ნ. თევზაძე

მეცნიერებისა და ტექნიკის დამსახურებული მოღვაწე,
ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

საინჟინრო გეოდეზია

IV

(უმცირეს კვადრატთა მეთოდი)

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების
სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი
ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1983

წინამდებარე წიგნი პირველად გამოიცა 1964 წელს, ამჯერად იგი გამოდის შევსებული სახით.

ნაშრომი განკუთვნილია სამარკშეიდერო და საინჟინრო გეოდეზიის სპეციალობის სტუდენტებისათვის. იგი დახმარებას გაუწევს აგრეთვე გეოდეზიისა და კარტოგრაფიის საკითხებით დაინტერესებულ მუშაკებს.

რ ე ც ე ნ ზ ე ნ ტ ე ბ ი :

ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი $\boxed{\text{კ. ტაბატაძე}}$

მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი დ. ავაზაშვილი

მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ს. ზათაშვილი

$T \frac{20701}{M\ 608(06)\ 83}$

ა ნ ბ ა ნ ი

ქართული		რუსული		ლათინური			ბერძნული		
ა	ა	А	а	A	a	ა	Α	α	ალფა
ბ	ბ	Б	б	B	b	ბე	Β	β	ბეტა
გ	გ	В	в	C	c	ცე	Γ	γ	გამა
დ	დ	Г	г	D	d	დე	Δ	δ	დელტა
ე	ე	Д	д	E	e	ე	Ε	ε	ეფსილონ
ვ	ვ	Е	е	F	f	ეფ	Ζ	ζ	ძეტა
ზ	ზ	Ё	ё	G	g	გე	Η	η	ეტა
თ	თ	Ж	ж	H	h	ჰაშ	Θ	ϑ θ	თეტა
ი	ი	З	з	I	i	ი	Ι	ι	იოტა
კ	კ	И	и	J	j	ჟი	Κ	κ	კაპა
ლ	ლ	Й	й	K	k	კა	Λ	λ	ლამბდა
მ	მ	К	к	L	l	ელ	Μ	μ	მიუ
ნ	ნ	Л	л	M	m	ემ	Ν	ν	ნიუ
ო	ო	М	м	N	n	ენ	Ξ	ξ	ქსი
პ	პ	Н	н	O	o	ო	Ο	ο	ომიკრონ
ჟ	ჟ	О	о	P	p	პე	Π	π	პი
რ	რ	П	п	Q	q	ქუ	Ρ	ρ	რო
ს	ს	Р	р	R	r	ერ	Σ	σ, ς	სიგმა
ტ	ტ	С	с	S	s	ეს	Τ	τ	ტაუ
უ	უ	Т	т	T	t	ტე	Υ	υ	იფსილონ
ფ	ფ	У	у	U	u	უ	Φ	φ	ფი
ქ	ქ	Ф	ф	V	v	ვე	Χ	χ	ხი
ღ	ღ	Х	х	W	w	დუბლვე	Ψ	ψ	ფსი
ყ	ყ	Ц	ц	X	x	იქს	Ω	ω	ომეგა
შ	შ	Ч	ч	Y	y	იგრეკ			
ჩ	ჩ	Ш	ш	Z	z	ზეტ			
ც	ც	Щ	щ						
ძ	ძ	Ъ	ъ						
წ	წ	Ы	ы						
ჭ	ჭ	Ь	ь						
ხ	ხ	Э	э						
ჯ	ჯ	Ю	ю						
ჰ	ჰ	Я	я						

შ Ი Ნ Ა Ა Რ Ს Ი

თ Ა ვ Ი I

თ Ა ვ Ი II

თავი III

პირდაპირი პირობითი განაზომების გაწონასწორების ზოგადი საფუძვლები 65

თავი IV

პირდაპირი პირობითი განაზომების, მათი გაწონასწორებული მნიშვნელობებისა და წონითი ფუნქციების სიზუსტის შეფასება . . 103

თავი V

ერთი პირობითი განტოლების შემთხვევაში განაზომთა გაწონასწორება 136

თავი VI

თავი VII

თავი VIII

თავი IX

არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორება

შესავალი

გეოდეზიის ციკლში შემავალი სამეცნიერო დარგების უპირველესი ამოცანაა გეოდეზიური აღნაგობის[1] ელემენტების ჭარბ განაზომთა ერთობლიობიდან, საძებარ სიდიდეთა (კოორდინატები, ნიშნულები და სხვ.) საიმედო მნიშვნელობების განსაზღვრა. ამ მოქმედებას, ჩვეულებრივ, საველე მასალის კამერულ დამუშავებას უწოდებენ. განაზომთა უცილობელი შეცდომებით წარმოშობილი გაწონასწორებითი პრობლემის გადაჭრისათვის საგანგებო სამეცნიერო დარგის — განაზომთა მათემატიკური დამუშავების წინაშე ისმება საკითხი დასახული სიზუსტისა და სანდოობის მიხედვით, თუ როგორ დავაპროექტოთ გეოდეზიური სისტემა ისე, რომ იგი აუცილებელი და საკმარისი იყოს დედამიწის ნამდვილი სახის (ფორმის და ზომების) დადგენისა და საინჟინრო, სასოფლო-სამეურნეო და სახალხო მეურნეობის სხვა დარგებისათვის. დასმული პრობლემის გადაწყვეტა ხორციელდება განაზომთა შეცდომების თეორიის, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის და განაზომთა ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საშუალებით, რომლებიც ერთიმეორისაგან განსხვავებულ, მაგრამ ამავე დროს მჭიდროდ ურთიერთდაკავშირებულ სამეცნიერო დარგებს წარმოადგენენ [19]. როგორც ცნობილია, პირველი ორი სამეცნიერო დარგი, გარდა განაზომთა გაწონასწორებისა, პასუხობს საკითხს შედეგთა სიზუსტის (განაზომთა სანდოობის) შესახებ, რომლის კრიტერიუმად მიღებულია შედეგთა საშუალო კვადრატული შეცდომა და წონა [18]. მესამე სამეცნიერო დარგი კი წყვეტს საკითხს მოცემულ პირობებში განაზომთა სიზუსტის კრიტერიუმების სანდოობის შესახებ, რომლის მაჩვენებლად ამ კრიტერიუმთა ალბათობას იღებს [13].

სპეციალისტები, რომელთაც ევალებათ გეოდეზიური გაზომვები[2], ადგენენ სამუშაოთა პროექტს, წინასწარ აფასებენ ამ სამუშაოთა სიზუსტეს, ახდენენ განაზომთა შეფასება-გაწონასწორებას, საზღვრავენ საძებარ სიდიდეთა საბოლოო მნიშვნელობებს [18]. მაგალითად, ცნობილია, რომ ტრიგონომეტრიული პუნქტების კოორდინატების განსაზღვრისათვის აუცილებლად საჭიროა ვიცოდეთ: 1. ტრიგონომეტრიული ქსელის ყველა კუთხე და გვერდი, 2. ერთი რომელიმე ტრიგონომეტრიული პუნქტის გეოგრაფიული ან მართკუთხა კოორდინატები, 3. ტრიანგულაციის ქსელის ერთ-ერთი გვერდის აზიმუტი (ან დირექციული კუთხე), 4. იმავე ქსელის ერთ-ერთი პუნქტის ნიშნული და აგრეთვე

[1] გეოდეზიური აღნაგობა ზოგადი ცნებაა და ნიშნავს ქსელს ან ქსელთა სისტემას (იხ. მეორე თავი).

[2] გეოდეზიურ ციკლში შემავალ სამეცნიერო დარგებს (უმაღლესი გეოდეზია, კარტოგრაფია, გრავიმეტრია, გეოდეზიური ასტრონომია, ფოტოგრამმეტრია, საინჟინრო გეოდეზია, სამარკშეიდერო საქმე და სხვ.) ზოგადად მოვიხსენიებთ სიტყვით „გეოდეზია“, მათივე საჭირო გაზომვებს კი გეოდეზიურ გაზომვებს ვუწოდებთ.

ტრიგონომეტრიულ პუნქტებზე ზენიტური მანძილები. ზემოხსენებულთან დაკავშირებით, საჭიროა ცალკეული სამუშაოების კამერული შესრულება შემდეგი თანამიმდევრობით:

1. ტრიანგულაციის ქსელის პუნქტებზე უშუალოდ გაზომილ ჰორიზონტულ მიმართულებათა (კუთხეთა) ოდენობების გამოთვლა (განხილულია VI ტ.);

2. ქსელის სამკუთხედების წინასწარი გამოთვლა (როცა სამკუთხედები საკმაოდ დიდია, საზღვრავენ სფერულ სიჭარბესაც) (განხილულია VIII ტ.);

3. დაცენტრვისა და რედუქციის შესწორებების განსაზღვრა (განხილულია VIII ტ.);

4. ცენტრირება — რედუქციით შესწორებული, ანუ დაყვანილი მიმართულებების ან კუთხეების განსაზღვრა (განხილულია VIII ტ.);

5. გაზომილი ჰორიზონტული მიმართულებების შესწორებათა განსაზღვრა, გეოდეზიური ხაზის გამოსახულების სიმრუდისათვის (გაუსის პროექციაში) (განხილულია II ტ.);

6. გაწონასწორებითი გამოთვლების შესრულება (განხილულია IV ტ.);

7. სამკუთხედთა საბოლოო გამოთვლების შესრულება (განხილულია VIII ტ.);

8. ტრიგონომეტრიული ქსელის პუნქტების კოორდინატების განსაზღვრა (განხილულია VIII ტ.).

საველე მასალის კამერული დამუშავების ჩამოთვლილი საკითხებიდან განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა გაწონასწორებითი გამოთვლების შესრულება. ამიტომ, განაზომთა მათემატიკური დამუშავების ერთ-ერთი დიდმნიშვნელოვანი საკითხია საძებარ სიდიდეთა საიმედო მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის საჭირო გაწონასწორებების რაც შეიძლება ზუსტი და უხოგადესი მეთოდის შერჩევა. ასეთ მეთოდად საერთოდ მიღებულია უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა მ ე თ ო დ ი, რომლის არსი ცნობილია [18] (მეშვიდე პარაგრაფში პირობით ექსტრემუმთან დაკავშირებული საკითხები) და [19] (1, 2 პარაგრაფში და მეცხრე თავში მისი ისტორიული მნიშვნელობისა და გამოყენების საკითხები). წინამდებარე ნაშრომში შედარებით ფართოდ შევეხებით და გამოვიყენებთ დასახელებულ მეთოდს.

უალბათეს შეცდომათა (ან გადახრათა) მ ე ო რ ე თ ვ ი ს ე ბ ა შესაბამისად ტოლზუსტი და არატოლზუსტი განაზომებისათვის

$$[v^2] = \text{minimum},$$

$$[pv^2] = \text{minimum}$$

პირობებით გამოსახული, წარმოადგენს საფუძველს გაზომილი სიდიდის მ რ ა ვ ა ლ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა თ ა გ ა ნ ს ა ი მ ე დ ო ე რ თ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს სიდიდის უმცირეს კვადრატთა მეთოდით განსაზღვრისათვის. ამიტომ ა მ თ ვ ი ს ე ბ ი ს გამოყენების არსს მოკლედ უწოდებენ უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა პ რ ი ნ ც ი პ ს. უმცირეს კვადრატთა ხ ე რ ხ ი კი ეწოდება იმ ხერხს, რომლითაც მოიძებნება განაზომთათვის ისეთი შესწორებები, რომელთა კვადრატების წონებზე ნამრავლების ჯამი მოცემული ამოცანის პირობებისათვის იქნება მინიმუმი. მაშასადამე, ზოგადად შეგვიძლია დავსვათ საკითხი ორგვარად: ვეძებოთ რიცხვები $[pv^2]$ =minimum პირობითი ან მოცემული რიცხვებიდან განვსაზღვროთ ისეთი რიცხვი, რომლიდანაც ამ რიცხვების გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება მინიმუმი. ორივე შემთხვევაში განსაზღვრული რიცხვი უალბათესია, რომელიც თანხლებული იქნება უმცირესი საშუალო კვადრატული შეცდომით, ანუ ხასიათდება უდიდესი წონით.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდი წმინდა მათემატიკური და, ამავე დროს, უნივერსალური მეთოდია. იგი უდიდესი წონის პრინციპზე უფრო ზოგადია, რადგანაც უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება შეიძლება იმ განაზომთა მიმართაც, რომლებიც უცილობელი შეცდომების გარდა სისტემატურ და სხვა სახის შეცდომებსაც შეიცავენ. მაგრამ, აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში განაზომთა სიზუსტის შეფასებაზე ვერაფერს ვიტყვით, რადგანაც შეფასებისათვის განაზომთა შეცდომების თეორიაში მიღებულ კრიტერიუმებს ვერ გამოვიყენებთ. ეს გარემოება აიხსნება იმით, რომ აღნიშნული კრიტერიუმები გამოყვანილია მხოლოდ შემთხვევითი შეცდომებისათვის, რომლებიც ხასიათდება კომპენსაციის თვისებით, რაც მათემატიკურად გამოისახება ასე:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\delta]}{n} = 0 \quad \text{ან} \quad M(v) = 0.$$

აღნიშნულის მიზეზით ა. მარკოვი განაზომთა გაწონასწორებებისა და სიზუსტის შეფასების პრობლემას არ უკავშირებდა არანორმალური კანონის შემცველ განაზომთა შეცდომებს. მისი თქმით, თუ უშუალო განაზომთა შედეგები ურთიერთდამოუკიდებელი და თავისუფალია სისტემატური და მუდმივი შეცდომებისაგან, გაწონასწორების შედეგები მიიღება უმცირესი საშუალო კვადრატული შეცდომით, ანუ უდიდესი წონით და მაშინ მხოლოდ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ავტორების — გაუსისა და ლეჟანდრეს მოთხოვნის საფუძველზე გვექნება საძებარი სიდიდეების საუკეთესო მნიშვნელობები.

ამაში მდგომარეობს განაზომთა მათემატიკური დამუშავების თეორიაში განაზომთა გაწონასწორებებისათვის უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენების აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

ა. მარკოვის მიერ ზემოჩამოყალიბებულ პირობას თუ მხედველობაში არ მივიღებთ და უმცირეს კვადრატთა მეთოდს გამოვიყენებთ არაკომპენსაციის თვისების შემცველი შეცდომების რიგების მიმართ, მაშინ ასეთ პრინციპს ექნება უფრო ფართო გამოყენება, მაგრამ საქმე გვექნება გათანაბრებასთან[1] და არა გაწონასწორებასთან, და, რა თქმა უნდა, ავცდებით განაზომთა შეცდომების თეორიის ძირითად პრინციპს, როგორიცაა საშუალო არითმეტიკულის პრინციპი. ა. მარკოვის ზემოაღნიშნული მოსაზრება დაკავშირებულია გაუსის გამოკვლევებთან, ამიტომ გაწონასწორებისათვის ზემოთ თქმულ პირობას უწოდებენ გაუს-მარკოვის პირობას [11].

ჰელმერტმა, გაუსის მოსაზრებებზე დაყრდნობით, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გაწონასწორების შედეგთა სხვადასხვა ღირსების შესახებ გააკეთა შემდეგი განმარტება:

1. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით განსაზღვრული სიდიდეები იქნება უცნობთა უალბათესი მნიშვნელობები იმ შემთხვევაში, თუ განაზო-

[1] ლიტერატურაში ხშირად გათანაბრებასა და გაწონასწორებას ერთნაირი მნიშვნელობის ცნებებად თვლიან. შევთანხმდეთ და გათანაბრების ქვეშ, განაზომთა საბოლოო სიდიდეების განსაზღვრისათვის ვიგულისხმოთ ის მოქმედებანი, რომლებიც ეყრდნობიან [illegible] [illegible] საფუძველს, ხოლო გაწონასწორებაში მრავალ განაზომთა საბოლოო სიდიდის განსაზღვრისას ვიგულისხმოთ ისეთი მოქმედება, რომელიც ეყრდნობა მხოლოდ კრიტერიუმებს, ანუ განაზომთა საშუალო კვადრატულ შეცდომებს ან განაზომთა წონებს.

მები შეიცავს მხოლოდ ისეთ შეცდომებს, რომლებიც ემორჩილებიან გაუსის კანონს. გარდა ამისა, უალბათესი სიდიდეები იქნება უდიდესი წონის შემცველი და, მაშასადამე, უმცირესი საშუალო კვადრატული შეცდომის (აქ უნდა ვიგულისხმოთ განაზომთა პირველგვარი სიმრავლის მეორე სახის რიგი, იხ. [19]).

2. იმ შემთხვევაში, როცა განაზომთა შეცდომები არ ემორჩილება გაუსის კანონს, მაგრამ, შემთხვევითი შეცდომების კომპენსაციის თვისების შემცველია, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით განსაზღვრული უცნობების მნიშვნელობები *არ იქნება უალბათესი*, მიუხედავად იმისა, რომ მათ ექნებათ უდიდესი წონა (აქ უნდა ვიგულისხმოთ განაზომთა მეორეგვარი სიმრავლე, იხილეთ [19]).

3. როცა განაზომთა შეცდომები არ ემორჩილება კომპენსაციის თვისებას ან მათ შედეგებში შედის არამარტო შემთხვევითი შეცდომები, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გაწონასწორება ისე, ყოველთვის მოგვცემს ცალსახა ამონახსნს, მაგრამ განსაზღვრული მნიშვნელობები *არ იქნება უალბათესი და არ იქნება შემცველი უმცირესი კვადრატული შეცდომებისა.*

აღნიშნულის გამო, საჭიროა ვიცოდეთ, თუ განაზომთა რომელ სიმრავლესთან და რომელი სახის რიგთან გვაქვს საქმე, რის შესაბამისად უნდა ვიხმაროთ ტერმინები: უალბათესი სიდიდე ან საშუალო სიდიდე, უალბათესი შეცდომა, ან უალბათესი გადახრა, საშუალო კვადრატული შეცდომა, ან საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტი).

განაზომთა შეცდომების თეორიის [18] § 2 პირველი ოთხი ძირითადი საკითხის განხილვასთან დაკავშირებით საჭიროებისამებრ გადაწყვეტილია სამი ამოცანა.

პირველი. პირდაპირი ამოცანა, რომლითაც იძებნებოდა ფუნქციის (გამონათვლის) საშუალო კვადრატული შეცდომა, არგუმენტთა (უშუალოდ გაზომილ სიდიდეთა) *და მათი საშუალო კვადრატული შეცდომების საშუალებით.*

მაგალითად, (3 . 4 . 1 . 22) ფორმულის გამოყენებით განისაზღვრა დამაკავშირებელი სამკუთხედის α კუთხის m_α საშუალო კვადრატული შეცდომა უშუალოდ გაზომილი a, c, γ და მათი m_a, m_c და m_γ საშუალო კვადრატული შეცდომების საშუალებით. ანალოგიური მაგალითები აღნიშნული შრომის თითქმის ყველა თავშია განხილული.

მეორე. შებრუნებული ამოცანა, რომლითაც გამოითვლება არგუმენტთა (უშუალოდ გაზომილ სიდიდეთა) საშუალო კვადრატული შეცდომები, როცა ცნობილია ფუნქციის (გამონათვლის) საშუალო კვადრატული შეცდომა.

მაგალითად, იგივე (3. 4. 1. 22) ფორმულის მიხედვით შეიძლება გადაწყდეს საკითხი, თუ რა ოდენობის საშუალო კვადრატული შეცდომით უნდა იყოს გაზომილი სამკუთხედის a, c და γ ელემენტი, რომ α გამონათვლის m_α საშუალო კვადრატული შეცდომა არ გადასცილდეს გარკვეულ ოდენობას. საერთოდ, ასეთი სახის ამოცანებს აქვს მრავალი ამოხსნა, რადგანაც არგუმენტთა (განაზომთა) საშუალო კვადრატული შეცდომები ფუნქციის (გამონათვლის) მო-

ცემული მნიშვნელობისათვის ნებისმიერად შეიძლება შევცვალოთ. პრაქტიკულად მრავალ შემთხვევაში ასეთი ამოცანები დამაკმაყოფილებლად წყდება თ ა ნ ა ბ ა რ ი გ ა ვ ლ ე ნ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი თ, რომლითაც იგულისხმება, რომ ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი (3 . 4 . 1 . 17) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის n შესაკრებები ურთიერთტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot m_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot m_y^2 = \cdots = \frac{m_u^2}{n},$$

რის საფუძველზე აბსოლუტურ მნიშვნელობებზე გადასვლით მივიღებთ

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x} \cdot m_x\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial y} \cdot m_y\right| = \cdots = \left|\frac{m_u}{\sqrt{n}}\right|,$$

სადაც n არგუმენტთა რაოდენობაა.

თანაბარი გავლენის მოხსენებული პრინციპი გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ განაზომთა დასაშვები საშუალო კვადრატული შეცდომების ოდენობები. ასეთი მიდგომა გამოყენებულია [18] წინამდებარე წიგნის მეშვიდე და სხვა თავებშიც.

აქვე შევნიშნავთ, რომ ხშირად პრაქტიკულად ძნელდება რომელიმე არგუმენტის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობის თანაბარი გავლენის პრინციპის შესაბამისად განსაზღვრა. ასეთ შემთხვევაში ამ შეცდომას იღებენ გადიდებულს და, სამაგიეროდ ამცირებენ იმ ელემენტის საშუალო კვადრატულ შეცდომას, რომლის განსაზღვრა უფრო იოლია, რითაც აღწევენ სასურველ შედეგს.

მ ე ს ა მ ე. ა მ ო ც ა ნ ა ი მ პ ი რ ო ბ ა თ ა გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ი ს შ ე ს ა ხ ე ბ, რ ო მ ლ ი ს გ ა ნ ხ ო რ ც ი ე ლ ე ბ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს (გ ა მ ო ნ ა თ ვ ლ ი ს) ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა მ ი ა ღ წ ე ვ ს უ მ ც ი რ ე ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს, ა ნ უ უ დ ი დ ე ს წ ო ნ ა ს.

ამ ამოცანის გადაწყვეტით იგულისხმება გაზომვების ისეთი პირობების დადგენა, რომლითაც მივიღებთ განაზომთა და გამონათვალთა საშუალო კვადრატული შეცდომების რაც შეიძლება მინიმალურ ოდენობებს (ამაში მდგომარეობს უდიდესი წონის პრინციპი). მაგალითად, იგივე (3 . 4 . 1 . 22) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავსვათ საკითხი იმის შესახებ, თუ რა პირობებში შეიძლება m_a იყოს მინიმალური, ანუ როგორი ფორმის უნდა იყოს დამაკავშირებელი სამკუთხედი, რომ მოთხოვნილი პირობა დაკმაყოფილდეს. [18] წიგნის მრავალ ადგილას განხილულია აღნიშნული საკითხი (იხილეთ 3. 7. 3 პარაგრაფი). აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტა ყველა შემთხვევაში არ შეიძლება, რადგანაც ზოგიერთ ფუნქციას არა აქვს მინიმუმი (წყვეტილი ფუნქციები).

ზემოხსენებული ამოცანები დაკავშირებულია მხოლოდ და მხოლოდ ერთი სიდიდის მრავალ განაზომთა რიგების დამუშავებასთან და [18]-ში განხილული ფორმულები არ გამოდგება სხვადასხვა სიდიდის განაზომთა რიგების დამუშავებისათვის. აქ გამონაკლისს შეადგენს შემთხვევა სხვადასხვა სიდიდის ტ ო ლ ზ უ ს ტ განაზომთა რიგის შეფასების შესახებ. მაგალითად, ტოლზუსტი გაზომვების დროს სამკუთხედის კუთხეთა გაწონასწორება, გაზომილი და გაწონასწორებული კუთხის შეფასება ხდება შესაბამისად

$$\alpha_{\text{გაწ.}} = \alpha_{\text{გაზ.}} - \frac{W}{3},$$

$$m_{\alpha_{\text{გაზ.}}} = \pm \frac{W}{\sqrt{3}},$$

$$M_{\alpha_{\text{გაწ.}}} = \frac{m_{\alpha_{\text{გაზ.}}}}{\sqrt{[p]}} = \frac{m_{\alpha_{\text{გაზ.}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = m_{\alpha_{\text{გაზ.}}} \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm W \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ფორმულებით, რადგანაც ტოლზუსტობის გამო ერთი კუთხის შეფასებას ვავრცელებთ დანარჩენ კუთხეებზეც. არატოლზუსტი გაზომვების დროს კი კუთხეთა გაწონასწორებას ვახდენთ მათი შებრუნებული წონების პროპორციულად. მხოლოდ გაზომილ და გაწონასწორებულ კუთხეთა ზემოხსენებული ფორმულებით შეფასებას ვერ ვასრულებთ, რადგანაც აღნიშნული ფორმულები გამოყვანილია ერთი და იგივე სიდიდის განაზომთა რიგის შესაფასებლად; აქ კი საქმე გვაქვს რამდენიმე სხვადასხვა სიდიდის (კუთხის) არატოლზუსტ განაზომთა რიგთან.

როგორც ვხედავთ, განაზომთა შეცდომების თეორია ერთი (ცალკეული) სიდიდის ჭარბ (დამატებით) განაზომთა დამუშავების წესებს გვაძლევს და არაა გათვალისწინებული განაზომ სიდიდეთა შორის მათემატიკური კავშირი. ამ წესებით გაწონასწორებითი სამუშაოების ამოცანის ამოხსნა სრულად შეიძლება იმ შემთხვევაში, როცა ჭარბად გაზომილია მხოლოდ ის სიდიდეები, რომლებიც აუცილებელია მიზნის მისაღწევად, ანუ, როცა შესრულებულია საჭირო გაზომვები (მაგალითად, როცა სამკუთხედში გაზომილია ერთი გვერდი და მხოლოდ ორი კუთხე).

გეოდეზიურ წარმოებაში გარდა *აუცილებელი სიდიდეებისა*, როგორც წესი, მიღებულია გაიზომოს *დამატებითი (ჭარბი) სიდიდეები*, რომლებიც მათთან მათემატიკურ კავშირშია (მაგალითად, სამკუთხედში ზომავენ სამივე კუთხეს). ჭარბ (დამატებით) სიდიდეთა გაზომვა სრულდება შეუკვრელობების საშუალებით საველე კონტროლის შესასრულებლად და განსაზღვრულ სიდიდეთა სიზუსტის გაზრდის მიზნით. გარდა ამისა, ჭარბი (დამატებითი) სიდიდეების განაზომები საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ შესრულებული გაზომვების სიზუსტე. მაშასადამე, *განაზომთა შეცდომების თეორიის ფორმულების საშუალებით გაწონასწორებული სიდიდეები თითქმის ყოველთვის საჭიროა კიდევ გაწონასწორდეს მათ შორის არსებული მათემატიკური კავშირის გათვალისწინებით.* ზემოთქმულიდან იგულისხმება, რომ ურთიერთდამოუკიდებლად ჭარბი განაზომების შედეგად განსაზღვრული სიდიდეების გაწონასწორება საჭიროა შესრულდეს ორ საფეხურად: ყოველი სიდიდის ჭარბ განაზომთა საშუალებით განისაზღვრება გაზომილი სიდიდის მარტივი ან წონითი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობა (უალბათესი სიდიდე), შემდეგ იღებენ რა ამ წინასწარ გაწონასწორებული სიდიდეების მნიშვნელობებს, როგორც უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების მნიშვნელობებს (სათანადო წონებით), მათ კიდევ გააწონასწორებენ ამ სიდიდეთა შორის მათემატიკური კავშირის (პირობის) მხედველობაში მიღებით და შედეგის სიზუსტეს შეაფასებენ. სისტემაში შემავალ გაწონასწორებულ სიდიდეთა იგივე მნიშვნელობებს მივიღებთ, თუ თანადროულად — ცალკეულ ელემენტთა საშუალო სი-

დიდეების განსაზღვრის გარეშე, გაწონასწორებაში შევიტანთ ელემენტთა მრავალჯერ განაზომებს. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ეს გზა ზემოხსენებულ პირველ ხერხთან შედარებით ნაკლებად მოსახერხებელია.

ცხადია, რომ გაწონასწორებული $L_i = l_i + \varepsilon_i$ სიდიდეები იქნება მიახლოებითი. გაწონასწორებითი სამუშაოების ამოცანაა, რაც შეიძლება გავზარდოთ განაზომების (უალბათესი სიდიდეების) სიზუსტეები, ანუ შევამციროთ მათი საშუალო კვადრატული შეცდომები. ამავე დროს, ისიც ხდება, რომ ზოგიერთი გაწონასწორებული სიდიდე გამოდის უფრო მეტი აბსოლუტური შეცდომით, ვიდრე მას ჰქონდა გაწონასწორებამდე. საერთოდ კი გაწონასწორებული სიდიდეების შეცდომები მათ განაზომთა შეცდომებთან შედარებით მცირეა. აღნიშნულის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი: ვთქვათ, სამკუთხედში კუთხეები გაზომილია შეცდომებით: $\delta_1 = +6''$; $\delta_2 = +5''$ და $\delta_3 = -2''$. მაშასადამე. შეუკვრელობა $W = +9''$. უმცირეს კვადრატთა ხერხით გაწონასწორების შედეგად შესწორებები იქნება $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -3''$. მაშასადამე, გაწონასწორებული კუთხეები მიიღება $\delta_1 = +3''$, $\delta_2 = +2''$ და $\delta_3 = -5''$ შეცდომით. როგორც ვხედავთ, გაწონასწორების შედეგად პირველი ორი კუთხის აბსოლუტური შეცდომა შემცირდა და მესამე კუთხისა კი გაიზარდა. განხილული მაგალითიდან ნათლად ჩანს, რომ გაწონასწორებამდე შეცდომათა კვადრატების ჯამი მეტია ($[\delta^2] = 65$), ვიდრე გაწონასწორების შემდეგ ($[\delta^2] = 38$).

ასეთი სახის რიგების დამუშავება-შეფასების საკითხი [18] წიგნში მოცემული გეგმის მიხედვით (პირდაპირი პირობითი ტოლზუსტი და არატოლზუსტი, არაპირდაპირი, ტოლზუსტი და არატოლზუსტი განაზომების გაწონასწორების საკითხები), მხოლოდ და მხოლოდ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მომარჯვებული გამოყენებით გადაწყდება.

აქვე შევნიშნავთ, რომ $[p\varepsilon\varepsilon] = \mathrm{minimum}$, ანუ უმცირეს კვადრატთა პრინციპის გამოყენებით ერთბაშად თუ მრავალჯგუფად გაწონასწორებითი სამუშაოების შესრულება შეიძლება მკაცრად, მხოლოდ მაშინ, თუ გაწონასწორებისას დაცული იქნება შემდეგი ორი პირობა: 1. უნდა მოხდეს მთელი სისტემის ერთბაშად გაწონასწორება, რადგანაც მთელი გეოდეზიური აღნაგობის (ქსელთა ერთობლიობის) ნებისმიერ ნაწილებად დაყოფით წყდება განაზომ ელემენტთა შორის შესაბამისი კავშირი, რის გამო დიდი ქსელების ნაწილნაწილ, ანუ თანდათანობითი შეერთებით დამუშავება მნიშვნელოვნად დაამახინჯებს შედეგს. 2. უმცირეს კვადრატთა პრინციპით განსაზღვრული ε_i შესწორებები უნდა ეხებოდეს მხოლოდ და მხოლოდ უშუალოდ გაზომილ ელემენტებს და არა მათ ფუნქციებს. მაგალითად, ხშირად ტრიგონომეტრიულ ქსელში გაზომილი მიმართულებების გაწონასწორების ნაცვლად აწონასწორებენ კუთხეებს, რითაც ირღვევა ზემოხსენებული მეორე პირობა, ხოლო ტრიანგულაციის ცალკეული ფიგურების მიხედვით განაზომთა გაწონასწორების გამო ირღვევა პირველი პირობა.

ზემოხსენებული პირობების დარღვევით იღებენ გაწონასწორების სხვადასხვა სახის მიახლოებით ხერხებს. იმ შემთხვევაში, როცა ეს მიახლოებითი ხერხები შედეგთა დიდ დამახინჯებას არ იწვევს, მათ იყენებენ დაბალი კლასის ტრიანგულაციის გაწონასწორებისათვის და ზოგჯერ ამ ხერხს მიმართავენ მაღალი კლასის ტრიანგულაციის წინასწარ გაწონასწორების დროსაც.

გეოდეზიური ამოცანების ამოხსნის მოთხოვნათა შესაბამისად უმცირეს კვადრატთა მეთოდის თეორიისა და პრაქტიკის ძირითადი ამოცანებია:

1. გეოდეზიური პროექტის შედგენის დროს გამოთვლები (შესასრულებელ სამუშაოთა ანგარიში და მეცნიერული ორგანიზაცია) (VIII ტ.).

2. შესასრულებელ სამუშაოთა სიზუსტის წინასწარი (სავარაუდო, პირველადი) შეფასება (VIII ტ.).

3. განაზომთა (უალბათეს სიდიდეთა) გაწონასწორება და სიზუსტის შეფასება, რომელიც თავის მხრივ გულისხმობს:

a. მეორადი უალბათესი, ანუ გაწონასწორებული სიდიდეების განსაზღვრას;

b. ამ გაწონასწორებული მნიშვნელობების ნებისმიერი (ზოგადი სახის) ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის, ანუ შებრუნებული წონის განსაზღვრას;

c. თვით გაწონასწორებული სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრას;

d. ყოველი ცალკეული განაზომების საშუალო კვადრატული შეცდომის (შეცდომათა საზომის) განსაზღვრას გაწონასწორებული სიდიდეების მონაცემებით.

წინამდებარე სახელმძღვანელოში *a*, *b*, *c* და *d* საკითხებს განვიხილავთ პირდაპირი პირობითი განაზომების გაწონასწორების შესაბამისად.

პირდაპირი პირობითი განაზომების გაწონასწორება

თავი I

პირობით განტოლებათა სახეები

(გაწონასწორებული სიდიდეების განსაზღვრის ამოცანისათვის)

მათემატიკურ თანაფარდობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გეოდეზიური აღნაგობის (აგებულების) ელემენტები, ეწოდება პირობები [9].

4. 1. 1. ფიგურის[1] განტოლება

ფიგურის განტოლება გამოსახავს გეომეტრიულ პირობას, რომელიც მოითხოვს ჩაკეტილ ფარგებში (სამკუთხედები, მრავალკუთხედები) უშუალოდ გაზომილი კუთხეების ჯამის ტოლობას მათ თეორიულ ჯამთან.

ა. სამკუთხედის პირობა

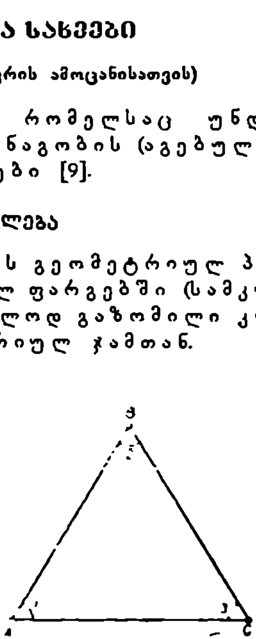
ბრტყელ სამკუთხედში (ნახ. 1) უშუალოდ გაზომილი 1, 2, 3 კუთხეები თეორიულად უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგი სახის გეომეტრიულ პირობას

$$1+2+3-180^\circ=0. \qquad (4.1.1.1)$$ [2]

მაგრამ, პრაქტიკულად ვიღებთ

$$1+2+3-180^\circ=W, \qquad (4.1.1.2)$$

სადაც W შეუკვრელობა (უბმაობა, შეცდომა) წარმოადგენს გაზომილ კუთხეთა შეცდომების ფუნქციას.



ნახ. 4.1.1.1

მიღებული შეუკვრელობის მოსპობის მიზნით, გაზომილ კუთხეებში, შესაბამისად შევიტანოთ (1), (2), (3) შესწორებები, რის გამო (2) ტოლობა გადაიწერება

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)-180^\circ=0, \qquad (4.1.1.3)$$

---

1 ფიგურაში ვგულისხმობთ ჩაკეტილ გარე ფარგს (კონტურს), რომლის მოხვეული კუთხეები გაზომილია.

2 როდესაც რომელიმე პარაგრაფის კითხვის დროს მითითებული იქნება ვთქვათ (4. 1. 1. 1) ფორმულა (მაგალითი, ცხრილი ან ნახაზი), ეს ნიშნავს მე-4 ტომს, პირველ თავს, პირველ პარაგრაფს და პირველ ფორმულას (მაგალითს, ცხრილს ან ნახაზს), ხოლო თუ მითითებულია (1) ფორმულა (მაგალითი, ცხრილი ან ნახაზი), ეს ნიშნავს იმავე პარაგრაფის პირველ ფორმულას (მაგალითს, ცხრილს ან ნახაზს).

ტოლობის სახით, რაც იგივურია (1) ტოლობისა. მაშასადამე, პრაქტიკულად მიღებული (2) ტოლობისა და თეორიული (3) ტოლობის სხვაობით შეიძლება განისაზღვროს დამოკიდებულება შეუკვრელობასა და შესწორებებს შორის შემდეგი სახით

$$-\Big((1)+(2)+(3)\Big)=W. \qquad (4.1.1.4)$$

მაშასადამე, შეუკვრელობა ტოლია უშუალოდ გაზომილ კუთხეთა შესწორებების ჯამისა შებრუნებული ნიშნით.

ამავე დროს (4) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს პირობა

$$(1)+(2)+(3)+W=0, \qquad (4.1.1.5)$$

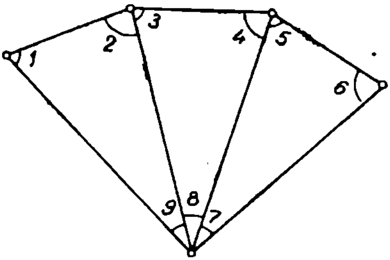
რაც მოითხოვს იმას, რომ (1), (2), (3) შესწორებათა და W შეუკვრელობის ალგებრული ჯამი იყოს ნულის ტოლი.

არსებულ ლიტერატურაში (5) ტოლობას უწოდებენ სამკუთხედის პირობით განტოლებას ან სამკუთხედის შეცდომათა (ჯობს შესწორებათა) განტოლებას.

როგორც ვხედავთ, ისმის საკითხი (2) დამოკიდებულებით მიღებული W შეუკვრელობის საფუძველზე (1), (2), (3) შესწორებათა განსაზღვრისა, ანუ სამკუთხედის უშუალოდ გაზომილი კუთხეების გაწონასწორებისა. ხშირად W უბმაობას თავისუფალ წევრს უწოდებენ.

ბ. შეკრული პოლიგონის პირობა

ამ შემთხვევაშიც საჭიროა, რომ გაზომილი ბრტყელი კუთხეების ჯამი უდრიდეს $2d(n-2)$, სადაც n პოლიგონის კუთხეების რაოდენობის გამომ-



ნახ. 4.1.1.2

სახველი რიცხვია. მაგალითად, ზემოხსენებულის თანახმად (2), (3) ნახაზების შესაბამისად მივიღებთ შემდეგი სახის ტოლობებს:

თეორიულად (ბრტყელი ფარგის შემთხვევაში)

$$\left.\begin{array}{l}1+2+3+\cdots+9-540^\circ=0\\ 1+2+3+\cdots+9-1260^\circ=0\end{array}\right\}. \qquad (4.1.1.6)$$

პრაქტიკულად კი გვექნება

$$\left.\begin{array}{l}1+2+3+\cdots+9-540^\circ=W_1\\ 1+2+3+\cdots+9-1260^\circ=W_2\end{array}\right\}. \qquad (4.1.1.7)$$

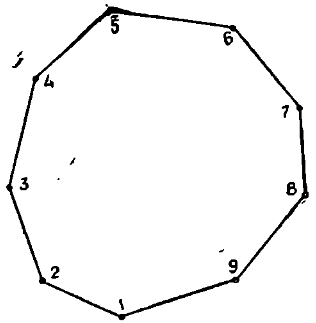
(6) ტოლობების იგივური იქნება

$$\left.\begin{aligned}1+(1)+2+(2)+\cdots+9+(9)-540^\circ=0\\1+(1)+2+(2)+\cdots+9+(9)-1260^\circ=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.1.8)$$

ე. ი. საჭიროა, რომ

$$\left.\begin{aligned}(1)+(2)+(3)+\cdots+(9)+W_1=0\\(1)+(2)+(3)+\cdots+(9)+W_2=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.1.9)$$

(9) ტოლობებს ზოგადად ეწოდება ფიგურის პირობითი განტოლებები.



ნახ. 4.1.1.3

ცხადია, რომ სამკუთხედის პირობითი განტოლება მის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს, ამიტომ სამკუთხედის პირობით განტოლებასაც ფიგურის პირობით განტოლებას უწოდებენ.

c. ვერტიკალურ კუთხეთა პირობა

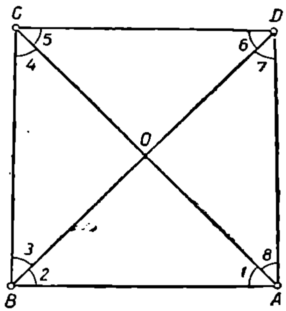
ეს პირობა მოითხოვს O წერტილში (ნახ. 4) შემავალ ვერტიკალურ კუთხეთა ტოლობის გარდა 180°-მდე მათი შემვსები კუთხეების ჯამები იყოს ურთიერთტოლი.

თეორიული პირობა:

$$\left.\begin{aligned}1+2-5-6=0\\3+4-7-8=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.1.10)$$

პრაქტიკულად მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}1+2-5-6=W_1\\3+4-7-8=W_2\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.1.11)$$



ნახ. 4.1.1.4

(10)-ში შესწორებების შეტანით, მივიღებთ მის იგივურ განტოლებებს,

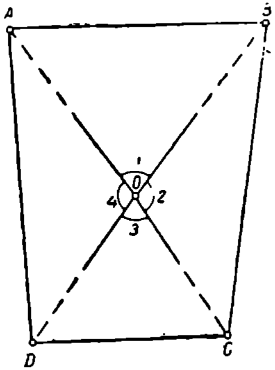
$$\left.\begin{aligned}1+(1)+2+(2)-5-(5)-6-(6)=0\\3+(3)+4+(4)-7-(7)-8-(8)=0\end{aligned}\right\}.$$

(11) და (12) სხვაობით, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}(1)+(2)-(5)-(6)+W_1=0\\(3)+(4)-(7)-(8)+W_2=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.1.13)$$

4. 1. 2. ჰორიზონტის (სადგურის) განტოლება

ჰორიზონტის განტოლება გამოსახავს გეომეტრიულ პირობას, რომლითაც საჭიროა რაიმე წერტილში შემავალ მიმართულებათა შორის ყველა კუთხის უშუალო განაზომთა ჯამი უდრიდეს 360°.



ნახ. 4.1.2.1

ვთქვათ, O წერტილში ოთხ მიმართულებას შორის უშუალოდ გაზომილია 1, 2, 3, 4 კუთხეები (ნახ. 1).

ფიგურის პირობითი განტოლების ანალოგიურად დავწერთ:

თეორიულ განტოლებას

$$1+2+3+4-360°=0. \qquad (4.1.2.1)$$

პრაქტიკულად მივიღებთ

$$1+2+3+4-360°=W. \qquad (4.1.2.2)$$

(1) დამოკიდებულების იგივური განტოლება იქნება

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+4+(4)-360°=0. \qquad (4.1.2.3)$$

(2) და (3) ტოლობის სხვაობით გვექნება

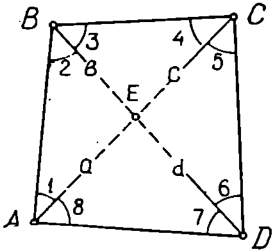
$$(1)+(2)+(3)+(4)+W=0. \qquad (4.1.2.4)$$

(4) დამოკიდებულებას უწოდებენ ჰორიზონტის პირობით განტოლებას ან ჰორიზონტის შეცდომათა (შესწორებათა) განტოლებას.

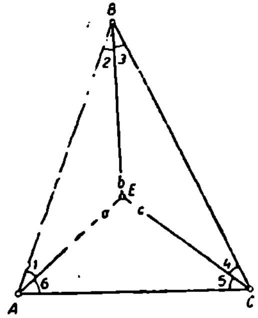
4. 1. 3. პოლუსის განტოლება

პოლუსის განტოლება გამოსახავს ტრიგონომეტრიულ პირობას, რომელიც მოითხოვს პოლუსის შესაბამისი ყოველი წყვილი გადაკვეთის კუთხეთა სინუსების ფარდობათა სრული ნამრავლი უდრიდეს ერთს.

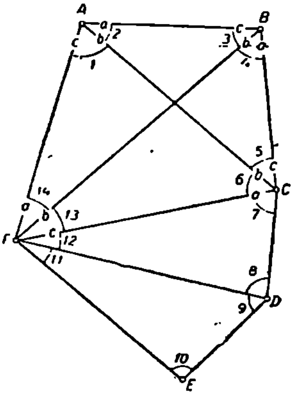
პოლუსს უწოდებენ იმ წერტილს, რომელიც მიღებულია ჩაკეტილი ქსელის ყველა წვეროდან გამოსულ მიმართულებათა კუთხური გადაკვეთით (ნახ. 1 და 2. E წერტილი) ან ქსელში ჩაკეტილი ფიგურის ყველა წვეროდან გამოსულ მიმართულებათა კუთხური გადაკვეთით (ასეთი გადაკვეთა მე-3 ნახაზზე მინიმუმ იქნება სამი: A, B, F წერტილები. ნახ. 4, B წერტილი და ნახ. 5 და 6 ყველა წერტილი).



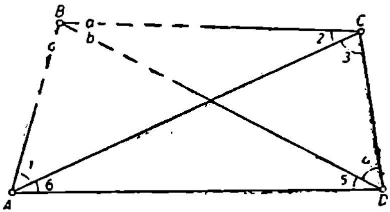
ნახ. 4.1.3.1



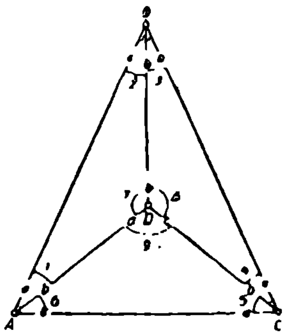
ნახ. 4.1.3.2



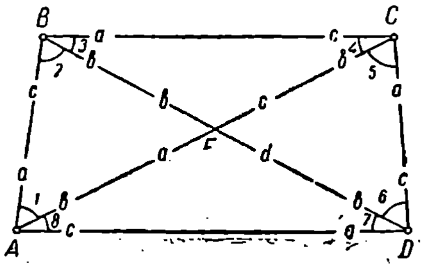
ნახ. 4.1.3.3



ნახ. 4.1.3.4



ნახ. 4.1.3.5



ნახ. 4.1.3.6

გეომეტრიულად პოლუსის პირობითი განტოლებით საჭიროა, რომ პოლუსის შესაბამისმა ყველა კუთხურმა გადაკვეთამ (ან, რაც იგივეა, ყველა ხაზოვანმა გადაკვეთამ) მოგვცეს ერთი წერტილი (პოლუსი), ე. ი. თეორიულად ადგილი არ უნდა ექნეს შეცდომის სამკუთხედს. მაშასადამე, მოთხოვნილი პირობის საფუძველზე დავწერთ პოლუსებში შემავალი გვერდების ფარდობათა სრული ნამრავლისა და შესაბამის კუთხის სინუსთა ფარდობების სრული ნამრავლის ერთისადმი ტოლობას:

ნახ. 1 და 2-სათვის (პოლუსი მხოლოდ E წერტილია)

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}=\frac{\sin 2}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 6}{\sin 5}\cdot\frac{\sin 8}{\sin 7}=1\,, \tag{4.1.3.1}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 2}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 6}{\sin 5}=1\,. \tag{4.1.3.2}$$

მე-3 ნახაზის (A, B, F წერტილებისათვის)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 5}{\sin[3+4]}\cdot\frac{\sin[13+14]}{\sin 6}\cdot\frac{\sin 3}{\sin 14}=1\\
&\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 13}{\sin[5+6]}\cdot\frac{\sin[1+2]}{\sin 14}\cdot\frac{\sin 5}{\sin 2}=1\\
&\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 1}{\sin[13+14]}\cdot\frac{\sin[3+4]}{\sin 2}\cdot\frac{\sin 13}{\sin 4}=1\\
&\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 3}{\sin[1+2]}\cdot\frac{\sin[5+6]}{\sin 4}\cdot\frac{\sin 1}{\sin 6}=1
\end{aligned}\right\} \tag{4.1.3.3}$$

ნახ. 4-სათვის (პოლუსი მხოლოდ B წერტილია)

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 4}{\sin[2+3]}\cdot\frac{\sin[1+6]}{\sin 5}\cdot\frac{\sin 2}{\sin 1}=1\,. \tag{4.1.3.4}$$

ნახ. 5 და 6-ის ნებისმიერი წერტილისათვის დაიწერება $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$ ტოლობის მიხედვით ტრიგონომეტრიული პირობა. მაგალითად, ნახ. 5-ის A წერტილისათვის

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sin 7}{\sin 2}\cdot\frac{\sin 5}{\sin 9}\cdot\frac{\sin[2+3]}{\sin[4+5]}=1\,. \tag{4.1.3.5}$$

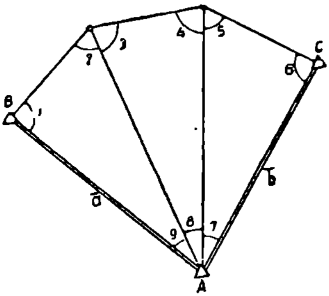
ნახ. 6-ის დიაგონალების ფიქტიური გადაკვეთის E წერტილისათვის

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}=\frac{\sin 2}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 6}{\sin 5}\cdot\frac{\sin 8}{\sin 7}=1\,. \tag{4.1.3.6}$$

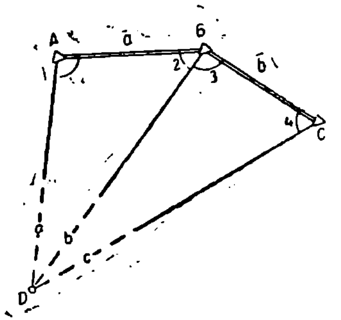
ვიდრე ზემომოყვანილი პოლუსის განტოლებებს დავიყვანდეთ საანგარიშო სახემდე, განვიხილოთ კიდევ ორი ტრიგონომეტრიული პირობა.

4. 1. 4. გვერდების განტოლება

გვერდების განტოლება[1] გამოსახავს ტრიგონომეტრიულ პირობას, რომლითაც საჭიროა წერტილში (არაპოლუსი) შემავალ განაპირა ხისტი გვერდების ფარდობისა და შესაბამის ყველა გადაკვეთის კუთხეების სინუსების სათანადო ფარდობათა ნამრავლი უდრიდეს ერთს (ნახ. 1 და 2) ან ქსელის (ჯაჭვის) ურთიერთდაშორებული განაპირა ხისტი გვერდების ფარდობისა (ნახ. 3) და ყველა დამაკავშირებელი კუთხის სათანადო სინუსების ფარდობათა ნამრავლი უდრიდეს ერთს.

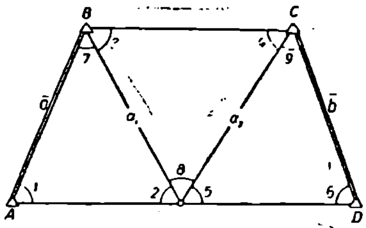


ნახ. 4.1.4.1



ნახ. 4.1.4.2

გვერდების განტოლების პირობის თანახმად ნახ. (1), (2) და (3) თეორიულად საჭიროა, რომ მაღალი კლასის ადრე შედგენილ ტრიანგულაციის $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ხისტ გვერდებს შორის ჩასმული უფრო დაბალი კლასის სამკუთხედების ელემენტებისა და საწყისი (ვთქვათ $\bar{a}$) გვერდის საშუალებით გამოთვლილი $\bar{b}$ გვერდის მნიშვნელობა უდრიდეს მის მოცემულ (ხისტ) მნიშვნელობას, ე. ი. დავწერთ:



ნახ. 4.1.4.3

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4} \cdot \frac{\sin 5}{\sin 6} = 1\,, \tag{4.1.4.1}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin 1}{\sin [1+2]} \cdot \frac{\sin [3+4]}{\sin 4} = 1\,, \tag{4.1.4.2}$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4} \cdot \frac{\sin 5}{\sin 6} = 1\,. \tag{4.1.4.3}$$

[1] იგულისხმება არათავისუფალი ქსელი. იხილეთ II თავი.

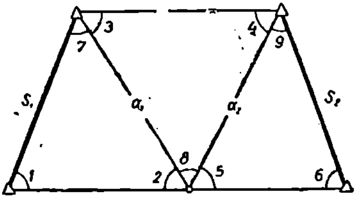
4. 1. 5. ბაზისების განტოლება

ბაზისების განტოლება (იგულისხმება არათავისუფალი ქსელი) გამოსახავს ტრიგონომეტრიულ პირობას, რომლითაც საჭიროა ქსელის (ჯაჭვის) ბაზისების სიგრძეთა ფარდობისა და მათ შორის ყველა დამაკავშირებელი კუთხის სათანადო სინუსების ფარდობათა ნამრავლი ,უდრიდეს ერთს.

ბაზისების პირობის თანახმად თეორიულად საჭიროა, რომ S_1 და S_2 ბაზისს შორის ჩასმული სამკუთხედების ელემენტებისა და პირველი, ვთქვათ S_1 ბაზისის საშუალებით გამოთვლილი S_2 ბაზისის მნიშვნელობა უდრიდეს მის უშუალოდ განაზომ (მოცემულ) მნიშვნელობას, რის გამო დავწერთ:

$$\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4} \cdot \frac{\sin 5}{\sin 6} = 1 . \qquad (4.1.5.1)$$

შენიშვნა. როგორც ვხედავთ, გვერდებისა (4. 1. 4. 3) და ბაზისების (1) პირობითი განტოლებები აგებულებით ერთნაირია, მაგრამ მათ შორის არსებითი განსხვავებაა იმ მხრივ, რომ გვერდების პირობით განტოლებაში შემავალი გვერდების სიგრძეების შესწორება არ ხდება ქსელის გაწონასწორების ანგარიშზე, ხოლო ბაზისების პირობით განტოლებაში შემავალი ბაზისების სიგრძეების შესწორება კი ხდება ქსელის გაწონასწორების ანგარიშზე. აღნიშნულ გარემოებას იწვევს ის, რომ საინჟინრო გეოდეზიური და სამარკშეიდერო სამუშაოების შესრულებისას ობიექტური პირობების გამო იძულებული ხდებიან ბაზისები შეარჩიონ ისეთ რელიეფზე, რომელიც არ იძლევა საშუალებას ბაზისების სათანადო სიზუსტით (მაღალი) გაზომვას (პორტალების, შტრეკების პუნქტების განსაზღვრისას, ნაგებობებზე არსებული პუნქტების კოორდინატების ჩამოტანა და სხვ.).



ნახ. 4.1.5.1

4. 1. 6. პოლუსის, გვერდებისა და ბაზისების პირობითი განტოლებების დაყვანა საანგარიშო სახეზე

იმ შემთხვევაში, როცა გამოთვლებს აწარმოებენ არითმომეტრით, მაშინ პოლუსის (4. 1. 3. 3.) და გვერდების (4. 1. 4. 1) თეორიულ პირობით ტოლობებს აქვს უცვლელი სახე:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin 5}{\sin[3+4]} \cdot \frac{\sin(13+14)}{\sin 6} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 14} = 1 \\ &\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4} \cdot \frac{\sin 5}{\sin 6} = 1 \end{aligned}\right\} . \qquad (4.1.6.1)$$

ხოლო, როცა გამოთვლა წარმოებს ლოგარითმებით, მაშინ საჭიროა შემდეგი პირობა:

$$\left.\begin{aligned} \lg \frac{\sin 5}{\sin[3+4]} \frac{\sin[13+14]}{\sin 6} \frac{\sin 3}{\sin 14} &= 0 \\ \lg \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \frac{\sin 1}{\sin 2} \frac{\sin 3}{\sin 4} \frac{\sin 5}{\sin 6} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.1.6.2}$$

განაზომთა თანხლებული შეცდომების გამო, პრაქტიკულად გვექნება არა (1) და (2), არამედ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin 5}{\sin[3+4]} \cdot \frac{\sin[13+14]}{\sin 6} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 14} &= 1+r_1 \\ \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4} \cdot \frac{\sin 5}{\sin 6} &= 1+r_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.1.6.3}$$

და

$$\left.\begin{aligned} \lg \frac{\sin 5}{\sin[3+4]} \frac{\sin[13+14]}{\sin 6} \frac{\sin 3}{\sin 14} &= \lg(1+r_1) = W_1 \\ \lg \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \frac{\sin 1}{\sin 2} \frac{\sin 3}{\sin 4} \frac{\sin 5}{\sin 6} &= \lg(1+r_2) = W_2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.1.6.4}$$

მოხერხებულობის გამო გამოთვლები ხდება ლოგარითმებით, ამიტომ ჩვენც ასე მოვიქცეთ და განვიხილოთ (4) ტოლობები. დავწეროთ (2) და (4) ტოლობები გაშლილი სახით, შესაბამისად მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} &(\lg\sin 5+\lg\sin[13+14]+\lg\sin 3)-(\lg\sin[3+4]+\lg\sin 6+ \\ &\qquad +\lg\sin 14)=0 \\ &(\lg\bar{a}+\lg\sin 1+\lg\sin 3+\lg\sin 5)-(\lg\bar{b}+\lg\sin 2+\lg\sin 4+ \\ &\qquad +\lg\sin 6)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.1.6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\lg\sin 5+\lg\sin[13+14]+\lg\sin 3)-(\lg\sin[3+4]+\lg\sin 6+ \\ &\qquad +\lg\sin 14)=W_1 \\ &(\lg\bar{a}+\lg\sin 1+\lg\sin 3+\lg\sin 5)-(\lg\bar{b}+\lg\sin 2+\lg\sin 4+ \\ &\qquad +\lg\sin 6)=W_2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.1.6.6}$$

შევიტანოთ (6) ტოლობებში სათანადო შესწორებები, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} &(\lg\sin[5+(5)]+\lg\sin[13+(13)+14+(14)]+\lg\sin[3+(3)])- \\ &-(\lg\sin[3+(3)+4+(4)]+\lg\sin[6+(6)]+\lg\sin[14+(14)])=0 \\ &\text{და} \\ &(\lg\bar{a}+\lg\sin[1+(1)]+\lg\sin[3+(3)]+\lg\sin[5+(5)])- \\ &-(\lg\bar{b}+\lg\sin[2+(2)]+\lg\sin[4+(4)]+\lg\sin[6+(6)])=0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.1.6.7}$$

(7) ტოლობა არის იგივური (5) ტოლობებისა. მაშასადამე, პრაქტიკულად მიღებულ (6) ტოლობას შეიძლება გამოვაკლოთ (7) ტოლობა, რითაც გამოისახება დამოკიდებულება W_i თავისუფალ წევრსა (შეუკვრელობასა) და განაზომი კუთხეების სინუსების ლოგარითმების შესწორებებს შორის. ამ დამოკიდებულების წრფივი სახით მარტივად გამოსახვის მიზნით საჭიროა განაზომი კუთხეების სინუსების ლოგარითმების შესწორებები (მაგალითად, $\lg\sin[\alpha_i+\varepsilon_i]-$ $-\lg\alpha_i$) შეიცვალოს ε_i შესწორებისა და $\Delta\alpha_i$ სიდიდის ნამრავლით. $\Delta\alpha_i$ სიმბოლოთი აღინიშნება α_i კ უ თ ხ ი ს ს ი ნ უ ს ი ს ლ ო გ ა რ ი თ მ ი ს ც ვ ა ლ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ო დ ე ნ ო ბ ა ა მ კ უ თ ხ ი ს ე რ თ ი ს ე კ უ ნ დ ი თ შ ე ც ვ ლ ი ს დ რ ო ს.

მაშასადამე, ზოგადად დავწერთ:

$$\lg\sin[\alpha_i+\varepsilon_i]-\lg\sin\alpha_i=\Delta_{\alpha_i}\cdot\varepsilon_i, \tag{4.1.6.8}$$

სადაც

$$\Delta_{\alpha_i}=\lg\sin(\alpha_i+1'')-\lg\sin\alpha_i. \tag{4.1.6.8'}$$

(8′) გამოსახულება შედეგია შემდეგი ტოლობის

$$\Delta_{\alpha_i}=\lg\frac{\sin(\alpha_i+1'')}{\sin\alpha_i}=\lg\frac{\sin\alpha_i\cdot\cos 1''+\cos\alpha_i\cdot\sin 1''}{\sin\alpha_i}\cdot \tag{4.1.6.9}$$

ვგულისხმობთ, რომ $\cos 1''=1$, მაშინ (9) გადაიწერება ასე:

$$\Delta_{\alpha_i}=\lg\left(1+\frac{1}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_i\right)\cdot \tag{4.1.6.10}$$

ვსარგებლობთ (3.1.7.33) ფორმულით

$$\lg(1+x)=M_{10}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)\approx M_{10}\cdot x,$$

ე. ი. დაშლის მხოლოდ პირველი წევრის მხედველობაში მიღებით (10) ტოლობა გადაიწერება ასე:

$$\Delta_{\alpha_i}\approx\frac{M_{10}}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_i. \tag{4.1.6.11}$$

როგორც ვიცით, $M_{10}=\lg e=0{,}4342945$, $\rho''=206264{,}8$. ამ სიდიდეთა (11)-ში შეტანით და Δ_i სიდიდის ლოგარითმის მანტისის მეშვიდე ნიშნის ერთეულებში გამოსახვით, გვექნება:

$$\Delta_{\alpha_i}\approx\frac{M_{10}\cdot 10^7}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha_i=21{,}055\operatorname{ctg}\alpha_i. \tag{4.1.6.12}$$

იგივე სიდიდე გამოსახული მანტისის მეექვსე ერთეულებში იქნება

$$\Delta_{\alpha_i}\approx\frac{M_{10}\cdot 10^6}{\rho''}\operatorname{ctg}\alpha=2{,}106\operatorname{ctg}\alpha_i. \tag{4.1.6.13}$$

(11) ფორმულით სარგებლობენ იმ შემთხვევაში, როცა პირობით განტოლებაში შემავალი კუთხეები ახლოა 90°. ყველა დანარჩენ შემთხვევაში

და საერთოდ, სამარკშეიდერო წარმოებაში Δ_{α_i}-ის სიდიდედ მიღებულია α_i კუთხის სინუსის ლოგარითმის ცხრილური სხვაობა, როცა α_i კუთხე იცვლება ერთი სეკუნდით. ამავე დროს უნდა გვახსოვდეს, რომ Δ_i ცხრილური სხვაობა იქნება პლუს ნიშნით, როცა α_i კუთხე მახვილია და მინუსი ნიშნით, როცა α_i კუთხე ბლაგვია.

ზემოხსენებულის საფუძველით (8) დამოკიდებულების გამოყენებით (7) ტოლობების წევრები შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი გამოსახულების ანალოგიურად

$$\lg\sin[5+(5)] = \lg\sin 5 + \Delta_5\cdot(5);$$

$$\lg\sin[13+(13)+14+(14)] = \lg\sin[13+14] + \Delta_{13+14}[(13)+(14)]. \qquad (4.1.6.14)$$

მაშასადამე, (7) ტოლობები დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{array}{l} \lg\sin 5+\Delta_5(5)+\lg\sin[13+14]+\Delta_{13+14}[(13)+(14)]+ \\ \quad +\lg\sin 3+\Delta_3(3)-\lg\sin[3+4]-\Delta_{3+4}[(3)+(4)]- \\ \quad -\lg\sin 6-\Delta_6(6)-\lg\sin 14-\Delta_{14}(14)=0 \\ \text{და} \\ \lg\bar{a}+\lg\sin 1+\Delta_1(1)+\lg\sin 3+\Delta_3(3)+\lg\sin 5+\Delta_5(5)- \\ -\lg\bar{b}-\lg\sin 2-\Delta_2(2)-\lg\sin 4-\Delta_4(4)-\lg\sin 6-\Delta_6(6)=0 \end{array}\right\}. \qquad (4.1.6.15)$$

(6) ტოლობებს შესაბამისად გამოვაკლოთ (15) ტოლობები; მივიღებთ წრფივი სახით პოლუსისა და გვერდების ტოლობებს:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_5(5)+\Delta_{13+14}[(13)+(14)]+\Delta_3(3)-\Delta_{3+4}[(3)+(4)]- \\ \qquad -\Delta_6(6)-\Delta_{14}(14)+W_1=0; \\ \Delta_1(1)+\Delta_3(3)+\Delta_5(5)-\Delta_2(2)-\Delta_4(4)-\Delta_6(6)+W_2=0 \end{array}\right\}. \qquad (4.1.6.16)$$

კვადრატული ფრჩხილების გახსნით პოლუსის პირობით განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta_3-\Delta_{3+4})\cdot(3)-\Delta_{3+4}(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+ \\ +\Delta_{13+14}(13)+(\Delta_{13+14}-\Delta_{14})(14)+W_1=0 \end{array}\right\}, \qquad (4.1.6.17)$$

სადაც W_1 გამოთვლილია (6) ტოლობით. გვერდების პირობითი განტოლება დალაგდება ასე:

$$\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+W_2=0, \qquad (4.1.6.18)$$

სადაც W_2 გამოთვლილია (6) ტოლობით.

იგივე სახის იქნება ბაზისების (4. 1. 5. 1) განტოლების შესაბამისი წრფივი განტოლება (როცა არაა საჭირო ბაზისების გაწონასწორება). მხოლოდ როცა საჭიროა ბაზისების გაწონასწორება, მაშინ ბაზისების განტოლებას წრფივი სახე იქნება ასეთი:

$$\Delta_{S_1}(S_1)-\Delta_{S_2}(S_2)+\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-$$
$$-\Delta_6(6)+W_2=0. \qquad (4.1.6.19)$$

შენიშვნა. რიცხვითი სიდიდეების ოდენობების გამოთვლის დროს არ უნდა დაგვავიწყდეს (17) და (18) ტოლობის წევრების ნიშნები (ეს წევრები ალგებრული სიდიდეებია). (19) ტოლობაში Δ_s არის ბაზისის სინუსის ლოგარითმის შეცდომა, როცა ბაზისის სიგრძე ერთი მილიმეტრით იცვლება.

(17) და (18) ტოლობის მიღება შეიძლება სხვა გზითაც; მაგალითად, თუ ავიღებთ (6) ტოლობების სრულ დიფერენციალს უშუალოდ გაზომილ კუთხეთა საშუალებით და აგრეთვე არგუმენტთა დიფერენციალების ნაცვლად მივიღებთ მათ შესწორებებს რადიანებში, ანუ დავწერთ (იხ. 3. 3. 5 პარაგრაფი).

$$\Delta W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial 3}\cdot\frac{(3)}{\rho''} + \frac{\partial W_1}{\partial 4}\cdot\frac{(4)}{\rho''} + \frac{\partial W_1}{\partial 5}\cdot\frac{(5)}{\rho''} + \frac{\partial W_1}{\partial 6}\cdot\frac{(6)}{\rho''} + \frac{\partial W_1}{\partial 13}\cdot\frac{(13)}{\rho''} + \frac{\partial W_1}{\partial 14}\cdot\frac{(14)}{\rho''}. \qquad (4.1.6.20)$$

განვსაზღვროთ მიღებული ტოლობის კერძო დიფერენციალები (6) ტოლობის მიხედვით:

$$\frac{\partial W_1}{\partial 3}\cdot\frac{(3)}{\rho''} = \frac{\partial \lg\sin 3}{\partial 3}\cdot\frac{(3)}{\rho''} - \frac{\partial \lg\sin[3+4]}{\partial 3}\cdot\frac{(3)}{\rho''} =$$

$$= \frac{M_{10}}{\rho''}\cdot\frac{\partial \ln\sin 3}{\partial 3}\cdot(3) - \frac{M_{10}}{\rho''}\,\frac{\partial \ln\sin[3+4]}{\partial 3}\cdot(3) =$$

$$= \frac{M_{10}}{\rho''}\left(\frac{\cos 3}{\sin 3} - \frac{\cos[3+4]}{\sin[3+4]}\right)(3) = \frac{M_{10}}{\rho''}(\mathrm{ctg}\,3 - \mathrm{ctg}\,[3+4])\,(3).$$

მიღებული კერძო წარმოებული გამოვსახოთ მანტისის მეშვიდე ერთეულებში, მივიღებთ:

$$\frac{M_{10}\cdot 10^7}{\rho''}\ (\mathrm{ctg}\,3 - \mathrm{ctg}\,[3+4])\,(3) =$$

$$= \frac{0{,}4342945\cdot 10^7}{206264{,}8}\,(\mathrm{ctg}\,3 - \mathrm{ctg}\,[3+4])\,(3) =$$

$$= 21{,}055\,(\mathrm{ctg}\,3 - \mathrm{ctg}\,[3+4])\,(3).$$

ამ სიდიდეში მესამე კუთხის შესწორების წინ გამოსახულება არის (17) ტოლობის $(\Delta_3 - \Delta_{3+4})$ კოეფიციენტი, ე. ი. დავწერთ:

$$\frac{\partial W_1}{\partial 3}\cdot\frac{(3)}{\rho''} = (\Delta_3 - \Delta_{3+4})\cdot(3). \qquad (4.1.6.21)$$

ანალოგიურად დაიწერება დანარჩენი კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial W_1}{\partial 4}\cdot\frac{(4)}{\rho''} = -\frac{\partial \lg\sin[3+4]}{\partial 4}\cdot\frac{(4)}{\rho''} = -21{,}055\,\mathrm{ctg}\,[3+4]\cdot(4) = -\Delta_{3+4}\cdot(4), \qquad (4.1.6.22)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial 5}\cdot\frac{(5)}{\rho''} = \frac{\partial \lg\sin 5}{\partial 5}\,\frac{(5)}{\rho''} = 21{,}055\,\mathrm{ctg}\,5\cdot(5) = \Delta_5\cdot(5), \qquad (4.1.6.23)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial 6}\cdot\frac{(6)}{\rho''}=-\frac{\partial \lg\sin 6}{\partial 6}\cdot\frac{(6)}{\rho''}=-21{,}055\operatorname{ctg}6\cdot(6)=$$

$$=-\Delta_6\cdot(6), \tag{4.1.6.24}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial 13}\cdot\frac{(13)}{\rho''}=\frac{\partial \lg\sin[13+14]}{\partial 13}\cdot\frac{(13)}{\rho''}=21{,}055\operatorname{ctg}[13+14]\cdot(13)=$$

$$=\Delta_{13+14}\cdot(13), \tag{4.1.6.25}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial 14}\cdot\frac{(14)}{\rho''}=\frac{\partial \lg\sin[13+14]}{\partial 14}\cdot\frac{(14)}{\rho''}-\frac{\partial \lg\sin 14}{\partial 14}\cdot\frac{(14)}{\rho''}=$$

$$=21{,}055\{\operatorname{ctg}[13+14]-\operatorname{ctg}(14)\}\cdot(14)=(\Delta_{13+14}-\Delta_{14})\cdot(14). \tag{4.1.6.26}$$

(21), (22), (23), (24), (25) და (26) კერძო დიფერენციალები წარმოადგენს წრფივი სახის პოლუსის პირობითი განტოლების წევრებს, რომლებიც მოცემულია (17) ტოლობაში. ამ ტოლობაში კუთხეთა შესწორებების წინ კოეფიციენტები, ანუ კერძო წარმოებულები გამომსახველია გაზომილი კუთხეების (ან კუთხეთა ჯამის) ერთი სეკუნდით შეცვლისას მათი (გაზომილ კუთხეთა) სინუსების ლოგარითმების ცხრილური ცვლილების. აღნიშნული კოეფიციენტები გამოიყენება კუთხეთა გაწონასწორებისათვის საჭირო ნორმალური განტოლებების შედგენისას, რასაც ქვემოთ ვნახავთ.

მაშასადამე, არაწრფივი სახის პოლუსის, გვერდებისა და ბაზისების განტოლებები შეიძლება დავიყვანოთ ადვილად გადასაწყვეტ (17) სახის წრფივ პირობით განტოლებამდე.

შენიშვნა. შეიძლებოდა (17) სახის პირობითი ტოლობის მიღება, არაწრფივი სახის (1) პირობითი ტოლობის გალოგარითმების გარეშეც; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობების ცხრილის გამოყენებით. ამისათვის ავიღებთ (1) ტოლობის სრულ დიფერენციალს და მიღებულ ტოლობას გავყოფთ (1) ტოლობაზე. განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 1. 7) პარაგრაფში დადგენილი წესის შესაბამისად დიფერენციალებს შევცვლით ნაზრდებით და ამ უკანასკნელს კი — შესწორებებით; აგრეთვე მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ შესწორებათა მათ კოეფიციენტებზე ნამრავლების ჯამი ტოლია პირობითი ტოლობის თავისუფალი წევრისა შებრუნებული ნიშნით. დავწერთ პირობით ტოლობას. ბოლოს, პირობითი ტოლობების შესწორებების კოეფიციენტებს გამოვსახავთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა მეექვსე ათწილადი ნიშნების რაოდენობით. თვით თავისუფალი წევრი კი განისაზღვრება (1) ტოლობის საშუალებით (იხილეთ 7. 4. პარაგრაფი).

მაგალითი 4. 1. 6. 1. უშუალოდ ტოლზუსტად გაზომილია სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედის კუთხეები, რომელთა ოდენობები მოცემულია (1) ცხრილში [9]-ის მიხედვით:

ცხრილი 4.1.6.1

კუთხეების №№	გაზომილი კუთხეები		
	°	′	″
1	22	14	18,69
2	56	46	07,94
3	69	08	25,03
4	31	51	07,10
5	52	35	54,94
6	26	24	37,36
7	38	21	41,03
8	62	37	49,64

თეორიულად პოლუსის განტოლება არის ასეთი სახის:

$$\frac{\sin 5 \cdot \sin [2+3] \sin 7}{\sin [6+7] \cdot \sin 4 \cdot \sin 2} = 1,$$

ხოლო, პრაქტიკულად არაწრფივი ლოგარითმული სახე იქნება:

$$(\lg \sin 5 + \lg \sin [2+3] + \lg \sin 7) - \\ -(\lg \sin [6+7] + \lg \sin 4 + \lg \sin 2) = W. \qquad a)$$

წრფივი სახის შესაბამისი პირობითი ტოლობა კი იქნება:

$$\Lambda_5(5) + \Delta_{2+3}[(2)+(3)] + \Delta_7(7) - \Delta_{6+7}[(6)+(7)] - \\ -\Delta_4(4) - \Delta_2(2) + W = 0. \qquad b)$$

ფრჩხილების გახსნითა და მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ:

$$[\Delta_{2+3} - \Delta_2] \cdot (2) + \Delta_{2+3}(3) - \Delta_4(4) + \Delta_5(5) - \Delta_{6+7}(6) + \\ +[\Delta_7 - \Delta_{6+7}](7) + W = 0. \qquad c)$$

b) და *c*) ტოლობათა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი მოცემულია (1) სქემაში:

სქემა 4.1.6.1

a) ტოლობის საკლები						*a*) ტოლობის მაკლები					
კუთხეები	კუთხეების მნიშვ.			lg sin კუთხის	Δ	კუთხეები	კუთხეების მნიშვნ.			lg sin კუთხის	
	°	′	″				°	′	″		
2+3	125	54	32,97	9.9084570_9	−15,2	2	56	46	07,94	9.9224486_5	+13,8
5	52	35	54,94	9.9000390_4	+16,1	4	31	51	07,10	9.7224088_7	+33,9
7	38	21	41,03	9.7928255_4	+26,6	6+7	64	46	18,39	9.9564648_1	+9,9
Σ				9.6013216_7		Σ				9.6013223_3	

ამ სქემის მიხედვით პოლუსის პირობითი განტოლების თავისუფალი წევრი ლოგარითმის მანტისის მეშვიდე ნიშნის ერთეულებში იქნება:

$$W = 9.6013216_7 - 9.6013223_3 = -6{,}6.$$

აგრეთვე (1) სქემით b) და c) ტოლობები შესაბამისად დაიწერება:

$$16{,}1(5)-15{,}2[(2)+(3)]+26{,}6(7)-9{,}9[(6)+(7)]-$$
$$-33{,}9(4)-13{,}8(2)-6{,}6=0, \qquad d)$$
$$-29{,}0(2)-15{,}2(3)-33{,}9(4)+16{,}1(5)-9{,}9(6)+$$
$$+16{,}7(7)-6{,}6=0. \qquad e)$$

გაწონასწორების შედეგად მიღებულია კუთხეთა შესწორებების შემდეგი მნიშვნელობები:

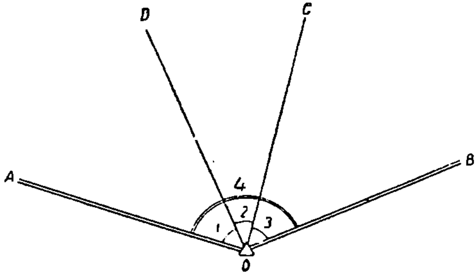
$$(2)=+0{,}95;\quad (3)=-0{,}43;\quad (4)=-0{,}78;$$
$$(5)=-1{,}36;\quad (6)=-1{,}86;\quad (7)=+0{,}28.$$

ამ სიდიდეთა d) და e) ტოლობებში შეტანით მივიღებთ:

$$-16{,}1\cdot 1{,}36-15{,}2\cdot 0{,}52+26{,}6\cdot 0{,}28+9{,}9\cdot 1{,}58+$$
$$+33{,}9\cdot 0{,}78-13{,}8\cdot 0{,}95-6{,}6=0,$$
$$29{,}0\cdot 0{,}95+15{,}2\cdot 0{,}43+33{,}9\cdot 0{,}78-16{,}1\cdot 1{,}36+$$
$$+9{,}9\cdot 1{,}86+16{,}7\cdot 0{,}28-6{,}6=0.$$

4. 1. 7. ჯამისა და სხვაობის განტოლება

ჯამისა და სხვაობის განტოლება გამოსახავს იმ გეომეტრიულ პირობას, რომლითაც საჭიროა ადრე მაღალი სიზუსტით განსაზღვრულ კუთხეში შემავალ (ჩასმულ) უშუალოდ გაზომილ კუთხეთა ჯამსა და ამ კუთხეს შორის სხვაობა იყოს ნული.



ნახ. 4.1.7.1

ვთქვათ, მაღალი კლასის ტრიანგულაციის საფუძველზე ცნობილია მე-4 კუთხე (ნახ. 1), რომელიც არ საჭიროებს გაწონასწორებას. ასეთ კუთხეს უწოდებენ მყარ ან ხისტ კუთხეს. საჭირო შეიქნა OA და OB მიმართულებას შორის ჩაისვას უფრო დაბალი კლასის ტრიანგულაციის OC და OD მიმართულებები, რის გამოც გაიზომა 1, 2 და 3 კუთხე.

თეორიულად მოითხოვება, რომ:

$$1+2+3-4=0, \tag{4.1.7.1}$$

მაგრამ, პრაქტიკულად მივიღებთ:

$$1+2+3-4=W. \tag{4.1.7.2}$$

გაზომილ კუთხეებში სათანადო შესწორებათა შეტანით მივიღებთ (1) ტოლობის იგივურ ტოლობას

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)-4=0. \tag{4.1.7.3}$$

(2) და (3) ტოლობის სხვაობა იქნება:

$$(1)+(2)+(3)+W=0, \tag{4.1.7.4}$$

იმ შემთხვევაში თუ გაზომილი იქნა მე-4 კუთხეც, მაშინ თანამიმდევრობით (1), (2), (3) და (4) ანალოგიით დაიწერება:

$$1+2+3-4=0,$$

$$1+2+3-4=W,$$

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)-4-(4)=0,$$

$$(1)+(2)+(3)-(4)+W=0. \tag{4.1.7.5}$$

ამ შემთხვევისათვის შედგენილ განტოლებას ხშირად უწოდებენ საღგურის პირობით განტოლებას.

4. 1. 8. დირექციული კუთხეების (აზიმუტების) განტოლება

ეს განტოლება გამოსახავს იმ გეომეტრიულ პირობას, რომლითაც შეიძლება ხისტი მნიშვნელობის მქონე საწყისი გვერდის დირექციული კუთხით (ან აზიმუტით) და გაზომილი (გაუწონასწორებელ) კუთხეებით გამოთვლილი უკანასკნელი გვერდის დირექციული კუთხის (აზიმუტის) მნიშვნელობა იყოს ტოლი ამ გვერდის უკვე ცნობილი დირექციული კუთხის (ხისტი) მნიშვნელობისა.

ვთქვათ, ცნობილია (AB), (AC) (ნახ. 1) და (AB), (CD) (ნახ. 2) გვერდების დირექციული კუთხეების ხისტი, ანუ ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც შესწორებას არ საჭიროებენ. გაზომილი (გაუწონასწორებელი) კუთხეებია 1, 2, 3 (ნახ. 1) და 1, 7, 8, 9 კუთხე (ნახ. 2).

1-ელი ნახაზისათვის:

თეორიული პირობაა

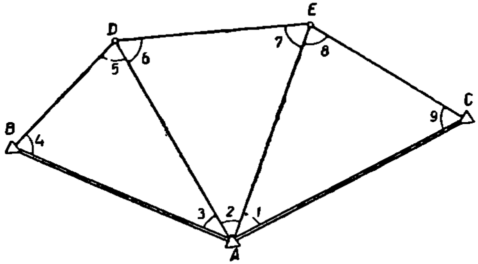
$$(AB)+1+2+3=(AC); \tag{4.1.8.1}$$

პრაქტიკულად ადგილი ექნება ტოლობას

$$(AB)+1+2+3=(AC)+W. \tag{4.1.8.2}$$

გაზომილი კუთხეების სათანადო შესწორებებით (1)-ის იგივური განტოლება იქნება:

$$(AB)+1+(1)+2+(2)+3+(3)=(AC). \quad (4.1.8.3)$$



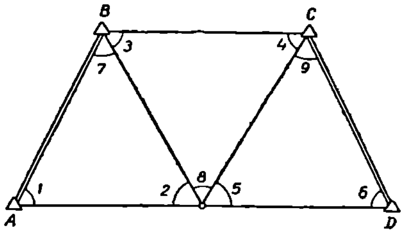
ნახ. 4.1.8.1

(2) და (3) ტოლობების სხვაობით მივიღებთ:

$$(1)+(2)+(3)+W=0, \quad (4.1.8.4)$$

სადაც

$$W=1+2+3-[(AC)-(AB)]. \quad (4.1.8.5)$$



ნახ. 4.1.8.2

მე-2 ნახაზისათვის ანალოგიური მსჯელობით გვექნება:

$$(AB)-7+8-9+180°=(CD), \quad (4.1.8.6)$$

$$(AB)-7+8-9+180°=(CD)+W, \quad (4.1.8.7)$$

$$(AB)-7-(7)+8+(8)-9-(9)+180°=(CD), \quad (4.1{\cdot}8.8)$$

$$-(7)+(8)-(9)+W=0, \quad (4.1.8.9)$$

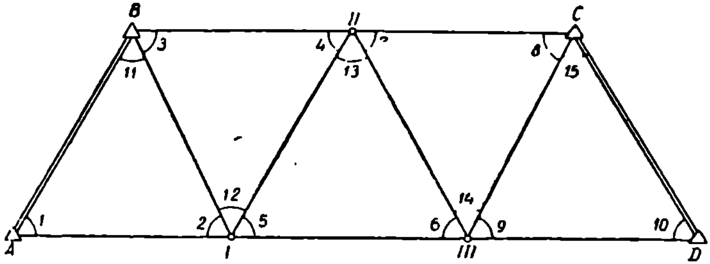
სადაც

$$W=-7+8-9+180°-[(CD)-(AB)]. \quad (4.1.8.10)$$

შენიშვნა. ჯამისა და სხვაობის პირობითი განტოლებები წარმოადგენს დირექციული კუთხეების (აზიმუტების) პირობითი განტოლებების კერძო შემთხვევას.

4. 1. 9. კოორდინატების განტოლება

კოორდინატების განტოლება გამოხატავს ტრიგონომეტრიულ პირობას, რომლითაც საჭიროა სვლის საწყისი პუნქტის ცნობილი (ხისტი) კოორდინატებისა (აბსცისი და ორდინატი) და გაზომილი ელემენტების (გვერდები, კუთხეები) საშუალებით გამოთვლილი სვლის ბოლო პუნქტის კოორდინატები (აბსცისისა და ორდინატა) ემთხვეოდეს ამ პუნქტის მოცემულ (ხისტ) კოორდინატებს (აბსცისისას და ორდინატას).



ნახ. 4.1.9.1

სვლად ავირჩიოთ $BIIC$ მიმართულება (ნახ. 1).
თეორიულად საჭიროა, რომ დაცული იყოს შემდეგი პირობა:

$$X_C = X_B + \Delta X_B^{II} + \Delta X_{II}^{C}, \qquad (4.1.9.1)$$

ანუ

$$\Delta X_B^{II} + \Delta X_{II}^{C} - (X_C - X_B) = 0. \qquad (4.1.9.2)$$

პრაქტიკულად ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$\Delta X_B^{II} + \Delta X_{II}^{C} - (X_C - X_B) = W_1. \qquad (4.1.9.3)$$

აღვნიშნოთ კოორდინატთა ნაზრდების შესწორებები სიმბოლოთი: ნაზრდები ფრჩხილებში და შევიტანოთ ეს შესწორებები (3) ტოლობაში, მივიღებთ (2)-ის იგივურ ტოლობას:

$$\Delta X_B^{II} + \left(\Delta X_B^{II}\right) + \Delta X_{II}^{C} + \left(\Delta X_{II}^{C}\right) - (X_C - X_B) = 0\,. \qquad (4.1.9.4)$$

(3) და (4) ტოლობის სხვაობით მივიღებთ აბსცისის პირობით განტოლებას:

$$\left(\Delta X_B^{II}\right) + \left(\Delta X_{II}^{C}\right) + W_1 = 0. \qquad (4.1.9.5)$$

ორდინატის პირობითი ტოლობა იგივე მსჯელობით მიიღება:

$$Y_C = Y_B + \Delta Y_B^{II} + \Delta Y_{II}^{C} \qquad (4.1.9.6)$$

ანუ

$$\Delta Y_B^{\mathrm{II}}+\Delta Y_{\mathrm{II}}^{C}-(Y_C-Y_B)=0\,, \tag{4.1.9.7}$$

$$\Delta Y_B^{\mathrm{II}}+\Delta Y_{\mathrm{II}}^{C}-(Y_C-Y_B)=W_2, \tag{4.1.9.8}$$

$$\Delta Y_B^{\mathrm{II}}+\left(\Delta Y_B^{\mathrm{II}}\right)+\Delta Y_{\mathrm{II}}^{C}+\left(\Delta Y_{\mathrm{II}}^{C}\right)-(Y_C-Y_B)=0, \tag{4.1.9.9}$$

$$\left(\Delta Y_B^{\mathrm{II}}\right)+\left(\Delta Y_{\mathrm{II}}^{C}\right)+W_2=0. \tag{4.1.9.10}$$

როგორც ვხედავთ, კოორდინატების პირობითი ტოლობა არის ორი (აბსცისებისა და ორდინატების) და ეს პირობითი განტოლებები შესაბამისია ცნობილი თეორემის: ჩაკეტილ პოლიგონში კოორდინატების ნაზრდთა ჯამი უდრის ნულს.

თავი II

სხვადასხვა სახის საყრდენი ქსელების შესაბამისი ძირითადი მათემატიკური პირობები

(გაწონასწორებული სიდიდეების განსაზღვრის ამოცანისათვის)

დედამიწის ფიზიკური ზედაპირისა და შახტების ველთა აგეგმვისათვის, აგრეთვე მათდამი წიაღის აგეგმვის დაკავშირების მიზნით შექმნილი ტრიანგულაციის ქსელი ან ქსელების სისტემა წარმოადგენს სხვადასხვა სახის გეომეტრიულ ფიგურათა გეოდეზიურ აღნაგობას, რომლის წვეროებს იყენებენ საყრდენ წერტილებად და მოკლედ უწოდებენ საყრდენ ქსელს ან ქსელთა სისტემას. ამ წერტილების ნიშნულთა განსაზღვრის მიზნით იქმნება სანიველო სისტემები. საყრდენ წერტილთა გახშირების მიზნით კი სრულდება პოლიგონომეტრიული[1] და თეოდოლიტური სვლები.

მიუხედავად გეოდეზიური აღნაგობის სახეობისა არჩევენ საყრდენ ქსელს ან ქსელთა სისტემას: *თავისუფალს*, *არათავისუფალს*, *მარტივსა* და *რთულს*.

თავისუფალი ქსელი ეწოდება ისეთ გეოდეზიურ აღნაგობას, რომელსაც არა აქვს ჭარბი რაოდენობა გამოსავალი მონაცემებისა. მაგალითად, ტრიანგულაციის თავისუფალ ქსელში ცნობილია მხოლოდ ერთი ბაზისი ან ადრე შესრულებული ტრიანგულაციის ერთი გვერდი, ერთი პუნქტის კოორდინატები, ერთი გვერდის აზიმუტი ან დირექციული კუთხე, ე. ი. ეს ქსელი არ ემხრობა (ებმება) მის მეორე ცნობილ გვერდს ან არა აქვს ბოლოში საკონტროლო ბაზისი; სანიველო ქსელებში ცნობილია, მხოლოდ ერთი მარკის ან რეპერის ნიშნული; პოლიგონომეტრიაში მხოლოდ ერთი პუნქტის კოორდინატები და ერთი გვერდის დირექციული კუთხე.

არათავისუფალი ქსელი ეწოდება ისეთ გეოდეზიურ აღნაგობას (აგებულებას), რომელსაც აქვს ჭარბი რაოდენობა გამოსავალი მონაცემებისა. მაგალითად, ტრიანგულაციის არათავისუფალ ქსელში ცნობილია რომ რამდენიმე ბაზისი ან ქსელი ემხრობა (ებმება) ადრე შესრულებული ტრიანგულაციის რამდენიმე გვერდს; ასევე არათავისუფალ ქსელს ეკუთვნის სამკუთხედთა ქსელი, რომლებიც ქმნიან შეკრულ პოლიგონს.

მარტივი ქსელი ეწოდება ისეთ გეოდეზიურ აღნაგობას, რომლის გეომეტრიული ფიგურები ურთიერთს არ ფარავს; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ქსელი რთულია [9].

---

[1] ახალი ინსტრუქციის მიხედვით, პოლიგონომეტრიული ქსელიც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს როგორც დამოუკიდებელი საყრდენი.

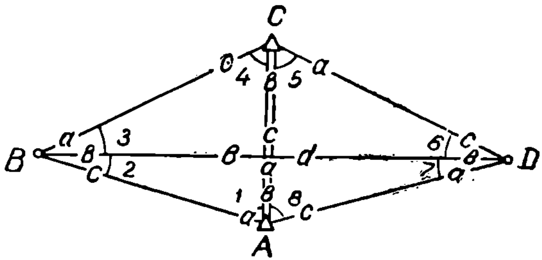
4. 2. 1. თავისუფალი სატრიანგულაციო ქსელების გაწონასწორებისათვის საჭირო პირობითი განტოლებების შედგენა

თანამიმდევრობით განვიხილოთ საჭირო სახეობანი თავისუფალი სატრიანგულაციო ქსელებისა, რომელთა საფუძველზე შევძლებთ ზოგადად დავადგინოთ, თუ როგორი სახის პირობით განტოლებებს შეიძლება ჰქონდეს ადგილი თავისუფალ ქსელებში, რათა შევძლოთ ქსელებში გაზომილი კუთხეების გაწონასწორება. საერთოდ, გაწონასწორებისათვის საჭირო პირობით განტოლებათა რაოდენობა r ჭარბი, ანუ დამატებითი მონაცემების (კუთხეების, გვერდების) რაოდენობის ტოლია.

I. სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი

სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი ეწოდება ისეთ ოთხკუთხედს, რომელშიც გადის ორი დიაგონალი და წვეროებში შემავალ გვერდებსა და დიაგონალებს შორის გაზომილია ყველა კუთხე. ეს ოთხკუთხედი წარმოადგენს რთულ ფიგურას (ნახ. 1).

როდესაც ოთხკუთხედი საბაზისო ქსელს წარმოადგენს, მაშინ AC ბაზისი უშუალოდ გაზომილია (საყრდენი ანუ საწყისი გვერდია) და გამოსასვლელი BD



ნახ. 4.2.1.1

გვერდი განისაზღვრება გაწონასწორებული AC ბაზისითა და კუთხეებით. შეიძლება BD გვერდი ცნობილი იქნეს ადრე შესრულებული მაღალი კლასის ტრიანგულაციით, მაშინ უფრო დაბალი კლასის ქსელის შესაქმნელად AC იქნება გამოსასვლელი გვერდი და იგი განისაზღვრება BD როგორც საწყისი, ანუ საყრდენი გვერდით და გაწონასწორებული კუთხეებით.

განსახილველი ფიგურის მიმართ შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახის თეორიული პირობები:

a. ფიგურის შიდი პირობა (სამკუთხედის ოთხი, ერთი შეკრული პოლიგონის და ორი ვერტიკალური კუთხეების).

$$\left.\begin{aligned}
r_1&=1+2+3+4-180^\circ=0\\
r_2&=5+6+7+8-180^\circ=0\\
r_3&=1+2+7+8-180^\circ=0\\
r_4&=3+4+5+6-180^\circ=0\\
r_5&=1+2+3+4+5+6+7+8-360^\circ=0\\
r_6&=1+2-5-6=0\\
r_7&=3+4-7-8=0
\end{aligned}\right\} . \qquad (4.2.I.1)$$

ხ. პოლუსის ხუთი პირობა

$$
\left.\begin{array}{lll}
A \text{ პოლუსის მიმართ} & r_8 = \dfrac{\sin 4\cdot\sin[6+7]\cdot\sin 2}{\sin[2+3]\cdot\sin 5\cdot\sin 7} = 1 \\[2ex]
B \quad \text{„} \quad \text{„} & r_9 = \dfrac{\sin 6\cdot\sin[1+8]\cdot\sin 4}{\sin[4+5]\cdot\sin 7\cdot\sin 1} = 1 \\[2ex]
C \quad \text{„} \quad \text{„} & r_{10} = \dfrac{\sin 8\cdot\sin[2+3]\cdot\sin 6}{\sin[6+7]\cdot\sin 1\cdot\sin 3} = 1 \\[2ex]
D \quad \text{„} \quad \text{„} & r_{11} = \dfrac{\sin 2\cdot\sin[4+5]\cdot\sin 8}{\sin[1+8]\cdot\sin 3\cdot\sin 5} = 1 \\[2ex]
\text{დიაგონალების გადაკვეთის, ანუ ფიქციური წერტილის მიმართ} & r_{12} = \dfrac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7} = 1
\end{array}\right\}. \qquad (4.2.1.2)
$$

ცნობილია, რომ (1) და (2) პირობები პრაქტიკულად არ იქნება დაცული და ადგილი ექნება შეუკვრელობებს, რომლებიც გაზომილი კუთხეების გაწონასწორებით უნდა გაბათილდნენ. გაწონასწორებისათვის საჭირო არაა ზემომოყვანილი ყველა განტოლების გამოყენება, რადგანაც ზოგიერთი მათგანი ურთიერთწრფივადდამოკიდებული, ანუ იგივურია, რაც ნიშნავს იმას, რომ თუ დაკმაყოფილდა ერთი ტოლობა, მასზე დამოკიდებული, ანუ იგივური ტოლობაც, როგორც მისი შედეგი დაკმაყოფილდება. აღნიშნულის გამო (1) და (2) პირობებიდან უნდა ამოირჩეს მ ა ქ ს ი მ ა ლ უ რ ი რაოდენობა ურთიერთდამოუკიდებელი ტოლობებისა. უყურადღებობის გამო, თუ პირობით განტოლებებში ადგილი ექნება წრფივად ურთიერთდამოკიდებულ (იგივურ) პირობით განტოლებებს, იგი თავს იჩენს გაწონასწორებისათვის საჭირო ნორმალური განტოლებების გადაწყვეტისას, რაც გამოიხატება იმით, რომ ზოგიერთი კორელატი განუსაზღვრელი აღმოჩნდება (ნორმალური განტოლებების კვადრატოვანი კოეფიციენტები ნულთან ახლობელი სიდიდეები გამოვა). ამ შემთხვევაში დამატებითი პირობის დაცვით პასუხს სწორს მივიღებთ, მხოლოდ გამოთვლები გაიზრდება და გართულდება. იმ შემთხვევაში კი, როცა პირობით განტოლებათა რიცხვი ნაკლები იქნება ჭარბ (დამატებით) განაზომთა რაოდენობასთან შედარებით, მაშინ ქსელი აღმოჩნდება სრულად (მთლიანად) გაუწონასწორებელი. რის გამო სამუშაო გადასაკეთებელი იქნება (იხილეთ (4. 3. 4.) პარაგრაფის დასკვნა).

ზემომოყვანილი შვიდი პირობიდან წრფივად უ რ თ ი ე რ თ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი, ანუ იგივურია შემდეგი ტოლობები:

$$
\left.\begin{array}{l}
r_1+r_2=r_3+r_4=r_5 \\
r_1-r_4=r_3-r_2=r_6 \\
r_1-r_3=r_4-r_2=r_7
\end{array}\right\}. \qquad (4.2.1.3)
$$

ე. ი. თუ დავაკმაყოფილეთ r_1 და r_2 ან r_3 და r_4, მაშინ დაკმაყოფილდება r_5 პირობითი ტოლობაც. ანალოგიურად, r_1 და r_4 ან r_3 და r_2 დაკმაყოფილებით r_6 ტოლობას დავაკმაყოფილებთ და ასევე r_1 და r_3 ან r_4 და r_2 ტოლობების დაკმაყოფილებით r_7—ტოლობაც დაკმაყოფილდება. მაშასადამე, (1) ჯგუფიდან წრფივად დამოუკიდებელი ტოლობების მაქსიმალური რაოდენობა იქნება სამი.

აღნიშნული (3) დამოკიდებულებებიდან ჩანს, რომ ამ სამეულში ან ერთ ჯგუფში, როგორც ი გ ი ვ უ რ ი არ შეიძლება შევიტანოთ შემდეგი ტოლობები:

$$\left.\begin{array}{lll} r_1, \; r_2, \; r_5; & & r_3, \; r_2, \; r_6 \\ r_3, \; r_4, \; r_5; & & r_1, \; r_3, \; r_7 \\ r_1, \; r_4, \; r_6; & & r_4, \; r_2, \; r_7 \end{array}\right\} . \qquad (4.2.1.4)$$

ხოლო, ქვემომოყვანილი სამ-სამ პირობითგანტოლებიანი ცხრა ჯგუფიდან, როგორც არაიგივური შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ნებისმიერი ჯგუფი:

$$\left.\begin{array}{lll} r_1, \; r_2, \; r_3; & & r_1, \; r_4, \; r_5 \\ r_1, \; r_2, \; r_4; & & r_2, \; r_3, \; r_5 \\ r_3, \; r_4, \; r_1; & & r_2, \; r_4, \; r_5 \\ r_3, \; r_4, \; r_2; & & r_5, \; r_6, \; r_7 \\ r_1, \; r_3, \; r_5; & & \end{array}\right\} , \qquad (4.2.1.5)$$

რადგანაც ამ დამოკიდებულებების ნებისმიერი ჯგუფის ცალკეული წევრები არ წარმოადგენს ორი დანარჩენი წევრის კომბინაციის შედეგს, ანუ ჯგუფში შემავალ ტოლობათა არავითარი კომბინაცია არ იძლევა ნულს (ისინი წრფივად დამოუკიდებელი არიან); ხოლო (5) დამოკიდებულებებიდან რომელიმე ჯგუფის დაკმაყოფილებით დაკმაყოფილდება (1) დამოკიდებულებების დანარჩენი ოთხი ტოლობა. მაგალითად, თუ დაკმაყოფილებულია

$$r_5, \quad r_6, \quad r_7$$

ტოლობები, მაშინ (1) ტოლობებიდან შესაბამისად დაკმაყოფილდება r_4, r_3, r_2 და r_1 ტოლობები:

$$r_5 - r_6 + r_7 = r_3 + r_4 - r_3 + r_2 + r_4 - r_2 = 2r_4;$$

$$r_3 = r_5 - r_4; \quad r_2 = r_3 - r_6; \quad r_1 = r_5 - r_2.$$

(2) დამოკიდებულებების თითოეული პირობითი ტოლობა წარმოადგენს დანარჩენი პირობითი ტოლობების წრფივი კომბინაციის შედეგს, რადგანაც

$$r_8 \cdot r_{10} = r_9 \cdot r_{11} = r_{12}.$$

დამოკიდებულებიდან შეიძლება დაიწეროს:

$$r_8 = \frac{r_9 \cdot r_{11}}{r_{10}} = \frac{r_{12}}{r_{10}}; \qquad r_9 = \frac{r_8 \cdot r_{10}}{r_{11}} = \frac{r_{12}}{r_{11}};$$

$$r_{10} = \frac{r_9 \cdot r_{11}}{r_8} = \frac{r_{12}}{r_8}; \qquad r_{11} = \frac{r_8 \cdot r_{10}}{r_9} = \frac{r_{12}}{r_9}.$$

მაშასადამე, (2) დამოკიდებულებებიდან სრულიად საკმარისია პოლუსის ერთი პირობითი ტოლობის დაკმაყოფილება, რაც საშუალებას მოგვცემს დავაკმაყოფილოთ პოლუსის ყველა დანარჩენი (ოთხი) პირობითი ტოლობა. აქვე შევნიშნავთ, რომ პირობით განტოლებათა შერჩევისას საჭიროა ისეთი განტოლების გამოყენება, რომელიც შეიცავს რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის უცნობებს. პოლუსად კი ირჩევენ ისეთ წვეროს, რომელიც უფრო ახლოა დიაგონალთან, ანუ რომლის პირდაპირ არის სხვა სამკუთხედებთან შედარებით უფრო დიდი ფართობის მქონე სამკუთხედი ან რაც იგივეა, წვეროში შემავალი გვერდებისაგან შემდგარი კუთხე იყოს შედარებით უფრო დიდი (ბლაგვი) (ნახ. 1. A კუთხე).

აღნიშნულს ის გამართლება აქვს, რომ პირობით განტოლებაში შემავალი კუთხეები რაც შეიძლება მახვილი იქნება და ტოლობებში შემავალი უცნობების კოეფიციენტები, ანუ კუთხეთა 1″-ით შეცვლის სინუსების ლოგარითმების ცვალებადობის შესაბამისი ოდენობები იქნება შედარებით დიდი მნიშვნელობების, რის გამოც კუთხეთა შესწორებების გამოთვლის შეცდომები მიიღება მინიმალური ((3. 2. 4. 8) ფორმულა).

ხშირად გამოთვლათა გამარტივების მიზნით მიუხედავად იმისა, რომ უცნობთა რაოდენობა მეტი გამოდის, შედარებით მცირე სივრცის შემცველი ტერიტორიის შემთხვევაში გეოდეზიური ოთხკუთხედის გაწონასწორებისათვის ირჩევენ

$$r_6,\ r_9,\ r_7 \text{ და } r_{12}$$

პირობით განტოლებას.

როგორც ზემოთ დავინახეთ, სრული გეოდეზიული ოთხკუთხედის (ნახ. 1) გაწონასწორებისათვის საჭირო პირობითი განტოლებების მაქსიმალური რაოდენობა ჭარბად გაზომილი ოთხი კუთხის შესაბამისად არის ოთხი — სამი ფიგურისა და ერთი პოლუსის. იგივე პასუხს მივიღებთ შემდეგი მსჯელობით. თუ AC ბაზისს (მის სიგრძეს) ავიღებთ გეოდეზიური ოთხკუთხედის მასშტაბირებისათვის, მაშინ B და D წვეროების ასაგებად საჭირო იქნება 1, 4, 5, 8 კუთხე და AB, CB, AD, CD გვერდი; ხოლო ჭარბი განაზომები იქნება ABC და ADC კუთხე, რომელთა გამო დაიწერება ABC და ADC სამკუთხედის პირობითი ტოლობა. ახლა ამ ნახაზს დავუმატოთ არამთლიანი BD ჭარბი (დამატებითი) ხაზი. ამისათვის აუცილებელია ერთ-ერთი: 3 ან 2, ან 6, ან 7 კუთხე. ვთქვათ გამოვიყენეთ 3 კუთხე. თუ 2 კუთხესაც დავუმატებთ, ეს იქნება ჭარბი განაზომი და ამით წარმოიშობა პოლუსის პირობითი ტოლობა, რომელიც მოითხოვს, რომ ეს ხაზი გადიოდეს უკვე აგებულ D წერტილში. ახლა ვთქვათ, გვინდა დავამატოთ მთლიანი BD ხაზი. ამისათვის აუცილებელია გამოვიყენოთ ორი 3 და 6 ან 2 და 7 კუთხე. ვთქვათ, გამოვიყენეთ 3 და 6 კუთხე. თუ 2 და 7 კუთხესაც გამოვიყენებთ ესენი იქნებიან ჭარბი, რომლებიც წარმოშობენ პოლუსისა და ფიგურის პირობით განტოლებას. მაშასადამე, ჭარბი ABC, ADC, 2 და 7 კუთხის გამო წარმოიშვა პირობითი ოთხი განტოლება. ამასთანავე, საჭიროა გვახსოვდეს, რომ თავისუფალ ქსელებში, ყოველი მთლიანი ჭარბი (სამკუთხედების გადამფარავი, გადამკვეთი) ხაზი, რომლისთვისაც ჩვეულებრივ ნახაზზე იძლევიან დამატებითი ხაზის ერთ მხარეს ორივე ბოლოში, ორ კუთხეს წარმოშობს პოლუსის ერთ და სამკუთხედის ერთ პირობით ტოლობას; ხოლო, როცა დამატებითი ხაზი არამთლიანია, რომლისთვისაც ჩვეულებრივ ნახაზზე იძლევიან ხაზის ერთ ბოლოში ერთ მხარეს კუთხეს, წარმოშობს პოლუსის ერთ პირობით განტოლებას.

II. სრული ცენტრალური სისტემა

სრული ცენტრალური სისტემა ეწოდება სამკუთხედთა ისეთ ერთობლიობას, რომელთა ერთ-ერთი წვერო ემთხვევა ერთ (ცენტრალურ) წერტილს და გაზომილია უკლებლივ ყველა კუთხე (ნახ. 2).

განსახილველი ფიგურის მიმართ შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახის თეორიული პირობები:

a. ფიგურის ექვსი პირობა (ხუთი სამკუთხედისა და ერთი შეკრული პოლიგონის)

$$\left.\begin{aligned}
r_1&=1+\ 2+11-180^\circ=0\\
r_2&=3+\ 4+12-180^\circ=0\\
r_3&=5+\ 6+13-180^\circ=0\\
r_4&=7+\ 8+14-180^\circ=0\\
r_5&=9+10+15-180^\circ=0\\
r_6&=1+\ 2+\ 3+4+5+6+7+8+9+10-540^\circ=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.2.1.6)$$

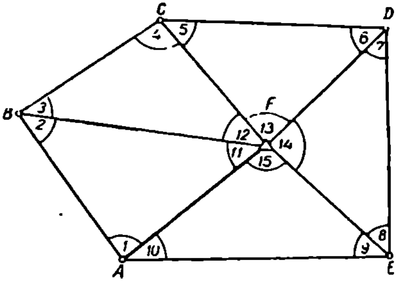
b. ჰორიზონტის პირობა

$$r_7=11+12+13+14+15-360^\circ=0. \qquad (4.2.1.7)$$

c. პოლუსის პირობა

$$r_8=\frac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8\cdot\sin 10}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 9}=1. \qquad (4.2.1.8)$$

მოყვანილი ტოლობებიდან, წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური რაოდენობა პირობითი ტოლობებისა იქნება შვიდი r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7 და r_8. მართლაც, ქსელი რომ ავაგოთ აუცილებელია მასშტაბირებისათვის AF გვერდი და გაზომილი 1, 11; 3, 12; 5, 13; 7 და 14 კუთხე. ამასთანავე საჭიროა ყველა დანარჩენი გვერდი, გარდა EA გვერდისა. ჭარბი განაზომი იქნება შვიდი (9, 10, 15, 2, 4, 6, 8 კუთხე). 2, 4, 6, 8 კუთხეების შეტანით წარმოიშობა სამკუთხედის ოთხი r_1, r_2, r_3 და r_4 პირობა. 15 კუთხის შეტანა წარმოშობს ჰორიზონტის ერთ r_7 ტოლობას, 9 და 10 კუთხეებისა პოლუსის ერთ r_8 ტოლობას და სამკუთხედის ერთ r_5 ტოლობას, ე. ი. მთლიანი დამატებითი (არაგამართულებელი) EA ხაზი აქაც იწვევს პოლიგონის ერთ და ფიგურის ერთ პირობას. სულ დაიწერა შვიდი პირობა—სამკუთხედის ხუთი, ჰორიზონტის ერთი და პოლუსის ერთი. მაშასადამე, სრულ ცენტრალურ სისტემაში რამდენი სამკუთხედიც შედის, იმდენი ფიგურის (სამკუთხედის) პირობითი განტოლება დაიწერება და მას ემატება ჰორიზონტისა და პოლუსის განტოლება. თუ სამკუთხედთა რაოდენობას n-ით აღვნიშნავთ მივიღებთ, რომ სრულ ცენტრალურ სისტემაში პირობით განტოლებათა რაოდენობა ტოლია $(n+2)$[1].



ნახ. 4.2.1.2

[1] იმ შემთხვევაში, როცა გაწონასწორებას ვახდენთ მიმართულებებით, მაშინ პირობით ტოლობათა რაოდენობა წარმოიშობა $n+1$, რადგანაც ჰორიზონტის პირობას ადგილი არ ექნება.

ზემოთ განხილული სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი და სრული ცენტრალური სისტემა შედარებით მარტივი სახის თავისუფალ ქსელს წარმოადგენს.

პრაქტიკაში გვხვდება ისეთი თავისუფალი ქსელები, რომლებიც მეტად რთულია და თვით ზემოთ განხილული ქსელები მათი შემადგენელი ნაწილია. ასეთ შემთხვევაში მოსალოდნელია:

1. სწორად ვერ განისაზღვროს ყველა სახის პირობითი განტოლებების მაქსიმალური (აუცილებელი და საკმარისი) რაოდენობა;

2. შეიძლება სწორად განისაზღვროს ყველა სახის პირობითი განტოლებების საერთო რაოდენობა, მაგრამ შეცდომა დავუშვათ საჭირო სახეობების მიხედვით მათი შერჩევის დროს;

3. შეიძლება სწორად განისაზღვროს პირობითი განტოლებების რაოდენობაცა და სახეობაც, მაგრამ შეცდომა დავუშვათ ერთი და იგივე სახეობის განტოლებების წრფივად დამოუკიდებლობაში, ე. ი. ამა თუ იმ სახის ჯგუფში შეიძლება აუცილებელი ტოლობები გამოვუშვათ მხედველობიდან და შევიტანოთ იგივური ტოლობები.

პირველი ორი მოსალოდნელი შეცდომის საბაბად ითვლება პროფ. ვ. ვიტკოვსკის, ფ. კრასოვსკისა და სხვა მეცნიერთა მიერ მოწოდებული ფორმულები, რომლებიც მიიღება შემდეგი მსჯელობით. მივიღოთ აღნიშვნები:

N — ქსელში ყველა გაზომილი კუთხეების რაოდენობა,

P — ქსელის ყველა საყრდენი წერტილის რაოდენობა, რომლის მიმართ არის გაზომილი კუთხეები (ანუ რომელზეც არ გაზომილა კუთხეები) და რომელზეც არის გაზომილი კუთხეები,

n — ყველა როგორც მთლიანი, ისე არამთლიანი გვერდების რაოდენობა, ე. ი. სათვალავში შეგვაქვს გვერდები, რომელთა მიმართულებით ხდებოდა როგორც ორმხრივი, ისე ერთმხრივი დამზერა,

r — ყველა სახის პირობითი განტოლების რაოდენობა,

r_1 — პოლუსის პირობითი განტოლებების რაოდენობა,

q — იმ ცენტრალური წერტილების რაოდენობა, რომელზედაც გაიზომა სრულ კუთხეში შემავალი ყველა კუთხე. მაშასადამე, q იქნება რიცხვი, რომელიც გამოხატავს ჰორიზონტის პირობით განტოლებათა რაოდენობას და ის აღვნიშნოთ r_3 სიმბოლოთი,

r_2 — ფიგურის პირობითი განტოლებების რაოდენობა.

1. ქსელის რომელიმე გვერდს ვიღებთ გამოსავალ გვერდად, რომლის საფუძველზე აიგება ქსელის ყველა წვერო. ცხადია, დარჩენილი წვეროების რიცხვი იქნება (P—2), რადგანაც გამოსავალ გვერდს უკვე აქვს ორი წვერო. დანარჩენი წვეროების ასაგებად აუცილებელი და საკმარისი იქნება $2(P-2)=2P-4$ კუთხე. მაშასადამე, ჭარბ (დამატებით) განაზომთა რაოდენობა, ანუ ყ ვ ე ლ ა პირობით განტოლებათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$r=N-(2P-4)=N-2P+4. \tag{4.2.1.9}$$

2. როგორც ვიცით, პ ო ლ უ ს ი ს განტოლებათა რაოდენობა იმდენი წარმოიშობა, რამდენი ჭარბი (დამატებითი) გვერდიც (მთლიანი და არამთლიანი) აღმოჩნდება ქსელში. ამიტომ ვმსჯელობთ ასე: პირველი სამი წვეროსათვის

საჭიროა სამი (ერთი მთლიანი და ორი არამთლიანი) გვერდი, ხოლო დარჩენილი ($P-3$) წვეროებიდან ყოველი წვეროს ასაგებად საჭირო იქნება ორ-ორი არამთლიანი გვერდი, ე. ი. სულ დაგვჭირდება $3+2(P-3)=2P-3$ გვერდი. მაშასადამე, ჭარბი ხაზების, ანუ პ ო ლ უ ს თ ა პირობითი ტოლობების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$r_პ=n-(2P-3)=n-2P+3. \qquad (4.2.1.10)$$

3. ჰ ო რ ი ზ ო ნ ტ ი ს პირობით განტოლებათა რაოდენობა

$$r_ჰ=q. \qquad (4.2.1.11)$$

4. ფ ი გ უ რ ი ს პირობით განტოლებათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$r_ფ=r-r_პ-r_ჰ=N-2P+4-n+2P-3-q,$$

ანუ

$$r_ფ=N-n+1-q. \qquad (4.2.1.12)$$

ამ მსჯელობის საფუძველზე განისაზღვრა მხოლოდ სამი სახის პირობითი ტოლობების რაოდენობა. ეს იმიტომ, რომ საერთოდ თავისუფალ ქსელებში ადგილი აქვს მხოლოდ და მხოლოდ ფიგურის, ჰორიზონტისა და პოლუსის პირობით განტოლებებს.

მაგალითი 4. 2. 1. 1. ABC სამკუთხედში გაზომილია 1, 2 და 3 კუთხე (ნახ. 3).

ცნობილია, რომ ერთ-ერთ გვერდს, რომელიც სამკუთხედის აგებისათვისაა საჭირო, უშუალოდ ზომავენ ან ცნობილია ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის საფუძველზე.

(9), (10), (11), (12) ფორმულების კომპონენტები იქნება:

$$N=3,\ P=3,\ n=3,\ q=0.$$

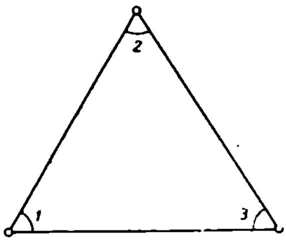
მაშასადამე:

$$r=N-2P+4=3-6+4=1,$$

$$r_პ=n-2P+3=3-6+3=0,$$

$$r_ჰ=q=0,$$

$$r_ფ=N-n+1-q=3-3+1-0=1.$$



ნახ. 4.2.1.3

ფიგურის პირობითი განტოლების პრაქტიკული სახე იქნება ასეთი:

$$(1)+(2)+(3)+W=0, \quad სადაც \quad W=1+2+3-180°.$$

მაგალითი 4.2.1.2. სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედის მონაცემებია (ნახ. 1)

$$N=8,\ P=4,\ n=6,\ q=0,$$

მაშინ

$$r=N-2P+4=8-8+4=4,$$

$$r_პ=n-2P+3=6-8+3=1,$$

$$r_ჰ=q=0,$$

$$r_ფ=N-n+1-q=8-6+1-0=3.$$

(1) და (2) დამოკიდებულებებიდან ჯობს ავირჩიოთ ფიგურის r_1, r_2, r_3 და პოლუსის r_8 ან r_5, r_6, r_7 და r_{12} ტოლობების შესაბამისი პრაქტიკული სახის პირობითი ტოლობები.

მაგალითად, თეორიულად

$$r_8 = \frac{\sin 4 \cdot \sin[6+7] \cdot \sin 2}{\sin[2+3] \cdot \sin 5 \cdot \sin 7} = 1.$$

პრაქტიკულად კი მივიღებთ:

$$r_8 = \frac{\sin 4 \cdot \sin[6+7] \cdot \sin 2}{\sin[2+3] \cdot \sin 5 \cdot \sin 7} = 1 + r.$$

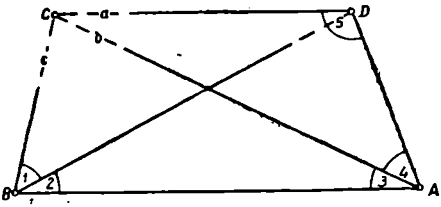
ამ პირობითი განტოლების წრფივი სახე (4.1.6.17) ტოლობის ანალოგიურად იქნება:

$$(\Delta_2 - \Delta_{2+3})(2) - \Delta_{2+3}(3) + \Delta_4(4) - \Delta_5(5) + \Delta_{6+7}(6) + (\Delta_{6+7} - \Delta_7)(7) + W = 0,$$

სადაც (4.1.6.4) ტოლობის მიხედვით

$$W = \lg r_8 = 10^7 \cdot \lg \frac{\sin 4 \cdot \sin[6+7] \cdot \sin 2}{\sin[2+3] \cdot \sin 5 \cdot \sin 7} = 10^7 \cdot \lg(1+r).$$

მაგალითი 4.2.1.8. არასრული გეოდეზიური ოთხკუთხედის მონაცემებია (ნახ. 4):



ნახ. 4.2.1.4

$$N = 5; \quad P = 4; \quad n = 6; \quad q = 0.$$

მაშასადამე,

$$r = N - 2P + 4 = 5 - 8 + 4 = 1,$$

$$r_{გ} = n - 2P + 3 = 6 - 8 + 3 = 1,$$

$$r_{ა} = q = 0,$$

$$r_{ø} = N - n + 1 - q = 5 - 6 + 1 - 0 = 0.$$

პოლუსად აიღება C წერტილი და პრაქტიკულად სათანადო ტოლობა იქნება ასეთი:

$$\frac{\sin 4 \cdot \sin[1+2] \cdot \sin[2+3+4+5]}{\sin 5 \cdot \sin 3 \cdot \sin 1} = 1 + r,$$

მისი წრფივი სახე კი იქნება:

$$(\Delta_{1+2} - \Delta_1)(1) + (\Delta_{1+2} + \Delta_{2+3+4+5})(2) + (\Delta_{2+3+4+5} - \Delta_3)(3) +$$
$$+ (\Delta_4 + \Delta_{2+3+4+5})(4) + (\Delta_{2+3+4+5} - \Delta_5)(5) + W = 0,$$

სადაც

$$W = 10^7 \cdot \lg \frac{\sin 4 \cdot \sin[1+2] \cdot \sin[2+3+4+5]}{\sin 5 \cdot \sin 3 \cdot \sin 1}.$$

მაგალითი 4.2.1.4. არასრული ცენტრალური სისტემის მონაცემებია შემდეგი (ნახ. 5):

$$N=10; \quad P=6; \quad n=10; \quad q=0,$$

მაშინ

$r = N-2P+4 = 10-12+4=2,$

$r_1 = n-2P+3 = 10-12+3 = 1,$

$r_2 = q=0,$

$r_8 = N-n+1-q = 10-10+1-0=1.$

პირობით განტოლებათა სახეები პრაქტიკულად იქნება ასეთი:

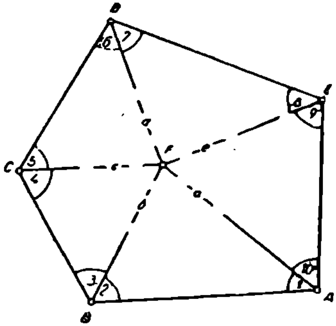
შეკრული პოლიგონის

$(1)+(2)+(3)+\cdots+(10)+W_1=0,$

სადაც

$W_1 = 1+2+3+\cdots+10-540°.$

F წერტილის მიმართ პოლუსის განტოლება იქნება:



ნახ. 4.2.1.5.

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9} = 1 + r_1,$$

რომლის წრფივი სახეა

$$-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+$$
$$+\Delta_8(8)-\Delta_9(9)+\Delta_{10}(10)+W=0,$$

სადაც

$$W = 10^7 \lg \frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}{\sin 1 \cdot \sin 3 \ \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}.$$

მაგალითი 4.2.1.5. არასრული ცენტრალური სისტემის მონაცემებია (ნახ. 6):

$$N=11; \quad P=5; \quad n=8; \quad q=1,$$

მაშინ

$$r = N-2P+4 = 11-10+4=5,$$

$$r_1 = n-2P+3 = 8-10+3=1,$$

$$r_2 = q=1,$$

$$r_8 = N-n+1-q = 11-8+1-1=3.$$

პრაქტიკულად არაიგივური პირობითი განტოლებები იქნება:

ფიგურის

$(1)+(2)+(9)+W_1=0,$ სადაც $W_1=1+2+9-180°,$

$(3)+(4)+(5)+(11)+(10)+W_2=0,$ „ $W_2=3+4+5+11+10-360°,$

$(6)+(7)+(8)+W_3=0,$ „ $W_3=6+7+8-180°.$

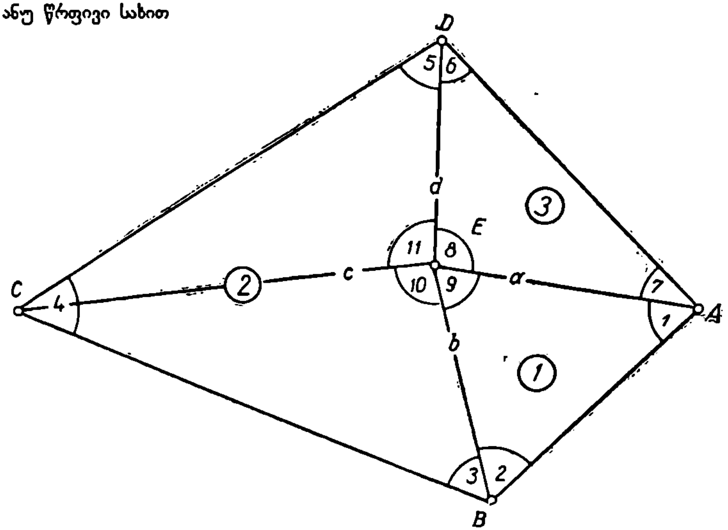
ჰორიზონტის

$$(8)+(9)+(10)+(11)+W_4=0, \qquad \text{სადაც} \quad W_4=8+9+10+11-360^\circ.$$

პოლუსის

$$\frac{\sin 2\cdot\sin[3+10]\cdot\sin 5\cdot\sin 7}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin[5+11]\cdot\sin 6}=1+r,$$

ანუ წრფივი სახით



ნახ. 4.2.1.6

$$-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)+(\Delta_{3+10}-\Delta_3)(3)+(\Delta_5-\Delta_{5+11})(5)-$$
$$-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)+\Delta_{3+10}(10)-\Delta_{5+11}(11)+W_5=0,$$

სადაც

$$W=10^7\cdot\lg\frac{\sin 2\cdot\sin[3+10]\cdot\sin 5\cdot\sin 7}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin[5+11]\cdot\sin 6}\;.$$

მაგალითი 4.2.1.6. არასრული ცენტრალური სისტემის მონაცემებია (ნახ. 7):

$$N=10;\quad P=5;\quad n=8;\quad q=1,$$

მაშინ

$$r=N-2P+4=10-10+4=4,$$
$$r_{ა}=n-2P+3=8-10+3=1,$$
$$r_{ჰ}=q=1,$$
$$r_{პ}=N-n+1-q=10-8+1-1=2.$$

არაიგივეური პირობითი განტოლებების პრაქტიკული სახე იქნება:

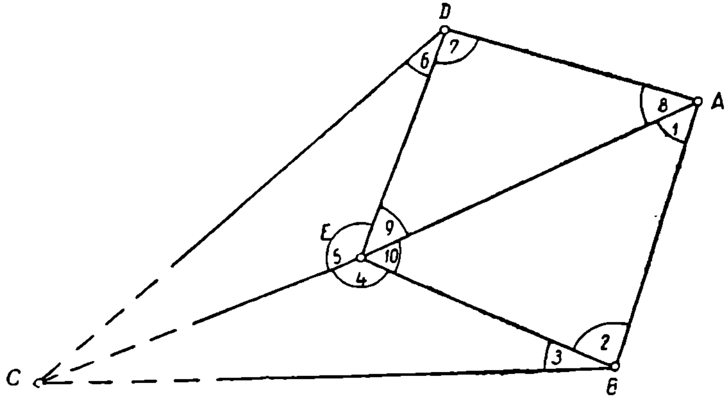
ფიგურის

$$(1)+(2)+(10)+W_1=0, \qquad \text{სადაც} \quad W_1=1+2+10-180°,$$

$$(7)+(8)+(9)+W_2=0, \qquad \text{„} \quad W_2=7+8+9-180°.$$

ჰორიზონტის

$$(4)+(5)+(9)+(10)+W_3=0, \text{ სადაც } \quad W_3=4+5+9+10-360°.$$



ნახ. 4.2.1.7

პოლუსის

$$\frac{\sin 2\cdot\sin[3+4]\cdot\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin[5+6]\cdot\sin 7}=1+r,$$

ანუ

$$-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)+(\Delta_{3+4}-\Delta_3)(3)+\Delta_{3+4}(4)-\Delta_{5+6}(5)+$$
$$+(\Delta_6-\Delta_{5+6})(6)-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)+W_4=0,$$

სადაც

$$W_4=10^7\cdot\lg\frac{\sin 2\cdot\sin[3+4]\cdot\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin[5+6]\cdot\sin 7}\,.$$

მაგალითი 4. 2. 1. 7. დავუმატოთ არასრულ ცენტრალურ სისტემას (ნახ. 7) არამთლიანი BD ხაზი, ე. ი. 11 კუთხე, მივიღებთ (ნახ. 8).

ამ შემთხვევაში (ნახ. 7) შესაბამის პირობით განტოლებებს დაემატება პოლუსის ერთი პირობითი ტოლობა. პოლუსად უნდა შეირჩეს ისეთი წერტილი, რომლის შესაბამისი პირობითი ტოლობა, რაც შეიძლება, მარტივი იქნება და ამავე დროს, მასში შევა დამატებული კუთხე (11). ასეთად ვიღებთ C წერტილს, ე. ი. პოლუსის პირობითი განტოლება პრაქტიკულად იქნება ასეთი:

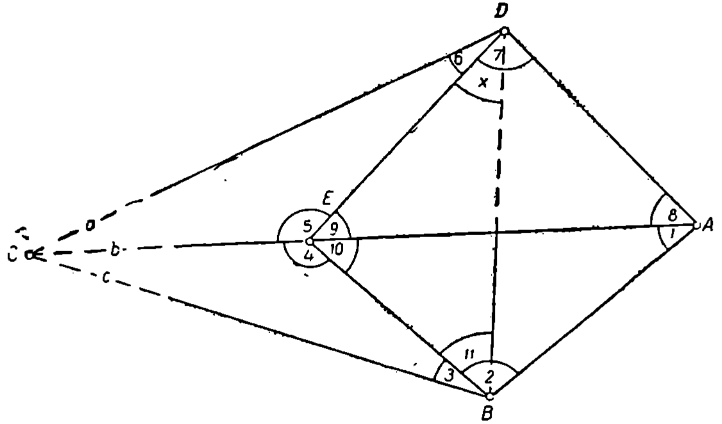
$$\frac{\sin 5\cdot\sin 3\cdot\sin[6+x]}{\sin 6\cdot\sin 4\cdot\sin[3+11]}=1+r_2,$$

სადაც

$$x=180°-9-10-11.$$

ანუ წრფივი სახით

$$(\Delta_3-\Delta_{3+11})(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)+(\Delta_{6+x}-\Delta_6)(6)-$$
$$-\Delta_{3+11}\cdot(11)+\Delta_{6+x}\cdot(x)+W_5=0,$$

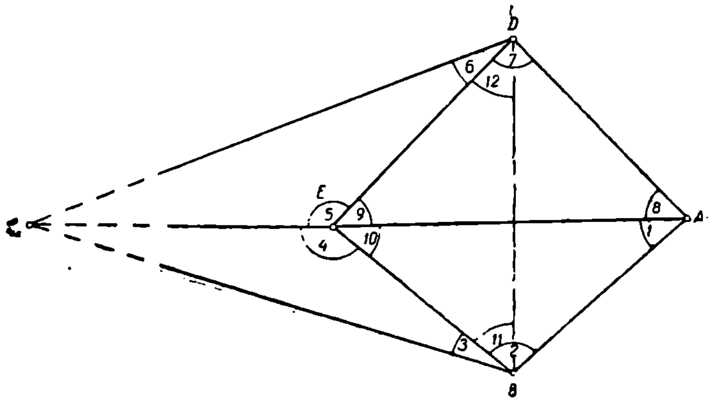


ნახ. 4.2.1.8

სადაც

$$W_5=10^7\cdot\lg\frac{\sin 5\cdot\sin 3\cdot\sin[6+x]}{\sin 6\cdot\sin 4\cdot\sin[3+11]}\ .$$

მაგალითი 4. 2. 1. 8. ახლა მე-7 ნახაზს დავუმატოთ მთლიანი ხაზი, ე. ი. 11 და უშუალოდ გაზომილი 12 კუთხე (ნახ. 9). მაშასადამე, x არის 12 კუთხე.



ნახ. 4.2.1.9

ამ შემთხვევაში მე-8 ნახაზის პირობით განტოლებებს დაემატება კიდევ ფიგურის ერთი განტოლება, სახელდობრ,

$(9)+(10)+(11)+(12)+W_6=0,$ სადაც $W_6=9+10+11+12-180°.$

მაშასადამე, სულ (ნახ. 9)-ის შესაბამისი პირობითი განტოლებები სახეობების მიხედვით იქნება ფიგურის სამი, ჰორიზონტის ერთი და პოლუსის ორი. (6), (7) და (8) მაგალითის საფუძველზე ჩამოვაყალიბებთ შემდეგ წესს: გამოსავალ ქსელად ავიღებთ მოცემული ქსელის მარტივ სახეს, რისთვისაც შევადგენთ სათანადო განტოლებებს და შემდეგ, თანდათანობით, დამატებითი (ჭარბი, გამართულებელი) ხაზების სახეობის მიხედვით, დავუმატებთ პოლუსისა და ფიგურის ან მხოლოდ პოლუსის პირობით განტოლებას.

მაგალითი 4. 2. 1. 9. ავიღოთ რთული თავისუფალი ქსელი [12] წიგნიდან და შევადგინოთ პრაქტიკული სახის სათანადო რაოდენობა პირობითი განტოლებებისა სახეობათა მიხედვით.

(10) ნახაზის მიხედვით შემდეგი მონაცემები გვაქვს:

$N=36;\quad P=9;\quad n=22;\quad q=2.$

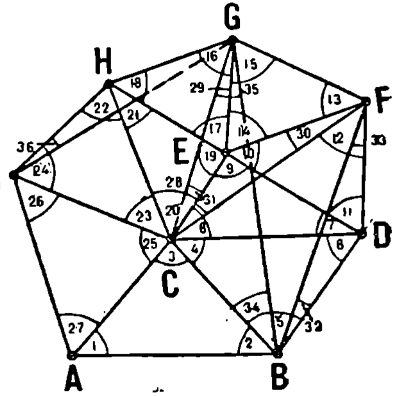
მაშასადამე, არაიგივური პირობითი განტოლებების აუცილებელი და საკმარისი (მაქსიმალური) რაოდენობა სახეობათა მიხედვით იქნება:

$r=N-2P+4=36-18+4=22,$

$r_ფ=n-2P+3=22-18+3=7,$

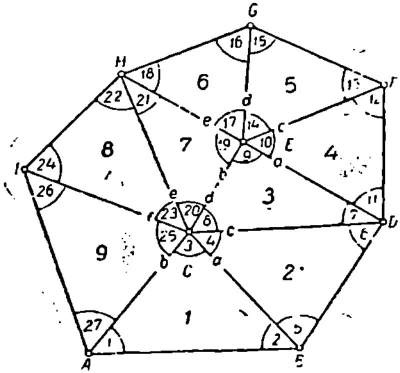
$r_ჰ=q=2,$

$r_პ=N-n+1-q=36-22+$
$+1-2=13.$



ნახ. 4.2.1.10

იგივური რომ არ გამოგვივიდეს სხვადასხვა სახეობაში შემავალი ტოლობები, საჭიროა გასაწონასწორებელი ქსელიდან (ნახაზი 10) ამოვიხაზოთ მარტივი ქსელი (დამატებითი გამართულებელი ხაზების გარეშე). ასეთი იქნება (ნახ. 11).



ნახ. 4.2.1.11

ამ ნახაზზე გვაქვს ორი ცენტრალური სისტემა გაერთიანებული, რომელთაც საერთო აქვთ მე-3 და მე-7 სამკუთხედები. ასე რომ, მთელი სისტემა განიხილება, როგორც ცხრა სამკუთხედის ერთობლიობა (და არა თერთმეტი სამკუთხედი).

პრაქტიკულად, სახეობების მიხედვით პირობითი ტოლობები იქნება ასეთი:

a) სამკუთხედის — ცხრა

$(1)+(2)+(3)+W_1=0,$ სადაც $W_1=1+2+3-180°,$

$(4)+(5)+(6)+W_2=0,$ „ $W_2=4+5+6-180°,$

$(7)+(8)+(9)+W_3=0,$ „ $W_3=7+8+9-180°,$

$(10)+(11)+(12)+W_4=0,$ „ $W_4=10+11+12-180°,$

$(13)+(14)+(15)+W_5=0,$ „ $W_5=13+14+15-180°,$

$(16)+(17)+(18)+W_6=0,$ „ $W_6=16+17+18-180°,$

$(19)+(20)+(21)+W_7=0,$ „ $W_7=19+20+21-180°,$

$(22)+(23)+(24)+W_8=0,$ „ $W_8=22+23+24-180°,$

$(25)+(26)+(27)+W_9=0,$ „ $W_9=25+26+27-180°.$

b) ჰორიზონტის — ორი

$(3)+(4)+(8)+(20)+(23)+(25)+W_{10}=0,$ სადაც $W_{10}=3+4+8+20+23+ +25-360°,$

$(9)+(10)+(14)+(17)+(19)+W_{11}=0,$ „ $W_{11}=9+10+14+17+ +19-360°.$

c) პოლუსის — ორი:

C წერტილის მიმართ

$$\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)-\Delta_9(9)+\Delta_{19}(19)-$$
$$-\Delta_{21}(21)+\Delta_{22}(22)-\Delta_{24}(24)+\Delta_{26}(26)-\Delta_{27}(27)+W_{12}=0,$$

სადაც

$$W_{12}=10^6\lg\frac{\sin 1\cdot\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 19\cdot\sin 22\cdot\sin 26}{\sin 2\cdot\sin 6\cdot\sin 9\cdot\sin 21\cdot\sin 24\cdot\sin 27}\,.$$

E წერტილის მიმართ

$$-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)+\Delta_{11}(11)-\Delta_{12}(12)+\Delta_{13}(13)-\Delta_{15}(15)+\Delta_{16}(16)-$$
$$-\Delta_{18}(18)-\Delta_{20}(20)+\Delta_{21}(21)+W_{13}=0,$$

სადაც

$$W_{13}=10^6\lg\frac{\sin 8\cdot\sin 11\cdot\sin 13\cdot\sin 16\cdot\sin 21}{\sin 7\cdot\sin 12\cdot\sin 15\cdot\sin 18\cdot\sin 20}\,.$$

მართლაც, მე-11 ნახაზისათვის

$$N=27;\quad P=9;\quad n=17 \text{ და } q=2,$$

ე. ი.

$$r=N-2P+4=27-18+4=13=a)+b)+c)=9+2+2;$$
$$r_ა=n-2P+3=17-18+3=2=c).$$
$$r_ჰ=q=2=b).$$
$$r_ფ=N-n+1-q=27-17+1-2=9=a).$$

ახლა, მე-11 ნახაზში თანდათანობით შევიტანოთ დამატებითი (გამართულებელი) ხაზები და შევადგინოთ ახლად წარმოშობილი პირობითი განტოლებები.

გავატაროთ CG მთლიანი ხაზი, რისთვისაც სისტემას დაემატება 28 და 29 კუთხეები. ამ დამატებითი კუთხეებით საჭიროა, რომ CG ხაზმა გაიაროს უკვე დანიშნულ C და G წერტილებზე და აგრეთვე დაკმაყოფილდეს CGE სამკუთხედის თეორიული პირობა. მაშასადამე, წარმოიშვა პოლუსისა და სამკუთხედის პირობითი განტოლება. ასეთი განტოლებები, როგორც ვიცით, უნდა იყოს მარტივი და ამავე დროს შემცველი ამ ჭარბი კუთხეებისა, ანუ განსახილველ ფიგურაში უნდა შედიოდეს დამატებული გვერდი. პრაქტიკულად პირობითი განტოლება CGE სამკუთხედიდან იქნება: $(17)+(19)+(28)+(29)+W_{14}=0$, სადაც $W_{14}=17+19+28+29-180°$, და $CHGE$ გეოდეზიური ოთხკუთხედიდან E წერტილის მიმართ (ნახ. 10) პოლუსის განტოლება

$$\Delta_{16}(16)-\Delta_{18}(18)-\Delta_{20}(20)+\Delta_{21}(21)+\Delta_{28}(28)-\Delta_{29}(29)+W_{15}=0,$$

სადაც

$$W_{15}=10^6\lg\frac{\sin 21\cdot\sin 16\cdot\sin 28}{\sin 20\cdot\sin 18\cdot\sin 29}\,.$$

შევიტანოთ მე-11 ნახაზში კიდევ CF (დამატებითი) მთლიანი ხაზი, რის გამოც სისტემას დაემატება ორი ჭარბი 30 და 31 კუთხე. CFE სამკუთხედიდან (ნახ. 10):

$$(9)+(10)+(30)+(31)+W_{16}=0, \text{ სადაც } W_{16}=9+10+30+31-180°,$$

ხოლო $CEFD$ გეოდეზიური ოთხკუთხედიდან თუ პოლუსად E წერტილს გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)+\Delta_{11}(11)-\Delta_{12}(12)+\Delta_{30}(30)-\Delta_{31}(31)+W_{17}=0,$$

სადაც

$$W_{17}=10^6\cdot\lg\frac{\sin 11\cdot\sin 8\cdot\sin 30}{\sin 12\cdot\sin 7\cdot\sin 31}\,.$$

გავატაროთ მე-11 ნახაზში კიდევ დამატებითი BF მთლიანი ხაზი, რისთვისაც სისტემას დაემატება 32 და 33 ჭარბი კუთხეები. ამის გამო (ნახ. 10), BDF სამკუთხედიდან დაიწერება სამკუთხედის პირობითი განტოლება:

$$(6)+(7)+(11)+(32)+(33)+W_{18}=0, \text{ სადაც } W_{18}=6+7+11+32+33-180°,$$

ხოლო $BCFD$ გეოდეზიური ოთხკუთხედიდან თუ პოლუსად D წერტილს გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$\Delta_4(4)-\Delta_5(5)-\Delta_{8-31}(8)+\Delta_{12-30}\cdot(12)+\Delta_{12-30}\cdot(30)-\Delta_{8-31}(31)+$$
$$+\Delta_{32}(32)+(\Delta_{12-30}-\Delta_{33})(33)+W_{19}=0,$$

სადაც

$$W_{19}=10^6\cdot\lg\frac{\sin 4\cdot\sin[12-30]\cdot\sin 32}{\sin 5\cdot\sin[8-31]\cdot\sin 33}\,.$$

ახლა მე-11 ნახაზს დავუმატოთ BG მთლიანი ხაზი, რომლის გამო სისტემას დაემატება 34 და 35 ჭარბი კუთხეები, ე. ი. BCG სამკუთხედის მიხედვით დავწერთ (ნახ. 10).

$$(4)+(8)+(28)+(34)+(35)+W_{20}=0, \text{ სადაც } W_{20}=4+8+28+34+35-180°,$$

ხოლო $BCGF$ გეოდეზიური ოთხკუთხედიდან თუ პოლუსად C წერტილს მივიღებთ გვექნება:

$$\Delta_{5-32}(5)-\Delta_{12-30-33}(12)+\Delta_{13+30}(13)-\Delta_{15+29}(15)-$$
$$-\Delta_{15+29}(29)+(\Delta_{13+30}-\Delta_{12-30-33})(30)+\Delta_{5-32}(32)+$$
$$+\Delta_{12-30-33}(33)-\Delta_{34}(34)+\Delta_{35}(35)+W_{21}=0,$$

სადაც

$$W_{21}=10^6\cdot\lg\frac{\sin[13+30]\cdot\sin[5-32]\cdot\sin 35}{\sin[15+29]\cdot\sin[12-30-33]\cdot\sin 34}\ .$$

დაბოლოს, გავატაროთ არამთლიანი IG ხაზი, რომლის გამო სისტემას დაემატება 36-ე კუთხე, რის გამო საჭიროა, რომ ხაზმა გაიაროს G წერტილში, ე. ი. დაწეროთ $CIHG$ გეოდეზიური ოთხკუთხედის H წერტილის მიმართ პოლუსის განტოლებას (ნახ. 10).

$$-\Delta_{16-29}(16)+\Delta_{18+21+22+36}(18)+\Delta_{20-28}(20)+\Delta_{18+21+22+30}(21)+$$
$$+\Delta_{18+21+22+36}(22)-\Delta_{23}(23)+\Delta_{24}(24)+\Delta_{20-28}(28)-\Delta_{16-29}\cdot(29)+$$
$$+(\Delta_{18+21+22+36}\Delta_{36})(36)+W_{22}=0,$$

სადაც

$$W_{22}=10^6\lg\frac{\sin[20-28]\cdot\sin 24\cdot\sin[18+21+22+36]}{\sin[16-29]\cdot\sin 23\cdot\sin 36}\ .$$

როგორც ვხედავთ, ძირითადი (გამოსავალი) ქსელის ფიგურის 9 განტოლებას დაემატება 4 განტოლება, პოლუსის ორ განტოლებას კი — ხუთი განტოლება, ე. ი. სულ მივიღებთ:

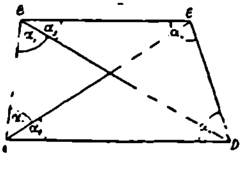
$$r_{\text{ფ}}=9+4=13,$$
$$r_{\text{პ}}=2+5=7,$$
$$r_{\text{ჯ}}=2,$$

22 პირობით ტოლობას.

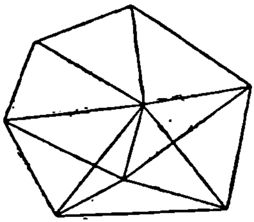
ასეთი წესით პირობითი განტოლებების შედგენა უზრუნველყოფს მოსალოდნელი შეცდომების თავიდან აცილებას, როგორც აუცილებელი და საკმარისი რაოდენობით სხვადასხვა სახის პირობითი განტოლებების დადგენის, ისე იგივური განტოლებების თავიდან აცილების მხრივ.

IV. სავარჯიშოები

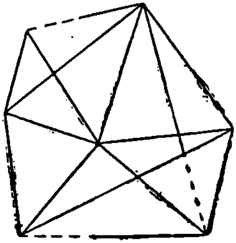
შედგენილ იქნეს სათანადო სახეობების მიხედვით აუცილებელი და საკმარისი რაოდენობა პირობითი განტოლებებისა (12) — (19) ნახაზების მიხედვით.



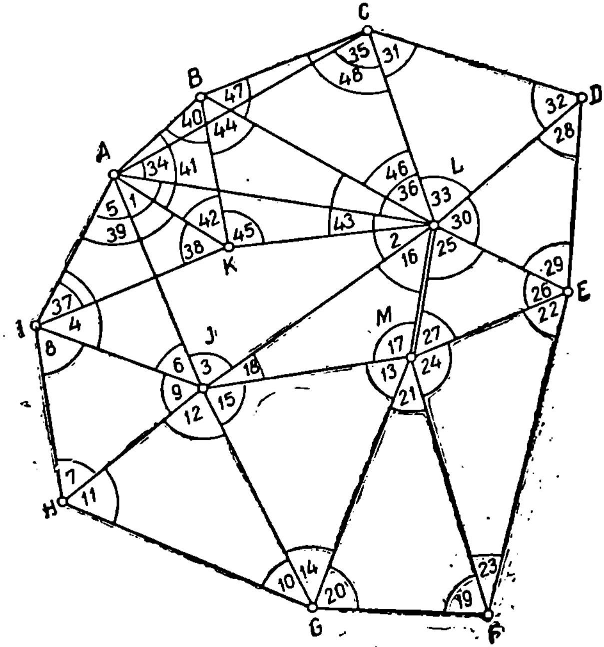
ნახ. 4.2.1.12



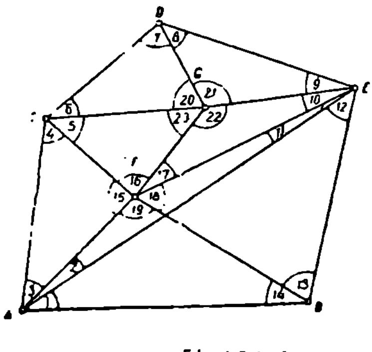
ნახ. 4.2.1.13



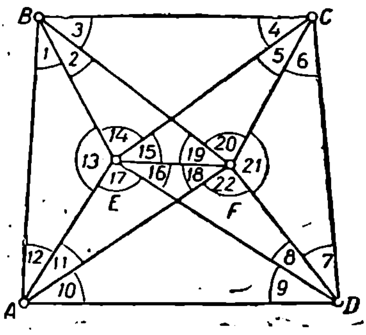
ნახ. 4.2.1.14



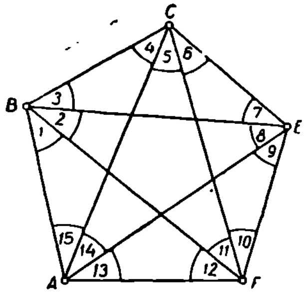
ნახ. 4.2.1.15



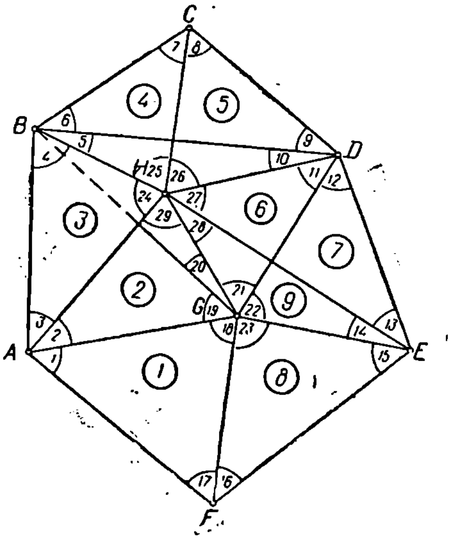
ნახ. 4.2.1.16



ნახ. 4.2.1.17



ნახ. 4.2.1.18



ნახ. 4.2.1.19

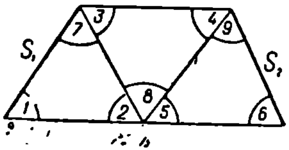
4. 2. 2. არათავისუფალი სატრიანგულაციო ქსელების გაწონასწორებისათვის საჭირო პირობითი განტოლებების შედგენა

ამ თავის შესავალში განმარტებული იყო, რომ არათავისუფალი ქსელი ეწოდება ისეთ გეოდეზიურ აღნაგობას, რომელსაც აქვს ჭარბი რაოდენობა *გამოსავალი* მონაცემებისა. გამოსავალ მონაცემებში ვგულისხმობთ გაწონასწორებულ ბაზისებს ან ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის სამკუთხედთა გვერდებსა (მათი სიგრძეები, დირექციული კუთხეები, ბოლოების კოორდინატები) და ცალკეულ პუნქტებს მათი კოორდინატების სახით.

