

თბილისის უნივერსიტეტის
შ რ მ ე ბ ი

Труды Тбилисского
университета

Proceedings
of Tbilisi University

A 4 (146)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საზოგადოებრივი
მეცნიერებანი

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1972

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского
университета

Proceedings
of Tbilisi University

A 4 (146)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებანი
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES

Контрольный экземпляр



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

1972

სარედაქციო კოლეგია

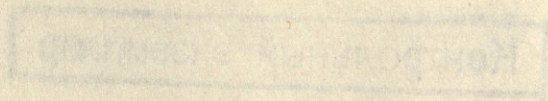
ი. გვერდწითელი, ნ. ვახანია, თ. კობალეიშვილი, ლ. მალნარაძე, ლ. ნათაძე,
ნ. სხირტლაძე, ჯ. შარიქაძე (მდივანი), ა. ხარაძე (მთავარი რედაქტორი).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н. Н. Вахания, И. М. Гвердцители, Т. И. Копалеишвили, Л. Г. Маг-
нарадзе, Л. Р. Натадзе, Н. И. Схиртладзе, А. К. Харадзе (главный ре-
дактор), Д. В. Шарикадзе (секретарь).

EDITORIAL BOARD

I. Gverdtsiteli, A. Kharadze (editor in chief), T. Kopaleishvili,
L. Magnaradze, L. Natadze, J. Sharikadze (secretary), N. Skhirtladze,
N. Vakhania.



საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის
ბიულეტენი
1971



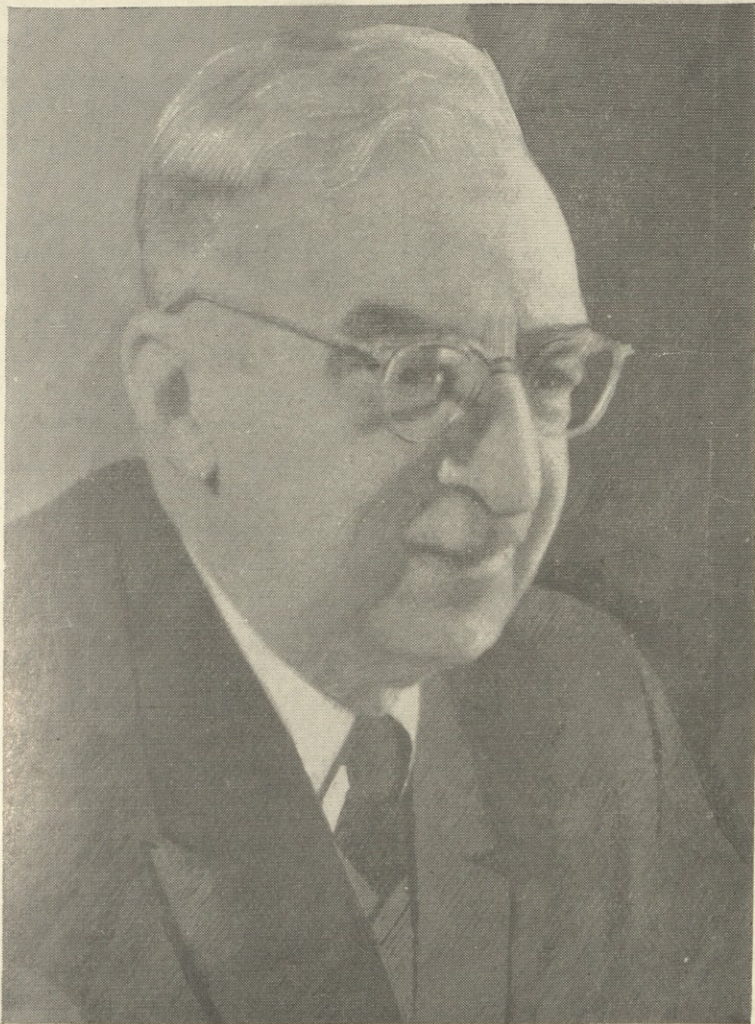


ქვემოთაშენი
საქართველოს
საქართველოს
საქართველოს

აკადემიკოს ნ. ი. მუსხელიშვილს
დაბადების 80 წლისთავზე

ПОСВЯЩАЕТСЯ
АКАДЕМИКУ Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ
К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

DEDICATED TO ACADEMICIAN
N. MUSKHELISHVILI ON THE OCCASION
OF HIS EIGHTIETH BIRTHDAY



ნიკო მუსხელიშვილი



(დაბადების 80 წლის შესახებების ბავშვ)

სახელოვან საბჭოთა მეცნიერს — აკადემიკოს ნიკო მუსხელიშვილს 80 წელი შეუსრულდა. მსოფიანი იუბილარი ეკუთვნის ქართველ მეცნიერთა იმ ბრწყინვალე პლეადას, რომელიც სათავეში ედგა ქართული მეცნიერებისა და კულტურის ახალი კერის — თბილისის უნივერსიტეტის ჩამოყალიბება-განვითარებას და წინ უძღოდა საქართველოში მეცნიერების აღორძინება-აყვავების საქმეს.

ნახევარ საუკუნეზე მეტია, რაც ნიკო მუსხელიშვილი ეწევა უაღრესად ნაყოფიერ მუშაობას როგორც თბილისის უნივერსიტეტის პროფესორი და თეორიული მექანიკის კათედრის გამგე. მისმა გამოკვლევებმა მექანიკასა და მათემატიკაში საქვეყნოდ გაუთქვეს სახელი ჩვენს უნივერსიტეტს, მთელ ჩვენს ხალხს. იგი მეთაურობს ქართულ მათემატიკურ სკოლას, რომელსაც მკვიდრი საფუძველი უნივერსიტეტის წიაღში ჩაეყარა და რომელიც მსოფლიოში ერთ-ერთი მოწინავე სამეცნიერო სკოლაა, საყოველთაოდ აღიარებული და დაფასებული.

ნიკო მუსხელიშვილი დაიბადა 1891 წლის 16 თებერვალს, თბილისში. გიმნაზიის დამთავრების შემდეგ, 1909 წელს, იგი ჩაირიცხა პეტერბურგის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, რომელიც 1914 წელს დაამთავრა და დატოვებულ იქნა უნივერსიტეტთან პროფესორის წოდებისათვის მოსამზადებლად (ასე იწერებოდა მაშინდელ საბუთებში). ჯერ კიდევ 1915—1919 წლებში, პეტროგრადში მოღვაწეობის დროს, ნ. მუსხელიშვილმა გამოაქვეყნა შრომები, სადაც გამოყენებული იყო მის მიერ დამუშავებული ორიგინალური მეთოდი დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ამოცანის ამოსახსნელად.

1920 წელს თბილისის უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭომ ნიკო მუსხელიშვილი მოიწვია თეორიული მექანიკის კათედრაზე. იგი სამშობლოში დაბრუნდა როგორც მომწიფებული მეცნიერი და დიდად შეუწყო ხელი მათემატიკური განათლებისა და სამეცნიერო კვლევის განვითარებას ჩვენში.

1922 წელს თბილისის უნივერსიტეტმა გამოსცა ნ. მუსხელიშვილის მონოგრაფია „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად“. ნაშრომმა იმთავითვე მიიპყრო სპეციალისტების ყურადღება. ამის შემდეგ გამოქვეყნდა ნ. მუსხელიშვილის მნიშვნელოვანი შრომები როგორც საბჭოთა კავშირში, ისე უცხოეთის სხვადასხვა სამეცნიერო გამოცემებში. 1933 წელს სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიამ გამოსცა ნ. მუსხელიშვილის მონოგრაფია — „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“, სადაც შეჯამებულია ავტორის ფუძემდებლური კვლევის შედეგები. ზემოაღნიშნული ნაშრომი დღემდე უკვე ხუთჯერ გამოიცა. მან საყოველთაო აღიარება მოიპოვა როგორც კლასიკურმა ნაწარმოებმა დრეკადობის თეორიაში. ასეთივე ფართო გავრცელება და მაღალი შეფასება მიიღო ნ. მუსხელიშვილის მეორე მონოგრაფიამ — „სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი“, რომელიც ძირითადად მოიცავს როგორც ავტორის, ისე მისი მოწაფეების მიერ მოპოვებულ ახალ დიდმნიშვნელოვან შედეგებს. ორივე ნაშრომისათვის ნ. მუსხელიშვილს მიენიჭა სსრ კავშირის სახელმწიფო პრემიები.

აღსანიშნავია ნ. მუსხელიშვილის დიდი ღვაწლი მეცნიერული კადრების მომზადებასა და დაწინაურებაში. განუზომელია მისი ამაგი ქართველი მათემატიკოსების, ფიზიკოსების, გეოფიზიკოსების, ასტრონომებისა და ტექნიკის მეცნიერებათა

არაერთი დარგის მაღალკვალიფიციურ სპეციალისტთა აღზრდაში. თბილისის უნივერსიტეტში მუშაობის დაწყებისთანავე ნ. მუსხელიშვილი შეუდგა სამეცნიერო კერების შექმნას. 1933 წელს მისი ხელმძღვანელობით უნივერსიტეტთან ჩამოყალიბდა მათემატიკისა და მექანიკის ინსტიტუტი. იგი ინიციატორია უნივერსიტეტში ფიზიკის ინსტიტუტის დაარსებისა. დიდი დახმარება გაუწია მან აბასთუმნის ასტროფიზიკურ ობსერვატორიას.

დიდია ნიკო მუსხელიშვილის დამსახურება ქართულ ენაზე სახელმძღვანელოების შექმნის საქმეშიც. მის წიგნებზე აღიზარდა მათემატიკოსებისა და ინჟინრების რამდენიმე თაობა. ცხადია, ქართულ ენაზე მათემატიკურ დარგებში სამეცნიერო ლიტერატურის გამოქვეყნებას ესაჭიროებოდა სათანადო ტერმინოლოგიის შემუშავება. ნ. მუსხელიშვილი გატაცებული იყო ამ საქმით და სამავალითო უნარს იჩენდა სპეციალური ტერმინების დადგენაში.

1939 წელს ნ. მუსხელიშვილი აირჩიეს სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრად. 1938—1941 წლებში იგი საკავშირო აკადემიის საქართველოს ფილიალის თავმჯდომარეა. ნ. მუსხელიშვილის დაუღალავი სამეცნიერო-ორგანიზატორული მუშაობა, რომელიც ნაყოფიერად დაიწყო უნივერსიტეტის კედლებში, შემდგომში კიდევ უფრო ფართოდ გაიშალა. იგი არის საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის შექმნის ერთ-ერთი ინიციატორი და მისი უცვლელი პრეზიდენტი დაარსებიდან 1972 წლამდე, როცა იგი აირჩიეს აღნიშნული აკადემიის საპატიო პრეზიდენტად.

მექანიკისა და განსაკუთრებით ღრეკადობის თეორიის დარგში თვალსაჩინო მეცნიერული დამსახურებისათვის, აგრეთვე დიდი წარმატებებისათვის ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადების საქმეში, ნ. მუსხელიშვილს 1945 წელს სოციალისტური შრომის გმირის წოდება მიენიჭა. იგი დაჯილდოებულია ორდენებითა და მედლებით, მათ შორის ლენინის ხუთი ორდენით და ოქტომბრის რევოლუციის ორდენით, აგრეთვე საზღვარგარეთის ქვეყნების ორდენებითა და მედლებით.

ნიკო მუსხელიშვილი დიდ სახელმწიფოებრივსა და საზოგადოებრივ მუშაობას ეწევა. იგი არის სკკპ წევრი 1940 წლიდან, სსრკ უმაღლესი საბჭოს ყველა მოწვევის დეპუტატი, იყო საბჭოების VIII საგანგებო ყრილობის დელეგატი და საბჭოთა კავშირის კონსტიტუციის საბოლოო ტექსტის დამდგენი სარედაქციო კომისიის წევრი. წლების მანძილზე ნ. მუსხელიშვილი იყო საქართველოს სსრ პოლიტიკური და მეცნიერული ცოდნის გამავრცელებელი საზოგადოების გამგეობის თავმჯდომარე. 1957 წლიდან, როდესაც თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის დარგში საერთაშორისო ასოციაცია ჩამოყალიბდა, ნ. მუსხელიშვილი ამ ასოციაციის საბჭოთა კავშირის ნაციონალური კომიტეტის თავმჯდომარედ აირჩიეს. იგი მონაწილეობდა სხვადასხვა საკავშირო და საერთაშორისო სამეცნიერო ყრილობების მუშაობაში, იყო ზოგიერთი მათგანის ორგანიზატორიც. 1960 წელს ნ. მუსხელიშვილმა, როგორც საკავშირო მეცნიერებათა აკადემიის დელეგაციის წევრმა, მონაწილეობა მიიღო ლონდონში სამეფო საზოგადოების სამასი წლისთავის აღსანიშნავ ზეიმში. ნ. მუსხელიშვილი უცხოეთის აკადემიებისა და სხვადასხვა სამეცნიერო დაწესებულებების საპატიო წევრია. იგი არის მოდესტო პანეტის საერთაშორისო პრემიის ლაურეატი.

ჩვენი უნივერსიტეტისათვის დიდად სამაყოა, რომ მისი შარავანდმოსილი პროფესორის ღვაწლი და დამსახურება ასე ფართოდაა აღიარებული ჩვენს ქვეყანაში და მის ფარგლებს გარეთაც.

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА

П. Г. КОГОНИЯ

0. Настоящая работа посвящена исследованию одного вопроса, к которому приводит попытка решения одной задачи теории диофантовых аппроксимаций [1].

Пусть $\varphi(k)$ обозначает некоторую функцию натурального аргумента; a —любое фиксированное действительное число, большее или равное 1. $\Delta\varphi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k)$ ($k \geq 1$). Рассмотрим выражение (функционал)

$$g^*(\varphi; a) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a^k \Delta\varphi(k) e^{\varphi(k)}; \quad (0.1^*)$$

подлежит исследованию множество значений выражения (0.1*), когда $\varphi(k)$ пробегает то или иное семейство функций натурального аргумента.

Функционал (0.1*), вследствие присутствия в нем оператора „ $\overline{\lim}$ “, трудно поддается исследованию, поэтому (и по той еще причине, что нижепредпринимаемое сужение области определения функционала (0.1*) не влечет за собой существенной потери общности), мы ограничиваемся в дальнейшем рассмотрении только таких функций $\varphi(k)$, для которых выражение

$$a^k \Delta\varphi(k) e^{\varphi(k)} \quad (0.2)$$

имеет предел; в области же таких функций функционал (0.1*) примет вид

$$g(\varphi, a) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^k \Delta\varphi(k) e^{\varphi(k)}. \quad (0.1)$$

Итак, наша основная цель—нахождение множества значений функционала (0.1) и классов тех функций, для которых функционал (0.1) принимает одно и то же значение.

1. В соответствии с целью дальнейших приложений предположим, что функционал (0.1) исключительно рассматривается на семействе Φ функций $\varphi(k)$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi(k) \geq 0 \quad (k > k_0), \quad \Delta\varphi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k) = o(1) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (1.1)$$

Ввиду этого наша цель заключается в исследовании (нахождении) множества

$$E = E(\Phi; a) = \{g(\varphi; a) \mid \varphi \in \Phi\} \quad (a \geq 1) \quad (1.2)$$

и классов функций

$$G = G(m; a) = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, g(\varphi; a) = m\}. \quad (1.2)$$

Предварительно придадим несколько иной вид условиям (1.1), определяющим семейство Φ , точнее, второму из этих условий.

Если $\varphi(k) \in \Phi$, т. е. $\varphi(k)$ удовлетворяет условиям (1.1), то

$$\varphi(k) = o(k) = k\beta(k), \quad \beta(k) = o(1). \quad (1.3)$$

В самом деле, в силу равенства

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi(i) + \varphi(1)$$

и условия (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi(i) + \varphi(1)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi(i)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi(i)}{k-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta\varphi(i) = 0, \end{aligned}$$

что и означает равенство (1.3).

Итак, из условия

$$\Delta\varphi(k) = o(1) \quad (1.4)$$

следует равенство (1.3). Но, как легко видеть, вообще говоря, не наоборот. Если выполнено условие (1.4) и, следовательно, (1.3), то имеем

$$\Delta\varphi(k) = \Delta(k\beta(k)) = (k+1)\beta(k+1) - k\beta(k) = k\Delta\beta(k) + \beta(k+1) = o(1), \quad (1.5)$$

откуда

$$k\Delta\beta(k) = o(1), \quad \text{т. е.} \quad \Delta\beta(k) = o(k^{-1}). \quad (1.6)$$

Таким образом, из условия (1.4) следует условие (1.6). Легко видеть, на основании (1.5), что из (1.6) вытекает (1.4); тем самым установлено, что справедлива

Лемма 1. $\Delta\varphi(k) = o(1)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(k) = k\beta(k)$, где $\Delta\beta(k) = o(k^{-1})$, т. е.

$$\{\varphi(k) \mid \Delta\varphi(k) = o(1)\} = \{\varphi(k) \mid \varphi(k) = k\beta(k), \Delta\beta(k) = o(k^{-1})\} \quad (1.7)$$

Из определения семейства Φ и леммы 1 следует, что это семейство совпадает с подмножеством множества (1.7), состоящим из всех неотрицательных (с некоторого значения аргумента) функций.

Содержание леммы 1 можно выразить и так: если общий член ряда — бесконечно малая величина, то порядок роста последовательности его частных сумм дается условием (1.7) и наоборот.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha}{a-1} + \frac{-\alpha}{a^{k-1}(a-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{o(1)}{a^i} + \varphi(1) = \\
 &= \frac{\alpha}{a-1} + \frac{-\alpha}{a^{k-1}(a-1)} + \psi(k),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\psi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{o(1)}{a^i}, \quad \Delta\psi(k) = \frac{o(1)}{a^k} = o(a^{-k}) \tag{2.7}$$

($\varphi(1)$ —произвольная постоянная—включена в $\psi(k)$). Необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть $\varphi(k)$ имеет вид (2.1). Тогда как, непосредственно видно,

$$\Delta\varphi(k) = \frac{\alpha}{a^k} + \frac{o(1)}{a^k}, \quad a^k \Delta\varphi(k) = \alpha + o(1). \tag{2.8}$$

Вместе с тем, из (2.1) следует существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \Delta\psi(i) + \psi(1) \right] = \beta. \tag{2.9}$$

Из (2.1), (2.8) и (2.9), следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k \Delta\varphi(k) e^{\varphi(k)} = \alpha \cdot e^{\frac{\alpha}{a-1} + \beta}, \tag{2.10}$$

чем и доказана достаточность.

Итак, если для функции $\varphi(k)$ ($\varphi(k) \in \Phi$) существует предел выражения (0.2), то она, имея вид (2.1), состоит из двух слагаемых

$$\varphi(k) = \psi(k) + \omega(k). \tag{2.11}$$

где

$$\omega(k) = \frac{\alpha(a^{k-1}-1)}{a^{k-1}(a-1)} = \frac{\alpha}{a-1} + \frac{-\alpha}{a^{k-1}(a-1)}, \quad \omega(1) = 0, \quad \Delta\omega(k) = \frac{\alpha}{a^k}, \tag{2.12_1}$$

а $\psi(k)$ —функция, определяемая условиями

$$\Delta\psi(k) = o(a^{-k}), \quad \psi(1) = \varphi(1) \tag{2.12_2}$$

(α —любое действительное число).

Теорема 1. Множество $E(\Phi; a)$, для любого фиксированного $a > 1$, совпадает с множеством всех действительных чисел

$$E(\Phi; a) = (-\infty, \infty).$$

Доказательство. Пусть Ψ обозначает множество всех функций, определяемых соотношениями (2.1) и удовлетворяющих условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = \beta > -\frac{\alpha}{a-1}. \tag{2.13}$$

Множество Ψ является подмножеством множества Φ ; в самом деле, в силу (2.1), $\Delta\varphi = \frac{\alpha}{a^k} + \frac{o(1)}{a^k} = o(1)$; с другой стороны, в силу (2.13), имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \frac{\alpha}{a-1} + \beta > 0. \quad (2.14)$$

откуда $\varphi(k) > 0$ с $k > k_0(\alpha, \beta)$.

Пусть $\varphi(k)$ пробегает все семейство Ψ ; тогда

$$\{g(\varphi; a) \mid \varphi \in \Psi\} \subset \{g(\varphi; a) \mid \varphi \in \Phi\} = E(\Phi; a). \quad (2.15)$$

С другой стороны, в силу (2.10), для любой функции из семейства Ψ , $g(\varphi; a)$ выражается формулой

$$g(\varphi; a) = \alpha \cdot e^{\frac{\alpha}{a-1} + \beta}. \quad (2.16)$$

Таким образом,

$$\{g(\varphi; a) \mid \varphi \in \Psi\} = \left\{ \alpha \exp\left(\frac{\alpha}{a-1} + \beta\right) \mid -\infty < \alpha < \infty, \frac{\alpha}{a-1} + \beta > 0 \right\}. \quad (2.17)$$

Но в полуплоскости $\left\{(\alpha, \beta) \mid -\infty < \alpha < \infty, \frac{\alpha}{a-1} + \beta > 0\right\}$ непрерывная функция

$$\alpha \cdot e^{\frac{\alpha}{a-1} + \beta} \quad (2.18)$$

неограничена как сверху, так и снизу, откуда следует, что

$$\left\{ \alpha \cdot e^{\frac{\alpha}{a-1} + \beta} \mid -\infty < \alpha < \infty, \frac{\alpha}{a-1} + \beta > 0 \right\} = (-\infty, \infty). \quad (2.19)$$

Из (2.15), (2.17) и последнего равенства следует справедливость теоремы 1.

Пусть m —любое действительное число; тогда, в силу (2.19), существует пара (α, β) , для которой

$$\alpha \cdot e^{\frac{\alpha}{a-1} + \beta} = m. \quad (2.20)$$

Если через $\Psi(\alpha, \beta)$ обозначить множество всех тех функций из семейства Ψ , которые соответствуют числам α и β , то будем иметь соотношение

$$\bigcup_{\alpha \exp\left(\frac{\alpha}{a-1} + \beta\right) = m} \Psi(\alpha, \beta) \subset G(m; a),$$

являющееся неполным ответом на вопрос о нахождении классов $G(m, a)$ функций.

2) $a=1$. В этом случае выражение (0.2) принимает вид

$$\Delta\varphi(k)e^{\varphi(k)}. \quad (0.2_1)$$

Подлежит исследованию множество значений выражения

$$g(\varphi; 1) = g(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\varphi(k)e^{\varphi(k)}, \quad (0.1)_1$$

когда $\varphi(k)$ пробегает то или иное семейство функций натурального аргумента.

И здесь, в соответствии с основной целью дальнейших приложений, мы ограничимся вполне определенным подмножеством семейства Φ ; точнее, будем предполагать, что рассматриваемые ниже функции из семейства Φ удовлетворяют условию $\varphi(k) \uparrow \infty$. Итак, выражение (0.1)₁ мы ниже рассматриваем на подмножестве $\bar{\Phi}$ семейства Φ , определяемом условиями $\varphi(k) \geq 0$ ($k \geq k_0$), $\Delta\varphi(k) = o(1) > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \infty$, т. е.

$$\bar{\Phi} = \{\varphi(k) \mid \varphi(k) \geq 0 \ (k > k_0), \ \Delta\varphi(k) = o(1) > 0, \ \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \infty\}. \quad (2.21)$$

Таким образом, требуется исследовать (найти) множество

$$\{g(\varphi) \mid \varphi \in \bar{\Phi}\}. \quad (2.22)$$

С этой целью рассмотрим семейство $\bar{\Phi}_1$ функций $\varphi(x)$ действительной переменной x , определенных на бесконечном полуинтервале $[1, \infty)$ и удовлетворяющих на нем условиям:

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \varphi'(x) = o(1) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty,$$

т. е.

$$\bar{\Phi}_1 = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \geq 0, \ \varphi'(x) = o(1) > 0, \ \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty\}. \quad (2.21)$$

Очевидно, что, если $\varphi(x) \in \bar{\Phi}_1$, то $\varphi(k) \in \bar{\Phi}$.

Лемма 3. Для функции $\varphi(x) \in \bar{\Phi}_1$ предел выражения

$$\varphi'(x)e^{\varphi(x)} \quad (0.2)$$

существует тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \ln \left(\alpha x + \int_1^x \varepsilon(t) dt \right), \quad \varepsilon(x) = o(1) \ (x \rightarrow \infty). \quad (2.23)$$

Доказательство. Пусть существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)e^{\varphi(x)} - \alpha \quad (\alpha \geq 0); \quad (2.24)$$

тогда

$$\begin{aligned} \varphi'(x)e^{\varphi(x)} &= \alpha + o(1) = \alpha + \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = o(1), \\ \int_1^x \varphi'(t)e^{\varphi(t)} dt &= \int_1^x (\alpha + \varepsilon(t)) dt = \alpha x + \int_1^x \varepsilon(t) dt, \end{aligned}$$

$$e^{\varphi(x)} = \alpha x + \int_1^x \varepsilon(t) dt, \quad \varphi(x) = \ln \left(\alpha x + \int_1^x \varepsilon(t) dt \right).$$

Если же, наоборот, функция $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in \overline{\Phi}_1$) имеет вид (2.23), то, как непосредственно видно, для нее справедливо равенство (2.24).

Обозначив через $\overline{\Phi}_2$ семейство всех функций $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in \overline{\Phi}_1$) вида (2.23), ($\alpha \geq 0$), из леммы 3 получаем

Следствие.

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) e^{\varphi(x)} \mid \varphi(x) \in \overline{\Phi}_2 \right\} = [0, \infty]. \quad (2.25)$$

Теорема 1₂.

$$\{g(\varphi) \mid \varphi \in \overline{\Phi}\} = [0; \infty). \quad (2.26)$$

Доказательство. Пусть α — любое неотрицательное действительное число. Рассмотрим соответствующую этому числу α функцию $\varphi(x)$, определяемую формулой (2.23); за счет соответствующего подбора бесконечно малой функции $\varepsilon(x)$ можно добиться того, чтобы $\varphi(x)$ принадлежала $\overline{\Phi}_2$. Тогда для соответствующей функции

$$\varphi(k) = \ln \left(\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt \right) \quad (\varphi(k) \in \overline{\Phi}_2)$$

натурального аргумента k будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(k) &= \ln \left[\alpha(k+1) + \int_1^{k+1} \varepsilon(t) dt \right] - \ln \left(\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt \right) = \\ &= \ln \frac{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt + \alpha + \int_k^{k+1} \varepsilon(t) dt}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} = \ln \left(1 + \frac{\alpha + \int_k^{k+1} \varepsilon(t) dt}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} \right) = \\ &= \frac{\alpha + \int_1^{k+1} \varepsilon(t) dt}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} + o \left(\frac{\alpha + \int_k^{k+1} \varepsilon(t) dt}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} \right) = \\ &= \frac{\alpha + o(k)}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} + o \left(\frac{1}{\alpha k + \int_1^k \varepsilon(t) dt} \right) \left(\int_1^x \varepsilon(t) dt = o(x) \right). \end{aligned}$$

Из (2.23) и последнего равенства имеем

$$\Delta\varphi(k)e^{\varphi(k)} = \alpha + o(1), \text{ т. е.}$$

$$\lim_{\Delta(\varphi) \rightarrow 0} \Delta\varphi(k)e^{\varphi(k)} = \alpha,$$

чем и доказывается теорема 1₂.

(Представлено 14. XI. 1970)

Кафедра
 высшей математики

ЛИТЕРАТУРА

П. Г. Когония, Труды Тбилисского государственного университета, т. 84, 1961, стр. 143—149.

პ. კოლონია

ერთი ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია სასრული სხვაობის შემცველი ერთი ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

О ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ТЭТА-ФУНКЦИЙ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ПОДСТАНОВКАХ

Г. А. ЛОМАДЗЕ

В нашей работе [9] изучено поведение первых производных тэта-функций с характеристиками при линейных подстановках подгруппы сравнений $\Gamma_0(N)$. При помощи полученных в [9] результатов удалось найти целый ряд новых формул для числа представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными, в которых так называемые дополнительные члены имеют простой арифметический смысл [1], [2], [3], [4], [8], [9].

В настоящей статье изучается поведение вторых и третьих производных тэта-функций с характеристиками при тех же линейных подстановках. Следует ожидать, что полученные здесь результаты найдут применение при нахождении формул для числа представлений чисел квадратичными формами с шестью и восемью переменными.

§ 1. В дальнейшем будут применяться следующие обозначения: N , h , r —натуральные числа; H , s , g , h , j , m , n , α , β , γ , δ , ξ , η —целые числа; A , B , C , D , G , z , τ —комплексные величины, причем $\text{Im } \tau > 0$; i —мнимая единица; $\left(\frac{h}{r}\right)$ при $2 \nmid r$ обозначает обобщенный символ Якоби; $e(z) = \exp 2\pi iz$; $z^{k/2} = (z^{1/2})^k$ при $z \neq 0$.

Пусть Γ —модулярная группа, т. е. группа линейных подстановок $\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Далее, пусть $\Gamma_0(N)$ обозначает ту подгруппу группы Γ , подстановки которой удовлетворяют сравнению $\gamma \equiv 0 \pmod{N}$.

Определение 1 (см., напр., [9], стр. 107). Аналитическая функция $F(\tau)$ называется целой модулярной формой (ц. м. ф.) размерности $-r$, присоединенной к подгруппе $\Gamma_0(N)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(\tau)$ регулярна и однозначна в верхней полуплоскости;
- 2) для каждой подстановки группы $\Gamma_0(N)$ имеет место соотношение

$$F\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = \varepsilon(\delta) (\gamma\tau + \delta)^r F(\tau), \quad |\varepsilon(\delta)| = 1;$$

3) в окрестности $\tau = \infty$ имеет место разложение

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e\left(\frac{n\tau}{N}\right); \quad (1)$$

4) в окрестности $\tau = -\frac{\delta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0$, $(\gamma, \delta) = 1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau + \delta)^r F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n e\left(\frac{n}{N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right).$$

Определение 2 (см., напр., [9], стр. 107). Ц. м. ф. $F(\tau)$ называется функцией делителя N , если все показатели n , встречающиеся в разложении (1), делятся на N . Тогда (1) принимает вид

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e(n\tau). \quad (2)$$

Для $\eta \neq 0$, ξ , g , h , N , удовлетворяющих условию $\xi g + \eta h + \xi \eta N \equiv 0 \pmod{2}$, положим

$$S_{gh}\left(\frac{\xi}{\eta}; c, N\right) = \sum_{\substack{m \pmod{N} | \eta | \\ m \equiv c \pmod{N}}} (-1)^{h(m-c)/N} e\left(\frac{\xi(m+g/2)^2}{2N\eta}\right).$$

Известно ([5], стр. 323, формулы (2.4), (2.5) и (2.6)), что

$$S_{g+2j, h}\left(\frac{\xi}{\eta}; c, N\right) = S_{gh}\left(\frac{\xi}{\eta}; c+j, N\right), \quad S_{g, h+2j}\left(\frac{\xi}{\eta}; c, N\right) = S_{gh}\left(\frac{\xi}{\eta}; c, N\right)$$

$$S_{gh}\left(\frac{\xi}{\eta}; c+Nj, N\right) = (-1)^{hj} S_{gh}\left(\frac{\xi}{\eta}; c, N\right). \quad (3)$$

Пусть

$$\vartheta_{gh}(z | \tau; c, N) = \sum_{m \equiv c \pmod{N}} (-1)^{h(m-c)/N} e\left(\frac{(m+g/2)^2}{2N} \tau\right) e((m+g/2)z). \quad (4)$$

При $n > 0$ положим

$$\vartheta_{gh}^{(n)}(\tau; c, N) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \vartheta_{gh}(z | \tau; c, N) |_{z=0}, \quad \vartheta_{gh}^{(0)}(\tau; c, N) = \vartheta_{gh}(0 | \tau; c, N).$$

Известно ([5], стр. 318, формула (1.3)), что

$$\vartheta_{g, h+2j}(z | \tau; c, N) = \vartheta_{gh}(z | \tau; c, N),$$

следовательно,

$$\vartheta_{g, h+2j}^{(n)}(\tau; c, N) = \vartheta_{gh}^{(n)}(\tau; c, N). \quad (5)$$

Далее, известно ([5], стр. 327, формулы (3.10) и (3.11)), что

$$\vartheta_{gh}(z | \tau + \beta; c, N) = e(\beta(c+g/2)^2/2N) \vartheta_{g, h+\beta g+\beta N}(z | \tau; c, N),$$

$$\vartheta_{gh}(-z | \tau - \beta; c, N) = e(-\beta(c+g/2)^2/2N) \vartheta_{-g, -h+\beta g-\beta N}(z | \tau; -c, N),$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}^{(n)}(\tau + \beta; c, N) &= e(\beta(c + g/2)^2/2N) \vartheta_{g, h + \beta g + \beta N}^{(n)}(\tau; c, N), \\ \vartheta_{gh}^{(n)}(\tau - \beta; c, N) &= (-1)^n e(-\beta(c + g/2)^2/2N) \vartheta_{-g, -h + \beta g - \beta N}^{(n)}(\tau; -c, N). \end{aligned} \quad (6)$$

Лемма 1. При $n=2$ и 3 имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}^{(n-2)}\left(-\frac{1}{\tau}; c, N\right) &= (Ni)^{n-2} (-i\tau/N)^{(2n-3)/2} \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} e(-(c + g/2)(H + h/2)/N) \vartheta_{hg}^{(n-2)}(\tau; H, N), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}^{(n)}\left(-\frac{1}{\tau}; c, N\right) &= (Ni)^n (-i\tau/N)^{(2n+1)/2} \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} e(-(c + g/2)(H + h/2)/N) \{n(n-1)N\pi i/\tau \vartheta_{hg}^{(n-2)}(\tau; H, N) + \\ &+ \vartheta_{hg}^{(n)}(\tau; H, N)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Известно ([5], стр. 321, формула (1.12)), что

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}; c, N\right) &= (-i\tau/N)^{1/2} e(Nz^2/2\tau) \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} e(-(c + g/2)(H + h/2)/N) \vartheta_{hg}(z|\tau; H, N). \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференцируя (9) три раза по z , а затем полагая $z=0$ в (9) и в полученных формулах, получаем утверждаемое.

Лемма 2. Если $\gamma \neq 0$, то, при $n=2$ и 3 , имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}^{(n-2)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; c, N\right) &= (-i(\gamma\tau + \delta) \operatorname{sgn} \gamma/N |\gamma|)^{(2n-3)/2} (N|\gamma| i \operatorname{sgn} \gamma)^{n-2} \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} \varphi_{g_1 gh}(c, H; N) \vartheta_{g_1 h_1}^{(n-2)}(\tau; H, N), \end{aligned} \quad (10)$$

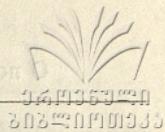
$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}^{(n)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; c, N\right) &= (-i(\gamma\tau + \delta) \operatorname{sgn} \gamma/N |\gamma|)^{(2n+1)/2} (N|\gamma| i \operatorname{sgn} \gamma)^n \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} \varphi_{g_1 gh}(c, H; N) \left\{ \frac{n(n-1)N\gamma\pi i}{\gamma\tau + \delta} \vartheta_{g_1 h_1}^{(n-2)}(\tau; H, N) + \right. \\ &\left. + \vartheta_{g_1 h_1}^{(n)}(\tau; H, N) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$g_1 = \alpha g + \gamma h + \alpha \gamma N, \quad h_1 = \beta g + \delta h + \beta \delta N, \quad (12)$$

$$\varphi_{g_1 gh}(c, H; N) = e(-\beta \delta (H + g_1/2)^2/2N) \times$$

$$\times e(\beta(c + g/2)(H + g_1/2)/N) S_{g - \delta g_1, h + \beta g_1} \left(\frac{\alpha}{\gamma}; c - \delta H, N \right). \quad (13)$$



Доказательство. Известно ([5], стр. 324—327, формулы (3.9), (3.5), (3.3), (3.7) и (2.16)), что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh} \left(\frac{z}{\gamma\tau + \delta} \middle| \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; c, N \right) &= (-i(\gamma\tau + \delta) \operatorname{sgn} \gamma/N |\gamma|)^{1/2} e \left(\frac{N\gamma z^2}{2(\gamma\tau + \delta)} \right) \times \\ &\times \sum_{H \bmod N} \varphi_{g_1 gh}(c, H; N) \mathfrak{F}_{g_1 h_1}(z | \tau; H, N) \quad (\gamma \neq 0), \end{aligned} \quad (14)$$

где g_1 , h_1 и $\varphi_{g_1 gh}$ определены формулами (12) и (13).

Дифференцируя (14) три раза по z , а затем полагая $z=0$ в (14) и в полученных формулах, получаем утверждаемое.

§ 2. В этом параграфе $\varphi(2N)$ обозначает функцию Эйлера, а $\eta(\gamma) = 1$ при $\gamma \geq 0$ и $\eta(\gamma) = -1$ при $\gamma < 0$.

Лемма 3 ([7], стр. 18, лемма 15 и [9], стр. 115, лемма 10). Если g —четное, то при $n=2$ и 3, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh}^{(n-2)} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N \right) &= (\operatorname{sgn} \delta)^{n-2} e(-\alpha\gamma\delta^2 h/16N) e(\beta\delta(g/2)^2 \delta^{2\varphi(2N)-2}/4N) \times \\ &\times i^{(2n-3)\eta(\gamma)} (\operatorname{sgn} \delta^{-1})^{1/2} i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N \operatorname{sgn} \delta}{|\delta|} \right) (\gamma\tau + \delta)^{(2n-3)/2} \mathfrak{F}_{\alpha_g, h}^{(n-2)}(\tau; 0, 2N). \end{aligned}$$

Лемма 4. Если g —четное, то при $n=2$ и 3, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh}^{(n)} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N \right) &= (\operatorname{sgn} \delta)^n e(-\alpha\gamma\delta^2 h/16N) e(\beta\delta(g/2)^2 \delta^{2\varphi(2N)-2}/4N) \times \\ &\times i^{(2n+1)\eta(\gamma)} (\operatorname{sgn} \delta^{-1})^{1/2} \cdot i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N \operatorname{sgn} \delta}{|\delta|} \right) (\gamma\tau + \delta)^{(2n+1)/2} \times \\ &\times \left\{ \frac{2n(n-1)N\gamma\pi i}{\gamma\tau + \delta} \mathfrak{F}_{\alpha_g, h}^{(n-2)}(\tau; 0, 2N) + \mathfrak{F}_{\alpha_g, h}^{(n)}(\tau; 0, 2N) \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Пусть $\gamma \neq 0$. Можно показать (см. [7], стр. 18, формула (5.1)), что

$$S_{g_0} \left(\frac{\beta}{\delta}; 0, 2N \right) = e(\beta\delta(g/2)^2 \delta^{2\varphi(2N)-2}/4N) i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N \operatorname{sgn} \delta}{|\delta|} \right) |\delta|^{1/2}. \quad (15)$$

В (11) и (12), взяв $\beta, -\alpha, \delta, -\gamma, \tau', 0, 2N$ вместо $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tau, c, N$, в силу (5), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh}^{(n)} \left(\frac{\beta\tau' - \alpha}{\delta\tau' - \gamma}; 0, 2N \right) &= \left(\frac{-i(\delta\tau' - \gamma) \operatorname{sgn} \delta}{2N|\delta|} \right)^{(2n+1)/2} (2N|\delta| i \operatorname{sgn} \delta)^n \times \\ &\times \sum_{H \bmod 2N} \varphi_{h_1 gh}(0, H; 2N) \left\{ \frac{2n(n-1)N\delta\pi i}{\delta\tau' - \gamma} \mathfrak{F}_{h_1, \alpha_g}^{(n-2)}(\tau'; H, 2N) + \right. \\ &\left. + \mathfrak{F}_{h_1, \alpha_g}^{(n)}(\tau', H; 2N) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

Из (19), (20) и (21) следует

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh}^{(n)}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2N\right) &= \left(\frac{-i\left(-\frac{\delta}{\tau}-\gamma\right)\operatorname{sgn}\delta}{2N|\delta|}\right)^{(2n+1)/2} (|\delta|\operatorname{sgn}\delta)^ne(-\alpha\gamma h_1^2/16N)\times \\ &\times e(\beta\delta(g/2)^2\delta^{2\varphi(2N)-2}/4N) i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)|\delta|^{1/2}(-2N i\tau)^{(2n+1)/2}\times \\ &\times \left\{\frac{2n(n-1)N\gamma\pi i}{\gamma\tau+\delta} \mathfrak{F}_{\alpha g, h_1}^{(n-2)}(\tau; 0, 2N) + \mathfrak{F}_{\alpha g, h_1}^{(n)}(\tau; 0, 2N)\right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Можно показать (см. [6], стр. 85, формула (6.16)), что

$$\left(\frac{-i\left(-\frac{\delta}{\tau}-\gamma\right)\operatorname{sgn}\delta}{2N|\delta|}\right)^{1/2} (-2N i\tau)^{1/2} = i\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta)^{1/2} \frac{(\gamma\tau+\delta)^{1/2}}{|\delta|^{1/2}}. \quad (23)$$

Из (22), принимая во внимание (23), (17) и (5), следует утверждаемое при $\gamma \neq 0$.

2) Пусть $\gamma=0$. В этом случае $\alpha=\delta=1$ или $\alpha=\delta=-1$. В (6), положив $c=0$ и взяв $2N$ вместо N , в силу (5), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{gh}^{(n)}(\tau+\beta; 0, 2N) &= e(\beta(g/2)^2/4N) \mathfrak{F}_{gh}^{(n)}(\tau; 0, 2N), \\ \mathfrak{F}_{gh}^{(n)}(\tau-\beta; 0, 2N) &= (-1)^ne(-\beta(g/2)^2/4N) \mathfrak{F}_{gh}^{(n)}(\tau; 0, 2N), \end{aligned}$$

т. е. утверждаемое при $\gamma=0$.

Лемма 5 ([9], стр. 116, лемма 11). Пусть g —четное, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Тогда в окрестности $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0, (\gamma, \delta)=1$) имеет место разложение

$$\begin{aligned} (\gamma\tau+\delta)^{3/2} \mathfrak{F}'_{gh}(\tau; 0, 2N) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n e\left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \text{ при } 2|\gamma, \\ &= e\left(\frac{h}{16N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} D'_n e\left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \text{ при } 2\uparrow\gamma, \end{aligned}$$

где, согласно (5), считаем $h=0$ или 1.

Лемма 6. Пусть g_1 и g_2 —четные, $N_1|N, N_2|N, 4|N(h_1/N_1+h_2/N_2)$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Тогда в окрестности $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0, (\gamma, \delta)=1$) имеют место разложения

$$(\gamma\tau+\delta)^3 \Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n e\left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \quad (24)$$

$$(\gamma\tau+\delta)^4 \Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) = \sum_{n=0}^{\infty} G'_n e\left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \quad (25)$$

где

$$\Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, c_1, c_2, N_1, N_2) = \frac{1}{N_1} \vartheta_{g_1 h_1}''(\tau; c_1, 2N_1) \vartheta_{g_2 h_2}(\tau; c_2, 2N_2) - \frac{1}{N_2} \vartheta_{g_1 h_1}(\tau; c_1, 2N_1) \vartheta_{g_2 h_2}''(\tau; c_2, 2N_2), \quad (26)$$

$$\Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, c_1, c_2, N_1, N_2) = \frac{1}{N_1} \vartheta_{g_1 h_1}'''(\tau; c_1, 2N_1) \vartheta_{g_2 h_2}(\tau; c_2, 2N_2) - \frac{3}{N_2} \vartheta_{g_2 h_2}''(\tau; c_2, 2N_2) \vartheta_{g_1 h_1}'(\tau; c_1, 2N_1). \quad (27)$$

Доказательство. I) В (11) заменив $\alpha, \delta, \beta, \gamma, \tau, c, N, g, h, g_1, h_1$ и H , соответственно через $\delta, \alpha, -\beta, -\gamma, \tau', 0, 2N_k, g_k, h_k, g_{k1}, h_{k1}$ и H_k , получим

$$\vartheta_{g_k h_k}^{(n)}\left(\frac{\delta\tau' - \beta}{-\gamma\tau' + \alpha}; 0, 2N_k\right) = \left(\frac{i(-\gamma\tau' + \alpha) \operatorname{sgn} \gamma}{2N_k |\gamma|}\right)^{(2n+1)/2} (2N_k |\gamma|)^n \times \\ \times (-i \operatorname{sgn} \gamma)^n \sum_{H_k \bmod 2N_k} \varphi_{g_{k1} h_{k1}}'(0; H_k, 2N_k) \left\{ \frac{-2n(n-1)N_k \gamma \pi i}{-\gamma\tau' + \alpha} \times \right. \\ \left. \times \vartheta_{g_{k1} h_{k1}}^{(n-2)}(\tau'; H_k, 2N_k) + \vartheta_{g_{k1} h_{k1}}^{(n)}(\tau'; H_k, 2N_k) \right\}, \quad (28)$$

где, согласно (12), имеем

$$g'_{k1} = \delta g_k - \gamma h_k - 2\delta \gamma N_k, \quad h'_{k1} = -\beta g_k + \alpha h_k - 2\alpha \beta N_k. \quad (29)$$

Можно показать (см. напр., [6], стр. 87, формула (6.23)), что

$$\left(\frac{i \operatorname{sgn} \gamma}{2N_k |\gamma| (\gamma\tau + \delta)}\right)^{1/2} = \frac{e(\operatorname{sgn} \gamma/8)}{(2N_k |\gamma|)^{1/2} (\gamma\tau + \delta)^{1/2}}. \quad (30)$$

Заменив в (28) τ' через $\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$, а затем приняв во внимание (30),

получим

$$(\gamma\tau + \delta)^{(2n+1)/2} \vartheta_{g_k h_k}^{(n)}(\tau; 0, 2N_k) = e((2n+1) \operatorname{sgn} \gamma/8) \frac{(-i \operatorname{sgn} \gamma)^n}{(2N_k |\gamma|)^{1/2}} \times \\ \times \sum_{H_k \bmod 2N_k} \varphi_{g_{k1} h_{k1}}'(0, H_k, 2N_k) \left\{ -2n(n-1)N_k \gamma \pi i (\gamma\tau + \delta) \times \right. \\ \left. \times \vartheta_{g_{k1} h_{k1}}^{(n-2)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k\right) + \vartheta_{g_{k1} h_{k1}}^{(n)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k\right) \right\}. \quad (31)$$

Рассуждая аналогично, из (10) получим

$$(\gamma\tau + \delta)^{(2n-3)/2} \vartheta_{g_k h_k}^{(n-2)}(\tau; 0, 2N_k) = e((2n-3) \operatorname{sgn} \gamma/8) \frac{(-i \operatorname{sgn} \gamma)^{n-2}}{(2N_k |\gamma|)^{1/2}} \times \\ \times \sum_{H_k \bmod 2N_k} \varphi_{g_{k1} h_{k1}}'(0, H_k, 2N_k) \vartheta_{g_{k1} h_{k1}}^{(n-2)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k\right). \quad (32)$$



II) Из (31) при $n=2, k=1$ и (32) при $n=2, k=2$ следует

$$\begin{aligned}
 & (\gamma\tau + \delta)^3 / N_1 \vartheta_{g'_1 h_1}''(\tau; 0, 2N_1) \vartheta_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2) = -e(3 \operatorname{sgn} \gamma/4) \frac{1}{2|\gamma|} \times \\
 & \times \frac{1}{(N_1 N_2)^{1/2}} \sum_{\substack{H_1 \bmod 2N_1 \\ H_2 \bmod 2N_2}} \varphi_{g'_1 g_1 h_1}(0, H_1; 2N_1) \varphi_{g'_2 g_2 h_2}(0, H_2; 2N_2) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{N_1} \vartheta_{g'_1 h_1}''\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1\right) \vartheta_{g'_2 h_2}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2\right) - \right. \\
 & \left. - 4\gamma\pi i (\gamma\tau + \delta) \vartheta_{g'_1 h_1}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1\right) \vartheta_{g'_2 h_2}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Вычтя из этого равенства равенство, полученное заменой $N_1, g_1, h_1, H_1, g'_{11}$ и h'_{11} , соответственно, на $N_2, g_2, h_2, H_2, g'_{21}$ и h'_{21} и наоборот, и приняв во внимание (26), получим

$$\begin{aligned}
 & (\gamma\tau + \delta)^3 \Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) = -e(3 \operatorname{sgn} \gamma/4) \frac{1}{2|\gamma|} \frac{1}{(N_1 N_2)^{1/2}} \times \\
 & \times \sum_{\substack{H_1 \bmod 2N_1 \\ H_2 \bmod 2N_2}} \varphi_{g'_1 g_1 h_1}(0, H_1; 2N_1) \varphi_{g'_2 g_2 h_2}(0, H_2; 2N_2) \times \\
 & \times \Phi\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; g'_{11}, g'_{21}, h'_{11}, h'_{21}, H_1, H_2, N_1, N_2\right). \quad (33)
 \end{aligned}$$

Пусть γ — четное. Тогда в силу (29), g'_{11} и g'_{21} также будут четными и, согласно (4), получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{N_k} \vartheta_{g'_k h'_k}''\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k\right) \vartheta_{g'_r h'_r}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_r, 2N_r\right) = \\
 & = \sum_{n_1=0}^{\infty} B_{n_1} e\left(\frac{N n_1 / N_k}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} B_{n_2} e\left(\frac{N n_2 / N_r}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e\left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) \text{ при } k=1, r=2 \text{ и } k=2, r=1.
 \end{aligned}$$

Следовательно, утверждаемое следует из (33) и определения (26) функции Φ .

Пусть теперь γ — нечетное. Тогда, если h_1 и h_2 оба — четные, то g'_{11} и g'_{21} также будут четными и мы получим тот же результат. Если же h_k — нечетное, то g'_{k1} — также нечетное и

$$(m + g'_{k1}/2)^2 = (m + (g'_{k1} - 1)/2)^2 + (m + (g'_{k1} - 1)/2) + \frac{1}{4},$$

следовательно, согласно (4),

$$\begin{aligned} & \vartheta''_{g'_{k1} h'_{k1}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k \right) = \\ & = -\pi^2 e \left(\frac{1}{16N_k} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) \sum_{m \equiv H_k \pmod{2N_k}} (-1)^{h'_{k1}(m-H_k)/2N_k} \times \\ & \times (2m + g'_{k1})^2 e \left\{ \frac{1}{4N_k} \left((m + (g'_{k1}-1)/2)^2 + (m + (g'_{k1}-1)/2) \right) \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right\} = \\ & = e \left(\frac{h_k}{16N_k} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n e \left(\frac{n}{4N_k} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right), \end{aligned}$$

ибо, в силу (5), можно считать, что $h_k = 1$. Таким образом, если среди h_1 и h_2 , по крайней мере, одно — нечетное, то при $k=1, r=2$ и $k=2, r=1$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_k} \vartheta''_{g'_{k1} h'_{k1}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_k, 2N_k \right) \vartheta'_{g'_{r1} h'_{r1}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_r, 2N_r \right) = \\ & = e \left(\frac{N}{4} \frac{(h_k/N_k + h_r/N_r)}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) \sum_{n_1=0}^{\infty} D_{n_1} e \left(\frac{Nn_1/N_k}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) \times \\ & \times \sum_{n_2=0}^{\infty} D_{n_2} e \left(\frac{Nn_2/N_r}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e \left(\frac{n}{4N} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right), \end{aligned}$$

где, в силу (5), $h_k = h_r = 1$ или $h_k = 1, h_r = 0$ или $h_k = 0, h_r = 1$. Следовательно, утверждаемое следует из (33) и определения функции Φ и при нечетном γ .

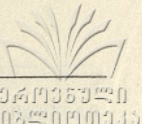
III) Из (31) при $n=3, k=1$ и (32) при $n=2, k=2$ следует

$$\begin{aligned} & (\gamma\tau + \delta)^4 / N_1 \vartheta'''_{g'_1 h'_1} (\tau; 0, 2N_1) \vartheta'_{g'_2 h'_2} (\tau; 0, 2N_2) = \frac{i \operatorname{sgn} \gamma}{2|\gamma|} \frac{1}{(N_1 N_2)^{1/2}} \times \\ & \times \sum_{\substack{H_1 \pmod{2N_1} \\ H_2 \pmod{2N_2}}} \vartheta'_{g'_{11} h'_{11}} (0, H_1; 2N_1) \vartheta'_{g'_{21} h'_{21}} (0, H_2; 2N_2) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{N_1} \vartheta'''_{g'_{11} h'_{11}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1 \right) \vartheta'_{g'_{21} h'_{21}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2 \right) - \right. \\ & \left. - 12\gamma\pi i (\gamma\tau + \delta) \vartheta'_{g'_{11} h'_{11}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1 \right) \vartheta'_{g'_{21} h'_{21}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2 \right) \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

где g'_{11}, h'_{11} и g'_{21}, h'_{21} определены формулами (29).

Из (31) при $n=2, k=2$ и (32) при $n=3, k=1$ следует

$$3(\gamma\tau + \delta)^4 / N_2 \vartheta'''_{g'_2 h'_2} (\tau; 0, 2N_2) \vartheta'_{g'_1 h'_1} (\tau; 0, 2N_1) = \frac{i \operatorname{sgn} \gamma}{2|\gamma|} \frac{1}{(N_1 N_2)^{1/2}} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \sum_{\substack{H_1 \bmod 2N_1 \\ H_2 \bmod 2N_2}} \varphi_{g'_{11} g_1 h_1} (0, H_1; 2N_1) \varphi_{g'_{21} g_2 h_2} (0, H_2; 2N_2) \times \\ & \times \left\{ \frac{3}{N_2} \vartheta''_{g'_{21} h'_{21}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2 \right) \vartheta'_{g'_{11} h'_{11}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1 \right) - \right. \\ & \left. - 12\gamma\pi i (\gamma\tau + \delta) \vartheta_{g'_{21} h'_{21}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_2, 2N_2 \right) \vartheta'_{g'_{11} h'_{11}} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; H_1, 2N_1 \right) \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

Вычитая (35) из (34) и принимая во внимание (27), получаем

$$\begin{aligned} (\gamma\tau + \delta)^4 \Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) &= \frac{i \operatorname{sgn} \gamma}{2|\gamma|} \frac{1}{(N_1 N_2)^{1/2}} \times \\ & \times \sum_{\substack{H_1 \bmod 2N_1 \\ H_2 \bmod 2N_2}} \varphi_{g'_{11} g_1 h_1} (0, H_1; 2N_1) \varphi_{g'_{21} g_2 h_2} (0, H_2; 2N_2) \times \\ & \times \Omega \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; g'_{11}, g'_{21}, h'_{11}, h'_{21}, H_1, H_2, N_1, N_2 \right). \quad (36) \end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и в II), получаем утверждаемое из (36).

Теорема 1. Пусть g_1 и g_2 — четные, $N_1 | N$, $N_2 | N$,

$$4 | N (h_1/N_1 + h_2/N_2), 4N_1 N_2 | (g_1/2)^2 N_2 + (g_2/2)^2 N_1. \quad (37)$$

Далее, пусть для всех α и δ , удовлетворяющих условию $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_1 N_2}{|\delta|} \right) \Phi(\tau; \alpha g_1, \alpha g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) &= \\ &= \varepsilon(\delta) \Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2). \quad (38) \end{aligned}$$

Тогда функция $\Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2)$, определенная формулой (26), будет ц. м. ф. размерности—3, присоединенной в подгруппе $\Gamma_0(4N)$, и делителя $4N$.

Доказательство. Очевидно, что функция $\Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 12 из работы [9], согласно леммам 3 и 4 при $n=2$ и условиям (37), для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ получаем, что

$$\begin{aligned} & \vartheta''_{g_k h_k} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_k \right) \vartheta_{g_r h_r} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_r \right) = \operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_k N_r}{|\delta|} \right) \times \\ & \times (\gamma\tau + \delta)^3 \left\{ \frac{4N_k \gamma \pi i}{\gamma\tau + \delta} \vartheta_{\alpha g_k, h_k}(\tau; 0, 2N_k) \vartheta_{\alpha g_r, h_r}(\tau; 0, 2N_r) + \right. \\ & \left. + \vartheta''_{\alpha g_k, h_k}(\tau; 0, 2N_k) \vartheta_{\alpha g_r, h_r}(\tau; 0, 2N_r) \right\} \text{ при } k=1, r=2 \text{ и } k=2, r=1. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (26) и (38), получаем

$$\begin{aligned} & \Phi \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2 \right) = \\ & = \varepsilon(\delta) (\gamma\tau + \delta)^3 \Phi(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2). \end{aligned}$$

Таким образом, функция Φ удовлетворяет условию 2) определения 1. Она также удовлетворяет и условию 4) определения 1, согласно лемме 6.

Из (4), при $k=1, r=2$ и $k=2, r=1$, следует

$$\begin{aligned} & \vartheta''_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k) \vartheta'_{g_r h_r}(\tau; 0, 2N_r) = -\pi^2 \sum_{m_k \equiv 0 \pmod{2N_k}} (-1)^{h_k m_k / 2N_k} (2m_k + g_k)^2 \times \\ & \times e \left(\frac{1}{4N_k} (m_k + g_k/2)^2 \tau \right) \sum_{m_r \equiv 0 \pmod{2N_r}} (-1)^{h_r m_r / 2N_r} e \left(\frac{1}{4N_r} (m_r + g_r/2)^2 \tau \right) = \\ & = -\pi^2 \sum_{\substack{m_k \equiv 0 \pmod{2N_k} \\ m_r \equiv 0 \pmod{2N_r}}} (-1)^{h_k m_k / 2N_k + h_r m_r / 2N_r} (2m_k + g_k)^2 \times \\ & \times e \left\{ \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^2 \frac{N}{N_n} (m_n (m_n + g_n) + (g_n/2)^2) \tau \right\}, \end{aligned}$$

где, согласно (37),

$$4N \left| \sum_{n=1}^2 \frac{N}{N_n} (m_n (m_n + g_n) + (g_n/2)^2) \right|$$

Следовательно, функция Φ удовлетворяет определению 2.

Теорема 2. Пусть имеют место условия (37). Далее, пусть для всех α и δ , для которых $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняется равенство

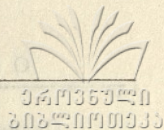
$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_1 N_2}{|\delta|} \right) \vartheta'_{\alpha g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta'_{\alpha g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2) = \\ & = \varepsilon(\delta) \vartheta'_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta'_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда функция $\vartheta'_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta'_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2)$ будет п. м. ф. размерности—3, присоединенной к подгруппе $\Gamma_0(4N)$, и делителя $4N$.

Доказательство. Очевидно, что функция $\vartheta'_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) \times \vartheta'_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.

Согласно лемме 3 при $n=3$ и (37) и (39), для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^2 \vartheta'_{g_k h_k} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_k \right) = \varepsilon(\delta) (\gamma\tau + \delta)^3 \prod_{k=1}^2 \vartheta'_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k).$$



Таким образом, функция $\vartheta'_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta'_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2)$ удовлетворяет условию 2) определения 1.

Из леммы 5 следует, что наша функция удовлетворяет и условию 4) определения 1. Выполнимость условия определения 2 проверяется так же, как и в предыдущей теореме.

Теорема 3. Пусть имеют место условия (37). Далее, пусть для всех α и δ , для которых $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняется равенство

$$\operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_1 N_2}{|\delta|} \right) \Omega(\tau; \alpha g_1, \alpha g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2) = \varepsilon(\delta) \Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2). \quad (40)$$

Тогда функция $\Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2)$, определенная формулой (27), будет ц. м. ф. размерности -4 , присоединенной к подгруппе $\Gamma_0(4N)$, и делителя $4N$.

Доказательство. Очевидно, что функция $\Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.

Согласно лемме 4 при $n=3$, лемме 3 при $n=2$ и условиям (37), для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место равенство

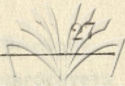
$$\begin{aligned} & \vartheta'''_{g_1 h_1} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_1 \right) \vartheta_{g_2 h_2} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_2 \right) = \\ & = \operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_1 N_2}{|\delta|} \right) (\gamma\tau + \delta)^4 \left\{ \frac{12N_1 \gamma \pi i}{\gamma\tau + \delta} \vartheta'_{\alpha g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta_{\alpha g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2) + \right. \\ & \left. + \vartheta'''_{\alpha g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) \vartheta_{\alpha g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2) \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

а согласно лемме 4 при $n=2$, лемме 3 при $n=3$ и условиям (37) — равенство

$$\begin{aligned} & \vartheta''_{g_2 h_2} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_2 \right) \vartheta'_{g_1 h_1} \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; 0, 2N_1 \right) = \\ & = \operatorname{sgn} \delta \left(\frac{-N_1 N_2}{|\delta|} \right) (\gamma\tau + \delta)^4 \left\{ \frac{4N_2 \gamma \pi i}{\gamma\tau + \delta} \vartheta_{\alpha g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2) \vartheta'_{\alpha g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) + \right. \\ & \left. + \vartheta''_{\alpha g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2) \vartheta'_{\alpha g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

Из (27), (41), (42) и (40) следует

$$\begin{aligned} & \Omega \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2 \right) = \\ & = \varepsilon(\delta) (\gamma\tau + \delta)^4 \Omega(\tau; g_1, g_2, h_1, h_2, 0, 0, N_1, N_2). \end{aligned}$$



Таким образом, функция Ω удовлетворяет условию 2) определения 1.

Из леммы 6 следует, что она удовлетворяет и условию 4) определения 1. Выполнимость условия определения 2 проверяется так же, как и в теореме 1.

(Представлено 20.V.1971)

Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. И. Беридзе, Сообщения АН ГССР, 50, № 2, 1968, стр. 267—272.
2. Г. П. Гогишвили, Сообщения АН ГССР, 56, № 3, 1969, стр. 525—528.
3. Г. П. Гогишвили, Сообщения АН ГССР, 59, № 3, 1970, стр. 537—540.
4. Р. Ш. Гонгадзе, Сообщения АН ГССР, 50, № 3, 1968, стр. 519—524.
5. H. D. Kloosterman, Annals of mathematics, 47, № 3, 1946, p. 317—373.
6. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского математического института, 22, 1956, стр. 77—102.
7. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского государственного университета, 117, 1966, стр. 7—43.
8. Г. А. Ломадзе, Сообщения АН ГССР, 50, № 2, 1968, стр. 295—300.
9. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского математического института, 40, 1971, стр. 106—139.

გ. ლომაძე

თეტა-ფუნქციების წარმოებულების ყოფაქცევა წრფივი ჩასმების მიმართ

რეზიუმე

ნაშრომში შეისწავლება მახასიათებლიანი თეტა-ფუნქციების მეორე და მესამე რიგის წარმოებულების ყოფაქცევა მოდულარული ჯგუფის ერთი ქვეჯგუფი-წრფივი ჩასმების მიმართ.

О СБЛИЖЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН С КЛАССОМ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В. В. САЗОНОВ

I. Введение и формулировка результата

Пусть $\{\xi_i\}$, $i=1, 2, \dots$ —независимые случайные величины со значениями в R^k и с одной и той же функцией распределения F . Обозначим

F^n функцию распределения суммы $\sum_{i=1}^n \xi_i$ и пусть D_k —класс всех безгра-

нично делимых функций распределения на R^k . В 1956 году А. Н. Колмогоровым было показано (см. [1]), что в случае $k=1$ существует абсолютная постоянная c такая, что какова бы ни была функция распределения F для некоторой (зависящей от F) последовательности функций распределения $\{D_n\}$, $D_n \in D_1$, $n=1, 2, \dots$,

$$\sup_{x \in R^1} |F^n(x) - D_n(x)| \leq cn^{-1/5}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1)$$

Впоследствии этот результат был улучшен Ю. В. Прохоровым [2], заменившим в правой части (1) $n^{-1/5}$ на $n^{-1/3}(\log n)^2$ и, наконец, в 1963 году А. Н. Колмогоров установил [3], что вместо $n^{-1/5}$ в (1) можно поставить $n^{-1/3}$.

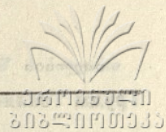
В настоящей работе рассматривается случай $k>1$ и показывается, что справедлива следующая

Теорема. Существует зависящая лишь от k постоянная $c(k)$ такая, что какова бы ни была функция распределения F для некоторой последовательности функций распределения $\{D_n\}$, $D_n \in D_k$, $n=1, 2, \dots$

$$\sup_{x \in R^k} |F^n(x) - D_n(x)| \leq c(k) (\log n)^{1/2} n^{-1/3}$$

Замечание. Первоначально нами была получена более слабая оценка, а затем Э. Л. Пресманом было замечено, что незначительное изменение в нашем доказательстве приводит к этой оценке.

Всюду ниже $c, c(k)$ обозначает, соответственно, абсолютные постоянные и постоянные, зависящие лишь от размерности k .



II. Вспомогательные леммы

Для удобства ссылок приведем несколько нужных нам результатов в виде лемм.

Лемма 1. При $0 \leq p \leq 1$, и всех $n=1, 2, \dots$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} - \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right| \leq cp.$$

Эта лемма принадлежит Прохорову (см. [4]).

Лемма 2. Пусть действительные случайные величины η_1, \dots, η_n таковы, что при $i=1, n$

$$P(\eta_i < x_i^-), P(\eta_i > x_i^+) \geq \alpha > 0, x_i^+ - x_i^- = l > 0.$$

Тогда при $L \geq l$

$$Q(L) \leq CLl^{-1}(\alpha n)^{-1/2},$$

где $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$ и $Q(L)$ —функция концентрации величины η :

$$Q(L) = \sup_{x \in R^1} P(x \leq \eta \leq x+L).$$

Утверждение леммы легко вытекает из теоремы 1 работы [5].

Лемма 3. Пусть независимые случайные величины $\{\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})\}$, $i=1, 2, \dots$ со значениями в R^k и с одной и той же невырожденной функцией распределения F таковы, что

$$|\xi_{ij} - E\xi_{ij}| \leq l_j, \quad i=1, 2, \dots, j=\overline{1, k}.$$

Тогда для функции распределения F^n суммы $\sum_{i=1}^n \xi_i$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in R^k} |F^n(x) - G(x)| \leq c(k) \left(\sum_{i=1}^k l_i \sigma_i^{-1} \right)^{1/3} n^{-1/6},$$

где G —нормальная функция распределения с теми же первыми и вторыми моментами, что у F , а $\sigma_j^2 = D\xi_{1j}$, $j=\overline{1, k}$.

Утверждение леммы непосредственно вытекает из теоремы 3 работы [6], поскольку в рассматриваемом случае

$$E|\xi_{1j} - E\xi_{1j}|^3 \leq l_j \sigma_j^2, \quad j=\overline{1, k}.$$

Лемма 4. Пусть η_i , $i=\overline{1, n}$ —независимые действительные случайные величины такие, что

$$|\eta_i - E\eta_i| \leq l, \quad i=\overline{1, n},$$

Тогда

$$P\left(\sum_{i=1}^n \eta_i > x+m\right) \leq \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), & \text{если } 0 < xl < \sigma^2 \\ \exp\left(-\frac{x}{4l}\right), & \text{если } xl \geq \sigma^2, \end{cases}$$

где $m = E \sum_{i=1}^n \eta_i$, $\sigma^2 = D \sum_{i=1}^n \eta_i$.

Доказательство см., например, в [7], стр. 268.

Лемма 5. При всех $x > 0$

$$\Phi_{m, \sigma^2}(m-x) = 1 - \Phi_{m, \sigma^2}(m+x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где Φ_{m, σ^2} — нормальная функция распределения со средним m и дисперсией σ^2 .

Утверждение леммы проверяется простым подсчетом.

