

თბილისის უნივერსიტეტის
უ რ ო მ ე ბ ი

Труды Тбилисского
университета

Proceedings
of Tbilisi University

A 6—7 (149—150)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებანი

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1973

თბილისის უნივერსიტეტის

შ რ მ ე ბ ი

Труды
Тбилисского университета

Proceedings
of Tbilisi University

A 6—7 (149—150)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES

Контрольный экземпляр



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

1973

სარედაქციო კოლეგია

ი. გვერდწითელი, ნ. ვახანია, თ. კობალეიშვილი, ლ. მაღ-
ნარაძე, ლ. ნათაძე, ნ. სხირტლაძე, ჯ. შარიქაძე (მდივანი), ა. ხა-
რაძე (მთავარი რედაქტორი)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н. Н. Вахания, И. М. Гвердцители, Т. И. Копалеишви-
ли, Л. Г. Магнарадзе, Л. Р. Натадзе, Н. И. Схиртладзе,
А. К. Харадзе (главный редактор), Д. В. Шарикадзе (секретарь)

EDITORIAL BOARD

I. Gverdtsiteli, A. Kharadze (editor in chief), T. Kopa-
leishvili, L. Magnaradze, L. Natadze, J. Sharikadze (sec-
retary), H. Skhirtladze, N. Vakhania

კ ვOPოსუ აპროქსიმაციი ფუნქციონალა ი გრადიენტი ა ლოკალნი-ლინეინიქ პროსტრანსთვოქ

ჟ. ს. ციტლანაძე

§ 1. ჟუსტი Y — მეტრიკოსეო ფუნქციონალნი პროსტრანსთვოქ ს ელემენტაი y ; E — ნორმიროვანი ლინეინი პროსტრანსთვოქ ტიპა ბანახა, უდვლეთვორიუოე სლედუიუქი უსლოვიან:

1. ზადოუო ელემენტი $y_1 \in Y$, პრინადლექაშემუ ნეკოტორი ε_1 -ოკრესტნოსი $S(y; \varepsilon_1) \subset Y$, ს ცენტრუ y ი რადიუსუ ε_1 , ატვეჩაე ელემენტი $h \in E$ — ობრავ ელემენტი y_1 ვ E . ობრატნი, ზადოუო ელემენტი $h \in E$, რასპოლჟენნიუ ვ ნეკოტორი ε_2 -ოკრესტნოსი $S(\theta; \varepsilon_2)$, ს ცენტრუ ვ ნულევი ტოქე $\theta \in E$ ი რადიუსუ ε_2 , ატვეჩაე ნეკოტორი ელემენტი $y_1 \in Y$ — პრობრავ ელემენტი h . სოოტვესტიე მეჟუ ელემენტაი ოკრესტნოსეი $S(y; \varepsilon_1)$ ი $S(\theta; \varepsilon_2)$ ტოპოლოგიკოსეო, პრინექ ტოქე y ატვეჩაე ელემენტი θ ი ობრატნი.

2. სუსტვესუეე პოსტოინანი $\mu > 0$ ტაკაი, ჭო დღა ვსექ $y_1 \in S(y; \varepsilon_1)$ იმეემ

$$\|h\| < \mu \rho(y, y_1),$$

ღღე ρ — მეტრიკა პროსტრანსთვოქ Y .

პროსტრანსთვოქ E , უდვლეთვორიუოე უსლოვიან 1 ი 2, ბუდემ ნაზღვარე კასატელნიუ კ Y პროსტრანსთვოქ ვ ტოქე $y \in Y$. იომეომორფიზი V , ს ობრატნიუ ოპერატორუ V^{-1} , რეალიზუიუქი ვაიკნი ოდნოზნიკნიე ი ნეპრერღვნიე ობრავენიე ოკრესტნოსეი $S(y; \varepsilon_1)$ ი $S(\theta; \varepsilon_2)$, უდვლეთვორიუი უსლოვიან 1 ი 2, ბუდემ ნაზღვარე ლოკალნი იზომეტრიკოსეო ობრავენიემ.

მეტრიკოსეო პროსტრანსთვოქ Y , დოსტატოქნი მალუი ოკრესტნოსე ზადოუო ელემენტი y კოტორო ზოქოუოე ტოპოლოგიკოსეო ობრავენიე ნეკოტორი ოკრესტნოსე ნულევი ელემენტი ლინეინი ნორმიროვანი პროსტრანსთვოქ E ს ობღოდენიემ პრინედენნიქ ვღე უსლოვიან 1 ი 2, ნაზღვარეა ლოკალნი ლინეინი პროსტრანსთვოქ.

ოღევიდნი, ვსაკოე ლინეინი ნორმიროვანი პროსტრანსთვოქ E ესე ლოკალნი ლინეინი პროსტრანსთვოქ, კასატელნიე პროსტრანსთვოქ კოტორო ვ ზადოუო ელემენტი y ესე სემო E .

რასმოდრიმ ლოკალნი ლინეინი მეტრიკოსეო პროსტრანსთვოქ Y ს ელემენტაი y . დოპუსტიმ, ჭო E ესე ლინეინი ნორმიროვანი პოლნი კასატელნიე კ Y პროსტრანსთვოქ ვ ზადოუო ელემენტი $y \in Y$. დღა ტოქე $y \in Y$ სუსტვესუეე სფერისკი ოკრესტნოსე $S(y; \varepsilon_1)$ რადიუსუ $\varepsilon_1 > 0$, დოპუსკაიუოა

локально изометрическое топологическое отображение на некоторую сферическую окрестность $S(\theta; \varepsilon_2)$ нулевого элемента θ пространства E , где ε_2 — радиус этой окрестности. При этом y переходит в θ и обратно.

Пусть $f(y)$ — функционал, определенный всюду на Y . Дифференциалом $f(y)$ в точке $y \in S(y; \varepsilon_1)$ назовем линейный по h функционал $df(y; h) = l(y; h)$, определенный всюду на E , такой, что

$$f(y_1) - f(y) = l(y; h) + \|h\| \omega_f(y; h), \quad (1)$$

где $h \in S(\theta; \varepsilon_2)$ обозначает образ элемента $y_1 \in S(y; \varepsilon_1)$ в $S(\theta; \varepsilon_2)$, а функционал $\omega_f(y; h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \omega_f(y; h) = 0 \quad (2)$$

Функционал $\Omega_f(y; h) = \|h\| \omega_f(y; h)$ назовем остатком дифференциала функционала $f(x)$.

Если $f(y)$ дифференцируем в каждой точке пространства Y , то $f(y)$ называется дифференцируемым на Y .

Функционал $l(y; h)$ по определению имеет следующие свойства:

1) для произвольного действительного числа η имеем

$$l(y; \eta h) = \eta l(y; h),$$

т. е. $l(y; h)$ — однородный по h функционал с показателем однородности 1;

2) для любой пары элементов $h_1, h_2 \in E$ имеем

$$l(y; h_1 + h_2) = l(y; h_1) + l(y; h_2);$$

3) если последовательность $\{h_n\} \subset E$ сходится по норме к h^* , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|l(y; h_n) - l(y; h^*)\| = 0.$$

Линейный по h функционал в E

$$df(y; h) = l(y; h)$$

можно представить скалярным произведением

$$df(y; h) = (y^*, h), \quad (3)$$

где y^* — определенный элемент сопряженного к E пространства E^* . Очевидно y^* изменяется с изменением y . Тем самым определен оператор $L_f y = y^*$, область определения которого Y , а область значений расположена в E^* . Следовательно, имеем

$$df(y; h) = (L_f y, h), \quad h = Vy_1 \in S(\theta; \varepsilon_2), \quad L_f y \in E^*. \quad (4)$$

Обозначим через \tilde{y} произвольный элемент из $S(y; \varepsilon_1)$. Любой функционал $f(\tilde{y})$, определенный в $S(y; \varepsilon_1)$, индуцирует функционал $f_1(\tilde{x}) = f(V^{-1}\tilde{x}) = f(\tilde{y})$ в $S(\theta; \varepsilon_2)$. Если $f_1(\tilde{x})$ есть линейный функционал в $S(\theta; \varepsilon_2)$, то $f(\tilde{y})$ будем называть локально линейным функционалом в $S(y; \varepsilon_1)$ [1]. Заметим, что линейный в $S(\theta; \varepsilon_2)$ функционал $f_1(\tilde{x})$ будет

линейным всюду в E . Примерами локально линейных функционалов являются вариации функционалов в различных классических вариационных задачах.

Теорема 1. Пусть y — произвольная точка из Y , некоторая окрестность $S(y; \varepsilon_1)$ которой допускает топологическое отображение на окрестность $S(\theta; \varepsilon_2)$ нулевого элемента θ пространства E . Пусть $\varphi(\tilde{y})$ — локально линейный функционал в $S(y; \varepsilon_1)$, где \tilde{y} — произвольная точка из $S(y; \varepsilon_1)$. Тогда $\varphi(\tilde{y})$ дифференцируем в y и его дифференциал дан скалярным произведением

$$d\varphi(y; h) = (L_\varphi y, h), \quad (5)$$

где h — образ элемента \tilde{y} в $S(\theta; \varepsilon_2)$, а $L_\varphi y \in E^*$.

Доказательство. Рассмотрим гомеоморфизм V с обратным оператором V^{-1} , реализующий взаимно однозначное и взаимно непрерывное локально изометрическое отображение окрестности $S(y; \varepsilon_1)$ на $S(\theta; \varepsilon_2)$ и обратно, удовлетворяющий условиям 1 и 2. Обозначим через $\varphi_1(h)$ линейный в E функционал, индуцируемый в $S(\theta; \varepsilon_2)$ функционалом $\varphi(\tilde{y})$. Тогда будем иметь

$$\varphi(\tilde{y}) = \varphi(V^{-1}h) = \varphi_1(h), \quad \varphi(y) = \varphi(V^{-1}\theta) = \varphi_1(\theta) = 0,$$

где φ_1 — линейный в E функционал.

Следовательно, получим

$$\varphi(\tilde{y}) - \varphi(y) = \varphi_1(h) = (L_{\varphi_1} h, h)$$

и теорема доказана.

Оператор $L_f y$, действующий из Y в E^* , будем называть градиентом функционала $f(y)$ и напомним: $L_f y = \text{grad } f(y)$. В дальнейшем предполагается, что $L_f y$ ограничен по норме пространства E^* , т. е. существует конечная постоянная C такая, что

$$\|L_f \tilde{y}\|_{E^*} \leq C$$

для всех $\tilde{y} \in S(y; \varepsilon_1)$.

Теорема 2. Дифференцируемый в точке $y \in S(y; \varepsilon_1)$ функционал $f(\tilde{y})$ непрерывен в этой точке.

Доказательство. Пусть $\{y_k\}$ — произвольная последовательность, принадлежащая окрестности $S(y; \varepsilon_1)$, сходящаяся к y :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(y_k, y) = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $\{h_k\}$ последовательность элементов h_k , которые являются образами в $S(\theta; \varepsilon_2)$ элементов y_k .



Существует постоянная μ такая, что для всех k будем иметь: $\|h_k\| < \mu \rho(y_k, y)$. Следовательно, в силу (6), $\|h_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Далее, по определению дифференциала функционала, имеем

$$f(y_k) - f(y) = (h_k, L_f y) + \|h_k\| \omega_f(y; h_k),$$

откуда

$$|f(y_k) - f(y)| \leq \|h_k\|_E (\|L_f y\|_{E^*} + |\omega_f(y; h_k)|). \quad (7)$$

Так как $\|L_f y\|_{E^*}$ ограничен и $\omega_f(y; h_k) \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$, то из (7) получим $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = f(y)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Дифференцируемый в точке $y \in S(y; \varepsilon_1)$ функционал $f(\tilde{y})$, с ограниченным в $S(\theta; \varepsilon_2)$ и непрерывным по норме относительно h остатком $\Omega_f = \|h\| \omega_f(y; h)$, непрерывен всюду в $S(y; \varepsilon_1)$, где \tilde{y} — произвольный элемент из $S(y; \varepsilon_1)$, h — его непрерывный образ в $S(\theta; \varepsilon_2)$.

Возьмем одну из последовательностей $\{y_k\} \in S(y; \varepsilon_1)$, сходящуюся к \tilde{y} по метрике пространства Y :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(y_k, \tilde{y}) = 0. \quad (7)$$

Пусть $\{h_k\}$ и h есть непрерывные, соответственно, образы в $S(y; \varepsilon)$.

Имеем

$$f(y_k) - f(\tilde{y}) = f(y_k) - f(y) - [f(\tilde{y}) - f(y)]. \quad (8)$$

Так как $f(y)$ дифференцируем в точке y , то имеют место следующие равенства:

$$f(y_k) - f(y) = df(y; h_k) + \|h_k\| \omega_f(y; h_k),$$

$$f(\tilde{y}) - f(y) = df(y; h) + \|h\| \omega_f(y; h),$$

где $\omega_f(y; h_k) \rightarrow 0$ при $\|h_k\| \rightarrow 0$ и $\omega_f(y; h) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Следовательно, из (8) теперь легко получить оценку:

$$|f(y_k) - f(y)| \leq |df(y; h_k) - df(y; h)| + \|\|h_k\| \omega_f(y; h_k) - \|h\| \omega_f(y; h)\|. \quad (9)$$

Так как $h_k = Vy_k$, $h = V\tilde{y}$ и оператор V непрерывен по норме, то, в силу (7), имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k - h\| = 0$. Далее, в силу линейности по h функционала

$df(y; h)$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |df(y; h_k) - df(y; h)| = 0. \quad (10)$$

Наконец, в силу непрерывности по норме относительно h ограниченного функционала $\omega_f(y; h)$, имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\|h_k\| \omega_f(y; h_k) - \|h\| \omega_f(y; h)\| \leq \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |\omega_f(y; h_k)| \lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k - h\| + \|h\| \lim_{k \rightarrow \infty} |\omega_f(y; h_k) - \omega_f(y; h)|. \quad (11) \end{aligned}$$

Теперь, используя (10) и (11), из (9) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = f(\tilde{y})$$

и теорема доказана.

§ 2. Введем определение локально слабой сходимости элементов.

Последовательность $\{y_n\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ будем называть локально слабо сходящейся к элементу $\overline{y} \in S(y; \varepsilon_1)$ и напишем $y_n \xrightarrow{\text{сл}} \overline{y}$, если для произвольного локально линейного в $S(y; \varepsilon_1)$ функционала f имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(\overline{y}).$$

Будем считать, что линейное касательное к Y пространство E и его сопряженное пространство E^* обладают биортогональными счетными базами $\{e_i\} \subset E$, $\{l_i\} \subset E^*$

$$l_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

Кроме того, допустим, что E регулярно: $E^{**} = E$. Тогда E будет сепарабельным слабо полным банаховским пространством со слабо компактной сферой. В этих условиях произвольный элемент $x \in E$ может быть однозначно представлен в виде ряда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} l_i(x) e_i, \quad (13)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=1}^n l_i(x) e_i\|_E = 0. \quad (14)$$

Совершенно так же любой элемент $l \in E^*$ представим рядом

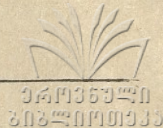
$$l = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(l) l_i, \quad (15)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|l - \sum_{i=1}^n e_i(l) l_i\|_{E^*} = 0.$$

Пусть

$$A_n x = \sum_{i=1}^n l_i(x) l_i, \quad R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x) e_i,$$



$$A_n l = \sum_{j=1}^n e_j(l) l_j, \quad R_n l = \sum_{i=n+1}^{\infty} e_i(l) l_i,$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= A_n x + R_n x, \\ l &= A_n l + R_n l, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и, следовательно, пространства E и E^* распадаются на прямые суммы

$$\left. \begin{aligned} E &= E_{A_n} + E_{R_n}, \\ E^* &= E_{A_n}^* + E_{R_n}^*, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

причем E_{A_n} , $E_{A_n}^*$ — конечномерные подпространства с базисами, соответственно, $\{l_i\}_{i=1}^n$, $\{l_i\}_{i=1}^n$ и элементами $A_n x \in E_{A_n}$, $A_n l \in E_{A_n}^*$, E_{R_n} и

$E_{R_n}^*$ — бесконечномерные подпространства с базисами, соответственно, $\{l_i\}_{i=n+1}^{\infty}$, $\{l_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ и элементами $R_n x \in E_{R_n}$, $R_n l \in E_{R_n}^*$. Отметим

также, что $E_{A_n}^*$, $E_{R_n}^*$ суть, соответственно, сопряженные к E_{A_n} , E_{R_n} пространства. Кроме того, очевидно E_{A_n} и $E_{R_n}^*$, а также E_{R_n} и $E_{A_n}^*$ взаимно ортогональны:

$$\left. \begin{aligned} (E_{A_n}, E_{R_n}^*) &= (E_{R_n}^*, E_{A_n}) = 0, \\ (E_{R_n}, E_{A_n}^*) &= (E_{A_n}^*, E_{R_n}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится к слабому пределу $\bar{x} \in E$, то последовательность $\{A_n x_n\} \subset E_{A_n}$ так же слабо сходится к тому же слабому пределу \bar{x} . Это предложение доказано в работе [2]. Далее можно показать, что если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к \bar{x} , то при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{A_n x_k\}$ слабо сходится к $A_n \bar{x}$ [3].

Пусть \tilde{y} — произвольный элемент из $S(y; \varepsilon_1)$, образ которого в $S(\theta; \varepsilon_2)$ обозначим через \tilde{x} . Элемент \tilde{x} допускает разложение $\tilde{x} = A_n \tilde{x} + R_n \tilde{x}$. Введем следующие обозначения $A_n \tilde{y} = V^{-1} A_n \tilde{x}$, $R_n \tilde{y} = V^{-1} R_n \tilde{x}$.

Лемма 1. Если n достаточно велико, то $A_n \tilde{y}$ и $R_n \tilde{y}$ суть элементы окрестности $S(y; \varepsilon_1)$.

Для доказательства, очевидно, достаточно доказать, что для достаточно большого n элементы $A_n \tilde{x}$, $R_n \tilde{x} \in S(\theta; \varepsilon_2)$. Выбирая n достаточно большим, в силу (14), норму элемента $R_n \tilde{x}$ можно сделать сколь угодно малой:

$$\|R_n \tilde{x}\| \leq \frac{d}{2} < \varepsilon_2,$$

где $d > 0$ и, следовательно, $R_n \tilde{x} \in S(\theta; \varepsilon_2)$. Но тогда и $A_n \tilde{x} \in S(\theta; \varepsilon_2)$. В самом деле, допустим противное: $A_n \tilde{x} \notin S(\theta; \varepsilon_2)$. Пусть $\|A_n \tilde{x}\| = \varepsilon_2 + \alpha$, где $\alpha > \frac{d}{2} > 0$. Тогда, исходя из оценки $\|\bar{x}\| \geq \left| \|A_n \tilde{x}\| - \|R_n \tilde{x}\| \right| \geq \varepsilon_2 + \alpha - \frac{d}{2} = \varepsilon_2 + \gamma$, $\gamma > 0$, мы придем к противоречию, так как $\tilde{x} \in S(\theta; \varepsilon_2)$.

Лемма 2. Если последовательность $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $\bar{y} \in S(y; \varepsilon_1)$, то последовательность $\{A_k y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к тому же локально слабому пределу \bar{y} .

В самом деле, пусть φ — произвольный локально линейный на $S(y; \varepsilon_1)$ функционал. Будем иметь

$$\varphi(A_k y_k) = \varphi(V^{-1} A_k x_k) = l(A_k x_k), \quad (19)$$

где l — линейный функционал на $S(\theta; \varepsilon_2)$, который индуцирован в $S(\theta; \varepsilon_2)$ функционалом φ , $\{A_k x_k\}$ — последовательность образов в $S(\theta; \varepsilon_2)$, порожденная элементами последовательности $\{A_k y_k\}$.

Последовательность $\{x_k\} \subset S(\theta; \varepsilon_2)$ слабо сходится к слабому пределу $\bar{x} \in S(\theta; \varepsilon_2)$. Но тогда и $\{A_k x_k\}$ слабо сходится к \bar{x} . Следовательно, из (19) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(A_k y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} l(A_k x_k) = l(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})$$

и, в силу произвольности φ , будем иметь: $A_k y_k \xrightarrow{\text{сл}} \bar{y}$.

Лемма 3. Если последовательность $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к $\bar{y} \in S(y; \varepsilon_2)$, то последовательность $\{A_n y_k\}$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $A_n \bar{y}$ при $k \rightarrow \infty$.

Действительно, сохраняя обозначения прежней леммы, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(A_n x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} l(A_n x_k). \quad (20)$$

Но, так как

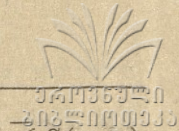
$$\lim_{k \rightarrow \infty} l(A_n x_k) = l(A_n \bar{x}),$$

то из (20) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(A_n y_k) = l(A_n \bar{x}) = \varphi(A_n \bar{y}),$$

т. е. $A_n y_k \xrightarrow{\text{сл}} A_n \bar{y}$ при $k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Функционал $f(\bar{y})$ будем называть локально усиленно непрерывным на $S(y; \varepsilon_1)$, если для любой локально слабо сходящейся последовательности $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ справедливо $f(\bar{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k)$.



довательности $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$, со слабым локальным пределом $\bar{y} \in S(y; \varepsilon_1)$, имеет место равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = f(\bar{y})$.

Очевидно, всякий локально усиленно непрерывный на $S(y; \varepsilon_1)$ функционал $\tilde{f}(y)$ непрерывен на $S(y; \varepsilon_1)$ по метрике пространства Y . Примером непрерывного на $S(y; \varepsilon_1)$ функционала по метрике Y , но не локально усиленно непрерывного, служит расстояние $\rho(\tilde{y}; y)$, где \tilde{y} — произвольный элемент из $S(y; \varepsilon_1)$.

В последующих теоремах предполагается, что E — слабо компактное линейное нормированное полное сепарабельное рефлексивное пространство, обладающее с сопряженным пространством E^* биортогональным счетным базисом.

Теорема 4. Для локально усиленной непрерывности на $S(y; \varepsilon_1)$ непрерывного функционала $f(y)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ существовало натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ и любого элемента $\tilde{y} \in S(y; \varepsilon_1)$ имело место неравенство

$$|f(\tilde{y}) - f(A_n \tilde{y})| < \varepsilon. \quad (21)$$

Доказательство необходимости. Допустим противное, что $f(y)$ локально усиленно непрерывен на $S(y; \varepsilon_1)$, но неравенство (21) неверно. Тогда существует неограниченно возрастающая последовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что для каждого n_k найдется хоть один элемент $y_{n_k} \in S(y; \varepsilon_1)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(y_{n_k}) - f(A_{n_k} y_{n_k})| \geq \varepsilon. \quad (22)$$

Последовательность $\{y_{n_k}\}$ индуцирует в $S(\theta; \varepsilon_2)$ последовательность $\{V y_{n_k}\} = \{x_{n_k}\} \subset S(\theta; \varepsilon_2)$. Так как E слабо компактно и $S(\theta; \varepsilon_2)$ — ограниченное по норме в нем множество, то из $\{x_{n_k}\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$, слабый предел которой обозначим через \bar{x} . Последовательность норм $\{\|x_{n_{k_s}}\|\}$ ограничена и, следовательно, существует $\overline{\lim}_{n_{k_s}} \|x_{n_{k_s}}\|$. Кроме того, как известно, $\|\bar{x}\| \leq \overline{\lim}_{n_{k_s}} \|x_{n_{k_s}}\|$ и поэтому $x \in S(\theta; \varepsilon_2)$.

Последовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$ индуцирует в $S(y; \varepsilon_1)$ подпоследовательность $\{y_{n_{k_s}}\} \subset \{y_{n_{k_s}}\}$, которая локально слабо сходится в $S(y; \varepsilon_1)$ к локально слабому пределу $\bar{y} \in S(y; \varepsilon_1)$.

В силу (22) имеем

$$|f(y_{k_s}) - f(A_{n_{k_s}} y_{n_{k_s}})| \geq \varepsilon. \quad (23)$$

Так как $y_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{лс}} \bar{y}$, то, в силу леммы 2, $A_{n_{k_s}} y_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{лс}} \bar{y}$. Далее, для произвольного $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ такое, что при $n_{k_s} > N$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} |f(y_{n_{k_s}}) - f(\bar{y})| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f(\bar{y}) - f(A_{n_{k_s}} y_{n_{k_s}})| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Используя (24), получим

$$\begin{aligned} |f(y_{n_{k_s}}) - f(A_{n_{k_s}} y_{n_{k_s}})| &\leq |f(y_{n_{k_s}}) - f(\bar{y})| + \\ &+ |f(\bar{y}) - f(A_{n_{k_s}} y_{n_{k_s}})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

что противоречит (23). Необходимость условия (21) доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ обозначает произвольную локально слабо сходящуюся последовательность со слабым локальным пределом $\bar{y} \in S(y; \varepsilon_1)$. Для последовательности образов в $S(\theta; \varepsilon_2)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_k - A_k x_k\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x} - A_n \bar{x}\| = 0$$

Но, тогда, в силу непрерывности оператора V^{-1} и расстояния ρ , получим

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(V^{-1} x_k, V^{-1} A_n x_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_k, A_n y_k) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(V^{-1} \bar{x}, V^{-1} A_n \bar{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{y}, A_n \bar{y}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Далее, очевидно можно написать

$$\begin{aligned} \|f(y_k) - f(\bar{y})\| &\leq |f(y_k) - f(A_n y_k)| + |f(A_n y_k) - f(A_n \bar{y})| + \\ &+ |f(A_n \bar{y}) - f(\bar{y})|. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как $f(\bar{y})$ непрерывен на $S(y; \varepsilon_1)$, то, в силу (25), для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\left. \begin{aligned} |f(y_k) - f(A_n y_k)| &< \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } n > N, \\ |f(A_n \bar{y}) - f(\bar{y})| &< \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } n > N. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Кроме того, при $k \rightarrow \infty$ имеем $A_n x_k \xrightarrow{\text{с.л.}} A_n \bar{x}$. Но элементы последовательности $\{A_n x_k\}$ и $A_n \bar{x}$ принадлежат n -мерному пространству, в котором слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_n x_k - A_n \bar{x}\| = 0.$$

Поэтому, при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{A_n y_k\}$ сходится к $A_n \bar{y}$ в метрике пространства Y :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A_n \bar{y}_k, A_n \bar{y}) = 0.$$



Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|f(A_n y_k) - f(A_n \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } n > N. \quad (28)$$

Таким образом, в силу (27) и (28), из (26) вытекает неравенство

$$|f(y_k) - f(\bar{y})| < \varepsilon,$$

показывающее усиленную непрерывность функционала $f(\tilde{x})$ на $S(y; \varepsilon_1)$.

Неравенство (21) показывает, что значение локально усиленно непрерывного функционала $f(\tilde{y})$ на $S(y; \varepsilon_1)$ в произвольной точке \tilde{y} для достаточно больших n можно аппроксимировать с любой наперед заданной степенью точности значениями этого функционала на элементах последовательности $\{A_n \tilde{y}\}$, причем число $\varepsilon > 0$ характеризует степень достигнутого приближения.

Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $f(\tilde{y})$ локально усиленно непрерывен в $S(y; \varepsilon_1)$,
- 2) $f(\tilde{y})$ удовлетворяет условию Липшица в $S(y; \varepsilon_1)$, т. е.

$$|f(\tilde{y}_1) - f(\tilde{y}_2)| \leq C_f \rho(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2),$$

где \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 — произвольные элементы окрестности $S(y; \varepsilon_1)$, C_f — постоянная Липшица,

3) $\tilde{f}(\tilde{y})$ дифференцируем в произвольной точке $\tilde{y} \in S(y; \varepsilon_1)$:

$$f(\tilde{y}) - f(\tilde{y}) = (L_f \tilde{y}, \tilde{h}) + \omega_f(\tilde{y}; \tilde{h}),$$

где \tilde{h} — образ в $S(\theta; \varepsilon_2)$ элемента $\tilde{y} \in S(y; \varepsilon_1)$, $L_f \tilde{y} = \text{grad } f(y) \in E^*$, $\omega_f(y; \tilde{h})$ — остаток дифференциала, удовлетворяющий условию

$$|\omega_f(\tilde{y}; \tilde{h})| < C \|\tilde{h}\|^2,$$

C — постоянная.

Тогда для любого $\varepsilon < \varepsilon_1$ существует натуральное число N такое, что для всех элементов y^* шара $S(y; \varepsilon)$ и для всех $n > N$ будем иметь

$$\|R_n L_f y^*\| < \xi \varepsilon,$$

где ξ — постоянная.

Доказательство. Имеем

$$f(\tilde{y}) - f(y^*) = (L_f y^*, \tilde{h}) + \omega_f(y^*; \tilde{h}), \quad (29)$$

где \tilde{h} — образ элемента \tilde{y} в $S(\theta; \varepsilon_2)$. Обозначим образ шара $S(y; \varepsilon)$ в $S(\theta; \varepsilon_2)$ через $S(\theta; \varepsilon_2) : VS(y; \varepsilon) = S(\theta; \varepsilon) \subset S(\theta; \varepsilon_2)$. В силу тео-

ремы Хана [4], для элемента $R_n L_f y^* \in E_{R_n}^*$ в пространстве E_{R_n} существует элемент h^* такой, что

$$(R_n L_f y^*, h^*) = \|R_n L_f y^*\| \|h^*\|. \quad (30)$$

Очевидно, $\eta h^* \in S(\theta; \varepsilon)$ при $\eta < \frac{\varepsilon}{\|h^*\|}$. Пусть $\tilde{y} = V^{-1}(\eta h^*)$ обозначает прообраз ηh^* в $S(y; \varepsilon)$. Для элемента \tilde{y} равенство (29) принимает вид

$$f(\tilde{y}) - f(y^*) = (L_f y^*, \eta h^*) + \omega_f(y^*; \eta h^*) = \eta (A_n L_f y^*, h^*) + \eta (R_n L_f y^*, h^*) + \omega_f(y^*; \eta h^*). \quad (31)$$

Но, так как $h^* \in E_{R_n}$ и $(E_{A_n}^*, E_{R_n}) = 0$, то $(A_n L_f y^*, h^*) = 0$.

Следовательно, из (31) получим

$$\eta \|R_n L_f y^*\| \|h^*\| = f(\tilde{y}) - f(y^*) - \omega_f(y^*; \eta h^*).$$

Отсюда будем иметь

$$\eta \|R_n L_f y^*\| \|h^*\| \leq |f(\tilde{y}) - f(A_n \tilde{y})| + |f(A_n \tilde{y}) - f(y^*)| + |\omega_f(y^*; \eta h^*)|. \quad (32)$$

В силу теоремы 4, для произвольного числа $\eta \|h^*\| \varepsilon$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ и любого элемента $\tilde{y} \in S(y; \varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|f(\tilde{y}) - f(A_n \tilde{y})| < \eta \|h^*\| \varepsilon. \quad (33)$$

Заметим, что

$$A_n \tilde{y} = N^{-1}(A_n \eta h^*)$$

и так как оператор A_n однороден, то

$$A_n(\eta h^*) = \eta A_n h^*.$$

Но, $h^* \in E_{R_n}$ и поэтому $A_n h^* = \theta$. Следовательно, получаем $A_n \tilde{y} = N^{-1}(\theta) = y$. Итак, будем иметь

$$|f(A_n \tilde{y}) - f(y^*)| = |f(y) - f(y^*)|$$

и, используя условие Липшица, получим

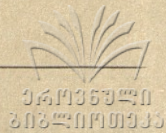
$$|f(A_n \tilde{y}) - f(y^*)| \leq C_f \rho(y; y^*).$$

Пусть C_1 — постоянная, удовлетворяющая условию $C_f \leq C_1 \|h^*\| \eta$, и учтем, что $y^* \in S(y; \varepsilon)$. Тогда из последнего неравенства получим

$$|f(A_n y^*) - f(y^*)| < C_f \eta \|h^*\| \varepsilon. \quad (34)$$

Наконец, по условию теоремы имеем

$$|\omega_f(y^*; \eta h^*)| \leq C \eta^2 \|h^*\|^2. \quad (35)$$



Используя неравенства (33), (34) и (35) из (32), будем иметь

$$\|R_n L_f y^*\| < (1 + C_1) \varepsilon + C \|\eta h^*\|$$

и, так как

$$\|\eta h^*\| \leq \mu \rho(y, \tilde{y}) < \mu \varepsilon,$$

то

$$\|R_n L_f y^*\| < \xi \varepsilon,$$

где $\xi = 1 + C_1 + \mu C$. Теорема доказана.

Доказанное ниже предложение устанавливает компактность оператора градиента.

Теорема 6. Если функционал $f(\tilde{y})$ удовлетворяет условиям теоремы 5, то оператор $L_f y^* = \text{grad } f(y^*)$ отображает окрестность $S(y; \varepsilon)$ в компактное множество $M = L_f S(y; \varepsilon)$, где $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Доказательство. Множество M , т. е. множество образов точек шара $S(y; \varepsilon)$ в пространстве E^* разлагается в прямую сумму

$$M = M_{A_n} + M_{R_n},$$

где M_{A_n} — ограниченное по норме множество n -мерного пространства.

M_{A_n} компактно и, следовательно, для произвольного $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ в M_{A_n} суще-

ствует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть. Обозначим элементы этой сети через $A_n L_f y_1,$

$A_n L_f y_2, \dots, A_n L_f y_k,$ где $\left\{y_i\right\}_{j=1}^k \in S(y; \varepsilon)$. Тогда для произвольного

элемента $A_n L_f y^* \in M_{A_n}$ существует по крайней мере один элемент $A_n L_f y_i \in \left\{A_n L_f y_j\right\}_{j=1}^k$ такой, что

$$\left\|A_n L_f y^* - A_n L_f y_i\right\|_{E^*} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (36)$$

Докажем, что последовательность $\left\{A_n L_f y_j\right\}_{j=1}^n$ является конечной ε сетью множества M . Действительно, возьмем произвольный элемент $L_f y^* \in S(y; \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|L_f y^* - A_n L_f y_i\| &\leq \|L_f y^* - A_n L_f y^*\| + \|A_n L_f y^* - A_n L_f y_i\| = \\ &= \|R_n L_f y^*\| + \|A_n L_f y^* - A_n L_f y_i\|. \end{aligned} \quad (37)$$

В силу теоремы 5, для произвольного числа $\frac{\varepsilon}{2\xi} > 0$ существует натуральное число N такое, что для всех $y^* \in S(y; \varepsilon)$ и $n > N$ имеем

$$\left\|R_n L_f y^*\right\| < \xi \frac{\varepsilon}{2\xi} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (38)$$

Теперь, с помощью оценок (36) и (38), из (37) получаем

$$\|L_j y_* - A_n L_j y_i\| < \varepsilon.$$

*) Таким образом, множество M компактно и теорема доказана.

(Представлено 15.II.1972)

Кафедра математики
физического фак-та

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник, ДАН СССР, т. 27, № 8, 1940, 771—774.
2. Э. С. Цитландадзе, Мат. сб., 29 (71), 1951, 3—12.
3. М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956, 94—95.
4. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1951, 158—162.

ი. წითლანაძე

ფუნქციონალისა და გრადიენტის აპროქსიმაციის საკითხისათვის ლოკალურად წრფივ სივრცეებში

რეზიუმე

შრომაში შემოღებულია სუსტი ტოპოლოგიისა და ფუნქციონალის ლოკალურად გაძლიერებული უწყვეტობის ცნებები ლოკალურად წრფივ სივრცეში.

დამტკიცებულია თეორემა ლოკალურად გაძლიერებული უწყვეტი ფუნქციონალის აპროქსიმაციის შესახებ და გამოკვლეულია გრადიენტის ზოგიერთი თვისება.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА МЕТОДОМ ЧАПЛЫГИНА

П. К. ЗЕРАГИЯ

1. В 1919 году акад. С. А. Чаплыгин дал новый замечательный метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В статьях [4—8] мы применили метод Чаплыгина к решению некоторых дифференциальных уравнений математической физики.

Пусть D —область в n -мерном пространстве R_n , ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова S .

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t, u), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ —точка области D , время t меняется на сегменте

$$[t_0, t_1], \text{ а } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

В дальнейшем будем называть функцию $u(x, t)$ регулярной функцией в области $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, если в этой области она непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков по x_i ($i=1, 2, \dots, n$) и непрерывную частную производную первого порядка по t .

Для нелинейного дифференциального уравнения (1) поставим следующую основную граничную задачу.

Найти функцию $u(x, t)$, регулярную в области $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющую в области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$, уравнению (1) и нулевым начальным и граничным условиям:

$$u(x, t_0) = 0, \quad x \in D, \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in S, \quad t_0 < t \leq t_1. \quad (3)$$

Отметим, что выбор однородных условий (2) и (3) не ограничивает общности.



Теорему существования решения задач (1), (2), (3) для достаточно малого промежутка времени $[t_0, t_1]$ впервые доказал А. Н. Тихонов [1] с помощью метода последовательных приближений (см. также [2]).

В работах [4, 8] мы доказали существование единственного решения поставленной граничной задачи для любого конечного промежутка времени $[t_0, t_1]$, пользуясь приближенным методом Чаплыгина [3], и вместе с тем дали оценку быстроты сходимости процесса, имеющую вид: $\frac{[k(t_1 - t_0)]^2}{n!}$.

В настоящей работе, тем же методом, докажем существование единственного решения нашей граничной задачи для малого промежутка времени, однако с гораздо лучшей оценкой быстроты сходимости процесса, имеющей вид: $\frac{c}{2^{2^n}}$.

2. Мы будем предполагать, что удовлетворяются следующие условия:

(А). Функция $f(x, t, u)$ непрерывна и ограничена вместе с производной f_u и $f_u < 0$ в области

$$R = \{ x \in D + S, t_0 \leq t \leq t_1, -\infty < u < \infty \};$$

(В). В указанной области f имеет непрерывную частную производную второго порядка f_{u^2} , положительную в этой области.

Имеют место следующие предложения.

Теорема 1. Разность $u_1(x, t) - u_2(x, t)$, где u_1 и u_2 — некоторые решения уравнения (1) в области $x \in D, t_0 < t \leq t_1$, не может принимать в этой области ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Omega u = \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u. \quad (4)$$

Тогда, в силу условия теоремы, имеем

$$\Omega u_1 = f(x, t, u_1), \quad \Omega u_2 = f(x, t, u_2). \quad (5)$$

Допустим, что разность $u_1 - u_2$ достигает отрицательного минимума в некоторой точке (x', t') в указанной области. В силу (5), на основании формулы конечных приращений, получим

$$\Omega(u_1 - u_2) = f_u^*(u_1 - u_2), \quad (6)$$

где $f_u^* = f_u(x, t, u_2 + \theta(u_1 - u_2))$, $0 < \theta < 1$.

В точке минимума будем иметь

$$u_1 - u_2 < 0, \quad \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} \leq 0,$$

причем, если $t' < t_1$, то в точке (x', t') имеем $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} = 0$, если же $t' = t_1$, то $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} \leq 0$. Кроме того, в точке (x', t') $\Delta(u_1 - u_2) \geq 0$.

Таким образом, в точке минимума имеем

$$u_1 - u_2 < 0 \text{ и } \Omega(u_1 - u_2) \leq 0, \quad (7)$$

что противоречит правой части формулы (6), так как согласно условию (A) $f_u < 0$.

Аналогично доказывается утверждение относительно положительного максимума.

Следствие. Если существует функция $u(x, t)$, регулярная в области $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая уравнению (1) в области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$, и условиям (2), (3), то она единственна.

В самом деле, разность $u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условиям (2), (3), поэтому, в силу теоремы 1 о максимуме и минимуме, легко видеть, что

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t), \quad x \in D + S, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Теорема 2. Если функция $v(x, t)$, регулярная в области $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет условиям (2), (3) и

$$\Omega v \leq f(x, t, v), \quad (8)$$

то $v \leq u$, при $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, где $u(x, t)$ — регулярная функция в области $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая условиям (2), (3) и уравнению $\Omega u = f(x, t, u)$, при $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$.

Действительно, из (8) и (1) следует, что

$$\Omega(v - u) \leq f_u^*(v - u). \quad (9)$$

Допустим, что в некоторой точке (x, t) области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$ $v > u$. Так как разность $v - u$ непрерывна в области $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, и удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям (2), (3), то функция $v - u$ необходимо достигает в некоторой точке в области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$, положительного максимума. Тогда в этой точке будем иметь

$$v - u > 0 \text{ и } \Omega(v - u) \geq 0.$$

Следовательно, в этой точке максимума левая часть неравенства (9) больше нуля, что противоречит неравенству (9). Таким образом,

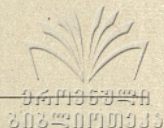
$$v \leq u, \text{ при } x \in D + S, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Аналогично доказывается

Теорема 3. Если функция $w(x, t)$ регулярная в области $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет условиям (2), (3) и

$$\Omega w \geq f(x, t, w), \quad (10)$$

то $w \geq u$, при $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$.



Определение. Функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$, регулярные в области $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, и удовлетворяющие условиям (2), (3) и неравенствам (8) и (10), будем называть, соответственно, нижней и верхней функциями для решения уравнения (1).

Теорема 4. Если $v(x, t)$ и $w(x, t)$ суть, соответственно, нижняя и верхняя функции, то

$$w(x, t) \geq v(x, t), \text{ при } x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1.$$

Действительно, из (8) и (10) получим

$$\Omega(w-v) \geq f_u^*(w-v), \text{ при } x \in D, t_0 < t \leq t_1. \quad (11)$$

Допустим, что $w < v$ в некоторой точке в области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$. Так как разность $w-v$ непрерывна в области $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, и удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям, то $w-v$ достигает в некоторой точке области $x \in D$, $t_0 < t \leq t_1$, отрицательного минимума. Тогда в этой точке $w-v < 0$ и $\Omega(w-v) \leq 0$.

Отсюда следует, что левая часть неравенства (11) ≥ 0 , что противоречит неравенству (11); теорема доказана.

3. Покажем теперь, что множества верхних и нижних функций не являются пустыми множествами.

Для этого допустим, что $G(x, t; \xi, \tau)$ есть функция Грина для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, при нулевых начальных и граничных условиях удовлетворяющая неравенствам [9]:

$$0 < G(x, t; \xi, \tau) \leq (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t-\tau)} \right\}. \quad (12)$$

Если воспользоваться свойствами этой функции [9], то нетрудно убедиться что, например, верхней функцией будет интеграл

$$\omega_0(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D M G(x, t; \xi, \tau) d\xi, \quad (13)$$

где

$$M \geq \text{Sup} |f(x, t, 0)|, \text{ при } x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1 \quad (14)$$

В самом деле, из (13) и (14) имеем, что функция $\omega_0(x, t)$ удовлетворяет условиям (2), (3) и $\omega_0(x, t) \geq 0$, при $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, кроме того

$$\begin{aligned} \Omega \omega_0 - f(x, t, \omega_0) &= M - f(x, t, 0) - [f(x, t, \omega_0) - f(x, t, 0)] = \\ &= M - f(x, t, 0) - f_u^* \omega_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, $\omega_0(x, t)$ является верхней функцией. Аналогично можно построить нижнюю функцию.

Построим теперь последовательности верхних и нижних функций $\{w_n(x, t)\}$ и $\{v_n(x, t)\}$ ($n=1, 2, \dots$), равномерно сходящиеся к искомому решению уравнения (1).

Для этого допустим, что найдены произвольные верхняя и нижняя функции $w_0(x, t)$ и $v_0(x, t)$. На основании вышесказанного такие функции всегда можно подобрать.

Определим нижнюю функцию $v_n(x, t)$ как решение следующего линейного дифференциального уравнения параболического типа с переменным коэффициентом:

$$\Omega(v_n - v_{n-1}) = f_u(x, t, v_{n-1})(v_n - v_{n-1}) - \sigma_{n-1}(x, t), \quad (15)$$

где $v_n - v_{n-1}$ удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям (2), (3), а

$$\sigma_{n-1}(x, t) = \Omega v_{n-1} - f(x, t, v_{n-1}) \leq 0. \quad (16)$$

Тогда из (15) имеем

$$\Omega(v_n - v_{n-1}) - f_u(x, t, v_{n-1})(v_n - v_{n-1}) \geq 0 \quad (17)$$

при условиях (2), (3).

Из этого уравнения, в силу принципа максимума и минимума, согласно условию (A), получим

$$v_n(x, t) \geq v_{n-1}(x, t), \quad \text{при } x \in D+S, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Покажем, что $v_n(x, t)$ есть нижняя функция. В самом деле, из (15) и (16) при помощи формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned} \Omega v_n - f(x, t, v_n) &= f_u(x, t, v_{n-1})(v_n - v_{n-1}) + \\ &+ f(x, t, v_{n-1}) - f(x, t, v_n) = -\frac{1}{2} f''_{u^2}(x, t, \zeta)(v_n - v_{n-1})^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\zeta = v_{n-1} + \theta(v_n - v_{n-1})$, $0 < \theta < 1$. Из (18) согласно условию (B) имеем

$$\sigma_n(x, t) = \Omega v_n - f(x, t, v_n) \leq 0. \quad (19)$$

Итак, $v_n(x, t)$ является нижней функцией.

Аналогично построим последовательность верхних функций. Для этого определим верхнюю функцию $w_n(x, t)$ как решение следующего линейного дифференциального уравнения

$$\Omega(w_n - w_{n-1}) = f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - w_{n-1}) - \alpha_{n-1}(x, t), \quad (20)$$

где $w_n - w_{n-1}$ удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям (2), (3), а

$$\alpha_{n-1}(x, t) = \Omega w_{n-1} - f(x, t, w_{n-1}) \geq 0. \quad (21)$$

Из (20) имеем

$$\Omega(w_n - w_{n-1}) - f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - w_{n-1}) \leq 0 \quad (22)$$

при условиях (2), (3).



Из (22), согласно принципу максимума и минимума и условию (A), получим

$$w_n(x, t) \leq w_{n-1}(x, t), \text{ при } x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1.$$

Покажем, что $w_n(x, t)$ является верхней функцией.

Для этого из (20) на основании формулы конечных приращений получим

$$\begin{aligned} \Omega w_n - f(x, t, w_n) &= f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - w_{n-1}) - f(x, t, w_n) + \\ &+ f(x, t, w_{n-1}) = f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - w_{n-1}) - f_u(x, t, \beta)(w_n - w_{n-1}) = \\ &= -(w_n - w_{n-1})[f_u(x, t, \beta) - f_u(x, t, v_{n-1})] = \\ &= -(w_n - w_{n-1})(\beta - v_{n-1})f''_{u^2}[x, t, v_{n-1} + \theta(\beta - v_{n-1})], \end{aligned}$$

где $w_n \leq \beta \leq w_{n-1}$, $0 < \theta < 1$. Из этого уравнения, согласно условию (B), имеем

$$\alpha_n(x, t) = \Omega w_n - f(x, t, w_n) \geq 0.$$

Итак, $w_n(x, t)$ является верхней функцией.

Продолжая таким путем указанный процесс, мы построим монотонно убывающую последовательность верхних функций и монотонно возрастающую—нижних функций:

$$w_0(x, t) \geq w_1(x, t) \geq \dots \geq w_n(x, t) \geq \dots, \quad (23)$$

$$v_0(x, t) \leq v_1(x, t) \leq \dots \leq v_n(x, t) \leq \dots, \quad (24)$$

при $x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1$.

Но, так как для любого n , $v_n(x, t) \leq w_0(x, t)$, при $x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1, n=1, 2, 3, \dots$, то последовательность $\{v_n(x, t)\}$ сходится. Аналогично убеждаемся в сходимости последовательности $\{w_n(x, t)\}, n=1, 2, 3, \dots$

Теперь покажем, что построенные нами последовательности (23) и (24) при $n \rightarrow \infty$ сходятся равномерно к искомому решению задач (2), (3) уравнения (1).

4. Сначала решим задачу (2), (3) для следующего линейного уравнения параболического типа с переменным коэффициентом:

$$\Omega Z = a(x, t)Z + \alpha(x, t). \quad (25)$$

Легко видеть, что решение граничных задач (2), (3) для линейного уравнения (25) эквивалентно решению следующего линейного интегрального уравнения:

$$Z(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) a(\xi, \tau) Z(\xi, \tau) d\xi + F(x, t), \quad (26)$$

где

$$F(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) \alpha(\xi, \tau) d\xi. \quad (27)$$

Введем перед интегралом в (26) параметр λ :

$$Z(x, t) = \lambda \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) a(\xi, \tau) Z(\xi, \tau) d\xi + F(x, t) \quad (28)$$

и будем искать решение уравнения (28) в виде ряда

$$Z(x, t) = Z_0(x, t) + \lambda Z_1(x, t) + \dots + \lambda^n Z_n(x, t) + \dots \quad (29)$$

Тогда

$$Z_0(x, t) = F(x, t),$$

$$Z_n(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) a(\xi, \tau) Z_{n-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (30)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть

$$|\alpha(x, t)| < K \text{ и } |a(x, t)| < K \text{ при } x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1.$$

Тогда из (27), согласно (12), имеем

$$|F(x, t)| < K \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) d\xi <$$

$$< K \int_{t_0}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right)}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} d\xi_1 \dots d\xi_n = K(t-t_0);$$

$$|Z_1(x, t)| < \int_{t_0}^t K(\tau - t_0) d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) K d\xi <$$

$$\begin{aligned}
 < K^2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right)}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} d\xi_1 \dots d\xi_n = \\
 &= K^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!};
 \end{aligned}$$

$$|Z_n(x, t)| < \frac{[k(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Из неравенств (31), в свою очередь, следует, что ряд (29) сходится равномерно в области $x \in D+S, t_0 \leq t \leq t_1$.

Далее, из (29) получим

$$S_n(x, t) = F(x, t) + \lambda \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) a(\xi, \tau) S_{n-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (32)$$

где $S_n(x, t)$ — сумма n первых членов ряда (29).

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из (32) получим

$$Z(x, t) = F(x, t) + \lambda \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) a(\xi, \tau) Z(\xi, \tau) d\xi.$$

Из этого вытекает, что функция $Z(x, t)$ удовлетворяет условиям (2), (3) и уравнению (25), при $\lambda=1$; кроме того, она является единственным решением задачи.

Таким образом, мы построили монотонно убывающую последовательность верхних функций $\{w_n(x, t)\}$ $n=1, 2, \dots$ и монотонно возрастающую — нижних функций $\{v_n(x, t)\}$ $n=1, 2, \dots$; при этом построение осуществляется решением только линейных дифференциальных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами.

5. Теперь покажем, что построенные нами последовательности $\{w_n(x, t)\}$ и $\{v_n(x, t)\}$, при $n \rightarrow \infty$, сходятся равномерно к искомому решению задач (2), (3) уравнения (1).

Оценим сначала быстроту сходимости процесса метода Чаплыгина (см. [10]). Из (15) и (20) на основании формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned} \Omega(w_n - v_n) &= f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - v_n) - f_u(x, t, v_{n-1})(w_{n-1} - v_{n-1}) + \\ &+ f(x, t, w_{n-1}) - f(x, t, v_{n-1}) = f_u(x, t, v_{n-1})(w_n - v_n) + \\ &+ \frac{1}{2} f''_{u^2}(x, t, \zeta)(w_{n-1} - v_{n-1})^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\zeta = v_{n-1} + \theta(w_{n-1} - v_{n-1})$, $0 < \theta < 1$. Так как разность $w_n - v_n$ удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям, поэтому из (33) получим

$$\begin{aligned} w_n(x, t) - v_n(x, t) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) f_u(\xi, \tau, v_{n-1})(w_n - v_n) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) f''_{u^2}(\xi, \tau, \zeta)(w_{n-1} - v_{n-1})^2 d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

Из уравнения (34), в силу (12) и условия (A), можно написать неравенство

$$w_n(x, t) - v_n(x, t) < \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) f''_{u^2}(\xi, \tau, \zeta)(w_{n-1} - v_{n-1})^2 d\xi \quad (35)$$

Положим $w_n - v_n = \delta_n$. Тогда имеем

$$\delta_n(x, t) < \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) f''_{u^2}(\xi, \tau, \zeta) \delta_{n-1}^2(\xi, \tau) d\xi, \quad (36)$$

Предположим, что

$$\frac{1}{2} f''_{u^2}(x, t, u) < L, \text{ при } (x, t, u) \in R,$$

где L — положительная постоянная. Из (36) получим

$$\delta_n(x, t) < L \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) \delta_{n-1}^2(\xi, \tau) d\xi. \quad (37)$$

Пусть $c = \text{Sup}[w_0(x, t) - v_0(x, t)] = \text{Sup} \delta_0(x, t)$, при $x \in D + S$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Обозначим $Lc = N$. Из (37), в силу оценки (12), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_1(x, t) &< Lc^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) d\xi < \\ &< Lc^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right)}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} d\xi_1 \dots d\xi_n = Lc^2(t-t_0) = \\ &= c[N(t-t_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2(x, t) &< Lc^2 N^2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^2 d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) d\xi < \\ &< cN^3 \int_{t_0}^t (\tau - t)^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right)}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= c \frac{[N(t-t_0)]^3}{3}, \end{aligned}$$

или

$$\delta_2(x, t) < \frac{c[N(t-t_0)]^{2^2-1}}{2^2-1} < c[N(t-t_0)]^{2^2-1}. \quad (38)$$

Допустим, что имеет место оценка

$$\delta_{n-1}(x, t) < c[N(t-t_0)]^{2^{n-1}-1}.$$

Тогда из (37) получим

$$\begin{aligned} \delta_n(x, t) &< L \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) c^2 N^{2^n-2} (\tau - t_0)^{2^n-2} d\xi < \\ &< L c^2 N^{2^n-2} \frac{(t-t_0)^{2^n-1}}{2^n-1} < c N^{2^n-1} (t-t_0)^{2^n-1}. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\delta_n(x, t) < c [N(t-t_0)]^{2^n-1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (39)$$

Чтобы оценить быстроту сходимости этого процесса, допустим, что $t_1 - t_0 = T$, $N = \frac{1}{2T}$; тогда из (39) получим

$$\delta_n(x, t) < \frac{2c}{2^{2^n}}. \quad (40)$$

Из этой оценки вытекает, что последовательности верхних и нижних функций равномерно в области $x \in D+S$, $t_0 \leq t \leq t_1$, сходятся к общему пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad x \in D+S, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

С другой стороны, из (15), при условиях (2), (3), получим

$$v_n(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) [f_u(\xi, \tau, v_{n-1})(v_n - v_{n-1}) + f(\xi, \tau, v_{n-1})] d\xi.$$

Переходя к пределу, при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_D G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau, \tilde{u}) d\xi.$$

Отсюда вытекает, что предельная функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

Таким образом, мы доказали существование единственного решения основной граничной задачи (1), (2), (3) для конечной области D и для малого промежутка времени $[t_0, t_1]$.

(Представлено 17.XI. 1971)

Кафедра
общей математики

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Бюллетень МГУ, вып. 8, 1938.
2. M. Gevrey, Journ. de math. pures et appl. (9), t. 9, 1913.
3. С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.-Л., 1950.
4. П. К. Зерагия, Сообщения АН Груз. ССР, т. XVII, № 2, 1956, 103—110.
5. П. К. Зерагия, Сообщения АН Груз. ССР, т. XVIII, № 6, 1957, 647—655.
6. П. К. Зерагия, Труды Тбилисского математического института АН Груз. ССР, т. XXIV, 1957, 195—222.

7. П. К. Зерагия, Сообщения АН Груз. ССР, т. XXVI, № 3, 1961, 257—264.
8. П. К. Зерагия, Труды Тбилисского государственного университета, т. 84, 1961, 117—127.
9. А. Н. Тихонов, Бюллетень МГУ, вып. 9, 1938.
10. Н. Н. Лузин, Труды Центрального аэро-гидродинамического института, вып. 141, 1932, 3—29.

3. ზიარება

ერთი კლასის პარაბოლური ტიპის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ჩაკლიგინის მეთოდით ამოხსნის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

სტატიაში მოცემულია პარაბოლური ტიპის ერთი არაწრფივი (1) დიფერენციალური განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა აკად. ჩაკლიგინის მეთოდით. აგებულია (1) განტოლების ამოხსნის ზედა და ქვედა ფუნქციების მიმდევრობები, რომლებიც ორივე მხრიდან თანაბრად კრებადია ამ განტოლების სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისაკენ.

დაბოლოს, მოყვანილია კრებადობის პროცესის სისწრაფის შეფასება.

ОБ ОДНОМ НОВОМ ВАРИАНТЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. П. КВИНИКАДЗЕ

Обобщенные плоские смешанные граничные задачи теории статики и установившихся колебаний однородного изотропного упругого тела были сформулированы и изучены методами теории потенциала и сингулярных интегральных уравнений в наших работах [1] и [2], где были доказаны теоремы существования и единственности решения этих задач.

В настоящей работе дается новый вариант доказательства теорем существования выше упомянутых задач, с использованием теории интегральных уравнений Фредгольма¹ (см [3]).

1. Пусть упругое тело занимает конечную (бесконечную) односвязную область D^+ (D^-), ограниченную простым замкнутым контуром S , имеющим непрерывную в смысле Гельдера кривизну. Начало координат возьмем в области D^+ . Обозначим через $\vec{n}(y) = (n_1(y), n_2(y))$ — орт внешней нормали S в точке $y(y_1, y_2)$, а через $\vec{s}(y) = (s_1(y), s_2(y)) \equiv (-n_2(y), n_1(y))$ — орт касательной².

Рассмотрим следующие матричные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \overset{x}{H}(\partial_y, n(y)) &= \left\| \delta_{k_1} n_j(y) + \delta_{k_2} \frac{(\mu + \kappa)}{\rho(y)} s_j(y) + \delta_{k_2} \mu \left(\delta_{j_1} \frac{\partial}{\partial y_2} - \delta_{j_2} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \right\|, \\ \overset{\kappa}{R}(\partial_y, n(y)) &= \left\| \delta_{k_2} s_j(y) + \delta_{k_1} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{(\mu + \kappa)}{\rho(y)} n_j(y) \right] \right\|, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\rho(y)^{-1}$ — кривизна S в точке y , λ и μ — упругие постоянные Ляме, δ_{kj} — символ Кронекера, а κ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$-\mu \leq \kappa \leq \mu.$$

¹ В работе используется матричная запись по аналогии [4], в связи с чем изменены обозначения задач A и B через H и R .

² Когда $x(x_1, x_2) \in D^\pm$, тогда $\vec{n}(x)$ и $\vec{s}(x)$ — произвольные взаимноперпендикулярные направления, проведенные в точке x .

Из (1.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \check{H}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) &= \left(\{u(y)\}_n, -\{\check{T}(\partial_y, n(y))u(y)\}_s + (\mu + \kappa) \frac{\partial}{\partial s(y)} \{u(y)\}_n \right), \\ \check{R}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) &= \left(\{\check{T}(\partial_y, n(y))u(y)\}_n + (\mu + \kappa) \frac{\partial}{\partial s(y)} \{u(y)\}_s, \{u(y)\}_s \right); \\ \check{H}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) - \overset{\nu}{H}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) &= \frac{(\kappa - \nu)}{\rho(y)} \{u(y)\}_s \cdot \bar{\delta}_2, \\ \check{R}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) - \overset{\nu}{R}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) &= \frac{(\nu - \kappa)}{\rho(y)} \{u(y)\}_n \cdot \bar{\delta}_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ν — произвольная постоянная, $\bar{\delta}_k = (\bar{\delta}_{k1}, \bar{\delta}_{k2})$, а $\{u(y)\}_n$, $\{u(y)\}_s$ и $\{\check{T}(\partial_y, n(y))u(y)\}_n$, $\{\check{T}(\partial_y, n(y))u(y)\}_s$ — нормальные и касательные составляющие, соответственно, вектора перемещения $\bar{u}(x) (u_1(x), u_2(x))$ и вектора обобщенного напряжения.

$$\begin{aligned} \check{T}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) &= (\mu + \kappa) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial n(y)} + \\ &+ (\lambda + \mu - \kappa) \bar{n}(y) \operatorname{div} \bar{u}(y) + \kappa \bar{s}(y) \left(\frac{\partial u_1(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial u_2(y)}{\partial y_1} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Основная система уравнений установившихся колебаний однородного изотропного упругого тела имеет вид

$$\mu \Delta \bar{u}(x) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(x) + \omega^2 \bar{u}(x) = 0. \quad (1.5)$$

Когда частота колебаний $\omega = 0$, из (1.5) получается основное уравнение статики

$$\mu \Delta \bar{u}(x) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(x) = 0. \quad (1.5_0)$$

Будем рассматривать следующие обобщенные смешанные задачи:

Задача $(\overset{\kappa, \omega}{H})^\pm$. Найти в $D^+(S D^-)$ регулярное решение $\bar{u}(x)$ системы (1.5), удовлетворяющее на S граничному условию

$$\left\{ \check{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \right\}^\pm = \vec{f}(z). \quad (1.6)$$

Задача $(\overset{\kappa, \omega}{R})^\pm$. Найти в $D^+(B D^-)$ регулярное решение $\bar{u}(x)$ системы (1.5), удовлетворяющее на S граничному условию

$$\left\{ \check{R}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \right\}^\pm = \vec{\varphi}(z), \quad (1.6_1)$$

где $\vec{f}(z) = (f_1(z), f_2(z))$, $\vec{\varphi}(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ заданные комплексные векторы¹ класса $C^{0, \beta}(S)$; кроме того $f_1(z), \varphi_2(z) \in C^{1, \beta}(S)$ ($0 < \beta \leq 1$).

¹ При $\omega = 0$ они действительны.

041036740
2022-01-01 09:33

В области D^- решение $\vec{u}(x)$ должно на бесконечности удовлетворять условию излучения. В случае статических задач (когда $\omega = 0$) это требование заменяется ограниченностью на бесконечности. Однородные задачи (когда $\vec{f}(z) = 0$ или $\vec{\varphi}(z) = 0$) будем обозначать через $\left(\begin{smallmatrix} \kappa, \omega \\ H \end{smallmatrix} \right)_0^\pm$ и $\left(\begin{smallmatrix} \kappa, \omega \\ R \end{smallmatrix} \right)_0^\pm$.

Для системы (1.5) матрица фундаментальных решений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \Gamma(x-y, \omega) &= \|\Gamma_{kj}(x-y; \omega)\| = \frac{1}{2i} \left\| \frac{\delta_{kj}}{\mu} H_0^{(1)}(k_2 |y-x|) + \right. \\ &+ \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 [H_0^{(1)}(k_2 |y-x|) - H_0^{(1)}(k_1 |y-x|)]}{\partial x_k \partial x_j} \left. \right\|_{2 \times 2}, \quad \text{при } \omega \neq 0; \\ \Gamma(x-y, 0) &\equiv \Gamma(x-y) = \|\Gamma_{kj}(x-y)\| = \\ &= \left\| \delta_{kj} \lambda' \ln |x-y| - \mu' \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x-y|^2} \right\|_{2 \times 2}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} |y-x| &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}; \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{\mu}, \\ \lambda' &= \frac{\lambda + 3\mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \end{aligned}$$

а $H_0^{(1)}(t)$ — функция Ганкеля первого рода.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} \Gamma_0(y-x) &= \left\| \overset{0}{\Gamma}_{kj}(y-x) \right\| = \left\| \delta_{kj} \lambda' \Theta(y-x) + \right. \\ &+ \mu' \frac{\delta_{kj}(\delta_{k_1} - \delta_{k_2})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) - (1 - \delta_{kj})(y_1 - x_1)^2}{|x-y|^2} \left. \right\|_{2 \times 2}, \end{aligned}$$

где

$$\Theta(y-x) = \text{arc tg} \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}.$$

Легко можно проверить, что $\Gamma_0(y-x)$ является матрицей решения (1.5₀) и справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} \Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial s(x)} \Gamma_0(x-y) - \mu' \Omega(x-y; \vec{s}(x)), \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(x-y; \vec{s}(x)) &= \left\| [\delta_{kj}(\delta_{k_2} - \delta_{k_1}) \widetilde{\text{grad}}_x \Theta(x-y) - \right. \\ &- (1 - \delta_{kj}) \widetilde{\text{grad}}_x \ln |x-y| \left. \right] \vec{s}(x) \left\|_{2 \times 2}^1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

¹ $\widetilde{\text{grad}}_x \Theta(x-y) = \left(\frac{\partial \Theta(x-y)}{\partial x_1}, -\frac{\partial \Theta(x-y)}{\partial x_2} \right)$.

Составим новые матрицы

$$\overset{\vee}{R}_0^*(y-x) = [\overset{\vee}{R}(\partial_y, n(y)) \Gamma_0(y-x)]^* = \left\| \frac{\delta_{j_1}}{\pi} \frac{\partial \theta(y-x)}{\partial y_k} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{lh}^0(y-x) \left[\delta_{j_1} \frac{(\nu+\mu)}{\rho(y)} n_l(y) - \delta_{j_2} s_l(y) \right] \right\|_{2 \times 2},$$

$$\overset{\vee}{R}^*(y-x, n(y), \omega) = [\overset{\vee}{R}(\partial_y, n(y)) \Gamma(y-x)]^* = \|\overset{\vee}{R}_{kj}^*(y-x, n(y), \omega)\|_{2 \times 2},$$

$$\overset{\vee}{H}^*(y-x, n(y), \omega) = [\overset{\vee}{R}(\partial_y, n(y)) \Gamma(y-x)]^*.$$

В силу (1,1) и (1.7), имеем

$$\overset{\vee}{R}_{kj}^*(y-x, n(y), \omega) = -\delta_{j_1} c(\omega) \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{lh}(y-x, \omega) \left[\delta_{j_2} s_l(y) - \frac{\delta_{j_1}(\nu+\mu)}{\rho(y)} n_l(y) \right], \quad (1.10)$$

где

$$c(\omega) = \frac{1}{2i} \quad \text{и} \quad Z(y-x; k, \omega) = H_0^{(1)}(k|y-x|), \quad \text{когда} \quad \omega \neq 0;$$

$$c(0) = \frac{1}{\pi} \quad \text{и} \quad Z(y-x; k, 0) = \ln|y-x|.$$

Наконец, учитывая (1,1), (1.7) и (1.10), легко получим следующие формулы

$$\overset{\times}{H}(\partial_x, n(x)) \overset{\vee}{R}^*(y-x, n(y), \omega) = \overset{\times, \vee}{K}(x, y, \omega) = \|\overset{\times, \vee}{K}_{kj}(x, y, \omega)\|,$$

$$\overset{\times}{R}(\partial_x, n(x)) \overset{\vee}{R}^*(y-x, n(y), \omega) = \overset{\times, \vee}{M}(x, y, \omega) = \|\overset{\times, \vee}{M}_{kj}(x, y, \omega)\|$$

где

$$\begin{aligned} \overset{\times, \vee}{K}_{kj}(x, y, \omega) = & -\delta_{j_1} \delta_{k_1} c(\omega) \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial n(x)} + \\ & -\delta_{k_2} \delta_{j_1} c(\omega) \left[\frac{(\mu+\nu)}{\rho(y)} \frac{\partial Z(y-x; k_2, \omega)}{\partial s(y)} - \frac{(\mu+x)}{\rho(x)} \frac{\partial Z(y-x; k_2, \omega)}{\partial s(x)} + \right. \\ & + \delta_{k_2} \delta_{j_2} c(\omega) \frac{\partial Z(y-x; k_2, \omega)}{\partial n(y)} + \sum_{l, m=1}^2 \Gamma_{lm}(y-x, \omega) \left[\delta_{k_1} \delta_{j_2} s_m(y) n_l(x) - \right. \\ & - \frac{\delta_{k_1} \delta_{j_1} (\nu+\mu)}{\rho(y)} n_m(y) n_l(x) - \frac{\delta_{k_2} \delta_{j_1} (\mu+x)(\mu+\nu)}{\rho(x) \rho(y)} n_m(y) s_l(x) + \\ & \left. + \frac{\delta_{k_2} \delta_{j_2} (\mu+x)}{\rho(x)} s_m(y) s_l(x) \right]; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
 M_{kj}^{\alpha, \nu}(x, y, \omega) &= \frac{\delta_{k_1} \delta_{j_1}}{2i} \omega^2 H_0^{(1)}(k_1 |y-x|) + \\
 &+ \delta_{k_1} \delta_{j_1} c(\omega) \left[\frac{(\mu + \nu)}{\rho(y)} \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial n(y)} + \frac{(\mu + \kappa)}{\rho(x)} \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial n(x)} \right] - \\
 &- \delta_{k_1} \delta_{j_2} c(\omega) \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial s(y)} - \delta_{k_2} \delta_{j_1} c(\omega) \frac{\partial Z(y-x; k_1, \omega)}{\partial s(x)} + \\
 &+ \sum_{l, m=1}^2 \Gamma_{lm}(y-x, \omega) \left[\delta_{k_1} \delta_{j_1} \frac{(\kappa + \mu)(\nu + \mu)}{\rho(y)\rho(x)} n_m(y) n_l(x) - \right. \\
 &- \delta_{k_1} \delta_{j_2} \frac{(\kappa + \mu)}{\rho(x)} S_m(y) n_l(x) - \delta_{k_2} \delta_{j_1} \frac{(\nu + \mu)}{\rho(y)} n_m(y) s_l(x) + \\
 &\left. + \delta_{k_2} \delta_{j_2} S_m(y) s_l(x) \right]. \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Из (1.11) очевидно, что $K_{11}^{\alpha, \nu}(z, y, \omega)$, $K_{12}^{\alpha, \nu}(z, y, \omega)$, $K_{22}^{\alpha, \nu}(z, y, \omega)$ являются ядрами типа Фредгольма, а $K_{21}^{\alpha, \nu}(z, y, \omega)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 K_{21}^{\alpha, \nu}(z, y, \omega) &= c(\omega) \left[\frac{(\mu + \nu)}{\rho(y)} \frac{\partial Z(z-y; k_1, \omega)}{\partial s(y)} - \right. \\
 &\left. - \frac{(\mu + \kappa)}{\rho(z)} \frac{\partial Z(z-y; k_1, \omega)}{\partial s(z)} \right] + Q_1(z, y, \omega) = \\
 &= \frac{(\mu + \nu)}{\pi} \left[\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(z)} \right] \frac{\partial \ln |z-y|}{\partial s(y)} - \frac{(\mu + \kappa)}{\pi} \left[\frac{\partial \ln |y-z|}{\partial s(y)} + \frac{\partial \ln |y-z|}{\partial s(z)} \right] + \\
 &+ \frac{(2\mu + \nu + \kappa)}{\pi \rho(z)} \frac{\partial \ln |y-z|}{\partial s(y)} + Q_2(z, y, \omega) = \\
 &= \frac{(2\mu + \kappa + \nu)}{\pi \rho(z)} \frac{\partial \ln |y-z|}{\partial s(y)} + Q_3(z, y, \omega), \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

где $Q_k(z, y, \omega)$ ($k=1, 2, 3$) — фредгольмовы ядра, а $\frac{\partial \ln |y-z|}{\partial s(y)}$ — сингулярное ядро. $(z, y) \in s$. Из (1.13) заключаем, что матрица $K^{\alpha, \nu}(z, y, \omega)$ является матрицей типа Фредгольма, если

$$\kappa + \nu = -2\mu. \quad (1.14)$$

2. Рассмотрим следующие потенциалы

$$\frac{\nu \omega}{v}(x) \equiv \frac{\nu \omega}{v}(x; h) = \int_S^v R^*(y-x, n(y), \omega) \bar{h}(y) dy_s; \quad (2.1)$$

$$\overset{v}{v}_0(x) \equiv \overset{v}{v}_0(x; h^*) = \int_S \overset{v}{R}_0^*(y-x, n(y)) \bar{h}^*(y) d_y s; \quad (2.2)$$

$$\overset{v, \omega}{W}(x) \equiv \overset{v, \omega}{W}(x; g) = \int_S \overset{v}{H}^*(y-x, n(y), \omega) \bar{g}(y) d_y s,$$

где $\bar{h}(y)$, $\bar{g}(y)$ и $\bar{h}^*(y)$ — векторы класса Гёльдера; причем $\bar{h}(y)$ и $\bar{g}(y)$ комплексные, когда $\omega \neq 0$

Очевидно, что (2.1) является регулярным решением системы (1.5) и удовлетворяет условиям излучения [1]. Аналогично вектор (2.2) является решением системы (1.5₀), но не ограничен на бесконечности. Легко можно показать, что если $\bar{h}^*(y)$ удовлетворяет условию

$$\int_S \overset{v}{P}(y) \bar{h}^*(y) d_y s = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{v}{P}(y) = \left\| \overset{v}{P}_{kj}(y) \right\| = & \left\| \delta_{kj} \left[\frac{(\nu + \mu)}{\rho(y)} \delta_{k_1} - \delta_{k_2} \right] s_2(y) - \right. \\ & \left. - (1 - \delta_{kj}) \left[\delta_{k_1} + \frac{(\nu + \mu)}{\rho(y)} \delta_{k_2} \right] s_1(y) \right\|, \end{aligned}$$

тогда $\overset{v}{v}_0(x)$ удовлетворяет на бесконечности условию

$$\bar{u}(x) = O(1), \quad |x|^2 \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x_i} = O(1). \quad (2.4)$$

Используя свойства логарифмических потенциалов [2], в силу формул (1.11) и (1.12), имеем

$$\left\{ \overset{x}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{v, \omega}{v}(z; h) \right\}^\pm = \pm \bar{h}(z) + \int_S \overset{x, v}{K}(z, y, \omega) \bar{h}(y) d_y s; \quad (2.5)$$

$$\left\{ \overset{x}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{v, \omega}{v}(z; h) \right\}^\pm = \pm \frac{(\nu - \kappa)}{\rho(z)} h_1(z) \bar{\delta}_2 + \int_S \overset{x, v}{M}(z, y, \omega) \bar{h}(y) d_y s; \quad (2.6)$$

$$\left\{ \overset{x}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{v, \omega}{W}(z; g) \right\}^\pm = \mp \bar{g}(z) + \int_S \overset{x, v}{K}(y, z, \omega) \bar{g}(y) d_y s; \quad (2.5_1)$$

$$\left\{ \overset{x}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{v, \omega}{W}(z; g) \right\}^\pm = \pm \frac{(\nu - \kappa)}{\rho(z)} g_2(z) \bar{\delta}_1 + \int_S \overset{x, v}{L}(z, y, \omega) \bar{g}(y) d_y s; \quad (2.6_1)$$

$$\{ \overset{\times}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{v}{v}_0(z) \}^{\pm} = \pm \frac{(\nu + \kappa + 2\mu)}{\rho(z)} h_1^*(z) \bar{\delta}_2 + \overset{\times}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{v}{v}_0(z); \quad (2.7)$$

$$\{ \overset{\times}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{v}{v}_0(z) \}^{\pm} = \mp \bar{h}_0^*(z) + \overset{\times}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{v}{v}_0(z), \quad (2.8)$$

где

$$\bar{h}_0^*(z) = (h_1(z), -h_2(z)).$$

Учитывая формулы (1.1), (1.4) и (1.8), из (2.2) получим

$$\begin{aligned} \overset{\times}{T}(\partial_x, n(x)) \overset{v,0}{v}(x; h) &= (\kappa + \mu) \frac{\partial}{\partial s(x)} \overset{v}{v}_0(x; h) + \\ &+ \kappa' \int_S [\overset{v}{R}(\partial_y, n(y)) G(y-x)]^* \bar{h}(y) d_y s, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} G(y-x) &= \| [-\delta_{kj} \text{grad}_x \Theta(y-x) + (\delta_{k1} - \delta_{k2} - \delta_{kj}) \text{grad}_x \ln |y-x|] \bar{s}(x) \|_{2 \times 2} \\ \kappa' &= \frac{\kappa(\lambda + 3\mu) - \mu(\lambda + \mu)}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned}$$

3. Ищем решение задачи $(H^{\nu,0})^{\pm}$ в виде

$$\bar{u}(x) = \frac{\gamma,0}{v}(x; h) - \frac{\gamma,0}{v}(0, h) + \int_S \overset{\gamma}{P}(y) \bar{h}(y) d_y s, \quad (3.1)$$

где

$$\gamma = -\kappa - 2\mu. \quad (3.2)$$

Тогда, в силу (1.6), (1.13), (1.14) и (2.4), для определения $\bar{h}(y) \in C^{0, \alpha}(S)$ получим систему интегральных уравнений Фредгольма

$$\bar{h}(z) + \int_S \overset{\kappa, \gamma}{K}(z, y, 0) \bar{h}(y) d_y s + \int_S \Lambda(z, y) \bar{h}(y) d_y s = \bar{f}(z), \quad (3.3)$$

где

$$\Lambda(z, y) = \left\| \sum_{l=1}^2 \left[\delta_{k1} n_l(z) + \delta_{k2} \frac{(\mu + \kappa)}{\rho(z)} s_l(z) \right] \left[\overset{\gamma}{R}_{lj}^*(y, n(y)) + \overset{\gamma}{P}_{lj}(y) \right] \right\|.$$

Докажем, что однородная система

$$\bar{h}(z) + \int_S \overset{\kappa, \gamma}{K}(z, y, 0) \bar{h}(y) d_y s + \int_S \Lambda(z, y) \bar{h}(y) d_y s = 0 \quad (3.3_0)$$

имеет только нулевое решение. Пусть $\bar{h}(z)$ — произвольное решение (3.3₀),

тогда (3.1) будет решением задачи $(\overset{x, 0}{H})_0^+$; поэтому, в силу теоремы единственности¹ [2], $\vec{u}(x)=0$, когда $x \in D^+$; в частности

$$\vec{u}(0) = \int_S \overset{y}{P}(y) \vec{h}(y) d_y s = 0$$

и, следовательно, $\vec{u}(x)$ удовлетворяет на бесконечности условию (2.4).