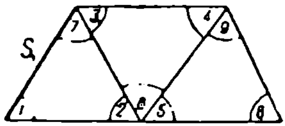
I. ორ გაწონასწორებულ ბაზისს შორის ჩასმული სამკუთხედების ჯაჭვი

მოცემულია არათავისუფალი ქსელი (ნახ. 1), რომლის გამოსავალი მონაცემებია S_1 და S_2 ბაზისი და აგრეთვე გაზომილია 9 კუთხე.

1. (1) ფიგურიდან გამოვყოფთ თავისუფალ ქსელს (ნახ. 2) (S_1 ბაზისის სიგრძე საჭიროა ფიგურის მასშტაბირებისათვის), და დავწერთ სათანადო პირობით ტოლობებს, პრაქტიკული სახით



ნახ. 4.2.2.1



ნახ. 4.2.2.2

$$(1)+(2)+(7)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=1+2+7-180^\circ,$$
$$(3)+(4)+(8)+W_2=0, \quad \text{„} \quad W_2=3+4+8-180^\circ,$$
$$(5)+(6)+(9)+W_3=0, \quad \text{„} \quad W_3=5+6+9-180^\circ.$$

2. ვინაიდან არა გვაქვს დამატებითი ხაზი, (2) ნახაზში შევიტანთ ჭარბ S_2 ბაზისს (მის სიგრძეს), რომლითაც წარმოიშობა ბაზისის (4. 1. 6. 18) ტოლობის ანალოგიური პირობითი ტოლობა (ნახ. 1).

$$\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+W_4=0,$$

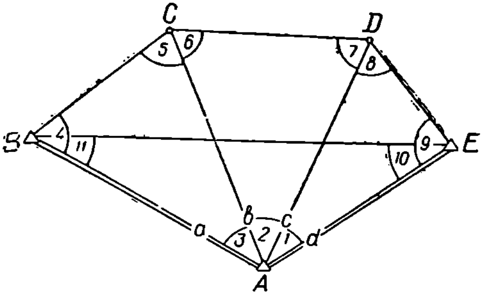
სადაც (4.1.6.4) ანალოგიურად

$$W_4=10^7 \lg \frac{S_1 \cdot \sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5}{S_2 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6} .$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ჭარბი ერთი ბაზისის გამო თავისუფალი ქსელებისათვის საჭირო რაოდენობას დაემატება ბაზისის ერთი პირობითი განტოლება. როცა საჭიროა ბაზისების გაწონასწორება, მაშინ ბაზისის წრფივ ტოლობას ექნება (4. 1. 6. 19) ტოლობის სახე.

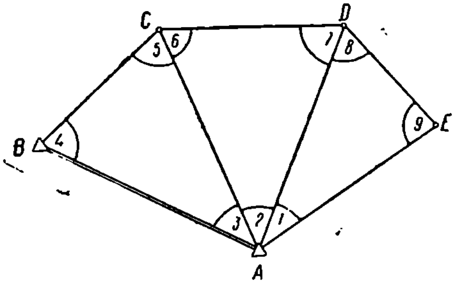
II. ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის ქსელის ერთი წერტილიდან გამოსულ ორ გვერდს შორის ჩასმულ სამკუთხედთა ჯაჭვი

გამოსავალი მონაცემებია $\overline{AB}$ და $\overline{AE}$ გვერდები, რომლებიც ცნობილია შედგენილი ტრიანგულაციიდან. გაზომილია თერთმეტი კუთხე იმისათვის, რომ



ნახ. 4.2.2.3

შევადგინოთ სახეობების მიხედვით აუცილებელი და საკმარისი რაოდენობა არაიგივური პირობითი განტოლებებისა, ამისათვის: 1) მოცემული (3) ქსელიდან გამოვყოფთ თავისუფალი ქსელის გამოსავალ ძირითად ფიგურას, (4) ნახაზის სახით, რომლის მიმართაც ცნობილი წესით შევადგინოთ შესაბამისი პირობითი განტოლებები. როგორც ცნობილია, $\overline{AB}$ გვერდი (მისი სიგრძე, დირექციული კუთხე და ბოლო ერთი წერტილის კოორდინატები) საჭიროა ამ თავისუფალი ქსელის ძირითადი ფიგურის მასშტაბირების, ორიენტირებისა და ცენტრირებისათვის. მაშასადამე, მივიღებთ ფიგურის (სამკუთხედის) სამ პირობით ტოლობას, როგორიცაა:



ნახ. 4.2.2.4

$$(3)+(4)+(5)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=3+4+5-180°,$$
$$(2)+(6)+(7)+W_2=0, \quad \text{„} \quad W_2=2+6+7-180°,$$
$$(1)+(8)+(9)+W_3=0, \quad \text{„} \quad W_3=1+8+9-180°.$$

2) ძირითად ფიგურას დავუმატებთ BE მთლიან ხაზს (10 და 11 კუთხეები), რაც წარმოშობს ფიგურის (ნახ. 4)

$$(1)+(2)+(3)+(10)+(11)+W_4=0, \quad \text{სადაც} \quad W_4=1+2+3+10+11-180°$$

და პოლუსის

$$-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)-\Delta_8(8)+\Delta_9(9)-\Delta_{10}(10)+\Delta_{11}(11)+W_4=0$$

ტოლობას, სადაც

$$W_4=10^7 \lg \frac{\sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9 \cdot \sin 11}{\sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}.$$

3) ძირითად ფიგურას დავუმატებთ $\overline{AE}$ გვერდს, ე. ი. ჭარბი განაზომი იქნება მისი სიგრძე და დირექციული კუთხე. ამით მოგვეცემა ორი პირობითი განტოლება, როგორიცაა:

გვერდების პირობითი ტოლობა

$$+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)-\Delta_9(9)+W_5=0,$$

სადაც

$$W_5=10^7 \lg \frac{\overline{AB} \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}{\overline{AE} \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}.$$

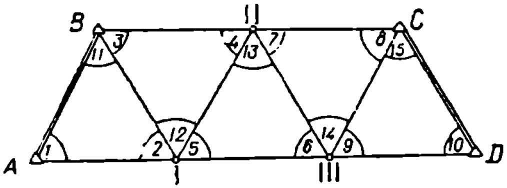
და დირექციული კუთხის პირობითი განტოლება (4. 1. 8. 4) და (4. 1. 8. 5) დამოკიდებულებების შესაბამისად, როგორიცაა:

$$(1)+(2)+(3)+W_6=0, \quad \text{სადაც} \quad W_6=1+2+3-[(AE)-(AB)].$$

როგორც ვხედავთ, არათავისუფალმა ქსელმა, რომელსაც ჭარბი გამოსავალი აქვს ერთი გვერდის სახით და ეს გვერდი ტრიანგულაციის ერთი წერტილიდან გამოდის, დამატებით წარმოშვა ერთი გვერდისა და ერთი დირექციული კუთხის პირობითი განტოლება. მაშ, სულ ამ შემთხვევისათვის საჭირო იქნება: სამკუთხედის ოთხი, ერთი პოლუსის, ერთი გვერდისა და ერთი დირექციული კუთხის (სულ 7) პირობითი განტოლება.

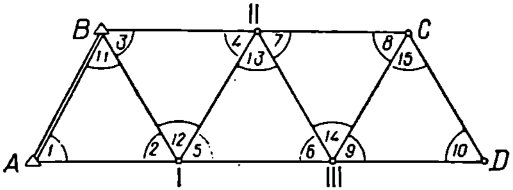
III. ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის ქსელის არაერთი წერტილიდან გამოსულ ორ გვერდს შორის ჩასმული სამკუთხედების ჯაჭვი

გამოსავალი მონაცემებია $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ გვერდები, ანუ ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის ქსელის საფუძველზე ცნობილია ამ გვერდების სიგრძეები, დირექციული კუთხეები და A, B, C და D პუნქტების კოორდინატები. ამ ქსელში (ნახ. 5) გაზომილია თხუთმეტი კუთხე.



ნახ. 4.2.2.5

1) გამოსავალ, ანუ ძირითად ფიგურად მივიღებთ თავისუფალ ქსელს (ნახ. 6), რომლისათვის საჭიროა $\overline{AB}$ გვერდის სიგრძე, დირექციული კუთხე



ნახ. 4.2.2.6

და ერთი A ან B პუნქტის კოორდინატები, სამკუთხედთა ჯაჭვის (ამ ძირითადი ქსელის) მასშტაბირების, ორიენტირებისა და ცენტრირებისათვის. ამიტომ მე-6 ნახაზისათვის შევადგენთ ფიგურების ხუთ განტოლებას

$$(1)+(2)+(11)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=1+2+11-180°,$$
$$(3)+(4)+(12)+W_2=0, \quad \text{„} \quad W_2=3+4+12-180°,$$
$$(5)+(6)+(13)+W_3=0, \quad \text{„} \quad W_3=5+6+13-180°,$$
$$(7)+(8)+(14)+W_4=0, \quad \text{„} \quad W_4=7+8+14-180°,$$
$$(9)+(10)+(15)+W_5=0, \quad \text{„} \quad W_5=9+10+15-180°.$$

2) როგორც ვხედავთ, მე-5 ნახაზისათვის ქსელში არ არის დამატებითი ხაზები, ე. ი. (6) ნახაზს დავუმატებთ ჭარბ გამოსავალ $\overline{CD}$ გვერდს, რომელიც

ხასიათდება სამი ჭარბი მონაცემით, როგორიცაა მისი სიგრძე, დირექციული კუთხე და ერთ-ერთი ბოლო პუნქტის კოორდინატები. მაშასადამე, შესაბამისად წარმოიშვება: გვერდების

$$\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)-\Delta_8(8)+$$
$$+\Delta_9(9)-\Delta_{10}(10)+W_6=0,$$

სადაც

$$W_6=10^7\lg\frac{\overline{AB}\cdot\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 9}{\overline{CD}\cdot\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8\cdot\sin 10}.$$

დირექციული კუთხის

$$-(11)+(12)-(13)+(14)-(15)+W_7=0,\ \text{სადაც}\ W_7=-11+12-13+14-15+$$
$$+180°-[(CD)-(AB)],$$

აბსცისისა (ქსელის ცენტრირების პირობა)

$$\left(\Delta X_B^{II}\right)+\left(\Delta X_{II}^{C}\right)+W_8=0,\quad \text{სადაც}\quad W_8=\Delta X_B^{II}+\Delta X_{II}^{C}-(X_C-X_B),$$

და ორდინატის

$$\left(\Delta Y_B^{II}\right)+\left(\Delta Y_{II}^{C}\right)+W_9=0,\quad \text{სადაც}\quad W_9=\Delta Y_B^{II}+\Delta Y_{II}^{C}-(Y_C-Y_B).$$

მაშასადამე, როცა ადრე შექმნილი ტრიანგულაციის ჭარბი გვერდი არ არის ხისტად დაკავშირებული პირველ გვერდთან ისე, როგორც ეს (5) ნახაზზეა მოცემული, დამატებით კიდევ წარმოიშობა კოორდინატების პირობითი ორი განტოლება (წინა შემთხვევასთან შედარებით).

სამარკშეიდერო და საინჟინრო გეოდეზიური ტრიანგულაციის შედგენისას საერთოდ ერიდებიან ასეთი სახის ქსელების შექმნას, რადგანაც კოორდინატების პირობითი განტოლებების ამოხსნა დაკავშირებულია სირთულეებთან.

ზემოხსენებული შემთხვევების განხილვით ვრწმუნდებით, რომ თავისუფალ ქსელებში წარმოიშობა მხოლოდ ფიგურის, ჰორიზონტისა და პოლუსის პირობითი განტოლებები, ხოლო არათავისუფალ ქსელებში, გარდა ამ განტოლებებისა, შეიძლება წარმოიშვას ბაზისების, გვერდების, დირექციული კუთხეებისა (ჯამისა და სხვაობის) და კოორდინატების განტოლებები, შემდეგი წესის მიხედვით:

1. ბაზისების პირობითი განტოლებების რაოდენობა უდრის ქსელში გაზომილი ბაზისების რაოდენობას ერთის გამოკლებით, ე. ი. ყოველი ჭარბი (დამატებითი) ბაზისი წარმოშობს ბაზისების განტოლებას;

2. გვერდების პირობითი განტოლებების რაოდენობა უდრის ადრე შესრულებული ტრიანგულაციის ქსელში მოცემული გვერდების რაოდენობას ერთის გამოკლებით;

3. დირექციული კუთხეების პირობითი განტოლებების რაოდენობა უდრის ადრე შესრულებული ტრიანგულაციის ქსელში მოცემული გვერდების რაოდენობას ერთის გამოკლებით, ე. ი. ტრიანგულაციაში ყოველი ჭარბი გვერდი წარმოშობს გვერდებისა და დირექციული კუთხეების (ჯამისა და სხვაობის) განტოლებას;

4. კოორდინატების პირობით განტოლებათა რაოდენობა უდრის $2(R-1)$, სადაც R გამოხატავს ტრიანგულაციის ქსელში ცალკეული (არა ხისტად შეერთებული) პუნქტების ან ხისტად შეკავშირებული პუნქტების ცალკეული ჯგუფების რაოდენობას, მაგალითად, მე-3 ნახაზში $R=1$; მე-5 ნახაზში $R=2$.

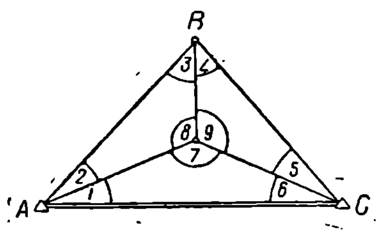
შენიშვნა. თავისუფალი ქსელების გაწონასწორებისას შესაძლებლობა გვაქვს ვიმსჯელოთ საველე სამუშაოთა შესრულების ხარისხზე, რადგანაც შეუკვრელობები, რომლებიც ამის საშუალებას გვაძლევენ, განისაზღვრებიან მხოლოდ და მხოლოდ უშუალოდ გაზომილი კუთხეების საშუალებით. არათავისუფალი ქსელების გაწონასწორებისას ამისი საშუალება არა გვაქვს, რადგანაც ზოგიერთი პირობითი განტოლების (ბაზისების, გვერდების, დირექციული კუთხეების, კოორდინატების) შეუკვრელობები შედეგია არამარტო უშუალოდ გაზომილი კუთხეების. ამ შეუკვრელობებში, გარდა უშუალოდ გაზომილი კუთხეების გაზომვების შეცდომებისა, შედის ზემოხსენებულ პირობით განტოლებებში არსებული ქსელის გამოსავალი ელემენტების მონაცემთა შეცდომებიც.

ზემოთ განხილული იყო ადრე შედგენილი ტრიანგულაციის არახისტად დაკავშირებულ გამოსავალ გვერდებს შორის, ანუ ჩაუკეტავ გვერდებს შორის ჩასმული ქსელები.

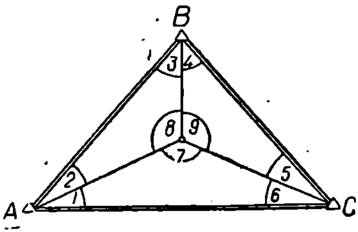
ახლა განვიხილოთ ისეთი არათავისუფალი ქსელები, რომლის გამოსავალი გვერდები ურთიერთხისტადაა დაკავშირებული, ანუ წარმოადგენს ჩაკეტილ კონტურს.

IV. არსებული ტრიანგულაციის ქსელის სამკუთხედში პუნქტის ჩასმა

გამოსავალი მონაცემებია $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ და $\overline{AC}$ გვერდების სიგრძეები, დირექციული კუთხეები და A, B და C პუნქტების კოორდინატები. (ნახ. 7) ქსელში გაზომილია 9 კუთხე. აქ, პირდაპირ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ აუცილებელი რაოდენობა პირობითი ტოლობებისა იქნება შვიდი, რადგანაც გაზომილია ცხრა კუთხე, ხოლო წერტილის ჩასმისათვის კი საჭიროა მხოლოდ ორი კუთხე.



ნახ. 4.2.2.7



ნახ. 4.2.2.8

მაშასადამე, დავწერთ $r=N-2=9-2=7$. სახეობების მიხედვით კი:

1) (7) ქსელიდან გამოვყოთ ძირითადი — გამოსავალი ფიგურა თავისუფალი ქსელის სახით, რომელიც ეყრდნობა $\overline{AC}$ გვერდს და იგი, მისი სიგრძის, დირექციული კუთხის და ერთ-ერთი პუნქტის კოორდინატების გამო, გამოყენებულია (8) ქსელის მასშტაბირების, ორიენტირების და ცენტრირებისათვის. ასე რომ (8) ქსელს შეესაბამება:

ფიგურის

$$(1)+(6)+(7)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=1+6+7-180^\circ,$$

$$(2)+(3)+(8)+W_2=0, \quad \text{"} \quad W_2=2+3+8-180^\circ,$$

$$(4)+(5)+(9)+W_3=0, \quad \text{"} \quad W_3=4+5+9-180^\circ.$$

ჰორიზონტის

$$(7)+(8)+(9)+W_4=0, \quad \text{სადაც} \quad W_4=7+8+9-360^\circ.$$

პოლუსის

$$\Delta_1(1)-\Delta_2(2)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_6(6)+W_5=0,$$

სადაც

$$W_5=10^7\cdot\lg\frac{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5}{\sin 6\cdot\sin 2\cdot\sin 4}\cdot$$

პირობითი განტოლებები.

2. განსახილველ ქსელში დამატებითი ხაზები არ არის, ე. ი. შევიტანთ (8) ქსელში გამოსავალ ჭარბ მონაცემებს. აქ საქმე გვაქვს A და C პოლუსების მიმართ B პუნქტის მდებარეობის განსაზღვრასთან, ე. ი. აქ შეიძლება გამოვიყენოთ ბიპოლარული კოორდინატები კუთხური ან ხაზოვანი გადაკვეთის სახით. პირველ შემთხვევაში საქმე გვექნება დირექციული კუთხეების ორ პირობით განტოლებასთან და მეორე შემთხვევაში პოლუსის ორ განტოლებასთან. უმჯობესია პირველი გზა. მაშასადამე, $\overline{AB}$ და $\overline{CB}$ გვერდის დამატება შესაბამისად მოგვცემს (ნახ. 7).

დირექციული კუთხეების

$$(1)+(2)+W_6=0, \quad \text{სადაც} \quad W_6=1+2-[(AC)-(AB)]$$

და

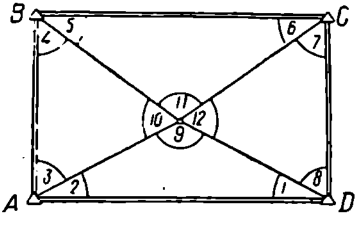
$$(5)+(6)+W_7=0, \quad \text{სადაც} \quad W_7=5+6-[(CB)-(CA)],$$

პირობით განტოლებებს.

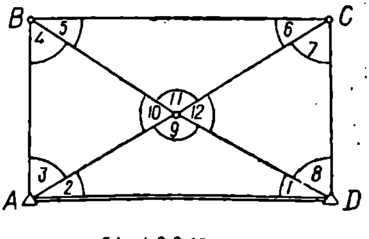
მოცემულ ქსელში, ვინაიდან $R=1$, ანუ ყველა პუნქტი ხისტად არის ურთიერთდაკავშირებული (ხისტად დაკავშირებული ერთი ჯგუფია), არ ექნება ადგილი კოორდინატების პირობით განტოლებებს.

ვ. არსებული ტრიანგულაციის ქსელის ოთხკუთხედში პუნქტის ჩასმა

გამოსავალი მონაცემებია $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ და $\overline{CD}$ გვერდების სიგრძეები, დირექციული კუთხეები და ყველა პუნქტის კოორდინატი. მე-9 ნახაზის ქსელში გაზომილია 12 კუთხე. მაშასადამე, სულ საჭირო პირობით ტოლობათა რაოდენობა $r=N-2=12-2=10$.



ნახ. 4.2.2.9



ნახ. 4.2.2.10

1) გამოვყოთ თავისუფალი ქსელი და შევადგინოთ მისი შესაბამისი პირობითი ტოლობები:

ფ ი გ უ რ ი ს

$$(1)+(2)+(9)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=1+2+9-180^\circ,$$
$$(3)+(4)+(10)+W_2=0, \quad „ \quad W_2=3+4+10-180^\circ,$$
$$(5)+(6)+(11)+W_3=0, \quad „ \quad W_3=5+6+11-180^\circ,$$
$$(7)+(8)+(12)+W_4=0, \quad „ \quad W_4=7+8+12-180^\circ.$$

ჰ ო რ ი ზ ო ნ ტ ი ს

$$(9)+(10)+(11)+(12)+W_5=0, \quad \text{სადაც} \quad W_5=9+10+11+12-360^\circ.$$

პ ო ლ უ ს ი ს

$$-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)+W_6=0,$$

სადაც

$$W_6=10^7\cdot\lg\frac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7}.$$

2) (9) ქსელში დამატებითი ხაზები არ არის. მაშასადამე, (10) ქსელში შევიტანთ $\overline{AB}$ გვერდს მისი სიგრძისა და დირექციული კუთხის სახით, რადგანაც B წერტილის განსაზღვრისათვის დაცული უნდა იქნეს $\overline{AB}$ გვერდის სიგრძე და დირექციული კუთხე. მაშასადამე, ამ გვერდის (10) ქსელში შეტანით წარმოიშობა პირობითი ტოლობები:

გ ვ ე რ დ ე ბ ი ს

$$-\Delta_1(1)+\Delta_4(4)+\Delta_9(9)-\Delta_{10}(10)+W_7=0,$$

სადაც

$$W_7=10^7\cdot\lg\frac{\overline{AB}\cdot\sin 9\cdot\sin 4}{\overline{AD}\cdot\sin 1\cdot\sin 10}.$$

და დირექციული კუთხის

$$(2)+(3)+W_8=0, \quad \text{სადაც} \quad W_8=2+3-[(AD)-(AB)].$$

3) $\overline{BC}$ და $\overline{DC}$ გვერდების შეტანით მივიღებთ კუთხურ გადაკვეთას, ე. ი. საჭიროა ორივე ხაზმა გაიაროს C წერტილში. ამიტომ შესაბამისად დავწერთ დირექციული კუთხის ორ პ ი რ ო ბ ი თ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს (ნახ. 9)

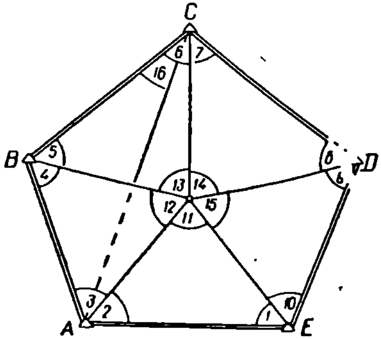
$$(4)+(5)+W_9=0, \quad \text{სადაც} \quad W_9=4+5[(BA)-(BC)],$$
$$(1)+(8)+W_{10}=0, \quad „ \quad W_{10}=1+8-[(DC)-(DA)].$$

მაშასადამე, აქ მივიღეთ ფიგურის ოთხი, ჰორიზონტის ერთი, პოლუსის ერთი, გვერდების ერთი და დირექციული კუთხეების სამი, სულ ათი პირობითი განტოლება.

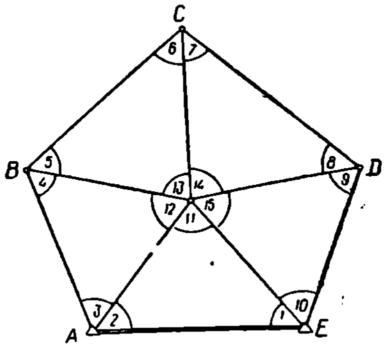
ამ შემთხვევაშიც, ვინაიდან $R=1$, ანუ გვაქვს პუნქტების ერთი ჯგუფი, კოორდინატების ტოლობებს ადგილი არ ექნება.

VI. არსებული ტრიანგულაციის ქსელის ხუთკუთხედში პუნქტის ჩასმა

გამოსავალი მონაცემებია $\overline{AE}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ გვერდების სიგრძეები, დირექციული კუთხეები და ყველა პუნქტის კოორდინატი. გაზომილია 16 კუთხე. მაშასადამე, $r=N-2=16-2=14$.



ნახ. 4.2.2.11



ნახ. 4.2.2.12

1. (12) ნახაზის მიმართ სახეობების მიხედვით შევადგენთ პირობით განტოლებებს:

ფიგურისას

$$(1)+(2)+(11)+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=1+2+11-180°,$$
$$(3)+(4)+(12)+W_2=0, \quad \text{„} \quad W_2=3+4+12-180°,$$
$$(5)+(6)+(13)+W_3=0, \quad \text{„} \quad W_3=5+6+13-180°,$$
$$(7)+(8)+(14)+W_4=0, \quad \text{„} \quad W_4=7+8+14-180°,$$
$$(9)+(10)+(15)+W_5=0, \quad \text{„} \quad W_5=9+10+15-180°.$$

ჰორიზონტისას

$$(11)+(12)+(13)+(14)+(15)+W_6=0, \quad \text{სადაც} \quad W_6=11+12+13+14+15-360°$$

პოლუსისას

$$-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+$$
$$+\Delta_8(8)-\Delta_9(9)+\Delta_{10}(10)+W_7=0,$$

სადაც

$$W_7=10^7\cdot\lg\frac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8\cdot\sin 10}{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 9}.$$

2. შევიტანოთ (12) ნახაზში არამთლიანი $\overline{CA}$ გვერდი (16 კუთხე), რის გამოც წარმოიშობა პოლუსის პირობითი განტოლება (B წერტილის მიმართ) (ნახ. 11).

$$\Delta_3(3)-\Delta_{4+5+16}(4)-\Delta_{4+5+16}(15)-\Delta_6(6)-\Delta_{12}(12)+\Delta_{13}(13)+$$
$$+(\Delta_{16}-\Delta_{4+5+16})\Delta_{16}+W_8=0,$$

სადაც

$$W_8=10^7\cdot\lg\frac{\sin 13\cdot\sin 3\cdot\sin 16}{\sin 6\cdot\sin 12\cdot\sin[4+5+16]}.$$

3. $\overline{AB}$ გვერდის შეტანით (მისი სიგრძე და დირექციული კუთხე) წარმოიშობა გვერდებისა და დირექციული კუთხეების პირობითი განტოლებები, რადგანაც აქ არსებულ B პუნქტს უნდა დაემთხვეს 1, 2, 3, 4, 11, 12 კუთხეების მონაწილეობით განსაზღვრული $\overline{AB}$ გვერდის სიგრძე და მიმართულება, ე. ი დავწერთ პირობით ტოლობებს:

გვერდებისას

$$-\Delta_1(1)+\Delta_4(4)+\Delta_{11}(11)-\Delta_{12}(12)+W_9=0,$$

სადაც

$$W_9=10^7\cdot\lg\frac{\overline{AB}\cdot\sin 11\cdot\sin 4}{\overline{AE}\cdot\sin 1\cdot\sin 12}\;.$$

დირექციული კუთხეებისას

$$(2)+(3)+W_{10}=0,\ \text{სადაც}\ W_{10}=2+3-[(AE)-(AB)].$$

4. $\overline{BC}$ გვერდის შეტანით წარმოიშობა პირობითი ტოლობები:

გვერდების

$$-\Delta_3(3)+\Delta_6(6)+\Delta_{12}(12)-\Delta_{13}(13)+W_{11}=0,$$

სადაც

$$W_{11}=10^7\cdot\lg\frac{\overline{BC}\cdot\sin 12\cdot\sin 6}{\overline{BA}\cdot\sin 3\cdot\sin 13}\;.$$

დირექციული კუთხეების

$$(4)+(5)+W_{12}=0,\quad \text{სადაც}\quad W_{12}=4+5-[(BA)-(BC)].$$

5. მოცემულ D წერტილზე $\overline{CD}$ და $\overline{ED}$ გვერდებმა რომ გაიარონ უნდა მოვითხოვოთ კუთხური ან ხაზოვანი გადაკვეთის პირობა. უფრო მისაღებია კუთხური, ე. ი. თითოეული ხაზის მიმართ დაიწერება დირექციული კუთხის პირობითი განტოლება

$$(6)+(7)+W_{13}=0,\quad \text{სადაც}\quad W_{13}=6+7-[(CB)-(CD)],$$
$$(1)+(10)+W_{14}=0,\quad \text{„}\quad W_{14}=1+10-[(ED)-(EA)].$$

მაშასადამე, სულ მივიღებთ ფიგურის ხუთ, ერთი ჰორიზონტის, ორი პოლუსის, ორი გვერდისა და ოთხი დირექციული კუთხის პირობით ტოლობებს. არ გვექნება კოორდინატების პირობითი განტოლებები, რადგანაც $R=1$. ანუ გვაქვს ერთი ხისტი ჯგუფი პუნქტებისა.

თუ დავუკვირდებით ზემოგანხილულ შემთხვევებს, შევამჩნევთ, რომ გვერდების პირობათა რაოდენობა ხისტად ჩაკეტილ ქსელებში უდრის ხისტი გვერდების რაოდენობას მინუს სამი, რადგანაც ერთ გვერდს ყოველთვის ვიღებთ მასშტაბირების, ორიენტირებისა და ცენტრირებისათვის, ხოლო ორი გვერდი კი ყოველთვის გვაძლევს მხოლოდ დირექციული კუთხეების პირობას. ასეთი ქსელების მეორე თავისებურება ისაა, რომ ჩაკეტილი ხისტი მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვის ზრდის მიხედვით წარმოიშობა მნიშვნელოვანი რაოდენობა პირობითი განტოლებებისა, რაც გამოთვლებს ართულებს.

საერთო დასკვნა

პირობითი განტოლებების შედგენის დროს საჭიროა გვახსოვდეს შემდეგი:

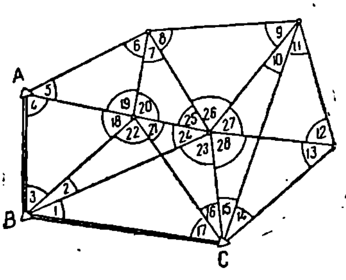
1. როცა ქსელი თავისუფალი და რთულია უნდა დავითვალოთ გაზომილი კუთხეები და (4. 2. 1. 9), (4. 2. 1. 10), (4. 2. 1. 11), 4. 2. 1. 12) ფორმულებით, სახეობების მიხედვით განვსაზღვროთ პირობითი განტოლების საჭირო რაოდენობა. შემდეგ, გამოვყოთ ძირითადი (გამოსავალი) ფიგურა, რომლის მიმართ უფრო ადვილად დაიწერება პირობითი განტოლებები, თანდათან ვუმატოთ ჯერ მთლიანი და მერე არამთლიანი გვერდები, რომლითაც დაემატება პოლუსის და ფიგურის ან მხოლოდ პოლუსის პირობითი ტოლობები. დაბოლოს, კონტროლის სახეობების მიხედვით დავითვალოთ განტოლებების რაოდენობა.

2. როცა ქსელი არათავისუფალია, მას მივიჩნევთ, როგორც თავისუფალს და დავითვლით ზემოხსენებული ფორმულებისათვის საჭირო ყველა ელემენტს (ჭარბი მთლიანი ხაზისათვის უნდა გვქონდეს ხაზის თავსა და ბოლოში თითო კუთხე, არამთლიანისათვის კი ერთი) და გამოვითვლით სახეობების მიხედვით პირობით განტოლებათა რაოდენობას. შემდეგ მოცემული ქსელიდან გამოვყოფთ ძირითად ქსელს (ფიგურას) თავისუფალი ქსელის სახით, რომლისათვისაც ვიყენებთ მხოლოდ ერთ გამოსავალ მონაცემს და შევადგენთ შესაბამის პირობით განტოლებებს. მერე დავუმატებთ მთლიან და არამთლიან ჭარბ (დამატებით, გამართულებელ) ხაზებს, რის გამოც დავწერთ პოლუსის და სამკუთხედის ან მხოლოდ პოლუსის პირობით განტოლებებს. შემდეგ თანდათანობით შევიტანთ ქსელში დარჩენილ გამოსავალ მონაცემებს (ბაზისებს, გვერდებს), რისთვისაც მიღებული წესით ვადგენთ სათანადო პირობით განტოლებებს. დაბოლოს, კონტროლის მიზნით დავითვლით ყველა განტოლებას.

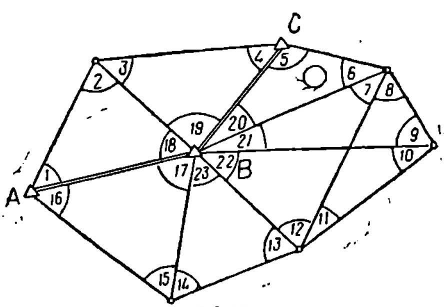
პირობითი განტოლებების შედგენის ზემოხსენებული წესის გაცნობით ვამთავრებთ გაწონასწორებისათვის საჭირო პირველი სახის მოსამზადებელი სამუშაოს განხილვას.

VII. სავარჯიშოები

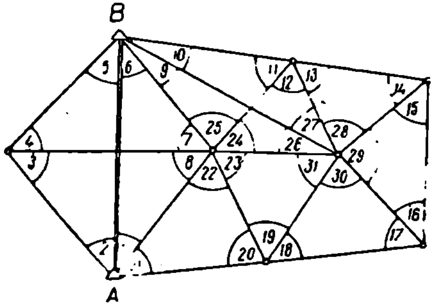
სახეობების მიხედვით შევადგინოთ პირობითი განტოლებების აუცილებელი და საკმარისი რაოდენობა (13) — (27) ნახაზების მიხედვით, რომელიც ამოღებულია [9] და [16]-დან.



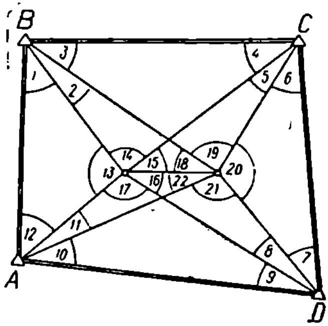
ნახ. 4.2.2.13



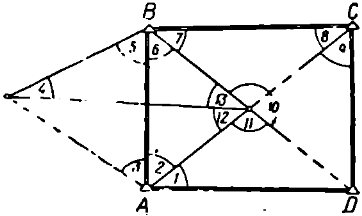
ნახ. 4.2.2.14



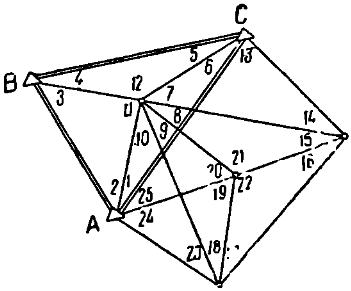
ნახ. 4.2.2.15



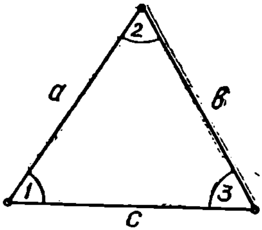
ნახ. 4.2.2.16



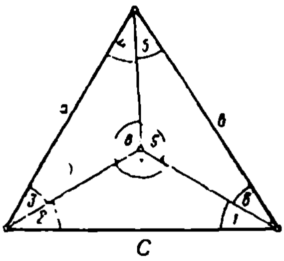
ნახ. 4.2.2.17



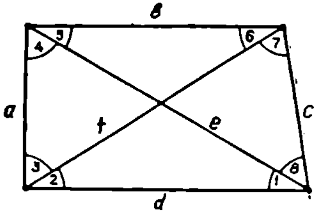
ნახ. 4.2.2.18



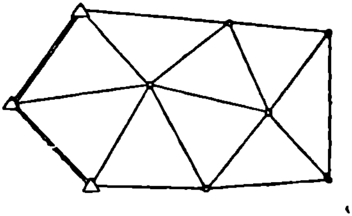
ნახ. 4.2.2.19



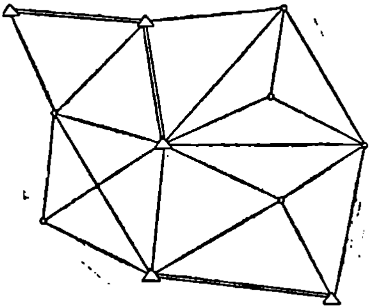
ნახ. 4.2.2.20



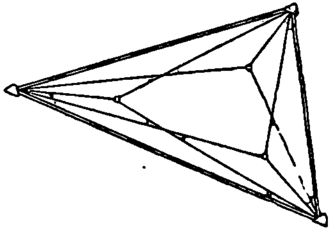
ნახ. 4.2.2.21



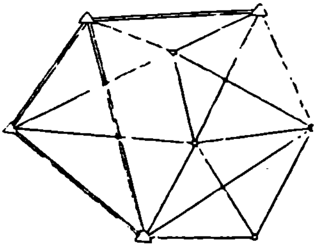
ნახ. 4.2.2.22



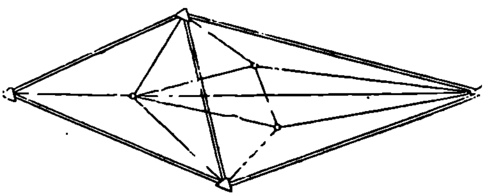
ნახ. 4.2.2.23



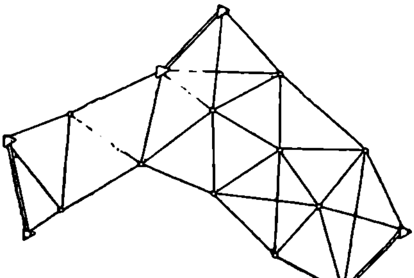
ნახ. 4.2.2.24



ნახ. 4.2.2.25



ნახ. 4.2.2.26



ნახ. 4.2.2.27

თავი III

პირდაპირი პირობითი განაზომების გაწონასწორების ზოგადი საფუძვლები

(გაწონასწორებული სიდიდეების განსაზღვრის ამოცანა)

4. 3. 1. ნორმალური განტოლებების სისტემების შედგენის არსი

წინა პარაგრაფებში განხილული მაგალითების საფუძველზე შეიძლება ზოგადად ჩამოვაყალიბოთ პირდაპირი პირობითი განაზომების გაწონასწორების საკითხი.

დავუშვათ, რომ უშუალოდ გაზომილი $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ელემენტების უალბათესი მნიშვნელობების საფუძველზე (4.1.1.1.) დამოკიდებულების მაგვარად შევადგინეთ თ ე ო რ ი უ ლ ი სახის სამი პირობითი განტოლება:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(l_1, l_2, \ldots, l_n)=0 \\ F_2(l_1, l_2, \ldots, l_n)=0 \\ F_3(l_1, l_2, \ldots, l_n)=0 \end{array}\right\}. \qquad (4.3.1.1)$$

განაზომთა თანხლებული უცილობელი შეცდომის გამო ამ განტოლებათა პ რ ა ქ ტ ი კ უ ლ ი სახე (4.1.1.2) — დამოკიდებულების ანალოგიურად იქნება

$$\left.\begin{array}{l} F_1(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_1 \\ F_2(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_2 \\ F_3(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_3 \end{array}\right\}, \qquad (4.3.1.2)$$

სადაც W_i შეუკვრელობა არის განაზომთა შეცდომების ფუნქცია და ტოლობებში ის შევა თავისი ნიშნით[1].

როგორიც არ უნდა იყოს W_i შეუკვრელობა (4.1.1.3) დამოკიდებულების ანალოგიით შეიძლება დაიწეროს განუზღვრელი რაოდენობის ზემოხსენებული სამი ტოლობის შესაბამისი ვარიანტი:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=0 \\ F_2(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=0 \\ F_3(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=0 \end{array}\right\}, \qquad (4.3.1.3)$$

სადაც ε_i განაზომთა შესწორებებია.

---

[1] რომელიმე ტოლობაში W შეიძლება ნულს უდრიდეს, მაგრამ ეს ტოლობა მაინც უნდა განვიხილოთ ბოლომდე სხვა ტოლობებთან ერთად.

ზოგადობის თვალსაზრისით დავუშვათ, რომ მოცემული პირობითი ტოლობები არ არის წრფივი სახის და საჭიროა მათ მიეცეს წრფივი სახე. ამისათვის (3) დამოკიდებულებები დავშალოთ ტ ე ი ლ ო რ ი ს ფორმულით, მხოლოდ ვიკმაროთ მწკრივის პირველხარისხიანი $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ მცირე შესწორებებიანი წევრები.

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=F_1(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_1}{\partial l_1}\cdot\varepsilon_1+\\
&\qquad+\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\cdot\varepsilon_2+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial l_n}\cdot\varepsilon_n=0\\
&F_2(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=F_2(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_2}{\partial l_1}\cdot\varepsilon_1+\\
&\qquad+\frac{\partial F_2}{\partial l_2}\cdot\varepsilon_2+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial l_n}\cdot\varepsilon_n=0\\
&F_3(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n)=F_3(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_3}{\partial l_1}\cdot\varepsilon_1+\\
&\qquad+\frac{\partial F_3}{\partial l_2}\cdot\varepsilon_2+\cdots+\frac{\partial F_3}{\partial l_n}\cdot\varepsilon_n=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.1.4)$$

მივიღოთ კერძო წარმოებულთა აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial l_1}=\frac{\partial W_1}{\partial l_1}=a_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial l_2}=\frac{\partial W_1}{\partial l_2}=a_2, \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial l_n}=\frac{\partial W_1}{\partial l_n}=a_n\\
&\frac{\partial F_2}{\partial l_1}=\frac{\partial W_2}{\partial l_1}=b_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial l_2}=\frac{\partial W_2}{\partial l_2}=b_2, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial l_n}=\frac{\partial W_2}{\partial l_n}=b_n\\
&\frac{\partial F_3}{\partial l_1}=\frac{\partial W_3}{\partial l_1}=c_1, \quad \frac{\partial F_3}{\partial l_2}=\frac{\partial W_3}{\partial l_2}=c_2, \ldots, \frac{\partial F_3}{\partial l_n}=\frac{\partial W_3}{\partial l_n}=c_n
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.1.5)$$

ვგულისხმობთ, რომ $F_1(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $F_2(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ და $F_3(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ფუნქციის, ანუ W_1, W_2 და W_3 შეუკვრელობის კერძო წარმოებულები უშუალოდ გაზომილი $l_1, l_2, \ldots, l_n$ სიდიდეების მიხედვით მდგრადი სიდიდეებია. მდგრადობის შემოწმების საკითხი პრაქტიკულად სრულდება განაზომთა შეცდომების თეორიის კურსში ((3.4.1) პარაგრაფში) მოყვანილი წესის მიხედვით. (4) დაშლის, მიღებული აღნიშვნებისა და (2) დამოკიდებულების გამოყენებით (3) დამოკიდებულებები გადაიწერება წრფივი სახით შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+W_1=0\\
&b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n+W_3=0\\
&c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n+W_3=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.1.6)$$

(6) სისტემა წარმოადგენს უ ა ლ ბ ა თ ე ს შ ე ს წ ო რ ე ბ ა თ ა პ ი რ ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ს წრფივ სახეს. როგორც ვხედავთ, უცნობთა რაოდენობა n მეტია პირობითი განტოლებების r რაოდენობაზე. როცა $n=r$, მაშინ გაწონასწორებას აზრი არ ექნება, რადგანაც უცნობები შეიძლება განისაზღვროს განტოლებათა ამოხსნის შედეგად და მათი ჭარბი გაზომვები საჭირო არ იქნება. აგრეთვე, როგორც ზემოთ ვთქვით, იმის გამო, რომ $n>r$-ზე, W_i შეუკვრე-

ლობისათვის შეიძლება დაიწეროს ნებისმიერი რაოდენობა ზემომოყვანილი სამი პირობითი ტოლობის შესაბამისი ვარიანტი [13]. ამ მიზეზით ამბობენ, რომ (6) დამოკიდებულება განუზღვრელია, ე. ი. (6) დამოკიდებულებებში მიღებული მათემატიკური პირობების დაკმაყოფილება ვერ მოგვცემს შესწორებათა და, მაშასადამე, საძებარ გაწონასწორებულ სიდიდეთა ცალსახა მნიშვნელობებს, რადგანაც შეიძლება მოიძებნოს უცნობთა ნებისმიერი რაოდენობა, რომელიც დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ მათემატიკურ (გეომეტრიულ ან ტრიგონომეტრიულ) პირობას. აღნიშნულის გამო საჭირო ხდება თანადროულად დავიცვათ მეორე ე. წ. ლ ე ჟ ა ნ დ რ ე-გ ა უ ს ი ს პირობაც — გ ა მ ო თ ვ ლ ი ლ ი შ ე ს წ ო რ ე ბ ე ბ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს გ ა ნ ა ზ ო მ თ ა წ ო ნ ე ბ ზ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს ჯ ა მ ი ს ხ ვ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ს ი დ ი დ ი ს შ ე ს წ ო რ ე ბ ა თ ა კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს წ ო ნ ე ბ ზ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ თ ა ჯ ა მ თ ა ნ შ ე დ ა რ ე ბ ი თ მ ი ნ ი მ ა ლ უ რ ი უ ნ დ ა ი ყ ო ს, რაც მათემატიკურად ასე გამოითქმის

$$[P\varepsilon\varepsilon] = \text{minimum}, \tag{4.3.1.7}$$

ან ტოლზუსტი განაზომებისათვის

$$[\varepsilon\varepsilon] = \text{minimum}. \tag{4.3.1.8}$$

ეს ორი პირობა ერთად აკმაყოფილებს აუცილებლობისა და საკმარისობის პირობას. მაშასადამე, უცნობთა განსაზღვრის მიზნით ვიყენებთ პირობითი ექსტრემუმის წესს, რისთვისაც ორივე პირობას გავაერთიანებთ ერთი ფუნქციის სახით, მხოლოდ (6) მათემატიკური პირობის გამოსახულებას წინასწარ ვამრავლებთ გაორკეცებულ K განუზღვრელ (ნებისმიერ) მამრავლზე (კორელატზე) შებრუნებული ნიშნით და შევუერთებთ მეორე ((7) ან (8)) პირობას. ამ მოქმედებით იღებენ ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ფუნქციას წრფივი სახით, რომელიც დაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} G=[P\varepsilon\varepsilon]&-2K_1(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+W_1)-\\ &-2K_2(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n+W_2)-\\ &-2K_3(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n+W_3)=\text{minimum}. \end{aligned} \tag{4.3.1.9}$$

ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს მინიმუმის პირობას, რადგანაც საკლები მინიმუმია და ყოველი მაკლები კი ნულის ტოლი.

შესწორებათა სიდიდეების განსაზღვრის მიზნით გამოვიყენებთ [13]-ში განმარტებულ პირობითი ექსტრემუმის წესს არგუმენტთა ექსტრემიალური მნიშვნელობის დადგენისას. მაშასადამე, ავიღოთ G ფუნქციის კერძო წარმოებული ε_1-ით მიღებული სიდიდე გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1} = 2P_1\varepsilon_1 - 2K_1a_1 - 2K_2b_1 - 2K_3c_1 = 0,$$

საიდანაც

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{P_1}(a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3).$$

ავიღოთ G ფუნქციის მეორე კერძო წარმოებული ε_1-ით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varepsilon_1^2} = 2P_1.$$

წონა P_1 დადებითი რიცხვია, მაშასადამე, G ფუნქციას ε_1-ის ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი მნიშვნელობისათვის აქვს ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ი და იგი მ ი ნ ი მ უ მ ი ა.

ანალოგიური გზით, ანუ G ფუნქციის $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$-ით გაწარმოებით განესაზღვრავთ $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ შესწორებებს, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{P_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{P_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= \frac{1}{P_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3) \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.1.10}$$

მიღებული (10) დამოკიდებულებები წარმოადგენს კორელატებით გამოსახულ **შესწორებათა სისტემას.**

შესწორებათა (10) სისტემა არის შეცდომათა (6) სისტემის **ტრანსფორმირება**, რადგანაც პირველის a_i, b_i, c_i კოეფიციენტები სტრიქონების მიხედვით, შეესაბამება მეორის კოეფიციენტებს სვეტების მიხედვით.

K_1, K_2 და K_3 კორელატის განსაზღვრის მიზნით, შესწორებათა მნიშვნელობები (10) სისტემიდან შევიტანოთ შესწორებათა (6) სისტემის პირველ სტრიქონში, მივიღებთ:

$$\begin{gathered} a_1\cdot\frac{1}{P_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)+ \\ +a_2\cdot\frac{1}{P_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)+\cdots+ \\ +a_n\cdot\frac{1}{P_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3)+W_1=0, \end{gathered}$$

ანუ

$$\begin{gathered} K_1\left(\frac{a_1a_1}{P_1}+\frac{a_2a_2}{P_2}+\cdots+\frac{a_na_n}{P_n}\right)+ \\ +K_2\left(\frac{a_1b_1}{P_1}+\frac{a_2b_2}{P_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{P_n}\right)+ \\ +K_3\left(\frac{a_1c_1}{P_1}+\frac{a_2c_2}{P_2}+\cdots+\frac{a_nc_n}{P_n}\right)+W_1=0. \end{gathered}$$

გამოვიყენოთ ჯამის შემოკლებული აღნიშვნა **გაუსის** წესით, მივიღებთ:

$$\left[\frac{aa}{P}\right]\cdot K_1+\left[\frac{ab}{P}\right]K_2+\left[\frac{ac}{P}\right]K_3+W_1=0.$$

ანალოგიურად, თუ შესწორებათა მნიშვნელობებს (10) სისტემიდან შევიტანთ (6) სისტემის მეორე და მესამე სტრიქონში, მივიღებთ სამუცნობიანი განტოლებების შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{P}\right]K_1+\left[\frac{ab}{P}\right]K_2+\left[\frac{ac}{P}\right]K_3+W_1=0 \\ \left[\frac{ab}{P}\right]K_1+\left[\frac{bb}{P}\right]K_2+\left[\frac{bc}{P}\right]K_3+W_2=0 \\ \left[\frac{ac}{P}\right]K_1+\left[\frac{bc}{P}\right]K_2+\left[\frac{cc}{P}\right]K_3+W_3=0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.1.11}$$

მიღებული სამუცნობიანი სისტემა სრულიად განსაზღვრულია და შეესაბამება პირობით განტოლებათა რაოდენობას.

(11) ტოლობების ერთობლიობას უწოდებენ კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემას, რომლის ძირითადი თავისებურება შემდეგია:

1. განტოლებათა რაოდენობა უდრის უცნობთა რაოდენობას,

2. კვადრატოვანი $\left(\left[\frac{aa}{P}\right], \left[\frac{bb}{P}\right], \left[\frac{cc}{P}\right]\right)$ კოეფიციენტები განლაგებულია მთავარი დიაგონალის მიმართულებით და დადებითი სიდიდისაა.

3. ამ დიაგონალის ორივე მხრივ წყვილ-წყვილად ტოლი კოეფიციენტები სიმეტრიულადაა განლაგებული და ისინი შეიძლება იყოს დადებითიც და უარყოფითიც. ამიტომ (11) სისტემა შეიძლება დაიწეროს (12) სისტემის სახით. იგი წაიკითხება მასზე ნაჩვენები ციფრებისა და ისრების მიხედვით.

$$1)\quad \left.\begin{array}{rrrl} \left[\frac{aa}{P}\right]K_1 + & \overset{2}{\left[\frac{ab}{P}\right]}K_2 + & \overset{3}{\left[\frac{ac}{P}\right]}K_3 + & W_1 = 0 \\ & \left[\frac{bb}{P}\right]K_2 + & \left[\frac{bc}{P}\right]K_3 + & W_2 = 0 \\ & & \left[\frac{cc}{P}\right]K_3 + & W_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.3.1.12)$$

აღნიშნული თავისებურებები წარმოადგენს ძირითად ნიშანთვისებას, რომლითაც განსახილველი სისტემა მიიჩნევა ნორმალურად.

ამ სისტემის ამოხსნით განისაზღვრება K_1, K_2 და K_3 კორელატი; ხოლო მათი მნიშვნელობების შესწორებათა (10) სისტემაში შეტანით განისაზღვრება გაწონასწორებისათვის საჭირო $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ შესწორებები. როგორც ვხედავთ, ლაგრანჟის (9) ფუნქციის ამოხსნის გზით (6) სისტემის ნებისმიერი რაოდენობის შესაძლო ამონახსნიდან მიიღება მხოლოდ ისეთი, რომელიც შეესაბამება შესწორებათა კვადრატების ჯამის მინიმუმის პირობას.

ზემოაღნიშნული მსჯელობა ეხებოდა არაერთგვაროვან, არატოლზუსტ განაზომებს.

ერთგვაროვანი, არატოლზუსტი განაზომებისათვის ნორმალური განტოლებების სისტემა იგივე სახის იქნება (მეორე პირველის კერძო შემთხვევაა), მხოლოდ, პირველ შემთხვევაში (3. 5. 4. 1) ფორმულით წონა

$$P_i = \frac{\eta^2}{m_i^2},$$

წარმოადგენს არანულოვანი განზომილების, ანუ სხვადასხვა განზომილების მქონე სიდიდეებს (η არის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა ნულოვანი განზომილების). მეორე შემთხვევაში P_i წონის სიდიდე იქნება ნულოვანი განზომილების (η არის იმავე განზომილების, რაც აქვს განაზომის m_i საშუალო კვადრატულ შეცდომას).

არაერთგვაროვანი და ერთგვაროვანი ტოლზუსტი განაზომებისათვის წონები ურთიერთტოლი სიდიდეებია და პრაქტიკულად მა-

თი ოდენობები მიიღება ერთის ტოლად. მაშასადამე, კორელატებით გამოსახულ შესწორებათა (10) სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3 \\ \varepsilon_2 = a_2K_1 + b_2K_2 + c_2K_3 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = a_nK_1 + b_nK_2 + c_nK_3 \end{array}\right\}. \tag{4.3.1.13}$$

ხოლო (11) ნორმალური განტოლებების სისტემის სახე იქნება ასეთი:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,K_1 + [ab]\,K_2 + [ac]\,K_3 + W_1 = 0 \\ [ab]\,K_1 + [bb]\,K_2 + [bc]\,K_3 + W_2 = 0 \\ [ac]\,K_1 + [bc]\,K_2 + [cc]\,K_3 + W_3 = 0 \end{array}\right\}. \tag{4.3.1.14}$$

როგორც ვხედავთ, ნორმალური განტოლებების რაოდენობა იმდენი მიიღება, რამდენი პირობითი განტოლებაც გვაქვს[1]. მაგალითად, თუ გვაქვს ხუთი პირობითი განტოლება, მაშინ დაემატება მეოთხე და მეხუთე განტოლებებისათვის d და e კოეფიციენტები. ე. ი. შესწორებათა (10) სისტემის ზოგადი სახე იქნება ასეთი:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{P_i}\,(a_iK_1 + b_iK_2 + c_iK_3 + d_iK_4 + e_iK_5).$$

თუ გვინდა ამ საერთო ფორმულიდან ε_{10} შესწორების განსაზღვრა ყველგან i ინდექსის მაგიერ შევიტანთ 10-ს, მაშასადამე,

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{P_{10}}\,(a_{10}K_1 + b_{10}K_2 + c_{10}K_3 + d_{10}K_4 + e_{10}K_5).$$

ნორმალური განტოლებების სისტემა კი იქნება:

$$\left[\frac{aa}{P}\right]K_1 + \left[\frac{ab}{P}\right]K_2 + \left[\frac{ac}{P}\right]K_3 + \left[\frac{ad}{P}\right]K_4 + \left[\frac{ae}{P}\right]K_5 + W_1 = 0,$$

$$\left[\frac{ab}{P}\right]K_1 + \left[\frac{bb}{P}\right]K_2 + \left[\frac{bc}{P}\right]K_3 + \left[\frac{bd}{P}\right]K_4 + \left[\frac{be}{P}\right]K_5 + W_2 = 0,$$

$$\left[\frac{ac}{P}\right]K_1 + \left[\frac{bc}{P}\right]K_2 + \left[\frac{cc}{P}\right]K_3 + \left[\frac{cd}{P}\right]K_4 + \left[\frac{ce}{P}\right]K_5 + W_3 = 0,$$

$$\left[\frac{ad}{P}\right]K_1 + \left[\frac{bd}{P}\right]K_2 + \left[\frac{cd}{P}\right]K_3 + \left[\frac{dd}{P}\right]K_4 + \left[\frac{de}{P}\right]K_5 + W_4 = 0,$$

$$\left[\frac{ae}{P}\right]K_1 + \left[\frac{be}{P}\right]K_2 + \left[\frac{ce}{P}\right]K_3 + \left[\frac{de}{P}\right]K_4 + \left[\frac{ee}{P}\right]K_5 + W_5 = 0.$$

---

[1] როგორც ზემოთ ითქვა, სისტემის რომელიმე ტოლობის შეუკვრელობა შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ეს ტოლობა მაინც შეიტანება სისტემაში და განისაზღვრება კორელატები.

ქვემოთ, საკითხების განხილვისას ვისარგებლებთ ინდუქციის მეთოდით. ფორმულებს გამოვიყვანთ არაერთგვაროვანი და ერთგვაროვანი ტოლზუსტი განაზომებისათვის, და შემდეგ არაერთგვაროვანი და ერთგვაროვანი არატოლზუსტი განაზომებისათვის ამ ფორმულებში, შესაბამისად შევიტანთ დადგენილ წონებს.

4. 3. 2. ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა უცნობთა თანამიმდევრობითი გამორიცხვის გზით

ნორმალური განტოლებების ამოხსნა შეიძლება ელემენტარულ ალგებრაში ცნობილი მრავალი ხერხით. როცა განტოლებათა რაოდენობა ორ-სამს არ აღემატება, მაშინ მათი ამოხსნის ხერხს გადამწყვეტი მნიშვნელობა არა აქვს. მაგრამ, თუ სისტემა აღემატება ათეულებს და ასეულ განტოლებებს, მაშინ შერჩეული მეთოდი და ესა თუ ის ხერხი დიდმნიშვნელოვანია. მრავალგანტოლებიანი სისტემის ამოხსნისათვის ძირითადად არსებობს ორი მეთოდი: პირდაპირი (ზუსტი) და არაპირდაპირი (იტერაციული). პირველი მეთოდის შესაბამის უფრო მოხერხებულ და მისაღებ ხერხს წარმოადგენს გაუსის უცნობთა თანამიმდევრობით გამორიცხვის ხერხი და მის შემდეგ ჰელმერტის განუზღვრელი კოეფიციენტების ხერხი. მეორე მეთოდის შესაბამის ხერხად მიღებულია იაკობის უცნობთა თანდათანობითი მიახლოების ხერხი [9].

სამარკშეიდერო და საინჟინრო გეოდეზიურ პრაქტიკაში მიღებულია გაუსის, ანუ უცნობთა თანამიმდევრობითი გამორიცხვის ხერხი, რომლის უპირატესობა ის არის, რომ თანამიმდევარი მოქმედებები ერთგვარია. აგრეთვე იგი იძლევა კონტროლისა და შედეგთა სიზუსტის შეფასების საშუალებას; უშუალოდ ვიღებთ უკანასკნელი უცნობის წონას და ადვილად შეიძლება განისაზღვროს ყოველი წინა უცნობის წონა; თანამიმდევრობით გარდაქმნილი ტოლობების კოეფიციენტების აღნიშვნის მოხერხებული სისტემის შერჩევით არ ირღვევა ნორმალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების დამახასიათებელი სიმეტრია. ამ ხერხის შესრულებისას არ შეიძლება ტოლობის ორივე მხარის ნებისმიერ რიცხვზე გამრავლება ან გაყოფა, აქ მხოლოდ დასაშვებია ტოლობის გაყოფა და გამრავლება საძიებელი უცნობის კოეფიციენტზე.

ვთქვათ, საჭიროა ამოიხსნას შემდეგი სახის ხუთუცნობიანი განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+[ad]K_4+[ae]K_5+W_1=0\\
&[ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+[bd]K_4+[be]K_5+W_2=0\\
&[ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3+[cd]K_4+[ce]K_5+W_3=0\\
&[ad]K_1+[bd]K_2+[cd]K_3+[dd]K_4+[de]K_5+W_4=0\\
&[ae]K_1+[be]K_2+[ce]K_3+[de]K_4+[ee]K_5+W_5=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.2.1)$$

I. გავყოთ (1) სისტემის პირველი ტოლობა K_1-ის $[aa]$ კოეფიციენტზე, მივიღებთ:

$$K_1+\frac{[ab]}{[aa]}K_2+\frac{[ac]}{[aa]}K_3+\frac{[ad]}{[aa]}K_4+\frac{[ae]}{[aa]}K_5+\frac{W_1}{[aa]}=0. \qquad a)$$

1. გავამრავლოთ *a*) ტოლობა (1) სისტემის მეორე ტოლობის K_1-ს $[ab]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (1) სისტემის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)K_2+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{(aa)}\right)K_3+\left([bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)K_4+$$
$$+\left(be-\frac{[ab][ae]}{[aa]}\right)K_5+\left(W_2-\frac{[ab]W_1}{[aa]}\right)=0,$$

2. გავამრავლოთ *a*) ტოლობა (1) სისტემის მესამე ტოლობის K_1-ის $[ac]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (1) სისტემის მესამე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)K_2+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)K_3+\left([cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}\right)K_4+$$
$$+\left([ce]-\frac{[ac][ae]}{[aa]}\right)K_5+\left(W_3-\frac{[ac]W_1}{[aa]}\right)=0,$$

3. გავამრავლოთ *a*) ტოლობა (1) სისტემის მეოთხე ტოლობის K_1-ის $[ad]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (1) სისტემის მეოთხე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)K_2+\left([cd]-\frac{[ac][ad]}{]aa]}\right)K_3+\left([dd]-\frac{[ad][ad]}{[aa]}\right)K_4+$$
$$+\left([de]-\frac{[ad][ae]}{[aa]}\right)K_5+\left(W_4-\frac{[ad]W_1}{[aa]}\right)=0,$$

4. გავამრავლოთ *a*) ტოლობა (1) სისტემის მეხუთე ტოლობის K_1-ის $[ae]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (1) სისტემის მეხუთე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([be]-\frac{[ab][ae]}{[aa]}\right)K_2+\left([ce]-\frac{[ac][ae]}{[aa]}\right)K_3+\left([de]-\frac{[ad][ae]}{[aa]}\right)K_4+$$
$$+\left([ee]-\frac{[ae][ae]}{[aa]}\right)K_5+\left(W_5-\frac{[ae]W_1}{[aa]}\right)=0.$$

I მუხლში შესრულებული მოქმედებებით (1) სისტემიდან გამოირიცხა K_1 უცნობი კორელატი და მივიღეთ ოთხუცნობიანი განტოლებების ნორმალური სისტემა.

მიღებული სისტემის მოხერხებულად დაწერის მიზნით გაუსის მიერ შემოღებულია შემდეგი შემოკლებული აღნიშვნა (სიმბოლო), რასაც ალგორითმი[1] ეწოდება:

---

[1] ალგორითმი არის მათემატიკურ მოქმედებათა ერთობლიობის სიმბოლური, შემოკლებული გამოსახვა, რომლის მიმართ დადგენილია წესი, თუ ცნობილი მათემატიკური ოპერაციებიდან რომელი მარტივი ოპერაციები უნდა შესრულდეს გარკვეული თანამიმდევრობით, რომ გამოსავალ მონაცემთა სათანადოდ მათში ჩასმით აუცილებლად მივიღოთ მოცემული მაგალითის გამონათვალი (ალგორითმის აგებულების შესახებ განმარტება მოცემულია შემდეგ პარაგრაფში).

$$[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=[bb\cdot 1];\qquad [dd]-\frac{[ad][ad]}{[aa]}=[dd\cdot 1];$$

$$[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}=[bc\cdot 1];\qquad [bc]-\frac{[ab][ae]}{[aa]}=[be\cdot 1]:$$

$$[bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}=[bd\cdot 1];\qquad [ee]-\frac{[ae][ae]}{[aa]}=[ee\cdot 1];$$

$$[be]-\frac{[ab][ae]}{[aa]}=[be\cdot 1];\qquad W_2-\frac{[ab]W_1}{[aa]}=W_2\cdot 1:$$

$$[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}=[cc\cdot 1];\qquad W_3-\frac{[ac]W_1}{[aa]}=W_3\cdot 1;$$

$$[cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}=[cd\cdot 1];\qquad W_4-\frac{[ad]W_1}{[aa]}=W_4\cdot 1;$$

$$[ce]-\frac{[ac][ae]}{[aa]}=[ce\cdot 1];\qquad W_5-\frac{[ae]W_1}{[aa]}=W_5\cdot 1.$$

ამ აღნიშვნებით მიღებული ოთხუცნობიანი განტოლებების სისტემა გადაიწერება ასე:

$$\left.\begin{aligned}
&[bb\cdot 1]K_2+[bc\cdot 1]K_3+[bd\cdot 1]K_4+[be\cdot 1]K_5+W_2\cdot 1=0\\
&[bc\cdot 1]K_2+[cc\cdot 1]K_3+[cd\cdot 1]K_4+[ce\cdot 1]K_5+W_3\cdot 1=0\\
&[bd\cdot 1]K_2+[cd\cdot 1]K_3+[dd\cdot 1]K_4+[de\cdot 1]K_5+W_4\cdot 1=0\\
&[be\cdot 1]K_2+[ce\cdot 1]K_3+[de\cdot 1]K_4+[ee\cdot 1]K_5+W_5\cdot 1=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.2.2)$$

II. გავყოთ (2) სისტემის პირველი ტოლობა K_2-ის $[bb\cdot 1]$ კოეფიციენტზე, მივიღებთ:

$$K_2+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_3+\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_4+\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_5+\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=0. \qquad ბ)$$

1. გავამრავლოთ ბ) ტოლობა (2) სისტემის მეორე ტოლობის K_2-ის $[bc\cdot 1]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (2) სისტემის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_3+\left([cd\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_4+$$

$$+\left([ce\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_5+\left(W_3\cdot 1-\frac{[bc\cdot 1]\,W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)=0.$$

2. გავამრავლოთ ბ) ტოლობა (2) სისტემის მესამე ტოლობის K_2-ის $[bd\cdot 1]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (2) სისტემის მესამე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([cd\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_3+\left([dd\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_4+$$

$$+\left([de\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_5+\left(W_4\cdot 1-\frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)=0,$$

3. გავამრავლოთ b) ტოლობა (2) სისტემის მეოთხე ტოლობის K_2-ის $[be\cdot 1]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (2) სისტემის მეოთხე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([ce\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_3+\left([de\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_4+$$

$$+\left([ee\cdot 1]-\frac{[be\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)K_5+\left(W_5\cdot 1-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)=0.$$

II მუხლში შესრულებული მოქმედებებით გამოირიცხა K_2 უცნობი კორელატი და მივიღეთ სამუცნობიანი განტოლებების ნორმული სისტემა. გამოვიყენოთ გ ა უ ს ი ს ა ლ გ ო რ ი თ მ ი:

$$[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[cc\cdot 2]; \qquad W_3\cdot 1-\frac{[bc\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=W_3\cdot 2;$$

$$[cd\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[cd\cdot 2]; \qquad W_4\cdot 1-\frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bd\cdot 1]}=W_4\cdot 2;$$

$$[ce\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[ce\cdot 2]; \qquad W_5\cdot 1-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=W_5\cdot 2;$$

$$[dd\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[dd\cdot 2];$$

$$[de\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[de\cdot 2];$$

$$[ee\cdot 1]-\frac{[be\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[ee\cdot 2].$$

ამ აღნიშვნებით მიღებული სამუცნობიანი განტოლებების სისტემა დაიწერება ასეთი სახით:

$$\left.\begin{array}{l}[cc\cdot 2]\cdot K_3+[cd\cdot 2]\cdot K_4+[ce\cdot 2]K_5+W_3\cdot 2=0\\ [cd\cdot 2]\cdot K_3+[dd\cdot 2]\cdot K_4+[de\cdot 2]K_5+W_4\cdot 2=0\\ [ce\cdot 2]\cdot K_3+[de\cdot 2]\cdot K_4+[ee\cdot 2]K_5+W_5\cdot 2=0\end{array}\right\}. \qquad (4.3.2.3)$$

III. გავყოთ (3) სისტემის პირველი ტოლობა მისივე K_3-ის $[cc\cdot 2]$ კოეფიციენტზე, მივიღებთ:

$$K_3+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_4+\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_5+\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=0. \qquad c)$$

1. გავამრავლოთ c) ტოლობა (3) სისტემის მეორე ტოლობის K_3-ის $[cd\cdot 2]$

კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (3) სისტემის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([dd\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)K_4+\left([de\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)K_5+$$
$$+\left(W_4\cdot 2-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right)=0.$$

2. გავამრავლოთ c) ტოლობა (3) სისტემის მესამე ტოლობის K_3-ის $[ce\,.\,2]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (3) სისტემის მესამე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([de\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)K_4+\left([ee\cdot 2]-\frac{[ce\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)K_5+$$
$$+\left(W_5\cdot 2-\frac{[ce\cdot 2]\cdot W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right)=0.$$

III მუხლში შესრულებული მოქმედებებით გამოირიცხა K_3 უცნობი კორელატი და მივიღეთ ორუცნობიანი განტოლებების ნორმალური სისტემა. გამოვიყენოთ გ ა უ ს ი ს ა ლ გ ო რ ი თ მ ე ბ ი:

$$[dd\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=[dd\cdot 3],\qquad W_4\cdot 2-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=W_4\cdot 3,$$
$$[de\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=[de\cdot 3],\qquad W_5\cdot 2-\frac{[ce\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=W_5\cdot 3.$$
$$[ee\cdot 2]-\frac{[ce\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=[ee\cdot 3],$$

ამ აღნიშვნებით მიღებული ორუცნობიანი სისტემა დაიწერება ასე:

$$\left.\begin{array}{l}[dd\cdot 3]\cdot K_4+[de\cdot 3]K_5+W_4\cdot 3=0\\ [de\cdot 3]\cdot K_4+[ee\cdot 3]K_5+W_5\cdot 3=0\end{array}\right\}. \qquad (4.3.2.4)$$

IV. გავყოთ (4) სისტემის პირველი ტოლობა მისივე K_4-ის $[dd\,.\,3]$ კოეფიციენტზე, მივიღებთ:

$$K_4+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}K_5+\frac{W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}=0. \qquad d)$$

1. გავამრავლოთ d) ტოლობა (4) სისტემის მეორე ტოლობის K_4-ის $[de\,.\,3]$ კოეფიციენტზე და მიღებული ტოლობა გამოვაკლოთ (4) სისტემის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([ee\cdot 3]-\frac{[de\cdot 3][de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\right)K_5+\left(W_5\cdot 3-\frac{[de\cdot 3]W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}\right)=0.$$

IV მუხლში შესრულებული მოქმედებებით გამოირიცხა K_4 უცნობი კორელატი და მივიღეთ ერთუცნობიანი განტოლება.

გამოვიყენოთ გაუსის ალგორითმები:

$$[ee\cdot 3]-\frac{[de\cdot 3][de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}=[ee\cdot 4]; \qquad W_5\cdot 3-\frac{[de\cdot 3]W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}=W_5\cdot 4.$$

ამ აღნიშვნების გამოყენებით მიღებული ერთუცნობიანი განტოლება დაიწერება ასე:

$$[ee\cdot 4]K_5+W_5\cdot 4=0. \tag{4.3.2.5}$$

შესრულებული მოქმედებების შედეგად (1) სისტემის ნაცვლად მივიღეთ გარდაქმნილი სახით მისი ეკვივალენტური (ტოლძალოვანი), ანუ რედუცირებული სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]K_1+[ab]\cdot K_2+[ac]K_3+[ad]K_4+[ae]K_5+W_1&=0\\
[bb\cdot 1]K_2+[bc\cdot 1]K_3+[bd\cdot 1]K_4+[be\cdot 1]K_5+W_2\cdot 1&=0\\
[cc\cdot 2]K_3+[cd\cdot 2]K_4+[ce\cdot 2]K_5+W_3\cdot 2&=0\\
[dd\cdot 3]K_4+[de\cdot 3]K_5+W_4\cdot 3&=0\\
[ee\cdot 4]K_5+W_5\cdot 4&=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.3.2.6}$$

(6) სისტემის მეხუთე ტოლობიდან განვსაზღვრავთ K_5, მის მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეოთხე ტოლობაში და განვსაზღვრავთ K_4; შემდეგ K_4 და K_5 მნიშვნელობას შევიტანთ მესამე ტოლობაში და განვსაზღვრავთ K_3; K_3, K_4 და K_5 მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეორე ტოლობაში და განვსაზღვრავთ K_2; ბოლოს, K_2, K_3, K_4 და K_5 მნიშვნელობას ჩავსვამთ პირველ ტოლობაში და განვსაზღვრავთ K_1. ე. ი. რედუცირებულ (6) სისტემიდან დაიწერება შემდეგი სახის სისტემა

$$\left.\begin{aligned}
K_5&=-\frac{W_5\cdot 4}{[ee\cdot 4]}\\
K_4&=-\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}K_5-\frac{W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}\\
K_3&=-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_4-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_5-\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\\
K_2&=-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_3-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_4-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_5-\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\\
K_1&=-\frac{[ab]}{[aa]}K_2-\frac{[ac]}{[aa]}K_3-\frac{[ad]}{[aa]}K_4-\frac{[ae]}{[aa]}K_5-\frac{W_1}{[aa]}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.3.2.7}$$

(7) და მის მსგავს სისტემას უწოდებენ ელიმინაციურს, ანუ გამორიცხულ (შეზღუდულ) სისტემას. შესაბამისად მის სტრიქონებსაც ელიმინაციური სტრიქონები ჰქვია.

არატოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში ელიმინაციური სისტემა დაიწერება ასე:

$$
\left.
\begin{aligned}
K_5 &= -\frac{W_5\cdot 4}{\left[\frac{ee}{P}\cdot 4\right]} \\
K_4 &= -\frac{\left[\frac{de}{P}\cdot 3\right]}{\left[\frac{dd}{P}\cdot 3\right]}K_5 - \frac{W_4\cdot 3}{\left[\frac{dd}{P}\cdot 3\right]} \\
K_3 &= -\frac{\left[\frac{cd}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}K_4 - \frac{\left[\frac{ce}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}K_5 - \frac{W_3\cdot 2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]} \\
K_2 &= -\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}K_3 - \frac{\left[\frac{bd}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}K_4 - \frac{\left[\frac{be}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}K_5 - \frac{W_2\cdot 1}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]} \\
K_1 &= -\frac{\left[\frac{ab}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}K_2 - \frac{\left[\frac{ac}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}K_3 - \frac{\left[\frac{ad}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}K_4 - \frac{\left[\frac{ae}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}K_5 - \frac{W_1}{\left[\frac{aa}{P}\right]}
\end{aligned}
\right\}. \qquad (4.3.2.8)
$$

4. 3. 3. გაუსის ალგორითმის აგებულება

3. 2. 4. პარაგრაფის D მუხლში განხილულია გაუსის მიერ შემოღებული ალგორითმების რამდენიმე შემთხვევა, მაგალითად:

$$[aa]=a_1a_1+a_2a_2+\cdots+a_na_n,$$

$$[ab]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \text{ და სხვ.}$$

წინა პარაგრაფში გამოყენებული ალგორითმების არსი მდგომარეობს შემდეგში: ნიშნაკები 1, 2, 3, ... გამოსახავს განტოლებათა გარდაქმნის რიგს და გვიჩვენებს თუ რამდენი უცნობია სისტემიდან გამორიცხული. მაგალითად, $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[ae]$ ნიშნავს, რომ სისტემიდან არც ერთი უცნობი არ არის გამორიცხული, $[bb\cdot 1]$, $[bc\cdot 1]$, $[bd\cdot 1]$, $[be\cdot 1]$—ერთი უცნობია გამორიცხული, $[cc\cdot 2]$, $[cd\cdot 2]$, $[ce\cdot 2]$—ორი უცნობია გამორიცხული, $[dd\cdot 3]$, $[de\cdot 3]$—სამი უცნობია გამორიცხული, $[ee\cdot 4]$—ოთხი უცნობია გამორიცხული და ასე შემდეგ. როგორც ვხედავთ, ნულოვანი ნიშნაკის (რომელიც არ იწერება) შესაბამისი კვადრატოვანი ელემენტია $[aa]$, ერთისათვის—$[bb\cdot 1]$, ორისათვის—$[cc\cdot 2]$, სამიანი ნიშნაკისათვის—$[dd\cdot 3]$ და ა. შ.

გაუსის ალგორითმი იშლება შემდეგი წესის მიხედვით:

1. დასაშლელი ალგორითმი უდრის სხვაობას

$$[de\cdot 3]=[de\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]\cdot[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \qquad a)$$

2. საკლები [$de \cdot 2$] არის იგივე ალგორითმი, მხოლოდ მისი ნიშნაკი დასაშლელი ალგორითმის ნიშნაკზე ერთით ნაკლებია (საერთოდ კვადრატულ ფრჩხილებში ჩანაწერის პირველი ასო ნიშნავს განტოლების ნომერს, მაგალითად, d — მეოთხე ტოლობა, რადგანაც d არის ლათინური ალფაბეტის მეოთხე ასო; მეორე ასო ნიშნავს უცნობის ნომერს. მაგ., e მეხუთე ასოა, ე. ი. მეხუთე უცნობთან გვაქვს საქმე და ციფრი — გამორიცხული უცნობების რაოდენობა).

3. მაკლები არის წილადი, რომლის მნიშვნელია საკლების ნიშნაკის შესაბამისი კვადრატოვანი ელემენტი, ხოლო მრიცხველი წარმოადგენს იგივე ნიშნაკებით ორი ალგორითმის ნამრავლს, რომლის თითოეული თანამამრავლი არის წევრობრივ მაკლების მნიშვნელის და საკლების ნამრავლი.

ალგორითმის დაშლის სისწორის შემოწმებისათვის საჭიროა დაშლილი ალგორითმი დავწეროთ კვადრატული ფრჩხილების გარეშე და მოვახდინოთ ალგებრული მოქმედება, შედეგი ნული უნდა იყოს, მაგალითად:

$$de \cdot 3 = de \cdot 2 - \frac{cd \cdot 2 \cdot ce \cdot 2}{cc \cdot 2} = 0.$$

a) გამოსახულება თანამიმდევრობით დაიშლება ასე:

$$[de \cdot 2] = [de \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1][be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

$$[de \cdot 1] = [de] - \frac{[ad][ae]}{[aa]}.$$

მაშასადამე, სამივე ტოლობის შეკრებით a) დამოკიდებულება დაშლილი სახით დაიწერება:

$$[de \cdot 3] = [de] - \frac{[ad][ae]}{[aa]} - \frac{[bd \cdot 1][be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cd \cdot 2][ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \qquad (4.3.3.1)$$

ანალოგიურად [$ee \cdot 4$] ალგორითმი დაიშლება ასე:

$$[ee \cdot 4] = [ee] - \frac{[ae]^2}{[aa]} - \frac{[be \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[ce \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dc \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]}. \qquad (4.3.3.2)$$

მაშასადამე, დაშლის არაწილადი (პირველი საკლები) წევრია დასაშლელი ალგორითმი უნიშნაკოდ (ეს წევრია ნორმალური სისტემის იმ უცნობის კოეფიციენტი, რომელიც შეესაბამება ეკვივალენტური სისტემის იმავე უცნობის დასაშლელ კოეფიციენტს); წილადი წევრების რაოდენობა უდრის დასაშლელი ალგორითმის ნიშნაკს; ამ წევრების მნიშვნელები ეკვივალენტური სისტემის დარჩენილი (წინა) ტოლობების კვადრატოვანი კოეფიციენტებია თანამიმდევრობით პირველი ტოლობიდან დასაშლელ ალგორითმიან ტოლობამდე, ხოლო მრიცხველები, ცნობილი წესით პირველი არაწილადი საკლებისა და შესაბამისი მნიშვნელების წყვილ-წყვილად ნამრავლთა კომბინაციით შედგენილი სიდიდეების ნამრავლებია.

თავისუფალი წევრების (შეუკვრელობების) ალგორითმის დაშლაში ზემოხსენებულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ მაკლების მრიცხველი, მაგალითად:

$$W_4 \cdot 3 = W_4 \cdot 2 - \frac{[cd \cdot 2] \cdot W_3 \cdot 2}{[cc \cdot 2]}. \qquad b)$$

ვხედავთ, რომ წილადის მრიცხველის პირველი მამრავლის, ანუ $[cd.2]$ ალგორითმის c ასო (ანბანის მიხედვით) შეესაბამება დასაშლელი ალგორითმის ნიშნაკს (3), d ასო კი — მის ინდექსს (ტოლობის ნომერს) (4), ხოლო მეორე ნამრავლის W_3-ის ინდექსი (ტოლობის ნომერი) (3) იგივეა, რა ნიშნაკიც აქვს დასაშლელ ალგორითმს.

მაშასადამე, b) გამოსახულება თანამიმდევრობით დაიშლება ასე:

$$W_4\cdot 2 = W_4\cdot 1 - \frac{[bd\cdot 1]\cdot W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]},$$

$$W_4\cdot 1 = W_4 - \frac{[ad]W_1}{[aa]}.$$

ე. ი. (b) დამოკიდებულება დაშლილი სახით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$W_4\cdot 3 = W_4 - \frac{[ad]\cdot W_1}{[aa]} - \frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}. \qquad (4.3.3.3)$$

ანალოგიურად დაიშლება $W_5\cdot 4$ ალგორითმი:

$$W_5\cdot 4 = W_5 - \frac{[ae]W_1}{[aa]} - \frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]} - \frac{[ce\cdot 2]\cdot W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]} - \frac{[de\cdot 3]W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}. \qquad (4.3.3.4)$$

დაშლის არსი (2)-ის ანალოგიურია.

4. 3. 4. ნორმალური განტოლებების შედგენისა და ამოხსნის საკონტროლო ფორმულები

კოეფიციენტების შედგენის სისწორეს აკონტროლებენ ე. წ. ჯამის მეთოდით, რაც შემდეგში მდგომარეობს.

ამოვიწეროთ უალბათეს შესწორებათა პირობითი განტოლებების ხუთუცნობიანი სისტემიდან, (4. 3. 1. 6) სისტემის ანალოგიით, უცნობთა კოეფიციენტები ტრანსფორმირებული (სტრიქონები სვეტებად დალაგდეს) სახით და შევკრიბოთ მიღებული სისტემა როგორც სვეტების, ისე სტრიქონების მიმართულებით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 = S_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 = S_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = S_n \\ \hline [a]+[b]+[c]+[d]+[e]=[S] \end{array}\right\}. \qquad (4.3.4.1)$$

ვინაიდან კორელატების ნორმალური განტოლებების (4. 3. 1. 11) სისტემის და უალბათეს შესწორებათა (4. 3. 1. 6) სისტემის W_i თავისუფალი წევრები ერთი და იგივეა, ამიტომ ისინი არ შეგვაქვს საკონტროლო (1) სისტემაში.

შევადგინოთ (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან ცხრილი (1).

ცხრილი 4.3.4.1

I	II	III	IV	V
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
.	.	.	.	.
a_n	b_n	c_n	d_n	e

გავამრავლოთ (1) სისტემა (1) ცხრილის I სვეტზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]=[aS].$$

იგივე სისტემა გავამრავლოთ (1) ცხრილის II სვეტზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]=[bS].$$

ანალოგიურად მოვიქცეთ დანარჩენი სვეტების მიმართაც. ასეთი მოქმედებების შედეგად მივიღებთ ნორმალური სახის ხუთუცნობიანი განტოლებების სისტემის კოეფიციენტებისაგან შემდგარ ტოლობათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]=[aS]\\
&[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]=[bS]\\
&[ac]+[bc]+[cc]+[cd]+[ce]=[cS]\\
&[ad]+[bd]+[cd]+[dd]+[de]=[dS]\\
&[ae]+[be]+[ce]+[de]+[ee]=[eS]
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.4.2)$$

მიღებული ტოლობები საკონტროლოა, ანუ მათი დაცვა საჭიროა ნორმალური განტოლებების დადგენის დროს. (1) სისტემიდან ნათლად ჩანს, რომ აქ კონტროლდება მხოლოდ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ჯამების გამოთვლის სისწორე, ხოლო შესწორებათა ტოლობების კოეფიციენტების გამოთვლებისა და მათი ცხრილების შედგენის სისწორე და აგრეთვე სისტემის არაწრფივი სახიდან წრფივ სახეზე დაყვანის სისწორე გამოვლინდება, მხოლოდ გაწონასწორებითი გამოთვლების დამთავრების შემდეგ; ამიტომ საჭიროა თავიდანვე დიდი ყურადღებით (ჯობს ორი გამომთვლელის ხელით და შედეგთა შედარებით) განისაზღვროს კოეფიციენტები.

თუ (2) სისტემას შესაბამისად დავუმატებთ თავისუფალ წევრებს, მივიღებთ შემდეგი სახის ჯამებს:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]+W_1=[aS]+W_1=S_1'\\
&[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]+W_2=[bS]+W_2=S_2'\\
&[ac]+[bc]+[cc]+[cd]+[ce]+W_3=[cS]+W_3=S_3'\\
&[ad]+[bd]+[cd]+[dd]+[de]+W_4=[dS]+W_4=S_4'\\
&[ae]+[be]+[ce]+[de]+[ee]+W_5=[eS]+W_5=S_5'
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.3.4.3)$$

რომელთა მარჯვენა მხარის საკონტროლო ელემენტები ნორმალური სისტემის გადაწყვეტის, ანუ უცნობთა თანამიმდევრობითი გამორიცხვის შესაბამისად (4. 3. 2. 6) ტოლძალოვანი სისტემის მსგავსად მიიღება შემდეგნაირად: (4. 3. 2) პარაგრაფის a) შესაბამისად (3) სისტემის მიხედვით დავწერთ:

$$\frac{[aS]}{[aa]}+\frac{W_1}{[aa]}=\frac{S_1'}{[aa]}\ , \tag{a'}$$

ხოლო პირველი ელიმინაციური ტოლობის შესაბამისად მივიღებთ:

$$[bS]-\frac{[ab][aS]}{[aa]}+W_2-\frac{[ab]\cdot W_1}{[aa]}=S_2'-\frac{[ab]\cdot S_1'}{[aa]}\ ,$$

ანუ

$$[bS\cdot 1]+W_2\cdot 1=S_2'\cdot 1.$$

მაშასადამე, (4.3.2.2) სისტემის შესაბამისი სისტემა ანალოგიური მოქმედებებით დაიწერება:

$$[bS\cdot 1]+W_2\cdot 1=S_2'\cdot 1,$$
$$[cS\cdot 1]+W_3\cdot 1=S_3'\cdot 1,$$
$$[dS\cdot 1]+W_4\cdot 1=S_4'\cdot 1,$$
$$[eS\cdot 1]+W_5\cdot 1=S_5'\cdot 1.$$

ამ სისტემის მიხედვით დავწერთ:

$$\frac{[bS\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=\frac{S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\ . \tag{b'}$$

მეორე ელიმინაციური ტოლობის შესაბამისად მივიღებთ:

$$[cS\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bS\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+W_3\cdot 1-\frac{[bc\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=S_3'\cdot 1-\frac{[bc\cdot 1]\cdot S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\ .$$

მაშასადამე, მივიღებთ (4.3.2.3) შესაბამის სამგანტოლებიან სისტემას:

$$[cS\cdot 2]+W_3\cdot 2=S_3'\cdot 2,$$
$$[dS\cdot 2]+W_4\cdot 2=S_4'\cdot 2,$$
$$[eS\cdot 2]+W_5\cdot 2=S_5'\cdot 2.$$

ამ სისტემის მიხედვით დავწერთ:

$$\frac{[cS\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=\frac{S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\ . \tag{c'}$$

მესამე ელიმინაციური ტოლობის შესაბამისად მივიღებთ:

$$[dS\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][cS\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+W_4\cdot 2-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=S_4'\cdot 2-\frac{[cd\cdot 2]\cdot S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\ ,$$

მაშასადამე, (4.3.2.4) სისტემის შესაბამისად დავწერთ:

$$[dS\cdot 3]+W_4\cdot 3=S_4'\cdot 3,$$
$$[eS\cdot 3]+W_5\cdot 3=S_5'\cdot 3.$$

ამ სისტემიდან კი დაიწერება:

$$\frac{[dS\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}+\frac{W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}=\frac{S_4'\cdot 3}{[dd\cdot 3]}\ . \tag{d'}$$

მეოთხე ელიმინაციური ტოლობის შესაბამისად მივიღებთ:

$$[eS\cdot 3]-\frac{[de\cdot 3][dS\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}+W_5\cdot 3-\frac{[de\cdot 3]\cdot W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}=S'_5\cdot 3-\frac{[de\cdot 3]\cdot S'_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}.$$

(4.3.2.5) ტოლობის შესაბამისად კი დაიწერება:

$$[eS\cdot 4]+W_5\cdot 4=S'_5\cdot 4.$$

მაშასადამე, (4.3.2.6) ტოლძალოვანი (ეკვივალენტური) სისტემის მსგავსად დაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]+W_1=[aS]+W_1=S'_1\\
&[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bd\cdot 1]+[be\cdot 1]+W_2\cdot 1=[bS\cdot 1]+W_2\cdot 1=S'_2\cdot 1\\
&[cc\cdot 2]+[cd\cdot 2]+[ce\cdot 2]+W_3\cdot 2=[cS\cdot 2]+W_3\cdot 2=S_3\cdot 2\\
&[dd\cdot 3]+[de\cdot 3]+W_4\cdot 3=[dS\cdot 3]+W_4\cdot 3=S'_4\cdot 3\\
&[ee\cdot 4]+W_5\cdot 4=[eS\cdot 4]+W_5\cdot 4=S'_5\cdot 4
\end{aligned}\right\}. \quad (4.3.4.4)$$

(3) და (4) ტოლობები გამოიყენება, ნორმალური განტოლებების ამოხსნის პროცესში, როგორც საკონტროლო (იხილეთ სქემა (1)) და მათ უწოდებენ სტრიქონულ კონტროლს.

გარდა სტრიქონული კონტროლისა, არსებობს ფორმულები, რომლებიც ფარავს მათ და გამოიყენება გაწონასწორებითი სამუშაოების ყველა ეტაპის საკონტროლოდ (გარდა საწყისი ეტაპისა). მაგალითად, (4. 3. 1. 2.) ფორმულებით თავისუფალი წევრების და (4. 3. 1. 5) ფორმულებით შესწორებათა (4. 3. 1. 6) განტოლებებისათვის კოეფიციენტების განსაზღვრისას. გამოვიყვანოთ ეს ფორმულები. (4. 3. 1. 13.) სისტემის ანალოგიით დავწეროთ:

$$\varepsilon_i=a_iK_1+b_iK_2+c_iK_3+d_iK_4+e_iK_5.$$

კვადრატში აყვანით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i\varepsilon_i&=(a_iK_1+b_iK_2+c_iK_3+d_iK_4+e_iK_5)^2=\\
&=a_ia_iK_1^2+b_ib_iK_2^2+c_ic_iK_3^2+d_id_iK_4^2+e_ie_iK_5^2+\\
&+2a_ib_iK_1K_2+2a_ic_iK_1K_3+2a_id_iK_1K_4+2a_ie_iK_1K_5+\\
&+2\cdot b_ic_iK_2K_3+2b_id_iK_2K_4+2b_ie_iK_2K_5+2c_id_iK_3K_4+\\
&+2c_ie_iK_3K_5+2d_ie_iK_4K_5.
\end{aligned}$$

მიღებული ტოლობიდან თანამიმდევრობით გამოვიტანოთ K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 კორელატები ისე, რომ ფრჩხილებში დარჩეს ნორმალურ განტოლებათა სისტემის სათანადო სტრიქონებისათვის საჭირო წევრები თავისუფალი წევრების გარეშე,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i\varepsilon_i&=K_1(a_ia_iK_1+a_ib_iK_2+a_ic_iK_3+a_id_iK_4+a_ie_iK_5)+\\
&+K_2(a_ib_iK_1+b_ib_iK_2+b_ic_iK_3+b_id_iK_4+b_ie_iK_5)+\\
&+K_3(a_ic_iK_1+b_ic_iK_2+c_ic_iK_3+c_id_iK_4+c_ie_iK_5)+\\
&+K_4(a_id_iK_1+b_id_iK_2+c_id_iK_3+d_id_iK_4+d_ie_iK_5)+\\
&+K_5(a_ie_iK_1+b_ie_iK_2+c_ie_iK_3+d_ie_iK_4+e_ie_iK_5).
\end{aligned}$$

შევადგინოთ [εε] ჯამი, მივიღებთ:

$$[\varepsilon\varepsilon]=K_1([aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+[ad]K_4+[ae]K_5)+$$
$$+K_2([ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+[bd]K_4+[be]K_5)+$$
$$+K_3([ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3+[cd]K_4+[ce]K_5)+$$
$$+K_4([ad]K_1+[bd]K_2+[cd]K_3+[dd]K_4+[de]K_5)+$$
$$+K_5([ae]K_1+[be]K_2+[ce]K_3+[de]K_4+[ee]K_5).$$

თანახმად ნორმალურ განტოლებათა (4. 3. 2. 1) სისტემისა, ფრჩხილებში მოქცეული წევრების ნაცვლად, შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ $-W_1$, $-W_2$, $-W_3$, $-W_4$, $-W_5$. მაშასადამე, ტოლზუსტ განაზომთა გაწონასწორების შემთხვევისათვის დავწერთ:

$$[\varepsilon\varepsilon]=-W_1K_1-W_2K_2-W_3K_3-W_4K_4-W_5K_5, \tag{4.3.4.5}$$

ანუ

$$[\varepsilon\varepsilon]=-[W\cdot K]. \tag{4.3.4.6}$$

იგივე პირობა არატოლზუსტი განაზომებისათვის დაიწერება ასე:

$$[P\varepsilon\varepsilon]=-[WK]. \tag{4.3.4.7}$$

მიღებულ (5), (6), (7) დამოკიდებულებებს უწოდებენ მეორე კონტროლის ფორმულებს.

მეორე კონტროლის შესრულებისას, ანუ ε_i შესწორებების გამოთვლის კონტროლის დროს დამატებითი შემოწმება ხდება შემდეგნაირად: შევკრიბოთ კორელატების საშუალებით გამოსახული შესწორებების (4. 3. 1. 13) სისტემა, მივიღებთ:

$$[\varepsilon]=[a]K_1+[b]K_2+[c]K_3. \tag{4.3.4.7'}$$

ეს ტოლობა არის (7) კონტროლის დამხმარე კონტროლი. გარდა ამისა, 4. 3. 1. 13 ტოლობებით გამოთვლილ ε_i შესწორებებს შევიტანთ 4. 3. 1. 6 სისტემაში, რითაც ეს უკანასკნელი უნდა დაკმაყოფილდეს.

ახლა გამოვიყვანოთ პირველი კონტროლის ფორმულები. (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში (4. 3. 2. 7) ელიმინაციური ტოლობების სისტემიდან თანამიმდევრობით ჩავსვათ K_1, K_2, K_3, K_4 K_5 კორელატების მნიშვნელობები. პირველ რიგში გამოვიყენოთ:

$$K_1=-\frac{W_1}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}K_2-\frac{[ac]}{[aa]}K_3-\frac{[ad]}{[aa]}K_4-\frac{[ae]}{[aa]}K_5,$$

მივიღებთ:

$$\frac{W_1^2}{[aa]}-W_2K_2+W_1\frac{[ab]}{[aa]}K_2-W_3K_3+W_1\frac{[ac]}{[aa]}K_3-W_4K_4+W_1\frac{[ad]}{[aa]}K_4-$$

$$-W_5K_5+W_1\frac{[ae]}{[aa]}K_5=\frac{W_1^2}{[aa]}-\left(W_2-\frac{[ab]W_1}{[aa]}\right)K_2-$$

$$-\left(W_3-\frac{[ac]W_1}{[aa]}\right)K_3-\left(W_4-\frac{[ad]W_1}{[aa]}\right)K_4-\left(W_5-\frac{[ae]W_1}{[aa]}\right)K_5,$$

ანუ (6) ტოლობიდან დავწერთ:

$$-[WK]=\frac{W_1^2}{[aa]}-(W_2\cdot 1)K_2-(W_3\cdot 1)K_3-(W_4\cdot 1)K_4-(W_5\cdot 1)K_5. \qquad (4.3.4.8)$$

(8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ჩავსვათ

$$K_2=-\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_3-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_4-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_5,$$

მივიღებთ:

$$\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}-(W_3\cdot 1)K_3+W_2\cdot 1\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_3-(W_4\cdot 1)K_4+W_2\cdot 1\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_4-$$

$$-(W_5\cdot 1)K_5+W_2\cdot 1\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_5=\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}-$$

$$-\left(W_3\cdot 1-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)K_3-\left(W_4\cdot 1-\frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)K_4-$$

$$-\left(W_5\cdot 1-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}\right)K_5,$$

ანუ (8) ტოლობის შესაბამისად დავწერთ:

$$-[WK]=\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}-(W_3\cdot 2)K_3-(W_4\cdot 2)K_4-(W_5\cdot 2)K_5. \qquad (4.3.4.9)$$

(9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შევიტანოთ

$$K_3=-\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_4-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_5;$$

მივიღებთ:

$$\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 2)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(W_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}-(W_4\cdot 2)K_4+W_3\cdot 2\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_4-$$

$$-(W_5\cdot 2)K_5+W_3\cdot 2\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}K_5=\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[W_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-$$

$$-\left(W_4\cdot 2-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right)K_4-\left(W_5\cdot 2-\frac{[ce\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right)K_5,$$

ანუ (9) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$-[WK]=\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[W_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-(W_4\cdot 3)K_4-(W_5\cdot 3)K_5. \qquad (4.3.4.10)$$

(10) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შევიტანოთ

$$K_4 = -\frac{W_4 \cdot 3}{[dd \cdot 3]} - \frac{[de \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} K_5,$$

მივიღებთ:

$$\frac{W_1^2}{[aa]} + \frac{(W_2 \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{(W_3 \cdot 2)^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{(W_4 \cdot 3)^2}{[dd \cdot 3]} - (W_5 \cdot 3)K_5 + (W_4 \cdot 3)\frac{[de \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} K_5 =$$

$$= \frac{W_1^2}{[aa]} + \frac{(W_2 \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{(W_3 \cdot 2)^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{(W_4 \cdot 3)^2}{[dd \cdot 3]} - \left(W_5 \cdot 3 - \frac{[de \cdot 3] W_4 \cdot 3}{[dd \cdot 3]}\right) K_5,$$

ანუ (10) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$-[WK] = \frac{W_1^2}{[aa]} + \frac{(W_2 \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{(W_3 \cdot 2)^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{(W_4 \cdot 3)^2}{[dd \cdot 2]} - (W_5 \cdot 4)K_5. \quad (4.3.4.11)$$

(11) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შევიტანოთ:

$$K_5 = -\frac{W_5 \cdot 4}{[ee \cdot 4]}.$$

მაშასადამე, ტოლზუსტი პირობითი განაზომების გაწონასწორებისათვის მივიღებთ პ ი რ ვ ე ლ ი კონტროლის ფორმულას:

$$-[WK] = \frac{W_1^2}{[aa]} + \frac{(W_2 \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{(W_3 \cdot 2)^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{(W_4 \cdot 3)^2}{[dd \cdot 3]} + \frac{(W_5 \cdot 4)^2}{[ee \cdot 4]}, \quad (4.3.4.12)$$

ხოლო არატოლზუსტი პირობითი განაზომებისათვის კი იქნება:

$$-[WK] \cdot \frac{W_1^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{(W_2 \cdot 1)^2}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]} + \frac{(W_3 \cdot 2)^2}{\left[\frac{cc}{P} \cdot 2\right]} + \frac{(W_4 \cdot 3)^2}{\left[\frac{dd}{P} \cdot 3\right]} + \frac{(W_5 \cdot 4)^2}{\left[\frac{ee}{P} \cdot 4\right]}. \quad (4.3.4.13)$$

პირველი კონტროლის, ანუ (12) ფორმულის ს ა კ ო ნ ტ რ ო ლ ო დ იყენებენ ფორმულას (ვთქვათ სამუცნობიანი განტოლებისათვის)

$$[WK] = [W] + \frac{W_1 \cdot S_1'}{[aa]} + \frac{W_2 \cdot 1 \cdot S_2' \cdot 1}{[bb \cdot 1]} + \frac{W_3 \cdot 2 \cdot S_3' \cdot 2}{[cc \cdot 2]}. \quad (4.3.4.12')$$

(12′) ფორმულა მიიღება შემდეგნაირად:

დავწეროთ სამუცნობიან ნორმალურ განტოლებების სისტემა და მეოთხე განტოლებად მას მივუწეროთ $[WK]$ ალგორითმი დაშლილი სახით.

$$[aa]K_1 + [ab]K_2 + [ac]K_3 + W_1 = 0,$$

$$[ab]K_1 + [bb]K_2 + [bc]K_3 + W_2 = 0,$$

$$[ac]K_1 + [bc]K_2 + [cc]K_3 + W_3 = 0,$$

$$W_1K_1 + W_2K_2 + W_3K_3 + 0 = [WK].$$

მიღებული სისტემა შევკრიბოთ და მის მიმართ გამოვიყენოთ (3) სისტემა, მივიღებთ:

$$S_1' \cdot K_1 + S_2' \cdot K_2 + S_3' \cdot K_3 + [W] = [WK].$$

ამ ტოლობაში (4. 3. 2. 7) სისტემიდან კორელატების მნიშვნელობების შეტანით და ალგორითმების გამოყენებით მივიღებთ (12′) ტოლობას.

ანალოგიური გზით მიიღება არატოლზუსტი განაზომებისათვის (13) ფორმულის საკონტროლო ფორმულა, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე:

$$[WK]=[W]+\frac{W_1 \cdot S_1'}{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\frac{W_2 \cdot 1 \cdot S_2' \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}+\frac{W_3 \cdot 2 \cdot S_3' \cdot 2}{\left[\frac{cc}{P} \cdot 2\right]}. \tag{4.3.4.13′}$$

გარდა ზემოთ აღნიშნულისა, კორელატების გამოთვლის საკონტროლოდ იყენებენ ჯამური განტოლების ფორმულას (ვთქვათ სამუცნობიანი სისტემისათვის)

$$[aS]K_1+[bS]K_2+[cS]K_3+[W]=0, \tag{4.3.4.13″}$$

რომელიც მიიღება სამუცნობიანი ნორმალური განტოლებების მიმართ (2) სისტემის გამოყენების გზით. ამ კონტროლს ჯამური კონტროლი ეწოდება.

(7) და (13) აგრეთვე (6) და 12 შედარებით შესაბამისად მივიღებთ მეორე კონტროლის ფორმულებს:

$$[P\varepsilon\varepsilon) = \frac{W_1^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\frac{(W_2 \cdot 1)^2}{\left[\frac{bb \cdot 1}{P}\right]}+\frac{(W_3 \cdot 2)^2}{\left[\frac{cc \cdot 2}{P}\right]}+\frac{(W_4 \cdot 3)^2}{\left[\frac{dd \cdot 3}{P}\right]}+\frac{(W_5 \cdot 4)^2}{\left[\frac{ee \cdot 4}{P}\right]}. \tag{4.3.4.14}$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2 \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]}+\frac{(W_3 \cdot 2)^2}{[cc \cdot 2]}+\frac{(W_4 \cdot 3)^2}{[dd \cdot 3]}+\frac{(W_5 \cdot 4)^2}{[ee \cdot 4]}. \tag{4.3.4.15}$$

მაშასადამე, სტრიქონული კონტროლის შემდეგ გამოითვლება (12), (12′) ტოლობების მარჯვენა ნაწილები. გამონათვალთა თანმთხვევა კორელატების გამოთვლამდე კონტროლია. შემდეგ გამოვითვლით კორელატების ოდენობებს. მათი გამოთვლის სისწორის, ანუ პირველი კონტროლისათვის ვიყენებთ (13″) ფორმულას. პირველი კონტროლისათვის, აგრეთვე გამოვითვლით (12) ტოლობის მარცხენა ნაწილს; მიღებული პასუხი უნდა ემთხვეოდეს იმავე ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ადრე მიღებულ გამონათვალს, განსხვავება არ უნდა აღემატებოდეს გამოთვლებისათვის მიღებულ სიზუსტეს. ვრწმუნდებით რა ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის სისწორეში (4. 3. 1. 10) ან (4. 3. 1. 13) სისტემის გამოყენებით გამოითვლება ε_i შესწორებები და შედგება $[P\varepsilon\varepsilon]$ ან $[\varepsilon\varepsilon]$ ჯამი. ეს ჯამი თანახმად (7) ან (6) ფორმულებისა შეედარება (13) ან (12) ტოლობებით მიღებულ შედეგს. ეს იქნება მეორე კონტროლი. იხილეთ (14) ან (15) დამოკიდებულებები. ამ კონტროლით მოწმდება ε_i $[P\varepsilon\varepsilon]$ და $[\varepsilon\varepsilon]$ ოდენობის გამოთვლის სისწორე. მხოლოდ ვინაიდან (7) ან (6) ფორმულაში ε შედის კვადრატში, ამიტომ ε_i ნიშნის სისწორის შემოწმება ვერ ხერხდება; ამიტომ იყენებენ (7′) ფორმულას. იმავე (14) ან (15) ფორმულით, ანუ მეორე კონტროლით მოწმდება ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შედგენის სისწორე, ე. ი. ის ამ მხრივ ფარავს სტრიქონულ კონტროლს და აგრეთვე კონტროლდება ნორმალური განტოლებების სისტემის გადაწყვეტის პროცესი. როგორც ზემოთ ვთქვით, ვერც ერთი ზემომოყვანილი ფორ-

მულით ვერ ხერხდება გაწონასწორებისათვის საჭირო საწყისი ეტაპის კონტროლი, როგორიცაა თავისუფალი (შეუკვრელობების) წევრების და შეცდომათა განტოლებების $a_i b_i \ldots$ კოეფიციენტების განსაზღვრის სისწორე. ამ მიზნით სრულდება მესამე, ანუ დასკვნითი კონტროლი, რაც გამოიხატება იმაში, რომ მიღებული შესწორებები შეიტანება (4. 3. 1. 3) ტოლობებში, რის შედეგადაც მარჯვნივ უნდა მივიღოთ ნულები. მაშასადამე, პირველი და მეორე კონტროლის შემდეგ გამოითვლება გაწონასწორებული სიდიდეები და ამ სიდიდეების (3. 1. 3)-ში ჩასმით სრულდება მესამე კონტროლი. მაგალითად, გაწონასწორებული სიდიდეები აღვნიშნოთ

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n$$

სიმბოლოებით, მაშინ გვექნება:

$$\left.\begin{array}{l} l_1+\varepsilon_1=L_1 \\ l_2+\varepsilon_2=L_2 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_n+\varepsilon_n=L_n \end{array}\right\}. \tag{4.3.4.16}$$

(16) სიდიდეების (4. 3. 1. 3) შეტანით უნდა მივიღოთ

$$\left.\begin{array}{l} F_1(L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n)=0 \\ F_2(L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n)=0 \\ F_3(L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n)=0 \\ F_4(L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n)=0 \\ F_5(L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n)=0 \end{array}\right\}. \tag{4.3.4.17}$$

დასკვნა: ვინაიდან ზემოხსენებული საკონტროლო ფორმულებით ვერ მოწმდება გაწონასწორების საწყისი სტადია (მისი შეცდომები სხვადასხვა სახისაა და გამოვლინდება გაწონასწორებითი გამოთვლების უკანასკნელ სტადიაში), ამიტომ განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს W_i და $a_i, b_i, c_i \ldots$ სიდიდეების ოდენობების განსაზღვრას. მაგალითად, იმის გამო, რომ გამოგვრჩა დამოუკიდებელი პირობითი განტოლება და სისტემაში არ შევიტანეთ ან შევცდით თავისუფალი წევრის ნიშანი, სამუშაო ნაწილობრივ ან მთლიანად გადასაკეთებელი გახდება; ან კიდევ, გარდა დამოუკიდებელი პირობითი ტოლობებისა, თუ სისტემაში შეცდომით შევიტანეთ დამოკიდებული ტოლობა, მართალია საძებარი ε_i შესწორებები მიიღება სწორი, მაგრამ დაგვჭირდება დამატებითი პირობა, რითაც გამოთვლები გაიზრდება და გართულდება. ვთქვათ, მაგალითად, გარდა ოთხი დამოუკიდებელი პირობითი ტოლობისა სისტემაში შევიტანეთ მეხუთე დამოკიდებული პირობითი ტოლობაც და ეს ტოლობა მოხვდა მეოთხე ადგილას, მაშინ ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას დამრგვალების შეცდომების მცირეოდენი გავლენით, მივიღებთ

$$[dd\cdot 3]=0,\quad [ee\cdot 3]=0,\quad W_4\cdot 3=0,\quad S'_4\cdot 3=0,$$

(იხილეთ (4. 3. 5. 2) სქემის დამუშავება 19 და 20 სტრიქონი), რაც შემდეგი ელიმინაციური სტრიქონის კოეფიციენტების ოდენობებს ფორმალურად განუზღვრელს ხდის. მაგრამ, თუ ამ კოეფიციენტებს ნულებად ჩავთვლით და გამოთვლებს ბოლომდე განვაგრძობთ, კორელატების მნიშვნელობებს და მაშასადამე ε_i შესწორებებსაც მივიღებთ სწორს; ამავე დროს $K_4=0$.

იმ შემთხვევაში, როცა დამოკიდებული (ზედმეტი) ტოლობა მოხვდება სისტემის პირველ ან ბოლო ადგილას, მაშინ ამ ტოლობის შესაბამისი ელიმინაციური სტრიქონების კოეფიციენტები მიიღება ნულებად და კორელატების და შესწორებების მნიშვნელობები იქნება სწორი.

გ. ბურმისტროვის [2] გამოკვლევის მიხედვით დადგენილია, რომ თუ დამრგვალებების შეცდომების გამო დამოკიდებული ტოლობის ეკვივალენტური ტოლობის კოეფიციენტები არ გამოვიდა ნულის ტოლი, მაინც უნდა გავაგრძელოთ გამოთვლები, რის შედეგად მართალია კორელატების მნიშვნელობები განსხვავებული იქნება იმისაგან, რასაც მივიღებდით მაშინ, ნორმალური განტოლებების სისტემა მხოლოდ დამოუკიდებელი პირობითი ტოლობების მიხედვით რომ შეგვედგინა, მაგრამ ამ კორელატებით გამოთვლილი ε_i შესწორებები მიიღება სწორი.

4. 3. 5. ნორმალური განტოლებების შედგენისა და ამოხსნის სქემები[1]

I. ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენის სქემა

(4. 3. 1) პარაგრაფიდან ცნობილია, რომ ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა l_i უშუალოდ პირდაპირ გაზომილი სიდიდეების მიხედვით ავიღოთ კერძო წარმოებულები (4. 3. 1. 2) ზოგადი სახის ტოლობებისა და აღვნიშნოთ ისინი (4. 3. 1. 5), რაც სამი განტოლების შემთხვევაში ზოგადად ასე დაიწერება:

$$\frac{\partial F_1(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)}{\partial l_i}=a_i,$$

$$\frac{\partial F_2(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)}{\partial l_i}=b_i,$$

$$\frac{\partial F_3(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)}{\partial l_i}=c_i.$$

ხოლო W_i თავისუფალი წევრი (შეუკვრელობა) კი გამოითვლება (4.3.1.2) ტოლობით:

$$F_i(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=W_i.$$

პრაქტიკულად (4. 3. 1. 2) ტოლობებს აქვს ან ვაძლევთ (4. 3. 1. 6) სისტემის შესაბამის წრფივ სახეს, საიდანაც ამოიწერება აღნიშნული კოეფიციენტები.

---

[1] გამოთვლები წარმოებს არითმომეტრით ან ელექტრომანქანით. სქემებში ნებისმიერი ჩანაწერი ალგებრულად იკრიბება.

ფიგურის, ჰორიზონტის და კუთხეების პირობითი ტოლობებიდან ყოველი კოეფიციენტი იქნება $+1$, -1, ან ნული. წრფივ სახეზე დაყვანილი პოლუსის, ბაზისების და გვერდების პირობითი ტოლობების ყოველი კოეფიციენტი კი იქნება ნული ან განაზომი კუთხის სინუსის ერთი სეკუნდით შეცვლის შესაბამისი ლოგარითმული სხვაობა გამოსახული მანტისის უკანასკნელ ერთეულებში. მაგალითად, ნახ. (4. 1. 3. 3) A წერტილისათვის დაწერილი წრფივი სახით (4. 1. 6. 17) პოლუსის პირობითი განტოლებიდან საჭირო კოეფიციენტები სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედისათვის იქნება:

$$f_1=0;\quad f_2=0;\quad f_3=(\Delta_3-\Delta_{3+4});\quad f_4=-\Delta_{3+4};$$
$$f_5=\Delta_5;\quad f_6=-\Delta_6;\quad f_7=f_8=f_9=f_{10}=f_{11}=f_{12}=0;$$
$$f_{13}=\Delta_{13+14};\quad f_{14}=(\Delta_{13+14}-\Delta_{14}).$$

ამის შემდეგ უნდა შედგეს ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების სქემა.

ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენის სხვადასხვა სქემა არსებობს. ქვემოთ მოყვანილია სრული სქემა, რომელიც გამოიყენება ნებისმიერი შემთხვევისათვის (იხ. სქემა 1); იგი შედგენილია ტოლზუსტ განაზომთა გაწონასწორებისათვის. არატოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში საჭირო იქნება შეცდომათა ტოლობების კოეფიციენტები გავყოთ სათანადო წონებიდან კვადრატულ ფესვზე. მაგალითად, ნაცვლად $[aa]$ იქნება $\left[\frac{aa}{P}\right]$ და ასე შემდეგ.

II. ნორმალური განტოლებების ამოხსნის სქემა

არსებობს სხვადასხვა სახის სქემები, როგორიცაა გაუსის, ანუ სრული სქემა, პრანის-პრანევიჩის მიერ გამარტივებული სქემები და სხვა. აქ განვიხილავთ სრულ სქემას.

ამოვხსნათ ხუთუცნობიან განტოლებათა (4. 3. 2. 1) სისტემა. სრული სქემის მიხედვით ამ სისტემის ამოხსნა ხდება შემდეგნაირად (იხ. სქემა 2):

1. (4. 3. 2. 1) სისტემის პირველი განტოლებიდან ამოვწეროთ კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი. საჭიროა დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]+W_1=S_1'; \qquad (a \text{ სტრიქონი})$$

ანუ S_1' ჯამი უნდა უდრიდეს (1) სქემიდან ამოწერილ $[aS]+W_1$ ჯამს. ამ პირობის დაკმაყოფილების შემთხვევაში $[aS]+W_1$ ჯამი იწერება კონტროლის სვეტში.

a სტრიქონი (4. 3. 4. 3) საკონტროლო სისტემის პირველი სტრიქონია. ეს სტრიქონი (2) სქემაში (4. 3. 2. 6) ეკვივალენტური სისტემის შესაბამისად პირველ ეკვივალენტურ (გარდაქმნილ) სტრიქონად ითვლება.

2. a სტრიქონის ყოველი წევრი გავყოთ $[aa]$ კოეფიციენტზე. ყოველი განაყოფის ნიშნადი ციფრების რაოდენობა უნდა შეესაბამებოდეს (4. 6. 5) პარაგრაფში მიღებულ მოთხოვნებს, რომლებიც შებრუნებული ნიშნებით იწერება E_1 სტრიქონში.

სქემა 4.3.5.1

ხუთუცნობიან ნორმალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების შედგენის სრული სქემა

განზომ-ვათა №№	a	b	c	d	e	S	aa	ab	ac	ad	ae	aS	bb	bc	bd	be	bS	cc	cd	ce	cS	dd	de	dS	ee	eS
1	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	S_1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	a_1d_1	a_1e_1	a_1S_1	b_1b_1	b_1c_1	b_1d_1	b_1e_1	b_1S_1	c_1c_1	c_1d_1	c_1e_1	c_1S_1	d_1d_1	d_1e_1	d_1S_1	c_1e_1	e_1S_1
2	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	S_2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	a_2d_2	a_2e_2	a_2S_2	b_2b_2	b_2c_2	b_2d_2	b_2e_2	b_2S_2	c_2c_2	c_2d_2	c_2e_2	c_2S_2	d_2d_2	d_2e_2	d_2S_2	e_2e_2	e_2S_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	S_n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	a_nd_n	a_ne_n	a_nS_n	b_nb_n	b_nc_n	b_nd_n	b_ne_n	b_nS_n	c_nc_n	c_nd_n	c_ne_n	c_nS_n	d_nd_n	d_ne_n	d_nS_n	e_ne_n	e_nS_n
Σ	[a[	[b]	[c]	[d]	[e]	[S]	[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[ae]	[aS]	[bb]	[bc]	[bd]	[be]	[bS]	[cc[	[cd]	[ce]	[cS]	[dd]	[de]	[dS]	[ee]	[eS]

S სვეტი შეტანილია სქემაში გამოთვლის კონტროლისათვის, სადაც $S_i=a_i+b_i+c_i+d_i+e_i$

კონტროლი:

1. $[a]+[b]+[c]+[d]+[e]=[S]$;
2. $[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]=[aS]$;
3. $[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]=[bS]$;
4. $[ac]+[bc]+[cc]+[cd]+[ce]=[cS]$;
5. $[ad]+[bd]+[cd]+[dd]+[de]=[dS]$;
6. $[ae]+[be]+[ce]+[de]+[ee]=[eS]$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა — არატოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში S სვეტის შემდეგ ემატება ერთი სვეტი $\frac{1}{P}$, რომელშიც შეიტანება სათანადო $\frac{1}{P_i}$ და იგი მრავლდება შესაბამის კოეფიციენტთა ნამრავლზე.

დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$-1-\frac{[ab]}{[aa]}-\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[ad]}{[aa]}-\frac{[ae]}{[aa]}-\frac{W_1}{[aa]}=-\frac{S_1'}{[aa]}; \qquad (E_1 \text{ სტრიქონი})$$

რის შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრული ჯამი ჩაიწერება კონტროლის სვეტში.

ამ სტრიქონს (4. 3. 2. 7) სისტემის შესაბამისად ეწოდება პირველი ელიმინაციური სტრიქონი, რომელიც სქემაში წითელი მელნით იწერება (ყოველი ელიმინაციური სტრიქონის შემდეგი სტრიქონი უნდა იყოს გამოტოვებული, რადგანაც მასში სურვილისამებრ, ბოლოს შეიძლება გამოვთვალოთ პირველი უცნობის ოდენობა).

3. ამოვიწეროთ (4. 3. 2. 1) სისტემის მეორე განტოლებიდან კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]+W_2=S_2'; \qquad (b \text{ სტრიქონი})$$

ე. ი. კონტროლი ხდება პირველი მუხლის ანალოგიურად, მხოლოდ უნდა მივიღოთ მხედველობაში, რომ სქემის b სტრიქონში $[ab]$ არ ამოიწერენ, რადგანაც ის უკვე a სტრიქონშია ამოწერილი, როგორც K_2 კოეფიციენტი. ეს სტრიქონი (4. 3. 4. 3) სისტემის მეორე სტრიქონია.

4. პირველ ელიმინაციურ სტრიქონს (E_1 სტრიქონს) ვამრავლებთ (4. 3. 4. 3) სისტემის მეორე განტოლების K_1-ის, ანუ სიმეტრიულობის გამო პირველი განტოლების K_2-ის $[ab]$ კოეფიციენტზე. სქემაში ეს აღინიშნება a_2 სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს a სტრიქონიდან K_2 სვეტის შესაბამის კოეფიციენტს

$$-[ab],\ -\frac{[ab]^2}{[aa]},\ -\frac{[ab][ac]}{[aa]},\ -\frac{[ab][ad]}{[aa]},\ -\frac{[ab][ae]}{[aa]},$$

$$-\frac{[ab]W_1}{[aa]},\ -\frac{[ab]S_1'}{[aa]}; \qquad (E_1\times a_2 \text{ სტრიქონი})$$

სქემის $E_1\times a_2$ სტრიქონის აღნიშვნა გამოსახავს ზემოთ თქმულს. სქემის $E_1\times a_2$ სტრიქონში $-[ab]$ წევრი არ იწერება.

5. შევკრიბოთ სქემის b და $E_1\times a_2$ სტრიქონი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$\left([bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}\right)+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)+\left([bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)+$$

$$+\left([be]-\frac{[ab][ae]}{[aa]}\right)+\left(W_2-\frac{[ab]W_1}{[aa]}\right)=\left(S_2'-\frac{[ab]S_1'}{[aa]}\right),$$

ანუ გაუსის ალგორითმების გამოყენებით

$$[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bd\cdot 1]+[be\cdot 1]+W_2\cdot 1=S_2'\cdot 1. \qquad (b\cdot 1 \text{ სტრიქონი})$$

ამ სტრიქონს უწოდებენ სქემის მეორე ეკვივალენტურ სტრიქონს, რადგანაც ეს სტრიქონი (4. 3. 2. 6) ეკვივალენტური სისტემის მეორე განტოლებიდანაა, ანუ იგი (4. 3. 2. 1) სისტემის მეორე ტოლობაა გარდაქმნილი სახით. მისი იგივურია ოთხუცნობიანი (4. 3. 2. 2) სისტემის პირველი ტოლობა კორელატების

გარეშე და კონტროლის მიზნით შედგენილი (4. 3. 4. 4) სისტემის მეორე ტოლობა. მოთხოვნის დაკმაყოფილების შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრული ჯამი იწერება კონტროლის სვეტში.

6. $b.1$ სტრიქონის ყოველი წევრი გავყოთ $[bb.1]$ კოეფიციენტზე. განაყოფი გამოსახული სათანადო ნიშნადი ციფრებით ჩავწეროთ შებრუნებული ნიშნით F_2, ანუ (4. 3. 2. 7) სისტემის შესაბამის მეორე ელიმინაციურ სტრიქონში წითელი მელნით.

საჭიროა დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$-1-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}=$$

$$=-\frac{S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}, \qquad (E_2 \text{ სტრიქონი})$$

რის შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრული ჯამი ჩაიწერება კონტროლის სვეტში.

7. ამოვიწეროთ (4. 3. 2. 1) სისტემის მესამე განტოლებიდან კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$[ac]+[bc]+[cc]+[cd]+[ce]+W_3=S'_3; \qquad (c \text{ სტრიქონი})$$

ე. ი. კონტროლი პირველი და მესამე მუხლების ანალოგიურად ხდება, მხოლოდ სქემის c სტრიქონში $[ac]$ და $[bc]$ არ ამოიწერება, რადგანაც ზემოთ ორივე, როგორც K_3-ის კოეფიციენტები შესაბამისად ამოწერილია a და b სტრიქონში. ეს სტრიქონი (4. 3. 4. 3) სისტემის მესამე განტოლებაა.

8. E_1 სტრიქონს ვამრავლებთ მესამე განტოლების K_1-ის, ანუ სიმეტრიულობის გამო პირველი განტოლების K_3-ის $[ac]$ კოეფიციენტზე. სქემაში ეს აღინიშნება a_3 სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს a სტრიქონიდან K_3 სვეტის შესაბამის კოეფიციენტს.

$$-[ac],\ -\frac{[ac][ab]}{[aa]},\ -\frac{[ac]^2}{[aa]},\ -\frac{[ac][ad]}{[aa]},\ -\frac{[ac][ae]}{[aa]},$$

$$-\frac{[ac]\cdot W_1}{[aa]},\ -\frac{[ac]\cdot S_1'}{[aa]}; \qquad (E_1\times a_3 \text{ სტრიქონი})$$

$E_1\times a_3$ აღნიშვნა გამოსახავს ზემოთ თქმულს.

სქემის $E_1\times a_3$ სტრიქონში პირველი ორი წევრი არ იწერება.

9. გავამრავლოთ მეორე ელიმინაციური, ანუ E_2 სტრიქონი $b.1$ სტრიქონის $[bc.1]$ სიდიდეზე, ანუ (4. 3. 2. 2) სისტემის პირველი ტოლობის K_3-ის კოეფიციენტზე (სიმეტრიულობის გამო იმავე სისტემის მეორე ტოლობის K_2-ის კოეფიციენტზე, ანუ (4. 3. 4. 4) სისტემის მეორე ტოლობის მეორე წევრზე). სქემაში ეს აღინიშნება $b.1_3$ სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს $b.1$ სტრიქონიდან K_3 სვეტის შესაბამის კოეფიციენტს.

$$-[bc\cdot 1],\ -\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]\cdot 1}{\cdot[bb\cdot 1]};\ -\frac{[bc\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]};$$

$$-\frac{[bc\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bc\cdot 1]S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}; \qquad (E_2\times b\cdot 1_3 \text{ სტრიქონი})$$

$E_2 \times b \cdot 1_3$ აღნიშვნა გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს. სქემის $E_2 \times b \cdot 1_3$ სტრიქონში — $[bc \cdot 1]$ არ იწერება.

10. შევკრიბოთ სქემის c, $E_1 \times a_3$ და $E_2 \times b \cdot 1_3$ სტრიქონი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$\left([cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}\right) + \left([cd] - \frac{[ac][ad]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1][bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right) +$$

$$+ \left([ce] - \frac{[ac][ae]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1][be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right) + \left(W_3 - \frac{[ac]W_1}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1]W_2 \cdot 1}{[bb \cdot 1]}\right) =$$

$$= \left(S_3' - \frac{[ac]S_1'}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1]S_2' \cdot 1}{[bb \cdot 1]}\right),$$

ანუ (4. 3. 3) პარაგრაფში განმარტებული გაუსის ალგორითმის მიხედვით

$$[cc \cdot 2] + [cd \cdot 2] + [ce \cdot 2] + W_3 \cdot 2 = S_3' \cdot 2. \qquad (c \cdot 2 \text{ სტრიქონი})$$

ამ სტრიქონს უწოდებენ სქემის მესამე ეკვივალენტურ სტრიქონს, რადგანაც ეს სტრიქონი (4. 3. 2. 6) ეკვივალენტური სისტემის მესამე განტოლებიდანაა და იგი წარმოადგენს (4. 3. 2. 1) სისტემის მესამე ტოლობას გარდაქმნილი სახით, მისი იგივურია სამუცნობიანი (4. 3. 2. 3) სისტემის პირველი ტოლობა კორელატების გარეშე და კონტროლის მიზნით შედგენილი (4. 3. 4. 4) სისტემის მესამე ტოლობა. მოთხოვნის დაკმაყოფილების შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრულ ჯამს წერენ კონტროლის სვეტში.

11. c . 2 სტრიქონის ყოველი წევრი გავყოთ $[cc \,.\, 2]$ კოეფიციენტზე. სათანადოდ გასინჯული ყოველი განაყოფი ჩავწეროთ შებრუნებული ნიშნით E_3, ანუ (4. 3. 2. 7) სისტემის შესაბამის მესამე ელიმინაციურ სტრიქონში წითელი მელნით. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$-1 - \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{W_3 \cdot 2}{[cc \cdot 2]} = -\frac{S_3' \cdot 2}{[cc \cdot 2]}, \qquad (E_3 \text{ სტრიქონი})$$

რის შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრული ჯამი ჩაიწერება კონტროლის სვეტში.

12. ამოვიწეროთ (4. 3. 2. 1) სისტემის მეოთხე განტოლებიდან კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი, დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$[ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [de] + W_4 = S_4'; \qquad [d \text{ სტრიქონი})$$

ე. ი. კონტროლი პირველი, მესამე და მეშვიდე მუხლების ანალოგიურია, მხოლოდ არ უნდა გამოგვრჩეს მხედველობიდან, რომ სქემის d სტრიქონში $[ad]$, $[bd]$ და $[cd]$ კოეფიციენტები არ ამოიწერება, რადგანაც ისინი უკვე ამოწერილია a, b და c სტრიქონებში, როგორც K_4-ის კოეფიციენტები. ეს სტრიქონი (4. 3. 4. 3) სისტემის მეოთხე განტოლებაა.

13. E_1 სტრიქონს ვამრავლებთ მეოთხე განტოლების K_1-ის ანუ სიმეტრიულობის გამო პირველი განტოლების K_4-ის $[ad]$ კოეფიციენტზე. სქემაში

ეს აღინიშნება a_4 სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს a სტრიქონიდან K_4 სვეტის შესაბამის კოეფიციენტს.

$$-[ad],\ -\frac{[ab][ad]}{[aa]},\ -\frac{[ac][ad]}{[aa]},\ -\frac{[ad]^2}{[aa]},\ -\frac{[ad][ae]}{[aa]},$$

$$-\frac{[ad]\cdot W_1}{[aa]},\ -\frac{[ad]\cdot S_1'}{[aa]}. \qquad (E_1\times a_4 \text{ სტრიქონი})$$

$E_1\times a_4$ აღნიშვნა გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს. სქემის $E_1\times a_4$ სტრიქონში პირველი სამი წევრი არ იწერება.

14. E_2 სტრიქონს ვამრავლებთ $b.1$ სტრიქონის $[bd.1]$ სიდიდეზე, ანუ (4. 3. 2. 2) სისტემის პირველი ტოლობის K_4-ის კოეფიციენტზე (სიმეტრიულობის გამო მისივე მესამე ტოლობის K_2-ის კოეფიციენტია), ანუ (4. 3. 4. 4) სისტემის მეორე ტოლობის მესამე წევრზე. სქემაში ეს აღინიშნება $b.1_4$ სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს $b.1$ სტრიქონიდან K_4 სვეტის შესაბამის კოეფიციენტს.

$$-[bd\cdot 1],\ -\frac{[bc\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bd\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},$$

$$-\frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bd\cdot 1]S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}. \qquad (E_2\times b\cdot 1_4 \text{ სტრიქონი})$$

$E_2\times b.1_4$ აღნიშვნა გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს. სქემის $E_2\times b.1_4$ სტრიქონში პირველი ორი წევრი არ იწერება.

15. E_3 სტრიქონს გავამრავლებთ $c.2$ სტრიქონის $[cd.2]$ სიდიდეზე, ანუ (4. 3. 2. 3) სისტემის პირველი ტოლობის K_4-ის კოეფიციენტზე (სიმეტრიულობის გამო მისივე მეორე ტოლობის K_3-ის კოეფიციენტია), ანუ (4. 3. 4. 4) სისტემის მესამე ტოლობის მეორე წევრზე. სქემაში ეს აღინიშნება $c.2_4$ სიმბოლოთი, რაც ნიშნავს, რომ მამრავლად $c.2$ სტრიქონიდან ამოღებულია K_4 სვეტის შესაბამისი კოეფიციენტი

$$-[cd\cdot 2],\ -\frac{[cd\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]},\ -\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},$$

$$-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]},\ -\frac{[cd\cdot 2]S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}. \qquad (E_3\times c\cdot 2_4 \text{ სტრიქონი})$$

$E_3\times c\cdot 2_4$ აღნიშვნა გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს.
$E_3\times c\cdot 2_4$ სტრიქონში პირველი წევრი არ იწერება.

16. შევკრიბოთ სქემის d, $E_1\times a_4$, $E_2\times b\cdot 1_4$ და $E_3\times c\cdot 2_4$ სტრიქონი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა

$$\left([dd]-\frac{[ad]^2}{[aa]}-\frac{(bd\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cd\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right)+\left([de]-\frac{[ad\cdot 1][ae]}{[aa]}-\right.$$
$$\left.-\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)+\left(W_4-\frac{[ad]W_1}{[aa]}-\frac{[bd\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\right.$$
$$\left.-\frac{[cd\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right)=\left(S_4'-\frac{[ad]S_1'}{[aa]}-\frac{[bd\cdot 1]S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cd\cdot 2]S_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}\right),$$

ანუ გაუსის ალგორითმების გამოყენებით

$$[dd\cdot3]+[de\cdot3]+W_4\cdot3=S_4'\cdot3. \qquad (d\cdot3 \text{ სტრიქონი})$$

ამ სტრიქონს უწოდებენ სქემის მეოთხე ეკვივალენტურ სტრიქონს, რადგანაც ეს სტრიქონი (4. 3. 4. 6) ეკვივალენტური სისტემის მეოთხე განტოლებიდანაა, ანუ იგი წარმოადგენს (4. 3. 2. 1) სისტემის მეოთხე ტოლობას გარდაქმნილი სახით. მისი იგივურია ორუცნობიანი (4. 3. 2. 4) სისტემის პირველი ტოლობა უკორელატებოდ და კონტროლისათვის შედგენილი (4. 3. 4. 4) მეოთხე ტოლობა. მოთხოვნილი პირობის დაკმაყოფილების შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრულ ჯამს წერენ კონტროლის სვეტში.

17. $d.3$ სტრიქონის ყოველი წევრი გავყოთ $[dd.3]$ კოეფიციენტზე. სათანადოდ გასინჯული ყოველი განაყოფი ჩავწეროთ E_4, ანუ მეოთხე ელიმინაციურ სტრიქონში, წითელი მელნით. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$-1-\frac{[de\cdot3]}{[dd\cdot3]}-\frac{W_4\cdot3}{[dd\cdot3]}=-\frac{S_4\cdot3}{[dd\cdot3]}\ ; \qquad (E_4 \text{ სტრიქონი})$$

რის შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრული ჯამი ჩაიწერება კონტროლის სვეტში.

18. ამოვიწეროთ (4. 3. 2. 1) სისტემის მეხუთე განტოლებიდან კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა:

$$[ae]+[be]+[ce]+[de]+[ee]+W_5=S_5'; \qquad (e \text{ სტრიქონი})$$

ე. ი. კონტროლი პირველი, მესამე, მეშვიდე და მეთორმეტე მუხლების ანალოგიურია, მხოლოდ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ სქემის e სტრიქონში $[ae]$, $[be]$, $[ce]$ და $[de]$ კოეფიციენტები არ ამოიწერება, რადგანაც ისინი უკვე ამოწერილია a, b, c და d სტრიქონებში, როგორც K_5-ის კოეფიციენტები. ეს სტრიქონი (4.3.4.3) სისტემის მეხუთე სტრიქონია.

19. E_1 სტრიქონს ვამრავლებთ მეხუთე განტოლების K_1-ის, ანუ სიმეტრიულობის გამო პირველი განტოლების K_5-ის $[ae]$ კოეფიციენტზე, რომელიც სქემაში a_5 სიმბოლოთია აღნიშნული და ნიშნავს, რომ მამრავლად აღებულია a სტრიქონიდან K_5 სვეტის შესაბამისი კოეფიციენტი.

$$-[ae],\ -\frac{[ab][ae]}{[aa]},\ -\frac{[ac][ae]}{[aa]},\ -\frac{[ad][ae]}{[aa]},\ -\frac{[ae]^2}{[aa]},$$

$$-\frac{[ae]W_1}{[aa]},\ -\frac{[ae]S_1'}{[aa]}. \qquad (E_1\times a_5 \text{ სტრიქონი})$$

$E_1\times a_5$ სიმბოლო გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს. სქემის $E_1\times a_5$ სტრიქონში პირველი ოთხი წევრი არ იწერება.

20. E_2 სტრიქონს ვამრავლებთ $b\cdot1$ სტრიქონის $[be\cdot1]$ სიდიდეზე, ანუ (4.3.2.2) სისტემის პირველი ტოლობის K_5-ის კოეფიციენტზე (სიმეტრიულობის გამო მისივე მეოთხე ტოლობის K_2-ის კოეფიციენტზე, ანუ (4.3.4.4) სისტემის მეორე ტოლობის მეოთხე წევრზე), რომელიც სქემაში $b\cdot1_5$ სიმბოლოთია აღნიშნული და ნიშნავს იმას, რომ $b.1$ სტრიქონიდან მამრავლად K_5 სვეტის შესაბამისი კოეფიციენტია აღებული.

$$-[be\cdot 1],\ -\frac{[bc\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[bd\cdot 1][be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[be\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]},$$

$$-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]},\ -\frac{[be\cdot 1]S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}. \qquad (E_2\times b\cdot 1_5 \text{ სტრიქონი})$$

$E_2\times b\,.\,1_5$ სიმბოლო გამოსახავს შესრულებულ მოქმედებებს. სქემაში პირველი სამი წევრი არ ჩაიწერება.

21. E_3 სტრიქონს ვამრავლებთ $c\,.\,2$ სტრიქონის $[ce\,.\,2]$ სიდიდეზე, ანუ (4. 3. 2. 3) სისტემის პირველი ტოლობის K_5-ის კოეფიციენტზე (სიმეტრიულობის გამო მისივე მესამე ტოლობის K_3-ის კოეფიციენტზე, ანუ (4. 3. 4. 4) სისტემის მესამე ტოლობის მესამე წევრზე), რომელიც სქემაში $c\,.\,2_5$ სიმბოლოთია აღნიშნული და ნიშნავს იმას, რომ $c\,.\,2$ სტრიქონიდან მამრავლად აღებულია K_5 სვეტის შესაბამისი კოეფიციენტი

$$-[ce\cdot 2],\ -\frac{[cd\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\ -\frac{[ce\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]},\ -\frac{[ce\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]},$$

$$-\frac{[ce\cdot 2]S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}. \qquad (E_3\times c\cdot 2_5 \text{ სტრიქონი})$$

$E_3\times c\,.\,2_5$ სიმბოლო შესრულებულ მოქმედებებს გამოსახავს.
სქემის $E_3\times c\,.\,2_5$ სტრიქონში არ ამოიწერება პირველი ორი წევრი.

22. F_4 სტრიქონი გავამრავლოთ $d\,.\,3$ სტრიქონის $[de\,.\,3]$ სიდიდეზე, ანუ (4. 3. 2. 4) სისტემის პირველი ტოლობის K_5-ის კოეფიციენტზე, (4. 3. 4. 4) სისტემის მეოთხე ტოლობის მეორე წევრზე, რომელიც სქემაში $d\,.\,3_5$ სიმბოლოთია აღნიშნული და ნიშნავს იმას, რომ $d\,.\,3$ სტრიქონიდან მამრავლად K_5 სვეტის შესაბამისი კოეფიციენტია აღებული

$$-[de\cdot 3],\ -\frac{[de\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]},\ -\frac{[de\cdot 3]W_4\cdot 3}{[dd\ 3]},\ -\frac{[de\cdot 3]S_4'\cdot 3}{[dd\cdot 3]}. \quad (E_4\times d\cdot 3_5 \text{ სტრიქონი})$$

$E\times d\,.\,3_5$ სიმბოლო შესრულებულ მოქმედებებს გამოსახავს.
სქემაში პირველი წევრი არ ამოიწერება.

23. შევკრიბოთ e, $E_1\times a_5$, $E_2\times b\cdot 1_5$, $E_3\times c\cdot 2_5$ და $E_4\times d\cdot 3_5$ სტრიქონი (შეკრებისას მსგავსი ალგორითმები ურთიერთგაბათილებულია), საჭიროა დავიცვათ შემდეგი ტოლობა

$$\left([ee]-\frac{[ae]^2}{[aa]}-\frac{[be\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[ce\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]^2}-\frac{[de\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}\right)+$$

$$+\left(W_5-\frac{[ae]W_1}{[aa]}-\frac{[be\cdot 1]W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\frac{[ce\cdot 2]W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[de\cdot 3]W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}\right)=$$

$$=\left(S_5'-\frac{[ae]S_1'}{[aa]}-\frac{[be\cdot 1]S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\frac{[ce\cdot 2]S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[de\cdot 3]S_4'\cdot 3}{[dd\cdot 3]}\right),$$

გაუსის ალგორითმებით

$$[ee\cdot 4]+W_5\cdot 4=S_5'\cdot 4. \qquad (e\cdot 4 \text{ სტრიქონი})$$

ამ ტოლობას უწოდებენ სქემის მეხუთე ეკვივალენტურ სტრიქონს, რადგანაც ეს სტრიქონი (4. 3. 2. 6) ეკვივალენტური სისტემის მეხუთე განტოლებიდანაა.

ანუ იგი წარმოადგენს (4. 3. 2. 1) სისტემის მეხუთე ტოლობას გარდაქმნილი სახით (მისი იგივურია ერთუცნობიანი (4. 3. 2. 5) ტოლობა უკორელატოდ და კონტროლისათვის შედგენილი (4. 3. 4. 4) სისტემის მეხუთე ტოლობის პირველი წევრი). მოთხოვნილი პირობის დაკმაყოფილების შემდეგ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ალგებრულ ჯამს ჩაწერენ კონტროლის სვეტში.

24. $e.4$ სტრიქონის ყოველი წევრი გავყოთ $[ee.4]$ კოეფიციენტზე. სათანადოდ გასინჯული ყოველი წევრი ჩავწეროთ შებრუნებული ნიშნით E_5, ანუ მეხუთე ელიმინაციურ სტრიქონში წითელი მელნით. დავიცვათ შემდეგი ტოლობა

$$-1-\frac{W_5\cdot 4}{[ee\cdot 4]}=-\frac{S_5'\cdot 4}{[ee\cdot 4]}, \qquad (E_5 \text{ სტრიქონი})$$

რის შემდეგ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ალგებრული ჯამი ჩაიწერება კონტროლის სვეტში.

სქემის W სვეტში, უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ, კორელატების გამოთვლამდე, კონტროლისათვის მოცემულია შემდეგი სახის ალგებრული ჯამი

$$0+\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(W_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}+\frac{(W_4\cdot 3)^2}{[dd\cdot 3]}+\frac{(W_5\cdot 4)^2}{[ee\cdot 4]};$$

ეს წევრები მიიღება W სვეტის (ზემოდან ქვემოთ) ელიმინაციური და შესაბამისი (უშუალოდ მის ზემოთ) ეკვივალენტური (გარდაქმნილი) სტრიქონის ნამრავლით

$$E_1\times a, \quad E_2\times b\cdot 1, \quad E_3\times c\cdot 2, \quad E_4\times d\cdot 3, \quad E_5\times e\cdot 4.$$

ამ სვეტის საკონტროლოდ გამოიყენება (4. 3. 4. 12) ტოლობის შესაბამისად S' სვეტის უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ მოცემული შემდეგი რიცხვების ალგებრული ჯამი:

$$[W]+\frac{W_1\cdot S_1'}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)(S_2'\cdot 1)}{[bb\cdot 1]}+\frac{(W_3\cdot 2)(S_3'\cdot 2)}{[cc\cdot 2]}+\frac{(W_4\cdot 3)(S_4'\cdot 3)}{[dd\cdot 3]}+$$
$$+\frac{(W_5\cdot 4)(S_5'\cdot 4)}{[ee\cdot 4]}.$$

ამ წევრებს მივიღებთ W სვეტის $[W]$ ჯამს თუ მივუმატებთ W და S' სვეტის (ზემოდან ქვემოთ) ელიმინაციური და შესაბამისი ეკვივალენტური (გარდაქმნილ) სტრიქონების ი რ ი ბ ი გადამრავლებით მიღებულ შემდეგ წევრებს

$$a\times E_1, \quad b\cdot 1\times E_2, \quad c\cdot 2\times E_3, \quad d\cdot 3\times E_4, \quad e\cdot 4\times E_5.$$

ორივე სვეტის წევრთა ალგებრული ჯამის ტოლობა მოწმობს იმას, რომ კორელატების გამოსათვლელად ჩატარებული ანგარიში სწორეა, რის შემდეგ გამოვთვლით (4. 3. 2. 7) ელიმინაციური სისტემის შესაბამისად K_5, K_4, K_3, K_2 და K_1 კორელატებს (იხ. სქემა). კორელატების გამოთვლის საკონტროლოა (4. 3. 4. 13″) ჯამური კონტროლის ფორმულა და (4. 3. 4. 12) ტოლობის დაკმაყოფილება (პირველი კონტროლი).

აღნიშნული სქემით სტრიქონული კონტროლი სავალდებულოა.

შენიშვნა. როგორც (2) სქემიდან ჩანს, ყოველი ელიმინაციური სტრიქონის შემდეგ სტრიქონს არ ავსებენ. რიცხვითი მაგალითების გამოყვანის დროს ამ სტრიქონებში გამოითვლება და იწერება K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 კორელატების მნიშვნელობები. მაგალითად, 29 სტრიქონის K_5 სვეტში გადმოიწერება 28-ე სტრიქონის W სვეტიდან — $\frac{W_5 \cdot 4}{[ee \cdot 4]}$ გამოსახულების შესაბამისი რიცხვი, რაც K_5 კორელატის ოდენობის გამომსახველია (ეს კი იგივე K_5 სვეტის ჩანაწერია 30 და 31 სტრიქონში). ასევე 21 სტრიქონის K_4-ე სვეტში ჩაიწერება გამონათვალი (ჯამი), რომელიც ედრება 20 სტრიქონის W და K_5 სვეტის ჩანაწერის K_5-ზე ნამრავლის ჯამს, რაც სქემის K_4 სვეტის 30, 31 სტრიქონებშია ჩაწერილი; ასევე ივსება, ყველა თავისუფალი სტრიქონი. როგორც ვხედავთ, (2) სქემაში მოცემული 30, 31, 32, 33, 34 სტრიქონები პრაქტიკულად არ ივსება, კორელატის მნიშვნელობებს იღებს ზემოხსენებულ შუალედ სტრიქონებში იმავე სახის გამოთვლებით (იხ. 4. 7. 3. 1, 4. 8. 4. 16, 4. 8. 4. 24 სქემები).

აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ სქემაზე სათანადო სვეტების დამატებით (იხილეთ მაგალითები) ისაზღვრება გაწონასწორებულ სიდიდეთა ფუნქციები და წონები (იხილეთ მეშვიდე თავი).

