თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
Тбилисский государственный университет

შრომები

102

ТРУДЫ

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

შრომები

102

მექანიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა სერია

თბილისის უნივერსიტეტის გამოცემა

თბილისი 1964

Тбилисский государственный университет

ТРУДЫ

102

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ИЗДАНИЕ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ТБИЛИСИ 1964

დაიბეჭდა

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის
ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს დადგენილებით

*

შინაარსი

СОДЕРЖАНИЕ

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

ლ. გოკიელი

მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციის საკითხისათვის

მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციის საკითხს დიდი მნიშვნელობა აქვს მასალის სწორი დალაგებისათვის და საერთოდ მათემატიკის ისტორიისადმი მართებული მიდგომისათვის. ამ საკითხის მართებულ გადაწყვეტას ღრმაფილოსოფიური კვლევა-ძიება ესაჭიროება მათემატიკის საფუძვლებისა და ისტორიის შესახებ. საქმე მარტო გარკვეული სქემის დადგენაში კი არ მდგომარეობს მათემატიკის ისტორიის მდიდარი მასალის რაიმე სახით მოწესრიგებისათვის, არამედ გარკვეული პრინციპული მნიშვნელობის მქონე პოზიციის დაჭერაში მათემატიკისა და მისი ისტორიის მიმართ.

ამჟამად არსებობს მათემატიკის ისტორიის რამოდენიმე პერიოდიზაცია. ზოგიერთი მათგანი საკმაოდ გავრცელებულია, მაგრამ, როგორც ამის ჩვენებას ჩვენ შევეცდებით ამ შრომის პირველ, კრიტიკულ ნაწილში, მათ ფართო გავრცელებას არ შეესაბამება მათი დასაბუთებისა და გამართლების ხარისხი. საერთო ნაკლი მათემატიკის პერიოდიზაციის არსებული თეორიებისა იმაში მდგომარეობს, რომ მათ საფუძვლად არ უდევთ პერიოდიზაციისათვის საჭირო ერთი გარკვეული და ამასთანავე საკმაოდ გამართლებული პრინციპი. პირდაპირ გადმოღებულია საერთო ისტორიის პერიოდიზაცია (ძველი დრო, შუა საუკუნეები, ახალი დრო) ან საზოგადოებრივი ფორმაციის საფეხურები ანდა აღწერილობითი სახით დახასიათებულია ისტორიული რიგით აღებული გარკვეული მსხვილი ფაქტები მათემატიკის წარსულიდან, რაიმე ზოგადი მიდგომის შემუშავების გარეშე. ორივე ეს გზა არის შაბლონური და უმცირეს წინააღმდეგობის მქონე გზა. ისტორიის საერთო პერიოდიზაციის უბრალო განმეორება, მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციის შემთხვევაში, გამომხატველი იქნება საქმისადმი მექანიკური მიდგომისა და ვულგარული სოციალოგიზმის მიდრეკილებისა.

მათემატიკის ისტორიის ფაქტები დახასიათებულ იქნება მხოლოდ მათთვის გარკვეული ადგილის მიჩენით მსოფლიო ისტორიის საფეხურების გასწვრივ და მათემატიკის ისტორიის ფაქტები, ამგვარად მოწესრიგებული, ზოგჯერ გამოიყურებიან როგორც ნაძალადევ და ხელოვნურ ადგილების მქონედ. მაგალითად, გამოდის, რომ, რადგან ახალი დროის დასაწყისად საფრანგეთის რევოლუცია არის მიჩნეული, ამიტომ მე-17 საუკუნის, მათემატიკის ისტორიის თვალსაზრისით, უმნიშვნელოვანესი და გარდატეხითი ხასიათის მქონე აღმოჩენები—ანალიზური გეომეტრიისა და უსასრულოდ მცირეთა აღ-

რიცხვისა—მოთავსებული იქნება შუა საუკუნეებში და გამოვა, რომ შუა საუკუნეები არის მათემატიკის ისტორიის ერთერთი ყველაზე საყურადღებო და მშფოთვარე პერიოდი.

საერთოდ იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს მათემატიკის ისტორია, როგორც ერთიანი მეცნიერული დისციპლინა, და ამ ისტორიის გარკვეული რაციონალური პერიოდიზაცია, საჭიროა თვით მათემატიკის ისტორია განხილული იყოს როგორც ერთიანი და მთლიანი პროცესი. რაიმე საგნის ცვლილებაზე ჩვენ მხოლოდ მაშინ შეგვიძლია ლაპარაკი, თუ ამ ცვლილების პროცესში ეს საგანი ერთიანი და იგივეობრივი სახით წარმოგვიდგება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ერთი საგნის ცვლილებას და საერთოდ ცვალებადობის პროცესს კი არ მივიღებთ, არამედ ერთიმეორის გვერდით სტატიკურ მდგომარეობაში მყოფ სხვადასხვა საგანს. თუ ავიღებთ, მაგალითად, ცალკეული ადამიანის ცხოვრების საფეხურებს: ბავშვობას, სიყრმის, სიმწიფის პერიოდს, სიბერეს, აქ სხვადასხვა ადამიანები კი არ გვყავს მხედველობაში, არამედ ეს შეეხება სწორედ ერთსადაიმავე ადამიანს. ცვლილების საფეხურების არსებობა საგანს კი არ ამრავლებს და თვით მის *ცვლილებას* „საფეხურებრივი“ სახით კი არ წარმოგვიდგენს, არამედ ამ ცვლილებაზე იმდენად შეგვიძლია ლაპარაკი, რამდენადაც საქმე შეეხება ერთსა და იმავე, დაუყოფლად წარმოდგენილ საგანს. ცვლილება რომ საგანს ყოფდეს, ეს დაყოფა მაინც ხომ ერთსა და იმავე საგანს შეეხება, ის უნდა მოხდეს ერთიანი საგნის ფონზე და ამით კვლავ დადასტურებულია ცვლილების საფეხურებრივი გაგების მცდარობა.

მსგავსი მდგომარეობა გვაქვს მოძრაობის „კინემატოგრაფიულ“ გაგების შემთხვევაში. მოძრაობა არ ნიშნავს მოძრაობაში მყოფი სხეულის უძრავ მდგომარეობათა თავმოყრას. ის არ უნდა იყოს გაგებული როგორც ერთ უძრავ მდგომარეობიდან მეორე უძრავ მდგომარეობაში გადასვლა. თვით ამ *გადასვლისადმი* მიმართვა უარყოფით პლანში ძალაუნებურად ადასტურებს *მოძრაობის* ცნების, როგორც ასეთის, გამოყენების აუცილებლობას. ესა თუ ის მდებარეობა მოძრავი სხეულისა სრულებით არ ნიშნავს ამ მდებარეობაში უძრავად ყოფნას. უძრაობა ის კი არ არის, რომ მოძრავ სხეულს გარკვეულ მომენტში გარკვეული ადგილი უკავია, არამედ ის, რომ დრო მიდის, სხეული კი *განაგრძობს* იმავე ადგილზე ყოფნას. უძრაობა არის *ერთსა და იმავე* ადგილას ყოფნა დროის გარკვეულ მონაკვეთში. მოძრაობის „კინემატოგრაფიული“ გაგება თვით კინემატოგრაფის მუშაობას შეუძლებელს გახდიდა. ეს მუშაობა გულისხმობს მოძრაობის ნამდვილ პროცესს. თვით კინემატოგრაფი რომ „კინემატოგრაფიულად“ მუშაობდეს და კინოფირის ყოველ სურათზე განსაკუთრებით *ჩერდებოდეს*, ჩვენ ვერც დავინახავდით მოძრაობას ეკრანზე.

ასევე ცვლადი სიდიდე გულისხმობს მის მნიშვნელობათა ერთიანობას და ის არ უნდა გავიგოთ როგორც მუდმივთა თავმოყრა. ცვლადი მუდმივებზე კი არ დაიყვანება, არამედ თვით მუდმივის ცნება ცვლადის ცნებას საჭიროებს. მუდმივი ცალკე აღებული რიცხვი კი არ არის, არამედ ფუნქციაა, რომელიც დამოუკიდებელი *ცვლადის* სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ერთსა და იმავე

რიცხვობრივ მნიშვნელობას ი ნ ა რ ჩ უ ნ ე ბ ს. „ჯამის თვალსაზრისი“ ცვლადისა და მოძრაობის მიმართ ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას ქმნის. ის წარმოადგენს ცვლადი სიდიდისა და მოძრაობის ცნებების მეტაფიზიკურ დამახინჯებას.

ისტორიული პროცესიც იმის ერთიანობას გულისხმობს, რაც იცვლება და ის არ უნდა გავიგოთ როგორც ცვალების პროცესის საფეხურად დაშლა და ამ საფეხურების თავმოყრა. ასეთი „საფეხურებრივი“ მიდგომა ისტორიული პროცესის და, კერძოდ, მათემატიკის ისტორიის მიმართ, უკიდურესობამდე მიყვანილი, გამოთქმული ჰქონდა გერმანელ მკვლევარს შპენგლერს თავის ცნობილ წიგნში „ევროპის აღსასრული“, რომელიც პირველი მსოფლიო ომის დამთავრების შემდეგ გამოვიდა და თავის დროზე დიდი გამოხმაურება გამოიწვია.

შპენგლერისათვის ისტორია არის არა მიზეზობრიობის, არამედ ბედისწერის სამყარო. ყოველი ისტორიული კულტურა წარმოადგენს აბსოლუტურად თავისებურ და იზოლირებულ რამეს, შეუდარებელს სხვა ისტორიულ კულტურებთან, სრულებით უცხოს და გაუგებარს სხვა კულტურულ-ისტორიულ ფენის წარმომადგენლისათვის. შპენგლერი უარყოფს კულტურული განვითარების თანმიმდევრობას, ერთიანი მსოფლიო ისტორიის შესაძლებლობას. შპენგლერისათვის არ არსებობს, მაგალითად, ერთიანი განვითარებაში მყოფი მათემატიკა. სრულებით სხვადასხვა ისტორიულ განზომილებაშია მოთავსებული ანტიკური, პლასტიკური ჭვრეტითი წარმოდგენა რიცხვზე და რიცხვის დასავლური კონცეფცია, მისი იდეებით სიმრავლეზე, ცვლად სიდიდეზე, ფუნქციაზე და ა. შ. გაუგებარი რჩება, თუ როგორ მოახერხა თვით შპენგლერმა გაეგო ანტიკური მათემატიკის სული, რომელიც მისივე აზრით აბსოლუტურად უცხოა დასავლური კულტურის წარმომადგენელთათვის.

მათემატიკა შეისწავლის ერთ საგანს, ამ საგნის ხასიათი გამოვლინდება მისი ისტორიული განვითარების პროცესში, და არა სხვადასხვა საგანს მისი განვითარების სხვადასხვა საფეხურზე.

თუ ისტორიის საფეხურები ერთიმეორისაგან მოწყვეტილია და ერთიმეორის მიმართ სრულებით უცხო, მაშინ არ შეიძლება არამცთუ ლაპარაკი ერთიან მსოფლიო ისტორიაზე, არამედ საერთოდ ისტორიაზე და ცვალებადობაზე ისტორიის გასწვრივ, რადგან თვით ამ ცვალებადობის ცნება იმის ერთიანობას გულისხმობს, რაც იცვლება. გვექნება არა ისტორია, არამედ ერთიმეორისაგან მოწყვეტილ ნაკვეთების თავმოყრა. მაგრამ თვით ის ფაქტი, რომ ამ ნაკვეთებს ერთიმეორის გვერდით ათავსებენ, რომ, ვთქვათ, ანტიკური მათემატიკის გვერდით ათავსებენ დასავლურ მათემატიკას და არა სხვა რამეს, ვთქვათ თანამედროვე ფილოლოგიას, ძალაუნებურად ადასტურებს, რომ ამ ნაკვეთებს განიხილავენ ერთი ისტორიული ხაზის გასწვრივ, ისე რომ თავისდაუნებურად ანგარიშს უწევენ ერთიან ისტორიულად განვითარებად საგნის არსებობას.

„საფეხურებრივი“ თვალსაზრისი ისტორიული პროცესისადმი ზოგჯერ, მართალია, არ არის აშკარად წამოყენებული, ცნობიერად გათვალისწინებული

პრინციპის სახით, მაგრამ ფაქტიური მიდგომა მათემატიკის ისტორიისა და მისი პერიოდიზაციისადმი ამჟღავნებს ამ თვალსაზრისით ფარულად საქმეში მონაწილეობას. ამას აქვს ადგილი, მაგალითად, მაშინ, როცა მათემატიკის ისტორიას ყოფენ ელემენტარულ და უმაღლეს მათემატიკის პერიოდებად. მათემატიკას განვითარების ყოველ საფეხურზე აქვს თავისი ელემენტარული და უმაღლესი ნაწილები, მაგრამ არ შეიძლება გარკვეული პერიოდის მათემატიკა, მთლიანად აღებული, მიჩნეული იყოს „ელემენტარულ მათემატიკად“. საჭიროა მათემატიკის განვითარების მოცემულ საფეხურს უკანა რიცხვით მიეაზროს ისტორიულად შემდგომი საფეხური, რომ ეს წინა საფეხურის მათემატიკა, თავისთავად, წარმოდგეს როგორც „ელემენტარული მათემატიკა“. გამოდის არა ისტორიულად ერთიმეორის მომდევნო საფეხურები, არამედ ერთიმეორის გვერდით დაყენებული ერთსა და იმავე დონეზე განხილული სხვადასხვა მათემატიკები. ნაცვლად ისტორიული განვითარებისა, გვექნება სტატიკური ხასიათის თავმოყრა სხვადასხვა ნაჭრებისა, ისე რომ აქ თავს იჩენს სწორედ „საფეხურებრივი“ მიდგომა ისტორიის მიმართ. წარსულის მათემატიკა გამოდის როგორც წარსულის პლანში მოცემული თანამედროვე მათემატიკა და წარსულისა და აწმყოს განხილვასთან დაკავშირებით თვითონ მათემატიკა მრავლდება და გვევლინება სხვადასხვა მათემატიკის სახით.

როცა მათემატიკის განვითარების საფეხურებს განიხილავენ როგორც ელემენტარულ მათემატიკას და უმაღლეს მათემატიკას, მაშინ, ნაცვლად ერთიანი მათემატიკის განვითარებისა, გვექნება ორი სხვადასხვა მათემატიკა. მათემატიკის შემდგომი განვითარების გათვალისწინება, ასე ვთქვათ, საერთო ფონის სახით უნდა წაემძღვაროს წინა საფეხურებს, რომ ცალკეული საფეხურების როლი დანახული იყოს მათემატიკის განვითარების საერთო ხაზის გასწვრივ სხვადასხვა ნაკვეთების ამოჭრაში, სხვადასხვა „მათემატიკის“ სახით.

ზემოდასახელებული შეცდომის მსგავს შეცდომას სჩადიან, როდესაც მუდმივი სიდიდის ძირითად როლს ძველ მათემატიკაში, ხოლო ცვლადი სიდიდისა—ახალ მათემატიკაში იმგვარად ახასიათებენ, რომ ძველი მათემატიკა წარმოადგენს „მუდმივ სიდიდეთა მათემატიკას“, ხოლო ახალი დროის მათემატიკა—„ცვლად სიდიდეთა მათემატიკას“, ისე რომ აქაც განსხვავება წარმოდგენილია როგორც თვით მათემატიკის სხვადასხვა ტიპი, როგორც ერთიმეორისაგან განსხვავებული მათემატიკები.

ნამდვილად მათემატიკა შეინარჩუნებს თავის ერთიანობას მაშინაც, როცა ის განიხილავს ცვლად სიდიდეებს, და მაშინაც, როცა ის განიხილავს მუდმივ სიდიდეებს. მუდმივ სიდიდეთა განხილვა არ ნიშნავს მუდმივობის ფორსირებას, ის უკანა რიცხვით არ შეზღუდავს თვით მათემატიკის ხასიათს და არ გადააქცევს მას „მუდმივ სიდიდეთა მათემატიკად“. თვითონ მუდმივი სიდიდის ცნება გულისხმობს ცვლადი სიდიდის ცნების გამოყენებას, რადგან, როგორც ვიცით, მუდმივი სიდიდე არის ფუნქცია, რომლის დამოუკიდებელ ცვლადს ერთი და იგივე რიცხვი ეთანადება. მაგრამ, მიუხედავად თვით ცვლად სიდიდეთა უფართოესი მნიშვნელობისა მათე-

მატიკაში, მათი განხილვაც ხდება საერთო მათემატიკის ჩარჩოებში და ამით თვით მათემატიკა არ გადაიქცევა განსაკუთრებულ მათემატიკად ცვლადი სიდიდეებისა.

მოყვანილი პერიოდიზაციის ნაკლს ისიც წარმოადგენს, რომ მათემატიკა ზოგადად გამოდის, როგორც მეცნიერება სიდიდეთა შესახებ. ეს განსაზღვრება ძალიან ვიწროა. მათემატიკა არის მეცნიერება რაოდენობის შესახებ (ამის შესახებ ქვემოთ გვექნება საუბარი), ხოლო სიდიდე არის რაოდენობის მხოლოდ გარკვეული სახე. ზემომოყვანილი განსაზღვრების მიხედვით ეს სახე გამოდის გატოლებულად რაოდენობის ზოგადფილოსოფიურ კატეგორიასთან.

ჩვენში ამჟამად ყველაზე გავრცელებულია მათემატიკის პერიოდიზაცია, რომელიც აკადემიკოსს ა. ნ. კოლმოგოროვს ეკუთვნის. მიუხედავად იმისა, რომ ის საინტერესოდ და ჭკუამახვილურად არის მოაზრებული, მაინც არ შეიძლება გაზიარებული იყოს. ამის ძირითადი მიზეზია ის საერთო ხასიათის ნაკლი, რომელსაც შეიცავს პერიოდიზაციის პრობლემისადმი „საფეხურებრივი" მიდგომა. მართალია თვით ა. ნ. კოლმოგოროვი „საფეხურებრივ" თვალსაზრისს, პრინციპული ხასიათის დებულების სახით, აშკარად არ გამოთქვამს, მაგრამ მისი მიდგომა ობიექტურად „საფეხურებრივი" არის. ა. ნ. კოლმოგოროვმა ერთგვარად შეცვალა და განავითარა თავისი პერიოდიზაცია, მაგრამ ამით მას „საფეხურებრივი" ხასიათი არ დაუკარგავს და მისი ზოგადი ნაკლები შერჩა. თვით აღნიშნული შეცვლა გამოწვეულია, როგორც ჩანს, ავტორის მიერ პირველ ვარიანტში გარკვეული ნაკლების დანახვით. მაგრამ ეს ნაკლები ნამდვილად პერიოდიზაციის სპეციალურ განხორციელებასთან იმდენად დაკავშირებული არაა, რამდენადაც საერთოდ „საფეხურებრივი" მიდგომის მიუღებლობასთან, ხოლო უკანასკნელს ინაწილებს გაუმჯობესებული ვარიანტიც. „საფეხურებრივ" მიდგომასთან ისიც არის დაკავშირებული, რომ პერიოდიზაცია მოხდენილია არა რაიმე ერთიანი პრინციპის მიხედვით, არამედ კონკრეტულ მათემატიკურ კონცეფციათა, სისტემათა, მიდგომათა და სხვ. მიმდევრობის აღწერილობითი დახასიათებით.

მათემატიკის ისტორიის კოლმოგოროვისეული პერიოდიზაცია პირველად მოცემული იყო მის სტატიაში „Математика", რომელიც მოთავსებულია დიდ საბჭოთა ენციკლოპედიის პირველ გამოცემაში [1].

კოლმოგოროვს საჭიროდ მიაჩნია მათემატიკის საგნის ენგელსის მიერ მოცემული ცნობილი განსაზღვრება (მათემატიკა, როგორც მეცნიერება სინამდვილის რაოდენობით მიმართებათა და სივრცითი ფორმების შესახებ) კონკრეტიზებული იყოს მათემატიკის ისტორიული განვითარების ეპოქების მიხედვით, ხოლო ეს კონკრეტიზაცია გაგებულია როგორც წამოყენება ამ ეპოქებისათვის მათემატიკის საგნის კერძო განსაზღვრებებისა. მე-17 საუკუნემდე მათემატიკის საგანი იყო რიცხვი, სიდიდე და გეომეტრიული ფიგურა, მე-17—18 საუკუნეებში მათემატიკა წარმოდგება როგორც მეცნიერება სიდიდის ცვალებადობის და გეომეტრიული გარდაქმნების შესახებ, და, ბოლოს, მე-19—20 საუკუნის მათემატიკა შეისწავლის სინამდვილის რაოდენობით და სივრცით ფორმებს მთელი მათი ზოგადობით.

მათემატიკის საგნის ზოგადი განსაზღვრება გამოდის როგორც სქემა, რომელშიც ჩაისმება მათემატიკის საგნის სხვადასხვა კონკრეტული განსაზღვრებანი ეპოქისაგან დამოკიდებულებით. ამგვარად, კონკრეტული შინაარსის მხრით გვექნება მათემატიკის საგნის არა ერთი, არამედ რამოდენიმე განსაზღვრება. ნამდვილად მათემატიკის განვითარების სხვადასხვა საფეხურები, ამ საფეხურების განსხვავებულობა არ ნიშნავს თვით საკვლევ საგნის განსხვავებულობას. მათემატიკის განვითარების სხვადასხვა საფეხურები არ იწვევს დანაწევრებას რაოდენობის ცნებისა, რომელიც საერთოდ მათემატიკის საგნის დამახასიათებელია.

რაოდენობა წარმოადგენს გარკვეულ ფილოსოფიურ კატეგორიას, რომელიც თანაფარდობითია თვისობრივობის კატეგორიასთან. რაოდენობა, თვისობრივობასთან დაპირისპირებით, გამოთქვამს საგნების ერთგვარ გარეგან გარკვეულობას. რაოდენობის ცნება განისაზღვრება ფილოსოფიურ ტერმინებში, იმ დროს როცა რაოდენობის სათანადო სახეები თავის დახასიათებას ღებულობს მათემატიკის ფარგლებში. რაოდენობის სახეები განუყრელად დაკავშირებულია რაოდენობის ზოგად კატეგორიასთან, მაგრამ, ამასთანავე, მისგან მკაცრად გარჩეული უნდა იყოს. რაოდენობის ზოგად ცნებაში არ უნდა იყოს შეტანილი რაოდენობის რაიმე მათემატიკური ნიშანი. ასეთი შეტანა იმის გამომხატველი იქნებოდა, რომ რაოდენობის გარკვეული სახის ფიქსირება შეფასებულია როგორც რაოდენობის ზოგადი განსაზღვრების გაგრძელება და „კონკრეტიზაცია". ნამდვილად კი რაოდენობის სახეები რაოდენობის ზოგად ცნებას კი არ შემოფარგლავენ, არამედ ეს სახეები გვაქვს რაოდენობის ზოგადი ცნების ჩარჩოებში. რაოდენობის ზოგადი ცნების მის ამა თუ იმ სახესთან გატოლება ენათესავება მათი ერთიმეორისაგან მოწყვეტას, რადგან გამოვა, რომ რაოდენობის ესა თუ ის სახე რაოდენობის ზოგად ცნებას აუქმებს და მის მაგივრობას წევს.

რაოდენობის სხვადასხვა სახის განხილვით მათემატიკას საქმე აქვს რაოდენობის ზოგად კატეგორიასთან და ეს კატეგორია არის მათემატიკის საგნისათვის დამახასიათებელი. მაგრამ უკანასკნელი გარემოება სრულებით არ ხდის მათემატიკას ფილოსოფიურ მეცნიერებად. მათემატიკა სწავლობს რაოდენობას არა სხვადასხვა კატეგორიათა სისტემაში, არამედ რაოდენობის, როგორც ზოგადის, ფარგლებში განიხილავს მის სხვადასხვა სახეს. ის გარემოება, რომ მათემატიკას საქმე აქვს რაოდენობის კატეგორიასთან, ლაპარაკობს მათემატიკის ფილოსოფიასთან კავშირის, და არა მათემატიკის ფილოსოფიისადმი კუთვნილების სასარგებლოდ.

რაოდენობის სახეების განსაზღვრება დამოკიდებულია მათემატიკის ამა თუ იმ დონეზე. რაც უფრო განვითარებულია მათემატიკა, მით რაოდენობის მათემატიკურ სახეებს უფრო განზოგადოებული ხასიათი აქვთ. მაგრამ პრინციპულად შეუძლებელია რაოდენობის ამა თუ იმ მათემატიკურმა სახემ დაფაროს რაოდენობის ზოგადი კატეგორია. ეს ჩვენი ცოდნის თითქოს შეზღუდულობის მიზეზით კი არა, არამედ იმის გამო, რომ რაოდენობის ფილოსოფიური კატეგორია, მართალია, მათემატიკის საგანს განსაზღვრავს, მაგრამ ამ საგნის

შიგნით არ არის მოთავსებული, როგორც მისი ერთადერთი რეალიზაცია და ა. შ.; რაოდენობის მათემატიკური სახეები კი გვაქვს სწორედ რაოდენობის ცნების შიგნით და მისი ფარგლებით არის შემოსაზღვრული.

როცა მათემატიკის საგანს მიუაზრებენ რაოდენობის ამა თუ იმ კონკრეტულ სახეს და მას ამ სახის ჩარჩოებში ხედავენ, მაშინ სხვადასხვა სახეებთან დაკავშირებით გამოდის მათემატიკის საგნის მრავლობა. გვექნება ამ საგნის მიმართ „საფეხურებრივი“ მიდგომა.

მათემატიკის განვითარების სხვადასხვა საფეხურები არ იწვევენ რაოდენობის ზოგადი ცნების დანაწევრებას. არ შეიძლება ვილაპარაკოთ მათემატიკის განვითარების ისეთ ისტორიულ საფეხურზე, რომელზედაც რაოდენობის მათემატიკური ცნება უკვე გამოხატავს სინამდვილის რაოდენობით ფორმებს მთელი მათი ზოგადობით, და, მაშასადამე, შეცვლის რაოდენობის ფილოსოფიურ კატეგორიას. ამ შემთხვევაში გამოვა, რომ მათემატიკამ უნდა გამოიკვლიოს რაოდენობა, როგორც გარკვეული ფილოსოფიური კატეგორია, ფილოსოფიურ კატეგორიათა სისტემაში და უკვე მათემატიკასთან კი არ გვექნება საქმე, არამედ ფილოსოფიასთან. მათემატიკის განვითარების საფეხურები არ მოითხოვს „საფეხურებრივ“ მიდგომას თვით განვითარების ერთიან პროცესისადმი, მის წარმოდგენას საფეხურებად დაშლილი სახით.

მათემატიკის ისტორიის „საფეხურებრივი“ გაგება კოლმოგოროვთან დაკავშირებულია მეცნიერული აბსტრაქციის ისტორიული განვითარების „საფეხურებრივ“ გაგებასთან. ამ მხრივ საყურადღებოა ანტიკური აზროვნების კოლმოგოროვისეული დახასიათება. ა. ნ. კოლმოგოროვი ფიქრობს, რომ ანტიკური მეცნიერებისათვის უცხო იყო ცნების რეფლექსია საკუთარი თავის მიმართ, მაგალითად განხილვა ცნების შესახებ ცნებისა, იდეის იდეისა და სხვ. ამ საერთო მიზეზით აიხსნება ის გარემოება, რომ ძველი ბერძნები ვერ მივიდნენ ირაციონალური რიცხვის აღმოჩენამდე. ა. კოლმოგოროვი ეხება პლატონის მოძღვრებას იდეათა შესახებ და წერს:

„შეატრიალა რა ნამდვილი ვითარება, პლატონი თვლიდა რიცხვებს და გეომეტრიულ ფორმებს საწყის არსებად, რომელთადმი მიზიარებით მატერია ღებულობს სხვადასხვა ფორმას. რადგან თვით იდეები აბსოლუტური და დამოუკიდებელია, ამიტომ იდეების შესახებ იდეებს პლატონი უკვე არ აკუთვნებს დამოუკიდებელ არსებობას (იხ., მაგალითად, პარმენიდი, 132, $A—B$) და სწორედ მხოლოდ ამ ფორმაში (იდეათა შესახებ იდეის) შეეძლოთ მოენახათ თავისი ადგილი პლატონურ ფილოსოფიის ჩარჩოებში ნამდვილ რიცხვებს მთელი მათი ზოგადობით (ე. ი. ირაციონალურ რიცხვთა ჩათვლით)“ [1, გვ. 387].

ნამდვილად იდეის აბსოლუტური ხასიათი პლატონთან მოითხოვს დამოუკიდებელ არსებობას ამა თუ იმ ი დ ე ი ს, კერძოდ ი დ ე ი ს ა იდეის შესახებ, რომელიც აგრეთვე წარმოსდგება ჰიპოსტაზირებული, განხეულისებრივი სახით (სხვა საკითხია, რომ ამასთან დაკავშირებით გამოვლინდება იდეათა თეორიის დაუძლეველი სიძნელეები). შეიძლება მეტის თქმაც. იდეის პირველადობის ცნობიდან უნდა გამომდინარეობდეს, რომ იდეათა შესახებ იდეა უნდა არსებობდეს კიდევ მეტი ძალით, ვიდრე ცალკე იდეები. ამასთან დაკავშირე-

ბით შეიძლება გავიხსენოთ არისტოტელის შემდეგი კრიტიკული მოსაზრება მიმართული პლატონის იდეათა თეორიის წინააღმდეგ: „შემდეგ, არა მარტო გრძნობებით აღქმულ საგნებისათვის არიან იდეები დედნები, არამედ თვით მათთვის, მაგალითად, გვარი, როგორც გვარი, სახეებისათვის; ისე რომ ერთი და იგივე იქნება დედანიცა და ასლიც (სხვა დედანისა)" [2]. ეს არგუმენტი ობიექტურად ლაპარაკობს იდეალიზმის წინააღმდეგ. თუ იდეა წინ უსწრებს საგანს, რომელსაც ის ნამდვილად უნდა ასახავდეს, მაშინ უფრო საწყისი, ვიდრე აღებულ საგანზე იდეა, იქნება იდეა ამ იდეის შესახებ და ა. შ.

იდეა იდეის შესახებ არამცთუ უცხოა პლატონის ფილოსოფიისათვის, არამედ მასში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს. ამისათვის საკმარისია მივუთითოთ ცნებების პლატონისეულ პირამიდაზე, სიკეთის ცნების მნიშვნელობაზე პლატონის ფილოსოფიაში და სხვ.

ადგილი „პარმენიდიდან", რომელზედაც მიუთითებდა ა. კოლმოგოროვი, არის გადაცემა არგუმენტისა „მესამე ადამიანი" (იხ. აგრეთვე 133 *A*), რომელსაც შემდეგ არისტოტელიც იყენებდა და რომელიც, თავისი ობიექტური ძალით, მიმართულია იდეალიზმის წინააღმდეგ. ამ არგუმენტის შინაარსი ასეთია: თუ რაიმე იდეა, მაგალითად ადამიანისა, არსებობს მისი ცალკეულების, ჩვენს შემთხვევაში ცალკეულ ადამიანების, გარეშე, მაშინ ახალი ზოგადი, ახალი გვარი დაგვჭირდება „მესამე ადამიანის" სახით, რომლის ცალკეულები იქნებიან როგორც ცალკე ადამიანები, ისე ცალკეული ეგზემპლიარის სახით წარმოდგენილი ზოგადი „ადამიანი"; ის იქნება საერთო საზომი ამ ცალკეულების ერთად აღებისათვის. მაგრამ ეს მესამე ადამიანი კვლავ გამოიყოფა ცალკეული ეგზემპლიარის სახით და უკვე საჭირო გახდება „მეოთხე ადამიანი" და ასე შემდეგ უსასრულოდ.

არგუმენტი „მესამე ადამიანი", თავისი ობიექტური მნიშვნელობით, მიუხედავად იმისა, თუ რა მიზნით იყენებდა მას პლატონი, მიმართულია საერთოდ იდეის ჰიპოსტაზირების წინააღმდეგ და არ შეიძლება იმის დამადასტურებლად გამოდგეს, რომ ეს ჰიპოსტაზირება პლატონთან შეეხება მხოლოდ იდეას და არა იდეას იდეის შესახებ (იდეის ჰიპოსტაზირებისას საჭირო გახდება ჯერ მოთხოვნა იდეის შესახებ იდეის ჰიპოსტაზირებისა და ა. შ.—გვარად ცალკეულ ადამიანებისათვის და ჰიპოსტაზირებულ „ადამიანისათვის" იქნება „მესამე ადამიანი", რომელსაც დასჭირდება „მეოთხე ადამიანი" და ასე შემდეგ).

არგუმენტს „მესამე ადამიანი" აქვს ნეგატური ხასიათი და ის სრულებით არ ადგენს დადებითი სახით იდეის ჰიპოსტაზირების საზღვარს. მითითება იდეაზე იდეის შესახებ (გვარი ადამიანის იდეის და ცალკე ადამიანების მიმართ) არგუმენტში „მესამე ადამიანი" კეთდება არა იმავე იდეის შესახებ იდეის მოცილების მიზნით, არამედ იმისათვის, რომ უარყოფილი იყოს (არგუმენტის მართებულ გამოყენებისას) ჰიპოსტაზირებული გაგება საერთოდ იდეისა.

საყურადღებოა, რომ უსასრულობის პრობლემის განხილვისას ძველი ბერძნები იყენებდნენ სწორედ იმ ლოგიკურ სვლებს, რომლის შესაძლებლო-

ბას მათთვის საეჭვოდ ხდის ა. კოლმოგოროვი. ამის ერთერთი მაგალითია თვითონ პლატონის „პარმენიდიდან“ მოყვანილი ადგილი. პლატონი თავისებურად იყენებს არგუმენტს „მესამე ადამიანი“ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობის მისაღებად. გამოდის, რომ ყალბი მდგომარეობა, რომელსაც სათანადო მიდგომისათვის გამოავლენს არგუმენტი „მესამე ადამიანი“, ერთგვარად მოქმედობს დადებით ასპექტში და იწვევს იმას, რომ ერთიანი ქმნის მრავალს. აქ პლატონი სარგებლობს ისეთი ცნებით როგორიც არის არსებობის არსებობა. ამას ყურადღებას აქცევს რასელი [3,4] და პლატონის მსჯელობის მსვლელობას ადარებს იმ როლს, რომელსაც რიცხვთა უსასრულობის მისაღებად დედეკინდთან ასრულებს ცნების ცნება, ხოლო ბოლცანოსთან ჭეშმარიტება ჭეშმარიტების შესახებ.

შეიძლება მოყვანილი იყოს რიგი მაგალითებისა, რომელიც ლაპარაკობს ანტიკური აზროვნების და ანტიკური მეცნიერების ჩვენს მიერ გაკრიტიკებული გაგების წინააღმდეგ. თვითონ პლატონთან ჩვენ ვხვდებით ცნებებს: ცოდნა ცოდნის შესახებ (დიალოგში „ხარმიდი“), ასლის ასლი (ადამიანების მხატვრული მოღვაწეობის კრიტიკის მიზნით „რესპუბლიკაში“). შეიძლება მითითებული იყოს ფილოსოფირების სოკრატისებური მანერისათვის განსაკუთრებით დამახასიათებელ ცნებაზე არცოდნის ცოდნისა, როლზე არისტოტელის ფილოსოფიისათვის „ფორმის ფორმის“ ცნებისა, დროის დახასიათებაზე ეპიკურესთან როგორც „თვისების თვისებისა“ და სხვ. ყველა ეს, მნიშვნელოვანი ანტიკური მეცნიერებისათვის, მაგალითები ადასტურებენ, რომ ცნების რეფლექსია საკუთარი თავის მიმართ სრულებით არ არის უცხო ანტიკური აზროვნებისათვის და სპეციფიკური მხოლოდ ახალი დროის მეცნიერული აზროვნებისათვის.

ა. ნ. კოლმოგოროვის ზემომოყვანილი გამონათქვამის შესახებ შეგვიძლია აღვნიშნოთ აგრეთვე შემდეგი: ნათქვამია, რომ პლატონი თვლიდა რიცხვებს და გეომეტრიულ ფიგურებს პირველად არსებებად—იდეებად. მართალია, როგორც ცნობილია, პლატონი სიბერეში იმ აზრამდე მივიდა, რომ განევითარებია იდეათა სამყარო როგორც რიცხვთა სისტემა, მაგრამ პლატონისათვის ყველაზე დამახასიათებელია მათემატიკური საგნებისათვის გარდამავალი ადგილის მიკუთვნება იდეებსა და გრძნობად საგნებს შორის [2, წიგნი I, თავი 6, გვ. 26].

ა. ნ. კოლმოგოროვის სტატიაში, მეორე ადგილას, კიდევ უფრო მეტად გამოვლინდება მათემატიკის ისტორიისადმი „საფეხურებრივი“ მიდგომა, რამდენადაც აქ მათემატიკის განვითარების საფეხურები დაკავშირებულია აბსტრაქციის ორ საფეხურთან, ხოლო თვით ეს სისტემა საფეხურებისა გამოდის შრეებად დაყოფილი სახით და დაკავშირებულია ფორმის ფენებად დაშლასთან. მეორე საფეხური შეფასებულია ისე, რომ „არსებული ქვეყნის ფორმათა და მიმართებათა სისტემა თვითონ განიხილება თავისი ფორმის მხრით“. აღნიშნულია, რომ აბსტრაქციის შემდგომი საფეხურები უკვე არ წარმოადგენენ რაიმე პრინციპულად ახალს [1, გვ. 387].

აქ საქმე გვაქვს ზოგადლოგიკურ პლანში ფორმის ფენებად დაშლასთან: ფორმად და ფორმის ფორმად. შეგვიძლია გავიხსენოთ აგრეთვე მსგავსი თვალსაზრისი ლასკისა—მასალისა და ფორმის დამოკიდებულების შესახებ. ლოგიკურ მომენტად გამოდის ფორმა, რომელსაც ალოგიკური მომენტის სახით ეპირისპირება მასალა. ხდება მასალის „დაფარვა“ ფორმით. ლასკის დუალისტურ სქემაში, რომელიც დაკავშირებულია ფორმისა და მასალის ორადობასთან, გრძნობადი სამყაროს ფორმა, რომელიც, თავის მხრივ, გარკვეულ მასალას წარმოადგენს, კვლავ უნდა იყოს გაფორმებული. ფორმის ფორმის განხილვა ლოგიკის ფილოსოფიის ამოცანას წარმოადგენს. აღნიშნული პროცესის გაგრძელების საჭიროებას, თვით ფორმის ფორმის გაფორმების სახით, ლასკი მოხსნის იმაზე მითითებით, რომ აქ არაფერი ახალი არ გვექნება შედარებით ფორმის ფორმასთან [5].

ლასკთან ფორმა მოწყვეტილია მასალას და დარღვეულია მათი ერთიანობა და ამის შემდეგ დაგვიანებული გამოვა მათი დაკავშირება მასალის ფორმით „დაფარვის“ საშუალებით. მასალა, იმისათვის რომ დაიფაროს ფორმით, რაღაც სახით უნდა მონაწილეობდეს და ამიტომ ადრევე მოითხოვს ფორმით „დაფარვას“ და ა. შ. როცა ფორმას შინაარსს აშორებენ, მაშინ ფორმის ჰიპოსტიზირება ხდება, თვით ის გამოდის ერთგვარი მასალის სახით და ადრევე წარმოიშვება საჭიროება მას დაედვას „ფორმა“ და ა. შ. ლასკის მითითება, რომ შემდგომი საფეხურები მეორის შემდეგ არაფერს ახალს არ იძლევა, მიზანს ვერ აღწევს, რადგან ამ შემთხვევაში ნამდვილად გვაქვს არა დადებითი მიმდევრობა ფორმის საფეხურებისა, არამედ უსასრულობაში რეგრესით გამოხატული ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა, რომელსაც იწვევს ფორმის მოწყვეტა მასალისაგან. ჩვენ ი ძ უ ლ ე ბ უ ლ ი ვიქნებით ფორმას წავუმძღვაროთ ფორმის ფორმა და ა. შ. უსასრულოდ. თვითონ სურვილი ამ რეგრესის „შეჩერებისა“ ადასტურებს მის აუცდენლობას სათანადო თვალსაზრისისათვის.

ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა იქმნება, როცა, იმის ნაცვლად, რომ თავიდანვე ფორმის ცნება თავისი ზოგადი მნიშვნელობით იყოს გაგებული, ამ მნიშვნელობას ზღუდავენ იმ შემთხვევების მიაზრებით, რომლების მიმართ ის წინათ გამოყენებული იყო; ამასთან დაკავშირებით ლაპარაკობენ „ჩვეულებრივ“ ფორმების შესახებ, იმისათვის, რომ საჭირო შეიქნეს მათზე „ფორმის ფორმის“ დაფენვა და ა. შ. ნამდვილად, თუ ფორმის ცნებას უფრო გაფართოებულ პირობებში იყენებენ, მაშინ „ჩვეულებრივ“ ფორმებად უკვე ეს შემთხვევები გადაიქცევა და ასეთებად მხოლოდ წინა შემთხვევები არ დარჩებიან. გადასვლა უფრო განზოგადებულ ფორმებზე ფორმის ერთიანი ცნების ფარგლებში ხდება, და საქმე არ უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც ფ ო რ მ ი დ ა ნ ფორმის ფორმაზე გადასვლა და დავუკავშიროთ ფორმის ფენებად დაშლას. ფორმა თანაფარდობითია შესაბამის შინაარსთან. თუ ჩვენ ისეთი შინაარსის ფორმაზე ვლაპარაკობთ, რომელიც თვითონ არის რაღაც სხვა შინაარსის მიმართ ფორმა, აქაც ფორმის ცნება ერთიანი აზრით გამოიყენება. საქმე გვაქვს

გარკვეული შინაარსის ფორმასთან და არა თავის თავად აღებულ „ფორმის ფორმასთან“.

წინათ უკვე აღნიშნული იყო, რომ აკადემიკოს ა. ნ. კოლმოგოროვის მეორე სტატიაში „მათემატიკა“, რომელიც მოთავსებულია დიდ საბჭოთა ენციკლოპედიის მეორე გამოცემაში [6], ერთგვარად შეცვლილია მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაცია, მიღებული პირველ სტატიაში, მაგრამ შენარჩუნებული რჩება მათემატიკის ისტორიის მიმართ „საფეხურებრივი“ მიდგომა.

განიხილება პერიოდები: მათემატიკის ჩასახვის, ელემენტარული მათემატიკის, ცვლად სიდიდეთა მათემატიკის და თანამედროვე მათემატიკის. აქ არ არის პერიოდიზაციის ერთიანი პრინციპი და თვით ისტორიული პროცესი მათემატიკის განვითარებისა წარმოსდგება ფენებად დაშლილი სახით. მართლაც, პირველი და მეოთხე პერიოდი, ყოველ შემთხვევაში მათი სახელწოდებით გამოთქმული საერთო ფორმულა, დაკავშირებულია მხოლოდ ქრონოლოგიური მომენტის გათვალისწინებასთან და ერთიანი სახით (თავისი ფორმულირების მიხედვით) შეიძლება ყოველი მეცნიერებისათვის გამოყენებული იყოს. ამავე დროს, ბოლო საფეხური არ შეიძლება გამომხატველი იყოს მათემატიკის ისტორიის რაიმე შინაგანი გარკვეულობის მქონე პერიოდისა, რადგან ტერმინი „თანამედროვე“ მიმდინარე და განუსაზღვრელია და დღევანდელი დღე ხვალ გუშინდელ დღედ იქცევა. საჭირო ხდება ტერმინის „თანამედროვე“ გაშიფრვა და მითითება მისით წარმოდგენილი ისტორიის მონაკვეთის გავრცობაზე. ამასთანავე შეიძლება დაისვას საკითხი: შესაძლებელია თუ არა მათემატიკის ჩასახვა შეფასებული იყოს როგორც მათემატიკის განვითარების გარკვეული ისტორიული პერიოდი?

მეორე და მესამე პერიოდი უკვე სხვა საფუძველს ემყარება, დაკავშირებულია დღევანდელი მათემატიკის აგებულებასთან, ყოველ შემთხვევაში მათემატიკის სწავლების პლანში (ელემენტარული და უმაღლესი მათემატიკა). ჩვენ აქ არ გვაქვს მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაცია გარკვეული, ისტორიული ვითარებისადმი მიმართული, ერთიანი პრინციპის მიხედვით და ცალკე პერიოდები გამოდიან ცალკე ფენების სახით. ეს დასტურდება იმითაც, რომ ერთერთ პერიოდად გამოდის ელემენტარული მათემატიკა. ჩვენ ზევით უკვე აღნიშნული გვქონდა, რომ მათემატიკის განვითარების ამა თუ იმ ეტაპისათვის შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მის „ელემენტარულ“ და „უმაღლეს“ ნაწილებზე, მაგრამ ელემენტარული მათემატიკა არ შეიძლება წარმოდგეს როგორც გარკვეული პერიოდი მათემატიკის განვითარების საერთო პროცესისა. არ შეიძლება თანამედროვე მათემატიკის განსხვავებულ ნაწილებში დავინახოთ მათემატიკის ისტორიული განვითარების განსხვავებული ეტაპები და მოვათავსოთ ეს ეტაპები ერთიმეორის გვერდით თანამედროვე მათემატიკის სისტემის გასწვრივ. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ „საფეხურებრივ“, „კინემატოგრაფიულ“ მიდგომას მათემატიკის განვითარების პროცესისადმი, რომელიც არ შეეფერება თვითონ განვითარების ცნებას და რაზედაც ზემოთ უკვე საკმაოდ იყო ლაპარაკი. მათემატიკის განვითარების ისტორიულ პროცესს სწორედ მივყევართ თანამედროვე მათემატიკისაკენ, და არა თანა-

მეღროვე მათემატიკა უკანა რიცხვით განაწილდება მათემატიკის ისტორიის სივრცეზე.

ზემოთ მოცემული იყო კრიტიკული განხილვა მათემატიკის პერიოდიზაციის ზოგიერთი არსებული თეორიისა. ახლა შევეცდებით ვაჩვენოთ თუ რა გზით შეიძლება დადებით პლანში გადაწყდეს მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციის საკითხი. მათემატიკა, შედარებით ყველა სხვა სპეციალურ მეცნიერებასთან, განსაკუთრებულ მდგომარეობაშია, კერძოდ თავისი ისტორიის პერიოდიზაციის საკითხის დასმის მხრით. ყველა დანარჩენი მეცნიერებანი შეისწავლიან სინამდვილის ამა თუ იმ ნ ა წ ი ლ ს. მათემატიკა კი შეისწავლის სინამდვილის გარკვეულ, სახელდობრ რაოდენობით, მ ხ ა რ ე ს, რომელიც, ამა თუ იმ ფარგლებში, აქვს სინამდვილის ყოველ ნაწილს. დანარჩენ მეცნიერებათათვის თვით საკვლევი საგანი, მასში შემავალი ნაწილების თანმიმდევრობით, ისტორიული განვითარების ხაზით, ერთნაირად აადვილებს მეცნიერების პერიოდიზაციის დადგენას, რადგან უფრო მეტად საფიქრებელია, რომ ის, რაც თავის განვითარების მხრით უფრო მარტივია, უფრო ადრე ხდება კვლევა-ძიების საგანი. ყოველ შემთხვევაში თვით საგნის ისტორიული განვითარების გათვალისწინება ერთგვარად ხელს უწყობს მისი შემსწავლელი მეცნიერების განვითარების საფეხურების დადგენას. მათემატიკისათვის ასეთი გზა დახურულია, რადგან აქ ლაპარაკი არ შეიძლება მისი ობიექტურად არსებული საგნის—რაოდენობის ი ს ტ ო რ ი უ ლ განვითარებაზე, ხოლო ის განვითარება, რომელსაც სათანადო ლოგიკური წყობა გამოსახავს, ვერ გამოდგება დასაყრდენად მეცნიერების ისტორიის პერიოდიზაციის დადგენისათვის.

სამაგიეროდ, ამასთან ერთად, მათემატიკა, სხვა სპეციალურ მეცნიერებებთან შედარებით, განსაკუთრებულ მდგომარეობაშია მისი ლოგიკასთან და ფილოსოფიასთან დამოკიდებულების მხრით. მათემატიკის საგანი თვით დახასიათებულია გარკვეული ფილოსოფიური კატეგორიის, სახელდობრ რაოდენობის საშუალებით. მათემატიკაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ სხვა ფილოსოფიური კატეგორიებიც, მაგალითად სიმრავლე, უსასრულობა. მათემატიკაში განსაკუთრებით გამახვილებულია საკითხი მისი თეორიებისა და დამტკიცებების ლოგიკური წყობის შესახებ. მათემატიკას გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს თვით ლოგიკის ფორმალური აპარატის დახასიათებისათვის. არცერთ მეცნიერებაში ისე ფართოდ და გამოყოფილად არ დგას საკითხი დაფუძნების პრობლემების დამუშავების შესახებ როგორც მათემატიკაში. მათემატიკაში განსაკუთრებულის პირდაპირობით და მკაფიობით გამოჩნდება კავშირი მეცნიერების საგნისადმი მიდგომისა და ამ მეცნიერებაში გაშლილ ლოგიკური პროცესებისადმი მიდგომას შორის. ყველაფერი ეს გვაიშნებს, რომ მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს განსხვავებას აზროვნების ხერხთა შორის.

მათემატიკური ანალიზის მაგალითზე მარქსი გვიჩვენებს ღრმა შინაგან კავშირს მათემატიკის საგნის მეტაფიზიკურ გაგებისა და სათანადო ლოგიკური პროცესისადმი ფორმალისტურ მიდგომას შორის და აგრეთვე დიალექტი-

კურ მიდგომებს შორის მათემატიკის საგნისა და მათემატიკაში გამოყენებულ ლოგიკური დასკვნებისადმი.

იმ განსხვავების მხრით, რასაც მარქსი ხედავს მათემატიკის მეთოდოლოგიის განვითარებაში, პირველ რიგში დასახელებული უნდა იყოს „გამონთავისუფლების“ და განვითარების მეთოდების დაპირისპირება. ეს დაპირისპირება ნაჩვენებია ფუნქციის წარმოებულის მიღების მაგალითზე. „გამონთავისუფლების“ მეთოდი დაკავშირებულია ცვლადი სიდიდის მეტაფიზიკურ გაგებასთან, განვითარების მეთოდი კი—მის დიალექტიკურ გაგებასთან. ცვლადი წარმოადგენს ერთერთ გამოვლენას იგივეობისა და სხვაობის ერთიანობისა. ერთიდაიგივე ცვლადი სიდიდე წარმოგვიდგება სხვადასხვა მნიშვნელობების სახით. ეს მნიშვნელობანი ცვლადის ადგილს კი არ იკავებენ ან მის შეჩერებას კი არ იწვევენ, არამედ ცვლადი, როგორც ასეთი, განუყრელად დაკავშირებულია ამ მნიშვნელობებთან. ცვლადი სიდიდის დიალექტიკური ხასიათის გათვალისწინებით, მარქსი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს ცვლადის ნაზრდისადმი სწორ მიდგომას. ნაზრდი უნდა იყოს შედეგი ცვლადის ახალი მნიშვნელობის შედარებისა ძველ მნიშვნელობასთან; იღებენ x ცვლადის ახალ მნიშვნელობას x_1 და განიხილავენ ნაზრდს Δx, როგორც სხვაობას x_1-x.

სხვაგვარი მდგომარეობა გვაქვს, როცა თავიდანვე იღებენ „ნაზრდს“ და მხოლოდ შემდგომში, თვითონ ნაზრდის საშუალებით, ცვლადის ძველი მნიშვნელობისათვის მისი დამატებით, ცდილობენ პირველად მიიღონ ცვლადის ახალი მნიშვნელობა. აქ ცვლადი მთლიანობას კარგავს, გვევლინება ცალკეულად აღებულ მნიშვნელობათა თავმოყრის სახით; ცვლადი სიდიდის ნაცვლად გვექნება ჯამი შეჩერებულ მდგომარეობაში მყოფ მისი მნიშვნელობებისა. მივიღებთ „ჯამის თვალსაზრისს“, რომელიც გამოხატავს ცვლადი სიდიდის მეტაფიზიკურ დამახინჯებას. ამ თვალსაზრისს უპირისპირდება ცვლადი სიდიდისადმი სწორი დიალექტიკური მიდგომა, რომელსაც ეწოდება, აღებულ სიტუაციასთან გამოყენებით, „სხვაობის თვალსაზრისი“. „x_1 არის თვით გაზრდილი x, მისი ზრდა განუყოფელია მისგან. x_1 არის მისი ზრდის სრულებით განუსაზღვრელი ფორმა; ეს ფორმა ანსხვავებს გაზრდილ x-ს, სახელდობრ x_1-ს, მის საწყის ფორმისაგან გაზრდამდე, x-გან, მაგრამ არ ანსხვავებს x-ს თვით მის ნაზრდისაგან. დამოკიდებულება x_1 და x შორის შეიძლება ამიტომ გამოსახული იყოს მხოლოდ უარყოფითად, როგორც სხვაობა, როგორც x_1-x. პირიქით $x_1=x+\Delta x$-ში 1) სხვაობა გამოხატულია დადებითად, როგორც x-ის ნაზრდი, 2) მისი ზრდა ამიტომ გამოსახულია არა როგორც სხვაობა, არამედ როგორც ჯამი თვითონ მისი, საწყის მდგომარეობაში პლიუს მისი ნაზრდი“ [7].

ნათქვამთან დაკავშირებით გამოვლინდება კავშირი ჯამისა და სხვაობის თვალსაზრისების დაპირისპირებისა მარქსის მათემატიკურ კონცეფციაში აგრეთვე ძირითად მნიშვნელობის მქონე „გამონთავისუფლების“ და განვითარების მეთოდების დაპირისპირებასთან.

ჯამის თვალსაზრისში ცვლადის ახალ მნიშვნელობას ადრევე მიუაზრებენ იმ ნაზრდს, რომელიც ნამდვილად მიიღება მხოლოდ ამ მნიშვნელობის ძველ

მნიშვნელობასთან შედარების შემდეგ; ახალი მნიშვნელობა თავიდანვე წარმოდგენილია დანაწევრებული სახით. ამიტომ, ნაცვლად იმისა, რომ ნამდვილად შეადგინონ ნაზრდი, უხდებათ მისი, როგორც უკვე მზა სახით წარმოდგენილისა ცვლადის ახალ მნიშვნელობაში, მხოლოდ „გამონთავისუფლება". „გამონთავისუფლების" და განვითარების მეთოდებს შორის განსხვავების ილუსტრაციას მარქსი ახდენს ფუნქციის წარმოებულის მიღების მაგალითზე. მარქსის მსჯელობანი შესრულებულია მათემატიკის სულ სხვა ეპოქის ფონზე, ვიდრე ის, რომელთანაც ამჟამად გვაქვს საქმე. ჩვენ აქ არ აღვადგენთ იმ ფორმას, რომლითაც წარმოდგენილია მარქსის გამონათქვამები, და შევეცდებით თანამედროვე მათემატიკის ტერმინებში გადავცეთ მათი საერთო სული.

განვიხილოთ ფუნქციის $y=x^2$ წარმოებულის გამოყვანა. ფუნქციისა და არგუმენტის ნაზრდების შეფარდებას ექნება სახე $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$. თუ წარმოებულს y', რომლისკენაც უნდა მივიდეთ Δx-ის ნულისაკენ მოძრაობასთან დაკავშირებით, მივიღებთ Δx-ის უკუგდებით, მაშინ გამოვა, რომ ადრევე ვსარგებლობთ მზა შედეგით $2x$ და, ამასთან დაკავშირებით, ვიცით, რომ დანარჩენი ნაწილი, ე. ი. Δx, უკვე ზედმეტია და ამიტომ შეიძლება უგულებელყოფილ იქნას. ეს, თავის მხრით, უპასუხებს Δx-ის გაგებას, როგორც აქტუალურ უსასრულოდ მცირის, ე. ი. სიდიდის, რომელიც ერთდროულად შეიძლება მიჩნეული იყოს ნულად და ნულისაგან განსხვავებულადაც. ამ შემთხვევაში შედეგი $2x$ უსწრებს მის მიღებას, თვითონვე მონაწილეობს ამ მიღებაში და მიღება შედეგისა მდგომარეობს მხოლოდ მის „გამონთავისუფლებაში", მზა შედეგის გამოცალკევებაში სათანადო გარემოცვისაგან.

ეხება რა წარმოებულის მიღებას „გამონთავისუფლების" მეთოდებით, ფუნქციის $y=x^4$ მაგალითზე, მარქსი წერს: „მთელი შემდეგი განვითარება მხოლოდ იმაში მდგომარეობს, რომ სრულებით მზა წარმოებული $4x^3$ გამოვანთავისუფლოთ მისი მამრავლისაგან Δx და მისი მეზობელი წევრებისაგან, გამოვიყვანოთ ის მისი გარემოცვისაგან. ამგვარად, ეს არის არა განვითარების მეთოდი, არამედ მხოლოდ გ ა მ ო ნ თ ა ვ ი ს უ ფ ლ ე ბ ი ს მ ე თ ო დ ი". რამდენადაც გამონთავისუფლების მეთოდში შედეგი, იმის ნაცვლად, რომ მიღებული იყოს, თავიდანვე მზა სახით არის მოცემული, მთელ შემდგომ პროცესს მარქსი აფასებს როგორც ფუფუნებას [7, გვ. 87, 81].

საქმე სხვაგვარ ხასიათს ღებულობს სწორად აგებულ ზღვართა თეორიის, უსასრულოდ მცირის მართებული გაგების, მისი ცვლად სიდიდეთ მიჩნევის პირობებში. წარმოებულის მიღება დაკავშირებული იქნება გარკვეულ უსასრულო პროცესის გაშლასთან, ნაზრდის Δx უსასრულოდ კლებასთან, ე. ი. ცვლადის ახალი მნიშვნელობის მისწრაფებასთან ძველი მნიშვნელობისაკენ. მაშინ, ფუნქციის ნაზრდის და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ჩვენს შემთხვევაში $2x+\Delta x$-ის ტოლი, მიისწრაფის $2x$-კენ და x^2 ფუნქციის წარმოებულისათვის მივიღებთ ფუნქციას $2x$. ეს ფუნქცია გამოყვანილი იქნება გარკვეული

პროცესის შედეგად, და თვით ამ გამოყვანის დროს ის ადრევე სრულებით არ ფიგურირებს როგორც წარმოებული.

ზოგადი იდეა წარმოებულის მიღების მარქსის მიერ მოწოდებული გზისა, რომელზედაც ჩვენ აქ დაწვრილებით არ შევჩერდებით, იმაში მდგომარეობს, რომ წარმოებული გამოყვანილი იყოს როგორც შედეგი გარკვეული განვითარებისა. ასეთი მეთოდი წარმოებულის მიღებისა უპასუხებს ცვლადი სიდიდის დიალექტიკურ გაგებას. ცვლადი სიდიდის მეტაფიზიკურ გაგებისას კი, როგორც ჩვენ დავინახეთ, თვითონ გამოყვანის პროცესს ექნება არა განვითარების, არამედ მხოლოდ გამონთავისუფლების ხასიათი. ამგვარად, მათემატიკაში პირდაპირი და მჭიდრო კავშირი არსებობს საკვლევი საგნისადმი მიდგომასა (მეტაფიზიკური თუ დიალექტიკური) და მსჯელობის ხერხს, თეორიაში გამოყენებულ ლოგიკურ პროცესის გაგებას შორის. ამ კავშირს ნათლად გვანიშნებს თვითონ მათემატიკის ისტორიული განვითარება.

ანტიკური მათემატიკისათვის დამახასიათებელია გათიშულობა მათემატიკის საგნის შიგნით, ერთიმეორისაგან მოწყვეტა არითმეტიკისა და გეომეტრიის, დისკრეტობისა და უწყვეტობის სფეროების, სასრულოსი და უსასრულოსი და ა. შ. მათემატიკის საგანი გაორებული იყო, მას მთლიანობა აკლდა. რიცხვთა სფერო მიჩნეული იყო როგორც სფერო აბსოლუტური წყვეტილობის, დისკრეტობის, განფენილობაში კი ბატონობდა უწყვეტობა. რიცხვები ხაზგასმით ინდივიდუალიზებული იყო, მთავარი ყურადღება ექცეოდა ცალკეული რიცხვების ან რიცხვითი ჯგუფების განუმეორებელ თვისებებს, განფენილობისათვის კი ცალკეულები, ასე ვთქვათ, იკარგებოდა საერთო მასაში, მაგალითად ცალკეული წერტილები წრფეზე გაუპიროვნებულად ჩანდა.

მათემატიკის საგნის გაორებულ ხასიათს ეთანადებოდა ერთგვარი გაორება მათემატიკის მეთოდშიც. ცალმხრივად იყო წარმართული და ერთიმეორისაგან დაშორებული აღმოჩენისა და დამტკიცების გზები. ანალიზი, რომელიც რეგრესიული მიმართების მქონე მსვლელობის: შედეგიდან მიზეზზე, გაპირობებულიდან პირობაზე და სხვ.—გამომხატველია და რომელსაც ძველი საბერძნეთის მეცნიერებაში გეომეტრიული ხასიათი ჰქონდა, ვარგოდა უმთავრესად როგორც ახლის აღმოჩენის ხერხი, ხოლო საკმარისი არ იყო როგორც საბოლოო დასაბუთების საშუალება, სინთეზი კი—პროგრესული მიმართულებით მსჯელობის გამომხატველი—ითხოვდა წინასწარ ცოდნას მოსალოდნელი, სავარაუდო შედეგისა, ხოლო უძლური იყო როგორც ევრისტული ხასიათის, ახლის მიგნების საშუალება.

ნათქვამი შეიძლება ილუსტრირებული იყოს მრუდი ფიგურების გაზომვის საკითხის მაგალითზე. სამუშაო იარაღად ამისათვის ანტიკურ მათემატიკაში იყო მათემატიკური ატომიზმი, მაგრამ ის ძალიან შორს იყო ლოგიკური სიზუსტისაგან, განსაკუთრებით ძველი ბერძნებისათვის, რომელნიც მკაცრ მათემატიკურ მსჯელობებში ერიდებოდნენ უსასრულობის გამოყენებას. მიღებული შედეგების საბოლოო დამტკიცებისათვის ძველმა ბერძნებმა მოიგონეს განსაკუთრებული ხერხი, „ამოწურვის მეთოდი“, რომლითაც ცდილობდნენ აეცდინათ უსასრულობის გამოყენება. ეს მეთოდი აკმაყოფილებდა შედარებით მა-

დალ ლოგიკურ მოთხოვნილებას, მაგრამ იყო არაოპერატიული და გამოყენებისათვის ძალიან მძიმე; მისი გამოყენება მოითხოვდა ამა თუ იმ კონკრეტულ ვითარებაში ხელოვნური გზების მიგნების ძალიან დიდ მოხერხებას და, ამასთან ერთად, გულისხმობდა შედეგის ცოდნას, რომელიც საბოლოოდ უნდა განმტკიცებულიყო.

მათემატიკური ატომიზმით და „ამოწურვის მეთოდით“ წარმოდგენილ გაორებულ ვითარებაში თავს იჩენს შინაგანი გათიშულობა როგორც მათემატიკის საგანში—სასრულოსა და უსასრულოსი ერთიმეორისაგან მოწყვეტის სახით, ისე მათემატიკის მეთოდში—აღმოჩენისა და დასაბუთების ხერხების ერთიმეორისაგან სიშორის მხრით. მხოლოდ მე-17 საუკუნიდან გახდა შესაძლებელი ერთიმეორესთან დაახლოვება აღმოჩენის და დამტკიცების გზებისა და, ამასთან ერთად, მთლიანობის დამყარება თვით მათემატიკის საგანში. ამ მხრით საინტერესოა ის გზა, რომლითაც დეკარტი მივიდა კოორდინატთა პრინციპისა და ანალიზური გეომეტრიის აღმოჩენისაკენ. აქ ძალიან საგულისხმო ისაა, რომ საქმე დაიწყო სწორედ მეთოდოლოგიური ხასიათის პრობლემის დასმით—ისეთნაირად გარდაქმნილიყო მეცნიერული მეთოდი, რომ ერთიან მეთოდში ერთიმეორესთან მჭიდროდ დაკავშირებული ყოფილიყო აღმოჩენისა და დასაბუთების ხერხები.

დეკარტი ამოცანად ისახავდა ისეთი მეთოდის შექმნას, რომელშიაც ლოგიკური სიზუსტე ორგანულად შეერთებული იქნება მეთოდის ქმედით ხასიათთან. იმისათვის, რომ აღმოჩენის იარაღი იყოს, მეთოდს უნდა ანალიზური ხასიათი ჰქონდეს, რადგან სწორედ ანალიზის დროს ხდება უცნობიდან ცნობილზე გადასვლა. მაგრამ ის უნდა იყოს ალგებრული ანალიზი და არა ძველების გეომეტრიული ანალიზი და ხორციელდებოდეს განტოლებათა საშუალებით. რადგან ამ შემთხვევაში გვაქვს გადასვლები, რომელნიც, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, შეიძლება შებრუნებული იყოს, ამიტომ გზის გავლა ანალიზური, რეგრესიული მიმართულებით ამით უკვე მოასწავებს მისივე გავლას სინთეზური, პროგრესული მიმართულებით, ისე რომ ანალიზი იძენს იმ ლოგიკურ ძალას, რომელიც სინთეზს აქვს, და ხდება არა მარტო მიგნების, არამედ საბოლოო დამტკიცების საშუალებაც. ანალიზი და სინთეზი ერთიმეორეს მჭიდროდ უკავშირდება, რითაც ხორციელდება აღმოჩენისა და დამტკიცების გზების დაახლოვება. ანალიზის განთავისუფლება გეომეტრიული წარმოდგენებით გადატვირთულობისაგან არ უნდა იყოს მიღწეული ალგებრული სიდიდეების გეომეტრიული სახეებისაგან მოწყვეტის ხარჯით. პირიქით, საჭიროა მიეცეს მეთოდური ხასიათი კავშირს არითმეტიკულ და გეომეტრიულ ობიექტებს შორის, ეს კავშირი დაყრდნობილი უნდა იყოს ერთიან და მარტივ პრინციპზე.

ამგვარი ვითარების პირობებში დეკარტმა ყურადღება მიაქცია იმას, რომ მეოთხე პროპორციულისა და საშუალო პროპორციულის წესების გამოყენებით შეიძლება მონაკვეთთა ნამრავლი, შეფარდება, კვადრატული ფესვი მონაკვეთისაგან კვლავ მონაკვეთის საშუალებით იყოს გამოთქმული. ამასთან დაკავშირებით დეკარტმა წამოაყენა საერთო პრინციპი, რომლის მიხედვით

რიცხვებს მარტივი და ამასთანავე საყოველთაო გეომეტრიული გამოხატულება უნდა ჰქონდეთ, სახელდობრ მონაკვეთების სახით. მყარდება სრული შესაბამისობა რიცხვთა სიმრავლესა და მონაკვეთთა სიმრავლეს, ანუ ღერძის წერტილთა სიმრავლეს შორის. ამაში მდგომარეობს ძირითადი ბირთვი კოორდინატთა იდეისა. ამის შემდეგ საჭირო იქნება მხოლოდ განზომილებათა გაძლიერება: ორღერძიან კოორდინატთა სისტემის საშუალებით სიბრტყის წერტილთა დაკავშირება რიცხვთა წყვილებთან, სამგანზომილებიან სისტემის საშუალებით სივრცის წერტილთა დაკავშირება რიცხვთა სამეულებთან.

კოორდინატთა პრინციპმა მჭიდრო კავშირი დაამყარა არითმეტიკისა და გეომეტრიის საგნებს შორის და ამით ბოლო მოეღო ძველს მათემატიკაში დაკანონებულ და შემდეგშიაც გაგრძელებულ მათ გათიშვას. მათემატიკა ორად გაპობილი არ რჩება და მისმა საგანმა მთლიანობა შეიძინა. დამახასიათებელია, რომ ერთიანობის განმტკიცებამ მათემატიკის მეთოდში ხელი შეუწყო ერთიანობის განმტკიცებას მათემატიკის საგანშიც, ისე რომ მე-17 საუკუნეში მომხდარი ძირითადი ხასიათის გარდაქმნები, მათემატიკის მეთოდისა და საგნის შიგნით მთლიანობის დამყარების ნიშნის ქვეშ, ერთიმეორესთან დაკავშირებით მიმდინარეობდა.

რიცხვებსა და წერტილებს შორის მჭიდრო კავშირის დამყარების შემდეგ რიცხვებში უკვე გამოჩნდება მათი გამაერთიანებელი ზოგადი, წერტილები კი ერთიმეორისაგან გასარჩევი ხდება და კონკრეტულ ხასიათს იძენს. აქ ხორციელდება ზოგადისა და ცალკეულის ერთიანობა და ამასთან დაკავშირებულია ცვლადი სიდიდის წამოწევა. ცვლადი სიდიდე მის ცალკეულ მნიშვნელობებთან განუყრელად დაკავშირებულია. კოორდინატთა პრინციპის წამოწევასთან დაკავშირებით ცვლადი სიდიდის ცნება იწყებს გაბატონებულ მნიშვნელობის მიღებას მათემატიკაში. „შემობრუნების წერტილი მათემატიკაში,—ამბობს ფ. ენგელსი,—იყო დეკარტის ც ვ ლ ა დ ი ს ი დ ი დ ე. ამის წყალობით მათემატიკაში შევიდა მ ო ძ რ ა ო ბ ა და დ ი ა ლ ე ქ ტ ი კ ა...“ [8].

ამგვარად, მათემატიკურ მეთოდში დიალექტიკურობის განმტკიცება, ერთიმეორესთან დაკავშირება ანალიზისა და სინთეზის, აღმოჩენისა და დასაბუთების გზებისა და სხვ. მოასწავებს დიალექტიკურობის განმტკიცებას მათემატიკის საგანშიც, ცვლადი სიდიდის წინა პლანზე წამოწევას. ახალი პერიოდი მათემატიკაში იწყება იმ საფუძვლიან ცვლილებასთან დაკავშირებით, რომელიც განიცადა აზროვნების ხერხმა მათემატიკაში, მათემატიკის საერთო მეთოდოლოგიამ.