Воспользуемся формулой (2.9). Тогда, в силу (2.10), имеем

$$T(\partial_x, n(x)) \vec{u}(x) = T(\partial_x, n(x)) \overset{y}{v}(x; h) = (\mu + \alpha_0) \frac{\partial}{\partial s(x)} \overset{y}{v}_0(x; h) = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}.$$

Из (3.4) получаем, что $\overset{y}{v}_0(x; h) = 0$, когда $x \in D^+$, поэтому

$$\{ \overset{x}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{y}{v}_0(z; h) \}^+ = 0, \quad \{ \overset{x}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{y}{v}_0(z; h) \}^+ = 0 \quad (3.5)$$

и тогда, в силу (2.7), имеем

$$\{ \overset{x}{H}(\partial_z, n(z)) \overset{y}{v}_0(z; h) \}^- = 0. \quad (3.6)$$

Следовательно, $\overset{y}{v}_0(x; h)$ является решением задачи $(\overset{x, 0}{H})_0^-$, поэтому, в силу теоремы единственности, $\overset{y}{v}_0(x; h) = 0$, когда $x \in D^-$, откуда имеем

$$\{ \overset{x}{R}(\partial_z, n(z)) \overset{y}{v}_0(z; h) \}^- = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.5) и (3.7), учитывая (2.8), получаем $\vec{h}(z) = 0$, что и следовало доказать.

Таким образом, с помощью теоремы 1 Фредгольма, нами доказана

Теорема 1. Задача $(\overset{x, 0}{H})^+$ разрешима единственным образом при любом заданном векторе $\vec{f}(x)$. Решение представляется в виде (3.1), где $\vec{h}(y)$ определяется из системы интегральных уравнений Фредгольма (3.3).

Аналогично доказываются теоремы существования решений для задач $(\overset{x, 0}{H})$ и $(\overset{x, 0}{R})^\pm$.

¹ Когда $\kappa = \mu$, подразумевается, что S — не окружность.

4. Ищем решение задачи $(H)^+$ в виде

$$\vec{u}(x) = \frac{\gamma}{v(x; h)} = \int_S \check{R}^*(y-x, n(y), \omega) \vec{h}(y) d_y s. \quad (4.1)$$

Тогда, в силу (2.5), для определения $\vec{h}(y)$ получим систему интегральных уравнений Фредгольма

$$-\vec{h}(z) + \int_S \check{K}^{\gamma, \gamma}(z, y, \omega) \vec{h}(y) d_y s = \vec{f}(z). \quad (4.2)$$

Рассмотрим союзные однородные системы

$$\vec{h}(z) - \int_S \check{K}^{\gamma, \gamma}(z, y, \omega) \vec{h}(y) d_y s = 0. \quad (4.2_0)$$

$$\vec{g}(z) - \int_S \check{K}^{\gamma, \gamma}(y, z, \omega) \vec{g}(y) d_y s = 0. \quad (4.2_0^*)$$

Лемма 1. Если $\vec{h}(z)$ является решением (4.2₀), а $\vec{g}(z)$ — решением (4.2₀^{*}), тогда

$$\left\{ \check{R}(\partial_z, n(z)) \frac{\gamma, \omega}{w}(z; g) \right\}^- = 2\vec{g}(z), \quad \left\{ \check{H}(\partial_z, n(z)) \frac{\gamma, \omega}{v}(z, h) \right\}^+ = 2\vec{h}(z). \quad (4.3)$$

Лемма 2. Если $\vec{h}(z)$ является решением (4.2₀) и $\vec{g}(z)$ — решением (4.2₀^{*}), тогда $\frac{\gamma, \omega}{v}(x, h)$ и $\frac{\gamma, \omega}{w}(x; g)$ будут решениями задачи $(R)_0^+$.

Лемма 3. Если $\vec{u}(x)$ является решением задачи $(R)_0^+$, тогда вектор

$$\vec{h}(z) = \left\{ \check{H}(\partial_z, n(z)) \vec{u}(z) \right\}^+ \quad (4.4)$$

будет решением системы (4.2₀).

Доказательство. Применим интегральную формулу Сомиляна [1]

$$\vec{v}(x) = \frac{1}{2} \int_S \left[\check{R}^*(y-x, n(y), \omega) \left\{ \check{H}(\partial_y, n(y)) \vec{v}(y) \right\}^+ - \right. \\ \left. - \check{H}^*(y-x, n(y), \omega) \left\{ \check{R}(\partial_y, n(y)) \vec{v}(y) \right\}^+ \right] d_y s, \quad (4.5)$$

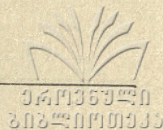
где $\vec{v}(x)$ — произвольное регулярное решение системы (1.4).

Подставляя в (4.5) $\vec{v}(x) = \vec{u}(x)$ и учитывая, что

$$\left\{ \check{R}(\partial_z, n(z)) u(z) \right\}^+ = 0, \quad (4.6)$$

получим

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{2} \int_S \check{R}^*(y-x, n(y), \omega) \left\{ \check{H}(\partial_y, n(y)) \vec{u}(y) \right\}^+ d_y s, \quad x \in D^+ \quad (4.7)$$



Рассмотрим операцию $\overset{\times}{H}(\partial_x, n(x))$ от (4.7) и перейдем к пределу при стремлении точки x изнутри к граничной точке $z \in S$. Тогда по формуле (2.5) получим

$$\begin{aligned} \{ \overset{\times}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+ &= \frac{1}{2} \{ \overset{\gamma}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+ + \\ &+ \frac{1}{2} \int_S^{\times, \gamma} K(z, y, \omega) \{ \overset{\gamma}{H}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) \} d_{yS}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Заметим, что, в силу (4.6) из (1.2), имеем

$$\sum_{j=1}^2 \{ R_{2j}(\partial_z, n(z)) u_j(z) \}^+ = \{ u(z) \}_S^+ = 0$$

и тогда (1.3) дает

$$\{ \overset{\gamma}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+ = \{ \overset{\times}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+. \quad (4.9)$$

Учитывая (4.9) в (4.8), получим

$$\{ \overset{\gamma}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+ - \int_S^{\times, \gamma} K(z, y, \omega) \{ \overset{\gamma}{H}(\partial_y, n(y)) \bar{u}(y) \} d_{yS} = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть

$$\{ \bar{h}^{(k)}(z) \}_{k=1}^q \quad \text{и} \quad \{ \bar{g}^{(k)}(z) \}_{k=1}^q$$

—полные системы решений, соответственно, уравнений (4.2₀) и (4.2₀^{*}).

Лемма 4. Система векторов $\frac{\gamma, \omega}{v}(x, h^{(k)})$, ($k = \overline{1, q}$) представляет полную систему решений задачи $(\overset{\gamma, \omega}{R})_0^+$.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(x)$ — некоторое решение задачи $(\overset{\gamma, \omega}{R})_0^+$. Так как (4.4) есть решение системы (4.2₀), полная система решений которой есть $\bar{g}^{(k)}(z)$ ($k = \overline{1, q}$), имеем

$$\{ \overset{\gamma}{H}(\partial_z, n(z)) \bar{u}(z) \}^+ = \sum_{k=1}^q \alpha_k \bar{h}^{(k)}(z). \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.7), получим

$$\bar{u}(x) = \sum_{k=1}^q \beta_k \frac{\gamma, \omega}{v}(x, h^{(k)}), \quad (4.11)$$

где β_1, \dots, β_q — постоянные. Легко можно показать, что $\frac{\gamma, \omega}{v}(x, h^{(k)})$ линейно независимы. Лемма доказана.

Лемма 5. Система векторов

$$\vec{\Psi}^{(k)}(z) = \left\{ \check{H}(\partial_z, n(z)) \frac{\kappa, \omega}{w(z, g^{(k)})} \right\} \quad (4.12)$$

представляет полную систему решения системы (4.2₀) и

$$\vec{\Psi}^{(k)}(z) = \sum_{m=1}^q \beta_{km} \vec{h}^{(k)}(z),$$

где

$$\det \|\beta_{km}\| \neq 0.$$

Из этих лемм непосредственно вытекает

Теорема 2. Для того чтобы система (4.2₀) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ω^2 была q -кратной собственной частотой задачи $(\check{R}^{\gamma, \omega})_0^+$. При этом (4.2₀) имеет q линейно независимых решений, которые совпадают с граничными значениями $\check{H}(\partial_z, n(z))$ -операций от решений задачи $(\check{R}^{\gamma, \omega})_0^+$.

Используя теорему 2, можно доказать основную теорему (ср. [1]):

Теорема 3. Внешняя неоднородная задача $(\check{H}^{\kappa, \omega})^+$ разрешима для любых значений частот колебаний ω^2 , а решение дается формулой

$$\vec{u}(x) = \int_S \check{R}^{\gamma}(y-x, n(y), \omega) \vec{h}(y) d_{yS} + \int_S \check{H}^{\kappa}(y-x, n(y), \omega) \vec{\Psi}(y) d_{yS},$$

где $\vec{h}(y)$ определяется из системы интегральных уравнений Фредгольма

$$-\vec{h}(z) + \int_S \check{K}^{\kappa, \gamma}(z, y, \omega) \vec{h}(y) d_{yS} = \vec{f}(z) - \int_S \check{H}^{\kappa}(y-z, n(y), \omega) \vec{\Psi}(y) d_{yS};$$

а

$$\vec{\Psi}(y) = 0,$$

если ω^2 не есть собственная частота задачи $(\check{R}^{\gamma, \omega})_0^+$, и

$$\vec{\Psi}(y) = \sum_{m=1}^q A_m \vec{\Psi}^{(m)}(y),$$

если ω^2 есть собственная частота задачи $(\check{R}^{\gamma, \omega})_0^+$.

A_m является решением системы линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^q a_{km} A_m = f_k,$$

где

$$f_k = \int_S \vec{f}(y) \vec{g}^{(k)}(y) d_y s, \quad a_{km} = \int_S \vec{\psi}^{(k)}(y) \vec{\psi}^m(y) d_y s.$$

Аналогично доказывается существование решения задачи $(R)^\omega$ для любого значения ω .

(Представлено 22. 11. 1972)

Кафедра дифференциальных и
интегральных уравнений

Л И Т Е Р А Т У Р А

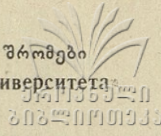
1. Г. П. Квиникадзе, Труды Тбилисского гос. университета, т. 117, 1966, 295—331.
2. Г. П. Квиникадзе, Труды Тбилисского гос. университета, т. 129, 1968, 79—111.
3. М. О. Башелейшвили, Сообщения АН ГССР, т. 35, 1964, 277—284.
4. В. Д. Купрадзе, Т. Ф. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси, 1968.

ბ. კვინიკაძე

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ახალი ვარიანტის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

შრომაში მოცემულია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განზოგადებული შერეული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ახალი ვარიანტი, რომელიც პოტენციალთა თეორიისა და ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებაზეა დამყარებული.



ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ
 КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. И. НАПЕТВАРИДЗЕ

Система дифференциальных уравнений стационарных колебаний моментной теории упругости в случае изотропной центросимметричной упругой среды при отсутствии внешних сил (что не является существенным ограничением) имеет вид [1,2]

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x}; \sigma \right) v(x) = 0, \quad (1)$$

где

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x}; \sigma \right) = \left\| \begin{array}{cc} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{array} \right\|,$$

$$A^{(1)} = \left\| A_{jk}^{(1)} \right\| = \left\| \delta_{jk} [(\mu + \alpha) \Delta + \rho \sigma^2] + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{3 \times 3},$$

$$A^{(4)} = \left\| A_{jk}^{(4)} \right\| = \left\| \delta_{jk} [(\gamma + \varepsilon) \Delta + (I \sigma^2 - 4\alpha)] + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{3 \times 3},$$

$$A^{(2)} = A^{(3)} = 2\alpha \left\| \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{jsk} \frac{\partial}{\partial x_s} \right\|_{3 \times 3}, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

$$v(x) = (v_1, v_2, \dots, v_6) = (u_1, u_2, u_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (u, \omega).$$

Здесь $Re [u(x) \exp(-i\sigma t)] = u^*(x, t)$, $Re [\omega(x) \exp(-i\sigma t)] = \omega^*(x, t)$ — векторы малых смещений и поворотов, $x(x_1, x_2, x_3)$ — точка трехмерного пространства, σ — частота колебаний, t — время, ρ — плотность среды, I — постоянная, характеризующая инерцию вращения, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — упругие постоянные, ε_{jsk} — тензор Леви-Чивита.

Пусть D^+ — область трехмерного евклидова пространства, ограниченная замкнутой поверхностью S , класса $\mathbb{L}_2(\delta)$, $\delta > 0$; $D^- = E_3 \setminus D^+ \cup S$.

Рассмотрим следующие граничные задачи. Задача $(I)_i$; $[(I)_a]^\sigma$: найти в $D^+ [D^-]$ регулярное решение [и удовлетворяющее „условиям излучения“ [3]] системы (1) по граничному условию

$$(v(z))_i = f(z), \quad [(v(z))_a]^\sigma = f(z), \quad z \in S.$$



0201035940

14 ж. удв. 33

Задача $(\Pi)_i$ [$(\Pi)_a$]: найти в D^+ [D^-] регулярное решение удовлетворяющее „условиям излучения“ системы (1) по граничному условию

$$\left(B \left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z) \right) v(z) \right)_i = f(z), \left[\left(B \left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z) \right) v(z) \right)_a = f(z) \right], z \in S,$$

где $B \left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z) \right)$ — матричный оператор напряжения, $f \in C^{1, \delta}(S)$ — заданный вектор шести измерений.

Соответствующие задачи с однородными граничными условиями обозначим через $(\bar{I})_i^0$; $(\bar{I})_a^0$, $(\bar{\Pi})_i^0$, $(\bar{\Pi})_a^0$.

Теоремы единственности рассматриваемых задач доказаны в [3].

Основываясь на методах и результатах классической теории упругости, развитых в [4], в настоящей работе изучаются вопросы существования решений.

Будем искать решения задач $(\bar{I})_{i, a}^0$ в виде потенциалов двойного слоя с неизвестной плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6)$ [5]

$$v(x) = \int_S \Gamma^*(y-x; n(y); \sigma) \varphi(y) d_y s, \quad \varphi \in C^{0, \delta}(S), \quad (2)$$

а решения задач $(\bar{\Pi})_{i, a}^0$ — в виде потенциалов простого слоя

$$v(x) = \int_S \Gamma(x-y; \sigma) \psi(y) d_y s, \quad \psi \in C^{0, \delta}(S). \quad (3)$$

В силу свойств потенциалов [5], относительно векторов φ и ψ получаем сингулярные интегральные уравнения

$$\mp \frac{1}{2} \varphi(z) + \int_S \Gamma^*(y-z; n(y); \sigma) \varphi(y) d_y s = f(z), \quad z \in S, \quad (\bar{I})_{i, a}^0$$

$$\pm \frac{1}{2} \psi(z) + \int_S \Gamma(z-y; n(y); \sigma) \psi(y) d_y s = f(z), \quad z \in S. \quad (\bar{\Pi})_{i, a}^0$$

При этом верхние знаки соответствуют внутренним, а нижние — внешним задачам.

Уравнения $(\bar{I})_{i, a}^0$ и $(\bar{\Pi})_{i, a}^0$ отличаются от соответствующих уравнений статических задач [3] вполне непрерывными слагаемыми и, следовательно, для них справедливы теоремы Фредгольма.

Введем теперь тензоры Грина статических задач. Тензорами Грина задач $(\bar{I})_i$ и $(\bar{\Pi})_i$ будем называть, соответственно, матрицы $G^k(x, y)$, $k=1, 2$, размером 6×6 , удовлетворяющие следующим условиям:

1) для $x \in D^+$ и $x \neq y$,

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}; 0\right)G^k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } k=1, \\ \sum_{s=1}^6 \mu^s(x) * \mu^s(y), & \text{при } k=2; \end{cases}$$

2) для граничной точки $z \in S$

$$\left\{ G^1(z, y) \right\}_i = 0, \left\{ B\left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z)\right) G^2(x, y) \right\}_i = 0, y \in D^+;$$

3) в области D^+ $G^k(x, y)$ представима в виде

$$G^1(x, y) = \Gamma(x - y) - v^1(x, y), \quad G^2(x, y) = \Pi(x, y) - v^2(x, y),$$

где $\left\{ \mu^k \right\}_{k=1}^6$ — система векторов, полученных ортонормированием в D^+

линейно независимых решений статической задачи $(\Pi)_i^0$ [3], $\mu^k(x) * \mu^s(y)$ — матрица с элементами $\mu^k(x) \mu_j^s(y)$, $j=1, 2, \dots, 6$, $v^k(x, y)$ — регулярное решение системы (1) при $\sigma=0$, любом $x \in D^+$ и фиксированном $y \in D^+$, $\Gamma(x - y)$ — матрица фундаментальных решений системы (1) при $\sigma=0$ ([2], [5]),

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) = \left\{ \overset{1}{\Pi}, \overset{2}{\Pi}, \dots, \overset{6}{\Pi} \right\} = & \Gamma(x - y) - \sum_{s=1}^6 \mu^s(x) * \int_{D^+} \Gamma(y - \xi) \mu^s(\xi) d_\xi \tau - \\ & - \sum_{s=1}^6 \int_{D^+} \Gamma(x - \xi) \mu^s(\xi) d_\xi \tau * \mu^s(y) + \sum_{t, s=1}^6 \Gamma^s(x) * \\ & * \mu^t(y) \int_{D^+} \int_{D^+} \mu^s(\xi) \Gamma(\xi - \eta) \mu^t(\eta) d_\xi \tau d_\eta \tau. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для построения матрицы $G^k(x, y)$ следует решить первую (при $k=1$) или вторую (при $k=2$) граничную задачу статики для области D^+ . Первая из этих задач всегда разрешима. Нетрудно проверить, что в силу выбора матрицы $\Pi(x, y)$, будут выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости второй задачи [3] и, тем самым, существование $G^k(x, y)$, $k=1, 2$ — обеспечено.

Существование тензоров Грина внешних статических задач вытекает из существования решений задач $(\overset{\circ}{I})_a$ и $(\overset{\circ}{\Pi})_a$ [3]. При этом $\Pi(x, y) = \Gamma(x - y)$.

Применяя формулу Грина, легко доказать справедливость равенства

$$G^k(x, y) = [G^k(y, x)]^*, \quad k=1, 2. \quad (4)$$

Так как $G^k(x, y)$ ($k=1, 2$) обладают всеми свойствами матриц фундаментальных решений, использованных при выводе формул общего представления [5], то имеем следующие представления регулярных решений:



$$v(x) = - \int_S \left[B \left(\frac{\partial}{\partial y}; n(y) \right) G^1(y, x) \right]^* (v(y))_i d_y s, \quad x \in D^+, \quad (\text{в случае задачи } (\dot{I})_i),$$

$$v(x) = - \int_S G^2(x, y) \left(B \left(\frac{\partial}{\partial y}; n(y) \right) v(y) \right)_i d_y s, \quad x \in D^+, \quad (\text{в случае задачи } (\dot{II})_i),$$

при этом в случае задачи $(\dot{II})_i$ имеется в виду, что $v(x)$ удовлетворяет условиям нормировки

$$\int_{D^+} v(y) \mu^k(y) d_y \tau = 0, \quad k=1, 2, \dots, 6. \quad (5)$$

Переходим к изучению однородных задач $(\dot{I})_i^\sigma$ и $(\dot{II})_i^\sigma$. Справедлива

Теорема I. Задачи $(\dot{I})_i^\sigma$ и $(\dot{II})_i^\sigma$ эквивалентны интегральным уравнениям

$$v(x) - \sigma^2 \int_{D^+} G^k(x, y) a v(y) d_y \tau = 0, \quad x \in D^+, \quad (6)$$

где $a = \|\delta_{jk} a_j\|_{6 \times 6}$, $a_j = \rho$, $j=1, 2, 3$, $a_j = I$, $j=4, 5, 6$; $k=1$ для задачи $(\dot{I})_i^\sigma$ и $k=2$ для задачи $(\dot{II})_i^\sigma$. При этом, в случае задачи $(\dot{II})_i^\sigma$ имеется в виду решение, удовлетворяющее условиям (5).

Теорема доказывается применением формулы Соммилиана и с учетом свойств $G^k(x, y)$.

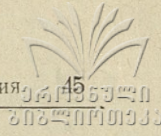
Используя (4), уравнение (6) можно привести к однородному уравнению Фредгольма с симметричным ядром класса L_2 и, следовательно, существует дискретный спектр действительных собственных значений параметра σ^2 (собственные частоты) и соответствующие нетривиальные собственные вектор-функции.

Пусть σ^2 — одно из собственных значений и $v(y)$ — соответствующая собственная вектор-функция. Применяя формулу Грина [5] к векторам $v(y)$ и $\bar{v}(y)$ и учитывая однородность граничных условий, в случае обеих задач получаем

$$\int_{D^+} [E(\bar{v}, v) - \sigma^2(\bar{v} a v)] d_y \tau = 0, \quad (7)$$

где $E[\bar{v}, v]$ — неотрицательная билинейная форма [5]. Отсюда вытекает

Теорема 2. Задача $(\dot{I})_i^\sigma$ [$(\dot{II})_i^\sigma$] имеет дискретный спектр строго положительных [неотрицательных] собственных частот, являющихся характеристическими числами ин-



интегрального уравнения (6) при $k=1$ [при $k=2$]. При этом, в случае задачи $(II)_i^\sigma$ значение $\sigma=0$ является характеристическим числом шестого ранга, которому соответствуют линейно независимые решения $v^k(x)$, $k=1, 2, \dots, 6$ (см. [5]).

Рассмотрим теперь интегральные уравнения $(I)_a^\sigma$ и $(II)_a^\sigma$, соответствующие однородным внешним задачам. Справедлива следующая

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение $(I)_a^\sigma$ имело нетривиальное решение, является равенство параметра σ^2 одной из собственных частот задачи $(II)_i^\sigma$. Если σ^2 есть m -кратная собственная частота этой задачи, то интегральное уравнение $(I)_a^\sigma$ имеет m линейно независимых решений, совпадающих с граничными значениями собственных вектор-функций задачи $(II)_i^\sigma$.

Необходимость. Пусть σ^2 отлично от собственных частот задачи $(II)_i^\sigma$ и уравнение $(I)_a^\sigma$ имеет нетривиальное решение. Тогда уравнение

$$\frac{1}{2} \varphi(z) + \int_S \Gamma(z-y; n(z); \sigma) \varphi(y) d_y S = 0, \quad z \in S \quad (8)$$

также имеет нетривиальное решение φ . Потенциал

$$V(x; \varphi) = \int_S \Gamma(x-y; \sigma) \varphi(y) d_y S, \quad x \in D^+$$

есть решение задачи $(II)_i^\sigma$. Но, так как σ^2 отлично от собственных частот этой задачи, то

$$V(x; \varphi) \equiv 0, \quad x \in \bar{D}^+.$$

Отсюда, по теореме единственности решения задачи $(I)_a^\sigma$ [3], имеем

$$V(x; \varphi) \equiv 0, \quad x \in \bar{D}^-.$$

Следовательно $\varphi(y) \equiv 0$, $y \in S$, что противоречит допущению.

Достаточность. Пусть σ^2 — m -кратная собственная частота задачи $(II)_i^\sigma$ и v^k ($k=1, 2, \dots, m$) соответствующие линейно независимые векторы.

Тогда легко показать, что граничные значения $(v^k)_i$ также будут линейно независимыми. Так как v^k есть решение задачи $(II)_i^\sigma$, из формулы общих представлений получим



УДК 517.51
 Математический анализ

$${}^k v(x) = - \int_S \Gamma^*(y-x; n(y); \sigma) (v)_i^k dy, \quad x \in D^+, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, переходя к пределу $D^+ \ni x \rightarrow z \in S$, получаем

$$\frac{1}{2} \left((v)_i^k \right)_+ + \int_S \Gamma^*(y-z; n(y); \sigma) (v)_i^k dy = 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, уравнение $(I)_a^\sigma$ имеет по крайней мере m линейно независимых решений $(v)_i^k$, $k=1, 2, \dots, m$. Легко показать, что других линейно независимых от $(v)_i^k$ решений уравнение не имеет. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение $(II)_a^\sigma$ имело нетривиальное решение, является равенство параметра σ^2 одной из собственных частот задачи $(I)_i^\sigma$. Если σ^2 есть m -кратная собственная частота этой задачи, то интегральное уравнение $(II)_a^\sigma$ имеет m линейно независимых решений и они совпадают с граничными значениями операции $B \left(\frac{\partial}{\partial x}; n(x) \right)$ над решениями задачи $(I)_i^\sigma$.

Наконец, рассмотрим вопросы существования решений неоднородных интегральных уравнений $(I)_{i,a}^\sigma$, $(II)_{i,a}^\sigma$. Справедлива

Теорема 5. Если σ^2 отличается от собственных частот задачи $(I)_i^\sigma$, то уравнение $(I)_i^\sigma$ всегда имеет решение и, следовательно, задача $(I)_i^\sigma$ всегда разрешима. Если же σ^2 есть m -кратная собственная частота задачи $(I)_i^\sigma$, то условие разрешимости имеет вид

$$\int_S f(z) \left(B \left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z) \right) v(z) \right)_i^k dz = 0, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

где v^k ($k=1, 2, \dots, m$) — собственные векторы задачи $(I)_i^\sigma$.

Первая половина теоремы очевидна. Пусть теперь σ^2 есть m -кратная собственная частота задачи $(I)_i^\sigma$. Тогда, по третьей теореме Фредгольма, условие разрешимости уравнения $(I)_i^\sigma$ имеет вид

$$\int_S f(z) \psi^k(z) d_z s = 0, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (10)$$

где $\psi^k (k=1, 2, \dots, m)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения

$$-\frac{1}{2} \psi^k(z) + \int_S \Gamma(z-y; n(z); \sigma) \psi^k(y) d_y s = 0.$$

Но, в силу теоремы 4, $\psi^k(z) = \left(B \left(\frac{\partial}{\partial z}; n(z) \right) v^k(z) \right)_i$, $k=1, 2, \dots, m$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 6. Если σ^2 отличается от собственных частот задачи $(\Pi)_i^\sigma$, то уравнение $(\Pi)_i^\sigma$ всегда имеет решение и, следовательно, задача $(\Pi)_i^\sigma$ всегда разрешима. Если же σ^2 есть m -кратная собственная частота задачи $(\Pi)_i^\sigma$, то уравнение $(\Pi)_i^\sigma$ разрешимо при условии

$$\int_S f(z) (v^k(z))_i d_z s = 0, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

где $v^k (k=1, 2, \dots, m)$ — собственные векторы задачи $(\Pi)_i^\sigma$.

Перейдем к рассмотрению внешних задач. Имеет место

Теорема 7. Задача $(I)_a^\sigma$ имеет и притом единственное решение для произвольного вектора $f \in C^{0,\delta}(S)$, $\delta > 0$ и при любом значении параметра σ^2 . Решение выражается потенциалом двойного слоя, если σ^2 отлично от собственных частот задачи $(\Pi)_i^\sigma$ и линейной комбинацией потенциала двойного слоя с потенциалом простого слоя, если σ^2 совпадает с одним из собственных значений задачи $(\Pi)_i^\sigma$.

Первая половина этой теоремы очевидна. Пусть теперь σ^2 есть m -кратная собственная частота задачи $(\Pi)_i^\sigma$. Тогда необходимыми и достаточными условиями разрешимости являются условия

$$\int_S f(y) \varphi^k(y) d_y s = 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$



где $\varphi^k (k=1, 2, \dots, m)$ — полная система решений союзного однородного уравнения

$$\frac{1}{2} \varphi(z) + \int_S \Gamma(z-y; n(z); \sigma) \varphi(y) d_y s = 0. \quad (12)$$

Тогда уравнение

$$\frac{1}{2} \psi(z) + \int_S \Gamma^*(y-z; n(y); \sigma) \psi(y) d_y s = 0 \quad (13)$$

также имеет m линейно независимых решений $\psi^k (k=1, 2, \dots, m)$.

Можно показать, что если σ^2 есть собственная частота задачи $(II)_{\sigma}^{\sigma}$, то уравнение (12) находится на характеристическом числе и это число является простым полюсом резольвенты. В силу этого, системы векторов

$\left\{ \varphi^k(y) \right\}_{k=1}^m$ и $\left\{ \psi^k(y) \right\}_{k=1}^m$ можно считать биортонормированными.

Выберем постоянные A_k следующим образом:

$$A_k = - \int_S f(y) \varphi^k(y) d_y s, \quad k=1, 2, \dots, m$$

и рассмотрим вектор

$$F(y) = f(y) + \sum_{k=1}^m A_k \psi^k(y),$$

где $f(y)$ — заданное граничное значение. Тогда легко проверить справедливость равенства

$$\int_S F(y) \varphi^k(y) d_y s = 0, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

При условии (14) интегральное уравнение

$$\frac{1}{2} \psi(z) + \int_S \Gamma^*(y-z; n(y); \sigma) \psi(y) d_y s = F(y)$$

разрешимо. Пусть $\psi(z)$ — его некоторое решение. Построим потенциал двойного слоя $W(x; \psi)$ и рассмотрим вектор

$$v(x) = W(x; \psi) - \sum_{k=1}^m A_k V(x; \varphi_k^*),$$

где φ_k^* есть линейная комбинация векторов $\left\{ \varphi^k \right\}_{k=1}^m$, составленная так, чтобы

$$\left(V(z; \varphi_k^*) \right)_i = \psi^k(z), \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Тогда, как легко видеть, $v(x)$ действительно является решением задачи

(I)_a^σ. Оно является единственным.

Аналогично доказывается

Теорема 8. Задача (II)_a^σ имеет и притом единственное решение для произвольного вектора $f \in C^{0,\delta}(S)$, $\delta > 0$ и при любом значении параметра σ^2 . Решение выражается в виде потенциала простого слоя, если σ^2 отлично от собственных частот задачи (I)_i^σ и линейной комбинацией потенциала простого слоя с потенциалом двойного слоя, если σ^2 есть одна из собственных частот задачи (I)_i^σ.

(Представлено 15.II.1972)

Кафедра математики
физического фак-та.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Пальмов, ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.
2. W. Nowacki, Teoria niesymetrycznej spreszystości. Warszawa, 1971.
3. О. И. Напетваридзе, Аннотации докладов семинара Института прикл. математики Тбилисского гос. университета, 5, 1971.
4. В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси, 1968.
5. О. И. Напетваридзе, Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе, т. XXXIX, 3, 1971.

ო. ნაშბტვარძიძე

მიკრობოლარული მომენტური დრეკადობის თეორიის რხევის ძირითადი
სახსრულვარო ამოცანების ამოხსნათა ახსნების თეორემა

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში დამტკიცებულია მიკრობოლარული მომენტური დრეკადობის თეორიის რხევის პირველი და მეორე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნათა არსებობის თეორემები სასრულ და უსასრულო არეების შემთხვევაში.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ И РЯДАХ ФУРЬЕ

Т. Ш. ТЕВЗАДЗЕ

1. Пусть 2π -периодическая функция $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ является четной или нечетной и ее ряды Фурье-Лебега соответственно суть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Пусть, кроме того, задана неотрицательная возрастающая функция $j(t)$, $t \in (0, 1)$.

Определение 1. Говорят, что $f(x) \in \text{Lip } j(t)$, если

$$\sup_{t>0; x} |f(x+t) - f(x)| \leq A j(t),$$

где A — положительная константа.

Определение 2. Мы будем говорить, что $f(x) \in \Lambda^m j(t)$, если

$$\sup_{t>0; x} |\Delta_m f(x, t)| \leq A_m j(t),$$

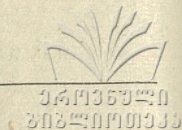
где

$$\Delta_m f(x, t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f[x + (m-2k)t],$$

число A_m зависит лишь от m .

В работе М. и Ч. Идзуми [1] рассмотрены вопросы, касающиеся классов функций $f(x) \in \text{Lip } j(t)$. В пункте 2 настоящей статьи обобщаются результаты М. и Ч. Идзуми для классов $\Lambda^m j(t)$, а в пункте 3 доказываются их аналоги для функций многих переменных.

2. **Теорема 1.** Пусть $a_n \geq 0$ и неотрицательная, возрастающая в интервале $(0, 1)$ функция $j(t)$ удовлетворяет условиям:



$$\int_t^1 j(u)u^{-m-1} du \leq A_m j(t)t^{-m}, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

$$\int_0^t j(u)u^{-1} du \leq A j(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Тогда, для того, чтобы $f(x) \in \Delta^m j(t)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_k \leq A_m j\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, что $f(x) \in \Delta^m j(t)$ и $f(x)$ — четная функция. Нетрудно показать в этом случае, что

$$\sigma[\Delta_m f(x, t)] = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \sin^m kt, & \text{для четных } m, \\ (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \sin^m kt, & \text{для нечетных } m. \end{cases} \quad (2.4)$$

В силу условия (2.2), ряды (2.4) равномерно сходятся на $[-\pi, \pi]$.

При четном m из (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} A_m j(t) &\geq |\Delta_m f(0, t)| = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin^m kt \geq \\ &\geq 2^m \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k \sin^m kt \geq 2^m \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k \left(\frac{2}{\pi}\right)^m (kt)^m \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $t = \frac{1}{n}$, получаем неравенство (2.3).

Аналогично для нечетных m находим

$$A_m j(t) \geq |\Delta_m f(t, t)| = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin^{m+1} kt \geq$$

¹ В дальнейшем, через $A, A_m, A_n, n \dots$ обозначаются положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров.

$$\begin{aligned} &\geq 2^m \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k \sin^{m+1} kt \geq 2^m \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1} (kt)^{m+1} \geq \\ &\geq \frac{2^m}{\pi^{m+1}} \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t = \frac{1}{n}$ имеем неравенство (2.3).

Теперь рассмотрим случай, когда $f(x) \in \Lambda^m j(t)$ и является нечетной функцией. Имеем

$$\sigma[\Delta_m f(x, t)] = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \sin^m kt, & \text{для четных } m, \\ (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \sin^m kt, & \text{для нечетных } m. \end{cases} \quad (2.5)$$

Заметим, что и здесь, согласно условию (2.2), ряды (2.5) равномерно сходятся.

Предположим сперва, что m — четное число. Тогда, в силу (2.5), будем иметь

$$A_m j(t) \geq |\Delta_m f(2t, t)| = 2^{m+1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \sin^{m+1} kt \right|.$$

Отсюда, в силу монотонности функции $j(t)$, следует

$$\begin{aligned} t j(t) &\geq \int_0^t j(u) du \geq A_m \int_0^t \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku \sin^{m+1} ku \right| du \geq \\ &\geq A_m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{k} \frac{\sin^{m+2} kt}{m+2} \right| \geq A_m t \sum_{k=\lfloor \frac{1}{2t} \rfloor}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} a_k. \end{aligned}$$

Полагая здесь $t = \frac{1}{n}$, получаем

$$\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_k \leq A_m j\left(\frac{1}{n}\right).$$



Теперь рассмотрим тот случай, когда m — нечетное число. В силу (2.5), имеем

$$A_m j(t) \geq \left| \Delta_m f(t, t) \right| = 2^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \sin^m kt \right|.$$

Тогда, используя монотонность функции $j(t)$, находим

$$\begin{aligned} t j(t) &\geq \int_0^t j(u) du \geq A_m \int_0^t \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku \sin^m ku \right| du \geq \\ &\geq A_m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{k} \frac{\sin^{m+1} kt}{m+1} \right| \geq A_m t \sum_{k=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k. \end{aligned}$$

Отсюда, при $t = \frac{1}{n}$, получается

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^n a_k \leq A_m j\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, необходимость условия (2.3) доказана.

Теперь докажем достаточность условия (2.3), т. е. мы должны установить, что если выполнены условия (2.1), (2.2) и (2.3), то $f(x) \in \Lambda^m j(t)$.

Используя (2.4) и (2.5), при любом m будем иметь

$$\left| \Delta_m f(x, 2t) \right| \leq 2^m \left[\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k (2kt)^m + \sum_{k=2^N}^{\infty} a_k \right]. \quad (2.6)$$

Пусть $t > 0$ и N определено из условия

$$2^N < \frac{1}{t} \leq 2^{N+1}.$$

Принимая во внимание (2.3), из (2.6) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} \left| \Delta_m f(x, 2t) \right| &\leq 2^m t^m \sum_{k=1}^{2^N-1} a_k k^m + \sum_{k=2^N}^{\infty} a_k = \\ &= 2^m t^m \sum_{k=1}^N \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i i^m + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i \leq \\ &\leq A_m \left[t^m \sum_{k=1}^N 2^{km} j\left(\frac{1}{2^k}\right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^k}\right) \right] = \\ &= A_m [S_1(N, m) + S_2(N, m)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^t j(u) u^{-m-1} du &= \int_1^t j\left(\frac{1}{x}\right) x^{m-1} dx \geq \int_1^{2^N} j\left(\frac{1}{x}\right) x^{m-1} dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{2^{k-1}}^{2^k} j\left(\frac{1}{x}\right) x^{m-1} dx \geq \sum_{k=1}^N j\left(\frac{1}{2^k}\right) \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{m-1} dx = \\ &= A_m \sum_{k=1}^N j\left(\frac{1}{2^k}\right) 2^{km}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.1) и (2.7), находим

$$S_1[N, m] = t^m \sum_{k=1}^N 2^{km} j\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq A_m j(t). \quad (2.8)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^{2t} j(u) u^{-1} du &= \int_{\frac{1}{2t}}^{\infty} j\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx \geq \int_{2^N}^{\infty} j\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} j\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Тогда на основании (2.2) и (2.7) получаем

$$S_2(N, m) = \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^k}\right) \leq A_m j(2t). \quad (2.9)$$

Таким образом, согласно (2.7), (2.8) и (2.9) будем иметь

$$|\Delta_m f(x, 2t)| \leq A_m j(2t). \quad (2.10)$$

Полагая в (2.10) $\tau = 2t$, находим

$$|\Delta_m f(x, \tau)| \leq A_m j(\tau).$$

Следовательно,

$$\sup_{\tau > 0; x} |\Delta_m f(x, \tau)| \leq A_m j(\tau),$$

т. е.

$$f(x) \in \Lambda^m j(\tau).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $a_n \downarrow 0$ и неотрицательная возрастающая функция $j(t)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Тогда для того, чтобы $f(x) \in \Lambda^m j(t)$, необходимо и достаточно

$$a_n \leq \frac{A_m}{n} j\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$



Следствие 2. Пусть $a_n \geq 0$ и

$$\omega_m(\delta; f) = \sup_{|t| < \delta; x} |\Delta_m f(x, t)|.$$

Если

$$\int_t^1 \omega_m(u; f) u^{-m-1} du \leq A_m \omega_m(t; f) t^{-m},$$

$$\int_0^t \omega_m(u; f) u^{-1} du \leq A \omega_m(t; f),$$

то

$$\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_k \leq A_m \omega_m\left(\frac{1}{n}; f\right).$$

3. Допустим, что 2π -периодическая функция $f(x, y) \in L[R]$, где $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, является четной относительно каждой из переменных; четной—по x и нечетной—по y ; нечетной—по x и четной—по y ; нечетной—по каждой из переменных с соответствующими двойными рядами Фурье-Лебега:

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m, n} a_{m, n} \cos mx \cos ny,$$

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m, n} a_{m, n} \cos mx \sin ny,$$

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m, n} a_{m, n} \sin mx \cos ny,$$

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} a_{m, n} \sin mx \sin ny,$$

где

$$\lambda_{m, n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m=n=0; \\ \frac{1}{2}, & m=0, n>0; n=0, m>0; \\ 1, & m, n>0. \end{cases}$$

Рассмотрим неотрицательную функцию $j(t, \tau)$, $(t, \tau) \in R_1[0, 1; 0, 1]$, неубывающую в смысле Харди в промежутке R_1 , т. е.

$$\begin{aligned} j(t_2, \tau_2) - j(t_2, \tau_1) - j(t_1, \tau_2) + j(t_1, \tau_1) &\geq 0, \\ j(t_2, \tau_2) - j(t_1, \tau_1) &\geq 0, \end{aligned}$$

при $t_2 \geq t_1$, $\tau_2 \geq \tau_1$.

Определение 3. Говорят, что $f(x, y) \in Lip j(t, \tau)$, если $\sup \sup |f(x+t, y+\tau) - f(x+t, y) - f(x, y+\tau) + f(x, y)| \leq A j(t, \tau)$, $t > 0; x, \tau > 0; y$.

Определение 4. Будем говорить, что $f(x, y) \in \Delta^m j(t, \tau)$, если

$$\sup_{\tau > 0; x} \sup_{\tau > 0; y} \{ |\Delta_{m, n} f(x, y; t, \tau)| \} \leq A_{m, n} j(t, \tau),$$

где

$$\Delta_{m, n} f[x, y; t, \tau] = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} C_m^i C_n^k f[x+(m-2i)t, y+(n-2k)\tau].$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma[\Delta_{m, n} f(x, y; t, \tau)] = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+n}{2}} 2^{m+n} \sum_{i, k=1}^{\infty} A_{i, k}(x, y) \sin^m it \sin^n k\tau, & \text{при четных } m \text{ и } n, \\ (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} 2^{m+n} \sum_{i, k=1}^{\infty} A_{i, k}^{(1)}(x, y) \sin^m it \sin^n k\tau, & \text{при нечетном } m \text{ и четном } n, \\ (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} 2^{m+n} \sum_{i, k=1}^{\infty} A_{i, k}^{(2)}(x, y) \sin^m it \sin^n k\tau, & \text{при четном } m \text{ и нечетном } n, \\ (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} 2^{m+n} \sum_{i, k=1}^{\infty} A_{i, k}^{(3)}(x, y) \sin^m it \sin^n k\tau, & \text{при нечетных } m \text{ и } n, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$A_{i, k}(x, y) = a_{i, k} \cos ix \cos ky,$$

$$A_{i, k}^{(1)}(x, y) = a_{i, k} \sin ix \cos ky,$$

$$A_{i, k}^{(2)}(x, y) = a_{i, k} \cos ix \sin ky,$$

$$A_{i, k}^{(3)}(x, y) = a_{i, k} \sin ix \sin ky,$$

— если функция $f(x, y)$ четна относительно каждой из переменных;

$$A_{i, k}(x, y) = a_{i, k} \cos ix \sin ky,$$

$$A_{i, k}^{(1)}(x, y) = a_{i, k} \sin ix \sin ky,$$

$$A_{i, k}^{(2)}(x, y) = -a_{i, k} \cos ix \cos ky,$$

$$A_{i, k}^{(3)}(x, y) = -a_{i, k} \sin ix \cos ky$$

— для функции четной по x и нечетной по y ;

$$A_{i, k}(x, y) = a_{i, k} \sin ix \cos ky,$$

$$A_{i, k}^{(1)}(x, y) = -a_{i, k} \cos ix \cos ky,$$

$$A_{i,k}^{(2)}(x, y) = a_{i,k} \sin ix \cos ky,$$

$$A_{i,k}^{(3)}(x, y) = -a_{i,k} \cos ix \sin ky$$

— если $f(x, y)$ функция является нечетной по x и четной по y и, наконец,

$$A_{i,k}(x, y) = a_{i,k} \sin ix \sin ky,$$

$$A_{i,k}^{(1)}(x, y) = -a_{i,k} \cos ix \sin ky,$$

$$A_{i,k}^{(2)}(x, y) = -a_{i,k} \sin ix \cos ky,$$

$$A_{i,k}^{(3)}(x, y) = a_{i,k} \cos ix \cos ky$$

— для функции $f(x, y)$, нечетной относительно каждой из переменных.

Теорема 2. Пусть $a_{m,n} \geq 0$ и в интервале R_1 , задана неотрицательная, неубывающая в смысле Харди функция $j(t, \tau)$, удовлетворяющая условиям:

$$\int_0^1 \int_0^1 j(u, v) u^{-m-1} v^{-n-1} du dv \leq A_{m,n} j(t, \tau) t^{-m} \tau^{-n}, \quad (3.2)$$

$$\int_0^t \int_0^\tau j(u, v) u^{-1} v^{-n-1} du dv \leq A_n j(t, \tau) \tau^{-n}, \quad (3.3)$$

$$\int_0^1 \int_0^\tau j(u, v) u^{-m-1} v^{-1} du dv \leq A_m j(t, \tau) t^{-m}, \quad (3.4)$$

$$\int_0^t \int_0^\tau j(u, v) u^{-1} v^{-1} du dv \leq A j(t, \tau). \quad (3.5)$$

Тогда для того, чтобы $f(x, y) \in \Lambda^{m,n} j(t, \tau)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}^p \sum_{k=\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}^q a_{i,k} \leq A_{m,n} j\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right). \quad (3.6)$$

Доказательство. Принимая во внимание (3.3), (3.4) и (3.5), легко проверить, что ряды (3.1) равномерно сходятся на R .

Допустим, что $f(x, y) \in \Lambda^{m,n} j(t, \tau)$ и рассмотрим, сперва, случай когда $f(x, y)$ — четная по x, y функция. В силу (3.1), для четных m и n будем иметь

$$A_{m,n} j(t, \tau) \geq |\Delta_{m,n} f(0, 0; t, \tau)| = 2^{m+n} \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \sin^m it \sin^n k\tau \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq 2^{m+n} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k} \sin^m it \sin^n k\tau \geq \\ &\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+n} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $t = \frac{1}{p}$, $\tau = \frac{1}{q}$, получаем

$$\sum_{i=\left[\frac{p}{2}\right]}^p \sum_{k=\left[\frac{q}{2}\right]}^q a_{i,k} \leq A_{m,n} j\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right).$$

Если m — нечетное, а n — четное число, то

$$\begin{aligned} A_{m,n} j(t, \tau) &\geq |\Delta_{m,n} f(t, 0; t, \tau)| = 2^{m+n} \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \sin^{m+1} it \sin^n k\tau \geq \\ &\geq 2^{m+n} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k} \sin^{m+1} it \sin^n k\tau \geq \\ &\geq \frac{2^{m+n}}{\pi^{m+n+1}} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу получается оценка (3.6). Если m — четное и n — нечетное или оба нечетные, то аналогичными рассуждениями получается то же самое неравенство (3.6).

Предположим теперь, что $f(x, y)$ нечетная относительно каждой из переменных функция. Тогда, согласно (3.1), для четных m и n имеем

$$\begin{aligned} A_{m,n} j(t, \tau) &\geq |\Delta_{m,n} f(2t, 2\tau; t, \tau)| = \\ &= 2^{m+n+2} \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \cos it \cos k\tau \sin^{m+1} it \sin^{n+1} k\tau \right|. \end{aligned}$$

Тогда, в силу монотонности функции $j(t, \tau)$, будем иметь

$$A_{m,n} t\tau j(t, \tau) \geq A_{m,n} \int_0^t \int_0^\tau j(u, v) du dv \geq$$



$$\begin{aligned}
 & \geq A_{m,n} 2^{m+n+2} \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \int_0^t \cos iu \sin^{m+1} iu \, du \int_0^{\tau} \cos kv \sin^{n+1} kv \, dv \right| \\
 & = A_{m,n} 2^{m+n+2} \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \frac{1}{ik} \frac{\sin^{m+2} it}{m+2} \frac{\sin^{n+2} k\tau}{n+2} \right| \geq \\
 & \geq A_{m,n} 2^{m+n+2} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k} \frac{1}{ik} \frac{\sin^{m+2} it}{m+2} \frac{\sin^{n+2} k\tau}{n+2} \geq \\
 & \geq \frac{A_{m,n} 2^{m+n+2}}{(m+2)(n+2)} \frac{t\tau}{\pi^{m+n+4}} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k}.
 \end{aligned}$$

Положив $t = \frac{1}{p}$, $\tau = \frac{1}{q}$, получаем (3.6).

Аналогично для нечетного m и четного n имеем

$$\begin{aligned}
 & A_{m,n} j(t, \tau) \geq |\Delta_{m,n} f(t, 2\tau; t, \tau)| = \\
 & = 2^{m+n+1} \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \cos it \cos k\tau \sin^m it \sin^{n+1} k\tau \right|.
 \end{aligned}$$

Принимая и здесь во внимание монотонность функции $j(t, \tau)$, находим

$$\begin{aligned}
 & A_{m,n} t\tau j(t, \tau) \geq A_{m,n} \int_0^t \int_0^{\tau} j(u, v) \, du \, dv \geq \\
 & \geq A_{m,n} 2^{m+n+1} \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} \frac{1}{ik} \frac{\sin^{m+1} it}{m+1} \frac{\sin^{n+2} k\tau}{n+2} \right| \geq \\
 & \geq A_{m,n} 2^{m+n+1} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k} \frac{1}{ik} \frac{\sin^{m+1} it}{m+1} \frac{\sin^{n+2} k\tau}{n+2} \geq \\
 & \geq \frac{A_{m,n}}{(m+1)(n+2)} 2^{m+n+1} \frac{t\tau}{\pi^{m+n+3}} \sum_{i=\left[\frac{1}{2t}\right]}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\tau}\right]}^{\left[\frac{1}{\tau}\right]} a_{i,k}.
 \end{aligned}$$

так что снова будет иметь место неравенство (3.6).

Совершенно аналогичными рассуждениями доказывается необходимость условия теоремы и для остальных рядов (3.1).

Теперь покажем достаточность условия (3.6). Если $t, \tau > 0$ и

$$2^M < \frac{1}{t} \leq 2^{M+1}, \quad 2^N < \frac{1}{\tau} \leq 2^{N+1},$$

то легко видеть, что для всех рядов (3.1) и любых значений m и n мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{m+n}} \left| \Delta_{m,n} f(x, y; 2t, 2\tau) \right| \leq 2^{m+n} \sum_{i=1}^{2^M-1} \sum_{k=1}^{2^N-1} a_{i,k} (it)^m (k\tau)^n + \\ & + 2^m \sum_{i=1}^{2^M-1} \sum_{k=2^N}^{\infty} a_{i,k} (it)^m + 2^n \sum_{i=2^M}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^N-1} a_{i,k} (k\tau)^n + \\ & + \sum_{i=2^M}^{\infty} \sum_{k=2^N}^{\infty} a_{i,k} = 2^{m+n} t^m \tau^n \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{p=2^{i-1}}^{2^i-1} \sum_{q=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{p,q} p^m q^n + \\ & + 2^m t^m \sum_{i=M+1}^{\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{p=2^{i-1}}^{2^i-1} \sum_{q=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{p,q} p^m + \\ & + 2^n \tau^n \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{p=2^{i-1}}^{2^i-1} \sum_{q=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{p,q} \cdot q^n + \\ & + \sum_{i=M+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{p=2^{i-1}}^{2^i-1} \sum_{q=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{p,q} \leq \\ & \leq 2^{m+n} t^m \tau^n \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N 2^{im} 2^{kn} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) + \\ & + 2^m t^m \sum_{i=1}^M 2^{im} \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) + 2^n \tau^n \sum_{k=1}^N 2^{kn} \sum_{i=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) + \\ & + \sum_{i=M+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{\mu=1}^4 I_{\mu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Оценим I_1 ; имеем:

$$\int_{\frac{1}{t}}^1 \int_{\frac{1}{\tau}}^1 j(u, v) u^{-m-1} v^{-n-1} du dv = \int_{\frac{1}{t}}^1 \int_{\frac{1}{\tau}}^1 j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{m-1} y^{n-1} dx dy \gg$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \int_1^{2^M} \int_1^{2^N} j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{m-1} y^{n-1} dx dy \geq \\
 &\geq \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) \int_{2^{i-1}}^{2^i} \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{m-1} y^{n-1} dx dy = \\
 &= A_{m,n} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N 2^{im} 2^{kn} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right).
 \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (3.2), следует

$$I_1 \leq A_{m,n} j(t, \tau). \quad (3.8)$$

Теперь, для оценки I_2 , рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}
 \int_t^{1/2} \int_0^{2\tau} j(u, v) u^{m-1} v^{-1} du dv &= \int_t^{1/2} \int_{1/2\tau}^{\infty} j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{m-1} y^{-1} dx dy \geq \\
 &\geq \int_1^{2^M} \int_{2^N}^{\infty} j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{m-1} y^{-1} dx dy = \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{2^{i-1}}^{2^i} \int_{2^{k-1}}^{2^k} j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{m-1} y^{-1} dx dy \geq \\
 &\geq \sum_{i=1}^M \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right) 2^{-k} \int_{2^{i-1}}^{2^i} \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{m-1} dx dy = \\
 &= A_m \sum_{i=1}^M 2^{im} \sum_{k=N+1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^k}\right).
 \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание (3.4), находим

$$I_2 \leq A_m j(t, 2\tau). \quad (3.9)$$

Совершенно аналогично получаются оценки

$$I_3 \leq A_n j(2t, \tau) \quad (3.10)$$

$$I_4 \leq A j(2t, 2\tau). \quad (3.11)$$

Далее, в силу (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) и (3.11), получаем

$$|\Delta_{m,n} f(x, y; 2t, 2\tau)| \leq A_{m,n} j(2t, 2\tau).$$

Отсюда, полагая $2t = \delta$, $2\tau = \eta$, следует достаточность условия (3.6). Теорема 2 доказана.

Следствие 3. Пусть $a_{m, n} \downarrow 0$ и $j(t, \tau)$ — неотрицательная, неубывающая в смысле Харди функция, удовлетворяющая условиям (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5). Тогда для того, чтобы $f(x, y) \in \Lambda^{m, n} j(t, \tau)$, необходимо и достаточно

$$a_{m, n} \leq \frac{A_{m, n}}{mn} j\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Следствие 4. Пусть $a_{m, n} \geq 0$ и

$$\omega_{m, n}(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{|t| < \delta_1} \sup_{|\tau| < \delta_2} \left| \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} G_m^i C_n^k f[x + (m-2i)t, y + (n-2k)\tau] \right|$$

Если

$$\int_t^1 \int_\tau^1 \omega_{m, n}(f; u, v) u^{-m-1} v^{-n-1} du dv \leq A_{m, n} \omega_{m, n}(f; t, \tau) t^{-m} \tau^{-n},$$

$$\int_t^1 \int_0^\tau \omega_{m, n}(f; u, v) u^{-m-1} v^{-1} du dv \leq A_m \omega_{m, n}(f; t, \tau) t^{-m},$$

$$\int_0^t \int_\tau^1 \omega_{m, n}(f; u, v) u^{-1} v^{-n-1} du dv \leq A_n \omega_{m, n}(f; t, \tau) \tau^{-n},$$

$$\int_0^t \int_0^\tau \omega_{m, n}(f; u, v) u^{-1} v^{-1} du dv \leq A \omega_{m, n}(f; t, \tau),$$

то

$$\sum_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_{i, k} \leq A_{m, n} \omega_{m, n}\left(f; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right).$$

Следуя схеме доказательства теоремы 2, можно показать, что справедлива

Теорема 3. Пусть $a_{m, n} \geq 0$ и в интервале R_1 задана неотрицательная, неубывающая в смысле Харди функция $j(t, \tau)$, удовлетворяющая условиям:

$$\int_t^1 \int_\tau^1 j(u, v) (uv)^{-2} du dv \leq A j(t, \tau) (t\tau)^{-1},$$

$$\int_0^t \int_\tau^1 j(u, v) u^{-1} v^{-2} du dv \leq A j(t, \tau) \tau^{-1},$$

$$\int_t^1 \int_0^\tau j(u, v) u^{-2} v^{-1} du dv \leq A j(t, \tau) t^{-1},$$

$$\int_0^t \int_0^\tau j(u, v) u^{-1} v^{-1} du dv \leq A j(t, \tau).$$

Тогда, для того, чтобы $f(x, y) \in Lip j(t, \tau)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_{i,k} \leq A j\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right).$$

Наконец, отметим что аналогичные теоремы доказываются для функций k переменных, $k > 2$, но, ввиду громоздкости выкладок, их доказательства опускаются.

(Представлено 1.II.1972)

Кафедра теории функций и
функционального анализа

ЛИТЕРАТУРА

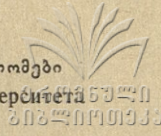
M. and Ch. Izumi, Journal of Math. and Mechanics, vol. 18, № 9, (1969), 857—870.

თ. თევზაძე

ფუნქციონალური კლასებისა და ფურიეს მწკრივების
შესახებ

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ $f(x) \in \Lambda^m j(t)$ კლასს. ამასთან განხილულია, როგორც მარტივი, ისე ჯერადი ფურიეს მწკრივები.



ლის სიმპლექსური მემორა ჩანგის ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენის ხასიათი

ე. სამსონაძე

ამ ნაშრომში მოცემულია ლის სიმპლექსური C_2 ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენის წონების ჯერადობების გამოსათვლელი ფორმულა წარმოდგენის უფროსი წონის მიხედვით.

ამ ფორმულას აქვს სახე

$$n = \frac{1}{2} \sum_{k_1=0}^{a-b} \sum_{k_2=0}^b [2^{\mu_{k_1, k_2}}] (1 + (-1)^{\nu_{k_1, k_2}}), \quad (1)$$

სადაც

$$\mu_{k_1, k_2} = a + b - c - d - 2k_2 - |a - c - k_1 - k_2| - |b - d + k_1 - k_2|,$$

$$\nu_{k_1, k_2} = a + b - c - d - (a - c - k_1 - k_2)(b - d + k_1 - k_2),$$

\mathbb{N} აღნიშნავს l რიცხვის მთელ ნაწილს; n აღნიშნავს $\vec{P}(c, d)$ წონის ($c \geq 0, d \geq 0$) ჯერადობას C_2 ალგებრის ისეთი დაუყვანადი წარმოდგენისათვის, რომლის უფროსი წონაა $\vec{A}(a, b)$.

დამტკიცება: 3. ვეილის ფორმულას [1] ლის ნახევრადმარტივი ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენისათვის აქვს შემდეგი სახე

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\delta}) = \chi(\vec{\alpha}) f(\vec{\delta}),$$

სადაც $\vec{\alpha}$ არის ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენის უფროსი წონა, $\vec{\delta}$ აღნიშნავს ამ ალგებრის დადებით ფესვთა ნახევარჯამს; $\chi(\vec{\alpha})$ არის წარმოდგენის ხასიათი; $f(\vec{x}) = \sum_{s \in S} \det s \exp s(\vec{x})$, სადაც s არის სასრული ჯგუფი, წარმოქმნილი სარ-

ქისებური ანარეკლებით იმ ჰიპერსიბრტყეების მიმართ, რომლებიც გადიან კოორდინატთა სათავეზე ფესვების პერპენდიკულარულად.

ვეილის ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\sum_{s \in S} \det s \cdot n(s(\vec{\delta}) + \vec{r}) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } \vec{r} \neq s_1(\vec{\delta} + \vec{\alpha}) \text{ ნებისმიერი } s_1\text{-თვის } (s_1 \in s), \\ \det s_1, & \text{როცა } \vec{r} = s_1(\vec{\delta} + \vec{\alpha}), \quad (s_1 \in s), \end{cases}$$

სადაც $n(\vec{t})$ აღნიშნავს \vec{t} წონის ჯერადობას;



ლის ორთოგონალური D_2 ალგებრის ფესვებს წარმოადგენენ ვექტორები $\pm(2,0)$ და $\pm(0,2)$. ამიტომ $\vec{P}(c, d)$ წერტილის m ჯერადობა, როცა $c \geq 0, d \geq 0, D_2$ ალგებრის ისეთი დაუყვანადი წარმოდგენისათვის, რომლის უფროსი წონაა $\vec{R}(e, f)$, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$m = 1, \text{ როცა } e \equiv c \pmod{2}, f \equiv d \pmod{2}, e \geq c, f \geq d;$$

$$m = 0, \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$m = \frac{1}{2} [2^\mu] (1 + (-1)^\nu), \quad (2)$$

სადაც

$$\mu = e - c + f - d - |e - c| - |f - d|,$$

$$\nu = e - c + f - d - (e - c)(f - d).$$

C_2 ალგებრის ფესვებს წარმოადგენენ ვექტორები $\pm(2, 0), \pm(0, 2), \pm(1, 1), \pm(1, -1)$. თუ გამოვიყენებთ ცნობილ შედეგს [2], მივიღებთ რომ

$$n = \sum_{k_1=0}^{a-b} \sum_{k_2=0}^b m_{(a-k_1-k_2, b+k_1-k_2)}, \quad (3)$$

სადაც n არის $\vec{P}(c, d)$ წერტილის ჯერადობა C_2 ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენისათვის, რომლის უფროსი წონაა $\vec{A}(a, b)$; $m_{(e, f)}$ აღნიშნავს \vec{P} წერტილის ჯერადობას D_2 ალგებრის ისეთი დაუყვანადი წარმოდგენისათვის, რომლის უფროსი წონაა $\vec{R}(e, f)$,

(2) და (3) ფორმულებიდან ადვილად მიიღება (1) ფორმულა.

(წარმოდგენილია 25. XII. 1970)

ალგებრა-გეომეტრიის კათედრა

ლიტერატურა

1. H. Weyl, Math. Zeitschr., 23 (1924), 24 (1925).
2. გ. სიმონია, ა. რაზმაძის სახელობის თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები, XXIV, 1957.

მ. თ. სამსონაძე

ХАРАКТЕР НЕПРОВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ВТОРОГО РАНГА

Резюме

В настоящей статье приведена формула для вычисления кратности произвольного веса неприводимого представления симплектической алгебры Ли C_2 по заданному старшему весу представления.

Эта формула имеет вид

$$n = \frac{1}{2} \sum_{k_1=0}^{a-b} \sum_{k_2=0}^b [2^{\mu_{k_1, k_2}}] (1 + (-1)^{\nu_{k_1, k_2}}),$$

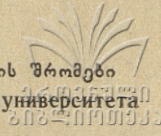
где

$$\mu_{k_1, k_2} = a + b - c - d - 2k_2 - |a - c - k_1 - k_2| - |b - d + k_1 - k_2|,$$

$$\nu_{k_1, k_2} = a + b - c - d - (a - c - k_1 - k_2)(b - d + k_1 - k_2),$$

$[l]$ означает целую часть числа l , n означает кратность веса $\vec{P}(c, d)$ в неприводимом представлении алгебры C_2 со старшим весом $\vec{A}(a, b)$ при $c \geq 0, d \geq 0$.

Для доказательства приведенной формулы использована известная формула Вейля для характера неприводимого представления полупростой алгебры Ли.



ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Г. И. РУСИЕШВИЛИ

Особенность плоскости Лобачевского заключается в том, что она имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну.

Ввиду этой особенности, ряд задач, простых для евклидовой плоскости, для плоскости Лобачевского приобретает значительную трудность. Поэтому их рассмотрение представляет определенный интерес.

В данной работе рассматривается задача именно такого характера. Ищется условие, при котором существует конечный криволинейный треугольник (имеющий основанием кривую без самопересечений) с заранее данными длиной и поворотом основания как кривой (см. [1]) и данной суммой углов при основании.

Для формулировки результата введем некоторые величины, характеризующие многогранники, склеенные из кусков плоскости Лобачевского.

Под положительной частью кривизны многогранника ω^+ понимаем сумму положительных кривизн всех внутренних вершин, т. е. $\omega^+ = \sum (\theta_i - 2\pi)$, где θ_i — полный угол вокруг i -ой вершины.
 $\theta < 2\pi$

Через $\omega_0 = \omega^+ - k^2 S$, где $-k^2 = K$ — гауссова кривизна плоскости Лобачевского, S — площадь многогранника.

Радиусом $r(Q)$ многогранника Q называем точную верхнюю границу расстояний от внутренних точек до границы многогранника.

(Рассматриваются многогранники, гомеоморфные замкнутому кругу).

Имеет место следующая

Теорема: Пусть на плоскости дана гомеоморфная отрезку, соединяющая точки A и B кривая Z , длина которой равна p . Пусть φ — ее поворот с одной стороны, и пусть из точек A и B в ту же сторону исходят лучи l_A и l_B так, что они с кривой Z составляют с этой стороны углы α и β . Тогда, если $\alpha + \beta < \pi + \varphi - kp$, то лучи l_A и l_B пересекаются.

Доказательство. Допустим, что l_A и l_B не пересекаются. Кривая Z' , состоящая из Z и лучей l_A и l_B , разбивает плоскость на две



области G_1, G_2 . Пусть G_1 —та из них, которая лежит с рассматриваемой стороны от Z .

Возьмем две точки $A' \in l_A, B' \in l_B$ и соединим их ломаной R в $\overline{G_1}$ ($\overline{G_1}$ —замыкание области). Ломаная R отделяет от G_1 область $G_1' \subset G_1$, не примыкающую к Z .

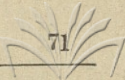
Теперь возьмем точки $A'' \in l_A, B'' \in l_B$, произвольным образом, но так, чтобы они лежали на границе области G_1' , и соединим их кратчайшей $A''B''$ в $\overline{G_1'}$ ($\overline{G_1'}$ —замыкание G_1'). Из общих теорем о кратчайших в многообразиях с внутренней метрикой (см. [1], гл. II, § 2) вытекает, что кратчайшая $A''B''$ существует и является в общем случае ломаной. Кроме того, очевидно, что ломаная $A''B''$ выпуклая и обращена выпуклостью в сторону части G_1' , не содержащей R . Присоединив к $A''B''$ отрезки $AA'' \subset l_A, BB'' \subset l_B$, получим ломаную R' , которая ограничивает совместно с кривой Z гомеоморфную кругу область G_1'' , причем R' выпукла и обращена выпуклостью наружу (по отношению к G_1''). Пусть $O \in R'$ —точка, делящая ломаную R' на части \overline{AO} и \overline{BO} равной длины. Склеив ломаные \overline{AO} и \overline{BO} , мы получим многогранник Q , гомеоморфный кругу и ограниченный кривой Z , и, следовательно, имеющий периметр p .

Так как углы ломаной R' внутри области G_1'' меньше π , то все вершины этого многогранника имеют положительную кривизну, так что для Q имеем: $\omega = 0$ и $\omega_0 = 2\pi - [\varphi + \pi - (\alpha + \beta)] = \pi - \varphi + \alpha + \beta$, при этом $\varphi + \pi - (\alpha + \beta)$ является, очевидно, поворотом границы многогранника Q . Ввиду условия $\alpha + \beta < \pi + \varphi - kp$, имеем $\omega_0 < 2\pi - kp$. Но, поскольку за счет выбора точек A'', B'' , отрезки AA'', BB'' можно сделать сколь угодно большими, радиус многогранника Q может быть сколь угодно большим, что противоречит ранее доказанной (см. [2]) теореме.

Если Q многогранник такой, что $\omega_0 = \omega^+ - k^2 S < 2\pi - kp$, то радиус многогранника $r(Q) \leq \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{2kp}{2\pi - \omega_0 - kp} \right)$.

Полученное противоречие и доказывает справедливость нашего утверждения.

Отметим, что условие $\alpha + \beta < \pi + \varphi - kp$ нельзя ослабить. Действительно, если Z —дуга орицикла и $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta = \pi + \varphi - kp$, тогда как лучи l_A и l_B не пересекаются.



ЛИТЕРАТУРА

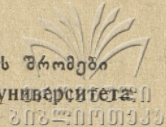
1. А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1948.
2. Г. И. Русиешвили, Вестник Ленинградского университета, № 1, 1957, 76 — 79.

გ. რუსიეშვილი

ლობაჩევსკის პლანიმეტრიის ერთი ექსტრემალური
ამოცანის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში მიღებულია ლობაჩევსკის სიბრტყეზე სასრულო სამკუთხედის არსებობის პირობა, როცა წინასწარ მოცემულია მის ფუძედ მდებარე წირის სიგრძე, ამ წირის მობრუნება და ფუძესთან მდებარე კუთხეთა ჯამი.



ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ТРУБ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. ПАТАРАЯ

Допустим, что движение несжимаемой вязкой жидкости стационарно и происходит параллельно оси OX , так что

$$v_y = v_z = 0, \quad v_x = v(y, z).$$

При отсутствии внешних сил будем иметь $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$ и уравнение Навье-Стокса для оси OX приведет к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

где μ —динамический коэффициент вязкости, а p —гидродинамическое давление. Легко понять, что граничными поверхностями жидкости в данном случае могут быть только цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси OX . Они могут двигаться с постоянными скоростями параллельно оси OX или оставаться неподвижными. Сечениями потока плоскостью OYZ будут кривые l_0, l_1, \dots, l_n , где l_0 охватывает l_1, l_2, \dots, l_n . В данном случае мы будем иметь стационарное одномерное движение вязкой жидкости внутри трубы с поперечным сечением l_0 . Внутренними границами потока будут трубчатые поверхности с поперечными сечениями l_1, l_2, \dots, l_n . На практике часто случается, когда имеется одна внутренняя граница. В этом случае вязкая жидкость движется в пространстве между двумя трубами. Часто эти трубы имеют концентрические круговые сечения. Рассматриваемая схема применяется, когда текучая жидкость должна подогреваться, что осуществляется с помощью трубы меньшего диаметра.

При дальнейшем изложении будем считать, что движение вязкой жидкости ламинарно. В уравнении (1) $\frac{\partial p}{\partial x}$ может иметь только постоянное значение. Если положим $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, то в этом случае сила внутреннего объемного трения будет преодолена силой внешнего трения жидкости с дви-

жушимися трубами. Поэтому, по крайней мере, скорость одной из граничных потоков труб должна отличаться от нуля.

В случае $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$ (градиентное течение) скорости всех труб могут равняться нулю.

Если через u_0, u_1, \dots, u_n , соответственно, обозначены постоянные скорости труб с кривыми поперечных сечений l_0, l_1, \dots, l_n , то граничные условия для скорости потока запишутся в виде:

$$\left. \begin{array}{l} v = u_0 \quad \text{на} \quad l_0 \\ v = u_1 \quad \text{''} \quad l_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ v = u_n \quad \text{''} \quad l_n \end{array} \right\} \quad (2)$$

Через $G_0^{(0)}$ обозначим силу трения, которая действует на единицу длины, ограничивающую поток цилиндра l_0 при отсутствии всех остальных цилиндров, а через $G_0^{(n)}$ —такую же силу, когда жидкость протекает в пространстве между цилиндрами l_0, l_1, \dots, l_n . Тогда разность $\Delta G_0^{(n)} = G_0^{(n)} - G_0^{(0)}$ будет равняться силе гидродинамического взаимодействия цилиндров l_1, l_2, \dots, l_n на цилиндр l_0 . Жидкость протекает вне цилиндров l_1, l_2, \dots, l_n . Обозначим через $G_k^{(0)}$ ($k \neq 0$) силу трения, действующую на единицу длины цилиндра l_k ($k \neq 0$), когда поток имеет единственную внутреннюю границу с кривой поперечного сечения l_k ($k \neq 0$), а через $G_k^{(n)}$ ($k \neq 0$)—такую же силу, когда жидкость протекает в пространстве между цилиндрами (при этом, конечно, l_0 может отсутствовать). Разность $\Delta G_k^{(n)} = G_k^{(n)} - G_k^{(0)}$ ($k \neq 0$) будет пондеромоторной силой, действующей на единицу длины цилиндра l_k . Легко усмотреть, что в случае отсутствия градиента давления вдоль потока $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$ скорость $v_x(y, z)$ —гармоническая на плоскости OYZ функция и по граничным условиям (2) надо решить задачу Дирихле для контуров l_0, l_1, \dots, l_n . Такую же задачу надо решить при определении функции тока $\psi(Y, Z)$ плоского безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости при граничных значениях (2) для функции тока.

Для определения сил трения будем иметь:

$$\begin{aligned} G_k^{(0)} &= \mu \oint_{l_k} \frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial n} dS = \mu \oint_{l_k} \frac{\partial \psi_k^{(0)}}{\partial n} dS = \mu \oint_{l_k} d\varphi_k^{(0)} = \mu \Gamma_k^{(0)}, \\ G_k^{(n)} &= \mu \oint_{l_k} \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial n} dS = \mu \oint_{l_k} \frac{\partial \psi_k^{(n)}}{\partial n} dS = \mu \oint_{l_k} d\varphi_k^{(n)} = \mu \Gamma_k^{(n)}, \\ \Delta G_k^{(n)} &= \mu (\Gamma_k^{(n)} - \Gamma_k^{(0)}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\psi_k^{(0)}$, $\psi_k^{(n)}$ — функции тока; $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(n)}$ — потенциалы скорости безвихревого движения идеальной жидкости; n — направление внутрь области течения нормали; $\Gamma_k^{(n)}$, $\Gamma_k^{(0)}$ — циркуляции скорости по контуру l_k . Верхние индексы имеют такой же смысл, что и выше.

При градиентном потоке $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0\right)$ формулы (3) не верны.

Рассмотрим подробно два примера, имеющих физическое значение: когда стационарное течение между двумя соосными трубами происходит при $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$ (градиентный поток).

Кривые l_1 и l_2 в данном случае концентрические окружности с общим центром в начале координат. Пусть радиусы этих окружностей равны R_1 и R_2 . Определенности ради примем, что $R_2 > R_1$. Функция тока $\psi(y, z)$ безвихревого плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в пространстве между двумя окружностями определяется равенством

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + c, \quad (4)$$

где Γ — циркуляция скорости, а $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат до текущей точки в жидкости.

Допустим, что круговые цилиндры двигаются со скоростями u_1 и u_2 . Тогда граничные условия

$$\begin{aligned} \psi &= u_1, & \text{при } r &= R_1, \\ \psi &= u_2, & \text{„ } r &= R_2, \end{aligned}$$

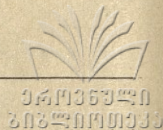
для определения Γ и c дадут уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R_1 + c &= u_1 \\ -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R_2 + c &= u_2. \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi(u_1 - u_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \\ c &= \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения Γ и c в (4), для скорости течения получим:



$$v(y, z) = \frac{u_2 - u_1}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln(y^2 + z^2) + \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}. \quad (5)$$

Сила трения со стороны жидкости, отнесенная на единицу длины обоих цилиндров, равна

$$G_1^{(2)} = G_2^{(2)} = -\Gamma = \frac{2\pi(u_2 - u_1)}{\ln R_2 - \ln R_1}. \quad (6)$$

При движении только второго цилиндра со скоростью u_2 скорость стационарного потока вязкой жидкости внутри цилиндра будет равна $v_2^{(0)}$ (y, z) = const = u_2 , что для силы трения даст $G_2^{(0)} = 0$. Точно так же для стационарного потока вязкой жидкости вне движущегося с постоянной скоростью u_1 кругового цилиндра будет

$$v(y, z) = u_1 = \text{const},$$

что для силы трения, действующей на единицу длины того же цилиндра, даст

$$G_1^{(0)} = 0.$$

Таким образом, в рассмотренном случае силы трения (6), действующие на единицу длины движущихся цилиндров, являются пондеромоторными силами гидродинамического взаимодействия. Формулу (6) можем переписать в виде:

$$\Delta G_1^{(2)} = \Delta G_2^{(2)} = -\Gamma = \frac{2\pi(u_2 - u_1)}{\ln R_2 - \ln R_1}. \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что пондеромоторная сила прямо пропорциональна разности скоростей и обратно пропорциональна разности логарифмов радиусов. Если $u_2 = u_1$, то сила трения равна нулю. В данном случае вся система будет двигаться с постоянной скоростью, как твердое тело. Рассмотрим случаи, когда между коаксиальными трубами, движущимися со скоростями u_1 и u_2 , имеется градиентный поток. Именно этот случай представляет большой физический интерес. Пусть радиусы труб равны R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Как известно [2], скорость стационарного течения в пространстве между соосно расположенными неподвижными трубами дается формулой

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(r^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln r - \frac{R_1^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right), \quad (8)$$

где r — расстояние от общей оси труб.

Так как стационарный градиентный поток вязкой жидкости вне одной неподвижной трубы физически не может существовать (ибо скорость должна стремиться к бесконечности вместе с r , как с $\ln r$), то здесь можно говорить только о пондеромоторной силе, действующей на внешнюю трубу и вызванной внутренней трубой радиуса R_1 . Определим напряжение трения на трубах.

Из (8) будем иметь

$$\tau_2^{(1)} = \left[-\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r=R_2} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} R_2 + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 - \ln R_1} \frac{1}{R_2},$$

$$\tau_1^{(2)} = \left[\mu \frac{dv}{dr} \right]_{r=R_1} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} R_1 - \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{R_1}.$$
(9)

Докажем, что при $R_2 > R_1$, $\tau_1^{(2)} > 0$. С этой целью τ_1 представим в виде:

$$\tau_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} R_1 \frac{1}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2} \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1 \right].$$
(10)

Заметим, что множитель перед квадратной скобкой в (10), ввиду $\frac{dp}{dx} < 0$, положителен. С этой целью покажем, что при $R_2 > R_1$ следует $\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 > 1$. Обозначим через x $\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$ и рассмотрим функцию $e^x - x$, которая имеет минимум при $x=0$, равный единице. Но при $x=0$ $R_2 = R_1$. Отсюда следует, что при $R_2 > R_1$ $\tau_1^{(2)} > 0$. Назовем поверхностью скольжения поверхность жидкого цилиндра в пространстве между соосными трубами, на которой напряжение трения $\tau=0$. Приравнявая выражение для напряжения трения нулю, получим

$$-\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} r^* + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r^*} = 0,$$

где r^* — расстояние от общей оси труб до поверхности трения.

Решая полученное уравнение, будем иметь

$$r^* = R_1 \sqrt{\frac{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}}.$$
(11)

Доказанное неравенство $\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1 > \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$ дает

$$R_2 > r^* > R_1.$$

Пондеромоторное приращение напряжения трения на поверхности второй трубы, вызванное гидродинамическим действием первой трубы, равно

$$\Delta \tau_2 = \tau_2^{(1)} - \tau_2^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 - \ln R_1} \frac{1}{R_2}.$$
(12)

Очевидно, что, в силу $\frac{dp}{dx} < 0$, будем иметь

$$\Delta\tau_2 < 0.$$

Следовательно, вследствие действия внутренней трубы при неизменном продольном градиенте давления, напряжение трения на поверхности внешней трубы уменьшается на величину, данную по формуле (12). Такое уменьшение напряжения трения уменьшает силу трения, действующую на единицу длины внешней трубы, на величину, равную

$$\frac{\pi}{2} \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (13)$$

Вместе с тем, сила трения на единицу длины внутренней трубы равна

$$-\pi \left| \frac{dp}{dx} \right| R_1^2 + \frac{\pi}{2} \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (14)$$

Суммарная сила трения, испытываемая потоком на единицу длины, будет равна

$$\pi \left| \frac{dp}{dx} \right| (R_2^2 - R_1^2), \quad (15)$$

что при $R_1 = 0$ дает $\pi \left| \frac{dp}{dx} \right| R_2^2$.

Формула (15) показывает, что при постоянном продольном градиенте давления сила сопротивления потоку падает пропорционально квадрату радиуса внутренней трубы и первой степени градиента давления. Для объемного расхода жидкости формула (8) дает

$$Q_2^{(1)} = -\frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right)_2^{(1)} \left\{ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\}. \quad (16)$$

Пологая $R_1 = 0$, получим

$$Q_2^{(0)} = -\frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right)_2^{(0)} R_2^4. \quad (17)$$

Положив $Q_2^{(1)} = Q_2^{(0)}$ и разделив (16) на (17), получим отношение тех значений градиентов давления, которые обеспечивают постоянство расходов в соосно расположенных трубах и в одной трубе радиуса R_2 . Для указанного отношения получим

$$\left(\frac{dp}{dx} \right)_2^{(1)} = \left(\frac{dp}{dx} \right)_2^{(0)} \frac{R_2^4}{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}. \quad (18)$$

Второй множитель справа больше единицы, и, как и следовало ожидать,

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_2^{(1)} > \left(\frac{dp}{dx}\right)_2^{(0)}$$

Если поперечное сечение труб не концентрические окружности, а иные кривые, то сначала надо решить плоское уравнение Пуассона для части плоскости, расположенной между кривыми с правой частью, равной постоянному значению продольного перепада давления, после чего проводить исследование по приведенному в этой статье образцу.

(Представлено 7.III.1972)

Кафедра
теоретической механики

ბ. პატარაია

ორი კოაქსიალური ცილინდრის ჰიდროდინამიკური ურთიერთმოქმედება ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული ლამინარული რეჟიმით მოძრაობისას

რ ე ზ ი უ მ ე

დასმულია ზოგადი თეორიული ამოცანა ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული დინებისას ორ პარალელურ მსახველებიან და ნებისმიერი განივკვეთის მქონე ცილინდრულ მილებს შორის ჰიდროდინამიკური ურთიერთმოქმედების ძალის განსაზღვრისა, როგორც წნევის გრადიენტიანი, ისე უგრადიენტო ნაკადის შემთხვევაში.

განხილულია ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული დინება, როგორც წრიულ მილში, ისე კოაქსიალურ წრიულ ცილინდრებს შორის. ნაჩვენებია, რომ თუ წნევის დაცემა სიგრძის ერთეულზე ორივე შემთხვევაში ერთნაირია, მაშინ კოაქსიალური მილების შემთხვევაში სიგრძის ერთეულზე ნაკადის წინააღმდეგობა მცირდება $\pi \left| \frac{dp}{dx} \right| R_1^2$ -ით ერთ წრიულ მილში ნაკადის წინააღმდეგობასთან შედარებით. გამოთვლილია წნევის იმ სიგრძივი გრადიენტების ფარდობა, რომლებიც ეთანადებიან ტოლ ხარჯებს $R_2 > R_1$ რადიუსებიანი კოაქსიალური მილების შიგნით და R რადიუსიან ერთ მილში დინების შემთხვევაში. ეს ფარდობა გადმოიცემა გამოსახულებით:

$$\frac{R_2^4}{R_2^4 - R_1^4} - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

ПРИВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ДВУХ ЭЛЛИпсоИДОВ

Н. Н. ПАТАРАЯ

§ 1. Постановка математической задачи

Рассмотрим совместное обтекание двух трехосных твердых эллипсоидов в безграничном по всем направлениям объеме идеальной несжимаемой жидкости, движущейся в бесконечности со скоростью, равной \vec{v}_∞ . Как известно, потенциал скорости обтекающей жидкости $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=0$, двум граничным условиям

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{S_1}=0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{S_2}=0$$

и условию в бесконечности

$$\varphi_\infty = v_\infty x \cos \alpha_0 + v_\infty y \cos \beta_0 + v_\infty z \cos \gamma_0,$$

где S_1, S_2 — поверхности обтекаемых эллипсоидов; $\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0$ — направляющие косинусы вектора скорости потока в бесконечности.

Для разности гармонических функций $\varphi'(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \varphi_\infty$ будем иметь граничные условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)_{S_1} = -v_\infty \left\{ \cos \alpha_0 \cos \hat{nx} + \cos \beta_0 \cos \hat{ny} + \cos \gamma_0 \cos \hat{nz} \right\}_{S_1},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)_{S_2} = -v_\infty \left\{ \cos \alpha_0 \cos \hat{nx} + \cos \beta_0 \cos \hat{ny} + \cos \gamma_0 \cos \hat{nz} \right\}_{S_2}, \quad (1.1)$$

$$\varphi'_\infty = 0,$$

где $\cos \hat{nx}, \cos \hat{ny}, \cos \hat{nz}$ — направляющие косинусы нормали поверхности эллипсоидов.

Регулярную гармоническую функцию $\varphi'(x, y, z)$ будем искать в виде потенциала простых слоев



$$\varphi'(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_1)} \frac{\mu_1(\theta', \psi')}{r_{MM'}} dS_1 + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_2)} \frac{\mu_2(\alpha', \beta')}{r_{MM'}} dS_2 \quad (1.2)$$

где $r_{MM'}$ — расстояние между точкой поверхности и точкой области течения.

Для поверхностных плотностей источников, расположенных на эллипсоидах S_1 и S_2 , будем иметь интегральные уравнения

$$\begin{aligned} \mu_1(\theta, \psi) = v_\infty & \left\{ \cos \alpha_0 \cos \hat{n}x + \cos \beta_0 \cos \hat{n}y + \cos \gamma_0 \cos \hat{n}z \right\}_{S_1} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_1)} \frac{\cos(\nu_1^A r_{MM'})}{r_{MM'}^2} \mu_1(\theta', \psi') dS_{M'} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_2)} \frac{\cos(\nu_1^A r_{MM'})}{r_{MM'}^2} \mu_2(\alpha', \beta') dS_{M'} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\alpha, \beta) = v_\infty & \left\{ \cos \alpha_0 \cos \hat{n}x + \cos \beta_0 \cos \hat{n}y + \cos \gamma_0 \cos \hat{n}z \right\}_{S_2} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_1)} \frac{\cos(\nu_1^A r_{MM'})}{r_{MM'}^2} \mu_1(\theta', \psi') dS_{M'} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_2)} \frac{\cos(\nu_1^A r_{MM'})}{r_{MM'}^2} \mu_2(\alpha', \beta') dS_{M'} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В первом интеграле правой части (1.3) точки M и M' берутся на поверхности первого эллипсоида, а во втором интеграле точка M берется на первом эллипсоиде, точка же интегрирования M' — на втором эллипсоиде.

Легко также заметить, что во втором интеграле правой части (1.4) точки M и M' берутся на втором эллипсоиде, а в первом интеграле точка M берется на втором эллипсоиде, точка же интегрирования M' — на первом эллипсоиде. Что касается координатных параметров $\theta, \psi, \alpha, \beta, \theta', \psi', \alpha', \beta'$, то они связаны с декартовыми координатами точек на эллипсоидах по формулам

$$\begin{aligned} (x_1)_{S_1} &= a_1 \cos \theta, \\ (y_1)_{S_1} &= b_1 \sin \theta \cos \psi, \\ (z_1)_{S_1} &= c_1 \sin \theta \sin \psi, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} (x_2)_{S_2} &= a_2 \cos \alpha, \\ (y_2)_{S_2} &= b_2 \sin \alpha \cos \beta, \\ (z_2)_{S_2} &= c_2 \sin \alpha \sin \beta, \\ 0 &\leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $a_1 > b_1 > c_1$ и $a_2 > b_2 > c_2$ — длины полуосей эллипсоидов.

*) В (1.5) x_1, y_1, z_1 — прямоугольные декартовы координаты точек на S_1 относительно системы с началом в центре симметрии S_1 и осями, направленными по ее же главным диаметрам.

Что касается x_2, y_2, z_2 в (1.6), то они имеют аналогичный смысл относительно системы отсчета с началом в центре симметрии S_2 и осями, направленными по главным диаметрам S_2 .

Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты центра симметрии S_2 относительно декартовой системы координат с началом в центре симметрии S_1 и осями, направленными по ее же главным диаметрам. Тогда для точек на S_2 будем иметь

$$\begin{aligned} (x_1)_{S_2} &= x_0 + \cos(x_1, x_2)(x_2)_{S_2} + \cos(x_1, y_2)(y_2)_{S_2} + \cos(x_1, z_2)(z_2)_{S_2}, \\ (y_1)_{S_2} &= y_0 + \cos(y, x_2)(x_2)_{S_2} + \cos(y_1, y_2)(y_2)_{S_2} + \cos(y_1, z_2)(z_2)_{S_2}, \\ (z_1)_{S_2} &= z_0 + \cos(z_1, x_2)(x_2)_{S_2} + \cos(z, y_2)(y_2)_{S_2} + \cos(z_1, z_2)(z_2)_{S_2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнение точек поверхности второго эллипсоида относительно системы $Ox_1y_1z_1$ можно написать, подставив в правые части (1.7) вместо $(x_2)_{S_2}, (y_2)_{S_2}, (z_2)_{S_2}$ правые части (1.6).

§ 2. Определение ядер интегральных уравнений (1.3) и (1.4)

Пусть точки M и M' лежат на первом эллипсоиде. Расстояние между M и M' определится формулой

$$\begin{aligned} r_{11} = & \left\{ a_1^2 (\cos \theta' - \cos \theta)^2 + b_1^2 (\sin \theta' \cos \psi' - \sin \theta \cos \psi)^2 + \right. \\ & \left. + c_1^2 (\sin \theta' \sin \psi' - \sin \theta \sin \psi)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если ν — направление внешней нормали в точке M на S_1 , а \vec{r}_{11} — вектор MM' , будем иметь:

$$\begin{aligned} \cos(\nu, r_{11}) = & \cos(\nu, x) \cos(x, r_{11}) + \cos(\nu, y) \cos(y, r_{11}) + \\ & + \cos(\nu, z) \cos(z, r_{11}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу равенств

$$\begin{aligned} \cos(\nu, x) &= \frac{b_1 c_1 \cos \theta}{H_1(\theta, \psi)}, \\ \cos(\nu, y) &= \frac{a_1 c_1 \sin \theta \cos \psi}{H_1(\theta, \psi)}, \\ \cos(\nu, z) &= \frac{a_1 b_1 \sin \theta \sin \psi}{H_1(\theta, \psi)}, \\ \cos(x, r_{11}) &= \frac{a_1 (\cos \theta' - \cos \theta)}{r_{11}}, \end{aligned}$$

$$\cos(y, r_{11}) = \frac{b_1(\sin \theta' \cos \psi' - \sin \theta \cos \psi)}{r_{11}},$$

$$\cos(z, r_{11}) = \frac{c_1(\sin \theta' \sin \psi' - \sin \theta \sin \psi)}{r_{11}},$$

где

$$H_1(\theta, \psi) = (b_1^2, c_1^2, \cos^2 \theta + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}},$$

для ядра первого интеграла правой части уравнения (1.3) получим

$$\frac{\cos(v, r_{11})}{r_{11}^2} = \frac{\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi') - 1}{H_2(\theta, \theta', \psi, \psi')}, \quad (2.3)$$

где положено

$$H_2(\theta, \theta', \psi, \psi') = \left(\frac{\cos^2 \theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[a_1^2 (\cos \theta' - \cos \theta)^2 + b_1^2 (\sin \theta' \cos \psi' - \sin \theta \cos \psi)^2 + c_1^2 (\sin \theta' \sin \psi' - \sin \theta \sin \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Положим, что точка интегрирования M' лежит на поверхности S_2 , а точка области M — на поверхности S_1 . В этом случае для координат точек M и M' будем иметь

$$\begin{aligned} x_M^{(1)} &= a_1 \cos \theta, \\ y_M^{(1)} &= b_1 \sin \theta \cos \psi, \\ z_M^{(1)} &= c_1 \sin \theta \sin \psi, \end{aligned}$$

$$x_{M'}^{(2)} = x_0 + \cos(x_1, x_2) a_2 \cos \alpha' + \cos(x_1, y_2) b_2 \sin \alpha' \cos \beta' + \cos(x_1, z_2) c_2 \times \sin \alpha' \sin \beta',$$

$$y_{M'}^{(2)} = y_0 + \cos(y_1, x_2) a_2 \cos \alpha' + \cos(y_1, y_2) b_2 \sin \alpha' \cos \beta' + \cos(y_1, z_2) c_2 \times \sin \alpha' \sin \beta',$$

$$z_{M'}^{(2)} = z_0 + \cos(z_1, x_2) a_2 \cos \alpha' + \cos(z_1, y_2) b_2 \sin \alpha' \cos \beta' + \cos(z_1, z_2) c_2 \times \sin \alpha' \sin \beta',$$

где $\vec{R}_{1,2}(x_0, y_0, z_0)$ — радиус вектор точки центра симметрии S_2 относительно центра симметрии S_1 . Для квадрата расстояния между точками M и M' получим

$$\begin{aligned} r_{1,2}^2 &= R_{1,2}^2 + a_2^2 \cos^2 \alpha' + b_2^2 \sin^2 \alpha' \cos^2 \beta' + c_2^2 \sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' + a_1^2 \cos^2 \theta + \\ &+ b_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + c_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2a_2 \cos \alpha' (\vec{R}_{1,2}, \vec{x}_2^0) + \\ &+ 2b_2 \sin \alpha' \cos \beta' (\vec{R}_{1,2}, \vec{y}_2^0) + 2c_2 \sin \alpha' \sin \beta' (\vec{R}_{1,2}, \vec{z}_2^0) - \\ &- 2(\vec{r}_1, \vec{R}_{1,2}) - 2a_2 \cos \alpha' (\vec{r}_1, \vec{x}_2^0) - 2b_2 \sin \alpha' \cos \beta' (\vec{r}_1, \vec{y}_2^0) - \\ &- 2c_2 \sin \alpha' \sin \beta' (\vec{r}_1, \vec{z}_2^0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\vec{x}_2^0, \vec{y}_2^0, \vec{z}_2^0$ — единичные векторы осей O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2 , направленных по осям симметрии (см. рис.), \vec{r}_1 — радиус вектор точек S_1 относительно его же центра симметрии.

В формуле (2.4) скобки означают скалярное произведение.

Радиус вектор точки M' относительно точки O_2 можно представить по формуле

$$\vec{r}_2 = \vec{x}_2^0 a_2 \cos \alpha' + \vec{y}_2^0 b_2 \sin \alpha' \cos \beta' + \vec{z}_2^0 c_2 \sin \alpha' \sin \beta',$$

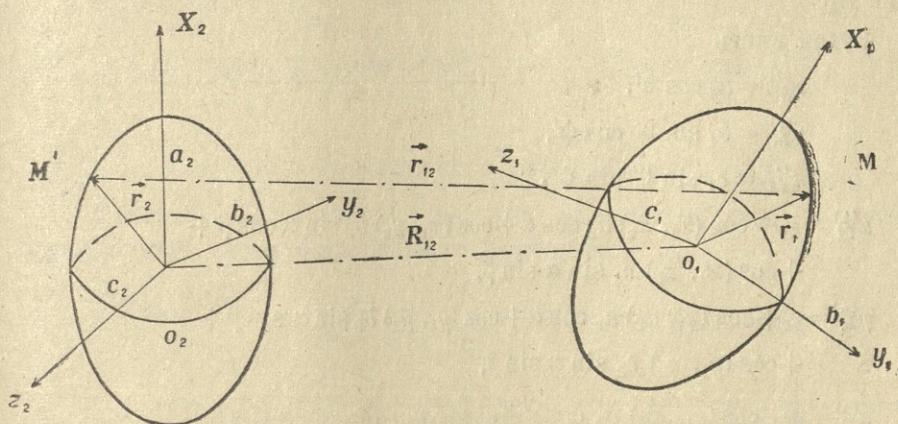
что позволяет формулу (2.4) представить в виде

$$r_{1,2}^2 = R_{1,2}^2 + r_2^2 + r_1^2 + 2(\vec{R}_{1,2}, \vec{r}_2) - 2(\vec{R}_{1,2}, \vec{r}_1) - 2(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Справедливость полученной формулы вытекает вследствие очевидного векторного равенства

$$\vec{r}_{1,2} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{R}_{1,2},$$

поясненного на чертеже.



Для точек поверхности первого эллипсоида S_1 будем иметь:

$$\cos(x, r_{1,2}) = \frac{x_M^{(2)} - x_M^{(1)}}{r_{1,2}} = \frac{x_0 + a_2 \cos(x_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(x_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(x_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - a_1 \cos \theta}{r_{1,2}},$$

$$\cos(y, r_{1,2}) = \frac{y_M^{(2)} - y_M^{(1)}}{r_{1,2}} = \frac{y_0 + a_2 \cos(y_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(y_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(y_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - b_1 \sin \theta \cos \psi}{r_{1,2}},$$

$$\cos(z, r_{1,2}) = \frac{z_M^{(2)} - z_M^{(1)}}{r_{1,2}} = \frac{z_0 + a_2 \cos(z_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(z_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(z_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - c_1 \sin \theta \sin \phi}{r_{1,2}}.$$

В силу этих соотношений, для ядра второго интеграла правой части уравнения (1.3) получим

$$\frac{\cos(v, r_{1,2})}{r_{1,2}^2} = \frac{1}{H_1(\theta, \psi)} r_{1,2}^3 \left\{ [x_0 + a_2 \cos(x_1, x_2) \cos \alpha' +$$

$$\begin{aligned}
 & + b_2 \cos(x_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(x_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - a_1 \cos \theta] b_1 c_1 \cos \theta - \\
 & + [y_0 + a_2 \cos(y_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(y_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(y_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - \\
 & - b_1 \sin \theta \cos \psi] a_1 c_1 \sin \theta \cos \psi + [z_0 + a_2 \cos(z_1, x_2) \cos \alpha' + \\
 & + b_2 \cos(z_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(z_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - \\
 & - c_1 \sin \theta \sin \psi] a_1 b_1 \sin \theta \sin \psi \Big\}, \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

где $r_{1,2}$ дается по (2.4), а $H_1(\theta, \psi)$ имеет прежнее значение.

Определим ядро первого интеграла правой части уравнения (1.4). Положим, что точка интегрирования M' лежит на S_1 , а точка области M на S_2 .

Будем иметь

$$x_M^{(1)} = a_1 \cos \theta',$$

$$y_M^{(1)} = b_1 \sin \theta' \cos \psi',$$

$$z_M^{(1)} = c_1 \sin \theta' \sin \psi',$$

$$\begin{aligned}
 x_M^{(2)} = & x_0 + \cos(x_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(x_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \\
 & + \cos(x_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_M^{(2)} = & y_0 + \cos(y_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(y_1, y_2) b_2 \sin \alpha \sin \beta + \\
 & + \cos(y_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_M^{(2)} = & z_0 + \cos(z_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(z_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \\
 & + \cos(z_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta,
 \end{aligned}$$

что для квадрата расстояния между M и M' даст

$$\begin{aligned}
 r_{2,1}^2 = & R_{12}^2 + a_2^2 \cos^2 \alpha + b_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + c_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + a_1^2 \cos^2 \theta' + \\
 & + b_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi' + c_1^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \psi' - 2a_1 x_M^{(2)} \cos \theta' - \\
 & - 2b_1 y_M^{(2)} \sin \theta' \cos \psi' - 2c_1 z_M^{(2)} \sin \theta' \sin \psi'. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Формулу (2.7) по-прежнему можно представить в виде

$$r_{1,2}^2 = R_{1,2}^2 + r_2^2 + r_1^2 + 2(\vec{R}_{1,2}, \vec{r}_2) - 2(\vec{R}_{1,2}, \vec{r}_1) - 2(\vec{r}_1, \vec{r}_2),$$

справедливость которой была выше пояснена на чертеже.

Для точек поверхности S_2 будем иметь очевидные равенства:

$$\cos(\nu, x) = \frac{b_2 c_2 \cos \alpha}{H_3(\alpha, \beta)},$$

$$\cos(\nu, y) = \frac{a_2 c_2 \sin \alpha \cos \beta}{H_3(\alpha, \beta)},$$

$$\cos(\nu, z) = \frac{a_2 b_2 \sin \alpha \sin \beta}{H_3(\alpha, \beta)},$$

$$\begin{aligned} \cos(x, r_{2,1}) &= \frac{x_M^{(1)} - x_M^{(2)}}{r_{2,1}} = \frac{a_1 \cos \theta' - [x_0 + \cos(x_1, x_2) a_2 \cos \alpha +}{r_{2,1}} + \\ &\quad \frac{+ \cos(x_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \cos(x_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta]}{r_{2,1}}, \\ \cos(y, r_{2,1}) &= \frac{y_M^{(1)} - y_M^{(2)}}{r_{2,1}} = \frac{b_1 \sin \theta' \cos \psi' - [y_0 + \cos(y_1, x_2) a_2 \cos \alpha +}{r_{2,1}} + \\ &\quad \frac{+ \cos(y_1, y_2) b_2 \sin \alpha \sin \beta + \cos(y_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta]}{r_{2,1}}, \\ \cos(z_1, r_{2,1}) &= \frac{z_M^{(1)} - z_M^{(2)}}{r_{2,1}} = \frac{c_1 \sin \theta' \sin \psi' - [z_0 + \cos(z_1, x_2) a_2 \cos \alpha +}{r_{2,1}} + \\ &\quad \frac{+ \cos(z_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \cos(z_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta]}{r_{2,1}}, \end{aligned}$$

где $H_3(\alpha, \beta) = [b_2^2 c_2^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}$.

Приведенные равенства позволяют определить ядро первого интеграла правой части интегрального уравнения (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\gamma, r_{2,1})}{r_{2,1}^2} &= \frac{1}{H_3(\alpha, \beta) \cdot r_{2,1}^3} \left\{ \left[a_1 \cos \theta' - [x_0 + \cos(x_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(x_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \cos(x_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta \right] b_2 c_2 \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + [b_1 \sin \theta' \cos \psi' - [y_0 + \cos(y_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(y_1, y_2) b_2 \sin \alpha \sin \beta + \right. \\ &\quad \left. + \cos(y_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta \right] a_2 c_2 \sin \alpha \cos \beta + [c_1 \sin \theta' \sin \psi' - \right. \\ &\quad \left. - [z_0 + \cos(z_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(z_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \cos(z_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta \right] a_2 b_2 \sin \alpha \sin \beta \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Легко усмотреть по аналогии формулы (2.3), что ядро второго интеграла в (1.4) запишется в виде

$$\frac{\cos(\gamma, r_{2,2})}{r_{2,2}^2} = \frac{\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos(\beta - \beta') - 1}{H_4(\alpha, \beta, \alpha', \beta')}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} H_4(\alpha, \beta, \alpha', \beta') &= \left[\frac{\cos^2 \alpha}{a_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{b_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{c_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[a_2^2 (\cos \alpha - \cos \alpha')^2 + b_2^2 (\sin \alpha' \cos \beta' - \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\ &\left. + c_2^2 (\sin \alpha' \sin \beta' - \sin \alpha \sin \beta)^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$



Выражая элементы площадей эллипсоидов dS_1 и dS_2 через параметры $\theta, \psi, \alpha, \beta$, заметим, что для коэффициентов первой дифференциальной формы Гаусса будем иметь:

$$E_1(\theta, \psi) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \theta}\right)^2 = a_1^2 \sin^2 \theta + b_1^2 \cos^2 \theta \cos^2 \psi + c_1^2 \cos^2 \theta \sin^2 \psi,$$

$$G_1(\theta, \psi) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \psi}\right)^2 = b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + c_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi,$$

$$F_1(\theta, \psi) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \psi}\right) + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial \psi}\right) + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial z_1}{\partial \psi}\right) = \\ = \frac{\sin 2\theta \sin 2\psi}{4} (c_1^2 - b_1^2).$$

Аналогично будем иметь:

$$E_2(\alpha, \beta) = a_2^2 \sin^2 \alpha + b_2^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + c_2^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

$$G_2(\alpha, \beta) = b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

$$E_2(\alpha, \beta) = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{4} (c_2^2 - b_2^2).$$

В силу этих равенств получим

$$dS_{1, M'} = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} d\theta' d\psi' = (c_1^2 b_1^2 \cos^2 \theta' + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \psi' + \\ + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi')^{\frac{1}{2}} \sin \theta' d\theta' d\psi', \quad (2.10)$$

$$dS_{2, M'} = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} d\alpha' d\beta' = (c_2^2 b_2^2 \cos^2 \alpha' + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' + \\ + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha' \cos^2 \beta')^{\frac{1}{2}} \sin \alpha' d\alpha' d\beta'.$$

Вследствие (2.3), (2.6), (2.9) и (2.10), система интегральных уравнений (1.3) и (1.4) приведет к виду:

$$\mu_1(\theta, \psi) = v_{\infty} \frac{(b_1 c_1 \cos \alpha_0 \cos \theta + a_1 c_1 \cos \beta_0 \sin \theta \cos \psi + a_1 b_1 \cos \gamma_0 \sin \theta \sin \psi)}{[b_1^2 c_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi]^{\frac{1}{2}}} + \\ + \frac{a_1 b_1 c_1}{2\pi [b_1^2 c_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi]^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} \mu_1(\theta', \psi') \frac{J_1(\theta, \theta', \psi, \psi') d\theta'}{J_2(\theta, \theta', \psi, \psi')} + \\ + \frac{1}{2\pi [b_1^2 c_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi]^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\beta' \int_0^{\pi} \mu_2(\alpha', \beta') \frac{J_3(\theta, \psi, \alpha', \beta')}{J_4(\theta, \psi, \alpha', \beta')} d\alpha'. \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\alpha, \beta) = & v_\infty \frac{(b_2 c_2 \cos \alpha_0 \cos \alpha + a_2 c_2 \cos \beta_0 \sin \alpha \cos \beta + a_2 b_2 \cos \gamma_0 \sin \gamma \sin \beta)}{[b_2^2 c_2^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + a_2 b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{1}{2\pi [b_2^2 c_2^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \mu_1(\theta', \psi') \frac{J_5(\theta', \psi', \alpha, \beta)}{J_6(\theta', \psi', \alpha, \beta)} d\theta' + \\ & + \frac{a_2 b_2 c_2}{2\pi [b_2^2 c_2^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\beta' \int_0^\pi \mu_2(\alpha', \beta') \frac{J_7(\alpha', \beta', \alpha, \beta)}{J_8(\alpha', \beta', \alpha, \beta)} d\alpha', \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $J_1(\theta, \theta', \psi, \psi') = [c_1^2 b_1^2 \cos^2 \theta' + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \psi' +$
 $+ a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi']^{\frac{1}{2}} \sin \theta' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi') - 1),$
 $J_2(\theta, \theta', \psi, \psi') = [a_1^2 (\cos \theta' - \cos \theta)^2 + b_1^2 (\sin \theta' \cos \psi' - \sin \theta \cos \psi)^2 +$
 $+ c_1^2 (\sin \theta' \sin \psi' - \sin \theta \sin \psi)^2]^{\frac{3}{2}},$
 $J_3(\theta, \psi, \alpha', \beta') = \{ [x_0 + a_2 \cos(x_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(x_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' +$
 $+ c_2 \cos(x_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - a_1 \cos \theta] b_1 c_1 \cos \theta + [y_0 + a_2 \cos(y_1, x_2) \cos \alpha' +$
 $+ b_2 \cos(y_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' + c_2 \cos(y_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - b_1 \sin \theta \cos \psi] \times$
 $\times a_1 c_1 \sin \theta \cos \psi + [z_0 + a_2 \cos(z_1, x_2) \cos \alpha' + b_2 \cos(z_1, y_2) \sin \alpha' \cos \beta' +$
 $+ c_2 \cos(z_1, z_2) \sin \alpha' \sin \beta' - c_1 \sin \theta \sin \psi] a_1 b_1 \sin \theta \sin \psi \} \times$
 $\times (c_2^2 b_2^2 \cos^2 \alpha' + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha' \cos^2 \beta')^{\frac{1}{2}} \sin \alpha',$
 $J_4(\theta, \psi, \alpha', \beta') = [R_{1,2}^2 + a_2^2 \cos^2 \alpha' + b_2^2 \sin^2 \alpha' \cos^2 \beta' + c_2^2 \sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' +$
 $+ r_1^2 + 2a_2(\vec{R}_{1,2}, \vec{x}_2^0) \cos \alpha' + 2b_2(\vec{R}_{1,2}, \vec{y}_2^0) \sin \alpha' \cos \beta' +$
 $+ 2c_2(\vec{R}_{1,2}, \vec{z}_2^0) \sin \alpha' \sin \beta' - 2(\vec{r}_1, \vec{R}_{1,2}) - 2a_2(\vec{r}_1, \vec{x}_2^0) \cos \alpha' -$
 $- 2b_2(\vec{r}_1, \vec{y}_2^0) \sin \alpha' \cos \beta' - 2c_2(\vec{r}_1, \vec{z}_2^0) \sin \alpha' \sin \beta']^{\frac{3}{2}},$
 $J_5(\theta, \psi, \alpha, \beta) = \{ [a_1 \cos \theta' - [x_0 + \cos(x_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(x_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta +$
 $+ \cos(x_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta]] b_2 c_2 \cos \alpha + [b_1 \sin \theta' \cos \psi' - (y_0 +$
 $+ \cos(y_1, x_2) a_2 \cos \alpha + \cos(y_1, y_2) b_2 \sin \alpha \sin \beta + \cos(y_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta)] \times$
 $\times a_2 c_2 \sin \alpha \cos \beta + [c_1 \sin \theta' \sin \psi' - (z_0 + \cos(z_1, x_2) a_2 \cos \alpha +$
 $+ \cos(z_1, y_2) b_2 \sin \alpha \cos \beta + \cos(z_1, z_2) c_2 \sin \alpha \sin \beta)] a_2 b_2 \sin \alpha \sin \beta \} \times$
 $\times (c_1^2 b_1^2 \cos^2 \theta' + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \psi' + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi')^{\frac{1}{2}} \sin \theta',$



$$J_6(\theta', \psi', \alpha, \beta) = [R_{1,2}^2 + r_2^2 + a_1^2 \cos^2 \theta' + b_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi' + c_1^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \psi' - 2a_1 x_M^{(2)} \cos \theta' - 2b_1 y_M^{(2)} \sin \theta' \cos \psi' - 2c_1 z_M^{(2)} \sin \theta' \sin \psi']^{\frac{1}{2}},$$

$$J_7(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (c_2^2 b_2^2 \cos^2 \alpha' + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \beta' + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \sin \alpha' (\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos(\alpha - \alpha')) - 1,$$

$$J_8(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = [a_2^2 (\cos \alpha' - \cos \alpha)^2 + b_2^2 (\sin \alpha' \cos \beta - \sin \alpha \cos \beta)^2 + \\ + c_2^2 (\sin \alpha' \sin \beta' - \sin \theta \sin \psi)^2]^{\frac{3}{2}}.$$

При соответствующем выборе параметров $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \vec{v}_\infty$ можно получить систему интегральных уравнений для плотностей потенциалов совместного обтекания тех поверхностей или контуров, уравнения которых получаются как частные случаи уравнений трехосных эллипсоидов. Так, например, положив в (2.11) и (2.12) $a_1 = b_1 = c_1 = R$, получим систему, соответствующую обтеканию шара и эллипсоида.

§ 3. Приведение системы интегральных уравнений (2.11) и (2.12) к системе линейных алгебраических уравнений

С помощью очевидных обозначений систему (2.11) и (2.12) приведем к виду:

$$\mu_1(\theta, \varphi) - \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} k_1(\theta, \psi, \theta', \psi') \mu_1(\theta', \psi') d\psi' - \\ - \int_0^\pi d\alpha' \int_0^{2\pi} k_1^1(\theta, \psi, \alpha', \beta') \mu_2(\alpha', \beta') d\beta' = -f_1(\theta, \psi),$$

$$\mu_2(\alpha, \beta) - \int_0^\pi d\alpha' \int_0^{2\pi} k_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \mu_2(\alpha', \beta') d\beta' - \\ - \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} k_2^1(\alpha, \beta, \theta', \psi') \mu_1(\theta', \psi') d\psi = -f_2(\alpha, \beta). \quad (3.1)$$

Областью интегрирования в (3.1) являются прямоугольники

$$0 \leq \theta' \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \alpha' \leq \pi, \quad 0 \leq \beta' \leq 2\pi$$

с параллельными осям координат сторонами. Полагая

$$h = \frac{\pi}{2n},$$

$$k = \frac{\pi}{m},$$

для узлов сети интерполяции получим координаты

$$\alpha'_i = \theta'_i = ih, \quad (i=0, 1, 2, \dots, 2n);$$

$$\beta'_j = \psi'_j = jk, \quad (j=0, 1, 2, \dots, 2m).$$

Положим также

$$\alpha_p = \theta_p = p, \quad h, \quad (p=0, 1, 2; \dots, 2n);$$

$$\beta_q = \psi_q = q, \quad k, \quad (q=0, 1, 2, \dots, 2m).$$

Применение к интегралам в (3.1) формулы численного интегрирования Симпсона для значений искомым плотностей потенциалов $\mu_1(\theta, \psi)$ и $\mu_2(\alpha, \beta)$ в узловых точках интегрирования, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_1(\theta_p, \psi_q) - \frac{\pi^2}{18nm} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2j}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2j}) + \right. \\ + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j}) \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j}) + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j}) \times \\ \times \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+2}) + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2j+2}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2j+2}) + \\ + 4[k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j}) \cdot \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j}) + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+1}) + \\ \times \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+1}) \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+1}) + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+2}) \times \\ \times \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+2}) + k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2j+1}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2j+1})] + \\ \left. + 16k_1(\theta_p, \psi_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+1}) \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+1}) \right\} - \frac{\pi^2}{18mn} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \right. \\ \left. k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i}, \beta'_{2j}) + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j}) + \right. \\ + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+2}) \mu_2(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+2}) + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i}, \beta'_{2j+2}) \times \\ \times \mu_2(\alpha'_{2i}, \beta'_{2j+2}) + 4[k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j}) + \\ + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+1}) \mu_2(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+1}) + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+2}) \times \\ \times \mu_2(\alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+2}) + k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i}, \beta'_{2j+1}) \mu_2(\alpha'_{2i}, \beta'_{2j+1})] + \\ \left. + 16k'_1(\theta_p, \psi_q, \alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+1}) \mu_2(\alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+1}) \right\} = \\ = \frac{v_{\cos} (\cos \alpha_0 b_1 c_1 \cos \theta_p + \cos \beta_0 a_1 c_1 \sin \theta_p \cos \psi_q + \cos \gamma_0 a_1 b_1 \sin \theta_p \sin \psi_q)}{\sqrt{b_1^2 c_1^2 \cos^2 \theta_p + a_1^2 c_1^2 \sin^2 \theta_p \cos^2 \psi_q + q_1^2 b_1^2 + \sin^2 \theta_p \sin^2 \psi_q}} \\ (p=0, 1, 2, \dots, 2n; \quad q=0, 1, 2, \dots, 2m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\alpha_p, \beta_q) - \frac{\pi^2}{18nm} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i}, \beta'_{2j}) + \right. \\ + k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j}) + k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+2}) \times \\ \times \mu_2(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+2}) + k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i}, \beta'_{2j+2}) \mu_2(\alpha'_{2i}, \beta'_{2j+2}) + \\ \left. + 4[k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j}) \mu_2(\alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j}) + k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+1}) \times \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \times \mu(\alpha'_{2i+2}, \beta'_{2j+1}) + 16k_2(\alpha_p, \beta_q, \alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+1}) \mu_2(\alpha'_{2i+1}, \beta'_{2j+1}) \\
 & - \frac{\pi^2}{18mn} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2j}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2j}) + \right. \\
 & + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j}) \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j}) + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+2}) \times \\
 & \times \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+2}) + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2i+2}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2i+2}) + \\
 & + 4[k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j}) \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j}) + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+1}) \times \\
 & \times \mu_1(\theta'_{2i+2}, \psi'_{2j+1}) + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+2}) \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+2}) + \\
 & + k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i}, \psi'_{2j+1}) \mu_1(\theta'_{2i}, \psi'_{2j+1})] + \\
 & \left. + 16k'_2(\alpha_p, \beta_q, \theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+1}) \mu_1(\theta'_{2i+1}, \psi'_{2j+1}) = \right. \\
 & = \frac{v_\infty (\cos \alpha_0 b_2 c_2 \cos \alpha_p + \cos \beta_0 a_2 c_2 \sin \alpha_p \cos \beta_2 + \cos \gamma_0 a_2 b_2 \sin \alpha_p \cos \beta_2)}{\sqrt{b_2^2 c_2^2 \cos^2 \alpha_p + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha_p \cos^2 \beta_q + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \psi_q}} \\
 & (p=0, 1, 2, \dots, 2n, \quad q=0, 1, 2, \dots, 2m).
 \end{aligned}$$

Значение ядра $k_1(\theta; \psi, \theta', \psi')$ становится бесконечным, если $\theta = \theta'$ и $\psi = \psi'$ одновременно. Бесконечным становится также ядро $k_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ при $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Интегралы в (3.1), содержащие эти ядра, — несобственные. При таких значениях аргументов надо воспользоваться формулами интерполяции и экстраполяции. Менее точные, но сравнительно несложные формулы можно получить при линейной интерполяции. Решение систем линейных алгебраических уравнений (3.2) и (3.3) даст $2n+1$ значений для $\mu_1(\theta_p, \psi_q)$ и $2m+1$ значений — для $\mu_2(\alpha_p, \beta_q)$. После замены в (3.1) интегралов соответствующими двойными суммами и использования найденных значений $\mu_1(\theta_p, \psi_q)$ и $\mu_2(\alpha_p, \beta_q)$ получим приближенные значения плотностей потенциалов $\mu_1(\theta, \psi)$ и $\mu_2(\alpha, \beta)$. Применяв один из методов приближенного интегрирования, по найденным значениям $\mu_1(\theta, \psi)$ и $\mu_2(\alpha, \beta)$ можно определить потенциал $\varphi(x, y, z)$ по формуле:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \\
 & \int_0^{2\pi} \frac{\mu_1(\theta, \psi) \sqrt{c_1^2 b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi \sin \psi}}{\sqrt{(x - a_1 \cos \theta)^2 + (y - b_1 \sin \theta \cos \psi)^2 + (z - c_1 \sin \theta \sin \psi)^2}} d\psi + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \\
 & \int_0^{2\pi} \frac{\mu_2(\alpha, \beta) \sqrt{c_2^2 b_2^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 b_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + a_2^2 c_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha}}{\sqrt{(x - a_2 \cos \alpha)^2 + (y - b_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z - c_2 \sin \alpha \sin \beta)^2}} d\beta.
 \end{aligned}$$

(Представлено 7.III.1972)

Кафедра
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., 1962.
2. Б. П. Демидович и И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М., 1960.
3. С. Г. Михлин, Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, М.—Л., 1949.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, М.—Л., 1951.
5. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, М., 1948.

ბ. პატარაია

ორი ელიფსოიდის ერთობლივი პოტენციალური გარსდენის ამოცანის მიყვანა ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე

რ ე ზ ი უ მ ე

განხილულია ორი სამეგრძა ელიფსოიდის ყოველი მიმართულებით უსაზღვრო უკუშში იდეალური სითხის პოტენციალური ნაკადით გარსდენა, რომლის სიჩქარე უსასრულობაში მოცემული ვექტორია. როგორც ცნობილია, სითხის სიჩქარის პოტენციალი შეიძლება ვექტორთ მარტივი ფუნქციების პოტენციალის სახით რომელთა განაწილების სიმკვრივე ელიფსოიდების ზედაპირებზე მოიძებნება, როგორც პოტენციალთა თეორიის ტიპის გარკვეულ ინტეგრალურ განტოლებათა ამოხსნა.

გამოთვლილია ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაში შემავალი ინტეგრაციების გულები. ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა მიახლოებითი ინტეგრების სიმპსონის მეთოდის გამოყენებით მიყვანილია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე. ელიფსოიდების ნახევარღერძების სიგრძეთა და ვექტორის მიმართულების მნიშვნელობების შერჩევით მიიღება ელიფსოიდის და სფეროს, 2 სფეროს, 2 ელიფსური ცილინდრის, ელიფსური და წრიული ცილინდრების, 2 წრიული ცილინდრის ერთობლივი გარსდენის ამოცანების შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები.

ТЕРМОСТАТ С ПРОГРАММНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

М. Н. КУКУЛАДЗЕ, А. Ю. ШТАЕРМАН

Развитие поляризационно-оптического метода исследования напряжений повысило требования, предъявляемые к точности экспериментальных решений, получаемых этим методом. Поэтому значительным становится вопрос о повышении точности проведения эксперимента и измерения оптических величин. В частности, вопрос „замораживания“ модели из оптически активных материалов имеет существенное значение для повышения точности эксперимента.

Термостат с программным управлением предназначен для проведения длительных непрерывных экспериментов при температурах в рабочей камере до $+180^{\circ}\text{C}$. В продолжение эксперимента температура может автоматически изменяться по заданным программам. Отклонение температур от программы не более $\pm 1,3\%$.

Размеры рабочей камеры термостата $500 \times 500 \times 300$ (высота) мм.

В камере градиент температур не превышает $\pm 2\%$. В камере термостата производятся статические и динамические испытания моделей из оптически активных материалов. В боковых стенах термостата имеются отверстия для вывода рычага прессы в случае статических испытаний.

Для динамических испытаний предусмотрена возможность вращения модели со скоростью планшайбы 3000 об/мин., при максимальном весе модели и наибольшем удалении от центра 15 см., рабочий диаметр планшайбы—20 см. Станция управления термостата помещена отдельно от термостата.

При статистических и динамических испытаниях исключена вибрация термостата. Общий вид термостата представлен на рис. 1.

Термостат состоит из: а) нагревательного шкафа с рабочей камерой и б) пульта управления с программным устройством.

На рисунке 2 показана схема нагревательного шкафа в продольном разрезе.

Рабочая камера (1) помещена в теплоизолированном корпусе (2) так, что вокруг нее может циркулировать нагретый воздух, прогоняемый вентилятором (3) через нагревательные элементы (4).

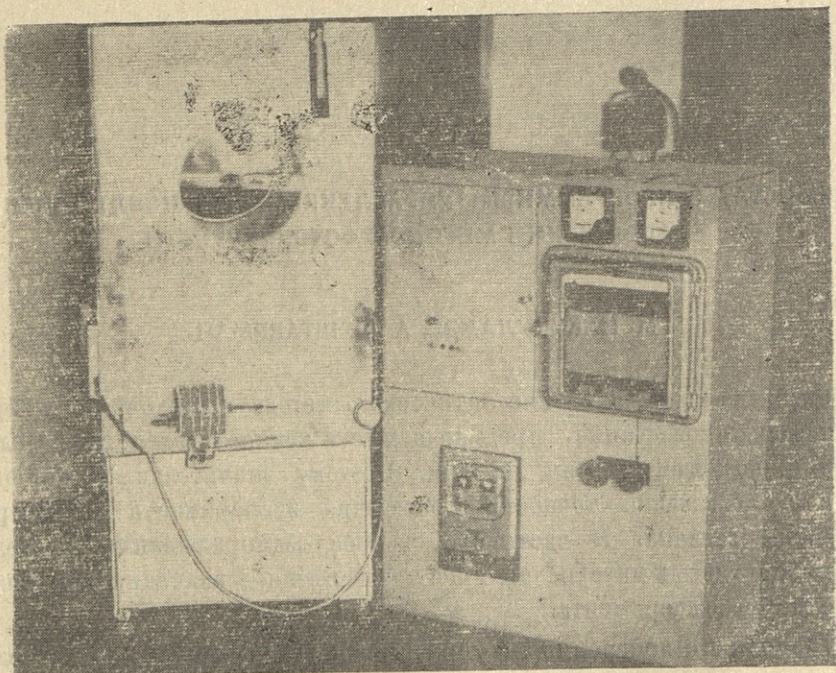


Рис. 1.

В камере установлены: терморпара (5), дающая сигнал о величине температуры в программирующее устройство (обратная связь), и ртутный термометр (6), дублирующий показания терморпары программирующего устройства.

Загрузка камеры происходит через люк (7), который снабжен двойными стеклами для наблюдения и откидными болтами для снятия или уплотнения.

Температурный режим в рабочей камере поддерживается нагревателями типа—НВ, а охлаждение камеры происходит от заслонки (8), приводимой в действие электромагнитом (9).

Угол поворота заслонки регулируется (предварительно) установочным винтом с гайкой (10).

Пульт управления термостата выполнен в виде шкафа, в котором размещены (см. рис. 3): а) прибор ЭПП с лентой, переделанной для программного управления термощкафом; б) трансформатор РНО для питания нагревателей термощкафа; в) выпрямитель ВСА для питания клапана электромагнита заслонки термощкафа; г) промежуточное реле (8) для вклю-

80 вольт—для интервала температур от 40° до 80°C , 120 вольт—для интервала температур от 80 до 120°C и 220 вольт—для интервала температур от 120° до 180°C .

Вентилятор (13) все время работает независимо от включения нагревателей.

Достоинством прибора является способность постепенно изменять тем-

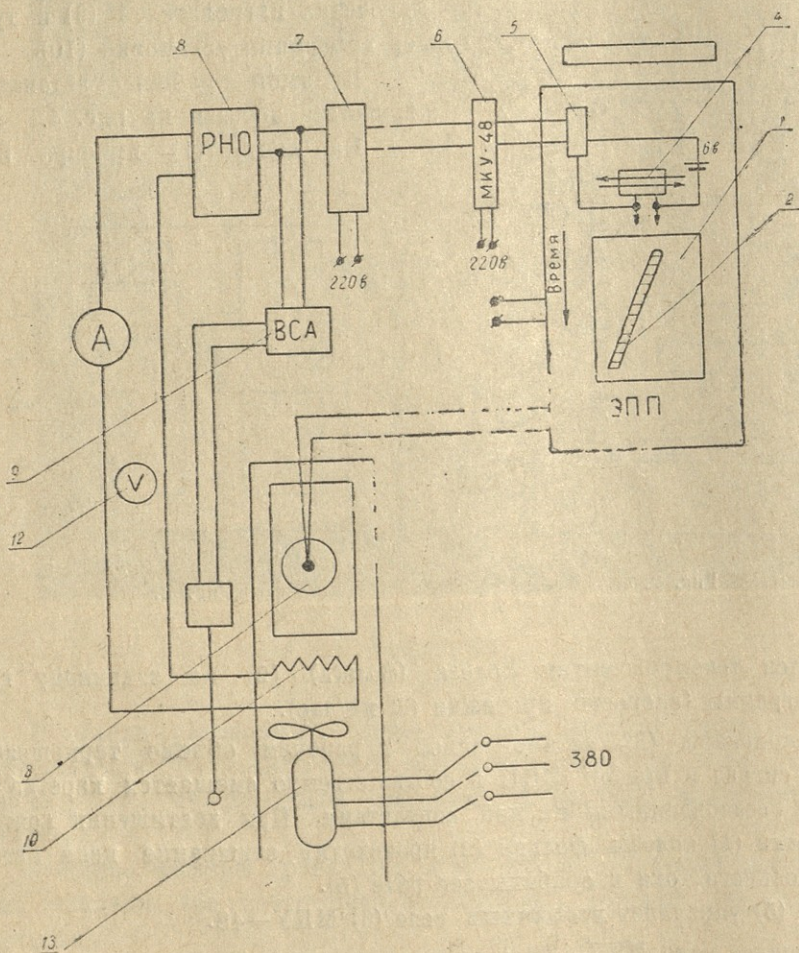


Рис. 4.

пературу по заданным программам и быстро устанавливать нужный температурный режим.

Прибор подвергнут испытанию и показал надежность в работе.

(Представлено 7. III. 1972)

Кафедра
теоретической механики

Л И Т Е Р А Т У Р А

Г. М. Фрохт, Фотоупругость, т. II, Гостехиздат, 1950.

მ. კუკულაძე, ა. შტაერმანი

**დაძაბულობის ფოტოდრეკადობის მეთოდით კვლევის
 პროგრამული მართვის თერმოსტატი**

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია პროგრამული მართვის თერმოსტატის — ხელსაწყოს აღწერილობა და დანიშნულება. იგი განკუთვნილია ხანგრძლივი და უწყვეტი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად, როდესაც სამუშაო კამერაში ტემპერატურა იცვლება — 180°C-მდე. ტემპერატურის ცვლილება და ხანგრძლივობა შეიძლება პროგრამის მიხედვით ავტომატურად შეიცვალოს: ტემპერატურის გადახრა პროგრამიდან არ აღემატება 1,3%.

ხელსაწყოს ღირსებად მიგვაჩნია პროგრამის მიხედვით ტემპერატურის თანდათანობითი ცვლილება და საჭირო ტემპერატურული რეჟიმის სწრაფად დაყენება. ხელსაწყო გამოცდილ იქნა და დაგვანახა საიმედოობა მუშაობაში.

О ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ

Д. И. БАШАЛЕИШВИЛИ

В [1] было показано, что для линейных объектов, в которых происходит процесс укрупнения размеров частиц, связь между плотностями распределения $f_1(x)$ и $f_2(x)$, соответственно на входе и выходе, имеет вид

$$A_x f_2(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) f_2^{(n-k)}(x) = f_1(x), \quad 0 < x < \infty \quad (1)$$

при нулевых начальных условиях, где x — размер частицы, а функции $f_i(x)$ ($i=1,2$) удовлетворяют условиям $f_i(x) \geq 0$, $\int_0^{\infty} f_i(x) dx = 1$.

Объект, для которого справедливо соотношение (1), мы назовем укрупняющим звеном.

В [2] показано, что для линейных объектов, в которых происходит процесс уменьшения размеров частиц, справедливо следующее соотношение

$$\varphi_2(x) = B_x \varphi_1(x) = \sum_{k=0}^m b_k(x) \varphi_1^{(m-k)}(x), \quad 0 < x < \infty \quad (2)$$

где x — размер частицы, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — плотности распределения, соответственно на входе и выходе, т. е. $\varphi_i(x) \geq 0$, $\int_0^{\infty} \varphi_i(x) dx = 1$ ($i=1,2$)¹.

Объект, для которого справедливо соотношение (2), мы назовем уменьшающим звеном.

Теперь займемся структурными преобразованиями плотностей распределения, которые позволяют глубже проникать в физический смысл

¹ Функции $f_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ могут быть гранулометрическими составами, т. е. распределениями массы по размерам.



работы системы, состоящей из различных соединений укрупняющих и уменьшающих звеньев. В статье будут рассмотрены только последовательные соединения, так как параллельные соединения не имеют смысла, поскольку один и тот же поток частиц не может поступать параллельно на входы различных звеньев.

В связи с этим в дальнейшем слово „соединение“ будет означать только последовательное соединение.

Рассмотрим соединение двух укрупняющих звеньев. Как известно [1], исчерпывающей характеристикой укрупняющего звена является весовая функция $W(x-y, y)$, которая однозначно связывает плотности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следующим образом:

$$f_2(x) = \int_0^x W(x-y, y) f_1(y) dy. \quad (3)$$

Обозначая весовую функцию системы, состоящей из двух укрупняющих звеньев с весовыми функциями $W_1(x-y, y)$ и $W_2(x-y, y)$, через $W(x-y, y)$, применяя выражение (3) два раза и условие неотрицательности размера частиц, т. е. $W(x-y, y) = 0$ при $y > x$, получим

$$W_1(x-y, y) = \int_0^x W_1(x-z, z) \delta(y-z) dz,$$

$$W(x-y, y) = \int_y^x W_2(x-z, z) W_1(z-y, y) dz. \quad (4)$$

Аналогично можно получить формулу для любого числа соединений укрупняющих звеньев.

Рассмотрим соединение двух уменьшающих звеньев с весовыми функциями $K_1(x-y, y)$ и $K_2(x-y, y)$. Тогда весовая функция такого соединения $K(x-y, y)$ определяется следующим образом:

$$K(x-y, y) = \int_y^x K_2(x-z, z) K_1(z-y, y) dz \quad (5)$$

Так как (см. [2]) весовые функции уменьшающих звеньев являются линейными комбинациями функции Дирака и её производных, т. е.

$$K_i(x-y, y) = \sum_{k=0}^{m_i} b_{ki}(x) \delta_x^{(m_i-k)}(x-y), \quad (i=1,2),$$

то после несложных вычислений, получим

$$K(x-y, y) = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} (-1)^{m_1+m_2-k-j} b_{j2}(x) \frac{d^{m_1-k} [b_{k1}(y) \delta_{y(x-y)}^{(m_2-j)}]}{dy^{m_1-k}}. \quad (6)$$

Аналогично формулам (5) и (6) можно получить формулы для любого числа последовательно соединенных уменьшающих звеньев.

„ Смешанной системой I типа назовем такое соединение уменьшающего и укрупняющего звеньев, при котором сначала включено уменьшающее звено. Для того, чтобы получить дифференциальное уравнение, описывающее смешанную систему I типа, необходимо учесть, что $f_1(x) = \varphi_2(x)$. Тогда на основании выражения (1) и (2) получим иско- мое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) f_2^{(n-k)}(x) = \sum_{i=0}^m b_i(x) \varphi_1^{(m-i)}(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (7)$$

или в операторной форме

$$A_x f_2(x) = B_x \varphi_1(x), \quad (8)$$

причем возможны случаи $m=n$, $m>n$ и $m<n$; где $\varphi_1(x)$ и $f_2(x)$ — плот- ности распределения соответственно на входе и выходе смешанной си- стемы I типа.

Очевидно, когда $m=n$ и $a_k(x) = b_j(x)$, при $k=j$, мы имеем тождествен- ное преобразование, т. е. преобразование с единичным оператором.

Используя известные свойства δ -функции, весовую функцию $Z(x-y, y)$ смешанной системы I типа вычисляем следующим образом:

$$\begin{aligned} Z(x-y, y) &= \int_y^x W(x-z, z) K(z-y, y) dy = \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \frac{d^{m-j} [b_j(y) W(x-y, y)]}{dy^{m-j}} \end{aligned} \quad (9)$$

т. е. $Z(x-y, y) = B_y^* W(x-y, y), \quad (10)$

где B_y^* — дифференциальный оператор, сопряженный с B_x .

Дифференциальное уравнение, описывающее систему, обратную по отношению к смешанной системе I типа, имеет вид

$$\sum_{j=0}^m b_j(x) \varphi_1^{(m-j)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) f_2^{(n-k)}(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (11)$$

где $f_2(x)$ и $\varphi_1(x)$ являются плотностями распределения соответственно на входе и выходе обратной системы, а весовая функция этой системы определяется по формуле

$$\begin{aligned} Z^{-1}(x-y, y) &= \int_y^x K^{-1}(x-z, z) W^{-1}(z-y, y) dz = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} [a_k(y) K^{-1}(x-y, y)]}{dy^{n-k}} \end{aligned} \quad (12)$$

или в операторной форме

$$Z^{-1}(x-y, y) = A_y^* K^{-1}(x-y, y), \quad (13)$$

где A_y^* — оператор, сопряженный с A_x ; $K^{-1}(x-y, y)$, является решением дифференциального уравнения

$$B_x K^{-1}(x-y, y) = \delta(x-y), \quad (14)$$

а

$$W^{-1}(x-y, y) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \delta_x^{(n-k)}(x-y). \quad (15)$$

Смешанной системой II типа назовем такое соединение укрупняющего и уменьшающего звеньев, при котором сначала включено укрупняющее звено. Такая система описывается выражением в операторной форме

$$B_x^{-1} \varphi_2(x) = A_x^{-1} f_1(x) \quad (16)$$

или более наглядно

$$\varphi_2(x) = \sum_{j=0}^m b_j(x) \frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} \int_0^x W(x-y, y) f_1(y) dy, \quad (17)$$

которые получаются при $f_2(x) = \varphi_1(x)$, если $f_2(x)$ определить из выражения (1), а $\varphi_1(x)$ — из выражения (2), где $f_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — плотности распределения соответственно на входе и выходе смешанной системы II типа.

Весовая функция $F(x-y, y)$ смешанной системы II типа получается следующим образом:

$$F(x-y, y) = \int_y^x K(x-z, z) W(z-y, y) dz = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} b_j(x) W_x^{(m-j)}(x-y, y) \quad (18)$$

Весовая функция $F^{-1}(x-y, y)$ системы, обратной по отношению к смешанной системе II типа, принимает вид

$$\begin{aligned} F^{-1}(x-y, y) &= \int_y^x W^{-1}(x-z, z) K^{-1}(z-y, y) dz = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} K^{-1}(x-y, y)}{dx^{n-k}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученные результаты можно обобщить для систем, состоящих из любого числа рассмотренных выше соединений.

Приведенные в настоящей статье математические преобразования плотностей распределения могут быть использованы для моделирования на универсальных и специализированных вычислительных машинах некоторых промышленных объектов и их соединений в области обогащения руд и различных патологических состояний и их связей в биологических объектах.

ЛИТЕРАТУРА

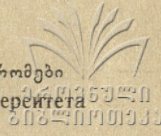
1. Д. И. Башалейшвили, Автоматика и телемеханика, 10, 1966.
2. Д. И. Башалейшвили, Труды Тбилисского университета, А 5 (147), 1970.

დ. ბაშალეიშვილი

**ზომათა განაწილების სიმკვრივეთა
გარდამქმნელების შესახებ**

რეზიუმე

დადგენილია მათემატიკური მოდელები ინტეგრალური და დიფერენციალური ტპერატორების სახით სისტემებისა, რომლებიც შედგება თანმიმდევრულად მიერთებული ობიექტებისაგან, რომლებშიც ხდება ნაწილაკთა ზომების შემცირება და გაზრდა. მიღებულია მათემატიკური გამოსახულებანი წინითი ფუნქციებისა, რომლებიც არიან სისტემების სრულყოფილი მახასიათებლები.



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СЖАТИЯ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н. Д. НАНОБАШВИЛИ, К. Г. ЧКУАСЕЛИ

Введение

В работах [1—3] были рассмотрены специфические особенности механизма сжатия дискретной информации, а также возможности их применения в дискретных системах и устройствах, построенных на средства микроэлектроники, хотя и не исключена возможность его применения в различных приложениях технической кибернетики. В данной работе делается попытка представить рассматриваемый метод сжатия информации в таких формах представления, которые могут оказаться более целесообразными с точки зрения его практического применения. Кроме того, в данной статье ограничиваемся рассмотрением только коммутативных относительно операции перестановки векторов-строк матриц сжимаемой информации.

Метод сжатия

Пусть задано n -мерное линейное векторное пространство V_n над полем $GF(2)$. Сопоставим каждому вектору пространства V_n отдельную вершину n -мерного гиперкуба Γ .

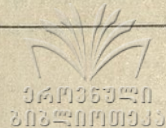
Пусть G —отображение гиперкуба Γ на плоскость π с точностью до изоморфизма. Расположим, далее, векторы с одинаковыми весами, являющиеся элементами соответствующих множеств $M_0, M_1 \dots M_i, M_n$, на так называемых весовых линиях $L_0, L_1 \dots L_i \dots L_n$ гиперкуба G со следующими условиями:

а) кроме векторов, расположенных на весовых линиях L_0 и L_n , любой вектор $V_i \in M_i$ с весом $W(v_i) = i$ $0 < i < n$ с помощью n -рёбер связан с n числом векторов с весами $i-1$ и $i+1$;

б) вектор $V_i \in M$ с каждым из связанных векторов в сумме по $\text{mod } 2$ образует вектор весом, равным единице.

Назовём вектор $U_k \in M_k$ $k=0, 1, 2 \dots n$ вектором-основанием¹ матрицы A_n размером $n \times n$, где

¹ В работе [1] U_k был назван характеристическим вектором.



$$A_n = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ \vdots \\ V_n \end{vmatrix}$$

если U_k относительно строк матрицы A_n удовлетворяет условиям а) и б). Тогда вес $V_1 V_2 \dots V_i$ векторов (k — вес U_k) из A_n равен $k-1$, а вес остальных $n-k$ количества векторов — $k+1$. В дальнейшем будем считать, что матрица A_n строится¹ над вектором-основанием U_k .

Пример 1. Пусть вектором-основанием является вектор $U_k = \alpha_8, \alpha_7 \dots \alpha_2, \alpha_1 = 00001111$. Тогда

$$A_n = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 00001110 \\ 00001101 \\ 00001011 \\ 00000111 \\ 00011111 \\ 00101111 \\ 01001111 \\ 10001111 \end{vmatrix}$$

Следовательно, негрудно заметить, что матрица A_n получается как $A_n = U_k \oplus I_n$, где I_n — единичная диагональная матрица размера $n \times n$.

Обозначим через $S = \beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_2, \beta_1, \beta_i \in \{0,1\}$ суммарный вектор, являющийся произвольной линейной комбинацией строк-векторов матрицы A_n .

Назовём, далее, вектором восстановления вектор $S' = \beta'_n, \beta'_{n-1}, \beta'_1, \beta'_i \in \{0,1\}$, каждая компонента β'_i которого сопоставлена некоторой строке-вектору V_i , точнее, если $\beta'_n = \beta'_{n-1} = \dots = \beta'_m = 1, m < n$ и $\beta_{m-1} = \beta_{m-2} = \dots = \beta_1 = 0$, то матрица A_n с размерностью $n \times n$ преобразуется в матрицу A_{mn} с размерностью $m \times n$. Тогда, согласно определению S' и свойствам а) и б), произвольная совокупность векторов $U_k S'$ будет отображать соответствующую матрицу A_{mn} с точностью до эквивалентности.

Пример 2. Пусть $S' = 01011110$ при $U_k = 00001111$. Тогда совокупности $U_k S'$ соответствует следующая матрица A_{mn} размера 5×8

$$A_{mn} = \begin{vmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 00001101 \\ 00001011 \\ 00000111 \\ 00011111 \\ 01001111 \end{vmatrix},$$

¹ Говоря иначе, вектор-основание U_k порождает соответствующую матрицу A_n .

которая образована следующим образом: вектор S' разлагается в виде суммы единичных векторов $S' = 010111110 = 01000000 \oplus 00010000 \oplus 00001000 \oplus 000000100 \oplus 000000010$.

Если, далее, просуммировать вектор-основание U_k с каждым из членов разложения, т. е. с единичными векторами, то в результате получатся строки указанной матрицы A_{mn} .

Если установить взаимно-однозначное соответствие между S' и S , то тогда совокупность $U_k S$, так же, как и $U_k S'$, будет представлять собой вектор сжатия [4], включающий в себя полную информацию о структуре соответствующей матрицы A_{mn} , для которой S и S' будут являться гомоморфизмами.