სქემა 4. 3. 5. 2

ხუთუცნობიანი განტოლებების სისტემის ამოხსნის სრული სქემა

სტრ. №№	სტრიქონების აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	W	S'	კონტროლი	შენიშვნა
1	a	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[ae]$	W_1	S_1'	$[aS]+W_1$	$S'_1=[aS]+W_1$
2	E_1		$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ae]}{[aa]}$	$-\frac{W_1}{[aa]}$	$-\frac{S_1'}{[aa]}$		$E_1=-\frac{a}{[aa]}$ პირველი ელიმინაციური სტრიქონი
3										თავისუფალი სტრიქონი
4	b		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[be]$	W_2	S_2'	$[bS]+W_2$	$S_2'=[bS]+W_2$
5	$E_1\times a_2$		$-\frac{[ab]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ae]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\;W_1}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\;S_1'}{[aa]}$		$E_1\times a_2=E_1\times[ab]$
6	$b.1$		$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bd.1]$	$[be.1]$	$W_2.1$	$S_2'.1$		$b.1=b+E_1\times a_2$, $S_2'.1=[bb.1]+[bc.1]+$ $+[bd.1]+[be.1]+W_2.1.$
7	E_2			$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[be.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{W_2.1}{[bb.1]}$	$-\frac{S_2'.1}{[bb.1]}$		$E_2=-\frac{b.1}{[bb.1]}$ მეორე ელიმინაციური სტრიქონი
8										თავისუფალი სტრიქონი

სქემა 4. 3. 5. 2 (გაგრძელება)

სტრ. №№	სტრიქონების აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	W	S'	კონტროლი	შენიშვნა
9	c			$[cc]$	$[cd]$	$[ce[$	W_3	S_3'	$[cS]+W_3$	$S'_3=[cS]+W_3$
10	$E_1\times a_3$			$-\frac{[ac]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[ae[}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,W_1}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,S'_1}{[aa]}$		$E_1\times a_3=E_1\times[ac]$
11	$E_2\times b\cdot 1_3$			$-\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,S_2'\cdot 1}{[bb\cdot 1]}$		$E_2\times b\cdot 1_3=E_2\times[bc\cdot 1]$
12	$c\cdot 2$			$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	$[ce\cdot 2]$	$W_3\cdot 2$	$S_3'\cdot 2$		$c\cdot 2=c+E_1\times a_3+E_2\times b\cdot 1_3$ $S_3'\cdot 2=[cc\cdot 2]+[cd\cdot 2]+$ $+[ce\cdot 2]+W_3\cdot 2$
13	E_3				$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$		$E_3=-\frac{c\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$ მესამე ელიმინაციური სტრიქონი
14										თავისუფალი სტრიქონი
15	d				$[dd]$	$[de]$	W_4	S_4'	$[dS]+W_4$	$S_4'=[dS]+W_4$
16	$E_1\times a_4$				$-\frac{[ad]^2}{[aa[}$	$-\frac{[ad]\,[ae]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,W_1}{[aa]}$	$-\frac{[ad[\,S_1'}{[aa]}$		$E_1\times a_4=E_1\times[ad]$
17	$E_2\times b\cdot 1_4$				$-\frac{[bd\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,S_2'\ 1}{[bb\cdot 1]}$		$E_2\times b\cdot 1_4=E_2\times[bd\cdot 1]$
18	$E_3\times c\cdot 2_4$				$-\frac{[cd\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$		$E_3\times c\cdot 2_4=E_3\times[cd\cdot 2]$

სტრ. №№	სტრიქონების აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	W	S'	კონტროლი	შენიშვნა
19	$d\cdot 3$				$[dd\cdot 3]$	$[de\cdot 3]$	$W_4\cdot 3$	$S_4'\cdot 3$		$d\cdot 3 = d + E_1 \times a_4 + E_2 \times b\cdot 1_4 + E_1 \times c\cdot 2_4$ $S_4'\cdot 3 = [dd\cdot 3] + [de\cdot 3] + W_1\cdot 3$
20	E_4					$-\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{S_4'\cdot 3}{[dd\cdot 3]}$		$E_4 = -\frac{d\cdot 3}{[dd\cdot 3]}$ მეოთხე ელიმინაციური სტრიქონი
21										თავისუფალი სტრიქონი
22	e					$[ee]$	W_5	S_5'	$[eS]+W_5$	$S_5' = [eS] + W_5$
23	$E_1 \times a_5$					$-\frac{[ae]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ae]\cdot W_1}{[aa]}$	$-\frac{[ae]\cdot S_1'}{[aa]}$		$E_1 \times a_5 = E_1 \times [ae]$
24	$E_2 \times b\cdot 1_5$					$-\frac{[be\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[be\cdot 1]\, W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[be\cdot 1]\, S_2'\cdot 2}{[bb\cdot 1]}$		$E_2 \times b\cdot 1_5 = E_2 \times [be\cdot 1]$
25	$E_3 \times c\cdot 2_5$					$-\frac{[ce\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[ce\cdot 2]\, W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[ce\cdot 2]\, S_3'\cdot 2}{[cc\cdot 2]}$		$E_3 \times c\cdot 2_5 = E_3 \times [ce\cdot 2]$
26	$E_4 \times d\cdot 3_5$					$-\frac{[de\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[de\cdot 3]\, W_4\cdot 3}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[de\cdot 3]\, S_4'\cdot 3}{[dd\cdot 3]}$		$E_4 \times d\cdot 3_5 = E_4 \times [de\cdot 3]$
27	$e\cdot 4$					$[ee\cdot 4]$	$W_5\cdot 4$	$S_5'\cdot 4$		$e\cdot 4 = e + E_1 \times a_5 + E_2 \times b\cdot 1_5 + E_3 \times c\cdot 2_5 + E_4 \times d\cdot 3_5$ $S_5'\cdot 4 = [ee\cdot 4] + W_5\cdot 4$

სქემა 4. 3. 5. 2 (გაგრძელება)

სტრ. №№	სტრიქონების აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	W	S'	კონტროლი	შენიშვნა
28	E_5						$-\frac{W_5\cdot4}{[ee\cdot4]}$	$-\frac{S_5'\cdot4}{[ee\cdot4]}$		$E_5=-\frac{e\cdot4}{[ee\cdot4]}$ მეხუთე ელიმინაციური სტრიქონი
29										თავისუფალი სტრიქონი
30		$-\frac{W_1}{[aa]}$	$-\frac{W_2\cdot1}{[bb\cdot1]}$	$-\frac{W_3\cdot2}{[cc\cdot2]}$	$-\frac{W_4\cdot3}{[dd\cdot3]}$	$-\frac{W_5\cdot4}{[ee\cdot4]}$	0	$[W]$		
31		$-\frac{[ae]K_5}{[aa]}$	$-\frac{[be\cdot1]K_5}{[bb\cdot1]}$	$-\frac{[ce\cdot2]K_5}{[cc\cdot2]}$	$-\frac{[de\cdot3]K_5}{[dd\cdot3]}$	K_5	$-\frac{W_1^2}{[aa]}$	$-\frac{W'_1\cdot S'_1}{[aa]}$		
32		$-\frac{[ad]K_4}{[aa]}$	$-\frac{[bd\cdot1]K_4}{[bt\cdot1]}$	$-\frac{[cd\cdot2]K_4}{[cc\cdot2]}$	K_4		$-\frac{(W_2\cdot1^2)}{[bb\cdot1]}$	$-\frac{(W_2\cdot1)(S_1'\cdot1)}{[bb\cdot1]}$		
33		$-\frac{[ac]K_3}{[aa]}$	$-\frac{[bc\cdot1]K_3}{[bb\cdot1]}$	K_3			$-\frac{(W_3\cdot2)^2}{[cc\cdot2]}$	$-\frac{(W_3\cdot2)(S_3'\cdot2)}{[cc\cdot2]}$		
34		$-\frac{[ab]K_2}{[aa]}$	K_2				$-\frac{(W_4\cdot3)^2}{[dd\cdot3]}$	$-\frac{(W_4\cdot3)(S_4'\cdot3)}{[cc\cdot2]}$		
35		K_1					$-\frac{(W_5\cdot4)^2}{[ee\cdot4)}$	$-\frac{(W_5\cdot4)(S_5'\cdot4)}{[ee\cdot4]}$		
36							$-[WK]$	$[WK]$		
37							$[ss]$			

თავი IV

პირდაპირი პირობითი განაზომების, მათი გაწონასწორებული მნიშვნელობებისა და წონითი ფუნქციების სიზუსტის შეფასება

წინა თავებში განვიხილეთ განაზომთა გაწონასწორების თეორიის პირველი ამოცანა, რაც მდგომარეობს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით პირდაპირი პირობითი განაზომების (უალბათესი სიდიდეების) გაწონასწორების, ანუ საბოლოო უალბათესი (გაწონასწორებული) სიდიდეების განსაზღვრის საკითხის გადაწყვეტაში. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ საკითხს მეორე ამოცანის შესახებ, რაც გულისხმობს პირდაპირი პირობითი განაზომების სიზუსტის შეფასების, ანუ ამ წიგნის შესავლის ბოლოში გათვალისწინებული *b*), *c*), *d*) საკითხების გადაწყვეტას და რაც დაკავშირებულია განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 4. 1. 17) ფორმულის გამოყენებასთან.

დასმული ამოცანის ამოხსნის გამარტივების მიზნით გავეცნოთ დეტერმინანტთა თეორიის ზოგიერთ საკითხს.

4. 4. 1. ზოგიერთი ცნობა დეტერმინანტთა თეორიიდან

ცნობილია, რომ მრავალუცნობიანი წრფივი განტოლებების სისტემის ამოხსნა (რომელთანაც ყოველთვის საქმე გვაქვს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებისას), დეტერმინანტების საშუალებით, პრაქტიკულად დაკავშირებულია დიდ სიძნელეებთან, მაგრამ, დეტერმინანტებს აქვს გარკვეული თეორიული ღირსება, რის გამოც აქ განვიხილავთ მასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.

განსაზღვრება.

n რიგის დეტერმინანტი აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

და ეწოდება

$$A=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

კვადრატული მატრიცის (ცხრილის) n^2 ელემენტიდან $n!$ წევრთა ალგებრულ ჯამს; მისი ყოველი წევრი n ელე-

მენტთა ისეთი ნამრავლია, რომლის თანამამრავლები აღებულია A მატრიცის სხვადასხვა სტრიქონიდან და სხვადასხვა სვეტიდან; წევრების ნიშანია $(-1)^t$, სადაც t არის ინვერსიათა (უწესრიგობათა, გადანაცვლებათა) რაოდენობა, რომელიც გამოითვლება ელემენტთა მეორე ინდექსების სრული გადაადგილების შესაბამისად და ამავე დროს პირველი ინდექსები დალაგებულია ბუნებრივი (ზრდადი) თანამიმდევრობით. ინდექსები (ნომრები) $i, j=1, 2, \ldots, n$ პირველი (i) სტრიქონების და მეორე (j) სვეტების ნომრის მაჩვენებელია.

მაგალითი 4. 4. 1. 1. მოცემულია

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა; მაშინ დეტერმინანტი

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

ამ დეტერმინანტის წევრთა თანამამრავლების მეორე ინდექსების (სვეტების ნომრების) სრული გადანაცვლებები და შესაბამისი ინვერსიების გამომსახველი რიცხვები დადგენილია წევრის (ჯგუფის) ყოველი ინდექსის (დაწყებული პირველიდან) დანარჩენ ინდექსებთან არაბუნებრივი დალაგების რაოდენობების შეჯამებით.

1 2 3 აქ ინვერსია (უწესრიგობა, გადანაცვლება) არ არის ე. ი. $t=0$
1 3 2 „ $t=1$,
2 1 3 „ $t=1$,
2 3 1 „ $t=2$,
3 1 2 „ $t=2$,
3 2 1 „ $t=3$.

4. 4. 2. დეტერმინანტების ძირითადი თვისებები

1. დეტერმინანტის რიცხვითი მნიშვნელობა არ შეიცვლება თუ[1] სტრიქონებს შევცვლით სათანადო ნომრის სვეტებით და პირიქით, ე. ი.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 6\cdot 4 = 24 - 24 = 0.$$

ასეთ გადაადგილებას ტრანსპონირებას უწოდებენ.

[1] განსაზღვრებებში ყველგან იგულისხმება მატრიცის სტრიქონები და სვეტები.

2. თუ დეტერმინანტში ურთიერთგადავაადგილებთ ორ სვეტს ან ორ სტრიქონს, ამით შეიცვლება დეტერმინანტის მხოლოდ ნიშანი, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა კი იგივე დარჩება, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12-42=-30; \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 42-12=30.$$

3. ის დეტერმინანტი, რომელსაც აქვს ორი ერთნაირი სტრიქონი (ან სვეტი) ნულის ტოლია, ე. ი.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0; \text{ მაგალითი: } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (2\cdot3\cdot6+4\cdot2\cdot1+5\cdot3\cdot4)- \\ &-(4\cdot3\cdot5+6\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot1)= \\ &=(36+8+60)-(60+36+8)=0. \end{aligned}$$

4. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (ან სტრიქონის) ყველა ელემენტს გავამრავლებთ რაიმე m რიცხვზე ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა m-ჯერ გაიზრდება.

მაგალითი:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -30; \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -60; \quad \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -60.$$

5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ყველა ელემენტს აქვს საერთო მამრავლი, იგი შეიძლება გამოტანილ იქნეს დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

$$\text{მაგალითი: } \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot3(-5) = -30.$$

6. დეტერმინანტი, რომლის ორი სვეტის (ან სტრიქონის) ელემენტები შესაბამისად პროპორციული სიდიდეებია, ნულის ტოლია

$$\text{მაგალითი: } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot0 = 0.$$

7. იმისათვის, რომ შევკრიბოთ ორი დეტერმინანტი, რომელთაც აქვს ერთნაირი სვეტები ერთი სვეტის გარდა (ან ერთნაირი სტრიქონები ერთი სტრიქონის გარდა), საჭიროა შევკრიბოთ ამ დეტერმინანტების ურთიერთგანსხვავებული სვეტები (ან განსხვავებული სტრიქონები), ე. ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_3 \end{vmatrix},$$

თუ ამ ტოლობას წავიკითხავთ მარჯვნიდან მარცხნივ, მივიღებთ წესს — ერთი დეტერმინანტის ორი დეტერმინანტის ჯამად დაშლის შესახებ. მაგალითი:

$$\begin{vmatrix} 2+1+3 & 4-1 \\ 0-2+1 & -2 \quad 2 \\ -1+3+2 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

8. დეტერმინანტის ოდენობა არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სვეტის (ან სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ სხვა სვეტის (ან სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \pm ma_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \pm ma_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \pm ma_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm ma_{31} & a_{12} \pm ma_{32} & a_{13} \pm ma_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი: მოცემულია დეტერმინანტი

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

თუ თანამიმდევრობით მეორე, მესამე და მეოთხე სვეტებს გამოვაკლებთ შესაბამისად პირველი სვეტის ელემენტებს, მივიღებთ:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} -$$

$$-3 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -28 - 21 + 14 = -35.$$

აქ განხილული რიცხვითი მაგალითიდან ნათლად ჩანს, რომ დეტერმინანტის გამოთვლისათვის უმჯობესია მისი დაშლა ნებისმიერი სვეტის (ან სტრიქონის) ელემენტების მიხედვით. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი მესამე რიგის დეტერმინანტი პირველი, მეორე და მესამე სვეტის ელემენტების მიხედვით დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} D &= a_{11}\left\{+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} + a_{21}\left\{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} + a_{31}\left\{+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right\} \\ D &= a_{12}\left\{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} + a_{22}\left\{+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} + a_{32}\left\{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right\} \\ D &= a_{13}\left\{+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right\} + a_{23}\left\{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right\} + a_{33}\left\{+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right\} \end{aligned}\right\}. \quad (4.4.2.1)$$

ანალოგიურად დაიშლება მოცემული დეტერმინანტი პირველი, მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. (1) გამოსახულებები მიღებულია

შემდეგნაირად. დაშლის შედეგად მიღებული (n—1) რიგის ანუ, ჩვენს შემთხვევაში მეორე რიგის დეტერმინანტებს ეწოდება მინორები და აღინიშნება M_{ij} სიმბოლოთი. (1) დამოკიდებულებების (D დეტერმინანტის დაშლის) ყოველი მინორი მიღებულია მოცემული (დასაშლელი) დეტერმინანტის იმ სვეტისა და სტრიქონის ამოშლით, რომლებიც იკვეთებიან ამ მინორის მამრავლად გამოტანილ ელემენტზე. მინორის წინ ნიშანი არის დადებითი, როცა მისი მამრავლის ინდექსების ჯამი ლუწია და უარყოფითი, როცა ეს ჯამი კენტია, რის გამოც ცხრილის პირველი ელემენტის (a_{11}) მინორის ნიშანი ყოველთვის დადებითია, შემდეგ კი ნიშანი მორიგეობით იცვლება.

იმავე (1) დამოკიდებულების ფიგურულ ფრჩხილებში მოქცეულ გამოსახულებას, ანუ მინორს ნიშნით ეწოდება ალგებრული დამატება და აღინიშნება A_{ij} სიმბოლოთი.

მაშასადამე, ალგებრულ დამატებასა და მინორს შორის კავშირი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}, \tag{4.4.2.2}$$

სადაც i, $j=1, 2, \ldots, n$ (n-ური რიგის დეტერმინანტის შემთხვევაში). ამასთან პირველი ინდექსი სტრიქონის (განტოლების ნომრის) მაჩვენებელია; ხოლო მეორე — სვეტის (უცნობის ნომრის).

მიღებული აღნიშვნებით (1) დამოკიდებულებები მინორებში გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} D&=a_{11}\cdot M_{11}-a_{21}\cdot M_{21}+a_{31}\cdot M_{31}\\ D&=-a_{12}\cdot M_{12}+a_{22}\cdot M_{22}-a_{32}\cdot M_{32}\\ D&=a_{13}\cdot M_{13}-a_{23}\cdot M_{23}+a_{33}\cdot M_{33}\end{aligned}\right\}. \tag{4.4.2.3}$$

იგივე დამოკიდებულებები ალგებრულ დამატებებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} D&=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}\\ D&=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}\\ D&=a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33}\end{aligned}\right\}. \tag{4.4.2.4}$$

(4) დამოკიდებულებებში A_{ij} ალგებრული დამატების ნიშანი ირკვევა (2) დამოკიდებულებით. ავიღოთ, მაგალითად, (4) დამოკიდებულების პირველი დეტერმინანტი. მასში შემავალ ალგებრულ დამატებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{22}\ a_{33}-a_{23}\ a_{32}),$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{12}\ a_{33}-a_{13}\ a_{32}),$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=(a_{12}\ a_{23}-a_{13}\ a_{22}).$$

ანალოგიურად დგინდება ყველა დანარჩენი დეტერმინანტის შესაკრებთა ნიშანი (ნიშანი მორიგეობით იცვლება).

ალგებრული დამატების ცნების საფუძველზე, მოვიყვანოთ დეტერმინანტთა კიდევ ორი თვისება:

9. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტის თავის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლთა ჯამი მოცემული დეტერმინანტის ტოლია (იხილეთ (4) დამოკიდებულებები).

10. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტის შესაბამისად სხვა სვეტის (სტრიქონის) ელემენტების ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

მაგალითად,

$$a_{12}\,A_{11}+a_{22}\,A_{21}+a_{32}\cdot A_{31}$$

ჯამის ალგებრული დამატებების ინდექსები ეკუთვნის პირველ სვეტს, ე. ი. მოცემული ჯამი წარმოადგენს პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით დაშლილ

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს, რომელიც დეტერმინანტთა მესამე თვისების გამო ტოლია ნულის (პირველი და მეორე სვეტი ერთნაირია).

$$a_{13}\,A_{12}+a_{23}\,A_{22}+a_{33}\,A_{32}$$

ჯამის ალგებრული დამატებების ინდექსები გვიჩვენებს, რომ ეს ჯამი წარმოადგენს მეორე სვეტის ელემენტების მიხედვით დაშლილ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს, რომელიც მესამე თვისების გამო ნულის ტოლია.

$$a_{12}\,A_{13}+a_{22}\,A_{23}+a_{32}\,A_{33}$$

ჯამის ალგებრული დამატებების ინდექსები გვიჩვენებს, რომ ეს ჯამი წარმოადგენს მესამე სვეტის ელემენტების მიხედვით დაშლილ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს, რომელიც მესამე თვისების გამო ნულის ტოლია.

ვთქვათ, საჭიროა შემდეგი სახის სამუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

$$a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+W_1=0,$$
$$a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3+W_2=0,$$
$$a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3+W_3=0.$$

ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება კრამერის ფორმულებით:

$$x_1=-\frac{D_1}{D};\quad x_2=-\frac{D_2}{D};\quad x_3=-\frac{D_3}{D},$$

სადაც

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ხოლო, D_1, D_2 და D_3 დეტერმინანტები მიიღება, თუ D დეტერმინანტის სვეტების ელემენტებს შესაბამისად შევცვლით W_i თავისუფალი წევრებით შემდეგნაირად: D_1-სათვის პირველ სვეტს, D_2-სათვის მეორე სვეტს და D_3-სათვის მესამე სვეტს, ე. ი. მივიღებთ:

$$D_1=\begin{vmatrix} W_1 & a_{12} & a_{13} \\ W_2 & a_{22} & a_{23} \\ W_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & W_1 & a_{13} \\ a_{21} & W_2 & a_{23} \\ a_{31} & W_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & W_1 \\ a_{21} & a_{22} & W_2 \\ a_{31} & a_{32} & W_3 \end{vmatrix}.$$

შეიძლება ანალოგიურად გამოითვალოს გაწონასწორებისათვის საჭირო ნორმალურ განტოლებათა სისტემა.

4. 4. 8. ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დეტერმინანტებით

ვთქვათ, ამოსახსნელია სამუცნობიანი ნორმალური განტოლებების სისტემა:

$$\left[\frac{aa}{P}\right]K_1+\left[\frac{ab}{P}\right]K_2+\left[\frac{ac}{P}\right]K_3+W_1=0,$$

$$\left[\frac{ab}{P}\right]K_1+\left[\frac{bb}{P}\right]K_2+\left[\frac{bc}{P}\right]K_3+W_2=0,$$

$$\left[\frac{ac}{P}\right]K_1+\left[\frac{bc}{P}\right]K_2+\left[\frac{cc}{P}\right]K_3+W_3=0.$$

ამ სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$K_1=-\frac{D_1}{D}; \quad K_2=-\frac{D_2}{D}; \quad K_3=-\frac{D_3}{D},$$

სადაც

$$D=\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{P}\right] & \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right] \\ \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{bb}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] \\ \left[\frac{ac}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] & \left[\frac{cc}{P}\right] \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} W_1 & \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right] \\ W_2 & \left[\frac{bb}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] \\ W_3 & \left[\frac{bc}{P}\right] & \left[\frac{cc}{P}\right] \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\left[\frac{aa}{P}\right] & W_1 & \left[\frac{ac}{P}\right]\\ \left[\frac{ab}{P}\right] & W_2 & \left[\frac{bc}{P}\right]\\ \left[\frac{ac}{P}\right] & W_3 & \left[\frac{cc}{P}\right]\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}\left[\frac{aa}{P}\right] & \left[\frac{ab}{P}\right] & \cdot W_1\\ \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{bb}{P}\right] & \cdot W_2\\ \left[\frac{ac}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] & \cdot W_3\end{vmatrix}.$$

დავშალოთ D დეტერმინანტი პირველი, მეორე და მესამე სვეტების ელემენტე-ბის მიხედვით, მივიღებთ:

$$D=\left[\frac{aa}{P}\right]A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]},\tag{4.4.3.1}$$

$$D=\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]},\tag{4.4.3.2}$$

$$D=\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]},\tag{4.4.3.3}$$

სადაც A_i ალგებრული დამატება ტოლია M_i მინორისა გარკვეული ნიშნით; მაგა-ლითად, D დეტერმინანტის მიხედვით

$$A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}=M_{\left[\frac{ac}{P}\right]}=\begin{vmatrix}\left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right]\\ \left[\frac{bb}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right]\end{vmatrix},\quad A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}=-M_{\left[\frac{bc}{P}\right]}=-\begin{vmatrix}\left[\frac{aa}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right]\\ \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right]\end{vmatrix}.$$

თუ D_1, D_2 და D_3 დეტერმინანტებს დავშლით შესაბამისად პირველი, მეორე და მესამე სვეტების ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$D_1=W_1\cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{ac}{P}\right]},\tag{4.4.3.4}$$

$$D_2=W_1\cdot A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{bc}{P}\right]},\tag{4.4.3.5}$$

$$D_3=W_1\cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}.\tag{4.4.3.6}$$

კორელატების საბოლოო მნიშვნელობანი კი იქნება:

$$\left.\begin{aligned}K_1&=-\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{D}\left\{W_1A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right\}\\ K_2&=-\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{D}\left\{W_1A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right\}\\ K_3&=-\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{D}\left\{W_1A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+W_2A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+W_3A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right\}\end{aligned}\right\}.\tag{4.4.3.7}$$

მიღებული ფორმულები შეიძლება გავრცელდეს ნებისმიერი რაოდენობის ნორმალურ განტოლებათა სისტემის მიმართ.

ნორმალურ განტოლებათა სისტემის მიმართ ყოველთვის უნდა დავიცვათ $D \neq 0$ პირობა; როცა $D=0$, ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იქნება განუსაზღვრელი. ამით გამოვლინდება, რომ პირობით განტოლებათა შედგენისას დაშვებულია შეცდომა (ე. ი. აუცილებელი ტოლობების ნაცვლად იგივური ტოლობებია შეტანილი სისტემაში).

პირობით განტოლებათა შედგენის დროს დაშვებული შეცდომა ვლინდება ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის დროს, რაც გამოიხატება იმაში, რომ კორელატები მიიღება $\frac{0}{0}$ განუზღვრელობის სახით.

განვიხილოთ შესავალში დასმული *b*) საკითხი.

4. 4. 4. განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობების ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ვთქვათ, გვაქვს გაწონასწორებული, ანუ საბოლოო, უალბათესი სიდიდეების ზოგადი სახის ფუნქცია

$$\Phi_u^{1)}=\Phi(L_1, L_2, \ldots, L_n). \qquad (4.4.4.1)$$

სადაც $L_1, L_2, \ldots, L_n$ განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობებია, რომლებიც განსაზღვრულია განაზომთა შეცდომების თეორიაში [13] მიღებული (3.3.2.5) ფორმულით

$$L_1=l_1+\varepsilon_1; \quad L_2=l_2+\varepsilon_2, \ldots, L_n=l_n+\varepsilon_n. \qquad (4.4.4.2)$$

დავუშვათ, რომ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ განაზომები (უალბათესი სიდიდეები) შესაბამისად ხასიათდება $m_1, m_2, \ldots, m_n$ საშუალო კვადრატული შეცდომებით, ანუ P_1, $P_2, \ldots, P_n$ წონებით.

საჭიროა განვსაზღვროთ Φ_u ფუნქციის M_{Φ_u} საშუალო კვადრატული შეცდომა (Φ_u ფუნქციას ხშირად წონით ფუნქციას უწოდებენ).

როგორც ვიცით, L_i სიდიდეები მიღებულია ერთად, გაწონასწორების შედეგად, ე. ი. ეს სიდიდეები ურთიერთდამოუკიდებელი არ არიან. მაშასადამე, Φ_u ფუნქციის მიმართ უშუალოდ ვერ გამოვიყენებთ განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 4. 1. 17) ფორმულას, რომლითაც ისაზღვრება ურთიერთდამოუკიდებელი განაზომების ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა. ზემოაღნიშნულის გამო საჭიროა Φ_u ფუნქცია გამოვსახოთ ურთიერთდამოუკიდებელი, ანუ უშუალოდ გაზომილი $l_1, l_2, \ldots, l_n$ სიდიდეების საშუალებით. ამ მიზნით (2) დამოკიდებულებების გამოყენებით (1) გადაიწერება ასე:

$$\Phi_u=\Phi(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \ldots, l_n+\varepsilon_n). \qquad (4.4.4.3)$$

(3) დავშალოთ ტეილორის ფორმულით და შევიზღუდოთ მწკრივის იმ წევრებით, რომლებიც შეიცავენ პირველი რიგის წარმოებულებს და შესწორებათა პირველ ხარისხებს,

$$\Phi_u \approx \Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\varphi_1\varepsilon_1+\varphi_2\varepsilon_2+\cdots+\varphi_n\varepsilon_n, \qquad (4.4.4.4)$$

---

[1] ინდექსი *u* ნიშნავს, რომ მოცემული გვაქვს სქემის ელემენტების გაწონასწორებული ოდენობების ფუნქცია.

სადაც

$$\varphi_i = \frac{\partial\Phi(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)}{\partial l_i}\,. \tag{4.4.4.5}$$

განვიხილოთ სამი პირობითი განტოლების შემთხვევა და მიღებული შედეგი გავავრცელოთ ნებისმიერი რაოდენობის პირობით ტოლობებზე. (4)-ში ε_i გამოვსახოთ კორელატებით, ე. ი. გამოვიყენოთ (4.3.1.10) ფორმულები

$$\varepsilon_i = \frac{1}{P_i}\,(a_iK_i + b_iK_2 + c_iK_3),$$

მივიღებთ:

$$\Phi_u = \Phi(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n) + \varphi_1\,\frac{1}{P_1}\,(a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3) +$$

$$+\,\varphi_2\,\frac{1}{P_2}\,(a_2K_1 + b_2K_2 + c_2K_3) + \cdots + \varphi_n\,\frac{1}{P_n}\,(a_nK_1 + b_nK_2 + c_nK_3).$$

ე. ი.

$$\Phi_u = \Phi(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n) + \left[\frac{a\varphi}{P}\right]K_1 + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]K_2 + \left[\frac{c\varphi}{P}\right]K_3. \tag{4.4.4.6}$$

მიღებულ ტოლობაში K_1, K_2 და K_3 კორელატების მნიშვნელობები შევიტანოთ (4.4.3.7) ფორმულებიდან, მივიღებთ:

$$\Phi_u = \Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n) - \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\left(W_1 A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + W_2 A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + W_3 A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right) -$$

$$-\,\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\left(W_1 A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + W_2 A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + W_3 A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right) -$$

$$-\,\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\left(W_1 A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + W_2 A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + W_3 A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right). \tag{4.4.4.7}$$

(7) ტოლობაში A_i ალგებრული დამატებებია, D — დეტერმინანტი და $\left[\frac{a\varphi}{P}\right]$, $\left[\frac{b\varphi}{P}\right]$, $\left[\frac{c\varphi}{P}\right]$ კოეფიციენტები მუდმივი სიდიდეებია, ხოლო W_1, W_2 და W_3 უშუალოდ განაზომი ულბათესი l_1, l_2, ..., l_n სიდიდეების ფუნქციებია, რაც იაზღვრება (4.3.1.2) ფორმულების საშუალებით. მაშასადამე, Φ_u ფუნქცია (7) ტოლობის სახით გამოსახულია როგორც ფუნქცია ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეებისა, რომლის მიმართ უკვე შეიძლება გამოვიყენოთ (3. 4. 1. 16) ფორმულა.

(7) ფორმულის შესაბამისად $M^2_{\Phi u}$ საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის, ანუ დისპერსიის განსაზღვრისათვის საჭირო იქნება Φ_u ფუნქციის სრული დიფერენციალის აღება (3. 4. 1. 16) ფორმულის მიხედვით და შემდეგ, როგორც სრული წრფივი ფუნქციისადმი (3. 4. 1. 17) ფორმულის გა-

მოყენება. აღნიშნული ჯობს შესრულდეს [13]-ში მიღებული წესის მიხედვით შემდეგნაირად:

a. განისაზღვრება Φ_u ფუნქციის კერძო წარმოებულები უშუალოდ გაზომილი (ურთიერთდამოუკიდებელი უალბათესი $l_1, l_2, \ldots, l_n$) სიდიდეების მიხედვით;

b. ყოველი კერძო წარმოებული გამრავლდება შესაბამისი განაზომის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე;

c. ყოველი წყვილი ნამრავლი აიყვანება კვადრატში;

d. მიღებული კვადრატები შეჯამდება.

a. განვსაზღვროთ Φ_u ფუნქციის კერძო წარმოებულები l_i-ის მიხედვით

$$\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_i}=\frac{\partial\Phi(l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_n)}{\partial l_i}-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l_i}A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\frac{\partial W_2}{\partial l_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{\partial W_3}{\partial l_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)-$$

$$-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{\partial W_2}{\partial l_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{\partial W_3}{\partial l_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)-$$

$$-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{\partial W_2}{\partial l_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{\partial W_3}{\partial l_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right). \qquad (4.4.4.8)$$

(5) ტოლობის მიხედვით

$$\frac{\partial\Phi(l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_n)}{\partial l_i}=\varphi_i,$$

ხოლო (4. 3. 1. 5.) ტოლობების მიხედვით

$$\frac{\partial W_1}{\partial l_i}=\frac{\partial F_1}{\partial l_i}=a_i;\quad \frac{\partial W_2}{\partial l_i}=\frac{\partial F_2}{\partial l_i}=b_i;\quad \frac{\partial W_3}{\partial l_i}=\frac{\partial F_3}{\partial l_i}=c_i.$$

როგორც ვხედავთ, განაზომთა მიხედვით W_1, W_2 და W_3 შეუკვრელობების კერძო წარმოებულები წარმოადგენს (4. 3. 1. 6) შეცდომათა წრფივი სახის განტოლებების კოეფიციენტებს. მაშასადამე, დავწერთ:

$$\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_i}=\varphi_i-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\left(a_iA_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)-$$

$$-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\left(a_iA_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)- \qquad (4.4.4.9)$$

$$-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\left(a_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right).$$

შემოვიღოთ შემდეგი სახის შემოკლებული აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_l &= a_l A\left[\frac{aa}{P}\right] + b_l A\left[\frac{ab}{P}\right] + c_l A\left[\frac{ac}{P}\right] \\ \mathrm{II}_l &= a_l A\left[\frac{ab}{P}\right] + b_l A\left[\frac{bb}{P}\right] + c_l A\left[\frac{bc}{P}\right] \\ \mathrm{III}_l &= a_l A\left[\frac{ac}{P}\right] + b_l A\left[\frac{bc}{P}\right] + c_l A\left[\frac{cc}{P}\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (4.4.4.10)$$

მაშინ (9) გადაიწერება ასე:

$$\frac{\partial \Phi_u}{\partial l_l} = \varphi_l - \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot \mathrm{I}_l - \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot \mathrm{II}_l - \frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot \mathrm{III}_l. \qquad (4.4.4.11)$$

b. მიღებული $\frac{\partial \varphi_u}{\partial l_l}$ კერძო წარმოებული გავამრავლოთ შესაბამის საშუალო კვადრატულ შეცდომებზე და მიღებული გამოსახულებისადმი გამოვიყენოთ (3. 5. 4. 1) ფორმულა:

$$\frac{\partial \Phi_u}{\partial l_l}\cdot m_l = \frac{\partial \Phi_u}{\partial l_l}\cdot\frac{\eta}{\sqrt{P_l}} =$$

$$= \eta\left(\frac{\varphi_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{I}_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{II}_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{III}_l}{\sqrt{P_l}}\right). \qquad (4.4.4.12)$$

c. მიღებული $\frac{\partial \Phi_u}{\partial l_l}\cdot m_l$ ნამრავლი ავიყვანოთ კვადრატში:

$$\left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial l_l} m_l\right)^2 = \eta^2\left(\frac{\varphi_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{I}_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{II}_l}{\sqrt{P_l}} - \frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\mathrm{III}_l}{\sqrt{P_l}}\right)^2 =$$

$$= \eta^2\left(\frac{\varphi_l\varphi_l}{P_l} + \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{I}_l^2}{P_l} + \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{II}_l^2}{P_l} + \frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{III}_l^2}{P_l} + \right.$$

$$+ \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{I}_l\cdot\mathrm{II}_l}{P_l} + \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{I}_l\cdot\mathrm{III}_l}{P_l} + \frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\frac{\mathrm{II}_l\mathrm{III}_l}{P_l} -$$

$$\left. - \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\varphi_l\mathrm{I}_l}{P_l} - \frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\varphi_l\mathrm{II}_l}{P_l} - \frac{2\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\frac{\varphi_l\mathrm{III}_l}{P_l}\right). \qquad (4.4.4.13)$$

d. (13)-ის მიხედვით მიღებული ნამრავლების კვადრატები შევაჯამოთ, მივიღებთ:

$$M^2_{\Phi_u} = \left[\left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial l}\cdot m\right)^2\right] = \eta^2\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] + \frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{I}^2}{P}\right] + \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{II}^2}{P}\right] + \right.$$

$$+\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\left[\frac{\mathrm{III}^2}{P}\right] + \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D^2}\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}}{P}\right] + \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{III}}{P}\right] +$$

$$+\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\left[\frac{\mathrm{II}\cdot\mathrm{III}}{P}\right] - \frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot\mathrm{I}}{P}\right] - \frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot\mathrm{II}}{P}\right] -$$

$$\left. - \frac{2\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\left[\frac{\varphi\cdot\mathrm{III}}{P}\right]\right). \tag{4.4.4.14}$$

განვიხილოთ ცალ-ცალკე (14) ტოლობის ფრჩხილებში მოქცეული ცხრა წევრი, დაწყებული მეორედან:

1. მეორე წევრი:

$$\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\left[\frac{\mathrm{I}^2}{P}\right].$$

ჯერ განვსაზღვროთ ამ წევრის $\left[\frac{\mathrm{I}^2}{P}\right]$ მამრავლი; ამისათვის წინასწარ მოვნახოთ $\frac{\mathrm{I}_i^2}{P_i}$ გამოსახულება (10) აღნიშვნის მიხედვით:

$$\frac{\mathrm{I}_i^2}{P_i} = \frac{\left(a_i A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + b_i A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + c_i A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)^2}{P_i} = \frac{a_i a_i}{P_i} A^2_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{2a_i b_i}{P_i} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\cdot A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} +$$

$$+\frac{2a_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \frac{b_i b_i}{P_i} A^2_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{2b_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \frac{c_i c_i}{P_i} A^2_{\left[\frac{ac}{P}\right]} =$$

$$= A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\frac{a_i a_i}{P_i} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{a_i b_i}{P_i} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{a_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right) +$$

$$+ A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\frac{a_i b_i}{P_i} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{b_i b_i}{P_i} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{b_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right) +$$

$$+ A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\frac{a_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{b_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{c_i c_i}{P_i} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right).$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{I^2}{P}\right]=A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\left[\frac{aa}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right).$$

მიღებულ გამოსახულებაში პირველი შესაკრების ფრჩხილებში მოქცეული $A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი თანახმად (4.4.2.4) დამოკიდებულებისა, ანუ დეტერმინანტთა მეცხრე თვისებისა ტოლია D-სი, რომელიც წარმოადგენს დეტერმინანტს დაშლილს პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით.

მეორე და მესამე შესაკრებების ფრჩხილებში მოქცეული ჯამი დეტერმინანტთა მეათე თვისების მიხედვით ტოლია ნულის. მაშასადამე, საბოლოოდ, (14) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე წევრი მიიღებს სახეს:

$$\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\left[\frac{I^2}{P}\right]=\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D}\cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}. \qquad (4.4.4.15)$$

2. მესამე წევრი:

$$\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\left[\frac{II^2}{P}\right].$$

ჯერ განვსაზღვროთ ამ წევრის $\left[\frac{II^2}{P}\right]$ მამრავლი. გამოვიყენოთ (10) აღნიშვნა

$$\frac{II_i^2}{P_i}=\frac{\left(a_i\cdot A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)^2}{P_i}=\frac{a_ia_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+$$

$$+\frac{2a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\cdot A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{2a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\cdot A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{2b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+$$

$$+\frac{c_ic_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{bc}{P}\right]}=A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\frac{a_ia_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}\left(\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\left(\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{c_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)\cdot$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{\mathrm{II}^2}{P}\right]=A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\left[\frac{aa}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}\left(\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\left(\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)\cdot$$

მიღებულ გამოსახულებაში $A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი (4. 4. 2. 4) დამოკიდებულების, ანუ დეტერმინანტთა მეცხრე თვისების შესაბამისად არის მეორე სვეტის ელემენტთა მიხედვით დაშლილი D დეტერმინანტი.

პირველი და მესამე შესაკრებების ფრჩხილებში მოქცეული ჯამი კი, დეტერმინანტთა მეათე თვისების მიხედვით ტოლია ნულის.

მაშასადამე, ზემოთ მოყვანილი ჯამი გადაიწერება:

$$\left[\frac{\mathrm{II}^2}{P}\right]=A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}\cdot D;$$

საბოლოოდ (14) ტოლობის მარჯვენა მხარის მესამე წევრი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\left[\frac{\mathrm{II}^2}{P}\right]=\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D}\cdot A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}\cdot \tag{4.4.4.16}$$

3. მეოთხე წევრი:

$$\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{III}^2}{P}\right]\cdot$$

განვსაზღვროთ ამ წევრის მამრავლი. გამოვიყენებთ (10) აღნიშვნას:

$$\frac{\mathrm{III}_i^2}{P_i}=\frac{\left(a_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)^2}{P_i}=\frac{a_ia_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{2a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+$$

$$+\frac{2a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{2b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\cdot A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}+\frac{c_ic_i}{P_i}A^2_{\left[\frac{cc}{P}\right]}=$$

$$=A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\frac{a_ia_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\left(\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\left(\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{c_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right).$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{\mathrm{III}^2}{P}\right]=A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\left[\frac{aa}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\left(\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\left(\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right).$$

მიღებული გამოსახულების $A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი წარმოადგენს მესამე სვეტის მიხედვით დაშლილ D დეტერმინანტს, ხოლო პირველი და მეორე შესაკრებების ფრჩხილებში მოქცეული ჯამები დეტერმინანტთა მეათე თვისების გამო არის ნული.

მაშასადამე, ზემოთ მოყვანილი ჯამი გადაიწერება:

$$\left[\frac{\mathrm{III}^2}{P}\right]=A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\cdot D.$$

საბოლოოდ (14) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეოთხე წევრი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D^2}\left[\frac{\mathrm{III}^2}{P}\right]=\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D}\cdot A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}. \tag{4.4.4.17}$$

4. მეხუთე წევრი:

$$\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}}{P}\right].$$

ამ წევრის მამრავლის განსაზღვრისათვის (10) აღნიშვნის გამოყენებით დავწერთ:

$$\frac{\mathrm{I}_i\mathrm{II}_i}{P_i}=\frac{\left(a_iA_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)\cdot\left(a_iA_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)}{P_i}=$$

$$=A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\frac{a_ia_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{c_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right).$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}}{P}\right]=A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\left[\frac{aa}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right).$$

მიღებული გამოსახულების $A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი (4. 4. 3. 2)-ის მაგვარად, ანუ მეცხრე თვისების გამო წარმოადგენს მეორე სვეტის ელემენტების მიხედვით დაშლილ D დეტერმინანტს.

$A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}$ და $A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი დეტერმინანტთა მეათე თვისების მიხედვით ტოლია ნულის.

მაშასადამე, ზემოთ მოყვანილი ჯამი გადაიწერება:

$$\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}}{P}\right]=A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\cdot D,$$

ანუ დავწერთ:

$$\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}}{P}\right]=\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}. \tag{4.4.4.18}$$

5. მეექვსე წევრი:

$$\frac{2\left[\frac{a\varphi}{p}\right]\left[\frac{c\varphi}{p}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{III}}{P}\right].$$

(10)-ის გამოყენებით დავწერთ:

$$\frac{\mathrm{I}_i\cdot\mathrm{III}_i}{P_i}=\frac{\left(a_iA_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)\cdot\left(a_iA_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+b_iA_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+c_iA_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)}{P_i}=$$

$$=A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\frac{a_ia_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\frac{a_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{b_ib_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\frac{a_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{b_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\frac{c_ic_i}{P_i}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right).$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]=A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}\left(\left[\frac{aa}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}\left(\left[\frac{ab}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{bb}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)+$$

$$+A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\left(\left[\frac{ac}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{bc}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{cc}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right).$$

აქ $A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი წარმოადგენს მესამე სვეტის ელემენტების მიხედვით დაშლილ D დეტერმინანტს, ხოლო $A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}$ და $A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}$ ალგებრული დამატების მამრავლი დეტერმინანტთა მეათე თვისების გამო ნულია.

მაშასადამე, დავწერთ:

$$\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]=A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\cdot D,$$

ე. ი.

$$\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]=\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\cdot \tag{4.4.4.19}$$

6. მეშვიდე წევრი:

$$\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{II}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]\cdot$$

მეექვსე წევრის ანალოგიურად გვექნება:

$$\left[\frac{\mathrm{II}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]=A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\cdot D,$$

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D^2}\cdot\left[\frac{\mathrm{II}\cdot\mathrm{III}}{P}\right]=\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} \tag{4.4.4.20}$$

7. მერვე წევრი:

$$-\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\left[\frac{\varphi\mathrm{I}}{P}\right]\cdot$$

(10)-ის გამოყენებით დავწერთ:

$$\frac{\varphi_i\mathrm{I}_i}{P_i}=\frac{a_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\frac{b_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{c_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\cdot$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$\left[\frac{\varphi\mathrm{I}}{P}\right]=\left[\frac{a\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot\mathrm{I}}{P}\right]=-\frac{2}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2\cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)\cdot \tag{4.4.4.21}$$

8. მეცხრე წევრი:

$$-\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot \mathrm{II}}{P}\right].$$

(10)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{\varphi_i\cdot \mathrm{II}_i}{P_i}=\frac{a_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\frac{b_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{c_i\varphi_i}{P_i}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]},$$

ჯამი იქნება:

$$\left[\frac{\varphi\cdot \mathrm{II}}{P}\right]=\left[\frac{a\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot \mathrm{II}}{P}\right]=-\frac{2}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2\cdot A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right). \tag{4.4.4.22}$$

9. მეათე წევრი:

$$-\frac{2\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot \mathrm{III}}{P}\right].$$

(10)-ის გამოყენებით და ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$-\frac{2\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\cdot\left[\frac{\varphi\cdot \mathrm{III}}{P}\right]=-\frac{2}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]\cdot A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2\cdot A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right). \tag{4.4.4.23}$$

შევაჯამოთ (15), (16), (17), (18), (19), (20) სიდიდეები:

$$\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{D}\cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2}{D}\cdot A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2}{D}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}+\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+$$

$$+\frac{2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\frac{2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}=\frac{N}{D}. \tag{4.4.4.24}$$

სადაც,

$$
\left.\begin{aligned}
N = {} & \left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2 \cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + 2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + 2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2 A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + 2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2 \cdot A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}
\end{aligned}\right\}, \quad (4.4.4.25)
$$

ანუ

$$
\left.\begin{aligned}
N = {} & \left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2 \cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right] \cdot A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2 A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2 A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}
\end{aligned}\right\}. \quad (4.4.4.26)
$$

ახლა შევაჯამოთ (21), (22), (23) და აგრეთვე მივიღოთ მხედველობაში (25) ტოლობა,
მივიღებთ:

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{2}{D}\Bigg(& \left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2 \cdot A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + 2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + 2\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] \cdot A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]^2 \cdot A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + 2\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\left[\frac{c\varphi}{P}\right] A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \\
& + \left[\frac{c\varphi}{P}\right]^2 A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\Bigg) = -\frac{2N}{D}
\end{aligned}\right\}. \quad (4.4.4.27)
$$

შევიტანოთ (14) ტოლობაში (24), (27), მივიღებთ:

$$
M^2 \Phi_u = \eta^2 \left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] + \frac{N}{D} - \frac{2N}{D}\right),
$$

ანუ, საბოლოოდ გვექნება

$$
M^2 \Phi_u = \eta^2 \left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] - \frac{N}{D}\right). \quad (4.4.4.28)
$$

მიღებულ (28) ფორმულას უმცირეს კვადრატთა მეთოდით განაზომთა დამუშავებისას იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც განაზომთა შეცდომების თეორიაში (3. 4. 1. 17) ფორმულას.

(28) ფორმულის $\eta^2\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]$ პირველი წევრი წარმოადგენს ფუნქციის გაუწონასწორებელი მნიშვნელობის (უშუალო განაზომთა ფუნქციის) საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატს (დისპერსიას), ხოლო $-\frac{N}{D}\cdot\eta^2$ მეორე წევრი წარმოადგენს ფუნქციის გაუწონასწორებელი მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის მაკლებს გამოწვეულს ამ ფუნქციის გაწონასწორებით. არსებითად $\frac{N}{D}$ წილადი უნდა იყოს დადებითი, რადგანაც უნდა ველოდოთ, რომ გაუწონასწორებელი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა მეტი იქნება მისი გაწონასწორებული მნიშვნელობის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე. ამით დავამთავრეთ ამ წიგნის შესავლის ბოლოში გათვალისწინებული b) საკითხი. ახლა განვიხილოთ c) საკითხი.

4. 4. 5. ერთი რომელიმე განაზომის გაწონასწორებული მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ვთქვათ, მოცემულია l_i გაზომილი (უალბათესი) სიდიდის L_i გაწონასწორებული მნიშვნელობა და საჭიროა განისაზღვროს მისი M_{L_i} საშუალო კვადრატული შეცდომა (i ინდექსი აღნიშნავს იმ გაწონასწორებული სიდიდის ნომერს, რომლის საშუალო კვადრატული შეცდომა განსასაზღვრია).

ვისარგებლოთ (4. 4. 4. 28) ფორმულით.

ამ შემთხვევაში $\Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = l_i$; მაშასადამე, $\varphi_i = 1$, ხოლო დანარჩენი φ-ები იქნება ნულის ტოლები. აღნიშნულის გამო (4. 4. 4. 26) და (4. 4. 4. 28) ტოლობის ელემენტები შესაბამისად იქნება შემდეგი მნიშვნელობებისა:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{a\varphi}{P}\right] = \frac{a_i\varphi_i}{P_i} = \frac{a_i}{P_i}\\
&\left[\frac{b\varphi}{P}\right] = \frac{b_i\varphi_i}{P_i} = \frac{b_i}{P_i}; \quad \left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] = \frac{\varphi_i\varphi_i}{P_i} = \frac{1}{P_i}\\
&\left[\frac{c\varphi}{P}\right] = \frac{c_i\varphi_i}{P_i} = \frac{c_i}{P_i}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.4.5.1}$$

ე. ი. (4. 4. 4. 26) გამოსახულება იქნება ასეთი:

$$\left.\begin{aligned}
N_i' = {} & \frac{a_ia_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{a_ib_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{a_ic_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \\
& + \frac{a_ib_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{b_ib_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + \frac{b_ic_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \\
& + \frac{a_ic_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \frac{b_ic_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \frac{c_ic_i}{P_i^2}A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.4.5.2}$$

და (4. 4. 4. 28) ტოლობა კი ასე გადაიწერება:

$$M^2_{L_l}=\eta^2\left(\frac{1}{P_l}-\frac{N'_l}{D}\right). \tag{4.4.5.3}$$

(2) ტოლობა გავამრავლოთ P_l-ზე და $N'_l \cdot P_l$ ნამრავლი აღვნიშნოთ N_l-ით.

$$\left.\begin{aligned} N_l = {} & \frac{a_l a_l}{P_l} A_{\left[\frac{aa}{P}\right]} + \frac{a_l b_l}{P_l} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{a_l c_l}{P_l} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \\ & + \frac{a_l b_l}{P_l} A_{\left[\frac{ab}{P}\right]} + \frac{b_l b_l}{P_l} A_{\left[\frac{bb}{P}\right]} + \frac{b_l c_l}{P_l} A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \\ & + \frac{a_l c_l}{P_l} A_{\left[\frac{ac}{P}\right]} + \frac{b_l c_l}{P_l} A_{\left[\frac{bc}{P}\right]} + \frac{c_l c_l}{P_l} A_{\left[\frac{cc}{P}\right]} \end{aligned}\right\}. \tag{4.4.5.4}$$

მაშასადამე, (3) ტოლობაში ნაცვლად N'_l-სა შეიძლება შევიტანოთ $\frac{1}{P_l}\cdot N_l$ სიდიდე, ე. ი. საბოლოოდ დავწერთ:

$$M^2_{L_l}=\frac{\eta^2}{P_l}\left(1-\frac{N_l}{D}\right). \tag{4.4.5.5}$$

მიღებული (5) ფორმულით შეიძლება გამოთვლილი იქნეს ნებისმიერი l_l გაზომილი სიდიდის L_l გაწონასწორებული (საბოლოო უალბათესი) ოდენობის $M^2_{L_l}$ დისპერსია და აქედან მისი M_{L_l}—საშუალო კვადრატული შეცდომა.

4. 4. 6. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების შემდეგ

ცნობილია, რომ არატოლზუსტ განაზომთა საშუალო კვადრატულ შეცდომად იღებენ არატოლზუსტ განაზომთა ისეთი რიგის საშუალო კვადრატულ შეცდომას, რომლის მიმართ ისაზღვრება სხვა არატოლზუსტი განაზომების (რიგების) სიზუსტე და რომლის წონა ერთის ტოლია. აღვნიშნოთ გაწონასწორების შემდეგ ეს შეცდომა η_u სიმბოლოთი.

ამ შეცდომის გამოსათვლელი ფორმულის მიღება შეიძლება წინა მუხლში განსაზღვრული საბოლოო უალბათესი (გაწონასწორებული) სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომის (4. 4. 5. 5) ფორმულის საფუძველზე, თუ მას გამოვიყენებთ განხილადი შემთხვევისათვის (3. 5. 8. 2) ფორმულაში,

$$\eta_u^2=\frac{[PM_L^2]}{n}, \tag{4.4.6.1}$$

სადაც n არატოლზუსტ განაზომთა, ანუ გაწონასწორებულ სიდიდეთა რაოდენობაა,

M_{L_l} გაწონასწორებულ სიდიდეთა საშუალო კვადრატული შეცდომაა,

P_l მათი წონებია გაწონასწორებამდე.

(4. 4. 5. 5) ფორმულის გამოყენებით დავწერთ:

$$P_i M^2_{L_i} = P_i \frac{\eta^2}{P_i} \left(1 - \frac{N_i}{D}\right) = \eta^2 \left(1 - \frac{N_i}{D}\right),$$

საიდანაც ჯამზე გადასვლით მივიღებთ:

$$[P \cdot M^2_L] = \eta^2 \left(n - \frac{[N]}{D}\right).$$

(4.4.5.4), (4.4.3.1), (4.4.3.2) და (4.4.3.3) ტოლობების საფუძველზე დავწერთ:

$$[N] = 3D.$$

მაშასადამე, სამი პირობითი ტოლობის, ანუ სამი ჭარბი განაზომისათვის მივიღებთ:

$$[PM^2_L] = \eta^2 (n - 3). \qquad (4.4.6.2)$$

(2) ტოლობის მნიშვნელობა შევიტანოთ (1) ტოლობაში:

$$\eta^2_u = \frac{\eta^2 (n-3)}{n} = \eta^2 \frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}},$$

ანუ

$$\eta_u = \pm \eta \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}. \qquad (4.4.6.3)$$

ახლა განვიხილოთ *d*) საკითხი, ანუ საკითხი გაწონასწორებამდე არატოლზუსტ განაზომთა η ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის შესახებ.

4. 4. 7. გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა გაწონასწორების მონაცემების საფუძველზე

იმისათვის, რომ შევძლოთ განსაზღვრა (4. 4. 4. 28) ფორმულით გაწონასწორებული სიდიდეების ზოგადი სახის ფუნქციის $M^2\Phi$ დისპერსიისა, (4. 4. 5. 5) ფორმულით თვით გაწონასწორებული სიდიდეების $M^2_{L_i}$ დისპერსიისა და (4.4.6.3) ფორმულით გაწონასწორების შემდეგ η_u ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომისა, საჭიროა ვიცოდეთ გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოთვლილი გაწონასწორების მონაცემებით. ამ შეცდომას აღვნიშნავთ η სიმბოლოთი, რომლის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღება შემდეგი მსჯელობით.

განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 8. 3) ფორმულაში

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[P\Delta\Delta]}{K}},$$

Δ არის ჭეშმარიტი შეცდომა ერთი და იგივე სიდიდის არატოლზუსტ განაზომთა (ცალკეული სერიის) L_i საშუალო არითმეტიკულსა და გაზომილი სიდიდის X ჭეშმარიტ მნიშვნელობას შორის; K კი სერიების რაოდენობაა. იმ შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს პირობით განტოლებებთან, რომელშიაც შედის გეოდეზიური აღნაგობის ურთიერთმათემატიკურად დაკავშირებული ელემენტები, მაშინ შეგვიძლია იმავე ფორმულაში, ნაცვლად Δ_i შეცდომებისა, ვიგულისხმოთ δ_i ჭეშმარიტი შეცდომები, გამოთვლილი l_i ელემენტის გაუწონასწორებელი საშუალო არითმეტიკულისა და მათი X_i ჭეშმარიტი მნიშვნელობის სხვაობით. აგრეთვე, ნაცვლად K სერიებისა, ფორმულაში შევიტანთ ელემენტთა n რაოდენობას, მაშასადამე, დავწერთ:

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[P\delta\delta]}{n}}, \tag{4.4.7.1}$$

სადაც განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 3. 1. 4) ფორმულით

$$\delta_i = l_i - X_i.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ და გამოვაკლოთ ელემენტის გაწონასწორებული სიდიდე L_i, მივიღებთ:

$$\delta_i = L_i - X_i + l_i - L_i.$$

(4. 4. 4. 2) ფორმულის მიხედვით უალბათესი შესწორებაა

$$-\varepsilon = l_i - L_i,$$

ხოლო $L_i - X_i$ სხვაობა არის Δ_i ჭეშმარიტი შეცდომა, რომელიც დაახლოებით ტოლია ყოველი (ცალკეული) გაწონასწორებული L_i სიდიდის M_{L_i} საშუალო კვადრატული შეცდომის, როცა განაზომთა რაოდენობა დიდია. მაშასადამე, დავწერთ:

$$\delta_i = M_{L_i} - \varepsilon_i,$$

აქედან:

$$[P\delta\delta] = [PM_L^2] + [P\varepsilon\varepsilon] - 2[PM_L \cdot \varepsilon]. \tag{4.4.7.2}$$

თანახმად (4. 4. 6. 2) ტოლობისა (2) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი გამოისახება:

$$[PM_L^2] = \eta^2 (n-3). \tag{4.4.7.3}$$

მესამე წევრი კი დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$[PM_L\varepsilon] = P_1 M_{L_1} \cdot \varepsilon_1 + P_2 M_{L_2} \cdot \varepsilon_2 + \cdots + P_n M_{L_n} \cdot \varepsilon_n.$$

შესწორებათა ნაცვლად (4. 3. 1. 10) დამოკიდებულებების მიხედვით, ჩავსვათ მათი მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$[PM_L\varepsilon] = P_1 M_{L_1} \frac{1}{P_1} (a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3) + P_2 M_{L_2} \cdot \frac{1}{P_2} (a_2K_1 + b_2K_2 + c_2K_3) +$$

$$+ \cdots + P_n M_{L_n} \frac{1}{P_n} (a_nK_1 + b_nK_2 + c_nK_3).$$

ანუ

$$[PM_L\varepsilon]=[aM_L]K_1+[bM_L]K_2+[cM_L]K_3. \tag{4.4.7.4}$$

თეორიულ პირობას უპასუხებს გაზომილი სიდიდეების ჭეშმარიტი მნიშვნელობები, ე. ი. სამი პირობითი განტოლების შემთხვევაში დავწერთ:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0 \\ F_2(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0 \\ F_3(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0 \end{array}\right\}. \tag{4.4.7.5}$$

განვიხილოთ (5)-ის პირველი პირობითი განტოლება, მხოლოდ X_i ჭეშმარიტი სიდიდე შევცვალოთ შემდეგი სახის ალგებრული ჯამით:

$$X_i=L_i+\Delta_i=l_i+\varepsilon_i+M_{L_i}$$

გვექნება:

$$F_1(l_1+\varepsilon_1+ML_1,\ l_2+\varepsilon_2+ML_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n+ML_n)=0. \tag{4.4.7.6}$$

(6) ტოლობის მარცხენა ნაწილი დავშალოთ ტეილორის ფორმულით და შევჩერდეთ მწკრივის პირველი რიგის წევრებზე, მივიღებთ:

$$F_1(l_1+\varepsilon_1+ML_1,\ l_2+\varepsilon_2+ML_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n+ML_n)=F_1(l_1+l_2,\ \ldots,\ l_n)+$$
$$+\frac{\partial F_1}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_1}{\partial l_1}M_{L_1}+\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\varepsilon_2+\frac{\partial F_1}{\partial l_2}M_{L_2}+$$
$$+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial l_n}\varepsilon_n+\frac{\partial F_1}{\partial l_n}\cdot M_{L_n}=0. \tag{4.4.7.7}$$

ვინაიდან (4. 3. 1. 2) და (4. 3. 1. 5) დამოკიდებულებების მიხედვით,

$$F_1(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=W_1 \text{ და } \frac{\partial F_1}{\partial l_i}=a_i,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(7) მწკრივი გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+a_1M_{L_1}+a_2M_{L_2}+\cdots+a_nM_{L_n}+W_1=0.$$

ანუ

$$[a\varepsilon]+W_1+[aM_L]=0. \tag{4.4.7.8}$$

(4. 3. 1. 6) ტოლობის მიხედვით

$$[a\varepsilon]+W_1=0,$$

მაშინ

$$[aM_L]=0. \tag{4.4.7.9}$$

მეორე და მესამე პირობითი განტოლებებისადმიც ასეთივე მსჯელობით მივიღებთ:

$$[bM_L]=0 \text{ და } [cM_L]=0. \tag{4.4.7.10}$$

(9) და (10) გამოსახულებების (4) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ:

$$[PM_L\cdot\varepsilon]=0. \tag{4.4.7.11}$$

ამის შემდეგ (2) ტოლობაში თუ გავითვალისწინებთ (3) და (11) ტოლობებს, დავწერთ:

$$[P\delta\delta]=\eta^2(n-3)+[P\varepsilon\varepsilon],$$

ხოლო (1) ტოლობის მხედველობაში მიღებით გვექნება:

$$n\eta^2=\eta^2(n-3)+[P\varepsilon\varepsilon],$$

საიდანაც

$$3\eta^2=[P\varepsilon\varepsilon] \text{ ე. ი. } \eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{3}},$$

აქ 3 ჭარბი განაზომის რაოდენობაა. მაშასადამე, ზოგადად დავწერთ:

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}. \tag{4.4.7.12}$$

ამ ფორმულით განსაზღვრულ η-ს აქვს *ნულოვანი განზომილება*.

4. 4. 8. გაწონასწორებულ სიდიდეთა ზოგადი სახის ფუნქციის M_{Φ_u} საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი (4. 4. 4. 28) ფორმულის გარდაქმნა გაუსის სქემით ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესაბამისად

მოცემულია

$$M^2_{\Phi_u}=\eta^2\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]-\frac{N}{D}\right).$$

ფრჩხილებში მოქცეული პირველი წევრი არ არის დამოკიდებული ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ხერხზე. ამიტომ, საჭირო იქნება მხოლოდ მეორე $-\frac{N}{D}$ წევრის გარდაქმნა.

(4.4.4.26) ტოლობის მიხედვით

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{N}{D}=&-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{aa}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}\right)-\\
&-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\right]}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ab}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bb}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}\right)-\\
&-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\right]}{D}\left(\left[\frac{a\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{ac}{P}\right]}+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{bc}{P}\right]}+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]A_{\left[\frac{cc}{P}\right]}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{4.4.8.1}$$

მიღებული ტოლობის ფრჩხილებში მოქცეული წევრები წარმოადგენს

პირველი, მეორე და მესამე სვეტების ელემენტების მიხედვით დაშლილი შემდეგი სახის დეტერმინანტებს:

$$D_1=\begin{vmatrix} \left[\frac{a\varphi}{P}\right] & \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right] \\ \left[\frac{b\varphi}{P}\right] & \left[\frac{bb}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] \\ \left[\frac{c\varphi}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] & \left[\frac{cc}{P}\right] \end{vmatrix}; \quad D_2=\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{P}\right] & \left[\frac{a\varphi}{P}\right] & \left[\frac{ac}{P}\right] \\ \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{b\varphi}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] \\ \left[\frac{ac}{P}\right] & \left[\frac{c\varphi}{P}\right] & \left[\frac{cc}{P}\right] \end{vmatrix};$$

$$D_3=\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{P}\right] & \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{a\varphi}{P}\right] \\ \left[\frac{ab}{P}\right] & \left[\frac{bb}{P}\right] & \left[\frac{b\varphi}{P}\right] \\ \left[\frac{ac}{P}\right] & \left[\frac{bc}{P}\right] & \left[\frac{c\varphi}{P}\right] \end{vmatrix}. \qquad (4.4.8.2)$$

მაშასადამე, (1) შეიძლება გადავწეროთ შემოკლებული სახით:

$$-\frac{N}{D}=-\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\cdot\frac{D_1}{D}-\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\cdot\frac{D_2}{D}-\left[\frac{c\varphi}{P}\right]\cdot\frac{D_3}{D}. \qquad (4.4.8.3)$$

(3) ტოლობის

$$-\frac{D_1}{D},\ -\frac{D_2}{D} \text{ და } -\frac{D_3}{D}.$$

წილადი წევრები შესაბამისად აღვნიშნოთ r_1, r_2 და r_3 სიმბოლოთი. ეს წილადი წევრები იქნება ფესვები შემდეგი სახის განტოლებათა სისტემისა:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{P}\right]r_1+\left[\frac{ab}{P}\right]r_2+\left[\frac{ac}{P}\right]r_3+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]&=0 \\ \left[\frac{ab}{P}\right]r_1+\left[\frac{bb}{P}\right]r_2+\left[\frac{bc}{P}\right]r_3+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]&=0 \\ \left[\frac{ac}{P}\right]r_1+\left[\frac{bc}{P}\right]r_2+\left[\frac{cc}{P}\right]r_3+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]&=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.4.8.4)$$

(4) სისტემა (4. 3. 1. 11) ნორმალური განტოლებების სისტემისაგან განსხვავდება მხოლოდ თავისუფალი წევრებით. (3) შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$-\frac{N}{D}=+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\cdot r_1+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]\cdot r_2+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]\cdot r_3. \qquad (4.4.8.5)$$

მაშასადამე, $-\frac{N}{D}$ წარმოადგენს ჯამს, რომლის ყოველი შესაკრები არის ნამრავლი (4) სისტემის

$$\left[\frac{a\varphi}{P}\right], \quad \left[\frac{b\varphi}{P}\right] \text{ და } \left[\frac{c\varphi}{P}\right]$$

თავისუფალი წევრისა, ამ სისტემის შესაბამის r_1, r_2 და r_3 ფესვზე.

ვისარგებლოთ (4. 3. 4. 7), (4. 3. 4. 14) ტოლობებით და სამუცნობიანი სისტემის შესაბამისად დავწეროთ:

$$-\frac{W_1^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{(W_2\cdot 1)^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{(W_3\cdot 2)^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}=W_1K_1+W_2K_2+W_3K_3. \qquad (4.4.8.6)$$

(6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ისე, როგორც (5) ტოლობის შემთხვევაში შესაკრებები წარმოადგენს (4. 3. 1. 11) სისტემის W_1, W_2 და W_3 თავისუფალი წევრებისა და შესაბამისი K_1, K_2 და K_3 ფესვების ნამრავლს. ამიტომ (5) და (6)-ის შედარებით დავწერთ:

$$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]r_1+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]r_2+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]r_3=-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]^2},$$

მაშასადამე,

$$-\frac{N}{D}=-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}, \qquad (4.4.8.7)$$

საიდანაც (4. 4. 4. 28) ფორმულა გადაიწერება ასე:

$$M^2_{\Phi_u}=\eta^2\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}\right). \qquad (4.4.8.8)$$

მიღებული (8) ფორმულა იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ დისპერსია როგორც გაწონასწორებულ სიდიდეთა ზოგადი სახის ფუნქციისა, ისე თვით L_i ნებისმიერი გაწონასწორებული სიდიდისა. ამისათვის, ისე როგორც ეს ნაჩვენებია (4.4.5) პარაგრაფში, უნდა მივიღოთ $\Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n)=l_i$ ე. ი. φ_i იქნება ერთის ტოლი, დანარჩენი კოეფიციენტები კი ნულია (იხილეთ (4. 4. 5. 1) ფორმულები).

4. 4. 9. პირდაპირი პირობითი ტოლზუსტი განაზომების შეფასება

აქამდე ვიხილავდით საკითხს არატოლზუსტი განაზომების სიზუსტის შეფასებისათვის საჭირო ფორმულების გამოყვანასთან დაკავშირებით. ახლა განვიხილოთ იგივე საკითხი ტოლზუსტი განაზომების შესახებ, რაც გულისხმობს იმას, რომ განაზომთა წონები ერთის ტოლ სიდიდეებად მივიღოთ.

მაშასადამე, ზემოთ გამოყვანილი ფორმულები გადაიწერება შემდეგი სახით:

1. (4. 4. 4. 26) ფორმულა:

$$\left.\begin{aligned} N=[a\varphi]^2\cdot A_{[aa]}+[a\varphi][b\varphi]\cdot A_{[ab]}+[a\varphi][c\varphi]\cdot A_{[ac]}+\\ +[a\varphi][b\varphi]\cdot A_{[ab]}+[b\varphi]^2\cdot A_{[bb]}+[b\varphi][c\varphi]\cdot A_{[bc]}+\\ +[a\varphi][c\varphi]\cdot A_{[ac]}+[b\varphi][c\varphi]\, A_{[bc]}+[c\varphi]^2\cdot A_{[cc]} \end{aligned}\right\}. \tag{4.4.9.1}$$

2. (4. 4. 4. 28) ფორმულა:

$$M^2{}_{\Phi_u}=m^2\left([\varphi\varphi]-\frac{N}{D}\right), \tag{4.4.9.2}$$

სადაც $m=\eta$ ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომაა,

$$D=\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}.$$

3. (4. 4. 5. 5) ფორმულა:

$$M^2_{L_i}=m^2\left(1-\frac{N_i}{D}\right), \tag{4.4.9.3}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} N_i=a_ia_iA_{[aa]}+a_ib_iA_{[ab]}+a_ic_iA_{[ac]}+\\ +a_ib_iA_{[ab]}+b_ib_iA_{[bb]}+b_ic_iA_{[bc]}+\\ +a_ic_iA_{[ac]}+b_ic_iA_{[bc]}+c_ic_iA_{[cc]} \end{aligned}\right\}. \tag{4.4.9.4}$$

4. (4. 4. 6. 3) ფორმულა შეიცვლის არსს და დაიწერება ასე:

$$M_L=m\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}, \tag{4.4.9.5}$$

სადაც M_L-ით უნდა ვიგულისხმოთ ყველა (ნებისმიერი) განაზომის გაწონასწორებული მნიშვნელობების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

5. (4. 4. 7. 12) ფორმულა შეიცვლის არსს და დაიწერება ასე:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}, \tag{4.4.9.6}$$

სადაც

m-ით იგულისხმება ტოლზუსტ განაზომთა რიგის ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა, გაწონასწორებამდე, განსაზღვრული გაწონასწორების მონაცემებით.

6. (4. 4. 8. 8) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$M^2{}_{\Phi_a}=m^2\left([\varphi\varphi]-\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}-\frac{[b\varphi\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[c\varphi\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right). \tag{4.4.9.7}$$

აქაც, ისევე როგორც (4. 4. 4. 28) და (4. 4. 8. 8) ფორმულებში, დავასკვნით, რომ ჭარბ განაზომთა გაზრდით მცირდება გაწონასწორებულ სიდიდეთა ფუნქციის (და თვით გაწონასწორებულ სიდიდეთა) საშუალო კვადრატული შეცდომა, ანუ იზრდება შესაბამისი წონა, რადგანაც თანახმად განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 2. 4) ფორმულისა $[\varphi\varphi]$ არის გაუწონასწორებელი განაზომების შებრუნებული წონა და იგი მცირდება (7) ფორმულის ყოველი ახალი წევრის შესაბამისად.

4. 4. 10. ნაკრები ფორმულებისა, რომლებსაც პრაქტიკაში იყენებენ განაზომთა გაწონასწორებული სიდიდეებისა და წონითი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად

a. ტოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში:

ფორმულა (4. 4. 9. 6) — გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული (ნებისმიერი) განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორებების მონაცემებით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}},$$

ფორმულა (4. 4. 9. 5) — ნებისმიერი განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების შემდეგ

$$M_L=m\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}},$$

ფორმულა (4. 4. 9. 7) — განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობების ზოგადი სახის ფუნქციის დისპერსია

$$M^2_{\Phi_u}=m^2\left([\varphi\varphi]-\underbrace{\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}-\frac{[b\varphi\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[c\varphi\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-\ldots}_{\text{წევრთა რიცხვი უდრის ჭარბ განაზომთა რაოდენობას}}\right).$$

მაგალითად, ხუთი ჭარბი განაზომისათვის, ანუ ხუთი პირობითი განტოლების შემთხვევაში დავწერთ:

$$M^2_{\Phi_u}=m^2\left([\varphi\varphi]-\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}-\frac{[b\varphi\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[c\varphi\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[d\varphi\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}-\frac{[e\varphi\cdot 4]^2}{[ee\cdot 4]}\right).$$

b. არატოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში:

ფორმულა (4. 4. 7. 12) — გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით:

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}},$$

ფორმულა (4. 4. 6. 3) — ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების შემდეგ

$$\eta_u=\eta\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}},$$

ფორმულა (4. 4. 4. 28), ანუ (4. 4. 8. 8) — განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობების ზოგადი სახის ფუნქციის დისპერსია:

$$M^2_{\Phi_u}=\eta^2\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]\underbrace{-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot2\right]}-\frac{\left[\frac{d\varphi}{P}\cdot3\right]^2}{\left[\frac{dd}{P}\cdot3\right]}\cdots}_{\text{წევრთა რიცხვი უდრის ჭარბი განაზომის რაოდენობას}}\right).$$

(4. 4. 8. 8) და (4. 4. 9. 7) ტოლობის ფრჩხილებში მოქცეული გამოსახულება წარმოადგენს **გაწონასწორებული განაზომების ფუნქციის შებრუნებულ წონას.**

მართლაც, თანახმად (3. 5. 4. 1) ფორმულისა, რომელიც შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი, ანუ როგორც დამოუკიდებელი, ისე დამოკიდებული სიდიდეების ფუნქციის წონების გამოსათვლელად, დავწერთ:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=\frac{M^2_{\Phi_u}}{\eta^2}. \qquad (4.4.10.1)$$

ეს სიდიდეები (4. 4. 9. 7) და (4. 4. 8. 8) ფორმულების მიხედვით ტოლზუსტი და არატოლზუსტი განაზომებისათვის შესაბამისად იქნება ასეთი:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=[\varphi\varphi\cdot3]; \qquad \frac{1}{P_{\Phi_u}}=\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\cdot3\right].$$

მართლაც, ტოლზუსტი განაზომების შემთხვევისათვის თუ ბოლომდე დავშლით $[\varphi\varphi\,.\,3]$ ალგორითმს, მივიღებთ:

$$[\varphi\varphi\cdot3]=[\varphi\varphi\cdot2]-\frac{[c\varphi\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}=[\varphi\varphi\cdot1]-\frac{[b\varphi\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[c\varphi\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}=$$

$$=[\varphi\varphi]-\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}-\frac{[b\varphi\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[c\varphi\cdot2]^2}{[cc\cdot2]};$$

ე. ი. თუ გვაქვს r რაოდენობა ტოლზუსტი და არატოლზუსტი ჭარბი განაზომებისა, მაშინ გვექნება:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=\frac{M^2_{\Phi_u}}{m^2}=[\varphi\varphi\cdot r] \text{ და } \frac{1}{P_{\Phi_u}}=\frac{M^2_{\Phi_u}}{\eta^2}=\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\cdot r\right]. \qquad (4.4.10.2)$$

(4.4.9.7) ფორმულის შესაბამისად $M^2_{\Phi_u}$ სიდიდის გამოსათვლელად ნორ-

მალურ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელ (4. 3. 5. 2) სქემას დაუმატებენ ერთ სვეტს, რომელშიაც თანამიმდევრობით შეიტანენ:

$$[a\varphi],\ [b\varphi],\ [c\varphi],\ldots$$

სიდიდეებს და ამ სიდიდეებზე აწარმოებენ ისეთივე მოქმედებებს, რასაც თავისუფალი წევრების სვეტში შემავალ W_1, W_2, W_3,... თავისუფალ წევრებზე, რის შემდეგ ადვილად მივიღებთ

$$-\left(\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}+\frac{[b\varphi\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[c\varphi\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right),$$

გამოსახულებას, რომელიც $[\varphi\varphi]$ პირველ წევრთან ერთად m^2-ზე გადამრავლებული მოგვცემს $M^2\varphi_u$ სიდიდეს. ანალოგიურად მოვიქცევით (4.4.8.8) ფორმულის მიხედვით $M^2\varphi_u$ გაწონასწორებულ სიდიდეთა ფუნქციის დისპერსიის გამოსათვლელად.

თუ საჭირო გახდა გაწონასწორებულ სიდიდეთა შებრუნებული წონების ან დისპერსიების განსაზღვრა, მაშინ, როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, წრფივი სახით დაწერილი გაწონასწორებული სიდიდეების ფუნქციის φ_i კოეფიციენტს მივიჩნევთ ერთის ტოლად, დანარჩენ კოეფიციენტებს კი ნულად და ვისარგებლებთ (4. 4. 8. 8) ან (4. 4. 9. 7) ტოლობებით. ამ მიზნით ნორმული განტოლებების მე-2 სქემას დაემატება φ და Σ სვეტი (იხილეთ (4. 7. 1) პარაგრაფი და სქემა (4. 7. 1. 1), (4. 7. 1. 2). ამ სვეტებზე ისეთივე მოქმედებები სრულდება, როგორც ამ სქემის წინა სვეტებზე. სქემა მოგვცემს გაწონასწორებული ელემენტის შებრუნებულ წონას, აქედან კი დისპერსია განისაზღვრება (4. 4. 10. 1) ფორმულიდან:

$$M^2\varphi_u=\frac{\eta^2}{P\varphi_u}. \tag{4.4.10.3}$$

თავი V

ერთი პირობითი განტოლების შემთხვევაში განაზომთა გაწონასწორება

4. 5. 1. არატოლზუსტი და ტოლზუსტი განაზომები

ვთქვათ, ამა თუ იმ სახის გეოდეზიური აღნაგობის შესაბამისად ადგილი აქვს (4. 3. 1. 6) შეცდომათა წრფივი სახის სისტემის პირველი ტოლობის ანალოგიურ ერთ ტოლობას:

$$a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n+W=0. \tag{4.5.1.1}$$

ამ შემთხვევაში საჭირო იქნება მხოლოდ ერთი K კორელატის განსაზღვრა და ამიტომ ლაგრანჟის ფუნქციის სახე, არატოლზუსტი გაზომების შემთხვევისათვის (4. 3. 1. 9) ტოლობის მაგვარად, იქნება:

$$G=[P\varepsilon\varepsilon]-2K\ (a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n+W)=\text{minimum}. \tag{4.5.1.2}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ მიხედვით ლაგრანჟის ფუნქციის კერძო წარმოებულების აღებით, შესწორებათა ექსტრემიალური მნიშვნელობები (4. 3. 1. 10) სისტემის ანალოგიურად ასე გამოისახება:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{1}{P_1}a_1K\\
\varepsilon_2&=\frac{1}{P_2}a_2K\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
\varepsilon_n&=\frac{1}{P_n}a_nK
\end{aligned}\right\}. \tag{4.5.1.3}$$

(3) სისტემიდან (1) ტოლობაში შესწორებათა მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ კორელატის განსაზღვრისათვის საჭირო შემდეგი სახის ერთ ნორმალურ განტოლებას:

$$\left[\frac{aa}{P}\right]K+W=0, \tag{4.5.1.4}$$

საიდანაც

$$K=-\frac{W}{\left[\frac{aa}{P}\right]}. \qquad (4.5.1.5)$$

კორელატის მნიშვნელობის (3) დამოკიდებულებაში შეტანით მივიღებთ შესწორებათა სიდიდეებს:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=-\frac{W}{\left[\frac{aa}{P}\right]}\cdot\frac{a_1}{P_1}\\ \varepsilon_2&=-\frac{W}{\left[\frac{aa}{P}\right]}\cdot\frac{a_2}{P_2}\\ \varepsilon_n&=-\frac{W}{\left[\frac{aa}{P}\right]}\cdot\frac{a_n}{P_n} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.5.1.6)$$

როცა $\frac{\partial F}{\partial l_i}=\frac{\partial W}{\partial l_i}$ კერძო წარმოებულები ტოლია ერთის, ანუ როცა

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=1,$$

მაშინ, (1), (2), (3), (4), (5) და (6) დამოკიდებულებები შესაბამისად გადაიწერება:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n+W=0, \qquad (4.5.1.1')$$

$$G=[P\varepsilon\varepsilon]-2K_k(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n+W)=\text{minimum}, \qquad (4.5.1.2')$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{1}{P}\cdot K\\ \varepsilon_2&=\frac{1}{P_2}\cdot K\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varepsilon_n&=\frac{1}{P_n}\cdot K \end{aligned}\right\}, \qquad (4.5.1.3')$$

$$\left[\frac{1}{P}\right]K+W=0, \qquad (4.5.1.4')$$

$$K=-\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]}, \qquad (4.5.1.5')$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]}\cdot\frac{1}{P_1} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]}\cdot\frac{1}{P_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]}\cdot\frac{1}{P_n} \end{aligned}\right\}. \tag{4.5.1.6'}$$

მაშასადამე, *შესწორებები შებრუნებული წონების პროპორციული სიდიდეებია* (3. 5. 7).

პირველი და მეორე საკონტროლო ფორმულების სახე (3. 4. 13) და (3. 4. 14) ფორმულების ანალოგიურად იქნება:

$$-W\cdot K=\frac{W^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]} \text{ და } [P\varepsilon\varepsilon]=-W\cdot K. \tag{4.5.1.7}$$

როცა $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, მაშინ:

$$-W\cdot K=\frac{W^2}{\left[\frac{1}{P}\right]} \text{ და } [P\varepsilon\varepsilon]=-W\cdot K \tag{4.5.1.7'}$$

შეფასებისათვის გამოიყენება (4. 4. 7. 12), (4. 4. 6. 3) და (4. 4. 4. 28) ფორმულები.

ტოლზუსტი გაზომვების შემთხვევაში: I ტოლობა იგივე სახის იქნება.

ნაცვლად (2), (3), (4), (5) და (6) გამოსახულებებისა, შესაბამისად გვექნება:

$$G=[\varepsilon\varepsilon]-2K\ (a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n+W)=\text{minimum} \tag{4.5.1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 K \\ \varepsilon_2 &= a_2 K \\ &\cdots \\ \varepsilon_n &= a_n K \end{aligned}\right\}. \tag{4.5.1.9}$$

$$[aa]\cdot K+W=0. \tag{4.5.1.10}$$

$$K=-\frac{W}{[aa]}. \tag{4.5.1.11}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{W}{[aa]}\cdot a_1 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{W}{[aa]}\cdot a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= -\frac{W}{[aa]}\cdot a_n \end{aligned}\right\}. \tag{4.5.1.12}$$

მაშასადამე, შესწორებები პირობით განტოლებათა კოეფიციენტების პროპორციული სიდიდეებია.

როცა $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$, მაშინ (1′) იგივე სახის იქნება, ხოლო (2′), (3′), (4′), (5′) და (6′) დამოკიდებულების შესაბამისად მივიღებთ:

$$G=[\varepsilon\varepsilon]-2K(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+W)=\text{minimum}. \qquad (4.5.1.8')$$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=K\\ \varepsilon_2=K\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varepsilon_n=K\end{array}\right\}, \qquad (4.5.1.9')$$

$$[aa]=n. \qquad (4.5.1.9'')$$

სადაც n შესწორებათა რაოდენობაა.

$$nK+W=0, \qquad (4.5.1.10')$$

$$K=-\frac{W}{n}, \qquad (4.5.1.11')$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=-\frac{W}{n}. \qquad (4.5.1.12')$$

ე. ი. შესწორებები ურთიერთტოლი სიდიდეებია და ყოველი მათგანი უდრის შეუკვრელობას, გამრავლებულს $\frac{1}{n}$-ზე შებრუნებული ნიშნით.

ამიტომ ტოლზუსტი გაზომვების დროს, სამკუთხედის ან მრავალკუთხედის შეუკვრელობა ნაწილდება კუთხეებზე თანაბრად და შებრუნებული ნიშნით.

პირველი და მეორე საკონტროლო ფორმულების სახე (4. 3. 4. 12) და (4. 3. 4. 15) ანალოგიურად იქნება

$$-W\cdot K=\frac{W^2}{[aa]} \text{ და } [\varepsilon\varepsilon]=-W\cdot K, \qquad (4.5.1.13)$$

როცა $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

$$-W\cdot K=\frac{W^2}{n} \text{ და } [\varepsilon\varepsilon]=-W\cdot K. \qquad (4.5.1.13')$$

შეფასებისათვის გამოიყენება (4. 4. 9. 6), (4. 4. 9. 5) და (4. 4. 9. 7) ფორმულა.

განაზომთა შეცდომების თეორიაში [13] მრავალი მაგალითია ამოხსნილი სხვადასხვა სახის გეოდეზიური აღნაგობის არაერთგვაროვანი არაჭარბი (აუცილებელი) ელემენტების განაზომთა ფუნქციების გამოთვლა-შეფასების შესახებ. მაგალითად, (3. 4. 1) 37, 39, 40, 41, 42 და სხვა მაგალითებში განხილულია საკითხი სამკუთხედში (3. 3. 1. 14) ან (3. 5. 3. 8) ფორმულით გაწონასწორებული (განსაზღვრული) და (3. 3. 9. 1) ან (3. 5. 5. 1) ფორმულით შეფასებული ორი კუთხისა და გვერდის, ერთი კუთხისა და ორი გვერდისა და ან მხოლოდ გვერდების საშუალებით, გაუზომელი ელემენტის განსაზღვრა-შეფასე-

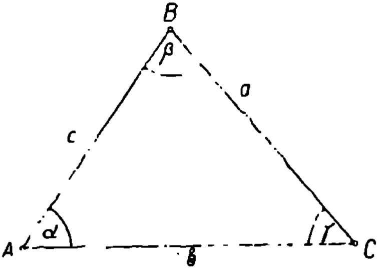
ბის შესახებ [(3. 4. 1) (21), (24), (29), (35), (36), (43), (45), (55), (57), (58) დამოკიდებულებები და (3. 7. 3)].

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საქმე გვაქვს არა პირველად გაწონასწორების შედეგად მიღებული განაზომების საფუძველზე გეოდეზიური აღნაგობის ელემენტების განსაზღვრა-შეფასებასთან, არამედ საჭიროა მეორადი გაწონასწორებული განაზომების საფუძველზე ელემენტების განსაზღვრა-შეფასება. მაგალითად, როცა სამკუთხედში გაზომილია ყველა კუთხე და საჭირო ხდება ყოველი კუთხის როგორც პირველადი გაწონასწორება (საშუალო არითმეტიკულის განსაზღვრა), ისე დამატებითი მათემატიკური პირობის შესაბამისად გაზომილი კუთხეების მეორადი გაწონასწორება. აქვე შევნიშნავთ, რომ მეორადი გაწონასწორება და მათი ფუნქციების განსაზღვრა-შეფასება თანადროულად ხდება ამ თავში მოყვანილი ფორმულებით.

მაგალითი 4. 5. 1. 1. ABC სამკუთხედში ტოლზუსტად გაზომილია სამივე შიგა კუთხე და b გვერდი m_b საშუალო კვადრატული შეცდომით (ნახ. 1). ვთქვათ, კუთხეების ზუსტი მნიშვნელობებია A, B, C; გაზომილი (უალბათესი) მნიშვნელობები შესაბამისად არის $\alpha'\pm m_{\alpha'}$, $\beta'\pm m_{\beta'}$, $\gamma'\pm m_{\gamma'}$, ხოლო გამოთვლილი მნიშვნელობები — $\alpha''\pm m_{\alpha''}$, $\beta''\pm m_{\beta''}$, $\gamma''\pm m_{\gamma''}$.

საჭიროა: 1. განისაზღვროს კუთხეების გაწონასწორებული α, β და γ მნიშვნელობები და შეფასდეს მათი სიზუსტე.

2. განისაზღვროს c გვერდი და შეფასდეს მისი სიზუსტე.



ნახ. 4.5.1.1.

ეს მაგალითი ამოვხსნათ განაზომთა შეცდომების თეორიის ხერხით [13].

1. კუთხეების გამოთვლილი მნიშვნელობები იქნება:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'' &= 180^\circ - \beta' - \gamma' \\ \beta'' &= 180^\circ - \alpha' - \gamma' \\ \gamma'' &= 180^\circ - \alpha' - \beta'\end{aligned}\right\}. \quad (4.5.1.14)$$

2. გაზომილი, ანუ (3.3.1.14) ფორმულით განსაზღვრული პირველადი გაწონასწორებული (უალბათესი) კუთხეების წონები იქნება:

$$P_{\alpha'} = \frac{1}{m^2_{\alpha'}}, \qquad P_{\beta'} = \frac{1}{m^2_{\beta'}}, \qquad P_{\gamma'} = \frac{1}{m^2_{\gamma'}}.$$

ტოლზუსტობის გამო (3. 3. 9. 1) ფორმულით განვსაზღვროთ საშუალო კვადრატული შეცდომები. ე. ი. სათანადო წონები მიიღება ურთიერთტოლად. მაშასადამე:

$$m_{\alpha'} = m_{\beta'} = m_{\gamma'} = m'$$

ე. ი.

$$P_{\alpha'} = P_{\beta'} = P_{\gamma'} = P'$$

და

$$P' = \frac{1}{m'^2}.$$

3. გამოთვლილი კუთხეების წონების განსაზღვრისათვის, (14) ტოლობებისადმი (3. 4. 1. 5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_{\alpha''} = m_{\beta''} = m_{\gamma''} = m'' = m' \sqrt{2}.$$

მაშასადამე, სათანადო წონები

$$P_{\alpha''} = P_{\beta''} = P_{\gamma''} = P'' = \frac{1}{2m'^2}, \text{ ე. ი. } P'' = \frac{P'}{2}.$$

უმჯობესია წონები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:
დავუშვათ, რომ გაზომილი კუთხის წონა

$$P' = 1$$

მაშინ, (14) ტოლობებისადმი (3. 6. 1. 5) ფორმულის გამოყენებით კუთხის ყოველი გამოთვლილი მნიშვნელობის წონა იქნება:

$$P'' = \frac{P'}{n} = \frac{1}{2}.$$

4. კუთხეების გაწონასწორებული (მეორადი) მნიშვნელობები გამოითვლება ერთი და იგივე სიდიდის წონითი საშუალოს (3. 5. 3. 5) ან (3. 5. 3. 8) ფორმულით:

$$\alpha = \frac{\alpha'' \cdot P'' + \alpha' P'}{[P]} = \frac{\alpha'' \cdot \frac{1}{2} + \alpha'}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{180° - \beta' - \gamma'}{2} + \alpha'}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{180° - \beta' - \gamma' + 2\alpha'}{3}. \qquad (4.5.1.15)$$

ანუ მცირედი გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\alpha = \frac{180° - (\alpha' + \beta' + \gamma') + 3\alpha'}{3} = \frac{3\alpha' - W}{3} = \alpha' - \frac{W}{3},$$

სადაც

$$W = \alpha' + \beta' + \gamma' - 180°.$$

მაშასადამე, გაწონასწორებული კუთხეები იქნება:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha' - \frac{W}{3} \\ \beta &= \beta' - \frac{W}{3} \\ \gamma &= \gamma' - \frac{W}{3} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.5.1.16)$$

5. გამოვითვალოთ გაზომილი (უალბათესი) კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ამ საკითხის გადაწყვეტა შეიძლება ორგვარად:

a. W შეუკვრელობა შეიძლება მივიღოთ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის m_Δ საშუალო კვადრატულ შეცდომად და (3. 4. 1. 5) ფორმულით დავწეროთ

$$m_\Delta = W = m' \sqrt{3},$$

საიდანაც ყოველი გაზომილი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m' = \pm \frac{W}{\sqrt{3}}. \tag{4.5.1.17}$$

საერთოდ, იგულისხმება, რომ ტოლზუსტი გაზომვების დროს ასე განსაზღვრული საშუალო კვადრატული შეცდომა და (3. 3. 9. 1) ფორმულით განსაზღვრული საშუალო კვადრატული შეცდომები ურთიერთტოლია. ამიტომ, როცა სამივე კუთხეა გაზომილი სამკუთხედში, (3. 3. 9. 1) ფორმულით განსაზღვრულ საშუალო კვადრატულ შეცდომას არ იძლევა.

b. გამოვითვლით უალბათეს შეცდომას ყოველი კუთხის გაზომილი (უალბათესი) და გამოთვლილი მნიშვნელობისათვის (ვთქვათ A კუთხისათვის). შესაბამისად დავწერთ:

$$v' = \alpha' - \alpha = \alpha' - \alpha' + \frac{W}{3} = \frac{W}{3}; \quad P' = 1.$$

$$v'' = \alpha'' - \alpha = 180^\circ - \beta' - \gamma' - \alpha' + \frac{W}{3} =$$

$$= -W + \frac{W}{3} = -\frac{2}{3} W; \qquad P'' = \frac{1}{2}.$$

რადგანაც გაზომილი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა შეესაბამება სამკუთხედის ნებისმიერ კუთხეს, ამიტომ (3. 5. 9. 1) ფორმულით გამოვითვლით α' კუთხის საშუალო კვადრატულ შეცდომას და მას ტოლზუსტობის გამო გავავრცელებთ დანარჩენ კუთხეებზე; აგრეთვე რადგანაც ერთის ტოლ წონად მიღებულია ერთი კუთხის გაზომვის წონა, ამიტომ ვიღებთ:

$$\eta = m_{\alpha'} = m' = \pm \sqrt{\frac{[Pv^2]}{\kappa - 1}}.$$

ე. ი.

$$m' = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{3}\right)^2 + \left(\frac{2W}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{2 - 1}} = \pm \sqrt{\frac{W^2}{3}} = \pm \frac{W}{\sqrt{3}}. \tag{4.5.1.17'}$$

ყოველი კუთხის გაწონასწორებული მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომა კი (3. 5. 9. 2′) ფორმულით იქნება:

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = m = \frac{m'}{\sqrt{[P]}} = \frac{m'}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = m' \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{4.5.1.18}$$

მაშასადამე,

$$m = \pm W \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \qquad (4.5.1.18')$$

6. გამოვითვალოთ c გვერდი. ამისათვის გამოვიყენებთ სინუსების თეორემას:

$$c = b \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \qquad (4.5.1.19)$$

გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln c = \ln b + \ln \sin \gamma - \ln \sin \beta.$$

ამ გამოსახულების გადიფერენციალებით მივიღებთ:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta b}{b} + \operatorname{ctg} \gamma \cdot \frac{\Delta \gamma}{\rho''} - \operatorname{ctg} \beta \cdot \frac{\Delta \beta}{\rho''} \cdot \qquad (4.5.1.20)$$

მიღებული ტოლობა გამოსახავს შემდეგს:

როცა b გვერდი გაზომილია $\frac{\Delta b}{b}$ სიზუსტით,

γ კუთხე " $\frac{\Delta \gamma}{\rho}$ " ,

β კუთხე " $\frac{\Delta \beta}{\rho}$ " ,

მაშინ (19) ფორმულით გამოთვლილი გვერდის c სიზუსტე იქნება $\frac{\Delta c}{c}$ ·

მიღებული სრული წრფივი სახის (20) ტოლობის მიმართ განაზომთა, შეცდომების თეორიის (3. 4. 1. 17) ფორმულას ვერ გამოვიყენებთ ისე, როგორც ამას (3. 4. 1) პარაგრაფში ვაკეთებდით, რადგანაც c გვერდი წარმოადგენს γ და β არგუმენტების ურთიერთდამოკიდებულ ფუნქციას. მართლაც, α, β, γ სიდიდეების, ანუ კუთხეების საბოლოო გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის (15) სახის ფორმულაში შეტანილია ერთი და იგივე α', β', ν' უშუალოდ განაზომები. მაშასადამე, α, β და γ არის ფუნქცია ერთი და იგივე არგუმენტებისა. იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს (3. 4. 1. 17) ფორმულის გამოყენება, განვსაზღვროთ $\Delta\gamma$ და $\Delta\beta$, რისთვისაც გავადიფერენციალოთ (15) ტოლობის სახის

$$\gamma = \frac{180^\circ - \alpha' - \beta' + 2\gamma'}{3},$$

და

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha' - \gamma' + 2\beta'}{3}$$

ტოლობა.. შესაბამისად მივიღებთ:

$$\Delta\gamma = \frac{2}{3} \Delta\gamma' - \frac{1}{3} \Delta\alpha' - \frac{1}{3} \Delta\beta', \qquad (4.5.1.21)$$

$$\Delta\beta = \frac{2}{3} \Delta\beta' - \frac{1}{3} \Delta\alpha' - \frac{1}{3} \Delta\gamma'. \qquad (4.5.1.22)$$

$\Delta\gamma$ და $\Delta\beta$ მნიშვნელობები შევიტანოთ (20) ტოლობაში და მსგავსი წევრების შეკრებით გვექნება:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{3\rho}[(2\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta)\Delta\gamma'-(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\beta)\Delta\alpha'-(\operatorname{ctg}\gamma+ + 2\operatorname{ctg}\beta)\Delta\beta']. \quad (4.5.1.23)$$

მივიღეთ ურთიერთდამოუკიდებელი არგუმენტების სრული წრფივი ფუნქცია, რომლის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ (3. 4. 1. 17) ფორმულა:

$$\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\rho}\right)^2\cdot[(2\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta)^2 m_{\gamma'}^2+(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\beta)^2 m_{\alpha'}^2+ + (\operatorname{ctg}\gamma+2\operatorname{ctg}\beta)^2\cdot m_{\beta'}^2]. \quad (4.5.1.2 4$$

ტოლზუსტობის გამო ვწერთ:

$$m_{\alpha'}=m_{\beta'}=m_{\gamma'}=m',$$

ამიტომ გვექნება:

$$\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{1}{9}[(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta)^2+(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\beta)^2+ + (2\operatorname{ctg}\gamma+2\operatorname{ctg}\beta)^2]\left(\frac{m'}{\rho''}\right)^2. \quad (4.5.1.25)$$

მცირეოდენი გარდაქმნით, მივიღებთ:

$$\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\gamma+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta)\left(\frac{m'}{\rho''}\right)^2. \quad (4.5.1.26)$$

ანალოგიურად მივიღებთ გაწონასწორებულ α და β ელემენტების α ფუნქციის სიზუსტეს:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^3 + \frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta)\cdot\left(\frac{m'}{\rho''}\right)^2. \quad (4.5.1.27)$$

(21) ტოლობის მიმართ (3. 4. 1. 17) ფორმულა რომ გამოვიყენოთ, მივიღებთ γ გაწონასწორებული კუთხის დისპერსიას. მართლაც:

$$m_\gamma^2 = \frac{4}{9}m_{\gamma}^2 + \frac{1}{9}m_{\alpha'}^2 + \frac{1}{9}m_{\beta'}^2,$$

ანუ, ვინაიდან $m_{\alpha'}=m_{\beta'}=m_{\gamma'}=m'$

$$m_\gamma^2 = \frac{2}{3}m'^2,$$

მაშასადამე,

$$m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=m=m'\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

მიღებული პასუხი იგივეა, რაც (18).

რადგანაც ერთეულ წონად მივიჩნიეთ ერთი კუთხის გაზომვის წონა, ამიტომ:

$$\eta = m_{a'} = m'.$$

(15) ფორმულიდან ცნობილია, რომ α კუთხის წონა

$$P_a = [P] = \frac{3}{2},$$

ე. ი. (3. 5. 9. 2) ფორმულით

$$m = \frac{m'}{\sqrt{P_a}} = \frac{m'}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = m'\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

როგორც ვხედავთ, წონების გამოყენებითაც მივიღეთ იგივე (18) ფორმულის გამოსახულება. თუ (17′) ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ (18′) გამოსახულებას

$$m = \pm W\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

შენიშვნა: 1. იმ შემთხვევაში, როცა განსახილველი სამკუთხედი ტოლგვერდაა (კუთხეები ტოლია), მაშინ გვერდის განსაზღვრის სიზუსტეზე არ ახდენს გავლენას უშუალოდ ორი კუთხე გაიზომება თუ სამივე, მიუხედავად იმისა, რომ მეორე შემთხვევის დროს გაწონასწორებული კუთხის m საშუალო კვადრატული შეცდომა ნაკლებია, ვიდრე მეორედ გაუწონასწორებელი კუთხის m' საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m = m'\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

მართლაც (3. 4. 1. 22) ფორმულით და (27) ფორმულითაც მივიღებთ:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{m'}{\rho}\right)^2.$$

აღნიშნულის მიზეზად უნდა ჩაითვალოს ის, რომ:

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ფორმულაში $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ დაახლოებით ტოლია ერთის, როგორც კუთხეების საბოლოო გაწონასწორებამდე, ისე მის შემდეგ. ორივე შემთხვევაში გამოთვლილი გვერდების სიგრძეები უცვლელი რჩება და ამიტომ არ იზრდება მისი სიზუსტე.

როცა სამკუთხედის გვერდები სხვადასხვა სიგრძის არის, მაშინ სამივე კუთხის გაზომვას არსებითი მნიშვნელობა აქვს როგორც გვერდების გამოთვლის სიზუსტის გაზრდის, ისე გაზომილი კუთხეების კონტროლის მხრივ.

2. როგორც ვიცით, საბოლოოდ გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა ტოლია იმავე კუთხის უშუალოდ განაზომის (საშუალო არითმეტიკულის) საშუალო კვადრატული შეცდომის ნამრავლისა კვადრატული ფესვი წილადიდან, რომლის მრიცხველია აუცილებელი განაზომების რაოდენობა, მნიშვნელი კი ყველა განაზომთა რაოდენობა (4. 4. 6. 3), (4. 4. 9. 5), (4. 5. 1. 18) ფორმულები. მაშასადამე, გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა მით ნაკლები იქნება, რაც მეტია ჭარბი განაზომების რაოდენობა გეოდეზიურ აღნაგობაში. იმდენად, რამდენადაც ჩაკეტილ პოლიგონში (სამკუთხედშიც) ასეთი შეიძლება მხოლოდ ერთი იყოს, ამიტომ ჭარბი განაზომების ხარჯზე ვერ გავზრდით ელემენტების განაზომთა სიზუსტეს. მთავარია თვით ელემენტების გაზომვის სიზუსტის გაზრდა.

მაგალითი 4. 5. 1. 2. განვიხილოთ წინა მაგალითი ამ თავში მიღებული პირობით განაზომთა ტოლობების საფუძველზე გამოყვანილი ფორმულების გამოყენებით.

1. $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+W=0$, სადაც $W=\alpha'+\beta'+\gamma'-180^\circ$.

ე. ი.

$$\frac{\partial W}{\partial b}=a_1=0;\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha'}=a_2=1,\quad \frac{\partial W}{\partial \beta'}=a_3=1,\quad \frac{\partial W}{\partial \gamma'}=a_4=1.$$

მაშასადამე, $[aa]=3$.

2. გაწონასწორებული კუთხეების ფუნქციაა (წონითი ფუნქცია)

$$c=b\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

ე. ი.

$$\frac{\partial c}{\partial b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c}{b}=\varphi_1,\qquad \frac{\partial c}{\partial \alpha}=0=\varphi_2,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \beta}=-c\cdot\operatorname{ctg}\beta=\varphi_3,\qquad \frac{\partial c}{\partial \gamma}=c\operatorname{ctg}\gamma=\varphi_4.$$

მაშასადამე,

$$[\varphi\varphi]=\left(\frac{c}{b}\right)^2+c^2\operatorname{ctg}^2\beta+c^2\operatorname{stg}^2\gamma,$$

$$[a\varphi]=c\operatorname{ctg}\gamma-c\operatorname{ctg}\beta,$$

$$[a\varphi]^2=c^2\operatorname{ctg}^2\gamma+c^2\operatorname{ctg}^2\beta-2\,c^2\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

3. (12′) ტოლობის შესაბამისად:

$$\varepsilon_1=-\frac{W}{3},$$

$$\varepsilon_2=-\frac{W}{3},$$

$$\varepsilon_3=-\frac{W}{3}.$$

$$\alpha=\alpha'+\varepsilon_1=\alpha'-\frac{W}{3},$$

$$\beta=\beta'+\varepsilon_2=\beta'-\frac{W}{3},$$

$$\gamma=\gamma'+\varepsilon_3=\gamma'-\frac{W}{3}.$$

4. (4. 4. 9. 6) ფორმულით ყოველი განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m'=\pm\sqrt{\frac{3\left(\frac{W}{3}\right)^2}{3-2}}=\pm\frac{W}{\sqrt{3}}.$$

ეს იგივე (17′) სიდიდეა.

5. (4. 4. 9. 5) ფორმულით ყოველი კუთხის მეორედ გაწონასწორებული ელემენტის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m=m'\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

ეს იგივე (18) ფორმულაა.

6. (4. 4. 9. 7) ფორმულაში

$$[\varphi\varphi]+\frac{[a\varphi]^2}{[aa]}=\left(\frac{c}{b}\right)^2+\frac{2c^2}{3}(\mathrm{ctg}^2\beta+\mathrm{ctg}^2\gamma+\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma).$$

ე. ი. (4. 4. 9. 7) ფორმულით და (20) ტოლობის გამოყენებით დავწერთ:

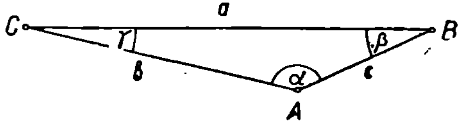
$$\left(\frac{m_c}{c}\right)^2=\left(\frac{m_b}{b}\right)^2+\frac{2}{3}(\mathrm{ctg}^2\beta+\mathrm{ctg}^2\gamma+\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma)\left(\frac{m'}{\rho}\right)^2.$$

ეს იგივე (26) ფორმულაა. აქ ნაგულისხმებია გვერდებისა და კუთხეების გაზომვაში თანაბარი გავლენის პრინციპის არსებობა.

როგორც ვხედავთ, შედარებით მარტივად შესრულდა ABC სამკუთხედის გაწონასწორება-შეფასება და c გვერდის განსაზღვრა-შეფასება გაწონასწორებული კუთხეებით (როგორც წონითი ფუნქციისა).

მაგალითი 4. 5. 1. 8[1]. გავაწონასწოროთ დამაკავშირებელი ABC სამკუთხედი (ნახ. 2), რომლის ელემენტების განაზომები და საშუალო კვადრატული შეცდომებია:

$a=6{,}5631$ მ,	$m_a=\pm 0{,}0007$ მ;
$b=4{,}5040$ მ,	$m_b=\pm 0{,}0005$ მ;
$c=2{,}0626$ მ,	$m_c=\pm 0{,}0004$ მ;
$\gamma=1°15'55''$,	$m_\gamma=\pm 11''$.



ნახ. 4.5.1.2

[1] ვიდრე ამ მაგალითის განხილვას შევუდგებოდეთ, უმჯობესია წინასწარ შევისწავლოთ VI თავი.

ა მ ო ხ ს ნ ა

1. შ ე ვ ა დ გ ე ნ თ პ ი რ ო ბ ი თ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ს დ ა გ ა ნ ვ ს ა ზ-ღ ვ რ ა ვ თ შ ე უ კ ვ რ ე ლ ო ბ ე ბ ს.

სამკუთხედის ასაგებად გამოსავალ გვერდად მივიღოთ b გვერდი. დარჩენილი B წვეროს ასაგებად ვიყენებთ γ კუთხეს და a გვერდს. მაშასადამე, c გვერდი არის ჭარბად გაზომილი, რომლის გამო იქნება ერთი პირობითი ტოლობა

თ ე ო რ ი უ ლ ი:

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma-c^2=0, \tag{4.5.1.28}$$

პ რ ა ქ ტ ი კ უ ლ ი:

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma-c^2=W. \tag{4.5.1.29}$$

შ ე ვ თ ა ნ ხ მ დ ე თ: W შეუკვრელობა გამოვსახოთ კვადრატულ სანტიმეტრებში, γ კუთხის ε_γ შესწორება მინუტებში, a, b და c გვერდის ε_a, ε_b და ε_c შესწორება სანტიმეტრებში.

გამოვთვალოთ W შეუკვრელობის ოდენობა:

$$\begin{array}{rl}
a^2= & 43{,}074282 \\
b^2= & 20{,}286016 \\
\hline
a^2+b^2= & 63{,}360298 \\
-\quad 2ab\cos\gamma= & 59{,}120404 \\
\hline
a^2+b^2-2ab\cos\gamma= & 4{,}239894 \text{ მ}^2 \\
c^2= & 4{,}254319 \text{ მ}^2 \\
\hline
W= & -\,0{,}014425 \text{ მ}^2 = -\,144{,}25 \text{ სმ}^2.
\end{array}$$

2. შევადგენთ შეცდომათა (შესწორებათა) ტოლობას და განვსაზღვრავთ მათ a_i კოეფიციენტებს ($i=a,\ b,\ c,\ \gamma$).

ვინაიდან (29) ტოლობას არა აქვს ლოგარითმული სახე, ამიტომ კოეფიციენტების განსაზღვრას ვახდენთ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეებით ამ ტოლობის კერძო წარმოებულების აღებით (იხ. (4. 3. 1. 5)), მხოლოდ მხედველობაში ვიღებთ მათ განზომილებას.

$$a_a=\frac{\partial W}{\partial a}=2a-2b\cos\gamma=2(a-b\cos\gamma)\ \left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right)=411{,}82\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right),$$

$$a_b=\frac{\partial W}{\partial b}=2b-2a\cos\gamma=2(b-a\cos\gamma)\ \left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right)=-411{,}82\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right),$$

$$a_c=\frac{\partial W}{\partial c}=-2c\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right)=-412{,}52\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{სმ}}\right),$$

$$a_\gamma=\frac{\partial W}{\partial\gamma}=\frac{2ab\cdot\sin\gamma}{\rho'}\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{მინ}}\right)=3{,}80\left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{მინ}}\right).$$

$$\sin 1^\circ15'55''=0{,}02210.$$

3. გამოვითვლით განაზომი სიდიდეების წონებს (3. 5. 4. 1) ფორმულით

$$P_i = \left(\frac{\eta'}{M_i}\right)^2,$$

სადაც η' ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომაა, რომელიც ნებისმიერად შეირჩევა.

მივიღოთ $\eta'=0{,}5$, მაშინ:

$$P_a = \left(\frac{0{,}5}{0{,}07}\right)^2 \approx 50\left(\frac{1}{სმ^2}\right); \qquad P_b = \left(\frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2 = 100\left(\frac{1}{სმ^2}\right),$$

$$P_c = \left(\frac{0{,}5}{0{,}04}\right)^2 \approx 160\left(\frac{1}{სმ^2}\right); \qquad P_\gamma = \left(\frac{0{,}5}{0{,}183}\right)^2 \approx 8\left(\frac{1}{მინ^2}\right).$$

4. შევადგენთ ნორმალურ განტოლებას და გამოვითვლით მის კოეფიციენტს (4) ტოლობის მიხედვით:

$$\left[\frac{aa}{P}\right]K + W = 0.$$

გამოთვლა ხდება (1) სქემით

სქემა 4. 5. 9. 1.

a	aa	$\frac{1}{P}$	$\frac{aa}{P}$	განზომილების დადგენა
411,82	169595,7	0,02	3391,91	$\frac{სმ^2}{სმ}\cdot\frac{სმ^2}{სმ}:\frac{1}{სმ^2}=(სმ^4)$
411,82	169595,7	0,01	1695,96	" " " "
412,52	170172,8	0,00625	1063,58	" " " "
3,80	14,4	0,125	1,80	$\frac{სმ^2}{მინ}\cdot\frac{სმ^2}{მინ}:\frac{1}{მინ^2}=(სმ^4)$

$$\left[\frac{aa}{P}\right] = 6153{,}25\ (სმ^4)$$

5. ნორმალური განტოლების ამოხსნით მივიღებთ:

$$K = -\frac{W}{\left[\frac{aa}{P}\right]} = \frac{144{,}25}{6153{,}25} = 0{,}0234\ [სმ^2:სმ^4] = 0{,}0234\left(\frac{1}{სმ^2}\right).$$

6 განვსაზღვრავთ ε_i შესწორებას (3) სისტემის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\varepsilon_a = \frac{a_a}{P_a}K = \frac{411{,}82}{50}\cdot 0{,}0234 = 0{,}1927\left(\frac{სმ^2}{სმ}\cdot\frac{1}{სმ^2}:\frac{1}{სმ^2}\right) \approx 0{,}193\ სმ,$$

$$\varepsilon_b = \frac{a_b}{P_a}K = -\frac{411{,}82}{100}\cdot 0{,}0234 = -0{,}09637 \approx -0{,}096\ სმ,$$

$$\varepsilon_c = \frac{a_c}{P_c} \cdot K = -\frac{412,52}{160} \cdot 0,0234 = -0,0603 \approx -0,060 \text{ სმ},$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{a_\gamma}{P_\gamma} \cdot K = \frac{3,80}{8} \cdot 0,0234 = 0,00869 \left(\frac{\text{სმ}^2}{\text{მინ}} \cdot \frac{1}{\text{სმ}^2} : \frac{1}{\text{მინ}^2}\right) = 0',01 = 0''6.$$

7. შევასრულებთ გამოთვლის პირველ და მეორე კონტროლს (7) საკონტროლო ფორმულებით

$$-WK = \frac{W^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]},$$

და

$$[P\varepsilon\varepsilon] = -[WK].$$

მართლაც,

$$-W \cdot K = 144,25 \cdot 0,0234 = +3,38 \left(\text{სმ}^2 \cdot \frac{1}{\text{სმ}^2}\right) = +3,38\,(0) = +3,38,$$

ე. ი. განზომილება ნულოვანია;

$$\frac{W^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]} = \frac{144,25^2}{6153,25} = +3,38 \left(\frac{\text{სმ}^4}{\text{სმ}^4}\right) = +3,38\,(0),$$

$$[P\varepsilon\varepsilon] = 50 \cdot (0,193)^2 \cdot 100 \cdot (0,096)^2 + 160(0,060)^2 + 8 \cdot (0,01)^2 =$$

$$= 3,368 \left(\frac{1}{\text{სმ}^2} \cdot \text{სმ}^2 + \frac{1}{\text{სმ}^2}\,\text{სმ}^2 + \frac{1}{\text{სმ}^2}\,\text{სმ}^2 + \frac{1}{\text{მინ}^2} \cdot \text{მინ}^2\right) \approx +3,37\,(0).$$

გამოთვლის კონტროლის მიღებული 0,01 განსხვავება შეესაბამება შესრულებული გამოთვლების დასაშვებ სიზუსტეს.

8. განვსაზღვრავთ განაზომთა გაწონასწორებულ მნიშვნელობებს:

$$a_0 = a + \varepsilon_a = 6,5631 + 0,00193 = 6,56503 \text{ მ},$$

$$b_0 = b + \varepsilon_b = 4,5040 - 0,00096 = 4,50304 \text{ მ},$$

$$c_0 = c + \varepsilon_c = 2,0626 - 0,00060 = 2,06200 \text{ მ},$$

$$\gamma_0 = \gamma + \varepsilon_\gamma = 1^\circ 15' 55'' + 0'',6 = 1^\circ 15' 55'',6.$$

9. შევასრულებთ გამოთვლის საბოლოო კონტროლს, ანუ განვსაზღვრავთ W_0 ნარჩენ შეუკვრელობას გაწონასწორებული ელემენტების მიხედვით შედგენილი პირობითი ტოლობით:

$$W_0 + a_0^2 + b_0^2 - 2a_0 b_0 \cos\gamma_0 - c_0^2 = -0,417 \text{ სმ}^2.$$

10. მიღებული შედეგი არ გვაძლევს საფუძველს ვიმსჯელოთ გაწონასწორებითი სამუშაოების სისწორით შესრულების შესახებ, ამიტომ საჭიროა გამოვითვალოთ d ხაზოვანი განსხვავება c გვერდის c_0 გაწონასწორებულ მნიშვნელობასა და იმავე ელემენტის a_0, b_0 და γ_0 გაწონასწორებულ ელემენტთა

c' გამონათვალს შორის. მაშასადამე, c გვერდის გამონათვალი გაწონასწორებული ელემენტებით იქნება:

$$c'^2 = a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0=42518{,}027 \text{ სმ}^2,$$

ე. ი.

$$c'^2 - c_0^2=42518{,}027-42518{,}440=-0{,}417 \text{ სმ}^2.$$

მცირედი განსხვავების გამო შეგვიძლია დავწეროთ:

$$c'^2 - c_0^2 = (c'-c_0)(c'+c_0)\approx(c'-c_0)\cdot 2c,$$

მაშასადამე, გაწონასწორების შემდეგ d წრფივი შეუკვრელობა იქნება:

$$d=c'-c_0=\frac{c'^2-c_0^2}{2c}\approx-\frac{0{,}417 \text{ სმ}^2}{412 \text{ სმ}}\approx-0{,}001 \text{ სმ}\approx-0{,}01 \text{ მმ}.$$

როგორც ვხედავთ, განხილულ შემთხვევაში წრფივის განსხვავება სრულიად დასაშვებია.

პრაქტიკულად მეათე მუხლი, ანუ საბოლოო კონტროლი შეიძლება შესრულდეს ფორმულით:

$$d=\frac{W_0}{2c}, \tag{4.5.9.30}$$

სადაც d ხაზოვანი შეუკვრელობაა, რომელიც წარმოადგენს სხვაობას c გვერდის გაწონასწორებულ სიდიდეთა გამონათვალსა და მის გაწონასწორებულ მნიშვნელობას შორის.

W_0 ნარჩენი შეუკვრელობაა, გამოთვლილი გაწონასწორებული ელემენტებით შედგენილი პირობითი განტოლებით.

შენიშვნა. ზემოთ მოყვანილი გაწონასწორებიდან ნათლად ჩანს, რომ წაგრძელებული სახის სამკუთხედში W შეუკვრელობა ძირითადად განაწილდა a, b და c გვერდებზე, მხოლოდ γ კუთხეზე, რომელიც გაზომილია იმ წვეროზე, რომლიდანაც გამოსული მიმართულებები აღებულია შეეულებზე, მივიღეთ მცირე (0″,6) შესწორება. ამით ერთხელ კიდევ დასტურდება (3. 7. 3) პარაგრაფში მიღებული დასკვნა, იმის შესახებ, რომ წაგრძელებული სახის დამაკავშირებელ სამკუთხედში ხაზოვანი შეცდომები თითქმის არ ახდენს გავლენას შეეულებთან კუთხეების (α, β) გამოთვლის სიზუსტეზე. მაშასადამე, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ როცა დამაკავშირებელი სამკუთხედი წაგრძელებული სახისაა, არ არის აუცილებელი მისი გაწონასწორება.

11. (4. 4. 7. 12) ფორმულით გამოვითვლით გაწონასწორებამდე η ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას გაწონასწორების მონაცემებით

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}=\pm\sqrt{\frac{3{,}37}{1}}\approx\pm1{,}8\,(0).$$

12. (4. 4. 6. 3) ფორმულით გამოვითვლით ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას გაწონასწორების შემდეგ

$$\eta_u=\eta\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}=\pm\eta\sqrt{\frac{3}{4}}=$$
$$=\pm1{,}8\cdot0{,}86=\pm1{,}55\,(0).$$

შენიშვნა. განხილულ მაგალითში ვისარგებლეთ რა განაზომთა m_a, m_b, m_c, m_γ საშუალო კვადრატული შეცდომებით და ნებისმიერად მიღებული η' ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომით, სისტემის გაწონასწორებამდე (აპრიორულად) (3.5.4.1) ფორმულით განვსაზღვრეთ განაზომთა P_a, P_b, P_c, P_γ წონები, ხოლო (4.4.7.12) ფორმულით განსაზღვრულ გაწონასწორებამდე η ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა (აპოსტერიორული შეცდომა) ტოლია 1,8 (0), ე. ი.

$$\eta = 1{,}8 > \eta' = 0{,}5.$$

(4. 4. 7. 12) ფორმულით განსაზღვრული η სიდიდის (3. 5. 4. 1) ფორმულაში ჩასმით განვსაზღვრავთ აპოსტერიორულ, ანუ გაწონასწორების მონაცემებით m_{a_0}, m_{b_0}, m_{c_0}, m_{γ_0} საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შემდეგნაირად:

$$m_{a_0} = \frac{\eta}{\sqrt{P_a}} = \pm\frac{1{,}8\ (0)}{\sqrt{50}\left(\frac{1}{\text{სმ}}\right)} \approx \pm 0{,}26\ \text{სმ} = \pm 2{,}6\ \text{მმ},$$

$$m_{b_0} = \frac{\eta}{\sqrt{P_b}} = \pm\frac{1{,}8\ (0)}{\sqrt{100}\left(\frac{1}{\text{სმ}}\right)} \approx \pm 0{,}18\ \text{სმ} = \pm 1{,}8\ \text{მმ},$$

$$m_{c_0} = \frac{\eta}{\sqrt{P_c}} = \pm\frac{1{,}8\ (0)}{\sqrt{160}\left(\frac{1}{\text{სმ}}\right)} = \pm 0{,}14\ \text{სმ} = \pm 1{,}4\ \text{მმ},$$

$$m_{\gamma_0} = \frac{\eta}{\sqrt{P_\gamma}} = \pm\frac{1{,}8\ (0)}{\sqrt{8}\left(\frac{1}{\text{მინ}}\right)} = \pm 0',64 \approx \pm 38''.$$

ზემოთ მოყვანილი რიცხვითი სიდიდეების დაკვირვებით შეგვიძლია ურთიერთდავაკავშიროთ m_{0_l} გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით განსაზღვრული (აპოსტერიორული), m_l უშუალოდ განაზომთა საშუალო კვადრატულ (აპრიორულ) შეცდომებთან შემდეგი ფორმულით:

$$m_{0_l} = m_l \cdot \frac{\eta}{\eta'} \cdot \tag{4.5.1.31}$$

მართლაც (31) ფორმულით:

$$m_{a_0} = m_a \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \pm 0{,}7\ \text{მმ} \cdot \frac{1{,}8\ (0)}{0{,}5\ (0)} = \pm 0{,}7 \cdot 3{,}6 \approx \pm 2{,}5\ \text{მმ},$$

$$m_{b_0} = m_b \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \pm 0{,}5\ \text{მმ} \cdot 3{,}6 \approx \pm 1{,}8\ \text{მმ},$$

$$m_{c_0} = m_c \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \pm 0{,}4\ \text{მმ} \cdot 3{,}6 \approx 1{,}4\ \text{მმ},$$

$$m_{\gamma_0} = m_\gamma \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \pm 11'' \cdot 3{,}6 \approx 40''.$$

როგორც ვხედავთ, აპოსტერიორულად (გაწონასწორების მონაცემებით) განსაზღვრული საშუალო კვადრატული შეცდომები უფრო დიდი გამოდის ვიდრე აპრიორულად (გაწონასწორებამდე მონაცემებით) განსაზღვრული საშუალო კვადრატული შეცდომები. ამით დასტურდება ის გარემოება, რომ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გაწონასწორებისას ვლინდება ის შეცდომები, რომლებსაც ვერ დავადგენთ გაწონასწორებამდე (აღნიშნულის შესახებ იხილეთ (3. 5. 11) პარაგრაფი).

საჭიროა გვახსოვდეს, რომ (4. 4. 9. 5), (4. 4. 9. 7), (4. 4. 6. 3), (4. 4. 4. 28) ფორმულებით საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა უნდა მოხდეს (4. 4. 9. 6) ან (4. 4. 7. 12) ფორმულით განსაზღვრული m-ის ან η-ს საშუალებით და არა აპრიორული შეცდომებით. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ $\eta > \eta'$ როცა აპრიორული შეცდომები მიღებულია შემცირებული და $\eta < \eta'$, როცა აპრიორული შეცდომები მიღებულია გადიდებული.

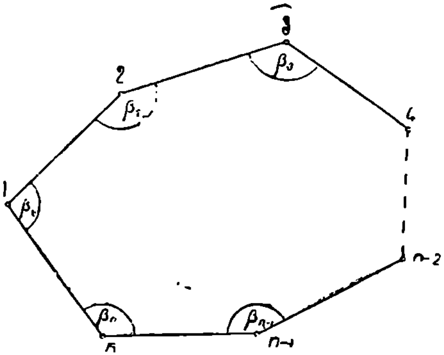
მაგალითი 4. 5. 1. 4. გაწონასწორებულ იქნეს შეკრული მრავალკუთხედის (პოლიგონის) (ნახ. 3) არატოლზუსტად გაზომილი შიგა კუთხეები შემდეგი მონაცემების მიხედვით:

β_1 წონით P_1,

β_2 " P_2,

. . . . . .

β_n " P_n.



ნახ. 4.5.1.3

1. (1′) ტოლობის მიხედვით პირობითი განტოლება იქნება:

$$[\varepsilon]+W=0,$$

სადაც

$$W=[\beta]-180^\circ(n-2).$$

2. (3′) ტოლობის მიხედვით შესწორებათა სიდიდეები იქნება:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{P_1}K,$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{P_2}K,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varepsilon_n=\frac{1}{P_n}\cdot K.$$

3. (4′) ტოლობის მიხედვით ნორმალური განტოლება იქნება:

$$\left[\frac{1}{P}\right]K+W=0,$$

საიდანაც (5′)-ის მიხედვით:

$$K = -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]}.$$

მაშასადამე,

4. (6′)-ის მიხედვით შესწორებათა სიდიდეები იქნება:

$$\varepsilon_1 = -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]} \cdot \frac{1}{P_1},$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]} \cdot \frac{1}{P_2},$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\varepsilon_n = -\frac{W}{\left[\frac{1}{P}\right]} \cdot \frac{1}{P_n}.$$

5. (7′)-ის მიხედვით საკონტროლო ფორმულა იქნება:

$$-WK = \frac{W^2}{\left[\frac{1}{P}\right]} \text{ და } [P\varepsilon\varepsilon] = -WK.$$

6. შეფასებისათვის გამოვიყენებთ (4. 4. 7. 12) და (4 4. 6. 3) ფორმულას

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}},$$

$$\eta_u = \eta \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}.$$

ტოლზუსტი გაზომვების შემთხვევაში ზემოხსენებული თანამიმდევრობით ადგილი ექნება (1′), (9′), (9″), (10′), (11′), (12′), (13′), (4. 9. 7) და (4. 9. 5) ფორმულების შესაბამის მნიშვნელობებს.

ამ შემთხვევაში ძალაში რჩება (1) მაგალითის მეორე შენიშვნა.

თავი VI

პირობით განაზომთა გაწონასწორების დროს სხვადასხვა სიდიდის განზომილებები; განტოლებათა კოეფიციენტების გათანაბრება და საჭირო ნიშნადი ციფრების რაოდენობის დადგენა

განსაზღვრება 1. ნამრავლის განზომილება უდრის თანამამრავლთა განზომილებების ნამრავლს.

განსაზღვრება 2. განზომილებების ფარდობა უდრის ფარდობის განზომილებას.

4. 6. 1. შესწორებათა განტოლებებში შემავალი სიდიდეების განზომილებები

იმისათვის, რომ (4. 3. 1. 6.) სისტემის შესწორებათა განტოლებებს აზრი ჰქონდეს, საჭიროა $a_i\varepsilon_i$, $b_i\varepsilon_i$, $c_i\varepsilon_i$ ნამრავლების განზომილებები შესაბამისად ემთხვეოდეს W_1, W_2, W_3 თავისუფალი წევრების განზომილებებს.

რაიმე სიდიდის განზომილება პირობით აღვნიშნოთ, თვით სიდიდე — ფრჩხილებში; მაგალითად, W შეუკვრელობის განზომილება იქნება (W). ვთქვათ, შეუკვრელობა უდრის 2,25 მმ. თანახმად პირობითი აღნიშვნისა დაიწერება:

$$W(W)=2{,}25\ (\text{მმ}),\quad \text{ე. ი.}\quad (W)=(\text{მმ})=\text{მმ}.$$

ან კიდევ, ვთქვათ, წრფივი სახის პოლუსის პირობითი განტოლების W თავისუფალი წევრი (შეუკვრელობა) უდრის 0.0000245, ეს დაიწერება:

$$W\,(W)=245\ (\lg),\quad \text{ე. ი.}\quad (W)=(\lg)=\lg.$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ ამ შეუკვრელობის განზომილებაა ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეშვიდე ათწილადი ერთეულები და მისი ოდენობა კი 245 ეს ერთეულია.

პირველი და მეორე განსაზღვრების თანახმად (4. 3. 1. 6) სისტემის მიმართ დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned}
(W_1)&=(a_i\varepsilon_i)=(a_i)\cdot(\varepsilon_i), \text{ საიდანაც } & (a_i)&=\frac{(W_1)}{(\varepsilon_i)}=\left(\frac{W_1}{\varepsilon_i}\right)\\
(W_2)&=(b_i\varepsilon_i)=(b_i)\ (\varepsilon_i), \quad\quad\text{,,} & (b_i)&=\frac{(W_2)}{(\varepsilon_i)}=\left(\frac{W_2}{\varepsilon_i}\right)\\
(W_3)&=(c_i\varepsilon_i)=(c_i)\ (\varepsilon_i), \quad\quad\text{,,} & (c_i)&=\frac{(W_3)}{(\varepsilon_i)}=\left(\frac{W_3}{\varepsilon_i}\right)
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.6.1.1)$$

მაშასადამე, ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ შ ე ს წ ო რ ე ბ ა თ ა პ ი რ ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი ს გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ა უ დ რ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი შ ე უ კ ვ რ ე ლ ო ბ ი ს ა დ ა შ ე ს წ ო რ ე ბ ე ბ ი ს გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ს ფ ა რ დ ო ბ ა ს.

საერთოდ, W შეუკვრელობათა და ε შესწორებათა გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ე ბ ი პირობით მივიღეთ კვადრატულ სანტიმეტრებში, ხოლო გვერდების შესწორეველობაში უნდა მივიღოთ კონკრეტული შემთხვევა. მაგალითად, (4. 5. 1. 3) მაგალითის ამოხსნისას (იხ. გვერდი 148) W შეუკვრელობის განზომილება პირობით მივიღეთ კვადრატულ სანტიმეტრებში, ხოლო გვერდების შესწორებების განზომილებები კი სანტიმეტრებში. ეს იმიტომ, რომ შეუკვრელობა განისაზღვრა კოსინუსების ფორმულით, სადაც გვერდები შედის კვადრატებში. იმ შემთხვევაში, როცა პირობით განტოლებებში შედის არაერთგვაროვანი სიდიდეები, მაგალითად, კუთხეები და ხაზები ან მიმართულებები და ხაზები, მაშინ პრაქტიკულად უმჯობესია მივიღოთ ერთნაირი განზომილებები ერთგვაროვანი ε შესწორებებისათვის; ვთქვათ, კუთხეებისა და ჰორიზონტული მიმართულებებისათვის სეკუნდები, ხოლო ხაზებისათვის მილიმეტრები.

განვიხილოთ საკითხი შესწორებათა განტოლებების შეცვლის შესახებ, მასში შემავალი ელემენტების განზომილებების შეცვლის გამო.

ა. თავისუფალი წევრის განზომილების შეცვლა

ვთქვათ W_1 (4. 3. 1. 6) სისტემის პირველი პირობითი განტოლების თავისუფალი წევრის ოდენობაა, სანამ მისი (W_1) განზომილება შეიცვლებოდეს, ხოლო W_1' იმავე განტოლების თავისუფალი წევრის ოდენობაა, მისი ახალი (W_1') განზომილებით გამოსახვის შემდეგ.
დავუშვათ, რომ

$$\frac{(W_1')}{(W_1)} = \left(\frac{W_1'}{W_1}\right) = \omega, \tag{4.6.1.2}$$

სადაც ω რაციონალური რიცხვია.
ცხადია, რომ

$$W_1\,(W_1) = W_1'\,(W_1'),$$

საიდანაც

$$W_1' = W_1\,\frac{(W_1)}{(W_1')} = W_1\left(\frac{W_1}{W_1'}\right) = W_1\,\frac{1}{\omega}\,. \tag{4.6.1.3}$$

მაგალითი 4. 6. 1. 1.

$$W_1(W_1) = 50 \text{ მმ } \ (W_1') = \text{სმ, მაშინ}$$

$$\omega = \left(\frac{\text{სმ}}{\text{მმ}}\right) = 10,$$

ხოლო

$$W_1' = \frac{50}{10} = 5.$$

მაგალითი 4. 6. 1. 2. W_1 $(W_1)=5$ (მინ); $(W_1')=$(სეკ), მაშინ:

$$\omega = \left(\frac{\text{სეკ}}{\text{მინ}}\right) = \frac{1}{60},$$

ხოლო

$$W_1' = \frac{5}{\frac{1}{60}} = 300.$$

ასევე, W_1 თავისუფალი წევრის ახალი (W_1') განზომილების მქონე თავისუფალი W_1' წევრით შეცვლა, როცა ε_i განზომილება (მაშასადამე, ოდენობაც) უცვლელია, გამოიწვევს ამ განტოლებების კოეფიციენტების განზომილებების (მაშასადამე, ოდენობების) შეცვლას, მართლაც (1) ფორმულის მიხედვით:

$$(a_i') = \frac{(W_1')}{(\varepsilon_i)}, \tag{4.6.1.4}$$

სადაც (a_i') ახალი განზომილებაა a_i კოეფიციენტისა. აღვნიშნოთ ახალი ოდენობა a_i კოეფიციენტისა a_i' სიმბოლოთი, მაშინ:

$$a_i'(a_i') = a_i(a_i) \text{ და } \dot{a}_i' = a_i \frac{(a_i)}{(a_i')} = a_i \left(\frac{a_i}{a_i'}\right)^{\bullet},$$

მაგრამ, პირობითი ტოლობის კონსტრუქციის შესაბამისად, ანუ (1) და (4) ტოლობების ფარდობით და (2) ტოლობის გამოყენებით, დავწერთ:

$$\frac{(a_i)}{(a_i')} = \frac{(W_1)}{(W_1')} = \frac{1}{\omega},$$

ე. ი. მივიღებთ:

$$(a_i') = (a_i)\frac{1}{\omega}.$$

ანალოგიურად დაიწერება დანარჩენი პირობითი ტოლობების მიმართაც. მაშასადამე, (4. 3. 1. 6) სისტემის კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობები ახალი განზომილების შესაბამისად იქნება:

$$\left.\begin{aligned} a_i' &= a_i \frac{1}{\omega} \\ b_i' &= b_i \frac{1}{\omega} \\ c_i' &= c_i \frac{1}{\omega} \end{aligned}\right\}. \tag{4.6.1.5}$$

მაშასადამე, ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი წ ე ვ რ ე ბ ი ს პ ი რ ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ს (4. 3. 1. 6) ს ი ს ტ ე მ ი ს, მ ხ ო ლ ო დ თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი წ ე ვ რ ე ბ ი ს გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ს შ ე ც ვ ლ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი, ს ა ჭ ი რ ო ა ა მ ს ი ს ტ ე მ ი ს ყ ვ ე ლ ა ტ ო ლ ო ბ ი ს გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა $\frac{1}{\omega}$ წ ი ლ ა დ ზ ე, ს ა დ ა ც ω ა რ ი ს თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი წ ე ვ-

რის ახალი განზომილების ძველ განზომილებასთან ფარდობა. აღნიშნულის გამო (4. 3. 1. 6) სისტემა შეცვლილი (W_i') განზომილებისათვის ასე დაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+W_1)=0\\
&\frac{1}{\omega}(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n+W_2)=0\\
&\frac{1}{\omega}(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n+W_3)=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.6.1.6}$$

როგორც ვხედავთ, მიღებული შედეგი პრაქტიკულად დიდმნიშვნელოვანია, რადგანაც გამოთვლითი პროცესების გაადვილებისათვის შეგვიძლია შესწორებათა განტოლებების ერთგვაროვანი სისტემა გავამრავლოთ ან გავყოთ ნებისმიერ რიცხვზე ისე, რომ არ შეიცვალოს ε_i შესწორების ოდენობა.

გამოთვლების გამარტივების მიზნით შეიძლება (4. 3. 1. 6) სისტემის ტოლობების მხოლოდ თავისუფალი წევრები გავყოთ მათ შორის ყველაზე დიდი რიცხვითი მნიშვნელობის W_{max} თავისუფალ წევრზე, მაშინ სისტემის გამოთვლილი ε_i შესწორებები გამოვა შემცირებული W_{max}-ჯერ, მაშასადამე, საძებარი შესწორებების მისაღებად გამოთვლილი შესწორებები უნდა გადავამრავლოთ W_{max}-ზე.

მაგალითი 4. 6. 1. 3. ვთქვათ (4. 3. 1. 6) სისტემაში $W_{max}=W_2$. მაშინ დავწერთ:

$$\begin{aligned}
&a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+\frac{W_1}{W_2}=0,\\
&b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n+\frac{W_2}{W_2}=0,\\
&c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n+\frac{W_3}{W_2}=0.
\end{aligned}$$

ხოლო

$$\begin{array}{llllll}
\varepsilon_1 & \text{საძებარი} & = & \varepsilon_1 & \text{გამოთვლილი} & \times\ W_2,\\
\varepsilon_2 & \text{„} & = & \varepsilon_2 & \text{„} & \times\ W_2,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\varepsilon_n & \text{„} & = & \varepsilon_n & \text{„} & \times\ W_2.
\end{array}$$

ბ. ზოგიერთი ε_i შესწორების განზომილების შეცვლა

ვთქვათ ε_i' ახალი (ε_i') განზომილების მქონე შესწორების რიცხვითი მნიშვნელობაა, დავუშვათ, რომ

$$\frac{(\varepsilon_i')}{(\varepsilon_i)}=\theta, \tag{4.6.1.7}$$

სადაც θ რაციონალური რიცხვია.

ცხადია, რომ

$$\varepsilon_i(\varepsilon_i)=\varepsilon_i'(\varepsilon_i'),$$

საიდანაც

$$\varepsilon_i'=\varepsilon_i\frac{(\varepsilon_i)}{(\varepsilon_i')}=\varepsilon_i\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i'}\right)=\varepsilon_i\frac{1}{\theta}\cdot \tag{4.6.1.8}$$

(1) ფორმულის მიხედვით:

$$(a_i')=\frac{(W_1)}{(\varepsilon_i')}=\left(\frac{W_1}{\varepsilon_i'}\right)\cdot \tag{4.6.1.9}$$

ცხადია

$$a_i(a_i)=a_i'(a_i'),$$

საიდანაც

$$a_i'=a_i\frac{(a_i)}{(a_i')}=a_i\left(\frac{a_i}{a_i'}\right)\cdot$$

მაგრამ, პირობითი ტოლობის კონსტრუქციის შესაბამისად, ანუ (1) და (9) ტოლობების ფარდობით და (7) ტოლობის გამოყენებით დავწერთ:

$$\frac{(a_i)}{(a_i')}=\frac{(\varepsilon_i')}{(\varepsilon_i)}=\theta,$$

ე. ი. მივიღებთ:

$$a_i'=a_i\cdot\theta. \tag{4.6.1.10}$$

დანარჩენი ორი ტოლობისათვისაც ანალოგიური მსჯელობით დავწერთ

$$b_i'=b_i\theta, \tag{4.6.1.11}$$

$$c_i'=c_i\theta. \tag{4.6.1.12}$$

მაშასადამე, **სისტემის რომელიმე ε_i შესწორების განზომილების შეცვლისას, საჭიროა მის ყველა ტოლობაში გავამრავლოთ მხოლოდ ახალი (ε_i') განზომილების მქონე შესწორებების კოეფიციენტები θ-ზე, სადაც θ არის (ε_i') შესწორების ახალი განზომილებისა და (ε_i) ძველი განზომილების ფარდობა.**

მიღებული დასკვნა პრაქტიკულად გამოიყენება, როცა საჭიროა განტოლებათა დაყვანა ერთგვაროვან სახეზე.

როცა შესწორებათა ტოლობებში რომელიმე ε_i შესწორების ყველა კოეფიციენტი t-ჯერ მეტია ვიდრე სხვა დანარჩენი შესწორებების კოეფიციენტები, მაშინ ε_i კოეფიციენტი იყოფა t-ზე და ამოიხსნება განტოლებებას მოცემული სისტემა, ამის შემდეგ გამოთვლილ ε_i ოდენობა **გაიყოფა** t-ზე, რითაც მიიღება საძებარი ε_i ოდენობა.

ზემოხსენებულის საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ პრაქტიკული წესი შესწორებათა პირობითი ტოლობების ერთგვაროვან სახეზე დაყვანის (კოეფიციენტთა გათანაბრების) შესახებ:

შესწორებათა რთული სისტემის შემთხვევაში ყოველი უცნობის (შესწორების) კოეფიციენტი უნდა გაიყოს მათ შორის უდიდეს კოეფიციენტზე, ხოლო თავისუფალი წევრები მათ შორის უდიდეს თავისუფალ წევრზე. ამ გარდაქმნილი ტოლობების ამოხსნის შემდეგ საძიებელი შესწორებების გამოსათვლელად მიღებული შესწორებები შესაბამისად უნდა გადავამრავლოთ $\frac{W_{max}}{A}$, $\frac{W_{max}}{B}$, $\frac{W_{max}}{C}$, ..., სადაც W_{max} უდიდესი თავისუფალი წევრია, ხოლო A არის ε_1 შესწორების კოეფიციენტებს შორის უდიდესი, B — ε_2 შესწორების კოეფიციენტებს შორის უდიდესი, C — ε_3 ის კოეფიციენტებს შორის უდიდესი და ასე შემდეგ.

მაგალითი 4. 6. 1. 4. ვთქვათ (4. 3. 1. 6) სისტემაში

$$W_{max}=W_2;\ A=c_1;\ a_2=b_2=c_2=1;\ N=a_n.$$

მაშინ (4. 3. 1. 6) ასე დაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_1}{c_1}\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+\frac{a_n}{a_n}\varepsilon_n+\frac{W_1}{W_2}&=0\\
\frac{b_1}{c_1}\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\varepsilon_n+\frac{W_2}{W_2}&=0\\
\frac{c_3}{c_1}\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+\frac{c_n}{a_n}\varepsilon_n+\frac{W_3}{W_2}&=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.6.1.13}$$

ამ შემთხვევაში:

$$\left.\begin{array}{lll}
\varepsilon_1 \text{ საძებარი} & = & \varepsilon_1 \text{ გამოთვლილი} \times \dfrac{W_2}{c_1}\\
\varepsilon_2 \quad " & = & \varepsilon_2 \text{ გამოთვლილი} \times 1\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\varepsilon_n \quad " & = & \varepsilon_n \text{ გამოთვლილი} \times \dfrac{W_2}{a_n}
\end{array}\right\}. \tag{4.6.1.14}$$

4. 6. 2. კორელატების განზომილებების შესახებ

იმისათვის, რომ (4 3. 1. 9) ტოლობას ჰქონდეს აზრი, აუცილებელია მისი ყველა წევრის განზომილება იყოს ერთნაირი. ვთქვათ, ტოლობის ყველა წევრის განზომილება გვინდა იყოს ნულოვანი. მაშინ, საჭირო იქნება, რომ განაზომთა m_i საშუალო კვადრატული შეცდომის (m_i) განზომილება და ε_i შესწორების (ε_i) განზომილება იყოს ერთნაირი, რადგანაც (4.3.1.9) ტოლობაში (3.5.4.1) ფორმულის მიხედვით

$$P_i=\frac{\eta^2}{m_i^2}\cdot$$

ე. ი. საჭიროა, რომ

$$(m_i)=(\varepsilon_i). \tag{4.6.2.1}$$

აგრეთვე, საჭიროა დავიცვათ ტოლობა

$$(K_l) = \frac{1}{(W_l)} \cdot \tag{4.6.2.2}$$

მაშასადამე, საჭიროა კორელატის (K_l) განზომილება და შესაბამისი თავისუფალი წევრის (W_l) განზომილება იყოს ურთიერთშებრუნებული.

4. 6. 3. ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების განზომილებები

გასაგებია, რომ (4. 3. 1. 11) ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ყოველი განტოლების ნებისმიერი წევრის განზომილება ტოლი უნდა იყოს შესაბამისი თავისუფალი წევრის განზომილებისა.

მაგალითად, უნდა დავიცვათ ტოლობა:

$$\left(\left[\frac{aa}{P}\right] K_1\right) = (W_1), \tag{4.6 3.1}$$

სადაც $\left(\left[\frac{aa}{P}\right] K_1\right)$ პირველი ტოლობის პირველი წევრის განზომილებაა.

პირველი განსაზღვრების ძალით (1) დაიწერება:

$$\left(\left[\frac{aa}{P}\right]\right) \cdot (K_1) = (W_1),$$

საიდანაც

$$\left(\left[\frac{aa}{P}\right]\right) = \frac{(W_1)}{(K_1)} \cdot \tag{4.6.3.2}$$

(2)-ში (4. 6. 2. 2)-ის სათანადო მნიშვნელობის შეტანით მივიღებთ:

$$\left(\left[\frac{aa}{P}\right]\right) = \frac{(W_1)}{\left(\frac{1}{W_1}\right)} = (W_1)^2. \tag{4.6.3.3}$$

იგივე პირველი ტოლობის მეორე წევრისათვის საჭიროა:

$$\left(\left[\frac{ab}{P}\right] \cdot K_2\right) = \left(\left[\frac{ab}{P}\right]\right) (K_2) = (W_1),$$

ხოლო (4. 6. 2. 2)-ის გამოყენებით

$$\left(\left[\frac{ab}{P}\right]\right) = (W_1) \cdot (W_2). \tag{4.6.3.4}$$

იმავე განტოლების მესამე წევრისათვის საჭირო იქნება:

$$\left(\left[\frac{ac}{P}\right] K_3\right) = \left(\left[\frac{ac}{P}\right]\right) \cdot (K_3) = (W_1),$$

(4. 6. 2. 2)-ის გამოყენებით

$$\left(\left[\frac{ac}{P}\right]\right)=(W_1)\,(W_3). \qquad (4.6.3.5)$$

ანალოგიურად დაიწერება დანარჩენი განტოლებების ნებისმიერი წევრის კორელატის კოეფიციენტის განზომილება. მაგალითად, მეორე განტოლების K_3 კორელატის კოეფიციენტის განზომილება საჭიროა იყოს შემდეგი:

$$\left(\left[\frac{bc}{P}\right]K_3\right)=\left(\left[\frac{bc}{P}\right]\right)\cdot(K_3)=(W_2).$$

(4. 6. 2. 2)-ის გამოყენებით:

$$\left(\left[\frac{bc}{P}\right]\right)=(W_2)\cdot(W_3). \qquad (4.6.3.6)$$

მესამე განტოლების მეორე წევრისათვის საჭიროა:

$$\left(\left[\frac{bc}{P}\right]K_2\right)=\left(\left[\frac{bc}{P}\right]\right)\cdot(K_2)=(W_3),$$

(4. 6. 2. 2)გამოყენებით

$$\left(\left[\frac{bc}{P}\right]\right)=(W_3)\,(W_2). \qquad (4.6.3.7)$$

ე. ი. სიმეტრიული კოეფიციენტების განზომილებები მივიღეთ ერთნაირი:

მაშასადამე, ნორმალურ განტოლებათა ყოველი კოეფიციენტის განზომილება უდრის ორი თავისუფალი წევრის განზომილებათა ნამრავლს. თუ რომელი თავისუფალი წევრის განზომილება უნდა ავიღოთ თანამამრავლად, გვიჩვენებს კოეფიციენტების ასოები წონების გარეშე. მაგალითად:

(2)	ტოლობაში	კოეფიციენტია	$[aa]$	ამიტომ	მივიღეთ	$(W_1)^2$,
(3)	„	„	$[ab]$	„	„	$(W_1)\cdot(W_2)$,
(4)	„	„	$[ac]$	„	„	$(W_1)\cdot(W_3)$,
(5)	„	„	$[bc]$	„	„	$(W_2)\cdot(W_3)$,
(6)	„	„	$[bc]=[cb]$	„	„	$(W_3)\cdot(W_2)$.