ზემონათქვამი საშუალებას გვაძლევს შევუდგეთ პრობლემის გადაწყვეტას იმ ძირათადი ნიშნის შესახებ, რომელიც საფუძვლად უნდა დაედოს მათემატიკის ისტორიის პერიოდიზაციას. ეს არის თვითონ აზროვნების ხერხი და მისი ძირითადი განვითარება, რაც მდგომარეობს აზროვნების მეტაფიზიკური ხერხიდან აზროვნების დიალექტიკურ ხერხზე გადასვლაში. მათემატიკის ისტორია უნდა დაიყოს ორ ძირითად პერიოდად იმისდა მიხედვით, თუ რომელი აზროვნების ხერხია მოქმედებაში—მეტაფიზიკური თუ დიალექტიკური. ძველი მათემატიკისათვის დამახასიათებელია აზროვნების მეტაფიზიკური

ხერხი. მართალია, ძველი ბერძნების შესახებ ცნობილია ფორმულა, რომ მათ-თან, შედარებით მეცნიერების განვითარების მომდევნო ხანასთან, როდესაც თავის ძლიერი გამოვლენა ჰპოვა აზროვნების მეტაფიზიკურმა ხერხმა, დია-ლექტიკური აზროვნება გამოდის მთელი თავისი პირველყოფილი სიმარტივით, მაგრამ, თუ ავიღებთ უფრო მსხვილ პლანს, ძველი ბერძნების მათემატიკაც უნდა იყოს მიკუთვნებული მათემატიკის ისტორიის მეტაფიზიკური პერიოდისადმი, რომელიც საერთოდ წარმოადგენს მათემატიკის განვითარების პირველ პერიოდს.

ძველი ბერძნებისათვის საერთოდ უცხო იყო ცვლადი სიდიდის ცნება და მისი როლი მათემატიკაში. ის, რასაც ჩვენ ცვლადის მნიშვნელობებად მი-ვიჩნევთ, ძველი ბერძნებისათვის ერთგვარი შეჩერებული მდგომარეობის გამო-მხატველი იყო. შეიძლება ითქვას, რომ ამ შემთხვევაში ყველაზე ტიპიურ გა-მოვლენას პოულობს მეტაფიზიკური ხასიათის მქონე „ჯამის თვალსაზრისი". აქ, პირველ რიგში, უნდა გავიხსენოთ ძენონის აპორიები, რომელთა მიზანი იყო მოძრაობის ლოგიკური შეუძლებლობის ჩვენება.

აპორიაში „ისარი" ძენონი ასეთნაირად მსჯელობს: მოძრავი ისარი ყო-ველ მომენტში გარკვეულ ადგილას არის, მაგრამ, თუ ის ამ ადგილას იმყო-ფება, ის გაჩერებულ მდგომარეობაშია და, მაშასადამე, გამოდის, რომ მოძრავი ისარი ყოველთვის გაჩერებულ მდგომარეობაშია [9].

ძენონის მიერ ჩადენილი შეცდომა იმაში მდგომარეობს, რომ, როგორც ეს წინათაც აღნიშნული გვქონდა, მოძრაობის დროს სხეულის ყოფნა ამა თუ იმ ადგილას სრულებით არ ნიშნავს მის უძრაობას. უძრაობა ისაა, რომ დრო მიდის, სხეული კი განაგრძობს იმავე ადგილზე ყოფნას. ძენონს, ამგვარად, მოძრაობა წარმოდგენილი აქვს როგორც უძრაობის მდგომარეობა-თა, გაჩერებათა ჯამი. მსგავსი ხასიათი აქვს ძენონის აპორიებს „აქილევსი და კუ" და „დიხოტომია". აპორიაში „აქილევსი და კუ" გამოდის, რომ აქილევსი ვერასოდეს ვერ დაეწევა კუს, რადგან, როცა აქილევსი მივა იმ ადგი-ლას, სადაც მოძრაობის დასაწყისში იყო კუ, უკანასკნელი მოასწრებს ამ ადგილის შეცვლას და ახალი ადგილის დაკავებას; მაგრამ, როცა აქი-ლევსი ამ ახალ ადგილზე მივა, კუ კვლავ ადგილიდან გადანაცვლებული იქნება და ა. შ. უსასრულოდ [9, გვ. 112—120]. აქ გარკვეული მსჯელობის საშუალებით გამოყოფილი ადგილთა უსასრულო სიმრავლე განხილულია რო-გორც ერთგვარად გამოყოფილი თვით მოძრაობის პროცესში, როგორც ამ მოძრაობის სადგურები, როგორც შეჩერების მდგომარეობის გამომხატველი, ისე რომ აქაც ძალაშია მოძრავი სხეულის ამა თუ იმ ადგილას ყოფნის გაგება როგორც შეჩერების მდგომარეობისა.

აპორიის „დიხოტომია" საშუალებით ძენონს სურს მოძრაობის ლოგიკუ-რი შეუძლებლობა იმ მხრივ გამოავლინოს, რომ მოძრავმა სხეულმა, სანამ მთელ გზას გაივლის, ჯერ უნდა გაიაროს მისი ნახევარი, მაგრამ უფრო ადრე ამ ნა-ხევარის ნახევარი და ა. შ. [9]. აქაც გამოდის, რომ მოძრავი სხეულის სათანა-დო მდგომარეობა (მაგალითად, გზის შუა ადგილას) შეფასებულია როგორც მოძრაობის გამწყვეტი და მის ორ მოძრაობად დამშლელი, რაც იმას მოასწა-ვებს, რომ ეს მდგომარეობა გაგებულია როგორც გაჩერების მდგომარეობა.

ძენონის რიგი აპორიებისა მიმართულია სიმრავლისა და რიცხვის ცნებე-ბის წინააღმდეგ. ძენონის მსჯელობით რაიმე საგანი ნაწილთა სიმრავლისგან რომ შედგებოდეს, მაშინ გამოვა, რომ იმისდა მიხედვით, ნაწილებს მივიჩნევთ განფენადად თუ განუფენადად, მთელი საგანი გამოვა ან უსასრულოდ მცირე, ან უსასრულოდ დიდი. ძენონის ყველა მოყვანილი აპორიები აგრეთვე მიმართულია უსასრულობის წინააღმდეგ.

ძენონის აპორიებმა დიდი გავლენა მოახდინეს მთელი ძველი საბერძნე-თის მათემატიკის ხასიათის ფორმირებაზე. ცდილობდნენ იმგვარად აეგოთ ზუსტი მათემატიკური თეორიები, რომ შეძლებისდაგვარად გვერდი აეარათ სიმრავლის, რიცხვის და უსასრულობის გამოყენებას, ეს განსაკუთრებით ნათ-ლად ჩან ევკლიდის „საწყისების" მაგალითზე.

რასაკვირველია, მოთხოვნილება—განთავისუფლებული იყოს მათემატიკური მსჯელობა უსასრულობისადმი მიმართვისაგან შეიძლება შეხებოდა მხოლოდ მათემატიკურ დამტკიცებებს და მკაცრ მათემატიკურ მსჯელობებს, და არა გზებს, რომელთა საშუალებით მათემატიკური აღმოჩენები კეთდებოდა. უკა-ნასკნელები ერთგვარად „თავისუფალია" და არ შეიძლება იყოს სათანადო კონტროლის და აკრძალვის საგანი. როცა ადამიანს სურს თავის თავს ძალა დაატანოს და უსასრულობაზე არ იფიქროს, სწორედ ამით ის უსასრულობაზე ფიქრობს. უსასრულობას მოქალაქეობრივი უფლება შენარჩუნებული ჰქონდა მხოლოდ ევრისტულ პლანში, მათემატიკური აღმოჩენებისა და მიგნების ფარგლებში. მათემატიკური დამტკიცებისათვის კი ნებადართული იყო მხოლოდ სასრული. აქ კვლავ თავს იჩენს ანტიკური მათემატიკისათვის დამახასიათებელი სიშორე აღმოჩენისა და დამტკიცების გზებისა.

უსასრულობის ცნებაზე დაყრდნობილ ერთერთ სამუშაო იარაღს მათემა-ტიკურ ძიებათა დროს წარმოადგენდა მათემატიკური ატომიზმი, რომლის მი-ხედვით ესა თუ ის სიდიდე წარმოიდგინება როგორც სათანადო აქტუალურ უსასრულოდ მცირე ელემენტების თავმოყრა, მაგალითად, რაიმე მონაკვეთი განიხილება როგორც ჯამი უსასრულოდ მცირე სიგრძის მქონე მონაკვეთებისა, რაიმე სხეული—როგორც ჯამი უსასრულოდ მცირე სისქის მქონე ფურცლე-ბისა, მსგავსად ფურცლებისაგან შედგენილი წიგნისა და სხვ. მათემატიკურ ატომიზმში უსასრულობა გამოდიოდა ერთგვარად დასრულებულ, სტატიკურ მდგომარეობაში, მაგალითად, წრეწირი გატოლებული იყო მრავალკუთხედთან გვერდთა უსასრულო სიმრავლით და თითოეული გვერდი წარმოსდგებოდა როგორც უსასრულოდ მცირე.

უსასრულობა, როგორც ერთგვარად გაქვავებული და სასრულის მიღმა მყოფი, ძალაუნებურად ემსგავსებოდა სასრულს. უსასრულობის მოწყვეტა სასრულისაგან გადადის თვით უსასრულობის წარმოდგენაში სასრულის მსგავ-სად. ჰეგელი სამართლიანად ამბობს, რომ, თუ უსასრულოს დავიჭერთ სასრუ-ლოსაგან წმინდად და მისგან შორს, ამით მას მხოლოდ დავასასრულებთ [10]. რაც შეეხება ამოწურვის მეთოდს, მასში საერთოდ ცდილობდნენ შემოფარგლუ-ლიყვნენ სასრულო შესაძლებლობებით. ამგვარად, დაპირისპირებაში: მათემა-ტიკური ატომიზმი—ამოწურვის მეთოდი გვაქვს ერთიმეორისაგან მოწყვეტა

სასრულოსი და უსასრულოსი და, ამასთანავე, დაპირისპირების თითქმის მთე-რეში, მართალია, თავისებური სახით მაგრამ მაინც გაბატონებულია სასრულო მიდგომა. საერთოდ, ანტიკურ მეცნიერებას ახასიათებს სასრულოსათვის პრიმატის მიკუთვნება შედარებით უსასრულოსთან. ამასთან დაკავშირებულია მათემატიკაში მუდმივი სიდიდის გაბატონების მიდრეკილება. მართლაც, ამ შემთხვევაში თავს იჩენს ჯამის თვალსაზრისი. ესა თუ ის რიცხვობრივი მნიშვნელობა გაგებულია როგორც გაჩერების მდგომარეობა, რითაც თვით მუდმივი სიდიდის ცნება მახინჯდება, რადგან ნამდვილად მუდმივი სიდიდე რიცხვი კი არ არის, არამედ ფუნქციაა.

„ჯამის თვალსაზრისი“ ცვლადი სიდიდის შესახებ ამ სიდიდეს გაიაზრებს როგორც შეჩერებულს მის ყოველ ცალკეულ მნიშვნელობაზე და ის წარმოსდგება როგორც მუდმივთა თავმოყრა (ისევე როგორც მოძრაობას—უძრავ მდგომარეობათა ჯამის სახით), იმ დროს, როცა მუდმივის ცნება, მისი სწორი გაგებისას, თვითონ საჭიროებს ცვლადი სიდიდის ცნებას. როცა ცალკეული მნიშვნელობანი განიხილება მათი მომცველი ზოგადის და ცვლადი სიდიდის უგულებელყოფის პირობებში, მაშინ თვით ეს სიდიდეები გამოიყურებიან როგორც მუდმივები. ანტიკურ მათემატიკაში გარკვეულობა გამოდის როგორც მუდმივობა და აქ იჩენს თავს აზროვნების მეტაფიზიკური წესის გავლენა. ანტიკური მათემატიკა და მათემატიკის შემდგომი ისტორია მე-17 საუკუნის დიდ აღმოჩენებამდე შეგვიძლია დავახასიათოთ როგორც მათემატიკის განვითარების პირველი დიდი პერიოდი, აზროვნების მეტაფიზიკური წესის ნიშნის ქვეშ მდგომი.

უძველესი ხანა—ძველი აღმოსავლეთის მათემატიკა აგრეთვე სავსებით მიეკუთვნება მათემატიკის განვითარების საერთო ხაზს, იმ აზრით, რომ აქ გვაქვს გარკვეული ნაწილი მათემატიკის ნამდვილი ისტორიისა, და არა ისეთი რამ, რაც შეიძლება შეფასდეს როგორც მხოლოდ მოსამზადებელი პერიოდი მათემატიკის ისტორიისა, როგორც მისი წინაისტორია.

უნდა ითქვას, რომ რამოდენიმე უკანასკნელი ათეული წლის განმავლობაში საფუძვლიანად შეიცვალა შეხედულებანი ძველი აღმოსავლეთის მათემატიკის შესახებ. წინანდელი შეხედულებების მიხედვით მათემატიკამ მეცნიერული თეორიის სახე მიიღო მხოლოდ ძველ საბერძნეთში. აღმოსავლეთის მათემატიკას უყურებდნენ როგორც რეცეპტების სახით მიწოდებულ კრებულს, რომელნიც მიღებულია უხეში ემპირიული გზით, რაიმე თეორიული მომენტის გარეშე და ხშირად ძალიან დიდ შეცდომებს შეიცავს. მათემატიკის წესების დამდგენლებად ითვლებოდნენ კულტის წარმომადგენლები—ქურუმები. ჯერ კიდევ არისტოტელი ამბობდა, რომ ეგვიპტელი ქურუმების მოცალეობა—მეცნიერების დასაწყისია. თვით მათემატიკური ცოდნა წარმოდგენილი ჰქონდათ როგორც სავსებით მისტიფიცირებული, ის რელიგიურ წარმოდგენებს ემორჩილებოდა და ამიტომ ეს ცოდნა საუკუნეების განმავლობაში გაქვავებული და უძრავი იყო, განვითარებას არ განიცდიდა და სრულებით შემცდარი მათემატიკური წესები დიდ გამძლეობას იჩენდნენ.

დღეს ჩვენ სრულებით სხვა შეხედულება გვაქვს ძველი აღმოსავლეთის მათემატიკაზე. ძველი აღმოსავლეთის მათემატიკაც არ იყო თეორიული მიდგომის და დასაბუთების რაღაც ჩანასახების გარეშე. საერთოდ ძნელი წარმოსადგენია რაიმე მეცნიერება, თუნდაც თავის განვითარების დაბალ საფეხურზე, როგორც რეცეპტების უბრალო კრებული, რომელიც ყოველგვარი თეორიული მიდგომის გარეშე რჩება, რომელშიც არ არის დასაბუთების უმარტივესი ელემენტები და თუნდაც რაღაც საწყისი წარმოდგენა მეცნიერული სიზუსტის შესახებ.

ძველი აღმოსავლეთის მათემატიკა, მართალია, განვითარების გასწვრივ უმდაბლესი დონის გამომხატველია, მაგრამ ეს არის გარკვეული დონე მათემატიკის განვითარების პროცესში და არა ამ პროცესის მიღმა ყოფნა. როგორც ჩანს, არ არის სწორი ძველი აზრი იმის შესახებ, რომ ძველ აღმოსავლეთში პრაქტიკულად იყენებდნენ წესებს, რომელნიც უხეშ შეცდომებს შეიცავდა და ეს წესები საუკუნეების განმავლობაში გაუსწორებელი რჩებოდა. ამასთანავე, საფიქრებელია, რომ მათემატიკური ცოდნის შემქმნელები ძველს აღმოსავლეთში ძირითადად ქურუმები კი არ იყვნენ, არამედ პრაქტიკულ საქმიანობასთან უფრო ახლოს მდგომი ხალხი. მარტო მოცალეობა საკმარისი არაა მეცნიერულ საქმიანობაში ჩაბმისათვის და ამისათვის საჭიროა თვით ცხოვრებიდან მიღებული გარკვეული იმპულსები. მართალია, ძველი აღმოსავლეთის მეცნიერება მისტიკურ ელემენტებთან გადაბმული იყო (ეს თავს იჩენდა მეცნიერების შემდგომ ისტორიაშიც), მაგრამ ამ შემთხვევაში გვაქვს მისტიკური ელემენტების გადანასკვა მეცნიერულ წარმოდგენებთან და არა თვით მეცნიერების მისტიკად გადაქცევა. შემცდარია ძველი აღმოსავლეთის მეცნიერების მნიშვნელობის უგულებელყოფა, აღმოსავლეთის აზროვნების მიჩნევა მეცნიერების მხოლოდ მოსამზადებელ ხანად და ფიქრი იმის შესახებ, რომ მხოლოდ ძველი საბერძნეთიდან იწყება ჩვენთვის გასაგები სულიერი სამყარო, როგორც ეს, მაგალითად, გამოთქმული აქვს ჰეგელს („საბერძნეთის ხსენებისას განათლებული ევროპიელი, და განსაკუთრებით ჩვენ გერმანელები, ისე ვგრძნობთ თავს თითქოს საკუთარ სახლში მოვხვდით" [11]).

ჩვენ ზემოთ შევეცადეთ გვეჩვენებინა, რომ პირველი დიდი პერიოდი მათემატიკის განვითარებისა, რომელიც მე-17 საუკუნის დიდ აღმოჩენებამდე გრძელდებოდა, შეიძლება დახასიათებული იყოს როგორც აზროვნების მეტაფიზიკურ ხერხთან დაკავშირებული. ეს პერიოდი აღინიშნება მათემატიკის საგნის და აგრეთვე მეთოდის ერთგვარი შინაგანი გათიშულობით, ერთიმეორისაგან დიდი დაშორებით აღმოჩენისა და დასაბუთების გზებისა, სასრულოს და უსასრულოსი, წყვეტილისა და უწყვეტის, პირველ პლანზე სასრულოსა და უცვლელობის წამოწევით.

სრულებით სხვაგვარი ხასიათი მიიღო მათემატიკამ შემდგომში, მე-17 საუკუნეში მოხდენილ გარდატეხის შემდეგ. არითმეტიკა მჭიდროდ დაუკავშირდა გეომეტრიას, განხორციელდა შინაგანი მთლიანობა სასრულოსი და უსასრულოსი, წყვეტილისა და უწყვეტის. წინა პლანზე წამოიწია ცვლადი სიდიდის ცნება. განმტკიცდა ერთიანობა არა მარტო მათემატიკის საგანში,

არამედ მათემატიკის მეთოდშიც: ანალიზი მჭიდროდ დაუკავშირდა სინთეზს, აღმოჩენის გზები დასაბუთების გზებს და სხვ. სინთეზური ხასიათი მიიღო როგორც მათემატიკის საგანმა, ისე მათემატიკის მეთოდმა. მათემატიკური აზროვნება გადავიდა აზროვნების დიალექტიკური ფორმის რელსებზე.

რასაკვირველია, საკმაოდ ბევრი დრო გავიდა, სანამ მათემატიკური თეორია იმგვარად აგებული და გააზრებული იყო, რომ სავსებით გამოვლინდა მისი დიალექტიკური ხასიათი და ეს დიალექტიკური ხასიათი ცნობიერად იყო გათვალისწინებული. აზროვნების ძველი მეტაფიზიკური ხერხი დიდი დროის განმავლობაში ახალ ვითარებაშიც ახდენდა თავის გავლენას, მაგრამ არსებითი იყო თვით ამ ახალ ვითარებაზე გადასვლა. ახალი ვითარების ძველი ვითარებისაგან განსხვავების კარგ ილუსტრაციას იძლევა შედარება კომბინაციისა: მათემატიკური ატომიზმი — ამოწურვის მეთოდი ზღვართა თეორიასთან.

მათემატიკური ატომიზმის ხერხის გამოყენებას ერთგვარი პირდაპირი მეთოდის ხასიათი ჰქონდა, მაგრამ სამაგიეროდ ის ძალიან ნაკლოვანი იყო ლოგიკური სიზუსტის მხრით. „ამოწურვის მეთოდი" შედარებით მაღალი სიზუსტის მქონე იყო, მაგრამ მას აკლდა ოპერატიულობა; ის სრულებით გამოუსადეგარია როგორც ახლის მიგნებისა და აღმოჩენის საშუალება. ამასთანავე, ის, ასე ვთქვათ, ძალიან არაპირდაპირი, აპაგოგიური ხასიათის იყო.

ზღვართა თეორია აერთიანებს მათემატიკური ატომიზმის და ამოწურვის მეთოდის დადებით მხარეებს და თავისუფალია მათი ნაკლებისაგან. ის შინაგანი მთლიანობის მქონეა და მოკლებულია იმ შინაგან გათიშულობას, რაც დამახასიათებელია კომბინაციისათვის: მათემატიკური ატომიზმი—ამოწურვის მეთოდი. ზღვართა მეთოდი ვარგა როგორც აღმოჩენისათვის, ისე დამტკიცებისათვის, მას ოპერაციულობაც გააჩნია და დამტკიცების ძალაც, და უფრო ძლიერადაც, ვიდრე ეს დადებითი მხარეები განაწილებული სახით გვაქვს მათემატიკურ ატომიზმში და ამოწურვის მეთოდში. ამასთანავე, ზღვართა მეთოდის სასარგებლოდ ლაპარაკობს მისი შედარებით პირდაპირი ხასიათი, წინააღმდეგ იმისა, რასაც ადგილი აქვს ამოწურვის მეთოდში.

ჩვენ რომ ამოწურვის მეთოდი და მათემატიკური ატომიზმი იმ ფონზე განვიხილოთ, რომელსაც ზღვარისაკენ მისწრაფების პროცესი იძლევა, მივიღებთ: მათემატიკური ატომიზმი ამ უსასრულო პროცესს, ასე ვთქვათ, გადაახტება და გაასწრებს, მას, როგორც დამთავრებულს, მიიჩნევს და გამოხატავს იმას, თუ რა გვექნება ამის შემდეგ. თუ ავიღებთ იმავე წრეში ჩახატულ მრავალკუთხედის მაგალითს, მათემატიკური ატომიზმი მრავალკუთხედის გვერდების შემცირებას არ უცდის და საქმეს თვლის როგორც თითქოს თავიდანვე უკვე დამთავრებულს; წრეს წარმოადგენს როგორც მრავალკუთხედს, გვერდთა უსასრულო სიმრავლით, და თითოეულ გვერდს მიიჩნევს, როგორც აქტუალურ უსასრულოდ მცირეს. ამოწურვის მეთოდი კი, პირიქით, ზღვრისაკენ მისწრაფების პროცესს ჩამორჩება და შუა გზაზე დგება. ის გარკვეულ მრავალკუთხედზე ჩერდება და ამის შემდეგ შორს არ მიდის. როგორც მათემატიკურ ატომიზმში, ისე ამოწურვის მეთოდში თავს იჩენს ერთგვარი სტატიკური მიდ-

გომა—საქმის წარმოდგენა ცვალების პროცესის გარეშე. მათემატიკურ ატომიზმში მთელი წარმოადგენს უსასრულოდ მცირეთა უცვლელ მზა ჯამს. ამოწურვის მეთოდში პროცესი ჩერდება და იყინება ნაბიჯების გარკვეულ სასრული რაოდენობის შემდეგ. ამასთანავე, როგორც ეს წინათაც აღნიშნულია, აქ ადგილი აქვს სასრულოსა და უსასრულოს ერთიმეორისაგან მოწყვეტას. მათემატიკურ ატომიზმში გაბატონებულია ხაზგასმული, თავიდანვე მზა სახით აღებული უსასრულობა, რაც მაინც სასრულოს ემსგავსება, ამოწურვის მეთოდში თავიდანვე ცდილობენ უსასრულობის სრულიად განდევნას.

ზღვართა მეთოდში კი გაშლილია გარკვეული უსასრულო პროცესი და აქ თვით უსასრულობა სასრულოსთან მჭიდრო კავშირში გვევლინება. წინა პლანზე, მათემატიკის წინა პერიოდისაგან განსხვავებით, წამოწეულია უსასრულობა და ამ შემთხვევაში უსასრულობა თავის ნამდვილი და სრული სახით გვევლინება, რაც გამოიხატება მის განუყრელ კავშირში სასრულოდან. განსხვავებით კომბინაციისაგან: მათემატიკური ატომიზმი—ამოწურვის მეთოდი, გვაქვს არა სტატიკური და უძრავი ვითარება, არამედ ცვლადი სიდიდის გამოყვანა ძირითად როლში.

როგორც საერთო დასკვნას ზემონათქვამიდან, ვღებულობთ შემდეგს: ძირითადი პერიოდები განირჩევა აზროვნების ხერხით—მეტაფიზიკურით და დიალექტიკურით. აქ გვაქვს პერიოდიზაციის საერთო საფუძველი. შეიძლება დაისვას საკითხი: ხომ არ არღვევს ეს პერიოდები მათემატიკის განვითარების ერთიანობას, ხომ არ გვექნება აქ იმის მსგავსი მდგომარეობა, რაც ისტორიისადმი „საფეხურებრივი" მიდგომისას. უნდა ითქვას, რომ განსახილველ შემთხვევაში სწორედ სრულებით დაძლეულია „საფეხურებრივი" მიდგომა. გადასვლა აზროვნების მეტაფიზიკური ხერხიდან დიალექტიკურ ხერხზე მთლიან პროცესს წარმოადგენს და ამ პროცესის საფეხურები არ არიან ერთიმეორისაგან მოწყვეტილი. ერთიანი ისტორიული კანონზომიერება გამოხატავს აზროვნების მეტაფიზიკური ხერხიდან დიალექტიკურ ხერხზე გადასვლას და თვით ამ კანონზომიერებას დიალექტიკური ხასიათი აქვს. საქმე სრულებით არ მიდის აზროვნების გაორებისაკენ და დადებითი სახით აღებულ აზროვნების ორი ფორმის ცნობისაკენ და დაკანონებისაკენ. თვითონ მეტაფიზიკური ხერხი აზროვნებისა ნეგატურ ასპექტში ლაპარაკობს დიალექტიკის სასარგებლოდ, ისევე როგორც, მაგალითად, მოძრაობის უარყოფა უარყოფით პლანში თვითონ ადასტურებს მოძრაობის აუცილებლობას.

მოძრაობის წარმოდგენა, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამისა, ძალაუნებურად მოითხოვს მოძრაობის გამოყენებას, რადგან საკითხი დაისმება უძრაობის ერთი მდგომარეობიდან მეორეზე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს შესახებ. უძრაობის ცნება არამცთუ აუქმებს მოძრაობის ცნებას, არამედ, პირიქით, მას გულისხმობს. გაჩერება და სადგურები შეიძლება გვქონდეს მხოლოდ მოძრაობის პროცესში.

დიალექტიკა არსებითად დაკავშირებულია უარყოფის მნიშვნელობის გათვალისწინებასთან და მის შინაგან ხასიათთან და ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა იქმნება თვითონ დიალექტიკის უ ა რ ყ ო ფ ი ს ცდასთან დაკავშირებით.

ასევე არ შეიძლება თვით *უარყოფის* შესაძლებლობის *უარყოფა*, რადგან მაშინ ადრე საჭირო გახდება თვით ამ უარყოფის უარყოფა და ა. შ. დიალექტიკისა და უარყოფის უარყოფა ძალაუნებურად მათ სასარგებლოდ ლაპარაკობს. თუ დიალექტიკას შეცდომად მიიჩნევენ, უნდა იმავე დიალექტიკით ისარგებლონ, რომ თვით შეცდომაში ისეთი რამ დაინახონ, რაც ნეგატურ ასპექტში კვლავ ჭეშმარიტების სასარგებლოდ ლაპარაკობს. შეცდომა, როგორც ჭეშმარიტების უარყოფა და უგულებელყოფა, თავისი უარყოფითი ხასიათით სწორედ ჭეშმარიტების სასარგებლოდ ლაპარაკობს.

რასაკვირველია, აზროვნების განვითარების მეტაფიზიკური საფეხური სრულებით არ ნიშნავს იმას, რომ ის, რაც იმ დროს გაკეთებული იყო, საერთოდ შეცდომას წარმოადგენს. აზროვნება მეტაფიზიკურ საფეხურზეც ძალაუნებურად დიალექტიკურ ელემენტებს გულისხმობს, რადგან ძირითადად აზროვნება, განსაკუთრებით თავის განვითარებაში, დიალექტიკურია. ის ცალმხრივობა და დამახინჯება, რასაც სპეციფიურად აზროვნების მეტაფიზიკური ხერხი იწვევს, როგორც გარკვეული ნაკლი, თვით ამჟღავნებს თავის მიუღებლობას; ეს გამოსწორებული უნდა იყოს მეცნიერების შემდგომი განვითარებისას, დიალექტიკური აზროვნების სრულფასოვნად და ცნობიერად ფლობის პირობებში.

მეცნიერების განვითარების გარკვეულ დონეზე აზროვნების მეტაფიზიკური ხერხი აუცდენელია. დიალექტიკისათვის განვითარების თვალსაზრისს ძირითადი მნიშვნელობა აქვს და თვით დიალექტიკური აზროვნება გარკვეული განვითარების შედეგს წარმოადგენს. საკუთარი ფაქტით ის იმასვე ადასტურებს, რასაც თვითონ ამბობს.

შრომის დასაწყისში აღნიშნული იყო მიუღებლობა მათემატიკის ისტორიის ისეთი პერიოდიზაციისა, რომელიც პირდაპირ გაიმეორებდა საერთო ისტორიის პერიოდიზაციას, რადგან ასეთი მიდგომა გადაჭარბებით ფართო იქნებოდა, და ისეთი პერიოდიზაციისაც, რომელშიაც ერთგვარი აღწერილობითი სახით, გადაცემისათვის ისტორიული ფორმის მიცემით, მოთხრობილი იქნებოდა მათემატიკის ისტორიის გარკვეული მნიშვნელოვანი ფაქტები და ამ მოთხრობისას ერთგვარი ზღვრები იქნებოდა გატარებული; ეს, პირიქით, ძალიან ვიწრო და გადაჭარბებით პროფესიული მათემატიკური მიდგომა გამოვიდოდა. სწორი გადაწყვეტა იქნებოდა სათანადოდ შერჩეული საშუალო ხაზის აღება. ეს ხაზი ჩვენ დავუკავშირეთ აზროვნების ხერხების განვითარებას და ამისდა მიხედვით განვსაზღვრეთ ორი ძირითადი პერიოდი მათემატიკის ისტორიისა.

რადგან მათემატიკის ზოგადი პერიოდიზაციისათვის გვაქვს გარკვეული ერთიანი საფუძველი, ამ ერთიანობას არ დაარღვევს უკვე ის, რომ თვითეული პერიოდის ფარგლებში ერთგვარი აღწერილობითი სახით უფრო დანაწევრებული სურათი წარმოვადგინოთ, მაგალითად, მეორე პერიოდის ფარგლებში ვილაპარაკოთ ცვლადი სიდიდის გაბატონების ხანაზე და შემდგომ ხანაზე, როცა ცვალებადობის როლი მათემატიკაში უფრო გაღრმავდა და თვით მათემატიკური ოპერაციები ცვლადი სახით წარმოდგნენ. ამ მიმართუ-

ლებით, ცხადია, საჭიროა პრობლემის დამუშავება, მაგრამ ეს იქნება არა პირ-ველადი პერიოდიზაცია, არამედ სათანადო პერიოდების უფრო დიფერენცი-რებული სახით წარმოდგენა. ჩვენს ამოცანას შეადგენდა მხოლოდ ცდა გარ-კვეული ერთიანი საფუძვლის მონახვისა პერიოდიზაციის პრობლემის ზოგადი პრინციპული ფორმით გადაწყვეტისათვის.

ზოგადი მათემატიკის კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 9.X 1962)

Л. П. Гокиели

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЗАЦИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Резюме

В работе указывается на актуальность проблемы и на недостаточную обоснованность существующих теорий периодизации истории математики, на отсутствие в них единого принципа периодизации. Несостоятельны как прямое перенесение в математику общей периодизации истории, так и описательная характеристика периодов, с помощью ссылки на расположенные в хронологическом порядке различные математические теории, приводимые без учета единого исторического основания периодизации.

Важнейшее значение при периодизации имеет соблюдение историзма, требование, чтобы в процессе развития выявилось единство математики, ее предмета, чтобы наличие периодов не умножало самой математики. В связи с этим критикуется „ступенчатый“ подход к истории математики, квалификация ступеней, как вызывающих пластование самой математики. Критически рассматриваются попытки связывания ступеней развития математики со „ступенчатым“ пониманием процесса абстракции, с пластованием формы. Показывается, что античная математика не укладывается в эту схему. Обосновывается несостоятельность квалификации элементарной математики, как определенной исторической ступени развития математики.

Переходя к положительному решению вопроса, автор указывает на особый характер постановки вопроса периодизации истории применительно к математике, в сравнении с другими науками, в связи с выявлением особого значения для математики проблемы о ее соотношении с логикой и методологией. Основные периоды связываются с основными способами мышления: метафизическим и диалектическим. Показывается, что этим обеспечивается единство математики в процессе ее исторического развития и преодолевается „ступенчатый“ подход, поскольку сама метафизика в негативном аспекте свидетельствует в пользу диалектики.

При наличии единого основного принципа периодизации значение единства периодизации не нарушается рассмотрением более дифференцированной картины, подразделением основных периодов на более мелкие, в связи с их некоторой описательной характеристикой.

ლიტერატურა

1. А. Н. Колмогоров, Математика, БСЭ, т. 38, 1938.
2. Аристотель, Метафизика I, 9, перевод А. В. Кубицкого, 1934, стр. 35.
3. B. Russell, Principles of mathematics, § 339, p. 357.
4. B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie, 1930, S. 139–140.
5. E. Lask. Die Logik der Philosophie und Kategorienlehre, 1911, S. 90–91.
6. А. Н. Колмогоров, Математика, БСЭ, т. 26, 1954, стр. 464—483.
7. კ. მარქსი, მათემატიკური ხელნაწერები, 1948, გვ. 49.
8. ფ. ენგელსი, ბუნების დიალექტიკა, 1950, გვ. 266.
9. Аристотель, Физика, VI, 6, Перевод В. П. Карпова, 1936, стр. 119.
10. Гегель, Сочинения, т. 5, 1937, стр. 136.
11. Гегель, Сочинения, т. 9, 1932, стр. 135.

В. Г. Челидзе

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Некоторые определения. Пусть α и β — неотрицательные числа. Функцию $f(t,\tau)$, определенную в области $R=[0\leqslant t<+\infty,\ 0\leqslant\tau<+\infty)$, мы будем называть $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой в области R, если она L-интегрируема на любом сегменте $[0\leqslant t\leqslant x;\ 0\leqslant\tau\leqslant y]$ и существует конечный предел

$$\lim_{x,y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)=I,$$

где

$$F_{\alpha,\beta}(x,\ y)=\frac{1}{x^{\alpha}\,y^{\beta}}\int_0^x\int_0^y (x-t)^{\alpha}\,(y-\tau)^{\beta}\,f(t,\ \tau)\,dt\,d\tau. \tag{1.1}$$

Число I мы будем называть $C_{\alpha,\beta}$-интегралом функции $f(t,\ \tau)$ по области R и обозначать символом $(C_{\alpha,\beta})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\ \tau)\,dt\,d\tau$. Очевидно, что

$$(C_{0,0})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\ \tau)\,dt\,d\tau=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

На основании формулы Дирихле, для любых $\alpha'>\alpha$ и $\beta'>\beta$, имеем равенство

$$F_{\alpha',\beta'}(x,\ y)=\frac{A}{x^{\alpha'}\,y^{\beta'}}\int_0^x\int_0^y (x-t)^{\alpha'-\alpha-1}\,(y-\tau)^{\beta'-\beta-1}\,t^{\alpha}\,\tau^{\beta}\,F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau, \tag{1.2}$$

где

$$A=\frac{1}{B(\alpha+1,\ \alpha'-\alpha)\,B(\beta+1,\ \beta'-\beta)},$$

а $B(\alpha+1,\alpha'-\alpha)$ — эйлеров интеграл первого рода.

Далее, функцию $f(t, \tau)$ мы будем называть $T_{\alpha+1, \beta}$-интегрируемой в области R, если существует конечный предел

$$\lim_{x,y\to\infty} T_{\alpha+1, \beta}(x, y)=I,$$

где

$$T_{\alpha+1, \beta}(x, y)=\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_0^x t^\alpha F_{\alpha, \beta}(t, y)\, dt. \tag{1.3}$$

Число I будем называть $T_{\alpha+1, \beta}$-интегралом функции $f(t, \tau)$ по области R и обозначать символом $(T_{\alpha+1, \beta})\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau$.

Аналогично, некоторое число I назовем $T^*_{\alpha, \beta+1}$-интегралом функции $f(t,\tau)$ по области R, если

$$\lim_{x, y\to\infty} T^*_{\alpha, \beta+1}(x, y)=I,$$

где

$$T^*_{\alpha, \beta+1}(x, y)=\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}}\int_0^y \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(x, \tau)\, d\tau, \tag{1.4}$$

а функцию $f(t, \tau)$ будем называть $T^*_{\alpha,\beta+1}$-интегрируемой на R.

Легко показать, что

$$F_{\alpha+1, \beta+1}(x, y)=\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}}\int_0^y \tau^\beta T_{\alpha+1, \beta}(x, \tau)\, d\tau=\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_0^x t^\alpha T^*_{\alpha, \beta+1}(t, y)\, dt. \tag{1.5}$$

Определение 1. Функцию $f(t,\tau)$, определенную в области R, мы будем называть функцией класса $A_{\alpha+1, \beta}$, если существует число $N\geqslant 0$, такое, что для любого $\nu\geqslant N$

$$\sup_{0\leqslant y+\infty}\left|\int_0^\nu t^\beta T_{\alpha+1,\beta}(x, \tau)\, d\tau\right|=P_\nu<+\infty.$$

Аналогично, функцию $f(t, \tau)$ будем называть функцией класса $A^*_{\alpha,\beta+1}$, если существует число $N\geqslant 0$, такое, что для всякого $\nu\geqslant N$

$$\sup_{0\leqslant y<+\infty}\left|\int_0^\nu t^\alpha T^*_{\alpha,\beta+1}(t, y)\, dt\right|=Q_\nu<+\infty.$$

Очевидно, что если $F_{\alpha, \beta}(x, y)$ ограничена в области R, то $f(t, \tau)$ будет одновременно функцией классов $A_{\alpha+1, \beta}$ и $A^*_{\alpha, \beta+1}$.

Определение 2. Функцию $f(t, \tau)$, определенную в области R, будем называть функцией класса $B_{\alpha, \beta}$, если существует такое число $N \geqslant 0$, что для всякого $\nu \geqslant N$

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} \left| \int_0^{\nu} \tau^{\beta} F_{\alpha, \beta}(x, \tau)\, d\tau \right| = a_{\nu} < +\infty. \tag{1.6}$$

Аналогично, функцию $f(t, \tau)$ будем называть функцией класса $B^*_{\alpha, \beta}$, если существует число $N \geqslant 0$, такое, что для любого $\nu \geqslant N$

$$\sup_{0 \leqslant y < +\infty} \left| \int_0^{\nu} t^{\alpha} F_{\alpha, \beta}(t, y)\, dt \right| = b_{\nu} < +\infty.$$

Легко заметить, что если $F_{\alpha, \beta}(x, y)$ ограничена в области R, то $f(t, \tau)$ будет одновременно функцией классов $B_{\alpha, \beta}$ и $B^*_{\alpha, \beta}$.

Замечание. В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

§ 2. Сравнение методов интегрирования $T_{\alpha+1, \beta}$ и $C_{\alpha+1, \beta+1}$, $C_{\alpha, \beta}$ и $T_{\alpha+1, \beta}$. Справедлива следующая

Теорема 1. Если функция $f(t, \tau)$ класса $A_{\alpha+1, \beta}$ является $T_{\alpha+1, \beta}$-интегрируемой, то $f(t, \tau)$ будет так же $C_{\alpha+1, \beta+1}$—интегрируемой и

$$(C_{\alpha+1, \beta+1}) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau = (T_{\alpha+1, \beta}) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau. \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как $f(t, \tau)$ является функцией класса $A_{\alpha+1, \beta}$, то существует такое число $N \geqslant 0$, что для всякого $\nu' \geqslant N$ будем иметь

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} \left| \int_0^{\nu'} \tau^{\beta} F_{\alpha, \beta}(x, \tau)\, d\tau \right| = a_{\nu'} < +\infty. \tag{2.2}$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\nu \geqslant N$, что

$$I - \varepsilon < T_{\alpha+1, \beta}(x, y) < I + \varepsilon, \text{ когда } x \geqslant \nu,\ y \geqslant \nu, \tag{2.3}$$

где

$$I = (T_{\alpha+1, \beta}) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau.$$

Пусть теперь $x > \nu$, $y > \nu$. Принимая во внимание соотношения (1.5) и (2.3), имеем:

$$F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,\,y)=\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}}\int\limits_{0}^{\nu}\tau^{\beta}\,T_{\alpha+1,\,\beta}(x,\,\tau)\,d\tau+\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}}\int\limits_{\nu}^{y}\tau^{\beta}\,T_{\alpha+1,\,\beta}(x,\,\tau)\,d\tau<$$

$$<I+\varepsilon+\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}}\int\limits_{0}^{\nu}\tau^{\beta}\;T_{\alpha+1,\,\beta}(x,\,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, на основании (2.2), получим

$$\limsup_{x,\,y\to+\infty} F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\leqslant I+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε будем иметь

$$\limsup_{x,\,y\to+\infty} F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\leqslant I. \tag{2.4}$$

Аналогично получим

$$\liminf_{x,\,y\to+\infty} F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\geqslant I. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) получаем

$$\lim_{x,\,y\to+\infty} F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)=I.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если функция $f(t,\,\tau)$ класса $B^{*}_{\alpha,\beta}$ является $C_{\alpha,\beta}$—интегрируемой, то $f(t,\,\tau)$ будет также $T_{\alpha+1,\beta}$—интегрируемой и справедливо равенство

$$(C_{\alpha,\beta})\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,\,y)\,dxdy=(T_{\alpha+1,\beta})\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,y)\;dxdy.$$

Доказательство. Так как $f(t,\tau)$ является функцией класса $B^{*}_{\alpha,\beta}$, то существует такое $N\geqslant 0$, что для всякого $\nu'\geqslant N$

$$\sup_{0\leqslant y<+\infty}\left|\int\limits_{0}^{\nu'} t^{\alpha}\,F_{\alpha,\beta}(t,\,y)\,dt\right|=b_{\nu'}<+\infty. \tag{2.6}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и определим $\nu\geqslant N$ так, чтобы имело место неравенство

$$I-\varepsilon<F_{\alpha,\beta}(x,\,y)<I+\varepsilon,\ \text{когда}\ x\geqslant\nu,\ \ y\geqslant\nu, \tag{2.7}$$

где

$$I=(C_{\alpha,\beta})\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t,\tau)\;dtd\tau.$$

Пусть x и y удовлетворяют условиям $x>\nu$, $y>\nu$. Тогда в силу (1.3) и (2.7) имеем:

$$T_{\alpha+1,\beta}(x,y)=\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_0^\nu t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,y)\,dt+\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_\nu^x t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,y)\,dt<$$

$$<\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_0^\nu t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,\ y)\ dt+I+\varepsilon.$$

Отсюда, на основании (2.6), получим

$$\limsup_{x,\,y\to+\infty} T_{\alpha+1,\,\beta}(x,y)\leqslant I+\varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε,

$$\limsup_{x,\,y\to+\infty} T_{\alpha+1,\,\beta}(x,y)\leqslant I. \tag{2.8}$$

Аналогично покажем, что

$$\liminf_{x,\,y\to+\infty} T_{\alpha+1,\,\beta}\geqslant I. \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.8) и (2.9) получаем

$$\lim_{x,\,y\to+\infty} T_{\alpha+1,\,\beta}(x,y)=I.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 3. Если функция $f(t,\tau)$ класса $B_{\alpha,\beta}$ является $T^*_{\alpha,\beta+1}$-интегрируемой, то $f(t,\tau)$ будет также $T^*_{\alpha,\,\beta+1}$-интегрируемой и имеет место равенство

$$(C_{\alpha,\beta})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\ dxdy=(T^*_{\alpha,\,\beta+1})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,\ y)\ dxdy.$$

Теорема 4. Если функция $f(t,\tau)$ является $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha u(x)\ dx=0, \tag{2.10}$$

где

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{F_{\alpha,\beta}(x,\ y)}{y^{\beta+1}}=u(x) \tag{2.11}$$

равномерно относительно x в любом сегменте $[0, a]$, то для всякого $\lambda > 1$ справедливо равенство

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} T_{\alpha+1,\beta}(x,y) = (C_{\alpha,\beta}) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\tau)\, dt d\tau.$$ [1]

Доказательство. Положим

$$(C_{\alpha,\beta}) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\, dx dy = I. \tag{2.12}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Принимая во внимание равенство (2.10) и (2.12), можно найти такое $\nu \geqslant 0$, что

$$\left| \int_0^{\nu} x^\alpha u(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{6\lambda}, \tag{2.13}$$

$$| F_{\alpha,\beta}(x,y) - I | < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ когда } x \geqslant \nu,\ y \geqslant \nu,\ 0 < y^{\beta+1} \leqslant \lambda x^{\alpha+1}. \tag{2.14}$$

Пусть

$$x \geqslant \nu,\ y \geqslant \nu,\ 0 < y^{\beta+1} \leqslant \lambda x^{\alpha+1}.$$

На основании (2.14) имеем:

$$| T_{\alpha+1,\beta}(x,y) - I | < \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}} \left| \int_0^{\nu} t^\alpha [F_{\alpha,\beta}(t,y) - I]\, dt \right| +$$

$$+ \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}} \left| \int_{\nu}^{x} t^\alpha [F_{\alpha,\beta}(t,y) - I]\, dt \right| < \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}} \left| \int_0^{\nu} t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,y)\, dt \right| +$$

$$+ \frac{\nu^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}} |I| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\nu^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}} |I| +$$

$$+ \lambda(\alpha+1) \frac{1}{y^{\beta+1}} \left| \int_0^{\nu} t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,y)\, dt \right|.$$

Далее, в силу (2.11) существует такое $N > 0$, что

$$\left[u(t) - \frac{\varepsilon}{6\lambda\nu t^\alpha} \right] y^{\beta+1} < F_{\alpha,\beta}(x,y) < \left[u(t) + \frac{\varepsilon}{6\lambda\nu t^\alpha} \right] y^{\beta+1}, \tag{2.15}$$

когда $y \geqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant \nu$.

---

[1] Символ $(x, y)_\lambda \to \infty$ означает, что x и y стремятся к $+\infty$ так, что выполнены условия $0 < y^{\beta+1} \leqslant \lambda x^{\alpha+1}$.

Умножая все члены неравенств (2.15) на t^{α} и интегрируя по t от 0 до ν, получим

$$\left(\int\limits_0^{\nu} t^{\alpha} u(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{6\lambda}\right) y^{\beta+1} < \int\limits_0^{\nu} t^{\alpha} F_{\alpha,\beta}(t,y)\,dt) < \left(\int\limits_0^{\nu} t^{\alpha} u(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{6\lambda}\right) y^{\beta+1}.$$

Отсюда, на основании (2.13), получаем

$$-\frac{\varepsilon}{3\lambda} < \frac{1}{y^{\beta+1}} \int\limits_0^{\nu} t^{\alpha} F_{\alpha,\beta}(t,y)\,dt < \frac{\varepsilon}{3\lambda}.$$

Следовательно,

$$\mid T_{\alpha+1,\,\beta}(x,y) - I \mid < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\nu^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}} |I| + \frac{\alpha+1}{3}\varepsilon,$$

когда $x \geqslant \nu$, $y \geqslant \nu$, $0 < y^{\beta+1} < \lambda x^{\alpha+1}$. В силу произвольности ε, из этого неравенства следует, что

$$\lim_{(x,\,y)_{\lambda}\to\infty} T_{\alpha+1,\,\beta}(x,y) = I.$$

Теорема доказана.

§ **3. Функции колебаний.** Пусть функция $\Phi(x, y)$ непрерывна в области $D = [0 \leqslant x < +\infty;\ 0 \leqslant y < +\infty)$ и пусть σ—некоторое число больше единицы. Положим

$$V_{\sigma}(\Phi;\ x,y) = \operatorname{Max}\{\Phi(x,\tau) - \Phi(x,y)\},\quad y \leqslant \tau \leqslant \sigma y,$$

$$V_{\sigma}^{*}(\Phi;\ x,y) = \operatorname{Max}\{\Phi(x,y) - \Phi(x,\tau)\},\quad \frac{y}{\sigma} \leqslant \tau \leqslant y,$$

$$W_{\sigma}(\Phi;\ x,y) = \operatorname{Max}\{\Phi(t,y) - \Phi(x,y)\},\quad x \leqslant t \leqslant \sigma x,$$

$$W_{\sigma}^{*}(\Phi;\ x,\ y) = \operatorname{Max}\{\Phi(x,y) - \Phi(t,y)\},\quad \frac{x}{\sigma} \leqslant t \leqslant x.$$

Далее, пусть

$$V_{\sigma}(\Phi) = \limsup_{x,\,y\to+\infty} V_{\sigma}(\Phi;\ x,y),\quad V_{\sigma}^{*}(\Phi) = \limsup_{x,\,y\to+\infty} V_{\sigma}^{*}(\Phi;\ x,y),$$

$$W_{\sigma}(\Phi) = \limsup_{x,\,y\to+\infty} W_{\sigma}(\Phi;\ x,y),\quad W_{\sigma}^{*}(\Phi) = \limsup_{x,\,y\to+\infty} W_{\sigma}^{*}(\Phi;\ x,y).$$

Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$V_{\sigma}(\Phi) = V_{\sigma}^{*}(\Phi), \tag{3.1}$$

$$W_{\sigma}(\Phi) = W_{\sigma}^{*}(\Phi). \tag{3.2}$$

Доказательство. Из неравенств $\frac{y}{\sigma} \leqslant \tau \leqslant y$ вытекают неравенства $\tau \leqslant y \leqslant \sigma\tau$. Поэтому

$$\Phi(x,y)-\Phi(x,\tau)\leqslant V_\sigma(\Phi;\ x,\tau).$$

Следовательно,

$$V_\sigma^*\ (\Phi;\ x,y)\leqslant \operatorname{Max} V_\sigma(\Phi;\ x,\tau),\ \frac{y}{\sigma}\leqslant\tau\leqslant y.$$

Далее, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N>0$, что

$$V_\sigma^*\ (\Phi;\ x,y)<V_\sigma(\Phi)+\varepsilon, \text{ когда } x>N,\ y>N.$$

Значит

$$V_\sigma^*\ (\Phi)\leqslant V_\sigma(\Phi)+\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, получим

$$V_\sigma^*\ (\Phi)\leqslant V_\sigma(\Phi). \tag{3.3}$$

Аналогично покажем, что

$$V_\sigma(\Phi)\leqslant V_\sigma^*\ (\Phi). \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) вытекает справедливость равенства (3.1).

Таким же путем доказывается справедливость равенства (3.2).

$V_\sigma(\Phi)$ и $W_\sigma(\Phi)$ будем называть функциями колебаний функции $\Phi(x,y)$.

Теорема 5. Если функция $f(t,\tau)$, определенная в области D, является $T^*_{\alpha,\beta_{+1}}$-интегрируемой и, кроме того,

$$\lim_{\sigma\to 1+} V_\sigma(F_{\alpha,\beta})=0, \tag{3.5}$$

то функция $f(t,\tau)$ будет также $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и

$$(C_{\alpha,\beta})\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=(T^*_{\alpha,\beta+1})\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dxdy. \tag{3.6}$$

Доказательство. Положим

$$(T^*_{\alpha,\ \beta_{+1}})\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\ dxdy=I.$$

Возьмем произвольное число $\nu>0$. Тогда для любого числа y, удовлетворяющего неравенствам $0<y<\nu$, будем иметь

$$\int\limits_y^\nu \tau^\beta F_{\alpha,\beta}\ (x,\tau)\ d\tau=\int\limits_0^\nu \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(x,\tau)\ d\tau-\int\limits_0^y \tau^\beta F_{\alpha,\beta}\ (x,\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\nu^{\beta+1}}{\beta+1}\ T^*_{\alpha,\beta_{+1}}\ (x,\nu)-\frac{y^{\beta+1}}{\beta+1}\ T^*_{\alpha,\ \beta_{+1}}(x,y)=\frac{1}{\beta+1}\ (\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1})\ T_{\alpha,\beta_{+1}}(x,y)+$$

$$+\frac{\nu^{\beta+1}}{\beta+1}\ [T^*_{\alpha,\ \beta_{+1}}\ (x,\nu)-T^*_{\alpha,\ \beta_{+1}}(x,y)].$$

Отсюда имеем

$$\frac{\beta+1}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}\int\limits_{y}^{\nu}\tau^{\beta}F_{\alpha,\beta}(x,\tau)\quad d\tau=T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)+$$

$$+\frac{\nu^{\beta+1}}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}[T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\nu)-T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)]. \tag{3.8}$$

Если от обеих частей последнего равенства вычесть $F_{\alpha,\beta}(x,y)$, то после элементарных преобразований получим

$$-F_{\alpha,\beta}(x,y)+T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)+\frac{\nu^{\beta+1}}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}[T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\nu)-T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)]=$$

$$=\frac{\beta+1}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}\int\limits_{y}^{\nu}\tau^{\beta}[F_{\alpha,\beta}(x;\tau)-F_{\alpha,\beta}(x,y)]\,d\tau.$$

Следовательно, для $\nu\leqslant\sigma y$, $\sigma>1$, имеем

$$-F_{\alpha,\beta}(x,\ y)+T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\ y)+\frac{\nu^{\beta+1}}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}[T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\nu)-T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)]\leqslant$$

$$\leqslant V\sigma(F_{\alpha,\beta};\ x,\ y).$$

Далее, так как

$$\lim_{x,\,y\to+\infty}T^{*}_{\alpha,\beta}(x,\ y)=I,$$

то, полагая $\nu=\sigma y$, будем иметь

$$\lim_{x,\,y\to+\infty}\frac{\nu^{\beta+1}}{\nu^{\beta+1}-y^{\beta+1}}[T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\nu)-T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\ y)]=0.$$

Следовательно,

$$\limsup_{x,\,y\to+\infty}[-F_{\alpha,\beta}(x,\ y)]+I\leqslant V\sigma(F_{\alpha,\beta}).$$

Отсюда, в силу (3.5), имеем

$$\liminf_{x,\,y\to+\infty}F_{\alpha,\,\beta}(x\,y)\geqslant I. \tag{3.9}$$

Заменяя в равенстве (3.8) y и ν числами p и y, где $p=\frac{y}{\sigma}$, $\sigma>1$, получим

$$\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}-p^{\nu+1}}\int\limits_{p}^{y}\tau^{\beta}F_{\alpha,\beta}(x,\tau)\,d\tau=T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,p)+$$

$$+\frac{y^{\beta+1}}{y^{\beta+1}-p^{\beta+1}}[T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\ y)-T^{*}_{\alpha,\,\beta+1}(x,\ p)].$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства $F_{\alpha,\beta}(x, y)$, будем иметь

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)-T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,p)-\frac{y^{\beta+1}}{y^{\beta+1}-p^{\beta+1}}\left[T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)-T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,p)\right]=$$

$$\frac{\beta+1}{y^{\beta+1}-p^{\beta+1}}\int\limits_p^y \tau^\beta\left[F_{\alpha,\beta}(x,\ y)-F_{\alpha,\beta}(x,\ \tau)\right]d\tau.$$

Отсюда вытекает, что

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)-T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,p)-\frac{y^{\beta+1}}{y^{\beta+1}-p^{\beta+1}}\left[T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,y)-T^*_{\alpha,\,\beta+1}(x,p)\right]\leqslant$$
$$\leqslant V^*_\sigma\left(F_{\alpha,\beta};\ x,y\right).$$

Следовательно,

$$\limsup_{x,\ y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)-I\leqslant V^*_\sigma\left(F_{\alpha,\beta}\right)=V_\sigma\left(F_{\alpha,\beta}\right).$$

Далее, так как $\lim\limits_{\sigma\to 1+} V_\sigma(F_{\alpha,\beta})<0$, то из последнего соотношения получим

$$\limsup_{x,\ y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)\leqslant I. \qquad (3.10)$$

Из соотношений (3.9) и (3.10) получаем

$$\lim_{x,\ y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)=I.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть функция $f(t,\ \tau)$ является $T^*_{\alpha,\ \beta+1}$-интегрируемой и, кроме того,

$$\int\limits_0^x (x-t)^\alpha f(t,y)\,dt<\frac{Kx^\alpha}{y},\quad 0<x<+\infty,\ \ 0<y<+\infty, \qquad (3.11)$$

где K—некоторое положительное число, то $f(t,\tau)$ будет так же $C_{\alpha,\beta}$—интегрируемой и будет иметь место равенство (3.6).

Доказательство. Возьмем некоторое положительное число $\delta<1$. Имеем:

$$F_{\alpha,\beta}(x,\ y)-F_{\alpha,\beta}(x,\ y-\delta)=\frac{1}{x^\alpha y^\beta}\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-t)^\alpha(y-\tau)^\beta f(t,\tau)\ dt d\tau-$$

$$-\frac{1}{x^\alpha(y-\delta)^\beta}\int\limits_0^x\int\limits_0^{y-\delta}(x-t)^\alpha(y-\tau-\delta)^\beta f(t,\ \tau)\ dt d\tau=$$

$$=\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{y-\delta}^{y}(x-t)^{\alpha}(y-\tau)^{\beta}f(t,\tau)\,dtd\tau+$$

$$+\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y-\delta}(1-\omega^{\beta})(x-t)^{\alpha}(y-\tau)^{\beta}f(t,\tau)\,dtd\tau=I_1+I_2,$$

где

$$\omega=\frac{y(y-\tau-\delta)}{(y-\delta)(y-\tau)}.$$

Легко показать, что $0<\omega\leqslant 1$, когда $0\leqslant\tau\leqslant y-\delta$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\beta>0$.

Справедливы следующие неравенства:

$$1-\omega^{\beta}\leqslant\beta(1-\omega)=\frac{\beta\delta\tau}{(y-\delta)(y-\tau)},\quad \text{когда } \beta\geqslant 1, \tag{3.12}$$

$$1-\omega^{\beta}\leqslant\beta\omega^{\beta-1}(1-\omega)=\frac{\beta\delta y^{\beta-1}\tau(y-\tau-\delta)^{\beta-1}}{(y-\delta)^{\beta}(y-\tau)^{\beta}},\ \text{когда } \beta<1. \tag{3.13}$$

На основании (3.11) имеем:

$$I_1<\frac{K}{y^{\beta}}\int\limits_{y-\delta}^{y}\frac{(y-\tau)^{\beta}}{\tau}\,d\tau<\frac{K}{(y-\delta)y^{\beta}}\int\limits_{y-\delta}^{y}(y-\tau)^{\beta}\,d\tau<\frac{K\delta^{\beta+1}}{(y-\delta)\,y^{\beta}}.$$

Предполагая $y>1$, будем иметь

$$I_1<\frac{K_1\delta}{y},$$

где K_1 не зависит от y и δ.

Оценим теперь I_2. Рассмотрим сперва случай $\beta\geqslant 1$. На основании (3.11) и (3.12) имеем:

$$I_2<\frac{K}{y^{\beta}}\int\limits_{0}^{y-\delta}(1-\omega^{\beta})\frac{(y-\tau)^{\beta}}{\tau}\,d\tau<\frac{K\beta\delta}{(y-\delta)\,y^{\beta}}\int\limits_{0}^{y-\delta}(y-\tau)^{\beta-1}\,d\tau=$$

$$=\frac{K\delta}{(y-\delta)\,y^{\beta}}(y^{\beta}-\delta^{\beta})<\frac{K_2\delta}{y}.$$

Если же $\beta<1$, то в силу (3.11) и (3.13) будем иметь

$$I_2<\frac{K}{y^{\beta}}\int\limits_{0}^{y-\delta}(1-\omega^{\beta})\frac{(y-\tau)^{\beta}}{\tau}\,d\tau<\frac{K\beta\delta}{y\,(y-\delta)^{\beta}}\int\limits_{0}^{y-\delta}(y-\tau-\delta)^{\beta-1}\,d\tau<\frac{K\delta}{y}.$$

Легко заметить, что $I_2=0$, когда $\beta=0$. Таким образом, при $y>1$ имеем

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)-F_{\alpha,\beta}(x,\ y-\delta)<\frac{M\alpha}{y}, \tag{3.14}$$

где M—некоторая постоянная, не зависящая от y и δ.

Пусть теперь τ удовлетворяет условию

$$y<\tau\leqslant\sigma y,\quad \sigma>1\quad y>1.$$

Возьмем натуральное число n настолько большим, чтобы было

$$\frac{\tau-y}{n}=\delta<1.$$

Отсюда получаем

$$\tau=y+n\delta.$$

Далее, на основании (1.14), имеем:

$$F_{\alpha,\beta}(x,\tau)-F_{\alpha,\beta}\ (x,y)=\sum_{k=1}^{n}\left[F_{\alpha,\beta}\,(x,y+k\delta)-F_{\alpha,\beta}\,(x,y+(k-1)\,\delta)\right]<$$

$$<M\delta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y+k\delta}<\frac{M\delta n}{y+\delta}=\frac{M\delta\,\dfrac{\tau-y}{\delta}}{y+\delta}<\frac{M(\tau-y)}{y}=$$

$$=M\left(\frac{\tau}{y}-1\right)\leqslant M\,(\sigma-1).$$

Значит,

$$V\sigma\,(F_{\alpha,\beta};\ x,y)\leqslant M\,(\sigma-1).$$

Следовательно,

$$V\sigma\,(F_{\alpha,\beta})\leqslant M\,(\sigma-1).$$

Отсюла вытекает, что

$$\lim_{\sigma\to+1} V\sigma(F_{\alpha,\beta})=0.$$

Следовательно, в силу теоремы 5, функция $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и будет иметь место равенство (3.6). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 7. Если функция $f(t,\tau)$ является $T_{\alpha+1},\beta$-интегрируемой и

$$\int\limits_{0}^{+\infty}(y-\tau)^{\beta}\,f\,(t,\,x)\,dt<\frac{Ky^{\beta}}{x},\quad 0<x<+\infty.\quad 0<y<+\infty,$$

то она будет также $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и имеет место равенство

$$(C_{\alpha,\beta}) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = (T_{\alpha+1,\,\beta}) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dxdy. \tag{3.15}$$

Теорема 8. Если функция $f(t,\tau)$, определенная в области $D=[0,+\infty;\ 0,+\infty)$, удовлетворяет условию

$$f(t,\tau)<\frac{M}{t^p+\tau^q},\ t+\tau>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1,\ p>1, \tag{3.16}$$

где M—некоторая положительная константа, то из $T^*_{\alpha,\,\beta+1}$-интегрируемости функции $f(t,\tau)$ вытекает $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемость той же функции и имеет место равенство (3.6).

Доказательство. В силу (3.16) имеем:

$$\int_0^x (x-t)^\alpha f(t,y)\,dt<M\int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{t^p+y^q}dt=Mx^\alpha\int_0^x \frac{\left(1-\frac{t}{x}\right)^\alpha}{t^p+y^q}\,dt<$$

$$<Mx^\alpha\int_0^x \frac{dt}{t^p+y^q}\leqslant\frac{MC_px^\alpha}{y},$$

где

$$C_p=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^p}. \tag{3.17}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 6. Поэтому функция $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и имеет место равенство (3.6).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 9. Если функция $f(t,\tau)$, определенная в области D, удовлетворяет условию (3.16), то из $T_{\alpha+1,\,\beta}$-интегрируемости функции $f(t,\tau)$ вытекает $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемость той же функции и имеет место равенство (3.15).

Теорема 10. Если функция $f(t,\tau)$ является $C_{\alpha+1,\,\beta+1}$-интегрируемой на D и, кроме того, выполнены условия

$$\lim_{\sigma\to 1+} V\sigma(F_{\alpha,\beta})=0,\quad \lim_{\sigma\to 1+} W\sigma(F_{\alpha,\beta})=0, \tag{3.18}$$

то $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$—интегрируемой и имеет место равенство

$$(C_{\alpha,\beta})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\tau)\,dtd\tau = (C_{\alpha+1,\,\beta+1})\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,\tau)\,dtd\tau. \tag{3.19}$$

Доказательство. В силу (1.2) имеем:

$$F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x, y)=\frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)}{x^{\alpha+1}\,y^{\beta+1}}\int\limits_0^x\int\limits_0^y t^\alpha\tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)dtd\tau.$$

Возьмем произвольные числа $a>0$, $b>0$. Тогда для любых x и y, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant x<a$, $0\leqslant y<b$, будем иметь:

$$\int\limits_x^a\int\limits_y^b t^\alpha\tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau=\frac{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}{(\alpha+1)\,(\beta+1)}F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)+$$

$$+\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{b^{\beta+1}}{\beta+1}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(a,\ b)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right]-$$

$$-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{y^{\beta+1}}{\beta+1}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(a,\ y)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right]-$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{b^{\beta+1}}{\beta+1}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,\ b)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right]. \tag{3.20}$$

Разделим обе части полученного равенства на $\dfrac{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}{(\alpha+1)\,(\beta+1)}$, получим

$$\frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)}{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}\int\limits_x^a\int\limits_y^b t^\alpha\tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau=$$

$$=F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,\ y)+I_1-I_2-I_3,$$

где

$$I_1=\frac{a^{\alpha+1}\ b^{\beta+1}}{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(a,b)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right],$$

$$I_2=\frac{a^{\alpha+1}\ y^{\beta+1}}{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(a,y)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right],$$

$$I_3=\frac{x^{\alpha+1}\ b^{\beta+1}}{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}\left[F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,b)-F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)\right].$$

Отсюда имеем

$$-F_{\alpha,\beta}(x,y)+F_{\alpha+1,\,\beta+1}(x,y)+I_1-I_2-I_3=$$

$$=\frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)}{(a^{\alpha+1}-x^{\alpha+1})\,(b^{\beta+1}-y^{\beta+1})}\int\limits_x^a\int\limits_y^b t^\alpha\tau^\beta\left[F_{\alpha,\beta}(t,\ \tau)-F_{\alpha,\beta}(x,\ y)\right]dtd\tau.$$

Далее, так как

$$F_{\alpha,\beta}(t,\tau)-F_{\alpha,\beta}(x,y)=[F_{\alpha,\beta}(t,\tau)-F_{\alpha,\beta}(t,y)]+$$
$$+[F_{\alpha,\beta}(t,y)-F_{\alpha,\beta}(x,y)],$$

то для $a\leqslant\sigma x$, $b\leqslant\lambda y$, $\sigma>1$, $\lambda>1$ будем иметь

$$-F_{\alpha,\beta}(x,y)+F_{\alpha+1,\beta+1}(x,y)+I_1-I_2-I_3<V\sigma(F_{\alpha,\beta};\ \xi,y)+$$
$$W_\lambda(F_{\alpha,\beta};\ x,y), \tag{3.21}$$

где $x\leqslant\xi\leqslant y$.

Полагая $a=\sigma x$, $b=\lambda y$, легко заметить, что

$$\lim_{x,y\to+\infty} I_k=0\quad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Следовательно, из соотношения (3.21) получим

$$\limsup_{x,y\to+\infty}\,[-F_{\alpha,\beta}(x,y)]+I\leqslant V\sigma(F_{\alpha,\beta})+W\lambda(F_{\alpha,\beta}),$$

где

$$I=(C_{\alpha+1,\ \beta+1})\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(t,\tau)\,dtd\tau.$$

Переходя к пределу, когда $\sigma\to 1+$, $\lambda\to 1+$, и принимая во внимание (3.19), получим

$$\liminf_{x,y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)\geqslant I. \tag{3.22}$$

Если заменить в равенстве (3.19) числа x, y, a, b числами p, q, x, y, где $p=\dfrac{x}{\sigma}$, $q=\dfrac{y}{\lambda}$, $\sigma>1$, $\lambda>1$, будем иметь

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)-F_{\alpha+1,\ \beta+1}(p,q)-I'_1+I'_2+I'_3\leqslant V^*_\sigma(F_{\alpha,\beta};\ \xi',y)+$$
$$+W^*_\lambda(F_{\alpha,\beta};\ x,y),$$

где $x\leqslant\xi'\leqslant y$.

Отсюда вытекает, что

$$\limsup_{x,y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)-I\leqslant V^*_\sigma(F_{\alpha,\beta})+W^*_\lambda(F_{\alpha,\beta}).$$

Переходя к пределу, когда $\sigma\to 1+$, $\lambda\to 1+$, получим

$$\limsup_{x,y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)\leqslant I. \tag{3.23}$$

Из соотношений (3.22) и (3.33) получаем

$$\lim_{x,y\to+\infty} F_{\alpha,\beta}(x,y)=I.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. Если функция $f(t,\tau)$ является $C_{\alpha+1,\beta+1}$-интегрируемой и, кроме того, выполнены условия

$$\int_0^x (x-t)^\alpha f(t,y)\,dt < \frac{Mx^\alpha}{x}, \tag{3.24}$$

$$\int_0^y (y-\tau)^\beta f(x,\tau)\,d\tau < \frac{My^\beta}{x}, \tag{3.25}$$

$$0 < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty,$$

где M—некоторая положительная константа, то $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и имеет место равенство (3.19).

Доказательство. При доказательстве теоремы 6 мы показали, что из условия (3.24) вытекает

$$\lim_{\sigma\to 1+} V\sigma(F_{\alpha,\beta})=0.$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{\sigma\to 1+} W\sigma(F_{\alpha,\beta})=0.$$

Следовательно, в силу теоремы 10, функция $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и имеет место равенство (3.19).

Теорема 12. Если функция $f(t,\tau)$ является $C_{\alpha+1,\beta+1}$—интегрируемой в области $D=[0,+\infty;\,0,+\infty)$ и

$$f(t,\tau) < \frac{M}{t^p+\tau^q}, \quad t+\tau>0, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1, \quad p>1, \tag{3.26}$$

где M—некоторая положительная константа, то данный ряд будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемым и имеет место равенство (3.19).

Доказательство. В силу условия (3.26) имеем

$$\int_0^x (x-t)^\alpha f(t,y)\,dt < \frac{MC_p\,x^\alpha}{y},$$

$$\int_0^y (y-\tau)^\beta f(x,\tau)\,d\tau < \frac{MC_p\,y^{\beta+1}}{x},$$

где C_p определенно равенством (3.17). Поэтому, в силу теоремы 11, функция $f(t,\tau)$ будет $C_{\alpha,\beta}$-интегрируемой и имеет место равенство (3.19).