Однако для установления взаимно однозначного соответствия между S и S' необходимо определить регулярный способ преобразования любого S в S' и, наоборот, что сводится к поиску определенного линейного оператора $g(N)$. С этой целью введём понятие функции приведения¹ g_n , определённое следующим соотношением

$$g_n = \begin{cases} 1 & \text{если } N = 2d + 1 \\ 0 & \text{если } N = 2d, \end{cases} \quad d = 0, 1, 2 \dots \quad (1)$$

где N — количество строк векторов в матрице A_{mn} .

Имеет место

Теорема 1. Если U_k — произвольный фиксированный вектор-основание, A_{mn} — матрица размера $m \times n$ ($m \leq n$), соответствующая паре $U_k S'$, то вектор восстановления S' с суммарным S -вектором связан следующей зависимостью:

$$S' = \begin{cases} S, & \text{если } g(N) = 0 \\ S \oplus U_k, & \text{если } g(N) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим общий случай, когда векторное пространство V_n задано над полем $GF(p)$, где p — некоторое конечное число.

Пусть матрица A_n образована в виде следующей суммы по $\text{mod } p$

$$A_n = U_k + J_n(q) = \begin{vmatrix} \alpha_n, & \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \alpha_2 + q \\ \alpha_n, & \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \alpha_2 + q, & \alpha_1 \\ \alpha_n, & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_3 + q, & \alpha_2, & \alpha_1 \\ \alpha_n + q, & \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \alpha_2, & \alpha_1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow U_k S'_n,$$

где $U_k = \alpha_n, \alpha_{n-1} \dots \alpha_2, \alpha_1$, $J_n(q)$ — диагональная матрица размера $n \times n$ $q \in \{1, 2 \dots p-1\}$, $S'_n = \beta'_n \beta'_{n-1} \dots \beta'_1$ — вектор восстановления, где $\beta'_n = \beta'_{n-1} = \dots = \beta'_i = \dots \beta'_2 = \beta'_1 = q$.

¹ В дальнейшем будем считать, что понятие g_n совпадает с понятием невырожденного линейного оператора [5], т. е. $g_n = g_n(N)$.



Рассмотрим произвольную линейную комбинацию из $N \leq n$ векторов строк матрицы A_n по $\text{mod } p$. Очевидно, что соответствующий суммарный вектор $S = \beta_n, \beta_{n-1} \dots \beta_2, \beta_1$ можно представить как результат суммы всех векторов-строк матрицы AN_n размера $N \times n$. При этом, согласно правилу построения матрицы A_n , в матрице AN_n , N число столбцов будет состоять из одинаковых элементов, а в $n-N$ столбцах количество одинаковых элементов будет равно $N-1$. Если обозначить через β_i произвольную компоненту вектора S_i , образованного в результате суммирования элементов любого i -того столбца из вышеуказанного $n-N$ числа столбцов, то β_i будет определяться следующим соотношением:

$$\beta_i = \alpha_i + \beta'_i + (N-1)\alpha_i \pmod{p} \quad (3)$$

где $\beta'_i = q$ — соответствующая компонента вектора восстановления, а α_i и $\alpha_i + \beta'_i$ — по условию элементы i -того столбца.

Обозначая, далее, через β_j произвольную компоненту вектора S_i , образованного в результате суммирования элементов произвольного j -того столбца из N числа столбцов, аналогично (3) для β_j можно написать

$$\beta_j = N\alpha_j \pmod{p}, \quad (4)$$

где $\alpha_j = \alpha_i$ — произвольный элемент j -того столбца.

Если теперь прибавить к левой и правой частям выражения (3) произведение $(p-N)\alpha_i$, т. е.

$$\beta_i + (p-N)\alpha_i = \alpha_i + \beta'_i + (N-1)\alpha_i + (p-N)\alpha_i \pmod{p},$$

то, исходя из известных соотношений, из [6] получим

$$\beta_i + (p-N)\alpha_i = \beta'_i \pmod{p}. \quad (5)$$

Согласно (5), компоненту вектора восстановления $\beta'_i \in S'_i$ можно восстановить из компоненты суммарного вектора $\beta_i \in S_i$ при $p-N$ -кратном прибавлении $\alpha_i \in U_k k\beta_i$. Аналогично для соотношения (4) получим

$$\beta_j + (p-N)\alpha_i = N\alpha_i + (p-N)\alpha_i \equiv 0 \pmod{p}. \quad (6)$$

Следовательно, согласно (5) и (6), можно восстановить все компоненты вектора восстановления, т. е. из вектора S вектор восстановления S' .

Пусть теперь значение модуля $p=2$. Тогда при чётном значении $N=2d$ из (5) получим

$$\beta_i + (2-2d)\alpha_i = \beta' \pmod{2}.$$

Однако, поскольку для любого $d=0,1,2 \dots$ произведение $(2-2d)\alpha_i \equiv 0 \pmod{2}$, то $\beta_i = \beta'_i \pmod{2}$ при чётном N , чему соответствует, что $S=S' \pmod{2}$ при $N=2d$.

Далее, если рассмотреть случай, когда $N=2d+1$, то из (5) соответственно получим, что

$$\beta_i + \alpha_i = \beta'_i \pmod{2},$$

чему соответствует, что при нечётном N

$$S' = S + U_k \pmod{2},$$

что и доказывает теорему.

Из теоремы вытекает

Следствие. Справедлива обратная зависимость

$$S = \begin{cases} S', & \text{если } g(N) = 0 \\ S' \oplus U_k, & \text{если } g(N) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно (2) и (7), преобразование S' в S и наоборот имеет место при нечетном значении N , что сводится к необходимости счёта количества векторов в A_{mn} . Очевидно, что процедура счёта является не совсем удобным способом определения $g(N)$, особенно, когда некоторая пара $U_k S$ без рассмотрения соответствующей матрицы A_{mn} заранее уже задана. Для установления более эффективного способа определения $g(N)$ введём обозначение веса любого V_i вектора через $W(V_i)$ и покажем, что имеет место

Теорема 2. Пусть n -мерный вектор U_k есть вектор-основание, порождающий соответствующую матрицу A_n . Тогда:

1) если вес вектора-основания $W(U_k) = 2d + 1 = n$, $d = 1, 2, 3 \dots$, то для любого $V_m \in A_n$ справедливо следующее соотношение

$$V_m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k V_j \pmod{2}, \quad (8)$$

т. е. строки-векторы матрицы A_n образуют систему линейно-зависимых векторов;

2) если вес вектора-основания является чётным, т. е. $W(U_k) = 2d = n$, то строки-векторы соответствующей матрицы A_n образуют базис заданного линейного векторного пространства V_n .

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольный i -тый столбец матрицы A_n . Число компонент i -того столбца равно n , а число единиц в столбце, согласно правилу построения матрицы A_n , равняется $n - 1$. Поскольку число $n - 1$ по условию первой части теоремы является чётным, то сумма всех элементов i -того столбца будет равна нулю. Отсюда вытекает, что сумма всех векторов-строк матрицы A_n будет также равна нулю. Следовательно, матрица A_n при $W(U_k) = 2d + 1 = n$ образует систему линейно-зависимых векторов.

Рассмотрим теперь произвольный вектор V_m матрицы A_n . Исходя из особенности конструкции A_n , в векторе V_m только одна компонента β_j , расположенная на некотором j -том столбце, равна нулю, а остальные — единице. Тогда, согласно вышесприведенному рассуждению, все остальные

элементы столбца j будут равны единице, и их число будет чётным. Поскольку все остальные компоненты вектора V_m , кроме β_j , равны единице, то в столбцах, соответствующих этим компонентам, число единиц будет нечётным. Отсюда вытекает, что произвольный вектор-строка V_m при нечётном n равняется сумме всех остальных векторов матрицы A_n , т. е.

$$V_m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k V_j \pmod{2}.$$

2) Пусть при чётном значении $W(U_k)$ линейные комбинации S_i образованы из нечётного $2d+1$ количества строк-векторов матрицы A_n . Если рассмотреть эти векторы как элементы матрицы размера $(2d+1) \times n$, то эта матрица будет содержать точно $2d+1$ число столбцов, в которых содержится чётное число единиц, поскольку, исходя из доказательства первой части теоремы, одна компонента в каждой из этих столбцов равна нулю. Тогда n -мерный суммарный вектор S_i содержит точно $2d+1$ компонент, равных нулю, и $n - (2d+1)$ компонент, равных единице. Так как n — чётно, то $n - (2d+1)$ количество единиц в S_i будет всегда нечётным. Различным линейным комбинациям S_i , образованным из нечётного числа векторов-строк матрицы A_n , соответствуют различные номера столбцов, в которых содержится чётное число единиц. Исходя из этого, значения суммарных векторов S_i при различных линейных комбинациях строк-векторов матрицы A_n также будут различными. Следовательно, строки-векторы матрицы $(2d+1) \times n$ при любом d образуют базис соответствующего подпространства V_{2d+1} пространства V_n .

Если рассмотреть, далее, линейные комбинации S , образованные из чётного N количества строк-векторов матрицы A_n , то, используя вышеприведённые рассуждения, аналогично доказываем, что строки-векторы матрицы A_n для произвольного d образуют базис подпространства V_{2d} пространства V_n . Поскольку $V_{2d} \cup V_{2d+1} = V_n$, то, следовательно, строки-векторы матрицы A_n представляют базис пространства V_n , что и доказывает вторую часть теоремы 2.

Из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие. Для произвольного значения n элементы матрицы A_n размера $n \times n$ образуют систему линейно-зависимых векторов, когда $W(U_k) = 2d+1 = m_1 < n$, и линейно-независимую систему, когда $W(U_k) = 2d = m_2 < n$, где m_1 является целым положительным нечётным, а m_2 — чётным числом.

Вторая часть теоремы даёт регулярный способ определения специального класса базисов n -мерного линейного векторного пространства, который в дальнейшем будет представлять интерес с точки зрения его прикладного значения. Очевидно, что число таких базисов равно 2^{n-1} .

На основании теоремы 2 можно показать, что справедлива

Теорема 3. Если вес вектора-основания $W(U_k)$ является чётным, то тогда:

- 1) чётному значению N соответствует чётное значение веса $W(S)$ вектора S ;
- 2) нечётному значению N — нечётное значение веса $W(S)$ вектора S .

Доказательство. Аналогичным рассуждением, приведённым в теореме 2, можно показать, что при нечётном N значение веса $W(S)$ вектора S является нечётным, а при чётном N значение $W(S)$ является чётным.

Следствие. При $W(U_k) = 2d$ $d = 0, 1, 2 \dots$ для оператора $g(N)$ справедливо следующее соотношение

$$g(N) = \begin{cases} 0, & \text{если } W(S) = 2d \\ 1, & \text{если } W(S) = 2d + 1, \end{cases} \quad (9)$$

из которого вытекает, что

$$S' = \begin{cases} S, & \text{если } W(S) = 2d \\ S \oplus U_k, & \text{если } W(S) = 2d + 1. \end{cases} \quad (10)$$

Выражение (10) позволяет из суммарного вектора S непосредственно определять значение вектора восстановления S' .

Пример. Пусть $U_k = 0111111$. Тогда рассмотрим две линейные комбинации S_1 и S_2 , образованные из следующих векторов матрицы:

$$\begin{aligned} S_1 &= V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 \oplus V_6 \oplus V_7 = 1000011 \\ S_2 &= V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 = 0001111. \end{aligned}$$

Поскольку $W(S_1)$ является нечётным, а $W(S_2)$ — чётным, то соответствующие векторы восстановления S'_1 и S'_2 определяются согласно (10), как

$$\begin{aligned} S'_1 &= U_k \oplus S_1 = 1111100 \\ S'_2 &= S_2 = 0001111. \end{aligned}$$

Разлагая, далее, S'_1 и S'_2 на единичные векторы

$$\begin{aligned} S'_1 &= 1111100 = 1000000 \oplus 0100000 \oplus 0010000 \oplus 0001000 \oplus 0000100 \\ S'_2 &= 0001111 = 0001000 \oplus 0000100 \oplus 0000010 \oplus 0000001 \end{aligned}$$

и суммируя каждый из членов разложения с U_k , восстанавливаем векторы V_3, V_4, V_5, V_6, V_7 и V_1, V_2, V_3, V_4 , соответственно первоначально свёрнутые в S_1 и S_2 .

Выражения (9) и (10) можно использовать для произвольного вектора-основания с нечётным значением веса. Справедливость такого утверждения легко можно показать, поскольку между квадратными матрицами размера $n \times n$ и линейными преобразованиями n -мерного линейного векторного пространства всегда существует взаимно однозначное соответствие. Исходя из этого, введём понятие вектора ρ_0 , преобразующего основа-



ние U_k с весом $W(U_k) = 2d + 1$, в вектор U'_k с весом $W(U'_k) = 2d$. Поскольку в выборе значения ρ_0 может существовать достаточно большой произвол, то, если принять $W(\rho_0) = 1$, получим

$$W(U'_k) = W(U_k \oplus \rho_0) = 2d, \quad (11)$$

чему соответствует $A'_n \oplus \rho_0 = A_n$

$$(12)$$

$$A_n \oplus \rho_0 = A'_n,$$

где A_n и A'_n являются матрицами, построенными над U_k и U'_k . Согласно (11) и (12) можно сформулировать следующее правило:

Если вес $W(U_k) = 2d + 1$ и требуется свёртка произвольного N числа векторов матрицы A_n , то

1) первоначально необходимо преобразовать U_k в U'_k ;

2) над U'_k построить матрицу A'_n и из той матрицы взять произвольную линейную комбинацию N векторов;

3) согласно (9) и (10) определить S' и образовать пару $U_k S'$, где вес U_k вектора-основания по условию является нечётным.

Пример. Пусть векторы V_1, V_2, V_3, V_4 и V_5 являются строками-векторами соответствующей матрицы A_n , построенной над вектором-основанием $U_k = 011111$. Поскольку вес $W(U_k)$ является нечётным, то, согласно теореме 2, суммарный вектор $S_1 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 = 011110 \oplus 011101 \oplus 011011 \oplus 010111 \oplus 001111 = 000000$, т. е. V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 образует систему линейно-зависимых векторов. Поскольку $W(S_1)$ является чётным, а N — нечётно, то соотношение (10) из теоремы 3 для определения S' из S неприемлемо. Ввиду этого, для получения S' из S_1 применим рассмотренное выше правило, первоначально преобразуя U_k в вектор-основание U'_k с чётным весом, т. е.

$$U'_k = U_k \oplus \rho_0 = 011111 \oplus 000001 = 011110.$$

С другой стороны, векторы V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 преобразуются в вектора-строки $V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5$ матрицы A'_n , построенной над U'_k , а суммарный вектор

$$S_2 = V'_1 \oplus V'_2 \oplus V'_3 \oplus V'_4 \oplus V'_5 = 000001.$$

Поскольку вес $W(S_2)$ является нечётным при нечётном N , то применяя соотношение (10), получим $S' = U'_k \oplus S_2$.

Из полученного таким образом S' и первоначально заданного U_k образуется соответствующая пара $U_k S'$, откуда и можно восстановить свёрнутые в ней векторы-строки.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 011110 \\ 011101 \\ 011011 \\ 010111 \\ 001111 \end{pmatrix}$$

На основании вышерассмотренных теорем, кроме некоторых ограничений, рассмотренных для случая, когда $W(U_k) = 2d + 1$, существует большой произвол в вопросе выбора вектора-основания U_k . Однако для практического применения рассмотренного метода сжатия часто может оказаться необходимым определение группы векторов-оснований, порождающих непересекающиеся классы соответствующих A_n матриц. Очевидно, что для количественного определения таких групп векторов-оснований необходимо первоначально сформулировать условия пересекаемости и непересекаемости матриц A_n в зависимости от значений соответствующих векторов-оснований.

С этой целью, исходя из условий а) и б), перечислим следующие свойства конструкции гиперкуба G .

1. Любой вектор V_i , сопоставленный вершине N_i $i=0, 1, 2 \dots 2^n$ гиперкуба G и расположенный на L_i -той весовой линии, с помощью отдельных рёбер связан с i количеством векторов, расположенных на L_{i-1} весовой линии, а на линии L_{i-1} — с $n-i$ количеством векторов.

2. Каждый вектор $V_i \in V_n$ может являться либо вектором-основанием, либо элементом соответствующей матрицы. Точнее, если V_i вектор весом $W(V_i) = i$ считать вектором-основанием, то элементами соответствующей матрицы A_n будут векторы в количестве n , расположенные на весовых линиях L_{i-1} и L_{i+1} . Если V_i считать элементом матрицы, то соответствующими векторами-основаниями этой матрицы будут два вектора, которые расположены на L_{i-1} и L_{i+1} весовых линиях.

Введём понятие двух Θ_k и Θ_{k+p} множеств, элементами которых являются элементы соответствующих A_k и A_{k+p} матриц, построенных над векторами U_k и U_{k+p} .

Теорема 4. Пусть сумма (mod 2) двух произвольных векторов-оснований U_k и U_{k+p} образует вектор V_s . Тогда

1) если значение веса вектора V_s равно $W(S) = 2$, то $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} \neq \emptyset$, т. е. пересечение множеств Θ_k и Θ_{k+p} не равно пустому множеству и, следовательно, A_k и A_{k+p} имеют общие элементы;

2) если значение веса вектора V_s удовлетворяет соотношению $W(V_s) < 2$ или $W(V_s) > 2$, то тогда $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} = \emptyset$.

Доказательство. Доказательство тривиально, если $V_k = V_{k+p}$, т. е. при $V_k = \alpha_n, \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$; $V_{k+p} = \alpha'_n, \alpha'_{n-1} \dots \alpha'_1$, имеем $\alpha_1 = \alpha'_1$; $\alpha_n = \alpha'_n$; $\alpha_i \in \{0, 1\}$ $\alpha'_i \in \{0, 1\}$. Поэтому, если примем, что $V_k \neq V_{k+p}$, то должны иметь место два следующих случая

$$A. W(V_k) = W(V_{k+p}),$$

$$B. W(V_k) \neq W(V_{k+p}).$$

1. А. Сперва покажем, что сумма по модулю 2 любых двух элементов произвольной матрицы A_i , построенной над вектором-основанием V_i , даёт вектор весом $W(V_{1,2}) = 2$.



040357040

202 0000000000

Для доказательства этого утверждения выберем два произвольных вектора V_{i1} и V_{i2} , являющихся элементами матрицы A_i . Согласно условию а) и б) можно написать, что

$$W(V_{i1} \oplus V_i) = 1; \quad W(V_{i2} \oplus V_i) = 1.$$

Поскольку $V_{i1} \neq V_{i2}$, то, учитывая очевидность соотношения $W(V_{i1} \oplus V_i) + W(V_{i2} \oplus V_i) = W(V_{i1} \oplus V_i \oplus V_{i2} \oplus V_i)$, получим $W(V_{1,2}) = W(V_{i1} \oplus V_{i2}) = 2$, что и доказывает справедливость данного утверждения.

В силу свойства 2) V_k и V_{k+p} можно считать векторами-основаниями. В таком случае соответствующие A_k и A_{k+p} матрицы будут содержать в качестве элемента вектор V_i . Точнее, $V_i \in \Theta_k$; $V_i \in \Theta_{k+p}$, чему соответствует $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} \neq \emptyset$, что и требовалось доказать.

Б. При $W(V_k) \neq W(V_{k+p})$ рассуждения, показывающие справедливость теоремы, аналогичны рассуждениям, рассмотренным в случае А.

2. Рассмотрим вторую часть теоремы.

Доказательство. Допустим противное, т. е. при $W(V_s) \neq 2$ имеет место $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} \neq \emptyset$. Тогда необходимо рассмотреть следующий случай:

- а) $W(V_k) = W(V_{k+p})$ при $W(V_s) > 2 \rightarrow$ и $W(V_s) < 2$.
 б) $W(V_k) \neq W(V_{k+p})$

- а) Первоначально, при $W(V_k) = W(V_{k+p})$ легко можно показать, что $W(V_s) = W(V_k \oplus V_{k+p}) = 2d$,

т. е. значение величины веса V_s всегда является чётным. Если это так, то для данного а) случая соотношение $W(V_s) < 2$ теряет смысл и не будет рассмотрено.

Ввиду допущения $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} \neq \emptyset$, векторы V_k и V_{k+p} должны быть элементами матрицы A_i с вектором-основанием V_i , чему соответствует

$$W(V_k \oplus V_i) = W(V_{k+p} \oplus V_i) = 1.$$

Тогда, в силу доказанной первой части теоремы, имеем $W(V_k \oplus V_{k+p}) = 2$. Однако по условию $W(V_k \oplus V_{k+p}) > 2$. Следовательно, допущение $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} \neq \emptyset$ противоречит основным правилам построения конструкции гиперкуба G .

б) Рассуждения для доказательства теоремы, когда $W(V_s) > 2$, при $W(V_k) \neq W(V_{k+p})$, аналогичны рассмотренному а) случаю. Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда $W(V_s) < 2$, что сводится к случаю $W(V_s) = 1$.

Пусть теперь $W(V_s) = 1$. Тогда основания V_k и V_{k+p} будут отличаться друг от друга одной компонентой. При этом, если $W(V_k) = i$, то $W(V_{k+p}) = i + 1$ и, следовательно, матрица A_k на V_k будет состоять из векторов, веса которых соответственно будут равны $i - 1$ и $i + 1$. Таким же образом матрица A_{k+p} над V_{k+p} будет состоять из векторов, веса которых будут соответственно равны i и $i + 2$. Поскольку веса элементов матрицы A_k не равны весовым значениям элементов матрицы A_{k+p} , то, следовательно, $\Theta_k \cap \Theta_{k+p} = \emptyset$, что и требовалось доказать.

Из первой части теоремы вытекают:

Следствие 1. Количество одинаковых элементов матриц A_k и A_{k+p} при $W(V_s)=2$ равно двум.

Следствие 2. Если разложить суммарный V_s вектор на два неэквивалентных вектора, вес каждого из которых равен единице, то в результате суммирования каждого вектора с любым из U_k и U_{k+p} векторов образуются общие элементы матриц A_k и A_{k+p} .

* Пример. Пусть даны векторы-основания $U_k=0000111$ и $U_{k+p}=0001011$. Тогда вектор $V_s=0001100$ и $W(V_s)=2$. Разлагая V_s на два единичных вектора 0001000 и 0000100 и суммируя его с U_k или U_{k+p} , получим оба вектора, которые являются общими элементами для матриц A_k и A_{k+p} . Действительно, представляя U_k и U_{k+p} с помощью соответствующих матриц A_k и A_{k+p} , где

$$A_k = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{array} = \begin{array}{c} 0000110 \\ 0000101 \\ 0000011 \\ 0001111 \\ 0010111 \\ 0100111 \\ 1000111 \end{array} ; A_{k+p} = \begin{array}{c} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \\ V'_5 \\ V'_6 \\ V'_7 \end{array} = \begin{array}{c} 0001010 \\ 0001001 \\ 0001111 \\ 0000011 \\ 0011011 \\ 0101011 \\ 1001011 \end{array}$$

получим, что $V_3=V'_4=0000011$; $V_4=V'_3=0001111$.

Вторая часть теоремы 4 позволяет определить непесекающиеся группы векторов-оснований, расположенных на отдельных весовых линиях гиперкуба G . Вопрос определения таких векторов-оснований, расположенных на любой Li -той весовой линии сводится к задаче отыскания максимального числа векторов в группе, в которой каждый вектор U_k имеет вес $W(U_k)=i$. Говоря иначе, необходимо определить количество строк инцидентной матрицы при наложении на неё определённых ограничений.

В основу способа построения таких матриц инцидентности лежат известные методы определения блок-схем из комбинаторной математики.

Пример. В предыдущем примере был рассмотрен случай пересечения матриц A_k и A_{k+p} , когда $W(U_k)=W(U_{k+p})=3$ и $n=7$. Определим теперь при тех же значениях W и n максимальное число векторов, удовлетворяющих условию второй части теоремы 4 и расположенных на весовой линии L_3 .

Согласно [7], для построения соответствующей инцидентной матрицы необходимо определить количество блок-схем из трёх элементов, в которых каждая пара различных элементов появляется точно в одном блоке, а элементами являются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Используя известные способы определения блок-схем из [7—8], определяем параметры блок-схемы и мак-



симальное число блок-схем, которое равно семи. Обозначая блок-схемы через $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$, имеем:

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \quad B_3 = \{1, 6, 7\} \quad B_5 = \{2, 5, 7\} \quad B_7 = \{3, 5, 6\}$$

$$B_2 = \{1, 4, 5\} \quad B_4 = \{2, 4, 6\} \quad B_6 = \{3, 4, 7\}$$

Если столбцы инцидентной матрицы пронумеровать через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, а в строках вместо чисел, содержащихся в блок-схемах, записать единицы, а в остальные компоненты соответствующих строк — нули, получим следующую матрицу инцидентности:

$$A_3 = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline B_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ B_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ B_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ B_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Векторы строки матрицы A_3 удовлетворяют условию второй части теоремы 4.

При использовании рассмотренного метода сжатия в задачах синтеза [9—10] логических сетей и различных дискретных систем управления, могут возникнуть требования относительно записи пары $U_k S'$ или $U_k S'$ в более компактной форме, что возможно за счёт сжатия вектора-основания U_k . Однако возможность сжатия [4] осуществима только для ограниченного класса векторов-оснований. Точнее, для таких U_k , которые могут быть образованы в результате размещения и объединения по длине векторов-строк V_1, V_2, \dots, V_n матрицы A_n . Очевидно, что синтезированный таким образом новый вектор-основание будет иметь размерность n^2 , а число таких векторов равно 2^n . Легко можно показать, что, кроме случая $n=2$, полученный указанным образом вес вектора-основания порождает соответствующие непересекающиеся матрицы, т. е. удовлетворяет условию второй части теоремы 4.

Пример: Рассмотрим случай $n=3$. Образует из полученных восьми векторов 111, 110, 011, 101, 001, 010, 100, 000 соответствующие матрицы A_1, A_2, \dots, A_8 , а из строк этих матриц — векторы-основания размерности n^2 . Так, например, для $U_1=111$ имеем $A_1 = \begin{array}{c|ccc} 110 \\ 101 \\ 011 \end{array}$, откуда образуется

соответствующий вектор-основание $U_1^{(2)}=110\ 101\ 011$. Определяя таким

же образом $A_2, A_3 \dots A_8$, получим соответствующие векторы-основания, представленные в качестве строк матрицы A_2 размера $n^2 \times 2^n$.

$$A_2 = \begin{array}{c} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \\ U_5^{(2)} \\ U_6^{(2)} \\ U_7^{(2)} \\ U_8^{(2)} \end{array} = \begin{array}{c} 110 \ 101 \ 011 \\ 111 \ 100 \ 010 \\ 010 \ 001 \ 111 \\ 100 \ 111 \ 001 \\ 000 \ 011 \ 101 \\ 011 \ 000 \ 110 \\ 101 \ 110 \ 000 \\ 001 \ 010 \ 100 \end{array}$$

Поскольку каждому U_k сопоставлена единственная матрица A_n , то пара $U_k^{(2)} S'$ может быть представлена через $U_k S'$, где размерность U_k n раз меньше размерности $U_k^{(2)}$. Следовательно, если, например, вместо вектора-основания $U_1^{(2)} = 110 \ 101 \ 011$ выбрать вектор $U_1 = 111$, то в соответствующей двенадцатиразрядной паре $U_1 S'$ можно сжать девять девятиразрядных векторов.

Для рассматриваемого случая коэффициент сжатия определится следующим соотношением:

$$K_c = \frac{n^2}{\sqrt{n+n}}; \quad n = 2^2, 3^2, 4^2 \dots$$

Если принять, что двоичное слово состоит из 36 разрядов, то, следовательно, в векторе длиной в 42 разряда будет сжато тридцать шесть тридцатидесятиразрядных слов (коэффициент сжатия $K \cong 31$), а в общем случае в 64 векторах сжимаются 2304 тридцатидесятиразрядных неэквивалентных двоичных слова (при этом, из каждых 64 векторов первые шесть разрядов непосредственно можно использовать в качестве адреса).

(Представлено 6.VII.1971)

Кафедра
теоретической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Нанобашвили, К. Г. Чкуасели, Сообщения АН ГССР, № 1, 1970.
2. Н. Д. Нанобашвили, К. Г. Чкуасели, Сообщения АН ГССР, № 1, 1971.
3. К. Г. Чкуасели, Н. Д. Нанобашвили, Сб. трудов молодых ученых, ТГУ, 1972.
4. К. П. Курбаков, Кодирование и поиск информации в автоматическом словаре, «Советское радио», М., 1968.
5. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, М., 1952.
6. И. Н. Виноградов, Основы теории чисел. Тех. теор. литература, М., 1952.
7. М. Холл, Комбинаторика, «Мир», М., 1970.
8. Прикладная комбинаторная математика, Сб. статей, «Мир», М., 1967.



9. Д. А. Поспелов, Логические методы анализа и синтеза схем, «Энергия», М., 1968.
10. И. В. Прангишвили, Н. А. Амбрамова, Е. В. Бабичева, В. В. Игнатушенко, Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств, «Наука», М., 1967.

ნ. ნანობაშვილი, კ. ჭკუასელი

დისკრეტული ინფორმაციის შეკუმშვის ერთი მეთოდის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

შრომაში მოცემულია ჩვენს მიერ ამავე თემაზე მუშაობისას ადრე მიღებულ შედეგთა განზოგადება. კერძოდ ნაჩვენებია დისკრეტული ინფორმაციის შეკუმშვის სპეციალური მეთოდი და მისი გამოყენების ეფექტიანობა მიკროელექტრონული სტრუქტურების მართვასა და საიმედოობაში.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ n -ЗНАЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛУКАСЕВИЧА-ТАРСКОГО

Р. Ш. ГРИГОЛИЯ

В данной статье дается анализ алгебраических систем, соответствующих n -значным пропозициональным исчислениям Лукасевича-Тарского \perp_n [6,1]. Эти алгебраические системы мы будем называть mv_n -алгебрами. Впервые mv -алгебры, соответствующие κ_0 -значному исчислению Лукасевича-Тарского \perp_{κ_0} , были введены Ченом в [8]. Как следует ожидать, всякая mv_n -алгебра является mv -алгеброй, и mv_n -алгеброй является всякая булева алгебра, которая, как известно, соответствует двузначному классическому исчислению. Обратные рассуждения неверны. Однако многие результаты, полученные для булевых алгебр, могут быть перенесены на mv_n -алгебры.

Цель работы — дать теорему представления для mv_n -алгебр, следствием которой является теорема полноты исчислений \perp_n^1 , и аксиоматику указанных исчислений.

В первой части работы приводятся аксиомы mv_n -алгебр и важные следствия из них.

Во второй части вводятся понятия фильтров и конгруэнций. При этом определение фильтра не содержит структурных операций. Показано, что так определенные фильтры образуют дистрибутивную структуру. Кроме того, доказано, что существует структурный изоморфизм между структурой фильтров и структурой конгруэнций.

В третьей части даны теоремы представления mv_n -алгебр и теорема полноты исчислений \perp_n .

Четвертая часть посвящена аксиоматике исчислений Лукасевича-Тарского \perp_n .

1. Аксиомы mv_n -алгебр и некоторые их следствия

mv_n -алгебра есть система $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, где A — непустое множество элементов, 0 и 1 — различные константные элементы из A , $+$ и \cdot являются бинарными операциями на A и $-$ есть унарная операция на A , удовлетворяющие перечисленным ниже аксиомам:

¹ Неалгебраическим методом полнота исчислений Лукасевича-Тарского была доказана Россером и Туркетом в [7]. Для \perp_3 полнота была показана Вайсбергом в [3]. Алгебраическим методом полнота для \perp_{κ_0} была показана Ченом в [8].



04105340
2023010533

$$A 1 \cdot x + y = y + x$$

$$A 2 \ x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$A 3 \ x + \bar{x} = 1$$

$$A 4 \ x + 1 = 1$$

$$A 5 \ x + 0 = x$$

$$A 6 \ [x + y]^- = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$A 7 \ x = [\bar{x}]^-$$

$$A 1' \ x \cdot y = y \cdot x$$

$$A 2' \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$A 3' \ x \cdot \bar{x} = 0$$

$$A 4' \ x \cdot 0 = 0$$

$$A 5' \ x \cdot 1 = x$$

$$A 6' \ [x \cdot y]^- = \bar{x} + \bar{y}$$

$$A 8 \ 0 = 1$$

Для компактной записи оставшихся аксиом введем следующие определения.

$$\text{Определение 1. 1. } x \vee y = (x \cdot \bar{y}) + y,$$

$$x \wedge y = (x + \bar{y}) \cdot y.$$

$$\text{Определение 1. 2. (i) } 0 \cdot x = 0 \text{ и } (m + 1)x = mx + x$$

$$(ii) \ x^0 = 1 \text{ и } x^{m+1} = (x^m) \cdot x$$

$$A 9 \ x \vee y = y \vee x$$

$$A 10 \ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$A 11 \ x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

$$A 12 \ (n - 1)x + x = (n - 1)x$$

$$A 9' \ x \wedge y = y \wedge x$$

$$A 10' \ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$A 11' \ x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$$

$$A 12' \ x^{n-1} \cdot x = x^{n-1}$$

Если $n > 3$, то добавляется следующая аксиома:

$$A 13 \ [(jx) \cdot (\bar{x} + [(j-1)x]^-)]^{n-1} = 0$$

$$A 13' \ (n-1) [x^j + (\bar{x} \cdot [x^{j-1}]^-)] = 1,$$

где $1 < j < n-1$ и j пробегает все числа, не делящие $n-1$.

Ясно, что, как и в случае булевых алгебр, система аксиом остается неизменной, если заменим всюду $+$ на \cdot , \vee на \wedge , 1 на 0 и наоборот. Следовательно, если в справедливом утверждении мы произведем такие замены, то получим также справедливое утверждение, дуальное исходному. В дальнейшем переменные x, y, z, \dots и с индексами предполагаются элементами некоторой фиксированной mv_n -алгебры A .

Алгебра, удовлетворяющая аксиомам $A1-A11$, есть mv -алгебра Чэна [8]. Поэтому все равенства, верные для mv -алгебр, верны и для mv_n -алгебр.

Определение 1. 3. $x \leq y$ если и только если $x \vee y = y$. Как обычно, обозначение $x < y$ будет означать $x \leq y$ и $x \neq y$.

Теорема 1.4. [8]. Отношение \leq является отношением частичного упорядочения на A . Элементы $x \vee y$ и $x \wedge y$ являются соответственно наименьшей верхней гранью и наибольшей нижней гранью элементов x и y по отношению порядка \leq .

$$\text{Теорема 1. 5. [8. } x \cdot y \leq x \wedge y \leq x \leq x \vee y \leq x + y.$$

Теорема 1. 6. Алгебра A относительно \vee и \wedge является дистрибутивной структурой.

Доказательство. Нам достаточно показать, что $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$x \wedge (y \vee z) = (x + (\overline{y \wedge z})) \cdot (y \vee z) = [(x + (\overline{y \wedge z})) \cdot y \vee [x + (\overline{y \wedge z})] \cdot z]$. Но $[x + (\overline{y \wedge z})] \cdot y \leq (x + \overline{y}) \cdot y = x \wedge y$ и $[x + (\overline{y \wedge z})] \cdot z \leq (x + \overline{z}) \cdot z = x \wedge z$.

Поэтому $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. С другой стороны, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (\overline{x + y}) \cdot x \vee (\overline{x + z}) \cdot x = x \cdot [(\overline{x + y}) \vee (\overline{x + z})] = x \cdot [(\overline{x + y}) \cdot \overline{x + z} + \overline{x + z}] = x \cdot [(x \wedge y) \cdot \overline{x + z} + \overline{x + z}] = x \cdot [(x \wedge y) \vee \overline{x + z}] = x \wedge [(x \wedge y) \vee \overline{x + z}] \leq x \wedge (y \vee z)$.

Элемент x из A назовем булевым, если выполняется условие: $x + x = x$.

Теорема 1.7. Если элемент x булев, то $x + y = x \vee y$ и $x \cdot y = x \wedge y$.

Доказательство: $y \leq x \vee y$. Поэтому $x + y \leq x + (x \vee y)$. $x \cdot (x \vee y) = x \cdot x \vee x \cdot y = x \vee x \cdot y = x$. Но согласно теореме 1.15 [8], имеем $x + (x \vee y) = x \vee y$. Значит $x + y \leq x \vee y$. Поскольку $x + y \geq x \vee y$, получаем, что $x + y = x \vee y$. Дуально доказывается, что $x \cdot y = x \wedge y$.

Определение 1.8. $x^* = [x^{n-1}]^-$.
 $x^x = [(n-1)x]^-$.

Теорема 1.9. $x \vee x^* = 1$, $x \wedge x^x = 0$.

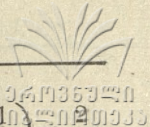
Доказательство. $x \vee x^* = x \vee [x^{n-1}]^- = x \cdot x^{n-1} + [x^{n-1}]^- = x^{n-1} + [x^{n-1}]^- = 1$. $x \wedge x^x = x \wedge [(n-1)x]^- = (x + (n-1)x) \cdot [(n-1)x]^- = (n-1)x \cdot [(n-1)x]^- = 0$.

Теорема 1.10. $(x \wedge x^*)^{n-1} = 0$, $(n-1)(x \vee x^x) = 1$.

Доказательство. Так как x^{n-1} является булевым (см. теорему 1.16 [8]), имеем $(x \wedge x^*)^{n-1} = ((x + x^{n-1}) \cdot [x^{n-1}]^-)^{n-1} = (x \vee x^{n-1}) \cdot [x^{n-1}]^-)^{n-1} = (x \cdot [x^{n-1}]^-)^{n-1} = x^{n-1} \cdot [x^{n-1}]^- = 0$. Дуально доказывается второе утверждение.

Пример. Система $\langle L_n, +, \cdot, -, 1, 0 \rangle$, где $L_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$, для любых $x, y \in L_n$ $x + y = \min(1, x + y)$, $x \cdot y = \max(0, x + y - 1)$, $\overline{x} = 1 - x$ является m_n -алгеброй. Операции \vee и \wedge на L_n являются соответственно $\max(x, y)$ и $\min(x, y)$, а отношение \leq является простым естественным порядком действительных чисел. Легко проверяется, что $A1 - A12$ выполняется в L_n . Покажем, что $A13$ верно в L_n . Заметим, что если $m-1$ делит $n-1$, то $L_m = \left\{ 0, \frac{k}{n-1}, \dots, \frac{(m-2)k}{n-1}, 1 \right\} \subseteq L_n$, где $k = \frac{n-1}{m-1}$. Более того, L_m изоморфно вложима в L_n . И тогда очевидно, что равенство, верное в L_n , верно и в L_m .

Рассмотрим выражение $((k-1)x + x) \cdot (\overline{x} + [(k-1)x]^-)$. $((k-1)x + x) \cdot (\overline{x} + [(k-1)x]^-) = 1$, если и только если $x = \frac{1}{k}$. Для $k=1, 2$ это



утверждение очевидно. Пусть $k > 2$. $x + x \Big|_{x=\frac{1}{k}} = \min \left(1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{k}$,

$\exists x \Big|_{x=\frac{1}{k}} = \frac{3}{k}$. В общем случае $ix \Big|_{x=\frac{1}{k}} = \frac{i}{k}$ ($i \leq k$) · $(k-1)x \Big|_{x=\frac{1}{k}} = \frac{k-1}{k}$

и $[(k-1)x]^- \Big|_{x=\frac{1}{k}} = 1 - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$. Учитывая все это, получаем $((k-1)x + x) \cdot (\bar{x} + [(k-1)x]^-) \Big|_{x=\frac{1}{k}} = 1$. Теперь предположим $x \neq \frac{1}{k}$, скажем

$x > \frac{1}{k}$. Тогда $ix > \frac{i}{k}$ ($i \leq k$). Но $[(k-1)x]^- = 1 - (k-1)x$. Если $(k-1)x = 1$, то $[(k-1)x]^- = 0$ и т. в. $\bar{x} + [(k-1)x]^- = \bar{x}$, $((k-1)x + x) \cdot (\bar{x} +$

$[(k-1)x]^-) \neq 1$. Если $(k-1) \cdot x \neq 1$, то $[(k-1)x]^- = 1 - (k-1)x = t$ и $t < \frac{1}{k}$. Т. в. $\bar{x} + [(k-1)x]^- = \bar{x} - t \neq 1$, $((k-1)x + x) \cdot (\bar{x} + [(k-1)x]^-) =$

$= 1$. Подобным рассуждением показывается, что если $x < \frac{1}{k}$, то $((k-1)x + x) \cdot (\bar{x} + [(k-1)x]^-) \neq 1$.

Предположим $k(m-1) \neq n-1$. Тогда $\frac{1}{m-1} \in L_m$, но $\frac{1}{m-1} \notin L_n$. Поэтому $mx \cdot (\bar{x} + [(m-1)x]^-)$ может равняться 1 в L_m , но не в L_n . Заметим, что если $x \neq 1$ в L_n , то $x^{n-1} = 0$. Поэтому в L_n $[mx \cdot (\bar{x} + [(m-1)x]^-)]^{n-1} = 0$. Из всего сказанного получаем, что L_m ($m \leq n$) является $m\nu_n$ -алгеброй лишь тогда, когда $m-1$ делит $n-1$.

2. Фильтры и конгруэнции

Определение 2.1. Подмножество F из A является фильтром, если и только если (i) $1 \in F$, (ii), если $x, y \in F$, то $x \cdot y \in F$ и (iii), если $x \in F$ и $y \geq x$, то $y \in F$.

Фильтр F называется собственным, если $F \neq A$. Ясно, что фильтр F — собственный, если и только если $0 \in F$.

Определение 2.2. Фильтр F является максимальным, если и только если F есть собственный фильтр и всякий раз, когда F' есть фильтр такой, что $F \subseteq F' \subseteq A$, то либо $F = F'$, либо $F' = A$.

Определение 2.3. Фильтр F называется простым, если из условия $x \vee y \in F$ следует, что или $x \in F$, или $y \in F$.

Теорема 2.4. Пусть F есть собственный фильтр из A . Тогда следующие условия эквивалентны: (i) F является максимальным фильтром; (ii) F является простым фильтром; (iii) для любого элемента $x \in A$, либо $x \in F$, либо $x^* \in F$.

Доказательство. Покажем, что $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что F не является простым, т. е. существуют $x, y \in A$, такие, что $x \vee y \in F$, $x \notin F$ и $y \notin F$. Рассмотрим множество $F_1 = \left\{ t : t \geq (x \cdot z)^{n-1} \text{ для некоторого } z \in F \right\}$. Ясно, что F_1 — фильтр. F_1 является собственным, т. е. $y \notin F_1$. Дей-

ствительно, если предположить, что $y \in F_1$, то $y \geq (x \cdot z)^{n-1}$ для некоторого $z \in F$. Т. к. $x \vee y \in F$ и $z \vee y \in F$, получаем $y = y \vee (x \cdot z)^{n-1} \geq y \cdot z^{n-1} \vee (x \cdot z)^{n-1} = z^{n-1} \cdot (y \vee x^{n-1}) \in F$, что противоречит предположению.

Пусть F есть простой фильтр. Тогда для любого $x \in A$, $x \vee x^* = 1 \in F$ (теорема 1.9.). Но из простоты F вытекает, что либо $x \in F$, либо $x^* \in F$. Тем самым показали, что $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Теперь покажем, что $(iii) \Rightarrow (i)$. Допустим, что существует фильтр F_1 , который собственно содержит F , т. е. существует $a \in A$ такой, что $a \in F_1$ и $a \notin F$. Тогда $a^* \in F$ и $a^* \in F_1$. Поэтому $a \wedge a^* \in F_1$. Но отсюда следует, что $0 = (a \wedge a^*)^{n-1} \in F_1$ (теорема 1.10).

Определение 2.5. r есть отношение конгруэнтности на A , если и только если (i) r есть отношение эквивалентности на A и (ii) , если xry и urv , то \overline{xry} , $(x+u)r(y+v)$ и $(x \cdot u)r(y \cdot v)$.

Как обычно, x/r обозначает класс эквивалентности r , представителем которого является x . Через A/r будем обозначать множество всех классов r .

Легко доказывается следующая

Теорема 2.6. Если r есть отношение конгруэнтности, то множество элементов из $1/r$ является фильтром и множество всех классов r образует mv_n -алгебру. $\langle A/r, +, \cdot, \bar{}, 0/r, 1/r \rangle$, где $x/r + y/r = (x+y)/r$, $x/r \cdot y/r = (x \cdot y)/r$, $[x/r]^- = \overline{x/r}$ и A/r есть гомоморфный образ A относительно отображения $f: x \rightarrow x/r$.

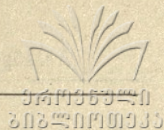
Определение 2.7. $c(x, y) = \overline{(x+y)} \cdot (x+\overline{y})$.

Теорема 2.8. Если r есть отношение конгруэнтности, то xry , если и только если $c(x, y) r 1$.

Доказательство. Предположим, что xry . Тогда, т. к. \overline{xrx} и \overline{yry} , получаем $(x+\overline{y}) r 1$, $\overline{(x+y)} r 1$ и $(x+\overline{y}) \cdot \overline{(x+y)} r 1$. Следовательно, $c(x, y) r 1$. Пусть $c(x, y) r 1$. Т. к. $(x+\overline{y}) r (x+\overline{y})$, $[(x+\overline{y}) \vee (x+\overline{y})] r r[(x+\overline{y}) \vee 1]$. Это влечет $(x+\overline{y}) r 1$. Аналогично $(\overline{y+x}) r 1$. Отсюда $yr [(x+\overline{y}) \cdot y]$ и $[x \cdot (y+\overline{x})] rx$. Поскольку $(x+\overline{y}) \cdot y = (y+\overline{x}) \cdot x$ (определение 1.1.), получаем xry .

Следствие 2.9. Если r и s являются отношениями конгруэнтностей, то $r=s$, если и только если $1/r=1/s$.

Из теоремы 3.14 [8] следует:



Теорема 2.9. Если F есть фильтр, то r является отношением конгруэнтности, если оно определено следующим образом: xry , если и только если $c(x, y) \in F$.

Из теорем 2.6, 2.8 и 2.11 следует, что между фильтрами и конгруэнциями алгебры A существует взаимодозначное соответствие. Из следующей теоремы будет вытекать, что между структурой фильтров и структурой конгруэнции существует структурный изоморфизм.

Теорема 2.11. Если конгруэнции r_1 соответствует фильтр F_{r_1} , а r_2 — F_{r_2} , то конгруэнции $r_1 \vee r_2$ соответствует фильтр $F_{r_1} \vee F_{r_2}$, конгруэнции $r_1 \cap r_2$ соответствует фильтр $F_{r_1} \cap F_{r_2}$, т. е. $F_{r_1} \vee F_{r_2} = F_{r_1 \vee r_2}$, $F_{r_1} \cap F_{r_2} = F_{r_1 \cap r_2}$.

Доказательство. Пусть $x \in F_{r_1} \Rightarrow c(1, x) \in F_{r_1} \Rightarrow 1r_1x \Rightarrow 1(r_1 \vee r_2)x \Rightarrow c(1, x) \in F_{r_1 \vee r_2}$. Аналогично $x \in F_{r_2} \Rightarrow x \in F_{r_1 \vee r_2}$. Значит $F_{r_1} \vee F_{r_2} \subseteq F_{r_1 \vee r_2}$. Пусть $x \in F_{r_1 \vee r_2} \Rightarrow c(1, x) \in F_{r_1 \vee r_2} \Rightarrow 1(r_1 \vee r_2)x \Rightarrow$ существует z такой, что $1r_1z$ и $zr_2x \Rightarrow c(1, z) \in F_{r_1}$ и $c(z, x) \in F_{r_2} \Rightarrow c(1, z) \cdot c(z, x) \in F_{r_1} \vee F_{r_2}$.

Согласно теореме 3.14 [8] $c(1, x) \geq c(1, z) \cdot c(z, x)$. Поэтому $c(1, x) = x \in F_{r_1} \vee F_{r_2}$. Значит $F_{r_1} \vee F_{r_2} = F_{r_1 \vee r_2}$. Аналогично показывается, что $F_{r_1} \cap F_{r_2} = F_{r_1 \cap r_2}$.

Теорема 2.12. Конгруэнции на алгебре A перестановочны.

Доказательство. Согласно предложению 6.8 ([5], гл. II), достаточно показать, что для каждой пары $a, b \in A$ существует трансляция, переставляющая a и b . Трансляция $J: x \rightarrow (ax + b) \wedge (bx + a)$, где a и b произвольные элементы алгебры A , обладает этим свойством.

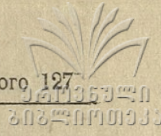
Согласно предложению 6.6 ([5], гл. II), из этой теоремы получаем

Следствие 2.13. Для произвольных конгруэнций q и r на A $q \vee r = q \circ r$, где $q \circ r$ есть произведение конгруэнции.

Для любого множества B элементов алгебры A существуют фильтры, содержащие B (в частности само множество A). Пересечение F_0 всех таких фильтров является наименьшим фильтром, содержащим B . Скажем, что такой фильтр порождается множеством B . Опишем элементы фильтра F_0 . Если B пусто, то F_0 — единичный фильтр. Пусть B не пусто. Тогда элемент $a \in A$ принадлежит F_0 тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность a_1, \dots, a_m элементов из B , что $a \geq (a_1 \dots a_m)^{n-1}$.

Действительно, элементы a такого типа принадлежат каждому фильтру F , содержащему B . С другой стороны, элементы такого типа образуют фильтр.

Наименьший фильтр F_0 , содержащий данный фильтр F и данный элемент d , есть множество всех таких элементов a , что (1) $a \geq (b \cdot d)^{n-1}$ для некоторого $b \in F$.



Фильтр F_0 , порожденный F и d , не будет собственным тогда и только тогда, когда (2) $d^* \in F$.

Действительно, если $d^* \in F$, то $d^* \in F_0$ и, следовательно, $0 = (\bar{d} \wedge d^*)^{n-1} \in F_0$. Обратно, если F_0 — несобственный фильтр, то в силу (1) существует такой элемент $b \in F$, что $0 \geq (b \cdot d)^{n-1}$. Отсюда $d^* = d^* + (b \cdot d)^{n-1} = [d^{n-1}]^- + b^{n-1} \cdot d^{n-1} = b^{n-1} \vee [d^{n-1}]^- = b^{n-1} \vee d^*$, т. е. $d^* \geq b^{n-1}$. Но $b^{n-1} \in F$. Поэтому $d^* \in F$.

Легко доказывается следующая

Теорема 2.14. Фильтр F будет собственным тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in A/F$ не содержит наряду с элементом x элемент x^* .

Теорема 2.15. Для каждого собственного фильтра F_0 существует максимальный фильтр, содержащий F_0 .

Доказательство. Пусть система $\{a_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ — трансфинитная последовательность, пробегающая все элементы алгебры A . При помощи трансфинитной индукции определим возрастающую последовательность $\{F_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ фильтров алгебры A . F_0 — исходный фильтр из условия теоремы. Если $0 < \alpha < \beta$, то через F_α обозначим фильтр, порожденный элементом a_α и объединением всех фильтров F_γ , $\gamma < \alpha$, при условии, что этот фильтр собственный; в противном случае в качестве F_α возьмем объединение всех F_γ , $\gamma < \alpha$. Объединение F всех фильтров F_α ($\alpha < \beta$) является собственным фильтром, содержащим F_0 . Докажем, что F является максимальным фильтром. Согласно теореме 2.4, достаточно показать, что для каждого a_α либо $a_\alpha \in F$, либо $a_\alpha^* \in F$. Если $a_\alpha \notin F_\alpha$, то F_α является объединением всех F_γ ($\gamma < \alpha$) и фильтр, порожденный F_α и a_α , не является собственным. Следовательно, в силу (2), $a_\alpha^* \in F_\alpha$ и тем самым $a_\alpha^* \in F$.

Определение 2.16. Элемент x алгебры A называется коатомом, если и только если $x \neq 1$ и всякий раз, когда $1 \geq y \geq x$, следует, что либо $y = 1$, либо $y = x$.

Теорема 2.17. Если фильтр F является максимальным, то A/F изоморфна L_m , где $m \leq n$ и $m - 1$ делит $n - 1$ (A/F есть A/r , где r — конгруэнция, соответствующая F).

Доказательство. Согласно теореме 3.3 [8], $(x + \bar{y}) \vee (y + \bar{x}) \in F$. Тогда, используя теорему 2.4, либо $(x + \bar{y})/F = 1/F$, либо $(y + \bar{x})/F = 1/F$, т. е. либо $x/F \leq y/F$, либо $y/F \leq x/F$ (теорема 1.13 [8]). A/F — коатомно. Если допустить противное, то, согласно теореме 3.20 [8], для $x \in A/F$, $x \neq 1/F$ и $x \neq 0/F$ для $n - 1$ существует $y \neq 1/F$, для которого $y^{n-1} \geq x$. Тогда множество $\{z : z \geq y^{n-1}\}$ является собственным фильтром, отличным от единичного. Но это противоречит максимальной фильтра F . Пусть элемент x является коатомом. Тогда $x^m = 0$ для некоторого $m \leq n - 1$, ибо в противном случае множество $\{z : z \geq x^{n-1}\}$ является собственным филь-



тром, отличным от единичного. Согласно теореме 3.19 [8], $A/F\lambda$ изоморфна L_m . Причем $m-1$ делит $n-1$, ибо в противном случае L_m не будет mv_n -алгеброй (см. пример).

Из этой теоремы вытекает, что если $n-1$ — простое число, то A/F изоморфна либо двухэлементной булевой алгебре L_2 , либо L_n .

Множество $\Phi \subseteq A$ назовем \wedge -фильтром, если и только если (i) $1 \in \Phi$, (ii) если $x, y \in \Phi$, то $x \wedge y \in \Phi$, (iii), если $x \in \Phi$ и $y \succ x$, то $y \in \Phi$. Структуру всех \wedge -фильтров обозначим через $P(\Phi)$, а структуру всех фильтров, определенных нами ранее, обозначим через $P(F)$.

Теорема 2.18. Структура $P(F)$ является подструктурой структуры $P(\Phi)$.

Доказательство. Очевидно, что если $F' \in P(F)$, то $F' \in P(\Phi)$, т. е. $P(F) \subseteq P(\Phi)$. Достаточно показать, что для $F_1, F_2 \in P(F)$, $F_1 \vee F_2$ в $P(F)$ и $P(\Phi)$ совпадают. $F_1 \vee F_2$ в $P(F)$ есть фильтр, порожденный множеством $F_1 \cup F_2$. Этот фильтр есть множество $F_0 = \{x : x \succ a^{n-1} \cdot b^{n-1} \text{ для некоторых } a \in F_1 \text{ и } b \in F_2\}$. $F_1 \vee F_2$ в $P(\Phi)$ есть множество $\Phi_0 = \{x : x \succ d \wedge u \text{ для некоторых } d \in F_1 \text{ и } u \in F_2\}$ [2]. Легко показать, что $F_0 = \Phi_0$.

Теорема 2.19 [2]. \wedge -фильтры любой дистрибутивной структуры сами образуют дистрибутивную структуру относительно теоретико-множественного включения.

Следствие 2.20. Структура $P(F)$ является дистрибутивной структурой относительно теоретико-множественного включения.

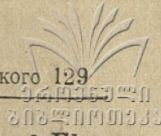
3. Теоремы представления. Теорема полноты

Теорема 3.1. Произвольная mv_n -алгебра A изоморфна подпрямому произведению алгебр $A/F\lambda$, где $F\lambda$ является максимальным фильтром из A . Другими словами, алгебра A изоморфна подпрямому произведению алгебр L_m , где $m \leq n$ и $m-1$ делит $n-1$.

Доказательство. Согласно теореме Биргофа о разложимости алгебр [2], нам достаточно показать, что пересечение всех максимальных фильтров есть единичный фильтр $\{1\}$. Для этого покажем, что для любого элемента $x \in A$ и $x \neq 1$ существует максимальный фильтр, не содержащий x . Пусть x — произвольный элемент из A и $x \notin \{1\}$. Породим фильтр F из $\{1\}$ и x^* . Ясно, что F является собственным фильтром и $x \notin F$ (т. е. $x^{**} \in \{1\}$) и согласно теореме 2.14). И наконец, расширяем фильтр F до максимального.

Теорема 3.2. Любая конечная mv_n -алгебра A представима в виде прямого произведения алгебр L_m , где $m \leq n$ и $m-1$ делит $n-1$.

Доказательство. Согласно теореме 6.15 ([5], гл. II), нам до-



статочно показать выполнимость следующих соотношений: $F_1 \cap \dots \cap F_k = \{1\}$ и $(F_1 \cap \dots \cap F_{i-1}) \vee F_i = A$ ($i=2, \dots, k$), где F_1, \dots, F_k — все максимальные фильтры из A . Выполнимость этих соотношений сразу следует из теорем 2.17, 3.1 и следствия 2.20.

Обозначим класс всех m_n -алгебр через Σ . Рассмотрим класс всех тех алгебр, в которых верны все те равенства, которые верны в L_n . Обозначим этот класс через $K(L_n)$. Ясно, что $K(L_n) \subseteq \Sigma$. Возьмем произвольную (конечную) алгебру A из Σ ; тогда она представима в виде подпрямого (прямого) произведения алгебр L_m , где $m \leq n$ и $m-1$ делит $n-1$. Вспомним, что L_m изоморфно вложима в L_n лишь в том случае, когда $m-1$ делит $n-1$. Поэтому $A \in K(L_n)$. Следовательно $K(L_n) = \Sigma$. В [4] показано, что произвольная (конечная) алгебра из $K(L_n)$ представима в виде подпрямого (прямого) произведения алгебр L_m , где $m \leq n$ ($m-1$ делит $n-1$). Аналогичный результат был получен для $K(L_3)$ в [9]. Из всего сказанного вытекает, что все равенства, верные в L_n , можно получить из аксиом $A1 - A13$.

Обозначим через \lfloor_n n -значное пропозициональное исчисление Лукасевича-Тарского. Мы здесь используем обозначения, данные в [1]. Формулы данной логики строятся при помощи счетного множества пропозициональных переменных p, q, r, \dots с индексами и двух операций \supset и \sim следующим образом:

- (i) Всякая пропозициональная переменная есть формула.
- (ii) Если α — формула, то $\sim \alpha$ — тоже формула.
- (iii) Если α и β — формулы, то $\alpha \supset \beta$ — тоже формулы.
- (iv) Других формул нет.

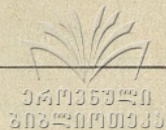
Все логики \lfloor_n ($n > 2$) конечно аксиоматизируемы [7]. Обозначение $\vdash \alpha$ — означает, что α выводима из аксиом с использованием одного правила вывода *modus ponens*, т. е. если $\vdash \alpha$ и $\vdash \alpha \supset \beta$, то $\vdash \beta$. В \lfloor_n можно ввести следующие определения: $\alpha \vee \beta = \sim \alpha \supset \beta$ и $\alpha : \beta = \sim(\alpha \supset \sim \beta)$. Пусть α — произвольная формула из \lfloor_n . Будем придавать пропозициональ-

ным переменным из α значения из множества $\left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$,

а операции $p \vee q, p : q, \sim p$ соответственно интерпретировать как *min* $[1, \nu(p) + \nu(q)]$, *max* $[0, \nu(p) + \nu(q) - 1]$, $1 - \nu(p)$, где $\nu(p)$ и $\nu(q)$ — значения, приданные переменным p и q . $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\nu(\alpha) = 1$ (т. е. когда α — тавтология) [1].

Из \lfloor_n построим алгебру Линденбаума $\Sigma(\lfloor_n)$.

Элементами этой алгебры будут классы эквивалентностей формул, определенных с помощью отношения эквивалентности \equiv ; α / \equiv означает класс эквивалентности, одним из представителей которого является формула α . α и β находятся в отношении \equiv , если и только если $\vdash \alpha \supset \beta$ и $\vdash \beta \supset \alpha$. На алгебре $\Sigma(\lfloor_n)$ определим операции $+$, \cdot , $-$ и элементы $0, 1$ следующим образом:



$$[\alpha/\equiv] + [\beta/\equiv] = [\alpha \dot{\vee} \beta/\equiv],$$

$$[\alpha/\equiv] \cdot [\beta/\equiv] = [\alpha : \beta/\equiv],$$

$$[\alpha/\equiv]^- = [\sim \alpha/\equiv],$$

$$[\alpha/\equiv] = 1, \text{ если и только если } \vdash \alpha,$$

$$[\alpha/\equiv] = 0, \text{ если и только если } \vdash \sim \alpha.$$

Легко доказать, что эти операции на $\Sigma(\underline{L}_n)$ не зависят от представителей класса эквивалентностей. Также легко показать, что $\Sigma(\underline{L}_n)$ является mv_n -алгеброй.

Сейчас приведем доказательство теоремы полноты \underline{L}_n , используя результаты, полученные для mv_n -алгебр.

Теорема 3.3 (теорема полноты). Формула α из \underline{L}_n является теоремой тогда и только тогда, когда α является тавтологией.

Доказательство. Рассмотрим алгебру Линденбаума $\Sigma(\underline{L}_n)$. Пусть α не теорема. Тогда $[\alpha/\equiv] \neq 1$. Т. к. $\Sigma(\underline{L}_n)$ является mv_n -алгеброй, она изоморфна подпрямому произведению алгебр L_m ($m \leq n$ и $m - 1$ делит $n - 1$). Следовательно, в разложении $[\alpha/\equiv]$ встречается элемент из L_m , который отличен от 1. Взяв в качестве значения формулы α этот элемент, получаем, что α не тавтология. Обратное очевидно.

4. Аксиоматика исчислений L_n

Имеем произвольное исчисление \underline{L}_n ($n > 2$). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — аксиомы исчисления \underline{L}_n . Будем предполагать, что в каждой α_i встречаются операции $\dot{\vee}$, $:$ и \sim . Образует алгебру Линденбаума $\Sigma(\underline{L}_n)$. Как было показано, $\Sigma(\underline{L}_n)$ является mv_n -алгеброй. Другими словами, из аксиом $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ при соответствующем переводе операций $\dot{\vee}$, $:$ и \sim в операции $+$, \cdot и $-$ следуют аксиомы $A1 - A13$. Трансформируем $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ следующим образом: вместо переменных встречающихся в $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ напомним x, y, \dots , вместо $\dot{\vee}$, $:$, и \sim соответственно операции $+$, \cdot , и $-$. Так полученные выражения приравняем к 1. Но все эти выражения выводимы из $A1 - A13$. Следовательно, мы можем заключить, что две аксиоматики $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и $A1 - A13$ эквивалентны относительно соответствующих связей между $\dot{\vee}$, $:$, \sim и $+$, \cdot , $-$.

Аксиомы $A1 - A11$ эквивалентны следующим аксиомам (см. [8]):

$$\underline{L}_{x_0} 1. \sim \alpha \dot{\vee} (\sim \beta \dot{\vee} \alpha),$$

$$\underline{L}_{x_0} 2. \sim (\sim \alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} [\sim (\sim \beta \dot{\vee} \gamma) \dot{\vee} (\sim \alpha \dot{\vee} \gamma)],$$

$$\underline{L}_{x_0} 3. ((\sim \alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \sim ((\sim \beta \dot{\vee} \alpha) \dot{\vee} \alpha),$$

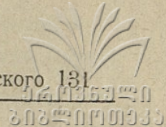
$$\underline{L}_{x_0} 4. \sim (\alpha \dot{\vee} \sim \beta) \dot{\vee} (\sim \beta \dot{\vee} \alpha).$$

При помощи обратной трансформации аксиом $A1 - A13$ можем получить аксиоматику для исчисления \underline{L}_n .

$$\underline{L}_n 1. \sim \alpha \dot{\vee} (\sim \beta \dot{\vee} \alpha),$$

$$\underline{L}_n 2. \sim (\sim \alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} [\sim (\sim \beta \dot{\vee} \gamma) \dot{\vee} (\sim \alpha \dot{\vee} \gamma)],$$

$$\underline{L}_n 3. ((\sim \alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \sim ((\sim \beta \dot{\vee} \alpha) \dot{\vee} \alpha),$$



$$\perp_n 4 \sim (\alpha \dot{\vee} \sim \beta) \dot{\vee} (\sim \beta \dot{\vee} \alpha),$$

$$\perp_n 5 (n-1) \alpha \dot{\vee} \alpha \dot{\vee} \sim ((n-1) \alpha),$$

$$\perp_n 6 \sim [(n-1) \alpha \dot{\vee} \alpha] \dot{\vee} (n-1) \alpha, \text{ при } n > 3 \text{ добавляем}$$

$$\perp_n 7 (n-1) [(\sim \alpha)^j \dot{\vee} (\alpha : ((j-1) \alpha))], \text{ где } 1 < j < n-1 \text{ и } j \text{ про-}$$

бегает все неделимые $n-1$ числа. Записи $m\alpha$ и α^m означают соответственно $\alpha \dot{\vee} \dots \dot{\vee} \alpha$ m раз и $\alpha : \dots : \alpha$ m раз.

Применяя операции \supset и \sim , напомним аксиомы для \perp_3 и \perp_4 :

$$\perp_3 1 \alpha \supset (\beta \supset \alpha),$$

$$\perp_3 2 (\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)],$$

$$\perp_3 3 ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset ((\beta \supset \alpha) \supset \alpha),$$

$$\perp_3 4 (\sim \alpha \supset \sim \beta) \supset (\beta \supset \alpha),$$

$$\perp_3 5 (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha)) \supset (\sim \alpha \supset \alpha),$$

$$\perp_3 6 (\sim \alpha \supset \alpha) \supset (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha)),$$

$$\perp_4 1 \alpha \supset (\beta \supset \alpha),$$

$$\perp_4 2 (\alpha \supset \beta) \supset [(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)],$$

$$\perp_4 3 ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset ((\beta \supset \alpha) \supset \alpha),$$

$$\perp_4 4 (\sim \alpha \supset \sim \beta) \supset (\beta \supset \alpha),$$

$$\perp_4 5 (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha)) \supset (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha))),$$

$$\perp_4 6 (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha))) \supset (\sim \alpha \supset (\sim \alpha \supset \alpha)),$$

$$\perp_4 7 \sim ((\sim \alpha \supset \alpha) \supset \sim (\alpha \supset \sim (\sim \alpha \supset \alpha))) \supset [\sim ((\sim \alpha \supset \alpha) \supset \sim (\alpha \supset \sim (\sim \alpha \supset \alpha))) \supset \sim (\sim \alpha \supset \alpha)] \supset ((\sim \alpha \supset \alpha) \supset (\alpha \supset \sim (\sim \alpha \supset \alpha))).$$

(Представлено 15.II.1972.)

Кафедра теоретической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Askermann, An introduction to many-valued logics, N. Y., 1967.
2. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952.
3. M. Wajsberg, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 24, (1931), cl. iii, 126—148.
4. Р. Ш. Григолия. Об алгебрах Лукасевича, XI, Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Резюме сообщений и докладов, Кишинев, 1971, 248—249.
5. П. Кон, Универсальная алгебра, „Мир“, 1968.
6. J. Lukasiewicz and A. Tarski, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. iii, 23, 30, 1930.
7. J. B. Rosser, and A. R. Turquette, Many-Valued Logics, Amsterdam, 1952.
8. C. C. Chung, Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 88, 467—490.
9. L. L. Esakia, IV-th international congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Abstracts, Bucharest, 1971, 22.

რ. გრიგოლია

ლუკასევიჩ-ტარსკის n -ნიშნა ლოგიკური სისტემების
 ალგებრული ანალიზი

რ ე ზ ი უ მ ე

განიხილება ალგებრების სპეციალური კლასი, ე. წ. ms_n -ალგებრები, რომლებიც წარმოადგენენ ლუკასევიჩ-ტარსკის L_n აღრიცხვის მოდელს. აგებულია ms_n -ალგებრების წარმოდგენის თეორია და L_n აღრიცხვის აქსიომატიკა; მოცემულია სისრულის თეორემის ალგებრული დამტკიცება აღნიშნული აღრიცხვებისათვის.

О НОСИТЕЛЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

НГУЕН ЗУЙ ТИЕН

В этой работе изучаются некоторые вопросы, связанные с понятием носителя вероятностных мер (распределений) в сепарабельных банаховых пространствах. В § 1 вводится понятие абсолютной непрерывности мер в слабом смысле и показано, что две меры эквивалентны между собой в этом смысле тогда и только тогда, когда их носители совпадают. В § 2 рассматриваются меры, носители которых являются линейными пространствами, и исследуются условия невырожденности таких мер. Мы получаем, в частности, другое доказательство известного результата Н. Н. Вахания о невырожденности гауссовских мер в пространствах l_p (см. [2]). Вводится также понятие допустимого сдвига в слабом смысле и показано, что носитель меры есть множество всех допустимых сдвигов в этом смысле.

§ 1. О носителях мер в сепарабельных метрических пространствах

Пусть X —сепарабельное метрическое пространство, $B(X)$ — σ -алгебра всех борелевских множеств пространства X и μ —некоторая вероятностная мера в $(X, B(X))$. Тогда носитель S_μ меры μ , по определению, является минимальным замкнутым подмножеством, которое имеет следующее свойство:

$$\mu(S_\mu) = 1. \quad (1.1)$$

Из определения носителя и из сепарабельности пространства X легко доказать, что

$$S_\mu = \{x \in X : \mu(G) > 0\}, \quad (1.2)$$

где G есть любое открытое подмножество в X , содержащее точку x .

Обратно, можно показать, что для любого замкнутого подмножества S сепарабельного метрического пространства существует хотя бы одна мера μ в $(X, B(X))$ такая, что

$$S_\mu = S,$$

т. е. S есть носитель меры μ . В самом деле, можно считать S сепарабельным метрическим подпространством пространства X . Следовательно,



существует счетное множество точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in S$, всюду плотное в S . Теперь мы берём последовательность чисел $\{p_i > 0\}$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Положим

$$\mu(\{x_i\}) = p_i,$$

$$\mu(\Delta) = \sum_{x_i \in \Delta} p_i,$$

где $\Delta \in B(X)$ и сумма берется по всем таким числам p_i , что $x_i \in \Delta$. Легко видеть, что μ представляет собой вероятностную меру в $B(X)$ и $S_\mu = S$.

Теперь пусть μ_1, μ_2 есть некоторые две вероятностные меры в $(X, B(X))$ и S_{μ_1}, S_{μ_2} есть их носители, соответственно. Мы напомним, что мера μ_1 называется абсолютно непрерывной относительно меры μ_2 (пишут $\mu_1 \ll \mu_2$), если $\mu_1(\Delta) = 0$ для всех Δ из $B(X)$, для которых $\mu_2(\Delta) = 0$. Если $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$, то пишут $\mu_1 \sim \mu_2$ и называют эти меры эквивалентными. Меры μ_1, μ_2 взаимно сингулярны (пишут $\mu_1 \perp \mu_2$), если существует множество $Q \in B(X)$ такое, что

$$\mu_1(Q) = \mu_2(X \setminus Q) = 0.$$

Теорема 1.1. Если $\mu_1 \ll \mu_2$, то $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$.

Доказательство. Пусть $\mu_1 \ll \mu_2$. Положим

$$\Delta = S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2}.$$

Так как $\mu_2(S_{\mu_2}) = 1$ и $\Delta \subset X \setminus S_{\mu_2}$, мы имеем

$$\mu_2(\Delta) = 0.$$

Именно поэтому

$$\mu_1(\Delta) = 0.$$

Отсюда из того, что

$$S_{\mu_1} = S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cup \Delta, \quad S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cap \Delta = \emptyset,$$

мы получаем

$$\mu_1(S_{\mu_1}) = \mu_1(S_{\mu_1} S_{\mu_2}) = 1.$$

Из определения носителя и из замкнутости подмножеств S_{μ_1}, S_{μ_2} следует, что

$$S_{\mu_1} S_{\mu_2} = S_{\mu_1},$$

т. е.

$$S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}.$$

Следствие 1.1. Если $\mu_1 \sim \mu_2$, то $S_{\mu_1} = S_{\mu_2}$.

Доказательство. Пусть $\mu_1 \sim \mu_2$, т. е. $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$.

Из теоремы 1.1 следует, что

$$S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2} \quad \text{и} \quad S_{\mu_2} \subset S_{\mu_1},$$

т. е. $S_{\mu_1} = S_{\mu_2}$.

Замечание 1.1. Из условия $S_{\mu_1} = S_{\mu_2}$ не следует, что $\mu_1 \sim \mu_2$. Следующий пример докажет это. Пусть $X = \mathbb{R}^1$, μ_1 есть некоторое дискретное распределение $\{p_i > 0\}$, которое сосредоточено в рациональных точках числовой оси, и μ_2 есть гауссовское распределение $N(0, \sigma^2)$. Ясно, что в этом случае

$$S_{\mu_1} = S_{\mu_2} = \mathbb{R}^1,$$

но $\mu_1 \perp \mu_2$, так как $\mu_1(Q) = \mu_2(\mathbb{R}^1 \setminus Q) = 0$, где Q есть множество всех иррациональных чисел.