Лемма 6. Пусть G_1 (соотв. G_2) — k -мерная нормальная функция распределения со средним $m = (m_1, \dots, m_k)$ и матрицей вторых центральных моментов $\sigma_1^2 \Delta$ (соотв. $\sigma_2^2 \Delta$), где Δ — некоторая неотрицательно определенная матрица. Тогда

$$\sup_{x \in R^k} |G_1(x) - G_2(x)| \leq c(k) \left| \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 \right|.$$

Доказательство. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ — k -мерная нормальная случайная величина с нулевым средним и матрицей вторых моментов Δ . Имеем

$$\begin{aligned} & |G_1(x) - G_2(x)| = \\ & = |P(\sigma_1 \xi_1 + m_1 < x_1, \dots, \sigma_1 \xi_k + m_k < x_k) - P(\sigma_2 \xi_1 + m_1 < x_1, \dots, \sigma_2 \xi_k + m_k < x_k)| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^k |P(\sigma_1 \xi_i + m_i < x_i) - P(\sigma_2 \xi_i + m_i < x_i)| \leq c(k) \left| \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 \right|. \end{aligned}$$

(см. лемму 2 в [2]).

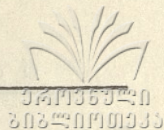
III. Доказательство теоремы

1. Предположим сначала, что вероятность любой гиперплоскости относительно F равна нулю. Можно, очевидно, предполагать также, что n достаточно велико.

Положим $p = n^{-1/2}$. Определим действительные числа x_i^-, x_i^+ $i = \overline{1, k}$, индуктивно взяв x_1^- и x_1^+ так, чтобы

$$P(\xi_{11} < x_1^-) = P(\xi_{11} > x_1^+) = p(2k)^{-1}$$

и далее, когда x_i^-, x_i^+ , $i = \overline{1, j-1}$ уже определены, выбирая x_j^-, x_j^+ так, чтобы



$$P(\{x_i^- < \bar{\xi}_{1i} < x_i^+, i=1, \overline{j-1}\} \cap \{\bar{\xi}_{1j} < x_j^-\}) = \\ = P(\{x_i^- < \bar{\xi}_{1i} < x_i^+, i=\overline{1, j-1}\} \cap \{\bar{\xi}_{1j} > x_j^+\}) = p(2k)^{-1}.$$

Обозначим

$$l_i = x_i^+ - x_i^-, \quad i = \overline{1, k}.$$

Очевидно, имеем

$$P(\{x_i^- < \bar{\xi}_{1i} < x_i^+, i = \overline{1, k}\}) = 1 - p = q.$$

Представим F в виде

$$F = pF_1 + qF_2,$$

где F_2 отвечает распределению, сосредоточенному на множестве

$$\{x: x_i^- < x_i < x_i^-, i = \overline{1, k}\},$$

а F_1 — распределению, сосредоточенному на дополнительном множестве. Пусть μ_i, σ_i^2 — отвечающие F_2 i -ое маргинальное среднее и дисперсия соответственно.

Так как по неравенству Чебышева

$$\sum_{|m-np| \geq \sqrt{n}} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \leq pq < p,$$

то, в силу леммы 1,

$$F^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m q^{n-m} F_1^m * F_2^{n-m} = \\ = \sum_{|m-np| < \sqrt{n}} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} F_1^m * F_2^{n-m} + \mathfrak{D}p = \\ = \sum_{|m-np| < \sqrt{n}} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} F_1^m * F_2^{n-m} + c\mathfrak{D}p \quad (2)$$

(здесь и ниже \mathfrak{D} означает число, не превосходящее по модулю 1).

Возможны следующие 2^k случаев

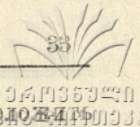
$$\frac{l_1}{\sigma_1} < \frac{3}{4} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2}, \dots, \frac{l_k}{\sigma_k} < \frac{3}{4} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2} \quad (3)$$

(отдельный случай получается, когда в каждом месте фиксируется какой-либо знак $<$ или \geq).

Рассмотрим случай

$$\frac{l_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{l_j}{\sigma_j} < \frac{3}{4} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2}, \quad \frac{l_{j+1}}{\sigma_{j+1}}, \dots, \frac{l_k}{\sigma_k} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2} \quad (4) \\ (1 \leq j \leq k-1)$$

Пусть \bar{G} — нормальная функция распределения со средним $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ и матрицей вторых центральных моментов, получающейся из матрицы вторых центральных моментов функции распределения F_2 , если



в ней элементы всех строк и столбцов, начиная с $(j+1)$ -го, по диагонали равными нулю. Обозначим

$$X_i = \frac{2}{3} \sigma_i (n \log n)^{1/2}, \quad Y_i = \frac{16}{9} l_i \log n.$$

Имеем

$$J = |F_1^m * F_2^{n-m}(x) - F_1^m * \bar{G}^{n-m}(x)| \leq \int |F_2^{n-m}(x-y) - \bar{G}^{n-m}(x-y)| dF_1^m(y) \leq \sum_{i=1}^{2k-j+2} J_i, \quad (5)$$

где

$$J_i = \int_{S_i} |F_2^{n-m}(x-y) - \bar{G}^{n-m}(x-y)| dF_1^m(y)$$

и

$$S_i = \begin{cases} \{y: x_i - y_i \leq -X_i + (n-m)\mu_i\}, & i = \overline{1, j} \\ \{y: x_i - y_i \leq -Y_i + (n-m)\mu_i\}, & i = \overline{j+1, k} \end{cases}$$

$$S_{k+i-j} = \{y: |x_i - y_i - (n-m)\mu_i| < Y_i\}, \quad i = \overline{j+1, k},$$

а множества S_{2k-j+s} , $s = \overline{1, 2^j}$ являются каким-либо способом упорядоченными множествами вида

$$\{y: x_i - y_i \geq Y_i + (n-m)\mu_i, i = \overline{j+1, k}\} \cap E_1 \cap \dots \cap E_j,$$

где при $i = \overline{1, j}$

$$E_i = \{y: |x_i - y_i - (n-m)\mu_i| < X_i\} \text{ либо } \{y: x_i - y_i \geq X_i + (n-m)\mu_i\}.$$

В дальнейшем будем считать (если противное не очевидно), что m — целое число, удовлетворяющее условию $|m - np| < \sqrt{n}$. Отметим, что когда n достаточно велико при этом

$$m \geq Cn^{8/9}, \quad n-m \geq Cn. \quad (6)$$

Обозначим через F_{1i} (соответственно F_{2i} , \bar{G}_i) i -ую одномерную маргинальную функцию распределения, отвечающую функции распределения F_1 (соответственно F_2 , \bar{G}). Имеем очевидно,

$$J_i \leq \begin{cases} F_{2i}^{n-m}(-X_i + (n-m)\mu) + \bar{G}_i^{n-m}(-X_i + (n-m)\mu), & i = \overline{1, j} \\ F_{2i}^{n-m}(-Y_i + (n-m)\mu) + \bar{G}_i^{n-m}(-Y_i + (n-m)\mu), & i = \overline{j+1, k} \end{cases}. \quad (7)$$

Поскольку, согласно (4) и (6), при достаточно большом n

$$X_i l_i < (n-m)\sigma_i^2, \quad i = \overline{1, j}, \quad (8)$$

и, согласно (4),

$$Y_i l_i \geq (n-m)\sigma_i^2, \quad i = \overline{j+1, k}, \quad (9)$$

то, в силу лемм 4 и 5, из (7) вытекает, что



$$J_i \leq \exp \left\{ -\frac{n \log n}{9(n-m)} \right\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{2n \log n}{9(n-m)} \right\} \leq C n^{-\frac{1}{9}} \quad (10)$$

при $i = \overline{1, j}$ и

$$J_i \leq \exp \left\{ -\frac{4}{9} \log n \right\} = n^{-4/9}, \quad i = \overline{j+1, k}. \quad (11)$$

Далее, при $i = \overline{j+1, k}$, принимая во внимание (6) и используя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} J_{h+i} &\leq \int_{S_{h+i-j}} dF_1^m(y), \\ &\leq F_1^m(x_i - (n-m)\mu_i + Y_i) - F_1^m(x_i - (n-m)\mu_i - Y_i) \\ &\leq c(k) Y_i l_i^{-1} m^{-1/2} \leq c(k) n^{-1/9}, \end{aligned} \quad (12)$$

поскольку, если η_i — случайная величина с функцией распределения F_1 , то, согласно определению F_1 ,

$$P(\eta_i \leq x_i^-), P(\eta_i \geq x_i^+) \geq (2k)^{-1}, \quad x_i^+ - x_i^- = l_i. \quad (13)$$

Оценим, наконец, J_i при $i > 2k - j$. Оценим, скажем,

$$J' = \int_S |F_2^{n-m}(x-y) - \bar{G}^{n-m}(x-y)| dF_1^m(y),$$

где

$$\begin{aligned} S = \{y : |x_i - y_i - (n-m)\mu_i| < X_i, \quad i = \overline{1, r}\} \\ \cap \{y : x_i - y_i \geq X_i + (n-m)\mu_i, \quad i = \overline{r+1, j}\} \\ \cap \{y : x_i - y_i \geq Y_i + (n-m)\mu_i, \quad i = \overline{j+1, k}\}, \quad 0 \leq r \leq j. \end{aligned}$$

Условимся считать, что

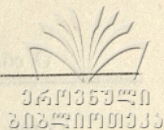
$$F_2(z_1, \dots, z_r, \infty, \dots, \infty) = \bar{G}(z_1, \dots, z_r, \infty, \dots, \infty) = 1$$

при $r=0$. Заметим, что

$$|F_2^{n-m}(x-y) - F_2^{n-m}(x_1 - y_1, \dots, x_r - y_r, \infty, \dots, \infty)| \leq \sum_{i=r+1}^h (1 - F_{2i}^{n-m}(x_i - y_i))$$

и аналогично для \bar{G}^{n-m} , так что при $y \in S$

$$\begin{aligned} |F_2^{n-m}(x-y) - \bar{G}^{n-m}(x-y)| &\leq |F_2^{n-m}(x_1 - y_1, \dots, x_r - y_r, \infty, \dots, \infty) \\ &- \bar{G}^{n-m}(x_1 - y_1, \dots, x_r - y_r, \infty, \dots, \infty)| + \sum_{i=r+1}^j [(1 - F_{2i}^{n-m}(X_i + (n-m)\mu_i) \\ &+ (1 - \bar{G}^{n-m}(X_i - (n-m)\mu_i)))] + \sum_{i=j+1}^h (1 - F_{2i}^{n-m}(Y_i + (n-m)\mu_i)). \end{aligned} \quad (14)$$



вытекает, что

$$\sup_{x \in R^k} |F^n(x) - D_n(x)| \leq c(k) (\log n)^{1/2} n^{-1/3},$$

где D_n — безгранично делимая функция распределения, определяемая формулой

$$D_n = \delta_{n\rho} \times \hat{G} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n\rho)^m}{m!} e^{-n\rho} (F_1 \times \delta_{-\rho})^m. \quad (21)$$

Аналогично разбираются остальные случаи (3) (в случае

$$l_i \sigma_i^{-1} \geq (3/4) (n/\log n)^{1/2}$$

в формуле (21) в качестве \hat{G} будет функция распределения, отвечающая единичной массе в нуле, в остальных случаях \hat{G} — нормальная функция распределения с нулевым средним и матрицей вторых центральных моментов, равной $n - n\rho$ раз взятой некоторой части матрицы вторых центральных моментов функции распределения F_2).

Тем самым утверждение доказано для тех функций F , относительно которых вероятность любой гиперплоскости равна нулю.

2. Пусть теперь F — произвольная невырожденная функция распределения в R^k . Рассмотрим последовательность функций распределения $F \times \Phi_T$, $T=1, 2, \dots$ (Φ_T — нормальная функция распределения с нулевым средним и матрицей вторых моментов $T^{-2}I$, где I — единичная матрица). Очевидно, относительно любой из этих функций распределения вероятность всякой гиперплоскости равна нулю. Фиксируем какое-либо натуральное n . Подобно тому, как в пункте 1 доказательства функции распределения F сопоставлялись числа x_i^{\pm} и функции распределения F_1 и

F_2 , сопоставим каждой функции распределения $F \times \Phi_T$ числа x_{iT}^{\pm} и функции распределения $(F \times \Phi_T)_1$ и $(F \times \Phi_T)_2$. Покажем, что числа x_{iT}^{\pm} равномерно ограничены.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайная величина с функцией распределения F , $\zeta_T = (\zeta_{T1}, \dots, \zeta_{Tk})$ — случайная величина с функцией распределения Φ_T и пусть ξ не зависит от ζ_T , $T=1, 2, \dots$. Согласно определению x_{iT}^{\pm}

$$p_1 = p(2k)^{-1} \leq P(\xi_i + \zeta_{Ti} \geq x_{iT}^+). \quad (22)$$

Определим число A как наибольшее число, удовлетворяющее условию

$$P(\zeta_i \geq A) \geq \frac{p_1}{2},$$

и пусть B — такое число, что

$$P(|\zeta_{Ti}| \leq B) \geq 1 - \frac{p_1}{2}, \quad T=1, 2, \dots \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$\frac{p_1}{2} \leq P(\xi_i + \zeta_{Ti} \geq x_{iT}^+, \quad |\zeta_{Ti}| \leq B) \leq P(\xi_i \geq x_{iT}^+ - B),$$

откуда, в силу определения A ,

$$x_{iT}^+ \leq A + B, \quad T = 1, 2, \dots$$

Совершенно аналогично устанавливается ограниченность снизу чисел x_{iT}^- .

Из ограниченности x_{iT}^\pm вытекает, что отвечающие функциям $(F * \Phi_T)_2$ распределения сосредоточены в одной и той же ограниченной части пространства R^k , и что, следовательно, первые и вторые моменты этих распределений равномерно ограничены.

Отсюда и из вида безгранично делимых функций распределения D_{nT} , сопоставляемых пунктом 1 доказательства функциям $(F * \Phi_T)^n$, легко следует, что последовательность $\{D_{nT}\}$, $T = 1, 2, \dots$ условно компактна в топологии слабой сходимости. Утверждение теоремы для функции распределения F вытекает теперь из слабой сходимости $(F * \Phi_T)^n$ к F^n при $T \rightarrow \infty$, замкнутости класса безгранично делимых распределений относительно слабой сходимости и непрерывности функций распределения слева.

(Представлено 2. IV. 1971)

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Теория вероятн. и ее примен., 1, № 4, 1956, стр. 426—436.
2. Ю. В. Прохоров, Теория вероятн. и ее примен., V, № 1, 1960, стр. 103—113.
3. А. Н. Колмогоров, Труды Московск. мат. о-ва, 12, 1963, стр. 437—451.
4. Ю. В. Прохоров, Успехи матем. наук, 8:3, 1953, стр. 135—142.
5. Б. А. Rogozin, Теория вероятн. и ее примен., VI, № 1, 1961, стр. 103—105.
6. V. V. Sazonov, Sankhyā, Ser. A, vol 30, 2, 1968, p. 181—204.
7. М. Лоев, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.

3. საკონკრეტო

დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების განაწილებების დაახლოება უსასრულოდ გაყოფად განაწილებათა კლასთან მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში

რეზიუმე

ვთქვათ $F_n (n = 1, 2, \dots)$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის კერძო ჯამების განაწილების ფუნქციებია. ცნობილია, რომ ნებისმიერი ასეთი მიმდევრობისათვის არსებობს უსასრულოდ გაყოფად განაწილებათა ისეთი მიმდევრობა G_n , რომ $\sup_x |F_n(x) - G_n(x)| \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. ამ კრებადობის სისწრაფე შეფასებული იყო პირველად ა. კოლმოგოროვის მიერ, შემდეგ ეს შეფასება რამდენჯერმე იქნა გაუმჯობესებული. ამ ნაშრომში შეისწავლება უსასრულოდ გაყოფად განაწილებათა კლასთან ასეთი დაახლოების სისწრაფის შეფასების საკითხი მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში.

О ПРОЕКТИВНО-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Г. Н. ТЕВЗАДЗЕ

В настоящей статье рассматривается в пространстве p_3 конгруэнция прямых общего вида c_0 и все её преобразования Лапласа

$c_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если M_n, M_{n+1} — фокальные поверхности конгруэнции c_n , то прямые этой конгруэнции отображают, например, поверхность M_n на

M_{m+1} . Обозначим это отображение через $L_{m,m+1}$. Ставится вопрос: в каком слу-

чае $L_{m,m+1}$ является проективным отображением пространства p_3 ? В параграфе 1 предполагается, что отображение $L_{m,m+1}$ представляет коллинеацию: при этом

получается, что фокальные поверхности являются или поверхностями второго порядка, или они могут принадлежать классу линейчатых поверхностей R или классу поверхностей совпадения. В параграфе 2 отображение $L_{m,m+1}$ является коррелятивным преобразованием. В этом случае

оно будет нуль-системой и конгруэнция c_m принадлежит соответствующему линейному комплексу прямых. При этом получается характерный тензорный признак конгруэнции, принадлежащей невырожденному линейному комплексу прямых (равенство (39)), что даёт возможность условие интегрируемости основного уравнения нормализованной фокальной поверхности записать в виде (51). Затем для конгруэнции Вильчинского отмечаются аналогичные результаты.

Пусть c_0 — непараболическая конгруэнция прямых проективного пространства p_3 с невырожденными фокальными поверхностями M_0, M_1 . Рассмотрим все её преобразования Лапласа в обоих направлениях $c_n = \pm 1, \pm 2, \dots$ и обозначим через $M_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ соответствующие фо-



кальные поверхности полученных при этом конгруэнций. Лучи конгруэнций c , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, как общие касательные прямые фокальных

поверхностей M_{n-1} , M_n , устанавливают взаимнооднозначное соответствие между

точками этих поверхностей, если рассматривать на них достаточно маленькие области. Таким образом, можно считать, что любое значение криволинейных координат (u^1, u^2) из некоторого числового множества (u) указывает однозначно определённую точку из соответствующих областей на каждой поверхности M_n . Следовательно, в этом смысле, все поверх-

ности M_n отображаются друг на друга вполне определённым образом. Мы

будем говорить, что эти отображения поверхностей индуцируются преобразованиями Лапласа соответствующих конгруэнций. В частности, обозначим через $L_{n,n+1}$ индуцированное вышеуказанным образом соответствие, отобра-

жающее поверхность M_n на M_{n+1} .

§ 1. Рассмотрим случай, когда для какого-нибудь фиксированного значения $n=k$ преобразование $L_{k,k+1}$ оказывается также проективным пре-

образованием пространства p_3 типа коллинеации и обозначим его через H , т. е.

$$L_{k,k+1} = H, \quad M_k H = M_{k+1}. \quad (1)$$

Теперь предположим, что все фокальные поверхности¹ нормализованы в смысле Нордена прямыми Грина соответствующих фокальных сетей. При этом без детальных разъяснений будем пользоваться формулами статьи [4].

Из соотношения (1) немедленно следует, что

$$b_{ij} = \lambda b_{ij}, \quad T_i = T_i, \quad G_{ij}^r = G_{ij}^r, \quad \Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ij}^r. \quad i, j, r=1, 2, \quad (2)$$

где, согласно обозначениям статьи [4], b_{ij} —тензор асимптотической сети фокальной поверхности M_k , T_i —его чебышевский вектор в связности

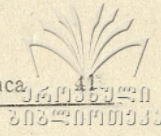
G_{ij}^r , а G_{ij}^r , Γ_{ij}^r —внутренние связности нормализованной поверхности M_k .

В силу равенств (2) и ([4], (53))², можно так согласовать нормирование тензоров b_{ij} , b_{ij} ³, что

¹ Ни одна из них не является развертывающейся поверхностью.

² ([4], (53)) обозначает формулы (53) статьи [4].

³ Тензорные индексы всюду принимают значения 1 и 2.



$$\omega_i = \omega_i$$

и поэтому, учитывая ([4], (40)),

$$l_i = l_i, \quad \lambda_i = \lambda_i. \tag{3}$$

Таким образом можно принять, что

$$x_k^\alpha H = x_{k+1}^\alpha, \quad \xi_k^\alpha \bar{H} = \xi_{k+1}^\alpha, \tag{4}$$

где \bar{H} — преобразование плоскостей при коллинеации H .

В силу полученных равенств, для элементов репера

$$y_i^\alpha = \partial_i x_k^\alpha - l_i x_k^\alpha, \quad \eta_{\alpha i} = \partial_i \xi_k^\alpha - \lambda_i \xi_k^\alpha$$

имеем, что

$$y_i^\alpha H = y_i^\alpha; \quad \eta_{\alpha i} \bar{H} = \eta_{\alpha i}. \tag{5}$$

Теперь легко доказывается следующая теорема: если для какого-нибудь фиксированного значения $n=k$ преобразование L является коллинеацией H , то тогда это имеет место для любого значения n

$$MH = M, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и поэтому каждая фокальная сеть f_{ij} является сетью R (теорема Боля [3], стр. 134). В самом деле, согласно равенствам (5) и ([4], (15), (29)) получаем, например, что

$$x_{k+1}^\alpha H = (a \ v^m \ y_m^\alpha) H = a \ v^m \ y_m^\alpha = v^m \ y_m^\alpha \quad a/f = x_{k+1}^\alpha \ a/f \ a. \tag{6}$$

Ниже увидим, что в этом равенстве коэффициент при x_{k+2}^α является постоянным.

Условие $b_{ij} = \lambda b_{ij}$, в силу равенств ([4], (25), (50)), даёт, что

$$p = \pi, \tag{7}$$

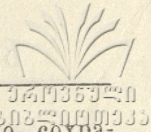
$$a = c_1 \ k \ b; \quad \beta = -c_1 \ k \ \alpha; \quad c_1 = \text{const.}$$

и поэтому из соотношений (2), (3), ([4], (43), (45)) следуют равенства

$$\omega_i = \partial_i \lg (v/p), \tag{8}$$

$$a = c_2 \sqrt{k/p}; \quad b \sqrt{k/p} = c_3; \quad c_3 = c_2/c_1; \quad c_2 = \text{const.} \tag{9}$$

Выбор вершины нормали первого рода и основания нормали второго рода для каждой фокальной поверхности имеет инвариантный характер



([4], (65), (71)) и при коллинеации (4) сохраняются. Следовательно, сохраняется также и коэффициент $p_{ij}(\pi_{ij})$ основного уравнения поверхности ([4], (13)):

$$p_{ij} = p_{ij}, \quad \pi_{ij} = \pi_{ij}. \quad (10)$$

Равенства (9) и ([4], (20), (29)) дают, что

$$p = p_{ij} v^i v^j = f \varphi p. \quad (11)$$

Кроме того, в силу (6), формулы (19) верны также при замене k значением $(k+1)$, поэтому

$$a = c_2 \sqrt{\frac{k}{p}}$$

и для коэффициента пропорциональности в равенстве (6), согласно (7), (9), (11), ([4], (34)), получаем, что

$$a / f = \text{const.} \sqrt{\frac{p k / f^2}{p k}} = \text{const.} \sqrt{\frac{\varphi k / f k}{k}} = \text{const.}$$

Таким образом, индекс k теряет своё исключительное значение и всюду заменяется индексом n . В частности имеем ([4], (25))

$$\bar{p} = \bar{\pi}. \quad (12)$$

Теперь соотношения (7), (10), (12), ([4], (24), (66), (71), (84), (89)) дают, что

$$\begin{aligned} u - \phi &= -\phi; \quad \Phi - (\bar{p} + \bar{p})/2v = (-\bar{p} - \bar{p})/2v; \quad -\Phi + (\bar{p} - \bar{p})/2v = (-\bar{p} + \bar{p})/2v; \\ w - \phi &= -\phi; \quad -\bar{\Phi} - (\bar{p} + \bar{p})/2v = (-\bar{p} - \bar{p})/2v; \quad -\bar{\Phi} + (-\bar{p} + \bar{p})/2v = (\bar{p} - \bar{p})/2v, \end{aligned}$$

т. е.

$$u = w = \Phi = \bar{\Phi} = 0, \quad (13)$$

$$p = \bar{p}; \quad (\pi = \bar{\pi}). \quad (14)$$

Условие (14) означает, что ([4], (24))

$$p^i_{,i} = \pi^i_{,i} = 0, \quad (14')$$

т. е. на каждой фокальной поверхности M_n индуцируется геометрия Римана с изотропной сетью f_{ij} и поэтому ([4], (118))

$$\Delta^k T_k = 0. \quad (15)$$

Согласно равенствам (7), (8), (13), (18), ([4], (82), (85), (87), (90)) по получаем, что

$$u_i = T_i; \quad w_i = -T_i. \quad (16)$$

$$\left(\frac{e^{mr}}{n} - \frac{b^{mr}}{n} \right) \left(T_m T_r + \frac{1}{2} \nabla_{(m)} T_r \right) = 0; \tag{17}$$

$$\left(\frac{e^{mr}}{n} + \frac{b^{mr}}{n} \right) \left(T_m T_r - \frac{1}{2} \nabla_m T_r \right) = 0.$$

$$f^{mr} \nabla_{(m)} T_r = 0; \quad f^{mr} \nabla_m T_r = 0. \tag{18}$$

Но равенства (18) сведутся к одному равенству

$$\nabla^m (f_m^r T_r) = 0 \tag{19}$$

и поэтому, в силу соотношений (14), ([4], (110)), на каждой фокальной поверхности индуцируется евклидова пара сопряженных связностей.

Учитывая (8), фиксируем нормирование проективных координат x_α^n, ξ_α^n таким образом, что

$$\omega = 0; \quad \left(-\frac{p}{n} / \frac{v}{n} = \text{const} = c \right). \tag{20}$$

Кроме того, имея в виду (19), за счёт нормирования v^i и \bar{v}^i можно предполагать, что

$$T^m f_{mi} = \nabla_i \lg \sqrt{\frac{v}{n}} = \nabla_i \lg \sqrt{\frac{p}{n}}; \quad k = \text{const}.$$

Следовательно, ([4], (9)),

$$\nabla_i v^m = -T_{in} v^m; \quad \nabla_{(i)} \bar{v}^m = T_{in} \bar{v}^m.$$

Если в этих равенствах учтём, что ([4], (29))

$$v_{n+1}^i = f_{n+1}^i v^i; \quad \bar{v}_{n+1}^i = \varphi_{n+1}^i \bar{v}_{n+1}^i,$$

то

$$f_{n+1} = \text{const.}; \quad \varphi_{n+1} = \text{const.}; \quad v_{n+1}^i = \text{const} \cdot \frac{v^i}{n}; \quad \bar{v}_{n+1}^i = \text{const} \cdot \frac{\bar{v}^i}{n}.$$

Таким образом, соотношения (7), (14), (16), (20), ([4], (24), (86), (91)) дают, что

$$p_{ij} = \pi_{ij} = c f_{ij} - \phi_{ij}; \quad c = c = \text{const}. \tag{21}$$

$$m_i = -\mu_i = 2c e_i^m T_m + \nabla_i \psi; \quad (c = c). \tag{22}$$

Следовательно,

$$p_{ij} b^{ir} = m_j^r = \mu_j^r = c e_j^r + \psi f_j^r; \quad m_j^r p_i^j = 0. \tag{23}$$

Формулы дифференцирования ([4], (8), (11)) теперь принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_r f_{ij} &= 2T_r f_{ij}, \quad \nabla_r e_{ij} = 2T_r e_{ij} + 2T^m f_{mr} b_{ij}; \\ \nabla_r \varepsilon_{ij} &= 2T_r \varepsilon_{ij}; \quad \nabla_r \varepsilon^{ij} = -2T_r \varepsilon^{ij}; \quad \nabla_r f_j^i = 0; \\ \nabla_r e_j^i &= 2T^m f_{mr} b_j^i; \quad \nabla_r b_j^i = 2T^m f_{mr} e_j^i; \quad \nabla^i b_{ij} = \nabla^i e_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$



Согласно равенствам (20), (21), (22), (23), ([4], (108)), условия интегрируемости основных уравнений нормализованной поверхности можно представить в виде:

$$b_i^k m_k = \nabla^k p_{ik}; \quad -b_i^k m_k = \nabla^k p_{(i)k}; \\ \nabla^k m_k^l = m^l; \quad \nabla^k m_k^{(l)} = -m^l; \quad \nabla^k m_k = 0,$$

т. е.

$$\overset{c}{\nabla}^k p_{ik} = 0; \quad \overset{c}{\nabla}^k m_k^l = 0; \quad \nabla^k m_k = 0; \\ 2b_i^k m_k = \nabla^k p_{ik} - \nabla^k p_{(i)k}; \quad 2m^l = \nabla^k m_k^l - \nabla^k m_k^{(l)}. \quad (25)$$

Учитывая здесь соотношения

$$\nabla^k p_{ik} - \nabla^k p_{(i)k} = 4cT^k f_{ik}, \quad \nabla^k m_k^l - \nabla^k m_k^{(l)} = -4ce_k^l T^k,$$

легко получаем, что вся система (25) эквивалентна следующим двум условиям:

$$\psi = \text{const.}$$

$$\nabla^i (e_i^m T_m) = 0.$$

Последнее равенство, согласно (24), перепишется в виде

$$e^{mi} \nabla_i T_m = e, \quad e = 2e^{mn} T_m T_n. \quad (26)$$

Имея в виду формулы (15), (18), (26), можно получить разложение

$$\nabla_i T_n = \frac{1}{2} J b_{im} - \frac{1}{2} e e_{im}, \quad (27)$$

где по формулам (17) и ([4], (55)),

$$J = 2b^{mn} T_m T_n = b^{mi} \nabla_m T_i.$$

Но $\nabla^i \nabla_i T_m = 0$, поэтому, учитывая выражения (24), из соотношения (27) следует, что

$$b_{im} \nabla^i J - e_{im} \nabla^i e = 0. \quad (28)$$

Выведем теперь равенство (27) для связности второго рода. С этой целью заметим, что

$$\nabla^i e_i^{(m)} = 2T^n e_n^m; \quad \nabla^i b_i^{(m)l} = 2T^n b_n^m; \quad \nabla^i (e_{(i)l}^m T_m) = 0$$

и, в силу равенств (15), (17), (18), легко получается разложение

$$\nabla_i T_{(m)} = -\frac{J}{2} b_{im} + \frac{e}{2} e_{im}. \quad (29)$$

Вычитая уравнения (27) и (29), первое из второго, согласно формулам ([4], (52)), получаем тождество, а их сложение даёт, что

$$\overset{c}{\nabla}^i T_m = 0. \quad (30)$$

Следовательно, при $T_i \neq 0$, средняя связность также является евклидовой связностью (так как $\overset{c}{R}_{ij} = kb_{ij}$; $kb_m^i T_i = 0$).

Если

$$J \neq 0,$$

то по формуле ([4], (59)) получаем, что

$$\nabla_i^c T_m = 3b_{in} \theta^n \bar{T}_m + \partial_i \lg \sqrt{J}^{-1} T_m = 0; \quad \bar{T}_m = b_{mi} T^i$$

и поэтому

$$\theta_i = 0, \quad J = \text{const.} \neq 0, \quad (31)$$

где θ_i — чебышевский вектор в средней связности сети, образованной на поверхности M_n одним из направлений Серге и сопряженным ему направлением Дарбу.

Условие (31) означает, что вектор Фубини ([1], стр. 423, форм. (5))

$$\psi_i = 0,$$

т. е. фокальная поверхность M_n является поверхностью совпадения ([1], стр. 424). В этом случае, согласно (28),

$$e = 2e^{mn} T_m T_n = \text{const.}$$

Пусть теперь

$$J = 2b^{mn} T_m T_n = 0, \quad (32)$$

т. е. поверхность M_n — линейчатая; поэтому в асимптотической системе криволинейных координат

$$R_{12} = \partial_{12} \lg b_{12} = 0.$$

Следовательно, можно так выбрать параметры вдоль асимптотических линий, что

$$b_{12} = \text{const.}, \quad \Gamma_{ij}^k + G_{ij}^k = 0, \quad f_{11} = \text{const.}, \quad f_{22} = \text{const.},$$

где Γ_{ij}^k, G_{ij}^k — индуцированные связности на поверхности M_n .

Но ([4], (52))

$$\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k = 2T_i \delta_j^k + 2T_j \delta_i^k + 2f^{kn} f_{ij} T_n,$$

поэтому

$$-\gamma = \Gamma_{22}^1 = \text{const.} T_1; \quad -\beta = \Gamma_{11}^2 = \text{const.} T_2.$$

При этом, в силу (30) и (32),

$$\partial_i T_m = 0; \quad T_1 T_2 = 0.$$

Таким образом, если, например, $\gamma \neq 0$, то $\beta = 0$, $\gamma = \text{const.}$ и фокальная поверхность M_n — линейчатая поверхность R . Случай $\beta = \gamma = 0$ соответствует поверхности второго порядка.

¹ ∂_i всюду означает частную производную $\frac{\partial}{\partial u^i}$.



Резюмируя, можно сказать, что если в невырожденной последовательности Лапласа преобразование двух каких-нибудь соседних фокальных поверхностей является коллинеацией пространства, то это верно для всех фокальных поверхностей последовательности и такая коллинеация единственна (теорема Боля). В этом случае фокальные поверхности могут быть или поверхностями второго порядка, или все они принадлежат классу линейчатых поверхностей R , или поверхностей совпадения.

§ 2. Рассмотрим теперь случай, когда для какого-нибудь фиксированного значения $n=k$ определенное в начале преобразование L оказывается также проективным преобразованием пространства p_3 типа корреляции и обозначим эту корреляцию через c :

$$L = C, \quad MC = M.$$

$k, k+1$ k $k+1$

Предполагая, что поверхности M_n нормализованы прямыми Грина сетей f_{ij} , аналогично равенствам (2), получаем соотношения:

$$b_{ij} = \lambda b_{ij}, \quad G_{ij} = \Gamma_{ij}; \quad \Gamma_{ij} = G_{ij}; \quad T_i = -T_i. \quad (33)$$

k $k+1$ k $k+1$ k $k+1$ k $k+1$

Поэтому можно так согласовать нормирование тензоров b_{ij} , b_{ij} , что

$$\omega_i = \omega_i \quad (34)$$

k $k+1$

и, в силу ([4], (40)),

$$l_i = \lambda_i, \quad \lambda_i = l_i.$$

k $k+1$ k $k+1$

Таким образом,

$$x^\alpha C = \xi_\alpha, \quad \xi_\alpha \bar{C} = x^\alpha,$$

k $k+1$ k $k+1$

где \bar{C} обозначает индуцированное корреляцией ($x^\alpha C$) преобразование плоскостей.

Согласно этим равенствам, для элементов репера y_i^α , $\eta_{\alpha i}$ получаем соотношения

$$y_i^\alpha C = \eta_{\alpha i}, \quad \eta_{\alpha i} \bar{C} = y_i^\alpha. \quad (35)$$

k $k+1$ k $k+1$

Теперь легко показать, что рассматриваемая корреляция является инволюцией, т. е. нуль-системой пространства p_3 . В самом деле, согласно равенствам (35) и ([4], (15), (16), (29)), например, имеем:

$$\xi_\alpha \bar{C} = b \bar{v}^m \eta_{\alpha m} \bar{C} = b \bar{v}^m y_m^\alpha / \varphi = b x^\alpha / \alpha \varphi,$$

$k+1$ $k+1$ k $k+1$ $k+1$ $k+1$ $k+1$ $k+1$ k k $k+1$



что доказывает наше утверждение и поэтому конгруэнция c_k принадлежит

невырожденному линейному комплексу прямых.

Этому комплексу должны принадлежать также нормали обоих родов поверхностей M_k, M_{k+1} , поэтому нормаль первого рода одной поверхности является нормалью второго рода другой поверхности и наоборот.

Очевидно также обратное предложение: произвольная нуль-система точки и касательную плоскость некоторой поверхности переводит соответственно в касательную плоскость и точку преобразованной поверхности. Соединяя точки, участвующие в этом преобразовании (или рассматривая пересечение этих плоскостей), мы получим конгруэнцию Вейнгартена, принадлежащую линейному комплексу.

Согласно первому равенству условий (33), учитывая формулы ([4], (25), (50)), имеем

$$p_k = \pi, \quad \overline{p}_{k+1} = \overline{\pi}. \quad (36)$$

$$a_{k+1}/k \quad b_{k+1} = c_1, \quad \beta_{k+1}/k \quad \alpha_k = -c_1, \quad c_k = \text{const.}$$

Теперь формулы (33), (34), (36), ([4], (43), (44)) дают, что

$$\frac{a_{k+1}}{k} \frac{b_{k+1}}{k} p_k = \text{const.} = 1, \quad \frac{\alpha_{k+1}}{k} \frac{\beta_k}{k} \overline{p}_{k+1} = \text{const.} = 1. \quad (37)$$

$$T_k = f_k^m \left(\frac{1}{2} \omega_m + d_m \lg \sqrt{\frac{p}{v}} \right) = f_k^m \left(\frac{1}{2} \omega_{m+1} + d_m \lg \sqrt{\frac{\overline{p}}{\overline{v}}} \right). \quad (38)$$

При этом в равенствах (37) постоянные величины приравнены к единице и поэтому ([4], (25), (27), (36), (37))

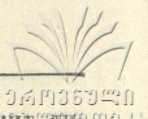
$$b_{k+1} = -b_{ij}; \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{ij}; \quad f_{k+1} = f_{ij}; \quad c_{k+1} = -c_{ij}.$$

Условие (38) является также достаточным, т. е. справедлива следующая теорема: равенство

$$T_k = f_k^m \left(\frac{1}{2} \omega_m + d_m \lg \sqrt{\frac{p}{v}} \right); \quad 2p/v = (f^{mn} + \varepsilon^{mn}) p_{mn} \quad (39)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы конгруэнция c_k принадлежала линейному комплексу прямых.

Заметим, что в соотношении (39) фокальная поверхность M_k предполагается нормализованной прямыми Грина фокальной сети f_{ij} , ω_i является дополнительным вектором средней (вейловой) связности, а T_i — чебышевским вектором асимптотической сети поверхности M_k . При равенстве



(39) одна из конгруэнций касательных прямых сети f_{ij} принадлежит некоторому комплексу прямых. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в случае соотношения (39) преобразование $L_{k,k+1}$ является коррелятивным преобразованием. Беря ниже всюду значение $k=1$, прежде всего отметим, что вектор $\left(T_1^i f_j^i - \frac{1}{2} \omega_j\right)$ — градиентная величина и поэтому, при некотором фиксировании нормирования тензора b_{ij} ,

$$T_1^m f_1^m = \frac{1}{2} \omega_1. \quad (40)$$

Кроме того, нормируя векторы v_1^i, \bar{v}_1^i так, что

$$k = \text{const.}; \quad v_1 = \text{const.}$$

будем иметь, по формулам ([4], (9), (12)),

$$\begin{aligned} \nabla_{11} v_1^m &= -T_{11} v_1^m; & \nabla_{(i)1} \bar{v}_1^m &= T_{11} \bar{v}_1^m; & \nabla_{11} \bar{v}_1^m &= (-T_{11} - \omega_1) \bar{v}_1^m; \\ \nabla_{(i)1} v_1^m &= (T_{11} - \omega_1) v_1^m; \\ \nabla_{11} v_m &= (T_{11} + \omega_1) v_m; & \nabla_{(i)1} \bar{v}_m &= (-T_{11} + \omega_1) \bar{v}_m; \\ \nabla_{11} \bar{v}_m &= T_{11} \bar{v}_m; & \nabla_{(i)1} v_m &= -T_{11} v_m. \end{aligned} \quad (41)$$

Следовательно, c является конгруэнцией Вейнгартена [5] и поэтому,

$$([4], (25), (43)) \quad T_2^i = T_{11}^i + f_{11}^m (\partial_m \lg \sqrt{v_1 / p - \omega_m}); \quad p = \pi; \quad \bar{p} = \bar{\pi},$$

или, в силу равенств (39), (в которых $k=1$), ([4], (43')),

$$T_2^i = -T_{11}^i = f_{11}^m \left(\partial_m \lg \sqrt{\frac{v_1}{p} - \frac{1}{2} \omega_m} \right). \quad (42)$$

Теперь, выбирая нормирование величин $b_{ij}, v_2^i, \bar{v}_2^i$ соответствующим

образом, согласно равенствам (39), (40), (42) ([4], (44)), можно положить, что

$$\omega_1 = \omega_2; \quad a_{22} b_{22} p = \text{const.} = 1; \quad \alpha_{11} \beta_{11} \bar{p}_1 = \text{const.} = 1; \quad b_{1j} = -b_{2j}, \quad (43)$$

$$k = \text{const.}; \quad v_1 = \text{const.}; \quad k = \text{const.}; \quad p = \pi = \text{const.} \neq 0; \quad \bar{p} = \bar{\pi} = \text{const.} \neq 0. \quad (44)$$

Таким образом, формулы (41) остаются в силе, когда в них нетензорный индекс 1 всюду заменяется значением 2.

По формулам (42) и (43) имеем, что

$$\lambda_{i2} = \frac{1}{2} (\omega_i - T_i) = \frac{1}{2} (\omega_i + T_i) = l_i; \quad l_i = \frac{1}{2} (\omega_i + T_i) = \frac{1}{2} (\omega_i - T_i) = \lambda_{i1}$$

Кроме того, в силу равенств ([4], (52)), можно написать соотношения

$$\Gamma_{ij}^{n+1} = G_{ij}^n + \frac{1}{2} (x_i \delta_j^n + x_j \delta_i^n + x_m f^{mr} f_{ij}^n); \quad x_i = \omega_i - \omega_i + 2T_i + 2T_i;$$

$$G_{ij}^{n+1} = \Gamma_{ij}^n + \frac{1}{2} (y_i \delta_j^n + y_j \delta_i^n + y_m f^{mr} f_{ij}^n); \quad y_i = \omega_i - \omega_i - 2T_i - 2T_i,$$

которые в нашем случае принимают вид:

$$\Gamma_{ij}^2 = G_{ij}^1; \quad G_{ij}^2 = \Gamma_{ij}^1. \quad (45)$$

Учитывая (43) и (44), равенства ([4], (50))

$$a/kb = \text{const.}; \quad \beta/k\alpha = \text{const.}$$

дадут, что

$$a/kb = \text{const.}; \quad \beta/k\alpha = \text{const.}$$

Обратимся теперь к векторам u_i, w_i, a_i, c_i , которые участвуют в выражениях для тензоров p_{ij}, π_{ij} . Согласно формулам (40), (44), ([4], (7'), (82), (87), (94)), имеем:

$$u_i = T_i + \frac{1}{2} \omega_i = T_i + T_m f_i^m = (\delta_i^m + f_i^m) T_m = x_{11} v_i; \quad (46)$$

$$w_i = y_{11} v_i; \quad a_i = y_{22} v_i; \quad c_i = x_{22} v_i,$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 обозначают некоторые коэффициенты пропорциональности.

Легко проверяется, что, в силу равенств (41), (46), ([4], (7), (85), (90), (94)):

$$\begin{aligned} u &= (e^{mr} - b^{mr}) \left(u_m u_r - \frac{1}{2} \nabla_{(m} u_r \right) = \\ &= \text{const.} \cdot v^m v^r \left[x^2 v_m v_r - \frac{1}{2} \nabla_{(m} (x v_r) \right] = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} 2v\Phi &= v \nabla^m (x v_m) + (\bar{v}^r v^m + \bar{v}^m v^r) \nabla_{(m} (x v_r) = \\ &= v \nabla^m (x v_m) + \bar{v}^r v^m \nabla_{(m} (x v_r) = 0, \end{aligned}$$

$$w = 0; \quad \bar{\Phi} = 0; \quad N = 0; \quad M = 0.$$

Следовательно, ([4], (88), (98)),

$$\psi = -\bar{\psi}; \quad \bar{m} = m = 0. \quad (48)$$



Теперь по формулам (44), (47), (48), ([4], (24), (84), (89)) получаем

$$p_{2ji} = \pi_{1ji} = -\frac{\psi}{1} e_{ij} - \frac{f_{ij}}{1} (p + \frac{\pi}{1}) / 2v + \frac{\varepsilon_{ij}}{1} (\frac{\pi - p}{1}) / 2v; \quad (49)$$

$$\pi_{2ji} = p_{1ji} = -\frac{\psi}{1} e_{ij} - \frac{f_{ij}}{1} (p + \frac{\pi}{1}) / 2v + \frac{\varepsilon_{ij}}{1} (\frac{p - \pi}{1}) / 2v.$$

Но величины G_{ij}^r , b_{ij} , p_{ij} определяют нормализованную поверхность с точностью до проективного преобразования ([1], стр. 229), поэтому согласно соотношениям (44), (45), (49), фокальные поверхности M_1 и M_2

преобразуются друг в друга надлежащей корреляцией пространства и, таким образом, достаточность равенства (39) доказана. Эту теорему можно сформулировать также следующим образом: конгруэнция c_k тогда и только

тогда принадлежит линейному комплексу прямых, когда она является конгруэнцией Вейнгартена и $T_i + T_{i+1} = 0$, т. е. когда справедливы равенства

$$\nabla^i \left(T_m f_i^m - \frac{1}{2} \omega_i \right) = 0, \quad T_i + T_{i+1} = 0, \quad (50)$$

где T_i — чебышевский вектор асимптотической сети фокальной поверхности

M_{k+1} , нормализованной прямыми Грина фокальной сети.

Доказательство получается сразу, если учитывать выражение тензора T_i для конгруэнций Вейнгартена ([4], (43)).

Равенство (39) даёт возможность получить условия интегрируемости основных уравнений нормализованной фокальной поверхности в этом случае. В самом деле, в систему уравнений ([4], (131))

$$\nabla^c P_{ik} + H_i = 0; \quad \nabla^k (D_{ks}^c P_r^s) + (\omega^k + \mu^k + s^k) D_{ks}^c P_r^s + Q = 0;$$

$$P_{ik} = p_{(ik)} = \varphi f_{ik} - \psi e_{ik}, \quad J \neq 0$$

теперь добавляется условие (39), которое, в силу ([4], (124)), можно представить в виде

$$\partial_i (\varphi + l) = (\varphi + l) (2T_k f_i^k - \omega_i); \quad l = \frac{1}{4} \nabla^n (T_n + \omega_n).$$

Следовательно, согласно равенствам ([4], (8))

$$\nabla_k^c f_{ij} = \omega_k f_{ij}; \quad \nabla_k^c e_{ij} = \omega_k e_{ij},$$

получаем относительно неизвестных φ и ψ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi &= (\varphi + l) (2T_k f_i^k - \omega_i) - \partial_i l; \\ \partial_i \psi &= 2T_k e_i^k \varphi - \omega_i \psi + l (2T_k e_i^k - \omega_k b_i^k) - b_i^k \partial_k l - H_k l_i^k; \end{aligned}$$

$$D'_{ks}(f_r^s \nabla^k \varphi - e_r^s \nabla^k \psi) + (\omega^k + 2\mu^k + 2s^k) D'_{ks}(\varphi f_r^s - \psi e_r^s) + Q = 0.$$

Но ([4], (54))

$$D'_{ks} f_r^s = -2T_n e_k^n; \quad D'_{ks} e_r^s = -2T_n f_k^n,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & [4J - 2T_n e_k^n (\omega^k + \nabla^k \lg J - 6\theta^k)] \varphi + 2T_n f_k^n (\omega^k + \nabla^k \lg J - 6\theta^k) \cdot \psi + \\ & + 4T_n e_k^n \nabla^k l + 4l (J + T_n e_k^n \omega^k) - 2T_n H_m b^{mn} + Q = 0; \\ & \partial_i \varphi = (\varphi + l) (2T_n f_i^k - \omega_i) - \partial_i l; \\ & \partial_i \psi = 2T_n e_i^k \varphi - \omega_i \psi + l (2T_n e_i^k - \omega_k b_i^k) - b_i^k \partial_k l - H_k e_i^k, \end{aligned} \quad (51)$$

где θ_i — чебышевский вектор в средней связности пучка сетей Дарбу, а для величины J предполагается, что

$$J = 2b^{mn} T_m T_n \neq 0.$$

Таким образом, для того чтобы непараболическая конгруэнция принадлежала невырожденному линейному комплексу прямых, необходимо и достаточно существование двух функций φ, ψ , удовлетворяющих системе (51); при этом предполагается, что одна из фокальных поверхностей конгруэнции нормализована прямыми Грина фокальной сети и эта поверхность нелинейчатая.

Рассмотрим теперь случай, когда две соседние конгруэнции последовательности Лапласа c_{k-1} и c_k принадлежат разным линейным комплексам. Согласно (38), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$T_k^i = f_i^m \left(\frac{1}{2} \omega_m + \partial_m \lg \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} \right), \quad T_{k-1}^i = f_i^m \left(\frac{1}{2} \omega_m + \partial_m \lg \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} \right). \quad (52)$$

Но

$$T_k^i = -T_{k-1}^i,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \omega_k^i = \partial_i \lg \left(\nu \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} \right), \\ & T_k^r f_i^r = \frac{1}{2} \omega_i + \partial_i \lg \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} = \partial_i \lg \sqrt{\frac{\rho}{\rho}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Следовательно, на фокальных поверхностях конгруэнции c_k индуци-

руются квазиевклидовые кодационные пары связностей, характеризующие конгруэнции R [6]. Из формул ([4], (44), (110)) непосредственно видно, что на всех фокальных поверхностях последовательности в этом случае также индуцируются квазиевклидовые, кодационные связности и все они принадлежат классу поверхностей R ([2], стр. 142).

Теперь, согласно равенствам (50), имеем теорему: для того чтобы некоторая конгруэнция c_k из последовательности Лапласа конгруэнции R



принадлежала невырожденному линейному комплексу прямых, необходимо и достаточно, чтобы

$$T_i + T_{i+1} = 0, \quad n = k. \quad (54)$$

Отсюда получается теорема Вильчинского о том, что, если равенство (54) верно для двух соседних значений n , то оно верно для всех значений n и все конгруэнции последовательности R принадлежат линейному комплексу.

В самом деле, например, вычисляя величину $T_i + T_{i+1}$, по формулам (47), (52), (53), ([4], (43), (44), (97)) получаем, что

$$\begin{aligned} T_{k+1} + T_k &= 2T_{k+1} + f_i^m [\partial_m \lg(v/p) - \omega_m] = -2T_k + f_i^m [\partial_m \lg(v/\pi) - \\ &- \omega_m] = -2f_i^m \left(\frac{1}{2} \omega_m + \partial_m \lg \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + f_i^m [\partial_m \lg(v/\bar{p}) - \omega_m] = \\ &= f_i^m [\partial_m \lg(v^2/\bar{p}p) - 2\omega_m]. \end{aligned}$$

В случае конгруэнции Вильчинского, к условиям интегрируемости (51), согласно формулам (52), ([4], (20), (117)), добавляется равенство

$$\partial_i(\varphi - l) = (l - \varphi)(2T_m f_i^m + \omega_i)$$

и поэтому, для конгруэнции Вильчинского в системе (51) нужно предполагать ещё, что

$$2\varphi T_m f_i^m = l\omega_i + \partial_i l; \quad \frac{1}{4} \nabla^n T_n = l. \quad (55)$$

В случае нелинейчатой фокальной поверхности

$$J = 2b^{mn} T_m T_n \neq 0$$

условие (55) можно представить в виде

$$J\varphi = e^{mn} (l\omega_m + \partial_m l) T_n; \quad f^{mn} (l\omega_m + \partial_m l) T_n = 0. \quad (56)$$

Таким образом, для того, чтобы конгруэнция была конгруэнцией Вильчинского, необходимо и достаточно существование двух функций φ, ψ , удовлетворяющих системе равенств (51), (56); при этом предполагается, что одна из фокальных поверхностей конгруэнции нормализована прямыми Грина фокальной сети и эта поверхность нелинейчатая.

(Представлено 23. II. 1971)

Тбилисский математический институт им. А. Размадзе

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Норден, Пространства аффинной связности, М.-Л., 1950.
2. С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.



3. G. Bol, Projektive Differentialgeometrie, 3. Teil, Göttingen, 1967.
 4. Г. Н. Тевзадзе, Труды Тбилисского математического института XXXVII, Тбилиси, 1970, стр. 5—52.
 5. Г. Н. Тевзадзе, Сообщения АН Грузинской ССР, XXXV: I, 1964, стр. 9—13.
 6. Г. Н. Тевзадзе, Труды Тбилисского математического института, XXVII, 1960, стр. 165—170.

ბ. თამაზაძე

ლაპლასის გარდაქმნაში პროექციულად ექვივალენტური ზედაპირების შესახებ

რეზიუმე

პროექციულ სივრცეში განიხილება ზოგადი სახის წრფეთა კონგრუენცია და მისი ყველა შესაძლო ლაპლასის გარდაქმნები. ასეთი გარდაქმნებით ხორციელდება ფოკალური ზედაპირების ურთიერთცალსახა გადასახვები ერთმანეთზე.

ნაწროში განიხილება საკითხი, თუ როდისაა შესაძლებელი ეს გადასახვები წარმოადგენდნენ პროექციულ გარდაქმნებს. ამ საკითხთან დაკავშირებით მიღებულია ტენზორული დამახასიათებელი ნიშანი ისეთი კონგრუენციისა, რომელიც წრფიც კომპლექსს ეკუთვნის [(39) ტოლობა].



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОГО
 ТЕЧЕНИЯ СЛАБОПРОВОДАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В
 МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. В. ШАРИКАДЗЕ

Исследованию нестационарных течений вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах посвящено значительное количество работ [1]. Общее решение этих задач получается с помощью преобразований Лапласа и приводится к интегралам в комплексной плоскости, вычисления которых наталкиваются на значительные математические трудности. В некоторых случаях исследуют нестационарные задачи приближенным методом [2]. Здесь мы будем применять метод совместного применения фундаментальных решений данной задачи и операционного исчисления и в некоторых случаях получим решения через табулируемые функции в явном виде.

Рассмотрим нестационарное одномерное течение слабопроводящей жидкости между бесконечными параллельными плоскостями, перпендикулярно которым приложено внешнее однородное магнитное поле. Здесь мы предполагаем, что созданы такие условия, для которых $\bar{E}=0$. Решение такой задачи приводится для уяснения приложения предложенного метода для исследования нестационарных течений слабопроводящей жидкости при $Rm \ll 1$.

Уравнение для такого движения имеет вид

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - m^2 u = A(t), \quad (1)$$

где

$$m^2 = \frac{\sigma B^2}{\rho}, \quad A(t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Предельные условия в общем случае имеют вид

$$u(y, 0) = v^0(y), \quad u(0, t) = f_1(t), \quad u(h, t) = f_2(t). \quad (2)$$

Будем искать решение задачи (1) — (2) в виде

$$u(y, t) = v_1(y, t) + v(y, t) - f(t), \quad (3)$$



где $v_1(y, t)$ — решение однородного уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$v_1(y, 0) = v^0(y),$$

$f(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{df}{dt} + m^2 f = A(t)$ и условию $f(0) = 0$. Его

решение есть $f(t) = \int_0^t A(\tau) e^{m^2(t-\tau)} d\tau$. $v(y, t)$ — удовлетворяет уравнению (1)

и следующим предельным условиям:

$$\begin{aligned} v(y, 0) &= 0, & v(0, t) &= u(0, t) - v_1(0, t) + f(t) = F_1(t), \\ v(h, t) &= u(h, t) - v_1(h, t) + f(t) = F_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Легко заметить, что $v_1(y, t)$ будет иметь вид

$$v_1(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^h v_0(\eta) \exp\left(-\frac{(\eta-h)^2}{4\nu t} - m^2 t\right) d\eta. \quad (5)$$

Удовлетворение начального условия легко проверить, если ввести подстановку $\eta = y + 2\alpha\sqrt{\nu t}$.

Легко проверить также, что выражение

$$L_m(y, t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu t} - m^2 t\right] - e^{-m^2 t} L(y, t) \quad (6)$$

является решением однородного уравнения (1).

Ввиду этого, функцию $v(y, t)$ представим в виде

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \int_0^t \varphi_1(\tau) \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right] \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)^3}} + \\ &+ \int_0^t \varphi_2(\tau) (h-y) \exp\left[-\frac{(h-y)^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right] \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)^3}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — неизвестные функции, которые должны быть определены из граничных условий (4). Переходя к изображению $\tilde{v}(y, p)$, получим выражение:

$$\tilde{v}(y, p) = \tilde{\varphi}_1(p) \tilde{L}_m(y, p) + \tilde{\varphi}_2(p) \tilde{L}_m(h-y, p). \quad (8)$$

Переход к изображению в предельных условиях (4) дает следующие выражения для $\tilde{\varphi}_1(p)$ и $\tilde{\varphi}_2(p)$:

$$\tilde{\varphi}_1(p) = \frac{\tilde{F}_1(p) - \tilde{F}_2(p) \tilde{L}_m(h, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)}, \quad \tilde{\varphi}_2(p) = \frac{\tilde{F}_2(p) - \tilde{F}_1(p) \tilde{L}_m(h, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)}, \quad (9)$$

которые в свою очередь дают для $\tilde{v}(y, p)$ следующее представление:

$$\tilde{v}(y, p) = \frac{1}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)} \left\{ \tilde{F}_1(p) [\tilde{L}_m(y, p) - \tilde{L}_m(h, p) \tilde{L}_m(h-y, p)] - \tilde{F}_2(p) [L_m(h-y, p) - \tilde{L}_m(y, p) \tilde{L}_m(h, p)] \right\}. \quad (10)$$

Здесь использована теорема смещения из теории преобразования Лапласа, гласящая, что если $F(p)$ есть изображение $f(t)$, то $F(p+a)$ есть изображение $e^{-at} f(t)$. В нашем случае, так как $e^{-y\sqrt{p/v}}$ является изображением $L(y, t)$, $\exp\left(-y\sqrt{\frac{p+m^2}{v}}\right)$ будет изображением $L_m(y, t) = e^{-m^2 t} L(y, t)$. Отсюда вытекает также, что

$$\tilde{L}_m(0, p) = 1, \quad \tilde{L}_m(h, p) = \exp\left(-h\sqrt{\frac{p+m^2}{v}}\right). \quad (11)$$

Таким образом, для оригинала $v(y, t)$ будем иметь:

$$v(y, t) = \int_0^t F_1(\tau) B_{1m}(y, t-\tau) d\tau + \int_0^t F_2(\tau) B_{2m}(y, t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

где через B_{1m} , B_{2m} обозначены оригиналы, соответствующие изображениям

$$B_{1m}(y, t) \doteq \frac{\tilde{L}_m(y, p) - \tilde{L}_m(h, p) \tilde{L}_m(h-y, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)}, \quad (13)$$

$$B_{2m}(y, t) \doteq \frac{\tilde{L}_m(h-y, p) - \tilde{L}_m(y, p) \tilde{L}_m(h, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)}. \quad (14)$$

Построение B_{1m} , B_{2m} может быть произведено двумя способами, приводящими к двум аналитическим выражениям, годящимся—одно для малых значений промежутка времени, а другое для больших значений времени t .

Подставляя в (13) и (14) явные выражения L_m , будем иметь

$$B_{1m}(y, t) \doteq \frac{\tilde{L}_m(y, p) - \tilde{L}_m(h, p) \tilde{L}_m(h-y, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)} =$$

$$= \frac{\exp\left(-y\sqrt{\frac{p+m^2}{v}}\right) - \exp\left(-(2h-y)\sqrt{\frac{p+m^2}{v}}\right)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2nh+y}{\sqrt{v}} \sqrt{p+m^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2nh-y}{\sqrt{v}} \sqrt{p+m^2}\right) \doteq -$$

$$= \frac{v}{h} e^{-m^2 t} \frac{\partial}{\partial y} \theta_3\left(\frac{y}{2h}, \frac{vt}{h^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-m^2 t} L(2nh+y, t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-m^2 t} L(2nh-y, t) =$$



$$\begin{aligned}
 &= e^{-m^2 t} L(y, t) + e^{-m^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} [L(2nh + y, t) - L(2nh - y, t)] = L_m(y, t) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [L_m(2nh + y, t) - L_m(2nh - y, t)]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Аналогично для $B_{2m}(y, t)$

$$\begin{aligned}
 B_{2m}(y, t) &\div \frac{\tilde{L}_m(h-y, p) - \tilde{L}_m(y, p) \tilde{L}_m(h, p)}{1 - \tilde{L}_m^2(h, p)} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)h-y}{\sqrt{v}} \sqrt{p+m^2}\right) - \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)h+y}{\sqrt{v}} \sqrt{p+m^2}\right) &\div \frac{v}{h} e^{-m^2 t} \frac{\partial}{\partial y} \theta_3\left(\frac{h-y}{2h}, \frac{vt}{h^2}\right) = \\
 \sum_{n=0}^{\infty} L_m[(2n+1)h-y, t] - \sum_{n=0}^{\infty} L_m[(2n+1)h+y, t].
 \end{aligned}$$

Здесь $\theta_3(v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v+n)^2}{t}\right)$ — эта функция.

Подставляя (15) и (16) в (12), получим для $v(y, t)$ выражение:

$$\begin{aligned}
 v(y, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \{F_1(\tau) L_m(2nh + y, t - \tau) + \\
 &\quad + F_2(\tau) L_m[(2n+1)h - y, t - \tau]\} d\tau, \quad (17)
 \end{aligned}$$

где суммы можно написать в виде:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_m(2nh + y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{L_m(2nh + y, t) - L_m[2(n+1)h - y, t]\}, \\
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_m[(2n+1)h - y, t] &= \sum_{n=0}^{\infty} L_m[(2n+1)h - y, t] - \sum_{n=0}^{\infty} L_m[(2n+1)h + y, t].
 \end{aligned}$$

Скорость течения слабопроводящей жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии однородного внешнего поля будет даваться формулой

$$\begin{aligned}
 u(y, t) &= v_1(y, t) + v(y, t) - f(t) = v_1(y, t) + \\
 &+ \int_0^t \{f_1(\tau) - v_1(0, \tau) + f(\tau)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_m(2nh + y, t - \tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t \{f_2(\tau) - v_1(h, \tau) + f(\tau)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_m(2nh - y, t - \tau) d\tau - f(t). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Ряды в этих интегралах очень быстро сходятся при малых значениях t .

Для больших значений времени t удобнее пользоваться другими аналитическими выражениями функций B_{1m} , B_{2m} . Вспоминая теорему сдвига, легко получить выражения:

$$B_{1m}(y, t) = \frac{2\pi\nu}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \sin \frac{k\pi(h-y)}{h} \exp \left[- \left(\frac{k^2\pi^2\nu}{h^2} + m^2 \right) t \right],$$

$$B_{2m}(y, t) = \frac{2\pi\nu}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \sin \frac{k\pi y}{h} \exp \left[- \left(\frac{k^2\pi^2\nu}{h^2} + m^2 \right) t \right] \quad (19)$$

и окончательно будем иметь

$$u(y, t) = v_1(y, t) - f(t) + \frac{2\pi\nu}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^{k+1} \int_0^t \left[F_1(\tau) \sin \frac{k\pi(h-y)}{h} + F_2(\tau) \sin \frac{k\pi y}{h} \right] \exp \left[- \left(\frac{k^2\pi^2\nu}{h^2} + m^2 \right) (t-\tau) \right] d\tau. \quad (20)$$

Для касательных напряжений на стенках будем иметь

$$\tau_{xy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u(y, p)}{\partial y} \Big|_{y=0},$$

$$\tau_{xy} \Big|_{y=h} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = \mu \frac{\partial u(y, p)}{\partial y} \Big|_{y=h}.$$

Рассмотрим случай равенства нулю начального распределения скорости $v^0(y) = 0$. Тогда (18) можно переписать в виде:

$$u(y, t) = v(y, t) - f(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^t [f_1(\tau) + f(\tau)] L_m(2nh + y, t-\tau) d\tau + \int_0^t [f_2(\tau) + f(\tau)] L_m[(2n+1)h - y, t-\tau] d\tau \right\} - f(t),$$

$$\tau_{xy} \Big|_{y=0} = \sqrt{\rho\mu} \left\{ \int_0^t [F_1'(\tau) + m^2 F_1(\tau)] \theta_3 \left[0, \frac{\nu(t-\tau)}{h^2} \right] e^{-m^2(t-\tau)} d\tau + F_1(0) e^{-m^2 t} \theta_3 \left(0, \frac{\nu t}{h^2} \right) - \int_0^t [F_2'(\tau) + m^2 F_2(\tau)] \theta_0 \left[0, \frac{\nu(t-\tau)}{h^2} \right] e^{-m^2(t-\tau)} d\tau - F_2(0) e^{-m^2 t} \theta_0 \left(0, \frac{\nu t}{h^2} \right) \right\}, \quad (21)$$

где $\theta_0 \left(0, \frac{\nu t}{h^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{(2k+1)^2 h^2}{4\nu t} \right)$.

Аналогично для напряжения на стенке $y=h$.

$$\begin{aligned} \tau_{xy}|_{y=h} = & -\sqrt{\rho\mu} \left\{ \int_0^t [F_1'(\tau) + m^2 F_1(\tau)] \theta_0 \left[0, \frac{\nu(t-\tau)}{h^2} \right] e^{-m^2(t-\tau)} d\tau + \right. \\ & + F_1(0) e^{m^2 t} \theta_0 \left(0, \frac{\nu t}{h^2} \right) - \int_0^t [F_2'(\tau) + m^2 F_2(\tau)] \theta_3 \left[0, \frac{\nu(t-\tau)}{h^2} \right] e^{-m^2(t-\tau)} d\tau - \\ & \left. - F_2(0) e^{-m^2 t} \theta_3 \left(0, \frac{\nu t}{h^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим несколько частных случаев задания граничных условий.

1. Пусть течение жидкости возникает из покоя приведением одной из плоскостей в движение, т. е. рассмотрим случай

$$A(t) = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = u_0, \quad v^0(y) = 0.$$

Тогда для скорости из (18) будем иметь два выражения:

$$\begin{aligned} u(y, t) = & u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \{ L_m[(2n+1)h-y, t-\tau] - L_m[(2n+1)h+y, t-\tau] \} d\tau, \\ u(y, t) = & u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \{ L_m[2nh+(h-y), t-\tau] - \\ & - L_m[2nh-(h-y), t-\tau] \} d\tau + u_0 \int_0^t L_m(h-y, t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Для удовлетворения граничного условия на $y=0$ нужно воспользоваться первым выражением, для удовлетворения граничного условия на $y=h$ —вторым. Эти два выражения тождественны.

Вычислим эти интегралы. Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t L_m(z, t-\tau) d\tau = \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right) \frac{z d\tau}{4\sqrt{\nu(t-\tau)^{3/2}}}.$$

Легко усмотреть, что его можно переписать в виде

$$I = \exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} - m\sqrt{t-\tau}\right)^2\right] \frac{z d\tau}{4\sqrt{\nu(t-\tau)^{3/2}}}.$$

Если ввести новую переменную интегрирования

$$\alpha = \frac{z}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} - m\sqrt{t-\tau}, \quad \frac{z d\tau}{4\sqrt{\nu(t-\tau)^{3/2}}} = d\alpha - \frac{m d\tau}{2\sqrt{t-\tau}},$$

получим

$$\begin{aligned}
 I &= \exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\alpha^2} m d\tau}{2\sqrt{t-\tau}} \right\} = \\
 &= \exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right) - \\
 &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right] \frac{m d\tau}{2\sqrt{t-\tau}},
 \end{aligned}$$

где $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ — функция ошибок.

Вычислим последний интеграл

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right) \frac{m d\tau}{2\sqrt{t-\tau}} = \\
 &= \exp\left(\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} + m\sqrt{t-\tau}\right)^2\right] \frac{m d\tau}{2\sqrt{t-\tau}}.
 \end{aligned}$$

Введем новую переменную

$$\beta = \frac{z}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} + m\sqrt{t-\tau}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right) \frac{z d\tau}{4\sqrt{\nu(t-\tau)^{3/2}}} = \\
 &= -\exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right) + I.
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{mz}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right).
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется $\int_0^t L_m[(2n+1)h+y, t-\tau] d\tau$.