ანალოგიურად, მიიღება ნებისმიერი განტოლების ნებისმიერი წევრის კოეფიციენტის განზომილება.

როგორც ვხედავთ, ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების განზომილებები არაა დამოკიდებული ε შესწორებათა განზომილებებზე და მაშასადამე, განაზომთა წონების განზომილებებზეც.

4. 6. 4. საერთო შენიშვნა შეცდომათა კოეფიციენტების გათანაბრების შესახებ

იმ შემთხვევაში, როცა შეცდომათა განტოლებების სხვადასხვა კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან საკმაოდ განსხვავდებიან, შემდგომი გამოთვლების გაადვილებისა და დაზუსტების მიზნით ამ კოეფიციენტებს ათანაბრებენ დაახლოებით იმავე გზით, რაც ცნობილია 4. 6. 1 პარაგრაფში. ვთქვათ, გვაქვს (1) სქემის შესაბამისი კოეფიციენტების ქვემორე (1) ცხრილი. გათანაბრების მიზანია მეორე, მესამე და მეხუთე უცნობების

b, c, e კოეფიციენტები გავხადოთ ± 1 ახლო. ასევე საჭიროა W თავისუფალი წევრის გათანაბრება, მხოლოდ აქ დამრგვალება არაა დასაშვები.

ცხრილი 4.6.4.1

ტოლობის №№	a	b	c	d	e	W მმ
1	+1	+34,5	+12,1	+1	+0,0165	−12,7
2	+1	+35,4	+12,0	+1	+0,0202	+11,8
3	+1	+32,4	+10,7	+1	+0,0196	− 9,5
4	+1	+35,7	+10,9	+1	+0,0222	−10,6
5	+1	+37,8	+12,7	+1	+0,0186	+13,5

მაშასადამე, გათანაბრების მიზნით მეორე უცნობის კოეფიციენტები საჭიროა შემცირდეს ოცდაათჯერ, მესამე უცნობისა — ათჯერ, მეხუთე უცნობისა კი გადიდდეს ორმოცდაათჯერ, ხოლო თავისუფალი წევრები შემცირდეს ათჯერ, რის შედეგად მივიღებთ (2) ცხრილს

ცხრილი 4.6.4.2

ტოლობის №№	a	b	c	d	e	W სმ
1	+1	+1,15	+1,21	+1	+0,82	−1,27
2	+1	+1,18	+1,20	+1	+1,01	+1,18
3	+1	+1,08	+1,07	+1	+0,98	−0,95
4	+1	+1,19	+1,09	+1	+1,11	−1,06
5	+1	+1,26	+1,27	+1	+0,93	+1,35

კოეფიციენტების ასეთი შეცვლა გამოიწვევს მეორე უცნობის გამოთვლილი მნიშვნელობის გადიდებას ოცდაათჯერ, მესამე უცნობისას — ათჯერ, მეხუთე უცნობის შემცირებას ორმოცდაათჯერ, რაც ნიშნავს იმას, რომ გამოთვლილი მეორე უცნობი უნდა შემცირდეს ოცდაათჯერ, მესამე ათჯერ და მეხუთესი გადიდდეს 50-ჯერ. მილიმეტრებით გამოსახული თავისუფალი წევრების ათჯერ შემცირება ნიშნავს იმას, რომ მიღებული რიცხვები იქნება სანტიმეტრის განზომილებით, ე. ი. უცნობებიც გამოისახება სანტიმეტრებით (მილიმეტრებით გამოსახვისას კი უნდა გავამრავლოთ 10-ზე).

ცხადია, კოეფიციენტების შეცვლით შესაბამისად შეიცვლება უცნობთა წონებიც. განხილად შემთხვევაში მეორე ახალი $30\,K_2$ უცნობის წონა მიიღება P_{30k_2}, მესამე ახალი $10\,K_3$ უცნობის წონა — P_{10k_3} მეხუთე ახალი $\frac{1}{50}K_5$ უცნობის წონა — $P_{\frac{1}{50}K_5}$. რომ მივიღოთ K_2, K_3, K_5 უცნობთა P_2, P_3, P_5 წონები, თანახმად [13] (42,8) ფორმულისა, საჭიროა ახლად მონახული წონები P_{30k_2} P_{10k_3}, $P_{\frac{1}{50}K_5}$ შესაბამისად გამრავლდეს 900, 100 და $\frac{1}{2500}$-ზე.

როცა იცვლება მხოლოდ თავისუფალი წევრები, მაშინ წონები უცვლელია.

4. 6. 5. ნორმალური განტოლებების პრაქტიკული ამოხსნის დროს საჭირო ნიშნადი ციფრების რაოდენობის დადგენა

a. საერთოდ ყველა სახის გამოთვლა და, კერძოდ, ნორმალური განტოლებების ამოხსნისას საჭიროა, რომ რიცხვების დამრგვალების შეცდომები შუალედ გამოთვლებში არ ამახინჯებდეს საბოლოო გამონათვლებს.

ვიდრე შევუდგებოდეთ ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნას, საჭიროა უცნობთა განსაზღვრის მოთხოვნილი სიზუსტის მიხედვით, დავადგინოთ ნიშნადი ციფრების რაოდენობა, რომლის მიხედვითაც ვასრულებთ გამოთვლების ძირითად ეტაპებს. ამასთანავე, სასურველია ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტები გამოისახოს ერთნაირი თანრიგის ერთეულებში, ამისათვის კი შესწორებათა პირობითი განტოლებების შედგენის დროს უნდა გათანაბრდეს მათი კოეფიციენტები ზემოგანხილული წესის მიხედვით. ხშირად ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტები მიიღება ახლობელი თანრიგის ერთეულებში (მეათედებში, მეასედებში) ურთიერთგანსხვავებული, მიუხედავად იმისა, რომ შესწორებათა განტოლებების კოეფიციენტები კარგადაა გათანაბრებული.

შესწორებათა უალბათესი მნიშვნელობები ო რ ი ნ ი შ ნ ა დ ი ც ი ფ რ ი ს ფარგლებში რომ განისაზღვროს ელიმინაციური და ეკვივალენტური ტოლობების კოეფიციენტების გამოთვლებიც რომ ორ-ორი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში ვაწარმოოთ, დამრგვალების შეცდომის გამო, უკანასკნელი ელიმინაციური ტოლობის კოეფიციენტები დ ა მ ა ხ ი ნ ჯ დ ე ბ ა. ამიტომ საჭიროა (4. 3. 5. 2) სქემის ელიმინაციური სტრიქონების გამოთვლისას ოდენობები ავიღოთ ზ ე დ მ ე ტ ი ათწილადი ნიშნებით. მათი რიცხვი ა. გორდეევისა და ე. ლარჩენკოს გამოკვლევით განისაზღვრება ნებისმიერი ელიმინაციური ტოლობის შედგენისათვის საჭირო ეკვივალენტური ტოლობის არაკვადრატული კოეფიციენტების მთელი ნაწილის ციფრების რაოდენობის მიხედვით. ვთქვათ, ეკვივალენტური ტოლობის უდიდესი არაკვადრატული კოეფიციენტის მთელი ნაწილი ორი ციფრია; მაგალითად, 36,598 და ეს კოეფიციენტი გამოთვლილია სამი ათწილადი ნიშნით, მაშინ სათანადო ე ლ ი მ ი ნ ა ც ი უ რ ი ტოლობის კოეფიციენტები უნდა გამოითვალოს ხ უ თ ი ათწილადი ნიშნით, და თუ არაკვადრატული კოეფიციენტის მთელი ნაწილი ერთი ციფრია და ის გამოთვლილია სამი ათწილადი ნიშნით, მაგალითად, 9,598, მაშინ ელიმინაციური ტოლობის კოეფიციენტები გამოითვლება ო თ ხ ი ათწილადი ნიშნით. მაშასადამე, ე ლ ი მ ი ნ ა ც ი უ რ ი ტ ო ლ ო ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ა თ წ ი ლ ა დ ი ნ ი შ ნ ე ბ ი ს რ ა ო დ ე ნ ო ბ ა უ ნ დ ა ი ყ ო ს მ ე ტ ი შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი ტ ო ლ ო ბ ი ს უ დ ი დ ე ს ი ა რ ა კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ა თ წ ი ლ ა დ ი ნ ი შ ნ ე ბ ი ს რ ა ო დ ე ნ ო ბ ა ზ ე ი მ დ ე ნ ი ნ ი შ ნ ი თ (ც ი ფ რ ი თ), რ ა მ დ ე ნ ი ც ი ფ რ ი ც ა ქ ვ ს ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი ტ ო ლ ო ბ ი ს უ დ ი დ ე ს ი ა რ ა კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი ს მ თ ე ლ ნ ა წ ი ლ ს.

ხ. ჩვეულებრივ სამარკშეიდერო და საინჟინრო გეოდეზიური პრაქტიკით მიღებულია შესწორებათა პირობითი განტოლებების კოეფიციენტების გამოთვლა სამ-სამი ნიშნადი ციფრით, ხოლო ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტებისა არანაკლებ სამი-ოთხი ნიშნადი ციფრით. პირველი და მეორე საკონტროლო ფორმულების შედეგთა განსხვავება (დარღვევა) შეიძლება მ ე ს ა მ ე ნ ი შ ნ ა დ ც ი ფ რ ე ბ შ ი დ ა ა რ ა რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ წ ი ლ ა დ ი ნ ა წ ი ლ ი ს მესამე ციფრამდე. კორელატების გამოთვლა ხდება ს ა მ ნ ი შ ნ ა დ ც ი ფ რ ა მ დ ე. შესწორებები გამოითვლება სამი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში. კუთხის გამოთვლის შეცდომა არ უნდა აღემატებოდეს 0″,1. გამოთვლილი გვერდების ლოგარითმების ურთიერთგანსხვავება დასაშვებია მანტისის უკანასკნელ 1—2 ერთეულში. გაწონასწორებული ელემენტებით გამოთვლილი პირობით განტოლებათა შეუკვრელობა არ უნდა აღემატებოდეს მანტისის უკანასკნელ 1—2 ერთეულს.

თავი VII

მაგალითები და სავარჯიშოები მრავალუცნობიანი პირობითი განტოლებების შემცველი სატრიანგულაციო ქსელებისა და პოლიგონების სისტემის ერთჯგუფად გაწონასწორებაზე

4. 7. 1. ზოგიერთი პრაქტიკული მითითებები

1. უმრავლეს შემთხვევაში პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორების ამოცანის გადაწყვეტა არსებითად იწყება (4. 3. 1. 6) სისტემის, ანუ შესწორებათა პირობითი განტოლებების შედგენით.

2. როდესაც საჭიროა მხოლოდ უშუალო განაზომთა გაწონასწორება, მაშინ გამოიყენება სქემები (4. 3. 5. 1) და (4. 3. 5. 2).

3. როდესაც გაწონასწორების გარდა საჭიროა გაწონასწორებულ ელემენტთა ფუნქციის შებრუნებული წონა ან დისპერსიის განსაზღვრაც, მაშინ გამოიყენება სქემები (1) და (2).

4. (1) სქემას (ვთქვათ სამუცნობიანი განტოლების შემთხვევაში) შედარებით (4.3.5.1) სქემასთან დამატებული აქვს φ, Σ, $a\varphi$, $a\Sigma$, $b\varphi$, $b\Sigma$, $c\varphi$, $c\Sigma$, $\varphi\varphi$ და $\varphi\Sigma$ სვეტი.

(1) სქემის საკონტროლო ელემენტებია შემდეგი:

$$a_i+b_i+c_i=S_i \text{ (მე-5 სვეტის ზოგადი სტრიქონი),} \tag{4.7.1.1}$$

ამ ტოლობების ჯამი გამოისახება

$$[a]+[b]+[c]=S_1+S_2+\cdots+S_n=[S] \text{ (მე-5 სვეტის ჯამის სტრიქონი),} \tag{4.7.1.2}$$

$$S_i+\varphi_i=\Sigma_i \text{ (მე-7 სვეტის ზოგადი სტრიქონი),} \tag{4.7.1.3}$$

ამ ტოლობების ჯამი გამოისახება

$$[S]+[\varphi]=[\Sigma]. \text{ (მე-7 სვეტის ჯამის სტრიქონი).} \tag{4.7.1.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{P}\right]+\left[\frac{ab}{P}\right]+\left[\frac{ac}{P}\right]&=\left[\frac{aS}{P}\right], \text{ (მე-12 სვეტის ჯამის სტრიქონი)}\\
\left[\frac{ab}{P}\right]+\left[\frac{bb}{P}\right]+\left[\frac{bc}{P}\right]&=\left[\frac{bS}{S}\right], \text{ (მე-17 სვეტის ჯამის სტრიქონი)}\\
\left[\frac{ac}{P}\right]+\left[\frac{bc}{P}\right]+\left[\frac{cc}{P}\right]&=\left[\frac{cS}{P}\right], \text{ (21-ე სვეტის ჯამის სტრიქონი)}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.7.1.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aS}{P}\right]+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]=\left[\frac{a\Sigma}{P}\right], \text{ (მე-14 სვეტის ჯამის სტრიქონი)}\\&\left[\frac{bS}{P}\right]+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]=\left[\frac{b\Sigma}{P}\right], \text{ (მე-19 სვეტის ჯამის სტრიქონი)}\\&\left[\frac{cS}{P}\right]+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]=\left[\frac{c\Sigma}{P}\right]. \text{ (23-ე სვეტის ჯამის სტრიქონი)}\end{aligned}\right\}. \quad (4.7.1.6)$$

(3) ტოლობა გავამრავლოთ $\frac{\varphi_i}{P_i}$-ზე და შევაჯამოთ, მივიღებთ:

$$\left[\frac{\varphi S}{P}\right]+\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]=\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right], \text{ საიდანაც } \left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]=\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]-\left[\frac{\varphi S}{P}\right]. \quad (4.7.1.7)$$

(3) ტოლობა გავამრავლოთ $\frac{\Sigma_i}{P_i}$-ზე და შევაჯამოთ, მივიღებთ:

$$\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]+\left[\frac{b\Sigma}{P}\right]+\left[\frac{c\Sigma}{P}\right]+\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]=\left[\frac{S\Sigma}{P}\right]+\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]=\left[\frac{\Sigma\Sigma}{P}\right]. \quad (4.7.1.8)$$

(1) ტოლობა გავამრავლოთ $\frac{\varphi_i}{P_i}$-ზე და შევაჯამოთ, მივიღებთ:

$$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]=\left[\frac{S\varphi}{P}\right]. \quad (4.7.1.9)$$

5. (2) სქემას შედარებით (4. 3. 5. 2) სქემასთან დამატებული აქვს φ და Σ სვეტები, რომლებიც საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ გაწონასწორებული ელემენტების ფუნქციის (წონითი ფუნქციის) შებრუნებული წონები. მაგალითად, (1) სქემიდან ამოიღება $\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]$ და ჩაიწერება φ სვეტში, რომელიც შეიკრიბება (2) სქემის φ სვეტის ელიმინაციური და შესაბამისი ეკვივალენტური (გარდაქმნილი) სტრიქონის ჩანაწერთა ნამრავლების ალგებრულ ჯამთან, რითაც მიიღება (4. 4. 10. 1) ფორმულის შესაბამისი სიდიდეები (φ სვეტი):

$$\frac{1}{P_\Phi}=\frac{M_\Phi^2}{\eta^2}=\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}, \quad (4.7.1.10)$$

ანუ

$$M_\Phi^2=\eta^2\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}\right). \quad (4.7.1.11)$$

ამ გამოთვლების საკონტროლოდ კი (1) სქემიდან ამოიღება $\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]$ და მასთან

ალგებრულად შეიკრიბება (2) სქემის φ და Σ სვეტების ელიმინაციური და შესაბამისი ეკვივალენტური სტრიქონის ჩანაწერთა ირიბი ნამრავლები (Σ სვეტი).

$$\frac{1}{P_\Phi}=\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]-\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]\left[\frac{b\Sigma}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]\left[\frac{c\Sigma}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}. \quad (4.7.1.12)$$

ორივე ალგებრული ჯამი იწერება სქემის φ და Σ სვეტებში უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ.

(12) ფორმულა მიიღება შემდეგნაირად:

(4. 4. 10. 1) ტოლობის გამოყენებით (4. 4. 4. 28) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]-\frac{N}{D}. \quad (4.7.1.13)$$

გამოვიყენოთ (4. 4. 8. 5) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]r_1+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]r_2+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]r_3. \quad (4.7.1.14)$$

(14) გამოსახულებას, როგორც მეოთხე ტოლობას, მივუწერთ (4. 4. 8. 4) სამუცნობიან სისტემას, მხოლოდ $\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]$ წევრის ნაცვლად მასში შევიტანოთ მისი მნიშვნელობა (7) ტოლობიდან:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{P}\right]r_1+\left[\frac{ab}{P}\right]r_2+\left[\frac{ac}{P}\right]r_3+\left[\frac{a\varphi}{P}\right]&=0,\\
\left[\frac{ab}{P}\right]r_1+\left[\frac{bb}{P}\right]r_2+\left[\frac{bc}{P}\right]r_3+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]&=0,\\
\left[\frac{ac}{P}\right]r_1+\left[\frac{bc}{P}\right]r_2+\left[\frac{cc}{P}\right]r_3+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]&=0, \quad (4.7.1.15)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]r_1+\left[\frac{b\varphi}{P}\right]r_2+\left[\frac{c\varphi}{P}\right]r_3+\left(\frac{[\varphi\Sigma]}{P}-\frac{[\varphi\Sigma]}{P}\right)=\frac{1}{P_{\Phi_u}}.$$

ამ სისტემის შეკრებით და (5), (6), (9) ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]r_1+\left[\frac{b\Sigma}{P}\right]r_2+\left[\frac{c\Sigma}{P}\right]r_3+\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]=\frac{1}{P_{\Phi_u}}. \quad (4.7.1.16)$$

(4. 3. 2. 8) ელიმინაციური სისტემის შესაბამისად სამუცნობიანი (15) სისტემის ფესვები იქნება:

არატოლზუსტ განაზომთა სამუცნობიან ნორმალურ განტოლებათა სისტემისა და გაწონასწორებულ ელემენტთა ფუნქციის კოეფიციენტების შედგენის სრული სქემა

სქემა 4. 7. 1. 1.

განა-ზომთა №№	a	b	c	S	φ	Σ	$\frac{1}{P}$	$\frac{aa}{P}$	$\frac{ab}{P}$	$\frac{ac}{P}$	$\frac{aS}{P}$	$\frac{a\varphi}{P}$	$\frac{a\Sigma}{P}$	$\frac{bb}{P}$	$\frac{bc}{P}$	$\frac{bS}{P}$	$\frac{b\varphi}{P}$	$\frac{b\Sigma}{P}$	$\frac{cc}{P}$	$\frac{cS}{P}$	$\frac{c\varphi}{P}$	$\frac{c\Sigma}{P}$	$\frac{\varphi\varphi}{P}$	$\frac{\varphi\Sigma}{P}$
1	a_1	b_1	c_1	S_1	φ_1	Σ_1	$\frac{1}{P_1}$	$\frac{a_1a_1}{P_1}$	$\frac{a_1b_1}{P_1}$	$\frac{a_1c_1}{P_1}$	$\frac{a_1S_1}{P_1}$	$\frac{a_1\varphi_1}{P_1}$	$\frac{a_1\Sigma_1}{P_1}$	$\frac{b_1b_1}{P_1}$	$\frac{b_1c_1}{P_1}$	$\frac{b_1S_1}{P_1}$	$\frac{b_1\varphi_1}{P_1}$	$\frac{b_1\Sigma_1}{P_1}$	$\frac{c_1c_1}{P_1}$	$\frac{c_1S_1}{P_1}$	$\frac{c_1\varphi_1}{P_1}$	$\frac{c_1\Sigma_1}{P_1}$	$\frac{\varphi_1\varphi_1}{P_1}$	$\frac{\varphi_1\Sigma_1}{P}$
2	a_2	b_2	c_2	S_2	φ_2	Σ_2	$\frac{1}{P_2}$	$\frac{a_2a_2}{P_2}$	$\frac{a_2b_2}{P_2}$	$\frac{a_2c_2}{P_2}$	$\frac{a_2S_2}{P_2}$	$\frac{a_2\varphi_2}{P_2}$	$\frac{a_2\Sigma_2}{P_2}$	$\frac{b_2b_2}{P_2}$	$\frac{b_2c_2}{P_2}$	$\frac{b_2S_2}{P_2}$	$\frac{b_2\varphi_2}{P_2}$	$\frac{b_2\Sigma_2}{P_2}$	$\frac{c_2c_2}{P_2}$	$\frac{c_2S_2}{P_2}$	$\frac{c_2\varphi_2}{P_2}$	$\frac{c_2\Sigma_2}{P_2}$	$\frac{\varphi_2\varphi_2}{P_2}$	$\frac{\varphi_2\Sigma_2}{P_2}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	a_n	b_n	c_n	S_n	φ_n	Σ_n	$\frac{1}{P_n}$	$\frac{a_na_n}{P_n}$	$\frac{a_nb_n}{P_n}$	$\frac{a_nc_n}{P_n}$	$\frac{a_nS_n}{P_n}$	$\frac{a_n\varphi_n}{P_n}$	$\frac{a_n\Sigma_n}{P_n}$	$\frac{b_nb_n}{P_n}$	$\frac{b_nc_n}{P_n}$	$\frac{b_nS_n}{P_n}$	$\frac{b_n\varphi_n}{P_n}$	$\frac{b_n\Sigma_n}{P_n}$	$\frac{c_nc_n}{P_n}$	$\frac{c_nS_n}{P_n}$	$\frac{c_n\varphi_n}{P_n}$	$\frac{c_n\Sigma_n}{P_n}$	$\frac{\varphi_n\varphi_n}{P_n}$	$\frac{\varphi_n\Sigma_n}{P_n}$
ჯამები	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[S]$	$[\varphi]$	$[\Sigma]$	—	$\left[\frac{aa}{P}\right]$	$\left[\frac{ab}{P}\right]$	$\left[\frac{ac}{P}\right]$	$\left[\frac{aS}{P}\right]$	$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]$	$\left[\frac{bb}{P}\right]$	$\left[\frac{bc}{P}\right]$	$\left[\frac{bS}{P}\right]$	$\left[\frac{b\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{b\Sigma}{P}\right]$	$\left[\frac{cc}{P}\right]$	$\left[\frac{cS}{P}\right]$	$\left[\frac{c\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{c\Sigma}{P}\right]$	$\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{\varphi\Sigma}{P}\right]$

საკონტროლო სტრიქონები:

1. $a_i + b_i + c_i = S_i$
2. $[a] + [b] + [c] = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = [S]$
3. $\left[\frac{aa}{P}\right] + \left[\frac{ab}{P}\right] + \left[\frac{ac}{P}\right] = \left[\frac{aS}{P}\right]$
4. $\left[\frac{ab}{P}\right] + \left[\frac{bb}{P}\right] + \left[\frac{bc}{P}\right] = \left[\frac{bS}{P}\right]$
5. $\left[\frac{ac}{P}\right] + \left[\frac{bc}{P}\right] + \left[\frac{cc}{P}\right] = \left[\frac{cS}{P}\right]$

1′. $a_i + b_i + c_i + \varphi_i = S_i + \varphi_i = \Sigma_i$

2′. $[a] + [b] + [c] + [\varphi] = [S] + [\varphi] = [\Sigma]$

3′. $\left[\frac{aS}{P}\right] + \left[\frac{a\varphi}{P}\right] = \left[\frac{a\Sigma}{P}\right]$

4′. $\left[\frac{bS}{P}\right] + \left[\frac{b\varphi}{P}\right] = \left[\frac{b\Sigma}{P}\right]$

5′. $\left[\frac{cS}{P}\right] + \left[\frac{c\varphi}{P}\right] = \left[\frac{c\Sigma}{P}\right]$

სამი ნორმალური განტოლების ამოხსნა და გაწონასწორებული ელემენტების ფუნქციის შებრუნებული წონა

სქემა 4. 7. 1. 2.

სტრ. №№	სტრიქონების აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	W	S'	φ	Σ	კონტ.	შენიშვნა
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	a	$\left[\frac{aa}{P}\right]$	$\left[\frac{ab}{P}\right]$	$\left[\frac{ac}{P}\right]$	W_1	S_1'	$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]$		$S_1' = \left[\frac{aS}{P}\right] + W_1$
2	E_1	-1	$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{W_1}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{S_1'}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\frac{a\varphi}{P}}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$		$E_1 = -\frac{a}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$
3										თავისუფალი სტრიქონი
4	b		$\left[\frac{bb}{P}\right]$	$\left[\frac{bc}{P}\right]$	W_2	S_2'	$\left[\frac{b\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{b\Sigma}{P}\right]$		$S_2' = \left[\frac{aS}{P}\right] + W_2$
5	$E_1 \times a_2$		$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right]\left[\frac{ac}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right] W_1}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right] \cdot S_1'}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ab}{P}\right]\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{aa}{P}\right]\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$		$\left[\frac{ab}{P}\right] \times E_1$
6	$b \cdot 1$		$\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]$	$\left[\frac{bc}{P} \cdot 1\right]$	$W_2 \cdot 1$	$S_2' \cdot 1$	$\left[\frac{b\varphi}{P} \cdot 1\right]$	$\left[\frac{b\Sigma}{P} \cdot 1\right]$		$S_2' \cdot 1 = \left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right] + \left[\frac{bc}{P} \cdot 1\right] + W_2 \cdot 1$
7	E_2		-1	$-\frac{\left[\frac{bc}{P} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$	$-\frac{W_2 \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$	$-\frac{S_2' \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{b\varphi}{P} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{b\Sigma}{P} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$		$E_2 = -\frac{b \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P} \cdot 1\right]}$

სქემა 4. 7. 1. 2. (გაგრძელება)

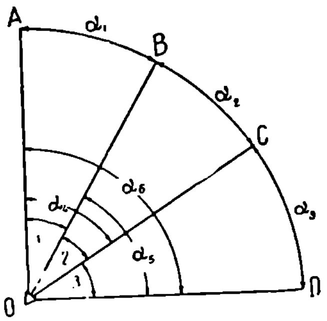
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8										თავისუფალი სტრიქონი
9	c			$\left[\frac{cc}{P}\right]$	W^3	S_3'	$\left[\frac{c\varphi}{P}\right]$	$\left[\frac{c\Sigma}{P}\right]$		$S_3' = \left[\frac{cS}{P}\right] + W_3$
10	$E_1 \times a_3$			$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right] W_1}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right] \cdot S_1'}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right]\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{P}\right]\left[\frac{a\Sigma}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]}$		$\left[\frac{ac}{P}\right] \times E_1$
11	$E_3 \times b \cdot 1_3$			$-\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right] W_3 \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right] S_3' \cdot 1}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]\left[\frac{b\Sigma}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$		$\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right] \times E_3$
12	$c \cdot 2$			$\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]$	$W_3 \cdot 2$	$S_3' \cdot 2$	$\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]$	$\left[\frac{c\Sigma}{P}\cdot 2\right]$		$S_3' \cdot 2 = \left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right] + W_3 \cdot 2$
13	E_3			$\left(-\frac{1}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}\right)$ -1	$-\frac{W_3 \cdot 2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\frac{S'_3 \cdot 2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\frac{\left[\frac{c\Sigma}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$		$-\frac{c \cdot 2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$
14										თავისუფალი სტრიქონი

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
15		$-\dfrac{W_1}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	$-\dfrac{W_2\cdot 1}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\dfrac{W_3\cdot 2}{\left[\dfrac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	0	$[W]$	$\left[\dfrac{\varphi\varphi}{P}\right]$	$\left[\dfrac{\varphi\Sigma}{P}\right]$		φ და Σ სვეტის ამ სტრიქონის ჩანაწერები ამოღებულია (1) სქემიდან. [W] მიღებულია W სვეტიდან.
16		$-\dfrac{\left[\dfrac{ac}{P}\right]K_3}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{bc}{P}\cdot 1\right]K_3}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	K_3	$-\dfrac{W_1^2}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	$-\dfrac{W_1\cdot S_1'}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{a\varphi}{P}\right]^2}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{a\varphi}{P}\right]\left[\dfrac{a\Sigma}{P}\right]}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$		
17		$-\dfrac{\left[\dfrac{ab}{P}\right]K_2}{\left[\dfrac{aa}{P}\right]}$	K_2		$-\dfrac{(W_2\cdot 1)^2}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\dfrac{(W_2\cdot 1)(S_2'\cdot 1)}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]\left[\dfrac{b\Sigma}{P}\cdot 1\right]}{\left[\dfrac{bb}{P}\cdot 1\right]}$		
18		K_1			$-\dfrac{(W_3\cdot 2)^2}{\left[\dfrac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\dfrac{(W_3\cdot 2)(S_3'\cdot 2)}{\left[\dfrac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]^2}{\left[\dfrac{cc}{P}\cdot 2\right]}$	$-\dfrac{\left[\dfrac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]\left[\dfrac{c\Sigma}{P}\cdot 2\right]}{\left[\dfrac{cc}{P}\cdot 2\right]}$		
19					$-[WK]$	$[WK]$	$\dfrac{1}{P_{\Phi_м}}$	$\dfrac{1}{P_{\Phi_м}}$		
20					$[P\,в\,в]$					

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\left[\frac{a\varphi}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{ab}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]} r_2 - \frac{\left[\frac{ac}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]} r_3, \\ r_2 &= \frac{\left[\frac{b\varphi}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]} r_3, \\ r_3 &= \frac{\left[\frac{c\varphi}{P}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.1.17)$$

(16) ტოლობაში (17) ფესვების მნიშვნელობების სათანადოდ ჩასმით და ალგორითმების გამოყენებით მივიღებთ (12) ფორმულას.

6. ზოგჯერ საჭირო ხდება განისაზღვროს გაწონასწორებული ელემენტების ფუნქციის წონა ისე, რომ თვით უცნობი სიდიდეების მნიშვნელობები არ გამოვითვალოთ. მაშინ (4. 3. 4. 13) საკონტროლო ფორმულა საჭირო არაა და ამიტომ (2) სქემიდან ამოვიღებთ W და S' სვეტს, აგრეთვე K_1, K_2 და K_3 სვეტის 15—18 სტრიქონის ჩათვლით.



ნახ. 4.7.1.1

მაგალითი 4. 7. 1. 1. ყველა შესაძლო კომბინაციით ტოლზუსტად გაზომილი კუთხეები გაწონასწორდეს პირობითი გაზომვების ხერხით. შეფასდეს უშუალო განაზომები (გაწონასწორებამდე და გაწონასწორების შემდეგ) შეფასდეს α_6 გაწონასწორებული კუთხე, როგორც ფუნქცია α_1, α_2, α_3 გაწონასწორებული კუთხეებისა. მონაცემები (1) ნახაზის შესაბამისად (1) ცხრილშია, რომელიც წარმოადგენს (2) ცხრილიდან ამოღებულ მესამე ვარიანტს (იხ. გვერდი 184).

ცხრილი 4.7.1.1

კუთხეების №№	კუთხეების დასახელება	განაზომები $l_i = \alpha'_i$	უცნობები $L = \alpha_i$
1	*AOB*	44° 03′ 14″,0	α_1
2	*BOC*	43 14 19,2	α_2
3	*COD*	53 33 32,9	α_3
4	*AOC*	87 17 31,2	$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$
5	*BOD*	96 47 52,9	$\alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$
6	*AOD*	140 51 03,9	$\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

1. აღვნიშნოთ გაზომილი და გაწონასწორებული კუთხეები შესაბამისად α_i', α_i სიმბოლოებით.

2. W შეუკვრელობები და ε შესწორებები გამოვსახოთ სეკუნდებში.

ამოხსნა

I. პირობით განტოლებათა შედგენა და W_i შეუკვრელობების გამოთვლა

უცნობთა რაოდენობა გვაქვს ექვსი. აქ გამოიყენება სადგურის, ანუ ჯამის და სხვაობის პირობა (4. 1. 7. 5) ტოლობის შესაბამისად. ვთქვათ α_1', α_2', α_3' აუცილებელი (დამოუკიდებელი) განაზომებია, მაშინ α_4', α_5' და α_6' ჭარბი განაზომები იქნება (ისინი დამოკიდებული არიან პირველ სამ კუთხეზე). მაშასადამე, ურთიერთდამოუკიდებელი პირობითი განტოლება უნდა შეირჩეს სამი და ამავე დროს ეს განტოლებები თითო განაზომით მაინც განსხვავდებოდეს ერთიმეორისაგან (ე. ი. არც ერთი მათგანი არ უნდა გამოდიოდეს დანარჩენი ტოლობიდან), რის გამო (1) ნახაზის შესაბამისად უნდა დავიცვათ ტოლობები: $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$; $\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3$; $\alpha_6=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, ანუ (4.1.7.5) პირობითი ტოლობის მიხედვით დავწეროთ:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_6+W_1=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1=\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'-\alpha_6'=+2'',2;$$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4+W_2=0, \quad \text{"} \quad W_2=\alpha_1'+\alpha_2'-\alpha_4'=+2'',0;$$

$$\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5+W_3=0, \quad \text{"} \quad W_3=\alpha_2'+\alpha_3'-\alpha_5'=-0'',8.$$

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობების და Φ_{α_6} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლა

როგორც ვიცით, შესწორებათა ტოლობების კოეფიციენტები წარმოადგენს პირობათა ტოლობების კერძო წარმოებულებს უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების მიხედვით; ამავე დროს საჭიროა მხედველობიდან არ გამოგვრჩეს ამ კოეფიციენტების განზომილების საკითხი (იხილეთ (4. 6. 1. 1) ფორმულები).

ვინაიდან პირობით განტოლებათა რაოდენობა გვაქვს სამი, გაზომილი კუთხეები კი — ექვსი, შესწორებათა ტოლობების კოეფიციენტების რაოდენობა იქნება $3\times6=18$.

გამოვითვალოთ ეს კოეფიციენტები:

$$a_1=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha_1'}=1;\quad a_2=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha_2'}=1;\quad a_3=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha_3'}=1;\quad a_6=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha_6'}=-1;\ a_4=a_5=0;$$

$$b_1=\frac{\partial W_2}{\partial\alpha_1'}=1;\quad b_2=\frac{\partial W_2}{\partial\alpha_2'}=1;\quad b_4=\frac{\partial W_2}{\partial\alpha_4'}=-1;\ b_3=b_5=b_6=0;$$

$$c_2=\frac{\partial W_3}{\partial\alpha_2'}=1;\quad c_3=\frac{\partial W_3}{\partial\alpha_3'}=1;\quad c_5=\frac{\partial W_3}{\partial\alpha_5'}=-1;\ c_1=c_4=c_6=0.$$

ყველა კოეფიციენტის განზომილება ნულოვანია $\left(\frac{\text{სეკ.}}{\text{სეკ.}}\right)=(0)$.

ახლა გამოვითვალოთ $\Phi_{\alpha_6}=\alpha_6=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები.

$$\varphi_1=\frac{\partial\Phi_{\alpha_6}}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial\alpha_6}{\partial\alpha_1}=1;\quad \varphi_2=\frac{\partial\alpha_6}{\partial\alpha_2}=1;\quad \varphi_3=\frac{\partial\alpha_6}{\partial\alpha_3}=1;\ \varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=0.$$

ეს კოეფიციენტებიც ნულოვანი განზომილებისაა.

Φ_{α_6} წონითი ფუნქციის მიმართ ისე ვიქცევით, როგორც პირობითი განტოლებების მიმართ, ე. ი. ამ ფუნქციას ვთვლით მეოთხე პირობით განტოლებად. მაშასადამე, კოეფიციენტები გვექნება 18+6=24. Φ_{α_6} როგორც ფუნქცია α_1, α_2, α_3 გაწონასწორებული სიდიდეებისა სასწავლო მიზნითაა აღებული. იგივე სიდიდის შებრუნებულ წონას მივიღებთ, თუ გამოვითვლით შებრუნებულ წონას α_6-სათვის, ე. ი. $\varphi_6=1$. დანარჩენი კოეფიციენტები კი ნული იქნება.

III. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების და Φ_{α_6} ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენა (სქემა 3).

უმრავლეს შემთხვევაში ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტები გამოითვლება არანაკლებ 3—4 ნიშნადი ციფრების შენარჩუნებით. (3) სქემა შედგენილია (1) სქემის შესაბამისად, რადგანაც Φ_{α_6} წონით ფუნქციასთანაც გვაქვს საქმე.

სქემაში ჭადრაკული (სტრიქონებისა და სვეტების) კონტროლი შესრულებულია შემდეგნაირად:

1. $a_i+b_i+c_i=S_i$;

2. $[a]+[b[+[c]=2+1+1=2+3+2-1-1-1=[S]$;

3. $[aa]+[ab]+[ac]=4+2+2=2+3+2+1=[aS]$;

4. $[ab]+[bb]+[bc]=2+3+1=2+3+1=[bS]$;

5. $[ac]+[bc]+[cc]=2+1+3=3+2+1=[cS]$;

1′. $a_i+b_i+c_i+\varphi_i=S_i+\varphi_i=\Sigma_i$;

2′. $[a]+[b]+[c]+[\varphi]=2+1+1+3=3+4+3-1-1-1=[\Sigma]$;

3′. $[aS]+[a\varphi]=8+3=3+4+3+1=[a\Sigma]$;

4′. $[bS]+[b\varphi]=6+2=3+4+1=[b\Sigma]$;

5′. $[cS]+[c\varphi]=6+2=4+3+1=[c\Sigma]$.

სქემა 4.7.1.3

№№ რიგ-ზე	a	b	c	S	φ	Σ	aa	ab	ac	aS	$a\varphi$	$a\Sigma$	bb	bc	bS	$b\varphi$	$b\Sigma$	cc	cS	$c\varphi$	$c\Sigma$	$\varphi\varphi$	$\varphi\Sigma$
1	1	1	0	2	1	3	1	1	0	2	1	3	1	0	2	1	3	0	0	0	0	1	3
2	1	1	1	3	1	4	1	1	1	3	1	4	1	1	3	1	4	1	3	1	4	1	4
3	1	0	1	2	1	3	1	0	1	2	1	3	0	0	0	0	0	1	2	1	3	1	3
4	0	—1	0	—1	0	—1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	—1	—1	0	—1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	—1	0	0	—1	0	—1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ჯამი	2	1	1	4	3	7	4	2	2	8	3	11	3	1	6	2	8	3	6	2	8	3	10

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა — როგორც ვიცით, პირობით განტოლებათა შედგენა, კოეფიციენტების განსაზღვრა და მათი სქემაში შეტანა ვერ კონტროლდება, ამიტომ საჭიროა აღნიშნული სამუშაო შეასრულოს ორმა გამომთვლელმა დამოუკიდებლად.

1. კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემისა და ჯამური განტოლების შედგენა.

ვსარგებლობთ (3) სქემიდან.

$$
\begin{aligned}
&4{,}0K_1+2{,}0K_2+2{,}0K_3+2{,}2=0;\\
&2{,}0K_1+3{,}0K_2+1{,}0K_3+2{.}0=0;\\
&2{,}0K_1+1{,}0K_2+3{,}0K_3-0{,}8=0.\\
\hline
\text{ჯამური ტოლობა }\ &8{,}0K_1+6{,}0K_2+6{,}0K_3+3{,}4=0.
\end{aligned}
\qquad (4.7.1.3)
$$

ჯამური ტოლობა გამოგვადგება ნორმალური განტოლებების ამოხსნით განსაზღვრული კორელატების შესამოწმებლად.

2. ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის სქემა (4).

(4) სქემის a, b და c სტრიქონებში ჩანაწერი რიცხვების კონტროლისათვის შევადგინოთ ჯამები (3) სქემის გამოყენებით:

$$
\begin{aligned}
S'_1&=[aS]+W_1=8{,}00+2{,}20=10{,}2;\\
S'_2&=[bS]+W_2=6{,}00+2{,}00=8{,}00;\\
S'_3&=[cS]+W_3=6{,}00-0{,}80=5{,}20.
\end{aligned}
$$

მიღებული რიცხვები შესაბამისად ტოლი უნდა იყოს K_1, K_2, K_3 და W სვეტის a, b და c სტრიქონებში ჩაწერილი რიცხვების ჯამისა. მაგალითად, a სტრიქონისათვის მოითხოვება ტოლობა:

$$[aS]+W_1=[aa]+[ab]+[ac]+W_1,$$

ანუ (3) და (4) სქემიდან

$$8{,}00+2{,}20=4{,}00+2{,}00+2{,}00+2{,}20=10{,}2.$$

შემოწმების შემდეგ მიღებული ჯამი 10,20 იწერება კონტროლის სვეტის a სტრიქონში. ანალოგიურად ხდება სტრიქონული კონტროლი b და c სტრიქონებში (იხილეთ 4 სქემის შენიშვნის სვეტი).

3. კორელატების განსაზღვრამდე კონტროლი.

აქ მოითხოვება (4. 3. 4. 12) და (1) საკონტროლო ფორმულების მარჯვენა ნაწილების ტოლობა (განსხვავება დასაშვებია მესამე ნიშნად ციფრამდე). ამისათვის შევადგენთ (4) სქემის W სვეტის ეკვივალენტური და სათანადო ელიმინაციური სტრიქონების ჩანაწერთა ნამრავლების ჯამს:

$$
\begin{aligned}
\frac{W_1^2}{[aa]}+\frac{(W_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(W_3\cdot 1)^2}{[cc\cdot 2]}&=2{,}20\times(-0{,}55)+0{,}90\times(-0{,}45)+\\
&+(-1{,}9)\times(+0{,}95)=-3{,}42.
\end{aligned}
\qquad W)
$$

ეს გამოთვლები შესრულებულია (4) სქემის W სვეტში უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ.

ასევე S' სვეტში ჩაიწერება $[W]$ ჯამით და W და S' სვეტის ეკვივალენტური და სათანადო ელიმინაციური სტრიქონების ჩანაწერთა ირიბი გადამრავლებით მიღებული რიცხვების ალგებრული ჯამი:

სქემა 4.7.1.4

(4) სქემა შედგენილია (2) სქემის მიხედვით.

№№ რიგზე	აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	W	S'	φ	Σ	კონტროლი	შენიშვნა
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	a	+4,00	+2,	+2,00	+2,20	+10,2	+3,00	+11,00	+10,20	$S_1'=[aS]+W_1=8+2,2==10,20$ ექვივალენტური სისტემის პირველი სტრიქონი
2	E_1	−1	−0,500	−0,500	−0,550	−2,550	−0,750	−2,750	−2,550	I ელიმინაციური სტრ.
3										
4	b		+3,00	+1,00	+2,00	8,00	+2,00	+8,00	+8,00	$S_2'=[bS]+W_2==6+2=8,00$
5	$E_1\times a_2$		−1,00	−1,00	−1,10	−5,10	−1,50	−5,50		
6	$b\cdot 1$		+2,00	0	+0,90	+2,90	+0,50	+2,50	+2,90	ექვივალენტური სისტემის მეორე სტრიქონი
7	E_2		−1	0	−0,450	−1,450	−0,250	−1,250	−1,450	II ელიმ. სტრიქონი
8										
9	c			+3,00	−1,80	+5,20	+2,00	+8,00	+5,20	$S_3'=[cS]'+W_3==6-0,8=5,20$
10	$E_1\times a_3$			−1,00	−1,10	−5,10	−1,50	−5,50		
11	$E_2\times b\cdot 1_3$			0	0	0	0	0		
12	$c\cdot 2$			+2,00	−1,90	+0,10	+0,50	+2,50	+0,10	ექვივალენტური სისტემის მესამე სტრიქონი
13	E_3			−1	+0,950	−0,050	−0,250	−1,250	−0,050	III ელიმ. სტრიქონი

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
14										
15		−0,55	−0,45	+0,95	0	+3,400	+3,000	+10,000		
16		−0,47	0	K_3	−1,210	−5,610	−2,250	− 8,250		
17		+0,22	−0,45		−0,405	−1,305	−0,125	− 0,625		
18		−0,80	K_2		−1,805	+0,095	−0,125	− 0,625		
19		K_1			−3,420	−3,420	+0,500	+ 0,500		
					−[WK]	[WK]	$\frac{1}{P_{\Phi_{a_6}}}(0)$	$\frac{1}{P_{\Phi_{a_6}}}(0)$		
					−3,410	−3,410				
					[სნ]					

$$[W]+\frac{W_1\cdot S_1'}{[aa]}+\frac{W_2\cdot 1\times S_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}+\frac{W_3\cdot 2\times S_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=(2{,}20+2{,}00-0{,}80)+$$

$$+2{,}20\times(-2{,}55)+0{,}90\times(-1{,}45)+(-1{,}90)\times(-0{,}05)=-3{,}42 \qquad S')$$

გამოთვლები შესრულებულია (4) სქემის S' სვეტში უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ.

W) და S') დამოკიდებულების გამონათვალთა ტოლობა ნიშნავს იმას, რომ სქემის ის ნაწილი, რომლითაც უნდა გამოითვალოს კორელატები, დამუშავებულია სწორად. ამ კონტროლის შემდეგ იწყება კორელატების გამოთვლა. სქემა (4).

4. კორელატების განსაზღვრა

შესრულებული კონტროლის შემდეგ (4. 3. 2. 7) ელიმინაციური სისტემის შესაბამისად გამოითვლება K_3, K_2 და K_1 კორელატი E_3, E_2 და E_1 ელიმინაციური სტრიქონების საშუალებით, შემდეგნაირად:

$$K_3=-\frac{W_3\cdot 2}{[cc\cdot 2]}=+0{,}95;$$

ეს გამონათვალი W სვეტის E_3 სტრიქონიდანაა გადატანილი K_3 სვეტში (პრაქტიკაში ეს სიდიდე იწერება 14 თავისუფალი სტრიქონის K_3 სვეტში).

$$K_2=-\frac{W_2\cdot 1}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}K_3=-0{,}450+0\cdot K_3=-0{,}45;$$

გამოთვლები და პასუხი ჩაწერილია სქემის K_2 სვეტში (პრაქტიკულად ყოველივე იწერება 8 თავისუფალი სტრიქონის W, K_3 და K_2 სვეტში).

$$K_1=-\frac{W_1}{[aa]}-\frac{[ac]}{[aa]}K_3-\frac{[ab]}{[aa]}K_2=-0{,}550+(-0{,}500)\cdot 0{,}950+$$

$$+(-0{,}500)\cdot(-0{,}450)=-0{,}550-0{,}475+0{,}225=-0{,}80;$$

გამოთვლები და პასუხი ჩაწერილია სქემის K_1 სვეტში (პრაქტიკულად ყოველივე იწერება მე-3 თავისუფალი სტრიქონის W, K_3, K_2 და K_1 სვეტში).

5. კორელატების გამოთვლის კონტროლი

აქ გამოიყენება (3) ჯამური ტოლობა, რომლითაც მოითხოვება:

$$8{,}0K_1+6{,}0K_2+6{,}0K_3+3{,}4=0.$$

გამოთვლილი კორელატების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$8{,}0\cdot(-0{,}80)+6{,}0(-0{,}45)+6{,}0\cdot 0{,}95+3{,}4=0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ კორელატების გამოთვლა შესრულებულია უშეცდომოდ და დამრგვალების შეცდომის გარეშე.

6. პირველი კონტროლი

ზემოხსენებულის შემდეგ უნდა მოველოდეთ, რომ (4. 3. 4. 12) და (1) ტოლობის მარცხენა ნაწილიც იგივე რიცხვითი სიდიდისა იქნება, რაც მარჯვენაში იყო მიღებული W) და S') ფორმულებით სქემის დამუშავების დროს. მართლაც

$$-[WK]=2{,}20\times(-0{,}80)+2{,}00(-0{,}45)+(-0{,}80)\cdot 0{,}95=$$
$$=-1{,}76-0{,}90-0{,}76=-3{,}42.$$

ამით მთავრდება პ ი რ ვ ე ლ ი კ ო ნ ტ რ ო ლ ი, რაც გვაძლევს უფლებას (4) სქემის W და S' სვეტში გამოთვლილი ჯამის (—3,42) ქვეშ ჩავწეროთ —$[WK]$ და $[WK]$ სიმბოლო.

პ ი რ ვ ე ლ ი კ ო ნ ტ რ ო ლ ი ს დარღვევა შეიძლება მესამე ნ ი შ ნ ა დ ი ციფრის ფარგლებში.

V. შესწორებების გამოთვლა და მეორე კონტროლი

შესწორებების გამოთვლა სრულდება (4. 3. 1. 13) სისტემის შესაბამისად (5) სქემაში:

ს ქ ე მ ა 4.7.1.5

განაზომთა №№	aK_1	bK_2	cK_3	ε	$\varepsilon\varepsilon$	შ ე ნ ი შ ვ ნ ა
1	—0,80	—0,45	0	—1″,25	1,56	$[\varepsilon\varepsilon]$ ჯამი
2	—0,80	—0,45	+0,95	—0 ,30	0,09	$\varepsilon\varepsilon$ სვეტის გარეშე შეიძლება მივიღოთ არითმომეტრზე.
3	—0,80	0	+0,95	+0 ,15	0,02	
4	0	+0,45	0	+0 ,45	0,20	
5	0	0	—0,95	—0 ,95	0,90	
6	+0,80	0	0	+0 ,80	0,64	
					3,41	
					$[\varepsilon\varepsilon]$	

გამოთვლილ შესწორებებს ჩავსვამთ პირობით ტოლობებში:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_6+W_1=-1'',25-0'',30+0'',15-0'',80+2'',2=0;$$
$$\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4+W_2=-1'',25-0'',30-0'',45+2'',0=0;$$
$$\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5+W_3=-0'',30+0'',15+0'',95-0'',8=0.$$

აქვე სრულდება მეორე კონტროლი (4. 3. 4. 6) ფორმულით, ანუ აქ ხდება შედარება (4. 3. 4. 12) ფორმულის მიხედვით გამოთვლილ W) ფორმულაში მიღებული შედეგის სქემა (5) $\varepsilon\varepsilon$ სვეტში მიღებულ ჯამთან:

$$[\varepsilon\varepsilon]=-[WK],$$

განსახილველი მაგალითისათვის:

$$3{,}41\approx 3{,}42.$$

როგორც ვხედავთ, განსხვავება არ სცდება დადგენილი სიზუსტის ფარგლებს.

ამის შემდეგ (4) სქემაში —$[WK]$ ჩანაწერს ქვეშ მიეწერება $[\varepsilon\varepsilon]$. აქვე შევნიშნავთ, რომ საჭიროა (3) ნორმალურ განტოლებათა ჯ ა მ უ რ ი ტ ო ლ ო ბ ი ს ა (სტრიქონი 178) და პირობით განტოლებათა (სტრიქონი 179) გამონათვლების შედეგები ურთიერთტოლი იყოს, რაც განხილად შემთხვევაში დაცულია.

VI. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა

გაწონასწორებული კუთხეების სიდიდეები განისაზღვრება განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 3. 2. 5) ფორმულის შესაბამისად (6) სქემის საფუძველზე.

ჩვეულებრივ მცირე სივრცის შემცველი ტრიანგულაციის ქსელების კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა ხდება 0″,1 სიზუსტით.

აქ გაწონასწორება მოხდენილია 0″,01—0″,02 სიზუსტით.

სქემა 4.7.1.6

№№	კუთხეები	განაზომები α_i'	შესწორებები ε_i	გაწონასწორებული მნიშვნელობები $\alpha_i=\alpha_i'+\varepsilon_i$
1	*AOB*	44°03′14″,0	—1″,25	44°03′12″,75
2	*BOC*	43 14 19 ,2	—0 ,30	43 14 18 ,90
3	*COD*	53 33 32 ,9	+0 ,15	53 33 33 ,05
4	*AOC*	87 17 31 ,2	+0 ,45	87 17 31 ,65
5	*BOD*	96 47 52 ,9	—0 ,95	96 47 51 ,95
6	*AOD*	140 51 03 ,9	+0 ,80	140 51 04 ,70

VII. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების საბოლოო კონტროლი

ეს კონტროლი ამოწმებს ყველა გამოთვლას, პირობითი განტოლებების შედგენიდან და კოეფიციენტების განსაზღვრიდან ბოლომდე. ამ კონტროლის დანიშნულებაა გაისინჯოს შესრულებულია თუ არა გეომეტრიული პირობა.

დავიცვათ ტოლობები:

$$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2;$$
$$\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3;$$
$$\alpha_6=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

მართლაც (6) სქემიდან შედგება (7)' სქემა.

სქემა 4.7.1.7

მოთხოვნილი გეომეტრიული პირობის №№	კუთხეების კომბინაცია	კუთხეების ალგებრული ჯამი	შესაბამისი გაწონასწორებული კუთხეები
1	$\alpha_1+\alpha_2$	87°17′31″,65	$\alpha_4=$ 87°17′31″,65
2	$\alpha_2+\alpha_3$	96 47 51 ,95	$\alpha_5=$ 96 47 51 ,95
3	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	140 51 04 ,70	$\alpha_6=$140 51 04 ,70

VIII. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 9. 6) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}=\pm\sqrt{\frac{3{,}41}{3}}=\pm1'',07.$$

2. განაზომთა ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის [14] (4. 9. 13. 18) ფორმულის შესაბამისად m-ის განსაზღვრის შეცდომა

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(r-1)}} = \pm \frac{1'',07}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \pm \frac{1'',07}{2} \approx 0'',54,$$

სადაც $r=3$ ჰარბ განაზომთა რაოდენობაა.

3. (4. 4. 9. 5) ფორმულის შესაბამისად ნებისმიერი გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$M_{\alpha_i} = m \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}} =$$

$$= \pm 1'',07 \sqrt{\frac{3}{6}} \approx \pm 0'',75.$$

IX. $\Phi_{\alpha_8} = \alpha_8 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ წონითი ფუნქციის სიზუსტის შეფასება

მოცემული ფუნქციის შებრუნებული წონა გამოითვლება (2) და (4) სქემის φ და Σ სვეტებში. გამოთვლა ჩაწერილია უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვემოთ. ამ გამოთვლებისა და სათანადო კონტროლის შესახებ ყოველივე აღნიშნულია ამ პარაგრაფის პრაქტიკული მითითებების მეექვსე მუხლში, რაც სრულიად ანალოგიურია W და S' სვეტებში შესრულებული მოქმედებებისა.

(4) სქემის φ სვეტიდან შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_{\Phi_{\alpha_8}}} = 0,50(0), \text{ ანუ წონა } P_{\Phi_{\alpha_8}} = 2(0),$$

ხოლო მისი დისპერსია (4.4.9.7) ფორმულით

$$M^2_{\Phi_{\alpha_8}} = \frac{m^2}{P_{\Phi_{\alpha_8}}} = m^2[\varphi\varphi \cdot 3] = (1'',07)^2 \cdot 0,50 \approx 0'',57,$$

ანუ საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$M_{\Phi_{\alpha_8}} \approx \pm 0'',76.$$

ეს იგივეა რაც (4. 4. 9. 5) ფორმულით მიღებული სიდიდე (იხილეთ VIII მუხლი).

ამ შეცდომის დადგენის შეცდომა იქნება

$$M_{M_{\Phi_{\alpha_8}}} = m_m \sqrt{\frac{1}{P_{\Phi_{\alpha_8}}}} = \pm 0,54 \cdot \sqrt{0,50} = \pm 0'',38.$$

მოვიყვანოთ განხილული მაგალითის სრული ანალიზი. ვთქვათ, საჭიროა $\Phi_{\alpha_4} = \alpha_1 + \alpha_2$ როგორც ფუნქციის შეფასება (ეს იგივე α_4 გაწონასწორებული კუთხის შეფასებაა). ამისათვის (3) სქემაში შეიცვლება, მხოლოდ φ, Σ, $a\varphi$, $a\Sigma$, $b\varphi$, $b\Sigma$, $c\varphi$, $c\Sigma$, $\varphi\varphi$, $\varphi\Sigma$ სვეტები და (4) სქემაში ამ მონაცემების საფუძველზე შეიცვლება φ და Σ სვეტი. $\Phi_{\alpha_4} = \alpha_1 + \alpha_2$ ფუნქციას მივიღებთ მეოთხე განტოლებად (მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, იგი პირობითი განტოლება არაა), მისი კერძო წარმოებულები α_1 და α_2 ელემენტით მიიღება: $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, ხოლო $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$. მაშასადამე (3) სქემას, რომელიც შედგენილია სამი პირობითი განტოლებისათვის შეუერთდება განსახილველი ფუნქციის მონაცემები (სქემა (8)), ხოლო (4) სქემას შეუერთდება (9) სქემა. ანალოგიური გზით მიიღება

$\Phi_{a_5} = a_2 + a_3$ ფუნქციის, ანუ a_6 და a_1, a_2, a_3 გაწონასწორებული ელემენტების შებრუნებული წონები (იხილეთ სქემები (10) და (11); (12) და (13); (14) და (15); (16) და (17)). როგორც განხილული სქემებიდან ჩანს, ყველა ფუნქციის წონა, მაშასადამე, დისპერსია და საშუალო კვადრატული შეცდომა ერთი და იგივე ოდენობისაა.

აქვე შევნიშნავთ, რომ როცა გაწონასწორებული სიდიდის ფუნქციად მივიღებთ თვით გაწონასწორებულ სიდიდეს, მაშინ (4. 4. 9. 5) ფორმულით და სქემით მიღებული შებრუნებული წონით (ანუ (4. 4. 9. 7) ფორმულით) შეფასების შედეგი დაახლოებით ტოლი ოდენობის გამოვა. იხილეთ განხილული მაგალითის ყველა ელემენტის რიცხვობრივი მახასიათებლები.

$\Phi_{a_4} = a_1 + a_2$ ფუნქციისათვის

სქემა 4.7.1.8

№№	S	φ	Σ	aφ	aΣ	bφ	bΣ	cφ	cΣ	φφ	φΣ
1	2	1	3	1	3	1	3	0	0	1	3
2	3	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0
4	—1	0	—1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	—1	0	—1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	—1	0	—1	0	1	0	0	0	0	0	0
ჯამი	4	2	6	2	10	2	8	1	7	2	

7

$\Phi_{a_4} = a_1 + a_2$ ფუნქციისათვის

სქემა 4.7.1.9

	φ	Σ
a	+2,0	+10,0
E_1	—0,50	— 2,50
b	+2,0	+8,0
$E_1 \cdot a_2$	—1,0	—5,0
$b \cdot 1$	+1,0	+3,0
E_2	—0,50	—1,5
c	+1,0	+7,0
$E_1 \cdot a_3$	—1,0	—5,0
$E_2 \cdot b \cdot 1_3$	0	0
$c \cdot 2$	0	+2,0
E_3	0	—1,0
	+2,0	+7,0
	—1,0	—5,0
	—0,5	—1,5
	0	0
	+0,500	+0,500
	P_{a_4}	P_{a_4}

$\Phi_{a_5} = a_2 + a_3$ ფუნქციისათვის

სქემა 4.7.1.10

№№	S	φ	Σ	aφ	aΣ	bφ	bΣ	cφ	cΣ	φφ	φΣ
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0
2	3	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	1	3	1	3	0	0	1	3	1	3
4	—1	0	—1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	—1	0	—1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	—1	0	—1	0	1	0	0	0	0	0	0
ჯამი	4	2	6	2	10	1	7	2	8	2	7

$\Phi_{a_5} = a_2 + a_3$ ფუნქციისათვის

სქემა 4.7.1.11

	φ	Σ
a	2,0	10,0
E_1	—0,50	— 2,5
b	+1,0	+7,0
$E_1 \cdot a_2$	—1,0	—5,0
$b \cdot 1$	0	+2,0
E_2	0	—1,0
c	+2,0	+8,0
$E_1 \cdot a_3$	—1,0	—5,0
$E_2 \cdot b \cdot 1_3$	0	0
$c \cdot 2$	+1,0	+3,0
E_3	—0,5	—1,5
	+2,0	+7,0
	—1,0	—5,0
	0	0
	—0,5	—1,5
	+0,500	+0,500
	$\frac{1}{P_{a_5}}$	$\frac{1}{P_{a_5}}$

a_1-სათვის სქემა 4.7.1.12

№№	s	φ	Σ	aφ	aΣ	bφ	bΣ	cφ	cΣ	φφ	φΣ
1	2	1	3	1	3	1	3	0	0	1	3
2	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	0
3	2	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0
4	—1	0	—1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	—1	0	—1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	—1	0	—1	0	1	0	0	0	0	0	0
ჯამი	4	1	5	1	9	1	7	0	6	1	3

a_1-სათვის სქემა 4.7.1.13

	φ	Σ
a E_1	+1,0 —0,25	+9,0 —2,25
b $E_1\cdot a_2$	+1,0 —0,50	+7,0 —4,50
$b\cdot 1$ E_2	+0,50 —2,25	+2,50 —1,25
c $E_1\cdot a_3$ $E_2\cdot b\cdot 1_3$	0 —0,50 0	+6,0 —4,50 0
$c\cdot 2$ E_3	—0,50 +0,25	+1,50 —0,75
	+1,000 —0,250 —0,125 —0,125	+3,000 —0,250 —0,625 0,375
	+0,500	+0,500
	$\frac{1}{P_{a_1}}$	$\frac{1}{P_{a_1}}$

a_2-სათვის სქემა 4.7.1.14

№№	s	φ	Σ	aφ	aΣ	bφ	bΣ	cφ	cΣ	φφ	φΣ
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0
2	3	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
3	2	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0
4	—1	0	—1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	—1	0	—1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	—1	0	—1	0	—1	0	0	0	0	0	0
ჯამი	4	1	5	1	7	1	7	1	7	1	4

a_2-სათვის სქემა 4.7.1.15

	φ	Σ
a E_1	+1,0 —0,25	+7,0 —1,75
b $E_1\cdot a_2$	+1,00 —0,50	+7,0 —3,50
$b\cdot 1$ E_2	+0,50 —0,250	+3,50 —1,75
c $E_1\cdot a_3$ $E_2\cdot b\cdot 1_3$	+1,0 —0,50 0	+7,0 —3,50 0
$c\cdot 2$ E_3	+0,50 —0,25	+3,50 —1,75
	+1,000 —0,250 —0,125 —0,125	+4,000 —1,750 —0,875 —0,875
	+0,500	+0,500
	$\frac{1}{P_{a_2}}$	$\frac{1}{P_{a_2}}$

a_3-სათვის სქემა 4.7.1.16

№№	s	φ	Σ	aφ	aΣ	bφ	bΣ	cφ	cΣ	φφ	φΣ
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0
2	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	0
3	2	1	3	1	3	0	0	1	3	1	3
4	—1	0	—1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	—1	0	—1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	—1	0	—1	0	1	0	0	0	0	0	0
ჯამი	4	1	5	1	9	0	6	1	7	1	3

a_3-სათვის სქემა 4.7.1.17

	φ	Σ
a E_1	+1,0 —0,25	+9,0 —2,25
b $E_1\cdot a_2$	0 —0,50	6,0 —4,50
$b\cdot 1$ E_2	—0,50 +0,25	+1,50 —0,75
c $E_2\cdot a_3$ $E_2\cdot b\cdot 1_3$	+1,0 —0,5 0	+7,0 —4,50 0
$c\cdot 2$ E_3	0,5 —0,25	2,50 —1,25
	+1,000 —0,250 —0,125 —0,125	+3,000 —2,250 0,375 —0,625
	+0,500	+0,500
	$\frac{1}{P_{a_3}}$	$\frac{1}{P_{a_3}}$

მაშასადამე,

$$P_{a_1}=P_{a_2}=P_{a_3}=P_{a_4}=P_{a_5}=P_{a_6}=2.$$

შენიშვნა. 1) Φ_{α_1}, Φ_{α_5}, Φ_{α_6}, როგორც α_1, α_2 და α_3 ფუნქციები განხილულია სასწავლო მიზნით. შეიძლებოდა უფრო მარტივად გაგვესაზღვრა მათი წონები $\Phi_{\alpha_4}=\alpha_4$; $F_{\alpha_5}=\alpha_5$ და $F_{\alpha_6}=\alpha_6$ ფუნქციების შესაბამისად. პასუხი იგივე იქნებოდა.

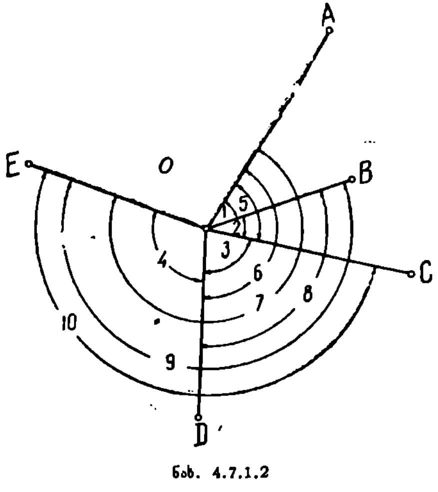
2) განხილადი და სხვა ანალოგიური სახის მაგალითებისათვის საჭირო გამოთვლები შეიძლება შესრულდეს ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 1. (1) ნახაზისა და (2) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მიხედვით მოხდეს პირობით განაზომთა წესით გაწონასწორება-შეფასება უშუალო განაზომთა; აგრეთვე შეფასდეს α_1, α_2, α_3, α_5, α_6 გაწონასწორებული კუთხეები [2]. შედარდეს პასუხი (4. 9. 5) და (4. 9. 7) ფორმულებისა.

ც ხ რ ი ლ ი 4.7.1.2

№№ რიგზე	კუთხეები	განაზომები სეკუნდების გარეშე	ვარიანტები									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			განაზომი კუთხეების სეკუნდები									
1	*AOB*	44°03′	14,5	13,5	14,0	13,0	12,5	12,0	15,0	16,1	15,6	14,7
2	*BOC*	43 14	20,0	20,3	19,2	21,0	20,5	21,0	18,5	19,2	19,1	18,7
3	*COD*	53 33	33,5	32,4	32,9	31,8	31,3	30,7	31,0	30,4	30,0	29,5
4	*AOC*	87 17	31,0	30,7	31,2	31,5	30,5	30,6	31,2	32,1	32,8	32,9
5	*BOD*	96 47	53,0	55,1	52,9	54,0	51,4	52,3	50,2	50,1	50,0	51,1
6	*AOD*	140 51	05,0	04,5	03,9	03,5	01,8	01,4	01,2	02,9	01,5	02,2

მაგალითი 4. 7. 1. 2. პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს ყველა შესაძლო კომბინაციით არატოლზუსტად გაზომილი კუთხეები. შეფასდეს უშუალოდ გაწონასწორებული კუთხეები როგორც გაწონასწორებამდე, ისე გაწო-



ნახ. 4.7.1.2

ნასწორების შემდეგ. შეფასდეს $BOE=\alpha_9$, გაწონასწორებული კუთხე, როგორც ფუნქცია $BOC=\alpha_2$, $COD=\alpha_3$, $DOE=\alpha_4$ გაწონასწორებული კუთხეებისა. (2) ნახაზის შესაბამისად მონაცემები (3) ცხრილშია, რომელიც ამოღებულია [18] წიგნიდან.

ცხრილი 4.7.1.3.

კუთხეების №№	დასახელება	განაზომები $l_i = a_i'$	სრული წრიული ილეთების რაოდენობა n	წონები $P_i = \frac{n}{4}$
1	*AOB*	15°37′32″,7	24	6
2	*BOC*	29 43 13 ,6	8	2
3	*COD*	111 02 43 ,1	16	4
4	*DOE*	112 20 49 ,3	8	2
5	*AOC*	45 20 47 ,3	16	4
6	*AOD*	156 23 28 ,8	32	8
7	*AOE*	268 44 19 ,8	12	3
8	*BOD*	140 45 57 ,1	24	6
9	*BOE*	250 06 45 ,0	4	1
10	*COE*	223 23 30 ,9	32	8
			176	44

გაზომილი კუთხეები აღვნიშნოთ α_i', გაწონასწორებული — α_i, სრულ. წრიული ილეთების რაოდენობა — n-ით. W შეუკვრელობა და ε შესწორებები გამოვსახოთ სეკუნდებში. ერთეულ წონად მივიღოთ ოთხი სრული წრიული ილეთი, ე. ი.

$$P_i = \frac{n}{4} \cdot$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

I. პირობით განტოლებათა შედგენა და W_i შეუკვრელობების გამოთვლა

გაზომილია ათი კუთხე. საჭიროა ოთხი კუთხე (α_1', α_2', α_3', α_4'). დანარჩენი ექვსი კუთხე ზედმეტია, ე. ი. უნდა შედგეს ექვსი ურთიერთდამოუკიდებელი პირობითი განტოლება, ასეთები იქნება:

1. $\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_5 \quad +W_1=0,$ სადაც $W_1=\alpha_1'+\alpha_2'-\alpha_5' \quad = -1'',0;$
2. $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_6 \quad +W_2=0,$ „ $W_2=\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'-\alpha_6' \quad = +0'',6;$
3. $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_7+W_3=0,$ „ $W_3=\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'-\alpha_7' = -1'',1;$
4. $\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_8 \quad +W_4=0,$ „ $W_4=\alpha_2'+\alpha_3'-\alpha_8' \quad = -0'',4;$
5. $\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_9 \quad +W_5=0,$ „ $W_5=\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'-\alpha_9' \quad = +1'',0;$
6. $\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_{10} \quad +W_6=0,$ „ $W_6=\alpha_3'+\alpha_4'-\alpha_{10}' \quad = +1'',5.$

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობებისა და Φ_{α_9} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლა

პირობით განტოლებათა რაოდენობაა ექვსი, ერთი კიდევ Φ_{α_9} ფუნქციაა. მაშასადამე, შვიდი ტოლობისა და გაზომილი ათი კუთხის შესაბამისად კოეფიციენტების რაოდენობა გვექნება 70. განტოლებათა კერძო წარმოებულები მოგვცემს:

პირველი განტოლებიდან $a_1=a_2=1;\ a_5=-1;\ a_3=a_4=a_6=a_7=a_8=a_9=a_{10}=0;$

მეორე " $b_1=b_2=b_3=1;\ b_6=-1;\ b_4=b_5=b_7=b_8=b_9=b_{10}=0;$

მესამე " $c_1=c_2=c_3=c_4=1;\ c_7=-1;\ c_5=c_6=c_8=c_9=c_{10}=0;$

მეოთხე " $d_2=d_3=1;\ d_8=-1;\ d_1=d_4=d_5=d_6=d_7=d_9=d_{10}=0;$

მეხუთე " $e_2=e_3=e_4=1;\ e_9=-1;\ e_1=e_5=e_6=e_7=e_8=e_{10}=0;$

მეექვსე " $f_3=f_4=1;\ f_{10}=-1;\ f_1=f_2=f_5+f_6=f_7=f_8=f_9=0.$

$\Phi_{\alpha_9}=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ ფუნქციისათვის $\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=1;\ \varphi_1=\varphi_5=\varphi_6=\varphi_7=\varphi_8=\varphi_9=\varphi_{10}=0$. (4.6.1.1) დამოკიდებულებების შესაბამისად ყველა კოეფიციენტი ნულოვანი განზომილებისაა.

III. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების და Φ_{α_9} ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენა (სქემა 18).

ეს სქემა შედგენილია (1) სქემის მიხედვით.

IV, ნორმალური განტოლებების ამოხსნა და პირველი კონტროლი

1. კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემის და ჯამური განტოლების შედგენა

$$0{,}9167K_1+0{,}6667K_2+0{,}6667K_3+0{,}5000K_4+0{,}5000K_5 \qquad -1{,}0=0;$$
$$0{,}6667K_1+1{,}0417K_2+0{,}9167K_3+0{,}7500K_4+0{,}7500K_5+0{,}2500K_6+0{,}6=0;$$
$$0{,}6667K_1+0{,}9167K_2+1{,}7500K_3+0{,}7500K_4+1{,}2500K_5+0{,}7500K_6-1{,}1=0;$$
$$0{,}5000K_1+0{,}7500K_2+0{,}7500K_3+0{,}9167K_4+0{,}7500K_5+0{,}2500K_6-0{,}4=0;$$
$$0{,}5000K_1+0{,}7500K_2+1{,}2500K_3+0{,}7500K_4+2{,}2500K_5+0{,}7500K_6+1{,}0=0;$$
$$+0{,}2500K_2+0{,}7500K_3+0{,}2500K_4+0{,}7500K_5+0{,}8750K_6+1{,}5=0;$$

ჯამური განტოლება

$$3{,}2501K_1+4{,}3751K_2+6{,}0834K_3+3{,}9167K_4+6{,}2500K_5+2{,}8750K_6+ +0{,}6=0;$$

2. ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა, სქემა (19).

აქ გამოთვლები შესრულებულია ზედმეტი (არასაჭირო რაოდენობის) ნიშნადი ციფრებით. დამრგვალებით შევამოწმეთ, რომ საკმარისი იქნებოდა ნაკლები რაოდენობის ნიშნადი ციფრების ფარგლებში გამოთვლა.

3. კორელატების განსაზღვრამდე კონტროლი.

გამოთვლები შესრულებულია (19) სქემის W და S' სვეტში.

4. კორელატების განსაზღვრა.

გამოთვლები შესრულებულია (19) სქემაში W და S' სვეტების გამონათვალთა თანმთხვევის შემდეგ.

სქემა 4.7.1.20

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	eK_5	fK_6	[ ]	$\frac{1}{P}$	ε	$\varepsilon\varepsilon$	$P\varepsilon\varepsilon$
1	+0,86640	−4,8993	+4,0309				−0,0020	0,1667	−0,0003	0,0000	0,0000
2	+0,86640	−4,8993	+4,0309	+2,3262	−0,7565		+1,5677	0,5000	+0,7838	0,6144	1,2288
3		−4,8993	+4,0309	+2,3262	−0,7565	−3,7858	−3,0845	0,2500	−0,7711	0,5946	2,3784
4			+4,0309		−0,7565	−3,7858	−0,5114	0,5000	−0,2557	0,0653	0,1306
5	−0,86640						−0,8664	0,2500	−0,2166	0,0469	0,1876
6		+4,8993					+4,8993	0,1250	+0,6124	0,3750	3,0000
7			−4,0309				−4,0305	0,3333	−1,3435	1,8050	5,4150
8				−2,3262			−2,3260	0,1667	−0,3877	0,1503	0,9018
9					+0,7565		+0,7560	1	+0,7560	0,5715	0,5715
10						+3,7858	+3,7858	0,1250	+0,4732	0,2239	1,7914
											15,6051 [$P\varepsilon\varepsilon$]

5. კორელატების გამოთვლის კონტროლი (4. 3. 4. 13") ჯამური ფორმულით.

კორელატების მნიშვნელობები (19) სქემიდან შევიტანოთ ჯამურ ტოლობაში, მივიღებთ:

$$3{,}2501 \times 0{,}8664 + 4{,}3751 \times (-4{,}8993) + 6{,}0834 \times (4{,}0309) + 3{,}9167 \times 2{,}3262 +$$
$$+ 6{,}2500 \times (-0{,}7565) + 2{,}8750(-3{,}7858) + 0{,}6 = +0{,}0011$$

6. პირველი კონტროლი

(4. 3. 4. 13) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი (19) სქემის W სვეტიდან ტოლია —15,60, ხოლო მარცხენა ნაწილი კორელატებით გამოთვლილი იქნება:

$$-[W \cdot K] = -1{,}0 \times 0{,}8664 + 0{,}6 \times (-4{,}8993) - 1{,}1 \times 4{,}0305 - 0{,}4 \times 2{,}3260 +$$
$$+ 1{,}0 \times (-0{,}7560) + 1{,}5 \times (-3{,}7858) = -15{,}60.$$

მაშასადამე, პირველი კონტროლის პირობა შესრულებულია.

პირობით განტოლებებში შესწორებათა მნიშვნელობების შეტანა:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5 + W_1 = -0{,}0004 + 0{,}7838 + 0{,}2166 - 1{,}0 = 0;$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_6 + W_2 = -0{,}0004 + 0{,}7838 - 0{,}7711 - 0{,}6124 + 0{,}6 = -0'',0001;$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_7 + W_3 = -0{,}0004 + 0{,}7711 - 0{,}2556 + 1{,}3434 - 1{,}1 = +0'',0001;$$
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_8 + W_4 = -0{,}7838 - 0{,}7711 + 0{,}3877 - 0{,}4 = +0'',0004;$$
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_9 + W_5 = 0{,}7838 - 0{,}7711 - 0{,}2556 - 0{,}7560 + 1{,}0 = +0'',0011;$$
$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{10} + W_6 = -0{,}7711 - 0{,}2556 - 0{,}4732 + 1{,}5 = +0'',0001.$$

V. შესწორებების გამოთვლა და მეორე კონტროლი (სქემა 20)

ეს სქემა შედგენილია (4. 3. 1. 10) სისტემის შესაბამისად.

მეორე კონტროლი

$$[P\varepsilon\varepsilon] = 15{,}60 = -[WK] = -15{,}60.$$

ამ კონტროლის შემდეგ [Pεε] მიეწერება (19) სქემის W სვეტის ქვემოთ.

VI. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა.

გამოთვლებს ვაწარმოებთ 0'',01 შეცდომის ფარგლებში.

სქემა 4.7.1.21

№№	კუთხეები	კუთხეების განაზომები a_i'	კუთხეების შესწორებები ε_i	კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობები $a_i = a_i' + \varepsilon_i$
1	AOB	15°37'32'',7	0''	15°37'32'',70
2	BOC	29 43 13 ,6	+0,78	29 43 14 ,38
3	COD	111 02 43 ,1	—0,77	111 02 42 ,33
4	DOE	112 20 49 ,3	—0,26	112 20 49 ,04
5	AOC	45 20 47 ,3	—0,22	45 20 47 ,08
6	AOD	156 23 28 ,8	+0,61	156 23 29 ,41
7	AOE	268 44 19 ,8	—1,34	268 44 18 ,46
8	BOD	140 45 57 ,1	—0,39	140 45 56 ,71
9	BOE	253 06 45 ,0	+0,76	253 06 45 ,76
10	COE	223 23 30 ,9	+0,47	223 23 31 ,37

VII. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების საბოლოო კონტროლი (სქემა 22)

სქემა 4.7.1.22

გეომეტრიული პირობა	კუთხეების კომბინაცია	კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების ჯამი	გაწონასწორებული კუთხეები
1	$\alpha_1+\alpha_2$	45°20′47″,08	$\alpha_5 =$ 45°20′47″,08
2	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	156 23 29 ,41	$\alpha_6 =$ 156 23 29 ,41
3	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$	268 44 18 ,45	$\alpha_7 =$ 268 44 18 ,46
4	$\alpha_2+\alpha_3$	140 45 56 ,71	$\alpha_8 =$ 140 45 56 ,71
5	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$	253 06 45 ,75	$\alpha_9 =$ 253 06 45 ,76
6	$\alpha_3+\alpha_4$	223 23 31 ,37	$\alpha_{10} =$ 223 23 31 ,37

VIII. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 7. 12) ფორმულის მიხედვით

გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}} = \pm \sqrt{\frac{15,60}{6}} \approx \pm 1'',61$$

2. η-ს განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_\eta = \frac{\eta}{\sqrt{2(r-1)}} = \pm \frac{1,61}{\sqrt{2(6-1)}} \approx \pm 0'',51$$

r — ჭარბ განაზომთა რაოდენობა.

3. (4. 4. 6. 3) ფორმულის მიხედვით

გაწონასწორების შემდეგ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_u = \eta \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}} = \pm 1'',61 \sqrt{\frac{4}{10}} \approx \pm 1'',02$$

IX. Φ_{α_9} წონითი ფუნქციის შეფასება

(4. 4. 4. 28) ანუ (4. 4. 8. 8) ფორმულის მიხედვით

$\Phi_{\alpha_9} = \alpha_9 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ფუნქციის შებრუნებული წონა გამოთვლილია (19) სქემის φ სვეტში (Σ მისი საკონტროლოა)

$$\frac{1}{P_{\Phi_{\alpha_9}}} = 0,1425\,(0),$$

ანუ წონა

$$P_{\Phi_{\alpha_9}} = 7(0)$$

ხოლო მისი დისპერსია (4. 4. 10. 1) ფორმულის მიხედვით

$$M^2_{\Phi_{\alpha_9}} = \frac{\eta^2}{P_{\Phi_{\alpha_9}}} = (1'',61)^2 \cdot 0,1425 \approx 0'',3694,$$

საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$M_{\Phi_{\alpha_9}} \approx \pm 0'',61.$$

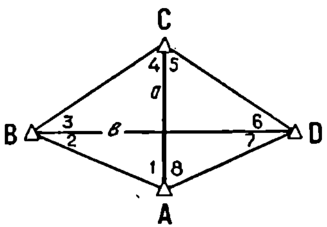
ამ შეცდომის განსაზღვრის შეცდომა

$$M_{M_{\Phi_{\alpha_9}}} = \eta_\eta \cdot \sqrt{\frac{1}{P_{\Phi_{\alpha_9}}}} = \pm 0'',51 \cdot \sqrt{0,1425} \approx \pm 0'',19.$$

შეიძლება ასევე გამოვითვალოთ (19) სქემის φ სვეტის ანალოგიური სვეტი გაწონასწორებული კუთხეების ნებისმიერი ფუნქციისა.

აქაც (4. 4. 6. 3) და (4. 4. 4. 28), ანუ (4. 4. 4. 8) ფორმულის შედეგი ურთიერთტოლია, რადგანაც α_9 იგივე გაწონასწორებული კუთხეა.

მაგალითი 4. 7. 1. 8. (3) ნახაზისა და (4) ცხრილის მონაცემებით გაწონასწორდეს პირობით განაზომთა ხერხით სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი. შეფასდეს გაზომილი და გაწონასწორებული კუთხეები. შეფასდეს გამოსასვლელი *b* გვერდის სიგრძისა და მისი დირექციული კუთხის განსაზღვრის სიზუსტე, როგორც გაწონასწორებული კუთხეების წონითი ფუნქციისა, იმ პირობით, რომ გამოსავალი (საწყისი) *a* გვერდის (ბაზისის) სიგრძე და მისი დირექციული კუთხე უშეცდომოა (იგი ცნობილია უშუალოდ მაღალი სიზუსტით გაზომვის შედეგად [9]).



ნახ. 4.7.1.3

ცხრილი 4.7.1.4

კუთხეების №№	ტოლზუსტად განაზომი კუთხეები
1	46°53′42″,15
2	34 04 46 ,18
3	62 18 00 ,78
4	36 43 34 ,27
5	20 46 12 ,30
6	60 12 09 ,25
7	57 24 33 ,44
8	41 37 06 ,38

კუთხეები არაბული ციფრებით და მათი შესწორებები იგივე ციფრებით ფრჩხილებშია აღნიშნული, ხოლო გაწონასწორებული კუთხეები a_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ფიგურის შესწორებათა პირობითი განტოლებების შესწორებები და შეუკვრელობები გამოვსახოთ სეკუნდებში. პოლუსის შესწორებათა პირობითი განტოლების წრფივი სახის კოეფიციენტები და სათანადო თავისუფალი წევრი (შეუკვრელობა) გამოვსახოთ ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეექვსე ერთეულებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

I. პირობით განტოლებათა შედგენა და W_i შეუკვრელობების გამოთვლა

a) ფიგურის შესწორებათა პირობითი განტოლებები *ABC*, *ACD* და *ABD* სამკუთხედიდან იქნება:

$$(1)+(2)+(3)+(4)+W_1=0;$$

$$(5)+(6)+(7)+(8)+W_2=0;$$

$$(1)+(2)+(7)+(8)+W_3=0,$$

სადაც იგივე სამკუთხედების მიხედვით

1. 46°53′42′,15	5. 20°46′12″,30	1. 46°53′42″,15
2. 34 04 46 ,18	6. 60 12 09 ,25	2. 34 04 46 ,18
3. 62 18 00 ,78	7. 57 24 33 ,44	7. 57 24 33 ,44
4. 36 43 34 ,27	8. 41 37 06 ,38	8. 41 37 06 ,38
180 00 03 ,38	180 00 01 ,37	180 00 8 ,15
— 180	— 180	— 180
$W_1=+3'',38$	$W_2=+1',37$	$W_3=+8'',15$

მაშასადამე, საჭიროა

$$(1)+(2)+(3)+(4)+3'',38=0,$$

$$(5)+(6)+(7)+(8)+1\ ,37=0,$$

$$(1)+(2)+(7)+(8)+8\ ,15=0.$$

b) პოლუსის პირობითი განტოლება (*A* წვეროს მიმართ) იქნება (იხილეთ 4.2.1.2) ტოლობები

$$\frac{\sin 4\cdot\sin[6+7]\cdot\sin 2}{\sin[2+3]\cdot\sin 5\cdot\sin 7}=1.$$

პრაქტიკულად წრფივი სახის შესაბამისი ტოლობა იქნება

$$\Delta_4(4)+\Delta_{6+7}[(6)+(7)]+\Delta_2(2)-\Delta_{2+3}[(2)+(3)]-\Delta_5(5)-\Delta_7(7)+W_4=0,$$

ანუ

$$(\Delta_2-\Delta_{2+3})\,(2)-\Delta_{2+3}(3)+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_{6+7}(6)+(\Delta_{6+7}-\Delta_7)\,(7)+W_4=0,$$

სადაც

$$W_4=10^7\lg\frac{\sin 4\cdot\sin[6+7]\cdot\sin 2}{\sin[2+3]\cdot\sin 5\cdot\sin 7}\ ;$$

ამ ტოლობის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი გამოთვლილია (23) სქემაში.

სქემა 4.7.1.23

საკლები				მაკლები			
კუ-თხეები	კუთხეების მნიშ-ვნელობები	lg sin α'_i	Δ	კუთ-ხეები	კუთხეების მნიშვნელობები	lg sin α'_i	Δ
2	34°04′46″,18	9·7484536	+31,1	2+3	96°22′46″,96	9·9973022	— 2,3
4	36 43 34 ,27	9·7766950	+28,2	5	20 46 12 ,30	9·5497618	+55,5
6+7	117 36 42 ,69	9·9474865	—11,1	7	57 24 33 ,44	9·9255904	+13,4
[ ]		9·4726351		[ ]		9·4726544	

მაშასადამე,

$$W_4=9\cdot4726351-9.4726544=-193(\lg_7)$$

($\lg_7$) თავისუფალი წევრის (შეუკვრელობის) განზომილებაა და ნიშნავს ათობითი შვიდნიშნა ლოგარითმის მანტისის უკანასკნელ ერთეულებს, ანუ მანტისის ნამრავლს 10^7-ზე.

Δ — გაზომილი კუთხის სინუსის ლოგარითმის ცვლილებაა, როცა კუთხე 1″ იცვლება.

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობების კოეფიციენტების გამოთვლა

ვინაიდან პირობითი განტოლებების რაოდენობა ოთხია, ხოლო გაზომილი კუთხეებია რვა, შესწორებათა ტოლობების კოეფიციენტების რაოდენობა იქნება 32. კოეფიციენტები გამოვითვალოთ ოთხ-ოთხ ნიშნად ციფრამდე.

$$a_1 = \frac{\partial W_1}{\partial 1} = 1; \quad a_2 = \frac{\partial W_1}{\partial 2} = 1; \quad a_3 = \frac{\partial W_1}{\partial 3} = 1; \quad a_4 = \frac{\partial W_1}{\partial 4} = 1;$$

$$a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$

ასეთი სახის კოეფიციენტების გამოთვლისას. ამ მაგალითში იგულისხმება, რომ გამოთვლები შესრულებულია მესამე ათწილად ნიშნამდე.

ანალოგიურად

$$b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 1; \qquad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0;$$

$$c_1 = c_2 = c_7 = c_8 = 1; \qquad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

ყველა კოეფიციენტი ნულოვანი განზომილებისაა, რადგანაც (4.6.1.1) ფორმულის მიხედვით $(a_i) = (b_i) = (c_i) = \frac{(W)}{(\varepsilon)} = \frac{(\text{სეკ.})}{(\text{სეკ.})} = (0)$. პოლუსის წრფივი სახის ტოლობიდან და (23) სქემიდან

$$d_2 = \Delta_2 - \Delta_{2+3} = 31,10 - (-2,30) = 33,40 \qquad d_3 = -\Delta_{2+3} = -(-2,3) = 2,30;$$

$$d_4 = \Delta_4 = 28,20; \quad d_5 = -\Delta_5 = -(55,50) = -55,50; \quad d_6 = \Delta_{6+7} = -11,10;$$

$$d_7 = (\Delta_{6+7} - \Delta_7) = -11,10 - (+13,40) = -24,50; \quad d_1 = d_8 = 0.$$

ე. ი. პოლუსის განტოლება წრფივი სახით იქნება ასეთი:

$$33,40\,(2) + 2,300\,(3) + 28,20\,(4) - 55,50\,(5) - 11,10(6) - 24,50\,(7) - 193,0 = 0.$$

გამარტივების მიზნით (პირობის თანახმად) შევამციროთ კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები 10-ჯერ, ანუ ისინი გამოვსახოთ ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეექვსე ათწილად ნიშნებში:

$$3,340\ (2) + 0,230\ (3) + 2,820\ (4) - 5,550\ (5) - 1,110\ (6) - 2,450\ (7) - 19,300 = 0$$

(4. 6. 1. 1) ფორმულის მიხედვით ამ ტოლობის კოეფიციენტების განზომილებაა:

$$(d_i) = \frac{(W_4)}{(\varepsilon)} = \frac{(\lg)}{(\text{სეკ.})} = \left(\frac{\lg}{\text{სეკ.}}\right).$$

III. სქემაზე შესწორებათა პირობითი განტოლებების კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შედგენა (სქემა 24).

(24) სქემა შედგენილია (4. 3. 5. 1) სქემის მიხედვით. შესწორებათა პირობითი განტოლებების კოეფიციენტები გამოთვლილია ოთხ-ოთხი სწორი ნიშნადი ციფრით, ნორმალური განტოლებების კი — ხუთ-ხუთი სწორი ნიშნადი ციფრით.

IV. ნორმალური განტოლებების ამოხსნა და პირველი კონტროლი.

I. კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემის და ჯამური განტოლების შედგენა

$$
\begin{aligned}
4{,}0000K_1+ \qquad\qquad +2{,}0000K_3+\ 6{,}3900K_4+\ 3{,}3800&=0;\\
+4{,}0000K_2+2{,}0000K_3-\ 9{,}1100K_4+\ 1{,}3700&=0;\\
2{,}0000K_1+2{,}0000K_2+4{,}0000K_3+\ 0{,}8900K_4+\ 8{,}1500&=0;\\
6{,}3900K_1-9{,}1100K_2+0{,}8900K_3-57{,}1980K_4-19{,}3000&=0.
\end{aligned}
$$

ჯამური ვანტოლება	$12{,}3900K_1-3{,}1100K_2+8{,}8900K_3-55{,}3680K_4-\ 6{,}4000=0.$

ს ა ე რ თ ო შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.

1. ცხრილებში რიცხვების ნიშნადი ციფრების წესის გარდა დაცულია ათწილადი ნიშნების სიმეტრია, ამიტომ ზოგი რიცხვი საჭირო ნიშნადი ციფრების შემცველი არაა, რაც გამოთვლის შედეგზე გავლენას არ ახდენს.

2. (4. 6. 2) და (4. 6. 3) პარაგრაფის საფუძველზე განზომილებებში განსახილველი სისტემა ასე გამოისახება:

$$(W_1)^2\cdot\frac{1}{(W_1)}+(W_1)\cdot(W_2)\cdot\frac{1}{(W_2)}+(W_1)(W_3)\frac{1}{(W_3)}+(W_1)(W_4)\frac{1}{(W_4)}+(W_1)=0;$$

$$(W_1)(W_2)\cdot\frac{1}{(W_1)}+(W_2)^2\frac{1}{(W_2)}+(W_2)(W_3)\frac{1}{(W_3)}+(W_2)(W_4)\frac{1}{(W_4)}+(W_2)=0;$$

$$(W_1)(W_3)\frac{1}{(W_1)}+(W_2)(W_3)\frac{1}{(W_2)}+(W_3)^2\frac{1}{(W_3)}+(W_3)(W_4)\frac{1}{(W_4)}+(W_3)=0;$$

$$(W_1)(W_4)\frac{1}{(W_1)}+(W_2)(W_4)\frac{1}{(W_2)}+(W_3)(W_4)\frac{1}{(W_3)}+(W_4)^2\frac{1}{(W_4)}+(W_4)=0;$$

სადაც,

$$(W_1)=(W_2)=(W_3)=(\text{სეკ.});\ (W_4)=(\lg);\ (K_1)=(K_2)=(K_3)=\frac{1}{(W_1)}=\left(\frac{1}{\text{სეკ.}}\right);$$

$$(K_4)=\frac{1}{(W_4)}=\frac{1}{(\lg)}.$$

2. ნ ო რ მ ა ლ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა ა მ ო ხ ს ნ ი ს ს ქ ე მ ა (25) განტოლებათა კოეფიციენტებს ვიღებთ ხუთ-ხუთი ნიშნადი ციფრებით.

3. კორელატების გამოთვლამდე კონტროლი შესრულებულია (25) სქემის W და S' სვეტში. შეიძლება საკონტროლო პასუხი დარღვეული იქნეს მესამე ნიშნადი ციფრის რამდენიმე ერთეულით; აქ კი დარღვეულია მეხუთე ნიშნადი ციფრის 1,2 ერთეული.

4. კორელატების გამოთვლა შესრულებულია (25) სქემაში. გამოთვლა დასაშვებია მესამე ნიშნად ციფრამდე შეცდომით; ჩვენ მეოთხე ნიშნად ციფრამდე შეცდომით გამოვთვალეთ.

5. კ ო რ ე ლ ა ტ ე ბ ი ს გ ა მ ო თ ვ ლ ი ს კ ო ნ ტ რ ო ლ ი

(25) სქემიდან (4. 3. 4. 13″) ჯამურ ტოლობაში შევიტანოთ კორელატების მნიშვნელობები

$$12{,}39\times(-0{,}6270)-3{,}110\times4{,}4640+8{,}890(-4{,}2200)+$$

$$+55{,}37\times1{,}1840-6{,}400=-0{,}01$$

აქაც დაცულია შესაბამისობა მეოთხე ნიშნად ციფრამდე.

6. პ ი რ ვ ე ლ ი კ ო ნ ტ რ ო ლ ი

სქემიდან (4. 3. 4. 13) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ტოლია — 53,2453, ხოლო კორელატების გამოყენებით მარცხენა ნაწილი არის:

სქემა 4.7.1.25

№№	აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	W	S'	კონტროლი
1	a	+4,0000	0	+2,0000	+6,3900	+3,3800	+15,7700	+15,7700
2	E_1	−1	0	−0,50000	−1,59750	−0,84500	− 3,94250	− 3,94250
3								
4	b		+4,0000	+2,0000	−9,1100	+1,3700	−1,7400	−1,7400
5	$E_1 \times a_2$		0	0	0	0	0	
6	$b \cdot 1$		+4,0000	+2,0000	−9,1100	+1,3700	−1,7400	−1,7400
7	E_2		−1	−0,50000	+2,27750	−0,3425	+0,43500	+0,43500
8								
9	c			+4,0000	+0,8900	+8,1500	+17,0400	+17,0400
10	$E_3 \times a_3$			−1,0000	−3,1950	−1,6900	− 7,8850	
11	$E_2 \times b \cdot 1_3$			−1,0000	+4,5550	−0,6850	+ 0,8700	
12	$c \cdot 2$			+2,0000	+2,2500	+5,7750	+10,025	+10,0250
13	E_3			−1	−1,12500	−2,88750	− 5,01250	− 5,01250
14								
15	d				+57,1980	−19,3000	+ 36,068	+36,068
16	$E_1 \times a_4$				−10,2080	− 5,3995	−259,193	
17	$E_2 \times b \cdot 1_4$				−20,7480	+ 3,1202	− 3,9628	
18	$E_3 \times c \cdot 2_4$				− 2,5312	− 6,4969	− 11,278	
19	d_3							
20	E_4				+23,7110	−28,0760	− 4,3658	− 4,3650
21					−1	+ 1,18409	+ 0,18412	+ 0,18409
22		−0,845	−0,343	−2,888	+1,184	0	− 6,4000	
23		−1,892	+2,697	−1,332	K_4	− 2,8561	−13,3260	
24		+2,110	+2,110	−4,220		− 0,4692	+ 0,5960	
25		0	+4,464	K_3		−16,6750	−28,9470	
26		−0,627	K_2			−33,2450	− 5,1695	
27		K_1				−53,2453	−53,2465	
28						−[WK]	[WK]	
						[ss]		

$$-[WK]=3{,}38\times(-0{,}627)+1{,}37\times4{,}464+$$
$$+8{,}15\times(-4{,}220)-19{,}30\times1{,}184=-53{,}2478$$

მოთხოვნილი პირობა აქაც დაცულია.

V. შესწორებების გამოთვლა (სქემა 26) და მეორე კონტროლი

გამოთვლა შესრულებულია (4. 3. 1. 13) სისტემის შესაბამისად; შესწორებების გამოთვლას ვაწარმოებთ ოთხი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში

სქემა 4.7.1.26

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	ε	შენიშვნა
1	−0,627		−4,220		−4,847	[εε] ჯამი მიიღება არითმეტრზე ε ახარისხება-შეჯამებით, ე. ი. εε სვეტი საჭირო არაა.
2	−0,627		−4,220	+3,955	−0,892	
3	−0,627			+0,272	−0,355	
4	−0,627			+3,339	+2,712	
5		+4,464		−6,571	−2,107	
6		+4,464		−1,314	+3,150	
7		+4,464	−4,220	−2,001	−2,657	
8		+4,464	−4,220		+0,244	
					[εε]=53,25	

როგორც ვხედავთ, $-[WK]=[\varepsilon\varepsilon]$, ე. ი. მეორე კონტროლიც შესრულებულია. ამ კონტროლის შემდეგ [εε] მიეწერება (25) სქემის W სვეტში.

პირობითი განტოლებების შემოწმება

$$(1)+(2)+(3)+(4)+W_1=-4{,}847-0{,}892-0{,}355+2{,}712+3{,}380=0,$$
$$(5)+(6)+(7)+(8)+W_2=-2{,}107+3{,}150-2{,}657+0{,}244+1{,}370=0,$$
$$(1)+(2)+(7)+(8)+W_3=-4{,}847-0{,}892-2{,}657+0{,}244+8{,}150=0,$$
$$3{,}340\,(2)+0{,}230\,(3)+2{,}820\,(4)-5{,}550\,(5)-1{,}110\,(6)-2{,}450\,(7)-19{,}30=$$
$$=3{,}340\times(-0{,}8920)+0{,}230(-0{,}3547)+2{,}820\times2{,}712-5{,}550(-2{,}107)-$$
$$-1{,}110\times3{,}150-2{,}450(-2{,}657)-19{,}30=0.$$

შენიშვნა. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თანახმად (4. 6. 1. 1) ფორმულისა, a, b და c კოეფიციენტების განზომილება იქნება ნულოვანი, ხოლო d კოეფიციენტისა

$$(d)=\frac{(W)}{(\varepsilon)}=\frac{(\lg)}{(\text{სეკ.})}=\left(\frac{\lg}{\text{სეკ.}}\right).$$

VI. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა (სქემა 27).

გამოთვლა დასაშვებია 0″,1 შეცდომის ფარგლებში, ჩვენ ვანგარიშობთ 0″,01 დასაშვები შეცდომით.

სქემა 4.7.1.27

კუთხეები	კუთხეების განაზომები	შესწორებები დამრგვალებული 0″,01	კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობები $a_i=a'_i+\varepsilon_i$
1	46°53′42″,15	−4,85	46°53′37″,30
2	34 04 46 ,18	−0,89	34 04 45 ,29
3	62 18 00 ,78	−0,35	62 18 00 ,43
4	36 43 34 ,27	+2,71	36 43 36 ,98
5	20 46 12 ,30	−2,11	20 46 10 ,19
6	60 12 09 ,25	+3,15	60 12 12 ,40
7	57 24 33 ,44	−2,66	57 24 30 ,78
8	41 37 06 ,38	+0,24	41 37 06 ,62

VII. საბოლოო კონტროლი

1. 46°53′37″,30	5. 20°45′10″,19	1. 46°53′37″,30
2. 34 04 45 ,29	6. 69 12 12 ,40	2. 34 04 45 ,29
3. 62 18 00 ,43	7. 57 24 30 ,78	7. 57 24 30 ,78
4. 36 43 36 ,98	8. 41 37 06 ,62	8. 41 37 06 ,62
180°00′00″,00	179°59′59″,99	179°59′59″,99
— 180°	— 180°	— 180°
00″,00	—0″,01	—0″,01

ს ა ქ ლ ე ბ ი			მ ა ქ ლ ე ბ ი		
კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin
2	34°04′45″,29	9·7484509	2+3	96°22′45″,72	9·9973025
4	36 43 36 ,98	9·7767027	5	20 46 10 ,19	9·5497501
6+7	117 36 43 ,18	9·9474860	7	57 24 30 ,78	9·9255869
		$\Sigma_1 = 9\cdot4726396$			$\Sigma_2 = 9\ 4726395$

$$W_0 = +1\ (\lg)$$

შედეგი მივიღეთ მოთხოვნილი სიზუსტის ფარგლებში

VIII. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 9. 6) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}} = \pm\sqrt{\frac{53,25}{4}} \approx \pm 3'',7.$$

2. m-ის განსაზღვრის შეცდომა

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm\frac{3,7}{\sqrt{2(4-1)}} = \pm\frac{3,7}{\sqrt{6}} \approx \pm 1'',6.$$

3. (4.4.9.5) ფორმულის შესაბამისად ნებისმიერი გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{a_i} = \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}} = \pm 3,7\sqrt{\frac{4}{8}} \approx \pm 2'',6$$

IX. b გვერდისა და მისი დირექციული კუთხის გაწონასწორებული კუთხეებით განსაზღვრის სიზუსტე

1. b გვერდის გამოსათვლელად გამოიყენება სინუსების თეორემა

$$b = a\,\frac{\sin\alpha_4\cdot\sin[\alpha_1+\alpha_8]}{\sin[\alpha_2+\alpha_3]\cdot\sin\alpha_7}, \tag{b}$$

ანუ

$$\lg b = \lg a + \lg\sin\alpha_4 + \lg\sin[\alpha_1+\alpha_3] - \lg\sin[\alpha_2+\alpha_3] - \lg\sin\alpha_7. \tag{b'}$$

იმისათვის, რომ შევაფასოთ b გვერდის განსაზღვრის სიზუსტე, საჭიროა მისი გამოსახვა გაუწონასწორებელი (გაზომილი) კუთხეებით (a იგულისხმება უშეცდომოდ გაზომილად):

$$\Phi_b=\lg b=\lg \frac{a \sin 4\cdot\sin[1+8]}{\sin[2+3]\cdot\sin 7},$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ წ ო ნ ი თ ფუნქციას.

წონითი ფუნქციის წრფივი სახე, ანუ ამ ფუნქციის ნაზრდი, როცა კუთხე იცვლება 1″, იქნება ასეთი:

$$\Delta_{\lg b}(\lg)=\Delta_{1+8}(1)-\Delta_{2+3}(2)-\Delta_{2+3}(3)+\Delta_4(4)-\Delta_7(7)+\Delta_{1+8}(8),\quad (4.7.1.18),$$

სადაც (23) სქემიდან: $\Delta_{2+3}=-2{,}3$; $\Delta_4=+28{,}2$; $\Delta_7=+13{,}4$, ხოლო ათობითი ლოგარითმების შეიდნიშნა ცხრილიდან

$$[1+8]$$

$\lg\sin 88°30'48'',53$ სიდიდისათვის $\Delta_{1+8}=+0{,}6$.

შეთანხმების მიხედვით წონით ფუნქციას და მის კოეფიციენტებს შესაბამისად ალვნიშნავთ Φ_u და φ_i სიმბოლოთი. ჩვენს შემთხვევაში $u=b$, ხოლო $i=1, 2,..., 8$, რადგანაც ვგულისხმობთ, რომ წონითი ფუნქცია თითქოს პირობითი განტოლებაა და მისი შესაბამისი φ_i კოეფიციენტები შეგვაქვს ნორმალურ განტოლებათა სქემის φ და Σ სვეტებში წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის (4. 4. 10. 1) ფორმულის მიხედვით განსაზღვრის მიზნით. მაშასადამე, მეხუთე პირობითი განტოლების მაგვარ განტოლებად წონითი ფუნქცია გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\varphi_1(1)+\varphi_2(2)+\varphi_3(3)+\varphi_4(4)+\varphi_7(7)+\varphi_8(8)+[\varphi\gamma]=\Delta\Phi_b,$$

სადაც:

$$\varphi_1=\Delta_{1+8}=+0{,}6;\ \varphi_2=-\Delta_{2+3}=-(-2{,}3)=+2{,}3;\ \varphi_3=-\Delta_{2+3}=$$
$$=-(-2{,}3)=+2{,}3;$$
$$\varphi_4=+\Delta_4=+28{,}2;\ \varphi_7=-\Delta_7=-(+13{,}4)=-13{,}4;\ \varphi_8=+\Delta_{1+8}=+0{,}6;$$
$$\varphi_5=\varphi_6=0.$$

ამ კოეფიციენტების განზომილებები (4.6.1.1) ფორმულის მიხედვით იქნება:

$$(\varphi_i)=\frac{(\Delta_{\lg})}{(\varepsilon)}=\frac{(\lg)}{(\text{სეკ.})}.$$

[φφ] სიდიდე წონით ფუნქციაში იწერება პირობითი განტოლების თავისუფალი წევრის ადგილას. მაშასადამე, ათჯერ შემცირებული, ანუ კოეფიციენტების და თავისუფალი წევრის ექვსნიშნა ლოგარითმების მანტისის უკანასკნელ ერთეულებში გამოსახვის შესაბამისად წონითი ფუნქციის სახე იქნება:

$$+0{,}06000(1)+0{,}2300(2)+0{,}2300(3)+2{,}820(4)-1{,}340(7)+$$
$$+0{,}06000(8)+9{,}8610=\Delta\Phi_b=\Delta\lg_b(\lg_b).\qquad \Phi_b)$$

2. (3) ნახაზის შესაბამისად საყრდენი a გვერდის დირექციული კუთხით (რომელიც უშეცდომოდაა ნაგულისხმები) და გაზომილი კუთხეებით შეიძლება გამოვითვალოთ გამოსასვლელი b გვერდის დირექციული კუთხე სხვადასხვა გზით, მაგალითად:

$$(CD)=(AB)+\alpha_4+\alpha_3;$$
$$(DC)=(AB)-\alpha_5-\alpha_6;$$
$$(CD)=(BA)-\alpha_1-\alpha_2;$$
$$(DC)=(BA)+\alpha_8+\alpha_7.$$

განვიხილოთ პირველი ტოლობა და მიღებული შედეგი გავავრცელოთ დანარჩენ ტოლობებზეც.

$(CD)=(AB)+\alpha_4+\alpha_3$ ფუნქციის შესაბამისად, რადგანაც (AB) უშეცდომოდ არის მიჩნეული, წონითი ფუნქციის სახე იქნება:

$$\Phi_{(CD)}=(3)+(4)+[\varphi'\varphi']. \qquad (4.7.1.19)$$

ამ ფუნქციასაც განვიხილავთ, როგორც პირობით განტოლებას, რომლისთვისაც გამოთვლილი კოეფიციენტები იქნება ასეთი:

$$\varphi_3'=\varphi_4'=1;\ \varphi_1'=\varphi_2'=\varphi_5'=\varphi_6'=\varphi_7'=\varphi_8'=0,\ \text{ხოლო}\ [\varphi'\varphi']=2.$$

ამ კოეფიციენტების განზომილებები კი იქნება ნულოვანი:

$$(\varphi')=\frac{(\text{სეკ.})}{(\text{სეკ.})}=(0).$$

მაშასადამე, წონითი ფუნქციის სახე, ანუ ფუნქციის ნაზრდი, როცა კუთხეები 1″ იცვლება, იქნება:

$$(3)+(4)+1=\Delta\Phi_{(CD)}\,(0). \qquad \Phi_{b_1})$$

განვიხილოთ იგივე მაგალითი წონითი ფუნქციებითურთ

შ ე მ ო კ ლ ე ბ უ ლ ს ქ ე მ ა შ ი ე ქ ვ ს ი ვ ე გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი ს გ ა ნ ლ ა გ ე ბ ა დ ა ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ს ს ი ს ტ ე მ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს შ ე დ გ ე ნ ა (ს ქ ე მ ა 28).

გარკვეული დახელოვნების შემდეგ ჯობს ვისარგებლოთ (28) სქემით, რომლის რიცხვითი მონაცემები განხილადი მაგალითისათვის დალაგებულია (29) სქემაში. ეს სქემა იძლევა გამომთვლელ მანქანაზე ახარისხება-შეჯამებისა და გამრავლება-შეჯამების კომბინაციის რაციონალურად გამოყენების საშუალებას. განსახილველ სქემაში მოთავსებულია:

a. შესწორებათა ოთხი პირობითი განტოლების და ორი წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და იმდენივე რაოდენობის ნორმალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების შედგენა.

b. თავისუფალი წევრები (შეუკვრელობები), გადმოტანილი ამოცანის ამოხსნის პირველი მუხლიდან, კორელატები გადმოტანილი ნორმალურ განტოლებათა სისტემის სქემიდან, მათი ნამრავლი და ამ ნამრავლთა $[WK]$ ჯამი პ ი რ ვ ე ლ ი კ ო ნ ტ რ ო ლ ი ს თ ვ ი ს ა ა, რომელიც მოითხოვს ამ ჯამის ტოლობას ნორმალური განტოლებების ამოხსნის სქემის W სვეტში უკანასკნელი ელიმინაციური სტრიქონის ქვევით მიღებულ — $[WK]$ ჯამთან.

c. შესწორებათა გამოთვლის სქემა (26) ან ამ სქემიდან მხოლოდ *e* სვეტის მონაცემები აქვე არითმომეტრით განისაზღვრება $[ee]$ და ამით ხდება მ ე ო რ ე კ ო ნ ტ რ ო ლ ი, რომლითაც მოითხოვება $[ee]=-[WK]$ ტოლობა დასაშვები განსხვავებით.

№№	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$S]$	$\varphi]$	$\Sigma\varphi]$	$\varphi']$	$\Sigma\varphi']$	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	ε
1	a_1	b_1	c_1	d_1	S_1	φ_1	$\Sigma\varphi_1$	φ_1'	$\Sigma\varphi_1'$	a_1K_1	b_1K_2	c_1K_3	d_1K_4	ε_1
2	a_2	b_2	c_2	d_2	S_2	φ_2	$\Sigma\varphi_2$	φ_2'	$\Sigma\varphi_2'$	a_2K_1	b_2K_2	c_2K_3	d_2K_4	ε_2
3														
4														
5														
6														
7	a_7	b_7	c_7	d_7	S_7	φ_7	$\Sigma\varphi_7$	φ_7'	$\Sigma\varphi_7'$	a_7K_1	b_7K_2	c_7K_3	d_7K_4	ε_7
8	a_8	b_8	c_8	d_8	S_8	φ_8	$\Sigma\varphi_8$	φ_8'	$\Sigma\varphi_8'$	a_8K_1	b_8K_2	c_8K_3	d_8K_4	ε_8
ჯამები	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[d]$	$\frac{[S]}{[S]}$	$[\varphi]$	$\frac{[\Sigma\varphi]}{[\Sigma\varphi]}$	$[\varphi']$	$\frac{[\Sigma\varphi']}{[\Sigma\varphi']}$					$[\varepsilon\varepsilon]=$
W	W_1	W_2	W_3	W_4										
K	K_1	K_2	K_3	K_4										
WK	W_1K_1	W_2K_2	W_3K_3	W_4K_4										$-[WK]=$
$[a$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[aS]$	$[a\varphi]$	$[a\Sigma\varphi]$	$[a\varphi']$	$[a\Sigma\varphi']$					
$[b$		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bS]$	$[b\varphi]$	$[b\Sigma\varphi]$	$[b\varphi']$	$[b\Sigma\varphi']$					
$[c$			$[cc]$	$[cd]$	$]cS]$	$[c\varphi]$	$[c\Sigma\varphi]$	$[c\varphi']$	$[c\Sigma\varphi']$					
$[d$				$[dd]$	$[dS]$	$[d\varphi]$	$[d\Sigma\varphi]$	$[d\varphi']$	$[d\Sigma\varphi']$					
$[S$					$[SS]$	$[S\varphi]$	—	$[S\varphi']$	—					
$[\varphi$						$[\varphi\varphi]$	$[\varphi\Sigma\varphi]$	—	—					
$[\Sigma\varphi$							$[\Sigma\varphi\Sigma\varphi]$	—	—					
$[\varphi'$								$[\varphi'\varphi']$	$[\varphi'\Sigma\varphi']$					
$[\Sigma\varphi'$									$[\Sigma\varphi'\Sigma\varphi']$					

საკონტროლო ჯამები:

1. $[aS]+W_1=S_1'$;
2. $[bS]+W_2=S_2'$;
3. $[cS]+W_3=S_3'$;
4. $[dS]+W_4=S_4'$;

№№	a]	b]	c]	d]	S]	φ]	Σφ]
1	1		1		+2,000	+0,060	+2,060
2	1		1	+3,340	+5,340	+0,230	+5,570
3	1			+0,230	+1,230	+0,230	+1,460
4	1			+2,820	+3,820	+2,820	+6,640
5		1		—5,550	—4,550	—1,340	—5,890
6		1		—1,110	—0,110		—0,110
7		1	1	—2,450	—0,450		—0,450
8		1	1		+2,000	+0.060	+2,060
ჯამები	+4,000	+4,000	+4,000	—2,720	+9,280 +9,280	+2,060	+11,840 +11,340
W	+3,380	+1,370	+ 8,150	—19,300			
K	—0,627	+4,464	— 4,220	+ 1,184			
WK	—2,119	+6,116	—34,390	+22,850			
[a	+4,0000		+2,0000	+ 6,3900	- 12,3900	+ 3,3400	+15,7300
[b		+4,0000	+2,0000	— 9,1100	— 3,1100	— 1,2800	— 4,3900
[c			+4,0000	+ 0,8900	+ 8,8900	+ 0,3500	+ 9,2400
[d				+57,1980	+55,3680	+16,2100	+71.5780
[S					+73,5380	+18,6200	—
[φ						+ 9,8610	+ 28,4820
[Σφ							+120,6400
[φ′							
[Σφ′							

ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის და წონითი ფუნქციების შებრუნებული წონების გამოთვლის სქემა 30.

ეს სქემა შეესაბამება (2) სქემას და წარმოადგენს კორელატების ოთხუცნობიანი განტოლებების ამოხსნის (25) სქემას; მხოლოდ მასზე დამატებულია φ, Σ, φ′ და Σ′ სვეტები, რომლებშიაც განისაზღვრება სათანადო კონტროლით (Σ და Σ′ სვეტები) შებრუნებული წონები ორი წონითი ფუნქციისა, რომლის შესაბამისი ნორმალური განტოლების მსგავსი განტოლებებია:

$$[a\varphi]K_1+[b\varphi]K_2+[c\varphi]K_3+[d\varphi]K_4+[\varphi\varphi]=\Delta\Phi_b;$$
$$[a\varphi']K_1+[b\varphi']K_2+[c\varphi']K_3+[d\varphi']K_4+[\varphi'\varphi']=\Delta\Phi_{(CD)}.$$

ასე, რომ წონითი ფუნქციების თავიდანვე გამოყენებით შეიძლებოდა (ასეც ვიქცევით ყოველთვის) ამ მაგალითის ამოხსნა სქემის საშუალებით:

(30) სქემის φ სვეტიდან (Σ საკონტროლოა) $\frac{1}{P_b}=3,22\frac{(\lg_6)^2}{(\text{სეკ.})^2}=3,22\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ.}}\right)^2$, ხოლო φ′ სვეტიდან (Σ′ საკონტროლოა) $\frac{1}{P_{(CD)}}=0,46(0)$.

Φ_b წონითი ფუნქციის შეფასება

a. (30) სქემის φ სვეტიდან (Σ საკონტროლოა) Φ_b წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_b}=3,22\frac{(\lg_6)^2}{(\text{სეკ.})^2},\ \text{ე. ი. წონა}\ P_b=0,311\ \frac{(\text{სეკ.})^2}{(\lg_6)^2}$$

φ']	Σφ']	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	ε
	+2,000	−0,627		−4,220		−4,847
	+5,340	−0,627		−4,220	+3,955	−0,892
1	+2,230	−0,627			+0,272	−0,355
1	+4,820	−0,627			+3,339	+2,712
	−4,550		+4,464		−6,571	−2,107
	−0,110		+4,464		−1,314	+3,150
	−0,450		+4,464	−4,220	−2,901	−2,657
	+2,000		+4,464	−4,220		+0,244
+2,000	+11,280 / +11,280				[εε]=+53,24	
					−[WK]=−53,24	

+2,0000	+14,3900
	−3,1100
	+8,8900
+3,0500	+58,4180
+5,0500	—
—	—
—	—
+2,0000	+7,0500
	+85,6380

სტრიქონული საკონტროლო ჯამები:

1. $S_1'=[aS]+W_1=+12,3900+3,3800=+15,7700;$
2. $S_2'=[bS]+W_2=-3,1100+1,3700=-1,7400;$
3. $S_3'=[cS]+W_3=+8,8900+8,1500=+17,0400;$
4. $S_4'=[dS]+W_4=+55,3680-19,3000=+36,0680.$

b. *b* გვერდის ლოგარითმის დისპერსია (4. 4. 9. 7) ფორმულის მიხედვით ექვსნიშნა ათობითი ლოგარითმების მანტისის უკანასკნელ ერთეულებში

$$m^2_{\lg b}=\frac{m^2}{P_b}=(3,7)^2\times 3,22\left[(\text{სექ.})^2\cdot\frac{(\lg_6)^2}{(\text{სექ.})^2}\right]=44,1(\lg_6)^2.$$

m-ის მნიშვნელობა ამოწერილია VIII მუხლიდან.

c. *b* გვერდის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა ექვსნიშნა ათობით ლოგარითმის მანტისის უკანასკნელ ერთეულებში

$$m_{\lg b}=\pm 6,66\approx\pm 7(\lg_6)$$

d. *b* გვერდის განსაზღვრის ფარდობითი შეცდომა (სიზუსტე) განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 4. 1. 46) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{m_a}{a}=\frac{m_{\lg b}}{\mu}=\pm\frac{7}{0,43\times 10^6}=\pm\frac{7}{430\,000}=\mp\frac{1}{60\,000}.$$

$\Phi_{(CD)}$ წონითი ფუნქციის შეფასება

a. (30) სქემის φ' სვეტიდან (Σ' საკონტროლოა) $\Phi_{(CD)}$ წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_{(CD)}}=0,460(0),\ \text{ე. ი. წონა}\ P_{(CD)}=2,17(0).$$

№№	აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4	W
1	a	+4,0000	0	+2,0000	+6,3900	+3,3800
2	E_1	−1	0	−0,50000	−1,59750	−0,84500
3						
4	b		+4,0000	+2,0000	−9,1100	+1,3700
5	$E_1 \times a_2$		0	0	0	0
6	$b \cdot 1$		+4,0000	+2,0000	−9,1100	+1,3700
7	E_2		−1	−0,50000	+2,27750	−0,34250
8						
9	c			+4,0000	+0,8900	+8,1500
10	$E_1 \times a_3$			−1,0000	−3,1950	−1,6900
11	$E_2 \times b \cdot 1_3$			−1,0000	+4,5550	−0,6850
12	$c \cdot 2$			+2,0000	+2,2500	+5,7750
13	E_3			−1	−1,25000	−2,88750
14						
15	d				+57,1980	−19,3000
16	$E_1 \times a_4$				−10,2080	− 5,3995
17	$E_2 \times b \cdot 1_4$				−20,7480	+ 3,1202
18	$E_3 \times c \cdot 2_4$				− 2,5312	− 6,4969
19	$d \cdot 3$				+23,711	−28,0760
20	E_4				−1	+1,184090
21						
22		−0,845	−0,343	−2,888	+1,184	0
23		−1,892	+2,697	−1,332	K_4	− 2,8561
24		+2,110	+2,110	−4,220		− 0,4692
25		0	+4,464	K_3		−16,6750
26		−0,627	K_2			−33,2450
27		K_1				−53,2453
						−[WK] [ნნ]

S'	კონტროლი	φ	Σ	φ'	Σ'
+15,7700	+15,7700	+3,3400	+15,7300	+2,0000	+14,3900
— 3,94250	— 3,94250	—0,83500	— 3,93250	—0,50000	— 3,59750
—1,7400	—1,7400	—1,2800	—4,3900	0	—3,1100
0	0	0	0	0	0
—1,7400	—1,7400	—1,2800	—4,3900	0	—3,1100
+0,43500	+0,43500	+0,32000	+1,09750	0	+0,77750
+17,0400	+17,0400	+0,3500	+9,2400	0	+8,8900
— 7,8850		—1,6700	—7,8650	—1,0000	—7,1950
+ 0,8700		+0,6400	+2,1950	0	+1,5550
+10,0250	+10,0250	—0,68000	+3,5700	—1,0000	+3,2500
— 5,01250	— 5,01250	+0,34000	—1,78500	+0,50000	—1,62500
+36,0680	+36,0680	+16,2100	+71,5780	+3,0500	+58,4180
—25,1930		— 5,3356	—25,1300	—3,19050	22,9880
— 3,9628		— 2,9152	— 9,9982	0	— 7,0830
—11,2780		+ 0,7650	— 4,0162	+1,1250	— 3,6562
—28,0760		+ 8,7242	+32,4340	+0,9845	+24,6910
+ 0,184125	+ 0,184125	— 0,367939	— 1,367888	—0,041521	— 1,041331
— 6,4000		+9,8610	+28,4820	+2,0000	+7,0500
—13,3260		—2,7889	—13,1350	—1,0000	—7,1950
+ 0,5960		—0,4096	— 1,4048	0	0
—28,9470		—0,2312	+ 1,2138	—0,5000	+1,6250
— 5,1695		—3,2100	—11,9340	—0,0409	—1,0252
—53,2465		+3,2213	+3,2220	+0,4591	+0,4548
[VK]		$\frac{1}{P_b}\left(\frac{\lg_6}{\text{სკ.}}\right)^2$	$\frac{1}{P^b}\left(\frac{\lg_6}{\text{სკ.}}\right)^2$	$\frac{1}{P_{(CD)}}0$	$\frac{1}{P_{(CD)}}0$

b. მისი დისპერსია (4.9.7) ფორმულის მიხედვით იქნება:

$$m^2_{(CD)} = \frac{m^2}{P_{(CD)}} = (3,7)^2 \times 0,46[(\text{სეკ.})^2(0)] = 6,3(\text{სეკ.})^2$$

c. საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{(CD)} = \pm\sqrt{6,3} \approx \pm 2,5\ (\text{სეკ.}) = \pm 2,''5.$$

d. ფარდობითი შეცდომა

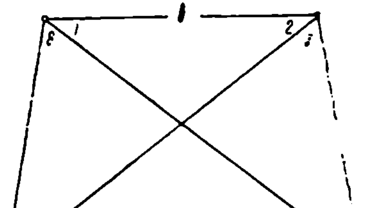
$$\frac{m_{(CD)}}{\rho} = \pm\frac{2,5}{2\times 10^5} = \pm\frac{1}{80\,000}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 2. (3) ნახაზის და (5) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მონაცემებით შესრულდეს ყოველივე, რაც მოთხოვნილია (3) მაგალითში. თავის ადგილას გამოყენებული იქნეს (29) და (30) სქემების აგებულება [9].

ც ხ რ ი ლ ი 4.7.1.5

კუთხეების №№	ტოლზუსტად გაზომილი კუთხეები — ვ ა რ ი ა ნ ტ ე ბ ი		
	1	2	3.
1	43°52′04″,0	46°13′28″	40°40′45″,1
2	31 48 21 ,3	30 54 20	15 09 19 ,5
3	69 06 15 ,1	35 17 28	36 32 57 ,8
4	35 13 29 ,0	67 34 50	87 36 59 ,2
5	10 37 34 ,0	42 51 27	25 06 25 ,9
6	65 02 53 ,4	34 16 23	30 43 39 ,7
7	79 09 28 ,6	49 18 20	50 53 54 ,1
8	25 10 10 ,3	53 33 45	73 16 02, 9

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 3. (4) ნახაზისა და (6) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მიხედვით პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი. შეფასდეს განაზომი და გაწონასწორებული კუთხეები.



ნახ. 4.7.1.4

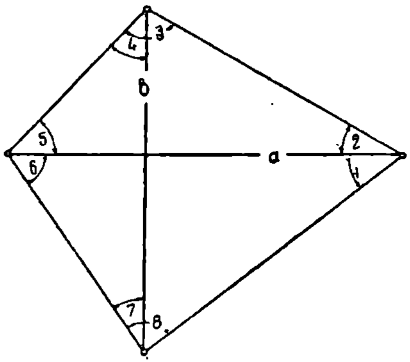
შეფასდეს გამოსასვლელი *b* გვერდის სიგრძისა და დირექციული კუთხის განსაზღვრის სიზუსტე, როგორც გაწონასწორებული კუთხეების წონითი ფუნქციების იმის გათვალისწინებით, რომ *a* საყრდენი გვერდის სიგრძე და დირექცი-

ული კუთხე ადრე შესრულებული მაღალი კლასის ტრიანგულაციით არის გან-საზღვრული [9].

ცხრილი 4.7.1.6

კუთხე-ების №№	ტოლზუსტად გაზომილი კუთხეები		
	ვარიანტები		
	1	2	3
1	36°35′42″,7	86°07′10″	31°25′14″,3
2	35 26 01 ,1	33 12 25	55 28 29 ,4
3	55 08 36 ,6	31 59 32	39 45 32 ,2
4	52 49 38 ,3	28 40 32	53 20 48 ,4
5	44 04 51 ,4	37 42 51	39 16 21 ,8
6	27 56 58 ,0	23 50 44	47 37 30 ,2
7	36 58 44 ,0	26 41 55	69 15 44 ,5
8	70 59 27 ,3	33 57 44	23 50 20 ,4

სავარჯიშო 4. 7. 1. 4 და 4. 7. 1. 5. (5) ნახაზს შეესაბამება (7) ცხრი-ლის პირველი ვარიანტი და (6) ნახაზს — მეორე ვარიანტი. შესრულდეს ყო-

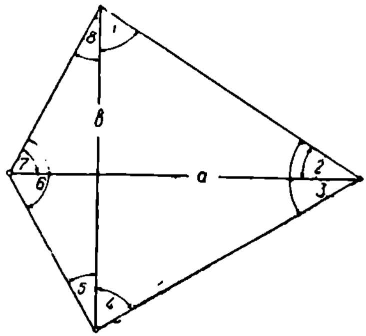


ნახ. 4.7.1.5

ველივე, რაც მოთხოვნილია(3) სავარჯიშო'ში. მოხდეს ერთად დამუშავება მა-სალისა (29) და (30) სქემის მიხედვით [6].

ცხრილი 4.7.1.7

კუთხეების №№	ტოლზუსტად გაზომილი კუთხეები	
	ვარიანტები	
	1	2
1	40°27′04″,8	72°22′26″, 3
2	31 13 41 ,5	9 33 51 ,6
3	70 42 09 ,1	52 16 21 ,7
4	12 00 04 ,9	55 21 12 ,4
5	78 04 16 ,3	28 13 39 ,1
6	81 19 21 ,5	74 18 18 ,9
7	8 36 28 ,2	20 35 41 ,6
8	58 13 32 ,6	77 27 56 ,8

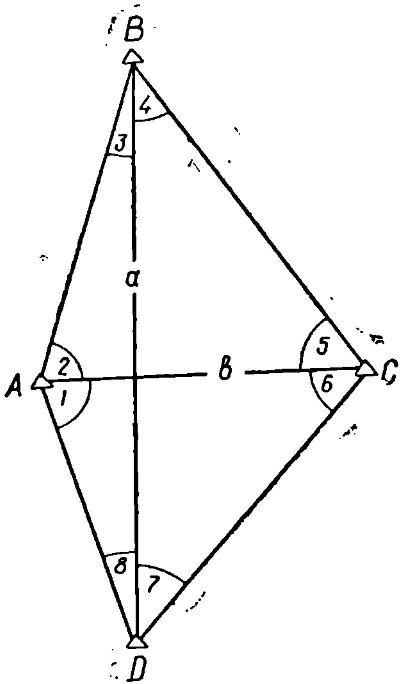


ნახ. 4.7.1.6

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 6. (7) ნახაზის და (8) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მიხედვით პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი. შეფასდეს გაზომილი და გაწონასწორებული კუთხეების სიზუსტე; შეფასდეს გაწონასწორებული კუთხეების საშუალებით გამოთვლილი b გვერდის სიზუსტე იმის გათვალისწინებით, რომ a გამოსავალი დიაგონალი უშეცდომოა. ადრე შესრულებული ტრიანგულაციიდან

$$\lg a = 3.7194265$$

შეივსოს (31) სქემის ყველა სვეტი (4) მაგალითის (37) სქემის ანალოგიით.



ნახ. 4.7.1.7

ც ხ რ ი ლ ი 4.7.1.8

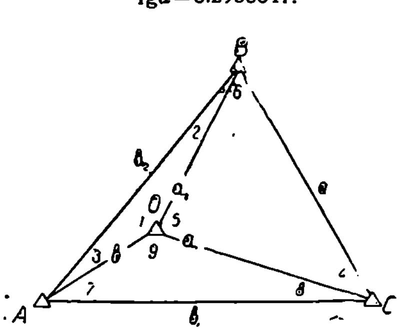
კუთხეების №№	განაზომები კუთხეები სეკუნდების გარეშე	ვარიანტები									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		სეკუნდები									
1	55°17′	48,0	47,5	46,9	48,4	49,1	49,7	46,3	45,8	45,2	44,7
2	37 53	54,0	53,3	54,5	52,9	53,8	51,8	53,5	54,1	51,3	50,8
3	42 15	11,0	11,4	10,8	12,2	12,7	13,1	10,2	09,7	09,2	08,7
4	36 11	37,0	37,6	38,1	36,5	36,0	35,4	34,9	34,5	37,1	34,0
5	63 39	22,0	23,1	22,6	23,6	24,1	24,5	24,8	20,7	21,2	21,8
6	55 12	01,0	01,7	02,1	01,3	02,4	02,8	03,2	03,8	04,4	04,9
7	24 57	02,0	01,5	01,0	02,4	00,7	00,3	01,9	02,9	03,3	02,1
8	44 33	11,0	10,4	11,7	11,5	09,2	08,7	12,2	12,8	08,2	13,3

სქემა 4.7.1.31

სამკუთხე-დების №№	წვეროების დასახ.	კუთხეების №№	გაწონასწო-რებული კუთხეები	კუთხეების სინუსების ლოგარითმები	გვერდების დასახ.	გვერდების ლოგარით-მები
1	2	3	4	5	6	7
1	*A* *B* *D*	8 3 1+2			a b_1 b_2	3.719 4265
2	*B* *C* *D*	4 7 5+6			a b_3 b_4	3.719 4265
3	*A* *B* *C*	3+4 5 2			b_1 b_4 b	
4	*A* *D* *C*	7+8 3 1			b_2 b_3 b	

მაგალითი 4. 7. 1. 4. (8) ნახაზისა და (9) ცხრილის (რიცხვითი მონაცემებია [2]) პირველი ვარიანტის მიხედვით პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს სრული ცენტრალური სისტემა. შეფასდეს გაზომილი და გაწონასწორებული კუთხეები; შეფასდეს გაწონასწორებული კუთხეების საშუალებით გამოთვლილი გამოსასვლი $AO=b$ გვერდი, იმის გათვალისწინებით, რომ გამოსავალი $BC=a$ გვერდი უშეცდომოა (ადრე შესრულებული ტრიანგულაციიდან) და მისი რიცხვითი ოდენობის ლოგარითმია

$$\lg a = 3.2958647.$$



ნახ. 4.7.1.8

ცხრილი 4.7.1.9

კუთხე-ების №№	განაზომე-ბი სეკუნ-დების გარეშე	ვარიანტები									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		სეკუნდები									
1	149°09′	47″,99	49,3	48,7	49,8	50,2	50,7	47,4	46,8	46,2	48,3
2	13 06	09 ,86	10,5	10,9	11,5	12,0	12,6	13,1	13,6	14,2	14,8
3	17 43	57 ,19	56,3	55,8	55,3	56,7	54,9	54,5	55,6	56,8	54,1
4	42 52	19 ,22	20,7	18,7	19,6	18,2	20,1	17,4	21,3	22,1	23,8
5	80 49	09 ,45	10,4	09,1	09,8	10,9	08,7	08,1	11,0	11,6	12,3
6	56 18	29 ,42	30,6	31,2	31,9	29,7	32,4	30,0	28,4	27,7	27,1
7	31 27	40 ,94	42,1	42,6	43,0	43,5	41,7	41,2	40,5	40,1	39,6
8	18 31	23 ,33	22,2	21,8	21,3	20,9	20,4	22,7	23,7	24,2	24,7
9	130 01	02 ,56	01,0	01,4	00,9	00,5	02,1	00,2	01,1	00,7	00,1

ფიგურის და ჰორიზონტის პირობითი განტოლებების შესწორებები და შეუკვრელობები გამოვსახოთ სეკუნდებში. პოლუსის პირობითი განტოლების წრფივი სახის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები გამოვსახოთ ათობითი ლოგარითმის მეექვსე ერთეულებში. მაშინ, (4. 6. 1. 1) ფორმულის თანახმად ამ ტოლობის კოეფიციენტის განზომილება იქნება

$$\frac{(W_{lg})}{(\varepsilon)} = \frac{(\lg)}{(\text{სეკ.})}.$$

ამოხსნა

I. პირობითი განტოლებების შედგენა და W შეუკვრელობების გამოთვლა

a) ფიგურის პირობები

$(1)+(2)+(3)+W_1=0;$ სადაც $W_1=1+2+3-180°=-4'',96$

$(4)+(5)+(6)+W_2=0;$ „ $W_2=4+5+6-180°=-1'',91$

$(7)+(8)+(9)+W_3=0;$ „ $W_3=7+8+9-180°=+6'',83$

b) ჰორიზონტის პირობა

$(1)+(5)+(9)+W_4=0,$ სადაც $W_4=1+5+9-360°=0$

c) პოლუსის თეორიული პირობა

$$\frac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 7}{\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 8}=1,$$

მისი წრფივი სახე (პრაქტიკული) იქნება

$$\Delta_2(2)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)-\Delta_8(8)+W_5=0,$$

სადაც

სქემა 4.7.1.32

საკლები				მაკლები			
კუთხე-ები	განაზომები	lg sin α'_i	Δ	კუთხე-ები	განაზომები	lg sin α	Δ
2	13°06′09″,86	9.3554474	+90,5	3	17°43′57″,19	9.4836932	+65,8
4	42 52 16 ,22	9.8427406	+22,7	6	56 18 29 ,42	9.9201407	+14,0
7	31 27 40 ,94	9.7176069	+34,4	8	18 31 23 ,33	9,5020004	+62,9
	Σ=	8.9057949			Σ_2=	8.9058343	

$$W_5=\Sigma_1-\Sigma=-394\ (\lg_7).$$

გამოთვლების გაადვილების მიზნით (პირობის თანახმად) ათჯერ შევამციროთ კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი.

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობების და Φ_b ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლა

$$a_1=a_2=a_3=1; \qquad a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=0;$$
$$b_4=b_5=b_6=1; \qquad b_1=b_2=b_3=b_7=b_8=b_9=0;$$
$$c_7=c_8=c_9=1; \qquad c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=0;$$
$$d_1=d_5=d_9=1; \qquad d_2=d_3=d_4=d_6=d_7=d_8=0.$$

(4. 6. 1. 1) ფორმულის თანახმად ყველა კოეფიციენტის განზომილება ნულოვანია.

$$e_2=+9{,}05; \quad e_3=-6{,}58; \quad e_4=+2{,}27; \quad e_6=-1{,}40;$$
$$e_7=+3{,}44; \quad e_8=-6{,}29; \quad e_1=e_5=e_9=0.$$

(4.6.1.1) ფორმულის მიხედვით ეს კოეფიციენტები $\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ.}}\right)$ განზომილებისაა; აქაც კოეფიციენტები ათჯერაა შემცირებული.

წონითი ფუნქციაა

$$\Phi_b=a\,\frac{\sin 6\cdot\sin 8}{\sin 5\cdot\sin 7}\,.$$

მისი წრფივი სახე, ანუ კუთხეების 1″ შეცვლისას შესაბამისად ამ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta\Phi_b=-\Delta_5(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)+[\varphi\varphi],$$

სადაც

$$\varphi_5=-0{,}35; \quad \varphi_6=+1{,}40; \quad \varphi_7=-3{,}44; \quad \varphi_8=+6{,}29;$$
$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=\varphi_9=0.$$

კოეფიციენტები $\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ.}}\right)$ განზომილებისაა. მაშასადამე, $([\varphi\varphi])=\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ.}}\right)^2$. $\Delta\Phi_b$ სიდიდის ოდენობის განსაზღვრაში $[\varphi\varphi]$ წევრი არ შედის.

III. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების და Φ_b წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შედგენა (სქემა 33)

პირობითი განტოლებების კოეფიციენტებს ვიღებთ სამ-სამი ნიშნადი ციფრით, ხოლო ნორმალური განტოლებებისას — ოთხ-ოთხი ნიშნადი ციფრით.

№№	a]	b]	c]	d]	e]	S]	φ
1	+1			+1		+ 2,00	
2	+1				+9,05	+10,05	
3	+1				−6,58	− 5,58	
4		+1			+2,27	+ 3,27	
5		+1		+1		+ 2,00	−0,35
6		+1			−1,40	− 0,40	+1,40
7			+1		+3,44	+ 4,44	−3,44
8			+1		−6,29	− 5,29	+6,29
9			+1	+1		+ 2,00	
ჯამები	+3,00	+3,00	+3,00	+3,00	+0,490	+12,49 / +12,49	+3,90
W	−4,96	−1,91	+6,83	0	−39,4		
K	+1,521	+0,5887	−2,128	+0,006284	+0,1582		
WK							
[a	+3,000			+1,000	+2,470	+ 6,470	+ 1,050
[b		+3,000		+1,000	+0,870	+ 4,870	+ 2,850
[c			+3,000	+1,000	−2,850	+ 1,150	− 0,350
[d				+3,000		+ 6,000	−53,360
[e					+183,710	+184,200	−49,810
[S						+202,700	+53,480
[φ							
[Σ							

IV. ნორმული განტოლებების ამოხსნა და პირველი კონტროლი

1. კორელატების ნორმული განტოლებების სისტემის და ჯამური ტოლობის შედგენა

$$
\begin{array}{l}
3{,}000K_1 \qquad\qquad\qquad +1{,}000K_4+2{,}470\,K_5-4{,}960=0;\\
\qquad +3{,}000K_2 \qquad\qquad +1{,}000K_4+0{,}8700K_5-1{,}910=0;\\
\qquad\qquad +3{,}000K_3+1{,}000K_4-2{,}850\,K_5+6{,}830=0;\\
1{,}000K_1+1{,}000\,K_2+1{,}000\,K_3+3{,}000K_4+ \qquad 0=0;\\
2{,}470K_1+0{,}8700K_2-2{,}850\,K_3 \qquad +183{,}710K_5-39{,}40=0.
\end{array}
$$

ჯ. გ. $6{,}4700K_1+4{,}8700K_2+1{,}1500K_3+6{,}000K_4+184.20K_5-39{,}44=0.$

წონითი ფუნქციის ნორმალური განტოლების მსგავსი სახე იქნება.

$$+1{,}050K_2+2{,}85K_3-0{,}3500K_4+53{,}36K_5+53{,}48=\Delta\Phi_b.$$

2. ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის სქემა (34).

3. კორელატების გამოთვლამდე კონტროლი შესრულებულია (34) სქემის W და S' სვეტში.

4.(4. 3. 4 13) ფორმულით კორელატების გამოთვლის კონტროლი.

სქემაში კორელატების გამოთვლა შესრულებულია საჭიროზე ერთი ციფრით მეტი.

Σ	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	eK_5	ε
+2,00	+1,521			+0,006284		+1,5270
+10,05	+1,521				+1,4320	+2,9530
−5,58	+1,521				−1,0410	+0,4800
+3,27		+0,5887			+0,3591	+0,9474
+1,65		+0,5887		+0,006284		+0,5950
+1,00		+0,5887			−0,2215	+0,3672
+1,00			−2,128		+0,5442	−1,5840
+1,00			−2,128		−0,9951	−3,1230
+2,00			−2,128	+0,006284		−2,1220
+16,39 +16,39					[εε]=29,43	
					−[WK]=29,44	

+6,470 +5,920 +4,000 +5,650 +130,840 0 +3,673 +154,600	სტრიქონული საკონტროლო ჯამები 1. $[aS]+W_1=+6,470-4,960=+1,510;$ 2. $[bS]+W_2=+4,870-1,910=+2,960;$ 3. $[cS]+W_3=+1,150-6,830=+7,980;$ 4. $[dS]+W_4=+6,000+0=+6,000;$ 5. $[eS]+W_5=+184,200-39,400=+144,800;$

$$6,4700\times1,5209+4,8700\times0,5887+1,1500\times(-2,1285)+6,0000\times0,0063+$$
$$+184,2000\times0,1582-39,4400=0.$$

5. პირველი კონტროლი

$$-[WK]=-4,96\times1,5209-1,91\times0,5887+6,83\times(-2,1285)-$$
$$-39,4\times0,1582=-29,4388.$$

(4. 3. 4. 13) ტოლობის ორივე ნაწილი ტოლია, ე. ი. პირველი კონტროლი დაკმაყოფილებულია.

V. შესწორებების გამოთვლა

იხილეთ (33) სქემა, იქვეა შედარება [εε] და $-[WK]$ ჯამების, სადაც არაა დაცული მესამე ნიშნადი ციფრი.