Однако во всех случаях справедлива

Теорема 1.2. Если $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$, то $\mu_1(G) = 0$ для всех таких открытых подмножеств G из $B(X)$, для которых $\mu_2(G) = 0$.

Доказательство. Пусть G есть открытое подмножество, для которого $\mu_2(G) = 0$. Сначала мы докажем, что

$$G \subset X \setminus S_{\mu_2}. \quad (1.3)$$

В самом деле, допуская противное, имеем

$$G \cap S_{\mu_2} \neq \emptyset.$$

Следовательно, существует хотя бы один элемент $x_0 \in G \cap S_{\mu_2}$, но поскольку G открыто, существует открытое подмножество Δ_0 такое, что

$$x_0 \in \Delta_0 \subset G. \quad (1.4)$$

С другой стороны, нам известно (см. (1.2)), что

$$S_{\mu_2} = \{x \in X : \mu_2(\Delta) > 0\}, \quad (1.5)$$

где Δ есть любое открытое подмножество, содержащее точку x , и так как $x_0 \in S_{\mu_2}$ из (1.4) и (1.5), мы получаем, что

$$\mu_2(G) \geq \mu_2(\Delta_0) > 0. \quad (1.6)$$

Это противоречит условию $\mu_2(G) = 0$. Итак, соотношение (1.3) доказано.

Из условия $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$ мы имеем:

$$X \setminus S_{\mu_2} \subset X \setminus S_{\mu_1}.$$

Отсюда и из (1.3) следует, что

$$G \subset X \setminus S_{\mu_1}.$$

Поэтому

$$0 \leq \mu_1(G) \leq \mu_1(X \setminus S_{\mu_1}) = 0$$

и, следовательно, $\mu_1(G) = 0$. Теорема 1.2 полностью доказана.

Следствие 1.2. Если $S_{\mu_1} = S_{\mu_2}$, то для любого открытого подмножества G из $B(X)$ $\mu_1(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_2(G) = 0$.

Теперь естественно ввести

Определение 1.1. Мера μ_1 называется абсолютно непрерывной в слабом смысле относительно меры μ_2 (пишем $\mu_1 \ll_{\text{сл}} \mu_2$), если $\mu_1(G) = 0$



для всех открытых подмножеств G из $B(X)$, для которых $\mu_2(G) = 0$ ^{сл} $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$, то пишем $\mu_1 \sim \mu_2$ и называем эти меры эквивалентными в слабом смысле.

Теорема 1.3. Если $\mu_1 \ll \mu_2$, то $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$.

Доказательство. Пусть $\mu_1 \ll \mu_2$. Положим

$$G = X \setminus S_{\mu_2}.$$

Из замкнутости носителя следует, что G есть открытое подмножество. Ясно, что

$$\mu_2(G) = \mu_2(X \setminus S_{\mu_2}) = 0.$$

Именно поэтому

$$\mu_1(G) = 0.$$

Замечая, что $S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2} = X \setminus S_{\mu_2} = G$, мы имеем:

$$0 \leq \mu_1(S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2}) \leq \mu_1(G) = 0,$$

т. е. $\mu_1(S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2}) = 0$.

С другой стороны,

$$S_{\mu_1} = S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cup (S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2}), \quad S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cap (S_{\mu_1} \setminus S_{\mu_2}) = \emptyset.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\mu_1(S_{\mu_1}) = \mu_1(S_{\mu_1} S_{\mu_2}) = 1.$$

Из определения носителя и из замкнутости подмножеств S_{μ_1} , S_{μ_2} следует, что

$$S_{\mu_1} S_{\mu_2} = S_{\mu_1},$$

$$\text{т. е. } S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1.2 и 1.3 вытекает

Следствие 1.3. $\mu_1 \ll \mu_2$ тогда и только тогда, когда $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$.

Следовательно, $\mu_1 \sim \mu_2$ тогда и только тогда, когда $S_{\mu_1} = S_{\mu_2}$.

Итак, условие $\mu_1 \sim \mu_2$ строго сильнее условия $\mu_1 \sim \mu_2$ (см. замечание 1.1).

§ 2. О мерах, носители которых являются замкнутыми подпространствами

Пусть X — сепарабельное банахово пространство и μ — некоторая вероятностная мера в $(X, B(X))$. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что среднее значение меры μ (определяемое, как известно, в смысле интеграла Петтиса) существует и равняется нулю. Напомним, что мера μ называется невырожденной, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in X^*$, $f \neq 0$, $f(x)$ является невырожденной случайной ве-

личной, т. е. $\sigma_f^2 = E[f(x)]^2 > 0$ (σ_f^2 может равняться бесконечности), E , как обычно, обозначает математическое ожидание (интеграл Лебега по мере μ).

Лемма 2.1. Если $S_\mu = X$, то мера μ невырождена.

Доказательство. В самом деле, если μ вырождена, то существует такой функционал $f_0 \in X^*$, что $f_0 \neq 0$ и $f_0(x)$ является вырожденной случайной величиной. Рассмотрим

$$S_{f_0} = \{x \in X : f_0(x) = 0\}.$$

Легко видеть, что S_{f_0} является замкнутым подмножеством и $\mu(S_{f_0}) = 1$. Из определения носителя следует, что

$$S_{f_0} = S_\mu = X,$$

т. е. $f_0(x) = 0$ для любого $x \in X$. Это противоречит условию $f_0 \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если мера μ невырождена и носитель меры μ является замкнутым подпространством, то $S_\mu = X$.

Доказательство. В самом деле, если $S_\mu \neq X$, то, по теореме Хана-Банаха, существует такой ненулевой функционал $f_0 \in X^*$, что $f_0 = 0$ на S_μ . Тогда мы имеем, что

$$\sigma_{f_0}^2 = \int_X f_0^2(x) d\mu(x) = \int_{S_\mu} f_0^2(x) d\mu(x) = 0.$$

Это противоречит невырожденности меры μ . Лемма доказана.

Из этих лемм вытекает следующая

Теорема 2.1. Пусть μ — некоторая вероятностная мера в $(X, B(X))$ и пусть носитель меры является замкнутым подпространством. Тогда для того, чтобы мера μ была невырождена, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$S_\mu = X,$$

т. е. $S_\mu = X$ тогда и только тогда, когда $\sigma_f^2 > 0$ для любого $f \in X^*$, $f \neq 0$.

С другой стороны, из (1.2) и из определения открытого подмножества легко видеть, что

$$S_\mu = \{x \in X : \mu(O) > 0\}, \quad (2.1)$$

где O есть любой шар в X с ненулевым радиусом, содержащий точку x . Отсюда и из теоремы 2.1 мы получаем, что $\{x \in X : \mu(O) > 0\} = X$ тогда и только тогда, когда $\sigma_f^2 > 0$ для любого $f \in X^*$, $f \neq 0$.

Итак, получаем

Следствие 2.1 Если носитель меры μ является замкнутым подпространством, то μ невырождена тогда и только тогда, когда μ — мера любого шара в X с ненулевым радиусом положительна.

Напомним, что вероятностная мера μ в $(X, B(X))$ называется гауссовской, если для каждого функционала $f \in X^*$ случайная величина $f(x)$



имеет гауссовское распределение (на числовой оси). Известно, что носитель любой гауссовской меры μ в $(X, B(X))$ есть замкнутое подпространство (см. [4], стр. 11). Отсюда и из следствия 2.1 вытекает

Следствие 2.2. Если μ — некоторая гауссовская мера в $(X, B(X))$, то μ невырождена тогда и только тогда, когда μ — мера любого шара в X с ненулевым радиусом положительна.

Далее, известно, что все пространства l_p ($1 \leq p < +\infty$) сепарабельны. Отсюда и из следствия 2.2 мы получаем результат Н. Н. Вахания (см. [1], стр. 63).

Следствие 2.3. Если μ — некоторая гауссовская мера в l_p ($1 \leq p < +\infty$), то μ невырождена тогда и только тогда, когда μ — мера любого шара в l_p с ненулевым радиусом положительна.

Замечание 2.1. Н. Н. Вахания доказал следствие 2.3 для l_p ($1 < p < +\infty$) и предсказал, что утверждение следствия 2.3 справедливо для l_1 (см [1], стр. 73).

Замечание 2.2. Теорема 2.1 не остается верной, если X не сепарабельно (например, $X = l_\infty$). Более того, Н. Н. Вахания показал, что каково бы ни было число $r > 0$, в пространстве l_∞ существует невырожденная гауссовская мера μ такая, что μ -мера любого шара с радиусом r равна нулю, т. е. $\mu(O_r(a)) = 0$, где $a \in l_\infty$ (см. [1], стр. 73–74).

Естественно, возникает следующий вопрос: всегда ли в $(X, B(X))$ существует мера μ , носитель которой является замкнутым подпространством?

Обозначим $P(X)$ множество всех мер μ в $(X, B(X))$, носители которых являются замкнутыми подпространствами пространства X .

Теорема 2.2. Пусть S — некоторое замкнутое подпространство пространства X . Тогда в $(X, B(X))$ существует такая гауссовская мера μ , что $S_\mu = S$.

Доказательство этой теоремы использует известное (см. [3], [4], [5]) понятие абстрактной меры Винера и основано на следующих двух леммах:

Лемма 2.3. (см. [3]). Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда существует абстрактная винеровская мера в $(X, B(X))$.

Лемма 2.4. (см. [4], стр. 11). Пусть X — сепарабельное или рефлексивное банахово пространство и пусть μ — гауссовская мера в $(X, B(X))$. μ является абстрактной винеровской мерой тогда и только тогда, когда из условия $\int_X f^2(x) d\mu(x) = 0$ вытекает, что $f = 0$, т. е. когда $\sigma_f^2 > 0$ для любого $f \in X^*$, $f \neq 0$.

Доказательство теоремы 2.2. Предположим сначала, что $S = X$. Из теоремы 2.1 и леммы 2.4 вытекает, что если μ — абстрактная винеровская мера (абстрактная винеровская мера является гауссовской мерой), то $S_\mu = X$. Таким образом, по лемме 2.3, в любом сепарабельном

банаховом пространстве всегда существует гауссовская мера μ такая, что $S_\mu = X = S$. Теперь пусть S — некоторое замкнутое подпространство пространства X . Тогда, как было показано выше, в $(S, B(S))$ существует гауссовская мера $\tilde{\mu}$ такая, что $S_{\tilde{\mu}} = S$. Теперь определим меру μ в $(X, B(X))$ следующим образом:

$$\mu(\Delta) = \tilde{\mu}(\Delta \cap S)$$

для каждого $\Delta \in B(X)$. Легко проверить, что вместе с $\tilde{\mu}$ мера μ также есть гауссовская мера и $S_\mu = S_{\tilde{\mu}} = S$. Теорема полностью доказана.

Итак, теорема 2.2 показывает, что множество $P(X)$ непустое и „достаточно богатое“.

Теперь пусть μ — некоторая вероятностная мера в $(X, B(X))$. Введем оператор сдвига в пространство X .

$$T_a x = x + a,$$

где a — некоторый элемент в X . Через μ_a обозначим меру, определенную соотношением

$$\mu_a(\Delta) = \mu(T_{-a}\Delta) = \mu\{x \in X : T_a x \in \Delta\}, \quad \Delta \in B(X).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что a является допустимым сдвигом в слабом смысле меры μ , если $\mu_a \ll \mu$.

Положим

$$K_\mu = \{a \in X : \mu_a \ll \mu\},$$

и пусть, как было выше, S_{μ_a} обозначает носитель меры μ_a .

Лемма 2.5. Для любого $a \in X$

$$S_{\mu_a} = a + S_\mu,$$

где $a + S_\mu = \{a + x : x \in S_\mu\}$.

Доказательство. Пусть $y \in a + S_\mu$, т. е. $y = a + x$, $x \in S_\mu$. Пусть G есть любое открытое подмножество, содержащее точку y , т. е. $y = a + x = T_a x \in G$. Следовательно $x \in T_{-a}G$. Из непрерывности оператора T_a имеем, что $T_{-a}G$ есть открытое множество и, поскольку $x \in S_\mu$, получаем, в силу соотношения (1.2), что

$$\mu_a(G) = \mu(T_{-a}G) > 0.$$

Поэтому $y \in S_{\mu_a}$, т. е. $a + S_\mu \subset S_{\mu_a}$. Обратно, пусть $y \in \overline{a + S_\mu}$, т. е. $y = a + x$ и $x \in S_\mu$. Из (1.2) следует, что существует открытое подмножество G_0 , содержащее точку x и $\mu(G_0) > 0$. Из непрерывности оператора T_{-a} и из соотношения

$$\mu_a(T_a G_0) = \mu(G_0) > 0$$

следует, что $y \in S_{\mu_a}$, т. е. $a + S_\mu \supset S_{\mu_a}$. Лемма полностью доказана.



Если теперь $\mu_a \stackrel{\text{сл}}{\ll} \mu$ то, по теореме 1.3, $S_{\mu_a} = S_{\mu}$. Отсюда и из леммы 2.5 следует, что

$$a + S_{\mu} = S_{\mu}. \quad (2.2)$$

Если S_{μ} есть замкнутое подпространство пространства X , то из (2.2) следует, что $a \in S_{\mu}$ и поэтому

$$a + S_{\mu} = S_{\mu}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) и следствия 1.3 мы имеем $\mu_a \stackrel{\text{сл}}{\sim} \mu$. Именно поэтому

$$\begin{aligned} K_{\mu} &= \{a \in X : \mu_a \stackrel{\text{сл}}{\sim} \mu\} \\ &= \{a \in X : a + S_{\mu} = S_{\mu}\} = S_{\mu}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.3. Пусть носитель S_{μ} меры μ является замкнутым подпространством. Тогда из условия $\mu_a \stackrel{\text{сл}}{\ll} \mu$ следует, что $\mu_a \stackrel{\text{сл}}{\sim} \mu$. Более того, $K_{\mu} = S_{\mu}$.

Последнее предложение стоит выделить и сформулировать как

Следствие 2.4. Носитель меры μ есть множество всех допустимых сдвигов в слабом смысле.

(Представлено 15. 11. 1972)

Кафедра теории случайных процессов

ლიტერატურა

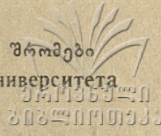
1. Н. Н. Вахания, Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тбилиси, 1971.
2. Н. Н. Вахания, Теория вероятности и ее применения, 1966, 11, № 3, 524—528.
3. L. Gross, Proceedings of Fifth Berkley Symposium. University of California Press, Berkley, California, vol. 2, part 1 (1965), 31—42.
4. B. S. Rajput, Institute of Statistics Mimeo Series, № 713. University of North Carolina, Chapel Hill, September, 1970.
5. H. Sato, Nagoya Math. J., 36 (1969).

58796 ზუი ტინი

ალბათურ ზომათა სუპორტის (მატარებლის) შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

შემოღებულია ერთი ზომის მეორის მიმართ სუსტი აზრით აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნება და ნაჩვენებია, რომ ორი ზომა ამ აზრით ურთიერთრეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მათი სუპორტები ერთმანეთს ემთხვევა. გარდა ამისა, შესწავლილია ზომები, რომელთა სუპორტები წარმოადგენენ წრფივ ქვესივრცეებს და მოქმენილია ასეთ ზომათა გადაუგვარებლობის პირობები. შემოღებულია სუსტი აზრით დასაშვები წანაცვლების ცნება და დამტკიცებულია, რომ ზომის სუპორტი წარმოადგენს ამ აზრით დასაშვები წანაცვლებების სიმრავლეს.



ВЛИЯНИЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЛЕГИРОВАННОГО p - $InSb$

Д. И. АЛАДАШВИЛИ, В. В. ГАЛАВАНОВ

Валентная зона $InSb$ имеет сложную структуру. Это создает известные трудности при интерпретации многих физических явлений в $InSb$. В частности, остается нерешенным вопрос о роли легких дырок в эффектах переноса: данные о величине концентрации и подвижности легких дырок противоречивы [1]. Зона легких дырок подобно зоне проводимости сильно отклоняется от параболы. Можно считать, что масса легких дырок m_2 , так же, как и масса электрона m_n , пропорциональна ширине запрещенной зоны E_g . Учитывая большой барический коэффициент ширины запрещенной зоны $InSb$ ($\alpha = 15 \cdot 10^{-6}$ эв/бар [2, 3]), следует ожидать заметного изменения электропроводности p - $InSb$ под давлением вследствие изменения концентрации p_2 и подвижности u_2 легких дырок. Влиянием зоны проводимости и, соответственно, давления на кривизну зоны тяжелых дырок, по-видимому, можно пренебречь [1].

В данной работе проведено исследование влияния гидростатического давления на электропроводность p - $InSb$ до 9 кбар при температурах 295, 273 и 203°K. Измерения проводились в автономной стальной камере высокого давления [3]. В качестве рабочего вещества использовалось трансформаторное масло. Давление внутри камеры определялось по изменению сопротивления манганиновой катушки.

Образцы с концентрацией акцепторов $Na \leq 10^{17}$ см⁻³ при комнатной температуре обладают смешанной проводимостью, в которой существенную роль играют электроны. Поэтому для исследования примесной (дырочной) проводимости при комнатной температуре необходимо брать образцы с высокой концентрацией. Нами исследовались образцы с $p = 10^{17} - 10^{18}$ см⁻³. Перед измерением все образцы шлифовались до размеров $10 \times 2,5 \times 1,5$ мм³ и травились в СР-4. Токовые и потенциальные контакты к образцу припаивались индием.

На рис. 1, 2 и 3 приводятся результаты исследования для образца с $p = 1,6 \cdot 10^{17}$ см⁻³ при температурах 203, 295 и 273°K соответственно. Как видно из рисунков, при 203°K электропроводность σ увеличивается с ростом давления, а при 295°K наблюдается сильный ее спад. При



$T=273^{\circ}K$ в начале σ уменьшается с ростом давления, достигает минимума, после чего кривая $\sigma(P)$ имеет тенденцию к росту.

Для анализа экспериментальных данных запишем электропроводность в случае трехзонной модели в виде:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_n = e(p_1 u_1 + p_2 u_2 + n u_n),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$ — проводимости, созданные тяжелыми дырками, легкими дырками и электронами, соответственно; $p_1, p_2, n, u_1, u_2, u_n$ соответственно концентрации и подвижности. Из уравнения нейтральности и закона действующих масс следует, что в исследуемом образце при $203^{\circ}K$ вкладом σ_n в σ (около 0,1%) можно пренебречь. Если обозначить

$$\frac{p_2}{p_1} = a; \quad \frac{u_2}{u_1} = b; \quad p_1 + p_2 = p_0; \quad \sigma_0^1 = e u_1 p_0$$

и пренебречь величиной $b a^2$ по сравнению с единицей, то σ можно записать в виде:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0^1 [1 + a(b-1)]. \quad (1)$$

В формуле (1) σ_0^1 можно считать независимой от давления, т. к. при полной ионизации примесей $p_0 = p_1 + p_2 = \text{const}$, а подвижность тяжелых дырок u_1 , зависящая от эффективной массы m_1 , также при $m_1 = \text{const}$, должна оставаться постоянной.

Поскольку $m_2 = \frac{m_{02} E_g}{E_g^0} = m_{02} \left(1 + \frac{\alpha P}{E_g^0}\right)$, а $m_1 = \text{const}$, то для a можно написать:

$$a = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{3/2} = \left(\frac{m_{02}}{m_1}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{\alpha P}{E_g^0}\right)^{3/2},$$

где m_{02} — масса легких дырок при нулевом давлении, E_g^0 — ширина запрещенной зоны при $P=0$.

Учитывая смешанный характер рассеяния дырок [4] на ионах примеси, акустических и оптических колебаниях решетки и представляя подвижности тяжелых и легких дырок в виде:

$$\frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_{i1}} + \frac{1}{u_{a1}} + \frac{1}{u_{o1}}; \quad \frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_{i2}} + \frac{1}{u_{a2}} + \frac{1}{u_{o2}}$$

(индексы i, a, o относятся соответственно к ионам, акустическим и оптическим фононам), для b после ряда преобразований получим

$$b = \frac{u_2}{u_1} = b_i \frac{1 + \frac{u_{a1}}{u_{o1}} + \frac{u_{a1}}{u_{i1}}}{\frac{b_i}{b_a} + \frac{b_i}{b_o} \frac{u_{a1}}{u_{o1}} + \frac{u_{a1}}{u_{i1}}},$$

$$\text{где } b_i = \frac{u_{i2}}{u_{i1}} = \sqrt{\frac{m_1^{(5)}}{m_2}}; \quad b_a = \frac{u_{a2}}{u_{a1}} = \frac{m_1}{m_2} \quad [5, 6]$$

$$b_0 = \frac{u_{02}}{u_{01}} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^\kappa \left(\kappa = \frac{1}{2}, 1^*\right).$$

В расчетах отношение $\frac{m_1}{m_{02}}$ принималось равным 25 $\left(\frac{m_1}{m_{02}} = \frac{0,4}{0,016} = 25\right)$.

На рис. 1 даны результаты теоретических расчетов (кривая 2—для $\kappa = \frac{1}{2}$, кривая 3—для $\kappa = 1$) и экспериментальные данные (кривая 1) при 203° К. Как видно из рисунка, наблюдаемый эффект хорошо объясняется теорией, учитывающей изменение эффективной массы легких дырок с давлением.

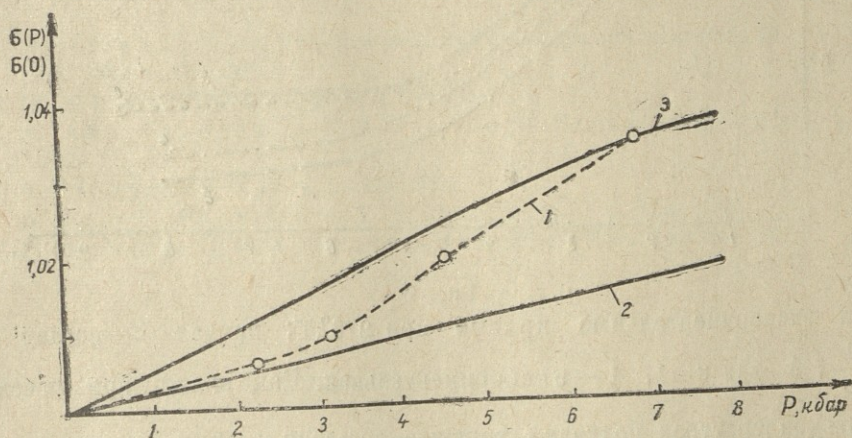


Рис. 1

При комнатной температуре и при $P=0$ σ_n составляет 26—27% от общей проводимости σ . А при $P=8$ кбар σ_n составляет 1—1,5% от σ , тогда как увеличение дырочной проводимости составляет 3—4%. Таким образом, почти весь эффект обусловлен электронами. Результаты теоретических расчетов и данные эксперимента при комнатной температуре приведены на рис. 2 (кривая 2—расчет при $\kappa = \frac{1}{2}$, кривая 3—для $\kappa = 1$, кривая 4—показывает электронный вклад, т. е. $\sigma_1 + \sigma_2$ считается постоянной, меняется с давлением только $\sigma_n(\kappa = 1)$; кривая 1—экспериментальные данные).

При температуре 273° К наблюдается уменьшение проводимости в интервале до 6 кбар за счет уменьшения электронной составляющей от

* При рассеянии на фоне χ роль межзонного рассеяния до конца не выяснена. Поэтому расчет проводился нами для случаев $\kappa = \frac{1}{2}$ и $\kappa = 1$.



12% до 0,01%. Около 7 кбар, когда электроны уже не сказываются, начинает возрастать за счет увеличения σ_2 . На рис. 3 даны теоретиче-

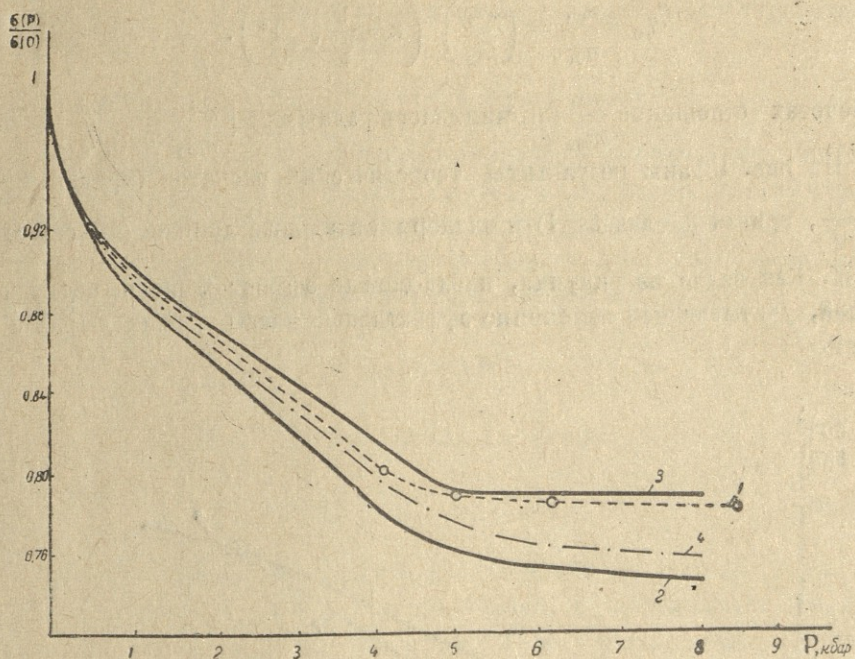


Рис. 2

ские и экспериментальные кривые при $273^\circ K$; кривая 2—расчет для $\kappa = \frac{1}{2}$, 3—для $\kappa=1$, 1—экспериментальная. Как видно, при рассмотренных температурах получаем хорошее согласие теории с экспериментом. При этом с экспериментом лучше согласуется случай $\kappa=1$ *

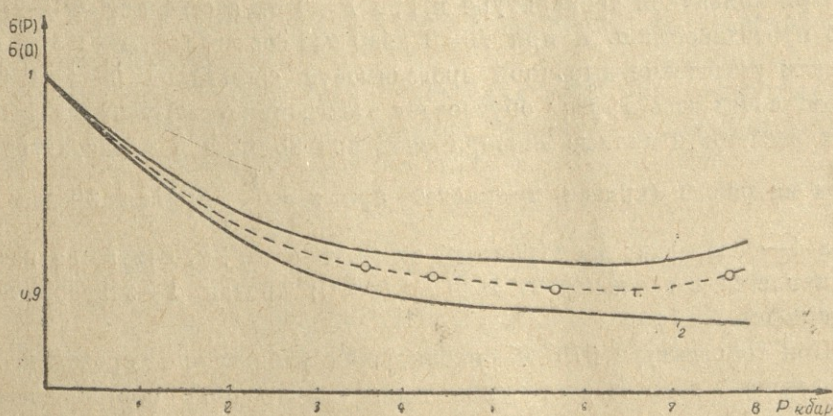


Рис. 3

* Как показал Ф. М. Гашим-заде при $T < \Theta = 290^\circ K$ и близок к единице (частное сообщение).

Для получения чисто дырочной (без вклада электронов) проводимости при комнатной температуре нами был измерен также образец с $p = 1,6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Измерения показали, что при всех температурах электропроводность с давлением изменяется слабо (на 1—2%). Теоретический расчет показывает, что в таких образцах вклад легких дырок в проводимость мал. Этим, по-видимому, объясняется слабое изменение σ с P .

В заключение авторы выражают благодарность А. С. Волкову и Х. М. Абдувахидову за помощь в работе и участие в обсуждении полученных результатов.

(Представлено 10. XII. 1971)

Кафедра
физики твердого тела

ლიტერატურა

1. О. Маделунг. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп. Изд. „Мир“, М., 1967.
2. R. W. Keyes, Phys. Rev., 99, 490, 1955.
3. Х. М. Абдувахидов, А. С. Волков, В. В. Галаванов, ФТН, 4, 7, 1409, 1970.
4. В. В. Галаванов, ФТП 4, 5, 853, 1970.
5. Г. П. Бир, Э. Нармантас, Т. Е. Пикус, ФТТ 4, 1180, 1962.
6. Н. Е. Ehrenreich, A. Overhauser, Phys. Rev., 104, 331, 1956.

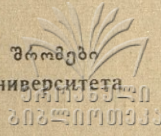
დ. ალაღაშვილი, ბ. გალაგანოვი

ჰიდროსტატიკური წნევის გავლენა ლეგირებულ p-InSb-ის გამტარობაზე

რ ე ზ ი უ მ ე

შესწავლილია ჰიდროსტატიკური წნევის გავლენა p-InSb-ის გამტარობაზე 295, 273 და 203°K ტემპერატურებზე წნევის 0—9 კ ბარ ინტერვალში. ნაჩვენებია: 1) ნიმუშის $1,6 \cdot 10^{17} \text{ სმ}^{-3}$ კონცენტრაციისათვის 295°K ტემპერატურაზე ნიმუშის გამტარობა წნევის გადიდებით მცირდება, 273°K ტემპერატურაზე გამტარობა წნევის გადიდებისას ჯერ მცირდება, აღწევს მინიმუმს და შემდეგ აქვს ზრდის ტენდენცია, ხოლო 203°K ტემპერატურაზე გამტარობა ყოველთვის იზრდება წნევის გადიდებით; 2) ნიმუშის კონცენტრაციისათვის $p = 1,6 \cdot 10^{18} \text{ სმ}^{-3}$ წნევის ეფექტი ყოველთვის მცირეა.

მიღებული შედეგები კარგად ემთხვევა თეორიას, რომელიც ითვალისწინებს მსუბუქი ხვრელების როლის ზრდას წნევის გადიდებისას და ხვრელების გაბნევას მინანტივების იონებზე, ოპტიკურ და აკუსტიკურ ფონონებზე.



ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ДАННЫХ НАД ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПЛАСТОМ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Г. Д. МАНАГАДЗЕ

Как известно, наблюдаемые гравитационные аномалии часто подвергаются различным преобразованиям. В результате одного из таких преобразований

$$\delta U(x, l) = U(x+l) - U(x-l) \quad (1)$$

можно из наблюдаемой аномалии исключить абсолютное значение силы тяжести, а в некоторых случаях—ослабить влияние регионального гравитационного фона. В формуле (1) под $U(x)$ подразумевается исследуемая гравитационная аномалия, а под l —некоторый подбираемый нами линейный параметр, в интервале которого из наблюдаемых данных определяется значение преобразованной $\delta U(x, l)$ аномалии.

Е. Г. Булах, пользуясь некоторым интегральным соотношением (1), приводящим в одном конкретном случае к преобразованию (1), разработал метод подбора и прямой метод интерпретации гравитационных аномалий.

В дополнение упомянутых методов, исходя из того же соотношения (1), предлагаем и другие варианты расчетных формул для случаев вертикального пласта и вертикальной материальной полуплоскости, причем при интерпретации будем пользоваться абсциссами характерных точек и экстремальными значениями преобразованных $\delta U_{xz}(x, l)$ и $\delta U_{zz}(x, l)$ аномалий.

Как известно, горизонтальный и вертикальный градиент аномалии силы тяжести для вертикального пласта и вертикальной материальной полуплоскости даются следующими формулами [2], [3]:

$$W_{xz} = f\sigma \ln \frac{(x-d_1)^2 + h^2}{(x+d_1)^2 + h^2}, \quad (2)$$

$$W_{zz} = 2f\sigma \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2hd_1}{x^2 + h^2 - d_1^2}, \quad (3)$$

$$W_{xz} = -2f\mu \frac{x}{x^2 + h^2}, \quad (4)$$

а вертикальный градиент вертикальной материальной полуплоскости можно получить из формулы



$$W_{zz} = -2 f \mu \frac{h}{x^2 + h^2}, \quad (5)$$

причем в этих формулах f есть гравитационная постоянная, h —глубина залегания грани пласта или полуплоскости, d_1 —половина мощности пласта, σ —его избыточная плотность, μ —поверхностная плотность полуплоскости, а x —текущая координата профиля.

Преобразование (2), (3), (4), (5) по формуле (1) дает:

$$\delta W_{xz}(x, l) = f \sigma \left[\ln \frac{(x+l-d_1)^2 + h^2}{(x+l+d_1)^2 + h^2} - \ln \frac{(x-l-d_1)^2 + h^2}{(x-l+d_1)^2 + h^2} \right], \quad (6)$$

$$\delta W_{zz}(x, l) = 2 f \sigma \left[\text{arc tg} \frac{2 h d_1}{(x+l)^2 + h^2 - d_1^2} - \text{arc tg} \frac{2 h d_1}{(x-l)^2 + h^2 - d_1^2} \right], \quad (7)$$

$$\delta W_{xz}(x, l) = -2 f \mu \left[\frac{x+l}{(x+l)^2 + h^2} - \frac{x-l}{(x-l)^2 + h^2} \right], \quad (8)$$

$$\delta W_{zz}(x, l) = 2 f \mu \left[\frac{h}{(x+l)^2 + h^2} - \frac{h}{(x-l)^2 + h^2} \right]. \quad (9)$$

Для определения интересующих нас параметров вертикального пласта: глубины— h , мощности— d и избыточной плотности— σ будем пользоваться теми абсциссами точек кривых функций (6) и (7), в которых $\delta W_{xz}(x, l)$ и $\delta W_{zz}(x, l)$ принимают соответственно нулевые и экстремальные значения.

Действительно, приравняв выражение (6) к нулю и решая его относительно x_0 , т. е. относительно того значения абсциссы, в которых $\delta W_{xz}(x, l)$ равняется нулю, найдем

$$x_0^2 - h^2 - d^2 - l^2 = 0. \quad (10)$$

Если продифференцировать выражение (7) по x и приравнять нулю, то для нахождения абсциссы экстремальных значений $\delta W_{zz}(x, l)$ получаем

$$3 x_m^4 + 2 x_m^2 (h^2 - d^2 - l^2) + 2 d^2 l^2 - 2 h^2 d^2 - 2 h^2 l^2 - d^4 - h^4 - l^4 = 0. \quad (11)$$

Совместное решение уравнений (10) и (11) для глубины пласта дает

$$h = \left[\frac{2 |x_m|^2 |x_0|^2 + |x_0|^4 + 4 l^4 - 3 |x_m|^4 - 4 |x_0|^2 l^2}{4 (|x_m|^2 - l^2)} \right], \quad (12)$$

а для мощности имеем

$$d = 2 \left[|x_0|^2 - (h^2 + l^2) \right]^{1/2}, \quad (13)$$

где

$$|x_m| = \frac{|x_{max}| + |x_{min}|}{2},$$

и

$$|x_0| = \frac{|+x_0| + |-x_0|}{2}.$$

Зная x_m , x_0 и h , для определения избыточной плотности находим

$$\sigma [\delta W_{xz}(x, l)] = \frac{[\delta W_{xz}(x, l)]_m}{\left[\ln \frac{(|x_0| + l - d_1)^2 + h^2}{(|x_0| + l + d_1)^2 + h^2} - \ln \frac{(|x_0| - l - d_1)^2 + h^2}{(|x_0| - l + d_1)^2 + h^2} \right]}, \quad (14)$$

и

$$\sigma [\delta W_{zz}(x, l)] = \frac{[\delta W_{zz}(x, l)]_m}{2 \left[\operatorname{arctg} \frac{2hd_1}{(|x_m| + l)^2 + h^2 - d_1^2} - \operatorname{arctg} \frac{2hd_1}{(|x_m| - l)^2 + h^2 - d_1^2} \right]}. \quad (15)$$

Для пластов малой мощности параметры h , d и σ можно определить простыми и для вычисления более удобными формулами, если исходить из аналитических выражений (4) и (5), соответствующих вертикальной материальной полуплоскости.

Действительно, исходя из формулы (8), для определения глубины полуплоскости будем пользоваться абсциссами тех точек, в которых

$$[\delta W_{xz}(x, l)]_{x=x_0} = -2f\mu \left[\frac{x_0 + l}{(x_0 + l)^2 + h^2} - \frac{x_0 - l}{(x_0 - l)^2 + h^2} \right] = 0,$$

или

$$x_0^2 - h^2 - l^2 = 0, \quad (16)$$

откуда

$$h = [|x_0|^2 - l^2]^{1/2}. \quad (17)$$

Для определения поверхностной плотности используем формулу

$$\mu = \frac{[\delta W_{xz}(x, l)]_m}{-2f \left[\frac{|x_m| + l}{(|x_m| + l)^2 + h^2} - \frac{|x_m| - l}{(|x_m| - l)^2 + h^2} \right]}. \quad (18)$$

Если исходить из выражения (9), тогда для определения полуплоскости воспользуемся абсциссами точек кривой δW_{zz} , при которых функция принимает экстремальные значения, т. е. дифференцируя (9) по x и приравнявая нулю, получаем

$$3x_m^4 + 2x_m^2(h^2 - l^2) - 2h^2l^2 - h^4 - l^4 = 0, \quad (19)$$

откуда

$$h = [2x_m^2 - l^2]^{1/2}. \quad (20)$$

Зная x_m и h , поверхностную плотность можно определить формулой

$$\mu = \frac{[\delta W_{zz}(x, l)]_m}{-2f \left[\frac{h}{(x+l)^2 + h^2} - \frac{h}{(x-l)^2 + h^2} \right]}. \quad (21)$$

Этим результатом в некоторых случаях можно воспользоваться для определения мощности вертикального пласта, если принять во внимание то обстоятельство, что гравитационный эффект градиентов W_{xz} и W_{zz} вертикальной материальной полуплоскости не отличается от эффекта W_{xz} и W_{zz} вертикального пласта мощности d больше чем на 2%, когда $d < \frac{h}{2}$.

Таким образом, если задана избыточная плотность σ для маломощного пласта, пользуясь формулой $\mu = \sigma \cdot d$, можно определить его мощность

$$d = \frac{\mu}{\sigma} \quad (22)$$

(Представлено 5. I. 1972)

Кафедра геофизики

ლიტერატურა

1. Е. Г. Булах, Интегральные соотношения для интерпретации гравитационных данных. „Наукова думка“, Киев, 1965.
2. Б. А. Андреев, И. Г. Клущин, Геологическое истолкование гравитационных данных. Гостоптехиздат, 1962.
3. А. К. Моловичко, Основной курс гравиразведки. Пермь, 1963.

გ. მანავაძე

გრავიტაციული მოცემულობების ინტერპრეტაციის საკითხის
 შესახებ ვერტიკალური ფენისა და ვერტიკალური მატერიალური
 ნახევარსიბრტყის განსწავლვის

რეზიუმე

შრომში მოცემულია ე. გ. ბულახის მიერ მოწოდებული $\delta U(x, l) = U(x + l) - U(x - l)$ ფუნქციის გამოყენებით ვერტიკალური ფენისა და ვერტიკალური მატერიალური ნახევარსიბრტყის შესაბამისი δW_{xz} და δW_{zz} ტრანსფორმირებული ანომალიის ინტერპრეტაციის ორი ხერხი.



თავისუფალ ატმოსფეროში ჯარის რეჟიმულ განხილვებთან მისაღებად შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ნორმალური კანონის გამოყენება

ზ. ხვედელიძე, რ. ზელიძე

უკანასკნელ წლებში თანამედროვე მეტეოროლოგიაში ამინდის პროგნოზისათვის გამომთვლელი ელექტრონული მანქანების გამოყენებამ დიდი ყურადღება მიიპყრო. ჯარის რეჟიმულ მახასიათებელთა შესწავლას. დასავა საკითხი იმის შესახებ, შეიძლება თუ არა მაქსიმალური განაწილების კანონის გამოყენება ჯარის რეჟიმის დასადგენად.

სტატისტიკურ მონაცემებზე დაყრდნობით ი. გუტერმანმა აჩვენა, რომ მაქსიმალური განაწილების გამოყენება ჯარის სიჩქარისათვის არაზუსტ შედეგებს იძლევა [1].

ჩ. ბრუკსის, ჩ. დერსტის და ნ. კარუზერსის მიერ მათემატიკურად ნაჩვენები იქნა, რომ თუ ჯარის სიჩქარის განედურ და მერიდიანულ კომპონენტებს განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს, მაშინ ჯარის ვექტორის განაწილება ემორჩილება შემთხვევით სიდიდეთა ნორმალური განაწილების კანონს [2].

გამოთვლებმა აჩვენეს, რომ ჯარის სიჩქარის განედური და მერიდიანული კომპონენტების საშუალო კვადრატული გადახრა დაახლოებით ერთმანეთის ტოლია. ამ შემთხვევაში განაწილება არის არა მარტო ნორმალური, არამედ წრიულიც. დაბალ სიმაღლეებზე (1000 მეტრამდე) ანალოგიური შემთხვევები შემჩნეული იქნა დღეშეთის რაიონისათვის [4].

ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ ჯარის ვექტორი მოთავსებული იქნება $C_1(u_1v_1) - C_2(u_2v_2)$ საზღვრებში, გამოითვლება ფორმულით:

$$F = \frac{1}{\pi\sigma_r^2} \int \int_{u_1 v_1}^{u^2 v^2} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{\sigma_r^2}\right) du dv \quad (1)$$

აქ σ_r^2 არის ჯარის ვექტორის საშუალო კვადრატული გადახრა, φ^2 არის გადახრის მოდულის კვადრატი, u და v კი ჯარის სიჩქარის კომპონენტები.

პოლარულ კოორდინატებში, ალბათობა იმისა, რომ თითოეული ვექტორის ბოლო მოთავსებული იყოს ელემენტარული ფართობის ($\varphi d\theta d\varphi$) შიგნით ტოლია:

$$\frac{1}{\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{\sigma_r^2}\right) \varphi d\theta d\varphi. \quad (2)$$



თუ პოლუსად მივიღებთ ქარის საშუალო ვექტორის დასაწყისს \vec{C}_r და კუთხეს, რომელსაც ადგენს ქარის ვექტორი \vec{C} ქარის საშუალო ვექტორთან \vec{C}_r , აღვნიშნავთ ψ , მაშინ ფორმულა (2) ასე გადაიწერება:

$$\frac{1}{\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{\psi^2}{\sigma_r^2}\right) cd\psi dc \quad (3)$$

ხოლო ალბათობისათვის გვექნება:

$$F = \frac{1}{\pi\sigma_r^2} \int_{c^1}^{c^2} \int_{\psi^1}^{\psi^2} \exp\left(-\frac{\psi^2}{\sigma_r^2}\right) cd\psi dc \quad (4)$$

(1) და (4) ფორმულების გამოყენების შესაძლებლობა ქარის რეჟიმული მახასიათებლის დასადგენად სვერდლოვსკის რაიონისათვის შესწავლილი იქნა ს. სოლონინისა და ი. ლიბერმანის მიერ [4].

იმ მიზნით, რომ ნაჩვენები იქნას, შეიძლება თუ არა თავისუფალ სიდიდეთა ნორმალური განაწილების კანონი გამოვიყენოთ ქარის კლიმატური მახასიათებლების დასადგენად თბილისის მიდამოებში, დამუშავებულია ადგილობრივი აეროლოგიური სადგურის ქარის ზონდირების მასალები.

აღებული იქნა ქარის ზონდირების 302 შემთხვევა. 1970 წლის დილის 10 სთ. მონაცემები 10 კმ სიმაღლეზე. ქარის რეჟიმული მახასიათებლები გამოთვლის შედეგები მოცემულია № 1, № 2 ცხრილებში.

ცხრილი № 1

| ქარის მიმართულება °. | 0-22 | 22-45 | 45-68 | 68-90 | 90-112 | 112-135 | 135-158 | 158-180 | 180-202 | 202-225 | 225-248 | 248-270 | 270-293 | 293-315 | 315-338 | 338-0 |
|-------------------------|------|-------|-------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| საშუალო სიჩქარე მ/წმ. | 8,5 | 33,5 | 0 | 8 | 7 | 10 | 12 | 13 | 23 | 27,4 | 26,3 | 25 | 24 | 21 | 15 | 17 |
| შემთხვევათა რიცხვი. | 2 | 2 | 0 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 22 | 55 | 78 | 74 | 28 | 16 | 5 | 5 |
| მიმართულების საშუალო °. | 13 | 27 | 0 | 73 | 103 | 126 | 150 | 166 | 192 | 217 | 236 | 260 | 281 | 305 | 321 | 347 |

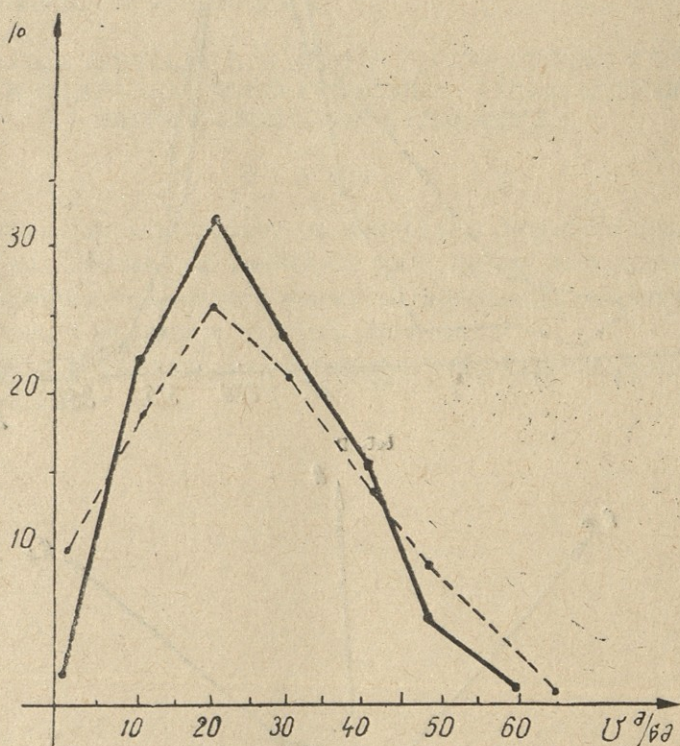
ცხრილი № 2

ქარის ვექტორის განაწილების ძირითადი მახასიათებლები 10 კმ სიმაღლეზე

| დაკვირვების ადგილი | სეზონი | შემთხვევათა რიცხვი | ჯამური ქარის სიდიდე და მიმართულება | | ქარის სიჩქარის საშუალო C_s მ/წმ. | საშუალო კვადრატული ვექტორული გადახრა σ_r მ/წმ. |
|--------------------|-------------------|--------------------|------------------------------------|---------------|------------------------------------|---|
| | | | C_r მ/წმ | β° | | |
| თბილისი | შემოდგომა-ზამთარი | 146 | 20,4 | 270 | 24 | 16 |
| თბილისი | გაზაფხული-ზაფხული | 156 | 18 | 301 | 21 | 14 |

ქარის ვექტორის განაწილება გამოთვლილი (1) და (4) ფორმულებით და ფაქტიური მონაცემებით მოცემულია გრაფიკებზე (ნახ. 1 და 2). უწყვეტი ხაზებით გაღებულია ფაქტიური მონაცემებით აგებული მრუდები, წყვეტილით კი თეორიული მრუდები. თანხედენა მათ შორის საკმაოდ კარგია.

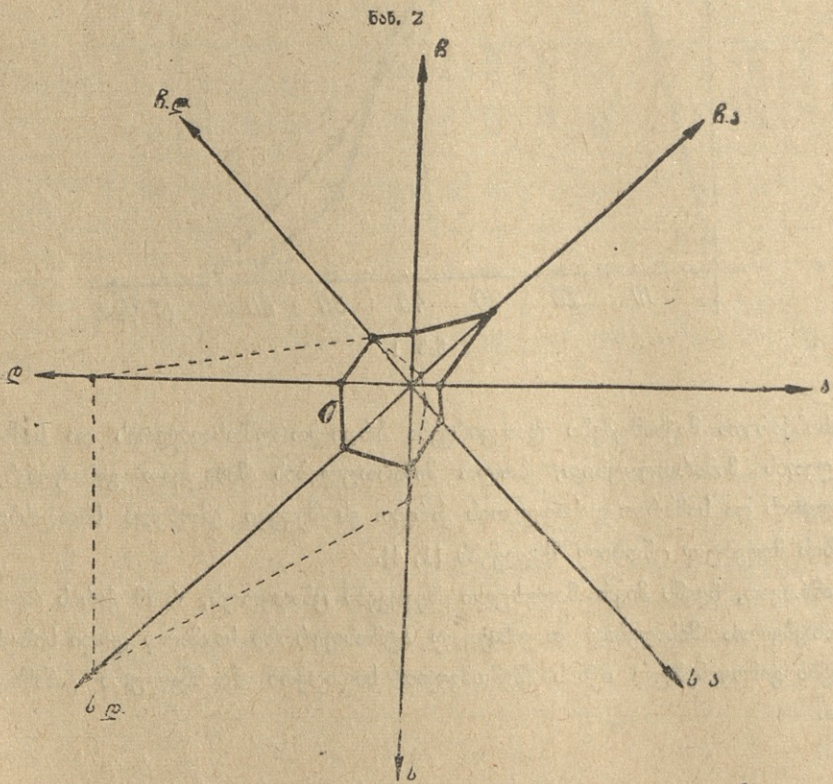
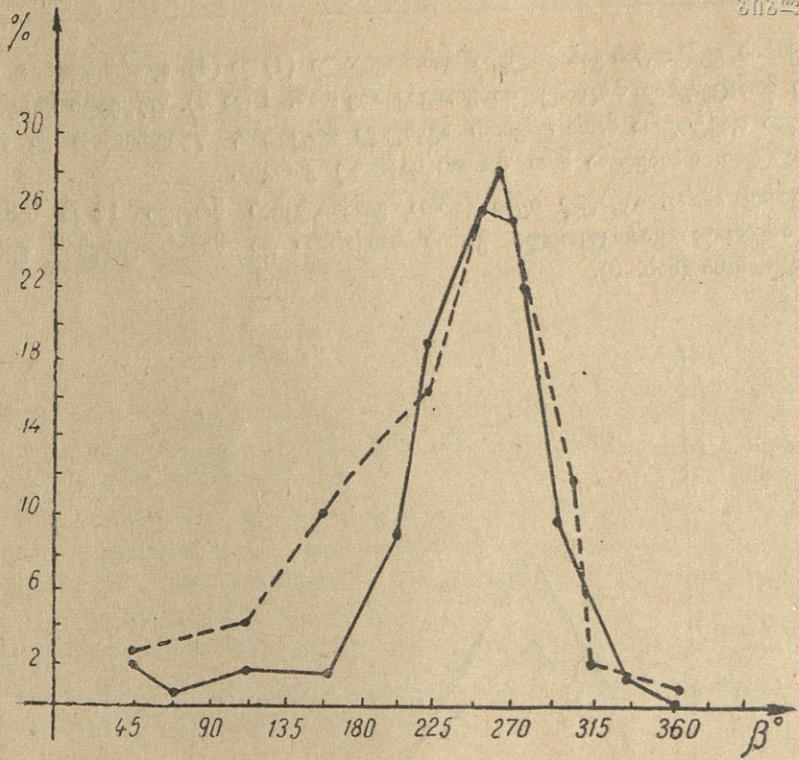
გარდა ამისა, აგებულ იქნა ქართა განაწილების მრუდი 10 კმ სიმაღლეზე, სადაც აშკარადაა გამოკვეთილი ქარის სიჩქარისა და მიმართულების უალბათესი მნიშვნელობანი (ნახ. 3).



ნახ. 1

სიჩქარეთა მაქსიმუმები დაიკვირვება ჩრდილო-აღმოსავლეთის და სამხრეთ-დასავლეთის მიმართულებით, ხოლო მიმართულების მიხედვით გაბატონებულია დასავლეთის და სამხრეთ-დასავლეთის ქარები. ეს შედეგი ემთხვევა სხვადასხვა ავტორების მიღებულ ცნობილ შედეგებს [1, 4].

ამრიგად, ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები ცხადყოფს, რომ ქარის რეჟიმულ მახასიათებელთა მისაღებად თავისუფალ ატმოსფეროში საკმაოდ დიდი სიზუსტით შეიძლება გამოყენებულ იქნას შემთხვევით სიდიდეთი ნორმალური განაწილების კანონი.



ს 0 6 3 6 5 6 3 6 5

1. И. Г. Гутерман. Метеорология и гидрология, № 9 1961.
2. C. E. P. Brooks, C. S. Durst, N. Karruthers, Upper winds over the world. Q. I. R. M. vol. 72, № 311.
3. С. В. Солонин, Ю. М. Либерман, Проблемы физики атмосферы. Сборник I, 1963.
4. А. В. Аситашвили, К. А. Сапицкий, З. В. Хведелидзе, Метеорология и гидрология, № 5, 1968.

З. В. ХВЕДЕЛИДZE, Р. А. ЧЕЛИДZE

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ РЕЖИМНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ВЕТРА В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ**

Р е з ю м е

В настоящей статье обработаны материалы ветрового зондирования 1970 года на ст. Тбилиси на высоте 10 км с целью выяснения возможности использования нормального закона распределения случайных величин для получения режимных характеристик ветра.

Полученные результаты имеют большое значение для прогноза скорости и направления ветра.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА К ЧИСЛУ ДНЕЙ С ОСАДКАМИ $\geq 30,0$ ММ В ТБИЛИСИ

К. А. САПИЦКИЙ, Э. Ш. ЭЛИЗБАРАШВИЛИ

Выпадение сильных осадков за отдельные сезоны и в целом за год в данном районе или над данным пунктом есть случайное и относительно редкое явление, поэтому следует ожидать, что распределение числа дней с осадками $\geq 30,0$ мм соответствует закону распределения Пуассона.

Как известно, распределение вероятностей случайной величины ξ , принимающей целые неотрицательные значения, называют распределением Пуассона с параметром a , если

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-a} \cdot a^x}{x!}, \quad (1)$$

где $a > 0$, а $x = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Математическим ожиданием величины ξ в случае распределения Пуассона служит a . Дисперсия ξ также равна a . Так как третий центральный момент также равен a , то асимметрия этого распределения связана с a .

Выпадение сильных осадков наносит большой ущерб сельскому хозяйству, связи, линиям электропередач, всем видам транспорта. Поэтому вопрос о том, как часто можно ожидать выпадения сильных осадков, интересует практиков различных отраслей народного хозяйства. Имеющиеся справочники и карты географического распределения числа дней с осадками различной градации позволяют определить только среднее многолетнее число дней в разные месяцы для отдельных пунктов.

Целью настоящей статьи является нахождение статистического закона распределения, которым можно было бы описать вероятность и частоту выпадения осадков $\geq 30,0$ мм в Тбилиси, для которого имеется длинный ряд наблюдений. В качестве исходных данных были использованы [4].

По ежегодным данным для Тбилиси за 80 лет были рассчитаны эмпирическая частота (m) и значения накопленных частостей (W_H), с целью применения критериев согласия Пирсона χ^2 и Колмогорова λ_n .

Критерий Пирсона

$$\chi^2 = \sum \frac{[m - F(x) \cdot N]^2}{F(x) \cdot N}, \quad (2)$$

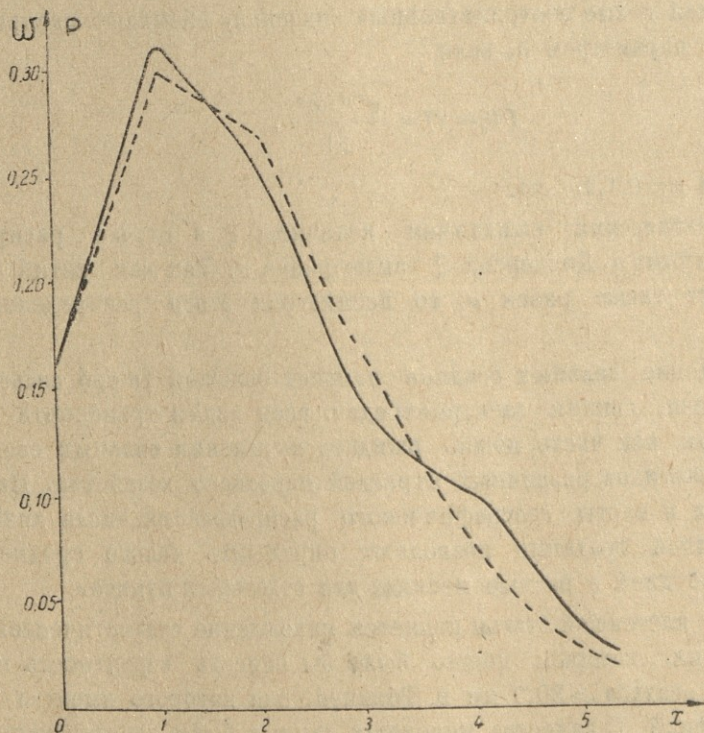
где m —эмпирическая частота, $F(x)N$ —расчётные значения интегральной функции распределения.

λ_k Колмогорова вычисляется по формуле:

$$\lambda_k = D\sqrt{N},$$

где D —наибольшее значение отклонения между эмпирическими и теоретическими накопленными частотами. Умножая D на \sqrt{N} , получаем λ_k , для которого по табл. 1, составленной Н. В. Смирновым, находим соответствующее значение вероятности $P(\lambda_k)$. Если окажется, что вероятность $P(\lambda_k)$ совпадения между $F_n(x)$ и m очень мала (менее 0,01), то по принципу практической невозможности маловероятных событий заключают, что предполагаемое теоретическое распределение не соответствует исследуемому эмпирическому распределению.

Полученные нами значения χ^2 и λ_k для разных сезонов и за год для Тбилиси приведены в табл. 2 (для зимнего сезона параметр закона Пуассона $\alpha = 0$).



На рисунке изображено дифференциальное распределение числа дней с осадками $\geq 30,0$ мм, рассчитанное по формуле Пуассона (прерывистая) и по эмпирическим данным (сплошная линия), за год для Тбилиси.

Из рисунка следует, что несмотря на некоторый разброс точек, применение формулы (1) для определения вероятности выпадения осадков $\geq 30,0$ мм в 1,2,...,n дней в году допустимо и возможно по одному известному параметру a , который может быть взят из [3].

Таблица 1

| λ_k | $P(\lambda_k)$ | λ_k | $P(\lambda_k)$ | λ_k | $P(\lambda_k)$ |
|-------------|----------------|-------------|----------------|-------------|----------------|
| <0,30 | 1,0000 | 0,70 | 7112 | 1,20 | 1122 |
| 0,35 | 0,9997 | 0,75 | 6272 | 1,30 | 0681 |
| 0,40 | 9972 | 0,80 | 5441 | 1,40 | 0397 |
| 0,45 | 9874 | 0,85 | 4653 | 1,50 | 0222 |
| 0,50 | 9636 | 0,90 | 3927 | 1,60 | 0120 |
| 0,55 | 9228 | 0,95 | 3275 | 1,70 | 0062 |
| 0,60 | 8643 | 1,00 | 2700 | 1,80 | 0032 |
| 0,65 | 7220 | 1,10 | 1777 | 1,90 | 0016 |

Таблица 2

| | λ_k | χ^2 |
|-------|-------------|----------------|
| Весна | 0,38 | $\approx 0,00$ |
| Лето | 0,63 | 3,80 |
| Осень | 0,37 | 3,17 |
| Год | 0,28 | 1,76 |

Критерии согласия (табл. 2) также подтверждают хорошее соответствие выравнивающей функции статистическим данным.

(Представлено 20. I. 1972).

Кафедра геофизики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Ключкин, С. А. Сапожникова, В. В. Филипов, Труды НИИАК, вып. 46, 1967.
2. Е. К. Фёдоров, Метеорология и гидрология, № 6, 1967.
3. Справочник по климату СССР, вып. 14, часть 4, 1970.
4. Климатический справочник СССР, вып. 14. часть 2, 1955.
5. А. М. Длин, Математическая статистика в технике. М., 1958.
6. Н. В. Кобышева, Косвенные расчёты климатических характеристик. Л., 1971.
7. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов, Таблицы математической статистики. М., 1965.

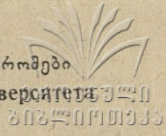
კ. საპინცი, ე. ელიზბარაშვილი

პუასონის განაწილების კანონის გამოყენება $30,0$ მმ-ზე \geq ნალექებიან ღღეთა რიცხვისათვის თბილისში

რეზიუმე

პუასონის განაწილების მიხედვით გამოთვლილია თბილისში $30,0$ მმ-ზე \geq ნალექებიან ღღეთა ალბათობა ცალკეული სეზონებისა და მთლიანად წლისათვის.

სტატისტიკურ მონაცემებთან განაწილების არჩეული კანონის შესაბამისობის შემოწმებამ პირსონისა და კოლმოგოროვის თანხმობის კრიტერიუმით კარგი შედეგები აჩვენა.



დარიშხანი საქართველოს ზოგიერთი რაიონის ქანებში

ბ. ჯონაძე

შრომში განხილულია დარიშხანის რაოდენობითი გამოკვლევის შედეგები ძირულის კრისტალური მასივის ზოგიერთ ქანში [1]. ძირულის კრისტალური მასივი მეტად რთული გეოლოგიური აგებულებისაა [2]. აღნიშნული კრისტალური მასივის უძველესი პალეოზოოური წარმონაქმნები წარმოდგენილია მეტამორფული ფიქლებით, გრანიტებით, ვაბროთი, ვაბროამფიბოლიტებით, ტალკებით, ლისტვენიტებით და სხვა მრავალი ქანის ნიმუშებით. ამიტომ ცხადია ასეთ რთულ გეოლოგიურ და მინერალოგიურ გარემოში დარიშხანის შემცველობის გამოკვლევა ფრიად საინტერესოა. ნიმუშები აღებულია სოფ. ბორითიდან უღელტეხილის მიმართულებით მდინარეების ძირულისა და მის შენაკად რიკოთის ხეობაში.

გამოკვლეული ქანების ნიმუშები ადგილმდებარეობის მიხედვით დავყავით 12 ჯგუფად.

ნიმუშებში დარიშხანის რაოდენობით განსაზღვრას ვაწარმოებდით ჰიპოფოსფიტურ-კოლორიმეტრიული მეთოდით [3, 4]. განსაზღვრის შედეგები მოცემულია №1 ცხრილში. ამავე ცხრილში შეტანილია Ni-ის განსაზღვრის შედეგებიც [5]. შრომაში ნიკელის განსაზღვრის შედეგი შეტანილია იმისათვის, რომ მინერალთა გენეტიკურ კლასიფიკაციაში [6] As და Ni მოქცეული არიან ერთ ჯგუფში. გარდა ამისა, კანონზომიერებანი, რომელიც საფუძვლად უდევს მინერალთა გენეტიკურ კლასიფიკაციას, ითვალისწინებს ერთ ჯგუფში მოქცეულ ელემენტთა მინერალების თანაარსებობასაც. ამდენად, ცხადია, აღნიშნულ ობიექტებში As-სა და Ni-ის რაოდენობრივი შემცველობის შედარებაც ინტერესს მოკლებული არ იქნება. როგორც ჩანს, გამოკვლეულ ობიექტებში Ni-ის შემცველობა მნიშვნელოვნად აღემატება დარიშხანის შემცველობას.

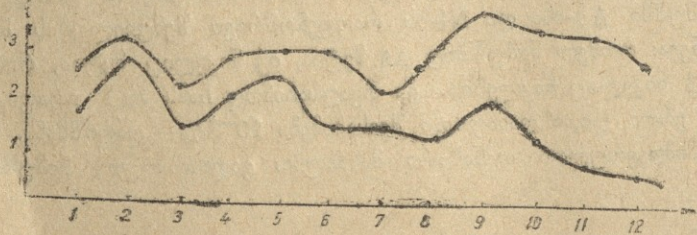
ამავე დროს საგულისხმოა ერთგვარი კანონზომიერების გამოვლენა ერთსა და იმავე ნიმუშში As-ისა და Ni-ის რაოდენობრივი შემცველობის მხრივ. კერძოდ, შეიმჩნევა: რომელ ნიმუშშიც As მეტია, იქ ნიკელიც მეტია, რომელშიც As ნაკლებია, იქ ნიკელიც ნაკლებია. ეს თვალსაჩინოდ ჩანს №1 გრაფიკზე, სადაც თრენინტზე ერთი დიდი დანაყოფი შეესაბამება 10⁻³% — დარიშხანს. ხოლო აბსცისაზე თანმიმდევრულად თანაბარი მანძილით გადაზომილია ნიმუშთა დაჯგუფებანი.

Ni განსაზღვრულია ოსუს-ს არაორგანული ქიმიის კათედრის თანამშრომლების მიერ.



| ჯგუფი | ნიმუშის აღების ადგილი | ნიმუშის გრამა- წონა | As %-ით (საშუალო) | Ni %-ით (საშუალო) |
|-------|--|---------------------------|----------------------|----------------------|
| I | სოფ. ბორითთან მდებარე კრისტალური ფიქლები, გაბროიდები და აპლიტური შედგენილობის ძარღვები | 3 | $1,83 \cdot 10^{-3}$ | $2,7 \cdot 10^{-3}$ |
| II | პირველი ჯგუფიდან უღელტეხილის მიმართულე-ბით 400 მ დაშორებით მდებარე გაბროიდული ქა-ნები | 6 | $3,0 \cdot 10^{-3}$ | $3,3 \cdot 10^{-3}$ |
| III | სოფ. საქსარაის და სოფ. ვერტიქალის მიდამოებ-ში მდებარე გრანიტული და დიბაზური ქანები | 4 | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $2,3 \cdot 10^{-3}$ |
| IV | სოფ. ხუნევაძე 1—1,5 კმ-ის დაშორებით მდებარე გნეისოიდული კვარციანი დიორიტები | 7 | $2,21 \cdot 10^{-3}$ | $3,0 \cdot 10^{-3}$ |
| V | სოფ. ხუნევის ბოლოს მდებარე გაბროიდული ქანები | 8 | $2,56 \cdot 10^{-3}$ | $3,1 \cdot 10^{-3}$ |
| VI | სოფ. ხუნევიდან უღელტეხილისაკენ 1,5—2 კმ-ის დაშორებით ტიბიური გაბროიდები | 5 | $1,65 \cdot 10^{-3}$ | $3,2 \cdot 10^{-3}$ |
| VII | სოფ. ხუნევიდან უღელტეხილისაკენ 3 კმ-ის დაშო-რებით მდებარე გაბროიდული ქანები | 3 | $1,7 \cdot 10^{-3}$ | $2,3 \cdot 10^{-3}$ |
| VIII | სოფ. ხუნევიდან უღელტეხილისაკენ 8 კმ-ის და-შორებით მდებარე გაბროიდული ქანები | 8 | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $3,1 \cdot 10^{-3}$ |
| IX | რიკოთის გადასასვლელამდე 4—5 კმ დაშორებით მდებარე კრისტალური ფიქლები | 2 | $2,12 \cdot 10^{-3}$ | $4,0 \cdot 10^{-3}$ |
| X | რიკოთის გადასასვლელამდე 1—1,5 კმ. დაშორე-ბით მდებარე კვარციანი დიორიტები | 4 | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $3,6 \cdot 10^{-3}$ |
| XI | X ჯგუფის ნიმუშებიდან აღმოსავლეთით 200—300 მ. დაშორებით მდებარე დაგნეისებული კვარციანი დიორიტები | 4 | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | $3,5 \cdot 10^{-3}$ |
| XII | სოფ. ჩუმათელეთამდე 0,5 კმ-ის დაშორებით მდებარე გრანიტები, რომელშიაც შეჭრილია გაბროიდუ-ლი ქანები. | 3 | $0,8 \cdot 10^{-3}$ | $3,0 \cdot 10^{-3}$ |

გამოკვლეულ ობიექტებში As-ის რაოდენობრივი შემცველობა ნიმუშების ლითოლოგიური სახეობის მიხედვით მოცემულია ცხ. № 2-ში



გრაფიკი № 1

საერთოდ უნდა აღინიშნოს, რომ დარიშხანის შემცველობა გამოკვლეული ქანების ნიმუშებში საკმაოდ მაღალია. ის თითქმის 10—15-ჯერ აღემატება ქანებში დარიშხანის საერთოდ საშუალო რაოდენობას ($5 \cdot 10^{-4}\%$). დარიშხანის მოჭარბებული შემცველობის თვალსაზრისით განსაკუთრებით აღსანიშნავია დიორიტ-პორფირიტები, კრისტალური ფიქლები, გაბროიდული ქანები და ზოგიერთი აპლიტები, რაც გეოქიმიური თვალსაზრისით მეტად საინტერესო მოვლენაა.

ცხრილი № 2

| №№ რიგზე | ლითოლოგიური სახეობა | ნიმუშის რაოდენობა | As-ით %-ით (საშუალო) |
|----------|---------------------|-------------------|----------------------|
| 1 | კრისტალური ფიქალი | 6 | $2,37 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | გრანიტული ქანი | 6 | $0,4 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | გაბროიდული ქანი | 31 | $1,66 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 | დიორიტ-პორფირიტი | 4 | $4,87 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | აპლიტები | 6 | $1,83 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | ღიაბაზები | 8 | $0,57 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | გამოფიტული ქანი | 2 | არ აღმოჩნდა |

დასკვნები

1. გამოკვლეულია დარიშხანის რაოდენობრივი შემცველობა ძირულის კრისტალური მასივის ქანების 62 ნიმუშში, რომელიც შემდეგ სურათს იძლევა: კრისტალურ ფიქლებში— $2,375 \cdot 10^{-3}\%$; დიორიტ-პორფირიტებში— $4,87 \cdot 10^{-3}$; აპლიტებში— $1,83 \cdot 10^{-3}\%$; გაბროიდული ქანის სხვადასხვა სახის ნიმუშებში— $1,66 \cdot 10^{-3}\%$; გრანიტულ ქანებში— $0,4 \cdot 10^{-3}\%$; ღიაბაზებში— $0,57 \cdot 10^{-3}\%$; ხოლო გამოფიტულ ქანებში არ აღმოჩნდა.

2. დარიშხანის შედარებით მაღალი შემცველობით აღინიშნება დიორიტ-პორფირიტების, გაბროიდული ქანების, კრისტალური ფიქლების და ზოგიერთი აპლიტების ნიმუშები.

3. გამოკვლეულ ქანებში დარიშხანსა და ნიკელს შორის რაოდენობრივი შემცველობის ურთიერთდამოკიდებულება გეოქიმიური თვალსაზრისით მეტად საგულისხმო ფაქტია.

(წარმოდგენილია 8. XI. 1971)

აბაორგანული ქიმიის კათედრა

ლიტერატურა

1. ი. ბ. მოსეშვილი, გ. მ. ჯოხაძე, თსუ შრომები, ტომი № 104, 1968, გვ. 19—23.
2. საქართველოს სსრ მინერალური რესურსები, 1937, გვ. 217—219.
3. В. А. Адамович и А. И. Рыбников, ж. „Заводская лаборатория“, т. IV, 1947. 487.
4. გ. მ. ჯოხაძე, საქ. სუბტროპიკული მეურნეობის ინსტიტუტის შრომები, ტომი 3—4 1959, გვ. 295—302.

5. В. М. Голдъшмидт, Сборник статей по геохимии редких элементов, 1938, 7—38, 106.
6. А. Е. Ферсман, Геохимические и минералогические методы поисков полезных ископаемых, 1940, 96, 370.
7. В. И. Вернадский, Очерки геохимии, 1934, 30, 35, 10—23.

Г. М. ДЖОХАДЗЕ

МЫШЬЯК В ГОРНЫХ ПОРОДАХ НЕКОТОРЫХ РАЙОНОВ ГРУЗИИ

Резюме

В работе исследовано количественное содержание мышьяка в 62 образцах различных горных пород.

В исследованных образцах пород среднее содержание мышьяка оказалось: в кристаллических сланцах $2,375 \cdot 10^{-3}\%$; в диорит-порфиридах $4,87 \cdot 10^{-3}\%$; в аплитах $1,83 \cdot 10^{-3}\%$; в габроидах $0,57 \cdot 10^{-3}\%$; а в выветренных породах мышьяк не обнаружен.

Сравнительно повышенное содержание мышьяка обнаружено в диорит-порфиридах, габроидных породах, кристаллических сланцах и некоторых аплитах.

В работе занесены также данные по содержанию Ni. Количественное соотношение между Ni и As в исследованных горных породах оказалось очень интересным, которому следует придать особое значение в региональной геохимии.

მანგანუმი საქართველოს ჩაიში

ი. მოსეუვილი, დ. ხაბთასი, ბ. თალაგვაძე, პ. ცისკარიძე

წინამდებარე შრომა წარმოადგენს ჩვენ მიერ წარმოებულ (არაორგანულ და ორგანულ ბუნებრივ რესურსებში) მანგანუმის გამოკვლევების გაგრძელებას [1], უკანასკნელ დროს შესწავლილ იქნა საქართველოს ჩაის ფოთლის, ბაიხაოს შავი და მწვანე ჩაის 120 ნიმუში.

ჩაის ნიმუშები აღებულია სათანადო წესისამებრ ანასეულის ჩაის ინსტიტუტის, საქართველოს ჩაის ტრესტის, წყალტუბოსა და წულუკიძის რაიონების ჩაის ქარხნების ლაბორატორიებში 1959 და 1964 წლებში.

