ზ. ნაცვლიშვილი, ა. კვალიაშვილი, ზ. ჭყონია,
ა. ბეგალიშვილი, რ. დანელია, ი. ჯვარშეიშვილი

განტოლებები, უტოლობები, სისტემები

(მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელთათვის და აბიტურიენტთათვის)

რედაქტორი ი. ჩახტაური

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა დამხმარე სახელმძღვანელოდ მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელებისა და აბიტურიენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1985

22·1 Я 720
53 (077)
6 375

ნაშრომში ამოხსნილია მოდულის შემცველი განტოლებები, უტოლობები, უტოლობათა სისტემები. განხილულია პარამეტრული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის მეთოდი და კვადრატულ სამწევრთან დაკავშირებული საკითხები. მოცემულია მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლის თეორიული და პრაქტიკული მასალა, არითმეტიკული და ალგებრული ამოცანები. ყოველ თავში მოყვანილია სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

რ ე ც ე ნ ზ ე ნ ტ ე ბ ი: ი. ჩახტაური — თბილისის პოლიტექნიკური ინსტიტუტის დოცენტი.

მ. ყურაშვილი — თბილისის ა. პუშკინის სახელობის პედაგოგიური ინსტიტუტის დოცენტი.

H $\frac{20202-179}{M-602(08)-85}$ 274 — 85

© გამომცემლობა „განათლება", 1985.

I თავი

განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

§ 1. დამხმარე ცნებები და განსაზღვრებები

განტოლების ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. სანამ განტოლებებს განვიხილავდეთ, გავიხსენოთ ზოგიერთი განსაზღვრებები და აღნიშვნები.

ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a<x<b$ უტოლობებს ($a<b$), ეწოდება ინტერვალი ანუ შუალედი და აღინიშნება $]a, b[$ სიმბოლოთი.

ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a\leqslant x\leqslant b$ უტოლობებს, სეგმენტი ეწოდება და აღინიშნება $[a, b]$ სიმბოლოთი.

$a\leqslant x<b$ და $a<x\leqslant b$ ნახევარსეგმენტები აღინიშნებიან შესაბამისად $[a, b[$ და $]a, b]$ სიმბოლოებით:

თუ ნამდვილ რიცხვთა A სიმრავლის ყოველ x რიცხვს გარკვეული f წესით შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი y რიცხვი, მაშინ y-ს უწოდებენ x ცვლადის ფუნქციას და წერენ $y=f(x)$.

x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე (A სიმრავლე) წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

x არის დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო y არის x ცვლადის ფუნქცია.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე A სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2-სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $x_1<x_2$ პირობას, გამომდინარეობს $f(x_1)<f(x_2)$ უტოლობა.

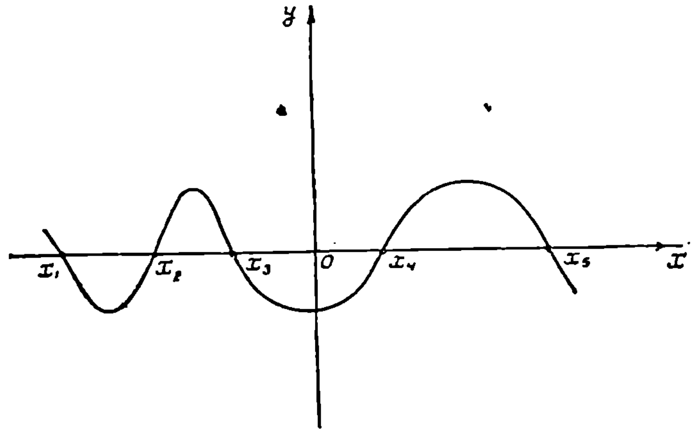
$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი A სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2-სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $x_1<x_2$ პირობას, გამომდინარეობს, რომ $f(x_1)>f(x_2)$.

თუ $f(\alpha)=0$, მაშინ α-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნული. მაგალითად, $f(x)=x^3-5x^2+6x$ ფუნქციის ნულების სიმრავლეა $A=\{0, 2, 3\}$ (რადგანაც $f(0)=f(2)=f(3)=0$).

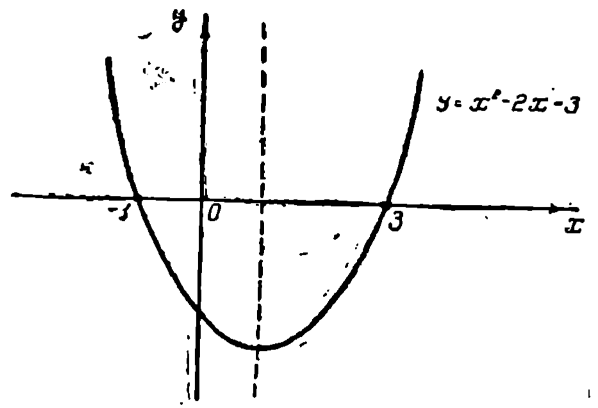
$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დადებითი რაიმე $]a, b[$ ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი x რიცხვისათვის $f(x)>0$.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უარყოფითი $]a, b[$ ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი x-სათვის, $f(x)<0$.

ცხადია, უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის ნიშნის შეცვლა შეიძლება მოხდეს ამ ფუნქციის ნულებში (ნახ. 1). ე. ი. თუ $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ნულების სიმრავლეს და $]-\infty, x_1[$ ინტერვალზე $f(x) > 0$, მაშინ $f(x) < 0$, როცა $x_1 < x < x_2$; $f(x) > 0$, როცა $x_2 < x < x_3$; $f(x) < 0$, როცა $x_3 < x < x_4$; $f(x) > 0$, როცა $x_4 < x < x_5$; $f(x) < 0$, როცა $x_5 < x < +\infty$.



ნახ. 1



ნახ. 2

მაგალითად, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ფუნქციის ნულების სიმრავლეა $A = \{-1, 3\}$; ცხადია, რომ $x^2 - 2x - 3 > 0$, როცა $-\infty < x < -1$; $x^2 - 2x - 3 < 0$, როცა $-1 < x < 3$ და $x^2 - 2x - 3 > 0$, როცა $3 < x < +\infty$. ამრიგად, $y = x^2 - 2x - 3$ ფუნქციის ნიშნის შეცვლა მოხდა მის ნულებში (-1 და 3-ში) (ნახ. 2).

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ნულში შეიძლება არ მოხდეს მისი ნიშნის შეცვლა. მაგალითად, $f(x)=x^2-2x+1$ ფუნქციის ნულია $x=1$, მაგრამ $f(x)$ არ იცვლის ნიშანს ამ წერტილში: $f(x)=(x-1)^2\geqslant 0$.

თუ x_1 და x_2 რიცხვები უწყვეტი $f(x)$-ის უახლოესი ნულებია, მაშინ $]x_1, x_2[$ ინტერვალზე $f(x)$ ფუნქციის ნიშნის დასადგენად საკმარისია დავადგინოთ $f(x)$-ის ნიშანი $]x_1, x_2[$ ინტერვალის ერთ ნებისმიერ წერტილში.

A და B სიმრავლეთა **საერთო ნაწილი** (გადაკვეთა), ანუ **კონიუქცია** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან როგორც A ისე B სიმრავლეს და აღინიშნება ასე: $A\cap B$ ან $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$ ე. ი.

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \quad \text{და} \quad x\in B\}.$$

A და B სიმრავლეთა **გაერთიანება** ანუ **დიზიუნქცია** არის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლე, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნიან და აღინიშნება ასე: $A\cup B$ ან $\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array}\right.$ ე. ი. $x\in A\cup B$ ნიშნავს, რომ ან $x\in A$, $x\notin B$, ან $x\in B$, $x\notin A$, ან $x\in A$ და $x\in B$.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია A სიმრავლეზე, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია B — სიმრავლეზე.

თუ A და B სიმრავლეთა, რაიმე, საერთო D არეზე შესრულებულია $f(x)=\varphi(x)$ ტოლობა, მაშინ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს უწოდებენ იგივურად ტოლს D არეზე, ხოლო $f(x)=\varphi(x)$ ტოლობას უწოდებენ **იგივეობას** ამავე D არეზე და წერენ:

$$f(x)\equiv\varphi(x).$$

ხშირად გვხვდება ისეთი ფუნქციების განხილვა, რომელთათვისაც უცნობია არგუმენტის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელზედაც ისინი იგივურად ტოლია. ამ შემთხვევაში $f(x)=\varphi(x)$ ტოლობას უწოდებენ **განტოლებას**.

$f(x)=\varphi(x)$ განტოლების ამოხსნა ეს ის ამოცანაა, რომელიც გულისხმობს x არგუმენტის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენას, რომელთათვისაც $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ტოლია და x-ის ამ მნიშვნელობებს უწოდებენ $f(x)=\varphi(x)$ განტოლების **ფესვებს**, ანუ **ამონახსნებს**.

$f(x)=\varphi(x)$ განტოლების **განსაზღვრის არე** ეწოდება $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა საერთო ნაწილს.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ, $\sqrt{2x-4}=\frac{1}{2-x}$ განტოლების განსაზღვრის არეა $f(x)=\sqrt{2x-4}$ და $\varphi(x)=\frac{1}{2-x}$ ფუნქციათა განსაზღვრის არეების საერთო ნაწილი: $f(x)=\sqrt{2x-4}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $2\leqslant x<+\infty$, $\varphi(x)=\frac{1}{2-x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[-\infty, 2[$ და $]2, +\infty[$ შუალედები. მოცემული განტოლების განსაზღვრის არეა $]2, +\infty[$ შუალედი.

ახლა გავიხსენოთ ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობის, ანუ მ ო დ უ ლ ი ს და ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი ფ ე ს ვ ი ს განმარტება:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & \text{თუ} \quad x\geqslant 0, \\ -x, & \text{თუ} \quad x<0. \end{cases}$$

თუ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, წერენ $a\in A$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $a\notin A$.

თუ x აკმაყოფილებს რაიმე P პირობას, მაშინ ამ ელემენტთა X სიმრავლე ჩაიწერება ასე:

$$X=\{x\,|\,x \text{ აკმაყოფილებს } P \text{ პირობას}\}$$

და იკითხება: იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ P პირობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ: 1) 2-ზე მეტი და 3-ზე ნაკლებ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ჩაიწერება ასე: $\{x\,|\,2<x<3\}$; 2) $x^2-5x+6=0$ განტოლების $x_1=2$ და $x_2=3$ ფესვთა სიმრავლე ჩაიწერება ასე: $A=\{2, 3\}=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$.

§ 2. ირაციონალური განტოლებები

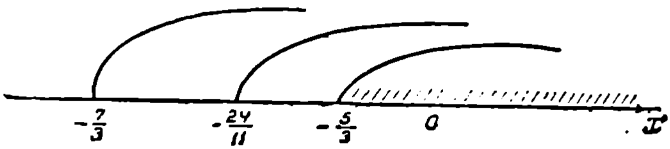
ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით ზოგიერთი ირაციონალური განტოლების ამოხსნის მეთოდს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება (ე. ი. ვიპოვოთ განტოლების ფესვთა სიმრავლე):

$$\sqrt{3x+5}+\sqrt{4x+7}=\sqrt{11x+24}. \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: დავადგინოთ განტოლების განსაზღვრის არე. ამისათვის ვიპოვოთ (1) განტოლებაში შემავალი ფუნქციების განსაზღვრის არეთა კონიუქცია: $\begin{cases} 3x+5\geqslant 0, \\ 4x+7\geqslant 0, \\ 11x+24\geqslant 0. \end{cases}$ აქედან ადვილად მივიღებთ (1) გან-

ტოლების განსაზღვრის არეს: $A = \left\{x \mid x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[\,\right\}$ (ნახ. 3). ეს გარემოება წინასწარ იმ ფაქტზე მეტყველებს, რომ (1) განტოლების ფესვთა სიმრავლე მოთავსდება $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ შუალედში, ე. ი. განტოლების ამოხსნის შედეგად მიღებული რიცხვებიდან ჩვენ მხოლოდ იმ რიცხვებს შევინარჩუნებთ, რომლებიც განტოლების განსაზღვრის არეში შედიან. ეს რიცხვები განტოლების ფესვები იქნება (შეიძლება მივიღოთ დამატებითი ფესვებიც), ფესვები უნდა შემოწმდეს მოცემულ განტოლებაში ჩასმით.



ნახ. 3

(1) განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანის შემდეგ მივიღებთ:

$$3x + 5 + 4x + 7 + 2\sqrt{12x^2 + 41x + 35} = 11x + 24 .$$

გამარტივების შემდეგ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sqrt{12x^2 + 41x + 35} = 2x + 6$$

საიდანაც (ისევ კვადრატში აყვანით) მივიღებთ:

$$8x^2 + 17x - 1 = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მიღებული $x_1 = \frac{-17 - \sqrt{321}}{8}$ და $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{89}}{8}$ რიცხვებიდან მხოლოდ $x_2 = \frac{-17 + \sqrt{321}}{8}$ არის (1) განტოლების ფესვი (რადგან $x_2 \in A$), ხოლო $x_1 = \frac{-17 - \sqrt{321}}{2}$ არის დამატებითი ფესვი (რადგან $x_1 \notin A$). მაშასადამე, მოცემული ირაციონალური განტოლების ფესვია $x = \frac{-17 + \sqrt{321}}{8}$.

პასუხი. (1) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $B = \left\{\frac{-17 + \sqrt{321}}{8}\right\}$.

თუ რაიმე განტოლების განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ ნამდვილ რიცხვთა არეზე ამ განტოლების ფესვთა სიმრავლეც ცარიელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ირაციონალური განტოლება:

$$\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}\,. \qquad (2)$$

ამ შემთხვევაში $1-x\geqslant 0$ და $x-2\geqslant 0$, საიდანაც $x\leqslant 1$ და $x\geqslant 2$. როგორც ჩანს (2) განტოლების განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა $\left(\begin{cases} x\leqslant 1 \\ x\geqslant 2\end{cases}\right.$ — კონიუქცია ცარიელია$\Big)$.

(2) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1-x=x-2,\ 2x=3,\ x=\frac{3}{2}\,.$$

მიღებული $x=\frac{3}{2}$ რიცხვი იქნება (2) განტოლების დამატებითი ფესვი. მოცემული განტოლების ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია. მაშასადამე, თუ განტოლების განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ განტოლების ამოუხსნელად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ განტოლების ფესვთა სიმრავლე ცარიელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$\sqrt{1-6x+9x^2}-\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{4x^2-4x+1}\,. \qquad (3)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ ფესვქვეშა გამოსახულებები სრული კვადრატებია, ე. ი.

$$\sqrt{(1-3x)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=\sqrt{(2x-1)^2}\,. \qquad (4)$$

არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრის თანახმად (4) განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

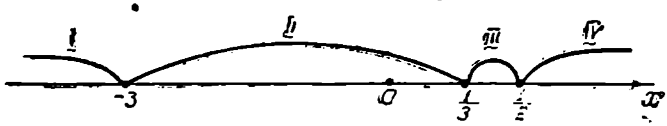
$$|1-3x|-|x+3|=|2x-1| \qquad (5)$$

მაშასადამე, (3) განტოლების ამოხსნა დავიყვანეთ ისეთი განტოლების ამოხსნაზე, რომელიც ცვლად სიდიდეებს შეიცავს მოდულის ნიშნის ქვეშ. გავიხსენოთ მოდულის განმარტება და (5) განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ინტერვალთა მეთოდი. მოდულის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულებების ნულებია $1-3x=0$, $x+3=0$ და $2x-1=0$ განტოლების ფესვები, ე. ი. $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-3$ და $x_3=\frac{1}{2}$ (ნახ. 4). ამიტომ (5) განტოლების ფესვთა სიმრავლის საპოვნელად განვიხილავთ ოთხ შემთხვევას, ე. ი. ვიპოვით ამ განტოლების ფესვებს თითოეულ

შუალედში (ეს საშუალებას მოგვცემს (5) განტოლება ჩავწეროთ ისეთი განტოლებების სახით, რომლებიც უცნობებს შეიცავენ მ ო დ უ ლ ი ს გარეშე): ამოვხსნათ (5) განტოლება. ცხადია, რომ ამ შუალედში ($x \leqslant -3$) $1-3x>0$, $x+3\leqslant 0$ და $2x-1<0$. სიდიდის მ ო დ უ ლ ი ს განმარტების თანახმად (5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x \leqslant -3 \\ (1-3x)+(x+3)=-(2x-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant -3 \\ 4\neq 1, \end{cases}$$

ე. ი. I შუალედში განტოლების ფესვთა სიმრავლე ცარიელია.



ნახ. 4

განვიხილოთ II შუალედი $-3<x\leqslant \frac{1}{3}$, ანუ $\left]-3, \frac{1}{3}\right]$. ცხადია, რომ ამ შუალედში $1-3x\geqslant 0$, $x+3>0$, $2x-1<0$ და (5) განტოლებისათვის გვექნება:

$$\begin{cases} -3<x\leqslant \frac{1}{3} \\ (1-3x)-(x+3)=-(2x-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<x\leqslant \frac{1}{3} \\ x=-\frac{3}{2}, \end{cases}$$

სადაც $x=-\frac{3}{2}$ წარმოადგენს (5) განტოლების ფესვს II შუალედში $\left(-3<-\frac{3}{2}<\frac{1}{3}\right)$.

III შუალედია $\frac{1}{3}<x\leqslant \frac{1}{2}$, ანუ $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, ყველა $x\in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$-სათვის $1-3x<0$, $x+3>0$ და $2x-1\leqslant 0$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}<x\leqslant \frac{1}{2} \\ -(1-3x)-(x+3)=-(2x-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2} \\ 4x=5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}<x\leqslant \frac{1}{2} \\ x=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

მაგრამ რადგან $x=\frac{5}{4}\notin \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, ამიტომ იგი არ იქნება (5) გან-

ტოლების ფესვი. ბოლოს განვიხილოთ IV შემთხვევა, ე. ი. $\frac{1}{2} < x < +\infty$ შუალედი. ამ შუალედისათვის გვექნება $1 - 3x < 0$, $x + 3 > 0$, $2x - 1 > 0$ და ამიტომ:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -(1-3x) - [-(x+3)] = 2x - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$x = -\frac{3}{2}$ არ წარმოადგენს (5) განტოლების ფესვს IV შუალედში, რადგანაც იგი $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლებია.

პასუხი: (5) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $D = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

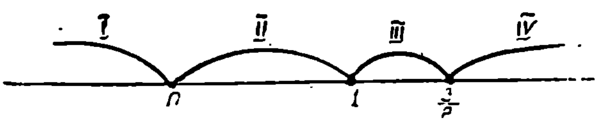
$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + x^2 - |x| - 2 = \sqrt{1 - 2x + x^2}. \qquad (6)$$

ამოხსნა. განტოლება ჩავწეროთ ასე:

$$\sqrt{(2x-3)^2} + x^2 - |x| - 2 = \sqrt{(1-x)^2},$$

ანუ

$$|2x - 3| + x^2 - |x| - 2 = |1 - x|. \qquad (7)$$



ნახ. 5

(7) განტოლების მოდულის ნიშნის ქვეშ მდგომი ფუნქციების ნულებია (ნახ. 5): $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. აქ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა მაგალითში ჩატარებული მსჯელობა, ე. ი. ამოვხსნათ (7) განტოლება თითოეულ შუალედში თანმიმდევრობით:

I) როცა $x \leqslant 0$, მაშინ $2x - 3 < 0$, $1 - x > 0$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ -(2x-3) + x^2 - (-x) - 2 = 1 - x; \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ -2x+3+x^2+x-2-1+x=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x_1=x_2=0. \end{cases}$$

რადგან $x=0$ ეკუთვნის I შუალედს, ამიტომ ამ შუალედში იგი არის (7) განტოლების ფესვი.

II) როცა $0<x\leqslant 1$, მაშინ $2x-3<0$, $1-x\geqslant 0$ და (7) განტოლებიდან გვაქვს:

$$\begin{cases} 0<x\leqslant 1 \\ -(2x-3)+x^2-x-2=1-x, \end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases} 0<x\leqslant 1 \\ x^2-2x=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x\leqslant 1 \\ x_1=0, \quad x_2=2. \end{cases}$$

მაგრამ $x_1=0$ და $x_2=2$ არ წარმოადგენენ $0<x\leqslant 1$ შუალედის რიცხვებს და, მაშასადამე, ისინი არ არიან (7) განტოლების ფესვები ამ შუალედში ($x=0$ არის ამავე განტოლების ფესვი წინა შუალედში).

III) როცა $1<x\leqslant \frac{3}{2}$, მაშინ $2x-3\leqslant 0$, $1-x<0$ და გვექნება:

$$\begin{cases} 1<x\leqslant \frac{3}{2} \\ -(2x-3)+x^2-x-2=-(1-x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x\leqslant \frac{3}{2} \\ x^2-4x+2=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1<x\leqslant \frac{3}{2} \\ x_1=2-\sqrt{2}, \quad x_2=2+\sqrt{2}. \end{cases}$$

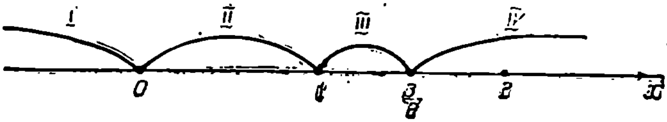
მივიღებთ, რომ $x_1=2-\sqrt{2}$ და $x_2=2+\sqrt{2}$ რიცხვები არ შედიან III შუალედში და ამიტომ ეს რიცხვები არ წარმოადგენენ (7) განტოლების ფესვებს ამ შუალედში.

IV) როცა $x>\frac{3}{2}$, მაშინ $2x-3>0$ და $1-x<0$. ამ შემთხვევაში (7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ 2x-3+x^2-x-2=-1+x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x^2-4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x_1=-2, \quad x_2=2, \end{cases}$$

საიდანაც მხოლოდ $x_2 = 2$ არის მოცემული განტოლების ფესვი (იგი ეკუთვნის $x > \frac{3}{2}$ შუალედს, $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

პასუხი. (6) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $E = \{0,2\}$ (ნახ. 6).



ნახ. 6

სავარჯიშო 1. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1) $|x^2 + |x| - 1| = \sqrt{1 - 6x + 9x^2}$,

2) $x^2 + 2x - 4 = \sqrt{1 - 2|x| + |x|^2}$,

3) $\dfrac{|x-2|}{x} + x - |2x+3| + 5 = 0$,

4) $\sqrt{|x-3|} - 2x - \sqrt{3} = 0$,

5) $\dfrac{1}{x+2} - |x-1| = 1$.

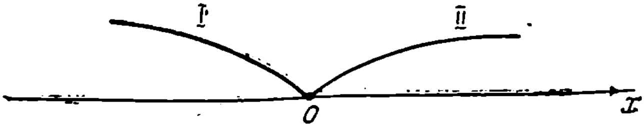
§ 3. განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ ისეთ განტოლებათა სისტემები, რომლებიც შეიცავენ ცვლად სიდიდეებს მოდულის ნიშნის ქვეშ:

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x + |x| - y = 1 \\ 2x + |y-3| = -2. \end{cases} \tag{1}$$

ამოხსნა. მოდულის განმარტება ჯერ გამოვიყენოთ $|x|$-ის მიმართ. აქ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 7):



ნახ. 7

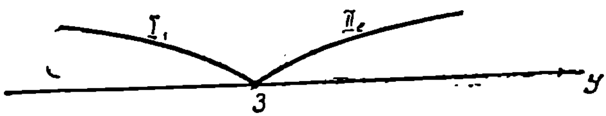
I) როცა $x<0$, მაშინ განტოლებათა (1) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} x<0 \\ \begin{cases} 3x-x-y=1 \\ 2x+|y-3|=-2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+|y-3|=-2. \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

II) როცა $x\geqslant 0$, მაშინ იგივე სისტემა მოგვცემს:

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \begin{cases} 3x+x-y=1 \\ 2x+|y-3|=-2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \begin{cases} 4x-y=1 \\ 2x+|y-3|=-2, \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

ახლა მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ $|y-3|$ გამოსახულების მიმართ. განტოლებათა (2) სისტემისათვის უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 8):



ნახ.

I_1) როცა $y<3$, მაშინ $y-3<0$ და (2) სისტემიდან მივიღებთ:

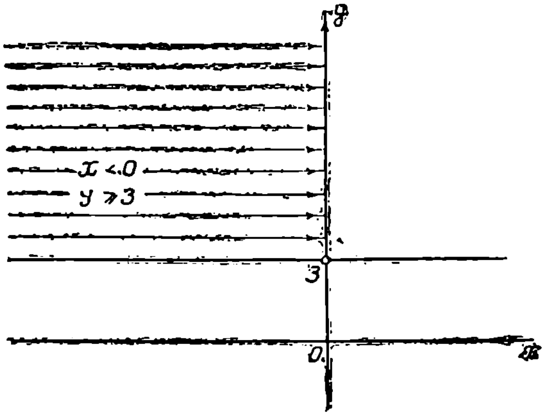
$$\begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ y<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x-y=-5. \end{cases} \end{cases}$$

მაგრამ, როგორც ჩანს $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

II_1). როცა $y\geqslant 3$, მაშინ $y-3\geqslant 0$ და (2) სისტემა მიიღებს სახეს:

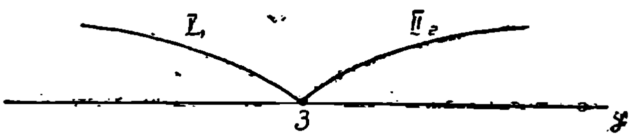
$$\begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ y\geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=1, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ y\geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ y\geqslant 3 \end{cases} \\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right), \end{cases}$$

როგორც ჩანს $x=\frac{1}{2}$, $y=0$ არ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსენს, რადგან $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ წერტილი არ არის მოთავსებული $\begin{cases} x<0 \\ y\geqslant 2 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილში (ნახ. 9).



ნახ. 9

განტოლებათა (3) სისტემისათვის უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 10):



ნახ. 10

I_2) როცა $y<3$, მაშინ $y-3<0$ და გვექნება:

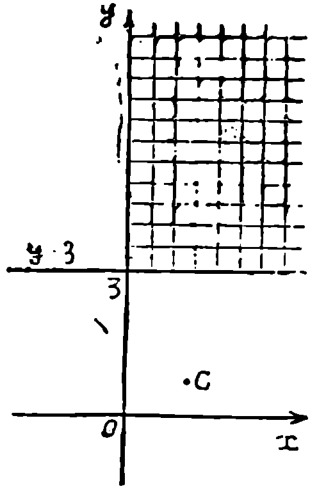
$$\begin{cases} \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-y=1 \\ 2x-y+3=-2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-y=1 \\ 2x-y=-5, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y<3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=11. \end{cases} \end{cases}$$

მაგრამ რადგან $B(3,\ 11)$ წერტილი არ მდებარეობს $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 3 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილში, ამიტომ $x = 3$, $y = 11$ არ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსენს.

II$_2$) როცა $y \geqslant 3$, მაშინ $y - 3 \geqslant 0$ და (3) სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3 \\ y \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + y - 3 = -2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + y = 1, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$



ნახ. 11

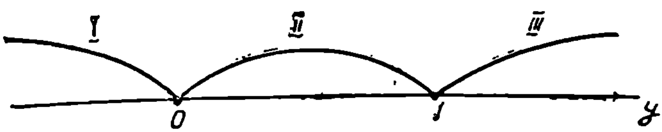
რადგანაც $C\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ წერტილი არ ეკუთვნის $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 3 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს (ნახ. 11), ამიტომ $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ არ არის (1) სისტემის ამონახსენი.

პ ა ს უ ხ ი. მოცემული სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის ამონახსენი:

$$\begin{cases} 1 + |x| - |y - 1| = x, \\ |2 - x| + 2|y| = 1 - y. \end{cases} \tag{4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. სიდიდის მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ $|y|$ და $|y-1|$ გამოსახულებების მიმართ (ნახ. 12). აქ უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:



ნახ. 12.

I) როცა $y\leqslant 0$, მაშინ $y-1<0$ და (4) სისტემა მოგვცემს:

$$\begin{cases} y\leqslant 0 \\ \begin{cases} 1+|x|+(y-1)=x \\ |2-x|-2y=1-y, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\leqslant 0 \\ \begin{cases} |x|+y=x \\ |2-x|-y=1. \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

II) როცა $0<y\leqslant 1$, მაშინ $y-1\leqslant 0$. ამიტომ (4) უტოლობათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} 0<y\leqslant 1 \\ \begin{cases} 1+|x|+(y-1)=x \\ |2-x|+2y=1-y, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<y\leqslant 1 \\ \begin{cases} |x|+y=x \\ |2-x|+3y=1. \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

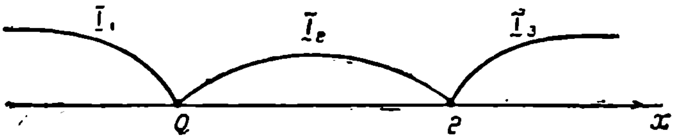
III) როცა $y>1$, მაშინ $y-1>0$ და (4) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} y>1 \\ \begin{cases} 1+|x|-(y-1)=x \\ |2-x|+2y=1-y, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>1 \\ \begin{cases} 2+|x|-y=x \\ |2-x|+3y=1. \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

ახლა, თუ მოდულის განმარტებას გამოვიყენებთ $|x|$ და $|2-x|$ გამოსახულებების მიმართ, მაშინ (5) სისტემის მიმართ უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

I_1) როცა $x\leqslant 0$, მაშინ $2-x>0$ და ამ შემთხვევაში (ნახ. 13) გვექნება:

$$\begin{cases} \begin{cases} x\leqslant 0 \\ y\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+y=x \\ 2-x-y=1, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\leqslant 0 \\ y\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=1, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\leqslant 0 \\ y\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{cases}$$



ნახ. 13

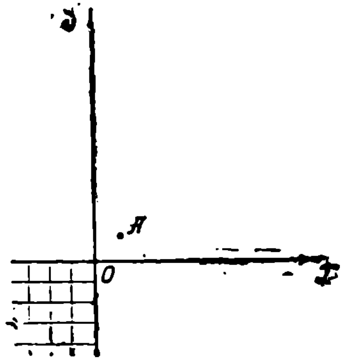
როგორც ჩანს $A\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ წერტილი არ ეკუთვნის $\begin{cases} x\leqslant 0 \\ y\leqslant 0 \end{cases}$ უტო-

ლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს (ნახ. 14) და ამიტომ $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ არ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსენს.

I_2) როცა $0<x\leqslant 2$, მაშინ $2-x\geqslant 0$. (5)-დან მივიღებთ, რომ:

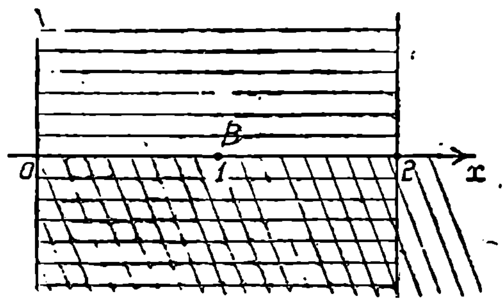
$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant 2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+y=x\\ 2-x-y=1,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant 2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x+y=1,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant 2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ x=1,\ y=0,\end{array}\right.$$



ნახ. 14

სადაც $x=1$, $y=0$ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსენს, რადგანაც $B(1,\ 0)$ წერტილი $\left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant 2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილში მდებარეობს (ნახ. 15).

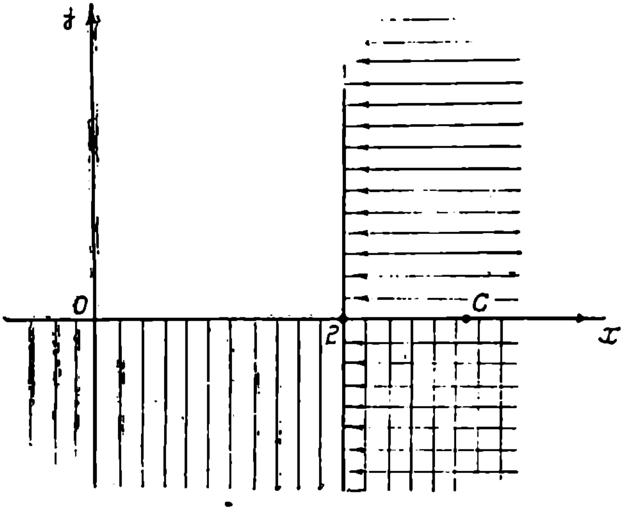


ნახ. 15

I_3) როცა $x>2$, მაშინ $2-x<0$ და (5) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+y=x\\ -(2-x)-y=1,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x-y=3,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>2\\ y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

რადგანაც (3, 0) წერტილი ეკუთვნის $\begin{cases} x > 2 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$ არეს (ნახ. 16), ამიტომ $x = 3$, $y = 0$ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსენს.

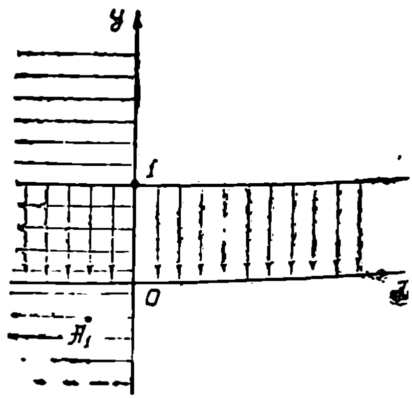


ნახ. 16

თუ ვისარგებლებთ მე-13 ნახაზით და გავიმეორებთ (5) სისტემის ამოხსნის თანმიმდევრობას, (6) სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\mathrm{II}_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -x + y = x \\ 2 - x + 3y = 1, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3y = 1, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$



ნახ. 17

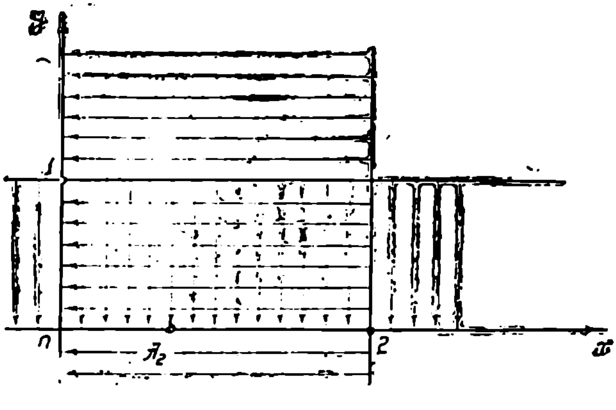
$A_1\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ წერტილი არ ეკუთვნის $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases}$ უტოლობა-

თა სისტემით განსაზღვრულ არეს (ნახ. 17) და, მაშასადამე $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ არ არის (4) სისტემის ამონახსენი აღნიშნულ არეში.

$$\mathrm{II}_2)\quad \begin{cases} \begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = x \\ 2 - x + 3y = 1, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ y = 0 \\ x - 3y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases} \end{cases}$$

რადგან $A_2\ (1, 0)$ წერტილი არ ეკუთვნის სიბრტყის $\begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases}$ არეს (ნახ. 18), ამიტომ სიბრტყის ამ ნაწილში (4) სისტემა არათავსებადია.

$$\mathrm{II}_3)\quad \begin{cases} \begin{cases} x > 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = x \\ -2 + x + 3y = 1, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x + 3y = 3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 0. \end{cases} \end{cases}$$

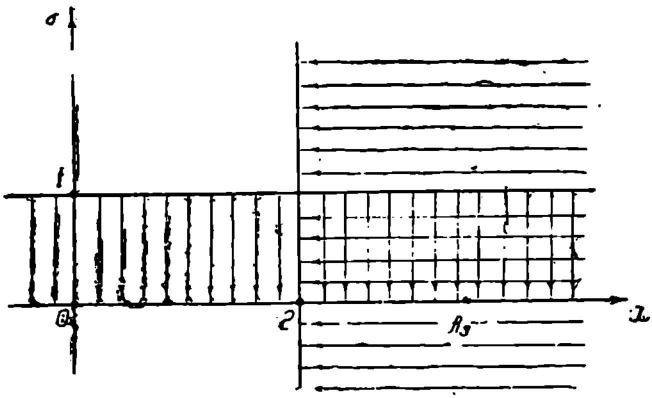


ნახ. 18

მაგრამ $A_3\ (3, 0)$ წერტილი არ ეკუთვნის სიბრტყის $\begin{cases} x > 2 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases}$ არეს და, მაშასადამე, $x = 3$, $y = 0$ არ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსენს ამ არეში (ნახ. 19).

ბოლოს ვისარგებლოთ იგივე ნახაზით (ნახ. 13) და განტოლებათა (7) სისტემის მიმართ განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

$$\mathrm{III}_1)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x - y = x \\ 2 - x + 3y = 1, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 3y = 1, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}\end{array}\right.$$



ნახ. 19

$x=1$, $y=0$ არ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსენს ამ არეში.

$$\mathrm{III}_2)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + x - y = x \\ 2 - x + 3y = 1, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x - 3y = 1, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7 \\ y = 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

არც $x = 7$, $y = 2$ არის (4) სისტემის ამონახსენი, რადგან $(7,2) \notin$ $\notin \begin{cases} 0 < x \leqslant 2 \\ y > 1. \end{cases}$

$$\mathrm{III}_3)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + x - y = x \\ -2 + x + 3y = 1, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x + 3y = 3, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3, \\ y = 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

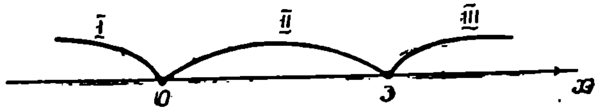
$x = -3$, $y = 2$ არ არის (4) სისტემის ამონახსენი.

პ ა ს უ ხ ი. მოცემული სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა $F = \{(1,0), (3,0)\}$ (დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე).

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x + |z - 1| + |y| = y + 4 \\ |y + 2| + z - |x| = z \\ |x - 3| + y + |1 - z| = 2. \end{cases} \tag{8}$$

ამოხსნა. სიდიდის მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ თანმიმდევრობით x, y და z ცვლადების შემცველ იმ გამოსახულებების მიმართ, რომლებიც შედიან მოდულის ნიშნის ქვეშ. სახელდობრ, x და



ნახ. 20

$x—3$ ცვლადების ნულებია $x=0$ და $x=3$ (ნახ. 20), ამიტომ მოდულის განმარტებიდან გამომდინარე (8) სისტემისათვის უნდა განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

I) როცა $x<0$, მაშინ $x—3<0$ და მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|+z+x=z \\ -x+3+y+|1-z|=2, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|+x=0 \\ y-x+|1-z|=-1. \end{cases}\end{array}\right. \tag{9}$$

II) როცა $0\leqslant x\leqslant 3$, მაშინ $x—3\leqslant 0$. ამ შემთხვევაში (8) სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant 3 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|+z-x=z \\ -x+3+y+|1-z|=2, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant 3 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|-x=0 \\ y-x+|1-z|=-1. \end{cases}\end{array}\right. \tag{10}$$

III) როცა $x>3$, მაშინ $x-3>0$ და გვექნება:

$$\left\{\begin{array}{l} x>3 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|+z-x=z \\ x-3+y+|1-z|=2, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x>3 \\ \begin{cases} x+|z-1|+|y|=y+4 \\ |y+2|-x=0 \\ x+y+|1-z|=5. \end{cases}\end{array}\right. \tag{11}$$

ახლა სიდიდის მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ (9), (10) და (11) სისტემებში y-ის მიმართ. აქაც თითოეული სისტემისათვის უნდა განვიხილოთ სამ-სამი შემთხვევა:

I₁) თუ $y<-2$, მაშინ (9) სისტემა მიიღებს სახეს (ნახ. 21):

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ y<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-y=y+4\\ -y-2+x=0\\ x-y+|1-z|=-1;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ y<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-2y=4\\ x-y=2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (9')$$

ნახ. 21

II₁) როცა $-2\leqslant y\leqslant 0$, მაშინ $y+2\geqslant 0$, ამიტომ (9)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

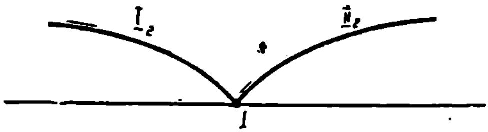
$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-y=y+4\\ y+2+x=0\\ y-x+|1-z|=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-2y=4\\ x+y=-2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (9'')$$

III₁) როცა $y>0$, მაშინ $y+2>0$ და მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|+y=y+4\\ y+2+x=0\\ y-x+|1-z|=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|=4\\ x+y=-2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (9''')$$

დასასრულ, თუ მოდულის განმარტებას გამოვიყენებთ z ცვლადის შემცველი გამოსახულებების მიმართ, მაშინ (9′), (9″) და (9‴) სისტემებიდან, თითოეულის მიმართ უნდა განვიხილოთ ორ-ორი შემთხვევა (ნახ. 22):

(9′)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა:



ნახ. 22

I_2) როცა $z<1$, მაშინ $z-1<0$, $1-z>0$ და (9′) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ x-y=2\\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2y-z=3\\ y-y=2\\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=0.\end{cases}\end{cases}$$

რადგან $(1,\ -1{,}0)$ წერტილი არ ეკუთვნის $\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z<1\end{cases}$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სივრცის ნაწილს, ამიტომ ამ ნაწილში (8) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

II_2) როცა $z\geqslant 1$, მაშინ $z-1\geqslant 0$, $1-z\leqslant 0$ და (9′) სისტემა მოგვცემს:

$$\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-1-2y=4\\ x-y=2\\ y-x-1+z=-1,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2y+z=5\\ x-y=2\\ -x+y+z=0,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=2.\end{cases}\end{cases}$$

$(1,\ -1{,}2)$ წერტილი არ ეკუთვნის სივრცის $\begin{cases}x<0\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}$ ნაწილს, ამიტომ სივრცის ამ ნაწილშიც (8) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

(9″)-ის ამოხსნა.

I_3) როცა $z<1$, მაშინ $z-1<0$, $1-z>0$ და გვექნება:

$$\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ x+y=-2\\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z-2y=3\\ x+y=-2\\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x<0\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\\ y=-\dfrac{9}{5}\\ z=\dfrac{2}{5}.\end{cases}\end{cases}$$

ამ შემთხვევაში (8) სისტემის ამონახსენია $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{9}{5},\ \frac{2}{5}\right)$.

II$_3$) როცა $z \geqslant 1$, მაშინ $z-1 \geqslant 0$, $1-z \leqslant 0$. (9″) სისტემა გვაძლევს:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ -2 \leqslant y \leqslant 0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x+z-1-2y=4 \\ x+y=-2 \\ y-x-1+z=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ -2 \leqslant y \leqslant 0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x+z-2y=5 \\ x+y=-2 \\ y-x+z=0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ -2 \leqslant y \leqslant 0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ y=-\frac{9}{5} \\ z=\frac{8}{5},\end{cases}\end{array}\right.$$

სადაც $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{9}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ წარმოადგენს (8) სისტემის ამონახსენს სივრცის ამ ნაწილში. ახლა ამოვხსნათ (9‴) სისტემა:

I$_4$) როცა $z<1$, მაშინ $z-1<0$, $1-z>0$ და გვექნება (ნახ. 22)

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z<1\end{cases} \\ \begin{cases} x-z+1=4 \\ x+y=-2 \\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z<1\end{cases} \\ \begin{cases} x-z=3 \\ x+y=-2 \\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z<1\end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

ცხადია, რომ სივრცის აღნიშნულ ნაწილში (8) სისტემა არათავსებადია.

II$_4$) როცა $z \geqslant 1$, მაშინ $z-1 \geqslant 0$, $1-z \geqslant 0$. (9‴) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x+z-1=4 \\ x+y=-2 \\ y-x-1+z=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x+z=5 \\ x+y=-2 \\ y-x+z=0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ z \geqslant 1\end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=4.\end{cases}\end{array}\right.$$

(8) სისტემა სივრცის ამ ნაწილშიც არათავსებადია.

ამრიგად, როცა $x<0$, მაშინ (9) სისტემის და, მაშასადამე, (8) სისტემის ამონახსნებია: $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$ და $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

ახლა ვისარგებლოთ 21-ე ნახაზით და (9) სისტემის ანალოგიურად ამოვხსნათ (10) სისტემა:

$$\text{IV)}\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-y=y+4\\ -y-2-x=0\\ y-x+|1-z|=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-2y=4\\ x+y=-2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \quad (10')$$

$$\text{V)}\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-y=y+4\\ y+2-x=0\\ y-x+|1-z|=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|-2y=4\\ y-x=-2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \quad (10'')$$

$$\text{VI)}\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|+y=y+4\\ y+2-x=0\\ y-x+|1-z|=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+|z-1|=4\\ y-x=-2\\ y-x+|1-z|=-1.\end{cases}\end{array}\right. \quad (10''')$$

(10′)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\text{IV}_1)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ x+y=-2\\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z-2y=3\\ x+y=-2\\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{1}{5}\\ y=-\frac{9}{5}\\ z=\frac{2}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში (8) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

$$\mathrm{IV}_2)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-1-2y=4\\ x+y=-2\\ y-x-1+z=-1,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-2y=5\\ x+y=-2\\ y-x+z=0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\\ y=-\dfrac{9}{5}\\ z=\dfrac{8}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

არც ეს შემთხვევა გვაძლევს (8) სისტემის ამონახსენს:

(10'')-ის ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\mathrm{V}_1)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ y-x=-2\\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z-2y=3\\ y-x=-2\\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

სივრცის ამ ნაწილში (8) სისტემის ამონახსენია $x=1$, $y=-1$, $z=0$.

$$\mathrm{V}_2)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-1-2y=4\\ y-x=-2\\ y-x-1+z=-1,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-2y=5\\ y-x=-2\\ y-x+z=0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში (8) სისტემის ამონახსენია $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

(10''')-ის ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\mathrm{VI}_1)\ \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1=4\\ y-x=-2\\ y-x+1-z=-1,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z=3\\ y-x=-2\\ y-x-z=-2,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=1\\ z=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

(3, 1, 0) წერტილი შედის უკანასკნელ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სივრცის ნაწილში, ამიტომ $x=3$, $y=1$, $z=0$ (8) სისტემის ამონახსენია.

$$\mathrm{VI_2)}\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z-1=4\\ y-x=-2\\ y-x-1+z=-1,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z=5\\ y-x=-2\\ y-x+z=0,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0\leqslant x\leqslant 3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=1\\ z=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$x=3$, $y=1$, $z=2$ არის (8) სისტემის ამონახსენი აღნიშნულ შუალედში.

მაშასადამე, როცა $0\leqslant x\leqslant 3$ (10) სისტემის და, მაშასადამე, (8) სისტემის ამონახსნებია: (1,—1,0), (1,—1,2), (3, 1, 0) და (3, 1, 2).

ახლა შევუდგეთ უკანასკნელი (11) სისტემის ამოხსნას.

აქაც განიხილება სამი შემთხვევა (ნახ. 21):

$$\mathrm{VII)}\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y<-2\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|-y=y+4\\ -y-2-x=0\\ x+y+|1-z|=5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y<-2\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|-2y=4\\ x+y=-2\\ x+y+|1-z|=5.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (11')$$

$$\mathrm{VIII)}\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|-y=y+4\\ y+2-x=0\\ x+y+|1-z|=5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|-2y=4\\ y-x=-2\\ x+y+|1-z|=5.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (11'')$$

$$\mathrm{IX)}\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|+y=y+4\\ y+2-x=0\\ x+y+|1-z|=5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+|z-1|=4\\ y-x=-2\\ x+y+|1-z|=5.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (11''')$$

(11′)-ის ა м о х с н а (ნახ. 22):

$$\mathrm{VII}_1)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ x+y=-2\\ x+y+1-z=5,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z-2y=3\\ x+y=-2\\ x+y-z=4,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{7}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=-6.\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში (8) სისტემა არათავსებადია.

$$\mathrm{VII}_2)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-1-2y=4\\ x+y=-2\\ x+y-1+z=5,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z-2y=5\\ x+y=-2\\ x+y+z=6,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ y<-2\\ z\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=8.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 8.\right)$ წერტილი არ ეკუთვნის უკანასკნელ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სივრცის ნაწილს და ამიტომ იგი არ იქნება (8) სისტემის ამონახსენი.

(11″)-ის ა м о х с н а (ნახ. 22):

$$\mathrm{VIII}_1)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z+1-2y=4\\ y-x=-2\\ x+y+1-z=5,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x-z-2y=3\\ y-x=-2\\ x+y-z=4,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში (8) სისტემა არათავსებადია.

$$\mathrm{VIII}_2)\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z-1-2y=4\\ y-x=-2\\ x+y-1+z\geqslant 5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}y>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z-2y=5\\ y-x=-2\\ x+y+z=6,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ -2\leqslant y\leqslant 0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{10}{3}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაშიც სისტემა არათავსებადია.

(11‴)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა (ნახ. 22):

$$\mathrm{IX}_1)\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z<1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x-z+1=4\\ y-x=-2\\ x+y+1-z=5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z<1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x-z=3\\ y-x=-2\\ x+y-z=4,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z<1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=1\\ z=0,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

მიღებული (3, 1, 0) წერტილი არ ეკუთვნის $\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z<1\end{array}\right.$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სივრცის ნაწილს, ამიტომ $x=3$, $y=1$, $z=0$ არ წარმოადგენს (8) სისტემის ამონახსენს სივრცის ამ ნაწილში.

$$\mathrm{IX}_2)\ \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z-1=4\\ y-x=-2\\ z+y-1+z=5,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+z=5\\ y-x=-2\\ x+y+z=6,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>3\\ y>0\\ z\geqslant 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=1\\ z=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

წინა შემთხვევის მსგავსად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $x=3$, $y=1$, $z=2$ არ წარმოადგენს (8) სისტემის ამონახსენს სივრცის ამ ნაწილში.

პ ა ს უ ხ ი. მოცემულ განტოლებათა (8) სისტემის ყველა ამონახსენის სიმრავლეა $\left\{\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{-9}{5}, \frac{8}{5}\right),\right.$

$(1, -1, 0), (3, 1, 0), (3, 1, 2), (1, -1, 2)\}$ (ე. ი. დალაგებულ სამეულთა სიმრავლე).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x+2y-|y+3|=-1 \\ |5-x|-x+|y|=6, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x+2|-y=|1-x| \\ x+|y+10|=8, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-2=|5x-9| \\ |15y+1|-|x|=|y|, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3-x+|y-10|=10 \\ 10-x|+|x|=41, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-|z|+|1-y|=0 \\ |x-4|+|z+1|-y=4 \\ |y-2|-|x|-z=-1, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-|z|=1 \\ |y-2|+x-z=3 \\ z-|z+4|-1=0, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ |x-3|-z=1 \\ |x|-|y|+|z-3|=2, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-|y|+3=2z \\ |x-z|+y=|1-x| \\ |z|=1+y, \end{cases}$

9) $\begin{cases} |x|-|y|=z-3 \\ x-|y+z|=2 \\ 1-|z-1|=x+y, \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x-y=-7 \\ |z-y|=1-|x| \\ 3x-|y-2|=z. \end{cases}$

§ 4. მაჩვენებლიანი განტოლებები

განვიხილოთ განტოლებები და განტოლებათა სისტემები, რომლებიც მაჩვენებლიან გამოსახულებებს შეიცავენ მოდულის ნიშნის ქვეშ. ასეთი განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივი მაჩვენებლიანი განტოლებების ამოხსნაზე (ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებით).

როგორც ვიცით $y=a^x$ სახის გამოსახულებას, სადაც a ნებისმიერი მუდმივი რიცხვია ($a>0$, $a\neq1$), ხოლო x დამოუკიდებელი ცვლადი (არგუმენტი), მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. განმარტების თანახმად ნებისმიერი x-სათვის $a^x>0$. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sqrt{2^{2x}-8\cdot2^x+16}=3\cdot2^{2x}+7\cdot2^x-24. \qquad (1)$$

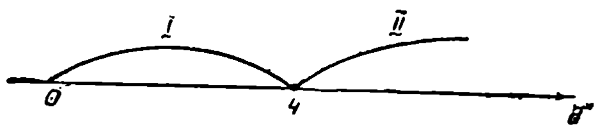
ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$\sqrt{(2^x-4)^2}=3\cdot2^{2x}+7\cdot2^x-24.$$

თუ გამოვიყენებთ არითმეტიკული ფესვის განმარტებას, უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$|2^x - 4| = 3\cdot 2^{2x} + 7\cdot 2^x - 24. \qquad (2)$$

გამოვიყენოთ მოდულის განმარტება და (2) განტოლება ამოვხსნათ ჯერ 2^x-ის მიმართ. უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 23):



ნახ. 23

I) როცა $0<2^x<4$ (ანუ $x<2$), მაშინ $2^x-4<0$. ამ შემთხვევაში (2) განტოლება გვაძლევს:

$$\begin{cases} 0<2^x<4 \\ -2^x+4=3\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<2^x<4 \\ 3\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x-28=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<2^x<4 \\ 2^x=2, \end{cases}$$

სადაც $x=1$ რიცხვი (1) განტოლების ფესვია.

II) როცა $2^x\geqslant 4$ (ანუ $x\geqslant 2$), მაშინ $2^x-4\geqslant 0$ და (2) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} 2^x\geqslant 4 \\ 2^x-4=3\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x-24, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x\geqslant 4 \\ 3\cdot 2^{2x}+6\cdot 2^x-20=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x\geqslant 4 \\ 2^x=\frac{1}{3}(-3\pm\sqrt{69}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x\geqslant 4 \\ 2^x=\frac{1}{3}(\sqrt{69}-3). \end{cases}$$

მაგრამ რადგან $2^x=\frac{1}{3}(\sqrt{69}-3)$ რიცხვი არ ეკუთვნის $2^x\geqslant 4$ უტოლობით განსაზღვრულ შუალედს, ამიტომ იგი არ არის მოცემული განტოლების ამონახსენი.

პ ა ს უ ხ ი. (1) განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეა $R=\{1\}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sqrt{100-20\cdot 3^x+3^{2x}}-\sqrt{64+3^{2x}-16\cdot 3^x}+3^x-2=$$
$$=\sqrt{-4\cdot 3^x+4+3^{2x}}. \qquad (3)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფესვქვეშა გამოსახულებები წარმოადგენენ სრულ კვადრატებს:

$$\sqrt{(10-3^x)^2}-\sqrt{(3^x-8)^2}+3^x-2=\sqrt{(2-3^x)^2}, \qquad (4)$$

საიდანაც არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|10-3^x|-|3^x-8|+3^x-2=|2-3^x|. \qquad (5)$$

(5) განტოლება ამოვხსნათ 3^x-ის მიმართ. როგორც ჩანს მოდულის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულებების ნულებია (3^x-ის მიმართ, ნახ. 24) $3^x=10, 3^x=8$ და $3^x=2$, ამიტომ (5) განტოლების ამოსახსნელად უნდა განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა:

ნახ. 24

I) როცა $0<3^x<2$, მაშინ $10-3^x>0$, $3^x-8<0$, $2-3^x>0$ და (5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} 0<3^x<2 \\ (10-3^x)+(3^x-8)+3^x-2=2-3^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<3^x<2 \\ 3^x=1, \end{cases}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $0<3^x<2$ შუალედში მოცემული განტოლების ამონახსენი არის $3^x=1$.

II) როცა $2\leqslant 3^x\leqslant 8$, მაშინ $10-3^x>0$, $3^x-8\leqslant 0$, $2-3^x\leqslant 0$, ამიტომ (5) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2\leqslant 3^x\leqslant 8 \\ (10-3^x)+(3^x-8)+3^x-2=-(2-3^x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\leqslant 3^x\leqslant 8 \\ 2=0 \end{cases}$$

სისტემა არათავსებადია ($2\neq 0$). შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ შუალედში არ არსებობს (5) განტოლების ამონახსენი.

III) როცა $8<3^x\leqslant 10$, მაშინ $10-3^x\geqslant 0$, $3^x-8>0$ და $2-3^x<0$. ამიტომ:

$$\begin{cases} 8<3^x\leqslant 10 \\ (10-3^x)-(3^x-8)+3^x-2=-(2-3^x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8<3^x\leqslant 10 \\ 3^x=9. \end{cases}$$

რადგან $8<9<10$, ამიტომ $3^x=9$ წარმოადგენს (5) განტოლების ფესვს.