Кафедра
теории функций действительного
переменного и функционального анализа

(Поступило в редакцию 17. XII. 1962)

ვ. ჭელიძე

ტაუბერის ტიპის თეორემები ჯერადი ინტეგრალებისათვის

რეზიუმე

ამ შრომაში დამტკიცებულია ტაუბერის ტიპის რიგი თეორემებისა ორჯერადი ინტეგრალებისათვის.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Э. С. Цитланадзе

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ОПЕРАТОРОВ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Введение. Известно, что, при переходе от анализа в конечномерных линейных пространствах к анализу в бесконечномерных линейных пространствах, ряд теорем, справедливых для конечномерных линийных пространств, перестает быть справедливым. Так, например, из непрерывности функции на ограниченном замкнутом множестве n-мерного евклидова пространства вытекает, что на этом множестве функция равномерно непрерывна, ограничена и достигает своих граней. Иначе обстоит дело с функционалом, определенном на ограниченном по норме множестве бесконечномерного пространства. Из непрерывности по норме функционала в шаре S_1 бесконечномерного банахого пространства еще не следует ни равномерная непрерывность, ни ограниченность этого функционала.

Естественно, поэтому, возникает необходимость введения понятий усиленной непрерывности функционалов и операторов. Одним из таких понятий является слабая непрерывность оператора и функционала. Операторы и функционалы, обладающие слабой непрерывностью, играют существенную роль в теории нелинейных интегральных уравнений и в топологических методах исследования задач вариационного исчисления в целом. Так, например, если банахого пространство E таково, что всякое его ограниченное по норме множество слабо компактно, то из слабой непрерывности функционала $f(x)$ в шаре $S_1 \subset E$ следует, что $f(x)$ в S_1 ограничен и достигает в нем своих граней.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия слабой непрерывности нелинейного оператора от двух независимых аргументов, действующего из одного линейного нормированного пространства E_1 в другое линейное нормированное пространство E_2. Кроме того, изучаются достаточные условия, обеспечивающие слабую непрерывность оператора градиента в смысле Фреше, некоторого слабо непрерывного оператора, действующего из E_1 в E_2.

2. Пусть E_1 и E_2 — линейные пространства типа Банаха, $U(x, y)$ — оператор, определенный в E_1, действующий из E_1 в E_2, где $x, y \in E_1$ есть произвольная пара элементов, не зависящих друг от друга.

Определение 1. Оператор $U(x, y)$ из E_1 в E_2 назовем непрерывным по норме при $x=x_0$, $y=y_0$, если для любых последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\in E_1$, сходящихся по норме соответственно к элементам x_0, $y_0 \in E_1$, т. е. таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_{E_1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| y_n - y_0 \|_{E_1} = 0,$$

последовательность $\{U(x_n, y_n)\} \in E_2$ сходится по норме к элементу $U(x_0, y_0)$:

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) \|_{E_2} = 0.$$

Оператор $U(x, y)$, непрерывный по норме для любой пары x_0, $y_0 \in E_1$, назовем непрерывным по норме в E_1.

Пример. Рассмотрим оператор

$$U(x, y) = y(s) \int_0^1 x(t)\, dt, \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant 1,$$

где $x(t)$, $y(s)$ — произвольная пара элементов замкнутого единичного шара S_1 гильбертого функционального пространства $L_2(0, 1)$.

Имеем

$$\int_0^1 U^2(x, y)\, ds = \int_0^1 y^2(s)\, ds \left(\int_0^1 x(t)\, dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 y^2(s)\, ds \int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant 1.$$

Следовательно, оператор $U(x, y)$ действует из $S_1 \in L_2(0,1)$ в S_1.

Покажем, что $U(x, y)$ — непрерывный по норме оператор в S_1. Пусть x_0, $y_0 \in S_1$ и $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in S_1$ — некоторые последовательности, сходящиеся по норме соответственно к x_0, y_0:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| y_n - y_0 \| = 0.$$

Тогда

$$U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) = y_n \int_0^1 (x_n - x_0)\, dt + (y_n - y_0) \int_0^1 x_0\, dt,$$

откуда

$$\int_0^1 [U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0)]^2\, ds = \left[\int_0^1 (x_n - x_0)\, dt \right]^2 \int_0^1 y_n\, ds +$$

$$+ 2 \int_0^1 x_0\, dt \int_0^1 (x_n - x_0)\, dt \int_0^1 y_n (y_n - y_0)\, ds + \left[\int_0^1 x_0\, dt \right]^2 \int_0^1 (y_n - y_0)^2 ds,$$

но так как

$$\int_0^1 x_0\,dt \leqslant \left[\int_0^1 x_0^2\,dt\right]^{1/2} \leqslant 1, \quad \int_0^1 y_n^2\,ds \leqslant 1, \quad \int_0^1 y_n(y_n-y_0)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^1 y_n^2\,ds\right]^{1/2}\left[\int_0^1 (y_n-y_0)^2\,ds\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_0^1 (y_n-y_0)^2 ds,\right.$$

$$\int_0^1 (x_n-x_0)^2 dt \leqslant \left[\int_0^1 (x_n-x_0)^2\,dt\right]^{1/2},$$

то

$$\int_0^1 [U(x_n, y_n)-U(x_0, y_0)]^2\,ds \leqslant \int_0^1 (x_n-x_0)^2 dt +$$

$$+2\left[\int_0^1 (x_n-x_0)^2 dt\right]^{1/2}\left[\int_0^1 (y_n-y_0)^2\,ds\right]^{1/2} + \int_0^1 (y_n-y_0)^2 ds = \| x_n - x_0\|^2 +$$

$$+2\,\| x_n-x_0\|\,\| y_n-y_0\| + \| y_n - y_0\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0)\| = 0$$

и непрерывность по норме оператора $U(x, y)$ в S_1 доказана.

Определение 2. Оператор $U(x, y)$, действующий из E_1 в E_2, назовем слабонепрерывным при $x=x^*$, $y=y^*\in E_1$, если, каковы бы ни были последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}\in E_1$, слабосходящиеся соответственно к x^*, y^*, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n, y_n) - U(x^*, y^*)\| = 0.$$

Оператор $U(x, y)$, слабо непрерывный для любой пары $x^*, y^*\in E_1$, назовем слабо непрерывным в E_1.

Примеры. 1) Пусть $x, y\in S_1$ — произвольная пара элементов, где S_1 — замкнутый единичный шар в вещественном функциональном пространстве $L_p(0,1)$. Пусть, кроме того, $\varphi, \psi\in L_p(0,1)$ — фиксированные элементы, причем $p^{-1}+g^{-1}=1$. Возьмем оператор

$$U(x, y) = \varphi(s)\int_0^1 x(t)\,\psi(t)\,dt + \psi(s)\int_0^1 y(t)\,y(t)dt = y(x, \psi) + \psi(y, y),$$

$$0 \leqslant s, t \leqslant 1. \qquad (1)$$

Очевидно, оператор (1) отображает элементы шара S_1 на элементы пространства $L_q(0,1)$.

Докажем, что оператор $U(x, y)$, определенный равенством (1), слабонепрерывен. В самом деле, пусть $x^*, y^* \in S_1$ — произвольная пара элементов и $\{x_n\}, \{y_n\} \in S_1$ — некоторые последовательности, слабосходящиеся к слабым пределам: x^*, y^*, т. е.

$$l(x_n) \to l(x^*), \quad l(y_n) \to l(y^*), \quad n \to \infty,$$

где $l \in L_q(0,1)$ — произвольный линейный функционал на $L_p(0,1)$.

Имеем

$$\| U(x_n, y_n) - U(x^*, y^*) \| = \| \varphi(x_n - x^*, \psi) + \psi(y_n - y^*, \varphi) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \varphi \| |(x_n - x^*, \psi)| + \| \psi \| |(y_n - y^*, \varphi)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что и доказывает слабую непрерывность в S_1 оператора (1).

2) Пусть x, y изменяются в единичном шаре S_1 пространства $L_p(0,1)$, а $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ — произвольно фиксированные элементы пространства $L_q(0,1)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Тогда оператор

$$U(x, y) = \psi(x, \varphi_1)(y, \varphi_2) \tag{2}$$

отображает элементы шара S_1 на элементы пространства $L_q(0,1)$, где (x, φ_1) и (y, φ_2) обозначают скалярные произведения элементов $x, y \in S_1 \subset L_p(0,1)$ на элементы $\varphi_1, \varphi_2 \in L_q(0,1)$.

Пусть

$$x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x^*, \quad y_n \xrightarrow{\text{сл.}} y^*, \quad \text{где } x^*, y^*, \{x_n\}, \{y_n\} \in S_1.$$

Тогда

$$\| U(x_n, y_n) - U(x^*, y^*) \| = \| \psi \| |(x_n, \varphi_1)(y_n, \varphi_2) - (x^*, \varphi_1)(y^*, \varphi_2)| =$$
$$= \| \psi \| |(y_n, \varphi_2)(x_n - x^*, \varphi_1) + (x^*, \varphi_1)(y_n - y^*, \varphi_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \| \psi \| \| y_n \| \| \varphi_2 \| |(x_n - x^*, \varphi_1)| + \| \psi \| \| x^* \| \| \varphi_1 \| |(y_n - y^*, \varphi_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \| \psi \| c [|(x_n - x^*, \varphi_1)| + |(y_n - y^*, \varphi_2)|],$$

где

$$c = \sup(\| \varphi_1 \|, \| \varphi_2 \|).$$

Из этой оценки получаем

$$\lim_{n \to \infty} \| U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) \| = 0,$$

что доказывает слабую непрерывность оператора (2) в S_1.

Заметим, что слабо непрерывный при $x = x^*$, $y = y^* \in E_1$ оператор $U(x, y)$ всегда является непрерывным и по норме при $x = x^*$, $y = y^*$.

Пример непрерывного по норме, но не слабо непрерывного, оператора дает нам функционал $U(x, y) = \| x \| \| y \|$, определенный в замкнутом единичном шаре S_1 пространства E_1. Действительно, пусть $x_0, y_0 \in S_1$ и $\{x_n\}$,

$\{y_n\} \in S_1$ есть некоторые последовательности, сходящиеся по норме соответственно к элементам x_0, y_0. Тогда

$$|U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0)| = |\,\|x_n\|\,\|y_n\| - \|x_0\|\,\|y_0\|\,| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_n\|\,|\,\|x_n\| - \|x_0\|\,| + \|x_0\|\,|\,\|y_n\| - \|y_0\|\,| \leqslant$$

$$\leqslant |\,\|x_n\| - \|x_0\|\,| + |\,\|y_n\| - \|y_0\|\,| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $U(x, y) = \|x\|\,\|y\|$ непрерывен по норме в S_1. Однако, если $x^*, y^* \in S_1$ и $\{x_n'\}, \{y_n'\} \in S_1$ есть произвольные последовательности, слабосходящиеся к слабым пределам x^*, y^*, то, вообще, последовательность $\{U(x_n, y_n)\}$ не сходится по норме к $U(x^*, y^*)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} |U(x_n', y_n') - U(x^*, y^*)| \neq 0.$$

Определение. Нелинейный оператор $U(x, y)$, действующий из E_1 в E_2, назовем вполне непрерывным на ограниченном по норме замкнутом множестве $\Omega \in E_1$, если он компактен и непрерывен по норме на Ω.

Пример. Пусть $K(s, t)$ — непрерывная в квадрате $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ функция, S_1 — единичный шар в пространстве непрерывных функций $C(0, 1)$ и $x(t), y(t) \in S_1$ — произвольная пара элементов. Тогда оператор

$$U(x, y) = \|x\| \int_0^1 K(s, t)\, y(t)\, dt \tag{3}$$

действует из S_1 в пространстве $C(0,1)$.

Покажем, что оператор (3) непрерывен по норме в S_1. Пусть $\{x_n(t)\}$, $\{y_n\} \in S_1$ есть произвольные последовательности, равномерно сходящиеся на сегменте $[0,1]$, соответственно, к предельным функциям $x_0(t), y_0(t) \in S_1$. Тогда

$$U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) = (\|x_n\| - \|x_0\|) \int_0^1 K(s, t)\, y_n(t)\, dt +$$

$$+ \|x_0\| \int_0^1 K(s, t)\,(y_n(t) - y_0(t))\, dt,$$

откуда

$$|(U x_n, y_n) - U(x_0, y_0)| \leqslant |\,\|x_n\| - \|x_0\|\,|\,\left|\int_0^1 K(s, t)\, y_n(t)\, dt\right| +$$

$$+ \|x_0\|\,\left|\int_0^1 K(s, t)\,(y_n(t) - y_0(t))\, dt\right| \leqslant (\|x_n - x_0\|\,\|y_n\| +$$

$$+\| y_n(t)-y_0(t)\| \, \| x_0 \|) \max_{s,t} | K(s,t) | \leqslant$$

$$\leqslant (\| x_n - x_0 \| + \| y_n(t) - y_0(t) \|) \max_{s,t} | K(s,t) |.$$

Следовательно, будем иметь

$$\| U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) \| = \max_s | U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0) | \leqslant$$

$$\leqslant (\| x_n - x_0 \| + \| y_n(t) - y_0(t) \|) \max_{s,t} | K(s,t) | \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Тем самым доказана непрерывность по норме оператора (3) в S_1.

Докажем теперь, что оператор (3) компактен.

Обозначим область значений оператора (3) через $\Omega_1 \in C(0,1)$ и заметим, что множество Ω_1 равномерно ограничено. Действительно, для произвольного $U(x; y) \in \Omega_1$, при любых $x(t), y(t) \in S_1$, имеем

$$| U(x,y) | = | \, \| x \| \int_0^1 K(s,t) y(t)\, dt \, | \leqslant \max_{s,t} | K(s,t) |.$$

Далее установим, что множество Ω_1 есть семейство равностепенно непрерывных функций на сегменте [0,1]. В самом деле, так как $K(s,t)$, непрерывна в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, то она равномерно непрерывна на этом же квадрате. Поэтому, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$| K(s_1, t) - K(s_2, t) | < \varepsilon \tag{4}$$

для $| s_1 - s_2 | < \eta$ и любых $t \in [0,1]$. Пусть $U(x,y) \in \Omega_1$ — произвольный элемент, в силу (4) будем иметь

$$| U(x,y)_{s=s_1} - U(x,y)_{s=s_2} | \leqslant \| x \| \int_0^1 | K(s_1,t) - K(s_2,t) | \, | y(t) | \, dt < \varepsilon,$$

коль скоро $| s_1 - s_2 | < \eta$. Итак, семейство Ω_1 непрерывных функций $U(x,y)$ такого, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta > 0$ такое, что

$$| U(x,y)_{s=s_1} - U(x,y)_{s=s_2} | < \varepsilon$$

каждый раз, когда $| s_1 - s_2 | < \eta$ для любых $s_1, s_2 \in [0,1]$ и произвольного элемента $U(x,y) \in \Omega_1$. Тем самым доказано, что Ω_1 есть множество равностепенно непрерывных функций.

Таким образом, оператор (3) непрерывен по норме и компактен. Следовательно, он вполне непрерывен в S_1.

Теорема. Всякий слабонепрерывный оператор $U(x,y)$, действующий из пространства E_1 со слабо компактным шаром S_1 в E_2, есть вполне непрерывный оператор в S_1.

Доказательство. Так как $U(x, y)$, где $x, y \in S_1$, слабонепрерывен в S_1, то он тем более непрерывен по норме в S_1. Следовательно, достаточно доказать компактность оператора $U(x, y)$.

Обозначим через $\Delta \subset E_2$ множество значений оператора $U(x, y)$. Пусть $U(x_k, y_k)\} \in \Delta$ — произвольная бесконечная последовательность. Пусть $\{x_k\}, \{y_k\} \in S_1$ один из прообразов последовательности $\{U(x_k, y_k)\}$. В силу слабой компактности шара S_1, из последовательностей $\{x_k\}, \{y_k\}$ можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности $\{x_{k_j}\} \in \{x_k\}, \{y_{k_j}\} \in \{y_k\}$, слабые пределы которых обозначим соответственно через $x^*, y^* \in S_1$. В силу слабой непрерывности $U(x, y)$, последовательность $\{U(x_{k_j}, y_{k_j})\}$ сходится по норме к $U(x^*, y^*) \in \Delta$. Следовательно, из $\{U(x_k; y_k)\}$ мы выделили сходящуюся по норме подпоследовательность $\{U(x_{k_j}, y_{k_j})\}$. Итак, оператор $U(x, y)$ компактен и теорема доказана.

Полная непрерывность оператора $U(x, y)$ не обеспечивает его слабую непрерывность. Это видно из следующего примера. Пусть

$$U(x, y) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, y(t)\, dt, \tag{5}$$

где $K(s, t)$ — непрерывная функция в квадрате $0 \leqslant s, t < 1$, для которой существует число μ такое, что $0 < \mu \leqslant K(s, t)$, функции $x(t)$, $y(t)$ — произвольные элементы шара S_1 гильбертого функционального пространства $L_2(0,1)$. Оператор (5) действует из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$. Пусть Δ обозначает область значений оператора (5). Легко убедиться, что $U(x, y)$ непрерывен по норме в S_1. В самом деле, пусть $\{x_n(t)\}$, $\{y_n(t) \in S_1$ — две произвольные последовательности, сходящиеся по норме соответственно к $x_0(t), y_0(t) \in S_1$. Имеем

$$|U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0)|^2 = \left(\int_0^1 K(s, t)\, (x_n y_n - x_0 y_0)\, dt \right)^2,$$

откуда

$$\int_0^1 |U(x_n, y_n) - U(x_0, y_0)|^2\, ds = (\max_{s, t} K(s, t))^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 (x_n y_n - x_0 y_0)\, dt \right)^2 ds =$$

$$= (\max_{s, t} K(s, t))^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 y_n (x_n - x_0)\, dt + \int_0^1 x_0 (y_n - y_0)\, dt) \right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant (\max_{s, t} K(s, t))^2 \int_0^1 \left[\int_0^1 y_n^2\, dt \int_0^1 (x_n - x_0)^2\, dt + \right.$$

$$+2\left(\int_0^1 y_n^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 (x_n-x_0)^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 x_0^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 (y_n-y_0)^2\,dt\right)^{1/2}+$$

$$\left.+\int_0^1 x_0^2\,dt\int_0^1 (y_n-y_0)^2 dt\right]^2 \leqslant \max_{s,t} K(s,t))^2\,[\,\|x_n-x_0\|\max_n \|y_n\|^2+$$

$$+2\,\|x_n-x_0\|\,\|y_n-y_0\|\,\|x_0\|\max_n \|y_n\|+\|y_n-y_0\|^2\,\|x_0\|\,].$$

Таким образом, при $n\to\infty$ получим

$$\|U(x_n, y_n)-U(x_0, y_0)\|\to 0.$$

Кроме того, легко видеть, что для любых $x(t), y(t)\in S_1$ оператор $U(x, y)$ ограничен по норме. Действительно, имеем

$$\|U(x, y)\|=\left\{\int_0^1\left(\int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,y(t)\,dt\right)^2 ds\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{s,t} K(s, t)\left\{\int_0^1\left[\left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 y^2(t)\,dt\right)\right]ds\right\}^{1/2}\max_{s,t} K(s, t).$$

Далее, так как функция $K(s, t)$ равномерно непрерывна, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ такое, что

$$|K(s+\Delta s, t)-K(s, t)|<\varepsilon,\quad \text{при}\quad |\Delta s|<\eta.$$

Следовательно, будем иметь

$$\int_0^1 [U(x, y)_{s+\Delta s}-U(x, y)_s]^2 ds=\int_0^1\left[\int_0^1 (K(s+\Delta s, t)-\right.$$

$$\left.-K(s, t))\,x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 ds<\varepsilon^2.$$

Таким образом, для элементов множества Δ выполнены условия:

1) существует постоянная $(\max\limits_{s,t} K(s,t))^2$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 |U(x, y)|^2\,ds\leqslant(\max_{s,t} K(s, t))^2,$$

для всех $U(x, y)\in\Delta$;

2) для любого $\varepsilon>$ существует число $\eta>0$ такое, что для всех $U(x, y)\in\Delta$ имеет место неравенство

$$\|U(x, y)_{s+\Delta s}-U(x, y)_s\|<\varepsilon$$

всякий раз, когда $|\Delta s|<\eta$.

В силу теоремы Ф. Рисса [1], множество Δ компактно. Следовательно, оператор (5) вполне непрерывен в S_1.

Покажем теперь, что $U(x, y)$ не является слабонепрерывным оператором. В самом деле, так как $K(s,t) \geqslant \mu > 0$, то для всех x, $\|x\| = 1$ и $y = kx$, $k > 0$ будем иметь

$$\|U(x, y)\| = \left\{ \int_0^1 [K(s, t)\, x(t)\, y(t)\, dt]^2\, ds \right\}^{1/2} \geqslant \mu k > 0. \tag{6}$$

Пусть элемент x пробегает последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$, $\|x_n\| = 1$, тогда $\{y_n\} = \{kx_n\}$ такова, что $y_n \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$ и $\|y_n\| = k$. Если допустить, что $U(x, y)$ слабонепрерывен, то мы должны иметь $\|U(x_n, y_n)\| \to 0$, что противоречит (6).

Теорема. Для того, чтобы нелинейный оператор $U(x, y)$, отображающий единичный шар $S_1 \subset E_1$ в ограниченное множество $\Delta \subset E_2$, был слабонепрерывным в S_1, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $U(x, y)$ должен быть компактным,

2) всякую слабосходящуюся последовательность шара S_1 оператор $U(x, y)$ должен отображать в слабосходящуюся последовательность.

Необходимость. Необходимость первого условия вытекает из предыдущей теоремы.

Необходимость второго условия очевидна, так как оператор $U(x, y)$ всякую слабосходящуюся последовательность из S_1 отображает в сходящуюся по норме последовательность, которая тем более будет сходиться в смысле слабой сходимости.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \in S_1$ обозначают произвольные слабосходящиеся последовательности. По условию последовательность $\{U(x_n, y_n)\} \in \Delta$ сходится слабо. Но тогда эта последовательность сходится и по норме, так как она компактна. Следовательно, $U(x, y)$ всякую слабосходящуюся последовательность из S_1 отображает в сходящуюся по норме последовательность множества Δ, т. е. $U(x, y)$ слабонепрерывен.

3. Рассмотрим оператор Vx, определенный на всем E_1 с областью значений в E_2, дифференцируемый в каждой точке $x \in E_1$ в смысле Фреше:

$$V(x+h) - V(x) = B_x h + \omega_V(x; h),$$

где $B_x h$ — линейный по h оператор из E_1 в E_2, $\omega_V(x; h)$ удовлетворяет условию

$$\|\omega_V(x; h)\| \leqslant C\omega \|h\|^{1+\alpha}, \tag{7}$$

$C\omega$ — постоянная независящая от x и $\alpha > 0$ — некоторое число. Оператор $B_x h$ будем называть градиентом, а $\omega_V(x; h)$—остатком оператора $V(x)$ [2].

Теорема. Если оператор $V(x)$, действующий из E_1 в E_2, слабонепрерывен и дифференцируем в смысле Фреше в пространстве E_1, остаток которого удовлетворяет условию (7), то его градиент $B_x h$ слабонепрерывен в E_1.

Пусть $\{x_n\}$, $\{h_n\} \in E_1$ — слабосходящиеся последовательности, соответственно, к слабым пределам $x, h \in E_1$. Пусть, кроме того, $t > 0$ — числовой параметр. Имеем

$$V(x_n + th_n) - V(x_n) = tBx_n h_n + \omega_V(x_n; th_n),$$

$$V(x + th) - V(x) = tB_x h + \omega_V(x; th).$$

Отсюда

$$\beta x_n h_n - B_x h = \frac{V(x_n + th_n) - V(x_n)}{t} - \frac{V(x + th) - V(x)}{t} +$$

$$+ \frac{1}{t}\omega_V(x;\ th) - \frac{1}{t}\omega_V(x_n;\ th_n)$$

и, переходя к нормам, получим

$$\| Bx_n h_n - B_x h \| \leqslant \left\| \frac{V(x_n + th_n) - V(x_n)}{t} + \frac{V(x + th) - V(x)}{t} \right\| +$$

$$+ \frac{1}{t}\| \omega_V(x; th) \| + \frac{1}{t}\| \omega_V(x_n;\ th_n) \|. \tag{8}$$

Очевидно, $x_n + th_n \xrightarrow{\text{сл.}} x + th$ и, в силу слабой непрерывности $V(x)$, последовательность $\left\{\frac{V(x_n + th_n) - V(x)}{t}\right\}$ сходится по норме к $\frac{V(x + th) - V(x)}{t}$. Следовательно, взяв достаточно большим n, для любого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\left\| \frac{V(x_n + th_n) - V(x_n)}{t} - \frac{V(x + th) - V(x)}{t} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8'}$$

Далее, в силу (7), имеем оценку

$$\frac{1}{t}\omega_V(x_n;\ th_n) \| \leqslant \frac{1}{t} C\omega \| th_n \|^{1+\alpha} = C\omega\, t^{\alpha} \| h_n \|^{1+\alpha}. \tag{9}$$

Так как последовательность $\{h_n\}$ сходится слабо, то нормы $\|h_n\|$ равномерно ограничены по n некоторым числом $\sqrt[1+\alpha]{\eta}$, т. е.

$$\| h_n \| \leqslant \sqrt[1+\alpha]{\eta}, \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому из (9) теперь будем иметь

$$\frac{1}{t}\|\omega_{\mathrm{V}}(x_n;\, th_n)\| \leqslant C'\omega\, t^{\alpha}, \tag{9'}$$

где $C'\omega = \eta C\omega$. Выбирая произвольный до сих пор параметр $t > 0$, равный $t = \sqrt[a]{\dfrac{\varepsilon}{3\, C'\omega}}$, из (9′) получим

$$\frac{1}{t}\|\omega_{\mathrm{V}}(x_n;\, th_n)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Аналогичным путем находим

$$\frac{1}{t}\|\omega_{\mathrm{V}}(x;\, th)\| \leqslant C\omega\, t^{\alpha}\, \|h\|^{1+\alpha}. \tag{11}$$

Кроме того, элемент h, по условию, является слабым пределом последовательности $\{h_n\}$, что обеспечивает неравенство $\|h\| \leqslant \|h_n\|$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, приходим к оценке $\|h\| \leqslant \sqrt[1+\alpha]{\eta}$. Последнее неравенство, в силу (11), приводит к неравенству

$$\frac{1}{t}\|\omega_{\mathrm{V}}(x;\, th)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Используя (8), (10), (11′), из (8) получим

$$\|B_{x_n}^{h_n} - B_x h\| < \varepsilon,$$

что и доказывает нашу теорему.

Кафедра высшей математики
физического факультета

(Поступило в редакцию 18.X.1962)

ე. წითლანაძე

ოპერატორის დიფერენცირების შესახებ წრფივ სივრცეში

რეზიუმე

შრომაში განხილულია სუსტად უწყვეტი ოპერატორის შესახებ ზოგიერთი საკითხი წრფივ ნორმირებულ სივრცეში.

ვთქვათ E_1 და E_2 ბანახის ტიპის სივრცეებია და $S_1 \subset E_1$ — ჩაკეტილი სფერო, რომლის რადიუსი უდრის ერთს.

დამტკიცებულია შემდეგი წინადადებები:

1. იმისათვის, რომ არაწრფივი ოპერატორი $U(x, y)$, რომელიც S_1 სფეროს გადასახავს ნორმით შემოსაზღვრულ სიმრავლეზე $\Delta \subset E_2$, იყოს სუსტად უწყვეტი S_1 სფეროში, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობები: ა) $U(x, y)$ უნდა იყოს კომპაქტური ოპერატორი, ბ) S_1 სფეროს კუთვნილ ყოველ სუსტად კრებად მიმდევრობას ოპერატორი $U(x, y)$ უნდა გადასახავდეს სუსტად კრებად მიმდევრობაში.

2. თუ არაწრფივი ოპერატორი $V(x)$, რომელიც E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში მოქმედებს, სუსტად უწყვეტი და ფრეშეს აზრით დიფერენცირებადია და თუ მისი ნაშთი გარკვეულ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ გრადიენტი $B_x h = \mathrm{grad}\, V(x)$ იქნება სუსტად უწყვეტი ოპერატორი.

შრომაში განხილულია აგრეთვე მაგალითები.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, Москва, 1951.
2. Э. С. Цитланадзе. О дифференцировании функционалов, Матем. сб. 29 (71) (1951), 3—12.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Э. С. Цитланадзе

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

1. В настоящей работе доказывается принцип неподвижной точки С. Банаха (1) для системы операторных уравнений и используется он при установлении существования и единственности решения у одной нелинейной общей системы интегральных уравнений. Этот принцип служит также средством для получения приближенных решений различных систем функциональных уравнений.

Теорема 1. Пусть в метрическом полном пространстве E даны операторы $U(x, y)$ и $V(x, y)$, действующие из E в E, т. е. если $x, y \in E$, то $U(x, y)$, $V(x, y) \in E$. Пусть, кроме того, операторы $U(x, y)$ $V(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\rho[U(x'; y'),\ U(x''; y'')] \leqslant \alpha\rho(x'\ x''), \\ &\rho[V(x'; y'),\ V(x'', y'')] \leqslant \beta\rho(y', y''), \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $x', x'', y', y'' \in E$ и $\alpha < 1$, $\beta < 1$. Тогда существует и притом единственная пара элементов $x_0, y_0 \in E$, такая, что

$$\left.\begin{aligned} U(x_0, y_0) &= x_0 \\ V(x_0, y_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно элементы $x, y \in E$ и положим

$$x_1 = U(x, y)$$
$$y_1 = V(x, y).$$

Далее построим две последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ согласно следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= U(x_{n-1},\ y_{n-1}), \\ y_n &= V(x_{n-1},\ y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad n = 2,3\ldots$$

Исходя из оценок

$$\left.\begin{aligned} &\rho(x_1, x_2) = \rho(U(x, y),\ U(x_1, y_1)) \leqslant \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho\,(x, U(x,y)), \\ &\rho(y_1, y_2) = \rho(V(x, y),\ V(x_1, y_1)) \leqslant \beta\rho(y, y_1) = \beta\rho(y, V(x, y)), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

получаемых использованием условий (1), легко построить последовательности следующих оценок

$$
\left.\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}) &\leqslant \alpha^n \rho(x, U(x, y)) \\
\rho(y_n, y_{n+1}) &\leqslant \beta^n \rho(y, V(x, y))
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

где $n = 1, 2, \ldots$

Далее для любого натурального p имеем

$$
\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha} \rho(x, U(x; y)) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x, U(x; y)),
$$

$$
\rho(y_n, y_{n+p}) \leqslant \frac{\beta^n - \beta^{n+p}}{1-\beta} \rho(y, V(x; y)) \leqslant \frac{\beta^n}{1-\beta} \rho(y, V(x; y)),
$$

откуда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0, \\
&\rho(y_n, y_{n+p}) \to 0,
\end{aligned}
$$

при $n \to \infty$. Следовательно, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ являются фундаментальными. Пусть

$$
\begin{aligned}
&x_n \to x_0, \quad \text{при} \quad n \to \infty, \\
&y_n \to y_0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Покажем, что $x_0, y_0 \in E$ являются элементами, удовлетворяющими системе (2). Действительно, имеем

$$
\begin{aligned}
\rho(x_0, U(x_0; y_0)) &\leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, U(x_0; y_0)) = \\
&= \rho(x_0, x_n) + \rho(U(x_{n-1}; y_{n-1}), U(_0; y_0)) \leqslant \\
&\leqslant \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0) \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Аналогично получим

$$
\rho(y_0, V(x_0; y_0)) \leqslant \rho(y_0, y_n) + \beta\rho(y_{n-1}, y_0) \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.
$$

Наконец, допустим, что существуют две пары x_0, y_0 и x'_0, $y'_0 \in E$, для которых

$$
\left.\begin{aligned}
U(x_0; y_0) &= x_0, \\
V(x_0; y_0) &= y_0,
\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad
\left.\begin{aligned}
V(x'_0; y'_0) &= x'_0, \\
V(x'_0; y'_0) &= y'_0.
\end{aligned}\right\}
$$

Тогда

$$
\rho(x_0; x'_0) = \rho(U(x_0; v_0), U(x'_0; y'_0)) \leqslant \alpha\rho(x_0; x'_0), \text{ т. е. } 1 \leqslant \alpha,
$$

$$
\rho(y_0, y'_0) = \rho(V(x_0, y_0), V(x'_0; y'_0)) \leqslant \beta\rho(y_0; y'_0), \text{ т. е. } 1 \leqslant \beta,
$$

что противоречит условиям теоремы.

2. Дадим приложение доказанной теоремы к задаче существования и единственности решения нелинейной системы интегральных уравнений (см. 2) вида

$$\left.\begin{aligned} &F_1\left[s, x(s), y(s), \lambda_1\int_0^1 k_1(s, t, x(t), y(t))\,dt\right]=0, \\ &F_2\left[s, x(s), y(s), \lambda_2\int_0^1 k_2(s, t, x(t), y(t))\,dt\right]=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где F_1 и F_2 — заданные функции своих аргументов, $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, λ_1 и λ_2 — действительные параметры, $x(s)$ и $y(s)$ — элементы пространства $C(0,1)$.

Допустим, что систему (5) можно решить относительно $x(s)$ и $y(s)$. Тогда (5) можно записать в форме

$$\left.\begin{aligned} &x(s)=f_1\left[s, \lambda_1\int_0^1 k_1(s, t, x(t), y(t))\,dt\right], \\ &y(s)=f_2\left[s, \lambda_2\int_0^1 k_2(s, t, x(t), y(t))\,dt\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Докажем, что при некоторых предположениях относительно функций f_1, f_2, k_1 и k_2 система (6) имеет единственное решение $x_0(s)$, $y_0(s) \in C(0,1)$.

Теорема 2. Если выполнены условия:

1) функции $f_1(s, \xi)$, $f_2(s, \eta)$ определены для $0 \leqslant s \leqslant 1$, $-\infty < \xi < \infty$, $-\infty < \eta < \infty$, непрерывны по совокупности соответственно переменных (s, ξ), (s, η) и удовлетворяют условию Липшица соответственно по ξ и η, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &|f_1(s, \xi'')-f_1(s, \xi')| \leqslant M_1|\xi''-\xi'|, \\ &|f_2(s, \eta'')-f_2(s, \eta')| \leqslant M_2|\eta''-\eta'|; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2) функции $k_1(s, t, x, y)$, $k_2(s, t, x, y)$ определены для $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, $-\infty < x$, $y < \infty$, непрерывны по совокупности переменных (s, t, x, y) и удовлетворяют условию Липшица соответственно по x и y, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &|k_1(s, t, x'', y'')-k_1(s, t, x', y')| \leqslant N_1|x''-x'|, \\ &|k_2(s, t, x'', y'')-k_2(s, t, x', y')| \leqslant N_2|y''-y'|. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Тогда для

$$|\lambda_1| < \frac{1}{M_1M_2}, \quad |\lambda_2| < \frac{1}{N_1N_2} \tag{9}$$

система (6) имеет единственное решение.

Доказательство. В пространстве C(0,1), непрерывных на сегменте [0,1] функций, определим операторы

$$
\left.\begin{aligned}
U(x, y) &= f_1\left[s, \lambda_1 \int_0^1 k_1(s, t, x(t), y(t))\, dt\right], \\
V(x, y) &= f_2\left[s, \lambda_2 \int_0^1 k_2(s, t, x(t), y(t))\, dt\right].
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

Операторы $U(x, y)$, $V(x, y)$ переводят элементы пространства $C(0,1)$ снова в элементы этого пространства. Пусть (x', y'), $(x'', y'') \in C(0,1)$ — две произвольные пары элементов. В силу условий (7), будем иметь

$$
|U(x', y') - U(x'', y'')| = \left| f_1\left[s, \lambda_1 \int_0^1 k_1(s, t, x', y')\, dt\right] - \right.
$$

$$
\left. - f_1\left[s, \lambda_1 \int_0^1 k_1(s, t, x'', y'')\, dt\right]\right| \leqslant
$$

$$
\leqslant M_1 |\lambda_1| \left| \int_0^1 k_1(s, t, x', y')\, dt - \int_0^1 k_2(s, t, x'', y'')\, dt \right|; \tag{11}
$$

аналогично получим

$$
|V(x', y') - V(x'', y'')| \leqslant M_2 |\lambda_2| \left| \int_0^1 k_2(s, t, x', y')\, dt - \right.
$$

$$
\left. - \int_0^1 k_2(s, t, x'', y'')\, dt \right|.
$$

Используя теперь условия (8), напишем:

$$
\left| \int_0^1 k_1(s, t, x', y')\, dt - \int_0^1 k_1(s, t, x'', y'')\, dt \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \int_0^1 |k_1(s, t, x', y') - k_1(s, t, x'', y'')|\, dt \leqslant N_1 \int_0^1 |x'' - x'|\, dt \leqslant
$$

$$
\leqslant N_1 \max_t |x'' - x'| = N_1 \| x'' - x' \|.
$$

Аналогично

$$
\left| \int_0^1 k_2(s, t, x', y')\, dt - \int_0^1 k_2(s, t, x'' y'')\, dt \right| \leqslant N_2 \| y'' - y' \|.
$$

Теперь из (10) и (11) получим

$$\max_s |U(x', y') - U(x'', y'')| \leqslant M_1 N_1 |\lambda_1| \, \| x'' - x' \|,$$

$$\max_s |V(x', y') - V(x'', y'')| \leqslant M_2 N_2 |\lambda_2| \, \| y'' - y' \|,$$

т. е.

$$\rho(U(x', y'), U(x'', y'')) \leqslant M_1 N_1 |\lambda_1| \rho(x', x''),$$

$$\rho(V(x', y'), V(x'', y'')) \leqslant M_2 N_2 |\lambda_2| \rho(y', y'').$$

Следовательно, в силу условий (9), операторы $U(x, y)$ $V(x, y)$ удовлетворяют условиям (1).

Таким образом, в силу теоремы 1, существует единственная пара непрерывных на сегменте [0,1] функций $x_0(t)$, $y_0(t)$), удовлетворяющая системе (6).

Кафедра высшей математики
физического факультета

(Поступило в редакцию 19.12.1962)

ე. წითლანაძე

უძრავი წერტილის პრინციპის ერთი განზოგადების შესახებ

რეზიუმე

ვთქვათ მოცემულია $U(x, y)$, $V(x, y)$ ოპერატორები, რომლებიც სრული მეტრული E სივრციდან ისევ ამავე სივრცეში მოქმედობენ. შრომაში დამტკიცებულია, რომ თუ შესრულებულია (1) პირობები, მაშინ არსებობს $x_0, y_0 \in E$ ელემენტების ერთადერთი წყვილი, რომელიც დააკმაყოფილებს ოპერატორულ განტოლებათა (2) სისტემას. მიღებული შედეგი გამოყენებულია (5) არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის დამტკიცების საკითხებში, როცა $x_0(t)$ და $y_0(t)$ ეკუთვნიან $C(0,1)$ სივრცეს.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Москва, 1951, стр. 47—50.
2. О. Женхен. ДАН СССР, Москва, 1952, т. LXXXVI, № 2.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

А. Г. Джваршейшвили

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этой статье мы в основном обобщаем в определённом направлении признаки Марцинкевича (см. [1]), Колмогорова и Селиверстова (см. [2]) о сходимости ряда Фурье. Прежде всего, для удобства читателя, приведем некоторые определения. Мы будем рассматривать функции, определенные на интервале $(-\pi, \pi)$.

Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу VB на множестве $E \subset (-\pi, \pi)$, если для любой системы неперекрывающихся сегментов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$, концы которых принадлежат E, имеем

$$\sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < M.$$

Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу VBG на интервале $(-\pi, \pi)$, если $(-\pi, \pi) = \sum E_k$, так что на каждом замкнутом множестве E_k функция $f(x)$ является класса VB. Отсюда следует, что если $f(x)$ есть VBG на $(-\pi, \pi)$, то всякое совершенное множество E содержит порцию $P = \overline{(\alpha, \beta) E}$, на которой $f(x)$ есть класса VB.

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Марцинкевича на множестве $E \subset (-\pi, \pi)$, или коротко, принадлежит классу M на E, если для любых точек $x \in E$, $y \in E$ имеем

$$|f(x) - f(y)| < \frac{C}{|\lg|x-y||}.$$

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет обобщённому условию Марцинкевича на интервале $(-\pi, \pi)$, или коротко, принадлежит классу MG на $(-\pi, \pi)$, если $(-\pi, \pi) = \sum_k E_k$ так, что на каждом замкнутом множестве E_k функция $f(x)$ принадлежит классу M. Теперь докажем одно основное свойство совершенных множеств, а именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть совершенное множество* $E \subset (-\pi, \pi)$ *и* $\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *суть смежные интервалы множества* E.

Если ряд

$$\sum_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k=1,2,\ldots$$

сходится, то почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_k \frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||\,|d_k-x|}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $0<\sigma<1$, $\Delta_k=(\alpha_k-\sigma|\delta_k|;\quad \beta_k+\sigma|\delta_k|)$,

$$k=1,2,\ldots$$

Ясно, что

$$E_1=(-\pi,\pi)-\sum \Delta_k \subset E$$

и

$$|E-E_1|<2\sigma\sum_k|\delta_k|.$$

Отсюда вытекает, что мера множества E_1 может быть сколь угодно близкой к мере множества E.

Пусть $\varphi(x)$ есть характеристическая функция множества E_1 и рассмотрим интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx\sum_k\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||\,|\alpha_k-x|}=\sum_k\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||}\int_{E_1}\frac{dx}{|\alpha_k-x|}. \tag{2}$$

Оценим интеграл

$$\int_{E_1}\frac{dx}{|\alpha_k-x|}<2\int_{\sigma|\delta_k|}^{2\pi}\frac{du}{u}<C|\lg|\delta_k||. \tag{3}$$

Из (3) и (2) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx\sum_k\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||\,|\alpha_k-x|}<C\sum_k\varepsilon_k<\infty.$$

Следовательно, ряд (1) сходится почти всюду на E_1, но из предыдущего замечания вытекает, что ряд (1) сходится почти всюду на E, и теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — суммируемая функция на $(-\pi,\pi)$, равна нулю на совершенном множестве $E\subset(-\pi,\pi)$ и для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$\int_{\pi_k}^{\beta_k}|f(x)|\,dt<C\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||}, \tag{4}$$

где ε_k — общий член некоторого сходящегося ряда, а $\{\delta_k=(\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества E. Тогда ряд Фурье $\sigma[f]$ функции $f(x)$ сходится почти всюду на E.

Доказательство. Рассмотрим преобразованную частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$. Имеем

$$S^*_n[f,x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt.$$

Для данного $x\in(-\pi,\pi)$ и любого $\delta>0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x+\delta}^{\pi} f(x)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{x-\delta} f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt=0. \tag{5}$$

Пусть $x\in E$ и в точке x сходится ряд (1). Следовательно, для $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\sum_{\delta_k\subset(x-\delta,\,x+\delta)}\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||\,|\alpha_k-x|}<\varepsilon. \tag{6}$$

Оценим интеграл

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|<\sum_{\delta_k\subset(x-\delta,\,x+\delta)}\int_{\delta_k}|f(t)|\left|\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\right|dt<$$

$$C\sum_{\delta_k\subset(x-\delta,\,x+\delta)}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}|f(t)|\frac{dt}{|\alpha_k-x|},\qquad n=1,\,2,\ldots \tag{7}$$

На основании неравенств (4), (6) (7) получаем

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|<C\varepsilon,\quad n=1,\,2,\ldots \tag{8}$$

Теперь, в силу соотношений (5) и (8) легко заключить справедливость теоремы.

Заметим, что если в условие теоремы 2 положим $\varepsilon_k\leqslant|\delta_k|$, то функция $f(x)$ будет удовлетворять условию теоремы Марцинкевича (см. [1]). Однако, в общем случае можно построить функцию $f(x)$ и множество E так, что условие теоремы Марцинкевича не будет выполнено. В самом деле, пусть E — такое совершенное множество, что для некоторого $\alpha\in(0,1)$ сходится ряд

$$\sum_k |\delta_k|^\alpha,$$

где $\{\delta_k=(\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества E.

Определим функцию $f(x)$ так, что $f(x)=0$, когда $x\in E$, а на смежных δ_k интервалах

$$\int_{\delta_k} |f(t)|\,dt = \frac{|\delta_k|^\alpha}{|\lg|\delta_k||},\ k=1, 2,\ldots$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\delta_k|}\int_{\delta_k} |f(t)|\,dt=\infty$$

и условие теоремы Марцинкевича не выполнено. С другой стороны, построенная функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ суммируема на $(-\pi, \pi)$ и $E\subset(-\pi, \pi)$ некоторое совершенное множество. Если для $x\in E$ и $y\in E$

$$|f(x)-f(y)|<\frac{C}{|\lg|x-y||}$$

и

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x)-f(\alpha_k)|\,dx<\frac{C\,\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||},\quad k=1,\ 2\ldots,$$

то ряд $\sigma[f]$ функции $f(x)$ сходится почти всюду на E, где $\{\delta_k=(\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества E, а $\varepsilon_k>0$ — общий член сходящегося ряда.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=f(x)$, когда $x\in E$ и

$$\varphi(x)=\frac{\beta_k-x}{\beta_k-\alpha_k}\,f(\alpha_k)+\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\,f(\beta_k),$$

когда $x\in\delta_k$, $k=1, 2\ldots$ Легко проверить, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Марцинкевича на $(-\pi, \pi)$; поэтому ее ряд Фурье сходится почти всюду на $(-\pi, \pi)$.

Пуст $h(x)=f(x)-\varphi(x)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(x)|\,dx\leqslant\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x)-f(\alpha_k)|\,dx+\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi(x)-\varphi(\alpha_k)|\,dx$$

$$\leqslant C\left\{\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||}+\frac{|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|}{2}\,|\delta_k|\right\}<C\,\frac{\varepsilon_k+|\delta_k|}{|\lg|\delta_k||}.$$

Таким образом, функция $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и поэтому ряд Фурье $\sigma[h]$ сходится почти всюду на E. Следовательно, ряд

Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на E, и теорема доказана.
Из доказанной теоремы вытекает:

Теорема 4. Пусть $f(x)$ принадлежит классу MG на $(-\pi, \pi)$. Если любое совершенное множество $E\subset(-\pi, \pi)$ содержит порцию $P=(\alpha, \beta)E$ так, что

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(t)-f(\alpha_k)|\,dt< C\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||},$$

то $\sigma[f]$ сходится почти всюду на $(-\pi, \pi)$, где $\{\delta_k=(\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества P, а $\{\varepsilon_k>0$ — общий член сходящегося ряда.

Справедлива также следующая

Теорема 5. Пусть $f(x)$ суммируема на $(-\pi, \pi)$ и $E\subset(-\pi, \pi)$ — некоторое совершенное множество. Если

$$\sum_k\Big[\Big(\int\limits_E f(t)\cos kt\,dt\Big)^2+\Big(\int\limits_E f(t)\sin kt\,dt\Big)^2\Big]\lg k$$

сходится и

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x)|\,dx<\frac{C\,\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||},\quad k=1,\ 2\ldots,$$

то ряд Фурье $\sigma[f]$ сходится почти всюду на E, где $\{\delta_k=(\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества E, а $\varepsilon_k>0$ — общий член сходящегося ряда.

Известно, что вопрос о сходимости почти всюду ряда Фурье $\sigma(f)$ не решён не только тогда, когда $f(x)$ интегрируема с квадратом, но даже для случая, когда $f(x)$ функция класса ACG (см. [3]). Поэтому представляет интерес вопрос, когда ряд Фурье $\sigma[f]$ функции класса VBG сходится почти всюду на интервале $(-\pi, \pi)$. Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть $f(x)$ функция класса VBG на $(-\pi, \pi)$. Если любое совершенное множество E содержит порцию $P=\overline{(\alpha, \beta)E}$ так, что

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(t)-f(\alpha_k)|\,dt< C\,\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||},\quad k=1, 2\ldots,$$

то ряд $\sigma[f]$ сходится почти всюду на $(-\pi, \pi)$, где $\{\delta_k=(\alpha_k,\beta_k)\}$ — смежные интервалы множества P, а $\varepsilon_k>0$ — общий член сходящегося ряда.

Доказательство. Допустим ряд $\sigma[f]$ расходится на совершенном множестве E положительной меры. Тогда, в силу условия теоремы, существует порция $P = \overline{(\alpha, \beta) E}$, такая, что функция $f(x)$ будет класса VB на множестве P, и одновременно будет выполнено неравенство

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(t) - f(\alpha_k)|\,dt < C\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||}, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

где $\{\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)\}$ — смежные интервалы множества P, а $\varepsilon_k > 0$ — общий член сходящегося ряда. Пусть $\varphi(x) = f(x)$, когда $x \in P$ и

$$\varphi(x) = \frac{\beta_k - x}{\beta_k - \alpha_k} f(\alpha_k) + \frac{x - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} f(\beta_k),$$

когда $x \in \delta_k$, $k = 1, 2 \ldots$. Очевидно, $\varphi(x)$ функция класса VB на интервале $(-\pi, \pi)$. Поэтому ряд Фурье $\sigma[\varphi]$ сходится почти всюду на P. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - \varphi(x)$. Вычислим интеграл

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(t)|\,dt < \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(t) - f(\alpha_k)|\,dt + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi(t) - \varphi(\alpha_k)|\,dt <$$

$$C\left[\frac{\varepsilon_k}{|\lg|\delta_k||} + \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{|\lg|\delta_k||}\right]. \tag{9}$$

Так как $f(x)$ принадлежит классу VB на множестве P, то ряд с общим членом $\eta_k = |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$ сходится. Пусть $\varepsilon'_k = \varepsilon_k + \eta_k$. Тогда из (9) имеем

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(t)|\,dt < C\frac{\varepsilon'_k}{|\lg|\delta_k||} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, функция $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а потому её ряд Фурье $\sigma[h]$ сходится почти всюду на P. Следовательно, ряд Фурье $\sigma[f] = \sigma[\varphi] + \sigma[h]$ сходится почти всюду на множестве P, что противоречит нашему допущению. Отсюда следует справедливость теоремы.

Кафедра теории функций действительного
переменного и функционального анализа

(Поступило в редакцию 20. XI. 1962)

ა. ჯვარშეიშვილი

ფურიეს მწკრივის კრებადობის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ფურიეს მწკრივის მარცინკევიჩისა და კოლმოგოროვ-სელივერსტოვის კრებადობის ნიშნების ლოკალური შემთხვევა.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Marcinkievicz, Sur les series de Fourier. Fund. Math. 27, 1936, 38—69.
2. А. Н. Колмогоров и Г. А. Селиверстов, Sur la convergence des series de Fourier. C. R. 178, 1925, 303 — 305.
3. Г. П. Толстов, К вопросу о сходимости тригонометрических рядов Фурье для непрерывных функций. Мат. сб., т. 44, 1958.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Н. Р. Тевзадзе

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \tag{1}$$

называется лакунарным, если $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность, т. е. если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1. \quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Как известно, справедлива

Теорема (Колмогоров): Если лакунарный ряд есть ряд Фурье функции $f(x) \in L\,[0,2\pi]$, то он сходится к $f(x)$ почти всюду.

Следуя Кноппу, мы будем называть любой ряд медленно колеблющимся рядом, если для последовательности его частных сумм имеет место предельное равенство

$$\omega(\alpha) = \overline{\lim_{n}} \max_{n \leqslant k \leqslant n\alpha} |S_k - S_n| \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 1+,$$

где через S_n обозначена частная сумма данного ряда. Легко показать, что лакунарный ряд (1), если $|a_k| + |b_k| \to 0$ при $k \to \infty$, является медленно колеблющимся рядом.

В самом деле, пусть λ — степень лакунарности ряда (1) и α — произвольное число, удовлетворяющее условию

$$\lambda > \alpha > 1.$$

Возьмем произвольное натуральное число m. Тогда найдется такое i, что

$$n_{i-1} < m \leqslant n_i.$$

Нетрудно видеть, что $m\alpha < n_{i+1}$. Поэтому

$$\max_{m \leqslant k \leqslant m\alpha} |S_k - S_m| \leqslant |a_{ni}|$$

Отсюда очевидно, что

$$\omega(\alpha) = 0.$$

С помощью теорем Кноппа [1] и Фейера-Лебега [2] и этого замечания легко доказывается вышеприведенная теорема Колмогорова.

Для двойных лакунарных рядов, обобщая вышеизложенное замечание и используя теорему Кноппа для медленно колеблющихся двойных рядов, мы докажем теорему, аналогичную теореме Колмогорова.

Итак, рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}. \tag{2}$$

Этот ряд называется медленно колеблющимся, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{\alpha \to 1+, \\ \beta \to 1+}} \omega(\alpha, \beta) = 0,$$

где

$$\omega(\alpha, \beta) = \varlimsup_{n,m} \max_{\substack{m \leqslant i \leqslant m\alpha \\ n \leqslant k \leqslant n\beta}} |S_{ik} - S_{mn}|$$

Нас интересует, главным образом, двойной тригонометрический лакунарный ряд Фурье от суммируемой периодической функции $f(x, y)$, определенной на сегменте $[0, 2\pi;\ 0, 2\pi]$. Поэтому под членами ряда (2) будем подразумевать выражение:

$$A_{mn} \equiv A_{m_i n_k} \equiv \lambda_{m_i n_k} (a_{ik} \cos m_i x \cos n_k y + b_{ik} \sin m_i x \cos n_k y +$$
$$+ c_{ik} \cos m_i x \sin n_k y + d_{ik} \sin m_i x \sin n_k y),$$

где

$$\frac{m_{i+1}}{m_i} \geqslant \lambda > 1, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_\mu = 1,$$

$$\lambda_{00} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{0\mu} = \lambda_{\nu 0} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{\mu\nu} = 1, \text{ при } \mu > 0, \quad \nu > 0$$

a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} и d_{ik} — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$.

В этом случае ряд (2) будет иметь вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{m_i n_k}(x, y). \tag{3}$$

Допустим теперь, что p_0 и q_0 произвольные, достаточно большие натуральные числа. Найдем такие i и k, что

$$m_{i-1} < p_0 \leqslant m_i, \quad n_{k-1} < q_0 \leqslant n_k.$$

Если $1 < \alpha, \beta < \lambda$, то легко видеть, что

$$p_0^\alpha < m_{i+1}, \quad q_0^\beta < n_{k+1}.$$

Поэтому

$$\max_{\substack{p_0 \leqslant \mu \leqslant p_0^\alpha,\\ q_0 \leqslant \nu \leqslant q_0^\beta}} |S_{\mu\nu} - S_{p_0 q_0}| \leqslant \Big|\sum_{m_i \leqslant p} \lambda_{m_i q} A_{m_i q}\Big| + \Big|\sum_{n_k \leqslant q} \lambda_{p n_k} A_{p n_k}\Big|,$$

$$p_0 \leqslant p \leqslant p_0^\alpha, \quad q_0 \leqslant q \leqslant q_0^\beta.$$

Следовательно, чтобы убедиться в том, что ряд (3) является медленно колеблющимся, достаточно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{p,q}} \sum_{m_i \leqslant p} \lambda_{m_i q} A_{m_i q} = 0, \\ &\overline{\lim_{p,q}} \sum_{n_k \leqslant q} \lambda_{p n_k} A_{p n_k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пусть $f(x, y) \in L[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ и рассмотрим последовательности функций

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\cos \mu y \, dy$$

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\sin \mu y \, dy. \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты функций $f_\mu(x)$, $\varphi_\mu(x)$ (обозначая их соответственно через α_m^μ, β_m^μ и γ_m^μ, δ_m^μ) и коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ — одни и те же. В самом деле,

$$\alpha_m^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_\mu(x)\cos mx \, dx = \frac{1}{\pi^2}\iint_R f(x, y)\cos mx \cos \mu y \, dx\, dy = a_{m\mu}.$$

$$\beta_m^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_\mu(x)\sin mx \, dx = \frac{1}{\pi^2}\iint_R f(x, y)\sin mx \cos \mu y \, dx\, dy = b_{m\mu},$$

$$\gamma_m^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_\mu(x)\cos mx \, dx = \frac{1}{\pi^2}\iint_R f(x, y)\cos mx \sin \mu y \, dx\, dy = c_{m\mu},$$

$$\delta_m^{\mu}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_\mu(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R f(x,y)\sin mx\sin\mu y\,dx\,dy=d_m^{\mu}.$$

Таким образом, если через $\sigma[f]$ обозначим ряд Фурье функции f, то будем иметь:

$$\sigma[f(x,y)]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{ik}A_{ik}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{ik}(a_{ik}\cos ix\cos ky+$$

$$+b_{ik}\sin ix\cos ky+C_{ik}\cos ix\sin ky+d_{ik}\sin ix\sin ky), \tag{5}$$

$$\sigma[f_p(x)]=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(\alpha_i^p\cos ix+\beta_i^p\sin ix), \tag{6}$$

$$\sigma[\varphi_q(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\gamma_k^q\cos kx+\delta_k^q\sin kx). \tag{7}$$

Непосредственной перегруппировкой членов этих рядов получаем:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(a_{iq}\cos ix\cos qy+b_{iq}\sin ix\cos qy+c_{iq}\cos ix\sin qy+$$

$$+d_{iq}\sin ix\sin qy)=\cos qy\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(a_{iq}\cos ix+b_{iq}\sin ix)+$$

$$+\sin qy\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(c_{iq}\cos ix+d_{iq}\sin ix)=\cos qy\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(\alpha_i^q\cos ix+$$

$$\beta_i^q\sin ix)+\sin qy\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(\gamma_i^q\cos ix+\delta_i^q\sin ix)=$$

$$=\cos qy\,\sigma[f_q(x)]+\sin qy\,\sigma[\varphi_q(x)]. \tag{8}$$

Очевидно, что если ряд (5) является лакунарным, то и ряды (6), (7) и (8) тоже являются лакунарными. Поэтому почти для всех x-ов будем иметь

$$f_q(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{iq}(a_{iq}\cos ix+b_{iq}\sin ix), \tag{6'}$$

$$\varphi_q(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{kq}(C_{kq}\cos kx+d_{kq}\sin kx). \tag{7'}$$

Следовательно, почти для всех x-ов имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{iq} A_{iq}(x, y) = f_q(x) \cdot \cos qy + \varphi_q(x) \sin qy. \tag{9}$$

Обозначим через $w_{pq}(x, y)$ частную сумму ряда (8) и докажем, что почти для всех фиксированных точек $(x, y) \in R$ можно найти такое число $N(\varepsilon)$, что

$$|w_{pq}(x, y)| < \varepsilon,$$

когда

$$p > N(\varepsilon), \quad q > N(\varepsilon).$$

Заметим, что

$$w_{pq} = w^1{}_{pq} \cos qy + w^2{}_{pq} \sin qy,$$

где $w^1{}_{pq}$ и $w_{pq}{}^2$ частные суммы, соответственно, рядов (6′) и (7′).

Тогда очевидно, что

$$|w_{pq}| \leqslant |w^1{}_{pq}| + w^2{}_{pq}|. \tag{10}$$

Положим

$$\sigma^1{}_{pq} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} w^1{}_{iq}.$$

Тогда, очевидно,

$$w^1{}_{pq} - \sigma^1{}_{pq} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} i\,(a_{iq} \cos ix + biq \sin ix).$$

В силу лакунарности ряда (6′) это равенство представимо в виде

$$w^1{}_{pq} - \sigma^1{}_{pq} = \frac{1}{p+1} \sum_{m_i \leqslant p} m_i\,(a_{m_i q} \cos m_i x + b m_i\, q \sin m_i\, x).$$

Для коэффициентов Фурье применимо известное предельное соотношение; например, для a_{mn} имеем

$$\lim_{m+n \to \infty} a_{mn} = 0,$$

а это значит: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что

$$|a_{mn}| < \varepsilon, \quad |b_{mn}| < \varepsilon, \quad |c_{mn}| < \varepsilon, \quad |d_{mn}| < \varepsilon,$$

при $n > N(\varepsilon)$, для всех значений m. Поэтому, если $q > N(\varepsilon)$, то

$$|w^1{}_{pq} - \sigma^1{}_{pq}| \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{m_i \leqslant p} m_i\,(|a_{m_i q}| + |b_{m_i q}|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{p+1} \sum_{m_i \leqslant p} m_i \leqslant A \cdot \varepsilon \quad (A = \text{const.}),$$

т. е.

$$|w^1_{pq}-\sigma^{1p}_q|<\varepsilon,$$

когда

$$q>N(\varepsilon),$$

для любого p.

Оценим теперь разность

$$\Omega_{pq}(x)=\sigma^1{}_{pq}-f_p.$$

Известно (2), что

$$\Omega_{pq}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{f_q(x+u)-f_q(x)\}\,k_p(u)\,du,$$

где

$$k_p(u)=\frac{1}{2(p+1)}\left(\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{siu}\frac{u}{2}}\right)^2$$

Отсюда, принимая во внимание определение функции $f_q(x)$, имеем

$$|\Omega_{pq}(x)|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x+u,y)-f(x,y)|\,k_p(u)\,du\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\left(\frac{1}{p}\right)}k_p(u)\,du\int\limits_0^{2\pi}|f(x+u,y)-f(x,y)|\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\left(\frac{1}{p}\right)}^{2\pi}k_p(u)\,du\int\limits_0^{2\pi}|f(x+u,y)-f(x,y)|\,dy\equiv I_1+I_2.$$

Пусть

$$\Phi_x(t)=\int\limits_0^t du\int\limits_0^{2\pi}|f(x+u,y)-f(x,y)|\,dy.$$

Как известно (3), почти для всех x-ов имеет место равенство

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Phi_x(t)=0. \tag{11}$$

Следовательно,

$$|I_1|\leqslant\frac{2p}{\pi^2}\int\limits_0^{\left(\frac{1}{p}\right)}du\int\limits_0^{2\pi}|f(x+u,y)-f(x,y)|\,dy<\varepsilon,\quad\text{при}\quad p>N(\varepsilon).$$

Далее

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_x(u)\,\frac{du}{u^2}, \tag{12}$$

где

$$\varphi_x(x) = \int\limits_0^{2\pi} |f(x+u, y) - f(x, y)|\,dy.$$

Теперь, интегрируя по частям правую часть неравенства (12) и применяя равенство (11), получим оценку:

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2p}\left\{\left[\frac{\Phi_x(2\pi)}{\pi^2} - \frac{\Phi_x\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right] + 2\int\limits_{\frac{1}{p}}^{2\pi} \Phi_x(u)\,\frac{du}{u^3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Phi_x(2\pi)}{2\pi^2 p} - \frac{p}{2}\,\Phi_x\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{1\cdot\varepsilon}{p}\int\limits_{\frac{1}{p}}^{2\pi}\frac{du}{u^3} = 0(1),$$

т. е.

$$|I_2| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad p < N_2(\varepsilon).$$

Пусть $N_0 = \max\{N_1, N_2, N\}$; тогда одновременно будем иметь оценки

$$|w^1{}_{pq} - \sigma^1{}_{pq}| < \varepsilon,$$

$$|\sigma^1{}_{pq} - f_q| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad p, q > N_0(\varepsilon).$$

Заметим, что для фиксированного x, $f_n(x)$ можно рассматривать как коэффициент Фурье и утверждать, что

$$|f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N_0(\varepsilon).$$

А так как

$$w^1{}_{pq} = (w^1{}_{pq} - \sigma^1{}_{pq}) + (\sigma^1{}_{pq} - f_q) + f_q,$$

окончательно будем иметь

$$|w^1{}_{pq}| < 3\,\varepsilon, \quad \text{когда} \quad p, q > N(\varepsilon).$$

Совершенно аналогичными рассуждениями доказывается и для ряда (7^1), что его частная сумма

$$|w^2{}_{pq}| < 3\,\varepsilon, \quad \text{когда} \quad p, q > \overline{N_0}(\varepsilon).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $N_0 = \overline{N_0}$. Таким образом, мы получили оценку

$$|w_{pq}| < 6\,\varepsilon, \quad \text{при} \quad p, q > N_0(\varepsilon),$$

т. е.

$$\left|\sum_{m_i \leqslant p} \lambda m_i q \, A m_i q\right| < 6\varepsilon, \quad \text{при} \quad p, q > N_0(\varepsilon),$$

откуда ясно, что

$$\overline{\lim_{p,q}} \sum_{m_i \leqslant p} \lambda m_i q \; A m_i q = 0.$$

Итак, доказана справедливость одного равенства из равенств (4). Нетрудно видеть, что доказательство другого равенства ничем не отличается от вышеприведенного доказательства; таким образом, мы вправе считать, что доказана

Теорема 1. Если двойной ряд Фурье некоторой интегрируемой функции $f(x, y)$ является лакунарным, то он будет и медленно колеблющимся рядом.

Отсюда непосредственно следует следующая

Теорема 2. Если двойной лакунарный ряд Фурье некоторой интегрируемой функции $f(x, y)$, $(c, 1, 1)$ — суммируем к $f(x, y)$, то он почти всюду сходится к $f(x, y)$.

В самом деле, в силу теоремы Кноппа, из $(c, 1, 1)$ — суммируемости медленно колеблющегося ряда, следует его сходимость.

Учитывая известную теорему Марцинкевича-Зигмунда о $(c, 1, 1)$ — суммируемости двойного ряда Фурье к $f(x, y)$ и теорему Кноппа, справедливую и при данном ограниченном стремлении индексов, оказывается справедливой и

Теорема: Если $\{Smn(x, y)\}$ есть последовательность частных сумм двойного лакунарного ряда Фурье интегрируемой функции $f(x, y)$, то

$$\lim_{(m,n)\lambda \to \infty} Smn(x, y) = f(x, y)$$

почти всюду на R.

Кафедра теории функции действительного переменного и функционального анализа

(Поступило в редакцию 10. III. 1963)

ნ. თევზაძე

ორმაგი ლაკუნარული ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის შესახებ

რეზიუმე

ამ შრომაში ნაჩვენებია, რომ ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თუ ლაკუნარულია, მაშინ სუსტად რხევადიც არის. ამ შენიშვნის საფუძველზე დამტკიცებულია, რომ თუ ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ამავე დროს ლაკუნარულიც არის, მაშინ $(c, 1, 1)$ — შეჯამებადობას მოსდევს კრებადობაც $f(x, y)$ ფუნქციისაკენ და რამდენადაც $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $(c, 1, 1)\lambda$ — შეჯამებულია $f(x, y)$ ფუნქციისაკენ (მარცინკევიჩ-ზიგმუნდის თეორემა) ამგვარად სამართლიანია.

თეორემა: თუ $\{Smn(x, y)\}$ არის $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგი ლაკუნარული მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(m,n)\lambda \to \infty} Smn(x, y) = f(x, y)$$

თითქმის ყველგან.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Knopp, Limitierungs — Umkehsätze für Doppelfolgen. Mathematische Zeitschrift, 45 Band, 4 Heft (1939).
2. Н. Бари, Тригонометрические ряды. Гос. из-во физ-мат. литературы. Москва, 1961.
3. Н. Р. Тевзадзе, О точках Лебега функции двух переменных. Сообщ. АН ГССР. XXXII: 1, 1963.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

ნ თევზაძე

A-ინტეგრალის და ზოგიერთი მწკრივის კრებადობის ურთიერთკავშირის შესახებ

კლასიკური ინტეგრალის ცნება, როგორც ცნობილია, არაიშვიათად გამოიყენება მწკრივის შესასწავლად კრებადობის თვალსაზრისით.

ინტეგრალის ცნების განზოგადება, ძირითადად, იმ მიზნით ხდება, რომ გაფართოვდეს ფუნქციათა კლასი, რომლისთვისაც გამოიყენება ინტეგრალის ეს ახალი ცნება, ინტეგრალის კლასიკური ცნების ძირითადი თვისებების შენარჩუნებით. მაგრამ ინტეგრალის ცნებასა და მწკრივის კრებადობის ცნებას შორის არსებული ღრმა შინაგანი კავშირი იძლევა შესაძლებლობას მწკრივთა კრებადობის თეორიაში გამოყენებულ იქნას ინტეგრალის საკმაოდ ზოგადი ცნებაც.

ჩვენ აქ განვიხილავთ საკითხს მწკრივის კრებადობის და A-ინტეგრალის არსებობის ურთიერთკავშირის შესახებ, ორბეკის ცნობილ თეორემის [2] განზოგადების საშუალებით.

როგორც ცნობილია, [1], $f(x)$ ფუნქციას Q-ინტეგრებადი ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ

$$\lim_{n} \int_a^b [f(x)]_n \, dx = S,$$

სადაც

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{როცა } |f(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{როცა } |f(x)| > n. \end{cases}$$

მიღებულია აღნიშვნა

$$S = (Q) \int_a^b f(x) \, dx; \tag{1}$$

ამას გარდა, თუ E_n სიმრავლის ზომა უსასრულოდ მცირეა $\left(\frac{1}{n}\right)$ შედარებით, ე. ი. თუ

$$mE_n = 0 \left(\frac{1}{n}\right),$$

სადაც

$$E_n = E\,[n < |\, f(x)\,|\,],$$

მაშინ (1) ინტეგრალი იქნება ადიტიური და მას A-ინტეგრალი ეწოდება. დავწერთ:

$$S = (A)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$[a, b] = E, \quad E_n^+ = E[f^+(x) \geqslant n+1], \quad E_n^- = E[f^-(x) \geqslant n+1],$$

$$\omega^{\mp}_n = E[n \leqslant f^{\mp}(x) < n+1], \quad w_n^{\mp} = E[0 \leqslant f^{\mp}(x) < n+1],$$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{როცა } f(x) > 0, \\ 0, & \text{როცა } f(x) \leqslant 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{როცა } f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{როცა } f(n) > 0. \end{cases}$$

აქედან, ცხადია, რომ

$$E = E_n + W_n, \quad E_n = E_n^+ + E_n^-, \quad W_n = W_n^+ + W_n^-,$$

$$\omega_n = \omega_n^+ + \omega_n^-, \quad W_n^{\mp} = \sum_{k=0}^{n} \omega^{\mp}_k, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

ვთქვათ, არსებობს

$$\lim_n \int_a^b [\,f(x)]_n\,d\varkappa = S,$$

მაშინ, ცხადია,

$$S = \lim_n \left\{ \int_{E_n} [\,f(x)]_n dx + \int_{W_n^-} [\,f(x)]_n dx + \int_{W_n^+} [\,f(x)]_n dx \right\} =$$

$$= \lim_n \left\{ \int_{W_n^+} f^+(x)\,dx - \int_{W_n^-} f^-(x)\,dx \right\} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \left\{ \int_{\omega_k^+} f^+ dx - \int_{\omega_k^-} f^- dx \right\},$$

ე. ი.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_{\omega_k^+} f^+(x)\,dx - \int_{\omega_k^-} f^-(x) dx \right\} = S.$$

აქედან

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \left\{ \int_{\omega^+_k} f^+(x)\,dx - \int_{\omega_k^-} f^-(x)\,dx \right\} \right| < \varepsilon,$$

როცა $n > N$, ყველა P-თვის

მეორე მხრივ,

$$km\omega_k^+ \leqslant \int_{\omega_k^+} f^+(x) dx < (k+1) m \omega_k^+,$$

$$km\omega_k^+ \leqslant \int\limits_{\omega_k^-} f^-(x)\,dx < (k+1)m\omega_k^-.$$

ამგვარად გვაქვს:

$$\sum_{k=n}^{n+p} [km\omega_k^+ - (k+1)m\omega_k^- \sum_{k=n}^{n+p} \left\{ \int\limits_{\omega_k^+} f^+\,dx - \int\limits_{\omega_k^-} f^-\,dx \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{n+p} [(k+1)m\omega_k^+ - km\omega_k^+].$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$\sum_{k=n}^{n+p} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \int\limits_{\omega_k} f(x)\,dx + \sum_{k=n}^{n+p} m\omega_k^-,$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} \int\limits_{\omega_k} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-) - \sum_{k=p}^{n+p} m\omega_k^+,$$

ე. ი.