პირობითი განტოლებების შემოწმება

$$(1)+(2)+(3)+W_1=+1,527+2,953+0,4800-4,960=0;$$
$$(4)+(5)+(6)+W_2=+0,9474+0,5950+0,3672-1,910=0;$$
$$(7)+(8)+(9)+W_3=-1,584-3,123-2,122+6,830=0;$$
$$(1)+(5)+(9)+W_4=+1,527+0,5950-2,122=0.$$
$$e_2(2)-e_3(3)+e_4(4)-e_6(6)+e_7(7)-e_8(8)+W_5=+9,05\times2,953-$$
$$-6,58\times0,4800+2,27\times0,9474-1,40\times0,3672+3,44\times(-1,584)-$$
$$-6,29\times(-3,123)-39,4=0.$$

№№	აღნიშვნა	K_1	K_2	K_3	K_4
1	a	+3,000	0	0	+1,000
2	E_1	−1	0	0	−0,3333
3					
4	b		+3,000	0	+1,000
5	$E_1 \times a_2$		0	0	+0
6	$b \cdot 1$		+3,000	0	+1,000
7	E_2		−1	0	−0,3333
8					
9	c			+3,000	+1,000
10	$E_1 \times a_3$			0	0
11	$E_2 \times b \cdot 1_3$			0	0
12	$c \cdot 2$			+3,000	+1,000
13	E_3			−1	−0,3333
14					
15	d				+3,000
16	$E_1 \times a_4$				−0,333
17	$E_2 \times b \cdot 1_4$				−0,333
18	$E_3 \times c \cdot 2_4$				−0,333
19	$d \cdot 3$				+2,000
20	E_4				−1
21					
22	e				
23	$E_1 \times a_5$				
24	$E_2 \times b \cdot 1_5$				
25	$E_3 \times c \cdot 2_5$				
26	$E_4 \times d \cdot 3_5$				
27	$e \cdot 4$				
28	E_5				
29		+1,6533	+0,63667	−2,2767	−0,006635
30		−0,1303	−0,0459	+0,1503	+0,012919
31		−0,0021	−0,0021	−0,0021	+0,006284
32		0	0	−2,1285	K_4
33		0	+0,58867	K_3	
34		+1,5209	K_2		
35		K_1			

$K_ნ$	W	S'	კონტროლი	φ	Σ
+2,470	−4,960	+1,510	+1,510	0	+6,470
−0,8233	+1,6533	−0,5033	−0,5033	0	−2,1566
+0,870	−1,910	+2,960	+2,960	+1,050	+5,920
0	0	0		0	0
+0,870	−1,910	+2,960	+2,960	+1,050	+5,920
−0,2900	+0,6367	−0,9867	−0,9866	−0,3500	−1,9733
−2,850	+6,830	+7,980	+7,980	+2,850	+4,000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
−2,850	+6,830	+7,980	+7,980	+2,850	+4,000
+0,9500	−2,2767	−2,6600	−2,6600	−0,9500	−1,3333
0	0	+6,000	+6,000	−0,350	+5,650
−0,823	+1,653	−0,503		0	−2,157
−0,290	+0,637	−0,987		−0,350	−1,973
+0,950	−2,277	−2,660		−0,950	−1,333
−0,163	+0,013	+1,850	+1,850	−1,650	+0,187
+0,082	−0,006	−0,925	−0,924	+0,825	−0,094
+183,710	−39,400	+144,800	+144,8000	−53,360	+130,840
− 2,034	+ 4,084	− 1,243		0	− 5,327
− 0,252	+ 0,554	− 0,858		− 0,304	− 1,717
− 2,708	+ 6,489	+ 7,581		+ 2,708	+ 3,800
− 0,013	+ 0,001	+ 0,151		− 0,1348	+ 0,015
+178,703	−28,272	+150,431	+150,431	−51,092	+127,611
−1	+ 0,15821	− 0,84180	− 0,84179	+ 0,28591	− 0,71410
+0,1582	0	−39,440		+53,480	+ 3,673
$K_ნ$	− 8,200	+ 2,497		0	− 0
	− 1,216	+ 1,884		− 0,367	− 2,072
	−15,550	−18,168		− 2,707	− 3,800
	− 0,000	− 0,012		− 1,361	+ 0,154
	− 4,473	+23,800		−14,610	+36.490
	−29,44	−29,44		+34,44	+34,44
	−[WK] [ss]	[WK]		$\frac{1}{P_b}\left(\frac{\lg_e}{სკ.}\right)^2$	$\frac{1}{P_b}\left(\frac{\lg_e}{სკ.}\right)^2$

VI. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა
სქემა (35)

სქემა 4.7.1.35

№№	კუთხეები	განაზომები a_i'	შესწორებები ε_i	გაწონასწორებული მნიშვნე-ლობები $a_i=a_i'+\varepsilon$
1	*AOB*	149°09′47″,99	+1,53	149°09′49″,52
2	*ABO*	13 06 09 ,86	+2,95	13 06 12 ,81
3	*BAO*	17 43 57 ,19	+0,48	17 43 57 ,67
4	*BCO*	42 52 19 ,22	+0,95	42 52 20 ,17
5	*BOC*	80 49 09 ,45	+0,59	80 49 10 ,04
6	*CBO*	56 18 29 ,42	+0,37	56 18 29 ,79
7	*CAO*	31 27 40 ,94	−1,59	31 27 39 ,35
8	*ACO*	18 31 23 ,33	−3,12	18 31 20 ,21
9	*AOC*	130 01 02 ,56	−2,12	130 01 0 ,44

VII. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების საბოლოო კონტროლი

1. 149°09′49″,52
2. 13 06 12 ,81
3. 17 43 57 ,67

180°
—
180

0

4. 42°52′20″,17
5. 80 49 10 ,04
6. 56 18 29 ,79

180°
—
180

0

7. 31°27′39″,35
8. 18 31 20 ,21
9. 130 01 0 ,44

180°
—
180

0

1. 149°09′49″,52
5. 80 49 10 ,04
9. 130 01 0 ,44

360
—
360

0

სქემა 4.7.1.36

	ს ა კ ლ ე ბ ი			მ ა კ ლ ე ბ ი	
№№	a_i	lg sin a_i		a_i	lg sin a_i
2	13°06′12″,87	9.3554741	3	17°43′57″,67	9.4836964
4	42 52 29 ,17	9.8327428	6	56 18 29 ,79	9.9201412
7	31 27 39 ,35	9.7176015	8	18 31 20 ,21	9.9201412
	Σ_1	8.9058184		Σ_2	8.9058184

$$\Sigma_1-\Sigma_2=0.$$

VIII. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}=\pm\sqrt{\frac{29{,}43}{5}}=\pm 2'',36.$$

2. m-ის განსაზღვრის შეცდომა

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}=\pm\frac{2{,}36}{\sqrt{2(9-1)}}=\pm 0'',59$$

3. ნებისმიერი გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{\alpha_i}=m\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}=$$

$$=\pm 2{,}36\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm 1'',57.$$

IX. Φ_b ფუნქციის სიზუსტის შეფასება

1. (34) სქემის φ სვეტიდან b გვერდის შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_b}=34{,}44\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ}}\right)^2 \text{ ანუ წონა } P_b\approx 0{,}03\left(\frac{\text{სეკ}}{\lg_6}\right)^2$$

2. b გვერდის ლოგარითმის განსაზღვრის დისპერსია

$$m^2_{\lg b}=\frac{m^2}{P_b}=(2{,}36)^2\cdot 34{,}44=173\,(\lg_6)^2$$

3. b გვერდის ლოგარითმის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{\lg b}\approx\pm 13{,}2\,(\lg_6)$$

4. b გვერდის განსაზღვრის ფარდობითი შეცდომა

$$\frac{m_b}{b}=\frac{m_{\lg b}}{M_{10}}=\pm\frac{13{,}2}{0{,}43\times 10^6}=\pm\frac{1}{33000}$$

X. b გვერდის ლოგარითმის განსაზღვრა (სქემა 37).

ამ გვერდის საბოლოო მნიშვნელობად ვიღებთ მისი გამონათვლების საშუალო არითმეტიკულს

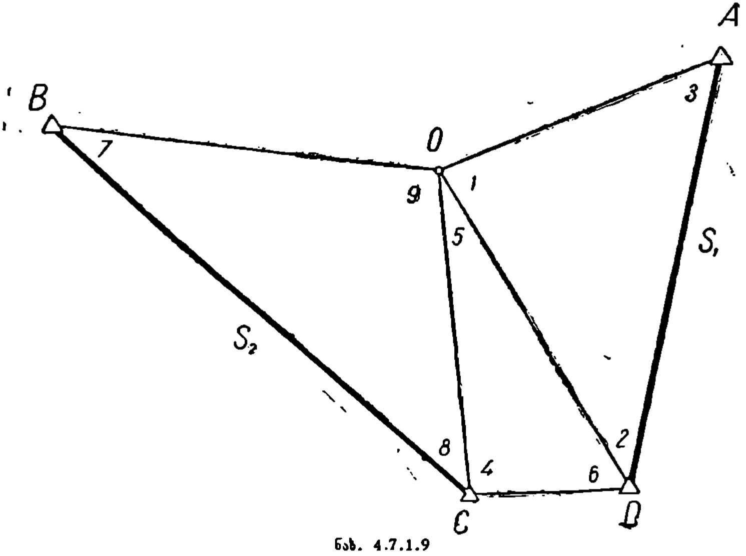
$$\lg b=3\cdot 005980+\frac{06+41+28-08}{4}\approx 3.0059818.$$

სქემა 4.7.1.37

სამკუთხედი	წვეროები	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები	კუთხეების სინუსების ლოგარითმები	გვერდის დასახელება	გვერდების ლოგარითმები
BCO	*B* *C* *O*	4 6 5	42°52′20″,17 56 18 29 ,79 80 49 10 ,04	9.8327428 9.9201412 9.9944011	a a_1 a_2	8.8058647 3.2216048
ABO	*C* *A*	8 7	18°31′20″,21 31 27 39 ,35	9.5019808 9.7176015	a_1 b	3.2216048 3.0059806
ACO	*B* *A*	2 3	13 06 12 ,81 17 43 57 ,67	9.3554741 9.4836964	a_2 b	3.1342064 3.0059841
ABC	*B* *A* *C*	2+6 3+7 4+8	69 24 39 ,32 49 11 38 ,13 61 23 42 ,55	9.9713345 9.8790533 9.9434660	a b_1 b_2	8.8058047 3.3881459 3.3602774
ABC	*C* *O*	8 9	18 31 20 ,21 130 01 02 ,56	9.5019808 9.8841434	b_1 b	3.3881459 3.0058828
ABC	*B* *O*	2 1	13 06 12 ,81 149 09 47 ,99	9.3554741 9.7097723	b_2 b	3.3602774 3.0059792

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 7. გაწონასწორდეს (4) მაგალითის პირობის მიხედვით (9) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მონაცემები (8) ნახაზის შესაბამისად.

მაგალითი 4. 7. 1. 5. გაწონასწორდეს პირობით განაზომთა ხერხით არახელსაყრელ პირობებში გაზომილ S_1 და S_2 ბაზისს შორის ჩასმულ სამკუთხედთა სისტემა (ნახ. (9) და (10) ცხრილის პირველი ვარიანტის მიხედვით და შეფასდეს *CD* გვერდის განსაზღვრის სიზუსტე.



ნახ. 4.7.1.9

ყველა ვარიანტისათვის საერთო გამოსავალი მონაცემია:

$$S_1 = AD = 2576{,}803 \text{ მ} \pm 0{,}045 \text{ მ},$$

$$S_2 = BC = 3246.671 \text{ მ} \pm 0{,}016 \text{ მ},$$

α_1, α_2, α_3, α_7, α_8 და α_9 კუთხეების განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომაა $\pm 5''$, ხოლო α_4 α_5, α_6 კუთხეების განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის $\pm 7''$.

ცხრილი 4.7.1.10

კუთხეების №№	ვარიანტები									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		სეკუნდები								
1	82°58′14″,6	14,1	13,6	13,0	12,5	12,0	11,6	11,1	10,4	13,8
2	40 49 36 ,9	37,3	36,7	37,8	36,2	35,7	37,1	38,2	38,6	36,9
3	56 12 06 ,7	07,4	07,8	08,2	08,7	09,1	09,4	06,9	09,9	07,6
4	93 00 32 ,8	32,3	31,7	31,1	30,6	30,2	29,8	29,3	28,8	29,0
5	24 28 02 ,1	02,4	02,8	03,3	03,8	00,7	01,5	01,1	00,2	01,9
6	62 31 28 ,0	28,5	29,1	29,7	30,1	27,5	26,2	26,8	33,6	32,5
7	35 21 49 ,0	48,2	47,6	47,1	46,7	46,3	45,9	45,3	44,8	45,1
8	43 13 28 ,1	27,4	26,9	26,3	25,8	25,4	25,0	24,6	27,9	26,6
9	101 24 47 ,3	47,9	48,5	48,8	48,2	45,7	46,9	46,4	45,3	46,0

განხილად შემთხვევაში ბაზისებისა და კუთხეების გაზომვების სიზუსტეს დაახლოებით ტოლს ვგულისხმობთ; ამიტომ გაწონასწორებისას მიღებული შეუკვრელობები საჭიროა გაბათილდეს როგორც გაზომილი კუთხეების, ასევე გაზომილი ბაზისების შესწორებების ხარჯზე.

მაშასადამე, აქ საქმე გვაქვს არაერთგვაროვანი, არატოლზუსტი განაზომების გაწონასწორება-შეფასებასთან (გასაწონასწორებელია კუთხეები და ბაზისები). შევთანხმდეთ: ფიგურის პირობით განტოლებათა შეუკვრელობები გამოვსახოთ სეკუნდებში, ბაზისების პირობითი განტოლებების შეუკვრელობები — ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეშვიდე ნიშნის ერთეულებში, კუთხეების შესწორებები — სეკუნდებში და ბაზისების შესწორებები გამოვსახოთ მილიმეტრებში.

ამოხსნა

I. პრაქტიკული სახის პირობითი განტოლებების შედგენა და შეუკვრელობების განსაზღვრა

a. ფიგურის

1. $(1)+(2)+(3)+W_1=0$, სადაც $W_1=1+2+3-180°=-1'',8$,
2. $(4)+(5)+(6)+W_2=0$, „ $W_2=4+5+6-180°=+2'',9$,
3. $(7)+(8)+(9)+W_3=0$, „ $W_3=7+8+9-180°=+4'',4$.

c. ბაზისების

$$\frac{S_2 \cdot \sin 7 \cdot \sin 4 \cdot \sin 1}{S_1 \cdot \sin 9 \cdot \sin 6 \cdot \sin 3} = 1 + r,$$

ანუ $\lg \sin 1 + \lg \sin 4 + \lg \sin 7 + \lg S_2 - \lg \sin 3 - \lg \sin 6 -$

$$-\lg \sin 9 - \lg S_1 = W_4.$$

მისი წრფივი სახე იქნება

$$4.\ \Delta_1(1)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_6(6)+\Delta_7(7)-\Delta_9(9)+\Delta_{10}(S_2)-$$
$$-\Delta_{11}(S_1)+W_4=0,$$

განზომილებებში:

$$\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})-\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})+\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})-\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})+\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})-$$
$$-\left(\frac{\lg}{\text{სკ}}\right)(\text{სკ})+\left(\frac{\lg}{\text{მმ}}\right)(\text{მმ})-\left(\frac{\lg}{\text{მმ}}\right)(\text{მმ})+(\lg)=0,$$

რომელთა შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობები მოცემულია (38) სქემაში.

სქემა 4.7.1.38

ს ა კ ლ ე ბ ი				მ ა კ ლ ე ბ ი			
№№	განაზომები	$\lg\sin\alpha_i$ და $\lg S_2$	Δ	№№	განაზომები	$\lg\sin\alpha$ და $\lg S_1$	Δ
1	82°58′14″,6	9.9967234	+ 2, 6	3	56°12′06″,7	9.9196023	+14, 1
4	93 00 32 ,8	9.9994008	— 1, 1	6	62 31 28 ,0	9.9480253	+10, 9
7	35 21 49 ,0	9.7625010	29, 7	9	101 24 47 ,3	9.9913261	— 4, 2
S_2	32 46,671	3.5114383	+ 1,34	S_1	2576,803	3.4110812	+ 1,69
		$\Sigma_1=3.2700635$				$\Sigma_2=3.2700349$	

$$W_4=\Sigma_1-\Sigma_2=+286\ (\lg_7).$$

ბაზისების ტოლობების ამ გალოგარითმების შესაბამისად ლოგარითმების ცხრილიდან ამოვიწერთ Δ ცხრილურ სხვაობებს:

Δ — კუთხის 1″-ზე შეცვლის შესაბამისი $\sin\alpha_i$ ლოგარითმის ცხრილური სხვაობაა და Δ_{S_i} — ერთი მილიმეტრით ბაზისის შეცვლის ბაზისის ლოგარითმის სხვაობა.

ცნობილია, რომ Δ_{S_i} ცხრილური სხვაობები შეიძლება განისაზღვროს, როგორც კერძო წარმოებულები, ბაზისების მიხედვით. მაგალითად, განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 1. 7) პარაგრაფის ფორმულების საფუძველზე:

$$\frac{\partial W_4}{\partial S_2}=\frac{\partial \lg S_2}{\partial S_2}=\frac{M_{10}\,\partial \ln S_2}{\partial S_2}=\frac{M_{10}\dfrac{\partial S_2}{S_2}}{\partial S_2}=\frac{M_{10}}{S_2}.$$

ვინაიდან (4. 6. 1. 1) მიხედვით ნებისმიერ შესწორებათა პირობითი ტოლობის კოეფიციენტების განზომილება ტოლია შესაბამისი **შეუკვრელობისა და შესწორების განზომილების ფარდობისა**

$$(\Delta s_2)=\frac{(\lg_7)}{\text{მმ}},$$

დავწერთ

$$\frac{\partial W_4}{\partial S_2}=\frac{M_{10}\times 10^7}{S_2}\ \frac{(\lg_7)}{\text{მმ}}=\frac{4_34_2945}{3246671}=1{,}34\left(\frac{\lg_7}{\text{მმ}}\right),$$

ასევე,

$$\frac{\partial W_4}{\partial S_1} = \frac{M_{10\times10^7}}{S_1}\,\frac{(\lg_7)}{(\text{მმ})} = \frac{4342945}{2576803} = 1{,}69\left(\frac{\lg_7}{\text{მმ}}\right),$$

რაც მივიღეთ (38) სქემაში, უშუალოდ ლოგარითმების ცხრილის საშუალებით.

პრაქტიკაში პირობით განტოლებათა უშუალო განაზომების მიხედვით კერძო წარმოებულების გამოთვლის ნაცვლად იღებენ ლოგარითმების ცხრილურ სხვაობას (შეცდომას) ზომის ერთ ერთეულზე; ჩვენს შემთხვევაში განაზომის მეშვიდე ციფრზე, ანუ მილიმეტრზე, როგორც ზემოთ მოვიქეცით.

კუთხეებისა და ბაზისების თანადროულად გაწონასწორებისათვის საჭირო კუთხური და ხაზოვანი შესწორებების ოდენობების განსაზღვრისათვის აუცილებელია წონების გამოყენება.

II. წონების და შებრუნებული წონების გამოთვლა

წონების გამოთვლას ვაწარმოებთ თანახმად განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 4. 1) ფორმულისა

$$P_i = \frac{\eta^2}{M_i^2}\,.$$

ვინაიდან არაერთგვაროვან განაზომთა გაწონასწორების შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, η-ს ვიღებთ როგორც ფიქტიური რიგის ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას ნულოვანი განზომილებით. ვთქვათ, $\eta = \pm 5$. მაშასადამე,

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_7 = P_8 = P_9 = \frac{5^2}{5^2} = 1\left(\frac{1}{\text{სკ}^2}\right),$$

$$P_4 = P_5 = P_6 = \frac{5^2}{7^2} = 0{,}51\left(\frac{1}{\text{სკ}^2}\right),$$

$$P_{s_2} = P_{10} = \frac{5^2}{16^2} = \frac{25}{256} = 0{,}0977\left(\frac{1}{\text{მმ}^2}\right),$$

$$P_{s_1} = P_{11} = \frac{5^2}{45^2} = \frac{25}{2025} = 0{,}0124\left(\frac{1}{\text{მმ}^2}\right).$$

შებრუნებული წონები კი იქნება:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_3} = \frac{1}{P_7} = \frac{1}{P_8} = \frac{1}{P_9} = 1\,(\text{სკ})^2;$$

$$\frac{1}{P_4} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{P_6} = \frac{100}{51} = 1{,}96\,(\text{სკ}^2);$$

$$\frac{1}{P_{s_2}} = \frac{1}{P_{10}} = \frac{256}{25} = 10{,}24\,(\text{მმ}^2);$$

$$\frac{1}{P_{s_1}} = \frac{1}{P_{11}} = \frac{2025}{25} = 81{,}0\,(\text{მმ}^2).$$

III. შესწორებათა პირობითი ტოლობების და Φ_{CD} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლა

1. $a_1 = a_2 = a_3 = 1\ (0);\ a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 0;$

2. $b_4 = b_5 = b_6 = 1\ (0);\ b_1 = b_2 = b_3 = b_7 = b_8 = b_9 = b_{10} = b_{11} = 0;$

3. $c_7 = c_8 = c_9 = 1\ (0);\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_{10} = c_{11} = 0;$

4. $d_1 = \Delta_1 = +2{,}6\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ.}}\right);\ d_3 = -\Delta_3 = -14{,}1\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ.}}\right);$

$$d_4 = \Delta_4 = -1{,}1\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);\ d_6 = -\Delta_6 = -10{,}9\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);$$

$$d_7 = \Delta_7 = +29{,}7\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);\ d_9 = -\Delta_9 = +4{,}2\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);$$

$$d_{10} = \Delta_{s_2} = +1{,}34\left(\frac{\lg_7}{\text{მმ}}\right);$$

$$d_{11} = -\Delta_{s_1} = -1{,}69\left(\frac{\lg_7}{\text{მმ}}\right);\ d_2 = d_5 = d_8 = 0.$$

წონითი ფუნქციაა

$$\Phi_{CD} = \frac{S_2 \cdot \sin 7 \cdot \sin 5}{\sin 9 \cdot \sin 6};$$

მისი წრფივი სახე, ანუ ნაზრდი კუთხეების 1″ შეცვლისას $\left(\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]\right.$ სიდიდის გარეშე$\left.\right)$ იქნება

$$\Delta\Phi_{CD} = \Delta_5(5) - \Delta_6(6) + \Delta_7(7) - \Delta_9(9) + \Delta_{s_2}(S_2) + \left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right],$$

სადაც

$$\varphi_5 = \Delta_5 = +46{,}3\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);\quad \varphi_6 = -\Delta_6 = -10{,}9\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);$$

$$\varphi_7 = +\Delta_7 = +29{,}7\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);\ \varphi_9 = -\Delta_9 = +4{,}2\left(\frac{\lg_7}{\text{სკ}}\right);$$

$$\varphi_{10} = \Delta_{s_2} = +1{,}34\left(\frac{\lg_7}{\text{მმ}}\right);\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_8 = \varphi_{11} = 0;$$

$$\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] = 5352{,}62\,(\lg_7)^2$$

ეს უკანასკნელი სიდიდე ამოღებულია (39) სქემის $\frac{\varphi\varphi}{P}$ სვეტიდან.

IV. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების და Φ_{CD} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შედგენა სქემა (39)

არატოლზუსტი გაზომვების დამუშავებისას (28) სქემის გამოყენება უხერხულია, რადგანაც ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენის დროს საჭირო ხდება შესწორებათა პირობითი ტოლობების კოეფიციენტების გაყოფა სათანადო წონებიდან კვადრატულ ფესვზე. ამიტომ ვიყენებთ (1) სახის სრულ სქემას.

V. ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა და პირველი კონტროლი.

1. კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემის და ჯამური ტოლობის შედგენა

$$3{,}00K_1 - 11{,}50K_4 - 1{,}80 = 0;$$

$$+5{,}88K_2 - 23{,}52K_4 + 2{,}90 = 0;$$

$$+3{,}00K_3 + 33{,}90K_4 + 4{,}40 = 0;$$

$$-11{,}50K_1 - 23{,}52K_2 + 33{,}90K_3 + 1590{,}60K_4 + 286{,}00 = 0.$$

ჯამური ტოლობა $-8{,}5K_1 - 17{,}64K_2 + 36{,}90K_3 + 1589{,}48K_4 + 291{,}50 = 0.$

Φ_{CD} წონითი ფუნქციის ნორმალური განტოლების მაგვარი განტოლება კი იქნება:

$$\left[\frac{a\varphi}{P}\right]K_1 + \left[\frac{b\varphi}{P}\right]K_2 + \left[\frac{c\varphi}{P}\right]K_3 + \left[\frac{d\varphi}{P}\right]K_4 + \left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right] = \Delta\Phi_{CD},$$

სადაც (4.6.2) პარაგრაფის მიხედვით: $(K_i) = \left(\frac{1}{W_i}\right)$.

(39) სქემიდან

$$0 + 69{,}39K_2 + 33{,}90K_3 + 1151{,}00K_4 + 5352{,}62 = \Delta\Phi_{CD}.$$

2. კორელატების განსაზღვრამდე კონტროლი შესრულებულია (40) სქემის W და S' სვეტში, რის შემდეგ გამოვითვლით კორელატებს.

3. კორელატების გამოთვლის კონტროლი ჯამური ტოლობის მიხედვით

$$-8{,}50\times(-0{,}2640) - 17{,}64\times(-1{,}3948) + 36{,}90\times1{,}0803 +$$

$$+1589{,}48\times(-0{,}2254) + 291{,}50 = 0$$

4. პირველი კონტროლი

$$[-WK] = -1{,}8\times(-0{,}2640) + 2{,}9\times(1{,}3948) + 4{,}4\times1{,}0803 +$$

$$+286{,}0\times(-0{,}2254) = -63{,}28$$

მიღებული სიდიდე ტოლია სქემის W სვეტის ჯამის

VI. შესწორებების გამოთვლა და $[P\varepsilon\varepsilon]$ ჯამის შედგენის სქემა (41)

სქემა 4.7.1.41

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	ჯამი	$\frac{1}{P}$	ε	$P\varepsilon\varepsilon$
1	—0,2640			—0,5860	—0,8500	1	— 0,8500	0,72
2	—0,2640				—0,2640	1	— 0,2640	0,07
3	—0,2640			+3,1781	+2,9141	1	+ 2,9141	8,49
4		—1,3948		+0,2479	—1,1469	1,96	— 2,2479	2,56
5		—1,3948			—1,3948	1,96	— 2,7338	3,81
6		—1,3948		+2,4569	+1,0621	1,96	+ 2,0817	2,21
7			+1,0803	—6,6944	—5,6141	1	— 5,6141	31,52
8			+1,0803		+1,0803	1	+ 1,0803	1,17
9			+1,0803	—0,9467	+0,1336	1	+ 0,1336	0,02
10				—0,3020	—0,3020	10,24	— 3,0925	0,93
11				+0,3809	+0,3809	81,00	+30,8529	11,80

$[P\varepsilon\varepsilon]=63,32(0)$

მეორე კონტროლი

გამოთვლა სწორია, რადგანაც მესამე ნიშნად ციფრამდე $[P\varepsilon\varepsilon]$ ტოლია (40) სქემის W სვეტის — $[WK]$ ჯამის, აგრეთვე პირობით განტოლებებში შესწორებათა მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:

$$(1)+(2)+(3)+W_1=-0,8500-0,2640+2,9141-1,8=0,$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2=-2,2479-2,7338+2,0817+2,9=0,$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3=-5,6141+1,0803+0,1336+4,4=0,$$

$$d_1(1)+d_3(3)+d_4(4)+d_6(6)+d_7(7)+d_9(9)+d_{10}(S_2)+d_{11}(S_1)+W_{4\lg}=$$

$$=2,60\times(-0,8500)-14,10\times2,9141-1,10\times(-2,2479)-$$

$$-10,9\times2,0817+20,70\times(-5,6141)+4,2\times0,1336+1,34(-3,0925)-$$

$$-1,69\times30,8529+286=0.$$

VII. კუთხეებისა და ბაზისების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრის სქემა (42)

სქემა 4.7.1.42

№№	კუთხეები და ბაზისები	განაზომები	შესწორებები	გაწონასწორებული მნიშვნელობები
1	*AOD*	82°58′14″,6	— 0″,85	82°58′13″,75
2	*ADO*	40 49 36 ,9	— 0 ,26	40 49 36 ,64
3	*DAO*	56 12 06 ,7	+ 2 ,91	56 12 09 ,61
4	*DCO*	93 00 32 ,8	— 2 ,25	93 00 30 ,55
5	*COD*	24 28 02 ,1	— 2 ,73	24 27 59 ,37
6	*CDO*	62 31 28 ,0	+ 2 ,08	62 31 30 ,08
7	*CBO*	35 21 49 ,0	— 5 ,61	35 21 43 ,39
8	*BCO*	43 13 28 ,1	+ 1 ,08	43 13 29 ,18
9	*BOC*	101 24 47 ,3	+ 0 ,13	101 24 47 ,43
10	$BC=S_2$	3246,671 მ	— 3 ,10 მმ	3246,668 მ
11	$AD=S_1$	2576,803 მ	+30 ,85 მმ	2576,834 მ

VIII. გაწონასწორებული მნიშვნელობების საბოლოო კონტროლი

1. 82°58′13″,75	4. 93°00′30″,55	7. 35°21′43″,39
2. 40 49 36 ,64	5. 24 27 59 ,37	8. 43 13 29 ,18
3. 56 12 09 ,61	6. 62 31 30 ,08	9. 101 24 47 ,43
180°	180°	180°
— 180°	— 180°	— 180°
0	0	0 .

სქემა 4.7.1.43

№№	საკლები		№№	მაკლები	
	a_i	lg sin a_i		a_i	lg sin a_i
1	82°58′13″,75	9.9967232	3	56°12′09″,61	9.9196065
4	93 00 30 ,55	9.9994011	6	62 31 30 ,08	9.9480275
7	35 21 43 ,39	9.7624844	9	101 24 47 ,43	9.9913261
S_2	3246,668 მ	3.5114379		2576,834 მ	3.4110865

$\Sigma_1=3.2700466$ Σ_2—3.2700466

$$\Sigma_1-\Sigma_2=0$$

IX. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 7. 12) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon_a^2]+[P\varepsilon_s^2]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{63,32}{4}}\approx\pm4,0(0)$$

სადაც ε_a — კუთხეების შესწორებები,

ε_s — ბაზისების შესწორებები,

r — ჭარბი განაზომების, ანუ პირობითი ტოლობების რაოდენობა.

2. η განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_\eta=\frac{\eta}{\sqrt{2(r-1)}}=\pm\frac{4,0}{\sqrt{6}}\approx\pm1,6(0)$$

3. (4. 4. 6. 3) ფორმულის მიხედვით გაწონასწორების შემდეგ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_u=\eta\sqrt{\frac{N-r}{N}}=\pm4,0\sqrt{\frac{7}{11}}=\pm3,2(0)$$

N ყველა განაზომთა რაოდენობაა.

4. CD გვერდის განსაზღვრის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა (ფუნქციის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა)

$$m_{\lg\overline{CD}}=\eta\sqrt{\frac{1}{P_{\overline{CD}}}}=\pm4,0\sqrt{3129}=\pm224\ (\lg_7),$$

სადაც შებრუნებული წონის განზომილებაა $(\lg)^2$.

5. ფარდობითი შეცდომა კი იქნება განაზომთა თეორიის [13] (3. 4. 1. 46) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{m_{\overline{CD}}}{\overline{CD}} = \frac{m_{\lg\overline{CD}}}{M_{10}} = \pm\frac{224}{0{,}43\cdot 10^7} = \pm\frac{224}{4300000} = \pm\frac{1}{20000}$$

X. CD გვერდის ლოგარითმის განსაზღვრის სქემა (44)

სქემა 4.7.1.44

სამკუთხედები	წვეროები	გაწონასწორებული კუთხეები	კუთხეების სინუსების ლოგარითმები	გვერდის დასახელება	გვერდების ლოგარითმები
BOC	*B*	35°21′43″,39	9.7624844	S_3	8.5114877
	C	101 24 47 ,43	9.9913261	a_1	3.2825960
COD	*O*	24 27 59 ,37	9.6171230	a_1	3.2825865
	D	62 31 30 ,08	9.9480275	*CD*	2.9516820
AOD	*A*	56 12 09 ,61	9.9196065	S_1	8.4110948
	O	82 58 13 ,75	9.9967232	a_2	3.3339781
COD	*O*	24 27 59 ,37	9.6171230	a_2	3.3339562
	C	93 00 30 ,55	9.9994011	*CD*	2.9516781

CD გვერდის საბოლოო სიდიდის ლოგარითმი იქნება **2,9516801**

შენიშვნა. განხილადი მაგალითის ამოხსნის IV და V მუხლების ნაცვლად (სქემა (39) და (40)) შეიძლებოდა გადასვლა IV′ მუხლზე (შემოკლებულ სქემაზე) და შემდეგ ჩვეულებრივი გზით მაგალითის დაბოლოება (V—VI...). მაგალითად, შევასრულოთ ამავე მაგალითის ამოხსნა შემოკლებული სქემის გამოყენებით.

VI′. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების, Φ_{CD} — წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება, ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა და წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრა (45) და (46) სქემა

გარკვეული დახელოვნების შემდეგ მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნეს წარმოებისათვის მოწონებული შემოკლებული სქემა (45). ამ სქემის უპირატესობა იმაშია, რომ მასში არაა საჭირო სრული სქემის $E_1 \cdot a_2$; $E_1 \cdot a_3$; $E_2 \cdot b \cdot 1_3$,... ნამრავლთა სტრიქონები, რაც მრავალუცნობიანი განტოლებების

ამოხსნის დროს მეტად აადვილებს საქმეს. ამავე დროს, არაერთგვაროვანი და ერთგვაროვანი არატოლზუსტი განაზომების დამუშავებისას იგი მეტად მოხერხებულია, რადგანაც შემოკლებულ (28) სქემაში ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენის დროს საჭირო ხდება შესწორებათა პირობითი ტოლობების კოეფიციენტების გაყოფა სათანადო წონებიდან კვადრატულ ფესვზე.

(45) სქემა არ მოითხოვს წინასწარ ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შედგენას. ამ სქემის გამოყენებისას შესწორებათა პირობითი ტოლობებიდან პირდაპირ გადავდივართ გარდაქმნილი (ეკვივალენტური) სახის ნორმალურ (b . 1, c . 2, d . 3, e . 4,...) განტოლებებზე ისე, რომ არ არის საჭირო (4. 3. 2. 1) პირველი სახის ნორმალური განტოლებების და (4. 7. 1. 3) ჯამური განტოლების შედგენა.

იმისათვის, რომ (45) შემოკლებული სქემა დაუბრკოლებლივ გამოვიყენოთ, საჭიროა კარგად გვახსოვდეს გარდაქმნილი (ეკვივალენტური) (4. 3. 2. 6) სახის სისტემის უცნობთა კოეფიციენტების (ალგორითმების) აგებულება, რომლის შესაბამისი წევრების გამომთვლელ მანქანაზე გამრავლება-შეკრების კომბინირებით მიიღება მათი რიცხვითი მნიშვნელობები.

განვიხილოთ ჩვენი მაგალითის, ანუ ოთხუცნობიანი ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის (45) და მისი შესაბამისი (46) შემოკლებული სქემა:

1. სქემა შედგება A გარდაქმნილი (ეკვივალენტური) ნორმალური I, II, III, IV ტოლობების ფურცლისა (ქვემო ნაწილი), ზემო ნაწილი წარმოადგენს შესწორებათა პირობით ტოლობებსა და Φ_u ფუნქციის კოეფიციენტებს სათანადო წონებითურთ განლაგებას (მას ვუწოდოთ სამრავლი ფურცელი) და B — ელიმინაციური I, II, III, IV ტოლობების ფურცლისაგან (ქვემო ნაწილი), რომლის ზემო ნაწილი გამოიყენება ეკვივალენტური სისტემის შესადგენად (მას ვუწოდოთ მამრავლი ფურცელი)[1].

2. (11), (12) და (13) მოქმედებების, ანუ წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრა იგივეა, რაც სრული სქემის დროს.

3. სქემაში, სადაც შტრიხებია (კვესურებია) გასმული, ის ადგილი არასდროს არ ივსება.

4. A — სამრავლი ფურცლის W და S სვეტში $+1$ და $+1$ ჩაწერა სავალდებულოა. ამ ჩაწერით ეკვივალენტური სტრიქონების მიღება სამრავლისა და მამრავლი ფურცლის მიჯრით დაყენების და გამომთვლელ მანქანაზე გამრავლება-შეჯამების ოპერაციით ნორმალურად მოხდება, რასაც (3), (5), (7), (9) მოქმედების დროს ვნახავთ (B ფურცლის W სტრიქონის სათანადო W_i სიდიდე მრავლდება ერთზე და იკრიბება დანარჩენ წევრებთან ერთად).

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (1) — იგივეა, რაც შემოკლებული (28) სქემის სათანადო ნაწილი.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (2) — პირველი მოქმედების ყველა კოეფიციენტი მრავლდება შებრუნებულ წონაზე. როდესაც საქმე გვაქვს ტოლზუსტ განაზომებთან სქემაში $\frac{1}{P}$ შებრუნებული წონის სვეტი მაინც გვექნება და $P = 1$ მნიშვნელობას შევიტანთ.

[1] ყველა მაგალითისათვის B ფურცელი დამატებით ჩადებულია წიგნში, რომელიც შესაბამის A ფურცელზე მიჯრით დაყენებით გაგვიადვილებს ტოლობების სისტემის ამოხსნას.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (3) — ეკვივალენტური სისტემის პირველი a ტოლობის (სტრიქონის) კოეფიციენტების შედგენა, რომელსაც მივიღებთ, თუ A ფურცლის a სვეტიდან დაწყებული ყოველ სვეტს $\left(\text{გარდა } \frac{1}{P} \text{ სვეტისა}\right)$ თანამიმდევრობით მიჯრით მივადებთ B ფურცლის $\frac{a}{P}$ სვეტს და მათ ნამრავლთა ალგებრულ ჯამს თანამიმდევრობით ჩავწერთ A ფურცლის I, ანუ a სტრიქონში. ამ სტრიქონის ბოლოში გამოითვლება $-\frac{1}{\frac{aa}{P}}$.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (4) — პირველი ელიმინაციური E_1 სტრიქონის მიღება. ამ სტრიქონს მივიღებთ თუ $-\frac{1}{\frac{aa}{P}}$ რიცხვს გავამრავლებთ იმავე a სტრიქონის ყოველ წევრზე და შესაბამის ნამრავლს ჩავწერთ B ფურცლის 1-ლი სტრიქონის სათანადო ადგილას.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (5) — ეკვივალენტური სისტემის მეორე (b . 1.) ტოლობის მიღება. A ფურცლის II, ანუ b . 1 სტრიქონი მიიღება, თუ მის b სვეტიდან დაწყებული (ყოველ სვეტს თანამიმდევრობით მიჯრით მივადებთ B ფურცლის $\frac{b}{P}$ სვეტს ქვემო ნაწილის a და E_1 სტრიქონის სათანადო სვეტის ჩათვლით) და მათ ნამრავლთა ალგებრულ ჯამს (გამომთვლელ მანქანაზე) თანამიმდევრობით ჩავწერთ A ფურცლის II ანუ b . 1 სტრიქონში. როგორც ვთქვით, ეს მოქმედება ვრცელდება ორივე ფურცლის II სტრიქონამდე, მაგალითად,

$$\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right] = \left[\frac{bb}{P}\right] - \frac{\left[\frac{ab}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}; \quad \left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right] = \left[\frac{bc}{P}\right] - \frac{\left[\frac{ab}{P}\right]\left[\frac{ac}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]} \text{ და ა. შ.}$$

აქვე გამოითვლება $-\frac{1}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$ რიცხვი და ჩაიწერება A ფურცლის II, ანუ $b\cdot 1$ სტრიქონის ბოლოში.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (6) — მეორე ელიმინაციური, ანუ E_2 ტოლობის მიღება. აქაც ისე, როგორც (4) მოქმედების დროს (b . 1) სტრიქონის ყოველ წევრს ვამრავლებთ $-\frac{1}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$ რიცხვზე და ყოველ ნამრავლს ვწერთ B ფურცლის II, ანუ E_2 სტრიქონში.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (7) — ეკვივალენტური სისტემის მესამე (c . 2) ტოლობის (სტრიქონის) მიღება (A ფურცლის III სტრიქონი). ამისათვის A ფურცლის c სვეტიდან დაწყებული ყოველ სვეტს თანამიმდევრობით მივადებთ

B ფურცლის $\frac{c}{P}$ სვეტს (ახლა მათი სიგრძე III სტრიქონამდეა) და ყველა ნამრავლის ალგებრულ ჯამს (გამომთვლელ მანქანაზე) თანამიმდევრობით ჩავწერთ A ფურცლის III, ანუ $(c \cdot 2)$ სტრიქონში.
მაგალითად, მივიღებთ:

$$\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right] = \left[\frac{cc}{P}\right] - \frac{\left[\frac{ac}{P}\right]^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]}$$

$$\left[\frac{cd}{P}\cdot 2\right] = \left[\frac{cd}{P}\right] - \frac{\left[\frac{ac}{P}\right]\left[\frac{ad}{P}\right]}{\left[\frac{aa}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{bc}{P}\cdot 1\right]\left[\frac{bd}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{P}\cdot 1\right]} \text{ და ა. შ.}$$

აქვე გამოითვლება $-\frac{1}{\left[\frac{cc}{P}\cdot 2\right]}$ რიცხვი და ჩაიწერება იმავე სტრიქონის ბოლოში.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (8) — მესამე (E_3) ელიმინაციური ტოლობის მიღება; იგივეა რაც მოქმედება (4) და (6).

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (9) — ეკვივალენტური სისტემის მეოთხე $(d \cdot 3)$ ტოლობის (სტრიქონის) მიღება. ახლა B სვეტის d სვეტი IV სტრიქონამდე იქნება სამრავლი და მოქმედებები შესრულდება (3), (5), (7) მოქმედებების ანალოგიურად.

მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა (10) — ანალოგიურია (4), (6), (8) მოქმედებებისა.

B ფურცელზე W სვეტის საკონტროლო — $[WK]$ ჯამის გამოსათვლელად A ფურცელი უნდა დავაყენოთ მიჯრით B ფურცლის W სვეტთან და A ფურცლის W სვეტის ჩანაწერები შესაბამისად მრავლდება B ფურცლის W და $\frac{S}{P}$ სვეტის ჩანაწერებზე. ასევე φ სვეტის ჩანაწერები მრავლდება $\frac{\varphi}{P}$ და $\frac{\Sigma}{P}$ სვეტის ჩანაწერებზე, რითაც განისაზღვრება $\frac{1}{P_u}$ სიდიდე.

დანარჩენი მოქმედებები განმარტებას არ მოითხოვს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 7. 1. 8. (5) მაგალითის პირობის შესაბამისად დამუშავდეს (10) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტი (ნახ. 9).

ამ სავარჯიშოში საქმე გვაქვს არაერთგვაროვან, არატოლზუსტ განაზომთა გაწონასწორება-შეფასებასთან. ფიგურის პირობით განტოლებათა შეუკვრელობები გამოვსახოთ სეკუნდებში, ბაზისების პირობითი ტოლობების შეუკვრელობები — ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეექვსე ნიშნის ერთეულებში, კუთხეების შესწორებები — სეკუნდებში და ბაზისების შესწორებები მილიმეტრებში.

მაგალითი 4. 7. 1. 6. პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს და შეფასდეს ტრიანგულაციის ერთი პუნქტიდან გამოსულ ორ გვერდს შორის ჩასმულ სამკუთხედთა ჯაჭვი (ნახ. 10). შეფასდეს (AD) გვერდის სიგრძისა

№	აღნიშ-ვნები	a	b	c	d	W	S	კონტრო-ლი	φ	Σ	$\frac{1}{P}$	მოქმედებათა თანამიმდევრობა
1	—	1			+ 2,60	—	+ 3,60	—		+ 3,60	1	
2	—	1			———	—	+ 1,00	—		+ 1,00	1	
3	—	1			—14,10	—	—13,10	—		—13,10	1	
4	—		1		— 1,10	—	— 0,10	—		— 0,10	1,96	
5	—		1		———	—	+ 1,00	—	+46,30	+47,30	1,96	
6	—		1		—10,90	—	— 9,90	—	—10,90	—20,80	1,96	
7	—			1	+29,70	—	+30,70	—	+29,70	+60,40	1	(1)
8	—			1	———	—	+ 1,00	—		+ 1,00	1	
9	—			1	+ 4,20	—	+ 5,20	—	+ 4,20	+ 9,40	1	
10	—				+ 1,34	—	+ 1,34	—	+ 1,34	+ 2,68	10,24	
11	—				— 1,69	—	— 1,69	—		— 1,69	81,00	
W	—				—	+ 1	+ 1	—		—	—	
I	a	+3	0	0	— 11,50	— 1,80	— 10,30	— 10,30	0	— 8,50	(—0,33333)	(3)
II	b·1		+5,88	0	— 23,52	+ 2,90	— 14,74	— 14,74	+ 69,38	+ 51,75	(—0,17007)	(5)
III	c·2			+3	+ 33,90	+ 4,40	+ 41,30	+ 41,30	+ 33,90	+ 70,80	(—0,33333)	(7)
IV	d·3				+1069,37	+240,98	+1310,32	+1310,35	+1045,45	+2114,87	(—0,000935133)	(9)

B ფურცელი

სქემა 4.7.1.46 (გაგრძელება)

№№	აღნიშვნა	$\frac{a}{P}$	$\frac{b}{P}$	$\frac{c}{P}$	$\frac{d}{P}$	W	$\frac{S}{P}$	კონტროლი	$\frac{\varphi}{P}$	$\frac{\Sigma}{P}$	მოქმედების თანამიმდევრობა
1	—	1			+ 2,60	—	+ 3,60	+ 3,60		+ 3,60	(2)
2	—	1				—	+ 1,00	+ 1,00		+ 1,00	
3	—	1			— 14,10	—	— 13,10	— 13,10		— 13,10	
4	—		1,96		— 2,16	—	— 0,20	— 0,20		— 0,20	
5	—		1,96			—	+ 1,96	+ 1,96	+90,75	+ 92,71	
6	—		1,96		— 21,36	—	— 19,40	— 19,40	—21,36	— 40,77	
7	—			1	+ 29,70	—	+ 30,70	+ 30,70	+29,70	+ 60,40	
8	—			1		—	+ 1,00	+ 1,00		+ 1,00	
9	—			1	+ 4,20	—	+ 5,20	+ 5,20	+ 4,20	+ 9,40	
10	—				+ 13,72	—	+ 13,72	+ 13,72	+13,72	+ 27,44	
11	—				—136,89	—	—136,89	—136,89		—136,89	
W	—	$W_1 = -1,8$	$W_2 = +2,9$	$W_3 = +4,4$	$W_4 = +286$	—	—	—	—	—	
I	E_1	—1	0	0	+ 3,8333	+0,6000	+ 3,4333	+ 3,4333	0	+ 2,8333	(4)
II	E_2		—1	0	+ 4,0000	—0,4932	+ 2,5068	+ 2,5068	—11,7995	— 8,8011	(6)
III	E_3			—1	—11,3000	—1,4667	—13,7667	—13,7667	—11,3000	—23,6000	(8)
IV	E_4				— 1	—0,2254	— 1,2253	— 1,2254	— 0,9776	— 1,9777	(10)
		+0,6000	—0,4932	—1,4667	—0,2254	0,	+291,50		+5352,62	+6606,87	
		—0,8640	—0,9016	+2,5470	K_4	— 1,08	— 6,18		0	0	
		0	0	+1,0803		— 1,43	+ 7,27		— 818,65	— 610,62	
		0	—1,3948	K_3		— 6,45	— 60,57		— 383,07	— 800,04	
		—0,2640	K_2			—54,32	—295,27		—1022,03	—2067,59	
		K_1				—63,28	— 63,25		+3128,87	+3128,62	
						$-\frac{[WK]}{[P ss]}$	$[WK]$		$\frac{1}{P_{CD}}(\lg_7)^2$	$\frac{1}{P_{CD}}(\lg_7)^2$	

პირველი კონტროლი:

ჯამი გამოთვლილი შეუკვრელობებით და კორელატებით — $-[WK] = -63,28$

(4.3.4.13) ფორმულის შესაბამისი ჯამი *B* ფურცლის *W* სვეტიდან — $-[WK] = -63,28$

და (AD) დირექციული კუთხის (როგორც წონითი ფუნქციის) განსაზღვრის სიზუსტე. მონაცემებია:

$$\lg \overline{AB} = \lg \bar{a} = 4.2390181,$$

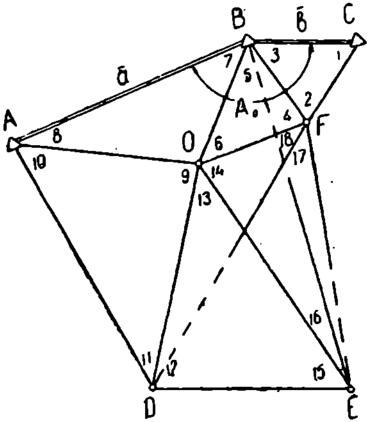
$$\lg \overline{BC} = \lg \bar{b} = 3.8940540,$$

$$\angle CBA = A_0 = 157°01'23''6.$$

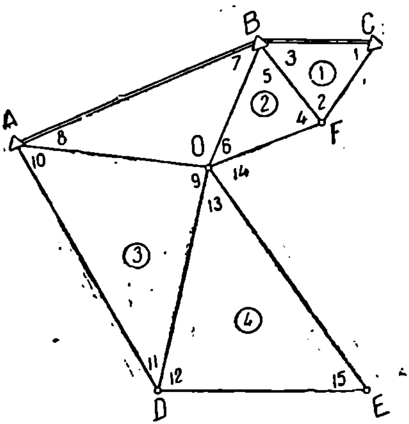
$\alpha'_1 = 56°37'04''$,	$\alpha'_6 = 48°55'25''$,	$\alpha'_{10} = 55°32'44''$,	$\alpha'_{15} = 56°33'43''$,
$\alpha'_2 = 67\ 19\ 00$,	$\alpha'_7 = 44\ 07\ 11$,	$\alpha'_{11} = 40\ 44\ 43$,	$\alpha'_{16} = 17\ 11\ 04$,
$\alpha'_3 = 56\ 04\ 02$,	$\alpha'_8 = 30\ 10\ 22$,	$\alpha'_{12} = 78\ 19\ 09$,	$\alpha'_{17} = 39\ 06\ 22$,
$\alpha'_4 = 74\ 14\ 21$,	$\alpha'_9 = 83\ 42\ 42$,	$\alpha'_{13} = 45\ 06\ 59$,	$\alpha'_{18} = 39\ 47\ 27$.
$\alpha'_5 = 56\ 50\ 12$,		$\alpha'_{14} = 76\ 32\ 35$,	

ამოხსნა.

I. პირობითი ტოლობების შედგენა და W შეუკვრელობების განსაზღვრა



ნახ. 4.7.1.10



ნახ. 4.7.1.11

$$N=15;\ P=7;\ n=11;\ q=0;$$

$$r = N - 2P + 4 = 15 - 14 + 4 = 5;$$

$$r_ა = n - 2P + 3 = 11 - 14 + 3 = 0;$$

$$r_ფ = N - n - q + 1 = 15 - 11 - 0 + 1 = 5.$$

1. $(1)+(2)+(3)+W_1=0$, სადაც $W_1 = 1+2+3-180° = +6''$
2. $(4)+(5)+(6)+W_2=0$, „ $W_2 = 4+5+6-180° = -2''$
3. $(9)+(10)+(11)+W_3=0$, „ $W_3 = 9+10+11-180° = +9''$

4. $(12)+(13)+(15)+W_4=0$, სადაც $W_4=12+13+15-180^\circ=-9''$

5. $(1)+(3)+(5)+(7)+(8)+(10)+(11)+(12)+(15)-(14)+(4)+$
$$+(2)+W_5=0,$$

სადაც

$$W_5=1+3+5+7+8+10+11+12+15+(360^\circ-14)+4+2-2d(n-2)=-4'',$$

რადგან $(360^\circ-14)=283^\circ27'25''$; $2d(n-2)=180^\circ\cdot5=900^\circ$.

დავუმატოთ (11) ნახაზს მე-18 კუთხე (იხილეთ მე-10 ნახაზი), რის გამო O პოლუსის მიმართ დავწერთ:

6. $\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_7(7)-\Delta_8(8)+\Delta_{10}(10)-\Delta_{11}(11)+\Delta_{13+14+18}(13)+$
$$+\Delta_{13+14+18}(14)+(\Delta_{13+14+18}-\Delta_{18})(18)+W_6=0,$$

სადაც

$$W_6=10^7\lg\frac{\sin 4\cdot\sin[13+14+18]\cdot\sin 10\cdot\sin 7}{\sin 5\cdot\sin 18\cdot\sin 11\cdot\sin 8},$$

შესაბამისი Δ_i და W_6 მოცემულია (47) სქემაში:

სქემა 4.7.1.47

საკლები				მაკლები			
კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ	კუთხე-ები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ
4	74°14′21″	9.9833574	+5,9	5	56°50′12″	9.9227849	+13,8
13+14+18	161 27 01	9.5026012	−62,8	18	39 47 27	9.8061710	+25,3
10	55 32 44	9.9162309	+14,4	11	40 44 43	9.8147118	+24,4
7	44 07 11	9.8427091	+21,7	8	30 10 22	9.7012305	+36,3
	$\Sigma^1=$	9.2448986			$\Sigma_2=$	9.2448982	

$$W_6=\Sigma_1-\Sigma_2=+4\ (\lg_7)$$

დავუმატოთ (11) ნახაზს მე-17 კუთხე (იხილეთ ნახ. 10), რის გამოც D პოლუსის მიმართ დავწერთ:

7. $(\Delta_{13}-\Delta_{13+14})(13)+(\Delta_{14+17+18-15}-\Delta_{13+14})(14)-(\Delta_{14+17+18-15}-\Delta_{15})(15)+$
$$+(\Delta_{14+17+18-15}-\Delta_{17})(17)+(\Delta_{18}+\Delta_{14+17+18-15})(18)+W_7=0,$$

სადაც

$$W_7=10^7\lg\frac{\sin 18\cdot\sin[14+17+18-15]\cdot\sin 13}{\sin[13+14]\cdot\sin 17\cdot\sin 15},$$

სადაც შესაბამისი Δ_i და W_7 მოცემულია (48) სქემაში:

სქემა 4.7.1.48

საკლები				მაკლები			
კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ	კუთხე-ები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ
18	39°47′27″	9.8061710	+25,3	13+14	121°39′34″	9.9300229	−13,0
14+17+18−15	98 52 41	9.9947653	−3,2	17	39 06 22	9.7998632	+25,9
13	45 06 59	9.8503654	+20,9	15	56 33 43	9.9214170	+13,9
	$\Sigma_1=$	9.6513017			$\Sigma_2=$	9.6513031	

$$W_7=\Sigma_1-\Sigma_2=-14\ (\lg_7).$$

დავუმატოთ (11) ნახაზს მე-16 კუთხე (იხ. ნახ. 10), რის გამოც O პოლუსის მიმართ დავწერთ:

$$8.\ \Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_{6+14+16}(6)+(\Delta_{14+17+18}+\Delta_{6+14+16})(14)+ \\ +(\Delta_{6+14+16}-\Delta_{16})(16)+(\Delta_{14+17+18}-\Delta_{17+18})(17)+ \\ +(\Delta_{14+17+18}-\Delta_{17+18})(18)+W_8=0,$$

სადაც

$$W_8=10^7\lg\frac{\sin 4\cdot\sin[14+17+18]\cdot\sin[6+14+16]}{\sin 5\cdot\sin[17+18]\cdot\sin 16},$$

შესაბამისი Δ_i და W_8 გამოთვლილია (49) სქემაში:

ს ქ ე მ ა 4.7.1.49

ს ა კ ლ ე ბ ი				მ ა კ ლ ე ბ ი			
კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ	კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ
4	74°14′21″	9.9833574	+5,9	5	56°50′12″	9.9227849	+13,8
14+17+18	155 26 04	9.6187236	−46,1	17+18	78 53 49	9.9917940	+4,1
6+14+16	142 39 04	9.7829504	−27,6	16	17 11 04	9.4704820	+68,1
	$\Sigma=$	9.3850314			$\Sigma_2=$	9.3850609	

$$W_8=\Sigma_1-\Sigma_2=-295\ (\lg_7).$$

დავუმატოთ (11) ნახაზს $\overline{BC}=\bar{b}$ გვერდი, ანუ ხისტი A_0 კუთხე (იხ. მე-10 ნახაზი), რის გამოც დავწერთ ჯამისა და გვერდების პირობით ტოლობებს:

9. $(3)+(5)+(7)+W_9=0,$ სადაც $W_9=3+5+7-A_0=+1'',4.$

10. $-\Delta_1(1)+\Delta_2(2)-\Delta_4(4)+\Delta_6(6)-\Delta_{7+8}(7)+(\Delta_8-\Delta_{7+8})(8)+W_{10}=0,$

სადაც

$$W_{10}=10^7\lg\frac{\bar{a}\cdot\sin 8\cdot\sin 6\cdot\sin 2}{\sin[7+8]\cdot\sin 4\cdot\sin 1},$$

შესაბამისი Δ და W_{10} გამოთვლილია (50) სქემაში:

ს ქ ე მ ა 4.7.1.50

ს ა კ ლ ე ბ ი				მ ა კ ლ ე ბ ი			
კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ	კუთხეები	განაზომები	$\lg\sin\alpha'_i$	Δ
—	$\lg\bar{a}$	4.2390181	—	—	$\lg\bar{b}$	3.8940540	—
8	30°10′22″	9.7012305	+36,3	7+8	74°17′33″	9.9834713	+5,9
6	48 55 25	9.8772759	+18,3	4	74 14 21	9.9833574	+5,9
2	67 19 00	9.9650371	+8,8	1	56 37 04	9.9216962	+13,9
	$\Sigma=$	3.7825616			$\Sigma_2=$	3.7825789	

$$W_{10}=\Sigma_1-\Sigma_2=-173\ (\lg_7).$$

გამოთვლის გამარტივების მიზნით პოლუსის და გვერდების განტოლებების Δ_i კოეფიციენტები და W_i შეუკვრელობები შევამციროთ ათ-ათჯერ, ანუ ისინი გამოვსახოთ ათობითი ლოგარითმის მანტისის მეექვსე ნიშნებში. ამ განზომილების სიმბოლო იქნება $(\lg_6)$.

როგორც ვხედავთ, განსახილველ შემთხვევაში მიღებულია შემდეგი სახის ათი პირობითი ტოლობა და მათი მსგავსი ორი წონითი ფუნქცია, რომელთაც (51) სქემაში დავალაგებთ ასე:

a. ფ ი გ უ რ ი ს (სამკუთხედის და პოლიგონის) პირობები:

1. $(1)+(2)+(3)+6''=0;$
2. $(4)+(5)+(6)-2''=0;$
3. $(9)+(10)+(11)+9''=0;$ *a*)
4. $(12)+(13)+(15)-9''=0;$
5. $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(7)+(8)+(10)+(11)+(12)-$
$-(14)+(15)-4''=0.$

b. ჯ ა მ ი ს და ს ხ ვ ა ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ა

6. $(3)+(5)+(7)+1'',4=0.$ *b*)

c. პ ო ლ უ ს ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ი:

7. $0{,}59(4)-1{,}38(5)+2{,}17(7)-3{,}63(8)+1{,}44(10)-2{,}44(11)-$
$-6{,}28(13)-6{,}28(14)-8{,}81(18)+0{,}4(\lg_6)=0;$
8. $3{,}39(13)+0{,}98(14)-1{,}07(15)-2{,}91(17)+2{,}21(18)-1{,}4(\lg_6)=0;$
9. $0{,}59(4)-1{,}38(5)-2{,}76(6)-7{,}37(14)-9{,}57(16)-5{,}02(17)-$
$-5{,}02(18)-29{,}5(\lg_6)=0.$ *c*)

d. გ ვ ე რ დ ე ბ ი ს პ ი რ ო ბ ა:

10. $-1{,}39(1)+0{,}88(2)-0{,}59(4)+1{,}83(6)-0{,}59(7)+$
$+3{,}04(8)-17{,}3(\lg_6)=0.$ *d*

წ ო ნ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი:

$$\Phi_{\overline{AD}}=\bar{a}\,\frac{\sin 7\cdot\sin 9}{\sin[7+8]\cdot\sin 11};$$

$$\Delta_{\overline{AD}}=(\Delta_7-\Delta_{7+8})(7)-\Delta_{7+8}(8)+\Delta_9(9)-\Delta_{11}(11)+[\varphi\varphi].$$

$$\Phi_{(AD)}=(AB)+8+10;\qquad \Delta_{(AD)}=(8)+(9)+[\varphi'\varphi'].$$

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობებისა და წონითი ფუნქციების კოეფიციენტების გამოთვლა

სულ გვაქვს $18\times12=216$ კოეფიციენტი.

(4. 6. 1. 1) ტოლობის შესაბამისად *a*) და *b*) პირობითი ტოლობების კოეფიციენტები იქნება ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი განზომილების $\frac{\partial W_i(\text{სეკ.})}{\partial\alpha_i(\text{სეკ.})}=0$, ხოლო *c*) და *d*) ტოლობების კოეფიციენტები იქნება $\frac{\partial W(\lg_6)}{\partial\alpha_i(\text{სეკ.})}=\frac{(\lg_6)}{(\text{სეკ.})}=\left(\frac{\lg_6}{\text{სეკ.}}\right)$ განზომილების. მაშასადამე, მივიღებთ:

1. $a_1=a_2=a_3=1$ დანარჩენი თხუთმეტი კოეფიციენტი იქნება ნული.

2. $b_4=b_5=b_6=1$ " " " " "

3. $c_9=c_{10}=c_{11}=1$ " " " " "

4. $d_{12}=d_{13}=d_{15}=1$ " " " " "

5. $e_1=e_2=e_3=e_4=e_5=e_7=e_8=e_{10}=e_{11}=e_{12}=e_{15}=1;$

$$e_{14}=-1;\ e_6=e_9=e_{13}=e_{16}=e_{17}=e_{18}=0.$$

6. $f_3=f_6=f_7=1;$

დანარჩენი თხუთმეტი კოეფიციენტი ნულია.

1, 2, 3, 4, 5 და 6 ტოლობის ყველა კოეფიციენტი ნულოვანი განზომილებისაა.

7. $g_4=+0{,}59;\quad g_5=-1{,}38;\quad g_7=+2{,}17;\quad g_8=-3{,}63;\quad g_{10}=+1{,}44;$

$g_{11}=-2{,}44;\quad g_{13}=-6{,}28;\quad g_{14}=-6{,}28;\quad g_{18}=-8{,}81;$

$$g_1=g_2=g_3=g_6=g_9=g_{12}=g_{15}=g_{16}=g_{17}=0.$$

8. $h_{13}=+3{,}39;\quad h_{14}=+0{,}98;\quad h_{15}=-1{,}07;\quad h_{17}=-2{,}91;\quad h_{18}=+2{,}21$

დანარჩენი ცამეტი კოეფიციენტი ნულია.

9. $i_4=+0{,}59;\quad i_5=-1{,}38;\quad i_6=-2{,}76;\quad i_{14}=-7{,}37;\quad i_{16}=-9{,}57;$

$$i_{17}=-5{,}02;\quad i_{18}=-5{,}02;$$

დანარჩენი თერთმეტი კოეფიციენტი ნულია.

10. $j_1=-1{,}39;\quad j_2=+0{,}88;\quad j_4=-0{,}59;\quad j_6=+1{,}83;\quad j_7=-0{,}59;$

$$j_8=+3{,}04;$$

დანარჩენი თერთმეტი კოეფიციენტი ნულია.

7, 8, 9 და 10 ტოლობების კოეფიციენტები (4.6.1·1)-ის მიხედვით $\left(\frac{\lg_e}{\text{სე.ჯ.}}\right)$ განზომილებისაა.

წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები:

$\varphi_7=(2{,}17-0{,}59)=+1{,}58;\quad \varphi_8=-0{,}59;\quad \varphi_9=+0{,}23;\quad \varphi_{11}=-2{,}44;$

ამ კოეფიციენტების განზომილებებია $\left(\frac{\lg_e}{\text{სეჯ.}}\right)$.

დანარჩენი თოთხმეტი კოეფიციენტი ნულია.

$\varphi'_8=\varphi_{10}=1$ (განზომილება ნულოვანია) დანარჩენი თექვსმეტი კოეფიციენტი ნულია.

III. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა

იხილეთ სქემა (51).

გამოთვლების გამარტივების მიზნით სქემაში ჯამისა და სხვაობის პირობა გადმოტანილია ფიგურის პირობების შემდეგ, რის გამო W_i შეუკვრელობების ინდექსები შეცვლილია. მაგალითად, სქემაში W_6 ადგილას არის W_9; W_7 ადგილას კი W_6 და ასე შემდგომ.

იქვეა შესრულებული პირველი კონტროლი.

IV. შესწორებების გამოთვლა (სქემა 52), ვსარგებლობთ B ფურცლით

სქემა 4.7.1.52

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	eK_5	fK_6	gK_7	hK_8	iK_9	jK_{10}	ε	ε
1	—3,17143				+1,53327					—1,34025	—2,97841	—3,0
2	—3,17143				+1,53327					+0,84850	—0,78966	—0,8
3	—3,17143				+1,53327	—0,59435					—2,23251	—2,2
4		—0,45128			+1,53327		+0,05751		+0,03944	—0,56888	+0,61006	+0,6
5		—0,45128			+1,53327	—0,59435	—0,13451		—0,09225		+0,26088	+0,3
6		—0,45128							—0,18451	+1,76450	+1,12871	+1,1
7					+1,53327	—0,59435	+0,21151			—0,56888	+0,58155	+0,6
8					+1,53327		—0,35382			+2,93120	+4,11065	+4,1
9			—3,99023								—3,99023	—4,0
10			—3,99023		+1,53327		+0,14036				—2,31660	—2,3
11			—3,99023		+1,53327		—0,23783				—2,69479	—2,7
12				+2,04883	+1,53327						+3,58210	+3,6
13				+2,04883			—0,61211	+0,58101			+2,01773	+2,0
14					—1,53327		—0,61211	+0,16796	—0,49268		—2,47010	—2,5
15				+2,04883	—1,53327			—0,18339			+3,39871	+3,4
16									—0,63975		—0,63975	—0,6
17								—0,49874	—0,33559		—0,83433	—0,8
18							—0,85871	+0,37877	—0,33559		—0,81553	—0,8

[εε]=98,30

პირობითი ტოლობების შემოწმება

a. ფიგურის

1. $(1)+(2)+(3)+6''=-3{,}0-0{,}8-2{,}2+6''=0;$

2. $(4)+(5)+(6)-2''=+0{,}6+0{,}3+1{,}1-2''=0;$

3. $(9)+(10)+(11)+9''=-4{,}0-2{,}3-2{,}7+9''=0;$

4. $(12)+(13)+(15)-9''=+3{,}6+2{,}0+3{,}4-9''=0;$

5. $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(7)+(8)+(10)+(11)+(12)-$
$-(14)+(15)-4''=-3{,}0-0{,}8-2{,}2+0{,}6+0{,}3+0{,}6+4{,}1-$
$-2{,}3-2{,}7+3{,}6+2{,}5+3{,}4-4''=0'',1$

b. ჯამის და სხვაობის

6. $(3)+(5)+(7)+1{,}4=-2{,}2+0{,}3+0{,}6+1{,}4=+0'',1$

c. პოლუსის

7. $0{,}59\times 0{,}61006-1{,}38\cdot 0{,}26088+2{,}17\cdot 0{,}58155-3{,}63\cdot 4{,}11065+$
$+1{,}44(-2{,}31660)-2{,}44(-2{,}69479)-6{,}28\cdot 2{,}01773-6.28(-2{,}47010)-$
$-8{,}81(-0{,}81553)+0{,}40=+0{,}005312\ (\lg_0)$

8. $3{,}39\cdot 2{,}1773+0{,}98\cdot(-2{,}47010)-1{,}07\cdot 3{,}39871-2{,}91(-0{,}83433)+$
$+2{,}21\cdot(-0{,}81553)-1{,}40=+0{,}008366\ (\lg_0),$

9. $0{,}59\times 0{,}61006-1{,}38\cdot 0{,}26088-2{,}76\times 1{,}12871-7{,}37\cdot(-2{,}47010)-$
$-9{,}59\cdot(-0{,}63975)-5{,}02(-0{,}83433)-5{,}02(-0{,}81533)-29{,}5=$
$=-0{,}0059769\ (\lg_0).$

d. გვერდების

10. $-1{,}39\cdot(-2{,}97841)+0{,}88(-0{,}78966)-0{,}59\cdot 0{,}61006+$
$+1{,}83\cdot 1{,}12871-0{,}59\times 0.58155+3{,}04\cdot 4{,}11065-17{,}3=+0{,}0039545\ (\lg_0).$

V. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა

სქემა 4.7.1.53

კუთხეები	განაზომები α'	შესწორებები ε	გაწონასწორებული მნიშვნელობები α
1	56°37′04″	−3″,0	56°37′01″,0
2	67 19 00	−0 ,8	67 18 59 ,2
3	56 04 02	−2 ,2	56 03 59 ,8
4	74 14 21	+0 ,6	74 14 21 ,6
5	56 50 12	+0 ,3	56 50 12 ,3
6	48 55 25	+1 ,1	48 55 26 ,1
7	44 07 11	+0 ,6	44 07 11 ,6
8	30 10 22	+4 ,1	30 10 26 ,1
9	83 42 42	−4 ,0	83 42 38 ,0
10	55 32 44	−2 ,3	55 32 41 ,7
11	40 44 43	−2 ,7	40 44 40 ,3
12	78 19 09	+3 ,6	78 19 12 ,6
13	45 06 59	+2 ,0	45 07 01 ,0
14	76 32 35	−2 ,5	76 32 32 ,5
15	56 33 43	+3 ,4	56 33 46 ,0
16	17 11 04	−0 ,6	17 11 03 ,4
17	39 06 22	−0 ,8	39 06 21 ,2
18	39 47 27	−0 ,8	39 47 26 ,2

VI. საბოლოო კონტროლი.

1. $1+2+3-180^\circ=0$
2. $4+5+6-180^\circ=0$
3. $9+10+11-180^\circ=0$
4. $12+13+15-180^\circ=0$
5. $1+2+3+4+5+7+8+10+11+12+(360^\circ-14)+15-900=-0'',1$
6. $3+5+7-157^\circ01'23'',6=+0'',1$

კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i
4	74°14′21″,6	9.9833577	5	56°50′12″,3	9.9227853
13+14+18	161 26 59 ,7	9.5026094	18	39 47 26 ,2	9.8061690
10	55 32 41 ,7	9.9162275	11	40 44 40 ,3	9.8147052
7	44 07 11 ,6	9.8427104	8	30 10 26 ,1	9.7012454
		$\Sigma_1=9.2449050$			$\Sigma_2=9.2449049$

$\Sigma_1-\Sigma_2=+1\ (\lg_7)$

კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i
16	39°47′26″,2	9.8061690	13+14	121°39′33″,5	9.9300235
14+17+18—15	98 52 33 .5	9.9947667	17	39 06 21 ,2	9.7998611
13	45 07 01 ,0	9.8503696	15	56 33 46 ,4	9.9214217
		$\Sigma_1=9.6513063$			$\Sigma_2=9.6513063$

$\Sigma_1-\Sigma_2=0$

კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i
4	74°14′21″,6	9.9833577	5	56°50′12″,3	9.92278510
14+17+18	155 26 19 ,9	9.6187425	17+18	78 53 47 ,4	9.9917933
6+14+16	142 39 2 ,0	9.7829559	16	17 11 03 ,4	9.4704780
		$\Sigma_1=9,3850561$			$\Sigma_2=9.3850563$

$\Sigma_1-\Sigma_2=-1\ (\lg_7)$

კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i	კუთხეები	გაწონასწორებული კუთხეები a_i	lg sin a_i
—	$\lg \overline{a}$	4.2390181	—	$\lg \overline{b}$	3.8940540
8	30°10′26″,1	9.7012453	7+8	74°17′37″,7	9.9834740
6	48 55 26 ,1	9.8772779	4	74 14 21 ,6	9.9833577
2	67 18 59 ,2	9.9650364	1	56 37 01 ,0	9.9216920
		$\Sigma_1=3.7825777$			$\Sigma_2=3.7825777$

$\Sigma_1-\Sigma_2=0$

VII. შედეგების სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 9. 6) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{98,30}{10}}=\pm 3'',14$$

სადაც r — ჭარბ განაზომთა რაოდენობა.

2. m-ის განსაზღვრის შეცდომა

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(r-1)}}=\pm\frac{3,14}{\sqrt{2\cdot 9}}=\pm 0'',74$$

3. (4. 4. 9. 5) ფორმულის შესაბამისად ნებისმიერი გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{\alpha_i}=m\sqrt{\frac{N-r}{N}}=\pm 3,14\sqrt{\frac{18-9}{18}}=\pm 2'',24$$

N — ყველა განაზომთა რაოდენობა.

4. $\Phi_{\overline{AD}}$ წონითი ფუნქციის შეფასება.

a. (51) სქემის $\frac{\varphi}{P}$ სვეტიდან $\Phi_{\overline{AD}}$ ფუნქციის შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_{\overline{AD}}}=4,45\left(\frac{\lg_6}{\text{სქ}}\right)^2$$

b. $\overline{AD}$ გვერდის ლოგარითმის დისპერსია (4.4.9.7) ფორმულის მიხედვით.

$$m^2_{\lg\overline{AD}}=\frac{m^2}{P_{\overline{AD}}}=(3,14)^2\times 4,45\left[(\text{სქ})^2\cdot\left(\frac{\lg_6}{\text{სქ}}\right)^2\right]=\pm 43,85\,(\lg_6)^2$$

c. $\overline{AD}$ გვერდის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{\lg\overline{AD}}=\pm 6,6\,(\lg_6)$$

d. $\overline{AD}$ გვერდის განსაზღვრის სიზუსტე (განაზომთა თეორიის) [3.13. 22.46) (ფორმულა)

$$\frac{m_{\overline{AD}}}{\overline{AD}}=\frac{m_{\lg\overline{AD}}}{\mu}=\pm\frac{6,6}{0,43}=\pm\frac{0,0000066}{0,43}\cong\pm\frac{1}{65000}\;.$$

5. $\Phi_{(AD)}$ ფუნქციის შეფასება.

a. (51) სქემის $\frac{\varphi'}{P}$ სვეტიდან $\Phi_{(AD)}$ წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონა

$$\frac{1}{P_{(AD)}}=0,74(0).$$

b. *AD* გვერდის (*AD*) დირექციული კუთხის დისპერსია (4.4.9.7) ფორმულით

$$m^2_{(AD)} = \frac{m^2}{P_{(AD)}} = (3{,}14)^2 \times 0{,}75\ [(\text{სკ})^2\,(0)] = 7{,}29\ (\text{სკ})^2$$

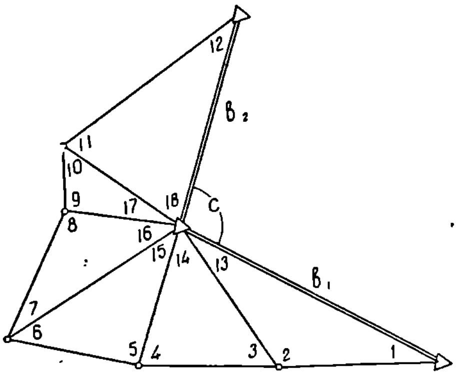
c. მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{(AD)} = \pm 2{,}7\ (\text{სკ})^2$$

d. სიზუსტე

$$\frac{m_{(AD)}}{\rho} = \pm \frac{2{,}7}{206265} \approx \pm \frac{1}{76000}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო (4. 7. 1. 9). პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს და შეფასდეს ორ ხისტ გვერდს შორის ჩასმულ სამკუთხედთა ჯაჭვი (12) ნახაზისა და მასთან დართული რიცხვითი მონაცემების მიხედვით. რიცხვითი მონაცემები ამოღებულია [17] წიგნიდან.

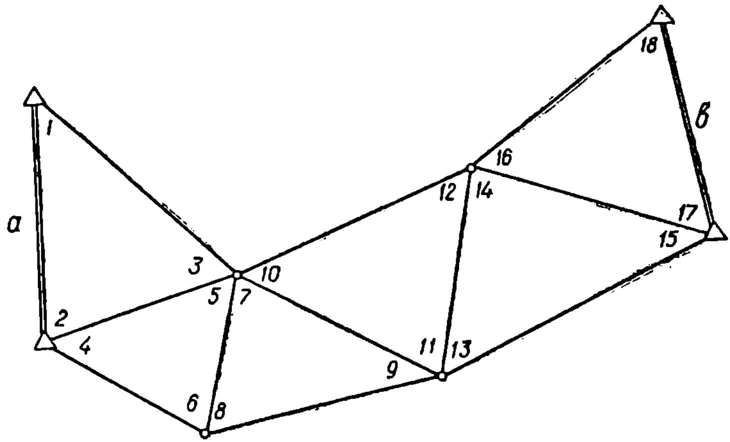


ნახ. 4.7.1.12

$$\lg b_1 = 4{\cdot}0897780$$
$$\lg b_2 = 3{\cdot}8866210$$
$$\angle C = 103°34'46'',0$$

$\alpha_1 =\ 24°21'41''$;	$\alpha_7 =\ 30°14'51''$;	$\alpha_{13} = 28°39'31''$,
$\alpha_2 = 126\ 58\ 42$;	$\alpha_8 = 108\ 12\ 32$;	$\alpha_{14} = 50\ 15\ 02$,
$\alpha_3 =\ 55\ 44\ 03$;	$\alpha_9 =\ 98\ 27\ 33$;	$\alpha_{15} = 40\ 18\ 53$,
$\alpha_4 =\ 74\ 00\ 51$;	$\alpha_{10} =\ 53\ 25\ 54$;	$\alpha_{16} = 41\ 32\ 31$,
$\alpha_5 =\ 95\ 02\ 22$;	$\alpha_{11} =\ 73\ 28\ 55$;	$\alpha_{17} = 28\ 06\ 34$,
$\alpha_6 =\ 44\ 38\ 33$;	$\alpha_{12} =\ 38\ 58\ 36$;	$\alpha_{18} = 67\ 32\ 25$.

მაგალითი 4. 7. 1. 7. პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს და შეფასდეს ორ მყარ გვერდს შორის ჩასმულ სამკუთხედთა ჯაჭვის განაზომი კუთხეები (მე-13 ნახაზისა და შემდეგი რიცხვითი მონაცემებით:



ნახ. 4.7.1.13

1. 40°56′19″,0;	7. 62°35′45″,5;	13. 51°31′47″,3;
2. 73 58 26 ,4;	8. 68 30 41 ,5;	14. 94 12 30 ,0;
3. 65 05 12 ;5;	9. 48 53 37 ,3;	15. 34 15 39 ,8;
4. 47 50 41 ,2;	10. 45 50 14 ,2;	16. 53 36 17 ,0;
5. 79 53 31 ,5;	11. 76 58 28 ,8;	17. 62 16 51 ,1;
6. 52 15 45 ,4;	12. 57 11 19 ,8;	18. 64 07 23 ,8.

მყარი გვერდების ლოგარითმები:

$$\lg a = 3{\cdot}4767181,$$

$$\lg b = 3{\cdot}4252220.$$

ფიგურის პირობითი განტოლებების შეუკვრელობები და კუთხეების შესწორებები გამოვსახოთ სეკუნდებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

I. პირობითი განტოლებების შედგენა და W შეუკვრელობების განსაზღვრა.

a· ფ ი გ უ რ ი ს

$(1)+(2)+(3)+W_1=0,$ სადაც $W_1=1+2+3-180°=-2'',1;$

$(4)+(5)+(6)+W_2=0,$ „ $W_2=4+5+6-180°=-1'',9;$

$(7)+(8)+(9)+W_3=0,$ „ $W_3=7+8+9-180°=+4'',3;$

$(10)+(11)+(12)+W_4=0,$ „ $W_4=10+11+12-180°=+2'',8;$

$(13)+(14)+(15)+W_5=0,$ „ $W_5=13+14+15-180°=-2'',9;$

$(16)+(17)+(18)+W_6=0,$ „ $W_6=16+17+18-180°=-4'',4.$

ბ. გვერდების

$$\frac{a\cdot\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 8\cdot\sin 10\cdot\sin 13\cdot\sin 16}{b\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 9\cdot\sin 12\cdot\sin 15\cdot\sin 18}=1+r,$$

რომლის წრფივი სახეა:

$$\Delta_1(1)-\Delta_3(3)+\Delta_4(4)-\Delta_6(6)+\Delta_8(8)-\Delta_9(9)+\Delta_{10}(10)-\Delta_{12}(12)+$$
$$+\Delta_{13}(13)-\Delta_{15}(15)+\Delta_{16}(16)-\Delta_{18}(18)+W_7=0,$$

შესაბამისი Δ_i და W_7 მოცემულია ქვემოთ:

	Δ		Δ
$\lg a=3\cdot4767181-$		$\lg b=3\cdot4252220-$	
$\lg\sin 1=9\cdot8164071$	$+24,3$	$\lg\sin 3=9\cdot9575820$	$+9,8$
$\lg\sin 4=9\cdot8700112$	$+19,1$	$\lg\sin 6=9\cdot8980800$	$+16,3$
$\lg\sin 8=9\cdot9687124$	$+8,3$	$\lg\sin 9=9\cdot8770781$	$+18,4$
$\lg\sin 10=9\cdot8557396$	$+20,5$	$\lg\sin 12=9\cdot9245175$	$+13,5$
$\lg\sin 13=9\cdot8937240$	$+16,7$	$\lg\sin 15=9\cdot7504810$	$+31,0$
$\lg\sin 16=9\cdot9057650$	$+15,5$	$\lg\sin 18=9\cdot9541147$	$+10,2$
$\Sigma_1=2\cdot7870774$		$\Sigma_2=2\cdot7870753$	

$$W_7=\Sigma_1-\Sigma_2=+21\ (\lg_7).$$

მაშასადამე, სიმარტივისათვის ათჯერ შემცირებული, ანუ ლოგარითმის მეექვსე ნიშნებში გამოსახული წრფივი სახის გვერდების პირობითი ტოლობა იქნება:

$$+2,4\ (1)-1,0\ (3)+1,9\ (4)-1,6\ (6)+0,8\ (8)-1,8\ (9)+2,0\ (10)-$$
$$-1,4\ (12)+1,7\ (13)-3,1\ (15)+1,6\ (16)-1,0\ (18)+2,1=0.$$

II. შესწორებათა პირობითი ტოლობების კოეფიციენტების გამოთვლა

$a_1=a_2=a_3=1;$ დანარჩენი კოეფიციენტები ნულია

$b_4=b_5=b_6=1;$ „ „

$c_7=c_8=c_9=1;$ „ „

$d_{10}=d_{11}=d_{12}=1;$ „ „

$e_{13}=e_{14}=e_{15}=1;$ „ „

$f_{16}=f_{17}=f_{18}=1;$ „ „

$g_1=+2,4;\quad g_3=-1,0;\quad g_4=+1,9;\quad g_6=-1,6;\quad g_8=+0,8;$

$g_9=-1,8;\quad g_{10}=+2,0;\quad g_{12}=-1.4;\quad g_{13}=+1,7;\quad g_{15}=-3,1;$

$g_{16}=+1,6;\quad g_{18}=-1,0;\quad g_2=g_5=g_7=g_{11}=g_{14}=g_{17}=0.$

III. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა (სქემა 54)

აქ ვიყენებთ (45) სქემას, სქემის შედგენილობა და ფორმა ტოლზუსტი განაზომების დამუშავებისათვის იგივეა, რაც არატოლზუსტი განაზომებისათვისაა მიღებული.

კორელატების კონტროლი ჯამური ტოლობის საშუალებით (54) სქემის გამოყენებისას არ სრულდება.

აქვეა გამოთვლილი — [WK] და [$\varepsilon\varepsilon$] ჯამის სიდიდე, რითაც შესრულებულია მეორე კონტროლი.

სქემა 4.7.1.55

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	eK_5	fK_6	gK_7	ε	$\varepsilon\varepsilon$
1	+0,746						—0,235	+0,5	+0,25
2	+0,746							+0,8	+0,64
3	+0,746						+0,098	+0,8	+0,64
4		+0,643					—0,186	+0,5	+0,25
5		+0,643						+0,6	+0,36
6		+0,643					+0,157	+0,8	+0,64
7			—1,466					—1,5	+2,25
8			—1,466				—0,078	—1,5	+2,25
9			—1,466				+0,176	—1,3	+1,69
10				—0,913			—0,196	—1,1	+1,21
11				—0,913				—0,9	+0,81
12				—0,913			+0,137	—0,8	+0,64
13					+0,921		—0,167	+0,8	+0,64
14					+0,921			+0,9	+0,81
15					+0,921		+0,304	+1,2	+1,44
16						+1,387	—0,157	+1,2	+1,44
17						+1,387		+1,4	+1,96
18						+1,387	+0,098	+1,5	+2,25
W	—2,1	—1,9	+4,3	+2,8	—2,9	—4,1	+2,1		[$\varepsilon\varepsilon$]=20,17
K	+0,746	+0,643	—1,466	—0,913	+1,921	+1,387	—0,098		
WK	—1,567	—1,222	—6,304	—2,556	—2,671	—5,687	—0,206		—[WK]=20,21

პირობითი ტოლობების შემოწმება

$$(1)+(2)+(3)+W_1=+0{,}5+0{,}8+0{,}8-2{,}1=0;$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2=+0{,}5+0{,}6+0{,}8-1{,}9=0;$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3=-1{,}5-1{,}5-1{,}3+4{,}3=0;$$

$$(10)+(11)+(12)+W_4=-1{,}1-0{,}9-0{,}8+2{,}8=0;$$

$$(13)+(14)+(15)+W_5=+0{,}8+0{,}9+1{,}2-2{,}9=0;$$

$$(16)+(17)+(18)+W_6=+1{,}2+1{,}4+1{,}5-4{,}1=0;$$

$$g_1(1)+g_3(3)+g_4(4)+g_6(6)+g_8(8)+g_9(9)+g_{10}(10)+g_{12}(12)+$$
$$+g_{13}(13)+g_{15}(15)+g_{16}(16)+g_{18}(18)+W_7=2{,}4\times0{,}5-1{,}0\times0{,}8+$$
$$+1{,}9\times0{,}5-1{,}6\times0{,}8+0{,}8\times(-1{,}5)-1{,}8\times(-1{,}3)+2{,}0\times(-1{,}1)-$$
$$-1{,}4\times(-0{,}8)+1{,}7\times0{,}8-3{,}1\times1{,}2+1{,}6\times1{,}2-1{,}0\times1{,}5+2{,}1=$$
$$=+10{,}99-10{,}70=0{,}29\ (\lg_6).$$

V. კუთხეების გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა (სქემა 56) და საბოლოო კონტროლი

სქემა 4.7.1.56

კუთხეები	განაზომები	შესწორებები	გაწონასწორებული მნიშვნელობები $a_i = a'_i + \varepsilon_i$	საბოლოო კონტროლი სამკუთხედებში
1 2 3	40°56′19″,0 73 58 26 ,4 65 05 12 ,5	+0,5 +0,8 +0,8	40°56′19″,0 73 58 27 ,2 65 05 13 ,3	Σ_1—180°=0
4 5 6	47 50 41 ,2 79 53 31 ,5 52 15 45 ,4	+0,5 +0,6 +0,8	47 50 41 ,7 79 53 32 ,1 52 15 46 ,2	Σ_2—180 =0
7 8 9	62 35 45 ,5 68 30 41 ,5 48 53 37 ,3	—1,5 —1,5 —1,3	62 35 44 ,0 68 30 40 ,0 48 53 36 ,0	Σ_3—180 =0
10 11 12	45 50 14 ,2 76 58 28 ,8 57 11 19 ,8	—1,1 —0,9 —0,8	45 50 13 ,1 76 58 27 ,9 57 11 19 ,0	Σ_4—180 =0
13 14 15	51 31 47 ,3 94 12 30 ,0 34 15 39 ,8	+0,8 +0,9 +1,2	51 31 48 ,1 94 12 30 ,9 34 15 41 ,0	Σ_5—180 =0
16 17 18	53 36 17 ,0 62 16 15 ,1 64 07 23 ,8	+1,2 +1,4 +1,5	53 36 18 ,2 62 16 16 ,5 64 07 25 ,3	Σ_6—180 =0

საბოლოო კონტროლი გვერდების პირობითი ტოლობის მიხედვით:

$\lg\ a = 3{\cdot}4767181$	$\lg\ b = 3{\cdot}4252220$
$\lg\sin\ 1 = 9{\cdot}8164083$	$\lg\sin\ 3 = 9{\cdot}9575827$
$\lg\sin\ 4 = 9{\cdot}8700122$	$\lg\sin\ 6 = 9{\cdot}8980813$
$\lg\sin\ 8 = 9{\cdot}9687111$	$\lg\sin\ 9 = 9{\cdot}8770757$
$\lg\sin 10 = 9{\cdot}8557374$	$\lg\sin 12 = 9{\cdot}9245165$
$\lg\sin 13 = 9{\cdot}8937253$	$\lg\sin 15 = 9{\cdot}7504847$
$\lg\sin 16 = 9{\cdot}9057668$	$\lg\sin 18 = 9{\cdot}9541162$
$\Sigma_1 = 2{\cdot}7870792$	$\Sigma_2 = 2{\cdot}7870791$

$\Sigma_1 - \Sigma_2 = 1\ (\lg_7)$ განსხვავება დასაშვებია.

VI. შედეგების სიზუსტის შეფასება

1. (4. 4. 9. 6) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული განაზომი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

1. $$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{20,17}{7}} = +1'',70$$

r ჭარბ განაზომთა რაოდენობაა.

2. m-ის განსაზღვრის შეცდომა

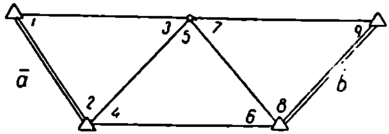
$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(r-1)}}=\pm\frac{1,70}{\sqrt{2\cdot 6}}=\pm 0'',5$$

3. (4. 4. 9. 5) ფორმულის შესაბამისად ნებისმიერი გაწონასწორებული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{\alpha_i}=m\sqrt{\frac{N-r}{N}}=\pm 1,70\sqrt{\frac{18-11}{18}}\approx\pm 1'',12.$$

N — ყველა განაზომთა რაოდენობა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 1. 10. პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს და შეფასდეს სიზუსტე ორ მყარ გვერდს შორის ჩასმული სამკუთხედების ჯაჭვის (14) ნახაზისა და (11) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მიხედვით.



ნახ. 4.7.1.14

ცხრილი 4.7.1.11

კუთხ. №№ და გვერდის lg	ვ ა რ ი ა ნ ტ ე ბ ი				
	1	2	3	4	5
1	70°37′08″,5	54°03′02″,96	46°52′29″	75°17′35″,8	38°22′22″,3
2	64 17 08 ,8	75 53 17 ,88	78 16 45	58 44 54 ,1	107 03 26 ,8
3	45 05 46 ,5	50 03 32 ,42	54 50 44	45 57 32 ,9	34 34 17 ,8
4	49 49 43 ,9	48 46 51 ,75	56 57 15	69 23 36 ,8	33 12 25 ,1
5	57 52 54 ,3	62 27 41 ,48	77 54 56	41 08 00 ,1	120 05 34 ,2
6	72 17 19 ,4	68 45 14 ,97	45 07 47	69 28 29 ,3	26 41 54 ,6
7	74 07 06 ,8	74 24 15 ,85	64 40 17	46 52 29 ,4	70 39 43 ,3
8	38 20 27 ,2	41 42 57 ,22	66 41 40	54 50 44 ,6	45 02 40 ,0
9	67 32 25 ,0	63 53 01 ,07	48 38 03	78 16 40 ,1	64 17 49 ,5
$\lg a$	3,4633289	3,2966631	3,3692240	3,3188675	3,0970000
$\lg b$	3,5094196	3,2576197	3,4735709	3,3199215	3,2420608

4. 7. 2. პოლიგონების სისტემის გაწონასწორება (კლასიკური ხერხი)

პოლიგონომეტრიულ და სანიველო ქსელებში გვხვდება პირობითი განტოლებების e_i შესწორებების კოეფიციენტები +1, —1 ან ნულის ტოლი. ასეთი სახის ტოლობებს უწოდებენ პ ო ლ ი გ ო ნ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ს.

პოლიგონის პირობების დამოუკიდებელი, ანუ აუცილებელი (მაქსიმალური) რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$r=P+M-1, \qquad (4.7.2.1)$$

სადაც P — ურთიერთდამოუკიდებელი გეომეტრიული პირობის შესაბამისი ჩაკეტილი (შეკრული) პოლიგონების რაოდენობა,

M — მყარი (გამოსავალი) პუნქტების ან მარკების რაოდენობა.

იგივე პასუხი შეიძლება მიღებულ იქნეს ფორმულით:

$$r=N-n, \qquad (4.7.2.2)$$

სადაც N — ყველა განაზომთა რაოდენობა,

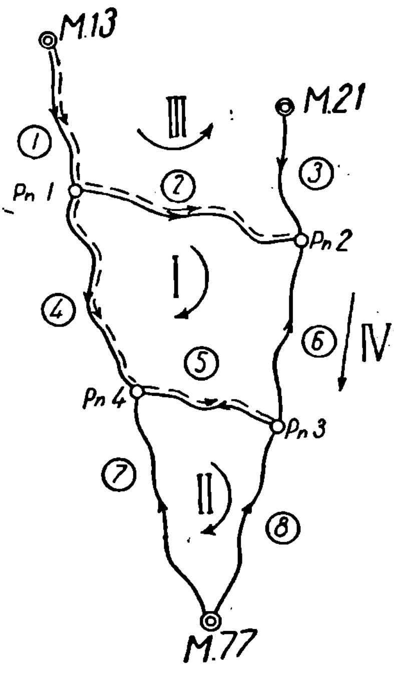
n — ურთიერთდამოუკიდებელი უცნობების რაოდენობა (აუცილებელი განაზომების რაოდენობა),

r — ჭარბი (დამატებითი) განაზომების, ანუ პირობითი განტოლებების რაოდენობა.

ვთქვათ, გვაქვს სანიველო ქსელი ნახ. 1, სადაც ისრებითაა ნაჩვენები ცალკეული სანიველო სვლების დადებითი h_i ამატებები.

პოლიგონის პირობები (პირობითი ტოლობები) ჯობს შედგეს შემდეგნაირად:

ყოველი ჩაკეტილი პოლიგონისათვის (I და II პოლიგონი) დაიწერება პირობითი ტოლობა (პოლიგონების გამაერთიანებელი პოლიგონისათვის არ შეიძლება ტოლობის შედგენა). განსახილველ შემთხვევაში გვექნება ორი ტოლობა. ამავე დროს, პირობითი ტოლობების შედგენისას პოლიგონის სვლა ჯობს მივილოთ ცენტრიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (მაგალითად, 1 პოლიგონის სვლა და პოლიგონში 4 სანიველო სვლა ურთიერთსაწინააღმდეგოა). ამ წესის დაცვით ადვილად და უშეცდომოდ გაირკვევა აღმატებების, შეუკვრელობებისა და შესწორებების ნიშნები. მარკებს შორის წყვილ-წყვილად ურთიერთდაკავშირებით საჭიროა პირობითი ტოლობების შედგენა, მხოლოდ სამუშაოს შემცირების მიზნით. მათ შორის უნდა აირჩეს, რაც შეიძლება მოკლე სვლები. მაგალითად, განსახილ-



ნახ. 4.7.2.1

ველ შემთხვევაში პირობითი ტოლობების შედგენა ჯობს (M . 13) მეცამეტე მარკიდან (M . 21) ოცდამეერთე მარკამდე და (M . 21) ოცდამეერთე მარკიდან (M . 77) სამოცდამეჩვიდმეტე მარკამდე.

ზემოთქმულის მიხედვით შესწორებათა დამოუკიდებელი პირობითი ტოლობები იქნება:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}.\quad +\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_5-\varepsilon_6+W_1=0,\\ &\mathrm{II}.\quad -\varepsilon_5+\varepsilon_7-\varepsilon_8\quad +W_2=0,\\ &\mathrm{III}.\quad +\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\quad +W_3=0,\\ &\mathrm{IV}.\quad +\varepsilon_3-\varepsilon_6-\varepsilon_8\quad +W_4=0. \end{aligned} \tag{4.7.2.3}$$

ალმატებათა p_i წონები და q_i შებრუნებული წონები განისაზღვრება განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 2. 12) ფორმულით

$$P_i=\frac{1}{L_i}, \tag{4.7.2.4}$$

სადაც L_i სანიველო სვლის სიგრძეა.

აღვნიშნოთ

$$\frac{1}{P_i}=q_i, \tag{4.7.2.5}$$

მაშინ

$$q_i=L_i \tag{4.7.2.6}$$

შესწორებათა პირობითი ტოლობებისა და ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტის ცხრილი იქნება შემდეგი:

ცხრილი 4.7.2.1

№№	a	b	c	d	q	qaa	qab	qac	qad	qbb	qbc	qbd	qcc	qcd	qdd
1	0	0	+1	0	q_1	0	0	0	0	0	0	0	$+q_1$	0	0
2	+1	0	+1	0	q_2	$+q_2$	0	$+q_2$	0	0	0	0	$+q_2$	0	0
3	0	0	−1	+1	q_3	0	0	0	0	0	0	0	$+q_3$	$-q_3$	$+q_3$
4	−1	0	0	0	q_4	$+q_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	+1	−1	0	0	q_5	$+q_5$	$-q_5$	0	0	$+q_5$	0	0	0	0	0
6	−1	0	0	−1	q_6	$+q_6$	0	0	$+q_6$	0	0	0	0	0	$+q_6$
7	0	+1	0	0	q_7	0	0	0	0	$+q_7$	0	0	0	0	0
8	0	−1	0	−1	q_8	0	0	0	0	$+q_8$	0	q_8	0	0	$+q_8$
					Σ	q_2+q_4+ $+q_5+q_6$	$-q_5$	$+q_2$	$+q_6$	$q_5+q_7+q_8$	0	$+q_8$	$q_1+q_2+q_3$	$-q_3$	q_3+q_6+ $+q_8$

კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემა კი იქნება:

$$\left.\begin{aligned} (q_2+q_4+q_5+q_6)K_1-q_5\cdot K_2+q_2\cdot K_3+q_6\cdot K_4+W_1=0,&\\ -q_5K_1+(q_5+q_7+q_8)K_2+0+q_8K_4+W_2=0,&\\ +q_2K_1+0+(q_1+q_2+q_3)K_3-q_3K_4+W_3=0,&\\ +q_6K_1+q_8K_2-q_3K_3+(q_3+q_6+q_8)K_4+W_4=0.& \end{aligned}\right\} \tag{4.7.2.7}$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 4. 7. 2. 1. პირობით განაზომთა წესით გაწონასწორდეს (1) ნახაზის შესაბამისი სანიველო ქსელი (2) ცხრილის მონაცემების მიხედვით (ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებ სვლათა მიმართულებებს შეესაბამება ცხრილში მოცემულ აღმატებათა ნიშნები); მყარი (საყრდენი) მარკების ნიშნულები მოცემულია (3) ცხრილში. გამოთვლილ იქნეს ნიველირსვლის ერთი კილომეტრის და გაწონასწორებული მეორე სვლის ($P_п 1—P_п 2$, როგორც წონითი ფუნქციის) აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ცხრილი 4.7.2.2

სვლის №№	განაზომი აღმატებები h'_i	სვლის სიგრძე L_i, კმ
1	+ 6,112	11,1
2	+ 8,320	14,8
3	+ 5,590	7,2
4	+ 1,368	12,4
5	+ 4,694	5,6
6	+11,642	14,3
7	— 0,905	15,1
8	— 5,589	16,8

ცხრილი 4.7.2.3

მარკები №№	ნიშნული მ
13	183,506
21	192,353
77	191,880

აქ საქმე გვაქვს ერთგვაროვან არატოლზუსტ განაზომთა გაწონასწორება-შეფასებასთან. პირობით განტოლებათა თავისუფალი წევრები და შესწორებები გამოვსახოთ მილიმეტრებში, ხოლო სანიველო სვლების სიგრძეები გამოისახება ასეული შტატივით (სადგურით) ან ათეული კილომეტრობით.

ამოხსნა

I. პირობითი განტოლებების შედგენა და W შეუკვრელობების (თავისუფალი წევრების) განსაზღვრა

მოცემულ სანიველო ქსელში პირობითი განტოლებების რაოდენობა (1) ფორმულით იქნება:

$$r=2+3-1=4$$

იგივე პასუხს მივიღებთ (2) ფორმულით.

მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში გაზომილია 8 აღმატება, უცნობი რეპერების რაოდენობა კი არის ოთხი, რომელთა განსაზღვრისათვის აუცილებელია ოთხი აღმატების ცოდნა, ე. ი. დავწერთ

$$r=8-4=4.$$

იმისათვის, რომ სისტემაში შემავალი ტოლობები ურთიერთდამოუკიდებელი იყოს, საჭიროა ყოველ ახალ ტოლობაში შევიტანოთ ახალი აღმატების შესწორება ან ახალი მყარი წერტილის ნიშნული, რომელიც არ არის გამოყენებული სხვა ტოლობებში. მაშასადამე, I, II, III და IV პოლიგონების შესაბამისად დავწერთ:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ +\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_5-\varepsilon_6+W_1=0; &&\text{სადაც}\ \ W_1=h'_3-h'_4+h'_5-h'_6=+4{,}0;\\
&\text{II.}\ \ -\varepsilon_5+\varepsilon_7-\varepsilon_8\quad +W_2=0; &&\quad ''\quad W_2=-h'_5+h'_7-h'_8=-10{,}0;\\
&\text{III.}\ \ +\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\quad +W_3=0; &&\quad ''\quad W_3=h'_1+h'_2-h'_3-(H_{21}-H_{13})=-5{,}0;\\
&\text{IV.}\ \ +\varepsilon_3-\varepsilon_6-\varepsilon_8\quad +W_4=0; &&\quad ''\quad W_4=h'_3-h'_6-h'_8-(H_{77}-H_{21})=+10{,}0.
\end{aligned}
$$

II. წონებისა და შებრუნებული წონების განსაზღვრა

ვგულისხმობთ, რომ რელიეფი არის მშვიდი, აგრეთვე ინსტრუმენტის სიზუსტე და მუშაობის მეთოდი უცვლელია, ამიტომ წონების გამოთვლას ვაწარმოებთ განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 2. 12) ფორმულით, მხოლოდ ერთეულ წონად ვიღებთ 20 კმ ნიველირსვლას, ე. ი. დავწერთ

$$P_i=\frac{20}{L_i}\ (0).$$

წონების განზომილება იქნება ნულოვანი, მაშასადამე:

$$P_1=\frac{20}{11{,}1}=1{,}80;\ P_2=\frac{20}{14{,}8}=1{,}35;\ P_3=\frac{20}{7{,}2}=2{,}78;\ P_4=\frac{20}{12{,}4}=1{,}61;$$

$$P_5=\frac{20}{5{,}6}=3{,}57;\ P_6=\frac{20}{14{,}3}=1{,}40;\ P_7=\frac{20}{15{,}1}=1{,}32;\ P_8=\frac{20}{16{,}8}=1{,}19.$$

შებრუნებული წონები კი იქნება:

$$q_1=\frac{1}{P_1}=\frac{11{,}1}{20}=0{,}56;\ q_2=\frac{1}{P_2}=\frac{14{,}8}{20}=0{,}74;\ q_3=\frac{1}{P_3}=\frac{7{,}2}{20}=0{,}36;$$

$$q_4=\frac{1}{P_4}=\frac{12{,}4}{20}=0{,}62;\ q_5=\frac{1}{P_5}=\frac{5{,}6}{20}=0{,}28;\ q_6=\frac{1}{P_6}=\frac{14{,}3}{20}=0{,}72;$$

$$q_7=\frac{1}{P_7}=\frac{15{,}1}{20}=0{,}76;\ q_8=\frac{1}{P_8}=\frac{16{,}8}{20}=0{,}84.$$

III. შესწორებათა პირობითი ტოლობების და Φ_2 ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლა

$$
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ a_3=a_5=+1;\ a_4=a_6=-1; && a_1=a_2=a_7=a_8=0;\\
&\text{II.}\ \ b_7=+1;\ b_5=b_8=-1; && b_1=b_2=b_3=b_4=b_6=0;\\
&\text{III.}\ \ c_1=c_2=+1;\ c_3=-1; && c_4=c_5=c_6=c_7=c_8=0;\\
&\text{IV.}\ \ d_3=+1;\ d_6=d_8=-1; && d_1=d_2=d_4=d_5=d_7=0.
\end{aligned}
$$

ყველა კოეფიციენტის განზომილება ნულოვანია (თანახმად 6.1.1-სა $\left(\frac{\text{მმ}}{\text{მმ}}\right)=(0)$).

წონით ფუნქციად (გაწონასწორებული ელემენტების ფუნქცია) იქნება თვით გაწონასწორებული h_2 ამაღლება, ე. ი. დავწერთ:

$$\Phi_2=h_2.$$

ამ ფუნქციის კოეფიციენტები იქნება ნულოვანი განზომილების და ედრება:

$$\varphi_2=1,\ \varphi_1=\varphi_3=\varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=\varphi_7=\varphi_8=0.$$

IV. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების და Φ_2 წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება და ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა და წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრა სქემა (1)

A ფ უ რ ც ე ლ ი

სქემა 4.7.2.1

№№	ალიშ-ვნები	a	b	c	d	W	S	კონტროლი	φ	Σ	$\frac{1}{P}$	
1	—			+1		—	+1	—		+1	0,56	(1)
2	—	+1		+1		—	+2	—	+1	+3	0,74	
3	—			−1	+1	—		—			0,36	
4	—	−1				—	−1	—		−1	0,62	
5	—	+1	−1			—		—			0,28	
6	—	−1			−1	—	−2	—		−2	0,72	
7	—		+1				+1	—		+1	0,76	
8	—		−1			—	−2	—		−2	0,84	
W	—	—	—	—	−1	+1	+1	—	—	—	—	
I	a	+2,360	−0,280	+0,740	+0,720	+ 4,00	+ 7,540	+ 7,540	+0,740	+4,280	(−0,42373)	(3)
II	$b \cdot 1$		+1,847	−0,088	+0,925	− 9,526	− 6,666	− 6,666	+0,088	+2,948	(−0,54142)	(5)
III	$c \cdot 2$			+1,424	−0,630	− 5,801	− 5,008	− 5,007	+0,504	+1,297	(−0,70225)	(7)
IV	$d \cdot 3$				+0,958	+10,984	+11,942	+11,942	−0,047	+0,912	(−1,04384)	(9)

B ფურცელი სქემა 4.7.2.1

№№	აღნიშ-ვნები	$\frac{a}{P}$	$\frac{b}{P}$	$\frac{c}{P}$	$\frac{d}{P}$	W	$\frac{S}{P}$	კონტროლი	$\frac{\varphi}{P}$	$\frac{\Sigma}{P}$	
1	—			+0,56		—	+0,56	+0,56		+0,56	
2	—	+0,74		+0,74		—	+1,48	+1,48	+0,74	+2,22	
3	—			−0,36	+ 0,36	—					
4	—	−0,62				—	−0,62	−0,62		−0,62	
5	—	+0,28	− 0,28			—					(2)
6	—	−0,72		−0,72	− 0,72	—	−1,44	−1,44		−1,44	
7	—		+ 0,76			—	+0,76	+0,76		+0,76	
8	—		− 0,84		− 0,84	—	−1,68	+1,68		−1,68	
W	—	+4,00	−10,00	−5,00	+10,000	—	—	—	—	—	
I	E_1	−1	+0,1186	−0,3136	−0,3051	− 1,6949	− 3,1949	− 3,1950	−0,3136	−1,8136	(4)
II	E_2		−1	−0,0476	−0,5008	+ 5,1576	+ 3,6091	+ 3,6092	−0,0476	−1,5961	(6)
III	E_3			−1	+0,4424	+ 4,0738	+ 3,5169	+ 3,5162	−0,3539	−0,9108	(8)
IV	E_4				−1	−11,4655	−12,4655	−12,4655	+0,0491	−0,9520	(10)
		−1,695	+ 5,158	+4,074	−11,466	0	− 1,000		+0,740	+2,220	
		+3,498	+ 5,742	−5,073	K_4	− 6,780	− 12,780		−0,232	−1,342	
		+0,313	+ 0,048	−0,999		− 49,131	− 34,380		−0,004	−0,140	
		+1,298	+10,948	K_3		− 23,632	− 20,402		−0,178	−0,459	
		+3,414	K_2			−125,937	−186,921		−0,002	+0,045	
		K_1				−205,480	−205,483		+0,324	+0,324	
						$-[WK]$ $[P_{88}]$	$[WK]$		$\frac{1}{P_2}$ (0)	$\frac{1}{P_2}$	

პირველი კონტროლი: კორელატებით და თავისუფალი წევრებით: $-[WK] = -205{,}49$
[4.3.4.13] ფორმულით სქემის B ფურცლის W სვეტიდან: $-[WK] = -205{,}48$
} განსხვავება დასაშვებია

V. შესწორებების გამოთვლა, $[P\varepsilon\varepsilon]$ ჯამის შედგენა (სქემა 2) და მეორე კონტროლი

სქემა 4.7.2.2

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_3	ჯამი	$\frac{1}{P}$	ε მმ	$\varepsilon\varepsilon$	P	$P\varepsilon\varepsilon$
1			−1,0		− 1,0	0,56	−0,6	0,36	1,80	0,65
2	+3,4		−1,0		+ 2,4	0,74	+1,8	3,24	1,35	4,37
3			+1,0	−11,5	−10,5	0,36	−3,8	14,44	2,78	40,14
4	−3,4				− 3,4	0,62	−2,1	4,41	1,61	7,10
5	+3,4	−10,9			− 7,5	0,28	−2,1	4,41	3,57	15,74
6	−3,4			+11,5	+ 8,1	0,72	+5,8	33,64	1,39	46,76
7		+10,9			+10,91	0,76	+8,3	68,89	1,32	90,93
8		−10,9		+11,5	+ 0,605	0,84	+0,5	0,25	1,19	0,30

მეორე კონტროლი $[P\varepsilon\varepsilon]=-WK$ $[P\varepsilon\varepsilon]=205,98$

პირობით განტოლებებში შესწორებების შეტანა

I. $+1,8+2,1-2,1-5,8+\ 4,0=\ 0$ მმ,

II. $+2,1+8,3-0,5\qquad -10,0=-0,1$ მმ,

III. $-0,6+1,8+3,8\qquad -\ 5,0=\ 0$ მმ,

IV. $-3,8-5,8-0,5\qquad +10,0=-0,1$ მმ.

მეორე და მეოთხე პოლიგონში მიღებული ნარჩენი შეუკვრელობები გამოწვეულია დამრგვალების შეცდომებით და მათი ოდენობები არ აღემატება დასაშვებ ფარგლებს.

VI. აღმატებათა გაწონასწორებული მნიშვნელობების განსაზღვრა (სქემა 3)

დავრწმუნდით რა იმაში, რომ პირობითი განტოლებები დაკმაყოფილებულია 0,1 მმ-ის ფარგლებში, გამოვითვლით აღმატებათა გაწონასწორებულ მნიშვნელობებს

სქემა 4.7.2.3

№№	გაზომილი აღმატებები h' მ	შესწორებები ε მმ	გაწონასწორებული აღმატებები h მ	დამრგვალებული საბოლოო აღმატებები
1	+ 6,112	−0,6	+ 6,1114	+ 6,111
2	+ 8,320	+1,8	+ 8,3218	+ 8,322
3	+ 5,500	−3,8	+ 5,5862	+ 5,586
4	+ 1,368	−2,1	+ 1,3659	+ 1,366
5	+ 4,694	−2,1	+ 4,6919	+ 4,692
6	+11,642	+5,8	+11,6478	+11,648
7	− 0,905	+8,3	− 0,8967	− 0,897
8	− 5,589	+0,5	− 5,5885	− 5,589

VII. საბოლოო კონტროლი

პოლიგონების მიხედვით შევიტანოთ გაწონასწორებული აღმატებები პირობით განტოლებებში

I. $h_2-h_4+h_5-h_6=8,322-1,366+4,692-11,648=0;$

II. $-h_5+h_7-h_8=-4,692-0,897+5,589=0;$

III. $h_1+h_2-h_3-(H_{21}-H_{13})=6,111+8,322-5,586-8,847=0;$

IV. $h_3-h_6-h_8-(H_{77}-H_{32})=5,586-11,648+5,589+0,473=0.$

VIII. შედეგთა სიზუსტის შეფასება

1. (4. 1. 7. 12) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა სანიველო სვლის 20 კმ გაწონასწორების მონაცემებით

$$\eta_{20} = \pm \sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{205,98}{4}} \approx \pm 7,2 \text{ მმ},$$

r ჭარბი განაზომების რაოდენობაა.

2. η_{20}-ის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_{\eta 20} = \frac{\eta_{20}}{\sqrt{2(r-1}} = \pm \frac{7,2}{\sqrt{2 \cdot 3}} \approx \pm 2,9 \text{ მმ}.$$

3. ერთი კილომეტრი სანიველო სვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{კმ} = \frac{\eta_{20}}{\sqrt{20}} = \pm \frac{7,2}{\sqrt{20}} = \pm 1,6 \text{ მმ}.$$

4. $m_{კმ}$ განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{m_{კმ}} = \frac{m_{კმ}}{\sqrt{2(r-1)}} = \pm \frac{1,6 \text{ მმ}}{\sqrt{6}} = \pm 0,6 \text{ მმ}.$$

5. (4. 4. 6. 3) ფორმულის მიხედვით გაწონასწორების შემდეგ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა სანიველო სვლის 20 კმ

$$\eta_{h_{20}} = \eta_{20} \sqrt{\frac{N-r}{N}} = \pm 7,2 \sqrt{\frac{8-4}{8}} \approx \pm 5,2 \text{ მმ},$$

N ყველა განაზომთა რაოდენობაა.

6. გაწონასწორების შემდეგ ერთი კმ ნიველირსვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{h_{კმ}} = \frac{\eta_{h_{20}}}{\sqrt{20}} = \pm \frac{5,2}{\sqrt{20}} = \pm 1,16 \text{ მმ}.$$

7. გაწონასწორებული მეორე სვლის (წონითი ფუნქციის) ამაღლებისათვის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{h_2} = m_{h_{კმ}} \sqrt{L_2} = \pm \cdot 1,16 \sqrt{14,8} = \pm 4,45 \text{ მმ}.$$

8. გაწონასწორებული მეორე სვლის (წონითი ფუნქციის) ამაღლების საშუალო კვადრატული შეცდომა, გამოთვლილი (1) სქემის $\frac{1}{P_2}$ (0) შებრუნებული წონის მიხედვით, როგორც წონითი ფუნქციისა (4.4.10.3) ფორმულით

$$m_{h_2} = \eta_{20} \sqrt{\frac{1}{P_2}} = \pm 7,2 \sqrt{0,324} \approx 4,1 \text{ მმ}.$$

9. m_{h_2} გამოთვლის შეცდომა

$$m_{m_{h_2}} = m_{,8} \sqrt{\frac{1}{P_2}} = \pm 1{,}6 \text{ მმ} \sqrt{0{,}324} \approx \pm 0{,}9 \text{ მმ}.$$

როგორც ვხედავთ, (4. 4. 6. 3) და (4. 4. 10. 3) ფორმულით მე-7 და მე-8 მუხლებში მიღებული m_{h_2} საშუალო კვადრატული შეცდომები დაახლოებით ტოლებია.

4. 7. 8. კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემის შედგენა პოლიგონის ქსელის ნახაზის მიხედვით

პოლიგონის პირობების შესახებ წინა პარაგრაფის შესაბამისად საბჭოთა მეცნიერის ვ. პ ო პ ო ვ ი ს და ამერიკელი მეცნიერის მ. მ ე რ ი მ ა ნ ი ს მიერ მოწოდებულია (პოლიგონის ნახაზის მიხედვით) კორელატების ნორმალური განტოლებების შედგენის ხერხები.

ორივე ხერხისათვის საერთო პირობაა ნახაზის შემზადება და ზოგიერთი წინასწარი გამოთვლები, რაც მდგომარეობს შემდეგში (ნახ. 4. 7. 2. 1).

1. 4. 7. 2. 1 ან 4. 7. 2. 2 ფორმულის მიხედვით განსაზღვრავენ პირობითი ტოლობების აუცილებელ რაოდენობას.

2. ნახაზზე რომაული ციფრებით აღნიშნავენ იმდენ დამოუკიდებელ პოლიგონს, რამდენი პირობითი ტოლობაც უნდა შედგეს. თუ ქსელში არა გვაქვს საჭირო რაოდენობა პოლიგონისა, მას დაუმატებენ ფიქტიურ სვლას. აგრეთვე, თუ ქსელში არა გვაქვს მყარი წერტილი (მარკა), მაშინ ნებისმიერ წერტილს ამ ქსელისას მიიღებენ გამოსავალ პუნქტად.

3. ყოველ ჩაკეტილ პოლიგონს ცენტრიდან აძლევენ ერთნაირ მიმართულებას (ჩვეულებრივ საათის ისრის სვლით, I—II პოლიგონი), ასევე დანარჩენ პოლიგონებზეც დაიტანენ მიმართულებებს (III და IV), ამ მიმართულებებს ზოგადად უწოდებენ პ ო ლ ი გ ო ნ ე ბ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ე ბ ს. პოლიგონების მიმართულებების (სვლების) მიხედვით, რაც ნახაზზე ისრებითაა ნაჩვენები, ადგენენ ტოლობებს და საზღვრავენ შეუკვრელობათა ოდენობებს. ასე, რომ ყოველ პოლიგონს შეესაბამება თავისი განტოლება, ე. ი. თავისი კორელატი და აღნიშვნის ასო. მაგალითად, I, II, III და IV პოლიგონს შესაბამისად ეკუთვნის K_1, K_2, K_3, K_4 კორელატები და a_i, b_i, c_i, d_i ასოები.

4. გარდა პოლიგონების მიმართულებებისა (სვლებისა), ნახაზზე დაიტანება პუნქტებს შორის სანიველო სვლების აღმატებათა მიმართულებები ისრებით, მხოლოდ ყველა დადებითი (1, 2, 3,..., 8) ან მხოლოდ ყველა უარყოფითი. წონითი ფუნქციისათვის სვლა ნახაზზე დაიტანება წყვეტილი ხაზით.

5. არ შეიძლება შედგეს ტოლობა იმ შეკრული პოლიგონისაგან, რომელიც შედგება რამდენიმე შეკრული პოლიგონისაგან, რომელთათვისაც უკვე შედგენილია ტოლობა. ეს ტოლობა იქნება დამოკიდებული, ანუ ჯამური ადრე შედგენილი ტოლობებისა.

6. ყველა პოლიგონისათვის გამოითვლება შეუკვრელობა და, თუ ეს შეუკვრელობები დასაშვებია, შემდეგ შეუდგებიან სისტემის გაწონასწორებას. მაგალითად, 4. 7. 2. 1 ნახაზის შესაბამისად:

$$W_1 = \quad h'_3 - h'_4 + h'_5 - h'_6 \qquad\qquad = + \ 4{,}0 \text{ მმ},$$
$$W_2 = -h'_5 + h'_7 - h'_8 \qquad\qquad = -10{,}0 \text{ მმ},$$
$$W_3 = +h'_1 + h'_2 - -h'_3 - (H_{21} - H_{13}) = -50 \text{ მმ}, \tag{4.7.3.1}$$
$$W_4 = +h'_3 - h'_6 - h'_8 - (H_{77} - H_{21}) = +10{,}0 \text{ მმ} .$$

7. განისაზღვრება 4. 7. 2. 4, 4. 7. 2. 5, 4. 7. 2. 6 ფორმულებით ალმატებების წონები და შებრუნებული წონები:

$$q_1 = L_1; \quad q_2 = L_2; \quad q_3 = L_3; \quad q_4 = L_4; \quad q_5 = L_5;$$
$$q_6 = L_6; \quad q_7 = L_7; \quad q_8 = L_8. \tag{4.7.3.2}$$

ამის შემდეგ გამოიყენება ესა თუ ის ხერხი.

I. Ვ. ᲞᲝᲞᲝᲕᲘᲡ ᲞᲝᲚᲘᲒᲝᲜᲔᲑᲘᲡ ᲮᲔᲠᲮᲘ

ვ. პოპოვმა ყურადღება მიაქცია იმ გარემოებას, რომ პოლიგონის პირობების წარმოშობისას, წინასწარ, კოეფიციენტების ცხრილის შედგენის გარეშე, შეიძლება უშუალოდ ნახაზიდან შედგეს კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემა, შემდეგი წესის დაცვით.

ყოველი ტოლობის კვადრატოვანი კოეფიციენტი დადებითია და მათი ოდენობა ტოლია მისი შესაბამისი პოლიგონის ყველა სანიველო სვლის სიგრძეების ჯამისა (ალმატებათა შებრუნებული წონების ჯამი). ამ ტოლობის ყოველი დანარჩენი წევრი წარმოადგენს ნამრავლს, რომლის ერთი თანამამრავლია ტოლობის რიგითი კორელატი და მეორე წევრია ამ კორელატის შესაბამისი პოლიგონისა და განსახილველი პოლიგონის (ტოლობის) საერთო სანიველო სვლის სიგრძე (საერთო ალმატების შებრუნებული წონა). ნამრავლის ნიშანი იქნება პლუსი, თუ საერთო სანიველო სვლის ფარგლებში, მოსაზღვრე პოლიგონების სვლის მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა (ნახაზზე 2, 6, 8, სანიველო სვლების ფარგლები) და მინუსი — წინააღმდეგ შემთხვევაში (5, 3 სანიველო სვლის ფარგლები) ასე რომ, მოსაზღვრე სანიველო სვლის მიმართულებას (ისარს) ტოლობათა წევრების ნიშნის დადგენისას ყურადღება არ ექცევა.

ამ წესის მიხედვით 4. 7. 2. 1 ნახაზის შესაბამისად დაიწერება (4. 7. 2. 7) სისტემა.

II. Მ. ᲛᲔᲠᲘᲛᲐᲜᲘᲡ ᲮᲔᲠᲮᲘ

4. 7. 2. 1 ნახაზის შესაბამისად:

1. შედგება შესწორებათა პირობითი ტოლობების 4. 7. 2. 3 სისტემა.

2. შესწორებების სიდიდეებს გამოვსახავთ კორელატებით, სანიველო სვლების მიმართულების მხედველობაში მიღებით, შემდეგნაირად: ყოველი სანიველო სვლის შესწორება ტოლია ნამრავლის, რომლის პირველი თანამამრავლია ამ სვლის სიგრძე, ანუ მისი ალმატების შებრუნებული წონა და მეორე თანამამრავლი — მოსაზღვრე პოლიგონების კორელატების ალგებრული ჯამი. ამ ჯამის შემადგენელი კორელატი დადებითია, თუ მისი შესაბამისი პოლიგონის სვლის და საერთო სვლის მიმართულებები ერთნაირია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კორელატის ნიშანი უარყოფითი იქნება;

მაშასადამე, 4.7.2.1 ნახაზის შესაბამისად დავწერთ:

$$\varepsilon_1 = +q_1 \cdot K_3;\ \varepsilon_2 = q_2(K_1+K_3);\ \varepsilon_3 = q_3(K_4-K_3);\ \varepsilon_4 = -q_4K_1;\ \varepsilon_5 = q_5(K_1-K_2);$$

$$\varepsilon_6 = q_6(-K_1-K_4);\ \varepsilon_7 = +q_7K_2;\ \varepsilon_8 = q_8(-K_2-K_4) \qquad (4.7.3.3)$$

3. შესწორებათა მიღებულ სიდიდეებს შევიტანთ 4. 7. 2. 3 სისტემაში; მსგავსი წევრების შეკრების შემდეგ მივიღებთ 4. 7. 2. 7 სისტემას.

როგორც ვხედავთ, ორივე ხერხით მივიღეთ ერთი და იგივე შედეგი.

3. პოპოვის ხერხით შედგენილი კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემას კონტროლის მიზნით ადარებენ მ. მერიმანის ხერხის გამოყენებით შედგენილ სისტემას. შედეგების თანმთხვევა განტოლებათა შედგენის სისწორეს ადასტურებს. ამის შემდეგ (4. 7. 2. 7) სისტემის ამოხსნით განსაზღვრული კორელატების მნიშვნელობებს შეიტანენ (3) ტოლობებში და განსაზღვრავენ ε_i შესწორებებს.

III. დამატებითი კონტროლი

სანიველო ქსელების ნებისმიერი ხერხით გაწონასწორებისას შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შემდეგი სახის დამატებითი კონტროლი. დავწეროთ:

$$\frac{\varepsilon_i}{q_i} = \varepsilon'_i, \qquad (4.7.3.4)$$

სადაც ε'_i სანიველო სვლის ზომის ერთეულზე შესწორებაა (ერთი კუთხე, სიგრძის ერთი მეტრი და სხვ.).

სანიველო ან პოლიგონომეტრიული ქსელის საკვანძო წერტილების მიმართ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს წესი — „მილები წყლით", თუ საკვანძო წერტილებს წარმოვიდგენთ, როგორც ბაკს წყლით და მასში შემავალ სანიველო სვლებს წყლის მილებად, მაშინ ვიგულისხმოთ, რომ ისარი, რომელიც მიმართულია საკვანძო წერტილის მიმართ, ნიშნავს ბაკში წყლის შესვლას და ისარი, რომელიც გამოდის ამ წერტილიდან — ბაკიდან წყლის გამოსვლას.

საკვანძო წერტილში წყლის დინების აღნიშნული წესით სვლის გამო უნდა იყოს დაცული პირობა

$$[\varepsilon'] = 0. \qquad (4.7.3.5)$$

ε'_i სიდიდეები შეიძლება გამოვსახოთ კორელატებით თუ (4)-ში შევიტანთ ε_i სიდიდეებს (3) სიდიდეებიდან:

$$\varepsilon'_1 = +K_3;\ \varepsilon'_2 = K_1+K_3;\ \varepsilon'_3 = K_4-K_3;\ \varepsilon'_4 = -K_1;$$

$$\varepsilon'_5 = K_1-K_2;\ \varepsilon'_6 = -(K_1+K_4);\ \varepsilon'_7 = +K_2;\ \varepsilon'_8 = -(K_2+K_4). \qquad (4.7.3.6)$$

4. 7. 2. 1 ნახაზის საკვანძო წერტილების მიმართ (5) ტოლობის შესაბამისად (6) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება შედგეს შემდეგი ტოლობები:

$$
\left.
\begin{array}{c}
Pn\ \text{1-სათვის} \\
[\varepsilon'] = +\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_4 = +K_3 - K_1 - K_3 + K_1 = 0, \\
Pn\ \text{2-სათვის} \\
[\varepsilon'] = +\varepsilon'_2 + \varepsilon'_5 + \varepsilon'_6 = K_1 + K_3 + K_4 - K_3 - K_1 - K_4 = 0, \\
Pn\ \text{3-სათვის} \\
[\varepsilon'] = -\varepsilon'_5 - \varepsilon'_6 + \varepsilon'_8 = -K_1 + K_2 + K_1 + K_4 - K_2 - K_4 = 0, \\
Pn\ \text{4-სათვის} \\
[\varepsilon'] = +\varepsilon'_3 + \varepsilon'_5 + \varepsilon'_7 = -K_1 + K_1 - K_2 + K_2 = 0.
\end{array}
\right\} \quad (4.7.3.7)
$$

IV. 3. პოპოვის ხერხით პოლიგონების გაწონასწორებულ სიდიდეთა სიზუსტის შეფასება

ნახაზის მიხედვით ვ. პოპოვის ხერხით კორელატების ნორმალური განტოლებების სისტემის შედგენისა და საკონტროლოდ მერიმანის ხერხით იგივე ტოლობების შედგენისას, ავირჩევთ დამატებით, ე. წ. ფიქტიურ პოლიგონს მყარი წერტილიდან განსასაზღვრელ პუნქტამდე, რაც შეიძლება მოკლე სიგრძისას, რომელსაც პირობით ვუწოდებთ „წონით პოლიგონს". ამ პოლიგონის შესაბამისად ვსაზღვრავთ შებრუნებულ წონას გაწონასწორებული ნიშნულისას ან გაწონასწორებული კოორდინატებისას.

გაუსის სქემისათვის საჭირო ალგორითმები მიიღება პირდაპირი ნახაზიდან ისე, როგორც საერთოდ მიღებულია. მაგალითად, 4. 7. 2. 1 ნახაზის მიხედვით, ვთქვათ, პირველი წონითი პოლიგონია M . 13 მარკიდან Pn 3 რეპერამდე. 4. 7. 2. 2. ცხრილის მონაცემების მიხედვით ამ პუნქტებს შორის უმოკლესი მანძილი 1, 4 და 5 სანიველო სვლის მიმართულებითაა. მეორე წონით პოლიგონად მივიღოთ 1 სვლა. როგორც ვიცით, ყოველ პოლიგონს თავისი აღნიშვნის ასო, იგივე ნომრის კორელატი და განტოლება შეესაბამება, განსახილველ შემთხვევაში:

I	პოლიგონს	შეესაბამება	a_i, K_1,	I	ტოლობა,
II	„	„	b_i, K_2,	II	„ ,
III	„	„	c_i, K_3	III	„ ,
IV	„	„	d_i, K_4	IV	„ ,

ხოლო წონით პოლიგონებს შეესაბამება φ'_i და φ''_i ასო.

მაშასადამე, კორელატების ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის 4. 7. 1. 2 სქემისათვის საჭიროა

$$
[qa\varphi'],\ [qb\varphi'],\ [qc\varphi'],\ [qd\varphi'],\ [q\varphi'\varphi'], \qquad (4.7.3.8)
$$

და

$$
[qa\varphi''],\ [qb\varphi''],\ [qc\varphi''],\ [qd\varphi''],\ [q\varphi''\varphi''];
$$

სიდიდეები იყოს განსასაზღვრი, რაც მოგვცემს შესაძლებლობას სქემის საშუალებით დავაკმაყოფილოთ (4. 4. 10. 1) და (4. 7. 1. 2) ფორმულები. მაგალითად, პირველი წონითი პოლიგონისათვის:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{P_\Phi} &= [q\varphi'\varphi'\cdot 4] = [q\varphi'\varphi'] - \frac{[qa\varphi']^2}{[qaa]} - \frac{[qb\varphi'\cdot 1]^2}{[qbb\cdot 1]} - \\
&\quad - \frac{[qc\varphi'\cdot 2]^2}{[qcc\cdot 2]} - \frac{[qd\varphi'\cdot 3]^2}{[qdd\cdot 3]}, \\
\frac{1}{P_\Phi} &= [q\varphi'\varepsilon'\cdot 4] = [q\varphi'\varepsilon] - \frac{[qa\varphi'][qa\Sigma']}{[qaa]} - \frac{[qb\varphi'\cdot 1][qb\Sigma'\cdot 1]}{[qbb\cdot 1]} - \\
&\quad - \frac{[qc\varphi'\cdot 2][qc\Sigma'\cdot 2]}{[qcc\cdot 2]} - \frac{[qd\varphi'\cdot 3][qd\Sigma'\cdot 3]}{[qdd\cdot 3]}
\end{aligned}\right\} . \qquad (4.7.3.9)$$

ანალოგიური სახე ექნება (2) წონითი პოლიგონის ფორმულებს. (8) სიდიდეების ნახაზის მიხედვით განსაზღვრისათვის საჭიროა შემდეგი წესის შესრულება.

როდესაც წონითი (ნახაზზე პუნქტირებითაა აღნიშნული) და მისი მოსაზღვრე პოლიგონის მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ (8) ალგორითმიდან შესაბამისი ალგორითმის ნიშანი დადებითია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ალგორითმის წინ ნიშანი მინუსია. *ალგორითმების წინ ნიშნების დადგენისას სვლის მიმართულებას ყურადღება* არ ექცევა. $[q\varphi\varphi]$ სიდიდე კი ყოველთვის დადებითია და უდრის წონითი პოლიგონის q_i შებრუნებული წონების ჯამს, ანუ მთლიან სიგრძეს.

აღნიშნული წესის დაცვის შესაბამისად ზემოხსენებული წონითი პოლიგონებისათვის გვექნება:

$-[qa\varphi'] = -(q_4+q_5) = -(L_4+L_5)$, რადგანაც წონითი პირველი პოლიგონის მიმართულებას მისი მოსაზღვრე I პოლიგონის მიმართულება არ ემთხვევა.

$+[qb\varphi'] = +q_5 = +L_5$, ვინაიდან წონითი პირველი პოლიგონის მიმართულებას მისი მოსაზღვრე II პოლიგონის მიმართულება ემთხვევა.

$+[qc\varphi'] = +q_1 = +L_1$, რადგანაც წონითი პირველი პოლიგონის მიმართულებას მისი მოსაზღვრე III პოლიგონის მიმართულება ემთხვევა.

$[qd\varphi'] = 0$, ვინაიდან წონითი პირველი პოლიგონი არ ესაზღვრება IV პოლიგონს.

$$+[q\varphi'\varphi'] = q_1+q_4+q_6 = L_1+L_4+L_6.$$

წონითი მეორე პოლიგონისათვის ანალოგიურად გვექნება:

$$[qa\varphi''] = [qb\varphi''] = [qd\varphi''] = 0, \ +[qc\varphi''] = +q_1 = L_1, \ [q\varphi''\varphi''] = +q_1 = L_1.$$

მიღებული სიდიდეების რიცხვით მნიშვნელობებს შევიტანთ 4. 7. 1. 2, სქემის φ სვეტის სათანადო ადგილას და სქემას მიღებული წესით დავამუშავებთ, რითაც მივიღებთ გაწონასწორებული $P_n 3$ და $P_n 1$ რეპერის ნიშნულის შებრუნებული წონის ოდენობას.

აღნიშნული წესით, აგრეთვე შეიძლება განისაზღვროს ალმატების წონა ან ორდინატებისა და აბსცისების ნაზრდების წონები პოლიგონის ნებისმიერი მიმართულებით. მაგალითად, 4. 7. 2. 1 ნახაზის 2 ალმატების (P_n1—P_n2-მდე) შებრუნებული წონის განსაზღვრისათვის საჭირო სიდიდეები იქნება:

$$
\begin{aligned}
+[qa\varphi] &= +q_2 = +L_2;\\
+[qc\varphi] &= +q_2 = +L_2;\\
[qb\varphi] &= [qd\varphi] = 0;\\
+[q\varphi\varphi] &= +q_2 = +L_2.
\end{aligned}
\qquad (4.7.3.10)
$$

მაგალითი 4. 7. 8. 1. პირობით განაზომთა კლასიკური ხერხით გაწონასწორებული 4. 7. 2. 1 მაგალითის მონაცემების მიხედვით შესრულდეს:

1. გამოთვლა აუცილებელი რაოდენობის პირობითი ტოლობებისა;

2. ნახაზზე რომაული ციფრებით წარწერილ იქნეს დამოუკიდებელი პოლიგონები და დანიშნულ იქნეს ისრებით პოლიგონების მიმართულებები (სვლები);

3. ნახაზზე ნაჩვენები იქნეს ისრებით სანიველო სვლები ყველა ალმატებათა დადებითი მიმართულებისა;

4. გამოთვლილ იქნეს ყველა პოლიგონისათვის შეუკვრელობები და შემოწმდეს დასაშვებია თუ არა ეს სიდიდეები;

5. განსაზღვრულ იქნეს ალმატებების წონები და შებრუნებული წონები;

6. ვ. პოპოვის ხერხით შედგენილ იქნეს კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემა;

7. მ. მერიმანის ხერხით შემოწმებულ იქნეს ვ. პოპოვის ხერხით შედგენილი კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემა;

8. ნახაზზე პუნქტირებით აღინიშნოს მეორე სანიველო სვლა და განისაზღვროს ალმატების შებრუნებული წონა (10) ფორმულების გამოყენებით;

9. გაუსის ან შემოკლებული სქემით ამოიხსნას კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემა და განისაზღვროს მე-2 ალმატების შებრუნებული წონა;

10. ცნობილი კორელატები ჩასმულ იქნეს შესწორებების განსაზღვრის მ. მერიმანის (3) ფორმულებში და განისაზღვროს ε_i შესწორებები;

11. დამატებით გავაკონტროლოთ (4), (5) ფორმულებით;

12. თუ ზემოხსენებული გამონათვლები დაემთხვევა 4. 7. 2. 1 მაგალითის გამონათვლებს, სიზუსტის შეფასება საჭირო აღარაა, რადგანაც ყოველივე ისე შესრულდება როგორც 4. 7. 2. 1 მაგალითშია.

ა მ ო ხ ს ნ ა

1. 4. 7. 2. 1 და 4. 7. 2. 2 ფორმულების მიხედვით 4. 7. 2. 1 მაგალითში გამოთვლილია, რომ საჭიროა ოთხი პირობითი ტოლობა.

2. 4. 7. 2. 1 ნახაზზე უკვე ნაჩვენებია როგორც პოლიგონების, ისე სანიველო სვლები ისრებით;

3. (1) დამოკიდებულებებით განსაზღვრულია შეუკვრელობების დასაშვები ოდენობა;

4. ალმატებების წონები და შებრუნებული წონები (4. 7. 2. 4), (4. 7. 2. 5) და (4. 7. 2. 6) ფორმულებით განსაზღვრულია (4. 7. 2. 1) მაგალითში;

5. ვ. პოპოვის ხერხით შედგენილია 4. 7. 2. 7 სისტემა;

6. მ. მერიმანის ხერხით შედგენილია 4. 7. 3. 3 ტოლობები და შეტანილია 4. 7. 2. 3 სისტემაში, რის შედეგად მიღებულია 4. 7. 2. 7 სისტემა, რაც მის სისწორეს ადასტურებს;

7. განვსაზღვროთ 4. 7. 2. 7 სისტემისა და წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები 4. 7. 2. 1 მაგალითის მონაცემის დახმარებით

$$[qaa]=q_2+q_4+q_5+q_6=0{,}74+0{,}62+0{,}28+0{,}72=+2{,}36,$$
$$[qab]=-q_5=-0{,}28,$$
$$[qac]=+q_2=+0{,}74,$$
$$[qad]=+q_6=+0{,}72,$$
$$[qbb]=+q_5+q_7+q_8=+0{,}28+0{,}76+0{,}84=+1{,}88,$$
$$[qbc]=0,$$
$$[qbd]=+q_8=+0{,}84,$$
$$[qcc]=q_1+q_2+q_3=0{,}56+0{,}74+0{,}36=+1{,}66,$$
$$[qcd]=-q_3=-0{,}36,$$
$$[qdd]=q_3+q_6+q_8=0{,}36+0{,}72+0{,}84=+1{,}92,$$
$$[qa\varphi]=+q_2=+0{,}74,$$
$$[qb\varphi]=0,$$
$$[qc\varphi]=+q_2=+0{,}74,$$
$$[qd\varphi]=0,$$
$$[q\varphi\varphi]=+q_2=+0{,}74.$$

8. მიღებული სიდიდეების და ცნობილი შეუკვრელობების საშუალებით კორელატების განსაზღვრის სქემა (1).

9) (3) ტოლობების საშუალებით ε_i შესწორებების განსაზღვრა

$$\varepsilon_1=+q_1K_3=0{,}56(-0{,}999)\approx-0{,}6 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_2=+q_2(K_1+K_3)=+0{,}74(3{,}414-0{,}999)=+1{,}8 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_3=+q_3(K_4-K_3)=+0{,}36(-11{,}466+0{,}999)=-3{,}8 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_4=-q_4K_1=-0{,}62\cdot3{,}414=-2{,}1 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_5=+q_5(K_1-K_2)=+0{,}28(3{,}414-10{,}948)=-2{,}1 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_6=+q_6(-K_1-K_4)=+0{,}72(-3{,}414+11{,}466)=+5{,}8 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_7=q_7K_2=+0{,}76\cdot10{,}948=+8{,}3 \text{ მმ},$$
$$\varepsilon_8=+q_8(-K_2-K_4)=+0{,}84(-10{,}948+11{,}466)=+0{,}5 \text{ მმ}.$$

10. დამატებითი კონტროლი (4) და (5) ფორმულებით მოცემული მაგალითისათვის შესრულებულია, იხ. (6) და (7) დამოკიდებულებები.

როგორც ვხედავთ, პასუხი სრულიად ემთხვევა 4. 7. 2. 1 მაგალითის ამონახსნებს.

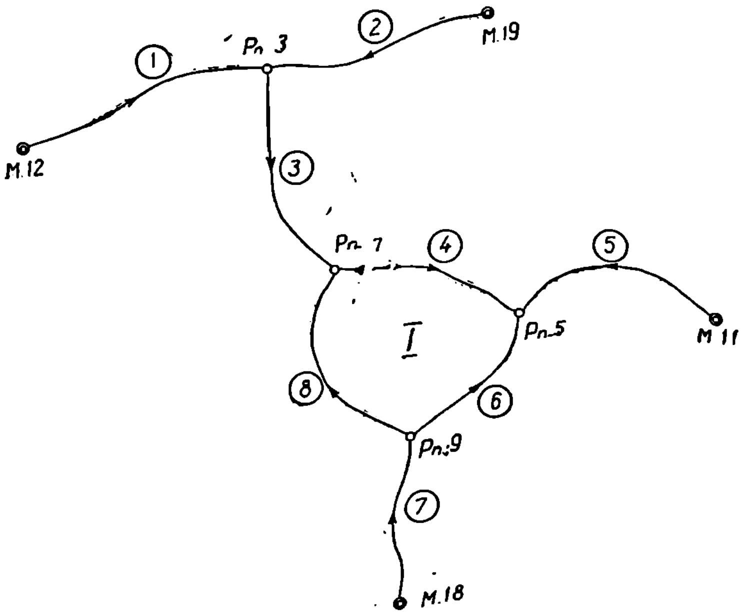
სქემა 4.7.3.1

№№	აღნიშ-ვნები	K_1	K_2	K_3	K_4	W	S	კონტროლი	φ	Σ
1	a	+2,360	−0,280	+0,740	+0,720	+4,000	+7,540		+0,740	+4,280
2	E_1	−1	+0,1186	−0,3136	−0,3051	−1,6949	−3,1949	−3,1950	−0,3136	−1,8136
3		+3,414	+1,298	+0,313	+3,498	−1,695				
4	b	K_1	+1,880	0	+0,840	−10,000	−7,560		0	+2,440
5	$E_1 \times a_2$		−0,033	+0,088	+0,085	+0,475	+0,895		+0,088	+0,508
6	$b \cdot 1$		+1,847	+0,088	+0,925	−9,526	−6,666	−6,666	+0,088	+2,948
7	E_2		−1	−0,0476	−0,5008	+5,1576	+3,6091	+3,6092	−0,0476	−1,5961
8			+10,948	+0,048	+5,742	+5,158				
9	c		K_2	+1,660	−0,360	−5.000	−2,960		+0,740	+2,780
10	$E_1 \times a_3$			−0,232	−0,226	−1,254	−2,364		−0,232	−1,342
11	$E_2 \times b \cdot 1_3$			+0,004	−0,044	+0,453	+0,318		−0,004	−0,140
12	$c \cdot 2$			+1,424	−0,630	−5,801	−5,008	−5,007	+0,504	+1,297
13	E_3			−1	+0,4424	+4,0740	+3,5162	+3,5162	+0,3539	−0,9108
14				−0,999	−5,073	+4,074				
15	d			K_3	+1,920	+10,000	+13,120		0	+3,120
16	$E_1 \times a_4$				−0,220	−1,220	−2,300		−0,226	−1,306
17	$E_2 \times b \cdot 1_4$				−0,463	+4,770	+3,338		−0,044	−1,476
18	$E_3 \times c \cdot 2_4$				−0,279	−2,567	−2,215		+0,223	+0,574
19	$d \cdot 3$				+0,958	+10,984	−11,942	+11,942	−0,047	+0,912
20	E_4				−1	−11,4655	−12,4655	−12,4655	+0,0491	−0,9520
21					−11,466					
22					K_4	0	−1,000		+0,740	+2,220
23						−6,780	−12,780		−0,232	−1,342
24						−49,131	−34,380		−0,004	−0,140
25						−23,632	−20,402		−0,178	−0,459
26						−125,937	−136,921		−0,002	+0,045
27						−205,480	−205,483		+0,324	+0,324
28						−[WK] [Pεε]	[WK]		$\frac{1}{P_2}(0)$	$\frac{1}{P_2}$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 3. 1 პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს (4. 7. 2. 1) ნახაზის შესაბამისი სანიველო ქსელი (1) ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მონაცემების მიხედვით (ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებ სვლათა მიმართულებებს შეესაბამება (1) ცხრილში მოცემულ აღმატებათა ნიშნები); მყარი (გამოსავალი) მარკების ნიშნულები მოცემულია (4. 7. 2. 3) ცხრილში. გამოთვლილ იქნეს სვლის ერთი კილომეტრი ნიველირსავალის და გაწონასწორებული ერთ-ერთი აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა. ყოველივე შესრულდეს (1) მაგალითების მოთხოვნის შესაბამისადაც.

მითითება: გამოთვლის გაადვილებისათვის შეუკვრელობები და შესწორებები სანტიმეტრებში გამოვსახოთ. 100 შტატივიანი ნიველირსვლა მივიღოთ ერთეულ წონად.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 7. 3. 2. პირობით განაზომთა ხერხით გაწონასწორდეს (1) ნახაზის შესაბამისი სანიველო ქსელი მე-2 ცხრილის ერთ-ერთი ვარიანტის მონაცემების მიხედვით (ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებ სვლათა მიმართულებებს შეესაბამება მე-2 ცხრილში მოცემულ აღმატებათა ნიშნები). მყარი (გამოსავალი) მარკების ნიშნულები მოცემულია (3) ცხრილში. გამოთვლილ იქნეს ნიველირსვლის ერთი კილომეტრის გაწონასწორებული ერთ-ერთი აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა. ყოველივე შესრულდეს (1) მაგალითის მოთხოვნის მიხედვითაც.



ნახ. 4.7.3.1

აქ წონები გამოითვლება განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 2. 11) ფორმულით

$$P_i = \frac{1}{n}$$

სადაც n სადგურების (შტატივების) რაოდენობაა.

ცხრილი 4.7.3.1

სვლის №№	ალმატება h მ,	ვარიანტები									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		სვლის სიგრძე, კმ									
1	6,110	12,1	10,6	10,0	9,0	8,5	11,6	12,8	13,4	14,0	8,0
2	8,318	13,4	11,7	11,1	10,0	9,4	12,8	14,2	14,8	15,5	8,9
3	5,589	8,2	7,2	6,8	6,1	5,8	7,9	8,7	9,1	9,5	5,4
4	1,369	11,7	10,3	9,7	8,7	8,2	11,2	12,4	13,0	13,5	7,7
5	4,696	5,5	4,8	4,5	4,1	3,9	5,3	5,8	6,1	6,4	3,6
6	11,640	4,8	4,2	4,0	3,6	3,4	4,6	5,1	5,3	5,6	3,2
7	— 0,905	7,4	6,5	6,1	5,5	5,2	7,1	7,8	8,2	8,6	4,9
8	— 5,587	9,6	8,4	7,9	7,1	6,7	9,2	10,1	10,7	11,1	6,3

ცხრილი 4.7.3.2

სვლის №№	ალმატება h_1 მ	ვარიანტები									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		სადგურების (შტატივების) რიცხვი									
1	—15,022	118	102	107	112	121	126	131	97	91	84
2	18,585	93	80	84	88	95	99	103	76	72	66
3	—24,046	121	105	110	115	124	129	134	99	93	86
4	5,702	67	58	61	64	69	72	74	55	52	48
5	— 5,246	52	45	47	49	53	56	58	43	40	37
6	24,895	80	69	72	76	82	85	89	66	62	57
7	7,728	49	42	44	46	50	52	54	40	38	35
8	—19,201	73	63	66	69	75	78	81	60	56	52

ცხრილი 4.7.3.3

მარკების №	12	19	11	18
ნიშნულები, მ	235,922	202,308	207,807	169,949

4. 7. 4. გაწონასწორების შესრულება ლოგარითმების ცხრილის გამოყენების გარეშე, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობების საშუალებით

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ფიგურის პირობითი განტოლებების სახეები იქნება ისეთივე, რაც ლოგარითმების ცხრილის გამოყენებით გაწონასწორების დროს. პოლუსის, გვერდებისა და ბაზისების პირობითი ტოლობების წრფივ სახეზე, ანუ საანგარიშო სახემდე დაყვანა კი შეიძლება ისე, როგორც ეს მოხსენებული იყო 4. 1. 6. პარაგრაფის შენიშვნაში, ფუნქციის სრული დიფერენციალის (განაზომთა კერძო წარმოებულებით) საშუალებით. მაშასადამე, საჭირო გახდება განაზომ კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და ბაზისების ნატურალური მნიშვნელობების გამოყენება.

ვთქვათ, საჭიროა გაწონასწორდეს 4. 7. 1. 5 მაგალითში განხილულ ორ ბაზისს შორის ჩასმული ქსელი.

1. ბაზისების პირობითი განტოლების შედგენის მიზნით დავწეროთ S_1 ბაზისის გამოსათვლელი ფორმულა

$$S_1 = \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot S_2. \tag{4.7.4.1}$$

2. ავიღოთ სრული დიფერენციალი ყველა განაზომის მიხედვით

$$\Delta S_1 = \frac{\cos 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot S_2 \frac{\Delta_1}{\rho''} + \frac{\sin 1 \cdot \cos 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot S_2 \frac{\Delta 4}{\rho''} +$$
$$+ \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \cos 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot S_2 \frac{\Delta 7}{\rho''} - \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin^2 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot \cos 3 \cdot S_2 \frac{\Delta 3}{\rho''} -$$
$$- \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin^2 6 \cdot \sin 9} \cdot \cos 6 \cdot S_2 \frac{\Delta 6}{\rho''} - \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin^2 9} \cdot \cos 9 \cdot S_2 \frac{\Delta 9}{\rho''} -$$
$$- \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \; \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot \Delta S_2. \tag{4.7.4.2}$$

3. (2) ტოლობის ყველა წევრი გავყოთ (1) ტოლობაზე

$$\frac{\Delta S_1}{S_1} = \operatorname{ctg} 1 \frac{\Delta 1}{\rho''} + \operatorname{ctg} 4 \frac{\Delta 4}{\rho''} + \operatorname{ctg} 7 \frac{\Delta 7}{\rho''} - \operatorname{ctg} 3 \frac{\Delta 3}{\rho''} - \operatorname{ctg} 6 \frac{\Delta 6}{\rho''} -$$
$$- \operatorname{ctg} 9 \frac{\Delta 9}{\rho''} + \frac{\Delta S_2}{S_2}. \tag{4.7.4.3}$$

4. განაზომთა შეცდომების თეორიიდან (3. 1. 7 პარაგრ.) ცნობილია, რომ ფუნქციის (გამონათვალთა) dy დიფერენციალის ნაცვლად შეიძლება მივიღოთ Δy ნაზრდი, აგრეთვე განაზომთა ნაზრდების (დიფერენციალების) იგივურად შეიძლება ჩავთვალოთ შესწორებები. მაშასადამე, თუ მივიღებთ მხედველობაში იმას, რომ შესწორებების მათ კოეფიციენტებზე ნამრავლების ჯამი ტოლია ბაზისების პირობითი ტოლობის W თავისუფალი წევრისა შებრუნებული ნიშნით, დავწერთ:

$$\frac{\operatorname{ctg} 1}{\rho''}(1) + \frac{\operatorname{ctg} 4}{\rho''}(4) + \frac{\operatorname{ctg} 7}{\rho''}(7) - \frac{\operatorname{ctg} 3}{\rho''}(3) - \frac{\operatorname{ctg} 6}{\rho''}(6) -$$
$$- \frac{\operatorname{ctg} 9}{\rho''}(9) - \frac{(S_1)}{S_1} + \frac{(S_2)}{S_2} + W_4 = 0. \tag{4.7.4.4}$$

5. (4) ტოლობის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი გამოვსახოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობების მეექვსე ათწილად ერთეულებში (ვამრავლებთ 10^6), რომლის განზომილება ექვსნიშნა მნიშვნელობებისათვის აღინიშნება $\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$ ან $\left(\frac{6}{\text{მმ}}\right)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{ctg}\,1\times 10^6}{\rho''}=\delta_1\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right), \quad \frac{\mathrm{ctg}\,4\times 10^6}{\rho''}=\delta_4\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\\
&\frac{\mathrm{ctg}\,7\times 10^6}{\rho''}=\delta_7\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right), \quad \frac{\mathrm{ctg}\,3\times 10^6}{\rho''}=\delta_3\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\\
&\frac{\mathrm{ctg}\,6\times 10^6}{\rho''}=\delta_6\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right), \quad \frac{\mathrm{ctg}\,9\times 10^6}{\rho''}=\delta_9\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\\
&\frac{1\times 10^6}{S_1}=\delta_{S_1}\left(\frac{6}{\text{მმ}}\right), \quad \frac{1\times 10^6}{S_2}=\delta_{S_2}\left(\frac{6}{\text{მმ}}\right)
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.7.4.5)$$

განაზომ კუთხეთა შესწორებების კოეფიციენტები, ანუ მათი კოტანგენსის რადიანთან ფარდობა ნიშნავს კუთხის კოტანგენსის ფარდობით შეცდომას, ანუ სიზუსტეს, ხოლო ბაზისების შესწორებების კოეფიციენტები კი ბაზისის ფარდობითი შეცდომაა ანუ სიზუსტეა. ორივე შემთხვევაში მათ ვამრავლებთ 10^6 ოდენობაზე, რითაც ვაძლევთ ადვილად გამოსაყენებელ სახეს. ცხადია, ბაზისები მილიმეტრებში გამოისახება.