IV) როცა $3^x>10$, მაშინ $10-3^x<0$, $3^x-8>0$, $2-3^x<0$ და (5) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} 3^x>10 \\ -(10-3^x)-(3^x-8)+3^x-2=-(2-3^x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x\leqslant 10 \\ 2=0, \end{cases}$$

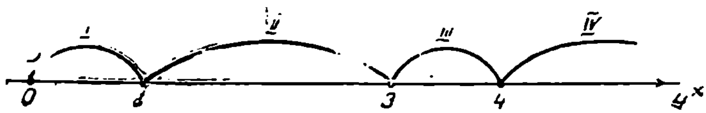
რაც შეუძლებელია ($2 \neq 0$). ეს შუალედი არ შეიცავს (5) განტოლების ფესვს. მაშასადამე, მოცემული განტოლების ფესვებს (3^x-ის მიმართ) წარმოადგენენ რიცხვები: $3^x = 1$, $3^x = 9$, საიდანაც $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

პ ა ს უ ხ ი. (5) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $\{0, 2\}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{4^x - 1 + |1 - 4^x|}{|4 - 4^x|} = \frac{3}{2} - \frac{4 - 4^x}{|3 - 4^x|}. \tag{6}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ $4^x \neq 4$, $4^x \neq 3$. მოცემული განტოლება ამოვხსნათ 4^x-ის მიმართ. მოდულის ნიშნის ქვეშ მდგომ გამოსახულებათა ნულებია: $4^x = 1$, $4^x = 3$, $4^x = 4$ (ნახ. 25). აქ უნდა განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა:



ნახ. 25

I) როცა $0 < 4^x \leqslant 1$, მაშინ $1 - 4^x \geqslant 0$, $4 - 4^x > 0$, $3 - 4^x > 0$; ამიტომ (6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} 0 < 4^x \leqslant 1 \\ \dfrac{4^x - 1 + 1 - 4^x}{4 - 4^x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4 - 4^x}{3 - 4^x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 4^x \leqslant 1 \\ 4^x = 1. \end{cases}$$

$4^x = 1$ წარმოადგენს (6) განტოლების ფესვს (4^x-ის მიმართ).

II) როცა $1 < 4^x < 3$, მაშინ $1 - 4^x < 0$, $4 - 4^x > 0$, $3 - 4^x > 0$ და გვაქვს:

$$\begin{cases} 1 < 4^x < 3 \\ \dfrac{4^x - 1 - 1 + 4^x}{4 - 4^x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4 - 4^x}{3 - 4^x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < 4^x < 3 \\ 5 \cdot 4^{2x} - 21 \cdot 4^x - 16 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 < 4^x < 3 \\ 4^x = \dfrac{21 \pm \sqrt{761}}{10}, \end{cases}$$

მაგრამ ეს რიცხვები არ არიან (6) განტოლების ფესვები, რადგანაც ისინი $1 < 4^x < 3$ შუალედს არ ეკუთვნიან.

III) როცა $3<4^x<4$, მაშინ $1-4^x<0$, $4-4^x>0$, $3-4^x<0$ და გვექნება:

$$\begin{cases} 3<4^x<4 \\ \dfrac{4^x-1-1+4^x}{4-4^x}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{4-4^x}{4^x-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3<4^x<4 \\ 10\cdot 4^{2x}-53\cdot 4^x+96=0. \end{cases}$$

მიღებულ განტოლებას ნამდვილი ფესვები არ გააჩნია.

IV) როცა $4^x>4$, მაშინ $1-4^x<0$, $4-4^x<0$, $3-4^x<0$ და (6) განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} 4^x>4 \\ \dfrac{4^x-1-1+4^x}{4^x-4}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{4-4^x}{4^x-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x>4 \\ 4^{2x}-21\cdot 4^x+56=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^x>4 \\ 4^x=\dfrac{1}{2}\left(21\pm\sqrt{217}\right), \end{cases}$$

სადაც $(4^x)_1=\dfrac{1}{2}\left(21-\sqrt{217}\right)<4$ არ წარმოადგენს (6) განტოლების ფესვს. რაც შეეხება $(4^x)_2=\dfrac{1}{2}\left(21\pm\sqrt{217}\right)>4$ რიცხვს — იგი არის განტოლების ფესვი.

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ 4^x-ის მიმართ მოცემული განტოლების ფესვებია $4^x=1$ და $4^x=\dfrac{1}{2}\left(21\pm\sqrt{217}\right)$; აქედან $x=0$ და $x=\log_4\left(21+\sqrt{217}\right)-\dfrac{1}{2}$.

პასუხი: (6) განტოლების ფესვებია $x_1=0$ და $x_2=\log_4\left(21+\sqrt{217}\right)-\dfrac{1}{2}$.

სავარჯიშო 8. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1) $\dfrac{|2-2^x|+2^x}{1-2^{2x}}=|4-2^x|$; 2) $\dfrac{2^{2x}-1+|2^x-4|}{|2^x-9|+2^x}=1$;

3) $\sqrt{(1-5^x)^2}-\sqrt{(5^x-8)^2}=|5^{x-1}-4|$;

4) $6^{2x}+3\cdot 6^x-24=\sqrt{1-6\cdot 6^x+9\cdot 6^{2x}}$;

5) $2^x-4=\sqrt{(2^x-4)^2}$; 6) $\sqrt{(3^x-1)^2}=3^{2x-1}-\dfrac{1}{3}$.

ჩვენ განვიხილავთ ისეთ განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც მაჩვენებლიან გამოსახულებებს შეიცავენ მოდულის ნიშნის ქვეშ.

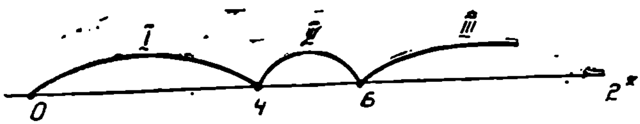
მ ა გ ა ლ ი თ ი. 1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \sqrt{16-8\cdot 2^x+2^{2x}}-|5^y-2|=2^x+1 \\ |2^x-6|+|15-5^y|=2\cdot 2^x-5^y+18. \end{cases} \tag{1}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველად ვიპოვოთ ამ სისტემის ამონახსენი 2^x-ისა და 5^y-ის მიმართ. რადგან $16-8\cdot 2^x+2^{2x}=(4-2^x)^2$, ამიტომ ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობის განსაზღვრების თანახმად (1) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} |4-2^x|-|5^y-2|=2^x+1 \\ |2^x-6|+|15-5^y|=2\cdot 2^x-5^y+18\,. \end{cases} \tag{2}$$

სიდიდის მოდულის განსაზღვრება ჯერ გამოვიყენოთ 2^x-ის შემცველი გამოსახულების მიმართ (ნახ. 26). განვიხილოთ სამი შემთხვევა:



ნახ. 26

I) როცა $0<2^x<4$, მაშინ $4-2^x>0$, $2^x-6<0$ და (2) განტოლება მოგვცემს:

$$\begin{cases} 0<2^x<4 \\ \begin{cases} 4-2^x-|5^y-2|=2^x+1 \\ -2^x+6+|15-5^y|=2\cdot 2^x-5^y+18, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 0<2^x<4 \\ \begin{cases} |5^y-2|+2\cdot 2^x=3 \\ |15-5^y|-3\cdot 2^x+5^y=12. \end{cases} \end{cases} \tag{2'}$$

II) როცა $4\leqslant 2^x<6$, მაშინ $4-2^x\leqslant 0$, $2^x-6<0$ და (2)-დან მივიღებთ:

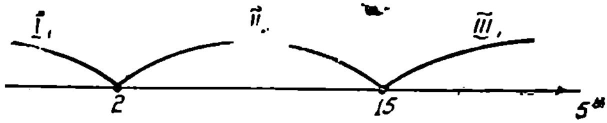
$$\begin{cases} 4\leqslant 2^x<6 \\ \begin{cases} -4+2^x-|15^y-2|=2^x+1 \\ -2^x+6+|15-5^y|=2\cdot 2^x-5^y+18, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 4\leqslant 2^x<6 \\ \begin{cases} |5^y-2|=-5 \\ |15-5^y|-3\cdot 2^x+5^y=12, \end{cases} \end{cases} \tag{2''}$$

$$\text{III)}\ \left\{\begin{array}{l} 2^x \geqslant 6 \\ \left\{\begin{array}{l} -4+2^x-|5^y-2| = 2^x+1 \\ 2^x-6+|15-5^y| = 2\cdot 2^x-5^y+18, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x \geqslant 6 \\ |5^y-2| = -5 \\ |15-5^y|-2^x+5^y = 24; \end{array}\right. \qquad (2''')$$

ცხადია, რომ შეუძლებელია $|5^y-2|=-5$ ტოლობის შესრულება, ამიტომ (2'') და (2''') სისტემების განხილვას ჩვენ არ შევუდგებით (ამ შემთხვევაში (1) სისტემა არათავსებადია). თუ მოდულის განსაზღვრებას გამოვიყენებთ 5^y-ის შემცველი გამოსახულებების მიმართ, მაშინ (2') სისტემისათვის უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა (ნახ. 27):



ნახ. 27

I_1) როცა $0<5^y<2$, მაშინ $5^y-2<0$, $15-5^y>0$. (2') მოგვცემს:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 0<5^y<2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -5^y+2+2\cdot 2^x=3 \\ 15-5^y-3\cdot 2^x+5^y=12, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 0<5^y<2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -5^y+2\cdot 2^x=1 \\ 3\cdot 2^x=3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 0<5^y<2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 5^y=1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში (2') და, მაშასადამე, (2) სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს $2^x=1$, $5^y=1$.

II_1) როცა $2\leqslant 5^y\leqslant 15$, მაშინ $5^y-2\geqslant 0$, $15-5^y\geqslant 0$ და გვაქვს:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 2\leqslant 5^y\leqslant 15 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 5^y-2+2\cdot 2^x=3 \\ 15-5^y-3\cdot 2^x+5^y=12, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 2\leqslant 5^y\leqslant 15 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 5^y+2\cdot 2^x=5 \\ 3\cdot 2^x=3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0<2^x<4 \\ 2\leqslant 5^y\leqslant 15 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 5^y=3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ე. ი. $2^x=1$, $5^y=3$ წარმოადგენს (2) სისტემის ამონახსენს, რადგან ამ შემთხვევაში $2^x=1$ და $5^y=3$ რიცხვები მოთავსებულია სათანადოდ $0<2^x<4$ და $2\leqslant 5^y\leqslant 15$ შუალედებში.

III₁) როცა $5^y > 15$, მაშინ $5^y - 2 > 0$ და $15 - 5^y < 0$; მივიღებთ:

$$\begin{cases}\begin{cases}0 < 2^x < 4\\ 5^y > 15\end{cases}\\ \begin{cases}5^y - 2 + 2\cdot 2^x = 3\\ -15 + 5^y - 3\cdot 2^x + 5^y = 12,\end{cases}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}0 < 2^x < 4\\ 5^y > 15\end{cases}\\ \begin{cases}5^y + 2\cdot 2^x = 5\\ 2\cdot 5^y - 3\cdot 2^x - 27 = 0,\end{cases}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}0 < 2^x < 4\\ 5^y > 15\end{cases}\\ \begin{cases}5^y = 5 - 2\cdot 2^x\\ 7\cdot 2^x = -17,\end{cases}\end{cases}$$

რომელიც არათავსებადია ნამდვილ რიცხვთა არეში. მაშასადამე, (2) სისტემის ამონახსნებია: $1 = 2^x$, $5^y = 1$ და $5^y = 3$, $2^x = 1$.

პ ა ს უ ხ ი. განტოლებათა (1) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე $\{(0, 0), (0, \log_5 3)\}$.

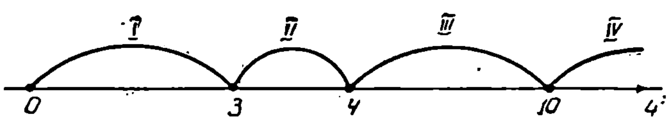
მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}4^x - |4^x - 10| + 3\cdot 3^y = 37\\ |4^{2x} - 7\cdot 4^x| - 3^y = 147.\end{cases} \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $4^{2x} - 7\cdot 4^x + 12 = (4^x - 4)(4^x - 3)$, ამიტომ $|ab| = |a|\cdot|b|$ ფორმულის თანახმად (3) სისტემიდან მიიღება:

$$\begin{cases}4^x - |4^x - 10| + 3\cdot 3^y = 37\\ |4^x - 4|\cdot|4^x - 3| - 3^y = 147,\end{cases} \tag{4}$$

ცხადია, უნდა განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა (ნახ. 28):



ნახ. 28

I) როცა $0 < 4^x < 3$, მაშინ $4^x - 10 < 0$, $4^x - 4 < 0$, $4^x - 3 < 0$ და (4) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} 0<4^x<3 \\ \begin{cases} 4^x+4^x-10+3\cdot 3^y=37 \\ (-4^x+4)(-4^x+3)-3^y=147, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<4^x<3 \\ \begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 3^y=47 \\ 4^{2x}-7\cdot 4^x-3^y=135, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<4^x<3 \\ 4^x=\dfrac{1}{6}(19\pm\sqrt{5785}) \\ 3^y=\dfrac{1}{9}(122\pm\sqrt{5785}) . \end{cases}$$

მაგრამ მიღებული რიცხვებიდან $4^x \neq \frac{1}{6}(9-\sqrt{5785})$ და $4^x = \frac{1}{6}(9+\sqrt{5785})$ არ ეკუთვნის $0<4^x<3$ შუალედს. ამ შემთხვევაში (3) სისტემა არათავსებადია.

II) როცა $3\leqslant 4^x\leqslant 4$, მაშინ $4^x-10<0$, $4^x-4\leqslant 0$. $4^x-3\geqslant 0$. ე. ი. მიიღება სისტემა:

$$\begin{cases} 3\leqslant 4^x\leqslant 4 \\ \begin{cases} 4^x+4^x-10+3\cdot 3^y=37 \\ (-4^x+4)(4^x-3)-3^y=147, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\leqslant 4^x\leqslant 4 \\ \begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 3^y=47 \\ 4^{2x}-7\cdot 4^x+3^y=-159, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\leqslant 4^x\leqslant 4 \\ 3^y=\dfrac{1}{3}(47-2\cdot 4^x) \\ 3\cdot 4^{2x}-4^x+524=0, \end{cases}$$

რომელსაც ნამდვილ რიცხვთა არეში ფესვები არ გააჩნია (4^x-ის მიმართ მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე).

III) როცა $4<4^x\leqslant 10$, მაშინ $4^x-10\leqslant 0$, $4^x-4>0$ და $4^x-3>0$, ამიტომ:

$$\begin{cases} 4<4^x\leqslant 10 \\ \begin{cases} 4^x+4^x-10+3\cdot 3^y=37 \\ (4^x-4)(4^x-3)-3^y=147, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4<4^x\leqslant 10 \\ \begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 3^y=47 \\ 4^{2x}-7\cdot 4^x-3^y=135, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4<4^x\leqslant 10 \\ \begin{cases} 3^y=\dfrac{1}{9}(122-\sqrt{5785}) \\ 4^x=\dfrac{1}{3}(19\pm\sqrt{5785}), \end{cases} \end{cases}$$

მაგრამ მიღებული რიცხვი $4^x = \frac{1}{3}(19 + \sqrt{5785})$ არ შედის $4 < 4^x \leqslant 10$ შუალედში და, მაშასადამე, მესამე შემთხვევაში (4) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

IV) როცა $4^x > 10$, მაშინ $4^x - 10 > 0$, $4^x - 4 > 0$, $4^x - 3 > 0$ და (4) სისტემა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 4^x > 10 \\ \begin{cases} 4^x - 4^x + 10 + 3\cdot 3^y = 37 \\ 4^{2x} - 7\cdot 4^x - 3^y = 135, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x > 10 \\ \begin{cases} 3^y = 9 \\ 4^{2x} - 7\cdot 4^x - 3^y = 135, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^x > 10 \\ \begin{cases} 3^y = 9 \\ 4^x = \frac{1}{2}(7 \pm 25). \end{cases} \end{cases}$$

მაგრამ რადგან $4^x \neq -9$ და $4^x = 16 > 10$, ამიტომ მოცემული სისტემის ამონახსენია $4^x = 16$, $3^y = 9$. აქედან $x = 2$, $y = 2$.

პ ა ს უ ხ ი. (4) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა $\{(2,2)\}$ (ნამდვილ რიცხვთა ერთი წყვილისაგან შედგენილი სიმრავლე).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} |2^y - 1| + 3^x - 2 = |1 - 3^x| \\ 2^y - |1 + 2^y| + 2\cdot 3^x = 4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{7^{2x} - 14\cdot 7^x + 49} + 6^y = 6 \\ |4 - 6^y| - |7^x - 2| + 6^y = 3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} |2^x - 10| + |3^y - 10| = 19 \\ 2^x - 1 + |3^y - 7| = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^{|x-1|} = 2^{y-1} \\ 2^{x+1} + 2^y = 2^{|y|} + 4. \end{cases}$

§ 6. ლოგარითმული განტოლებები

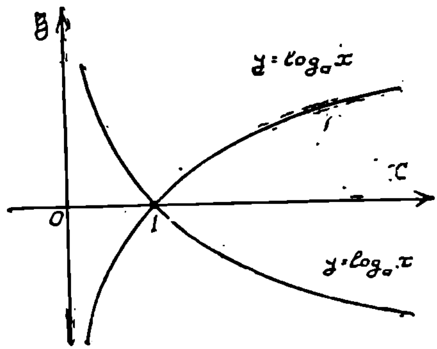
გავიხსენოთ ლოგარითმული ფუნქციის განმარტება და მისი ძირითადი თვისებები. როგორც ვიცით, $y = \log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $a > 1$ და კლებადია, როცა $0 < a < 1$ (ნახ. 29). $y = \log_a x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს შეადგენს $x > 0$ შუალედი. ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის დროს ჩვენ ძირითადად დავეყრდნობით ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეს და $y = \log_a x$ ფუნქციის იმ თვისებას, რომ, თუ $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, მაშინ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა საერთო ნაწილში $f(x) = \varphi(x)$. განვიხილოთ ისეთი განტოლებები, რომლებიც ლოგარითმულ გამოსახულებებს შეიცავენ მოდულის ნიშნის ქვეშ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ ლოგარითმული განტოლება:

$$|\log_2 x - 6| + |\log_2^2 x + 5\log_2 x - 14| + \log_2 x = 6 \qquad (1)$$

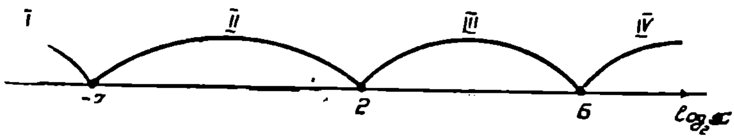
ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლების გარდაქმნით მივიღებთ:

$$|\log_2 x - 6| + |\log_2 x - 2|\cdot|\log_2 x + 7| + \log_2 x = 6. \qquad (2)$$



ნახ. 29

(2) განტოლება ამოვხსნათ $\log_2 x$-ის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ მოდულის განმარტებას, (2) განტოლების მიმართ უნდა განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა (ნახ. 30):



ნახ. 30

1) როცა $\log_2 x < -7$, მაშინ $\log_2 x - 6 < 0$, $\log_2 x - 2 < 0$, $\log_2 x + 7 < 0$ და (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \log_2 x < -7 \\ -\log_2 x + 6 + (2 - \log_2 x)(-\log_2 x - 7) + \log_2 x = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x < -7 \\ (\log_2 x)_1 = -7; \ (\log_2 x)_2 = 2. \end{cases}$$

მაგრამ -7 და 2 არ შედიან $]-\infty, -7[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

II) როცა $-7 \leqslant \log_2 x \leqslant 2$, მაშინ $\log_2 x - 6 < 0$, $\log_2 x - 2 < 0$ და $\log_2 x + 7 \geqslant 0$; ამიტომ (2) განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$\begin{cases} -7 \leqslant \log_2 x \leqslant 2 \\ -\log_2 x + 6 + (2 - \log_2 x)(\log_2 x + 7) + \log_2 x = 6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 \leqslant \log_2 x \leqslant 2 \\ (\log_2 x)_1 = -7; \ (\log_2 x)_2 = 2, \end{cases}$$

საიდანაც ცხადია, რომ $\log_2 x = -7$ და $\log_2 x = 2$ წარმოადგენენ (2) განტოლების ფესვებს $[-7, 2]$ სეგმენტზე (იგი $\log_2 x$-ის შესაბამისი სეგმენტია, ე. ი. $-7 \leqslant \log_2 x \leqslant 2$).

III) როცა $2 < \log_2 x \leqslant 6$, მაშინ (2) განტოლება მოგვცემს:

$$\begin{cases} 2 < \log_2 x \leqslant 6 \\ -\log_2 x + 6 + (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 7) + \log_2 x = 6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 < \log_2 x \leqslant 6 \\ (\log_2 x)_1 = 2, \ (\log_2 x)_2 = -7. \end{cases}$$

მიღებული რიცხვები არ წარმოადგენენ $2 < \log_2 x \leqslant 6$ შუალედის რიცხვებს და, მაშასადამე, (2) განტოლების ფესვებს ამ შუალედში.

IV) როცა $\log_2 x > 6$ მაშინ (2) განტოლებიდან გვექნება:

$$\begin{cases} \log_2 x > 6 \\ \log_2 x - 6 + (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 7) + \log_2 x = 6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x > 6 \\ (\log_2 x)_1 = \frac{1}{2}(-7 - \sqrt{153}), \ (\log_2 x)_2 = \frac{1}{2}(-7 + \sqrt{153}). \end{cases}$$

მიღებული რიცხვები არ იქნებიან (2) განტოლების ფესვები, რადგანაც ისინი არ შედიან $\log_2 x > 6$ შუალედში. მაშასადამე, (1) განტოლების ფესვებია ($\log_2 x$-ის მიმართ): $\log_2 x = -7$ და $\log_2 x = 2$. x-ის მიმართ ამ განტოლებების ამოხსნა მოგვცემს:

1) $\log_2 x = -7, \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x = \log_2 2^{-7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 2^{-7} \end{cases} \Rightarrow x = 2^{-7} = \frac{1}{128}$.

2) $\log_2 x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x = \log_2 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4$.

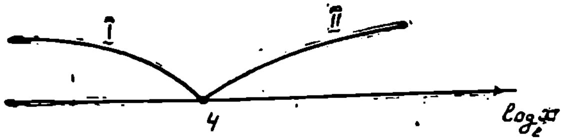
პ ა ს უ ხ ი. (1) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $\left\{\frac{1}{128}, 4\right\}$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sqrt{\log_3^4 x + 8\log_3^3 x + 16\log_3^2 x} - |\log_3 x - 2| + 5\log_3 x = 9. \qquad (3)$$

ამოხსნა. თუ ვისარგებლებთ არითმეტიკული ფესვის განმარტებით, მაშინ გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$|\log_3 x| \cdot |\log_3 x + 4| - |\log_3 x - 2| + 5\log_3 x = 9. \qquad (4)$$



ნახ. 31

(4) განტოლება ამოიხსნება (1) განტოლების მსგავსად. აქაც უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 31):

$$\text{I)} \quad \begin{cases} \log_3 x < -4 \\ (-\log_3 x)(-\log_3 x - 4) - (-\log_3 x + 2) + 5\log_3 x = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < -4 \\ (\log_3 x)_1 = -11, \ (\log_3 x)_2 = 1. \end{cases}$$

$\log_3 x = -11$ წარმოადგენს (3) განტოლების ამონახსენს პირველ შუალედში.

$$\text{II)} \quad \begin{cases} -4 \leqslant \log_3 x \leqslant 0 \\ (-\log_3 x)(\log_3 x + 4) + (\log_3 x - 2) + 5\log_3 x = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 \leqslant \log_3 x \leqslant 0 \\ \log_3^2 x - 2\log_3 x + 11 = 0. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში (3) განტოლება არათავსებადია (მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე).

$$\text{III)} \quad \begin{cases} 0 < \log_3 x \leqslant 2 \\ \log_3 x(\log_3 x + 4) + (\log_3 x - 2) + 5\log_3 x = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \log_2 x \leqslant 2 \\ (\log_3 x)_1 = -11, \ (\log_3 x)_2 = 1. \end{cases}$$

$\log_3 x=1$ წარმოადგენს (3) განტოლების ფესვს $0<\log_3 x\leqslant 2$ შუალედში.

IV) $\begin{cases} \log_3 x>2, \\ \log_3 x(\log_3 x+4)-\log_3 x+2+5\log_3 x=9, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_3 x>2 \\ \log_3 x=-4\pm\sqrt{23}. \end{cases}$

მიღებული $\log_3 x=-4\pm\sqrt{23}$ რიცხვები არ შედიან $\log_3 x>2$ შუალედში და ამიტომ ისინი არ იქნებიან (3) განტოლების ფესვები.

მაშასადამე, (3) განტოლების ფესვებია: $\log_3 x=-11$ და $\log_3 x=1$. აქედან $x_1=3^{-11}$, $x_2=3$.

პ ა ს უ ხ ი. (3) განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეა $\{3^{-11}, 3\}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$|\log_2 x-4|+\log_2|x-3|=1+\log_2|x-2| \tag{5}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების ამოხსნის მიზნით მოდულის განმარტება ჯერ გამოვიყენოთ $|\log_2 x-4|$ გამოსახულების მიმართ. აქ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 31):

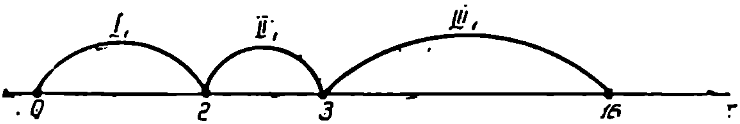
I) როცა $\log_2 x<4$, მაშინ $\log_2 x-4<0$ და (5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \log_2 x<4 \\ -\log_2 x+4+\log_2|x-3|=1+\log_2|x-2|, \end{cases} \tag{6}$$

II) როცა $\log_2 x\geqslant 4$, მაშინ $\log_2 x-4\geqslant 0$ და გვექნება:

$$\begin{cases} \log_2 x\geqslant 4 \\ \log_2 x-4+\log_2|x-3|=1+\log_2|x-2|; \end{cases} \tag{7}$$

ახლა, მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ $|x-3|$ და $|x-2|$ გამოსახულებების მიმართ. რადგან $\log_2 x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $x>0$ შუალედი, ამიტომ (6) განტოლებისათვის უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა (ამასთან $x\neq 2$, $x\neq 3$, ნახ. 32):



ნახ. 32

I$_1$) როცა $0<x<2$, მაშინ (6) განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} 0<x<2 \\ \log_2 x<\log_2 16 \\ -\log_2 x+4+\log_2(3-x)=1+\log_2(2-x), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ \begin{cases} 0<x<16 \\ 3-x>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \\ \log_2 \dfrac{3-x}{x(2-x)}=\log_2 \dfrac{1}{8}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ x_1=4, \ x_2=6. \end{cases}$$

მაგრამ $4 \notin]0,2[$ და $6 \notin]0,2[$. ამიტომ აღნიშნულ შუალედზე (5) განტოლების ფესვთა სიმრავლე ცარიელია.

II$_1$) როცა $2<x<3$, მაშინ (6) განტოლება მოგვცემს:

$$\begin{cases} 2<x<3 \\ \log_2 x<\log_2 16 \\ -\log_2 x+4+\log_2(3-x)=1+\log_2(x-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2<x<3 \\ x=-3\pm\sqrt{33}; \end{cases}$$

$x=-3+\sqrt{33}$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს $]2,3[$ შუალედში (რადგანაც $-3+\sqrt{33} \in]2,3[$).

III$_1$) როცა $x>3$, მაშინ (6) განტოლება მოგვცემს:

$$\begin{cases} x>3 \\ \log_2 x<\log_2 16 \\ -\log_2 x+4+\log_2(x-3)=1+\log_2(x-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3<x<16 \\ x=4, \ x=6. \end{cases}$$

$x=4$ და $x=6$ რიცხვები წარმოადგენენ (5) განტოლების ფესვებს $]3,16[$ შუალედში ($4 \in]3,16[$ და $6 \in]3,16[$).

(7)-ის ამოხსნა. აქ $x \geqslant 16$; ამიტომ (7) განტოლებისათვის უნდა განვიხილოთ მხოლოდ ერთი შემთხვევა:

$$\begin{cases} \log_2 x \geqslant \log_2 16 \\ \log_2 x-4+\log_2(x-3)=1+\log_2(x-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 16 \\ x=16\pm\sqrt{195}. \end{cases}$$

$x=16+\sqrt{195}>16$ წარმოადგენს (5) განტოლების ფესვს.

პასუხი. (5) განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეა:

$$\{-3+\sqrt{33}, \ 4, \ 6, \ 16+\sqrt{195}\}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sqrt[3]{|\log_2 x - 8|^{\log_2 x - 4}} = \sqrt[4]{|\log_2 x - 8|^{\log_2 x + 1}}. \tag{8}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$|\log_2 x - 8|^{\frac{\log_2 x - 4}{3}} = |\log_2 x - 8|^{\frac{\log_2 x + 1}{4}}$$

და გავალოგარითმოთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{3}(\log_2 x - 4)\log_2|\log_2 x - 8| = \frac{1}{4}(\log_2 x + 1)\log_2|\log_2 x - 8|,$$

ანუ

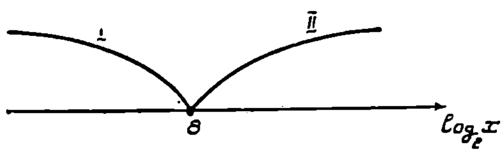
$$\left(\frac{\log_2 x - 4}{3} - \frac{\log_2 x + 1}{4}\right)\log_2|\log_2 x - 8| = 0. \tag{9}$$

აქ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) $\begin{cases} x > 0 \\ 4\log_2 x - 16 - 3\log_2 x - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x = 19, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 2^{19}. \end{cases}$

ბ) $\log_2|\log_2 x - 8| = 0.$ (10)

(10)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა (ნახ. 33).



ნახ. 33

I) როცა $\log_2 x < 8$, მაშინ (10) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \log_2 x < 8 \\ \log_2(8 - \log_2 x) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^8 \\ 8 - \log_2 x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^8 \\ \log_2 x = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^8 \\ x = 2^7. \end{cases}$$

$x = 2^7$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს (რადგან $0 < 2^7 < 2^8$);

II) როცა $\log_2 x > 8$ ($\log_2 x \neq 8$), მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} \log_2 x > 8 \\ \log_2(\log_2 x - 8) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2^8 \\ \log_2 x = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2^8 \\ x = 2^9. \end{cases}$$

$x = 2^9$ არის მოცემული განტოლების ფესვი ამ შუალედში: ($2^9 \in]2^8, +\infty[$).

პ ა ს უ ხ ი. (8) განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $\{2^7, 2^9, 2^{19}\}$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 5. ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებები:

1) $\log_2|x-14|+|\log_2 x-6|=7;$

2) $\log_3(x^2-4x+1)+\log_2|x-2|=1-\log_2|x-1|;$

3) $4^{\log_2|x|+1}-6^{|\log_2 x|}-2\cdot 3^{2\log_2|x|+2}=0;$

4) $\sqrt{\log_4^2 x-4\log_4 x+4}=1+\log_2 x;$

5) $\log_2|x-3|+\log_2\sqrt{x+9}=4.$

§ 7. ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ ლოგარითმულ განტოლებათა ისეთი სისტემები, რომლებიც ლოგარითმულ გამოსახულებებს შეიცავენ მოდულის ნიშნის ქვეშ. მათი ამოხსნის მეთოდი განვიხილოთ შემდეგ კონკრეტულ მაგალითებზე:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ მოცემულია ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \log_2|x|+\log_2 y=3 \\ \log_2|y-1|-\log_2|x+4|=-3. \end{cases} \tag{1}$$

ნახ. 34

სიდიდის მოდულის განმარტების თანახმად (ჯერ $|x|$-ის მიმართ) (1) სისტემიდან მივიღებთ (ნახ. 34):

$$\begin{cases} x<-4 \\ \begin{cases} \log_2(-x)+\log_2 y=3 \\ \log_2|y-1|-\log_2(-x-4)=-3, \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -4<x<0 \\ \begin{cases} \log_2(-x)+\log_2 y=3 \\ \log_2|y-1|-\log_2(x+4)=-3, \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

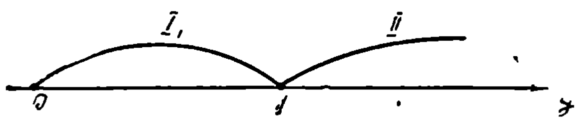
$$\begin{cases} x>0 \\ \begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=3 \\ \log_2|y-1|-\log_2(x+4)=-3. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

(2), (3) და (4) სისტემების მიმართ უნდა განვიხილოთ ორ-ორი შემთხვევა (ნახ. 35):

(2) ს ი ს ტ ე მ ი ს ა მ ო ხ ს ნ ა (იგულისხმება, რომ $y\neq1$):

$$
\mathrm{I}_1)\quad \begin{cases} \begin{cases} x<-4 \\ 0<y<1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x)+\log_2 y=3 \\ \log_2(1-y)-\log_2(-x-4)=-3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-4 \\ 0<y<1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-8 \\ x=8y-12, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-4 \\ 0<y<1 \\ x=8y-12 \\ 2y^2-3y+2=0 \end{cases}
$$



ნახ. 35

მიღებულ სისტემას ამონახსენი არ გააჩნია.

$$
\mathrm{II}_1)\quad \begin{cases} \begin{cases} x<-4 \\ y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x)+\log_2 y=3 \\ \log_2(y-1)-\log_2(-x-4)=-3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-4 \\ y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-8 \\ \dfrac{y-1}{-x-4}=\dfrac{1}{8}, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-4 \\ y>1 \end{cases} \\ \left| \begin{array}{l} x_1=2-2\sqrt{17},\ \ y_2=\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{17}) \\ x_2=2+2\sqrt{17},\ \ y_2=\dfrac{1}{4}(1-\sqrt{17}). \end{array} \right. \end{cases}
$$

ამ შემთხვევაში $x=2-2\sqrt{17}$, $y=\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{17})$ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსენს.

(3)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა (აქაც $y \neq 1$, ნახ. 35):

$$\mathrm{I}_2)\ \begin{cases} \begin{cases} -4 < x < 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x) + \log_2 y = 3 \\ \log_2(1-y) - \log_2(x+4) = -3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4 < x < 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2(1+\sqrt{17}), \quad y_1 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{17}) \\ x_2 = 2(1-\sqrt{17}), \quad y_2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{17}). \end{array} \right. \end{cases}$$

$\begin{cases} -4 < x < 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ სიბრტყის ნაწილში (1) სისტემას ამონახსენი არ გააჩნია.

$$\mathrm{II}_2)\ \begin{cases} \begin{cases} -4 < x < 0 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x) + \log_2 y = 3 \\ \log_2(y-1) - \log_2(x+4) = -3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4 < x < 0 \\ y > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{8}{x} \\ x^2 + 12x + 64 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე, ამიტომ სიბრტყის $\begin{cases} -4 < x < 0 \\ y > 1 \end{cases}$ ნაწილში (1) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

ახლა (4) სისტემის მიმართ გამოვიყენოთ იგივე ნახაზი და განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

$$\mathrm{I}_3)\ \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2(1-y) - \log_2(x+4) = -3, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 8 \\ \frac{1-y}{x+4} = \frac{1}{8}; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ 2y^2 - y + 2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე, ამიტომ ამ შემთხვევაშიც (1) სისტემა არათავსებადია.

$$\mathrm{II}_3)\quad \begin{cases} \begin{cases} x>0 \\ y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=3 \\ \log_2 (y-1)-\log_2 (x+4)=-3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x>0 \\ y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-16, \ y_1=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=4, \qquad y_2=2. \end{cases} \end{cases}$$

$\begin{cases} x>0 \\ y>1 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილში მოცემული (1) სისტემის ამონახსენია $x=4, \ y=2$.

პ ა ს უ ხ ი. (1) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა:

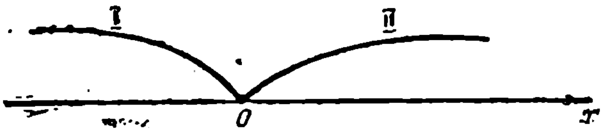
$$\left\{(4, 2), \left(2-2\sqrt{17}, \ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1 \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases} \tag{5}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. არითმეტიკული ფესვის განმარტების თანახმად მივიღებთ:

$$\begin{cases} \lg|x+y|=1 \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+y|=10 \\ \dfrac{y}{|x|}=2. \end{cases} \tag{6}$$



ნახ. 36

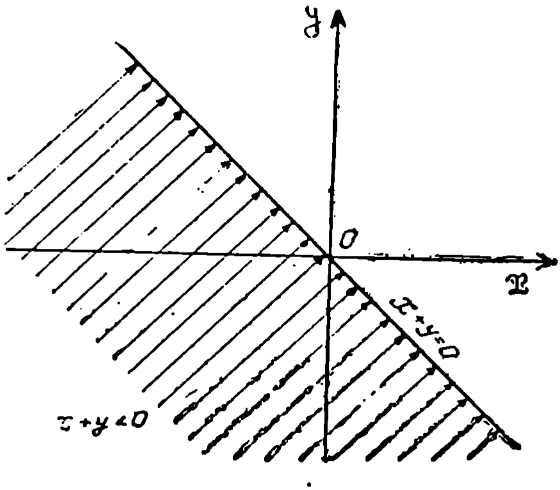
თუ მოდულის განმარტებას გამოვიყენებთ $|x|$-ის მიმართ, მაშინ (6)-დან მივიღებთ ორ სისტემას (ნახ. 36, $x\neq 0$):

$$\mathrm{I})\quad \begin{cases} x<0 \\ \begin{cases} |x+y|=10 \\ \dfrac{y}{-x}=2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ \begin{cases} x+y|=10 \\ y+2x=0, \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

$$\text{II)}\quad \begin{cases} x>0 \\ |x+y|=10 \\ \dfrac{y}{x}=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \begin{cases} |x+y|=10 \\ y-2x=0. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

$|x+y|$-ის განმარტების თანახმად (7) და (8) სისტემებიდან მიიღება ორ-ორი სისტემა:

(7)-ის ა მ ო ხ ს ნ ა (ნახ. 37):



ნახ. 37

I_1) როცა $x+y<0$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ x+y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x-y=10 \\ y+2x=0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<0 \\ x+y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=10 \\ y=-20, \end{cases} \end{cases}$$

მიღებული $(10, -20)$ წერტილი არ ეკუთვნის $\begin{cases} x<0 \\ x+y<0 \end{cases}$ სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს და ამიტომ $(10, -20)$ არ იქნება მოცემული სისტემის ამონახსენი სიბრტყის ამ ნაწილში.

$$\mathrm{II}_1)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x+y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=10\\ y+2x+0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x+y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-10\\ y=20.\end{cases}\end{array}\right.$$

რადგან $(-10,\ 20)\in \begin{cases}x<0\\ x+y>0\end{cases}$, ამიტომ $(-10,\ 20)$ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსენს.

(8)-ის *ამოხსნა* (ნახ. 37):

$$\mathrm{I}_2)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x+y<0\end{cases}\\ \begin{cases}-x-y=10\\ y-2x=0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x+y<0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{10}{3}\\ y=-\dfrac{20}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში მოცემულ სისტემას ამონახსენი არ გააჩნია.

$$\mathrm{II}_2)\quad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x+y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=10\\ y-2x=0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x+y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{20}{3};\end{cases}\end{array}\right.$$

მივიღეთ, რომ $\left(\frac{10}{3},\ \frac{20}{3}\right)\in \begin{cases}x>0\\ x+y>0\end{cases}$, ამიტომ სიბრტყის ამ ნაწილში (1) სისტემის ამონახსენია: $x=\frac{10}{3}$; $y=\frac{20}{3}$.

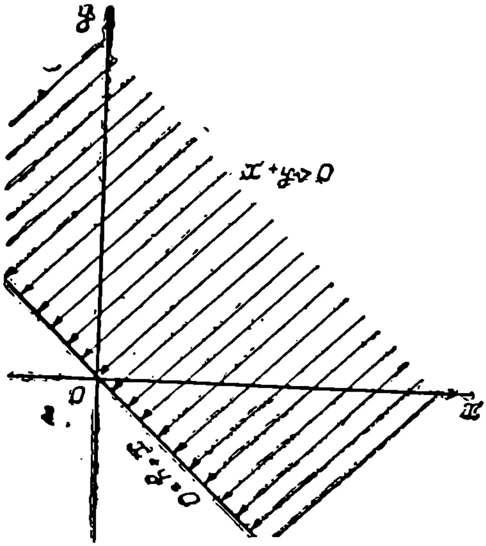
პასუხი. (5) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა:

$$\left\{(-10,\ 20),\ \left(\frac{10}{3},\ \frac{20}{3}\right)\right\}.$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\log_2|x+y|-\log_2|5x-y|=-2\\ \log_2|5x-y|+\log_2 x=5.\end{cases}\qquad (9)$$

ამოხსნა. როგორც წინა მაგალითებში, აქაც გამოვიყენოთ მოდულის განმარტება ჯერ $|x+y|$ გამოსახულების მიმართ· განვიხილოთ ორი შემთხვევა (ნახ. 38):



ნახ. 38

I) როცა $x+y<0$ $(x+y\neq 0)$, მაშინ (9) სისტემიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} x+y<0 \\ \log_2(-x-y)-\log_2|5x-y|=-2 \\ \log_2|5x-y|+\log_2 x=5, \end{cases} \tag{10}$$

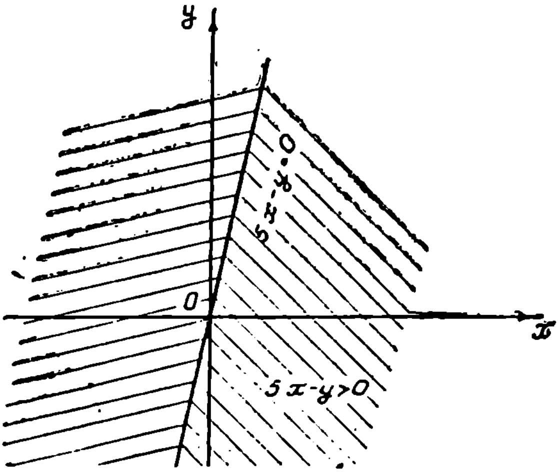
II) როცა $x+y>0$, მაშინ იგივე სისტემიდან გვექნება:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y>0 \\ \begin{cases} \log_2(x+y)-\log_2|5x-y|=-2 \\ \log_2|5x-y|+\log_2 x=5. \end{cases} \end{array} \right. \tag{11}$$

ახლა მოდულის განმარტება გამოვიყენოთ $|5x-y|$-ის მიმართ. (10) სისტემა მოგვცემს ორ სისტემას (ნახ. 39):

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x-y)-\log_2(-5x+y)=-2 \\ \log_2(-5x+y)+\log_2 x=5, \end{cases} \end{array} \right. \tag{10'}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(-x-y)-\log_2(5x-y)=-2 \\ \log_2(5x-y)+\log_2 x=5. \end{cases}\end{array}\right. \tag{10'}$$



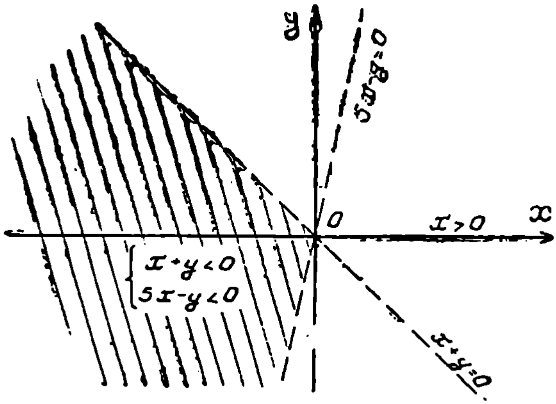
ნახ. 39

მსგავსად ამისა (11) სისტემიდან მივიღებთ ორ სისტემას:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x+y>0 \\ 5x-y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(x+y)-\log_2(-5x+y)=-2 \\ \log_2(-5x+y)+\log_2 x=5, \end{cases}\end{array}\right. \tag{11'}$$

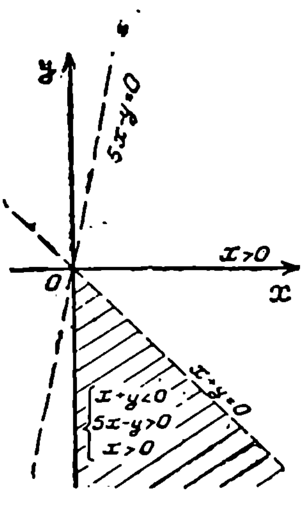
$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x+y>0 \\ 5x-y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(x+y)-\log_2(5x-y)=-2 \\ \log_2(5x-y)+\log_2 x=5. \end{cases}\end{array}\right. \tag{11''}$$

(10′) სისტემის ამოხსნა. პოტენცირების შედეგად (10′) სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ (ნახ. 40):



ნახ. 40

$$\begin{cases}\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+y}{-y+5x}=\dfrac{1}{4} \\ x(y-5x)=32. \end{cases}\end{cases}$$



ნახ. 41

ცხადია, რომ $\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y<0 \\ x>0 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია. ე. ი. ამ შემთხვევაში (9) სისტემა არათავსებადია.

(10″)-ის ამოხსნა (ნახ. 41): პოტენცირების შემდეგ მივიღებთ:

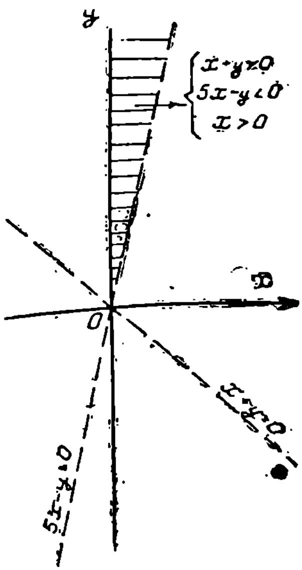
$$\begin{cases}\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y>0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+x}{y-5x}=\dfrac{1}{4} \\ x(5x-y)=32, \end{cases}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y>0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-6. \end{cases}\end{cases}$$

რადგან (2, —6) წერტილი მოთავსებულია $\begin{cases} x+y<0 \\ 5x-y>0 \\ x>0 \end{cases}$ უტოლობა-თა სისტემით განსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილში, ამიტომ $x=2$, $y=-6$ წარმოადგენს განტოლებათა (9) სისტემის ამონახსენს (სიბრტყის ამ ნაწილში).

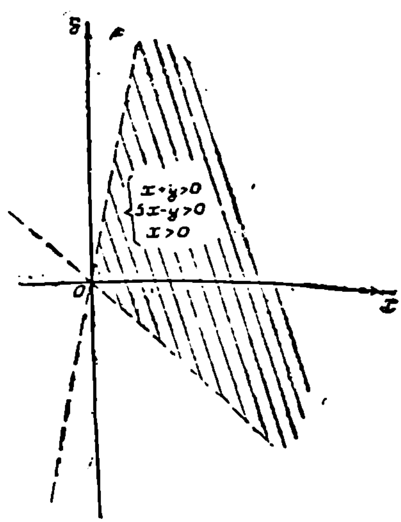
(11′)-ის ამოხსნა (ნახ. 42): ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე გვექნება:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+y>0 \\ 5x-y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+y}{y-5x}=\dfrac{1}{4} \\ x(y-5x)=32, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+y>0 \\ 5x-y<0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+y=0 \\ 8x^2+32=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში განტოლებათა (9) სისტემა არათავსებადია (რადგან $8x^2+32\neq0$).



ნახ. 42



ნახ. 43

(11″)-ის ამოხსნა (ნახ. 43):

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+y>0\\5x-y>0\\x>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{5x-y}=\dfrac{1}{4}\\x(5x-y)=32,\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+y>0\\5x-y>0\\x>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\sqrt{15}\\y=\dfrac{2}{15}\sqrt{15}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

ამ შემთხვევაში მოცემული სისტემის ამონახსენია $x=\frac{2}{3}\sqrt{15}$, $y=\frac{2}{15}\sqrt{15}$.

პასუხი. (9) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა $\left\{(2,-6),\left(\frac{2}{3}\sqrt{15},\ \frac{2}{15}\sqrt{15}\right)\right\}$.

სავარჯიშო 6. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases}\log_5|x-y|-\log_5 y=3\\ \log_2|2x+3y|+4\log_2 x=-1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}|\log_2 x-5|+\log_4|x|+y=0\\ \log_2|y|-\log_2 x=2,\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^{|2x-y|}=1\\ 1-\log_4|x+y|=y,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_3(x+y)-\log_3 x=1\\ |\log_4 y|-6=2x.\end{cases}$

II თავი

უტოლობები და უტოლობათა სისტემები

§ 1. ალგებრული უტოლობები

ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით უტოლობათა ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდს. როგორც ადრე შევნიშნეთ, $y=f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს ამ ფუნქციის ყოველ ორ მეზობელ ნულს შორის. კარგად უნდა დავიმახსოვროთ შემდეგი ორი გარემოება:

1) თუ მოცემული გვაქვს $|x|<a$ უტოლობა, სადაც $a>0$, მაშინ ეს უტოლობა ისეთი ორი უტოლობის ტოლფასია, როგორიცაა $-a<x<a$ და რომელთათვისაც უნდა მოიძებნოს საერთო ნაწილი, ანუ კონიუქცია: $\begin{cases}x<a\\x>-a\end{cases}$. თუ ჩვენ ამ უტოლობების საერთო ნა-

წილს არ ვიპოვიდით, მაშინ დავუშვებდით შეცდომას (რადგან, თუ მაგალითად დავწერდით, რომ $x<a$, მაშინ ამ უტოლობაში ისეთი რიცხვებიც შედიან, რომლებიც ნაკლები არიან $-a$-ზე, მაშინ, როცა $-a$-ზე ნაკლები რიცხვების აბსოლუტური სიდიდეები ვერ იქნებოდნენ ნაკლები a-ზე. იგივე ითქმის $x>-a$ უტოლობის შესახებ).

2) $|x|>a$ უტოლობის შემთხვევაში ($a>0$) აერთიანებენ $x>a$ და $x<-a$ უტოლობებს. ამ გაერთიანებას დ ი ზ ი უ ნ ქ ც ი ა ეწოდება და წერენ $\left[\begin{array}{l}x<-a\\ x>a\end{array}\right.$. შეცდომა იქნებოდა თუ მოცემულ უტოლობებს შევცვლიდით $\begin{cases}x<-a\\ x>a\end{cases}$ უტოლობათა სისტემით. მაშასადამე, $|x|>a$ უტოლობას დააკმაყოფილებს $-a$-ზე ნაკლები და a-ზე მეტი რიცხვები (ეს გარემოება ხშირად იწვევს გაუგებრობას მოსწავლეებში. განსაკუთრებით მაშინ, როცა მოდულის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულება საკმარისად რთულია).

$|x|<a$, ($a<0$) უტოლობას ამონახსენი არა აქვს, ხოლო $|x|>a$ ($a<0$) უტოლობის ამონახსენია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $-\infty<x<+\infty$.

ახლა ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ უტოლობები:

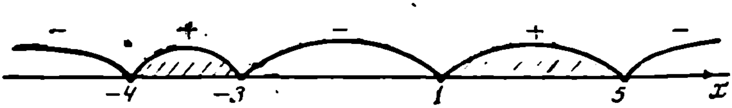
მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ შემდეგი უტოლობის ამონახსენი:

$$(7x+4)^4(x+4)(x+3)(x-1)^3(5-x)\geqslant 0. \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x\neq -\frac{4}{7}$-ისათვის $(7x+4)^2>0$ და ნებისმიერი x-ისათვის $(x-1)^3$ და $x-1$ ფუნქციები ერთი და იგივე ნიშნის არიან. თუ გავითვალისწინებთ ამ გარემოებას და გავიხსენებთ უტოლობათა ძირითად თვისებებს, მაშინ (1) უტოლობა შეგვიძლია შევცვალოთ მისი ტოლფასი უტოლობით

$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{7}\\ (x+3)(x-1)(5-x)(x+4)\geqslant 0.\end{array}\right. \qquad (2)$$

(2) უტოლობის მარცხენა ნაწილში მდგომი $f(x)=(x+3)(x-1)\times$ $\times(5-x)(x+4)$ ფუნქციის ნულების სიმრავლეა $\{-4, -3, 1, 5\}$ (ნახ. 44) და მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებია



ნახ. 44

$]-\infty, -4[$, $]-4, -3[$, $]-3, 1[$, $]1, 5[$ და $]5, +\infty[$. ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი თითოეულ შუალედში დამოკიდებულია $x+3$, $x-1$, $5-x$ და $x+4$ ფუნქციათა ნიშანზე. ამიტომ თითოეულ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ნიშნის დასადგენად საკმარისია დავადგინოთ ამ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის თითოეული თანამამრავლის ნიშანი.

განვიხილოთ პირველი შუალედი $x<-4$. აქ $x+3<0$, $x-1<0$, $5-x>0$ და $x+4<0$, ამიტომ აღნიშნულ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი იქნება $(-1)(-1)(+1)(-1)=(-1)$.

ანალოგიურად $-4\leqslant x<-3$ შუალედში: $x+3<0$, $x-1<0$, $5-x>0$, $x+4>0$ და ამიტომ ამ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი იქნება $(-1)(-1)(+1)(+1)=(+1)$.

$-3\leqslant x<1$ შუალედში გვექნება: $x+3\geqslant 0$, $x-1<0$, $5-x>0$, $x+4>0$ და $f(x)$-ისათვის მივიღებთ ნიშანს $(+1)(-1)(+1)(+1)=$ $=(-1)$.

$1\leqslant x<5$ შუალედში: $x+3>0$, $5-x>0$, $x-1\geqslant 0$, $x+4>0$ და $f(x)$ ფუნქციას ექნება $(+1)(+1)(+1)(+1)=(+1)$ ნიშანი.

ბოლოს განვიხილოთ $x\geqslant 5$ შუალედი; აქ: $x+3>0$, $5-x\leqslant 0$, $x-1>0$, $x+4>0$ და $f(x)$-ის ნიშანი იქნება $(+1)(-1)(+1)\times(+1)=(-1)$.

ჩვენ გვაინტერესებს ის შუალედები, სადაც $f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია. ეს შუალედებია: $-4\leqslant x\leqslant -3$ და $1\leqslant x\leqslant 5$.

პასუხი. მოცემული (1) უტოლობის ამონახსენია $x=-\frac{4}{7}$, $-4\leqslant x\leqslant -3$ და $1\leqslant x\leqslant 5$; ე. ი. დიზიუნქცია: $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{4}{7} \\ -4\leqslant x\leqslant -3 \\ 1\leqslant x\leqslant 5. \end{array}\right.$

მაგალითი. 2. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$\frac{(x-2)(3x+4)(x^2+5x-14)(x^2+4)}{(x^2-20x+99)(1-x)(12+6x)}\leqslant 0, \tag{3}$$

ამოხსნა. უტოლობის გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\frac{(x-2)(3x+4)(x-2)(x+7)(x^2+4)}{6(x-11)(x-9)(1-x)(x+2)}\leqslant 0.$$

საიდანაც

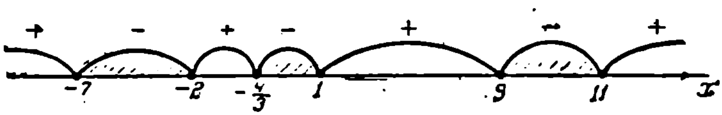
$$\frac{(x-2)^2(3x+4)(x+7)(x^2+4)}{6(x-11)(x-9)(1-x)(x+2)}\leqslant 0. \tag{4}$$

ნებისმიერი x-ისათვის $x^2+4>0$ და $(x-2)^2>0$ (გარდა $x=2$ წერტილისა). თუ (4) უტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ დადებით $\frac{(x-2)^2(x^2+4)}{6}$ გამოსახულებაზე და მარცხენა ნაწილს აღვნიშნავთ $F(x)$-ით, გვექნება:

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ F(x)=\dfrac{(3x+4)(x+7)}{(x-11)(x-9)(1-x)(x+2)}=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\leqslant 0. \end{array}\right. \qquad (5)$$

$f(x)=(3x+4)(x+7)$ ფუნქციის ნულები $\left(x=-\frac{4}{3},\ x=-7\right)$ დააკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობას (რადგანაც უტოლობის ნიშანია $\leqslant 0$), ხოლო $\varphi(x)=(x-11)(x-9)(1-x)(x+2)$ ფუნქციის ნულები $(x=11,\ x=9,\ x=1,\ x=-2)$ არ ეკუთვნის (3) უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეს (მნიშვნელი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი).

$F(x)$ ფუნქციის ნიშნის დასადგენად საკმარისია დავადგინოთ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ნიშნები თითოეულ შუალედში (ნახ. 45):



ნახ. 45

$-\infty<x<-7$ შუალედში: $3x+4<0$ და $x+7<0$, ე. ი. $f(x)>0$; $x-11<0$, $x-9<0$, $1-x>0$ და $x+2<0$, ე. ი. $\varphi(x)<0$. მივიღეთ, რომ ამ შუალედში $F(x)<0$.

$-7\leqslant x<-2$ შუალედში: $3x+4<0$, $x+7\geqslant 0$ და $f(x)\leqslant 0$; $x-11<0$, $x-9<0$, $1-x>0$, $x+2<0$ და $\varphi(x)<0$, ე. ი. $F(x)>0$.

$-2<x\leqslant-\frac{4}{3}$ შუალედში: $3x+4\leqslant 0$, $x+7>0$ და $f(x)\leqslant 0$; $x-11<0$, $x-9<0$, $1-x>0$, $x+2>0$ და $\varphi(x)>0$, ე. ი. $F(x)\leqslant 0$.