Учитывая доказанное выше, (23) примет вид

$$\begin{aligned}
 u(y, t) = & \frac{u_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{m[(2n+1)h-y]}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right] + \right. \\
 & + \exp\left(\frac{m[(2n+1)h-y]}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right] - \\
 & - \exp\left(-\frac{m[(2n+1)h+y]}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)h+y}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right] - \\
 & \left. - \exp\left(-\frac{m[(2n+1)h+y]}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)h+y}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right] \right\}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Перейдем к пределу $t \rightarrow \infty$ в выражении (24). Учитывая, что $\operatorname{erfc}(x+y) = 1 - \operatorname{erf}(x+y)$, $\operatorname{erfc}(-x) = 1 + \operatorname{erf}x$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$,

будем иметь

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \left[\exp\left(\frac{my}{\sqrt{\nu}}\right) - \exp\left(-\frac{my}{\sqrt{\nu}}\right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(- (2n+1) \frac{mh}{\sqrt{\nu}}\right) = \\
 = u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{my}{\sqrt{\nu}}}{\operatorname{sh} \frac{mh}{\sqrt{\nu}}}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(- (2n+1) \frac{mh}{\sqrt{\nu}}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{mh}{\sqrt{\nu}}}.$$

Выражение (25) представляет собой скорость стационарного течения. При $m=0$ из (25) получим выражение

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} u(y, t) = \frac{u_0 y}{h}, \quad (26)$$

которое соответствует скорости стационарного течения при отсутствии магнитного поля.

Если вспомнить выражение числа Гартмана (22), будем иметь

$$\frac{m}{\sqrt{\nu}} = B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} = \frac{M}{h}.$$

Тогда (25) можно переписать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{My}{h}}{\operatorname{sh} M}. \quad (27)$$

И если сравнить (27) и (26), можно заключить, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) < \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} u(y, t).$$

Следовательно, магнитное поле при стационарном движении вызывает отклонение от линейного распределения скоростей и приводит к уменьшению скорости течения жидкости.

Если в (24) допустить, что $m=0$, получим

$$\lim_{m \rightarrow 0} u(y, t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{vt}} - \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)h+y}{2\sqrt{vt}} \right], \quad (28)$$

что совпадает с выражением скорости обычной гидродинамики.

Перепишем (24) с учетом числа Гартмана в виде

$$u(y, t) = \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(- \left[(2n+1)h-y \right] \frac{M}{h} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{vt}} - \frac{M}{h} \sqrt{-t} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left(\left[(2n+1)h-y \right] \frac{M}{h} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{vt}} + \frac{M}{h} \sqrt{-t} \right] \right\}. \quad (29)$$

Легко усмотреть, что безразмерная скорость, полученная из этого выражения, зависит от двух безразмерных величин

$$Fo_m = M^2 Fo, \quad D_{ny} = \frac{2n+1}{\sqrt{Fo}} - \frac{y}{\sqrt{vt}} = \frac{2n+1}{\sqrt{Fo}} - \frac{1}{\sqrt{Fo_y}}, \quad (30)$$

где величина $Fo = \frac{\nu t}{h^2}$ — аналогична критерию гомохронности для процессов чистой теплопроводности, так называемому критерию Фурье.

Если бы мы имели дело с теорией теплопроводности, то в критерии Фурье, вместо коэффициента вязкости, должны были брать коэффициент температуропроводности $a = \frac{\lambda}{c\rho}$, где c — удельная теплоемкость тела

(ккал/кг. град), ρ — плотность тела (кг/м³), λ — коэффициент теплопроводности (ккал/м. час. град). Такое совпадение происходит из-за равенства размерностей $[a] = [\nu]$. В теорию теплопроводности вводится также критерий Фурье для координаты $Fo_y = \frac{at}{y^2}$; этой безразмерной величине у нас будет

соответствовать $Fo_y = \frac{\nu t}{y^2}$; букву D мы снабдили двумя индексами, под-

черкивая этим ее зависимость как от n , так и от y . Критерий Фурье для нашего случая на M^2 (где M — число Гартмана) больше соответствующего критерия в теории теплопроводности. Ее мы будем называть магнитным критерием Фурье.



Подставляя безразмерные величины (30) в (29), получим:

$$\frac{u(y, t)}{u_0} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp(-D_{2n+1, y} \sqrt{F_{0m}}) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n+1, y}}{2} - \sqrt{F_{0m}} \right) + \exp \left(-D_{2n+1, y} \sqrt{F_{0m}} \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n+1, y}}{2} + \sqrt{F_{0m}} \right) \right] \right]. \quad (31)$$

При отсутствии магнитного поля $F_{0m}=0$ эта формула перейдет в формулу (29), записанную в безразмерных величинах в следующем виде:

$$\frac{u_{0\delta}(y, t)}{u_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{D_{2n+1, y}}{2}.$$

Для касательного напряжения на стенках $y=0$, $y=h$ будем иметь

$$\tau_{xy} |_{y=0} = \mu \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M}{h} \left[\exp \left(-D_{2n+1, 0} \sqrt{F_{0m}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n+1, 0}}{2} - \sqrt{F_{0m}} \right) - \exp \left(D_{2n+1, 0} \sqrt{F_{0m}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n+1, 0}}{2} + \sqrt{F_{0m}} \right) \right] + \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp \left[- \left(\frac{D_{2n+1, 0}^2}{4} + F_{0m} \right) \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\tau_{xy} |_{y=h} = \mu \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M}{h} \left[\exp \left(-D_{2n, 0} \sqrt{F_{0m}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n, 0}}{2} - \sqrt{F_{0m}} \right) - \exp \left(D_{2n, 0} \sqrt{F_{0m}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{2n, 0}}{2} + \sqrt{F_{0m}} \right) \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp \left[- \left(\frac{D_{2n, 0}^2}{4} + F_{0m} \right) \right] \right\}. \quad (33)$$

2. Пусть движение слабопроводящей жидкости происходит между перемешающимися в разные стороны параллельными стенками, перпендикулярно которым действует внешнее однородное магнитное поле. Имеем из (18)

$$A(t)=0, \quad f_1(t)=-u_1, \quad f_2(t)=u_0, \quad v_0(y)=0.$$

$$u(y, t) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t L_m [(2n+1)h - y, t - \tau] d\tau - u_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t L_m (2nh + y, t - \tau) d\tau = \quad (34)$$

$$= \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(- \left[(2n+1)h - y \right] \frac{M}{h} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h - y}{2\sqrt{\nu t}} - \frac{M\sqrt{\nu t}}{h} \right] + \exp \left(\left[(2n+1)h - y \right] \frac{M}{h} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h - y}{2\sqrt{\nu t}} + \frac{M\sqrt{\nu t}}{h} \right] \right\} -$$

$$-\frac{u_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(2nh+y)M}{h}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{2nh+y}{2\sqrt{vt}} - \frac{M}{h}\sqrt{vt}\right] + \right. \\ \left. + \exp\left(\frac{(2nh+y)M}{h}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{2nh+y}{2\sqrt{vt}} + \frac{M}{h}\sqrt{vt}\right] \right\}.$$

Предел $t \rightarrow \infty$ выражения (34) дает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(2n+1)h-y]M}{h}\right) - \\ - u_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2nh+y)M}{h}\right] = \frac{u_0 \operatorname{sh} \frac{M}{h} y - u_1 \operatorname{sh} (h-y) \frac{M}{h}}{\operatorname{sh} M}. \quad (35)$$

Если $M \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ M \rightarrow 0}} u(y, t) = \frac{u_0 + u_1}{h} y - u_1,$$

что совпадает с результатом обычной гидродинамики.

Предел $M \rightarrow 0$ в выражении (34) дает:

$$\lim_{M \rightarrow 0} u(y, t) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{vt}} - u_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{2nh+y}{2\sqrt{vt}},$$

которое совпадает с выражением скорости обычной гидродинамики.

Если ввести безразмерные величины (30), выражение (34) можно переписать в виде:

$$u(y, t) = \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp(-D_{2n+1, y} \sqrt{F_{0m}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{D_{2n+1, y}}{2} - \sqrt{F_{0m}}\right) + \right. \\ \left. + \exp(D_{2n+1, y} \sqrt{F_{0m}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{D_{2n+1, y}}{2} + \sqrt{F_{0m}}\right) \right\} - \\ - \frac{u_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp(-D_{2n, y} \sqrt{F_{0m}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{D_{2n, y}}{2} - \sqrt{F_{0m}}\right) + \right. \\ \left. + \exp(D_{2n, y} \sqrt{F_{0m}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{D_{2n, y}}{2} + \sqrt{F_{0m}}\right) \right\}.$$

Аналогично предыдущему можно вычислить касательные напряжения на стенках $y=0$ и $y=h$.

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M}{h} \exp[-(2n+1)M] \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)h}{2\sqrt{vt}} - \frac{M\sqrt{vt}}{h}\right] - \right.$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\left[\frac{(2n+1)^2 h^2}{4 \nu t} + \frac{M^2 \nu t}{h^2}\right]\right) - \\
 & - \frac{M}{h} \exp[(2n+1) M] \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1) h}{2 \sqrt{\nu t}} + \frac{M \sqrt{\nu t}}{h} \right] + \\
 & + \frac{u_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M}{h} e^{-2nM} \operatorname{erfc} \left[\frac{2nh}{2 \sqrt{\nu t}} - \frac{M}{h} \sqrt{\nu t} \right] - \right. \\
 & - \frac{M}{h} e^{-2nM} \operatorname{erfc} \left[\frac{2nh}{2 \sqrt{\nu t}} + \frac{M \sqrt{\nu t}}{h} \right] + \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{\nu t} + \frac{M^2 \nu t}{h^2}\right) \Big\}, \\
 \tau_{xy}|_{y=h} = & \frac{u_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M}{h} e^{-2nM} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nh}{2 \sqrt{\nu t}} - \frac{M}{h} \sqrt{\nu t} \right) - \right. \\
 & - \frac{M}{h} e^{2nM} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nh}{2 \sqrt{\nu t}} + \frac{M \sqrt{\nu t}}{h} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{4n^2 h^2}{4 \nu t} + \frac{M^2 \nu t}{h^2}\right) \Big\} + \\
 & + \frac{u_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{M}{h} e^{-(2n+1)M} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1) h}{2 \sqrt{\nu t}} - \frac{M \sqrt{\nu t}}{h} \right] + \right. \\
 & + \frac{M}{h} e^{(2n+1)M} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1) h}{2 \sqrt{\nu t}} + \frac{M \sqrt{\nu t}}{h} \right] \Big\} + \\
 & + \frac{2}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left\{-\left[\frac{(2n+1)^2 h^2}{4 \nu t} + \frac{M^2 \nu t}{h^2}\right]\right\}.
 \end{aligned}$$

3. Рассмотрим задачу о течении жидкости у подвижной стенки, когда на бесконечности жидкость покоится. Предельные условия при этом суть

$$u(y, 0) = 0, \quad u(0, t) = f_1(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad A(t) = 0. \quad (36)$$

Ищем решение (1), удовлетворяющее условию (36), в виде

$$u(y, t) = \int_0^t \varphi(\tau) L_m(y, t-\tau) d\tau. \quad (37)$$

Здесь $L_m(y, t) = e^{-m^2 t} L(y, t)$, и решение для этого случая будет иметь вид:

$$u(y, t) = \int_0^t f_1(\tau) \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right) \frac{y d\tau}{2 \sqrt{\pi \nu(t-\tau)^3}}. \quad (38)$$

Для касательного напряжения на стенке $y=0$ имеем:

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \mu \int_0^t f_1(\tau) e^{-m^2(t-\tau)} \frac{d\tau}{2 \sqrt{\pi \nu(t-\tau)^3}}. \quad (39)$$

Если стенка мгновенно приводится в движение постоянной скоростью, будем иметь

$$f_1(t) = u_0 = \text{const}$$

$$u(y, t) = u_0 \int_0^t \exp \left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)} - m^2(t-\tau) \right] \frac{y d\tau}{2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)^3}}, \quad (40)$$

или

$$u(y, t) = \frac{u_0}{2} \left\{ \exp \left(-\sqrt{\frac{F_{0m}}{F_{0y}}} \right) \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0y}}} - \sqrt{F_{0m}} \right) + \right. \\ \left. + \exp \left(\sqrt{\frac{F_{0m}}{F_{0y}}} \right) \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0y}}} + \sqrt{F_{0m}} \right) \right\}. \quad (41)$$

В пределе $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \exp \left(-\frac{M_y}{h} \right) = u_0 \exp \left(-\sqrt{\frac{F_{0m}}{F_{0y}}} \right),$$

что совпадает со стационарным случаем аналогичной задачи.

Для касательного напряжения имеем

$$\tau_{xy}|_{y=0} = -\mu \frac{u_0 h}{M} \left\{ \sqrt{F_{0m}} \text{erf} \sqrt{F_{0m}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-F_{0m}} \right\} \sqrt{F_{0m}} = \\ = -\mu u_0 \left\{ \frac{M}{h} \text{erf} \frac{M}{h} \sqrt{\nu t} + \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp \left(-\frac{M^2 \nu t}{h^2} \right) \right\}. \quad (42)$$

Этот результат был получен Россоу иным путем (3).

Пусть движение слабопроводящей жидкости происходит при наличии перепада давления между двумя неподвижными параллельными плоскостями, перпендикулярно которым действует постоянное внешнее магнитное поле. Из (2) имеем

$$u(y, 0) = v^0(y), \quad u(0, t) = u(h, t) = 0,$$

а из (18)

$$u(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^h v^0(\eta) \exp \left(-\frac{(\eta-y)^2}{4\nu t} - m^2 t \right) d\eta - f(t) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t \{ [f(\tau) - v_1(0, \tau)] L_m(2nh + y, t - \tau) + \\ + [f(\tau) - v_1(h, \tau)] L_m[(2n+1)h - y, t - \tau] \}. \quad (43)$$

Если движение жидкости начинается с покоя, то $v^0(y) = 0$ и (43) даст:

$$u(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t \{ f(\tau) L_m(2nh + y, t - \tau) + \\ + L_m[(2n+1)h - y, t - \tau] \} d\tau - f(t), \quad (44)$$



и если перепад давления постоянен $A(t) = A_0 = \text{const}$, то получим

$$\begin{aligned}
 u(y, t) = & \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(2nh+y)m}{\sqrt{\nu}} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nh+y}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t} \right) \right] + \right. \\
 & + \exp \left(\frac{(2nh+y)m}{\sqrt{\nu}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{2nh+y}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t} \right) - \\
 & - \exp \left\{ \frac{[(2n+1)h-y]m}{\sqrt{\nu}} \right\} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t} \right] - \\
 & \left. - \exp \left(\frac{[(2n+1)h-y]m}{\sqrt{\nu}} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t} \right] \right\} - \frac{A_0}{m^2} (1 - e^{-m^2 t}). \quad (45)
 \end{aligned}$$

И если перейти в этих выражениях к пределу $t \rightarrow \infty$, получим:

$$\begin{aligned}
 \lim u(y, t) = & \frac{A_0}{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(-\frac{m(2nh+y)}{\sqrt{\nu}} \right) - \exp \left(-\frac{m[(2n+1)h-y]}{\sqrt{\nu}} \right) \right\} - \\
 & - \frac{A_0}{m^2} = \frac{A_0 h}{M^2 \nu} \left[\frac{\operatorname{sh} M \frac{y}{h} + \operatorname{sh} \frac{M}{h} (h-y)}{\operatorname{sh} M} - 1 \right],
 \end{aligned}$$

что соответствует скорости стационарной задачи.

Если $m=0$, мы получим скорость движения жидкости при отсутствии магнитного поля

$$u(y, t) = A_0 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \frac{2nh+y}{2\sqrt{\nu t}} - \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)h-y}{2\sqrt{\nu t}} \right] - 1 \right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $A(t)$ — неизвестная функция. Ищем решение уравнения (1) в виде:

$$u(y, t) = \int_0^t \varphi(\tau) L_m(y, t-\tau) d\tau - \int_0^t A(\tau) e^{-m^2(t-\tau)} d\tau. \quad (46)$$

Для определения двух неизвестных функций $\varphi(t)$ и $A(t)$ воспользуемся предельными условиями:

$$u(0, t) = f_1(t), \quad u(h, t) = f_2(t), \quad u(y, 0) = 0. \quad (47)$$

Записав (46) — (47) в изображениях, будем иметь:

$$\tilde{u}(y, p) = \tilde{\varphi}(p) \tilde{L}_m(y, p) - \frac{\tilde{A}(p)}{p+m^2} = \tilde{\varphi}(p) \tilde{L}(y, p+m^2) - \frac{\tilde{A}(p)}{p+m^2}. \quad (48)$$

Удовлетворив (47), получим

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{\tilde{f}_1(p) - \tilde{f}_2(p)}{1 - \tilde{L}_m(h, p)}, \quad \frac{\tilde{A}(p)}{p+m^2} = \frac{\tilde{f}_1(p) - \tilde{f}_2(p) - \tilde{L}_m(h, p)}{1 - \tilde{L}_m(h, p)}. \quad (49)$$

Восстанавливая скорость $u(y, t)$, имеем

$$\begin{aligned}
 u(y, t) = & \int_0^t f_1(\tau) L_m(y, t-\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_1(\tau) [L_m(nh+y, t-\tau) - L_m(nh, t-\tau)] d\tau + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_2(\tau) [L_m(nh, t-\tau) L_m(nh+y, t-\tau)] = \int_0^t f_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \{L_m[nh-(h-y), t-\tau] - \\
 & - L_m(nh, t-\tau)\} d\tau + \int_0^t f_2(\tau) L_m(h-y, t-\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_2(\tau) \{L_m(nh, t-\tau) - L_m[nh-(h-y), t-\tau]\} d\tau. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Последнее выражение записано в двух различных формах, в зависимости от того, какое граничное условие требуется проверить.

Для $A(t)$ будем иметь

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_1(\tau) L_m(nh, t-\tau) d\tau - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_2(\tau) L_m(nh, t-\tau) d\tau. \quad (51)$$

Интересно рассмотреть несколько частных случаев задания граничных условий.

Пусть нижняя стенка покоится, а верхняя движется с постоянной скоростью u_0 . Найдем скорость течения и возникший при этом перепад давления. Из (50) и (51) будем иметь

$$\begin{aligned}
 u(y, t) = & u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [L_m(nh, t-\tau) - L_m(nh+y, t-\tau)] d\tau = \\
 = & \frac{u_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{mnh}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right) + \right. \\
 & + \exp\left(\frac{mnh}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right) - \\
 & - \exp\left(-\frac{m(nh+y)}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh+y}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right) - \\
 & \left. - \exp\left(\frac{m(nh+y)}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh+y}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right) \right\}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(t) = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{mnh}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh}{2\sqrt{\nu t}} - m\sqrt{t}\right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(\frac{mnh}{\sqrt{\nu}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{nh}{2\sqrt{\nu t}} + m\sqrt{t}\right) \right\}. \quad (53)
 \end{aligned}$$

В пределе $t \rightarrow \infty$ эти выражения дают

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{My}{h}\right)}{1 - e^{-M}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{-u_0}{1 - e^{-M}}.$$

Отсюда видно, что магнитным полем можно управлять движением жидкости.

(Представлено 20. V. 71)

Кафедра механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер, Магнитогидродинамические течения в каналах. М., 1970.
2. А. Г. Рябинин и А. И. Хожайнов, ЖТФ, 37, в. 2, 1967.
3. V. J. Rossow, NASA Report. 1358, 1957.

ჯ. შარიქაძე

მაგნიტურ ველში მოთავსებულ სუსტადგამტარი სითხის
 ერთგანზომილებიან არასტაციონარულ ამოცანათა
 ამოხსნის ერთი მეთოდის შესახებ

რეზიუმე

სუსტადგამტარი სითხის არასტაციონარული ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შესწავლისათვის გამოყენებულია ფუნდამენტალური ამოხსნისა და ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის კომბინირებული მეთოდი.

УСТРОЙСТВО ВВОДА ИНФОРМАЦИИ С БУМАЖНОЙ ПЕРФОЛЕНТЫ В ЭВМ «РАЗДАН-2»

Н. С. АМАГЛОБЕЛИ, Ц. И. ИОСЕЛИАНИ, Д. Ф. КЕЛЬБАЛИХАНОВ,
Л. Ш. МАРКОЗАШВИЛИ, О. С. ШУДРА, Г. А. ЭРИСТАВИ

В научно-исследовательской лаборатории ядерной физики ТГУ для обработки экспериментальных данных, полученных с полуавтоматической установки для обмера снимков с пузырьковых камер [1] на ЭВМ „Раздан-2“, возникла необходимость создания устройства, осуществляющего ввод этих данных в машину [2].

Существующий универсальный ввод в машину „Раздан-2“ осуществляется 7-дорожечной кинолентой шириной 35 мм с помощью фотосчитывающего устройства.

Информация, полученная с полуавтоматических установок, записы-

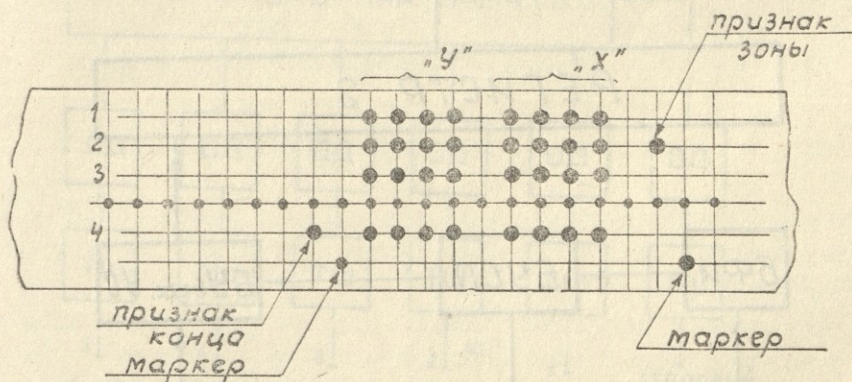


Рис. 1. Расположение одного числа на бумажной перфоленте.

вается на стандартной бумажной перфоленте шириной 17,5 мм. Каждая координата на бумажной перфоленте занимает один кадр. Полный кадр расположен на 12-ти строках (в строке 4-ой дорожки). В одном кадре на ленте может располагаться одно 36-разрядное число с дополнительными признаками (рис. 1). Для введения этой перфоленты в ЭВМ „Раздан-2“ пришлось внести изменения в „магнитном регистре“ полуавтоматической установки, с помощью которых получили дополнительную дорожку синхроимпульсов (рис. 2); причем для логики устройства синхроимпульсы



пробивались в тех местах, где записаны исходные данные; свободные синхроимпульсы строки предназначены для служебных признаков.

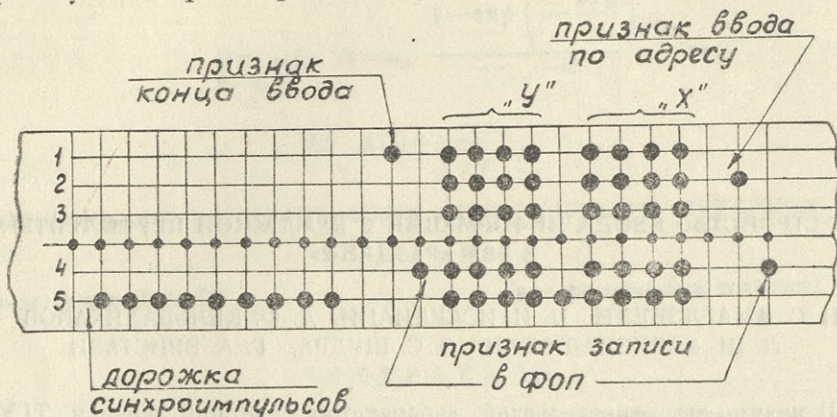


Рис. 2. Расположение одного числа на бумажной перфоленте для ввода в ЭЦВМ „Раздан-2“.

Для записи координат одной точки используется девять строк: четыре строки для записи значения „х“-координаты, четыре—для „у“.

В первой строке 1-го кадра на 2-ой дорожке пробит признак начала зоны, используемый для ввода информации по адресу; для разворота чис-

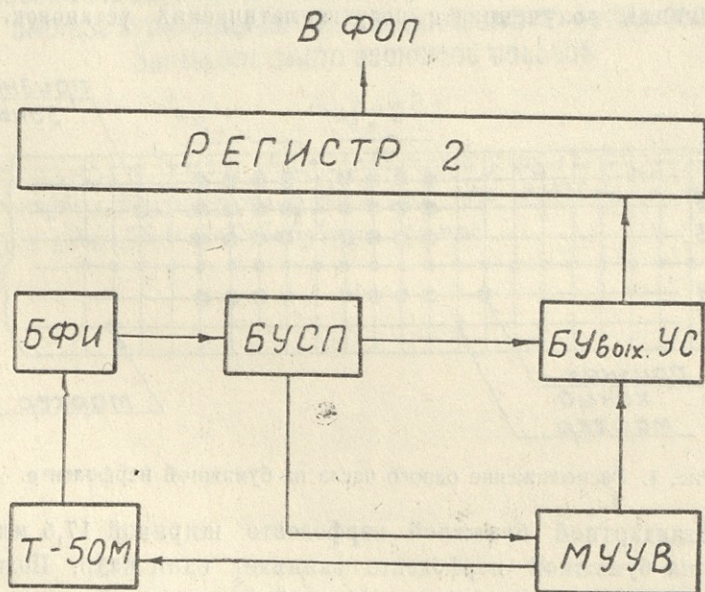


Рис. 3. Блок-схема устройства управления вводом информации.

ловой информации на 9-ти строках каждого кадра в местах записи исходных данных пробиваются синхроимпульсы; в каждом кадре на 4-ой дорожке 12-ой строки пробивается маркерный признак, который использует-

ся для записи числа с регистра машины (Рг-2) в ее ферритовую оперативную память.

Созданное местное устройство управления вводом информации в ЭВМ „Раздан-2“ представляет собой унифицированную схему, которая может работать как с механическим считывающим устройством-трансмисмиттером, так и с фототрансмисмиттером.

Для работы устройства ввода с механическим трансмисмиттером разработан дополнительный блок формирования импульсов. Блок-схема устройства управления вводом информации в ЭВМ „Раздан-2“ представлена на рис. 3. Основные узлы устройства управления:

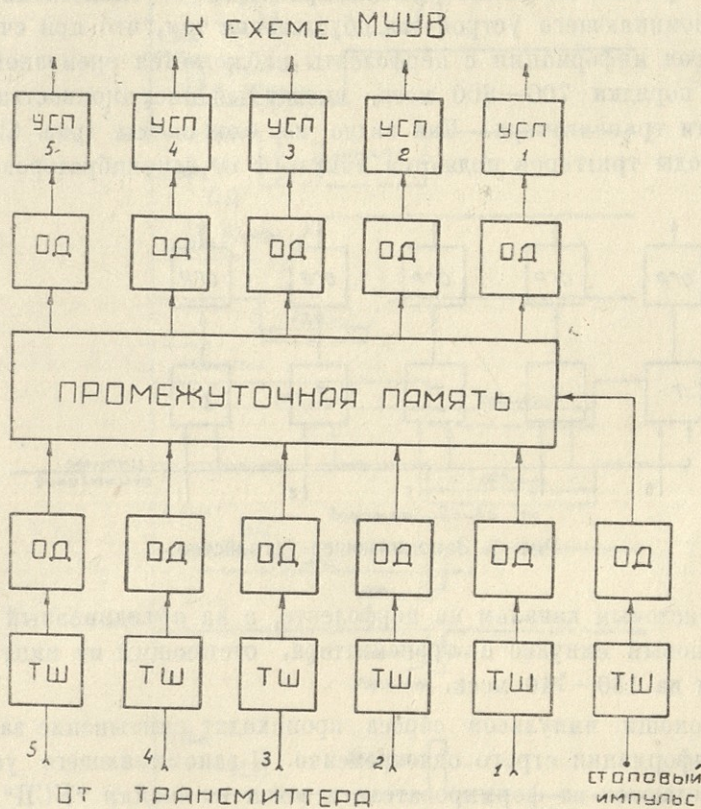


Рис. 4. Блок-схема устройства формирования импульсов.

- 1) механическое считывающее устройство,
- 2) блок формирования импульсов,
- 3) местное устройство управления вводом.

Механическим считывающим устройством является трансмисмиттер Т-50 МС, преобразующий информацию, нанесенную на бумажной перфоленте, в электрические импульсы. Считывание информации с бумажной перфоленты трансмисмиттером производится параллельно-последовательно.



УДК 621.372.6
ЭВМ 1983

Импульсы, получаемые с трансмиттера, представляют собой импульсы с колебаниями на фронте и на срезе. Следовательно, для последующей передачи в устройство управления вводом необходимо сформировать эти импульсы.

Схема формирования импульсов дана на рис. 4. На входе ее расположены триггеры Шмитта, формирующие фронты импульсов.

Затем импульсы подаются на одновибраторы, вырабатывающие импульсы длительностью 60 мсек, перекрывающие дребезг контактов трансмиттера.

С одновибраторов импульсы подаются на запоминающее устройство (рис. 5.), собранное на симметричных триггерах с усилителями. Необходимость запоминающего устройства обусловлена тем, что при считывании трансмиттером информации с перфоленты наблюдается временной разброс импульсов порядка 700—800 мсек, вызванный инерционностью механической части трансмиттера. Как видно из блок-схемы (рис. 5), на отдельные входы триггеров подаются импульсы от одновибраторов, соответ-

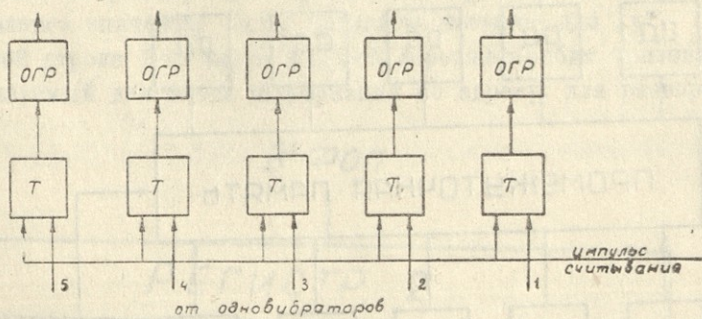


Рис. 5. Запоминающее устройство.

ствующих числовым каналам на перфоленте, а на объединенный вход подается «стоповый» импульс с трансмиттера, отстающий от импульса числовой серии на 130—140 мсек.

При помощи импульсов сброса происходит считывание записанной в память информации строго одновременно. С запоминающего устройства импульсы подаются на формирователи и затем на ячейки «УСП», дающие импульсы амплитудой 9,5 в, длительностью 600 мсек.

Временная диаграмма устройства формирования приведена на рис. 6.

Сформированные импульсы подаются на местное устройство управления вводом (рис. 7). Это устройство запускается от генератора одиночных импульсов (ГОИ) при нажатии кнопки «ввод» на пульте управления ЭВМ «Раздан-2».

Полученный в устройстве управления импульс 5-1 запускает через «триггер пуска» трансмиттер (терминология обозначения импульсов заимствована из технического описания ЭВМ «Раздан-2»).

В местном устройстве управления вводом формируется импульс 5-4, который стробируется потенциалами от УСП на клапанах выходных усилителей, откуда импульсы одновременно подаются на 1-4 разряды регистра Рг-2 ЭВМ „Раздан-2“.

От дорожки синхримпульсов вырабатываются импульсы 5-4, при

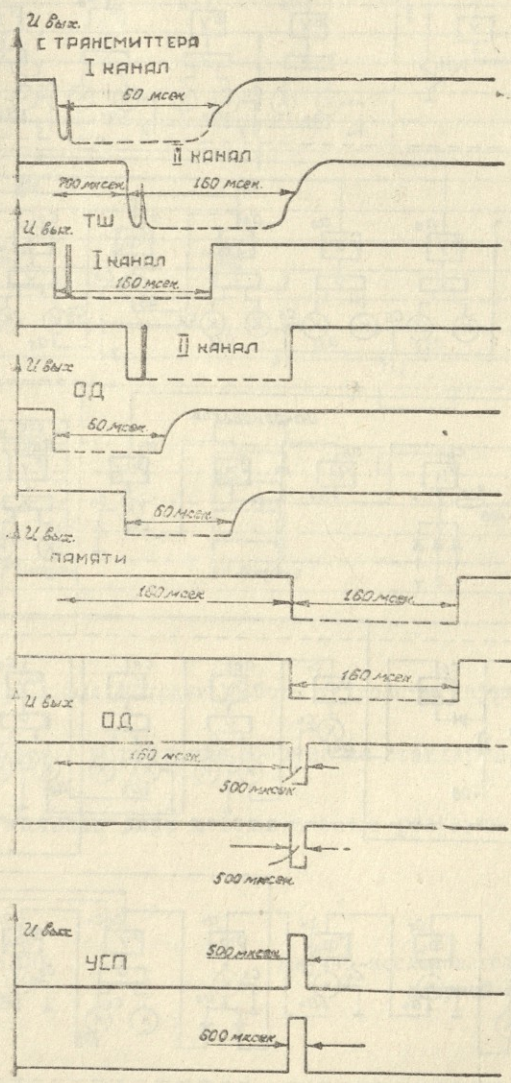


Рис. 6. Временная диаграмма работы блока формирования импульсов.

посылке которых в машину „Раздан-2“ она высылает 3 сдвинутых друг относительно друга (на 4 мсек) импульса серии 2в: 2в-2, 2в-4, 2в-6. В итоге получается импульс 5-6, производящий сдвиги в Рг-2 и разворот числа в 36 разрядов.



Устройство управления вырабатывает основные управляющие импульсы:

1) по служебному признаку — маркер, который пробит в каждом кадре, и импульс 5—3, производящий запись информации с Рг-2 в оперативную

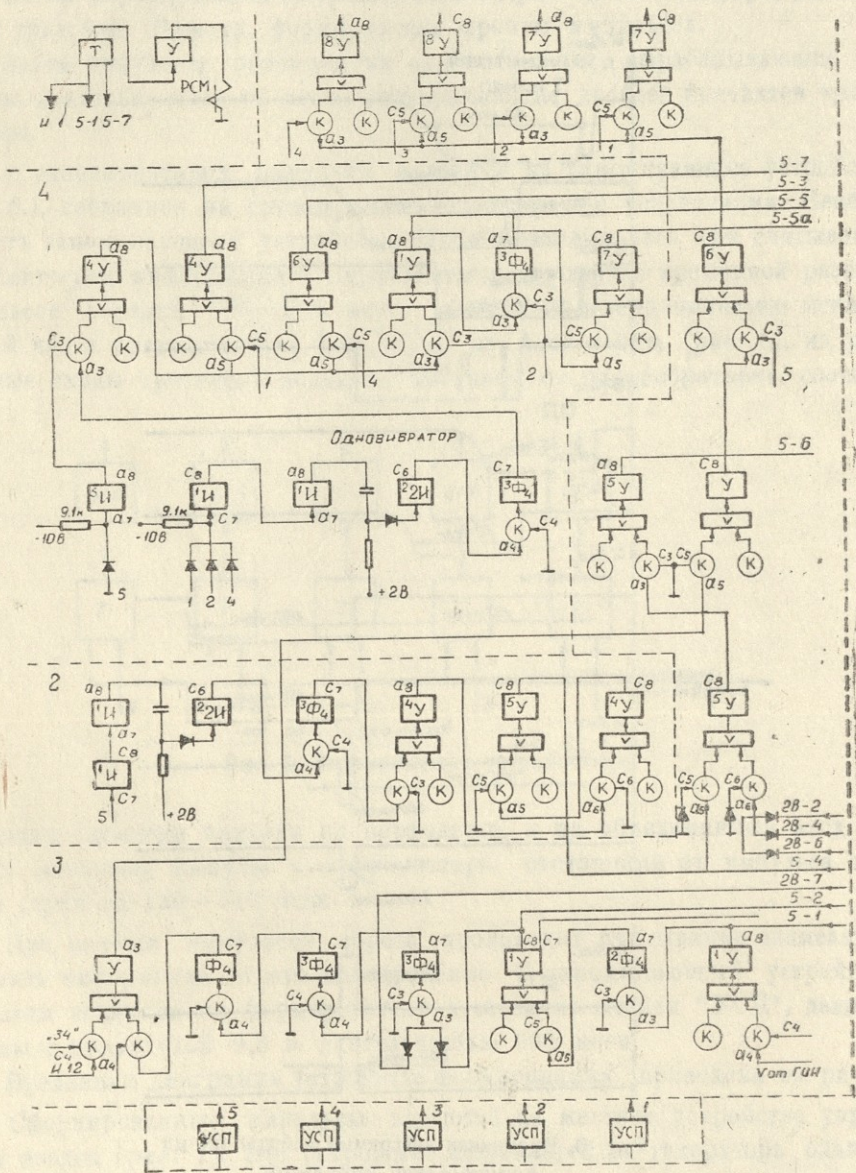


Рис. 7. Схема местного устройства управления вводом.

память машины; 2) по признаку начала зоны — импульс ввода информации по адресу 5—5, 5—5а, 3) по признаку конца массива — конец ввода 5—7, который выключает трансмиттер.

Управляющие импульсы имеют амплитуду $6 \div 8$ вольт, длительность $0,8 \div 2$ мсек.

Временная диаграмма работы устройства управления дана на рис. 8.

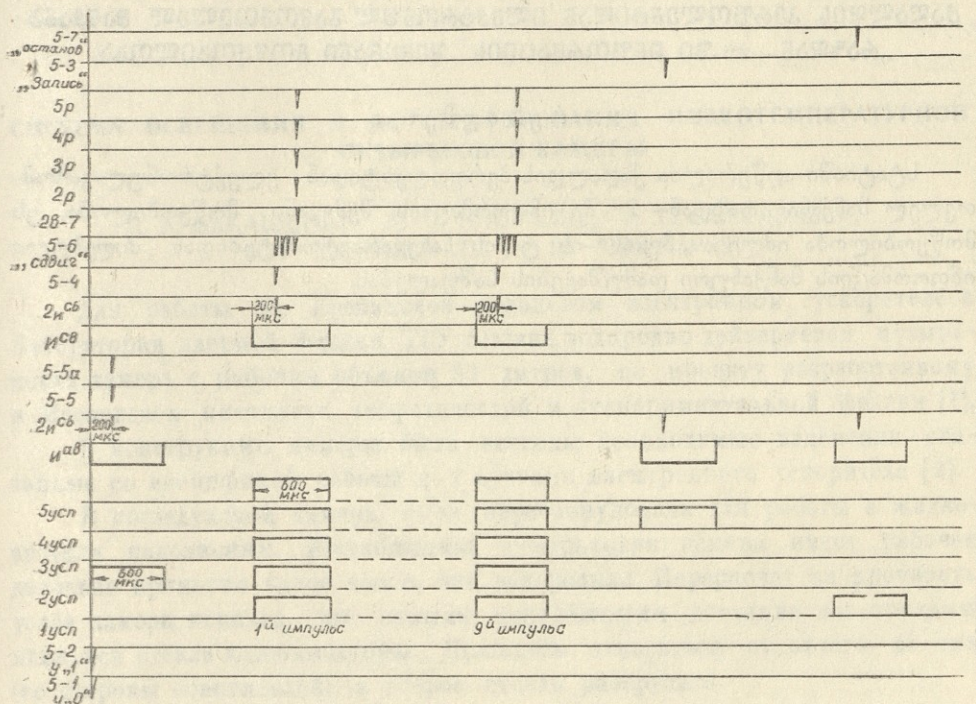


Рис. 8. Временная диаграмма работы устройства управления.

Местное устройство управления собрано на стандартных ячейках ЭВМ "Раздан-2".

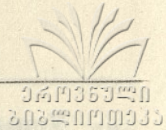
Испытания установки дали положительные результаты.

(Представлено 2. X. 1970)

Научно-исследовательская лаборатория
ядерной физики

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Алмазов, И. А. Голутвин, В. Д. Инкин, Ю. А. Каржавин, В. Д. Неустроев, В. Д. Степанов, Препринт ОИЯИ, № 1352, Дубна, 1963.
2. О. К. Нефедьев, Р. К. Сиколенко, В. В. Федорин, Препринт ОИЯИ, № 1871, Дубна, 1964.



ნ. ამაღლობელი, ც. იოსელიანი,
დ. კელბალიხანოვი, ლ. მარაოჯაშვილი,
ო. შუღრა, ბ. პრისტავი

**ქაღალდის პერფორენტიდან ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანა
„რაზდან—2“-ში ინფორმაციის შემყვანი მოწყობილობა**

რეზიუმე

სტატიაში აღწერილია ქაღალდის პერფორენტიდან ელექტრონულ-გამომ-
თვლელ მანქანა „რაზდან—2“-ში ინფორმაციის შემყვანი მოწყობილობა. ეს
მოწყობილობა იძლევა „პუოს“-ის ტიპის ნახევარავტომატებიდან მიღებულ
ინფორმაციის მანქანური დამუშავების საშუალებას.

СИСТЕМА ОСВЕЩЕНИЯ И ФОТОГРАФИРОВАНИЯ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЫ

Д. А. БАКАШВИЛИ, М. С. НИОРАДЗЕ, Р. Г. САЛУКВАДЗЕ,
Ф. Г. ТАТРИШВИЛИ, В. Ш. ШВАРЦМАН

Для работы на Ереванском кольцевом электронном ускорителе в Лаборатории ядерной физики ТГУ создана водородно-дейтериевая пузырьковая камера с рабочим объемом 80 литров, по проекту разработанному в Московском институте теоретической и экспериментальной физики [1].

В конструкцию камеры были внесены необходимые изменения, связанные со спецификой работы с γ пучками электронного ускорителя [2].

В последующем камера была переоборудована для работы в жидкоазотном наполнении. Жидкоазотная пузырьковая камера имеет рабочее давление примерно вдвое выше, чем водородная. Перерасчет на прочность узлов камеры показал, что самыми ненадежными деталями конструкции являются стекла-иллюминаторы. Пришлось отказаться от одного из них (со стороны осветителей), а второе стекло разгрузить.

С этой целью был изготовлен передний конус водородного термостата, рассчитанный на рабочее давление 10 ат. Подверглась изменению и вся термостатирующая система камеры. В отверстие электромагнита, где должна была находиться осветительная система, были помещены железные блоки для улучшения однородности магнитного поля в рабочем объеме камеры (рис. 1).

Через камеру, по диаметру, проходит 20 миллиметровая нержавеющая труба для чистых газовых мишеней (H_2 , D_2 , He, Ne), позволяющая пропустить через камеру интенсивный γ -пучок ($10^5 + 10^6$) экв. γ /имп [2].

Заново были разработаны системы фотографирования и освещения. Для фотографирования камеры была создана трехобъективная стереофотокамера (СФК) с пневматическим лентопротяжным механизмом. В СФК использованы три объектива „Руссар-Плазмат Т-2“ с фокусным расстоянием 150 мм и углом поля зрения 60° . Объективы крепятся на общем массивном корпусе, отлитом из дюрала. Оптические оси объективов проходят перпендикулярно ($90^\circ \pm 0,5^\circ$) плоскостям пленок через вершины равнобедренного треугольника со стороной ($226 \pm 0,1$) мм. Фотографирование ведется на трех отдельных неперфорированных аэрофотопленках шириной 50 мм.

В кассете помещается 150 метров пленки. Перезарядка производится на свету и для трех кассет требуется время менее 20 сек.

Средний масштаб фотографирования составляет 1:9. Размеры кадра 60×50 мм². На одной пленке размещается около 2000 кадров.

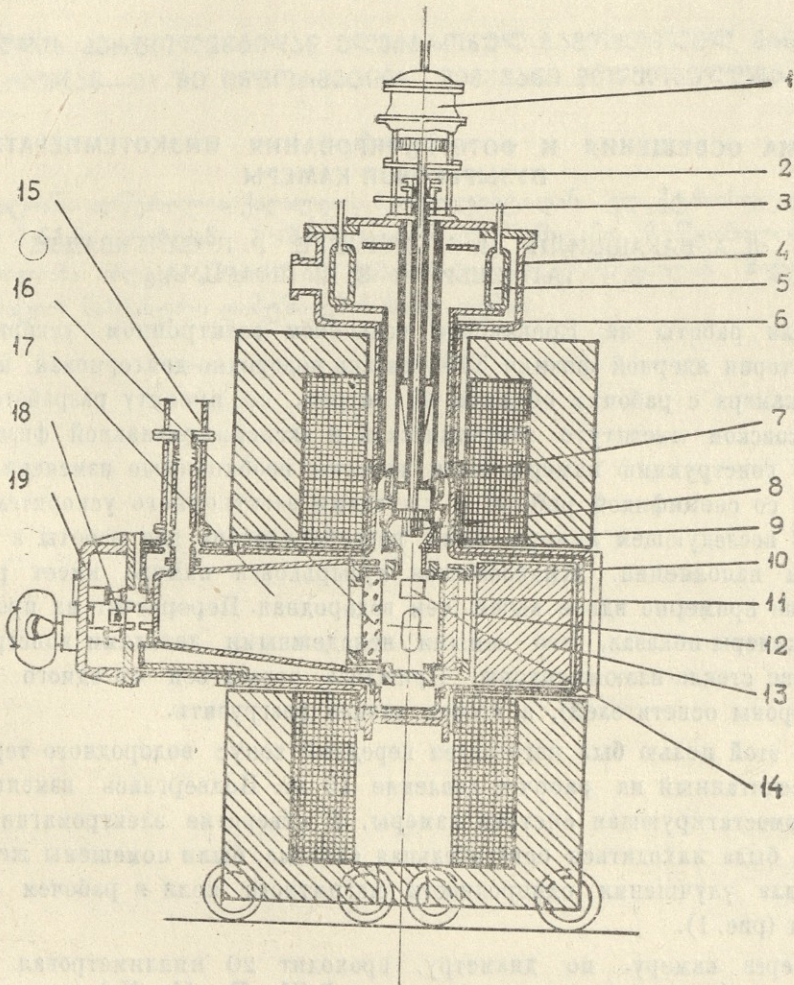


Рис. 1. Общий вид водородной пузырьковой камеры:

1—пневматический привод, 2—шток, 3—прокладка из графитизированного фторопласта, 4—вакуумный кожух, 5—резервуар для жидкого азота, 6—медный радиационный экран, 7, 9, 14—теплообменники, 8—поршень, 10—комбинированная прокладка, 11, 16—иллюминаторы, 12—отражатель, 13—блок магнитного железа, 15—аварийный сброс, 17—предохранительный конус, 18—импульсные лампы, 19—стереофотокамера.

Рядом с изображением камеры, во всю ширину пленки, впечатывается служебная информация, состоящая из стоп-признака для измерительного или просмотрочного прибора, номера объектива, номера кадра и т. д. [3; 4].

Осветительная система светлополная. В качестве отражающей поверхности используется отражатель с зернистым растром—„скотчлайт“, широко применяемый в последнее время. Отражение падающего света в „скотчлайте“ происходит в малом телесном угле, изменение интенсивности света при отражении незначительное, а отражательная способность света очень высокая [5]. Известно, что диаметр стеклянных шариков „скотчлайта“ равен $20 \div 60$ мк, поэтому на снимках зернистость светлого фона не обнаруживается. Расходимость падающего и отраженного лучей не более $(1 \div 2)$ градусов. Свойства отражателя остаются неизменными до угла падения 60° .

С целью получения характеристик систем освещения и фотографирования была изготовлена модель натуральной величины. Имитация следов производилась с помощью медных проволок диаметром $0,1 \div 0,15$ мм, натянутых в разных направлениях в рабочем объеме.

Был сконструирован осветитель специальной формы (рис. 2).

Он состоит из панели, изготовленной из оргстекла, на которой крепятся по 6 ламп типа ИФК-120 и дюралевого кольцевого цилиндра с полированной внутренней поверхностью параболической формы в радиальном сечении. Три лампы, расположенные симметрично под углом 120° ,

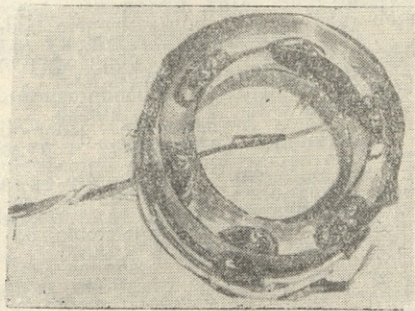


Рис. 2.

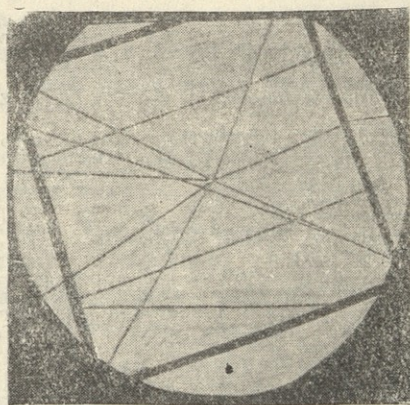


Рис. 3.

соединены вместе. В каждом осветителе по две таких триады. Работает одна триада, вторая же—резервная, во избежание простоя при выходе из строя работающей. Осветители надеваются на оправы объективов и крепятся к корпусу СФК не касаясь объективов.

Использование описанной осветительной системы позволило полностью избавиться от раздвоения изображений фотографируемых объектов для следов, расположенных вдали от „скотчлайта“, или получить заметное различие между изображениями объекта и его тени—вблизи него (рис. 3).

(Представлено 28. 12. 1970)

Научно-исследовательская
лаборатория ядерной
физики



ЛИТЕРАТУРА

1. М, С. Айнутдинов, Г. В. Бекетов, С. М. Замбковский, Б. С. Коновалов, С. Д. Седойкин, Я. М. Селектор, А. М. Степанов, В. Н. Шуляченко, ПТЭ, 1968, № 2, стр. 47.
2. Д. Л. Бакашвили, М. С. Ниорадзе, Р. Г. Салуквадзе, В. Ш. Шварцман, ПТЭ, 1969, № 5, стр. 55.
3. Д. Л. Бакашвили, Р. Г. Салуквадзе, В. Ш. Шварцман, Материалы рабочего совещания по технике пузырьковых камер, Дубна, 1969.
4. Д. Л. Бакашвили, Р. Г. Салуквадзе, М. К. Шапиро, В. Ш. Шварцман, Оптико-механическая промышленность, № 6, Ленинград, 1969.
5. Е. О. Пюйтт, 12-я Международная конференция по физике высоких энергий, Дубна, 1964.

ჯ. ბაკაშვილი, მ. ნიორაძე, რ. სალუქვაძე,

ფ. თათრიშვილი, ვ. შვარცმანი

დაბალტემპერატურიანი ბუშტოვანი კამერის განათების და ფოტოგრაფირების სისტემა

რეზიუმე

შრომში აღწერილია 80-ლიტრიანი დაბალტემპერატურიანი ბუშტოვანი კამერის ფოტოგრაფირების სისტემა.

მუშა მოცულობის ფოტოგრაფირებისათვის დამზადდა სპეციალური სამობიექტივიანი სტერეოფოტოაპარატი. კონსტრუირებულ იქნა პნევმატური ფირგადამხვევი მექანიზმი, რომელმაც გვიჩვენა მუშაობის მაღალი საიმედოობა.

ფოტოგრაფირების დროს, რომელიც წარმოებდა ბუშტოვანი კამერის ნატურალური ზომის მოდელზე, გამოყენებული იყო ნათელფონიანი ზედაპირი ე. წ. „სკოტჩლაიტი“ — (უკუამრეკლავი ეკრანი). დადგენილ იქნა, რომ თუ კამერის მოცულობის განათებას ვაწარმოებთ სინათლის რგოლური წყაროთი, მაშინ ობიექტის გამოსახულების გაორება, რომელსაც საერთოდ ადვილი აქვს უკუამრეკლავი ეკრანის გამოყენებისას, უმნიშვნელოა და მუშაობაში დაბრკოლებას არ წარმოადგენს.

О ЗАКОНЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. С. КИРИЯ

§ 1. Введение. Согласно специальной теории относительности (СТО), скорости материальных объектов ограничены сверху скоростью света c . Это положение, следуя М. Борну, мы будем называть „законом $v < c$ “ [1]. Наличие верхнего предела для всех скоростей в природе является фундаментальным свойством материи, оказывающим существенное влияние на закономерности ее движения.

Иная ситуация имеется в общей теории относительности (ОТО). Как указывает М. Борн, „применение закона $v < c$ полностью ограничено пределами специальной теории относительности“, а в присутствии поля тяготения „скорости либо материальных тел, либо света могут принимать любые численные значения“ [1].

Как будет показано ниже, это утверждение является ошибочным.

Закон $v < c$ в СТО является следствием законов преобразования скорости и ускорения, отвечающих лоренцовым преобразованиям пространственно-временных интервалов однородного (плоского) 4-пространства. Заключение об отсутствии закона $v < c$ в присутствии гравитационного поля (G -поля), очевидно, было сделано из-за отсутствия законов преобразования скорости и ускорения в ОТО, отвечающих преобразованию пространственно-временных интервалов неоднородного (искривленного G -полем) 4-пространства. Однако в наших работах [2, 3, 4, 5] были введены формулы преобразования скорости и ускорения в ОТО. Там было указано на возможность обобщения понятия гиперболического движения СТО на любые движения, рассматриваемые в ОТО.

Целью настоящей работы является показать, что применение введенных нами формул преобразования скорости и ускорения в ОТО приводит, вопреки существующему до сих пор мнению, к справедливости закона $v < c$ и при наличии G -поля, а также при движении точки с любым ускорением.

§ 2. О понятии гиперболического движения в СТО. Предельный характер движения доказывается в СТО в случае равноускоренного движения.

Равноускоренным, или гиперболическим движением в СТО называют



такое движение, при котором движущаяся точка в каждый момент времени имеет постоянное ускорение относительно мгновенно сопутствующей системы отсчета (СО).

Законы прямолинейного гиперболического движения содержатся в лоренцевских преобразованиях ускорения, имеющих вид

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{a}_x &= \beta^3 \left(1 + \frac{v_x \overset{\circ}{V}}{c^2}\right)^{-3} a_x, & \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\overset{\circ}{V}}{c}\right)^2}, \\ \overset{\circ}{a}_y &= \beta^2 \left(1 + \frac{v_x \overset{\circ}{V}}{c^2}\right)^{-2} a_y - \beta^2 \frac{v_y \overset{\circ}{V}}{c^2} \left(1 + \frac{v_x \overset{\circ}{V}}{c^2}\right)^{-3} a_x, \\ \overset{\circ}{a}_z &= \beta^2 \left(1 + \frac{v_x \overset{\circ}{V}}{c^2}\right)^{-2} a_z - \beta^2 \frac{v_z \overset{\circ}{V}}{c^2} \left(1 + \frac{v_x \overset{\circ}{V}}{c^2}\right)^{-3} a_x. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если $\overset{\circ}{V}$ — скорость сопутствующей инерциальной СО (\bar{x}) (СИСО), совпадающей в данный момент времени со скоростью движущейся точки v относительно основной СО ($\overset{\circ}{x}$), то, согласно определению гиперболического движения, имеем $\overset{\circ}{v} = 0$, $\overset{\circ}{a} = \text{const}$ ($a_x = a$, $a_y = a_z = 0$). Если точка движется вдоль оси \bar{x} при начальных условиях $\bar{t} = 0$ $\bar{x}(0) = 0$, $(d\bar{x}/d\bar{t})_0 = 0$, то из (1) получим:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{a}_x &= \beta^3 a, \quad \overset{\circ}{a}_y = \overset{\circ}{a}_z = 0; & \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} &= \overset{\circ}{a} = \frac{ac^3}{\sqrt{(c^2 + a^2 \bar{t}^2)^3}}, \\ \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= \overset{\circ}{v} = \frac{ac\bar{t}}{\sqrt{c^2 + a^2 \bar{t}^2}}, & \bar{x} &= \frac{c}{a} \left(\sqrt{c^2 + a^2 \bar{t}^2} - c \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) следует, что при $\bar{t} \rightarrow \infty$ $\overset{\circ}{a} \rightarrow 0$ и $\overset{\circ}{v} \rightarrow c$, т. е. имеет место закон $\overset{\circ}{v} < c$.

Кинематические законы преобразования ускорения (1) согласуются с динамическими уравнениями движения точки в СО ($\overset{\circ}{x}$)

$$\frac{d}{d\bar{t}} (m \beta^{3-1} \overset{\circ}{v}^\alpha) = \overset{\circ}{F}^\alpha \quad (3)$$

в том случае, если ускорение точки относительно СИСО (\bar{x}) определяется из уравнений движения

$$\frac{d}{d\bar{t}} (m \beta^{3-1} v^\mu) = F^\mu, \quad (4)$$

а силы $\overset{\circ}{F}$ и F в СО ($\overset{\circ}{x}$) и (\bar{x}) связаны друг с другом следующим образом:

$$\overset{\circ}{F} = \beta \bar{F} + (1 - \beta) \frac{\overset{\circ}{v}}{v^2} \left(\overset{\circ}{v}, \bar{F} \right) \quad \left(\beta = \sqrt{1 - \frac{\overset{\circ}{v}^2}{c^2}} \right). \quad (5)$$

В частности, в СИСО (\bar{x}) $\vec{v} = 0$ и согласно (4) $F^\mu = ma^\mu$. Поэтому из уравнений (3) и (5), при условиях $a_x = a$, $a_y = a_z = 0$, получим уравнения (2).

Чисто вращательное движение в СТО мы получим из условия

$$\left(\overset{\circ}{v}, \vec{F} \right) = m \left(\overset{\circ}{v}, \vec{a} \right) = 0, \quad (6)$$

где $\overset{\circ}{v}$ — скорость относительно основной (неподвижной) СО $(\overset{\circ}{x})$, а \vec{F} и \vec{a} — сила и ускорение в СИСО (\bar{x}) .

Переходя к полярным координатам $\overset{\circ}{r} = R (= \text{const})$, $\overset{\circ}{\varphi} = \varphi$, в силу (5) и (6), получим

$$R\overset{\circ}{\varphi}^2 = \left(1 - \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} \right) a, \quad R^2 \dot{\varphi} = h (= \text{const}).$$

Отсюда для линейной и угловой скоростей кругового движения в СО $(\overset{\circ}{x})$ мы имеем

$$\overset{\circ}{v} = \overset{\circ}{\omega} R = \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{c^2 + Ra}}, \quad \overset{\circ}{\omega} = \frac{c \sqrt{\frac{a}{R}}}{\sqrt{c^2 + Ra}}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что при $R \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow \infty$, $\overset{\circ}{v} \rightarrow c$, т. е. соблюдается закон $\overset{\circ}{v} < c$.

§. 3. Обобщение понятия гиперболического движения в ОТО.

Аналогичная ситуация возникает также и в ОТО благодаря введению формул преобразования скорости и ускорения при наличии G -поля. Но теперь, как это будет показано ниже, ограничение скоростей имеет место для движения тел с любым ускорением.

Движение точки с любым ускорением, удовлетворяющим закону $v < c$, мы будем называть асимптотическим движением. Оно представляет обобщение в ОТО понятия гиперболического движения СТО.

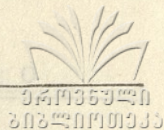
Обозначим через (x_G) СО, определенную в неоднородном (искривленном) пространстве, в присутствии G -поля, метрика которого определяется выражением $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Если ввести неинтегрируемые (неголомомные) преобразования (сокращенно НП) [2, 4, 5, 6]

$$d\overset{\circ}{x}^\alpha = a_\mu^\alpha dx^\mu, \quad dx^\mu = \tilde{a}_\beta^\mu d\overset{\circ}{x}^\beta, \quad (8)$$

которые производят переход из локально галилеевой СО $(\overset{\circ}{x})$ к негалилеевой СО (x_G) , движущейся относительно $(\overset{\circ}{x})$ с произвольной скоростью \vec{V} , то тогда формулы преобразования скорости и ускорения при $(\overset{\circ}{x}) \rightarrow (x_G)$ будут иметь такой вид [2, 3, 4]¹:

$$\overset{\circ}{v}^i = c \frac{a_\mu^i v^\mu}{a_\lambda^0 v^\lambda}, \quad \overset{\circ}{a}^i = \frac{d\overset{\circ}{v}^i}{dt} = \frac{c^2}{a_\lambda^0 v^\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{a_\mu^i v^\mu}{a_\nu^0 v^\nu} \right), \quad (9)$$

¹ Лагранжевы индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие — 0, 1, 2, 3.



$$v^i = c \frac{\tilde{a}_\mu^i \overset{\circ}{v}^\mu}{\tilde{a}_\lambda^0 \overset{\circ}{v}^\lambda}, \quad a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{c^2}{\tilde{a}_\lambda^0 \overset{\circ}{v}^\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{a}_\mu^i \overset{\circ}{v}^\mu}{\tilde{a}_\nu^0 \overset{\circ}{v}^\nu} \right). \quad (9')$$

Кроме того $\overset{\circ}{v}^0 = v^0 = c$, $\overset{\circ}{a}^0 = a^0 = 0$.

Асимптотическое движение точки относительно СО $(\overset{\circ}{x})$ с любым ускорением мы определим аналогично определению гиперболического движения с помощью ускорения той же точки относительно СИСО (\bar{x}) , относительно которой точка в данный момент времени покоится. Соответственно этому в формулах (9) для $\overset{\circ}{a}^i$ следует подставить $v^k = 0$. Точно так же определяется асимптотическое движение по формулам (9').

В § 2 было указано, что для совместимости кинематических формул преобразования ускорения (1), взятых для $\bar{v} = 0$ и вытекающих из них уравнений гиперболического движения (2) с динамическими уравнениями движения СТО (3), необходимо, чтобы силы при переходе $(\bar{x}) \rightarrow (\overset{\circ}{x})$ преобразовывались по формулам (5). Аналогичная ситуация возникает и в ОТО, благодаря введению формул преобразования ускорения (9) и (9') [5, 7].

Положив в (9) $\bar{v} = 0$ мы, прежде всего, получим¹

$$\overset{\circ}{a}^i = \frac{c^2}{(a_0^0)^2} \left(a_k^i - \frac{a_0^i a_k^0}{a_0^0} \right) a^k + \frac{c^2}{(a_0^0)^2} \left(a_{0,0}^i - \frac{a_0^i a_{0,0}^0}{a_0^0} \right) \bar{V} = \frac{c^2}{v}, \quad (10)$$

где \bar{a} — ускорение точки относительно СИСО (\bar{x}) . При этом индекс $\bar{V} = \overset{\circ}{v}$ означает, что производная функций a_0^i и a_0^0 по времени берется при постоянной скорости $\bar{V} = \overset{\circ}{v}$, где $\overset{\circ}{v}$ — скорость точки в данный момент времени относительно неподвижной СО $(\overset{\circ}{x})$. Заметим, что в неподвижной СО $(\overset{\circ}{x})$ G -поле может отсутствовать или присутствовать. В последнем случае неподвижную СО мы будем обозначать через (x_G) .

Далее, необходимо потребовать совместимость кинематических преобразований скорости и ускорения (9) с динамическими уравнениями движения частицы в СО $(\overset{\circ}{x})$ и (x_G)

$$\frac{d}{dt} (m \beta^{-1} \overset{\circ}{v}^\alpha) = F^\alpha, \quad \frac{d}{dt} (m \dot{\tau}^{-1} v^\lambda) = F^\lambda, \quad (11)$$

где $\beta = ds/c dt$, $\dot{\tau} = ds/c dt$. Это требование выражается следующей теоремой: формулы преобразования (9) для перехода $(\overset{\circ}{x}) \rightarrow (x_G)$ являются совместимыми с уравнениями движения частицы в неподвижной СО $(\overset{\circ}{x})$ и

¹ Индекс после запятой означает дифференцирование.



СИСО (\bar{x}) (11) только в том случае, если силы при $\overset{\circ}{x} \rightarrow \bar{x}$ преобразуются по закону

$$\overset{\circ}{F}^\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{g_{00}}} \left(a_\lambda^\alpha F^\lambda + \frac{mc^2}{\sqrt{g_{00}}} a_{0,0}^\alpha \right). \quad (12)$$

В том случае, когда сила в СИСО (\bar{x}) определяется из уравнений геодезической линии, в формулу (12) следует подставить $F^\mu = -mc^2 G_{00}^\mu$, где G — неголономные коэффициенты связности в СО (\bar{x}) [5, 8].

Общее доказательство того, что скорость частицы относительно СО (x_G) , при наличии G -поля, удовлетворяет закону $v < c$ можно получить прямым вычислением скорости по формуле

$$v_G^{\overset{\circ}{\alpha}} = \gamma_{ik} v_G^i v_G^k \left(\gamma_{ik} = \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \right) \quad (13)$$

и с использованием формул преобразования (9'), содержащих через коэффициенты НП a_μ^α скорость асимптотического движения СО (x_G) относительно $\overset{\circ}{x}$.

Для определения скорости v_G по формулам (9), (9') и (13) необходимо знать явные выражения коэффициентов НП a_μ^α и \tilde{a}_μ^β как функций от $g_{\sigma\tau}$ и $\vec{V} = \vec{v}$. Они были определены в наших работах [2, 4, 5]. Ради простоты мы ограничимся рассмотрением диагональной метрики риманова пространства $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} g_{\mu\mu}$. Это упрощение не представляет существенного ограничения, так как с помощью неголономных преобразований произвольную метрику всегда можно привести к диагональному виду [4]. Вышеуказанные коэффициенты для перехода $\overset{\circ}{x} \rightarrow (x_G)$ выражаются следующим образом:

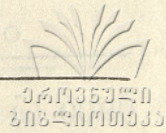
$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= \beta^{-1} \sqrt{g_{00}} \frac{V_{x^0}}{c}, & a_0^i &= \beta^{-1} \sqrt{g_{00}} \frac{V_{x^i}}{c}, & a_k^0 &= \\ &= \beta^{-1} \sqrt{-g_{kk}} \frac{V_{x^k}}{c}, & a_k^i &= \sqrt{-g_{kk}} \left[\delta_k^i - (1 - \lambda \beta^{-1}) \frac{V_{x^i} V_{x^k}}{V^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_0^0 &= \beta^{-1} \sqrt{g^{00}} \frac{V_{x^0}}{c}, & \tilde{a}_0^i &= -\beta^{-1} \sqrt{-g^{ii}} \frac{V_{x^i}}{c}, & \tilde{a}_k^0 &= \\ &= -\beta^{-1} \sqrt{g^{00}} \frac{V_{x^k}}{c}, & \tilde{a}_k^i &= \sqrt{-g^{ii}} \left[\delta_k^i - (1 - \lambda \beta^{-1}) \frac{V_{x^i} V_{x^k}}{V^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

где величины V_{x^0} , V_{x^i} , V , β и λ имеют следующие значения:

а) при определении скорости движения СО (x_G) относительно $\overset{\circ}{x}$ по наблюдению из СО (\bar{x})

$$\left. \begin{aligned} V_{x^0} &= c, V_{x^i} = \overset{\circ}{V}_{x^i}, & \beta &= \sqrt{1 - \frac{\overset{\circ}{V}^2}{c^2}}, & V &= \overset{\circ}{V} = \sqrt{\sum_i (\overset{\circ}{V}_{x^i})^2}, & \lambda &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (14 \text{ а})$$



б) при определении той же скорости \vec{V} в СО (x_G)

$$\left. \begin{aligned} V_{x^0} &= \sqrt{g_{00}} c, & V_{xi} &= \sqrt{-g_{ii}} v^i & \left(v^i = \frac{dx^i}{dt} \right), & \beta = \\ & & & & & \\ &= \sqrt{g_{00} - \left(\frac{V_G}{c} \right)^2}, & V &= V_G = \sqrt{\gamma_{ikh} v^i v^k}, & \lambda &= \sqrt{g_{00}}. \end{aligned} \right\} \quad (14\text{б})$$

Используя формулы (13), (14') и (14а), мы получим

$$v_G^2 = g_{00} \frac{\beta^2 v^2 + \vec{V}^2 - 2 \left(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\vec{V}} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\vec{V}} \right)^2}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\vec{V}} \right) \right]^2}, \quad (15)$$

где $\overset{\circ}{v}$ — скорость точки относительно СО ($\overset{\circ}{x}$), а $\overset{\circ}{\vec{V}}$ — скорость СО (x_G) относительно ($\overset{\circ}{x}$), определенные в СО ($\overset{\circ}{x}$). При определении скорости \vec{V} по наблюдению из СО (x_G) соответственно формулам (14б) мы имеем

$$v_G^2 = g_{00} \frac{\beta^2 v^2 + V^2 - 2\sqrt{g_{00}} \left(\overset{\circ}{v}, \vec{V} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\overset{\circ}{v}, \vec{V} \right)^2}{\left[\sqrt{g_{00}} - \frac{1}{c^2} \left(\overset{\circ}{v}, \vec{V} \right) \right]^2}. \quad (15')$$

Так как скорости $\overset{\circ}{v}$ и $\overset{\circ}{\vec{V}}$ определены в локально галилеевой СО ($\overset{\circ}{x}$), в которой силовое G -поле устранено, то предельными значениями являются $\overset{\circ}{v} = c$ и $\overset{\circ}{\vec{V}} = c$. Для этих значений из (15) или (15') мы получим $v_G = \sqrt{g_{00}} c$. Для истинных полей $\sqrt{g_{00}} < 1$, следовательно, в присутствии G -поля соблюдается закон $v_G < c$.