6. ბაზისების პირობითი განტოლებების წრფივი სახე, თუ δ_i ნაცვლად d_i სიმბოლოს გამოვიყენებთ (ეს იმიტომ, რომ მეოთხე განტოლებასთან გვაქვს საქმე), დაიწერება:

$$d_1(1)-d_3(3)+d_4(4)-d_6(6)+d_7(7)-d_9(9)-d_{S_1}(S_1)+$$
$$+d_{S_2}(S_2)+W_4=0. \qquad (4.7.4.6)$$

იგივე ტოლობა განზომილებებში დაიწერება:

$$\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}-\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}+\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}-\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}+\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}-\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)\text{სკ}-$$
$$-\left(\frac{6}{\text{მმ}}\right)\text{მმ}+\left(\frac{6}{\text{მმ}}\right)\text{მმ}+(6)=0. \qquad (4.7.4.7)$$

როგორც ვხედავთ, აქ კუთხეების შესწორებები სეკუნდებში, ხოლო ბაზისებისა მილიმეტრებშია გამოსახული.

7. ბაზისების წრფივი სახის (6) ტოლობის W_4 თავისუფალი წევრი (4. 1. 6. 1) ანალოგიურად განისაზღვრება (1) ფორმულიდან, მხოლოდ შედეგი აქაც 10^6 მრავლდება, ანუ გამოისახება მეექვსე ათწილად ერთეულებში. მაშასადამე, ბაზისის განზომილება იქნება (6)

$$\frac{S_2\cdot\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 7}{S_1\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 9}-1=W_4. \qquad (4.7.4.8)$$

8. Φ_{CD} წონითი ფუნქციის წრფივი სახე, (4.7.1.3) მაგალითში მოყვანილი (4. 7. 1. 18) და (4. 7. 1. 19) ტოლობისა და (7) ანალოგიურად თუ წონითი ფუნქციის კოეფიციენტებს φ_i-ით აღვნიშნავთ, იქნება

$$\Phi_{CD}=\varphi_5(5)-\varphi_6(6)+\varphi_7(7)-\varphi_9(9)+\varphi_{S_2}(S_2). \qquad (4.7.4.9)$$

13 წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონა (4. 7. 1. 10) და (4. 7. 1. 12) შესაბამისად გამოითვლება გაუსის სქემით ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნისას.

9. წონები გამოითვლება განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 5. 2. 6), (3. 5. 2. 14) და (3. 5. 4. 1) ფორმულების შესაბამისად (იმ შემთხვევისას, როცა მოცემულია μ შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი; იხილეთ მაგალითი (3. 4. 1. 30), (3. 4. 1. 31)). წონების გამოთვლისას ბაზისების სიგრძეები იგივე განზომილებით დარჩება, რის შესაბამისადაც მოცემულია μ.

10. (4. 4. 7. 12) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას გაწონასწორების მონაცემებით გამოვთვლით ფორმულით:

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon_a^2]+[P\varepsilon_S^2]}{r}}\ (0), \qquad (4.7.4.10)$$

სადაც

ε_a—კუთხეების შესწორებები,

ε_S—ბაზისების შესწორებები,

r—პირობით განტოლებათა რაოდენობა.

11. η-ს განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით:

$$\eta_\eta=\frac{\eta}{\sqrt{2(r-1)}}=(0). \qquad (4.7.4.11)$$

12. (4. 4. 6. 3) ფორმულის მიხედვით გაწონასწორების შემდეგ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით:

$$\eta_u=\eta\sqrt{\frac{N-r}{r}}\ (0), \qquad (4.7.4.12)$$

სადაც

N ყველა განაზომთა რაოდენობაა.

13. CD გვერდის (ფუნქციის) განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (რომლის ყველა კომპონენტი (6) განზომილებისაა) გამოითვლება

$$m_{CD}=\eta\sqrt{\frac{1}{P_\Phi}}\ (6). \qquad (4.7.4.13)$$

14. $\overline{CD}$ გვერდის ფარდობითი შეცდომის (სიზუსტის) განსაზღვრისათვის საჭირო იქნება m_{CD} გავყოთ 10^6 ოდენობაზე. მართლაც, თუ $\overline{CD}$ გვერდის განსაზღვრის საშუალო კვადრატულ შეცდომას ზოგადად აღვნიშნავთ $m'_{\overline{CD}}$ სიმბოლოთი, მაშინ მისი ფარდობითი შეცდომა იქნება

$$\frac{m'_{\overline{CD}}}{\overline{CD}},$$

ხოლო, ვინაიდან (4), (5), (10), (13) ფორმულების შესაბამისად მეექვსე ათწილად ერთეულებში

$$m_{\overline{CD}}=\frac{m'_{\overline{CD}}\cdot 10^6}{\overline{CD}},$$

$$\frac{m'_{\overline{CD}}}{\overline{CD}} = \frac{m_{\overline{CD}}}{10^6} . \qquad (4.7.4.14)$$

მაგალითი 4. 7. 4. 1. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობების ცხრილის გამოყენებით გაწონასწორდეს 4. 7. 1. 5 მაგალითის მონაცემები.

ა მ ო ხ ს ნ ა

I. პრაქტიკული სახის პირობითი განტოლებებისა და წონითი ფუნქციის შედგენა და შეუკვრელობების განსაზღვრა

ფიგურის განტოლებები იქნება იგივე სახისა და ოდენობის, რაც 4. 7. 1. 5 მაგალითშია. განვსაზღვროთ (5) ტოლობების მიხედვით ბაზისებისა და წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები:

$$d_1 = \frac{\mathrm{ctg}\, 82°58'14'',6 \cdot 10^6}{\rho''} = \frac{0{,}1233033 \cdot 10^6}{206265''} = +0{,}60 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_3 = \frac{\mathrm{ctg}\, 56°12'06'',7 \cdot 10^6}{\rho''} = \frac{0{,}6693946 \cdot 10^6}{206265''} = +3{,}25 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_4 = \frac{\mathrm{ctg}\, 93°00'32'',8}{\rho''} = \frac{-0{,}05256723 \cdot 10^6}{206265''} = -0{,}26 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_6 = \frac{\mathrm{ctg}\, 62°31'28'',0}{\rho''} = \frac{0{,}5200249 \cdot 10^6}{206265''} = +2{,}52 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_7 = \frac{\mathrm{ctg}\, 35°21'49'',0}{\rho''} = \frac{1{,}4090311 \cdot 10^6}{206265''} = +6{,}83 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_9 = \frac{\mathrm{ctg}\, 101°24'47'',3}{\rho''} = \frac{-0{,}2018740 \cdot 10^6}{206265''} = -0{,}98 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_{S_1} = \frac{1 \cdot 10^6}{S_1} = \frac{1 \cdot 10}{2576803} = +0{,}39 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$d_{S_2} = \frac{1 \cdot 10^6}{S_2} = \frac{1 \cdot 10^6}{?246671} = +0{,}31 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) .$$

წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები იქნება:

$$\varphi_5 = \frac{\mathrm{ctg}\, 24°28'02'',1}{\rho''} = \frac{2{,}197628 \cdot 10^6}{206265''} = +10{,}65 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$\varphi_6 = d_6 = +\, 2{,}52 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$\varphi_7 = d_7 = +\, 6{,}83 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$\varphi_9 = d_9 = -\,0{,}98 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) ,$$

$$\varphi_{S_2} = d_{S_2} = +0{,}31 \left(\frac{6}{\text{სკ}}\right) .$$

II. სქემაში შესწორებათა პირობითი განტოლებების Φ_{CD} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება, ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა და წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრა სქემა (1)

სქემა 4.7.4.1

A ფურცელი

№№	აღნიშვნები	*a*	*b*	*c*	*d*	*W*	*S*	კონტროლი	φ	Σ	$\frac{1}{P}$	მოქმ. თანამიმ.
1	—	1			+0,60	—	+1,60	—		+ 1,60	1	
2	—	1			—	—	+1,00	—		+ 1,00	1	
3	—	1			−3,25	—	−2,25	—		− 2,25	1	
4	—		1		−0,26	—	+0,74	—		+ 0,74	1,96	
5	—		1		—	—	+1,00	—	+10,65	+11,65	1,96	
6	—		1		−2,52	—	−1,52	—	− 2,52	− 4,04	1,96	(1)
7	—			1	+6,83	—	−7,83	—	+ 6,83	+14,66	1	
8	—			1	—	—	+1,00	—			1	
9	—			1	+0,98	—	+1,98	—	+ 0,98	+ 2,96	1	
10	—				+0,31	—	+0,31	—	+ 0,31	+ 0,62	10,24	
11	—				+0,39	—	−0,39	—		− 0,39	81,00	
W	—	—			—	+1	+1	—	—	—	—	
I	*a*	+3,00	0	0	− 2,65	− 1,80	− 1,45	− 1,45	0	+ 0,35	(−0,3333)	(3)
II	*b*·1		+5,88	0	− 5,45	+ 2,90	+ 3,33	+ 3,33	+15,93	+ 16,37	(−0,17007)	(4)
III	*c*·2			+3,00	+ 7,81	+ 4,40	+ 15,21	+ 15,21	+ 7,81	+ 17,62	(−0,33333)	(6)
IV	*d*·3				+56,694	+54,947	+111,641	+111,641	+55,478	+114,786	(−0,01763855)	(8)

B ფურცელი

სქემა 4.7.4 1

№№	აღნიშ-ვნები	$\frac{a}{P}$	$\frac{b}{P}$	$\frac{c}{P}$	$\frac{d}{P}$	W	$\frac{S}{P}$	კონტ-როლი	$\frac{\varphi}{P}$	$\frac{\Sigma}{P}$	მოქმ. თანამიმ.
1	—	1			+ 0,60	—	+ 1,60	+ 1,60		+ 1,60	(2)
2	—	1				—	+ 1,00	+ 1,00		+ 1,00	
3	—	1			— 3,25	—	— 2,25	— 2,25		— 2,25	
4	—		1,96		— 0,51	—	+ 1,45	+ 1,45		+ 1,45	
5	—		1,96			—	+ 1,96	+ 1,96	+20,87	+22,83	
6	—		1,96		— 4,94	—	— 2,98	— 2,98	— 4,94	— 7,92	
7	—			1	+ 6,83	—	+ 7,83	+ 7,83	+ 6,83	+14,66	
8	—			1		—	+ 1,00	+ 1,00		+ 1,00	
9	—			1	+ 0,98	—	+ 1,98	+ 1,98	+ 0,98	+ 2,96	
10	—				+ 3,17	—	+ 3,17	+ 3,17	+ 3,17	+ 6,34	
11	—				—31,59	—	—31,59	—31,59		—31,59	
W	—	—1,8	+2,9	+4,4	+65,3	—	—	—	—	—	
I	E_1	—1	0	0	+0,883	+0,600	+0,483	+0,483	0	—0,117	(4)
II	E_2		—1	0	+0,927	—0,493	—0,566	—0,566	—2,709	—2,784	(5)
III	E_3			—1	—2,603	—1,467	—5,070	—5,070	—2,603	—5,873	(7)
IV	E_4				—1	—0,9692	—1,9692	—1,9692	—0,9786	—2,0247	(9)
		+0,600	—0,493	—1,467	—0,969	0	+ 70,80		+283,31	+368,09	
		—0,856	—0,898	+2,522	K_4	— 1,08	— 0,87		0	0	
		0	0	+1,055		— 1,43	— 1,64		— 43,15	— 44,35	
		0	—1,391	K_3		— 6,45	— 22,31		— 20,33	— 45,87	
		—0,256	K_2			—53,25	—108,20		— 54,29	—112,33	
		K_1				—62,21	— 62,22		+165,64	+165,53	

$$-[WK] = -1{,}8\,(-0{,}256) + 2{,}9\,(-1{,}391) + 4{,}4 \cdot 1{,}055 + 65{,}3\,(-0{,}969) = -62{,}20$$

პირველი კონტროლი დაცულია

თავისუფალი წევრი (8) ტოლობის მიხედვით იქნება:

$$W_4 = \frac{3246671 \text{ მმ} \cdot \sin 82°58'14'',6 \cdot \sin 93°00'32'',8 \cdot \sin 35°21'49'',0}{2576803 \text{ მმ} \cdot \sin 56°12'06'',7 \cdot \sin 62°31'28'',0 \cdot \sin 101°24'47'',3} - 1 =$$

$$= \frac{3246671 \cdot 0,9924838 \cdot 0,9986212 \cdot 0,5787633}{2576803 \cdot 0,8310025 \cdot 0,8872077 \cdot 0,9802258} - 1 =$$

$$= 1,2599608 \cdot 1,1943210 \cdot 1,1255776 \cdot 0,5904387 - 1 =$$

$$= 1,0000653 - 1 = +0,0000653 = +65,3(6).$$

მაშასადამე, პირობითი ტოლობები იქნება ასეთი:

1. $(1)+(2)+(3)-1'',8=0,$
2. $(4)+(5)+(6)+2'',9=0,$
3. $(7)+(8)+(9)-4'',4=0.$
4. $0,60(1)-3,25(3)-0,26(4)-2,52(6)+6,83(7)+0,98(9)+$
$+0,31(S_2)-0,39(S_1)+65,3=0.$

წონითი ფუნქცია

$$\Phi_{CD} = 1,07(5)-2,52(6)+6,83(7)+0,98(9)+0,31(S_2).$$

III. შესწორებების გამოთვლა

სქემა 4.7.4.2

№№	aK_1	bK_2	cK_3	dK_4	ჯამი	$\frac{1}{P}$	v	Pvv
1	−0,256			−0,581	−0,837	1	− 0,8	0,64
2	−0,256				−0,256	1	− 0,3	0,09
3	−0,256			+3,149	+2,893	1	+ 2,9	8,41
4		−1,391		+0,252	−1,139	1,96	− 2,2	2,47
5		−1,391			−1,391	1,96	− 2,7	3,72
6		−1,391		+2,442	+1,051	1,96	+ 2,1	2,25
7			+1,055	−6,618	−5,563	1	− 5,6	31,36
8			+1,055		+1,055	1	+ 1,1	1,21
9			+1,055	−0,950	+0,105	1	+ 0,1	0,01
10				−0,300	−0,300	10,24	− 3,1	0,94
11				+0,380	+0,380	81,00	+30,8	11,71

$[Pvv] = 62,81$

შესწორებების მიღებული მნიშვნელობები იგივეა რაც 7. 1. 5 მაგალითში. მაშასადამე, ორივე მეთოდით გაწონასწორება ერთ და იმავე შედეგს იძლევა, ამიტომ საბოლოოდ არ ვაკონტროლებთ.

1. (4. 4. 7. 12) ფორმულის შესაბამისად გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon_{\alpha}^{2}]+[P\varepsilon_{S}^{2}]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{62,81}{4}} \approx \pm 4,0(0),$$

სადაც

ε_α—კუთხეების შესწორებები;
ε_S—ბაზისის შესწორებები;
r—პირობით განტოლებათა რაოდენობა;

2. η განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_\eta = \frac{\eta}{\sqrt{2(r-1)}} = \pm\frac{4,0}{\sqrt{6}} \pm \approx 1,6(0).$$

3. (4. 4. 6. 3) ფორმულის მიხედვით გაწონასწორების შემდეგ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta_u = \eta\sqrt{\frac{N-r}{N}} \approx \pm 4,0\cdot\sqrt{\frac{7}{11}} \approx \pm ?,2(0)$$

N ყველა განაზომთა რაოდენობაა.

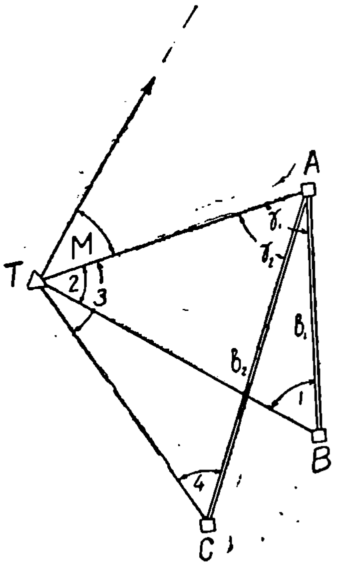
4. (13) ფორმულის შესაბამისად DC გვერდის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{CD} = \eta\sqrt{\frac{1}{P_{CD}}} =$$

$$= \pm 4,0\sqrt{165,64} \approx \pm 51,4(6)$$

5. (14) ფორმულის შესაბამისად CD გვერდის განსაზღვრის ფარდობითი შეცდომა კი იქნება

$$\frac{m_{CD}}{CD} = \frac{51,5}{10^6} \approx \frac{1}{20000}.$$



ნახ. 4.7.4.1

მაგალითი 4. 7. 4. 2. პოლიგონომეტრიული სვლის ტრიანგულაციის პუნქტებთან დაკავშირების მიზნით ე. წ. კოორდინატების ჩამოტანისათვის, ანუ ტრიგონომეტრიული პუნქტების კოორდინატების საშუალებით პოლიგონომეტრიული პუნქტების განსაზღვრისათვის (1) ნახაზის შესაბამისი განაზომები გაწონასწორდეს და შეფასდეს. აგრეთვე, შეფასდეს AT დამაკავშირებელი გვერდი როგორც წონითი ფუნქცია.

გ ა მ ო ს ა ვ ა ლ ი   მ ო ნ ა ც ე მ ე ბ ი ა

1. $X_T = 113228{,}136$ მ,

$Y_T = \quad 7263{,}279$ მ,

$\alpha_{TK} = 17°47'23'',8$

2. კუთხეების გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_\beta = \pm 4'',$$

ხოლო ბაზისების გაზომვის შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი

$$\mu = \pm 0{,}0004$$

ე. ი. ერთ მეტრზე შემთხვევითი გავლენის სიდიდე იქნება 0,0004 მეტრი=
=0,4 მმ

3. განაზომებია

$$\angle 1 = 31°15'06''$$
$$\angle 2 = 73\ 46\ 28$$
$$\angle \gamma_1 = 74\ 58\ 30$$
$$\angle 3 = 74\ 02\ 55$$
$$\angle 4 = 31\ 03\ 28$$
$$\angle \gamma_2 = 74\ 53\ 33$$
$$\angle M = 432822$$
$$b_1 = 212{,}360 \text{ მ}$$
$$b_2 = 213{,}857 \text{ მ}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

I. პრაქტიკული სახის პირობითი განტოლებების შედგენა, შეუკვრელობების განსაზღვრა და წონითი ფუნქციის წრფივი სახე

1. $(1)+(2)+(\gamma_1)+W_1=0$, სადაც $W_1=1+2+\gamma_1-180°=4''$,

2. $(3)+(4)+(\gamma_2)+W_2=0$, „ $W_2=3+4+\gamma_2-180°=-4''$,

3. $d_{b_1}(b_1)+d_1(1)-d_2(2)+d_3(3)-d_4(4)-d_{b_2}(b_2)+W_3=0$,

სადაც

$$W_3 = \frac{b_1 \cdot \sin 1 \cdot \sin 3}{b_2 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4} - 1 = \frac{212360 \cdot 0{,}5187982 \cdot 0{,}9614952}{213857 \cdot 0{,}9601692 \cdot 0{,}5159022} - 1 =$$

$$= 0{,}9929999 \cdot 0{,}5403195 \cdot 1{,}8637160 - 1 = 0{,}99995298 - 1 =$$

$$= -0{,}00004702 = -47\ (6)$$

წონითი ფუნქციაა

$$\Phi_{AT} = b_1 \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot$$

მისი წრფივი სახე იქნება

$$\Delta_{AT} = \varphi_{b_1}(b_1) + \varphi_1(1) - \varphi_2(2).$$

სქემა 4.7.4.3

A ფურცელი

№№	აღნიშ-ვნები	a	b	c	W	S	კონტროლი	φ	Σ	$\frac{1}{P}$	მოქმ. თანამიმ.
1	—	1		+8,00	—	+9,00	—	+8,00	+17,00	1	(1)
2	—	1		−0,41	—	−0,41	—	−1,41	− 1,82	1	
3	—	1				+1,00	—		+ 1,00	1	
4	—		1	+1,39	—	+2,39	—		+ 2,39	1	
5	—		1	−8,05	—	−7,05	—		− 7,05	1	
6	—		1		—	+1,00	—		+ 1,00	1	
7	—			+4,71	—	+4,71	—	+4,71	+ 9,42	2,12	
8	—			−4,68	—	−4,68	—		− 4,68	2,14	
W	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	
I	a	+3,00	0	+ 6,59	+ 4,00	+ 13,59	+ 13,59	+ 6,59	+ 16,18	(−0,33333)	(3)
II	$b \cdot 1$		+3,00	− 6,66	− 4,00	− 7,66	− 7,66	0	− 3,66	(−0,33333)	(5)
III	$c \cdot 2$			+197,4058	−64,6680	+132,7368	+132,7378	+98,5628	+296,0115	(−0,00506571)	(7)

B ფურცელი

№№	აღნიშვნები	$\frac{a}{P}$	$\frac{b}{P}$	$\frac{c}{P}$	W	$\frac{S}{P}$	კონტროლი	$\frac{\varphi}{P}$	$\frac{\Sigma}{P}$	მოქმედებათა თანამიმ.
1	—	1		+8,00	—	+9,00	+9,00	+8,00	+17,00	(2)
2	—	1		−1,41	—	−1,41	−1,41	−1,41	−1,82	
3	—	1			—	+1,00	+1,00		+1,00	
4	—		1	+1,39	—	+2,39	+2,39		+2,39	
5	—		1	−8,05	—	−8,05	−8,05		−8,05	
6	—		1		—	+1,00	+1,00		+1,00	
7	—			+9,99	—	+9,99	+9,99	+9,99	+19,98	
8	—			−10,02	—	−10,02	−10,02		−10,02	
W	—	−4,00	−4,00	−47,00	—	—	—	—	—	
I	E_1	−1	0	−2,197	−1,333	−4,530	−4,530	−2,197	−5,393	(4)
II	E_2		−1	+2,220	+1,333	+2,553	+2,553	0	+1,220	(6)
III	E_3			−1	+0,32759	−0,67241	−0,3752	−0,49929	−1,4995	(8)
		−1,333	+1,333	+0,328	0	−47,00		+113,04	+232,67	
		−0,721	+0,728	K_3	−5,33	−18,12		−14,48	−35,54	
		0	+2,061		−5,33	−10,21		0	0	
		−2,054	K_2		−21,18	+43,48		+49,21	−147,79	
		K_1			−31,84	−31,85		+49,35	+49,34	
								$\frac{1}{P_{AT}}$		

$-[WK] = 4,00(-2,054) - 4,00 \cdot 2,061 - 47,00 \cdot 0,328 = 31,88$

(4) სქემის W სვეტის საკონტროლო ჯამია 31,84, ე. ი. პირველი კონტროლი დაკმაყოფილებულია.

II. წონების და შებრუნებული წონების გამოთვლა

თანახმად განაზომთა შეცდომების თეორიის [13] (3. 5. 2. 6) და (3. 5. 2. 14) ფორმულის შესაბამისად დავწერთ

$$P_\beta = \frac{1}{m_\beta^2}, \quad P_L = \frac{1}{\mu^2 L}.$$

ვინაიდან საქმე გვაქვს არაერთგვაროვან არატოლზუსტ განაზომებთან, ვისარგებლოთ [13] (3. 5. 4. 1) ფორმულით და η ფიქტიური რიგის ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მივიღოთ 10μ (განყენებული მნიშვნელობა). აგრეთვე μ ავიღოთ 0,4 მმ (ერთ მეტრზე 0,4 მმ საშუალო კვადრატული შეცდომა), რადგანაც ბაზისების შესწორებების სიდიდე მილიმეტრებში გვინდა გამოვსახოთ, ხოლო ბაზისების სიგრძეები მეტრებში გამოისახება (იხ. [13] მაგალითი (3. 4. 1. 30) და (3. 4. 1. 31)).

$$P_1 = P_2 = P_{\gamma_1} = P_3 = P_4 = P_{\gamma_2} = \frac{\eta^2}{m_\beta^2} = \frac{(10\cdot\mu)^2}{m_\beta^2} = \frac{(10\cdot 0{,}4)^2}{(4'')^2} = 1\left(\frac{1}{\text{სკ}^2}\right),$$

$$P_{b_1} = \frac{\eta^2}{\mu^2 b_1} = \frac{(10\cdot\mu)^2}{\mu^2\cdot b_1} = \frac{10^2}{212{,}360} = 0{,}471\left(\frac{1}{\text{მმ}^2}\right),$$

$$P_{b_2} = \frac{\eta^2}{\mu^2 b_2} = \frac{(10\cdot\mu)^2}{\mu^2 b_2} = \frac{10^2}{213{,}857} = 0{,}468\left(\frac{1}{\text{მმ}^2}\right).$$

III. შესწორებათა პირობითი ტოლობების და Φ_{AT} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განსაზღვრა

1. $a_1 = a_2 = a_{\gamma_1} = 1$ დანარჩენი რვა კოეფიციენტი ნულია
2. $b_3 = b_4 = b_{\gamma_2} = 1$ „ „ „ „
3. $$c_1 = \frac{\operatorname{ctg} 1\cdot 10^6}{\rho''} = \frac{\operatorname{ctg} 31°15'06''\cdot 10^6}{206265} = \frac{1{,}6478409\cdot 10^6}{206264'',8} = +8{,}00\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_2 = \frac{\operatorname{ctg} 2\cdot 10^6}{\rho''} = \frac{\operatorname{ctg} 73°46'28''\cdot 10^6}{206265''} = \frac{0{,}2910118\cdot 10^6}{206264'',8} = +1{,}41\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_3 = \frac{\operatorname{ctg} 3\cdot 10^6}{\rho''} = \frac{\operatorname{ctg} 74°02'55''\cdot 10^6}{206265''} = \frac{0{,}2868274\cdot 10^6}{206264'',8} = +1{,}39\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_4 = \frac{\operatorname{ctg} 4\cdot 10^6}{\rho''} = \frac{\operatorname{ctg} 31°03'28''\cdot 10^6}{206265''} = \frac{1{,}6604843\cdot 10^6}{206264'',8} = +8{,}05\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_{b_1} = \frac{1\cdot 10^6}{b_1} = \frac{1\cdot 10^6}{212360} = +4{,}71\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_{b_2} = \frac{1\cdot 10^6}{b_2} = \frac{1\cdot 10^6}{213857} = +4{,}68\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right)$$

$$c_{\gamma_1} = c_{\gamma_2} = 0.$$

წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები

$$\varphi_1 = c_1 = +8{,}00\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right); \quad \varphi_2 = c_2 = +1{,}41\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right); \quad \varphi_{b_1} = c_{b_1} = +4{,}71\left(\frac{6}{\text{სკ}}\right).$$

IV. სქემაში პირობითი განტოლებების Φ_{AT} წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების განლაგება, ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა და წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრა (სქემა 3)

V. შესწორებების გამოთვლა (სქემა 4)

სქემა 4.7.4.4

№№	aK_1	bK_2	cK_3	ჯამი	$\frac{1}{P}$	ε	$P\varepsilon\varepsilon$
1	—2,054		+2,624	+0,570	1	+ 0,6	0,36
2	—2,054		—0,462	—2,516	1	— 2,5	6,25
3	—2,054			—2,054	1	— 2,1	4,41
4		+2,061	—0,456	+2,517	1	+ 2,5	6,25
5		—2,061	+2,640	—0,579	1	— 0,6	0,36
6		+2,061		+2,061	1	+ 2,1	4,45
7			+1,545	+1,545	2,12	+ 3,31	5,10
8			—1,535	—1,535	2,14	— 3,3	5,10
							$P\varepsilon\iota = 32,28$

მეორე კონტროლი დაკმაყოფილებულია (— [WK] = [$P\varepsilon\varepsilon$]).

VI. საბოლოო კონტროლი.

1. 31°15′06″,6	3. 74°02′57″,5
2. 73 46 25,5	5. 31 03 27,4
γ_1. 74 58 27,9	γ_2. 74 53 35,1
180°	180°

$$\frac{b_1 \sin 1 \cdot \sin 3}{b_2 \sin 2 \cdot \sin 4} - 1 = \frac{212363,3 \cdot 0,5188006 \cdot 0,9614985}{213853,7 \cdot 0,9601658 \cdot 0,5158997} - 1 =$$

$$= 0,9930307 \cdot 1,0056230 \cdot 1,0013879 - 1 = 1,0 - 1,0 = 0.$$

VII. სიზუსტის შეფასება

$$1.\ \eta = \pm\sqrt{\frac{32,28}{3}} \approx \pm 3,3(0),$$

$$2.\ \eta_\eta = \pm \frac{3,3}{\sqrt{4}} \approx \pm 1,7(0),$$

$$3.\ \eta_u = \pm 3,3\sqrt{\frac{5}{8}} \approx \pm 2,8(0),$$

$$4.\ m_{AT} = \pm 3,3\sqrt{49,35} \approx 23,2\ (6),$$

$$5.\ \frac{m_{AT}}{10^6} = \frac{23,2}{10^6} \approx \frac{1}{43000}$$

ლოგარითმების გამოყენებითაც იგივე შედეგს მივიღებთ.

თავი VIII

ჯგუფებად გაწონასწორება

წინა თავში განხილული მაგალითებიდან ნათლად ჩანს, რომ ყველა პირობითი ტოლობის ერთბაშად (თანადროულად) გაწონასწორება მოითხოვს მნიშვნელოვან შრომასა და დროს. აქვე აღვნიშნავთ, რომ განტოლებების რაოდენობის ზრდის მიხედვით მათი გაწონასწორებისათვის საჭირო შრომა და დრო არაჩვეულებრივი სისწრაფით იზრდება. აღნიშნულის გამო ერთ-ერთ საყურადღებო ღონისძიებად ითვლება განტოლებათა სისტემის ჯ გ უ ფ ე ბ ა დ დაყოფა და მათი თანამიმდევრობით ამოხსნა იმ პირობით, რომ ამ წესით გაწონასწორებული ელემენტების მნიშვნელობები და სიზუსტე იყოს იგივე, რაც მიიღებოდა განტოლებათა მთელი სისტემის ერთბაშად გაწონასწორების შედეგად.

როგორც ვიცით, მოცემულ სისტემაში შემავალი ტოლობები უნდა იყოს უ რ თ ი ე რ თ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ანუ, არც ერთი მათგანი არ უნდა იყოს შედეგი დანარჩენი ტოლობებისა. ამავე დროს, იმისათვის, რომ გვქონდეს ტოლობების სისტემა, საჭიროა ეს ტოლობები იყოს უ რ თ ი ე რ თ დ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი, ანუ ამა თუ იმ ტოლობაში შემავალი ზოგიერთი განაზომი საჭიროა შედიოდეს სხვა ტოლობებშიც. როცა ტოლობები არ არის ურთიერთდაკავშირებული, ანუ, როცა სხვადასხვა ტოლობაში შემავალი ყველა განაზომი სხვადასხვაა, მაშინ პირობით განტოლებათა (ასევე ნორმალურ განტოლებათა) ერთობლიობა ს ი ს ტ ე მ ა ს არ წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში საქმე გვექნება მხოლოდ ცალკეული ტოლობების მარტივ ერთობლიობასთან. მაგალითად, ცენტრალურ სისტემაში ფიგურის ტოლობები ურთიერთდაკავშირებული არ არის, ისინი დაკავშირებული არიან ჰორიზონტისა და პოლუსის ტოლობებთან, თვით ეს უკანასკნელნი კი არ არიან ურთიერთდაკავშირებული; მაშასადამე, ყველა ეს ტოლობა ერთად სისტემას წარმოადგენს. ზოგჯერ ადგილი აქვს ისეთ შემთხვევას, როცა პირობით განტოლებათა ერთი ნაწილი არაა დაკავშირებული მეორე ნაწილთან, მხოლოდ ამ ჯგუფებში შემავალი ტოლობები ურთიერთდაკავშირებულია, მაშინ ეს ჯგუფები გაწონასწორდება ცალცალკე როგორც დამოუკიდებელი ს ი ს ტ ე მ ე ბ ი. შეიძლება ასეც მოხდეს, რომ ჯგუფებში შემავალი ტოლობებიც არ იყოს ურთიერთდაკავშირებული. ეს შემთხვევა გაწონასწორებისათვის ყველაზე ხელსაყრელია. ამ პარაგრაფში განიხილება საკითხი ერთი სისტემის ორ და სამ ჯგუფად გაწონასწორების შესა-

ხებ, რისთვისაც საჭირო გახდება გარდა პირველ ჯგუფში შემავალი პირობითი ტოლობებისა, ხელოვნურად გარდავქმნათ ტოლობები ისე, რომ ყველა ჯგუფი გახდეს ურთიერთდამოუკიდებელი.

4. 8. 1. არატოლზუსტ და ტოლზუსტ განაზომთა ორ ჯგუფად გაწონასწორება

განსახილველი ხერხის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ პირობით განტოლებათა სისტემა დაიყოფა ორ ჯგუფად, რომლებიც ამოიხსნება ცალ-ცალკე. იმისათვის, რომ ამ ხერხით მიღებული შედეგი და მთელი სისტემის ერთად გაწონასწორების გზით მიღებული შედეგი ერთნაირი გამოვიდეს, საჭიროა განტოლებათა მეორე ჯგუფის გარდაქმნა.

ვთქვათ, სისტემაშია ხუთი ტოლობა, რომლებშიც შედის n უცნობი. ეს სისტემა დავყოთ ორ ჯგუფად .

I ჯგუფი

$$\left.\begin{aligned} a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n+W_1'=0 \\ b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\ldots+b_n\varepsilon_n+W_2'=0 \\ c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\ldots+c_n\varepsilon_n+W_3'=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8.1.1)$$

II ჯგუფი

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots+\alpha_n\varepsilon_n+W_1''=0 \\ \beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2+\ldots+\beta_n\varepsilon_n+W_2''=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8.1.2)$$

დავუშვათ, რომ ჩვენს მიერ შესრულებულია მეორე ჯგუფის ტოლობათა გარდაქმნა, რომლის ეკვივალენტურ ჯგუფს წარმოადგენს შემდეგი სახის ორი ტოლობა:

$$\left.\begin{aligned} A_1\varepsilon_1+A_2\varepsilon_2+\ldots+A_n\varepsilon_n+W_A=0 \\ B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2+\ldots+B_n\varepsilon_n+W_B=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.1.3)$$

ამოვხსნათ (1) და (3) ჯგუფები (გარდაქმნილ მეორე ჯგუფს მესამე ჯგუფი ვუწოდეთ) ერთად უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით. ამისათვის შევადგენთ (1) და (3) ჯგუფების საშუალებით ლაგრანჟის ფუნქციას, რომლის შესაბამისი შესწორებების ექსტრემალური მნიშვნელობების ზოგადი სახე იქნება:

$$\varepsilon_i=\frac{1}{P_i}\,(a_ik_1+b_ik_2+c_ik_3+A_ik_A+B_ik_B), \qquad (4.8.1.4)$$

$i=1,2,\ldots,n.$

(4) მნიშვნელობების (1) და (3) ჯგუფში ჩასმით მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{P}\right]K_1+\left[\frac{ab}{P}\right]K_2+\left[\frac{ac}{P}\right]K_3+\left[\frac{aA}{P}\right]K_A+\left[\frac{aB}{P}\right]A_B+W'_1=0\\
&\left[\frac{ab}{P}\right]K_1+\left[\frac{bb}{P}\right]K_2+\left[\frac{bc}{P}\right]K_3+\left[\frac{bA}{P}\right]K_A+\left[\frac{bB}{P}\right]K_B+W'_2=0\\
&\left[\frac{ac}{P}\right]K_1+\left[\frac{bc}{P}\right]K_2+\left[\frac{cc}{P}\right]K_3+\left[\frac{cA}{P}\right]K_A+\left[\frac{cB}{P}\right]K_B+W'_3=0\\
&\left[\frac{aA}{P}\right]K_1+\left[\frac{bA}{P}\right]K_2+\left[\frac{cA}{P}\right]K_3+\left[\frac{AA}{P}\right]K_A+\left[\frac{AB}{P}\right]K_B+W_A=0\\
&\left[\frac{ab}{P}\right]K_1+\left[\frac{bB}{P}\right]K_2+\left[\frac{cB}{P}\right]K_3+\left[\frac{AB}{P}\right]K_A+\left[\frac{BB}{P}\right]K_B+W_B=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.5}$$

იმისათვის, რომ (5) სისტემიდან შეიქმნას ორი ურთიერთდამოუკიდებელი სისტემა, საჭიროა დაცული იქნეს პირობა:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aA}{P}\right]=\left[\frac{bA}{P}\right]=\left[\frac{cA}{P}\right]=0\\
&\left[\frac{aB}{P}\right]=\left[\frac{bB}{P}\right]=\left[\frac{cB}{P}\right]=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.6}$$

ამ პირობის დაცვის შედეგად (5) სისტემიდან ამოიწერება (მთლიან ხაზებში ჩასმული) ორი სისტემა შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{P}\right]K_1+\left[\frac{ab}{P}\right]K_2+\left[\frac{ac}{P}\right]K_3+W'_1=0\\
&\left[\frac{ab}{P}\right]K_1+\left[\frac{bb}{P}\right]K_2+\left[\frac{bc}{P}\right]K_3+W'_2=0\\
&\left[\frac{ac}{P}\right]K_1+\left[\frac{bc}{P}\right]K_2+\left[\frac{cc}{P}\right]K_3+W'_3=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.7}$$

და

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{AA}{P}\right]K_A+\left[\frac{AB}{P}\right]K_B+W_A=0\\
&\left[\frac{AB}{P}\right]K_A+\left[\frac{BB}{P}\right]K_B+W_B=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.8}$$

(7) და (8) სისტემა ამოიხსნება ურთიერთდამოუკიდებლად, ე. ი. ამ სისტემებს საერთო კორელატები არ ექნებათ.

(7) სისტემის ამოხსნით მივიღებთ (1) ჯგუფისათვის საჭირო კორელატებს, რომლებითაც გამოითვლება პირველადი შესწორებები ფორმულით:

$$\varepsilon'_i=\frac{1}{P_i}\,(a_iK_1+b_iK_2+c_iK_3), \tag{4.8.1.9}$$

$i=1,\ 2,\ldots,\ n.$

(8) სისტემა კი წარმოადგენს კორელატების ნორმალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეესაბამება (3) ჯგუფს, ე. ი. ეს კორელატები გამოიყენება მეორადი შესწორებების გამოსათვლელად:

$$\varepsilon''_i=\frac{1}{P_i}(A_iK_A+B_iK_B). \tag{4.8.1.10}$$

თუ (9) და (10) ტოლობებს შევადარებთ (4) ტოლობას დავწერთ

$$\varepsilon_i=\varepsilon'_i+\varepsilon''_i. \tag{4.8.1.11}$$

მაშასადამე, (1) გარდაუქმნელი ჯგუფისა და (3) გარდაქმნილი ჯგუფის მიხედვით ცალ-ცალკე ამოხსნილი ε'_i და ε''_i (პირველადი და მეორადი) შესწორებების ჯამი ტოლია ε_i შესწორების, რომელიც მიიღებოდა ამ ორი ჯგუფის ერთად ამოხსნისას.

ახლა განვმარტავთ იმას, თუ რა გზით შეიძლება მივიღოთ (2) ჯგუფის ეკვივალენტური (გარდაქმნილი სახის) (3) ჯგუფი. მაშასადამე, შევისწავლოთ საკითხი, თუ როგორ მივიღოთ A_i, B_i, W_A და W_B სიდიდეები.

a. პირველი ჯგუფის ყველა ტოლობა შესაბამისად გავამრავლოთ ρ_{11}, ρ_{12} და ρ_{13} განუზღვრელ (ნებისმიერ) მამრავლზე და ეს ნამრავლები მივუმატოთ (2) ჯგუფის პირველ ტოლობას. მამრავლთა პირველი ინდექსი გვიჩვენებს მეორე ჯგუფის ტოლობის ნომერს, ხოლო მეორე ინდექსი კი პირველი ჯგუფის ტოლობის ნომრის მაჩვენებელია. მაგალითად, ρ_{13} ნიშნავს, რომ ეს მამრავლი ეკუთვნის მეორე ჯგუფის პირველ და პირველი ჯგუფის მესამე ტოლობას. ამ მამრავლთა რაოდენობა იმდენი აიღება, რამდენი ტოლობაც გვაქვს პირველ ჯგუფში.

$$(\alpha_1+a_1\rho_{11}+b_1\rho_{12}+c_1\rho_{13})\varepsilon_1+(\alpha_2+a_2\rho_{11}+b_2\rho_{12}+c_2\rho_{13})\varepsilon_2+\ldots+$$
$$+(\alpha_n+a_n\rho_{11}+b_n\rho_{12}+c_n\rho_{13})\varepsilon_n+(W_1''+W_1'\rho_{11}+W_2'\rho_{12}+W'\rho_{13})=0.$$

მიღებული ტოლობა შეიძლება დაიწეროს (3) სისტემის პირველი ტოლობის სახით:

$$A_1\varepsilon_1+A_2\varepsilon_2+\ldots+A_n\varepsilon_n+W_A=0, \tag{4.8.1.12}$$

სადაც

$$A_i=\alpha_i+a_i\rho_{11}+b_i\rho_{12}+c_i\rho_{13}, \tag{4.8.1.13}$$

$$W_A=W_1''+W_1'\rho_{11}+W_2'\rho_{12}+W_3'\rho_{13}, \tag{4.8.1.14}$$

$$i=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

ახლა (1) ჯგუფის ყველა ტოლობა შესაბამისად გავამრავლოთ ϱ_{21}, ϱ_{22} და ϱ_{23} განუზღვრელ მამრავლზე და მიღებული ნამრავლი მივუმატოთ (2) ჯგუფის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$(\beta_1+a_1\rho_{21}+b_1\rho_{22}+c_1\rho_{23})\varepsilon_1+(\beta_2+a_2\rho_{21}+b_2\rho_{22}+c_2\rho_{23})\varepsilon_2+\ldots+$$
$$+(\beta_n+a_n\rho_{21}+b_n\rho_{22}+c_n\rho_{23})\varepsilon_n+(W_2''+W_1'\rho_{21}+W_2'\rho_{22}+W_3'\rho_{23})=0,$$

ანუ

$$B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2+\ldots+B_n\varepsilon_n+W_B=0, \qquad (4.8.1.15)$$

სადაც

$$B_i=\beta_i+a_i\rho_{21}+b_i\rho_{22}+c_i\rho_{23}, \qquad (4.8.1.16)$$

$$W_B=W_1^{II}+W_1^I\rho_{21}+W_2^I\rho_{22}+W_3^I\rho_{23}. \qquad (4.8.1.17)$$

როგორც ვხედავთ, (12) და (15) ტოლობა ეკუთვნის (3) სისტემას, რომლის კოეფიციენტები წარმოადგენს განუზღვრელ მამრავლთა ფუნქციებს. განუზღვრელ მამრავლთა რაოდენობა უდრის პირველი და მეორე ჯგუფების ტოლობათა რაოდენობის ნამრავლს (განსახილველ შემთხვევაში 3×2=6).

ეს (ρ) განუზღვრელი მამრავლები ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ დაკმაყოფილდეს (6) პირობა. ამისათვის (13) და (16) ტოლობებიდან A_i და B_i კოეფიციენტების მნიშვნელობები ჩავსვათ (6) პირობაში. ვინაიდან

$$\frac{a_iA_i}{P_i}=\frac{a_i}{P_i}(\alpha_i+a_i\rho_{11}+b_i\rho_{12}+c_i\rho_{13}),$$

$$\frac{b_iA_i}{P_i}=\frac{b_i}{P_i}(\alpha_i+a_i\rho_{11}+b_i\rho_{12}+c_i\rho_{13}),$$

$$\frac{c_iA_i}{P_i}=\frac{c_i}{P_i}(\alpha_i+a_i\rho_{11}+b_i\rho_{12}+c_i\rho_{13}),$$

შესაბამისად დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aA}{P}\right]&=\left[\frac{aa}{P}\right]\rho_{11}+\left[\frac{ab}{P}\right]\rho_{12}+\left[\frac{ac}{P}\right]\rho_{13}+\left[\frac{a\alpha}{P}\right]=0\\ \left[\frac{bA}{P}\right]&=\left[\frac{ab}{P}\right]\rho_{11}+\left[\frac{bb}{P}\right]\rho_{12}+\left[\frac{bc}{P}\right]\rho_{13}+\left[\frac{b\alpha}{P}\right]=0\\ \left[\frac{cA}{P}\right]&=\left[\frac{ac}{P}\right]\rho_{11}+\left[\frac{bc}{P}\right]\rho_{12}+\left[\frac{cc}{P}\right]\rho_{13}+\left[\frac{c\alpha}{P}\right]=0\end{aligned}\right\}, \qquad (4.8.1.18)$$

საიდანაც განისაზღვრება ρ_{11}, ρ_{12}, და ρ_{13} განუზღვრელი მამრავლები.

ზემოხსენებულის ანალოგიურად დაიშლება (6) პირობის მეორე სტრიქონი. ვინაიდან:

$$\frac{a_iB_i}{P_i}=\frac{a_i}{P_i}(\beta_i+a_i\rho_{21}+b_i\rho_{22}+c_i\rho_{23}),$$

$$\frac{b_iB_i}{P_i}=\frac{b_i}{P_i}(\beta_i+a_i\rho_{21}+b_i\rho_{22}+c_i\rho_{23}),$$

$$\frac{c_iB_i}{P_i}=\frac{c_i}{P_i}(\beta_i+a_i\rho_{21}+b_i\rho_{22}+c_i\rho_{23}),$$

შესაბამისად დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aB}{P}\right]=\left[\frac{aa}{P}\right]\rho_{21}+\left[\frac{ab}{P}\right]\rho_{22}+\left[\frac{ac}{P}\right]\rho_{23}+\left[\frac{a\beta}{P}\right]=0\\ \left[\frac{bB}{P}\right]=\left[\frac{ab}{P}\right]\rho_{21}+\left[\frac{bb}{P}\right]\rho_{22}+\left[\frac{bc}{P}\right]\rho_{23}+\left[\frac{b\beta}{P}\right]=0\\ \left[\frac{cB}{P}\right]=\left[\frac{ac}{P}\right]\rho_{21}+\left[\frac{bc}{P}\right]\rho_{22}+\left[\frac{cc}{P}\right]\rho_{23}+\left[\frac{c\beta}{P}\right]=0\end{aligned}\right\}, \qquad (4.8.1.19)$$

საიდანაც, განისაზღვრება ρ_{21}, ρ_{22} და ρ_{23} განუზღვრელი (ხებისმიერი) მამრავლები.

თუ შევადარებთ (18) და (19) სისტემის (1) ჯგუფის შესაბამის (7) ნორმალურ განტოლებათა სისტემას, დავასკვნით, რომ ρ_{11}, ρ_{12}, და ρ_{13} მამრავლების განსაზღვრა შეიძლება (7) სისტემიდანაც თუ W_1^1, W_2^1 და W_3^1 თავისუფალი წევრების ნაცვლად მათ ადგილას შესაბამისად შევიტანთ

$$\left[\frac{a\alpha}{P}\right], \left[\frac{b\alpha}{P}\right], \left[\frac{c\alpha}{P}\right]$$

სიდიდეებს. ასევე განისაზღვრება ρ_{21}, ρ_{22} და ρ_{23} განუზღვრელი მამრავლები, თუ (7) სისტემაში W_1^1, W_2^1, და W_3^1 წევრის მაგიერ ჩავსვამთ $\left[\frac{a\beta}{P}\right]$, $\left[\frac{b\beta}{P}\right]$, $\left[\frac{c\beta}{P}\right]$ სიდიდეებს.

გასაგებია, რომ (18) და (19) სისტემის მაგვარი სისტემა გვექნება იმდენი, რამდენი ტოლობაც იქნება მეორე ჯგუფში, ხოლო ყოველ სისტემაში უცნობთა რაოდენობა იქნება იმდენი, რამდენი ტოლობაც გვაქვს პირველ ჯგუფში.

დავადგინოთ, თუ როგორი თანამიმდევრობით სრულდება ამოცანის გადაწყვეტა:

1. (I ჯგუფში შემავალი პირობითი ტოლობები ამოიხსნება და (9) ფორმულით განისაზღვრება ε_i' პირველადი შესწორებები.

2. ρ განუზღვრელი მამრავლის ყველა მნიშვნელობა განისაზღვრება (18) და (19) ფორმულებით. აქ საჭირო გახდება იმდენი სისტემის ამოხსნა, რამდენი ტოლობაც გვაქვს მეორე ჯგუფში.

3. გარდაქმნილი ჯგუფის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები განისაზღვრება (13), (16) და (14), (17) ფორმულებით.

4. (3) ჯგუფში შემავალი პირობითი ტოლობები ამოიხსნება და (10) ფორმულით განისაზღვრება ε_i'' მეორადი შესწორებები.

როგორც ვხედავთ, ზემოხსენებული წესით განტოლებათა ორ ჯგუფად გაწონასწორება მოითხოვს უფრო მეტ შრომას და დროს, ვიდრე მთელი სისტემის ერთად ამოხსნა. ამჟამად მიღწეულია ორ ჯგუფად გაწონასწორების ეფექტური ხერხი ამოცანის გ ა მ ა რ ტ ი ვ ე ბ ი ს ა და კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს გზით.

ამოცანის გადაწყვეტა გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ ორ ჯგუფად დაყოფის შემდეგ წესს: პირველ ჯგუფში შევიტანოთ ურთიერთდაუკავშირებელი პირობითი ტოლობები, რომელთაც უცნობების კოეფიციენტები ექნებათ $+1$.

ამ შემთხვევაში (7) ნორმალურ ტოლობათა არაკვადრატოვანი კოეფიციენტები იქნება ნულის ტოლი. მაშასადამე, ნაცვლად (7) სისტემისა მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{P}\right]K_1+W'_1=0 \\ \left[\frac{bb}{P}\right]K_2+W'_2=0 \\ \left[\frac{cc}{P}\right]K_3+W'_3=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.1.20}$$

მაგრამ, ვინაიდან ყველა კოეფიციენტი ერთის ტოლია, (20) გადაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{1}{P}\right]_1 K_1+W'_1=0 \\ \left[\frac{1}{P}\right]_2 K_2+W'_2=0 \\ \left[\frac{1}{P}\right]_3 K_3+W'_3=0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.21}$$

$$\left.\begin{aligned} K_1=-\frac{W'_1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1} \\ K_2=-\frac{W'_2}{\left[\frac{1}{P}\right]_2} \\ K_3=-\frac{W'_3}{\left[\frac{1}{P}\right]_3} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.22}$$

ზოგადად

$$K_S=\frac{W'_S}{\left[\frac{1}{P}\right]_S}, \tag{4.8.1.23}$$

სადაც

S—(1) ჯგუფში შემავალი ტოლობის (სექციის) ნომერია, ჩვენ შემთხვევაში $S=1, 2, 3,$

$\left[\frac{1}{P}\right]_S$ — (1) ჯგუფის S ტოლობაში (სექციაში) შემავალი უცნობების შებრუნებული წონების ჯამია.

(9) ფორმულა

$$\varepsilon_i' = \frac{1}{P_i}\,(a_i K_1 + b_i K_2 + c_i k_3),$$

(1) ჯგუფის პირველ, მეორე და მესამე ტოლობებში (სექციაში) შემავალი ნებისმიერი ნომრის ε_i' პირველადი შესწორებისათვის გამოსათვლელად გადაიწერება ასე:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{i1}' &= \frac{K_1}{P_i} = -\frac{W_1'}{\left[\frac{1}{P}\right]_1}\cdot\frac{1}{P_i}\\
\varepsilon_{i2}' &= \frac{K_2}{P_i} = -\frac{W_2'}{\left[\frac{1}{P}\right]_2}\cdot\frac{1}{P_i}\\
\varepsilon_{i3}' &= \frac{K_3}{P_i} = -\frac{W_3'}{\left[\frac{1}{P}\right]_3}\cdot\frac{1}{P_i}
\end{aligned}\right\}; \qquad (4.8.1.24)$$

მაშასადამე, (9) ფორმულის ზოგადი სახე იქნება:

$$\varepsilon_{iS}' = \frac{K_S}{P_i} = -\frac{W_3'}{\left[\frac{1}{P}\right]_S}\cdot\frac{1}{P_i}. \qquad (4.8.1.25)$$

ცხადია, სხვადასხვა ტოლობაში (სექციაში), ანუ S-ის სხვადასხვა მნიშვნელობის შესაბამისი i-ის მნიშვნელობები იქნება ურთიერთგანსხვავებული, რადგანაც ტოლობები (სექცია) ურთიერთდაუკავშირებელია (ყოველი ტოლობა შეიცავს სხვადასხვა უცნობ ε' პირველად შესწორებას). როგორც ვხედავთ, ყოველ ტოლობაში ნებისმიერი უცნობის სიდიდე პროპორციულია თავისივე შებრუნებული წონისა.

(18) და (19) სისტემები შესაბამისად დაიწერება (26) სახით:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{P}\right]_1 \rho_{11} + \left[\frac{\alpha}{P}\right]_1 = 0 \qquad && \left[\frac{1}{P}\right]_1 \rho_{21} + \left[\frac{\beta}{P}\right]_1 = 0\\
&\left[\frac{1}{P}\right]_2 \rho_{12} + \left[\frac{\alpha}{P}\right]_2 = 0 \qquad && \left[\frac{1}{P}\right]_2 \rho_{22} + \left[\frac{\beta}{P}\right]_2 = 0\\
&\left[\frac{1}{P}\right]_3 \rho_{13} + \left[\frac{\alpha}{P}\right]_3 = 0 \qquad && \left[\frac{1}{P}\right]_3 \rho_{23} + \left[\frac{\beta}{P}\right]_3 = 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (4.8.1.26)$$

საიდანაც,

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_{11}=-\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1} \qquad \rho_{21}=-\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1}\\
&\rho_{12}=-\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_2}{\left[\frac{1}{P}\right]_2} \qquad \rho_{22}=-\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_2}{\left[\frac{1}{P}\right]_2}\\
&\rho_{13}=-\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_3}{\left[\frac{1}{P}\right]_3} \qquad \rho_{23}=-\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_3}{\left[\frac{1}{P}\right]_3}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.27}$$

ჩავსვათ (27) სიდიდეები (13) და (16) ტოლობებში, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
A_i&=\alpha_i-a_i\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1}-b_i\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_2}{\left[\frac{1}{P}\right]_2}-c_i\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_3}{\left[\frac{1}{P}\right]_3}\\
B_i&=\beta_i-a_i\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1}-b_i\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_2}{\left[\frac{1}{P}\right]_2}-c_i\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_3}{\left[\frac{1}{P}\right]_3}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.28}$$

ამ ტოლობებს თუ წარმოვიდგენთ სექციებად, ისე რომ პირველი ჯგუფის ყოველი ტოლობა დავუშვათ ცალკეული სექციებია, რომლის ნომერი S-ით გვაქვს აღნიშნული, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
A_{iS}&=\alpha_{iS}-\frac{\left[\frac{\alpha}{P}\right]_S}{\left[\frac{1}{P}\right]_S}\\
B_{iS}&=\beta_{iS}-\frac{\left[\frac{\beta}{P}\right]_S}{\left[\frac{1}{P}\right]_S}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.8.1.29}$$

სადაც

A_{iS}—(3) გარდაქმნილი ჯგუფის პირველი ტოლობის იმ უცნობის კოეფიციენტია, რომელიც თანადროულად შედის (1) ჯგუფის S სექციაში (ტოლობაში) და (2) ჯგუფის პირველ ტოლობაში.

α_{iS} (2) ჯგუფის პირველი ტოლობის იმ უცნობის კოეფიციენტია, რომელიც თანადროულად შედის (1) ჯგუფის S სექციაში (ტოლობაში).

$\left[\frac{\alpha}{P}\right]_S$ —[2] ჯგუფის პირველი ტოლობის იმ უცნობთა კოეფიციენტების შესაბამის წონებზე განაყოფთა ჯამია, რომლებიც თანადროულად შედიან (1) ჯგუფის S სექციაში (ტოლობაში).

$\left[\frac{1}{P}\right]_S$ —(1) ჯგუფის S ტოლობის უცნობთა შებრუნებული წონების ჯამია.

$\left[\frac{\beta}{P}\right]_S$ —(2) ჯგუფის მეორე ტოლობის იმ უცნობთა კოეფიციენტების შესაბამის წონებზე განაყოფთა ჯამია, რომლებიც თანადროულად შედიან (1) ჯგუფის S სექციაში (ტოლობაში).

განსახილველ შემთხვევაში $S=1, 2, 3$.

იმ შემთხვევაში, როცა (1) და (2) ჯგუფი ურთიერთდაკავშირებულია, ანუ არც ერთი საერთო უცნობი არა აქვთ, მაშინ (3) ჯგუფის კოეფიციენტები არ გარდაიქმნება და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\left.\begin{aligned} A_l &= \alpha_l \\ B_l &= \beta_l \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.30}$$

შეიძლება α_{lS} უდრიდეს ნულს, მაშინ (29) ფორმულაში დარჩება მხოლოდ მაკლები.

თუ გარდაქმნილ კოეფიციენტებს შევაჯამებთ სექციების მიხედვით, მივიღებთ ყოველი სექციის საკონტროლო ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{A}{P}\right]_S &= 0 \\ \left[\frac{B}{P}\right]_S &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.1.31}$$

აღნიშნულის შემდეგ (8) სისტემისა და (10) ტოლობის ამოხსნით მივიღებთ ε_i'' მეორად შესწორებებს.

როგორც ზემოთ განხილულიდან ჩანს, არატოლზუსტი განაზომების ორ ჯგუფად გაწონასწორებისათვის საჭიროა (25), (29), (8) და (10) ტოლობების თანამიმდევრობითი შესრულება.

თუ რომელიმე სექციაში ყველა შებრუნებული წონა $\frac{1}{P}$ ურთიერთტოლია, ანუ როცა ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი განაზომები გვაქვს, მაშინ (25), (29), (8), (10) და (31) ფორმულები შესაბამისად მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varepsilon'_{iS} = -\frac{W_S^I}{n_S}, \tag{4.8.1.32}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{lS} &= \alpha_{lS} - \frac{[\alpha]_S}{n_S} \\ B_{lS} &= \beta_{lS} - \frac{[\beta]_S}{n_S} \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.1.33}$$

$$\left.\begin{aligned}[AA]K_A+[AB]K_B+W_A=0\\ [AB]K_A+[BB]K_B+W_B=0\end{aligned}\right\},\qquad (4.8.1.34)$$

$$\varepsilon_i''=A_iK_A+B_iK_B, \qquad (4.8.1.35)$$

$$\left.\begin{aligned}[A]_S=0\\ [B]_S=0\end{aligned}\right\},\qquad (4.8.1.36)$$

სადაც

n_s S სექციაში უცნობთა რაოდენობაა.

(32), (33), (34), (35) და (36) ფორმულებით ხდება ტოლზუსტ განაზომთა გაწონასწორება. (30) ფორმულა იგივე მნიშვნელობისაა.

II. კოეფიციენტების გარდაქმნის წესი

1. (29), (33) ფორმულების მიხედვით S სექციის შესაბამისი (3) ჯგუფის გარდაქმნილი კოეფიციენტი უდრის (2) ჯგუფის გარდაუქმნელ კოეფიციენტს მინუს S სექციაში მეორე ჯგუფიდან შემავალ კოეფიციენტთა წონითი ან უბრალო საშუალო.

2. (14) და (17) ფორმულების მიხედვით (3) გარდაქმნილი ჯგუფის W_A და W_B გამოთვლა საჭირო არ გახდება, თუ (2) ჯგუფის ტოლობებს შევადგენთ პირველადი შესწორებების მხედველობაში მიღებით. ამ შემთხვევაში W_1', W_2' და W_3' ედრება ნულს, ე. ი. (14) და (17) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}W_A=W_1''\\ W_B=W_2''\end{aligned}\right\}.\qquad (4.8.1.37)$$

3. ზემოაღნიშნული გარდაქმნილი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები გვაძლევს (8) ან (34) სისტემას, რომელნიც ცნობილი წესით ამოიხსნება და შემდეგ (10) ან (35) ფორმულებით გამოითვლება ε_i'' მეორადი შესწორებები.

ამ (8) ან (34) ნორმალური ტოლობების სისტემის კოეფიციენტების გამოთვლა გაადვილდება, თუ (30) ტოლობებს გავამრავლებთ A_i-ზე და ყველა ნამრავლის ჯამს შევადგენთ; ასევე, თუ იმავე ტოლობებს გავამრავლებთ B_i-ზე და ყოველ ნამრავლს შევაჯამებთ:

$$[AA]=]A\alpha];\quad [AB]=[A\beta];\quad [BB]=[B\beta]; \qquad (4.8.1.38)$$

ე. ი. (8) ნორმალური განტოლებების სისტემის კოეფიციენტების შესადგენად ერთ-ერთ ნამრავლად შეიძლება მივიღოთ გარდაუქმნელი კოეფიციენტი (2) ჯგუფიდან. ამის გამო კი სამუშაო მცირდება, რადგანაც გარდაუქმნელი კოეფიციენტები უფრო ნაკლები რაოდენობით გვხვდება, ვიდრე გარდაქმნილი.

III. მოქმედებათა თანამიმდევრობა

1. პირობით ტოლობათა ერთობლიობას გავყოფთ ორ ჯგუფად ისე, რომ (1) ჯგუფში შევიდეს ურთიერთდაუკავშირებელი ტოლობები, რომელთა უცნობების კოეფიციენტები იქნება +1 ტოლი;

2. (25) ან (32) ტოლობით განისაზღვრება ε'_i პირველადი შესწორებები (იხ. (4. 8. 2. 1), (4. 8. 2. 4) და (4. 8. 2. 7) სქემის პირველადი შესწორებების სვეტი).

3. შედგება (2) ჯგუფის ტოლობები ε'_i პირველადი შესწორებების სათანადო კუთხეებში შეტანის შემდეგ, რითაც დაცული იქნება (37) ტოლობა. ე. ი. შესწორებული კუთხეებით განისაზღვრება ეკვივალენტური ტოლობების შეუკვრელობები (იხ. (4. 8. 2. 1′), (4. 8. 2. 1″), (4. 8. 2. 4) და (4. 8. 2. 7) სქემები).

4. ვაწარმოებთ (2) ჯგუფის კოეფიციენტების (3) ჯგუფის, ანუ ეკვივალენტურ ტოლობათა კოეფიციენტებად გარდაქმნას (29), (30), (31), (33) და (36) ფორმულების გამოყენებით (იხ. (4. 8. 2. 2), (4. 8. 2. 5) და (4. 8. 2. 8) სქემები).

5. (38) და (37) ტოლობების გამოყენებით ვადგენთ (8) სისტემის მსგავს სისტემას და ვანსაზღვრავთ კორელატებს სათანადო სქემით (იხ. 4. 8. 2. 3), (4. 8. 2. 6) სქემები და (4. 8. 2. 8) სქემის ქვემო ნაწილი.

6. ცნობილი K_A, K_B... კორელატებისა და (13) ჯგუფის გარდაქმნილი კოეფიციენტების გამოყენებით (10) ან (35) ფორმულით გამოვითვლით ε''_i მეორად შესწორებებს (იხ. (4. 8. 2. 3) სქემის A, B და ε'' სვეტი, (4. 8. 2. 5) სქემის A, B, C, D, E, F, და ε'' სვეტი; (4. 8. 2. 8) სქემის K_1 მნიშვნელობის და A სვეტით შედგენილი ε'' სვეტი).

7. (11) ფორმულით გამოვთვლით ε_i სრულ შესწორებას, რითაც მივიღებთ გაწონასწორებულ კუთხეებს. საბოლოო კონტროლი იგივეა, რაც ერთბაშად გაწონასწორების დროს.

4. 8. 2. ორ ჯგუფად გაწონასწორების დროს განაზომების, მათი გაწონასწორებული მნიშვნელობებისა და წონითი ფუნქციების სიზუსტის შეფასება

(4. 4. 4) პარაგრაფში გამოყენებული წესის ანალოგიური მსჯელობით, მხოლოდ დეტერმინანტთა თეორიის გამოყენების გარეშე, გამოვიყვანოთ $\varepsilon_i=\varepsilon'+\varepsilon''$ ტოლობის შესაბამის განაზომთა და გაწონასწორებულ სიდიდეთა და მათი ფუნქციების (წონითი ფუნქციების) შესაბამისი ფორმულები. ვიმსჯელოთ ამ პარაგრაფში განხილული ხუთი პირობითი ტოლობის შესახებ (I ჯგუფში სამი ტოლობაა). მიღებული შედეგი შეიძლება გავრცელდეს ნებისმიერი რაოდენობის ტოლობებზე.

A. ტოლზუსტი განაზომებისათვის ($P=1$)

a. გაწონასწორებამდე ყოველი ცალკეული (ნებისმიერი) განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

(4. 4. 9. 6) ფორმულის $[\varepsilon\varepsilon]$ წევრის განსახილველ შემთხვევაში მიღებისათვის ვისარგებლოთ (11) დამოკიდებულებით ($P=1$)

$$\varepsilon_i=\varepsilon'_i+\varepsilon''_i,$$

კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ:

$$\varepsilon_i^2=\varepsilon_i'^2+\varepsilon_i''^2+2\varepsilon'_i\,\varepsilon''_i,$$

კვადრატების ჯამი კი იქნება:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[\varepsilon'\varepsilon']+[\varepsilon''\varepsilon'']+2[\varepsilon'\varepsilon''].$$

განვსაზღვროთ უკანასკნელი წევრის ოდენობა. ამისათვის გამოვიყენოთ (9), (10) ტოლობები და დავწეროთ ნამრავლი $\varepsilon_i' \varepsilon_i''$.

$$\varepsilon_i'\varepsilon_i''=(a_iK_1+b_iK_2+c_iK_3)\cdot(A_iK_A+B_iK_B)=a_iA_iK_1K_A+$$
$$+a_iB_iK_1K_B+b_iA_iK_2K_A+b_iB_iK_2K_3+c_iA_iK_3K_A+c_iB_iK_3K_B.$$

შევადგინოთ ნამრავლის ყველა მნიშვნელობის ჯამი:

$$[\varepsilon'\varepsilon'']=[aA]K_1K_A+[aB]K_1K_B+[bA]K_2K_A+[bB]K_2K_B+$$
$$+[cA]K_3K_A+[cB]K_3K_B.$$

ვინაიდან კორელატთა კოეფიციენტები (6) ტოლობების მიხედვით ნულია, მივიღებთ:

$$[\varepsilon'\varepsilon'']=0$$

მაშასადამე,

$$[\varepsilon\varepsilon]=[\varepsilon'\varepsilon']+[\varepsilon''\varepsilon'']. \tag{4.8.2.1}$$

ე. ი. (4. 4. 9. 6) ფორმულის შესაბამისად, მივიღებთ:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon'\varepsilon']+[\varepsilon''\varepsilon'']}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}}. \tag{4.8.2.2}$$

ყოველთვის ჯობს განისაზღვროს $\varepsilon_i=\varepsilon_i'+\varepsilon_i''$ სიდიდეები და (2) ფორმულის ნაცვლად გამოვიყენოთ (4. 4. 9. 6) ფორმულა.

b. ნებისმიერი გაწონასწორებული (გაწონასწორების შემდეგ) განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა

(4. 4. 9. 5) ფორმულის შესაბამისად ეს შეცდომა გამოითვლება ფორმულით:

$$M_L=m\sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}}=m\sqrt{\frac{N-r}{N}}, \tag{4.8.2.3}$$

სადაც,

N განაზომ კუთხეთა რაოდენობაა,

r პირობით ტოლობათა რაოდენობაა (ჭარბ განაზომთა რაოდენობა).

c. განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობების ზოგადი სახის ფუნქციის (წონითი ფუნქციის) შებრუნებული წონა, დისპერსია და საშუალო კვადრატული შეცდომა

ვთქვათ, მოცემულია გაწონასწორებულ L_1, $L_2, \ldots, L_n$, მნიშვნელობათა ზოგადი სახის ფუნქცია

$$\Phi_u=\Phi(L_1\ L_2,\ldots,\ L_n). \tag{4.8.2.4}$$

ამ ფუნქციის არგუმენტები არ არის ურთიერთდამოუკიდებელნი, რადგანაც მათი მნიშვნელობები მიღებულია ერთად გაწონასწორების შედეგად. აგრეთვე ეს არგუმენტები წარმოადგენს ფუნქციებს უშუალო $l_1, l_2, \ldots, l_n$ განაზომების და მათი $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ უალბათესი შესწორებების, რაც გამოსახულია

$$L_i=l_i+\varepsilon_i, \tag{4.8.2.5}$$

დამოკიდებულებით.

იმისათვის, რომ (4) ფუნქციის მიმართ გამოვიყენოთ განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 6. 1. 17) ფორმულა, საჭიროა მისი გამოსახვა ცხადი სახით და შემდეგ მას მივცეთ წრფივი სახე, ანუ დავშალოთ ტეილორის ფორმულით; მხოლოდ შევიზღუდოთ დაშლის პირველხარისხიანი წევრებით. მაშასადამე, დავწერთ:

$$\Phi_u=\Phi(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=\Phi_0+\varphi_1\varepsilon_1+\varphi_2\varepsilon_2+\cdots+\varphi_n\varepsilon_n, \tag{4.8.2.6}$$

სადაც,

და

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0&=\Phi(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)\\ \varphi_i&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.2.7}$$

(4. 8. 1. 11) დამოკიდებულების გამოყენებით, დავწერთ:

$$\begin{aligned}\Phi_u&=\Phi_0+\varphi_1(\varepsilon_1'+\varepsilon_1'')+\varphi_2(\varepsilon_2'+\varepsilon_2'')+\cdots,\ \varphi_n\,(\varepsilon_n'+\varepsilon_n'')=\\ &=\Phi_0+\varphi_1\varepsilon_1'+\varphi_2\varepsilon_2'+\cdots,\ \varphi_n\varepsilon_n'+\varphi_1\varepsilon_1''+\varphi_2\varepsilon_2''+\cdots,\ \varphi_n\varepsilon_n''.\end{aligned} \tag{4.8.2.8}$$

(4. 8. 1. 9) და (4. 8. 1. 10) ტოლობების შესაბამისად ε_i' და ε_i'' პირველადი და მეორადი შესწორებების მნიშვნელობების შეტანით, გამრავლების და შემოკლებული ჩაწერის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\Phi_u=\Phi_0+[a\varphi]K_1+[b\varphi]K_2+[c\varphi]K_3+[A\varphi]K_A+[B\varphi]K_B. \tag{4.8.2.9}$$

მიღებული ტოლობიდან გამოვრიცხოთ კორელატები, რადგანაც ისინი ურთიერთდამოუკიდებელი არ არიან.

ამ მიზნით (4. 8. 1. 7) სისტემა შესაბამისად გადავამრავლოთ π_i განუზღვრელ მამრავლზე; (4. 8. 1. 8) სისტემა კი გავამრავლოთ R_i განუზღვრელ მამრავლზე და მიღებული ორივე სისტემა მივუმატოთ (2) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\Phi_u&=\Phi_0+[a\varphi]K_1+[b\varphi]K_2+[c\varphi]K_3+[A\varphi]K_A+[B\varphi]K_B+\\ &+([aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3)\pi_1+([ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3)\pi_2+\\ &+([ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3)\pi_3+([AA]K_A+[AB]K_B)R_1+\\ &+([AB]K_A+[BB]K_B)R_2+W_1'\pi_1+W_2'\pi_2+W_3'\pi_3+W_AR_1+W_BR_2.\end{aligned} \tag{4.8.2.10}$$

გამოვიტანოთ კორელატები ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\Phi_u&=\Phi_0+([aa]\pi_1+[ab]\pi_2+[ac]\pi_3+[a\varphi])K_1+\\ &+([ab]\pi_1+[bb]\pi_2+[bc]\pi_3+[b\varphi])K_2+([ac]\pi_1+[bc]\pi_2+[cc]\pi_3+[c\varphi])K_3+\\ &+([AA]R_1+[AB]R_2+[A\varphi]K_A+([AB]R_1+[BB]R_2+[B\varphi])K_B+\\ &+W_1'\pi_1+W_2'\pi_2+W_3'\pi_3+W_AR_1+W_BR_2.\end{aligned} \tag{4.8.2.11}$$

იმის გამო, რომ π_i, R_i განუზღვრელი მამრავლებია, შეგვიძლია მათი ოდენობები იმგვარად შევირჩიოთ, რომ (11) ტოლობის ფრჩხილებში მოქცეული ყოველი ჯამი მივიღოთ ნულად;

ე. ი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\pi_1+[ab]\pi_2+[ac]\pi_3+[a\varphi]=0\\ [ab]\pi_1+[bb]\pi_2+[bc]\pi_3+[b\varphi]=0\\ [ac]\pi_1+[bc]\pi_2+[cc]\pi_2+[c\varphi]=0\end{aligned}\right\}, \qquad (4.8.2.12)$$

$$\left.\begin{aligned}[AA]R_1+[AB]R_2+[A\varphi]=0\\ [AB]R_1+[BB]R_2+[B\varphi]=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.2.13)$$

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\Phi_u=\Phi_0+W_1^l\pi_1+W_2^l\pi_2+W_3^l\pi_3+W_AR_1+W_B\cdot R_2. \qquad (4.8.2.14)$$

მიღებული ტოლობის, როგორც ურთიერთდამოუკიდებელ არგუმენტთა წრფივი ფუნქციის მიმართ გამოვიყენებთ განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 6. 1. 17) ფორმულას

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}}=\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_n}\right)^2, \qquad (4.8.2.15)$$

სადაც (7) და (4. 3. 1. 5) აღნიშვნების გამოყენებით:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_u}{\partial l_1}&=\varphi_1+a_1\pi_1+b_1\pi_2+c_1\pi_3+A_1R_1+B_1R_2\\ \frac{\partial\Phi_u}{\partial l_2}&=\varphi_2+a_2\pi_1+b_2\pi_2+c_2\pi_3+A_2R_1+B_2R_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\Phi_u}{\partial l_n}&=\varphi_n+a_n\pi_1+b_n\pi_2+c_n\pi_3+A_nR_1+B_nR_2\end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.2.16)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=\varphi_1+a_1\pi_1+b_1\pi_2+c_1\pi_3\\ \Phi_2&=\varphi_2+a_2\pi_1+b_2\pi_2+c_2\pi_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \Phi_n&=\varphi_n+a_n\pi_1+b_n\pi_2+c_n\pi_3\end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.2.17)$$

როგორც ვხედავთ, (17) დამოკიდებულებები ანალოგიურია (4. 8. 1. 13) და (4. 8. 1. 16) ტოლობებისა, (12) კი ანალოგიურია (4. 8. 1. 18) სისტემისა. ზუსტად ისე, როგორც შევასრულეთ (4. 8. 1. 13) და (4. 8. 1. 16) ტოლობიდან (4. 8. 1. 29) ტოლობაზე გადასვლა, (17) ტოლობიდან გადავალთ (4. 8. 1. 33) მსგავს შემდეგი სახის ტოლობაზე

$$\Phi_{is}=\varphi_{is}-\frac{[\varphi]_S}{n_S}. \qquad (4.8.2.18)$$

მაშასადამე, წონითი ფუნქციის Φ_i კოეფიციენტი იმავე გზით გარდაიქმნება, რა გზითაც II ჯგუფის კოეფიციენტები.

(17) აღნიშვნების (16) ში შეტანით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_u}{\partial l_1} &= \Phi_1 + A_1R_1 + B_1R_2 \\ \frac{\partial\Phi_u}{\partial l_2} &= \Phi_2 + A_2R_1 + B_2R_2 \\ \cdots&\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\Phi_u}{\partial l_n} &= \Phi_n + A_nR_1 + B_nR_2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.2.19}$$

(19) დამოკიდებულებების ყოველი ტოლობის კვადრატში აყვანით და შეჯამებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_{\Phi u}} = [\Phi\Phi] + ([AA]R_1 + [AB]R_2 + [A\Phi])R_1 +$$
$$([AB]R_1 + [BB]R_2 + [B\Phi])R_2 + [A\Phi]R_1 + [B\Phi]R_2. \tag{4.8.2.20}$$

(17) ტოლობები თანამიმდევრობით გადავამრავლოთ A_i და B_i კოეფიციენტებზე, შესაბამისად შევკრიბოთ და ამ ჯამის მიმართ გამოვიყენოთ (4. 8. 1. 8) დამოკიდებულება მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} [A\Phi] &= [A\varphi] \\ [B\Phi] &= [B\varphi] \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.2.21}$$

(21) იგივე (4. 8. 1. 38) ტოლობებია; ამით კი ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების შედგენა ადვილდება.

ასევე შეიძლება დავწეროთ

$$[\Phi\Phi] = [\Phi\varphi]. \tag{4.8.2.22}$$

მართლაც, თუ (17) ტოლობებს შესაბამისად გადავამრავლებთ Φ_i-ზე და შევკრიბავთ მივიღებთ:

$$[\Phi\Phi] = [\Phi\varphi] + [a\varphi]\pi_1 + [b\Phi]\pi_2 + [c\Phi]\pi_3. \tag{4.8.2.23}$$

ხოლო თუ (17) ტოლობებს შესაბამისად გადავამრავლებთ a_i-ზე და შევკრებთ დაიწერება:

$$[a\Phi] = [a\varphi] + [aa]\pi_1 + [ab]\pi_2 + [ac]\pi_3. \tag{4.8.2.24}$$

(12) სისტემის ტოლობების თანახმად კი

$$[a\Phi] = 0$$

ანალოგიურად დავწერთ, რომ

$$[b\Phi] = 0 \text{ და } [c\Phi] = 0.$$

მაშასადამე, ნაცვლად (23) ტოლობისა დაიწერება:

$$[\Phi\Phi] = [\Phi\varphi].$$

(20) ტოლობის ფრჩხილებს შორის მოქცეული ჯამები (13) სისტემის თანახმად ნულის ტოლია, ე. ი. (20) საბოლოოდ დაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}} = [\Phi\Phi] + [A\Phi]R_1 + [b\Phi]R_2 = [\Phi\varphi] + [A\varphi]R_1 + [B\varphi]R_2. \qquad (4.8.2.25)$$

(13) სისტემიდან განსაზღვრული

$$R_1 = -\frac{[A\varphi]}{[AA]} - \frac{[AB]}{[AA]}R_2 \quad და \quad R_2 = -\frac{[B\varphi \cdot 1]}{[BB \cdot 1]}.$$

სიდიდეების (25) ჩასმით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_{\Phi_u}} = [\Phi\Phi] - \frac{[A\Phi]^2}{[AA]} - \frac{[B\Phi \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} = [\Phi\varphi] - \frac{[A\varphi]^2}{[AA]} - \frac{[B\varphi \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]}. \qquad (4.8.2.26)$$

ამ ტოლობით გამოითვლება შებრუნებული წონის სიდიდე (13) სისტემის სათანადო სქემით გადაწყვეტის დროს ისევე, როგორც ეს ხდებოდა პირობით ტოლობათა ერთად გაწონასწორების შემთხვევისას. (25) ფორმულის საკონტროლოდ იყენებენ

$$\frac{1}{P_{\Phi}} = [\Phi\Sigma] - \frac{[A\Phi][A\Sigma]}{[AA]} - \frac{[B\Phi \cdot 1][B\Sigma \cdot 1]}{[BB \cdot 1]} \qquad (4.8.2.27)$$

ტოლობას. Σ ჯამური სვეტი სქემაშია მოცემული. (4. 4. 10. 2) ფორმულის მიხედვით კი $M^2_{\Phi_u}$ დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$M^2_{\Phi_u} = m^2 \frac{1}{P_{\Phi_u}}. \qquad (4.8.2.28)$$

ხოლო, საშუალო კვადრატული შეცდომა ფორმულით

$$M_{\Phi_u} = m\sqrt{\frac{1}{P_{\Phi_u}}}. \qquad (4.8.2.29)$$

აქაც ისევე, როგორც ერთად გაწონასწორების შემთხვევაში, შებრუნებული წონის განსაზღვრისათვის საჭირო ფორმულის წილადი წევრების რაოდენობა იმდენია, რამდენი გარდაქმნილი (ანუ მეორე ჯგუფში მოხვედრილი) განტოლებაც გვაქვს.

B. არატოლზუსტი გაზომვებისათვის

ამ შემთხვევაში გამოსაყენებელი ფორმულების მიღების წესი სრულიად ანალოგიურია ზემოთ შესრულებული ტოლზუსტი განაზომებისათვის საჭირო შესაფასებელი ფორმულებისა. მსჯელობის დროს არ უნდა გამოგვრჩეს მხედველობიდან P_i წონა. ამ ფორმულებს დავწერთ ანალოგიის პრინციპის გამოყენებით.

a. გაწონასწორებამდე ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების მონაცემებით

(4. 4. 7. 12) ფორმულის შესაბამისად, (2) ანალოგიით იქნება:

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[Pe'e']+[Pe''e'']}{\text{ჭარბი განაზომის რაოდენობა}}} = \pm \sqrt{\frac{[Pe'e']+[Pe''e'']}{r}}. \qquad (4.8.2.30)$$

b. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გაწონასწორების შემდეგ

(4. 4. 6. 3) ფორმულის შესაბამისად, (3) ფორმულის ანალოგიით იქნება:

$$\eta_u = \eta \sqrt{\frac{\text{აუცილებელი განაზომის რაოდენობა}}{\text{ყველა განაზომის რაოდენობა}}} = \eta \sqrt{\frac{N-r}{N}}. \qquad (4.8.2.31)$$

c. განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობების ზოგადი სახის ფუნქციის (წონითი ფუნქციის) შებრუნებული წონა, დისპერსია და საშუალო კვადრატული შეცდომა

(4. 4. 4. 28) ფორმულის შესაბამისად (26), (27), (28) და (29) ანალოგიით დაიწერება:

$$\frac{1}{P_{\Phi u}} = \left[\frac{\Phi\Phi}{P}\right] - \frac{\left[\frac{A\Phi}{P}\right]^2}{\left[\frac{AA}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{B\Phi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{AA}{P}\cdot 1\right]} =$$

$$= \left[\frac{\Phi\varphi}{P}\right] - \frac{\left[\frac{A\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{AA}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{B\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{AA}{P}\cdot 1\right]}. \qquad (4.8.2.32)$$

საკონტროლო

$$\frac{1}{P_{\Phi u}} = \left[\frac{\Phi\Sigma}{P}\right] - \frac{\left[\frac{A\Phi}{P}\right]\left[\frac{A\Sigma}{P}\right]}{\left[\frac{AA}{P}\right]} \cdot \frac{\left[\frac{B\Phi}{P}\cdot 1\right]\left[\frac{B\Sigma}{P}\cdot 1\right]}{\left[\frac{BB}{P}\cdot 1\right]}. \qquad (4.8.2.33)$$

$$M^2_{\Phi u} = \eta^2 \frac{1}{P_{\Phi u}}. \qquad (4.8.2.34)$$

$$M_{\Phi u} = \eta \sqrt{\frac{1}{P_{\Phi u}}}. \qquad (4.8.2.35)$$

სავარჯიშო 4. 8. 2. 1. (4. 7. 1. 2), (4. 7. 1. 3), (4. 7. 1. 4), (4. 7. 1. 5) (4. 7. 1. 6) სავარჯიშოები შესრულდეს (1) მაგალითის მსგავსად.

C. მაგალითები და სავარჯიშოები

მაგალითი 4. 8. 2. 1. ორ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით განისაზღვროს (4. 7. 1. 3) მაგალითის e_i შესწორებები და წონითი ფუნქციების შებრუნებული წონები და მიღებული შედეგები შედარდეს (4. 7. 1. 3) მაგალითში განსაზღვრულ სიდიდეებთან.

ამოხსნა

1. სულ გვაქვს ოთხი პირობითი განტოლება (იხ. გვ. 190—191), რომელთაც ვყოფთ ორ ჯგუფად შემდეგნაირად:

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+(4)+W_1'=0, \text{ სადაც } a_1=a_2=a_3=a_4=1;\ a_5=a_6=a_7=a_8=0,$$
$$(5)+(6)+(7)+(8)+W_2'=0, \quad \text{"} \quad b_5=b_6=b_7=b_8=1;\ b_1=b_2=b_3=b_4=0.$$

II ჯგუფი

$$(1)+(2)+(7)+(8)+W_1''=0,$$
$$10^7 \lg \frac{\sin 4\cdot\sin[6+7]\cdot\sin 2}{\sin[2+3]\cdot\sin 5\cdot\sin 7}=W_2''.$$

წონითი ფუნქციებია: (იხ. გვ. 197).

$$a.\ \Phi_b=\lg\frac{a\cdot\sin 4\cdot\sin[1+8]}{\sin[2+3]\cdot\sin 7},$$

ანუ წრფივი სახით

$$\Delta\Phi_b=\varphi_1(1)+\varphi_2(2)+\varphi_3(3)+\varphi_4(4)+\varphi_7(7)+\varphi_8(8)+[\varphi\varphi],$$

სადაც შესწორებული კუთხეების მიხედვით (1″) სქემიდან:

$\varphi_1=\Delta_{1+8}=+0{,}6,\quad \varphi_2=-\Delta_{2+3}=+2{,}3,\quad \varphi_3=-\Delta_{2+3}=+2{,}3,$

$\varphi_4=\Delta_4=+28{,}2,\quad \varphi_7=-\Delta_7=-13{,}4,\quad \varphi_8=\Delta_{1+8}=+0{,}6,$

$\varphi_5=\varphi_6=0.$ განზომილებები იქნება $\left(\frac{\lg_7}{\text{სეკ.}}\right)$.

$b.\ \Delta.\ \Phi_{(CD)}=(3)+(4)+[\varphi'\varphi'],$

სადაც,

$$\varphi_3'=\varphi_4'=1,\quad \varphi_1'=\varphi_2'=\varphi_5'=\varphi_6'=\varphi_7'=\varphi_8'=0.$$

განზომილება ნულოვანია.

2. I ჯგუფში შემავალ პირობით განტოლებათა განაზომი ელემენტების ε' პირველადი შესწორებები (4. 8. 1. 32) ფორმულით გამოთვლილია (1) სქემის 1, 2, 3 სვეტებში.

3. შესწორებული კუთხეებით $W_A=W_1''$ და $W_B=W_2''$ გარდაქმნილ ტოლობათა შეუკვრელობების განსაზღვრა (4.8.1.37) ფორმულის შესაბამისად (1′) და (1″) სქემაშია. ამ სქემის მიხედვით $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_7=\alpha_8=1;\ \alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0.$ $\beta_2=31{,}1-(-2{,}3)=+33{,}4;\quad \beta_3=-(-2{,}3)=+2{,}3;\quad \beta_4=+28{,}2;\quad \beta_5=-55{,}5;$ $\beta_6=-11{,}1;\ \beta_7=-11{,}1-13{,}4=-24{,}5;\ \beta_1=\beta_8=0.$ განზომილებებია $\left(\frac{\lg_7}{\text{სეკ.}}\right)$.

4. გარდაქმნილი სახის ტოლობათა და წონითი ფუნქციების განსაზღვრა (4. 8. 1. 33), (18) და (4. 8. 1. 36) ფორმულის გამოყენებით (2) სქემაშია.

5. K_A, K_B და $\dfrac{1}{P_b}$, $\dfrac{1}{P_{(CD)}}$ სიდიდეების განსაზღვრა (3) სქემაშია.

6. ცნობილი K_A, K_B კორელატები მიეწერება (2) სქემის A, B სვეტებს და (4. 8. 1. 10) ფორმულით განისაზღვრება ε_i'' შესწორებები. აქვეა ε_i შესწორებების (4. 8. 1. 11) ფორმულით განსაზღვრა. საჭიროა ეს სიდიდეები შევადაროთ (4. 7. 1. 3) მაგალითის შედეგებს. როგორც ვხედავთ, მოთხოვნილი პირობა შესრულებულია.

სქემა 4.8.2.1

კუთხეების №№	განაზომები	პირველადი შესწორებები ε'
1	46° 53° 42″,15	—0″,85
2	34 04 46 ,18	—0 ,84
3	62 17 60 ,78	—0 ,85
4	36 43 34 ,27	—0 ,84
	180 00 3 ,38 $W_1^{\mathrm{I}}=+3''{,}38$	—3″ 38
5	20 46 12 ,30	—0 ,34
6	60 12 09 ,25	—0 ,35
7	57 24 33 ,44	—0 ,34
8	41 37 06 ,38	—0 ,34
	180 00 1 ,37 $W_2^{\mathrm{I}}=+1''\ 37$	—1″ 37

სქემა 4.8.2.1′

კუთხეების №№	შესწორებული კუთხეები
1	46° 53′ 41″,30
2	34 04 45 ,34
7	57 24 33 ,10
8	41 37 06 ,04
	180 00 5, 78
	$W_A=+5''\ {,}78$

სქემა 4.8.2.1″

კუთხეების №№	საკლები: შესწორებული კუთხეები	$\lg \sin \alpha'_i$	Δ	კუთხეების №№	მაკლები: შესწორებული კუთხეები	$\lg \sin \alpha'_i$	Δ
2	34°04′45″,34	9.7484510	+31,1	2+3	96°22′45″,27	9.9973026	— 2,3
4	36 43 33 ,43	9.7766927	+28,2	5	20 46 11 ,96	9.5497599	+55,5
6+7	117 36 42 ,00	9.9474873	—11,1	7	57 24 33 ,10	9.9255900	+13,4
		9.4726310				9.4726525	

$W_B = -215\ (\lg_7)$

სქემა 4.8.2.2

სქ მა	კუთხ. №№	a	β	φ	φ'	A	B	Φ	Σ	Φ'	Σ'	ε''	$\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon$ (4.8.1.11) ფორმულით	ε (4.7.1.3 მაგალითის ამოხსნით)
1	1	1	0	+0,06	0	+0,50	−1,5975	−0,7750	−1,8725	−0,5	−1,5975	−4,00	−4',85	−4'',85
	2	1	+3,34	+0,23	0	+0,50	+1,7425	−0,6050	+1,6375	−0,5	+1,7425	−0,05	−0 ,89	−0 ,89
	3	0	+0,23	+0,23	+1	−0,50	−1,3675	−0,6050	−2,4725	+0,5	−1,3675	+0,50	−0 ,35	−0 ,35
	4	0	+2,82	+2,82	+1	−0,50	+1,2225	+1,9850	+2,7075	+0,5	+1,2225	+3,55	+2 ,71	+2 ,71
11	5	0	−5,55	0	0	−0,50	−3,2725	+0,3200	−3,4525	0	−3,7725	−1,76	−2, 10	−2 ,10
	6	0	−1,11	0	0	−0,50	+1,1675	+0,3200	+0,9875	0	+0,6675	+3,49	+3 ,14	+3 ,15
	7	1	−2,45	−1,34	0	+0,50	−0,1725	−1,0200	−0,6925	0	+0,3275	−2,31	−2 ,65	−2 ,65
	8	1	0	+0,06	0	+0,50	+2,2775	+0,3800	+3,1575	0	+2,7775	+0,58	+0 ,24	+0 ,24
						K_k −4,219	KB +1,181	[ΦΦ] +6,6625	[ΦΣ] +8,4482	[Φ'Φ'] +1,0000	[ΦΣ'] +0,1450	[ε''ε''] 49,80		

A ფურცელი

სქემა 4.8.2.3

№№	აღნიშ-ვნები	A	B	W	S	კონტრ.	Φ	Σ	Φ'	Σ'	$\frac{1}{P}$	მოქმ. თანმ.
1	—	+0,5	— 1,5975	—	— 1,0975	—	— 0,7750	— 1,8725	—0,5	— 1,5975	1	(1)
2	—	+0,5	+ 1,7425	—	+ 2,2425	—	— 0,6050	+ 1,6375	—0,5	+ 1,7425	1	
3	—	—0,5	— 1,3675	—	— 1,8675	—	— 0,6050	— 2,4725	+0,5	— 1,3675	1	
4	—	—0,5	+ 1,2225	—	+ 0,7225	—	+ 1,9850	+ 2,7075	+0,5	+ 1,2225	1	
5	—	—0,5	— 3,2725	—	— 3,7725	—	+ 0,3200	— 3,4525		— 3,7725	1	
6	—	—0,5	+ 1,1675	—	+ 0,6675	—	+ 0,3200	+ 0,9875		+ 0,6675	1	
7	—	+0,5	— 0,1725	—	+ 0,3275	—	— 1,0200	— 0,6925		+ 0,3275	1	
8	—	+0,5	+ 2,2775	—	+ 2,7775	—	+ 0,3800	+ 3,1575		+ 2,7775	1	
W	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	
I	A	+2,0	+ 2,2588	+ 5,7800	+10,0300	+10,0300	—2,0200	+ 2,2300	—1,0000	+ 3,2500	(—0,50000)	(3)
II	$B\cdot 1$		+23,71070	—28,00250	— 4,29180	— 4,29180	+ 6,07815	+29,78885	+0,9800	+24,69070	(—0,04217505)	(5)

B ფურცელი   სქემა 4.8.2.3

№№	აღნიშ-ვნები	$\frac{A}{P}$	$\frac{B}{P}$	W	$\frac{S}{P}$	კონტრ.	$\frac{\Phi}{P}$	$\frac{\Sigma}{P}$	$\frac{\Phi'}{P}$	$\frac{\Sigma'}{P}$	მოქმედებათა თანამიმდევ.
1	—	+0,5	— 1,5975	—	— 1,0975	—	—0,7750	—1,8725	—0,5	—1,5975	
2	—	+0,5	+ 1,7425	—	+ 2,2425	—	—0,6050	+1,6375	—0,5	+1,7425	
3	—	—0,5	— 1,3675	—	— 1,8675	—	—0,6050	—2,4725	+0,5	—1,3675	
4	—	—0,5	+ 1,2225	—	+ 0,7225	—	+1,9850	+2,7075	+0,5	+1,2225	
5	—	—0,5	— 3,2725	—	— 3,7725	—	+0,3200	—3,4525	—	—3,7725	(2)
6	—	—0,5	+ 1,1675	—	+ 0,6675	—	+0,3200	+0,9875	—	+0,6675	
7	—	+0,5	— 0,1725	—	— 0,3275	—	—1,0200	—0,6925	—	+0,3275	
8	—	+0,5	+ 2,2775	—	+ 2,7775	—	+0,3800	+3,1575	—	+2,7775	
W	—	+5,78	—21,50	—	—	—	—	—	—	—	
I	E_1	—1	— 1,125	—2,890	—5,015	—5,015	+1,010	—1,115	+0,500	—1,625	(4)
II	E_2		— 1	+1,18101	+0.18101	+0,1801	—0,25635	—1,25635	—0,04133	—1,04133	(6)
		—2,890									
		—1,329	+1,181	0	—15,72		+6,66	+8,45	+1,00	—0,14	
		—4,219	Kв	—16,70	—28,99		—2,04	+2,25	—0,50	+1,62	(9)
				—33,07	—55,07		—1,56	—7,64	—0,04	—1,02	
		Kᴀ				(7)					
				—49,77	49,78		+3,06	+3,06	+0,46	+0,46	
		(8)		—[WK]	[WK]		$\frac{1}{P_ბ}\left(\frac{\lg_7}{\text{სქ.}}\right)^2$	$\frac{1}{P_ბ}\left(\frac{\lg_7}{\text{სქ.}}\right)$	$\frac{1}{P(CD)}(0)$	$\frac{1}{P(CD)}(0)$	
				[8'' 8'']							

მაგალითი 4. 8. 2. 2. ორჯგუფად გაწონასწორების ხერხით განისაზღვროს (4. 7. 1. 6) მაგალითის მხოლოდ ჲშესწორებები და წონითი ფუნქციების შებრუნებული წონები. შედეგთა თანმთხვევა დაადასტურებს ორჯგუფად გაწონასწორების ხერხის გამოყენების სისწორეს.

ა მ ო ხ ს ნ ა

სულ გვაქვს ათი პირობითი განტოლება და ორი წონითი ფუნქცია

I ჯგუფი

1. $(1)+(2)+(3)+W_1'=0$, სადაც $a_1=a_2=a_3=1$, დანარჩენი 15 კოეფ. ნულია
2. $(4)+(5)+(6)+W_2'=0$, „ $b_4=b_5+b_6=1$, „ „ „
3. $(9)+(10)+(11)+W_3'=0$. „ $c_9=c_{10}=c_{11}=1$, „ „ „
4. $(12)+(13)+(14)+W_4'=0$, „ $d_{12}=d_{13}=d_{15}=1$, „ „ „

II ჯგუფი

1. $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(7)+(8)+(10)+(11)+(12)-(14)+(15)+W=0$,
სადაც $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_7=\alpha_8=\alpha_{10}=\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{15}=1$; $\alpha_{14}=-1$,

$\alpha_6=\alpha_9=\alpha_{13}=\alpha_{16}=\alpha_{17}=\alpha_{18}=0$.

2. $(3)+(5)+(7)+W_2''=0$, სადაც, $\beta_3=\beta_5=\beta_2=1$; დანარჩენი 15 კოეფიციენტი ნულია.

3. $10^7\lg\dfrac{\sin 4\cdot\sin[13+14+18]\cdot\sin 10\cdot\sin 7}{\sin 5\cdot\sin 18\cdot\sin 11\cdot\sin 8}=W_3''$, კოეფიციენტების სიდიდეები (4) სქემაშია.

4. $10^7\lg\dfrac{\sin 18\cdot\sin[14+17+18-15]\cdot\sin 13}{\sin[13+14]\cdot\sin 17\cdot\sin 15}=W_4''$, კოეფიციენტების სიდიდეები (4) სქემაშია.

5. $10^7\lg\dfrac{\sin 4\cdot\sin[14+17+18]\cdot\sin[6+14+16]}{\sin 5\cdot\sin[17+18]\cdot\sin 16}=W_5''$, კოეფიციენტების სიდიდეები (4) სქემაშია.

6. $10^7\lg\dfrac{\bar a\cdot\sin 8\cdot\sin 6\cdot\sin 2}{\bar b\cdot\sin[7+8]\cdot\sin 4\cdot\sin 1}=W_6''$. კოეფიციენტების სიდიდეები (4) სქემაშია.

$$1\quad \Phi_{\overline{AD}}=\bar a\,\frac{\sin 7\cdot\sin 9}{\sin[7+8]\cdot\sin 11},\ \Delta_{\overline{AD}}=(\Delta_7-\Delta_{7+8})(7)-\Delta_{7+8}(8)+$$

$$+\Delta_9(9)-\Delta_{11}(11)+[\varphi\varphi]$$

სადაც, (4) სქემის მიხედვით

$\varphi_7=(\Delta_7-\Delta_{7+8})=1{,}58$; $\varphi_8=\Delta_{7+8}=-0{,}59$; $\varphi_9=\Delta_9+0{,}23$; $\varphi_{11}=-\Delta_{11}=-2{,}44$.

დანარჩენი თოთხმეტი კოეფიციენტი ნულია $\left(\text{ყველა კოეფიციენტი } \left(\dfrac{\lg_6}{\text{სეკ}}\right)^2\right.$ განზომილებისაა$\left.\right)$.

2. $\Phi_{(AD)}=(AB)+8+10, \qquad \Delta_{(AD)}=(8)+(10)+[\varphi'\varphi']$,

სადაც $\varphi'_8=\varphi'_{10}=1$ (ნულოვანი განზომილებისაა), დანარჩენი თექვსმეტი კოეფიციენტი ნულია.

1. W_i' თავისუფალი წევრების გამოთვლა I ჯგუფის ტოლობებისათვის მოყვანილია (4) სქემის მეორე სვეტში.

2. I ჯგუფში შემავალი ტოლობების მიმართ გამოყენებულია (4. 8. 1. 32) ფორმულა, რომლის მიხედვით ყოველ ტოლობაში W_i' შეუკვრელობები თანაბრადაა განაწილებული (იხილეთ (4) სქემის მესამე სვეტი).

3. II ჯგუფის ტოლობებს ვადგენთ პირველადი შესწორებების მხედველობაში მიღებით, ანუ შესწორებული კუთხეების საშუალებით. ამ შესწორებული კუთხეებით ვსაზღვრავთ სათანადო W_i'' შეუკვრელობებს (იხილეთ (4) სქემის მე-4, მე-5 და დანარჩენი სვეტები).

4. II ჯგუფის გარდაქმნილი ტოლობებისა და წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები მოყვანილია (5) სქემაში. გამოთვლების გამარტივების მიზნით Δ და W_i'' სიდიდეების ოდენობები (4) სქემიდან გადმოწერილია 10-ჯერ შემცირებული. ამავე (5) სქემაში გამოთვლილია ეკვივალენტური ჯგუფის გარდაქმნილი A, B, C, D, E, F კოეფიციენტები და წონითი ფუნქციის გარდაქმნილი Φ და Φ' კოეფიციენტები.

გარდაქმნილი კოეფიციენტების გამოთვლა ხდება (4. 8. 1. 33) და (18) ფორმულების შესაბამისად. მაგალითად,

$$A_{11}=1-\frac{3}{3}=0, \qquad A_{21}=1-\frac{3}{3}=0, \qquad A_{31}=1-\frac{3}{3}=0.$$

$$A_{42}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33, \quad A_{52}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33, \quad A_{62}=0-\frac{2}{3}=-0{,}66.$$

$$A_{93}=0-\frac{2}{3}=-0{,}66, \quad A_{103}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33, \quad A_{113}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33.$$

$$A_{124}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33, \quad A_{134}=0-\frac{2}{3}=-0{,}66, \quad A_{164}=1-\frac{2}{3}=+0{,}33.$$

ხოლო, $A_{124}+A_{134}+A_{154}=0$ (კონტროლი ყოველ სექციაში ანალოგიურია). ასევე,

$$\Phi_{93}=0{,}23-\frac{(-2{,}44+0{,}23)}{3}=0{,}97, \qquad \Phi_{103}=0-\frac{(-2{,}44+0{,}23)}{3}=0{,}73.$$

$$\Phi_{113}=-2{,}44-\frac{(-2{,}44+0{,}23)}{3}=-1{,}70,$$ ხოლო $\Phi_{93}+\Phi_{103}+\Phi_{113}=0$. (კონტროლი) იგივე გზით გამოთვლილია Φ'_{is} კოეფიციენტები.

როგორც ვხედავთ, მეორე ჯგუფში შემავალი 7, 8, 14, 16, 17 და 18 კუთხე I-ელ ჯგუფში არ შედის, ამიტომ აქ გამოვიყენებთ (4. 8. 1. 30) ფორმულას და იმავე (4) სქემის ქვემოთ ამოვწერთ, შესწორებული კუთხეების მიხედვით მათ მნიშვნელობებს, მაგალითად:

$$C_7=\gamma_7=+2{,}17,\qquad C_8=\gamma_8=-3{,}63,\qquad C_{14}=\gamma_{14}=-6{,}28;$$
$$C_{16}=C_{17}=\gamma_{16}=\gamma_{17}=0,\qquad C_{18}=\gamma_{18}=-8{,}81.$$
ასევე
$$\Phi_7=\varphi_7=+1{,}58,\quad \Phi_8=\varphi_8=-0{,}59,\quad \Phi_{14}=\Phi_{16}=\Phi_{17}=\Phi_{18}=0,\quad \Phi'=\varphi'=1.$$
დანარჩენი კი ნულია. Σ და Σ' სვეტი საჭიროა (27) ფორმულისათვის, რომლითაც სრულდება კონტროლი (26) ფორმულით წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის გამოთვლის სისწორისა.

5. K_A, K_B, K_C, K_D, K_E, K_F კორელატებისა და წონითი ფუნქციების $\frac{1}{P_{\overline{AD}}}$, $\frac{1}{P_{(AD)}}$ — შებრუნებული წონების განსაზღვრა სათანადო კონტროლით შესრულებულია (6) სქემაში.

6. (6) სქემიდან კორელატების რიცხვითი მნიშვნელობები მიეწერება (5) სქემას A, B, C, D, E, F სვეტების ქვემოთ და (4. 8. 1. 10) ფორმულის შესაბამისად გამოთვლილი ε_i'' სიდიდეების ოდენობები ჩაიწერება (5) სქემის ε'' სვეტში.

7. (4. 8. 1. 11) ფორმულით გამოთვლილი ε_i შესწორებები შესრულებულია (5) სქემაში, რომელთა მნიშვნელობები იგივეა, რაც ერთად გაწონასწორების შემთხვევისას (იხილეთ 4. 7. 1. 53 სქემა).

დანარჩენი მოქმედებები ისეთივე თანამიმდევრობით სრულდება, როგორც 4. 7. 1. 6 მაგალითში.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 2. 2. (2) მაგალითის მსგავსად შესრულდეს (4. 7. 1. 9) სავარჯიშო.

მაგალითი 4. 8. 2. 3. ორ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით დამუშავდეს (4. 7. 1. 5) მაგალითი. აგრეთვე შეფასდეს გაწონასწორებული α_2, α_8, S_1 და S_2 ელემენტები. მაგალითის დამუშავება დავამთავროთ ε_i შესწორებათა და წონითი ფუნქციების შებრუნებული წონების განსაზღვრით და ამ სიდიდეების ოდენობების 4. 7. 1. 5 მაგალითის შედეგებთან შედარებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა

1. სულ გვაქვს ოთხი პირობითი ტოლობა (იხ. გვ. 217), რომელთაც ვყოფთ შემდეგ ორ ჯგუფად:

I ჯ გ უ ფ ი

$$(1)+(2)+(3)+W_1=0,$$
$$(4)+(5)+(6)+W_2=0,$$
$$(7)+(8)+(9)+W_3=0,$$

II ჯ გ უ ფ ი

$$10^7\lg\frac{S_2\cdot\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 7}{S_1\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 9}=W_1^{II}$$

მისი წრფივი სახეა

$$\alpha_1(1)-\alpha_3(3)+\alpha_4(4)-\alpha_6(6)+\alpha_7(7)-\alpha_9(9)+\alpha_{s2}(S_2)-\alpha_{s1}(S_1)+W_1^{II}=0.$$
წონითი ფუნქციაა (იხ. გვ. 220)

$$\Phi_{CD}=\frac{S_3\cdot\sin 5\cdot\sin 7}{\sin 6\cdot\sin 9};$$

სექციები	კუთხ. №№	α	β	γ	δ	ϑ	η	φ	φ'	A	B	C
	1	+1	—	—	—	—	—1,39	—	—	0	—0,33	—
I	2	+1	—	—	—	—	+0,88	—	—	0	—0,33	—
	3	+1	+1	—	—	—	—	—	—	0	+0,66	—
	4	+1	—	+0,59	—	+0,59	—0,59	—	—	+0,33	—0,33	+0,85
II	5	+1	+1	—1,38	—	—1,38	—	—	—	+0,33	+0,66	—1,12
	6	—	—	—	—	—2,76	+1,83	—	—	—0,66	—0,33	+0,27
	9	—	—	—	—	—	—	+0,23	—	—0,66	—	+0,33
III	10	+1	—	+1,44	—	—	—	—	+1	+0,33	—	+1,77
	11	+1	—	—2,44	—	—	—	—2,44	—	+0,33	—	—2,10
	12	+1	—	—	—	—	—	—	—	+0,33	—	+2,09
IV	13	—	—	—6,28	+3,40	—	—	—	—	—0,66	—	—4,18
	15	+1	—	—	—1,06	—	—	—	—	+0,33	—	+2,09
	7	+1	+1	+2,17	0	0	—0,59	+1,58	0	+1	+1	+2,17
	8	+1	0	—3,63	0	0	+3,04	—0,59	+1	+1	0	—3,63
	14	+1	0	—6,28	+0,97	—7,37	0	0	0	—1	0	—6,28
	16	0	0	0	0	—9,57	0	0	0	0	0	0
	17	0	0	0	—2,92	—5,02	0	0	0	0	0	0
	18	0	0	—8,81	+2,20	—5,02	0	0	0	0	0	—8,81
										+1.5460	—0,6975	+0,0948
										K_A	K_B	K_C

მისი წრფივი სახეა

$$\Delta\Phi_{CD}=\varphi_5(5)-\varphi_6(6)+\varphi_7(6)-\varphi_0(9)+\varphi_{S_2}(S_2)+\left[\frac{\varphi\varphi}{P}\right]\cdot$$

კოეფიციენტები იქნება:

$\Phi_{\alpha_2}=\alpha_2$, სადაც $\varphi_{\alpha_2}=1(0)$ დანარჩენი ნულებია

$\Phi_{\alpha_8}=\alpha_8$, „ $\varphi_{\alpha_8}=1(0)$ „ „

$\Phi_{S_2}=S_1$ „ $\varphi_{11}=1(0)$ „ „

$\Phi_{S_2}=S_2$ „ $\varphi_{10}=1(0)$ „ „

2. პირველადი შესწორებების გამოსათვლელი ფორმულა (4. 8. 2. 25)

$$\varepsilon'_{iS}=-\frac{W_S}{[q]_S}\,q_1,$$

სადაც

$$q_i=\frac{1}{P_i}\cdot$$

იხილეთ სქემა (7) და (7′), რომლის მიხედვითაც თავისუფალი წევრისა და კოეფიციენტების სიდიდეებია:

სქემა 4.8.2.5

D	E	F	Φ	Σ	Φ'	Σ'	ε''	$\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon$
—	—	—1,22	—	— 1,55	—	— 1,55	—0″,95	—3″,0
—	—	+1,05	—	+ 0,72	—	+ 0.72	+1 ,25	—0 ,7
—	—	+0,17	—	+ 0,83	—	+ 0,83	—0 ,30	—2 ,3
—	+1,77	—1,00	—	+ 1,62	—	+ 1,62	—0 ,03	+0 ,7
—	—0,20	—0,41	—	— 0,74	—	— 0,74	—0 ,47	+0 ,2
—	—1,57	+1,41	—	— 0,88	—	— 0,88	+0 ,50	+1 ,1
—	—	—	+0,97	+ 0,64	—0,33	— 0,66	—0 ,99	—4 ,0
—	—	—	+0,73	+ 2,83	+0,66	+ 2,76	+0 ,68	—2 ,3
—	—	—	—1,70	— 3,47	—0,33	— 3,80	+0 ,31	—2 ,7
—0,78	—	—	—	—	—	+ 1,64	+0 ,59	+3 ,6
+2,62	—	—	—	—	—	— 2,22	—1 ,01	+2 ,0
—1,84	—	—	—	—	—	+ 0,58	+0 ,42	+3 ,4
0	0	—0,59	+1,58	+ 5,16	0	+ 3,58	+0 ,48	+0 ,5
0	0	+3,04	—0,59	— 0,18	+1	+ 1,41	+4 ,15	+4 ,2
+0,97	—7,37	0	0	—13,68	0	—13,68	—2 ,49	—2 ,5
0	—9,57	0	0	— 9,57	0	— 9,57	—0 ,65	—0 ,6
—2,92	—5,02	0	0	— 7,94	0	— 7,94	—0 ,80	—0 ,8
+2,20	—5,02	0	0	—11,63	0	—11,63	—0 ,83	—0 ,8
+0,1562 K_D	+0,0677 K_E	+0,9698 K_F						

$$W_A = W_1^{II} = +240\,(\lg_7)$$

$$\alpha_1 = +2{,}60\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right) \quad \alpha_3 = -14{,}10\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right) \quad \alpha_4 = -1{,}10\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right)$$

$$\alpha_6 = -10{,}90\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right) \quad \alpha_7 = +29{,}70\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right) \quad \alpha_9 = +4{,}20\left(\frac{\lg}{\text{სქ.}}\right)$$

$$\alpha_{S_2} = +1{,}34\left(\frac{\lg}{\text{მმ}}\right) \quad \alpha_{S_1} = -1{,}69\left(\frac{\lg}{\text{მმ}}\right) \quad \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_8 = 0.$$

და წონითი ფუნქციისათვის კი:

$$\varphi_5 = +46{,}30\left(\frac{\lg}{\text{სქ}}\right) \quad \varphi_6 = -10{,}90\left(\frac{\lg}{\text{სქ}}\right) \quad \varphi_7 = +29{,}7\left(\frac{\lg}{\text{სქ}}\right)$$

$$\varphi_9 = +4{,}20\left(\frac{\lg}{\text{სქ}}\right) \quad \varphi_{S_2} = +1{,}34\left(\frac{\lg}{\text{მმ}}\right) \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_8 = \varphi_{S_1} = 0.$$

$$\varphi'_{\alpha_2} = 1(0) \quad \varphi_{\alpha_8} = 1(0) \quad \varphi_{S_1} = 1(0) \quad \varphi_{S_2} = 1(0).$$

3. მეორე ჯგუფის გარდაქმნილი ტოლობებისა და წონითი ფუნქციის კოეფიციენტების გარდაქმნის (8) სქემა, შედგენილია (4. 8. 1. 29) და (16) ფორმულით

$$A_{is}=\alpha_{is}-\frac{[q\alpha]_s}{[q]_s},$$

$$\Phi_{is}=\varphi_{is}-\frac{[q\varphi]_s}{[q]_s},$$

4. ε'' მეორადი შესწორებების გამოსათვლელი სქემა (8) გამოთვლილია (4. 8. 1. 10) ფორმულით

$$\varepsilon''_i=q_iA_iK_1.$$

5. კორელატების და გაწონასწორებულ სიდიდეთა ფუნქციის (წონითი ფუნქციის) შებრუნებული წონის გამოსათვლელი სქემა (8) გამოთვლილია (32) ფორმულით.

$$\frac{1}{P_\Phi}=[q\Phi\Phi]-\frac{[qA\Phi]}{[qAA]}=[q\varphi\Phi]-\frac{[qA\varphi]}{[qAA]}.$$

6. $\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}}$ (0).

7. $M=\eta\sqrt{\frac{1}{P_\Phi}}$.

I ჯგუფი — სქემა 4.8.2.7

კუთხ. №№	განაზომი კუთხეები	პირვ. შესწ. ε'	კუთხ. №№	განაზომი კუთხეები	პირვ. შესწ. ε'	კუთხ. №№	განაზომი კუთხეები	პირვ. შესწ. ε'
1	82°58′14″6	+0″,60	4	93 00 32, 8	—0″,97	7	35 21 49,0	—1″,46
2	40 49 36 9	+0 ,60	5	24 28 2, 1	—0 ,96	8	43 13 28,1	—1 ,47
3	56 12 6 7	+0 ,60	6	64 31 28, 0	—0 ,97	9	101 24 47,3	—1 ,47
	179 59 58 2			180 00 2,90			180 0 4,4	
	W_1=—1″,80	+1″,80		W_2=+2″,90	—2″,90		W_3=+4″,40	—4″,40

II ჯგუფი — სქემა 4.8.2.7′

საკლები				მაკლებს			
№№	შესწორებული კუთხეები და S_2 გვერდის სიგრძე	lg	Δ	№№	შესწორებული კუთხეები და S_2 გვერდის სიგრძე	lg	Δ
1	82°58′15″20	9.9967236	+ 2,6	3	56°12′ 7″30	9.9196032	+14,1
4	93 00 31 83	9.9994009	— 1,1	6	62 31 27,03	9.9480243	+10,9
7	35 21 47 54	9.7624967	+29,7	9	101 25 45,83	9.9913268	— 4,2
S_2	3246,671	3.5114383	+ 1,34	S_1	2576,803	3.4110812	+ 1,69
		Σ_1=3.2700595				Σ_2=3.2700355	

სვლები	№№	P	q	a	A	ε''	$\varepsilon'+\varepsilon''$	φ_{CD}
I	1	$1\left(\frac{1}{სკ}\right)^2$	$1\ (სკ)^2$	$+2,6\left(\frac{lg}{სკ}\right)$	$+6,4\frac{lg}{სკ}$	$-1'',43$	$-0'',83$	$0\ \frac{lg}{სკ}$
	2	1 „	1 „	0 „	+ 3,9 „	— 0 ,87	— 0 ,27	0 „
	3	1 „	1 „	—14,1 „	—10,3 „	+ 2 ,31	+ 2 ,91	0 „
II	4	0,51 „	1,96 „	— 1,1 „	+ 2,9 „	— 1,27	— 2,24	0 „
	5	0,51 „	1,96 „	0 „	+ 4,0 „	— 1,76	— 2,72	+46,3 „
	6	0,51 „	1,96 „	—10,9 „	— 6,9 „	+ 3,04	+ 2,07	—10,9 „
III	7	1 „	1 „	+29,7	+18,4 „	— 4,12	— 5,58	+29,7 „
	8	1 „	1 „	0	—11,3 „	+ 2,53	+ 1,06	0 „
	9	1 „	1 „	+ 4,2	— 7,1 „	+ 1,59	+ 0,12	+ 4,2 „
10	S_2	$0,0997\left(\frac{1}{მმ}\right)^2$	$10,24(მმ)^2$	$+1,3\left(\frac{lg}{მმ}\right)$	$+1,3\left(\frac{lg}{მმ}\right)$	— 2,98 მმ	— 2,98 მმ	$-1,3\frac{lg}{მმ}$
11	S_1	$0,0124\left(\frac{lg}{მმ}\right)^2$	81,00 „	—1,7 „	—1,7 „	+30,79 მმ	+30,79 მმ	0 „

$$W_1^{II}=+240(lg_7)$$

$$[qAA]=1071,48\ (lg)^2$$

$$q_l=\frac{1}{P_l}=\frac{m^2}{25},\ (\text{იხ. 219 გვ.})$$

$$K_1=-\frac{W_1 lg}{[qAA]}=-\frac{240}{1071,48}=-0,223989\approx-0,224\left(\frac{1}{lg_7}\right)\ (5.1.5)\ \text{ფორმულით.}$$

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{62,98}{4}}=\pm\sqrt{15,75}\approx\pm4,0(0)$$

$$m_{lg\overline{CD}}=\eta\sqrt{\frac{1}{P\Phi}}=\pm4,0\times56=\pm224(lg_7)$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 2. 3. (3) მაგალითის მსგავსად შესრულდეს (4. 7. 1. 8) სავარჯიშო.

4. 8. 8. პირდაპირი გადაკვეთით პუნქტის განსაზღვრისას გაწონასწორება

ამ შემთხვევაში სრულად გამოიყენება ორ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხი. გავარჩიოთ რამდენიმე შემთხვევა:

I შემთხვევა (ნახ. 1)

(4. 2. 1) პარაგრაფში მოყვანილი წესის მიხედვით შედგება:

ერთი შეკრული პოლიგონის (ფიგურის), ერთი პოლუსის, ორი ჯამისა და სხვაობის პირობითი ტოლობა. ამ ტოლობებიდან, როგორც ურთიერთდაუკავ-

$\varphi_{\alpha_2}(0)$	$\varphi_{\alpha_8}(0)$	$\varphi_{S_1}(0)$	$\varphi_{S_2}(0)$	Φ_{CD}	$\Phi_{\alpha_2}(0)$	$\Phi_{\alpha_8}(0)$	$\Phi_{S_1}(0)$	$\Phi_{S_2}(0)$
0	0	0	0	0 $\frac{\text{lg}}{\text{სკ}}$	—0,33	0	0	0
1	0	0	0	0 „	+0,67	0	0	0
0	0	0	0	0 „	—0,34	0	0	0
0	0	0	0	—11,8 „	0	0	0	0
0	0	0	0	+34,5 „	0	0	0	0
0	0	0	0	—22,7 „	0	0	0	0
0	0	0	0	+18,4 „	0	—0,33	0	0
0	1	0	0	—11,3 „	0	0,67	0	0
0	0	0	0	— 7,1 „	0	—0,34	0	0
0	0	0	1	+1,3 $\frac{\text{lg}}{\text{მმ}}$	0	0	0	1
0	0	1	0	0 „	0	0	1	0
			$[q\varphi\Phi]$	4134,1$(\text{lg}_7)^2$	0,67 (სკ)^2	0,67(სკ)^2	81,0(მმ)^2	10,2(მმ)^2
			$-\frac{[qAA]_2}{[qAA]}$	—1017,9 „	—0,01 „	—0,12 „	—17,7 „	—0,2 „
			$\frac{1}{P_\Phi}$	3116,2 „	0,66 „	0,56 „	63,3 „	10,0 „
			$\sqrt{\frac{1}{P_\Phi}}$	56(lg_7)	0,81 (სკ)	0,75 „	8,0 (მმ)	3,2(მმ)
			M	224 „	3, 2 „	3, 0 „	32,0 „	12,8 „

შირებელი ორი უკანასკნელი ტოლობა შევა I ჯგუფში, ხოლო წინა ორი შევა II ჯგუფში. ჯობს შეკრული პოლიგონის პირობითი ტოლობა შევცვალოთ ჯამის და სხვაობის პირობითი ტოლობით, რითაც შესაძლებლობა მოგვეცემა I ჯგუფში შევიტანოთ სამი ურთიერთდაუკავშირებელი პირობითი ტოლობა, რომელთაც კოეფიციენტი ექნება 1. მაშასადამე, დავწერთ:

I ჯგუფი:

1. $\varepsilon_1+\varepsilon_2+W_1^{\mathrm{I}}=0$, სადაც $W_1^{\mathrm{I}}=1+2-A_0$,

2. $\varepsilon_3+\varepsilon_4+W_2^{\mathrm{I}}=0$, „ $W_2^{\mathrm{I}}=3+4-B_0$,

3. $\varepsilon_5+\varepsilon_6+W_3^{\mathrm{I}}=0$, „ $W_3^{\mathrm{I}}=5+6-C_0$.

II ჯგუფი

$$\Delta_1\varepsilon_1-\Delta_2\varepsilon_2+\Delta_3\varepsilon_3-\Delta_4\varepsilon_4+\Delta_5\varepsilon_5-\Delta_6\varepsilon_6+W^{II}=0,$$

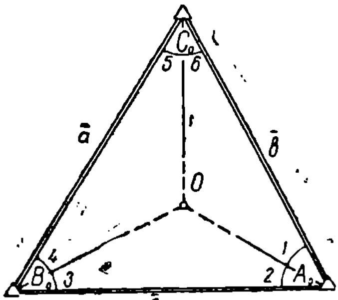
სადაც

$$W^{II}=10^7\lg\frac{\sin 1^{II}\cdot\sin 3^{II}\cdot\sin 5^{II}}{\sin 2^{II}\cdot\sin 4^{II}\cdot\sin 6^{II}}.$$

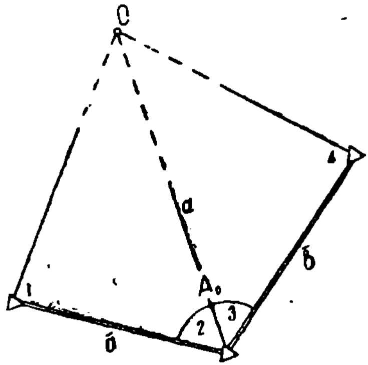
როგორც ცნობილია I ჯგუფში შემავალი ტოლობების გადაწყვეტა მდგომარეობს პირველადი შესწორებების (4. 8. 1. 32) ფორმულით განსაზღვრაში, ე. ი.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1=\varepsilon_2&=-\frac{W_1}{2}\\ \varepsilon_3=\varepsilon_4&=-\frac{W_2}{2}\\ \varepsilon_5=\varepsilon_6&=-\frac{W_3}{2}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.3.1)$$

არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ II ჯგუფში შემავალი პოლუსის პირობითი ტოლობა უნდა შედგეს შესწორებული კუთხეებით, რითაც მიიღწევა (4, 8, 1, 37)



ნახ. 4.8.3.1.



ნახ. 4.8.3.2.

ტოლობა. მეორე ჯგუფის კოეფიციენტების გარდაქმნა კი შესრულდება (8.1.33) ფორმულით. აქ გვექნება ორ-ორი კუთხისაგან შემდგარი სამი სექცია. მაშასადამე, გარდაქმნილი კოეფიციენტები იქნება გამოთვლილი ფორმულით:

$$A_{is}=\alpha_{is}-\frac{[\alpha]_s}{2}, \qquad (4.8.3.2)$$

სადაც

$\alpha_{11}=\Delta_1,\qquad \Delta_{21}=-\Delta_2,\qquad \alpha_{12}=+\Delta_3,\qquad \alpha_{22}=-\Delta_4,$

$\alpha_{13}=\Delta_5,\qquad \Delta_{23}=-\Delta_6.$

მეორადი შესწორებები კი გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon_i^{II}=-\frac{W^{II}}{[AA]}\cdot A_i. \qquad (4.8.3.3)$$

II შემთხვევა, ნახ. (2)

აქ ჭარბი b გვერდის გამო წარმოიშობა ორი პირობითი ტოლობა:

I ჯგუფი

$$\varepsilon_2+\varepsilon_3+W^{I}=0, \text{ სადაც } W^{I}=2+3-A_0.$$

II ჯგუფი

$$(\Delta_1-\Delta_{1+2})\varepsilon_1-\Delta_1+2\varepsilon_2+\Delta_{3+4}\varepsilon_3+(\Delta_{3+4}-\Delta_4)\varepsilon_4+W^{II}=0,$$

სადაც შესწორებული კუთხეებით:

$$W^{II}=10^7\lg\frac{\sin 1\cdot\sin[3+4]}{\sin 4\cdot\sin[1+2]}\,.$$

პირველადი შესწორებები იქნება:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_2=\varepsilon_3=-\frac{W^{I}}{2}\\&\varepsilon_1=\varepsilon_4=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.3.4)$$

პირველ ჯგუფში გვაქვს ერთი პირობითი ტოლობა, ე. ი. ერთი სექცია, რომლის მიხედვით გარდაიქმნება II ჯგუფის კოეფიციენტები. ამ სექციაში შედის მე-2 და მე-3 კუთხეები, მაშასადამე, გარდაიქმნება მხოლოდ α_2 და α_3 კოეფიციენტები, ე. ი. (4. 8. 1. 30) და (4. 8. 1. 33) ტოლობების შესაბამისად:

$$\left.\begin{aligned}&A_1=\alpha_1,\quad A_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=+\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\\&A_4=\alpha_4,\quad A_3=\alpha_3-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=-\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\end{aligned}\right\}, \qquad (4.8.3.5)$$

სადაც

$$\alpha_1=\Delta_1-\Delta_{1+2},\ \alpha_2=-\Delta_{1+2},\ \alpha_3=\Delta_{3+4},\ \alpha_4=\Delta_{3+4}-\Delta_4.$$

მეორადი შესწორებები გამოითვლება (3) ფორმულით.

III შემთხვევა, ნახ. (3)

აქ $N=4$, $P=4$, $n=6$, ე. ი.

$$r=4-8+4=0.$$

მხოლოდ $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ჭარბი გვერდის გამო გვექნება

I ჯგუფში

$$\varepsilon_2+\varepsilon_3+W^{I}=0, \text{ სადაც } W^{I}=2+3-A_0$$

II ჯგუფში

$$W^{II}=10^7\lg\frac{\bar{a}\cdot\sin[B_0+1]\cdot\sin[C_0+3\pm4]}{\bar{b}\cdot\sin[B_0+1+2]\cdot\sin[C_0+4]}\,.$$

მეორე ჯგუფში შესწორებული კუთხეები იქნება მხოლოდ 2 და 3 კუთხე. აქ II შემთხვევისაგან ის განსხვავებაა, რომ II ჯგუფის გვერდების ტოლობაში შევა ხისტი კუთხეები, რომლებიც არ გაწონასწორდება, ე. ი. გამოვიყენებთ (4), (5) და (3) ფორმულებს, მხოლოდ გარდაქმნისათვის გვექნება

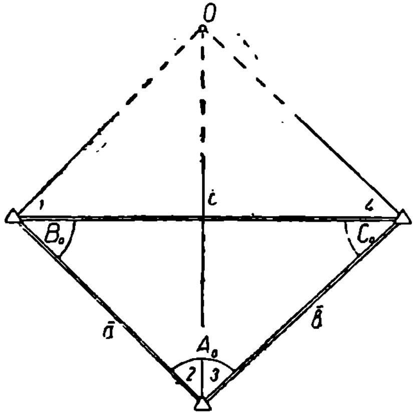
$$\alpha_1=\Delta_{B_{0+1}}-\Delta_{B_{0+1+2}},\quad \alpha_2=-\Delta_{B_{0+1+2}},\quad \alpha_3=\Delta_{C_{0+3+4}},$$
$$\alpha_4=\Delta_{C_{0+3+4}}-\Delta_{C_{0+4}}.$$

IV შემთხვევა, ნახ. (4)

აქ $N=4$, $P=4$, $n=6$, ე. ი.

$$4-8+4=0.$$

$\bar{b}$ ხისტი ჭარბი გვერდის შეტანით მივიღებთ



ნახ. 4.8.3.3.

I ჯგუფში

$$\varepsilon_2+\varepsilon_3+W^{I}=0,\quad \text{სადაც}\quad W^{I}=(2+3-360^\circ)-A_0$$

II ჯგუფში

$$W^{II}=10^7\lg\frac{\bar{a}\cdot\sin 1\cdot\sin[3+4]}{\bar{b}\cdot\sin 4\cdot\sin[2-1-180^\circ]}.$$

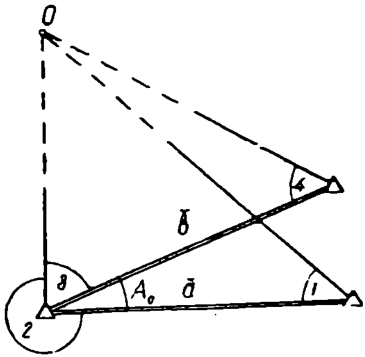
გაზომილი კუთხეების ნახაზზე ნაჩვენები თანამიმდევრობის გამო მივიღეთ III შემთხვევის შესაბამისი პირობითი ტოლობები, რომელთა მიმართ გამოვიყენებთ (4), (5) და (3) ფორმულებს, მხოლოდ გარდაქმნისათვის

$$\alpha_1=\Delta_1-\Delta_{2-1-180^\circ},$$

$$\alpha_2=-\Delta_{2-1-180^\circ},$$

$$\alpha_3=\Delta_{3+4},$$

$$\alpha_4=\Delta_{3+4}-\Delta_4.$$



ნახ. 4.8.3.4.

4. 8. 4. სამ ჯგუფად გაწონასწორება

აუცილებელ პირობით განტოლებათა სისტემის სამ ჯგუფად გაწონასწორება ხდება ორ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხის ზედიზედ ორჯერ გამოყენების გზით. ტოლობების მთელ სისტემას ყოფენ სამ ჯგუფად, რომელსაც წარმოიდგენენ ორი ჯგუფის სახით: პირველ და მეორე ჯგუფებად (მეორე+მესამე). პირველ ჯგუფს გააწონასწორებენ და შემდეგ ამ შესწორებული კუთხეებით გარდაქმნიან მეორე ჯგუფის კოეფიციენტებს (მეორეს და მესამეს). შემდეგ ამ გარდაქმნილ მეორე ჯგუფს ისევ დაყოფენ მეორე და მესამე ჯგუფებად. მეორე ჯგუფს გააწონასწორებენ. მეორედ შესწორებული კუთხეებით კიდევ გარდაქმნიან მესამე ჯგუფის კოეფიციენტებს და შემდეგ, ამ ჯგუფს გააწონასწორებენ[1]. ამით იღებენ საბოლოო გაწონასწორებისათვის საჭირო შესწორებებს. მაშასადამე, საბოლოო შესწორება მიიღება ტოლობით:

$$\varepsilon_i=\varepsilon_i'+\varepsilon_i''+\varepsilon_i'''. \tag{4.8.4.1}$$

სანამ შევუდგებოდეთ სათანადო სამუშაო ფორმულების გამოყვანას, აქვე მოვიყვანთ პირობით განტოლებათა კოეფიციენტების აღნიშვნის სისტემას (1) ცხრილის სახით.

ცხრილი 4.8.4.1

	გარდაუქმნელი კოეფიციენტები	პირველად გარდაქმნილი კოეფიციენტები	მეორედ გარდაქმნილი კოეფიციენტები
I ჯგუფის	a_i b_i c_i d_i . . .	— — — —	— — — —
II ჯგუფის	α_i β_i γ_i . . .	α_i' β_i' γ_i' . . .	— — —
III ჯგუფის	A_i B_i . . .	A'_i B'_i . . .	A_i'' B_i'' . . .

ვთქვათ, საჭიროა ტოლზუსტ განაზომთა ცხრა პირობითი ტოლობის სამ ჯგუფად გაწონასწორება.

---

[1] ასეთი თანამიმდევრობა, ცხრილური და რიცხვითი მონაცემები ვისარგებლეთ [4]-დან.

I ჯგუფი

$$a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+W_1^{I}=0,$$
$$b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n+W_2^{I}=0,$$
$$c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n+W_3^{I}=0,$$
$$d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2+\cdots+d_n\varepsilon_n+W_4^{I}=0,$$

II ჯგუფი

$$\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\cdots+\alpha_n\varepsilon_n+W_1^{II}=0,$$
$$\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2+\cdots+\beta_n\varepsilon_n+W_2^{II}=0,$$
$$\gamma_1\varepsilon_1+\gamma_2\varepsilon_2+\cdots+\gamma_n\varepsilon_n+W_3^{II}=0.$$

III ჯგუფი

$$A_1\varepsilon_1+A_2\varepsilon_2+\cdots+A_n\varepsilon_n+W_1^{III}=0,$$
$$B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2+\cdots+B_n\varepsilon_n+W_2^{III}=0.$$

პირველ ჯგუფში შევა ურთიერთდაუკავშირებელი ტოლობები, რომელთა კოეფიციენტები არის 1.

მეორე ჯგუფში — დანარჩენი ტოლობები კოეფიციენტებით 1.

ამ ჯგუფის ტოლობები დაკავშირებულია პირველ ჯგუფთან და შეიძლება ისინი ერთმანეთსაც უკავშირდებოდეს.

მესამე ჯგუფში შევა დანარჩენი ტოლობები.

პირველი ჯგუფის ამოხსნა მდგომარეობს ყოველი ტოლობიდან პირველადი შესწორების განსაზღვრაში (4. 8. 1. 32) მიხედვით:

$$\varepsilon'_{i_S}=-\frac{W_S^{I}}{n_S}. \tag{4.8.4.2}$$

სადაც S პირველი ჯგუფის ტოლობის (სექციის) რიგითი ნომერია, განსახილველ შემთხვევაში $S=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

W_S^{I} პირველი ჯგუფის იმ ტოლობის შეუკვრელობაა (თავისუფალი წევრია), რომელსაც აქვს რიგითი ნომერი S.

n_S იმავე ტოლობის უცნობთა (შესწორებათა) რაოდენობაა.

მიღებულ შესწორებებს შევიტანთ მეორე ჯგუფის განაზომებში და ამ პირველადი შესწორებული კუთხეებით გამოვითვლით მეორე ჯგუფის W_1^{II}, W_2^{II}, W_3^{II} შეუკვრელობებს, ე. ი. მიიღება (4.8.1.37) ტოლობის შესატყვისი სიდიდეები. ამავე დროს, ვაწარმოებთ მეორე და მესამე ჯგუფების ტოლობების კოეფიციენტების გარდაქმნას, რისთვისაც პირველი ჯგუფის მიხედვით დალაგებული სექციების (ჩვენს შემთხვევაში ოთხი) შესაბამისად განისაზღვრება გარდაქმნილი კოეფიციენტები (4. 8. 1. 33)-ის ანალოგიურად:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{i_S} &= \alpha_{i_S} - \frac{[\alpha]_S}{n_S} \\ \beta'_{i_S} &= \beta_{i_S} - \frac{[\beta]_S}{n_S} \\ \gamma'_{i_S} &= \gamma_{i_S} - \frac{[\gamma]_S}{n_S} \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} A'_{i_S} &= A_{i_S} - \frac{[A]_S}{n_S} \\ B'_{i_S} &= B_{i_S} - \frac{[B]_S}{n_S} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.4}$$

მაშასადამე, მეორე ჯგუფის შესაბამისი ნორმალური განტოლებების სისტემა იქნება:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha'\alpha']K_1+[\alpha'\beta']K_2+[\alpha'\gamma']K_3+W_1^{II'} &= 0 \\ [\alpha'\beta']K_1+[\beta'\beta']K_2+[\beta'\gamma']K_3+W_2^{II'} &= 0 \\ [\alpha'\gamma']K_1+[\beta'\gamma']K_2+[\gamma'\gamma']K_3+W_3^{II'} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.5}$$

განვსაზღვროთ კორელატები.(4. 4. 3. 7) ამოხსნის ანალოგიურად (იხილეთ 4. 4. 3. 4, 4. 4. 3. 5 და 4. 4. 3. 6), მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= -\frac{D_1}{D} = -\frac{A_{[\alpha'\alpha']}}{D}W_1^{II'} - \frac{A_{[\alpha'\beta']}}{D}W_2^{II'} - \frac{A_{[\alpha'\gamma']}}{D}W_3^{II'} \\ K_2 &= -\frac{D_2}{D} = -\frac{A_{[\alpha'\beta']}}{D}W_1^{II'} - \frac{A_{[\beta'\beta']}}{D}W_2^{II'} - \frac{A_{[\beta'\gamma']}}{D}W_3^{II'} \\ K_3 &= -\frac{D_3}{D} = -\frac{A_{[\alpha'\gamma']}}{D}W_1^{II'} - \frac{A_{[\beta'\gamma']}}{D}W_2^{II'} - \frac{A_{[\gamma'\gamma']}}{D}W_3^{II'} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.6}$$

(6)-ის თავისუფალი წევრების კოეფიციენტები შესაბამისად აღვნიშნოთ:

$$\left.\begin{aligned} f_{\alpha'\alpha'} &= -\frac{A_{[\alpha'\alpha']}}{D}, & f_{\beta'\beta'} &= -\frac{A_{[\beta'\beta']}}{D} \\ f_{\alpha'\beta'} &= -\frac{A_{[\alpha'\beta']}}{D}, & f_{\beta'\gamma'} &= -\frac{A_{[\beta'\gamma']}}{D} \\ f_{\alpha'\gamma'} &= -\frac{A_{[\alpha'\gamma']}}{D}, & f_{[\gamma'\gamma']} &= -\frac{A_{[\gamma'\gamma'[}}{D} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.7}$$

სადაც

$$D=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\alpha'\beta'][\beta'\beta'][\beta'\gamma']\\ [\alpha'\gamma'][\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}+[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{[\alpha'\alpha']}=\begin{vmatrix}[\beta'\beta'][\beta'\gamma']\\ [\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}, && A_{[\beta'\beta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\gamma']\\ [\alpha'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}\\
&A_{[\alpha'\beta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix} && A_{[\beta'\gamma']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\beta']\\ [\alpha'\gamma'][\beta'\gamma']\end{vmatrix}\\
&A_{[\alpha'\gamma']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\beta'\beta'][\beta'\gamma']\end{vmatrix} && A_{[\gamma'\gamma']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\beta']\\ [\alpha'\beta'][\beta'\beta']\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}, \quad (4.8.4.8)$$

მაშასადამე, (6) ასე გადაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}
K_1&=f_{\alpha'\alpha'}{}_1^{II'}\cdot W_1^{II'}+f_{\alpha'\beta'}\cdot W_2^{II'}+f_{\alpha'\gamma'}\cdot W_3^{II'}\\
K_2&=f_{\alpha'\beta'}\cdot W_1^{II'}+f_{\beta'\beta'}\cdot W_2^{II'}+f_{\beta'\gamma'}\cdot W_3^{II'}\\
K_3&=f_{\alpha'\gamma'}\cdot W_1^{II'}+f_{\beta'\gamma'}\cdot W_2^{II'}+f_{\gamma'\gamma'}\cdot W_3^{II'}
\end{aligned}\right\}. \quad (4.8.4.9)$$

(4. 8. 1. 10) ტოლობის ანალოგიურად და (7) აღნიშვნებით მეორადი შესწორებები შესაბამისად გამოითვლება ფორმულით:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_i''&=\alpha_i'K_1+\beta_i'K_2+\gamma_i'K_3=\\
&=\alpha_i'(f_{\alpha'\alpha'}W_1^{II'}+f_{\alpha'\beta'}\cdot W_2^{II'}+f_{\alpha'\gamma'}\cdot W_3^{II'})+\\
&+\beta_1'(f_{\alpha'\beta'}W_1^{II'}+f_{\beta'\beta'}\cdot W_2^{II'}+f_{\beta'\gamma'}\cdot W_3^{II'})+\\
&+\gamma_i'(f_{\alpha'\gamma'}W_1^{II'}+f_{\beta'\gamma'}\cdot W_2^{II'}+f_{\gamma'\gamma'}\cdot W_3^{II'})
\end{aligned}\right\}, \quad (4.8.4.10)$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1''=&(\alpha_i'f_{\alpha'\alpha'}+\beta_i'f_{\alpha'\beta'}+\gamma_i'f_{\alpha'\gamma'})W_1^{II'}+\\
&+(\alpha_i'f_{\alpha'\beta'}+\beta_i'f_{\beta'\beta'}+\gamma_i'f_{\beta'\gamma'})W_2^{II'}+\\
&+(\alpha_i'f_{\alpha'\gamma'}+\beta_i'f_{\beta'\gamma'}+\gamma_i'f_{\gamma'\gamma'})W_3^{II'}
\end{aligned}\right\}. \quad (4.8.4.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned}
p_i&=\alpha_i'f_{\alpha'\alpha'}+\beta_i'f_{\alpha'\beta'}+\gamma_i'f_{\alpha'\gamma'}\\
q_i&=\alpha_i'f_{\alpha'\beta'}+\beta_i'f_{\beta'\beta'}+\gamma_i'f_{\beta'\gamma'}\\
l_i&=\alpha_i'f_{\alpha'\gamma'}+\beta_i'f_{\beta'\gamma'}+\gamma_i'f_{\gamma'\gamma'}
\end{aligned}\right\}. \quad (4.8.4.12)$$

მაშასადამე, (11) ტოლობის ნაცვლად დავწერთ:

$$\varepsilon_i''=p_iW_1^{II'}+q_iW_2^{II'}+l_iW_3^{II'}. \quad (4.8.4.13)$$

სხვადასხვა ტიპური სქემებისათვის წინასწარ შეიძლება გამოითვალოს p_i, q_i და l_i კოეფიციენტები თანამიმდევრობით (3), (8), (7) და (12) დამოკიდებულებების საშუალებით. ტიპურ სქემებს გვერდით მიეწერება ცხრილის სახით წინასწარ გამოთვლილი p_i, q_i, l_i, ... კოეფიციენტები. ამ კოეფიციენტების გამოთვლა მარტივდება იმით, რომ მეორე ჯგუფში (რომლითაც ისინია გამოთვლილი) შეტანილია ის ტოლობები, რომელთა უცნობებს კოეფიციენტები აქვს ერთი. რა ოდენობებიც არ უნდა ჰქონდეს მოცემული სქემის კუთხეებს, p_i, q_i და l_i ამ ტიპის სქემისათვის მუდმივებია.

(4. 8. 1. 12), (4. 8. 1. 13), (4. 8. 1. 15) და (4. 8. 1. 16) დამოკიდებულებების ანალოგიურად დავწერთ მესამე ჯგუფის კოეფიციენტების მეორეჯერ გარდაქმნას შემდეგი ფორმულებით:

$$A_i''=A_i'+\alpha_i'\rho_{11}+\beta_i'\rho_{12}+\gamma_i'\rho_{13}. \tag{4.8.4.14}$$

$$B_i''=B_i'+\alpha_i'\rho_{21}+\beta_i'\rho_{22}+\gamma_i'\rho_{23}. \tag{4.8.4.15}$$

ანუ

$$A_i''=A_i'+\Delta A_i', \tag{4.8.4.16}$$

$$B_i''=B_i'+\Delta B_i', \tag{4.8.4.17}$$

სადაც

$$\Delta A_i'=\alpha_i'\rho_{11}+\beta_i'\rho_{12}+\gamma_i'\rho_{13}. \tag{4.8.4.18}$$

$$\Delta B_i'=\alpha_i\rho_{21}+\beta_i'\rho_{22}+\gamma_i'\rho_{23}. \tag{4.8.4.19}$$

(4. 8. 1. 14) და (4. 8. 1. 17) ტოლობების ანალოგიური ტოლობებით, მესამე ჯგუფის გარდაქმნილი W_A და W_B თავისუფალი წევრების გამოთვლა საჭირო არ არის, რადგანაც მათი ოდენობები პირდაპირ მიიღება მესამე ჯგუფის ტოლობებში მეორედ შესწორებული კუთხეების ჩასმით.