$-\frac{4}{3}<x<1$ შუალედში: $3x+4>0$, $x+7>0$, $f(x)>0$; $x-11<0$, $x-9<0$, $1-x>0$, $x+2>0$, $\varphi(x)>0$ და მაშასადამე, $F(x)>0$.

$1<x<9$ შუალედში: $3x+4>0$, $x+7>0$, $f(x)>0$; $x-11<0$, $x-9<0$, $1-x<0$, $x+2>0$, $\varphi(x)<0$, ე. ი. $F(x)<0$.

$9<x<11$ შუალედში: $3x+4>0$, $x+7>0$, $f(x)>0$; $x-11<0$, $x-9>0$, $1-x<0$, $x+2>0$, $\varphi(x)>0$ და მიიღება, რომ $F(x)>0$.

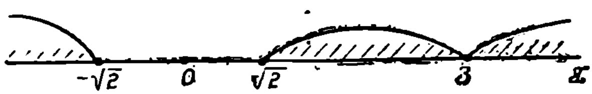
ბოლოს განვიხილოთ $x>11$ შუალედი: $3x+4>0$, $x+7>0$, $f(x)>0$; $x-11>0$, $x-9>0$, $1-x<0$, $x+2>0$, $\varphi(x)<0$ და $F(x)<0$.

პასუხი. მოცემული (3) უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა $A=\{x:-7\leqslant x\leqslant -2\}$, $B=\left\{x:-\frac{4}{3}\leqslant x<1\right\}$, $C=\{2\}$ და $D=\{x:9<x<11\}$ სიმრავლეთა დიზიუნქცია.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$x-3<\sqrt{x^2-2}. \tag{6}$$

ამოხსნა. აქ არსებითია არითმეტიკული ფესვის ცნება და ისიც, რომ $\sqrt{x^2-2}\geqslant 0$. ამ შენიშვნის გათვალისწინებით (6) უტო-



ნახ. 46

ლობა შეგვიძლია შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური (ტოლფასი) უტოლობათა სისტემებით ან, რაც იგივეა, შემდეგ კონიუნქციათა დიზიუნქციით:

$$\left[\begin{array}{l} (\text{ა})\ \begin{cases} x^2-2>0 \\ x-3\geqslant 0 \\ \left(\sqrt{x^2-2}\right)^2>(x-3)^2 \end{cases} \\ (\text{ბ})\ \begin{cases} x^2-2\geqslant 0 \\ x-3<0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{7}$$

აქედან

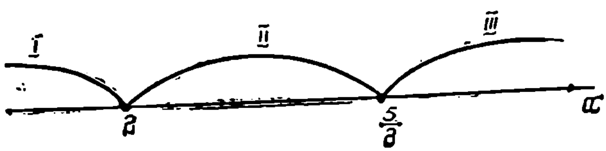
$$\left[\begin{array}{l} (ა)\ \begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})>0 \\ x\geqslant 3 \\ 6x-11>0 \end{cases} \\ (ბ)\ \begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\geqslant 0 \\ x-3<0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (ა)\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{2} \\ x>\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x\geqslant 3 \\ x>\dfrac{11}{6} \end{cases} \\ (ბ)\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\sqrt{2} \\ x\geqslant \sqrt{2} \end{array}\right. \\ x<3, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\sqrt{2} \\ x\geqslant \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

პ ა ს უ ხ ი. მოცემული (6) უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა: $A=\{x: -\infty < x \leqslant -\sqrt{2}\}$ და $B=\{x: \sqrt{2}\leqslant x < +\infty\}$, ანუ მათი დიზიუნქცია $\left[\begin{array}{l} x\leqslant -\sqrt{2} \\ x\geqslant \sqrt{2}. \end{array}\right.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ შემდეგი უტოლობის მთელ დადებით ამონახსენთა სიმრავლე:

$$\frac{x^2-|2x-5|+1}{|2-x|+1}>1. \tag{8}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული უტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ მოდულის განმარტება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა (ნახ. 47):



ნახ. 47

I) როცა $x<2$, მაშინ (8) უტოლობა მიიღებს სახეს:

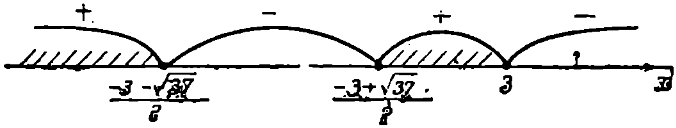
$$\begin{cases} x<2 \\ \dfrac{x^2-(5-2x)+1}{2-x+1}>1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ \dfrac{x^2+3x-7}{3-x}>0. \end{cases} \tag{8′}$$

(8′) უტოლობათა სისტემის ინტერვალთა მეთოდით ამოხსნის მიზნით გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x<2 \\ \dfrac{\left(x+\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x+\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)}{3-x}>0. \end{cases} \tag{8″}$$

თუ გავიმეორებთ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას, მაშინ ვიპოვით (8″)-ის და, მაშასადამე, (8) უტოლობის ამონახსენს (ნახ. 48):

$$-\infty < x < \frac{1}{2}(-3-\sqrt{37}) \text{ და } \frac{1}{2}(-3+\sqrt{37}) < x < 2.$$

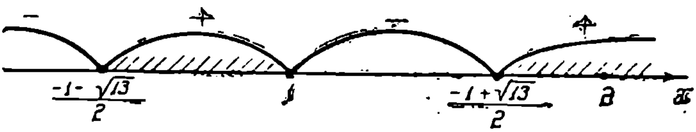


ნახ. 48

II) როცა $2 < x < \frac{5}{2}$, მაშინ (8) უტოლობისათვის მივიღებთ (ნახ. 49):

$$\begin{cases} 2 < x < \frac{5}{2} \\ \dfrac{x^2-(5-2x)+1}{x-2+1} > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < \frac{5}{2} \\ \dfrac{\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)}{x-1} > 0. \end{cases}$$

ამ შუალედში (8) უტოლობის ამონახსენია $2 < x < \frac{5}{2}$.



ნახ. 49

III) როცა $x > \frac{5}{2}$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ \dfrac{x^2-2x+5+1}{-2+x+1} > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ \dfrac{x^2-3x+7}{x-1} > 0. \end{cases}$$

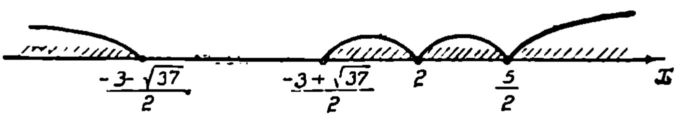
ამ უტოლობათა სისტემის ამონახსენია $x > \frac{5}{2}$ შუალედი (რადგანაც ყველა x-ისათვის ($x^2 - 3x + 7 > 0$).

პასუხი. (8) უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეებია:

$$A = \left\{ x : -\infty < x < \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{37}) \right\},$$

$$B = \left\{ x : \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{37}) < x < 2 \right\},$$

$C = \left\{ x : 2 < x < \frac{5}{2} \right\}$ და $D = \left\{ x : x > \frac{5}{2} \right\}$ (ნახ. 50), ხოლო მთელ დადებით ამონახსენთა სიმრავლეა $E = \{3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots\}$.



ნახ. 50

სავარჯიშო 7. ამოხსნათ შემდეგი უტოლობები:

1) $\dfrac{(x^2 - 3x + 5)(x^3 + x^2 + x)(4 - x)}{(x - 3)(x + 4)} < 0;$

2) $\sqrt{1 - x^2 + 3x} > 1 + x;$ 3) $-x^2 + 4x + 6 < \sqrt{x + 2};$

4) $|4 - x| + 1 = \sqrt{(1 - x)^2};$ 5) $|x - 1| > \sqrt{9x^2 - 12x + 4};$

6) $\dfrac{|x - 1| + \sqrt{(x - 2)^2} + 1}{x^2 + x - 2} > \dfrac{1}{2}.$

§ 2. ალგებრულ უტოლობათა სისტემები

უტოლობათა სისტემების ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ მოცემული სისტემის უტოლობათა ამონახსნების საერთო ნაწილი, ანუ კონიუქცია.

მაგალითი 1. ამოხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} (x^2 + x - 2)(x + 4) > 0, \\ (x^2 + x + 5)(x - 4)(x - 2)(x + 1) < 0, \\ (3x^2 + 4x - 4)(x^2 + 5x + 6) < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

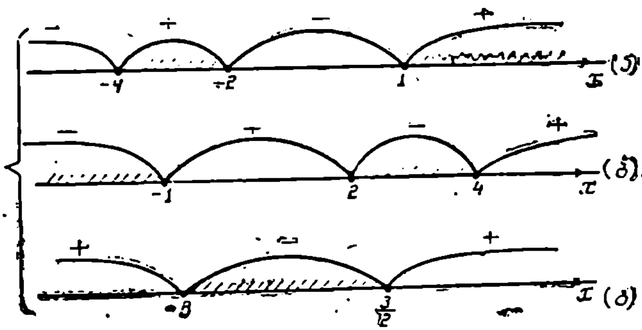
ა მ ო ხ ს ნ ა. კონიუქციის ამოხსნის მიზნით (1) სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)(x+4)>0,\\(x-4)(x-2)(x+1)(x^2+x+5)<0,\\(3x-2)(x+2)^2(x+3)<0.\end{cases} \qquad (2)$$

რადგანაც ნებისმიერი x-ისათვის $(x+2)^2\geqslant 0$ და $x^2+x+5>0$, ამიტომ (2) სისტემიდან გვექნება:

$$\begin{array}{l} (\text{ა}) \\ (\text{ბ}) \\ (\text{გ}) \end{array}\begin{cases}(x-1)(x+2)(x+4)>0\\(x-4)(x-2)(x+1)<0,\\(3x-2)(x+3)<0\end{cases} \qquad (3)$$

თუ (3) სისტემის თითოეული უტოლობის მიმართ გამოვიყენებთ უტოლობის ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდს (ნახ. 51), მივიღებთ შემდეგ

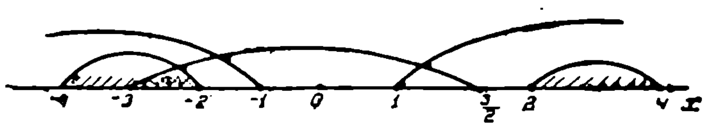


ნახ. 51

დიზიუნქციათა კონიუქციას:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-4<x<-2\\x>1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\2<x<4\end{array}\right.\\-3<x<\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ი. მოცემული სისტემის კონიუქციის ამონახსენთა სიმრავლეა $\{x:-3<x<-2\}$ (ნახ. 52).



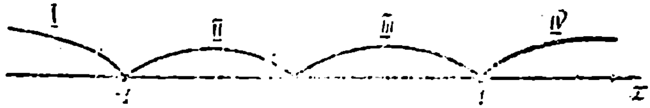
ნახ. 52

მაგალითი 2. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} |x+1|(4-x)>0, \\ \dfrac{x+2+x|x-1|}{|x|}>-1. \end{cases} \qquad (4)$$

ამოხსნა. განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა (ნახ. 53):

$$\text{I)}\ \begin{cases} x<-1 \\ (-x-1)(4-x)>0 \\ \dfrac{x+2-x(-x-1)}{-x}+1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ (x+1)(x-4)>0 \\ \dfrac{(x+1)(x-2)}{x}>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \end{cases}$$

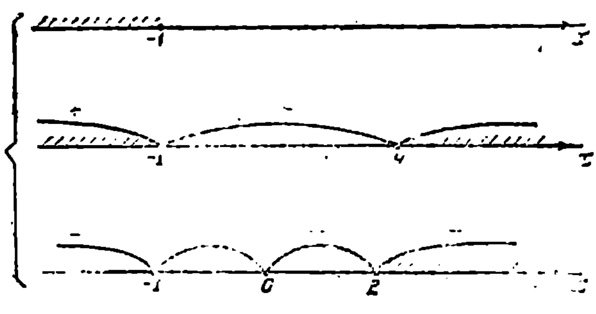


ნახ. 53

მივიღეთ ცარიელი სიმრავლე (ნახ. 54).

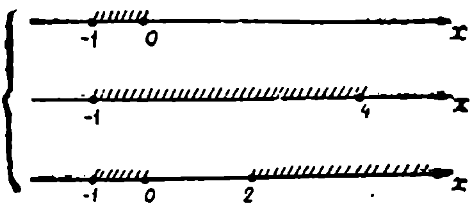
$$\text{II)}\ \begin{cases} -1<x<0 \\ (x+1)(4-x)>0 \\ \dfrac{x+2-x(x-1)}{-x}+1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ (x+1)(4-x)>0 \\ \dfrac{(x+1)(x-2)}{x}>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ -1<x<4 \\ \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>2. \end{array}\right. \end{cases}$$

რომლის ამონახსნია $x\in\ ]-1;\ 0[$ სიმრავლე (ნახ. 55).



ნახ. 54

5.



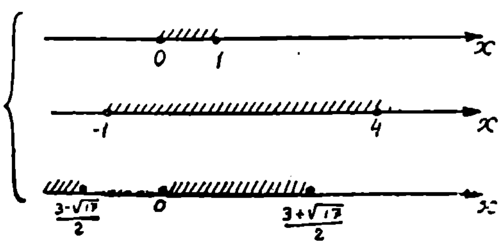
ნახ. 55

$$\text{III)}\quad \begin{cases} 0<x<1 \\ \begin{cases} (x+1)(4-x)>0 \\ \dfrac{x+2-x(x-1)}{x}+1>0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \begin{cases} (x+1)(4-x)>0 \\ \dfrac{x^2-3x-2}{x}<0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \begin{cases} -1<x<4 \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \\ 0<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{cases}.$$

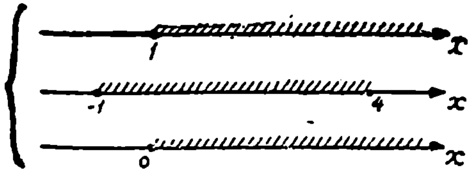
ამ უტოლობათა სისტემის ამონახსენია: $0<x<1$ (ნახ. 56).

$$\text{IV)}\quad \begin{cases} x>1 \\ (x+1)(4-x)>0 \\ \dfrac{x^2+x+2}{x}>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -1<x<4 \\ x>0 \end{cases}$$



ნახ. 56

რადგან x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $x^2+x+2>0$, ამიტომ ამ შემთხვევაში ამონახსენია: $1<x<4$ (ნახ. 57).



ნახ. 57

პ ა ს უ ხ ი. მოცემულ უტოლობათა (4) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა დიზიუნქცია: $\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ 0<x<1\\ 1<x<4.\end{array}\right.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x+y\geqslant 1\\ x+2y\geqslant 2.\end{cases} \tag{5}$$

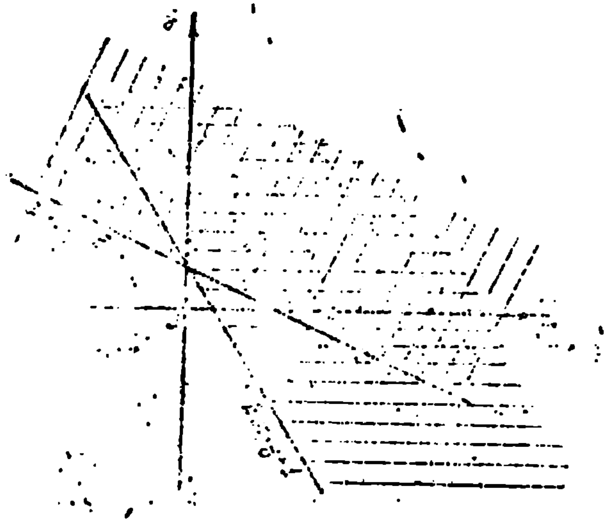
ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული სისტემა შევცვალოთ მისი ტოლფასი სისტემით:

$$\begin{cases} y\geqslant 1-2x\\ y\geqslant 1-\frac{1}{2}x.\end{cases} \tag{6}$$

უნდა განვიხილოთ შემდეგ კონიუქციათა დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 1-2x\\ -2x+1\geqslant -\frac{1}{2}x+1\end{cases}\\ \begin{cases} y\geqslant -\frac{1}{2}x+1\\ -2x+1\leqslant -\frac{1}{2}x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 1-2x\\ x\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases} y\geqslant -\frac{1}{2}x+1\\ x\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

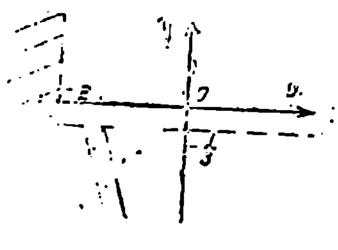
ნახ. 58-ზე წარმოდგენილია (5) სისტემის ამონახსნის გეომეტრიუ-ლი სახე.



ნახ. 58

მაგალითი 4. ამოხსენით უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} -3x+y<-1-3x-2y, \\ 2y-4x>10+x+2y. \end{cases} \qquad (7)$$



ნახ. 59

ამოხსნა. გამარტივების შემდეგ (7) სისტემიდან მივიღებთ (ნახ. 59):

$$\begin{cases} y<-\frac{1}{3}, \\ x<-2. \end{cases}$$

სავარჯიშო 8. ამოხსენით უტოლობათა სისტემები:

$$\begin{cases} (x^2-x+3)(x-5)(x+14)>0, \\ (x-1)(3-x)(x^2+x+17)<0, \\ (x-5)(x+1)(x+2)(x+4)>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1|\cdot|x-2|>1, \\ \frac{|x-2|+3}{1-|x+1|}>4; \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} \frac{(x-3)(x^2-16)(x-7)}{|1-x|}>0, \\ |x-2|+1>x; \end{cases}$$

4) $\begin{cases} \sqrt{x-1} > x, \\ (4-x)(5-x) < 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y-3 \geqslant 0, \\ y+2x+6 \geqslant 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y > 2x+y, \\ 2x+3y > 1. \end{cases}$

§ 8. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები და უტოლობათა სისტემები

გავიხსენოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი ფაქტები: 1) თუ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ და $0<a<1$, მაშინ $f(x)<\varphi(x)$. 2) თუ $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}$ და $a>1$, მაშინ $f(x)>\varphi(x)$. 3) თუ $a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}$ და $0<a<1$, მაშინ $f(x)>\varphi(x)$. 4) თუ $a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}$ და $a>1$, მაშინ $f(x)<\varphi(x)$.

ამის მსგავსად $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქციისათვის განვიხილოთ შემთხვევები: 1) თუ $\log_a f(x)>\log_a\varphi(x)$ და $0<a<1$, მაშინ $f(x)<\varphi(x)$. 2) თუ $a>1$, მაშინ $f(x)>\varphi(x)$; 3) თუ $\log_a f(x)<\log_a\varphi(x)$ და $0<a<1$, მაშინ $f(x)>\varphi(x)$. 4) თუ $a>1$, მაშინ $f(x)<\varphi(x)$ ($f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეების საერთო ნაწილში).

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა:

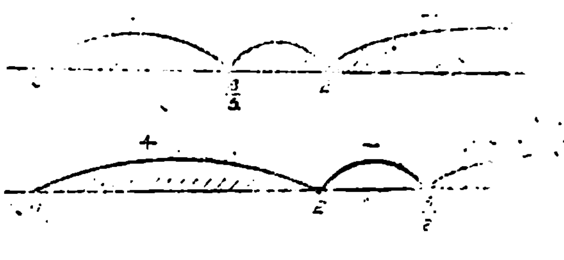
$$\left|\frac{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}{2^{2x}-4}\right| \leqslant 1. \qquad (1)$$

ამოხსნა. განვიხილოთ (1) უტოლობის ტოლფასი სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}{2^{2x}-4} \leqslant 1 \\[2mm] \dfrac{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}{2^{2x}-4} \geqslant -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5\cdot 2^x-8}{2^x-2} \geqslant 0 \\[2mm] \dfrac{2\cdot 2^x-5}{2^x-2} \geqslant 0. \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ $2^x>0$, მაშინ ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ (ნახ. 60) დიზიუნქციათა კონიუნქციას:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0<2^x\leqslant \dfrac{8}{5} \\ 2^x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0<2^x<2 \\ 2^x\geqslant \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \end{cases}$$



ნახ. 60

აქედან ვღებულობთ შემდეგ დიზიუნქციას

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x \leqslant \dfrac{8}{5} \\ 2^x \geqslant \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \tag{3}$$

რომლის (x-ის მიმართ) ამოხსნა მოგვცემს:

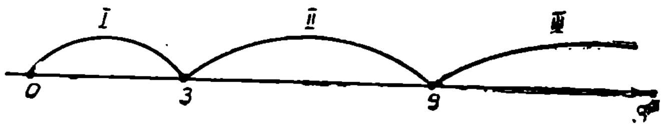
$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant \log_2 \dfrac{8}{5} \\ x \geqslant \log_2 \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 - \log_2 5 \\ x \geqslant \log_2 5 - 1. \end{array}\right.$$

პ ა ს უ ხ ი. (1) უტოლობის ამონახსენია დიზიუნქცია: $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 - \log_2 5 \\ x \geqslant \log_2 5 - 1. \end{array}\right.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 15 - 5|3^x - 3|}{|3^x - 9|(2 - 3^x)} < 0. \tag{4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სამი შემთხვევა (ნახ. 61):



ნახ. 61

I) როცა $0 < 3^x < 3$, მაშინ (4)-დან მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < 3^x < 3, \\ \dfrac{3^{2x} - 3^x}{(9 - 3^x)(2 - 3^x)} < 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 < 3^x < 3 \\ \dfrac{3^x - 1}{(9 - 3^x)(2 - 3^x)} < 0. \end{array}\right. \tag{4'}$$

თუ გამოვიყენებთ ინტერვალების მეთოდს, მაშინ ადვილად მივიღებთ უტოლობათა (4′) სისტემის ამონახსენს:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < 3^x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < 1 \\ 2 < 3^x < 9, \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < 1 \\ 2 < 3^x < 3, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ \log_3 2 < x < 1. \end{array}\right.$$

II) როცა $3 < 3^x < 9$, მაშინ (4) უტოლობა ჩაიწერება ასე:

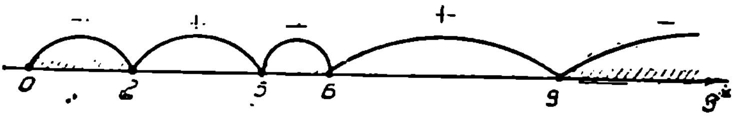
$$\begin{cases} 3 < 3^x < 9 \\ \dfrac{3^{2x} - 11 \cdot 3^x + 30}{(9 - 3^x)(2 - 3^x)} < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < 3^x < 9 \\ \dfrac{(3^x - 5)(3^x - 6)}{(9 - 3^x)(2 - 3^x)} < 0, \end{cases} \qquad (4'')$$

აქედან

$$\begin{cases} 3 < 3^x < 9 \\ \left[\begin{array}{l} 2 < 3^x < 5 \\ 6 < 3^x < 9, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < 3^x < 5 \\ 6 < 3^x < 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < \log_3 5 \\ \log_3 6 < x < 2. \end{array}\right.$$

III) თუ $3^x > 9$, მაშინ (4)-დან მივიღებთ (ნახ. 62):

$$\begin{cases} 3^x > 9 \\ \dfrac{(3^x - 5)(3^x - 6)}{(3^x - 9)(2 - 3^x)} < 0. \end{cases}$$



ნახ. 62

ე. ი. $3^x > 9$ შემთხვევისათვის გვექნება:

$$\begin{cases} 3^x > 9 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < 2 \\ 5 < 3^x < 6, \end{array}\right. \end{cases}$$

რაც შეუძლებელია (მიღებული კონიუქცია ცარიელი სიმრავლეა).

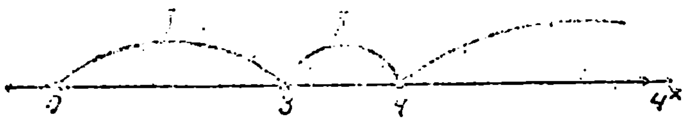
პ ა ს უ ხ ი. მოცემული (4) უტოლობის ამონახსენია შემდეგი დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ \log_3 2 < x < 1, \\ 1 < x < \log_3 5 \\ \log_3 6 < x < 2. \end{array}\right.$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} |4^x-3|-4^x>-8, \\ 4^{2x}-|4-4^x|<4. \end{cases} \qquad (5)$$

ამოხსნა. აქ განიხილება სამი შემთხვევა (ნახ. 63):



ნახ. 63

I) როცა $0<4^x<3$, მაშინ (5) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} 0<4^x<3, \\ -4^x+3-4^x>-8 \\ 4^{2x}-4+4^x<4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<4^x<3 \\ \begin{cases} 2\cdot 4^x<11 \\ \left(4^x+\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}\right)\left(4^x-\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}\right)<0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<4^x<3 \\ 4^x<\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}. \end{cases}$$

საიდანაც $0<4^x<\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$.

II) როცა $3<4^x<4$ $(4^x\neq 3,\ 4^x\neq 4)$, მაშინ იგივე სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} 3<4^x<4 \\ 4^x-3-4^x>-8 \\ 4^{2x}-4+4^x<4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -3>-8 \\ 4^{2x}+4^x-8<0 \end{cases} \\ 3<4^x<4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3<4^x<4 \\ 0<4^x<\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}. \end{cases}$$

მიღებული კონიუქცია ცარიელი სიმრავლეა.

III) როცა $4^x>4$, მაშინ (5) სისტემისათვის გვექნება:

$$\begin{cases} 4^x>4 \\ 4^x-3-4^x>-8 \\ 4^{2x}-4^x<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x>4 \\ \begin{cases} -3>-8 \\ 4^x<1 \end{cases} \end{cases}$$

რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, უტოლობათა (5) სისტემის ამონახსენია $0 < 4^x < \frac{\sqrt{33}-1}{2}$; აქედან $x < \log_4 \frac{\sqrt{33}-1}{2}$.

პასუხი. უტოლობათა (5) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა $A = \left\{x \mid x < \log_4 \frac{\sqrt{33}-1}{2}\right\}$.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ ლოგარითმული უტოლობა:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+8) - \log_{\frac{1}{2}}|x-3| < \log_{\frac{1}{2}} 3x. \tag{6}$$

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა;

I) როცა $x < 3$ $(x \neq 3)$, მაშინ:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+8) - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) < \log_{\frac{1}{2}} 3x. \end{cases} \tag{7}$$

II) როცა $x > 3$, გვექნება:

$$\begin{cases} x > 3, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+8) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < \log_{\frac{1}{2}} 3x. \end{cases} \tag{8}$$

(7)-ის ამოხსნა. რადგან ლოგარითმის ფუძე ნაკლებია 1-ზე $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$, ამიტომ (7)-დან გვექნება:

$$\begin{cases} x < 3 \\ x+8 > 0 \\ 3x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+8}{3-x} < \log_{\frac{1}{2}} 3x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ \frac{x+8}{3-x} > 3x, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \frac{3x^2 - 8x + 8}{3-x} > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x < 3. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში, მოცემული უტოლობის ამონახსენია $0 < x < 3$.

(8)-ის ამოხსნა.

$$\begin{cases} x>3 \\ x+8>0 \\ 3x>0 \\ \dfrac{x+8}{x-3}>3x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \dfrac{(x-4)(3x+2)}{x-3}<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{2}{3} \\ 3<x<4. \end{array}\right. \end{cases}$$

მიღებული კონიუქციაა $3<x<4$.

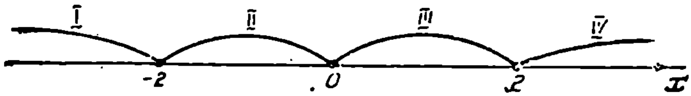
პასუხი. (6) უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე არის $A = \{x \mid 0<x<3\} \cup \{x \mid 3<x<4\}$.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ შემდეგი უტოლობის ამონახსენი:

$$\log_2 \frac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \geqslant 1. \tag{9}$$

ამოხსნა. მოცემულ უტოლობას მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\log_2 \frac{|x|\cdot|x-2|+4}{|x+2|+x^2} \geqslant \log_2 2. \tag{10}$$



ნახ. 64

განვიხილოთ შემთხვევები (ნახ. 64):

I) $$\begin{cases} x<-2 \\ \log_2 \dfrac{(-x)(-x+2)+4}{-x-2+x^2} \geqslant \log_2 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ \dfrac{x^2-2x+4}{x^2-x-2} \geqslant 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ \dfrac{(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \leqslant x < -1 \\ 2<x \leqslant 2\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} \leqslant x < -2.$$

II) $$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{-x^2-4x}{x^2+x+2} \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{x(x+4)}{x^2+x+2} \leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ -4 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

საიდანაც $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

$$\text{III)}\quad \begin{cases} 0<x<2\ (x\neq 2) \\ \dfrac{-3x^2}{x^2+x+2}\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ \dfrac{x^2}{x^2+x+4}\leqslant 0. \end{cases}$$

მიღებული კონიუქცია ცარიელია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $0<x<2$ შუალედში მოცემულ უტოლობას ამონახსენი არა აქვს.

$$\text{IV)}\quad \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x+2}-2\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{-x^2-4x}{x^2+x+2}\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>2 \\ x(x+4)\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ -4\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

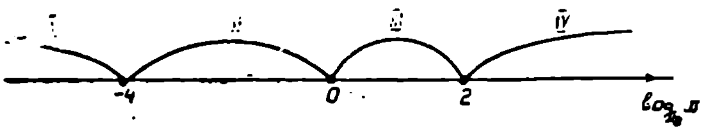
მიღებული კონიუქცია ცარიელი სიმრავლეა.

პ ა ს უ ხ ი. (9) უტოლობის ამონახსენია დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2}\leqslant x<-2 \\ -2\leqslant x<0 \end{array}\right. \quad \text{ანუ} \quad -2\sqrt{2}\leqslant x<0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} |\log_2 x+4|+|\log_2 x|\geqslant 4, \\ |2-\log_2 x|+3\log_2 x<-2 \end{cases} \tag{11}$$



ნახ. 65

ა მ ო ხ ს ნ ა. (11) სისტემა ჯერ ამოვხსნათ $\log_2 x$-ის მიმართ. განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა (ნახ. 65):

$$\text{I)}\quad \left\{\begin{array}{l} \log_2 x\leqslant -4 \\ \begin{cases} -\log_2 x+4-\log_2 x\geqslant 4 \\ 2-\log_2 x+3\log_2 x<-2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x\leqslant -4 \\ \log_2 x\leqslant 0, \\ \log_2 x<-2, \end{cases}$$

საიდანაც $\log_2 x\leqslant -4$.

$$\text{II)}\quad \begin{cases} -4<\log_2 x<0 \\ \begin{cases} \log_2 x+4-\log_2 x\geqslant 4 \\ 2-\log_2 x+3\log_2 x<-2. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<\log_2 x<0 \\ \begin{cases} -\infty<\log_2 x<+\infty \\ \log_2 x<-2. \end{cases} \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში უტოლობის ამონახსენია: $-4<\log_2 x<-2$.

$$\text{III)}\quad \begin{cases} 0<\log_2 x<2 \\ \begin{cases} \log_2 x+4+\log_2 x\geqslant 4 \\ 2-\log_2 x+3\log_2 x<-2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<\log_2 x<2 \\ \begin{cases} \log_2 x\geqslant 0 \\ \log_2 x<-2. \end{cases} \end{cases}$$

მიღებული კონიუქცია ცარიელი სიმრავლეა.

$$\text{IV)}\quad \begin{cases} \log_2 x>2 \\ \begin{cases} \log_2 x+4+\log_2 x\geqslant 4 \\ -2+\log_2 x+3\log_2 x<-2, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x>2 \\ \log_2 x\geqslant 0 \\ \log_2 x<0. \end{cases}$$

ეს კონიუქციაც ცარიელი სიმრავლეა.

მაშასადამე, (11) სისტემის ამონახსენს ($\log_2 x$-ის მიმართ) წარმოადგენს დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x\leqslant -4 \\ -4<\log_2 x<-2, \end{array}\right. \quad \text{ანუ} \quad \log_2 x<-2.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ მოცემული სისტემის ამონახსენს (x-ის მიმართ).

პასუხი. მოცემული (11) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლეა $\left\{x \mid 0<x<\frac{1}{4}\right\}$.

მაგალითი 7. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 1<3^{|x^2-x|}<9 \\ \log_x \dfrac{3}{8-2x}\geqslant -2 \end{cases} \tag{12}$$

ამოხსნა. განიხილება ორი შემთხვევა:

I) როცა $0 < x < 1$, უტოლობათა სისტემა მოგვცემს:

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ \dfrac{3}{8-2x}>0 \\ 1<3^{-x^2+x}<9 \\ \log_x \dfrac{3}{8-2x} \geqslant \log_x \dfrac{1}{x^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<4 \\ 3^0<3^{-x^2+x}<3^2 \\ \dfrac{3}{8-2x} \leqslant \dfrac{1}{x^2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<-x^2+x<2 \\ \dfrac{(x+2)(3x-4)}{4-x} \leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x(1-x)>0, \\ x^2-x+2>0, \\ \dfrac{(x+2)(3x-4)}{4-x} \leqslant 0, \end{cases}$$

საიდანაც $0 < x < 1$.

II) როცა $x>1$, მაშინ (12)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{3}{8-2x}>0 \\ 1<3^{x^2-x}<9 \\ \dfrac{3}{8-2x} \geqslant \dfrac{1}{x^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<4 \\ 0<x^2-x<2 \\ \dfrac{(x+2)(3x-4)}{4-x} \geqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x<4 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>1 \end{array}\right. \\ -1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ \dfrac{4}{3} \leqslant x<4. \end{array}\right. \end{cases}$$

აქედან $\dfrac{4}{3} \leqslant x < 2.$

პ ა ს უ ხ ი. მოცემული (12) სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ \dfrac{4}{3} \leqslant x<2. \end{array}\right.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 9. ამოვხსნათ უტოლობები და უტოლობათა სისტემები:

1) $\log_2|x-1|+\log_2 x>3$,

2) $3^{\log_2|x-5|}>9^{\log_2|1-x|}$;

3) $\log_{x-1}\log_2(10^x-7)\geqslant 2$;

4) $\begin{cases}\log_2(x-2)+\log_3|x|>-2,\\ 4-\log_2|x+4|<-1;\end{cases}$

5) $\begin{cases}2^{|x^3+x^2-4x|}>4^{\frac{1}{2}x},\\ 1-\log_5|x|<\log_5 x\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_{|x-4|}2+\log_{|x|}4>2,\\ 3^{|x-x^3|}<3^{\log_2 x}.\end{cases}$

III თავი

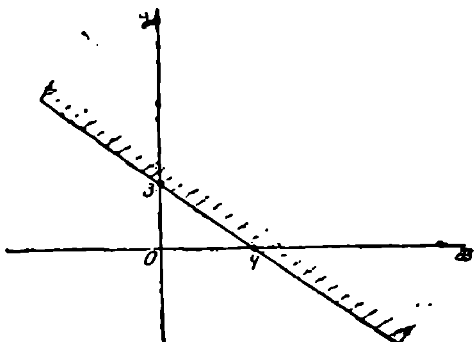
ორი ცვლადის შემცველი უტოლობები

§ 1. პირველი ხარისხის უტოლობები, უტოლობათა კონიუქციები და დიზიუნქციები

ამოვხსნათ პირველი ხარისხის ორი ცვლადის შემცველი უტოლობები:

1. $3x+4y>12$. (1)

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1) უტოლობა $y>-\frac{3}{4}x+3$ უტოლობის ტოლფასია. განვსაზღვროთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომლის ყველა წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებენ (1) უტოლობას. ამ



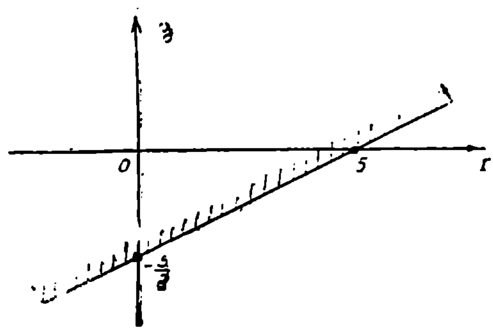
ნახ. 66

მიზნით xOy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ $y=-\frac{3}{4}x+3$ წრფე (ნახ. 66). ეს წრფე მთელ სიბრტყეს ჰყოფს ორ

ნახევარსიბრტყედ. რადგან $y=-\frac{3}{4}x+3$ წრფის მიმართ ქვედა ნახევარსიბრტყის თუნდაც ერთი $O(0,0)$ წერტილის $x=0$ და $y=0$ კოორდინატები არ აკმაყოფილებენ (1) უტოლობას, ამიტომ ამ ნახევარსიბრტყის არცერთი წერტილი არ იქნება (1)-ის ამონახსენი. (1) უტოლობის ამონახსენი იქნება აღნიშნული წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, $y=-\frac{3}{4}x+3$ წრფის წერტილთა გამოკლებით.

$$2. \quad x-2y\leqslant 5 \qquad (2)$$

ამოხსნა. ამ უტოლობის ტოლფასია $y\geqslant\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ უტოლობა. ავაგოთ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ წრფე (ნახ. 67). რადგან მას აკმაყოფილებს $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის $O(0,0)$



ნახ. 67

წერტილის კოორდინატები, ამიტომ (2) უტოლობის ამონახსენი იქნება ამ ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ წრფის წერტილების ჩათვლით.

ამოვხსნათ პირველი ხარისხის ორი ცვლადის შემცველი უტოლობათა სისტემები:

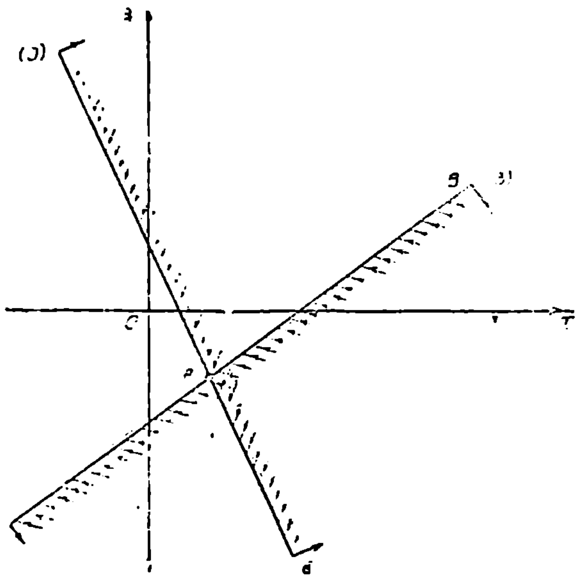
$$1. \quad \begin{cases} 3x+2y>1 & (ა) \\ 2x-2y>5 & (ბ) \end{cases} \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\begin{cases} y > -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ y < x - \frac{5}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} > -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} < y < x - \frac{5}{2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{5}, \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} < y < x - \frac{5}{2}. \end{cases}$$

ამრიგად, (1) სისტემის ამონახსენი იქნება x და y ნებისმიერი წყვილი, რომელთათვისაც $x > \frac{6}{5}$, ხოლო y ნებისმიერი რიცხვია $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$



ნახ. 68

და $x - \frac{5}{2}$ მნიშვნელობებს შორის მოთავსებული. ავაგოთ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ და $y = x - \frac{5}{2}$ წრფეები (ნახ. 68). დავშტრიხოთ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ წრფის შესაბამისი ზედა ნახევარსიბრტყე, რადგან

$y > -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ და $y = x - \frac{5}{2}$ წრფის შესაბამისი ქვედა ნახევარსიბრტყე, რადგან $y < x - \frac{5}{2}$. BAC კუთხის წერტილების კოორდინატები დააკმაყოფილებენ (1) სისტემას. რაც შეეხება ამ კუთხის გვერდებზე მდებარე წერტილებს — ისინი არ შევლენ აღნიშნულ ამონახსენში.

პ ა ს უ ხ ი. (1) უტოლობათა სისტემის ამონახსენია BAC კუთხის წერტილთა სიმრავლე AB და AC სხივების წერტილთა გამოკლებით.

2. $$\begin{cases} 2x + y > 2 \\ 6x + 3y < 12. \end{cases} \qquad (2)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინა უტოლობათა სისტემის მსგავსად შეგვიძლია დავწეროთ:

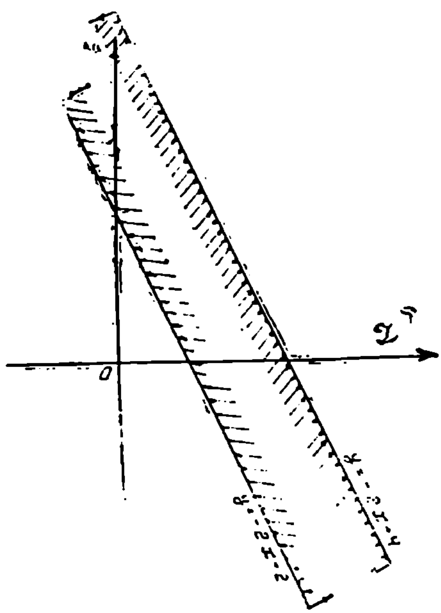
$$\begin{cases} y > -2x + 2 \\ y < -2x + 4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 < -2x + 4 \\ -2x+2 < y < -2x+4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 < 4 \\ -2x+2 < y < -2x+4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -2x + 2 < y < -2x + 4, \end{cases}$$

ე. ი. x შეიძლება იყოს ნებისმიერი რიცხვი, ხოლო y განისაზღვრება $-2x + 2 < y < -2x + 4$ ორმაგი უტოლობიდან. წინა მსჯელობის მსგავსად მივიღებთ ამ შემთხვევის გეომეტრიულ სურათს (ნახ. 69). ცხადია (2)-ის ამონახსენი იქნება $y = -2x + 2$ და $y = -2x + 4$ წრფეებით განსაზღვრული ზოლის წერტილთა სიმრავლე, ამ წრფეების წერტილთა გამოკლებით.



ნახ. 69

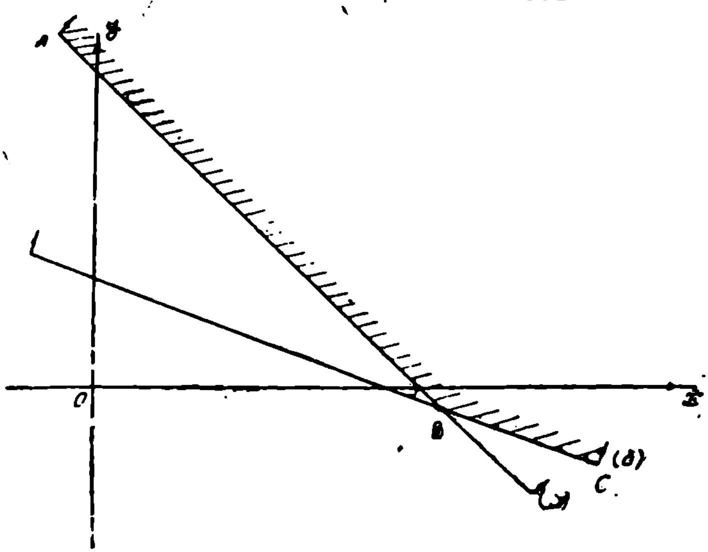
3. $$\begin{cases} 3x + 4y \geqslant 24 & (ა) \\ 2x + 7y \geqslant 14 & (ბ) \end{cases} \qquad (3)$$

ამოხსნა. მოცემული უტოლობათა სისტემა ტოლფასია შემდეგი უტოლობათა სისტემების:

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{3}{4}x + 6 \\ y \geqslant -\dfrac{2}{7}x + 2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + 6 \geqslant -\dfrac{2}{7}x + 2 \\ y \geqslant -\dfrac{3}{4}x + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + 6 \leqslant -\dfrac{2}{7}x + 2 \\ y \geqslant -\dfrac{2}{7}x + 2, \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 8\dfrac{8}{13} \\ y \geqslant -\dfrac{3}{4}x + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 8\dfrac{8}{13} \\ y \geqslant -\dfrac{2}{7}x + 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

70-ე ნახაზზე დაშტრიხულია სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე. ABC კუთხის ყველა წერტილთა სიმრავლე BA და BC სხივების წერტილებთან ერთად შეადგენს (3) სისტემის კონიუქციას.



ნახ. 70

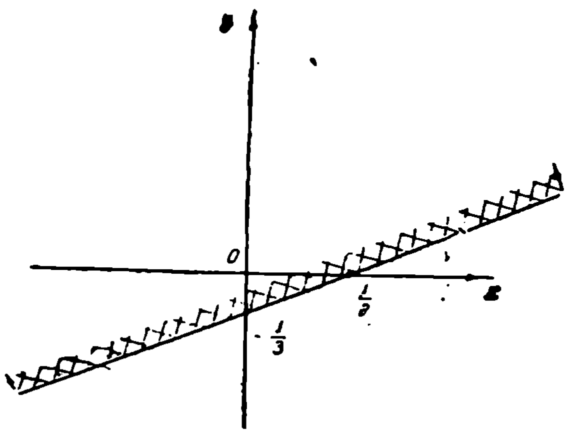
$$4. \quad \begin{cases} 2x-3y\leqslant 1 \\ 6x-9y\leqslant 3 \end{cases} \qquad (4)$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$\begin{cases} 2x-3y\leqslant 1 \\ 6x-9y\leqslant 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geqslant \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \\ y\geqslant \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}, \end{cases}$$

ე. ი. (4) სისტემა ტოლფასია ერთი $y\geqslant\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ უტოლობის (ნახ. 71), რომელსაც აკმაყოფილებს $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყე, ამ წრფის წერტილების ჩათვლით.

$$5. \quad \begin{cases} x-2y\leqslant 5 & (ა) \\ 2x-4y\leqslant 15 & (ბ) \end{cases} \qquad (5)$$

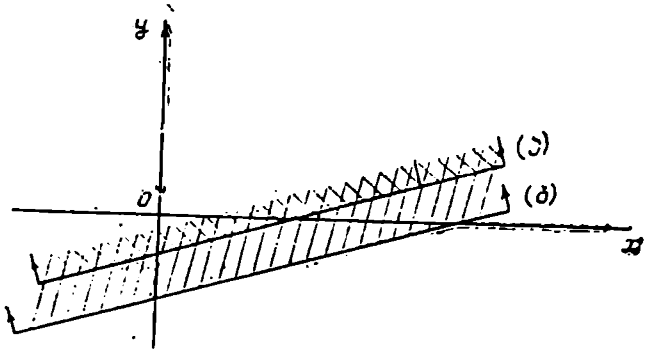


ნახ. 71

ამოხსნა. ავაგოთ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ და $y=\frac{1}{2}x-\frac{15}{4}$ წრფეები (ნახ. 72). (5)-ის (ა) უტოლობას დააკმაყოფილებს პირველი წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყე და (ბ) უტოლობას — მეორე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყე. (5) სისტემის ამონახსნე-

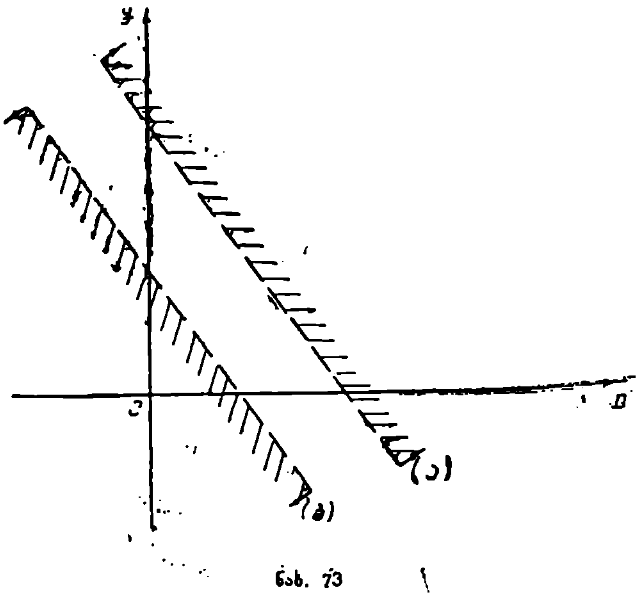
ნი იქნება $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, ამ წრფის წერტილების ჩათვლით.

$$\text{გ.}\quad \begin{cases} 3x+2y<6 & \text{(ა)} \\ 3x+2y>9 & \text{(ბ)} \end{cases} \qquad (6)$$



ნახ. 72

ამოხსნა. ავაგოთ $y=-\frac{3}{2}x+3$ და $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ წრფეები (ნახ. 73). (6) სისტემის (ა) უტოლობას აკმაყოფილებს პირველი

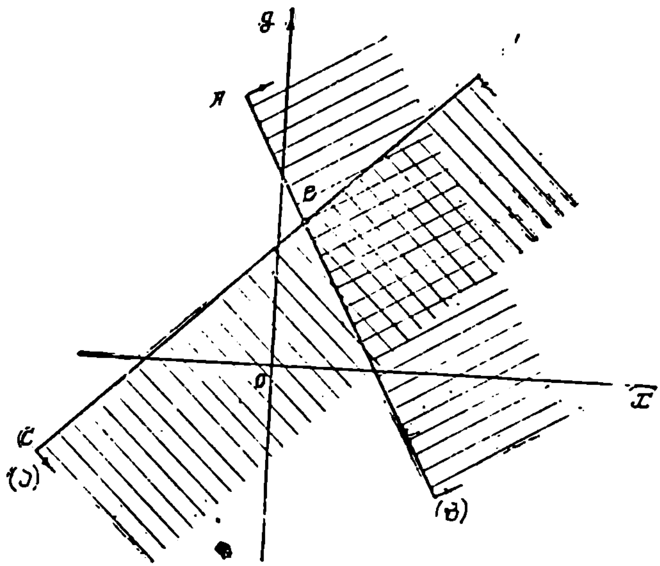


ნახ. 73

წრფით განსაზღვრული ქვედა ნახევარსიბრტყის წერტილები, ხოლო (ბ) უტოლობას — მეორე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილები. ამიტომ (6)-ს ამონახსენი არა აქვს.

$$7. \quad \left[\begin{array}{ll} x+2 \geqslant y & (ა) \\ 2x+y \geqslant 3 & (ბ) \end{array}\right. \qquad (7)$$

ამოხსნა. ავაგოთ $y = x + 2$ და $y = -2x + 3$ წრფეები (ნახ. 74). (ა) უტოლობის ამონახსენი იქნება პირველი წრფით განსა-



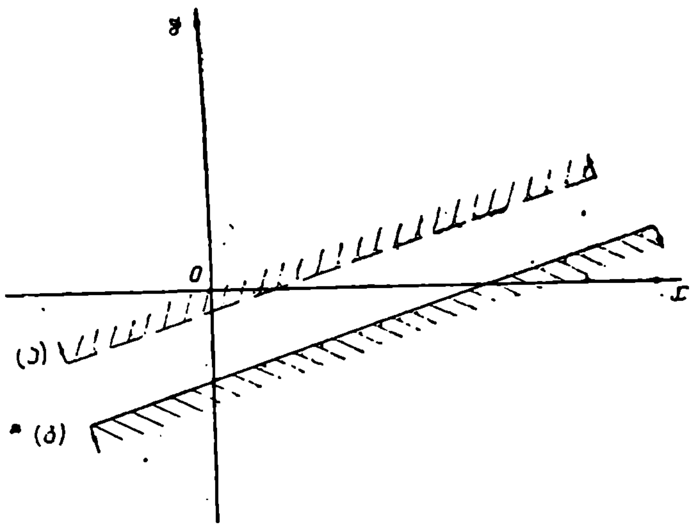
ნახ. 74

ზღვრული ქვედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, $y = x + 2$ წრფის წერტილების ჩათვლით. მეორე უტოლობის ამონახსენი იქნება მეორე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, $y = -2x + 3$ წრფის წერტილებთან ერთად. ამრიგად, (7)-ის ამონახსენი იქნება მთელ სიბრტყეს გამოკლებული ABC კუთხის ყველა წერტილის სიმრავლე. ამ სიმრავლეში შედიან BA და BC სხივებიც.

$$8. \quad \left[\begin{array}{ll} 3x-4y < 1 & (ა) \\ 3x-4y \geqslant 8 & (ბ) \end{array}\right. \qquad (8)$$

ამოხსნა. ავაგოთ წრფეები: $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ და $y=\frac{3}{4}x-2$. ცხადია (8)-ის ამონახსენი იქნება პირველი წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის და მეორე წრფით განსაზღვრული ქვედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე ერთად აღებული. ამასთან ამ სიმრავლეში შევა $y=\frac{3}{4}x-2$ წრფე და არ შევა $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ წრფე (ნახ. 75).

$$9. \begin{cases} x+y>1 & (ა) \\ x-2y<4 & (ბ) \\ y<-1 & (გ) \end{cases} \qquad (9)$$

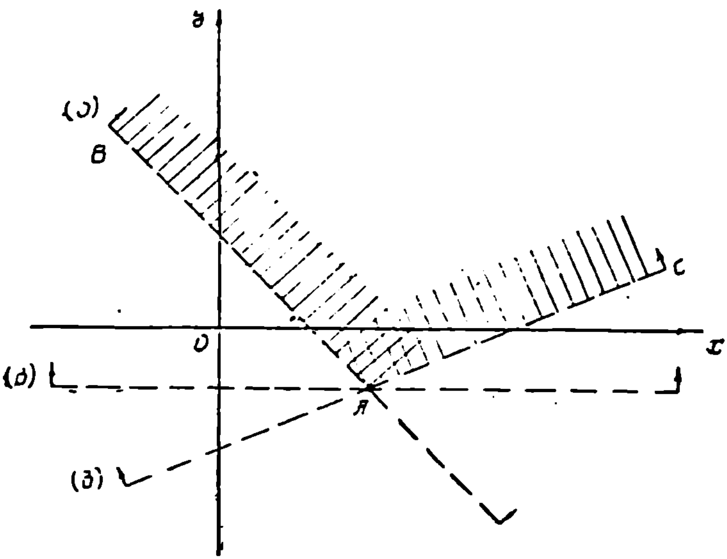


ნახ. 75

ამოხსნა. ავაგოთ წრფეები: $y=-x+1$, $y=\frac{1}{2}x-2$ და $y=-1$. (9) სისტემის (ა) უტოლობას დააკმაყოფილებს (ნახ. 76) პირველი წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილთა

სიმრავლე. (ბ) უტოლობას — მეორე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილები, ხოლო (გ) უტოლობას — მესამე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილები (რადგან (ა) და (ბ) წრფის გადაკვეთის A წერტილის ორდინატია $y=-1$, ამიტომ $y=-1$ წრფე გადის A წერტილზე). (9) სისტემის ამონახსენია ABC კუთხით განსაზღვრულ წერტილთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეში არ შედიან AB და AC სხივები.

$$
10. \quad \begin{cases} 2x-y\leqslant 2 & (\text{ა}) \\ x+y\geqslant -2 & (\text{ბ}) \\ y\leqslant 3 & (\text{გ}) \end{cases} \qquad (10)
$$

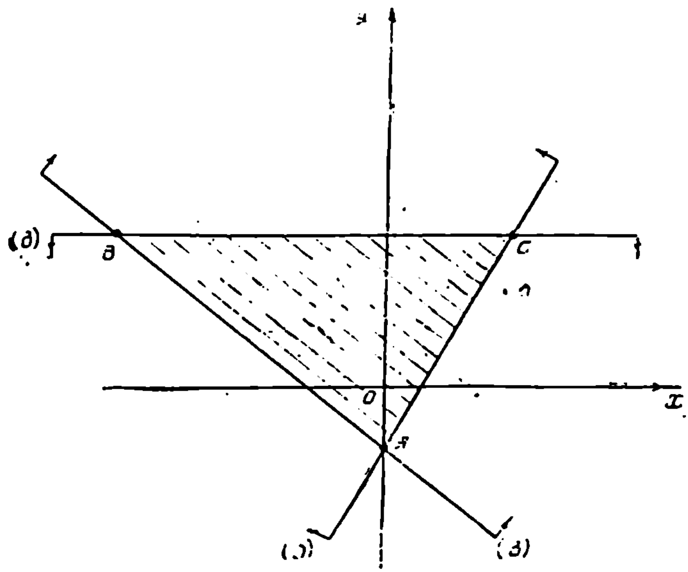


ნახ. 76

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ წრფეები: $y=2x-2$, $y=-x-2$, $y=3$. (10) სისტემის (ა) უტოლობის ამონახსენია პირველი წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყე. (ბ) უტოლობის ამონახსენია მეორე წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყე, ხოლო (გ) უტოლობის ამონახსენია მესამე წრფით განსაზღვრული ქვედა ნახევარსიბრტყე.

ამრიგად (ნახ. 77), (10) სისტემის ამონახსენია ABC სამკუთხედის წერტილთა სიმრავლე, საზღვრის წერტილების ჩათვლით.