საკვლევი მასალის დამზადება და ანალიზი შესრულებულია იმავე წესით, როგორც აღწერილია შრომებში [2, 3].

კვლევის შედეგები მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ 1, მე-2 და მე-3 ცხრილში.

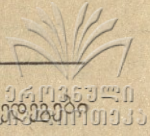
მანგანუმის შემცველობა ჩაის ფოთოლში

ცხრილი 1

| ნიმუშის რაოდენობა | ნიმუშის აღების ადგილი | ნიმუშის აღების დრო | ჩაის ხარისხი | მანგანუმი მგ. %/მ-ით |
|-------------------|-----------------------|--------------------|--------------|----------------------|
| 15 | ანასეული | ოქტომბერი 1959 | პირველი | 0,012—0,046 |
| 15 | მახარაძე | —“— | მეორე | 0,098—0,185 |

როგორც 1 ცხრილის მონაცემებიდან ჩანს, შესწავლილი ჩაის ფოთლებიდან მანგანუმის მომეტებული შეცულობით ხასიათდება მეორე ხარისხის ჩაის ფოთოლი. აღნიშნულ ფოთოლში მანგანუმის შეცულობა მერყეობს 0,098—0,185 მგ %/მ-ის საზღვრებში.

რაც შეეხება პირველი ხარისხის ჩაის ფოთოლს, მასში მანგანუმი ნაკლები რაოდენობითაა და მერყეობს 0,012—0,046 მგ %/მ-ის ფარგლებში. ეს ფაქტი, ჩვენი აზრით, უნდა უკავშირდებოდეს მცენარის ფოთლების ზრდასთან დაკავშირებულ მანგანუმის თანდათანობით დაგროვებას. გარდა ზემოაღნიშნულისა, ჩვენ შევისწავლეთ ბაიხაოს შავი და მწვანე ყველა ხარისხის ჩაი. სახელდობრ, თაიგული, უმაღლესი, პირველი, მეორე და მესამე. მანგანუმის რაოდენობრივი შეცულობა ჩვენ



მეორე დადგენილია აღნიშნული ხარისხების ჩაის 90 ნიმუშში. ანალიზის შედეგები მოგვყავს მე-2 და მე-3 ცხრილში.

ცხრილი 2

მანგანუმის შემცველობა ბაიხაოს შავ ჩაიში

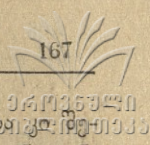
| ნიმუშის რაოდენობა | ნიმუშის აღების ადგილი | ნიმუშის აღების დრო | ჩაის ხარისხი | მანგანუმი მგ %/0-ით |
|-------------------|-----------------------|--------------------|------------------|---------------------|
| 10 | წულუკიძე | აგვისტო, 1964 | თაიგული | 0,060—0,112 |
| 10 | წყალტუბო ანასეული | —“— | უმალღესი პირველი | 0,070—0,150 |
| 20 | | ივნისი, 1959 | | 0,080—0,176 |
| 10 | ზუგდიდი | აგვისტო, 1964 | მეორე | 0,090—0,182 |
| 10 | ქობულეთი | —“— | მესამე | 0,090—0,198 |

ცხრილი 3

მანგანუმის შემცველობა ბაიხაოს მწვანე ჩაიში

| ნიმუშის რაოდენობა | ნიმუშის აღების ადგილი | ნიმუშის აღების დრო | ჩაის ხარისხი | მანგანუმი მგ %/0-ით |
|-------------------|-----------------------|--------------------|--------------|---------------------|
| 6 | მახარაძე | აგვისტო, 1959 | თაიგული | 0,050—0,080 |
| 6 | ზუგდიდი | აგვისტო, 1964 | უმალღესი | 0,050—0,104 |
| 6 | ქობულეთი ანასეული | —“— | პირველი | 0,084—0,120 |
| 6 | | აგვისტო, 1959 | მეორე | 0,060—0,122 |
| 6 | წყალტუბო | აგვისტო, 1964 | მესამე | 0,070—0,168 |

როგორც მე-2 და მე-3 ცხრილის მონაცემებიდან ჩანს, ბაიხაოს ყველა ხარისხის შავი და მწვანე ჩაიდან მანგანუმის ყველაზე დიდი შეცულობით ხასიათდება მესამე ხარისხის ბაიხაოს შავი ჩაი, სადაც მისი რაოდენობა მერყეობს 0,090—0,198 მგ %-ის ფარგლებში. მეორე ხარისხის ჩაიში ამაზე ნაკლები რაოდენობითაა (0,090—0,182 მგ. %), კიდევ უფრო ნაკლები რაოდენობითაა პირველი ხარისხის ჩაიში (0,080—0,176 მგ %), უმალღესისაში — (0,070—0,150 მგ %), დაბოლოს, მანგანუმის ყველაზე მცირე რაოდენობა აღმოჩნდა ბაიხაოს შავი ჩაის თაიგულში (0,060—0,112 მგ %). რაც შეეხება ბაიხაოს მწვანე ჩაის, მათში მანგანუმი უფრო ნაკლები რაოდენობითაა. კერძოდ, მესამე ხარისხის მწვანე ჩაიში მანგანუმის შეცულობის ზღვრები 0,070—0,168 მგ %-ის ფარგლებშია. დანარჩენი ხარისხების მეორე, პირველი და უმალღესი ხარისხის ჩაიში მანგანუმის თანდათანობით შემცირებული რაოდენობაა, დაბოლოს მწვანე ჩაის თაიგულში მანგანუმის ყველაზე მცირე რაოდენობა აღმოჩნდა (0,050—0,080 მგ %). უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მონაცემებით გარკვეული კანონზომიერება შეიმჩნევა ჩაის ხარისხსა და მანგანუმის რაოდენობას შორის. სახელობრ, ჩაის ხარისხის გაუმჯობესების კვალობაზე მცირდება მანგანუმის რაოდენობა, გარდა ამისა, ისიც შეიმჩნევა, რომ



შავი ჩაი მანგანუმს უფრო მეტს შეიცავს, ვიდრე მწვანე ჩაი. ეს გარემოებები პირობებული უნდა იყოს მათში ქიმიური კომპონენტების ერთიმეორისაგან განსხვავებული რაოდენობრივი შეცულობით.

მანგანუმის განაწილების მიღებული შედეგები დასახელებულ ობიექტებში კარგად ეთანხმება ჩვენ მიერ შესწავლილ მცენარეულ ობიექტთა ანალიზებს [1].

დასკვნები

1. გამოკვლეული ჩაის ნიმუშებიდან მანგანუმის მაქსიმალური შეცულობით ხასიათდება ბაიხაოს მესამე ხარისხის ჩაი (0,070—0,198 მგ %), შემდეგ — მეორე ხარისხის (0,090—0,182 მგ %), პირველი ხარისხის — (0,080—0,176 მგ %), უმაღლესი ხარისხის — (0,070—0,150 მგ %) და მანგანუმის მინიმალური შეცულობით აღინიშნება თაიგული (0,060—0,112 მგ %); რაც შეეხება ბაიხაოს მწვანე ჩაის, მათში მანგანუმი ზემოაღნიშნული ხარისხების ჩაისთან შედარებით მცირე რაოდენობითაა, მაგრამ განაწილება ანალოგიურია.

2. მანგანუმს მეტი რაოდენობით შეიცავს ბაიხაოს შავი ჩაი (0,060—0,198 მგ %), ხოლო ბაიხაოს მწვანე ჩაიში მანგანუმი შედარებით ნაკლებია (0,050—0,168 მგ %).

(წარმოდგენილია 29. II. 1972).

არაორგანული ქიმიის
კათედრა

ლიტერატურა

1. ი. მოსეშვილი, დ. ხავთასი, გ. თალაკვაძე, თბილისის სახ. უნივერსიტეტის შრომები, 74, 1959, გვ. 15, 21, 29, 80; 1962, გვ. 33.
2. Е. Б. Сендел, Колориметрическое определение следов металлов, 1949, 302.
3. Методы определения микроэлементов, АН СССР, 1950, 34.
4. В. М. Акопджанян, Вопросы питания, т. 10, 1941, 59.

Я. П. МОСЕШВИЛИ | Д. К. ХАВТАСИ, Г. Н. ТАЛАКВАДЗЕ, П. В. ЦИСКАРИДЗЕ

МАРГАНЕЦ В ЧАЕ ГРУЗИИ

Резюме

Проводившиеся в течение ряда лет на кафедре неорганической химии исследования марганца в естественных ресурсах Грузии показали, что количество марганца колеблется в довольно значительных пределах. В представленной работе исследовано содержание марганца в различных сортах чая Грузии.

Материал для исследований был получен из Анасеульского института чая, Грузинского треста чая и из лабораторий Цхалтубского и Цулу-ჯიძევского чайных заводов в 1959 и 1964 годах.



Согласно полученному экспериментальному материалу, марганец в большом количестве содержится в чае третьего сорта (0,090—0,198 мг%), за ним следуют чай второго сорта (0,090—0,182 мг %), первого сорта (0,080—0,176 мг %), высшего сорта (0,070—0,150) и Букета Грузии (0,060—0,112 мг %).

Такая же закономерность наблюдается в чайных листьях. Содержание марганца в листьях первого сорта меньше, чем в листьях второго.

В чае разных местностей Западной Грузии разница в содержании марганца незначительна.

ХРОМ В ПРЕСНЫХ ВОДАХ ГРУЗИИ

Г. Д. СУПАТАШВИЛИ, Н. К. КАРСАНИДЗЕ, М. С. ТЕТРАШВИЛИ

Содержание хрома в гидросфере мало изучено. В этом отношении не составляют исключения и объекты нашего исследования—водоемы Грузии. Нами в 1969—70 г. изучено содержание хрома в жидкой и твердой фазах пресных поверхностных вод Грузинской ССР. В некоторых пробах были раздельно определены содержания трех- и шестивалентного хрома. Определения проведены фотометрически, дифенилкарбазидом [1, 2]. Хром концентрировали соосаждением с $Al(OH)_3$ из 0,25 л концентрата, который получали выпариванием 1,0—3,0 л воды, отфильтрованной в плотном бумажном фильтре. Первая порция фильтрата (0,5 л) для анализа не употреблялась. До анализов пробы хранились в полиэтиленовых сосудах. Навеска предварительно высушенных при $105^\circ C$ взвешенных веществ составляла 70—100 мг. Точность определения проверялась методом добавки. Относительная ошибка в обоих случаях $\leq 7,0\%$.

Среднее содержание растворенного хрома в водоемах Грузии равно 1,3 мг/л, при экстремальных значениях 0—3,2 мг/л (табл. 1). Приблизительно таково же содержание хрома в водах Сибири [3,4] и в некоторых больших реках мира [5]. Полагаем, что данные, полученные В. Цинцадзе [6] при определении хрома в питьевых водах Грузии (2,8—40,8 мг/л), требуют уточнения.

Резкое колебание содержания хрома в пространстве и во времени в водоемах Грузии не обнаружено. Отчетливо выражено влияние антропогенного фактора—р. Кура ниже г. Тбилиси (Соганлуги) заметно обогащена хромом.

Хром в природных водах может существовать в трех- и шестивалентном состоянии. По нашим определениям в природных водах Грузии преобладает содержание шестивалентного хрома (табл. 2).

Формы содержания растворенного хрома зависят от окислительно-восстановительного потенциала воды. Поэтому, с увеличением концентраций восстановителей (в основном органические вещества) в водах увеличивается доля трехвалентного хрома.

При искусственном внесении хроматов (1,7—20,4 мг/л) в природные воды восстановление хрома заканчивается за 8—24 часа и в зави-



Содержание растворенного хрома в водоемах Грузии (в мкг/л)

| Река—пункт | Сезоны года | | | | Среднее |
|-----------------|-------------|------------|-----------|------------|---------|
| | Лето-1969 | Осень-1969 | Зима-1969 | Весна-1970 | |
| Бзибь—Бзиби | 0,8 | 1,3 | 1,0 | 0,9 | 1,0 |
| Кодори—устье | 0,9 | 1,0 | 0,9 | 1,0 | 0,9 |
| Ингури—Рухи | — | 1,3 | 1,2 | 1,2 | 1,2 |
| Риони—Жонети | 0,6 | 0,8 | 0,6 | 0,9 | 0,7 |
| Риони—устье | 1,0 | — | 1,1 | 1,1 | 1,1 |
| Цх. Цкали—устье | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,5 | 1,5 |
| Чорохи—Ерге | 0,9 | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| Кура—Минадзе | 1,2 | 1,1 | 1,3 | 1,3 | 1,2 |
| Кура—Дзегви | 1,3 | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 1,4 |
| Кура—Соганлуги | 2,7 | 3,1 | 3,2 | 2,6 | 2,9 |
| Арагви—Мцхета | 1,3 | 1,3 | 1,2 | 1,2 | 1,3 |
| Храми—устье | 1,5 | 1,5 | — | 1,5 | 1,5 |
| Тб. море—центр | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | 0,8 |
| Алазани—Кеда | — | 1,2 | 1,4 | 1,4 | 1,4 |
| Лиахви—Гори | 1,2 | 1,2 | — | 1,4 | 1,3 |

Таблица 2

Содержание трех- и шестивалентного хрома в жидкой фазе пресных вод Грузии (весна 1970 г.)

| Река—пункт | мкг/л | | Река—пункт | мкг/л | |
|-----------------|-------------|------------|----------------|-------------|------------|
| | C_r^{III} | C_r^{VI} | | C_r^{III} | C_r^{VI} |
| Бзибь—Бзиби | 0,2 | 0,6 | Кура—Минадзе | 0,6 | 0,8 |
| Кодори—устье | 0,4 | 0,5 | Кура—Дзегви | 0,8 | 0,8 |
| Ингури—Рухи | 0,5 | 0,8 | Кура—Соганлуги | 1,1 | 1,6 |
| Риони—Жонети | 0,3 | 0,7 | Лиахви—Гори | 0,6 | 0,9 |
| Риони—устье | 0,4 | 0,7 | Арагви—Мцхета | 0,5 | 0,7 |
| Цх. Цкали—устье | 0,6 | 0,8 | Храми—устье | 0,8 | 0,9 |
| Чорохи—Ерге | 0,3 | 0,6 | Алазани—Кеда | 0,6 | 0,8 |

симости от концентрации органических веществ восстанавливается от 20 до 45% шестивалентного хрома. Окисление искусственно вносимого в пробы природных вод хрома (III) в хроматы нами не обнаружено. Это закономерно, т. к. для окисления требуются жесткие условия.

Основное количество хрома мигрируется реками Грузии во взвешенном состоянии. В нерастворенном виде, в среднем, в реках Грузии содержится 11,3 мкг/л хрома (экстремум 0—74,2 мкг/л). Среднее же содержание хрома во взвешенных веществах составляет 3,1 мг % (табл. 3).

Ведущая роль взвешенных веществ в миграции хрома реками выявлена и другими гидрохимиками [7,8].

Таблица 3

Содержание нерастворенного хрома в водоемах Грузии

| Река | Колич. проб | В воде мкг/л | Во взв. веществ. мг% | Река. | Колич. проб | Во воде мкг/л | Во взв. веществ. мг% |
|-----------|-------------|--------------|----------------------|---------|-------------|---------------|----------------------|
| Бзибь | 1 | 0,9 | 0,6 | Ксани | 1 | 7,6 | 4,3 |
| Риони | 5 | 3,5 | 2,5 | Подхови | 1 | 31,9 | 3,6 |
| Квирила | 3 | 34,0 | 8,0 | Кура | 4 | 3,0 | 2,0 |
| Чорохи | 4 | 9,7 | 2,1 | Арагви | 3 | 2,1 | 2,4 |
| Ингури | 3 | 12,4 | 4,1 | Алазани | 4 | 25,3 | 4,2 |
| Цх. Цкали | 2 | 3,8 | 0,4 | Храми | 1 | 1,0 | 2,9 |

Внутригодовое распределение нерастворенного хрома в водоемах Грузии выражено четко: содержание хрома увеличивается от весны к зиме (табл. 4).

Таблица 4

Внутригодовое распределение нерастворенного хрома в реках Грузии

| Сезоны года | Колич. проб | Содержание хрома | | Сезоны года | Колич. проб | Содержание хрома | |
|-------------|-------------|------------------|-----|-------------|-------------|------------------|-----|
| | | мкг/л | мг% | | | мкг/л | мг% |
| Весна | 16 | 4,4 | 1,8 | Осень | 8 | 24,6 | 4,9 |
| Лето | 7 | 8,2 | 3,7 | Зима | 3 | 30,7 | 6,7 |

В основном в том же направлении уменьшается расход воды и доля атмосферных вод в питании рек Грузии. По нашим данным (3 пробы) содержание хрома в атмосферных осадках незначительно (0,03 мкг/л), и оно не может играть серьезной роли в балансе рек. В холодный период года реки главным образом переходят на подземное питание, а эти воды сравнительно богаты хромом [9,10].

Таблица 5

Изменение содержания нерастворенного хрома по течению рек

| Река | Сезоны года | Содержание хрома | | | | | |
|---------|-------------|------------------|-----|----------------|-----|---------------|-----|
| | | Верхн. течение | | Средн. течение | | Нижн. течение | |
| | | мкг/л | мг% | мкг/л | мг% | мкг/л | мг% |
| Риони | Весна | 1,0 | 1,4 | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 7,4 |
| Риони | Лето | 0,8 | 1,1 | 9,4 | 1,4 | 2,5 | 1,4 |
| Кура | Весна | 0,6 | 0,4 | 0,8 | 0,3 | 5,0 | 2,0 |
| Ингури | Осень | 1,0 | 1,2 | 2,3 | 3,3 | 34,0 | 8,4 |
| Арагви | Весна | 0,8 | 1,1 | 2,0 | 2,6 | 3,6 | 3,6 |
| Алазани | Лето | — | — | 13,1 | 3,7 | 37,1 | 4,7 |

По течению реки содержание нерастворенного хрома в воде рек, а также во взвешенных веществах увеличивается (табл. 5). Причина—ад-



სორბცია ქრომა (III) на повехности взвешенных веществ. Вероятно этот равновесный процесс играет немаловажную роль в стабилизации содержания растворенного хрома в поверхностных водах. Изучением адсорбции хрома в условиях, аналогичных создаваемым в водах рек, нами установлено, что в зависимости от количества, дисперсности и состава взвешенных веществ, а также от количества хрома из раствора сорбируется от 75 до 90% хрома. Адсорбция хрома (VI) протекает менее полно (30—45%). Процесс, вероятно, частично лимитируется скоростью восстановления хроматов.

Выводы

1. Содержание хрома в растворенном и взвешенном виде в реках Грузии составляет в среднем 1,3 и 11,3 мкг/л. Около 60% растворенного хрома находится в виде хроматов.

2. Установлено и объяснено внутригодовое изменение содержания нерастворенного хрома, а также его увеличение по течению реки.

(Представлено 27.II, 1972)

Кафедра
аналитической химии

ЛИТЕРАТУРА

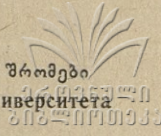
1. Е. Сендел, Колориметрические методы определения следов металлов, „Мир“, 1964.
2. А. А. Резников, Е. П. Муликовская, И. Ю. Соколов, Методы анализа природных вод, „Недра“, 1970.
3. Я. М. Грушко, С. А. Шипицин, Гигиена и санитария, № 5, 1948.
4. М. Е. Королев, И. Г. Шубенин, Уч. записки Казанского ун-та, т. 128, № 1, 1968, 102.
5. W. H. Durgun, J. Haffy, Geochim. et cosmochim. acta, v. 27, № 1, 1963, 1.
6. В. Цинцадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 26; № 1, 1961, 23.
7. D. P. Kharkar, Geochim. et cosmochim. acta, v. 32, № 3, 1968, 285.
8. Г. Д. Белицина, Н. Г. Зорин, Геохимия ландшафта, вып. 1—2, 1968, 7.
9. Я. Мияки, Основы геохимии, „Недра“, 1969
10. Э. И. Раманюскас, Тезисы докладов 15 гидрохим. совещания, Новочеркасск, 1961.

გ. სუბატაშვილი, ნ. კარსანიძე, მ. თეთრაშვილი

ქრომი საქართველოს მტკნარ წყლებში

რეზიუმე

1969—70 წლებში საქართველოს სსრ 12 ძირითადი წყალსატევის წყალში დადგენილია ქრომის შემცველობა, ფორმები და მათი ცვალებადობის ზოგიერთი კანონზომიერება.



პატარა შირაქის ნავთობის ბენზინ-ლიგროინის ფრაქციების არომატული ნახშირწყალბადების გამოკვლევა

ა. არეშიძე, თ. ლეხაძე, ნ. ციციშვილი

ნავთობის ქიმიური შემადგენლობის შესწავლას თეორიულ ინტერესთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ნავთობის ქიმიური შემადგენლობის ცოდნა მეცნიერულ საფუძველს უქმნის მის რაციონალურად გადამუშავებას. ამ გარემოებით აიხსნება ის დიდი ინტერესი, რაც ნავთობის ქიმიური შემადგენლობის შესწავლისადმი მიძღვნილ შრომებში ჩანს.

საქართველოს ნავთობებში შემავალი არომატული ნახშირწყალბადების გამოკვლევას მიუძღვნეს შრომა ფ. ბელშტეინმა და ა. კურბატოვმა [1], როგორც ჩანს, ეს გამოკვლევა მირზანის საბადოს ნავთობს ეხება.

საქართველოს ნავთობებში შემავალი მონო- და ბიციკლური არომატული ნახშირწყალბადების ინდივიდუალური ბუნების დადგენას მიუძღვნა ქ. არეშიძის შრომები თანამშრომლებთან ერთად [2—4].

ბ. კაზანსკიმ, გ. ლანდსბერგმა და ა. პლატემ თანამშრომლებთან ერთად [5] გამოიკვლიეს კარაჩუხურის, ტუიმაზინის, ემბენის და კაზანბულაქის ნავთობებში შემავალი არომატული ნახშირწყალბადები.

ამ შრომაში გამოკვლეულია არომატული ნახშირწყალბადების შემცველობა პატარა შირაქის ნავთობის ბენზინ-ლიგროინის ფრაქციებში.

ექსპერიმენტული ნაწილი

პატარა შირაქის ნავთობის ბენზინ-ლიგროინის ფრაქციებში შემავალი არომატული ნახშირწყალბადების ინდივიდუალური ბუნების შესწავლის მიზნით ნავთობიდან წილადური გამოხდით, დეფლემატორის გამოყენებით, გამოყოფილია შემდეგი ფრაქციები: $60-95^{\circ}$, $95-122^{\circ}$, $122-150^{\circ}$ და $150-200^{\circ}$.

აღნიშნული ფრაქციებიდან არომატული ნახშირწყალბადების განოსაყოფად ესარგებლობდით სულფირების მეთოდით [6]. არომატული ნახშირწყალბადების შემცველი ფრაქციების ფიზიკური მაჩვენებლები მოცემულია 1 ცხრილში.

$107-111^{\circ}$ -იან ფრაქციაში დუღილის ტემპერატურის მიხედვით მოსალოდნელი ნახშირწყალბადის, კერძოდ ტოლუოლის აღმოჩენის მიზნით, იგი დაიჟანგა ულმანის [7] მეთოდით, კალიუმის პერმანგანატის 3%-იანი ხსნარით, სუსტ ტუტე არეში. $107-111^{\circ}$ -იან ფრაქციაში ბენზოის მჟავას იდენტიფიცირება მიუთითებს პატარა შირაქის ბენზინის ფრაქციაში ტოლუოლის არსებობაზე.



134—146°-იან ფრაქციაში არსებული არომატული ნახშირწყალბადების ეთილბენზოლის, ო-, მ- და პ-ქსილოლების აღმოჩენის მიზნით გამოყენებულ იქნა დაქანგვის ზემოთ აღნიშნული მეთოდი. [7] დაქანგვის შედეგად მიღებულ ბენზოის მკვას დაცილება ორფუძიანი მკვავებისაგან წარმოებდა წყლის ორთქლით. ბენზოის მკვა ცხელი წყლიდან ორჯერ გადაკრისტალების შედეგად გალღვა 119—120°-ზე. აღნიშნული მკვა სინთეზური ბენზოის მკვასთან, ლობის ტემპერატურით 120—121°, დებრესიას არ იძლეოდა.

ცხრილი 1

| №№ | ფრაქციები | წნევა R_{mm} | d_4^{20} | n_D^{20} |
|----|-----------|----------------|------------|------------|
| 1. | 107—111 | 730 | 0,8625 | 1,4922 |
| 2. | 134—146 | 730 | 0,8627 | 1,4928 |
| 3. | 151—155 | 729 | 0,8513 | 1,4940 |
| 4. | 156—160 | 729 | 0,8553 | 1,4970 |
| 5. | 161—164 | 730 | 0,8692 | 1,5020 |
| 6. | 165—170 | 730 | 0,8697 | 1,5031 |

ორფუძიანი მკვავების დასაცილებლად ვსარგებლობდით ტაუშ-დობრიანსკის მეთოდით [8]. ორფუძიანი მკვავებიდან ო-ფტალის მკვას არსებობა დადასტურებულია ლობის ტემპერატურით. იგი გალღვა 189—192°-ზე. ლიტერატურული მონაცემების მიხედვით ო-ფტალის მკვას ლობის ტემპერატურა 191°-ია. ამავე მკვას არსებობა დადასტურებულია მისი შელლობით რეზორცინთან. მიღებულია ფლუორესცენი, რომლის ტუტე ხსნარი იძლევა მკაფიო მომწვანო ფლუორესცენციას. ეს რეაქცია ლობის ტემპერატურასთან ერთად ნათელყოფს 134—146°-იან ფრაქციაში ო-ქსილოლის არსებობას. მ-ფტალის მკვას არსებობა დადასტურებულია მისი დიმეთილეთერის მომზადებით, რომელიც ეთილის სპირტიდან ორჯერ გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 66—67°-ზე. ლიტერატურული მონაცემების მიხედვით, მ-ფტალის მკვას დიმეთილის ეთერის ლობის ტემპერატურა 67—68°-ს შეადგენს.

მ-ფტალის მკვას ანლოგიურად ტერეფტალის მკვას იდენტიფიცირების მიზნით, მოვამზადეთ მისი დიმეთილის ეთერი, რომელიც ცხელი ეთილის სპირტიდან ორჯერ გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 136—137°-ზე, ლიტერატურული მონაცემების მიხედვით მისი ლობის ტემპერატურა 140°-ია.

151—155°-იან ფრაქციაში იზობროპილბენზოლის არსებობის დასადასტურებლად გამოვიყენეთ ულმანის მეთოდი. აღნიშნული ფრაქციის დაქანგვით გამოყოფილია ბენზოის მკვა, რომელიც ცხელი წყლიდან ორჯერ გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 119—120°-ზე. ამგვარად, ბენზოის მკვას იდენტიფიცირება მიუთითებს ბენზინის ფრაქციაში იზობროპილბენზოლის არსებობაზე. 155—160°-იან ფრაქციაში მოსალოდნელი არომატული ნახშირწყალბადი (პროპილბენზოლი) იდენტიფიცირებულია ბენზოის მკვას სახით, რომელიც ცხელი წყლიდან გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 119—120°-ზე. აღნიშნული მკვა სინთეზურ ბენზოის მკვასთან, ლობის ტემპერატურით 120—121°, დებრესიას არ იძლეოდა.

150—200°-იანი ფრაქციიდან გამოყოფილი ფრაქციების 161—164° და 165—170° გამოკვლევისათვის ვიყენებდით ნიტრირების მეთოდს. ნიტრირება წარმოებდა აზოტის მქავესა ($\bar{d}=1,5017$) და გოგირდის მქავეს ($\bar{d}=1,837$) ნარევით.

161—164°-იან ფრაქციაში დუღილის ტემპერატურის მიხედვით მოსალოდნელი იყო მეზითილენის (დუღ. ტემპ. 164°) არსებობა. 161—164°-იან ფრაქციაში მეზითილენის არსებობის შემთხვევაში დანიტრების აღნიშნულ პირობებში უნდა წარმოქმნილიყო ტრინიტრომეზითილენი (ლღობის ტემპერატურა 230—232°). გაფილტვრით ნალექი დაცილებულ იქნა ხსნარისაგან. ტრინიტროფსევდოკუმოლის სპირტთან და ერთ წვეთ ნატრიუმის ტუტის ხსნართან იძლევა ინტენსიურ მწვანე შეფერვას, რომელიც თანდათანობით ღებულობს მუქ ყავისფერ შეფერვას, რასაც საერთოდ მეზითილენის შემთხვევაში ადგილი არა აქვს. 161—164°-იანი ფრაქციის შემთხვევაში აღნიშნული ფერადი რეაქციით მიღებული დადებითი შედეგი მოწმობს მასში ფსევდოკუმოლის არსებობას. რაც შეეხება მეზითილენს, იგი მის შესაბამის ფრაქციაში (161—164°) არ არის აღმოჩენილი.

165—170°-იანი ფრაქციის შესასწავლად აგრეთვე მივმართეთ დანიტრების მეთოდს. ამ ფრაქციაში მოსალოდნელი იყო ფსევდოკუმოლის არსებობა (დუღ. ტემპ. 168°). ნალექს ამ შემთხვევაშიც ვტოვებდით ერთი დღე-ღამით. მიღებული ნალექი გადაკრისტალბებული იქნა ბენზოლიდან და გალღვა 179—180°-მდე. ამ შემთხვევაშიც საძიებელი ნახშირწყალბადი — ფსევდოკუმოლი იძლეოდა ფერად რეაქციას, კერძოდ მწვანე შეფერვას, რაც უმალ გადადის მუქ ყავისფერ შეფერვად; ეს 165—170°-იან ფრაქციაში ფსევდოკუმოლის არსებობაზე მიუთითებს.

60—95°-იანი ფრაქციის სულფირებით გამოყოფილი არომატული ნახშირწყალბადების ფრაქციონირების შედეგად ბენზოლის შესაბამისი ფრაქცია არ იქნა მიღებული.

დასკვნები

1. პატარა შირაქის ნავთობის 80—150°-იან ფრაქციაში იდენტიფიცირებულია: ტოლუოლი და ეთილბენზოლი—ბენზოის მქავეს სახით, ო-ქსილოლი—ო-ფტალის მქავეს სახით, მ-ქსილოლი—მ-ფტალის მქავესა და მისი დიმეთილის ეთერის სახით. პ-ქსილოლი—ტერეფტალის მქავეს და მისი დიმეთილის ეთერის სახით.

2. პატარა შირაქის ნავთობის 122—150°-იან ფრაქციაში იდენტიფიცირებულია ნ-პროპილბენზოლი და იზოპროპილბენზოლი—ბენზოის მქავეს სახით.

3. 150—200°-იან ფრაქციაში იდენტიფიცირებულია: ფსევდოკუმოლი ტრინიტროფსევდოკუმოლის სახით.

(წარმოდგენილია 18. XI, 1971)

ორგანული ქიმიის
კათედრა

ლიტერატურა

1. Ф. Бейлштейн и А. Н. Курбатов, ЖРХО, 15, 5, 1883.
2. X. И. Арешидзе и А. М. Гахокидзе, ЖПХ, 17, 529, 1914.
3. X. И. Арешидзе, ДАН Азерб. ССР, 4, 525, 1948; X. И. Арешидзе и Е. М. Бенашвили, Труды Института химии им. П. Г. Меликишвили АН



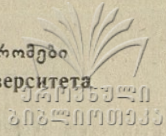
- Грузинской ССР, 10, 13, 1951. Известия Ясского политехнического института 8, № 3 — 4, 161, 1962.
4. Х. И. Арешидзе и Е. П. Хечинашвили, Известия Ясского политехнического института 10, № 1 — 2, 151, 1964.
 5. Б. А. Казанский, Г. С. Ландсберг, А. Ф. Платэ и др., Изв. АН СССР, ОХН, 1053, 1954, 456/1954/, 865 /1954/.
 6. Е. А. Робинзон и Е. С. Поеровская, Определение группового состава бензинов. Изв. Академии наук. М.-Л., 1936, 79.
 7. F. Ullman, Ber., 36, 1797, 1903.
 8. А. Ф. Добрянский и Р. Оболенцев, ЖОХ, 17, 1810, 1938.

Х. И. АРЕШИДЗЕ, Т. Н. ЛЕБСАДЗЕ, Н. С. ЦИЦИШВИЛИ

ИССЛЕДОВАНИЕ АРОМАТИЧЕСКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ БЕНЗИНО-ЛИГРОИНОВЫХ ФРАКЦИЙ МАЛОШИРАКСКОЙ НЕФТИ

Резюме

Изучены ароматические углеводороды бензино-лигроиновых фракций малоширакской нефти. Обнаружены следующие ароматические углеводороды: толуол, этилбензол, три изомера ксилола, н-пропилбензол, изопропилбензол и псевдокумол.

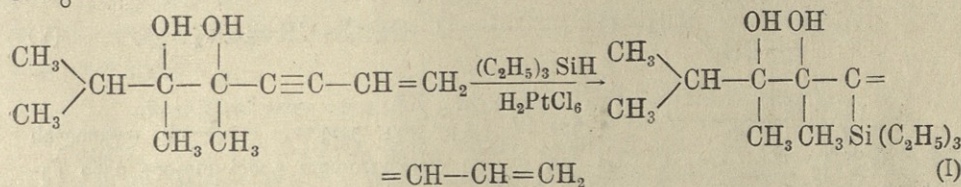


ალკილჰიდრიდ- და ალკილქლორსილანების მოქმედება
2, 3, 4-ტრიმეთილპენტინ-5-ენ-7-დიოლ-3, 4-ზე

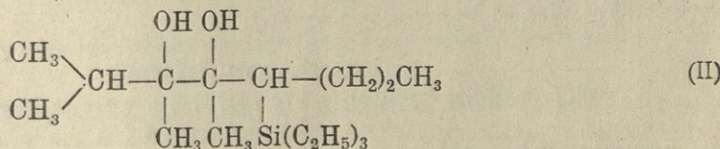
ა. ნოღაიძელი, ნ. რთველიაშვილი

ცნობილია, რომ ვინილეთინილკარბინოლებთან H_2PtCl_6 -ის თანდასწრებით რეაქცია მიდის ალკილჰიდრიდსილანის მიერთებით სამმაგ ბმასთან [1]. ენინგლიკოლებზე ალკილჰიდრიდსილანების მოქმედება არ იყო შესწავლილი.

კვლევის შედეგად აღმოჩნდა, რომ რეაქცია მიდის სამმაგ ბმასთან მიერთების გზით:

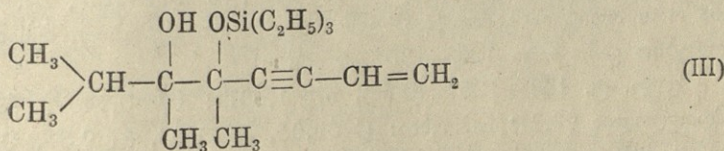


$Pd/CaCO_3$ -ით შთანთქმული 250 მლ წყალბადი მიუთითებს სილიციუმის შემცველ გლიკოლში ორი უჯერი ბმის არსებობაზე: დულ. $t^\circ 130-131^\circ$ (II)



აღნიშნულ ენინგლიკოლზე ტრიეთილქლორსილანის ურთიერთქმედებისას მოსალოდნელი იყო როგორც მონო-, ისე დისილიციუმის ეთერის წარმოქმნა.

რეაქცია ჩატარებული იყო პირიდინის არეში. გამოყოფილ იქნა მხოლოდ ერთი ფრაქცია, დუდილის ტემპერატურით $99-101^\circ$.

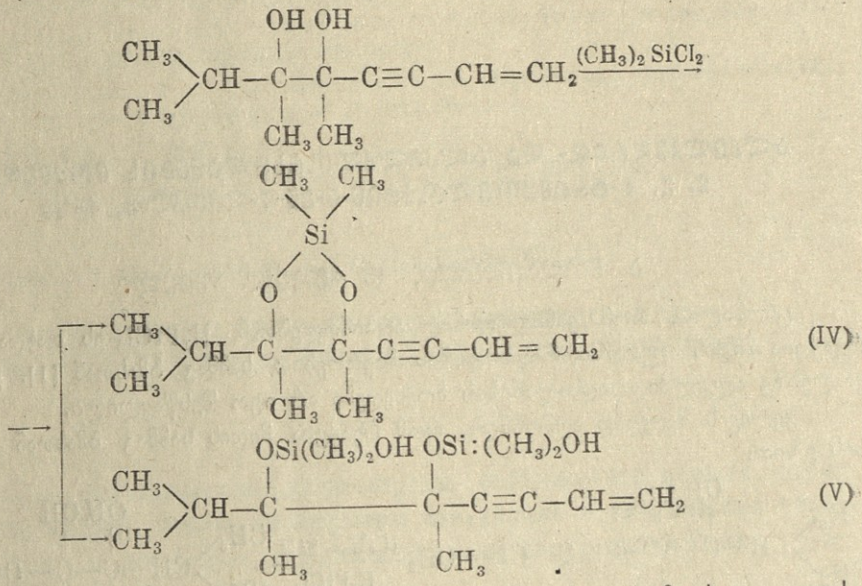


რეაქციების ასეთი მიმართულება განპირობებულია სივრცითი ფაქტორის გავლენით [2].

შთანთქმული წყალბადის რაოდენობა და ნაჯერი ნაერთის წარმოქმნა მიუთითებს მოლეკულაში ვინილაცეტილენის დაჯგუფების არსებობაზე. მიღებული იქნა ნაერთი დუდილის ტემპერატურით $120-121^\circ$ (0 მმ),



მეთილიზობროპილის რადიკალის შემცველ α -ენინგლიკოლზე დიმეტილდი-
 ქლორსილანის ურთიერთქმედების შედეგად მოსალოდნელი სამი მიმართულებიდან
 რეაქცია მიდის შემდეგი პროდუქტების წარმოქმნით:



რეაქციის პირველი პროდუქტია IV ციკური ეთერი, რომლის დუდილის ტემპერატურა არის 74—75° (0,1 მმ), მცირე რაოდენობით გამოყოფილ იქნა შედარებით ბლანტი სითხე დუდილის ტემპერატურით (134—136°) (1 მმ), რომელიც პოლიმერიზდება. აღნიშნული პროდუქტი შეიცავს ჰიდროქსილის ჯგუფებს (V), რაც გვაფიქრებინებს, რომ მიღებული შენაერთი შეესაბამება არამდგრადი ალკილქლორსილანწარმოებულის ჰიდროლიზის პროდუქტს.

ექსპერიმენტული ნაწილი

2, 3, 4-ტრიმეთილოქტინ-5-ენ-7-დიოლ-8, 4-ის ურთიერთქმედება ტრიეთილშიდრიდსილანთან

კოლბაში მოვათავსეთ 11 გ მეთილიზობროპილის რადიკალის შემცველი ენინგლიკოლი, 0,5 მლ $\text{H}_2\text{P} + \text{Cl}_6$ (იზობროპილის სპირტში) და საწვეთი ძაბრიდან დაკუმბატეთ 7 გ ტრიეთილსილანი. მექანიკური მორევის პირობებში სარეაქციო ნარევი ვაცხელებთ 24 საათის განმავლობაში, შემდეგ ნარევი გამოვხადეთ ვაკუუმში. მივიღეთ სამი ფრაქცია: I. 56—107°; II. 107—137°; III. 133—137° (0 მმ). წინა ორი ფრაქცია გამოიხადა უმნიშვნელო რაოდენობით. მესამე ფრაქცია განმეორებით გამოიხადა 133—135° (0 მმ).

დულ. ტ. 133—135° (0 მმ), n_D^{20} 1,5011; d_4^{20} 0,9489; ნაპ. MR_D 92,51. გამოთვლილია 92,71° ნაკონია: C 68,85, H 11,63, Si 9,31, OH 11,46. გამოთვლილია %: C 68,45, H 11,11. Si 9,39 OH 11,42.

2, 3, 4-ტრიმეთილ-5-ტრიეთილსან-ოქტენ-5-ენ-7-დიოლი-8, 4-ის ჰიდრირება Pd/CaCO₃-ის თანდასწრებით

1,35 გ ნივთიერების მიერ 50 მლ ეთილის სპირტში 0,5 გ Pd/CaCO₃ თანდასწრებისას შთაინთქა 250 მლ წყალბადი (t 24°, P 722). გამოთვლილია

222 მლ H_2 . სათანადო გადამუშავების შემდეგ ნივთიერება 0 მმ წნევაზე გამოიხადა 130—131°.

ანალიზი სითხისა, რომელიც 0 მმ წნევაზე დუღს 130—132°-ზე. n_D^{20} 1,4803, d_4^{20} 0,9184, MR_D 93,66. ნაპოვნია %: C 67,89, H 12,98, Si 9.18, OH 11.55, $C_{17}H_{38}O_2Si$ გამოთვლილია %: C 67.54, H 12,58, Si 9.42, OH 11.25. მიღებულია გამჭვირვალე ნივთიერება 0,5 გ რაოდენობით, რაც თეორიულს 36,7 % შეადგენდა.

2, 3, 4-ტრიმეთილ-ოქტინ-5-ენ-7-დიოლ-3, 4-ის ურთიერთქმედება

ტრიეთილქლორსილანთან

სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 10 გ მეთილ-იზოპროპილის რადიკალის შემცველი α -ენინგლიკოლი; დავუმატეთ მას მცირე რაოდენობა აბსოლუტური ეთერი, 10 გ პირიდინი და 16,5 გ ტრიეთილქლორსილანი. მუდმივი მორევის პირობებში კოლბას ვაცხელებდით 60—70°-მდე 8 საათის განმავლობაში. მივიღეთ ორი ფენა—ზედა ყვეთელი ეთერიანი ფენა გადმოვიტანეთ დეკანტაციით, ხოლო ქვედა ფენა (ნალექი) დავშალეთ წყლით, გამოვწვლილეთ ეთერით და გავაშრეთ გლახურის მარილზე. გაერთიანებული ეთერსნარიდან ეთერის მოშორების შემდეგ ვამოხადეთ ვაკუუმზე. მივიღეთ 1 ფრაქცია 68—95°; II—99—101° (0 მმ): ნივთიერება დუღილის ტემპერატურით 99—101° (0 მმ) შეადგენდა რეაქციის ძირითად პროდუქტს.

ანალიზი სითხისა დუღილის ტემპერატურით 99—101° 0 მმ წნევაზე

n_D^{20} 1,4772, d_4^{20} 0,9290, MR_D 90,08; გამოთვლილია 90.72. ნაპოვნია %: C 68.43, H 10,56, Si 8,93, OH 5.33. გამოთვლილია პროცენტები %: C 68.91, H 9.45, Si 45.78, OH 5.20. მიღებული იქნა გამჭვირვალე, უფერო მოძრავი სითხე, სულ მიღებული იქნა სითხე 4,5 გ. რაოდენობით, რაც თეორიულს 27,6 % შეადგენს.

2, 3, 4-ტრიმეთილ-ოქტინ-5-ენ-7-ოლ-3-ტრიეთილსილან-ოლ-4-ის ჰიდრირება

$Pd/CaCO_3$ -ის თანდასწრებით

1,77 გ ნივთიერების 50 მლ ეთილის სპირტში ჰიდრირებისას შთაინთქა 435 მლ წყალბადი ($Pd/CaCO_3$ 0,5 გრ t—21°, P—724 მმ). გამოთვლილია 401 მლ.

0 მმ წნევაზე გამოხდელი ნივთიერების დუღილის ტემპერატურაა 120—121°. ანალიზი სითხისა, დუღილის ტემპერატურით 120—121° (0 მმ).

n_D^{20} 1.4643 d_4^{20} 0,8983. MR_D 92,75; გამოთვლილია 93.05. ნაპოვნია %: C 64.79, H 12.97, Si 8.87, OH 5.41. $C_{17}H_{32}O_2Si$ გამოთვლილია %: C 64.23, H 12.58, Si 9,27, OH 5.66. მივიღეთ გამჭვირვალე, მოძრავი სითხე 0,7 რაოდენობით, რაც თეორიულს 38,8 % შეადგენდა.

2, 3, 4-ტრიმეთილ-ოქტინ-5-ენ-7-დიოლი-3, 4-ის ურთიერთქმედება

დიმეთილდიქლორ-სილანთან

სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 10 გ α -ენინგლიკოლი, დავუმატეთ მცირე რაოდენობით აბსოლუტური ეთერი, 9 გ პირიდინი და 9 გ დიმეთილდიქლორსილანი. მუდმივი მორევის პირობებში სარეაქციო ნარევი ვაცხელებთ 60—70°-მდე 8 საათის განმავლობაში. მივიღეთ 2 ფენა. ზედა ფენა გადმოვიტანეთ დეკანტაციით, ქვედა ნალექის ფენა დავამუშავეთ წყლით, გამოვწვლილეთ ეთერით და გავაშრეთ გლახურის მარილზე. გაერთიანებული ეთერსნარიდან ეთერის მოშო-



რების შემდეგ 0 მმ წნევაზე მივიღეთ ორი ფრაქცია: I ფრაქცია—74—75°C, II—134—136°.

ანალიზის სითხისა, რომელიც 0 მმ წნევაზე დუღს 74—76°C-ზე

n_D^{20} 1.4781, d_4^{20} 0,9421, ნაპოვნია %: C 65,67, H 9,21, Si 11,43. $C_{13}H_{22}O_2Si$ გამოთვლილია %: C 65,12, H 9,24, Si 11,76.

ანალიზი სითხისა, დუღილის ტემპერატურით 134—136° 0 მმ წნევაზე n_D^{20} 1.4651, d_4^{20} 0.9900, MR_D 92,03. გამოთვლილია 91,39. ნაპოვნია %: C 54,86, H 9,50, Si 16,78, OH 10,57, $C_{15}H_{30}O_4Si$ -დან გამოთვლილია %: C 54,54, H 9,99, Si 17,27, OH 10,35.

მიღებული ნივთიერებები გამჭვირვალე მოძრავი სითხეებია.

α -ენინგლიკოლის და ჰიდრიდსილანის მიერთების პროდუქტის სპექტროსკოპიულმა გამოკვლევამ გვიჩვენა, რომ სამმაგი ბმა შესუსტებულია, რადგან იგი მოთავსებულია მოლეკულის ცენტრალურ ნაწილში. რაც შეეხება $C=C$ -შესაბამისი რხევები მოთავსებულია 1614 cm^{-1} -ის არეში. რაც შეიძლება აიხსნას სილიციუმის მიერთებით სამმაგ ბმასთან. თვით სილიციუმს შეესაბამება სისწირეთა ზოლი, რომელიც მოთავსებულია 730 cm^{-1} -ის უბანში. სამმაგი ბმის შესაბამისი სისწირეები არ გვეძლევა.

დასკვნები:

1. შესწავლილია იზოპროპილის რადიკალის შემცველ α -ენინგლიკოლზე ტრიეთილჰიდრიდსილანის მოქმედება კატალიზატორ H_2PtCl_6 -ის თანდასწრებით. მიღებული ნაერთი $Pd/CaCO_3$ -ის თანდასწრებით ჰიდრირების შედეგად იძლევა სილიციუმის შემცველ ნაჯერ α -გლიკოლს.

იზოპროპილის რადიკალის შემცველ α -ენინგლიკოლზე ტრიეთილქლორსილანის მოქმედებით ინდენტიფიცირებულია სილიციუმშემცველი უფერო მონოეთერი, რომელიც იერთებს სამ მოლეკულა წყალბადს და ნაჯერ მონოეთერს იძლევა.

2, 3, 4-ტრიმეთილ-ოქტინ-5-ენ-7-დიოლი-3, 4-ზე დიმეთილდიქლორსილანის ურთიერთქმედების შემთხვევაში ინდენტიფიცირებულია როგორც ჩანაცვლების, ისე ჰიდროლიზის პროდუქტები.

(წარმოდგენილია 29. III. 1972)

მაღალმოლეკულურ ნაერთთა ქიმიის კათედრა

ლიტერატურა

1. И. М. Гвердцители, К. И. Черкезишвили, А. Д. Петров, ДАН СССР 136, 4, 1961, 817.
2. ა. რთველიაშვილი, ა. ი. ნოღაიდელი, თსუ შრომები, 104, 1964, 259.

А. И. НОГАИДЕЛИ, Н. А. РТВЕЛИАШВИЛИ

ДЕЙСТВИЕ АЛКИЛГИДРИД- И АЛКИЛХЛОРСИЛАНОВ НА 2, 3, 4-ТРИМЕТИЛОКТИН-5-ЕН-7-ДИОЛ-3, 4

Резюме

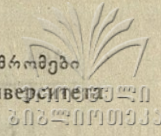
В работе описано взаимодействие α -енинггликоля с изопропиловым радикалом с триэтилгидридсиланом в присутствии катализатора Спейера.

Установлено, что продуктом присоединения по тройной связи является 2, 3, 4-триметил-5-триэтилсилил, октадиен-5, 7.

Указанное соединение при гидрировании в присутствии Pd/CaCO₃ переходит в соответствующий предельный α-гликоль.

Взаимодействием триэтилхлорсилана с α-енингликолем, содержащим изопропиловый радикал, идентифицирован 2, 3, 4-триметил-октинол-3-триэтилсилокси-4-октин-5-ен-7.

Действием диметилхлорсилана на 2, 3, 4-триметил-октин-5-ен-7-диол-3, 4 идентифицирован циклический эфир и продукт гидролиза диэфира алкилхлорсилила—алкенокисилан.

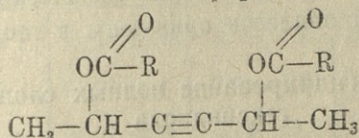


СИНТЕЗ И КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ГИДРИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭФИРОВ ГЕКСИНДИОЛА

Ш. Г. МИКАДЗЕ, Н. Г. АРЕВАДЗЕ

Ранее были синтезированы и изучены уксуснокислые эфиры вторичных ацетиленовых γ -гликолей кипячением соответствующих гликолей с уксусным ангидридом в присутствии безводного ацетата натрия [1—3]. Позднее в нашей лаборатории был разработан метод для получения полных и неполных сложных эфиров бутиндиола-1,4 прямым действием кислоты на гликоль в присутствии *p*-толуолсульфокислоты [4]. Для установления строения неполных эфиров бутиндиола нами проведена их этерификация и впервые были получены сложные эфиры бутиндиола со смешанными радикалами [5]. Кроме того, нами проведено исследование для получения сложных эфиров различных кислот третичных ацетиленовых γ -гликолей в условиях, выработанных нами, но в чистом виде выделить их нам не удалось. Сложные эфиры пропионовой и *n*-масляной кислоты тетраметилбутиндиола и диметилдиэтилбутиндиола были синтезированы действием ангидридов кислот на гликоль [6].

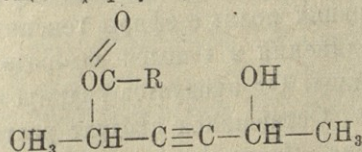
В данной работе мы задались целью синтезировать и изучить полные и неполные эфиры гексин-3-диола-2,5. Сложные эфиры (кроме I, II) гексиндиола нами были получены прямым действием одноосновных органических кислот на гликоль в присутствии *p*-толуолсульфокислоты. Таким путем были синтезированы полные эфиры гексиндиола с общей формулой



где

R = CH₃ (I); C₂H₅ (II); C₃H₇ (III); C₄H₉ (IV); *изо*-C₄H₉ (V); C₅H₁₁ (VI);

и неполные эфиры с общей формулой



где R = C₃H₇ (VII); C₃H₉ (VIII); *изо*-C₄H₉ (IX); C₅H₁₁ (X).

Эфиры гексиндиола были разделены с применением тонкослойной хроматографии (адсорбент Al_2O_3 , растворитель гексан—эфир 3:1). Строение синтезированных соединений, кроме химического анализа, подтверждено ИК-спектрами, снятыми на приборе УР—10. В спектре исходного соединения (гексиндиол) наблюдается полоса в области $3200—3600^{-1}$ см. При полной этерификации полоса поглощения гидроксильной группы исчезает

и появляется полоса, соответствующая сложноэфирным группам $\begin{array}{c} O \\ \parallel \\ -C-O- \end{array}$ в области 1745 см^{-1} . В спектрах всех названных эфиров появляется также полоса в области 1170 см^{-1} , обусловленная $-C-O$ колебаниями.

В случае частичной этерификации в спектрах обнаруживается слабая полоса гидроксильной группы.

Ю. С. Залькиндо и его учениками [1—4] изучено каталитическое гидрирование полных эфиров уксусной кислоты адетиленовых, а также диэтиленовых гликолей. Мы проводили каталитическое гидрирование полных эфиров гексиндиола проионовой, масляной, *n*-валерьяновой и *n*-капроновой кислот в присутствии $Pd/CaCO_3$. В процессе работы установлено, что гидрирование вышеуказанных эфиров происходит нормально—получаются соответствующие предельные эфиры.

Экспериментальная часть

Синтез полных и неполных эфиров гексиндиола. I и II были получены действием ангидридов кислот на гликоль в присутствии ацетата натрия. Остальные эфиры получили действием кислот на гексиндиол в присутствии *p*-толуолсульфокислоты. Смесь гликоля, кислот и катализатора, перемешивая, нагревали при $115—150^\circ$ в течение 5—10 часов. После окончания реакции избыток кислоты нейтрализовали содой, продукт экстрагировали эфиром, сушили сульфатом натрия и подвергали фракционированию, очищали с помощью тонкослойной хроматографии. Количество исходных веществ, условия реакции, физические константы полученных эфиров и результаты анализов приведены в таблице 1.

Каталитическое гидрирование полных сложных эфиров гексиндиола

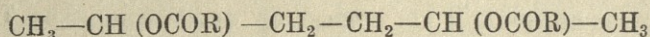
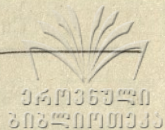
Каталитическое гидрирование некоторых полных сложных эфиров гексиндиола проводили в присутствии катализатора $Pd/CaCO_3$ почти в одинаковых условиях (количество: эфира 0,01 м, H_2 2—мол., t $22^\circ C$).

В указанных условиях полные эфиры гексиндиола гидрируются нормально и после присоединения 2 г-молей водорода получают соответствующие предельные эфиры. От продуктов гидрирования отделили катализатор и отогнали спирт. Оставшийся продукт растворили в эфире и сушили над сульфатом натрия. После отгонки эфира продукт перегнали в вакууме. Получили эфиры с общей формулой:

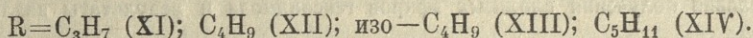
Условия получения сложных эфиров гексиндиола и результаты анализов

| Гексиндиол | Исходные вещества (в г) | | Условия реакции | | № полученных соединений | Выход (в %) | Т. кип. (р в мм) | n_D^{20} | d_4^{20} | MR _D | |
|------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------|--------------|-------------------------|-------------|--------------------------|------------|------------|-----------------|-----------|
| | кислота или ангидрид | катализатор | Температура °С | длительность | | | | | | найдено | вычислено |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 10 | уксусный (18) | CH ₃ COONa (2) | 115—120 | 5 | I | 54 | 79—80 (I) | 1,4422 | 1,0419 | 50,302 | 49,686 |
| 5 | пропионовый (13) | CH ₃ COONa (1) | 120—130 | 6 | II | 48 | 108—110 (I) | 1,4448 | 1,0147 | 59,245 | 58,922 |
| 20 | н-масляная (87) | п-толуолсульфокислота (4) | 150—160 | 10 | VII | 8 | 98—104 (I) | 1,4500 | 0,9968 | 49,61 | 49,557 |
| | | | | | III | 32,6 | 114—116 (I) | 1,4480 | 1,0147 | 67,022 | 68,158 |
| 21 | н-валериановая (90) | " | 150—160 | 10 | VIII | 15 | 105—110 (I) | 1,4540 | 0,9833 | 54,53 | 54,175 |
| | | | | | IV | 43,9 | 133—135 (I) | 1,4505 | 0,9683 | 78,873 | 77,394 |
| 30 | изовалериановая (100) | п-толуолсульфокислота (5) | 120—140 | 8 | IX | 17,4 | 110—113 (I) | 1,4486 | 0,9772 | 54,302 | 54,175 |
| | | | | | V | 39,0 | 119—123 (I) | 1,4441 | 0,9567 | 78,303 | 77,394 |
| 30 | н-капроновая (160) | п-толуолсульфокислота (4,5) | 140—150 | 10 | X | 34,0 | 122—124 (I) | 1,4520 | 0,9710 | 58,91 | 58,793 |
| | | | | | VI | 46,6 | 141—142 Т. пл. 36—37° | 1,4480 | 0,9388 | 88,39 | 86,603 |

| Гексиндиол | Исходные вещества (в г) | | Найдено % | | Формула | Вычислено % | | % OH | |
|------------|-------------------------|-----------------------------|---------------|--------------|--|-------------|------|---------|-----------|
| | кислота или ангидрид | катализатор | С | Н | | С | Н | найдено | вычислено |
| 1 | 2 | 3 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | уксусный (18) | CH ₃ COONa (2) | 60,04; 60,48 | 6,92; 7,25 | C ₁₀ H ₁₄ O ₄ | 60,61 | 7,07 | — | — |
| 5 | пропионовый (13) | CH ₃ COONa (1) | 62,72; 62,48 | 7,91; 7,71 | C ₁₂ H ₁₈ O ₄ | 63,71 | 7,96 | — | — |
| 20 | н-масляная (87) | п-толуолсульфокислота (4) | 64,82; 64,76 | 8,14; 8,08 | C ₁₀ H ₁₆ O ₃ | 65,21 | 8,69 | 10,03 | 9,23 |
| | | | 65,98; 65,86 | 8,58; 9,15 | C ₁₄ H ₂₂ O ₄ | 66,16 | 8,88 | — | — |
| 21 | н-валериановая (90) | " | 66,90; 66,64 | 10,16; 10,01 | C ₁₁ H ₁₈ O ₃ | 66,67 | 9,09 | 10,68 | 8,59 |
| | | | 68,61; 68,449 | 9,78; 9,49 | C ₁₆ H ₂₆ O ₄ | 68,08 | 9,21 | — | — |
| 30 | изовалериановая (100) | п-толуолсульфокислота (5) | 67,77; 67,43 | 9,71; 9,54 | C ₁₁ H ₁₈ O ₃ | 66,67 | 9,09 | 8,2 | 7,5 |
| | | | 67,63; 67,57 | 10,16; 9,73 | C ₁₆ H ₂₆ O ₄ | 68,08 | 9,21 | — | — |
| 30 | н-капроновая (160) | п-толуолсульфокислота (4,5) | 67,39; 67,44 | 9,50; 9,75 | C ₁₂ H ₂₀ O ₃ | 67,92 | 9,43 | 9,44 | 8,24 |
| | | | 69,75; 69,35 | 9,90; 9,67 | C ₁₈ H ₃₀ O ₄ | 69,67 | 9,67 | — | — |



где



Физико-химическая характеристика и результаты анализа некоторых эфиров гександиола приведены в таблице 2.

Таблица 2

Физико-химическая характеристика и результаты анализа некоторых эфиров гександиола

| Соединения | Т. кип. (р 1 мм) | n_D^{20} | d_4^{20} | M_{RD} | | Найдено % | | Формула | Вычислено % | |
|------------|---------------------|------------|------------|----------|-----------|--------------|--------------|--|-------------|-------|
| | | | | найдено | вычислено | С | Н | | С | Н |
| XI | 104—109 | 1,4280 | 0,9572 | 61,825 | 60,924 | 62,13; 62,47 | 9,46; 9,74 | $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_4$ | 62,60 | 9,65 |
| XII | 109—110 | 1,4292 | 0,9484 | 70,158 | 70,160 | 65,27; 65,37 | 10,12; 10,57 | $\text{C}_{14}\text{H}_{26}\text{O}_4$ | 65,12 | 10,07 |
| XIII | 112—113 | 1,4315 | 0,9354 | 79,204 | 79,396 | 67,94; 67,52 | 10,64; 10,26 | $\text{C}_{16}\text{H}_{30}\text{O}_4$ | 67,13 | 10,48 |
| XIV | 115—116 | 1,4339 | 0,9233 | 88,632 | 88,54 | 68,40; 69,10 | 11,06; 11,41 | $\text{C}_{18}\text{H}_{34}\text{O}_4$ | 68,79 | 10,82 |

Выводы

1. Изучено действие одноосновных органических кислот на гексиндиол в присутствии п-толуолеульфокислоты и выработано условие для получения соответствующих полных и неполных эфиров.

2. Впервые синтезированы и охарактеризованы полные эфиры гексиндиола-2,5 пропионовой, н-масляной, н-валерьяновой, изовалерьяновой и н-капроновой кислот, а также неполные эфиры гексиндиола н-масляной, н-валерьяновой, изовалерьяновой и н-капроновой кислот.

3. Изучено каталитическое гидрирование некоторых полных эфиров гексиндиола, выделены и охарактеризованы соответствующие предельные сложные эфиры.

(Представлено 29.II.1972)

Кафедра аналитической химии

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Залькинд, И. С. Бессонова, ЖРХО, т. 53, 1921 286.
2. Ю. С. Залькинд, З. И. Нейштаб, ЖРХО, т. 50, 1918, 34.
3. А. И. Ногандели, К. Я. Дзагидзе, ЖОХ, т. 11, 1941, 137.
4. Ш. Г. Микадзе, ЖОРХ, т. 1, 1965, 471; Труды Тбилисского гос. университета, т. 80, 1961, 179; т. 104, 1964, 86.
5. Ш. Г. Микадзе, Л. М. Когуашвили, Труды Тбилисского гос. университета, т. А 2, 141, 1971, 37.
6. Ш. Г. Микадзе, Н. Г. Аревадзе, Т. И. Чехошвили, Труды Тбилисского гос. университета, т. А 2, 141, 1971, 31.

შ. მიჰაძე, ნ. არეჰაძე

ჰექსინდიოლის რთული ეთერების სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება

რ ე ზ ი უ მ ე

1. შესწავლილია ჰექსინდიოლზე ერთფუძიანი კარბონმჟავების მოქმედება პ-ტოლუოლსულფომჟავას თანაობისას და შემუშავებულია რეაქციის პირობები შესაბამისი სრული და არასრული ეთერების მისაღებად.

2. პირველადაა სინთეზირებული პროპიონის, ნ-ერბოს, ნ-ვალერიანის, იზო-ვალერიანის, ნ-კაპრონმჟავას ჰექსინდიოლის სრული ეთერები, აგრეთვე ნ-ერბოს, ნ-ვალერიანის, იზოვალერიანისა და კაპრონმჟავას ჰექსინდიოლის არასრული ეთერები.

3. შესწავლილია ჰექსინდიოლის ზოგიერთი სრული ეთერების კატალიზური ჰიდრირება, გამოყოფილი და დახასიათებულია შესაბამისი ნაჯერი სრული ეთერები.

ГИДРОСТАНИРОВАНИЕ АЦЕТИЛЕНОВЫХ СПИРТОВ ГИДРИДОМ ТРИПРОПИЛОЛОВА

И. М. ГВЕРДЦТЕЛИ. С. В. АДАМИЯ

Ранее нами было изучено гидростанирование ацетиленовых третичных спиртов гидридом триэтилола [1].

Настоящая статья посвящена гидростанированию ацетиленовых третичных и вторичного спиртов гидридом трипропилола.

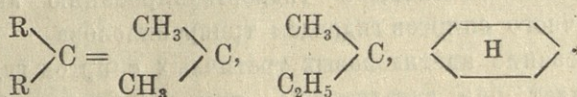
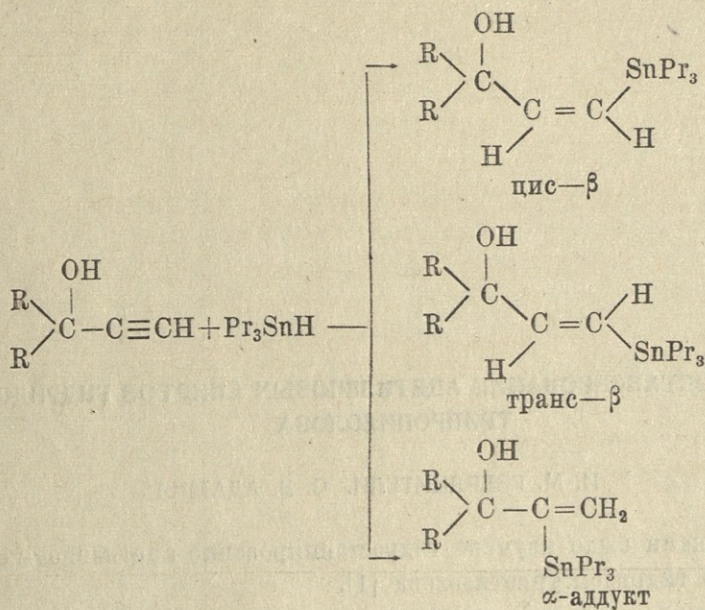
Гидростанирование ацетиленовых третичных спиртов гидридом трипропилола протекает без катализатора, при нагревании реакционной смеси до $80-100^\circ$ в течение 6 часов. Гидрид трипропилола присоединяется к тройной связи с образованием олефинового оловоорганического спирта. Образование аддукта подтверждено ИК-спектрами, где отсутствует характерная полоса поглощения тройной связи при 2120 см^{-1} . Методом тонкослойной хроматографии из полученных аддуктов было выделено три изомера. Исследование изомеров ИК-спектроскопией показало, что один изомер с $R_f=0,16$ представляет цис- β -аддукт с характерной полосой поглощения при 730 см^{-1} , второй изомер с $R_f=0,40$ представляет α -аддукт с характерной полосой поглощения при 3030 см^{-1} и 890 см^{-1} , а третий изомер с $R_f=0,68$ представляет транс- β -аддукт с характерной полосой поглощения при 990 см^{-1} .

Во всех трех изомерах полоса поглощения $\text{C}=\text{C}$ связи обнаруживается при более низких частотах 1570 см^{-1} , что обусловлено присутствием атома олова у двойной связи.

Таким образом, данные ИК-спектроскопии подтверждают, что присоединение гидрида трипропилола идет как по правилу Марковникова, так и вопреки ему с образованием α - и β -аддуктов.

При гидростанировании ацетиленовых третичных спиртов реакция дегидроконденсации за счет ацетиленового водорода или гидроксильного водорода не происходит, ибо в ИК-спектрах присутствуют характерные полосы поглощения OH группы при $3200-3400\text{ см}^{-1}$.

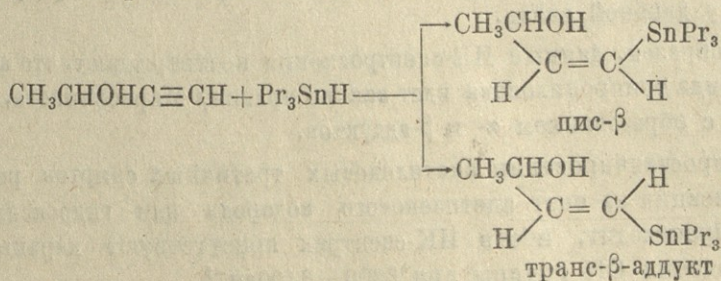
Гидростаннирование идет по схеме:



Гидростаннирование ацетиленового вторичного спирта-метилацетиленилкарбинола гидридом трипропилолова в отличие от гидростаннирования третичных спиртов было проведено в присутствии катализатора-азодизобутиронитрила. Реакция протекает нагреванием при более низкой температуре (80°) в течение 4 часов.

Методом тонкослойной хроматографии из полученного аддукта было выделено два изомера. Один изомер с $R_f=0,65$ представляет транс- β -аддукт в ИК-спектре с характерной полосой поглощения при 990см^{-1} , второй изомер с $R_f=0,83$ представляет цис- β -аддукт в ИК-спектре с характерной полосой поглощения при 730см^{-1} . Полоса поглощения $\text{C}=\text{C}$ связи проявляется при 1570см^{-1} .

Гидростаннирование метилацетиленилкарбинола идет по схеме:



Экспериментальная часть

Третичные ацетиленовые спирты получали по методу Фаворского [2], вторичный-метилацетиленилкарбинол—в жидком аммиаке [3], а гидрид трипропилолова получали восстановлением хлоридов по методу Ван-дер-Керка [4].

Гидростаннирование ацетиленовых спиртов. Гидростаннирование ацетиленовых спиртов проводили по следующей общей методике. В ампулу, продутую азотом, помещали 0,05 М карбинола и 0,05 М гидрида трипропилолова. В ампулу в течение 3—5 минут пропускали азот, ампулу запаивали и нагревали в термостате при 80—100° в течение 4—6 часов. Затем ампулу вскрывали и содержимое перегоняли в вакууме. 3 г смеси, приготовленной из полученных трех фракций, разделяли методом тонкослойной хроматографии в системе гексан-эфир при соотношении 7:3 соответственно. Физико-химические константы хроматографически очищенных продуктов даны в таблице.

Выводы

1. Изучено гидростаннирование ацетиленовых третичных и вторичного спиртов гидридом трипропилолова и установлены оптимальные условия реакции.

2. Гидростаннирование ацетиленовых третичных спиртов, как это установлено ИК-спектрами хроматографически очищенных продуктов, идет как по правилу Марковникова, так и вопреки ему с образованием α - и β -аддуктов.

3. Каталитическое гидростаннирование ацетиленового вторичного спирта—метилацетиленилкарбинола—идет по правилу Фармера с образованием β - цис- и β - транс-аддуктов.

4. Установлено, что при гидростаннировании ацетиленовых спиртов дегидроконденсации за счет ацетиленового или гидроксильного водорода не происходит.

5. В ходе работы получено и охарактеризовано 11 хроматографически очищенных олифиновых оловоорганических спиртов.

(Представлено 23.II 1972)

Кафедра
органической химии

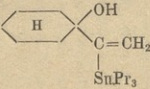
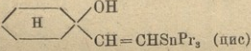
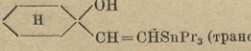
ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гвердцители, С. В. Адамия, Сообщения АНГССР, т. 57, 1970, 65.
2. А. Е. Фаворский, М. Ф. Шостаковский, Авторское свидетельство 59308, 1941.
3. Современные методы эксперимента в органической химии, под редакцией Кнуянца, ИЛ, М, 1960.
4. G. M. Van der Kerck, J. G. Noltes, J. G. A. Luijten, J. Appl. Chem., vol. 7, 1957, 336.

Физико-химические константы хроматографически очищенных продуктов

Таблица

| № | Соединения | Выход в% | т. кип. | d_4^{20} | n_D^{20} | MR _D | | Найдено % | | | Вычислено % | | |
|---|--|-------------|---------|------------|------------|-----------------|--------|-----------|------|----------------|-------------|------|----------------|
| | | | | | | найд. | вычис. | C | H | S _n | C | H | S _n |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{C} = \text{CH}_2 \\ \quad \\ \text{CH}_3 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | | 110(3) | 1.1345 | 1.4871 | 84.34 | 84.89 | 50.36 | 8.53 | 35.45 | 50.49 | 9.02 | 35.67 |
| 2 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{CH} = \text{CHSnPr}_3 \text{ (цис)} \\ \quad \\ \text{CH}_3 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | 80 | 117(3) | 1.1400 | 1.4870 | 83.94 | 84.89 | 50.45 | 8.72 | 35.36 | 50.49 | 9.02 | 35.67 |
| 3 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{CH} = \text{CHSnPr}_3 \text{ (транс)} \\ \quad \\ \text{CH}_3 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | | 120(3) | 1.1338 | 1.4886 | 84.87 | 84.89 | 50.53 | 9.14 | 35.67 | 50.49 | 9.02 | 35.67 |
| 4 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{C} = \text{CH}_2 \\ \quad \\ \text{C}_2\text{H}_5 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | | 117(2) | 1.0973 | 1.4870 | 90.84 | 89.49 | 51.65 | 9.15 | 34.03 | 51.92 | 9.23 | 34.24 |
| 5 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{CH} = \text{CHSnPr}_3 \text{ (цис)} \\ \quad \\ \text{C}_2\text{H}_5 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | 85 | 127(2) | 1.1261 | 1.4885 | 88.47 | 89.49 | 51.67 | 9.34 | 34.39 | 51.92 | 9.23 | 34.24 |
| 6 | $\begin{array}{c} \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \diagup \text{C} - \text{CH} = \text{CHSnPr}_3 \text{ (транс)} \\ \quad \\ \text{C}_2\text{H}_5 \quad \text{SnPr}_3 \end{array}$ | | 121(2) | 1.0952 | 1.4850 | 90.41 | 89.49 | 51.47 | 9.00 | 34.51 | 51.92 | 9.23 | 34.24 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----|---|----|--------|--------|--------|-------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| 7 |  | | 147(3) | 1.1480 | 1.5010 | 95.64 | 96.16 | 54.00 | 8.95 | 31.47 | 54.47 | 9.12 | 31.84 |
| 8 |  (цис) | 86 | 151(3) | 1.1504 | 1.5050 | 95.21 | 96.16 | 54.40 | 9.01 | 31.57 | 54.47 | 9.12 | 31.84 |
| 9 |  (транс) | | 153(3) | 1.1440 | 1.4988 | 95.62 | 96.16 | 54.50 | 9.25 | 31.62 | 54.47 | 9.12 | 31.84 |
| 10 | $\text{CH}_3\text{CHOHCH}=\text{CHSnPr}_3$ (цис) | | 122(3) | 1.1498 | 1.4985 | 80.25 | 79.69 | 48.84 | 8.65 | 37.02 | 48.94 | 8.78 | 37.24 |
| 11 | $\text{CH}_3\text{CHOHCH}=\text{CHSnPr}_3$ (транс) | 74 | 135(5) | 1.1510 | 1.4955 | 80.03 | 79.69 | 48.80 | 8.70 | 37.51 | 48.94 | 8.78 | 37.24 |

ი. გვერდწითელი. ს. აღაშია

აცეტილენური სპირტების ჰიდროსტანირება ტრიპროპილკალას ჰიდრიდით

რეზიუმე

ახალი, ეფექტური ინსექტიციდებისა და ფუნგიციდების მიღების მიზნით ჩვენს მიერ მიღებულ იქნა ოლეფინური კალაორგანული სპირტები, აცეტილენურ სპირტებზე ტრიპროპილკალას ჰიდრიდის მიერთებით.