ისევე, როგორც ორჯგუფად გაწონასწორების (იხ. 4. 8. 1. 8 სისტემა) დროს, ρ_{1i} დამატებითი კორელატების, ანუ განუზღვრელი (ნებისმიერი) მამრავლების სიდიდეები შეიძლება მივიღოთ, თუ (9)-ში ნაცვლად W თავისუფალი წევრებისა, შესაბამისად ჩავსვამთ $[\alpha'A']$, $[\beta'A']$, $[\gamma'A']$ სიდიდეებს:

$$\left.\begin{aligned}\rho_{11}&=f_{\alpha'\alpha'}[\alpha'A']+f_{\alpha'\beta'}[\beta'A']+f_{\alpha'\gamma'}[\gamma'A']\\ \rho_{12}&=f_{\alpha'\beta'}[\alpha'A']+f_{\beta'\beta'}[\beta'A']+f_{\beta'\gamma'}[\gamma'A']\\ \rho_{13}&=f_{\alpha'\gamma'}[\alpha'A']+f_{\beta'\gamma'}[\beta'A']+f_{\gamma'\gamma'}[\gamma'A']\end{aligned}\right\}, \tag{4.8.4.20}$$

სადაც (4. 8. 1. 38)-ის ანალოგიურად

$$\left.\begin{aligned}[\alpha'A']&=[\alpha A']=[A']_1^{II}\\ [\beta'A']&=[\beta A']=[A']_2^{II}\\ [\gamma'A']&=[\gamma A']=[A']_3^{II}\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.21}$$

(21)-ში $[A']_i^{II}$ გამოსახულება არის მესამე ჯგუფის პირველი ტოლობის პირველად გარდაქმნილი იმ კოეფიციენტების ჯამი, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის i-ის ტოლობაში (ჩვენს შემთხვევაში $i=1, 2, 3$). მაშასადამე, (20) სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= f_{\alpha'\alpha'}[A']_1^{II} + f_{\alpha'\beta'}[A']_2^{II} + f_{\alpha'\gamma'}[A']_3^{II} \\ \rho_{12} &= f_{\alpha'\beta'}[A']_1^{II} + f_{\beta'\beta'}[A']_2^{II} + f_{\beta'\gamma'}[A']_3^{II} \\ \rho_{13} &= f_{\alpha'\gamma'}[A']_1^{II} + f_{\beta'\gamma'}[A']_2^{II} + f_{\gamma'\gamma'}[A']_3^{II} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.22}$$

(22)-ის მნიშვნელობების (18)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_i' = {} & (\alpha_i' f_{\alpha'\alpha'} + \beta_i' f_{\alpha'\beta'} + \gamma_i' f_{\alpha'\gamma'})[A']_i^{II} + \\ & + (\alpha_i' f_{\alpha'\beta'} + \beta_i' f_{\beta'\beta'} + \gamma_i' f_{\beta'\gamma'})[A']_i^{II} + \\ & + (\alpha_i' f_{\alpha'\gamma'} + \beta_i' f_{\beta'\gamma'} + \gamma_i' f_{\gamma'\gamma'})[A']_i^{II} \end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.23}$$

(23)-ში გამოვიყენოთ (12) აღნიშვნები, მივიღებთ:

$$\Delta A_i' = p_i[A']_1^{II} + q_i[A']_2^{II} + l_i[A']_3^{II}. \tag{4.8.4.24}$$

(24)-ის ანალოგიურად დავწერთ

$$\Delta B_i' = p_i[B']_1^{II} + q_i[B']_2^{II} + l_i[B']_3^{II}, \tag{4.8.4.25}$$

სადაც

$[B']_i^{II}$ მესამე ჯგუფის მეორე ტოლობის პირველად გარდაქმნილი იმ კოეფიციენტების ჯამია, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის i-ის ტოლობაში

$$i=1,\ 2,\ 3. \tag{4.8.4.26}$$

(24) და (25)-ის (13)-თან შედარებით დავადგენთ, რომ A' და B' პირველად გარდაქმნილი კოეფიციენტების მეორედ გარდაქმნისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ p_i, q_i, l_i კოეფიციენტები, რომლებიც, როგორც ცნობილია, სხვადასხვა სქემისათვის წინასწარ არის გამოთვლილი.

მეორე გარდაქმნილი კოეფიციენტების საფუძველზე ჩვეულებრივი ხერხით განისაზღვრება K_A და K_B კორელატი, რის შემდეგ განვსაზღვრავთ საბოლოო შესწორებებს ფორმულით:

$$\varepsilon''' = A_i'K_A + B_i'K_B. \tag{4.8.4.27}$$

შეფასებების საკითხი განმარტებას არ საჭიროებს, რადგანაც (1) ტოლობით გამოთვლილი შესწორება იქნება იგივე, რაც ყველა ტოლობის ერთად გაწონასწორების შემთხვევაში.

წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის, დისპერსიისა და საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა ხდება ორ ჯგუფად გაწონასწორების ანალოგიურად:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_\Phi} &= [\Phi''\Phi''] - \frac{[A''\Phi'']}{[A''A'']} - \frac{[B\Phi''\cdot 1]^2}{[B''B''\cdot 1]} = \\ &= [\Phi''\varphi] - \frac{[A''\varphi]^2}{[A''A'']} - \frac{[B\varphi\cdot 1]^2}{[B''B''\cdot 1]}\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.28}$$

არატოლზუსტი განაზომების გაწონასწორების შემთხვევაში იქნება:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_\Phi} &= \left[\frac{\Phi''\Phi''}{P}\right] - \frac{\left[\frac{A''\Phi''}{\cdot P}\right]^2}{\left[\frac{A''A''}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{B''\Phi''}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{B''B''}{P}\cdot 1\right]} = \\ &= \left[\frac{\Phi''\varphi}{P}\right] - \frac{\left[\frac{A''\varphi}{P}\right]^2}{\left[\frac{A''A''}{P}\right]} - \frac{\left[\frac{B''\varphi}{P}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{B''B''}{P}\cdot 1\right]}\end{aligned}\right\}. \tag{4.8.4.29}$$

Φ'' კოეფიციენტები მიიღება ზუსტად ისე, როგორც A'' და B'' კოეფიციენტები, მაგალითად:

$$\Phi'_{iS} = \varphi_{iS} - \frac{[\varphi]_s}{n_s}. \tag{4.8.4.30}$$

$$\Phi''_i = \Phi'_i + \Delta\Phi'_i. \tag{4.8.4.31}$$

$$\Delta\Phi'_i = p_i[\Phi']^{II}_1 + q_i[\Phi']^{II}_2 + l_i[\Phi']^{II}_S. \tag{4.8.4.32}$$

$[\Phi']^{II}_1$ წონითი ფუნქციის პირველად გარდაქმნილი იმ კოეფიციენტების ჯამია, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის პირველ ტოლობაში.

$[\Phi']^{II}_2$ იგივე ჯამია კოეფიციენტებისა, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის მეორე ტოლობაში.

$[\Phi']^{II}_3$ იგივე ჯამია კოეფიციენტებისა, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის მესამე ტოლობაში. ხოლო p_i, q_i, l_i მოცემული სქემისათვის წინასწარ შედგენილი ცხრილიდან ამოღებული მუდმივებია.

(28) ან (29) სიდიდე მიიღება გაუსის სქემით მესამე ჯგუფის ამოხსნის დროს. (28)-ის კონტროლისათვის გამოიყენება ფორმულა

$$\frac{1}{P_\Phi} = [\Phi''\varepsilon''] - \frac{[A''\Phi''][A''\Sigma'']}{[A''A'']} - \frac{[B''\Phi''\cdot 1][B''\cdot\Sigma''\cdot 1]}{[B''B''\cdot 1]}. \tag{4.8.4.33}$$

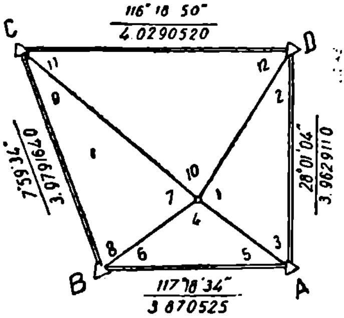
შეფასებისათვის ფორმულები იგივეა, რაც ერთ ჯგუფად გაწონასწორების დროს.

I. ხისტ ფიგურებში პუნქტების ჩასმის მაგალითები და სავარჯიშოები

როგორც ცნობილია, სატრიანგულაციო ქსელის გახშირება (გასქელება) ხდება, მასში ცალკეული პუნქტის ან პუნქტების სისტემის ჩასმით. საჭირო პუნქტების ჩასმისათვის იყენებენ არსებული ქსელის სამ, ოთხ და მეტ ხისტ

პუნქტს, რის მიხედვითაც არჩევენ ჩასმის სახეობებს. 4. 2. 2 პარაგრაფში ვნახეთ, რომ არათავისუფალ ქსელებში პუნქტების ჩასმისას წარმოიშობა შედარებით დიდი რაოდენობა პირობითი განტოლებებისა, ვიდრე მას მივიღებდეთ თავიდანვე ძირითად ქსელში ამ პუნქტების შეტანით. აღნიშნულის გამო ორჯგუფური გაწონასწორების ხერხიც კი მეტად შრომატევადი გამოდის. არსებითი გამარტივება მიიღწევა, თუ ასეთ შემთხვევაში გამოვიყენებთ სამჯგუფურად გაწონასწორების ხერხს.

მაგალითი 4. 8. 4. 1. სამ ჯგუფად გაწონასწორდეს არსებული ტრიანგულაციის ქსელის ოთხკუთხედში წერტილის ჩასმა, ნახ. 1 და (2) ცხრილის მონაცემების მიხედვით.



ნახ. 4.8.4.1.

ცხრილი 4.8.4.2

კუთხ. №№	კუთხეების განაზომი მნიშვნელობები
1	101°24′37″
2	30 04 15
3	48 31 04
4	99 11 48
5	42 11 28
6	38 36 48
7	78 04 12
8	70 42 11
9	31 13 36
10	81 19 24
11	40 27 04
12	58 13 29

ამოხსნა

1. დავადგინოთ პირობითი განტოლებების აუცილებელი რაოდენობა. (4. 2. 2) პარაგრაფიდან (გვ. 58) ცნობილია, რომ პირობით განტოლებათა საერთო რაოდენობა $r=N-2=12-2$. თანახმად მიღებული წესისა პირველ ჯგუფში შევა სამკუთხედის ოთხი ტოლობა, მეორეში ჰორიზონტის ერთი და დირექციული კუთხეების სამი ტოლობა; ხოლო, მესამე ჯგუფში შევა პოლუსის ერთი და გვერდის ერთი ტოლობა.

ჩვენი მიზანია პირველ ჯგუფში შევიდეს რაც შეიძლება მეტი რაოდენობა ურთიერთდაუკავშირებელი პირობითი ტოლობებისა, ამიტომ წერტილების ხისტ მრავალკუთხედებში ჩასმისათვის მივიღოთ ასეთი ზოგადი წესი.

a. პირობითი განტოლებების აუცილებელი რაოდენობა გამოვითვალოთ ფორმულით

$$r=N-2, \qquad (4.8.4.34)$$

სადაც,

N გაზომილი კუთხეების რაოდენობაა.

b. I ჯგუფში შევიტანოთ

დირექციული კუთხეების n—ტოლობა,
ჰორიზონტის 1—ტოლობა,
სულ $n+1$ ტოლობა, (4.8.4.35)

სადაც n ხისტი კუთხეების (ხისტი გვერდების, სამკუთხედების) რაოდენობაა.

c. II ჯგუფში შევიტანთ

ფიგურის (სამკუთხედების) n—1 ტოლობას (4. 8. 4. 36)

d. III ჯგუფში შევიტანთ

გვერდების (n—2) ტოლობას (4. 8. 4. 37)

ასეთი მიდგომა ორ ჯგუფად გაწონასწორების დროსაც კარგია, რადგანაც პირველ ჯგუფში ტოლობების მეტი რაოდენობა შევა.

ზემოთქმული გამოვიყენოთ განსახილველი მაგალითის მიმართ. სულ საჭირო იქნება $r=12-2=10$ ტოლობის ამოხსნა, რომლებიც სახეობების მიხედვით 4. 2. 2 პარაგრაფის V მუხლის შესაბამისად ჯგუფებში ასე დალაგდება:

I ჯგუფში (W_i^I გამოთვლილია განაზომი კუთხეებით)

1. $(2)+(12)+W_1^I=0,$

$$W_1^I=2+12-(116°18'50''-\ 28°01'04'')=-2'',0$$

2. $(3)+(\ 5)+W_2^I=0,$

$$W_2^I=3+\ 5-(208°01'04''-117°18'34'')=+2,0$$

3. $(6)+(\ 8)+W_3^I=0,$

$$W_3^I=6+\ 8-(117°18'34''-\ \ 7°59'34'')=-1,0$$

4. $(9)+(11)+W_4^I=0,$

$$W_4^I=9+11-(187°59'34''-116°18'50'')=-4,0$$

5. $(1)+(4)+(7)+(10)+W_5^I=0,$

$$W_5^I=1+\ 4+7+10-360°=+1,0.$$

II ჯგუფში (W_i^{II} გამოთვლილია პირველად შესწორებული კუთხეებით)

1. $(1)+(2)+(3)+W_1^{II'}=0,$ სადაც $W_1^{II'}=1'+2'+3'-180°=-4'',2$
2. $(4)+(5)+(6)+W_2^{II'}=0,$ „ $W_2^{II'}=4'+5'+6'-180°=+3,2$
3. $(7)+(8)+(9)+W_3^{II'}=0,$ „ $W_3^{II'}=7'+8'+9'-180°=+1,2$

III ჯგუფში ($W_i^{III'}$ გამოითვლება მეორედ შესწორებული კუთხეებით)

1. $\Delta_1(1)-\Delta_2(2)-\Delta_4(4)+\Delta_6(6)+W_1^{III'}=0,$

სადაც

$$W_1^{III'}=10^7 \lg \frac{\overline{AB}\cdot\sin 1\cdot\sin 6}{\overline{AD}\cdot\sin 2\cdot\sin 4}\cdot$$

2. $-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)+\Delta_7(7)-\Delta_9(9)+W_1^{III}=0,$

სადაც

$$W_2^{III}=10^7\lg\frac{\overline{AB}\cdot\sin 5''\cdot\sin 7''}{\overline{BC}\cdot\sin 4''\cdot\sin 9''}\,.$$

იმისათვის, რომ შევასრულოთ მოცემული სქემის გაწონასწორება, საჭიროა ამ სქემისათვის გვქონდეს p_i, q_i და l_i მუდმივების მნიშვნელობათა ცხრილი. ასეთი ცხრილი თუ არ მოგვეპოვება, შევადგენთ შემდეგნაირად.

1. (3) ფორმულების მიხედვით (სექციებია I ჯგუფის მიხედვით და ჩასმულია მეორე ჯგუფის კოეფიციენტები).

სქემა 4.8.4.1

სექციები	კუთხ. №№	α_i	β_i	γ_i	α_i'	β_i'	γ_i'
I	2	1	0	0	+0,50	0	0
	12	0	0	0	—0,50	0	0
II	3	1	0	0	+0,50	—0,50	0
	5	0	1	0	—0,50	+0,50	0
III	6	0	1	0	0	+0,50	—0,50
	8	0	0	1	0	—0,50	+0,50
IV	9	0	0	1	0	0	+0,50
	11	0	0	0	0	0	—0,50
V	1	1	0	0	+0,75	—0,25	—0,25
	4	0	1	0	—0,25	+0,75	—0,25
	7	0	0	1	—0,25	—0,25	+0,75
	10	0	0	0	—0,25	—0,25	—0,25

2. (8) დამოკიდებულების მიხედვით.

$$D=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\alpha'\beta'][\beta'\beta'][\beta'\gamma']\\ [\alpha'\gamma'][\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}+[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}$$

$$A_{[\alpha'\alpha']}=\begin{vmatrix}[\beta'\beta'][\beta'\gamma']\\ [\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1,75 & -0,75\\ -0,75 & 1,75\end{vmatrix}=(1,75\times1,75)-(0,75\times0,75)=2,5$$

$$A_{[\alpha'\beta']}=-\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\beta'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-0,75 & -0,25\\ -0,75 & 1,75\end{vmatrix}=$$

$$=-\left\{-(0,75\times1,75)-(0,25\times0,75)\right\}=+1,5$$

$$A_{[\alpha'\gamma']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'][\alpha'\gamma']\\ [\beta'\beta'][\beta'\gamma']\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-0,75 & -0,25\\ 1,75 & -0,75\end{vmatrix}=(0,75\times0,75)+(0,25\times1,75)=+1,0$$

$$A_{[\beta'\beta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'][\alpha'\gamma']\\ [\alpha'\gamma'][\gamma'\gamma']\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1,75 & -0,25\\ -0,25 & 1,75\end{vmatrix}=(1,75\times1,75)-(0,25\times0,25)=3,0$$

$$A_{[\beta'\gamma']} = -\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'][\alpha'\beta'] \\ [\alpha'\gamma'][\beta'\gamma'] \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1{,}75 & -0{,}75 \\ -0{,}25 & -1{,}75 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ -(1{,}75 \times 0{,}75) - (0{,}75 \times 0{,}25) \right\} = +1{,}5$$

$$A_{[\gamma'\gamma']} = \begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'][\alpha'\beta'] \\ [\alpha'\beta'][\beta'\beta'] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}75 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 1{,}75 \end{vmatrix} = (1{,}75 \times 1{,}75) - (0{,}75 \times 0{,}75) = 2{,}5$$

$$D = 1{,}75 \times 2{,}5 + (-0{,}75) \times (+1{,}5) + (-0{,}25) \times 1{,}0 = 3{,}0$$

3. (7) დამოკიდებულების მიხედვით

$$f_{\alpha'\alpha'} = -\frac{A_{[\alpha'\alpha']}}{D} = -\frac{2{,}5}{3} = -0{,}833$$

$$f_{\beta'\beta'} = -\frac{A_{[\beta'\beta']}}{D} = -\frac{3{,}0}{3} = -1{,}000$$

$$f_{\alpha'\beta'} = -\frac{A_{[\alpha'\beta']}}{D} = -\frac{1{,}5}{3} = -0{,}500$$

$$f_{\beta'\gamma'} = -\frac{A_{[\beta'\gamma']}}{D} = -\frac{1{,}5}{3} = -0{,}500$$

$$f_{\alpha'\gamma'} = -\frac{A_{[\alpha'\gamma']}}{D} = -\frac{1{,}0}{3} = -0{,}333$$

$$f_{\gamma'\gamma'} = -\frac{A_{[\gamma'\gamma']}}{D} = -\frac{2{,}5}{3} = -0{,}833$$

4. (12) დამოკიდებულების მიხედვით

$$p_1 = \alpha'_1 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_1 f_{\alpha'\beta'} + \gamma' f_{\alpha'\gamma'} = -0{,}75 \times 0{,}833 + 0{,}25 \times 0{,}500 + 0{,}25 \times$$
$$\times 0{,}333 = -0{,}400$$

$$p_2 = \alpha'_2 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_2 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_2 f_{\alpha'\gamma'} = -0{,}5 \times 0{,}833 + 0 + 0 = -0{,}400$$

$$p_3 = \alpha'_3 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_3 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_3 f_{\alpha'\gamma'} = -0{,}5 \times 0{,}833 + 0{,}50 \times 0{,}500 + 0 = -0{,}200$$

$$p_4 = \alpha'_4 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_4 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_4 f_{\alpha'\gamma'} = 0{,}25 \times 0{,}833 - 0{,}75 \times 0{,}500 + 0{,}25 \times$$
$$\times 0{,}333 = -0{,}080$$

$$p_5 = \alpha'_5 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_5 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_5 f_{\alpha'\gamma'} = 0{,}5 \times 0{,}833 - 0{,}5 \times 0{,}500 + 0 = +0{,}200$$

$$p_6 = \alpha'_6 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_6 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_6 f_{\alpha'\gamma'} = 0 - 0{,}5 \times 0{,}500 + 0{,}5 \times 0{,}333 = -0{,}080$$

$$p_7 = \alpha'_7 f_{\alpha'\alpha'} + \beta_7 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_7 f_{\alpha'\gamma'} = 0{,}25 \times 0{,}833 + 0{,}25 \times 0{,}500 - 0{,}75 \times$$
$$\times 0{,}333 = +0{,}080$$

$$p_8 = \alpha'_8 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_8 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_8 f_{\alpha'\gamma'} = 0 + 0{,}5 \times 0{,}500 - 0{,}5 \times 0{,}333 = +0{,}080$$

$$p_9 = \alpha'_9 f_{\alpha'\alpha'} + \beta'_9 f_{\alpha'\beta'} + \gamma'_9 f_{\alpha'\gamma'} = 0 + 0 - 0{,}5 \times 0{,}333 = -0{,}200$$

$$p_{10}=\alpha'_{10}f_{\alpha'\alpha'}+\beta'_{10}f_{\alpha'\beta'}+\beta'_{10}f_{\alpha'\gamma'}=0{,}25\times0{,}833+0{,}25\times0{,}500+0{,}25\times$$
$$\times0{,}333=+0{,}400$$

$$p_{11}=\alpha'_{11}f_{\alpha'\alpha'}+\beta'_{11}f_{\alpha'\beta'}+\gamma'_{11}f_{\alpha'\gamma'}=0+0+0{,}5\times0{,}333=+0{,}200$$

$$p_{12}=\alpha'_{12}f_{\alpha'\alpha'}+\beta'_{12}f_{\alpha'\beta'}+\gamma'_{12}f_{\alpha'\gamma'}=0{,}5\times0{,}833+0+0=+0{,}400$$

$$q_1=\alpha'_1f_{\alpha'\beta'}+\beta'_1f_{\beta'\beta'}+\gamma'_1f_{\beta'\gamma'}=-0{,}75\times0{,}500+0{,}25\times1{,}000+0{,}25\times$$
$$\times0{,}500=0$$

$$q_2=\alpha'_2f_{\alpha'\beta'}+\beta'_2f_{\beta'\beta'}+\gamma'_2f_{\beta'\gamma'}=-0{,}5\times0{,}500+0+0=-0{,}25$$

$$q_3=\alpha'_3f_{\alpha'\beta'}+\beta'_3f_{\beta'\beta'}+\gamma'_3f_{\beta'\gamma'}=0{,}5\times(-0{,}500)+(-0{,}5)(-1{,}000)+0=0{,}25$$

$$q_4=\alpha'_4f_{\alpha'\beta'}+\beta'_4f_{\beta'\beta'}+\gamma'_4f_{\beta'\gamma'}=(-0{,}25)\times(-0{,}500)+(+0{,}75)\times(-1{,}000)-$$
$$-0{,}25\times(-0{,}500)=-0{,}5$$

$$q_5=\alpha'_5f_{\alpha'\beta'}+\beta'_5f_{\beta'\beta'}+\gamma'_5f_{\beta'\gamma'}=(-0{,}5)(-0{,}500)+0{,}5(-1{,}000)+0=-0{,}25$$

$$q_6=\alpha'_6f_{\alpha'\beta'}+\beta'_6f_{\beta'\beta'}+\gamma'_6f_{\beta'\gamma'}=0+05(-1{,}000)+(-0{,}5)(-0{,}500)=-0{,}25$$

$$q_7=\alpha'_7f_{\alpha'\beta'}+\beta'_7f_{\beta'\beta'}+\gamma'_7f_{\beta'\gamma'}=(-0{,}25)(-0{,}500)+(-0{,}25)(-1{,}000)+$$
$$+0{,}75(-0{,}500)=0$$

$$q_8=\alpha'_8f_{\alpha'\beta'}+\beta'_8f_{\beta'\beta'}+\gamma'_8f_{\beta'\gamma'}=0+(-0{,}5)(-1{,}000)+0{,}5(-0{,}500)=+0{,}25$$

$$q_9=\alpha'_9f_{\alpha'\beta'}+\beta'_9f_{\beta'\beta'}+\gamma'_9f_{\beta'\gamma'}=0+0+0{,}5(-0{,}500)=-0{,}25$$

$$q_{10}=\alpha'_{10}f_{\alpha'\beta'}+\beta'_{10}f_{\beta'\beta'}+\gamma'_{10}f_{\beta'\gamma'}=(-0{,}25)(-0{,}500)+(-0{,}25)(-1{,}000)+$$
$$+(-0{,}25)(-0{,}500)=0{,}5$$

$$q_{11}=\alpha'_{11}f_{\alpha'\beta'}+\beta'_{11}f_{\beta'\beta'}+\gamma'_{11}f_{\beta'\gamma'}=0+0+(-0{,}5)(-0{,}500)=+0{,}25$$

$$q_{12}=\alpha'_{12}f_{\alpha'\beta'}+\beta'_{12}f_{\beta'\beta'}+\gamma'_{12}f_{\beta'\gamma'}=(-0{,}5)(-0{,}500)+0+0=0{,}25$$

$$l_1=\alpha'_1f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_1f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_1f_{\gamma'\gamma'}=0{,}75(-0{,}333)+(-0{,}25)(-0{,}500)+$$
$$+(-0{,}25)(-0{,}833)=+0{,}080$$

$$l_2=\alpha'_2f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_2f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_2f_{\gamma'\gamma'}=0{,}5(-0{,}333)+0+0=-0{,}166$$

$$l_3=\alpha'_3f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_3f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_3f_{\gamma'\gamma'}=0{,}5(-0{,}333)+(-0{,}5)(-0{,}500)+0=+0{,}080$$

$$l_4=\alpha'_4f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_4f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_4f_{\gamma'\gamma'}=(-0{,}25)(-0{,}333)+0{,}75(-0{,}500)+$$
$$+(-0{,}25)(-0{,}833)=-0{,}080$$

$$l_5=\alpha'_5f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_5f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_5f_{\gamma'\gamma'}=(-0{,}5)(-0{,}333)+0{,}50(-0{,}500)+0=-0{,}080$$

$$l_6=\alpha'_6f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_6f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_6f_{\gamma'\gamma'}=0+0{,}5(0{,}500)+(-0{,}5)(-0{,}833)=+0{,}170$$

$$l_7=\alpha'_7f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_7f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_7f_{\gamma'\gamma'}=(-0{,}25)(-0{,}333)+(-0{,}25)(-0{,}500)+$$
$$+0{,}75(-0{,}833)=-0{,}416$$

$$l_8=\alpha'_8f_{\alpha'\gamma'}+\beta'_8f_{\beta'\gamma'}+\gamma'_8f_{\gamma'\gamma'}=0+(-0{,}5)(-0{,}500)+0{,}5(-0{,}833)=-0{,}170$$

$l_9 = \alpha'_9 f_{\alpha'\gamma'} + \beta'_9 f_{\beta'\gamma'} + \gamma'_9 f_{\gamma'\gamma'} = 0 + 0 + 0,5(-0,833) = -0,420$

$_{10} = \alpha'_{10} f_{\alpha'\gamma'} + \beta'_{10} f_{\beta'\gamma'} + \gamma'_{10} f_{\gamma'\gamma'} = (-0,25)(-0,333) + (-0,25)(-0,500) + $
$+ (-0,25) \times (-0,833) = 0,420$

$l_{11} = \alpha'_{11} f_{\alpha'\gamma'} + \beta'_{11} f_{\beta'\gamma'} + \gamma'_{11} f_{\gamma'\gamma'} = 0 + 0 + (-0,5)(-0,833) = 0,420$

$l_{12} = \alpha'_{12} f_{\alpha'\gamma'} + \beta'_{12} f_{\beta'\gamma'} + \gamma'_{12} f_{\gamma'\gamma'} = (-0,5)(-0,333) + 0 + 0 = 0,170$

5. მიღებული გამონათვლებით შევადგენთ p_i, q_i და l_i სიდიდეების ოდენობების (3) ცხრილს

ც ხ რ ი ლ ი 4.8.4.3.

კუთხეების №№	p	q	l	კუთხეების №№	p	q	l
1	—0,40	0	+0,08	7	+0,08	0	—0,42
2	—0,40	—0,25	—0,17	8	+0,08	+0,25	—0,17
3	—0,20	+0,25	+0,08	9	—0,20	—0,25	—0,42
4	—0,08	—0,50	—0,08	10	+0,40	+0,50	+0,42
5	+0,20	—0,25	—0,08	11	+0,20	+0,25	+0,42
6	—0,08	—0,25	+0,17	12	+0,40	+0,25	+0,17

ეს ცხრილი ყოველთვის გამოიყენება განსახილველი სქემის მიმართ მასში შემავალი კუთხეებისა და გვერდების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

ამ ცხრილის შედგენის შემდეგ იწყება გაწონასწორებითი სამუშაოები შემდეგი თანამიმდევრობით.

I. (2) ფორმულით I ჯგუფისათვის პირველადი შესწორებების გამოთვლა

ს ქ ე მ ა 4.8.4.2

სექ.	კუთხეების №№	პირველადი შესწორებები ε'	შეუკვრელობები W'_i
I	2 12	+1″,0 +1 ,0	—2″
II	3 5	—1 ,0 —1 ,0	+2
III	6 8	+0 ,5 +0 ,5	—1
IV	9 11	+2 ,0 +2 ,0	—4
V	1 4 7 10	—0 ,2 —0 ,3 —0 ,3 —0 ,2	+1

II. პირველად შესწორებული კუთხეებით II ჯგუფის პირობით განტოლებათა

$W_1^{II'}$, $W_2^{II'}$ და $W_3^{II'}$ შეუკვრელობების განსაზღვრა.

სქემა 4.8.4.3

№№	პირველად შესწორე-ბული კუთხეები	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები (შეივსება (4) სქემის შემდეგ)
1	101°24′36″,8	101°24′38″,6
2	30 04 16 ,0	30 04 16 ,8
3	48 31 03 ,0	48 31 04 ,6
	179 59 55 ,8	180°00′00 ,0
	$W_1^{II'}=-4'',2$	
4	99°11′47″,7	99 11 46 ,4
5	42 11 27 ,0	42 11 25 ,4
6	38 36 48 ,5	38 36 48 ,4
	180 00 3 ,2	180 00 00 ,0
	$W_2^{II'}=+3'',2$	
7	78°04′11″,7	78°04′10″,9
8	70 42 11 ,5	70 42 11 ,7
9	31 13 38 ,0	31 13 37 ,4
	180 00 1 ,2	180 00 00 ,0
	$W_3^{II'}=+1'',2$	
10	81°19′23″,8	81°19′24″,1
11	40 27 06 ,0	40 27 06 ,6
12	58 13 30 ,0	58 13 29 ,3
	179 59 59 ,8	180 00 00 ,0
	$W_4^{II'}=-0'',2$	

III. (18) ფორმულით და (3) ცხრილით ε″ მეორე შესწორებების გამოთვლის სქემა (4)

სქემა 4.8.4.4

№№	$p_i \times W_1^{II'}$	$q_i \times W_2^{II'}$	$l_i \times W_3^{II'}$	ε''
1	−0,40×(−4,2)	0 ×(+3,2)	+0,08×1,2	+1″,8
2	−0,40× "	−0,25 "	−0,17 "	+0 ,8
3	−0,20× "	+0,25 "	+0,08 "	+1 ,6
4	−0,08× "	−0,25 "	−0,08 "	−1 ,3
5	+0,20× "	−0,25 "	−0,08 "	−1 ,6
6	−0,08× "	−0,25 "	+0,17 "	−0 ,3
7	+0,08× "	0 "	−0,42 "	−0 ,8
8	+0,08× "	+0,25 "	−0,17 "	+0 ,2
9	−0,20× "	−0,25 "	−0,42 "	−0 ,6
10	+0,40× "	+0,50 "	+0,42 "	+0 ,3
11	+0,20× "	+0,25 "	+0,42 "	+0 ,6
12	+0,40× "	+0,25 "	+0,17 "	−0 ,7

IV. მეორედ შესწორებული კუთხეებით III ჯგუფის პირობით განტოლებათა $W_2^{III'}$ და $W_3^{III'}$ შეუკვრელობების განსაზღვრა (კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები შემცირებულია ათჯერ)

სქემა 4.8.4.5

№№ კუთ.	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები	lg sin	Δ ($\lg_6$)	№№ კუთ.	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები	lg sin	Δ ($\lg_6$)
1	101°24′38″,6	9.9913298	—0,4	2	30 04 16,8	9.6999052	+3,6
6	38 36 48 ,2	9.9752278	+2,6	4	99 11 46,4	9.9943517	—0,3
AB		3.8706250		AD		3.9629110	

$\Sigma_1 = 3.6571826$ $\Sigma_2 = 3.6571979$

$$W_1^{III'} = -15,3(\lg_6)$$

5	42°11′25″,4	9.8271083	+2,3	4	99°11′46″,4	9.9943517	—0,3
7	78 04 10 ,9	9.9905163	+0,4	9	31 13 37 ,4	9.7146909	+3,5
BA		3.8706250	—	BC		3.9791640	—

$\Sigma_1 = 3.6882496$ $\Sigma_2 = 3.6882366$

$$W_3^{III'} = +13,0(\lg_6)$$

V. (4) ფორმულით III ჯგუფის კოეფიციენტების პირველად გარდაქმნა, რომლებიც (5) სქემაში გამოთვლილია მეორედ შესწორებული კუთხეებით. სექციები დალაგებულია პირველი ჯგუფის განტოლებათა მიხედვით

სქემა 4.8.4.6

პირველი ჯგუფის სექცია	№№ კუთხ.	A	B	A′	B′
I	2	—3,6	0	—1,8	0
	12	0	0	+1,8	0
II	3	0	0	0	—1,1
	5	0	+2,3	0	+1,1
III	6	+2,6	0	+1,3	0
	8	0	0	—1,3	0
IV	9	0	—3,5	0	—1,8
	11	0	0	0	+1,8
V	1	—0,4	0	—0,4	—0,2
	4	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2
	7	0	+0,4	0	+0,2
	10	0	0	0	—0,2

VI. მეორე ჯგუფის სექციების შესაბამისად მესამე ჯგუფის კოეფიციენტების მეორედ გარდაქმნა (21), (26), (24) და (25) ფორმულების გამოყენებით

მესამე ჯგუფის კოეფიციენტების გარდაქმნა და ε''' შესწორებების გამოთვლა

სქემა 4.8.4.7

II ჯგ. სექც.	კუთხ. №№	p_l	q_l	l_l	A'	B'	$[A']_l^{II}$	$[B']_l^{II}$	$\Delta A'$	$\Delta B'$	A'' (10) ფორმულა	B'' (17) ფორმულა	ε''' (27) ფორმულა	ε''	ε'	ε
1	1	−0,40	0	+0,08	−0,4	−0,2	−2,2	−1,3	+0,8	+0,4	+0,4	+0,2	+0,5	+1,8	−0,2	+2,1
	2	−0,40	−0,25	−0,17	−1,8	0			+0,7	+0,5	−1,1	+0,5	−2,6	+0,8	+1,0	−0,8
	3	−0,20	+0,25	+0,08	0	−1,1			+0,7	+0,4	+0,7	−0,7	+2,1	+1,6	−1,0	+2,7
2	4	−0,08	−0,50	−0,08	+0,3	+0,2	+1,6	+1,3	−0,5	−0,4	−0,2	−0,2	−0,2	−1,3	−0,3	−1,8
	5	+0,20	−0,25	−0,08	0	+1,1			−0,7	−0,4	−0,7	+0,7	−2,1	−1,6	−1,0	−4,7
	6	−0,08	−0,25	+0,17	+1,3	0			−0,4	−0,5	+0,9	−0,5	+2,2	−0,3	+0,5	+2,4
3	7	+0,08	0	−0,42	0	+0,2	−1,3	−1,6	+0,4	+0,6	+0,4	+0,8	−0,2	−0,8	−0,3	−1,3
	8	+0,08	+0,25	−0,17	−1,3	0			+0,4	+0,5	−0,9	+0,5	−2,2	+0,2	+0,5	−1,5
	9	−0,20	−0,25	−0,42	0	−1,8			+0,5	+0,6	+0,5	−1,2	+2,3	−0,6	+2,0	+3,7
4	10	+0,40	+0,50	+0,42	0	−0,2	—	—	−0,6	−0,6	−0,6	−0,8	−0,2	+0,3	−0,2	−0,1
	11	+0,20	+0,25	+0,42	0	+1,8			−0,5	−0,6	−0,5	+1,2	−2,3	+0,6	+2,0	+0,3
	12	+0,40	+0,25	+0,17	+1,8	0			−0,7	−0,5	+1,1	−0,5	+2,3	−0,7	+1,0	+2,9

$[A']_l^{II}$	−2,2	+1,6	−1,3
$[B']_l^{II}$	−1,3	+1,3	−1,6

$$\left.\begin{array}{ll} [A''\,A''] & 6,24 \\ [B''\,B''] & 6,22 \\ [A''\,B''] & -3,26 \end{array}\right\}\ \text{(8) სქემისათვის}$$

$K_A = +1,87$ $K_B = -1,11$ (27) ფორმულისათვის

გაუსის სქემა (კორელატების გამოთვლა)

სქემა 4.8.4.8

№№	აღნ.	K_A	K_B	$W^{III'}$	S	კონტროლი
1	a	6,24	—3,26	—15,30	—12,32	
2	E_1	—1	+0,522	+ 2,452	1,974	+1,974
3		+1,87	—0,58	+ 2,45		
4	b		6,22	+13,00	+15,96	
5	$E_1 \times a_2$		—1,70	— 7,99	6,44	
6	$b \cdot 1$		4,52	5,01	9,52	9,53
7	E_2		—1	—1,11	— 2,11	—2,11
8			—1,11			

VII. საბოლოო კონტროლი

№№	გაწონასწორებული კუთხეები
1	101°24′39″,1
2	30 04 14 ,2
3	48 31 6 ,7
	180° 0′ 0″,0
4	99 11′46″,2
5	42 11 23 ,3
6	38 36 50 ,4
	179°59′59″,9
7	78°04′10″,7
8	70 42 9 ,5
9	31 13 39 ,7
	179°59′59″,9

№№	გაწონასწორებული კუთხეები
10	81°19′23″,9
11	40 27 4 ,3
12	58 13 31 ,9
	180°00′ 0″,1

№№	გაწონასწორებული კუთხეები		№№	გაწონასწორებული კუთხეები	
1	101°24′39″,1	9.9913296	2	30°04′14″,2	9.6998957
6	38 36 50 ,4	9.7952337	4	99 11 46 ,2	9.9943818
AB		3.8706250	AD		3.9629110

$\Sigma_1 = 3.6571883$ $\Sigma_2 = 3.6571885$

$\Sigma_1 - \Sigma_2 = -2(\lg_7)$

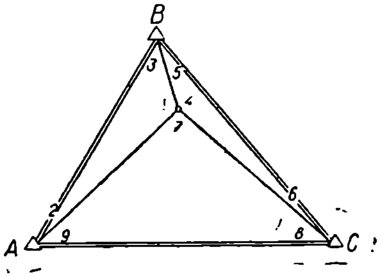
5	42°11′23″,3	9.8271035	4	99°11′46,″2	9.9943818
7	78 04 10 ,7	9.9905162	9	31 13 39, 7	9.7146989
BA		3.8706250	BC		3.9791640

$\Sigma_1 = 3.6882447$ $\Sigma_2 = 3.6882447$

$\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 4. 1. ხისტ სამკუთხედში პუნქტის ჩასმის ორი ძირითადი შემთხვევა.

პ ი რ ვ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. არსებული სატრიანგულაციო ქსელის ხისტი ABC სამკუთხედის შესაბამისი კუთხეები და გვერდების ლოგარითმები მოცემულია (4) ცხრილში, ხოლო ამ სამკუთხედში D პუნქტის ჩასმისათვის განაზომი კუთხეების მნიშვნელობები მოცემულია (5) ცხრილში. (2) ფიგურის



ნახ. 4.8.4.2.

შესაბამისი p და q მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობები მოცემულია (6) ცხრილში. D პუნქტის განსაზღვრისათვის შესრულდეს განაზომთა გაწონასწორება და განისაზღვროს გაწონასწორებული კუთხეებით განსაზღვრული DC გვერდის ლოგარითმის წონა.

ც ხ რ ი ლ ი 4.8.4.4

ხისტი კუთხეები	კუთხეების მნიშვნელობები	გვერდები
A_{29}	59°26′54″,9	
		4.249880
B_{35}	70 39 44 ,5	
		4.289570
C_{88}	49 53 20 ,6	
		4.198337
A_{29}		

ც ხ რ ი ლ ი 4.8.4.5

კუთხეები	განაზომები
1	118°14′57″
2	15 40 24
3	46 04 36
4	146 50 50
5	24 35 14
6	8 34 00
7	94 54 13
8	41 19 11
9	43 46 31

ც ხ რ ი ლ ი 4.8.4.6

კუთხეების №№	p	q	კუთხეების №№	p	q
1	−0,4	0,0	6	−0,2	−0,4
2	−0,4	−0,2	7	+0,4	+0,4
3	−0,2	+0,2	8	+0,2	+0,4
4	0,0	−0,4	9	+0,4	+0,2
5	+0,2	−0,2			

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განსახილველ შემთხვევაში წარმოიშობა შვიდი პირობითი განტოლება, რომლებიც სამ ჯგუფად წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

I ჯგუფი

$$(2)+(9)+W_1^{I}=0 \quad \text{სადაც} \quad W_1^{I}=2+9-A_{29},$$

$$(3)+(5)+W_2^{I}=0 \quad \text{"} \quad W_2^{I}=3+5-B_{35},$$

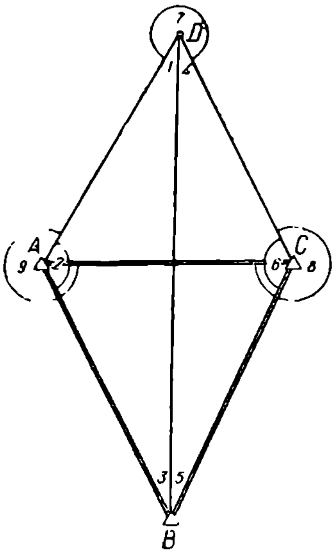
$$(6)+(8)+W_3^{I}=0 \quad \text{"} \quad W_3^{I}=6+8-C_{68},$$

$$(1)+(4)+(7)+W_4^{I}=0 \quad \text{"} \quad W_4^{I}=1+4+7-360^\circ.$$

II ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+W_1^{II}=0,$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{II}=0.$$



ნახ. 4.8.4.3.

III ჯგუფი

$$W^{III}=10^6\cdot \lg \frac{\sin 3\cdot \sin 6\cdot \sin 9}{\sin 2\cdot \sin 5\cdot \sin 8}$$

წონითი ფუნქცია იქნება

$$\overline{DC}=\overline{AC}\frac{\sin 9}{\sin 7},$$

ანუ

$$\lg \overline{DC}=\lg \overline{AC}-\Delta_7(7)+\Delta_9(9).$$

მაშასადამე,

$$\varphi_7=-\Delta_7, \quad \varphi_9=+\Delta_9,$$

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=\varphi_8=0.$$

მეორე შემთხვევა. როცა D პუნქტის ჩასმა საჭიროა ხისტი სამკუთხედის ფარგლების გარეთ, მაშინ ჯობს კუთხეები ალინიშნოს და გაიზომოს (3) ნახაზზე ნაჩვენები თანამიმდევრობით. ამ შემთხვევაში გაწონასწორება ისე შესრულდება, როგორც პირველი შემთხვევის დროს. შემოწმდეს (6) ცხრილის რიცხვითი სიდიდეები.

სავარჯიშო 4. 8. 4. 2. ხისტ სამკუთხედში ორი პუნქტის ჩასმის ოთხი შემთხვევა.

პირველი შემთხვევა (ნახ. 4). მე-4 ნახაზის შესაბამისი პირობითი განტოლებები შემდეგი ჯგუფების სახით წარმოვიდგინოთ.

I ჯგუფი

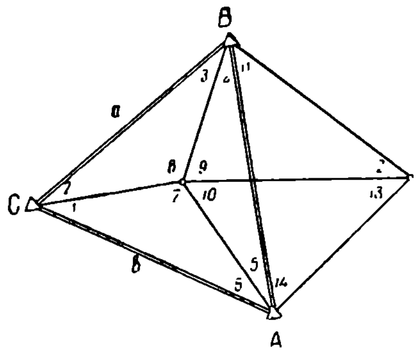
$$(1)+(2)+W_1^{\mathrm{I}}=0 \qquad \text{სადაც} \quad W_1^{\mathrm{I}}=1+2-C_{12},$$

$$(3)+(4)+W_2^{\mathrm{I}}=0 \qquad " \quad W_2^{\mathrm{I}}=3+4-B_{34},$$

$$(5)+(6)+W_3^{\mathrm{I}}=0 \qquad " \quad W_3^{\mathrm{I}}=5+6-A_{56},$$

$$(7)+(8)+(9)+(10)+W_4^{\mathrm{I}}=0 \qquad " \quad W_4^{\mathrm{I}}=7+8+9+10-360°,$$

$$(11)+(12)+(13)+(14)+W_5^{\mathrm{I}}=0 \qquad " \quad W_5^{\mathrm{I}}=11+12+13+14-180°.$$



ნახ. 4.8.4.4.

II ჯგუფი

$$(1)+(6)+(7)+W_1^{\mathrm{II}}=0,$$

$$(2)+(3)+(8)+W_2^{\mathrm{II}}=0,$$

$$(4)+(9)+(11)+(12)+W_3^{\mathrm{II}}=0.$$

III ჯგუფი

$$W_1^{\mathrm{III}}=10^6 \lg \frac{\sin 12\cdot\sin[5+14]\cdot\sin 4}{\sin[4+11]\sin 13\cdot\sin 5},$$

$$W_2^{\mathrm{III}}=10^6 \lg \frac{a\cdot\sin 3\cdot\sin 7}{b\cdot\sin 8\cdot\sin 6}.$$

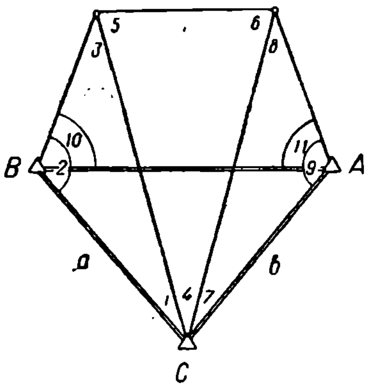
ε_i' პირველადი შესწორებები პირველი ჯგუფის ყოველ ტოლობაში განაწილდება სათანადო შეუკვრელობების მიხედვით თანაბრად.

ε_i'' მეორადი შესწორებებისა და მესამე ჯგუფის ტოლობების კოეფიციენტების მეორადი გარდაქმნა ხდება (13) და (16) ფორმულების ანალოგიურად და (7) ცხრილის დახმარებით. შემოწმდეს (7) ცხრილის რიცხვითი სიდიდეები.

ცხრილი 4.8.4.7

კუთხ. №№	17 p	17 q	17 l	კუთხ. №№	17 p	17 q	17 l
1	−3	+4	+1	8	−1,25	−8,25	−1
2	+3	−4	−1	9	+2,25	+1,25	−5
3	−1,75	−4,75	+2	10	+6,25	+7,25	+5
4	+1,75	+4,75	−2	11	−2	−3	−5
5	+6,75	+3,75	+2	12	−2	−3	−5
6	−6,70	−3,75	−2	13	+2	+3	+5
7	−7,75	−0,25	+1	14	+2	+3	+5

მეორე შემთხვევა (ნახ. 5). ამ შემთხვევაში წარმოიშობა პირობით განტოლებათა შემდეგი სახის ჯგუფები



ნახ. 4.8.4.5.

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+W_1^{\mathrm{I}}=0, \quad \text{სადაც} \quad W_1^{\mathrm{I}}=1+2+3-180°;$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{\mathrm{I}}=0, \quad \text{"} \quad W_2^{\mathrm{I}}=4+5+6-180,$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3^{\mathrm{I}}=0, \quad \text{"} \quad W_3^{\mathrm{I}}=7+8+9-180.$$

II ჯგუფი

$$(2)-(10)+W_1^{\mathrm{II}}=0,$$

$$(9)-(11)+W_2^{\mathrm{II}}=0,$$

$$(1)+(4)+(7)+W_3^{\mathrm{II}}=0.$$

III ჯგუფი

$$\lg \frac{a\cdot\sin 2\cdot\sin 5\cdot\sin 8}{b\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 9}=W^{\mathrm{III}}$$

ε'' და A'' განისაზღვრება (8) ცხრილის გამოყენებით. შემოწმდეს (8) ცხრილის რიცხვითი მონაცემები.

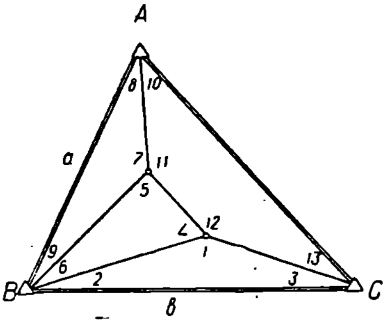
ცხრილი 4.8.4.8

კუთხ. №№	14 p	14 q	14 l
1	+1,9	−0,9	−4,5
2	−5,3	+0,3	+1,5
3	+3,4	+0,6	+3,0
4	−1,0	−1,0	−5,0
5	+0,5	+0,5	+2,5
6	−0,5	+0,5	+2,5
7	−0,9	+1,9	−4,5
8	+0,6	+3,4	+3,0
9	+0,3	−5,3	+1,5
10	+8,7	+0,3	+1,5
11	+0,3	+8,7	+1,5

მესამე შემთხვევა (ნახ. 6).

ცხრილი 4.8.4.9

კუთხ. №№	247 p	247 q	247 l
8	−87	−39	−30
10	+87	+39	+30
9	−70	+32,5	+44
6	+26	−65,0	+26
2	+44	+32,5	−70
3	−30	−39	−87
13	+30	+39	+87
7	−90	+ 6,5	−14
5	+ 6	−91,0	−32
11	+84	+84,5	+46
4	−32	−91	+ 6
1	−14	+6,5	−90
12	+46	+84,5	+84



ნახ. 4.8.4.6.

ამ შემთხვევის შესაბამისი პირობითი ტოლობების ჯგუფებია:

I ჯგუფი

$(8)+(10)+W_1^{\mathrm{I}}=0$ სადაც $W_1^{\mathrm{I}}=8+10-A_{810}$,

$(2)+(6)+(9)+W_2^{\mathrm{I}}=0$ „ $W_2^{\mathrm{I}}=2+6+9-B_{269}$,

$(3)+(13)+W_3^{\mathrm{I}}=0$ „ $W_3^{\mathrm{I}}=3+13-C_{313}$,

$(5)+(7)+(11)+W_4^{\mathrm{I}}=0$ „ $W_4^{\mathrm{I}}=5+7+11-360°$,

$(1)+(4)+(12)+W_5^{\mathrm{I}}=0$ „ $W_5^{\mathrm{I}}=1+4+12-360°$.

II ჯგუფი

$$(7)+(8)+(9)+W_1^{II}=0,$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{II}=0,$$

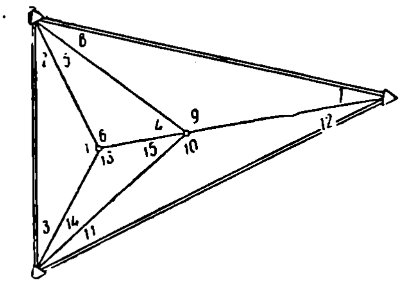
$$(1)+(2)+(3)+W_3^{II}=0.$$

III ჯგუფი

$$\lg\frac{a\cdot\sin 8\cdot\sin 5\cdot\sin 1}{b\cdot\sin 7\cdot\sin 4\cdot\sin 3}=W^{III}$$

ε'', A'' განისაზღვრება (9) ცხრილის გამოყენებით. შემოწმდეს (9) ცხრილის მონაცემები.

მეოთხე შემთხვევა (ნახ. 7).



ნახ. 4.8.4.7.

ცხრილი 4.8.4.10

კუთხ. №№	266 p	266 q	266 l	266 m
1	+ 28	+ 28	+ 14	—70
2	— 71	+ 43	— 7	+35
3	+ 43	— 71	— 7	+35
4	+ 89	+ 51	+ 35	+91
5	— 94	— 18	— 28	+ 7
6	+ 5	— 33	— 7	—98
7	+ 19	— 19	—133	0
8	—101	— 25	+ 35	—42
9	+ 82	+ 44	+ 98	+42
10	+ 44	+ 82	+ 98	+42
11	— 25	—101	+ 35	—42
12	— 19	+ 19	—133	0
13	— 33	+ 5	— 7	—98
14	— 18	— 94	— 28	+ 7
15	+ 51	+ 89	+ 35	+91

ამ შემთხვევის შესაბამისი პირობითი ტოლობების ჯგუფებია:

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+W_1^{I}=0 \quad \text{სადაც} \quad W_1^{I}=1+2+3-180^\circ,$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{I}=0 \quad " \quad W_2^{I}=4+5+6-180,$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3^{I}=0 \quad " \quad W_3^{I}=7+8+9-180,$$

$$(10)+(11)+(12)+W_4^{I}=0 \quad " \quad W_4^{I}=10+11+12-180,$$

$$(13)+(14)+(15)+W_5^{I}=0 \quad " \quad W_5^{I}=13+14+15-180.$$

II ჯგუფი

$$(2)+(5)+(8)+W_1^{II}=0, \qquad (7)+(12)+W_3^{II}=0,$$

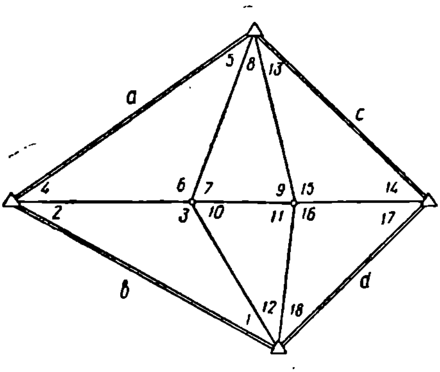
$$(3)+(11)+(14)+W_2^{II}=0, \qquad (1)+(6)+(13)+W_4^{II}=0.$$

III ჯგუფი

$$\lg \frac{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 14}{\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 15} = W_1^{III}, \qquad \lg \frac{\sin 13\cdot\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 11}{\sin 14\cdot\sin 6\cdot\sin 8\cdot\sin 12} = W_2^{III},$$

ε'', A'' და B'' განისაზღვრება (10) ცხრილის გამოყენებით. შემოწმდეს (10) ცხრილის რიცხვითი მონაცემები.

სავარჯიშო 4. 8. 4. 3. ხისტ ოთხკუთხედში ორი პუნქტის ჩასმა (8) ნახაზი.



ნახ. 4.8.4.8.

ცხრილი 4.8.4.11

კუთხ. №№	6 *p*	6 *q*	6 *l*	6 *m*	6 *n*
1	+1,8	—0,2	+0,6	—1,4	+1,0
2	—3,0	0	—0,5	+0,5	0
3	+1,2	+0,2	—0,1	+0,9	—1,0
4	—3,0	0	+0,5	—0,5	0
5	+1,8	—0,2	—1,4	+0,6	+1,0
6	+1,2	+0,2	+0,9	—0,1	—1,0
7	—1,2	—0,2	+0,1	—0,9	—2,0
8	—0,6	—0,6	—2,2	—0,2	0
9	+1,8	+0,8	+2,1	+1,1	+2,0
10	—1,2	—0,2	—0,9	+0,1	—2,0
11	+1,8	+0,8	+1,1	+2,1	+2,0
12	—0,6	—0,6	—0,2	—2,2	0
13	1,2	+0,8	—2,4	—0,4	—1,0
14	+0	—3,0	+0,5	—0,5	0
15	—1,2	+2,2	+1,9	+0,9	+1,0
16	+1,2	+2,2	+0,9	+1,9	+1,0
17	0	—3,0	—0,5	+0,5	0
18	—1,2	+0,8	—0,4	—2,4	—1,0

შესაბამის პირობით განტოლებათა ჯგუფებია:

I ჯგუფი

$(1)+(2)+(3)+W_1^I=0$ სადაც $W_1^I=1+2+3-180,$

$(4)+(5)+(6)+W_2^I=0$ „ $W_2^I=4+5+6-180,$

$(7)+(8)+(9)+W_3^I=0$ „ $W_3^I=7+8+9-180,$

$$(10)+(11)+(12)+W_4'=0 \quad \text{სადაც} \quad W_4'=10+11+12-180,$$
$$(13)+(14)+(15)+W_5'=0 \quad \text{„} \quad W_5'=13+14+15-180,$$
$$(16)+(17)+(18)+W_6'=0 \quad \text{„} \quad W_6'=16+17+18-180.$$

II ჯგუფი

$$(2)+(4)+W_2''=0, \qquad (1)+(12)+(18)+W_5''=0,$$
$$(14)+(17)+W_3''=0, \qquad (3)+(6)+(7)+(40)+W_6''=0.$$
$$(5)+(8)+(13)+W_4''=0,$$

III ჯგუფი

$$\lg \frac{a\cdot\sin 5\cdot\sin 3}{b\cdot\sin 6\cdot\sin 1}=W_1''',$$

$$\lg \frac{c\cdot\sin 13\cdot\sin 16}{d\cdot\sin 15\cdot\sin 18}=W_2''',$$

$$\lg \frac{\sin 2\cdot\sin 5\cdot\sin 9\cdot\sin 12}{\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 8\cdot\sin 11}=W_3'''.$$

ε', A'', B'' და C'' სიდიდეები განისაზღვრება (11) ცხრილის დახმარებით. შემოწმდეს (11) ცხრილის რიცხვითი მონაცემები.

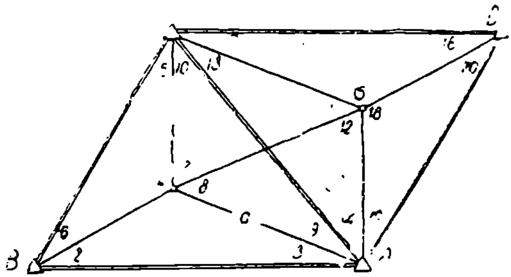
მაგალითი 4. 8. 4. 2. სამ ჯგუფად გაწონასწორდეს არსებული ტრიანგულაციის ქსელის ორ ხისტ სამკუთხედში ორი წერტილის ჩასმა (9) ნახაზისა და (12), (13) ცხრილების მიხედვით.

ცხრილი 4.8.4.12

კუთხ. №№	განაზომები
1	126° 14′ 24″
2	30 05 47
3	23 39 47
4	120 08 31
5	29 58 36
6	29 52 53
7	66 34 53
8	47 02 12
9	28 59 29
10	37 23 28
11	46 39 00
12	65 55 02
13	29 22 39
14	38 03 21
15	130 03 12
16	27 53 58
17	22 2 43
18	117 22 46
19	31 26 47
20	31 10 24

ცხრილი 4.8.4.13

ხისტი კუთხე	კუთხეების სიდიდეები
A_{39}	52°39′ 16,5″
B_{28}	59 58 42,7
C_{510}	67 22 00,8
C_{1317}	51 25 26,3
D_{1620}	59 04 22,3
A_{1419}	69 30 11,4



ნახ. 4.8.4.9.

ამოხსნა

I. შევადგენთ პირობით განტოლებათა აუცილებელ რაოდენობას, რომელთაც სამ ჯგუფად დავყოფთ (პირველ ჯგუფში საჭიროა შეტანილი იქნეს რაც შეიძლება მეტი რაოდენობა ურთიერთდაუკავშირებელი ტოლობისა).

I ჯგუფი

1. $(2)+(6)+W_1^I=0$ საიდაც $W_1^I=2+6-B_{26}$;

2. $(3)+(9)+W_2^I=0$ „ $W_2^I=3+9-A_{39}$;

3. $(5)+(10)+W_3^I=0$ „ $W_3^I=5+10-C_{610}$;

4. $(13)+(17)+W_4^I=0$ „ $W_4^I=13+17-C_{1317}$;

5. $(14)+(19)+W_5^I=0$ „ $W_5^I=14+19-A_{1419}$;

6. $(16)+(20)+W_6^I=0$ „ $W_6^I=16+20-D_{1620}$;

7. $(1)+(4)+(7)+(8)+W_7^I=0$ „ $W_7^I=1+4+7+8-360$;

8. $(11)+(12)+(15)+(18)+W_8^I=0$ „ $W_8^I=11+12+15+18-360$.

II ჯგუფი

1. $(1)+(2)+(3)+W_1^{II}=0$;

2. $(4)+(5)+(6)+W_2^{II}=0$;

3. $(15)+(16)+(17)+W_3^{II}=0$.

4. $(18)+(19)+(20)+W_4^{II}=0$;

5. $(7)+(10)+(11)+(13)+W_5^{II}=0$

III ჯგუფი

1. $$10^7 \lg \frac{\sin 2\cdot\sin 5\cdot\sin 9}{\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 10}=W_1^{III},$$

2. $$10^7 \lg \frac{\sin 13\cdot\sin 16\cdot\sin 19}{\sin 14\cdot\sin 17\cdot\sin 20}=W_2^{III},$$

3. $$10^7 \lg \frac{\sin 8\cdot\sin[10+13]\sin 14}{\sin[9+14]\sin 7\cdot\sin 13}=W_3^{III}.$$

II. p_i, q_i, l_i, m_i, და n_i მუდმივების გამოთვლა

1. (13) ფორმულის მიხედვით (სექციებს ვალაგებთ I ჯგუფის შესაბამისად, ხოლო კოეფიციენტები გამოთვლილია II ჯგუფისათვის).

სექციების №№	კუთხ. №№	α_i	β_i	γ_i	η_i	ζ_i	α_i'	β_i'	γ_i'	η_i'	ζ_i'
I	2	1	0	0	0	0	+0,5	−0,5	0	0	0
	6	0	1	0	0	0	−0,5	+0,5	0	0	0
II	3	1	0	0	0	0	+0,5	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	−0,5	0	0	0	0
III	5	0	1	0	0	0	0	+0,5	0	0	−0,5
	10	0	0	0	0	1	0	−0,5	0	0	−0,5
IV	13	0	0	0	0	1	0	0	−0,5	0	+0,5
	17	0	0	1	0	0	0	0	+0,5	0	0,5
V	14	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,5	0
	19	0	0	0	1	0	0	0	0	+0,5	0
VI	16	0	0	1	0	0	0	0	+0,5	−0,5	0
	20	0	0	0	1	0	0	0	−0,5	+0,5	0
VII	1	1	0	0	0	0	+0,75	−0,25	0	0	−0,25
	4	0	1	0	0	0	−0,25	+0,75	0	0	−0,25
	7	0	0	0	0	1	−0,25	−0,25	0	0	+0,75
	8	0	0	0	0	0	−0,25	−0,25	0	0	−0,25
VIII	11	0	0	0	0	1	0	0	−0,25	−0,25	+0,75
	12	0	0	0	0	0	0	0	−0,25	−0,25	−0,25
	15	0	0	1	0	0	0	0	+0,75	−0,25	−0,25
	18	0	0	0	1	0	0	0	−0,25	+0,75	−0,25

$[\alpha'\alpha'] = 1{,}75;\quad [\alpha'\beta'] = -0{,}75;\quad [\alpha'\gamma'] = 0;\quad [\alpha'\eta'] = 0,\quad [\alpha'\zeta'] = -0{,}25$

$[\beta'\beta'] = 1{,}75;\quad [\beta'\gamma'] = 0;\quad [\beta'\eta'] = 0;\quad [\beta'\zeta'] = -0{,}75;$

$[\gamma'\gamma'] = 1{,}75;\quad [\gamma'\eta'] = -0{,}75;\quad [\gamma'\zeta'] = -0{,}75;$

$[\eta'\eta'] = 1{,}75;\quad [\eta'\zeta'] = -0{,}25;$

$[\zeta'\zeta'] = 2{,}50;$

2. (8) დამოკიდებულებისათვის

შევადგენთ A მატრიცას

$$A = \left\| \begin{matrix} [\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta'] & [\alpha'\zeta'] \\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\zeta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\zeta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\zeta'] \\ [\alpha'\zeta'] & [\beta'\zeta'] & [\gamma'\zeta'] & [\eta'\zeta'] & [\zeta'\zeta'] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1{,}75 & -0{,}75 & 0 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & 1{,}75 & 0 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & 1{,}75 & -0{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}75 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}75 & -0{,}25 & 2{,}50 \end{matrix} \right\|$$

ალგებრული დამატებების გამოთვლა

$$A_{[\alpha'\alpha']} = \begin{vmatrix} [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\zeta'] \\ [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\zeta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\zeta'] \\ [\beta'\zeta'] & [\gamma'\zeta'] & [\eta'\zeta'] & [\zeta'\zeta'] \end{vmatrix} = [\beta'\beta']\,A_{[\beta'\beta']} - [\beta'\gamma']\,A_{[\beta'\gamma']} + [\beta'\eta']\,A_{[\beta'\eta']} - [\beta'\zeta']\,A_{[\beta'\zeta']} = [\beta'\beta']A_{[\beta'\beta']} - 0\cdot A_{[\beta'\gamma']} + 0\cdot A_{[\beta'\eta']} - [\beta'\zeta']A_{[\beta'\zeta']} =$$

$$= [\beta'\beta'] \begin{vmatrix} [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\zeta'] \\ [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\zeta'] \\ [\gamma'\zeta'] & [\eta'\zeta'] & [\zeta'\zeta'] \end{vmatrix} - [\beta'\zeta'] \begin{vmatrix} [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\beta'\zeta'] & [\gamma'\zeta'] & [\eta'\zeta'] \end{vmatrix} =$$

$$= 1{,}75 \begin{vmatrix} 1{,}75 & -0{,}75 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}25 & 2{,}50 \end{vmatrix} - (-0{,}75) \begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix} =$$

$$= 1{,}75\cdot 4{,}875 - (0{,}75)\cdot 1{,}875 = 7{,}125$$

$$A_{[\alpha'\beta']}=-\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}\begin{aligned}&=-([\alpha'\beta']\,A_{[\alpha'\beta']}-[\beta'\gamma']\,A_{[\beta'\gamma']}+\\&+[\beta'\eta']A_{[\beta'\eta']}+[\beta'\vartheta']A_{[\beta'\vartheta']})=\\&=-[\alpha'\beta']\,A_{[\alpha'\beta']}+0\cdot A_{[\beta'\gamma']}-\\&-0\cdot A_{[\beta'\eta']}+[\beta'\vartheta']A_{[\beta'\vartheta']}=\end{aligned}$$

$$=-[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}+[\beta'\vartheta']\begin{vmatrix}[\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=$$

$$=0,75\begin{vmatrix}1,75 & -0,75 & -0,75 \\ -0,75 & 1,75 & -0,25 \\ -0,75 & -0,25 & 2,50\end{vmatrix}-0,75\begin{vmatrix}0 & 1,75 & -0,75 \\ 0 & -0,75 & 1,75 \\ -0,25 & -0,75 & -0,25\end{vmatrix}=$$

$$=0,75\cdot 4,875-0,75\,(-0,625)=3,188$$

$$A_{[\alpha'\gamma']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}\begin{aligned}&=[\alpha'\beta']\,A_{[\alpha'\beta']}-[\beta'\beta']A_{[\beta'\beta']}+\\&+[\beta'\eta]'A_{[\beta'\eta']}-[\beta'\vartheta'[A_{[\beta'\vartheta']}=\end{aligned}$$

$$=[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\beta'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}-[\beta'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] &]\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}-$$

$$-[\beta'\xi']\begin{vmatrix}[\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'[& [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=-0,75\begin{vmatrix}0 & -0,75 & -0,75 \\ 0 & 1,75 & -0,25 \\ -0,75 & -0,25 & 2,50\end{vmatrix}-$$

$$-1,75\begin{vmatrix}0 & -0,75 & -0,75 \\ 0 & 1,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 2,50\end{vmatrix}+0,75\begin{vmatrix}0 & 0 & -0,75 \\ 0 & 0 & 1,75 \\ -0,25 & -0,75 & -0,25\end{vmatrix}=$$

$$=-0,75\cdot(-1,125)-1,75\cdot(-0,375)=1,500$$

$$A_{[\alpha'\eta']}=-\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}\begin{aligned}&=-([\alpha'\beta']\,A_{[\alpha'\beta']}-[\beta'\beta']A_{[\beta'\beta']}+\\&+[\beta'\gamma']\,A_{[\beta'\gamma']}-[\beta'\vartheta']\,A_{[\beta'\vartheta']})=\end{aligned}$$

$$=-[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}+[\beta'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}+$$

$$+[\beta'\vartheta']\begin{vmatrix}[\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta']\end{vmatrix}=0,75\begin{vmatrix}0 & 1,75 & -0,75 \\ 0 & -0,75 & 0,25 \\ -0,75 & -0,75 & 2,50\end{vmatrix}+$$

$$+1{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & 2{,}50 \end{vmatrix} -0{,}75\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}75 \end{vmatrix} =$$

$$=0{,}75\cdot 0{,}75+1{,}75\cdot 0{,}25=1{,}000$$

$$A_{[\alpha'\zeta']}=\begin{vmatrix} [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] \\ [\alpha'\gamma'[& [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta)[& [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ ]\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix} = [\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}-[\beta'\beta']A_{[\beta'\beta']}+ + [\beta'\gamma']A_{[\beta'\gamma']}-[\beta'\eta']A_{[\beta'\eta']}=$$

$$=[\alpha'\beta']\begin{vmatrix} [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'[& [\eta'\eta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix} -[\beta'\beta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix}=$$

$$=-0{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix} -1{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix}=$$

$$=-0{,}75\cdot(-1{,}875)-1{,}75\cdot(-0{,}625)=2{,}500$$

$$A_{[\beta'\beta']}=\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma,\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} = [\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}+ + [\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']}=$$

$$=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix} [\gamma'\gamma,] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} -[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix}=$$

$$=1{,}73\begin{vmatrix} 1{,}75 & -0{,}75 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}25 & 2{,}50 \end{vmatrix} +0{,}25\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix}=$$

$$=1{,}75\cdot 4{,}875+0{,}25\cdot(-0{,}625)=8{,}375$$

$$A_{[\beta'\gamma']}=-\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha' & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\eta'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} = -[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+ + [\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']}=$$

$$=-[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix} [\beta'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} +[\alpha'\beta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta]' \\ ]\alpha'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix}+$$

$$+[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix} =-1{,}75\begin{vmatrix} 0 & -0{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}25 & 2{,}50 \end{vmatrix}-$$

$$-0{,}75\begin{vmatrix} 0 & -0{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 2{,}50 \end{vmatrix} -0{,}25\begin{vmatrix} 0 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & 1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix}=$$

$$=-1{,}75\cdot(-1{,}125)-0{,}75\cdot(-0{,}375)=2{,}250$$

$$A_{[\beta'\eta']}=\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} \begin{matrix} =[\alpha'\alpha']\,A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+ \\ +[\alpha'\gamma']\,A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']}= \end{matrix}$$

$$=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix} [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} -[\alpha'\beta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix}-$$

$$-[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] \end{vmatrix}=1{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & 2{,}50 \end{vmatrix}+$$

$$+0{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & 2{,}50 \end{vmatrix} +0{,}25\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}75 \end{vmatrix}=$$

$$=1{,}75\cdot 0{,}750+0{,}75\cdot 0{,}250=1{,}500$$

$$A_{[\beta'\vartheta']}=-\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix} \begin{matrix} =-([\alpha'\alpha']\,A_{[\alpha'\alpha']}-[A'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+ \\ +[\alpha'\gamma']\,A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\eta']\,A_{[\alpha'\eta']})= \end{matrix}$$

$$=-[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix} [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix} +[\alpha'\beta']\begin{vmatrix} [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] \end{vmatrix}=$$

$$=-1{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix} -0{,}75\begin{vmatrix} 0 & 1{,}75 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix}=$$

$$=-1{,}75\cdot(-1{,}875)-0{,}75\cdot(-0{,}625)=3{,}750$$

$$A_{[\gamma'\gamma']}=\begin{vmatrix} [\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\eta'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} \begin{matrix} =[\alpha'\alpha']\,A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+ \\ +[\alpha'\eta']\,A_{[\alpha'\eta']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']}= \end{matrix}$$

$$=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix} [\beta'\beta'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix} -[\alpha'\beta']\begin{vmatrix} [\alpha'\beta'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta'] \end{vmatrix}-$$

$$-[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix} = 1{,}75 \begin{vmatrix}1{,}75 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}25 & 2{,}50\end{vmatrix}+$$

$$+0{,}75\begin{vmatrix}-0{,}75 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 2{,}50\end{vmatrix}+0{,}25\begin{vmatrix}-0{,}75 & 1{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25\end{vmatrix}=$$

$$=1{,}75\cdot 6{,}563+0{,}75\cdot(-3{,}562)+0{,}25\cdot(-1{,}750)=8{,}376$$

$$A_{[\gamma'\eta']}=-\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\zeta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}=-([\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+$$
$$+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']})=$$

$$=-[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix}[\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}+[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}+$$

$$+[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta']\end{vmatrix}=-1{,}75\begin{vmatrix}1{,}75 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & 2{,}50\end{vmatrix}-$$

$$-0{,}75\begin{vmatrix}-0{,}75 & 0 & -0{,}75 \\ 0 & -0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & 2{,}50\end{vmatrix}-0{,}25\begin{vmatrix}-0{,}75 & 1{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}75\end{vmatrix}=$$

$$=-1{,}75\cdot(-3{,}187)-0{,}75\cdot 1{,}688-0{,}25\cdot 0{,}750=4{,}124$$

$$A_{[\gamma'\vartheta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta'] \\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+$$
$$+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']}=$$

$$=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix}[\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] \\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}-[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] \\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=$$

$$=1{,}75\begin{vmatrix}1{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 \\ -0{,}75 & -0{,}75 & -0{,}25\end{vmatrix}+0{,}75\begin{vmatrix}-0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}75 & -1{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}25\end{vmatrix}=$$

$$=1{,}75\cdot 2{,}625+0{,}75\cdot(-1{,}125)=3{,}750$$

$$A_{[\eta'\eta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\vartheta'] \\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta'] \\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta'] \\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+$$
$$+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\vartheta']A_{[\alpha'\vartheta']}=$$

$$
=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix}[\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta']\\ [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta']\\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}-[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\vartheta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\vartheta']\\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}-
$$

$$
-[\alpha'\vartheta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma']\\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma']\\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta']\end{vmatrix}=1,75\begin{vmatrix}1,75 & 0 & -0,75\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ -0,75 & -0,75 & 2,50\end{vmatrix}+
$$

$$
+0,75\begin{vmatrix}-0,75 & 0 & -0,75\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ -0,25 & -0,75 & 2,50\end{vmatrix}+0,25\begin{vmatrix}-0,75 & 1,75 & 0\\ 0 & 0 & 1,75\\ -0,25 & -0,75 & -0,75\end{vmatrix}=
$$

$$
=1,75\cdot 5,688+0,75\,(-3,187)+0,25\cdot(-1,750)=7,126
$$

$$
A_{[\eta'\vartheta']}=-\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta']\\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=-([\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+
$$

$$
+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']})=
$$

$$
=-[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix}[\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}+[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\alpha'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta']\end{vmatrix}=
$$

$$
=-1,75\begin{vmatrix}1,75 & 0 & 0\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ -0,75 & -0,75 & -0,25\end{vmatrix}-0,75\begin{vmatrix}-0,75 & 0 & 0\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ -0,25 & -0,75 & -0,25\end{vmatrix}=
$$

$$
=-1,75\cdot(-1,750)-0,75\cdot 0,750=2,500
$$

$$
A_{[\vartheta'\vartheta']}=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta']\\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta']\end{vmatrix}=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\alpha']}+
$$

$$
+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']}=
$$

$$
=[\alpha'\alpha']\begin{vmatrix}[\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta']\end{vmatrix}-[\alpha'\beta']\begin{vmatrix}[\alpha'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta']\\ [\alpha'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta']\end{vmatrix}=
$$

$$
=1,75\begin{vmatrix}1,75 & 0 & 0\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ 0 & -0,75 & 1,75\end{vmatrix}+0,75\begin{vmatrix}-0,75 & 0 & 0\\ 0 & 1,75 & -0,75\\ 0 & -0,75 & 1,75\end{vmatrix}=
$$

$$
=1,75\cdot 4,375+0,75\cdot(-1,875)=6,250
$$

$$
D=\begin{vmatrix}[\alpha'\alpha'] & [\alpha'\beta'] & [\alpha'\gamma'] & [\alpha'\eta'] & [\alpha'\zeta']\\ [\alpha'\beta'] & [\beta'\beta'] & [\beta'\gamma'] & [\beta'\eta'] & [\beta'\zeta']\\ [\alpha'\gamma'] & [\beta'\gamma'] & [\gamma'\gamma'] & [\gamma'\eta'] & [\gamma'\zeta']\\ [\alpha'\eta'] & [\beta'\eta'] & [\gamma'\eta'] & [\eta'\eta'] & [\eta'\zeta']\\ [\alpha'\vartheta'] & [\beta'\vartheta'] & [\gamma'\vartheta'] & [\eta'\vartheta'] & [\vartheta'\vartheta']\end{vmatrix}=
$$

$$=[\alpha'\alpha']A_{[\alpha'\alpha']}-[\alpha'\beta']A_{[\alpha'\beta']}+[\alpha'\gamma']A_{[\alpha'\gamma']}-[\alpha'\eta']A_{[\alpha'\eta']}+$$
$$+[\alpha'\vartheta_1]A_{[\alpha'\vartheta']}=1,75\cdot 7,125+0,75\,(-3,188)-0,25\cdot 2,500=9,453$$

3. (7) დამოკიდებულებისათვის

$$f_{\alpha'\alpha'}=-\frac{A_{[\alpha'\alpha']}}{D}=-\frac{7,125}{9,453}=-0,754,$$

$$f_{\alpha'\beta'}=-\frac{A_{[\alpha'\beta']}}{D}=-\frac{3,188}{9,453}=-0,337,$$

$$f_{\alpha'\gamma'}=-\frac{A_{[\alpha'\gamma']}}{D}=-\frac{1,500}{9,453}=-0,159,$$

$$f_{\alpha'\eta'}=-\frac{A_{[\alpha'\eta']}}{D}=-\frac{1,000}{9,453}=-0,106,$$

$$f_{\alpha'\vartheta'}=-\frac{A_{[\alpha'\vartheta']}}{D}=-\frac{2,500}{9,453}=-0,264,$$

$$f_{\beta'\beta'}=-\frac{A_{[\beta'\beta']}}{D}=-\frac{8,375}{9,453}=-0,886,$$

$$f_{\beta'\gamma'}=-\frac{A_{[\beta'\gamma']}}{D}=-\frac{2,250}{9,453}=-0,238,$$

$$f_{\beta'\gamma'}=-\frac{A_{[\beta'\eta']}}{D}=-\frac{1,500}{9,453}=-0,159,$$

$$f_{\eta'\vartheta'}=-\frac{A_{[\beta'\vartheta']}}{D}=-\frac{3,750}{9,453}=-0,397,$$

$$f_{\gamma'\gamma'}=-\frac{A_{[\gamma'\gamma']}}{D}=-\frac{8,376}{9,453}=-0,886,$$

$$f_{\gamma'\eta'}=-\frac{A_{[\gamma'\eta']}}{D}=-\frac{4,124}{9,453}=-0,436,$$

$$f_{\gamma'\vartheta'}=-\frac{A_{[\gamma'\vartheta']}}{D}=-\frac{3,750}{9,453}=-0,397,$$

$$f_{\eta'\eta'}=-\frac{A_{[\eta'\eta']}}{D}=-\frac{7,126}{9,453}=-0,754,$$

$$f_{\eta'\vartheta}=-\frac{A_{[\eta'\vartheta']}}{D}=-\frac{2,500}{9,453}=-0,264,$$

$$f_{\vartheta'\vartheta'}=-\frac{A_{[\vartheta'\vartheta']}}{D}=-\frac{6,250}{9,453}=-0,661$$

4. (12) დამოკიდებულებისათვის

$$p_1=\alpha_1' f_{\alpha'\alpha'}+\beta_1' f_{\alpha'\beta'}+\gamma_1' f_{\alpha'\gamma'}+\eta_1' f_{\alpha'\eta'}+\vartheta_1' f_{\alpha'\vartheta'}=0{,}75\,(-0{,}754)-$$
$$-0{,}25\,(-0{,}337)+0\,(-0{,}159)+(-0{,}106)-0{,}25\,(-0{,}264)=-0{,}416$$
$$p_2=\alpha_2' f_{\alpha'\alpha'}+\beta_2' f_{\alpha'\eta'}+\gamma_2' f_{\alpha'\gamma'}+\eta_2' f_{\alpha'\eta'}+\vartheta_2' f_{\alpha'\vartheta'}=0{,}5\,(-0{,}754)-$$
$$-0{,}5(-0{,}337)+0(-0{,}159)+0(-0{,}106)+0(-0{,}264)=-0{,}210$$
$$p_3=+0{,}5(-0{,}754)=-0{,}377$$
$$p_4=-0{,}25(-0{,}754)+0{,}75(-0{,}337)-0{,}25(-0{,}264)=+0{,}002$$
$$p_5=0{,}5(-0{,}337)-0{,}5(-0{,}264)=-0{,}036$$
$$p_6=-0{,}5(-0{,}754)+0{,}5(-0{,}337)=+0{,}210$$
$$p_7=-0{,}25(-0{,}754)-0{,}25(-0{,}337)+0{,}75(-0{,}264)=+0{,}075$$
$$p_8=-0{,}25(-0{,}754)-0{,}25(-0{,}337)-0{,}25(-0{,}264)=+0{,}340$$
$$p_9=-0{,}5(-0{,}754)=0{,}377$$
$$p_{10}=-0{,}5(-0{,}337)+0{,}5(-0{,}264)=+0{,}036$$
$$p_{11}=-0{,}25\,(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}106)+0{,}75(-0{,}264)=-0{,}132$$
$$p_{12}=-0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}106)-0{,}25(-0{,}264)=+0{,}132$$
$$p_{13}=-0{,}5(-0{,}159)+0{,}5(-0{,}264)=-0{,}052$$
$$p_{14}=-0{,}5(-0{,}166)=0{,}053$$
$$p_{15}=0{,}75(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}106)-0{,}25(-0{,}264)=-0{,}027$$
$$p_{16}=0{,}5(-0{,}159)-0{,}5(-0{,}106)=-0{,}026$$
$$p_{17}=0{,}5(-0{,}159)-0{,}5(-0{,}264)=+0{,}052$$
$$p_{18}=-0{,}25(-0{,}159)+0{,}75(-0{,}106)-0{,}25(-0{,}264)=+0{,}026$$
$$p_{19}=0{,}5(-0{,}106)=-0{,}053$$
$$p_{20}=-0{,}5(-0{,}159)+0{,}5(-0{,}106)=+0{,}026$$
$$q_1=\alpha_1' f_{\alpha'\beta'}+\beta_1' f_{\beta'\beta'}+\gamma_1' f_{\beta'\gamma'}+\eta_1' f_{\beta'\eta'}+\vartheta_1' f_{\beta'\vartheta'}=0{,}75(-0{,}377)-$$
$$-0{,}25(-0{,}886)+0(-0{,}238)+0(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}397)=0{,}038$$
$$q_2=\alpha_2' f_{\alpha'\beta'}+\beta_2' f_{\beta'\beta'}+\gamma_2' f_{\beta'\gamma'}+\eta_2' f_{\beta'\eta'}+\vartheta_2' f_{\beta'\vartheta'}=0{,}5(-0{,}337)-$$
$$-0{,}5(-0{,}886)=0{,}254$$
$$q_3=0{,}5(-0{,}337)=-0{,}168$$
$$q_4=-0{,}25(-0{,}337)+0{,}75(-0{,}886)-0{,}25(-0{,}397)=-0{,}481$$
$$q_5=0{,}5(-0{,}886)-0{,}5(-0{,}397)=-0{,}244$$

$$q_6 = -0{,}5(-0{,}377)+0{,}5(-0{,}886) = -0{,}254$$

$$q_7 = -0{,}25-(0{,}337)-0{,}35(-0{,}886)+0{,}75(-0{,}397) = 0{,}008$$

$$q_8 = -0{,}25(-0{,}337)-0{,}25(-0{,}86)-0\ 25(-0{,}397) = 0{,}405$$

$$q_9 = -0{,}5(-0{,}337) = +0{,}168$$

$$q_{10} = -0{,}5(-0{,}886)+0{,}5(-0{,}397) = 0{,}244$$

$$q_{11} = -0{,}25(-0{,}238)-0{,}25(-0{,}159)+0{,}75(-0{,}397) = -0{,}198$$

$$q_{12} = -0{,}25(-0{,}238)-0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}397) = 0{,}198$$

$$q_{13} = -0{,}5(-0{,}238)+0{,}5(-0{,}397) = -0{,}080$$

$$q_{14} = -0{,}5(-0{,}159) = 0{,}080$$

$$q_{15} = 0{,}75(-0{,}238)-0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}397) = -0{,}040$$

$$q_{16} = 0{,}5(-0{,}238)-0{,}5(-0{,}159) = -0{,}040$$

$$q_{17} = 0{,}5(-0{,}238)-0{,}5(-0{,}397) = 0{,}080$$

$$q_{18} = -0{,}25(-0{,}238)+0{,}75(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}397) = 0{,}40$$

$$q_{19} = \quad 0{,}5(-0{,}159) = -0{,}080$$

$$q_{20} = -0{,}5(-0{,}238)+0{,}5(-0{,}159) = 0{,}040$$

$$l_1 = \alpha_1' f_{\alpha'\alpha'} + \beta_1' f_{\beta'\gamma'} + \gamma_1' f_{\gamma'\gamma'} + \eta_1' f_{\gamma'\eta'} + \vartheta_1 f'_{\gamma'\vartheta'} = 0{,}75(-0{,}159) -$$
$$-0{,}25(-0{,}238)+0(-0{,}886)+0(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}397) = 0{,}040$$

$$l_2 = \quad 0{,}5\ (-0{,}159)-0{,}5\ (-0{,}238) = 0{,}040$$

$$l_3 = \quad 0{,}5\ (-0{,}159) = -0{,}080$$

$$l_4 = -0{,}25(-0{,}159)+0{,}75(-0{,}238)-0{,}25(-0{,}397) = -0{,}040$$

$$l_5 = \quad 0{,}5\ (-0{,}238)-0{,}5\ (-0{,}397) = +0{,}080$$

$$l_6 = -0{,}5\ (-0{,}159)+0{,}5\ (-0{,}238) = -0{,}040$$

$$l_7 = -0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}238)+0{,}75(-0{,}397) = -0{,}198$$

$$l_8 = -0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}238)-0{,}25(-0{,}397) = +0{,}198$$

$$l_9 = -0{,}5\ (-0{,}159) = +0{,}080$$

$$l_{10} = -0{,}5\ (-0{,}238)+0{,}5\ (-0{,}397) = -0{,}080$$

$$l_{11} = -0{,}25(-0{,}886)-0{,}25(-0{,}436)+0{,}75(-0{,}397) = +0{,}033$$

$$l_{12} = -0{,}25(-0{,}886)-0{,}25(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}397) = +0{,}430$$

$$l_{13} = -0{,}5\ (-0{,}886)+0{,}5\ (-0{,}397) = +0{,}245$$

$$l_{14} = -0{,}5\ (-0{,}436) = +0{,}225$$

$l_{15}= \quad 0{,}75(-0{,}886)-0{,}25(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}397)=-0{,}456$

$l_{16}= \quad 0{,}5\ (-0{,}886)-0{,}5\ (-0{,}436)=-0{,}225$

$l_{17}= \quad 0{,}5\ (-0{,}886)-0{,}5\ (-0{,}397)=-0{,}245$

$l_{18}=-0{,}25(-0{,}886)+0{,}75(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}397)=-0{,}006$

$l_{19}= \quad 0{,}5\ (-0{,}436)=-0{,}218$

$l_{20}=-0{,}5\ (-0{,}886)+0{,}5\ (-0{,}436)=+0{,}225$

$m_1=\alpha_1' f_{\alpha'\eta'}+\beta_1' f_{\beta'\eta'}+\gamma_1' f_{\gamma'\eta'}+\eta_1' f_{\eta'\eta'}+\vartheta_1' f_{\eta'\vartheta'}=0{,}75(-0{,}106)-$

$-0{,}25(-0{,}159)+0(-0{,}436)+0(-1{,}260)-0{,}25-0{,}264=+0{,}026$

$m_2= \quad 0{,}5\ (-0{,}106)-0{,}5\ (-0{,}159)=+0{,}026$

$m_3= \quad 0{,}5\ (-0{,}106)=-0{,}053$

$m_4=-0{,}25(-0{,}106)+0{,}75(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}264)=-0{,}026$

$m_5= \quad 0{,}5\ (-0{,}159)-0{,}5\ (-0{,}264)=+0{,}052$

$m_6=-0{,}5\ (-0{,}106)+0{,}5\ (-0{,}159)=-0{,}026$

$m_7=-0{,}25(-0{,}106)-0{,}25(-0{,}159)+0{,}75(-0{,}264)=-0{,}132$

$m_8=-0{,}25(-0{,}106)-0{,}25(-0{,}159)-0{,}25(-0{,}264)= \quad 0{,}132$

$m_9=-0{,}5\ (-0{,}106)=+0{,}053$

$m_{10}=-0{,}5\ (-0{,}159)+0{,}5\ (-0{,}264)=-0{,}052$

$m_{11}=-0{,}25(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}754)+0{,}75(-0{,}264)=+0{,}100$

$m_{12}=-0{,}25(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}754)-0{,}25(-0{,}264)=+0{,}364$

$m_{13}=-0{,}5\ (-0{,}436)+0{,}5\ (-0{,}264)=+0{,}086$

$m_{14}=-0{,}5\ (-0{,}754)=+0{,}377$

$m_{15}=0{,}75(-0{,}436)-0{,}25(-0{,}754)-0{,}25(-0{,}264)=-0{,}073$

$m_{16}= \quad 0{,}5\ (-0{,}436)-0{,}5\ (-0{,}754)=+0{,}159$

$m_{17}= \quad 0{,}5\ (-0{,}436)-0{,}5\ (-0{,}264)=-0{,}086$

$m_{18}=-0{,}25(-0{,}436)+0{,}75(-0{,}754)-0{,}25(-0{,}264)=-0{,}391$

$m_{19}= \quad 0{,}5\ (-0{,}754)=-0{,}377$

$m_{20}=-0{,}5\ (-0{,}436)+0{,}5\ (-0{,}754)=-0{,}159$

$n_1=\alpha_1' f_{\alpha'\vartheta'}+\beta_1' f_{\beta'\vartheta'}+\gamma_1' f_{\gamma'\vartheta'}+\eta_1' f_{\eta'\vartheta'}+\zeta_1' f_{\vartheta'\vartheta'}=0{,}75(-0{,}264)-$

$-0{,}25(-0{,}397)+0(-0{,}397)+0(-0{,}264)-0{,}25(-0{,}661)=+0{,}066$

$n_2= \quad 0{,}5\ (-0{,}264)-0{,}5\ (-0{,}397)=+0{,}066$

$$n_3 = \quad 0,5\;(-0,264) = -0,132$$

$$n_4 = -0,25(-0,264) + 0,75(-0,397) - 0,25(-0,661) = -0,066$$

$$n_5 = \quad 0,5\;(-0,397) - 0,5\;(-0,661) = +0,132$$

$$n_6 = -0,5\;(-0,264) + 0,5\;(-0,397) = 0,066$$

$$n_7 = -0,25(-0,264) - 0,25(-0,397) + 0,75(-0,661) = -0,330$$

$$n_8 = -0,25(-0,264) - 0,25(-0,397) - 0,25(-0,661) = +0,330$$

$$n_9 = -0,5\;(-0,264) = +0,132$$

$$n_{10} = -0,5\;(-0,397) + 0,5(-0,661) = -0,132$$

$$n_{11} = -0,25(-0,397) - 0,25(-0,264) + 0,75(-0,661) = -0,330$$

$$n_{12} = -0,25(-0,397) - 0,25(-0,264) - 0,25(-0,661) = +0,330$$

$$n_{13} = -0,5\;(-0,397) + 0,5\;(-0,661) = -0,132$$

$$n_{14} = -0,5\;(-0,264) = +0,132$$

$$n_{15} = \quad 0,75\;(-0,397) - 0,25(-0,264) - 0,25(-0,661) = -0,066$$

$$n_{16} = \quad 0,5\;(-0,397) - 0,5\;(-0,264) = -0,066$$

$$n_{17} = 0,5\;(-0,397) - 0,5\;(-0,661) = +0,132$$

$$n_{18} = -0,25\;(-0,397) + 0,75(-0,264) - 0,25(-0,661) = +0,066$$

$$n_{19} = \quad 0,5\;(-0,264) = -0,132$$

$$n_{20} = -0,5\;(-0,397) + 0,5(-0,264) = +0,066$$

5. q_i, q_i, e_i, m_i და n_i მუდმივების ცხრილის შედგენა

ცხრილი 4.8.4.14

№№	p_i	q_i	l_i	m_i	n_i
1	—0,416	+0,038	+0,040	+0,026	+0,066
2	—0,210	+0,254	+0,040	+0,026	+0,066
3	0,377	—0,168	—0,080	—0,053	—0,132
4	—0,002	—0,481	—0,040	—0,026	—0,066
5	—0,036	—0,244	+0,080	+0,052	+0,132
6	+0,210	—0,254	—0,040	—0,026	—0,066
7	+0,075	+0,008	—0,198	—0,132	—0,330
8	+0,340	+0,405	+0,198	+0,132	+0,330
9	+0,377	+0,168	+0,080	+0,053	+0,132
10	+0,036	+0,244	—0,080	—0,052	—0,132
11	—0,132	—0,198	+0,033	+0,100	—0,330
12	0,132	+0,198	+0,430	+0,364	+0,330
13	—0,052	—0,080	+0,244	+0,086	—0,132
14	+0,053	+0,080	+0,225	+0,377	+0,132
15	—0,027	—0,040	—0,456	—0,073	—0,066
16	—0,026	—0,040	—0,225	+0,159	—0,066
17	+0,052	+0,080	—0,244	—0,086	+0,132
18	+0,026	+0,040	—0,006	—0,391	+0,066
19	—0,053	—0,080	—0,218	—0,377	—0,132
20	+0,026	+0,040	+0,225	—0,159	+0,066

შენიშვნა: (14) ცხრილის სიდიდეები შეიძლება გამოთვლილ იქნეს 0,01 სიზუსტით.

მიღებული ცხრილი გამოდგება ნებისმიერი სიდიდის კუთხეებისა და გვერდე-ბის შემცველი (9) ნახაზის (სისტემის) მიმართ.

III. სისტემის გაწონასწორებითი გამოთვლები

1. (2) ფორმულით I ჯგუფის პირობით განტოლებებში შემავალი შესწორებების გამოთვლა

სქემა 4.8.4.10

სექციების №№	კუთხეე-ბის №№	შეუკვრელობათა გამოთვლა	პირველადი შესწორებები	შესწორებუ-ლი კუთხეე-ბის სეკუნ-დები
I	2	30°05′47″	+1″,3	48″,3
	6	29 52 53	+1 ,4	54 ,4
	B_{26}	59 58 42 ,7		
		$W_1^I=-2''$,7	+2 ,7	
II	3	23 39 47	+0 ,3	47 ,3
	9	28 59 29	+0 ,2	29 ,2
	A_{39}	52 39 16 ,5		
		$W_2^I=-0''$,5	+0 ,5	
III	5	29 58 36	— 1,6	34 ,4
	10	37 23 28	— 1,6	26 ,4
	C_{610}	67 22 0 ,8		
		$W_3^I=+3''$,2	—3 ,2	
IV	13	29 22 39	+2 ,2	41 ,2
	17	22 02 43	+2 ,1	45 ,1
	C_{1317}	51 25 26 ,3		
		$W_4^I=-4''$,3	+4 ,3	
V	14	38 03 21	+1 ,7	22 ,7
	19	31 26 47	+1 ,7	48 ,7
	A_{1419}	69 30 11 ,4		
		$W_5^I=-3''$,4	+3 ,4	
VI	16	27 53 58	+0 ,2	58 ,2
	20	31 10 24	+0 ,1	24 ,1
	D_{1620}	59 04 22 ,3		
		$W_6^I=-0''$,3	+0 ,3	
VII	1	126 14 24	0	
	4	120 08 31	0	
	7	66 34 53	0	
	8	47 02 12	0	
		360		
		$W_7^I=0$	0	
VIII	11	46 39 00	0	
	12	65 55 02	0	
	15	130 03 12	0	
	18	117 22 46	0	
		$W_8^I=0$		

გ. პირველად შესწორებული კუთხეებით II ჯგუფის პირობით განტოლებათა შეუკვრელობების განსაზღვრა

სქემა 4.8.4.11

№№	პირველად შესწორებული კუთხეები	ε″ (12) სქემიდან	მეორედ შესწორებული კუთხეები (12 სქემის შემდეგ)	ε‴ (15) სქემიდან	მესამედ შესწორებული, ანუ გაწონასწორებული კუთხეებით (კონტროლი)
1 2 3	126°14′24″,0 30 05 48 ,3 23 39 47 ,3	0″,0 —0 .2 +0 ,6	126°14′24″,0 30 05 48 ,1 23 39 47 ,9	+0″,6 —1 ,8 +1 ,2	126°13′24″,6 30 05 46 ,3 23 39 49 ,1
	179 59 59 ,6 $W^{II'}_{1}$ =— 0″,4	+0″,4			0
4 5 6	120 08 31 ,0 29 58 34 ,4 29 52 54 ,4	+0 ,3 —0 ,3 +0 ,2	120 08 31 ,3 29 58 34 ,1 29 52 54 ,6	—0 ,6 —1 ,1 +1 ,7	120 08 30 ,7 29 58 33 ,0 29 52 56 ,3
	179 59 59 ,8 $W^{II'}_{2}$ =—0″ ,2	+0 ,2			0
15 16 17	130 03 12 ,0 27 53 58 ,2 22 02 45 ,1	+2 ,2 +0 ,9 +1 ,3	130 03 14 ,2 27 53 59 ,1 22 02 46 ,4	+0 ,5 +1 ,7 —1 ,9	130 03 14 ,7 27 54 0 ,8 22 02 44 ,5
	179 59 55 ,3 $W^{II'}_{3}$ =—4″ ,7	+4 ,4			0
18 19 20	117 22 46 ,0 31 26 48 ,7 31 10 24 ,1	+0 ,5 +1 ,4 —0 ,9	117 22 46 ,5 31 26 50 ,1 31 10 23 ,2	+0 ,2 +1 ,5 —1 ,5	117 22 46 ,7 31 26 51 ,6 31 10 21 ,7
	179 59 58 ,8 $W^{II'}_{4}$ =—1″ ,2	+1 ,0			0
7 10 11 13	66 34 53 ,0 37 23 26 ,4 46 39 00 ,0 29 22 41 ,2	+0 , 9 +0 , 3 —0 , 4 —1 , 3	66 34 53 ,9 37 23 26 ,7 46 38 59 ,6 29 22 39 ,9	—0 ,5 +0 ,8 —2 ,3 +1 ,9	66 34 53 ,4 37 23 27 ,5 46 38 57 ,3 29 22 41 ,8
	180 00 00 ,6 $W^{II'}_{5}$ =+0 ,6	—0″,5			0
8 9 12 14	47 02 12 ,0 28 59 29 ,2 65 55 02 ,0 38 03 22 ,7	—1 ,1 —0 ,6 —2 ,4 —1 ,5	47 02 10 ,4 28 59 28 ,6 65 54 59 ,6 38 03 21 ,2	+0 ,6 —1 ,0 +1 ,5 —1 ,4	47 02 11 ,5 28 59 27 ,6 65 55 01 ,1 38 03 19 ,8
					0

3. (10) ფორმულით და (11) ცხრილით ε″ მეორადი შესწორებების გამოთვლის სქემა

სქემა 4.8.4.12

№№	$p_i W^{II'}_1$	$q_i W^{II'}_2$	$e_i W^{II'}_3$	$m_i W^{II'}_4$	$n_i W^{II'}_5$	ε″
1	−0,416(−0″,4)	+0,038(−0″,2)	+0,040(−4″,7)	+0,026(−1″,2)	+0,066(0″,6)	0,0
2	−0,210 〃	+0,254 〃	+0,040 〃	+0,026 〃	+0,066 〃	−0,2
3	−0,377 〃	−0,168 〃	−0,080 〃	−0,053 〃	−0,132 〃	+0,6
4	+0,002 〃	−0,481 〃	−0,040 〃	−0,020 〃	−0,066 〃	+0,3
5	−0,036 〃	−0,244 〃	+0,080 〃	+0,052 〃	+0,132 〃	−0,3
6	+0,210 〃	−0,254 〃	−0,040 〃	−0,026 〃	−0,066 〃	+0,2
7	+0,075 〃	+0,008 〃	−0,198 〃	−0,132 〃	−0,330 〃	+0,9
8	+0,340 〃	+0,405 〃	+0,198 〃	+0,132 〃	+0,330 〃	−1,1
9	+0,377 〃	+0,168 〃	+0,080 〃	+0,053 〃	+0,132 〃	−0,6
10	+0,036 〃	+0,244 〃	−0,080 〃	−0,052 〃	−0,132 〃	+0,3
11	−0,132 〃	−0,198 〃	+0,033 〃	+0,100 〃	−0,330 〃	−0,4
12	+0,132 〃	+0,198 〃	+0,430 〃	+0,364 〃	+0,330 〃	−2,4
13	−0,052 〃	−0,080 〃	+0,245 〃	+0,086 〃	−0,132 〃	−1,3
14	+0,053 〃	+0,080 〃	+0,225 〃	+0,377 〃	+0,132 〃	−1,5
15	−0,027 〃	−0,040 〃	−0,456 〃	−0,073 〃	−0,066 〃	+2,2
16	−0,026 〃	−0,040 〃	−0,225 〃	+0,159 〃	−0,066 〃	+0,9
17	+0,052 〃	+0,080 〃	−0,245 〃	−0,086 〃	+0,132 〃	+1,3
18	+0,026 〃	+0,040 〃	−0,006 〃	−0,391 〃	+0,066 〃	+0,5
19	−0,053 〃	−0,080 〃	−0,218 〃	−0,377 〃	−0,132 〃	+1,4
20	+0,026 〃	+0,040 〃	+0,225 〃	−0,159 〃	+0,066 〃	−0,9

4. მეორედ შესწორებული კუთხეებით III ჯგუფის პირობით განტოლებათა შეუკვრელობების განსაზღვრა

სქემა 4.8.4.13

კუთხ. №№	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)	კუთხ. №№	მეორედ შესწო-რებული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)
2	30°05′48″,1	9.7002370	+36,3	3	23°39′47″,9	9.6035355	48,1
5	29 58 34 ,1	9.7986566	+36,5	6	29 52 54 ,6	9.6974149	36,6
9	28 59 28 ,6	9.6854520	+38,0	10	37 23 26 ,7	9.7833658	27,6
	$\Sigma_1=$	9.0843456			$\Sigma_2=$	9.0843162	

$$W^{III'}_1=+294(\lg_7)$$

კუთხ. №№	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)	კუთხ. №№	მეორედ შესწო-რებული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)
13	29 22 39 ,9	9.6906969	+37,4	14	38 03 21 ,2	9.7898836	+26,9
16	27 53 59 ,1	9.6701771	+39,8	17	22 02 46 ,4	9.5744416	+52,0
19	31 26 50 ,1	9.7174319	+34,4	20	31 10 23 ,2	9.7140157	+34,8
	$\Sigma_1=$	9.0783059			$\Sigma_2=$	9.0783409	

$$W^{III'}_2=-350(\lg_7)$$

კუთხ. №№	მეორედ შესწორე-ბული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)	კუთხ. №№	მეორედ შესწო-რებული კუთხეები	lg sin α	Δ (lg₇)
8	47 02 10 ,9	9.8643843	+19,6	14	67 02 49 ,8	9.9641776	+ 8,9
10+13	66 46 6 ,6	9.9632770	+ 9.0	7	66 34 53 ,9	9.9626663	+ 9,1
14	38 03 21 ,2	9.7898836	+26,9	13	29 22 39 ,9	9.6906969	+37,4
	$\Sigma_1=$	9.6175449			$\Sigma_2=$	9.6175408	

$$W^{III'}_3=+41(\lg_7)$$

ათჯერ შემცირებული III ჯგუფის განტოლებათა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები იქნება.

$A_2=+3,6$, $A_3=-4,8$, $A_5=+3,7$, $A_6=-3,7$, $A_9=-3,8$, $A_{10}=-2,8$,

დანარჩენი თოთხმეტი კოეფიციენტი ნულია.

$$W_1^{III'}=+29,4(\lg_6)$$

$B_{13}=+3,7$, $B_{14}=-2,7$, $B_{16}=+4,0$, $B_{17}=-5,2$, $B_{19}=+3,4$, $B_{20}=-3,5$,

დანარჩენი ნულია

$$W_2^{III'}=-35(\lg_6)$$

$C_7=-0,9$, $C_8=-2,0$, $C_9=-0,9$, $C_{10}=+0,9$, $C_{13}=-2,8$, $C_{14}=+1,8$,

დანარჩენი ნულია

$$W_3^{III'}=+4,1(\lg_6)$$

ნ. მეორედ შესწორებული კუთხეებით გამოთვლილი მესამე ჯგუფის ტოლობების კოეფიციენტების პირველად გარდაქმნა (4) ფორმულით. სექციები პირველი ჯგუფის განტოლებათა მიხედვითაა დალაგებული

სქემა 4.8.4.14

სექციები	№№	A	B	C	A'	B'	C'
I	2 6	+3,6 —3,7	0 0	0 0	+3,65 —3,65	0 0	0 0
II	3 9	—4,8 +3,8	0 0	0 +0,9	—4,30 +4,30	0 0	+0,45 —0,45
III	5 10	+3,7 —2,8	0 0	0 +0,9	+3,25 —3,25	0 0	+0,45 —0,45
IV	13 17	0 0	+3,7 —5,2	—2,8 0	0 0	+4,45 —4,45	—1,40 +1,40
V	14 19	0 0	—2,7 +3,4	+1,8 0	0 0	—3,05 +3,05	+0,90 —0,90
VI	16 20	0 0	+4,0 —3,5	0 0	0 0	+3,75 —3,75	0 0
VII	1 4 7 8	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 —0,9 +2,0	0 0 0 0	0 0 0 0	—0,2 —0,2 —1,2 +1,6
VIII	11 12 15 18	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0

$[A'A']=+84,75$; $[A'B']=0$; $[A'C']=-6,80$;
$[B'B'[=+86,34$; $[B'C'']=-17,95$;
$[C'C']=+6,35$.

7. კორელატების გამოთვლის სქემა

სქემა 4.8 4.16

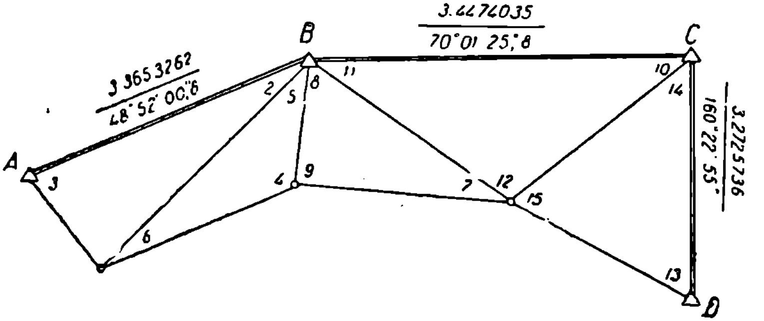
№№	აღნიშვნე-ბი	K_A	K_B	K_C	$W^{III'}$	S	კონტროლი
1 2	a E	+74,25 −1	+10,74 −0,144646	−11,16 +0,150303	+29,40 −0,395959	+103,23 −1,390302	−1,390302
3		K_A = −0,614	−0,054	−0,164	−0,396	—	
4 5	b $E_1 \times a_9$		+16,20 −1,55	−12,06 +1,61	−35,00 −4,25	+39,88 −14,93	
6 7	$b \cdot 1$ E_2		+74,65 −1	−10,45 +0,139986	−39,25 +0,525785	+24,95 −0,334225	−0,334229
8			K_B = +0,375	−0,153	+0,526		
9 10 11	C $E_1 \times a_3$ $E_2 \times b \cdot 1_8$			+5,90 −1,67 −1,46	+4,10 +4,42 −5,50	−13,22 +15,52 +3,49	
12 13	$C \cdot 2$ E_3			+2,77 −1	+3,02 −1,090	+5,79 −2,09	+5,79 −2,09
14				K_C = −1,090			
					0 −11,61 −20,65 −3,29 −35,55	−1,50 −40,88 +13,12 −6,31 −35,57	
					$-[W^{III} K]$	$-[W^{III} K]$	
					$[\varepsilon''' \varepsilon''']$		

8. კონტროლი (სამკუთხედების გეომეტრიული კონტროლი იხილეთ გარდა (17) სქემისა (11) სქემის ბოლო სვეტში)

სქემა 4.8.4. 17

კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin α	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin z
2	30°05′46″,3	9.7002303	3	23° 39′ 49″ ,1	9.6035413
5	29 58 33 ,5	9.6986524	6	29 52 56 ,3	9.6974214
9	28 59 27 ,6	9.6854482	10	37 23 27 ,5	9.7833682
	$\Sigma_1 =$	9.0843309		$\Sigma_2 =$	9.0843309
13	29 22 41 ,8	9.6907030	14	38 03 19 ,8	9.7898800
16	27 54 0 ,8	9.6701830	17	22 02 44 ,5	9.5744317
19	31 26 51 ,6	9.7174363	20	31 10 21 ,7	9.7140106
	$\Sigma_1 =$	9.0783223		$\Sigma_2 =$	9.0783223
8	47 02 11 ,5	9.8643855	9+14	67 02 47 ,4	9.9641755
10+13	66 46 09 ,3	9.9632796	7	66 34 53 ,4	9.9626658
	38 03 19 ,8	9.7898802	13	29 22 41 ,8	9.6907039
	$\Sigma_1 =$	9.6175453		$\Sigma_2 =$	9.6175453

მაგალითი 4. 8. 4. 8. ორ ხისტ მოსაზღვრე კუთხეს შორის სამკუთხედების ჩასმა (ნახ. 10).



ნახ 4.8.4.10

I. (10) ნახაზის შესაბამისი პირობითი განტოლებების ჯგუფები იქნება შემდეგი სახის:

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+W_1^{I}=0,$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{I}=0,$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3^{I}=0,$$

$$(10)+(11)+(12)+W_4^{I}=0,$$

$$(13)+(14)+(15)+W_5^{I}=0.$$

II ჯგუფი

$$(2)+(5)+(8)+11+W_1^{II}=0,$$

$$(10)+(14)\ W_2^{II}=0.$$

III ჯგუფი

$$\lg \frac{\overline{AB}\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 9\cdot\sin 12}{\overline{BC}\cdot\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 7\cdot\sin 10}=W_1^{III},$$

$$\lg \frac{\overline{BC}\cdot\sin 11\cdot\sin 15}{\overline{CD}\cdot\sin 12\cdot\sin 13}=W_2^{III}.$$

II. ε′ პირველადი შესწორებების გამოთვლა (2) ფორმულით

სქემა 4.8.4.18

კუთხ. №№	განაზომები	ε′	შესწორებული კუთხეები (სეკუნდები)
1	83°48′34″,8	—5″,6	29″,2
2	23 23 14 ,6	—5 ,6	09 ,0
3	72 48 27 ,4	—5 ,6	21 ,8
	180 00 16, 8		
	$W_1^I=+16''{,}8$	—16″,8	
4	120°50′25″,6	+4″,1	29 ,7
5	37 49 37 ,9	+4 ,1	42 ,0
6	21 19 44 ,2	+4 ,1	48 ,3
	179 59 47 ,7		
	$W_2^I=-12{,}3$	+12″,3	
7	30°57′32″,6	—0″,2	32 ,4
8	60 38 29 ,5	—0 ,2	29 ,3
9	88 23 58 ,6	—0 ,3	58 ,3
	180 00 00 ,7		
	$W_3^I=+0''{,}7$	—0″,7	
10	39°33′35″,2	+2″,0	37 ,2
11	36 59 14 ,2	+2 ,0	16 ,2
12	103 27 04 ,6	+2 ,0	06 ,6
	179 59 54 ,0		
	$W_4^I=-6''{,}0$	+6″,0	37 ,2
13	60°12′29″,9	—5″,6	24 ,3
14	50 04 59 ,0	—5 ,6	53 ,4
15	69 42 47 ,9	—5 ,6	42 ,3
	180 00 16 ,8		
	$W_5^I=+16''{,}8$	—16″,8	

III. წინა მაგალითებში მიღებული წესის მიხედვით წინასწარ არის შედგენილი ცხრილი (15) p და q მუდმივებისათვის

ცხრილი 4.8.4.15

კუთხ. №№	p	q
1	+0,129	+0,032
2	—0,258	—0,065
3	+0,129	+0,032
4	+0,129	+0,032
5	—0,258	—0,065
6	+0,129	+0,032
7	+0,129	+0,032
8	—0,258	—0,065
9	+0,129	+0,032
10	+0,065	—0,484
11	—0,226	+0,194
12	+0,161	+0,290
13	+0,032	+0,258
14	—0,065	—0,516
15	+0,032	+0,258

IV. პირველად შესწორებული კუთხეებით II ჯგუფის პირობით განტოლებათა W_1^{II} და W_2^{I} თავისუფალი წევრების განსაზღვრა

კუთხეების №№	პირველად შესწორებული კუთხეები და ხისტი კუთხე
2	23°23′09″,0
5	37 49 42 ,0
8	60 38 29 ,3
11	36 59 16 ,2
Σ	158°50′36″,5
B_{25911}	158 50 35 ,0
	$W_1^{II'}=+1'',5$

სქემა 4.8.4.19

კუთხეების №№	პირველად შესწორებული კუთხეები და ხისტი კუთხე
10	39°33′37″,2
14	50 04 53 ,4
Σ	89 38 30 ,6
C_{1014}	89 38 30 ,8
	$W_2^{II'}=-0'',2$

V. (13) ფორმულით და (15) ცხრილით ε″ მეორადი შესწორებების გამოთვლა და მეორედ შესწორებული კუთხეები

სქემა 4.8.4.20

კუთხ. №№	$p_iW_1^{II'}$	$q_iW_2^{II'}$	ε″	მეორედ შესწორებული კუთხეები
1	+0,129×1,5	+0,032×(—0,2)	+0″,2	83°48′29″,4
2	—0,258 „	—0,065× „	—0 ,4	23 23 08 ,6
3	+0,129 „	+0,032 „	+0 ,2	72 48 22 ,0
4	+0,129 „	+0,032 „	+0 ,2	120 50 29 ,9
5	—0,256 „	—0,065 „	—0 ,4	37 40 41 ,6
6	+0,129 „	+0,032 „	+0 ,2	21 19 48 ,5
7	+0,129 „	+0,032 „	+0 ,2	30 57 32 ,6
8	—0,258 „	—0,065 „	—0 ,4	60 38 28 ,9
9	+0,129 „	+0,032 „	+0 ,2	88 23 58 ,5
10	+0,065 „	—0,484 „	+0 ,2	39 33 37 ,4
11	—0,226 „	+0,194 „	—0 ,4	36 59 15 ,8
12	+0,161 „	+0,290 „	+0 ,2	103 27 06 ,8
13	+0,032 „	+0,258 „	0	60 12 24 ,3
14	—0,065 „	—0,516 „	0	50 04 53 ,4
15	+0,032 „	+0,258 „	0	69 42 42 ,3

VI. მეორედ შესწორებული კუთხეებით III ჯგუფის პირობით განტოლებათა $W_1^{III'}$ და $W_2^{III'}$ თავისუფალი წევრების განსაზღვრა

სქემა 4.8.4.21

კუთხის №№	მეორედ შესწორებული კუთხეები	lg sin	Δ	კუთხეების №№	მეორედ შესწორებული კუთხეები	lg sin	Δ
3	72°48′22″,0	9.9801443	+ 6″,5	1	83 48 29 ,4	9.9974591	+ 2″,3
6	21 19 48 ,5	9.5607926	+54 ,0	4	120 50 29 ,9	9.9337846	—12 ,5
9	88 23 58 ,5	9.9998305	+ 0 ,5	7	30 57 32 ,6	9.7113224	+35 ,1
12	103 27 06 ,8	9.9879189	— 5 ,0	10	30 33 37 ,4	9.8040652	+25 ,4
AB	—	3.3653262	—	*BC*	—	3.4474035	—
	$\Sigma_1=$	2.8940125			$\Sigma_2=$	2.8940348	

$$W_1^{III'}=\Sigma_1-\Sigma_2=-223\ (\lg_7)$$

11	36°59′15″,8	9.7793395	+27 ,9	12	103°27′06″,8	9.9879189	— 5 ,0
15	69 42′42 ,3	9.9721844	+ 7 ,7	13	60 12 24 ,3	9.9384317	+12 ,1
BC	—	3.4474035		*CD*	—	3.2726736	
	$\Sigma_1=$	3.1989274			$\Sigma_2=$	3.1990242	

$$W_2^{III'}=\Sigma_1-\Sigma_2=-968\ (\lg_7)$$

VII. მეორედ შესწორებული კუთხეებით (21) სქემაში გამოთვლილი III ჯგუფის *A* და *B* კოეფიციენტების (4) ფორმულით პირველად გარდაქმნა (სექციებს ვალაგებთ I ჯგუფის განტოლებათა მიხედვით)

სქემა 4.8.4.22

პირველი ჯგუფის სექციები	კუთხ. №№	*A*	*B*	*A′*	*B′*
I	1	— 2,3	0	— 3,7	0
	2	0	0	— 1,4	0
	3	+ 6,5	0	+ 5,1	0
II	4	+12,5	0	— 9,7	0
	5	0	0	+22,1	0
	6	+54,0	0	+31,8	0
III	7	—35,1	0	—23,6	0
	8	0	0	+11,5	0
	9	+ 0,5	0	+12,1	0
IV	10	—25,4	0	—15,3	—11,0
	11	0	+27,9	+10,2	+17,0
	12	— 5,0	+ 5,0	+ 5,1	— 6,0
V	13	0	—12,1	0	—10,6
	14	0	0	0	+ 1,5
	15	0	+ 7,7	0	+ 9,2

VIII. მეორე ჯგუფის სექციების შესაბამისად მესამე ჯგუფის კოეფიციენტების მეორედ გარდაქმნა (21), (20), (24) და (25) ფორმულების გამოყენებით (აქვე გამოითვლება ε''' შესწორება და საბოლოო ε შესწორება)

სქემა 4.8.4.23

II ჯგუფ. სექც. №№	კუთხ. №№	p_i	q_i	A'	B'	$[A']_i^{II}$	$[B']_i^{II}$	$\Delta A'$	$\Delta B'$	A''	B''	ε'''	ε''	ε'	ε
I	2	—0,258	—0,065	— 1,4	0	— 1,8	+17,0	+1,5	—3,8	+ 0,1	— 3,8	— 7,6	—0″,4	—5″,6	—13″,6
	5	—0,258	—0,065	—22,1	0			+1,5	—3,8	—20,6	— 3,8	— 5,5	—0 ,4	+4 ,1	— 1 ,8
	8	—0,258	—0,065	+11,5	0			+1,5	—3,8	+13,0	— 3,8	— 8,9	—0 ,4	—0 ,2	— 9 ,5
	11	—0,226	+0,194	+10,2	+17,0			—2,6	—5,7	+ 7,6	+11,3	+21,8	—0 ,4	+2 ,0	+23 ,4
II	10	+0,065	—0,484	—15,3	—11,0	—15,3	+ 9,5	+7,3	+5,7	— 8,0	— 5,3	— 9,8	+0 ,2	+2 ,0	— 7 ,6
	14	—0,065	—0,516	0,	+ 1,5			+8,0	+3,8	+ 8,0	+ 5,3	+ 9,8	0	—5 ,6	+ 4 ,2
	1	+0,129	+0,032	— 3,7	0	—	—	—0,7	+1,9	— 4,4	+ 1,9	+ 4,2	+0 ,2	—5 ,6	— 1 ,2
	2	+0,129	+0,032	+ 5,1	0			—0,7	+ ,9	+ 4,4	+ 1,9	+ 3,4	+0 ,2	—5 ,6	— 2 ,0
	4	+0,129	+0,032	— 9,7	0			—0,7	+1,9	—10,4	+ 1,9	+ 4,8	+0 ,2	+4 ,1	+ 9 ,1
	6	+0,129	+0,032	+31,8	0			—0,7	+1,7	+31,1	+ 1,9	+ 0,7	+0 ,2	+4 ,1	+ 5 ,0
	7	+0,129	+0,032	—23,6	0			—0,7	+1,9	—24,3	+ 1,9	+ 6,2	+0 ,2	—0 ,2	+ 6 ,2
	9	+0,129	+0,032	+12,1	0			—0,7	+1,9	+11,4	+ 1,9	+ 2,7	+0 ,2	—0 ,3	+ 2 ,6
	12	+0,161	+0,290	+ 5,1	— 6,0			—4,7	0	+ 0,4	— 6 0	—12,0	+0 ,2	+2 ,0	— 9 ,8
	13	+0,032	+0,258	0	—10,6			—4,0	—1,9	— 4,0	—12,5	—24,7	0	—5 ,6	—30 ,3
	15	+0,032	+0,258	0	+ 9,2			—4,0	—1,9	— 4,0	+ 7,3	+14,9	0	—5 ,6	+ 9 ,3

$[A''A''] = +2645{,}8$
$[B''B''] = +\ 494{,}4$
$[A''B''] = +\ 232{,}4$

K_A	K_B
—0,0914	2,0008

IX. კორელატების გამოთვლის სქემა

სქემა 4.8.4.24

№№	აღნიშვნები	K_A	K_B	$W^{III'}$	S	კონტროლი
1	a	+2645,8	+232,4	—223,0	+2655,2	
2	E_1	—1	—0,0878	+0,0843	—1,0035	—1,0035
3		—0,0914	—0,1757	+0,0843		
4	b	—	+494,4	—968,0	—241,2	
5	$E_1 \times a_2$		—20,4	+19,6	—233,2	
6	$b \cdot 1$		+474,0	—948,4	—474,4	—474,4
7	E_2		—1	+2,0008	+1,0008	+1,0008
8			+2,0008			

X. საბოლოო კონტროლი

I ჯგუფის

კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები
1	83°48′33″,6	7	30°57′38″,8	13	60°11′59″,6
2	23 23 01 ,0	8	60 38 20 ,0	14	50 05 03 ,2
3	72 48 25 ,4	9	88 24 01 ,2	15	69 42 57 ,2
	180°		180°		180°
4	120°50′34″,7	10	39°33′27″,6		
5	37 49 36 ,1	11	36 59 37 ,6		
6	21 19 49 ,2	12	103 26 54 ,8		
	180°		180°		

II ჯგუფის

კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები
		10	39°33′27″,6
2	23°23′01″,0	14	50 05 03 ,2
5	37 49 36 ,1	Σ	89 38 30 ,8
8	60 38 20 ,0	C_{1014}	89 38 30 ,8
11	36 59 37 ,6		
Σ	158°50′34″,7		
B_{25811}	158 50 35		
	—0″,3		

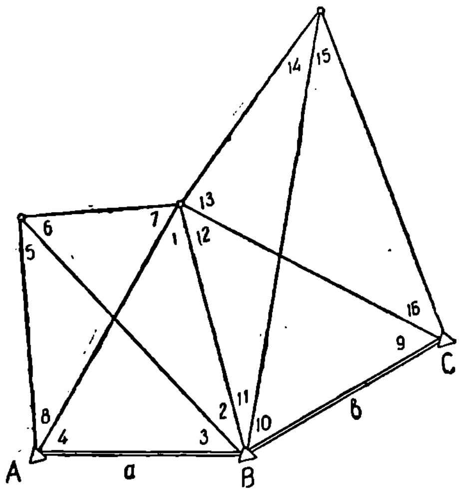
კუთხ. №№	გაწონასწორებუ-ლი კუთხეები	lg sin	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin
3	72° 48′ 25″,4	9.9801465	1	83 48 33 ,6	9.9974600
6	21 19 49 ,2	9.5607964	4	120 50 34 ,7	9.9337786
9	88 24 01 ,2	9.9998307	7	30 57 38 ,8	9.7113442
12	103 26 54 ,8	9.9879250	10	39 33 27 ,6	9.8040403
$\overline{AB}$	—	3.3653262	$\overline{BC}$	—	3.4474035
	$\Sigma_1=$	2.8940248		$\Sigma_2=$	2.8940266

$\Sigma_1-\Sigma_2=-18(\lg_7)$ დამრგვალების გამო

11	36° 59′ 37″,6	9.7794004	12	103° 26′ 54″,8	9.9879250
15	69 42 57 ,2	9.9721959	13	60 11 59 ,6	9.9384019
$\overline{BC}$	—	3.4474035	$\overline{CD}$	—	3.2726736
	$\Sigma_1=$	3.1989998		$\Sigma_2=$	3.1990005

$\Sigma_1-\Sigma_2=-7(\lg_7)$ დამრგვალების გამო

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 4. 4. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით გაწონასწორდეს ხისტ კუთხეში ჩასმული ოთხკუთხედები (ნახ. 11) განაზომი კუთხეებისა (ცხრილი 16) და A_{231011} ხისტი კუთხის მიხედვით. შემოწმდეს და გამოყენებულ იქნეს მუდმივების ცხრილი (17).



ნახ. 4.8.4.11.

ცხრილი 4.8.4.16

კუთხ. №№	განაზომები	კუთხ. №№	განაზომები
1	43°31′34″,8	9	59°51′05″,8
2	27 39 54 ,0	10	50 54 23 ,5
3	48 26 54 ,5	11	23 18 10 ,3
4	60 21 40 ,3	12	46 46 16 ,6
5	37 50 27 ,1	13	84 11 13 ,9
6	49 01 38 ,3	14	25 44 18 ,0
7	54 46 52 ,2	15	28 44 01 ,8
8	33 21 05 ,4	16	41 20 18 ,7

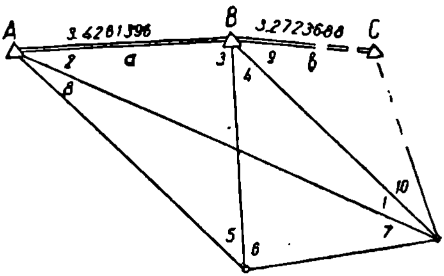
$A_{231011} = 150°19'18'',8$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. I ჯგუფში შევა სამკუთხედის ოთხი პირობითი განტოლება; II ჯგუფში — სამკუთხედის ორი და ერთი ჯამისა და სხვაობის; III ჯგუფში — პოლუსის ორი და გვერდების ერთი პირობითი განტოლება. სულ მიიღება 10 განტოლება.

ცხრილი 4.8.4.17

კუთხ. №№	p	q	l	კუთხ. №№	p	q	l
1	—0,25	0	+0,25	9	0	+0,25	+0,25
2	—0,25	0	—0,25	10	0	+0,25	—0,25
3	+0,25	0	—0,25	11	0	—0,25	—0,25
4	+0,25	0	+0,25	12	0	—0,25	+0,25
5	+0,25	0	0	13	0	—0,25	0
6	—0,25	0	0	14	0	0,25	0
7	—0,25	0	0	15	0	+0,25	0
8	+0,25	0	0	16	0	+0,25	0

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 4. 5. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით გაწონასწორდეს ნახაზის შესაბამისად გაზომილი კუთხეები (ცხრილი 18), აგრეთვე



ნახ. 4.8.4 12.

შემოწმდეს და გამოყენებულ იქნეს მუდმივების ცხრილი (19). განისაზღვროს ჩასმული გვერდების სიგრძეები.

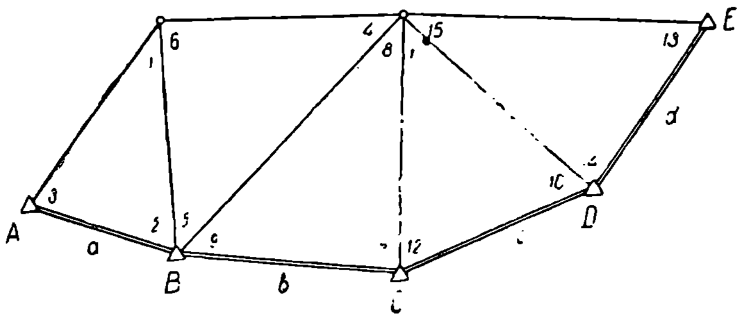
ცხრილი 4.8.4.18	
კუთხ. №№	განაზომები
1	19°19′56″,79
2	27 16 08 ,91
3	90 34 03 ,20
4	42 49 56 ,79
5	42 24 38 ,62
6	85 45 00 ,91
7	32 05 12 ,11
8	19 45 21 ,41
9	38 24 5 ,65
10	27 35 55 ,79

ცხრილი 4.8.4.19		
კუთხ. №№	P	q
1	+0,25	+0,25
2	—0,25	+0,25
3	—0,25	—0,25
4	+0,25	—0,25
5	—0,25	0
6	+0,25	0
7	+0,25	0
8	—0,25	0
9	0	—0,50
10	0	0

$B_{349} = 171°48'47''$, 60

მ ი თ ი თ ე ბ ა. სულ გვექნება ექვსი განტოლება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4. 8. 4. 6. შემოწმდეს სამ ხისტ კუთხეში ჩასმული სამკუთხედების გაწონასწორებისათვის საჭირო მუდმივების ცხრილი (20), ნახაზი (13).



ნახ. 4.8.4.13

მ ი თ ი თ ე ბ ა. შესაბამის პირობით განტოლებათა ჯგუფები იქნება:

I ჯ გ უ ფ ი

$$(1)+(2)+(3)+W_1^{\mathrm{I}}=0;$$

$$(4)+(5)+(6)+W_2^{\mathrm{I}}=0;$$

$$(7)+(8)+(9)+W_3^{\mathrm{I}}=0;$$

$$(10)+(11)+(12)+W_4^{\mathrm{I}}=0;$$

$$(13)+(14)+(15)+W_5^{\mathrm{I}}=0.$$

II ჯგუფი

$$(2)+(5)+(9)+W_1^{II}=0;$$

$$(7)+(12)+W_2^{II}=0;$$

$$(10)+(14)+W_3^{II}=0.$$

III ჯგუფი

$$\frac{a\cdot\sin 3\cdot\sin 6\cdot\sin 8}{b\cdot\sin 1\cdot\sin 4\cdot\sin 7}=W_1^{III},$$

$$\frac{b\cdot\sin 9\cdot\sin 11}{c\cdot\sin 8\cdot\sin 10}=W_2^{III},$$

$$\frac{c\sin 12\cdot\sin 15}{d\sin 11\cdot\sin 13}=W_3^{III}.$$

ცხრილი 4.8.4.20

კუთხ. №№	p	q	l
1	+0,1744	+0,0465	+0,0116
2	—0,3488	—0,0930	—0,0232
3	+0,1744	+0,0465	+0,0116
4	+0,1744	+0,0465	+0,0116
5	—0,3488	—0,0930	—0,0232
6	+0,1744	+0,0465	—0,0116
7	+0,0814	—0,5116	—0,1278
8	+0,2209	+0,3256	+0,0813
9	—0,3023	+0,1860	+0,0465
10	+0,0581	+0,1396	—0,4650
11	+0,0581	+0,3488	+0,3372
12	—0,0813	—0,4884	+0,1278
13	+0,0116	+0,0698	+0,2674
14	—0,0232	—0,1396	—0,5348
15	+0,0116	+0,0698	+0,2674

სავარჯიშო 4. 8. 4. 7. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით დამუშავდეს 4. 7. 1. 6 მაგალითი.

4. 8. 5. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხის განზოგადება მარტივი ფიგურების მიმართ

როგორც განხილული მაგალითებიდან დავრწმუნდით, სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხი ეფექტურია იმ შემთხვევაში, როცა პირველ ჯგუფში შეტანილია ურთიერთდაუკავშირებელი ტოლობები ერთის ტოლი კოეფიციენტებით, მეორე ჯგუფში დანარჩენი ტოლობები, მხოლოდ კოეფიციენტებით +1 და მესამე ჯგუფში ყველა დანარჩენი ტოლობა, რომელთა უცნობების კოეფიციენტები არ უდრის ერთს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მეორე ჯგუფში ზემოხსენებული პირობების მიხედვით გვექნება მხოლოდ ერთი ტოლობა, სამუშაო ფორმულები მარტივდება და სისტემის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ გაწონასწორების საერთო მეთოდი, რომელიც გამოდგება ნებისმიერი ქსელის მიმართ. განსახილველ შემთხვევაში სამუშაო ფორმულები იქნება შემდეგი სახის.

როგორც ვიცით, პირველი ჯგუფის ტოლობების ამოხსნა მდგომარეობს მის ყოველ განტოლებაში შემავალ უცნობებზე სათანადო შეუკვრელობების თანაბრად განაწილებაში (4. 8. 4. 2) ფორმულით

$$\varepsilon'_{i_S}=-\frac{W_S^I}{n_S}, \tag{4.8.5.1}$$

სადაც S პირველი ჯგუფის ტოლობის რიგითი ნომერია,

W_S^I — სათანადო შეუკვრელობა,

n_S — იმავე ტოლობის უცნობთა რაოდენობა.

იმ უცნობებს, რომლებიც არ შედიან პირველი ჯგუფის არც ერთ ტოლობაში პირველადი შესწორებები არ აქვთ.

მეორე ჯგუფის ტოლობებს ადგენენ პირველადი შესწორებული კუთხეების მიხედვით. ვინაიდან აქ ერთი ტოლობა იგულისხმება, (4. 8. 4. 3) მიხედვით ამ ტოლობის კოეფიციენტების გარდაქმნისათვის დავწერთ:

$$\alpha'_{i_S} = \alpha_{i_S} - \frac{[a]_S}{n_S}. \qquad (4.8.5.2)$$

ვინაიდან პირობის თანახმად ამ ტოლობაში შემავალი კოეფიციენტები ერთის ტოლია ($\alpha_i = 1$), (2) ტოლობა, რომლითაც გამოითვლება იმ უცნობის კოეფიციენტი, რომელიც შედის თანადროულად პირველ და მეორე ჯგუფში, გადაიწერება ასე:

$$\alpha'_{i_S} = 1 - \frac{t_S}{n_S} = \frac{n_S - t_S}{n_S} = \frac{l_S}{n_S}, \qquad (4.8.5.3)$$

სადაც t_S იმ კოეფიციენტების რაოდენობაა, რომლებიც თანადროულად შედიან პირველ ჯგუფში S რიგითი ნომრით და მეორე ჯგუფშიც;

$l_S = n_S - t_S$ იმ კოეფიციენტების რაოდენობაა, რომლებიც შედიან პირველ ჯგუფში S რიგითი ნომრით და არ შედიან მეორე ჯგუფში.

იმ შემთხვევაში, როცა მეორე ჯგუფში არ შედის უცნობები, მათი კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულით:

$$\alpha'_{i_S} = 0 - \frac{t_S}{n_S} = -\frac{t_S}{n_S}. \qquad (4.8.5.4)$$

როცა უცნობები შედის მხოლოდ მეორე ჯგუფში (არ შედის პირველ ჯგუფში), მაშინ მათი კოეფიციენტები არ გარდაიქმნება, ე. ი.

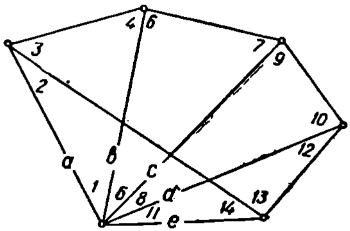
$$\alpha' = \alpha = 1. \qquad (4.8.5.5)$$

როცა უცნობები არ შედის არც პირველ და არც მეორე ჯგუფში, მხოლოდ შედის მესამე ჯგუფში, მაშინ

$$\alpha' = 0. \qquad (4.8.5.6)$$

ხოლო, როცა პირველი ჯგუფის არც ერთი ტოლობის უცნობი არ შედის მეორე ტოლობაში მაშინაც გვექნება

$$\alpha' = 0. \qquad (4.8.5.7)$$



ნახ. 4.8.5.1

(3), (4), (5), (6), (7) ტოლობებიდან ნათლად ჩანს, რომ მეორე ჯგუფის a_i' კოეფიციენტები შეგვიძლია პირდაპირ განვსაზღვროთ პირობით განტოლებათა ჩამოწერისთანავე, რაც მიიღწევა პირველი ჯგუფის განტოლებების შესაბამისი კოეფიციენტების ცხრილის შედგენის საშუალებით.

განვიხილოთ მაგალითი α_i' განსაზღვრის შესახებ, ნახ. (1).

(1) ნახაზის შესაბამისი პირობითი განტოლებები იქნება:

I ჯგუფი

$$1.\ (1)+(2)+(3)+(4)+W_1^{\mathrm{I}}=0;$$

$$2.\ (5)+(6)+(7)+W_2^{\mathrm{I}}=0;$$

$$3.\ (8)+(9)+(10)+W_3^{\mathrm{I}}=0;$$

$$4.\ (11)+(12)+(13)+(14)+W_4^{\mathrm{I}}=0.$$

II ჯგუფი

$$1.\ (1)+(2)+(5)+(8)+(11)+$$
$$+(14)+W^{II}=0.$$

III ჯგუფი

1. პოლუსის ერთი ტოლობა

შევადგენთ (1) ცხრილს პირველი ჯგუფის ტოლობების მიხედვით და იგივე ცხრილში გამოვითვლით α' უცნობებს.

(1) ცხრილში წერტილებით წინ აღნიშნულია ის კუთხეები, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფშიც. ცხადია, წერტილების რაოდენობა მეორე სვეტში იქნება იმდენი, რამდენი უცნობიც გვაქვს მეორე ჯგუფის ტოლობაში, ხოლო ყოველ სექციაში t_S გამოსახავს წერტილებიანი კუთხეების რაოდენობას და l_S უწერტილო კუთხეების რაოდენობას. აგრეთვე საჭიროა დავიხსომოთ, რომ (3) ფორმულის შესაბამისად ყოველ სექციაში იმ კუთხის გარდაქმნილი კოეფიციენტი, რომელიც წერტილით არის აღნიშნული, დადებითია. (1) ცხრილის შედგენის ნაცვლად a_i^1 გარდაქმნილი კოეფიციენტების გამოთვლა შეგვიძლია

ცხრილი 4.8.5.1

სექციების №№	კუთხეების №№	α'	
$S=1$	.1	$+\frac{1}{2}$	$l_1=2$
	.2	$+\frac{1}{2}$	$l_1=2$
	3	$-\frac{1}{2}$	$n_1=4$
	4	$-\frac{1}{2}$	
$S=2$	.5	$+\frac{2}{3}$	$l_2=1$
	6	$-\frac{1}{3}$	$l_2=2$
	7	$-\frac{1}{3}$	$n_2=3$

ცხრილი 4.8.5.i გაგრძელება

სექციების №№	კუთხეების №№	α'	
$S=3$	.8	$+\frac{2}{3}$	$l_3=1$
	9	$-\frac{1}{3}$	$l_3=2$
	10	$-\frac{1}{3}$	$n_3=3$
$S=4$	.11	$+\frac{1}{2}$	$l_4=2$
	12	$-\frac{1}{2}$	$l_4=2$
	13	$-\frac{1}{2}$	
	.14	$+\frac{1}{2}$	$n_4=4$

პირდაპირ სქემის მიხედვით, რადგანაც პირველ და მეორე ჯგუფებში ყოველთვის შედის ჯამის და ფიგურის პირობითი ტოლობები, რომლებიც ნახაზზე ნათლად ჩანს.

როგორც ვიცით, ყოველ სექციაში გარდაქმნილი კოეფიციენტების ჯამი ტოლია ნულის, ე. ი.

$$[\alpha']_S^l=0. \tag{4.8.5.8}$$

ზემოხსენებული მოქმედებების შესრულების შემდეგ გარდაქმნილი კოეფიციენტების საფუძველზე ამოვხსნით მეორე ჯგუფის ტოლობას.

შესაბამისი ნორმალური განტოლება იქნება:

$$[\alpha'\alpha']+W''=0. \tag{4.8.5.9}$$

ხოლო (4. 8. 1. 38) ანალოგიურად

$$[\alpha'\alpha']=[\alpha\alpha']=[\alpha']'', \tag{4.8.5.10}$$

სადაც $[\alpha']''$ იმ გარდაქმნილი კოეფიციენტების ჯამია, რომლებიც შედიან მეორე ჯგუფის განტოლებაში.

(10) დამოკიდებულების გამოყენებით (9) ტოლობიდან მიეიღებთ:

$$K=-\frac{W''}{[\alpha']''},$$

სადაც W'' გამოთვლილია პირველადი შესწორებული კუთხეების მიხედვით. მაშასადამე, (4. 8. 4. 10) ანალოგიურად ε'' მეორადი შესწორებები გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon_i''=\alpha_i' K=-\frac{\alpha_i'}{[\alpha']''}\cdot W''. \tag{4.8.5.11}$$

მეორად შესწორებათა ჯამი, გამოთვლილი მხოლოდ მეორე ჯგუფის ტოლობისათვის, უნდა აკმაყოფილებდეს ტოლობას:

$$[\alpha']^{II}=-W^{II}. \tag{4.8.5.12}$$

როგორც (11)-დან ჩანს, მეორე ჯგუფის ტოლობის მეორადი შესწორებების სიდიდეები მიიღება W შეუკვრელობის განაწილებით α_i' გარდაქმნილი კოეფიციენტების პროპორციულად. აგრეთვე მეორად შესწორებათა ჯამი პირველი ჯგუფის ყოველი განტოლების შესაბამისად ტოლი უნდა იყოს ნულის. მართლაც, (11)-ის მიხედვით

$$[\varepsilon'']_S^I=-\frac{[\alpha']_S^I}{[\alpha']^{II}}W^{II}.$$

ხოლო (8)-ის მიხედვით

$$[\alpha']_S^I=0.$$

მაშასადამე,

$$[\varepsilon'']_S^I=0. \tag{4.8.5.13}$$

მესამე ჯგუფის ტოლობებს შევადგენთ მეორედ შესწორებული კუთხეების მიხედვით.

როგორც ცნობილია, A, B, C,... კოეფიციენტები უნდა გარდაიქმნას ორჯერ.

პირველადი გარდაქმნა ხდება (2) ფორმულის ანალოგიურად ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} A'_{i_S}&=A_{i_S}-\frac{[A]_S}{n_S}\\ B'_{i_S}&=B_{i_S}-\frac{[B]_S}{n_S}\end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.14}$$

და ასე შემდეგ.

მეორადი გარდაქმნა კი თანახმად სამ ჯგუფად განაწილების წესისა ხდება (4. 8. 4. 16) და (4. 8. 4. 17) დამოკიდებულებების შესაბამისად, ფორმულებით·

$$\left.\begin{aligned} A_i''&=A_i'+\Delta A_i'\\ B_i''&=B_i'+\Delta B_i'\end{aligned}\right\} \tag{4.8.5.15}$$

და ასე შემდეგ,

სადაც

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_i'&=-\frac{\alpha_i'}{[\alpha']^{II}}[A']^{II}\\ \Delta B_i'&=-\frac{\alpha_i'}{[\alpha']^{II}}[B']^{II}\end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.16}$$

და ასე შემდეგ.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$p_i = -\frac{\alpha_i'}{[\alpha']''}. \tag{4.8.5.17}$$

მაშინ (11) და (16) ფორმულები შესაბამისად მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\varepsilon_i'' = p_i \cdot W''. \tag{4.8.5.18}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_i' &= pi\,[A_i''' \\ \Delta B_i' &= p_i\,[B']'' \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.19}$$

და ასე შემდეგ.

გასაგებია, რომ მეორე ჯგუფის უცნობებისათვის დაცული იქნება ტოლობა

$$[\Delta A']'' = -[A']''. \tag{4.8.5.20}$$

საკონტროლო ფორმულები იქნება:

$$\left.\begin{aligned} [A_S']_S' &= 0 \\ [B_S']_S' &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.21}$$

და ასე შემდეგ.

მაშასადამე, პირველი ჯგუფის ტოლობების მიხედვით A', B',... კოეფიციენტების კერძო ჯამები ნულია.

აგრეთვე,

$$\left.\begin{aligned} [A'']_l' &= 0 \\ [B'']_l' &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.22}$$

და ასე შემდეგ.

ასევე

$$\left.\begin{aligned} [A'']'' &= 0 \\ [B'']'' &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.8.5.23}$$

და ასე შემდეგ. ე. ი. პირველი და მეორე ჯგუფების მიხედვით A'', B'',... კოეფიციენტების კერძო ჯამები ნულია.

მეორედ გარდაქმნილი კოეფიციენტების საფუძველზე გაუსის სქემით განვსაზღვრავთ მესამე ჯგუფის K_A, K_B.... კორელატებს, რის შემდეგ გამოითვლება მესამე შესწორებები ფორმულით

$$\varepsilon''' = A_i'' K_A + B'' K_B. \tag{4.8.5.24}$$

წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის განსაზღვრისათვის, მოცემულ ფუნქციას დავწერთ (4. 8. 2. 8) ანალოგიურად წრფივი სახით:

$$\Phi_u = \Phi_o + \Phi_1\varepsilon_1' + \Phi_2\varepsilon'_2 + \ldots + \Phi_n\varepsilon_n'.$$

შემდეგ ყოველ Φ_i კოეფიციენტს ორჯერ გარდავქმნით ისე, როგორც A_i, B_i კოეფიციენტებს. მაგალითად,

$$\Phi'_{i_S}=\Phi_{i_S}-\frac{[\Phi]_S}{n_S}\,. \tag{4.8.5.25}$$

$$\Delta\Phi_i'=p_i\,[\Phi']^{II} \tag{4.8.5.26}$$

$$\Phi_i''=\Phi_i'+\Delta\Phi_i'. \tag{4.8.5.27}$$

ცხადია, რომ Φ-ის გამოთვლის კონტროლი (20) და (21) ფორმულების შესაბამისი იქნება.

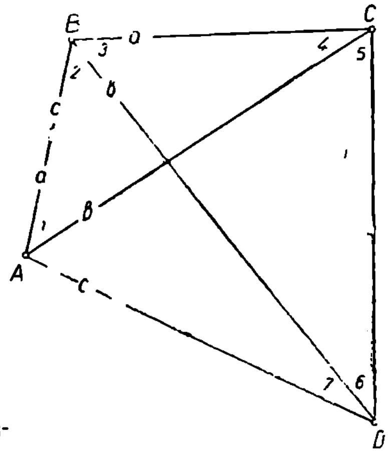
წონითი ფუნქციის წონა გამოითვლება გაუსის სქემის მიხედვით შემდეგი სახის ფორმულის შესაბამისად:

$$\frac{1}{P_\Phi}=[\Phi''\Phi]-\frac{[A''\Phi]^2}{[A''A'']}-\frac{[B''\Phi\cdot 1]^2}{[B''B''\cdot 1]}-\ldots \tag{4.8.5.28}$$

მაგალითი 4. 8. 5. 1. სამ ჯგუფად გაწონასწორდეს (2) ნახაზზე წარმოდგენილი არასრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი (1) ცხრილის მონაცემების მიხედვით

ცხრილი 4.8.5.1

კუთხეების №№	განაზომები
1	42° 45′ 50″,4
2	51 51 19 ,6
3	53 25 20 ,4
4	31 57 28 ,4
5	56 34 30 ,9
6	38 02 37 ,7
7	28 15 30 ,3



ნახ. 4.8.5.2.

ამოხსნა

1. შევადგენთ და ჯგუფებად დავყოფთ სათანადო პირობით განტოლებებს

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+(4)+W^I=0,\ \text{სადაც}\ W^I=1+2+3+4-180^0=$$
$$=179^059'58'',\ 8-180^0=-1'',\ 2$$

II ჯგუფი

$$(3)+(4)+(5)+(6)+W^{II}=0$$

III ჯგუფი

$$(\Delta_2-\Delta_{2+3})\,(2)-\Delta_{2+3}\,(3)+$$
$$+\Delta_4(4)-\Delta_5(5)+\Delta_{6+7}(6)+$$
$$+(\Delta_{6+7}-\Delta_7)\,(7)+W_{\lg}^{\mathrm{III}}=0,$$

სადაც

$$W^{III}=10_7\,\lg\frac{\sin 4\cdot\sin[6+7]\sin 2}{\sin[2+3]\sin 5\cdot\sin 7}\,.$$

2. (1) ფორმულით გავანაწილებთ W^I შეუკვრელობას

$$\varepsilon_1{}'=\varepsilon_2{}'=\varepsilon_3=\varepsilon_4=-\frac{W^I}{4}=-\frac{-1{,}2}{4}=+0{,}3.$$

ეს ოდენობები შეიტანება (1) სქემის მეათე სვეტში.