11.
$$\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 6 & (ა) \\ 2x + y \leqslant 2 & (ბ) \\ y \leqslant 3 & (გ) \\ x \geqslant -3 & (დ) \end{cases} \qquad (11)$$



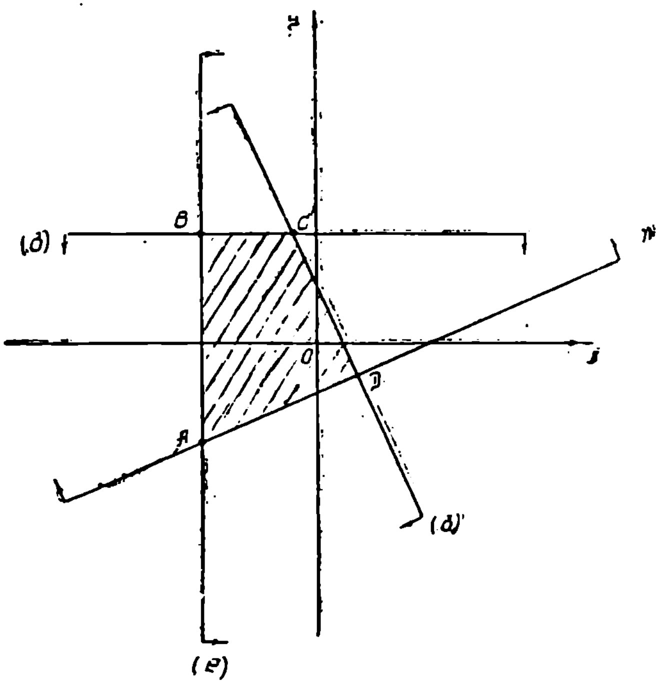
ნახ. 77

ა მ ო ხ ს ნ ა. გადავიდეთ ტოლფას გარდაქმნებზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 6 \\ 2x + y \leqslant 2 \\ y \leqslant 3 \\ x \geqslant -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant \frac{2}{3}x - 2 \\ y \leqslant -2x + 2 \\ y \leqslant 3 \\ x \geqslant -3, \end{cases} \Rightarrow$$

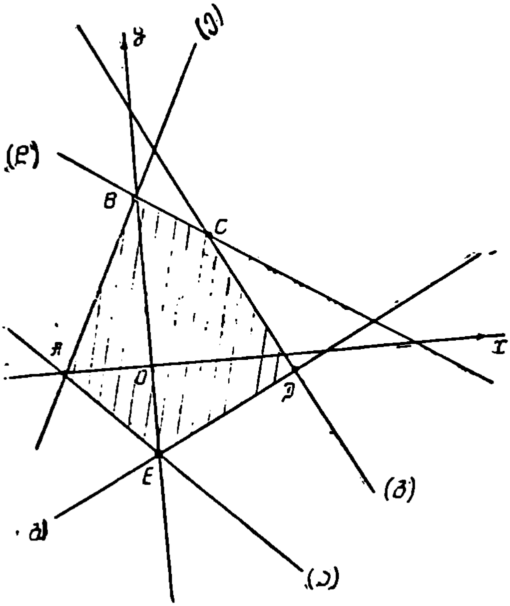
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3 \\ -2x+2 \geqslant 3 \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant 3 \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant y \leqslant 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -3 \\ -2x+2 \leqslant 3 \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant -2x+2 \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant y \leqslant -2x+2, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}x-2 \leqslant y \leqslant -2x+2. \end{cases} \end{array}\right.$$

ავაგოთ წრფეები: $y=\frac{2}{3}x-2$, $y=-2x+2$, $y=3$, $x=-3$ და მივმართოთ გეომეტრიულ სურათს (ნახ. 78). (11) სისტემის (ა), (ბ),



ნახ. 78

(გ), (დ) უტოლობების ამონახსნები ნაჩვენებია ისრების საშუალებით და ჩანს, რომ (11)-ის ამონახსენია $ABCD$ მრავალკუთხედის წერტილთა სიმრავლე, საზღვრის წერტილების ჩათვლით.



ნახ. 79

12. $$\begin{cases} x+y \geqslant -2 \\ x-2y \leqslant 4 \\ 2x+y \leqslant 6 \\ 2x+3y \leqslant 12 \\ 2x-y \leqslant -4. \end{cases} \quad (12)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ წრფეები: $y=-x-2$, $y=\frac{1}{2}x-2$, $y=-2x+6$, $y=-\frac{2}{3}x+4$ და $y=2x+4$. (12) სისტემის უტოლობათა ამონახსნების საერთო ნაწილს წარმოადგენს $ABCDE$ ხუთკუთხედი, საზღვრის წერტილებით (ნახ. 79).

§ 2. მეორე ხარისხის უტოლობათა სისტემები

განვიხილოთ ისეთ უტოლობათა სისტემის ამოხსნის საკითხი, რომლებიც შეიცავენ ორ ცვლადს, საზოგადოდ, მეორე ხარისხში.

ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემები:

1. $$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4 \\ 2x-y \leqslant 2 \end{cases} \quad (1)$$

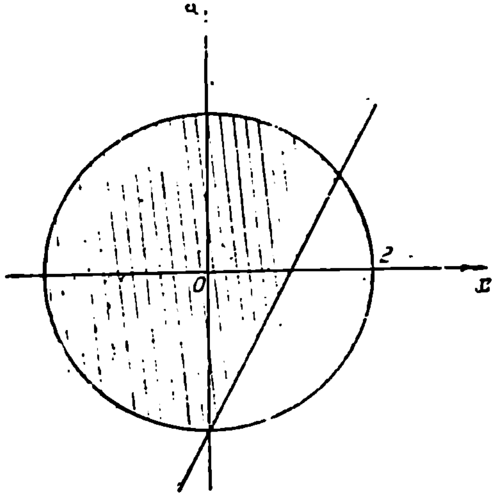
ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $x^2+y^2=2^2$ წრეწირი და $y=2x-2$ წრფე (ნახ. 80). ცხადია $x^2+y^2 \leqslant 4$ განსაზღვრავს იმ ჩაკეტილი წრის წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ცენტრია O (0,0) და რადიუსი $R=2$, ხოლო (1)-ის მეორე უტოლობით მოიცემა $y=2x-2$ წრფით განსაზღვრული ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილები. ამიტომ (1) სისტემის

ამონახსენი არის მოცემული წრის ის ჩაკეტილი წრიული სეგმენტი, რომელიც $y=2x-2$ წრფის მარცხნივ მდებარეობს.

2. $$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9 \\ xy>0 \end{cases} \qquad (2)$$

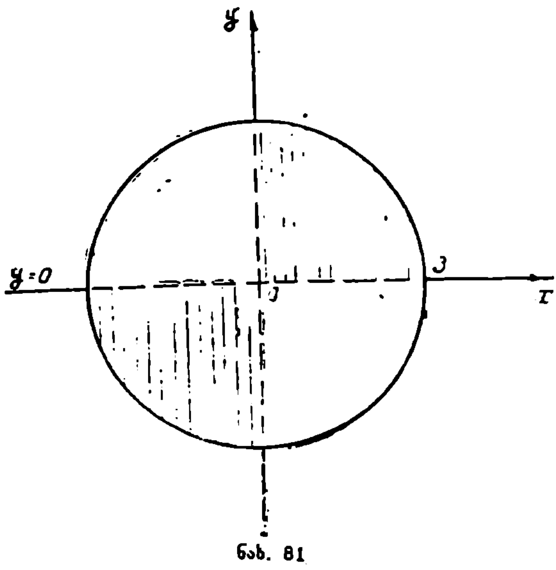
ამოხსნა. აქედან ვღებულობთ უტოლობათა ორი კონიუქციის დიზიუნქციას:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9 \\ x>0 \\ y>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9 \\ x<0 \\ y<0; \end{cases} \end{array}\right.$$



ნახ. 80

ავაგოთ $x^2+y^2=9$ წრეწირი და $x=0$, $y=0$ წრფეები (ნახ. 81). ცხადია (2) სისტემის ამონახსენია წრის დაშტრიხული ნაწილი, ე. ი. პირველ და მესამე მეოთხედში მოთავსებული წრიული სექტორების გაერთიანება. წრის შიგნით მოთავსებული ღერძების ნაწილები ამ სიმ-

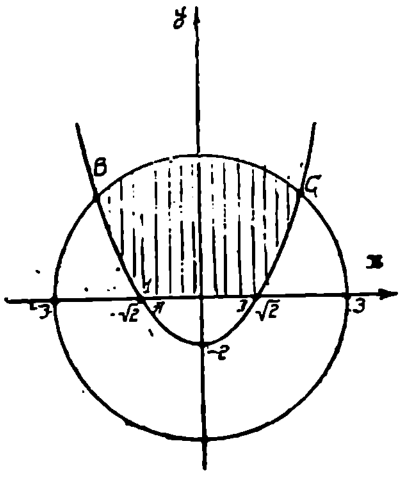


ნახ. 81

რავლეს არ ეკუთვნის. რაც შეეხება აღნიშნული სექტორების რკალების წერტილებს — ისინიც ეკუთვნიან ამონახსენთა სიმრავლეს.

$$3.\quad \begin{cases} y \geqslant x^2-2 & (ა) \\ x^2+y^2 \leqslant 9 & (ბ) \\ y \geqslant 0 & (გ) \end{cases} \qquad (3)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $y=x^2-2$ პარაბოლა, $x^2+y^2=9$ წრეწირი და განვიხილოთ $y=0$ წრფე (ნახ. 82). (3) სისტემის (ა) უტოლობას დააკმაყოფილებს სიბრტყიდან $y=x^2-2$ პარაბოლით გამოყოფილი იმ ნაწილის წერტილთა სიმრავლე, სადაც მოთავსებულია O (0,0) წერტილი. ხოლო (ბ) უტოლობას — აღნიშნული წრის წერტილები, საზღვრის წერტილების ჩათვლით. რადგან ამასთან ერთად $y \geqslant 0$, ამიტომ (3) სისტემის ამონახსენი იქნება $ABCD$ მრუდწირული ფიგურა, საზღვრის წერტილების ჩათვლით.



ნახ. 82

$$4.\quad \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \log_2 y - \log_2 2 \leqslant \log_2(x+1). \end{cases} \qquad (4)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული უტოლობათა სისტემა გადავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{y}{2} \leqslant \log_2 (x+1) \\ x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

აქედან გვაქვს

$$\begin{cases} y > 0 \\ x+1 > 0 \\ \dfrac{y}{2} \leqslant x+1 \\ x^2+y^2 \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \\ y \leqslant 2x+2 \\ x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (5)$$

(5), ან რაც იგივეა (4) სისტემის ამონახსენი მოცემულია 83-ე ნახაზზე.

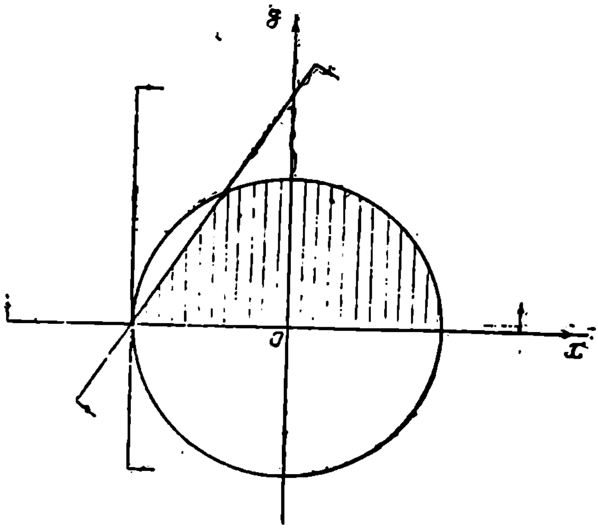
$$5.\quad \begin{cases} y-x^2+1 \geqslant 0 \\ xy \geqslant 3 \\ y-4 \leqslant 0 \end{cases} \qquad (6)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გადავწეროთ სისტემა ასე:

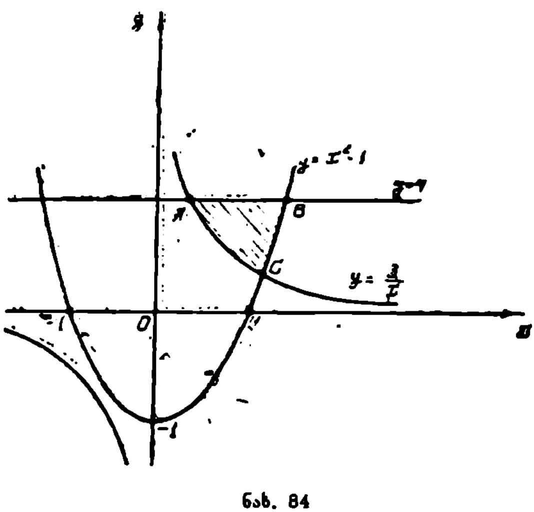
$$\begin{cases} y \geqslant x^2-1 \\ xy \geqslant 3 \\ y \leqslant 4. \end{cases}$$

ავაგოთ $y = x^2 - 1$ პარაბოლა, $y = \frac{3}{x}$ ჰიპერბოლა და $y=4$ წრფე. თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ, რომ (6) სისტემის ამონახსენია ABC მრუდწირული სამკუთხედის წერტილთა სიმრავლე (ნახ. 84).

გ. $$\lg(x^2 + y^2 - 4) > \lg(2xy). \qquad (7)$$



ნახ. 83



ნახ. 84

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ 2xy>0 \\ x^2+y^2-4>2xy. \end{cases} \qquad (8)$$

გადავწეროთ იგი შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ xy>0 \\ (x-y)^2>4, \end{cases}$$

საიდანაც

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x>0 \\ y>0 \\ (x-y)^2>4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x<0 \\ y<0 \\ (x-y)^2>4, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x>0 \\ y>0 \\ \left[\begin{array}{l} x-y>2 \\ x-y<-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x<0 \\ y<0 \\ \left[\begin{array}{l} x-y>2 \\ x-y<-2. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

ცხადია, რომ ამონახსენთა სიმრავლეა ABC, DEF, NMQ და KRP სამკუთხედების შიგა წერტილთა სიმრავლე (ნახ. 85).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 10. **ამოვხსნათ უტოლობები და უტოლობათა სისტემები:**

1) $6x-4y\leqslant-3,$ 2) $-42x-13y>-1,$

3) $\begin{cases} x-y\leqslant 5 \\ 7x+4y>-1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-3x-5<0 \\ 2x-6y+17\leqslant 0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - y \leqslant 0 \\ 6x - 7y + 12 > 0 \\ y - 3 \leqslant 0, \end{cases}$

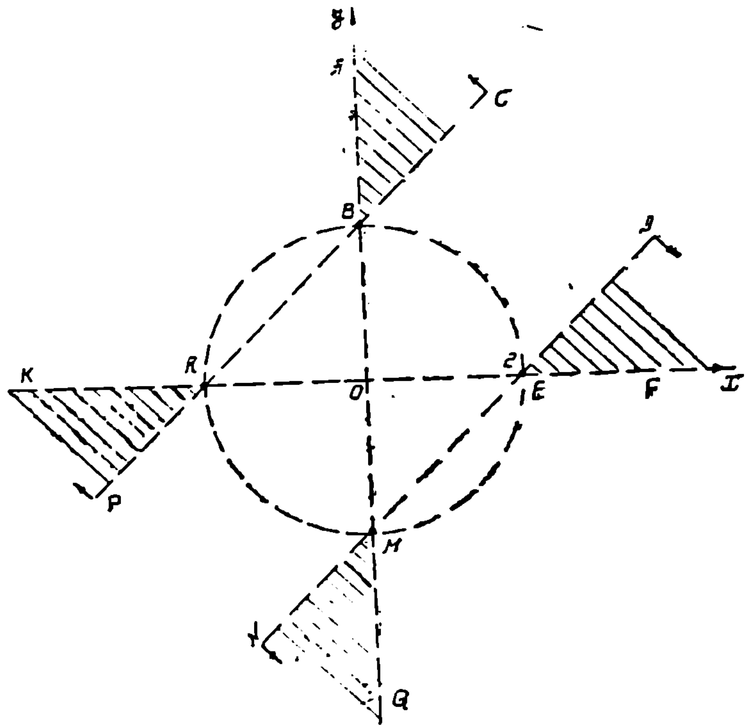
6) $\begin{cases} x \leqslant -5 \\ x + 5y \leqslant -7 \\ 6x + y > -2, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - 3y < 6 \\ x - 5 \geqslant 0 \\ y \leqslant -1; \end{cases}$

8) $\left[\begin{array}{l} x - 6 \leqslant 0 \\ 4y - 6x > 9, \end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l} y - x > 3 \\ \begin{cases} 4x - y \geqslant 7 \\ 2x - 3y \leqslant 5, \end{cases} \end{array}\right.$

10) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 2y \leqslant -3 \\ x - y < 4 \end{array}\right. \\ x - 1 > 0. \end{cases}$



ნახ. 85

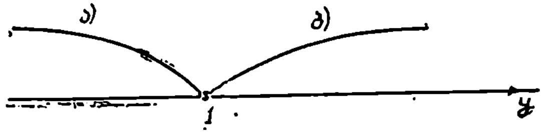
უტოლობები და უტოლობათა სისტემები, რომლებიც შეიცავენ ორი ცვლადის მოდულს

§ 1. მოდულის შემცველი უტოლობები

აქ განვიხილავთ ისეთი უტოლობების ამოხსნის საკითხს, რომლებიც შეიცავენ ორ ცვლადს აბსოლუტური მნიშვნელობის ნიშნის ქვეშ.

ამოვხსნათ უტოლობები:

1. $$x-1+|y-1|\leqslant 0. \qquad (1)$$



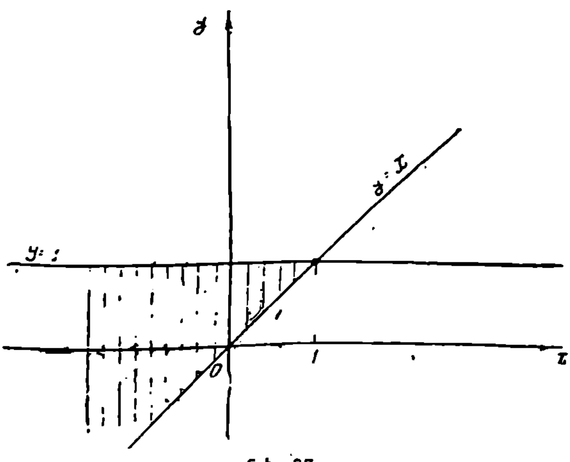
ნახ. 86

ამოხსნა. გამოვიყენოთ მოდულის განსაზღვრება $|y-1|$ გამოსახულების მიმართ (ნახ. 86), მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y-1\leqslant 0 \\ x-1+1-y\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-1>0 \\ x-1+y-1\leqslant 0, \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} y\leqslant 1 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases} & (\text{ა}) \\ \begin{cases} y>1 \\ x+y-2\leqslant 0. \end{cases} & (\text{ბ})\end{array}\right.$$

(ა) სისტემის ამონახსენი იხილეთ 87-ე ნახაზზე, (ბ) სისტემის ამონახსენი 88-ე ნახაზზე, ხოლო (1) სისტემის ამონახსენი მე-89 ნახაზზე.

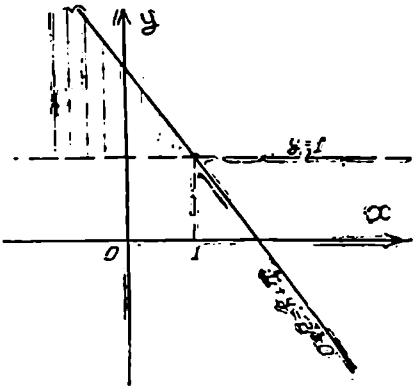
2. $$|x+2|-|y-1|\geqslant 1 \qquad (2)$$



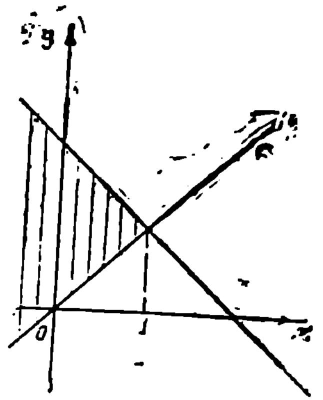
ნახ. 87

ამოხსნა. მოდულის განსაზღვრა გამოვიყენოთ $|x+2|$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x+2-|y-1|\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+2<0\\ -x-2-|y-1|\geqslant 1.\end{cases}\end{array}\right. \tag{3}$$



ნახ. 88



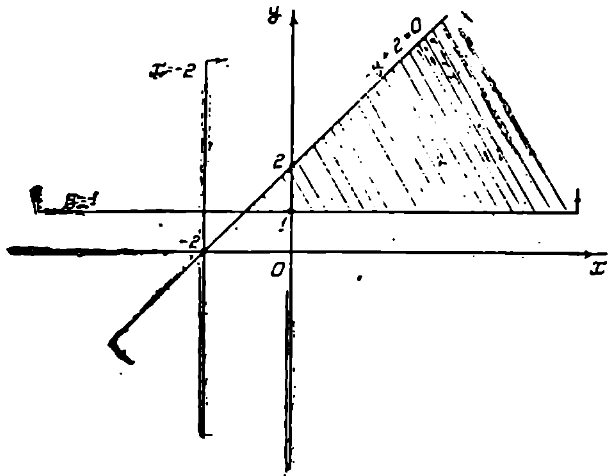
ნახ. 89

$|y-1|$-ის მიმართ მოდულის განსაზღვრის გამოყენებით (3)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

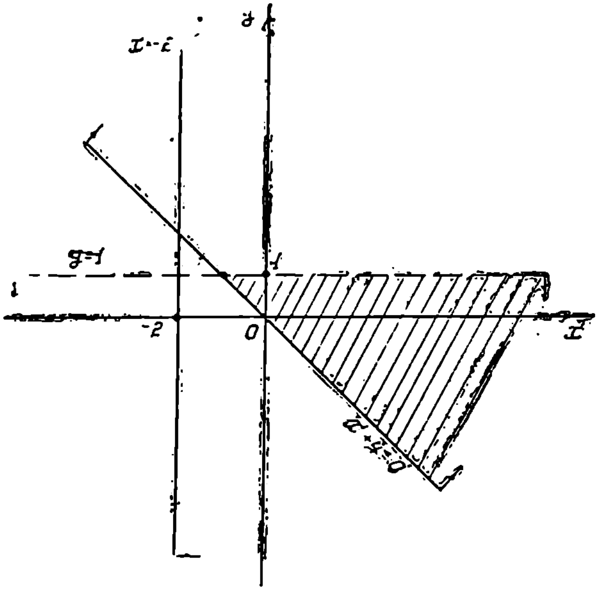
$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ y-1\geqslant 0\\ x+2-(y-1)\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+2\geqslant 0\\ y-1<0\\ x+2-(1-y)\geqslant 1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2<0\\ y-1\geqslant 0\\ -x-2-(y-1)\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x+2<0\\ y-1<0\\ -x-2-(1-y)\geqslant 1,\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant -2\\ y\geqslant 1\\ x-y+2\geqslant 0\end{cases} & (ა)\\ \begin{cases}x\geqslant -2\\ y<1\\ x+y\geqslant 0\end{cases} & (ბ)\\ \begin{cases}x<-2\\ y\geqslant 1\\ x+y+2\leqslant 0\end{cases} & (გ)\\ \begin{cases}x<-2\\ y<1\\ x-y+4\leqslant 0\end{cases} & (დ)\end{array}\right.$$

(ა), (ბ), (გ), (დ) უტოლობების ამონახსნები დაშტრიხულია შესაბამისად 90, 91, 92, 93 ნახაზებზე: ხოლო (2) უტოლობის ამონახსენი მოცემულია 94-ე ნახაზზე.

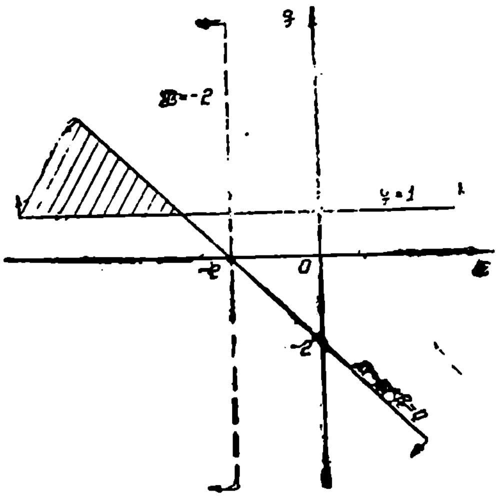
8. $$|x-3|+|x-y+1|\leqslant 2 \qquad (4)$$



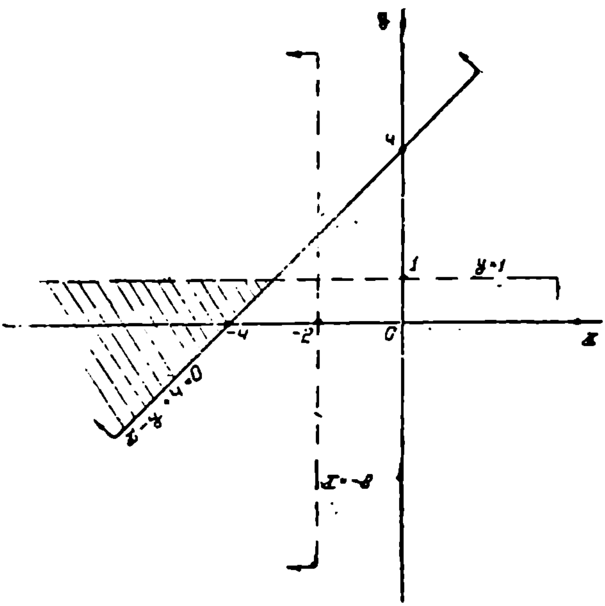
ნახ. 90



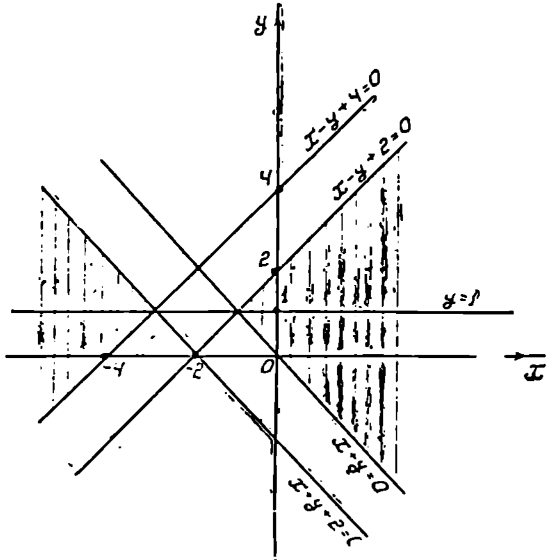
ნახ. 91



ნახ. 92



ნახ. 93



ნახ. 94

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქედან გვაქვს:

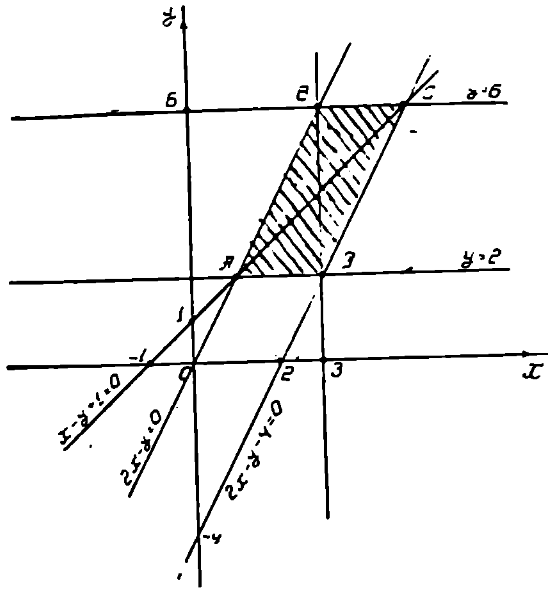
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x-3+|x-y+1|\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0\\ 3-x+|x-y+1|\leqslant 2,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (5)$$

ხოლო (5)-დან ვღებულობთ:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ x-3+x-y+1\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x-y+1<0\\ x-3-x+y-1\leqslant 2\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3<0\\ x-y+1\geqslant 0\\ 3-x+x-y+1\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0\\ x-y+1<0\\ 3-x-x+y-1\leqslant 2,\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 3\\ x-y+1\geqslant 0\\ 2x-y-4\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 3\\ x-y+1<0\\ y\leqslant 6\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\geqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x-y+1<0\\ 2x-y\geqslant 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

რომლის ამონახსენიც მოცემულია 95-ე ნახაზზე (ე. ი. (4) უტოლობის ამონახსენი არის ABCD პარალელოგრამის წერტილთა სიმრავლე).

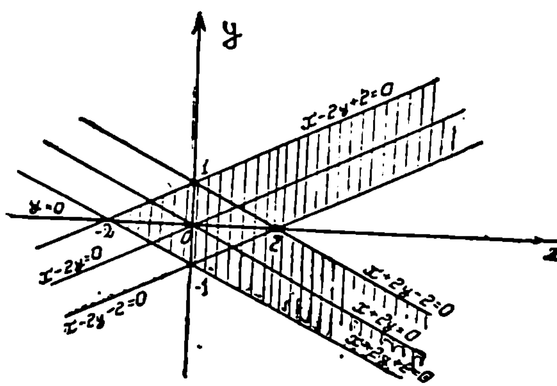
4. $$|x-2|y||\leqslant 2 \qquad (6)$$



ნახ. 95

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ მოდულის განსაზღვრება $|y|$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 0 \\ |x-2y|\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases} y<0 \\ |x+2y|\leqslant 2.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (7)$$



ნახ. 96

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 0\\ x-2y\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases} y\geqslant 0\\ x-2y<0\\ -x+2y\leqslant 2\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y<0\\ x+2y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases} y<0\\ x+2y<0\\ -x-2y\leqslant 2,\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 0\\ x-2y\geqslant 0\\ x-2y-2\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases} y\geqslant 0\\ x-2y<0\\ x-2y+2\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases} y<0\\ x+2y\geqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases} y<0\\ x+2y<0\\ x+2y+2\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (8)$$

ვიპოვოთ (8) დიზიუნქციის თითოეული კონიუქციის ამონახსენი და მიღებული შედეგები გავაერთიანოთ (ნახ. 96).

ნ. $$\left|\frac{x-y}{x+y}\right|<3. \qquad (9)$$

ამოხსნა. აქედან გვაქვს (შევნიშნოთ, რომ თუ $x=0$, მაშინ $y\neq 0$ და პირიქით, თუ $y=0$, მაშინ $x\neq 0$):

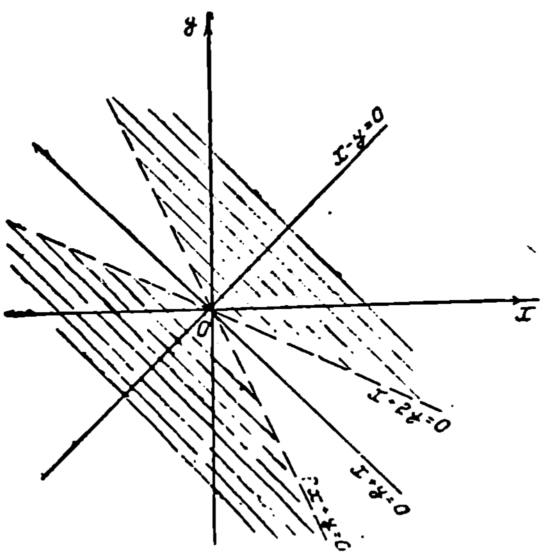
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x-y}{x+y}<3\end{cases}\\[6mm] \begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}<0\\[2mm] -\dfrac{x-y}{x+y}<3,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (10)$$

რომელიც გვაძლევს:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y>0\\ x-y<3(x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y<0\\ x-y>3(x+y)\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y>0\\ x+y<0\\ y-x>3(x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}x-y<0\\ x+y>0\\ y-x<3(x+y),\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y>0\\ x+2y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y<0\\ x+2y<0\end{cases}\\ \begin{cases}x-y>0\\ x+y<0\\ 2x+y<0\end{cases}\\ \begin{cases}x-y<0\\ x+y>0\\ 2x+y>0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (11)$$

(9) უტოლობის ამონახსენი მოცემულია 97-ე ნახაზზე.

6. $$||x|-|y|+1|\leqslant 2 \qquad (12)$$



ნახ. 97

ამოხსნა. $|x|$-ის განსაზღვრების თანახმად მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ |x - |y| + 1| \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ |x - |y| + 1| \leqslant 2, \end{cases} \end{array}\right. \tag{13}$$

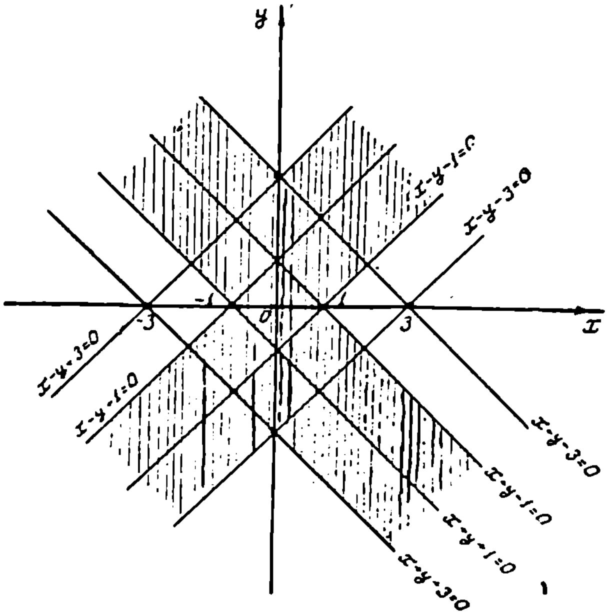
ხოლო $|y|$-ის მიმართ მოდულის განსაზღვრების გამოყენება გვაძლევს:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ |x - y + 1| \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ |x + y + 1| \leqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ |-x - y + 1| \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ |-x + y + 1| \leqslant 2. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{14}$$

აქედან კი საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y - 1 \leqslant 0 \\ x - y + 3 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ x + y - 1 \leqslant 0 \\ x + y + 3 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y + 1 \geqslant 0, \\ x + y - 3 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \\ x - y - 3 \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \tag{15}$$

რომლის ამონახსენი მოცემულია 98-ე ნახაზზე.



ნახ. 93

§ 2. მოდულის შემცველი უტოლობათა სისტემები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ისეთ უტოლობათა სისტემებს, რომლებიც შეიცავენ ორ ცვლადს მოდულის ნიშნის ქვეშ. ამოვხსნათ სისტემები:

1.
$$\begin{cases} x + |y-2| \leqslant 2 \\ |x+1| + 2x > -1. \end{cases} \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია ორი კონიუქციის დიზიუნქციის:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2 \geqslant 0 \\ x+y-2 \leqslant 2 \\ |x+1| + 2x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2 < 0 \\ x-y+2 \leqslant 2 \\ |x+1| + 2x > -1, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2 \geqslant 0 \\ x+y-4 \leqslant 0 \\ |x+1| + 2x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2 < 0 \\ x-y \leqslant 0 \\ |x+1| + 2x > -1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

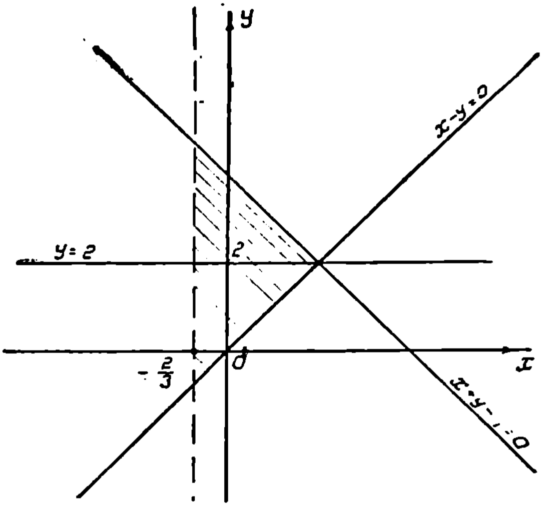
(2) დიზიუნქცია კი თავის მხრივ ეკვივალენტურია:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y-2\geqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ x+1\geqslant 0\\ x+1+2x>-1\end{cases}\\ \begin{cases} y-2\geqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ x+1<0\\ -x-1+2x>-1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y-2<0\\ x-y\leqslant 0\\ x+1\geqslant 0\\ x+1+2x>-1\end{cases}\\ \begin{cases} y-2<0\\ x-y\leqslant 0\\ x+1<0\\ -x-1+2x>-1,\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 2\\ x+y-4\leqslant 0\\ x\geqslant -1\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases} y\geqslant 2\\ x+y-4\leqslant 0\\ x<-1\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases} y<2\\ x-y\leqslant 0\\ x\geqslant -1\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases} y<2\\ x-y\leqslant 0\\ x<-1\\ x>0,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (3)$$

რომლის მეორე და მეოთხე კონიუქციები ცარიელი სიმრავლეებია. ამრიგად, (3)-დან შეგვიძლია დავწეროთ ორი კონიუქციის დიზიუნქცია:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geqslant 2\\ x+y-4\leqslant 0\\ x\geqslant -\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases} y<2\\ x-y\leqslant 0\\ x\geqslant -\dfrac{2}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

(1) სისტემის ამონახსენი მოცემულია 99-ე ნახაზზე.



ნახ. 99

2.
$$\begin{cases} |x-|y+2|| \leqslant 2 \\ |2x-3y| \geqslant 6 \end{cases} \tag{4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია

$$\begin{cases} |x-|y+2|| \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y \geqslant 6 \\ 2x-3y \leqslant -6 \end{array}\right. \end{cases} \tag{5}$$

სისტემის. აქედან კი მივიღებთ (4)-ის ეკვივალენტურ ორი კონიუნქციის დიზიუნქციას:

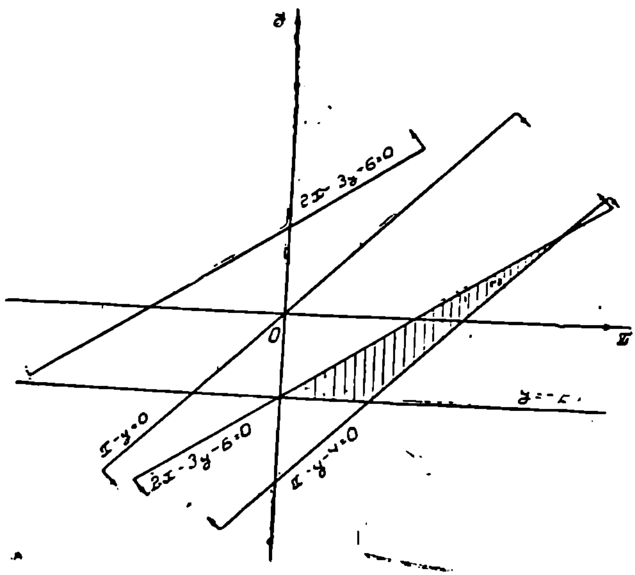
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+2 \geqslant 0 \\ |x-y-2| \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y \geqslant 6 \\ 2x-3y \leqslant -6, \end{array}\right. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y+2 < 0 \\ |x+y+2| \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y \geqslant 6 \\ 2x-3y \leqslant -6. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

ახლა მოდულის განსაზღვრება გამოვიყენოთ $|x-y-2|$ და $|x+y+2|$ გამოსახულებების მიმართ, მივიღებთ:

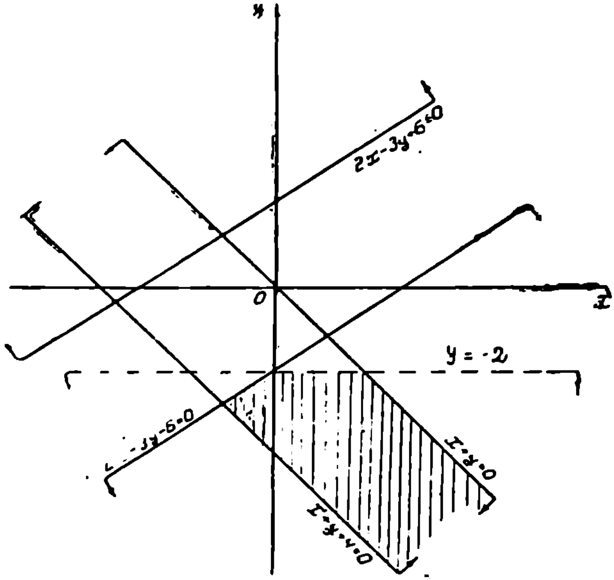
$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} y+2\geqslant 0\\ \left\{\begin{array}{l} x-y-2\leqslant 2\\ x-y-2\geqslant -2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y\geqslant 6\\ 2x-3y\leqslant -6,\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} y+2<0\\ \left\{\begin{array}{l} x+y+2\leqslant 2\\ x+y+2\geqslant -2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y\geqslant 6\\ 2x-3y\leqslant -6,\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l} y\geqslant -2\\ x-y-4\leqslant 0\\ x-y\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y-6\geqslant 0\\ 2x-3y+6\leqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. & (7)\\ \left\{\begin{array}{l} y<-2\\ x+y\leqslant 0\\ x+y+4\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} 2x-3y-6\geqslant 0\\ 2x-3y+6\leqslant 0.\end{array}\right.\end{array}\right. & (8)\end{array}\right.$$

(7)-ის ამონახსენი მოცემულია მე-100 ნახაზზე, ხოლო (8)-ის ამონახსენი 101-ე ნახაზზე. (4) სისტემის ამონახსენი იხილეთ 102-ე ნახაზზე.

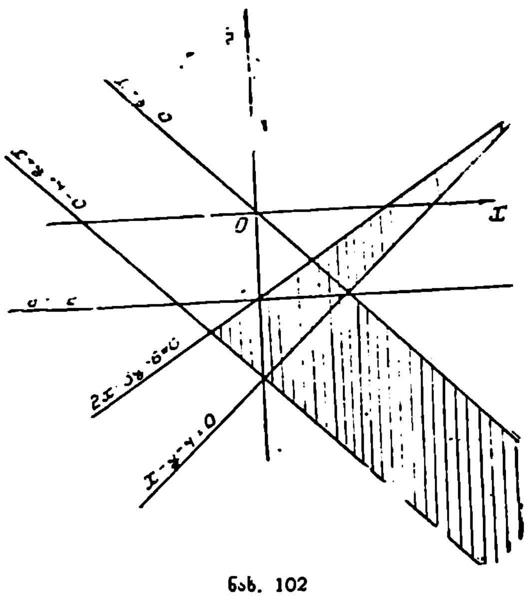
3.
$$\left\{\begin{array}{l} ||x|-y+1|\leqslant 2\\ |2+x-|y-2||>3\end{array}\right. \qquad (9)$$



ნახ. 100



ნახ. 101



ნახ. 102

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოდულის განსაზღვრება გამოვიყენოთ ჯერ $|x|$-ის და შემდეგ $|y-2|$-ის მიმართ. მივიღებთ ორი კონიუქციის დიზიუნქციას:

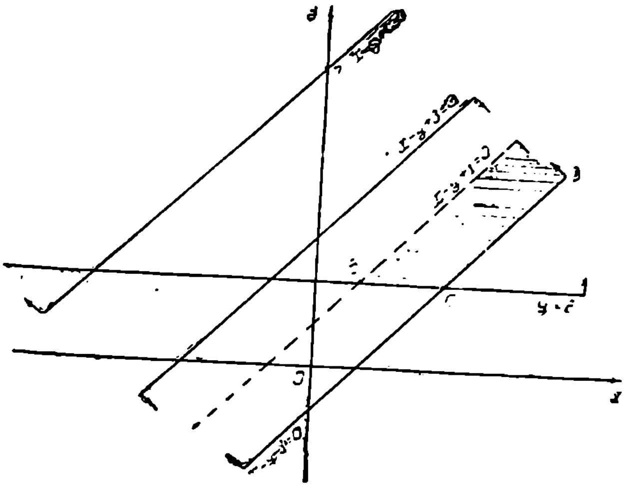
$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\ |x-y+1|\leqslant 2\\ |2+x-|y-2||>3\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ |-x-y+1|\leqslant 2\\ |2+x-|y-2||>3\end{array}\right.\end{array}\right.$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\ y-2\geqslant 0\\ |x-y+1|\leqslant 2\\ |x-y+4|>3\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\ y-2<0\\ |x-y+1|\leqslant 2\\ |x+y|>3\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ y-2\geqslant 0\\ |-x-y+1|\leqslant 2\\ |x-y+4|>3\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ y-2<0\\ |-x-y+1|\leqslant 2\\ |x+y|>3\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\ y-2\geqslant 0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x-y+1>0\\ x-y+7<0\end{array}\right.\end{array}\right. & (\text{ა})\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\ y-2<0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x+y-3>0\\ x+y+3<0\end{array}\right.\end{array}\right. & (\text{ბ})\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ y-2\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+y+1\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x-y+1>0\\ x-y+7<0\end{array}\right.\end{array}\right. & (\text{გ})\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ y-2<0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+y+1\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x+y-3>0\\ x+y+3<0\end{array}\right.\end{array}\right. & (\text{დ})\end{array}\right.$$

ახლა ამოვხსნათ ჩვეულებრივად (ა), (ბ), (გ), (დ) უტოლობათა სისტემები:

(ა)-ს ამონახსენს წარმოადგენს სიბრტყის $ABCD$ შემოუსაზღვრელი ზოლის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც შეიცავს BC მონაკვეთს, CD — სხივს და არ შეიცავს BA სხივს (ნახ. 103).



ნახ. 103

(ბ) სისტემის ამონახსენი არის (ნახ. 104) ΔMNP, რომელიც შეიცავს PN და არ შეიცავს MP და MN გვერდებს.

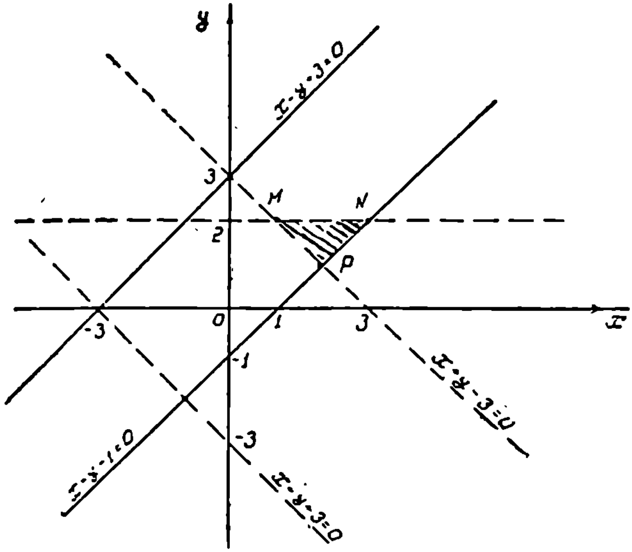
(გ) სისტემის ამონახსენია $MNKP$ შემოუსაზღვრელი ზოლის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც შეიცავს NM და KP სხივებს და არ შეიცავს NK მონაკვეთს (ნახ. 105).

(დ) სისტემას არა აქვს ამონახსენი (ნახ. 106).

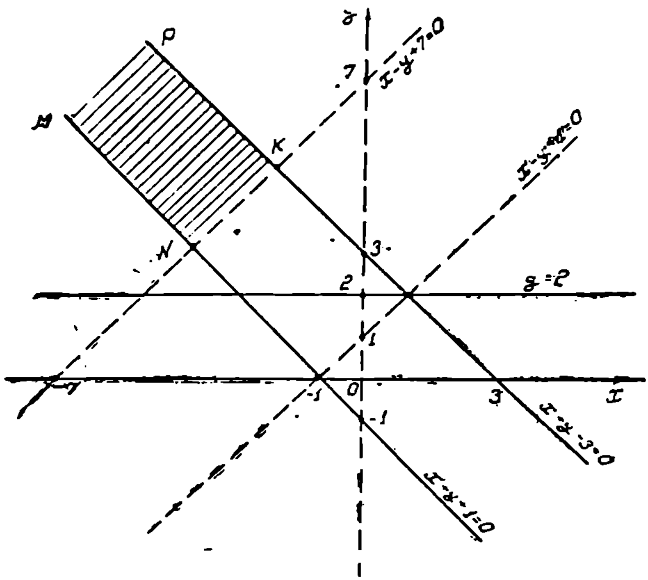
(9) უტოლობათა სისტემის ამონახსენი გამოსახულია 107-ე ნახაზზე.

პ ა ს უ ხ ი: (9) უტოლობათა სისტემის ამონახსენი მოცემულია ბოლო ნახაზზე, რომლის ანალიზური სახეა

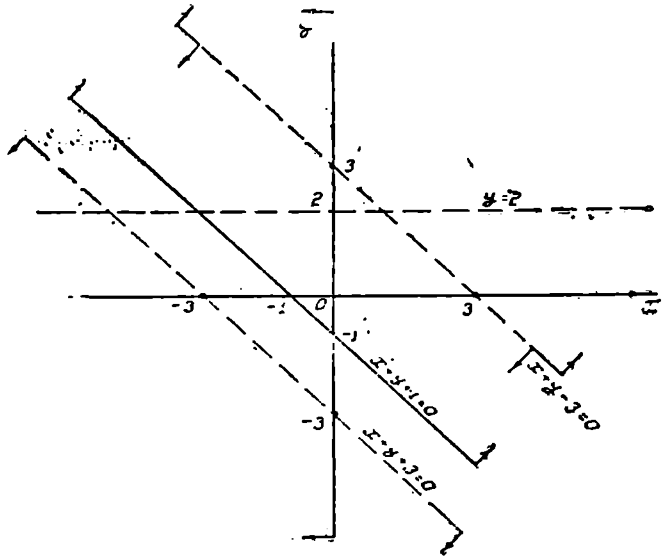
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y+7<0 \\ x+y+1\geqslant 0 \\ x+y-3\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y+1>0 \\ x+y-1\leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (10)$$



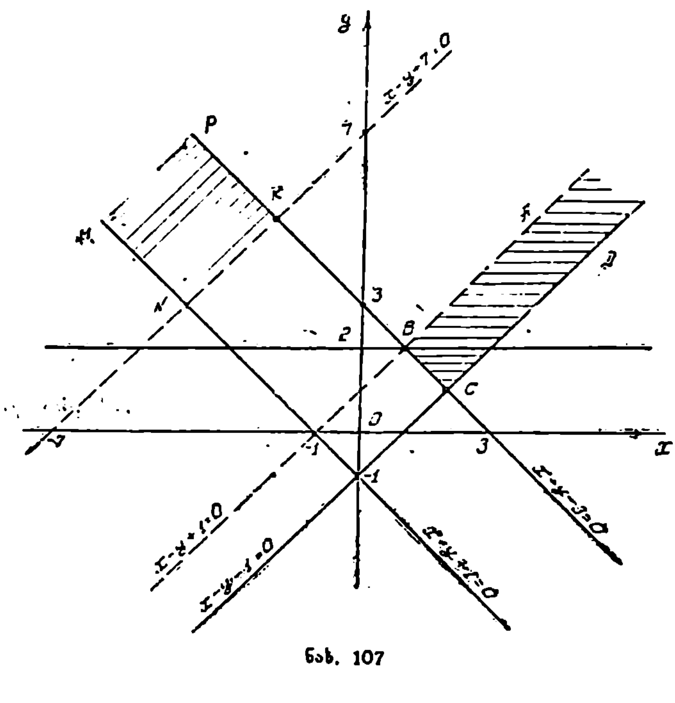
ნახ. 104



ნახ. 105



ნახ. 106



ნახ. 107

ორი კონიუქციის დიზიუნქცია.

4. $$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4 \\ ||x-2|-y| < 3 \end{cases} \tag{10}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. $|x-2|$-ის მიმართ მოდულის განსაზღვრების გამოყენება მოგვცემს ორი კონიუქციის დიზიუნქციას:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ |x-2-y| < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ |-x+2-y| < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ

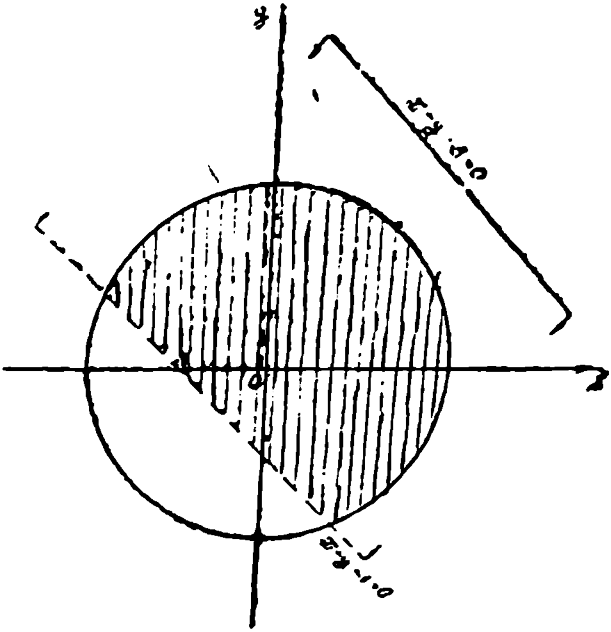
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ \begin{cases} x-2-y < 3 \\ x-2-y > -3 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ \begin{cases} -x+2-y < 3 \\ -x+2-y > -3 \end{cases} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ x-y-5 < 0 \\ x-y+1 > 0 \end{cases} & (\text{ა}) \\ \begin{cases} x < 2 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \\ x+y+1 > 0 \\ x+y-5 < 0 \end{cases} & (\text{ბ}) \end{array}\right.$$

რომლის ამონახსენი მოცემულია 108-ე ნახაზზე. ((ა) სისტემის ამონახსენია მხოლოდ $x \in \{2\}$ სიმრავლე):

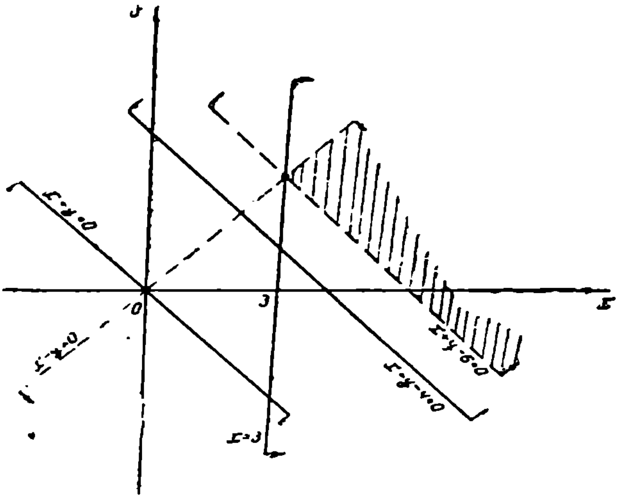
5. $$\begin{cases} \log_2(x-y) - \log_2(x-3) < 1 \\ |x+y-2| \geqslant 2. \end{cases} \tag{11}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ (11)-ის ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x-y > 0 \\ x-3 > 0 \\ \dfrac{x-y}{x-3} < 2 \\ |x+y-2| \geqslant 2 \end{cases}$$



ნახ. 108



ნახ. 109

აქედან ვღებულობთ:

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x-3>0 \\ x-y<2(x-3) \\ \left[\begin{array}{l} x+y-2\geqslant 2 \\ x+y-2\leqslant -2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} x-y>0 \\ x>3 \\ x+y-6>0 \\ \left[\begin{array}{l} x+y-4\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 0. \end{array}\right. \end{cases} \tag{12}$$

10º-ე ნახაზზე მოცემულია (12) ან რაც იგივეა (11) სისტემის ამონახსენი.

სავარჯიშო 11. ამოვხსნათ უტოლობები, უტოლობათა კონიუქციები და დიზიუნქციები:

1) $|x+y|>4x-3$, 2) $|x-2y|+|x+y|\leqslant 2$,
3) $|x-1|+|y|-|x-y|\leqslant 4$, 4) $|x|+|y-2|+|x+2y|\geqslant 41$,

5) $\begin{cases} |y+2|+|x|<3 \\ |x-2|+|y|-1<0, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |x|+|y-2|\geqslant 4 \\ |2x-3y|\leqslant 4 \\ |x|\geqslant 2, \end{cases}$

7) $\begin{cases} |x|+|y|-3\leqslant 0 \\ 6x-|y-4|\geqslant 7 \\ |x-y|\leqslant 1, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 1-|x+y|\geqslant x \\ 2y+|x|-|y|+3\geqslant 0 \\ y\leqslant 3, \end{cases}$

9) $\left[\begin{array}{l} |x+2y|-1\leqslant 0 \\ |x|-|y|-4>0 \\ |y|\leqslant 5, \end{array}\right.$ 10) $\left[\begin{array}{l} |x+2y|-3<0 \\ |x+y|\leqslant 4. \end{array}\right.$

V თავი

პარამეტრული განტოლებები და უტოლობები

§ 1. ძირითადი განსაზღვრებები

განვიხილოთ

$$f(m, n, \ldots, p, x)=\varphi(m, n, \ldots, p, x) \tag{1}$$

განტოლება, სადაც $m, n, \ldots, p, x$ ცვლადი სიდიდეებია.

ალნიშნულ ცვლადთა მნიშვნელობების ნებისმიერ

$$m=m_0,\ n=n_0, \ldots,\ p=p_0,\ x=x_0$$

კომპლექტს, რომლისთვისაც (1) განტოლების მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები ღებულობენ ნამდვილ მნიშვნელობებს, ეწოდება $m, n, \ldots,$

p, x ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა კომპლექტი.

$m, n, \ldots, p$ და x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეები აღვნიშნოთ შესაბამისად $M, N, \ldots, P$ და X-ით, ე. ი. $m \in M$, $n \in N, \ldots, p \in P$ და $x \in X$.