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \int\limits_{\omega_k} f(x)\,dx - \sum_{k=n}^{n+p} k(m\bar{\omega}_k^+ - \omega_k^-) \right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} m\omega_k. \tag{3}$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{k=n}^{n+p} m\omega_k \leqslant mE_n, \quad \text{ყველა } p\text{-თვის.}$$

განვიხილოთ ისეთ ფუნქციათა კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$mE_n = 0(1),$$

სადაც

$$E_n = E[\,|f(x)| > n].$$

თეორემა 1. აუცილებელი და საკმარისი პირობა $f(x)$ ფუნქციის Q-ინტეგრებადობისათვის არის მწკრივის

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-) \tag{4}$$

კრებადობა

დამტკიცება. ვთქვათ, (4) მწკრივი კრებადია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$, მოიძებნება ისეთი N_1, რომ

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა } n > N_1, \; p \text{ ნებისმიერია.}$$

მეორე მხრივ, მოიძებნება ისეთი N_2, რომ როცა $n > N_2$, მაშინ

$$mE_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ ახლა $N = \min\{N_1, N_2\}$, მაშინ, ცხადია, (3)-ძალით

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \int_{\omega_k} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

როცა $n > N$, p-ნებისმიერი.

აქედან

$$\lim_n \int_a^b [f(x)]_n\,dx = S.$$

ახლა ვაჩვენოთ აუცილებლობა: ვთქვათ,

$$\lim_n \int_a^b [f(x)]_n\,dx = S,$$

ე. ი.

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_{\omega_n} f(x)\,dx = S,$$

მაშინ

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \int_{\omega_k} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა } n > N$$

ყველა p-თვის. (3) უტოლობის ძალით გვექნება

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-) \right| < \varepsilon,$$

ვინაიდან $\sum\limits_{k=n}^{n+p} m\omega_k < \frac{\varepsilon}{2}$, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები.

ლემა 1. თუ $mE_n^+ - mE_n^- = 0\left(\frac{1}{n}\right)$, მაშინ მწკრივის

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(m\omega_k^+ - m\omega_k^-)$$

კრებადობიდან გამომდინარეობს კრებადობა მწკრივისა

$$\sum_{k=0}^{\infty}(mE_k^{+}-mE_k^{-}).$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $E^{\pm}_{k-1}-E_k^{\pm}=\omega_k^{\pm}$,
აქედან

$$\sum_{k=0}^{n} k(m\omega_k^{+}-m\omega_k^{-})=\sum_{k=0}^{n} k(mE^{+}_{k-1}-mE_k^{+}-mE^{-}_{k-1}+mE_k^{-})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k(mE^{+}_{k-1}-mE^{-}_{k-1})-\sum_{k=0}^{n} k(mE_k^{+}-mE_k^{-})=$$

$$=\sum_{k=}^{n-1}(k+1)(mE_k^{+}-mE_k^{-}))-\sum_{k=0}^{k-1} k(mE_k^{+}-mE_k^{-})-n(mE_n^{+}-mE_n^{-})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(mE_k^{+}-mE_k^{-})-n(mE_n^{+}-mE_n^{-})$$

აქედან ცხადია, რომ თუ

$$mE_n^{+}-mE_n^{-}=0\left(\frac{1}{n}\right),$$

ერთდროულად კრებადი არიან მწკრივები

$$\sum_{k=1}^{\infty}(mE_k^{+}-mE^{-})\quad \text{და}\quad \sum_{k=1}^{\infty} k(m\omega_k^{+}-m\omega_k^{-}).$$

ლემა 2. თუ $\sum\omega_k$ მწკრივი კრებადია, სადაც $\omega_k=a_k-b_k$, $a_n\downarrow 0$ $b_n\downarrow 0$ და მწკრივის ყოველ მონაკვეთში დადებით და უარყოფით წევრთა რაოდენობათა სხვაობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\sum\omega_k$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\sum\omega_k$ მწკრივი ნიშანცვლადია, მაშინ, ცხადია,

$$\sum_{k=1}^{m}|\omega_k|=|\omega_1|+|\omega_2|+\dots+|\omega_m|=(a_1-b_1)-(a_2-b_2)+\dots=A_m+B_n,$$

სადაც

$$A_m=a_1-a_2+a_3-\dots\pm a_m,$$

$$B_m=b_1-b_2+b_3-\dots\pm b_m.$$

ცხადია, არსებობს

$$\lim_{m} A_m \quad და \quad \lim_{m} B_m.$$

ზოგად შემთხვევაში გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k| = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n_1} - \omega_{n_1+1} - \omega_{n_1+2} - \omega_{n_1+3} - \ldots - \omega_{n_2} + \omega_{n_2+1} + \cdots$$

ცხადია, რომ მწკრივი

$$\omega_1 - \omega_{n_1+1} + \omega_{n_2+1} - \cdots$$

დამტკიცებულის ძალით კრებადია, მაგრამ ასეთ მწკრივთა რაოდენობა სასრულია. ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ,

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \omega_n = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}, \quad \beta_n = \alpha_n - \omega_n,$$

როცა

$$\frac{m(m-1)}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{m(m+1)}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

ცხადია, $\alpha_n \downarrow 0$, $\beta_n \downarrow 0$, $\sum \omega_k$ მწკრივი კრებადია, მაგრამ მწკრივი

$$\sum |\omega_k|$$

არ არის კრებადი. ეს იმიტომ, რომ ამ მწკრივში დადებით და უარყოფით წევრთა განლაგება ისეთია, რომ მათი სხვაობა არ არის შემოსაზღვრული.

აქვე შევნიშნოთ, თუ მწკრივი $\sum \omega_k$ აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ $\sum |\Delta\omega_k| < \infty$ და ამიტომ ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$\omega_n = a_n - b_n, \quad a_n \downarrow 0, \; b_n \downarrow 0 \quad (\text{იხ. [1], X თავი, § 2}).$$

ამგვარად, A-ინტეგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა

$$\sum_{n=1}^{\infty} (mE_n^{+} - mE_n^{-}) \tag{5}$$

მწკრივის კრებადობა. თუ აღვნიშნავთ, $mE_n^{+} = a_n$ $mE_n^{-} = b_n$ და შევნიშნავთ, რომ $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ შეიძლება განვიხილოთ შემთხვევები:

ა) $\sum a_n$ და $\sum b_n$ მწკრივები კრებადნი არიან. მაშინ $f(x) \in L$.

ბ) $\sum a_n$ და $\sum b_n$ განშლადია, მაგრამ (5) კრებადია, მაშინ $f(x) \in A$.

ფუნქციათა კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $mE_n = O(1)$ საკმარისად ფართოა, მასში შედიან A-ინტეგრებადი, D-ინტეგრებადი და აგრეთვე ისეთი ფუნქციები, რომლებსაც აქვთ უსასრულო წყვეტა წერტილებში. ასე-

თია, მაგალითად, ფუნქცია $J=\frac{1}{x}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{x}$ ([0, 1] სეგმენტზე), რომელიც არ არის A-ინტეგრებადი. მაგრამ არის D-ინტეგრებადი [3]. ასეთი ფუნქციის Q-ინტეგრებადობის საკითხი დაიყვანება $\sum k(m\omega_k^{+}-m\omega_k^{-})$ მწკრივის კრებადობის საკითხზე.

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის
და ფუნქციონალური ანალიზის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 15. IX. 1962)

Н. Р. Тевзадзе

О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ПОНЯТИЕМ A-ИНТЕГРАЛА И СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Резюме

Известная теорема Орбека легко обобщается для „обобщенных интегралов“ Очана, в частности для A-интеграла, и таким образом устанавливается связь между сходимостью некоторых рядов и существованием A-интеграла.

ლიტერატურა

[1] Н. Бари. Тригонометрические ряды. Гос. из-во физ.-мат. литературы. Москва, 1961.
[2] А. Ковань ко. Интеграл Лебега. Книжно-журн. из-во. Львов, 1951.
[3] Ю. Очан. Обобщенный интеграл. Мат. сборник, т. 28 (70): 2. Из-во АН СССР, Москва, 1951.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

П. Г. Когония

О СВЯЗИ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ЛАГРАНЖА И МАРКОВА (II)

1. Определения и обозначения.

$$M = \{ \ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \} \tag{1}$$

— произвольная бесконечная в обе стороны ограниченная последовательность натуральных чисел;

$$1 \leqslant a_k \leqslant N, \quad \text{т. е.} \quad Max[a_k] = N, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{2}$$

$$\lambda_M(k; m, n) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_{k-m}] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+n}]; \tag{3}$$

$$\lambda_M(k) = \lambda_M(k; \infty, \infty) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots]; \tag{3_1}$$

$$T_M(k; m, n) = \{a_{k-m}, a_{k-m+1}, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n-1}, a_{k+n}\}; \tag{4}$$

$$T_M(k; m) = T_M(k; m, m) = \{a_{k-m}, \cdots, a_{k-1}, a_k \; a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}\}; \tag{4_1}$$

$$\{\lambda_M(k)\}_{-\infty < k < \infty} = E_M; \tag{5}$$

$$\lambda_M = \sup_{-\infty < k < \infty} \{\lambda_M(k)\} = \sup E_M. \tag{6}$$

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots] \tag{1'}$$

— произвольное иррациональное число интервала (0,1) с ограниченной последовательностью неполных частных;

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, a_k = \overline{\theta} = N; \tag{2'}$$

$$\lambda_\theta(k; m, n) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_{k-m}] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+n}]; \tag{3'}$$

$$\lambda_\theta(k) = \lambda_\theta(k; k-1, \infty) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_1] + a_k + [a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots]; \tag{$3'_1$}$$

$$T_\theta(k; m, n) = \{a_{k-m}, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n}\}; \tag{4'}$$

$$T_\theta(k; m, m) = \{a_{k-m}, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}\}; \tag{$4'_1$}$$

$$\{\lambda_\theta(k)\}_{k=1,2,\cdots} = E_\theta \tag{5'}$$

$$\lambda_\theta = \overline{\lim_{k \to \infty}}\, \lambda_\theta(k) \tag{6'}$$

Из элементарных свойств цепных дробей [1] непосредственно следует, что имеет место, равномерно относительно k, равенство

$$\lim_{m,n\to\infty} \lambda_M(k;\, m,\, n) = \lambda_M(k). \tag{7}$$

Числа λ_θ называются числами спектра Лагранжа, а числа λ_M — числами спектра Маркова [2] (в работе [3], продолжением которой служит настоящая статья, числа λ_θ названы числами Маркова); $\{\lambda_\theta\}$ и $\{\lambda_M\}$ обозначают, соответственно, спектры Лангража и Маркова, а $\{\lambda_\theta\}_N$ и $\{\lambda_M\}_N$ — те части этих спектров, для которых, соответственно, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, a_k = N$ и $1 \leqslant a_k \leqslant N$; итак,

$$\{\lambda_\theta\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\lambda_\theta\}_N, \quad \{\lambda_M\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\lambda_M\}_N.$$

2. Известно (см. [2] или [3]), что имеет место включение

$$\{\lambda_\theta\} \subset \{\lambda_M\}. \tag{9}$$

Занимаясь вопросом обратного включения, мной установлено [3], что если M такова, что λ_M является предельной точкой множества E_M, или даже последовательности E_M, то λ_M является некоторым λ_θ, т. е. для такой M существует θ (конструируемое просто и эффективно), для которого

$$\lambda_M = \lambda_\theta.$$

Настоящая статья посвящена исследованию обратного включения для тех последовательностей M, для которых λ_M является изолированной точкой множества E_M; это значит, что существует такое целое k_0 (число таких k_0 конечно), что

$$\lambda_M = \lambda_M(k_0), \quad \lambda_M - \lambda_M(k) \geqslant c > 0. \quad \text{при} \quad k \neq k_0.$$

Можно предположить, без ограничения общности, что $k_0 = 0$ (ибо, в случае надобности, можно было бы нумерацию членов M „сместить“ влево или вправо); можно, более того, предположить, что $k=0$ единственное, для которого имеет место указанное равенство, т. е.

$$\lambda_M = \lambda_M(0), \ \lambda_M - \lambda_M(k) \geqslant c > 0, \quad \text{при} \quad k \neq 0. \tag{10}$$

Если $Max\,[a_k] = \mathrm{N} > 6$, то для соответствующей последовательности M λ_M является некоторой λ_θ, т. е. для таких M обратное включение доказано [2]. Итак, исследованию подлежат последовательности M, для которых $1 \leqslant N \leqslant 6$; но случай $N = 1$ крайне тривиален, поэтому остается рассмотреть случаи $N = 2, 3, 4, 5, 6$.

В настоящей статье ограничимся случаем $N=2$; некоторые способы рассуждения и соответствующие факты, как легко можно видеть, распространяются на остальные случаи.

Таким образом, пусть

$$M=\{\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots\},\ 1 \leqslant a_k \leqslant 2, \tag{1}$$

$$\lambda_M=\lambda_M(0)=[0; a_{-1}, a_{-2}, \cdots]+a_0+[0; a_1, a_2, \cdots]; \tag{11}$$

тогда, в силу (10), имеем

$$\lambda_M(k)<\lambda'<\lambda''<\lambda_M \quad \text{при} \quad k \neq 0, \tag{12}$$

с соответствующими постоянными λ' и λ''.

Легко установить, на основании (11) и (12), что $a_0=2$; в силу (1) последовательности

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}=M^+, \tag{13_1}$$

$$\{a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \cdots\}=M^- \tag{13_2}$$

(назовем их, соответственно, правой и левой частью последовательности (1)) образованы чередующимися группами единиц и двоек. Пусть $\{m_1^-(k)\}$, $\{m_1^+(k)\}$, $\{m_2^-(k)\}$, $\{m_2^+(k)\}$ обозначают, соответственно, последовательности чисел единиц групп единиц в M^- и M^+, и чисел двоек групп двоек в M^- и M^+, т. е. $\{m_1^-(k)\}$ обозначает последовательность чисел единиц в чередующихся группах единиц в последовательности M^- и аналогично для остальных. Пусть далее

$$m_1^-=\overline{\lim_{k\to\infty}}\, m_1^-(k), \cdots, \qquad m_2^+=\overline{\lim_{k\to\infty}}\, m_2^+(k). \tag{14}$$

Рассмотрим систему

$$(m_1^-, m_1^+, m_2^-, m_2^+). \tag{15}$$

Если какое-нибудь из чисел $m_i^\pm$ равно ∞, в системе (15) число это заменим символом „∞“, если же $m_i^\pm$ конечно, то оставим символ „$m_i^\pm$“. В зависимости от того, сколько и какие из чисел $m_i^\pm$ равны ∞, возможны всего 16 случаев. Этими 16-тью случаями охватываются и те последовательности M, для которых некоторые из $\{m_i^\pm(k)\}$ конечны; это означает, что все члены одной из последовательностей M^-, M^+ (или обеих), начиная с некоторого места, совпадают; например, если M^+, начиная с некоторого места, состоит только из единиц, то $\{m_2^+(k)\}$ — конечно; в этом случае полагаем $m_2^+=0$, $m_1^+=\infty$.

Если бы N было равно какому-нибудь из чисел 2, 3, 4, 5 6, то, при соответствующих обозначениях, мы имели бы, вместо (15), следующую систему

$$(m_1^-, m_1^+, m_2^-, m_2^+, \cdots, m_N^-, m_N^+), \tag{15'}$$

состоящую из $2N$ чисел; причем всех возможных подслучаев будет равно 2^{2N}.

Возвращаясь к случаю $N=2$, выпишем все 16 подслучаев, указанных выше:

$$\left.\begin{array}{ll}(\infty,\ \infty,\ m_2^-,\ m_2^+) & (\mathrm{I})\\ (m_1^-,\ m_1^+,\ \infty,\ \infty) & (\mathrm{II})\\ (\infty,\ \infty,\ \infty,\ m_2^+) & (\mathrm{III})\\ (\infty,\ \infty,\ m_2^-,\ \infty) & (\mathrm{IV})\\ (m_1^-,\ \infty,\ \infty,\ \infty) & (\mathrm{V})\\ (\infty,\ m_1^+,\ \infty,\ \infty) & (\mathrm{VI})\\ (\infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty) & (\mathrm{VII})\end{array}\right\}1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\infty,\ m_1^+,\ m_2^-,\ \infty) & (\mathrm{VIII})\\ (m_1^-,\ \infty,\ \infty,\ m_2^+) & (\mathrm{IX})\end{array}\right\}2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(m_1^-,\ \infty,\ m_2^-,\ \infty) & (\mathrm{X})\\ (\infty,\ m_1^+,\ \infty,\ m_2^+) & (\mathrm{XI})\end{array}\right\}3)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\infty,\ m_1^+,\ m_2^-,\ m_2^+) & (\mathrm{XII})\\ (m_1^-,\ \infty,\ m_2^-,\ m_2^+) & (\mathrm{XIII})\\ (m_1^-,\ m_1^+,\ \infty,\ m_2^+) & (\mathrm{XIV})\\ (m_1^-,\ m_1^+,\ m^-_2,\ \infty) & (\mathrm{XV})\end{array}\right\}4)$$

$$(m_1^-,\ m_1^+,\ m_2^-,\ m_2^+)\quad (\mathrm{XVI})\qquad (5$$

Подслучай (I), как уже было условлено, означает, что как в M^-, так и в M^+ встречаются группы единиц произвольно большой длины, а длины групп двоек ограничены как в M^-, так и в M^+; в подслучае (II)— наоборот; аналогичный смысл имеют все остальные 14 систем.

Как непосредственно видно из записи систем, все 16 подслучаев разбиты на 5 групп — типов; группы эти состоят, соответственно, из 7, 2, 2, 4 и 1-го подслучаев.

Подслучаев первой группы объединяет то общее, что как в M^-, так и в M^+ встречаются группы из единиц произвольно большой длины, или группы из двоек произвольно большой длины, или и те и другие.

Рассмотрим любой из семи подслучаев первой группы, так как все они охватываются одним способом; для конкретности исследуем случай (I). Итак, пусть последовательность M такова, что как в M^-, так и в M^+ встречаются группы из единиц произвольно большой длины и произвольно далеко. Исходя из этого условия, найдем число θ, для которого $\lambda_\theta = \lambda_M$.

С этой целью рассмотрим те отрезки $T_M(0;\ m,\ n)$ последовательности M, которые с обеих сторон оканчиваются достаточно длинными группами единиц, что, в силу условия, налагаемого на M, возможно; к тому же можно предположить, что каждый из этих отрезков содержится в последующем и длины крайних групп из единиц стремятся к ∞.

Пусть эти отрезки суть следующие:

$$T_k = T_M(0;\ m_k,\ n_k) = \{a_{-m_k},\dots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\dots,a_{n_k}\}; \tag{16}$$

тогда, ввиду вышесказанного,

$$m_k \leqslant m_{k+1},\ n_k < n_{k+1},\ m_k,\ n_k \to \infty, \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Обозначим через m_k'' и n_k'' числа единиц в крайних группах единиц соответственно слева и справа в отрезке T_k; тогда

$$m_k = m_k' + m_k'',\quad n_k = n_k' + n_k'',\quad m_k'',\ n_k'' \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

В силу последних обозначений, отрезки (16) можно записать и так:

$$T_k = T_M(0;\ m'_k + m_k'',\ \ n_k' + n_k'') =$$
$$= \{(1)_{m''_k},\ a_{-m'_k}, \dots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1, \dots,\ a_{n_k},\ (1)_{n''_k}\} \tag{16$_1$}$$

Теперь построим число θ (цепную дробь), пристроив отрезки T друг к другу в порядке возрастания их номера; итак, пусть

$$\theta = [0;\ T_1,\ T_2, \dots,\ T_k, \dots] = [0; (1)_{m_1''},\ a_{-m_1'}, \dots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1, \dots,\ a_{n_1'},\ (1)_{n_1''}, \dots] =$$
$$= [0;\ b_1,\ b_2, \dots,\ b_k, \dots]. \tag{17}$$

Теперь покажем, что $\lambda_\theta = \lambda_M$.

Обозначим через $\{k_n\}$ последовательность номеров числа a_0 в разложении (17); в силу условий, налагаемых на T_k, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_\theta(k_n) = \lambda_M(0) = \lambda_M. \tag{18}$$

Так как в последовательности M встречаются группы из единиц произвольно большой длины, то, в силу (12),

$$[0;\ 1_\infty] + 1 + [0;\ 1_\infty] < \lambda' < \lambda'' < \lambda_M. \tag{19}$$

Если $\{k'_n\}$ обозначает последовательность номеров мест тех единиц в разложении (17), которые с обеих сторон ограничены достаточно длинными группами единиц, то, в силу (7),

$$\lambda_M(k'_n) < [0;\ 1_\infty] + 1 + [0;\ 1_\infty] + (\lambda'' - \lambda);$$

из этого неравенства и (19) имеем

$$\lambda_M(k'_n) < \lambda'' < \lambda_M. \tag{20}$$

Если k таково, что b_k является внутренним элементом некоторого T_s, т. е. элементом, не входящим в крайние группы из единиц, то $\lambda_\theta(k)$, в силу (7), произвольно мало отличается от соответствующего $\lambda_M(k')$; в самом деле, пусть, например, $b_k = a_{n'_s}$; тогда

$$\lambda_\theta(k) = [0;\ a_{n'_s - 1}, \dots\ a_0,\ a_{-1}, \dots,\ (1)_{m''_s}] + a_{n'_s} + [0;\ (1)_{n''_s}, \dots],$$
$$\lambda_M(k') = [0;\ a_{n'_s - 1}, \dots,\ a_1,\ a_0,\ a_{-1}, \dots] + a_{n'_s} + [0;\ (1)_{n''_s}, \dots,].$$

Так как $n_k',\ n_k'' \to \infty$, то на основании последних равенств можно предполагать, что

$$\lambda_\theta(k) < \lambda_M(k') + (\lambda'' - \lambda');$$

последнее неравенство, на основании (12), дает

$$\lambda_\theta(k) < \lambda'' < \lambda_M. \tag{21}$$

Если же b_k равно некоторой единице из группы крайних единиц отрезков T_k, то и в этом случае $\lambda_\theta(k)$ отличается от соответствующей $\lambda_M(k')$ на достаточно малую величину, т. е. и в этом случае имеем равенство (21).

Из (18), (20) и (21) следует, что

$$\lambda_\theta = \lambda_M.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1_1. Если последовательность M такова, что как в M^-, так и в M^+ встречаются группы из единиц или группы из двоек произвольно большой длины и произвольно далеко, то существует θ, для которого

$$\lambda_\theta = \lambda_M.$$

Итак, если имеет место один из первых 7-ми подслучаев, то для такой M имеет место обратное включение.

Теперь займемся случаями второй группы, т. е. случаями (VIII) и (IX); так как и эти два случая охватываются одним способом, рассмотрим один из них, например, VIII; в этом случае M такова, что в ее левой части (M^-) встречаются группы единиц произвольно большой длины и произвольно далеко, а в правой части (M^+) — группы двоек произвольно большой длины и произвольно далеко; рассмотрим те отрезки последовательности M, которые слева оканчиваются достаточно длинными группами единиц, а справа — достаточно длинными группами двоек; вместе с тем, как и раньше, можно предполагать, что отрезки эти вложены один в другой по возрастанию их номера, а длины групп, как единиц, так и двоек, стремятся к ∞. Итак

$$T_k = \{(1)_{m''_k},\ a_{-m'_k}, \dots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1, \dots,\ a_{n'_k},\ (2)_{n''_k}\}. \tag{22}$$

Теперь, как и раньше, с помощью этих отрезков строим число θ, с той лишь разницей, что перед тем, как пристраивать друг к другу, каждый второй отрезок поворачиваем на полоборота; если отрезок, получаемый из T_k поворачиванием на полоборота, обозначить через T_k^-, то число θ определяется следующим разложением

$$\theta = [0;\ T_1,\ T_2^-,\ T_3\ T_4^-, \dots] =$$

$$= [0;\ (1)_{m''_1},\ a_{-m_1'}, \dots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1, \dots,\ a_{n_1'},\ (2)_{n_1''},\ (2)_{n_2''}, \dots] =$$

$$= [0;\ b_1,\ b_2, \dots,\ b_l, \dots]. \tag{23}$$

Рассуждениями, аналогичными вышеприведенным, показывается, что $\lambda_\theta = \lambda_M$. Итак, имеет место

Теорема 1_2. Если последовательность M такова, что в одной ее части встречаются группы единиц произвольно большой длины и произвольно далеко, а в другой— такие же группы двоек, то существует θ, для которого

$$\lambda_\theta = \lambda_M.$$

Множество, получаемое из $\{\lambda_M\}$ увеличением каждого его элемента на единицу, т. е. „смещением" его на единицу вправо, обозначим через $\{\lambda_M + 1\}$; тогда имеет место

Теорема 2.

$$\{\lambda_M + 1\} \subset \{\lambda_\theta\}. \tag{24}$$

Примечание. Соотношение (24) гласит, что спектр Маркова, хотя бы после смещения вправо на единицу, содержится в спектре Лагранжа.

Доказательство.

Пусть

$$M = \{\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\},\ 1 \leqslant a_k \leqslant 6, \tag{25}$$

$$\lambda_M = \sup\{\lambda_M(k)\} = \lambda_M(0) = [0;\ a_{-1}, a_{-2}, \ldots] + a_0 + [0;\ a_1, a_2, \ldots]; \tag{26}$$

(если $\lambda_M = \lambda_M(0)$ неизолированная точка множества $\{\lambda_M(k)\}$, то, как известно [3], λ_M равно некоторому λ_θ, откуда $\lambda_M + 1 = \lambda_\theta + 1$; но $\lambda_\theta + 1$, как легко видеть, равно $\lambda_{\theta'}$, для соответствующего θ'. Итак, можно предположить, что λ_M — изолированная точка).

Таким образом,

$$\lambda_M(k) < \lambda^{\mathrm{I}} < \lambda^{\mathrm{II}} < \lambda^{\mathrm{III}} < \lambda^{\mathrm{IV}} < \lambda_M = \lambda_M(0), \quad \text{при} \quad k \neq 0. \tag{27}$$

Пусть

$$M' = \{\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0 + 1, a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \tag{28}$$

тогда

$$\lambda_M + 1 = \lambda_{M'}. \tag{29}$$

В самом деле, если $k \neq 0$, то в силу (27) и (28) ($k > 0$; аналогично было бы при $k < 0$) имеем:

$$\lambda_{M'}(k) = [0;\ a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 + 1, a_{-1}, \ldots] + a_k + [0;\ a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots],$$

откуда

$$|\lambda_{M'}(k) - \lambda_M(k)| < 1,$$

в частности

$$\lambda_M(k) < \lambda_M(k) + 1 < \lambda' + 1 < \lambda''' + 1 < \lambda_M(0) + 1 = \lambda_{M'}(0), \tag{30}$$

откуда следует, что $\lambda_{M'}(0)$ является максимальным изолированным элементом множества $\{\lambda_{M'}(k)\}$, чем и доказывается равенство (29).

Из (30), в свою очередь, следует, что при достаточно больших m, n, m', n' $(m, n, m'; n' > N_0)$

$$\lambda_{M'}(k;\ m', n') < \lambda' + 1 < \lambda'' + 1 < \lambda_{M'}(0, m, n). \tag{31}$$

Пусть, теперь

$$m_s > N_0,\ n_s > N_0,\ m_s, n_s \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty \tag{32}$$

и рассмотрим число

$$\theta=[0;\ a_{-m_1},\dots,\ a_{-1},\ a_0+1,\ a_1,\dots,\ a_{n_1},\ a_{-m_2},\dots,\ a_{-1},\ a_0+1,\ a_1,\dots]=$$
$$=[0;\ b_1,\ b_2,\ b_3,\dots,\ b_k,\dots]; \tag{33}$$

покажем, что $\lambda_\theta=\lambda_M+1$.

В самом деле, если $b_k=a_0+1$, то

$$\lambda_\theta(k)=[0;\ a_{-1},\ a_{-2},\dots,\ a_{-m_s},\ a_{n_s-1},\dots]+a_0+1+$$
$$+[0;\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_{n_s},\ a_{-m_s+1},\dots]=$$
$$=[0;\ a_{-1},\dots,\ a_{-m_s},\ r^*_{-m_s-1}|+a_0+1+[0;\ a_1,\dots,\ a_{n_s},\ r^*_{n_s+1}]=$$
$$=\lambda_{M'}^*(0;\ m_s,\ n_s).$$

Из этого равенства, в силу (7), следует, что при достаточно большом $k>k_0(\varepsilon)$

$$|\lambda_\theta(k)-\lambda_{M'}(0)|<\varepsilon. \tag{34}$$

Если же $b_k\neq a_0+1$, то $b_k=a_i$, $i\neq 0$, и

$$\lambda_\theta(k)=[0;\ a_{i-1},\dots,\ a_{-m_1}]+a_i+[0;\ a_{i+1},\dots]. \tag{35}$$

Оба крайних слагаемых правой части последнего равенства <1, и по крайней мере одно из них, произвольно мало отличается от соответствующего $\lambda_M(i)$; таким образом,

$$\lambda_\theta(k)<1+a_i+[0;\ a_{i+1},\dots]=1+a_i+\lambda_M^-(i)+\varepsilon=$$
$$=\lambda_M^-(i)+a_i+\lambda_M^+(i)+(1-\lambda_M^-(i))+\varepsilon=$$
$$=\lambda_M(i)+(1-\lambda_M^-(i))+\varepsilon<\lambda_M(i)+1<\lambda_M(0)+1=\lambda\quad(0).$$

Из (34) и последнего неравенства следует, что

$$\lambda_\theta=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\lambda_\theta(k)=\lim_{s\to\infty}\lambda^*_{M'}(0;\ m_s,\ n_s)=\lambda_{M'}(0)=\lambda_M+1.$$

Наконец, приведем простое доказательство уже известной теоремы [2].

Теорема 3. Спектр Маркова — замкнутое множество.

Доказательство. Пуст $\{\lambda_{Mn}\}$ обозначает произвольную сходящуюся последовательность чисел марковского спектра; итак

$$M_n=\{\dots,\ a_{-2}^{(n)},\ a_{-1}^{(n)},\ a_0^{(n)},\ a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\dots\},$$

$$\lambda_{Mn}=[0;\ a_{-1}^{(n)},\ a_{-2}^{(n)},\dots]+a_0^{(n)}+[0;\ a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\dots]=\theta'_n+a_0^{(n)}+\theta''_n \tag{37}$$

По условию теоремы существует

$$\lim\lambda_{Mn}=\lim(\theta'_n+a_0^{(n)}+\theta''_n)=\lambda. \tag{38}$$

Можно, без ограничения общности, предположить, что каждая из последовательностей θ'_n, $a_0^{(n)}$ и θ''_n имеет предел, соответственно равный θ', a_0 и θ''; в самом деле, в противном случае из последовательности $\{M_n\}$ последовательностей можно было бы выбрать подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$, для которой это условие выполнено (см., например, [3], леммы 1 и 2), и вместо M рассмотрели бы M_{n_k}. Итак, (38) дает

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{Mn} = \lim_{n\to\infty} \theta'_n + \lim_{n\to\infty} a_0^{(n)} + \lim_{n\to\infty} \theta''_n = \theta' + a_0 + \theta'' = \lambda =$$

$$= [0;\ a_{-1},\ a_{-2}, \ldots] + a_0 + [0;\ a_1,\ a_2, \ldots]. \tag{39}$$

Если положить

$$M = \{\ldots,\ a_{-3},\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots\}, \tag{40}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{Mn} = \lambda = \lambda_M(0) \tag{41}$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{Mn}(k) = \lambda_M(k), \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{42}$$

По условию теоремы имеем

$$\lambda_{Mn}(k) \leqslant \lambda_{Mn}(0).$$

Из (42) и последнего неравенства следует

$$\lambda_M(k) \leqslant \lambda_M(0).$$

Это неравенство, вместе с (41), дает

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{Mn} = \lambda = \lambda_M(0).$$

Кафедра общей математики

(Поступило в редакцию 5.IX.1962)

ვ. კოლონია

ლაგრანჟისა და მარკოვის სპექტრათა შორის კავშირის შესახებ (II)

რეზიუმე

შრომა წარმოადგენს ამავე სახელწოდების ჩემი შრომის გაგრძელებას. მასში ნაჩვენებია, რომ მარკოვის სპექტრის კიდევ ახალი „დიდი“ ნაწილი შედის ლაგრანჟის სპექტრში.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Цепные дроби. Госиздат. тех.-теоретической литературы, Москва—Ленинград, 1949 г.
2. А. Виноградов, Б. Делоне и Д. Фукс. О рациональных приближениях к иррациональным числам с ограниченными неполными частными. ДАН СССР, 1958, т 118, № 5, стр. 862—865.
3. П. Когония, О связи между множеством чисел Маркова и марковским спектром (I), Труды ТГУ, 1959 г., т. 76, стр. 161—171.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

П. Г. Когония

О СВЯЗИ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ЛАГРАНЖА И МАРКОВА (III)

1. Необходимые определения и обозначения.

$$M=\{\ldots,\ a_{-3},\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\} \tag{1}$$

— бесконечная в обе стороны ограниченная последовательность натуральных чисел — двоякобесконечная ограниченная последовательность натуральных чисел, которую ниже будем называть коротко: д. б. п.

Число

$$\overline{M}=\max_{-\infty<k<\infty} a_k = N \tag{2}$$

назовем высотой д. б. п. M.;

$$\mu_M(k)=[0;\ a_{k-},\ a_{k-2},\ldots]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ldots],\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots; \tag{3}$$

$$E_M=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mu_M(k),\qquad \mu_M=\sup E_M\ ; \tag{4}$$

$$\mu_M(k;\ m,\ n)=[0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ldots,\ a_{k-m}]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ldots,\ a_{k+n}]; \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\mu_M(k;\ m,\ n)=\mu_M(k) \tag{6}$$

равномерно относительно $k\,(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$.

$\bigcup\limits_M \mu_M$ множество всех чисел μ_M — спектр Маркова; $\left(\bigcup\limits_M \mu_M\right)_N$ — часть спектра Маркова, состоящая из всех чисел μ_M, для которых д. б. п. M имеет данную высоту N; Очевидно, что

$$\bigcup_M \mu_M=\bigcup_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup_M \mu_M\right)_N . \tag{7}$$

$$\theta=[0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots] \tag{1_1}$$

— произвольное иррациональное число интервала (0,1) с ограниченной последовательностью неполных частных.

Число

$$\overline{\theta} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = N \tag{2_1}$$

назовем высотой числа θ (последовательности $\{a_k\}_1^\infty$);

$$l_\theta(k) = [0;\ a_{k-1}, \cdots, a_1] + a_k + [0;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \cdots]; \tag{3_1}$$

$$E\theta = \{l_\theta(k)\}_1^\infty,\ l_\theta = \overline{\lim_{k\to\infty}}\ l_\theta(k) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, E_\theta. \tag{4}$$

Из (3) и (4) непосредственно видно, что l_θ не меняется при изменении любого конечного отрезка разложения (1) числа θ, ввиду чего можно предположить (без ограничения общности), что в этом разложении $1 \leqslant a_k \leqslant N$, $k = 1, 2, \cdots$.

$\underset{\theta}{\mathrm{U}}\, l_\theta$ — множество всех чисел l_θ — спектр Лагранжа, $\left(\underset{\theta}{\mathrm{U}}\, l_\theta\right)_N$ — часть спектра Лагранжа, состоящая из всех чисел l_θ, для которых число θ имеет данную высоту N. Очевидно, что

$$\underset{\theta}{\mathrm{U}}\, l_\theta = \underset{N=\infty}{\overset{\infty}{\mathrm{U}}} \left(\underset{\theta}{\mathrm{U}}\, l_\theta\right)_N. \tag{7_1}$$

$$F(0;\ N) = \{\theta = [0;\ a_1,\ a_2, \cdots, a_k, \cdots];\ 1 \leqslant a_k \leqslant N\}; \tag{8}$$

$$F(0;\ N_1) + F(0;\ N_2) = \{\theta = \theta_1 + \theta_2;\ \theta_1 \in F(0;\ N_1),\ \theta_2 \in F(0;\ N_2)\}; \tag{9}$$

в частности

$$2F(0;\ N) = \{\theta = \theta_1 + \theta_2;\ \theta_1,\ \theta_2 \in F(0;\ N)\}. \tag{10}$$

Если $E = \{x\}$ любое множество действительных чисел, а c — любое данное действительное число, то пусть

$$E + c = \{x + c\}. \tag{11}$$

Определение 1. Последовательность $\{a_k\}$ натуральных чисел назовем полной, если любая конечная система натуральных чисел в ней встречается бесконечное число раз.

Определение 1_1. Иррациональное число назовем полным, если последовательность $\{a_k\}$ его неполных частных полна.

Определение 1_2. Последовательность (число) высоты N назовем полной с показателем полноты N, если любая конечная система натуральных чисел отрезка $[1, N]$ в ней встречается бесконечное число раз.

Определение 2. Д. б. п. M называется предельной [1], если

$$\mu_M = \sup \underset{k=-1}{\overset{\infty}{\mathrm{U}}}\, \mu_M(k) = \overline{\lim_{|k|\to\infty}}\, \{\mu_M(k)\}_{-\infty}^{\infty};$$

иначе говоря, д. б. п. M называется предельной, если точная верхняя грань множества $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mu_M(k)$ равна верхнему пределу последовательности $\{\mu_M(k)\}_{-\infty}^{\infty}$; в противном случае, т. е. если

$$\mu_M > \overline{\lim_{|k|\to\infty}} \{\mu_M\}_{-\infty}^{\infty},$$

то последовательность M называется изолированной.

Определение 3. Д. б. п. M называется достижимой [1], если существует хотя бы одно такое значение k, для которого

$$\mu_M = \mu_M(k);$$

в противном случае последовательность M называется недостижимой; очевидно, что всякая недостижимая последовательность предельна, но не наоборот; вообще, последовательность может быть предельной, и в то же самое время достижимой.

Определение 4. Две д. б. п. M и M' назовем эквивалентными между собой, если $\mu_M = \mu_{M'}$.

Определение 4_1. Множество всех эквивалентных между собой д. б. п. назовем классом Маркова.

Определение 5. Два числа θ и θ' назовем эквивалентными между собой (в широком смысле), если $l_\theta = l_{\theta'}$.

Определение 5_1. Множество всех эквивалентных (в широком смысле) между собой чисел назовем классом Лагранжа.

Определение 6. Класс Маркова назовем предельным, если он содержит хотя бы одну предельную д. б. п.

В противном случае, т. е. если класс Маркова состоит исключительно из изолированных д. б. п., то назовем его изолированным классом.

Легко показать [1], [2], что если класс Маркова K_M, содержащий д. б. п. M, предельный, то ему соответствует единственный класс Лагранжа K_θ, т. е. существует число θ, такое, что $\mu_M = l_\theta$.

Таким образом, при исследовании вопроса о том, является ли μ_M некоторым l_θ, т. е. соответствует ли любому классу Маркова некоторый класс Лагранжа, достаточно ограничиться рассмотрением изолированных классов Маркова.

2. Известно [1], [2], что спектр Лагранжа содержится в спектре Маркова $\bigcup\limits_{\theta} l_\theta \subset \bigcup\limits_{M} \mu_M$, точнее

$$\Big(\bigcup_{\theta} l_\theta\Big)_N \subset \Big(\bigcup_{M} \mu_M\Big)_N, \qquad N=1, 2, \ldots .$$

Занимаясь задачей об обратном включении, нами была найдена „большая" часть спектра Маркова, содержащаяся в спектре Лагранжа.

Настоящая работа, главным образом, тоже посвящена дальнейшему исследованию задачи об обратном включении.

Теорема 1. Если число

$$\theta=[0;\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_k, \cdots],\ 1 \leqslant a_k \leqslant N$$

имеет показатель полноты N, то множество всех предельных точек последовательности

$$\{\theta_k\}=\{[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \cdots]\},\ \ (k=1, 2, 3, \ldots)$$

равно $F(0; N)$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha=[0;\ b_1,\ b_2, \cdots,\ b_k, \cdots] \tag{12}$$

обозначает любое данное число множества $F(0; N)$; в силу полноты числа $\theta=\theta_0$, каждое θ_k — полное, с тем же показателем полноты N; рассмотрим бесконечную последовательность всех отрезков разложения (12), расположенных по возрастанию их длин

$$b_1,\ (b_1,\ b_2),\ (b_1,\ b_2,\ b_3), \ldots,\ (b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n), \ldots . \tag{13}$$

Из полноты всех чисел θ_k непосредственно следует, что из последовательности $\{\theta_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\theta_{k_n}\}$, такую, чтобы начальный отрезок длины n разложения числа θ_{k_n} совпадал с n-ным членом последовательности (13), т. е. чтобы разложение числа θ_{k_n} имело вид

$$\theta_{k_n}=[0;\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n,\ b^{(n)}{}_{n+1},\ b^{(n)}{}_{n+2}, \ldots], \tag{14}$$

где $b_i^{(n)}$ $(i=n+1,\ n+2, \ldots)$ — соответствующие натуральные числа отрезка $[1,\ N]$; из (14) же непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{k_n}=[0;\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_k \ldots]=\alpha.$$

Итак, мы показали, что любое число множества $F(0; N)$ является предельной точкой последовательности $\{\theta_k\}$; справедливость обратного утверждения непосредственно следует из того, что $\theta_k \in F(0; N)$, а $F(0; N)$ — совершенное множество.

Теорема 2. Если число

$$\theta=[0;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k, \ldots],\ 1 \leqslant a_k \leqslant N$$

имеет показатель полноты N, то множество всех предельных точек последовательности

$$\{l_\theta(k)\}=\{[0;\ a_{k-1}, \ldots,\ a_1]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \cdots]\}$$

равно $\bigcup\limits_{m=1}^{N} (2F(0;\ N)+m)$.

Доказательство. Пусть α обозначает любое данное число множества $2F(0;N)+m$, т. е. пусть α имеет вид

$$\alpha=[0;\ b_{-1},\ b_{-2},\ \dots]+m+[0;\ b_1,\ b_2,\dots],\ 1\leqslant b_k\leqslant N, k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots. \quad (15)$$

Рассмотрим д. б. п. M, связанную с представлением числа α в виде (15)

$$M=\{\dots,\ b_{-3},\ b_{-2},\ b_{-1},\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\dots\}, \quad (16)$$

и последовательность всех ее симметричных отрезков, расположенных по возрастанию их длин

$$m,\ (b_{-1},\ m,\ b_1),\ (b_{-2},\ b_{-1},\ m,\ b_1,\ b_2),\dots,\ (b_{-n},\dots,\ b_{-1},\ m,\ b_1,\dots,\ b_n),\dots; \quad (17)$$

в силу полноты числа θ каждый член последовательности (17) бесконечно часто повторяется в его разложении; поэтому из последовательности $\{\theta_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\theta_{k_n}\}$, такую, что начальный отрезок длины $2n+1$ числа θ_{k_n} совпадает с n-ным членом последовательности (17), т. е. разложение θ_{k_n} имеет вид

$$\theta_{k_n}=[0;\ b_{-n},\dots,\ b_{-1},\ m,\ b_1,\dots,\ b_n,\ b^{(n)}{}_{2n+1},\dots], \quad (18)$$

где $b_i{}^{(n)}\,(i=2n+1,\ 2n+2,\dots)$ — соответствующие числа сегмента $[1,\ N]$; из (3) и (18) следует, что

$$l_\theta(k_n)=[0;\ b_{-1},\dots,\ b_{-n}]+m+[0;\ b_1,\dots,\ b_n,\ b^{(n)}{}_{2n+1},\dots]. \quad (19)$$

Из (15) и (19) вытекает, что

$$\lim l_\theta(k_n)=[0;\ b_{-1},\ b_{-2},\dots]+m+[b0;\ b_1,\ b_2,\dots]=\alpha.$$

Итак, как и раньше, мы показали, что любое число множества $2F(0;N)+m$ является предельной точкой последовательности $\{l_\theta\}$; справедливость же обратного утверждения и тут является непосредственным следствием совершенности множества $2F(0:\ N)+m$.

Из теоремы 2, как непосредственное следствие, получается следующая

Теорема 3. Для любого числа

$$\theta=[0;\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_k,\dots],\ 1\leqslant a_k\leqslant N$$

с показателем полноты N имеет место равенство

$$l_\theta=\max[2F(0;N)+N]=(N^2+4N)^{1}/_{2}.$$

В самом деле, по теореме 2, множество всех предельных точек последовательности $\{l_\theta(k)\}$ совпадает с множеством $\bigcup\limits_{m=1}^{N}(2F(0;\ N)+m)$; в частности, наибольшая среди предельных точек, т. е. верхний предел l_θ — совпадает с максимальной точкой совершенного множества $2F(0;N)+$ $+N$, равной $2\cdot[0;\ (1,N)\infty]+N=(N^2+N)^{1}/_{2}$.

Теорема 4. Если хотя бы одна из половин д. б. п. M высоты N является полной с показателем полноты N, то существует число θ, для которого $\mu_M = l_\theta$.

Примечание. Теорему 4 можно сформулировать и так: если класс Маркова K_M содержит хотя бы одну д. б. п., у которой хотя бы одна половина полна, то ему соответствует некоторый класс Лагранжа K_θ.

Доказательство. Пусть, для определенности, правая половина д. б. п.

$$M = \{ \ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \}$$

полна, тогда для числа

$$\theta = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$$

множество всех предельных точек последовательности $\{ l_\theta(k) \}$, по теореме 2, совпадает с множеством $\bigcup_{m=1}^{N} ((2F(0; N) + m)$, в частности

$$l_\theta = \max [2F(0; N)) + N] = N^2 + 4N)^{1/2};$$

с другой стороны, из (3) и (3_1) непосредственно вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} (\mu_M(k) - l_\theta(k)) = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\overline{\lim_{k = \infty}} \mu_M(k) = l_\theta (N^2 + 4N)^{1/2}. \tag{20}$$

Так как высота д. б. п. M равна N, каждое число $\mu_M(k)$ меньше или равно максимальному элементу множества $2F(0; N) + N$, т. е. $\mu_M \leqslant (N^2 + 4N)^{1/2} = l_\theta$; из (20) и этого неравенства непосредственно следует два факта:

$$\mu_M = \sup \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mu_M(k) \leqslant l_\theta, \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{|k| \to \infty}} \mu_M(k) = l_\theta; \tag{22}$$

но, с другой стороны, верхний предел любого множества не превосходит его точную верхнюю грань, в частности

$$\mu_M >= \overline{\lim_{|k| \to \infty}} \mu_M(k) = l_\theta;$$

(21) и последние неравенства дают

$$\mu_M = l_\theta = (N^2 + 4N)^{1/2}.$$

Доказанное нами равенство (23) содержит большее, чем содержание теоремы 4, именно: какова бы ни была д. б. п. M высоты N, если ее хотя бы одна половина имеет показатель полноты N, то не только существует θ, для которого $\mu_M = l_\theta$ (одним из таких θ является полная половина M), но и все эти значения равны одному и тому же числу $(N^2+4N)^{1/2}$ — максимальному элементу множества $2F(0; N)+N$.

Теорема 5. Если число θ_0 не квадратичная иррациональность, то уравнение

$$l_\theta = l_{\theta_0}$$

имеет континуальное множество решений.

Доказательство. Пусть

$$\theta_0 = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots],$$

тогда, для соответствующей последовательности $\{k_n\}$

$$l_{\theta_0} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, l_{\theta_0}(k) = \lim_{n\to\infty} l_{\theta_0}(k_n) = \lim_{n\to\infty}\left([0; a_{k_n-1}, \dots, a_1] +\right.$$

$$\left. + a_{k_n} + [0; a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \dots]\right) = \lim_{n\to\infty} [0; a_{k_n-1}, \dots, a_1] +$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} + \lim [0; a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \dots] = [0; c_{-1}, c_{-2}, \dots] + c_0 +$$

$$+ [0; c_1, c_2, \dots] = \theta_1 + c_0 + \theta_2, \tag{24}$$

$\theta_1, \theta_2 \in F(0; N)$, $c_0 = N$ или $N-1$, где N — высота числа θ_0.

Рассмотрим д. б. п. M, определяемую представлением (24) числа l_{θ_0}.

$$M = \{\dots, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots\}. \tag{25}$$

Из соотношений (24) непосредственно следует, что любой отрезок последовательности M, содержащий внутри себя член c_0, в разложении числа θ_0 встречается бесконечно часто; пусть $\{k_n\}$ обозначает любую последовательность натуральных чисел, для которой справедливо предельное равенство (24); тогда, начиная с некоторого n_0-го, $a_{k_n} = c_0$, причем эти члены $a_{k_n} = c_0$ в разложении числа θ_0 заключены внутри таких отрезков последовательности M, длины которых (в обе стороны) стремятся к ∞, при $n\to\infty$; очевидно, последовательность $\{k_n\}$ можно выбрать так, чтобы последовательность длин указанных отрезков монотонно стремилась к бесконечности (причем отрезки эти бесконечно удлиняются как слева, так и справа).

Пусть

$$T_M(0; m', m) = T_M\{c_{-m'}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots c_m\}. \tag{26}$$

будет одним из этих отрезков, с достаточно большими m, m'; тогда разложение числа θ_0 имеет вид

$$\theta_0=[0; S_1, T_M, S_2, T_M, \dots, S_{n-1}, T_M, S_n, T_M, \dots] \tag{27}$$

$$=[0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots],$$

где S_n — соответствующие системы натуральных чисел отрезка $[1, N]$; из условий, налагаемых на последовательность $\{k_n\}$, следует, что последовательность длин систем S_n стремится к ∞, при $n \to \infty$; поэтому можно предположить (без ограничения общности), что длины всех S_n — достаточно большие числа.

Пусть $\{Sn_i\}$ обозначает произвольную подпоследовательность последовательности систем S_n, встречающихся в разложении (27); рассмотрим число θ, разложение которого получается из разложения (27) числа θ_0 удалением всех S_n, не вошедших в подпоследовательность $\{S_{n_i}\}$ и следующих за ними T_M, т. е. число θ, разложение которого имеет вид

$$\theta=[0; S_{n_1}, T_M, S_{n_2}, T_M, \dots, Sn_{i-1}, T_M, Sn_i, T_M, \dots] =$$

$$=[0; b_1, b_2, \dots, b_k, \dots], \tag{28}$$

так как θ_0 — непериодическая непрерывная дробь, разным последовательностям $\{Sn'_i\}$ и $\{Sn''_i\}$ соответствуют разные числа θ' и θ'', определяемые разложениями вида (28); отсюда следует, что множество всех чисел θ, определяемых разложением вида (28), имеет мощность континуума. Итак, достаточно показать, что для любого числа θ, вида (28), $l_\theta = l_{\theta_0}$.

Из определения разложения (27) следует, что система S_n имеет следующее выражение

$$S_n=(a_{k_{n-1}+m+1}, a_{k_{n-1}+m+2}, \dots a_{k_n-m'-2}, a_{k_n-m'-1}), n \geqslant 2; \tag{29}$$

Из (24) и (29) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_{n-1}+m+t}=c_{m+t}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{k_n-m'-1}=c_{-m'-t}, \quad t=0, 1, 2 \dots. \tag{30}$$

Пусть $\{k'_n\}$ обозначает последовательность номеров мест тех b_k в разложении (28), которые равны c_0; тогда, в силу (24), (27), (28) и (29), имеем

$$\lim_{n\to\infty} l_\theta(k'_n)=[0; c_{-1}, c_{-2}, \dots]+c_0+[0; c_1, c_2, \dots]=l_{\theta_0}. \tag{31}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$l_{\theta_0}=\mu_M=[0; c_{-1}, c_{-2}, \dots]+c_0+[0; c_1, c_2, \dots], \quad \mu_M(k)\leqslant\mu_M; \tag{32}$$

по определению числа l_{θ_0}, каково бы ни было $\varepsilon>0$

$$l_{\theta_0}(k)<l_{\theta_0}+\varepsilon, \quad k>k_0(\varepsilon). \tag{33}$$

Если $\{k_n''\}$ обозначает последовательность номеров мест остальных элементов b_k разложения (28), то, по определению этого разложения, $l_\theta(k_n'')$, при достаточно больших n, произвольно мало отличается от некоторой $\mu_M(k)$, или $l_{\theta_0}(k)$; поэтому, в силу (32) и (33) имеем

$$\lim_{n\to\infty} l_\theta(k''_n) \leqslant l_{\theta_0} = \mu_M\,;$$

Это неравенство, вместе с (31), дает

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, l_\theta(k) = l_\theta = l_{\theta_0} \quad (\text{ч. т. д.}).$$

Кафедра общей математики

(Поступило в редакцию 30. XI. 62 г)

პ. კოღონია

ლაგრანჟისა და მარკოვის სპექტრთა შორის კავშირის შესახებ (III)

რეზიუმე

საკითხისადმი არსებითად ახალი მიდგომის საფუძველზე წინამდებარე შრომაში მოცემულია ამავე სახელწოდების ჩემი შრომების შედეგების შემდგომი გაძლიერება-გაფართოება: მასში დამტკიცებულია 5 დებულება აღნიშნულ სიმრავლეთა კავშირის შესახებ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Виноградов, Б. Делоне и Д. Фукс. О рациональных приближениях к иррациональным числам с ограниченными неполными частными, ДАН СССР, 1958, т. 118, № 5, стр. 862—865.
2. П. Когония. О связи между множеством чисел Маркова и марковским спектром. Труды ТГУ, 1959, т. 76, стр. 161—171,

---

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Н. Н. Патарая

О КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ

Исторически гидродинамика развивалась в двух направлениях: с одной стороны, со времени Эйлера, Даламбера, Паскаля, Д. Бернулли и др. разрабатывались вопросы движения т. н. идеальной жидкости без внутреннего и внешнего трения. Твердое тело, движущееся в ней или обтекаемое ею с постоянной скоростью, не подвергается действию силы лобового сопротивления. Этот вывод, называемый парадоксом Даламбера, резко расходится с действительностью и заставил ученых отказаться от основного допущения классической гидродинамики—об отсутствии касательных напряжений, т. е. напряжений трения в жидкости.

В первой половине прошлого столетия после появления работ Навье, Пуассона и Стокса стала развиваться гидродинамика вязкой жидкости.

С точки зрения кинетической теории материи молекулярная вязкость возникает вследствие передачи количества движения жидкости от одного слоя к другому путем теплового движения. При этом, касательные напряжения в точках движущейся жидкости определяются формулами

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right),$$

в которых μ—постоянное число, связанное с длиной свободного пробега молекул в случае газов или с частотой тепловых колебаний в случае капельных жидкостей.

Как известно, благодаря хаотическим неровностям микрорельефа поверхности тела и беспорядочным тепловым колебаниям частиц, образующих твердую поверхность, молекулы жидкости будут отбрасываться от поверхности твердого тела по всевозможным направлениям с различными скоростями, в результате чего средняя касательная к поверхности скорость равна скорости поверхности самого тела.

В случае газового потока 1/6 часть остановленных стенкой молекул будет отскакивать от стенки по направлению нормали к ней и со средней тепловой скоростью $\overline{C}$, без столкновения с другими молекулами, пройдет расстояние равное средней длине свободного пробега молекул $\overline{\lambda}$.

Если имеется поток капельной жидкости, то такая же доля остановленных молекул при тепловом дрожании (колебании) будет колебаться по направлению нормали к стенке со средней частотой $\overline{\nu}$. При этом, размах колебаний будет равняться среднему расстоянию между центрами молекул $\overline{l}$.

Ради определенности, в дальнейшем изложении мы ограничимся рассмотрением газового потока, в котором передача импульсов, в основном, обусловлена диффузией. Однако читатель без труда может все выводы перенести на случай потока капельной жидкости.

Определим $V_{\overline{\lambda}}$ скорость газа на растоянии $\overline{\lambda}$ от плоскости в момент $t=t_0$. Количество движения, принесенное потоком вследствие теплового движения за единицу времени и через единицу площади пластинки, будет

$$\frac{1}{6}\overline{c}\rho V_{\overline{\lambda}}.$$

Стало быть, касательное напряжение на пластинке, без учета поправочного коэффициента, связанного с Максвелевским распределением скорости, будет

$$(\tau_{0,0})_{\substack{y=0\\ t=t_0}}=\frac{1}{6}\overline{c}\rho V_{\overline{\lambda}}=\frac{\mu}{\overline{\lambda}}V_{\overline{\lambda}}=\frac{\mu}{\overline{\lambda}}U. \qquad (2_1)$$

Определим значение производной $\frac{d\tau}{dy}$ при $t=t_0$. При этом заметим, что скорость течения на расстоянии $2\overline{\lambda}$ от пластинки в $t=t_0$ будет равна скорости на расстоянии $\overline{\lambda}$, а эта последняя равна U. Следовательно,

$$(\tau)_{\substack{y=\lambda\\ t=t_0}}=\tau_{\lambda,0}=0.$$

Что касается $\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_{\substack{y=0\\ t=0}}$, то её можно положить равной:

$$\frac{\tau_{\lambda,0}-\tau_{0,0}}{\lambda}=-\frac{\tau}{\overline{\lambda}^2}V_{\overline{\lambda},0}=-\frac{\mu U}{\overline{\lambda}^2}.$$

Это соотношение показывает какой значительной величины достигает как касательное напряжение, так и сила объемного трения.

Рассмотрим бесконечный по всем направлениям однородный поток вязкой жидкости, движущейся параллельно оси $0x$ со скоростью U. Положим, что в ней погружена твердая пластинка, расположенная в плоскости $y0z$, имеющая бесконечный размах параллельно оси $0z$ и конечную длину L.

Если до момента $t=t_0$ пластинка двигалась вместе с жидкостью, находясь с ней в относительном равновесии, и в $t=t_0$ останавливается с помощью ударной силы, то молекулы движущейся жидкости при тепловом дрожании начнут бомбардировку пластинки.

В силу основного теплового движения 1/3 часть всех молекул, находящихся в мономолекулярном слое, примыкающем к пластинке, будет колебаться по направлению нормали. При этом 1/6 часть будет притекать к ней, а 1/6—отходить от нее, передавая ей свой импульс. Как было показано выше, молекулы после удара будут останавливаться, так как они должны принимать скорость, равную скорости пластинки.

Среднее расстояние между центрами молекул обозначим через $\bar{e}$ (для воды $\bar{e}=3\check{A}$). Если $\bar{c}$—средняя скорость колебательного движения, то частота теплового колебания будет

$$\nu=\frac{\bar{c}}{2\bar{e}}.$$

Пусть $\varkappa$—молекулярный вес, N_0—число Авогадро и ρ—плотность жидкости. Тогда число молекул в единице объема будет

$$n=N_0\frac{\rho}{\varkappa},$$

а число молекул в слое толщины $\bar{e}$ будет $n\bar{e}=N_0\frac{\rho}{\varkappa}\bar{e}$. Подсчитаем количество импульса, пронесенного в единицу времени через единицу площади на каждую из двух сторон пластинки в момент $t=t_0$.

Это количество будет равно

$$\frac{\nu}{3}\,n\,\bar{e}\,m\,(U_{\bar{e}})_{t=t_0}=\frac{\nu}{3}\,\rho\,\bar{e}\,U=\frac{\mu}{\bar{e}}\,U=(\tau)_{\substack{y=0\\ t=0}}=\tau_{0,0} \qquad (2_2)$$

(здесь через m обозначена масса молекулы). Чтобы определить силы объемного трения, заметим, что скорость течения на расстоянии $2\bar{e}$ от пластинки в $t=t_0$ будет равна U. Поэтому $(\tau)_{\substack{y=\bar{e}\\ t=t_0}}=\tau_{\bar{e},0}=0$, что для силы объемного трения дает

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_{\substack{y=0\\ t=0}}=\frac{\tau_{\bar{e},0}-\tau_{0,0}}{\bar{e}}=\frac{-\frac{\mu}{\bar{e}}U}{\bar{e}}=-\frac{\mu}{\bar{e}^2}U. \qquad (2_3)$$

Подсчитаем числовое значение множителя при U. Для воды при $0^\circ C$ и 760 мм ртутного столба $\mu = 0{,}018 \frac{2}{\text{см. сек}}$; $e = 3.10^{-8}$ см. $\frac{\mu}{e^2} = 6.10^{13} \frac{\text{г}}{\text{см}^2\text{. сек}}$.

Таким образом, в примыкающем к пластинке слое получается весьма внушительное торможение, чем и объясняется отбрасывание в уравнениях Прандтля, в задаче обтекания плоской пластинки, слагаемого $\nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$, малого по сравнению с $\nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$.

Как известно, касательное напряжение, действующее на какую-либо площадку в движущейся жидкости, равняется избытку количества движения, которая проникает с одной стороны площадки в другую. Передача импульса может осуществляться как с помощью дуффузии (как например, в газах), так и колебательных движений частиц (в капельных жидкостях) Если площадка, на которую действует касательное напряжение, находится на границе с другой средой, которая неподвижна или имеет другое состояние движения, то через такую площадку процесс передачи импульса имеет односторонний характер. В этом случае происходит трение данной среды с другой средой, которую можно назвать внешним трением. Фактически, весь импульс, подведенный к единице пограничной площадки в единицу времени путем внутреннего трения, будет уравновешиваться силой, действующей на единицу площади внешней среды. Граничная поверхность твердого тела с жидкостью или газом, кроме гашения подведенного к ней импульса, замедляет процесс молекулярного обмена и придает ей односторонний характер. В результате получается уменьшение силы трения в 2 раза по сравнению с тем значением, которое бы она имела при одинаковом значении скорости деформации (градиент по нормали к поверхности касательной скорости).

Для доказательства последнего предложения возьмем одномерный поток реального газа параллельно оси $0x$ и, пусть, вертикальный градиент скорости $\frac{dv}{dy} = \gamma$ будет постоянным числом.

Покажем, что в слое, примыкающем к твердой поверхности, за который примем плоскость $y=0$, толщины, равной длине свободного пробега молекулы $\bar{\lambda}$, $\frac{dv}{dy}$ возрастет вдвое, т. е.

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y=0} = 2\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y=\bar{\lambda}}.$$

С этой целью заметим, что поток импульса газа через единицу площади за единицу времени, выраженный осредненной тепловой скоростью газа, со стороны газа равен (так как $v_0 = 0$)

$$\frac{1}{6}\rho \bar{c} \lambda \left(\frac{dv}{dy}\right)_0,$$

а со стороны твердой поверхности $=0$, ибо оттуда дифундируют остановленные, отраженные поверхностью молекулы. Таким образом, сила трения у поверхности твердого тела равна $\frac{1}{6}\rho \bar{c} \bar{\lambda}\left(\frac{dv}{dy}\right)_0 = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dv}{dy}\right)_0$, что касается силы трения при $y \geqslant \bar{\lambda}$, то в этих местах газовые молекулы проносят, соответственно, импульсы:

$$\frac{1}{6}\rho \bar{c}\left[v(y) + \bar{\lambda}\left(\frac{dv}{dy}\right)_y\right]; \quad \frac{1}{6}\rho \bar{c}\left[v(y) - \bar{\lambda}\left(\frac{dv}{dy}\right)_y\right],$$

что дает избыток количества движения в одну сторону:

$$\frac{1}{3}\rho \bar{c}\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y \geqslant \bar{\lambda}} = \mu \frac{dv}{dy}.$$

При всех y, которые удовлетворяют неравенство

$$0 \leqslant y < \bar{\lambda},$$

через единицу площади за единицу времени проносятся импульсы:

$$\frac{1}{6}\rho \bar{c}\left[v(y) + \bar{\lambda}\left(\frac{dv}{dy}\right)_y\right], \quad \frac{1}{6}\rho \bar{c}\left[v(y) - y\left(\frac{dv}{dy}\right)_y\right].$$

В результате для силы трения получим:

$$\frac{1}{6}\rho \bar{c} \bar{\lambda}\left(1 + \frac{y}{\bar{\lambda}}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)_y = \frac{\mu}{2}\left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)\frac{dv}{dy}.$$

Следовательно, твердая поверхность играет роль экрана, который задерживает молекулярный обмен импульсами. С другой стороны, сила трения у стенки не может быть меньше, чем в удаленных от нее точках, ибо если массовой силы нет и имеется поток без перепада давления, т. е.

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

то единственная сила, уравновешивающая силу инерции, есть сила объемного трения $= \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$ (на единицу массы). Отсюда получается, что для того, чтобы касательное напряжение могло бы сохранить хотя бы постоянное значение при отсутствии массовой силы и перепада давления, скорость деформации газовых частиц, в примыкающем к телу слое толщины $\bar{\lambda}$, должна возрастать вдвое, т. е.

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_0 = 2\left(\frac{dv}{dy}\right)_{\bar{\lambda}}.$$

Вероятно, это обстоятельство является причиной быстрого возрастания скоростей газа в пограничном слое.

Сказанное полностью распространяется и на движения капельных жидкостей, с той только разницей, что вместо длины свободного пробега молекулы λ появляется среднее расстояние между центрами молекул.

Наконец заметим, что наши заключения имеют силу статистической закономерности, ибо молекулярные расстояния могут быть рассмотрены с точки зрения механики сплошной среды лишь с оговорками.

Кафедра гидроаэромеханики

(Поступило в редакцию 24/XII 62 г.)

ნ. პატარაია

სითხეში მოძრავი მყარი ზედაპირის მახლობლობაში მხები ძაბვების შესახებ

რეზიუმე

სტატიაში განხილულია სითხეში მოძრავი მყარი სხეულების ზედაპირებზე მხები ძაბვების აღძვრის მექანიზმი—მატერიის კინეტიკური თეორიის თვალსაზრისით.

გამოთვლილია ბრტყელი ფირფიტის დამუხრუჭების მომენტში მის ზედაპირზე აღძრული მხები ძაბვების სიდიდე.

სტატიაში ნაჩვენებია, აგრეთვე, რომ მყარი სხეულის ზედაპირი ახდენს იმპულსთა მოლეკულიარული გაცვლის პროცესის შენელებას, რის შედეგადაც ადგილი აქვს სითხის დეფორმაციის სიჩქარის ორჯერ შემცირებას იმ ფენაში, რომლის სისქე უდრის მოლეკულის თავისუფალი გარბენის სიგრძეს გაზებში ან მოლეკულათა ცენტრებს შორის საშუალო მანძილს უკუმშ სითხეებში.

ЛИТЕРАТУРА

1) L. Prandtl. Uber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen der dritten Internat. Math. Kongr. in Heidelberg 1904; Leipzig, 1905.
2) R. Mises. Von Bemerkingen zur Hydrodynamik, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., т. 7, 1927.
3) Е. А. Штрауф. Молекулярная физика, Ленинград, Москва, 1949.
4) А. Ф. Иоффе, Н. Н. Семенов. Курс физики, ч. IV. Ленинград, Москва, 1933.
5) J. O. Hirschehfelder, Ch. Curtiss, R. Bird. Molekular theory gases and liquids, New-Iork, London, 1954.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Дж. В. Шарикадзе

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОРИСТЫМ ТРУБАМ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Одной из задач магнитной гидродинамики является изучение течения вязкой проводящей несжимаемой жидкости по трубам, находящимся во внешнем поперечном магнитном поле. Такие задачи для установившегося течения для некоторых частных видов сечения труб и при определенных предположениях о характере проводимости стенок изучались рядом авторов [1—10]. С другой стороны, большое развитие получили также исследования течения жидкости через трубы с пористыми поверхностями [11—14].

В настоящей работе поставлена общая задача установившегося течения вязкой проводящей несжимаемой жидкости в трубе бесконечной длины произвольного поперечного сечения, с пористыми стенками, помещенной во внешнее однородное магнитное поле, и дано конкретное решение задачи для течения в трубе прямоугольного сечения с двумя пористыми стенками.

Для описания такого течения воспользуемся уравнениями магнитной гидродинамики, записанными в виде:

$$\Delta\vec{v} - \frac{1}{\nu}(\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\nu}(\vec{h}\nabla)\vec{h} - \frac{1}{\nu}\operatorname{grad} p^* = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta\vec{v} - \frac{1}{\nu_m}(\vec{v}\nabla)\vec{h} + \frac{1}{\nu_m}(\vec{h}\nabla)\vec{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{h} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{v}$—скорость течения жидкости, $\vec{H} = \sqrt{4\pi\rho}\,\vec{h}$—напряженность магнитного поля, $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ — магнитная вязкость, $p^* = \frac{p}{\rho} + \frac{h^2}{2}$.

Направим ось $0x$ параллельно стенкам трубы, а ось $0y$ — перпендикулярно им. Будем считать, что скорость жидкости имеет две составляющие $v_x = v(x, y, z)$ и $v_y = v_0 = \text{const}$, где v_0—скорость проницаемости через стенки трубы. Здесь подразумевается, что через одну из стенок трубы вдувается та же жидкость с известной скоростью v_0, а через другую отсасывается с той же скоростью, так что количество жидкости, протекающей в направлении основного потока, всюду постоянно.