ჩატარებულ იქნა აცეტილენური სპირტების როგორც თერმული ისე, კატალიზური ჰიდროსტანირება. აცეტილენური მესამადი სპირტების ჰიდროსტანირებით მიღებული ალუქტის თხელფენოვანი ქრომატოგრაფიისა და ი. წ. სპექტროსკოპიის მეთოდების გამოყენებით დადგენილ იქნა, რომ ტრიპროპილკალას ჰიდრიდის მიერთება მიდის სამმაგ ბმასთან, როგორც მარკოვნიკოვის, ისე ფარმერის წესით და α და β ალუქტის წარმოქმნით, აცეტილენური მეორადი სპირტის ჰიდროსტანირება ჩატარებულ იქნა კატალიზატორის თანდასწრებით. მიღებული ალუქტის თხელფენოვანი ქრომატოგრაფიისა და ე. წ. სპექტროსკოპიის მეთოდების გამოყენებით დადგენილ იქნა, რომ ტრიპროპილკალას ჰიდრიდის მიერთება სამმაგ ბმასთან მიდის ფარმერის წესით და β ალუქტის წარმოქმნით.

აცეტილენური სპირტების ჰიდროსტანირების დროს დეჰიდროკონდენსაციის რეაქციას აცეტილენური ან ჰიდროქსილის წყალბადის ხარჯზე ადგილი არ ჰქონია.

მუშაობის პროცესში მიღებული და შესწავლილია ლიტერატურაში უცნობი 11 კალაორგანული სპირტი.

ГИДРОСИЛИРИРОВАНИЕ ВИНАЦЕТИЛЕНОВОГО ГВАЯКОЛА

А. И. КАХНИАШВИЛИ, Д. Ш. ИОРАМАШВИЛИ

Ранее нами исследовано гидросилирирование и гидрогермирирование винилацетиленового эфира [1] и винилацетиленовых фенолов с защищенной гидроксильной группой [2]

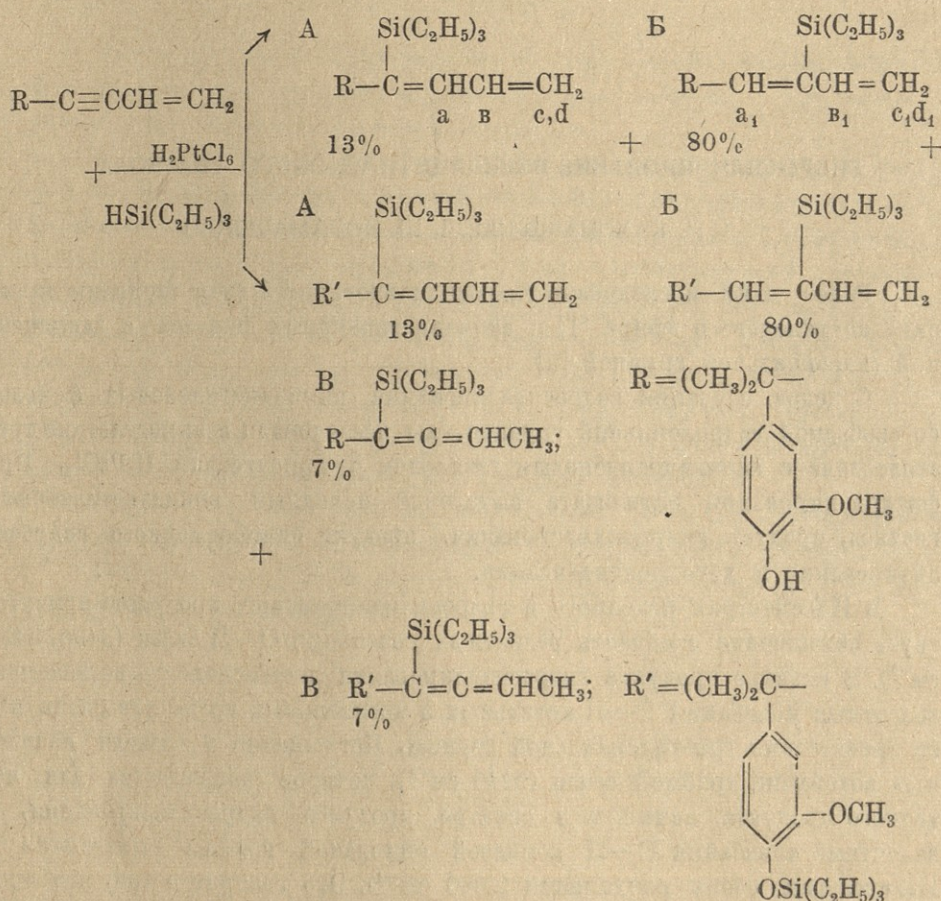
С целью изучения гидросилирирования винилацетиленовых фенолов со свободной гидроксильной группой, мы исследовали взаимодействие триэтилсилана с винилацетиленовым гваяколом в присутствии H_2PtCl_6 . При фракционировании катализата выделены: исходный винилацетиленовый гваякол, продукт гидросилирирования, продукт одновременного гидросилирирования и дегидроконденсации.

В ИК-спектрах исходного и гидросилирированного продуктов присутствует поглощение в области валентных колебаний $O-H$ связи ($3430, 3435 \text{ см}^{-1}$). В спектре продукта гидросилирирования интенсивность поглощения валентных колебаний $C-H$ метильных и метиленовых групп повышена из-за присутствия триэтилсилильной группы. Поглощение в области валентных колебаний тройной связи (2240 см^{-1}), которое наблюдается для исходного продукта, исчезает в спектре продукта гидросилирирования, а валентные колебания $C-H$ концевой винильной группы выявляются в ИК-спектрах обоих соединений (3080 см^{-1}). Это говорит о том, что протекает присоединение к тройной связи с образованием диеновых продуктов. Малоинтенсивное поглощение в области валентных колебаний $C=C$ алленовой системы указывает на присутствие алленового изомера не больше 5—7%.

В ПМР-спектре продукта гидросилирирования протоны триэтилсилильной, гем-диметильных, метоксильной, гидроксильной и фенильной групп выявляются с химическими сдвигами 0,4—1,2; 1,42; 3,8; 5,38; 6,8 м. д. соответственно. Б-изомеру, который присутствует в продукте в преобладающем количестве, принадлежит мультиплет от H_{B1} протона, состоящий из восьми пиков с константами спин-спинового взаимодействия $I_{A_1 B_1} = 1.3 \text{ гц}$; $I_{B_1 C_1} = 18.3 \text{ гц}$; $I_{B_1 d_1} = 10.5 \text{ гц}$. К данному изомеру относятся сигналы от H_{A_1} ($\delta 6.08 \text{ м.д.}$), H_{C_1} ($\delta 4.83 \text{ м.д.}$) и H_{d_1} ($\delta 4.84 \text{ м.д.}$) протонов с аналогичными константами. $I_{C_1 d_1} = 2.0 \text{ гц}$. Дублет от H_A протона А-изомера заметно искажает вид спектра. Алленовый же изомер



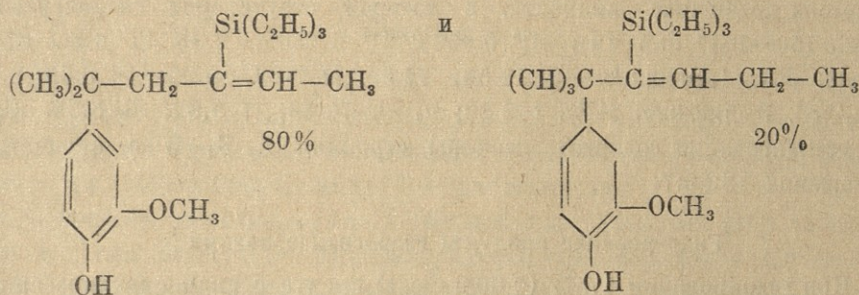
В-строения однозначно характеризуется дублетом от метильных протонов (δ 1.68 м. д., I=6.7 гц). Метоксильная группа выявляется в виде трех синглетов с интегральными интенсивностями 13:80:7, что указывает на процентное соотношение изомеров.



Аналогично, ИК- ПМР- спектральным исследованием мы установили, что третья фракция представляет собой продукт одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации. В ИК-спектре исчезает поглощение гидроксильной группы и увеличивается интенсивность сигналов от валентных С—Н колебаний метильных и метиленовых групп. В ПМР-спектре же вид неопредельного фрагмента спектра остается неизменным, исчезает гидроксильный пик и интенсивность сигнала от триэтилсилильной группы при постоянном сигнале от OCH_3 увеличивается вдвое.

Метилирование продукта гидросилилирования мы выделили соответствующий метилированный продукт, содержащий изомеры строения А,Б,В в том же самом процентном соотношении. Продукт, полученный встречным синтезом, метилированием винилацетиленового гваякола и дальнейшим гидросилилированием, оказался идентичным.

При гидрировании продукта гидросилилирования в присутствии жидкого палладия гидрируется одна двойная связь как диеновой, так и алленовой систем. Метоксильная группа гидрированного продукта в ПМР-спектре выявляется в виде двух сигналов, а в области прелельных протонов наблюдается дублет от метильной группы и уширенный сигнал от метиленовой группы ($\delta_{\text{дубл.}} = 1.6$ м. д., $I=8.4$ гц; $\delta_{\text{CH}_2}=2.40$ м. д.). В области поглощения непредельных фрагментов появляется квадруплет с равной константой и с химическим сдвигом 5.70 м. д. Спектрально (ИК и ПМР) показано, что образуется два изомера:



Мы провели также встречные синтезы продукта одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации: взаимодействие триэтилхлорсилана с продуктом гидросилилирования, взаимодействие триэтилхлорсилана с винилацетиленовым гваяколом с последующим действием на продукт дегидрохлорирования триэтилсиланом в присутствии H_2PtCl_6 .

Экспериментальная часть

Взаимодействие триэтилсилана с винилацетиленовым гваяколом

В трехгорлой колбе, снабженной механической мешалкой и термометром, помещали 21.6 г винилацетиленового гваякола, 11.6 г триэтилсилана и 1 мл 0.1 н. раствора $\text{H}_2\text{PtCl}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ в абсолютном изопропиловом спирте. При 100° и при постоянном перемешивании реакция заканчивалась через 5 часов (ИК- и ПМР-спектральный контроль). После многократного фракционирования в вакууме выделены фракции:

первая фракция— $125-128^\circ$ (1 мм); d_4^{20} 1.041; n_D^{20} 1.5500; 1.328 г; вых. 4%—исходный винилацетиленовый гваякол;

вторая фракция— $160-161^\circ$ (1 мм); d_4^{20} 0.9915; n_D^{20} 1.5345; 23.9 г; вых. 72%; светложелтая, не очень густая жидкость; найдено: MR_D 103.87; %C—72.69, 72.54, H 9.58, 9.47; Si 8.65, 8.70; $\text{C}_{20}\text{H}_{32}\text{O}_2\text{Si}$. Вычислено: MR_D 103.43; %C 72.28; H 9.64; Si 8.43. Выделенный продукт представляет собой аддукт гидросилилирования и содержит три изомера строения А, Б, В в процентном соотношении 13:80:7;

третья фракция— $170-171^\circ$ (0,5 мм); d_4^{20} 0.9732; n_D^{20} 1.5220; 0.8303 г. вых 2.50%; бесцветная подвижная жидкость; гидроксильная группа



не обнаружена; найдено: MR_D 140.11; %—С 70.09, 69.90; Н 10.62, 10.62; Si 12.83, 12.55; $C_{26}H_{40}Si_2O_2$. Вычислено: MR_D 139.64; %—С 69.95; Н 10.31; Si 12.55. Третья фракция представляет собой продукт одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации. Содержит изомеры строения А, Б, В в процентном соотношении 13:80:7.

Метилирование продукта гидросилилирования

Метилированием 3.3 г. (0.01 г-моль) продукта гидросилилирования 6 мл диметилсульфатом в 20 мл 10%-ного едкого натра получен продукт—бесцветная подвижная жидкость, в которой отсутствует гидроксильная группа. 150—151° (0.5 мм); d_4^{20} 0.9568; n_D^{20} 1.5309; 2.85 г; вых. 87%, найдено: MR_D 108.90; %—С 72.56, 72.39; Н 9.63, 9.92; Si 8.59, 8.42; $C_{21}H_{36}O_2Si$. Вычислено: MR_D 108.28; %—С 72.83; Н 9.82; Si 8.09. Продукт метилирования содержит изомеры строения А, Б, В в процентном соотношении 13:80:7.

Гидрирование продукта гидросилилирования

При гидрировании 1.67 г (0.005 г-моль) продукта гидросилилирования в 25 мл абсолютного этилового спирта в присутствии 5. мг коллоидного палладия поглощается 155 мл H_2 вместо 256 мл, вычисленного для полного гидрирования. Палладий отделяли фильтрованием. Фильтрат после высушивания с помощью Na_2SO_4 и отгонки спирта перегоняли в вакууме. Получена бесцветная жидкость: 180° (3 мм); d_4^{20} 0.9774; n_D^{20} 1.5230; 1.35 г; вых. 81%. Найдено: MR_D 104.57; %—С 71.63, 71.54; Н 10.18, 10.36; Si 8.40, 8.62; $C_{20}H_{34}O_2Si$. Вычислено: MR_D 103.66; %—С 71.79; Н 10.24; Si 8.39.

Взаимодействие триэтилхлорсилана с винилацетиленовым гваяколом

При взаимодействии 21.6 г винилацетиленового гваякола и 15.05 г триэтилхлорсилана в присутствии 7.9 г пиридина получена бесцветная подвижная жидкость. 144° (1 мм); d_4^{20} 0.9641; n_D^{20} 1.5150; ОН не обнаружен. Найдено: MR_D 103.17; %—С 72.99, 73.03; Н 9.11, 9.19; Si 8.19, 8.34, $C_{20}H_{30}O_2Si$. Вычислено: MR_D 101.42; %—С 72.72; Н 9.06; Si 8.5; получен продукт дегидрохлорирования.

Взаимодействие триэтилсилана с продуктом дегидрохлорирования

Реакция 6.70 г продукта дегидрохлорирования с 2.32 г триэтилсиланом в присутствии H_2PtCl_6 при 100° заканчивалась через 5 ч. Получена бесцветная подвижная жидкость: 175—176 (0.5 мм); d_4^{20} 0.9730; n_D^{20} 1.5220; 6.48 г; вых. 72%. ОН—группа не обнаружена. Найдено: MR_D 140.10; %—С 69.81, 70.05; Н 10.42, 10.33; Si 12.60, 12.80; $C_{26}H_{40}Si_2O_2$. Вычислено: MR_D 139.64; %—С 69.95; Н 10.31; Si 12.55; продукт идентичен с продуктом одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации.

Взаимодействие триэтилхлорсилана с продуктом гидросилилирования

При взаимодействии 3.32 г продукта гидросилилирования с 1.505 г триэтилхлорсилана в присутствии 1.18 г пиридина получена подвижная, бесцветная жидкость: $183-185^{\circ}$ (1 мм); d_4^{20} 0.9730; n_D^{20} 1.5220, ОН группа не обнаружена. Найдено: MR_D 139.78; %—С 70.10, 69.86; Н 10.46, 10.44; Si 12.65, 12.45; $C_{26}H_{40}Si_2O_2$. Вычислено: MR_D 139.64; %—С 69,95; Н 10.31; Si 12.55. Продукт идентичен с продуктом одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации.

Выводы

1. При взаимодействии триэтилсилана с винилацетиленовым гваяколом в присутствии H_2PtCl_6 параллельно протекают реакция гидросилилирования тройной связи и реакция одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации. Наблюдается также 1.4-присоединение.

2. Проведены метилирование и гидрирование продукта гидросилилирования, а также встречные синтезы продукта одновременного гидросилилирования и дегидроконденсации: взаимодействие триэтилхлорсилана с продуктом гидросилилирования, взаимодействие триэтилхлорсилана с винилацетиленовым гваяколом с последующим действием на продукт дегидрохлорирования триэтилсиланом.

ქ (Представлено 19.X.1971)

Кафедра органической химии

ЛИТЕРАТУРА

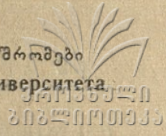
1. А. И. Кахниашвили, Д. Ш. Иорамашвили, ЖОХ, т. 40, 1970, 1552.
2. А. И. Кахниашвили, Д. Ш. Иорамашвили, ЖОХ, т. 40, 1970, 1556.

ა. კახნიაშვილი, დ. იორამაშვილი

ვინილაცეტილენური გვიაკოლის ჰიდროსილირება**რეზიუმე**

ტრიეთილსილანის ურთიერთქმედებისას ვინილაცეტილენურ გვიაკოლთან H_2PtCl_6 -ის თანდასწრებით პარალელურად მიმდინარეობენ ჰიდროსილირებისა და ერთდროული ჰიდროსილირება-დეჰიდროკონდენსაციის რეაქციები. მიერთება ძირითადად მიმდინარეობს სამზავ ბმასთან, აღინიშნება აგრეთვე 1,4-მიერთება.

შესწავლილია ჰიდროსილირების პროდუქტის მეთილირება და ჰიდრირება. ჩატარებულია შემხვედრი სინთეზები: ტრიეთილქლორსილანის ურთიერთქმედება ჰიდროსილირების პროდუქტთან, ტრიეთილქლორსილანის ურთიერთქმედება ვინილაცეტილენურ გვიაკოლთან და მიღებული დეჰიდროქლორირების პროდუქტის შემდგომი ჰიდროსილირება ტრიეთილსილანით.



კ ვოპროსუ ო ვზაიმნი რაწვორიმიტი ნეკოტორი
ტრეხკომპონენტიანი სისტემა (აწეტიონ-უგლევოდორდი-წედა, უკსუსნი
კისლუთა-უგლევოდორდი-წედა)

ვ. ი. კოკოწაშვილი, ლ. მ. სეპიაშვილი, ა. ა. გრიგალაშვილი

Изучение трехкомпонентных систем имеет большое практическое значение вследствие их широкого применения в промышленности и в повседневной жизни.

Условия равновесия в системах из трех компонентов зависят от целого ряда факторов, таких, как природа самих компонентов, их строение [1], химическое взаимодействие компонентов [2, 3], их взаимная растворимость, температура и др.

Нами изучены условия изотермического равновесия в 10 жидких трехкомпонентных системах с неограниченной взаимной растворимостью двух пар компонентов и ограниченной взаимной растворимостью одной

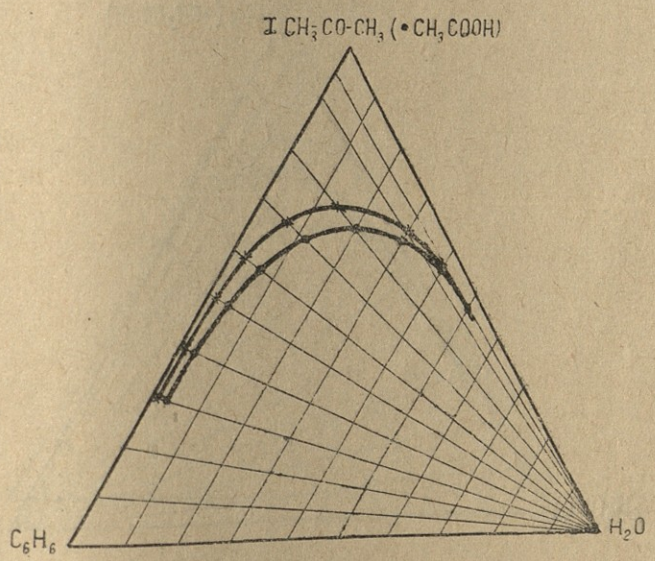


Рис. 1.

პარა: აწეტიონ-ბენზოლ-წედა, აწეტიონ-ტოლუოლ-წედა, აწეტიონ-პარა-კსილოლ-წედა, აწეტიონ-ხლორფორმ-წედა, აწეტიონ-წეტირეხლორისტი უგლეროდი-წედა, უკსუსნი

кислота-бензол-вода, уксусная кислота-толуол-вода, уксусная кислота-пара-ксилол-вода, уксусная кислота-хлороформ-вода, уксусная кислота-четыре-хлористый углерод-вода.

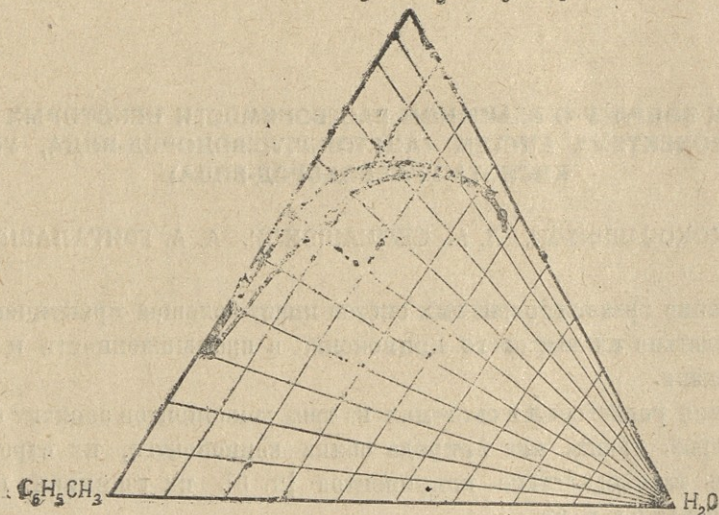
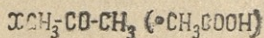


Рис. 2.

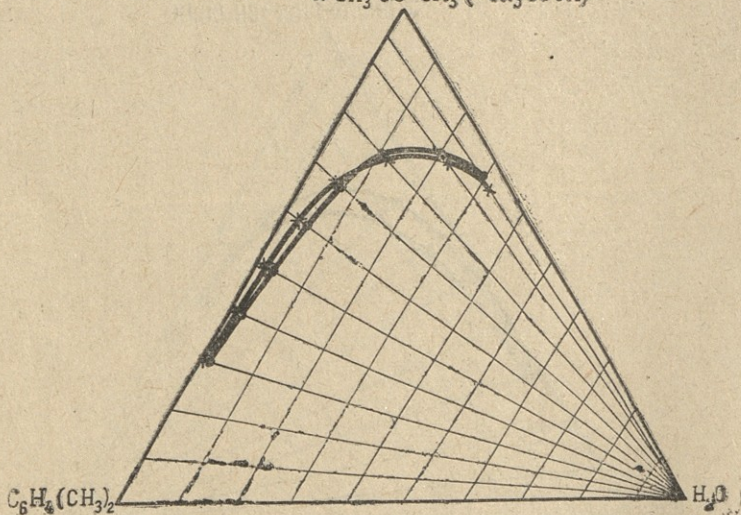
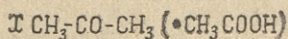


Рис. 3.

Диаграммы состояния соответствующих трехкомпонентных систем представлены на рис. 1—5.

В областях расслоения на этих рисунках количества ацетона (уве-
ной кислоты) недостаточны для растворения воды и бензола (рис. 1), во-

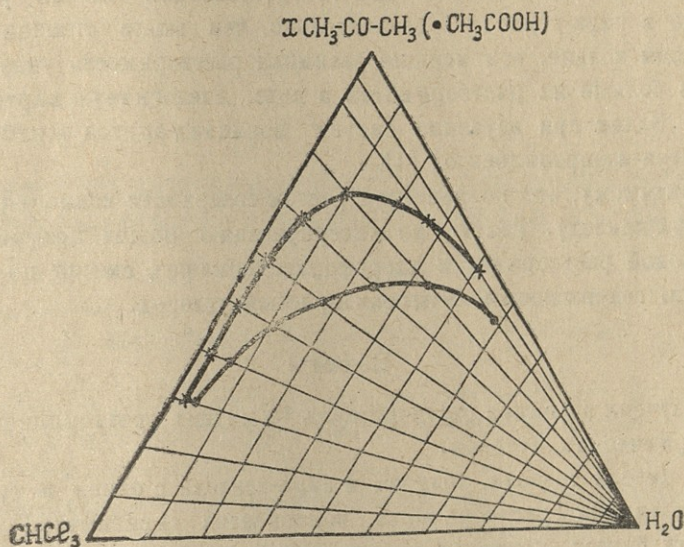


Рис. 4.

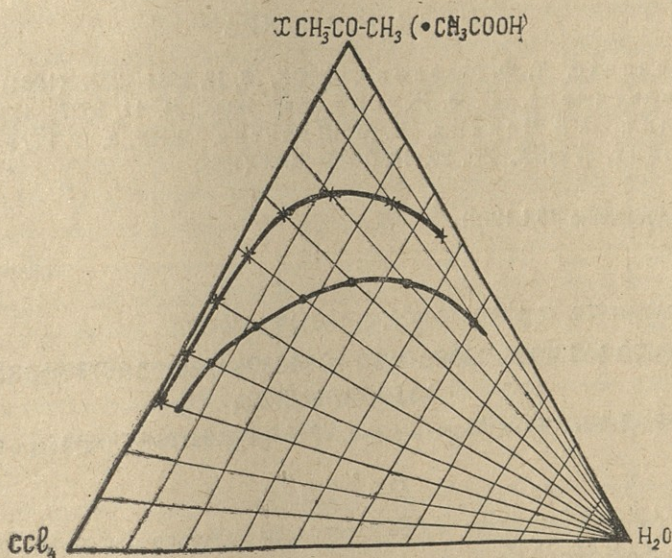


Рис. 5.

ды и толуола (рис. 2), воды и пара-ксилола (рис. 3), воды и хлороформа (рис. 4), воды и четыреххлористого углерода (рис. 5) с образованием однофазных систем.



Таким образом, сравнение систем, в которых взяты смеси бензола, толуола и пара-ксилола с одним и тем же компонентом, показывает, что количество воды, необходимое для гетерогенизации смесей уменьшается от бензола к пара-ксилолу. Следовательно, чем выше степень замещения в бензольном кольце, тем меньше взаимная растворимость указанных систем и тем больше их растворимость в воде. Аналогичную картину наблюдал М. Г. Бланк при изучении систем формамид-ацетон-этилбензол, формамид-ацетон-изопропилбензол [4].

По-видимому, это объясняется ростом полярности компонентов от бензола к пара-ксилолу. Такую же интерпретацию может получить и факт более высокой растворимости хлороформсодержащих смесей по сравнению со смесями, содержащими четыреххлористый углерод.

Выводы

1. Изучена взаимная растворимость 10 жидких трехкомпонентных систем изотермическим методом.
2. В смесях бензола, толуола и пара-ксилола с одним и тем же компонентом взаимная растворимость компонентов уменьшается от смесей, содержащих бензол, к смесям с пара-ксилолом.
3. Хлороформсодержащие смеси растворимы лучше, чем смеси, содержащие четыреххлористый углерод.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Удовенко, Т. Ф. Мазанко, ЖФХ, 38, 12, 2384—2337 (1964).
2. И. К. Мельникова, Е. Ф. Журавлёв, ЖОХ, 34, 11, 3527—3533 (1964).
3. А. С. Лилич, Л. В. Черных, В. М. Шалигин, ЖНХ, 8, 12, 2773—2777 (1963).
4. М. Г. Бланк, Укр. Х. Ж., 29, 10, 1009—1013 (1963).

(Представлено 15.1.1970)

Кафедра
физической химии

ვ. კოკჩაშვილი, ლ. სეფიაშვილი, ა. გრიგალაშვილი

ზოგიერთი სამკომპონენტური სისტემის ურთიერთშერევადობის საკითხისათვის

(აცეტონი-ნახშირწყალბადი-წყალი, ძმარმჟავა-ნახშირწყალბადი-წყალი)

რ ე ზ ი უ მ ე

იზოთერმული მეთოდით შესწავლილია 10 თხევადი სამკომპონენტური სისტემის ურთიერთშერევადობა.

ბენზოლისა, ტოლუოლის და პარა-ქსილოლის ნარევებში ერთსა და იმავე კომპონენტთან კომპონენტების ურთიერთშერევადობა მცირდება ბენზოლის შემცველ ნარევებიდან პარა-ქსილოლის შემცველ ნარევებზე გადასვლისას.

ქლოროფორმის შემცველი ნარევები უკეთეს ხსნადობას ამჟღავნებენ, ვიდრე ოთხქლორიანი ნახშირბადის შემცველნი.

სილნალისა და თელავის რაიონების მიწისქვეშა წყლების ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა (ცნობა პირველი)

კ. გამსახურდია, ნ. ხუხია, ს. ბერუჩიანი, ლ. ხინტიბიძე,
თ. მაცაბერიძე, თ. არეშიძე, ნ. ძოწენიძე

ნაშრომში მოცემულია სილნალისა და თელავის რაიონების წყლების ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევის შედეგები (ცხ. 1). განსაზღვრები შესრულებულია ჰიდროქიმიაში მოწოდებული მეთოდებით [1].

მართლაც შემცველობის მიხედვით დასახლებული რაიონების წყლები არიან ზომიერად ან სუსტად მინერალიზებული და მიეკუთვნებიან უნახშირმჟავო ჰიდროკარბონატულ ტიპს.

მთავარი იონებიდან წამყვანია კალციუმი ან ნატრიუმი და ჰიდროკარბონატი. ქლორსა და სულფატ-იონებს დაქვემდებარებული ადგილი უკავიათ.

ცალკეული კომპონენტების შემცველობის ცვალებადობა საერთო მინერალიზაციის ზრდასთან დაკავშირებით გარკვეულ კანონზომიერებას ექვემდებარება. სუსტად მინერალიზებული წყლების კათიონურ შემადგენლობაში დომინირებულია კალციუმი, ანიონურში — ჰიდროკარბონატი. მინერალიზაციის ზრდა ძირითადად განისაზღვრება კალციუმის ჰიდროკარბონატით. საინტერესოა, რომ ზოგიერთი წყლის ქიმიური შედგენილობა ემთხვევა ადრე მიღებულ შედეგებს [5].

ფიზიკურ-ქიმიური მაჩვენებლები pH და Eh-ის სიდიდეები განსაზღვრავენ წყალში არსებული მჟავურ-ფუძოვან და ჟანგვა-აღდგენის წონასწორულ სისტემებს [2, 3].

აღნიშნული რაიონების მიწისქვეშა წყლები pH-ის სიდიდის მიხედვით სუსტ ტუტე და ტუტე წყლებს მიეკუთვნებიან. გვხვდება ნეიტრალური წყლებიც. უნახშირმჟავო წყლების მჟავურ-ფუძოვანი წონასწორობა ძირითადად კალციუმის და ნატრიუმის ჰიდროკარბონატების კონცენტრაციათა თანაფარდობით განისაზღვრება, უფრო ტუტე წყლებში კი — ჰიდროკარბონატ- და კარბონატ-იონების თანაფარდობით.

ცნობილია, რომ წყალში გოგირდწყალბადის ფორმების თანაფარდობა განისაზღვრება pH-ის სიდიდით¹. რადგან აღნიშნულ წყლებს სუსტი ტუტე რეაქცია აქვთ (pH 9,24 არ აღემატება), სულფიდ-იონის არსებობა გამორიცხულია. ამრიგად, ჟანგვა-აღდგენითი წონასწორული სისტემა მოლეკულური გოგირდწყალბადის და ჰიდროსულფიდ-იონის თანაფარდობითაა გაპირობებული [4].

¹ დასახლებული კომპონენტების ($H_2S + HS^- + S^{2-}$) ჯამი პირობით გოგირდწყალბადზეა გადათვლილი.

თელავისა და სიღნაღის რაიონების წყაროების ქიმიური ანალიზის შედეგები

| წყაროს დასახელება | მგ/ლ | | | | | | | H ₂ S მგ/ლ | pH | Eh | მგ/ლ SiO ₂ | წყლის ტიპი | t°C |
|---|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------|------------------|---------------------------------|--------------------------|------|-----|--------------------------|--|-----|
| | Cl ⁻ | SO ₄ ²⁻ | HCO ₃ ⁻ | CO ₃ ²⁻ | Ca ²⁺ | Mg ²⁺ | Na ⁺ +K ⁺ | | | | | | |
| თელავის რაიონი | | | | | | | | | | | | | |
| თელავი, ბურღ. აგურის ქარხანასთან | 7,8 | 12,0 | 366,0 | არ არის | 75,6 | 20,5 | 22,5 | არ ალმონდა | 7,36 | 459 | 15,5 | M 0,5 HCO ₃ 93 Ca 58 Mg 26 | 12 |
| თელავი, ბურღ. გარაქთან | 4,7 | 24,0 | 341,6 | " | 72,0 | 9,7 | 41,8 | " | 7,20 | 471 | 19,7 | M 0,46 HCO ₃ 89 Ca 57 Na 29 | 12 |
| თელავი, ბურღ. მარმარი- ლოს ქარხანასთან | 3,5 | 31,2 | 329,4 | " | 67,5 | 12,9 | 38,8 | " | 7,18 | 455 | 23,6 | M 0,46 HCO ₃ 88 Ca 55 Na 27 | |
| თელავი, სამხედროების ეზო ბურღ. | 3,5 | 18,2 | 378,2 | " | 71,1 | 12,9 | 47,3 | " | 7,30 | 488 | 23,3 | M 0,52 HCO ₃ 92 Ca 53 Na 36 | 11 |
| ყრუ ხევი | 2,8 | 4,3 | 396,5 | " | 68,4 | 11,8 | 51,9 | 0,51 | 7,58 | 449 | 27,2 | M 0,53 HCO ₃ 97 Ca 51 Na 33 | 10 |
| თელავი, საავადმყოფოს ახლოს ბურღ. | 3,5 | 1,2 | 378,2 | " | 81,9 | 4,8 | 32,3 | " | 7,02 | 485 | 22,2 | M 0,51 HCO ₃ 98 Ca 64 Na 26 | 10 |
| ბანის-ხევი | 4,6 | 4,8 | 402,6 | " | 89,1 | 13,5 | 26,2 | 0,51 | 7,48 | 471 | 10,0 | M 0,53 HCO ₃ 93 Ca 66 | 12 |
| კისის-ხევი ბურღ. | 5,6 | 62,4 | 286,7 | " | 63,9 | 10,2 | 48,5 | " | 7,29 | 499 | 32,0 | M 0,47 HCO ₃ 75 Cl 22 Ca 55 Na 30 | 13 |
| თელავი, ორჯონიკიძის ქ. | 4,2 | 1,9 | 390,4 | " | 87,3 | 12,4 | 26,9 | " | 7,40 | 499 | 23,5 | M 0,52 HCO ₃ 97 Ca 66 | 11 |
| თელავი, ბურღ. სააკაძის II ჩიხთან | 2,8 | 3,3 | 250,1 | " | 61,2 | 7,0 | 14,0 | " | 7,36 | 459 | 12,3 | M 0,34 HCO ₃ 96 Ca 72 | 11 |

ქ. გამსახურდია, ნ. ხუბია, ს. ბერუჩიაშვილი, ლ. ხინიბიძე, თ. მამუკაშვილი და სხვ.

თელავისა და ხილნალის რაიონების წყაროების ქიმიური ანალიზის შედეგები

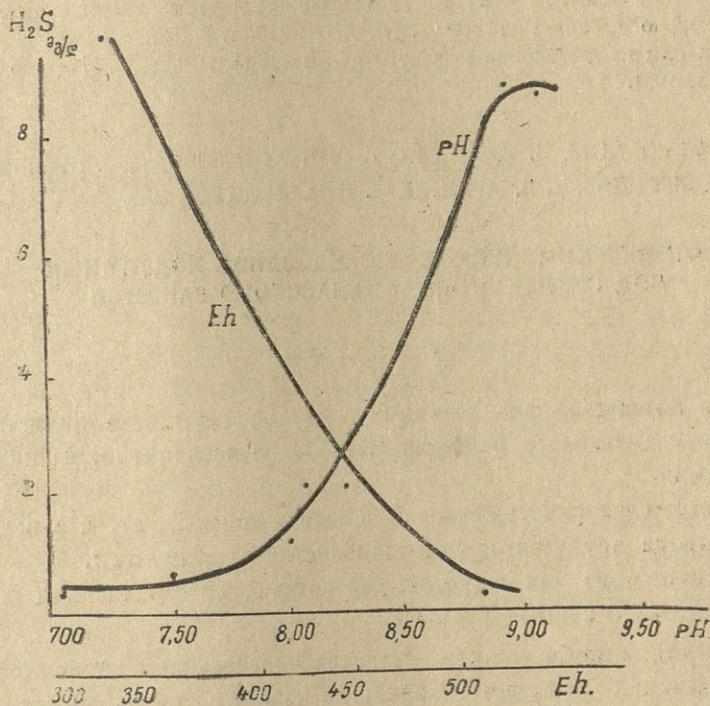
ცხრილი 1
 საქართველოს
 გეოლოგიური
 ინსტიტუტი

| წყაროს დასახელება | მგ/ლ | | | | | | | H ₂ S მგ/ლ | pH | Eh | მგ/ლ SiO ₂ | წყლის ტიპი | მარილის კონცენტრაცია | |
|---|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------|------------------|---------------------------------|--------------------------|------|-----|--------------------------|------------|--|----|
| | Cl ⁻ | SO ₄ ²⁻ | HCO ₃ ⁻ | CO ₃ ²⁻ | Ca ²⁺ | Mg ²⁺ | Na ⁺ +K ⁺ | | | | | | | |
| ვარდისუბანი ხილის ვადამ, ქარახანსთან | 2,1 | 3,3 | 250,0 | " | 66,6 | 5,4 | 10,3 | 0,34 | 7,18 | 445 | 15,2 | M 0,34 | $\frac{HCO_3 \ 97}{Ca \ 79}$ | 16 |
| გულგულა, ბურღ. | 4,2 | 63,2 | 274,5 | " | 76,5 | 12,4 | 24,8 | არ აღმო- ჩნდა | 7,28 | 467 | 11,3 | M 0,45 | $\frac{HCO_3 \ 76 \ SO_4 \ 22}{Ca \ 64}$ | 13 |
| თელავი, სასმელი წყალი | 2,4 | 14,4 | 286,7 | " | 79,2 | 3,2 | 19,3 | " | 7,46 | 479 | 16,3 | M 0,40 | $\frac{HCO_3 \ 93}{Ca \ 78}$ | 13 |
| თეთრი წყლები, მთის ძირში | 8,5 | 124,0 | 384,3 | " | 132,3 | 3,2 | 51,5 | 0,58 | 6,94 | 479 | 42,1 | M 0,70 | $\frac{HCO_3 \ 69 \ SO_4 \ 28}{Ca \ 72 \ Na \ 24}$ | 8 |
| თეთრი წყლები, გამოსავალი კლდეში | 5,3 | 82,5 | 359,9 | " | 106,2 | არ აღ- მოჩნდა | 56,5 | 2,21 | 7,04 | 485 | 38,9 | M 0,61 | $\frac{HCO_3 \ 76}{Ca \ 68 \ Na \ 31}$ | 8 |
| თეთრი წყლები, აბანო | 12,0 | 27,5 | 347,7 | " | 68,5 | 11,3 | 51,7 | 9,04 | 7,16 | 473 | 24,8 | M 0,52 | $\frac{HCO_3 \ 86}{Ca \ 52 \ Na \ 34}$ | 8 |
| თეთრი წყლები, ხევში, მთის ძირში | 56,9 | 39,9 | 420,9 | არ არის | 151,2 | 4,3 | 19,5 | 0,85 | 7,08 | 493 | 22,3 | M 0,22 | $\frac{HCO_3 \ 78}{Ca \ 86}$ | 7 |
| შუამთა, ეკლესიასთან ახლოს | 2,1 | 17,9 | 445,3 | " | 100,8 | 18,3 | 26,6 | 0,34 | 7,12 | 507 | 20,3 | M 0,61 | $\frac{HCO_3 \ 94}{Ca \ 65 \ Mg \ 20}$ | 9 |
| თორღვას აბანო | 59,6 | 7,7 | 240,9 | 54,0 | არ აღ- მოჩნდა | 0,1 | 34,0 | 8,67 | 9,24 | 349 | 38,4 | M 0,48 | $\frac{HCO_3 \ 52 \ CO_3 \ 23 \ Cl \ 122}{Na \ 100}$ | 35 |
| თორღვას აბანო, ქვემო აუზი | 58,2 | 7,4 | 122,0 | 60,0 | " | 0,1 | 133,1 | 8,67 | 8,80 | 340 | 37,5 | M 0,38 | $\frac{HCO_3 \ 34 \ CO_3 \ 34 \ Cl \ 128}{Na \ 100}$ | 40 |
| თორღვა, სასმელი წყალი | 15,6 | 27,9 | 128,1 | 19,0 | 28,8 | 2,7 | 42,7 | 1,02 | 7,80 | 469 | 15,5 | M 0,28 | $\frac{HCO_3 \ 68}{Na \ 53 \ Ca \ 41}$ | 17 |

თელავის რაიონების მარილების წყლების ფიზიკო-ქიმიური გამოკვლევა 207

თელავისა და სიღნაღის რაიონების წყლების უმრავლესობა შეიცავს გოგირდ-წყალბადს 0,3 და 3,5 მგ/ლ-მდე. გამოჩაქისია თორღვას აბანოს წყლები, რომლებშიაც გოგირდწყალბადის შემცველობა 8,6 მგ/ლ.

აღნიშნული რაიონების წყლებში Eh-სა და pH-ის სიდიდეებსა და გოგირდ-წყალბადის რაოდენობას შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება (ნახ. 1). გოგირდწყალბადის კონცენტრაციის გაზრდა იწვევს Eh-ის შემცირებას.



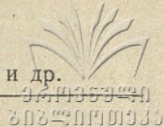
ნახ. Eh-ისა და pH-ის დამოკიდებულება გოგირდწყალბადის კონცენტრაციისაგან.

დასკვნები

1. სიღნაღისა და თელავის რაიონების მიწისქვეშა წყლები ძირითადად მიეკუთვნებიან სუსტად და ზომიერად მინერალიზებულ უნახშირმჟავო ჰიდროკარბონატულ-კალციუმთან სულფიდურ წყლებს.

2. გამოკვლეულ წყლებს აქვთ სუსტი ტუტე რეაქცია (pH 7,80—9,24). მათი ქანგვა-აღდგენის პოტენციალი 340 ც-დან—503 ც-მდე იცვლება.

3. გამოკვლევის შედეგებით დადგენილია დამოკიდებულება Eh, pH-სა და H₂S-ის კონცენტრაციას შორის.



ს ი ბ ე რ ა დ ი ა

1. А. А. Резников, Е. П. Муликовская, И. Ю. Соколов, Методы анализа природных вод. 1970.
2. Р. М. Гарелс, Ч. Л. Крайст, Растворы, минералы, равновесия, изд-во „Мир“, Москва, 1968.
3. С. Шукарев, Физико-химия минеральных вод и лечебных грязей, Биомедгиз, Москва, 1937.
4. Б. А. Скопинцев, Изучение окислительно-восстановительного потенциала в водах Черного моря. Гид. мат., 1957, АН СССР, т. XXVII.
5. С. С. Чихелидзе, Природные ресурсы Грузинской ССР, т. III, Изд-во АН СССР, Москва, 1961.

К. А. ГАМСАХУРДИЯ, Н. В. ХУХИА, С. А. БЕРУЧЬЯН, Л. С. ХИНТИБИДЗЕ,
Т. Г. МАЦАБЕРИДЗЕ, Т. В. АРЕШИДЗЕ, Н. Э. ДЗОЦЕНИДЗЕ

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД СИГНАХСКОГО И ТЕЛАВСКОГО РАЙОНОВ

Р е з ю м е

Статья посвящена физико-химическому исследованию подземных вод Сигнахского и Телавского районов. Изучено 38 источников, из них 20 буровых скважин.

Результаты физико-химического анализа показывают, что воды в основном являются неуглекисло-гидрокарбонатно-кальциевыми.

Большинство из них содержит сероводород. Минерализация вод колеблется в пределах 0,28 г/л—0,67 г/л.

Результатами исследования выявлена определенная зависимость между минерализацией, составом главнейших ионов, а также между Eh, pH и H₂S.

По значениям величины pH изученные воды можно причислить к слабощелочным водам, а единичные воды—к щелочным (pH—9,24).

Окислительно-восстановительные потенциалы их находятся в пределах 340 мВ — 503 мВ.



კ ვOPოსუ სტოენი ზემოი კორი ვ რაიონე ს. ხაში (გარეკახეთი)

Г. К. ТВАЛТВАДЗЕ |, М. С. ИОСЕЛИАНИ, В. Г. ПАПАЛАШВИЛИ

В настоящей статье излагаются результаты, полученные на основе анализа записей некоторых землетрясений, происшедших в 1967 году, в окрестностях с. Хашми. Первый основной толчок зарегистрирован 12 июня 1967 года в 18 ч. 16 минут. После этого толчка в продолжение нескольких месяцев земля не могла успокоиться; из всех землетрясений особо выделяются землетрясения 17 июня в 09 ч. 56 минут и 24 июня 16 ч. 01 м. Эти землетрясения ощущались в некоторых районах Восточной Грузии. В эпицентральной области максимальная сила сотрясения достигала 5—6 баллов. Колебания почвы зарегистрированы многими сейсмическими станциями Советского союза. Анализ сейсмограмм дает возможность отождествлять первые и последующие вступления как продольных, так и поперечных волн.

На основе интерпретации записей этих трёх землетрясений по способу засечек были определены положения эпицентров и глубины залегания очагов. Как показывают расчёты [1], эти землетрясения исходят из одного и того же очага, залегающего на глубине $h = 9$ км; координаты эпицентров следующие:

$$\varphi = 41^{\circ} 46' \text{ С}, \quad \lambda = 45^{\circ} 15' \text{ В.}$$

Эпицентры находятся в южном склоне Кахетинского хребта, который в тектоническом отношении относится к северному борту межгорной впадины Восточной Грузии.

Результаты исследований А. И. Джанелидзе [2] показали, что эта территория принадлежит тектонической зоне, обладающей платформонидной структурой.

По-видимому, существование здесь платформональных структур вызвано блоковым строением кристаллического фундамента сбросового характера. На территории южного склона Кахетинского хребта блоки расчленены глубинными разломами.

Глубинному разлому и приурочены гипоцентры этих землетрясений. Предполагается, что по меридиональному направлению в районе Хашми



проходит глубинный разлом, который к северу соединяется с Орхевским разломом, а к югу простирается восточнее Сартичала, по направлению Удабно.

В районе Сартичала существование этого разлома подтверждается сейсмическими и гравиметрическими данными [3,4].

На основании анализа геологических и геофизических исследований подтверждается, что этот меридиональный разлом играет большую роль в тектонической жизни южной Казетии. Поверхность кристаллического субстрата к западу этого разлома приподнята, тогда как к востоку она опущена на большую глубину [4]. Надо отметить, что в районе эпи-

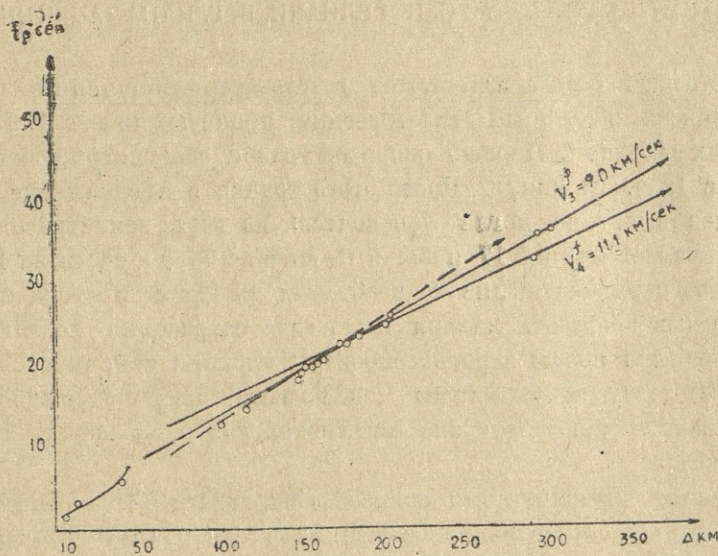


Рис. 1. Годограф главного толчка Хашмского землетрясения 12 июня 1967 года 18 часов 16 минут 41 сек.

центра имеется магнитная аномалия, интенсивность которой достигает $+400\gamma$. Этот факт указывает на то, что, по-видимому, глубинному разлому приурочено магматическое интрузивное тело, вызывающее магнитную аномалию [4].

Для определения основных сейсмических элементов мы использовали данные тех сейсмических станций, которые были расположены непосредственно в эпицентральной области. Установив местоположение эпицентра, мы определили эпицентральные расстояния для всех сейсмических станций Кавказа. После этого были определены разности времени $\Delta t = s - p$ для тех станций, которые дали хорошо читаемые записи. Следует отметить, что записи последующих толчков на тех сейсмических станциях, которые

были использованы для определения основных сейсмических элементов, имеют одни и те же значения разности фаз. Поэтому мы предполагаем, что все эти три толчка исходили из одного и того же очага.

После проведения соответствующих расчетов были построены годографы фиктивных скоростей (рис. 1).

Эти годографы дают следующие значения фиктивных скоростей соответственно:

$$V_2^f = 8,0 \text{ км/сек}, V_3^f = 9,0 \text{ км/сек}, V_4^f = 11,1 \text{ км/сек}.$$

Ввиду того, что очаг расположен во втором (гранитном) слое, первая ветвь годографа должна соответствовать прямым преломленным

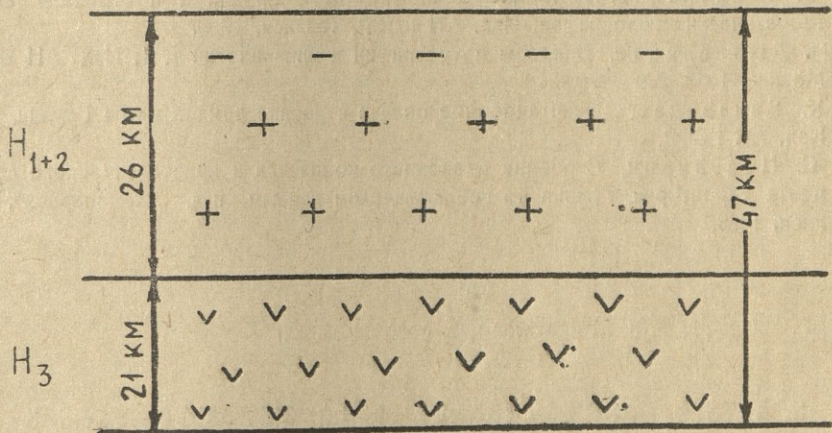


Рис. 2. Схема строения земной коры в районе с. Хашми.

волнам, а вторая и третья ветви годографа — дифрагированным волнам от поверхности базальта и верхней мантии соответственно.

В таком случае по методу фиктивных скоростей можно определить общую мощность первых двух слоёв и мощность третьего слоя. Для определения мощностей использованы соответствующие формулы [1]:

$$H_{1+2} = (t_{23} + t_h - t') \frac{V_2^f}{2 \cos \alpha},$$

где

$$t_h = \frac{h}{V_2^f} \cos \alpha, \quad t' = \frac{\Delta}{V_3^f}, \quad \alpha = \arcsin \frac{V_2^f}{V_3^f};$$

$$H_3 = (t_{24} + t'_h - t'' - t_h) \frac{V_2^f}{2 \cos \beta},$$

$$\text{где } t'_h = \frac{h}{V_4^f} \cos \beta, \quad t'' = \frac{\Delta}{V_4^f}, \quad t_h = \frac{2H_{1+2}}{V_2^f} \cos \beta',$$

$$\beta = \arcsin \frac{V_2^f}{V_4^f}, \quad \beta' = \arcsin \frac{V_3^f}{V_4^f},$$

$$H_{1+2} = 26 \text{ კმ}, \quad H_3 = 21 \text{ კმ. (რის. 2).}$$

Таким образом, общая мощность земной коры в эпицентральной области около 47 км. (рис. 2).

(Представлено 15. 1. 1970)

Кафедра геофизических методов
поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых

ლიტერატურა

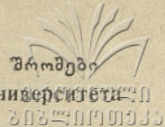
1. Г. К. Твалтвადзе, Строение земной коры в Грузии и построение систем теоретических годографов, Изд. АН ГССР, Тбилиси, 1960.
2. А. И. Джаңелидзе, Вопросы петрографии и минералогии т. 1, Изд. АН СССР, Москва, 1953, 269—279.
3. Б. К. Балавадзе, Гравитационное поле и строение земной коры Грузии, 1957, Изд. АН ГССР.
4. М. С. Иоселиани, Строение осадочного комплекса и кристаллического фундамента территории Грузии по геофизическим данным, изд. „Мецниереба“, Тбилиси, 1969.

გ. თვალთვაძე, მ. იოსელიანი, ვ. პაპალაშვილი

ს. ხაშმის რაიონის (გარე კახეთი) დედამიწის ძირის აგებულების საკითხისათვის

რეზიუმე

სტატიაში მოცემულია ს. ხაშმის რაიონში 1967 წლის ივნისში მომხდარი მიწისძვრების ანალიზი და მის საფუძველზე დადგენილია ამ მიწისძვრების ეპიცენტრების მდებარეობის ($\varphi = 41^{\circ}46'$ ჩდ. $\lambda = 45^{\circ}15'$ აღ) და ჰიპოცენტრების ჩაწოლის სიღრმეები და მათი კავშირი სიღრმულ რღვევასთან. მიწისძვრების მონაცემების ინტერპრეტაციის საფუძველზე ფიქტიური სიჩქარეთა მეთოდის გამოყენებით, განსაზღვრულია დედამიწის ქერქის აგებულება ეპიცენტრალურ ზონაში.



შტორმული ქარების ღინებათა განაწილების სტატისტიკური მონაცემები შავი ზღვის სანაპიროზე

ა. დემეტრაშვილი, ბ. სულაჰველიძე

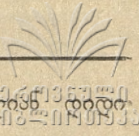
დედამიწის ევოლუციის ისტორიაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ კატასტროფული მოვლენები, რომლებსაც ადგილი აქვთ ბუნებაში. ერთ-ერთი ასეთი მოვლენაა ძლიერი ქარი, რომელიც იწვევს ნგრევას, ზღვებზე ძლიერ ტალღებს, ცხოვრების ნორმალური პირობების დროებით დარღვევას და ხშირად ადამიანის მსხვერპლსაც კი.

შტორმის დროს ქარის სიჩქარე წაშში 20 მ-ზე უფრო მეტია, ხოლო გრიგალის დროს — 35—40 მ/წამში, რაც საათში 120 კმ აღემატება. ქარის ყველაზე დიდი სიჩქარე აღინიშნება ტროპიკულ ციკლონებში. გრიგალი და გრიგალისებური ქარები დამახასიათებელია აგრეთვე არატროპიკული ციკლონებისათვის; არატროპიკული ციკლონები წარმოიშობიან და აღწევენ ყველაზე დიდ სიმძლავრეს სუბპოლარულ განედებში. ბევრი არატროპიკული ციკლონი ძლიერი შტორმული ქარებით და შედარებით იშვიათ შემთხვევაში გრიგალით წარმოიშობიან საბჭოთა კავშირის ევროპული ტერიტორიის სამხრეთ-დასავლეთ რაიონებში, კერძოდ ჩვენთვის საინტერესო შავ ზღვაზე და მის სანაპიროებზე. შავ ზღვაზე გრიგალის და გრიგალისებური ქარების მოქმედება, მართალია, შედარებით იშვიათია, მაგრამ მათი დამანგრეველი ძალა საკმაოდ დიდია. ნგრევა გამოწვეულია როგორც ქარის ძალით, ისე ძლიერი ლეღვით; ამ დროს ტალღის სიდიდე ძალიან დიდია — 8—13 მ-დე.

უცხო არ არის გრიგალისებური ქარების მოქმედება შავი ზღვის საქართველოს სანაპიროებისათვის. ბევრი ლეგენდა და თქმულება შემორჩენილი ქართველ ხალხში ქარიშხლის შესახებ შავ ზღვაზე. ვავიხსენოთ თუნდაც ეგნატე ნინოშვილის „პალიასტომის ტბა“.

უკანასკნელ პერიოდში ძალიან ძლიერი ქარები აღინიშნა 1967 წლის შემოდგომასა და 1968 წლის იანვარში. 1968 წელს შავი ზღვის ჩრდილო-დასავლეთ და ჩრდილო-აღმოსავლეთ რაიონებში, იანვრის შუა რიცხვებიდან, თითქმის თვის ბოლომდე, შავი ზღვის კავკასიის სანაპიროებზე გრიგალისებურმა ქარმა გამოიწვია 9—10-ბალიანი ლეღვა.

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ 1967 წლის შემოდგომისა და 1968 წლის ზამთრის კატასტროფული ქარები აღინიშნა მთელ ჩრდილოეთ ნახევარსფეროს სხვადასხვა რაიონში, თითქმის ყველა ევროპულ ქვეყანაში, მექსიკის ნახევარკუნ-



ძულსა და იაპონიის კუნძულებზე. ასეთივე ანომალური ზაფხული ძალიან ხშირად სიცხეებით აღინიშნა სამხრეთ ნახევარსფეროში.

გაცილებით უფრო ძლიერი ქარებით აღინიშნა 1969 წლის იანვარ-თებერვალი შავი ზღვის კავკასიის სანაპიროებზე. 1—8 იანვარს შავი ზღვის მთელი კავკასიის სანაპიროზე ქარის ძალა იყო 35—40 მ/წმ-ში, ფოთში კი — 48 მ/წამში. შემჩნეულია, რომ ასეთი ძლიერი ქარები შავი ზღვის სანაპიროებზე შეიძლება განმეორდეს 50—100 წელიწადში ერთხელ. მიზეზი, როგორც სპეციალურ ლიტერატურაშია ცნობილი, შემდეგი სინობტიკური სიტუაცია იყო: ყველაზე ძლიერი ანტიციკლონი რეგისტრირებულია ცენტრში 1070 მმ წნევით. ამ შემთხვევაში დიკსონის მიდამოებში მოხდა ანტიციკლონის გაძლიერება, რომლის ცენტრშიც მაქსიმალური წნევა 1080 მმ იყო. ანტიციკლონის ძლიერი თხემი დიდი სიჩქარით გავრცელდა კასპიის ზღვისაკენ. ერთდროულად შავ ზღვასა და მცირე აზიაზე აღინიშნა დაბალი წნევის არე, რომელმაც გამოიწვია წნევის დიდი გრადიენტი (20—25 მმ 100—150 კმ-ზე). შავი ზღვის კავკასიის სანაპიროებსა და კასპიის ზღვის სანაპიროებს გრივალმა დიდი ზიანი მიაყენა. თვალსაჩინოებისათვის მოგვყავს 1969 წლის იანვარ-თებერვალში გრივალისებური ქარების განაწილება შავი ზღვის სავაჭრო გზის სანაპიროებზე (ცხრ. 1).

ცხრილი 1

ძლიერი ქარების განმეორება შავი ზღვის სანაპიროებზე 1969 წლის იანვარ-თებერვალში

| მოვლენა | მოვლენის დაწყებისა და დამთავრების თარიღი | ტერიტორია | მაქსიმალური სიჩქარე | მოვლენის განმეორება მრავალი წლის განმავლობაში |
|---------------------------------|--|---|--------------------------|---|
| აღმოსავლეთის გრივალი | 3/I—8/I | სოსუმბიდან ფოთამდე | 40—48 მ/წმ | 5—100 წელიწადში ერთხელ |
| დასავლეთის გრივალისებური ქარები | 15/I—19/I | პიცუნდა ბაბუშერა ქობულეთი ბათუმი | 30 მ/წმ | 3 წელიწადში ერთხელ |
| აღმოსავლეთის გრივალი | 8/II—12/II | ოჩამჩირე სოხუმი ბაბუშერა ფოთი ბაბუშერა ფოთი | 35—40 მ/წმ 40—47 მ/წმ | 5 წელიწადში ერთხელ 50—100 წელიწადში ერთხელ |

მოკლედ შევხებით რა შავ ზღვაზე გრივალისა და გრივალისებური ქარის შემთხვევებს, ახლა საინტერესოა გავეცნოთ შავ ზღვაზე ქარის რეჟიმის მდგომარეობას ლიტერატურული წყაროების მიხედვით. ეს საკითხი პირველად წამოყენებულ იქნა საბჭოთა კავშირში საბჭოთა ოკეანოგრაფიის სწრაფი ტემპით განვითარებასთან დაკავშირებით. თეორიულ გამოკვლევებთან ერთად, რომლებმაც დაგვანახეს რეალური შესაძლებლობა ქარისმიერი ტალღებისა და დინებების შესწავლის დაკავშირებისა ქარის ველის შესწავლასთან, სამამულო ლიტერატურაში გამოჩნდა ათობით შრომა, რომელიც მიძღვნილია ქარის ველის რუკების შედგენისადმი. შავ ზღვაზე ქარის რეჟიმის შესწავლას მიუძღვნეს თავისი შრომები ლ. ანდრიენკომ.

[1], ბ. ვიტვიცკაიამ [2], ნ. ეგორენკომ [3]. ყველა ეს გამოკვლევა ეხება ქარის-შიერი ტალღების შექმნის, განვითარებისა და გავრცელების თეორიას. უკანასკნელი პერიოდის შრომებიდან უნდა დავასახელოთ ა. ჩერნიაკოვას [4] და კ. პაპინაშვილის და ნ. ბერაძის [5] შრომები ქარის ველის შესახებ შავ ზღვაზე. ა. ჩერნიაკოვა თანამედროვე გამოთვლითი მეთოდების საშუალებით არკვევს შავ ზღვაზე გაბატონებული ქარის დინებებს და იძლევა ქარის ველის ტიპურ რუკებსა და სტატისტიკურ ცხრილებს მათი განმეორებისა და ხანგრძლივობის შესახებ, ნაწილობრივ ეხება ყირიმისა და კავკასიონის მთების მოქმედებას შავი ზღვის ქარების მიმართულებასა და ძალაზე. კ. პაპინაშვილისა და ნ. ბერაძის შრომაში მოცემულია ძირითადი შედეგები ქარის ველის გამოკვლევის შესახებ „შავი ზღვის კავკასიონის სანაპიროებზე დამახასიათებელი სინოპტიკური მდგომარეობის მიხედვით“.

უკანასკნელ წლებში შავი ზღვის სანაპიროებზე შტორმული ქარების შესწავლას მიეცა ყურადღება თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მეტეოროლოგიის, კლიმატოლოგიისა და ოკეანოლოგიის კათედრაზე. ამისათვის გამოყენებული იქნა 25 წლის (1946—1970 წწ.) დაკვირვების მასალები და მონაცემები 1954—1971 წწ. განსაკუთრებულად სახიფათო მოვლენების შესახებ, თბილისის ამინდის ბიუროსა და სევასტოპოლის შავი და აზოვის ზღვების აუზების ჰიდრომეტეოროლოგიური ობსერვატორიიდან.

სტატისტიკური მასალების ანალიზის შედეგად გამოიკვია, რომ შავი ზღვის სანაპიროებზე შეიძლება გამოიყოს ქარის განსხვავებული რეჟიმით დამახასიათებელი 5 ძირითადი რაიონი, კერძოდ:

1. ჩრდილო-დასავლეთი (ოდესიდან იალტამდე);
2. ჩრდილო-აღმოსავლეთი (იალტიდან სოჭამდე);
3. აღმოსავლეთი (სოჭიდან ბათუმამდე);
4. სამხრეთი (თურქეთის სანაპიროები);
5. დასავლეთი (რუმინეთისა და ბულგარეთის სანაპიროები).

25 წლის მასალების მონაცემების საფუძველზე სხვადასხვა გრადაციების ქარის სიჩქარეების განმეორება ცალკეულ თვეებში და მთელი წლის განმავლობაში, აღნიშნული რაიონების მიხედვით, მოცემულია ცხრ. № 2-ში. როგორც მეორე ცხრილის ანალიზი გვიჩვენებს, სხვადასხვა სიჩქარეების ქარის განმეორება მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია სეზონზე. წლის ცივ პერიოდში ძლიერი ქარების დღეთა რიცხვი დიდია, ხოლო მაისიდან სექტემბრამდე შემცირებულია თითქმის 5—7-ჯერ, 15 მ/წმ-ში და მეტი სიძლიერის ქარებს აქვთ ორი მაქსიმუმი—იანვარში და მარტში, ერთი მინიმუმი ივნისში. ამ სიძლიერის ქარის ყველაზე დიდი რაოდენობა მოდის ჩრდილო-აღმოსავლეთ და სამხრეთ, ხოლო ყველაზე ცოტა—დასავლეთ რაიონებზე. ჩრდილო-აღმოსავლეთ და აღმოსავლეთ რაიონებში ქარების მაქსიმალური სიჩქარეები აღწევენ 40—48 მ/წმ, ხოლო სამხრეთ რაიონებში სიჩქარეები მნიშვნელოვნად ნაკლებია, აქ 25 წლის განმავლობაში 25 მ/წმ-ში სიძლიერის ქარი აღინიშნა მხოლოდ ერთხელ. შტორმების ხანგრძლივობა შავ ზღვაზე საკმაოდ დიდია, საშუალოდ 20—24 საათი. აღინიშნება ცალკეული შემთხვევები, როდესაც ხანგრძლივობა 3 და ზოგჯერ მეტი დღე-ღამეა.

გამოყოფილ რაიონებში გაბატონებული ქარების მიმართულებები სხვადასხვა არის. ჩრდილო-დასავლეთ და ჩრდილო-აღმოსავლეთ რაიონებში უმეტესად ჩრდი-



ლო-დასავლეთის და ჩრდილო აღმოსავლეთის ქარებია დამახასიათებელი სამხრეთ-აღმოსავლეთ რაიონებში—აღმოსავლეთის და სამხრეთ-აღმოსავლეთის. სამხრეთ რაიონებში ჩრდილო-აღმოსავლეთის და ჩრდილო-დასავლეთის და დასავლეთ რაიონებში—ჩრდილო-აღმოსავლეთის და აღმოსავლეთის (ცხრილი 3), ყველაზე ძლიერი ქარები დამახასიათებელია ამ მიმართულებებისათვის.

ამგვარად, დადგენილია, რომ ძლიერი ქარები ძირითადად უბერავენ ხმელეთიდან ზღვისაკენ.

ცხრილი 2

15 მ/წმ-ში და მეტი სიჩქარის ქარების დღეთა რაოდენობა შავი ზღვის სანაპიროზე

| სიჩქარე მ/წმ | რაიონი | თ ვ ე ე ბ ი | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|----------------|-----------------|------------------|------------------|----------------|----------------|---------------|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | I | 7 1 0 | 6 1 0,5 | 6 1 0 | 7 1 0 | 5 0,5 0 | 3 0,5 0 | 2 0 0 | 3 0 0 | 5 0,5 0 | 4 0,5 0 | 7 2 1 | 4 0,5 0 | 61 8,5 1,5 |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | II | 12 3 0,5 | 10 2 1 | 11 4 0,5 | 6 1 0 | 3 1 0 | 4 0,5 0 | 3 0,5 0 | 3 1 0,5 | 6 1 0,5 | 6 1 0 | 1 2 0,5 | 10 3 0,5 | 75 20 4,5 |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | III | 9 1 0 | 7 2 0 | 7 1 0,5 | 4 1 0 | 2 1 0 | 2 0,5 0 | 2 0 0 | 1 0 0 | 2 0,5 0,5 | 4 1 0,5 | 7 1 0,5 | 10 1 0,5 | 57 10 2,5 |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | IV | 13 0 0 | 12 1 0 | 13 0,5 0 | 9 0,5 0 | 5 0,5 0 | 5 0 0 | 9 0,5 0 | 9 0 0 | 7 0 0 | 6 0,5 0 | 11 0,5 0 | 10 0,5 0 | 109 4,5 0 |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | V | 5 0,0 0,5 | 4 5 0 | 5 0 0 | 1 0,5 0 | 2 0 0 | 1 0 0 | 1 0 0 | 1 0 0 | 1 0,5 0,5 | 2 0 0 | 3 0 0 | 3 1 0 | 29 2,5 1 |
| 15—20 20—25 25 და მეტი | მთელი სანაპირო | 19 5 1,0 | 16 6,0 1,5 | 14 6,5 1,0 | 12 4,0 0 | 11 3,0 0 | 9 1,5 0 | 16 1,0 0 | 13 1,0 0,5 | 15 2,5 1,0 | 16 3,0 0,5 | 19 5,5 2,5 | 18 6,0 1,0 | |

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ არატროპიკული და ტროპიკული გრიგალი-სათესს დამახასიათებელი ძირითადი თვისებები მნიშვნელოვნად განსხვავებულია (ცხრ. 4). ტროპიკული ციკლონების შემთხვევაში გრიგალი წარმოიშობა უმეტესად ზაფხულის პერიოდში. შავი ზღვის სანაპიროებზე კი გრიგალი და გრიგალი-სებური ქარი, დამახასიათებელი მიმართულებებით, აღინიშნებიან უფრო ხშირად ზამთარში, გვიან შემოდგომასა და ადრე გაზაფხულზე. აქ ზაფხულის თვეებში შტორმული ქარები იშვიათია (იხ. ცხრ. 5).

ტროპიკული გრიგალის წარმოშობა ყოველთვის დაკავშირებულია ტროპიკულ ციკლონებთან, ხოლო არატროპიკული გრიგალისა კი, კერძოდ შავი ზღვის სანაპიროებისათვის დამახასიათებელი გრიგალი ან გრიგალისებრი ქარების წარმოშობა დაკავშირებულია უმეტესად სინობტიკური მდგომარეობის ანტიციკლონურ პირობებთან.

15 მ/წმ-ში და მეტი სიჩქარის ქარების დამახასიათებელი მიმართულებები შავი ზღვის სანაპიროებზე რაიონების მიხედვით

| მიმართულება | I რაიონი | II რაიონი | III რაიონი | IV რაიონი | V რაიონი |
|-------------|----------|-----------|------------|-----------|----------|
| C3 | 12 | 7 | 2 | 13 | 3 |
| C | 9 | 7 | 0 | 9 | 5 |
| CB | 8 | 28 | 2 | 44 | 12 |
| B | 5 | 5 | 12 | 9 | 6 |
| Ю | 4 | 6 | 10 | 0 | 0 |
| ЮВ | 3 | 16 | 5 | 8 | 2 |
| ЮЗ | 3 | 7 | 4 | 6 | 1 |
| З | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 |

ცხრილი 4

ტროპიკული და არატროპიკული გრივალისათვის დამახასიათებელი ძირითადი ნიშნები

| № | ღახასიათება | ტროპიკული გრივალი | არატროპიკული გრივალი |
|----|---|--|---|
| 1. | გრივალის წარმომშობი სინობტიკური სიტუაციები | ციკლონი (დაბალი წნევის არე) | ანტიციკლონი (მაღალი წნევის არე) |
| 2. | გრივალის წარმომშობის და განვითარების პერიოდები | მაისი — სექტემბერი (წლის თბილი პერიოდი) | ოქტომბერი—მარტი (წლის თბილი პერიოდი) |
| 3. | გრივალის მოქმედების რადიუსი | 500—600 კმ | 50—100 კმ |
| 4. | გრივალის ხანგრძლივობა | 9—12 დღე | 20—24 საათი |
| 5. | გრივალის გადაადგმვლების საშუალო მანძილი | რამდენიმე ათასი კმ | რამდენიმე ასი კმ |
| 6. | ნალექები | უხვი თავსხმა ნალექები ზოგჯერ 1000 მმ-დე დღე-ღამეში | უმეტესად უნალექოდ |
| 7. | გრივალის პორიზონტალური დინებების საშუალო სიჩქარეები | 320—400 კმ/საათში | 120 კმ/საათში |
| 8. | გრივალის ენერჯის ძირითადი წყარო | წყლის ორთქლის ფართული სითბო | პაერის მასების გადანაწილების პოტენციალური ენერჯია |

როგორც 25 წლის პერიოდის სინობტიკური რუკების ანალიზმა გვიჩვენა შავი ზღვის აკვატორიაზე, შტორმული და გრივალისებური ქარების ფორმირების ერთ-ერთ მთავარ ფაქტორს წარმოადგენს მაკროციკულაციური პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ თითქმის მთელი ევრაზიის ტერიტორიაზე, კერძოდ ევროპისა და აზიის ტერიტორიაზე სხვადასხვა ტრაექტორიებით გადმონაცვლებული ანტიციკლონები, რომელთა წარმოშობის უშუალო კერაა ატმოსფეროს მოქმედების 3 მთავარი ცენტრი: არქტიკული, ციმბირის და აზორის.