თუ $M, N, \ldots, P$ სიმრავლეებიდან დავაფიქსირებთ $m, n, \ldots, p$ ცვლადების მნიშვნელობებს და ჩავსვამთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას x-ის მიმართ.

მიღებული განტოლების ამონახსენი დამოკიდებულია $m, n, \ldots, p$ მნიშვნელობათა ჩვენ მიერ აღებულ სისტემაზე. ამიტომ x-ის მიმართ (1) განტოლების ამონახსენი არის $m, n, \ldots, p$-ს ფუნქცია. თუ ამონახსენს აღვნიშნავთ $g(m, n, \ldots, p)$-თი, მივიღებთ:

$$f[m, n, \ldots, p, g(m, n, \ldots, p)] = \varphi[m, n, \ldots, p, g(m, n, \ldots, p)].$$

$m, n, \ldots, p$ ცვლადებს, რომლებიც (1)-განტოლების ამოხსნისას ითვლებიან მუდმივ სიდიდეებად, ეწოდება **პარამეტრები**, ხოლო (1) განტოლებას — **პარამეტრული განტოლება**.

განვიხილოთ უტოლობა.

$$f(m, n, \ldots, p, x) > \varphi(m, n, \ldots, p, x), \qquad (2)$$

სადაც $m, n, \ldots, p$ პარამეტრებია, ხოლო x — ნამდვილი ცვლადი.

(2)-ს ეწოდება ერთცვლადიანი **პარამეტრული უტოლობა**.

პარამეტრთა მნიშვნელობების $m = m_0$, $n = n_0, \ldots, p = p_0$ კომპლექტს, რომლისთვისაც განსაზღვრულია $f(m, n, \ldots, p, x)$ და $\varphi(m, n, \ldots, p, x)$ ფუნქციები (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში), ეწოდება პარამეტრთა დასაშვებ მნიშვნელობათა სისტემა.

$x = x_0$-ს ეწოდება x-ის **დასაშვები მნიშვნელობა**, თუ პარამეტრთა ნებისმიერი დასაშვები სისტემისათვის $f(m, n, \ldots, p, x_0)$ და $\varphi(m, n, \ldots, p, x_0)$ ფუნქციები ღებულობენ ნამდვილ მნიშვნელობებს.

x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ეწოდება (2) უტოლობის **განსაზღვრის არე**.

$x = x_0$-ს ეწოდება (2) უტოლობის **კერძო ამონახსენი**, თუ პარამეტრთა ნებისმიერი დასაშვები სისტემისათვის

$$f(m, n, \ldots, p, x_0) > \varphi(m, n, \ldots p, x_0).$$

უტოლობის ყველა კერძო ამონახსენთა სიმრავლეს ეწოდება ამ უტოლობის **ზოგადი** ანუ **სრული** ამონახსენი.

ამრიგად, პარამეტრული უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს დავადგინოთ პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არსებობს ზოგადი ამონახსენი და როგორია იგი. ქვემოთ განვიხილავთ ერთი და ორი პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის მეთოდებს.

§ 2. პარამეტრული განტოლებები

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ პარამეტრული განტოლება:

$$\frac{2mx+3}{(m-3)(x+2)}-\frac{2m-15}{m-3}=\frac{3x+7}{x+2}. \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს m პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლება, სადაც $(m-3)(x+2)\neq 0$, $m\neq 3$, $x\neq -2$. (1)-ის გამარტივებით მივიღებთ:

$$2mx+3-(2m-15)(x+2)=(3x+7)(m-3),$$

საიდანაც

$$(24-3m)x=11m-54.$$

თუ $m\neq 8$ მაშინ

$$x=\frac{11m-54}{3(8-m)}. \qquad (2)$$

შევამოწმოთ m-ის რა მნიშვნელობებისათვის სრულდება $x=-2$ ტოლობა, ე. ი. $\frac{11m-54}{3(8-m)}=-2$. აქედან $m=\frac{6}{5}$.

ამრიგად, როცა $m\neq\frac{6}{5}$, $m\neq 3$, $m\neq 8$, მაშინ (1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც მოიცემა (2) ფორმულით.

როცა $m=3$, მაშინ განტოლებას აზრი არა აქვს, ხოლო როცა $m=\frac{6}{5}$ და $m=8$, მაშინ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ m პარამეტრის რაიმე $m=m_0$ მნიშვნელობისათვის განტოლებას აზრი არა აქვს, მაშინ ამონახსენიც არ ექნება, როცა $m=m_0$. პირიქით კი ეს, საზოგადოდ, ასე არ არის: შეიძლება $m=m_0$ არ იყოს განტოლების ამონახსენი, მაგრამ $m=m_0$-ისათვის იგი იყოს განსაზღვრული. მაგალითად, განხილულ მაგალითში $m=\frac{6}{5}$-ისათვის

განტოლებას არა აქვს ამონახსენი, მაგრამ იგი განსაზღვრულია როცა $m = \frac{6}{5}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ პარამეტრული განტოლება x-ის მიმართ:

$$\frac{k^2 - 10}{k(x+2)(x+3)} + \frac{3}{x+2} = \frac{x}{k(x+2)} \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. როცა $k = 0$, განტოლებას აზრი არა აქვს. $x \neq -3$, $x \neq -2$. ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $k(x+2)(x+3)$-ზე, მივიღებთ (3)-ის ეკვივალენტურ

$$x^2 + 3(1-k)x + (-k^2 - 9k + 10) = 0 \tag{4}$$

განტოლებას, საიდანაც

$$x = \frac{1}{2}\left(3(k-1) \pm \sqrt{13k^2 + 18k - 31}\right). \tag{5}$$

ამ ფესვებში შეიძლება აღმოჩნდეს ისეთი მუდმივები, რომელთათვისაც $(x+2)(x+3) = 0$. დავადგინოთ k-ს რა მნიშვნელობებისათვის სრულდება $x = -3$, $x = -2$ ტოლობები; ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებები:

ა) $\quad x_1 = \frac{1}{2}\left[3(k-1) - \sqrt{13k^2 + 18k - 31}\right] = -3,$

ბ) $\quad x_1 = \frac{1}{2}\left[3(k-1) - \sqrt{13k^2 + 18k - 31}\right] = -2,$

გ) $\quad x_2 = \frac{1}{2}\left[3(k-1) + \sqrt{13k^2 + 18k - 31}\right] = -3,$

დ) $\quad x_2 = \frac{1}{2}\left[3(k-1) + \sqrt{13k^2 + 18k - 31}\right] = -2.$

მივიღებთ:

ა) და გ) შემთხვევაში $k^2 - 10 = 0$; $k = \pm\sqrt{10}$.

ბ) და დ) შემთხვევაში $k^2 - 3k - 8 = 0$; $k = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{41})$.

ამრიგად, როცა

$$k \in \left\{-\sqrt{10},\ \sqrt{10},\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2},\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right\},$$

მაშინ $(x+2)(x+3) = 0$.

პასუხი: როცა $k \notin \left\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\}$, მაშინ (3) განტოლების ამონახსენი მოიცემა (5) ფორმულით. იგულისხმება $13k^2+18k-31 \geqslant 0$, ე. ი.

$$\left[\begin{array}{l} k \leqslant \frac{1}{13}(-9-\sqrt{403}), \\ k \geqslant \frac{1}{13}(-9+\sqrt{403}). \end{array}\right.$$

ცხადია აქ გამორიცხულია $k \in \left\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\}$ სიმრავლე.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$nx^2-2(n-1)x+2n=0. \tag{6}$$

ამოხსნა. თუ $n=0$, მაშინ $2x=0$ და $x=0$. ახლა ვთქვათ $n \neq 0$ და გამოვთვალოთ (6)-ის მარცხენა ნაწილის დისკრიმინანტი: $D=-n^2-2n+1$.

როცა $D=0$, ე. ი. $n=-1 \pm \sqrt{2}$, მაშინ განტოლებას ექნება ერთი ამონახსენი

$$x=\frac{n-1}{n}. \tag{7}$$

როცა $n=-1-\sqrt{2}$, მაშინ (7)-დან $x=\sqrt{2}$; ხოლო როცა $n=-1+\sqrt{2}$, მაშინ $x=-\sqrt{2}$.

ამრიგად,

$$x=\begin{cases} \sqrt{2}, & \text{თუ } n=-1-\sqrt{2}, \\ -\sqrt{2}, & \text{თუ } n=-1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

თუ $D<0$, ე. ი. $n \in \{\,]-\infty; -1-\sqrt{2}[\, \cup \,]-1+\sqrt{2}; +\infty[\,\}$, მაშინ (6) განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

ახლა დავუშვათ $D>0$, ე. ი. $n \in \{\,]-1-\sqrt{2}; 0[\, \cup \,]0; -1+\sqrt{2}[\,\}$. ამ შემთხვევაში განტოლებას ექნება ორი ამონახსენი:

$$x_1=\frac{1}{n}(n-1-\sqrt{-n^2-2n+1}); \; x_2=\frac{1}{n}(n-1+\sqrt{-n^2-2n+1}).$$

პასუხი: თუ: $n \in \,]-\infty; -1-\sqrt{2}[$, ამონახსენი არა აქვს, ე. ი. $x \in \varnothing$;

თუ $n = -1 - \sqrt{2}$, მაშინ $x = \sqrt{2}$;

თუ $n \in]-1-\sqrt{2};\ 0[$, მაშინ $x = \frac{1}{n}(n-1 \pm \sqrt{-n^2-2n+1})$;

თუ $n = 0$, მაშინ $x = 0$;

თუ $n \in]0;\ -1+\sqrt{2}[$, მაშინ $x = \frac{1}{n}(n-1 \pm \sqrt{-n^2-2n+1})$;

თუ $n = -1+\sqrt{2}$, მაშინ $x = -\sqrt{2}$;

თუ $n \in]-1+\sqrt{2};\ +\infty[$, მაშინ ამონახსენი არა აქვს, $x \in \varnothing$.

§ 3. ირაციონალური პარამეტრული განტოლებები

ამოვხსნათ ირაციონალური განტოლებები:

1. $$\sqrt{x^2 - mx + 2m} = x + 3. \qquad (1)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. პ ი რ ვ ე ლ ი ხ ე რ ხ ი: ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით და გამარტივებით მივიღებთ:

$$(m+6)\,x = 2m - 9.$$

როცა $m = -6$, მაშინ $0x = -21$, ე. ი. ამონახსენი არა აქვს. როცა $m \neq -6$, მივიღებთ:

$$x = \frac{2m-9}{m+6}\,.$$

შემოწმებისათვის, მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ (1)-ში:

$$\sqrt{\left(\frac{2m-9}{m+6}\right)^2 - \frac{2m^2-9m}{m+6} + 2m} = \frac{2m-9}{m+6} + 3,$$

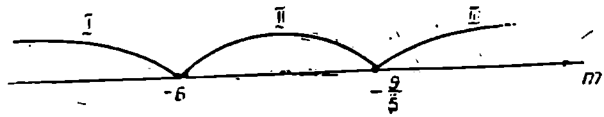
საიდანაც

$$\left|\frac{5m+9}{m+6}\right| = \frac{5m+9}{m+6}\,.$$

განვიხილოთ სამი შემთხვევა (ნახ. 110):

$$\text{I.}\ \begin{cases} m < -6 \\ \dfrac{5m+9}{m+6} = \dfrac{5m+9}{m+6}, \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} -6 < m < -\dfrac{9}{5} \\ -\dfrac{5m+9}{m+6} = \dfrac{5m+9}{m+6}, \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} m \geqslant -\dfrac{9}{5} \\ \dfrac{5m+9}{m+6} = \dfrac{5m+9}{m+6}; \end{cases}$$



ნახ. 110

ამრიგად,

$$\left|\frac{5m+9}{m+6}\right| = \begin{cases} \dfrac{5m+9}{m+6}, & \text{თუ } m \in \left\{\left]-\infty, -6\right[\cup \left]-\dfrac{9}{5}, +\infty\right[\right\}, \\ -\dfrac{5m+9}{m+6}, & \text{თუ } m \in \left]-6; -\dfrac{9}{5}\right[. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე $x = \dfrac{2m-9}{m+6}$ არის (1) განტოლების ფესვი, როცა $m \in \left\{\left]-\infty, -6\right[\cup \left]-\dfrac{9}{5}, +\infty\right[\right\}$; ხოლო როცა $m \in \left]-6; -\dfrac{9}{5}\right[$, მაშინ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

მ ე ო რ ე ხ ე რ ხ ი. გვაქვს:

$$x^2 - mx + 2m \geqslant 0 \quad \text{და} \quad x + 3 \geqslant 0.$$

(1) ტოლობის ორივე ნაწილი ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$x^2 - mx + 2m = (x+3)^2$$

რადგან $(x+3)^2 \geqslant 0$, ამიტომ ამ განტოლების ნებისმიერი ფესვისათვის

$$x^2 - mx + 2m \geqslant 0.$$

აქედან გამომდინარე (1)-ის ეკვივალენტური იქნება სისტემა:

$$\begin{cases} x^2 - mx + 2m = (x+3)^2 \\ x \geqslant -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+6)\,x = 2m - 9 \\ x \geqslant -3, \end{cases}$$

როცა $m = -6$, ბოლო განტოლებას ამონახსენი არა აქვს. როცა $m \neq -6$, მაშინ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m-9}{m+6} \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

ვიპოვოთ m-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $\dfrac{2m-9}{m+6} \geqslant -3$. აქედან $\dfrac{5m+9}{m+6} \geqslant 0$, საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ

ა) $\begin{cases} m \geqslant -\dfrac{9}{5} \\ m > -6, \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} m \leqslant -\dfrac{9}{5} \\ m < -6 \end{cases}$

ა)-დან $m \geqslant -\dfrac{9}{5}$, ხოლო ბ)-დან $m < -6$, რაც ემთხვევა პირველი ხერხით მიღებულ შედეგს.

2. $$\sqrt{x-n} - n = x^2. \qquad (2)$$

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $\sqrt{x-n} = t$, სადაც $t \geqslant 0$. მაშინ მივიღებთ

$$\begin{cases} t - n = x^2, \\ t^2 + n = x. \end{cases}$$

ამ განტოლებათა შეკრება მოგვცემს

$$t^2 + t - (x^2 + x) = 0.$$

ამოვხსნათ t-ს მიმართ:

$$t = \frac{1}{2}[-1 \pm (2x + 1)].$$

აქედან $t_1 = -1 - x$, $t_2 = x$. ამრიგად, მივიღეთ ორი განტოლება:

ა) $\sqrt{x-n} = x$, ბ) $\sqrt{x-n} = -1 - x$.

ამოვხსნათ თითოეული მათგანი:

ა) $x - n = x^2 \Rightarrow x^2 - x + n = 0$,

აქედან

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4n}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4n}),$$

სადაც $1 - 4n \geqslant 0$, $n \leqslant \dfrac{1}{4}$. რადგან $\sqrt{x-n} \geqslant 0$, ამიტომ $x \geqslant 0$

როცა $0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}$, მაშინ ა) განტოლებას აკმაყოფილებს ორივე x_1 და x_2 ფესვი. ხოლო როცა $n < 0$, მაშინ მხოლოდ — x_2,

ბ) $$\sqrt{x-n} = -x-1.$$

ცხადია $-x-1 \geqslant 0$, $x \leqslant -1$. კვადრატში აყვანით მივიღებთ:

$$x^2 + x + n + 1 = 0,$$

საიდანაც

$$x_3 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3-4n}), \quad x_4 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3-4n}).$$

აქ $-3-4n \geqslant 0$, $n \leqslant -\frac{3}{4}$. დავადგინოთ $x_3 \leqslant -1$ და $x_4 \leqslant -1$ უტოლობების შესრულების პირობები:

$$\begin{cases} n \leqslant -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3-4n}) \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leqslant -\frac{3}{4} \\ \sqrt{-3-4n} \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \leqslant -\frac{3}{4} \\ n \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow n \leqslant -1,$$

ე. ი. $x_3 \leqslant -1$ როცა $n \leqslant -1$.

$$\begin{cases} n \leqslant -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3-4n}) \leqslant -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leqslant -\frac{3}{4} \\ \sqrt{-3-4n} \leqslant -1, \end{cases}$$

რაც შეუძლებელია, ე. ი. x_4 არ იქნება მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი: (2)-ის მიმართ შეგვიძლია ვთქვათ:

როცა $0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}$, მაშინ აქვს ორი ფესვი $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4n})$;

როცა $-1 < n < 0$, მაშინ აქვს ერთი ფესვი $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4n})$;

როცა $n \leqslant -1$, მაშინ აქვს ორი ფესვი $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4n})$ და

$$x = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3-4n}).$$

როცა $n > \frac{1}{4}$ — ამონახსენი არა აქვს, $x \in \varnothing$.

გ. $\sqrt{x-m} = x-n-1$.

ამოხსნა. როცა $x \geqslant m$, მაშინ $\sqrt{x-m} \geqslant 0$; ამიტომ ამ განტოლების ფესვმა უნდა დააკმაყოფილოს პირობები:

$$\begin{cases} x \geqslant m \\ x \geqslant n+1 \end{cases} \qquad (4)$$

(3)-ის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით მივიღებთ:

$$x-m = (x-n-1)^2,$$

რომლის ყოველი ფესვი, თუ იგი არსებობს, აკმაყოფილებს $x \geqslant m$ პირობას. ამიტომ (3) განტოლება ეკვივალენტურია:

$$\begin{cases} x \geqslant n+1 \\ x-m = (x-n-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant n+1 \\ x^2-(2n+3)x+m+(n+1)^2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

ამ განტოლების დისკრიმინანტი $D = 4n-4m+5$.

როცა $D = 0$, ე. ი. $n = m-\frac{5}{4}$, მაშინ $x_1 = x_2 = n+\frac{3}{2}$.

$D > 0$ როცა $n > m-\frac{5}{4}$. ამ შემთხვევაში (5)-ს აქვს ორი ნამდვილი ფესვი:

$$x_1 = \frac{1}{2}(2n+3-\sqrt{4n-4m+5}),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(2n+3+\sqrt{4n-4m+5}),$$

ამასთან $x_1 < x_2$. დავადგინოთ x_1 და x_2 ამონახსნებიდან რომელი და რა პირობებში აკმაყოფილებს $x \geqslant n+1$ პირობას. ამ მიზნით განვიხილოთ

$$f(x) = x^2-(2n+3)x+m+(n+1)^2$$

ფუნქცია და გამოვთვალოთ $f(n)$:

$$f(n) = n^2-(2n+3)n+m+(n+1)^2 = m-n-1.$$

როცა $m-\frac{5}{4}<n<m$, გვაქვს $f(n)>0$ და რადგან $n<n+\frac{3}{2}$, სადაც $n+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, ამიტომ $n<x_1<x_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $m-\frac{5}{4}<n<m$, მაშინ x_1 და x_2 არიან (3) განტოლების ფესვები. როცა $m=n$ მაშინ (3)-დან მივიღებთ:

$$\sqrt{x-n}=x-(n+1),$$

საიდანაც

$$x-n=x^2-2(n+1)x+(n+1)^2$$

ანუ

$$x=2n+3\pm\sqrt{3n^2+9n+8},$$

ე. ი.

$$x_3=2n+3-\sqrt{3n^2+9n+8}, \quad x_4=2n+3+\sqrt{3n^2+9n+8}.$$

როცა $n>m-1$, მაშინ $f(n)<0$ და ამიტომ $x_1<n<x_2$. ამონახსენი იქნება მხოლოდ x_2.

პასუხი:

როცა $n=m-\frac{5}{4}$, მაშინ $x=n+\frac{3}{2}$;

როცა $m-\frac{5}{4}<n\leqslant m$, მაშინ $x=\frac{1}{2}(2n+3\pm\sqrt{4n-4m+5})$;

როცა $n>m$, მაშინ $x=\frac{1}{2}(2n+3+\sqrt{4n-4m+5})$;

როცა $n<m-\frac{5}{4}$, მაშინ ამონახსენი არა აქვს, $x\in\varnothing$.

4. $$\sqrt{n-\sqrt{x-2+n}}=x-2 \qquad (6)$$

ამოხსნა. x და n ყველა დასაშვები მნიშვნელობებისათვის $\sqrt{n-\sqrt{x-2+n}}\geqslant 0$. ამიტომ განტოლების ფესვებმა უნდა დააკმაყოფილონ $x-2\geqslant 0$ პირობა. (6)-ის კვადრატში აყვანით მივიღებთ მის ეკვივალენტურ სისტემას:

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ n-\sqrt{x-2+n}=(x-2)^2 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} x\geqslant 2 \\ \sqrt{x-2+n}=n-(x-2)^2. \end{cases} \qquad (7)$$

როცა $x \geqslant 2-n$, მაშინ $\sqrt{x-2+n} \geqslant 0$. ამიტომ $n-(x-2)^2 \geqslant 0$, ე. ი. $(x-2)^2 \leqslant n$. ეს არის ის დამატებითი პირობა, რომელიც უნდა დააკმაყოფილოს (6)-ის ფესვმა. აქედან ჩანს, რომ $n \geqslant 0$ და $0 \leqslant x-2 \leqslant \sqrt{n}$, ანუ $2 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{n}$. (7) სისტემა ეკვივალენტურია.

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{n} \\ x-2+n = [n-(x-2)^2]^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{n} \\ n^2-[2(x-2)^2+1]\,n+(x-2)^4-(x-2)=0 \end{cases} \tag{8}$$

სისტემის. თუ (8)-ში შემავალ განტოლებას ამოვხსნით n-ის მიმართ და მარცხენა ნაწილს დავშლით მამრავლებად, მივიღებთ ორ სისტემას:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{n} \\ (x-2)^2+(x-2)+1-n=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{n} \\ (x-2)^2-(x-2)-n=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f(x) = (x-2)^3+(x-2)+1-n,$$
$$\varphi(x) = (x-2)^2-(x-3)-n.$$

$f(x)=0$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4n-3}\right); \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4n-3}\right),$$ სადაც $n \geqslant \frac{3}{4}$. ცხადია, რომ $x_1 < 2$ არ იქნება (6)-ის ფესვი. $x_2 \geqslant 2$, $\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4n-3}\right) \geqslant 2$, $\sqrt{4n-3} \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, ე. ი. $x_2 \geqslant 2$ როცა $n \geqslant 1$. ახლა შევამოწმოთ $x_2 \leqslant 2+\sqrt{n}$ პირობის მართებულობა. გვაქვს:

$$f(2+\sqrt{n}) = \sqrt{n}+1.$$

მაშასადამე, $f(2+\sqrt{n}) > 0$ და ამიტომ $x_1 < 2 \leqslant x_2 \leqslant 2+\sqrt{n}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4n-3}\right)$ არის (6)-ის ფესვი, როცა $n \geqslant 1$.

$\varphi(x)=0$, როცა $x_3 = \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{4n+1}\right)$, $x_4 = \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{4n+1}\right)$.

$x_3=0$, როცა $n=0$. როცა $n>0$, მაშინ $x_3<2$ და ამიტომ იგი არ იქნება (5)-ის ფესვი. ასეთი n-ისათვის $x_4\geqslant 2$. შევამოწმოთ $x_4\leqslant 2+\sqrt{n}$ უტოლობის მართებულობა. მართლაც

$$\varphi(2+\sqrt{n}) = -\sqrt{n} < 0.$$

ამრიგად, $x_3<2<2+\sqrt{n}<x_4$, ე. ი. x_4 არ არის (6)-ის ფესვი.

პასუხი: როცა $n=0$, მაშინ $x=2$;

როცა $n\geqslant 1$, მაშინ $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{4n-3})$;

როცა $n\in]0,1[\cup]-\infty,0[$, მაშინ ამონახსენი არა აქვს.

მოვიყვანოთ (6) განტოლების ამოხსნის გეომეტრიული სურათი: ვთქვათ $\sqrt{x-2+n}=y\geqslant 0$. მაშინ $x=y^2+2-n$ და (6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sqrt{n-y}=y^2-n.$$

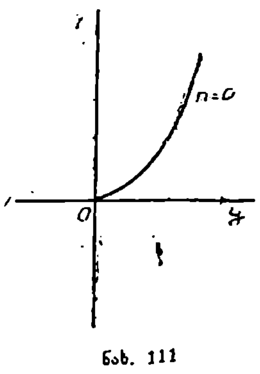
yOz მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ განვიხილოთ

$$z=\sqrt{n-y} \quad \text{და} \quad z=y^2-n$$

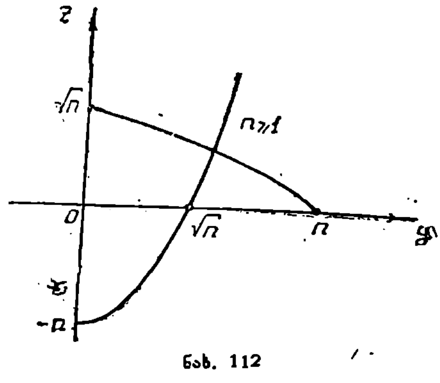
ფუნქციების გრაფიკები.

როცა $n=0$, მაშინ, როგორც ზემოთ მივიღეთ, (6)-ს აქვს ერთი ამონახსენი $x=2$. ამ შემთხვევაში $z=\sqrt{-y}$ და $z=y^2$ ფუნქციების გრაფიკებს აქვთ ერთი საერთო წერტილი (ნახ. 111).

როცა $n\geqslant 1$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{4n-3})$, ე. ი. $z=\sqrt{n-y}$ და $z=y^2-n$ ფუნქციების გრაფიკები გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში (ნახ. 112).



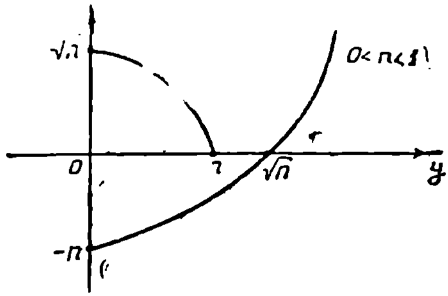
ნახ. 111



ნახ. 112

როცა $0<n<1$, მაშინ აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკებს არა აქვთ საერთო წერტილი (ნახ. 113).

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ, როცა $n<0$. ამ შემთხვევაში $z=\sqrt{n-y}$ ფუნქციის გრაფიკი არ აკმაყოფილებს $y\geqslant 0$ პირობას, ე. ი. იგი მოთავსებულია z ღერძის მარცხენა ნახევარსიბრტყეში.



ნახ. 113

5. $\sqrt{x-\sqrt{x-p}}=p$ (9)

ამოხსნა. ცხადია $\sqrt{x-\sqrt{x-p}}\geqslant 0$, ამიტომ $p\geqslant 0$ და მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} p\geqslant 0 \\ x-\sqrt{x-p}=p^2 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} p\geqslant 0 \\ \sqrt{x-p}=x-p^2 \end{cases} \tag{10}$$

რადგან $\sqrt{x-p}\geqslant 0$ როცა $x\geqslant p$, ამიტომ $x-p^2\geqslant 0$ ანუ $x\geqslant p^2$ და (10)-დან მივიღებთ:

$$\begin{cases} p\geqslant 0 \\ x\geqslant p^2 \\ x-p=(x-p^2)^2 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} p\geqslant 0 \\ x\geqslant p^2 \\ x-p=x^2-2p^2x+p^4 \end{cases} \tag{11}$$

თუ (11)-ში შემავალ განტოლებას ამოვხსნით x-ის მიმართ და მის მარცხენა ნაწილს დავშლით მამრავლებად, მივიღებთ (9)-ის ორ ეკვივალენტურ სისტემას:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} p\geqslant 0 \\ x\geqslant p^2 \\ x=p^2+p \end{cases} & (12) \\ \begin{cases} p\geqslant 0 \\ x\geqslant p^2 \\ x=p^2-p+1 \end{cases} & (13) \end{array}\right.$$

(12) სისტემაში $x=p^2+p$ აკმაყოფილებს $x\geqslant p^2$ უტოლობას, რადგან $p^2+p\geqslant p^2$, როცა $p\geqslant 0$, ე. ი. როცა $p\geqslant 0$, მაშინ (9) განტოლების ფესვი იქნება $x=p^2+p$. (13) სისტემაში $x=p^2-p+1$ აკმაყოფილებს $x\geqslant p^2$ პირობას, როცა $0\leqslant p\leqslant 1$ და ამიტომ ასეთი p-სათვის იგი

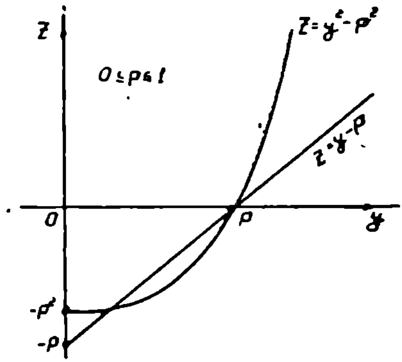
იქნება (9) განტოლების ფესვი. როცა $p < 0$, მაშინ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

პასუხი: როცა $0 \leqslant p \leqslant 1$, მაშინ $x = p^2 - p + 1$, $x = p^2 + p$;

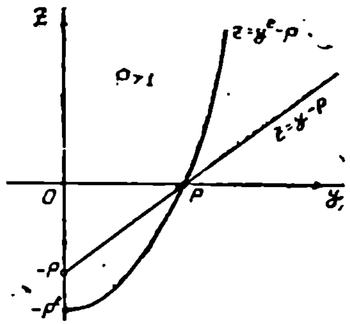
როცა $p > 1$, მაშინ $x = p^2 + p$;

როცა $p < 0$, მაშინ $x \in \varnothing$.

განტოლების ამოხსნის გეომეტრიული სურათი ასეთია: ვთქვათ $\sqrt{x - p} = y \geqslant 0$. მაშინ $x = y^2 + p$ და გვექნება $y^2 - p^2 = y - p$. yOz კოორდინატთა სისტემის მიმართ განვიხილოთ $z = y^2 - p^2$ და $z = y - p$ ფუნქციების გრაფიკები. როცა $0 \leqslant p \leqslant 1$, მაშინ აღნიშნული გრაფიკები



ნახ. 114



ნახ. 115

გადაიკვეთებიან ორ წერტილში, რომელთა აბსცისებია $x_1 = p^2 - p + 1$ და $x_2 = p^2 + p$ (ნახ. 114). როცა $p > 1$, მაშინ გრაფიკები იკვეთებიან ერთ წერტილში (ნახ. 115). როცა $p < 0$, მაშინ აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკები არ გადაიკვეთებიან.

§ 4. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული პარამეტრული განტოლებები

განვიხილოთ განტოლება

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}, \tag{1}$$

სადაც $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. (1)-ს ეწოდება უმარტივესი მაჩვენებლიანი პარამეტრული განტოლება. $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა საერთო R ნაწილი (კონიუქცია) იქნება (1) განტოლების განსაზღვრის არე. აქ განიხილება შემთხვევები:

თუ $a=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$, მივიღებთ მის ეკვივალენტურ

$$f(x)=\varphi(x)$$

განტოლებას.

როცა $a\neq b$ $(a\neq 1,\ b\neq 1)$, მაშინ (1)-ს შევცვლით მისი ეკვივალენტური

$$\log_k a^{f(x)}=\log_k b^{\varphi(x)}$$

განტოლებით, სადაც $k>0$ $(k\neq 1)$.

უმარტივეს ლოგარითმულ პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე:

$$\log_a f(x)=\log_b \varphi(x), \tag{2}$$

სადაც $a>0$ $(a\neq 1)$, $b>0$ $(b\neq 1)$. მისი განსაზღვრის არე იქნება $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა კონიუქცია (საერთო ნაწილი).

თუ $a=b$, მაშინ (2)-ის ეკვივალენტური იქნება

$$f(x)=\varphi(x)$$

განტოლება.

თუ $a\neq b$ მაშინ (2) დაიყვანება

$$\log_a f(x)=\frac{1}{\log_a b}\log_a \varphi(x)$$

სახის განტოლებაზე, რომელიც ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლების

$$[f(x)]^{\log_a b}=\varphi(x).$$

აქ გამოვიყენეთ ფორმულა

$$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\log_a N,$$

სადაც $N>0$, $a>0$, $(a\neq 1)$, $b>0$ $(b\neq 1)$.

ამოვხსნათ განტოლებები:

1. $$a^{x+4}+3a^{x+3}+4a^{x+2}=b. \tag{2}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$a^{x+2}(a^2+3a+4)=b. \tag{4}$$

აქ $a>0$, $a^2+3a+4\neq 0$, $a^2+3a+4>0$, $b>0$. (4)-ის ორივე ნაწილი გავყოთ a^2+3a+4-ზე, მივიღებთ:

$$a^{x+2}=\frac{b}{a^2+3a+4}.$$

გავალოგარითმოთ a-ს ფუძით:

$$x + 2 = \log_a \frac{b}{a^2 + 3a + 4},$$

საიდანაც

$$x = -2 + \log_a \frac{b}{a^2 + 3a + 4}.$$

2. $$\log_a x^4 + 4 \log_a (x + 3) = 2 \tag{5}$$

ამოხსნა. განტოლებას აზრი აქვს, როცა $a > 0$ $(a \neq 1)$. განტოლების განსაზღვრის არე არის $R = \{-3 < x < 0,\ 0 < x < +\infty\}$. R-ში მისი ეკვივალენტური განტოლება იქნება:

$$4 \log_a |x| + 4 \log_a (x + 3) = 2,$$

საიდანაც

$$\log_a [\,|x|\,(x + 3)\,] = \frac{1}{2}.$$

ლოგარითმის განსაზღვრების თანახმად

$$|x|\,(x + 3) = \sqrt{a}. \tag{6}$$

აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) თუ $-3 < x < 0$, მაშინ (6)-დან მივიღებთ

$$-x\,(x + 3) = \sqrt{a},$$

ე. ი.

$$x^2 + 3x + \sqrt{a} = 0,$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-3 - \sqrt{9 - 4\sqrt{a}}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{9 - 4\sqrt{a}}\right);$$

როცა $9 - 4\sqrt{a} > 0$, ე. ი. $\sqrt{a} < \frac{9}{4}$ ანუ $0 < a < \frac{81}{16}$.

ბ) როცა $x > 0$, მაშინ (6)-დან გვექნება

$$x\,(x + 3) = \sqrt{a}$$

ანუ

$$x^2 + 3x - \sqrt{a} = 0.$$

აქედან $x_3 = \frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{9+4\sqrt{a}}\right)$, $x_4=\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{9+4\sqrt{a}}\right)$.
x_3 არ აკმაყოფილებს $x>0$ პირობას. $x_4>0$ როცა $a>0$.

პ ა ს უ ხ ი: როცა $0<a<\frac{81}{16}$, მაშინ $x_1=\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{9-4\sqrt{a}}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{9-4\sqrt{a}}\right)$, $x_4=\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{9+4\sqrt{a}}\right)$; როცა $a>\frac{81}{16}$, მაშინ $x=\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{9+4\sqrt{a}}\right)$.

გ. $$2\lg(x-k)-\lg 4=\lg(x-n) \tag{7}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$\lg(x-k)-\lg 2=\frac{1}{2}\lg(x-n). \tag{8}$$

მისი განსაზღვრის არე მოიცემა $\begin{cases} x>k \\ x>n \end{cases}$ უტოლობათა სისტემით. ამ არეზე (8) განტოლება

$$\lg\frac{x-k}{2}=\lg\sqrt{x-n}$$

განტოლების ეკვივალენტურია. აქედან

$$x-k=2\sqrt{x-n}\,.$$

როცა $k=n$, მაშინ

$$x-k=2\sqrt{x-k} \tag{9}$$

ანუ

$$\sqrt{x-k}\,(\sqrt{x-k}-2)=0\,.$$

რადგან $\sqrt{x-k}\neq 0$ $(x-k>0)$, ამიტომ აქედან ვწერთ:

$$\sqrt{x-k}=2, \quad \text{ე. ი.} \quad x=k+4.$$

ახლა ვთქვათ $k\neq n$ (9) ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით და გამარტივებით მივიღებთ:

$$x^2-2(k+2)x+k^2+2n=0, \tag{10}$$

რომლის დისკრიმინანტი

$$D=16(k-n+1).$$

თუ $D=0$, ე. ი. $k=n-1$, მაშინ (10)-დან $x_1=x_2=k+2$;

თუ $D>0$, ე. ი. $k>n-1$, მაშინ $x_1=k+2-2\sqrt{k-n+1}$ და $x_2=k+2+2\sqrt{k-n+1}$.

აქ $x>n$ პირობა შესრულებულია, რადგან x_1 და x_2 არიან $(x-k)^2=4(x-n)$ განტოლების ფესვები. ახლა ვიპოვოთ k და n-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც x_1 და x_2 აკმაყოფილებენ $x>k$ პირობას. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(x)=x^2-2(k+2)x+k^2+4n$$

და გამოვთვალოთ

$$\varphi(k)=4(n-k).$$

როცა $n-1<k<n$, მაშინ $k<n<x_1<x_2$; მაშასადამე x_1 და x_2 არიან (7) განტოლების ფესვები.

როცა $k>n$, მაშინ $\varphi(k)<0$; მაშასადამე $n<x_1<k<x_2$, ე. ი. $x>k$ პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ x_2 ფესვი.

პასუხი: თუ $k=n$, მაშინ $x=k+4$;

თუ $n-1<k<n$, მაშინ $x=k+2\pm2\sqrt{k-n+1}$;

თუ $k>n$, მაშინ $x=k+2+\sqrt{k-n+1}$;

თუ $k<n-1$, მაშინ (7)-ს ამონახსენი არა აქვს, ე. ი. $x\in\varnothing$.

§ 6. ტრიგონომეტრიული პარამეტრული განტოლებები

ამოვხსნათ განტოლებები:

1. $\sin^2 2x-(2n+1)\sin 2x+n(n+1)=0$ (1)

ამოხსნა: თუ ამოვხსნით როგორც კვადრატულ განტოლებას $\sin 2x$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=n,\\ \sin 2x=n+1\end{array}\right.$$

აქედან

$$\left[\begin{array}{l}2x=(-1)^k\arcsin n+k\pi\\ 2x=(-1)^k\arcsin(n+1)+k\pi\end{array}\right. \text{ ანუ } \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin n+\frac{\pi}{2}k\\ x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin(n+1)+\frac{\pi}{2}k,\end{array}\right.$$

სადაც $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$

2. $(n+1)\cos x+(n-1)\sin x=n$ (2)

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლებას მივცეთ შემდეგი სახე:

$$(n+1)\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)-2(n-1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$

$$=n\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

ანუ

$$(2n+1)\sin^2\frac{x}{2}-2(n-1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+n\cos^2\frac{x}{2}=0. \qquad (3)$$

როცა $n=-\frac{1}{2}$, მივიღებთ:

$$3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}=0$$

ანუ

$$\cos\frac{x}{2}\left(3\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

აქედან

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\[2mm] 3\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \quad \text{ანუ} \quad \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\[2mm] \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{6}\end{array}\right.$$

საიდანაც

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\\[2mm] \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}+k\pi\end{array}\right. \quad \text{ანუ} \quad \left[\begin{array}{l}x=\pm\pi+4k\pi\\[2mm] x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}+2k\pi.\end{array}\right.$$

თუ $n\neq-\frac{1}{2}$, მაშინ (3) ტოლფასია

$$(2n+1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2(n-1)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+n=0$$

განტოლების. ამოვხსნათ იგი ჯერ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ის მიმართ:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2n+1}\left(n-1-\sqrt{-n^2-3n+1}\right),\\[2mm] \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2n+1}\left(n-1+\sqrt{-n^2-3n+1}\right).\end{array}\right.$$

როცა $-n^2-3n+1\geqslant 0$, ე. ი. $\frac{1}{2}(-3-\sqrt{13})\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(-3+\sqrt{13})$,
მაშინ (2) განტოლების ამონახსენი იქნება:

$$\left[\begin{array}{l} x=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n-1-\sqrt{-n^2-3n+1}}{2n+1}+2k\pi, \\ x=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n-1+\sqrt{-n^2-3n+1}}{2n+1}+2k\pi. \end{array}\right.$$

თუ $n\in\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\right[\cup\left]\frac{1}{2}(-3+\sqrt{13}),\ +\infty\right[$, მაშინ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

პასუხი: როცა $n=-\frac{1}{2}$, მაშინ

$$\left[\begin{array}{l} x=\pi(2k+1), \\ x=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{6}+2k\pi; \end{array}\right.$$

როცა $-\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(-3+\sqrt{13})$, მაშინ

$$\left[\begin{array}{l} x=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n-1-\sqrt{-n^2-3n+1}}{2n+1}+2k\pi, \\ x=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n-1+\sqrt{-n^2-3n+1}}{2n+1}+2k\pi. \end{array}\right.$$

როცა $n\in\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\right[\cup\left]\frac{1}{2}(-3+\sqrt{13}),\ +\infty\right[$, მაშინ $x\in\varnothing$.

8. $\sin x+p\cos^2 x=0.$ (4)

ამოხსნა. გვაქვს

$$\sin x+p(1-\sin^2 x)=0 \tag{5}$$

ანუ

$$p\sin^2 x-\sin x-p=0.$$

როცა $p=0$, მაშინ $\sin x=0$, $x=\pi k$;

როცა $p\neq 0$, მაშინ $\sin x=\frac{1}{2p}(1\pm\sqrt{1+4p^2})$.

ახლა დავადგინოთ p-ს რა მნიშვნელობებისათვის. შესრულდება $|\sin x| \leqslant 1$ პირობა. ამ მიზნით (5) განტოლებაში დავუშვათ $\sin x = y$, ე. ი.

$$py^2 - y - p = 0$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(y) = py^2 - y - p$. გამოვთვალოთ $pf(-1) = p(p+1-p) = p$; $pf(1) = p(p-1-p) = -p$; როცა $p > 0$, მაშინ $pf(-1) > 0$, $pf(1) < 0$ და რადგან ამ შემთხვევაში $-1 < \frac{1}{2p}$, ამიტომ $-1 < y_1 < 1 < y_2$. ამრიგად, განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსენი $y_1 = \frac{1}{2p}(1 - \sqrt{1+4p^2})$. როცა $p < 0$, მაშინ $pf(-1) < 0$, $pf(1) > 0$ და მაშასადამე, $y_2 < -1 < y_1 < 1$. განტოლების ამონახსენი იქნება ისევ y_1.

პასუხი: როცა $p = 0$, მაშინ $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

როცა $p \neq 0$, მაშინ $\sin x = \frac{1}{2p}(1 - \sqrt{1+4p^2})$, ე. ი.

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2p}(1 - \sqrt{1+4p^2}) + \pi k,$$

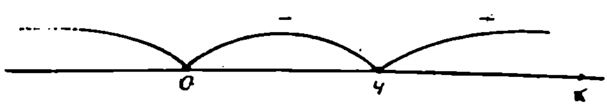
სადაც $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

§ 6. ალგებრული პარამეტრული უტოლობები

ამოვხსნათ უტოლობები:

1. $(k-4)x < 2k$ (1)

ამოხსნა. გვაქვს წრფივი უტოლობა x-ის მიმართ. განვიხილოთ შემთხვევები k-ს მიმართ (ნახ. 116):



ნახ. 116

თუ $k < 0$, მაშინ (1)-დან $x > \frac{2k}{k-4}$, რადგან ამ შემთხვევაში $k - 4 < 0$.

თუ $k=0$, მაშინ $-4x<0$, $x>0$, ე. ი. $x>\frac{2k}{k-4}$.

თუ $0<k<4$, მაშინ $k-4<0$ და ამიტომ $x>\frac{2k}{k-4}$.

თუ $k=4$, მაშინ $0x<8$ უტოლობა სრულდება ნებისმიერი x-ისათვის.

თუ $k>4$, მაშინ $k-4>0$ და ამიტომ $x<\frac{2k}{k-4}$.

პასუხი: თუ $k=4$, მაშინ $x\in\,]-\infty, +\infty[$;

თუ $k<4$, მაშინ $x>\frac{2k}{k-4}$;

თუ $k>4$, მაშინ $x<\frac{2k}{k-4}$.

2. $$\frac{x-5}{m-2}+\frac{x+4}{2}\geqslant\frac{2x-m}{3(m-2)}. \tag{2}$$

ამოხსნა. ეს უტოლობა დაიყვანება წრფივ უტოლობაზე. $m=2$ მნიშვნელობისათვის უტოლობას აზრი არა აქვს $m\neq 2$).

თუ $m-2<0$, ე. ი. $m<2$, მაშინ (2)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(3m-4)\,x\leqslant 54-14m. \tag{3}$$

თუ $m=\frac{4}{3}$, მაშინ $0x<\frac{106}{3}$, ე. ი. $x\in\,]-\infty, +\infty[$.

თუ $m<\frac{4}{3}$, მაშინ (3)-დან მივიღებთ

$$x\geqslant\frac{2(27-7m)}{3m-4},$$

ხოლო როცა $\frac{4}{3}<x<2$, მაშინ

$$x\leqslant\frac{2(27-7m)}{3m-4}.$$

ახლა ვთქვათ $m-2>0$, ე. ი. $m>2$. ამ შემთხვევაში (2) მიიღებს სახეს:

$$(3m-4)\,x\geqslant 54-14\,m. \tag{4}$$

როცა $m>2$, მაშინ $3m-4>0$, ე. ი. $m<\frac{4}{3}$. ამიტომ (4) უტოლობის ამონახსენი იქნება

$$x\geqslant\frac{2(27-7m)}{3m-4}.$$

პასუხი: როცა $m=2$, მაშინ უტოლობას აზრი არა აქვს;

როცა $m=\frac{4}{3}$, მაშინ $x\in]-\infty, +\infty[$;

როცა $m\in\left\{\left]-\infty, \frac{4}{3}\right[\cup]2, +\infty[\right\}$, მაშინ

$$x\geqslant\frac{2(27-7m)}{3m-4};$$

როცა $m\in\left]\frac{4}{3}; 2\right[$, მაშინ $x\leqslant\frac{2(27-7m)}{3m-4}$.

8. $nx^2-2(n-3)x+(n+4)<0$ (5)

ამოხსნა. გვაქვს კვადრატული უტოლობა x-ის მიმართ. როცა $n=0$, მაშინ მივიღებთ: $6x+4<0$, $x<-\frac{2}{3}$. ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა $(n\neq 0)$:

$$\varphi(x)=nx^2-2(n-3)x+(n+4)$$

მისი დისკრიმინანტი $D=4(-10n+9)$.

თუ $D<0$, ე. ი. $n>\frac{9}{10}$, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი x-ისათვის $\varphi(x)$-ის ნიშანი ემთხვევა n-ის ნიშანს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(x)>0$ როცა $x\in]-\infty, +\infty[$. ამრიგად, $n>\frac{9}{10}$-ისათვის $\varphi(x)<0$ უტოლობას ამონახსენი არა აქვს.

თუ $D=0$, ე. ი. $n=\frac{9}{10}$, მაშინ $\varphi(x)=\frac{1}{10}(3x+7)^2$. გვაქვს $\varphi(x)\geqslant 0$, როცა $x\in]-\infty, +\infty[$. მაშასადამე, $n=\frac{9}{10}$-ისათვის $\varphi(x)<0$ უტოლობას ამონახსენი არა აქვს.

ახლა ვთქვათ $D>0$, ე. ი. $n<\frac{9}{10}$ $(n \neq 0)$. ამ შემთხვევაში $\varphi(x)=0$ განტოლების ფესვები იქნება:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n}) \\ x_2 = \frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n}), \end{array}\right.$$

სადაც განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) $n<0$. $\varphi(x)<0$ უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს ისეთი x-ების პოვნას, რომელთათვისაც $\varphi(x)$-ის ნიშანი დაემთხვევა n-ის ნიშანს. შევნიშნოთ, რომ რადგან $-\sqrt{9-10n}<\sqrt{9-10n}$, ამიტომ

$$n-3-\sqrt{9-10n}<n-3+\sqrt{9-10n}. \tag{6}$$

მაგრამ რადგან $n<0$, ამიტომ (6) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n})>\frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n}),$$

ე. ი. (5) უტოლობის ამონახსენი მოთავსდება ფესვებს გარეთ:

$$x \in \left\{\left]-\infty;\ \frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n})\right[\ \cup\right.$$

$$\left.\cup\left]\frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n});\ +\infty\right[\right\}.$$

ბ) $0<n<\frac{9}{10}$. უნდა ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $\varphi(x)$-ს ექნება n-ის საწინააღმდეგო ნიშანი. $0<n<\frac{9}{10}$ შემთხვევაში

$$\frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n})<\frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n}),$$

ამიტომ ამონახსენი იქნება

$$x \in \left]\frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n});\ \frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n})\right[.$$

პასუხი:

როცა $n=0$, მაშინ $x\in]-\infty; +\infty[$;

როცა $n<0$, მაშინ $x\in \Big\{ \Big]-\infty; \frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n}) \Big[\cup \Big] \frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n}); +\infty \Big[\Big\}$;

როცა $0<n<\frac{9}{10}$, მაშინ $x\in \Big] \frac{1}{n}(n-3-\sqrt{9-10n}); \frac{1}{n}(n-3+\sqrt{9-10n}) \Big[$;

როცა $n\geqslant\frac{9}{10}$, მაშინ $x\in\varnothing$.

4. ვიპოვოთ p-ს ყველა ნამდვილი მნიშვნელობა, რომელთათვისაც სრულდება

$$\begin{cases} \frac{(1-p)x-p}{x-2(1-p)} \geqslant 0 \\ x-8\geqslant px \end{cases} \tag{7}$$

უტოლობათა სისტემა.

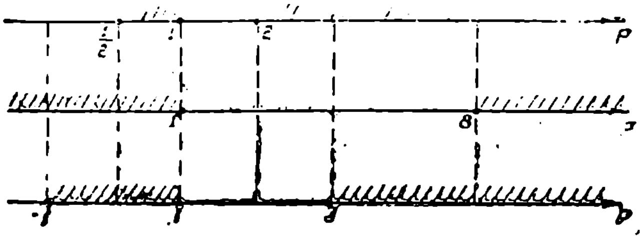
ამოხსნა. განიხილება ორი შემთხვევა:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1-p)x\geqslant p \\ x>2(1-p) \\ (1-p)x\geqslant 8 \end{cases} \quad (8) \\ \begin{cases} (1-p)x\leqslant p \\ x<2(1-p) \\ (1-p)x\geqslant 8 \end{cases} \quad (9) \end{array}\right.$$

თუ $1-p<0$, ე. ი. $p>1$, მაშინ (8) და (9) უტოლობათა სისტემებიდან მივიღებთ ორ სისტემას:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant\frac{p}{1-p} \\ x>2(1-p) \\ x\leqslant\frac{8}{1-p} \end{cases} \quad (10) \\ \begin{cases} x\geqslant\frac{p}{1-p} \\ x<2(1-p) \\ x\leqslant\frac{8}{1-p} \end{cases} \quad (11) \end{array}\right.$$

ამ სისტემების ამოხსნამდე წინასწარ ამოვხსნათ შემდეგი უტოლობები (ნახ. 117):



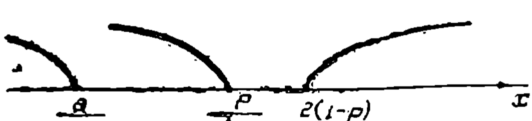
ნახ. 117

ა) $\frac{p}{1-p} > 2(1-p)$; $\quad \frac{2\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-2)}{1-p} < 0$,

$p \in \left\{\left]\frac{1}{2};\ 1\right[\cup \left]2;\ +\infty\right[\right\}$;

ბ) $\frac{p}{1-p} < \frac{8}{1-p}$; $\quad \frac{p-8}{1-p} < 0$; $\quad p \in \{]-\infty;\ 1[\cup]8;\ +\infty[\}$;

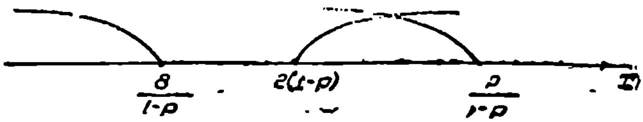
გ) $\frac{8}{1-p} > 2(1-p)$; $\quad \frac{(p+1)(p-3)}{1-p} < 0$; $p \in \{]-1;\ 1[\cup]3;\ +\infty[\}$.



ნახ. 118

(10)-ის ამოხსნა. თუ $1<p<2$, მაშინ $\frac{p}{1-p} < 2(1-p)$; $\frac{8}{1-p} < \frac{p}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p} < 2(1-p)$. ამიტომ სისტემას არ ექნება ამონახსნი (ნახ. 118).

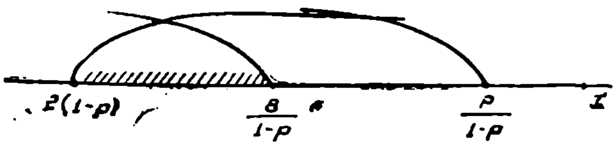
თუ $2 < p < 3$, მაშინ $\frac{p}{1-p} > 2(1-p)$; $\frac{p}{1-p} > \frac{8}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p} < 2(1-p)$; სისტემას ამონახსენი არა აქვს (ნახ. 119).



ნახ. 119

თუ $3 < p < 8$, მაშინ $\frac{p}{1-p} > 2(1-p)$; $\frac{p}{1-p} > \frac{8}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p} > 2(1-p)$. ამ შემთხვევაში სისტემის ამონახსენი იქნება (ნახ. 120):

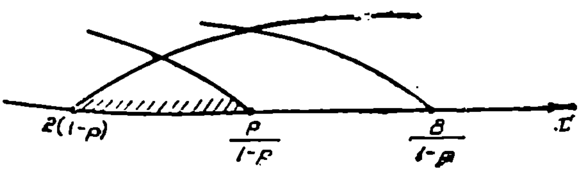
$$2(1-p) < x \leqslant \frac{8}{1-p}.$$



ნახ. 120

თუ $p > 8$, მაშინ $\frac{p}{1-p} > 2(1-p)$, $\frac{p}{1-p} < \frac{8}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p} > 2(1-p)$. ამიტომ ამ შემთხვევაში ამონახსენი იქნება (ნახ. 121):

$$2(1-p) < x \leqslant \frac{p}{1-p}.$$



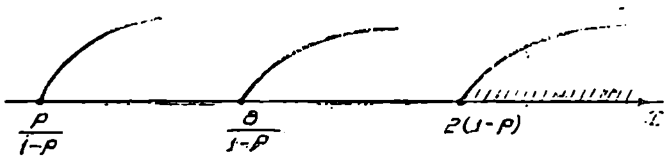
ნახ. 121

თუ გავითვალისწინებთ მოყვანილ ნახაზებს შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (11) სისტემას ამონახსენი არა აქვს არცერთი p-სათვის.

ახლა ვთქვათ $1-p>0$, ე. ი. $p<1$, მაშინ (8) და (9) სისტემიდან მივიღებთ ორ სისტემას:

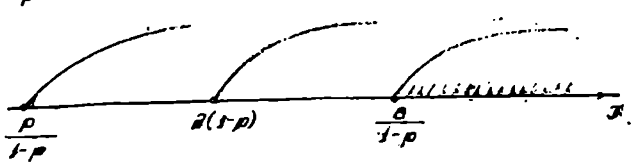
$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant \dfrac{1}{1-p} \\ x > 2(1-p) \\ x \geqslant \dfrac{8}{1-p} \end{array}\right. \quad (12) \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant \dfrac{p}{1-p} \\ x < 2(1-p) \\ x \geqslant \dfrac{8}{1-p} \end{array}\right. \quad (13) \end{array}\right.$$

(12)-ის ამოხსნა. თუ $p<-1$, მაშინ $\frac{p}{1-p}<2(1-p)$. $\frac{p}{1-p}<\frac{8}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p}<2(1-p)$. ამ შემთხვევაში სისტემის ამონახსენი იქნება (ნახ. 122) $x>2(1-p)$.



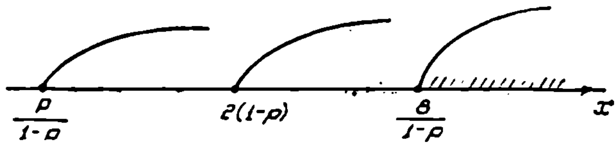
ნახ. 122

თუ $-1<p<\frac{1}{2}$, მაშინ $\frac{p}{1-p}<2(1-p)$, $\frac{p}{1-p}<\frac{8}{1-p}$ და $\frac{8}{1-p}>2(1-p)$. სისტემის ამონახსენი იქნება (ნახ. 123): $x \geqslant \frac{8}{1-p}$.



ნახ. 123

122-ე, 123-ე და 124-ე ნახაზებიდან გამომდინარეობს, რომ (13) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.



ნახ. 124

ამრიგად, (7) სისტემისათვის მივიღებთ:

ა) $2(1-p) < x \leqslant \frac{8}{1-p}$, თუ $3 < p < 8$;

ბ) $2(1-p) < x < \frac{p}{1-p}$, თუ $p > 8$;

გ) $x > 2(1-p)$, თუ $p < -1$;

დ) $x \geqslant \frac{8}{1-p}$, თუ $-1 < p < 1$.