Тогда из первого уравнения (1.3) вытекает, что $v_x = v(y, z)$. В дальнейшем предположим, что имеется пока неопределенное магнитное поле, неизменяющееся в направлении потока, т. е.

$$\vec{h}\{h_x(y, z),\ h_y(y, z),\ h_z(y, z)\} \tag{1.4}$$

Электрическое поле и плотность текущего в жидкости тока при этом имеют вид:

$$j_x = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right); \quad j_y = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad j_z = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_y}{\partial y},$$

$$\begin{gathered} E_x = \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \frac{1}{c}v_0 H_z, \\ E_y = \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{1}{c}vH_z, \\ E_z = -\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c}(vH_y - v_0 H_x). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Проектируя систему уравнений (1.1—1.3) на оси координат с учетом сделанных предположений, получим:

$$\Delta v - \frac{v_0}{\nu}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{h_y}{\nu}\frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{h_z}{\nu}\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = h_y\frac{\partial h_y}{\partial y} + h_z\frac{\partial h_y}{\partial z}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = h_y\frac{\partial h_z}{\partial y} + h_z\frac{\partial z_z}{\partial z}, \tag{1.8}$$

$$\Delta h_x - \frac{v_0}{\nu_m}\frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{h_y}{\nu_m}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{h_z}{\nu_m}\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{1.9}$$

$$\Delta h_y = \frac{v_0}{\nu_m}\frac{\partial h_y}{\partial y}, \quad \Delta h_z = \frac{v_0}{\nu_m}\frac{\partial h_z}{\partial y} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0. \tag{1.11}$$

Эта система уравнений при предположении, что стенки трубы непроницаемы, т. е. когда $v_0 = 0$ переходит в систему, полученную в работе [8], а при дополнительном условии, что $j_x = 0$ — в систему, данную в работе [9]. В частном случае, если скорость проницаемости равна нулю, а индуцированное магнитное поле имеет только одну составляющую по оси $0x$ и внешнее магнитное поле направлено по оси $0y$, из системы (1·6)—(1·11) получим уравнения, выведенные Шерклифом [3] для течения проводящей жидкости через трубу прямоугольного сечения:

$$\nu\Delta v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} - h_0\frac{\partial h}{\partial z},$$
$$\nu_m \Delta h_z + h_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{1·12}$$

Система уравнений (1·6)—(1·11) допускает разделение переменных в декартовых координатах, что дает возможность получить точные решения для прямоугольной трубы. Но метод разделения переменных не применим ко всем возможным типам граничных условий на контуре прямоугольника. Как показали исследования Уфлянда [7·15], система (1·12) разрешима по методу частных решений в следующих трех случаях:

1. стенки трубы непроводящие,

2. стенки трубы идеально проводящие,

3. стенки, перпендикулярные к внешнему полю—идеально проводящие, а параллельные внешнему полю—непроводящие.

В настоящей работе исследуется случай течения вязкой несжимаемой проводящей жидкости через трубу прямоугольного сечения с двумя пористыми стенками и тем самым обобщаются полученные ранее результаты для трубы с твердыми стенками.

Как будет показано ниже, метод Фурье применим для двух классов течения вязкой проводящей жидкости.

1. Внешнее магнитное поле H_0 и скорость проницаемости v_0 параллельны.

2. Внешнее магнитное поле H_0 и скорость проницаемости v_0 перпендикулярны.

При этом для первого класса сечения получены решения при следующих граничных условиях:

а) стенки трубы непроводящие,

б) стенки перпендикулярные к внешнему полю—идеально проводящие, а остальные две—непроводящие.

Для второго же класса:

в) стенки идеально проводящие,

г) стенки, перпендикулярные к внешнему полю—идеально проводящие, а остальные две—непроводящие.

Случай с непроницаемыми стенками и когда две непроводящие стенки перпендикулярны, а две проводящие—параллельны внешнему магнитному полю, был рассмотрен Гринбергом методом приведения к интегральным уравнениям [5.6].

§ 1. Течения в прямоугольной трубе при параллельности скорости проницаемости и внешнего магнитного поля

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в прямоугольной трубе, две стенки которой (перпендикулярно к которым приложено внешнее магнитное поле) пористые, а остальные две—твердые. Пусть течение происходит параллельно оси $0x$, скорость проницаемости v_0 и внешнее магнитное поле направлены по оси $0y$, а $h_z=0$. При этих предположениях система (1.6)—1.11) переходит в систему

$$\Delta v-\frac{v_0}{\nu}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{h_0}{\nu}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial p^*}{\partial x}=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p^*}{\partial z}=0, \tag{2.2}$$

$$\Delta h-\frac{v_0}{\nu_m}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{h_0}{\nu_m}\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{2.3}$$

Для всех нижерассмотренных задач из условия неподвижности стенок трубы вытекает, что скорость течения v равна нулю на контуре, т. е.

$$v|_{y=\pm a}=0,\quad v|_{z=\pm b}=0, \tag{2.4}$$

где a, b—стороны прямоугольника*.

а) Пусть все стенки трубы непроводящие. Тогда из условия непрерывности касательной составляющей магнитного поля находим, что величина h должна обращаться в нуль на стенках трубы. Таким образом, задача сводится к решению (2.1—2.4) при следующих граничных условиях для переменного h [6]:

$$h|_{y=\pm a}=0,\quad h|_{z=\pm b}=0. \tag{2.5}$$

Из (2.2) вытекает, что

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x}=\text{const}=m\nu. \tag{2.6}$$

б) Для случая, когда стенки трубы, перпендикулярные к внешнему магнитному полю, идеально проводящие, а остальные две—непроводящие, будем иметь граничные условия для h:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=\pm a}=0,\quad h|_{z=\pm b}=0. \tag{2.7}$$

Учитывая (2.6), умножая (2.3) на постоянную α и складывая с (2.1), получим:

$$\begin{gathered}\Delta(v+\alpha_1 h)+\left[\frac{U_0}{a}-\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]\frac{\partial(v+\alpha_1 h)}{\partial y}+m=0,\\ \Delta(v+\alpha_2 h)-\left[\frac{U_0}{a}+\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]\frac{\partial(v+\alpha_2 h)}{\partial y}+m=0.\end{gathered} \tag{2.8}$$

---

* Здесь и в дальнейшем считается $a<<b$, так что движение происходит примерно так же, как между бесконечными параллельными стенками.

где

$$\alpha_{1,2}=\frac{\nu_m}{2}\left[\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_m}\right)\pm\frac{M_0}{a}\right],$$

а M_0—обобщенное число Гартмана

$$M_0=a\sqrt{\frac{v_0^2}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_m}\right)^2+\frac{h_0^2}{\nu\nu_m}}.$$

Решение, удовлетворяющее в силу (2,4), (2,5), (2,7) граничным условиям относительно независимой переменной z, будет:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\beta_n^2}{\lambda_n^2}+\frac{\alpha_2c_1e^{k_1y}+\alpha_2c_2e^{k_2y}-\alpha_1c_3e^{k_3y}-\alpha_1c_4e^{k_4y}}{\alpha_2-\alpha_1}\right]\cos\lambda_n z, \tag{2.9}$$

$$h=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{c_3e^{k_3y}+c_4e^{k_4y}-c_1e^{k_1y}-c_2e^{k_2y}}{\alpha_1-\alpha_1}\right]\cos\lambda_n z,$$

где

$$\lambda_n=\frac{2n+1}{2b}\pi,\quad \beta_n=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$k_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{M_0}{a}-\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{M_0}{a}-\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]^2+\lambda_n^2},$$

$$k_{3,4}=\frac{1}{2}\left[\frac{M_0}{a}+\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{M_0}{a}+\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right)\right]^2+\lambda_n^2},$$

постоянная m представлена в виде

$$m=\frac{4m}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\lambda_n z.$$

Для определения 4-х постоянных c_1, c_3, c_3, c_4 в обоих случаях имеем 4 граничных условия:

а) $\quad v|_{y=\pm a}=0, \qquad h|_{y=\pm a}=0,$

б) $\quad v|_{y=\pm a}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=\pm a}=0.$

В случае а) Когда все стенки трубы являются непроводящими, после определения постоянных, получим решение в виде:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{\lambda_n^2}\left[1-\frac{\alpha_2\,(e^{k_1y}\,\mathrm{sh}\,k_2a-e^{k_2y}\,\mathrm{sh}k_1a)}{(\alpha_2-\alpha_1)\,\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)a}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_2\,(e^{k_3y}\,\mathrm{sh}k_4a-e^{k_4y}\,\mathrm{sh}k_3a)}{(\alpha_2-\alpha_1)\,\mathrm{sh}\,(k_4-k_3)\,a}\right]\cos\lambda_n z,$$

$$h=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{\lambda_n^2\,(\alpha_2-\alpha_1)}\left[\frac{e^{k_1y}\,\mathrm{sh}\,k_2a-e^{k_2y}\,\mathrm{sh}\,k_1v}{\mathrm{sh}\,(k_1-k_2)a}-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{k_3y}\,\mathrm{sh}\,k_4a-e^{k_4y}\,\mathrm{sh}\,k_3a}{\mathrm{sh}\,(k_4-k_3)a}\right]\cos\lambda_n z.$$

Если стенки трубы непроницаемые, т. е. $v_0=0$, число M_0 переходит в число Гартмана $M=ah_0\sqrt{\dfrac{1}{\nu\nu_m}}$, $k_3=-k_2$, $k_4=-k_1$, $\alpha_1=-\alpha_2=\dfrac{M}{a}$ и мы получим решение Шерклифа:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{\mathrm{sh}\,k_1a\,\mathrm{ch}k_2y+\mathrm{sh}\,k_2a\,\mathrm{ch}\,k_1y}{\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)a}\right]\cos\lambda_n z,$$

$$h=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n a}{\lambda_n^2 M}\,\frac{\mathrm{sh}\,k_1a\,\mathrm{sh}\,k_2y-\mathrm{sh}\,k_2a\,\mathrm{sh}\,k_1y}{\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)a}\cos\lambda_n z.$$

б) Если стенки, перпендикулярные внешнему полю, идеально проводящие, то решением системы (2.1)—(2.3) являются выражения:

$$v=\frac{\beta_n}{\lambda_n^2}\left(1-\frac{\alpha_2\Delta_{11}\,e^{k_1y}+\alpha_2\Delta_{12}\,e^{k_2y}+\alpha_1\,\Delta_{13}\,e^{k_3y}-\alpha_1\Delta_{14}\,e^{k_4y}}{\Delta}\right)\cos\lambda_n z,$$

$$h=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{\lambda_n^2}\,\frac{\Delta_{11}\,e^{k_1y}-\Delta_{12}e^{k_2y}-\Delta_{13}e^{k_3y}+\Delta_{14}e^{k_4y}}{\Delta}\cos\lambda_n z,$$

где

$$\Delta=(\alpha_2^2\,k_3k_4+\alpha_1^2\,k_1k_2)\,\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)a\,\mathrm{sh}\,(k_4-k_3)a-$$

$$-\alpha_1\alpha_2\,(k_1k_3+k^2k_4)\,\mathrm{sh}\,(k_4+k_2)\,\mathrm{sh}\,(k_3-k_1)\,a$$

$$-\alpha_1\alpha_2\,(k_1k_4-k_2k_3)\,\mathrm{sh}\,(k_3-k_2)a\,\mathrm{sh}\,(k_4-k_1)a,$$

$$\Delta_{11}=\alpha_1k_2k_4\,\mathrm{sh}\,k_3a\,\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)a+\alpha_2\,k_3k_4\,\mathrm{sh}\,k_2a\,\mathrm{sh}\,(k_4-k_3)a+$$

$$+\alpha_1k_2k_3\,\mathrm{sh}\,k_4a\,\mathrm{sh}\,(k_2-k_4)a,$$

$$\Delta_{12}=\alpha_2 k_3 k_4 \operatorname{sh} k_1 a \operatorname{sh}(k_4-k_3)a+\alpha_1 k_1 k_3 \operatorname{sh} k_4 a \operatorname{sh}(k_3-k_1)a+$$
$$+\alpha_1 k_1 k_4 \operatorname{sh} k_3 a \operatorname{sh}(k_1-k_4)a,$$
$$\Delta_{13}=\alpha_2 k_2 k_4 \operatorname{sh} k_1 a \operatorname{sh}(k_2-k_4)+\alpha_1 k_1 k_2 \operatorname{sh} k_4 a \operatorname{sh}(k_1-k_2)a+$$
$$+\alpha_2 k_1 k_4 \operatorname{sh} k_2 a \operatorname{sh}(k_4-k_1)a,$$
$$\Delta_{14}=\alpha_2 k_2 k_3 \operatorname{sh} k_1 a \operatorname{sh}(k_2-k_3)a+\alpha k_1 k_3 \operatorname{sh} k_2 a \operatorname{sh}(k_3-k_1)a+$$
$$+\alpha_1 k_1 k_2 \operatorname{sh} k_3 a \operatorname{sh}(k_1-k_2)a.$$

§ 2. Течение в прямоугольной трубе при перпендикулярности магнитного поля и скорости проницаемости

Пусть основное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости происходит параллельно оси $0x$, скорость проницаемости направлена по оси $0y$, а внешнее магнитное поле—по оси $0z$. Тогда основная система (1.7)—(1.11) будет иметь вид:

$$\Delta v-\frac{v_0}{\nu}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{h_0}{\nu}\frac{\partial h}{\partial z}+m=0$$
$$\Delta h-\frac{v_0}{\nu_m}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{h_0}{\nu_m}\frac{\partial v}{\partial z}=0. \qquad (3.1)$$

Введем безразмерные величины:

$$U=\frac{v}{v}, \quad U_0=\frac{v_0}{v}, \quad H=\frac{h\nu_m}{h_0 v\, l}, \quad Q=\frac{ml^2}{v},$$

$$\xi=\frac{y}{l}, \quad \eta=\frac{z}{l},$$

где v и l—характерная скорость и размер.

Система (3.1) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\Delta U-RU_0\frac{\partial v}{\partial \xi}+M^2\frac{\partial h}{\partial \eta}+Q=0$$
$$\Delta H-R_m U_0\frac{\partial H}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \eta}=0, \qquad (3.2)$$

где $M=\frac{H_0 l}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ число Гартмана, $R=\frac{\rho}{\eta}v\,l$ и $R_m=\frac{vl}{\nu_m}$—вязкое и магнитное числа Рейнольдса.

Из неподвижности стенок трубы вытекает граничное условие для скорости течения:

$$U|_{\eta=\pm 1}=0, \quad U|_{\xi=\pm k}=0, \quad \xi=\frac{y}{b}, \; \eta=\frac{z}{b}, \; x=\frac{a}{b}. \qquad (3.3)$$

г) Рассмотрим случай, когда все стенки трубы идеально проводящие. Тогда на контуре сечения трубы нужно положить равной нулю касательную составляющую электрического поля, что приводит к следующим граничным условиям для величины H

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \eta}\right|_{\eta=\pm 1}=0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial \xi}\right|_{\xi=\pm k}=0. \tag{3.4}$$

Здесь подразумевается, что в стенках трубы составляюшими токами, обусловленными проницаемостью стенок, можно пренебречь.

д) Для случая, когда стенки трубы, параллельные к внешнему полю, идеально проводящие, а перпендикулярные к нему—непроводящие, будем иметь граничные условия:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \eta}\right|_{\eta=\pm 1}=0, \quad h|_{\xi=\pm k}=0. \tag{3.5}$$

Решение системы (3.2), удовлетворяющее граничным условиям на стенках $\eta=\pm 1$, представим в виде

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)\cos\lambda_n \eta,$$
$$H=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)\sin\lambda_n \eta, \tag{3.6}$$

где

$$\lambda_n=\frac{2n+1}{2}\pi.$$

Подставляя (3.6) в (3.2) получим:

$$\begin{gathered} f''_n - RU_0 f'_n - \lambda^2_n f_n + M^2\lambda_n\varphi_n + q_n = 0, \\ \varphi''_n R_m U_0 \varphi'_n - \lambda^2_n \varphi_n - \lambda_n f_n = 0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$q_n=\frac{2Q(-1)^n}{\lambda_n}.$$

Для простоты выкладок рассмотрим случай $R=R_m$. Решение системы (3.6) будем искать в виде:

$$\begin{gathered} f_n=\frac{q_n}{\lambda^2_n+M^2}\left[1-F_n(\xi)\exp\left(\frac{RU_0}{2}\,\xi\right)\right] \\ \varphi_n=-\frac{q_n}{\lambda_n(\lambda^2_n+M^2)}\left[1-\Phi_n(\xi)\exp\left(\frac{RU_0}{2}\,\xi\right)\right]. \end{gathered} \tag{3.8}$$

После подстановки (3.8) в (3.6) получим систему уравнений для определения $F_n(\xi)$ и $\Phi_n(\xi)$:

$$F''_n - \left(\lambda^2_n + \frac{R^2U_0^2}{4}\right)F_n - M^2\Phi_n = 0,$$
$$\Phi''_n - \left(\lambda^2_n + \frac{R^2U^2_0}{4}\right)\Phi_n + \lambda_n^2 F_n = 0. \tag{3.9}$$

Решая систему (3.9) и после удовлетворения граничных условий, мы получим окончательно

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n \cos\lambda_n\eta}{\lambda^2_n + M^2}\Big\{1 - [A(\xi)c_1 + B(\xi)c_2 - D(\xi)c_3 + M(\xi)c_4]\exp\left(\frac{RU_0}{2}\xi\right)\Big\},$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{q_n \sin\lambda_n\eta}{\lambda_n(\lambda^2_n + M^2)}\Big\{1 - [c_1 \operatorname{ch} r_n\xi \cos\lambda_n\xi + c_2 \operatorname{sh} r_n\xi \cos s_n\xi + c_3 \operatorname{sh} r_n\xi \sin s_n\xi + c_4 \operatorname{ch} r_n\xi \sin s_n\xi]\exp\left(\frac{RU_0}{2}\xi\right)\Big\},$$

где

$$r_n = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\lambda_n^2 + \frac{R^2U_0^2}{4}\right)^2 + M^2\lambda_n^2} + \left(\lambda_n^2 + \frac{R^2U_0^2}{4}\right)}{2}},$$

$$s_n = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\lambda_n^2 + \frac{R^2U_0^2}{4}\right)^2 + M^2\lambda_n^2} - \left(\lambda^2_n + \frac{R^2U_0^2}{4}\right)}{2}},$$

$$A(t) = \left(1 + \frac{R^2U_0^2}{4\lambda^2_n}\right)\operatorname{ch} r_n t \cos s_n t -$$
$$-\frac{1}{\lambda^2_n}(r^2_n \operatorname{ch} r_n t \cos s_n t - 2r_n s_n \operatorname{sh} r_n t \sin s_n t + s_n^2 \operatorname{ch} r_n t \cos s_n t),$$

$$B(t) = \left(1 + \frac{R^2U_0^2}{4\lambda^2_n}\right)\operatorname{sh} r_n t \cos s_n t -$$
$$-\frac{1}{\lambda^2_n}(r^2_n \operatorname{sh} r_n t \cos s_n t - 2r_n s_n \operatorname{ch} r_n t \sin s_n t) + s^2_n \operatorname{sh} r_n t \cos s_n t),$$

$$D(t) = \left(1 + \frac{R^3U_0^2}{4\lambda^2_n}\right)\operatorname{sh} r_n t \sin s_n t -$$
$$-\frac{1}{\lambda^2_n}(r^2_n \operatorname{sh} r_n t \sin s_n t + 2r_n s_n \operatorname{ch} r_n t \cos s_n t + s^2_n \operatorname{sh} r_n \sin s_n t),$$

$$M(t)=\left(1+\frac{R^2U_0^2}{4\lambda^2_n}\right)\operatorname{ch} r_nt \sin s_nt -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2_n}(r_n^2 \operatorname{ch} r_nt \sin s_nt + 2r_n s_n \operatorname{sh} r_nt \cos s_nt - s_n^2 \operatorname{ch} r_nt \sin s_nt),$$

а постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 определяются из следующей системы:

$$c_1 A(k) \operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_2 B(k) \operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_3 D(k) \operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_4 M \operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k = 1,$$

$$c_1 A(k) \operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_2 B(k) \operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_3 D(k) \operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_4 M \operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k = 0,$$

$$c_1A_1 + c_2B_1 + c_3D_1 + c_4M_1 = 0,$$

$$c_1A_2 - c_2B_2 + c_3D_2 - c_4M_2 = 0,$$

где

$$A_1 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{ch} r_nk \cos s_nk + r_n \operatorname{sh} r_nk \cos s_nk - s_n \operatorname{ch} r_nk \sin s_nk,$$

$$B_1 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{sh} r_nk \cos s_nk + r_n \operatorname{ch} r_nk \cos s_nk - s_n \operatorname{sh} r_nk \sin s_nk,$$

$$D_1 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{sh} r_nk \sin s_nk + r_n \operatorname{ch} r_nk \sin s_nk + s_n \operatorname{sh} r_nk \cos s_nk,$$

$$M_1 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{ch} r_nk \sin s_nk + r_n \operatorname{sh} r_nk \sin s_nk + s_n \operatorname{ch} r_nk \cos s_nk,$$

$$A_2 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{ch} r_nk \cos s_nk - r_n \operatorname{sh} r_nk \cos s_nk + s_n \operatorname{ch} r_nk \sin s_nk,$$

$$B_2 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{sh} r_nk \cos s_nk - r_n \operatorname{ch} r_nk \cos s_nk + s_n \operatorname{sh} r_nk \sin s_nk,$$

$$D_2 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{sh} r_nk \sin s_nk - r_n \operatorname{ch} r_nk \sin s_nk - s_n \operatorname{sh} r_nk \cos s_nk,$$

$$M_2 = \frac{RU_0}{2}\operatorname{ch} r_nk \sin s_nk - r_n \operatorname{sh} r_nk \sin s_nk - s_n \operatorname{ch} r_nk \cos s_nk.$$

Для случая, когда стенки трубы, параллельные к внешнему полю, идеально проводящие, а перпендикулярные к нему—непроводящие, будем иметь аналогичное выражение для скорости течения и индуцированного магнитного поля, что было получено в предыдущем выражении, а c_1, c_2, c_3 определяются из системы:

$$c_1 A(k)\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_2 B(k)\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_3 D(k)\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_4 M(k)\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k = 1.$$

$$c_1 A(k)\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_2 B(k)\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_3 D(k)\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_4 M(k)\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k = 0.$$

$$c_1\operatorname{ch} r_n k\cos s_n k\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_2\operatorname{sh} r_n k\cos r_n k\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_3\operatorname{sh} r_n k\sin s_n k\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k + c_4\operatorname{ch} r_n k\sin s_n k\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k = 1.$$

$$c_1\operatorname{sh} r_n k\cos s_n k\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_2\operatorname{sh} r_n k\cos r_n k\operatorname{ch}\frac{RU_0}{2}k +$$

$$+ c_3\operatorname{sh} r_n k\sin s_n k\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k + c_4\operatorname{ch} r_n k\sin s_n k\operatorname{sh}\frac{RU_0}{2}k = 0.$$

Из этих формул можно легко получить среднюю скорость и потери на трение.

Аналогичную задачу можно решить для случая, когда течение вязкой проводящей жидкости происходит в трубе, две стенки которой $y = \pm a$— непроводящие полюсы магнита, а две другие $z = \pm b$—хорошо проводящие простые шины, к которым подводится заданная разность потенциалов. Пренебрегая индуцированными полями внутри жидкости, уравнения магнитной гидродинамики приводятся к виду [16]:

$$\Delta v_x - \frac{v_0}{\nu}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\sigma}{\eta}B_0^2 v_x + P = 0,$$

$$v_x(y, z)|_{y=\pm a} = 0, \quad v_x(y, z)|_{z=\pm b} = 0,$$

где

$$P = -\frac{\sigma E_0 B_0}{\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x},$$

а $\overrightarrow{E}$—напряженность электрического поля, $\overrightarrow{B}$—вектор магнитной индукции.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{\lambda_n^2+\dfrac{M^2}{a^2}}\left(1-\frac{e^{k_1 z}\,\mathrm{sh}\,k_2 b-e^{k_2 z}\,\mathrm{sh}\,k_1 b}{\mathrm{sh}\,(k_2-k_1)b}\right)\cos\lambda_n y,$$

где

$$k^2-\frac{v_0}{\nu}\,k-\left(\lambda_n^2+\frac{M^2}{a^2}\right)=0,$$

$$\lambda_n=\frac{2n+1}{2a}\,\pi,\quad M^2=\frac{\sigma B_0^2}{\eta}\,a^2,\quad q_n=\frac{2(-1)^n}{\lambda_n a}.$$

Выраженные в элементарных функциях эти формулы дают возможность использовать их при решении практических задач.

Кафедра механики
сплошных сред

(Поступило в редакцию 15. VI. 1962)

ჯ. შარიქაძე

ბლანტი გამტარი სითხის სტაციონარული მოძრაობა მუდმივკვეთიან ფოროვან მილებში

რეზიუმე

შრომაში განიხილება ბლანტი გამტარი სითხის მოძრაობა მუდმივკვეთიან ფოროვან მილში, რომელიც მაგნიტურ ველშია მოთავსებული. შესწავლილია ოთხკუთხოვან მილში გამტარი სითხის მოძრაობის რამდენიმე შემთხვევა.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hartmann. Det. kgl. Danske Vidensk. Selskab (Math-fys. Medd). 15, № 6, 1937.
2. J. A. Shercliff. Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 136, 1953.
3. J. A. Shercliff. Proc. Roy. Soc. A 233, 396, 1955.
4. Г. А. Гринберг. Об установившемся движении проводящей жидкости по трубам, находящимся в поперечном магнитном поле. ЖТФ, т. 31, в. 1, 1961.
5. Г. А. Гринберг. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.

6. Г. А. Гринберг, О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле, ПММ, 1962, т. 26, в. 1.

7. Я. С. Уфлянд, Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале, при наличии поперечного поля. ЖТФ. т. 30, в. 10, 1960.

8. С. А. Регирер, О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля. ПММ, т. 24, № 3, 1960.

10. А. Е. Якубенко, Стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости по трубам в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1. 1961.

10. C. C., Chang, T. S. Lundgren, Duct flow in Magnetohydrodynamics, ZAMP, v. 12, F 2, 1961.

11. С. А. Регирер, Течение вязкой проводящей жидкости в областях с проницаемыми границами в присутствии магнитного поля. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига, 1962.

12. Н. П. Джорбенадзе, Д. В. Шарикадзе, О течении проводящей жидкости между двумя пористыми плоскостями. ДАН СССР, 133, 2, 1960.

13. Д. В. Шарикадзе, Кандидатская диссертация. Москва, 1961, стр. 8—15.

14. Я. С. Уфлянд, Некоторые вопросы неустановившегося течения проводящей жидкости по трубам постоянного сечения в поперечном магнитном поле. ЖТФ, т. 30, в. 12, 1061.

15. Д. В. Шарикадзе, О течении проводящей жидкости в прямоугольном пористом канале в магнитном поле. Тезисы докладов III совещания по теоретической и прикладной магнитной гидродинамике, Рига, 1962 г.

16. А. Г. Рябинин, А. И. Хожанов, Установившееся ламинарное течение электропроводной жидкости в прямоугольной трубе под действием пондерматорных сил. ЖТФ, т. 32, в. 1, 1962.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Л. В. Жижиашвили

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В настоящей статье обобщаются результаты Min-Ten Cheng'a [2] на случай двойных рядов Фурье.

Рассмотрим 2π периодическую функцию $f(x,y) \in L^p(R_0)$, $p>1$, $R_0 = [0,2\pi; 0,2\pi]$.

Пусть двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x,y), \tag{1}$$

где

$$A_{mn}(x,y) = a_{mn}\cos mx \cos ny + bmn \sin mx \cos ny + \\ + cmn \cos mx \sin ny + dmn \sin mx \sin ny,$$

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если} \quad m=n=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если}, \quad m=0,\ n>0, \ \text{или} \ n=0,\ m>0, \\ 1, & \text{если} \quad m>0,\ n>0 \end{cases}$$

является двойным рядом Фурье-Лебега функции $f(x,y)$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{11}(f,s,t,x,y) = f(x+s,\ y+t) - f(x-s,\ y+t) - f(x+s,\ y-t) + \\ + f(x-s,\ y-t),$$

$$\Delta_{10}(f;\ s,\ x,\ y) = f(x+s,y) - (x-s,\ y),$$

$$\Delta_{01}(f;\ t,x,y) = f(x,\ y+t) - f(x,\ y-t),$$

и

$$M_p[\Delta_{11}(f)] = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{11}(f;s,t,x,y)|^p \, dxdy \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$M_p[\Delta_{10}(f)] = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} (\Delta_{10}(f; s, x, y)]\, dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$M_p[\Delta_{01}(f)] = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} [\Delta_{01}(f; t, x, y)]\, dx \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 1. Пусть $1 < p_k \leqslant 2$, $p_k^{-1} + q_k^{-1} = 1$ $(k = 1,2,3)$.
Если

$$M_{p_1}[\Delta_{11}(f)] = O(s^{\alpha} \,.\, t^{\beta}),\ M_{p_2}[\Delta_{10}(f)] = O(s^{\alpha'}),\ M_{p_3}[\Delta_{01}(f)] = O(t^{\beta'}), \tag{2}$$

причем

$$0 < \alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta' \leqslant 1,$$

то

$$\sum_{m_1 n = 1}^{\infty} |\, l_{mn}\, m^{\sigma} n^{\rho}\, |^{q_1} < +\infty, \quad \sigma < \alpha, \quad \rho < \beta, \tag{3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\, l_{m0}\, m^{\sigma_1} |^{q_2} < +\infty,\ \sigma_1 < \alpha', \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, l_{0n}\, n^{\sigma_2}\, |^{q_3} < \infty,\ \sigma_2 < \beta', \tag{5}$$

где

$$l_{mn} = |\, a_{mn}\,| + |\, b_{mn}\,| + |\, c_{mn}\,| + |\, d_{mn}\,|,$$

$$l_{m0} = |\, a_{m0}\,| + |\, b_{m0}\,|,\ l_{0n} = |\, a_{0n}\,| + |\, c_{0n}\,|.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x, y)\, dy, \quad \psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x, y)\, dx.$$

Легко проверить, что

$$M p_2[\Delta\varphi] = O(s^{\alpha'}), \quad M p_3[\Delta\psi] = O(t^{\beta'}), \tag{6}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x + s) - \varphi(x - s), \quad \Delta\psi = \psi(y + t) - \psi(y - t).$$

С другой стороны [1], имеем

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + b_{m0} \sin mx),$$

$$\psi(y) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos nx + c_{0n} \sin ny).$$

Значит, принимая во внимание (6), на основании результатов, полученных в работе [2], показываем справедливость соотношений (4) и (5).

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y) + \frac{a_{00}}{4}.$$

Можно показать [1], что

$$\Delta_{11}(\varphi; s, t, x, y) \sim 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mn}(x, y) \sin ms \sin nt, \tag{7}$$

где

$$D_{mn}(x, y) = d_{mn} \cos mx \cos ny - b_{mn} \cos mx \sin ny -$$
$$- c_{mn} \sin mx \cos ny + a_{mn} \sin mx \sin ny.$$

Пусть теперь

$$F(s, t) = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{11}(\varphi; s, t, x, y)|^{p_1} \, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p_1} \cdot q_1}.$$

Можно показать, что

$$F(s, t) \geqslant K \sum_{m,n=1}^{\infty} |l_{mn}|^{q_1} |\sin ms|^{q_1} |\sin nt|^{q_1}, \tag{8}$$

где K — некоторая положительная константа.

В силу условия теоремы $F(s, t) = 0\,(s^{\alpha q_1} \cdot t^{\beta q_1})$. Значит, сходится интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(s, t)}{s^{1+\alpha q_1 - \varepsilon} \cdot t^{1+\beta q - \varepsilon'}} \, ds dt, \quad \varepsilon, \varepsilon' > 0. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin ms \sin nt|^{q_1}}{s^{1+\alpha q_1 - \varepsilon} \cdot t^{1+\beta q_1 - \varepsilon'}} \, ds\, dt > K' m^{\alpha q_1 - \varepsilon} \cdot n^{\beta q_1 - \varepsilon}. \tag{10}$$

Следовательно, на основании (8), (9) и (10) получаем (3). Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} l^{k}_{mn} < +\infty, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} l^{k_1}_{m0} < +\infty, \qquad \sum_{u=1}^{\infty} l^{k_2}_{0n} < +\infty,$$

где

$$k > \max\left\{ \frac{p_1}{p_1 + \alpha p_1 - 1}, \frac{p_1}{p_1 + \beta p_1 - 1} \right\}, \quad k_1 > \frac{p_2}{p_2 + \alpha' p_2 - 1}, \quad k_2 > \frac{p_3}{p_3 + \beta' p_2 - 1}.$$

Аналогично доказываются следующие теоремы:

Теорема 2. Если

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha',\beta' > 0,\ 1 < p_k \leqslant 2\ (k = 1,2,3) \quad \text{и}$$

$$M_{p1}[\Delta_{11}(f)] = O\left[s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-1-p\alpha_1} t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1-\beta p_1}\right],\quad s,t \to 0+,$$

$$M_{p2}[\Delta_1 0(f)] = O\left[s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-1-\alpha' p_2}\right],\quad s \to 0+,$$

$$M_{p3}[\Delta_{01}(f)] = O\left[t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha'\beta_3}\right],\quad t \to 0+,$$

то сходятся ряды

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} l_{mn}(\log m \log n)^{\lambda},\qquad \sum_{m=1}^{\infty} l_{m0}\log^{\lambda'} m,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} l_{0n}\log^{\lambda''} n,$$

где

$$\lambda < \min\left\{\alpha + \frac{1}{p_1} - 1,\ \beta + \frac{1}{p_1} - 1\right\},\ \lambda' < \alpha' + \frac{1}{p_2} - 1,\ \lambda'' < \beta' + \frac{1}{p_3} - 1.$$

Теорема 3. Если

$$1 < p_k \leqslant 2,\quad \varepsilon > 0$$

$$M_{p_1}^{p_1}[\Delta_{11}(f)] = O\left[s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-p_1-\varepsilon} t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-p_1-\varepsilon'}\right],\ s,t \to 0+,\ \varepsilon, \varepsilon' > 0,$$

$$M_{p_1}^{p_1}[\Delta_{10}(f) = O\left[s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-p_2-\varepsilon''}\right],\quad s \to 0+,\quad \varepsilon'' > 0,$$

$$M_{p_3}^{p_3}[\Delta_{01}(f) = O\left[t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-p_3-\varepsilon'''}\right],\quad t \to 0+,\ \varepsilon''' > 0,$$

то ряд $\sigma[f]$ абсолютно сходится.

Заметим, что если в теореме 1 одно из чисел σ, ρ, σ_1, ρ_1, равняется соответственно α или β, также α' или β', то теорема может не быть правильной. Аналогично, если в теореме 2 λ равно одному из чисел $\alpha + \frac{1}{p_1} - 1$, $\beta + \frac{1}{p_1} - 1$, или $\lambda' = \alpha' + \frac{1}{p_2} - 1$, или $\lambda'' = \beta' + \frac{1}{p_3} - 1$, то теорема уже может не быть справедливой.

Кафедра теории функции действительного
переменного и функционального анализа

(Поступило в редакцию 15 . XI . 62 г.)

ლ. ჟიჟიაშვილი

ფურიეს ორმაგი მწკრივების აბსოლუტური კრებადობის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში მოცემულია Min-Ten Cheng-ის [ა] შედეგების განზოგადება ორმაგი ფურიეს მწკრივებისათვის.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Челидзе. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье. ДАН СССР т. 54, № 2 (1946).
2. Min-Ten Cheng, The absolute convergence of Fourier series, Duke Math. J. Vol, 9 № 4. (1942)
3. C. Reves, O. Sza'sz, Double trigonometric Series, Duke Math, J. Vol. 9. № 4, (1942).

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Л. В. Жижиашвили

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛАХ

В настоящей статье обобщаются некоторые результаты Райхмана и Зигмунда [1]. Полученные результаты распространяем на двойные ряды.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в интервале (a, b), причем $o \in [a, b)$. Рассмотрим числовую последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к нулю.

Справедлива

Теорема 1. Если

$$U_m(x) = \sum_{k=2^m+1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} \varphi_k(x) \tag{1}$$

и

$$U_m(x) = U(x), \quad \text{при} \quad \frac{1}{2^{m+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^m},$$

то

$$\lim_{x\to 0} as\, U(x) = 0.$$

Доказательство. Легко можно убедиться [1], что функция $U(x)$ определена почти всюду. Положим

$$\alpha_m \sup_{k>2^m} \{|\beta_k|\}, \quad I_0 = [o, s] \subset (a, b),$$

$$M_m(I_0) = E_x[\,|U_m(x)| \leqslant \sqrt{\alpha_m}, \quad x \in I_0].$$

Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.

Далее,

$$\int_{M_m} U^2{}_m(x)\, dx < \int_a^b U^2{}_m(x)\, dx = C \sum_{k=2^m+1}^{\infty} \frac{\beta_k{}^2}{k^2} < C' \frac{\alpha^2{}_m}{2^m}, \tag{2}$$

где C и C' — константы.

Пусть теперь x — некоторое число, удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{2^{m+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^m}.$$

Введем обозначения

$$R_k = \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right], \quad R_k^{(x)} = \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \quad x\right],$$

$$H_m = \underset{x}{E}\left[\,|U_m(x)| > \sqrt{\alpha_m}, \quad x \in R_m\right].$$

В силу (2) получим

$$\operatorname{mes} H_m \alpha_m = \left[\frac{1}{2^{m+1}} - \operatorname{mes} M_m(R_m)\right] <$$

$$< \int\limits_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}} U^2{}_m(x)\, dx < C' \frac{\alpha^2{}_m}{2^m}.$$

Отсюда

$$\operatorname{mes} M_m(R_m) > \frac{1}{2^{m+1}} - C' \frac{\alpha_m}{2^m}. \tag{3}$$

Аналогично получается, что

$$\operatorname{mes} M_m(R_m^{(x)}) > x - \frac{1}{2^{m+1}} - C' \frac{\alpha_m}{2^m}. \tag{4}$$

Полагая

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m,$$

легко заметить, что если $x \in E$, то $\lim\limits_{x \to 0} U(x) = 0$.

С другой стороны, на основании (3) и (4) находим

$$\underline{\lim_{x \to 0}} \frac{\operatorname{mes} M(x)}{x} \geqslant 1,$$

где $M(x)$ обозначает порцию множества E на $[0, x]$.

Но так как

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{\operatorname{mes} M(x)}{x} \leqslant 1,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{mes} M(x)}{x} = 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.

На основании этой теоремы следует

Теорема 2. Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и

$$|\varphi_k(x)| \leqslant k\,|x|,$$

или

$$\Delta\left\{\frac{\varphi_k(x)}{kx}\right\} = o(x^2), \quad 0 < |x| < \frac{1}{k},$$

то

$$\lim_{x\to 0} as \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k}\varphi_k(x) = 0.$$

2. Пусть $R_0 = [a, b; c, d]$ — двумерный сегмент. Рассмотрим систему функций $\{\varphi_{i,k}(x, y)\}_{i,k=1}^{\infty}$ с суммируемым квадратом на R_0 и допустим, что эта система полная ортонормированная на R_0. Предположим, что $[o, s, \dot{o}, s'] = Q \subset R_0$.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{i,k\to\infty} \rho_{ik} = 0$ и

$$U_{mn}(x, y) = \sum_{i=2^m+1}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{\infty} \frac{\rho_{ik}}{ik}\varphi_{ik}(x, y). \tag{1}$$

Если

$$U(x, y) = U_{mn}(x, y) \quad \text{при} \quad \frac{1}{2^{m+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^m}, \ \frac{1}{2^{n+1}} < y \leqslant \frac{1}{2^n},$$

то

$$\lim_{(x, y)\to 0} as\ U(x, y) = 0.$$

Доказательство. Функции $U_{mn}(x, y)$ почти всюду определены. Положим,

$$\varepsilon_{mn} = \sup_{\substack{k > 2^m \\ i > 2^n}} \{|\rho_{ik}|\},$$

$$M_{mn}(R) = \mathop{E}_{(x,y)}\left[\,|U_{mn}(x, y)| \leqslant \sqrt{\varepsilon_{mn}}, \quad (x, y) \in R\right],$$

$R = [a', b', c', d']$, причем $Q \subset R$. Легко заметить [2], что

$$\iint\limits_{M_{mn}} U^2_{mn}(x, y)\,dx\,dy \leqslant \int_a^b\int_c^d U^2_{mn}(x, y)dxdy < C\,\frac{\varepsilon^2_{mn}}{2^m 2^n}, \tag{2}$$

где $\lim\limits_{m,n\to\infty} \varepsilon_{mn} = 0$ и $C = \text{const}$.

Возьмем некоторые числа x и y, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{2^{m+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^m}, \quad \frac{1}{2^{n+1}} < y \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Введем обозначения

$$R_{ik} = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \quad \frac{1}{2^i}; \quad \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \frac{1}{2^k}\right], \quad R_{ik}^{(x)} = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \ x; \ \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \frac{1}{2^k}\right],$$

$$R_{ik}^{(y)} = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \quad \frac{1}{2^i}; \ \frac{1}{2^{k+1}}, \quad y\right], \quad R_{ik}^{(x,y)} = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \ x; \ \frac{1}{2^{k+1}}, \quad y\right].$$

Рассмотрим теперь множество

$$H_{mn} = \underset{(x,y)}{E}\left[\,|U_{mn}(x,y)| > \sqrt{\varepsilon_{mn}}, \quad (x,y) \in R_{mn}\right].$$

Имеем

$$\operatorname{mes} H_{mn}\, \varepsilon_{mn} = \left[\frac{1}{2^{m+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}} - \operatorname{mes} M_{mn}(R_{mn})\right] <$$

$$< \int\limits_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}} \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} U^2_{mn}(x,y)\, dxdy < C\frac{\varepsilon^2{}_{mn}}{2^m 2^n}. \tag{3}$$

Отсюда находим

$$\operatorname{mes} M_{mn}(R_{mn}) > \frac{1}{2^{m+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}} - C\,\frac{\varepsilon_{mn}}{2^m 2^n}. \tag{4}$$

Аналогично находим, что

$$\operatorname{mes} M_{mn}(mn^{(s,t)}) > s\cdot t - s\,\frac{1}{2^{n+1}} - t\,\frac{1}{2^{m+1}} - C\,\frac{\varepsilon_{mn}}{2^m 2^n}, \tag{5}$$

$$\operatorname{mes} M_{mn}(R_{mn}{}^{(s)}) > s\,\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{m+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}} - C\,\frac{\varepsilon_{mn}}{2^m 2^n}, \tag{6}$$

$$\operatorname{mes} M_{mn}(R_{mn}{}^{(t)}) > t\,\frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+1}\cdot 2^{n+1}} - C\,\frac{\varepsilon_{mn}}{2^m 2^n}. \tag{7}$$

Положим теперь, что

$$M = \sum_{i,k=1}^{\infty} M_{ik}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ (x,y)\in M}} U(x,y) = 0.$$

Обозначая через $M(x, y)$ порцию множества M на $[0, x;\ 0, y]$, нетрудно показать, что

$$M(x,y)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\ \sum_{k=n+1}^{\infty} M_{ik}(R_{ik})+\sum_{i=m+1}^{\infty} M_{in}(R_{in}{}^{(y)})+$$

$$+t\sum_{k=n+1}^{\infty} M_{mk}(R_{mk}{}^{(x)})+M_{mn}(R_{mn}{}^{(x,y)}). \tag{8}$$

Покажем, что

$$\lim_{s,\,t\to 0}\frac{\operatorname{mes} M(s,t)}{s\cdot t}=0. \tag{9}$$

В самом деле

$$\overline{\lim_{s,\,t\to 0}}\ \frac{\operatorname{mes} M(s,t)}{s\cdot t}\leqslant 1. \tag{10}$$

Затем, принимая во внимание (8), на основании (4), (5) — (7), имеем

$$\operatorname{mes} M(s,t)>\sum_{i=m+1}^{\infty}\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i 2^k}-C\sum_{i=m+1}^{\infty}\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{ik}}{2^i 2^k}+$$

$$+t\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}-C\frac{1}{2^n}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{in}}{2^i}+$$

$$+s\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-C\frac{1}{2^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{mk}}{2^k}+$$

$$+st-s\frac{1}{2^{n+1}}-t\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}\frac{1}{2^{n+1}}-C\frac{\varepsilon_{mn}}{2^m 2^n}.$$

Отсюда легко находим, что

$$\operatorname{mes} M(s,t)>st-\frac{\varepsilon'_{mn}}{2^m 2^n},$$

где

$$\lim_{m,n\to\infty}\varepsilon'_{mn}=0.$$

Следовательно, имеем

$$\underline{\lim_{s,t\to 0}}\ \frac{\operatorname{mes} M(s,t)}{s\cdot t}\geqslant 1.$$

На основании (10) и (11) следует (9). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4. Если

$$\lim_{(i,k)_\lambda \to \infty} \rho_{ik} = 0,$$

то

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to 0} as\, U(x, y) = 0,$$

где $U_{mn}(x, y)$ определяется формулой (1).

Теорема 5. Если $\lim\limits_{i+k\to\infty} \rho_{ik} = 0$,

то

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to 0} as \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\rho_{ik}}{ik} \varphi_{ik}(x, y) = 0,$$

где

$$|\varphi_{i,k}(x, y)| \leqslant ik\,|x|\,|y|.$$

Следствие 1. Пусть

$$\lim_{m+n\to\infty} \sqrt{a^2_{mn} + b^2_{mn} + c^2_{mn} + d^2_{mn}} = 0.$$

Если

$$F(x, y) = \frac{a_{00}}{4} xy + \frac{y}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i0} \cos ix - b_{i0} \sin ix}{i} +$$

$$+ \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0k} \cos ky - c_{0k} \sin ky}{k} +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{d_{ik} \cos ix \cos ky - b_{ik} \cos ix \sin ky - c_{ik} \sin ix \cos ky + a_{ik} \sin ix \sin ky}{ik},$$

то функция $F(x, y)$ почти всюду асимптотически непрерывна [3].

Кафедра теории функции действительного
переменного и функционального анализа

(Поступило в редакцию 15. XI. 62)

ლ. ჟიჟიაშვილი

ასიმპტოტური ზღვრების შესახებ

რეზიუმე

ცნობილია [4], რომ, თუ $\beta_k \to 0$, მაშინ

$$\lim_{x \to 0} as \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} \sin kx = 0.$$

შრომაში დამტკიცებულია ანალოგიური თეორემა გარკვეული კლასის ფურიეს მწკრივებისათვის; მიღებული შედეგები განზოგადებულია ორმაგი მწკრივებისათვის.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов. Москва (1958).
2. В. Г. Челидзе, Об абсолютной сходимости ортогональных двойных рядов. Труды Тбил. матем. института им. Размадзе, XXVI (1960).
3. В. Г. Челидзе, Двойные интегралы Данжуа. Труды Тбил. матем. института им. Размадзе. 15 (1941).
4. A. Rajchman, A. Zygmund, Sur la relation du procédé de sommation de Cesàro et celui de Riemann, B. P. A. (1925).

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

И. Т. Кигурадзе

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В 1925 году М. Мателл опубликовал работу [1], в которой изучаются асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений любого конечного порядка. Частные случаи теорем, доказанных в упомянутой работе, переоткрывались позже многими авторами (см., напр., [2]—[11]).

В настоящей статье обобщаются некоторые результаты Мателля и показывается их связь с результатами других авторов.

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n}(a_k(t)+b_k(t))\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}}=0, \tag{1}$$

где функции $a_k(t)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ предполагаются абсолютно непрерывными, а $b_k(t)$ $(k=1, 2, \dots, n)$—суммируемыми на каждом конечном отрезке промежутка $[t_0, \infty)$.

Введём следующее

Определение. Пусть в промежутке $[t_0, \infty)$ заданы непрерывные комплексные функции $\omega_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$. Мы скажем, что они удовлетворяют условию (M), если при любом $i\neq k$ $(i, k=1, 2, \dots, n)$ функция $\int\limits_{t_0}^{t} Re(\omega_i(\tau)-\omega_k(\tau))\,d\tau$ либо ограничена сверху, когда $t\to\infty$, либо $\int\limits_{t_0}^{\infty} Re(\omega_i(\tau)-\omega_k(\tau))d\tau=\infty$ и $\int\limits_{t_1}^{t_2} Re(\omega_i(\tau)-\omega_k(\tau))\,d\tau\geqslant -c$ для всех $t_2>t_1\geqslant t_0$, где c—положительная постоянная, не зависящая от t_1 и t_2.

Ясно, что если ни одна из разностей $Re\,\omega_i(\tau)-Re\,\omega_k(t)$ не меняет знака, то функции $\omega_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ удовлетворяют условию (M).

Ниже вместо $\int\limits_{t_0}^{\infty} |f_1(t)|^p\,dt < \infty$ и $\overset{\infty}{\underset{t_0}{\mathrm{V}}} f_2(t) < \infty$, для простоты, будем писать $f_1(t) \in L^p$ и $f_2(t) \in V$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемые, положительные функции на $[t_0, \infty)$ и

$$g_k(t) = \varphi^{-1}(t)\,\psi^{-k}(t)\,(\varphi(t)\,\psi^{k-1}(t))' \in V,\ a_k(t)\psi^{-k}(t) \in V, \tag{2}$$

$$b_k(t)\,\psi^{1-k}(t) \in L\ (k=1,\ 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Если функции $\psi(t)\,\lambda_k(t)$ $(k=1,\ 2, \ldots, n)$, где $\lambda_k(t)$—корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,\psi^{-k}(t) \prod_{i=1}^{n-k} (\lambda + g_i(t)) + a_n(t)\,\psi^{-n}(t) = 0,\ (a_0(t) \equiv 1), \tag{4}$$

удовлетворяют условию (M) и

$$\lim_{t\to\infty} (\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) \neq 0,\ i \neq k\ (i,\ k=1,\ 2, \ldots, n), \tag{5}$$

то дифференциальное уравнение (1) имеет n линейно независимых решений $u_i(t)$ $(i=1,\ 2, \ldots, n)$, таких, что при $t \to \infty$

$$u_i(t) = \varphi(t) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\right)(1 + o(1)),$$

$$\frac{d^k u_i(t)}{dt^k} = \varphi(t)\,\psi^k(t) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\right)\left(\prod_{l=1}^{k} (\lambda_i + g_l) + o(1)\right) \tag{6}$$

$$(i=1,\ 2, \ldots, n;\ k=1,\ 2, \ldots, n-1),$$

где

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \lambda_i(t),\ g_i = \lim_{t\to\infty} g_i(t)\ (i=1,\ 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Уравнение (1) можно переписать следующим образом

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = (A(t) + B(t)) \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_n(t) & -b_{n-1}(t) & \dots & -b_1(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$G(t)=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(t)+g_1(t) & \dots & \lambda_n(t)+g_1(t) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \prod\limits_{i=1}^{n-1}(\lambda_1(t)+g_i(t)) & \dots & \prod\limits_{i=1}^{n-1}(\lambda_n(t)+g_i(t)) \end{pmatrix}.$$

Матрица $G=\lim\limits_{t\to\infty} G(t)$ — неособая, так как

$$\operatorname{Det}(G)=\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i=k+1}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)\neq 0.$$

Поэтому при больших значениях t и $G(t)$ будет неособой матрицей и $\lim\limits_{t\to\infty} G^{-1}(t)=G^{-1}$.

Преобразованием

$$x=\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau,\quad \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}=F(t)\,G(t)\,y(x), \tag{8}$$

где

$$F(t)=\begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(t)\psi(t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(t)\psi^{n-1}(t) \end{pmatrix},\qquad y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{dy}{dx}=(H(x)+R(x))\,y,$$

где

$$H(x)=\psi^{-1}(t)\,G^{-1}(t)\,[F^{-1}(t)\,A(t)\,F(t)-F^{-1}(t)\,F'(t)]\,G(t)=$$

$$=\begin{pmatrix} \omega_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2(x) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n(x) \end{pmatrix},\quad \omega_k(x)=\lambda_k(t)\ (k=1,2,\dots,n), \tag{10}$$

$$R(x)=\psi^{-1}(t)\,G^{-1}(t)\,[B_1(t)-G'(t)],\ \ B_1(t)=F^{-1}(t)B(t)\,F(t)\,G(t)=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ & & . & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ b^*_1(t) & . & . & . & & & b^*_n(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$b_l^*(t)=-\sum_{k=1}^{n-1} b_k(t)\psi^{1-k}(t)\prod_{i=1}^{n-k}(\lambda_l(t)+g_i(t))-b_n(t)\psi^{1-n}(t)\quad (l=1,2,\ldots n).$$

Покажем сначала, что $x\to\infty$ при $t\to\infty$, т. е.

$$\int_{t_0}^{\infty}\psi(\tau)d\tau=\infty. \tag{12}$$

Действительно, если предположить, что $\psi(t)\in L$, то в силу ограниченности функции $\varphi^{-1}(t)\,\psi^{-k}(t)\,(\varphi(t)\,\psi^{k-1}(t))'$ $(k=1,\ 2,\ldots,n)$ будем иметь

$$\frac{d}{dt}\lg(\varphi(t)\,\psi^{k-1}(t))=\{\varphi^{-1}(t)\,\psi^{-k}(t)\,(\varphi(t)\,\psi^{k-1}(t))'\}\psi(t)\in L,$$

т. е. $\lg(\varphi(t)\,\psi^{k-1}(t))\in V(k=1,\ 2,\ldots,n)$. Отсюда следует, что при $t\to\infty$ функция $\psi(t)$ стремится к конечному, отличному от нуля пределу и, следовательно, не может быть суммируемой. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (12).

Введём обозначения

$$f(\lambda,\ t)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\psi^{-k}(t)\prod_{i=1}^{n-k}(\lambda+g_i(t))+a_n(t)\psi^{-n}(t),\ \ f(\lambda)=\lim_{t\to\infty}f(\lambda,\ t).$$

В силу (5) ясно, что уравнение $f(\lambda)=0$ имеет различные корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ т. е. $f'(\lambda_k)\neq 0$ $(k=1,\ 2,\ldots,n)$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}f'_\lambda(\lambda_k(t),\ t)=$ $=f'(\lambda_k)\neq 0$, поэтому при $t\to\infty$ имеем

$$\frac{d\lambda_k(t)}{dt}=-\frac{f'_t(\lambda_k(t),\ t)}{f'_\lambda(\lambda_k(t),\ t)}=O\left(f'_t(\lambda_k(t),\ t)\right)\quad (k=1,\ 2,\ldots,n).$$

Отсюда, в силу (2), легко выводим, что

$$\int_{t_0}^{\infty}|d\,\lambda_k(t)|<\infty\quad (k=1,\ 2,\ldots,n). \tag{13}$$

Принимая во внимание, что функции $\lambda_k(t)$, $g_k(t)$ $(k=1, 2,\ldots,n)$ и $\| G^{-1}(t) \|$ [1] остаются ограниченными при $t\to\infty$, то из (11) находим

$$\| R(x) \| \leqslant c\psi^{-1}(t) \sum_{k=1}^{n} (|b_k(t)|\psi^{1-k}(t)+|g'_k(t)| + |\lambda'_k(t)|),$$

где c—достаточно большое положительное число.

В силу (2), (3) и (12), из последнего неравенства получим

$$\int_0^\infty \|R(x)\| dx \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} (|b_k(t)|\psi^{1-k}(t) + |g'_k(t)| + |\lambda'_k(t)|)dt < \infty. \tag{14}$$

Так как $\int\limits_0^x \omega_k(z)dz = \int\limits_{t_0}^t \lambda_k(\tau)\psi(\tau)d\tau$ и функции $\lambda_k(t)\psi(t)$ $(k=1, 2,\ldots,n)$

удовлетворяют условию (M), поэтому функции $\omega_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ также удовлетворяют условию (M). Кроме того, из (5) имеем

$$\lim_{x\to\infty} (\omega_i(x) - \omega_k(x)) \neq 0, \quad i \neq k \ (i,\ k=1, 2, \ldots, n). \tag{5_1}$$

Хорошо известно (см. [1], [12] и [13]), что когда $H(x)$—диагональная матрица вида (10), где функции $\omega_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям (M) и (5), а матрица $R(x)$ удовлетворяет условию (14), то уравнение (9) имеет фундаментальную систему решений

$$y_i(x) = \begin{pmatrix} y_{1i}(x) \\ y_{2i}(x) \\ \vdots \\ y_{ni}(x) \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

такую, что при $x\to\infty$ имеем

$$y_i(x) = \exp\left(\int_0^x \omega_i(z)dz\right)(e_i + o(1)) \ (i=1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

где e_i—вектор, все элементы которого нули, за исключением i-го, который равен 1.

Из (8) и (15) ясно, что каждому решению $y_i(x)$ уравнения (9) соответствует решение $u_i(t)$ уравнения (1), поведение которого при $t\to\infty$ описывается асимптотическими формулами (6). Теорема доказана.

---

[1] Здесь и в дальнейшем под нормой $\|X\|$ матрицы X понимается сумма модулей её элементов.

При $\varphi(t) \equiv 1$, $\psi(t) = \frac{1}{t}$ из теоремы 1 непосредственно получается

Теорема 2. Пусть

$$t^k a_k(t) \in V,\ t^{k-1} b_k(t) \in L \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Если корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k a_k(t) \prod_{i=1}^{n-k} (\lambda - i + 1) + t^n a_n(t) = 0 \quad (a_0(t) \equiv 1) \tag{17}$$

удовлетворяют условию (5), а функции $\frac{\lambda_k(t)}{t}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (M), то дифференциальное уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, такую, что при $t \to \infty$ имеем

$$u_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda_i(\tau)}{\tau} d\tau\right)(1 + o(1)), \quad \frac{d^k u_i(t)}{dt^k} =$$
$$= t^{-k} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda_i(\tau)}{\tau} d\tau\right)\left(\prod_{l=1}^{k} (\lambda_i - l + 1) + o(1)\right) \tag{18}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

При $n = 2$ уравнение (17) имеет вид

$$\lambda^2 - (1 - t a_1(t))\lambda + t^2 a_2(t) = 0.$$

Так как

$$2\lambda_i(t) = 1 - t a_1(t) + (-1)^i \sqrt{(1 - t a_1(t))^2 - 4t^2 a_2(t)} \quad (i = 1, 2), \tag{19}$$

поэтому ясно, что для соблюдения (5) необходимо и достаточно неравенство

$$\lim_{t \to \infty} (1 - t a_1(t))^2 \neq 4 \lim_{t \to \infty} t^2 a_2(t). \tag{20}$$

С другой стороны, условие (20) гарантирует знакопостоянство функции $Re(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))$, а это достаточно для того, чтобы функции $\frac{\lambda_i(t)}{t}$ $i = 1, 2)$ удовлетворяли условию (M).

Итак, мы показали, что из теоремы 2 вытекает такое

Следствие 1. Если $n = 2$ и удовлетворяются условия (16) и (20), то справедливы формулы (18), где $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$ даются равенствами (19).

Приведённое утверждение обобщает одну теорему Хилла [14] и Маржика-Раба ([15], теорема 23).

Следствие 2. Если соблюдаются условия (16) и кроме того

$$\lim_{t\to\infty} t^k a_k(t)=0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \tag{21}$$

то справедливы формулы (17), которые можно представить следующим образом:

$$u_i(t)=t^{i-1+\varepsilon_i(t)}(1+o(1)), \quad \frac{d^k u_i(t)}{dt^k}=$$

$$=t^{i-1-k+\varepsilon_i(t)}\left(\prod_{l=1}^{k}(i-l)+o(1)\right) \quad (i=1, 2, \dots, n;\ k=1, 2, \dots, n-1), \tag{22}$$

где $\varepsilon_i(t)=O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lg t}\int_{t_0}^{t}|\tau^{k-1}\dot{a}_k(\tau)|\,d\tau\right)\to 0$, при $t\to\infty$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Действительно, в силу (21), корни уравнения (17) имеют вид

$$\lambda_i(t)=i-1+O\left(\sum_{k=1}^{n}|t^k a_k(t)|\right) \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{23}$$

и очевидно удовлетворяются как условие (5), так и условие (M). Следовательно, справедливы формулы (18), которым, в силу (23), можно придать вид (22).

Если $a_k(t)\equiv 0$ $(k=1, 2, \dots, n)$, тогда из (22) получаются формулы Соболя [16]

$$u_i(t)=t^{i-1}(1+o(1)), \quad \frac{d^k u_i(t)}{dt^k}=$$

$$=t^{i-1-k}\left(\prod_{l=1}^{k}(i-l)+o(1)\right) \quad (i=1, 2, \dots, n;\ k=1, 2, \dots, n-1). \tag{24}$$

Допустим теперь, что $a_k(t)\equiv 0$, $b_k(t)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ знакопостоянные функции одинакового знака и уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида (24). Тогда из (1) находим

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{\infty}|b_k(t)|t^{k-1}dt\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{\infty}|b_k(t)|u_n^{(k)}(t)\,dt\leqslant u^{(n-1)}(t_0).$$

Таким образом, из следствия 2 теоремы 2 получается следующая

Теорема Соболя. Условие $t^{k-1}b_k(t)\in L$ $(k=1, 2, \dots, n)$ достаточно, а если $b_k(t)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ — знакопостоянные функции одинакового знака, и необходимо для того, чтобы дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}=0$$

имело фундаментальную систему решений вида (24).

Если в уравнении (1) вместо $a_n(t)$ напишем $a_n(t)+a(t)$, то получим

$$\frac{d^n u}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n}(a_k(t)+b_k(t))\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}}+a(t)u=0. \tag{1_1}$$

Теорема 3. Пусть $a(t)$ дифференцируема и нигде не равна нулю на $[t_0, \infty)$. Если

$$a'(t)|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}}\in V,\ \ a_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k}{n}}\in V, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty} a'(t)\,|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}}=\lim_{t\to\infty} a_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k}{n}}=0, \tag{25_1}$$

$$b_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k-1}{n}}\in L\ \ (k=1,\ 2,\ldots,n), \tag{26}$$

то дифференциальное уравнение (1_1) имеет n линейно независимых решений $u_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$, таких, что при $t\to\infty$

$$\frac{d^k u_i(t)}{dt^k}=|a(t)|^{\frac{2k-n+1}{2n}}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_i(\tau)\,|a(\tau)|^{\frac{1}{n}}\,d\tau\right)(\lambda_i^k+o(1)) \tag{27}$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,n;\ k=0,\ 1,\ldots,n-1),$$

где $\lambda_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$ — корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k}{n}}\prod_{i=1}^{n-k}\left(\lambda+\frac{2i-n-1}{2n}a'(t)|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}}\operatorname{sign}a(t)\right)+$$

$$+\frac{a_n(t)+a(t)}{|a(t)|}=0. \tag{28}$$

Доказательство. Допустим сперва, что $a(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Положим

$$\varphi(t)=|a(t)|^{-\frac{n-1}{2n}},\ \ \psi(t)=|a(t)|^{\frac{1}{n}}. \tag{29}$$

Для таких $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, в силу (25) и (26), соблюдаются условия (2) и (3).

В силу (25_1), корни уравнения (28) при $t \to \infty$ стремятся к корням уравнения $\lambda^n + \operatorname{sing} a(t) = 0$ и, следовательно, удовлетворяют условию (5). Так как для больших t функции $Re(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))$ $(i,\ k=1,\ 2, \ldots, n)$ сохраняют знаки, поэтому $\lambda_k(t)\psi(t)$ $(k=1,\ 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (M).

Таким образом, все условия теоремы 1 соблюдаются и поэтому справедливы формулы (6), которые в силу (29) принимают вид (27).

Итак, мы доказали теорему при дополнительном предположении, что $a(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Освободимся теперь от этого предположения.

Положим

$$t_{ij} = t_0 + i - 1 + \frac{j}{m_i} \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ j=1,\ 2, \ldots, m_i).$$

Пусть $\sigma(t)$ какая-нибудь гладкая функция на $[t_0\ \infty)$, монотонная в каждом промежутке $(t_{ij-1},\ t_{ij})$ и пусть

$$\sigma(t_{ij}) = a'(t_{ij}) \mid a(t_{ij}) \mid^{-\frac{n+1}{n}} \operatorname{sign} a(t) \quad (i=1, 2, \ldots, j=1, 2, \ldots m_i).$$

В силу (25) и (25_1) ясно, что

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0, \ \sigma(t) \in V. \tag{30}$$

Положим

$$\varepsilon(t) = a'(t) \mid a(t) \mid^{-\frac{n+1}{n}} \operatorname{sign} a(t) - \sigma(t). \tag{31}$$

Подберём числа $m_i (i=1,\ 2, \ldots)$ таким образом, чтобы

$$\int_{i-1}^{i} (1 + |a(\tau)|^{\frac{1}{n}}) |\varepsilon(\tau)| d\tau \leqslant \frac{e^{-i}\, 2^{-i}}{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant i} (1 + |a(t)|^{\frac{2}{n}})} \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что

$$\int_{t}^{\infty} (1 + |a(\tau)|^{\frac{1}{n}}) \mid \varepsilon(\tau) | d\tau \leqslant \frac{e^{-t}}{1 + |a(t)|^{\frac{2}{n}}}. \tag{32}$$

Введём функции

$$\widetilde{a}(t) = a(t) \left[1 - \frac{|a(t)|^{\frac{1}{n}}}{n} \int_{t}^{\infty} \varepsilon(\tau)\, d\tau \right]^{-n}, \tag{33}$$

$$\widetilde{a}_k(t)=\left|\frac{\widetilde{a}(t)}{a(t)}\right|^{\frac{k}{n}} a_k(t) \quad (k=1,\ 2,\dots,n), \tag{34}$$

$$\widetilde{b}_k(t)=b_k(t)+a_k(t)-\widetilde{a}_k(t) \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n-1),$$

$$\widetilde{b}_n(t)=b_n(t)+a_n(t)+a(t)-\widetilde{a}_n(t)-\widetilde{a}(t). \tag{35}$$

Тогда уравнение (1_1) принимает вид

$$\frac{d^n u}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{a}_k(t)+\widetilde{b}_k(t))\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}}+\widetilde{a}(t)u=0. \tag{36}$$

Из (31) и (33) находим

$$\widetilde{a}'(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{n+1}{n}}\operatorname{sign}a(t)=\sigma(t).$$

Отсюда, в силу (30), имеем

$$\widetilde{a}'(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{n+1}{n}}\in V,\ \lim_{t\to\infty}\widetilde{a}'(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{n+1}{n}}=0. \tag{37}$$

Согласно (25) и (25_1), из (34) следует, что

$$\widetilde{a}_k(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k}{n}}\in V,\quad \lim_{t\to\infty}\widetilde{a}_k(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k}{n}}=0 \quad (k=1,\ 2,\dots n). \tag{38}$$

В силу (32), из (33) находим

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{a}(t)}{a(t)}=1,\ (|\widetilde{a}(t)|^{\frac{k}{n}}-|a(t)|^{\frac{k}{n}})\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k-1}{n}}=$$

$$=O\left(|a(t)|^{\frac{2}{n}}\int_t^{\infty}|\varepsilon(\tau)|\,d\tau\right)=O(e^{-t}) \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{39}$$

Поэтому из (34) получим, что

$$(\widetilde{a}_k(t)-a_k(t))\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k-1}{n}}=a_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k}{n}}(|\widetilde{a}(t)|^{\frac{k}{n}}-$$

$$-|a(t)|^{\frac{k}{n}})\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k-1}{n}}=O(e^{-t}) \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{40}$$

В силу оценок (39) и (40), из (35) находим, что при $t\geqslant t_0$

$$|\widetilde{b}_k(t)|\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k-1}{n}}\leqslant \mathrm{const}\,(|b_k(t)|\,|a(t)|^{-\frac{k-1}{n}}+e^{-t}) \ (k=1,\ 2,\dots,n).$$

Отсюда, в силу (26), следует

$$\widetilde{b}_k(t)\,|\widetilde{a}(t)|^{-\frac{k-1}{n}}\in L \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{41}$$

(37), (38) и (41) показывают, что для уравнения (36) выполнены все условия теоремы 3. Так как, кроме того, $\widetilde{a}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, поэтому, в силу доказанного, уравнение (36) имеет фундаментальную систему решений $\widetilde{u}_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$, такую, что при $t \to \infty$

$$\frac{d^k \widetilde{u}_i(t)}{dt^k} = |\widetilde{a}(t)|^{\frac{2k-n+1}{2n}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \widetilde{\lambda}_i(\tau) |\widetilde{a}(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right)(\lambda_i^k + o(1)) \tag{42}$$

$$(i=1, 2, \dots, n;\ k=0, 1, \dots, n-1),$$

где $\widetilde{\lambda}_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$—корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,|a(t)|^{-\frac{k}{n}} \prod_{t=1}^{n-k}\left(\lambda + \frac{2i-n-1}{2n}\sigma(t)\right) + \frac{a_n(t)+a(t)}{|a(t)|} = 0. \tag{43}$$

Легко можно показать, что

$$\widetilde{\lambda}_i(t) - \lambda_i(t) = O(\varepsilon(t)) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Поэтому, в силу (32) и (39), найдём

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |\widetilde{\lambda}_i(\tau)|\widetilde{a}(\tau)|^{\frac{1}{n}} - \lambda_i(\tau)\,|a(\tau)|^{\frac{1}{n}}|d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{\infty}\{|a(\tau)|^{\frac{1}{n}}|\widetilde{\lambda}_i(\tau) - \lambda_i(\tau)| +$$

$$+ |\widetilde{\lambda}_i(\tau)|\,\big|\,|a(\tau)|^{\frac{1}{n}} - |\widetilde{a}(\tau)|^{\frac{1}{n}}\big|\}\,d\tau \leqslant \text{const} \int\limits_{t_0}^{\infty}(|a(\tau)|^{\frac{1}{n}}|\varepsilon(\tau)| + e^{-\tau})d\tau < \infty$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

Введём функции

$$u_i(t) = \widetilde{u}_i(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\infty}\{\lambda_i(\tau)\,|a(\tau)|^{\frac{1}{n}} - \widetilde{\lambda}_i(\tau)|\widetilde{a}(\tau)|^{\frac{1}{n}}\}\,d\tau\right) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Ясно, что $u_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ опять будет фундаментальной системой решений уравнения (1_1). С другой стороны, в силу (42), легко находим, что $u_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ имеет вид (27), чем справедливость теоремы 3 полностью доказана.

Заметим, что в теореме 3 вместо (25) можно потребовать, чтобы функции $\lambda_i(t)\,|a(t)|^{\frac{1}{n}}$ $(i=1, 2, \dots, n)$ удовлетворяли условию (M).