§ 4. Асимптотическое движение в статическом G -поле. В случае статического G -поля $a_{0,0}^{\alpha} = 0$, поэтому из формулы (10) получим

$$\overset{\circ}{a}^i = \frac{c^2}{(a_0^0)^2} \left(a_k^i - \frac{a_0^i a_k^0}{a_0^0} \right) a^k. \quad (16)$$

Подставляя в (16) значения коэффициентов a_{μ}^{α} из (14) соответственно (14а) и (14б), мы будем иметь

$$\overset{\circ}{a}^i = \frac{\beta^2}{g_{00}} \left[\sqrt{-g_{ii}} a^i - \left(1 - \beta \right) \frac{V_{xi}}{V^2} \sum_k \sqrt{-g_{hk}} V_{xk}^0 a^k \right], \quad (16\text{а})$$

$$\overset{\circ}{a}^i = \frac{\beta^2}{g_{00}^2} \left[\sqrt{-g_{ii}} a^i - \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{g_{00}}} \right) \frac{V_{xi}}{V^2} \sum_k \sqrt{-g_{hk}} V_{xk}^i a^k \right]. \quad (16\text{б})$$

Эти выражения переходят друг в друга при

$$\overset{\circ}{V}_{xi} = \frac{\sqrt{-g_{ii}} V_i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{V_{xi}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (17)$$

С использованием формул (16а) и (16б) мы рассмотрим несколько примеров на движение частицы в G -поле Шварцшильда.

1) Равноускоренное удаление частицы от центра тяготения. Положим, что частица в СИСО (\bar{x}) находится под действием внешней силы и движется в радиальном направлении от центра с постоянным ускорением. Этот случай, очевидно, соответствует предположению

$$\overset{\circ}{V}_{xi} = \delta_i^1 \frac{\overset{\circ}{dr}}{\overset{\circ}{dt}}, \quad a^i = \delta_i^1 a, \quad (18)$$

где $\overset{\circ}{dt}$ и $\overset{\circ}{dr}$ отнесены к неподвижной локально галилеевой СО ($\overset{\circ}{x}$) при отсутствии G -поля. С интервалами dt и dr , относящимися к СО ($\overset{\circ}{x}_G$) при наличии G -поля Шварцшильда, они связаны по формулам НП (8), которые, согласно (14), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= \sqrt{g_{00}}, & a_i^0 &= a_0^i = 0, & a_k^i &= \sqrt{-g_{kk}} \delta_k^i, \\ \overset{\circ}{dt} &= \sqrt{g_{00}} dt, & \overset{\circ}{dr} &= dr / \sqrt{g_{00}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Используя выражения (17), (18) и (19), из формул (16а) и (16б) мы получим одинаковый результат

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{g_{00}} \right) = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{r}}{g_{00}} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{a}{g_{00}^{3/2}}, \quad (20)$$

где $\dot{r} = dr/dt$. Интегрирование (20) дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^2 g_{00}}{\sqrt{g_{00} - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} &= a(r - r_G) + 2 ar_G \ln(r - r_G) - \\ - \frac{a r_G^2}{r - r_G} + \text{const}, & \left(r_G = \frac{2 \gamma m}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

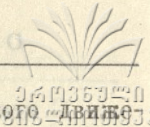
Если $r \rightarrow \infty$, то $g_{00} \rightarrow 1$, и тогда из (21) получаем $(\dot{r})_{\infty} = c$. Следовательно, (21) определяет асимптотическое движение частицы в G -поле (равноускоренное удаление от центра тяготения).

При отсутствии G -поля, т. е. при $r_G = 0$, из (21) имеем

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} = ar + c^2, \quad (22)$$

(здесь $\text{const} = c^2$ получено из условия: $r=0, (\dot{r})_0=0$). Уравнению (22) удовлетворяет интеграл

$$r = \frac{c}{a} (\sqrt{c^2 + a^2 t^2} - c). \quad (23)$$



Формулы (22) и (23) совпадают с выражениями гиперболического движения СТО (2).

2) Равномерное вращение частицы вокруг центра тяготения. В случае чисто вращательного движения вокруг оси $x^3 = z$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{V}_{x^1} = 0, \quad \overset{\circ}{V}_{x^2} = 0, \quad \overset{\circ}{V}_{x^3} = R \frac{d\overset{\circ}{\varphi}}{dt} = R\overset{\circ}{\omega}; \quad a^1 = -a, \quad a^2 = 0, \quad a^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{\omega}$, R , $d\overset{\circ}{\varphi}$ и dt определены в СО $(\overset{\circ}{x})$, а \bar{a} — в СИСО (\bar{x}) . Ускорение относительно СО $(\overset{\circ}{x})$ можно определить по формулам (16 а) или (16 б). Так как

$$\overset{\circ}{a}^1 = -R\overset{\circ}{\omega}^2, \quad \overset{\circ}{a}^2 = 0, \quad \overset{\circ}{a}^3 = 0, \quad \overset{\circ}{\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{R\overset{\circ}{\omega}}{c}\right)^2},$$

то из (16 а) и (24) получим

$$\overset{\circ}{a}^1 = -R\overset{\circ}{\omega}^2 = -\left(1 - \frac{R^2\overset{\circ}{\omega}^2}{c^2}\right) \frac{a}{g_{00}^{3/2}}, \quad \overset{\circ}{a}^2 = \overset{\circ}{a}^3 = 0.$$

Отсюда для скорости в СО $(\overset{\circ}{x})$ имеем

$$R\overset{\circ}{\omega} = \sqrt{\frac{Ra}{g_{00}^{3/2} + \frac{Ra}{c^2}}}. \quad (25)$$

Скорость в СО (x_G) можно вычислить по формуле (9). Учитывая (19), получим

$$R\overset{\circ}{\omega} = \frac{Rd\overset{\circ}{\varphi}}{dt} = \frac{a_\lambda^3 dx^\lambda}{\sqrt{g_{00}} dt} = \frac{rd\varphi}{\sqrt{g_{00}} dt} = \frac{r\omega}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (26)$$

Из (25) и (26) окончательно имеем

$$r\omega = c \sqrt{\frac{g_{00} Ra}{Ra + g_{00}^{3/2} c^2}}. \quad (27)$$

Из (26) следует, что при $r \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ и $g_{00} \rightarrow 1$. Поэтому, согласно (25) и (27), $\lim_{R \rightarrow \infty} (R\overset{\circ}{\omega}) = \lim_{r \rightarrow \infty} (r\omega) = c$. Это значит, что соблюдается закон

$\overset{\circ}{v}_\varphi < c$, $v_\varphi < c$. Кроме того, при отсутствии G -поля (при $g_{00} = 1$) формулы (25) и (27) переходят в соответствующие формулы СТО (7).

3) Свободное падение частицы на центр тяготения. Этот случай был частично изучен с помощью применения искусственных приемов [9]. Здесь мы рассмотрели этот вопрос более строго и в общем виде с помощью формул преобразования ускорения при наличии G -поля.

Введем неподвижную СО ($\overset{\circ}{x}_G$) в присутствии поля Шварцшильда. В качестве СИСО (\bar{x}) возьмем локально галилееву инерциальную СО, в которой G -поле отсутствует. Тогда переход ($\overset{\circ}{x}_G$) \rightarrow (\bar{x}) производится с помощью НП

$$\left. \begin{aligned} a_0^{\circ} &= \beta^{-1} \sqrt{g^{00}} \frac{\overset{\circ}{V}_{x^0}}{c}, & a_0^i &= \beta^{-1} \sqrt{-g^{ii}} \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i}}{c}, & a_i^{\circ} &= \beta^{-1} \sqrt{g^{00}} \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i}}{c}, \\ a_k^i &= \sqrt{-g^{ii}} \left[\delta_k^i - (1 - \lambda \beta^{-1}) \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i} \overset{\circ}{V}_{x^k}}{\overset{\circ}{V}^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_0^{\circ} &= \beta^{-1} \sqrt{g_{00}} \frac{\overset{\circ}{V}_x}{c}, & \tilde{a}_0^i &= -\beta^{-1} \sqrt{g_{00}} \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i}}{c}, & \tilde{a}_i^{\circ} &= -\beta^{-1} \sqrt{-g_{ii}} \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i}}{c}, \\ \tilde{a}_k^i &= \sqrt{-g_{kk}} \left[\delta_k^i - (1 - \lambda \beta^{-1}) \frac{\overset{\circ}{V}_{x^i} \overset{\circ}{V}_{x^k}}{\overset{\circ}{V}^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

$$\lambda = \sqrt{g_{00}}, \quad \beta = \sqrt{g_{00} - \left(\frac{\overset{\circ}{V}_G}{c}\right)^2}, \quad \overset{\circ}{v}_{x^i} = -\sqrt{-g_{ii}} \overset{\circ}{v}^i,$$

$$\overset{\circ}{V}_G = \sqrt{\sum_i \left(\overset{\circ}{V}_{x^i}\right)^2}. \quad (28a)$$

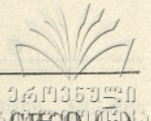
Эти формулы заменяют НП (8), (14), (14') и (14 б), которые были определены для того случая, когда СО (x_G) считалась движущейся относительно ($\overset{\circ}{x}$).

Ускорение относительно СО ($\overset{\circ}{x}_G$) свободно падающей частицы мы вычислим по формуле (10), в которую следует подставить значения коэффициентов НП a_{μ}^{α} и \tilde{a}_{β}^{μ} из (28), (28') и (28 а). При этом производные, входящие в (10), отнесены к подвижной СО (\bar{x}), которые с производными в СО ($\overset{\circ}{x}_G$) связаны теперь следующим образом: $\Phi_{,\bar{\lambda}} = a_{\lambda}^{\alpha} \Phi_{,\alpha}$ (они носят название неинтегрируемых производных [4, 5, 6]). Кроме того, при свободном падении частицы на центр для скорости и ускорения мы имеем

$$\left. \begin{aligned} V_r = \overset{\circ}{V}_{x^1} &= \sqrt{-g_{11}} \overset{\circ}{v}, & V_{\theta} = \overset{\circ}{V}_{x^2} &= 0, & V_{\varphi} = \overset{\circ}{V}_{x^3} &= 0, \\ a_r = \bar{a}^1, & a_{\theta} = \bar{a}^2 = 0, & a_{\varphi} = \bar{a}^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где $\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{v}$ — скорость СИСО (\bar{x}) относительно ($\overset{\circ}{x}_G$), а \bar{a} — ускорение точки относительно (\bar{x}). Подставляя в (10) выражения (28), (28') и (29), мы получаем

$$\overset{\circ}{a}_r = \beta^3 \bar{a}^1, \quad \overset{\circ}{a}_{\theta} = 0, \quad \overset{\circ}{a}_{\varphi} = 0. \quad (30)$$



Ускорение \bar{a}^i нужно определить из уравнений движения в СИСО (\bar{x}), имеющих вид

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau} \right) = -\bar{G}_{\alpha\beta}^\lambda \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta, \quad (31)$$

где $\bar{u}^\alpha = d\bar{x}^\alpha / d\tau$, а $\bar{G}_{\alpha\beta}^\lambda$ — неголономные коэффициенты связности [5, 8]

$$\bar{G}_{\alpha\beta}^\lambda = \tilde{a}_\alpha^\lambda a_\alpha^\sigma a_\beta^\tau \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\tau}^\lambda + \tilde{a}_\alpha^\lambda a_\beta^\tau a_\alpha^\rho a_\rho^\tau, \quad (32)$$

($\overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\tau}^\lambda = \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda$ — обычные кристоффелевы символы в СО ($\overset{\circ}{x}_G$)). Так как в СО (\bar{x}) $\bar{u}^i = 0$, то из (31) для $a^k = d\bar{v}^k / d\bar{t}$ получим $\bar{a}^k = -c^2 \bar{G}_{00}^k$. Вычисляя \bar{G}_{00}^k по формулам (28), (28'), (28 а) (29), (31) и (32), согласно (30), мы получим

$$\overset{\circ}{a}_r = \frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{1}{2} c^2 g_{00, r} \left(g_{00} - 3 \frac{\dot{r}^2}{g_{00} c^2} \right), \quad \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt} \right). \quad (33)$$

Вводя переменную $\dot{r}^2 / g_{00} c = \xi$, после элементарных преобразований (33) приводится к виду $d(1 - \xi) / (1 - \xi) = d g_{00} / g_{00}$, откуда получаем

$$\sqrt{g_{00} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 g_{00}}} = \text{const } g_{00}. \quad (34)$$

Для определения постоянной интегрирования подставляем в (34) $r = \infty$. Так как $g_{00}(\infty) = 1$, то имеем

$$\text{const} = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{r}_\infty}{c} \right)^2} = \frac{mc^2}{E}, \quad (35)$$

где m — масса покоя частицы, а E — ее энергия на бесконечности.

Для радиальной скорости частицы $v_r = \sqrt{-g_{11}} \dot{r} = \dot{r} / \sqrt{g_{00}}$ из формул (34) и (35) мы получаем

$$v_r = \pm c \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 g_{00}}. \quad (36)$$

Если на бесконечности частица неподвижна ($\dot{r}_\infty = 0$), то

$$v_r = -c \sqrt{\frac{r_G}{r} \left(1 - \frac{r_G}{r} \right)}. \quad (37)$$

Согласно (36) и (37), $|v_r| < c \sqrt{g_{00}} < c$, т. е. соблюдается закон $v_G < c$. Кроме того, из формулы (37) следует, что при падении на центр из бесконечности без начальной скорости максимального значения скорость v_G достигает на расстоянии $r_m = 2r_G$, которая равна $v_G = c/2$, а на расстоянии $r = r_G$ $v_G = 0$.

§ 5. Асимптотическое движение относительно неинерциальной системы отсчета (НСО). Сперва необходимо определить понятие НСО в ОТО. Такому определению в ОТО мешает неправильное толкование принципа эквивалентности (ПЭ), утверждающего, что G -поле и поле ус-

корения (или инерции) (поле A) локально полностью эквивалентны друг другу. В действительности же дело обстоит иначе. Если СО движется с переменной скоростью $\vec{V} = \vec{V}(t)$, то за бесконечно малый промежуток времени dt скорость можно считать постоянной и тогда допустимо применение преобразований Лоренца

$$d x^{\alpha} = L_{\mu}^{\alpha}(\vec{V}) d x^{\mu}, \quad (38)$$

которые связывают неподвижную СО (ИСО) ($\overset{\circ}{x}$) с ускоренно движущейся СО (x_A). Однако ПЭ не позволяет рассматривать СО (x_A) как неинерциальную систему. Причиной этого является тот факт, что преобразования (38) оставляют неизменным метрический тензор Минковского.

$$e_{\mu\nu} = e_{\alpha\beta} L_{\mu}^{\alpha} L_{\nu}^{\beta} = e_{\mu\nu} = \text{inv}, \quad (39)$$

где $e_{\mu\nu} = e_{\mu} \delta_{\mu\nu}$ ($e_0 = 1$, $e_i = -1$). (39), очевидно, означает, что ускоренное движение СО никакого G -поля не создает, что прямо противоречит утверждению ПЭ.

Вопреки этому мы допускаем справедливость соотношений (38) и (39) для $L_{\mu}^{\alpha} = L_{\mu}^{\alpha}(\vec{V})$, т. е. считаем, что G -поле и поле A локально не эквивалентны друг другу. Эта неэквивалентность выражается с помощью $e_{\mu\nu} = \text{inv}$ и проявляется в том, что истинное G -поле искривляет пространство-время, а поле A не искривляет его.

В связи с этим фундаментальным фактом мы должны либо отказаться от преобразований Лоренца (38) и оставить в силе ПЭ в его прежнем, ортодоксальном, понимании, либо нужно признать справедливость преобразований Лоренца (38) и как-то видоизменить ПЭ.

До сих пор вторая возможность опровергалась ценой отказа, из-за (39), от преобразований (38). Подобный отказ мы считаем необоснованным. Это мнение мы мотивируем тем, что возможно такое видоизменение ПЭ, при котором противоречие между преобразованиями Лоренца и лоренцвариантности с ПЭ полностью устраняется.

Конечно ПЭ полностью отрицать нельзя, так как он связан с фундаментальным законом равенства инертной и гравитационной масс $m_{\tau} = m_G$. Вышеуказанное противоречие будет отсутствовать, если вместо ортодоксального понимания ПЭ мы введем его понимание на основе закона действия,—закона равенства действия и противодействия. С точки зрения этого закона ПЭ связан с равенством сил тяготения и инерции, действие и противодействие которых всегда осуществляется локально в точках сосредоточения инертной материи. Закон действия требует признания сил инерции как реальных сил, обусловленных всеми массами Вселенной. Тогда из равенства сил тяготения и инерции следует необходимость равенства $m_{\tau} = m_G$ [10, 11], что и приводит к чисто силовому толкованию ПЭ. Согласно этому пониманию, ПЭ отражает равенство сил тяготения и инерции и одинаковость их силового проявления при наличии пробного тела. С этим фактом связана силовая неразличимость G -



и A -полей, но не их локальная эквивалентность. Причиной последнего является то обстоятельство, что G -поле потенциалов существует независимо от помещаемого в нем пробного тела, а силовое G -поле существует только в тех точках, где имеется пробное тело (вещество). С этим, очевидно, связан тот факт, что истинное G -поле (потенциалов) искривляет пространство-время, а поле A никакого отношения к кривизне пространства-времени не имеет.

Непротиворечивый характер понимания ПЭ состоит в предположении, что этому принципу подчиняются относительные свойства пространства-времени, связанные с силовыми действиями G -поля на пробное материальное тело, но ПЭ не подчиняются абсолютные свойства пространства-времени, существующими независимо от пробного тела (например, кривизна и геометрическая структура 4-пространства).

Как мы видим, изменение в понимании ПЭ, внесенное законом действия, имеет радикальный характер, так как в прежнем понимании ПЭ означал полную локальную эквивалентность G - и A -полей, а новое понимание ПЭ основано на локальной неэквивалентности этих же полей.

Понимание ПЭ на основе закона действия позволяет нам устранить связанные с ним противоречия, которые были указаны В. А. Фоком [12], а также противоречия между ПЭ и преобразованиями Лоренца, препятствующими введению понятия НСО в ОТО.

Таким образом, соответственно (38) и (39) мы полагаем, что ускоренное движение СО никакого G -поля не создает (оно создает только поле инерции в местах сосредоточения пробных тел, но не кривизну пространства-времени), а лоренцовые преобразования (39) связывают друг с другом ИСО (x) и НСО (x_A).

Понятие НСО может быть теперь введено в ОТО следующим образом. Преобразования Лоренца (39) с коэффициентами

$$L_0^0 = \beta^{-1}, \quad L_i^0 = L_0^i = \beta^{-1} \frac{V_i}{c}, \quad L_k^i = \delta_k^i - (1 - \beta^{-1}) \frac{V_i V_k}{V^2} \quad (40)$$

определяют переход к невращающейся НСО. Переход к вращающейся и переносной СО следует произвести с помощью произведения „переносных“ и „вращательных“ преобразований, т. е. (38) и $\dot{d}x^\alpha = \Omega_\mu^\alpha d\tilde{z}^\mu$, $d\tilde{z}^\mu = L_\rho^\mu dx^\rho$. Это приводит к

$$\dot{d}x^\alpha = \Omega_\mu^\alpha L_\rho^\mu dx^\rho = M_\rho^\alpha dx^\rho. \quad (41)$$

При этом к вращательному преобразованию мы должны предъявить требование, чтобы оно не вводило G -поля. Поэтому должны иметь место соотношения

$$e_{\rho\sigma} \Omega_\mu^\rho \Omega_\nu^\sigma = e_{\mu\nu}, \quad e_{\alpha\beta} M_\mu^\alpha M_\nu^\beta = e_{\mu\nu}. \quad (42)$$

Требованию (42) удовлетворяют соотношения $\Omega_0^0 = 1$, $\Omega_0^i = \Omega_i^0 = 0$, $\Omega_i^j \Omega_j^i = \delta_{ij}$, определяющие трехмерное вращение ортонормированной системы координат



нат с угловой скоростью $\vec{\omega} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$, где θ_i — углы Эйлера. Помимо этого, необходимо потребовать, чтобы линейная и угловая скорости удовлетворяли закону $v < c$. Для этой цели движение СО следует определять с помощью ее ускорения относительно СИСО (\bar{x}). Так, например, при равноускоренном движении в качестве скорости СО в (40) следует брать выражение (2); при чисто вращательном движении \dot{v} и $\dot{\omega}$ должны определяться из (7) и т. д.

Таким образом, понятие НСО в ОТО определяется нами с помощью лоренцовых преобразований (38) и (41), оставляющих $e_{\mu\nu} = in\nu$ и введением в них скоростей, удовлетворяющих закону $v < c$.

В связи с этим голономные преобразования координат $x^i = x^i(t, x^k)$ непосредственного отношения к НСО иметь не могут. Например, преобразования

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \quad z = z'$$

не определяют вращающуюся СО. К этому же выводу, с точки зрения тетрадной формулировки ОТО (ТФ ОТО), пришел В. И. Родичев [13]. В нашем случае этот вывод объясняется следующим образом. При переходе к НСО $\overset{\circ}{dx}^i$, фигурирующие в выражении $ds^2 = e_{\mu\nu} \overset{\circ}{dx}^\mu \overset{\circ}{dx}^\nu$, представляют неинтегрируемые величины, следовательно, нельзя дифференцировать $\overset{\circ}{x}^i = \overset{\circ}{x}^i(t, x^k)$ и подставлять их в ds^2 .

При наличии G -поля НСО (x_G) определяют нелоренцовые преобразования

$$\overset{\circ}{dx}^\alpha = M_{\beta\mu}^\alpha \overset{\circ}{dx}^\mu, \quad M_{\beta\mu}^\alpha = \Omega_\lambda^\alpha a_\mu^\lambda, \quad (43)$$

где a_λ^α — коэффициенты НП (14), а Ω_μ^λ — коэффициенты лоренцовых вращений, для которых $g_{\mu\nu} = in\nu$ [4]. При этом скорости, входящие в (43) через a_λ^α и Ω_μ^λ , должны удовлетворять закону $v < c$ при наличии G -поля.

Коэффициенты вращения Ω_μ^λ представляют аналоги коэффициентов лоренцовых поворотов $\omega_\mu^\lambda(x)$, для которых также $g_{\mu\nu} = in\nu$. Эти коэффициенты были введены в работах Фока, Иваненко и Вейля [14, 15, 16], которые затем легли в основу ТФ ОТО. Однако между Ω_μ^λ и ω_μ^λ существует принципиальная разница. В то время как, в соответствии с требованием ПЭ, $\omega_\mu^\lambda(x)$ не содержат скорости $\vec{V}(t)$, Ω_μ^λ явно зависит от скоростей. Это значит, что НП (43), так же, как и НП (8), противоречат ортодоксальному (универсальному) ПЭ, но полностью отвечают сугубо силовому пониманию ПЭ, отражающему равенство сил инерции и тяготения и локальную неэквивалентность G -и A -полей.

ლიტერატურა

1. М. Борн, Эйнштейновская теории относительности, М., 1964, стр. 429.
2. В. С. Кирия, Тезисы докладов 2-й гравитационной конференции СССР, Тбилиси, 1965, стр. 46.
3. В. С. Кирия, Сообщения АН ГССР, т. 43, № 2, 1966, стр. 321.
4. В. С. Кирия, Сборник „Современные проблемы гравитации“, Тб., 1967, стр. 155.
5. В. С. Кирия, Тезисы докладов GR5, Тб., 1968, стр. 121.
6. М. М. Мирианашвили, В. С. Кирия, М. С. Гобеджишвили, А. Б. Кереселидзе, Сборник „Современные проблемы гравитации“, Тб., 1967, стр. 135.
7. В. С. Кирия, Тезисы докладов IV всесоюзной межвузовской конференции, Тб., 1969, стр. 107.
8. Я. А. Схоутен, Тензорный анализ для физиков, М., 1965.
9. Г. К. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология, М., 1961.
10. В. С. Кирия, Сборник „Современные проблемы гравитации“, Тб., 1967, стр. 493.
11. В. С. Кирия, Сборник „Гносеологические аспекты измерения“, Киев, 1968, стр. 252.
12. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955.
13. В. И. Родичев, Сборник „Современные проблемы гравитации“, Тб., 1967, стр. 71.
14. V. Fock, Journ. de Phys. et le Radium, V. 10, N 11, 1929, p. 392.
15. V. Fock, D. Ivanenko, C. r. Acad. Sci, 188, 1929, p. 1470.
16. I. Schwinger, Phys. Rev., 130, 800, 1963.

3. ჭირია

 ზღვრული სიჩქარეების კანონი ზოგად ფარდობითობის
 თეორიაში

რეზიუმე

განხილულია საკითხი მატერიალური სხეულების სიჩქარეების ზედა ზღვარის არსებობის შესახებ (კანონი $v < c$). ნაჩვენებია, რომ სიჩქარეებს ზოგადი ფარდობითობის თეორიის თანახმად ასიმპტოტური ხასიათი აქვთ და დაკმაყოფილებულია კანონი $v_G < c$ (v_G მატერიალური წერტილის სიჩქარეა გრავიტაციულ ველში).

О СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ОРОГРАФИИ И ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОЛЯРНЫХ ТЕМПЕРАТУР ПО ТЕРРИТОРИИ ГРУЗИИ

К. А. САПИЦКИЙ

Температурный режим Грузии, как и климат в целом, характеризуется рядом особенностей, обусловленных географическим положением Грузии, сложным рельефом занимаемой территории, радиационным режимом и господствующими здесь циркуляционными процессами атмосферы. На рассматриваемой территории встречаются почти все типы климатов от климата вечных снегов и ледников высокогорий Главного Кавказского хребта до влажного субтропического климата Черноморского побережья и степного континентального климата восточной части Грузии. Достаточно указать, что средняя годовая температура на ее территории (всего около 70 000 км²) колеблется в пределах от -6,1 (Казбеги, в/г) до 15,0° (Сухуми, порт).

Чтобы судить о степени влияния орографии и циркуляционных процессов на количество солнечной радиации, получаемой территорией Грузии, нами были использованы данные математической теории климата Земли [1] и справочника [2]. Основные предпосылки, с помощью которых была построена математическая теория климата Земли и были найдены средние годовые температуры (в градусах Цельсия) параллелей, следующие: допущение вполне горизонтальной и однородной (средней) земной поверхности под всеми широтами; влажность и облачность в находящейся над ней атмосфере имеют везде их среднее значение; обмен тепла между земной поверхностью и воздухом происходит только посредством излучения и что атмосфера и гидросфера земли неподвижны, т. е. в них отсутствуют какие-либо нарушения механического равновесия, вызывающие различные течения. Из всех предположений первое и последнее имеют наибольшее значение, так как исключают целый ряд географических особенностей и метеорологических явлений. Поэтому вычисленные средние годовые температуры различных параллелей (табл. 1, [1]) называют солярными, т. е. зависящими только от количества солнечной радиации, получаемой той или иной географической широтой.

Таким образом, солярные температуры представляют лишь влияние важнейшей слагающей климата Земли. Отклонения их от действительно



Географическая широта, град.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Температура воздуха, град.	+32,8	+31,6	+28,2	+22,1	+13,7	+2,6	-10,9	-24,1	-32,0	-34,8

наблюдающихся температур дают нам представление о влиянии распределения суши, а также о значении воздушных и морских течений.

В табл. 2 приведены станции, расположенные в различных физико-географических условиях, которые достаточно хорошо освещают характер-

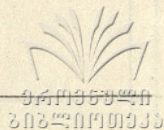
Таблица 2

Западная Грузия					Восточная Грузия				
Станции	Высота, м	T _г , град.	T _с , град.	Отношение T _г /T _с	Станции	Высота, м	T _г , град.	T _с , град.	Отношение T _г /T _с
Мestia, ГМС	1441	5,7	10,3	0,55	Казбеги в/г	3653	-6,1	10,8	-0,56
Ханши	730	10,6	10,5	1,01	Пасанаури	1070	7,8	11,1	0,70
Лентехи	760	9,4	10,6	0,89	Душети	922	9,7	11,4	0,85
Мамисонский пер.	2854	-2,4	10,8	-0,22	Хашури	690	9,7	11,5	0,84
Диди-Чкони	345	12,8	10,9	1,17	Скра	607	10,2	11,5	0,89
Амбролаури, ГМС	544	11,2	11,0	1,02	Гори	588	10,9	11,5	0,95
Цхакая, агро.	40	14,5	11,2	1,29	Мухрани, агро	550	10,8	11,6	0,93
Кутаиси, ГМС	114	14,5	11,2	1,29	Телави, агро.	568	11,8	11,7	1,01
Поти, парк	1	14,1	11,3	1,25	Боржоми	789	9,1	11,7	0,78
Сакара	148	13,9	11,3	1,23	Абастумани	1265	6,4	11,8	0,54
Орджоникидзе	280	13,2	11,5	1,15	Тбилиси, ГМО	403	12,7	11,8	1,08
Анасеули	158	13,6	11,7	1,16	Ахалцихе	982	9,0	11,9	0,76
Саирме	910	8,8	11,5	0,77	Сигнахи	795	11,1	11,9	0,93
Пеху, ГМС	685	9,1	9,9	0,92	Шалка	1457	5,9	11,9	0,50
Леселидзе	6	13,9	10,0	1,39	Болниси	534	12,0	12,1	0,99
Земо-Ажара	952	9,4	10,2	0,92	Гардабани	300	12,9	12,0	1,08
Новый Афон	45	14,8	10,3	1,43	Шираки	555	10,3	12,0	0,86
Гали	63	13,7	10,8	1,27	Карцахи	1863	4,2	12,3	0,34
Махинджаури	15	13,8	11,9	1,16	Ефремовка	2112	1,8	12,4	0,15
Хуло	928	10,4	11,9	0,87	Цхинвали	862	9,5	11,2	0,85

ные для Закавказья атмосферные процессы, а также своеобразие и большие контрасты температурного режима Грузии. В последней графе табл. 2 дается отношение многолетней средней годовой температуры (T_г) к солнечной (T_с). Эти же отношения для наглядности приведены и на рисунке.

Приложенная карта, на которой нанесены отношения $\eta = \frac{T_g}{T_c}$ и проведены изолинии через каждые 0,25, позволяет получить температуру воздуха (многолетнюю среднюю годовую) любого пункта данной территории по формуле

$$T_g = \eta T_c.$$



где T_c —солярная температура искомого пункта с широтой φ , которая считается известной.

На основе табл. 2 и карты заключаем, что Сурамский хребет, служащий орографической перемычкой между Большим и Малым Кавказом, является климатораздельным хребтом, который делит Грузию на две контрастные области—Западную и Восточную Грузию. Под непосредственным воздействием теплого Черного моря оказываются районы, расположенные к западу от Сурамского и Арсианского хребтов. Вся территория Западной Грузии до высот 500—600 м над у.м. характеризуется повышенной среднегодовой температурой воздуха по сравнению с теоретически вычисленной температурой (солярной). При этом повышение многолетней среднегодовой температуры воздуха может достигать значительных величин—40—50% от солярной (Новый Афон, отношение 1.43). Среднее же отношение составляет—1.23. В Восточной Грузии для тех же высот (500—600 м) среднее отношение близко к 1 (0,99), т. е. фактически наблюдаемые многолетние средние годовые температуры совпадают с вычисленными. Что касается высот до 1000 м, то и здесь величина отношения для станции Западной Грузии выше, чем для Восточной Грузии—0.90 и 0.84 соответственно. Резко пересеченный рельеф территории Грузии, особенности господствующих циркуляционных процессов и высота местности над уровнем моря оказывают большое влияние на температуру воздуха (табл. 3).

Таблица 3

Станции	Высота, м	T_c , град.	T_r/T_c
Махинджаури	15	11.9	1.16
Сигнахи	795		0.93
Хуло	923		0.87
Ахалцихе	982		0.76
Цалка	1457		0.50
Орджоникидзе	280	11.5	1.15
Гори	588		0.95
Скра	607		0.89
Хашури	690		0.84
Саирме	910		0.77
Гали	63	10.8	1.27
Мамисонский пер.	2854		—0.22
Казбеги в/г	3653		—0.56

В табл. 3 объединены станции с одинаковыми солярными температурами, которые расположены в порядке возрастания их высот. Как явствует из последней графы, повышение высоты места над уровнем моря вызывает уменьшение отношения многолетней среднегодовой температуры воздуха к солярной. Аналогичные выводы получают если сравнить станции, находящиеся в Западной или Восточной Грузии. Например, станции Диди-Чкони и Хаиши расположены в Западной Грузии и примерно на одинаковом расстоянии от Черного моря. Высота первой—345 м, а второй—730 м. Величина отношения составляет соответственно 1.17 и 1.01.

Таким образом, о степени влияния орографии и циркуляционных процессов на формирование температурного режима такой сложной физико-географической территории, какой является территория Грузии, можно судить по данным математической теории климата и сравнительно небольшого числа (40) станций.

(Представлено 5.IX.1971)

Кафедра геофизики

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Миланкович, Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата, ГОНТИ, НКТП, СССР, 1939.
2. Справочник по климату СССР, вып. 14, ч. II, Гидрометеиздат, Л., 1967.

ბ. სპიციკი

საქართველოს ტერიტორიაზე სოლარული ტემპერატურების
განაწილებაზე ოროგრაფიისა და ცირკულაციური პროცესების
გავლენის ხარისხის შესახებ

რ ე ზ ი მ ე

დედამიწის კლიმატის მილანკოვიჩისეული მათემატიკური თეორიისა და სადგურთა შედარებით მცირე (40) რიცხვის მონაცემების საფუძველზე აგებულია რუკა, რომელიც ნათლად გამოხატავს ოროგრაფიისა და ცირკულაციური პროცესების გავლენის ხასიათს, ისეთი რთული ფიზიკო-გეოგრაფიული ტერიტორიის ტემპერატურულ რეჟიმზე, როგორცაა საქართველოს ტერიტორია.

რუკა საშუალებას იძლევა მიღებულ იქნას განსახილველი ტერიტორიის ნებისმიერი პუნქტის ჰაერის ტემპერატურის მრავალწლიური საშუალო ტემპერატურა ფორმულით $T_{\Sigma} = \eta T_s$, სადაც T_s მოცემული პუნქტის სოლარული ტემპერატურაა, რომელიც ცნობილად ითვლება, ხოლო η -ს მნიშვნელობა აიღება რუკიდან.

ИССЛЕДОВАНИЕ СУТОЧНОГО ХОДА ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА ТБИЛИСИ В ТЕПЛОЕ ВРЕМЯ ГОДА ПРИ МАКСИМАЛЬНОЙ И МИНИМАЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ СОЛНЦА

К. А. САПИЦКИЙ, Р. К. КОМЛАДЗЕ, Э. Ш. ЭЛИЗБАРАШВИЛИ

Изучению суточного хода температуры воздуха различных пунктов земного шара посвящено достаточное количество работ как качественного [1 и др.], так и количественного [2, 3, 4, 5 и др.] характера, в которых показана тесная связь изменений температуры с колебаниями теплового баланса и других факторов.

В работе [6] изложена методика построения суточного хода температуры и влажности воздуха в зависимости от характера облачности, а в [7] рассмотрен суточный ход температуры воздуха различных районов СССР в теплое время года, полученный путем синоптикостатистической обработки результатов ежечасных метеорологических наблюдений.

В данной статье, аналогично работам [6, 7], исследуется суточный ход температуры воздуха Тбилиси в теплое время года в зависимости от характера облачности как одного из основных факторов, обуславливающих его. Причем рассматривается три типа кривых суточного хода приземной температуры для трех градаций общей облачности: ясно (0—4 балла), полудясно (5—7 баллов) и пасмурно (8—10 баллов). Кроме того, для выяснения влияния скорости и направления ветра на суточный ход температуры были сравнены случаи суточного хода температуры (для одной и той же облачности) при скоростях ветра 0—5 м/сек. и 5,1—10 м/сек., а для направления W и E, как характерные для данного пункта.

В качестве исходного материала при изучении суточного хода температуры приземного слоя воздуха г. Тбилиси в теплое время года были использованы данные ТМ-1 и ТМ-2 метеорологической станции Тбилисского государственного университета за 1947—1950, 1952—1955, 1956—1959, 1963—1965 гг.

1948—1949 и 1957—1958 гг. были годами максимальной активности солнца, а 1953—1954 и 1964 гг. — минимальной.

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов исследования, отметим, что при построении кривых суточного хода температуры использовались осредненные значения отклонений температуры за каждый час суток от ее значения в 21 час местного солнечного времени. После соот-



ветствующей обработки исходного материала были построены кривые точного хода температуры (в общей сложности более 200 графиков).

Кривые суточного хода температуры при ясном небе, как в годы максимальной, так и минимальной активности Солнца (рис. 1), имеют близкую к синусоидальной форму с ярко выраженным максимумом и мини-

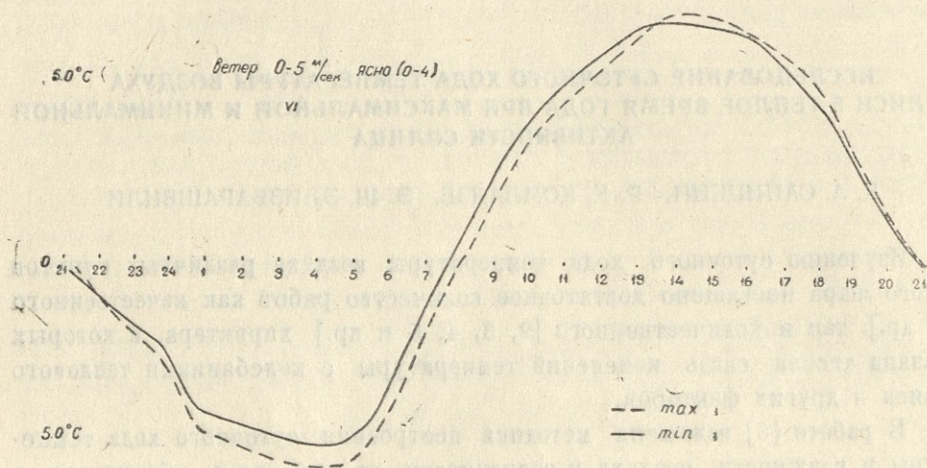


Рис. 1.

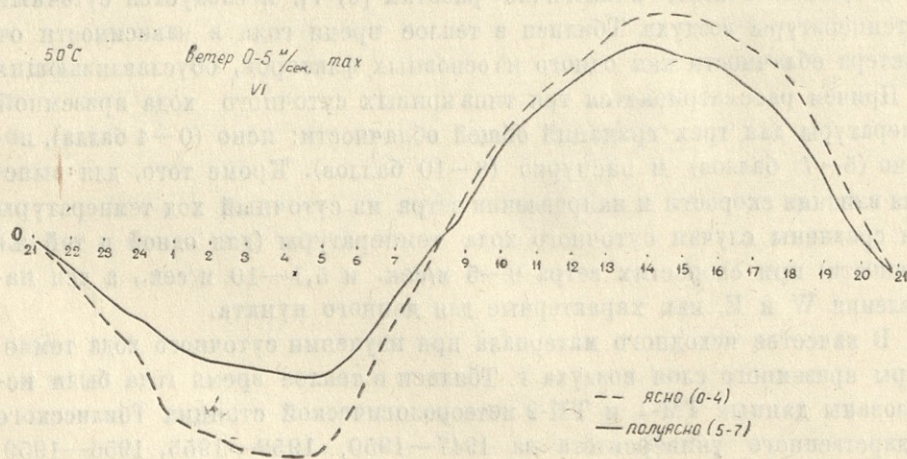


Рис. 2.

мумом. Кривые же суточного хода температуры для полужасного и пасмурного неба имеют структуру, подобную кривым для ясного неба, но с увеличением облачности они более сглажены, суточные амплитуды температуры уменьшаются (рис. 2, 3).

В таблице 1 приведены данные о суточных амплитудах температуры воздуха при ясном небе в годы максимальной и минимальной активности Солнца.

Данные таблицы 1 показывают, что суточная амплитуда температуры при ясном небе, равная разности между максимальным и минимальным ее

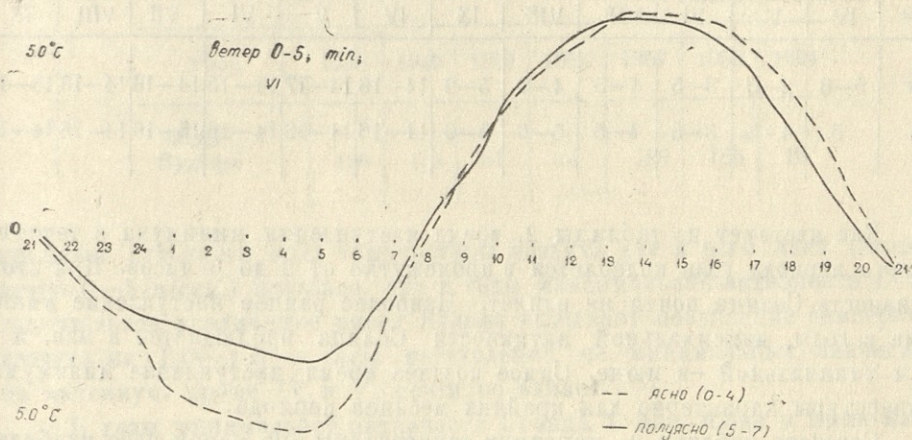


Рис. 3.

значениями, в течение лета мало изменяется при переходе от одного месяца к другому. При этом наименьшая суточная амплитуда наблюдается в августе месяце в годы максимальной активности Солнца и в июне месяце

Таблица 1

Месяцы	IV	V	VI	VII	VIII	IX
max	13.6	12.5	12.6	12.4	12.0	12.7
min	13.0	12.4	11.8	11.9	12.2	13.0

в годы минимальной активности Солнца, т. е. разность составляет два месяца.

Анализ величин суточных амплитуд температуры воздуха при полужасном и пасмурном небе показал отсутствие закономерности в изменении от месяца к месяцу, но сами величины амплитуд с увеличением облачности заметно уменьшаются.

Минимальная суточная амплитуда при пасмурном небе как в годы максимальной, так и минимальной активности Солнца отмечена в сентябре.



В таблице 2 указано местное солнечное время (часы) наступления минимальных и максимальных значений температуры в годы экстремальной активности Солнца при ясном состоянии неба.

Таблица 2

Меся- цы	Минимальная температура						Максимальная температура					
	IV	V	VI	VII	VIII	IX	IV	V	VI	VII	VIII	IX
max	5—6	2—5	3—5	4—5	4—6	5—6	14—16	14—17	14—15	14—16	14—16	13—15
min	5	4—5	3—5	4—5	5—6	5—6	14—16	14—16	14—16	15—16	14—15	14—15

Как явствует из таблицы 2, время наступления минимума в течение теплого периода года колеблется в промежутке от 2 до 6 часов. При этом активность Солнца почти не влияет. Наиболее раннее наступление минимума в годы максимальной активности Солнца наблюдается в мае, а в годы минимальной — в июне. Самое позднее время наступления минимума температуры характерно для крайних месяцев периода.

Согласно таблице 2, максимум температуры при ясном небе наиболее часто отмечается в 14 часов, а сдвиг во времени его наступления в ту или иную сторону не превышает одного часа.

Время наступления экстремальных значений температуры при пасмурной погоде примерно совпадает со временем наступления их при ясном небе.

Сопоставление сезонных графиков суточного хода температуры воздуха, построенных для западного и восточного направлений ветра, показало, что как в годы максимальной, так и минимальной активности Солнца воздух теплее при западном направлении ветра, чем при восточном. При этом разность температур воздуха при ясном небе с 0 часов до 7—8 часов утра и с 11 до 16—17 часов составляет примерно $1,0^\circ$. В остальные часы суток разность меньше $0,5^\circ$.

Аналогичная картина наблюдается и для облачности 5—7 баллов, но разность температур не превышает $0,5^\circ$.

При пасмурной погоде почти весь день разность температур составляет $0,5 - 1,0^\circ$.

Сравнение случаев суточного хода температуры (для одной и той же облачности) при скоростях ветра 0—5 и 5.1—10 м/сек. показало, что в июле амплитуда температуры при скоростях 5.1—10 м/сек. на $3-4^\circ$ меньше, чем при 0—5 м/сек. (ясное небо). Причем изменяется лишь величина минимума, а максимум температуры остается прежним.

Для полужасного состояния неба изменение величины амплитуды составляет $2-3^\circ$, при этом изменяется и минимум и максимум температуры примерно на одну и ту же величину ($1-1,5^\circ$).

Для остальных месяцев, к сожалению, не удалось провести сравнения из-за недостаточного числа случаев со скоростями 5.1—10 м/сек.

В таблице 3 приведены значения чисел Вульфа, которыми обычно характеризуют активность солнца. Как видим, различие наблюдается как в годы максимальной, так и минимальной активности Солнца. Сравнение

Таблица 3

годи	1948	1949	1952	1953	1957	1958	1964
Числа Вульфа	136	135	31	14	190	185	10

графиков суточного хода температуры воздуха для ясных дней (скорость ветра 0—5 м/сек.) показало, что в годы максимальной активности Солнца значительное увеличение чисел Вульфа вызывает повышение температуры воздуха на 1.0—1.5° в часы наступления ее минимальных значений, а на максимум, кроме IV и V, почти не влияет.

В годы минимальной активности Солнца в мае, июне и июле наблюдается общее повышение температуры воздуха (~1.0°) при меньших числах Вульфа; аналогичная картина наблюдается в августе и сентябре, но после полудня температура падает. Суточный ход температуры апреля таков, как в годы максимальной активности Солнца.

(Представлено 14. 1. 1971)

Кафедра геофизики

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Воейков, Соотношение между суточными периодическими и непериодическими колебаниями температуры воздуха. Собр. соч., 3, 1962.
2. М. Е. Берлянд, Труды ГГО, вып. 48(110), 1954.
3. А. А. Дородницын, ДАН СССР, 50, № 5, 1941.
4. Д. Л. Лайхтман, Труды ГГО, вып. 22 (84), 1950.
5. М. Е. Швец, Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., № 2, 1943.
6. А. А. Бачурина, Е. М. Орлова, Труды ЦИП, вып. 144, 1965.
7. А. А. Бачурина и др., Труды ГМЦ, вып. 13, краткосрочные прогнозы погоды, 1967.
8. К. А. Сапицкий, Труды ТГУ, 133, серия физических наук, 4, Тб., 1969.

კ. სავიციკი, რ. კოვლამი, ე. ელიზბარაშვილი

ჰაერის ტემპერატურის დღიური მსვლელობის გამოკვლევა
თბილისისათვის წლის თბილ პერიოდში მზის მაქსიმალური და
მინიმალური აქტივობის დროს

რ ე ზ ი მ ე

ჰაერის ტემპერატურის დღიური მსვლელობის ანალიზი თბილისისათვის
წლის თბილ პერიოდში ჩატარებულია მზის ექსტრემალური აქტივობის წლები-



საქართველოს
საბჭოთა მეცნიერებათა
აკადემიის გამომცემი

სათვის (ორი მაქსიმუმი და ორი მინიმუმი). გამოყენებულია შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მეტეოროლო-გიური სადგურის TM-1 და TM-2 მონაცემები 15 წლის საერთო რაოდენობით. აგებულია ჰაერის ტემპერატურის დღიური მსვლელობის გრაფიკები მოღრუბ-ლულობის ხასიათისა (სამი გრადაცია) და აგრეთვე ქარის სიჩქარესა და მიმარ-თულებზე (ძირითადად W და E როგორც მოცემული პუნქტისათვის დამახ-სიათებელი) დამოკიდებით.

მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ოპერატიულ პრაქ-ტიკაში.

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ПРОГНОСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БАРОКЛИННОЙ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ГОР

З. В. ХВЕДЕЛИДZE

В связи с интенсивным развитием вычислительной математики и вычислительной техники открываются новые возможности для решения сложных задач прогноза метеорологических элементов. Большое значение для развития методов прогноза имели работы по изучению динамики процессов в баротропной и бароклинной атмосфере [1, 3, 4, 5] с учетом влияния трения, орографии и переменности силы Кориолиса по широте.

Основное прогностическое уравнение для бароклинной атмосферы с учетом переменности силы Кориолиса при наличии гор имеет вид [1, 3, 4]

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + a(x, y) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} + b(x, y) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} + \beta(y) \frac{\partial H}{\partial x} + \eta c \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial \zeta} \right) = F \dots \quad (1)$$

$$F = - \left(H, \frac{g}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{g}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) - \frac{l}{\eta} (\eta, H) + \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta A_T,$$

где

$$c = \frac{l^2}{c_1^2}; \quad c_1^2 = \alpha R T; \quad \alpha = \frac{R}{g} (\gamma_\alpha - \gamma); \quad \eta = \frac{p_z}{p_0};$$

$$A_T = - \frac{g^2}{R l} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right);$$

H — высота соответствующей изобарической поверхности; p_0 — стандартное значение давления на уровне моря; p_z — давление на уровне горы; x, y — горизонтальные координаты, причем ось x направлена на восток по направлению параллели, ось y — на север по меридиану; $l = l(y)$ — параметр Кориолиса; g — ускорение силы тяжести; $\beta = \frac{\partial l}{\partial y}$ — параметр Россби; $a = - \frac{\partial \ln \eta}{\partial x}$; $b = - \frac{\partial \ln \eta}{\partial y}$; T — абсолютная температура; R — универсальная газовая постоянная; Δ — оператор Лапласа;

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x};$$

γ_α —адиабатический градиент температуры; γ —вертикальный градиент температуры.

С целью упрощения (1) для конкретно взятого горного массива будем считать a и b постоянными и равными их средним значениям. Уравнение (1) надо решать при начальных условиях

$$t=0, \quad H=H_0(x, y, \zeta)$$

и краевых условиях

$$1. \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

т. е. при ограниченности решения

$$2. \quad \zeta = Z(x, y), \quad \zeta \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial \zeta} + \alpha \frac{\partial H}{\partial t} = \varphi(x, y).$$

—обращения в нуль нормальной составляющей скорости ветра u поверхности горы.

Введем вместо ζ независимую переменную ζ_1

$$\zeta_1 = \ln \frac{1}{\zeta}$$

и будем искать функцию H' , определяемую равенством

$$H' = \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta_1\right) \cdot H.$$

Тогда для H' получаются уравнения

$$\Delta \frac{\partial H'}{\partial t} + a \frac{\partial^2 H'}{\partial t \partial x} + b \frac{\partial^2 H'}{\partial t \partial y} + \beta \frac{\partial H'}{\partial x} + \eta_{cp} \frac{\partial^3 H'}{\partial t \partial \zeta_1^2} -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\partial H'}{\partial t} \eta_{cp} = F \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta_1\right).$$

Краевые условия переписываются так:

$$1. \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial H'}{\partial t} = 0,$$

$$2. \quad \zeta = Z(x, y), \quad \frac{\partial^2 H'}{\partial t \partial \zeta_1} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial H'}{\partial t} =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta_1\right) \varphi(x, y) = M(x, y).$$

Применяя по t оператор Карсона-Хевисайда $\bar{H}' = p \int_0^\infty H' e^{-pt} dt$ ■

учитывая начальное условие

$$t=0, \quad H' = H'_0(x, y, \zeta_1),$$

получим

$$p\Delta \bar{H}' + (ap + \beta) \frac{\partial \bar{H}'}{\partial x} + pb \frac{\partial \bar{H}'}{\partial y} + p\eta_{cp} \left(\frac{\partial^2 \bar{H}'}{\partial \zeta_1^2} - \frac{1}{4} \bar{H}' \right) = F -$$

$$- \left[p\Delta \bar{H}'_0 + ap \frac{\partial \bar{H}'_0}{\partial x} + pb \frac{\partial \bar{H}'_0}{\partial y} + p\eta_{cp} \left(\frac{\partial^2 \bar{H}'_0}{\partial \zeta_1^2} - \frac{1}{4} \bar{H}'_0 \right) \right] = F.$$

Для функции изображения краевые условия запишутся так:

1. $z \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial H'}{\partial t} = 0,$
2. $p \frac{\partial \bar{H}'}{\partial \zeta_1} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) p \bar{H}' \Big|_{\zeta=Z(x, y)} = M(x, y) - p \frac{\partial \bar{H}'_0}{\partial \zeta_1} -$
 $- \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) p \bar{H}'_0 = M_1(x, y).$

Положим $H' = \Psi \exp \left(-\frac{(ap + \beta)x + bpy}{2p} \right).$

Для функции Ψ получим следующее уравнение:

$$\Delta \Psi + \eta_{cp} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta_1^2} - \Psi \frac{(ap + \beta)^2 + b^2 p^2}{4p^2} - \frac{1}{4} \eta_{cp} \Psi =$$

$$= \frac{1}{p} \exp \left(\frac{(ap + \beta)x + bpy}{2p} \right) F = F_1.$$

Обозначим

$$\kappa^2 = \frac{(ap + \beta)^2 + b^2 p^2 + p^2 \eta_{cp}}{4p^2}.$$

Тогда имеем

$$\Delta \Psi + \eta_{cp} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta_1^2} - \kappa^2 \Psi = F_1. \quad (2)$$

Краевые условия у поверхности горы примут вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_1} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \Psi \Big|_{\zeta=Z(x, y)} = M_1 \exp \left(\frac{(ap + \beta)x + bpy}{2p} \right) = M_2(x, y). \quad (3)$$

Будем теперь решать уравнение (2) с граничными условиями. Для этого будем считать, что функции Ψ , F_1 , и M_2 удовлетворяют условиям Дирихле. Больше того, потребуем, чтобы функции F_1 и M_2 быстро убывали при увеличении r (быстрее, чем e^{-kr} , где $k > \frac{(ap + \beta)x + bpy}{2p}$), т. е.

должны существовать интегралы:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta; \quad \iint_{-\infty}^{\infty} F_1(\zeta, \eta) d\zeta d\eta; \quad \iint_{-\infty}^{\infty} M_2(\zeta, \eta) d\zeta d\eta.$$



საქართველოს
აкадеმიის

Тогда их можно представить с помощью интеграла Фурье,

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-i(mx+ny)} dmdn$$

$$M_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} M_{2mn}(\zeta_1) e^{-i(mx+ny)} dmdn \quad (4)$$

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{mn}(\zeta_1) e^{-i(mx+ny)} dmdn,$$

где Ψ_{mn} — искомая функция, а

$$F_{1mn} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F_1(x', y', \zeta_1) e^{imx'+iny'} dx' dy', \quad (4')$$

$$M_{2mn} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} M_2(x', y') e^{imx'+iny'} dx' dy'.$$

После подстановки в (2) и (3) получим:

$$\eta_{cp} \frac{d^2 \Psi_{mn}}{d\zeta_1^2} - (x^2 + \rho^2) \Psi_{mn} = F_{1mn}, \quad (5)$$

$$\frac{d \Psi_{mn}}{d\zeta_1} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \Psi_{mn} \Big|_{\zeta=Z(x, y)} = M_{2mn}. \quad (6)$$

Решением однородного уравнения (5) являются выражения

$$S_1 = e^{-\sigma \zeta_1}, \quad S_2 = e^{\sigma \zeta_1}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{x^2 + \rho^2}{\eta_{cp}}}.$$

Решение неоднородного уравнения (5) имеет вид

$$\Psi_{mn} = c_1 e^{-\sigma \zeta_1} + c_2 e^{\sigma \zeta_1} + \frac{S_1}{\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\zeta} \frac{F_{1mn}(\zeta_1)}{W} S_2 d\zeta_1 - \frac{S_2}{\eta_{cp}} \int_{\zeta}^{\zeta_z} \frac{F_{1mn}(\zeta_1)}{W} S_1 d\zeta_1,$$

где

$$W = S_1 \frac{\partial S_2}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial S_1}{\partial \zeta_1} S_2 =$$

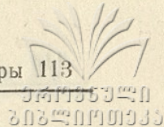
— детерминант Вронского, c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

Так как

$$W = (\sigma + \sigma) e^{-\sigma \zeta_1} e^{\sigma \zeta_1} = 2\sigma,$$

то условие ограниченности дает:

$$C_2 = \frac{1}{2\sigma \eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-\sigma \zeta_1} d\zeta_1,$$



следовательно,

$$\Psi_{mn} = \frac{e^{-\sigma\zeta_1}}{2\sigma\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_{1mn}(\zeta_1) e^{\sigma\zeta_1} d\zeta_1 + \frac{e^{\sigma\zeta_1}}{2\sigma\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\infty} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1 + c_1 e^{-\sigma\zeta_1}.$$

Постоянную C_1 определим из граничного условия (6). Получим

$$C_1 = \frac{M_{2mn} e^{\sigma\zeta_z}}{\alpha - \sigma + \frac{1}{2}} - \frac{\sigma + \alpha + \frac{1}{2}}{2\sigma\eta_{cp}} \left(\alpha - \sigma + \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_z}^{\infty} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1.$$

Теперь $\Psi_{mn}(\zeta_1)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(\zeta_1) = & \frac{e^{\sigma\zeta_1}}{2\sigma\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\infty} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1 + \frac{e^{-\sigma\zeta_1}}{2\sigma\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_{1mn}(\zeta_1) e^{\sigma\zeta_1} d\zeta_1 + \\ & + \frac{\left(\sigma + \alpha + \frac{1}{2} \right)}{2\sigma\eta_{cp}} \left(\sigma - \alpha - \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_z}^{\infty} F_{1mn}(\zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1 + \frac{M_{2mn} e^{\sigma\zeta_z}}{\alpha - \sigma + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и заменим F_{1mn} , M_{2mn} выражениями (4'). Получим

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4\pi^2} \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\sigma\eta_{cp}} \left[\int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma(\zeta_1 - \zeta_1)} d\zeta_1 + \right. \right. \\ & + \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma(\zeta_1 - \zeta_1)} d\zeta_1 + \frac{\sigma + \alpha + \frac{1}{2}}{\sigma - \alpha - \frac{1}{2}} \times \\ & \left. \left. \times \int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{M_2(x', y')}{\alpha - \sigma + \frac{1}{2}} e^{\sigma\zeta_z} \left\{ e^{-im(x-x') - in(y-y')} dm dn dx' dy' \right. \right. \end{aligned} \quad (8)$$

Возвращаясь к \bar{H}' , имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}' = & \frac{1}{4\pi^2} \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\sigma\eta_{cp}} \left[\int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma(\zeta_1 - \zeta_1)} d\zeta_1 + \right. \right. \\ & + \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma(\zeta_1 - \zeta_1)} d\zeta_1 + \frac{\sigma + \alpha + \frac{1}{2}}{\sigma - \alpha - \frac{1}{2}} \int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(x', y', \zeta_1) e^{-\sigma\zeta_1} d\zeta_1 \left. \right] + \end{aligned}$$



$$+ \frac{M_2(x', y')}{\alpha - \sigma + \frac{1}{2}} e^{\sigma \zeta_z} \left. \frac{1}{p} \exp \left(\frac{(a\rho + \beta)(x - x') + b\rho(y - y')}{2\rho} \right) \right\} \times \\ \times e^{-im(x-x') - in(y-y')} dm dn dx' dy'.$$

Перейдем от переменных m и n к переменным ρ и δ . Получим $m = \rho \cos \delta$; $n = \rho \sin \delta$.

Положим еще

$$x - x' = r \cos \vartheta; \quad y - y' = r \sin \vartheta.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \exp[ir\rho \cos(\delta - \vartheta)] d\delta = 2\pi J_0(r, \rho)$$

и

$$\exp(\sigma \zeta_1) = \exp \left(\sqrt{\frac{x^2 + \rho^2}{\eta_{cp}}} \zeta \right) = \exp \left(\frac{\zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right),$$

то

$$\begin{aligned} \overline{H'} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{p} \exp \left(-\frac{r\beta \cos \vartheta}{2p} \right) \exp \left(-\frac{r(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)}{2} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^\infty F_1(r, \vartheta, \zeta_1) d\zeta_1 \int_0^\infty \frac{\exp \left(-\frac{\zeta_1 - \zeta}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right)}{\sigma} J_0(r, \rho) \rho d\rho + \right. \\ &+ \sqrt{\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^\zeta F_1(r, \vartheta, \zeta_1) d\zeta_1 \int_0^\infty \frac{\exp \left(-\frac{\zeta_1 - \zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right)}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} J_0(r, \rho) \rho d\rho + \\ &+ \frac{1}{\sigma - \alpha - \frac{1}{2}} \int_{\zeta_z}^\infty F_1(r, \vartheta, \zeta_1) d\zeta_1 \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right) J_0(r, \rho) \rho d\rho + \\ &\quad \left. + \sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \int_{\zeta_z}^\infty F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \int_0^\infty \frac{\exp \left(-\frac{\zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right)}{\left(\sigma - \alpha - \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + \rho^2}} J_0(r, \rho) \rho d\rho d\zeta_1 \right] + \\ &+ M_2(r, \vartheta) \int_0^\infty \frac{\exp \left(\frac{\zeta_z}{\sqrt{\eta_{cp}}} \sqrt{x^2 + \rho^2} \right)}{\alpha - \sigma + \frac{1}{2}} J_0(r, \rho) \rho d\rho \left. \right\} r dr d\vartheta. \quad (10) \end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований используем значения следующих известных интегралов [7]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha \sqrt{t^2 + y^2})}{\sqrt{t^2 + y^2}} J_0(r, t) dt = \frac{\exp(-y \sqrt{\alpha^2 + r^2})}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha \sqrt{t^2 + y^2})}{\lambda + \sqrt{t^2 + y^2}} J_0(r, t) dt = \frac{\exp(-y \sqrt{\alpha^2 + r^2})}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} +$$

$$+ \lambda e^{\alpha \lambda} \int_0^{\alpha} e^{-\lambda \varepsilon} \frac{\exp(-y \sqrt{\varepsilon^2 + r^2})}{\sqrt{\varepsilon^2 + r^2}} d\varepsilon,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha \sqrt{t^2 + y^2})}{\sqrt{t^2 + y^2} (\sqrt{t^2 + y^2} + \lambda)} J_0(r, t) dt =$$

$$= -e^{-\alpha \lambda} \int_0^{\alpha} e^{-\varepsilon \lambda} \frac{\exp(-y \sqrt{\varepsilon^2 + r^2})}{\sqrt{\varepsilon^2 + r^2}} d\varepsilon.$$

Применяя их в нашем случае, получим

$$\overline{H'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{r\beta \cos \vartheta}{2p}\right) \exp\left(\frac{-r(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\eta_{cp}}} \left[\int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \frac{\exp\left(-x \sqrt{\frac{|\zeta_1 - \zeta_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}\right)}{\sqrt{\frac{|\zeta_1 - \zeta_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} d\zeta_1 + \right.$$

$$+ \int_{\zeta_z}^{\zeta} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \frac{\exp\left(-x \sqrt{\frac{|\zeta_1 - \zeta_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}\right)}{\sqrt{\frac{|\zeta_1 - \zeta_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} d\zeta_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \frac{\exp\left(-x \sqrt{\frac{\zeta_1^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}\right)}{\sqrt{\frac{\zeta_1^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} d\zeta_1 \right] +$$

$$+ \sqrt{\eta_{cp}} \int_{\zeta_z}^{\infty} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \exp\left[\zeta_1 \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \int_{\frac{\zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}}}^{\infty} \exp\left[\sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \varepsilon\right] \frac{\exp(-x \sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2})}{\sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}} d\varepsilon +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \exp \left[\zeta_1 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] \times \\
 & \times \int_{\frac{\zeta_1}{\sqrt{\eta_{cp}}}}^{\infty} \exp \left[\sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \right] \frac{\exp \left(-x \sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2} \right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}} d\varepsilon \times \\
 & \times \int_{\zeta_2}^{\infty} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) d\zeta_1 - M_2(r, \vartheta) \left(\sqrt{\eta_{cp}} \frac{\exp \left(-x \sqrt{\frac{\zeta_2^2}{\eta_{cp}} + r_1^2} \right)}{\sqrt{\frac{\zeta_2^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} + \right. \\
 & + \left. \sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \exp \left[\zeta_2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] \int_{\frac{\zeta_2}{\sqrt{\eta_{cp}}}}^{\infty} \exp \left[\sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \right] \times \right. \\
 & \left. \left. \times \frac{\exp \left(-x \sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2} \right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}} d\varepsilon \right\} r dr d\vartheta \quad (11)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \bar{H}' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F_1(r, \vartheta, \zeta_1) \bar{G}(r, \vartheta, \zeta_1) r dr d\vartheta + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} M_2(r, \vartheta) \bar{G}_2(r, \vartheta, \zeta_2) r dr d\vartheta. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (11), можно было бы переходом к обратному преобразованию Лапласа по переменной p получить искомое решение. Однако обратное преобразование для H' невозможно, так как несобственный интеграл $d\varepsilon$ не допускает перемены порядка интегрирования. Поэтому для нахождения оригинала функции воспользуемся формулой обращения Меллина-Римана

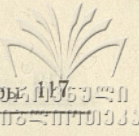
$$g_m(r, \vartheta, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g_m(p) e^{pt} dp,$$

а именно, вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p^2} \exp \left(-\frac{r\beta \cos \vartheta}{2p} \right) \times \\
 & \exp \left(-\sqrt{D^2 + \frac{a\beta}{2p} + \frac{\beta^2}{4p^2}} \sqrt{k^2 + r_1^2} \right) e^{pt} dp,
 \end{aligned}$$

где

$$D^2 = \frac{a^2 + b^2 + \eta_{cp}}{4}, \quad k = \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_1}{\eta_{cp}}; \frac{\zeta_1 - \zeta_1}{\eta_{cp}}; \frac{\zeta_1}{\eta_{cp}}; \frac{\zeta_2}{\eta_{cp}}; \varepsilon \right).$$



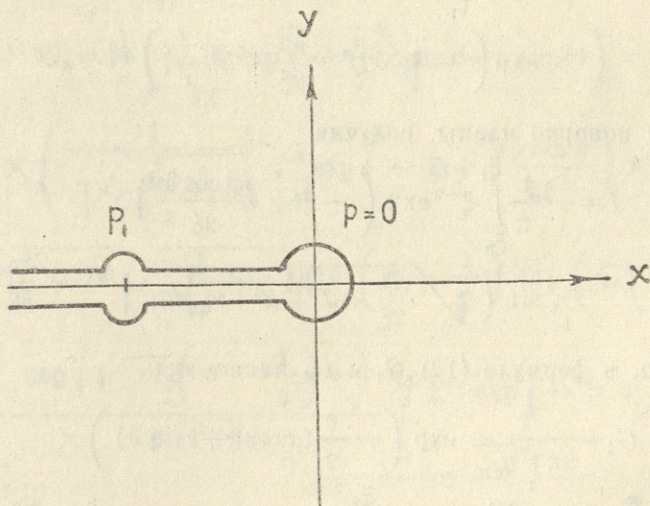
Для малых значений t , что соответствует большим значениям p , членом $\beta^2/4p^2$ можно пренебречь. Тогда

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p^2} \exp\left(-\frac{r\beta \cos \vartheta}{2p}\right) \times \\ \times \exp\left(-\sqrt{D^2 + \frac{2a\beta}{4p} \sqrt{k^2 + r_1^2}} e^{p t} dp. \quad (13)$$

Точка $p=0$ будет точкой регулярности подынтегральной функции, так как

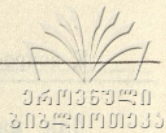
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{r\beta \cos \vartheta}{2\delta}\right) e^{-i\varphi} \rightarrow 0.$$

Точка $p_1 = -\frac{a\beta}{2p}$ будет точкой ветвления. Чтобы сделать функцию однозначной, можно провести разрез так, как показано на рисунке.