(14)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

ა) $$\begin{cases} 3 < p < 8 \\ 2(1-p) < \frac{8}{1-p}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < p < 8 \\ 2(1-p)^2 > 8, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 < p < 8 \\ p^2 - 2p - 3 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < p < 8 \\ \left[\begin{array}{l} p < -1 \\ p > 3, \end{array}\right. \end{cases}$$

საიდანაც $3 < p < 8$;

ბ) $$\begin{cases} p > 8 \\ 2(1-p) < \frac{p}{1-p}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > 8 \\ 2(1-p)^2 > p, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p > 8 \\ 2p^2 - 5p + 2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > 8 \\ \left[\begin{array}{l} p < \frac{1}{2} \\ p > 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

აქედან $p > 8$.

გ) $p < -1$;

დ) $-1 < p < 1$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $p=1$ და $p=3$ მნიშვნელობებისათვის (7) უტოლობათა სისტემას ამონახსენი არა აქვს, ხოლო $p=-1$ და $p=8$ მნიშვნელობებისათვის აქვს ამონახსენი.

პ ა ს უ ხ ი: (7) უტოლობათა სისტემას აქვს ამონახსენი ყველა იმ p-სათვის, რომელთათვისაც $p \in \{]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]3;\ +\infty[\}$.

§ 7. ტრიგონომეტრიული პარამეტრული უტოლობები

ამოვხსნათ უტოლობები:

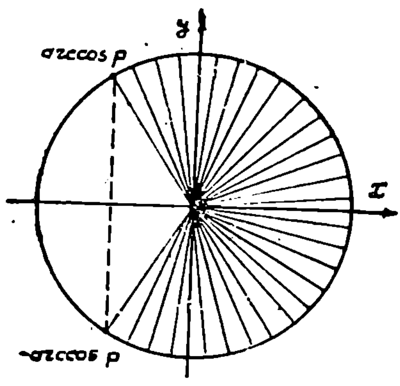
1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geqslant p$, სადაც $-1<p<0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთეულოვან წრეწირზე ავიღოთ ორი წერტილი p აბსცისით (ნახ. 125). ცხადია მოცემული უტოლობა მართებულია, როცა

$$-\arccos p+2k\pi \leqslant x-\frac{\pi}{3} \leqslant \arccos p+2k\pi$$

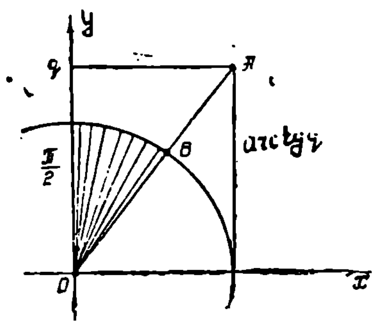
ანუ

$$\frac{\pi}{3}-\arccos p+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+\arccos p+2k\pi.$$



ნახ. 125

2. $\operatorname{tg}(px+1) \geqslant q$. (1)



ნახ. 126

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტანგენსების ღერძზე ავიღოთ A წერტილი q ორდინატით. $[OA]$ მონაკვეთის წრეწირთან გადაკვეთის **B** წერტილი იქნება $\operatorname{arctg} q$ კუთხის შესაბამისი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილი (ნახ. 126). (1) უტოლობა შესრულდება, როცა

$$\operatorname{arctg} q+k\pi \leqslant px+1<\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

აქედან

$$-1+\operatorname{arc\,tg} q+k\pi \leqslant px<-1+\frac{\pi}{2}+k\pi. \qquad (2)$$

თუ $p>0$, მაშინ (2)-დან:

$$\frac{1}{p}(\operatorname{arc\,tg} q-1+k\pi)\leqslant x<\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-1+k\pi\right),$$

ხოლო $p<0$-სათვის:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-1+k\pi\right)<x\leqslant\frac{1}{p}\left(\operatorname{arc\,tg} q-1+k\pi\right).$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $p=0$, მაშინ (1) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\operatorname{tg} 1\geqslant q.$$

მაშასადამე, როცა $p=0$ და $q\leqslant \operatorname{tg} 1=\frac{\pi}{4}$, მაშინ $-\infty<x<+\infty$.

8. $p\cos^2 2x-2\sin 2x-(p-1)>0$. (3)

ამოხსნა. როცა $p=0$, მივიღებთ (ნახ. 127):

$$-2\sin 2x+1>0,$$

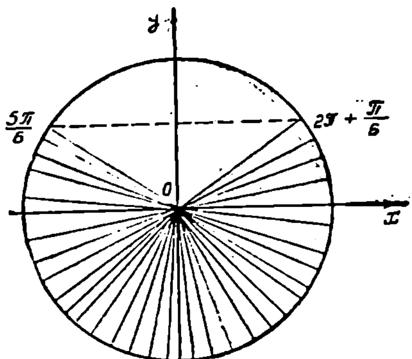
$$\sin 2x<\frac{1}{2},$$

რომლის ამონახსნია

$$2k\pi+\frac{5\pi}{6}<2x\leqslant 2\pi+2k\pi+\frac{\pi}{6}.$$

აქედან

$$\frac{5\pi}{12}+k\pi<x\leqslant\frac{13\pi}{12}+k\pi,$$



ნახ. 127

სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

დავუშვათ $p\neq 0$ და (3) უტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$p\sin^2 2x+2\sin 2x-1<0. \qquad (4)$$

აღვნიშნოთ $\sin 2x=u$, სადაც $-1\leqslant u\leqslant 1$. მაშინ (4) უტოლობის ეკვივალენტური იქნება

$$\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1\\ pu^2+2u-1<0.\end{cases} \qquad (5)$$

უტოლობათა სისტემა. განვიხილოთ ფუნქცია $f(u)=pu^2+2u-1$, რომლის დისკრიმინანტი $D=4(1+p)$. $D<0$ როცა $p=-1$. ამიტომ

$f(u)<0$ უტოლობა შესრულდება u-ს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. (5)-ის ამონახსენი იქნება $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$; $D=0$ როცა $p=-1$. ამ შემთხვევაში (5) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} -1 \leqslant u \leqslant 1 \\ -u^2+2u-1<0 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} -1 \leqslant u \leqslant 1 \\ -(u-1)^2<0, \end{cases}$$

რომელიც შესრულდება, როცა $-1 \leqslant u < 1$, ე. ი. $-1 \leqslant \sin 2x < 1$. აქედან $-\infty < x < +\infty$, მხოლოდ $\sin 2x \neq 1$, საიდანაც $x \neq (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$. $D<0$, როცა $p>-1$ $(p \neq 0)$; $f(u)=0$, როცა

$$\left[\begin{array}{l} u_1 = -\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1+p}\right), \\ u_2 = \frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right). \end{array}\right.$$

თუ $-1<p<0$, მაშინ $f(u)<0$, როცა $u<u_2$ და $u>u_1$.

ამ შემთხვევაში (5) სისტემა ეკვივალენტურია ორი

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} -1 \leqslant u \leqslant 1 \\ u < \frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right) \end{cases} & (6) \\ \begin{cases} -1 \leqslant u \leqslant 1 \\ u > -\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1+p}\right) \end{cases} & (7) \end{array}\right.$$

უტოლობათა სისტემის. გამოვთვალოთ

$pf(-1)=p(p-2-1)=p(p-3)$ და $pf(1)=p(p+2-1)=p(p+1)$.

$-1<p<0$-სათვის გვაქვს $pf(-1)>0$ და $pf(1)<0$, მაშასადამე,

$$\frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right) < -1 < -\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1+p}\right) < 1.$$

აქედან გამოდის, რომ (6)-ს არა აქვს ამონახსენი, ხოლო (7)-ის ამონახსენია

$$-\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1+p}\right) < u \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1+p}\right) <$$

$$< \sin 2x \leqslant 1 \Rightarrow u_1 < \sin 2x \leqslant 1.$$

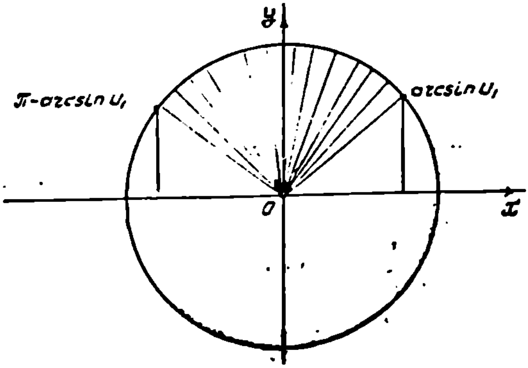
ამოხსნით მივიღებთ (ნახ. 128):

$$2k\pi + \arcsin u_1 < 2x < \pi - \arcsin u_1 + 2k\pi,$$

$$k\pi + \frac{1}{2}\arcsin u_1 < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin u_1 + k\pi$$

ანუ

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})+k\pi.$$

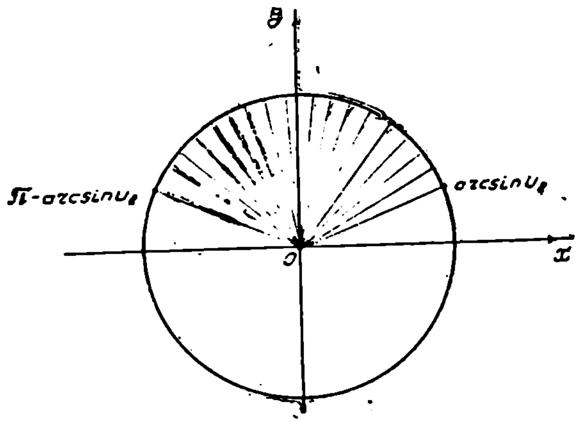


ნახ. 128

ახლა ვთქვათ $0<p<3$. ამ შემთხვევაში $u_1<u_2$ და $f(u)<0$ როცა $u_1<u<u_2$. ამიტომ (5) ეკვივალენტურია

$$\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1\\ -\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<u<\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})\end{cases} \tag{8}$$

სისტემის. რადგან $0<p<3$-სათვის $pf(-1)=p(p-3)<0$ და $pf(1)=p(p+1)>0$, ამიტომ $u_1<-1<u_2<1$. ამრიგად, (8) სისტემის ამონახსენია (ნახ. 129):



ნახ. 129

$$\frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right)<u\leqslant 1, \quad u_2<\sin 2x\leqslant 1.$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ მოკლე ამონახსენი:

$$2k\pi+\arcsin u_2<2x<\pi-\arcsin u_2+2k\pi,$$

საიდანაც

$$k\pi+\frac{1}{2}\arcsin u_2<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin u_2+k\pi$$

ანუ ვრცლად

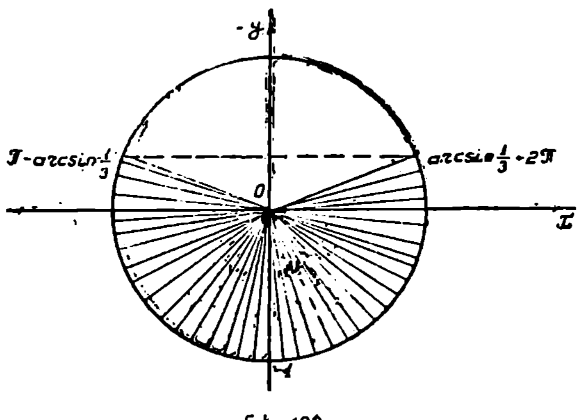
$$k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right)<x<\frac{\pi}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1+p}\right)+k\pi.$$

როცა $p=3$, მაშინ (5) გვაძლევს:

$$\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1\\ 3u^2+2u-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1\\ 3(u+1)\left(u-\frac{1}{3}\right)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1\\ -1<u<\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1<u<\frac{1}{3}\Rightarrow -1<\sin 2x<\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x>-1\\ \sin 2x<\frac{1}{3}\end{cases}.$$

რადგან ნებისმიერი x-ისათვის $\left(x\neq\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)$ $\sin 2x>-1$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობათა სისტემა ეკვივალენტურია $\sin 2x<\frac{1}{3}$ უტოლობის, რომლის ამოხსნით მივიღებთ (ნახ. 130):



ნახ. 130

$$\left[\begin{array}{l}\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi<2x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi\\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi<2x<\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi+2\pi\end{array}\right.$$

საიდანაც

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+k\pi\\ \frac{3}{4}\pi+k\pi<x<\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi+\pi.\end{array}\right.$$

თუ $p>3$, მაშინ $f(u)<0$ როცა $u_1<u<u_2$ და (5) სისტემა მიიღებს სახეს:

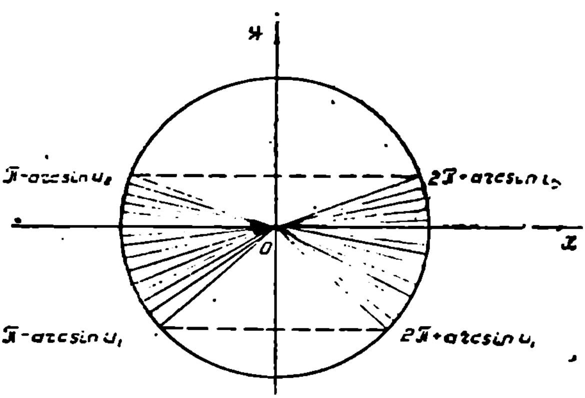
$$\begin{cases}-1\leqslant u\leqslant 1,\\ -\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<u<\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p}).\end{cases}\tag{9}$$

შევნიშნოთ, რომ $p>3$-ისათვის $pf(-1)>0$ და $pf(1)>0$, ე. ი. $-1<u_1<u_2<1$. მართლაც, $\frac{1}{2}(u_1+u_2)=-\frac{1}{p}$, $-1<-\frac{1}{p}<1$. ამრიგად, (9) სისტემის ამონახსენი იქნება

$$-\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<u<\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})\Rightarrow-$$

$$-\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<\sin 2x<\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})$$

ანუ მოკლედ $u_1<\sin 2x<u_2$. ამოვხსნათ ეს სისტემა (ნახ. 131):



ნახ. 131

$$\left[\begin{array}{l}2k\pi+2\pi+\arcsin u_1<2x<2k\pi+2\pi+\arcsin u_2\\ 2k\pi+\pi-\arcsin u_2<2x<2k\pi+\pi-\arcsin u_1\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k\pi+\pi+\frac{1}{2}\arcsin u_1<x<k\pi+\pi+\frac{1}{2}\arcsin u_2\\ k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin u_2<x<k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin u_1\end{array}\right.$$

საბოლოო სახით

$$\left[\begin{array}{l}(k+1)\pi+\frac{1}{2}\arcsin\left[-\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})\right]<x<(k+1)\pi+\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p}),\\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})<x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\\ \qquad\qquad-\frac{1}{2}\arcsin\left[-\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})\right]\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(k+1)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<x<(k+1)\pi+\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p}),\\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})<x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p}).\end{array}\right.$$

ამრიგად, მივიღეთ პასუხი:

როცა $p<-1$, მაშინ $x\in\,]-\infty;\,+\infty[$;

როცა $p=-1$, მაშინ $x\in\left\{]-\infty;\,+\infty[\,\diagdown\left\{(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right\}\right\}$;

როცა $-1<p<0$, მაშინ $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})+$

$$+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})+k\pi,$$

როცა $p=0$, მაშინ $\frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi;$

როცა $0<p<3$, მაშინ $k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})<$

$$<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})+k\pi;$$

როცა $p=3$, მაშინ $k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}<x<\pi+$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi,\quad x\neq\frac{3}{4}\pi+k\pi;$$

როცა $p>3$, მაშინ

$$\left[\begin{array}{l}(k+1)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p})<x<(k+1)\pi+\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p}),\\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(-1+\sqrt{1+p})<x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{p}(1+\sqrt{1+p}).\end{array}\right.$$

სავარჯიშო 12. 1) ამოვხსნათ პარამეტრული განტოლებები:

ა) $\frac{2b}{x}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a-b}$,

ბ) $\frac{ax-b}{x+1}=b-1+\frac{2b-3}{5}$,

გ) $\frac{x-4}{x+2}+\frac{2}{a}=\frac{1}{a(x+2)}$,

დ) $\frac{x-3a}{x^2-4}-\frac{2a+3}{x+2}=\frac{a-5}{x-2}$,

2) ამოვხსნათ x-ის მიმართ:

ა) $2(a-1)^2 x + 2(a-1) + \frac{3k+4}{x} = 0;$

ბ) $\frac{x-a}{x-2} = \frac{8}{x+2} + \frac{40}{x^2-4};$

გ) $\sqrt{x+a} = a;$

დ) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-4} = a;$

ე) $\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} = x - a.$

3) ამოვხსნათ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები:

ა) $a^{2x} + a^x = a^{4x},$

ბ) $b^{2x-1} + a^{2x} - b^{2x} + a^{2x+2} = 0,$

გ) $\sqrt[x]{a^2} = \sqrt[x]{\frac{b^4}{a^2}} + \sqrt[x]{b^2},$

დ) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log a_{a^3x} = 0,$

ე) $\sqrt{\log_x (ax)}\,\log_a x = -\sqrt{2},$

ვ) $\log_{ab}(x-a)^2 + \log_{ab}(x-b)^2 = 2.$

4) ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლებები:

ა) $\cos(3x+2) = b,$

ბ) $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = \sin 2a,$

გ) $2\sin^2 2x - (b+2a+2)\sin 2x + b(a+1) = 0.$

დ) $\mathrm{tg}^2 x = a(1-\cos x),$

ე) $a\sin(x+15°) = b\sin(x-75°),$

5) ამოვხსნათ x-ის მიმართ უტოლობები:

ა) $\frac{x}{x-3} < \frac{2a+1}{(a-3)(a-2)};$

ბ) $\frac{ax-2}{x-2} - \frac{a}{3} < a-1,$

დ) $\frac{2x+1}{(a-1)x}-\frac{a+5}{a-1}>\frac{3}{x}$,

ე) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-3>0$,

ვ) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\leqslant 2$,

ზ) $x+\sqrt{a^2-x^2}\geqslant 0$,

თ) $\sqrt{\frac{2x+a}{x-2}}<a-2$,

ი) $\sqrt{x+a}>a-\sqrt{x}$,

კ) $1-\frac{1}{2}\lg(2x-a)>\frac{1}{2}\lg(3a-x)$,

ლ) $\log_a x+1>2\log_x a$.

6) ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული უტოლობები:

ა) $\cos(mx-2)<m$, სადაც $-1<m<0$,

ბ) $\cos^2(x+2)<a$, სადაც $0<a<1$,

გ) $|\operatorname{tg}(3x+2)|\leqslant a$, სადაც $a>0$,

დ) $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}-\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$,

ე) $\cos x+\frac{a(a+1)}{\cos x-1}<\frac{2(1+a\cos x)}{\cos x-1}$.

VI თავი

კვადრატული სამწევრი

§ 1. კვადრატულ სამწევრთან დაკავშირებული საკითხები

განვიხილოთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

კვადრატული სამწევრი, რომლის დისკრიმინანტია $D=b^2-4ac$ და დავამტკიცოთ:

თ ე ო რ ე მ ა 1. $f(x)$ კვადრატული სამწევრის ფესვები ნამდვილი რიცხვებია და ორივე მეტია k რიცხვზე მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ k < -\dfrac{b}{2a}, \\ af(k) > 0. \end{cases} \tag{1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ x_1 და x_2 არიან $f(x)$-ის ნამდვილი ფესვები, მაშინ გვექნება:

$$af(k) = a(ak^2 + bk + c) = a^2(k - x_1)(k - x_2) \tag{2}$$

ტოლობა. დავუშვათ $x_1 \leqslant x_2$ და განვიხილოთ უტოლობა:

$$a^2(k - x_1)(k - x_2) > 0, \tag{3}$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{cases} k > x_1, \\ k < x_2. \end{cases}$$

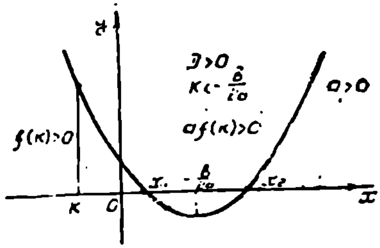
მაგრამ (3) უტოლობა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა

$$\begin{cases} k < x_1, \\ k < x_2. \end{cases}$$

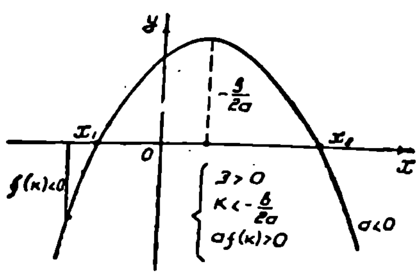
აქედან, ვიეტას თეორემის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$2k < x_1 + x_2 \Rightarrow k < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}.$$

ამრიგად, მივიღეთ $k < -\dfrac{b}{2a}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა. ამ შემთხვევის გეომეტრიული სურათი მოცემულია 132-ე, 133-ე, 134-ე და 135-ე ნახაზებზე.



ნახ. 132

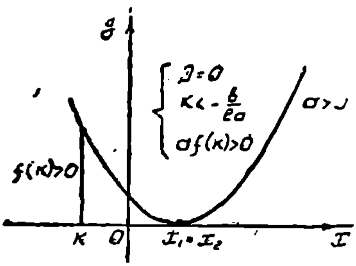


ნახ. 133

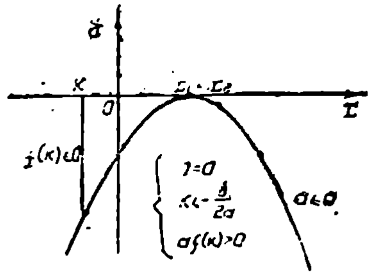
ა მ ო ც ა ნ ა. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $(m-1)x^2-$ $-2x+m+3=0$ განტოლების ფესვები $k=-1$ რიცხვზე მეტი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ დამტკიცებული თეორემის (1) პირობებით და ამოვხსნათ

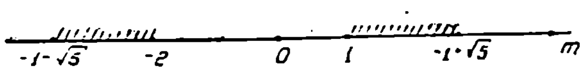
$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ -1 < -\dfrac{-2}{2(m-1)} \\ (m-1)f(-1) > 0 \end{cases}$$



ნახ. 134



ნახ. 135



ნახ. 136

უტოლობათა სისტემა. გვაქვს (ნახ. 136):

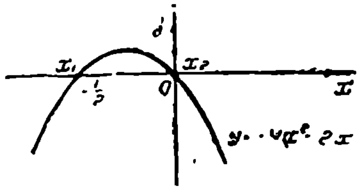
$$\begin{cases} 4-4(m-1)(m+3) \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{m-1}+1>0 \\ (m-1)[(m-1)+2+m+3]>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2+2m-4 \leqslant 0 \\ \dfrac{m}{m-1}>0 \\ (m-1)(m+2)>0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{5} \leqslant m \leqslant -1+\sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{5}\leqslant m<-2\\ 1+m\leqslant -1+\sqrt{5}\end{array}\right. \text{ ანუ } m\in[-1-\sqrt{5},\ -2[\ \cup\ ]1;-1+\sqrt{5}].$$

შემოწმებისათვის განვიხილოთ თუნდაც $m=-3$ მნიშვნელობა, მივიღებთ $-4x^2-2x=0$; $2x^2+x=0$; $x(2x+1)=0$; $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$ და მართლაც $-1<-\frac{1}{2}$; $-1<0$ (ნახ. 137):



ნახ. 137

თ ე ო რ ე მ ა 2. k რიცხვი მეტია $f(x)$ სამწევრის ფესვებზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$\left\{\begin{array}{l}D\geqslant 0\\ k>-\frac{b}{2a}\\ af(k)>0\end{array}\right. \tag{4}$$

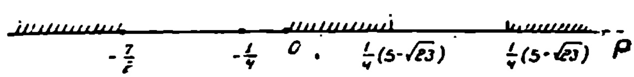
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც წინა თეორემაში იყო აღნიშნული, $a^2(k-x_1)(k-x_2)>0$ როცა

$$\left\{\begin{array}{l}k>x_1\\ k>x_2,\end{array}\right.$$

საიდანაც $x_1\leqslant x_2<k$ და $k>\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ა მ ო ც ა ნ ა. p-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $px^2+x-2p+5=0$ განტოლების ფესვები $k=2$-ზე ნაკლები?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (4) პირობათა კომპლექტით, მივიღებთ (ნახ. 138):



ნახ. 138

$$\begin{cases} 1+4p(2p-5)\geqslant 0 \\ 2>-\dfrac{1}{2p} \\ p(4p+2-2p+5)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8p^2-20p+1\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2p}+2>0 \\ p(2p+7)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p\leqslant \dfrac{1}{4}(5-\sqrt{23}) \\ p\geqslant \dfrac{1}{4}(5+\sqrt{23}) \end{array}\right. \\ \dfrac{1+4p}{p}>0 \\ \left[\begin{array}{l} p<-\dfrac{7}{2} \\ p>0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p\leqslant \dfrac{1}{4}(5-\sqrt{23}) \\ p\geqslant \dfrac{1}{4}(5+\sqrt{23}) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p<-\dfrac{1}{4} \\ p>0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p<-\dfrac{7}{2} \\ p>0. \end{array}\right. \end{cases}$$

მაშასადამე,

$$p\in\left\{\left]-\infty;\ -\frac{7}{2}\right[\cup\left]0;\ \frac{1}{4}(5-\sqrt{23})\right]\cup\left[\frac{1}{4}(5+\sqrt{23});\ +\infty\right[\right\}.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. ამ სიმრავლიდან განვიხილოთ თუნდაც $p=3$, მაშინ მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ:

$$3x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13})\Rightarrow x_1=\frac{1}{6}(-1-\sqrt{13}),$$

$$x_2=\frac{1}{6}(-1+\sqrt{13}).$$

მართლაც $x_1<2$ და $x_2<2$.

თ ე ო რ ე მ ა 3. $f(x)$ კვადრატული სამწევრის ფესვები ნამდვილი რიცხვებია და მოთავსებულია $]k_1, k_2[$ შუალედში მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ k_1<-\dfrac{b}{2a} \\ k_2>-\dfrac{b}{2a} \\ bf(k_1)>0 \\ af(k_2)>0 \end{cases} \qquad (5)$$

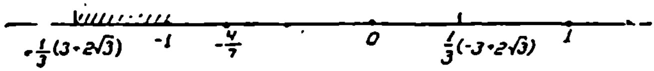
პირობები.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვისარგებლოთ პირველი და მეორე თეორემით: დასამტკიცებელი თეორემის მართებულობა ნათლად ჩანს, როცა

$D\geqslant 0$. (5) პირობებიდან $af(k_1)>0$ და $k_1<-\dfrac{b}{2a}$ იმაზე მიუთითებს, რომ $k_1<x_1\leqslant x_2$; ხოლო $af(k_2)>0$ და $k_2>-\dfrac{b}{2a}$ უტოლობების ერთობლივი შესრულება ნიშნავს, რომ $x_1\leqslant x_2<k_2$. ამრიგად (5)-ის შესრულება ნიშნავს, რომ $k_1<x_1\leqslant x_2<k_2$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ა მ ო ც ა ნ ა. n-ის რა მნიშვნელობებისათვის მოთავსდება $nx^2-(n+1)x+n+2=0$ განტოლების ფესვები $k_1=-2$ და $k_2=1$ რიცხვებს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (5) პირობებით, მიიღებთ (ნახ. 139):



ნახ. 139

$$\begin{cases}(n+1)^2-4n(n+2)\geqslant 0\\ -2<-\dfrac{-(n+1)}{2n}\\ 1>-\dfrac{-(n+1)}{2n}\\ n(4n+2(n+1)+n+2)>0\\ n(n-(n+1)+n+2)>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3n^2+6n-1\leqslant 0\\ \dfrac{n+1}{2n}+2>0\\ \dfrac{n+1}{2n}-1<0\\ n(7n+4)>0\\ n(n+1)>0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3n^2+6n-1\leqslant 0\\ \dfrac{5n+1}{n}>0\\ \dfrac{1-n}{n}<0\\ n(7n+4)>0\\ n(n+1)>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}(3+2\sqrt{3})\leqslant n\leqslant\dfrac{1}{3}(-3+2\sqrt{3})\\ \left[\begin{array}{l}n<-\dfrac{1}{5}\\ n>0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}n<0\\ n>1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}n<-\dfrac{4}{7}\\ n>0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}n<-1\\ n>0.\end{array}\right.\end{cases}$$

ამრიგად, $-\dfrac{1}{3}(3+2\sqrt{3})\leqslant n<-1$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. განვიხილოთ ამ შუალედიდან n-ის რაიმე მნიშვნელობა, ვთქვათ $n = -\frac{3}{2}$. მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$-\frac{3}{2}x^2 - \left(-\frac{3}{2}+1\right)x - \frac{3}{2} + 2 = 0, \quad 3x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{6}(1-\sqrt{13}), \quad x_2 = \frac{1}{6}(1+\sqrt{13}).$$

ორივე ფესვი მოთავსებულია $k_1 = -2$ და $k_2 = 1$ რიცხვებს შორის, ე. ი.
$-2 < \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{13}) < 1$.

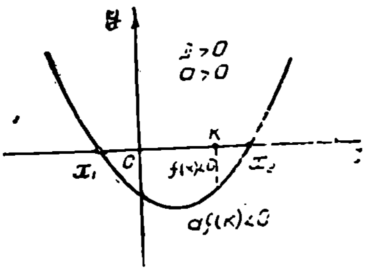
პ ა ს უ ხ ი: $-\frac{1}{3}(3 + 2\sqrt{3}) \leqslant n < -1$.

თ ე ო რ ე მ ა 4. k რიცხვი მოთავსებულია კვადრატული სამწევრის x_1 და x_2 ფესვებს შორის მხოლოდ მაშინ, როცა $af(k) < 0$.

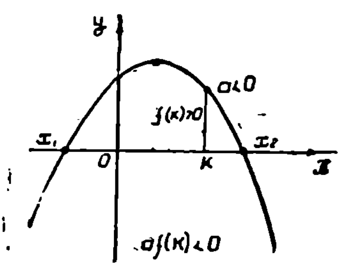
ეს თეორემა ცხადია, რადგან

$$af(k) = a^2(k-x_1)(k-x_2) < 0 \qquad (6)$$

უტოლობის ამონახსენია $x_1 < k < x_2$. რაც შეეხება $D > 0$ უტოლობას, იგი უშუალოდ გამომდინარეობს $af(k) < 0$ უტოლობიდან (ნახ. 140, ნახ. 141).



ნახ. 140



ნახ. 141

ა მ ო ც ა ნ ა. p-ს რა მნიშვნელობებისათვის მოთავსდება $k=2$ რიცხვი $(p-1)x^2 - 2x + 3p - 1 = 0$ განტოლების ფესვებს შორის?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (6) უტოლობით, მივიღებთ (ნახ. 142):

$$(p-1)f(2)<0, \quad (p-1)\left[(p-1)4-4+3p-1\right]<0,$$

$$(p-1)(7p-9)<0, \quad 1<p<\frac{9}{7}.$$

ნახ. 142

შემოწმება. მიღებული შედეგიდან ავიღოთ თუნდაც $p=\frac{8}{7}$ და ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{1}{7}x^2-2x+\frac{17}{7}=0 \Rightarrow x^2-14x+17=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=7-4\sqrt{2}; \quad x_2=7+4\sqrt{2}.$$

მართლაც, $k=2$ მოთავსებულია ამ ფესვებს შორის: $7-4\sqrt{2}<2<$ $<7+4\sqrt{2}$.

პასუხი: $1<p<\frac{9}{7}$.

განვიხილოთ კიდევ რამოდენიმე ამოცანა.

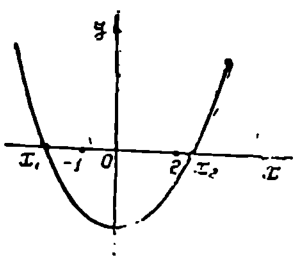
1. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის შესრულდება

$$(1-\alpha)x^2-\alpha x+1-4\alpha<0$$

უტოლობა, როცა $-1<x<2$?

ამოხსნა. განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა:

ა) თუ $1-\alpha>0$, მაშინ -1 და 2 უნდა მოთავსდნენ ფესვებს შორის (ნახ. 143), ე. ი. უნდა შესრულდეს შემდეგ პირობათა კომპლექტი:



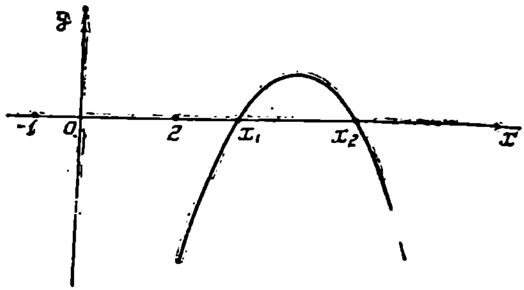
ნახ. 143

$$\begin{cases} 1-\alpha>0 \\ (1-\alpha)f(-1)\leqslant 0 \\ (1-\alpha)f(2)\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ (1-\alpha)(1-\alpha)\leqslant 0 \\ (1-\alpha)(1-2\alpha)\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ \alpha=1 \\ \frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში სისტემას ამონახსენი არ აქვს.

ბ) თუ $1-\alpha<0$ და -1 და 2 ორივე ნაკლებია x_1 და x_2 ფესვებზე. პირველი თეორემის თანახმად გვაქვს (ნახ. 144):

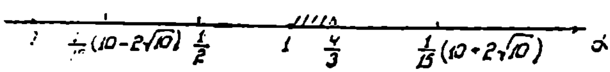


ნახ. 144

$$\begin{cases} 1-\alpha<0 \\ D\geqslant 0 \\ (1-\alpha)f(2)\geqslant 0 \\ 2<-\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \alpha^2-4(1-\alpha)(1-4\alpha)\geqslant 0 \\ (1-\alpha)(1-2\alpha)\geqslant 0 \\ 2<-\dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ 15\alpha^2-20\alpha+4\leqslant 0 \\ (1-\alpha)(1-2\alpha)\geqslant 0 \\ \dfrac{4-3\alpha}{1-\alpha}<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{15}(10-2\sqrt{10})\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{1}{15}(10+2\sqrt{10}) \\ \alpha>1 \\ \left[\begin{array}{l} \alpha\leqslant\dfrac{1}{2} \\ \alpha\geqslant 1 \end{array}\right. \\ 1<\alpha<\dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

აქედან $1<\alpha<\dfrac{4}{3}$ (ნახ. 145).



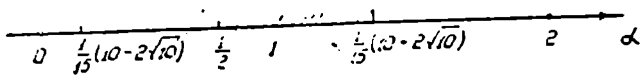
ნახ. 145

გ) თუ $1-\alpha<0$ და x_1 და x_2 ფესვები ნაკლებია -1 და 2-ზე, მეორე თეორემის თანახმად უნდა შესრულდეს უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} 1-\alpha<0 \\ D \geqslant 0 \\ (1-\alpha) f(-1) \geqslant 0 \\ -1>-\dfrac{b}{2a}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ 15\alpha^2-20\alpha+4 \leqslant 0 \\ (1-\alpha)(1-2\alpha) \geqslant 0 \\ \dfrac{2-\alpha}{1-\alpha}<0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \dfrac{1}{15}(10-2\sqrt{10}) \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{15}(10+2\sqrt{10}) \\ \left[\begin{array}{l} \alpha \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \alpha \geqslant 1 \end{array}\right. \\ 1<\alpha<2, \end{cases}$$

საიდანაც $1<\alpha \leqslant \dfrac{1}{15}(10+2\sqrt{10})$ (ნახ. 146).

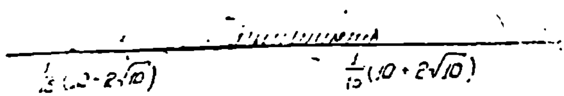


ნახ. 146

დ) $1-\alpha<0$ და $D<0$ (მოცემული უტოლობა სრულდება x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის), მაშინ

$$\begin{cases} 1-\alpha<0 \\ 15\alpha^2-20\alpha+4 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \dfrac{1}{15}(10-2\sqrt{10}) \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{15}(10+2\sqrt{10}). \end{cases}$$

აქედან (ნახ. 147) $1<\alpha \leqslant \dfrac{1}{15}(10+2\sqrt{10})$.



ნახ. 147

ე) თუ $1-\alpha=0$, ე. ი. $\alpha=1$, მაშინ მოცემული უტოლობიდან მივიღებთ: $-x+1<0$, $x>1$, რომელიც ნაწილობრივ აკმაყოფილებს მოთხოვნას.

პასუხი: $\alpha \in \left]1; \frac{4}{3}\right]$.

2. d-ს რა მნიშვნელობებისათვის შესრულდება $x^2+(d-1)x-d^2+4d+1<0$ უტოლობა, თუ $0<x<2$.

ამოხსნა. x^2-ის კოეფიციენტი $a=1>0$. ამიტომ x-ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის უტოლობა შესრულდება თუ 0 და 2 მოთავსდებიან x_1 და x_2 ფესვებს შორის:

$$\begin{cases} f(0) \leqslant 0, \\ f(2) \leqslant 0. \end{cases}$$

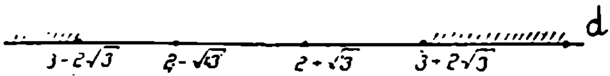
გვაქვს

$$\begin{cases} -d^2+4d+1 \leqslant 0 \\ 4+2(d-1)-d^2+4d+1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2-4d-1 \geqslant 0, \\ d^2-6d-3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} d \leqslant 2-\sqrt{3} \\ d \geqslant 2+\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} d \leqslant 3-2\sqrt{3} \\ d \geqslant 3+2\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

აქედან (ნახ. 148):

$$\left[\begin{array}{l} d \leqslant 3-2\sqrt{3} \\ d \geqslant 3+2\sqrt{3}\,. \end{array}\right.$$



ნახ. 148

შემოწმება. ავიღოთ თუნდაც $d=7$ მნიშვნელობა და ჩავსვათ მოცემულ უტოლობაში, მივიღებთ:

$$x^2+6x-49+28+1<0,\ x^2+6x-20<0;\ x_1=-3-\sqrt{29},$$

$$x_2=-3+\sqrt{29} \quad \text{და} \quad -3-\sqrt{29}<x<-3+\sqrt{29}\,,$$

რომელიც შეიცავს 0 და 2-ს, ე. ი.

$$-3-\sqrt{29}<0<2<-3+\sqrt{29}\,.$$

§ 2. ორი კვადრატული სამწევრის რეზულტანტი

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნამდვილკოეფიციენტებიანი ორი კვად-რატული სამწევრი $f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ და $f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$. $f_1(x)$ და $f_2(x)$ მრავალწევრთა რეზულტანტი აღინიშნება $R(f_1, f_2)$ სიმბოლოთი და ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას

$$R(f_1, f_2) = (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 - (a_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

თეორემა: ორ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ კვადრატულ სამწევრს რომ ჰქონდეს ერთი მაინც საერთო ფესვი, აუცილებელია და საკმარისი

$$R(f_1, f_2) = 0 \tag{1}$$

პირობის შესრულება.

დამტკიცება. ვთქვათ $f_1(x)$ სამწევრის ფესვებია x_1 და x_2. ეს ფესვები ჩავსვათ $f_2(x)$ სამწევრში და შევადგინოთ

$$a_1^2 f_2(x_1) f_2(x_2) \tag{2}$$

ნამრავლი. ვაჩვენოთ, რომ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ სამწევრებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში ექნებათ საერთო ფესვი, როცა (2) ნამრავლი ნულის ტოლია. მართლაც, თუ ამ ორ სამწევრს აქვს საერთო ფესვი, მაშინ ერთი მაინც x_1 და x_2 რიცხვისათვის შესრულდება ტოლობა $f_2(x) = 0$, ე. ი. $f_2(x_1) = 0$ ან $f_2(x_2) = 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$a_1^2 f_2(x_1) f_2(x_2) = 0.$$

პირიქით, თუ $a_1^2 f_2(x_1) f_2(x_2) = 0$, მაშინ $f_2(x_1) = 0$ ან $f_2(x_2) = 0$ (იგულისხმება $a_1 \neq 0$). ამრიგად, $f_1(x)$ სამწევრის ერთი ფესვი მაინც არის $f_2(x)$ სამწევრის ფესვი.

მაშასადამე, (2)-ის ნულთან ტოლობა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა $f_1(x)$ და $f_2(x)$ სამწევრთა საერთო ფესვის არსებობისათვის. ვაჩვენოთ, რომ

$$a_1^2 f_2(x_1) f_2(x_2) = a_1^2 (a_2 x_1^2 + b_2 x_1 + c_2)(a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2) =$$
$$= a_1^2 [\,(a_2^2 x_1^2 x_2^2 + b_2^2 x_1 x_2 + c_2^2 + a_2 b_2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) +$$
$$+ a_2 c_2 (x_1^2 + x_2^2) + b_2 c_2 (x_1 + x_2)\,].$$

თუ ამ ტოლობაში შემავალ $x_1, x_2, x_1 + x_2$ და $x_1^2 + x_2^2$ გამოვსახავთ $f_1(x)$ სამწევრის კოეფიციენტებით, ე. ი.

$$x_1 x_2 = \frac{c_1}{a_1}; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = \frac{b_1^2}{a_1^2} - \frac{c_1}{a_1},$$

მივიღებთ $R(f_1, f_2)$-ს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შეგვიძლია რეზულტანტის ჩაწერა შემდეგნაირადაც:

$$R(f_1, f_2) = a_1^2 f_2(x_1) f_2(x_2) = a_2^2 f_1(x_1') f_1(x_2') =$$

$$= a_1^2 a_2^2 (x_1 - x_1')(x_2 - x_1')(x_1 - x_2')(x_2 - x_2') =$$

$$= \frac{1}{4} [(2a_1 c_2 + 2c_1 a_2 - b_1 b_2)^2 - D_1 D_2],$$

სადაც x_1' და x_2' არიან $f_2(x)$ სამწევრის ფესვები, ხოლო D_1 და D_2 შესაბამისად არიან $f_1(x)$ და $f_2(x)$-ის დისკრიმინანტები.

თუ $a_2 = 0$, მაშინ აღნიშნული მსჯელობის ჩატარება არ შეიძლება, რადგან $f_2(x) = b_2 x + c_2$, რომლის ფესვია $x' = -\frac{c_2}{b_2}$, სადაც $b_2 \neq 0$. ეს ფესვი დააკმაყოფილებს $f_1(x) = 0$ განტოლებას იმ პირობით, თუ

$$\frac{c_2^2}{b_2^2} a_1 - b_1 \frac{c_2}{b_2} + c_1 = 0,$$

საიდანაც

$$c_2^2 a_1 - b_1 b_2 c_2 + c_1 b_2^2 = 0.$$

თუ $R(f_1, f_2)$-ში დავუშვებთ $a_2 = 0$, მაშინ მივიღებთ:

$$R(f_1, f_2) = a_1(a_1 c_2^2 - b_2 b_1 c_2 + c_1 b_2^2),$$

საიდანაც ჩანს, რომ $R(f_1, f_2) = 0$ ტოლობა კვლავ გვაძლევს $f_1(x)$ სამწევრისა და $f_2(x)$ ორწევრის საერთო ფესვის არსებობის პირობას.

თუ $a_1 = a_2 = 0$, მაშინ $R(f_1, f_2) = 0$. ამ შემთხვევაში $f_1(x)$ და $f_2(x)$ შეიძლება ჰქონდეთ საერთო ფესვი (პირობა არ გამოიყენება).

ა მ ო ც ა ნ ა 1. ვთქვათ α არის

$$2x^2 + 4x + 2 - k = 0 \tag{3}$$

განტოლების ფესვი, ხოლო β არის

$$x^2 - 3x + k + 2 = 0 \tag{4}$$

განტოლების ფესვი. k პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის შესრულდება $\alpha + 2\beta = 1$ ტოლობა?

ა მ ო ხ ს ნ ა: თუ $\alpha = 1 - 2\beta$-ს შევიტანთ (3) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2(1 - 2\beta)^2 + 4(1 - 2\beta) + 2 - k = 8\beta^2 - 16\beta + 8 - k.$$

მაშასადამე, (4) და

$$8x^2 - 16x + 8 - k = 0 \tag{5}$$

განტოლებებს ექნებათ β საერთო ფესვი. გამოვთვალოთ (4) და (5) განტოლებათა რეზულტანტი, გვაქვს:

$$R = (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 - (a_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2) =$$

$$= [1\cdot(8-k) - (k+2)\cdot 8]^2 - [1\cdot(-16) - (-3)\cdot 8][(-3)(8-k) -$$

$$-(k+2)(-16)] = (9k+8)^2 - 8(19k+8) =$$

$$= 81k^2 - 8k = k(81k - 8),$$

რომელიც ნულის ტოლი ხდება $k = 0$ და $k = \frac{8}{81}$ მნიშვნელობისათვის.

(4) და (5) განტოლებათა საერთო ფესვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\beta = -\frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{b_1 a_2 - a_1 b_2} = -\frac{(k+2)8 - 1\cdot(8-k)}{(-3)8 - 1\cdot(-16)} = \frac{9k+8}{8}$$

როცა $k = 0$, მაშინ $\beta = 1$; ხოლო როცა $k = \frac{8}{81}$, მაშინ $\beta = \frac{10}{9}$.

ამოცანა 2. $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ და $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ განტოლებებს აქვთ ერთი საერთო ფესვი. შევადგინოთ კვადრატული განტოლება რომელსაც დააკმაყოფილებს მათი არა საერთო ფესვები.

ამოხსნა. ვთქვათ β_1 და α პირველი განტოლების ფესვებია, ხოლო β_2 და α — მეორე განტოლების ფესვები, სადაც $\beta_1 \neq \beta_2$. ვიეტას თეორემის თანახმად

$$\beta_1 + \alpha = -p_1 \quad \text{და} \quad \beta_2 + \alpha = -p_2,$$

საიდანაც

$$\beta_1 + \beta_2 = -(p_2 + p_2) - 2\alpha; \quad \beta_1 \alpha = q_1; \quad \beta_2 \alpha = q_2.$$

ამიტომ

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{q_1 q_2}{\alpha^2} \quad (\alpha \neq 0).$$

საერთო ფესვი გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2},$$

სადაც $p_1 \neq p_2$, რადგან $\beta_1 \neq \beta_2$. საძიებელი განტოლების კოეფიციენტებია:

$$-(\beta_1 + \beta_2) = p_1 + p_2 + 2\frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} \quad \text{და} \quad \beta_1 \beta_2 = \frac{q_1 q_2 (p_1 - p_2)^2}{(q_2 - q_1)^2}$$

და განტოლებას ექნება სახე

$$x^2 - \left(p_1 + p_2 + 2\frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}\right)x + \frac{q_1 q_2 (p_1 - p_2)^2}{(q_2 - q_1)^2} = 0.$$

თუ $\alpha = 0$, მაშინ $\beta_1 = -p_1$; $\beta_2 = -p_2$. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$-(\beta_1 + \beta_2) = p_1 + p_2; \quad \beta_1 \beta_2 = p_1 p_2$$

და განტოლება იქნება

$$x^2 - (p_1 + p_2)x + p_1 p_2 = 0.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3. p-ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნება ორ $x^2 + (3p - 1)x + 1 = 0$ და $3x^2 + (p + 1)x - 2 = 0$ განტოლებას საერთო ფესვი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (1) ფორმულით, სადაც $a_1 = 1$, $b_1 = 3p - 1$, $c_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_2 = p + 1$, $c_2 = -2$, მივიღებთ

$$25 - (4 - 8p)(3 - 5p) = 0, \ 40p^2 - 64p - 13 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{386}}{20}.$$

ახლა ამოვხსნათ ზოგიერთი ტიპური ამოცანა:

1. k-ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნება ორი ტოლი და ნამდვილი ფესვი $(1 + k)x^2 - 4kx - k + 3 = 0$ განტოლებას?

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღნიშნული პირობა შესრულდება, როცა $D = 0$, ე. ი.

$$16k^2 - 4(k + 1)(-k + 3) = 0, \ 4k^2 + (k + 1)(k - 3) = 0,$$

$$5k^2 - 2k - 3 = 0, \quad k_1 = -\frac{3}{5}, \quad k_2 = 1.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. როცა $k = 1$, მაშინ მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 2x + 1 = 0, \ (x - 1)^2 = 0,$$

საიდანაც $x_1 = x_2 = 1$. ასევე შემოწმდება $k_2 = -\frac{3}{5}$ მნიშვნელობისათვის.

პ ა ს უ ხ ი. $k = -\frac{3}{5}$, $k = 1$ ანუ $k \in \left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$.

2. p-ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნება $px^2 + 4x - 3p - 20 = 0$ განტოლებას ნამდვილი და განსხვავებული ფესვები?

ამოხსნა. როცა $D>0$, მაშინ $x_1 \neq x_2$. ამოვხსნათ უტოლობა

$$16-4p(-3p-20)>0, \quad 3p^2+20p+4>0,$$

საიდანაც

$$\left[\begin{array}{l} p<\dfrac{-10-2\sqrt{22}}{3} \\ p>\dfrac{-10+2\sqrt{22}}{3} \end{array}\right. .$$

აქ $p \neq 0$.

შემოწმება. მიღებული სიმრავლიდან განვიხილოთ $p=1$, მაშინ განტოლებიდან მივიღებთ.

$x^2+4x-23=0$, $x_1=-2-3\sqrt{3}$, $x_2=-2+3\sqrt{3}$ ე. ი. $x_1 \neq x_2$.

3. d-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $(d-2)x^2-2dx+d-4=0$ განტოლების ფესვები დადებითი?

ამოხსნა. $x^2+px+q=0$ განტოლებას ექნება დადებითი ფესვები, თუ შესრულებულია პირობები:

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ q>0 \\ p<0. \end{cases} \tag{6}$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x^2-\frac{2d}{d-2}x+\frac{d-4}{d-2}=0.$$

ამიტომ (6) პირობის თანახმად

$$\begin{cases} 4d^2-4(d-2)(d-4) \geqslant 0 \\ \dfrac{d-4}{d-2}>0 \\ \dfrac{-2d}{d-2}<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2-(d^2-6d+8) \geqslant 0 \\ \dfrac{d-4}{d-2}>0 \\ \dfrac{d}{d-2}>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3d-4 \geqslant 0 \\ \dfrac{d-4}{d-2}>0 \\ \dfrac{d}{d-2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \geqslant \dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} d<2 \\ d>4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} d<0 \\ d>2, \end{array}\right. \end{cases}$$

აქედან $d>4$.

შევამოწმოთ ამ სიმრავლიდან აღებული d-ს თუნდაც $d=5$ მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$3x^2-10x+1=0,\quad x_1=\frac{1}{3}(5-\sqrt{22}),\quad x_2=\frac{1}{3}(5+\sqrt{22}).$$

ამრიგად, $x_1>0$ და $x_2>0$.

პ ა ს უ ხ ი: როცა $d>4$, მაშინ მოცემული განტოლების ფესვები დადებითი რიცხვებია.

4. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება $mx^2-2(m+2)x+5m+4=0$ განტოლებას უარყოფითი ფესვები?

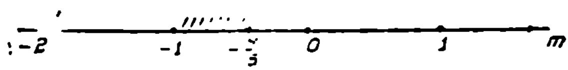
ა მ ო ხ ს ნ ა: $x^2+px+q=0$ განტოლებას ექნება უარყოფითი ფესვები, თუ სრულდება

$$\begin{cases} D\geqslant 0\\ q>0\\ p>0\end{cases}\qquad(7)$$

უტოლობათა სისტემა. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x^2-\frac{2(m+2)}{m}x+\frac{5m+4}{m}=0,$$

საიდანაც (7)-დან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ (ნახ. 149):



ნახ. 149

$$\begin{cases} 4(m+2)^2-4m(4+5m)\geqslant 0\\ \dfrac{5m+4}{m}>0\\ -\dfrac{2(m+2)}{m}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4m^2-4\leqslant 0\\ \dfrac{5m+4}{m}>0\\ \dfrac{m+2}{m}<0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m-1)(m+1)\leqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{4}{5}\\ m>0\end{array}\right.\\ -2<m<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant m\leqslant 1\\ \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{4}{5}\\ m>0\end{array}\right.\\ -2<m<0,\end{cases}$$

საიდანაც $-1\leqslant m<-\dfrac{4}{5}$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. მიღებული სიმრავლიდან გამოვყოთ $m=-\dfrac{9}{10}$ მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$81x^2+198x+10=0,$$

რომლის ფესვები ცხადია უარყოფითი რიცხვია.

5. როგორი უნდა იყოს n, რომ $x^2-(n-1)x+n+4=0$ განტოლებას ჰქონდეს სხვადასხვა ნიშნის ფესვები.

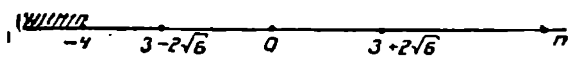
ა მ ო ხ ს ნ ა. $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვები სხვადასხვა ნიშნისაა, თუ:

$$\begin{cases} D>0 \\ q<0. \end{cases} \tag{8}$$

ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{cases} (n-1)^2-4(n+4)>0 \\ n+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2-6n-15>0 \\ n<-4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} n<3-2\sqrt{6} \\ n>3+2\sqrt{6} \end{array} \right. \\ n<-4. \end{array} \right.$$

აქედან $n\in]-\infty;-4[$ (ნახ. 150).



ნახ. 150

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. თუ $n=-5$, მაშინ $x^2+6x-1=0$, $x_1=-3-\sqrt{10}<0$ და $x_2=-3+\sqrt{10}>0$.

პ ა ს უ ხ ი. $n\in]-\infty;\ 4[$.

6. $nx^2-x+n+1=0$ განტოლების ამოუხსნელად ვიპოვოთ $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, სადაც x_1 და x_2 მოცემული განტოლების ფესვებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2(x_1x_2)}{(x_1x_2)^2}.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x^2-\frac{1}{n}x+\frac{n+1}{n}=0.$$

ვიეტას თეორემის თანახმად $x_1 x_2 = \frac{n+1}{n}$ და $x_1 + x_2 = \frac{1}{n}$, ამიტომ

$$x_1^{-2} + x_2^{-2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2\,\frac{n+1}{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2n+2}{n}\right) : \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1 - 2n^2 - 2n}{(n+1)^2}.$$

7. $kx^2 + kx - k + 1 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2. შევადგინოთ კვადრატული განტოლება $\frac{1}{x_1}$ და $\frac{1}{x_2}$ ფესვებით.

ამოხსნა. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x^2 + x - \frac{k-1}{k} = 0.$$

საძიებელი განტოლება იქნება:

$$x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$$

ანუ

$$x^2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\,x + \frac{1}{x_1 x_2} = 0.$$

ვიეტას თეორემის თანახმად

$$x_1 + x_2 = -1, \quad x_1 x_2 = \frac{1-k}{k},$$

ამიტომ საძიებელი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^2 - \frac{-1}{\frac{1-k}{k}}\,x + \frac{1}{\frac{1-k}{k}} = 0$$

ანუ

$$(1-k)\,x^2 + kx + k = 0.$$

8. შევადგინოთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია $mx^2+2x+3m+1=0$ განტოლების ფესვთა ჯამი და ფესვთა ნამრავლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ მოცემული განტოლების ფესვებია x_1 და x_2. მაშინ საძიებელი განტოლების ფესვები იქნება x_1+x_2 და x_1x_2. განტოლება იქნება:

$$x^2-(x_1+x_2+x_1x_2)x+(x_1+x_2)x_1x_2=0.$$

მაგრამ მოცემული განტოლებიდან

$$x_1+x_2=-\frac{2}{m} \quad \text{და} \quad x_1x_2=\frac{3m+1}{m}.$$

ამიტომ საძიებელი განტოლება იქნება:

$$x^2-\left(-\frac{2}{m}+\frac{3m+1}{m}\right)x+\left(-\frac{2}{m}\right)\frac{3m+1}{m}=0,$$

გამარტივებით მივიღებთ:

$$m^2x^2+m(1-3m)x-6m-2=0.$$

9. განვსაზღვროთ $x^2+mx+n=0$ განტოლების კოეფიციენტები ისე, რომ მისი ფესვები იყოს m და n.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლებას, რომლის ფესვებია m და n, ექნება სახე:

$$x^2=(m+n)x+mn=0.$$

თუ ამ განტოლებას შევადარებთ მოცემულს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} m=-m-n \\ n=mn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m=-n \\ n(1-m)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m=-n \\ n=0,\ m=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=n=0 \\ m=1,\ n=-2. \end{cases}$$

10. m-ის რა მთელი მნიშვნელობისათვის იქნება $4x^2-(3m+2)x+m^2-1=0$ განტოლების ერთი ფესვი სამჯერ ნაკლები მეორეზე?

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ერთი ფესვია x_1, მეორე იქნება $3x_1$. ვიეტას თეორემის თანახმად:

$$x_1+3x_1=\frac{3m+2}{4} \quad \text{და} \quad x_1\cdot 3x_1=\frac{m^2-1}{4}.$$

სასურველ შედეგს მივიღებთ შემდეგი პირობებიდან:

$$\begin{cases} D>0 \\ 4x_1=\dfrac{3m+2}{4} \\ 3x_1^2=\dfrac{m^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3m+2)^2-16(m^2-1)>0 \\ x_1^2=\dfrac{(3m+2)^2}{256} \\ x_1^2=\dfrac{m^2-1}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7m^2-12m-20<0 \\ 37m^2-36m-76=0, \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} \frac{1}{7}(6-4\sqrt{11})<m<\frac{1}{7}(6+4\sqrt{11}) \\ m_1=-\frac{38}{37}; \quad m_2=2. \end{cases}$$

აქედან $m=2$.

11. ვიპოვოთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^2-2a(x-1)-1=0$ განტოლების ფესვთა ჯამი უდრის ფესვთა კვადრატების ჯამს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x^2-2ax+2a-1=0.$$

ვთქვათ მისი ფესვებია x_1 და x_2. პირობის თანახმად

$$x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$$

ანუ

$$x_1+x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

ვიეტას თეორემით:

$$x_1+x_2=2a, \quad x_1x_2=2a-1.$$

ამიტომ

$$2a=(2a)^2-2(2a-1), \; 2a^2-3a+1=0.$$

ვისარგებლოთ პირობებით:

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2-4(2a-1)\geqslant 0 \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2\geqslant 0 \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty<a<+\infty \\ a_1=\frac{1}{2}, \; a_2=1. \end{cases}$$

აქედან $a=\frac{1}{2}$ და $a=1$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა: $a=1$-ისათვის განტოლება მიიღებს სახეს: $4x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=1$. მართლაც, $0+1=1=0^2+1^2=1$; ასევე როცა $a=\frac{1}{2}$, გვაქვს $x^2-x=0$, $x_1=0$, $x_2=1$; $0+1=1=0^2+1^2=1$.

პ ა ს უ ხ ი. $a=\frac{1}{2}$ და $a=1$ ანუ $a\in\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

12. $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას აქვს ორი ფესვი. შევადგინოთ განტოლება, რომლის ერთი ფესვი ერთით ნაკლებია მოცემული განტოლების უდიდეს ფესვზე, ხოლო მეორე ფესვი ერთით მეტია მოცემული განტოლების უმცირეს ფესვზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების უმცირესი და უდიდესი ფესვებია შესაბამისად:

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D}), \quad x_2 = \frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D}).$$

საძიებელი განტოლების ფესვები იქნება

$$\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})-1 \quad \text{და} \quad \frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})+1$$

და გვექნება:

$$x^2-\left[\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})-1+\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})+1\right]x+$$

$$+\left[\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})-1\right]\left[\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})+1\right]=0.$$

განმარტივებით მივიღებთ:

$$ax^2+bx+c+\sqrt{b^2-4ac}-a=0,$$

რომელიც წარმოადგენს საძიებელ განტოლებას.

13. დავამტკიცოთ, რომ თუ $ax^2+bx+c=0$ განტოლების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ $2b^2-9ac=0$ პირობას, მაშინ განტოლების ფესვთა ფარდობა უდრის 2-ს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2. პირობის თანახმად

$$\frac{x_1}{x_2}=2 \quad \text{ანუ} \quad x_1=2x_2.$$

მაგრამ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ და $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. თუ გავითვალისწინებთ $x_1=2x_2$ ტოლობას, უკანასკნელი ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$3x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{ანუ} \quad x_2^2=\frac{b^2}{9a^2} \quad \text{და} \quad 2x_2^2=\frac{c}{a} \quad \text{ანუ} \quad x_2^2=\frac{c}{2a}.$$

ბოლო ორი ტოლობიდან გვექნება:

$$\frac{b^2}{9a^2}=\frac{c}{2a}, \quad \frac{b^2}{9a}=\frac{c}{2}$$

ანუ $2b^2-9ac=0$ რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

14. m-ის რა დადებითი მნიშვნელობისათვის იქნება $2x^2-(m+2)x+7-m^2=0$ განტოლების ფესვები ურთიერთშებრუნებული და ნიშნით მოპირდაპირე?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ განტოლების ერთი ფესვია x_1, მაშინ მეორე ფესვი $x_2=-\frac{1}{x_1}$. ვიეტას თეორემის თანახმად:

$$x_1-\frac{1}{x_1}=\frac{m+2}{2} \quad \text{და} \quad x_1-\left(\frac{1}{x_1}\right)=\frac{7-m^2}{2},$$

ამასთან $D>0$. ე. ი. ამოვხსნათ შემდეგ პირობათა სისტემა:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1\left(-\frac{1}{x_1}\right)=\frac{7-m^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9m^2+4m-52>0 \\ 7-m^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{9}(-2-2\sqrt{123}) \\ m>\frac{1}{9}(-2+2\sqrt{123}) \end{array}\right. \\ m=\pm 3, \end{cases}$$

აქედან $m=3$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. როცა $m=3$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2x^2-5x-2=0, \quad x_1=\frac{1}{4}(5-\sqrt{41}), \quad x_2=\frac{1}{4}(5+\sqrt{41}).$$

გვაქვს

$$x_1x_2=-1.$$

ამრიგად, $m=3$.

15. ვიპოვოთ $x^2+px+q=0$ განტოლების კოეფიციენტები, თუ ფესვთა სხვაობა უდრის 5-ს, ხოლო ფესვთა კუბების სხვაობა 35-ს.

ამოხსნა. ვთქვათ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2, მაშინ პირობის თანახმად:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = 35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 5 \\ x_1^2 + x_2^2 - 10 x_1 + 25 + x_1^2 - 5 x_1 = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 5 \\ 3 x_1^2 - 15 x_1 + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 5 \\ x_1^2 - 5 x_1 + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 5 \\ (x_1)_1 = 2, \ (x_1)_2 = 3. \end{cases}$$

აქედან

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2. \end{cases} \end{array} \right.$$

ვიეტას თეორემით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = -(x_1 + x_2) = -(2 - 3) = 1 \\ n = x_1 x_2 = 2(-3) = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} m = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1 \\ n = x_1 x_2 = 3(-2) = -6. \end{cases} \end{array} \right.$$

ამრიგად, $m = 1$, $n = -6$ და $m = -1$, $n = -6$.

16. ვთქვათ $3x^2 + 7x + 4 = 0$ განტოლების ფესვებია α და β. განტოლების ამოუხსნელად შევადგინოთ ისეთი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვები იქნება $\dfrac{\alpha}{\beta - 1}$ და $\dfrac{\beta}{\alpha - 1}$.

ამოხსნა. ვიეტას თეორემის თანახმად საძიებელი განტოლება იქნება:

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta - 1} + \frac{\beta}{\alpha - 1} \right) x + \frac{\alpha\beta}{(\beta - 1)(\alpha - 1)} = 0.$$

გამარტივებით მივიღებთ:

$$x^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} x + \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = 0.$$

პირობის თანახმად $\alpha+\beta=-\frac{7}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$. ამიტომ მივიღებთ:

$$x^2-\frac{\frac{49}{9}-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{3}+1}x+\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{3}+1}=0.$$

აქედან

$$21x^2-23x+6=0,$$

რომელიც წარმოადგენს საძიებელ განტოლებას.

17. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის მიიღებს $(m-2)x^2-4x+$ $+2m+1$ სამწევრი უარყოფით მნიშვნელობებს x-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია $(m-2)x^2-4x+2m+1<0$. უტოლობა ნებისმიერი x-ისათვის შესრულდება ისეთი m-ებისათვის, რომლებიც დააკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases}D<0\\ m-2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16-4(m-2)(2m+1)<0\\ m-2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2m^2-3m-6>0\\ m<2.\end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\frac{1}{4}(3-\sqrt{57})\\ m>\frac{1}{4}(3+\sqrt{57})\end{array}\right.\\ m<2,\end{cases}$$

საიდანაც $m<\frac{1}{4}(3-\sqrt{57})$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. ამ შუალედიდან ავიღოთ თუნდაც $m=-2$ მნიშვნელობა. მაშინ მოცემული სამწევრი მოგვცემს:

$$-4x^2-4x-3<0\Rightarrow 4x^2+4x+3>0,$$

სადაც $D<0$. ამიტომ $-\infty<x<+\infty$.

18. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება ამონახსენი $(m-1)x^2-$ $-2(m+1)x+m+4>0$ უტოლობას ნებისმიერი x-ისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\begin{cases} D<0 \\ m-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(m+1)^2-4(m-1)(m+4)<0 \\ m>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>5 \\ m>1, \end{cases}$$

აქედან $m>5$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. თუ ავიღებთ $m=6>5$, მაშინ მოცემული უტოლობიდან მივიღებთ $5x^2-14x+10>0$; ცხადია $D<0$ და ამიტომ $-\infty<x<+\infty$.

პ ა ს უ ხ ი: $m>5$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 13. 1) p-ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნება ტოლი და ნამდვილი ფესვები $px^2-x+p-2=0$ განტოლებას?

2) m-ის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება $(m-1)x^2-2x-1+m=0$ განტოლებას ნამდვილი და განსხვავებული ფესვები?

3) ვიპოვოთ a-ს მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $ax^2-(4-a)x-7+a=0$ განტოლებას ექნება დადებითი ფესვები.

4) რა მნიშვნელობები უნდა მიიღოს k პარამეტრმა, რომ $(k+1)x^2-kx+1=0$ განტოლების ფესვები იყოს უარყოფითი?

5) k-ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება $x^2-(2-k)x+k+4=0$ განტოლებას განსხვავებული ნიშნის ფესვები?

6) $3x^2-4x-15=0$ განტოლების ამოუხსნელად ვიპოვოთ $\dfrac{2x_1^2+2x_2^2-5x_1x_2}{x_1x_2^2+x_1^2x_2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ x_1 და x_2 განტოლების ფესვებია.

7) $px^2-px-1+2k=0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2. შევადგინოთ კვადრატული განტოლება $\dfrac{1}{x_1}$ და $\dfrac{1}{x_2}$ ფესვებით.

8) m-ის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება $mx^2-(1-2m)x+m-2=0$ განტოლებას რაციონალური ფესვები?

9) k-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $x^2-(2k+1)x+k^2-7k-35=0$ განტოლების ერთი ფესვი მეორეზე ორჯერ მეტი?

10) $x^2+px+10=0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $3x_1-x_2=1$. ვიპოვოთ p-კოეფიციენტი.

11) p-ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნებათ საერთო ფესვი $2x^2-(k+2)x+10=0$ და $4x^2-(5k-1)x+20=0$ განტოლებებს?

12) ვთქვათ $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვებია α და β. შევადგინოთ ისეთი განტოლება, რომლის ფესვები იქნება $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$ და $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$.

VII თავი

მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლა

§ 1. ზოგიერთი მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა

საშუალო სკოლისა და უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელთათვის განკუთვნილ მათემატიკის თანამედროვე სახელმძღვანელოებში ვხვდებით ისეთ განტოლებებს, რომლებიც მოსწავლეებისაგან მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლის ზოგადი თეორიის კარგ ცოდნას მოითხოვს.

ჩვენი აზრით ამ პარაგრაფში განხილული მასალა სასარგებლო იქნება მათემატიკის მასწავლებლებისათვის ფაკულტატიური მეცადინეობის დროსაც.

განვიხილოთ n-ური ხარისხის მრავალწევრი:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

სადაც $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $a_n \neq 0$. ჯერჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ ეს კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია და $a_n > 0$. შემოვიღოთ ასეთი

განსაზღვრება 1. მთელკოეფიციენტებიან $u(x)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი ნაკლებია n-ზე, n-ური ხარისხის $p(x)$ მრავალწევრის გამყოფი ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი $v(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$P(x) = u(x)\, v(x), \tag{2}$$

სადაც $u(x) \neq 1$.

თუ ასეთი თვისებების $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები არ არსებობს, მაშინ $p(x)$-ის შესახებ იტყვიან, რომ ის წარმოადგენს დაუყვანად მრავალწევრს. ამგვარად, ყოველი მრავალწევრი ან დაუყვანადი მრავალწევრი იქნება ან შეიძლება მისი წარმოდგენა დაუყვანად მრავალწევრთა ნამრავლის სახით. რაც შეეხება მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ერთადერთობის საკითხს, ჩვენ მას აქ არ შევეხებით.

განსაზღვრება 2. (1) მრავალწევრს ვუწოდოთ პოზიტიური მრავალწევრი, თუ ყველა მისი კოეფიციენტი არაუარყოფითი რიცხვია, ე. ი. $q_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

ცხადია, რომ სასრული რაოდენობით აღებულ პოზიტიურ მრავალწევრთა ნამრავლი პოზიტიური მრავალწევრი იქნება, მაგალითად,

$$(2x^3 + x + 1)(x^4 + 2x + 11) =$$
$$= 2x^7 + x^5 + 5x^4 + 22x^3 + 2x^2 + 13x + 11.$$

შებრუნებული დებულება. საზოგადოდ, მართებული არ არის, ე. ი. შეიძლება მრავალწევრი იყოს პოზიტიური, მაგრამ არაპოზიტიურ მამრავლებად იშლებოდეს, მაგალითად,

$$(x^2+x+1)(x^3-x+3)=x^5+x^4+2x^2+2x+3.$$

ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ნებისმიერი, პოზიტიური მრავალწევრისათვის ვიპოვოთ პოზიტიურ მამრავლთა თუნდაც ერთი წყვილი, ან დავამტკიცოთ, რომ მოცემული მრავალწევრისათვის არ არსებობს ასეთ თანამამრავლთა არც ერთი წყვილი. ამ ამოცანის ამოხსნის მიზნით დავამტკიცოთ შემდეგი:

ლ ე მ ა 1. ორ პოზიტიურ $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრთა $u(x)\,v(x)$ ნამრავლის უდიდესი კოეფიციენტი მეტია ან ტოლი თითოეული თანამამრავლის უდიდეს კოეფიციენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. u_{k_0} და v_{k_0}-ით აღვნიშნოთ $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი კოეფიციენტები, შესაბამისად, ხოლო P_{k_0,r_0} იყოს $P(x)=u(x)\,v(x)$ მრავალწევრის უდიდესი კოეფიციენტი. რადგანაც

$$P_{k_0,r_0}=u_{k_0}v_{r_0}+\alpha+\beta+\cdots+\gamma, \tag{3}$$

სადაც $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ, ცხადია, ამ დადებით წევრთა ჩამოშორებით (3) ტოლობის მარცხენა მხარე ყოველ შემთხვევაში არ შემცირდება, ე. ი. გვექნება უტოლობა $P_{k_0,r_0}\geqslant u_{k_0}v_{r_0}$. ამგვარად მივიღეთ, რომ $P(x)$ მრავალწევრის P_{k_0,r_0} უდიდესი კოეფიციენტი მეტია ან ტოლია $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი კოეფიციენტების $u_{k_0}v_{r_0}$ ნამრავლზე და მითუმეტეს მეტი ან ტოლი იქნება ამ კოეფიციენტებიდან თითოეულ მათგანზე, ე. ი.

$$P_{k_0,r_0}\geqslant u_{k_0},\quad P_{k_0,r_0}\geqslant v_{r_0}, \tag{4}$$

რადგანაც u_{k_0} და v_{r_0} მთელი დადებითი რიცხვებია.

დამტკიცებული ლემის ნათელსაყოფად განვიხილოთ თუნდაც ასეთი მაგალითი:

$$(3x^4+7x+1)(x^2+x+2)=3x^6+3x^5+6x^4+7x^3+8x^2+15x+2.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. პოზიტიური მრავალწევრის უდიდეს კოეფიციენტს ამ მრავალწევრის სიმაღლე ეწოდება.

მაგალითად, x^5+4x^2+7 მრავალწევრის შემთხვევაში სიმაღლე 7-ის ტოლი იქნება.

დავუშვათ, რომ m წარმოადგენს ფიქსირებულ მთელ დადებით რიცხვს. m რიცხვზე ნაკლები სიმაღლის მქონე $p(x)$ მრავალწევრს შევუსაბამოთ მთელი დადებითი $[p]$ რიცხვი, განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით: $[p]=p(m)$, ე. ი. $p(x)$ მრავალწევრს შევუსაბამოთ ამ მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=m$ $(P(x)\to P(m))$. ამგვარად, თუ:

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1 x+a_0,$$

მაშინ

$$[P]=a_n m^n+a_{n-1}m^{n-1}+a_{n-2}m^{n-2}+\cdots+a_1 m+a_0.$$

რადგანაც, პირობის თანახმად, $P(x)$ მრავალწევრის სიმაღლე ნაკლებია m რიცხვზე, ამიტომ თვლის m-ობით სისტემაში $[P]$ რიცხვის ციფრებად შეგვიძლია მივიღოთ კოეფიციენტები: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0^m}$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$[P]=P(m)=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0^m}.$$

ცხადია, რომ $P(x)-[P]$ გამოსახავს ურთიერთცალსახა თანადობას, m-ზე ნაკლები სიმაღლის მქონე ყველა პოზიტიურ მრავალწევრსა (ნულოვანი ხარისხის ჩათვლით) და ყველა მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეებს შორის. a რიცხვის შესაბამის $P(x)$ მრავალწევრს (ე. ი. მრავალწევრს, რომლისთვისაც $[P]=a$) ვუწოდოთ a რიცხვით ასოცირებული მრავალწევრი (m ფუძით). ამ მრავალწევრის ასაგებად საკმარისია a რიცხვი ჩავწეროთ m ფუძის მქონე თვლის სისტემაში და ამ რიცხვის კოეფიციენტები მივიღოთ $P(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებად.

განსაზღვრება 4. $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრებს უწოდებენ $P(x)$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით მამრავლებს, თუ $P(x)=u(x)\,v(x)$.

ჩვენ მიერ დამტკიცებული 1-ლი ლემიდან და $P(x)=u(x)\,v(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

თეორემა 1. m-ზე ნაკლები სიმაღლის მქონე $P(x)$ მრავალწევრის ყოველი პოზიტიური გამყოფის სიმაღლე m-ზე ნაკლებია, ამავე დროს, თუ

$$P(x)=u(x)\,v(x), \tag{5}$$

მაშინ

$$[P]=[u]\,[v]. \tag{6}$$

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს პოზიტიური მრავალწევრის დაშლის შემდეგი წესი: $P(x)$ იყოს ნებისმიერი პოზიტიური მრავალწევრი. $P(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტზე მეტი m

რიცხვის შერჩევით ვიპოვით $[P]$ რიცხვს და დავშლით მას მამრავლებად. $[P]$ რიცხვის გამყოფთა ყოველი a და b $(a, b>m)$ წყვილისათვის შევადგენთ მათ მიმართ ასოცირებულ (m-ის ფუძით) $u(x)$ და $v(x)$ პოზიტიურ მრავალწევრებს. $P(x)$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით გამყოფთა ყველა შესაძლო წყვილები მოთავსდებიან ამგვარად აგებულ (u, v) წყვილთა შორის. ამიტომ ყველა ასეთ წყვილთათვის uv ნამრავლის შედგენით და მათი შედარებით $P(x)$ მრავალწევრთან, ან მივიღებთ მოცემული მრავალწევრის დაშლას ორი პოზიტიური მრავალწევრის ნამრავლად, ან დავრწმუნდებით იმაში, რომ იგი ასეთ ნამრავლად, არ იშლება.

პრაქტიკულად ეს წესი საშუალებას მოგვცემს, მოცემული პოზიტიური მრავალწევრის მიხედვით ვიპოვოთ მისი პოზიტიური მამრავლები. ეს წესი უფრო კომპაქტური გახდება, თუ $[F]$ რიცხვს ჩამოვაშორებთ გამყოფთა ისეთ წყვილებს, რომლებიც არ მოგვცემენ $P(x)$ მრავალწევრის გამყოფებს.

ვთქვათ, $u(x)=b_p x^p+b_{p-1} x^{p-1}+\cdots+b_0$ და $v(x)=c_q x^q+c_{q-1} x^{q-1}+\cdots+c_0$ წარმოადგენენ $P(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_0$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით მამრავლებს, მაშინ:

$$p+q=n, \tag{7}$$

$$b_0 c_0=a_0, \tag{8}$$

$$b_p c_q=a_n. \tag{9}$$

გარდა ამისა,

$$P(1)=u(1)\, v(1). \tag{10}$$

თვლის m-ობით სისტემაში ჩაწერილი ყოველი ნატურალური a რიცხვის, ერთით შემცირებული ციფრთა რიცხვი აღვნიშნოთ $\mu(a)$ სიმბოლოთი (მაგ., $\mu(107319)=5$), ამ ციფრთა ჯამი — $\sigma(a)$ სიმბოლოთი (მაგ., $\sigma(107319)=21$), a რიცხვის ერთეულების რიცხვი (მარჯვენა ციფრი)—$\Pi(a)$—სიმბოლოთი (მაგ., $\Pi(107319)=9$), ხოლო უმაღლესი რიგის რიცხვი (მარცხენა ციფრი) $Л(a)$ სიმბოლოთი (მაგ., $Л(107319)=1$). ამ აღნიშვნების გამოყენებით (7), (8), (9) და (10) ფორმულები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\mu([P])=\mu([u])+\mu([v]), \tag{7'}$$

$$Л([P])=Л([u])\,Л([v]), \tag{8'}$$

$$\Pi([P])=\Pi([u])\,\Pi([v]), \tag{9'}$$

$$\sigma([P])=\sigma([u])\,\sigma([v]), \tag{10'}$$

საიდანაც გამომდინარეობს საჭირო წყვილთა შერჩევის შემდეგი წ ე ს ი: $P(x)$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით მამრავლთა (u,v)

წყვილების შესადგენად საკმარისია შენარჩუნებული იქნას $[P]$ რიცხვის ურთიერთდამატებით მამრავლთა მხოლოდ ის (a, b) წყვილები, რომელთათვისაც სრულდება ოთხი დამოკიდებულება:

$$\mu([P]) = \mu(a) + \mu(b), \tag{11}$$

$$Л([P]) = Л(a)\, Л(b), \tag{12}$$

$$\Pi([P]) = \Pi(a)\, \Pi(b), \tag{13}$$

$$\sigma([P]) = \sigma(a)\, \sigma(b), \tag{14}$$

რომელთა შემოწმება საკმარისად ადვილია. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი:

თ ე ო რ ე მ ა 2. $[P]$ რიცხვის ურთიერთდამატებითი a და b მამრავლებით ასოცირებული $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები წარმოადგენენ $P(x)$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით მამრავლებს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (14) ტოლობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$Q(x) = u(x)\, v(x).$$

ვთქვათ,

$$Q(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0.$$

გარდა ამისა დავუშვათ, რომ:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$u(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

$$v(x) = c_q x^q + c_{q-1} x^{q-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

ამრიგად, $N = p + q$. მრავალწევრთა გამრავლების წესის თანახმად, $Q(x)$ მრავალწევრის ყოველი A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$ კოეფიციენტი ტოლი იქნება ყველა შესაძლო $b_i c_j$ (სადაც $i + j = k$) ნამრავლთა ჯამისა. მაგალითად, $A_0 = b_0 c_0$, $A_1 = b_1 c_0 + c_1 b_0$ და ა. შ. მეორე მხრივ, პირობის თანახმად $[p] = [u]\,[v]$, ე. ი.

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0^m} = \overline{b_p b_{p-1} \cdots b_1 b_0^m} \cdot \overline{c_q c_{q-1} \cdots c_1 c_0^m}\,.$$

თუ გავიხსენებთ მრავალნიშნა რიცხვთა გამრავლების წესს, მაშინ ნამრავლის ერთეული a_0 ციფრის გამოსათვლელად საკმარისია გადავამრავლოთ თანამამრავლი რიცხვების ერთეულების ციფრები (ჩვენს შემთხვევაში b_0 და c_0) და $b_0 c_0$ ნამრავლიდან გამოვყოთ უმაღლესი რიგის ერთეულები (ათეულები). ამრიგად, თუ $b_0 c_0$ ნამრავლში შედის ε_0 „ათეულები“, მაშინ $a_0 = b_0 c_0 - m\varepsilon_0$, ე. ი.

$$a_0 = A_0 - m\,\varepsilon_0. \tag{15°}$$

(მაგ., $123\cdot 97=11931$, საიდანაც ნამრავლის ბოლო ციფრი $1=3\cdot 7-10\cdot 2$, სადაც $b_0=3$, $c_0=7$, $m=10$, $\varepsilon_0=2$) შემდეგ, ნამრავლის „ათეულების“ რიცხვი ტოლია ერთეულთა გამრავლების შემდეგ დარჩენილი ε_0 „ათეულების“ რიცხვით გაზრდილი $b_1c_0+b_0c_1=A_1$ ჯამისა. ამიტომ „ათეულთა ციფრი“ მიიღება $A_1+\varepsilon_0$ რიცხვისაგან „ასეულების“ გამოყოფის შემდეგ. სხვა სიტყვებით

$$a_1=A_1+\varepsilon_0-m\,\varepsilon_1, \tag{15'}$$

სადაც ε_1 გარკვეული არა უარყოფითი მთელი რიცხვია. ამის ანალოგიურად ვწერთ:

$$a_2=A_2+\varepsilon_1-m\,\varepsilon_2. \tag{15^2}$$

ზოგად შემთხვევაში გვექნება:

$$a_k=A_k+\varepsilon_{k-1}-m\,\varepsilon_k, \tag{15^k}$$

სადაც $k=0,\ 1,\ 2,\dots,N$. კერძოდ, როდესაც $k=N$, მივიღებთ:

$$a_N=A_N+\varepsilon_{N-1}-m\,\varepsilon_N. \tag{15^N}$$

(ამით ჩვენ ისიც დავამტკიცეთ, რომ $N\leqslant n$).

რაც შეეხება $a_{N+1},\dots,a_n$ ციფრებს ცხადია, ისინი წარმოადგენენ (თუ ისინი არსებობენ, ე. ი. თუ $N<n$) ε_N რიცხვის ციფრებს m ფუძით:

$$\varepsilon_N=a_n m^{n-N-1}+\cdots+a_{N+2}\,m+a_{N+1}. \tag{16}$$

$(15^0),\dots,(15^N)$ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ:

$$a_0+\cdots+a_N=(A_0+\cdots+A_N)-(m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{N-1})-m\varepsilon_N.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $a_{N+1}+\cdots+a_n$ რიცხვს და მივიღებთ მხედველობაში (16) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_0+\cdots+a_n=(A_0+\cdots+A_n)-(m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{N-1}+\varepsilon_N)-$$
$$-[a_n(m^{n-N-1}-1)+\cdots+a_{N+2}(m-1)].$$

მაგრამ

$$a_0+\cdots+a_n=p(1)=\sigma([P])$$

და, ანალოგიურად:

$$A_0+\cdots+A_N=Q(1)=u(1)\,v(1)=\sigma([u])\,\sigma([v])=\sigma(a)\,\sigma(b).$$

მაშასადამე, პირობის თანახმად

$$a_0+\cdots+a_n=A_0+\cdots+A_N$$

და ამიტომ

$$(m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{N-1}+\varepsilon_N)+[a_n(m^{n-N-1}-1)+\cdots+$$
$$+a_{N+2}(m-1)=0,$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\varepsilon_0=\cdots=\varepsilon_{N-1}=\varepsilon_N=0.$$

(და, მაშასადამე, როცა $a_n=\cdots=a_{N+2}=a_{N+1}=0$). ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ $a=[u]$ და $b=[v]$ რიცხვების გამრავლებისას „ათეულების გადატანა" არ ხდება, ე. ი. $N=n$ და $a_0=A_0$, $a_1=A_1, \ldots, a_n=A_n$, რითაც თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ $[P]$ რიცხვის ურთიერთდამატებით (a, b) წყვილებს (რომლებიც მიიღებიან ზემომოყვანილი წესის გამოყენების შედეგად) მივყავართ $p(x)$ მრავალწევრის ურთიერთდამატებით გამყოფთა (u, v) წყვილებისაკენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როგორც ცნობილია, n-ური რიგის ორი მრავალწევრი ერთმანეთს ემთხვევა, საზოგადოდ, მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ემთხვევიან $n+1$ წერტილში. დამტკიცებული თეორემის თანახმად $P(x)$ და $Q(x)=u(x)v(x)$ მრავალწევრთა იგივურად ტოლობისათვის საკმარისია ტოლი აღმოჩნდეს მათი მნიშვნელობები ორ წერტილში $x=1$, $x=m$ (მათი ხარისხის მიუხედავად).

ამ მასალის უფრო კარგად ათვისების მიზნით განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $P(x)=x^4+4x^3+8x^2+9x+6$ მრავალწევრის ყველა პოზიტიური გამყოფი.

აქ $m=10$. $[P]=P(m)=P(10)=14896=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot7\cdot19\cdot P(10)$ რიცხვი წარმოვიდგინოთ ორი ისეთი თანამამრავლის ნამრავლის სახით, რომელთაგან თითოეული მეტია 10-ზე:

$$P(10)=16\cdot931,$$
$$P(10)=112\cdot133,$$
$$P(10)=19\cdot784,$$
$$P(10)=14\cdot1064,$$
$$P(10)=98\cdot152.$$

როგორც ჩანს, $\Pi([P])=\Pi(a)\Pi(b)$ და $Л([P])=Л(a)Л(b)$ აუცილებელ პირობებს აკმაყოფილებს მხოლოდ მეორე ცაშლა, ვინაიდან

$$6=\Pi(14896)=\Pi(112)\,\Pi(133)=2\cdot3=6$$

და

$$1=Л(14986)=Л(112)\,Л(133)=1\cdot1=1.$$

ახლა შევამოწმოთ საკმარისი პირობის მართებულობა იგივე დაშლისათვის, გვექნება:

$$\sigma(14896) = 1 + 4 + 8 + 9 + 6 = 28 = \sigma(112)\,\sigma(133) =$$
$$= (1 + 1 + 2)(1 + 3 + 3) = 4 \cdot 7 = 28.$$

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 9x + 6 = (x^2 + 3x + 3)(x^2 + x + 2).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავშალოთ მამრავლებად მრავალწევრი

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 5x - 3.$$

როგორც ვხედავთ, ეს მრავალწევრი არაპოზიტიური მრავალწევრია, მაგრამ შეგვიძლია დავიყვანოთ იგი პოზიტიურ მრავალწევრზე. ამ მიზნით x შევცვალოთ $-x$-ით და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ (-1)-ზე. თუ მიღებულ მრავალწევრს აღვნიშნავთ $Q(x)$-ით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$Q(x) = -P(-x) = x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 5x + 3.$$

აქაც $m = 10$, $Q(10) = 148953$. წინა მაგალითში ჩატარებული მსჯელობის მსგავსად, მივიღებთ: $148953 = 123 \cdot 1211$. აქაც შესრულებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები, სახელდობრ:

$$3 = \Pi(148953) = \Pi(1211)\,\Pi(123) = 1 \cdot 3 = 3,$$

$$1 = Л(148953) = Л(1211)\,Л(123) = 1 \cdot 1 = 1,$$

და

$$30 = \sigma(148953) = 1 + 4 + 8 + 9 + 5 + 3 = \sigma(1211)\sigma(123) =$$
$$= (1 + 2 + 1 + 1)(1 + 2 + 3)\,5 \cdot 6 = 30.$$

მივიღეთ, რომ

$$Q(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^3 + 2x^3 + x + 1).$$

ახლა თუ x-ს შევცვლით ისევ $-x$-ით და მიღებულ გამოსახულებას გავამრავლებთ (—1)-ზე, მივიღებთ $P(x)$ მრავალწევრის საძიებელ დაშლას:

$$P(x) = (-x^2 + 2x - 3)(x^3 - 2x^2 + x - 1).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავშალოთ მამრავლებად მრავალწევრი

$$P(x) = 3x^5 + 10x^4 + 22x^3 + 37x^2 + 35x + 25.$$

აქ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ორი ხერხი. ერთის მხრივ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $m = 100$, (უნდა აღინიშნოს, რომ $m = 10^k$ რიცხვების გა-

მოყენება იმ უპირატესობასთანაა დაკავშირებული, რომ ათობითი სისტემის რიცხვებიდან ადვილად ხორციელდება ისეთ რიცხვებში გადასვლა, რომელთა თვლის ფუძესაც 10^k — რიცხვები წარმოადგენენ). მაშინ ცხადია $P(100)=31022373525$. წინა მაგალითების მსჯელობათა მსგავსად, არცთუ ისე მცირე გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$P(100)=30405\cdot 1020305.$$

თვლის ასობით სისტემაში გადასვლის მიზნით ამ უკანასკნელ რიცხვებში გამოვყოთ ორ-ორი ციფრი (მარჯვნიდან მარცხნივ):

$$3'\,10'\,22'\,37'\,35'\,25=3'\,04'\,05'\cdot 1'\,02'\,03'\,05,$$

აუცილებელი პირობის შემოწმება:

$$25=\Pi\,(3'\,10'\,22'\,37'\,35'\,25)=\Pi(3'\,04'\,05)\Pi(1'\,02'\,03'\,05)=(05)(05)=25,$$

$$3=\text{Л}\,(3'\,10'\,22'\,37'\,35'\,25)=\text{Л}\,(3'\,04'\,05')\,\text{Л}\,(1'\,02'\,03'\,05)=3\cdot 1=3.$$

საკმარისი პირობის შემოწმება:

$$132=\sigma\,(3'\,10'\,22'\,37'\,35'\,25)=3+10+22+37+35+25=$$

$$=\sigma\,(3'\,04'\,05)\times(\sigma\,(1'\,02'\,03'\,05)=(3+04+05)\times$$

$$\times\,(1+02+03+05)=12\cdot 11=132.$$

მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის აუცილებელი და საკმარისი პირობების შესრულების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P(x)=3x^5+10x^4+22x^3+37x^2+35x+25=$$

$$=(3x^2+5x+5)(x^3+2x^2+3x+5)\cdot$$

დიდი რიცხვების თავიდან აცილების მიზნით შეგვიძლია დავუშვათ $m=40$, მაშინ $p(40)=334268625$. როგორც თავისუფალი წევრის გამყოფების გამოკვლევიდან ჩანს, $p(x)$ მრავალწევრს პირველი რიგის გამყოფები არ გააჩნია. ამიტომ $p(40)$ რიცხვისათვის საკმარისია შევამოწმოთ მხოლოდ $40^2=1600$-ზე მეტი ურთიერთდამატებითი მამრავლები. გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ, რომ $334268625=67325\cdot 4965$. შევამოწმოთ აუცილებელი პირობა: 40-ობით სისტემაში 67325 რიცხვის მარჯვენა ციფრს წარმოადგენს ამ რიცხვის 40-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, ე. ი. $\Pi\,(67325)=5$, ანალოგიურად $\Pi\,(4965)=5$ და $\Pi\,(334268625)=25$. მაშასადამე, მართებულია ტოლობა:

$$25=\Pi\,(334268625)=\Pi\,(67325)\,\Pi\,(4965)=5\cdot 5=25.$$

საკმარისი პირობის შესამოწმებლად გადავიდეთ 40-ობით სისტემაში:

$$334268625 = 3' \, 10' \, 22' \, 37' \, 35' \, 25_{40},$$

$$67325 = 1235_{10},$$

$$4965 = 345_{10}.$$

მართლაც,

$$132 = \sigma(334268625) = \sigma(67325)\,\sigma(4965) = 11 \cdot 12 = 132.$$

მაშასადამე, მოცემული მრავალწევრისათვის მივიღეთ იგივე დაშლა რაც პირველი მეთოდის გამოყენებით

$$p(x) = (3x^2 + 4x + 5)(x^3 + 2x^2 + 3x + 5).$$

§ 2. ნებისმიერი მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა

რაციონალურკოეფიციენტებიანი $P(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მრავალწევრთა ნამრავლის სახით წარმოდგენის პრობლემას ერთ-ერთი ცენტრალური ადგილი უკავია ალგებრაში. $P(x)$ მრავალწევრის პირველი და მეორე ხარისხის გამყოფთა მოძებნის მეთოდი ცნობილი იყო ჯერ კიდევ დეკარტესა და ნიუტონისათვის. მაგრამ, მიუხედავად იმისა, რომ ეს მეთოდი კიდევ უფრო დაიხვეწა კრონეკერის შემდეგ, დღემდე მრავალწევრის დაუყვანად გამყოფთა მოძებნის მეთოდმა ვერ მიიღო პრაქტიკულად მოხერხებული სახე. წინა პარაგრაფში განხილული გვქონდა ზოგიერთი კერძო სახის მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის საკითხი. ახლა გავეცნოთ რაციონალურკოეფიციენტებიანი ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლთა მოძებნის მეთოდს.

ვთქვათ, არსებობს გარკვეული F წესი, რომელიც ყოველ $P(x)$ მრავალწევრს შეუსაბამებს რაიმე $P_1(x)$ მრავალწევრს (იგულისხმება, რომ საზოგადოდ $P(x) \neq P_1(x)$), ამ შემთხვევაში დავწერთ $F: p(x) \to P_1(x)$.

განსაზღვრება 1. თუ $F: P(x) \to P_1(x)$ შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა (ე. ი. თუ $P_1(x) = Q_1(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა $P(x) = Q(x)$) და თუ ყოველთვის, როცა სრულდება ტოლობა $P(x) = u(x)\,v(x)$, სრულდება $P_1(x) = u_2(x)\,v_1(x)$ ტოლობაც, ამასთან ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრისა და ნებისმიერი $u'(x)$ და $v'(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $P(x) = u'(x)\,v'(x)$ არსებობს ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომ $P(x) = u(x)\,v(x)$ და $u_1(x) = u'(x)$, $v_1(x) = v'(x)$, მაშინ F-ს უწოდებენ მულტიპლიკაციურ იზომორფიზმს.

რაციონალურკოეფიციენტებიანი ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის ამოცანა მისი შესაბამისი $P_1(x)$

მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის ამოცანის ტოლფასია.

თუ n-ური ხარისხის ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრისათვის დავუშვებთ, რომ

$$P_1(x) = (-1)^n P(-x) \qquad (1)$$

მაშინ ცხადია, რომ $F: P(x) \to P_1(x)$ შესაბამისობა მულტიპლიკაციური იზომორფიზმი იქნება.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $P(x)$ ისეთი მრავალწევრია, რომლის კოეფიციენტები თანმიმდევრულად იცვლიან ნიშანს, მაშინ $P_1(x)$ მრავალწევრი პოზიტიური მრავალწევრი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: განვიხილოთ მე-5 ხარისხის ნიშანცვლადი მრავალწევრი

$$P(x) = 6x^5 - 9x^4 + 29x^3 - 28x^2 + 37x - 21;$$

ცხადია, რომ

$$P_1(x) = (-1)^n P(-x) = (-1)^5 [6(-x)^5 - 9(-x)^4 + 29(-x)^3 - 28(-x)^2 + 37(-x) - 21] = -1 \cdot (-6x^5 - 9x^4 - 29x^3 - 28x^2 - 37x - 21) = 6x^5 + 9x^4 + 29x^3 + 28x^2 + 37x + 21$$

წარმოადგენს პოზიტიურ მრავალწევრს.

თუ გავიხსენებთ პოზიტიური მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის ზოგად წესს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P_1(x) = 6x^5 + 9x^1 + 29x^3 + 28x^2 + 37x + 21 = (3x^5 + 3x + 7)(2x^3 + x^2 + 4x + 3).$$

მაგრამ $P_1(x) = (-1)^5 P(-x)$ ტოლობიდან $P(-x) = -P_1(x)$; თუ ბოლო ტოლობაში x-ს შევცვლით $-x$-ით, მივიღებთ $P(x) = -P_1(-x)$, რაც საშუალებას გვაძლევს $P(x)$ მრავალწევრი წარმოვიდგინოთ დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლის სახით:

$$P(x) = 6x^5 - 9x^4 + 29x^3 - 28x^2 + 37x - 21 = (3x^3 - 3x + 7)(2x^3 - x^2 + 4x - 3),$$

მაშასადამე, (1) მულტიპლიკაციური იზომორფიზმის გამოყენებით ნიშანცვლად კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ამოცანა დაიყვანება პოზიტიური მრავალწევრის პოზიტიურ მამრავლებად დაშლის ამოცანაზე. ზოგჯერ მულტიპლიკაციური იზომორფიზმის გამოყენება სასარგებლოა არა მთელ მრავალწევრთა სიმრავლეზე, არამედ მხოლოდ მის რაიმე E — ქვესიმრავლეზე. ამავე დროს უნდა

მოვითხოვოთ, რომ თუ არსებობენ $P(x)$ მრავალწევრის გამყოფები, მაშინ ისინი $P(x)$ მრავალწევრთან ერთად აუცილებლად უნდა შედიოდნენ E — სიმრავლეში.

განვიხილოთ იმ მრავალწევრთა E_n — სიმრავლე ($E_n = \{P(x)\}$), რომელთა ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს და რომლებიც შეიცავენ ნულისაგან განსხვავებულ თავისუფალ წევრებს. მაგალითად, ასეთი მრავალწევრებია:

$$P_{r_1}(x) = a_0 x^{r_1} + \cdots + a_{r_1},$$

$$P_{r_2}(x) = b_0 x^{r_2} + \cdots + b_{r_2},$$

$$P_{r_3}(x) = c_0 x^{r_3} + \cdots + c_{r_3},$$

სადაც $r_k \leqslant n$, a_{r_1}, b_{r_2}, $c_{r_3}, \ldots \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

ახლა კი ყოველ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ მრავალწევრს შევუსაბამოთ ისეთი $P_1(x)$ მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები იგივეა რაც $P(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები მხოლოდ დაწერილი შებრუნებული რიგით, ე. ი.

$$P_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

მაგრამ $P_1(x)$ მრავალწევრისათვის გვაქვს:

$$P_1(x) = x^n \left(a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 \right).$$

მაშასადამე,

$$P_1(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2}$$

აქედან ცხადია, რომ $F : P(x) \to P_1(x)$ შესაბამისობა წარმოადგენს მულტიპლიკაციურ იზომორფიზმს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $P(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის საკითხი ტოლფასია $P_1(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის საკითხისა, ე. ი. თუ $P_1(x)$ მრავალწევრს გააჩნია დაუყვანადი მამრავლები, მაშინ $P(x)$ მრავალწევრიც იშლება დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად და თუ $P_1(x)$ დაუყვანადი მრავალწევრია, მაშინ დაუყვანადი იქნება $P(x)$ მრავალწევრიც.

იმის ნათელსაყოფად, რომ ეს იზომორფიზმი საგრძნობლად ამარტივებს გამოთვლებს, განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ მოცემულია მრავალწევრი

$$P(x) = 7x^6 + x^5 + 4x^4 + 7x + 6;$$

აქ, წინა მეთოდის გამოყენება მოითხოვდა ბევრი გამოთვლების ჩატარებას, მაშინ როცა $P_1(x)$ მრავალწევრზე გადასვლა გვაძლევს

$$P_1(x) = x^6 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^6\left[7\left(\frac{1}{x}\right)^6 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + 7\left(\frac{1}{x}\right) + 6\right] = x^6\left(7\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + 4\frac{1}{x^4} + 7\frac{1}{x} + 6\right) =$$

$$= 7 + x + 4x^4 + 7x^5 + 6x^6,$$

ე. ი. მივიღეთ მრავალწევრი:

$$P_1(x) = 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + x + 7,$$

რომელსაც პოზიტიური გამყოფები არ გააჩნია (ამაში, რომ დავრწმუნდეთ საკმარისია გამოვიყენოთ პოზიტიური მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის წესი).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$P(x) = 4x^6 + 2x^5 + 19x^4 - 3x^3 - 36x^2 - 3x + 9$$

და (2) იზომორფიზმის გამოყენებით გადავიდეთ $P_1(x)$ მრავალწევრზე

$$P_1(x) = x^6 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^6\left[4\left(\frac{1}{x}\right)^6 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^5 + 19\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - 36\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) + 9\right] = x^6\left(\frac{4}{x^6} + \frac{2}{x^5} + \frac{19}{x^4} - \frac{3}{x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{36}{x^2} - \frac{3}{x} + 9\right) = 9x^6 - 3x^5 - 36x^4 - 3x^3 + 19x^2 + 2x + 4.$$

ცნობილი მეთოდის გამოყენებით, რთული გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ, რომ:

$$P_1(x) = 9x^6 - 3x^5 - 36x^4 - 3x^3 + 19x^2 + 2x + 4 =$$

$$= (-3x^3 + 6x^2 + 1)(-3x^3 - 5x^2 + 2x + 4).$$

მაგრამ თუ $P_1(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ ტოლობაში x-ს შევცვლით $\frac{1}{x}$-ით და გამოვიყენებთ $P_1(x)$ მრავალწევრის დაშლას, მივიღებთ:

$$P(x) = x^n P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x^6 \left[-3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1\right] \times$$

$$\times \left[-3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right) + 4\right] =$$

$$= x^3\left(-\frac{3}{x^3} + \frac{6}{x^2} + 1\right) x^3 \left(-\frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x} + 4\right) =$$

$$= (-3 + 6x + x^3)(-3 - 5x + 2x^2 + 4x^3).$$

მაშასადამე, აღნიშნული მულტიპლიკაციური იზომორფიზმის გამოყენებით შევძელით მოცემული $P(x)$ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა:

$$P(x) = (4x^3 + 2x^2 - 5x - 3)(x^3 + 6x - 3).$$

მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს შემდეგი მულტიპლიკაციური იზომორფიზმი

$$P_\varepsilon(x) = P(x + \varepsilon),$$

სადაც ε წარმოადგენს რაიმე ფიქსირებულ რიცხვს.

თ ე ო რ ე მ ა 1. დადებითი უფროსი კოეფიციენტის მქონე მთელკოეფიციენტებიანი ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრისათვის არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ε რიცხვი, რომ $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრი ძლიერ პოზიტიურია.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად მიზანშეწონილია განვიხილოთ ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტებიანი ისეთი მრავალწევრები, რომელთა უფროსი კოეფიციენტები და შემცველი ცვლადის ხარისხები დადებითი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში n-ური ხარისხის $P(x)$ მრავალწევრის გამყოფად ჩვენ მივიღებთ ისეთ ნამდვილ კოეფიციენტებიან $u(x)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი n-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვია და უფროსი კოეფიციენტიც დადებითი რიცხვია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. ნებისმიერ ნამდვილკოეფიციენტებიან $P(x)$ მრავალწევრს ვუწოდოთ პ ო ზ ი ტ ი უ რ ი (მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის მსგავსად), თუ მისი კოეფიციენტები არაუარყოფითი რიცხვებია.

მაგალითად, $P(x) = \frac{2}{3}x^5 + 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 11x + 7$ პოზიტიური მრავალწევრია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. მთელკოეფიციენტებიან პოზიტიურ $P(x)$ მრავალწევრს ვუწოდოთ ძ ლ ი ე რ პ ო ზ ი ტ ი უ რ ი მრავალწევრი

თუ იგი შეიძლება დაიშალოს დაუყვანად პოზიტიურ მრავალწევრთა ნამრავლად.

მაგალითად, $P(x) = 3x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 19x^2 + 34x + 63$ ძლიერ პოზიტიური მრავალწევრია, რადგან

$$P(x) = 3x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 19x^2 + 34x + 63 =$$
$$= (3x^3 + x^2 + x + 9)(x^2 + 3x + 7) = u(x)\,v(x),$$

სადაც $P(x)$, $u(x)$ და $v(x)$ პოზიტიური მრავალწევრებია.

განსაზღვრება 4. ნამდვილკოეფიციენტებიან $P(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ ძლიერ პოზიტიურს თუ $P(x)$ და მისი დაუყვანადი გამყოფები პოზიტიური მრავალწევრებია.

მაგალითად,

$$P(x) = \frac{5}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{34}{3}x^3 + 6x^2 + \frac{7}{2}x + 4$$

ძლიერ პოზიტიური მრავალწევრია, რადგანაც

$$P(x) = \frac{5}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{34}{3}x^3 + 6x^2 + \frac{7}{2}x + 4 =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + 1\right)\left(5x^2 + \frac{1}{2}x + 4\right) = u(x)\,v(x),$$

სადაც $P(x)$, $u(x)$ და $v(x)$ პოზიტიური მრავალწევრებია.

შევნიშნოთ, რომ მთელკოეფიციენტებიან და ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრთათვის განსაზღვრული ძლიერ პოზიტიურობის ცნებები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მართლაც, შეიძლება დადებით მთელკოეფიციენტებიანი $P(x)$ მრავალწევრის ყველა გამყოფი წარმოადგენდეს მთელკოეფიციენტებიან პოზიტიურ მრავალწევრს, მაგრამ $P(x)$ მრავალწევრი იშლებოდეს ნამდვილკოეფიციენტებიან (ირაციონალურ კოეფიციენტებიან) არაპოზიტიურ მრავალწევრებად. მაგალითისათვის განვიხილოთ მრავალწევრი:

$$P(x) = 2x^7 + 2x^6 + 8x^5 + 11x^4 + 18x^3 + 30x^2 + 27 =$$
$$= (x^4 + 4x^2 + 9)(2x^3 + 2x^2 + 3);$$

აქედან ჩანს, რომ $P(x)$ მრავალწევრი, როგორც მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, ძლიერ პოზიტიურია; მაგრამ $P(x)$ მრავალწევრი,

როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, ვერ იქნება ძლიერ პოზიტიური, რადგანაც

$$x^4 + 4x^2 + 9 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 3)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 3),$$

$$P(x) = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 3)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 3)(2x^3 + 2x^2 + 3),$$

სადაც $x^2 - \sqrt{2}\,x + 3$ არ წარმოადგენს პოზიტიურ მრავალწევრს.

ამ გარემოების გამო მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის და ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებისათვის შემოღებული ძლიერ პოზიტიურობის ცნებების განსხვავების მიზნით მთელკოეფიციენტებიან ძლიერ პოზიტიურ მრავალწევრს — ვუწოდოთ მ თ ე ლ ა დ ძ ლ ი ე რ პ ო ზ ი ტ ი უ რ ი მრავალწევრი.

ცხადია, რომ ნებისმიერი მთელკოეფიციენტებიანი ძლიერ პოზიტიური (განსაზღვრება 4-ის მიხედვით) მრავალწევრი მთელად ძლიერ პოზიტიური იქნება. ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ 1-ლ ი თ ე ო რ ე მ ა უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან:

თ ე ო რ ე მ ა 2. დადებითი უფროსი კოეფიციენტის მქონე ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტებიანი $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრისათვის არსებობს ისეთი მთელი არაუარყოფითი ε რიცხვი, რომ $P_\varepsilon(x) = P(x + \varepsilon)$ მრავალწევრი ძლიერ პოზიტიურია.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა უფრო ნათლად გავაანალიზოთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ძლიერ პოზიტიური მრავალწევრის აგებულება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. ნამდვილკოეფიციენტებიან $P(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ ნ ა ხ ე ვ რ ა დ მ დ გ რ ა დ ს, თუ ყველა მისი ფესვის ნამდვილი ნაწილი არადადებითი რიცხვია.

ნახევრად მდგრად მრავალწევრთა ნამრავლი ნახევრად მდგრადი მრავალწევრია და პირიქით, ნახევრად მდგრადი მრავალწევრის ნებისმიერი გამყოფი ასევე ნახევრად მდგრადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ (*)

$$P(x) = x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 131x^2 + 200x + 150 =$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 25)(x + 3)$$

მრავალწევრი და მისი გამყოფები ნახევრად მდგრადი მრავალწევრებია, რადგან მისი ფესვები: $\alpha_1 = -1 + i$, $\alpha_2 = -1 - i$, $\alpha_3 = 0 - 5i$, $\alpha_4 = 0 + 5i$ და $\alpha_5 = -3 + 0i$ შეიცავენ არადადებით ნამდვილ ნაწილებს. ახლა დავამტკიცოთ ასეთი

ლ ე მ ა 1. ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ძლიერ პოზიტიურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ნახევრად მდგრადია (ეს ზემო მაგალითიდანაც ნათლად ჩანს).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ძლიერ პოზიტიურ მრავალწევრთა ნამრავლი პოზიტიურია და პირიქით, ძლიერ პოზიტიური მრავალწევრის ნებისმიერი გამყოფი ძლიერ პოზიტიურია. მეორე მხრივ ცნობილია, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ნებისმიერი მრავალწევრი იშლება წრფივ და მეორე ხარისხის მრავალწევრთა ნამრავლად. ამიტომ საკმარისია ლემის დამტკიცება წრფივი და მეორე ხარისხის მრავალწევრთათვის; მაგრამ ამ შემთხვევაში ლემის სამართლიანობის შემოწმება შეიძლება ფესვთა უშუალო გამოთვლით (მაგალითი (*)).

თეორემა 2-ის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $P(x)$ მრავალწევრის ნებისმიერი β ფესვისათვის $\beta-\varepsilon$ რიცხვი წარმოადგენს $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრის ფესვს და პირიქით, $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრის ნებისმიერი γ ფესვისათვის $\gamma+\varepsilon$ რიცხვი წარმოადგენს $P(x)$-ის ფესვს, ამიტომ $P(x)$ მრავალწევრის ფესვთა ნამდვილ ნაწილებზე მეტი ε რიცხვი აკმაყოფილებს თეორემა 2-ის ყველა პირობას, რაც ამტკიცებს როგორც თეორემა 2-ს, ისე თეორემა 1-ს.

ამრიგად, ნებისმიერი მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრისათვის მივიღეთ მამრავლებად დაშლის შემდეგი

წ ე ს ი: მთელკოეფიციენტებიან $P(x)$ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის მიზნით:

1. ვიპოვოთ იმ თვისების მქონე არაუარყოფითი ε რიცხვი, რომ $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრი იყოს ძლიერ პოზიტიური;

2. $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრი დავშალოთ მამრავლებად:

$$P_\varepsilon(x)=u_1(x)\,u_2(x)\cdots u_s(x);$$

3. $P(x)$ მრავალწევრის $P_1(x),\ P_2(x),\dots,P_s(x)$ მამრავლებად მივიღოთ მრავალწევრები:

$$P_1(x)=[u_1(x)]_{-\varepsilon},\ P_2(x)=[u_2(x)]_{-\varepsilon},\dots,\ P_s(x)=[u_s(x)]_{-\varepsilon}$$

ანუ

$$P_1(x)=u_1(x-\varepsilon),\ P_2(x)=u_2(x-\varepsilon),\dots,P_\varepsilon(x)=u_s(x-\varepsilon).$$

მივიღებთ

$$P(x)=P_\varepsilon(x-\varepsilon)=u_1(x-\varepsilon)\,u_2(x-\varepsilon)\cdots u_s(x-\varepsilon).$$

აღნიშნული წესის პირველი პუნქტის დამაკმაყოფილებელი ε რიცხვის პრაქტიკულად მოძებნის მიზნით მიახლოებით გამოვთვალოთ (მძიმიდან ერთი ნიშნის სიზუსტით) მოცემული $P(x)$ მრავალწევრის ფესვები და ε რიცხვად მივიღოთ, ამ ფესვთა ნამდვილ ნაწილებზე მეტი, უმცირესი მთელი რიცხვი (მაგალითად, თუ ფესვებია $\alpha_1=-1{,}1+i$, $\alpha_2=-1{,}1-i$, $\alpha_3=2+3i$, $\alpha_4=2-3i$, $\alpha_5=-3+0i$, მაშინ

$\varepsilon=3$). ε რიცხვის გამოთვლის მეორე ხერხი დამყარებულია იმაზე, რომ ნებისმიერი α კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება α-ს მოდულს (ე. ი. $|R_n(\alpha)|\leqslant|\alpha|$). ამიტომ $P(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვის მოდულზე მეტი ნებისმიერი ε რიცხვი ხასიათდება იმ თვისებით, რომ $P_\varepsilon(x)$ მრავალწევრი ძლიერ პოზიტიურია (ნახევრად მდგრადი). მეორე მხრივ, თუ მოცემულია მრავალწევრი

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0,$$

მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ მრავალწევრის ყველა ფესვთა მოდული არ აღემატება $1+\dfrac{q}{a_n}$ რიცხვს, სადაც $a_n>0$ წარმოადგენს $P(x)$ მრავალწევრის უფროს კოეფიციენტს, ხოლო q არის $a_{n-1}, a_{n-2},\ldots$ $\ldots, a_1, a_0$ კოეფიციენტთა აბსოლუტურ სიდიდეთა შორის უდიდესი, ე. ი.

$$q=\max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|,\ldots,|a_1|, |a_0|\}.$$

ამ ფაქტის შემოწმების მიზნით განვიხილოთ მრავალწევრი:

$$P(x)=x^5-2x^3-18x^2+40x+200=(x^2+6x+10)(x^2-8x+20)=$$
$$=[x-(-3+i)][x-(-3-i)[x-(4-2i)][x-[4+2i)],$$

სადაც

$$a_n=1,\ q=\max\{|1|,\ |-2|,\ |-18|,\ |40|,\ |200|\}=200,$$

ფესვები: $\alpha_1=-3-i$, $\alpha_2=-3+i$, $\alpha_3=4-2i$, $\alpha_4=4+2i$; მოდულები:

$$|\alpha_1|=|-3-i|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10},$$
$$|\alpha_2|=|-3+i|=\sqrt{(-3)^2+(+1)^2}=\sqrt{10},$$
$$|\alpha_3|=|4-2i|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20},$$
$$|\alpha_4|=|4+2i|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20},$$

$1+\dfrac{q}{a_n}=1+\dfrac{200}{1}=201$ და მაშასადამე,

$$|\alpha_1|=|\alpha_2|=\sqrt{10}<201,$$
$$|\alpha_3|=|\alpha_4|=\sqrt{20}<201.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი $\varepsilon>1+\dfrac{q}{a_n}$ მთელი რიცხვი გამოსადეგია ჩვენი ამოცანისათვის.