В силу этого замечания, из доказанной теоремы легко получаются такие следствия:

Следствие 1[1]. Если $n=2$ и удовлетворяются (25) и (26), то для справедливости формул (27) достаточно, чтобы

[1] Это следствие обобщает одну теорему Собола ([17], теорема 4).

$$\lim_{t\to\infty} (a'^2(t)\,|\,a(t)|^{-3} + 4a_1^2(t)\,|a(t)|^{-1} +$$

$$+ 4a_1(t)\,|\,a(t)|'a^{-2}(t) - 16a_2(t)\,|\,a(t)\,|^{-1}) \neq 16\,\mathrm{sign}\,a(t).$$

Следствие 2. Если $a_0 \equiv 1$, $a_k \equiv \mathrm{const}$, $b_k(t) \in L$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0$$

имеет лишь простые корни λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k(t))\,\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}} = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $u_i(t)$ $(i=1, 2,\ldots,n)$, такую, что при $t\to\infty$

$$\frac{d^k u_i(t)}{dt^k} = e^{\lambda_i t}(\lambda_i^k + o(1)) \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Следствие 3. Если $a(t)$—дифференцируемая, нигде не равная нулю на $[t_0, \infty)$ функция и

$$a'(t)\,|\,a(t)|^{-\frac{n+1}{n}} \in V,\ a'(t)\,|\,a(t)|^{-\frac{2n+1}{2n}} \in L^2, \tag{44}$$

$$b_k(t)\,|\,a(t)|^{-\frac{k-1}{n}} \in L \quad (k=1, \ldots, n),$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}} + a(t)u = 0 \tag{1_2}$$

имеет фундаментальную систему решений $u_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, такую, что при $t\to\infty$

$$\frac{d^k u_i(t)}{dt^k} = |\,a(t)\,|^{\frac{2k-n+1}{2n}} \exp\left(\lambda_i \int_{t_0}^{t} |a(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right)(\lambda_i^k + o(1))$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ k=0, 1, \ldots, n-1), \tag{45}$$

где λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$—корни уравнения

$$\lambda^n + \mathrm{sign}\,a(t) = 0.$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что из (44) следует

$$\lim_{t\to\infty} a'(t) \mid a(t)|^{-\frac{n+1}{n}} = 0. \tag{46}$$

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{t\to\infty} a'(t)|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}} \operatorname{sign} a(t) =$

$=-\delta \neq 0$, то получим $|a(t)|^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{\delta}{n} t(1+o(1))$. Отсюда имеем, что $\delta > 0$

и $a(t) = \left(\dfrac{n}{\delta}\right)^n t^{-n}(1+o(1))$. Следовательно, $a'(t) \mid a(t)|^{-\frac{2n+1}{2n}} = -(\sqrt{n\delta} +$

$+ o(1))t^{-\frac{1}{2}}$, что невозможно, так как $a'(t) \mid a(t)|^{-\frac{2n+1}{2n}} \in L^2$. Полученное противоречие показывает, что справедливо (46).

Таким образом, для уравнения (1_2) удовлетворяются все условия теоремы 3. Поэтому оно имеет фундаментальную систему решений $u_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ такую, что при $t\to\infty$

$$\frac{d^k \widetilde{u_i}(t)}{dt^k} = |a(t)|^{\frac{2k-n+1}{2n}} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau) \mid a(t)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right)(\lambda_i^k + o(1))$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ k=0, 1, \ldots, n-1), \tag{47}$$

где $\lambda_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$—корни уравнения

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda + \frac{2i-n-1}{2n} a'(t)|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}} \operatorname{sign} a(t)\right) + \operatorname{sign} a(t) = 0.$$

Принимая во внимание, что коэффициент при λ^{n-1} равен нулю, будем иметь

$$\lambda_i(t) - \lambda_i = O\left(a'^2(t) \mid a(t)|^{-\frac{2n+2}{n}}\right) \in L \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим функции

$$u_i(t) = \widetilde{u_i}(t) \exp\left(\int_{t_0}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_i(\tau) \mid a(\tau)|^{\frac{1}{n}} d\tau\right) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Из (47) ясно, что поведение $u_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ при $t\to\infty$ дается асимптотическими формулами (45) и справедливость следствия доказана.

Условиям (44) можно придать несколько иной вид: так, например, можно считать, что

$$a''(t)|a(t)|^{-\frac{n+1}{n}} \in L, \tag{44_1}$$

либо

$$|a(t)|^{-\frac{1}{2n}}\frac{d^2}{dt^2}|a(t)|^{-\frac{1}{2n}}\in L. \qquad (44_2)$$

Имеет место следующая

Лемма. Для выполнения (44) достаточно, чтобы $a(t)$ была абсолютно непрерывной функцией на $[t_0, \infty)$ и

$$|a(t)|\geqslant\delta>0;\ a'(t)\,|a(t)|^{-\alpha}\in V,\ \text{где}\ 0\leqslant\alpha<\frac{n+1}{n}. \qquad (44_3)$$

Если $a(t)$ — дважды дифференцируемая функция с абсолютно непрерывной первой производной, то условия (44) и (44_1) эквивалентны. Если удовлетворяется (44), то удовлетворяется и (44_2), а если удовлетворяется (44_2), то либо удовлетворяется (44), либо найдётся такое $\delta_1\neq 0$, что при $t\to\infty$ будем иметь

$$a(t)=(\delta_1+o(1))t^{-2n}. \qquad (44_4)$$

Доказательство. Без ограничения общности ниже будем считать, что $a(t)>0$.

Покажем сперва, что из (44_3) следует

$$a'(t)a^{-\frac{2n+1}{2n}}(t)\in L^2. \qquad (48)$$

Так как $a(t)$ абсолютно непрерывна, поэтому имеет место равенство

$$\int_{t_0}^{t} a'^2(\tau)a^{-\frac{2n+1}{n}}(\tau)\,d\tau=-\frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} a'(\tau)a^{-\alpha}(\tau)da^{-\beta}(\tau),\quad \beta=\frac{n+1}{n}-\alpha, \qquad (49)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле Стильтьеса. Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t} a'(\tau)\,a^{-\alpha}(\tau)\,da^{-\beta}(\tau)=a'(\tau)\,a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau)\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t} a^{-\beta}(\tau)d\left(a'(\tau)a^{-\alpha}(\tau)\right).$$

Принимая во внимание это равенство и условие (44_3), из (49) получим, что при $t\geqslant t_0$

$$\int_{t_0}^{t} a'^2(\tau)a^{-\frac{2n+1}{n}}(\tau)d\tau\leqslant \text{const}+\beta^{-1}\delta^{-\beta}\mathop{V}_{t_0}^{\infty}\left(a'(\tau)a^{-\beta}(\tau)\right)<\infty,$$

чем доказывается справедливость (48).

Докажем теперь, что

$$a'(t)a^{-\frac{n+1}{n}}(t)\in V. \qquad (50)$$

Так как $a(t)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяется (44_3), поэтому $a'(t)a^{-\frac{n+1}{n}}(t)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном промежутке $[t_0, t]$.

Для произвольно фиксированного $t > t_0$, подберём числа $t_0 = t_{m0} < t_{m1} < \dots < t_{mm} = t \; (m=1, 2, \dots)$ таким образом, чтобы

$$\varepsilon_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} (t_{mi} - t_{mi-1}) \to 0 \text{ при } m \to \infty \text{ и } \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left| a'(t_{mi})\, a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi}) - \right.$$

$$\left. - a'(t_{mi-1})\, a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi-1}) \right| = \bigvee_{t_0}^{t} \left(a'(\tau)\, a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau) \right). \tag{51}$$

С помощью формулы конечных приращений найдем, что

$$\sum_{i=1}^{m} \left| a'(t_{mi})\, a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi}) - a'(t_{mi-1}) a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi-1}) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} a^{-\beta}(t_{mi}) \left| a'(t_{mi}) a^{-\alpha}(t_{mi}) - \right.$$

$$\left. - a'(t_{mi-1}) a^{-\alpha}(t_{mi-1}) \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| a'(t_{mi-1}) \right| a^{-\alpha}(t_{mi-1}) \left| a^{-\beta}(t_{mi}) - a^{-\beta}(t_{mi-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-\beta} \bigvee_{t_0}^{t} \left(a'(\tau) a^{-\alpha}(\tau) \right) + \beta \sum_{i=1}^{m} \left| a'(t_{mi-1})\, a'(\xi_{mi}) \right| a^{-\alpha}(t_{mi-1}) a^{-(1+\beta)}(\xi_{mi})\, \Delta t_{mi},$$

$$\text{где } t_{mi-1} \leqslant \xi_{mi} \leqslant t_{mi} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Полагая, что $N(t) = \max\limits_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} |a'(\tau)|\, a(\tau)^{-(1+\beta)}$ из последнего неравенства легко находим

$$\sum_{i=1}^{m} \left| a'(t_{mi}) a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi}) - a'(t_{mi-1})\, a^{-\frac{n+1}{n}}(t_{mi-1}) \right| \leqslant \delta^{-\beta} \bigvee_{t_0}^{t} \left(a'(\tau)\, a^{-\alpha}(\tau) \right) +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{m} a'^2(\xi_{mi})\, a^{-\frac{2n+1}{n}}(\xi_{mi}) \Delta t_{mi} + \beta \varepsilon_m N(t) \sum_{i=1}^{m} \left| a'(\xi_{mi})\, a^{-\alpha}(\xi_{mi}) - \right.$$

$$\left. - a'(t_{mi-1}) a^{-\alpha}(t_{mi-1}) \right| \leqslant \left(\delta^{-\beta} + \beta \varepsilon_m N(t) \right) \bigvee_{t_0}^{t} \left(a'(\tau)\, a^{-\alpha}(\tau) \right) +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{m} a'^2(\xi_{mi}) a^{-\frac{2n+1}{n}}(\xi_{mi})\, \Delta t_{mi}.$$

Перейдя к пределу при $m \to \infty$, из последнего неравенства, в силу (51), находим

$$\overset{t}{\underset{t_0}{\mathrm{V}}} (a'(\tau) a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau)) \leqslant \delta^{-\beta} \overset{t}{\underset{t_0}{\mathrm{V}}} (a'(\tau) a^{-\alpha}(\tau)) + \beta \int_{t_0}^{t} a'^2(\tau) a^{-\frac{2n+1}{n}}(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда, в силу (44_3) и (48), следует справедливость условия (50).

Итак, мы показали, что условие (44_3) достаточно для выполнения (44).

Перейдём к доказательству эквивалентности условий (44) и (44_1) при предположении, что $a'(t)$ абсолютно непрерывна.

Из тождества

$$\frac{d}{dt}(a'(t) a^{-\frac{n+1}{n}}(t)) = a''(t) a^{-\frac{n+1}{n}}(t) - \frac{n+1}{n} a'^2(t) a^{-\frac{2n+1}{n}}(t) \tag{52}$$

сразу следует, что если выполняется (44), то выполняется и (44_1).

Пусть теперь выполняется (44_1). Если соблюдается (48), то из (52) следует справедливость (44). Допустим, что $a'(t) a^{-\frac{2n+1}{n}} \overline{\in} L^2$. Тогда из (52) находим

$$a'(t) a^{-\frac{n+1}{n}}(t) = -a'(t_0) a^{-\frac{n+1}{n}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} a''(\tau) a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{n+1}{n} \int_{t_0}^{t} a'^2(\tau) a^{-\frac{2n+1}{n}}(\tau)\, d\tau \to -\infty \text{ при } t \to \infty. \tag{53}$$

Из (53) ясно, что $a(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому, в силу (44_1), находим

$$\int_{t_0}^{\infty} |a''(\tau)|\, a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau)\, d\tau \geqslant a^{-\frac{n+1}{n}}(t_0) \int_{t_0}^{\infty} |da'(\tau)|.$$

Следовательно, $a'(t) \in V$, и, так как $a(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому

$$\lim_{t \to \infty} a'(t) = 0. \tag{54}$$

В силу (44_1) и (54), находим

$$|a'(t)| = \left| \int_{t}^{\infty} a''(\tau)\, d\tau \right| \leqslant a^{\frac{n+1}{n}}(t) \int_{t}^{\infty} |a''(\tau)|\, a^{-\frac{n+1}{n}}(\tau)\, d\tau,$$

т. е. $a'(t) a^{-\frac{n+1}{n}}(t) = o(1)$, что противоречит условию (53).

Полученное противоречие доказывает, что соблюдается условие (48), которое вместе с условием (44_1), в силу (52), гарантирует выполнение условия (44).

Таким образом, эквивалентность условий (44) и (44_1) доказана.

Рассмотрим равенство

$$\frac{d}{dt}\left(a'(t)\,a^{-\frac{n+1}{n}}(t)\right)=-2na^{-\frac{1}{2n}}(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\,a^{-\frac{1}{2n}}(t)-\frac{1}{2n}\,a'^2(t)a^{-\frac{2n+1}{n}}(t). \tag{55}$$

Отсюда ясно, что если выполняется (44), то выполняется и (44_2). Если соблюдается (48) и (44_2), то из (55) легко следует справедливость (44). Допустим теперь, что соблюдается (44_2), но не соблюдается (48).

Тогда из (55) находим

$$a'(t)a^{-\frac{n+1}{n}}(t)\to-\infty, \tag{56}$$

т. е. $a(t)$ монотонно стремится к нулю при $t\to\infty$. Поэтому, в силу (44_2), имеем

$$\int_{t_0}^{\infty}\left|\,d\left(a'(\tau)a^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)}(\tau)\right)\right|<\int_{t_0}^{\infty}a^{-\frac{1}{2n}}(\tau)\left|\,d\left(a'(\tau)a^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)}(\tau)\right)\right|<\infty.$$

Отсюда следует, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty}\left(a'(t)\,a^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)}(t)\right)=-\delta_2. \tag{57}$$

Покажем, что $\delta_2\neq 0$. Действительно, в противном случае будем иметь

$$\left|\,a'(t)\,a^{-\frac{n+1}{n}}(t)\,\right|=\left|\,a^{-\frac{1}{2n}}(t)\int_t^{\infty}d\left(a'(\tau)\,a^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)}(\tau)\right)\right|<$$

$$<\int_t^{\infty}a^{-\frac{1}{2n}}(\tau)\left|\,d\left(a'(\tau)a^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)}(\tau)\right)\right|=o(1),$$

что противоречит условию (56).

Так как $\delta_2\neq 0$, поэтому из (57) находим, что $a(t)$ имеет вид (44_4), где $\delta_1=\left(\dfrac{2n}{\delta_2}\right)^{2n}$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы ясно, что следствие 3 теоремы 3 останется справедливым, если в нём условие (44) заменим либо условием (44_1), либо условием (44_3). Следствие справедливо также при соблюдении условия (44_2), если $a(t)$ не имеет вида (44_4); а если $a(t)$ имеет вид (44_4), то поведение фундаментальной системы решений уравнения (1_2) даётся формулами Соболя (24).

Справедливость асимптотических формул (45) для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}+a(t)\,u=0, \tag{1_3}$$

где $a(t)>0$, впервые была доказана М. Мателлем ([1], стр. 60) при условии (44). В заметках [4] и [5] А. Винтнер вместо условия (44) предлагает условие—$a^{-\frac{1}{4}}(t)\,\frac{d^2}{dt^2}a^{-\frac{1}{4}}(t)\in L$, $\int\limits_{t_0}^{\infty}\sqrt{a(\tau)}\,d\tau=\infty$ [1].

Л. А. Гусаров [2]—[3] и Р. Беллман [11] доказали ограниченность решений уравнения (1_3) при предположении (44_3), когда $\alpha=0$.

У. Барбути [7] и В. А. Якубович [8] дали доказательство того же факта при условии (44_1) [2].

М. Зламал [9] и В. Долежал [10] установили асимптотические формулы (45) для уравнения (1_3), когда $a(t)\geqslant\delta>0$, а функция $a^{-\beta}(t)$, где $0<\beta<\frac{1}{2}$ непрерывна и выпукла. Так как каждая выпуклая функция абсолютно непрерывна, а её производная не убывает, поэтому из условия Зламала-Долежала следует справедливость (44_3) при $0<\alpha=1+\beta<\frac{3}{2}$.

Таким образом, как это ясно из доказанной выше леммы, все указанные результаты работ [2]—[11] следуют из упомянутого выше результата Мателля.

Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

(Поступило в редакцию 26. XII 62).

---

[1] В заметке [6] А. Винтнер установил асимптотические формулы без этого второго ограничения. В силу доказанной нами леммы это означает, что из рассмотрения не исключается случай, когда $a(t)=(\delta+o(1))t^{-4}$. Но тогда поведение решений уравнения (1_3) даётся хорошо известными формулами Хилла [14].

[2] Заметим, что в теоремах Барбути и Якубовича, кроме (44_1), фигурируют также лишние условия: $a(t)\geqslant\delta>0$, $a'(t)a^{-\frac{5}{4}}(t)\in L^2$.

ი. კიღურაძე

წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნების ასიმპტოტური წარმოდგენის შესახებ

რეზიუმე

დადგენილია ასიმპტოტური ფორმულები (1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნებისათვის.

დამტკიცებულია თეორემები 1, 2 და 3, რომლებიც წარმოადგენენ ზოგიერთი ადრე ცნობილი შედეგის განზოგადებას.

ნაჩვენებია, რომ თეორემები მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნების ასიმპტოტური თვისებების შესახებ, რომლებიც მოყვანილია [2]—[11] შრომებში, გამომდინარეობენ მ. მატელის ერთი დებულებიდან (იხ. [1], გვ. 60).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Matell, Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen, Uppsala (1924), Appelbergs Boktryckeri Aktiebolag.
2. Л. А. Гусаров, ДАН СССР, 1949, 68, № 2, стр. 217—220.
3. Л. А. Гусаров. ДАН СССР, 1950, 71, № 1, стр. 9—12.
4. A. Wintner, Phys. Rev., 1947, 72, pp. 516—517.
5. A. Wintner, Bul. Inst. politechn. Jasi, 1957, 3, № 1—2, pp. 25—29.
6. A. Wintner, Quart. Appl. Math., 1958, 16, № 1, pp. 82—86.
7. U. Barbuti, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1954, 8, № 1—2, pp, 81—91.
8. В. А. Якубович, Зап. Ленинград. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, стр. 198—204.
9. M. Zlamal, Чех. Мат. журнал, 1956, 6 (81), стр. 75—91.
10. V. Doležal, časopis pro pestovani matematiky, 1958, 4 (83) стр. 451—463.
11. R. Bellman, Duke Math. J., 1955, 22, pp. 511—513.
12. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Москва, 1954, стр. 64—70.
13. Э. А Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, 1958, стр. 103—110.
14. E. Hille, Trans. Amer. Math. soc., 1948, 64, № 2, pp. 234—252.
15. J. Mažik, M. Rab. Чех мат. журнал, 1960, 10 (85), № 4, стр. 501—522.
16. И. М. Соболь, ДАН СССР, 1948, 61 № 2, стр. 219—222.
17. И. М. Соболь, Матем. сборник, 1951, т. 28 (70), № 3, стр. 707—714.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

მ. ჭიჭინაძე

სიმრავლის ცნების ადგილი მათემატიკურ ცნებათა სისტემაში

მათემატიკის განვითარების ისტორიულ-ლოგიკური პროცესის ანალიზი გვარწმუნებს იმაში, რომ სიმრავლის ცნება მათემატიკის ყველაზე ზოგადი და ფუნდამენტალური ცნებაა. თანამედროვე მათემატიკის ძირითად მიმართულებათა სინთეზმა საბოლოოდ განსაზღვრა მისი აგებულების სიმრავლურ-თეორიული კონცეფცია; ამიტომ მათემატიკის დაფუძნების მდგომარეობაზე არსებითად მსჯელობენ იმის მიხედვით, თუ რა ზომითაა მოგვარებული სიმრავლეთა თეორიის ლოგიკური საკითხები. უსასრულო სიმრავლეთა თეორიის არსებითი სიძნელეები, პირველ რიგში პარადოქსთა პრობლემა, ღრმა ლოგიკური ბუნების აღმოჩნდნენ; მათ მიმართ სხვადასხვა მიდგომამ XX საუკუნეში წარმოშვა მათემატიკოსთა ძირითადი ფილოსოფიური სკოლები: ფორმალიზმის, ინტუიციონიზმის, ლოგიციზმის და სხვა. ხსენებულ სიძნელეთა გადაჭრის მიმართულებით გაშლილმა უდიდესი კვლევა-ძიების შედეგებმა საბოლოოდ გამოავლინეს ფორმალისტური სკოლის ტენდენციის — მთელი მათემატიკის სიძნელეთა ფორმალური გზით საბოლოოდ მოგვარების — უსაფუძვლობა. გოდელის, ჩერჩის, ნოვიკოვის და სხვათა გამოკვლევებმა გვიჩვენეს, რომ სიმრავლეთა თეორიის პრობლემები არ შეიძლება ბოლომდე მოგვარებულ იქნენ სიმრავლეთა თეორიის მხოლოდ აქსიომატურ-დედუქციური თეორიის სახით ჩამოყალიბების საშუალებით, რომ შეუძლებელია უკვე ნატურალურ რიცხვთა თეორიის სრული ფორმალიზაცია. აქ საკმარისია დავასახელოთ გოდელის ცნობილი თეორემა არითმეტიკის პრინციპული არასისრულის შესახებ და მისი თეორემა ფორმალურ სისტემათა თავსებადობის შესახებ, რომელიც პირდაპირ მიგვითითებს იმაზე, რომ იმედი არ უნდა ვიქონიოთ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატურ სისტემათა თავსებადობის საკითხის ფორმალური გზით ბოლომდე გადაჭრისა. ამ მხრივ დიდი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე ჩერჩის, ნოვიკოვის და სხვათა მიერ დამტკიცებულ თეორემებს ე. წ. არაამოხსნად სისტემათა არსებობის შესახებ.

აღნიშნული წმინდა მათემატიკური შედეგები საკმაოდ ზოგადი ხასიათისანი არიან და მათი საერთო შემეცნებითი მნიშვნელობის გარკვევა გვარწმუნებს, რომ სიმრავლის ცნების ბუნების შესასწავლად ფართო სარბიელი რჩება აგრეთვე ზოგად-ლოგიკური და ფილოსოფიური კვლევისათვის. ამ

მიმართულებით ჩატარებულმა მუშაობამ უკვე მოგვცა მნიშვნელოვანი კონკრეტული შედეგები, კერძოდ, ნაჩვენები იყო, რომ შეუძლებელია სიმრავლის ცნების ლოგიკური დეფინიცია [3].

ქვემოთ შევეცდებით გამოვთქვათ ზოგიერთი მოსაზრებანი სიმრავლის ცნების ხასიათის შესახებ.

როგორც აღვნიშნეთ, სიმრავლის ცნების ლოგიკური დეფინიციის სახით მოცემა შეუძლებელია. საჭიროა ამ გარემოების თავიდანვე სწორი შეფასება. ის გამოთქვამს არა ლოგიკის პრინციპულ უძლურებას — გავარკვიოთ სიმრავლის ცნების ბუნება,— არამედ, თვით ლოგიკისადმი სწორი მიდგომის პირობებში, იძლევა სიმრავლის ცნების სწორედ გარკვეულ ლოგიკურ დახასიათებას. სიმრავლის ცნების დეფინიციის სახით მოცემის შეუძლებლობა აღნიშნავს არა ამ ცნების ალოგიკურობას (ის ხომ ცნებას წარმოგვიდგენს), არამედ გამოხატავს სრულიად გარკვეულ მდგომარეობას სიმრავლის ცნების ლოგიკური ბუნების შესახებ, რომელიც გარკვეულია, მართალია, ხანგრძლივი, მაგრამ სწორი ლოგიკური ანალიზის შედეგად. ლ. გოკიელმა თავის შრომებში გვიჩვენა, რომ დეფინიციის სახით სიმრავლის ცნების, ნატურალური რიცხვის ცნების და სხვ. განსაზღვრის შეუძლებლობაში ამ ცნებათა ალოგიკურობის დანახვა ნიშნავს თავიდანვე არასწორ ნიადაგზე იდგე თვით ლოგიკის, კერძოდ ცნების ბუნების გაგების საკითხში, სახელდობრ, იდგე ლოგიკის აქსიომატურ-რედუქციული გაგების საფუძველზე, რომელსაც თავის მხრივ მივყევართ ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობამდე უსასრულობაში ლოგიკური რეგრესის სახით; ნატურალური რიცხვისა და სიმრავლის ცნება ზოგად-ლოგიკური ხასიათისაა [3]. ამიტომ ისინი აღარ მოიცემიან სხვა უფრო ზოგადი და მარტივი ცნებების საშუალებით აგებულ დეფინიციათა სახით. მათ, ამ აზრით, შეიძლება ვუწოდოთ აგრეთვე ელემენტარული ცნება.

მეორე მხრივ, დაკმაყოფილება იმით, რომ სიმრავლის ცნების განსაზღვრის სახით მოცემა შეუძლებელია და რომ ეს უკვე მის ლოგიკურ ხასიათს გამოთქვამს, არ იქნებოდა სწორი. ეს არის სიმრავლის ცნების გარკვეული მხრივ დახასიათება, მაგრამ ისვე გვიკარნახებს, რომ გაშლილ იქნეს ამ ცნების ლოგიკური ბუნება მისი სხვადასხვა ასპექტში ანალიზის საფუძველზე.

ამ მიმართულებით ჩვენ გვსურს გამოვთქვათ ზოგიერთი მოსაზრება.

ყოველგვარი სიმრავლე არის საგანთა სიმრავლე, ან აზრობრივ ობიექტთა სიმრავლე. ამიტომ, ამა თუ იმ სიმრავლის ცნება აუცილებლად სხვა ცნებასთან ან ცნებებთან არის დაკავშირებული, მათი საშუალებით არის წარმოდგენილი. ასე მაგალითად, ჩვენ შეიძლება საქმე გვქონდეს ადამიანთა სიმრავლესთან, სწორკუთხა სამკუთხედთა სიმრავლესთან, ცხენის, მთვარის და მაგიდისაგან შემდგარ სიმრავლესთან, მათემატიკურ ცნებათა სიმრავლესთან და სხვ. აქ ისმის მთავარი და ბუნებრივი კითხვა: რა ზომით მონაწილეობს აღებულ სიმრავლის ცნებაში სათანადო ცნების ან ცნებათა შინაარსი, აზრი, სათანადო საგანთა არსებით ნიშნებზე? ეს ძნელი კითხვაა, მაგრამ ეს თვითვე არ არის პასუხი ამავე კითხვაზე. ხსენებული კითხვის წინაშე ჩვენ თავიდანვე თვალში გვეცემა ის გარემოება, რომ თითქოს სიმრავლის ცნებას მხოლოდ მათე-

მატიკა შეისწავლის; საკმარისია ამისათვის მხედველობაში მივიღოთ თუნდაც ის გარემოება, რომ მხოლოდ მათემატიკაში გვხვდება სპეციალური დისციპლინა: სიმრავლეთა თეორია. ასეთ პირობებში ბუნებრივად აღიძრება სურვილი გავარკვიოთ — ხომ არ წარმოადგენს სიმრავლე მხოლოდ და მხოლოდ მათემატიკის საგანს და, სათანადოდ, სიმრავლის ცნება მხოლოდ და მხოლოდ მათემატიკურ ცნებას? ამ კითხვაზე ჩვენ უარყოფითად უნდა ვუპასუხოთ, თუ გვსურს გავითვალისწინოთ საერთოდ ცნების ბუნება და თუ არ გვინდა, რომ მივიღოთ სრულიად ხელოვნური და ყოველგვარ გარკვეულობას მოკლებული სქემები. სამწუხაროდ, იმის გამო, რომ, ერთი მხრივ, მხოლოდ მათემატიკაში ვხვდებით ასე ხშირად და სპეციალურად სიმრავლის ცნებას, ხოლო მეორე მხრივ, მათემატიკა შეისწავლის საგანთა გარეგნულ განსაზღვრულობას, იქმნება არასწორი წარმოდგენა, რომ სიმრავლის ცნება არის წმინდა მათემატიკური, რაოდენობრივი ცნება და, ამიტომ კონკრეტულ სიმრავლეთა შემადგენლობაში საგანთა მონაწილეობას უნდა მიეცეს სპეციალური აზრი. ასეთ პირობებში გამოდის, რომ როცა ჩვენ ვლაპარაკობთ, მაგალითად, მოცემულ ოთახში მყოფ საგანთა სიმრავლეზე და კონკრეტულად ჩამოვთვლით ამ საგნებს, მივიჩნევთ რა თავიდანვე აღებულ სიმრავლეს წმინდა მათემატიკურ ობიექტად, თვით სათანადო საგნები შესაბამისად უნდა წარმოვიდგინოთ რაღაც სქემატურად, როგორც ისეთნი, რომელთაც საგნობრივი გარკვეულობა და კონკრეტულობა აქვთ, მაგრამ თანაც ასეთნი არ არიან და მხოლოდ თვით ამ საგანთა სიმბოლოებს ან აჩრდილებს წარმოადგენენ. ამ შემთხვევაში საჭირო იქნებოდა სიმრავლეში მონაწილე საგნები თავიდანვე წარმოგვედგინა როგორც გარეგანი განსაზღვრულობანი; ვინაიდან ეს უკანასკნელნიც გარკვეული ობიექტები არიან, მათ იმავე საბუთით კვლავ დასჭირდებოდათ გარკვეული მათემატიკური დამუშავება და ა. შ. ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა შეიქმნებოდა სწორედ იმასთან დაკავშირებით, რომ ამა თუ იმ სიმრავლეს თავიდანვე მივააზრებთ, ასე ვთქვათ, მათემატიკურობას, წმინდა რაოდენობრიობას. ამ შემთხვევაში ჩვენ იძულებული ვართ სიმრავლეში შემავალი საგნები თავიდანვე „დავცალოთ“ შინაარსიდან და მათსავე აღმნიშვნელ სიმბოლოებად გადავაქციოთ. ლოგიკურად მანკიერი სიტუაცია კიდევ უფრო ფორსირებულ სახეს მიიღებს, თუ საქმე გვექნება სიმრავლის მათემატიკურ მაგალითებთან, ვთქვათ, ამა თუ იმ რიცხვთა სიმრავლესთან. სიმრავლის ცნებისადმი წმინდა რაოდენობრივი მიდგომა გვაიძულებდა უარი გვეთქვა სათანადო რიცხვთა სიმრავლის ელემენტთა თვისობრივ მხარეებზე.

სიმრავლის ცნება ფაქტიურად გვხვდება ყველა მეცნიერებაში: საგანთა ერთობლიობის, საგანთა კლასების, სისტემების, კოლექციების და სხვა სახით. იმის გამო, რომ სიმრავლის ცნება ფართო მათემატიკური კვლევის სარბიელია, თავიდანვე მას თავზე არ უნდა მოვახვიოთ მათემატიკური საბურველი. როდესაც, მაგალითად, საქმე გვაქვს ადამიანთა სიმრავლესთან, აქ ადამიანის ცნების ყველა ძირითადი ნიშნები უნდა გავითვალისწინოთ მთელი მოცულობით. ამა თუ იმ საგანთა სიმრავლე გარკვეული რეალური ობიექტია და მისი ამსახველი ცნება, თუ ის მართლაც ამსახველია, უნდა შეიცავდეს თავის თავში

თვით სიმრავლის ელემენტთა არსებით ნიშნებს, მათ თვისობრივ განსაზღვრულობას. ადამიანთა სიმრავლის ცნებაში უკვე გამოყენებულია ადამიანის ცნება და გვიან არის მისი გადააზრება და ადამიანთა თავიდანვე ერთგვარი მათემატიზირებული სახით წარმოდგენა, რადგან ამჯერად მათზე ლაპარაკია სიმრავლის ასპექტში. ამა თუ იმ საგანთა სიმრავლე შეიძლება ვახსენოთ სრულიად ნებისმიერ ვითარებაში და ეს სიმრავლე თავიდანვე არაა იმის მოლოდინში, თუ რომელ ასპექტში შეისწავლიან მას, ფიზიკურ, ქიმიურ, თუ მათემატიკურ ასპექტში და ის ვერ გარდაიქმნება, ვერ მიიღებს სპეციალიზირებულ სახეს იმის გამო, რომ ერთ შემთხვევაში შეიძლება საკითხი იდგეს მის ელემენტებს შორის ფიზიკურ კავშირთა გარკვევაზე, ხოლო მეორე შემთხვევაში— რაოდენობრივ მიმართებათა შესწავლის შესახებ.

სიმრავლის ცნების სპეციალიზირება გამოხატავს სიმრავლის ზოგადი ცნების ფენებად დაყოფის თვალსაზრისს. ის გარემოება, რომ, მაგალითად, ადამიანთა სიმრავლეზე შეუძლიათ იმსჯელონ როგორც ბიოლოგიაში, ისე პოლიტეკონომიაში, ასევე მათემატიკაში და სხვა, სრულიადაც არ გვაძლევს საფუძველს წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ერთ შემთხვევაში ადამიანთა სიმრავლის ბიოლოგიურ, მეორე შემთხვევაში — პოლიტეკონომიურ ცნებასთან და სხვ. ნამდვილად, სიმრავლის ცნება არ იყოფა ფენებად; მათემატიკას, ბიოლოგიას და სხვა მეცნიერებებს არა აქვთ სიმრავლის ცნების საკუთარი მათემატიკური, ბიოლოგიური და სხვა შესატყვისები, სიმრავლის ზოგადი ცნების საკუთარი შემცველები. ჩვენ, სწორედ, ვითვალისწინებთ რა საგანთა ამა თუ იმ სიმრავლის, როგორც შინაგანად მთლიანი, რეალური ობიექტის ერთდროულად სხვადასხვა თვისობრივ ასპექტში შესწავლის შესაძლებლობას, სათანადო აბსტრაქციის საფუძველზე, ამა თუ იმ მეცნიერების შიგნით შევისწავლით საგანთა ამა თუ იმ სიმრავლის ელემენტებს შორის სათანადო სპეციფიური სახის დამოკიდებულებებს. მაგალითად, ატომთა რაიმე სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ფიზიკური, ასევე ქიმიური, რაოდენობრივი და სხვა დამოკიდებულებანი. საგანთა ერთი და იგივე სიმრავლე შეისწავლება სულ სხვადასხვა მხრივ. ყოველგვარი შესწავლა არის კონკრეტული და ამის შესაბამისად ჩვენ საქმე გვაქვს სხვადასხვა სახის აბსტრაქციასთან. მათემატიკა, ისევე როგორც ყოველი სხვა მეცნიერება, შეისწავლის სინამდვილის ერთ მხარეს, სახელდობრ, რაოდენობრივ მხარეს და ამასთან დაკავშირებით ახდენს გარკვეული სახის აბსტრაქციას, მაგრამ, სწორი არ იქნებოდა გვეფიქრა, რომ ამისავე გამო თვით ესა თუ ის კონკრეტული სიმრავლე თავიდანვე რაღაც აბსტრაჰირებული სახით წარმოდგება მათემატიკის წინაშე. ასეთ პირობებში თვით მათემატიკას დაეკარგებოდა საკუთარი ობიექტი; გარდა ამისა, თვით ამ აბსტრაჰირებულ სიმრავლეს იმავე ლოგიკური აუცილებლობით ახალი აბსტრაჰირება დასჭირდებოდა და ა. შ., ლოგიკურად მანკიერი მდგომარეობა შეგვექნებოდა გამოხატული ლოგიკური რეგრესით უსასრულობაში.

ამრიგად, სიმრავლის ცნება არაა წმინდა რაოდენობრივი ცნება; ის ისევე ზოგადია, როგორც ცნების ცნება, ვინაიდან ყოველი კონკრეტული

სიმრავლე წარმოდგენილია ერთი ან რამდენიმე ცნებით, რომელთა შინაარსი მთელი ზომითაა გათვალისწინებული. ყოველი სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს თვისობრივ და რაოდენობრივ კავშირთა უსასრულო სიმრავლე; საკითხი დგება მხოლოდ იმის შესახებ, თუ ამა თუ იმ შემთხვევაში სიმრავლის ელემენტებს შორის რა სპეციფიური სახის კავშირებს განვიხილავთ ან სიმრავლეს, როგორც მთლიან ობიექტს, რა აზრით შევისწავლით. ამისდა მიხედვით ჩვენ საქმე გვექნება აღებული სიმრავლის ამა თუ იმ მეცნიერულ ასპექტში შესწავლასთან.

მიუხედავად ზემოთქმულისა, მათემატიკა მაინც განსაკუთრებულ მდგომარეობაშია სხვა სპეციალურ მეცნიერებებთან შედარებით სიმრავლეთა შესწავლის მხრივ. უპირველესად ყოვლისა, უნდა შევნიშნოთ, რომ მათემატიკა არ შეისწავლის რეალურ საგანთა კონკრეტულ სიმრავლეებს, უფრო სწორად, მათემატიკური თეორიის **უშუალო** ობიექტებს არ წარმოადგენენ კონკრეტული საგნობრივი სიმრავლეები; მათემატიკა მათ შეისწავლის იმდენად, რამდენადაც შეისწავლის სიმრავლეებს საზოგადოდ, ვინაიდან მას აინტერესებს რაოდენობა საერთოდ. მათემატიკა შეისწავლის საგანთა გარეგნულ, მაგრამ აუცილებელ განსაზღვრულობას და სწორედ ეს განაპირობებს მის დამოკიდებულებას სიმრავლეთა მიმართ. რაოდენობა, განხილული აბსტრაქტულად, საგანთა და მოვლენათა სწორედ ისეთ მიმართებებს გამოჰყოფს, რომელნიც თავისივე გარეგანი ხასიათის გამო წარმოგვიდგენენ უზოგადეს დამოკიდებულებებს. ამიტომ, მათემატიკა წარმოგვიდგენს სიმრავლეთა აბსტრაქტულ, ზოგად თეორიას, ის შეისწავლის სიმრავლეებს საზოგადოდ. ახდენს რა აბსტრაქციას სიმრავლეთა კონკრეტული საგნობრივი ხასიათისაგან, ის გამოყოფს სიმრავლეთა ელემენტებს შორის ზოგად მიმართებებს. მათემატიკას აინტერესებს საგანთა შორის საერთო რაოდენობრივი მიმართებანი, ე. ი. ისეთნი, რომელნიც გარკვეულად განურჩეველნი არიან საგანთა კონკრეტულ, ფიზიკურ, ქიმიურ და სხვა განსაზღვრულობებისადმი. ამიტომ „წმინდა“ მათემატიკა, კონკრეტული უშუალობით კი არ განიხილავს ცალკე აღებულ ობიექტურად არსებულ სიმრავლეებს, არამედ, გამოჰყოფს მათგან საერთო, ზოგად აბსტრაქტულ მიმართებებს. რა თქმა უნდა, აქ საქმე გვაქვს გარკვეულ რელატიურ მომენტთან იმ მხრივ, რომ მათემატიკა თვით თ ე ო რ ი ი ს შ ი გ ნ ი თ სიმრავლეთა მათემატიკურ სახეებს, როგორიცაა რიცხვითი სისტემები და სხვა, კვლავ შეისწავლის მათი შინაარსობლივი კონკრეტული სიმდიდრის მთლიანი გათვალისწინებით. ამასთან დაკავშირებით შეიძლება გვკითხონ: მაშინ როგორია წყარო სიმრავლეთა აბსტრაქტული თეორიისა? ამაზე ვუპასუხებთ, რომ სინამდვილის ისტორიულ-ლოგიკური ასახვის პროცესში მათემატიკა თავის ცნებებს ქმნის კონკრეტულ საგნობრივ სიმრავლეთა შესწავლის შედეგად მიღებული მასალის განზოგადების ბაზაზე, მაგრამ ჩვენ უნდა განვასხვავოთ მათემატიკის შემეცნებით-თეორიული მნიშვნელობა მათემატიკის საკუთარ ცნებათა სპეციფიური დახასიათებისაგან, თვით მათემატიკური თეორიის ხასიათისაგან. მათემატიკა იძლევა სიმრავლეთა აბსტრაქტულ თეორიას, ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა ჩვენ ვსწავლობთ რაოდენობის მხრივ რომელიმე სიმ-

რავლეს, ფაქტიურად მივატოვებთ საკუთრივ „წმინდა“ მათემატიკის სფეროდან და საქმე გვაქვს უკვე მათემატიკის გამოყენებასთან, ანუ გამოყენებით მათემატიკასთან. მათემატიკა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ნებისმიერი ბუნების საგანთა სიმრავლის, თვით აზრობრივ ობიექტთა სიმრავლის რაოდენობრივი მხარის შესასწავლადაც და ასეთი მობრუნება მათემატიკისა სინამდვილისადმი ამტკიცებს მის სწორედ, ზოგად ხასიათს. მათემატიკას აინტერესებს საკუთრივი მნიშვნელობით საგანთა ცალკეულად და მრავლად არსებობა, დისკრეტულად ყოფადობა და უწყვეტობა, ურთიერთგანლაგების ზოგადი მიმართებანი, ურთიერთ-ცალსახა თანადობა და სხვა—ისეთი მომენტები და მიმართებანი, რომელნიც არსებობენ ნებისმიერი ბუნების საგანთა შორის. მაგრამ მათემატიკის აბსტრაქტულობა რელატურია, რაც განსაკუთრებით კარგად ჩანს სხვადასხვა გეომეტრიების, სხვადასხვა აქსიომატური სისტემებით განსაზღვრულ გეომეტრიების მაგალითზე, რომელნიც სივრცის კონკრეტულ ფიზიკური თავისებურებებით და სივრცის მასშტაბებით არიან გაპირობებული [1]. აგრეთვე საგანთა ცალკე და მრავლად არსებობა, გაპირობებული მათი განსაზღვრულობით, რელატურია. ეს უკანასკნელი, უნდა ითქვას, ზოგადი და ამასთან მეტად უხეში აბსტრაქციაა.

გასაგები უნდა იყოს, რომ სიმრავლეთა აბსტრაქტული მათემატიკური თეორიის შექმნა თვით წარმოადგენს შედეგს შემეცნების ხანგრძლივ ისტორიულ-ლოგიკურ პროცესში სწორედ ცალკეულ სიმრავლეთა რაოდენობრივ მხარის შესწავლისა. ესევე ხდის შესაძლებელს მათემატიკა გამოყენებულ იქნეს კონკრეტულ სიმრავლეთა მიმართ. გამოყენების შემთხვევაში ჩვენ გამოვდივართ „წმინდა“ მათემატიკის სფეროდან, მაგრამ ისმის კითხვა: ყოველგვარი სახით არის მზად სიმრავლე მათემატიკურად დადებით, რეზულტატური შესწავლისათვის? ამ კითხვაზე უარყოფითად უნდა ვუპასუხოთ. მაგალითად, ადამიანთა სიმრავლის რაოდენობრივი შესწავლისათვის საჭირო იქნება ამ სიმრავლის გარკვეული კონკრეტიზაცია, ე. ი. ისეთი პირობების აღება, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მოცემული სიმრავლე შევისწავლოთ მრავლობის მხრივ, რაოდენობის მხრივ. ამისათვის საჭიროა ისეთი მომენტების კონკრეტიზება, როგორიც არის დროის, ადგილის და სხვა, რომელნიც განაპირობებენ ცნების მოცულობის განსაზღვრულობას. დედამიწის მოსახლეობის ზუსტი რაოდენობრივი შესწავლის ამოცანას აზრი ექნებოდა დროის მოცემულ ინტერვალში, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ინტერვალში არც ერთი ადამიანი არ დაბადებულა და არც ერთი არ გარდაცვლილა, ან თუ ასეთი ცვლილება მოხდა—ის კონკრეტულად არის ცნობილი. სიმრავლის რაოდენობრივად შესწავლისათვის საჭიროა მისი ისეთი მომენტების კონკრეტიზაცია, რომელნიც ცალსახად განსაზღვრავენ სათანადო ცნების მოცულობას. ასეთ პირობებში ობიექტურად არსებული სიმრავლე გახდება ზუსტი რაოდენობრივი განხილვის ობიექტი, მაგრამ ვიმეორებთ, რომ ეს იქნება „წმინდა“ მათემატიკის სფეროდან გამოსვლა. რა თქმა უნდა, ცნების მოცულობის ასეთი კონკრეტიზაცია გულისხმობს არა აუცილებლად ამ მოცულობის ცოდნას, არამედ, მის ცალსახად განსაზღვრულობას.

ჩვენ დავრწმუნდით, რომ სიმრავლის ცნება არაა წმინდა რაოდენობრივი ცნება და ამიტომ ის არ არის საკუთრივი, სპეციფიური ობიექტი მათემატიკური თეორიისა, ის ზოგად-ლოგიკური ცნებაა. მაგრამ, ამასთან, სიმრავლის ცნება უშუალო კავშირს ამყარებს მათემატიკასა და ობიექტურ რეალობას შორის. მათემატიკა მოწოდებულია ასახოს სინამდვილის რაოდენობრივი მხარე; ის ამ ასახვის ისტორიულ-ლოგიკურ პროცესში ერთ-ერთ უშუალო ემპირიულ ობიექტს სწორედ სიმრავლის, საგანთა მრავლობის სახით ჰპოვებს, უფრო სწორად, ჰპოვებს საგანთა ცალკეულად და მრავლად არსებობის ფაქტში. მათემატიკის საკუთრივი ობიექტი თვით სიმრავლე კი არ არის, არამედ, საერთოდ სიმრავლეთა რაოდენობრივი მხარე, ისეთი ცნებანი, როგორიცაა კარდინალური და რიგობრივი რიცხვის, აქსიომატურ სისტემათა და სხვა ცნებანი, ე. ი. ის, რაც საერთოა საზოგადოდ სიმრავლეებისათვის, ის, რაც აბსტრაჰირებულია საერთოდ სიმრავლეთა და მათ ელემენტებს შორის დამოკიდებულებათა სახით.

მათემატიკის მიერ სიმრავლეთა ასეთი აბსტრაქტული შესწავლა შეიცავს კიდევ ერთ რელატიურ მომენტს. როდესაც ვლაპარაკობთ საერთოდ სიმრავლეებზე, როგორც მათემატიკის ობიექტზე, ამ სიმრავლეებში ექცევიან აგრეთვე თვით მათემატიკური მაგალითები სიმრავლისა, როგორიცაა რიცხვთა, ფუნქციათა სიმრავლეები და სხვა. ამ სიმრავლეების მიმართ თვით მათემატიკის შიგნით კვლავ ვუბრუნდებით აგრეთვე მათ ისეთ განხილვას, სადაც გარკვეული ზომით გათვალისწინებულია სიმრავლის ელემენტებს შორის თვისობრივი, შინაარსობრივი დამოკიდებულებანი.

მათემატიკის მიერ სიმრავლეთა აბსტრაქტული შესწავლა რელატიურია კიდევ იმიტომ, რომ მათემატიკა, შეისწავლის რა სიმრავლეების ზოგად მხარეებს, ამით ფაქტიურად შეისწავლის აგრეთვე კონკრეტულ ობიექტურ-რეალურ სიმრავლეებსაც. ვინც ზოგადსა და აბსტრაქტულს უარყოფს, ის, პირველ რიგში, უარყოფს კონკრეტულს.

სიმრავლის ცნების ხასიათის გასარკვევად არსებითი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე მის დამოკიდებულებას ცნების მოცულობასთან. სიმრავლის ცნების ფორმალისტური კონცეფციები ხშირად აიგივებენ ხსენებულ ორ ცნებას, ან სურთ სიმრავლის ცნება გამოიყვანონ ცნების მოცულობის ცნებიდან. ამ მიმართულებით უფრო ხშირად ადგილი აქვს პროპოზიციური ფუნქციის მეტაფიზიკურ-ფორმალისტურ ინტერპრეტაციას, რაც ამასთან ერთად სიმრავლის ჰიპოსტაზირებისა, საერთოდ, სიმრავლის თავისი ელემენტებისაგან მოწყვეტის, სიმრავლის შესახებ ე. წ. „ჯამის“ თვალსაზრისის, სიმრავლის აქტუალურად შედგენის, აგრეთვე უსასრულობისადმი საფეხურებრივი მიდგომის და სხვა მეტაფიზიკურ თეორიებთან არის გადახლართული. ამით დამახინჯებულია აგრეთვე პრედიკატთა აღრიცხვის ნამდვილი ბუნება. ეს თვალსაზრისები მკაცრად არის გაკრიტიკებული ლ. გოკიელის მთელ რიგ შრომებში, კერძოდ ნაჩვენებია პროპოზიციური ფუნქციის საშუალებით სიმრავლის ცნების დეფინიციის ლოგიკურად ყალბი ხასიათი, ასეთი ცდის მეტაფიზიკური ბუნება.

ჩვენ აქ სიმრავლის ცნებისა და ცნების მოცულობის დამოკიდებულებას გავარჩევთ ძირითადად ზოგად-ლოგიკურ ასპექტში.

სიმრავლის ცნება და ცნების მოცულობის ცნება არ ემთხვევა ერთმანეთს, ჯერ ერთი, იმიტომ, რომ ცნება შეიძლება მხოლოდ ერთ საგანს მოიცავდეს. მაგალითად, მთვარის, მტკვრის, თბილისის და სხვა ცნებანი ერთ საგანს მოიცავენ. რაც მთავარია, ცნების მოცულობა უკვე გულისხმობს სიმრავლის ცნებას. ცნების მოცულობის ცნებაში გამოყენებულია სიმრავლის ცნება, ისე რომ სიმრავლის ცნება ლოგიკურად უსწრებს ცნების მოცულობის ცნებას. გარდა ამისა, სიმრავლე მოცემულია არა მარტო მაშინ, როდესაც ცნების საშუალებით წარმოდგენილია სათანადო კლასი. ეს არის სიმრავლის მოცემის მხოლოდ კერძო შემთხვევა. საზოგადოდ, სიმრავლე მოცემულია მაშინ, როცა ჩვენ გვაქვს რაიმე წესი, როგორც არ უნდა იყოს ის, თუნდაც სრულიად მექანიკური წესი, საგანთა გაერთიანებისა, ამასთან, შესაძლებელია სავსებით განსხვავებული საგნებისა. ეს გარემოება სრულიად არ ეწინააღმდეგება იმას, რომ ჩვენ სათანადო სიმრავლის ცნებაში მთელი შინაარსით ვითვალისწინებთ იმ ცნებათა არსებით ნიშნებს, რომელნიც მონაწილეობენ სიმრავლის ფორმირებაში. სიმრავლის მოცემის წესი არის სწორედ **საგანთა** ერთობლიობის მოცემის წესი. საგანთა სიმრავლე მოცემულია, თუ ის წარმოდგენილია რამენაირად. თვით საგანთა გარკვეული სიმრავლე სავსებით ნეიტრალურია იმისადმი, თუ რა ნიშნის მიხედვით, რა ცნებასთან დაკავშირებით წარმოადგენენ მას. გავიხსენოთ გ. კანტორის შესანიშნავი გამოთქმა: „მრავალსახეობის ანუ სიმრავლის ქვეშ მე მესმის ყოველივე ბევრი, გააზრებული როგორც მთლიანი" [4, გვ. 68]. მაგრამ ეს ბევრი, ეს მთლიანი შეიძლება გააზრებულ იქნეს სხვადასხვა წესით, სხვადასხვა ცნების საშუალებით. ამ შემთხვევაში ვლაპარაკობთ რეალურად არსებულ საგანთა ერთი და იმავე სიმრავლეზე, მაგრამ სხვადასხვა ნიშნის, სხვადასხვა ცნების საშუალებით, ხოლო ამ იდენტურ მომენტს იმით აღვნიშნავთ, რომ ვამბობთ: „ამ ცნებებს ერთი და იგივე მოცულობა აქვთ". მაგრამ **ცნებით ასპექტში** არ შეიძლება არ გავითვალისწინოთ თვით სიმრავლესთან დაკავშირებული ცნების შინაარსი. ამიტომ ჩვენ ამ ასპექტში უნდა განვასხვავოთ აზრობრივი ობიექტები, რომელნიც ერთსა და იმავე რეალურად არსებულ, ერთსა და იმავე საგნებისაგან შედგენილ სიმრავლეებს წარმოგვიდგენენ სხვადასხვა ცნების საშუალებით. მაგალითად, ამ მხრივ ჩვენ განვასხვავებთ „მოაზროვნე ცხოველთა სიმრავლეს", „მშრომელ ცხოველთა სიმრავლისაგან", „რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს" და „უსასრულო პერიოდულ ათწილადთა სიმრავლეს" და სხვა. თვით იმ აზრშიც, რომ ერთი და იგივე საგანთა სიმრავლის ორი ცნების საშუალებით წარმოდგენის დროს აღვნიშნავთ ამ ცნებათა მოცულობების ტოლობას, არის შეფარდებითი მომენტი, ისევე როგორც, საერთოდ ყოველ არატავტოლოგიურ ტოლობის შემთხვევაში. საქმე იმაშია, რომ ცნება და მისი მოცულობაც არიან აბსტრაქტული აზროვნების ელემენტები. ცნების მოცულობა არის არა თვით სათანადო საგანთა სიმრავლე, არამედ, **აზრი** ამ ცნებით წარმოდგენილ საგანთა ობიექტურ სიმრავლეზე. ამიტომ, მოცულობათა ტოლობა არის არა ამ აზრთა ტავტო-

ლოგიური იდენტურობა (ისინი ხომ სხვადასხვა ცნებასთან არიან დაკავშირებული), არამედ, შეიცავს სწორედ რელატურ მომენტს, მიგვითითებს რეალურად არსებულ ან აზრობრივი სახის ერთი და იგივე ობიექტთა სიმრავლეზე. მართალია, სიმრავლე მოცემულია მაშინ, როცა მოცემულია რაიმე ნიშანი, რომელიც ამ და მხოლოდ ამ საგნებს აერთიანებს, მათ აზრობრივად შემოსაზღვრავს, მაგრამ საზოგადოდ იგივე საგანთა სიმრავლე შეიძლება ჩვენს მიერ ასახულ იქნეს, აზრობრივად დასაზღვრულ იქნეს აგრეთვე სხვა ნიშნის, სხვა ცნების მიხედვით. ამ ორ აზრობრივ ობიექტს განვასხვავებთ, მაგრამ საგანთა სიმრავლის მოცემა სხვადასხვა წესით თვით ამ საგანთა სიმრავლეს ვერ გაამრავლებს. ერთი და იგივე საგანთა, ან აზრობრივ ელემენტთა სხვადასხვა ცნებით წარმოდგენა გამომხატველია მხოლოდ იმ ზოგადი გარემოებისა, რომ საგანთა სიმრავლე სხვადასხვა მხრივ შეიძლება ავსახოთ და შევისწავლოთ, მისი სხვადასხვა თვისობრივი მომენტები წარმოვადგინოთ. ამიტომ დიდი შეცდომა იქნებოდა არ განგვესხვავებინა ცნებით ასპექტში აზრობრივი ობიექტები, რომელნიც ერთი და იგივე საგანთა სიმრავლეს სხვადასხვა ცნებით წარმოგვიდგენენ. საზოგადოდ, ასეთ იდენტიფიკაციას არ ვახდენთ თვით მათემატიკის შიგნითაც; უფრო მეტიც, თუ მათემატიკური აბსტრაქციის საფუძველზე ჩვენ გარკვეულ განურჩევლობას ვიჩენთ საგანთა კონკრეტული შინაარსის მიმართ, თვით მათემატიკური ობიექტების მისამართით მუდამ ვერ გამოვიჩენთ ასეთ განურჩევლობას. მაგალითად, ერთი და იგივე ობიექტზე შეიძლება ვილაპარაკოთ მეორე გვარის განკვეთასთან დაკავშირებით და კანტორის ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა ტერმინებშიაც. მაგრამ ეს იქნება სწორედ ერთი და იგივე რიცხვთა სიმრავლის სხვადასხვა მიმართულებით შესწავლა. როდესაც რაიმე M სიმრავლეს რეფლექსური, სიმეტრული და ტრანზიტული დამოკიდებულების მიხედვით ვყოფთ ექვივალენტურ ელემენტთა კლასებად, ჩვენ ცნების ასპექტში განვასხვავებთ ერთმანეთისაგან M_a და M_b ერთი და იგივე შედგენილობის კლასებს სხვადასხვა a და b წარმომადგენლებთან დაკავშირებით. როდესაც ჩვენ ვწერთ $M_a = M_b$, ამ ტოლობაში, ისევე, როგორც ყოველ არატავტოლოგიურ ტოლობაში გვაქვს მოცემული ფარდობითი მომენტი განსხვავებულთა იგივეობისა.

გერმანელი ლოგიკოსი გ. კლაუსი სავსებით მართალია, როდესაც ამბობს, რომ „ცნებათა დაყვანა მათს მოცულობაზე არის აბსტრაქცია, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს მთელ რიგ მათემატიკურ და ფორმალურ-ლოგიკურ გამოკვლევათათვის“ [5, გვ. 200] და, აქვე შენიშნავს სწორედ, რომ „ამ აბსტრაქციის აბსოლუტიზაციას, რომელიც ჩვენ გვხვდება მათემატიკური ლოგიკის ზოგიერთ წარმომადგენლებთან, მივყევართ საშიშ შედეგებამდე“ [5, გვ. 200]. სამწუხაროდ, კლაუსი, ლოგიკის შესახებ თავისი არასწორი კონცეფციის გამო, ბოლომდე თანმიმდევრული ვერ რჩება და სხვა მომენტებთან დაკავშირებით თვით მიდის ლოგიკურის აუცილებლობით ისეთ თვალსაზრისამდე, რომელიც ეწინააღმდეგება მათემატიკის ბუნებას. საქმე იმაშია, რომ კლაუსი ვერ ამაღლდა ლოგიკის ერთიანობის დონემდე, ლოგიკისა, რომელშიაც გათვალისწინებულია ფორმისა და შინაარსის დიალექტიკური ერთიანობა. კლა-

უსი შინაგანად არღვევს ლოგიკას მისი ფორმისა და შინაარსის ლოგიკებად დაყოფის გზით და ამის შესაბამისად ლოგიკას გაჰყოფს ფორმალურ და დიალექტიკურ ლოგიკის სფეროებად. კლაუსი წერს: „პირადად მე დიალექტიკური ლოგიკის ცნების ქვეშ მესმის სხვა რამ, გავხსნი რა მის შინაარსს ასე: ფორმალური ლოგიკა არის აზრის ექსტენსიონალურ განსაზღვრებათა და ექსტენსიონალურ დამოკიდებულებათა თეორია, ხოლო დიალექტიკური ლოგიკა არის აზრის ინტენსიონალურ განსაზღვრებათა და ინტენსიონალურ დამოკიდებულებათა თეორია“ [5, გვ. 142]. კლაუსი ცდილობს აჩვენოს, რომ წინადადებათა აღრიცხვა არის წინადადებათა შორის ექსტენსიონალური კავშირების ლოგიკა, რაც დაკავშირებულია გარკვეულ აბსტრაქციასთან. როდესაც კლაუსი გადადის კლასთა აღრიცხვაზე (ერთადგილიდან პრედიკატთა აღრიცხვაზე), ის შენიშნავს, რომ ფორმალური ლოგიკა, როგორც ექსტენსიონალური ნაწილი ლოგიკისა, ეყრდნობა აბსტრაქციას, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენ განვიხილავთ, როგორც იგივურს ყველა პრედიკატს, რომელიც ეხება ერთსა და იმავე კლასს, ე. ი. განვდგებით პრედიკატთა ინტენსიონალური მხარისაგან, ამის გამო ჩვენ საშუალება გვეძლევა ცნებებზე ოპერაციები შევცვალოთ სათანადო კლასებზე ოპერაციებით [5, გვ. 219]. რა თქმა უნდა, კლაუსს კარგად ესმის ამ აბსტრაქტული მომენტის მნიშვნელობა, მაგრამ მისი შეცდომა იმაშია, რომ ის გარკვეულად ფორმალისტურ თვალსაზრისს გამოთქვამს ლოგიკის შესახებ, გამიჯნავს რა ფორმალურ ლოგიკას ინტენსიონალურ, ანუ, მისი სიტყვებით, დიალექტიკური ლოგიკისაგან. შეცდომა, თუმცა ლოგიკურად თანმიმდევრული, მაგრამ მით უფრო ღრმა ხდება, როდესაც კლაუსი ასკვნის, რომ „მათემატიკური დამოკიდებულებანი ასევე ექსტენსიონალურნი არიან“ [5, გვ. 223]. გამოდის, რომ კლასთა აღრიცხვასთან დაკავშირებული აბსტრაქციის აბსოლუტიზაცია საერთოდ შეუძლებელია, მაგრამ ის მთლიანად შესაძლებელია მათემატიკის მიმართ. ამ თვალსაზრისით მათემატიკაში არ უნდა განვასხვავოთ ორი სხვადასხვა ცნება, რომელთაც ერთი და იგივე მოცულობა აქვთ; იგივე შეეხება ორ აზრობრივ ობიექტს, რომელიც სხვადასხვა ცნების საშუალებით წარმოგვიდგენს ერთსა და იგივე სიმრავლეს. ზემოთქმულთან დაკავშირებით გასაგები უნდა იყოს, თუ როგორ დისონანსს იძლევა ეს დასკვნა მათემატიკის ფაქტიური არსის მიმართ. ეს არის ფორმალისტურ თვალსაზრისამდე მისვლა მათემატიკის არსის შესახებ. როდესაც კლაუსი ამ კონცეფციასთან დაკავშირებით ახდენს აპელაციას ჰეგელისადმი, რომელიც მათემატიკას შინაარსს უმზადებს მისი ფილოსოფიაში გადატანის შემთხვევაში [2], მას გარკვეული პარალელი სურს გაატაროს თავის სქემასთან, რომ ჰეგელის მსგავსად, ექსტენსიონალურმა ლოგიკამ და მათემატიკამ თავისი აზრი და შინაარსი ინტენსიონალურ ლოგიკაში მონახონ. ამით კლაუსი კიდევ უფრო იდეალისტურ ხასიათს აძლევს ლოგიკის ორ სფეროდ გათიშვას და, ამასთან დაკავშირებით, მათემატიკის ექსტენსიონალურ სფეროში გადატანას. ამ მაგალითზე ჩვენ კიდევ ერთხელ ვრწმუნდებით, თუ როგორი მნიშვნელობა აქვს მეცნიერებისათვის ლოგიკის, როგორც შინაარსისა და ფორ-

მის დიალექტიკური ერთიანობით განპირობებულ მეცნიერების შესახებ თვალ-საზრისს.

დაბოლოს, ჩვენ შევჩერდებით კიდევ ერთ მნიშვნელოვან მომენტზე.

წინა შრომებში (რომელნიც ჯერ არ გამოქვეყნებულან), ჩვენ განვიხილეთ ნატურალური რიცხვის ცნების საკითხი და მივედით იმ დასკვნამდე, რომ ნატურალური რიცხვის ცნებას ო რ ა დ უ ლ ი ბუნება აქვს: ზოგად-ლოგიკური და მათემატიკური. მისი ზოგად-ლოგიკური ბუნება აიხსნება შემდეგი გარემოებით. იმის გამო, რომ მათემატიკა ასახავს საგანთა აუცილებელ გარეგნულ გარკვეულობას, მათემატიკური აბსტრაქცია ზღვრული ხასიათის აბსტრაქციაა. აბსტრაქტულის, რ ო გ ო რ ც გ ა რ ე გ ნ უ ლ ი ს აზრით, მათემატიკა უფრო აბსტრაქტულია, ვიდრე თვით ფილოსოფია: მისი ეს უკიდურესი აბსტრაქტულობა გადადის უკიდურეს ზოგადობაში, საგნობრივი და აზრობრივი ობიექტების გარკვეული მხრით ზოგად მომცველობაში. სწორედ ამიტომ ნატურალური რიცხვი, როგორც უშუალო აბსტრაქციის შედეგი, ერთი მხრიდან, რაოდენობრივი მხრიდან აღწევს ისეთ ყოვლის მომცველობას სინამდვილისა (აზრის სფეროს ჩათვლით), რომ ის უკვე ღ ე ბ უ ლ ო ბ ს ზოგად-ლოგიკური ელემენტის მნიშვნელობას. მიუხედავად ამისა, თვით მათემატიკური თეორიის შიგნით ის გარკვეულ მიმართებაში იქცევა როგორც სავსებით სპეციალური მათემატიკური, რაოდენობრივი ობიექტი, — ამ ასპექტში წარმოგვიდგება, როგორც რაოდენობის მათემატიკური სახე.

ამასთან დაკავშირებით უნდა შევნიშნოთ, რომ სიმრავლის ცნებას, რომელიც აგრეთვე ზოგად-ლოგიკური ბუნებისაა, უკვე არა აქვს ორადული ბუნება. ის არავითარ ასპექტში არ გვევლინება როგორც წმინდა რაოდენობრივი საგანი, არასდროს არ წარმოგვიდგება, როგორც მათემატიკის საკუთარი ობიექტი. სიმრავლე მათემატიკის შემეცნებითი საგანია, ის ერთ-ერთი საშუალედო რგოლია, რომელიც კონტაქტს ამყარებს მათემატიკასა და ობიექტურ რეალობას შორის; ეს კავშირი ასახვის კავშირია, მაგრამ სიმრავლე, როგორც ვნახეთ, თვით არ წარმოადგენს მხოლოდ და მხოლოდ რაოდენობრივი კვლევის საგანს.

ეს გარემოება კიდევ ერთხელ მიგვითითებს იმაზე, რომ მეცნიერების ცალკეულ დარგებს შორის არ არსებობს მკვეთრად გამმიჯნავი ხაზები.

ზოგადი მათემატიკის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 10. VI. 1963)

———

М. Н. Чичинадзе

МЕСТО ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Резюме

Анализ ряда новых исследований по обоснованию математики, в особенности результатов, полученных Геделем, Черчем, Новиковым и др., показывает, что при выявлении природы понятия множества широкая перспектива открывается также для общелогических и философских исследований. Работа, проведенная в этом направлении, уже дала значительные результаты, в частности Л. П. Гокиели показал невозможность логической дефиниции понятия множества.

Автор, проводя исследования в общелогическом плане, высказывает некоторые соображения о харкатере понятия множества. Он пытается показать, что понятие множества не является чисто математическим понятием, оно общелогическое. Автор, сравнивая понятие множества с понятием натурального числа, находит разницу в том, что понятие натурального числа имеет двоякую природу: общелогическую и специфически математическую, понятие же множества во всех отношениях ведет себя как общелогическое понятие.

В работе критикуется точка зрения Г. Клауса, утверждающего, что математические соотношения имеют чисто экстенсиональный характер.

ლიტერატურა

1. მ. ჭიჭინაძე—მათემატიკური აბსტრაქციის ბუნების შესახებ, თსუ შრომები, ტ. 64, 1957.
2. Гегель, Наука логики, Соч., ტ. V.
3. Л. Гокиели, О понятии числа, 1951.
4. Г. Кантор, Основы общего учения о многообразиях, Сб. „Новые идеи в математике“ № 6, 1914.
5. Г. Клаус, Введение в формальную логику, 1960.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

А. К. Сулаквелидзе

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ КОШИ И ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Пусть на сегменте $[a_0, a_n]$ определены и непрерывны функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и пусть они дифференцируемы до n-го порядка включительно на интервале (a_0, a_n). Предположим, что $\varphi^{(n)}(x) \neq 0$ на интервале (a_0, a_n).

Сегмент $[a_0, a_n]$ разобьем точками $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n,$$

и предположим, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & a_0, & a_0^2, & \cdots, & a_0^{n-1}, & \varphi(a_0) \\ 1, & a_1, & a_1^2, & \cdots, & a_1^{n-1}, & \varphi(a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & a_n, & a_n^2, & \cdots, & a_n^{n-1}, & \varphi(a_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этих условиях покажем, что внутри сегмента $[a_0, a_n]$ найдется по крайней мере одна такая точка ξ, для которой будет иметь место равенство

$$\frac{f(a_0, a_1, \cdots, a_n)}{\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_n)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}, \tag{1}$$

где $f(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ и $\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ обозначают соответственно разделенные разности n-го порядка функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) + \lambda_0\varphi(x) + \lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1} \tag{2}$$

и подберем коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ так, чтобы было

$$F(a_0) = F(a_1) = \ldots = F(a_n) = 0. \tag{3}$$

Тогда получим систему уравнений относительно λ_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} &\lambda_0\varphi(a_0) + \lambda_n a_0^{n-1} + \lambda_{n-1}a_0^{n-2} + \cdots + \lambda_1 = -f(a_0), \\ &\lambda_0\varphi(a_1) + \lambda_n a_1^{n-1} + \lambda_{n-1}a_1^{n-2} + \ldots + \lambda_1 = -f(a_1), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\lambda_0\varphi(a_n) + \lambda_n a_n^{n-1} + \lambda_{n-1}a_n^{n-2} + \ldots + \lambda_1 = -f(a_n). \end{aligned}$$

Так как $\Delta \neq 0$, имеем

$$\lambda_0 = -\frac{\begin{vmatrix} f(a_0), & 1, & a_0, & a_0^2, \ldots, a_0^{n-1} \\ f(a_1), & 1, & a_1, & a_1^2, \ldots, a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(a_n), & 1, & a_n, & a_n^2, \ldots, a_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi(a_0), & 1, & a_0, & a_0^2, \ldots, a_0^{n-1} \\ \varphi(a_1), & 1, & a_1, & a_1^2, \ldots, a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi(a_n), & 1, & a_n, & a_n^2, \ldots, a_n^{n-1} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

Из (2), дифференцированием n-раз, очевидно, получим

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda_0 \varphi^{(n)}(x).$$

В силу равенств (3) и теоремы Ролля существует хотя бы одна такая точка $\xi \in (a_0, a_n)$, что $F^{(n)}(\xi) = 0$. Следовательно,

$$f^{(n)}(\xi) + \lambda_0 \varphi^{(n)}(\xi) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) имеем

$$\frac{\begin{vmatrix} f(a_0), & 1, & a_0, & a_0^2, \ldots, a_0^{n-1} \\ f(a_1), & 1, & a_1, & a_1^2, \ldots, a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(a_n), & 1, & a_n, & a_n^2, \ldots, a_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi(a_0), & 1, & a_0, & a_0^2, \ldots, a_0^{n-1} \\ \varphi(a_1), & 1, & a_1, & a_1^2, \ldots, a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi(a_n), & 1, & a_n, & a_n^2 \ldots, a_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}. \tag{6}$$

Числитель и знаменатель левой части равенства (6) одним и тем же множителем отличаются от разделенных разностей n-го порядка функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Поэтому из (6) следует, что

$$\frac{f(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}, \quad a_0 < \xi < a_n. \tag{7}$$

В частности, если $\varphi(x) \equiv x^n$, тогда, как известно (см., напр., [1]), $\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n) \equiv 1$ и из (7) имеем, что

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Формулу (1) будем называть обобщенной формулой Коши.

2. Полученным результатом можно воспользоваться для нахождения одного нового представления остаточного члена формулы Тейлора.