При интегрировании в нижней полуплоскости положим $p = \xi e^{-i\pi}$. На участке $(-\infty, p_1)$, $D > \frac{a\beta}{2p}$, поэтому

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\ \times \exp\left(-\sqrt{D^2 - \frac{a\beta}{2\xi} \sqrt{k^2 + r_1^2}}\right) d\xi.$$



На участке (ρ_1, ρ_0) , $D < \frac{a\beta}{2\rho}$ получается

$$I_{11} = + \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\ \times \exp\left(-i \sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2 \sqrt{k^2 + r_1^2}}\right) d\xi.$$

Аналогично для верхней полуплоскости получаем

$$I_{111} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\ \times \exp\left(i \sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2 \sqrt{k^2 + r_1^2}}\right) d\xi$$

$$I_{1V} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1}^{\infty} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\ \times \exp\left(-\sqrt{D^2 - \frac{a\beta}{2\xi}} \sqrt{k^2 + r_1^2}\right) d\xi.$$

Собирая попарно члены, получим

$$I = - \frac{1}{\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\ \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2 \sqrt{k^2 + r_1^2}}\right) d\xi. \quad (14)$$

Следовательно, в формуле (12) G_1 и G_2 имеют вид:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\eta_{cp}}} \exp\left(-\frac{r}{2}(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)\right) \times \\ \times \left\{ \int_{\xi_z}^{\infty} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \right. \\ \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2 \sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}}\right) d\xi + \\ \left. + \int_{\xi_z}^{\xi} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \right. \\ \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2 \sqrt{\frac{|\xi_1 - \xi_1|^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}}\right) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\xi_2}^{\infty} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\frac{\xi_1^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\
 & \quad \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2} \sqrt{\frac{\xi_1^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}\right) d\xi \Bigg] + \\
 & + (\sqrt{\eta_{cp}} + \eta_{cp}) \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \exp\left[-\xi_1 \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right] \times \\
 & \times \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{\exp\left(\sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \varepsilon\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}} d\varepsilon \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\
 & \quad \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2} \sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}\right) d\xi \Bigg\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\eta_{cp}}} \exp\left(-\frac{r}{2}(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)\right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_2^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \right. \\
 & \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2} \sqrt{\frac{\xi_2^2}{\eta_{cp}} + r_1^2}\right) d\xi + \left. \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\xi_2 \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right) \right) \times \\
 & \times \int_{\xi_2}^{\infty} \frac{\exp\left(\sqrt{\eta_{cp}} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \varepsilon\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi^{-2} \exp\left(-\xi t + \frac{r\beta \cos \vartheta}{2\xi}\right) \times \\
 & \quad \times \sin\left(\sqrt{\frac{a\beta}{2\xi} - D^2} \sqrt{\varepsilon^2 + r_1^2}\right) d\varepsilon d\xi \Bigg). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Теперь можно записать решение для функций оригинала в таком виде

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F_1(r, \vartheta, \xi_1) G_1(r, \vartheta, \xi_1) r dr d\vartheta + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} M_2(r, \vartheta) G_2(r, \vartheta, \xi_1) r dr d\vartheta. \quad (17)
 \end{aligned}$$



Для функций влияния G_1 и G_2 надо найти численные значения. Анализ этих функций показывает, что для малых значений t решения лучше получить в виде рядов по степеням t

$$G = E_0 + E_1 t + E_2 t^2 + E_3 t^3 + \dots$$

Исследование полученного решения показывает: 1) неровность земной поверхности отражается как на исходном поле, так и на функции влияния; 2) влияние гор на изменение поля геопотенциала, так же, как и влияние переменной силы Кориолиса, увеличивается со временем; 3) влияние горы на упомянутую функцию растет с увеличением горизонтальных размеров горы.

Так как при расчетах были приняты указанные выше значения параметров a и b , характерные для соответствующих гор, то функции влияния относятся к области непосредственно над горой, вдали от гор следует положить $a = b = 0$.

(Представлено 22. IX. 1970)

Кафедра геофизики.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Кибель, Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Госиздат, М., 1957.
2. Г. И. Марчук, Численные методы в прогнозе погоды. Гидрометиздат. Л., 1967.
3. П. Н. Белов, Практические методы численного прогноза погоды. Гидрометеоиздат, 1967.
4. З. В. Хведелидзе, Труды ТГУ, серия физ. наук, 133, 1969.
5. Е. М. Добрышман, Труды ЦИП, вып. 78, 1958.
6. Р. И. Нозадзе, Труды Тбил. НИГМИ, вып. 4, 1959.
7. П. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, М., 1951.

ზ. ხვედელიძე

ბაროკლინური ატმოსფეროს პროგნოზური განტოლების ამოხსნის საკითხისათვის მთის გავლენის გათვალისწინებით

რეზიუმე

შრომში მოცემულია ბაროკლინური ატმოსფეროსათვის ატმოსფერული წნევის (იზობარული ზედაპირის სიმაღლის) ძირითადი პროგნოზური განტოლების ამოხსნა. აღნიშნული განტოლების ამოხსნისათვის გამოყენებულია ოპერატიული აღრიცხვისა და ფურიეს ინტეგრალის შესაბამისი ფორმულები. ამოხსნაში გათვალისწინებულია როსბის ეფექტის და ოროგრაფის ერთდროული გავლენა.

დროითი და სივრცითი კოორდინატების ბიჯების სპეციალური შერჩევით შეიძლება მიღებული განტოლებების დაპროგრამება გამომთვლელ ელექტრონულ მანქანებზე და სათანადო პროგნოზის განხორციელება რიცხვითი მეთოდით.

ნიკელი ხრამის კრისტალური მასივის ქანებში (ვალკის რაიონი)

ი. მოსევილი, ე. დოკსოკაშვილი

ხრამის კრისტალური მასივი საკმაოდ რთული გეოლოგიური აგებულებისაა. ჩატარებული გამოკვლევების შედეგად დადგენილია ხრამის მასივის შემადგენელი ქანების შემდეგი თანმიმდევრობა:

1. მეტამორფიზმის ასაკის კალედონური კვარციან-ლიორიტიანი გნეისები (ქარსიანი მასებით—სელიმენ ტოგენური მეტამორფული ქანები და უქარსო მასებით, რომლებიც შეიცავენ ფუძე მაგმური ქანების გარდაქმნილ რელიქტებს).

2. ფუძე მაგმური ქანები (გაბრო-პორფირიტები, გაბრო-დიაბაზები, დიაბაზები, გაბრო-პიროქსენიტები), რომლებიც კვეთენ კვარციან-ლიორიტის გნეისებს.

3. ჰერცინული გრანიტოიდები, ჩვეულებრივ მასიური, ხან გნეისოიდური (გრანიტები, გრანოლიორიტები, კვარციანი დიორიტები), რომლებიც წარმოქმნილან კვარციან-ლიორიტული გნეისებისა და მათი გადაკვეთი ფუძე მაგმური ქანების სხვადასხვა ინტენსივობის მეტასომატური გრანიტიზაციის ხარჯზე.

4. ზედაპალეოზოური ფუძე მაგმური ქანები (დიაბაზები, პორფირიტები, გაბრო-პორფირიტები, გაბრო-დიაბაზები), რომლებიც კვეთენ გნეისებსაც და გრანიტოიდებსაც.

5. კვარც-პორფირები და გრანიტ-პორფირები, რომლებიც დაიკების სახითაა ჩაწოლილი ჰერცინულ გრანიტოიდებში, უფრო იშვიათად გნეისებში, ხოლო ცალკეულ შემთხვევებში უკანასკნელთა გადაკვეთი ფუძე მაგმური ქანებში. ეს წარმონაქმნები, როგორც ჩანს, წარმოადგენენ იმ ფესვებს, რომლებიც კვებავდნენ ზედაპალეოზოურ ვულკანიზმს.

ხრამის მასივის ქანები ტრანსგრესულადაა გადახურული ზედაპალეოზოური ტუფოგენურ-დანალექი წარმონაქმნებით [1].

ზემოაღნიშნული ქანებიდან ჩვენ ნიკელის რაოდენობრივი შეცულობები დავდგინეთ დიორიტებში, დიაბაზურ ქანებში, პორფირიტებში, კირქვებში, ქვიშაქვებში, ვულკანოგენურ ბრეჩჩიებში, ტუფებში, კვარციტში, კვარციან ქანებში, გრანიტებში, ბაზალტებში და სხვ.

აღნიშნული გამოკვლევების შედეგები მოყვანილია ცხრილში:

ქანის ლითოლოგიური სახელწოდება *	ნიმუშების რიცხვი	ნიკელის შეცულობის ზღვრები %% **
დიორიტები	15	1,2.10 ⁻³ —1,2.10 ⁻²
დიბაზური ქანები	17	4,0.10 ⁻³ —9,9.10 ⁻³
ბორფირიტები	4	2,3.10 ⁻³ —7,1.10 ⁻³
კირქვები	2	8,5.10 ⁻³ —8,9.10 ⁻³
ქვიშაქვები	3	7,2.10 ⁻³ —1,1.10 ⁻²
კაჟიანი ქანები	4	1,9.10 ⁻⁴ —4,1.10 ⁻⁴
გრანიტები	5	2,2.10 ⁻³ —8,5.10 ⁻³
ტუფები	5	6,7.10 ⁻³ —9,2.10 ⁻³
კვარციტი	3	1,2.10 ⁻⁴ —1,2.10 ⁻³
ვულკანოგენური ბრეჩიები	3	6,8.10 ⁻³ —9,7.10 ⁻³
გნეისები	4	3,5.10 ⁻³ —7,5.10 ⁻³
გაბროიდული ქანები	3	6,5.10 ⁻³ —7,1.10 ⁻³
ლუმბელო	2	7,1.10 ⁻³ —8,2.10 ⁻³
ალბიტოფირი	2	6,2.10 ⁻³ —6,9.10 ⁻³

* ნიმუშები მინერალოგიურად აღწერა გეოლოგია-მინერალოგიის მეცნიერებათა დოქტორმა ბ. გოგიშვილმა.

** ნიკელის რაოდენობრივი შეცულობების დადგენას ვაწარმოებდით სენდელ [4]-მალიუგას [2,3] კოლორიმეტრიული მეთოდით.

დასკვნები

1. გამოკვლეული ქანებიდან ნიკელის მაქსიმალური შეცულობით ხასიათდება დიორიტები (1,2.10⁻³—1,2.10⁻² % Ni), დიბაზური ქანები (4,0.10⁻³—9,9.10⁻² % Ni), ქვიშაქვები (7,2.10⁻³—1,1.10⁻² % Ni), კირქვები (8,5.10⁻³—8,9.10⁻³ % Ni) და ა. შ. ნიკელს მინიმალური რაოდენობით კვარციტი (1,2.10⁻⁴ % Ni) და კაჟიანი ქანები (1,9.10⁻⁴—4,1.10⁻⁴ % Ni) შეიცავს.

2. გამოკვლეული რაიონის გნეისებში ნიკელის შედარებით გაზრდილი შეცულობა (3,5.10⁻³—7,5.10⁻³ % Ni) იმაზე უნდა მიუთითებდეს, რომ აღნიშნული ქანები ტერიგენულ მასალასთან ერთად ალბათ ფუძე მაგმური ქანების ნაწილაკებს შეიცავს.

3. გრანიტოიდებთან შედარებით გნეისების გადამკვეთ ფუძე მაგმურ ქანებში ნიკელის გაზრდილი შეცულობა გრანიტიზაციის პერიოდში ნიკელის თანდათანობითი დაკარგვით უნდა აიხსნას.

4. გრანიტოიდებში ნიკელის არსებობა იმის მაჩვენებელია, რომ იმ დედა ქანთა შორის, რომელთა მეტასომატური გრანიტიზაციით წარმოიქმნენ ეს გრანიტოიდები, არსებით როლს ფუძე მაგმური ქანები ასრულებდნენ.

(წარმოდგენილია 25.X.1969)

არაორგანული ქიმიის კათედრა

ლიტერატურა

1. Труды геологического института АН СССР, новая серия, 1, 1965, стр. 35.
2. Д. П. Милюга, Труды Всесоюз. конф. по аналит. химии, 2, 1943, стр. 493.
3. Д. П. Милюга, Труды био-еохим. лаб., 5, 1939, стр. 91.
4. Е. Б. Сендэл, Колориметрическое определение следов металлов. 1949, стр. 544.
5. ე. ბ. დოქსოპულო, თსუ შრომები, 74, 1959, გვ. 39.

6. ე. ბ. დოქსოპულო, ნიკელი ჩორჩანის ტალვის საბადოს მიმდებარე ქანებში, წყლებში და მცენარეებში, საკანდიდატო დისერტაცია, 1961.
7. ი. ბ. მოსეშვილი, ე. ბ. დოქსოპულო, თსუ შრომები, 126 (IV), 1968, გვ. 37.
8. ი. ბ. მოსეშვილი, ე. ბ. დოქსოპულო, თსუ შრომები, 126 (IV), 1968, გვ. 43.
9. ი. ბ. მოსეშვილი, ე. ბ. დოქსოპულო, ლ. ა. კუცია, თსუ შრომები, 126 (IV), 1968, გვ. 47.

* Я. П. МОСЕШВИЛИ, Э. П. ДОКСОПУЛО

НИКЕЛЬ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ ХРАМСКОГО КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАССИВА

(Цалкинский район)

Резюме

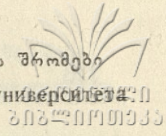
Храмский кристаллический массив характеризуется весьма сложным геологическим строением. В построении массива участвуют различные по возрасту и типу горные породы, из которых количественное содержание никеля установлено в диоритах, диабазных горных породах, порфиритах, песчаниках, известняках, вулканогенных брекчиях, туфах, гранитах и т. д.

Из исследованных горных пород наибольшим содержанием никеля характеризуются диориты ($1,2 \cdot 10^{-3}$ — $1,2 \cdot 10^{-2}\%$ Ni), диабазные горные породы ($4,0 \cdot 10^{-3}$ — $9,9 \cdot 10^{-2}\%$ Ni), песчаники ($7,2 \cdot 10^{-3}$ — $1,1 \cdot 10^{-3}\%$ Ni), известняки ($8,5 \cdot 10^{-3}$ — $8,9 \cdot 10^{-3}\%$ Ni) и т. д. Минимальные количества никеля содержат кварцит ($1,2 \cdot 10^{-4}\%$ Ni) и кварцевые горные породы ($1,9 \cdot 10^{-4}$ — $4,1 \cdot 10^{-4}\%$ Ni).

Повышенное содержание никеля в гнейсах ($3,5 \cdot 10^{-3}$ — $7,5 \cdot 10^{-3}\%$ Ni) указывает на то, что эти горные породы, наряду с теригенным материалом, содержали частицы основных магматических горных пород (туфовый материал).

Повышенное количественное содержание никеля в пересекающих гнейсы основных горных породах объясняется постепенным исчезновением никеля в процессе гранитизации.

Присутствие никеля в гранитоидах указывает на то, что среди материнских горных пород, в результате метасоматической гранитизации которых образовались эти гранитоиды, существенную роль играли основные горные породы.



ქანეზში მცირე რაოდენობა სპილენძის განსაზღვრის საკითხისათვის

ი. საბინ-გუსი, მ. უზუღავა

ქანეზში მცირე რაოდენობა სპილენძის განსაზღვრისას ქანის დაშლას აწარმოებენ ფტორწყალბადმჟავას და გოგირდმჟავას ნარევიან შელღობის გზით [1]. პირველ შემთხვევაში სპილენძის დაკარგვის შესაძლებლობა თითქმის გამორიცხულია, მაგრამ ფტორწყალბადმჟავას გამოყენება მასობრივ ანალიზში მეტად ძნელია. ქანის შელღობისას კი მიიღება შემცირებული შედეგები, ამიტომ მიზნად დავისახეთ მოგვეჩვენა ისეთი პირობები, რომ შელღობის გამოყენებისას თავიდან აგვეცილებინა სპილენძის დანაკარგი.

დასახული მიზნის განსახორციელებლად ქანის სტანდარტულ ნიმუშში მაქსიმალური სიზუსტით დავადგინეთ სპილენძის რაოდენობა. ამისათვის სტანდარტული ქანის ნიმუში პლატინის ჯამში დავამუშავეთ ფტორწყალბადმჟავასა და გოგირდმჟავას ნარევიან, მიღებულ ხსნარში სპილენძი განესაზღვრეთ კარბამატული და დითიზონური მეთოდებით [2, 3]. პირველი მეთოდით სპილენძი აღმოჩნდა $2,74 \cdot 10^{-3} \%$, ხოლო მეორე მეთოდით— $2,70 \cdot 10^{-3} \%$, საშუალო— $2,72 \cdot 10^{-3} \%$.

ცნობილია, რომ ქანის ნიმუშის სოდასთან შელღობისას პლატინა მცირე რაოდენობით გადადის ხსნარში, მაგრამ იგივე კი ძლიერ უშლის ხელს დითიზონური მეთოდით სპილენძის განსაზღვრას. ამიტომ ნიმუშის შესაღობად გამოვიყენეთ რკინის ტიგელი, რადგან, როგორც ცნობილია, შენაღობში გადასული რკინა ხელს არ უშლის განსაზღვრას.

ამ შემთხვევაში იმავე სტანდარტულ ქანში სპილენძი საშუალოდ აღმოჩნდა $2,51 \cdot 10^{-3} \%$, რაც მნიშვნელოვნად მცირეა $2,72 \cdot 10^{-3} \%$ -თან შედარებით.

შემცირების მიზეზი უნდა იყოს SiO_2 -ზე სპილენძის იონების ადსორბცია. ამ მოსაზრების დასამტკიცებლად შენაღობის გამოტუტვის შედეგად მიღებული ხსნარი გაფილტრეთ. ფილტრზე დარჩენილი SiO_2 ჩავერცხეთ წყლით, შემდეგ გადავიტანეთ პლატინის ჯამში და დავშალეთ ფტორწყალბადმჟავასა და გოგირდმჟავას ნარევიან, ნაშთი გავხსენით წყალში და მიღებულ ხსნარში განესაზღვრეთ სპილენძი. შედეგები მოცემულია № 1 ცხრილში.

ცხრილი № 1

№№	სტანდარტული ქანის წონა გ-ით	აღმოჩნდა სპილენძი მკგ-ით	აღმოჩნდა სპილენძი %%-ით
1	2,1084	3,4	$0,16 \cdot 10^{-3}$
2	2,1722	3,2	$0,15 \cdot 10^{-3}$
3	2,2648	4,2	$0,10 \cdot 10^{-3}$

ცხრილი № 2

№№	სტანდარტული ქანის წონა გ-ით	აღმოჩნდა სპილენძი $X \cdot 10^{-3} \%$
1	0,9348	2,68
2	0,9626	2,70
3	0,8594	2,66
4	0,9702	2,72
5	0,8218	2,64

როგორც ამ მონაცემებიდან ჩანს, SiO_2 ნამდვილად იკავებს (ადასორბირებს) სპილენძის მნიშვნელოვან რაოდენობას, ამიტომ შეუძლებელია მეთოდით სპილენძის განსაზღვრისას შედეგები მულამ შემცირებული იქნება. ამის თავიდან ასაცილებლად საჭიროა როგორმე შემცირდეს სპილენძის იონების ადასორბცია SiO_2 -ზე.

როგორც ცნობილია [4], მოცემულ სორბენტზე კატიონთა სორბცია ხდება გარკვეული თანმიმდევრობით. ამ რიგში სპილენძის წინ განლაგებულ კატიონებს, მაგალითად, ტყვიის იონებს შეუძლია გამოაძევეს მოცემულ სორბენტზე ადასორბირებული სპილენძის იონები. ამიტომ თუ შენაღლობის გამოტუტვის შედეგად მიღებულ ხსნარში შევიტანთ ტყვიის იონებს, ამით სპილენძის დანაკარგი უნდა შემცირდეს. ამ მოსაზრების შესამოწმებლად სტანდარტული ქანის ნიმუში შევალღვეთ სოდასთან რკინის ტიგელში, შენაღლობი გამოვტუტეთ წყლით, შევამჟავეთ მარილმჟავათი და დავუმატეთ ტყვიის ქლორიდის ნაჭერი ხსნარი, კარგად მორღვისა და ათი წუთის დაყოვნების შემდეგ გავფილტრეთ, ნალექი (SiO_2) კარგად ჩაგრეცხეთ და ფილტრატში განვსაზღვრეთ სპილენძი. შედეგები მოცემულია № 2 ცხრილში.

როგორც მონაცემებიდან ჩანს, ამ შემთხვევაში სტანდარტულ ქანში საშუალოდ აღმოჩენილ იქნა $2,68 \cdot 10^{-3} \%$ სპილენძი. ეს შედეგი საკმაოდ აღემატება უბრალო შეუძლებელი მეთოდით მიღებულ შედეგს ($2,51 \cdot 10^{-3} \%$) და უახლოვდება $2,72 \cdot 10^{-3} \%$ -ს.

შეტანილი შესწორების შედეგად შეუძლებელი გამოყენებისას ქანებში სპილენძის განსაზღვრა ხდება უფრო ზუსტი და პრაქტიკული შესრულების მხრივაც არაა რთული. ამასთანავე ქანის შეუძლებლობა შეიძლება რკინის ტიგელში.

(წარმოდგენილია 20. X. 1967)

არაორგანული ქიმიის
კათედრა

ლიტერატურა

1. В. Ф. Гиллебранд, Г. Э. Лендель, Г. А. Брайт, Д. И. Гофман, Практическое руководство по неорганическому анализу, М., 1960, стр. 838—853.
2. А. К. Вабко, А. Т. Пилипенко, ЖАХ, 1, № 5—6, 1946, стр. 275.
3. Ю. А. Чернихов, Б. М. Добникова, Зав. лаб., XI, № 10, 1949, стр. 1143.
4. А. М. Шемякин, Э. С. Мицеловский, Д. В. Романов, Хроматографический анализ, Госхимиздат, М., 1955.

И. А. САБИН-ГУС, М. М. УГУЛАВА

კ ვოპროსუ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МАЛЫХ КОЛИЧЕСТВ МЕДИ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Резюме

При определении следовых количеств меди в породах, их разложение сплавлением с содой приводит к значительно заниженным результатам. Установлено, что причиной этого является адсорбция меди на выпадающем SiO_2 . Для десорбции меди нами использован хлористый свинец, который добавляется после осаждения SiO_2 .

Таким способом достигается значительное повышение точности определения меди в породах.

**წორკონი ალკილისა და სტირილის რადიკალების შემცველი
 ბორორგანული ნაერთების სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური
 გამოკვლევა**

გ. ქავციავილი, ნ. ფირცხალავა, ს. კანდელაკი, ნ. ტუფინაშვილი

ბორორგანული ნაერთებისადმი დიდი ინტერესი, უშუალოდ გამომდინარეობს მათი სტრუქტურულიდან და თვისებებიდან. ისინი ხასიათდებიან პოლიმერიზაციის, მიმოცვლის, დისპროპორციისა და სხვა რეაქციებით. რეაქციისადმი მათი დიდი უნარი განპირობებულია უშუალოდ თვით ბორის ატომის აგებულებით. ცნობილია, რომ ბორის ატომს გააჩნია ერთი თავისუფალი p ელექტრონული ორბიტა, რომელზედაც შეუძლია მიიღოს დონორიდან ელექტრონები და წარმოქმნას კოორდინაციული ნაერთები.

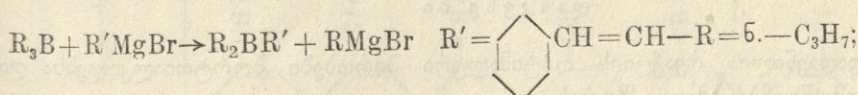
ბ. მიხაილოვისა და მისი თანამშრომლების მიერ ფართოდაა შესწავლილი ბორტრიალკილები და მათი მიღების მეთოდები, ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევის საფუძველზე დადგენილია ბორტრიალკილების რეაქციაში შესვლის დიდი უნარი.

ბორის შერეული რადიკალების შემცველი ნაერთების შესახებ ლიტერატურაში ძალიან მცირე მონაცემები მოიპოვება. მათ რიცხვს მიეკუთვნება 1-ბუტილ-ბორციკლოპენტანი და 1-ბუტილციკლოპექსანი [1]. ანალოგიურად ზემოთ დასახელებული ნაერთებისა, ტორსელის მიერ [2] მიღებულია ფენილის რადიკალების შემცველი ჰეტეროციკლური ნაერთები. ყველა ცდა, მიეღოთ ბორორგანული ნაერთები, რომელშიაც ალკილის რადიკალთან ერთად, უშუალოდ ბორთან დაკავშირებული იქნებოდა არილის რადიკალები, უშედეგოდ დამთავრდა [2, 4, 5].

ნაერთები, რომლებიც შეიცავენ ერთდროულად როგორც ალკილის, ასევე ფენილის, ბენზილის, ნაფტილის, ციკლოპექსილის, სტირილისა და სხვა რადიკალებს, სრულიად შეუსწავლელია.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ ხსენებული ხარვეზის ნაწილობრივად შევსება [5,6].

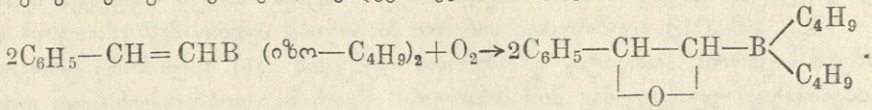
ჩვენს მიერ ჩატარებულმა ცდებმა გვიჩვენა, რომ რეაქცია ბორტრიალკილებსა და ა-სტირილმაგნიუმბრომიდს შორის მიმდინარეობს შემდეგი სქემით:



იზო — C₃H₇, იზო — C₄H₉; ნ. — C₅H₁₁; იზო — C₅H₁₁;
 C₂H₅



იმის გამო, რომ ა-ბორსტიროლის მოლეკულა შეიცავს ორმაგ ბმას, ის ადვილად იქანება ჰაერის ქანებადით. ქანებადის მოქმედებით იხლიება ორმაგი ბმა და წარმოიქმნება ეპოქსინაერთები, შემდეგი სქემის მიხედვით:



მძსპკინიზინტული ნაწილი

(ოპერაციები ტარდებოდა ინერტულ გარემოში)

1. ა-სტირილდიიზობროპილბორის მიღება. 20 გ ა-სტირილმაგნიუმბრომიდის ეთერხსნარს, ენერგიული მორევისა და ყინულით გაცივების პირობებში თანდათანობით დავუმატეთ 14 გ ტრიიზობროპილბორის ეთერხსნარი. რეაქციის დამთავრების შემდეგ კოლბის შიგთავსი 0°C ტემპერატურაზე დავამუშავეთ 10 % მარილის მკაეას წყალხსნარით. გამოვყავით ეთერის ფენა, რომელიც გამოვარეთ კალციუმის ქლორიდით, მოვაცილეთ ეთერი და დარჩენილი პროდუქტი გადავდინეთ ვაკუუმში. აღმოჩნდა რომ $t_{ფუღ} = 92.4^\circ$, როდესაც $P = 4$ მმ, გამოსავლია ნობა 12 %, $d_4^{20} = 0.8251$, $n_D^{20} = 1.4550$, $MR_D = 60.40$, გაანგარიშებული $MR = 60.51$, ნაპოვნია % C 83.50; H 10.82; B 5.24 გაანგარიშებით % C 84.00; H 10.50; B 5.5.

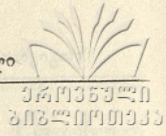
ანალოგიურად სინთეზირებულ იქნა: ა-სტირილდი-ნ-პროპილბორი, ა-სტირილდიიზობროპილბორი, ა-სტირილდიიზობუტილბორი, ა-სტირილდიეთილბორი. სინთეზირებული ნაერთების ფიზიკურ-ქიმიური კონსტანტები მოცემულია № 1 ცხრილში.

ა-სტირილდიალკილბორიდების დაქანვა

1. დი-ნ-პროპილ ეპოქსი-ა-სტირილბორი. 30 მლ მოცულობის ორყელა კოლბაში მოვათავსეთ 5 გ ა-სტირილდი-ნ-პროპილბორი და ოთახის ტემპერატურაზე გავატარეთ ნახშირის ორქანვისაგან თავისუფალი, მშრალი ჰაერის ნაკადი; საწყისში შეიმჩნევა სარეაქციო ნარევის ოდნავი გათბობა. დადგენილ იქნა ცდის ოპტიმალური პირობები. ცდის დამთავრების შემდეგ მიღებული პროდუქტი გადავდინეთ ვაკუუმ ში. დაქანვული პროდუქტის გამოსავლიანობა 80%. $t_{ფუღ} = 101^\circ$, 4 მმ წნევის პირობებში $d_4^{20} = 0.8490$, $n_D^{20} = 1.4450$; $MR_D = 65.8$; გამოთვლილია $MR = 62,72$; ნაპოვნია %: C 77.33; H 9.82; B 5,08; $C_{14}H_{21}BO$ გამოანგარიშებულია %: C 77,32; H 9,72; B 5.08. ანალოგიურად დავქანეთ სხვა ალკილბორიდები. მიღებული ეპოქსინაერთების ფიზიკურ-ქიმიური კონსტანტები მოცემულია № 2 ცხრილში.

დასკვნე ბი

1. დადგენილია რეაქციის ოპტიმალური პირობები ბორტრიალკილებსა და ა-სტირილმაგნიუმბრომიდს შორის.
2. მოწოდებულია ალკილ-ა-სტირილბორიდების დაქანვის რეაქციის მექანიზმი.



ცხრილი № 2

ეპოქსისტირებული ფიზიკურ-ქიმიური კონსტანტები

ნომერი	ნივთოების დასახელება	გამოყენებული მასალის რაოდენობა %	მ. წინააღმდეგობა	D ₂₀ ⁴	D ₂₀ ²⁰	MR _D			შეღებნილობა (ნაპოვნი %-ში)			ფორმულა			ელემენტარული (შეღებნილობა %-ში)		
						გამაგრილებელი	მასობრივი	მასობრივი	C	H	B	C	H	B	C	H	B
1	 <chem>Cc1ccc(cc1)C(C)(c2ccc(O)cc2)c3ccc(O)cc3</chem>	101-2 (4)	1,4450	65,8	62,72	77,33	9,72	5,08	C ₁₄ H ₂₁ BO	77,32	9,71	5,08					
2	 <chem>Cc1ccc(cc1)C(C)(c2ccc(O)cc2)c3ccc(O)cc3</chem>	85	1,4385	66,70	62,72	77,30	8,85	5,04	C ₁₄ H ₂₁ BO	77,32	9,71	5,08					
3	 <chem>Cc1ccc(cc1)C(C)(c2ccc(O)cc2)c3ccc(O)cc3</chem>	88	1,4388	74,4	71,89	78,80	10,54	4,20	C ₁₆ H ₂₅ BO	78,86	10,24	4,50					
4	 <chem>Cc1ccc(cc1)C(C)(c2ccc(O)cc2)c3ccc(O)cc3</chem>	86	1,4320	80,2	82,19	79,49	11,77	4,01	C ₁₈ H ₂₉ BO	79,91	10,66	4,04					
5	 <chem>Cc1ccc(cc1)C(C)(c2ccc(O)cc2)c3ccc(O)cc3</chem>	84	1,4402	81,9	82,19	79,28	10,12	4,03	C ₁₈ H ₂₉ BO	79,41	10,66	4,04					

3. პირველადაა სინთეზირებული და შესწავლილი ω -სტირილრადიკალისა და ალკილის რადიკალის შემცველი 11 ახალი ბორორგანული ნაერთი.

(წარმოდგენილია 15. XI. 1971)

ზოგადი ქიმიისა და ფიზიკურ-ქიმიური
ანალიზის კათედრა

ლიტერატურა

1. J. Conbean, R. Epple, D. Ulmschneider, Ang. chem., 67, 1955, 710.
2. R. Torrsell, Acta chem. S. 1954, 1779.
3. E. Kraus, P. Nobbe, Ber., 64, 1931, 2112.
4. J. Johnson, H. Snyder, M. Van-Campden, J. Am. chem., 60, 1958, 115.
5. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, т. 35, 1965, 484.
6. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, 36, 1964, 618.

Г. Е. КАЧЕЙШВИЛИ, Н. И. ПИРЦХАЛАВА,
С. П. КАНДЕЛАКИ, Н. А. ТУПИНАШВИЛИ

СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННОРАДИКАЛОВЫХ БОРОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

Резюме

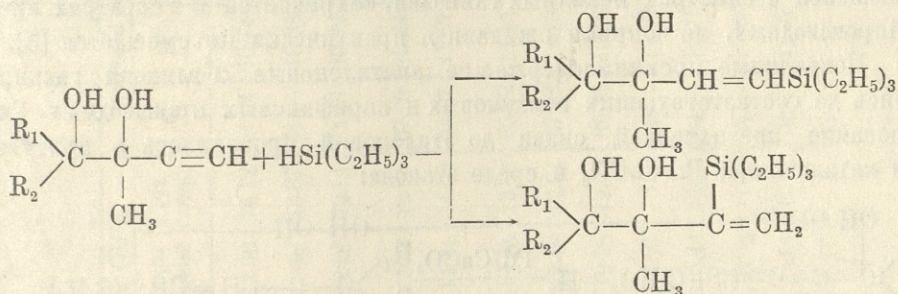
В результате многочисленных опытов установлены оптимальные условия реакции между бортриалкилом и ω -стирилмагнийбромидом.

Установлен механизм окисления вновь полученных алкилстирилборидов молекулярным кислородом и найдены их физико-химические константы.

СИНТЕЗ КРЕМНИЙСОДЕРЖАЩИХ АЦЕТИЛЕНОВЫХ α -ГЛИКОЛЕЙ И ИХ КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ГИДРИРОВАНИЕ

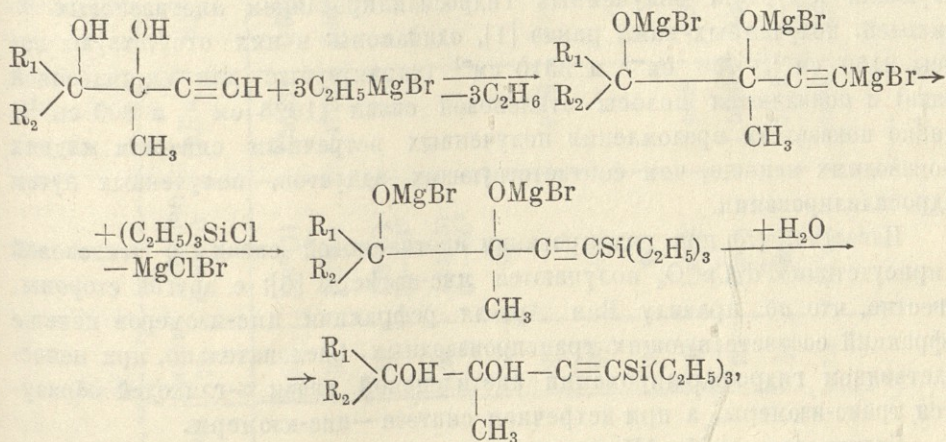
К. И. ЧЕРКЕЗИШВИЛИ, Р. И. КУБЛАШВИЛИ, И. М. ГВЕРДЦИТЕЛИ

При исследовании реакции гидросилилирования ацетиленовых α -гликолей нами было установлено, что присоединение гидридсилана к ацетиленовой связи происходит как по правилу Фармера, так и вопреки ему [1]:



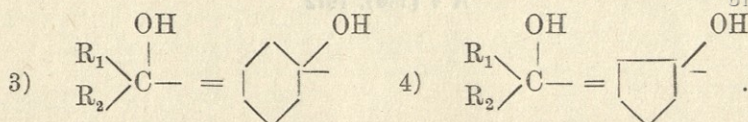
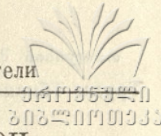
С целью идентификации продуктов гидросилилирования мы постарались синтезировать эти соединения другим путем — с помощью магнийорганического синтеза.

Кремнийсодержащие ацетиленовые α -гликоли синтезировались по схеме:



где

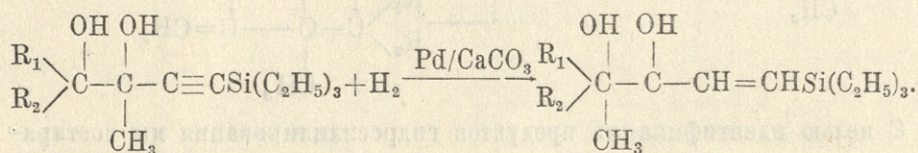
1) $\text{R}_1 = \text{R}_2 = \text{CH}_3$; 2) $\text{R}_1 = \text{CH}_3$, $\text{R}_2 = \text{C}_2\text{H}_5$



Свойства полученных соединений представлены в таблице (соед. I—IV).

Изучение ИК-спектров исходных ацетиленовых α -гликолей и полученных на их основе соответствующих кремнийпроизводных показало, что в спектрах кремнийорганических ацетиленовых α -гликолей присутствуют полосы поглощения, характерные для связи Si-C в группе $\equiv\text{Si}-\text{C}_2\text{H}_5$: 1230 см^{-1} , 1010 см^{-1} и 1410 см^{-1} (деформационные колебания, [2, 3], 720 см^{-1} (валентное колебание) [4]. Все перечисленные полосы поглощения отсутствуют в спектрах исходных гликолей. Полосы валентного и деформационного колебания $\equiv\text{CH}$ (3310 см^{-1} и 650 см^{-1}) [5], имеющиеся в спектрах исходных гликолей, отсутствуют в спектрах кремнийсодержащих продуктов. Полоса валентного колебания $\text{C}\equiv\text{C}$ 2150 см^{-1} , имеющаяся в спектрах исходных гликолей, сохраняется и в спектрах кремнийпроизводных, но вопреки ожиданию, практически не смещается [5].

Полученные кремнийсодержащие ацетиленовые α -гликоли гидрировались до соответствующих этиленовых и парафиновых производных. Гидрирование ацетиленовой связи до этиленовой проводилось в присутствии катализатора Pd/CaCO₃ в среде этанола:



Свойства полученных этиленовых гликолей представлены в таблице (соед. V—VII).

ИК-спектры поглощения этих гидрированных продуктов и соответствующих аддуктов, полученных гидросилированием ацетиленовых α -гликолей, полученных нами ранее [1], одинаковы: в них отсутствуют полосы 2150 см^{-1} , 650 см^{-1} и 3310 см^{-1} (характерные для ацетиленовой связи) и появляются полосы этиленовой связи (1625 см^{-1} и 800 см^{-1}); однако показатели преломления полученных встречным синтезом жидких производных меньше, чем соответствующих аддуктов, полученных путем гидросилирования.

Известно, что при гидрировании ацетиленовой связи до этиленовой в присутствии Pd/CaCO₃ получаются цис-изомеры [6]; с другой стороны, известно, что по правилу Ван Аркеля рефракции цис-изомеров меньше рефракций соответствующих транспроизводных. Следовательно, при непосредственном гидросилировании ацетиленовой связи α -гликолей образуются транс-изомеры, а при встречном синтезе — цис-изомеры.

Гидрированием I—IV веществ и аддуктов по правилу Фармера до насыщенности получаются идентичные соединения:

Таблица

№ соед.	Выход Т %	Т кип. (мм) Т. плавл.	n_D^{20}	d_4^{20}	MR _D		ОН%		Найдено %			Формула	Вычислено %		
					най- дено	вычи- слено	най- дено	вычи- слено	С	Н	Si		С	Н	Si
I	19	134°(1)	1,5673	0.9206	72.98	73.44	13.96	14.12	64.54	10.74	11.41	C ₁₃ H ₂₆ O ₂ Si	64.46	10.74	11.57
II	31	146°(4)	1,4728	0.9162	78.35	78.07	13.22	13.37	65.26	10.88	11.12	C ₁₄ H ₂₈ O ₂ Si	65.15	10.98	10.93
III	16	145°(1) 53—54°					12.36	12.14	68.19	10.82	9.78	C ₁₆ H ₃₀ O ₂ Si	63.98	10.63	9.92
IV	20	128(0.5) 64—65°					12.43	12.74	67.06	10.24	10.13	C ₁₅ H ₂₈ O ₂ Si	67.16	10.04	10.04
V	93	40°					14.24	14.00	64.07	11.87	12.01	C ₁₃ H ₂₈ O ₂ Si	63.93	11.47	11.47
VI	85		1,4696	0.9167	78.45	78.93	13.23	13.26	65.62	11.45	10.69	C ₁₄ H ₃₀ O ₂ Si	65.18	11.62	10.55
VII	87	47°					12.18	12.04	67.78	12.10	9.93	C ₁₆ H ₃₂ O ₂ Si	67.60	11.26	9.85
VIII	87	44°					12.93	12.62	66.85	10.46	10.53	C ₁₅ H ₃₀ O ₂ Si	66.66	11.11	10.37
IX	87	141(3)	1,4665	0.9101	74.88	75.05	14.21	13.90	63.64	12.00	11.58	C ₁₃ H ₃₀ O ₂ Si	63.40	12.18	11.39
X	90	145(3)	1,4699	0.8926	79.46	79.68	13.44	13.14	64.96	12.21	10.54	C ₁₄ H ₃₂ O ₂ Si	64.61	12.30	10.76
XI	84	168(2)	1,4872	0.9555	86.08	86.81	12.32	11.99	67.56	11.29	9.99	C ₁₆ H ₃₄ O ₂ Si	67.13	11.88	9.79
XII	81	155(2)	1,4822	0.9442	82.15	82.28	12.96	12.57	66.20	11.97	10.50	C ₁₅ H ₃₂ O ₂ Si	66.17	11.76	10.29

Аналогично были получены соединения VI—VIII.

Получение 3,4-диметил-1-триэтилсилилпента-1-диола-3,4 (IX): 1,7 г 3,4-диметил-1-триэтилсилилпента-1-диола-3,4, растворенного в 50 мл этанола, гидрировался в присутствии катализатора никеля Ренэ; $v_0=314$ мл, $v_t=358$ мл; поглощено 350 мл водорода. Перегонкой получено вещество с. т. кип. 139° (2 мм), в количестве 1,6 г. Это вещество было получено также гидрированием транс-3,4-диметил-1-триэтилсилилпента-1-диола-3,4: 1,25 г вещества, 30 мл абсолютного этанола, катализатор—никель Ренэ; $v_0=110$ мл, $v_t=125$ мл; поглощено 120 мл водорода.

Аналогично, гидрированием соответствующих ацетиленовых и транс-этиленовых производных получены вещества X—XII.

Выводы

Путем магнийорганического синтеза получены кремнийсодержащие ацетиленовые α -гликоли. Проведено их гидрирование до соответствующих этиленовых производных в присутствии Pd/CaCO₃ и до парафиновых производных в присутствии никеля Ренэ.

Установлено, что в условиях гидрирования кремнийсодержащих ацетиленовых α -гликолей в присутствии Pd/CaCO₃ образуются цис-этиленовые производные, в то время как при непосредственном гидросилилировании ацетиленовых α -гликолей образуются исключительно транс-изомеры.

(Представлено 16.IX.1970)

Кафедра
 органической химии

ЛИТЕРАТУРА

1. К. И. Черкезишвили, Р. И. Кублашвили, И. М. Гвердцители, ЖОХ, 41, 1971, стр. 2051.
2. S. Kaye, S. Tannenbaum, J. Org. Chem., 18, 1953, стр. 1750.
3. C. W. Joung, P. C. Servais, C. C. Currie, M. J. Hunter, J. Am. Chem. Soc., 70, 1948, p. 3758.
4. R. E. Richards, H. W. Thomson, J. Chem. Soc., 124, 1948.
5. Л. Беллами, Инфракрасные спектры сложных молекул, М., 1963, стр. 53—85, 86—95.
6. H. Lindlar, Helv. Chim. Acta, 35, 1952, стр. 446.

ა. ჩერკეზიშვილი, რ. კუბლაშვილი, ი. გვერდციტიელი

აცეტილენური რიგის სილიციუმმცველი α -გლიკოლები
 სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება

რეზიუმე

მაგნიუმორგანული სინთეზის საშუალებით სინთეზირებულია აცეტილენური რიგის სილიციუმმცველი α -გლიკოლები. ჩატარებულია მათი ჰიდრირება Pd/CaCO₃-ის და რენეს ნიკელის თანდასწრებით შესაბამისად ოლეფინურ და პარაფინულ α -გლიკოლებამდე. Pd/CaCO₃-ის თანდასწრებით ჰიდრირების შედეგად მიღებულია Si-ეთილენური სილიციუმმცველი α -გლიკოლები.

კონდენსაცია 1, 3-გექსადიენ-5-ოლა ს გვავაკოლმ ვ პრისუტუვრის ფოსფორნოი კისლოთა

ა. ი. კახნიაშვილი, დ. ს. პარჯიკია

კონდენსაცია ფენოლა ს გვავაკოლა ს ტრეტისონის დიენოვით სპირტათა ვ პრისუტუვრის ფოსფორნოი კისლოთა სოპროვოჯდას იზომერისაციათა ტრეტისონის კარბინოლთა ვ პერვითონის; პოღუაქთა პარა-ზამეცენითა ფენოლთა ს გვავაკოლთა, ოთვაცაოთა ნე ისოღონთა ტრეტისონის სპირტათა, ა იზომერითა იმ პერვითონის კარბინოლათა [1, 2, 4, 5].

ოდნით იმ ნას ბოლა იზოღენა კონდენსაცია ფენოლა, ო- ს მ-კრეზოლთა ს 1,3-გექსადიენ-5-ოლომ I ვ პრისუტუვრის ფოსფორნოი კისლოთა ს ბოლი პოღუ-ენითა პროდუქტთა, ოთვაცაოთა ნე ისოღონთა ვტორითონის სპირტთა, ა იზომერითონის ემუ პერვითონის კარბინოლთა [3].

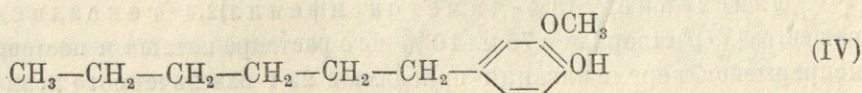
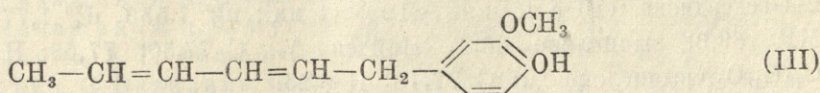
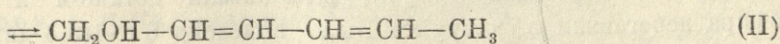
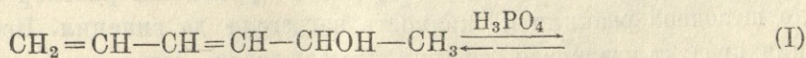
ინტერესითა ბოლო იზოღენა კონდენსაციუ ვაშეუკაზანოღო დიენოვო კარბინოლა ს გვავაკოლმ ვ პრისუტუვრის ფოსფორნოი კისლოთა.

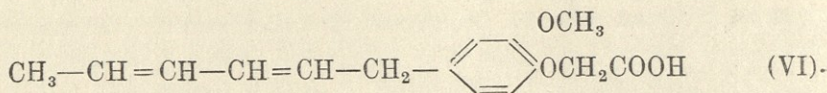
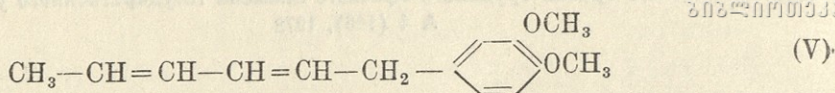
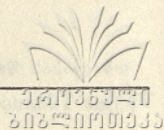
ოკაზოღოს, ქოთა ი ეთა კონდენსაცია სოპროვოჯდას დიენოვო იზომერისაციათა ვტორითონის დიენოვო სპირტა ვ პერვითონის (II), ს პოღუენითა პრის კონდენსაციის პარა-ზამეცენითა გვავაკოლმ ოთვაცაოთა იზომერითონის პერვითონის კარბინოლთა.

გიდრიროვანითა მონოზამეცენოღო დიენოვო გვავაკოლა (III) პოღუენ სოოთვეტუვრითა პრედელთა პროდუქტ (IV).

პარა-ზამეცენითა გვავაკოლმ (III) კონდენსაციითა ს მონოქლორუქსოვოი კისლოთა ბოლმ პრევრაცენ ვ სოოთვეტუვრითა ფენოქსიკარბონოვოი კისლოთა (IV).

პრის მეთილოვანითა პროდუქტა კონდენსაციის (III) პოღუენ მეთილოვოი ეფირ (V), პრის ოქსილოვანითა კოტოროღო ვდელენითა სოოთვეტუვრითა კისლოთა.





Экспериментальная часть

Конденсация 1,3-гексадиен-5-ола с гваяколом в присутствии фосфорной кислоты. К смеси 15 г гваякола и 20 г фосфорной кислоты прибавляли по каплям при комнатной температуре и непрерывном помешивании 30 г 1,3-гексадиен-5-ола (т. кип. 44—46° (8 мм), n_D^{20} 1,4772). Реакция протекала с разогреванием и температура смеси поднялась до 55°. Перемешивание продолжалось 6 часов при температуре 55—60°. После охлаждения продукт извлекали эфиром, эфирный раствор промывали водой, а затем несколько раз 10%-ным раствором едкого натра для удаления кислых продуктов реакции; щелочные вытяжки объединяли, подкисляли и продукт экстрагировали эфиром. Эфирный раствор сушили сульфатом натрия и после отгонки эфира перегоняли в вакууме. Было выделено 20 г 1-(3-метокси, 4-оксифенил)-2,4-гексадиена с т. кип. 136° (2 мм), n_D^{20} 1,5620, d_4^{20} 1,0661; найдено MR: 62,05; вычислено: 61,35. Найдено %: С 76; 55; 76,78; Н 8,00; $\text{C}_{13}\text{H}_{16}\text{O}_2$ вычислено %: С 76,47; Н 7,86.

Гидрирование 1-(3-метокси, 4-оксифенил)-2,4-гексадиена (III). При гидрировании 4 г вещества в 25 мл. спирта в присутствии 1 г. Ni Ренея поглотилось вычисленное количество водорода. После отгонки спирта продукт перегнали в вакууме, получили 3 г 1-(3-метокси-4-оксифенил) гексана (IV) с т. кип. 134° (2 мм); n_D^{20} 1,5114, d_4^{20} 0,9903; найдено MR: 62,9; вычислено 62,3. Найдено %: С 75,42; 75,02; Н 9,99; 10,02; $\text{C}_{13}\text{H}_{20}\text{O}_2$, вычислено %: С 75,00; Н 9,61.

Метилирование 1-(3-метокси, 4-оксифенил)-2,4-гексадиена (III). 10 г вещества (III) растворили в 50 мл 10%-ного раствора едкого натра и постепенно добавляли 15 г диметилсульфата. Смесь встряхивали в течение получаса, затем прибавляли раствор едкого натра до щелочной реакции и жидкость нагревали до кипения. После охлаждения продукт извлекали эфиром, высушивали поташом и после отгонки эфира перегоняли в вакууме. Было выделено 8 г 1-(3,4-диметоксифенил)-2,4-гексадиена (V) с т. кип. 129° (4 мм); n_D^{20} 1,556, d_4^{20} 1,777. Найдено MR: 69,3; вычислено 66,4. Найдено %: С 77,50; 77,58; Н 8,42; 8,60, $\text{C}_{14}\text{H}_{18}\text{O}_2$, вычислено %: С 77,16; Н 8,25.

Окисление 1-(3,4-диметоксифенил)2,4-гексадиена. 5 г вещества (V) растворили в 75 мл 10%-ного раствора поташа и постепенно при непрерывном перемешивании прибавляли 22 г измельченного перманганата

калия. Окисление продолжалось 3 часа. Перекись марганца отфильтровали и тщательно промыли кипящей водой; фильтрат был выпарен на водяной бане до небольшого объема и подкислен соляной кислотой. При этом выпали кристаллы: 3,4-диметоксибензойной кислоты с т. пл. 180° . Смешанная проба их с известным образцом 3,4-диметоксибензойной кислоты депрессии не дает. После отделения диметоксибензойной кислоты часть фильтрата была перегнана и нейтрализована содой, выпарена на водяной бане досуха, подкислена разбавленной H_2SO_4 и экстрагирована эфиром. Эфирный раствор был высушен и разогнан. Была получена уксусная кислота, кипящая при 110° — 117° , которая дает яркую какодильную пробу с мышьяковистым ангидридом.

В оставшейся части фильтрата была обнаружена щавелевая кислота. Конденсация 1-(3-метокси, 4-оксифенил)-2,4-гексадиена с монохлоруксусной кислотой. 2 г вещества (III) растворили в 20 мл 10%-ного раствора едкого натра, добавили 3 г монохлоруксусной кислоты. Смесь нагревали на кипящей водяной бане 1,5 часа, затем жидкость была подкислена, экстрагирована эфиром. Эфирный раствор промыли разбавленным раствором соды, и полученную щелочную вытяжку подкислили разбавленной соляной кислотой. Выпали белые кристаллы. Выделено 1 г 1-(3-метокси, 4-карбоксиметоксифенил)-2,4-гексадиена (IV) с т. пл. 97° (из изооктена). Найдено %: С 73,58; Н 7,61, $C_{15}H_{18}O_3$, вычислено %: С 73,17; Н 7,80.

Выводы

1. При конденсации 1,3-гексадиен-5-ола с гваяколом в присутствии фосфорной кислоты образуется диеновый гваякол (III), отвечающий первичному спирту.
2. Гидрированием монозамещенного диенового гваякола (III) получен соответствующий предельный продукт (IV).
3. Метилированием пара-замещенного диенового гваякола (III) получен его диметилловый эфир (V), окислением которого выделены 3,4-диметоксибензойная, уксусная и щавелевая кислоты.
4. При конденсации монозамещенного диенового гваякола (III) с монохлоруксусной кислотой получена соответствующая феноксикарбоновая кислота (VI).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Назаров, А. И. Кахниашвили, ЖОХ, 22, 1952, стр. 617.
2. А. И. Кахниашвили, Д. С. Парджикя, Труды ТГУ, 80, 1962, стр. 147.
3. А. И. Кахниашвили, Д. А. Бугианишвили, ЖОХ, 1, 1965, стр. 1043.
4. И. Н. Назаров, А. Б. Фишер, Изв. АН СССР, 5, 1944, стр. 341.
5. С. Варданын, С. Варданын, Ш. Беданын, Изв. АН Арм. ССР, 13, 1960, стр. 253

ა. კახნიაშვილი, დ. ფარჯიკია

1,3-ჰექსადიენ-5-ოლის კონდენსაცია გვაიაკოლთან ფოსფორმეზას თანდასწრებით

რ ე ზ ი უ მ ე

მესამადი და მეორადი დიენური სპირტების კონდენსაცია ფენოლებთან მიმდინარეობს დიენური იზომერიზაციის თანხლებით. ჩატარებული იქნა 1,3-ჰექსადიენ-5-ოლის კონდენსაცია გვაიაკოლთან ფოსფორმეზას თანდასწრებით და აღმოჩნდა, რომ რეაქციას წინ უსწრებს დიენური იზომერიზაცია და კონდენსაციის შედეგად მიღებული დიენური მონოჩანაცვლებული გვაიაკოლი პასუხობს არა აღებულ მეორად დიენურ სპირტს, არამედ მის იზომერს—პირველად დიენურ კარბინოლს.

მიღებული ნაერთის აგებულების დასადგენად ჩატარებული იქნა მისი დაჰიდრირება, კონდენსაცია მონოქლორმმარმეზასთან, მეთილირება და მეთილირებული პროდუქტის დაჟანგვა.

ნორმალური ამილის სპირტის ამინირება გუმბრინის მონაწილეობით

ჟ. არეშიძე, ე. თაგარტყილაძე

ადრე ჩვენ მიერ შესწავლილია სპირტების დეჰიდრატაციის და ამინირების რეაქციები გუმბრინის მონაწილეობით [1, 6].

წინამდებარე შრომა წარმოადგენს აღნიშნული საკითხის შესწავლის გაგრძელებას. ჩატარებულმა გამოკვლევებმა დაადასტურა, რომ ამ რეაქციის დროს ნ-ამილამინი მიიღება მაქსიმალური გამოსავლით 23%, როდესაც კატალიზატორად გამოყენებულია 30%-იანი გოგირდმჟავათი გააქტივებული გუმბრინი. ცდის ტემპერატურა 340—360°, მოცულობითი სიჩქარე 0,06 სთ⁻¹, აგრეთვე მიღებულია უჯერი ნახშირწყალბადები: პენტენ-1, 2-მეთილბუტენ-1 და 2-მეთილბუტენ-2, რამაც ნ-ამილამინის გამოსავალი შეამცირა [6].

ნ-ამილის სპირტი ჩვენ მიერ სინთეზირებულია გრანიარის რეაქციით სათანადო ჰალოიდალკილებისა და ტრიოქსიმეთილენის გამოყენებით 75% გამოსავლიანობით, რომლის კონსტანტები თანხვედნილია ლიტერატურულ მონაცემებთან [7]. სპირტის ამინირებისათვის გამოვიყენეთ 30%-იანი გოგირდმჟავათი გააქტივებული გუმბრინი, რომლის მომზადება აღწერილია წინა შრომებში [6]. ამავე შრომებში აღწერილია დანადგარი, რომელშიც ვატარებდით ამინირების რეაქციას. საკატალიზო მილში 25 გ ნ-ამილის სპირტი და ამონიაკი ერთდროულად 310—320° 0,05 სთ⁻¹ მოცულობითი სიჩქარით ტარდებოდა. რეაქციის შედეგად მიღებული კატალიზატი, წყლის მოშორების შემდეგ გავაშრეთ მყარი კალიუმის ტუტით, რის შემდეგ გამოვხადეთ 103—105°-ზე (745 მმ). მიღებულია 2 გ გამოსავალი 8,2%, რომლის d_4^{20} —0,7630; n_D^{20} —1,4060, რაც თანხვედნილია ნ-ამილამინის კონსტანტების ლიტერატურულ მონაცემებთან [7]. მიღებული ნივთიერება წარმოადგენს ადვილად აქროლად მოკვითალო ფერის სითხეს, რომელსაც აქვს არასასიამოვნო სუნი. გარდა ამილამინისა გამოიხადა დაბალი ფრაქცია, დუდილის ტემპერატურით 29—40°. მიღებულ ნივთიერებას ჰქონდა უჯერი ნახშირწყალბადის არასასიამოვნო სუნი და სწრაფად აუფერულებდა ბრომიან წყალს.

103—105°-ზე (745 მმ) მიღებული ნივთიერების ანალიზი d_4^{20} 0,7630; n_D^{20} 1,4060; MR_D 27,45; % C 61.49, H 13.25, $C_6H_{13}N$ გამოთვლილია MR_D 28.7 % C 61.31, H 13.14, N 10.2. კატალიზატორის მოქმედების ხანგრძლივობის შესწავლის მიზნით გავიმეორეთ ცდები, რის შედეგადაც დადასტურდა, რომ კატალიზატორი პირველი ცდის შემდეგ აქტივობას ნაწილობრივ კარგავს. რეაქციის ოპტიმალური პირობების შემუშავების მიზნით მომღვენო ცდები ჩატარდა 320—360° და 340—360° ახლად მომზადებულ 30% გოგირდმჟავათი გააქტივებულ გუმბრინზე.



კატალიზატი დამუშავდა ზემოთ აღწერილის ანალოგიურად. ცდების შედეგები მოცემულია 1 ცხრილში. ჩატარებული ცდების შედეგებიდან ჩანს, რომ რეაქციის პირობების შეცვლა გავლენას ახდენს სამიზნო პროდუქტის გამოსავლიანობაზე. ნ-ამილამინი 340—360° დაყენებული ცდის დროს მიღებულია 20% გამოსავლიანობით. მიღებული შედეგებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ტემპერატურის ზრდა გარკვეულ ზღვარამდე გავლენას ახდენს ნ-ამილამინის გამოსავალზე.

შემდეგი ცდები ჩატარდა იმავე მოცულობითი სიჩქარით, ხოლო განსხვავებულ ტემპერატურაზე 360—380° და 380—400°, კატალიზატის დამუშავების დროს შემჩნეულია, რომ რამდენადაც იზრდება ცდის ტემპერატურა, იმდენად მატულობს ფრაქციის (29—40°) გამოსავალი. ხოლო ტემპერატურის ზრდასთან ერთად განსაზღვრული დონის შემდეგ მცირდება ამილამინის გამოსავალი, სამაგიეროდ დიდდება დაბალი დუილის ტემპერატურის მქონე ფრაქციების რაოდენობა. ცდების შედეგები მოტანილია პირველ ცხრილში. უნდა ვივარაუდოთ, რომ

ცხრილი № 1

ნ. ამილის სპირტის რაოდენობა გ	ცდის ტემპერატურა °C	კატალიზატორის მოცულობა მლ	მოცულობითი სიჩქარე სთ ⁻¹	ნ. ამილამინის რაოდენ. წონითი %	29—40°-ზე მიღებული ფრაქცია % რაოდენ.
25	320—340	60	0,05	15,5	60
25	340—360	60	0,05	20,4	50
25	360—380	60	0,05	13,3	65
25	380—400	60	0,05	7,7	75

მაღალ ტემპერატურაზე ჭარბობს შიგა მოლეკულური დეჰიდრატაცია, ვიდრე მოლეკულათა შორისი, რის შედეგადაც მიიღება მეტი რაოდენობით უჯერი ნახშირწყალბადები.

სამიზნო პროდუქტის გამოსავლის გაზრდის მიზნით ცდები ჩავატარეთ ზოგიერთი ცვლილებით, კერძოდ მოცულობითი სიჩქარის ვადიდებით. კატალიზატორად ავიღეთ 30% გოგირდმჟავათი გააქტივებული გუმბრინი 80 მლ რაოდენობით, მოცულობითი სიჩქარე 0,06. დანარჩენი პირობები უცვლელი იყო. კატალიზატი დამუშავდა ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად.

ცდის შედეგები მოცემულია მეორე ცხრილში.

ცხრილი № 2

სპირტის რაოდენ. გ	ცდის ტემპერატურა °C	კატალიზატორის მოცულობა მლ	მოცულობითი სიჩქარე სთ ⁻¹	ამილამინის რაოდენობა წონითი %-ით	d ₄ ²⁰	n _D ²⁰
25	320—340	80	0,06	15,3	0,7630	1,4060
25	340—360	80	0,06	23,5	"	"
25	360—380	80	0,06	14,5	"	"
25	380—400	80	0,06	10,2	"	"

მიღებული შედეგებიდან ჩანს, რომ მოცულობითი სიჩქარისა და ტემპერატურის ზრდა გარკვეულ ზღვრამდე გავლენას ახდენს ნ-ამილამინის გამოსავლიანობაზე. ცდის 340—360° ტემპერატურაზე ნაცვლად 20%-ისა მიღებულია ნ-ამილამინი 23%, გამოსავლით, როდესაც მოცულობითი სიჩქარე იცვლება 0,05 საათი⁻¹ 0,06 საათი⁻¹.

იმის დასადასტურებლად, თუ რა ნივთიერებები შეიძლება წარმოქმნილიყო ამინირების დროს 29—40°-ის ფარგლებში მიღებული ფრაქციის სახით, ჩავატარეთ ნ-ამილის სპირტის დეჰიდრატაცია 320—340°, 340—360° და 380—400°-ზე 0,05 მოცულობითი სიჩქარით. ცდის პირობები მოცემულია მესამე ცხრილში.

ცხრილი № 3

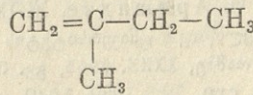
სპირტის დასახელება გ	კატალიზატორის მოცულობა მლ	ცდის ტემპერატურა °C	მოცულობითი სიჩქარე საათი ⁻¹	დეჰიდრატაციის შედეგად მიღებული წყალი გ	დეჰიდრატაციის შედეგად მიღ. ორგ. ნივთ. გ	დანაკარგი გ
ნ. ამილის სპირტი 25	60	320—340	0,05	3,5	15,9	4,6
"	60	340—360	0,05	4	17,7	3,5
"	60	380—400	0,05	4,6	18,7	1,8

კატალიზატი ორი ფენისაგან შედგებოდა. მისი ორგანული ნაწილი სწრაფად აუფერულებდა ბრომიან წყალს, რაც უკერი ნახშირწყალბადის არსებობაზე მიგვიჩვენებდა. მიღებული თხევადი პროდუქტი ნატრიუმის სულფატზე გაშრობის შემდეგ მთლიანად გამოიხადა 29—40°-ის ფარგლებში, რაც ანალოგიურია ამინირების დროს მიღებული შედეგისა. 380—400°-ზე მიღებული კატალიზატი გამოვხადეთ სარექტიფიკაციო სვეტში, რომლის თეორიული თევშების რიცხვი 10-ს უდრიდა. მიღებულია ფრაქციები 29—31°—4 გ 21%; 31—36°—6 გ (742 მმ).

ნახშირწყალბადის სტრუქტურის დადგენის მიზნით ჩავატარეთ ორი ფრაქციის (31—36° და 36—40°) დაქანგვა კალიუმის პერმანგანატით. დაქანგვის პროდუქტის შემდგომი გადამუშავებით სემიკარბაზიდით დესტილატში აღმოჩენილია სემიკარბაზონი, რომელიც მეთილის სპირტში გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 147—148°-ზე (სინჯი მეთილ-ეთილკეტონზე).

ნაწილი ფილტრატისა აორთქლებულ იქნა წყლის აბაზანაზე სრულ ამოშრობამდე. მშრალი ნაშთი შემკვავდა 25% გოგირდმჟავათი და გამოიწვლილა ეთერით. ეთერის მოშორების შემდეგ სითხე გამოიხადა 100—101°-ზე, რომელიც სულემასთან იძლეოდა კალომელს, თეთრ ნალექს (სინჯი ჭიანჭველმჟავაზე).

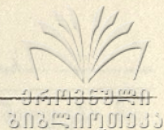
დაქანგვის პროდუქტებში ჭიანჭველმჟავასა და მეთილ-ეთილკეტონის აღმოჩენა და აგრეთვე დასაქანგავად აღებული ფრაქციის კონსტანტების მნიშვნელობები მიგვიჩვენებს ამ უკანასკნელში 2-მეთილბუტენ-1-ის არსებობაზე.



36—40° დუღილის ტემპერატურის მქონე ფრაქციაში, დაქანგვის პროდუქტში აღმოჩენილია აცეტონი.

მოსალოდნელი მჟავას იდენტიფიცირების მიზნით დარჩენილი ფილტრატი ავორთქლეთ, შევამკვავეთ, მივიღეთ ორგანული მჟავას ვერცხლის მარილი, რომელშიც გამოანგარიშებულ იქნა ვერცხლი:

ვერცხლის მარილი 0,0845 გ, Ag 0,0540.
 CH_3COOAg გამოთვლილია % 64,67.
 CH_3COOAg მიღებულია % 63,79.