შავი ზღვის სანაპიროებზე გრივალისებური ქარების უმეტესობა გამოწვეულია არქტიკული ცენტრიდან გადმონაცვლებული ანტიციკლონებით, რომელთა

15 მ/წმ და მეტი სიჩქარის ქარების დამახასიათებელი მიმართულებები შავი ზღვის
 სანაპიროებზე თვეების მიხედვით

| მიმართუ- ლებები | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | |
|--------------------|----|----|-----|----|---|----|-----|------|----|----|----|-----|-----|
| СЗ | 13 | 10 | 15 | 6 | 7 | 6 | 4 | 9 | 4 | 17 | 17 | 29 | 137 |
| С | 16 | 17 | 19 | 9 | 9 | 0 | 0 | 9 | 17 | 10 | 23 | 23 | 151 |
| СВ | 10 | 11 | 16 | 8 | 8 | 5 | 8 | 5 | 3 | 7 | 16 | 13 | 110 |
| В | 21 | 14 | 15 | 8 | 4 | 1 | 1 | 0 | 4 | 6 | 4 | 35 | 113 |
| Ю | 4 | 4 | 10 | 6 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 55 |
| ЮВ | 16 | 12 | 10 | 4 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 59 |
| ЮЗ | 2 | 1 | 7 | 0 | 4 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 25 |
| З | 19 | 10 | 11 | 5 | 5 | 0 | 4 | 4 | 5 | 7 | 11 | 14 | 94 |

შემოკრა დამახასიათებელია უმთავრესად წლის ცივი პერიოდისათვის, რის გამოც გრივალისებური ქარების უმრავლესობა შავი ზღვის სანაპიროებზე წლის ცივ პერიოდში აღინიშნება.

ამრიგად, 25 წლის აეროსინოპტიკური რუკების ანალიზის შედეგად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ შავი ზღვის სანაპიროებზე გრივალისებური ქარების წარმოშობის ძირითადი სინოპტიკური სიტუაციები იქმნება ჰაერის მასების ჩრდილო-აღმოსავლეთიდან, აღმოსავლეთიდან, სამხრეთ-აღმოსავლეთიდან, სამხრეთ-დასავლეთიდან და დასავლეთიდან გადმონაცვლებით, როდესაც წნევის ჰორიზონტალური ბარიული გრადიენტი აღემატება 1,5 მბ-ს მერიდიანის 1°-ის მანძილზე (111.1 კმ).

აღსანიშნავია, რომ გრივალისებური ქარების გარკვეული რაოდენობა ემთხვევა სამხრეთის ციკლონების გადმონაცვლების დროს პოლარული ფრონტის ცივი ნაწილის გავლას.

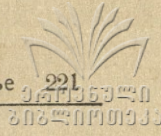
შესაძლებელია, რომ როგორც ტროპიკული, ისე არატროპიკული გრივალის მექანიზმის შესწავლა პროგნოზირების მიზნით, საშუალებას მოგვცემს გამოვიმუშაოთ გრივალზე ხელოვნური ზემოქმედების მეთოდები, ქარის ძალის შემცირების მიზნით.

(წარმოდგენილია 30/I—1971)

მეტეოროლოგია, კლიმატოლოგია,
ოკეანოლოგიის კათედრა

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Л. А. Андриенко, Труды ОГМИ, вып. XXI, 1960, 19.
2. З. М. Витвицкая, Труды ОГМИ, вып. XXI, 1961, 120.
3. Н. П. Егоренко, Изд. АН СССР, сер. география, т. VII, 1962, 41.
4. А. П. Чернякова, Труды УКГМИ, вып. XXI 1958, 78.
5. К. И. Папинашвили, М. И. Берадзе, Труды Зак НИГМИ, вып. XXII-1966, 29.



А. А. ДЕМЕТРАШВИЛИ, Г. К. СУЛАКВЕЛИДЗЕ

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ШТОРМОВЫХ ВЕТРОВ НА
ПОБЕРЕЖЬЕ ЧЕРНОГО МОРЯ**

Р е з ю м е

На основании 25-летнего синоптического материала произведено районирование побережья Черного моря по ветровому режиму. Получены статистические выводы распределения скоростей и направления ветра.



აჭარა-თრიალეთის მთავრახილის რელიეფის ტიპები და მათი გავრცელების რაიონები

შ. ცხომავაშვილი

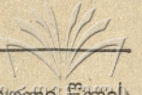
აჭარა-თრიალეთის მთავრახილის შესახებ არსებული ტიპოლოგიური ან რეგიონული დაყოფებიდან უმეტესად ისეთი სქემები მოგვეპოვება, რომლებშიც მისი ცალკეული, მეტ-ნაკლები სიდიდის მრნაკვებებია განხილული. მათი რაოდენობა თუმცა დღეისათვის ორ ათეულს აღწევს, მაგრამ ყველა ისინი მთავრახილის საერთო ფართობის 2/3 თუ მოიცავენ.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ აჭარა-თრიალეთის, როგორც მთლიანი მორფოლოგიური ერთეულის გეომორფოლოგიურ დარაიონებაზე სპეციალურად ყურადღება არააქვს შეუჩერებია და თუ ამ მხრივ რაიმე მოგვეპოვება, ესაა ა. ჯავახიშვილის (1926, 1947) და ლ. მარუაშვილის (1964) მიერ მოცემული დაყოფები, რომლებშიც ჩვენთვის საინტერესო ობიექტის ძირითადი კონტურების თავისებურება საქართველოს სსრ ტერიტორიის საერთო ფონზეა მოცემული.

ა. ჯავახიშვილის დარაიონების პირველ სქემაში ყურადღება რელიეფის გარეგან სახეზე არის გამახვილებული და ამ ნიშნის მიხედვით აჭარა-თრიალეთი საქართველოს სამხრეთ მთიანეთისა და ბარის შემადგენლობაშია მოქცეული. რაც შეეხება მეორე სქემას, მასში ავტორი დარაიონების საფუძვლად იღებს რელიეფის მორფოგენეტიურ-მორფოგრაფიულ ნიშნებს და გამოყოფს კომპლექსებს, როგორც უმსხვილეს გენეტიურ ერთეულებს, ტიპთა ჯგუფებს და ბოლოს ტიპებს, რომლებიც სივრცითი გამოვლინების თვალსაზრისით შესაბამისად ზონებს, ოლქებს და რაიონებს ქმნიან. აღნიშნული დაყოფის მიხედვით აჭარა-თრიალეთის მთავრახილზე რელიეფის ათი ტიპია გამოყოფილი.

ლ. მარუაშვილის მიერ 1957 წელს მოცემულ საქართველოს გეომორფოლოგიური დანაწილების სქემაში ზემოაღნიშნული მხარე მცირე კავკასიის მთიანი სისტემის ოლქში ცალკე ერთეულად არის გამოყოფილი. მის მეორე, შედარებით დეტალურ დარაიონებაში (1964) აჭარა-თრიალეთზე შემდეგი გეომორფოლოგიური რეგიონებია გამოყოფილი: 1. აჭარა-თრიალეთის სისტემა; 2. აჭარა-გურიის მთისწინეთის რაიონი; 3. სამხრეთ იმერეთის მთისწინეთის რაიონი, 4. მტკვრის ხეობა, 5. კუმის-ასურეთის რაიონი და 5. თორის ქვაბული.

როგორც ზემოთ აღინიშნა, აჭარა-თრიალეთის ამა თუ იმ ნაწილის შესახებ არსებული გეომორფოლოგიური დაყოფის სქემების რაოდენობა დღეისათვის ორ



ათეულს აღწევს. სქემები შესრულებულია უკანასკნელი ორი-სამი ათეული წლის განმავლობაში, უმთავრესად თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გეოგრაფიკულ-გეოლოგიის ფაკულტეტის, საქართველოს გეოლოგიური სამმართველოს და ვახუშტის სახელობის გეოგრაფიის ინსტიტუტის მეცნიერ მუშაკთა მიერ. მათ მიერ მოცემული დარაიონებანი ფრიად საყურადღებო, მეტ-ნაკლები სიდიდის წინგადაღმულ ნაბიჯებად მიგვაჩნია აჭარა-თრიალეთის მთაგრეხილის გეომორფოლოგიური თავისებურების შესწავლის საქმეში. ეს მით უფრო, რომ მათი უმეტესობა უწინამორბედო ცდას წარმოადგენს აღნიშნული რეგიონის ამა თუ იმ ნაწილის ძირითადი ნიშნების ასახვისას მიღებულ საველე დაკვირვებათა დროს შეკრებილი მასალების საფუძველზე.

როგორც ცნობილია, საკითხი გეომორფოლოგიური დარაიონების შესახებ ჯერჯერობით არაა იმ სახით დამუშავებული, რომ საყოველთაო აღიარებით სარგებლობდეს. ამიტომ. ამა თუ იმ მხარის დარაიონება ზემოაღნიშნული თვალსაზრისით დღესაც მეტწილად მკვლევართა სუბიექტური თვალსაზრისის ამსახველია, რომ აღარა ვთქვათ, ტაქსონომიური ერთეულების სიდიდისა და მათი ურთიერთდამოკიდებულების თაობაზე, თვით გეომორფოლოგიური რაიონების შინაარსზეც არაა აზრთა ერთიანობა.

ჩვენ მიერ აჭარა-თრიალეთის მთაგრეხილზე გამოყოფილ გეომორფოლოგიურ ერთეულებს წამყვანი გენეტიური ნიშანი უდევს საფუძვლად, მაგრამ, ამასთან ერთად, სათანადო ყურადღება რელიეფის ჰიფსომეტრიისა და მორფოგრაფიის ამსახველ მთავარ შრიხტებზეც არის გამახვილებული, ე. ი. მათში გენეზისთან ერთად რელიეფის გარეგანი თავისებურებაცაა გათვალისწინებული.

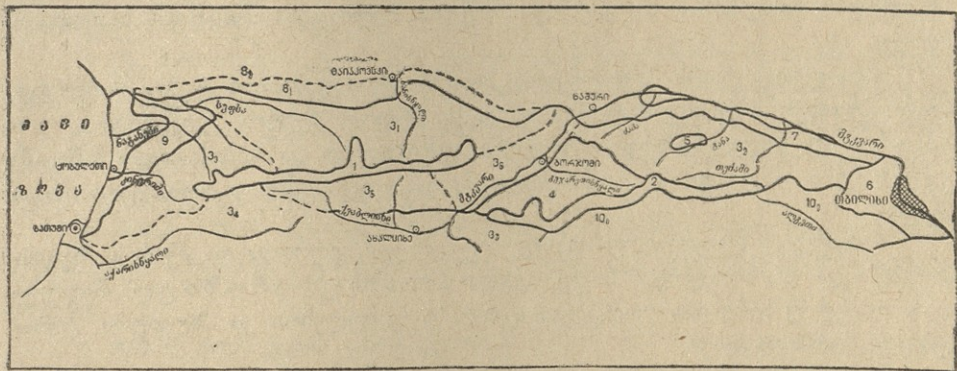
აჭარა-თრიალეთის მთაგრეხილის დღევანდელი რელიეფი მის ცალკეულ ნაწილებში, რა თქმა უნდა, განსხვავებული გენეზისის მქონეა, მაგრამ იგი როგორც რელიეფის მაკროფორმა ერთის მხრივ, ტექტონიკური პროცესების ღრმა კვალის მატარებელია, რადგან ამ უკანასკნელითაა გაპირობებული მისი განედური ორიენტირება და 2000 მ-მდე საშუალო სიმაღლე. მეორეს მხრივ, ასევე ნაირგვარი სუბაერალური დენუდაციური პროცესების ღრმა კვალს ატარებს. დიდი სიღრმის V-სებრი ხეობების გაბატონებული მდგომარეობა ამის ნათელ დადასტურებას წარმოადგენს.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, სრული საფუძველი გვაქვს აჭარა-თრიალეთის მთაგრეხილი ტექტონიკურ-დენუდაციური რელიეფის ტიპთა ჯგუფად გამოვყოთ, რომელიც ცალკეულ ნაწილებში ამა თუ იმ პროცესის ან ფაქტორის ზემოქმედებით მეტ-ნაკლებად განსხვავებული სახის მატარებელია. ასე მაგალითად, აჭარა-იმერეთის ქედის თხემის ზოლი უძველესი მოსწორებული ზედაპირების ფრაგმენტების შემცველია, რომლის ჩრდილოეთის ექსპოზიციის კალთებზე მეტად კარგად გამოხატულ ყინვარული რელიეფის ფორმებს ვხვდებით, უმეტესად კარების, ზოგან კი პატარა ტროვების სახით. ყოველივე ეს ქედის აღნიშნულ ნაწილში დენუდაციურ-გლაციოგენური, მაღალმთიანი რელიეფის გამოყოფის საფუძველს იძლევა.

რამდენადმე სხვა სახისაა თრიალეთის ქედის თხემის ზოლი. ეს უკანასკნელი პირველი ნიშნით ისეთივე სურათის მქონეა, როგორც აჭარა-იმერეთის ქედის შუა მონაკვეთი, მაგრამ აქ ყინვართა მოქმედების კვალი ან სულ არაა, ანდა მეტდ

უმნიშვნელო. ასე, რომ უკანასკნელ შემთხვევაში საქმე გვაქვს დენ უღის ტიპის საშუალომთიან რელიეფთან.

აჭარა-თრიალეთის მთავარი წყალგამყოფი ზოლის ჩრდილოეთისა და სამხრეთის განტოტებათა მიერ დაკავებული ვრცელი ტერიტორია, რომელსაც მისი თითქმის 2/3 უკავია, გენეტურად აშკარად ეროზიულ-დენ უღისა და ციური მთაგობიანი რელიეფის მქონეა. აქ გაბატონებულ გეომორფოლოგიურ პროცესს მიმდინარე წყლის ეროზიული მოქმედება წარმოადგენს, რომელსაც ხეობების კალთებზე „შენიღბული“, თუ აშკარა დენუდაციური პროცესები ემატება და მათ განზე გაწევისა და უმეტესად გაფორმებულ, V-სებრი პროფილის გამომუშავებას აპირობებს. ამ ვრცელ ტერიტორიაზე დაახლოებით 1000—2200 მ სიმაღლის ზოლში; როგორც მეორე რიგის წყალგამყოფებზე, ისე ხეობათა ფერდობებზე, ხშირად შეინიშნება მეტ-ნაკლები სიდიდის მოსწორებული ზედაპირების ფრაგმენტები, რომლებიც ქედის ამ ნაწილების რელიეფის პლასტიკაში თვალსაჩინო როლს თამაშობენ.



3 0 1 0 2 0 0 6 0 8 5 2 0

რ ა ი ო ნ ე ბ ი :

1—აჭარა-იმერეთის ქედის თხემის; 2—თრიალეთის ქედის თხემის; 3—აჭარა-თრიალეთის მთაგრების განტოტებების; 4—თრიალეთის ქედის NW ფერდობის; 5—ატენ-ბობნევის; 6—თრიალეთის ქედის აღმოსავლეთ ნაწილის; 7—თრიალეთის ქედის N ფერდობის მთისწინეთის; 8—აჭარა-იმერეთის ქედის N ფერდობის მთისწინეთის; 9—აჭარა-გურის; 10—თრიალეთის ქედის S ფერდობის.

ქ ვ ე რ ა ი ო ნ ე ბ ი :

3₁—აჭარა-იმერეთის ქედის N ფერდობის; 3₂—თრიალეთის ქედის N ფერდობის; 3₃—აჭარა-იმერეთის ქედის NW ფერდობის; 3₄—აჭარა-იმერეთის ქედის SW ფერდობის; 3₅—აჭარა-იმერეთის ქედის S ფერდობის; 3₆—აწყურ-ტაშისკარის; 3₇—თრიალეთის ქედის SW ფერდობის; 8₁—სულორ-ძულუხის; 8₂—ვანი-მაიაკოვსკის; 10₁—ცხრაწყარო-არჯვეანის; 10₂—მდ. ალგეთის მარცხენა მხარის.

ს ა ზ ლ ვ რ ე ბ ი :

- რაიონის
- - - - - ქვერაიონის



ამ საერთო ნიშნების ფონზე რელიეფის აღნიშნული ტიპის ცალკეული ნიშნები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან როგორც მეზოფორმათა ორიენტირებით, ისე მათი დანაწევრების სიღრმის და ზოგი სხვა მეორეხარისხოვანი ნიშნებით. ეს კი მათში შვიდი ქვეტიპის გამოყოფის საფუძველს იძლევა, რომელთაგან ორი თრიალეთის ქედის ფერდობებზეა წარმოდგენილი, ოთხი აჭარა-იმერეთის ქედზე, ერთი კი აღნიშნული ქედების შეხვედრის ზოლში.

თრიალეთის ქედის აღმოსავლეთ ბოლოზე ოროგრაფიული ვირგაციის მსგავს-სურათთან გვაქვს საქმე, რაც მნიშვნელოვანწილად გეოლოგიური სტრუქტურის ანარეკლია. ანტიკლინური შტოები და სინკლინური ჩადაბლებები ქედის აღნიშნული ნაწილის რელიეფის მაკროფორმებს წარმოადგენენ. მათ ზედაპირზე, უმეტესად კი ანტიკლინური სტრუქტურის მქონე შტოთა ჩრდილოეთის ექსპოზიციის ფერდობებზე გვხვდება პერიოდულ და მუდმივ ნაკადთა ეროზიული მოქმედების კვალი. კონსექვენტური ხრამების და სუბსეკვენტური ხეობების სახით, რომლებიც რელიეფის მეზო- და მიკროფორმებსა ქმნიან. ყოველივე ეს თრიალეთის ქედის ამ ნაწილში დაბალმთიან სტრუქტურული რელიეფის გამოყოფის საფუძველს იძლევა.

თრიალეთის ქედის მთისწინეთის ზოლში რელიეფის ორი ტიპია წარმოდგენილი: ჩრდილოეთ პერიფერიაზე საქმე გვაქვს მტკვრის ხეობის ტექტონიკურ-ეროზიულ, ხოლო სამხრეთ ფერდობის ცენტრალურ და აღმოსავლეთ ნაწილში ეროზიულ რელიეფთან. უკანასკნელი მათგანი თავის მხრივ ორი ქვეტიპისაგან შედგება.

აღნიშნული მთაგრებილის დასავლეთ ნაწილში, გურიისა და აჭარის ზღვისპირეთში და მის სიახლოვეს საქმე გვაქვს აბრაზიულ-ეროზიულ რელიეფთან, რომელიც სერებით, ბორცვებით, პატარა ქვაბულებით და ზღვიური ტერასებითაა წარმოდგენილი.

ბოლოს, მკვეთრად განსხვავებული რელიეფის ფორმებისა და მათი გვუფეების თავმოყრის ადგილს წარმოადგენს თრიალეთის ქედის ჩრდილო-დასავლეთი ნაწილის რაიონი. აქ რელიეფის მორფოლოგიაში არა მარტო ეროზიული და დენუდაციური პროცესებია ფართოდ ასახული, არამედ ვულკანურ-აკუმულაციური მოქმედების შედეგებიც. ამიტომ თრიალეთის ქედის ამ ნაწილში გამოყოფილი გვაქვს ვულკანურ-ეროზიული პლატოების და ქვაბულების რელიეფი, რომელიც თავის მხრივ ორი ქვეტიპისაგან შედგება.

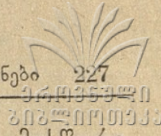
თუ ზემოაღნიშნულს შევაჯამებთ, აჭარა-თრიალეთის მთაგრებილის გეომორფოლოგიური დაყოფის ჩვენი სქემა შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

1. აჭარა-იმერეთის ქედის თხემის მაღალმთიანი, დენუდაციურ-გლაციოგენური რელიეფი; განვითარებულია ეოცენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

2. თრიალეთის ქედის თხემის საშუალომთიანი, დენუდაციური რელიეფი, განვითარებულია უმთავრესად ეოცენის და ცარცულის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3. აჭარა-თრიალეთის მთაგრებილის განტოტებათა საშუალომთიანი, ეროზიულ-დენუდაციური რელიეფი V-სებრი ხეობების სიჭარბით, განვითარებული ეოცენისა და ცარცულის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3 (1). აჭარა-იმერეთის ქედის ჩრდილოეთ ფერდობის ღრმად დანაწევრებული, მთახეობიან-მოსწორებულ ზედაპირებიანი რელიეფი, განვითარებული ეოცენის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.



3 (2). თრიალეთის ქედის ჩრდილოეთ ფერდობის მთახეობიანი, მოსწორებული ზედაპირებიანი რელიეფი, განვითარებული პალეოგენის და ცარცულის ნაოჭანარღვევ სუბსტრატზე.

3 (3). აჭარა-იმერეთის ქედის NW ფერდობის საშუალომთიანი რელიეფი კანიონისებური ხეობების სიჭარბით, განვითარებული შუა ეოცენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3 (4). აჭარა-იმერეთის ქედის SW ფერდობის მთახეობიანი მეწყრული რელიეფი, ხეობათა ჭალიანი და კანიონისებური მონაკვეთების მონაცვლეობით, განვითარებული ეოცენის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3 (5). აჭარა-იმერეთის ქედის სამხრეთ ფერდობის საშუალო ვერტიკალური დანაწევრების რელიეფი, ფართო V-სებრი ხეობებით და მოსწორებული ზედაპირებით, განვითარებული ეოცენის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3 (6). მტკვრის აუზის აწყურ-ტაშისკრის მონაკვეთის ანტიცედენტური ხეობების ეროზიულ-პეტრომორფული რელიეფი, განვითარებული ეოცენის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

3 (7). თრიალეთის ქედის SW ფერდობის მონოკლინური ხეობების და კუესტისებური სერების რელიეფი, განვითარებული ეოცენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

4. თრიალეთის ქედის NW ფერდობის საშუალომთიანი, ვულკანურ-ეროზიული პლატოებისა და ქვაბულების რელიეფი, განვითარებული პალეოგენის ძლიერ დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

5. ტანას აუზის მარცხენა მხარის საშუალომთიანი, პეტრომორფულ-ბედენდისებური რელიეფი, განვითარებული ეოცენის ვულკანოგენურ ნაოჭა სუბსტრატზე.

6. თრიალეთის ქედის აღმოსავლეთი ნაწილის დაბალმთიანი, სტრუქტურული რელიეფი, განვითარებული პალეოგენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

7. თრიალეთის ქედის N ფერდობის მთისწინეთის დაბალმთიანი, ტექტონიკურ-ეროზიული რელიეფი, განვითარებული უმთავრესად პალეოგენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

8. აჭარა-იმერეთის ქედის N ფერდობის მთისწინეთის დაბალმთიან-ქვაბულე-ბიანი, ფლუვიალურ-მეწყრული რელიეფი, განვითარებული მესამეულის ნაოჭანარღვევ სუბსტრატზე.

8 (1). სულორ-ძულუხის და ვახანის მიდამოების დაბალმთიან-ქვაბულიანი რელიეფი.

8 (2). ვანი-მაიაკოვსკის მიდამოების ბორცვიან-ტერასებიანი რელიეფი.

9. აჭარა-გურიის მთისწინეთის აბრაზიულ-ეროზიული, სერებიან-ტერასებიანი რელიეფი, განვითარებული უმთავრესად შუა ეოცენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

10. თრიალეთის ქედის სამხრეთ ფერდობის საშუალომთიანი, ეროზიული რელიეფი, განვითარებული პალეოგენის დანაოჭებულ სუბსტრატზე.

10 (1). ცხრაწყარო-არჯევანის ზოლის ხრამიან-ხევებიანი რელიეფი.

10 (2). მდ. ალგეთის მარცხენა მხარის კუესტური სერების და ტერასების რელიეფი.

ლ ი ბ ე რ ა ტ უ რ ა

1. ალ. ჯავახიშვილი, საქართველოს გეოგრაფია. ტ. I. (გეომორფოლოგია). თბილისი, 1926.
2. А. Н. Джавахишвили, Геоморфологические районы Груз. ССР., М.—Л., 1947.
3. Л. И. Маруашвили, Тр. IV геоморф. конференции по изуч. Кавказа и Закавказья, Ереван, 1957, 55—71.
- 4; ლ. მარუაშვილი, საქართველოს ფიზიკური გეოგრაფია. თბილისი, 1964.

Ш. А. ЦХОВРЕБАШВИЛИ

 ТИПЫ РЕЛЬЕФА АДЖАРО-ТРИАЛЕТСКОЙ ГОРНОЙ ЦЕПИ И РАЙОНЫ
 ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Резюме

Хотя вопросу геоморфологического деления отдельных частей Аджаро-Триалетской горной цепи] посвящено не одно исследование, ее детальное геоморфологическое районирование, как единого целого, до сих пор почти не проводилось.

Наша попытка геоморфологического деления Аджаро-Триалетской горной цепи проведена на основе ведущих морфогенетических признаков. Кроме этого, нами учтены основные штрихи гипсометрического развития и морфологии выделенных единиц.

Полученная схема представлена в следующем виде:

1. Высокогорный, денудационно-гляциогенный рельеф гребня Аджаро-Имеретского хребта, развитый на эоценовом складчатом субстрате.
2. Среднегорный, денудационный рельеф гребня Триалетского хребта, развитый в основном на эоценовом и меловом складчатом субстрате.
3. Среднегорный, эрозионно-денудационный рельеф отрогов Аджаро-Триалети, с преобладанием V-образных долин, развитый на эоценовом интенсивно складчатом субстрате. (Этот район подразделяется на семь подрайонов).
4. Среднегорный рельеф вулканогенно-эрозионных плато и котловин NW склона Триалетского хребта, развитый на складчатом субстрате палеогена.
5. Среднегорный, петроморфно-бедлендообразный рельеф Атени-Боблеви, развитый на эоценовом вулканогенном складчатом субстрате.
6. Низкогорный структурный рельеф восточной части Триалетского хребта, развитый на палеогеновом складчатом субстрате.
7. Низкогорный, тектонико-эрозионный рельеф предгорья северного склона Триалетского хребта, развитый в основном на складчатом субстрате палеогена.
8. Низкогорно-котловинный, флювиально-оползневый рельеф пред-

горья северного склона Аджаро-Имеретского хребта, развитый на складчатом складчато-сбросовом субстрате. (Состоит из двух подрайонов).

9. Абразионно-эрозионный, грядово-террасированный рельеф Аджаро-Гурийских предгорий, развитый в основном на среднеэоценовом складчатом субстрате.

10. Среднегорный, эрозионный рельеф южного склона Триалетского хребта. (Состоит из двух подрайонов).

ТЕОРИЯ ПОРОГОВ И АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РАЗВИТИЯ ГОРОДОВ И СИСТЕМ РАССЕЛЕНИЯ

В. В. ГУДЖАБИДЗЕ

За последние годы в зарубежной урбанистической литературе большое распространение получила теория порогового развития городов и систем расселения. Теория эта („*teoria progów*“), разработанная известным польским урбанистом Б. Малишом и его сотрудниками, успешно применяется в качестве руководства как в теоретических, так и в практических целях¹.

Теория порогов нашла применение в урбанистике как метод, позволяющий учитывать возможности физического, количественного и структурного развития по совокупности экономических показателей [5].

Теория порогов отвечает на вопрос о целесообразных масштабах городов в условиях несоответствия между темпами роста населения и экономическими возможностями для наращивания и освоения городской территории. Она вскрывает взаимосвязи природных и экономических элементов при планировке и позволяет выразить проектные решения в количественных категориях. Теория порогов связывает планировочные решения разных уровней и определяет период времени, в течение которого будут определены проектные решения [7].

Города и системы расселения по мере своего пространственного разрастания периодически наталкиваются на определенные ограничения (пороги). Эти ограничения имеют физико-географический, технологический и структурный характер, преодоление которых требует непропорционально высоких расходов, что выражается в соответствующем росте расходов на заселение каждого нового жителя. Явление порогов имеет место тогда, когда город уже не может быть расширен за счет возрастающих пропорционально заселению расходов, а также в том случае, когда требуется путем дорогостоящих мероприятий расширить развивающуюся

¹ Заслуживает внимания статья И. Т. Хьюса и И. Козловского об анализе порогов как экономического инструмента для районной планировки (см. [3], 132—143), а также попытка применения теории порогов для анализа возможностей развития пригородного района городов Грейнджмут—Фолкерис (недалеко от Эдинбурга), приводимая Козловским (см. [4], 99—116).



территорию (в особенности, когда для новых жителей приходится создавать новые системы обслуживания).

Существенным представляется тот факт, что величина расходов, необходимых для преодоления порогов, является относительной. Развитию небольших городов препятствуют небольшие пороги, между тем, как крупные города вынуждены преодолевать большие¹. Именно поэтому расходы на развитие больших агломераций все более возрастают. В этих условиях принцип экономической эффективности должен подсказать более правильное решение, а именно: создание и развитие других систем расселения, которым или не угрожают пороги, или же для преодоления их требуется меньше расходов.

Из вышеотмеченных ограничений первичны естественные или физико-географические ограничения, отражающие особенности природной среды. На территориальное развитие и на конфигурацию границ городов или систем расселения значительное влияние оказывают топографические условия местности.

Бесспорно, что потенциальные возможности территориального развития городов, расположенных на островах (Копенгаген, Сингапур, Кронштадт и др.) ограничены берегами островов. Аналогично, города, расположенные в горных ущельях (Боржоми, Ткварчели, Чиатура и т. д.) или между морем и береговыми хребтами (Гагра, Ялта, Сочи и др.) имеют ограниченные возможности пространственного развития. Однако в современных условиях даже морской берег и горный рельеф не является каким-либо абсолютным ограничением при территориальном росте городов, поскольку имеется возможность создания искусственных форм городской застройки либо в виде понтоновых сооружений (как например в городах Японии — Токио, Иокогама), либо путем рефулерования территории (ценой срезания холмов и гор, как это проводится в Рио-де-Жанейро) [6]. Хотя, несомненно, что такие мероприятия очень дорогостоящие и создание новой территории подобного рода для застройки в значительной степени повышает затраты на заселение каждого нового жителя и создания системы обслуживания.

¹ В связи с этим кажется необоснованным замечание Т. Райомова о том, что «теория порогов имеет преимущественное значение для выявления территориально-планировочных возможностей малых и средних городов, и что она в гораздо меньшей степени применима по отношению к крупнейшим городам и столицам, где первостепенное значение имеют уже другие факторы и условия» (см. Материалы XI межвед. совещания по географии населения, вып. I, М., 1968, 38, 118). Дело в том, что столицы и крупные города в своем территориальном развитии неизбежно сталкиваются как с физико-географическими, так и с технологическими и структурными ограничениями. И именно два последних основных ограничения для больших и крупных городов являются теми, преодоление которых требуют значительно больших расходов. Однако и в столицах (и в некоторых крупных городах) расходы для преодоления таких пороговых ограничений сравнительно «легко» осуществляются, несмотря на их большие размеры, чем в малых или средних городах.

Следует отметить, что физико-географические пороги имеют место не только при сложных географических условиях местности — аналогичные ограничения наблюдаются и в более „нормальной“ топографической ситуации города. Водоразделы ограничивают территориальное расширение сети канализации и промышленных отходов города, а сооружение системы перекачки (которая обычно имеет ограниченный радиус действия) требует больших расходов.

Если город имеет почти недифференцированную плоскую территорию, то развитие такого города всегда наталкивается на ограничения или пороги развития, обусловленные технологическими условиями отдельных сетевых организаций городов. Технологические пороги отражают уровень инженерного и транспортного оборудования городов [7].

Город с населением до 50 тыс. человек (если нет большого расстояния между местом жительства и работы) опирается в основном на пешую коммуникацию. Для города же с населением, превышающим эту величину, необходима уже система массового транспорта (автобусы). В городе с населением свыше 100 тыс. жителей автобусный транспорт уже будет недостаточен и понадобится сооружение трамвайной сети (иногда и троллейбусной), которая в свою очередь оправдана (обеспечивает перевозку) до определенного предела, после которого необходимо строить новую систему городской скоростной коммуникации (метро, монорельс). Каждый переход на новую систему коммуникации влечёт необходимость преодоления определенного порога и непропорциональное увеличение капиталовложений и эксплуатационных затрат [6].

Сеть городских улиц можно застроить постепенно по мере необходимости, однако и здесь будет иметь место пороговое явление,—но выступающее в несколько ином виде. Оказывается, что постепенное застраивание сети улиц, вследствие влияния городского центра, приводит к такой высокой плотности средства передвижения, что становится необходимой перестройка и модернизация всей системы коммуникаций. Однако очевидно, что этим не исчерпываются пороговые ограничения; для нормального функционирования города понадобится существенное изменение планирования городского центра и основных артерий. Для этого следует снести целые кварталы. В то время, когда актуальным становится реконструкция (разрушение и перестройка) городских кварталов или их значительной части, можно говорить о структурных порогах. Эти пороги определяются ограничениями, накладываемыми на развитие городов сложившейся планировочной структурой. Типичным примером структурного порога является необходимость перестройки городского центра с того момента, когда он не в состоянии выполнить свои функции, из-за постоянно нарастающей (пространственно и по численности населения) агломерации (напр., Сан-Паулу, где снесли ряд кварталов и многоэтажных зданий построенных после второй мировой войны) [1].



Из вышесказанного следует, что явления порогов вследствие городских агломераций имеются повсюду. Они могут иметь физико-географический, технологический или структурный характер. Эти пороговые явления характеризуются тем, что при дальнейшем увеличении агломераций, уже недостаточно постепенное застраивание отдельных элементов систем расселения, а следует создать совсем новую систему городской организации.

В свете теории порогов определенный интерес представляют возможности развития г. Тбилиси.

Сегодня Тбилиси стоит как перед физико-географическими, так и технологическими и структурными порогами. Увеличение численности населения и территориальный рост города, усиление трудовых и культурно-бытовых пассажиро-потоков между отдельными городскими районами, увеличение численности общественного и индивидуального транспорта и т. д. приводит к чрезмерной перегрузке транспортных артерий и к осложнению нормальной жизни города. Исходя из этого, является необходимым не только реконструкция городского центра и сооружение новых транспортных магистралей, но и проведение ряда сложных и дорогостоящих мероприятий. Необходимо также строительство обводной железной дороги и автомагистрали за „Тбилисским морем“ для разгрузки центра города от транзитного транспорта.

Поскольку пороговые ограничения накладываются друг на друга во времени, вышеописанные явления не выступают на практике в чистом виде. Одновременно, следует отметить, что порогом, в полном смысле слова, является не всякое ограничение, на которое наталкивается развитие какой-либо системы обслуживания. Поэтому следует помнить об относительной трактовке пороговых явлений, когда малые города (системы расселения) имеют относительно малые пороги. Достаточно даже незначительных ограничений, чтобы объем капиталовложений и затраты на функционирование городского организма возросли до высокого предела. Для больших систем такие ограничения не были бы вовсе заметными порогами. Но крупные города и системы расселения время от времени в своем развитии встречаются с такими большими ограничениями, которые могут вызвать сомнения в целесообразности их дальнейшего развития [6].

Теория порогов имеет большое значение для анализа возможностей развития городов и систем расселения. Благодаря определению пороговых ограничений можно определить (установить) экономическую эффективность развития города (системы расселения) в различных территориальных вариантах. Ибо существует возможность определить емкость заселения (эффект) и пороговые расходы для территорий, расположенных между следующими друг за другом пороговыми ограничениями.

Теория порогов имеет важное значение для установления оптимальной величины городов. Б. Малиш считает, что экономичность масштаба крупных систем расселения (или крупных городов) не может измеряться

исключительно ростом расходов. Здесь необходимо провести исследование эффектов, или выгод, которые извлекают хозяйственные единицы из крупных городов. В свете теории порогов ясно, что тут не может быть и речи об оптимальной величине города как абсолютном пределе. Между тем для конкретных поселенческих систем можно определить их относительный (по времени) оптимум, вытекающий из пороговых ограничений. Можно определить момент, когда переход от компактного развития к системе, характеризующейся внутренней концентрацией, будет экономически оправдан.

Анализ, проведенный на основе теории порогов позволяет среди разных вариантов компактного развития города (системы расселения) выбрать оптимальный вариант, обосновать выбор варианта, предусматривающего внутреннюю децентрацию тогда, когда дальнейшее развитие в виде компактного организма уже нерационально. Этот анализ, проведенный для всех систем расселения (городов) в границах района (страны), позволяет провести рациональную внешнюю децентрацию, т. е. сознательно развивать те системы (города), которые характеризуются наиболее высокими показателями эффективности.

Таким образом этот анализ становится тем важным инструментом урбанистики, который предоставляет в распоряжение районной планировки и градостроительства измеримые параметры для экономических расчетов.

(Представлено 18. II. 1971)

Кафедра
экономической географии

ლიტერატურა

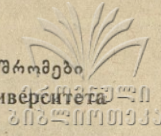
1. Ж. Божье-Гарнье, Ж. Шабо, Очерки по географии городов, Москва, „Прогресс“, 1967, стр. 78.
2. Материалы II межвед. совещания по географии расселения, вып. I, Москва, 1968, 38, 118.
3. I. Hughes, J. Kozlowski, Urban Stud., 1969, 5, № 2, 132, 143.
4. J. Kozlowski, Town Plann. Rev., 1968, 38, № 2, 99, 116.
5. W. Leen, J. Town Plann. Inst., 1969, 55, № 7.
6. B. Malisz, Zarys teorii kstałtowania układów osadniczych, Warszawa, 1961, 8, 88, 89, 330.
7. B. Malisz, J. Town Plann. Inst., 1969, 55, № 3.

3. გუჯაბიძე

**ზღუდეთა თეორია და ქალაქებისა და განსახლების
სისტემების განვითარების შესაძლებლობების ანალიზი**

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია, საბჭოთა ურბანისტულ ლიტერატურაში ჯერჯერობით სუსტად გაშუქებული, ზღუდეთა თეორიის არსი და მნიშვნელობა ქალაქებისა და განსახლების სისტემების განვითარების შესაძლებლობებისათვის. განხილულია ზღუდობრივი წინააღმდეგობების სამი სახე: ფიზიკურ-გეოგრაფიული, ტექნოლოგიური და სტრუქტურული.



ცივ-გომბორის ქედის NO ფერდობის ღვარცოფების საკითხისათვის

ჯ. ხარიტონაშვილი

ჩვენი დაკვირვებები ღვარცოფებზე ჩატარებული იქნა ცივ-გომბორის ქედის ჩრდილო-აღმოსავლეთ ფერდის 90 კმ მონაკვეთზე, მთა შახვეტილასა და ქ. სიღნაღს შორის. აღნიშნულ ქედზე საერთოდ, კერძოდ კი მის NO ფერდზე მიმდინარე თანამედროვე გეომორფოლოგიურ პროცესებს შორის ღვარცოფებს ერთ-ერთი წამყვანი როლი მიეკუთვნება. ისინი ხშირად დიდ ზარალს აყენებენ სახალხო მეურნეობას და ამიტომ მათ შესწავლას პირველხარისხოვანი მნიშვნელობა ენიჭება.

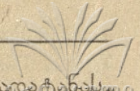
ცივ-გომბორის ქედზე არსებული ღვარცოფების შესახებ ცნობებს ვხვდებით რიგ ავტორთა გამოკვლევებში, რომელთა შორის ყურადღებას იქცევს ბ. ყავრიშვილის [4], თ. კიკილაშვილის და მ. კორძახიას [1, 2], ვ. ლეჟავას [3], გ. ჩანგაშვილის [5] და სხვა ავტორთა შრომები.

უკანასკნელი დროის გამოკვლევათა შორის აღსანიშნავია გეოლოგიური სამმართველოს სელური პარტიის მიერ ჩატარებული ცივ-გომბორის ქედის აგვეგვა, აღნიშნული შრომის ავტორებმა ე. წერეთელმა, ზ. ბოჭორიშვილმა და სხვ. მოგვცეს ახალი მასალა ამ რაიონში არსებული ღვარცოფების თავისებურების და გავრცელების შესახებ. აღნიშნულ გეოლოგიურ პარტიაში ჩვენც ვიხილავთ მუშაობა და წინამდებარე შრომა ძირითადად ამ მუშაობის ანარეკლია.

ცივ-გომბორის ქედის ზემოაღნიშნულ ნაწილში ღვარცოფების წარმოშობა-განვითარებაში რიგი ფაქტორი იღებს მონაწილეობას. მათ შორის აღსანიშნავია გეოლოგიური აგებულება, ლითოლოგიური თავისებურება, კონტინენტური ჰავის პირობები, მდინარეთა დიდი ვარდნა, განსაკუთრებით ზემო წელში, სეისმური პროცესები და ანთროპოგენული ფაქტორი.

საკვლევ ტერიტორიაზე 12-მდე ღვარცოფული აუზი და 30-მდე ღვარცოფული კერაა, რომელთა შორის აღსანიშნავია: მდ. მდ. ორვილის, გურულას, ბერხევას, თურდოს, კისისხევის, თელავისხევის, ვანთისხევის, შრომისხევის, ხოდაშნისხევის, ჭერმისხევის, ბაკურციხისხევის, ფაფრისხევის, და სხვათა აუზები.

ზემოაღნიშნულ ნაკადებზე ღვარცოფული ბუნების გამოვლინების ყველა შემთხვევის უმეტესობა აგვისტოს თვეზე მოდის. ყოველი ღვარცოფული აუზი ხასიათდება აქტივობის, მყარი მასალის გადატანის და გრანულომეტრიული შედეგინილობის სხვადასხვაობით. ღვარცოფულ პროცესში ორ ძირითად მომენტს ვიხილავთ:



ღვარცოფისათვის მყარი მასალის, ნაშალის დაგროვებასა და ნაშალის საკვლევ ტერიტორიაზე ღვარცოფული კერები მყარი მასალით კვების მიძღვნილობა დაიყოს შეიძლება ტიპებად: 1. კერები სადაც მყარი მასალის დაგროვება ხდება ღვარცოფული ნაკადის ჩასახვამდე. ასეთია ხოდაშნისხევის, შავკაბას, ორვილის, გურულას, თურდოს აუზების კერები. 2. კერები, რომლებიც მყარი მასალით კვებავენ ნაკადს მოძრაობის დროს (კერები ძირითადად მეწყრული წარმოშობისა) ამ უკანასკნელთ საკვლევ ტერიტორიაზე გაბატონებული მდგომარეობა აქვთ წარმოშობიან სარმატის თიხა-ქვიშიან ნაფენებსა და პლიოცენის კონგლომერატებში და მოიცავენ მდინარეების — შრომისხევის, ფაფრისხევის, თელავისხევის, ბერხეას, ვანთისხევის, კისისხევის, ბაკურციხისხევის და მათი შენაკადების აუზებს.

გამოფიტვის პროცესები, მეწყრული მოვლენები და ეროზია წარმოადგენენ მთავარ ეგზოგენურ ფაქტორებს, რომელთა შედეგადაც წარმოიქმნება ღვარცოფისათვის მყარი მასალის მარაგი. ამასთან ერთად ღვარცოფულ აუზებში მყარი მასალის დაგროვება მჭიდრო კავშირშია ტერიტორიის ლითოლოგიურ თავისებურებასთან.

ცივ-გომბორის ჩრდილო-აღმოსავლეთ ფერდზე გეოლოგიურ-ლითოლოგიურ ფაქტორებზე დაყრდნობით ღვარცოფული აუზები კვების ხასიათისა და მოქმედების სიხშირის მიხედვით შეიძლება გაიყოს ორ ტიპად: 1. ცარცულისა და პალეოგენის წყებებში განვითარებული ხანგრძლივი პაუზებით მოქმედი ღვარცოფები და 2. პლიოცენური ცივის წყების ნალექებში განვითარებული მცირე პაუზებით მოქმედი ღვარცოფები.

პირველი მათგანი მოიცავს შედარებით წყალუხვ მდ. მდ. ხოდაშნისხევის, ორვილის, გურულას, თურდოს აუზების ზემო და შუა ნაწილებს. აღნიშნული მდინარეები ჰყვეთენ გეოლოგიურ სტრუქტურებს უმეტესად გარდიგარდმოდ და V-სებურ ღრმად ჩაჭრილ ხეობებს ივითარებენ. ხეობების გასწვრივ ხშირად მეორდება შევიწროებული და გაფართოებული უბნები, რომლებიც ფერდობის ამგებ ქანებთან უშუალო კავშირშია. ქვედა ცარცული თიხების და ქვიშაქვების გავრცელების ადგილებში ხეობები უფრო გაფართოებულია და რელიეფი რბილი ფორმებით ხასიათდება. ასეთი უბნები მდინარეების ზემო ნაწილშია და უშუალოდ სათავეების რაიონში გვხვდება. აქ ფერდობები კარგად არის შემოსილი ტყის საფარით, რაც ეროზიისა და გამოფიტვისაგან იცავს მათ. ამიტომ ზემოთ ჩამოთვლილი მდინარეების სათავეებში ღვარცოფული კერები თითქმის არ ფორმირდება.

მყარი მასალის მიწოდების წყაროდ, რომლებიც უშუალოდ მონაწილეობს ღვარცოფების კვებაში, წარმოადგენენ ზედა ცარცისა და ეოცენური ქვიშაქვები, მერგელები, ფიქლები და კირქვები, რომლებიც ძირითადად მდინარის შუა ნაწილში შიშვლდებიან და ხეობის შევიწროებულ უბნებს ემთხვევიან. ეს გაშიშვლებები მდინარეების გასწვრივ კლდოვან ფლატეებს ქმნიან, რომელთა შეფარდებითი სიმძლევ რამდენიმე ათეულ მეტრს აღწევს. ინტენსიური გამოფიტვის, ფერდობის ექსპოზიციის მუდმივი განახლების პირობებში, ფლატეების ძირში გამუდმებით მიმდინარეობს მყარი მასალის დაგროვება სხვადასხვა ზომის ლოდნარიდან ქვიშის ნაწილაკებამდე. ეს უკანასკნელი წარმოდგენილია შემავსებლის სახით, რომელიც წყლის რეჟიმის ნორმალურ პირობებშიც კი ადვილად ირეცხება და გადაიტანება მდინარის მიერ.



ერთდროულად ღვარცოფების მოძრაობის დროს წარმოებს ნაკადის უკუქცევა და მისი დინამიკური ძალის შესუსტება. ჩვენს მიერ ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში, რომელიც აღებულია მდ. ხოდაშნისხევის 3 სხედასხევა უბანზე. 1 ტონა მყარი მასალის დახარისხების შემდეგ ნათლად სჩანს, თუ როგორ კლებულობს მდინარის დინამიკური ძალა და როგორ ფრაქციონირდება მყარი მასალა მდინარის სათავიდან შესართავამდე.

ცხრილი 1

| ფრაქციები მმ-ში | I წერტილი 1,3 კმ ალაზ- ნიდან %-ში | II წერტილი 19 კმ ალაზ- ნიდან %-ში | III წერტილი 22 კმ ალაზ- ნიდან %-ში |
|-----------------|---|---|--|
| > 200 მმ | 6,0 | 24,1 | 50,5 |
| 200—100 მმ | 30,0 | 43,6 | 18,0 |
| 100—50 მმ | 29,3 | 10,7 | 10,4 |
| 50—20 მმ | 18,8 | 10,1 | 8,5 |
| 20—10 მმ | 5,2 | 3,4 | 3,2 |
| 10—5 მმ | 2,8 | 3,6 | 2,4 |
| 5—2 მმ | 2,9 | 3,2 | 4,5 |
| 2—1 მმ | 2,9 | 0,7 | 2,0 |
| < 1 მმ | 2,1 | 0,6 | 0,5 |

გრანულომეტრიული ანალიზი გვიჩვენებს, რომ აღნიშნული ღვარცოფი ტურბულენტური წყალქვის ტიპისაა, სადაც მსხვილი 50 მმ-ზე მეტი, შედარებით დაუმუშავებელი მასალის რაოდენობა დიდია და აღწევს მთელი დანარჩენი ნაწილის 60—70%-ს, ხოლო მცირე 1 მმ-ზე ნაკლები ფრაქცია მთელი დანარჩენი მასის 2 %-მდეა.

აღნიშნული ტიპის ღვარცოფების გამეორება ერთა წლის განმავლობაში იშვიათაა, და უფრო ხშირად რამდენიმე წელიწადში ერთხელ ხდება.

ღვარცოფის უეცარი მოვარდნის და სტიქიური უბედურების თავიდან ასაცილებლად საჭიროა პერიოდულად ხდებოდეს ვიზუალური დაკვირვება მყარი მასალის დაგროვებაზე, ფერდობის გატყაინება ან უკეთესია სპეციალური ღვარცოფის დამჭერი ნაგებობების აგება.

ღვარცოფების მეორე ტიპი, როგორც ზემოთ აღინიშნა, ფორმირდება პლიოცენის კონგლომერატებში, რომლებიც საკვლევ რაიონში უფრო ფართო გავრცელებით სარგებლობენ. ამ ტიპის აუზებს დიდი გავრცელება აქვს მდ. მდ. ცივის, თელავისხევის, ბერხევის, ვანთისხევის, ჭერმისხევის, კისისხევის, ფაფრისხევის, ბაკურციხისხევის და იმ ხრამებში, რომლებიც შიგა კახეთის სოფლების მახლობლად მდებარეობენ.



აღნიშნული კონგლომერატები მდინარის სათავეებში ფლატებს ქმნიან, რომელთა სიმაღლე რამდენიმე ათეულ მეტრებით განისაზღვრება და რომლებიც მულ-მივ ნგრევასა და მასალის დაგროვებაში იმყოფებიან.

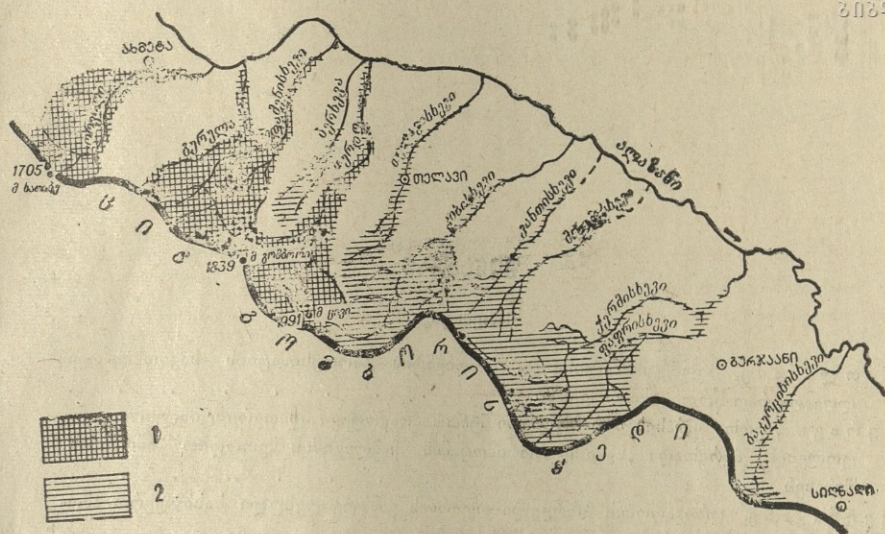
ცივ-გომბორის ქედის ამ ნაწილისათვის დამახასიათებელია მეწყრულ-ზვავუ-რი მოვლენების ინტენსიური განვითარება, რომლებიც წარმოადგენს მთავარ განმ-საზღვრელ ფაქტორს ღვარცოფული აუზის მყარი მასალით კვების საქმეში. ზემო-აღნიშნული აუზის მდინარეებში მყარი მასალა არის როგორც ღვარცოფის წარ-მოშობამდე, ისე ღვარცოფის წარმოშობის მომენტში. აქ ღვარცოფი შეიძლება წარმოიქმნას წლის ნებისმიერ დროს და შეიძლება განმეორდეს წელიწადში რამ-დენიმეჯერ, თუ იქნება მათთვის ატმოსფერული ნალექების საკმარისი რაოდენობა. ღვარცოფის ამ ტიპისათვის არ არის საჭირო ხანგრძლივი მშრალი პერიოდის დად-გომა მყარი მასალის წარმოქმნისათვის. პირიქით, რაც უფრო ხშირია ატმოსფე-რული ნალექები, მით უფრო სწრაფად ჯერდება გრუნტი ტენით, რაც საბოლოო ჯამში ააქტიურებს მეწყრულ-ზვავურ მოვლენებს.

აღნიშნულ აუზებში ღვარცოფები, ისე როგორც პირველ ტიპში ტურბუ-ლენტური, წყალქვის ტიპისაა. გრანულმეტრიულმა ანალიზმა გვიჩვენა, რომ ასეთ ღვარცოფით მასალის გადატანის სიმძლავრე პირველ ტიპთან შედარებით რამდენ-ნადმე მცირეა. მეორე ცხრილში, რომელშიც მოცემულია მდ. კისისხევის სხვადა-სხვა უბანზე (სათავე, შუა წელი, შესართავი) აღებული მყარი მასალის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მსხვილი ფრაქცია (50 მმ-ზე მეტი) შუა და ქვემო ნაწილში 25—35%-ს აღწევს. საშუალო ფრაქციაც შესართავიდან სათავისაკენ კლებულობს, რაც მიგვითითებს ღვარცოფული ნაკადის ენერჯის შემცირებაზე ქვემო წელისა-კენ (იხ. ცხრილი № 2).

ცხრილი 2

| ფრაქციები მმ-ში | I წერტილი 6 კმ შესართა- ვიდან | II წერტილ. 10 კმ შესართა- ვიდან | III წერტილი 18 კმ შესართა- ვიდან |
|--------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| > 200 მმ | — | 19,1 | 27,5 |
| 200—100 მმ | 26,8 | 35,3 | 35,6 |
| 100—50 მმ | 25,9 | 24,5 | 18,7 |
| 50—20 მმ | 26,9 | 13,3 | 8,9 |
| 20—10 მმ | 8,9 | 2,1 | 1,9 |
| 10—5 მმ | 4,9 | 2,7 | 4,1 |
| 5—2 მმ | 2,2 | 1,5 | 1,7 |
| 2—1 მმ | 2,9 | 0,8 | 0,5 |
| < 1 მმ | 1,5 | 0,7 | 0,1 |

ამ ტიპის ღვარცოფებთან ბრძოლის ყველაზე ეფექტური საშუალება იქნება ჯებირის აშენება სავალხო კომუნიაციებთან და რეგულარულად ხეობის ძირის გაღრმავება ღვარცოფული მასალის გადატანის გზით.



ცივ-გომბორის ქედის NO ფერდობზე ღვარცოფების გავრცელების სქემატური რუკა (შედგენილია შ. ხარიტონაშვილის მიერ), 1969 წ.

1. ცარცისა და პალეოგენის ნალექებში განვითარებული ხანგრძლივი პაუზით მოქმედი ღვარცოფები.
2. პლიოცენურ ნალექებში განვითარებული მცირე პაუზით მოქმედი ღვარცოფები.

წარმოდგენილია
26. 1. 1971 წ.

გეომორფოლოგიის კათედრა

ლიტერატურა

1. თ. კიკილაშვილი, მ. კორძაია, საქართველოს გეოგრაფიული საზოგადოების შრომები. ტ. 111, 1958, გვ. 33—72.
2. თ. კიკილაშვილი, თსუ შრომები, ტ. 54, გვ. 217—224.
3. ვ. ლეჟავა, საქ. სსრ მეცნ. აკადემია. საქ. გეოგრ. საზოგადოების შრომები. ტ. 111 1958, გვ. 101—112.
4. ბ. ყავრიშვილი, თსუ შრომები, ტ. 7, 1937, 1—25.
5. გ. ჩანგაშვილი, ვახუშტის სახელობის გეოგრაფიის ინსტიტუტის შრ., ტ. XVII 1962, გვ. 42—57.

ДЖ. А. ХАРИТОНАШВИЛИ

К ВОПРОСУ СЕЛЕЙ ПО СКЛОНУ ЦИВ-ГОМБОРСКОГО ХРЕБТА

Резюме

В пределах изученного района по характеру питания и частоте действия выделяются два типа селевых бассейнов:

1. Селевые бассейны, действующие длительными паузами, развитые в меловых и палеогеновых отложениях.
2. Селевые бассейны, действующие короткими паузами, развитые в плиоценовой Цивской свите.

შინაარსი

მათემატიკა

| | |
|--|----|
| ე. წითლანაძე, ფუნქციონალისა და გრადიენტის აპროქსიმაციის საკითხისათვის ლოკალურად წრფივ სივრცეებში | 15 |
| პ. ზერაგია, ერთი კლასის პარაბოლური ტიპის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ჩაპლიგინის მეთოდით ამოხსნის შესახებ | 27 |
| გ. კვინიკაძე, დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ახალი ვარიანტის შესახებ | 40 |
| ო. ნაფეტვარიძე, მიკროპოლარული მომენტური დრეკადობის თეორიის რხევის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნათა არსებობის თეორემები | 49 |
| თ. თევზაძე, ფუნქციათა ზოგიერთი კლასებისა და ფურცის მწკრივების შესახებ | 64 |
| ე. სამსონაძე, ლის სიმპლექსური მეორე რანგის ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენის ხასიათი | 65 |
| გ. რუსიეშვილი, ლობაჩევსკის პლანიმეტრიის ერთი ექსტრემალური ამოცანის შესახებ | 71 |

მექანიკა

| | |
|--|----|
| ნ. პატარაია, ორი კოაქსიალური ცილინდრის ჰიდროდინამიკური ურთიერთმოქმედება ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული ლამინარული რეჟიმით მოძრაობისას | 79 |
| ხ. პატარაია, ორი ელიფსოიდის ერთობლივი პოტენციალური გარსდენის ამოცანის მიყვანა ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე | 93 |
| მ. კუკულაძე, ა. შტაერმანი, დაძაბულობის ფოტოდრეკადობის მეთოდით კვლევის პროგრამული მართვის თერმოსტატი | 99 |

კიბერნეტიკა

| | |
|--|-----|
| დ. ბაშალაიშვილი, ზომათა განაწილების სიმკვრივეთა გარდამქმნელების შესახებ | 105 |
| ნ. ნანობაშვილი, კ. ჭკუასელი, დისკრეტული ინფორმაციის შეკუმშვის ერთი მეთოდის შესახებ | 120 |
| რ. გრიგოლია, ლუკასევიჩ-ტარსკის n-ნიშნა ლოგიკური სისტემების ალგებრული ახალიზი | 132 |
| ნ. გუენზუიტიენი, ალბათურ ზომათა სუპორტის (მატარებლის) შესახებ | 140 |

ფიზიკა

| | |
|--|-----|
| დ. აღადაშვილი, ვ. გაღვანოვი, ჰიდროსტატიკური წნევის გავლენა ლევირებულ p-InSb-ის გამტარობაზე | 145 |
| გ. მანაგაძე, გრავიტაციული მოცემულობების ინტერპრეტაციის საკითხის შესახებ ვერტიკალური ფენისა და ვერტიკალური მატერიალური ნახევარსიბრტყის გასწვრივ | 150 |

ზ. ხვედელიძე, რ. ჭელიძე, თავისუფალ ატმოსფეროში ქარის რეჟიმულ მასშტაბში სიათბელთა მისაღებად შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ნორმალური კანონის გამოყენება 151

კ. საპიტცი, ე. ელიზბარაშვილი, პუასონის განაწილების კანონის გამოყენება 30,0 მმ-ზე \geq ნალექებიან დღეთა რიცხვისათვის თბილისში 159

ქიმია

გ. ჯოხაძე, დარიშხანი საქართველოს ზოგიერთი რაიონის ქანებში 161

ი. მოსეშვილი, დ. ხავეთასი, გ. თალაკვაძე, პ. ცისკარიძე, მანგანუმი საქართველოს ჩაიში 165

გ. სუპატაშვილი, ხ. კარსანიძე, მ. თეთრაშვილი, ქრომი საქართველოს მტკნარ წყლებში 172

ქარეშიძე, თ. ლეხაძე, ნ. ციციშვილი, პატარა შირაქის ნავთობის ბენზინ-ლიგროინის ფრაქციების არომატული ნახშირწყალბადების გამოკვლევა 173

ა. ნოღაიდელი, ნ. რთველიაშვილი, ალკილჰიდრიდ- და ალკილქლორსილანების მოქმედება 2, 3, 4-ტრიმეთილოქტინ-5-ენ-7-დიოლ-3,4-ზე 177

შ. მიქაძე, ნ. არევაძე, ჰექსინდიოლის რთული ეთერების სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება 187

ი. გვერდწითელი, ს. ადამია, აცტილენური სპირტების ჰიდროსტანირება ტრიბრომილკალას ჰიდრიდით 194

ა. კახნიაშვილი, დ. იორამაშვილი, ვინილაცტილენური გვიაკოლის ჰიდროსილირება 199

ვ. კოკოჩაშვილი, ლ. სეფიაშვილი, ა. გრიგალაშვილი, ზოგიერთი სამკობრონენტანი სისტემის ურთიერთშერევადობის საკითხისათვის (აცეტონი-ხახშირწყალბადი-წყალი, ძმარმჟავა-ნახშირწყალბადი-წყალი). 204

კ. გამსახურდია, ნ. ხუხია, ს. ბერუჩიანი, ლ. ხინთიბიძე, თ. მაცაბერიძე, თ. არეშიძე, ნ. ძოწენიძე, სილნალისა და თელვის რაიონების მიწისქვეშა წყლების ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა (ცნობა პირველი) 205

გეოგრაფია-გეოლოგია

გ. თვალთვაძე, მ. იოსელიანი, კ. პაპალაშვილი, ს. ხაშმის რაიონის (გარე კახეთი) დედამიწის ქერქის აგებულების საკითხისათვის 214

ა. დემეტრაშვილი, გ. სულაქველიძე, შტორმული ქარების დინებათა განაწილების სტატისტიკური მონაცემები შავი ზღვის სანაპიროზე 215

შ. ცხოვრებაშვილი, აჭარა-თრიალეთის მთაგრეხილის რელიეფის ტიპები და მათი გავრცელების რაიონები 223

ვ. გუჯაბიძე, ზღუდეთა თეორია და ქალაქებისა და განსახლების სისტემების განვითარების შესაძლებლობების ანალიზი 235

ჯ. ხარტონაშვილი, ციე-გომბორის ქედის NO ფერდობის დვარცოფების საკითხისათვის 237

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

| | |
|---|----|
| Э. С. Цитлანдзе, К вопросу аппроксимации функционала и градиента в локально-линейных пространствах | 3 |
| П. К. Зерагия, О решении основной граничной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа методом Чаплыгина | 17 |
| Г. П. Квиникадзе, Об одном новом варианте решения обобщенных смешанных задач плоской теории упругости | 29 |
| О. И. Напетваридзе, Теоремы существования решений основных граничных задач колебания микрополярной моментной теории упругости | 41 |
| Т. Ш. Тевзадзе, О некоторых классах функций и рядах Фурье | 51 |
| Э. Т. Самсонадзе, Характер неприводимого представления симплектической алгебры Ли второго ранга | 66 |
| Г. И. Русиешвили, Об одной экстремальной задаче планиметрии Лобачевского | 69 |

Механика

| | |
|--|----|
| Н. Н. Патарая, Гидродинамическое взаимодействие двух коаксиальных труб при стационарном ламинарном режиме движения вязкой несжимаемой жидкости | 73 |
| Н. Н. Патарая, Приведение к системе интегральных уравнений задачи о совместном потенциальном обтекании двух эллипсоидов | 81 |
| М. Н. Кукуладзе, А. Ю. Штаерман, Термостат с программным управлением для исследования напряжений методом фотоупругости | 95 |

Кибернетика

| | |
|--|-----|
| Д. И. Башалеишвили, О преобразователях плотностей распределения размеров | 101 |
| Н. Д. Нанобашвили, К. Г. Чкуасели, Об одном методе сжатия дискретной информации | 107 |
| Р. Ш. Григолия, Алгебраический анализ n -значных логических систем Лукасевича-Тарского | 121 |
| Нгуен Зуй Тиен, О носителях вероятностных мер | 133 |

Физика

| | |
|--|-----|
| Д. И. Аладашвили, В. В. Галаванов, Влияние гидростатического давления на электропроводность легированного p - $\ln Sb$ | 141 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| Г. Д. Манагадзе, Об интерпретации гравитационных данных над вертикальным пластом и вертикальной материальной полуплоскостью | 147 |
| З. В. Хведелидзе, Р. А. Челидзе, Использование нормального закона распределения случайных величин для получения режимных характеристик ветра в свободной атмосфере | 155 |
| К. А. Сапицкий, Э. Ш. Элизбарашвили, Применение закона распределения Пуассона к числу дней с осадками $\geq 30,0$ мм в Тбилиси | 157 |

Химия

| | |
|--|-----|
| Г. М. Джохадзе, Мышьяк в горных породах некоторых районов Грузии | 164 |
| Я. П. Мосешвили, Д. К. Хавтаси, Г. Н. Талаквандзе, П. В. Цискаридзе, Марганец в чае Грузии | 167 |
| Г. Д. Супаташвили, Н. К. Карсанидзе, М. С. Тетрашвили, Хром в пресных водах Грузии | 169 |
| Х. И. Арешидзе, Т. Н. Лебсадзе, Н. С. Цицишвили, Исследование ароматических углеводородов бензино-лигроиновых фракций малоширакской нефти | 176 |
| А. И. Ногаидели, Н. А. Ртвелиашвили, Действие алкилгидрид и алкилхлорсиланов на 2, 3, 4-триметилпентин-5-ен-диол-3, 4 | 180 |
| Ш. Г. Микадзе, Н. Г. Аревадзе, Синтез и каталитическое гидрирование сложных эфиров гексиндиола | 183 |
| И. М. Гвердцители, С. В. Адамия, Гидростаннирование ацетиленовых спиртов гидридом трипропилолова | 189 |
| А. И. Кахнашвили, Д. Ш. Иорамашвили, Гидросилилирование винилацетиленового гваякола | 195 |
| В. И. Кокочашвили, Л. М. Сепиашвили, А. А. Григалашвили, К вопросу о взаимной растворимости некоторых трехкомпонентных систем (ацетон—углеводород—вода, уксусная кислота—углеводород—вода) | 201 |
| К. А. Гамсахурдия, Н. В. Хухиа, С. А. Беручьян, Л. С. Хинтибидзе, Т. Г. Мацаберидзе, Т. В. Арешидзе, Н. Э. Дзоценидзе, Физико-химические исследования подземных вод Сигнахского и Телавского районов | 210 |

География—геология

| | |
|--|-----|
| Г. К. Твалтвандзе, М. С. Иоселиани, В. Г. Папалашвили, К вопросу строения земной коры в районе с. Хашми (Гарекахети) | 211 |
| А. А. Деметрашвили, Г. К. Сулаквелидзе, Статистические данные распределения штормовых ветров на побережье Черного моря | 221 |
| Ш. А. Цховребашвили, Типы рельефа Аджаро-Триалетской горной цепи и районы их распространения | 228 |
| В. В. Гуджабидзе, Теория порогов и анализ возможностей развития городов и систем расселения | 231 |
| Дж. А. Харитонашвили, К вопросу селей NO-склона Цив-Гомборского хребта | 241 |

CONTENTS

Mathematics

| | |
|--|----|
| E. Tsitlanadze, On the question approximation of the functional and gradient in local linear spaces | 3 |
| P. Zeragia, Application of Tchaplignin's method for solution of non-linear boundary value problem for parabolic equation | 17 |
| G. Kvinikadze, On the new variant of solving of the generalized problems of the plane theory of elasticity | 29 |
| O. Napetvaridze, The theorems of existence of solving the basic boundary value problems of the oscillation of micropolar moment theory of elasticity | 41 |
| T. Tevzadze, On some class of functions and Fourier's series | 51 |
| E. Samsonadze, The character of the irreducible representation of the second order of simplex Lie algebra | 65 |
| G. Rusieshvili, On one extremal problem in the Lobachevski's planimetry | 69 |

Mechanics

| | |
|---|----|
| N. Pataraiia, Hydrodynamic interaction of two coaxial pipes under stationary laminar condition of viscous incompressible fluid motion | 73 |
| N. Pataraiia, Reduction to integral equation sistem of problem about simultaneous potentialstreamlining of two ellipsoids | 81 |
| M. Kukuladze, A. Shtaerman, Thermostat with program control for voldage study by the photoelasticity method | 95 |

Cybernetics

| | |
|--|-----|
| D. Bashaleishvili, On the transformers of dansities distribution of sizes | 101 |
| N. Nanobashvili, K. Chkhuaseli, On one method of reduction of discrete information | 107 |
| R. Grigolia, Algebraic analysis of Lukasiewich-Tarski's n-valued logical systems | 121 |
| Nguyen Zui Tien, On supports of probability measures | 133 |

Physics

| | |
|--|-----|
| D. Aladashvili, V. Galavanov, The unfluence of hydrostatic pressure on the conductivity of alloyed p-InSb | 141 |
| G. Managadze, On interpretation of the gravitational field data of the vertical stratum and vertical material half-plane | 147 |

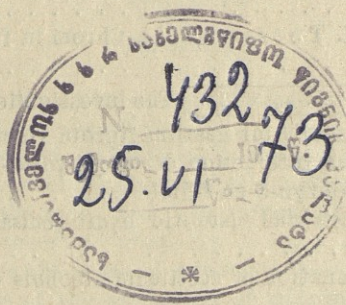
| | |
|--|-----|
| Z. Khvedelidze, R. Tchelidze, The use of the normal law of the distribution of occasional largeness for getting the windy regime characterizing settlement in the force atmosphere | 151 |
| K. Sapitski, E. Elizbarashvili, The use of Poisson's distributional law for the number of days with precipitation $\geq 30,0$ mm in Tbilisi . . | 157 |

Chemistry

| | |
|--|-----|
| G. Jokhadze, Arsenic in mountain rocks in some areas of Georgia | 161 |
| I. Moseshvili, D. Khavtasi, G. Talakvadze, P. Tsiskaridze, Manganese in the georgian tea | 165 |
| G. Supatashvili, N. Karsanidze, M. Tetrashvili, Chrom in fresh waters of Georgia | 169 |
| Ch. Areshidze, T. Lebsadze, N. Tsitsishvili, The investigation of aromatic hydrocarbons of Patara Shirachi's oil gassline-ligroin fraction. | 173 |
| A. Nogaideli, N. Rtveliashvili, The interaction of alkylhydrid- and alkylchlorosilans with 2, 3, 4-trymethyloktyn-5-en-7-diol-3,4 | 177 |
| Sh. Mikadze, N. Arevadze, The synthesis and catalitic hydrogenisation of the heksandiol's esthers | 183 |
| I. Gverdtsiteli, S. Adamia, Hydrostannation of acetilenic alcohols with tripropyltic hydride | 189 |
| A. Kakhniashvili, D. Ioramashvili, The hydrosililiration of vnyl-atsetylenyl gvaycol | 195 |
| V. Kokochashvili, L. Sepiashvili, A. Grigalashvili, On the solubility of some three-component systems (acetone—hydrocarbon—water, acetic acid—hydrocarbon—water) | 201 |
| K. Gamsakhurdia, N. Khukhia, S. Beruchian, L. Khintibidze, T. Matsaberidze, T. Areshidze, N. Dzotsenidze, Physical and chemical study of underground streams (Telavi and Signakhi regions) | 205 |

Geography. Geology

| | |
|--|-----|
| G. Tvaltvadze, M. Ioseliani, V. Papalashvili, Bilding question of the land-bark in the country of Khashmy | 211 |
| A. Demetrashvili, G. Sulakvelidze, The statistical date on the storm winds distribution on the Blak sea coast | 217 |
| Sh. Tskhovrebashvili, The Ajara-Trialeti mountain range types and regions of their distribution | 225 |
| V. Gujabadze, The threshold theory and analysis of the possibilities of development towns and settlement systems | 233 |
| J. Kharitonashvili, On the question of the sels of the north-east slope of the Tsivgombori range | 239 |



გამომცემლობის რედაქტორები: ლ. აბუაშვილი, დ. დელევიძე
ტიქრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორები: ე. სულხანიშვილი, ე. კენკიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27. III. 73

ჭაღალდის ფორმატი 70×108/16

ნაბეჭდი თაბახი 21,7

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17,68

შეკვეთა 1545 უე 05395 ტირაჟი 500

ფასი 1 მან. 80 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პრ., 14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პრ., 1
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1

, b
rete
rigo
syst
e

86
1973.

73-432