Как известно (см., напр., [1]), разделенная разность n-го порядка представляется так:

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\omega_n)\, dt_n, \tag{8}$$

где

$$\omega_n = a_0(1-t_1) + a_1(t_1-t_2) + \ldots + a_{n-2}(t_{n-1}-t_n) + a_n t_n. \tag{9}$$

Допустим, что

$$a_0 = x, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0. \tag{10}$$

В этом случае обобщенная формула Коши (1) дает

$$f(x, 0, 0, \ldots 0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)} \cdot \varphi(x, 0, \ldots, 0). \tag{11}$$

Далее, из (8) и (9), в силу (10), имеем

$$f(x, 0, 0, \ldots, 0) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}[x(1-t_1)]dt_n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 t_1^{n-1} f^{(n)}[x(1-t_1)]dt_1$$

или

$$f(x, 0, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{(n-1)!\, x^n} \int_0^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z)dz.$$

Аналогично получим

$$\varphi(x, 0, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{(n-1)!\, x^n} \int_0^x (x-z)^{n-1} \varphi^{(n)}(z)dz.$$

Поэтому равенство (11) примет вид

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z)\, dz = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-z)^{n-1} \varphi^{(n)}(z)dz.$$

Применяя к левой части формулу Тейлора (см., напр., [2]), имеем

$$f(x)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}x-\frac{f''(0)}{2!}x^2-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}=$$

$$=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,\varphi^{(n)}(\xi)}\int\limits_0^x (x-z)^{n-1}\varphi^{(n)}(z)dz.$$

Отсюда получим

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),$$

где остаточный член представлен в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,\varphi^{(n)}(\xi)}\int\limits_0^x (x-z)^{n-1}\varphi^{(n)}(z)\,dz. \tag{12}$$

3. Очевидно, что, если в формуле (12), в частности, положим $\varphi^{(n)}(x)\equiv f^{(n)}(x)$, то получим известное интегральное представление остаточного члена:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z)\,dz.$$

Далее, полагая $\varphi^{(n)}(z)\equiv 1$, из (12) получим остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n.$$

Кафедра высшей
математики физического факультета

(Поступило в редакцию 26. XII. 62)

ა. სულაქველიძე

კოშის თეორემის ერთი განზოგადებისა და ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრის შესახებ

რეზიუმე

მოყვანილია (1) ფორმულის დამტკიცება. ეს ფორმულა გვაძლევს კოშის ცნობილ თეორემის განზოგადებას.

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრის ერთი ახალი წარმოდგენა (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. Москва. 1953 г.
2. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва. 1958 г.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Д. О. Баладзе

О НЕКОТОРЫХ РАЗНОВИДНОСТЯХ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП НАД ПАРОЙ ГРУПП КОЭФФИЦИЕНТОВ

Определяя в [4,5] группу гомологии над парой компактных групп коэффициентов, мы сначала компактно пополняли топологизированную определенным образом группу цепей комплекса, а затем в это пополнение вводили граничный оператор и строили гомологическую группу. В данной работе, наоборот, в обычной группе цепей сначала вводится граничный оператор, получающиеся таким образом группы циклов и ограничивающих циклов замыкаются в указанном выше пополнении группы цепей, и потом строится группа гомологии. Это делается в § 3. В § 2 аналогичное построение проводится относительно т. н. слабоограничивающих циклов; в частном случае, когда группы пары совпадают между собой и дискретны, получаем группу гомологии С. Мак-Лейна и С. Эйленберга, введенные ими в [7]. Другим частным случаем этих групп является когомологическая группа, введённая А. А. Мальцевым в [9]. В § 1 для пары групп коэффициентов обобщается тот способ построения гомологической группы, примененный К. А. Ситниковым в случае нулевой подгруппы коэффициентов (см. [10]), который состоит в факторизации по аннулятору обычной нетопологизированной группы гомологии (ср. [11]). Все упомянутые построения проводятся для локально конечного комплекса, потом для любого комплекса, и наконец для пространства, причем для пространств строятся группы гомологии как в смысле Александрова-Чеха, так и в смысле Виеториса (в общем случае, рассматриваемом нами, эти два подхода не совпадают).

В каждом из перечисленных случаев, наряду с группой гомологии, строится также группа когомологии. Доказывается, что в случае сопряженных пар групп коэффициентов группы гомологии и когомологии § 1 и § 3 двойственны; при этом и в случае групп § 3 применяется факторизация, аналогичная указанной выше факторизации для групп § 1.

§ 1. Свёрнутые группы гомологии и когомологии

1.1. Пусть даны локально конечный комплекс K, его замкнутый подкомплекс L, $L \subset K$, и две пары групп (X, X') и (Y, Y'), $X' \subset X$, $Y' \subset Y$; далее всегда будем предполагать, что группы одной из этих пар компактны, а группы другой пары дискретны и что X и Y двойственные группы,

$X|Y$, в смысле теории характеров, а X' и Y' являются аннуляторами одна другой, $X' \perp Y'$.

Следуя нашей работе [5], но считая X дискретной группой даже в том случае, когда она компактна, т. е. снимая с нее топологию, рассмотрим группу p-мерных цепей $C_p(K;\ X, X')$ комплекса K над парой групп коэффициентов (X, X'). При этом p-мерными цепями над парой (X, X') считаются такие p-мерные цепи комплекса K по группе коэффициентов X, что только конечное число коэффициентов цепи принадлежит $X \setminus X'$, а групповая операция вводится, как обычно, равенством $c_p + c_p' = \sum (x^i + x'^i) t_i^p$, $c_p = \sum x^i t_i^p$ и $c'_p = \sum x'^i t_i^p$. Пока мы рассматриваем эту группу без топологии. Очевидно, мы можем считать, что группа $C_p(L;\ X, X')$ является подгруппой группы $C_p(K;\ X, X')$. Фактор-группу $C_p(K;\ X, X') - C_p(L;\ X, X')$ будем обозначать через $C_p(K;\ L, X, X')$. Так как K предполагается локально конечным комплексом, то граничный гомоморфизм имеет смысл и граница цепи над парой групп является, как нетрудно проверить, также цепью над парой групп. Следовательно, имеем граничный гомоморфизм $\partial : C_p(K; X, X') \to C_{p-1}(K; X, X')$. Очевидно, $\partial(C_p(L, X, X')) \subset C_{p-1}(L;\ X,\ X')$ и, поэтому, ∂ определяет также граничный гомоморфизм $\partial' : C_p(K, L; X, X') \to C_{p-1}(K, L; X, X')$. Таким образом, получаем цепной комплекс $\{C_p(K, L; X, X'), \partial'\}$, группа гомологии $H_p(K, L; X, X')$ которого есть, по определению, группа гомологии K по модулю L над парой групп коэффициентов $(X,\ X')$ (см. [5]); но, в отличие от [5], эта группа построена без учета топологии даже в том случае, когда X компактна.

Рассмотрим также относительную когомологическую группу $H^p(K, L; Y, Y')$ комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (Y, Y'). Строится эта группа как в [5], опять-таки не учитывается топология в Y, т. е. предполагается как если бы Y была дискретной группой даже в том случае, когда она компактна. Построение этой группы двойственно построению группы $H_p(K, L; X, X')$; в частности $C^p(K, L; Y, Y')$ будет состоять из таких коцепей c^p комплекса K по группе Y, что $c^p(t^p) = 0$ при $t^p \in L$ и $c^p(t^p) \in Y'$ почти для всех $t^p \in K$. Кограничный гомоморфизм будем обозначать через δ.

Пользуясь сопряженностью пар (X, X') и (Y, Y'), определим сопряженность групп $H_p(K, L;\ X, X')$ и $H^p(K, L;\ Y,\ Y')$ следующим образом. Будем считать скалярным произведением $(c_p,\ c^p)$ элемента $c_p = \sum\limits_i x^i t_i^p$ группы $C_p(K;\ X,\ X')$ на элемент $c^p = \sum\limits_i y^i t_i^p$ группы $C^p(K;\ Y, Y')$ сумму

$\sum x^i y^i$; эта сумма имеет смысл, ибо из сопряженности пар (X, X') и (Y, Y') и из определения цепей и коцепей комплекса K относительно пары групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y') заключаем, что при любых c_p и c^p почти для всех i имеет место равенство $x^i y^i = 0$. Это скалярное произведение дистрибутивно по обеим переменным. Легко видеть, что при этом скалярном произведении $C_p(K; X, X')$ и $C^p(K; Y, Y')$ ортогональны. С помощью этого произведения определяем перемножение групп $C_p(K, L; X, X')$ и $C^p(K, L; Y, Y')$, считая произведением (c^*_p, c^p) элемента c_p^* группы $C_p(K, L; X, X')$ на элемент c^p группы $C^p(K, L; Y, Y')$ произведение (c_p, c^p), где c^p произвольный представитель элемента c_p^*. Это произведение не зависит от произвола выбора представителей, оно дистрибутивно, а группы $C_p(K, L; X, X')$ и $C^p(K, L; Y, Y')$ ортогональны.

Можно показать, что $(\partial c_p, c^{p-1}) = (c_p, \delta c^{p-1})$, $c_p \in C_p(K, L; X, X')$, $c^{p-1} \in C^{p-1}(K, L; Y, Y')$. При помощи этого равенства доказываем, что $Z_p(K, L; X, X')$ есть аннулятор подгруппы $B^p(K, L; Y, Y')$ в группе $C_p(K, L; X, X')$, а $Z^p(K, L; Y, Y')$ есть аннулятор подгруппы $B_p(K, L; X, X')$ в группе $C^p(K, L; Y, Y')$.

Указанные аннуляции позволяют найти сопряженность групп $H_p(K, L; X, X')$ и $H^p(K, L; Y, Y')$, определяя их скалярное произведение по формуле $(h_p, h^p) = (c_p^*, c^p)$, где $h_p \in H_p(K, L; X, X')$, $h^p \in H^p(K, L; Y, Y')$, $c_p^* \in h_p$ и $c^p \in h^p$.

Выделим теперь в группе $H^p(K, L; Y, Y')$ подгруппу $N^p(K, L; Y, Y')$, состоящую из всех таких элементов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $H_p(K, L; X, X')$. Далее, в группе $H_p(K, L; X, X')$ выделим подгруппу $N_p(K, L; X, X')$, состоящую из всех таких элементов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $H^p(K, L; Y, Y')$. Обозначим фактор-группу $H_p(K, L; X, X') - N_p(K, L; X, X')$ через $F_{p0}(K, L; X, X')$, а фактор-группу $H^p(K, L; Y, Y') - N^p(K, L; Y, Y')$ через $F_0^p(K, L; Y, Y')$.

Теорема (1.1). Если (X, X') и (Y, Y') являются сопряженными парами групп, то группы $F_{p0}(K, L; X, X')$ и $F_0^p(K, L; Y, Y')$ сопряжены, и та из этих групп, которая взята относительно пары компактных групп коэффициентов, естественно содержится, как всюду плотная подгруппа, в группе характеров другой группы (т. е. группы, взятой относительно пары дискретных групп коэффициентов).

Доказательство. Доказанная выше сопряженность групп $H_p(K, L; X, X')$ и $H^p(K, L; Y, Y')$ дает возможность определить скалярное произведение $(h_{p0}, h^p{}_0)$ элемента h_{p0} группы $F_{p0}(K, L; X, X')$ на элемент $h_0{}^p$ группы $F_0{}^p(K, L; Y, Y')$ равенством $(h_{p0}, h_0{}^p) = (h_p, h^p)$, где h_p и h^p произвольно взяты из h_{p0} и h_0^p соответственно. Произведение не зависит от выбора представителей элементов h_{p0} и h_0^p, ибо, взяв другие представители $h'_p \in h_{p0}$ и $h_1^p \in h_0^p$, получаем $h_p = h'_p + \overline{h}_p$, $h^p = h_1^p + \overline{h}^p$, $\overline{h}_p \in N_p(K, L; X, X')$, $\overline{h}^p \in N^p(K, L; Y, Y')$ и $(h_p, h^p) = (h'_p, h_1^p) + (h'_p, \overline{h}^p) + (\overline{h}_p, h_1^p) + (\overline{h}_p, \overline{h}^p) = (h'_p, h_1^p)$, так как три последние слагаемые равны нулю.

Допустим теперь для определенности, что (X, X') есть пара компактных групп и, что, следовательно, (Y, Y') есть пара дискретных групп. Каждый элемент h_{p0} группы $F_{p0}(K, L; X, X')$ определяет характер μh_{p0} группы $F_0^p(K, L; Y, Y')$ посредством скалярного произведения $\mu h_{p0}(h_0^p) = (h_{p0}, h_0^p)$, $h_0^p \in F_0^p(K, L; Y, Y')$, которое, как это можно проверить, дистрибутивно. При этом различные элементы группы $F_{p0}(K, L; X, X')$ определяют различные характеры группы $F_0^p(K, L; Y, Y')$, ибо если μh_{p0}, $h_{p0} \in F_{p0}(K, L; X, X')$, аннулирует $F_0^p(K, L; Y, Y')$, то h_p, где $h_p \in h_{p0}$, будет аннулировать группу $H^p(K, L; Y, Y')$, т. е. $h_p \in N_p(K, L; X, X')$, а это означает, что $h_{p0} = 0$. Итак, μ есть мономорфизм, так что группа $\mu F_{p0}(K, L; X, X')$ является подгруппой компактной группы характеров $\chi(F_0^p(K, L; Y, Y'))$ группы $F_0^p(K, L; Y, Y')$, и, следовательно, получает из нее топологию. Эта топология переносится и на $F_{p0}(K, L; X, X')$ в силу мономорфности μ. Докажем, что $\mu F_{p0}(K, L; X, X')$ есть всюду плотная подгруппа группы $\chi(F_0^p(K, L; Y, Y'))$. Предположим, что замыкание $\overline{\mu F_{p0}(K, L; X, X')}$ группы $\mu F_{p0}(K, L; X, X')$ в $\chi(F_0^p(K, L; Y, Y'))$ не совпадает с $\chi(F_0^p(K, L; Y, Y'))$. Следовательно, аннулятор в $F_0^p(K, L; Y, Y')$ группы $\overline{\mu F_{p0}(K, L; X, X')}$ будет отличной от нуля подгруппой G группы $F_0^p(K, L; Y, Y')$. Возьмем отличный от нуля элемент h_0^p из G. Тогда $(h_0^p, h_{p0}) = 0$ для всех $h_{p0} \in F_{p0}(K, L; X, X')$ и, следовательно, $(h_p, h^p) = 0$, где $h^p \in h_0^p$ и $h_p \in h_{p0}$. Но, так как $h^p \overline{\in} N^p(K, L; Y, Y')$, то равенство $(h^p, h_p) = 0$, $h_p \in H_p(K, L; X, X')$, противоречит тому, что $N^p(K, L; Y, Y')$ есть аннулятор группы $H_p(K, L; X, X')$ в группе $H^p(K, L; Y, Y')$.

В случае, когда (Y, Y') есть пара компактных групп, аналогично можно было бы доказать, что группа $F_0^p(K, L; Y, Y')$ естественно и мономорфно включается, как всюду плотная подгруппа, в компактную группу характеров $\chi(F_{p0}(K, L; X, X'))$ группы $F_{p0}(K, L; X, X')$.

Если (X, X') — пара компактных групп, то указанные выше компактные пополнения групп $F_{p0}(K, L; X, X')$ и $F_0^p(K, L; X, X')$ обозначим через $F_p(K, L; X, X')$ и $F^p(K, L; X, X')$ соответственно. Если (X, X') — пара дискретных групп, то принимаем

$$F_p(K, L; X, X') = F_{p0}(K, L; X, X')$$

и

$$F^p(K, L; X, X') = F_0^p(K, L; X, X').$$

Определение. $F_p(K, L; X, X')$ и $F^p(K, L; X, X')$ называются [illegible]нутыми группами гомологии и, соответственно, когомологии локально конечного комплекса K по модулю подкомплекса L над парой групп коэффициентов (X, X').

Как это следует из теоремы (1.1), если $X|Y$, $X' \perp Y'$, то

$$F_p(K,L;X,X') \mid F^p(K,L;Y,Y'). \tag{1.1}$$

Частные случаи:

1. Если X компактная группа и, следовательно, Y дискретная группа и если, кроме этого, $X'=X$ и, следовательно, $Y'=0$, то мы получаем известные, классические группы (см., например, [8]). Именно, $F_p(K, L; X, X)$ есть группа гомологии бесконечных циклов над X, а $F^p(K, L; Y, O)$ — группа когомологии конечных коциклов над Y. Доказанная в [8] двойственность

$$F_p(K,L;X,X) \mid F^p(K,L;Y,O)$$

является частным случаем двойственности (1.1).

2. Если X компактна и, следовательно, Y дискретна, и если, кроме того, $X'=O$, и, следовательно, $Y'=Y$, то предыдущее построение дает группы, введенные К. А. Ситниковым в [10] в случае когда $L=\varnothing$. Именно, $F_p(K, L; X, O)$ есть группа гомологии конечных циклов над компактной группой X, а $F^p(K,L; Y, Y)$ есть группа когомологии бесконечных коциклов над дискретной группой Y. Доказанная им двойственность

$$F_p(K,\varnothing;X,O) \mid F^p(K,\varnothing,Y,Y)$$

является частным случаем двойственности (1.1).

3. Если X дискретна, Y компактна, $X'=X$ и, следовотельно, $Y'=O$, то получаются группы, аналогичные упомянутым в 2 группам Ситникова. А именно, $F_p(K, L; X, X)$ есть группа гомологии бесконечных циклов над дискретной группой X, а $F^p(K, L; Y, O)$ есть группа когомологии конечных коциклов над компактной группой Y. Двойственность (1.1) в этом случае дает

$$F_p(K,L;X,X) \mid F^p(K,L;Y,O).$$

4. Если X дискретная группа и, следовательно, Y компактная группа и если, кроме того, $X'=O$ и, стало быть, $Y'=Y$, то мы получаем известные классические группы (см. [8]). $F_p(K, L; X, O)$ есть группа гомологии конечных циклов над дискретной группой X, а $F^p(K,L; Y,Y)$ — группа когомологии бесконечных коциклов над компактной группой Y. Доказанная в [8] двойственность

$$F_p(K,L; X,O) \mid F^p(K,L; Y,Y)$$

является частным случаем двойственности (1.1)

1.2. Выше существенно предполагалось, что комплекс K является локально конечным. Теперь мы освободимся от этого требования, применив аппроксимацию произвольного комплекса его локально конечными подкомплексами, введенную для другого случая в [4,5]. Итак, пусть дан произвольный комплекс K и его замкнутый подкомплекс L. Рассмотрим направленную по возрастанию систему всех локально конечных подкомплексов K_a комплекса K и систему соответствующих пар (K_a, L_a), где $L_a = K_a \cap L$ для каждого a, т. е. мы скажем, что $a < b$, если $K_a \subset K_b$ и, следовательно, $L_a \subset L_b$. Для каждой пары (K_a, L_a) рассмотрим определенные выше свёрнутые группы гомологии и когомологии $F_p(K_a, L_a; X, X')$ и $F^p(K_a, L_a; Y, Y')$ над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y'') соответственно. Вложение $\pi_{ab}: K_a \to K_b$, являющееся локально конечным симплициальным отображением, определяет гомоморфизм $\overline{\pi_{ab*}}$ группы $F_p(K_a, L_a; X, X')$ в группу $F_p(K_b, L_b; X, X')$ и $\overline{\pi^*_{ba}}$ группы $F_p(K_b, L_b; Y, Y')$ в группу $F^p(K_a, L_a; Y, Y')$. Именно $\overline{\pi_{ab}^*}$ индуцируется гомоморфизмом вложения $\pi_{ab*}: H_p(K_a, L_a; X, X') \to H_p(K_b, L_b; X, X')$, а π^*_{ba} — гомоморфизмом высечения $\pi^*_{ba}: H^p(K_b, L_b; Y, Y') \to H^p(K_a, L_a; Y, Y')$ в свою очередь индуцированных вложением $\pi_{ab}: K_a \to K_b$. $\overline{\pi_{ab*}}$ и $\overline{\pi^*_{ba}}$ определяются в силу включений: $\pi_{ab*}(N_p(K_a, L_a; X, X') \subset N_p(K_b, L_b; X, X')$ и $\pi^*_{ba}(N^p(K_b, L_b; Y, Y')) \subset N^p(K_a, L_a; Y, Y')$. Нетрудно проверяется также, что гомоморфизмы $\overline{\pi_{ab*}}$ и $\overline{\pi^*_{ba}}$ непрерывны, транзитивны и сопряжены между собой. Нужно иметь в виду, что когда группы коэффициентов компактны, наши гомоморфизмы сперва определяются для групп до пополнения; потом непрерывно распространяются на их компактные пополнения. Таким образом, получается прямой спектр (компактных или дискретных) групп $\{F_p(K_a, L_a; X, X'); \overline{\pi_{ab*}}\}$ и обратный спектр (дискретных или компактных) групп $\{F^p(K_a, L_a; Y, Y'); \overline{\pi^*_{ba}}\}$. Предельные группы этих спектров будем называть **свёрнутыми относительными гомологическими** и, соответственно, **когомологическими** группами комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y'); обозначим их через $F_p(K, L; X, X')$ и $F^p(K, L; Y, Y')$ соответственно. При этом, здесь и в дальнейшем предельную группу для обратного спектра компактных групп и прямого спектра дискретных групп мы берем в обычном, классическом смысле (см. например, [1,8]), а предельные группы обратного спектра дискретных групп и прямого спектра компактных групп—в том смысле, в каком используются в работах [2, 3, 11]. Это обеспечивает компактность всех полученных предельных групп, когда группы коэффициентов компактны, и дискретность, когда группы коэффициентов дискретны.

Теорема (1.2). *Если (X, X') и (Y, Y') являются сопряженными парами групп, то свёрнутые группы гомологии и когомологии двойственны:*

$$F_p(K,L;X,X') \mid F^p(K,L;Y,Y'). \qquad (1.2)$$

Доказательство опирается на теорему (1.1), в силу которой для каждого a имеем двойственность $F_p(K_a, L_a; X, X') \mid F^p(K_a, L_a; Y, Y')$ и на доказанную так же выше сопряженность соответствующих гомоморфизмов тех спектров, которые определяют группы, участвующие в (1.2). После этого двойственность предельных групп следует из теории спектров.

1.3. Рассмотрим пару топологических пространств (R, A), где A есть произвольное подмножество пространства R. Рассмотрим, далее, произвольную, направленную по конечной вписанности систему τ покрытий $\alpha=(U_\alpha, V_\alpha)$ пары (R, A), где U_α есть открытое, звездно конечное покрытие пространства R, а V_α любая такая подсистема системы U_α, что объединение элементов V_α содержит A; конечная вписанность $\alpha<\beta$, α, $\beta\in\tau$, означает, что каждый элемент из U_β или V_β входит хотя бы в один элемент из U_α и, соответственно, V_α, и каждый элемент из U_α содержит не более конечного числа элементов из U_β. Частным случаем таких систем τ являются максимальные идеалы агрегата в смысле работы [12].

Возьмем теперь любое покрытие α, $\alpha\in\tau$. Рассмотрим пару комплексов (R_α, A_α), являющихся нервами пары покрытий (U_α, V_α). Ясно, что R_α есть локально конечный комплекс, а A_α—замкнутый подкомплекс комплекса R_α. В силу этого для этих комплексов можем взять свёрнутые относительные группы гомологии и когомологии $F_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $F_p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')$ комплекса R_α по модулю A_α над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y') соответственно. Если $\alpha<\beta$, α, $\beta\in\tau$, и если, как обычно, элементу u_β покрытия U_β пространства R поставим в соответствие какой-либо содержащий его элемент u_α покрытия U_α пространства R, то получаем локально конечное симплициальное отображение ρ_α^β комплекса R_β в R_α, и это можем сделать так, чтобы при этом подкомплекс A_β комплекса R_β отображался в подкомплекс A_α комплекса R_α; можно проверить, что это симплициальное отображение индуцирует определенное обычными формулами ковариантное отображение взятых над парой групп коэффициентов относительных цепей в относительные цепи, взятые над той же парой, и контравариантное отображение взятых над парой групп коэффициентов относительных коцепей в относительные коцепи над той же парой, причем эти гомоморфизмы коммутируют с граничными и кограничными операторами и аннуляторы $N_p(R_\beta,A_\beta;X,X')$ и $N^p(R_\alpha,A_\alpha;Y,Y')$ переводят в $N_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $N^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$. При этом, в случае компактных групп коэффициентов все это надо установить сначала для групп до пополнения, а потом по непрерывности распространить на их компактные пополнения. Это замечание надо учитывать и при доказательстве сопряженности рассматриваемых индуцированных гомоморфизмов. Таким образом, мы имеем гомоморфизмы $\overline{\pi_{\beta\alpha_*}}: F_p(R_\beta, A_\beta; X, X') \to F_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\overline{\pi^*_{\alpha\beta}}: F^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y') \to F^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$. Эти группы и гомоморфизмы образуют обратный спектр $\{F_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X'); \overline{\pi_{\beta\alpha_*}}\}$ и прямой спектр $\{F^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y'); \overline{\pi^*_{\alpha\beta}}\}$. Предельные группы этих спектров мы называем свёрнутыми относительными гомологическими и когомологическими группами Александрова-Чеха пространства R по модулю A над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y'), основанными на системе τ. Обозначим их через $F_{p\tau}(R, A; X, X')$ и $F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, Y')$. Из теоремы (1.1), сопряженности гомоморфизмов $\overline{\pi_{\beta\alpha_*}}$ и $\overline{\pi^*_{\alpha\beta}}$ и теории спектров (классических или новых, см. [1, 2, 3, 8, 11]) мы можем заключить, что верна следующая

Теорема (1.3). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то группы $F_{p\tau}(R, A; X, X')$ и $F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, Y')$ двойственны:

$$F_{p\tau}(R, A; X, X') \mid F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, Y'). \tag{1.3}$$

Отметим некоторые известные частные случаи предыдущего построения.

1. Пусть X компактная группа, следовательно, Y дискретная группа, $X' = O$ и, значит, $Y' = Y$; тогда получаются свёрнутые относительные группы гомологии и когомологии $F_{p\tau}(R, A; X, O)$ и $F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, Y)$ пространства R по модулю A относительно группы коэффициентов X и Y, основанных на системе τ. В этом частном случае вместо τ можно рассмотреть всю систему звездно конечных открытых покрытий пары (R, A); получающиеся свёрнутые относительные группы гомологии будем обозначать через $F_p(R, A; X, O)$ и $F^p(R, A; Y, Y)$. При $A = \varnothing$ группы $F_p(R, \varnothing; X, O)$ и $R^p(R, \varnothing; Y, Y)$ совпадают с введенными К. А. Ситниковым в [10] группами. Доказанная К. А. Ситниковым двойственность

$$F_p(R, \varnothing; X, O) \mid F^p(R, \varnothing; Y, Y)$$

является частным случаем двойственности (1.3).

2. Пусть X компактная группа, следовательно, Y дискретная группа, $X' = X$ и, значит, $Y' = O$; тогда получаются относительные группы гомологии и когомологии $F_{p\tau}(R, A; X, X)$ и $F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, O)$ пространства R по модулю A над группой коэффициентов X и Y, основанные на системе τ. Они введены Г. С. Чогошвили в [12]. Доказанная там двойственность

$$F_{p\tau}(R, A; X, X) \mid F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, O)$$

есть частный случай двойственности (1.3).

3. Пусть X дискретная группа, следовательно, Y компактная группа, $X' = O$ и, значит, $Y' = Y$; тогда получаются относительные группы гомологии и когомологии $F_{p\tau}(R, A; X, O)$ и $F^{p}{}_{\tau}(R, A; Y, Y)$ пространства

R по модулю A над группой коэффициентов X и Y, основанные на системе τ. В этом частном случае, как и в первом, вместо τ можно рассмотреть всю систему звездно конечных открытых покрытий пары (R, A). В этом случае получаются относительные группы гомологии и когомологии, $F_p(R, A; X, O)$ и $F^p(R, A; Y, Y)$, введенные Г. С. Чогошвили в [11]. Доказанная в [11] двойственность

$$F_p(R,A;X,O) \mid F^p(R,A;Y,Y)$$

является другим частным случаем двойственности (1.3).

4. Пусть X дискретная группа, следовательно, Y компактная группа, $X'=X$ и, значит, $Y'=O$; тогда получаются свёрнутые группы гомологии и когомологии $F_{p\tau}(R, A; X, X)$ и $F^p{}_\tau(R, A; Y, O)$ пространства R по модулю A над группой коэффициентов X и Y, основанные на системе τ. При $A=\varnothing$ получаем абсолютные свёрнутые группы, аналогичные группам, рассмотренным в 1. В этом случае двойственность (1.3) дает

$$F_{p\tau}(R,A; X,X) \mid F^p{}_\tau(R,A;Y,O).$$

1.4. Рассмотрим опять пару пространств (R, A). Для каждого покрытия (U_α, V_α) пары (R, A) рассмотрим пару комплексов (R_α, A_α), где R_α есть виеторисиан покрытия U_α (т. е. R_α есть симплициальный комплекс, симплексы которого вершинами имеют точки пространства R, причем данное конечное множество вершин образует симплекс, если оно содержится в одном и том же элементе покрытия U_α), а A_α есть замкнутый подкомплекс комплекса R_α, вершины которого принадлежат подмножеству A и кроме того, если $t \in A_\alpha$, то все вершины t принадлежат некоторому элементу v_α из V_α. Для каждой пары (R_α, A_α) рассмотрим определенные в 1.2. свёрнутые группы гомологии и когомологии, $F_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $F^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')$, комплекса R_α по модулю A_α. Если $\alpha < \beta$, то виеторисиан R_β есть подкомплекс комплекса R_α, а A_β есть подкомплекс комплекса A_α. Вложение $\rho^\beta_\alpha : (R_\beta, A_\beta) \to (R_\alpha, A_\alpha)$ определяет гомоморфизмы:

$\rho^{*\beta}_{\alpha} : F_p(R_\beta, A_\beta; X, X') \to R_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\pi^*{}_{\alpha\beta} : R^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y') \to F^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$, как гомоморфизмы предельных групп соответствующих спектров, группы которых связаны гомоморфизмами, индуцированными включениями ρ^β_α. Можно проверить, что установленные таким образом отображения являются гомоморфизмами и обладают свойствами транзитивности. При этом в случае компактной группы коэффициентов эти предложения устанавливаются сначала для допредельных групп, а потом по непрерывности распространяются на рассматриваемые группы. Таким образом, получаем обратный спектр $\{F_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X'), \rho^{*\beta}_{\alpha}\}$ и прямой спектр $\{F^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y'); \pi^*_{\alpha\beta}\}$. Предельные группы этих спектров являются, по определению, свёрнутыми относительными группами гомологии и когомологии Виеториса пространства R по модулю A над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y') соответственно. Обозначим их через $F_{pv}(R, A; X, X')$ и $F_v^p(R, A; Y, Y')$. Эти группы новы даже в случае тривиальных подгрупп. Группы с одним и тем же индексом тех спектров, которые определяют только что введенные группы, двойственны в силу теоремы (1.2) при любом значении индекса. Кроме того гомоморфизмы указанных только что спектров сопряжены, как это можно вывести из рассуждений n° 2 и этого n°. Поэтому та теория спектров, которой мы придерживаемся в этой статье, обеспечивает двойственность предельных групп наших спектров. Итак, имеет место следующая

Теорема (1.4). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то группы $F_{pv}(R, A; X, X')$ и $F_v^p(R, A; Y, Y')$ двойственны, т. е.

$$F_{pv}(R, A;\ X, X') \mid F^p_v(R, A;\ Y, Y'). \tag{1.4}$$

1.5. Некоторые из введенных выше групп являются новыми и в случае тривиальных подгрупп группы коэффициентов. Таким являются, например, свернутая группа гомологии бесконечных циклов над дискретной группой коэффициентов и свернутая группа когомологии конечных коциклов над компактной группой коэффициентов. Новыми являются, далее, все группы в смысле Виеториса. Известная теорема Доукера об изоморфизме групп Александрова-Чеха с группами Виеториса, не имеющая место (как это следует из аксиоматического исследования (см. [5]) для групп над парой групп коэффициентов, оказывается верной в частном случае, когда $X' = O$ и $Y' = Y$. Точнее, имеет место следующая

Теорема (1.5). Относительная свернутая группа Александрова-Чеха $F_p(R, A; X, O)$ конечных циклов звездно-паракомпактного пространства над компактной группой коэффициентов X изоморфна с относительной свернутой группой Виеториса $F_{pv}(R, A; X, O)$ конечных циклов пространства R над X. Аналогичное утверждение имеем для свернутых групп когомологии:

$$F^p(R, A; Y, Y) \approx F_v^p(R, A; Y,\ Y),$$

где Y—дискретная группа, а R—звездно-паракомпактное пространство.

Так как пространство R звездно-паракомпактно, мы можем ограничится рассмотрением звездно-конечных покрытий. По определению,

$$F^p(R, A;\ Y, Y) = \underrightarrow{\lim}\{H^p(R_\alpha,\ A_\alpha;\ Y,\ Y) - N^p(R_\alpha,\ A_\alpha; Y, Y),\ \pi^*_{\alpha\beta}\}, \tag{1}$$

$$F_v^p(R,\ A;\ Y, Y) = \underrightarrow{\lim}\{H_v^p(R_\alpha,\ A_\alpha;\ Y, Y) - N_v^p(R_\alpha,\ A_\alpha; Y, Y);\ \pi^*_{\alpha\beta}\}, \tag{2}$$

$$H_p(R,A;X,O)=\underline{\lim}\{H_p(R\alpha,A\alpha;X,O);\ \overset{*}{\rho}{}^{\beta}_{\alpha}\},\tag{3}$$

$$H_{pv}(R,A;X,O)=\underline{\lim}\{H_{pv}(R\alpha,A\alpha;X,O);\ \overset{*}{\rho}{}^{\beta}_{\alpha}\}.\tag{4}$$

По теореме Доукера (см. [6]) имеем изоморфизмы:

$$H^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)\approx H_v{}^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$$

и

$$H_p(R\alpha,A\alpha;X,O)\approx H_{pv}(R\alpha,A\alpha;X,O).$$

Можно доказать, что аннулятор $N^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$ группы $H_p(R\alpha,A\alpha;X,O)$ в группе $H_{pv}(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$ изоморфен аннулятору $N_v{}^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$ группы $H^p{}_v(R\alpha,A\alpha;X,O)$ в группе $H_v{}^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$. Можно, далее, показать, что имеет место изоморфизм ψ_α фактор-групп $H^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)-N^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$ и $H_v{}^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)-N_v{}^p(R\alpha,A\alpha;Y,Y)$. Наконец, проверяется коммутативность получающейся диаграммы, т. е. справедливость равенства $\psi_\beta\pi^*{}_{\alpha\beta}=\pi^*{}_{\alpha\beta}\psi_\alpha$, $\alpha<\beta$. Отсюда получаем вторую часть теоремы. Изоморфизм

$$F^p(R,A;X,O)\approx F_v{}^p(R,A;X,O)$$

получается из доказанного изоморфизма и двойственностей (см. (1.3) и (1.4)):

$$F^p(R,A;Y,Y)\mid F_p(R,A;X,O)$$

и

$$F_v{}^p(R,A;Y,Y)\mid F_{pv}(R,A,X,O).$$

Требование звездной паракомпактности пространства здесь было бы излишним, если бы взяли группы Александрова-Чеха, основанные на всех покрытиях пространства.

§ 2. Группы слабых гомологии и когомологии

2.1. Будем считать, что (X,X') и (Y,Y') обозначают то же самое, что и в § 1. Пусть $C_{p0}(K,L;X,X')$ есть (топологическая) группа обычных цепей локально конечного комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X,X'), а $C_p(K,L;X,X')$ — группа всех цепей K по модулю L над (X,X') в смысле работы [5]. Следовательно, $C_p(K,L;X,X')$ есть компактное пополнение группы $C_{p0}(K,L;X,X')$, когда X компактна, и совпадает с $C_{p0}(K,L;X,X')$, когда X дискретна. Пусть N произвольный p-конечный подкомплекс комплекса K, т. е. подкомплекс, содержащий конечное число p-мерных симплексов комплекса K (см [7]). Через I^K_N обозначим гомоморфизм высечения $C_p(K,L;X,X')\to C_p(N,L';X)$, где $L'=L\cap N$. При $c_p\in C_p(K,L;X,X')$ — через c_{pN} будем обозначать $I^K_N c_p$.

Если N есть открытый подкомплекс комплекса K, то $\partial_N c_{pN} = (\partial c_p)_N$, где ∂_N обозначает граничный оператор в комплексе N, а ∂—граничный оператор в K. Отсюда получаем, что если $Z_{p0}(K,L;X,X')$ есть группа обычных циклов комплекса K по модулю L над парой (X,X'), то цепь $z_p \in C_{p0}(K,L;X,X')$ принадлежит $Z_{p0}(K,L;X,X')$ тогда и только тогда, когда $z_{pN} \in Z_{p0}(N,L';X)$ для каждого p-конечного открытого подкомплекса N комплекса K. Пусть $z_p \in B_{p0}(K,L;X,X')$, где $B_{p0}(K,L;X,X')$ есть группа обычных (следовательно, в случае дискретной пары (X,X') всех) ограничивающих циклов комплекса K по модулю L над парой (X,X') (см. [5]); тогда $z_{pN} \in B_{p0}(N,L';X)$ если N есть открытый подкомплекс комплекса K. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. [7]).

Определение (2.1). Цикл $z_p \in Z_{p0}(K,L;X,X')$ называется слабоограничивающим циклом комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X,X'), если цикл z_{pN} является ограничивающим циклом mod L' для каждого p-конечного открытого подкомплекса N комплекса K. Их множество образует группу обычных слабоограничивающих циклов $B_{pw0}(K,L;X,X')$.

Обозначим замыкание группы $Z_{p0}(K,L;X,X')$ в группе $C_p(K,L;X,X')$ через $Z_p(K,L;X,X')$, а замыкание группы $B_{pw0}(K,L;X,X')$ в $C_p(K,L;X,X')$—через $B_{pw}(K,L;X,X')$.

Определение (2.2). Фактор-группа $W_p(K,L,X,X') = Z_p(K,L;X,X') - B_{pw}(K,L;X,X')$ называется группой слабой гомологии комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X,X').

Пусть теперь $C_0{}^p(K,L;Y,Y')$ есть группа обычных коцепей комплекса K по модулю L над парой (Y,Y'), а $C^p(K,L;Y,Y')$ группа всех коцепей K по модулю L над (Y,Y') (см. [5]). Следовательно, $C^p(K,L;Y,Y)$ есть компактное пополнение группы $C^p{}_0(K,L;Y,Y')$, когда Y компактна, и $C^p(K,L;Y,Y') = C^p{}_0(K,L;Y,Y')$, когда Y дискретна. Пусть, опять, N есть произвольный p-конечный подкомплекс комплекса K. Через I^K_N обозначим гомоморфизм высечения $C^p(K,L;Y,Y') \to C^p(N,L';Y)$, где $L' = L \cap N$. При $c^p \in C^p(K,L;Y,Y')$, пусть $c^p{}_N$ обозначает $I^K_N c^p$. Очевидно, если N есть замкнутый подкомплекс комплекса K, то $\delta_N c^p{}_N = (\delta c^p)_N$, где δ_N кограничный оператор в комплексе N, а δ—кограничный оператор в комплексе K. Отсюда получаем, что если $Z^p{}_0(K,L;Y,Y')$ есть группа обычных коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y,Y'), то коцепь $z^p \in C^p{}_0(K,L;Y,Y')$ принадлежит $Z^p{}_0(K,L;Y,Y')$ тогда и только тогда, когда $z^p{}_N \in Z_0{}^p(N,L';Y)$ для каждого p-конечного замкнутого подкомплекса N комплекса K. Пусть $z^p \in B^p{}_0(K,L;Y,Y')$, где $B^p{}_0(K, L; Y, Y')$ есть группа обычных (следовательно, в случае дискретной пары (Y, Y') всех) кoограничивающих коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y, Y') (см. [5]); тогда $z^p{}_N \in B_0{}^p(N, L'; Y)$, если N есть замкнутый подкомплекс комплекса K. Обратное утверждение, вообще говоря, и здесь неверно (см. [9]).

Определение (2.3). Коцикл $z^p \in Z_0{}^p(K, L; Y, Y')$ называется слабоограничивающим коциклом комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (Y, Y'), если коцикл $z^p{}_N$ является кoограничивающим коциклом $\bmod L'$ для каждого p-конечного замкнутого подкомплекса N комплекса K. Их множество образует группу обычных слабоограничивающих коциклов $B^p{}_{w_0}(K, L; Y, Y')$.

Обозначим замыкание группы $Z_0{}^p(K,L; Y,Y')$ в группе $C^p(K,L; Y, Y')$ через $Z^p(K,L; Y,Y')$, а замыкание группы $B^p{}_{w_0}(K, L; Y, Y')$ в группе $C^p(K,L;Y,Y')$ через $B^p{}_w(K,L;Y,Y')$.

Определение (2.4). Фактор-группа $W^p(K, L; Y, Y') = Z^p(K, L; Y, Y') - B^p{}_w(K,L;Y,Y')$ называется группой слабой когомологии комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (Y, Y').

Частные случаи:

1. Если X компактная группа и $X' = X$, то группы $W_p(K, L; X, X)$ и $W^p(K, L; X, X)$ совпадают с классическими группами гомологии и когомологии, основанными на бесконечных цепях.

2. Если X дискретна и $X' = X$, то получаем слабую гомологическую группу $W_p(K, L; X, X)$ комплекса K над X, введенную С. Эйленбергом и С. Мак Лейном в работе [7] (для случая $L = \varnothing$).

3. Если X дискретная группа и $X' = X$, то получается слабая когомологическая группа $W^p(K, L; X, X)$ комплекса K над Y, введенная А. А. Мальцевым для случая $L = \varnothing$ в [9].

2.2. Пусть теперь дан произвольный комплекс K и его замкнутый подкомплекс L. Рассмотрим направленную систему всех локально конечных подкомплексов K_a комплекса K и систему соответствующих пар (K_a, L_a), где $L_a = K_a \cap L$. Для каждой пары (K_a, L_a) берем слабые группы гомологии и когомологии $W_p(K_a, L_a; X, X')$ и $W^p(K_a, L_a; Y, Y')$. Вложение $\pi_{ab}: K_a \to K_b$ определяет гомоморфизмы $\pi_{ab}: W_p(K_a, L_a; X, X') \to W_p(K_b, L_b; X, X')$ и $\pi_{ba}: W^p(K_b, L_b; Y, Y') \to W^p(K_a, L_a; Y, Y')$. Они устанавливаются так же, как в аналогичных классических случаях, но надо начинать с обычных цепей, учитывая при этом, что они взяты над парой групп коэффициентов, а потом переходить к остальным цепям по непрерывности. Наши группы и гомоморфизмы порождают прямой спектр $\{W_p(K_a, L_a; X, X'); \pi_{ab}\}$ и обратный спектр $\{W^p(K_a, L_a; Y, Y'); \pi_{ba}\}$, предельные группы которых мы принимаем за слабые гомологические и когомологические группы пары (K, L) и обозначаем их через $W^p(K\ L;\ X, X')$ и $W^p(K, L;\ Y, Y')$ соответственно.

2.3. Рассмотрим пару топологических пространств $(R,\ A)$ и произвольную, направленную по конечной вписанности систему τ звездно конечных покрытий $\alpha = (U_\alpha,\ V_\alpha)$ пары $(R,\ A)$.

Возьмем α, $\alpha \in \tau$, пару нервов (R_α, A_α) пары α, слабые группы гомологии и когомологии $W_p(R_\alpha,\ A_\alpha;\ X, X')$ и $W^p(R_\alpha,\ A_\alpha;\ Y, Y')$, гомоморфизмы $\rho_\alpha^\beta : W_p(R_\beta, A_\beta; X, X') \to W_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\pi_{\alpha\beta} : W^p(R_\alpha,\ A_\alpha;\ Y,\ Y') \to W^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$, порожденные (с учетом, что имеем цепи над парой групп коэффициентов и что сперва отображение должно быть построено для обычных цепей и потом распространено на все цепи) симплициальным отображением $\rho_\alpha^\beta : (R_\beta,\ A_\beta) \to (R_\alpha,\ A_\alpha)$. Так возникают обратный спектр $\{W_\alpha(R_\alpha,\ A_\alpha;\ X,\ X');\quad \rho_\alpha^\beta\}$ и прямой спектр $\{W^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y');\ \pi_{\alpha\beta}\}$, предельные группы которых называем с л а б ы м и группами гомологии и когомологии Александрова-Чеха пространства R по модулю A, основанными на системе τ. Обозначим их через $W_{p\tau}(R,\ A;\ X,\ X')$ и $W^p{}_\tau(R,\ A;\ Y,\ Y')$.

2.4. Рассмотрим опять пару $(R,\ A)$, направленную систему всех ее открытых покрытий $(U_\alpha,\ V_\alpha)$, виеторисианов $(R_\alpha,\ A_\alpha)$ этих покрытий и слабые группы $W_p(R_\alpha, A_\alpha;\ X, X')$ и $W^p(R_\alpha, A_\alpha;\ Y, Y')$. Если $\alpha < \beta$, то вложение $\rho_\alpha^\beta\ :\ (R_\beta,\ A_\beta) \to (R_\alpha,\ A_\alpha)$ определяет гомоморфизмы $\rho_\alpha^\beta : W_p(R_\beta, A_\beta;\ X, X') \to W_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\pi_{\alpha\beta} : W^p(R_\alpha, A_\alpha;\ Y,\ Y') \to W^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$. Эти гомоморфизмы устанавливаются с помощью соответствующих гомоморфизмов n° 2.2 этого параграфа и строятся как аналогичные естественные гомоморфизмы с учетом того, что при компактной группе коэффициентов требуется предельный переход в группах циклов и границ. Например, сравнение спектров $\{W^p(R_{a\alpha},\ A_{a\alpha};\ Y,\ Y');\ \rho^{\alpha}_{a'a}\}$ и $\{W^p(R_{b\beta},\ A_{b\beta};\ Y,\ Y');\ \rho^{\beta}_{b'b}\}$, $a < a'$, $b < b'$, определяет гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}$.

Таким путем порождаются спектры $\{W_p(R_\alpha, A_\alpha;\ X,\ X');\ \rho_\alpha^\beta\}$ и $\{W^p(R_\alpha, A_\alpha;\ Y, Y');\ \pi_{\alpha\beta}\}$. Предельные группы этих спектров являются с л а б ы м и гомологическими и когомологическими группами Виеториса $W_{pv}(R,\ A;\ X,\ X')$ и $W_v{}^p(R,\ A;\ Y,\ Y')$.

§ 3. Ординарные группы гомологии и когомологии

3.1. Рассмотрим локально конечный комплекс K, его замкнутый подкомплекс L и пары компактных или дискретных групп $(X,\ X')$ и

(Y, Y'), причем $X \mid Y$ и $X' \perp Y'$. Возьмем группы обычных цепей и коцепей $C_{p0}(K, L, X, X')$ и $C_0^p(K; L; Y, Y')$ (см. [5]). Ядро гомоморфизма $\partial: C_{p0}(K, L; X, X') \to C_{(p-1)0}(K, L; X, X')$ обозначим через $Z_{p0}(K, L, X; X')$ и назовем группой обычных циклов комплекса K по модулю L над парой (X, X'). Замыкание группы $Z_{p0}(K, L; X, X')$ в группе $C_p(K, L; X, X')$, где $C_p(K, L; X, X')$ есть компактное пополнение группы $C_{p0}(K, L; X, X')$, если X компактна, и $C_p(K, L; X, X') = C_{p0}(K, L; X, X')$, если X дискретна, обозначим через $Z_p(K, L; X, X')$ и будем называть группой ординарных циклов комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X, X'). В случае дискретной группы X, очевидно, $Z_p(K, L; X, X') = Z_{p0}(K, L; X, X')$. Образ гомоморфизма $\partial: C_{(p+1)0}(K, L, X, X') \to C_{p0}(K, L; X, X')$ обозначим через $B_{p0}(K, L; X, X')$ и назовем группой обычных ограничивающих циклов комплекса K по модулю L над парой (X, X'). Замыкание группы $B_{p0}(K, L; X, X')$ в группе $C_p(K, L; X, X')$ обозначим через $B_p(K, L; X, X')$ и назовем группой ординарно ограничивающих ординарных циклов комплекса K по модулю L над парой (X, X'). В случае дискретной группы X ясно, $B_p(K, L; X, X') = B_{p0}(K, L; X, X')$. Фактор-группу $Z_p(K, L; X, X') - B_p(K, L; X, X')$ обозначим через $N_p(K, L; X, X')$ и назовем ординарной группой гомологии комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (X, X'). Ясно, что в случае дискретной группы X группа $N_p(K, L; X, X')$ совпадает с группой $H_p(K, L; X, X')$, рассмотренной в [5] (см. также § 1).

Переходя к когомологическим группам, аналогично этому ядро гомоморфизма $\delta: C_0^p(K, L; Y, Y') \to C_0^{p+1}(K, L; Y, Y')$ обозначим через $Z_0^p(K, L; Y, Y')$ и назовем группой обычных коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y, Y'), а замыкание этой группы в $C^p(K, L; Y, Y')$, где $C^p(K, L; Y, Y')$ есть компактное пополнение группы $C_0^p(K, L; Y, Y')$, если Y компактна, и $C^p(K, L; Y, Y') = B_0^p(K, L; Y, Y')$, если Y дискретна, обозначим через $Z^p(K, L; Y, Y')$ и назовем группой ординарных коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y, Y'). В случае дискретной группы Y ясно, что $Z^p(K, L; Y, Y') = Z^p_0(K, L; Y, Y')$. Образ гомоморфизма $\delta: C_0^{p-1}(K, L; Y, Y') \to C_0^p(K, L; Y, Y')$ обозначим через $B_0^p(K, L; Y, Y')$ и назовем группой обычных кограничивающих коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y, Y'), а замыкание этой группы в $C^p(K, L; Y, Y')$ обозначим через $B^p(K, L; Y, Y')$ и назовем группой ординарно кограничивающих ординарных коциклов комплекса K по модулю L над парой (Y, Y'). В случае дискретной группы Y имеем: $B^p(K, L; Y, Y') = B_0^p(K, L; Y, Y')$. Фактор-группу $Z^p(K, L; Y, Y') - B^p(K, L; Y, Y')$ обозначим через $N^p(K, L; Y, Y')$ и назовем ординарной группой когомологии комплекса K по модулю L над парой групп коэффициентов (Y, Y'). В случае дискретной группы Y группа $N^p(K, L; Y, Y')$

совпадает с группой $H^p(K, L; Y, Y')$, рассмотренной в [5]. Наконец, введем еще группы

$$N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X') = N_p(K, L; X, X') - (N^p(K, L; Y, Y'), N_p(K, L, X, X'))$$

и

$$N^p_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y') = N^p(K, L; Y, Y') - (N_p(K, L; X, X'), N^p(K, L; Y, Y')),$$

которые назовем свёрнутыми ординарными группами гомологии и когомологии. При этом, как обычно, если A и B сопряженные группы и A'—подгруппа группы A, то через (A', B) обозначаем аннулятор подгруппы A' в B.

Теорема (3·1). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то ординарные группы гомологии и когомологии $N_p(K, L; X, X')$ и $N^p(K, L; Y, Y')$ сопряжены, а свёрнутые ординарные группы гомологии и когомологии двойственны;

$$N_{p\mathrm{F}}(K,L;X,X') \mid N^p{}_{\mathrm{F}}(K,L;Y,Y'). \tag{3.1}$$

Доказательство. Как мы знаем из [5], группы $C_{p0}(K, L; X, X')$ и $C_0{}^p(K, L; Y, Y')$ сопряжены. Покажем, что $Z_p(K, L; X, X') \subset \subset (B^p(K, L; Y, Y'), C_p(K, L; X, X'))$. В самом деле, также как в случае с одной группой коэффициентов, но учитывая все время, что в данном случае имеем цепи, циклы и т. п., взятые над парой групп коэффициентов, показывается, что для обычных цепей имеем равенство

$$Z_{p0}(K,L;X,X') = (B_0{}^p(K,L;Y,Y'), C_{p0}(K,L;X,X')).$$

Если X дискретна, то $Z_{p0}(K, L; X, X') = Z_p(K, L; X, X')$ и $C_{p0}(K, L; X, X') = C_p(K, L; X, X')$ и $Z_p(K, L; X, X')$, будучи аннулятором $B_0{}^p(K, L; Y, Y')$ в $C_p(K, L; X, X')$, будет аннулятором и ее замыкания $B^p(K, L; Y, Y')$ в $C_p(K, L; X. X')$. Если X компактна, то замыкание $Z_p(K, L; X, X')$ группы $Z_{p0}(K, L; X, X')$ так же будет аннулировать $B^p(K, L; Y, Y')$, ибо $B^p(K, L; Y, Y) = B_0{}^p(K, L; Y, Y')$, так как Y дискретна. Этим вышеуказанное включение доказано во всех случаях.

Аналогично докажем, что $Z^p(K, L; Y, Y') \subset (B_p(K, L; X, X'), C^p(K, L; Y, Y'))$, причем если Y дискретна, то здесь имеем равенство.

Из этих двух включений получается, что группы $N_p(K, L; X, X')$ и $N^p(K, L; Y, Y')$ сопряжены. Из этого, в свою очередь, выводим двойственность групп $N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y')$, ч. т. д.

Частные случаи:

1. Если X компактная группа и, следовательно, Y дискретная группа и если $X' = X$ и, значит, $Y' = O$, мы получаем известные классические группы (см. [8]). Именно, $N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X)$ есть группа гомологии бесконечных циклов комплекса K по модулю L над X, а $N^p{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, O)$—

группа когомологии конечных коциклов комплекса K по модулю L над Y. Известная двойственность (см. [8]):

$$N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X) \mid N^{p}{}_{\mathrm{F}}(\mathrm{K}, L; Y, O)$$

является частным случаем двойственности (3.1).

2. Если X дискретная группа, $X'=O$ и, следовательно, Y компактная группа, $Y'=Y$, то мы опять получаем известные классические группы. Именно, $N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, O)$ есть группа гомологии конечных циклов комплекса K по модулю L относительно X, а $N^{p}{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y)$ есть группа когомологии бесконечных коциклов комплекса K по модулю L над Y. Известная двойственность (см. [8]):

$$N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, O) \mid N^{p}{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y)$$

является частным случаем двойственности (3.1).

Другие частные случаи, получающиеся когда X компактна, Y дискретна, $X'=O$ и $Y'=Y$ или когда X дискретна, Y компактна, $X'=X$ и $Y'=O$, являются новыми.

3.2. Пусть теперь K произвольный комплекс, L его замкнутый подкомплекс, а (X, X') и (Y, Y') сопряженные пары групп. Рассмотрим направленную по возрастанию систему всех локально конечных подкомплексов K_a комплекса K и систему соответствующих пар (K_a, L_a), где $L_a = K_a \cap L$. Для каждой пары (K_a, L_a) рассмотрим ординарные группы гомологии и когомологии $N_p(K_a, L_a; X, X')$ и $N^p(K_a, L_a; Y, Y')$ и свёрнутые ординарные группы гомологии и когомологии $N_{p\mathrm{F}}(K_a, L_a, X, X')$ и $N^{p}{}_{\mathrm{F}}(K_a, L_a; Y, Y')$. Вложение $\pi_{ab}: K_a \to K_b$, $a < b$, индуцирует гомоморфизмы $\pi_{ab}: N_p(K_a, L_a; X, X') \to N_p(K_b, L_b; X, X')$ и $\pi_{ba}: N^p(K_b, L_b; Y, Y') \to N^p(K_a, L_a; Y, Y')$. Определяются эти гомоморфизмы естественным образом (исходя из обычных циклов и переходя к предельным) и обладают всеми свойствами, нужными для образования прямого спектра $\{N_p(K_a, L_a; X, X'); \pi_{ab}\}$ и обратного спектра $\{N^p(K_a, L_a; Y, Y'); \pi_{ba}\}$. Предельные группы этих спектров принимаем за *ординарные гомологические и когомологические* группы комплекса K по модулю L над парой (X, X') и (Y, Y') и обозначаем их через $N_p(K, L; X, X')$ и $N^p(K, L; Y, Y')$ соответственно.

Аналогично строятся прямой спектр $\{N_{p\mathrm{F}}(K_a, L_a; X, X'); \pi^*{}_{ab}\}$ и обратный спектр $\{N^{p}{}_{\mathrm{F}}(K_d, L_a; Y, Y')\pi^*{}_{ba}\}$. Предельные группы, принимаемые нами за *свёрнутые ординарные* группы гомологии и когомологии комплекса K по модулю L, обозначаем через $N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X')$ и $N^{p}{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y')$ соответственно.

Из теоремы (3.1), сопряженности гомоморфизмов π_{ab} и π_{ba} и рассматриваемой нами теории спектров можно установить, что справедлива

Теорема (3.2.). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то группы $N_p(K, L; X, X')$ и $N^p(K, L; Y, Y')$ сопряжены, а группы $N_{p\mathrm{F}}(K, L; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}}(K, L; Y, Y')$ двойственны:

$$N_{p\mathrm{F}}(K, L;\ X, X') \mid N^p{}_{\mathrm{F}}(K, L;\ Y, Y'). \tag{3.1}$$

3.3. Рассмотрим пару топологических пространств (R, A) и произвольную, направленную по конечной вписанности, систему τ открытых звездно конечных покрытий $\alpha=(U_\alpha, V_\alpha)$ пары (R, A). Пусть $\alpha \in \tau$, а пара комплексов (R_α, A_α) является парой нервов покрытий (U_α, V_α). Возьмем ординарные группы гомологии и когомологии $N_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $N^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')$ и свёрнутые ординарные группы $N_{p\mathrm{F}}(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}}(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')$ пары (R_α, A_α). Симплициальное отображение $\rho_\alpha^\beta : (R_\beta, A_\beta) \to (R_\alpha, A_\alpha)$, $\alpha < \beta$, α, $\beta \in \tau$, локально конечно и в силу этого определяются гомоморфизмы: $\rho_\alpha^\beta : N_p(R_\beta, A_\beta; X, X') \to N_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\pi_{\alpha\beta} : N^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y') \to N^p(R_\beta, A_\beta; Y, Y')$. Сперва эти гомоморфизмы устанавливаются для обычных циклов над парой, а потом для тех элементов, которые являются пределами обычных циклов. В результате получаем обратный спектр $\{N_p(R_\alpha, A_\alpha; X, X');\ \rho_\alpha^\beta\}$ и прямой спектр $\{N^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y');\ \pi_{\alpha\beta}\}$. Предельные группы этих спектров мы называем *ординарными* группами гомологии и когомологии Александрова-Чеха пространства R по модулю A над парой групп коэффициентов (X, X') и (Y, Y'), основанными на системе τ. Обозначим их через $N_{p\tau}(R, A; X, X')$ и $N^p{}_\tau(R, A; Y, Y')$. В случае дискретной группы X, $N_{p\tau}(R, A; X, X') = H_{p\tau}(R, A; X, X')$, а в случае дискретной Y, $N^p{}_\tau(R, A; Y, Y') = H^p{}_\tau(R, A; Y, Y')$ (определения групп, стоящих в правой части этих равенств, см. [5]).

Подобными же способами проверяется, что существуют обратный спектр $\{N_{p\mathrm{F}}(R_\alpha, A_\alpha; X, X'),\ \overset{*}{\rho}{}_\alpha^\beta\}$ и прямой спектр $\{N^p{}_{\mathrm{F}}(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y');\ \pi^*{}_{\alpha\beta}\}$ с индуцированными гомоморфизмами $\overset{*}{\rho}{}_\alpha^\beta$ и $\pi^*{}_{\alpha\beta}$. Предельные группы этих спектров мы называем *свёрнутыми ординарными* группами Александрова-Чеха пары (R, A), над парой (X, X') и (Y, Y'), соответственно основанными на системе τ. Обозначим их через $N_{p\mathrm{F}\tau}(R, A; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}\tau}(R, A; Y, Y')$. Сопряженности естественных гомоморфизмов ρ_α^β и $\pi_{\alpha\beta}$, а также $\overset{*}{\rho}{}_\alpha^\beta$ и $\pi^*{}_{\alpha\beta}$ вместе с теоремой (3.1) и применяемой нами теорией спектров дают возможность установить, что верна

Теорема (3.3). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то группы $N_{p\tau}(R, A; X, X')$ и $N^p{}_\tau(R, A; Y, Y')$ сопряжены, а группы $N_{p\mathrm{F}\tau}(R, A; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}\tau}(R, A; Y, Y')$ двойственны:

$$N_p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R, A; X, X') \mid N^p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R, A; Y, Y'). \qquad (3.3)$$

Из частных случаев известны были два:

1. Группы $N_p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R, A; X, X)$, когда X компактна, и $N^p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau(R, A; Y, O)$, когда Y дискретна, в случае когда τ есть т. н. максимальный идеал агрегата рассматривал Г. С. Чогошвили в [12]; доказанная там двойственность

$$N_p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R,A; X, X) \mid N^p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R,A;Y,O)$$

есть частный случай двойственности (3.3).

2. При рассмотрении групп $N_p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R, A; X, O)$, когда X дискретна и $N^p{}_{\mathrm{F}}{}_\tau (R, A; Y, Y)$, когда Y компактна, можно отказаться от направленной по конечной вписанности системы τ и рассмотреть систему всех открытых звездно конечных покрытий.

Эти группы рассматривались Г. С. Чогошвили в [11]; доказанная там двойственность

$$N_p{}_{\mathrm{F}} (R,A; X,O) \mid N^p{}_{\mathrm{F}} (R,A;Y,Y)$$

является частным случаем двойственности (3.3).

3.4. Рассмотрим опять пару произвольных пространств (R, A), направленную систему всех открытых покрытий $\alpha=(U_\alpha, V_\alpha)$ этой пары, и для каждого покрытия α рассмотрим пару виеторисианов (R_α, A_α). Далее берем ординарные группы $N_p (R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $N^p (R_\alpha, A_\alpha, Y, Y')$ и свёрнутые ординарные группы $N_p{}_{\mathrm{F}} (R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}} (R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')$. Если $\alpha < \beta$, то вложение $\rho^\beta_\alpha : (R_\beta, A_\beta) \to (R_\alpha, A_\alpha)$ определяет гомоморфизмы $\rho^\beta_\alpha : N_p(R_\beta, A_\beta; X, X') \to N_p (R_\alpha, A_\alpha; X, X')$ и $\pi_{\alpha\beta} : N^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y') \to N^p (R_\beta, A_\beta; Y, Y')$. Эти гомоморфизмы естественны и при их установлении требуется лишь учитывать, что рассматриваемые группы взяты над парой групп коэффициентов и ординарны. Так образуются обратный спектр $\{N_p (R_\alpha, A_\alpha; X, X'); \rho^\beta_\alpha\}$ и прямой спектр $\{N^p(R_\alpha, A_\alpha; Y, Y')\ \pi_{\alpha\beta}\}$. Предельные группы этих спектров называем ординарными гомологическими и когомологическими группами Виеториса пространства R по модулю A над парой (X, X') и (Y, Y') соответственно и обозначаем их через $N_{p\mathrm{v}} (R,A; X,X')$ и $N_{\mathrm{v}}{}^p (R, A; Y, Y')$. Таким же образом строятся обратный спектр $\{N_p{}_{\mathrm{F}} (R_\alpha, A; X, X'); \overset{*}{\rho}{}^\beta_\alpha\}$ и прямой спектр $\{N^p (R_\alpha, A_\alpha; Y, Y'); \pi^*_{\alpha\beta}\}$, предельные группы которых называются свёрнутыми ординарными группами Виеториса $N_p{}_{\mathrm{F}}{}_{\mathrm{v}} (R, A; X,X')$ и $N^p{}_{\mathrm{F}}{}_{\mathrm{v}} (R,A;Y,Y')$.

Опираясь на теорему (3.2), на сопряженность гомоморфизмов ρ_{α}^{β} и $\pi_{\alpha\beta}$, а также $\overset{*}{\rho}{}_{\alpha}^{\beta}$ и $\pi^{*}{}_{\alpha\beta}$, можно установить, пользуясь свойствами рассматриваемой нами теории спектров, что справедлива

Теорема (3.4). Если пары (X, X') и (Y, Y') сопряжены, то группы $N_{p\mathrm{v}}(R, A; X, X')$ и $N^{p}{}_{\mathrm{v}}(R, A; Y, Y')$ сопряжены, а группы $N_{p\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; X, X')$ и $N^{p}{}_{\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; Y, Y')$ двойственны:

$$N_{p\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; X, X') \mid N^{p}{}_{\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; Y, Y') \tag{3.4}$$

Двойственность (3.4), так же, как и фигурирующие в ней группы, являются новыми и в случае тривиальных подгрупп.

3.5. Ординарные свернутые группы Александрова-Чеха и Виеториса совпадают в случае конечных циклов и бесконечных коциклов. Точнее имеет место

Теорема (3.5). Ординарная свернутая группа гомологии Александрова-Чеха $N_{p\mathrm{F}}(R, A; X, O)$ звездно-паракомпактного пространства R над компактной группой коэффициентов X изоморфна с ординарной свернутой группой гомологии Виеториса $N_{p\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; X, O)$, а ординарная свернутая группа когомологии Александрова-Чеха $N^{p}{}_{\mathrm{F}}(R, A; Y, Y)$ над дискретной группой Y изоморфна с ординарной свернутой группой когомологии Виеториса $N^{p}{}_{\mathrm{F}\mathrm{v}}(R, A; Y, Y)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы (1.5).

Кафедра
алгебры и геометрии

(Поступило в редакцию 5. II. 1963)

დ. ბალაძე

კოეფიციენტების ჯგუფთა წყვილის მიმართ აღებულ ჰომოლოგიის ჯგუფების სახეობათა შესახებ

რეზიუმე

[4.5] შრომებში, ისეთი ჰომოლოგიის ჯგუფის განსამარტავად, რომელიც კოეფიციენტთა კომპაქტურ ჯგუფთა წყვილის მიმართ იყო აღებული, ჩვენ გარკვეული გზით ტოპოლოგიზირებული ჯაჭვთა ჯგუფი ჯერ კომპაქტურად შევავსეთ, შემდეგ ამ შევსებაში შემოვიტანეთ სასაზღვრო ოპერატორი და ბოლოს ავაგეთ ჰომოლოგიის ჯგუფი. ამ შრომაში, პირიქით, ჩვეულებრივ

ჯაჭვთა ჯგუფში ჯერ შემოიტანება სასაზღვრო ოპერატორი და ამგვარად მიღებული ციკლთა და შემომსაზღვრელ ციკლთა ჯგუფები ჩაიკეტება ზემოთ აღნიშნულ ჯაჭვთა ჯგუფის კომპაქტურ შევსებაში და შემდეგ აიგება ჰომოლოგიის ჯგუფი. ეს კეთდება § 3-ში. § 2-ში ანალოგიური აგება ხდება ე. წ. სუსტად შემომსაზღვრელი ციკლების მიმართ; კერძო შემთხვევაში, როცა წყვილის ჯგუფები ემთხვევა ერთმანეთს და დისკრეტულია, ვღებულობთ ს. ეილენბერგისა და ს. მაკლეინის მიერ შემოღებულ ჰომოლოგიის ჯგუფს (ნახ. [7]). მეორე კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ა. ა. მალცევის ჯგუფი [9]. § 1-ში კოეფიციენტების ჯგუფთა წყვილებისათვის ჰომოლოგიის ჯგუფების აგების იმ ხერხის განზოგადება ხდება, რომელსაც იყენებს ნულოვანი ქვეჯგუფის შემთხვევაში კ. ა. სიტნიკოვი და რომელიც მდგომარეობს არატოპოლოგიზირებული ჰომოლოგიის ჯგუფის ფაქტორიზაციაში ანულატორის მიმართ. ყველა ეს აგება ხდება ჯერ ლოკალურად სასრულო კომპლექსისათვის, შემდეგ ნებისმიერი კომპლექსისათვის, და, ბოლოს, სივრცისათვის; ამასთანავე, სივრცისათვის აგებულია ჰომოლოგიის ჯგუფი, როგორც ალექსანდროვ-ჩეხის აზრით, ასევე ვიეტორისის აზრითაც (ზოგად შემთხვევაში ეს ორი მიდგომა განსხვავდება ერთმანეთისაგან). ყველა ჩამოთვლილ შემთხვევაში, ჰომოლოგიის ჯგუფებთან ერთად აგებულია კოჰომოლოგიის ჯგუფებიც და დამტკიცებულია, რომ კოეფიციენტთა შეუღლებული წყვილებისათვის § 1 და § 3-ის ჰომოლოგიისა და კოჰომოლოგიის ჯგუფები ორადულია; ამასთან, § 3-ის ჯგუფებისათვისაც გამოიყენება ზემოთ აღნიშნული § 1-თვის გამოყენებული ფაქტორიზაციის ანალოგიური ფაქტორიზაცია. § 1-ის ბოლოში ერთ კერძო შემთხვევისათვის დამტკიცებულია იზომორფიზმი ალექსანდროვ-ჩეხისა და ვიეტორისის ჩახვეულ, ხოლო § 3-ში — ორდინალურ-ჩახვეულ ჰომოლოგიურ და, შესაბამისად, კოჰომოლოგიურ ჯგუფებს შორის.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.-Л., 1947.
2. П. С. Александров, Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств n-мерного пространства. Матем. сборн., 21 (63), № 2, 1947.
3. Н. А. Берикашвили, Об аксиоматической теории спектров и о законах двойственности для произвольных множеств. Труды Матем. ин-та АН Гр. ССР, т. 24, 1957.
4. Д. О. Баладзе, О группах гомологии и когомологии над парой групп коэффициентов, ДАН СССР, т. 131, № 6, 1960.
5. Д. О. Баладзе, Группы гомологии относительно пары групп коэффициентов с аксиоматической точки зрения. Сообщ. АН Гр. ССр, т. 38, № 5, 1962.
6. C. H. Dowker, Homology Groups of Relations. Annals of Math., vol. 56, № 1, 1952.

7. S. Eilenberg, S. Mac-Lane, Croup Extensions and Homology. Ann. of Math., 43, № 4, 1942.
8. С. Лефшец, Алгебраическая топология, ИЛ, 1949.
9. А. А. Мальцев, Теорема двойственности для незамкнутых множеств в многообразиях. ДАН СССР, т. 126, № 4, 1959.
10. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств, Ш. Матем. сборн., 48 (90), № 2, 1959.
11. Г. С. Чогошвили, О гомологических аппроксимациях и законах двойственности для произвольных множеств. Матем. сборн., 28 (70), № 1, 1951.
12. Г. С. Чогошвили, О группах Чеха с бесконечными цепями и конечными коцепями. Сообщ. АН Гр. ССР, т. 19, № 5, 1957.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

Х. Н. Инасаридзе

К ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ГРУД

В этом сообщении дана новая, более простая, аксиоматика обобщённых груд, введённых В. В. Вагнером, и получены некоторые результаты, касающиеся теории полугруд.