დაქანგვის შემდეგ ძმარმქავას და აცეტონის მიღება და აგრეთვე დისაქანგად აღებული ნახშირწყალბადის ფიზიკური კონსტანტები მიგვითითებენ აღნიშნულ ფრაქციაზე 2-მეთილბუტენ-2-ის არსებობაზე $\text{CH}_3-\text{C}=\text{CH}-\text{CH}_3$. როგორც ჩა-



ტარებული კვლევის შედეგებიდან ჩანს, ამილამინი მაქსიმალური გამოსავლით მიიღება 340—360°-ზე ჩვეულებრივი წნევის პირობებში, ამილამინთან ერთად მიღებულია ამილის სპირტის დეჰიდრატაციის პროდუქტები, რომლის გამოსავალი იზრდება ტემპერატურის ზრდასთან ერთად, რაც იმით არის გამოწვეული, რომ ნ. ამილის სპირტი ერთდროულად განიცდის შიგამოლეკულურ და მოლეკულათაშორის დეჰიდრატაციას, რის დროსაც პირველი სჭარბობს მეორეს.

დასკვნები

1. შესწავლილია ნ. ამილის სპირტის და ამონიაკის ერთდროული დეჰიდრატაცია გუმბრინის მონაწილეობით. მიღებულია ნ. ამილამინი მაქსიმალური გამოსავლით (23%), როდესაც კატალიზატორად გამოყენებულია 30%-იანი გოგირდმქავათი გაქტივებული გუმბრინი.

2. ჩატარებულია ნ. ამილის სპირტის დეჰიდრატაცია გუმბრინის მონაწილეობით.

3. ამილის სპირტის დეჰიდრატაციის პროდუქტებში აღმოჩენილია: პენტენ-1, 2-მეთილბუტენ-1 და 2-მეთილბუტენ-2.

(წარმოდგენილია 20. XI. 1969)

ორგანული ქიმიის
კათედრა

ლიტერატურა

1. X. И. Арешидзе, Е. К. Таварткиладзе, Программа конференции по органическому катализу. Изд. АН СССР, М., 61, 1959.
2. П. Сабатье, Катализ в органической химии. ХТИ, 1932, стр. 361.
3. Н. С. Козлов, А. Ф. Ахметшина, ЖОХ, 25, 1955, стр. 485.
4. А. М. Бутлеров, Избранные работы по органической химии. Изв. АН СССР, 1951, стр. 290.
5. А. Н. Либерман, О. В. Брагин, Б. А. Казанский, Изв. АН СССР, ОХН, 1961, стр. 525.
6. Е. К. Таварткиладзе, X. И. Арешидзе, ЖПХ 18, 1945, стр. 271; ЖПХ, 22, 1949, стр. 225. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, 62, 1957, გვ. 159. საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, XXXX, 1965, გვ. 3, 1968, 52. გვ. 1.
7. Справочник химика, М.-Л., 1951, стр. 722, 1039, 1040.

X. И. АРЕШИДЗЕ, Е. К. ТАВАРТКИЛАДЗЕ

АМИНИРОВАНИЕ Н-АМИЛОВОГО СПИРТА В ПРИСУТСТВИИ ГУМБРИНА

Резюме

Опыты аминирования н-амилового спирта ставились при разных температурах и объемных скоростях подачи реагирующих веществ в реактор.

В качестве катализатора применяли активированный гумбрин. Активация гумбина производилась 30%-ной серной кислотой. Из активированного гумбина готовились отдельные шарики диаметром 2—3 мм, они переносились в каталитическую трубку и высушивались до температуры реакции 300—400°С.

* *n*-Амиловый спирт синтезирован применением реакции Гриньяра. Из бутилбромида и магния готовился реактив Гриньяра, добавлением триоксиметилена и последующим разложением получен исходный *n*-амиловый спирт.

Максимальный выход *n*-амиламина (23% весовых) получен при температуре реакции 340—360°С. В условиях аминирования *n*-амилового спирта имела место дегидратация спирта с образованием пентена-1, 2-метилбутена-1 и 2-метилбутена-2.

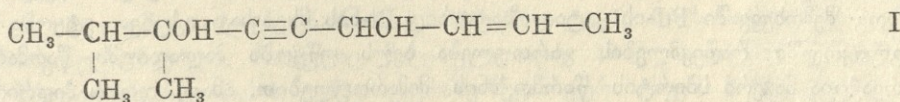
2,3-დიმეტილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3,6-ის სინთეზი და გარდაქმნები

ა. ნოღაიძელი, ძ. ძაგნიძე

წინა შრომებში შესწავლილია სხვადასხვა რადიკალის შემცველი γ -ენინგლიკოლების კატალიზური ჰიდრირება პლატინის შავითა და კალციუმის კარბონატზე დაფენილი პალადიუმის მონაწილეობით [1, 2].

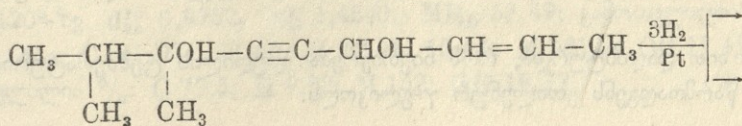
აღსანიშნავია, რომ აკროლენის ჰომოლოგებიდან მიღებულ γ -ენინგლიკოლებში პლატინის შავისა და Pd/CaCO_3 -ის თანდასწრებით 6 ატომი წყალბადის მიერთებისას, ნაჯერი გლიკოლის ნაცვლად, ნაჯერი ერთატომიანი სპირტები წარმოიქმნებიან, რაც არ ყოფილა შენიშნული ჩუნიანგლიკოლების ვინილის ჯგუფის შემცველ γ -ენინგლიკოლების დროს. ამრიგად, ირკვევა, რომ თვით დასაპირირებელი ობიექტის აგებულება გარკვეულ გავლენას ახდენს კატალიზატორზე.

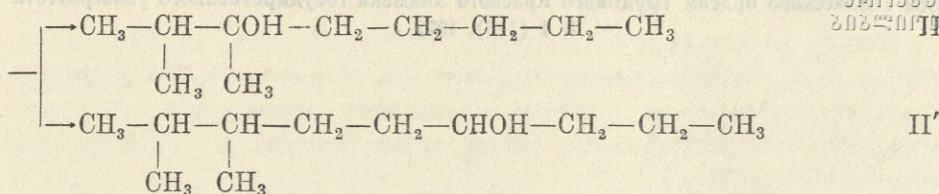
γ -ენინგლიკოლებში შემჩნეულმა კანონზომიერებამ და ჰიდრირების თავისებურებამ გვაძლევს იმედი, რომ ამ მიმართულებით შეგვესწავლა სხენებული კლასის კიდევ ერთი წარმომადგენელი, რისთვისაც სინთეზირებული იქნა 2,3-დიმეტილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3, 6.



ჩვენ მიერ შესწავლილ იქნა აღნიშნული γ -ენინგლიკოლის ჰიდრირება, როგორც პლატინის შავით, ასევე Pd/CaCO_3 -ის მონაწილეობით და აღმოჩნდა: 1. პლატინის შავის მონაწილეობით (0,9 გ) ენინგლიკოლი 6 ატომ წყალბადს იერთებს 4 საათის განმავლობაში. ჰიდრირება შედარებით ენერგიულად მიმდინარეობს პირველ 9 წუთში, ასე, რომ 2 ან 4 ატომი წყალბადის მიერთების შემდეგ შესამჩნევი გარდატეხა ჰიდრირების სიჩქარეში ნაკლებად შეიმჩნევა, თუმცა რეაქციის სიჩქარე თანდათანობით მკვეთრად ეცემა.

ჰიდრირების შედეგად მიღებული გამჭვირვალე მოძრავი ზეთი დუღს 76—78°-ზე 1—2 მმ წნევაზე. ანალიზმა ცხადყო, რომ მიღებულია ნაჯერი ერთატომიანი სპირტი, რომლის წარმოქმნა შეიძლება გავითვალისწინოთ სქემით:





თუ გავითვალისწინებთ γ -ენინგლიკოლში მესამადი ჰიდროქსილის ჯგუფის უფრო მეტი ეკრანირების ალბათობას, მაშინ უნდა დავუშვათ, რომ ჰიდრირება ჰიდროქსილის ჯგუფის მოხლეჩით განიცადა მეორადმა ჰიდროქსილმა, რისთვისაც მიღებული ერთატომიანი ნაჯერი სპირტი უნდა შეესაბამებოდეს II სტრუქტურას. ამრიგად, ვინილჩანაცვლებული γ -ენინგლიკოლის ხსენებული წარმომადგენელიც წინა ჰომოლოგების ანალოგიურად იქცევა და 6 ატომი წყალბადის მიერთების შედეგად ძირითადად ერთატომიან ნაჯერ სპირტს — 2, 3-დიმეთილნონანოლ-3-ს იძლევა.

აღსანიშნავია, რომ ჰიდრირების პროდუქტში იდენტიფიცირებულ იქნა მცირე რაოდენობით რეაქციაში შეუსვლელი საწყისი შენაერთი — γ -ენინგლიკოლი ან აცეტილენური გლიკოლი.

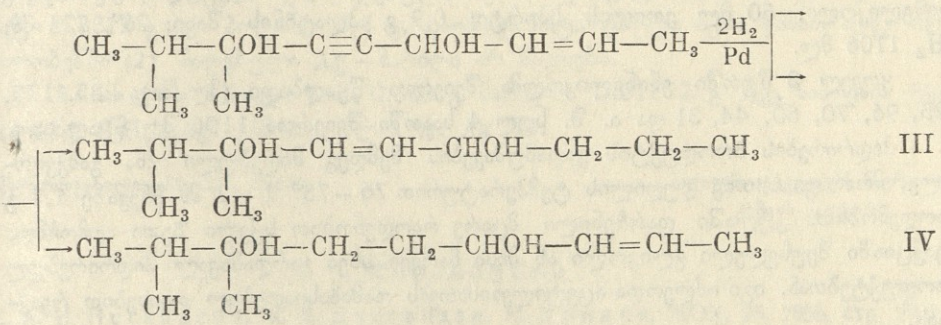
2. კალციუმის კარბონატზე დაფენილი პალადიუმის მონაწილეობით შესწავლილ იქნა ენინგლიკოლის ჰიდრირება 6 და 4 ატომი წყალბადის მიერთებამდე.

აღმოჩნდა, რომ იგი ენერგიულად იერთებს 4 ატომ წყალბადს, ხოლო შემდეგ ჰიდრირების სიჩქარეში შესამჩნევი ვარდატება ხდება და რეაქცია ძალზე ნელა მიმდინარეობს. 6 ატომი წყალბადი გლიკოლს უერთდება 14 საათის განმავლობაში. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ შემთხვევაში მიღებული იქნა წინა ჰომოლოგების საწინააღმდეგო შედეგი. ჰიდრირების შედეგად წარმოიქმნა ნივთიერება დუდილის ტემპერატურით 76—78° 1—2 მმ წნევაზე და იგი პლატინის შავით მიღებული ერთატომიანი ნაჯერი სპირტის ანალოგიური აღმოჩნდა. ამრიგად, ირკვევა, რომ ზოგ შემთხვევაში Pd-ის კატალიზატორიც Pt-ნის მსგავსად იქცევა. ეტყობა ენინგლიკოლში რადიკალების გართულება ხელს უწყობს პალადიუმს წარმართოს რეაქცია ნაჯერი სპირტის წარმოქმნის მიმართულებით. ამავე დროს ჰიდრირების შედეგად 100—102° მდულარე ფრაქციაში (1—2 მმ) შემჩნეულია მცირე რაოდენობით რეაქციაში შეუსვლელი საწყისი ენინ- და აცეტილენური შენაერთის არსებობა, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ Pd/CaCO₃ ხსენებულ შემთხვევაში არ ხასიათდება შერჩევითი უნარით ჰიდრირების დროს [3] და რეაქციის შედეგად პროდუქტთა ნარევის იძლევა.

როგორც აღინიშნა, ჩვენ ხსენებული γ -ენინგლიკოლი დავაჰიდრირეთ აგრეთვე Pd/CaCO₃-ის მონაწილეობით 4 ატომი წყალბადის შეერთებამდე; რეაქციის ხელოვნური შეწყვეტისა და სარეაქციო ნარევის სათანადოდ გადამუშავების შემდეგ მიღებული იქნა ძირითადად 2 ფრაქცია დუდილის ტემპერატურით 86—88° (I) 2,5 გ რაოდენობით და 120—124° (II) 1—2 მმ წნევაზე 3 გ რაოდენობით. I ფრაქცია აცეტილენზე თვისებით რეაქციას არ იძლევა, ხოლო II ფრაქცია — იძლევა.

ანალიზით დადასტურდა, რომ ნივთიერება დუდილის ტემპერატურით 86—88° (I მმ) წარმოადგენს ეთილენურ γ -გლიკოლს.

4 ატომი წყალბადის მიერთების შედეგად შეიძლება რეაქცია წარმოადგინოს ლიყო შემდეგი სქემის მიხედვით:



I ფრაქციის დაქანგვის შედეგად თვისობრივად ძმარმყავა არ იქნა აღმოჩენილი, ხოლო ოქსიმჟაებთან ანალიზით დადგინდა იქნა (III) შენაერთისათვის შესაბამისი ოქსიმჟაეა $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CHOH}-\text{COOH}$ წარმოქმნა, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ორმაგი ბმა წარმოიქმნება ცენტრალური ნახშირბადების ატომებთან. ამიტომ უნდა ვიფიქროთ, რომ დაახლოებით γ -ენინგლიკოლის 50% ჰიდრირდება (III) სქემის მიხედვით, ხოლო ნაწილი რეაქციაში შეუსვლელი რჩება, ან წარმოქმნის ჰიდრირების რაღაც შუალედურ პროდუქტებს.

ამრიგად, ჩატარებული კვლევა-ძიება ერთგვარ ნათელს ჰყენს γ -ენინგლიკოლების სინთეზისა და ჰიდრირების ხასიათს სხვადასხვა კატალიზატორების მონაწილეობით. აგრეთვე ძირითადად ჰიდრირების რეაქცია მიემართება ისე, რომ წარმოიქმნება ეთილენური გლიკოლი ორმაგი ბმით ცენტრში, რაც სავსებით შეესაბამება γ -ენინგლიკოლის სტრუქტურას, სადაც, წყალბადის მეორე მოლეკულის შეერთებისათვის გაცილებით უკეთესი პირობებია ჩაუნაცვლებელ ვინილის ჯგუფთან.

ექსპერიმენტული ნაწილი

2, 3-დიმეთილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3, 6-ის სინთეზი. მაგნიუმორგანულ ნაერთს, რომელიც მიღებული იყო 18 გ მაგნიუმისა და 81 გ ეთილბრომიდისაგან, ოთახის ტემპერატურაზე მექანიკური არევის პირობებში დაემატა 40 გ მეთილიზობრომიდითინილკარბინოლი, რომელიც განზავებული იყო ტოლ რაოდენობა მშრალ ეთერში. მეორე დღეს რეაქცია კვლავ გაგრძელდა მექანიკური არევით ოთახის ტემპერატურაზე ერთ საათს და სარეაქციო ნარევეს, გაცივებულს—15—16°-ზე, წვეთობით დაემატა ტოლი რაოდენობა მშრალ ეთერში განზავებული ახლად გამოხდილი 25 გ კროტონის ალდეჰიდი (დულ. ტ. 102—104°), რის შემდეგ სარეაქციო ნარევი დავაყოფნეთ 12 საათს, რომელიც დავშალეთ 26%-იანი ამონიუმის ქლორიდით. ეთერსნარი ნატრიუმის სულფატზე გაშრობის შემდეგ გამოვხადეთ და საბოლოოდ მიღებული იქნა ძნელად მოძრავი მოყვითალო გამკვირვალე სითხე დუღილის ტემპერატურით 119—120° 1—2 მწუხვებზე, რომლის თეორიული გამოსავალი 32, 7%-ია.

ანალიზი ნივთიერებისა, რომელიც 1—2 მმ წნევაზე დულს 119—120°-ზე. d_{20}^{20} 0,9782, n_D^{20} 1,4840, MR_D 53,49; გამოთვლილია 53,58. ნაპოვნია %: C 71,93, 71,66; H 10.41, 10.61; M 181.2; OH 18.18. $C_{11}H_{18}O_2$. გამოთვლილია %: C 72.5; H 9.88; M 182; OH 18.79.



2. 3-დიმეთილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3, 6-ის ჰიდრირებული ტინის შავის მონაწილეობით. ჰიდრირებისათვის აღებული იყო 2,52 გ ენინგლიკოლი, 50 მლ ეთილის სპირტი; 0,9 გ პლატინის შავი; 26°, 724 მმ; $3H_2$ 1106 მლ.

ყოველ 3 წუთში ენინგლიკოლმა შეიერთა წყალბადი (მლ-ში): 225, 175, 125, 96, 70, 60, 44, 31 და ა. შ. სულ 4 საათში შეიერთა 1106 მლ წყალბადი.

ჰიდრირების პროდუქტის გადამუშავების შემდეგ მიღებული იქნა გამჭვირვალე, მოძრავი სითხე დუღილის ტემპერატურით 76—78° 1—2 მმ წნევაზე 1,7 გ რაოდენობით. კულაში დარჩენილი მცირე რაოდენობით სქელი ზეთი აღმოჩნდა რეაქციაში შეუსვლელი გლიკოლი ან მისი ნარევი სხვა გარდამავალ ჰიდრირებულ პროდუქტებთან. იგი იძლეოდა აცეტილენისათვის დამახასიათებელ თვისებით რეაქციას.

ანალიზი ნივთიერებისა, რომელიც 1—2 მმ წნევაზე 76—78°-ზე დუღს. d_{20}^{20} 0.536, n_D^{20} 1.4420, MR_D 53.31; გამოთვლილია 54.52. ნაპოვნია %: C 76,18, 76.29; H 13,71; 13,90; OH 9,15; $C_{11}H_{24}O$. გამოთვლილია %: C 76.74, H 13.95, OH 9.97.

2, 3-დიმეთილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3, 6-ის ჰიდრირება $Pd/CaCO_3$ -ის მონაწილეობით.

1. ჰიდრირება $3H_2$ მიერთებამდე. ჰიდრირებისათვის აღებული იყო 3,01 გ ენინგლიკოლი, 50 მლ ეთილის სპირტი, 1,5 გ კატალიზატორი. 20°; 722 მმ; $3H_2$ 1281 მლ.

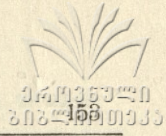
ყოველ 3 წუთში ენინგლიკოლმა შეიერთა წყალბადი (მლ-ში): 470, 235, 230, 70, 30, 25, 20 და ა. შ. სულ 14 საათში შეიერთა 1281 მლ წყალბადი.

სარეაქცია ნარევის ჯგერონად გადამუშავების შემდეგ 1—2 მმ წნევაზე მიღებული იქნა ფრაქცია დუღილის ტემპერატურით 76—78° (I) და 100—102° (II მცირე რაოდენობით). I ფრაქცია აღმოჩნდა ანალოგიური იმ ნივთიერებისა, რომელიც მიღებული იქნა ძირითადი პროდუქტის სახით პლატინის შავით ჰიდრირების დროს და აქვს შემდეგი კონსტანტები: d_{20}^{20} 0,8545, n_D^{20} 1.442. II ფრაქცია აღმოჩნდა აცეტილენური შენაერთი. ბუხოვეცით იძლევა აცეტილენისათვის დამახასიათებელ რეაქციას.

2. ჰიდრირება $2H_2$ მიერთებამდე. ჰიდრირებისათვის აღებული იყო 2,68 გ ენინგლიკოლი, 50 მლ ეთილის სპირტი, 1 გ კატალიზატორი. 27°, 722 მმ, $2H_2$ 791 მლ. ყოველ 3 წუთში ენინგლიკოლმა შეიერთა წყალბადი (მლ-ში): 400, 360, 40; სულ 8—9 წუთში შეიერთა 800 მლ წყალბადი. 1—2 მმ წნევაზე მიღებული იქნა ფრაქციები დუღილის ტემპერატურით 86—88° (I) და 120—124° (II), რომელთაგან I გამჭვირვალე, მოძრავი სითხეა, ხოლო II მოყვითალო, გამჭვირვალე, შედარებით ძნელად მოძრავი ზეთი, რომელიც ბუხოვეცით იძლევა აცეტილენისათვის დამახასიათებელ რეაქციას.

სამი ცდის შედეგად მიღებული იქნა I ფრაქცია 2,5 გ, ხოლო II—3 გ რაოდენობით.

ანალიზი ნივთიერებისა, რომელიც 1—2 მმ წნევაზე დუღს 86—88°-ზე. d_{20}^{20} 0.8797, n_D^{20} 1.4490, MR_D 56.77; გამოთვლილია 55.58. ნაპოვნია %: C 70.87, 70.54; H 12.40, 12.63; OH 17.63. $C_{11}H_{22}O_2$. გამოთვლილია %: 70.96, H 18.2, OH 18.37.



დაქანგვა ნივთიერებისა, დუღილის ტემპით 86—88° 1—2 მმ წნევაზე. დაქანგვისათვის აღებული იყო ნივთიერება 0,7342 გ, პერმანგანატი 0,8312 გ და პოტაში 0,4 გ. დაქანგვა ჩატარებული იქნა წინათ აღწერილ პირობებში (2). მიღებული Ag — მარილი არ შეედება.

მარილის ანალიზი. 0.040 გ მარილი: 0.01892 გ Ag, ნაპოვნია %: Ag 47,2 C₅H₉O₃Ag. გამოთვლილია %: Ag 48.

(წარმოდგენილია 15. XII. 1969)

მაღალმოლეკულურ ნაერთთა ქიმიის კათედრა

ლიტერატურა

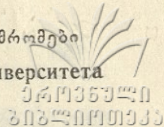
1. А. И. Ногайдели, К. Я. Дзагнидзе, Н. Уридия, ЖОХ, 25, 1955, стр. 2225.
2. А. И. Ногайдели, К. Я. Дзагнидзе, Ш. Кверенчхиладзе, ЖОХ, 29, 1959, стр. 1231.
3. А. И. Ногайдели, Ш. Пичхадзе, ЖОХ, 29, 1959, стр. 1574.

А. И. НОГАЙДЕЛИ, К. И. ДЗАГНИДЗЕ

СИНТЕЗ И ПРЕВРАЩЕНИЕ 2,3-ДИМЕТИЛ-НОНИН-4-ЕН-7-ДИОЛА-3,6

Резюме

Впервые описан 2,3-диметил-нонин-4-эн-7-диол-3,6 и изучена кинетика гидрирования в присутствии палладия и платиновой черни. Установлено, что указанные катализаторы способствуют образованию предельного одноатомного спирта. Присоединением четырех атомов водорода образуется этиленовый γ-гликоль 2, 3-диметил-октен-4-диол-3, 6.



ძმარმევა და პროპიონეზა და დეკინ-5-დიოლ-4,7-ის რთული ეთერების სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება

შ. მიქაძე, ნ. არევაძე

მეორადი აცეტილენური γ -გლიკოლების რთული ეთერების სინთეზისა და მათი გარდაქმნების საკითხი ნაკლებადაა შესწავლილი. დღემდე სინთეზირებულია დიფენილბუტინდიოლის [1], ჰექსინდიოლის [2], დიტოლილბუტინდიოლის [3] ძმარმევას სრული ეთერები და შესწავლილია მათი ჰიდრირების სიჩქარის საკითხი.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ მეორადი აცეტილენური γ -გლიკოლის—დეკინდიოლის რთული ეთერების მიღება და მათი გარდაქმნების ჩატარება. აღნიშნული საკითხი მანამდე შეუსწავლელი იყო. კლევის შედეგად სინთეზირდა დეკინდიოლის ძმარმევასა და პროპიონმევას რთული ეთერები და ჩატარდა მათი ჰიდრირება Pd/CaCO_3 -ის თანაობისას. რთული ეთერები სინთეზირებული იყო გლიკოლზე როგორც მევას ანჰიდრიდის, ასევე უშუალოდ მევების მოქმედებით პ-ტოლუოლსულფომევას თანაობისას. უკანასკნელი მეთოდი ჩვენს მიერ მოწოდებული იყო 1,4-ბუტინდიოლის რთული ეთერების მისაღებად [4]. დეკინდიოლის პროპიონმევას სრული ეთერი სინთეზირებული იყო აგრეთვე გლიკოლზე პროპიონის მევას მოქმედებით ქლორიანი თიონილის თანაობისას.

ექსპერიმენტული ნაწილი

ძმარმევა დეკინდიოლის სრული ეთერის სინთეზი დეკინდიოლზე ძმარმევას ანჰიდრიდის მოქმედებით. 250 მლ სამყელა კოლბაში, რომელსაც გაკეთებული ჰქონდა უკუმაცივარი და მექანიკური სარევი, მოვითავსეთ 15 გ დეკინდიოლი (სიმეტრიული დიპროპილბუტინდიოლი, დულ. ტემპ. $114-115^\circ$ 1მმ; $d_4^{20}=0,9474$; $n_D^{20}=1,4686$. ლიტ. მონაცემები [5,6]: დულ. ტემპ. $113-114^\circ$ 1მმ; $d_4^{20}=0,9462$; $n_D^{20}=1,4678$), 55 გ ძმარმევა ანჰიდრიდი და 2 გ უწყლო ნატრიუმის აცეტატი. სარეაქციო ნარევი 7 საათის განმავლობაში ვაცხელებთ $140-150^\circ$ -ზე. რეაქციის პროდუქტზე წყლის დასხმის დროს ზედა ფენაში გამოყოფილი ყვითელი ფერის სითხე გავანეიტრალეთ სოლით, გამოწვლილვის შემდეგ ეთერსნარი გავაუწყლოეთ ნატრიუმის სულფატით. ეთერის მოცილების შემდეგ დარჩენილი სითხე გამოვხადეთ შემცირებული წნევის ქვეშ. ფრაქციონირების შემდეგ გამოვყავით დეკინდიოლის ძმარმევას სრული



ეთერი, დულ. ტემპ. $106-107^{\circ}$ 1 მმ (გამოსავლიანობა 16 გ ანუ 72% გაცხელების შემდეგ); რიშებულო დეკინდიოლზე). იგი არის უფერო, ადვილად მოძრავი სითხე. აქვს თავისებური სუნი. არ იხსნება წყალში და კარგად იხსნება ორგანულ გამხსნელებში. $n_D^{20}-1,4490$; $d_4^{20}-0,9793$; $MR-69,09$; MR გამოთვლილი 68,15. ნაპოვნი % : C 66,11; 66,80; H 9,41; 9,51. $C_{14}H_{22}O_4$ გამოთვლილი % : C 66,4; H 8,66.

ძმარმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერის სინთეზი დეკინდიოლზე ძმარმჟავას მოქმედებით. ჩვეულებრივად მომზადებულ სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 80 გ ძმარმჟავა, 10 გ დეკინდიოლი და 2 გ პ-ტოლუოლსულფომჟავა. სარეაქცია ნარევი მუდმივი მორევის პირობებში ვაცხელეთ $150-160^{\circ}$ -ზე 10 საათის განმავლობაში. რეაქციის პროდუქტი დავამუშავებთ ცნობილი წესით. მივიღეთ ძმარმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერი დულ. ტემპ. $106-107^{\circ}$ 1 მმ (გამოსავლიანობა 8 გ ანუ 54%); d_4^{20} 0,9814; $n_D^{20}-1,4489$; $MR-69,198$; MR გამოთვლილი 68,15.

პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერის სინთეზი დეკინდიოლზე პროპიონის მჟავას ანჰიდრიდის მოქმედებით. ჩვეულებრივად მომზადებულ სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 10 გ დეკინდიოლი, 23 გ პროპიონის მჟავას ანჰიდრიდი და 1,5 გ უწყლო ნატრიუმის აცეტატი. სარეაქცია ნარევი ვაცხელეთ 7 საათის განმავლობაში $120-130^{\circ}$ -ზე. რეაქციის პროდუქტის ცნობილი წესით დამუშავების შემდეგ გამოყოფილ იქნა პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერი. დულ. ტემპ. $132-133^{\circ}$ 2 მმ (გამოსავლიანობა 10 გ ანუ 74%), იგი არის უფერო მოძრავი სითხე, აქვს თავისებური სუნი. $d_4^{20}-0,9685$; $n_D^{20}-1,4470$; $MR-77,802$; MR გამოთვლილი 77,394; ნაპოვნი % : C 68,70; 68,53; H 9,67; 9,38; $C_{16}H_{26}O_4$ გამოთვლილია % : C 68,08; H 9,22.

პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული და არასრული ეთერის სინთეზი დეკინდიოლზე პროპიონის მჟავას მოქმედებით. ჩვეულებრივად მომზადებულ სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 20 გ დეკინდიოლი, 35 გ პროპიონის მჟავა და 3 გ პ-ტოლუოლსულფომჟავა. სარეაქცია ნარევი ვაცხელეთ $120-140^{\circ}$ -ზე 8 საათის განმავლობაში. რეაქციის პროდუქტი დავამუშავებთ ცნობილი წესით. რამდენჯერმე ფრაქციონირების შემდეგ გამოვყავით პროპიონმჟავადეკინდიოლის არასრული და სრული ეთერები. პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერის დულ. ტემპ. $130-132^{\circ}$ 1 მმ (გამოსავლიანობა 6 გ ანუ 24,5%), $d_4^{20}-0,9683$; $n_D^{20}-1,44$ 78; $MR-77,933$; MR გამოთვლილი 77,394. არასრული ეთერის დულ. ტემპ. $124-126^{\circ}$ 1 მმ (გამოსავლიანობა 3 გ ანუ 10,2%). იგი არის ძნელად მოძრავი სითხე, აქვს დამახასიათებელი სუნი. არ იხსნება წყალში. $d_4^{20}-0,9565$; $n_D^{20}-1,4536$; $MR-63,92$; MR გამოთვლილი—63,411; ნაპოვნი % : C 69,43; 69,24; H 9,86; 9,90; $C_{13}H_{22}O_3$ გამოთვლილი % : C 69,02; H 9,74. 0,0388 გ ნიეთიერება; t 18° ; P 729 მმ; $CH_4-3,2$ მლ; ნაპოვნი %; OH—6,30; $C_{13}H_{21}O_2(OH)$ გამოთვლილი % : OH 6,7.

პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერის სინთეზი ქლორიანი თიონილის გამოყენებით. ჩვეულებრივად მომზადებულ სამყელა კოლბაში მოვათავსეთ 15 გ პროპიონის მჟავა და 8 გ ქლორიანი თიონილი, სარეაქცია ნარევი 2 საათის განმავლობაში ვაცხელეთ $110-120^{\circ}$ -ზე, სანამ არ შეწყდა SO_2 -ის გამოყოფა. შემდეგ დავამატეთ 10 გ დეკინდიოლი და კვლავ:

გაცხელეთ 100—125°-ზე, 10 საათის განმავლობაში. მიღებული პროდუქტი დამუშავეთ წყლით, გავანიტრალეთ სოდიტ და გამოვწვლილეთ ეთერით. ეთერსნარი გავუწყლოეთ ნატრიუმის სულფატით. ეთერის მოცილების შემდეგ დარჩენილი პროდუქტი გამოვხადეთ რამდენიმეჯერ. გამოვყავით პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერი, დულ. ტემპ. 127—131° 2 მმ (გამოსავლიანობა 5,5 გ ანუ 33 %). d_4^{20} — 0,9689; n_D^{20} — 1,4470; MR 77,770; MR გამოთვლილი 77,394.

ძმარმჟავა და პროპიონმჟავა დეკინდიოლის სრული ეთერების ჰიდრირება $Pd/CaCO_3$ -ის თანაობისას. ჰიდრირებისათვის ვიღებდით 0,01 გ მოლ ნივთიერებას, 1 გ კატალიზატორს $Pd/CaCO_3$ -ს და 50 მლ ეთილის სპირტს.

მიუერთეთ რა 2 მოლი წყალბადი ძმარმჟავადეკინდიოლის სრულ ეთერს, რეაქცია პრაქტიკულად შეწყდა. ჰიდრირების პროდუქტს კატალიზატორი მოვაცილეთ გაფილტვრით, სპირტი კი—გადადენით. დარჩენილი პროდუქტი გავხსენით ეთერში. ეთერსნარი გავუწყლოეთ Na_2SO_4 -ით და ეთერის მოცილების შემდეგ გამოვყავით ძმარმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერი. დულ. ტემპ. 105—106° 2 მმ; იგი უფერო, ადვილად მოძრავი სითხეა. აქვს თავისებური სუნი. d_4^{20} — 0,9679; n_D^{20} — 1,4400; MR 70,264; MR გამოთვლილი 70,160. ნაპოვნი % : C 65,61; 65,59; H 10,42; 10,54. $C_{14}H_{24}O_4$ გამოთვლილი % : C 65,11; H 10,07.

პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერის დაჰიდრირებით მივიღეთ შესაბამისი ნაჯერი ეთერი—პროპიონმჟავადეკინდიოლის სრული ეთერი. დულ. ტემპ. 125—126° 3 მმ; იგი უფერო, ადვილად მოძრავი სითხეა; აქვს თავისებური სუნი. d_4^{20} — 0,9513; n_D^{20} — 1,4430; MR 79,700; MR გამოთვლილი 79,396; ნაპოვნი % : C 67,56; 67,74; H 10,44; 10,65; $C_{16}H_{30}O_4$ გამოთვლილი % : C 67,13; H 10,49.

დასკვნები

შესწავლილია დეკინდიოლის (სიმეტრიული დიპროპილბუტინდიოლის) ზოგიერთი რთული ეთერის სინთეზისა და კატალიზური ჰიდრირების საკითხი. კვლევის შედეგად დადგენილია: 1. დეკინდიოლზე ძმარმჟავა ანჰიდრიდის (უწყლო ნატრიუმის აცეტატის თანაობისას), ასევე ძმარმჟავას (პ-ტოლუოლსულფომჟავას თანაობისას) მოქმედებისას წარმოიქმნება შესაბამისი სრული ეთერი. 2. დეკინდიოლზე პროპიონმჟავა ანჰიდრიდის (უწყლო ნატრიუმის აცეტატის თანაობისას), ასევე პროპიონის მჟავას (ქლორიანი თიონილის გამოყენებით) მოქმედებისას წარმოიქმნება მხოლოდ სრული ეთერი, ხოლო პროპიონის მჟავას მოქმედებისას პ-ტოლუოლსულფომჟავას თანაობით წარმოიქმნება როგორც სრული, ისე არასრული ეთერები. 3. ძმარმჟავა და პროპიონმჟავა დეკინდიოლის რთული ეთერების სრული ჰიდრირების შემდეგ $Pd/CaCO_3$ -ის თანაობისას გამოყოფილი და დახასიათებულია შესაბამისი ნაჯერი ეთერები. 4. აღნიშნული ეთერები ჩვენს მიერ პირველადაა მიღებული და დახასიათებული.

შ ო ბ ი ა ს ო ტ უ რ ა

1. Ю. С. Залькинд и Э. И. Нейштаб, ЖРХО, II, 1918, стр. 137.
2. Ю. С. Залькинд и И. С. Бессонова, ЖРХО, 53, 1921, стр. 286.
3. А. И. Ногайдели и К. Я. Дзагнидзе, ЖОХ, 1941, стр. 137.
4. Ш. Г. Микадзе, ЖОРХ, I, 1965, стр. 471.
5. А. Д. Петров и А. Д. Карлик, ЖОХ, II, 1941, стр. 1100.
6. C. G. Marvell, Am. chem. soc., 61, 1939, p. 2714.

Ш. Г. МИКАДЗЕ, Н. Г. АРЕВАДЗЕ

**СИНТЕЗ И КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ГИДРИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭФИРОВ
ДЕКИН-5-ДИОЛА-4,7 УКСУСНОЙ И ПРОПИОНОВОЙ КИСЛОТ**

Резюме

Изучен вопрос о синтезе и каталитическом гидрировании некоторых сложных эфиров декиндиола (симметричный дироцил-бутиндиола). В процессе исследования установлено:

1. При действии на декиндиол уксусного ангидрида (в присутствии безводного ацетата натрия) или уксусной кислоты (в присутствии *p*-толуолсульфокислоты) образуется полный эфир.
2. При действии на декиндиол пропионового ангидрида (в присутствии безводного ацетата натрия) или пропионовой кислоты (с применением хлористого тионила) получается только полный эфир, а действием пропионовой кислоты в присутствии *p*-толуолсульфокислоты получают полные и неполные эфиры. Впервые синтезированы и охарактеризованы полные эфиры декиндиола уксусной и пропионовой кислоты, а также неполные эфиры декиндиола пропионовой кислоты.
3. При полном гидрировании сложных эфиров декиндиола уксусной и пропионовой кислоты в присутствии $Pd/CaCO_3$ выделены и охарактеризованы соответствующие эфиры.

მიკროელემენტების განსაზღვრა ბუნებრივ წყლებში. Mo, Mn და Fe ფოტომეტრიული განსაზღვრა წყლის ერთ სინჯში

ნ. კარსანიძე, ბ. სუპატაშვილი

ფოტომეტრიული მეთოდით ბუნებრივ წყლებში Mo, Mn და Fe ჩვეულებრივ ცალ-ცალკე სინჯებში საზღვრავენ, რისთვისაც სინჯის დიდი მოცულობაა საჭირო. რადგან ამ მხრივ უმეტესად შეზღუდული ვართ, მიზანშეწონილია Mo, Mn და Fe თანამიმდევრული განსაზღვრა წყლის ერთ სინჯში.

ბუნებრივი წყლებიდან Mo, Mn და Fe კონცენტრირების მეთოდებიდან ვარჩიეთ მათი დიეთილდითიოკარბამატების ქლოროფორმით ექსტრაქცია. წყალ-ხსნარიდან, რომლის $\text{pH} > 6$, რაოდენობრივად ექსტრაპირდება Mn^{2+} , Fe^{2+} და Fe^{3+} , ხოლო თუ $\text{pH} \leq 4,5$ — Mo^{VI} [1]. ორგანული ფაზიდან კონც. HCl-ით და H_2O_2 -ით რეექსტრაპირებულ Mo^{VI} -ს ფოტომეტრიული მეთოდით საზღვრავენ როდანიდული კომპლექსის სახით [2,3]. მეთოდი საიმედოა და მცირე შესწორებით გამოვიყენეთ.

ჰიდროქსიმურ ანალიზში Mn^{2+} განსაზღვრის გავრცელებული პერსულფატური (ან პერიოდატული) მეთოდი შედარებით დაბალმგრძობიარეა (MnO_4^- -ის შთანთქმის მოლური კოეფიციენტი $\epsilon = 2420$ [4]). ამიტომ Mn^{2+} განსაზღვრა ვაპჯობინეთ ფორმალდოქსიმატის სახით ($\lambda = 546$ ნმ-ზე, $\epsilon = 11200$ [5]). ფორმალდოქსიმი Mn^{2+} -ის გარდა შეფერილ კომპლექსებს იძლევა Ce, Co, Cu, Ni და Fe [5]. მათი შენიღბვა არ მოხერხდა, არც მათი ფორმალდოქსიმატების გაცხელებამ [6] მოგვცა სასურველი შედეგი. ამიტომ საჭირო ვახდა ხელშემშლელი კატიონების წინასწარი დაცილება Mn^{2+} -დან. Ce და V, როცა წყალხსნარის $\text{pH} > 7$ -ზე დიეთილდითიოკარბამატით Mn^{2+} -თან ერთად არ ექსტრაპირდებიან [1]. დითიზონატების სახით წყლიდან წინასწარ შეიძლება Cu^{2+} , Co^{2+} და Ni^{2+} ექსტრაქცია. ამრიგად, ხელისშემშლელი იონებიდან მანგანუმთან ერთად ექსტრაპირდება მხოლოდ რკინა. მათი დაცილება ორნაირად შეიძლება: ორგანული ფაზიდან 2N HCl -ით რეექსტრაპირდება მხოლოდ Mn^{2+} , ან $6-8 \text{ N HCl}$ -ით რეექსტრაპირებენ ორივე კატიონს, წყალფაზიდან კი ახდენენ Fe^{3+} ხელახალ ექსტრაქციას დიეთილეთერით ქლორიდული, ან როდანიდული კომპლექსების სახით.

წყალფაზაში Mn^{2+} -ის ფორმალდოქსიმით განსაზღვრისათვის შევისწავლეთ სხვადასხვა ფაქტორის გავლენა მანგანუმის ფორმალდოქსიმატის ოპტიკურ სიმკვრივეზე და შევარჩიეთ ოპტიმალური პირობები.



ორგანული ფაზიდან Mn^{2+} -ის $2N HCl$ -ით რეექსტრაციის შემდეგ, ქლოროფორული კატიონებიდან ექსტრაქტში რჩება მხოლოდ რკინა, ამიტომ მისი განსაზღვრა შეიძლება ორგანული ფაზის ფოტომეტრიებით. რკინის დიეთილდითიოკარბამატის შთანთქმის მოლური კოეფიციენტი დაბალია, მაგრამ რკინის შემცველობა $0,5-1,0$ ლ წყალში განსაზღვრისათვის საკმარისია: უკიდურეს შემთხვევაში ორგანული ფაზიდან შეიძლება Fe^{3+} რეექსტრაცია $6-8N HCl$ -ით და მისი განსაზღვრა რომელიმე მგრძობიარე მეთოდით.

ანალიზის მსვლელობა: $0,5-1,0$ ლ მტკნარ წყალს კონც. HNO_3 -ით სუსტად ამჟავებენ და აცხელებენ ადუღებამდე. გაცივების შემდეგ წყალი გადააქვთ $1,5-2$ ლ გამყოფ ძაბრში და მეთილნარინჯის თანაობისას ანეიტრალებენ კონც. NH_4OH -ით. ძაბრში შეაქვთ $10-20$ მლ ბუფერული ხსნარი ($pH 7,8$) და 10 მლ დითიზონის $0,005\%$ ქლოროფორმხსნარი. ძაბრს $2-3$ წუთით ენერგიულად ანჯღრევენ ან ურევენ მექანიკური სარეველით, აყოვნებენ ფაზების განცალკევებამდე და ორგანულ ფაზას გამოაცილიან. ექსტრაციას იმეორებენ მანამ, სანამ ექსტრაქტი არ შეინარჩუნებს რეაქტივის მწვანე ფერს. ხსნარს ორჯერ რეცხავენ $5-10$ მლ ქლოროფორმით. საჭიროების შემთხვევაში ექსტრაქტში შეიძლება განისაზღვროს Pb^{2+} , Cu^{2+} , Ni^{2+} და Zn^{2+} [7].

ძაბრში შეაქვთ 2 მლ ნატრიუმის დიეთილდითიოკარბამატის 5% -იანი წყალხსნარი, 5 მლ ქლოროფორმი და ენერგიულად ანჯღრევენ $2-3$ წუთს. ორგანულ ფაზას გამოყოფენ და ექსტრაციას იმეორებენ $2-3$ -ჯერ. ექსტრაქტებს აერთებენ და ინახავენ Mn^{2+} და Fe^{3+} განსასაზღვრავად.

ძაბრში წყალს $2N HCl$ -ით ანეიტრალებენ, ამჟავებენ ($pH \sim 3$) და Mn^{2+} -ის ანალოგიურად ახდენენ Mo^{VI} ექსტრაციას. თუ ნატრიუმის დიეთილდითიოკარბამატის შეტანით ხსნარის pH შეიცვლება, ძაბრში კვლავ შეაქვთ რამდენიმე წვეთი $2N HCl$. ექსტრაქტებს აერთებენ, გადააქვთ 100 მლ გამყოფ ძაბრში, უმატებენ 5 მლ კონც. HCl -ს, 2 წვე 30% H_2O_2 -ს და ენერგიულად ანჯღრევენ. წყალფაზას, რომელიც Mo^{VI} შეიცავს გამოყოფენ და ჭარბი H_2O_2 -ის დასაშლელად უმატებენ მარილმჟავა პიდროქსილამინის რამდენიმე კრისტალს. ხსნარში შეაქვთ $0,6$ მლ 20% NH_4SCN , $0,2$ მლ 20% $SnCl_2$, ანახევენ 10 მლ-მდე და მოლიბდენის როდანიდის ექსტრაპირებას ახდენენ ორჯერად, $4-4$ მლ დიეთილეთერით. ორგანულ ფაზაში დისპერაპირებული წყლის მოსაცილებლად ექსტრაქტს აცენტრიფუგირებენ და 5 მლ-იან კიუვეტში ზომავენ ოპტიკურ სიმკვრივეს ლურჯ შუქფილტრზე (420 ნმ).

პირველი ექსტრაქტი გადააქვთ 100 მლ გამყოფ ძაბრში და Mn^{2+} -ის რეექსტრაციას ახდენენ 3 -ჯერად $5-5$ მლ $2N HCl$ -ით. წყალფაზებს აერთიანებენ და ტუტე რეაქტივამდე უმატებენ კონც. NH_4OH -ს. შემდეგ ხსნარში შეაქვთ 1 მლ ფორმალდოქსიმი, ავსებენ 20 მლ-მდე და 20 მლ-იან კიუვეტში მწვანე-ლურჯ შუქფილტრზე (480 ნმ) ზომავენ ხსნარის ოპტიკურ სიმკვრივეს.

Mn^{2+} -ის რეექსტრაციის შემდეგ დარჩენილ ორგანულ ფაზას (რკინის დიეთილდითიოკარბამატი) აცენტრიფუგირებენ და 10 მლ-იან კიუვეტში ზომავენ ოპტიკურ სიმკვრივეს ლურჯ შუქფილტრზე.

Mo^{VI} , Mn^{2+} და Fe^{3+} რაოდენობას ანგარიშობენ, ზემოთ აღწერილ პირობებში სტანდარტული ხსნარების დამუშავებით მიღებულ შედეგებზე აგებული საკალიბრო მრუდების საშუალებით.

რეაქტივები: ბუფერული ხსნარი. (pH 7,75). 49,2 მლ 10% N მარმეავას უმატებენ 50,8 მლ 0,1 N ამონიუმის ტუტეს.

ფორმალდოქსიმი. 2 გ პარაფორმალდეჰიდსა და 5,5 გ გოგირდმეკავა ჰიდროქსილამინს ხსნიან 100 მლ მდუღარე წყალში, აცივებენ და ფილტრავენ [6]. რეაქტივი ვარგისია 10—12 დღე. რეაქტივი შეიძლება მომზადდეს ფორმალდეჰიდიდანაც [8], მაგრამ მისი აქტივობა ჩამორჩება პარაფორმალდეჰიდიდან მიღებულ რეაქტივს.

მეთოდი შემოწმებულია სტანდარტულ და მოდელურ ხსნარებზე, ბუნებრივ წყლებზე დამატების მეთოდით, აგრეთვე მათში Mn^{2+} და Fe^{2+} პარალელური განსაზღვრით პერიოდატული და როდანიდული მეთოდებით [6]. 2—10 მკგ Mo^{VI} , 10—50 მკგ Mn^{2+} და 30—300 მკგ Fe^{3+} განსაზღვრისას ცდომილება $\pm 8—10\%$ არ აღემატება.

ამრიგად, შესაძლოა წყლის ერთ სინჯში განისაზღვროს: Pb^{2+} , Cu^{2+} , Ni^{2+} , Zn^{2+} , Mo^{VI} , Mn^{2+} და Fe^{3+} . იმავე სინჯში დამატებით შეიძლება იმ მიკროელემენტების განსაზღვრა, რომლებიც დითიზონით და დიეთილდითიოკარბამატით არ ექსტრაჰირდებიან (Al, Ti და სხვა).

დასკვნა

დამუშავებულია წყლის ერთ სინჯში Mo^{VI} , Mn^{2+} და Fe^{3+} თანმიმდევრული განსაზღვრის მეთოდი. განსაზღვრის ცდომილება არ აღემატება $\pm 10\%$ -ს. იმავე სინჯში შესაძლოა Pb^{2+} , Cu^{2+} , Ni^{2+} და Zn^{2+} ექსტრაქციულ-ფოტომეტრიული მეთოდით განსაზღვროს.

(წარმოდგენილია 20. XII. 1969)

ანალიზური ქიმიის კათედრა

ლიტერატურა

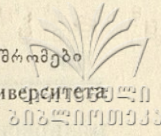
1. И. Стари, Экстракция хелатов, „Мир“, 1966.
2. Концентрирование и определение микроэлементов, вып. 2, под ред. В. Б. Алексовского, Госнаучтехиздат, 1958.
3. Г. С. Коновалов, О. Н. Шокина. Гидрохимические материалы, XXXI, 1961, стр. 204.
4. Г. Шарло, Методы аналитической химии, „Химия“, 1966.
5. З. Марченко, Е. Минчевский, ЖАХ, вып. I, 1962, стр. 23.
6. Е. Сендел, Колориметрическое определение следов металлов, М., 1964.
7. გ. სუბატაშვილი, ნ. კარსანიძე, თსუ შრომები, A 1 (137), 1971, 161.
8. П. П. Коростелев. Приготовление растворов для химико-аналитических работ, „Наука“, 1964.

Н. К. КАРСАНИДЗЕ, Г. Д. СУПАТАШВИЛИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОЭЛЕМЕНТОВ В ПРИРОДНЫХ ВОДАХ.
ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ Мо, Мп и Fe
В ОДНОЙ ПРОБЕ ВОДЫ

Резюме

Разработан экстракционно-фотометрический метод последовательного определения молибдена, марганца и железа в одной пробе воды. Мп²⁺ определен в виде формальдоксимата, а железо—в виде диэтилдитиокарбамата. Относительная погрешность определения не более $\pm 10\%$. В той же пробе возможно определение Рb²⁺, Cu²⁺, Ni²⁺ и Zn²⁺.



ОТДЕЛЕНИЕ ПРОТАКТИНИЯ ОТ НИОБИЯ И ТАНТАЛА

(Краткое сообщение)

В. К. АКИМОВ, К. А. ГАМСАХУРДИЯ, У. А. МУРАЧАШВИЛИ

При выделении протактиния из урановых руд или из продуктов их переработки, а также из облученного нейтронами тория всегда возникает задача отделения ультрамалых количеств протактиния от макроколичеств других элементов.

Наибольшие затруднения возникают при отделении протактиния от ниобия, тантала, циркония, гафния, титана и железа.

При отделении протактиния от ниобия и тантала пользуются преимущественно экстракционным методом (1).

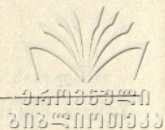
Вследствие большой склонности протактиния образовывать устойчивые к гидролизу хлоридные комплексные анионы, экстракция протактиния из солянокислых растворов протекает легче, чем из азотнокислых и бромистоводороднокислых растворов. Эти анионные комплексы экстрагируются кислородсодержащими растворителями, способными в растворах кислот присоединять протоны (2,3).

Для отделения индикаторных количеств ^{233}Pa от макроколичеств ниобия и тантала применяют диизобутилкетон (4), арсеназо (III) (5), фенол-арсоновую кислоту (6), трибутилфосфат (7) и др. Экстракцию в основном проводят изоамиловым спиртом. Во всех этих методах для устранения мешающего влияния ниобия в экстрагируемый раствор вносят комплексообразователи.

Для отделения индикаторных количеств ^{233}Pa от ниобия и тантала нами были использованы антипирин (АНТ) и его производные, а именно: диантипириметан (ДАМ), диантипирилпропилметан (ДАПМ) и диантипирилфенилметан (ДАФМ). В качестве экстрагента применяли бензол, среда была солянокислая.

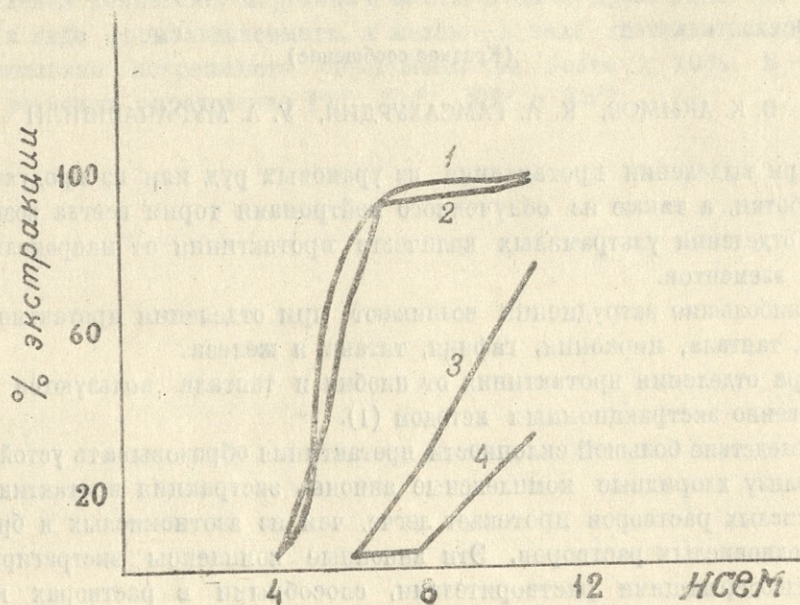
Экстракция изучалась с помощью изотопов протактиния ^{233}Pa , ниобия ^{95}Nb и тантала ^{182}Ta . Концентрации ниобия и тантала в растворе HCl с носителем соответственно равны 10^{-4} и $2 \cdot 10^{-4}$ м. Концентрации спиртовых растворов производных антипирина: 10^{-2} — $6 \cdot 10^{-2}$ м.

Опыты проводились следующим образом: к определенному количеству раствора, содержащего ^{233}Pa , добавляли соляную кислоту до требуемой



молярности, 0,2 мл спиртового раствора реагента и бензол в таком количестве, чтобы объемы водных и органических фаз были равны. Полученную смесь встряхивали на механической мешалке до достижения равновесия (15 минут).

Активность водной и органической фаз измеряли на счетчике Гейгера-Мюллера типа „Б“. Аналогично проводилась экстракция ниобия и тантала.



Дис. 1. Экстракция хлоридных комплексов протактиния с производными антипиринна

1. ДАПМ, 2. ДАФМ, 3. ДАМ, 4. АНТ

Как видно из рис. 1, при молярности HCl , равной 10,7, бензолом полнее экстрагируются комплексные соединения протактиния с ДАПМ-ом и ДАФМ-ом.

В указанных условиях была изучена экстракция хлоридных комплексов ниобия и тантала. Ниобий экстрагируется с ДАПМ-ом на 2%, а ДАФМ-ом—на 4%; свеженприготовленный раствор тантала в HCl экстрагируется с ДАПМ-ом на 48 %, а со временем, вероятно ввиду полимеризации, процент экстракции падает и через 24 часа достигает 2 %.

После реэкстракции слабым раствором соляной кислоты и повторной экстракции в оптимальных условиях процент извлечения ниобия и тантала падает до нуля.

Методом сдвига равновесия установлено, что соотношение органического лиганда к металлу равно 1:1.

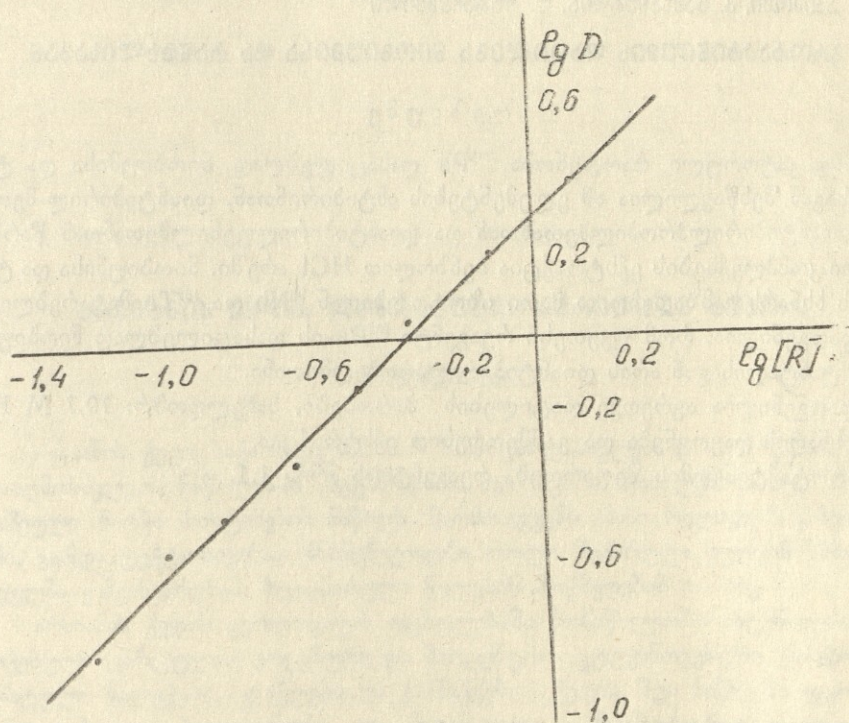


Рис. 2. Определение соотношения Ра: ДАПМ методом сдвига равновесия

Выводы

Изучено взаимодействие антипирина и некоторых его производных с протактинием в растворах HCl.

Отделение индикаторных количеств ^{233}Pa от ниобия и тантала проведено с применением ДАПМ-а в 10,7 М HCl, с использованием в качестве экстрагента бензола.

(Представлено 10. XII. 1970)

Кафедра
аналитической химии

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гибало, Аналитическая химия ниобия и тантала, изд-во „Наука“ М., 1967.
2. И. Д. Буланов а, А. М. Воробьев, Радиохимия 6, 1964, стр. 623.
3. И. Е. Старик, А. Н. Элизарова, Л. И. Ильменкова, Б. И. Шебетковский, М. Н. Чубарков, В. В. Смирнов, Радиохимия 4, 1932, стр. 620.
4. F. L. Moog, Anal. Chem., 27, 1955, p. 70.
5. Е. С. Пальшин, Б. Ф. Мясоедов, Н. П. Палей, ЖАХ, 21, 1962, стр. 954.
6. Б. Ф. Мясоедов, Е. С. Мальшин, Н. П. Малочникова, ЖАХ, 21, 1966, стр. 673.
7. И. Д. Буланова, А. М. Воробьев, Радиохимия 6, 1934, стр. 621.



ვ. აკიმოვი, კ. გამსახურდია, უ. მურაჩაშვილი

პროტაქტინიუმის დაცილება ნიობიუმისა და ტანტალისაგან

რ ე ზ ი უ მ ე

ინდიკატორული რაოდენობა ^{233}Pa დასაცილებლად ნიობიუმისა და ტანტალისაგან შესწავლილია ამ ელემენტების ანტიპირინთან, დიანტიპირილ-მეთანთან, დიანტიპირილპროპილმეთანთან და დიანტიპირილფენილმეთანთან წარმოქმნილი კომპლექსების ექსტრაქცია ბენზოლით HCl არეში. ნიობიუმისა და ტანტალის ხსნარს ვამზადებდით მათი იზოტოპებიდან ^{95}Nb და ^{182}Ta მატარებლით.

დადგენილია, რომ უკეთესი რეაგენტი ^{233}Pa -ის დასაცილებლად ნიობიუმისა და ტანტალისაგან არის დიანტიპირილპროპილმეთანი.

დადგენილია აგრეთვე დაცილების პირობები, სახელდობრ: 10,7 M HCl არე, ხსნარის დაყოვნება და განმეორებით ექსტრაქცია.

პროტაქტინიუმის შეფარდება რეაგენტთან არის 1:1.

არსიანის ქედის ლანდშაფტის ძირითადი ტიპები

ა. ტერმინები

არსიანის ქედი საქართველოს სსრ სამხრეთ-დასავლეთ და თურქეთის ჩრდილო-აღმოსავლეთ ნაწილებში მდებარეობს. იგი აჭარა-თრიალეთისა და პონტოს მესამეული ნაოჭა სისტემების ნაწილს წარმოადგენს. მისი რელიეფის განვითარებაში, გარდა ტექტონიკისა, მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა ვულკანიზმმა, მეოთხეულმა გამაყინვარებამ, ზედაპირული წყლების მოქმედებამ და სხვ.

არსიანის ქედის გეოლოგიურ აგებულებაში მონაწილეობს ინტენსიურად დანაოჭებული ცარცული, ეოცენური და მიოცენური ვულკანოგენური ქანები, კარბონატული ნალექები, ფიქლები და ქვიშაქვები. ქედის შუა ნაწილში ფართოდაა გავრცელებული პლიოცენური და მეოთხეული ანდეზიტურ-დაციტური ლავები [7, 12, 14].

არსიანის ქედი წარმოადგენს არა მარტო წყალგამყოფსა და კლიმატურ ზღუდეს, არამედ ლანდშაფტურ ზღვარს ერთმანეთისაგან მკვეთრად განსხვავებულ დიდ რეგიონებს შორის. მის დასავლეთით, სადაც დიდია შავი ზღვის გავლენა, გაბატონებულია კოლხურ და მეზოფილურ ტყეთა ლანდშაფტები, აღმოსავლეთით, შავი ზღვის გავლენის შესუსტებისა და კონტინენტური ჰაერის გავლენის მატების გამო ჭარბობს მთის მშრალი ველებისა და არიდული ტყეების ლანდშაფტები. მკვეთრად განსხვავდება ერთმანეთისაგან თვით არსიანის ქედის დასავლეთ და აღმოსავლეთ ფერდობთა ლანდშაფტები, დიდია განსხვავება აგრეთვე ქედის ჩრდილო და სამხრეთ ნაწილებს შორის.

მნიშვნელოვანი ჰიფსომეტრიული განვითარების გამო არსიანის ქედის ბუნებრივი ლანდშაფტები მკვეთრად იცვლება სიმაღლის მიხედვით, რასთან დაკავშირებითაც ბუნებრივი კომპლექსები ქმნიან კარგად გამოხატულ სიმაღლით ზონებს.

არსიანის ქედის ფარგლებში შესაძლებლად მიგვაჩნია გამოიყოს ლანდშაფტის შემდეგი ძირითადი ტიპები:

1. საშუალო სიმაღლის მთის ტყის ლანდშაფტი (წიფლის სიჭარბით);
2. საშუალო სიმაღლის მთის არიდული ტყის ლანდშაფტი;
3. მთის ქსეროფიტული ბუჩქნარების ლანდშაფტი;
4. ვულკანური მთისპირეთის გავრცელებული მთის მდელოების ლანდშაფტი;
5. მაღალმთიანი ტყის ლანდშაფტი;
6. სუბალპური ლანდშაფტი;
7. ალპურ მდელოთა ლანდშაფტი.



1. საშუალო სიმაღლის მთის ტყის ლანდშაფტი (სიჭარბით) მოიცავს არსიანის ქედის ჩრდილო ნაწილის დასავლეთ და აღმოსავლეთ ფერდობებს, შუა ნაწილის დასავლეთი განშტოებების დასავლეთ და ჩრდილო ექსპოზიციის ფერდობებს, ზღვის დონიდან 800—900-დან 1200 მ სიმაღლემდე. მისთვის დამახასიათებელია მკვეთრად დანაწევრებული მთა-ხეობათა რელიეფი. ხეობათა მნიშვნელოვანი ნაწილი V-სებური მოყვანილობისაა, ზოგან გვხვდება კანიონისებური ხეე-ხეობებიც. ხშირია დიდ სიმაღლეზე მდებარე ძველი მოსწორებული ზედაპირები. ქედების განშტოებათა თხემები ხშირად ბრტყელ გაკეებს წარმოადგენენ.

ჰავა ზომიერად ტენიანია, ცივი ზამთრით და ხანგრძლივი ზაფხულით (საშუალო ტემპერატურა წლიური 10° -ზე მაღალია, იანვრის $0-1^{\circ}$, ივლისის— $18-19^{\circ}$, ნალექების საშუალო წლიური რაოდენობა 1200 მმ აღემატება).

მცენარეული საფარი წარმოდგენილია შერეული ფართოფოთლოვანი ტყეებით წიფლის სიჭარბით. აქა-იქ ვხვდებით კოლხური ტყეებისათვის დამახასიათებელ მარადმწვანე ბუჩქებს.

აღნიშნული ტიპის გავრცელების ფარგლებში ძირითადად წარმოდგენილია სატყვე მეურნეობა, რომელსაც განვითარების ყველაზე მეტი პერსპექტივა აქვს. ოროგრაფიულად ხელსაყრელ უბნებზე განვითარებულია მებალეობა, მებოსტნეობა, სიმინდის კულტურის მოყვანა და სხვ.

2. საშუალო სიმაღლის მთის ფართოფოთლოვანი არიდული ტყის ლანდშაფტი წარმოდგენილია არსიანის ქედის შუა და სამხრეთი ნაწილების დასავლეთი განშტოებების სამხრეთი და აღმოსავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე, მთავარი ქედის აღმოსავლეთ ფერდობზე, 800-დან 1200—1400 მ აბსოლუტურ სიმაღლეზე. იგი ხასიათდება მკვეთრად დანაწევრებული მთა-ხეობათა რელიეფით, კანიონისებური ხეობების სიმრავლით და კარსტული ფორმებით.

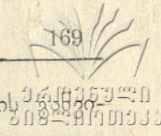
ქედებისა და მთების სამხრეთისა და აღმოსავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე შავი ზღვის ჰაერის გავლენა მკვეთრადაა შემცირებული, ამიტომ აქ დაბალია შეფარდებითი ტენიანობა ($55-65\%$), ნალექების საშუალო წლიური რაოდენობა იშვიათად აღემატება 800 მმ. ნალექების სეზონური განაწილება არსიანის ქედის აღნიშნულ ნაწილებში ხმელთაშუაზღვიური რეჟიმისაა.

მცენარეული საფარი ძირითადად მუხის მეჩხერი ტყეებითაა წარმოდგენილი; მუხასთან ერთად ხშირად გვხვდება ფიჭვი და ღვია. მუხნარ ტყეებში ბევრია ქსეროფიტული ბუჩქნარები.

დასავლეთი განშტოებების ქვედა ფერდობებზე მუხას დიდი რაოდენობით ერევა ხმელთაშუა ზღვის ფლორის წარმომადგენლები—იტალიური ფიჭვი, მუხის ადგილობრივი სახეობა—ჭოროხის მუხა, მარწყვის ხე და სხვ. ხშირად გვხვდება წყავმაზისა და საკმელის ბუჩქნარები. ბევრია აგრეთვე თრიმლი, კაპარი, ზეთის ხე, გარეული ბროწეული, უნაბი, იალღუნი და სხვ.

არიდული ტყეების ქვეშ განვითარებულია ტყის ყავისფერი, ყომრალი და ნეშომპალა-კარბონატული ნიადაგები.

ლანდშაფტის ეს ტიპი ძირითადად თურქეთის ფარგლებში ვრცელდება და მისი მნიშვნელოვანი ნაწილი სუსტადაა ათვისებული. აქ დიდი პერსპექტივები



აქვს სატყევე მეურნეობის, მებაღეობის, მებაღეობისა და მებოსტნეობის თარეზას.

3. მთის ქსეროფიტული ბუჩქნარების ლანდშაფტი გავრცელებულია ცალკეული უბნების სახით არსიანის ქედის სამხრეთი ნაწილის განშტოებათა სამხრეთი და აღმოსავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე. მისთვის დამახასიათებელია მკვეთრად დანაწევრებული მთა-ხეობათა რელიეფი კარსტული ფორმებით.

მშრალი ჰავისა და გრუნტის წყლების სიმცირის პირობებში ციცაბო, კლდოვან ფერდობებზე გაბატონებული მდგომარეობა აქვს ქსეროფიტულ ბუჩქნარს, რომელსაც ძირითადად ქმნის: შავჯავა, ღვია, ძეძვი. დიდი რაოდენობითაა გავრცელებული იაღღუნი, გლერძი, ეფედრა. იშვიათია ზღარბა. მთების ქვედა ფერდობებზე გვხვდება ჯაგრცხილა, ჭანური ნეკერჩხალი, უნაბი და სხვ. აქვე ხშირია აგრეთვე გარეული ზეთის ხის კორომები, თრიმლი, გარეული ბროწეული, უნაბი და სხვ.

ბუჩქნარის ქვეშ ძირითადად გავრცელებულია ყავისფერი და ნეშომპალაკარბონატული ნიადაგები. აქ მცირე ფართობი უჭირავს ხილის ბაღებს, ვენახებს და მარცვლეულ კულტურებს. მათ განვითარების მნიშვნელოვანი შესაძლებლობა აქვთ.