აღნიშნული წესის მეორე პუნქტში მიღებული $P_{\varepsilon}(x)$ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის მიზნით გამოვიყენოთ პოზიტიური მრავალწევრის დაშლის ზოგადი მეთოდი. რაც შეეხება იმავე წესის მე-3 პუნქტს, მისი განხორციელება ხდება ავტომატურად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ მოცემულია მრავალწევრი

$$P(x)=x^4+3x^2-6x+10.$$

მიღებული წესის მიხედვით დავადგინოთ მისი გამყოფები. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მისი ფესვების ნამდვილ ნაწილებზე მეტი უმცირესი მთელი რიცხვია $\varepsilon=2$; შევადგინოთ $P_2(x)$ მრავალწევრი:

$$P_2(x)=P(x+2)=(x+2)^4+3(x+2)^2-6(x+2)+10=$$
$$=x^4+8x^3+27x^2+38x+26.$$

ახლა მიღებული პოზიტიური $P_2(x)$ მრავალწევრი დავშალოთ მამრავლებად. გავიხსენოთ პოზიტიური მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ზოგადი მეთოდი და ვიპოვოთ მიღებული $P_2(x)$ მრავალწევრის პოზიტიური გამყოფები. შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $m=40$, მაშინ $P_2(40)=3116746$. ამოვიწეროთ $P_2(40)$ რიცხვის $40^2=1600$ რიცხვზე მეტი ურთიერთდამატებითი გამყოფები. თუ ჩავატარებთ გამოთვლებს მივიღებთ, რომ $3116746=1853\cdot1682$. შევამოწმოთ აუცილებელი პირობა: 40-ობით სისტემაში 1853 რიცხვის მარჯვენა ციფრს წარმოადგენს ამ რიცხვის 40-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, ე. ი. $\Pi(1853)=13$, ანალოგიურად $\Pi(1682)=2$ და $\Pi(3116746)=26$, მაშასადამე, სამართლიანია ტოლობა:

$$26=\Pi(3116746)=\Pi(1853)\,\Pi(1682)=13\cdot2=26.$$

საკმარისი პირობის შემოწმების მიზნით გადავიდეთ 40-ობით სისტემაში. გავიხსენოთ წესი: a — ფუძიანი სისტემიდან b — ფუძიან სისტემაზე გადასასვლელად საკმარისია მოცემული R რიცხვი, ჩაწერილი a ფუძით, გავყოთ a ფუძით წარმოდგენილ b რიცხვზე, a ფუძით მიღებული ნაშთები გამოვსახოთ b ფუძით. უკანასკნელი განაყოფი და მიმდევარი ნაშთები იქნება R რიცხვი ჩაწერილი b ფუძით:

$$3116746:40=77918\ (\text{ნაშთი } 26);\ 77918:40=1947\ (\text{ნაშთი } 38);$$

$$1947:40=48\ (\text{ნაშთი } 27);\ 48:40=1\ (\text{ნაშთი } 8).$$

მაშასადამე, $3116746=1'\,8'\,27'\,3'\,8'\,26_{40}$, ანალოგიურად

$$1853=1'\,6'\,13_{40},$$

$$1682=1'\,2'\,2_{40}.$$

მართლაც, $100 = \sigma(3116746) = \sigma(1853)\,\sigma(1682) = 20\cdot 5 = 100$, მაშასადამე, $P_2(x)$ მრავალწევრისათვის მივიღეთ დაშლა:

$$P_2(x) = x^4 + 8x^3 + 27x^2 + 38x + 26 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 6x + 13).$$

ახლა ვისარგებლოთ $P_2(x) = P(x+2)$ მულტიპლიკაციური იზომორფიზმით. თუ x-ს შევცვლით $(x-2)$-ით, მივიღებთ მოცემული $P(x)$ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ფორმულას:

$$P(x) = P_2(x-2) = [(x-2)^2 + 2(x-2) + 2] \times [(x-2)^2 + 6(x-2) + 13] = (x^2 - 2x + 2)\times(x^2 + 2x + 5) = x^4 + 3x^2 - 6x + 10,$$

ე. ი.

$$P(x) = x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 5).$$

სავარჯიშო 14. დავშალოთ მამრავლებად შემდეგი მრავალწევრები:

1) $x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 9x - 5$,
2) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 6x^2 + x + 5$,
3) $2x^5 + 8x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 20x + 35$,
4) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 6$,
5) $x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$,
6) $x^4 - 2x^2 + 6x^2 - 7x + 20$.

VIII თავი

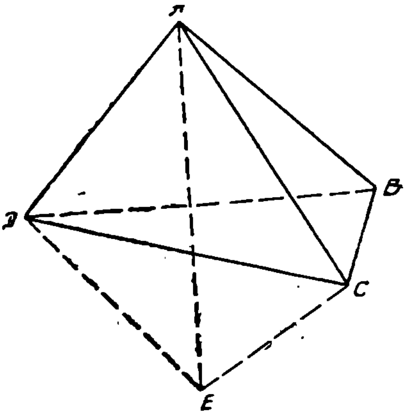
შერეული ამოცანები

§ 1. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ვექტორული ალგებრის გამოყენებით

გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ვექტორული მეთოდი, ცნობილ მეთოდებთან შედარებით, საგრძნობლად ამარტივებს გამოთვლებს. ზოგჯერ ცნობილი მეთოდებით ძნელად ამოხსნადი ამოცანები ადვილად ამოიხსნებიან ვექტორთა გამოყენებით. სანამ ამ საკითხს უშუალოდ შევეხებოდეთ, შევნიშნოთ, რომ ვექტორული ალგებრის ელემენტებს და მათ მიმართ ძირითად კანონებს მოსწავლეები ეცნობიან მე-7 კლასის გეომეტრიის ახალ სახელმძღვანელოში. რაც შეეხება ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს, ჯამისა და სხვაობის სკალარულ კვადრატებს, ისინი გადმოცემულია მე-9 კლასის გეომეტრიის სახელმძღვანელოში.

ახლა დავუბრუნდეთ ძირითად საკითხს და ზემოთ აღნიშნული ვექტორული ალგებრის ელემენტების გამოყენებით ამოვხსნათ ზოგიერთი ამოცანა

ა მ ო ც ა ნ ა 1. $ABCD$ ტეტრაედრის A წვერო მივიღოთ პოლუსად და ავაგოთ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ რადიუს-ვექტორი (ნახ. 151).

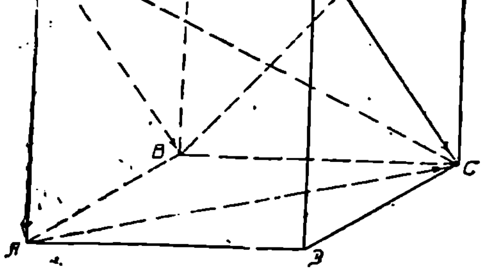


ნახ. 151

ა მ ო ხ ს ნ ა. ორი ვექტორის ჯამის განსაზღვრების თანახმად $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$ რადიუს-ვექტორი წარმოადგენს $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორებზე აგებულ პარალელოგრამის დიაგონალს—სათავით A წერტილში. საძიებელი რადიუს-ვექტორის ასაგებად საკმარისია, ცნობილი წესის მიხედვით, ვიპოვოთ $\overrightarrow{AE}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორთა სხვაობა; ეს ის ვექტორია, რომლის სათავე და ბოლო შესაბამისად C და E წერტილებშია. მაშასადამე,

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 2. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. დავამტკიცოთ, რომ $\vec{a} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1A_1}$ და $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ მოპირდაპირე ვექტორებია, ე. ი. $\vec{a} = -\vec{b}$ (ნახ. 152).



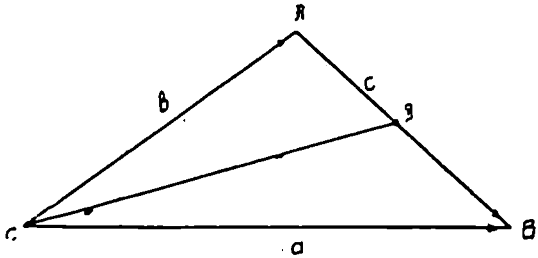
ნახ. 152

ამოხსნა. შევადგინოთ (ავაგოთ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები: $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$, $\vec{a}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{CA_1}$. $\vec{b}$ ვექტორის ასაგებად ჯერ ავაგოთ $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}$ ვექტორი: $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B}$, ხოლო შემდეგ $\overrightarrow{A_1B}-\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{A_1B}$ და $\overrightarrow{CB}$ ვექტორები შეგვიძლია შევცვალოთ შესაბამისად, საერთო სათავის მქონე, $\overrightarrow{D_1C}$ და $\overrightarrow{D_1A_1}$ ვექტორებით. მაშასადამე,

$$\overrightarrow{A_1B}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{D_1C}-\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{A_1C}\ ;$$

მივიღეთ, რომ $\vec{b}=\overrightarrow{A_1C}$; მაგრამ რადგან $\vec{a}=\overrightarrow{CA_1}$, ამიტომ $\vec{a}=-\vec{b}$.

ამოცანა 3. ABC სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c. გამოვსახოთ m_c მედიანა მისი გვერდების საშუალებით (ნახ. 153).



ნახ. 153

ამოხსნა. თუ ABC სამკუთხედის C წვეროს მივიღებთ პოლუსად გავიხსენებთ ვექტორთა ჯამის განსაზღვრებას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ 2\,\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b} \qquad (1)$$

გარდა ამისა

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}\,. \qquad (2)$$

თუ გამოვიყენებთ ორი ვექტორის ჯამისა და სხვაობის სკალარული კვადრატების ფორმულებს, მაშინ (1) და (2) ტოლობების კვადრატში აყვანით და შეკრებით მივიღებთ:

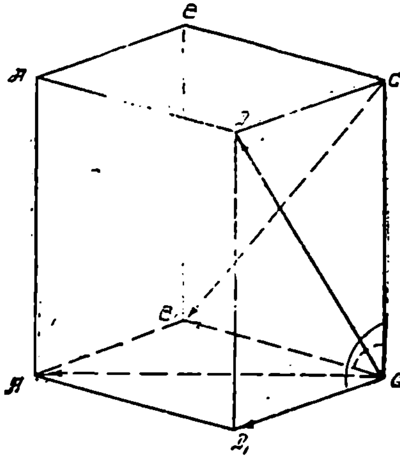
$$4\,|\overrightarrow{CD}\,|^2+|\,\overrightarrow{AB}\,|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2,$$

საიდანაც

$$4\,DC^2+c^2=2a^2+2b^2,\ 4\,CD^2=2a^2+2\,b^2-c^2,$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2+2\,b^2-c^2}\,.$$

ამოცანა 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედის $A_1B_1C_1D_1$ წახნაგი წარმოადგენს კვადრატს p გვერდით; $C_1C = p$ წიბო C_1B_1 და C_1D_1 წიბოებთან ადგენს β კუთხეს. ვიპოვოთ DB_1 დიაგონალის სიგრძე და კუთხე DB_1 და C_1A_1 წრფეებს შორის (ნახ. 154).



ნახ. 154

ამოხსნა. C_1 წერტილი მივიღოთ პოლუსად. ვიპოვოთ DB_1-ის სიგრძე:

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1D} = \overrightarrow{C_1B_1} - (\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C}) = \overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{C_1C},$$

აქედან

$$(\overrightarrow{DB_1})^2 = (\overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{C_1C})^2;$$

$$|\overrightarrow{DB_1}|^2 = \overrightarrow{DB}_1^2 = \overrightarrow{C_1B}_1^2 + \overrightarrow{C_1D}_1^2 + \overrightarrow{C_1C}^2 - 2\,\overrightarrow{C_1B_1}\cdot\overrightarrow{C_1D_1} - 2\overrightarrow{C_1B_1}\cdot\overrightarrow{C_1C} +$$

$$+ 2\,\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\overrightarrow{C_1C} = p^2 + p^2 + p^2 - 2pp\cos 90^\circ - 2pp\cos\beta +$$

$$+ 2pp\cos\beta; \quad DB_1 = p\sqrt{3}.$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებას, ადვილად ვიპოვით კუთხეს DB_1 და C_1A_1 წრფეებს შორის; $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{C_1A_1} = |\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1A_1}|\cos\alpha$; რადგან $\alpha \leqslant 90^\circ$, $\cos\alpha \geqslant 0$, ამიტომ:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}}{|\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1A_1}|}\right|.$$

მაგრამ

$$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{C_1A_1} = (\overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{C_1C})(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1}) =$$

$$= |\overrightarrow{C_1B_1}|^2 + \overrightarrow{C_1B_1}\cdot\overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{C_1D_1}\cdot\overrightarrow{C_1B_1} - |\overrightarrow{C_1D_1}|^2 -$$

$$- \overrightarrow{C_1C}\cdot\overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D_1} = p^2 - p^2 - |\overrightarrow{C_1C}|\cdot|\overrightarrow{C_1B_1}|\cos\beta -$$

$$- |\overrightarrow{C_1C}|\cdot|\overrightarrow{C_1D_1}|\cos\beta = -2pp\cos\beta = -2p^2\cos\beta$$

და

$$C_1A_1 = p\sqrt{2}.$$

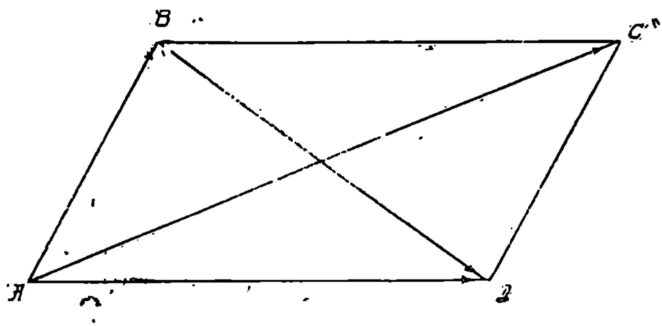
ამიტომ

$$\cos\alpha = \left|\frac{-2p^2\cos\beta}{p\sqrt{3}\cdot p\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}|\cos\beta|$$

და საბოლოოდ

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}|\cos\beta|\right).$$

ა მ ო ც ა ნ ა 5. დავამტკიცოთ, რომ პარალელოგრამის გვერდების კვადრატების ჯამი მისი დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია (ნახ. 155).



ნახ. 155

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია. თუ წვეროს მივიღებთ პოლუსად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2. \tag{5}$$

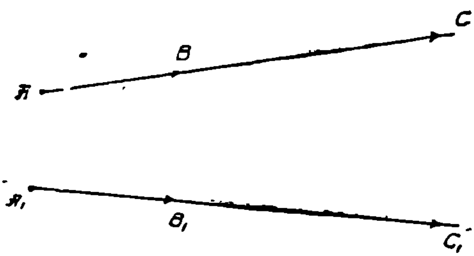
(4) და (5) ტოლობების შეკრება გვაძლევს

$$AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2. \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

ვექტორთა გარდაქმნა. ვთქვათ, A და B წერტილთა გარკვეული (A, B) წყვილი განსაზღვრავს გარკვეულ $\vec{a}$ ვექტორს. f იყოს ის გარდაქმნა, რომელიც A და B წერტილებს გადაადგილებს სათანადოდ A' და B' წერტილებში და, მაშასადამე, (A, B) წყვილს შეუსაბამებს (A', B') წყვილს, რომელიც განსაზღვრავს გარკვეულ $\vec{a}'$ ვექტორს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $\vec{a}$ ვექტორის f გადაადგილებით მიიღება $\vec{a}'$ ვექტორი და წერენ $f:\vec{a}\to\vec{a}'$. ამგვარად, გადაადგილების საშუალებით შეგვიძლია ნებისმიერ $\vec{a}$ ვექტორს შევუსაბამოთ იგივე სიგრძის მქონე $\vec{a}'$ ვექტორი. ჩვენ აქ დავრწმუნდებით იმ ფაქტში, რომ ვექტორთა გადაადგილება დიდი გამოყენებით სარგებლობს ამოცანების ამოხსნის დროს.

თეორემა 1. თუ რაიმე ტოლობაში შემავალი ყველა ვექტორისათვის გამოვიყენებთ ერთსა და იმავე გარდაქმნას, ამით მოცემული ტოლობა არ დაირღვევა.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულ ტოლობაში სრულდება ისეთი ოპერაციები, როგორიცაა 1) ვექტორთა შეკრება: 2) ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი; 3) ვექტორთა შეკრება და რიცხვზე ნამრავლი; 4) ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. ჩავატაროთ ამ შემთხვევათა თანმიმდევრული განხილვა.



ნახ. 156

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. ვთქვათ, $f: A\to A_1$, $f: B\to B_1$, $f: C\to C_1$. მაგრამ, როგორც ცნობილია, სიბრტყის ნებისმიერი სამი წერტილისათვის გვაქვს ტოლობა $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$. მაგრამ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ და $\overrightarrow{A_1C_1}$ ვექტორები მიღებულია $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებისაგან f გარდაქმნის საშუალებით. ამგვარად, პირველი ტოლობა არ დარღვეულა და, მაშასადამე, პირველი შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

2) ვთქვათ, $c\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ და $f: A\to A_1$, $f: B\to B_1$, $f: C\to C_1$ (ნახ. 156).

გადაადგილების განსაზღვრების თანახმად $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$ და $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$, საიდანაც $|c|\cdot|\overrightarrow{AB}| = |c|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|$ და $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$. ბოლო ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $|c|\cdot|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$ ანუ $|c\cdot\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$. მაგრამ, რადგან წრფის წერტილებისათვის f გადაადგილება ინარჩუნებს რიგს, ამიტომ A_1, B_1, C_1 და A, B, C წერტილები განლაგდებიან ერთნაირი რიგით. ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ვექტორულ ტოლობაზე $c\cdot\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

3) ამ შემთხვევაში თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს პირველი ორი შემთხვევის მართებულობიდან.

4) გადაადგილების დროს სკალარული ნამრავლი არ იცვლება. მართლაც,

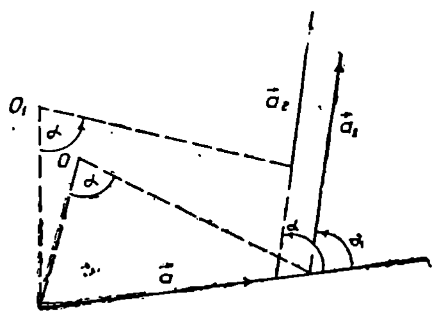
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos\alpha,$$

სადაც $\alpha = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$. ვთქვათ, $f: A\to A_1$, $f: B\to B_1$, $f: C\to C_1$ და $f: D\to D$, მაშინ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{C_1D_1}|$. გადაადგილებისას კუთხე არ იცვლება, ამიტომ $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos\alpha = |\overrightarrow{A_1B_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1D_1}|\cos\alpha$, ე. ი.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{C_1D_1}$$

თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 2. $\vec a$ ვექტორის ორიენტირებული α კუთხით მობრუნების შედეგად მიღებული $\vec a_1$ ვექტორი დამოკიდებული არ არის მობრუნების ცენტრის შერჩევაზე (ნახ. 157).



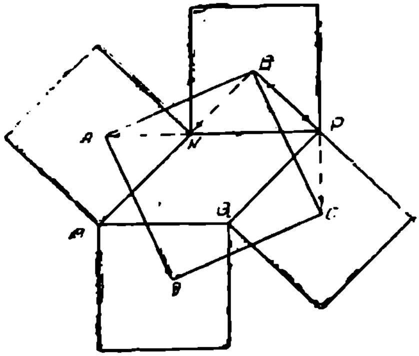
ნახ. 157

მართლაც, $\vec a$ ვექტორის O ცენტრის მიმართ α კუთხით მობრუნება მოგვცემს $\vec a_1$-ს $\cdot$ $\widehat{\vec a, \vec a_1} = \alpha$; $\vec a$ ვექტორის O_1 ცენტრის მიმართ α კუთხით მობრუნებით მივიღებთ $\vec a_2$ ვექტორს. $\widehat{\vec a, \vec a_2} = \alpha$ და, მაშასადამე, $\widehat{\vec a_1, \vec\alpha_2} = \alpha$; რადგან მობრუნება არის გადაადგილება, ამიტომ $|\vec a_1| = |\vec a_2| = |\vec a|$, მივიღეთ, რომ $\vec a_1 = \vec a_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. დავამტკიცოთ, რომ რომბის გვერდებზე (მის გარეთ) აგებული კვადრატების ცენტრების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედი კვადრატია (ნახ. 158).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. B და C წერტილები შევაერთოთ P წერტილთან. ცხადია, რომ:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}. \qquad (6)$$



ნახ. 158

$\overrightarrow{BP}$ და $\overrightarrow{PC}$ ვექტორები მოვაბრუნოთ — 90° კუთხით. მეორე თეორემის თანახმად ვექტორთა მობრუნების დროს მობრუნების ცენტრი შეიძლება იყოს ნებისმიერი. ამიტომ ნახაზზე ჩვენ შევარჩევთ ისეთ ვექტორებს, რომელთა სიგრძეები სათანადოდ $\overrightarrow{BP}$ და $\overrightarrow{PC}$ ვექტორთა სიგრძეების ტოლია და რომლებიც ამავე ვექტორებთან შეადგენენ — 90° კუთხეს. ცხადია, რომ ჩვენს შემთხვევაში

$$\overrightarrow{BP} \to \overrightarrow{BN}; \quad \overrightarrow{PC} \to \overrightarrow{NA} \qquad (7)$$

ვექტორთა ჯამის განსაზღვრების თანახმად

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BA}. \qquad (8)$$

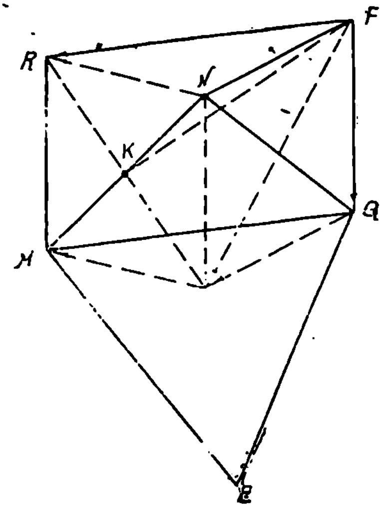
თუ შევადარებთ (6) და (8) ტოლობებს, მაშინ პირველი თეორემისა და (7) გარდაქმნის საფუძველზე შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ $\overrightarrow{BA}$ ვექტორი მიღებულია $\overrightarrow{BC}$ ვექტორისაგან ამ უკანასკნელის — 90° კუთხით მობრუნებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\widehat{ABC} = 90°$ და $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$. ამის მსგავსად ადვილად დამტკიცდება, რომ $\widehat{BCD} = 90°$ და $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}|$. მაშასადამე, მიღებული $ABCD$ ოთხკუთხედი კვადრატია.

ა მ ო ც ა ნ ა 7. MNQ სამკუთხედის QM და NQ გვერდებზე (მის გარეთ) აგებულია წესიერი სამკუთხედები MQN და NQF. განვსაზღვროთ KFO სამკუთხედის კუთხეები, თუ K წერტილი MN-ის შუაწერტილია, ხოლო O წერტილი MQE სამკუთხედის ცენტრია (ნახ. 159).

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ΔKFO. თუ O წერტილს შევაერთებთ Q წერტილთან, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{FO}. \qquad (9)$$

რადგანაც NFQ და MQE წესიერი სამკუთხედებია, ამიტომ (9) ტოლობის მარცხნივ მდგომი ვექტორების — 60° კუთხით მობრუნებით მივიღებთ გარდაქმნებს:



ნახ. 159

$$\overrightarrow{FQ} \to \overrightarrow{EN};\quad \overrightarrow{QO} \to \overrightarrow{OM}.$$

ახლა N წერტილიდან, როგორც სათავიდან, ავაგოთ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის ტოლი ვექტორი და მისი ბოლო წერტილი აღვნიშნოთ R ასოთი, ე. ი. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NR}$, მაშინ $\overrightarrow{QO} \to \overrightarrow{NR}$ და, მაშასადამე, $\overrightarrow{FO} \to \overrightarrow{FR}$ (აქ გამოვიყენეთ (9) ტოლობა). რადგანაც ჩვენ განვახორციელეთ ვექტორთა — 60°-იანი კუთხით მობრუნება, ამიტომ მიღებული ΔOFR ტოლგვერდაა. ჩვენი აგების თანახმად $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NR}$ და მოცემულობის მიხედვით K წარმოადგენს AB მონაკვეთის შუაწერტილს. გამოდის, რომ $MRNO$ პარალელოგრამია. მაშასადამე, K წარმოადგენს RO მონაკვეთის შუაწერტილს და ROF ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლეა FK; ამიტომ:

$$\widehat{KFO} = \frac{1}{2}\widehat{RFO} = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°;\ \widehat{FKO} = 90°,\ \widehat{FOK} = 90° - 30° = 60°.$$

ამოცანა 8. MN მონაკვეთის ბოლოები სათანადოდ დაყრდნობილია AB ორწახნაგა კუთხის (P) და (Q) წახნაგზე. M და N წერტილებიდან AB წიბოზე დაშვებული პერპენდიკულარების სიგრძეებია $MM_1 = m$ და $NN_1 = n$; $M_1N_1 = p$. ვიპოვოთ MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ მოცემული ორწახნაგა კუთხის სიდიდეა α (ნახ. 160).

ამოხსნა. $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი გამოვსახოთ ვექტორთა ჯამის საშუალებით: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NN_1} + \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_1M}$ და ვიპოვოთ მისი სკალარული კვადრატი:

$$\overrightarrow{NM}^2 = (\overrightarrow{NN_1} + \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_1M})^2 = \overrightarrow{NN_1}^2 + \overrightarrow{N_1M_1}^2 + \overrightarrow{M_1M}^2 +$$

$$+ 2\,\overrightarrow{NN_1}\cdot\overrightarrow{N_1M_1} + 2\,\overrightarrow{NN_1}\cdot\overrightarrow{M_1M} + 2\,\overrightarrow{N_1M_1}\cdot\overrightarrow{M_1M}. \qquad (10)$$

რადგან $\overrightarrow{NN_1} \perp \overrightarrow{N_1M_1}$ და $\overrightarrow{N_1M_1} \perp \overrightarrow{M_1M}$, ამიტომ $\overrightarrow{NN_1} \cdot \overrightarrow{N_1M_1} = 0$ და $\overrightarrow{N_1M_1} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$. რაც შეეხება $\overrightarrow{NN_1}$ და $\overrightarrow{M_1M}$ ისინი წარმოადგენენ ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი ხაზოვანი კუთხის გვერდების პარალელურ ვექტორებს, რომელთა შორის კუთხე უდრის α-ს და ამიტომ:

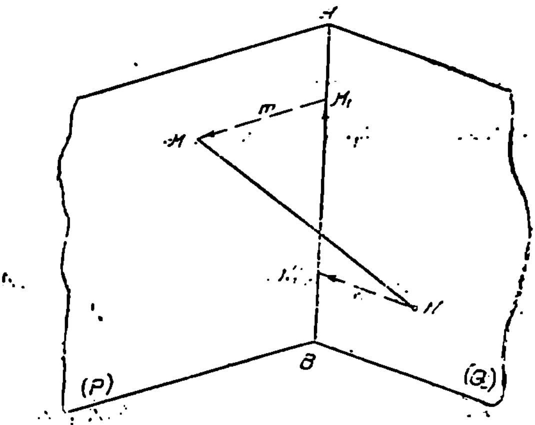
$$\overrightarrow{NN_1} \cdot \overrightarrow{M_1M} = |\overrightarrow{NN_1}| \cdot |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha = mn\cos\alpha,$$

ამის შემდეგ (10) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$NM^2 = m^2 + n^2 + p^2 - 2mn\cos\alpha,$$

საიდანაც

$$|NM| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 - 2mn\cos\alpha},$$



ნახ. 160

ამრიგად, დავრწმუნდებით, თუ რა დიდი უპირატესობით და გამოყენებით სარგებლობს გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ვექტორული მეთოდი.

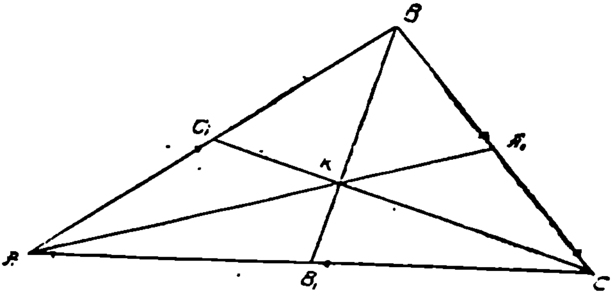
ა მ ო ც ა ნ ა 9. ABC სამკუთხედის სიბრტყეში მოცემულია K წერტილი. KA, KB, KC წრფეები გადაკვეთენ BC, CA, AB წრფეებს შესაბამისად A_1, B_1, C_1 წერტილებში. დავამტკიცოთ, რომ თუ $\overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{C_1B} = 0$, მაშინ K არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი.

ამოხსნა. მოცემული ტოლობა გადავწეროთ ასე (ნახ. 161):

$$\overrightarrow{KA_1} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KB_1} - \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KA} +$$
$$+ \overrightarrow{KB_1} + \overrightarrow{KC_1} - \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC_1} = 0.$$

აქედან

$$\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KB_1} + \overrightarrow{KC_1} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}.$$



ნახ. 161

მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0.$$

გვაქვს

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}}{1+k}; \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{BA}}{1+m}; \quad \overrightarrow{CC_1} = \frac{\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}}{1+n}.$$

ამიტომ

$$\frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{BA}}{1+m} + \frac{\overrightarrow{CA} + n(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})}{1+n} = \vec{0}.$$

რადგან $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილში $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების კოეფიციენტები ნულის ტოლია, ე. ი.

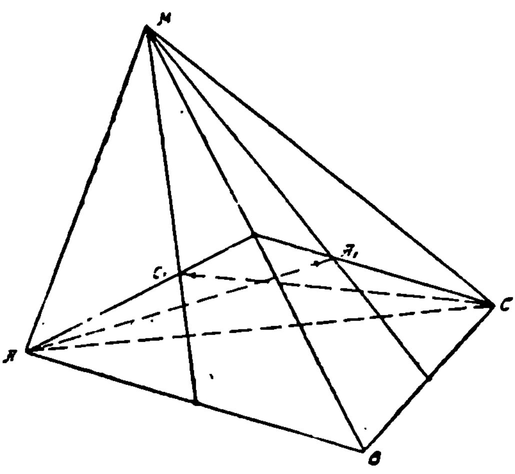
$$\frac{1}{k+1} - 1 + \frac{n}{n+1} = 0, \quad \frac{k}{1+k} + \frac{1}{1+m} - 1 = 0;$$

რომელთა შეკრება მოგვცემს

$$\frac{n}{1+n} + \frac{1}{1+m} = 1,$$

საიდანაც $n=m$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $k=m$. ამრიგად, $k=m=n$. მაგრამ ჩვენს თეორემის თანახმად $kmn=1$. ამიტომ $k^3=1$ და $k=m=n=1$. ე. ი. A_1, B_1, C_1 არიან ABC სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები, ხოლო K არის მედიანების გადაკვეთის წერტილი.

ამოცანა 10. $ABCM$ ტეტრაედრის მოპირდაპირე წიბოები წყვილ-წყვილად კონგრუენტულია: $|AB|=|MC|=c$, $|BC|=|MA|=a$, $|CA|=|MB|=b$. ვაჩვენოთ, რომ $a^2+c^2=3b^2$ ტოლობა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა იმისა, რომ ტეტრაედრის AA_1 და CC_1 მედიანები იყოს პერპენდიკულარული (A_1 და C_1 არიან შესაბამისად BCM და MAB წახნაგების მედიანების გადაკვეთის წერტილები).



ნახ. 162

ამოხსნა. გვაქვს (ნახ. 162):

$$\vec{AA_1}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AM}),\quad \vec{CC_1}=\vec{AC_1}-\vec{AC}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AM})-\vec{AC}.$$

მაშასადამე,

$$9\,\vec{AA_1}\cdot\vec{CC_1}=(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AM})(\vec{AB}+\vec{AM}-3\,\vec{AC})$$

ანუ:

$$9\,\vec{AA_1}\cdot\vec{CC_1}=(\vec{AB}+\vec{AM})^2-2(\vec{AB}+\vec{AM})\cdot\vec{AC}-3\,\vec{AC}^2$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$9\,\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=c^2+a^2+a^2+c^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)-(a^2+b^2-c^2)-3b^2,$$

ანუ:

$$9\,\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2(a^2+c^2-3b^2).$$

$\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{CC_1}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0$, ანუ $a^2+c^2=3b^2$.

სავარჯიშო

1) დაადგინეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის სახე თუ

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=0.$$

2) ოთხწახნაგა კუთხის ბრტყელი კუთხეები კონგრუენტულია. დავამტკიცოთ, რომ მისი დიაგონალური კვეთების სიბრტყეები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

3) მოცემულია $ABC\,A_1B_1C_1$ სამკუთხა პრიზმა. დავამტკიცოთ, რომ გვერდითი წახნაგების AB_1, BC_1, CA_1 დიაგონალები არ შეიძლება იყვნენ ერთი სიბრტყის პარალელური.

4) მოცემულია ორი $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამი. O წერტილიდან გადაზომილია ვექტორები: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{DD_1}$. დავამტკიცოთ, რომ $MNPQ$ პარალელოგრამია.

5) სამი არანულოვანი $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ ვექტორები დაკავშირებულია ტოლობით:

$$(\vec b\cdot\vec c)\,\vec a+(\vec c\cdot\vec a)\,\vec b+(\vec a\cdot\vec b)\,\vec c=0.$$

ვიპოვოთ $\alpha=\widehat{\vec b,\ \vec c}$, $\beta=\widehat{\vec c,\ \vec a}$, $\gamma=\widehat{\vec a,\ \vec b}$ კუთხეები.

§ 2. არითმეტიკული და ალგებრული ამოცანები

განვიხილოთ ალგებრული ამოცანები განტოლების შედგენაზე:

1) უკვეცი წილადი არ შეიცვლება თუ მის მრიცხველს მივუმატებთ 6-ს, ხოლო მნიშვნელს მივუმატებთ 15-ს. ვიპოვოთ ეს წილადი.

ამოხსნა: საძიებელი წილადი აღვნიშნოთ $\frac{x}{y}$-ით. ამოცანის პირობის თანახმად შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{x+6}{y+15}=\frac{x}{y},$$

საიდანაც $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$. მაშასადამე, საძიებელი წილადია $\frac{2}{5}$.

2) ვიპოვოთ ორი დადებითი რიცხვი, თუ თითოეულ მათგანთან მათი ნამრავლის მომატებით მიიღება რაიმე რიცხვის კუბი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველი რიცხვი აღვნიშნოთ $8x$-ით, მეორე (x^2-1)-ით. მათი ნამრავლი $8x(x^2-1)=8x^3-8x$. ნამრავლისა და პირველი რიცხვის ჯამი გვაძლევს რაღაც რიცხვის კუბს $8x^3=(2x)^3$. თუ ამ ნამრავლს მივუმატებთ მეორე რიცხვს, მივიღებთ $8x^3-8x+x^2-1$, რომელიც უნდა უდრიდეს რაიმე რიცხვის კუბს. თუ ამ რიცხვს აღვნიშნავთ $(2x-1)$-ით, მივიღებთ $(2x-1)^3=8x^3-8x+x^2-1$, საიდანაც $x=\frac{14}{13}$. მაშასადამე, პირველი რიცხვია $8x=8\cdot\frac{14}{13}=\frac{112}{13}$ და მეორე $x^2-1=\frac{27}{169}$.

3) ვიპოვოთ ორი ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი, რომელთა კვადრატების სხვაობაა 113.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ ეს რიცხვებია x და y. გვაქვს $x^2-y^2=113$. $(x-y)(x+y)=19\cdot7=133\cdot1$, ანუ

$$\begin{cases}x+y=19\\x-y=7,\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=133\\x-y=1\end{cases}$$

ამ ორი სისტემის ამოხსნით მივიღებთ რიცხვთა ორ წყვილს 13 და 6; 67 და 66.

4) ორნიშნა რიცხვი სამჯერ მეტია ამ რიცხვის ციფრების ჯამზე, ხოლო ამ ჯამის კვადრატი უდრის გასამკეცებულ საძიებელ რიცხვს. ვიპოვოთ ეს რიცხვი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი რიცხვის ათეულების რიცხვი აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო ერთეულების — y-ით. ამოცანის პირობის თანახმად შეგვიძლია შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases}10x+y=3(x+y)\\(x+y)^2=3(10x+y),\end{cases}$$

რომლის ამოხსნით მივიღებთ $x=2$, $y=7$. ე. ი. საძიებელი რიცხვია 27.

5) ერთი შენადნობი შედგება ორი მეტალისაგან, რომლებიც მასში შედიან $1:2$ თანაფარდობით. მეორე შენადნობი შედგება იგივე მეტალებისაგან $2:3$ თანაფარდობით. ორივე შენადნობის რა ნაწილებისაგან შეგვიძლია მივიღოთ ახალი შენადნობი, რომელიც შეიცავს იგივე მეტალებს $17:27$ თანაფარდობით?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ახალ შენადნობში შემავალი პირველი და მეორე მეტალის ნაწილების რიცხვი აღვნიშნოთ შესაბამისად x-ითა და y-ით. მაშასადამე, ახალ შენადნობში შევა $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$ პირველი მეტალი და

$\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$ მეორე მეტალი. ამიტომ შეგვიძლია შევადგინოთ პროპორცია:

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{17}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{27},$$

საიდანაც ადვილად მიიღება $\frac{x}{y}=\frac{35}{9}$.

ამრიგად, ახალი შენადნობი შეიცავს პირველი შენადნობის 9 და მეორე შენადნობის 35 ნაწილს.

6) ოქროსა და სპილენძის ორ 950 და 800 სინჯიან შენადნობს შეადნობენ 2 კგ სუფთა ოქროსთან. მიიღებენ 906 სინჯიან 25 კგ ახალ შენადნობს. გამოვთვალოთ პირველი ორი შენადნობების წონა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: p_1 — შენადნობის საერთო წონა; p — „კეთილშობილი" მეტალის წონა; l — სინჯი. ვთქვათ აღებულია x კგ პირველი შენადნობი და y კგ მეორე შენადნობი. როგორც ვიცით $p=lp_1$. ამიტომ შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}0{,}950\,x+0{,}800\,y+2=25\cdot 0{,}906\\ x+y+2=25,\end{cases}$$

რომლის ამოხსნა მოგვცემს: $x=15$ კგ; $y=8$ კგ.

7) გამოვთვალოთ ვერცხლისა და სპილენძის შენადნობის წონა და სინჯი, თუ ცნობილია, რომ მისი შედნობით 3 კგ სუფთა ვერცხლთან მიიღება 900 სინჯიანი შენადნობი, ხოლო მისივე შედნობით 2 კგ 900 სინჯიან შენადნობთან, მიიღება 840 სინჯიანი შენადნობი.

ამოხსნა. ვთქვათ შენადნობი შეიცავს x კგ ვერცხლს და y კგ სპილენძს. მისი შედნობით 3 კგ სუფთა ვერცხლთან მივიღებთ:

$$\frac{x+3}{x+y+3}=0{,}900. \qquad (1)$$

ახლა თუ მას შევადნობთ 2 კგ 900 სინჯიან შენადნობთან, მივიღებთ $(2\cdot 0{,}900+x)$ სუფთა ვერცხლს; საერთო წონა იქნება $(x+y+2)$, ამიტომ:

$$\frac{x+1{,}8}{x+y+2}=0{,}840. \qquad (2)$$

თუ ამოვხსნით (1) და (2) განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ: $x = 2{,}4$ კგ; $y = 0{,}6$ კგ. შენადნობის წონა $x + y = 3$ კგ. მისი სინჯი ტოლია $\frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$.

პასუხი. 3 კგ; 0,8.

8) ზღვის წყალი შეიცავს 5% მარილს. რამდენი კილოგრამი მტკნარი წყალი უნდა დავუმატოთ 60 კგ ზღვის წყალს, რომ მიღებული ნარევი შეიცავდეს 2% მარილს?

ამოხსნა. 60 კგ ზღვის წყალი შეიცავს $60 \cdot 0{,}05 = 3$ კგ მარილს. 3 კგ რომ შეადგენდეს საერთო წონის 2%, იგი ტოლი უნდა იყოს $3 : 0{,}02 = 150$ კგ, ე. ი. უნდა დავუმატოთ 90 კგ მტკნარი წყალი.

9) 3 კგ წონის შენადნობი შეიცავს ვერცხლსა და სპილენძს. ამასთან ვერცხლის წონა შეადგენს სპილენძის წონის 12,5%; რამდენი ვერცხლია მოცემული შენადნობში?

ამოხსნა. მთელი შენადნობის წონა (3 კგ) შეადგენს სპილენძის წონის $100\% + 12{,}5\% = 112{,}5\%$. ე. ი. სპილენძის წონის 1% შეადგენს $\frac{3}{112{,}5}$ კგ. მაშასადამე, ვერცხლის წონა, რომელიც შეადგენს სპილენძის წონის 12,5%-ს, ტოლია $\frac{3}{112{,}5} \cdot 12{,}5 = \frac{1}{3}$ კგ. სპილენძის წონის 1%-ის გამოსათვლელად შევადგინოთ პროპორცია

$$x : 3 = 12{,}5 : 112{,}5.$$

პასუხი: ვერცხლის წონაა $\frac{1}{3}$ კგ.

10) მოცემულია ორი ხარისხის ფოლადის ჯართი, რომლებიც შეიცავენ შესაბამისად 6% და 50% ნიკელს. რამდენი უნდა ავიღოთ თითოეული ხარისხის ჯართი, რომ მივიღოთ 150 ტ. ფოლადი, რომელიც შეიცავს 40% ნიკელს?

ამოხსნა. ვთქვათ ვიღებთ x ტ პირველი ხარისხის ჯართს. მასში იქნება $\frac{6}{100} x = 0{,}06 x$ ტ. ნიკელი. მეორე ხარისხის ჯართი უნდა ავიღოთ $(150 - x)$ ტ. იგი შეიცავს $\frac{6}{100}(150 - x) = 0{,}60(150 - x)$ ტ. ნიკელს. საერთო რაოდენობა 150 ტ. ფოლადი პირობის თანახმად შეიცავს $\frac{40}{100} \cdot 150$ ტ. ნიკელს. მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$0{,}06 x + 0{,}60(150 - x) = 0{,}40 \cdot 150.$$

აქედან $x = 55\frac{5}{9}$ ტ.

ამრიგად, უნდა ავიღოთ პირველი ხარისხის $55\frac{5}{9}$ ტ. და მეორე ხარისხის $94\frac{4}{9}$ ტ. ჯართი.

11) 15 კგ სპილენძისა და კალის შენადნობის ნაჭერი შეიცავს 35% სპილენძს. რა რაოდენობის სუფთა კალა უნდა დავუმატოთ ამ ნაჭერს, რომ ახლად მიღებული შენადნობი შეიცავდეს 30% სპილენძს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული შენადნობი შეიცავს $15\cdot\frac{35}{100}=5{,}25$ კგ სპილენძს. პირობის თანახმად 5,25 კგ სპილენძის წონა შეადგენს 30%-ს, ამიტომ ახალი შენადნობის წონა იქნება $5{,}25:\frac{30}{100}=17{,}5$ კგ. ამრიგად, საჭიროა დავუმატოთ $17{,}5-15=2{,}5$ კგ სუფთა კალა.

12) ორი თანხა, სულ 5000 მანეთი, შეტანილია გარკვეული ვადით შემნახველ სალაროში 3% დარიცხვის ანგარიშით წლიურად. ამასთან, პროცენტები ერიცხებათ პირველადი თანხიდან ანაბრის გაცემის მომენტში მისი შემნახველ სალაროში არსებობის დროის პროპორციულად. თითოეულმა თანხამ მოგვცა 60 მანეთი შემოსავალი. პირველი თანხა სალაროში იყო 4 თვით ნაკლები დროით, ვიდრე მეორე. რა რაოდენობისაა თითოეული თანხა და რა ვადითაა იგი შეტანილი შემნახველ სალაროში?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ პირველი თანხაა x მანეთი და იგი სალაროშია y თვე. მაშინ მეორე თანხა იქნება $(5000-x)$ მანეთი და იგი სალაროში იქნება $(y+4)$ თვე. პირველ თანხაზე სალარო გადაიხდის $\frac{3xy}{100\cdot12}$ მან., ხოლო მეორე თანხაზე $\frac{(5000-x)(y+4)}{100\cdot12}$ მან. ამოცანის პირობის თანახმად მიღებული შემოსავალი ორივე შემთხვევაში უდრის 60 მან. ამიტომ გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}3xy=100\cdot12\cdot60\\3(5000-x)(y+4)=100\cdot12\cdot60,\end{cases}$$

საიდანაც $x=3000$, $y=8$.

პ ა ს უ ხ ი. 3000 მან. 8 თვეს, 2000 მან. 12 თვეს.

13) სამი ტუმბო ერთდროულად იწყებს წყლის ტუმბვას მდინარიდან. პირველმა და მესამე ტუმბომ ერთდროულად დაამთავრა მუშაობა, ხოლო მეორემ — მუშაობის დაწყებიდან 2 საათის შემდეგ. აღმოჩნდა, რომ პირველმა მათგანმა გადატუმბა 9 $м^3$ წყალი, მეორემ და მესამემ ერთად — 28 $м^3$. რა რაოდენობის წყალს გადატუმბავს თითოეული ტუმბო ერთი საათის განმავლობაში, თუ მესამე ტუმბო ერთ საათში

გადატუმბავს 3 მ^3-ით მეტს, ვიდრე პირველი და სამივე ტუმბო ერთად მუშაობისას ერთ საათში. გადატუმბავს 14 მ^3 წყალს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუშვათ, პირველი ტუმბო ერთ საათში ტუმბავს x მ^3 წყალს, მეორე — y მ^3, მესამე $(x+3)$ მ^3. სამივე ტუმბო ერთად ერთ საათში ტუმბავს 14 მ^3 წყალს. ამიტომ შეგვიძლია განტოლების შედგენა: $x+y+(x+3)=14$. რადგან პირველმა ტუმბომ ამოტუმბა 9 მ^3 წყალი, ამიტომ მან იმუშავა $\frac{9}{x}$ სთ. ამდენივე იმუშავა მესამე ტუმბომ. 2 საათში მეორე ტუმბო ამოტუმბავდა $2y$ მ^3 წყალს, მესამე კი $\frac{9}{x}$ საათში $\frac{9}{x}(x+3)$ მ^3-ს. ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{9}{x}(x+3)+$ $+2y=28$, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x+y=11 \\ \dfrac{9(x+3)}{x}+2y=28, \end{cases}$$

რომლის ამოხსნით მივიღებთ $x=3$, $y=5$.

პ ა ს უ ხ ი: I — 3 მ^3, II — 5 მ^3, III — 6 მ^3.

ა მ ო ც ა ნ ა 14. ორი მილი, ერთდროული მოქმედებით, ერთ საათში სითხით ავსებს აუზის $\frac{3}{4}$ ნაწილს. თუ თავიდან პირველი მილი შეავსებს აუზის $\frac{1}{4}$ ნაწილს და ამის შემდეგ მხოლოდ მეორე მილი სითხის მოცულობას დაიყვანს აუზის $\frac{3}{4}$ ნაწილამდე, ამისათვის დაიხარჯება 2,5 საათი. თუ პირველ მილს ჩავრთავთ ერთი საათით, ხოლო მეორეს — ნახევარი საათით, მაშინ ისინი შეავსებენ აუზის ნახევარზე მეტს. რა დროში შეავსებს აუზს თითოეული მილი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ პირველი მილით აუზი ივსება x საათში, ხოლო მეორე მილით — y საათში. ერთ საათში პირველი მილი შეავსებს აუზის $\frac{1}{x}$ ნაწილს, ხოლო მეორე მილი — $\frac{1}{y}$ ნაწილს. პირობის თანახმად პირველი და მეორე მილის ერთობლივი მოქმედებით, ერთ საათში, ივსება აუზის $\frac{3}{4}$ ნაწილი, ე. ი.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}. \tag{1}$$

პირველი მილი აუზის $\frac{1}{4}$ ნაწილს შეავსებს $\frac{x}{4}$ საათში, ხოლო მეორე მილი აუზის $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ნაწილს შეავსებს $\frac{y}{2}$ საათში. ამოცანის პირობის თანახმად:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=2{,}5. \qquad (2)$$

როგორც ვიცით, ერთ საათში პირველი მილი ავსებს აუზის $\frac{1}{x}$ ნაწილს. მეორე მილი $\frac{1}{2}$ საათში ავსებს აუზის $\frac{1}{2y}$ ნაწილს. ამ პირობებში ისინი აავსებენ აუზის ნახევარზე მეტს, ე. ი.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}>\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

შევადგინოთ და ამოვხსნათ (1), (2) და (3) პირობათა სისტემა:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4},\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=2{,}5\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}>\frac{1}{2},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3y^2-14y+2=0\\ x=10-2y\\ \dfrac{\left(y-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}{y(5-y)}>0,\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{5}{3};\ y_2=4\\ x_1=\frac{20}{3};\ x_2=2\\ \left[\begin{array}{l}0<y<\frac{5-\sqrt{5}}{2}\\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}<y<5.\end{array}\right.\end{cases}$$

ცხადია, რომ აქედან $y=4$, ამიტომ $x=2$. პ ა ს უ ხ ი: $x=2$; $y=4$.

ა მ ო ც ა ნ ა 15. გვაქვს ოქროსა და ვერცხლის სხვადასხვა შენადნობის სამი ნაჭერი. ცნობილია, რომ მესამე ნაჭრის 2 გრამში ოქროს რაოდენობა იმდენივეა რაც, ერთად აღებული, პირველი ნაჭრის

1 გრამსა და მეორე ნაჭრის 1 გრამში. მესამე ნაჭრის წონა უდრის პირველი და მეორე ნაჭრების იმ ნაწილების ჯამს, რომელთაგან პირველი შეიცავს 10 გრამს, ხოლო მეორე 80 გრამ ოქროს. მესამე ნაჭერი ოთხჯერ მძიმეა პირველზე და შეიცავს 75 გრამ ოქროს. რამდენი გრამი ოქროა პირველ ნაჭერში?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ პირველ ნაჭერში x გრამი ოქროა და y გრამი ვერცხლი; მეორე ნაჭრის 80 გრამის ოქროს შემცველი ნაწილი შეიცავს z გრამ ვერცხლს, მაშინ მესამე ნაჭერში იქნება $[4(x+y)-75]$ გრამი ვერცხლი. პირველი ნაჭრის ერთი გრამი შეიცავს $\frac{x}{x+y}$ გრამ ოქროს, მეორე ნაჭრის ერთი გრამი — $\frac{80}{z+80}$ გრამ ოქროს, ხოლო მესამე ნაჭრის ორი გრამი — $\frac{2\cdot 75}{4(x+y)}=\frac{75}{2(x+y)}$ გრამ ოქროს. ამოცანის პირველი პირობიდან გამომდინარე შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{x}{x+y}+\frac{80}{z+80}=\frac{75}{2(x+y)}. \tag{1}$$

პირველი ნაჭრის 10 გრამი ოქროს შემცველი ნაწილი იწონის $\frac{10(x+y)}{x}$ გრამს, ხოლო მეორე ნაჭრის 80 გრამი ოქროს შემცველი ნაწილის წონაა $\frac{80(z+80)}{80}=(z+80)$ გრამი. მათი ჯამი უდრის მესამე ნაჭრის წონას, ე. ი.

$$\frac{10(x+y)}{x}+(z+80)=4(x+y). \tag{2}$$

პირველი ნაჭრის 10 გრამი ოქროს შემცველი ნაწილი შეიცავს $\frac{10(x+y)}{x}-10=\frac{10y}{x}$ გრამ ვერცხლს. რადგან მეორე ნაჭრის 80 გრამი ოქროს შემცველ ნაწილში z გრამი ვერცხლია, ამიტომ მესამე ნაჭერში ვერცხლის რაოდენობა იქნება $10+\frac{10y}{x}+80+z-75=\left(15+z+\frac{10y}{x}\right)$ გრამი. ამოცანის პირობის თანახმად:

$$4(x+y)=90+z+\frac{10y}{x}. \tag{3}$$

ამოვხსნათ (1), (2) და (3) განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{80}{z+80}=\dfrac{75}{2(x+y)}\\ \dfrac{10(x+y)}{x}+z+80=4(x+y)\\ 4(x+y)=90+z+\dfrac{10y}{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}160(x+y)=(z+80)(75-2x)\\ 2(2x-5)(x+y)=x(z+80)\\ z=4(x+y)-\dfrac{10y}{x}-90\end{cases}$$

პირველი განტოლება გავყოთ მეორეზე, მივიღებთ:

$$\frac{80}{2x-5}=\frac{75-2x}{x}\Rightarrow 4x^2-80x-375=0,$$

აქედან

$$x_1=\frac{15}{2};\quad x_2=\frac{25}{2}.$$

სავარჯიშო 15. 1) სამმა მუშამ ერთად მიიღო 2080 მან. პირველი და მეორე მუშის მიერ მიღებული თანხები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $6\frac{1}{2}:2\frac{3}{4}$; მესამე მუშის მიერ მიღებული თანხა შეადგენს პირველი მუშის მიერ მიღებული თანხის $37\frac{1}{3}\%$. რა თანხა მიიღო თითოეულმა მუშამ?

2) კლასში მოსწავლეთა რიცხვის 12%-მა ვერ შეასრულა საკონტროლო სამუშაო მათემატიკაში. კლასის 32% შეასრულა შეცდომებით, ხოლო 14-მა მოსწავლემ შეასრულა სწორად. რამდენი მოსწავლე იყო კლასში?

3) საშუალო სკოლის დამთავრებისას მოსწავლეებმა გაცვალეს ფოტოსურათები. რამდენი იყო მოსწავლე, თუ მათ გაცვალეს 870 ფოტოსურათი?

4) ტრაქტორისტთა ბრიგადას შეუძლია მოხსნას მიწის ნაკვეთი 4 საათსა და 15 წუთში. შესვენებამდე ბრიგადამ იმუშავა 4,5 საათი, რის შემდეგ მოუხნავი დარჩა კიდევ 8 ჰა. რას უდრის ნაკვეთის ფართობი?

5) სამუშაო დღე შემცირდა 8 საათიდან 7 საათამდე. რამდენი პროცენტით უნდა გადიდდეს შრომის ნაყოფიერება, რომ იმავე პირობებში ხელფასი გადიდდეს 5%-ით?

6) 18 კგ მასის სპილენძისა და თუთიის შენადნობის ზოდი შეიცავს 30% სპილენძს. რამდენი სპილენძი უნდა დაემატოს ზოდს, რომ

გადადნობისას მიღებული ახალი შენადნობი შეიცავდეს 55% სპილენძს?

7) მამამ 36 ვაშლი ხუთ შვილს გაუყო. ნახევარი ვაჟებს მისცა. მათ იგი თანაბრად გაინაწილეს. მეორე ნახევარი ქალიშვილებს ერგოთ. განაწილება მათ შორისაც თანაბრად მოხდა. აღმოჩნდა, რომ თითოეულმა ქალიშვილმა მიიღო 3 ვაშლით მეტი, ვიდრე თითოეულმა ვაჟმა. რამდენი ვაჟი ჰყავდა მამას?

8) ძვირფასი ბეწვის ორი ნაჭრის საერთო ღირებულებაა 225 მან. ისინი გაყიდეს აუქციონზე 40%-ის მოგებით. როგორია პირველი ნაჭრის ღირებულება, თუ პირველიდან მიიღეს 25% მოგება, ხოლო მეორიდან — 50%?

9) რამდენი პროცენტით უნდა გადიდდეს წრის რადიუსის სიგრძე, რომ წრის ფართობი 96%-ით გაიზარდოს?

10) ერთი სახის პროდუქტის ერთ კილოგრამსა და მეორე სახის პროდუქციის ათ კილოგრამში გადაიხადეს 2 მან. თუ ფასების სეზონური ცვლილებისას პირველი პროდუქტი 15%-ით გაძვირდება, ხოლო მეორე 25%-ით გაიაფდება, მაშინ ამ პროდუქტების ამავე რაოდენობაში გადასახდელი იქნება 1 მან. 82 კაპ. რა ღირს მეორე სახის პროდუქტის ერთი კილოგრამი?

ლიტერატურა

1. ს. ი. ნოვოსელოვი; ელემენტარული ალგებრის სპეციალური კურსი; სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა; თბილისი, 1954.

2. ზ. მ. ნაცვლიშვილი; მოდულის შემცველი განტოლებები და უტოლობები; თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. 1977.

3. Ястребинецкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры М. 1972.

4. Блох А. Ш.; Трухан Т. Л. Неравенства, издательство «Народная Асвета» Минск. 1972.

შინაარსი

I თავი. განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

II თავი. უტოლობები და უტოლობათა სისტემები

III თავი. ორი ცვლადის შემცველი უტოლობები

IV თავი. უტოლობები და უტოლობათა სისტემები, რომლებიც შეიცავენ ორი ცვლადის მოდულს

V თავი. პარამეტრული განტოლებები და უტოლობები