Следуя В. В. Вагнеру [1], полугрудой будем называть множество K с однозначной всюду определённой тернарной алгебраической операцией, удовлетворяющей условиям:

$$[[k_1k_2k_3]k_4k_5] = [k_1[k_4k_3k_2]k_5] = [k_1k_2[k_3k_4k_5]],$$

где через $[k_1k_2k_3]$ обозначается элемент, который эта операция ставит в соответствие упорядоченной тройке k_1, k_2, k_3.

Элемент h произвольной полугруды K называется правым биунитарным элементом, если

$$[khh] = k \text{ при любом } k \text{ из } K,$$

и левым биунитарным элементом, если

$$[hhk] = k \text{ при любом } k \text{ из } K.$$

Элемент, являющийся одновременно и правым и левым биунитарным элементом, называется биунитарным элементом.

Полугруда, все элементы которой биунитарны, называется грудой.

Элемент k называется идемпотентным элементом, если $[kkk]=k$. Полугруда называется идемпотентной, если все её элементы идемпотенты.

Легко доказывается следующая

Теорема 1. *Множество K с произвольной однозначной всюду определенной алгебраической операцией, удовлетворяющей условиям*

1. $[[k_1k_2k_3]k_4k_5] = [k_1[k_4k_3k_2]k_5] = [k_1k_2[k_3k_4k_5]]$,
2. $[kkk]=k$ *при любом* k *из* K,
3. *Уравнения* $[axb]=b$ *и* $[bya]=b$ *разрешимы при любых* a, b *из* K, *является грудой.*

В груде уравнения 3 теоремы 1 имеют единственное решение.

Элементы k_1 и k_2 полугруды K называются бикоммутирующими справа, если

$$[kk_1k_1k_2k_2] = [kk_2k_2k_1k_1] \quad \text{при любом } k \text{ из } K,$$

и называются бикоммутирующими слева, если

$$[k_1k_1k_2k_2k] = [k_2k_2k_1k_1k] \quad \text{при любом } k \text{ из } K.$$

Элементы, одновременно бикоммутирующие и справа и слева, называются просто бикоммутирующими элементами.

Полугруда K называется бикоммутативной, если все её элементы бикоммутируют. Бикоммутативная полугруда, все элементы которой идемпотентны, называется обобщённой грудой (см. [1]).

Назовём элемент h полугруды K правым идемпотентно-биунитарным элементом, если

$$[k[khh]k] = [khh] \quad \text{при любом } k \text{ из } K,$$

и левым идемпотентно-биунитарным элементом, если

$$[k[hhk]k] = [hhk] \quad \text{пр любом } k \text{ из } K.$$

Элемент, являющийся одновременно и правым и левым идемпотентно-биунитарным элементом, назовем просто идемпотентно-биунитарным элементом.

Нетрудно видеть, что в идемпотентной полугруде каждый биунитарный элемент является идемпотентно-биунитарным элементом.

Лемма. Если между элементами k_1 и k_2 полугруды K существует соотношение:

$$[k_2[k_2k_1k_1]k_2] = [k_2k_1k_1],$$

то k_1 и k_2 бикоммутируют справа.

Доказательство. Действительно, имеем $[kk_1k_1k_2k_2] = [k[k_2k_1k_1]k_2] =$

$$= [k[k_2[k_2k_1k_1]k_2]k_2] = [kk_2[k_2k_1k_1]k_2k_2] = [kk_2[k_2k_1k_1k_2k_2]] =$$

$$= [kk_2[k_2[k_2k_1k_1]k_2]] = [kk_2[k_2k_1k_1]] = [kk_2k_2k_1k_1].$$

Следствие. Если элемент h полугруды K является правым идемпотентно-биунитарным элементом, то он бикоммутирует справа с каждым элементом полугруды K.

Аналогично доказывается, что если h является левым идемпотентно-биунитарным элементом, то он бикоммутирует слева с каждым элементом полугруды K.

Отсюда получаем следующее предложение.

Теорема 2. Полугруда K, все элементы которой идемпотентно-биунитарны, является бикоммутативной полугрудой.

Отметим, что обратное утверждение вообще неверно.

Теорема 3. Идемпотентная полугруда K является обобщённой грудой тогда и только тогда, когда все её элементы идемпотентно-биунитарны.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2. Докажем необходимость. Имеем $[kk'k'k_1k_1]=[kk_1k_1k'k']$. Отсюда следует, что $[k'k_1k_1]=$ $=[k'[k'k_1k_1]k']$. Это означает, что каждый элемент является правым идемпотентно-биунитарным элементом. Аналогично доказывается левая идемпотентно-биунитарность каждого элемента.

Заметим, что бикоммутативность элементов k_1 и k_2 в идемпотентной полугруде является свойством самих этих элементов, т. е. даётся соотношениями, зависящими только от k_1 и k_2.

Теорема 4. Множество K с произвольной однозначной всюду определённой тернарной алгебраической операцией, удовлетворяющей условиям:

1. $[[k_1k_2k_3]k_4k_5]=[k_1[k_4k_3k_2]k_5]=[k_1k_2[k_3k_4k_5]]$,
2. $[kkk]=k$ при любом k из K,
3. уравнения $[axa]=[abb]$ и $[aya]=[bba]$ разрешимы при любых a, b из K,

является обобщенной грудой.

Доказательство. Пусть $a, b \in K$. Тогда существует такой элемент x из K, что $[axa]=[abb]$. Далее, $[abb]=[axaaa]=[[axa]aa]=[[abb]aa]=[a[abb]a]$. Отсюда следует, что каждый элемент является правым идемпотентно-биунитарным элементом. Аналогично доказывается левая идемпотентно-биунитарность каждого элемента полугруды K. Остаётся применить теорему 3.

Следствие. Если полугруда K, все элементы которой идемпотентно-биунитарны, содержит правый (левый) биунитарный элемент, то K будет обобщенной грудой.

Теоремы 1 и 4 дают возможность сравнить груду с обобщенной грудой.

Полугруппа называется инволютированной [1], если в ней задана некоторая определённая инволюция, являющаяся обратным автоморфизмом для алгебраической операции в полугруппе. Элемент, соответствующий элементу g при этой инволюции, обозначим через g^{-1}. В. В. Вагнером было показано [1], что в инволютированной полугруппе можно так вводить тернарную алгебраическую операцию ($[g_1g_2g_3]=g_1g_2^{-1}g_3$), что полугруппа будет полугрудой относительно этой операции. Далее, им было доказано, что если полугруда K имеет биунитарный элемент e, то K можно рассматривать как инволютированную полугруппу K_e с единицей e (где $k_1 \cdot k_2=$ $[k_1ek_2]$ и $k^{-1}=[eke]$), причём, вводя в K_e тернарную алгебраическую операцию вышеуказанным способом, мы получим исходную тернарную алгебраическую операцию полугруды K.

Если K является грудой, то K_e будет группой, а если K есть обобщённая груда с биунитарным элементом e, то K_e является обобщённой группой. Если в обобщённой группе каждому элементу g соответствует его обобщённо-обратный элемент $\bar{g}$, то это соответствие будет инволюцией, которая называется канонической инволюцией [1].

Из одного результата В. В. Вагнера ([1], теорема 3,11) и из следствия теоремы 4 вытекает следующая

Теорема 5. Если полугруда K, все элементы которой идемпотентно-биунитарны, содержит биунитарный элемент e, то инволютированная полугруппа K_e будет обобщённой группой, инволютированной при помощи её канонической инволюции.

Кафедра алгебры и
геометрии

(Поступило в редакцию 30. VI. 62 г.)

ხ. ინასარიძე

განზოგადოებული გროვების თეორიისათვის

რეზიუმე

ამ შენიშვნაში მოცემულია ვ. ვაგნერის-მიერ შემოტანილი განზოგადოებული გროვების (груда) ახალი უფრო მარტივი აქსიომატიკა (თეორემები 3 და 4) და მიღებულია ზოგიერთი შედეგი ნახევარგროვების თეორიაში.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер. Теория обобщённых груд и обобщенных групп, Матем. сборник, 1953, т. 32 (74): 3, 545—632.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

З. А. Чантурия

К ВОПРОСУ СУММИРУЕМОСТИ СЛАБОСХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В статье вводится понятие ограниченно-координатной сходимости, которая в некоторых пространствах совпадает со слабой сходимостью.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная бесконечная матрица любую ограниченно-координатно сходящуюся последовательность суммировала сильно.

1. Мы в основном будем придерживаться обозначений книги [1].

Пусть E — бесконечномерное банахово пространство с базисом $e_1, e_2, \dots, e_i, \dots$.

Введем следующее

Определение. Последовательность элементов

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(n)} e_i, \quad n = 1,2,\cdots \tag{1}$$

из E мы называем ограниченно-координатно сходящейся к элементу

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(0)} e_i, \tag{2}$$

если:

$$1) \ \sup_n \| \xi_n \| \leqslant L, \tag{3}$$

и

$$2) \ \lim_{n\to\infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\cdots \tag{4}$$

Этот факт запишем так: $\xi_n \xrightarrow{\text{ок}} \xi_0$.

Очевидно, что из слабой сходимости последовательности $\{\xi_n\}$ к элементу ξ_0 следует ограниченно-координатная сходимость этой последовательности к тому же элементу. Обратное не всегда верно. Например, в пространстве l_1 последовательность элементов базиса $e_n = (0,0,\cdots, \underset{(n)}{1}, 0\cdots)$ не сходится слабо, но сходится ограниченно-координатно. Между тем, имеет место следующая

Теорема 1. Если последовательность, биортогональная к последовательности элементов базиса E, полна в сопряженном пространстве $\overline{E}$, то ограниченно-координатная сходимость совпадает со слабой сходимостью.

Доказательство. По условию теоремы, последовательность функционалов

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x = e_i \\ 0, & x = e_j \quad j \neq i \end{cases}$$

полна в $\overline{E}$.

Если $\xi_n \xrightarrow{\text{ок}} \xi_0$, то

$$f_i(\xi_n) = \lambda_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_i^{(0)} = f_i(\xi_0). \tag{5}$$

Но из (3) и (5) имеем, что $\xi_n \xrightarrow{c} \xi_0$ ([1], стр. 204).

Отсюда следует, что в пространствах H, $l_p\,(p>1)$, $L_p\,(p>1)$, c_0, слабая и ограниченно-координатная сходимости совпадают.

Далее, справедлива

Теорема 2. В пространстве $C[0,1]$ ограниченно-координатная сходимость совпадает со слабой сходимостью.

Доказательство. Возьмем базис Шаудера в пространстве C. Тогда ограниченно-координатная сходимость последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к функции $\varphi_0(x)$ означает, что:

1) $\sup\limits_n \{\max\limits_x |\varphi_n(x)|\} \leqslant L$,

2) соотношение $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_0(x)$ имеет место в точках

$$x_{km} = \frac{k}{2^m}, \quad m = 0,1,\ldots; \ k = 0,1,\cdots, \ 2^m. \tag{6}$$

Покажем, что в любой точке $x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_0(x)$.

Действительно, так как точки (6) образуют всюду плотное множество в $[0,1]$, то для любого $x \in [0,1]$ и для любого положительного δ существуют такие целые положительные числа m_1 и k_1, что $\left|x - \frac{k_1}{2^{m_1}}\right| < \delta$. Далее, в силу непрерывности функций φ_n и φ_0, для любого $\varepsilon > 0$, число δ можно выбрать настолько малым, чтобы имели место неравенства:

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_n\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\varphi_0(x) - \varphi_0\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Но $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ок}} \varphi_0$, поэтому n_0 можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\left|\varphi_n\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right) - \varphi_0\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{когда } n > n_0. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) будем иметь

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_0(x)\right| \leqslant \left|\varphi_n(x)-\varphi_n\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)\right|+\left|\varphi_n\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)-\varphi_0\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)\right|+$$

$$+\left|\varphi_0\left(\frac{k_1}{2^{m_1}}\right)-\varphi_0(x)\right|<\varepsilon, \quad \text{когда } n>n_0.$$

Поэтому $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_0(x)$ в каждой точке, т. е. $\varphi_n \xrightarrow{c} \varphi_0$.

Легко доказывается

Теорема 3. В пространстве E сильная сходимость последовательности элементов (1) к элементу (2) означает, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_i^{(n)}=\lambda_i^{(0)}, \quad i=1,2,\cdots$

2) для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число j_0, что, как только $j>j_0$, имеем

$$\| R_j \xi_n \| = \| \sum_{i=j+1}^{\infty} \lambda_i^{(n)} e_i \| < \varepsilon$$

для всех n, $n=1,2,\cdots$.

II. Теперь рассмотрим бесконечную матрицу

$$A=\{a_{mn}\}, \quad m,n=1,2,\cdots.$$

Возьмем такую последовательность $\{\xi_n\}$ пространства E, чтобы сходились ряды

$$\eta_m=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\,\xi_n, \quad m=1,2,\cdots.$$

Определение. Если последовательность $\{\eta_m\}$ сходится сильно, то мы скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ сильно суммируема матрицей A.

Можно доказать, что справедлива теорема, аналогичная теореме Кожима — Шура ([2], стр. 74).

Теорема 4. Для того, чтобы каждая сильно сходящаяся последовательность была сильно суммируемой матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы A-матрица была K-матрицей, т. е.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leqslant M$, независимо от m.

б) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=\alpha_n$, для любого n.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}=A_m \to \alpha$ при $m\to\infty$.

Кроме того, если при этих условиях $\xi_n \to \xi_0$, то

$$\lim_{m\to\infty} \eta_m = \eta_0 = \alpha\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\xi_n - \xi_0).$$

Если потребуем, чтобы из сходимости $\xi_n \to \xi_0$ всегда вытекала сходимость $\eta_m \to \xi_0$, то матрица A должна быть T-матрицей, т. е. в условиях б) и с) должны иметь $\alpha_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ и $\alpha = 1$.

Теперь поставим такой вопрос: каким условиям должна удовлетворять матрица A, чтобы любая ограниченно-координатно сходящаяся последовательность из E была сильно суммируемой матрицей A.

На этот вопрос отвечает следующая

Теорема 5. Для того чтобы последовательность

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\,\xi_n$$

была сильно сходящейся, при $m\to\infty$, всякий раз, когда $\{\xi_n\}$ ограниченно-координатно сходится, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \alpha, \quad n = 1, 2, \cdots$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m \to \alpha$, когда $m\to\infty$.

3) каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое N, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Кроме того, если при этих условиях $\xi_n \xrightarrow{\text{ок}} \xi_0$, то

$$\lim_{m\to\infty} \eta_m = \eta_0 = \alpha\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\xi_n - \xi_0).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий теоремы легко следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leqslant M, \tag{9}$$

где M не зависит от m.

Из условий теоремы 1) и 2) и из (9), в силу теоремы Кожима—Шура, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\lambda_i^{(n)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha\lambda_i^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(0)}), \quad i=1,2,\dots \tag{10}$$

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число j_0, что, когда $j > j_0$, имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} R_j \xi_n \right\| < \varepsilon \quad \text{для любого } m. \tag{11}$$

Из условия теоремы 3) для $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2L}$ найдется такое N, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}| < \varepsilon, \quad \text{для всех } m. \tag{11_1}$$

Фиксируя N и положив $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, можно взять j_0 так, чтобы было

$$\| R_j \xi_n \| < \varepsilon_2, \quad \text{когда } j > j_0 \text{ и } n = 1,2,\dots, N-1. \tag{11_2}$$

Из (11_1) и (11_2) следует, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} R_j \xi_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} |a_{mn}| \cdot \left\| R_j \xi_n \right\| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}| \left\| R_j \xi_n \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \cdot \sum_{n=1}^{N-1} |a_{mn}| + L \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}| \leqslant \varepsilon_2 \cdot M + \varepsilon_1 \cdot L = \varepsilon.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(n)} e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\lambda_i^{(n)} \right] e_i$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_i^{(n)} \right] e_i,$$

то из (10) и (11), по теореме 3, вытекает

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\xi_n \to \alpha\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(0)}), \quad i=1,2,\dots \tag{12}$$

и, таким образом, достаточность условий теоремы доказана.

Теперь докажем необходимость этих условий. Так как сильно сходящаяся последовательность сходится и ограниченно-координатно, то 1) и

2) условия необходимы. Необходимо также и неравенство (9). Покажем необходимость условия 3). Допустим противное. Тогда каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и натуральное число N, найдется такое натуральное число $m_0(\varepsilon)$, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{m_0 n}| > \varepsilon.$$

Фиксируя ε, сперва положим $N=1$. По допущению, существуют такие числа m_1 и p_1, что

$$\sum_{n=1}^{p_1} |a_{m_1 n}| > 2\varepsilon,$$

но, в силу (9), существует такое q_1, что

$$\sum_{n=q_1}^{\infty} |a_{m_1 n}| < \varepsilon.$$

Теперь положим $N=q_1$. По допущению, найдутся такие числа m_2 и p_2, что

$$\sum_{n=q_1}^{p_2} |a_{m_2 n}| > 2\varepsilon,$$

но, в силу (9), существует такое число q_2, что

$$\sum_{n=q_2}^{\infty} |a_{m_2 n}| < \varepsilon$$

и т. д.

Теперь рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$, где

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sgn}[a_{m_1 n}]\, e_1, & \text{когда} \quad 1 \leqslant n \leqslant p_1 \\ 0, & \text{„} \quad p_1+1 \leqslant n \leqslant q_1 - 1 \\ \operatorname{sgn}[a_{m_2 n}]\, e_2, & \text{„} \quad q_1 \leqslant n \leqslant p_2 \\ 0, & \text{„} \quad p_2+1 \leqslant n \leqslant q_2 - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

Легко показать, что $\{\xi_n\}$ ограниченно-координатно сходится.

Очевидно, имеем

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{p_1} a_{mn} \operatorname{sgn}[a_{m_1 n}]\, e_1 + \sum_{n=q_1}^{p_2} a_{mn} \operatorname{sgn}[a_{m_2 n}]\, e_2 + \cdots.$$

Отсюда следует, что

$$\| R_1(\eta_{m_1}) \| = \left\| \sum_{n=1}^{p_1} | a_{m_1 n} | e_1 + \sum_{n=q_1}^{\infty} a_{m_1 n} \xi_n \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{p_1} | a_{m_1 n} | - \sum_{n=q_1}^{\infty} | a_{m_1 n} | > \varepsilon$$

и

$$\| R q_1(\eta_{m_2}) \| = \left\| \sum_{n=q_1}^{p_2} | a_{m_2 n} | e_2 + \sum_{n=q_2}^{\infty} a_{m_2 n} \xi_n \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=q_1}^{p_2} | a_{m_2 n} | - \sum_{n=q_2}^{\infty} | a_{m_2 n} | > \varepsilon$$

Аналогично получим, что

$$\| R_{q_2}(\eta_{m_3}) \| > \varepsilon, \ldots \quad \| R_{q_r}(\eta_{m_{r+1}}) \| > \varepsilon, \ldots$$

Поэтому η_m не может сильно сходиться. Этим необходимость условия 3) доказана.

III. Выше было доказано, что в пространствах H, $l_p(p>1)$, $L_p(p>1)$, C, c_0 ограниченно-координатная сходимость совпадает со слабой сходимостью. Поэтому из теоремы 5 вытекает

Следствие. Для того чтобы в пространствах H, $l_p(p>1)$, $L_p(p>1)$, C, c_0 последовательность

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \xi_n, \quad m = 1,2,\ldots$$

сходилась сильно, при $m \to \infty$, всякий раз, когда $\{\xi_n\}$ слабо сходится, необходимы и достаточны условия 1), 2), 3) теоремы 5.

Эта теорема известна для пространства l_p (см. [2], стр. 347).

Если в теореме 5 потребовать, чтобы последовательность η_m, $m = 1,2,\ldots$ сходилась к ξ_0, когда $\xi_n \xrightarrow{\text{ок}} \xi_0$, необходимо и достаточно, чтобы

а) $\lim\limits_{m \to \infty} a_{mn} = 0, \quad n = 1,2\ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m \to 1,$

с) для любого $\varepsilon > 0$. существует такое N, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}| < \varepsilon \quad \text{для всех } m.$$

Но легко показать, что условия а), б), с) противоречивы, так что справедлива следующая

Теорема 6. Для любой T-матрицы существует ограниченно-координатно сходящаяся последовательность, которая не суммируема этой матрицей.

Из теоремы 6 вытекает

Следствие. Для любой T-матрицы в постранствах H, $l_p (p > 1)$, $L_p (p > 1)$, C, c_0 существуют слабо сходящиеся последовательности, которые не суммируемы этой матрицей.

Этот результат является обобщением теоремы Штейнгауза, которая гласит ([2], стр. 93):

для любой T-матрицы существует ограниченная последовательность, не суммируемая этой матрицей.

Кафедра дифференциальных
и интегральных уравнений

(Поступило в редакцию 30/XII 62 г.)

ზ. ჭანტურია

სუსტად კრებადი მიმდევრობათა შეჯამებადობის საკითხისათვის

რეზიუმე

შემოტანილია შემოსაზღვრულ-კოორდინატულად კრებადობის ცნება, რომელიც ზოგიერთ სივრცეში (მაგ., H, $l_p (p > 1)$, c_0, $L_p (p>1)$, $C[0,1]$) თანხვდება სუსტად კრებადობას.

მტკიცდება შემდეგი ძირითადი თეორემა: იმისათვის, რომ

$$\eta_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mn} \xi_n, \quad m = 1, 2 \ldots$$

მიმდევრობა იყოს მძლავრად კრებადი ყოველთვის, როცა $\{\xi_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულ-კოორდინატულად კრებადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

1) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=\alpha_n, \quad n=1,2,\ldots$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}=A_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha$

3) როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, არსებობს ისეთი N, რომ

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{mn}|<\varepsilon \quad \text{ყველა } m\text{-სათვის.}$$

ამას გარდა, თუ ამ პირობებში $\xi_n \xrightarrow{\text{შკ}} \xi_0$, მაშინ

$$\lim_{m\to\infty} \eta_m=\alpha\xi_0+\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\xi_n-\xi_0).$$

ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ თეორემას: როგორიც უნდა იყოს T — მატრიცი, არსებობს E სივრცის ისეთი შემოსაზღვრულ-კოორდინატულად კრებადი მიმდევრობა, რომელიც არაა მძლავრად შეჯამებადი ამ მატრიცით.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа- ГТТЛ, 1951 г.

[2] Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, 1960 г.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

რ. ბერიძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ოთხცვლადიანი კვადრატული ფორმით

§ 1. ვთქვათ, a და a' აღნიშნავს ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვებს; $r(n;\ a,\ a')$—ნატურალურ n რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობას

$$f=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+a'x_4^2 \tag{1.1}$$

ფორმით, ე. ი. განტოლების

$$n=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+a'x_4^2 \tag{1.2}$$

ამონახსენთა რაოდენობას მთელ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ რიცხვებში.

დავუშვათ, $M=4aa'n$, მაშინ (1.2) მიიღებს სახეს

$$M=a'\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+ay_4^2, \tag{1.3}$$

სადაც

$$y_1,\ y_2,\ y_3\equiv 0\ (\operatorname{mod} 2a);\ y_4\equiv 0\ (\operatorname{mod} 2a').$$

თუ ავღნიშნავთ $R(M;\ a,\ a')$-ით (1.3) განტოლების ამონახსენთა რაოდენობას, მაშინ, ცხადია,

$$R(M;\ a,\ a')=r(n;\ a,\ a').$$

თუ დავუშვებთ,

$$\vartheta_{gh}(\tau;c,N)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\equiv c\ (\operatorname{mod} N)}}^{\infty} \exp\{\pi ih(m-c)/N\}\exp\{\pi i\tau(m+g/2)^2/N\} \tag{1.4}$$

($c,\ g,\ h$ მთელი რიცხვებია, N ნატურალური რიცხვია, τ კომპლექსური ცვლადია, ამასთანავე, $\operatorname{Im}\tau>0$), მივიღებთ

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 2a)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2a')=1+\sum_{\substack{M=1\\ M\equiv 0\ (\operatorname{mod} 4aa')}}^{\infty} R(M;a,a')\,Q^M, \tag{1.5}$$

სადაც

$$Q=\exp\{\pi i\tau/2aa'\}.$$

ვთქვათ,

$$\theta(\tau)=\theta(\tau;\ a,\ a')=1+\sum_{\substack{M=1\\ M\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4aa')}}^{\infty} \rho(M;\ a,\ a')Q^{M}, \tag{1.6}$$

სადაც $\rho(M;\ a,\ a')$ სინგულარული მწკრივია და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\rho(M;\ a,\ a')=\frac{\pi^2}{4a\,(aa')^{3/2}}\,M\sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$

$$A(q)=q^{-4}\sum_{h \bmod q}{}' \exp\{-\pi i M h/2a\,a'\,q\}\widetilde{S}(h,\ q),$$

$$\widetilde{S}(h,\ q)=S^3(ah,\ q)\,S(a'h,\ q).$$

სინგულარული მწკრივი $\rho(M;\ a,\ a')$ შეჯამებულია [1] ნაშრომში.

გ. ლომაძემ [1] აჩვენა, თუ როგორ მიიღება ზუსტი ფორმულები ნატურალური რიცხვების წარმოდგენათა რაოდენობისათვის (1.1) სახის ფორმებით და, კერძოდ, მიიღო ზუსტი ფორმულები n რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის, როცა $a=1$, $a'=6,\ 7,\ 9,\ 10$.

წინამდებარე ნაშრომში ჩვენ ვღებულობთ ზუსტ ფორმულებს ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის, როცა

$$a=6,\ a'=1;\ a=2,\ a'=3;\ a=3,\ a'=2;\ a=7,\ a'=1.$$

შემდგომში დაგვჭირდება

ლემა (იხ., მაგ., [1], გვ. 110). N საფეხურის და $-r$ განზომილების მთელი მოდულარული ფორმა იგივურად უდრის ნულს, თუ თავის ფუნდამენტალურ არეში მას აქვს

$$\frac{r}{24}N^3\prod_{p|N}(1-p^{-2})\text{-ზე}$$

მეტი ნული (აქ ყოველი ნული იანგარიშება იმდენჯერ, რამდენიცაა მისი ჯერადობა).

§ 2. ამ პარაგრაფში განიხილება რიცხვთა წარმოდგენა

$$6\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4^2$$

ფორმით.

თეორემა 1.

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2)=\theta(\tau;\ 6,\ 1)$$
$$+\frac{4}{3}\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta^2_{61}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{40}(\tau;\ 0,\ 12).$$

დამტკიცება. როგორც [1] ნაშრომის 34 ლემაში, ასევე აქაც შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\psi(\tau;\ 6,\ 1)=\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2)-\theta(\tau;\ 6,\ 1)$$

$$-A\vartheta^2_{61}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{40}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6) \tag{2.1}$$

ფუნქცია ნებისმიერი A მუდმივისათვის წარმოადგენს 24 საფეხურისა და -2 განზომილების მთელ მოდულარულ ფორმას. მაშასადამე, ლემის ძალით, $\psi(\tau;\ 6,\ 1)$ ფუნქცია იქნება იგივურად ნულის ტოლი, თუ თავის ფუნდამენტალურ არეში მას აქვს 768-ზე მეტი ნული. დავამტკიცოთ, რომ $\tau=i\infty$ წერტილი წარმოადგენს $\psi(\tau;\ 6,\ 1)$ ფუნქციის 768-ზე მეტი ჯერადობის ნულს. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\psi(\tau,\ 6,\ 1)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხების მიხედვით A მუდმივი შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ Q^M $(M\leqslant 768)$-ის კოეფიციენტები იყოს ნულის ტოლი.

თუ [1] ნაშრომის 31, 32, 33 ლემებში დავუშვებთ,

$$a=6,\ a'=1,\ b=3,\ b'=1,\ \gamma=1,\ \gamma'=0,\ l=1,\ v=3^{\beta},$$

ე. ი.

$$M=24n,\ n=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\,u,\ u=\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid 6}} p^{\beta},\ \ r=1,\ \ \omega=6,$$

მივიღებთ

$$\rho(M;\ 6,\ 1)=\frac{2^{\alpha}\quad 3^{\beta}\quad \pi^2}{6^{\frac{3}{2}}}\chi_2\chi_3\,L^{-1}(2,6)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2, \tag{2.2}$$

სადაც

$$\chi_2=\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}2^{-1-\alpha}; \tag{2.3}$$

$$\chi_3=\left\{3^{\beta}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}3^{-\beta}; \tag{2.4}$$

$$L(2,6)=\frac{\pi^2}{4\cdot 6^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.5}$$

(2.2)—(2-5) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\rho(M;\ 6,\ 1)=\frac{1}{3}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{3^{\beta}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2. \tag{2.6}$$

თუ დავუშვებთ, $Q=\exp\{\pi i\tau/12\}$, (1.4)-დან მივიღებთ

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 12)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{144k^2}\right)^3\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{24k^2}$$

$$=1+2Q^{24}+2Q^{96}+6Q^{144}+12Q^{168}+2Q^{216}+12Q^{240}$$

$$+12Q^{288}+24Q^{312}+12Q^{360}+26Q^{384}+8Q^{432}+16Q^{456}$$
$$+24Q^{504}+28Q^{528}+6Q^{576}+14Q^{600}+16Q^{648}+36Q^{672}$$
$$+24Q^{720}+60Q^{744}+12Q^{792}+\dots \tag{2.7}$$

$$\vartheta_{21}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{40}(\tau;\,0,\,12)\,\vartheta^2_{61}(\tau;\,0,\,12)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k Q^{2(6k+1)^2}$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{4(6k+1)^2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k Q^{9(4k+1)^2}\right)^2=Q^{24}-Q^{72}-2Q^{96}$$
$$+2Q^{144}-Q^{216}+2Q^{288}+4Q^{384}-4Q^{432}+2Q^{456}-4Q^{528}$$
$$-4Q^{576}-5Q^{600}+5Q^{648}+5Q^{792}+\dots \tag{2.8}$$

თუ (2.6) ფორმულებით გამოვითვლით $\rho(M;\,6,\,1)$-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\theta(\tau;\,6,\,1)=1+\frac{2}{3}Q^{24}+\frac{4}{3}Q^{72}+\frac{14}{3}Q^{96}+\frac{10}{3}Q^{144}+12Q^{168}$$
$$+\frac{10}{3}Q^{216}+12Q^{240}+\frac{28}{3}Q^{288}+24Q^{312}+12Q^{360}+\frac{62}{3}Q^{384}$$
$$+\frac{40}{3}Q^{432}+\frac{40}{3}Q^{456}+24Q^{504}+\frac{100}{3}Q^{528}+\frac{34}{3}Q^{576}+\frac{62}{3}Q^{600}$$
$$+\frac{28}{3}Q^{648}+36Q^{672}+24Q^{720}+60Q^{744}+\frac{20}{3}Q^{792}+\dots \tag{2.9}$$

(2.1)-ში A მუდმივი ისე შევარჩიოთ, რომ $\psi(\tau;\,6,\,1)$ ფუნქციის გაშლაში Q-ს ხარისხების მიხედვით Q^{24}-ის კოეფიციენტი იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. (2.7)—(2.9)-ის ძალით ისე, რომ

$$2-A-\frac{2}{3}=0,\quad \text{ე. ი.}\quad A=\frac{4}{3}.$$

ადვილია იმის შემოწმება, რომ A-ს ასეთი მნიშვნელობისათვის Q^M $(M\leqslant 768)$-ის კოეფიციენტები ნულის ტოლია.

თეორემა 1a. თუ $n=2^\alpha m=2^\alpha\,3^\beta\cdot u$, $(m,\,2)=(u,\,6)=1$, $M=24n$, მაშინ

$$r(n;\,6,\,1)=\frac{1}{3}\left\{3^\beta+(-1)^\alpha\left(\frac{u}{3}\right)\right\}\left\{2^{\alpha+1}-\right.$$
$$\left.-(-1)^\alpha\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2+\frac{4}{3}\nu(M), \tag{2.10}$$

სადაც $\nu(M)$ არის Q^M -ის კოეფიციენტი $\vartheta_{21}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{40}(\tau;\,0,\,12)\,\vartheta^2_{61}(\tau;\,0,\,12)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხებად.

ეს თეორემა ისევე მტკიცდება როგორც [1] ნაშრომის თეორემა 2a.

§ 3. ამ პარაგრაფში განიხილება რიცხვთა წარმოდგენა

$$2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3x_4^2$$

ფორმით.

თეორემა 2.

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\,0,\,4)\,\vartheta_{00}(\tau;\,0,\,6)=\theta(\tau;\,2,\,3)$$

$$+\frac{4}{3}\vartheta^2_{21}(\tau;\,0,\,4)\,\vartheta_{21}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{80}(\tau;\,0,\,12).$$

დამტკიცება. ისევე როგორც თეორემა 1-ში საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\psi(\tau;\,2,\,3)=\vartheta^3_{00}(\tau;\,0,\,4)\,\vartheta_{00}(\tau;\,0,\,6)-\theta(\tau;\,2,\,3)$$

$$-A\,\vartheta^2_{21}(\tau;\,0,\,4)\,\vartheta_{21}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{80}(\tau,\,0,\,12) \qquad (3.1)$$

ფუნქციის გაშლაში Q ხარისხების მიხედვით A მუდმივი შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ Q^M ($M \leqslant 768$)-ის კოეფიციენტები ტოლი იყოს ნულის.

თუ [1] ნაშრომის 31, 32, 33 ლემებში დავუშვებთ,

$$a=2,\ a'=3,\ \gamma=1,\ \gamma'=0,\ b=1,\ b'=3,\ l=1,\ v=3^\beta,$$

ე. ი.

$$M=24n,\ n=2^\alpha\cdot 3^\beta u,\ u=\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid 6}} p^\beta,\ aa'=6,\ r=1,\ \omega=6,$$

მივიღებთ

$$\rho(M;\,2,\,3)=\frac{2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot\pi^2}{2\cdot 6^{\frac{1}{2}}}\chi_2\chi_3L^{-1}(2,\,6)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2, \qquad (3.2)$$

სადაც

$$\chi_2=\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^\alpha\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}2^{-1-\alpha}; \qquad (3.3)$$

$$\chi_3=\left\{3^{\beta+1}+(-1)^\alpha\left(\frac{u}{3}\right)\right\}3^{-(\beta+1)}; \qquad (3.4)$$

$$L(2,\,6)=\frac{\pi^2}{4\ 6^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.5)$$

(3.2)—(3.5) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\rho(M;\ 2,\ 3)=\frac{1}{3}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}\left\{3^{\beta+1}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}\sum_{d_1 d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2. \tag{3.6}$$

თუ დავუშვებთ, $Q=\exp\{\pi i\tau/12\}$, (1.4)-დან მივიღებთ

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 6)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{48k^2}\right)^3\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{72k^2}$$

$$=1+6Q^{48}+2Q^{72}+12Q^{96}+12Q^{120}+8Q^{144}+24Q^{168}+6Q^{192}$$

$$+16Q^{216}+24Q^{240}+12Q^{264}+26Q^{288}+48Q^{312}+12Q^{336}$$

$$+48Q^{360}+36Q^{384}+46Q^{432}+24Q^{456}+36Q^{480}+60Q^{504}+72Q^{528}$$

$$+48Q^{552}+56Q^{576}+48Q^{600}+24Q^{624}+18Q^{648}+72Q^{672}+60Q^{696}$$

$$+60Q^{720}+120Q^{744}+54Q^{768}+\cdots, \tag{3.7}$$

$$\vartheta^2_{21}(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{80}(\tau;\ 0,\ 12)$$

$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k Q^{3(4k+1)^2}\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k Q^{2(6k+1)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{16(3k+1)^2}$$

$$=Q^{24}-2Q^{48}+Q^{72}+2Q^{96}+4Q^{144}+4Q^{192}-5Q^{216}-4Q^{264}-2Q^{288}$$

$$+4Q^{384}+8Q^{408}-2Q^{432}+2Q^{456}-4Q^{528}-8Q^{576}-5Q^{600}+7Q^{648}-8Q^{768}+\ldots \tag{3.8}$$

გამოვთვლით რა $\rho(M;\ 2,\ 3)$-ის მნიშვნელობებს (3.6) ფორმულით და ჩავსვამთ (1.6) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\theta(\tau;\ 2,\ 3)=1+\frac{4}{3}Q^{24}+\frac{10}{3}Q^{48}+\frac{10}{3}Q^{72}+\frac{28}{3}Q^{96}$$

$$+12Q^{120}+\frac{48}{3}Q^{144}+24Q^{168}+\frac{34}{3}Q^{192}+\frac{28}{3}Q^{216}+24Q^{240}$$

$$+\frac{20}{3}Q^{264}+\frac{70}{3}Q^{288}+48Q^{312}+12Q^{336}+48Q^{360}+\frac{124}{3}Q^{384}$$

$$+\frac{32}{3}Q^{408}+\frac{130}{3}Q^{432}+\frac{80}{3}Q^{456}+36Q^{480}+60Q^{504}$$

$$+\frac{200}{3}Q^{528}+48Q^{552}+\frac{136}{3}Q^{576}+\frac{124}{3}Q^{600}+24Q^{624}$$

$$+\frac{82}{3}Q^{648}+72Q^{672}+60Q^{696}+60Q^{720}+120Q^{744}$$

$$+\frac{130}{3}Q^{768}+\cdots \tag{3.9}$$

ავარჩიოთ A მუდმივი ისე, რომ Q^{24}-ის კოეფიციენტი $\psi(\tau;\ 2,\ 3)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხებად იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. (3.1), (3.7)—(3.9) ფორმულების თანახმად ისე, რომ

$$0-A-\frac{4}{3}=0,\quad \text{ე. ი.}\quad A=-\frac{4}{3}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ Q^{M} $(M\leqslant 768)$-ის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია $A=-\dfrac{4}{3}$-სათვის.

თეორემა 2a. ვთქვათ, $n=2^{\alpha}m=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot u$, $(m, 2)=(u, 6)=1$, $M=24n$, მაშინ

$$r(n;\ 2,\ 3)=\frac{1}{3}\left\{2^{\alpha-1}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}\left\{3^{\beta+1}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2-\frac{4}{3}\nu(M), \tag{3.10}$$

სადაც $\nu(M)$ არის Q^{M}-ის კოეფიციენტი $\vartheta^2_{21}(\tau;\ 0,\ 4)\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\vartheta_{80}(\tau;\ 0,\ 12)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხებად.

მტკიცება 1a თეორემის ანალოგიურად.

§ 4. ამ პარაგრაფში განიხილება რიცხვთა წარმოდგენა

$$3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_4^2$$

ფორმით.

თეორემა 3.

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 4)=\theta(\tau;\ 3,\ 2)$$

$$-\frac{4}{3}\vartheta_{20}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{41}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{12,0}(\tau;\ 0,\ 12).$$

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\psi(\tau;\ 3,\ 2)=\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 4)-\theta(\tau;\ 3,\ 2)$$

$$-A\,\vartheta_{20}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{41}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{12,0}(\tau;\ 0,\ 12)$$

ფუნქციის გაშლაში Q-ს ხარისხებად A მუდმივი ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ Q^{M} ($M \leqslant 768$)-ის კოეფიციენტები იყოს ნულის ტოლი.

თუ [1] ნაშრომის 31, 32, 33 ლემებში დავუშვებთ,

$$a=3,\ a'=2,\ \gamma=0,\ \gamma'=1,\ b=3,\ b'=1,\ l=1\ v=3^{\beta},$$

ე. ი.

$$M=24n,\ n=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\,u,\quad u=\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid 6}} p^{\beta},\ aa'=6,\ r=1,\ \omega=6,$$

მივიღებთ

$$\rho(M;\,3,\,2)=\frac{2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot \pi^{2}}{3\cdot 6^{\frac{1}{2}}}\chi_2\chi_3 L^{-1}(2,6)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2, \tag{4.2}$$

სადაც

$$\chi_2=\left\{2^{\alpha+2}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}2^{-2-\alpha}; \tag{4.3}$$

$$\chi_3=\left\{3^{\beta}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}3^{-\beta}; \tag{4.4}$$

$$L(2,6)=\frac{\pi^{2}}{4\cdot 6^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.5}$$

(4.2)—(4.5) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\rho(M;\,3,\,2)=\frac{1}{3}\left\{2^{\alpha+2}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{-2}{m}\right)\right\}$$

$$\times\left\{3^{\beta}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{6}{d_1}\right)d_2. \tag{4.6}$$

თუ დავუშვებთ, $Q=e\mathrm{xp}\{\pi i\tau/12\}$, მივიღებთ

$$\vartheta^{3}_{00}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{00}(\tau;\,0,\,4)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{72k^2}\right)^{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{48k^2}$$

$$\begin{aligned}&=1+2Q^{48}+6Q^{72}+12Q^{120}+12Q^{144}+26Q^{192}+8Q^{216}\\&+28Q^{264}+6Q^{288}+36Q^{336}+24Q^{360}+64Q^{408}+26Q^{432}\\&+60Q^{480}+12Q^{504}+48Q^{552}+36Q^{576}+72Q^{624}+46Q^{648}\\&+60Q^{696}+36Q^{720}+74Q^{768}+\ldots,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\vartheta_{20}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{21}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{41}(\tau;\,0,\,6)\,\vartheta_{12,0}(\tau;\,0,\,12)=$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{2(3k+1)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{2(3k+1)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{8(3k+1)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{36(3k+1)^2}$$

$$= 2(Q^{48} - Q^{72} - Q^{144} - 2Q^{192} + 2Q^{216} + 2Q^{264} + 2Q^{288} - 4Q^{408} - Q^{432}$$
$$+ 2Q^{576} - Q^{648} + 4Q^{768} + \ldots).$$

გამოვთვალოთ $\rho(M;\ 3,\ 2)$-ის მნიშვნელობანი (4.6) ფორმულით და ჩავსვათ (1.6) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\theta(\tau;\ 3,\ 2) = 1 + \frac{14}{3} Q^{48} + \frac{10}{3} Q^{72} + 12Q^{120} + \frac{28}{3} Q^{144}$$
$$+ \frac{62}{3} Q^{192} + \frac{40}{3} Q^{216} + \frac{100}{3} Q^{264} + \frac{34}{3} Q^{288} + 36Q^{336}$$
$$+ 24Q^{360} + \frac{160}{3} Q^{408} + \frac{70}{3} Q^{432} + 60Q^{480} + 12Q^{504}$$
$$+ 48Q^{552} + \frac{124}{3} Q^{576} + 72Q^{624} + \frac{130}{3} Q^{648} + 60Q^{696}$$
$$+ 36Q^{720} + \frac{254}{3} Q^{768} + \ldots \tag{4.9}$$

ავირჩიოთ A მუდმივი ისე, რომ Q^{48}-ის კოეფიციენტი $\psi(\tau;\ 3,\ 2)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხებად იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. ისე რომ

$$2 - \frac{14}{3} - 2A = 0, \quad \text{ე. ი.} \quad A = -\frac{4}{3}.$$

ადვილად მოწმდება, რომ Q^{M} $(M \leqslant 768)$-ის ყველა კოეფიციენტი $\psi(\tau;\ 3,\ 2)$-ის გაშლაში Q-ს ხარისხებად არის ნულის ტოლი.

თეორემა 3a. ვთქვათ, $n = 2^{\alpha} m = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot u$, $(m,\ 2) = (u,\ 6) = 1$, $M = 24n$, მაშინ

$$r(n;\ 2,\ 3) = \frac{1}{3} \left\{ 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha} \left(\frac{-2}{m} \right) \right\} \times$$
$$\times \left\{ 3^{\beta} - (-1)^{\alpha} \left(\frac{u}{3} \right) \right\} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{6}{d_1} \right) d_2 - \frac{4}{3} \nu(M), \tag{41.0}$$

სადაც $\nu(M)$ არის Q^{M}-ის კოეფიციენტი

$$\vartheta_{20}(\tau;\ 0,\ 6)\, \vartheta_{21}(\tau;\ 0,\ 6)\, \vartheta_{41}(\tau;\ 0,\ 6)\, \vartheta_{12,0}(\tau;\ 0,\ 12)$$

ფუნქციის გაშლაში Q-ს ხარისხებად.

მტკიცება 1a თეორემის ანალოგიურად.

§ 5. ამ პარაგრაფში განიხილება რიცხვთა წარმოდგენა

$$7\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4^2$$

ფორმით.

[1] ნაშრომის 16 ლემის თანახმად

$$X(\tau)=\{\vartheta_{01}(\tau;0,2)\,\vartheta_{20}(\tau;0,2)\,\vartheta^4_{00}(\tau;0,14)\,\vartheta_{01}(\tau;0,14)\,\vartheta_{14,0}(\tau;0,14)\}^{\frac{1}{2}}$$

ფუნქციის ორივე შტო არის τ-ს ცალსახა რეგულარული ფუნქცია.

თეორემა 4.

$$\vartheta^3_{00}(\tau;\ 0,\ 14)\,\vartheta_{00}(\vartheta;\ 0,\ 2)=\theta(\tau;\ 7,\ 1)+\frac{3}{4}X(\tau).$$

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\psi(\tau;\ 7,\ 1)=\vartheta^3_{00}(\tau,\ 0,\ 14)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2)-A\,X(\tau) \tag{5.1}$$

ფუნქციის გაშლაში Q-ს ხარისხებად A მუდმივი ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ Q^M $(M\leqslant 1344)$-ის კოეფიციენტები იყოს ნულის ტოლი.

თუ [1] ნაშრომის 31, 32, 33 ლემებში დავუშვებთ,

$$a=7,\ b=7,\ \gamma=0,\ a'=1,\ b'=1,\ \gamma'=1,\ l=1,\ v=7^\beta,$$

ე. ი.

$$M=28n,\quad n=2^\alpha\ 7^\beta\cdot u,\quad u=\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid 14}} p^\beta,\ r=1,\ \omega=6,$$

მაშინ, მივიღებთ

$$\rho(M;\ 7,\ 1)=\frac{2^\alpha\cdot 7^\beta\ \pi^2}{7^{\frac{3}{2}}}\chi_2\chi_7L^{-1}(2,\ 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{7}{d_1}\right)d_2, \tag{5.2}$$

სადაც

$$\chi_2=\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right\}2^{-\alpha-1}, \tag{5.3}$$

$$\chi_3=\left\{7^\beta+(-1)^\beta\left(\frac{u}{7}\right)\right\}7^{-\beta}, \tag{5.4}$$

$$L(2,\ 7)=\frac{2\pi^2}{7^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.5}$$

(5.2)—(5.5) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\rho(M;\ 7,\ 1)=\frac{1}{2}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right\}$$

$$\times\left\{7^\beta+(-1)^\beta\left(\frac{u}{7}\right)\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{7}{d_1}\right)d_2. \tag{5.6}$$

თუ დავუშვებთ, $Q=exp\{\pi i\tau/14\}$, მივიღებთ

$$\vartheta^3_{00}(\tau,\ 0,\ 14)\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 2)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{196k^2}\right)^3\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{28k^2}$$
$$=1+2Q^{28}+2Q^{112}+6Q^{196}+12Q^{224}+2Q^{252}+12Q^{308}$$
$$+12Q^{392}+24Q^{420}+14Q^{448}+24Q^{504}+8Q^{588}+16Q^{616}$$
$$+36Q^{644}+18Q^{700}+6Q^{784}+12Q^{812}+40Q^{840}+24Q^{896}$$
$$+24Q^{980}+50Q^{1008}+28Q^{1036}+72Q^{1092}+24Q^{1176}+60Q^{1204}$$
$$+60Q^{1232}+64Q^{1288}+18Q^{1316}+\dots, \tag{5.7}$$

$$X^2(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kQ^{28k^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{7(2k+1)2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{196k2}\right)^4$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q^{49(2k+1)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kQ^{196k^2}=4\,(Q^{56}-2Q^{84}+Q^{112}-2Q^{140}$$
$$+2Q^{168}+3Q^{224}+4Q^{252}-12Q^{280}+4Q^{308}-10Q^{336}+10Q^{364}$$
$$+Q^{392}+16Q^{420}-3Q^{448}-20Q^{476}+Q^{504}-6Q^{532}+8Q^{560}$$
$$+6Q^{588}+16Q^{616}-32Q^{644}+10Q^{672}-4Q^{700}+40Q^{728}-28Q^{756}$$
$$+9Q^{784}-44Q^{812}-32Q^{840}+52Q^{868}+27Q^{896}+48Q^{924}$$
$$-34Q^{952}-10Q^{980}-71Q^{1008}+36Q^{1036}+30Q^{1064}+24Q^{1092}$$
$$-44Q^{1120}-36Q^{1148}-30Q^{1176}+24Q^{1204}+72Q^{1232}+22Q^{1266}$$
$$+62Q^{1288}-68Q^{1316}+\dots), \tag{5.8}$$

საიდანაც

$$X(\tau)=2\,(Q^{28}-Q^{56}-Q^{112}+Q^{196}+3Q^{224}-3Q^{252}-2Q^{308}+3Q^{392}$$
$$-Q^{448}+3Q^{504}-6Q^{616}+2Q^{644}+5Q^{700}-5Q^{784}-2Q^{812}-5Q^{896}+3Q^{1008}$$
$$+6Q^{1036}+10Q^{1092}-2Q^{1204}+10Q^{1232}+6Q^{1288}+24Q^{1316}+\dots). \tag{5.9}$$

გამოვთვალოთ $\rho(M;\ 7,\ 1)$-ის მნიშვნელობანი (5.6) ფორმულით და ჩავსვათ (1.6)-ში, მივიღებთ

$$\theta(\tau;\ 7,\ 1)=1+\frac{1}{2}Q^{28}+\frac{3}{2}Q^{56}+\frac{7}{2}Q^{112}+\frac{9}{2}Q^{196}+\frac{15}{2}Q^{224}$$
$$+\frac{13}{2}Q^{252}+15Q^{308}+\frac{15}{2}Q^{392}+34Q^{420}+\frac{31}{2}Q^{448}-\frac{39}{2}Q^{504}$$
$$+8Q^{558}+25Q^{616}+33Q^{644}+\frac{21}{2}Q^{700}+\frac{27}{2}Q^{784}+15Q^{812}$$

$$+40Q^{840}+\frac{63}{2}Q^{896}+24Q^{984}+\frac{91}{2}Q^{1008}+19Q^{1036}$$

$$+57Q^{1092}+24Q^{1176}+63Q^{1204}+45Q^{1232}+55Q^{1288}+\dots \qquad (5.10),$$

შევარჩიოთ A მუდმივი ისე, რომ Q^{28}-ის კოეფიციენტი $\psi(\tau;\,7,\,1)$-ის გაშლაში იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. ისე რომ

$$2-\frac{1}{2}-2A=0 \quad \text{ე. ი.} \quad A=\frac{3}{4}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $Q^{\mathbf{M}}$ $(M\leqslant 1344)$-ის ყველა კოეფიციენტი $A=\frac{3}{4}$-სათვის არის ნულის ტოლი.

თეორემა 4a. ვთქვათ, $n=2^{\alpha}m=2^{\alpha}\,7^{\beta}\cdot u$, $(m,\ 2)=(u,\ 14)=1$ $M=28n$, მაშინ

$$r(n;\,7,\,1)=\frac{1}{2}\left\{7^{\beta}+(-1)^{\beta}\left(\frac{u}{7}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{2^{\alpha+1}+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right\}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{7}{d_1}\right)d_2+\frac{3}{4}\nu(M), \qquad (5.11)$$

სადაც $\nu(M)$ არის $X(\tau)$ ფუნქციის Q-ს ხარისხებად გაშლაში Q^{M}-ის კოეფიციენტები.

მტკიცება 2a თეორემის ანალოგიურად.

ალგებრა-გეომეტრიის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 18. X 1962 წ.)

Р. И. Беридзе

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Резюме

Пусть $r(n;\,a,\,a')$ обозначает число представлений натуральных чисел n квадратичной формой

$$f=a\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+a'x_4^2,$$

где a и a'—заданные натуральные числа.

В настоящей работе получены точные формулы для числа представлений чисел n формами:

$$f = 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2,\ 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3x_4^2,$$

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_4^2,\ 7(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2$$

(см. формулы (2.10), (3.10), (4.10), (5.11)).

ლიტერატურა

[1] Г. Ломадзе. О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными. Труды Тбилисского государственного университета 76 (1959), 107—169.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 102, 1964
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 102, 1964

ი. ტოროშელიძე

ვოლტერას ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ერთი უსასრულო სისტემის შესახებ

განვიხილოთ ვოლტერას ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგი სახის უსასრულო სისტემა

$$\varphi_i(z) - \lambda \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty K_{ij}(z, t)\varphi_j(t) \frac{dt}{t^\alpha (t-z)^\beta} = f_i(z), \tag{1}$$

$$z \neq 0, \; z \in L, \quad i = 1, 2, \ldots$$

სადაც ინტეგრება ხდება კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე, კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ უსასრულო L წირის გასწვრივ.

$f_i(z)$ და $K_{ij}(z, t)$ მოცემული ფუნქციებია, α და β მოცემული ნამდვილი არაუარყოფითი მუდმივი რიცხვები, λ-პარამეტრი, ხოლო $\varphi_i(z)$ უცნობი ფუნქციები.

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ, რომ თუ L წირი, $K_{ij}(z, t)$, და $f_i(z)$ ფუნქციები და α და β მუდმივები აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს, მაშინ არსებობს (1) სისტემის ერთადერთი ამოხსნა გარკვეულ ვექტორულ სივრცეში.

1. წინასწარი აღნიშვნები და განმარტებანი. კომპლექსური z ცვლადის სიბრტყეზე განვიხილოთ კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი უწყვეტი უსასრულო L წირი, რომელიც თავის თავს არ ჰკვეთს. ვიგულისხმოთ, რომ L წირის ნებისმიერი სასრული ნაწილი გაწრფევადია. რკალური აბსცისი s ავთვალოთ კოორდინატთა სათავიდან. $z = z(s)$, $0 \leqslant s < +\infty$ იყოს L წირის პარამეტრული განტოლება.

ვთქვათ, L წირის ყოველი ორი ნებისმიერი $z(s)$ და $t(\sigma)$ წერტილისათვის შესრულებულია უტოლობა

$$A \cdot |t(\sigma) - z(s)| \geqslant |\sigma - s|, \tag{2}$$

სადაც A არის დადებითი მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული z და t წერტილების შერჩევაზე.

t^α და $(t-z)^\beta$ მრავალსახა ფუნქციათა მნიშვნელობები, როდესაც $t(\sigma) \in L$, ხოლო $z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, L წირის ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, განისაზღვრებიან ჩვეულებრივი წესით, შევარჩევთ რა მათ გარკვეულ

შტოებს L წირის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე და ამ შტოების ზღვრულ მნიშვნელობებს ჭრილის ერთერთ ნაპირზე.

ახლა განვიხილოთ სიმრავლე $A(\omega, L)$ ყველა იმ ვექტორებისა

$$\varphi(z)=(\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots), \tag{3}$$

რომელთა კომპონენტები $\varphi_i(z)$, $i=1, 2, \ldots$ არიან ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციები L წირის ნებისმიერ სასრულ ნაწილზე $(0<s_0\leqslant s\leqslant l<\infty)$ და აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$|\varphi_i(z)|\leqslant\frac{BA_i}{|z|^{\omega}},\ z(s)\in L,\ 0<s_0\leqslant s<+\infty, \tag{4}$$

სადაც A_i და ω მოცემული დადებითი რიცხვებია, რომელნიც არ არიან დამოკიდებული φ ვექტორის შერჩევაზე, ხოლო B რაიმე სასრული დადებითი მუდმივი რიცხვი, რომელიც შეიძლება დამოკიდებული იყოს φ ვექტორის შერჩევაზე, მაგრამ არ არის დამოკიდებული i ინდექსზე.

ცხადია, რომ სიმრავლე $A(\omega, L)$ წარმოადგენს წრფივ ვექტორულ სივრცეს.

ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (1) სისტემის მარჯვენა მხარეებისაგან შედგენილი ვექტორი $f(z)=(f_1(z), f_2(z)\cdots)\in A(\omega, L)$ და

$$|f_i(z)|\leqslant\frac{B_0A_i}{|z|^{\omega}},\ z(s)\in L,\ 0<s_0\leqslant s<+\infty. \tag{5}$$

ვთქვათ, $K_{ij}(z, t)$ $(i, j=1, 2, \ldots)$, $z(s), t(\sigma)\in L$, $0<s_0\leqslant s\leqslant\sigma<+\infty$ არიან ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციები, როდესაც z და t იცვლებიან L წირის ნებისმიერ სასრულ ნაწილზე, და აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$|K_{ij}(z, t)|\leqslant M_{ij},\ z(s),\ t(\sigma)\in L,\ 0<s_0\leqslant s\leqslant\sigma<+\infty, \tag{6}$$

სადაც M_{ij}-მოცემული დადებითი რიცხვებია.

გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ

$$\sum_{j=1}^{\infty}M_{ij}A_j\leqslant C_0A_i,\ i=1, 2, \ldots \tag{7}$$

სადაც C_0 მოცემული დადებითი რიცხვია.

შემდეგ, ვიგულისხმოთ, რომ

$$\alpha>0,\ 0\leqslant\beta<1,\ \alpha+\beta>1. \tag{8}$$

ინტეგრალი (1) სისტემაში წარმოადგენს ზღვარს ინტეგრალისა, რომელიც აღებულია L წირის ნებისმიერ სასრულ ნაწილზე $s_0\leqslant\sigma\leqslant l$, როცა $l\to+\infty$.

2. (1) სისტემის ამოხსნის არსებობის დამტკიცება. ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ L წირი, $f_i(z)$ და $K_{ij}(z, t)$ ფუნქციები და α და β მუდმივები აკმაყოფილებენ, შესაბამისად, (2), (5), (6), (7) და (8) პირობებს, მაშინ ვექტორულ სივრცეში $A(\omega, L)$ არსებობს ვექტორი $\varphi(z)$, რომლის კომპონენტები $\varphi_i(z)$ $(i=1, 2,\ldots)$ თითქმის ყველგან აკმაყოფილებენ (1) სისტემას.

შემდეგ, ვაჩვენებთ, რომ ეს ამოხსნა არის ერთადერთი $A(\omega, \Gamma)$ სივრცეში.

(1) სისტემის უცნობი $\varphi(z)$ ვექტორის $\varphi_i(z)$ კომპონენტი ვეძებოთ λ პარამეტრის ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$\varphi_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_{in}(z), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

სადაც

$$\varphi_{i0}(z) \equiv f_i(z) \tag{10}$$

და

$$\varphi_{in}(z) = \int_z^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}(z, t)\, \varphi_{jn-1}(t) \frac{dt}{t^{\alpha}(t-z)^{\beta}}, \tag{11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi_{i1}(z) = \int_z^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}(z, t) f_j(t) \frac{dt}{t^{\alpha}(t-z)^{\beta}}.$$

აქედან, (2) (5) (6), (7) და (8)-ს თანახმად გვექნება

$$|\varphi_{i1}(z)| \leqslant \int_s^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M_{ij} B_0 A_j \frac{A^{\alpha+\beta+\omega}\, d\sigma}{\sigma^{\alpha+\omega}(\sigma - s)^{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant B_0 C_0 A^{\alpha+\beta+\omega} A_i \int_s^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\omega}(\sigma - s)^{\beta}} =$$

$$= B_0 C_0 A^{\alpha+\beta+\omega} \frac{A_i}{s^{\alpha+\beta+\omega-1}} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha+\omega}(u-1)^{\beta}}.$$

მაგრამ

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha+\omega}(u-1)^{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\omega-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+\omega)}.$$

ამიტომ გვექნება

$$|\varphi_{i1}(z)| \leqslant B_0 C_0 A^{\alpha+\beta+\omega} H(\alpha+\omega, 1-\beta) \frac{A_i}{|z|^{\alpha+\beta+\omega-1}}, \tag{12}$$

სადაც

$$H(p, q) = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)}, \quad p > q > 0. \tag{13}$$

ანალოგიურად (11) და (12) დან მივიღებთ

$$|\varphi_{i_2}(z)| \leqslant B_0 C_0 A^{\alpha+\beta+\omega} H(\alpha+\omega,\ 1-\beta) \sum_{j=1}^{\infty} M_{ij} A_j \int_s^{\infty} \frac{A^{\alpha+\beta}\, d\sigma}{\sigma^{2\alpha+\beta+\omega-1}\,(\sigma-s)^{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant B_0 C_0^2 A^{2\alpha+2\beta+\omega}\, H(\alpha+\omega,\ 1-\beta) \frac{A_i}{s^{2\alpha+2\beta+\omega-2}} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{2\alpha+\beta+\omega-1}\,(\sigma-s)^{\beta}}$$

ანუ

$$|\varphi_{i_2}(z)| \leqslant B_0 C_0^2 A^{2\alpha+2\beta+\omega}\, H(\alpha+\omega,\ 1-\beta)\, H(2\alpha+\beta+\omega-1,\ 1-\beta) \times$$

$$\times \frac{A_i}{|z|^{2\alpha+2\beta+\omega-2}}. \tag{14}$$

სრული მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$|\varphi_{in}(z)| \leqslant B_0 C_0^n A^{n(\alpha+\beta)+\omega} \prod_{k=1}^{n} H(\mu_k,\ 1-\beta) \frac{A_i}{|z|^{n(\alpha+\beta-1)+\omega}}, \tag{15}$$

სადაც

$$\mu_k = k(\alpha+\beta-1)+\omega+1-\beta, \tag{16}$$

$$k=1,\ 2,\ldots,n;\ n=1,\ 2,\ldots$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (15)-ის ძალით, ფუნქციონალური (9) მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია, როცა $z(s) \in L$, $0 < s_0 \leqslant s < +\infty$. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T_n = B_0(|\lambda|\, C_0)^n A^{n(\alpha+\beta)+\omega} \prod_{k=1}^{n} H(\mu_k,\ 1-\beta) \frac{A_i}{|z|^{n(\alpha+\beta-1)+\omega}}. \tag{17}$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{|\lambda|\, C_0 A^{\alpha+\beta}}{|z|^{\alpha+\beta-1}} H(\mu_{n+1},\ 1-\beta). \tag{18}$$

მაგრამ (13)-ის ძალით გვაქვს

$$H(\mu_{n+1},\ 1-\beta) = \frac{\Gamma(\mu_{n+1}+\beta-1)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\mu_{n+1})}. \tag{19}$$

გამოვიყენოთ კარგად ცნობილი ფორმულა

$$\log \Gamma(u) = \left(u-\frac{1}{2}\right)\log u - u + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\theta(u)}{12u}, \tag{20}$$

სადაც $u > 0$, ხოლო $0 < \theta(u) < 1$.

(19) და (20)-დან ადვილად მიიღება, რომ

$$H(\mu_{n+1},\ 1-\beta) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\mu_{n+1}^{1-\beta}}\, e^{O\left(\frac{1}{\mu_{n+1}}\right)}, \tag{21}$$

სადაც

$$\left| O\left(\frac{1}{\mu_{n+1}}\right) \right| \leqslant \frac{D_1(\alpha, \beta, \omega)}{\mu_{n+1}}, \tag{22}$$

ხოლო $D_1(\alpha, \beta, \omega)$ დადებითი მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ α, β და ω მუდმივებზე.

(21) და (22)-დან გვექნება, რომ

$$H(\mu_{n+1}, 1-\beta) \leqslant \frac{D_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\mu_{n+1}^{1-\beta}}. \tag{23}$$

ახლა (16) და (23)-დან ცხადია, რომ

$$H(\mu_{n+1}, 1-\beta) \leqslant \frac{D_0(\alpha, \beta, \omega)}{(n+1)^{1-\beta}}, \tag{24}$$

სადაც $D_0(\alpha, \beta, \omega)$ დადებითი მუდმივი მხოლოდ α, β და ω მუდმივებზეა დამოკიდებული.

ამიტომ, (18) და (24)-დან გვექნება

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = 0, \; z(s) \in L, \; 0 < s_0 \leqslant s < +\infty. \tag{25}$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ (9) ფუნქციონალური მწკრივი კრებადია თითქმის ყველა z-სათვის, $z(s) \in L$, $0 < s_0 \leqslant s < +\infty$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(z)$ ვექტორი, რომლის კომპონენტები $\varphi_i(z)$ წარმოადგენენ (9) მწკრივის ჯამებს, ეკუთვნის $A(\omega, L)$ სივრცეს.

მართლაც, (15) და (24)-დან გამომდინარეობს,

$$|\varphi_{in}(z)| \leqslant B_0 C_0^n D_0^n A^{n(\alpha+\beta)+\omega} \frac{A_i}{n!^{1-\beta} |z|^{n(\alpha+\beta-1)+\omega}}, \tag{26}$$

$$n = 1, 2 \ldots$$

ამიტომ, (9), (5) და (26)-დან მივიღებთ

$$|\varphi_i(z)| \leqslant \frac{B_0 A_i}{|z|^\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n B_0 C_0^n D_0^n A^{n(\alpha+\beta)+\omega} \frac{A_i}{n!^{1-\beta} |z|^{n(\alpha+\beta-1)+\omega}}$$

ანუ

$$|\varphi_i(z)| \leqslant \frac{B A_i}{|z|^\omega}, \tag{27}$$

სადაც

$$B = B_0 + B_0 \cdot A^\omega \cdot g(E_0), \tag{28}$$

$$g_0(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!^{1-\beta}}, \tag{29}$$

ხოლო

$$E_0 = \frac{|\lambda| C_0 D_0 A^{2\alpha+2\beta-1}}{s_0}. \tag{30}$$

(27)—(30)-დან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(z) \in A(\omega, L)$.

3. (1) სისტემის ამოხსნის ერთადერთობის დამტკიცება. ვთქვათ, გარდა $\varphi(z) \in A\,(\omega,\ L)$ ვექტორისა, რომლის კომპონენტები (9) მწკრივით არიან წარმოდგენილი, არსებობს (1) სისტემის ამოხსნა—ვექტორი $\psi(z)=(\psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \ldots) \in A\,(\omega,\ L)$. დავამტკიცოთ, რომ $\psi(z) \equiv \varphi(z)$ თითქმის ყველა z-სათვის, $z(s) \in L,\ 0 < s_0 \leqslant s < +\infty$. მართლაც, შევადგინოთ სხვაობა $\nu(z)=\psi(z)-\varphi(z)$. ცხადია, რომ ვექტორი $\nu(z) \in A\,(\omega,\ L)$ და მისი კომპონენტები $\nu_i(z)$ $i=1,\ 2,\ldots$ აკმაყოფილებენ უსასრულო ერთგვაროვან სისტემას:

$$\nu_i(z) - \lambda \int_z^{\infty} K_{ij}(z,\ t)\nu_j(t)\,\frac{dt}{t^{\alpha}(t-z)^{\beta}} = 0, \tag{1_0}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ z(s),\ t(\sigma) \in L,\ 0 < s_0 \leqslant s \leqslant \sigma < +\infty.$$

რადგან $\nu(z) \in A\,(\omega,\ L)$, ამიტომ არსებობს ისეთი B^* დადებითი რიცხვი, რომ

$$|\nu_i(z)| \leqslant B^* \frac{A_i}{|z|^{\omega}}. \tag{31_0}$$

(1_0) და (31_0)-დან, ისევე როგორც ზემოთ, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$|\nu_i(z)| \leqslant B^* |\lambda|\, C_0 A^{\alpha+\beta+\omega} H\,(\alpha+\omega,\ 1-\beta)\,\frac{A_i}{s^{\alpha+\beta+\omega-1}}. \tag{31_1}$$

ანალოგიურად, (1_0) და (31_1) დან მივიღებთ, რომ

$$|\nu_i(z)| \leqslant B^* |\lambda|^2 C_0^2 A^{2\alpha+2\beta+\omega} H\,(\alpha+\omega,\ 1-\beta)\, H\,(2\alpha+\beta+\omega-1,\ 1-\beta) \times$$

$$\times \frac{A_i}{s^{2\alpha+2\beta+\omega-2}}. \tag{31_2}$$

სრული მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის გვაქვს

$$|\nu_i(z)| \leqslant B^* |\lambda|^n C_0^n A^{n(\alpha+\beta)+\omega} \prod_{k=1}^{n} H\,(\mu_k,\ 1-\beta)\,\frac{A_i}{s^{n(\alpha+\beta-1)+\omega}}, \tag{31_n}$$

სადაც μ_k განისაზღვრება ტოლობიდან (16).

(31_n) და (24)-დან გვაქვს თითქმის ყველა z-სათვს, $z(s) \in L,\ s \geqslant s_0$

$$|\nu_i(z)| \leqslant B^* A^{\omega}\,\frac{A_i}{s_0^{\omega}} \left(\frac{|\lambda|\, C_0 D_0\, A^{\alpha+\beta}}{s_0^{\alpha+\beta-1}}\right)^n \frac{1}{n!^{1-\beta}}. \tag{32}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, (32)-დან მივიღებთ, რომ $\nu_i(z) \equiv 0$, ანუ, რაც იგივეა, $\psi_i(z) \equiv \varphi_i(z)$ თითქმის ყველა z-სათვის, $z(s) \in L,\ s \geqslant s_0$ და როცა $i=1,\ 2\ldots$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

შემდგომ სტატიაში ჩვენ შევისწავლით (1) სისტემის ამოხსნის არსებობის და ერთადერთობის საკითხს იმ შემთხვევაში, როცა $f_i(z)$ და $K_{ij}(z, t)$ ფუნქციები ეკუთვნიან ლებეგის აზრით გარკვეული ხარისხით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასებს.

დიფერენციალური და ინტეგრალური
განტოლების კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 30. XII. 1962)

И. А. Торошелидзе

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Резюме

В настоящей работе устанавливается, что бесконечная система (1) сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра, где линия интегрирования L, функции $f_i(z)$ и $K_{ij}(z, t)$ $(i, j=1, 2...)$ и постоянные α и β удовлетворяют определенным условиям, имеет единственное решение в определенном векторном пространстве.

ლიტერატურა

1. Г. Мюнц, Интегральные уравнения, Л.-М., 1934.
2. Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, М., 1960.

გამომცემლობის რედაქტორები: ლ. გამცემლიძე, ზ. მიქაძე

თბილისის უნივერსიტეტის გამოცემა, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, № 1.
Издание Тбилисского университета, Тбилиси, проспект И. Чавчавадзе, № 1.