4. ვულკანური მთისპირეთის გავრცელებული მთის მდელოების ლანდშაფტი წარმოდგენილია არსიანის ქედის შუა და სამხრეთი ნაწილების აღმოსავლეთ, ქვედა ფერდობებზე, რომლებიც ძირითადად აგებულია ახალგაზრდა ვულკანური ლავებით. მათ ახასიათებს მცირე დახრილობა და სუსტი დანაწევრება. ხშირად ვხვდებით მცირე ფართობის ვაკეებს და ტაფობებს. ლავის საფარი ზოგან ქმნის საფეხურისებურ ფორმებს.

ზომიერად მშრალი კონტინენტური ჰავის პირობებში აქ გაბატონებულია ველისა და მდელოს მცენარეულობა, კერძოდ, მარცვლოვანები და სხვა ბალახეული სახეები, რომელთა ქვეშ განვითარებულია მთის შავმიწები და შავმიწისებური ნიადაგები. ტაფობების მნიშვნელოვანი ნაწილი დაჭაობებულია. ეს ტიპი თავისი მდიდარი საკვები ბალახეულით სათბ-საძოვრებად გამოიყენება, მნიშვნელოვანი ფართობი უჭირავს მარცვლეულ კულტურებსაც. მორწყვის პირობებში შესაძლებელია მარცვლეულისა და კონტინენტური მეხილეობის ფართობების მნიშვნელოვანი გაზრდა.

5. მაღალმთიანი ტყის ლანდშაფტი მოიცავს არსიანის მთავარი ქედისა და მისი განშტოებების მნიშვნელოვან ნაწილებს 1200—1400 მ ზევით. იგი ხასიათდება მთა-ხეობათა რელიეფით, ფერდობების დიდი დახრილობით, მოსწორებული ზედაპირების უბნებით.

ქედის ჩრდილო ნაწილში, აგრეთვე სამხრეთი ნაწილის განშტოებათა ჩრდილო და დასავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე, სადაც ჰავა ზომიერი და ტენიანია, გაბატონებული მდგომარეობა აქვს ნაძვნარს, ხოლო სამხრეთისა და აღმოსავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე ჭარბობს ფიჭვის ტყეები. ნაძვნარებში დიდი რაოდენობით არის გავრცელებული სოჭი და ამიტომ ხშირად იქმნება ნაძვნარ-სოჭნარი, ფიჭვნარებში კი ბევრია ქსეროფიტული ბუჩქნარები.

წიწვიანი ტყეების ქვეშ ძირითადად განვითარებულია გაეწრებული ყომრალი ნიადაგები.



მაღალმთიანი ტყის ლანდშაფტი მეტყევეობისა და საკურორტო მეტყევეობის განვითარების მნიშვნელოვან არეალს წარმოადგენს.

6. სუბალპური ლანდშაფტი წარმოდგენილია არსიანის ქედისა და მისი მთავარი განშტოებების თხემურ ნაწილებში, ზღვის დონიდან 1800—2000 მ ზემოთ. მისთვის დამახასიათებელია ციცაბო ფერდობები და მოვაკებული თხემები, რომლებშიც ხშირად ვხვდებით მცირე ზომის ტბებს.

ჰავა ზომიერად ტენიანი, ცივზამთრიანი და მოკლესაფხულიანია. მცენარეულ საფარში გაბატონებულია მდელოები და მაღალბალახეულობა, მაგრამ საკმაოდ ფართოდაა გავრცელებული ბუჩქნარებიც. ქედის ჩრდილო ნაწილში, შუა და სამხრეთი ნაწილების ჩრდილო და დასავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე ჭარბობს დეკიანები, ხოლო სამხრეთისა და აღმოსავლეთი ექსპოზიციის ფერდობებზე—ღვია-ნები. აქვე გვხვდება მელიქაურის ბუჩქნარებიც.

მაღალმთიანი ტყისა და სუბალპურ მდელოთა ლანდშაფტების ზღვარზე ხშირად განვითარებულია სუბალპური ტყე, ტანბრეცილა დაბალი ხემცენარეებით. მისი ძირითადი ედიფიკატორებია წიფელი, ბოყვი, ჭნავი, მაღალმთის მუხა, პონტური მუხა, არყის ხე და სხვ.

სუბალპური ლანდშაფტისათვის დამახასიათებელია მთა-მდელოს კორდიანი ნიადაგები.

7. ალპურ მდელოთა ლანდშაფტი განვითარებულია ცალკეული უბნების სახით არსიანის ქედის მაღალმთიან ნაწილებში, 2400—2500 მ-ზე მაღლა. იგი ხასიათდება ციცაბო ფერდობებით, ზოგან კლდოვანი და დაკბილული თხემებითა და მწვერვალებით, ცივი ტენიანი ჰავით, კორდიანი, ტორფიანი და პრიმიტიული ნიადაგებით.

მცენარეული საფარი ძირითადად მდელოებითაა წარმოდგენილი, თუმცა გვხვდება ბუჩქნარებიც, რომლებსაც ქედის ჩრდილო ნაწილში მეტწილად დეკაჰქმნის, ხოლო სამხრეთში—ღვია.

არსიანის ქედის შუა ნაწილში და აღმოსავლეთ განშტოებებზე, სადაც აგებულებაში ახალგაზრდა ლავეები ჭარბობს, ხშირად გვხვდება მოკლესაფხული თხემები და კონუსისებური მწვერვალები.

ქედის სამხრეთ ნაწილის მდელოთა შექმნაში ხშირად მონაწილეობს ქსეროფიტული სახეები. ამის გამო ჭოროხის შუა წელის აუზის ალპურ მდელოებს დ. სოსნოვსკიმ [11] „ალპური ქსეროფიტები“ და „ალპური ველები“ უწოდა.

არსიანის ქედის ვაკე თხემებზე, ტაფობებში გვხვდება ჭაობები. არსიანის ქედის სუბალპური და ალპური მდელოები შესანიშნავ საზაფხულო საძოვრებს წარმოადგენენ და ისევე როგორც საქართველოს სსრ-ში, თურქეთის ფარგლებშიაც იგი ფართოდ გამოიყენება მესაქონლეობისათვის.

1. ბ. კეცხოველი, საქართველოს მცენარეული საფარი, თბილისი, 1960.
2. მ. კორძაია, საქართველოს ჰავა, თბილისი, 1901.
3. ნ. ნიჭარაძე, ნ. ჯიბუტი, აჭარის ასსრ, ბათუმი, 1957.
4. მ. საბაშვილი, საქართველოს სსრ ნიადაგები, თბილისი, 1965.
5. Л. Бацевич, Геологическое описание Батумского и Артвинского округов. Материалы для геологии Кавказа, книга I, 1887, стр. 2.
6. Ю. Н. Воронов, Вестник Тифлисского ботанического сада, вып. 10, 1910.
7. П. Д. Гамкрелидзе, Геологическое строение Аджаро-Триалетской складчатой системы, Тб., 1949.
8. Бесим Даркот, География Турции. М., 1959.
9. В. В. Докучаев, Характеристика почв бассейна р. Чорохи и Карс-Ардаганских степей. Изв. КОИРГО, XII, 1899.
10. К. А. Сатунин, Поездка К. М. Дерюгина в Чорохский край. Изв. КОИРГО, XVI, № 5, 1903.
11. Д. И. Сосновский, Ботанико-географическое исследование в Ольгинском округе, Зап. КОИРГО, кн. 23, 1915.
12. Н. И. Схиртладзе, Постплиоценовый эффузивный вулканизм Грузии. Изд. АН Груз. ССР, Тб., 1953.
13. Н. Н. Шавров, О распространении некоторых растений в долинах Чорохи и Имерхеви. Изв. КОИРГО, XIX, № 3, 1907—1908.
14. P. Agni, Über tektonische Grundzüge Ostanatoliens und benachbarten Gebiete. Ankara, 1939.
15. Sabri Faik, Türkiye coğrafyası. İstanbul, 1929.
16. Sabri Faik, Büyük Atlas, İstanbul, 1939.
17. K. Krause, Englers Bot. Jahrbuch, Bd. 69, 1939.
18. K. Leuchs, Leipziger viertel Jahrchrift für SO Europa, 2, 1939.
19. G. Palgrave, „Nature“, vol. V, 1872.
20. Z. Weickmann, Zum Klima der Türkei, Leipzig, 1926.

А. К. ТЕРЕЛАДЗЕ

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЛАНДШАФТОВ АРСИАНСКОГО ХРЕБТА

Резюме

Арсиянский хребт является частью Аджаро-Триалетской и Понтийской третично-складчатой системы. Его северная часть расположена в Грузинской ССР, а средняя и южная—в пределах Турции.

В формировании рельефа Арсиянского хребта наряду с тектоникой большую роль сыграли вулканизм, поверхностные воды и четвертичное оледенение. Его слагают в основном третичные осадочные и вулканогенные толщи. Довольно широко развиты также плиоценовые и четвертичные андезито-базальтовые лавы.

Наблюдаются большие контрасты между ландшафтами западных и восточных склонов главного Арсиянского хребта и между склонами северной и южной экспозиций западных отрогов.



Ввиду большого гипрометрического развития природные ландшафты резко меняются также по высоте.

В пределах Арсианского хребта выделяются следующие основные типы ландшафтов: 1. Среднегорно-лесной ландшафт, 2. Среднегорный ариднолесной ландшафт, 3. Горный ксерофитно-кустарниковый ландшафт, 4. Предгорья вулканических хребтов с остепененными лугами, 5. Высокогорно-лесной ландшафт, 6. Субальпийский ландшафт, 7. Альпийско-луговой ландшафт.

НЕКОТОРЫЕ ЧЕРТЫ СЕЛЬСКОГО РАССЕЛЕНИЯ СРЕДИЗЕМНОМОРСКОЙ ЗОНЫ ТУРЦИИ

(На примере вилайета Анталя)

Н. В. НАЧКЕБИА

Средиземноморская зона занимает юго-западную часть Турции. В хозяйственном отношении в целом вилайет Анталя является районом товарного сельского хозяйства. Благоприятные природные условия, а также проводимая государством политика способствовала возникновению, формированию и развитию постоянных сельских поселений и, тем самым, оседанию полукочевых кряков на низменной плодородной территории [1, 2].

Изменения в жизни сельской местности этого региона произошли совсем недавно, однако они уже способствовали определенному социально-экономическому прогрессу, несмотря на те феодальные пережитки и социальное неравенство, которые здесь еще остаются тяжелым наследием.

По своему внешнему рисунку расселение здесь носит дисперсный характер. В труднодоступной горной части, а также на отдельных участках низменности Анталя встречаются сгущенные формы расселения.

Средиземноморская зона Турции была заселена издревле. Формированию и развитию сельских поселений способствовали природные, историко-политические и социально-экономические факторы, обусловленные государственным строем и социальными типами хозяйства.

Эта зона еще до греческой колонизации и римской оккупации была представлена довольно густой сетью поселений. Влияние этих цивилизаций на данную территорию было огромным, а последующее влияние византийской культуры глубоко внедрило греческий язык и эллинистическую культуру среди жителей региона.

Однако в первой половине XIII века над этим процветающим районом нависла угроза. В 1207 году Анталей овладели турки, а затем уже большое количество турецких кочевых племен вторглось в этот район, заняв основную часть прибрежной равнины.

Непрерывные вторжения кочевников на протяжении веков отрицательно сказывались на хозяйстве и расселении этой зоны. Из древнейших поселений в этой зоне уцелели лишь г. Анталя и



несколько других городов. Основание постоянных сельских поселений, а также заселение задерживались вплоть до XVIII столетия. Более интенсивное заселение зоны, а следовательно и возникновение постоянных поселений начинается с 60-х годов XIX века, несмотря на то, что отсутствие ирригации в засушливых районах препятствовало оседанию, а свирепствующая малярия беспощадно уничтожала вновь осевших поселенцев.

Процесс заселения становится более интенсивным в конце XIX и в первой половине XX века. Освоение территории происходит за счет иммигрантов и полукочевых юрюков. За два последних десятилетия процесс освоения этой зоны усилился. Этому, безусловно, способствовало расширение ирригационного строительства и специализация района на производстве цитрусовых, фруктов и ранних овощей.

Таким образом, освоению и заселению территории способствовали как государственная колонизация—размещение иммигрантов-турок, так и оседание кочевников-юрюков, которые постепенно переходили на оседлую жизнь. Кочевой образ жизни преобразуется сначала в полукочевой, с двумя постоянными селениями (одно—зимнее, расположенное на равнине, другое—летнее, во внутренних горных котловинах, вокруг которых имеются посеы). Летние поселения на яйлах в старину были более значительными. Все большее количество кочевников-юрюков оставалось на равнине, чтобы выращивать доходные товарные культуры [1].

На изучаемой территории можно выделить следующие генетические типы сельских поселений:

- 1) Старые деревни, существовавшие еще в средние века (феодалная эпоха);
- 2) деревни, возникшие на базе мигрирующего населения;
- 3) деревни, возникшие в связи с развитием интенсивного сельского хозяйства;
- 4) деревни, возникшие на месте бывших зимних кочевьях юрюков.

Как видно из некоторых источников, на обширной территории Средиземноморья, занятой в основном кочевниками, уже существовали постоянные сельские поселения. По данным Коларса, на территории современной деревни Бахтили существовала деревня Секуи с мечетью, построенной еще в конце XV века [4]. Таким образом, зачатки постоянных поселений в этом районе уже существовали к концу XV века, но процесс их возникновения усиливается лишь в XVII-XVIII вв. По данным того же Коларса, деревня Бахтили была основана в 1700—1750 годах [4].

Интенсивное возникновение деревень начинается с 60-х годов XIX столетия и притом исключительно в результате миграционных процессов, продолжавшихся вплоть до начала второй мировой войны. Первыми поселенцами (1860 г.) были черкесы-мухаджеры, переселившиеся из Северного Кавказа в различные части Османской империи, в частности на Анталийскую равнину в районе Манавгата. Однако впоследствии черкесы были вынуждены покинуть эти места в связи с нездоровым климатом, способствующим частым эпидемиям малярии.

Большое количество иммигрантов-турок из Греции и Румынии селилось сюда после русско-турецкой войны 1877—1878 гг. Ими были основаны следующие поселения: Белек, Карабоиндж, Серик, Дикмен, Шатирлы, Чатма и т. д.

Следующая партия иммигрантов с острова Крита поселилась в этих краях в 1900 году. Они основали деревни Селимие, Ахмедие, Кадрие и т. д.

Затем иммигранты появились в 1913 году после Балканской войны и в 1923 после Лозаннского договора об обмене населения. В основном это были турки из Македонии, основавшие несколько поселений вблизи г. Анталя.

В 1934—1936 годах турки-киприоты поселились в деревне Ени-Кей, а болгарские турки — в г. Анталя.

После освоения равнины Анталя (осушение заболоченных мест, строительство ирригационных каналов, ликвидация малярии) туда переселяются жители горных деревень этого региона.

По людности сельских поселений на территории изучаемой зоны встречаются все группы сельских поселений. Самыми распространенными типами поселения являются средние и большие деревни. Например, в вилайете Анталя в 463 средних и больших деревнях проживает 69,09% всего сельского населения вилайета.

Однако эти показатели по отдельным волостям неодинаковы. Например, в ильче Финикие преобладают крупные и крупнейшие деревни. В ильче Манавгат в основном встречаются поселения средней величины.

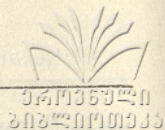
Большинство средних и больших деревень отдалены друг от друга, что, безусловно, создает трудности в коммунальном обслуживании поселений.

Функция населенного пункта (наряду с его людностью), как известно, является одним из главных признаков характеристики поселений и имеет большое научное и практическое значение [3]. Обычно в сельских местностях выделяют сельскохозяйственные, аграрно-индустриальные и несельскохозяйственные функциональные типы.

На территории Средиземноморской зоны, в связи с ее ярко выраженной сельскохозяйственной специализацией, несельскохозяйственные поселения почти не имеются, а что касается аграрно-индустриальных деревень, они пока в зачаточном состоянии.

Таким образом, в этой зоне основным функциональным типом являются сельскохозяйственные поселения. Однако на данном этапе по специализации и хозяйственному развитию они находятся не на одинаковом уровне. Этот контраст усугубляется еще и различным природно-географическим окружением.

Экономически окрепшие поселения, расположенные на низменностях с субтропическим климатом, представляют большой контраст по сравнению с горными селениями, расположенными почти на высоте двух тысяч



метров и отдаленными от крупных портовых городов и населенных пунктов на несколько десятков километров, где занимаются традиционным зерновым хозяйством и животноводством [5].

По характеру производственной специализации и культурно-административной функции среди сельскохозяйственных поселений можно выделить следующие основные типы: 1) Центральные поселения—центры волостей (буджака). Эти населенные пункты по административным функциям являются буджаками, а по типу населенных пунктов—деревнями. Основной функцией этих деревень является сельскохозяйственное производство. В таких деревнях имеются мелкие кустарные производства, лесопилки и т. д. В центре деревни расположена мечеть, имеются кофейни, маленькие гостиницы дома.

2) Распространенным типом является деревня, главной функцией которой является сельскохозяйственное производство.

3) Постепенно появляется тип деревень, где наряду с сельскохозяйственным производством, развивается мелкая кустарная промышленность и т. д. В таких деревнях наблюдается улучшение сферы услуг, что несомненно свидетельствует о социально-экономической эволюции этого региона.

Более существенными оказались изменения в равнинной части Анталийского побережья, где субтропический климат способствует выращиванию цитрусов, ранних овощей и других ценных товарных культур [4].

Примером деревенской общины, претерпевшей преобразования, служит деревня Бахтили. Эта деревня занимает часть плодородной аллювиальной долины Бога Чай примерно в 15 километрах от г. Анталя. Промышленная деятельность в Бахтили большей частью сельскохозяйственная, но это положение меняется в силу того, что товарные культуры постепенно заменяют продовольственные [4].

Новые культуры значительно повысили доходы обитателей деревни. В то время как кукуруза, по данным 1960 г., с одного декара земли давали около 125 тур. лир (14 долл), зеленая фасоль приносила почти 1000 лир (110 долл), а апельсин—1600 лир (177 долл) [4].

Большая часть нового дохода вкладывалась в жилищное строительство, но с 1960 г. сельские жители проявляют заботу и о коммунальных условиях. Например, они регулярно вносят определенную сумму на содержание нового водопровода, построенного правительством [4].

В связи с улучшением жизненных условий из деревенских жителей сравнительно малое число людей проявляет желание покинуть деревню ради работы в Анкаре, Стамбуле или в Западной Германии [4].

Из других типов поселений в этой зоне встречаются временные и сезонные поселения и жилища. Временные поселения обычно бывают летними, связанными с различными типами летних миграций.

В этой зоне можно выделить несколько типов селений по расположению на местности. Из них больше всего выделяются деревни,

расположенные на холмах, равнинные деревни, долинные и горные поселения.

Деревни, расположенные на холмах, встречаются в основном в самых древнезаселенных частях Анталийского вилайета, между реками Манавгат и Кёпрю. Такое местоположение было вызвано желанием уклониться от зон прохождения кочевников. Большинство жителей постепенно спустилось, оставив дома на вершине холма, и возвел ступенями новые на его склонах, а также в глубине долины [6].

Деревни, существовавшие на равнинах в оттоманскую эпоху, обычно располагались на полувозвышенностях. Такое местоположение деревень преследовало в основном оборонные цели. Сейчас равнинные деревни являются наиболее распространенными. Почти все равнинные поселения расположены на слегка волнистой Анталийской равнине.

Встречается также долинный тип поселения. Деревни этого типа в основном размещены в предгорной части на террасах рек. Горные деревни расположены в горах Тавра на высоте 1000 метров над уровнем моря.

Из встречающихся планировочных форм сельских поселений изучаемого района наиболее распространены варианты разбросанных и скученных форм. Имеются также слитные и смешанные формы деревень.

Внешний вид и структура разбросанных деревень далеки от однообразия. В некоторых горных низинах существует тип широко разбросанной деревни, который трудно отличить от дисперсного поселения. Дома отдалены друг от друга по меньшей мере на 30—40 метров и каждый окружен полем. Имеются разбросанные села, где интервал между домами достигает всего нескольких метров, а также нескольких десятков метров [6].

Такой тип деревень в основном доминирует в горных районах и маленьких долинах. Определенное число разбросанных деревень встречается и на равнинной местности.

Возникновение и существование разбросанных деревень, по мнению Д. Еремеева, „определяется малыми ресурсами водных источников, а рытье колодцев и создание водохранилищ являются для кочевников слишком трудным и дорогостоящим делом“ [2]. А по мнению Пляноля, „...дело касается двух стадий эволюции деревень. Деревня, которая основывается, всегда широко застроена, а затем из-за поздней эволюции деревни стягиваются за счет спонтанного разрастания, результата демографической эволюции, которая вынуждает из-за роста населения строить дома в интервале уже существующих домов скорее, чем на драгоценных сельскохозяйственных землях, которые начинаются сразу же у подступов к деревне“ [5].

Наиболее распространенной формой являются скученные деревни. Такой тип деревни обычно состоит из нескольких кварталов (махалле).

Каждое махалле в свою очередь насчитывает по 10—15 плотно прилегающих друг к другу домов. Махалле отделяют друг от друга несколько



კილომეტრს. Иногда махалле возникают на более отдаленном расстоянии от деревни. Появлению таких махалле-саттелитов способствуют избыток населения, желание населения приблизиться к своим полям, а также оседание кочевых и полукочевых племен на пути своего сезонного перемещения. Как только такое изолированное махалле увеличится в размере, оно может со временем потребовать признания его отдельной деревней [4].

Таким образом, в районах, где в достаточном количестве имеются сельскохозяйственные угодья, прежние концентрированные деревни постепенно превращаются в кварталные. Скученные поселения встречаются как в горной, так и на равнинной местности.

Встречаются также деревни слитной формы. Такие деревни существуют как в горах, так и на равнине. В горах в селениях такой формы дома лежат один к другому, плоская крыша одного дома служит двором соседнему.

Это — плотно, непланомерно застроенные деревни, где легко можно потеряться в лабиринте улочек и тупиков. От них отличаются иммигрантские деревни и некоторые поселения, построенные турецким правительством сравнительно недавно, также для переселенцев.

С развитием сети поселений постепенно меняется и внешний облик самих поселений. Если в прошлом в деревнях встречались плетеные и глинобитные жилища, то теперь типичными жилищными постройками являются одноэтажные и двухэтажные дома, хотя надо отметить, что эти два типа домов не соответствуют географически резко очерченным районам.

(Представлено 10.I. 1971)

Кафедра
 экономической географии

ლიტერატურა

1. П. Биро и Ж. Дреш, Средиземноморье, т. II, М., 1962.
2. Д. Е. Еремеев, Юрюки, М., 1969
3. С. А. Ковалев, Сельское расселение, М., 1963.
4. J. F. Kolars, Tradition, Season and Change in a turkish Village, Chicago, 1963.
5. X. de Planhol, De la plaine Pamphilienne aux lacs Pisidiens. Nomadisme et vie paysanne, Paris, 1958.
6. N. Tunçdilek, Observation on Rural Settlement in Two Different Regions of Turkey, RGIUL, № 7, 1961.

ბ. ნაჭყებია

თურქეთის ხმელთაშუა ზღვის ზონის სასოფლო განსახლების ზოგიერთი ნიშანი

(ანტალიის ვილაიეთის მაგალითზე)

რ ე ზ ი მ ე

ნაშრომში მოცემულია თურქეთის ხმელთაშუა ზღვის ზონის (ანტალიის ვილაიეთის ფარგლებში) განსახლების ზოგადი სახე. ბუნებრივ და სოციალურ-ეკონომიურ ფაქტორებზე დაყრდნობით გამოყოფილია ამ ზონისათვის დამახასიათებელ სოფელთა გენეტიური, ფუნქციური, ტოპოგრაფიული და გეგმარებითი ტიპები.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ СРЕДНЕГОДОВЫМИ И СРЕДНЕМЕСЯЧНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ ВОДЫ РЕК ГРУЗИИ

О. Г. ХМАЛАДЗЕ

Изменение интенсивности поступающего в реку теплового потока и расходование ею полученного тепла в течение суток, сезона и года вызывает соответствующее изменение температуры воды в реке. Однако это изменение температуры во времени происходит значительно спокойнее и без резких переходов по сравнению с изменением температуры воздуха.

Плавный характер режима температуры воды, повторяющегося из года в год, определяет её устойчивость в средних декадных и месячных ее значениях. Из года в год эти величины колеблются очень близко около какой-то средней многолетней температуры и лишь незначительно отклоняясь от последней в ту или другую сторону. Значительно большей устойчивостью отличается средняя за год температура воды, вычисленная как среднее арифметическое из среднемесячных значений, так как, чем больше отрезок времени, за который вычисляется средняя температура, тем устойчивее эта величина. Следовательно, учитывая идентичность условий формирования отдельно средних суточных, декадных, месячных или годовых температур воды, можно установить определенную связь, например, между значениями среднегодовой и среднемесячной температурами воды

$$t_b = f(\bar{t}_b)$$

где \bar{t}_b — среднегодовая температура воды, t_b — среднемесячная температура воды.

Для рек бассейна реки Риони такая связь приводится на рисунке.

Этот график связи подтверждает существование связи между среднегодовыми и среднемесячными температурами речных вод.

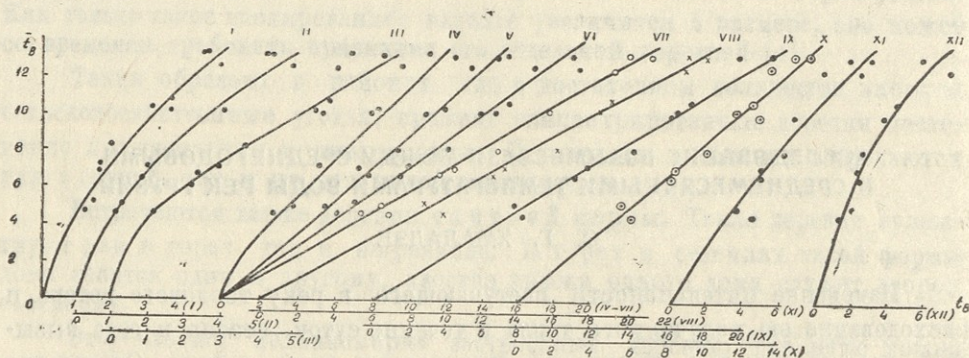
Из рисунка 1 видно, что для р. Риони и ее притоков усматривается определенная и четко выраженная закономерность роста среднемесячной температуры воды с увеличением среднегодовой температуры во все месяцы и сезоны года.

Это положение, проверенное и по большинству других горных рек, сохраняется и для других горных рек рассматриваемой территории.

Рассматривая графики связи $t_b = f(\bar{t}_b)$ для отдельных сезонов года, видно, что для зимних (декабрь—февраль), а также первых месяцев весны



(март—апрель) и последних месяцев осени (ноябрь), т. е. для холодного периода года связи имеют криволинейный характер. Увеличение среднемесячных температур воды происходит неравномерно, т. к. градиент роста



Графики связи между среднемесячными и среднегодовыми температурами воды рек бассейна р. Риони.

температуры воды не сохраняется постоянным по всему диапазону колебания среднегодовой температуры воды.

Для теплого периода года (май—октябрь) связи имеют прямолинейный характер, которые также отражают закономерное повышение средней температуры воды с увеличением среднегодовой температуры, т. е. градиент изменения температуры для всех высотных зон сохраняется постоянным.

Приведенные графики связи на примере рек бассейна р. Риони подтверждают возможность построения исследуемых связей и для других горных рек, и, что очень важно, они являются одним из лучших способов определения значений среднемесячных температур воды для неизученных или слабо изученных рек.

Исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы:

Между среднемесячными, среднегодовыми и сезонными температурами воды горных рек существует тесная и четко выраженная связь.

Значение среднемесячных сезонных значений температур воды рек увеличивается с увеличением среднегодовых температур воды.

Выявлена закономерность уменьшения температуры воды с повышением высоты речного водосбора.

Градиент изменения температуры воды за месяц для холодного периода года не сохраняется постоянным; для теплого периода года градиент изменения температуры остается постоянным для всего диапазона высот.

Установленные связи могут быть использованы для определения значения среднемесячных и сезонных температур вод неизученных и слабо изученных горных рек.

მ. ხმალაძე

**საქართველოს მთის მდინარეების საშუალოთვიური და
საშუალოწლიური ტემპერატურების ურთიერთკავშირის
გამოკვლევები**

რ ე ზ ი მ ე

მდინარეების წყლის ტემპერატურებზე არსებული დაკვირვების მასალების გამოყენებით, გაანგარიშებულია მდ. რიონის აუზის მდინარეთა წყლის საშუალოთვიური და საშუალოწლიური მნიშვნელობები, რაც დაედო საფუძვლად მათ შორის ურთიერთკავშირის დადგენას, რომელიც მოცემულია გრაფიკის სახით (ნახ. 1).

მიღებული კავშირი $t_b = f(\bar{t}_b)$ გვაძლევს საშუალებას გავიანგარიშოთ წყლის ტემპერატურის საშუალოთვიური მნიშვნელობები ნებისმიერი შეუსწავლელი მთის მდინარეებისათვის.

О СИСТЕМАТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ НУММУЛИТОВ

Н. И. МРЕВЛИШВИЛИ

Среди палеонтологов, занимающихся изучением нуммулитов, до сих пор нет единого мнения о систематическом значении отдельных морфологических признаков рода *Nummulites Lamarck*. Поэтому в обширной литературе, посвященной нуммулитам, встречаются самые различные точки зрения при группировке довольно многочисленных видов этого рода. Одни авторы при классификации нуммулитов отдают предпочтение внешним признакам — форме раковины, характеру расположения септальных линий, наличию или отсутствию гранул и характеру их расположения на поверхности (Ж. Буссак, Ф. де ля Ри, А. Дувийе, Г. И. Немков и др.). Именно по внешним признакам выделены: группа нуммулитов с радиальными септальными линиями (без гранул, с гранулами), группа с мандриформными септальными линиями (без гранул, с гранулами), группа с сетчатыми септальными линиями (с гранулами) и т. д. В других случаях более важное значение придается признакам внутреннего строения и, в первую очередь, характеру навивания спирали (Р. Абрар, П. Розложник, Ф. Бьеда, М. Ярцева, Т. Мамедов и др.). Различаются, например, нуммулиты со свободной спиралью, плотнозавернутой спиралью, менее плотнозавернутой спиралью, более плотнозавернутой спиралью и т. д. [1]. Придавая большое значение элементам внутреннего строения, П. Розложник попытался дать более точную характеристику некоторым из этих признаков, изобразив навивание спирали в виде кривых [6]. Позже для некоторых видов нуммулитов кривые роста радиусов спирали составили Г. Шауб [7], М. Ярцева [3], А. Блондо [5]. Наиболее полную характеристику элементов внутреннего строения дают сводные графики, примененные П. Арни [4]. На т. н. сводном графике основных диагностических признаков нуммулитов П. Арни дает не только кривую роста радиусов оборотов, но и кривые таких признаков, как высота оборотов спирали (шаг спирали), высота канала оборота и количество перегородок в обороте. Другие морфологические признаки — форма раковины, перегородок и камер, скульптура — описываются в тексте. При этом каждое описание сопровождается таблицей точных размеров элементов внутреннего строения данного вида. Сводный график П. Арни имеет, по



нашему мнению, большие преимущества при описании отдельных видов перед принятыми до сих пор способами описания. Он позволяет более наглядно, точно и лаконично показать характерные черты внутреннего строения каждого индивида. С другой стороны, ознакомление с графиками, составленными П. Арни для сравнительно малого числа нуммулитов (всего 11 форм), дает основание предположить, что подобные графики могут иметь большое значение при решении некоторых вопросов морфологии, систематики и филиации нуммулитов. Нет никакого сомнения, что они позволят проследить изменения того или иного элемента внутреннего строения в процессе онтогенетического развития индивида. Кроме того, сравнение сводных графиков разных видов даст возможность оценить систематическое значение отдельных морфологических признаков.

Мы попытались на примере некоторых эоценовых нуммулитов Грузии оценить возможность применения сводных графиков П. Арни для выяснения систематического значения отдельных элементов внутреннего строения нуммулитов. В первую очередь были произведены точные измерения 10 индивидов *Nummulites laevigatus* Brug. Этот вид один из наиболее широко распространенных и наиболее хорошо изученных. Кроме того, в нашем распоряжении имелись сравнительно многочисленные хорошо сохранившиеся индивиды этого среднеэоценового вида не только из Грузии, но и Нахичеванской АССР и Парижского бассейна. Это дало нам возможность проследить внутривидовую изменчивость отдельных элементов внутреннего строения для образцов с разных местонахождений. Затем были измерены *N. brongniarti* d'Arch. et Haime, *N. partschi* de la Harpe, *N. globulus* Leym., *N. incrassatus* de la Harpe. Это те виды, радиусы оборотов которых возрастают сравнительно медленно, так же, как у *N. laevigatus*. Сравнение сводных графиков перечисленных видов нам позволило проследить изменчивость отдельных признаков для близкостоящих форм. С целью сравнения сводных графиков микро- и мегасферических генераций одного и того же вида, мы произвели измерения как мегасферических, так и микросферических индивидов следующих четырех видов: *N. laevigatus* Brug., *N. incrassatus* de la Harpe, *N. globulus* Leym. и *N. partschi* de la Harpe. И наконец, были измерены и графически изображены элементы внутреннего строения *N. millecaput* Voubeé и *N. murchisoni* Rütim. Эти последние значительно отличаются от всех вышеупомянутых форм как образом навивания спирали, так и другими морфологическими признаками.

Измерения производились по экваториальным разрезам, полученным быстрым охлаждением сильно нагретых раковин, на минераграфическом микроскопе МИН-9 (окуляр 7х, объектив 9х). При измерении образец погружался в дистиллированную воду. Результаты измерений вносились в таблицы, а затем в системе прямоугольных координат составлялись графики, объяснения к которым приведены на рис. 1. Сводные графики измеренных индивидов приведены на рис. 2—10.

Анализ составленных нами графиков¹, а также графиков, приведенных в работе П. Арни [4], позволяет сделать некоторые выводы:

1. Сравнение сводных графиков 10 индивидов *N. laevigatus*, 6 индивидов *N. millescaput* и др. показывает, что внутри вида наиболее постоянной является кривая роста радиусов оборотов. Остальные элементы подвержены более значительным колебаниям. Интересно, что кривые роста радиусов оборотов *N. laevigatus* из среднего эоцена Грузии вполне соответствуют кривым *N. laevigatus* из Парижского и Хемпширского бассейнов, составленным А. Блондо, с применением метода вариационной статистики [5].

2. Тем не менее только характер роста радиусов оборотов вряд ли может служить видовым критерием. Близкие к *N. laevigatus* формы — *N. brongniarti*, *N. partschi*, *N. gallensis*, *N. incrassatus*, *N. globulus* и др., у которых радиусы оборотов растут сравнительно медленно, имеют кривые роста радиусов оборотов, мало отличающиеся от кривых *N. lae-*

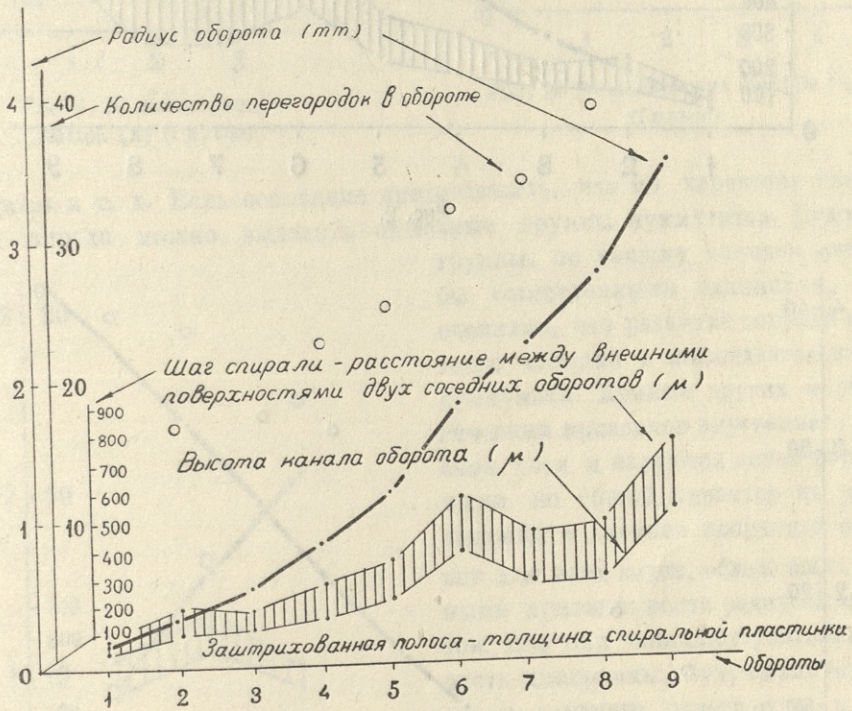


Рис. 1. *N. Laevigatus* Brug. (B) (Грузия).

vigatus. Так например, кривая роста радиусов оборотов *N. partschi* почти совпадает с кривой *N. laevigatus* (рис. 2 и 3). Незначительна разница в этом отношении между *N. laevigatus* и *N. brongniarti*, *N. gallensis* и *N. inc-*

¹ В статье приводится только 9 сводных графиков, однако анализ опирается на большее количество измерений. Публикация всех графиков в предлагаемом сообщении оказалась невозможной из-за ограниченного объема.



064935340
80330701933

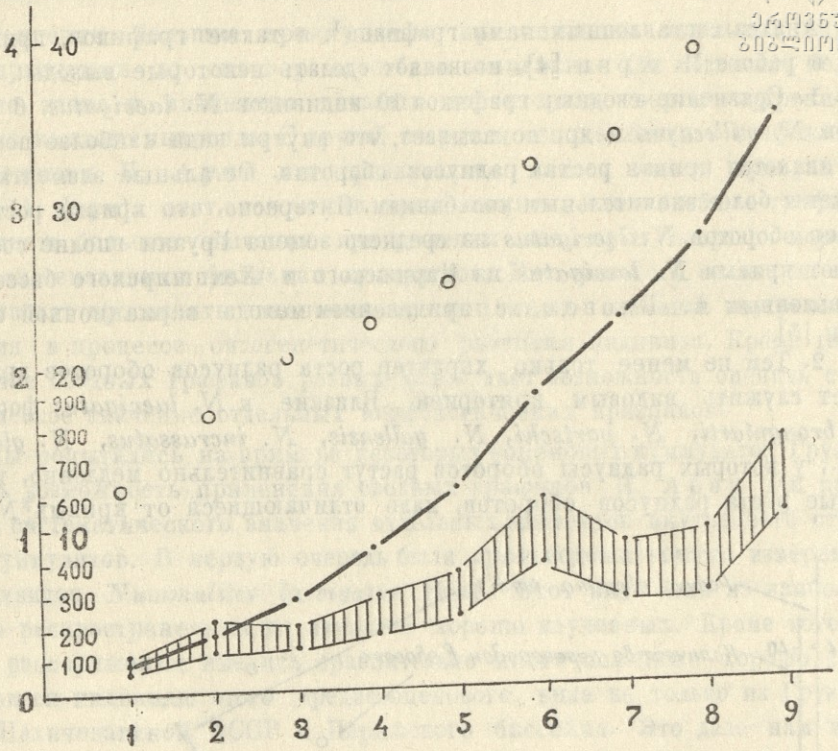


Рис. 2.

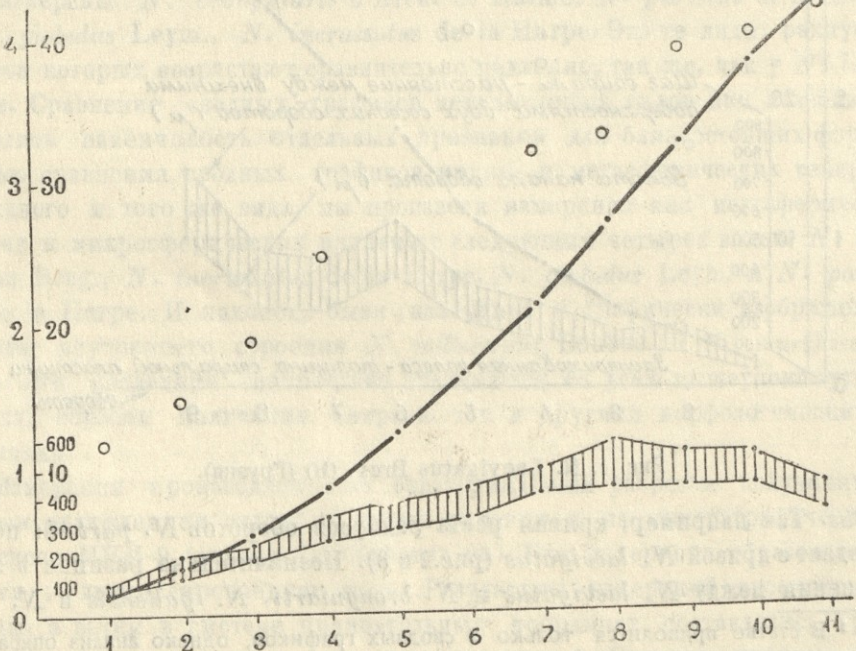


Рис. 3. N. partschi de la Harpe (B) (Грузия)

04036740
2025010333

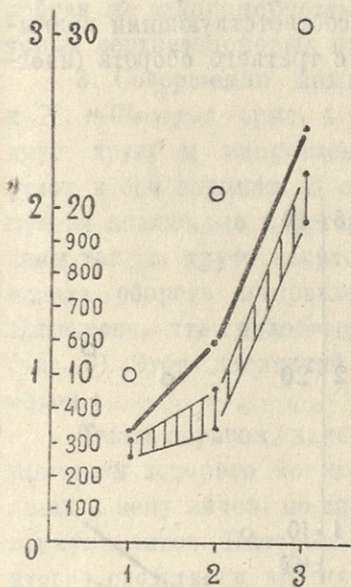


Рис. 4. *N. murchisoni* Rütim. (A) (Грузия)

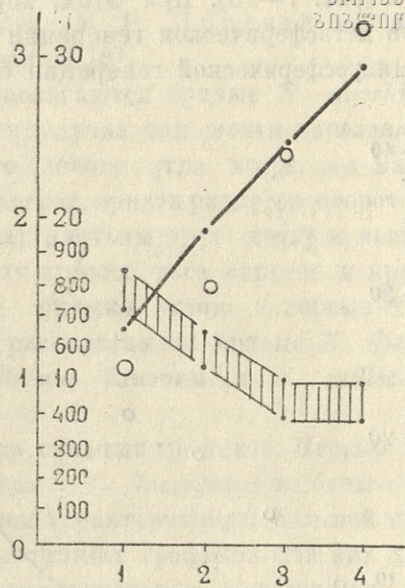


Рис. 5. *N. millescaput* Voubée (A) (Грузия)

incrassatus и т. д. Есть основание предположить, что по характеру навивания спирали можно выделить отдельные группы нуммулитов. Подобные

группы, по нашему мнению, явились бы естественными единицами, т. к. очевидно, что развитие спирали очень тесно связано с жизнедеятельностью нуммулита. Кривые других морфологических признаков внутреннего строения хотя и являются менее постоянными но общий характер их расположения в системе координат одинаков для всех видов, обладающих сходными кривыми роста радиусов оборотов. Все они занимают диагональную часть диаграммы, будучи направлены из ее нижнего левого угла к правому верхнему.

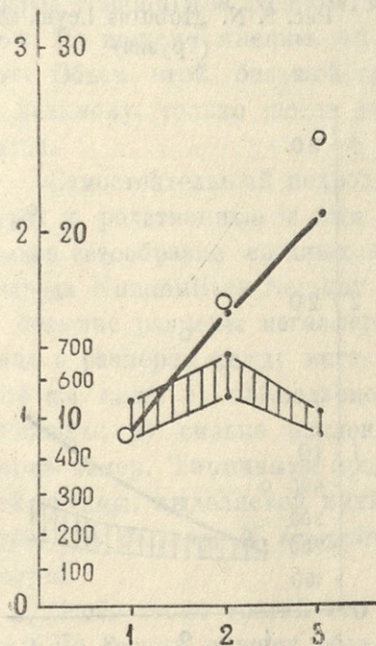


Рис. 6. *N. distans* Desh. (A) (Грузия)

3. Сравнение сводных графиков мега- и микросферических генераций одного и того же вида (*N. laevigatus*, *N. incrassatus*, *N. globulus*, *N. partschi* и др.) показывает, что они практически не отличаются друг от



друга (рис. 7—10). При этом, хорошо видно, что кривые радиусов оборотов мегасферической генерации совпадают с соответствующими кривыми микросферической генерации со второго или с третьего оборота (иног-

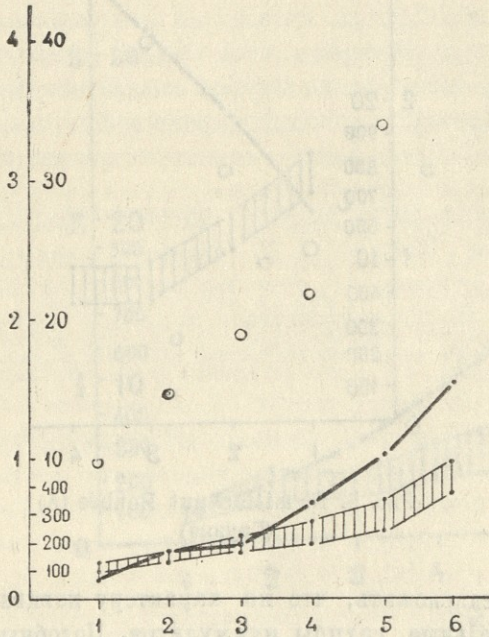


Рис. 7. *N. globulus* Leym. (B)
(Грузия)

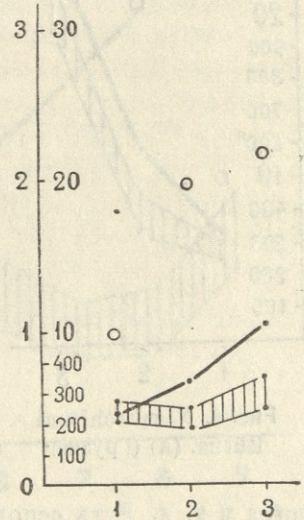


Рис. 8. *N. globulus* Leym. (A)
(Грузия)

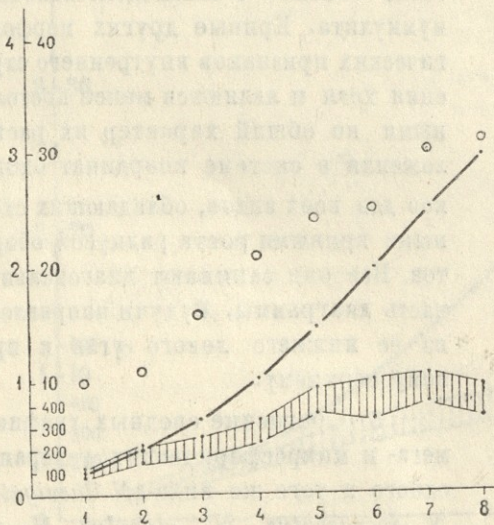


Рис. 9. *N. incrassatus* de la Harpe (A)
(Грузия)

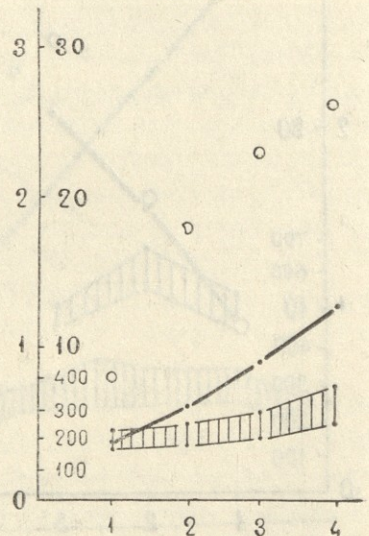


Рис. 10. *N. incrassatus* de la Harpe (A) (Грузия)

да даже с четвертого, как например, у *N. laevigatus*). Интересно, что подобная же закономерность была установлена М. В. Ярцевой для некоторых верхнеэоценовых нуммулитов Украины [3].

3. Совершенно иным образом располагаются кривые *N. murchisoni* и *N. millescaput* (рис. 4 и 5). В первом случае они почти параллельны друг другу и направлены из нижнего левого угла вверх под малым углом к оси ординат. В случае *N. millescaput* кривая радиусов оборотов и кривая количества перегородок почти параллельны друг другу и направлены так же круто вверх, в то время как кривая шага спирали и кривая канала оборота направлены почти под прямым углом к первым двум. Интересно, что подобным же образом располагаются кривые *N. distans* (рис. 6). Этот последний является наиболее близким к *N. millescaput* видом.

Таким образом, намечаются три типа сводных графиков. Первый тип, примером которого могут служить кривые *N. laevigatus* и близко стоящих к нему видов, по-видимому, является характерным для большой группы нуммулитов. Интересно, что кроме однотипных графиков, для них характерно сходство и других морфологических признаков, в частности: а) в большинстве случаев линзовидная форма; плоские формы крайне редки; б) разница в размерах между мега- и микросферическими генерациями одного и того же вида небольшая; в) перегородки прямые или наклонены и изогнуты слабо; г) камеры изометричные, широкие или же небольшой высоты. Нуммулиты с перечисленными признаками мы объединяем в подрод *Nummulites* Nemkov, понимая его более обширно, чем Г. И. Немков. По нашему мнению, он должен включать и подрод *Globulites* Nemkov. Объем этой большой группы может быть определен более точно, по-видимому, только после изучения сводных графиков большего числа видов.

Самостоятельный подрод, по нашему мнению, составляют *N. millescaput* и родственные с ним виды нуммулитов. Для них характерно не только своеобразие сводных графиков, резко отличающихся от графиков подрода *Nummulites* Nemkov, но и другие морфологические признаки: а) большие размеры мегасферы (0,5—1,5 мм и больше); б) большая разница в размерах между мега- и микросферическими генерациями одного и того же вида; в) наблюдаемое довольно часто асимметричное строение раковины; г) сильно наклоненные и изогнутые септы; д) серповидная форма камер. Типичными представителями этой, сравнительно малочисленной группы, выделяемой нами в подрод *Meskhethites*, являются *N. millescaput*, *N. distans*, *N. irregularis*, *N. subdistans* и др. Тип подрода *N. millescaput*.

Особо стоит третий тип сводного графика. Это кривые *N. murchisoni*. По своему общему облику он значительно отличается от двух остальных. Однако только по одному виду судить о его принадлежности к самостоятельному подроду невозможно, тем более, что названный вид фило-



генетически тесно связан с *N. fraasi*, являющимся бесспорным предком большого числа видов подрода *Nammulites* Nemkov. Вопрос подлежит дальнейшему исследованию.

5. Отмеченная П. Арни закономерность процесса онтогенетического развития микросферических форм устанавливается и на наших графиках. В частности, на графиках *N. laevigatus*, *N. bronngiarti*, *N. incrassatus*, *N. partschi* примерно до пятого оборота развитие кривых шага спирали, высоты канала оборота и толщины спиральной полосы идет довольно ровно, по равномерно восходящим линиям. После пятого оборота проявляются некоторые колебания, продолжающиеся до восьмого, а то и до девятого-десятого оборотов, после чего происходит уменьшение толщины спиральной пластинки, высоты оборотов спирали, а в некоторых случаях и количества перегородок (рис. 2, 3, 9). Нам кажется довольно обоснованным объяснение, данное П. Арни этому явлению. Согласно П. Арни, неровности хода кривых связаны со стадией самой активной жизнедеятельности организма, после которой вследствие потери протоплазмы, происходит падение кривых.

Таким образом, выясняется, что видовыми критериями нуммулитов являются как внешние признаки, так и элементы внутреннего строения. Что касается более крупных таксономических единиц, в частности подродов, то для них первостепенное значение имеют признаки внутреннего строения, в первую очередь, характер развития спирали. Поэтому нам кажется, что составление сводных графиков по методу П. Арни при описании нуммулитов в каждом конкретном случае целесообразно как для лаконичности и наглядности описания отдельных видов, так и для определения подродов. Значение подобных графиков еще больше усугубляется тем обстоятельством, что на них отчетливо прослеживается процесс онтогенетического развития индивида. Нет сомнения, что применение метода сводных графиков П. Арни, особенно в сочетании с методом вариационной статистики, когда это позволяет количество и сохранность материала, окажет значительную услугу при решении многих вопросов морфологии, систематики и филогении нуммулитов.

(Представлено 10. VII. 1970)

Кафедра
геологии и палеонтологии

ЛИТЕРАТУРА

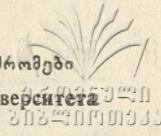
1. Т. А. Мамедов, Нуммулитиды и орбитониды эоценовых отложений Азербайджана и их стратиграфическое значение. Автореф. канд. диссерт. Баку, 1967.
2. Г. И. Немков, Нуммулиты Советского Союза и их биостратиграфическое значение. М., 1967.
3. М. В. Ярцева, Вопросы микропалеонтологии, вып. 8, 1964.
4. P. Arni, Micropaleontology, vol. 13, n. 1, 1967.
5. Alph. Blondeaux, Bull. Soc. Geol. Fr., 7, № 2, 1965.
6. P. Rozložnik, Geologica Hungarica, ser. paleont., fasc. 2, 1929.
7. H. Schaub, Schweiz. Paläont. Abh., Bd. 68, 1951.

ნ. მრავლიშვილი

ნუმულიტების ზოგიერთი მორფოლოგიური ნიშნის
სისტემატიკური მნიშვნელობის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

* საქართველოს ზოგი ეოცენური ნუმულიტის (*N. laevigatus* Brug., *N. millecaput* Bonbée, *N. distans* Desh., *N. partschi* de la Harpe, *N. incrassatus* de la Harpe და სხვა) ძირითადი დიაგნოსტიკური ნიშნების გრაფიკული ხერხით გამოსახვამ (სურ. 1—10) პ. არნის (4) მეთოდით, საფუძველი მოგვცა გვარი *Nummulites* Lamarck ორ ქვეგვარად გავვეყო: *Nummulites* Nemkov და *Meskhethites* sgen. n. პირველი ჩვენ უფრო ფართოდ გვესმის და მასში ვაერთიანებთ ქვეგვარ *Globulites* Nemkov-საც. ქვეგვარების განსასხვავებლად უპირველესი მნიშვნელობა აქვს ხვეულების სიმაღლის და რადიუსების ზრდის სურათს. სახეთა დახასიათებისათვის მნიშვნელოვანია როგორც შიგა აღნაგობის ელემენტები (ტინჩრების და კამერების ფორმა, სპირალის დახვევის ხასიათი), ისევე ნიჟარის ფორმა და ზედაპირის მოკაზმულობა.



გვარ *Rubus L.*-ის ახალი სახეობანი ქვემო სვანეთიდან

ბ. სანაძე

გვარ *Rubus L.*-ის ქვეგვარ *Eubatus Focke*-ს საქართველოს წარმომადგენელთა დამუშავებისას ჩვენს მიერ შენიშნულია 2 ახალი სახეობა ქვემო სვანეთიდან, რომელთა აღწერა წინამდებარე შრომაში მოგვეყავს.

Rubus diffusus Sanadze sp. n. (sect. *glandulosi* P. J. Müll.)

ერთწლოვანი ყლორტები საკმაოდ ღონიერია, რკალისებრ მოხრილი, ცილინდრული, 9 მმ დიამეტრის, ნაფიფქითაა, შიშველი, მრავალი ყუნწიანი ჯირკვლებით, საკმაოდ მაგარი, ფუძეგანიერი, ოდნავ ქვევით გადახრილი ეკლებით და ნემსისებრი ქიცვებით მოფენილი; ფოთოლი სამფოთოლაკიანია, ყუნწი ცილინდრულია 9, 1 სმ სიგრძის და ისეთივე ჯირკვლებით და ეკლებითაა მოფენილი, როგორც ერთწლოვანი ყლორტი; ფოთოლაკები დიდი ზომისაა, ზედა მხარეზე შიშველი, ქვედა მხარეზე მოთეთრო ქეჩისებრია, ხერხისებრი დაკბილვით, თითქმის თანაბრად წაწვეტილი კბილებით, კენწრული ფოთოლაკი განიერ-კვერცხისებრია ან მოგრძო-კვერცხისებრი, ფუძე გულისებრ ამოკვეთილი, გრძლად წაწვეტილი 11,5—12,2 სმ სიგრძის; 8,3—9,1 სმ სიგანის, გვერდითი ფოთოლაკები პატარა ყუნწებზე ზის, ირიბ-მოგრძო-კვერცხისებრია; ფოთოლთანები მოგრძო-ხაზურია; საყვავილე ყლორტი გრძელია, ცილინდრული, სუსტად არის შებუსხვილი, მრავალი ეკლით, ქიცვით და ჯირკვლითაა მოფენილი, ფოთოლი სამფოთოლაკიანია, ფოთოლაკები ისეთივე ფორმისაა, როგორც ერთწლოვანი ყლორტების, მაგრამ უფრო პატარა ზომის; ყვავილედის გრძელია, საგველა მტევნებისაგან შემდგარი, ძირში წყვეტილი და შეფოთილი, ყვავილედის ტოტები ფარჩხატი, მრავალ ყვავილიანი, მრავალი ეკლით, ქიცვით და ჯირკვლით მოფენილი; ჯამის ფოთლები ლანცეტა და წაწვეტილი, მოთეთრო-ქეჩისებრი, ბეწვებით, ნემსისებრი ეკლებით და ყუნწიანი ჯირკვლებით მოფენილი, დაყვავილების შემდეგ მეტწილად ნაყოფებზეა მიტკეცილი; კურკიანა პატარა ზომის ბეწვებითაა შებუსხვილი; ნაყოფი დიდი ზომისაა, მოგრძო, თითქმის ცილინდრული, წვნიანი, ტკბილი. VII—VIII [1, 2, 3, 4].

იზრდება ტყის პირებზე და გაჩეხილ ადგილებზე, ვხვდებით მთის ტყეების ზედა და შუა სარტყელში (იხ. ნახ. 1 და ნახ. 2).

ტიპი: საქ. სსრ—ქვემო სვანეთი, ლენტეხი, ხოფურა, ლაორჩხანას მიდამოები 14—VIII—65 წ., ბ. სანაძე.

ინახება საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის თბილისის ბოტანიკის ინსტიტუტის ჰერბარიუმში.



ნახ. 1. *Rubus diffusus* Sanadze. საყვავილე ყლორტი.

შენიშვნა: ჩენი ახალი სახეობა *R. diffusus* Sanadze მსგავსებას იჩენს *R. caucasicus* Focke-სთან, მაგრამ მისგან განსხვავდება გრძელი ფარჩხატი ყვავილედით, კენწრული ფოთოლაკი განიერ-კვერცხისებრი ან მოგრძო-კვერცხისებრია, *R. caucasicus* Focke-ს ყვავილენი უფრო პატარა ზომისაა, თავდახრილი და უფრო მცირე ყვავილიანი, კენწრული ფო-

თოლაკი კი უკუკვერცხისებრია ან თითქმის მომრგვალო; ჩენი სახეობის *R. diffusus* Sanadze-ს ნაყოფი უფრო დიდი ზომისაა, მოგროვებულია ცილინდრული, *R. caucasicus* Focke-ს ნაყოფი განიერ-კვერცხისებრია.



ნახ. 2. *Rubus diffusus* Sanadze. ერთწლოვანი ყლორტი.

Turiones validi, arcuati, cylindrici, 9 mm in diam., pruinosi, glabri, glandulis stipitatis numerosis obsiti, aculeis sat robustis basi dilatatis vix reclinatis et aciculis armati. Folia ternata, petiolo cylindrico, 9,1—9,6 cm longo, ut turiones, glanduloso et aculeato. Stipulae lange lineares. Foliola magna, supra globra, subtus tenuiter albo-tomentosa, late serrato-dentata, dentibus acutiusculis subaequalibus, terminale late ovatum vel oblongo-ovatum, basi sinu cordato praeditum, longe acuminatum 11,5—12,2 cm longum; 8,3—9,1 cm latum, lateralia petiolulata, oblique oblongo-ovata.

Ramus florifer longissimus, cylindricus, vix pubescens, aculeis, aciculis et glandulis numerosis armatus. Foliola eis turionum similia sed



minora. Inflorescentia longissima paniculato-racemosa basi interrupta, lio-
siosa, pedunculis diffusis multifloris, aculeis aciculis et glandulis numero-
sis armatis. Sepala lanceolata, acutata, post anthesin plerumque fructi-
bus adhaerantia, albo-tomentosa, aciculis et glandulis stipitatis armata. Dru-
peolae pilis minutissimis tecta. Fructus magni oblongi subcylindrici, succo-
si, dulces, VII—VIII.

Habitatio: ad margines silvarum et in caeduis. Zona silvatica mon-
tana superior et media. Georgia occidentalis, Lentechi Svanetia Inferior,
chofura, in vicinitate Laorczechan.

Typus: Georgia occidentalis, Lentechi, Svanetia Inferior, Chofura, in
vicinitate Laorczechan, ad margines silvarum et in caeduis, 14.VIII.1965
K. Sanadze legit. In herbario Instituti Botanici Ac. Sci. RSS Georgiae
(Tbilissi) conservatur.

Affinitas: Species nostra *R. caucasicus* affinis est, sed inflorescentia
longa diffusa, foliolo terminali late ovato vel oblongo-ovato fructibus
magnis oblongis subcylindricis (nec inflorescentia brevior nutante non
tam multiflora, foliolo terminali obovato vel suborbiculari, fructibus late
ovatis) differt.

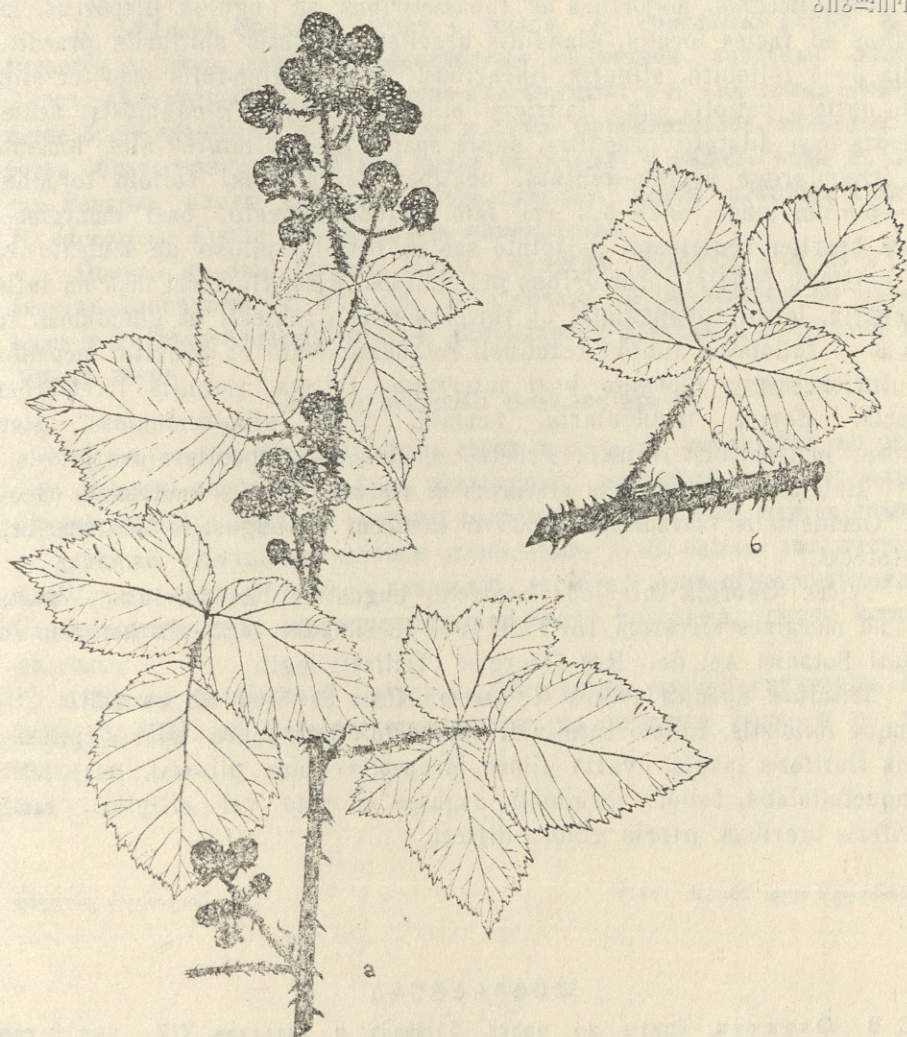
***Rubus svanensis* Sanadze sp. n. (sect. Silvatici P. J. Müll.)**

არც თუ ისე მძლავრი მცენარეა; ერთწლოვანი ყლორტები რკალისებრ მოხ-
რილია, 6 მმ დიამეტრის, ნაფიფქითაა, წიბოებიანი, გაფანტული ბეწვებით და
ხშირი, ფუქეგანიერი, ოდნავ ქვევით გადახრილი ეკლებითაა მოფენილი; ეკლები
არაერთგვაროვანია, უფრო მაგარი წიბოებზეა, პატარა ზომის კი წახნაგებზეა
გაფანტულად განლაგებული და ერთეული მოკლეყუნწიანი ჯირკვლებითაა მოფე-
ნილი. ფოთლები 3—5-ფოთოლაკიანია; ფოთოლთანები ხაზურია, შებუსხვილი
და მოკლეყუნწიანი ჯირკვლებით მოფენილი; ფოთლის ყუნწი თითქმის ცილინ-
დრულია, ერთეული ჯირკვლებით შებუსხვილი და ფუქეგანიერი, ნამკლისებრ მოხ-
რილი ეკლებიც აქვს; ფოთლის ზედა მხარე გაფანტული ბეწვითაა, ქვედა მხარე-
ზე მოთეთრო ქეჩისებრია, არათანაბარ ხერხისებრი წაწვეტილი დაკბილვითაა;
კენწრული ფოთოლაკი 5,2—5,8 სმ სიგრძისა და 5,1—5,3 სმ სიგანის მომრგვა-
ლო-კვერცხისებრია, ფუქე ამოკვეთილი და მოკლე წვეტით ბოლოვდება, შებუს-
ვილი და ეკლიანი ისე, როგორც ყუნწი, ქვედა ფოთოლაკები მოკლეყუნწიანია;
საყვავილე ყლორტები და ყვავილედნი გრძელია, ოდნავ წიბოებიანი, ისეთივე შე-
ბუსხვით და ეკლებით, როგორც ერთწლოვანი ყლორტი; საყვავილე ყლორტი
3—5-ფოთოლაკიანია, კენწრული ფოთოლაკი მომრგვალო-კვერცხისებრია და მოკ-
ლე წვეტით ბოლოვდება, ყვავილედნი მოგრძოა, ძირში წყვეტილი და შეფოთლი-
ლი, ქვედა ტოტები ზევითაა მიმართული; ჯამის ფოთლები სამკუთხოვანი ფორმი-
საა, წაწვეტილი, ხშირი მოთეთრო ქეჩისებრი შებუსხვითა და ჯირკვლებით მოფე-
ნილი, ნაყოფობისას ქვევითაა გადახრილი; ნაყოფი თითქმის სფეროსებრია, კურ-
კიანას წვეტი შებუსხვილია. VII—VIII [1, 2, 3, 4].

იზრდება ტყისა და გზის პირებზე (იხ. ნახ. 3).

ტიპი: საქ. სსრ—ქვემო სვანეთი, ლენტეხი, რცხმელურას ხეობა, ნაფატეხი,
15—VIII—65 წ., ქ. სანაძე.

ინახება საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის თბილისის ბოტანიკის ინსტიტუტის ჰერ-
ბარიუმში.



ნახ. 3. *Rubus svanensis* Sanadze. a. საყვავილე ყლორტი. b. ერთწლოვანი ყლორტი.

შენიშვნა: სახეობა *R. svanensis* Sanadze ახლო დგას *R. ossicus* Juz.-თან, მაგრამ მისგან მთელი რიგი მორფოლოგიური ნიშნებით განსხვავდება: ჩვენი სახეობის *R. svanensis* Sanadze-ს ფოთლები 3—5-ფოთოლაკიანია, კენწურული ფოთოლაკი მომრგვალო-კვერცხისებრია, ზედა მხარეზე გაფანტული ბეწვითაა მოფენილი, საყვავილე ყლორტები მოგრძოა, კურკიანას წვერი შებუსვილია, *R. ossicus* Juz.-ის ფოთლები 5-ფოთოლაკიანია, ზედა მხარეზე შიშველი, კენწურული ფოთოლაკი ვიწრო უკუკვერცხისებრი ან ელიფსურია, საყვავილე ყლორტი მოკლეა, კურკიანას წვერი შიშველია.

Planta validiusecula, turionibus arcuatis, 6 mm in diam., albo-pruinosis angulatis sparse pilosis, dense aculeatis, aculeis robustis, basi dilata-



tis, inaequimagnis, majoribus ac robustioribus ad angulos dispositis, minoribus ad facies locatis, glandulis breviter stipitatis solitariis praeditis. Folia 3—5 foliolata, stipulis linearibus, pilosis, glandulis breviter stipitatis obsitis, petiolis subcylindricis, pilosis, solitarie glandulosis, aculeis falcatis basi dilatatis praeditis, supra sparse pilosa, subtus albo-tomentosa, irregulariter serrato-dentata, dentibus acuminatus, foliolo terminali 5,2—5,8 cm longo, 5,1—5,3 cm lato, rotundato-ovato, basi emarginato, apice breviter acuminato, petiolulo suo ut petiolus piloso ac aculeato 2,5 plo longiore, foliolis inferioribus petiolulatis. Rami floriferi unacum inflorescentia, longi, subangulati, ut turiones pilosi, aculeati et glandulosi, foliis 3—5 foliolatis, foliolo terminali rotundato-ovato et breviter acuminato. Inflorescentia elongata basi interrupta, foliata, ramulis inferioribus erectis. Sepala triangularia, acutata, dense albo-tomentosa, glandulosa, in fructibus reflexa. Fructus subglobosi, drupeolis apice pilosis.

Habitato: ad margines silvarum et viarum. Species endemica. Georgia Occidentalis. Svanetia Inferior. Lentechi in angustiis Rtschmelura, Wafatechi.

Typus: Georgia Inferior, Lentechi, angustiae Rtschmelura, Wafatechi, ad margines silvarum 15. VIII. 1965 K. Sanadze legit. In herbario Instituti Botanici Ac. Sci. Rss Georgiae (Tbilissi) legit.

Affinitas: Species nostra *R. ossico* affinis est, sed ab eo foliis triquinque foliolatis, foliolo terminali rotundato-ovato supra sparse pilosis, ramis floriferis longis, ovario piloso (drupeolis apice pilosis), nec foliis quinquefoliolatis, foliolo terminali anguste obovato vel elliptico, ramis floriferis brevibus, ovario glabro differt.

(წარმოდგენილია 20. III. 1971)

ბოტანიკის კათედრა

ლიტერატურა

1. С. В. Юзепчук, Труды по прикл. ботанике и селекции, XIV, вып. 3, стр. 159—169. Москва-Ленинград. 1924—1925.
2. С. В. Юзепчук, Ботанические материалы гербария Ботанического инст. им. В. Л. Комарова Акад. наук СССР, XIII, стр. 85—110. Москва-Ленинград, 1950.
3. С. В. Юзепчук, Флора СССР, X, Москва-Ленинград. 1941.
4. დ. ი. სოსნოვსკი, საქართველოს ფლორა, V, თბილისი, 1949.

К. САНАДЗЕ

НОВЫЕ ВИДЫ РОДА RUBUS L. ИЗ НИЖНЕЙ СВАНЕТИИ

Резюме

В процессе обработки подрода *Eubatus* Фоске рода *Rubus* L. из Нижней Сванетии нами выявлены 2 новых вида, описание которых приводится в данной работе.

Rubus diffusus Sanadze sp. n.

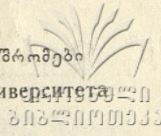
R. diffusus Sanadze сходен с видом *R. caucasicus* Focke, но отличается от него длинным раскидистым соцветием, конечный листочек широко-яйцевидный или удлинённо-яйцевидный; у *R. caucasicus* Focke соцветие более короткое, поникающее и более малоцветковое, конечный листочек обратно-яйцевидный или почти округлый; у нашего вида *R. diffusus* Sanadze плоды крупные, продолговатые, почти цилиндрические; у *R. caucasicus* Focke плоды широко-яйцевидные.

Описан из Зап. Грузии, Нижн. Сванетии, Лентехи, Хофура в окрестностях Лаорчхана 14. VIII. 65. К. Санадзе. Произрастает по опушкам лесов и по вырубленным местам. Встречается в верхнем и среднем поясе горных лесов.

Rubus svanensis Sanadze sp. n.

R. svanensis Sanadze близко стоит к виду *R. ossicus* Juz. но отличается от него: листьями с 3—5 листочками, конечный листочек округло-яйцевидный и с верхней стороны рассеянно волосистый, цветоносные ветви длинные, кончик костяночки опушенный. У *R. ossicus* Juz. листья с 5 листочками сверху голые, конечный листочек узко-обратно-яйцевидный или эллиптический, цветоносные ветви более короткие, кончик костяночки голый.

Описан из Нижней Сванетии, Лентехи из ущелья Рцхмелури, Нафатени 15. VIII. 65 Санадзе; произрастает по опушкам лесов и по краям дорог.



კუმისის წყალსაცავის ზოოკლანქტონის ფორმირება

ზ. კერესელიძე

წყალსაცავების სათევზმეურნეო ათვისებასთან დაკავშირებით თევზთა ლიფსიტებისა და პლანქტოფაგი თევზების საკვები ბაზის—ზოოპლანქტონის ფორმირების შესწავლას თეორიულ ინტერესთან ერთად საკმაოდ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს.

კუმისის წყალსაცავი ველებისა და ნახევრადუდაბნოების ზონის წყალსატევებს ეკუთვნის. იგი შეიქმნა ყოფილი კუმისის მომლაშო (მიქსოპალინური) ტბის ტაფობის მდ. მტკვრის მტკნარი წყლით გავსების შედეგად. ტბის გრუნტი დიდი რაოდენობით შეიცავდა გლაუბერის მარილებს და აქ მტკნარი წყლის დადგომის შედეგად წყალსაცავში მეტად თავისებური სასიცოცხლო გარემო შეიქმნა და ზოოპლანქტონის ფორმირებაც მთელი რიგი თავისებურებებით წარიმართა.

კუმისის წყალსაცავი მდებარეობს თბილისიდან სამხრეთ-აღმოსავლეთით 20 კმ-ზე, ზღვის დონიდან 480 მ-ზე. მისი უდიდესი სიგრძე 2,5 კმ-ია, სიგანე—1,7 კმ, წყლის სარკის ფართობი—2,68 კმ²; წყალსაცავის უდიდესი სიღრმე მისი მაქსიმალური გავსებისას 2,6 მ-ია, საშუალო სიღრმე—1,3 მ. მაქსიმალური გავსებისას წყლის მოცულობა 11 მილიონი მ³, წყლის სარკის ფართობი 335 ჰა. ეს პარამეტრები ჩვენი გამოკვლევის პერიოდში (1967—1969 წწ.) მცირე ფარგლებში ცვალებადობდა.

ლანდშაფტურ-ჰიდროლოგიური დარაიონების მიხედვით (ყავრიშვილი, [1]), წყალსაცავის მიდამოები მცირეწყლიან, ძლიერ აორთქლებად ზონას ეკუთვნის. წყალსაცავის ნაპირები ერთგვაროვანია, დამრეცი, დაბალი და წყალდიდობის დროს დაღამული, რომელიც თიხიანი დანალექებისაგანაა შემდგარი. აქ მცენარეულობა ველის ტიპისაა, რომელიც ნ. კეცხოველისა [2] და ა. ერქომაიშვილის [3] მიხედვით ანდროპოგენური ფორმაციებითაა წარმოდგენილი. უშუალოდ წყალსაცავის ნაპირები და ძირითადად მისი აღმოსავლეთი სანაპირო დაფარულია მლაშობის მცენარეულობით; აქ წამყვანი სახეობებია: *Salicornia aeuropae* L., *Gamanthus pilosus* (Pall.) Bge., *Petrosimomata appostifolia* (Pall.) Lihw., *Artemisia Mayeriana* Bess., *Salcola* sp., *Suada* sp. და სხვ.

მასალა და მეთოდების მეთოდოიკა. წყალსაცავის ჰიდროლოგიური და ჰიდროქიმიური რეჟიმი შესწავლილი იქნა საერთოდ მიღებული მეთოდის მიხედვით (ალიოკინი, [4]). ზოოპლანქტონის თვისობრივი და რაოდენობრივი სინჯები (72 თვისობრივი და 216 რაოდენობრივი სინჯი) შეკრებილი იქნა აპშტეინის თვისობრივი და რაოდენობრივი ბაღით და ვოკის პლანქტონმხაზავით (10 ლ მო-



ცულობის). მასალების კამერალური დამუშავება ხდებოდა ბოგოროვიჩის ბინოკულარის და შემდეგ მიკროსკოპის ქვეშ.

წყალსაცავის ჰიდროლოგიური და ჰიდროქიმიური რეჟიმი

წყლის გამჭვირვალობა საკმაოდ დაბალია (0,25-დან 1,8 მ-დე იცვლება), იზრდება იგი შემოდგომაზე და მინიმუმამდე ეცემა გაზაფხულზე და ზამთარში. ხშირი ქარებისა და ღელვის გამო თითქმის მთელი წლის მანძილზე წყალსაცავში ჰომოთერმიაა ზაფხულის უმნიშვნელო პირდაპირი სტრატეფიკაციით. წლის მანძილზე ტემპერატურა საკმაოდ დიდ ფარგლებში ცვალებადობს (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

კუმისის წყალსაცავის წყლის ტემპერატურის წლიური დინამიკა

თვეები	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1967	ზედაპირი	—	2,3	7,4	12,5	—	21,5	22,6	23,7	—	—	18,4	—
	ფსკერი	—	2,3	7,2	12,2	—	20,8	22,1	22,9	—	—	18,1	—
1968	ზედაპირი	—	—	9,2	16,6	19,4	22,8	24,3	23,2	18,4	14,2	18,1	4,1
	ფსკერი	—	—	9,0	16,3	19,2	21,9	23,1	22,9	18,1	14,0	18,0	4,1
1969	ზედაპირი	3,3	—	10,2	15,1	20,2	22,6	23,7	22,5	16,3	—	—	—
	ფსკერი	3,3	—	10,1	14,9	20,1	21,3	22,2	21,7	16,1	—	—	—

წყლის აქტიური რეაქცია ყოველთვის სუსტი ტუტეა და ხშირად უახლოვდება ნეიტრალურს (7—7,8-მდე). ქანგბადის დეფიციტს ადგილი არა აქვს. გაზაფხულზე და ზაფხულში შემჩნეულია წყლის ქანგბადით ზენაჩერობაც, რაც ძირითადად ფიტოპლანქტონის ძალზე მასობრივი გამრავლებით უნდა აიხსნას. ნახშირორჟანგის შემცველობა ზოგჯერ იზრდება. წყლის საერთო მინერალიზაცია საკმაოდ ცვალებადია (იცვლება ოლიგოჰალინურიდან მეზოჰალინურამდე). მარილებს შორის გაბატონებული ადგილი ნატრიუმის სულფატებს უკავიათ (გლაუბერის მარილი). აზოტის შემცველი ბიოგენური ელემენტების რაოდენობა მცირეა—ეს ელემენტები ძირითადად გაზაფხულზეა შემჩნეული მცირე რაოდენობით. ქანგვადობა ზაფხულში იზრდება 9,1 მგ/ლ-მდე. კუმისის წყალსაცავის წყალი ბუნებრივი წყლების კლასიფიკაციის მიხედვით. (ალიოკინი, [4]), სულფატურ კლასს და ნატრიუმთან ჯგუფს ეკუთვნის.

ზოოპლანქტონის სახეობრივი შემადგენლობის ფორმირება

კუმისის ტბის წყლის საკმაოდ მაღალი მინერალიზაციის გამო მასში ზოოპლანქტონი საკმაოდ შეზღუდული სახეობრივი შემადგენლობით იყო წარმოდგე-

ნილი და ძირითადად ჰალოფილებისა და ჰალობიონტებისაგან შედგებოდა (კაკა-ურძე, [5]). გაბატონებული ფორმა იყო *Arctodiaptomus salinus*.

კუმისის წყალსაცავის ზოოპლანქტონის სახეობრივი შემადგენლობის ძირითად წყაროს ყოფილი მომლაშო ტბის გრუნტზე შემორჩენილი ორგანიზმები და მდ. მტკვრის ზოოპლანქტონი წარმოადგენდა.

წყალსაცავის წყლით ავსების პირველ წელს ციბრუტელების სახეობრივი შემადგენლობა თანდათანობით შემცირდა და წლის ბოლოსათვის მხოლოდ *Keratella quadrata* შემორჩა. მეორე და მესამე წელს სახეობათა რიცხვი გაიზარდა. ულვაშტოტიანებიდან პირველ წელს *D. magna* გამრავლდა, მეორე წელს იგი მთელი წლის მანძილზე გვხვდებოდა უფრო მეტი რაოდენობით, ვიდრე წინა წელს და წლის ბოლოს კი მთლიანად ამოვარდა ზოოპლანქტონის შემადგენლობიდან. პირველსავე წელს აგვისტო-ნოემბერში ზოოპლანქტონში გაჩნდნენ *D. pulex* და *D. longispina*. შემდგომ კი *B. longirostris*, *C. reticulata*, *S. vetulus*, *A. rectangula*, *Ch. sphaericus*. მეორე წელს ულვაშტოტიანების სახეობათა რიცხვი შემცირდა და მესამე წელს მხოლოდ 2—3 სახეობა შემორჩა. იგივე ბედი ეწიათ ნიჩაბფეხიანებს: 5 სახეობიდან მესამე წელს მხოლოდ ერთი—*C. vicinus*-ი შემორჩა. ეს ძირითადად იმით უნდა აიხსნას, რომ მეორე-მესამე წელს წყლის საერთო მინერალიზაცია 6—8 ‰-მდე გაიზარდა და შემორჩნენ უმთავრესად ევ-რიპალინური ფორმები.

ამგვარად, წყალსაცავის წყლით ავსების პირველი წლები ზოოპლანქტონის სახეობრივი შემადგენლობის მკვეთრი ცვლილებებით ხასიათდება. ამ პერიოდში სახეობათა რიცხვი დაახლოებით 3-ჯერ შემცირდა. ზოოპლანქტონში გაბატონებული ადგილი დაიკავა მტაცებელმა ფორმამ *C. vicinus*-მა, ფილტრატორების როლი ზოოპლანქტონის საერთო ბიომასაში მეტად უმნიშვნელოა.

გამოკვლევის პერიოდში ჩვენ მიერ კუმისის წყალსაცავში რეგისტრირებულია ზოოპლანქტონის 25 სახეობა: ციბრუტელები—8: *Brachionus quadridentatus* Hermann, *B. plicatilis* Müll., *B. angularis* Gosse, *Keratella cochlearis* (Gosse), *K. quadrata* (O. F. Müll.), *Notholca acuminata* (Ehrbg.), *Lecane luna* (O. F. Müll.), *Polyarthra vulgaris* Carlin; ულვაშტოტიანები—11: *Daphnia pulex* (De Geer), *D. longispina* O. F. Müll., *D. magna* Straus, *Simocephalus vetulus* (O. F. Müll.), *Moina rectangula* (Leydig), *Ceriodaphnia reticulata* (Jur.), *Scapholoberis mucronata* (O. F. Müll.), *Chydorus sphaericus* (O. F. Müll.), *Pleuroxus aduncus* (Jur.), *Alona rectangula* Sars, *Bosmina longirostris* (O. F. Müll.). ნიჩაბფეხიანები—6: *Arctodiaptomus salinus* (Daday), *Macrocylops fuscus* (Jur.), *Eucyclops serrulatus* (Fisch.), *Cyclops vicinus* Ulan., *Acanthocyclops viridis* (Jur.), *Acanthocyclops vernalis* (Fisch.).

კუმისის მომლაშო ტბის ზოოპლანქტონიდან ამჟამად წყალსაცავში 4 სახეობაა შემორჩენილი. ესენი ყველა ევრიპალინური ფორმებია: (*B. plicatilis*, *M. rectirostris*, *A. rectangula* და *A. salinus*).

ზოოპლანქტონში გაბატონებული ფორმებია: *K. quadrata*, *C. reticulata*, *D. longispina*, *Ch. sphaericus*, *A. vernalis*, *C. vicinus*.

ზოოპლანქტონის სახეობების უმრავლესობა (ნახევარზე მეტი) პოლოპლანქ-



ტონური ფორმებია, გვხვდება მცენარეულ შამბნართან დაკავშირებულ ფსკერულ სანაპირო ფორმები, არ გვხვდება ფსკერული ფორმები.

მინერალიზაციის საკმაოდ ცვალებადობის გამო უმეტესობა მეზოპალინური წყალსატევების ტიპობრივი ფორმებია. გვხვდება ევრიპალინური ფორმებიც *K. quadrata*, *K. cochlearis*, *P. vulgaris*, *L. luna*, *Ch. sphaericus*, *E. serulatus*, *A. vernalis*.); გვხვდება აგრეთვე მტკნარი წყლის ტიპობრივი ფორმები—*M. fuscus* და *A. vernalis*, რომლებიც მინერალიზაციის გაზრდისთანავე ამოვარდნენ ზოოპლანქტონიდან.

ზოოგეოგრაფიული თვალსაზრისით ზოოპლანქტონის სახეობათა უმრავლესობა კოსმოპოლიტები და საკმაოდ ფართოდ გავრცელებული ფორმებია. გვხვდება ტროპიკული ფაუნის ელემენტიც—*M. rectirostris*, რომელიც ამერიკულ-აფრიკული ფორმაა.

ზოოპლანქტონის რიცხოვნობისა და ბიომასის დინამიკა. ციბრუტელების როლი ზოოპლანქტონის საერთო რიცხოვნობასა და ბიომასაში მეტად მცირეა. თითქმის იგივე ითქმის ულვაშოტიანებზედაც. წყალსაცავში გაბატონებული ადგილი ნიჩაბფეხიანებმა დაიკავეს, რომელთაგან ჯერ *A. vernalis* იყო წამყვანი ფორმა, შემდეგ კი—*C. vicinus*.

კუმისის წყალსაცავის ზოოპლანქტონის რიცხოვნობა და ბიომასა პირველ წლებში დიდი ცვალებადობით ხასიათდება, რაც აბიოტური ფაქტორების მკვეთრი ცვალებადობითაა გაპირობებული (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

კუმისის წყალსაცავის ზოოპლანქტონის რიცხოვნობისა და ბიომასის $\left(\frac{მგ/მ^3}{მგ/მ^3}\right)$ წლიური დინამიკა წყალსაცავის წყლათ ავსების პირველ წლებში

თვეები წლები	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1967	—	39840	31020	5490	—	132100	226000	553600	—	—	151360	—
	—	19,52	91,04	1124,3	—	1821,4	932	6494,3	—	—	1864,7	—
1968	—	—	49350	39780	53600	224200	141400	482670	150400	112000	88200	19000
	—	—	1518,8	2703,8	8927,2	5122,2	2990,9	3486,5	3432,4	2132,2	1093,2	580,9
1969	3250	—	80460	85900	271530	180800	354960	119270	58820	—	—	—
	77,56	—	501,9	1153,7	1359,9	2154,6	2573,4	2294,1	679,1	—	—	—

ზოოპლანქტონის ყველაზე მეტი სიხშირით გამოირჩევა წყალსაცავის აღმოსავლეთა, ლელაინით დაფარული უბანი. თხელწყლანობის გამო ზოოპლანქტონის ვერტიკალურ განაწილებას თითქმის ადგილი არა აქვს.

კუმისის წყალსაცავში დიდი როლენობითაა ფიტოპლანქტონი, რაც განპირობებულია მისი ბიომასის, რომელიც გაცილებით მაღალია საქართველოს ყველა სხვა წყალსაცავების ამავე მაჩვენებლებთან შედარებით. ეს კი ძირითადად გაპირობებულია იმ ორგანიზმების ნივთიერებების დიდი მარაგის მოხმარებით, რომელიც წლების მანძილზე დაგროვილია და შემონახული კუმისის ტბის ფსკერზე მინერალიზებული ან ნახევრადგახრწნილი სახით.

პლანქტონისა და ბენტოსის მაღალი პროდუქცია განპირობებს წყალსაცავში მათი ძირითადი მომხმარებლის—თევზის ასეთსავე მაღალ პროდუქტიულობას, რომელიც ბუნებრივ წყალსაცავებში თითქმის მიუწვდომელია და ახასიათებს მხოლოდ საქართველოს სამხრეთის ზონის ტბორებს.

დასკვნები

1. კუმისის წყალსაცავი ველებისა და ნახევრადუდაბნოების ზონის ევტროფულ წყალსატევს წარმოადგენს, რომელიც ყოფილი კუმისის მომლაშო (მეზოპალინური) ტბის ტაფობის მდ. მტკვრის მტკნარი წყლით გავსების შედეგად შეიქმნა. წყალსაცავს ახასიათებს: თხელწყლიანობა, დაბალი გამჭვირვალობა, უმეტესად ჰომოთერმია, სუსტი ტუტე რეაქცია, ყანგბადის საკმაოდ მაღალი შემცველობა, ზოგჯერ CO_2 -ის ზრდა, პირველადი პროდუქციის ძალზე მაღალი მაჩვენებლები, საკმაოდ ცვალებადი მინერალიზაცია (ოლიგოპალინურიდან მეზოპალინურამდე), აზოტის შემცველი ბიოგენური ელემენტების სიმცირე, ყანგბადობის ზრდა ზაფხულში. წყალსაცავის წყალი მიეკუთვნება სულფატურ კლასს და ნატრიუმიან ჯგუფს.

2. ზოოპლანქტონის სახეობრივი შემადგენლობის ფორმირების ძირითად წყაროს ყოფილი ტბის გრუნტზე შემორჩენილი ორგანიზმები და მდ. მტკვრის ზოოპლანქტონი წარმოადგენს. გამოკვლევის პერიოდში ზოოპლანქტონის სახეობრივი შემადგენლობა დიდი ცვალებადობით ხასიათდება—დაახლოებით სამჯერ შემცირდა სახეობათა რიცხვი. სულ რეგისტრირებული იყო ზოოპლანქტონის 25 სახეობა (ციბრუტელები—8, ულვაშტოტიანები—11, ნიჩბფეხიანები—6). უმეტესობა პოლიპლანქტონური ფორმებია. გვხვდება ფსკერულ-სანაპირო ფორმებიც. წყლის მინერალიზაციის ცვალებადობის გამო უმეტესობა სახეობებისა მიქსოპალინური და ევრიპალინური ფორმებია. ზოოგეოგრაფიულად უმეტესობა კოსმოპოლიტური და ფართოდ გავრცელებული ფორმებია.

3. ზოოპლანქტონში გაბატონებულია მტაცებელი ნიჩბფეხიანები (ჯერ *A. vernalis* და შემდეგ *C. vicinus*), რომლებიც ქმნიან წყალსაცავის ზოოპლანქტონის რიცხობრიობისა და ბიომასის მაქსიმუმს. ციბრუტელების და ულვაშტოტიანების როლი ამ რიცხობრივ მაჩვენებლებში უმნიშვნელოა. ზოოპლანქტონის რიცხობრიობა და ბიომასა საკმაოდ მაღალი მაჩვენებლებით ხასიათდება. როგორც პირველადი და მეორადი პროდუქციის დონით, ასევე თევზის მასობრივი გავრცელებით, კუმისი ყველაზე მაღალპროდუქტიული წყალსაცავია ჩვენს რესპუბლიკაში.

ლიტერატურა

1. В. И. Кавришвили, Ландшафтно-гидрологические зоны Грузинской ССР, Тб., 1955.
2. ბ. კეცხოველი, საქართველოს მცენარეული საფარა. საქ. სსრ მეც. აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 1959.
3. ა. ერქომაიშვილი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, 109., 1965.
4. О. А. Алекин, Химический анализ вод суши, из-во „Наука“, 1954, М.
5. Т. Г. Какауридзе, Тр. Ин-та зоологии АНГССР, XII, 1953.

З. М. КЕРЕСЕЛИДЗЕ

ФОРМИРОВАНИЕ ЗООПЛАНКТОНА КУМИССКОГО ВОДОХРАН ИЛИЩА

Резюме

Эвтрофное Кумисское водохранилище было создано заполнением котловины бывшего миксогалинного озера пресной водой р. Куры. Для него характерны: низкая прозрачность, мелководье, гомотермия, слабощелочная реакция воды, большое содержание кислорода, изменение минерализации, низкое содержание азотосодержащих биогенных элементов, очень высокая первичная продукция; вода относится к сульфатному классу и натриевой группе.

Основными источниками формирования видового состава зоопланктона являются организмы, содержащиеся в грунте бывшего озера, и зоопланктон р. Куры. В период исследования число видов зоопланктона уменьшилось почти в три раза. Всего было зарегистрировано 25 видов зоопланктона (коловраток—8, ветвистоусых—11, веслоногих—6).

Большинство видов—голопланктонные формы; встречаются также прибрежно-донные формы. В связи с минерализацией воды большинство видов—миксогалинные и эвригалинные формы. С зоогеографической точки зрения почти все виды космополиты или широко распространенные формы.

В зоопланктоне доминирующими формами являются хищные веслоногие (сперва *A. vernalis*, а потом *C. vicinus*), которые создают основную часть численности и биомассы зоопланктона. Общая численность и биомасса зоопланктона в первые годы заполнения водохранилища была очень высокой. Как по уровню первичной и вторичной продукции, так и по массовому размножению рыб, Кумисское водохранилище является самым высокопродуктивным водоемом нашей республики.

ფსიქონეკრული მეხსიერების შესწავლისათვის კუპუზოვებაში

ნ. ზიჟინაძე

შესავალი

ცხოველთა მეხსიერების საკითხი უძველესი დროიდან იბყრობდა მკვლევართა ყურადღებას. მიუხედავად იმისა, რომ წლების განმავლობაში მრავალი მორფო-ფიზიოლოგიური კვლევა ჩატარებული, მეხსიერების ცენტრალური მექანიზმების შესახებ მაინც ცოტა რამ არის ცნობილი. დღეისათვის ფიზიოლოგიური აზროვნების და კვლევის შედარებით მაღალი დონე საშუალებას იძლევა ეს პრობლემა უფრო ღრმად და მრავალმხრივად იქნეს შესწავლილი.

ამიტომ სასებით დროულად უნდა ჩაითვალოს აკად. ი. ბერიტაშვილის მიერ ასეთი პრობლემის დაყენება—„მეხსიერების ნეიროფიზიოლოგიური შესწავლა ინტო-ფილოგენეზში“.

უმალეს ხერხემლიან ცხოველთა ქცევის შესახებ აკად. ი. ბერიტაშვილის შეხედულების მიხედვით არსებობს ქცევის ერთ-ერთი ტიპი, რომელიც ნერვული სისტემის რეორგანიზაციის ბაზაზე ხორციელდება და გარემო პირობებთან შეგუების პროცესში გამოცდილების დაგროვების შედეგს წარმოადგენს. ქცევის ეს ტიპი რეფლექსის (პირობითი ან უპირობო) პრინციპის მიხედვით ხორციელდება და მის ყველაზე დამახასიათებელ თვისებას ის წარმოადგენს, რომ იგი დეტერმინდება არა მარტო გარეგანი და შინაგანი უშუალო გალიზიანებით, არამედ იმ ნერვული პროცესებითაც, რომლებიც რეპროდუქციის დროს აღძრავენ სიცოცხლისათვის მნიშვნელოვანი ობიექტის ხატს ცხოველის რომელიმე ორგანული მოთხოვნილების დასაკმაყოფილებლად.

ხატი ანუ გარე სამყაროზე წარმოდგენა არის ორგანიზმის შეგუებითი მოქმედების რეგულატორი. ხატისა და მისი სივრცითი პროექციის გარეშე წარმოუდგენელი იქნებოდა ცხოველის გარემოსადმი შეგუება მანძილზე, ე. ი. როცა ცხოველისათვის სასიცოცხლო მნიშვნელობის ობიექტი მასთან უშუალოდ კონტაქტში არ იმყოფება [1].

თითოეული ფსიქონერვული ხასიათის ქცევით აქტს საფუძვლად უდევს ცენტრალური ნერვული სისტემის ნერვულ ელემენტებში შენახული ხატის მარეგულირებელი მოქმედება.

მოკლევადიანი მეხსიერების შესახებ შეიძლება ვიმსჯელოთ ე. წ. დაყოვნებული რეაქციებით. კონორსკის აზრით, ადამიანისა და ცხოველის ქცევის ნაწილს საფუძვლად უდევს მოკლევადიანი მეხსიერება, ანუ ორგანიზმზე მომქმედი გამოი-



ზიანების კვალი, რომელიც რამდენიმე ხანს არსებობს და შემდეგ კი ქრება. ამავე დროს კონორსკი არსებითად განასხვავებს კვალის რეფლექსს დაყოფნებულ რეაქციებისაგან [9].

შუსტინი [10] შეისწავლიდა რა დაყოფნებულ რეაქციებს, შეეცადა მათი ინტერპრეტაცია მოეცა კვალის პირობითი რეფლექსების საფუძველზე, მაგრამ როგორც ი. ბერიტაშვილი აღნიშნავს, შუსტინის ცდებში სწორედ კვალის პირობითი რეფლექსი იყო და არა დაყოფნებული რეაქციები [1].

მეხსიერების ფიზიოლოგიური მექანიზმების შესახებ არსებობს მოსაზრებანი ჰიპოთეზების სახით.

კონორსკის აზრით [9] ხანმოკლე მეხსიერებას საფუძვლად უდევს ჩაკეტილ ნერვულ წრეებში აგზნების ცირკულირება (ნეირონების რევერბერაციული წრეები); ასეთი რევერბერაციული წრეები ტვინის ქერქში ჰისტოლოგიური გამოკვლევების შედეგად ნაპოვნი იქნა ამერიკელი ნეიროფიზიოლოგის—ლორენტე დე ნოს მიერ. კონორსკის მიხედვით, რევერბერაციული წრეები კავშირში იმყოფებიან ნეირონების გარკვეულ ჯგუფთან, რომლებიც ამოქმედდებიან განსაზღვრული ექსტროგამლიზიანებლებიდან.

აკად. ი. ბერიტაშვილი [1] აგრეთვე ფიქრობს, რომ მოკლევადიან მეხსიერებას საფუძვლად უდევს ჩაკეტილ წრეებში აგზნების ცირკულირება. ამ დროს უნდა ხდებოდეს ცილის მოლეკულური და სუბმოლეკულური ცვლილებები ასოციაციურ პირამიდულ ნეირონებში. ეს ცვლილებები უნდა იწვევდეს აქტიური ცილის წარმოშობას, რომელიც გროვდება მოცემულ მომენტში აგზნებულ პოსტინაფსურ უბნებში და აძლიერებს წრეების სინაფსური წარმოქმნების აქტივობას.

ჰიდენმა [11—12] წამოაყენა ჰიპოთეზა მეხსიერების ენგრამის დადგენაში რნმ-ის წამყვანი როლის შესახებ. მის მიერ ნაჩვენებია, რომ ქცევის ახალი ფორმის ჩამოყალიბებას თან სდევს სპეციფიკური ნუკლეოტიდური შედგენილობის მქონე ახალი ინფორმაციული ტიპის რნმ-ის სინთეზი.

აკადემიკოს ი. ბერიტაშვილის [8] აზრით, ძნელია წარმოდგენა იმისა, რომ ყოველი ობიექტის აღქმისას ნერვულ წრეებში სპეციფიკური ცილები წარმოიშობოდეს.

ი. ბერიტაშვილი განიხილავს კაფიანის აზრს და ეთანხმება მას, რომ გარემო არის ობიექტის გავლენით ნერვულ უჯრედში რნმ-ის მონაწილეობით წარმოიქმნება არა სპეციფიკური ცილა, რომელიც დამახასიათებელია მხოლოდ მოცემული აღქმისათვის, არამედ საზოგადოდ აქტიური ცილა, რომელიც ზრდის უჯრედის გამტარებლობას და აგზნებადობას. მხოლოდ უნდა დავუშვათ,—აღნიშნავს ი. ბერიტაშვილი,— რომ აქტიური ცილის დაგროვება წარმოებს არა საზოგადოდ უჯრედში, არამედ იმ პოსტინაფსურ ნაწილებში, რომელზეც იმოქმედა აგზნებულმა ნერვულმა დაბოლოებებმა. რაც უფრო ძლიერია და ხანგრძლივია გარემოს ზემოქმედება, მით უფრო მეტი აქტიური ცილა წარმოიშობა და მით უფრო დიდხანს შეინახება იგი მეხსიერებაში.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ მეხსიერების საკითხის შესწავლა დაყოფნებული რეაქციების მიხედვით ფილოზოფიკურად. მოგვყავს კურდღლებზე, კატებზე და ძაღლებზე დაკვირვებით მიღებული შედეგები.

მეთოდთა

ცდები მიმდინარეობდა ი. ბერიტაშვილის მიერ მოწოდებული თავისუფალი მოძრაობის მეთოდით დიდ საექსპერიმენტო ოთახში. ცხოველებს წინასწარ ვაჩვენვდით საექსპერიმენტო გარემოს: ჯამით საკვების ჩვენებაზე ან ჯამის კაკუნზე, გალიის კარის გაღების შემდეგ, გალიიდან გამოსვლასა და ძახილზე უკან გალიაში დაბრუნებას; გალია ექსპერიმენტატორის მიერ ავტომატურად იღებოდა და იკეტებოდა. ცხოველის კარგად შეჩვევის შემდეგ ვიწყებდით ცდებს.

დაყოვნებულ რეაქციებს მხედველობითი რეცეპციის ბაზაზე შევისწავლიდით შემდეგნაირად: საკვები ჯამით მიგვექონდა გალიასთან და ვაჩვენებდით (ცხოველი მოთავსებული იყო გალიაში), შემდეგ კი მიგვექონდა უკან ისე, რომ ცხოველს შეძლებოდა მისი დანახვა და ვათავსებდით 2—5 მეტრის დაშორებით ოთხი თეჯირიდან რომელიმე ერთ-ერთის უკან, რის შემდეგ ცხოველი საკვებს ვეღარ ხედავდა. დროის სხვადასხვა შუალედების შემდეგ ვათავისუფლებდით ცხოველს გალიიდან და ვაკვირდებოდით მის ქცევას. თუ ცხოველი პირდაპირ მივიდოდა საჭირო თეჯირთან, მაშინ დაყოვნებულ რეაქციას დადებითად ვთვლიდით.

დაყოვნებულ რეაქციებს სმენით გამლიზიანებელზე შემდეგნაირად ვიკვლევდით: გალია, რომელშიც ცხოველი იყო მოთავსებული, დაფარული იყო მაღალი თეჯირებით ისე, რომ იგი ვერ ხედავდა მის ირგვლივ არსებულ გარემოს. საკვების ჯამით ვაკაკუნებდით რომელიმე თეჯირის უკან. ამის შემდეგ ცხოველს გალიიდან ვათავისუფლებდით დროის სხვადასხვა შუალედით.

ასეთი მეთოდით ჩვენ ვადგენდით ცხოველზე სხვადასხვა რეცეპციის ბაზაზე დაყოვნებული რეაქციის დროის მაქსიმუმს (ცდების დროს თეჯირების განლაგება და რაოდენობა სტანდარტული არ იყო, ხდებოდა მათი გადაანაცვლება).

გარდა ამისა, საკვების ჯამი ეძლეოდა ახალ ადგილას, როგორც იმავე საექსპერიმენტო, ისე სხვა ოთახშიც. რომელიმე ახალ ადგილას საკვების აღქმის შემდეგ ცხოველი მიგვეყვავდა ვიგარიუმში და ხელახლა მოგვეყვავდა იმავე, მეორე ან რამდენიმე დღის შემდეგ მშვიერ მდგომარეობაში და ვაკვირდებოდით მის ქცევას.

ცდების შედეგები

ცდები ჩატარებულ იქნა ექვს კურდღელზე უფროს ლაბორანტ ნ. ნანობაშვილთან ერთად. მათში მეხსიერების საკითხს შევისწავლიდით გადავადებული ანუ დაყოვნებული რეაქციების მეთოდით, თავისუფალი მოძრაობის პირობებში. ცდების ასეთი ფორმა მოითხოვს ცხოველის წინასწარ განსაკუთრებულ მომზადებას. უნდა მივედწიოთ იმას, რომ ისინი თავისუფლად მოძრაობდნენ, აღარ ეშინოდეთ ექსპერიმენტატორის, ჩავუქრეთ საორიენტაციო რეაქციები.

ცხოველის ამგვარად დამუშავების შემდეგ ვიწყებდით მათზე ცდების წარმოებას. ერთი სერია ცდებისა ჩავატარეთ ე. წ. ხანმოკლე მეხსიერებაზე, როგორც სმენით, ისე მხედველობით გალიზიანებაზე.

საცდელ ოთახში, სხვადასხვა ადგილზე, თეჯირის უკან, ცხოველის გალიიდან 2—3 მეტრის დაშორებით მოთავსებული იყო საკვების ყუთი. ცხოველს წინასწარ ვაჩვენვდით მყისიერი ცდების პირობებში საკვების მიღებას იმ ყუთიდან, რომელზეც ვაკაკუნებდით. კურდღლები ადვილად ახდენდნენ ბგერაზე ორიენტაციას და საკვებიანი ყუთის ადგილმდებარეობის ლოკალიზაციას. თუმცა უნდა



აღინიშნოს, რომ კურდღლებში თავისუფალი მოძრაობის პირობებში ყურდღლებში რეაქციები მერყეობს.

შეცდომათა რიცხვის საგრძნობლად შემცირების შემდეგ ვიწყებდით გადავადებულ რეაქციებზე დაკვირვებას. ამისათვის ამა თუ იმ ყუთზე დაკაუნების შემდეგ გალიის კარს ვაღებდით და ცხოველს ვათავისუფლებდით სხვადასხვა დაყოვნებით. აღმოჩნდა, რომ დაყოვნების მაქსიმუმი აღწევდა 30'—1⁶ მ-დე.

დაყოვნების მეტად გაზრდის შემთხვევაში კურდღლის ქცევა ირღვეოდა, ან ის მიდიოდა იმ ყუთთან, სადაც წინა ცდაში ჭამა, ან იწყებდა ოთახში მოძრაობას.

მხედველობით გაღიზიანებაზე დაყოვნებული რეაქციების შესწავლის მიზნით ცდებში ვიყენებდით ოთხ თეჯირს. ცხოველს ვაჩვენებდით საკვებს ერთ-ერთი თეჯირის უკან. ზოგჯერ ვაჭმევდით და ისევ ვაბრუნებდით გალიაში. ვათავისუფლებდით სხვადასხვა დაყოვნებით, ვიდრე არ დადგინდებოდა დაყოვნების მაქსიმუმი. ცდათა შორის ინტერვალს ვიღებდით 5—6 წუთამდე. ინტერვალების უფრო მეტად გაზრდის შემთხვევაში კურდღლები მოუსვენარი ხდებოდნენ, რასაც დიდი გავლენა ჰქონდა ცდის მსვლელობაზე. სამ წუთამდე დაყოვნების ფარგლებში კურდღელი ახერხებს ამოცანის სწორად გადაწყვეტას. დაყოვნების გაზრდის შემთხვევაში კი კურდღელი ამოცანას სწორად ვერ წყვეტს. გალიიდან გამოდის და მიდის უახლოეს თეჯირთან, ან იქ, სადაც წინა ცდაში მიიღო საკვები, ან დარბის ოთახში, მაგრამ საკვების ძებნის რეაქციას არ აწარმოებს. ზოგ ცდებში საკვებს ვაჩვენებდით მხოლოდ გალიის წინ.

საკვების ჩვენების ცდებში დიდი მნიშვნელობა აქვს, თუ როგორ მდგომარეობაშია ცხოველი საჭმელის ჩვენების დროს. თუ მშვიდი ცხოველია, ან თუ ცდა კარგ პირობებში ჩატარდა, ე. ი. კურდღელი ხედავდა საკვებს ბოლომდე, მას შეუძლია 5 წუთამდე დაყოვნებით მივიღეს იმ ადგილზე, სადაც მოვათავესთ საკვები ჩვენების შემდეგ.

ამრიგად, 5—6—წუთიანი დაყოვნების შემდეგ კურდღელი ზუსტად მიემართება საკვებისაკენ. 10—წუთიანი დაყოვნების დროს კი აშკარად ჩანს, რომ საკვების ადგილმდებარეობის ხატი ქრება.

მეორე სერია ცდებისა ჩავატარეთ ხანგრძლივი მესხიერების გამოძლანების მიზნით. ამისათვის კურდღელი მოგვყავდა ახალ გარემოში, მისთვის უცნობ ოთახში. საორიენტაციო რეაქციების ჩაქრობის შემდეგ ვაჩვენებდით და რიგ შემთხვევაში ვაჭმევდით საკვებს გარკვეულ მოფარებულ ადგილზე, შემდეგ მიგვყავდა ვივარიუმში, განმეორებით შემოგვყავდა დაყოვნების განხანგრძლივებით 1—3—6—8 დღემდე. კურდღლები ყოველთვის ახერხებდნენ მიმართულების სწორად აღებას და მეტ-ნაკლები მოძრაობის შემდეგ საკვებთან მისვლას.

ამრიგად, ხანგრძლივი მესხიერების დაყოვნების მაქსიმუმი ჩვენს მიერ ოთხ კურდღელზე ჩატარებული ცდების ფარგლებში აღწევდა 6—8 დღეს.

კატებზე მესხიერების შესასწავლად ცდებში გამოყენებული იყო იგივე მეთოდი. მოკლევადიან მესხიერებაზე დაკვირვებას ვაწარმოებდით 5 კატაზე საკვების როგორც კომპლექსური, ისე იზოლირებული აღქმის საფუძველზე.

იზოლირებულ მხედველობით აღქმაზე ცდები შემდეგნაირად ტარდებოდა: კატას, რომელიც გალიაში იყო მოთავსებული შორიდან ვაჩვენებდით საკვებს ჯამით. საკვების ჩვენების შემდეგ ჯამს ვდგამდით რომელიმე თეჯირის უკან, რომე-

ლიც გალიიდან 3—4 მეტრით იყო დაშორებული. ცხოველს გალიიდან ვათავისუფლებდით დროის სხვადასხვა შუალედის შემდეგ.

თუ საკვები მოთავსებული იყო გალიიდან 4 მეტრის მანძილზე, ცხოველი საკვებს შეუცდომლად აგნებდა 17—20 წუთის შემდეგ.

შემჩნეული იყო აგრეთვე, რომ განსხვავებით კურდღლებისაგან, დაყოვნების პერიოდში ცხოველის მდგომარეობას სწორი რეაქციისათვის მნიშვნელობა არ ჰქონდა: ისინი მინც გალიის კარის გაღებისთანავე მიდიოდნენ პირდაპირ საკვების ადგილისაკენ.

აღსანიშნავია, რომ კატის ინდივიდუი ქცევის შესწავლისას კატების მიერ საკვების ადგილმდებარეობის დამახსოვრების ხანგრძლივობა აღნიშნული იყო ჯერ კიდევ 1946 წელს, ა. ბრეგადის მიერ 6—8 წუთის ფარგლებში, უპირატესობა მინიჭებული საკვების დამახსოვრების მიმართ [3].

ჩვენ ვიკვლევდით აგრეთვე სენსორული ადაპტაციის გავლენას დაყოვნების მაქსიმუმზე. ამისათვის კატებს საკვებს ვაჩვენებდით ნაცნობ სხვადასხვა ადგილას და ამის შემდეგ გამოგვყავდა საექსპერიმენტო ოთახიდან, მიგვყავდა ვივარიუმში. ცდის განმეორების შემთხვევაში კატები საკვებს პოულობდნენ უფრო ხანგრძლივი დროის შემდეგ.

ცდების შემდეგი სერია ტარდებოდა საკვების სმენით აღქმაზე. ამისათვის გალიის წინ ვდგამდით მალალ თეჯირებს ისე, რომ კატა ვერ ხედავდა მის ირგვლივ გარემოს. იმ ჯამით, რომლის კაკუნის დროს ცხოველი საკვებს იღებდა, იატაკზე ვაკაკუნებდით რომელიმე თეჯირის უკან. მნიშვნელობა ჰქონდა იმას, თუ კაკუნის ადგილი რა მანძილით იყო დაშორებული გალიიდან. როცა გალიიდან 2—3 მეტრით დაშორებულ თეჯირთან ვაკაკუნებდით, მაშინ დაყოვნების მაქსიმუმი იყო 5—6 წუთი, ხოლო 5 მეტრის შემთხვევაში—3 წუთი.

შემჩნეული იყო შემდეგი საინტერესო მოვლენა, რომ გარემო პირობების შეცვლამ კატების ქცევაზე და დაყოვნების მაქსიმუმზე არსებითი გავლენა არ მოახდინა.

ჩვენ აგრეთვე შევისწავლეთ კატებზე ხანგრძლივი მეხსიერების მოვლენაც. ამისათვის ცხოველი მიგვყავდა ახალ გარემოში, მისთვის სრულიად უცნობ ოთახში. საორიენტაციო რეაქციების ჩაქრობის შემდეგ, ვაჩვენებდით და ვაჭმევდით საკვებს გარკვეულ ადგილას, შემდეგ მიგვყავდა ვივარიუმში. განმეორებით შემოვიყვანდით დროის სხვადასხვა შუალედის შემდეგ (რამდენიმე დღისა ან კვირის შემდეგ). ოთახის კარებში ვდგამდით გალიას და ვათავისუფლებდით ცხოველს. ყველა კატა გამოდიოდა ფრთხილად, გალიას და მის მახლობელ მიდამოს ყნოსავდნენ რამდენიმე ხნის განმავლობაში, უცებ ნაბიჯის აჩქარებით იღებდნენ მიმართულებას და მტკიცედ მიდიოდნენ იქ, სადაც ადრე საკვები მიიღეს.

ძაღვებში დაყოვნების მაქსიმუმი ცდების ყველაწიარ ვარიანტში მეტია, ვიდრე კატებსა და კურდღლებში. იგი უდრის იზოლირებული მხედველობის აღქმისას 20—27 წუთს, ხოლო იზოლირებული სმენითი აღქმისას 7—10 წუთს (ბერიტაშვილი, ნათიშვილი).

სმენითი აღქმისას ძაღლს წინასწარ უმუშავდება ნატურალური პირობითი რეფლექსი ჯამის კაკუნზე. შემდეგ გალიის წინ თავსდება დიდი თეჯირი, რომელიც მთლიანად ფარავს ძაღლის მხედველობის ველს. საკვებიანი ჯამის კაკუნის შემდეგ ოთახის რომელიმე ადგილას და სხვადასხვა დროის შემდეგ ცხოველის გალიიდან



გამოშვებისას, აღმოჩნდა, რომ ისინი პირდაპირ მიდიან საკვებისაკენ თის დაყოვნებით.

ამაირად, ხერხემლიან ცხოველთა მეხსიერების ფილოგენეზური განვითარების თითოეული საფეხური აკად. ი. ბერიტაშვილის და მისი თანამშრომლების მიერ დაწვრილებით შეისწავლება და უკვე დადგენილია, რომ მეხსიერების შესატყვისი ნერვული სუბსტრატის განსაკუთრებული თვისებებით ხასიათდება.

დასკვნები

მიღებული ფაქტობრივი მასალის საფუძველზე შეგვიძლია გავაყოთ შემდეგი დასკვნები:

1. დაყოვნების მაქსიმუმი კურდღლებში სმენითი აღქმისას აღწევს 30 წამიდან—1 წუთამდე, მხედველობითი აღქმისას კი იგი 3—5 წუთს უდრის.
2. დაყოვნების მაქსიმუმი კატებში საკვების მხედველობითი აღქმისას უდრის 17—20 წუთს; სმენითი აღქმისას 3—6 წუთს.
3. სენსორული დეზადაპტაციის შემთხვევაში დაყოვნების მაქსიმუმი იზრდება.
4. გარემო პირობების შეცვლამ (როგორც საცხოვრებელი, ისე საექსპერიმენტო) გავლენა არ იქონია ცხოველის არც ქცევაზე და არც დაყოვნების მაქსიმუმზე.
5. ხანგრძლივი მეხსიერების დროს დაყოვნების მაქსიმუმი კურდღლებში ჩვენს ცდებში აღწევს 6—8 დღეს.
6. კატებში ხანგრძლივი მეხსიერება აღწევს 1 თვეს.
7. საკვების მხედველობითი აღქმისას დაყოვნების მაქსიმუმი ძაღლებში უდრის 20—27 წუთს, ხოლო სმენითი აღქმისას—7—10 წუთს.
8. დაყოვნების მაქსიმუმისათვის მნიშვნელობა აქვს იმას, თუ როგორ იქცევა კურდღელი საკვების ჩვენების დროს. ნაკლებად ავზნებადი, მშვიდი ცხოველის შემთხვევაში დაყოვნების მაქსიმუმი 5 წუთამდე აღწევს.

(წარმოდგენილია 20. III. 1971)

ცხოველთა ფიზიოლოგიის კათედრა

ლიტერატურა

1. И. С. Бериташвили, Память позвоночных животных, ее характеристика и происхождение. Т., 1968.
2. ი. ს. ბერიტაშვილი, თბილისის უნივერსიტეტის მოაზრებ., 1929, გვ. 225—232.
3. ა. ბ. ბრეგვაძე, სსრ მეცნ. აკად. მოაზრებ., VII, № 7, 1946, გვ. 153—460.
4. И. С. Бериташвили, Вестник АН СССР, № 10, 1939, стр. 85—97.
5. И. С. Беритов, Первые механизмы поведения высших позвоночных животных. М., 1961.
6. И. С. Беритов, Архив анатомии, гистологии и эмбриологии, XXXIX, № 3, 1960, стр. 3.
7. И. С. Бериташвили, Структурные и функциональные основы психической деятельности, М., 1963.
8. И. С. Бериташвили, Об образной психонервной деятельности животных. М., 1966.

9. Ю. Конорски, Физиол. журн. СССР, 46, 2, 1960, стр. 244—248.
10. Н. А. Шустин, Физиология лобных долей головного мозга, М., 1959.
11. X. Хиден, Нейрон. Функциональная морфология клетки. Изд. иностр. литер. М., 1963.
12. Hyden, In the Neuron, 1967, p. 179.
13. Konorski, Brain mechanisms and Learning, 1961, p. 115—123.

Н. М. ЧИЧИНАДЗЕ

К ИЗУЧЕНИЮ ПСИХОНЕРВНОЙ ПАМЯТИ У МЛЕКОПИТАЮЩИХ

Резюме

Вопрос о памяти животных привлекал внимание исследователей с давних времён. Несмотря на то, что в последние годы проводилось много морфо-физиологических исследований, о центральных механизмах памяти известно очень мало. Сегодня высокий уровень физиологического мышления и методов исследования даёт возможность более глубокого и многостороннего изучения этого вопроса. Поэтому вполне своевременной следует считать постановку проблемы нейрофизиологического изучения памяти в онто- и филогенезе акад. И. С. Бериташвили.

В данной работе изучался вопрос о памяти путём отсроченных реакций в филогенезе (кролики, кошки, собаки). Опыты проводились в большой, специально оборудованной экспериментальной комнате методом свободного передвижения. Животные заранее приучались к экспериментальной обстановке, после чего приступали к постановке опытов.

Для установления краткосрочной памяти отсроченные реакции, на основе зрительной рецепции, изучались следующим образом: пищу в миске подносили к клетке и показывали животным, затем относили на расстояние 2—5 метров и ставили за одной из четырёх ширм.

Через определённые интервалы времени животных выпускали из клетки и следили за их поведением. Способность запоминания, в случае положительного решения задачи, определялась тем максимумом времени, которое проходило с начала дачи раздражителя до освобождения животного из клетки.

Отсроченные реакции на слуховую рецепцию изучались следующим образом: перед клеткой ставили высокую ширму, так что животное не видело манипуляцию опытов. Стучали миской за ширмой; через определённые интервалы времени животные освобождались из клетки. Вышеописанными опытами мы устанавливали максимум отсрочки.

С целью изучения долгосрочной памяти животным показывали пищу и кормили в новом месте экспериментальной комнаты или же вовсе в новой комнате. После этого животных отводили в вивариум и приводили их через определённый промежуток времени (например, через 1—2 ч.) и т. д. и следили за их поведением.



На основе нашего фактического материала выяснилось, что максимум отсрочки на слуховое раздражение у кроликов достигает от 30" до 1'; а на зрительное раздражение—3'—5'.

У кошек максимум отсрочки на зрительное раздражение достигает 17'—20', а на слуховое раздражение—3'—6'.

При зрительном восприятии максимум отсрочки у собак достигает 20'—27', а на слуховое восприятие—7—10 минут.

При изучении долгосрочной памяти выяснилось, что кролики запоминают воспринятые пищевые объекты на 6—8 дней.

Кошки в голодном состоянии, даже при месячной отсрочке, сохраняют в памяти образ местоположения воспринятого пищевого объекта.

Максимум отсрочки устанавливается на животных в одной постоянной обстановке, когда у животных уже наступала адаптация к ней. В период сенсорной дезадаптации максимум отсрочки увеличивался.

Для установления максимума отсрочки определенное значение имеет и то, в каком состоянии находилось животное во время показа пищи; к тому же максимум отсрочки зависит от типа животных (по возбудимости).

Таким образом, можно допустить, что каждый этап филогенетического развития памяти позвоночных животных характеризуется исключительными особенностями определенного нервного субстрата.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თემატიკა

ნიკო მუსხელიშვილი (დაბადების 80 წლის შესრულების გამო)	5
პ. კოლონია, ერთი ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლის შესახებ	14
გ. ლომაძე, თეტა-ფუნქციების წარმოებულების ყოფაქცევა წრფივი ჩასმების მიმართ	27
ვ. საზონოვი, დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების განაწილებების დაახლოება უსასრულოდ გაყოფად განაწილებათა კლასთან მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში	37
გ. თევზაძე, ლაბლასის გარდაქმნაში პროექციულად ექვივალენტური ზედაპირების შესახებ	53

მექანიკა

ჭ. შარიქაძე, მაგნიტურ ველში მოთავსებულ სუსტადამატარი სითხის ერთგანზომილებიან არასტაციონარულ ამოცანათა ამოხსნის ერთი მეთოდის შესახებ	70
---	----

ფიზიკა

ნ. ამაღლობელი, ც. იოსელიანი, დ. კელბაღიხანოვი, ლ. მარკოზაშვილი, თ. შუღრა, გ. ერისთავი, ქალაღის პერფორაციის ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანა „რაზდან-2“-ში ინფორმაციის შემყვანი მოწყობილობა	78
ჭ. ბაკაშვილი, მ. ნიორაძე, რ. სალუქვაძე, ფ. თათრიშვილი, ვ. შვარცმანი, დაბალტემპერატურიანი ბუშტოვანი კამერის ფოტოგრაფირების სისტემა	82
ვ. ქირია, ზღვრული სიჩქარეების კანონი ზოგად ფარდობითობის თეორიაში	96
კ. საპიტცი, საქართველოს ტერიტორიაზე სოლარული ტემპერატურების განაწილებაზე ოროგრაფიისა და ცირკულაციური პროცესების გავლენის ხარისხის შესახებ	101
კ. საპიტცი, რ. კომლაძე, ე. ელიზბარაშვილი, ჰაერის ტემპერატურის დღიური მსვლელობის გამოკვლევა თბილისისათვის წლის თბილ პერიოდში მზის მაქსიმალური და მინიმალური აქტივობის დროს	107
ზ. ხვედელიძე, ბაროკლინური ატმოსფეროს პროგნოზური განტოლებების ამოხსნის საკითხისათვის მთის გველენის გავალისწინებით	120

ქიმია

ი. მოსეშვილი, ე. დოქსოპულო, ნიკელი ხრამის კრისტალური მასივის ქანებში (წალკის რაიონი)	121
ი. საბინ-გუსი, მ. უგულავა, ქანებში მცირე რაოდენობა სპილენძის განსაზღვრის საკითხისათვის	125
ბ. ყაჭეიშვილი, ნ. ფირცხალავა, ს. კანდელაკი, ნ. ტუფინაშვილი, ზოგიერთი ალკილისა და სტირილის რადიკალების შემცველი ბოროტგანული ნერთების სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა	127



ქართული

ქ. ჩერქეზიშვილი, რ. კუბლაშვილი, ი. გვერდუთელი, აცბელიძე-ნიქიძე	რი რიგის სილიციუმმცველი α-გლიკოლების სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება	137
ა. კახნიაშვილი, დ. ფარჯიაია, 1-3-პექსადიენ-5-ოლის კონდენსაცია გვიაკოლ-თან ფოსფორმეჯას თანდასწრებით		142
ქ. არეშიძე, ე. თავართქილაძე, ნორმალური ამილის სპირტის ამინირება გუმბრინის მონაწილეობით		143
ა. ნოლაიდელი, ქ. ძაგნიძე, 2,3-დიმეთილ-ნონინ-4-ენ-7-დიოლი-3,6-ის სინთეზი და გარდაქმნები		149
შ. მიქაძე, ნ. არევაძე, ძმარმეჯვა და პრობიონმეჯვა დეკინ-5-დიოლ-4,7-ის რთული ეთერების სინთეზი და მათი კატალიზური ჰიდრირება		155
ნ. კარსანიძე, გ. სუბატაშვილი, მიკროელემენტების განსაზღვრა ბუნებრივ წყლებში. Mo, Mn და Fe ფორტომეტრიული განსაზღვრა წყლის ერთ სინჯში		159
გ. აკიმოვი, კ. გამსახურდია, უ. მურაჩაშვილი, პროტაქტინიუმის დაცილება ნიობიუმისა და ტანტალისაგან		166

გეოგრაფია-გეოლოგია

ა. ტერელაძე, არსიანის ქედის ლანდშაფტის ძირითადი ტიპები	167
ნ. ნაჭყეზია, თურქეთის ხმელთაშუა ზღვის ზონის სასოფლო განსახლების ზოგიერთა ნიშანი (ანტალიის ვილაიეთის მაგალითზე)	178
ო. ხმალაძე, საქართველოს მთის მდინარეების საშუალოთვიური და საშუალოწლიური ტემპერატურების ურთიერთკავშირის გამოკვლევები	181
ნ. მრევლიშვილი, ნუმულიტების ზოგიერთი მორფოლოგიური ნიშნის სისტემატიკური მნიშვნელობის შესახებ	191

ბიოლოგია

ქ. სანაძე, გვარ Rubus L.-ის ახალი სახეობანი ქვემო სვანეთიდან	193
ზ. კერესელიძე, კუმისის წყალსაცავის ზოობლანქტონის ფორმირება	201
ნ. ჭიჭინაძე, ფსიქონერვული მეხსიერების შესწავლისათვის ძუძუმწოვრებში	207



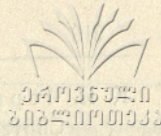
К. И. Черкезишвили, Р. И. Кублашвили, И. М. Гвердцители, Синтез кремнийсодержащих ацетиленовых α -гликолей и их каталитическое гидрирование	133
А. И. Кахнашвили, Д. С. Парджикия, Конденсация 1,3-гексадиен-5-ола с гваяколом в присутствии фосфорной кислоты	139
Х. И. Арешидзе, Е. К. Таварткиладзе, Аминирование <i>n</i> -амилового спир- та в присутствии гумбина	146
А. И. Ногайдели, К. И. Дзагнидзе, Синтез и превращение 2,3-диметил- нонин-4 ен-7-диола-3,6	153
Ш. Г. Микадзе, Н. Г. Аревадзе, Синтез и каталитическое гидрирование сложных эфиров декин-5-диола-4,7 уксусной и пропионовой кислот	158
Н. К. Карсанидзе, Г. Д. Супаташвили, Определение микроэлементов в природных водах. Фотометрическое определение Мо, Мп и Fe в одной про- бе воды	162
В. К. Акимов, К. Г. Гамсахурдия, У. А. Мурачашвили, Отделение протактиния от ниобия и тантала (Краткое сообщение),	163

География—геология

А. К. Тереладзе, Основные типы ландшафтов Арсианского хребта	171
Н. В. Начкебия, Некоторые черты сельского расселения Средиземноморской зоны Турции (на примере вилайета Анталыа)	173
О. Г. Хмаладзе, Исследование взаимосвязи между среднегодовыми и средне- месячными температурами воды рек Грузии	179
Н. И. Мревлишвили, О систематическом значении некоторых морфологиче- ских признаков нуммулитов	183

Биология

К. С. Санадзе, Новые виды рода <i>Rubus</i> L. из Нижней Сванетии	190
З. М. Кереселидзе, Формирование зоопланктона Кумисского водохрани- лища	206
Н. М. Чичинадзе, К изучению психонервной памяти у млекопитающих	213



СОДЕРЖАНИЕ

Математика

П. Г. Когония, О множестве значений одного функционала	7
Г. А. Ломадзе, О поведении производных тэта-функций при линейных подстановках	15
В. В. Сазонов, О сближении распределений сумм независимых случайных величин с классом безгранично делимых распределений в многомерном случае	29
Г. Н. Тевзадзе, О проективно-эквивалентных поверхностях в преобразовании Лапласа	39

Механика

Д. В. Шарикадзе, Об одном методе решения нестационарных задач одномерного течения слабопроводящей жидкости, находящейся в магнитном поле	55
--	----

Физика

Н. С. Амаглобели, Ц. И. Иоселиани, Д. Ф. Кельбалиханов, Л. Ш. Маркозашвили, О. С. Шудра, Г. А. Эристави, Устройство ввода информации с бумажной перфоленты в ЭВМ «Раздан-2»	71
Д. А. Бакашвили, М. С. Ниорадзе, Р. Г. Салуквадзе, Ф. Г. Татришвили, В. Ш. Шварцман, Система освещения и фотографирования низкотемпературной пузырьковой камеры	79
В. С. Кирия, О законе предельных скоростей в общей теории относительности	83
К. А. Сапицкий, О степени влияния орографии и циркуляционных процессов на распределение соляных температур по территории Грузии	97
К. А. Сапицкий, Р. К. Комладзе, Э. Ш. Элизбарашвили, Исследование суточного хода температуры воздуха Тбилиси в теплое время года при максимальной и минимальной активности Солнца	103
З. В. Хведелидзе, К вопросу о решении прогностического уравнения бароклинической атмосферы с учетом влияния гор	109

Химия

Я. П. Мосешвили, Э. П. Доксопуло, Никель в горных породах Храмоского кристаллического массива (Цалкинский район)	123
И. А. Сабин-Гус, М. М. Угулава, К вопросу об определении малых количеств меди в горных породах	126
Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, С. П. Канделаки, Н. А. Тупинашвили, Синтез и физико-химическое исследование некоторых смешаннорадикаловых борорганических соединений	131

CONTENTS

Mathematics

P. Kogonia, On a set values of one functional	7
G. Lomadze, On the behaviour of derivatives of theta-functions under the linear substitutions	15
V. Sazonov, On the approachment of the distributions of sums of independent random variables to the class of infinitely divisible distributions on the multidimensional case	29
G. Tevzadze, On projectively equivalent surfaces in the Laplace transforms	39

Mechanics

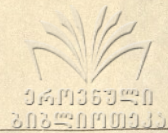
J. Sharikadze, On the solution of unsteady one-dimensional flow of weakly conducting fluid in a magnetic field	54
--	----

Physics

N. Amaglobeli, Z. Ioseliani, D. Kelbalikhanov, L. Markiozashvili, O. Shudra, G. Eristavi, The devise of inputs information with punched paper tape in computer „Razdan-2“	71
D. Bakashvili, M. Njoradze, R. Salukvadze, F. Tatrishvili, V. Shvartzman, System of lighting and photographing of low temperature bubble chamber	79
V. Kiria, On the law limit velocities in general relativity	83
K. Sapitski, On the degry of influence of orography and circulatory processes on the distribution of solar temperature through Georgia	97
K. Sapitski, R. Komladze, E. Elizbarashvili, The study of daily speed of air temperature in Tbilisi during the warm season by maximal and minimal Sun activity	103
Z. Khvedelidze, Solution of the prognostic equation of a baroclinic atmosphere with account of the effect of mountain	109

Chemistry

I. Moseshvili, E. Dokso-pulo, Nickel containing in the Khran crystal rocks (Tsalka region)	121
I. Sabinus, M. Ugulava, Determination of a little quantity of copper in the rocks	125
G. Kacheishvili, N. Pirtskhalava, S. Kandelaki, N. Tupinashvili, Synthesis and physical and chemical investigation of organoboron compounds containing some alkyl and styrene radicals	128



K. Cherkezishvili, R. Kublashvili, I. Gverdtsiteli, Synthesis and catalytic hydrogenation of acetylenic organo-silicon α -diols 115

A. Kakhniashvili, D. Parjikia, Condensation of 1,3-hexadien-5-ol with guaiacol in the presence of H_3PO_4 139

Khr. Areshidze, E. Tavartkiladze, Amination of amyl alcohol by gumbrine 145

A. Nogaideli, K. Dzagnidze, Synthesis and chemical change of 2,3-dimethyl-nonin-4-en-7-diol-3,6 149

Sh. Mikadze, N. Arevadze, Synthesis and catalytic hydrogenation of acetic and propionic esters of decandiol 155

N. Karsanidze, G. Supatashvili, Determination of microelements in natural waters. Photometric determination of Mo, Mn and Fe 159

V. Akimov, K. Gamsakhurdia, U. Murachashvili, Separation of protactinium from niobium and tantalum 165

Geography. Geology

A. Tereladze, The main types of the Arsiani Range landscapes 167

N. Nachkebia, Some peculiarities of the rural settlement of the Mediterranean zone of Turkey (especially of the vilayet Antalya) 175

O. Khmaladze, Research on interrelation between mean annual and mean monthly temperatures of water of the rivers of Georgia 179

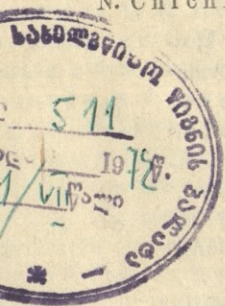
N. Mrevlishvili, On the systematic significance of some morphological features of Nummulites 183

Biology

K. Sanadze, The new species of the genus Rubus from the Lower Swanetia 195

Z. Kereselidze, The formation of zooplankton of Kumisi reservoir . . . 201

N. Chichinadze, The study of psychonervous memory of mammals . . . 207



გამომცემლობის რედაქტორები: ლ. აბუაშვილი, დ. დელეყვა
 ტექნედაქტორი ი. ხუციშვილი, კორექტორები: ე. სულხანიშვილი,
 ე. თოფჩიაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 30/V-72, ქაღალდის ფორმატი 70x108/16,
 ნაბეჭდი თაბახი 19,25, სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 15,6,
 შეკვეთა 910; უე 07082, ტირაჟი 500

ფასი 1 მან. 64 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14
 Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14
 თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1
 Типография Тбилисского университета, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1

~~72-511~~

041136740
802001101330

51

1979