3. (2), (3), (4), (5), (6), (7) ფორმულების მიხედვით განვსაზღვრავთ $\alpha_i{}'$ მეორე ჯგუფის გარდაქმნილ კოეფიციენტებს და შემდეგ (17) ფორმულით განვსაზღვრავთ P_i კოეფიციენტებს (იხილეთ (1) სქემის 1, 2, 3 სვეტები); მაგალითად,

$$p_1=-\frac{\alpha_1{}'}{[\alpha']^{II}}=-\frac{\alpha_1{}'}{\alpha_3{}'+\alpha_4{}'+\alpha_5{}'+\alpha_6{}'}=-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1}=+\frac{1}{6}\,.$$

$$p_2=+\frac{1}{6}\,.$$

$$p_3=-\frac{\alpha_3{}'}{[\alpha']^{II}}=-\frac{+\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1}{6}\,,\quad p_4=-\frac{1}{6}\,,$$

$$p_5=-\frac{\alpha_5{}'}{[\alpha']^{II}}=-\frac{1}{3}\,,\quad p_6=-\frac{1}{3}\,.$$

$\alpha_i{}'$ და p_i გამოთვლის კონტროლი სრულდება შემდეგი ფორმულებით:

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha']_S^I=0\\ p\,[\varepsilon']_S^I=0\\ [p]^{II}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-1\end{array}\right\}\,. \qquad (4.8.5.29)$$

იხილეთ (1) სქემის 2 და 3 სვეტები.

სქემა 4.8.5.1

№№	α'	p	ε''	A	A'	$\Delta A'$	A''	ε'''	ε'	ε
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	−0″,3	0	−1,5	+0,1	−1,4	−1″,0	+0″,3	−1″,0
2	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	−0 ,3	+2,2	+0,6	+0,1	+0,7	+0 ,5	+0 ,3	+0 ,5
.3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	+0 ,3	+0,6	−1,0	−0,1	−1,1	−0 ,8	+0 ,3	−0 ,2
.4	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	+0 ,3	+3,4	+1,9	−0,1	+1,8	+1 ,3	+0 ,3	+1 ,9
5	+1	$-\frac{1}{3}$	+0,7	−1,4	−1,4	−0,1	−1,5	−1,1	0	−0 ,4
6	+1	$-\frac{1}{3}$	+0,7	+0,9	+0,9	−0,1	+0,8	+0,6	0	+1 ,3
7	0	0	0	−3,0	−3,0	0	−3,0	−2,2	0	−2 ,2

$[\alpha']^{II}=+3,0$ $\quad W^{II}=-2,0$ $\quad [A']^{II}=+0,4$

$W^{III}=-13,8$
$[A''A'']=18,79$
$K=+0,7344$

4. პირველად შესწორებული კუთხეებით განვსაზღვრავთ W^{II} შეუკვრელობას და (18) ფორმულით განვსაზღვრავთ ε_i'' მეორად შესწორებებს (სქემის 4 სვეტი)

3. 53°25′20″,7
4. 31 57 28 ,7
5. 56 34 30 ,9
6. 38 02 37 ,7

179 59 58 ,0

$$W^{II}=-2'',0$$

მეორადი შესწორებების კონტროლი სრულდება (12) და (13) ფორმულებით
$[\varepsilon''[^{II}=-W^{II}$, მართლაც $0,3+0,3+0,7+0,7=+2'',1$;
$[\varepsilon'']^{1}_{S}=0$, $-0,3-0,3+0,3+0,3=0$.

5. მეორედ შესწორებული კუთხეებით ვადგენთ მესამე ჯგუფის ტოლობას (იხილეთ 2 სქემა) და ორჯერ გარდაქმნას ამ ჯგუფის კოეფიციენტებისას ვაწარმოებთ (14), (19) და (15) ფორმულებით.

სქემა 4.8.5.2

№№	მეორედ შესწ. კუთხეები	lg sin α	Δ	WW	მეორედ შესწ. კუთხეები	lg sin α	Δ
4	31°57′29″,0	9.7237005	+33,8	2+3	105°16′40″,6	9.9843738	−5,7
6+7	66 18 08 ,7	9.9617435	+9,2	5	56 34 31 ,6	9.9214845	+13,9
2	51 51 19 ,6	9.8956738	+16,5	7	28 15 30 ,3	9.6752733	+39,2

$\Sigma_1=9.5811178$ $\quad W^{III}=-138(\lg_7)$ $\quad \Sigma_2=9.5811316$

ათჯერ შემცირებული

$$A_2=\Delta_2-\Delta_{2+3}=16,5-(-5,7)=+22,2=+2,2(\lg_6),\quad A_3=-\Delta_{2+3}=+0,6(\lg_6)$$

$$A_4=+3,4(\lg_6),\ A_5=-\Delta_5=-1,4(\lg_6)\ \ A_6=\Delta_{6+7}=+0,9(\lg_6),$$

$$A_7=\Delta_{6+7}-\Delta_7=9,2-39,2=-3,0(\lg_6),\quad A_1=0$$

$$W\text{III}=-13,8(\lg_6)$$

მიღებული ოდენობები შეტანილია (1) სქემის 5 სვეტში.

(14) ფორმულით შევსებულია (1) სქემის 5 სვეტში.

(19) „ „ „ 7 „ , ხოლო

$[A']^{\text{II}}=-1,0+1,9-1,4+0,9=+0,4$ ჩაწერილია (1) სქემის ქვემო სტრიქონის P სვეტში.

კონტროლისათვის ვსარგებლობთ (20), (21) ფორმულებით, მაგალითად,

(20) ფორმულით $-0,1\ -0,1\ -0,1\ -0,1=-(-1,0+1,9-1,4+0,9)$

(21) „ $-0,1\ -0,1\ -0,1\ -0,1=0.$

(1) სქემის 8 სვეტი (15) ფორმულის მიხედვითაა შევსებული, მისი კონტროლია (22) და (23) ფორმულები. მაგალითად,

(22) ფორმულით $-1,4+0,7-1,1+1,8=0;$

(23) „ $-1,1+1,8-1,5+0,8=0.$

6. (1) სქემის მერვე სვეტის, ანუ მეორედ გარდაქმნილი კოეფიციენტებით გაუსის სქემით განისაზღვრება K კორელატი, რის შემდეგ გამოვითვლით ε''' შესწორებებს.

$[A''A'']=18,8$; $K=-0,734$ ჩაწერილია (1) სქემის მერვე სვეტში.

(24) ფორმულით გამოითვლება ε_i''', (1) სქემის მეცხრე სვეტი. (1) სქემის მეათე სვეტში შეიტანება ε_i' პირველადი შესწორებების მნიშვნელობები და მეთერთმეტე სვეტში კი ჩაიწერება $\varepsilon_i=\varepsilon_i'+\varepsilon_i''+\varepsilon_i'''$ ჯამები.

7. საბოლოო კონტროლი (გაწონასწორებული კუთხეები)

1.	42°45′49″,5	1′.	99°53′11″,7
2.	51 51 20 ,1	2.	51 51′20 ,1
3.	53 25 20 ,2	3.	28 15 28 ,2
4.	31 57 30 ,3		0
	0		

3.	53°25′20″,2	1″.	57°07′22″,3
4.	31 57′30 ,3	5.	56 34 30 ,5
5.	56 34 30 ,5	6.	38 02 39 ,0
6.	38 02 39 ,0	7.	28 15 28 ,2
	0		0

№№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin α	№№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin α
4	31°57′30″,3	9.7237049	2+3	105°16′40″,3	9.9843739
6+7	66 18 07 ,2	9.9617421	5	56 34 30 ,5	9.9214830
2	51 51 20 ,1	9.8956747	7	28 15 28 ,2	9.6752650
		$\Sigma_1=9.5811217$			$\Sigma_2=9.5811219$

განაზომთა და გამონათვალთა შეფასება ხდება ჩვეულებრივი ხერხით.

4. 8. 6. შემთხვევა, როცა მეორე ჯგუფის ტოლობების გარდაქმნილი კოეფიციენტები არის ურთიერთტოლი

იმ შემთხვევაში, როცა α_i' მეორე ჯგუფის გარდაქმნილი კოეფიციენტები ერთნაირია, მათი შესაბამისი უცნობების p_i სიდიდეებიც ურთიერთტოლი იქნება.

მართლაც, (4. 8. 5. 17) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$p_i = p^{II} = -\frac{1}{n^{II}}, \tag{4.8.6.1}$$

სადაც

n^{II} მეორე ჯგუფის ტოლობის უცნობთა რაოდენობაა.

(1) დამოკიდებულების (4. 8. 5. 18) ტოლობაში ჩასმით დავწერთ:

$$\varepsilon''^{II} = -\frac{W^{II}}{n^{II}}. \tag{4.8.6.2}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში პირველადი შესწორებული კუთხეებით განსაზღვრული W^{II} მეორე ჯგუფის ტოლობის შეუკვრელობა ამ ტოლობაში შემავალ კუთხეებზე განაწილდება თანაბრად.

p^{II} და ε''^{II} სიდიდეებს გამოვითვლით პირველი ჯგუფის სექციების (ტოლობების) შესაბამისად ისე, როგორც ამას α' მეორე ჯგუფის გარდაქმნილი კოეფიციენტების გამოთვლის დროს ვაკეთებთ.

გამოვითვალოთ p ცალ-ცალკე სექციების მიხედვით იმ უცნობებისათვის, რომლებიც არ მონაწილეობენ მეორე ჯგუფში, მხედველობაში მივიღოთ ის, რომ α' გამოითვლება (4. 8. 5. 4) ტოლობით. ამისათვის, გარდავქმნათ (4. 8. 5. 17) ფორმულა შემდეგნაირად:

$$p = -\frac{\alpha_i'}{[\alpha']^{II}} = -\frac{\alpha_i'}{\alpha'^{II} \cdot n^{II}} = -\frac{\alpha_i'}{\frac{l_S}{n_S}} \cdot \frac{1}{n^{II}}.$$

თუ მიღებულ დამოკიდებულებაში (4. 8. 5. 4)-ის მიხედვით ჩავსვამთ $\alpha_i' = -\frac{t_S}{n_S}$, მივიღებთ $_Sp$ მუდმივს იმ კუთხეებისათვის, რომლებიც არ იმყოფებიან მეორე ჯგუფში.

$$_Sp = +\frac{t_S}{l_S} \cdot \frac{1}{n^{II}}. \tag{4.8.6.3}$$

მაშასადამე, $_S\varepsilon''$ მეორადი შესწორება იმ უცნობებისათვის, რომლებიც მეორე ჯგუფის განტოლებაში არ შედის, (4. 8. 5. 18) შესაბამისად გამოითვლება ფორმულით:

$$_S\varepsilon'' = +\frac{t_S}{l_S} \cdot \frac{W^{II}}{n^{II}}. \tag{4.8.6.4}$$

(3) და (4) ფორმულები შეიძლება სხვა სახითაც წარმოვიდგინოთ შემდეგი მსჯელობით:

p^{II} მუდმივების ჯამი და ასევე ε''^{II} შესწორებათა ჯამი ყოველ სექციაში t სიდიდის მნიშვნელობის და (4. 8. 5. 18) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$[P^{II}]_S = -\frac{t_S}{n^{II}} . \tag{4.8.6.5}$$

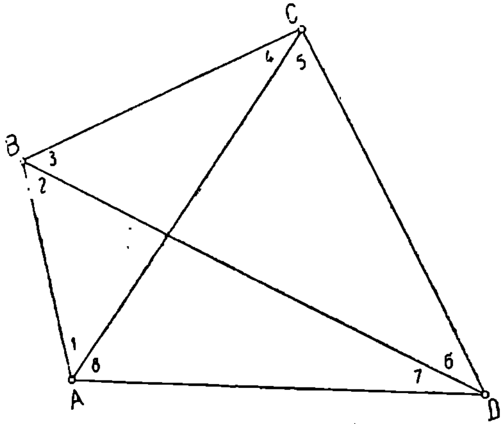
$$\left[\varepsilon''^{II}\right]_S = -\frac{t_S}{n^{II}} \cdot W^{II}. \tag{4.8.6.6}$$

(3) და (5) დამოკიდებულების შედარებით

$$_{S}p = -\frac{[p^{II}]_S}{l_S} . \tag{4.8.6.7}$$

(4) და (6) შედარებით კი

$$_{S}\varepsilon'' = -\frac{[\varepsilon''^{II}]_S}{l_S} . \tag{4.8.6.8}$$



ნახ. 4.8.6.1

მაშასადამე, იმისათვის, რომ გამოვითვალოთ $_{S}p$ და $_{S}\varepsilon''$ ყოველ სექციაში კრებენ p^{II} და ε''^{II} სიდიდეებს და შესაბამისად ჰყოფენ სექციის დანარჩენი წევრების რაოდენობაზე.

მესამე ჯგუფის მიმართ ვიმოქმედებთ ისე, როგორც ეს წინა პარაგრაფში მოყვანილი.

მაგალითი 4. 8. 6. 1. გაწონასწორდეს სრული გეოდეზიური ოთხკუთხედი (1) ნახაზისა და (1) ცხრილის მონაცემებით.

ცხრილი 4.8.6.1

კუთხ. №№	გაზომვები	α	α'	
.1	42°45′50″,4	0	$-\frac{1}{2}$	$l_1=2$
2	51 51 19 ,6	0	$-\frac{1}{2}$	$l_1=2$
.3	53 25 20 ,4	1	$+\frac{1}{2}$	$n_1=4$
.4	31 57 28 ,4	1	$+\frac{1}{2}$	
.5	56 34 30 ,9	1	$+\frac{1}{2}$	$l_2=2$
.6	38 02 37 ,7	1	$+\frac{1}{2}$	$l_2=2$
7	28 15 30 ,3	0	$-\frac{1}{2}$	$n_2=4$
8	57 07 22 ,7	0	$-\frac{1}{2}$	

ამოხსნა

I ჯგუფი

$$(1)+(2)+(3)+(4)+W_1^I=0, \text{ სადაც } W_1^I=1+2+3+4-180=-1'',2$$

$$(5)+(6)+(7)+(8)+W_2^I=0, \quad " \quad W_2^I=5+6+7+8-180=+1'',6$$

II ჯგუფი

$$(3)+(4)+(5)+(6)+W^{II}=0$$

III ჯგუფი

$$(\Delta_{1+8}-\Delta_1)(1)+(\Delta_4-\Delta_{4+5})(4)-\Delta_{4+5}(5)+\Delta_6(6)-\Delta_7(7)+\Delta_{1+8}(8)+ +W^{III}=0,$$

სადაც

$$W^{III}=10^6\lg\frac{\sin 6\cdot\sin[1+8]\cdot\sin 4}{\sin[4+5]\cdot\sin 7\cdot\sin 1}.$$

(1) ცხრილიდან და (1) სქემიდან ჩანს, რომ a_i' მეორე ჯგუფის (განტოლების) გარდაქმნილი კოეფიციენტები ერთნაირია; ასე რომ, შეიძლება ამ პარაგრაფში მიღებული ფორმულების გამოყენება.

1. პირველადი შესწორებები (4. 8. 5. 1) ფორმულით

$$\varepsilon'_{1_1}=\varepsilon'_{2_1}=\varepsilon'_{3_1}=\varepsilon'_{4_1}=-\frac{W_1^I}{n_1}=-\frac{-1'',2}{4}=+0'',3,$$

$$\varepsilon'_{5_2}=\varepsilon'_{6_2}=\varepsilon'_{7_2}=\varepsilon'_{8_2}=-\frac{W_2^I}{n_2}=-\frac{+1'',6}{4}=-0'',4.$$

2. პირველად შესწორებული კუთხეებით W^{II} შეუკვრელობის გამოთვლა

$$\begin{array}{rl} 3. & 53°25'20'',7 \\ 4. & 31\ 57\ 28\ ,7 \\ 5. & 56\ 34\ 30\ ,5 \\ 6. & 38\ 02\ 37\ ,3 \\ \hline - & 179°59'57'',2 \\ & 180° \\ \hline & W^{II}=-2'',8 \end{array}$$

3. მეორე ჯგუფში შემავალი უცნობებისათვის ε''^{II} მეორე შესწორებების გამოთვლა (2) ფორმულით

$$\varepsilon_3''^{II}=\varepsilon_4''^{II}=\varepsilon_5''^{II}=\varepsilon_6''^{II}=-\frac{W^{II}}{n^{II}}=-\frac{-2'',8}{4}=+0'',7$$

4. $_5\varepsilon''$ მეორე შესწორებების გამოთვლა იმ უცნობებისათვის, რომლებიც არ შედიან მეორე ჯგუფში (8) ფორმულით

$$_1\varepsilon_1''={}_1\varepsilon_2''=-\frac{[\varepsilon''^{II}]_1}{l_1}=-\frac{\varepsilon_3''^{II}+\varepsilon_4''^{II}}{2}=-\frac{1'',4}{2}=-0'',7,$$

$$_2\varepsilon_7''={}_2\varepsilon_8''=-\frac{[\varepsilon''^{II}]_2}{l_2}=-\frac{\varepsilon_5''^{II}+\varepsilon_6''^{II}}{2}=-\frac{1'',4}{2}=-0'',7.$$

მაშასადამე, მეორე შესწორებები იმ უცნობებისათვის, რომლებიც არ შედიან მეორე ჯგუფის განტოლებაში გამოითვლება (2) ფორმულით, მხოლოდ ნიშანი შეიცვლება

$$\varepsilon_1''=\varepsilon_2''=\varepsilon_7''=\varepsilon_8''=+\frac{W^{II}}{4}=\frac{-2'',8}{4}=-0'',7.$$

5. მესამე ჯგუფის ტოლობის A_i კოეფიციენტებისა და შესაბამისი W^{III} შეუკვრელობების გამოთვლა ($\lg_7$) განზომილებაში.

სქემა 4.8.6.1

კუთხ. №№	მეორედ შესწ. კუთხეები	lg sin α	Δ	კუთხეების №№	მეორედ შესწორებული კუთხეები	lg sin α	Δ
6	38°02'38'',0	9.7897674	+26,9	4+5	88°32'00'',6	9.9998577	+ 0,5
1+8	99 53 11 ,6	9.9935022	— 3,7	7	28 15 29 ,2	9.6752690	+39,2
4	31 57 29 ,4	9.7237019	+33,8	1	42 45 50 ,0	9.8318562	+22,7
	Σ_1=9.5069715					Σ_2=9.5069829	

$$W^{III}=-114\ (\lg_7)$$

ათჯერ შემცირებული, ანუ (lg$_6$) განზომილებაში:

$$A_1=\Delta_{1+8}-\Delta_1=-0{,}37-2{,}27=-2{,}64; \quad A_2=0; \; A_3=0;$$

$$A_4=\Delta_4-\Delta_{4+5}=+3{,}4; \qquad A_5=-\Delta_{4+5}=-0{,}05=0;$$

$$A_6=\Delta_6=+2{,}7; \quad A_7=-\Delta_7=-3{,}9; \; A_8=\Delta_{1+8}=-0{,}4;$$

$$W^{III}=-11{,}4.$$

6. მიღებული ოდენობები შეტანილია (2) სქემის მეორე სვეტში და (4. 8. 5. 14) ფორმულით გამოთვლილია A_i' პირველად გარდაქმნილი კოეფიციენტები პირველი ჯგუფის სექციების (ტოლობების) მიხედვით. იხილეთ (2) სქემის მესამე სვეტი.

სქემა 4.8.6.2

ქუთხ. №№	A	A'	$\Delta A'$	A''	ε'''	ε''	ε'	ε
1	−2,6	−2,8	+1,6	−1,2	−0″,7	−0″,7	+0″,3	−1″,1
2	0	−0,2	+1,6	+1,4	+0 ,8	−0 ,7	+0 ,3	+0 ,4
3	0	−0,2	−1,6	−1,8	−1 ,1	+0 ,7	+0 ,3	−0 ,1
4	+3,4	+3,2	−1,6	+1,6	+1 ,0	+0 ,7	+0 ,3	+2 ,0
5	0	+0,4	−1,6	−1,2	−0 ,7	+0 ,7	−0 ,4	−0 ,4
6	+2,7	+8,1	−1,6	+1,4	+0 ,8	+0 ,7	−0 ,4	+1 ,1
7	−3,9	−3,5	+1,6	−1,9	−1 ,1	−0 ,7	−0 ,4	−2 ,2
8	−0,4	0	+1,6	+1,6	+1 ,0	−0 ,7	−0 ,4	−0 ,1

$[A']^{II}=+6{,}5$ $\qquad W^{II}=-11{,}4$

$[A''A'']=\ 18{,}8$

$K=+\ 0{,}6064$

7. მესამე ჯგუფის ტოლობის კოეფიციენტების მეორედ გარდაქმნისათვის საჭიროა (2) სქემის მესამე სვეტიდან განისაზღვროს $[A']^{II}$ ჯამი და $\Delta A_i'$ სიდიდეების გამოსათვლელად მოვიქცევით ისე, როგორც W^{II} შეუკვრელობის მიმართ. მაშასადამე,

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_3'=\Delta A_4'=\Delta A_5'=\Delta A_6'=-\frac{[A']^{II}}{4}=-\frac{+6{,}5}{4}=-1{,}6 \\ \Delta A_1'=\Delta A_2'=\Delta A_7'=\Delta_8'=+\frac{[A']^{II}}{4}=+\frac{+6{,}5}{4}=+1{,}6 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.8.6.9)$$

(2) სქემის მეხუთე სვეტი წარმოადგენს მესამე და მეოთხე სვეტების ჯამს, გამოთვლილს ფორმულით:

$$A_i''=A_i'+\Delta A_i'$$

8. გამოითვლება K კორელატი ფორმულით

$$K=-\frac{W^{III}}{[A'A'']}=-\frac{-11{,}4}{18{,}8}=+0{,}6064,$$

რაც (2) სქემის ქვემოთ არის ჩაწერილი.

9. გამოითვლება ε''' მესამე შესწორება ფორმულით (სქემის მეექვსე სვეტი)

$$\varepsilon_i'''=KA_i'''$$

10. (2) სქემის მეშვიდე და მერვე სვეტებში შეიტანება ε_i'' და ε' მნიშვნელობები, ხოლო მეცხრე სვეტში სამივე შესწორების ε_i ჯამები. დანარჩენი მოქმედებები იგივეა, რაც ერთ ჯგუფად განაწილების დროს იყო შესრულებული. აქ მოვიყვანთ მხოლოდ საბოლოო კონტროლს.

11. საბოლოო კონტროლი

1.	42°45′49″,3;	5.	56°34′30″,5;
2.	51 51 20 ,0;	6.	36 02 38 ,8;
3.	53 25 20 ,3;	7.	28 15 28 ,1;
4.	31 57 30 ,4;	8.	57 07 22 ,6;
	0		0

1.	42°45′49″3;	3.	53°25′20″,3;
2.	51 51 20 0;	4.	31 57 30 ,4;
7.	28 15 28 1;	5.	56 34 30 ,5;
8.	57 07 22 6;	6.	38 02 38 ,8.
	0		0

კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin α	კუთხ. №№	გაწონასწორებული კუთხეები	lg sin α
6	38°02′38″,8	9.7897696	4+5	88°32′00″,9	9.9998577
1+8	99 53 11 ,9	9.9935021	7	28 15 28 ,1	9.6752647
4	31 57 30 ,4	9.7237052	1	42 45 49 ,3	9.8318546
		$\Sigma_1=9.5069769$			$\Sigma_2=9.5069770$

$$\Sigma_1-\Sigma_2=-1(\lg_7)$$

სავარჯიშოები

სავარჯიშო 4. 8. 6. 1. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით დამუშავდეს 4. 7. 1. 3 მაგალითი.

სავარჯიშო 4. 8. 6. 2. სამ ჯგუფად გაწონასწორების ხერხით დამუშავდეს 4. 7. 1. 4 მაგალითი.

სავარჯიშო 4. 8. 6. 3. ხისტ კუთხეში n სამკუთხედის ჩასმისათვის საჭიროა სამკუთხედის n პირობითი განტოლება (I ჯგუფი), ჯამის და სხვაობის ერთი განტოლება (II ჯგუფი) და გვერდების ერთი ტოლობა (III ჯგუფი).

შეარჩიეთ მაგალითი და გააწონასწორეთ.

სავარჯიშო 4. 8. 6. 4. ხისტ კუთხეში პუნქტის ჩასმისათვის საჭიროა: სამკუთხედის ორი განტოლება (I ჯგუფი), ჯამის და სხვაობის ერთი განტოლება (II ჯგუფი) და გვერდების ერთი განტოლება (III ჯგუფი).

შეარჩიეთ მაგალითი და გააწონასწორეთ.

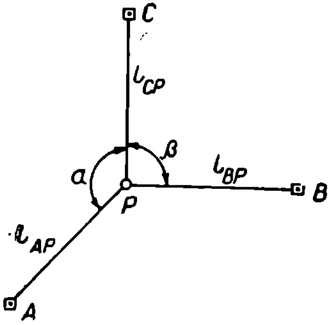
თავი IX

არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორება

4. 9. 1. ზოგიერთი წინასწარი ცნობები არაპირდაპირ განაზომთა შესახებ

განაზომთა შეცდომების თეორიიდან ცნობილია, რომ არაპირდაპირი (მეშვეობითი) ეწოდება განაზომებს, როცა მათი ოდენობები გამოითვლება ამა თუ იმ ფორმულით, რომელშიც შეიტანება მათთან ფუნქციონალურად დაკავშირებული ელემენტების უშუალო (პირდაპირი) განაზომები. ასეთი შემთხვევები ბევრი გვხვდება საინჟინრო გეოდეზიურ და სამარკშეიდერო პრაქტიკაში. განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ საჭიროა რაიმე საინჟინრო ნაგებობის ახლო P წერტილის Xp, Yp კოორდინატების განსაზღვრა, რადგანაც მათი უშუალოდ გაზომვა შეუძლებელია (ძირითადად წერტილთა კოორდინატები არაპირდაპირი გზით ისაზღვრება). ეს წერტილი მდებარეობს მაღალი კლასის A, B, C პუნქტებს შორის, რომელთა ცნობილი კოორდინატებია X_A, Y_A; X_B, Y_B; X_C, Y_C. მაშასადამე, ამოსახსნელია სნელიუს-პოტენოტის ამოცანა, რისთვისაც საჭირო იქნება α და β (ნახ. 1) კუთხეების უშუალოდ გაზომვა ან უნდა გაიზომოს l_{AB}, l_{Bp}, l_{CP} გვერდები და გამოვიყენოთ შებრუნებული გეოდეზიური ამოცანის ფორმულები და სხვ. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში აუცილებელია უშუალოდ გაიზომოს l_{AP} და l_{Bp}. როგორც ვიცით, უშუალოდ გაზომილი ელემენტები ერთმანეთთან ფუნქციონალურად დაკავშირებულია (2. 6. 1. 7) ფორმულებით:



ნახ. 4.9.1.1.

$$\left.\begin{aligned} l_{Ap} &= \sqrt{(X_p - X_A)^2 + (Y_p - Y_A)^3} \\ l_{Bp} &= \sqrt{(X_p - X_B)^2 + (Y_p - Y_K)^2} \end{aligned}\right\} . \qquad (4.9.1.1)$$

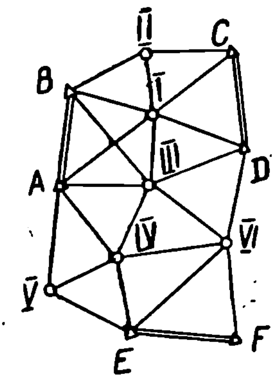
მაშასადამე, არაპირდაპირი განაზომების დროს იზომება ფუნქციები და უცნობია (ისაზღვრება) არგუმენტები. იმ შემთხვევაში, თუ განაზომი ფუნქციების რაოდენობა ტოლია უცნობი არგუმენტების რაოდენობისა, ამ უკანასკნელთა გამოთვლა, მარტივად, არაერთგვაროვანი განტოლებების ელემენტარული ალგებრის წესებით შეიძლება. მაგალითად, ამ ორი ორუცნობიანი განტოლების ერთობლივად ამოხსნით მივიღებთ X_p და Y_p უცნობების მნიშვნე-

ლობას ერთხელ. აქ გაწონასწორების ამოცანა არ დაისმება, ე. ი. საჭიროა ჭარბი განაზომი. ამ მიზნით დამატებით უშუალოდ გაიზომება l_{CP} მანძილი, რის შესაბამისად დავწერთ მესამე განტოლებას:

$$l_{CP} = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_C - Y_P)^2} \qquad (4.9.1.2)$$

მიღებული ორუცნობიანი სამი განტოლების წყვილ-წყვილად ამოხსნით მივიღებთ X_P და Y_P უცნობების არაპირდაპირი ხერხით განსაზღვრულ სამ-სამ რიცხვით მნიშვნელობას. იმის გამო, რომ უშუალოდ გაზომილი l_{AP}, l_{BP}, l_{CP} მანძილები მოიცავს უცილობელ შეცდომებს, საძებარი გამონათვლები ტოლი არ იქნება, მაშასადამე, საჭიროა მიღებულ გამონათვალთა გაწონასწორება. ზოგჯერ არაპირდაპირ განაზომთა ხერხს „საჭირო უცნობთა" ხერხს უწოდებენ.

როგორც ვხედავთ, გარდა განხილული პირობით განაზომთა ერთ და მრავალჯგუფთად გაწონასწორების ხერხისა, საჭიროა მეორენაირად, ანუ არაპირდაპირგანაზომთა გაწონასწორების ხერხის გამოყენება.



ნახ. 4.9.1.2.

აღნიშნული გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ არათავისუფალ ქსელებში, რომელთაც მრავალი გამოსავალი (ხისტი) მონაცემი აქვთ ან როცა საჭიროა ხისტ მრავალკუთხედში პუნქტების ჩასმა ორჯერ, სამჯერ მეტი გამოდის გაწონასწორებითი სამუშაოები პირველი ხერხით, ვიდრე მეორე ხერხით. მაგალითად, (2) ნახაზზე წარმოდგენილ ქსელში გამართულებელი ხაზისა და ბაზისების გამოკლებით, კუთხეების რაოდენობა $N = 39$; საყრდენი პუნქტების რაოდენობა $P = 12$; მთლიანი და არამთლიანი გვერდების რაოდენობა $n = 24$; სრული კუთხე (ცენტრალური წერტილი) $q = 3$. მაშინ (4.2.1.9) ტოლობით:

სულ განტოლებათა რაოდენობა $r = N - 2P + 4 = 39 - 24 + 4 = 19$; (4.2.1.10) ტოლობით პოლუსების განტოლებები $r_3 = n - 2P + 3 = 24 - 24 + 3 = 3$; (4.2.1.11) ტოლობით ჰორიზონტის განტოლებები $r_3 = q = 3$; (4.2.1.12) ტოლობით ფიგურის განტოლებები $r_\varphi = N - n + 1 - q = 39 - 24 + 1 - 3 = 13$. გამართულებელი მთლიანი ხაზია ერთი, ე. ი. წინა ტოლობებს დაემატება 1 ფიგურის და 1 პოლიგონის პირობითი ტოლობა. ბაზისია სამი, მაშასადამე, დაემატება $3 - 1 = 2$ ბაზისის და $3 - 1 = 2$ დირექციული კუთხეების ტოლობები. ცალკეული არახისტად შეერთებული ჯგუფების რაოდენობა $R = 3$, ე. ი. კოორდინატების ტოლობების რაოდენობა იქნება:

$$2\,(R - 1) = 2\,(3 - 1) = 4. \qquad (4.9.1.3)$$

სულ პირობით განტოლებათა რაოდენობა იქნება 29:

ფიგურის	$13 + 1 = 14$,
პოლუსის	$3 + 1 = 4$,
დირექციული კუთხის	2,
ბაზისების	2,
კოორდინატების	4,
ჰორიზონტის	3.

თუ გაწონასწორებას შევასრულებთ მიმართულებებით, ჰორიზონტის სამი განტოლება მოიხსნება, ე. ი. დარჩება 26 პირობითი ტოლობა, ე. ი. ამოსახსნელი იქნება 26 ნორმალურ განტოლებათა სისტემა და გამოთვლითი სამუშაოები გაიზრდება ნორმალურ განტოლებათა რაოდენობის კვადრატსა და კუბში.

იგივე ქსელის *არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების ხერხით* დამუშავებისათვის საჭირო იქნება 12 ნორმალური განტოლების ამოხსნა. მაშასადამე, განხილად შემთხვევაში ორჯერ ნაკლები რაოდენობის განტოლებების ამოხსნა იქნება საჭირო მეორე ხერხით, პირველ ხერხთან შედარებით. ე. ი. გაწონასწორებითი სამუშაოები შემცირდება დაახლოებით 4-ჯერ. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ მეორე ხერხში შეცდომათა განტოლებების შედგენას სჭირდება შედარებით დიდი დრო, რაც თითქმის არ განსხვავდება პირველი ხერხისათვის საჭირო საპოლუსო და პოლიგონური პირობითი განტოლების შედგენისათვის საჭირო დროისაგან.

4. 9. 2. არაპირდაპირი განაზომების გაწონასწორების ზოგადი საფუძვლები

ვთქვათ საჭიროა n რაოდენობის $L_1, L_2, \dots, L_n$ *უშუალოდ გაზომილი და გაწონასწორებული სიდიდეებით* განვსაზღვროთ K რაოდენობის X, Y, Z, გაწონასწორებული სიდიდეები. წინა პარაგრაფში მოყვანილი განსაზღვრების მიხედვით, იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორება და სიზუსტის შეფასება, საჭიროა უშუალოდ განაზომების რაოდენობა n მეტი იყოს უცნობთა k რაოდენობაზე, ე. ი. საჭიროა:

$$n>k \qquad (4.9.2.1)$$

გაზომილი ფუნქციები და საძებნი არგუმენტები ერთმანეთთან ფუნქციონალურადაა დაკავშირებული შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= F_1\,(X, Y, Z, \dots) \\ L_2 &= F_2\,(X, Y, Z, \dots) \\ &\cdots\cdots \\ L_n &= F_n(X, Y, Z, \dots) \end{aligned}\right\}, \qquad (4.9.2.2)$$

ანუ უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ტოლობებს:

$$\left.\begin{aligned} F_1\,(X, Y, Z, \dots) - L_1 &= 0 \\ F_2\,(X, Y, Z, \dots) - L_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ F_n\,(X, Y, Z, \dots) - L_n &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (4.9.2.3)$$

რადგანაც ვგულისხმობთ, რომ როგორც უშუალოდ გაზომილი, ისე საძებნი სიდიდეები გაწონასწორებულია. ხოლო, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იმისათვის, რომ შევძლოთ ხსენებულ საძებნ სიდიდეთა გაწონასწორება, საჭიროა დაცული იყოს $n>k$ უტოლობა.

ვთქვათ უშუალოდ განაზომებია $l_1, l_2, \dots, l_n$, რომელთა წონებია შესაბამისად $P_1, P_2, \dots, P_n$, ე. ი. უშუალო განაზომთა გაწონასწორებული მნიშვნელობები გამოითვლება დამოკიდებულებებით:

$$L_i = l_i + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n)\,, \qquad (4.9.2.4)$$

სადაც ε_i არის შესწორებები.

ახლა შეგვიძლია დავაკავშიროთ საძებნი სიდიდეები უშუალოდ განაზომ სიდიდეებთან და მათ შესწორებებთან, რისთვისაც (4) დამოკიდებულებები შევიტანოთ (3) დამოკიდებულებებში:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y, Z, \dots) - (l_1 + \varepsilon_1) = 0 \\ F_2(X, Y, Z, \dots) - (l_2 + \varepsilon_2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(X, Y, Z, \dots) - (l_n + \varepsilon_n) = 0 \end{array}\right\} \quad (4.9.2.5)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y, Z, \dots) - l_1 = \varepsilon_1 \\ F_2(X, Y, Z, \dots) - l_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(X, Y, Z, \dots) - l_n = \varepsilon_n \end{array}\right\} . \quad (4.9.2.6)$$

როგორც ნათქვამი იყო, $l_1, l_2, \dots, l_n$ უშუალოდ განაზომებში აუცილებელი შეცდომების გამო მრავალჯერ გამონათვლები არ მიიღება ურთიერთტოლი, ე. ი. საჭიროა გაწონასწორება.

(6) ტოლობებს ეწოდება *შესწორებათა ტოლობების საერთო სახე*.

ცხადია, რომ (6) დამოკიდებულებებში უცნობთა რაოდენობა $n+k$ იქნება. ამ უცნობების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ უმცირეს კვადრატთა პრინციპით — განვსაზღვროთ X, Y, Z,... უცნობების უალბათესი ოდენობები ისე, რომ დაცული იყოს ტოლობა:

$$[P\varepsilon\varepsilon] = min \quad (4.9.2.7)$$

დავუშვათ, რომ (6) ტოლობები არის რთული (არაწრფივი), ე. ი. საჭიროა სიმარტივისათვის მათ მივცეთ წრფივი სახე, რისთვისაც (6) დამოკიდებულებებით გაწონასწორებული X, Y, Z,... არგუმენტები, ანუ უცნობი სიდიდეები შევცვალოთ მათი *მიახლოებითი* x, y, z,... სიდიდეებით და შესაბამისი δ_x, δ_y, δ_z,... შესწორებებით, ანუ დავწეროთ:

$$\left.\begin{array}{l} X = x + \delta_x \\ Y = y + \delta_y \\ Z = z + \delta_z \\ \dots\dots \end{array}\right\} . \quad (4.9.2.8)$$

მაშინ (6) დამოკიდებულებები მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z, \dots) - l_1 = \varepsilon_1 \\ F_2(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z, \dots) - l_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z, \dots) - l_n = \varepsilon_n \end{array}\right\} . \quad (4.9.2.9)$$

x, y, z,... საძებნი მიახლოებითი ოდენობების გამოთვლა შეიძლება (6) დამოკიდებულებიდან k რაოდენობის ტოლობის ამოხსნით, იმ დაშვებით, რომ ყოველ ტოლობაში $\varepsilon_i (i=1,2,\dots,k)$ არის ნულის ტოლი. ახლა კი (9) დამოკიდებულების მიმართ გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა, მხოლოდ დავკმაყოფილდეთ მწკრივის პირველხარისხიანი δ_x, δ_y, δ_z მცირეშესწორებიანი წევრებით.

შევიზღუდოთ სამი უცნობით:

$$
\left.
\begin{aligned}
&F_1(x, y, z)+\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta_y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta_z-l_1=\varepsilon_1\\
&F_2(x, y, z)+\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta_y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta_z-l_2=\varepsilon_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F_n(x, y, z)+\frac{\partial F_n}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial F_n}{\partial y}\delta_y+\frac{\partial F_n}{\partial_z}\delta_z-l_n=\varepsilon_n
\end{aligned}
\right\}. \qquad (4.9.2.10)
$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$
\frac{\partial Fi}{\partial x}=a_i;\ \frac{\partial Fi}{\partial y}=b_i;\ \frac{\partial Fi}{\partial z}=ci, \qquad (4.9.2.11)
$$

$$
F_i(x, y, z)-l_i=v_i\,(i=1, 2,\ldots,n)\cdot \qquad (4.9.2.11^1)
$$

ეს აღნიშვნები შევიტანოთ (10) დამოკიდებულებებში, მივიღებთ:

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1=\varepsilon_1\\
&a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2=\varepsilon_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n\delta_x+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n=\varepsilon_n
\end{aligned}
\right\}. \qquad (4.9.2.12)
$$

მიღებული (12) ტოლობები წარმოადგენს *შესწორებათა ტოლობების წირულ სახეს*. როგორც ვხედავთ, თანახმად (11) და (11[1]) აღნიშვნებისა, აქ x, y, z უცნობთა მიახლოებითი სიდიდეების a_i, b_i, c_i კოეფიციენტები წარმოადგენს შესაბამისი ფუნქციების კერძო წარმოებულებს x, y, z უცნობთა მიახლოებითი სიდიდეებით, ხოლო *თავისუფალი* v_i წევრები *ფუნქციის ოდენობასა* (როცა მასში შეტანილია არგუმენტთა მიახლოებითი მნიშვნელობები) და *გაზომილ ოდენობებს შორის სხვაობებია*.

შევადაროთ შესწორებათა ტოლობების წირული სახის (12) ტოლობები ეალბათეს შესწორებათა *პირობით* (4. 3. 1. 6) *განტოლებებს*.

1. არაპირდაპირი განაზომების შემთხვევაში ((12) ტოლობა) ტოლობათა რაოდენობა ტოლია ყველა არაპირდაპირ განაზომთა რაოდენობისა, ხოლო უშუალოდ პირობითი განაზომების შემთხვევაში, პირობით განაზომთა ტოლობების რაოდენობა ჭარბი განაზომების რაოდენობის ტოლია;

2. a, b, c,... კოეფიციენტები (12) სისტემაში წარმოადგენს ფუნქციათა კერძო წარმოებულებს მიახლოებითი x, y, z სიდიდეებით, ხოლო პირობით განაზომთა შემთხვევაში ეს კოეფიციენტები წარმოადგენს ფუნქციათა კერძო წარმოებულებს უშუალოდ განაზომებით;

3. (12) სისტემაში თავისუფალი v_i წევრები არგუმენტთა მიახლოებით (x, y, z) ოდენობებსა და უშუალოდ განაზომებს (l_1, l_2,..., l_n) შორის სხვაობებია, ხოლო (4. 3. 1. 6) სისტემაში ისინი პირობით განაზომთა შეუკვრელობებია.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მიახლოებითი x, y, z სიდიდეების δ_x, δ_y, δ_z შესწორებების ოდენობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ უმცირეს კვადრატთა პრინციპს, შევადგინოთ შემდეგი სახის ფუნქცია:

$$F=[P\varepsilon\varepsilon]=P_1(a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1)^2+$$
$$+P_2(a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2)^2+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+P_n(a_n\delta_n+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n)^2=min. \qquad (4.9.2.13$$

მინიმუმის მონახვისათვის (13) ფუნქციის კერძო წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\delta_x}&=2P_1a_1^2\delta_x+2P_1a_1b_1\delta_y+2P_1a_1c_1\delta_z+2P_1a_1v_1+\\
&+2P_2a_2^2\delta_x+2P_2a_2b_2\delta_y+2P_2a_2c_2\delta_z+2P_2a_2v_2+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+2P_na_n^2\delta_x+2P_na_nb_n\delta_y+2P_na_nc_n\delta_z+2P_na_nv_n=0\\
\frac{\partial F}{\partial\delta_y}&=2P_1a_1b_1\delta_x+2P_1b_1^2\delta_y+2P_1b_1c_1\delta_z+2P_1b_1v_1+\\
&+2P_2a_2b_2\delta_x+2P_2b_2^2\delta_y+2P_2b_2c_2\delta_z+2P_2b_2v_2+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+2P_na_nb_n\delta_x+2P_nb_n^2\delta_y+2P_nb_nc_n\delta_z+2P_nb_nv_n=0\\
\frac{\partial F}{\partial\delta_z}&=2P_1a_1c_1\delta_x+2P_1b_1c_1\delta_y+2P_1c_1^2\delta_z+2P_1c_1v_1+\\
&+2P_2a_2c_2\delta_x+2P_2b_2c_2\delta_y+2P_2c_2^2\delta_z+2P_2c_2v_2+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+2P_na_nc_n\delta_x+2P_nb_nc_n\delta_y+2P_nc_n^2\delta_z+2P_nc_nv_n=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.2.14)$$

ყველა ტოლობა შევკვეცოთ 2-ზე და უცნობთა კოეფიციენტები გამოვსახოთ გაუსის ალგორითმით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
[Paa]\delta_x+[Pab]\delta_y+[Pac]\delta_z+[Pav]&=0\\
[Pab]\delta_x+[Pbb]\delta_y+[Pbc]\delta_z+[Pbv]&=0\\
[Pac]\delta_x+[Pbc]\delta_y+[Pcc]\delta_z+[Pcv]&=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.2.15)$$

(15) დამოკიდებულებები წარმოადგენს ნ ო რ მ ა ლ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა ს ი ს ტ ე მ ა ს. ამ სისტემის კვადრატოვანი კოეფიციენტები განლაგებულია დიაგონალზე, ხოლო მათი სიმეტრიული კოეფიციენტები — დიაგონალის ორივე მხარეზე. მაშასადამე, ნორმალური სისტემის ნიშან-თვისება აქაც დაცულია.

ნორმალურ განტოლებათა რაოდენობა ტოლია არაპირდაპირი ხერხით განსაზღვრული უცნობების k რაოდენობის.

(12) დამოკიდებულებებით გამოსახულ შესწორებათა ტოლობების წირული სახისა და (14) დამოკიდებულებების გამოყენებით შეიძლება დავადგინოთ ε შესწორებების შემდეგი თვისებები:

$$\left.\begin{aligned}
P_1a_1\varepsilon_1+P_2a_2\varepsilon_2+\cdots+P_na_n\varepsilon_n&=[Pa\varepsilon]=0\\
P_1b_1\varepsilon_1+P_2b_2\varepsilon_2+\cdots+P_nb_n\varepsilon_n&=[Pb\varepsilon]=0\\
P_1c_1\varepsilon_1+P_2c_2\varepsilon_2+\cdots+P_nc_n\varepsilon_n&=[Pc\varepsilon]=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.2.16).$$

(4. 3. 1. 11) ნორმალური სისტემიდან კორელატების განსაზღვრის მსგავსად (15) სისტემიდან განისაზღვრება x, y, z მიახლოებითი სიდიდეების δ_x, δ_y, δ_z შესწორებები, მათი საშუალებით კი (8) ტოლობებით განისაზღვრება გაწონასწორებული X, Y, Z სიდიდეები, ხოლო უშუალო l_1, $l_2,\ldots,l_n$ განაზომთა ε_1, $\varepsilon_2,\ldots$, ε_n შესწორებები განისაზღვრება (12) დამოკიდებულებებით, რისთვისაც v_1, $v_2,\ldots$, v_n წევრები განისაზღვრება (11[1]) დამოკიდებულებებით.

მაშასადამე, არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებით განისაზღვრება არაპირდაპირი გზით განაზომი მიმართულებების უალბათესი შესწორებები კოორდინატების შესწორებების განსაზღვრის საშუალებით.

ტოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში, ანუ როცა

$$P_1=P_2=\cdots=P_n=1 \tag{4.9.2.17}$$

და სისტემა აკმაყოფილებს პირობას

$$[\varepsilon\varepsilon]=min, \tag{4.9.2.18}$$

მაშინ (13) ფუნქცია მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\left.\begin{aligned} F=[\varepsilon\varepsilon]=(a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1)^2 &+ \\ +(a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2)^2 &+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ +(a_n\delta_x+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n)^2 &=min \end{aligned}\right\}, \tag{4.9.2.19}$$

ხოლო ნორმალური განტოლებების სისტემის სახე იქნება ასეთი:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,\delta_x+[ab]\delta_y+[ac]\delta_z+[av]&=0 \\ [bb]\delta_y+[bc]\delta_z+[bv]&=0 \\ [cc]\delta_z+[cv]&=0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.2.20}$$

ამ შემთხვევაში (16) სახე, ანუ ε შესწორებათა თვისება გამოისახება შემდეგნაირად:

$$[a\varepsilon]=[b\varepsilon]=[c\varepsilon]=0. \tag{4.9.2.21}$$

ზემოთ მოყვანილი წესით შეიძლება განისაზღვროს ნებისმიერი რაოდენობის შესწორებებისა და იმავე რაოდენობის X, Y, Z უცნობები, რომლებიც განხილად ფუნქციებში არგუმენტებს წარმოადგენენ.

თუ დავაკვირდებით, პირობით განაზომთა გაწონასწორების დროს უცნობებს წარმოადგენს კორელატები (ანუ ლაგრანჟის მამრავლები), თავისუფალი წევრები პირობით განაზომთა შეუკვრელობებია და წონები შედის მხოლოდ კოეფიციენტების გამყოფების სახით.

არაპირდაპირი ხერხით გაწონასწორების დროს კი უცნობები არგუმენტების შესწორებებია. თავისუფალი წევრები ისე უნდა გამოითვალოს, როგორც უცნობთა კოეფიციენტები; წონები შედის მამრავლის სახით როგორც კოეფიციენტებში, ისე თავისუფალ წევრებში.

პირობით განაზომთა ნორმალური განტოლებების რაოდენობა ტოლია ჭარბი განაზომების რაოდენობისა, ხოლო არაპირდაპირ განაზომთა ნორმალური განტოლებების რაოდენობა ტოლია უცნობების, ანუ აუცილებელი განაზომების რაოდენობისა.

4. 9. 3. ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების გამოთვლა

ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების გამოთვლებს ვაწარმოებთ (1) სქემაში, რომელიც ცნობილია **ს რ უ ლ ი** სქემის სახელწოდებით (იხ. 4. 3. 5. 1 და 4. 7. 1. 1 სქემები).

სქემა 4.9.3.1

განტოლებების №№	a	b	c	v	S	P	Paa	Pab	Pac	Pav	PaS	Pbb	Pbc	Pbv	PbS	Pcc	Pcv	PcS	Pvv	PvS	PSS
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	a_1	b_1	c_1	v_1	S_1	P_1	$P_1a_1a_1$	$P_1a_1b_1$	$P_1a_1c_1$	$P_1a_1v_1$	$P_1a_1S_1$	$P_1b_1b_1$	$P_1b_1c_1$	$P_1b_1v_1$	$P_1b_1S_1$	$P_1c_1c_1$	$P_1c_1v_1$	$P_1c_1S_1$	$P_1v_1v_1$	$P_1v_1S_1$	$P_1S_1S_1$
2	a_2	b_2	c_2	v_2	S_2	P_2	$P_2a_2a_2$	$P_2a_2b_2$	$P_2a_2c_2$	$P_2a_2v_2$	$P_2a_2S_2$	$P_2b_2b_2$	$P_2b_2c_2$	$P_2b_2v_2$	$P_2b_2S_2$	$P_2c_2c_2$	$P_2c_2v_2$	$P_2c_2S_2$	$P_2v_2v_2$	$P_2v_2S_2$	$P_2S_2S_2$
3	a_3	b_3	c_3	v_3	S_3	P_3	$P_3a_3a_3$	$P_3a_3b_3$	$P_3a_3c_3$	$P_3a_3v_3$	$P_3a_3S_3$	$P_3b_3b_3$	$P_3b_3c_3$	$P_3b_3v_3$	$P_3b_3S_3$	$P_3c_3c_3$	$P_3c_3v_3$	$P_3c_3S_3$	$P_3v_3v_3$	$P_3v_3S_3$	$P_3S_3S_3$
. . . .	.	.	.	.	.	.	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	a_n	b_n	c_n	v_n	S_n	P_n	$P_na_na_n$	$P_na_nb_n$	$P_na_nc_n$	$P_na_nv_n$	$P_na_nS_n$	$P_nb_nb_n$	$P_nb_nc_n$	$P_nb_nv_n$	$P_nb_nS_n$	$P_nc_nc_n$	$P_nc_nv_n$	$P_nc_nS_n$	$P_nv_nv_n$	$P_nv_nS_n$	$P_nS_nS_n$
[ ]	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[v]$	$[S]$	$[P]$	$[Paa]$	$[Pab]$	$[Pac]$	$[Pav]$	$[PaS]$	$[Pbb]$	$[Pbc]$	$[Pbv]$	$[PbS]$	$[Pcc]$	$[Pcv]$	$[PcS]$	$[Pvv]$	$[PvS]$	$[PSS]$

$$\left.\begin{array}{c} a_1+b_1+c_1+v_1=S_1 \\ a_2+b_2+c_2+v_2=S_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n+b_n+c_n+v_n=S_n \\ \hline [a]+[b]+[c]+[v]=[S] \end{array}\right| . \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} P_1a_1 & P_1b_1 & P_1c_1 & P_1v_1 & P_1S_1 \\ P_2a_2 & P_2b_2 & P_2c_2 & P_2v_2 & P_2S_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_na_n & P_nb_n & P_nc_n & P_nv_n & P_nS_n \end{array}\right| . \qquad (4.9.3.1)$$

(1) დამოკიდებულებების მამრავლის ყოველი სვეტის სამრავლის ყოველა სვეტზე გადამრავლებით და შეკრებით მივიღებთ ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების სტრიქონებს, რომლებიც წარმოადგენენ ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების გამოთვლის სისწორის შემდეგი სახის საკონტროლო ჯამებს.

$$\left.\begin{array}{l} [Paa]+[Pab]+[Pac]+[Pav]=[PaS] \\ [Pab]+[Pbb]+[Pbc]+[Pbv]=[PbS] \\ [Pac]+[Pbc]+[Pcc]+[Pcv]=[PcS] \\ [Pav]+[Pbv]+[Pcv]+[Pvv]=[PvS] \\ [PaS]+[PbS]+[PcS]+[PvS]=[PSS] \end{array}\right\} . \qquad (4.9.3.2)$$

ტოლზუსტი გაზომვების დროს ყველგან ამოიღება P წონები და (1) ცხრილი მიიღებს (4.3.5.1) ცხრილის სახეს, განსხვავება მხოლოდ ის არის, რომ (1) ცხრილში შედის v თავისუფალი წევრი.

4. 9. 4. ნორმალური განტოლებების ამოხსნა

ნორმალური განტოლებების ამოხსნას ვაწარმოებთ (4. 3. 2) პარაგრაფში განხილული გაუსის უცნობთა თანამიმდევრობითი გამორიცხვის ხერხით, რის შედეგად ვიღებთ (4. 9. 2. 15) სისტემის ეკვივალენტურ (ტოლძალოვან), ანუ რედუცირებულ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
&[Paa]\delta_x+[Pab]\delta_y+[Pac]\delta_z+[Pav]=0\\
&\qquad[Pbb\cdot1]\delta_y+[Pbc\cdot1]\delta_z+[Pbv\cdot1]=0\\
&\qquad\qquad[Pcc\cdot2]\delta_z+[Pcv\cdot2]=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.4.1}$$

(1) სისტემის შედეგია შემდეგი სახის ელიმინაციური, ანუ გამორიცხული (შეზღუდული) სტრიქონებისაგან შედგენილი δ_x, δ_y, δ_z უცნობების გამოსათვლელი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_z&=-\frac{[Pcv\cdot2]}{[Pcc\cdot2]}\\
\delta_y&=-\frac{[Pbc\cdot1]}{[Pbb\cdot1]}\delta_z-\frac{[Pbv\cdot1]}{[Pbb\cdot1]}\\
\delta_x&=-\frac{[Pab]}{[Paa]}\delta_y-\frac{[Pac]}{[Paa]}\delta_z-\frac{[Pav]}{[Paa]}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.4.2}$$

გაუსის ალგორითმის აგებულება და დაშლა იგივეა, რაც (4. 3. 3) პარაგრაფში იყო მოხსენებული; მხოლოდ, აქ v თავისუფალი წევრიც ისეთივე წესით შედის ალგორითმში, როგორც a, b, c,... კოეფიციენტები. მაგალითად:

$$[Pbv\cdot1]=[Pbv]-\frac{[Pab][Pav]}{[Paa]}.$$

$$[Pcv\cdot2]=[Pcv\cdot1]-\frac{[Pbc\cdot1][Pbv\cdot1]}{[Pbb\cdot1]}=[Pcv]-\frac{[Pac][Pav]}{[Paa]}-\frac{[Pbc\cdot1][Pbv\cdot1]}{[Pbb\cdot1]}.$$

$$[Pvv\cdot3]=[Pvv]-\frac{[Pav]^2}{[Paa]}-\frac{[Pbv\cdot1]^2}{[Pbb\cdot1]}-\frac{[Pcv\cdot2]^2}{[Pcc\cdot2]}. \tag{4.9.4.2^1}$$

$$[Pvv\cdot K]=[Pvv]-\frac{[Pav]^2}{[Paa]}-\frac{[Pbv\cdot1]^2}{[Pbb\cdot1]}-\dots-\frac{[Pgv\cdot(k-1)]^2}{[Pgg\cdot(k-1)]}.$$

4. 9. 5. ნორმალური განტოლებების ამოხსნისა და კონტროლის სქემა

არაპირდაპირ განაზომთა ნორმალური განტოლებების უცნობთა ამოსახსნელად შეიძლება გამოყენებული იქნეს პირობით განაზომთა ნორმალური განტოლებების კორელატების ამოხსნის წინ განხილული ნებისმიერი სქემა. აქ

სანიმუშოდ მოვიყვანთ გ ა უ ს-დ უ ლ ი ტ ლ ი ს სრული სქემის ნიმუშს (სქემა 1). ადვილად დამახსოვრების მიზნით, (1) სქემა დავყოთ უცნობთა შესაბამის ჯგუფებად. მაგალითად, პირველი, ანუ δ_x უცნობის ჯგუფში შედის სამი (a, E, δ_x) სტრიქონი; მეორე ანუ δ_y უცნობის ჯგუფში—ხუთი (b, $E_1 \cdot a_2$, $b \cdot 1$, E_2, δ_y) სტრიქონი; მესამე, ანუ δ_z უცნობის ჯგუფში—ექვსი (c, $E_1 \times a_3$, $E_1 \times b \cdot 1_3$, $c \cdot 2$, E_3, δ_z) სტრიქონი; მეოთხე უცნობის ჯგუფში—შვიდი სტრიქონი, მეხუთე ჯგუფში—რვა სტრიქონი, ე ი. მეორე უცნობის შემდეგ ყოველი ახალი უცნობის ჯგუფს ემატება ერთი ეკვივალენტური განტოლების სტრიქონი.

(1) სქემაში შეივსება მესამე ჯგუფის მეექვსე, ანუ δ_z სტრიქონი, მერე — მეორე ჯგუფის მეხუთე, ანუ δ_y სტრიქონი, დაბოლოს, — პირველი ჯგუფის მესამე, ანუ δ_x სტრიქონი.

1. პირველი ჯგუფის a სტრიქონში ამოვწერთ (4. 9. 3. 1) სქემიდან ამოღებული (4. 9. 3. 2) დამოკიდებულებებიდან პირველ სტრიქონს და წონითი ფუნქციის φ_1 კოეფიციენტს და შევაჯამებთ (S_1'). გამოვითვლით შენიშვნაში მოყვანილ $S_1' = [PaS] + \varphi_1$ ჯამს და თუ ეს ჯამი დაემთხვა a სტრიქონის S_1' ჯამს, შედეგი იწერება კონტროლის სვეტის პირველ სტრიქონში. ეს სტრიქონი ითვლება პირველ ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ, ანუ რ ე დ უ ც ი რ ე ბ უ ლ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა დ;

2. პირველი ჯგუფის E_1 (ელიმინაციურ) სტრიქონში იწერება a სტრიქონის ყოველი წევრი გაყოფილი $[Paa]$ სიდიდეზე შებრუნებული ნიშნით;

3. მეორე ჯგუფის პირველ (b) სტრიქონში ამოიწერება (4. 9. 3. 2) დამოკიდებულებიდან მეორე სტრიქონი $[Pab]$ წევრის გარეშე (რადგანაც ეს წევრი უკვე ამოწერილია a სტრიქონში). პირველ მუხლში მოხსენებული წესით კეთდება კონტროლი.

4. მეორე ჯგუფის მეორე, ანუ $E_1 \times a_2$ სტრიქონში ჩაიწერება E_1 სტრიქონის ნამრავლი a სტრიქონის $[Pab]$ სიდიდეზე;

5. მეორე ჯგუფის მესამე, ანუ $b . 1$ სტრიქონში იწერება შესაბამისად b და $E_1 \times a_2$ სტრიქონების ჯამი, ანუ პირველ ნიშნაკიანი ალგორითმები. ეს არის მეორე ეკვივალენტური განტოლება;

6. მეორე ჯგუფის მეოთხე, ანუ E_2 (ელიმინაციურ) სტრიქონში შებრუნებული ნიშნით იწერება $b . 1$ სტრიქონის ყოველი წევრის განაყოფი $[Pbb . 1]$ სიდიდეზე;

7. მესამე ჯგუფის პირველ, ანუ c სტრიქონში ამოიწერება (4. 9. 3. 2) დამოკიდებულებებიდან მესამე სტრიქონი $[Pac]$, $[Pbc]$ წევრების გარეშე (რადგანაც ეს წევრები უკვე ამოწერილია a და b სტრიქონში) და სრულდება კონტროლი;

8. მესამე ჯგუფის მეორე ($E_1 \times a_3$) სტრიქონში იწერება E_1 სტრიქონის ნამრავლი a სტრიქონის $[Pac]$ სიდიდეზე;

9. მესამე ჯგუფის მესამე ($E_2 \times b . 1_3$) სტრიქონში იწერება E_2 სტრიქონის ნამრავლი $b . 1$ სტრიქონის $[Pbc . 1]$ სიდიდეზე;

10. მესამე ჯგუფის მეოთხე ($c.2$) მესამე ეკვივალენტურ სტრიქონში იწერება შესაბამისად c, $E_1 \times a_3$, $E_2 \times b.1_3$ სტრიქონების ჯამი გამოსახული 2 ნიშნაკიან ალგორითმებში;

11. მესამე ჯგუფის მეხუთე (E_3 ელიმინაციურ) სტრიქონში შებრუნებული ნიშნით იწერება $c.2$ ეკვივალენტური წევრების განაყოფები $[Pcc.2]$ სიდიდეზე; როგორც ვხედავთ, ყოველ ახალ ჯგუფს, ანუ ახალ უცნობს ემატება სათანადო ეკვივალენტური განტოლება: მაგალითად, ხუთუცნობიანი ნორმალური სისტემის ხუთ ჯგუფს შეესაბამება a, $b.1$, $c.2$, $d.3$, $e.4$ ეკვივალენტური განტოლებები.

ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის საკონტროლო ფორმულების მიღების მიზნით (4. 9. 3. 2) სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ $-\frac{[Pab]}{[Paa]}$ სიდიდეზე და მიღებული შედეგი მივუმატოთ იმავე სისტემის მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$\left([Pbb]-\frac{[Pab]^2}{[Paa]}\right)+\left([Pbc]-\frac{[Pab][Pac]}{[Paa]}\right)+$$
$$+\left([Pbv]-\frac{[Pab][Pav]}{[Paa]}\right)=\left([PbS-\frac{[Pab][PaS]}{[Paa]}\right). \qquad (a)$$

მიღებული ტოლობა გამოვსახოთ გაუსის ალგორითმებით, მივიღებთ პირველ ეკვივალენტურ (გარდაქმნილ) ტოლობას:

$$[Pbb\cdot 1]+[Pbc\cdot 1]+[Pbv\cdot 1]=[PbS\cdot 1]. \qquad (4.9\cdot 5.1)$$

ამ ტოლობის საფუძველზე სრულდება კონტროლი (1) სქემის მეორე ჯგუფის მესამე სტრიქონში.

(4. 9. 3. 2) დამოკიდებულებების პირველი ტოლობა თანამიმდევრობით გადავამრავლოთ $-\frac{[Pac]}{[Paa]}, -\frac{[Pav]}{[Paa]}, -\frac{[PaS]}{[Paa]}$, სიდიდეებზე და ყოველი შედეგი შესაბამისად მივუმატოთ იმავე დამოკიდებულებების მესამე, მეოთხე და მეხუთე ტოლობებს; მივიღებთ პირველი სახის ეკვივალენტური (1) ტოლობის მსგავს სამ ტოლობას:

$$\left.\begin{aligned}&[Pbc\cdot 1]+[Pcc\cdot 1]+[Pcv\cdot 1]=[PcS\cdot 1]\\&[Pbv\cdot 1]+[Pcv\cdot 1]+[Pvv\cdot 1]=[PvS\cdot 1]\\&[PbS\cdot 1]+[PcS\cdot 1]+[PvS\cdot 1]=[PSS\cdot 1]\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.5.2)$$

(1) ტოლობა გავამრავლოთ $-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$ სიდიდეზე და მიღებული შედეგი მივუმატოთ (2) სისტემის პირველ ტოლობას და გამოვიყენოთ ალგორითმი, მივიღებთ მეორე სახის ეკვივალენტურ ტოლობას:

$$[Pcc\cdot 2]+[Pcv\cdot 2]=[PcS\cdot 2]. \qquad (4.9.5.3)$$

№№	სტრიქონების აღნიშვნა	a δ_x	b δ_y	c δ_z	v	φ	S'	კონტროლი	შენიშვნა
1	a	$[Paa]$	$[Pab]$	$[Pac]$	$[Pav]$	φ_1	S_1'		$S'_1=[PaS]+\varphi_1$
2	E_1	-1	$-\frac{[Pab]}{[Paa]}$	$-\frac{[Pac]}{[Paa]}$	$-\frac{[Pav]}{[Paa]}$	$-\frac{\varphi_1}{[Paa]}$	$-\frac{S_1'}{[Paa]}$		$-\frac{a}{[Paa]}$
3	δ_x	$\delta_x=$	$-\frac{[Pab]}{[Paa]}\times\delta_y$	$-\frac{[Pac]}{[Paa]}\times\delta_z$	$-\frac{[Pav]}{[Paa]}$				
1	b		$[Pbb]$	$[Pbc]$	$[Pbv]$	φ_2	S_2'		$S_2'=[bS]+\varphi_2$
2	$E_1\times a_2$		$-\frac{[Pab]}{[Paa]}[Pab]$	$-\frac{[Pac]}{[Paa]}[Pab]$	$-\frac{[Pav]}{[Paa]}[Pab]$	$-\frac{\varphi_1}{[Paa]}[Pab]$	$-\frac{S_1'}{[Paa]}[Pab]$		
3	$b\cdot 1$		$[Pbb\cdot 1]$	$[Pbc\cdot 1]$	$[Pbv\cdot 1]$	$[\varphi_2\cdot 1]$	$[S'_2\cdot 1]$		$b\cdot 1=b+E_1\times a$
4	E_2		-1	$-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[Pbv\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[\varphi_2\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[S'_2\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$		$-\frac{b\cdot 1}{[Pbb\cdot 1]}$
5	δ_y		$\delta_y=$	$-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}\times\delta_z$	$-\frac{[Pbv\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$				
1	c			$[Pcc]$	$[Pcv]$	φ_3	S_3'		$S_3=[cS]+\varphi_3$
2	$E_1\times a_3$			$-\frac{[Pac]}{[Paa]}[Pac]$	$-\frac{[Pav]}{[Paa]}[Pac]$	$-\frac{\varphi_1}{[Paa]}[Pac]$	$-\frac{S_1'}{[Paa]}[Pac]$		$E_1\times[Pac]$
3	$E_2\times b\cdot 1_3$			$-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}[Pbc\cdot 1]$	$-\frac{[Pbv\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}[Pbc\cdot 1]$	$-\frac{[\varphi_2\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}[Pbc\cdot 1]$	$-\frac{[S_2'\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}[Pbc\cdot 1]$		$E_2\times[Pbc\cdot 1]$
4	$c\cdot 2$			$[Pcc\cdot 2]$	$[Pcv\cdot 2]$	$[\varphi_3\cdot 2]$	$[S_3'\cdot 2]$		$c\cdot 2=c+E_1\times a_3+E_2\times b\cdot 1_3$
5	E_3			-1	$-\frac{[Pcv\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[\varphi_3\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[S_3'\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$		$-\frac{c\cdot 2}{[Pcc\cdot 2]}$
6	δ_z			$\delta_z=$	$-\frac{[Pcv\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$				
1					$[Pvv]$		$[PSS]$		$[PvS]$
2					$-\frac{[Pav]^2}{[Paa]}$	$-\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}$	$-\frac{S_1'^2}{[Paa]}$		$-\frac{[Pav]}{[Paa]}S_1'$
3	საკონტროლო ჯგუფი				$-\frac{[Pbv\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[S'_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}$		$-\frac{[Pbv\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}[S_2'\cdot 1]$
4					$-\frac{[Pcv\cdot 2]^2}{[Pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[\varphi_3\cdot 2]^2}{[Pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[S_3'\cdot 2]^2}{[Pcc\cdot 2]}$		$-\frac{[Pcv\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}[S_3'\cdot 2]$
5					$[Pvv\cdot 3]$	$\frac{1}{P_{\Phi..}}$	$[PS'S'\cdot 3]$		$[PvS'\cdot 3]$

ამ ტოლობის საფუძველზე სრულდება კონტროლი (1) სქემის მესამე ჯგუფის მეოთხე სტრიქონში.

(1) ტოლობა თანამიმდევრობით გადავამრავლოთ $-\frac{[Pbv\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$, $-\frac{[PbS\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}$ სიდიდეებზე და ყოველი შედეგი შესაბამისად მივუმატოთ (2) სისტემის მეორე და მესამე ტოლობას, მივიღებთ მეორედ გარდაქმნილ (ეკვივალენტურ) ორ ტოლობას:

$$\left.\begin{aligned}[Pcv\cdot 2]+[Pvv\cdot 2]=[PvS\cdot 2]\\ [PcS\cdot 2]+[PvS\cdot 2]=[PSS\cdot 2]\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.5.4}$$

დაბოლოს, (3) ტოლობა თანამიმდევრობით გადავამრავლოთ $-\frac{[Pcv\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$ და $-\frac{[PcS\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}$ სიდიდეებზე და ყოველი შედეგი შესაბამისად მივუმატოთ (4) სისტემის ტოლობებს: გამოვიყენოთ ალგორითმები, მივიღებთ მესამე სახის ეკვივალენტურ ორ ტოლობას:

$$\left.\begin{aligned}[Pvv\cdot 3]=[PvS\cdot 3]\\ [PvS\cdot 3]=[PSS\cdot 3]\end{aligned}\right\}, \tag{4.9.5.5}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$[Pvv\cdot 3]=[PSS\cdot 3]=[PvS\cdot 3]. \tag{4.9.5.6}$$

(6) ტოლობა საშუალებას იძლევა შევასრულოთ გაუს-დულიტლის სქემაში ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების გარდაქმნის კონტროლი. იხილეთ (1) სქემის საკონტროლო ჯგუფის პირველი სტრიქონი. აქვე აღვნიშნავთ, რომ თვით δ_x, δ_y, δ_z შესწორებების გამოთვლის სისწორის კონტროლი განხილად სქემაში არ სრულდება. ამიტომ საჭიროა, მივმართოთ ქვემოთ მოყვანილ სხვა ღონისძიებას.

შემდეგი სახის კონტროლის მიზნით გამოვიყენოთ შესწორებათა (4. 9. 2. 12) სისტემა

$$\left.\begin{aligned}a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1=\varepsilon_1\\ a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2=\varepsilon_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_n\delta_x+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n=\varepsilon_n\end{aligned}\right\}. \tag{b}$$

(b) სისტემის ყოველი ტოლობის ყოველი წევრი შესაბამისად გადავამრავლოთ $P_1\varepsilon_1, P_2\varepsilon_2,\ldots,P_n\varepsilon_n$ სიდიდეებზე და შედეგი შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$[Pa\varepsilon]\delta_x+[Pb\varepsilon]\delta_y+[Pc\varepsilon]\delta_z+[Pv\varepsilon]=[P\varepsilon\varepsilon]. \tag{4.9.5.7}$$

თანახმად (4. 9. 2. 16) დამოკიდებულებისა:

$$[Pa\varepsilon]=[Pb\varepsilon]=[Pc\varepsilon]=0. \tag{4.9.5.8}$$

მაშასადამე, (7) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$[Pv\varepsilon]=[P\varepsilon\varepsilon]. \tag{4.9.5.9}$$

ახლა (b) სისტემის ყოველი ტოლობის ყოველი წევრი შესაბამისად გადავამრავლოთ P_1v_1, $P_2v_2,\ldots,P_nv_n$ სიდიდეებზე და შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$[Pav]\delta_x+[Pbv]\delta_y+[Pcv]\delta_z+[Pvv]=[Pv\varepsilon]. \tag{4.9.5.10}$$

თანახმად (9) დამოკიდებულებისა, (10) ტოლობა შეიძლება ასე გამოისახოს:

$$[P\varepsilon\varepsilon]=[Pav]\delta_x+[Pbv]\delta_y+[Pcv]\delta_z+[Pvv]. \tag{4.9.5.11}$$

ამ ტოლობაში (4. 9. 4. 2) სისტემიდან თანამიმდევრობით შევიტანოთ δ_x δ_y, δ_z შესწორებათა გამოსახულებები, მივიღებთ:

$$[P\varepsilon\varepsilon]=[Pvv\cdot 3]. \tag{4.9.5.12}$$

(6) დამოკიდებულებების მხედველობაში მიღებით ნებისმიერი (k) რაოდენობის მეშვეობით განაზომებისათვის (12) დამოკიდებულება ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$[P\varepsilon\varepsilon]=[Pvv\cdot k]=[PSS\cdot k]=[PvS\cdot k]. \tag{4.9.5.13}$$

(1) სქემაში $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ შესწორებათა გამოთვლის სისწორის საკონტროლოდ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს (11) და (12) დამოკიდებულებები, შემდეგნაირად:

$$[Pvv\cdot 3]=[Pvv]+[Pav]\delta_x+[Pbv]\delta_y+[Pcv]\delta_z. \tag{4.9.5.14}$$

(13) ტოლობა ნორმალური განტოლებების შედგენისა და ამოხსნის სისწორის დასკვნითი კონტროლის საშუალებას იძლევა.

გაწონასწორებითი სამუშაოების საბოლოო კონტროლია მოთხოვნა იმისა, რომ დაკმაყოფილდეს (4. 9. 2. 3) ტოლობები მათში უშუალოდ გაზომილი და გაწონასწორებული ($L_1, L_2,\ldots,L_n$) ფუნქციებისა და მეშვეობით გაზომილი და გაწონასწორებული (X. Y, Z,...) არგუმენტების შეტანის შემდეგ.

4. 9. 6. არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების დროს სხვადასხვა სიდიდის განზომილებები

განხილად შემთხვევაში სიდიდეთა განზომილებების საკითხი სრულიად ანალოგიურია (4. 6. 1) პარაგრაფში განხილული საკითხისა.

A. შესწორებათა განტოლებაში შემავალი სიდიდეების განზომილებები

დავწეროთ (4. 9. 2. 12) შესწორებათა წ ი რ უ ლ ი ს ა ხ ი ს სისტემა ზოგადად:

$$a_i\delta_x+b_i\delta_y+c_i\delta_z+v_i=\varepsilon_i, \tag{4.9.6.1}$$

სადაც $i=1,\ 2,\ldots,n$.

(4. 6. 1) პარაგრაფში მიღებული წესის შესაბამისად (1) ტოლობის კოეფიციენტების განზომილებები დაიწერება ასე:

$$\left.\begin{aligned}(a_l) &= \frac{(\varepsilon_l)}{(\delta_x)}\\ (b_l) &= \frac{(\varepsilon_l)}{(\delta_y)}\\ (c_l) &= \frac{(\varepsilon_l)}{(\delta_y)}\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.6.2}$$

საერთოდ, ε_l, δ_x, δ_y, δ_z შესწორებათა (ε_l), (δ_x), (δ_y), (δ_z) განზომილებები შეიძლება შევარჩიოთ ნებისმიერად. წარმოებაში, ერთგვაროვანი სიდიდეების განზომილებებს იღებენ ერთნაირს.

B. ნორმალური განტოლებების უცნობთა კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების განზომილებები

თანახმად (3. 5. 2. 6) ფორმულისა, განაზომის წონასა და საშუალო კვადრატულ შეცდომას შორის არის ასეთი დამოკიდებულება:

$$P_l = \frac{1}{m_l^2}. \tag{4.9.6.3}$$

მაშასადამე, მათ განზომილებებს შორისაც იქნება ასეთივე დამოკიდებულება

$$(P_l) = \frac{1}{(m_l)^2}. \tag{4.9.6.4}$$

ასევე (4. 4. 9. 6) ფორმულით განაზომთა საშუალო კვადრატულ შეცდომასა და შესწორებებს შორის დამოკიდებულებაა:

$$m_l = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{ჭარბ განაზომთა რაოდენობა}}}, \tag{4.9.6.5}$$

ე. ი. მათ განზომილებებს შორისაც იქნება დამოკიდებულება:

$$\text{ანუ}\quad \left.\begin{aligned}(m_l)^2 &= (\varepsilon_l)^2\\ (m_l) &= (\varepsilon_l)\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.6.6}$$

ნორმალურ განტოლებათა (4. 9. 2. 15) სისტემის შესაბამისად δ_x უცნობის კოეფიციენტის განზომილება იქნება:

$$([Paa]) = (P_l a_l a_l) = (P_l)(a_l)^2. \tag{a}$$

(a) დამოკიდებულებებში შევიტანოთ (4) და (6) გამოსახულებები, დავწერთ:

$$(P_l)(a_l)^2 = \frac{1}{(m_l)^2}(a_l)^2 = \frac{1}{(\varepsilon_l)^2}(a_l)^2. \tag{b}$$

(b) დამოკიდებულების მიმართ (2) დამოკიდებულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$(P_l)(a_l)^2=\frac{1}{(\delta_x)^2}. \tag{c}$$

მაშასადამე, (a) დამოკიდებულება, ანუ δ_x უცნობის კოეფიციენტის განზომილება

$$([Paa])=\frac{1}{(\delta_x)^2}. \tag{4.9.6.7}$$

ანალოგიურად მიიღება (4. 9. 2. 15) დამოკიდებულების დანარჩენ უცნობთა კოეფიციენტების განზომილებები:

$$\left.\begin{aligned} &([Pab])=\frac{1}{(\delta_x)(\delta_y)}, \quad ([Pac])=\frac{1}{(\delta_x)(\delta_z)} \\ &([Pbb])=\frac{1}{(\delta_y)^2}, \qquad ([Pbc])=\frac{1}{(\delta_y)(\delta_z)} \\ &([Pcc])=\frac{1}{(\delta_z)^2}, \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.6.8}$$

მაშასადამე, არაპირდაპირი განაზომების ნორმალური განტოლებების უცნობთა კოეფიციენტების განზომილებები წარმოადგენს ორ არაპირდაპირ განაზომთა (არგუმენტთა) შესწორებების განზომილებების ნამრავლის შებრუნებულ ოდენობას, ამავე დროს ყოველი წყვილი შესწორება შეირჩევა უცნობთა კოეფიციენტების ასოების შესაბამისად (როცა კოეფიციენტია aa, მაშინ ვიღებთ $(\delta_x)^2$, ab — $(\delta_x)(\delta_y)$ და ა. შ.).

იგივე ნორმალურ განტოლებათა (4. 9. 2. 15) სისტემის თავისუფალი წევრების განზომილებების დადგენისათვის, გამოვიყენოთ (4), (6), მივიღებთ:

$$([Pav])=(P_l)(a_l)(v_l)=\frac{1}{(\varepsilon_l)^2}\,\frac{(\varepsilon_l)}{(\delta_x)}\,(v_l)=\frac{1}{(\delta_x)}, \tag{4.9.6.9}$$

სადაც იგულისხმება, რომ განზომილება $(\varepsilon_l)=(v_l)$.

ანალოგიურად,

$$([Pbv])=\frac{1}{(\delta_y)} \quad \text{და} \quad ([Pcv])=\frac{1}{(\delta_z)}. \tag{4.9.6.10}$$

ე. ი. არაპირდაპირი განაზომების ნორმალურ განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრების განზომილებები წარმოადგენს a, b, c ასოების შესაბამისი δ_x, δ_y, δ_z.... შესწორებების შებრუნებულ განზომილებებს.

როგორც ვხედავთ, არაპირდაპირ განაზომთა ნორმალური განტოლებების უცნობთა კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების განზომილებები არ არის დამოკიდებული ფუნქციის, ანუ l_i პირდაპირ განაზომთა ε_i შესწორების განზომილებაზე.

4. 9. 7. არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების ამოხსნის წესი და ზოგიერთი ტიპური მაგალითების ამოხსნა

წინა პარაგრაფში განხილული საკითხები საშუალებას იძლევა ჩამოვაყალიბოთ არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების მაგალითების ამოხსნის ზოგადი წესი:

I. დადგინდეს უცნობი (არგუმენტები X, Y, Z,...) სიდიდეები და მათი რიცხვი;

II. დავაკავშიროთ გაზომილი (ფუნქციები) სიდიდეები უცნობ სიდიდეებთან (არგუმენტებთან) (4. 9. 2. 2 ფორმულა);

III. უცნობი სიდიდეების მიახლოებითი x, y, z,... ოდენობების გამოთვლა და ამ უკანასკნელთა (x), (y), (z),... განზომილებების დადგენა;

IV. l_1, l_2,... განაზომების მიახლოებითი l_1' l_2',... ოდენობების გამოთვლა F $(x, y, z, \ldots)$ ფუნქციის ამოხსნით და მათი (l_1'), (l_2'),... განზომილებების დადგენა (ეს უნდა შესრულდეს ორი გამომთვლელის მიერ);

V. (4. 9. 2. 12) ტოლობების v თავისუფალი წევრების გამოთვლა (4. 9. 2. 11[1]) ფორმულით, ანუ გამოთვლა l_i' და l_i სხვაობებით (ორი ხელით);

VI. (4. 9. 2. 11) ფორმულებით ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების ოდენობებისა და (4. 9. 6. 8) და (4. 9. 6. 10) ფორმულებით მათი და თავისუფალი წევრების განზომილებების დადგენა (ორი ხელით);

VII. რომელიმე სქემით ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების შედგენა (თუ ამოცანის პირობაში არ არის წონების ოდენობები მოცემული, საჭიროა მათი გამოთვლა (3. 5. 4. 1) ფორმულით);

VIII. ერთ-ერთი სქემით ნორმალური განტოლებების ამოხსნა;

IX. ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის კონტროლი (4. 9. 5. 14) ფორმულით (იხილეთ (4. 9. 5. 1) სქემა);

X. განაზომთა ε_i შესწორებების გამოთვლა (4. 9. 2. 12) ფორმულით, $[P\varepsilon\varepsilon]$ სიდიდის შედგენა და (4. 9. 5. 11) ფორმულით კონტროლი;

XI. (4. 9. 2. 8) დამოკიდებულებებით X, Y, Z,... გაწონასწორებული უცნობების ოდენობების დადგენა;

XII. (4. 9. 2. 2) დამოკიდებულებებით განაზომთა გაწონასწორებული L_1, L_2,... ოდენობების გამოთვლა;

XIII. დასკვნითი და საბოლოო კონტროლი (4. 9. 5. 13) და (4. 9. 2. 3) ფორმულებით.

მაგალითი 4. 9. 7. 1. საჭიროა არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების ხერხით განისაზღვროს ბრტყელი სამკუთხედის α', β', γ' განაზომი კუთხეების გაწონასწორებული α, β, γ ოდენობები.

ეს მაგალითი წონითი საშუალოსა და პირობით განაზომთა გაწონასწორების ხერხით ამოხსნილია (4. 5. 1) პარაგრაფში. განხილად შემთხვევაში სამარტივის გამო ზოგი წინ მიღებული მუხლებიც ერთიანდება.

I. უცნობებისა და მათი რაოდენობის დადგენა

განხილად მაგალითში სამი კუთხიდან ნებისმიერი ორი კუთხე მივიღოთ უცნობად, რადგანაც მათი გაწონასწორებული ოდენობები საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ მესამე კუთხის გაწონასწორებული ოდენობა, როგორც დამატება 180°-მდე. მივიღოთ X და Y უცნობად α და β კუთხე;

II. გაზომილი სიდიდეების მიახლოებითი ოდენობების დადგენა და V_i თავისუფალი წევრების გამოთვლა (4. 9. 2. 11[1]) ფორმულით

$$F_i\ (x,\ y_i) - l_i = v_i, \text{ ანუ } l_i' - l_i = v_i.$$

განხილად შემთხვევაში l_i განაზომთა l_i' მიახლოებით ოდენობად მივიღოთ თვით l_i განაზომები. მაშასადამე, α' და β' განაზომები მივიღოთ მათივე მიახლოებით ოდენობებად, ე. ი. დაიწერება $l_i'=l_i$, ანუ $\alpha'=\alpha'$, $\beta'=\beta'$, და $\gamma'=\gamma'$, რის საფუძველზეც დაიწერება სამი ორუცნობიანი ტოლობა:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha'-\alpha'=v_1=0, & \text{ანუ ცხადი სახით} & \alpha'=\alpha'+v_1 \\ \beta'-\beta'=v_2=0 & \quad ,, \qquad ,, & \beta'=\beta'+v_2 \\ 180^\circ-(\alpha'+\beta')-\gamma'=v_3 & \quad ,, & -(\alpha'+\beta')=\gamma'+v_3-180^\circ \end{array}\right\}, \tag{a}$$

სადაც $V_3=-W$ ანუ V თავისუფალი წევრი ტოლია $-W$ თავისუფალი წევრისა (შეუკვრელობისა), რომელსაც მივიღებთ, მაშინ თუ სამკუთხედის კუთხეებს გავაწონასწორებთ პირობით განაზომთა გაწონასწორების ხერხით.

III. შესწორებათა განტოლებების შედგენა და მათი კოეფიციენტების გამოთვლა (4. 9. 2. 11[1]) ფორმულებით

დავწეროთ (4. 9. 2. 12) წირული სახის ორუცნობიანი ტოლობის ზოგადი სახე:

$$a_i\delta_x+b_i\delta_y+v_i=\varepsilon_i. \tag{b}$$

ვინაიდან განხილად მაგალითში მივიღეთ, რომ კუთხეების განაზომები მათი მიახლოებითი მნიშვნელობებია, შეიძლება დავწეროთ:

$\delta_x=\varepsilon_1$ — არის α' კუთხის შესწორება;
$\delta_y=\varepsilon_2$ — β' ,, ,,
$v_1=v_2=0$

ამიტომ მივიღებთ შესწორებათა შემდეგი სახის სამ განტოლებას:

$$\begin{aligned} a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2&=\varepsilon_1, \\ a_2\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2&=\varepsilon_2, \\ a_3\varepsilon_1+b_3\varepsilon_3+v_3&=\varepsilon_3. \end{aligned}$$

ახლა (a) ტოლობების მიმართ (4. 9. 2. 11[1]) დამოკიდებულებების გამოყენებით გამოვითვალოთ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 კოეფიციენტები:

$$a_1=\frac{\partial F_1}{\partial\alpha'}=\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha'}=1; \qquad b_1=\frac{\partial F_1}{\partial\beta'}=\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta'}=0$$

IV. ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების შედგენისა და ამოხსნის სქემები. ორივე (1) და (2) სქემა ხრულია

სქემა 4.9.7.1

განტოლებების №№	a	b	v	S	aa	ab	av	aS	bb	bv	bS	vv	vS	SS
1	1			1	1			1						1
2		1		1					1		1			1
3	-1	-1	v_3	v_3-2	1	1	$-v_3$	$2-v_3$	1	$-v_3$	$2-v_3$	v_3^2	$v_3^2-2v_3$	$(v_3-2)^2$
			v_3	v_3	2	1	$-v_3$	$3-v_3$	2	$-v_3$	$3-v_3$	v_3^2	$v_3^2-2v_3$	$(v_3-2)^2+2$

S	aS	bS	v_3S	SS
$1+0+0=1$	$1+0+0=1$	$0+0+1=$	$0+0+0=0$	$1+0+0=1$
$0+1+0=1$	$0+0+0=0$	$0+1+0=1$	$0+0+0=0$	$0+1+0=1$
$-1-1+v_3=v_3-2$	$1+1-v_3=2-v_3$	$1+1-v_3=2-v_3$	$-v_3-v_3+v_3^2=v_3^2-2v_3$	$(2-v_3)+(2-v_3)+(v_3^2-2v_3)=(v_3-2)^2$
$0+0+v_3=v_3$	$2+1-v_3=3-v_3$	$1+2-v_3=3-v_3$	$-v_3-v_3+v_3^2=v_3^2-2v_3$	$(3-v_3)+(3-v_3)+(v_3^2-2v_3)=(v_3-2)^2+2$

სქემა 4.9.7.2

№№	სტრიქონების აღნიშვნა	a $\varepsilon_1=\delta_x$	b $\varepsilon_2=\delta_y$	v	S	კონტროლი	შენიშვნა
1	a	2	1	$-v_3$	$3-v_3$	$3-v_3$	$S_1=[aS]$
2	E_1	-1	$-0{,}5$	$+0{,}5\ v_3$	$-0{,}5\ (3-v_3)$	$-1{,}5+0{,}5\ v_3$	
3		$\varepsilon_1=0{,}333\ v_3$	$-0{,}167\ v_3$	$+0{,}5\ v_3$			
1	b		2	$-v_3$	$3-v_3$		$S_2=[bS]$
2	$E_1 \cdot a_3$		$-0{,}5$	$0{,}5\ v_3$	$-0{,}5\ (3-v_3)$		
3	$b\cdot 1$		$1{,}5$	$-0{,}5\ v_3$	$1{,}5-0{,}5\ v_3$		
4	E_2		-1	$0{,}333\ v_3$	$-1+0{,}333\ v_3$	$-1+0{,}333\ v_3$	
5			$\varepsilon_2=0{,}333\ v_3$	$0{,}333\ v_3$			
				v_3^2 $-0{,}5v_3^2$ $-0{,}167\ v_3^2$			
				$+0{,}333\ v_3^2$ $[vv\cdot 2]$			

$$a_2=\frac{\partial F_2}{\partial \alpha'}=\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha'}=0; \qquad b_2=\frac{\partial F_2}{\partial \beta'}=\frac{\partial \beta'}{\partial \beta'}=1$$

$$a_3=\frac{\partial F_3}{\partial \alpha'}=\frac{\partial(180^\circ-(\alpha'+\beta'))}{\partial \alpha'}=-1; \qquad b_3=\frac{\partial F_3}{\partial \beta'}=\frac{\partial(180^\circ-(\alpha'+\beta'))}{\partial \beta'}=-1.$$

V. ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის კონტროლი (4. 9. 5. 14) ფორმულით

(4. 9. 5. 14) ტოლობის შესაბამისად დავწერთ:

$[vv\cdot 2]=[vv]+[av]\varepsilon_1+[bv]\varepsilon_2$. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის ოდენობა (1) და (2) სქემების მონაცემებით იქნება: $v_3^2+(-v_3)\cdot 0{,}333v_3+(-v_3)\cdot 0{,}333v_3=0{,}334v_3^2$, ხოლო მარცხენა მხარე მიღებულია (2) სქემის v სვეტში $[vv\cdot 2]=0{,}333v_3^2$. მაშასადამე, შედეგები ტოლია.

VI. α', β', γ' განაზომი კუთხეების შესწორებების გამოთვლა (4. 9. 2. 12) ფორმულით

α' და β' განაზომი კუთხეების ε_1 და ε_2 შესწორებები გამოვითვალეთ (1) სქემით. γ' კუთხის ε_3 შესწორება კი გამოვითვალეთ (4. 9. 2. 12) სისტემის ზოგადი სახის (b) ტოლობის საშუალებით

$$\varepsilon_i=a_i\delta_x+b_i\delta_y+v_i.$$

ე. ი. (1) და (2) სქემის გამოყენებით

$$\varepsilon_3=-\delta_x-\delta_y+v_3=-0{,}333v_3-0{,}333v_3+v_3=0{,}333v_3=+\frac{1}{3}\,v_3.$$

მაშასადამე,

$$[\varepsilon\varepsilon]=\left(\frac{1}{3}\,v_3\right)^2+\left(\frac{1}{3}\,v_3\right)^2+\left(\frac{1}{3}\,v_3\right)^2=3\times\left(\frac{v_3}{3}\right)^2.$$

VII. გამონათვალთა კონტროლი (4. 9. 5. 11) ფორმულით

$$[\varepsilon\varepsilon]-[vv]=[av]\delta_x+[bv]\delta_y=[av]\varepsilon_1+[bv]\varepsilon_2.$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე (2) და (1) სქემის გამოყენებით იქნება:

$$3\times\left(\frac{v_3}{3}\right)^2-v_3^2=-\frac{2}{3}v_3^2.$$

ხოლო, მარჯვენა ნაწილით კი მივიღებთ, იგივე ოდენობას:

$$-v_3\times\frac{1}{3}v_3-v_3\times\frac{1}{3}\,v_3=-\frac{2}{3}v_3^2,$$

რითაც დადასტურებულია გამოთვლის სისწორე.

VIII. (4. 9. 2. 8) ფორმულებით უცნობთა გაწონასწორებული ოდენობების გამოთვლა

$$X=x+\delta_x=\alpha'+\varepsilon_1=\alpha'+\frac{v_3}{3}, \text{ ე. ი. } \alpha=\alpha'+\frac{v_3}{3},$$

$$Y=y+\delta_y=\beta'+\varepsilon_2=\beta'+\frac{v_3}{3}, \quad " \quad \beta=\beta'+\frac{v_3}{3}.$$

IX. შესწორების განმეორებით გამოთვლა და გამოთვლების დასკვნითი კონტროლი

როგორც ცნობილია, ε_1 და ε_2 არის შესწორებები როგორც უცნობი სიდიდეებისა (არგუმენტებისა), ისე გაზომილი კუთხეებისა. განხილად მაგალითში საჭიროა განისაზღვროს ε_3, რისთვისაც უცნობთა (a) დამოკიდებულებების მესამე ტოლობაში შევიტანოთ უცნობთა გაწონასწორებული მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} &180^\circ-\left(\alpha'+\frac{v_3}{3}+\beta'+\frac{v_3}{3}\right)-\gamma'=\varepsilon_3;\\ &180^\circ-(\alpha'+\beta')-\gamma'-\left(\frac{v_3}{3}+\frac{v_3}{3}\right)=\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

ვინაიდან

$$180^\circ-(\alpha'+\beta')-\gamma'=v_3,$$

(c) დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ:

$$v_3-\frac{2}{3}v_3=\varepsilon_3 \text{ ე. ი. } \varepsilon_3=\frac{1}{3}v_3,$$

რაც ემთხვევა მეექვსე პუნქტში გამოთვლილი ε_3 ოდენობას.

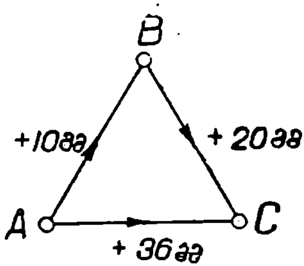
X. (2. 9. 2. 4) ფორმულით განაზომ კუთხეთა გაწონასწორებული ოდენობების გამოთვლა

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=\alpha'+\varepsilon_1=\alpha'+\frac{1}{3}v_3;\\ &\beta=\beta'+\varepsilon_2=\beta'+\frac{1}{3}v_3;\\ &\gamma=\gamma'+\varepsilon_3=\gamma'+\frac{1}{3}v_3. \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

მაშასადამე, ისევე როგორც პირობით განაზომთა გაწონასწორების დროს, **არაპირდაპირი ხერხით სამკუთხედის გაწონასწორებული ყოველი კუთხე ტოლია მისი უშუალოდ განაზომისა და შებრუნებული ნიშნით შეუკვრელობის მესამედის ალგებრული ჯამისა.**

ეს მაგალითი დადასტურებაა პირობით და არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების ხერხების ურთიერთშესაბამისობისა. პრაქტიკაში სამკუთხედის განაზომი კუთხეების გაწონასწორება სრულიად მარტივად ხდება (4. 5. 5. 1) მაგალითში განხილული წონითი საშუალოს გამოყენებით.

მაგალითი 4. 9. 7. 2. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედში ნიველობით განსაზღვრულია B წერტილის ალმატება A წერტილის მიმართ $h_1' = +10$ მმ; C წერტილის ალმატება B წერტილის მიმართ $h_2' = +20$ მმ, და C წერტილის ალმატება A წერტილის მიმართ $h_3' = +36$ მმ. საჭიროა განისაზღვროს განაზომთა h_1, h_2, h_3 გაწონასწორებული (მეორედ უალბათესი) ოდენობები.



ნახ. 4.9.7.1-

I. უცნობების დადგენა

განხილად მაგალითში სამი ალმატებიდან შეიძლება ნებისმიერი ორი ალმატება მივიღოთ უცნობად, რადგანაც მათი გაწონასწორებული ოდენობები საშუალებას მოგვცემს გამოვითვალოთ მესამე ალმატების გაწონასწორებული ოდენობა. მივიღოთ უცნობად h_1 და h_2 ალმატება;

II. გაზომილი სიდიდეების მიახლოებითი ოდენობების დადგენა და v_i თავისუფალი წევრის გამოთვლა (4. 9. 2. 11[1]) ფორმულით

h_1 და h_2 უცნობთა მიახლოებით მნიშვნელობებად მივიღოთ მათი გაზომილი $h_1' = +10$ მმ და $h_2' = +20$ მმ ოდენობები. მაშინ დავწერთ ორუცნობიან სამ განტოლებას:

$$\left.\begin{array}{lll} h_1' - h_1' = v_1 = 0 & \text{ანუ ცხადი სახით} & h_1' = h_1' + v_1 \\ h_2' - h_2' = v_2 = 0 & \text{"} & h_2' = h_2' + v_2 \\ (h_1' + h_2') - h_3' = v_3 = -6 \text{ მმ} & \text{"} & h_1' + h_2' = h_3' + v_3 \end{array}\right\}, \qquad (a)$$

სადაც v_3 არის პირობით ვანაზომთა W თავისუფალი წევრი შებრუნებული ნიშნით.

III. შესწორებათა განტოლებების შედგენა და მათი კოეფიციენტების გამოთვლა

(4. 9. 2. 12) სისტემის შესაბამის შესწორებათა ზოგადი წირული სახე იქნება:

$$a_i \delta_x + b_i \delta_y + v_i = \varepsilon_i,$$

სადაც $\delta_x = \varepsilon_1$ არის h_1' ალმატების შესწორება;

$\delta_y = \varepsilon_2$ " h_2' " "

$v_1 = v_2 = 0$ და $v_3 = -6$ მმ

ე. ი. $a_1 \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_1$;

$a_2 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_2$;

$a_3 \varepsilon_1 + b_3 \varepsilon_2 + v_3 = \varepsilon_3$;

რომელთა კოეფიციენტები, ანუ (a) ტოლობების კერძო წარმოებულებია:

$$a_1=\frac{\partial F_1}{\partial h_1'}=1; \qquad b_1=\frac{\partial F_1}{\partial h_2'}=0;$$

$$a_2=\frac{\partial F_2}{\partial h_1'}=0; \qquad b_2=\frac{\partial F_2}{\partial h_2'}=1;$$

$$a_3=\frac{\partial F_3}{\partial h_1'}=+1; \qquad b_3=\frac{\partial F_3}{\partial h_2'}=+1.$$

IV. ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტების შედგენისა და ამოხსნის სქემები: ორივე (3) და (4) სქემა არის სრული

სქემა 4.9.7.3

განტ. №№	a	b	v	S	aa	ab	av	aS	bb	bv	bS	vv	vS	SS
1	1			1	1			1						1
2		1		1					1		1			1
3	1	1	—6	—4	1	1	—6	—4	1	—6	—4	36	24	16
	2	2	—6	—2	2	1	—6	—3	2	—6	—3	36	24	18

სქემა 4.9.7.4

№№	სტრიქ. აღნიშვნა	a $\varepsilon_1=\delta_x$	b $\varepsilon_2=\delta_y$	v	S	კონტროლი	შენიშვნა
1	a	2	1	—6	—3	—3	$S_1=[aS]$
2	E_1	—1	—0,5	+3	+1,5	+1,5	
3		$\varepsilon_1=+2$	—1	+3			
1	b		2	—6	—3		$S_2=[bS]$
2	$E_1\times a_2$		—0,5	+3	+1,5		
3	$b\cdot 1$		+1,5	—3	—1,5	—1,5	
4	E_2		—1	+2	+1	+1	
5			$\varepsilon_2=+2$	+2			

V. ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის კონტროლი 4. 9. 5. 14 ფორმულით

$$[vv\cdot 2]=[vv]+[av]\varepsilon_1+[bv]\varepsilon_2 \qquad (b)$$

(3) და (4) სქემების v სვეტებიდან

$$[vv\cdot 2]=[vv]-\frac{[av]^2}{[aa]}-\frac{[bv\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}=36-18-6=12$$

$36+(-6)\times 2+(-6)\times 2=12$ (b) ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარე ურთიერთტოლია.

VI. ε_3 შესწორების გამოთვლა (4. 9. 2. 12) ფორმულის ზოგადი სახით

$$\varepsilon_3 = a_3\delta_x + b_3\delta_y + v_3 = a_3\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_2 + v_3 = 1\times 2 + 1\times 2 - 6 = -2.$$

მაშასადამე, $[\varepsilon\varepsilon] = [vv\cdot 2] = 12$.

VII. გამონათვალთა კონტროლი (4. 9. 5. 11) ფორმულით

$$[\varepsilon\varepsilon] - [vv] = [av]\delta_x + [bv]\delta_y;$$

$$12 - 36 = (-6)\times 2 + (-6)\times 2 = -24.$$

VIII. (4. 9. 2. 8) ფორმულით უცნობთა გათანასწორებული ოდენობების გამოთვლა

$$h_1 = h_1' + \varepsilon_1 = 10 + 2 = 12 \text{ მმ},$$

$$h_2 = h_2' + \varepsilon_2 = 20 + 2 = 22 \text{ მმ}.$$

IX. ε_3 შესწორების განმეორებითი გამოთვლა და გამოთვლის დასკვნითი კონტროლი

(a) ტოლობაში ნაცვლად გაზომილი h_1' და h_2' სიდიდეებისა შევიტანოთ მათი გაწონასწორებული h_1 და h_2 სიდიდეები, მივიღებთ:

$$\varepsilon_3 = (h_1 + h_2) - h_3' = 12 + 22 - 36 = -2 \text{ მმ}.$$

მივიღეთ იგივე ოდენობა, რაც მე-6 მუხლში.

X. (2. 9. 2. 4) ფორმულებით გაწონასწორებულ ალმატებათა გამოთვლა

$$h_1 = h_1' + \varepsilon_1 = 10 + 2 = 12 \text{ მმ}$$

$$h_2 = h_2' + \varepsilon_2 = 20 + 2 = 22 \text{ მმ}$$

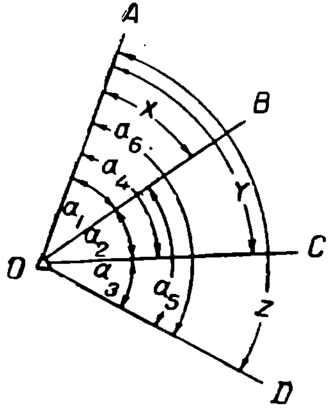
$$h_3 = h_3' + \varepsilon_3 = 36 - 2 = 34 \text{ მმ}.$$

მაგალითი 4. 9. 7. 8. ამოვხსნათ (4. 7. 1. 1) მაგალითი არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების ხერხით. რიცხვითი მონაცემები იგივეა, (4. 7. 1. 1) ცხრილი.

I. უცნობისა და მათი რაოდენობის დადგენა

როგორც მოცემულობიდან ჩანს, O წერტილზე A, B, C, D მიმართულებებს შორის გაზომილია α_1', α_2', α_3', α_4', α_5', α_6' კუთხეები და უნდა განისაზღვროს X, Y, Z [გაწონასწორებული უცნობი (არგუმენტები), ანუ განხილად შემთხვევაში α_1, α_4, α_6 კუთხეები ამავე დროს L_i გაზომილი და გაწონასწორებული L_i (ფუნქციები) იქნება α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, მაშასადამე, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, $\varepsilon_1 = \delta_x$; $\varepsilon_4 = \delta_y$; $\varepsilon_6 = \delta_z$.

II. ეაზომილი და გაწონასწორებული L_i ოდენობების გამოსახვა უცნობი X, Y, Z სიდიდეებით



ნახ. 4.9.7.2

(4.9.2.2) ტოლობის შესაბამისად გაზომილი და საძებარი სიდიდეები დაკავშირებული იქნება შემდეგნაირად (ნახ. 2):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= X \\
\alpha_2 &= -X+Y \\
\alpha_3 &= -Y+Z \\
\alpha_4 &= Y \\
\alpha_5 &= -X+Z \\
\alpha_6 &= Z
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

III. უცნობთა მიახლოებითი x, y, z ოდენობების დადგენა

მივიღოთ X, Y, Z უცნობთა x, y, z მიახლოებით ოდენობებად, მათი შესაბამისი გაზომილი კუთხეები: $x=\alpha'_1$; $y=\alpha'_4$; $z=\alpha'_6$.

IV. განაზომთა (ფუნქციათა) მიახლოებითი მნიშვნელობების დადგენა და (a) დამოკიდებულებების შეცვლა მათი შესაბამისი მიახლოებითი მნიშვნელობებით და შესწორებებით

როგორც ზემოთ ითქვა, განაზომთა მიახლოებით ოდენობებად მიიღება თვით α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, α'_5, α'_6 განაზომები. მაშინ (a) დამოკიდებულებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$F_i = L_i \quad \left\{\begin{aligned}
\alpha'_1+\varepsilon_1 &= \alpha'_1+\delta_x \\
\alpha'_2+\varepsilon_2 &= -\alpha'_1-\delta_x+\alpha'_4+\delta_y \\
\alpha'_3+\varepsilon_3 &= -\alpha'_4-\delta_y+\alpha'_6+\delta_z \\
\alpha'_4+\varepsilon_4 &= \alpha'_4+\delta_y \\
\alpha'_5+\varepsilon_5 &= -\alpha'_1-\delta_x+\alpha'_6+\delta_z \\
\alpha'_6+\varepsilon_6 &= \alpha'_6+\delta_z
\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

V. (4. 9. 2. 11′) ტოლობის შესაბამისად (b) ტოლობების გამოყენებით v_i თავისუფალი წევრების გამოთვლა

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= 0 \\
v_2 &= \alpha'_4-\alpha'_2-\alpha'_1 = -2'' \\
v_3 &= \alpha'_6-\alpha'_4-\alpha'_3 = -0''.2 \\
v_4 &= 0 \\
v_5 &= \alpha'_6-\alpha'_5-\alpha'_1 = -3'' \\
v_6 &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

VI. (b) ტოლობებში მსგავსი წევრების შეკრება (c) დამოკიდებულებების გამოყენებით

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_x \qquad\qquad\qquad &= \varepsilon_1 \\
-\delta_x+\delta_y \qquad +v_2 &= \varepsilon_2 \\
-\delta_y+\delta_z+v_3 &= \varepsilon_3 \\
+\delta_y \qquad\qquad &= \varepsilon_4 \\
-\delta_x \qquad +\delta_z+v_5 &= \varepsilon_5 \\
+\delta_z \qquad &= \varepsilon_6
\end{aligned}\right\} \qquad (d)
$$

VII. a_i, b_i, c_i კოეფიციენტების გამოთვლა (b) დამოკიდებულებების მარჯვენა მხარისადმი (4. 0. 2. 11) დამოკიდებულებების გამოყენებით

$$
\begin{aligned}
a_1&=\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1'}=1, & b_1&=\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_4'}=0, & c_1&=\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_6'}=0,\\
a_2&=\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1'}=-1, & b_2&=\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_4'}=+1, & c_2&=\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_6'}=0,\\
a_3&=\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1'}=0, & b_3&=\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_4'}=-1, & c_3&=\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_6'}=+1,\\
a_4&=\frac{\partial F_4}{\partial \alpha_1'}=0, & b_4&=\frac{\partial F_4}{\partial \alpha_4'}=+1, & c_4&=\frac{\partial F_4}{\partial \alpha_6'}=0,\\
a_5&=\frac{\partial F_5}{\partial \alpha_1'}=-1, & b_5&=\frac{\partial F_5}{\partial \alpha_4'}=0, & c_5&=\frac{\partial F_5}{\partial \alpha_6'}=+1,\\
a_6&=\frac{\partial F_6}{\partial \alpha_1'}=0, & b_6&=\frac{\partial F_6}{\partial \alpha_4'}=0, & c_6&=\frac{\partial F_6}{\partial \alpha_6'}=+1.
\end{aligned}
$$

(d) და (c) დამოკიდებულებების მიხედვით სრულიად თავისუფლად უშუალოდ ამოიწერება a_i, b_i, c_i კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები:

VIII. ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების შედგენის (5) და ამოხსნის (6) სქემა

სქემა 4.9.7.5

შესწორებათა განტოლებები	$a]$	$b]$	$c]$	$v]$	$S]$	შენიშვნა
1	1				1	
2	−1	1		−2	−2	
3		−1	1		−0,2	$[SS]=16,04$
4		1		−0,2	1	
5	−1		1		−3	
6			1	−3	1	
Σ	−1	1	3	−5,2	−2,2	
						კონტროლი
$[a$	3	−1	−1	5	6	6
$[b$		3	−1	−1,8	−0,8	−0,8
$[c$			3	−3,2	−2,2	−2,2
$[v$				13,04	16,04	13,04

სქემა 4.9.7.6

№№	სტრიქონების დონ.	a ε_1	b ε_4	c ε_8	v	S	კონტროლი	შენიშვნა
1	a	3	—1	—1	+5	+6	+6	$S_1'=[aS]$ (5) სქემიდან
2	E_1	—1	+0,333	+0,333	—1,667	—2	—2	
3		$\varepsilon_1=-1,25$	+0,15	+0,27	—1,667			
1	b		+3	—1	—1,8	—0,8	—0,8	$S_2=[bS]$
2	$E_1\times a_2$		—0,333	—0,333	+1,667	+2		
3	$b\cdot 1$		+2,667	—1,333	—0,133	+1,2		
4	E_2		—1	+0,50	+0,05	—0,45		
5			$\varepsilon_4=+0,45$	+0,40	+0,05			
1	c			+3	—3,2	—2,2	—2,2	$S_3=[cS]$
2	$E_1\times a_3$			—0,333	+1,667	+2		
3	$E_2\times b\cdot 1_3$			—0,667	—0,067	+0,6		
4	$c\cdot 2$			+2,00	—1,60	+0,4		
5	E_3			—1	+0,80	—0,06		
6				$\varepsilon_8=+0,80$	+0,80			

მიღებული ε_1, ε_4, ε_8 ოდენობები შეადარეთ 4.7.1.1 მაგალითით განსაზღვრული იმავე სიდიდეების ოდენობებს.

IX. ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის კონტროლი (4. 9. 5. 14) ფორმულით

$$[vv\cdot 3]=[vv]-\frac{[av]^2}{[aa]}-\frac{[bv\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cv\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}=$$

$$=13{,}04-5\times 1{,}667-0{,}133\times 0{,}05-1{,}60\times 0{,}80=13{,}04-8{,}335-$$
$$-0-1{,}28=3{,}42.$$

$$[vv]+[av]\varepsilon_1+[bv]\varepsilon_4+[cv]\varepsilon_6=13{,}04+5\times(-1{,}25)+(-1{,}8)0{,}45+$$
$$+(-3{,}2)0{,}80=13{,}04-6{,}25-0{,}81-2{,}56=3{,}42.$$

X. (d) და (c) დამოკიდებულებების მიხედვით ε_i შესწორებების გამოთვლა

$\varepsilon_1=\delta_x=-1{,}25$ მმ.

$\varepsilon_2=-\delta_x+\delta_y+v_2=+1'',25+0'',45-2''=-0'',30$

$\varepsilon_3=-\delta_y+\delta_z+v_3=-0{,}45+0{,}80-0'',2=+0'',15$

$\varepsilon_4=+\delta_y=+0{,}45$ მმ.

$\varepsilon_5=-\delta_x+\delta_z+v_5=+1'',25+0'',80-3'',00=-0'',95$

$\varepsilon_6=\delta_z=+0{,}80$

$$[\varepsilon\varepsilon]=(-1{,}25)^2+(-0{,}30)^2+(0{,}15)^2+(0{,}45)^2+(-0{,}95)^2+$$
$$+(0{,}80)^2=3'',42.$$

იხილეთ 4.7.1.5 სქემა.

XI. გამოთვლის კონტროლი (4. 9. 5. 11) ფორმულით

$[\varepsilon\varepsilon]-[vv]=3'',42-13'',04=-9'',62.$

$$[av]\delta_x+[bv]\delta_y+[cv]\delta_z=5\times(-1{,}25)+(-1{,}8)\times 0{,}45+$$
$$+(-3{,}2)0{,}8=-6{,}25-0{,}81-2{,}56=-9{,}62.$$

XII. (4. 9. 2. 8) ფორმულებით უცნობთა გაწონასწორებული ოდენობების გამოთვლა

$\alpha_1=\alpha_1'+\varepsilon_1=\ 44°03'\ 14'',0-1'',25=44°\ 03'12'',75;$

$\alpha_4=\alpha_4'+\varepsilon_4=\ 87\ 17\ \ 31,\ 2+0,\ 45=87\ \ 17\ 31,\ 65;$

$\alpha_6=\alpha_6'+\varepsilon_6=140\ 51\ \ 03,\ 9+0,\ 80=140\ 51\ 04,\ 70.$

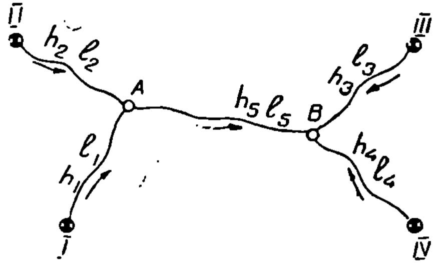
ანალოგიურად გამოითვლება დანარჩენი კუთხეების გაწონასწორებული ოდენობები:

$\alpha_2=\alpha_2'+\varepsilon_2=43°14'19'',2-0'',30=43°14'18'',90;$

$\alpha_3=\alpha_3'+\varepsilon_3=53\ 33\ 32{,}90+0,\ 15=53\ 33\ 33,\ 05;$

$\alpha_5=\alpha_5'+\varepsilon_5=96\ 47\ 52{,}90-0,\ 95=96\ 47\ 51,\ 95.$

მაგალითი 4. 9. 7. 4. არაპირდაპირი ხერხით გაწონასწორდეს სანიველო სვლები, შემდეგი მონაცემების საფუძველზე. გამოსავალი რეპერებია I, II, III, IV (ნახ. 3). მათი ნიშნულებია $Z_I = 150,686$ მ; $Z_{II} = 152,582$ მ; $Z_{III} = 153,438$ მ; $Z_{IV} = 155,822$ მ, რომელთა მიმართ ხუთი სანიველო სვლით განსაზღვრულია A და B რეპერის ალმატებები: $h_1 = +6,194$ მ; $h_2 = +4,300$ მ; $h_3 = +4,340$ მ; $h_4 = +1,952$ მ; $h_5 = +0,890$ მ. სანიველო სვლის სიგრძეებია: $l_1 = 1250,00$ მ; $l_2 = 1150,526$ მ; $l_3 = 1015,996$ მ; $l_4 = 1205,236$ მ; $l_5 = 1380,298$ მ. საჭიროა განისაზღვროს A და B რეპერის Z_A და Z_B გაწონასწორებული ნიშნული, რისთვისაც აუცილებელია ორი სანიველო სვლა, დანარჩენი კი ჭარბია, ე. ი. საჭიროა გაწონასწორება.



ნახ. 4.9.7.3.

I. Z_A და Z_B გაწონასწორებული უცნობების მიახლოებითი სიდიდეების დანიშვნა

უცნობთა მიახლოებით z_A და z_B სიდიდეებად მივიღოთ:

$$\left.\begin{aligned} &z_A = Z_I + h_1 \text{ და } z_B = Z_{III} + h_3, \\ \text{ანუ } &z_A = 150,686 + 6,194 = 156,880 \text{ მ} \\ &z_B = 153,438 + 4,340 = 157,778 \text{ მ} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

II. შესწორებათა განტოლებების შედგენა

$$L_i = l_i + \varepsilon_i = h_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5); \; X_{z_j} = z_{zj} + \delta_{zj}, \quad (j = A, B)$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 + \varepsilon_1 &= z_A + \delta_{z_A} - Z_I \\ h_2 + \varepsilon_2 &= z_A + \delta_{z_A} - Z_{II} \\ h_3 + \varepsilon_3 &= z_B + \delta_{z_B} - Z_{III} \\ h_4 + \varepsilon_4 &= z_B + \delta_{z_B} - Z_{IV} \\ h_5 + \varepsilon_5 &= z_B + \delta_{z_B} - z_A - \delta_{z_A} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

III. თავისუფალი წევრების განსაზღვრა (b) ტოლობიდან

$$v_1 = z_A - Z_I \; - h_1 = 156,880 - 150,636 - 6,194 = 0$$

$$v_2 = z_A - Z_{II} \; - h_2 = 156,880 - 152,582 - 4,300 = -2 \text{ მმ}$$

$$v_3 = z_B - Z_{III} - h_3 = 157,778 - 153,438 - 4,340 = 0$$

$$v_4 = z_B - Z_{IV} - h_4 = 157,778 - 155,822 - 1,952 = +4 \text{ მმ}$$

$$v_5 = z_B - Z_A \; - h_5 = 157,778 - 156,880 - 0,890 = +8 \text{ მმ}$$

(b) გადაიწერება სათანადო წონებით ასე:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{z_A} \qquad\quad + v_1 &= \varepsilon_1; \quad P_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{1}{1250,000} = 0,0008 \\
\delta_{z_A} \qquad\quad + v_2 &= \varepsilon_2; \quad P_2 = \frac{1}{l_2} = \frac{1}{1150,526} = 0,0009 \\
\delta_{z_B} + v_3 &= \varepsilon_3; \quad P_3 = \frac{1}{l_3} = \frac{1}{1015,996} = 0,0010 \\
\delta_{z_B} + v_4 &= \varepsilon_4; \quad P_4 = \frac{1}{l_4} = \frac{1}{1205,236} = 0,0008 \\
-\delta_{z_A} + \delta_{z_B} + v_5 &= \varepsilon_5; \quad P_5 = \frac{1}{l_5} = \frac{1}{1380,298} = 0,0007
\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

IV. (d) და (c) გამოსახულებების მიხედვით ნორმალურ განტოლებათა კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების განსაზღვრის სქემა

სქემა 4.9.7.7

განტ. №№	a	b	υ	S	P	მოძრავი ფურცელი Pa	Pb	$P\upsilon$	PS	კონტროლი	შენიშვნა
1	1			1	0,0008	0,0008			0,0008	0,0008	
2	1		−2	−1	0,0009	0,0009		−0,0018	−0,0009	−0,0009	
3		1		1	0,0010		0,0010		0,0010	0,0010	
4		1	4	5	0,0008		0,0008	0,0032	0,0040	0,0040	
5	−1	1	8	8	0,0007	−0,0007	0,0007	0,0056	0,0056	0,0056	
					კონტროლი						
a	0,0024	−0,0007	−0,0074	−0,0057	−0,0057						
b		0,0025	0,0088	0,0106	0,0106						
υ			0,0612	0,0626	0,0626						

სქემა 4.9.7.8

სტრიქონების აღნ.	a / δ_{z_A}	b / δ_{z_B}	υ	S	კონტროლი	შენიშვნა
a	0,0024	−0,0007	−0,0074	−0,0057	−0,0057	$S_1=[PaS]$
E_1	−1	+0,2917	+3,0833	+2,3750	+0,3750	
	$\delta_{z_A}=+3,9204$	+0,8371	+3,0833			
b		0,0025	0,0088	0,0106	0,0106	$S_2=[PbS]$
$E_1\times a_2$		−0,0002	−0,0022	−0,0017		
$b\cdot 1$		−0,0023	+0,0066	+0,0089		
E_2		−1	+2,8696	+3,8696		
		$\delta_{z_B}=+2,8696$				

V. ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნის კონტროლი (4. 9. 5. 14)

$$[Pvv\cdot 2]=[Pvv]-\frac{[Pav]^2}{[Paa]}-\frac{[Pbv\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}=0{,}0612-0{,}0074\times 3{,}0833+0{,}0066\times$$

$$\times 2{,}8696=0{,}0573\approx 0{,}1$$

$$[Pvv]+[Pav]\delta_{z_A}+[Pbv]\delta_{z_B}=0{,}0612-0{,}0074\times 3{,}9204+0{,}0088\times$$

$$\times 2{,}8696=0{,}0574\approx 0{,}1.$$

VI. ε_1 და ε_2 გამოთვლა (4. 9. 2. 12) ფორმულით

$$\varepsilon_1=a_1\delta_{z_A}+b_1\delta_{z_B}+v_1=1\times 3{,}9204+0+0=+3{,}9204 \text{ მმ}$$

$$\varepsilon_2=a_2\delta_{z_A}+b_2\delta_{z_B}+v_2=1\times 3{,}9204+0-2=+1{,}9204 \text{ მმ}$$

$$\varepsilon_3=a_3\times\delta_{z_A}+b_3\delta_{z_B}+v_3=0+1\times 2{,}8696+0=+2{,}8696 \text{ მმ}$$

$$\varepsilon_4=a_4\times\delta_{z_A}+b_4\delta_{z_B}+v_4=0+1\times 2{,}8696+4=+6{,}8696 \text{ მმ}$$

$$\varepsilon_5=a_5\times\delta_{z_A}+b_5\delta_{z_B}+v_5=-1\times 3{,}9204+1\times 2{,}8696+8=+6{,}9492 \text{ მმ}$$

VII. კონტროლი (4. 9. 5. 12) ფორმულით

$$[Pvv\cdot 2]=[P\varepsilon\varepsilon];$$

$$[Pvv\cdot 2]=0{,}0574\approx 0{,}1;\ [P\varepsilon\varepsilon]=0{,}0008\times(3{,}9204)^2+0{,}0009\times(1{,}9204)^2+$$

$$+0{,}0010\times(2{,}8696)^2+0{,}0008\times(6{,}8696)^2+0{,}0007(6{,}9492)^2=0{,}0952\approx 0{,}1..$$

VIII. (d) და (c) მიხედვით ε_2-ის გამოთვლა

$$\varepsilon_1=3{,}9204+0=3{,}9204\approx 4 \text{ მმ}$$

$$\varepsilon_2=3{,}9204-2=1{,}9204\approx 2 \text{ „}$$

$$\varepsilon_3=2{,}8696+0=2{,}8696\approx 3 \text{ „}$$

$$\varepsilon_4=2{,}8696+4=6{,}8696\approx 7 \text{ „}$$

$$\varepsilon_5=-3{,}9204+2{,}8696+8=6{,}9492\approx 7 \text{ „}$$

IX. (b) დამოკიდებულებების მიხედვით აღმატებების გამოთვლა

$6{,}194+4=156{,}880+4-150{,}686$ ე. ი. $h_1=+6{,}198$ მ

$4{,}300+2=156{,}880+4-152{,}582$ $h_2=+4{,}302$ „

$4{,}340+3=157{,}778+3-153{,}438$ $h_3=+4{,}343$ „

$1{,}952+7=157{,}778+3-155{,}822$ $h_4=+1{,}959$ „

$0{,}890+7=157{,}778+3-156{,}880-4$ $h_5=+0{,}897$ „

X. A და B პუნქტის გაწონასწორებული ნიშნულების გამოთვლა

$$Z_A=Z_{\mathrm{I}}+h_1=Z_{\mathrm{II}}+h_2=150{,}686+6{,}198=152{,}582+4{,}302=156{,}884 \text{ მ}$$

$$Z_B=Z_A+h_5=Z_{\mathrm{III}}+h_3=Z_{\mathrm{IV}}+h_4=156{,}884+0{,}897=153{,}438+4{,}343=$$

$$=155{,}822+1{,}959=157{,}781 \text{ მ.}$$

4. 9. 8. არაპირდაპირ განაზომთა და გაწონასწორებულ სიდიდეთა სიზუსტის შეფასება

A. წონითი კოეფიციენტები

ვთქვათ შევადგინეთ სამი ნორმალური განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}
&[Paa]\delta_x+[Pab]\delta_y+[Pac]\delta_z+[Pav]=0\\
&[Pab]\delta_x+[Pbb]\delta_y+[Pbc]\delta_z+[Pbv]=0\\
&[Pac]\delta_x+[Pbc]\delta_y+[Pcc]\delta_z+[Pcv]=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.8.1}$$

და შევარჩიეთ შემდეგი სახის განუსაზღვრელი მამრავლები:

$$\left|\begin{array}{c|c|c}
Q_{11} & Q_{21} & Q_{31}\\
Q_{12} & Q_{22} & Q_{32}\\
Q_{13} & Q_{23} & Q_{33}
\end{array}\right| \tag{4.9.8.1^1}$$

(1^1) ერთობლიობის პირველი სვეტის Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} წევრები შესაბამისად გავამრავლოთ (1) სისტემის ყოველ სვეტზე, საერთო მამრავლები გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
&([Paa]Q_{11}+[Pab]Q_{12}+[Pac]Q_{13})\delta_x+\\
&+([Pab]Q_{11}+[Pbb]Q_{12}+[Pbc]Q_{13})\delta_y+\\
&+([Pac]Q_{11}+[Pbc]Q_{12}+[Pcc]Q_{13})\delta_z+\\
&+[Pav]Q_{11}+[Pbv]Q_{12}+[Pcv[Q_{13}=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.8.2}$$

Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} განუსაზღვრელი მამრავლების სისტემა უნდა იყოს შერჩეული ისეთი, რომ დააკმაყოფილოს შემდეგი ტოლობები:

$$\left.\begin{aligned}
&[Paa]Q_{11}+[Pab]Q_{12}+[Pac]Q_{13}=1\\
&[Pab]Q_{11}+[Pbb]Q_{12}+[Pbc]Q_{13}=0\\
&[Pac]Q_{11}+[Pbc]Q_{12}+[Pcc]Q_{13}=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.8.3}$$

მაშასადამე, (3) ტოლობების სისტემის ამოხსნით განისაზღვრება Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} მამრავლები. (3) დამოკიდებულებების (2) ტოლობაში შეტანით განისაზღვრება δ_x უცნობი:

$$\delta_x=-([Pav]Q_{11}+[Pbv]Q_{12}+[Pcv]Q_{13}). \tag{4.9.8.4}$$

ანალოგიურად გამოითვლება δ_y შესწორება, რისთვისაც (1^1) ერთობლიობის მეორე სვეტის Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} წევრები შესაბამისად, გავამრავლოთ (1) სისტემის ყოველ სვეტზე, საერთო მამრავლები გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ და შევკრიბოთ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\delta_y=-([Pav]Q_{21}+[Pbv]Q_{22}+[Pcv]Q_{23}), \tag{4.9.8.5}$$

სადაც იგულისხმება, რომ Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} განუსაზღვრელი მამრავლები განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობებით:

$$\left.\begin{aligned}
&[Paa]Q_{21}+[Pab]Q_{22}+[Pac]Q_{23}=0\\
&[Pab]\,Q_{21}+[Pbb]Q_{22}+[Pbc]Q_{23}=1\\
&[Pac]\,Q_{21}+[Pbc]Q_{22}+[Pcc]Q_{23}=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.6}$$

δ_z შესწორების გამოსათვლელად (1[1]) ერთობლიობის მესამე სვეტის Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} წევრები შესაბამისად უნდა გავამრავლოთ (1) სისტემის ყოველ სვეტზე და მოვიქცეთ ზემოხსენებულის ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$\delta_z = -([Pav]Q_{31}+[Pbv]Q_{32}+[Pcv]Q_{33}), \tag{4.9.8.7}$$

ხოლო Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} განუსაზღვრელი მამრავლები უნდა განისაზღვროს შემდეგი სახის სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} [Paa]Q_{31}+[Pab]Q_{32}+[Pac]Q_{33}=0 \\ [Pab]Q_{31}+[Pbb]\,Q_{32}+[Pbc]Q_{33}=0 \\ [Pac]Q_{31}+[Pbc]\,Q_{32}+[Pcc]Q_{33}=1 \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.8}$$

(3), (6), (8) განტოლებათა სისტემებს უწოდებენ წ ო ნ ი თ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ს, ხოლო Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i}, $(i=1, 2, 3)$ განუსაზღვრელ მამრავლებს -- წ ო ნ ი თ კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ს.

გამოვსახოთ δ_x, δ_y, δ_z უცნობი შესწორებები უშუალოდ განაზომი სიდიდეებით, რისთვისაც დავშალოთ (4) ტოლობა:

$$\left.\begin{aligned} \delta_x = -(P_1a_1v_1+P_2a_2v_2+\cdots+P_na_nv_n)Q_{11}- \\ -(P_1b_1v_1+P_2b_2v_2+\cdots+P_nb_nv_n)Q_{12}- \\ -(P_1c_1v_1+P_2c_2v_2+\cdots+P_nc_nv_n)Q_{13} \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.9}$$

(4) ტოლობის ფრჩხილების გახსნისა და თავისუფალი წევრების შესაბამისად დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \delta_x = -(a_1Q_{11}+b_1Q_{12}+c_1Q_{13})P_1v_1- \\ -(a_2Q_{11}+b_2Q_{12}+c_2Q_{13})P_2v_2- \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(a_nQ_{11}+b_nQ_{12}+c_nQ_{13})\,P_nv_n \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.10}$$

მივიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = (a_1Q_{11}+b_1Q_{12}+c_1Q_{13})P_1 \\ \alpha_2 = (a_2Q_{11}+b_2Q_{12}+c_2Q_{13})P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = (a_nQ_{11}+b_nQ_{12}+c_nQ_{13})P_n \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.11}$$

(11) აღნიშვნების (10) ტოლობებში შეტანით მივიღებთ:

$$\delta_x = -(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n) = -[v\alpha]. \tag{4.9.8.12}$$

ანალოგიურად (5) და (7) ტოლობებში ფრჩხილები გავხსნათ, თავისუფალი წევრები შესაბამისად დავაჯგუფოთ, შემოვიღოთ აღნიშვნები და შევიტანოთ (5) და (7) დაშლილ ტოლობებში, მივიღებთ:

$$\beta_i = (a_iQ_{21}+b_iQ_{22}+c_iQ_{23})P_i, \ (i=1,2,\ldots n); \tag{4.9.8.13}$$

$$\gamma_i = (a_iQ_{31}+b_iQ_{32}+c_iQ_{33})P_i, \ (i=1,2,\ldots n); \tag{4.9.8.14}$$

$$\delta_y = -(\beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_nv_n) = -[v\beta]; \tag{4.9.8.15}$$

$$\delta_z = -(\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\cdots+\gamma_nv_n) = -[v\gamma]. \tag{4.9.8.16}$$

როგორც ვხედავთ, (12), (15), (16) გამოსახულებებში δ_x, δ_y, δ_z უცნობები (შესწორებები) გამოსახულია v_i თავისუფალი წევრებით, რომლებსაც თანახმად (4. 9. 2. 11[1]) გამოსახულებისა, აქვს ისეთივე საშუალო კვადრატული შეცდომა, რაც უშუალოდ l_i განაზომებს.

B. წონითი კოეფიციენტების თვისებები

Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i} $(i=1, 2, 3)$ წონითი კოეფიციენტებისა და α, β, γ კოეფიციენტების ზოგიერთი თვისებების დადგენის მიზნით (11) სისტემის ყოველი ტოლობა შესაბამისად გადავამრავლოთ ჯერ a_i, შემდეგ b_i, ბოლოს c_i სიდიდეებზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}[a\alpha]&=[Paa]Q_{11}+[Pab]Q_{12}+[Pac]Q_{13}\\ [b\alpha]&=[Pab]Q_{11}+[Pbb]Q_{12}+[Pbc]Q_{13}\\ [c\alpha]&=[Pac]Q_{11}+[Pbc]Q_{12}+[Pcc]Q_{13}\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.17}$$

(3) სისტემის ტოლობების შესაბამისად მივიღებთ:

$$[a\alpha]=1,\ [b\alpha]=0,\ [c\alpha]=0. \tag{4.9.8.18}$$

ანალოგიურად, გადავამრავლოთ შესაბამისად ჯერ a_i-ზე, შემდეგ b_i-ზე დაბოლოს, c_i-ზე (13) და (14) სისტემის ყოველი განტოლება, შევკრიბოთ და (6), (8) სისტემების საფუძველზე მივიღებთ:

$$[a\beta]=0,\ [b\beta]=1,\ [c\beta]=0, \tag{4.9.8.19}$$

$$[a\gamma]=0,\ [b\gamma]=0,\ [c\gamma]=1. \tag{4.9.8.20}$$

ახლა (11) ტოლობები შესაბამისად გადავამრავლოთ $\frac{\alpha_i}{P_i}$-ზე და შევკრიბოთ:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{P}\right]=[a\alpha]Q_{11}+[b\alpha]Q_{12}+[c\alpha]Q_{13}, \tag{4.9.8.21}$$

(18) ტოლობების გამოყენებით (21) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{P}\right]=Q_{11}. \tag{4 9.8.22}$$

ანალოგიურად, (11) ტოლობების შესაბამისად $\frac{\beta_i}{P_i}$ და $\frac{\gamma_i}{P_i}$ სიდიდეებზე გადამრავლებით, შეკრებით და (19) და (20) ტოლობების გამოყენებით დავწერთ:

$$\left[\frac{\beta\alpha}{P}\right]=Q_{12}; \tag{4.9.8.23}$$

$$\left[\frac{\gamma\alpha}{P}\right]=Q_{13}. \tag{4.9.8.24}$$

გავამრავლოთ (13) ტოლობები შესაბამისად $\frac{\alpha_i}{P_i}$-ზე მერე კი $\frac{\beta_i}{P_i}$ და $\frac{\gamma_i}{P_i}$ სიდიდეებზე, შევკრიბოთ და გამოვიყენოთ (18), (19), (20) ტოლობები, მივიღებთ:

$$\left[\frac{\alpha\beta}{P}\right]=Q_{21}; \tag{4.9.8.25}$$

$$\left[\frac{\beta\beta}{P}\right]=Q_{22};\qquad(4.9.8.26)$$

$$\left[\frac{\gamma\beta}{P}\right]=Q_{23}.\qquad(4.9.8.27)$$

(14) ტოლობების სრულიად ანალოგიური გარდაქმნით დავწერთ:

$$\left[\frac{\alpha\gamma}{P}\right]=Q_{31};\qquad(4.9.8.28)$$

$$\left[\frac{\beta\gamma}{P}\right]=Q_{32};\qquad(4.9.8.29)$$

$$\left[\frac{\gamma\gamma}{P}\right]=Q_{33}.\qquad(4.9.8.30)$$

თუ შევადარებთ (23) და (25), (24) და (28), (27) და (29) ტოლობებს, ვნახავთ, რომ

$$Q_{12}=Q_{21},\qquad(4.9.8.31)$$

$$Q_{13}=Q_{31},\qquad(4.9.8.32)$$

$$Q_{23}=Q_{32}.\qquad(4.9.8.33)$$

C. პირდაპირ განაზომთა სიზუსტის შეფასება

პირდაპირ (უშუალოდ) განაზომთა სიზუსტის შეფასებისათვის ვისარგებლოთ ε_i შესწორებებით, რადგანაც ისინი წარმოადგენენ l_i პირდაპირ განაზომების შესწორებებს.

თუ შესწორებათა (4. 9. 2. 12) ტოლობებში, რომლის ზოგადი სახეა

$$\varepsilon_i=a_i\delta_x+b_i\delta_y+c_i\delta_z+v_i\ \ (i=1,\ 2,\dots,n),\qquad(4.9.8.34)$$

უცნობთა მიახლოებითი x, y, z სიდიდეების δ_x, δ_y, δ_z შესწორებებს შევცვლით მათი ჭეშმარიტი δ_X, δ_Y, δ_Z მნიშვნელობებით, (1) ტოლობის მარცხენა მხარის ε_i შესწორებაც შეიცვლება პირდაპირ განაზომთა ჭეშმარიტი შესწორებით, მაგრამ თანახმად განაზომთა შეცდომების თეორიის (3.1.3) პარაგრაფში მოცემული განსაზღვრებისა (ანუ შევიტანოთ 3. 1. 3. 4[1] ფორმულა $\varepsilon_i=-\delta_i$), ε_i ჭეშმარიტი შესწორებები ტოლია ჭეშმარიტი Δ_i შეცდომებისა შებრუნებული ნიშნით. მაშასადამე, ნაცვლად (1) ტოლობისა, დავწერთ.

$$-\Delta_i=a_i\delta_X+b_i\delta_Y+c_i\delta_Z+v_i\ \ (i=1,\ 2,\dots,n).\qquad(4.9.8.35)$$

(34) ტოლობა გავამრავლოთ $-\Delta_i$ სიდიდეზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$-[\Delta\varepsilon]=-[a\Delta]\delta_x-[b\Delta]\delta_y-[c\Delta]\delta_z-[v\Delta].\qquad(4.9.8.36)$$

(35) ტოლობა გავამრავლოთ ε_i სიდიდეზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$-[\Delta\varepsilon]=[a\varepsilon]\delta_X+[b\varepsilon]\delta_Y+[c\varepsilon]\delta_Z+[v\varepsilon].\qquad(4.9.8.37)$$

(4. 9. 5. 8) და (4. 9. 5. 9) ტოლობების საფუძველზე (37) ასე გადაიწერება:

$$-[\Delta\varepsilon]=[v\varepsilon]=[\varepsilon\varepsilon],\qquad(4.9.8.38)$$

საიდანაც, თანახმად (36) ტოლობისა, დავწერთ:

$$[\varepsilon\varepsilon]=-[a\Delta]\delta_x-[b\Delta]\delta_y-[c\Delta]\delta_z-[v\Delta].\qquad(4.9.8.39)$$

(35) განტოლება გავამრავლოთ $-\Delta_i$ სიდიდეზე და შევკრიბოთ:

$$[\Delta\Delta]=-[a\Delta]\delta_X-[b\Delta]\delta_Y-[c\Delta]\delta_Z-[v\Delta]. \qquad (4.9.8.40)$$

(40) ტოლობას გამოვაკლოთ (39) ტოლობა, მივიღებთ:

$$[\Delta\Delta]-[\varepsilon\varepsilon]=[a\Delta](\delta_x-\delta_X)+[b\Delta](\delta_y-\delta_Y)+[c\Delta](\delta_z-\delta_Z). \qquad (4.9.8.41)$$

(35) ტოლობა გავამრავლოთ α_i სიდიდეზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$-[\alpha\Delta]=[a\alpha]\delta_X+[b\alpha]\delta_Y+[c\alpha]\delta_Z+[v\alpha]. \qquad (4.9.8.42)$$

(18) ტოლობების მიხედვით $[a\alpha]=1$, $[b\alpha]=[c\alpha]=0$, (12) ტოლობის მიხედვით კი $[v\alpha]=-\delta_x$. ამ სიდიდეების (42) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ.

$$-[\alpha\Delta]=\delta_X-\delta_x. \qquad (4.9.8.43)$$

თანამიმდევრობით (35) ტოლობის β_i და γ_i სიდიდეებზე გადამრავლებით, შეკრებით, (19), (20), (15), (16) ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}-[\beta\Delta]&=\delta_Y-\delta_y\\ -[\gamma\Delta]&=\delta_Z-\delta_z\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.8.44)$$

(41) ტოლობაში (43) და (44) სიდიდეების შეტანით მივიღებთ:

$$[\Delta\Delta]-[\varepsilon\varepsilon]=[a\Delta][\alpha\Delta]+[b\Delta][\beta\Delta]+[c\Delta][\gamma\Delta]. \qquad (4.9.8.45)$$

განვსაზღვროთ (45) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის წევრების საშუალო მნიშვნელობები, რისთვისაც დავშალოთ ისინი შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}[a\Delta][\alpha\Delta]&=(a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+\cdots+a_n\Delta_n)(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2+\cdots+\alpha_n\Delta_n)=\\ &=(a_1\alpha_1\Delta_1^2+a_2\alpha_2\Delta_2^2+\cdots+a_n\alpha_n\Delta_n^2)+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\Delta_1\Delta_2+\\ &\quad+(a_1\alpha_3+a_3\alpha_1)\Delta_1\Delta_3+\cdots\end{aligned} \qquad (4.9.8.46)$$

განაზომთა შეცდომების თეორიიდან ცნობილია, რომ Δ_i^2 საშუალო მნიშვნელობა არის m^2 საშუალო კვადრატული შეცდომა, ხოლო ჭეშმარიტი $\Delta_i\Delta_j$ ნამრავლის საშუალო მნიშვნელობა მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე, (46) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$[a\Delta][\alpha\Delta]=a_1\alpha_1m^2+a_2\alpha_2m^2+\cdots+a_n\alpha_nm^2, \qquad (4.9.8.47)$$

ანუ

$$[a\Delta][\alpha\Delta]=[a\alpha]m^2=m^2, \qquad (4.9.8.48)$$

რადგანაც, თანახმად (18) დამოკიდებულებისა, $[a\alpha]=1$.
თუ ანალოგიურად დავშლით და ვიმოქმედებთ (45) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე და მესამე წევრებზე, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}[b\Delta][\beta\Delta]&=m^2\\ [c\Delta][\gamma\Delta]&=m^2\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.8.49)$$

(45) ტოლობაში შევიტანოთ (48) და (49) სიდიდეები, აგრეთვე თანახმად განაზომთა შეცდომების თეორიისა, მივიღოთ, რომ $[\Delta\Delta]=m^2n$ (n არის განაზომთა რაოდენობა), მაშინ მივიღებთ:

$$m^2n - m^2 - m^2 - m^2 = [\varepsilon\varepsilon]$$

ანუ

$$m^2(n-3) = [\varepsilon\varepsilon]\,, \tag{4.9.8.50}$$

საიდანაც

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}}\,,$$

საერთოდ კი, როცა საჭიროა k რაოდენობის განსასაზღვრელი უცნობი (ანუ როცა აუცილებელ განაზომთა რაოდენობაა k), მაშინ (50) ასე გადაიწერება:

$$m^2(n-k) = [\varepsilon\varepsilon],$$

საიდანაც

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}} \tag{4.9.8.51}$$

არატოლზუსტი განაზომების შემთხვევაში ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით:

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}\,. \tag{4.9.8.52}$$

D. არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებული სიდიდეების ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომებისა და შებრუნებული წონების განსაზღვრა წონითი კოეფიციენტებით

ვთქვათ საჭიროა შეფასდეს სიზუსტე არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებული სიდიდეებით განსაზღვრული რაიმე

$$U = F(X, Y, Z) \tag{4.9.8.53}$$

ფუნქციის.

(53) ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრისათვის საჭიროა გვქონდეს ამ ფუნქციის η ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა და შებრუნებული $1 : P_4$ წონა. მაშინ (3. 5. 4. 3) ფორმულის საფუძველზე დავწერთ:

$$M_u = \eta\sqrt{\frac{1}{P_u}}\,. \tag{4.9.8.54}$$

(53) ფუნქციაში გაწონასწორებული X, Y, Z არგუმენტების ნაცვლად შევიტანოთ მათი მიახლოებითი x, y, z სიდიდეები და შესაბამისი δ_x, δ_y, δ_z შესწორებები, მივიღებთ:

$$U = F(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z). \tag{4.9.8.55}$$

ამ ფუნქციას მოხერხებულობის მიზნით მივცეთ წრფივი სახე, რისთვისაც ის დავშალოთ ტეილორის ფორმულით და ვისარგებლოთ დაშლის პირველხარისხიანი წევრებით:

$$U = F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta_z. \tag{4.9.8.56}$$

მივიღოთ აღნიშვნები:

$$F(x,y,z)=F_0;\ \frac{\partial F}{\partial x}=\varphi_1;\ \frac{\partial F}{\partial y}=\varphi_2;\ \frac{\partial F}{\partial z}\varphi_3. \qquad (4.9.8.57)$$

წონითი ფუნქციის φ_1, φ_2, φ_3 კერძო წარმოებულებს უწოდებენ წ ო ნ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ს.

(56) ტოლობაში (57) აღნიშვნების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$U=F_0+\varphi_1\delta_x+\varphi_2\delta_y+\varphi_3\delta_z. \qquad (4.9.8.58)$$

(58) ტოლობაში δ_x, δ_y, δ_z სიდიდეების ნაცვლად შევიტანოთ მათი მნიშვნელობები (12), (15), (16) ტოლობებიდან, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} U=F_0&-\varphi_1(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n)-\\ &-\varphi_2(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\cdots+\beta_n v_n)-\\ &-\varphi_3(\gamma_1 v_1+\gamma_2 v_2+\cdots+\gamma_n v_n). \end{aligned} \qquad (4.9.8.59)$$

(59) ტოლობის ფრჩხილების გახსნისა და v_1, v_2,..., v_n სიდიდეების ირგვლივ დაჯგუფებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} U=F_0&-(\varphi_1\alpha_1+\varphi_2\beta_1+\varphi_3\gamma_1)v_1-\\ &-(\varphi_1\alpha_2+\varphi_2\beta_2+\varphi_3\gamma_2)v_2-\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &-(\varphi_1\alpha_n+\varphi_2\beta_n+\ \varphi_3\gamma_n)v_n. \end{aligned} \qquad (4.9.8.60)$$

განაზომთა შეცდომების თეორიის (3. 6. 1. 15) და (3. 6. 1. 17) ფორმულის მიხედვით ტოლზუსტი და არატოლზუსტი განაზომებისათვის დავწერთ:

$$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial ln}\right)^2. \qquad (4.9.8.61)$$

$$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2\cdot\frac{1}{P_1}+\left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2\frac{1}{P_2}+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2\frac{1}{P_n}. \qquad (4.9.8.62)$$

განვსაზღვროთ რთული (60) ფუნქციის კერძო წარმოებულები l_i განაზომების მიხედვით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l_1}&=\frac{\partial F}{\partial v_1}\,\frac{\partial v_1}{\partial l_1}=-(\varphi_1\alpha_1+\varphi_2\beta_1+\varphi_3\gamma_1)\\ \frac{\partial F}{\partial l_2}&=\frac{\partial F}{\partial v_2}\,\frac{\partial v_2}{\partial l_2}=-(\varphi_1\alpha_2+\varphi_2\beta_2+\varphi_3\gamma_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial F}{\partial l_3}&=\frac{\partial P}{\partial v_3}\,\frac{\partial v_3}{\partial l_3}=-(\varphi_1\alpha_n+\varphi_2\beta_n+\varphi_3\gamma_n) \end{aligned} \qquad (4.9.8.63)$$

რადგანაც, (4. 9. 2. 11[1]) ტოლობის მიხედვით, $\frac{\partial v_i}{\partial l_i}=1 \quad (i=1,2,\ldots,n)$

მაშასადამე, ფუნქციის შებრუნებული წონა, ანუ (62) ტოლობა დაიწერება ასეთი სახით:

$$\frac{1}{P_u}=\left[\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}{P}\right]=(\varphi_1\alpha_1+\varphi_2\beta_1+\varphi_3\gamma_1)^2\frac{1}{P_1}+(\varphi_1\alpha_2+\varphi_2\beta_2+\varphi_3\gamma_2)^2\frac{1}{P_2}+\cdots+$$
$$+(\varphi_1\alpha_3+\varphi_2\beta_3+\varphi_3\gamma_3)^2\frac{1}{P_n}. \tag{4.9.8.64}$$

(64) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ფრჩხილების გახსნისა და მსგავსი წევრების გაუსის ალგორითმით გამოსახვით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_u}=\left[\frac{\alpha\alpha}{P}\right]\varphi_1\varphi_1+2\left[\frac{\alpha\beta}{P}\right]\varphi_1\varphi_2+2\left[\frac{\alpha\gamma}{P}\right]\varphi_1\varphi_3+$$
$$+\left[\frac{\beta\beta}{P}\right]\varphi_2\varphi_2+2\left[\frac{\beta\gamma}{P}\right]\varphi_2\varphi_3+ \tag{4.9.8.65}$$
$$+\left[\frac{\gamma\gamma}{P}\right]\varphi_3\varphi_3.$$

(22), (23), (24), (26), (27), (30) ტოლობების საფუძველზე ფუნქციის შებრუნებული წონის ფორმულა (65) გადაიწერება წონითი კოეფიციენტებით:

$$\frac{1}{P_u}\varphi_1\varphi_1Q_{11}+2\varphi_1\varphi_2Q_{12}+2\varphi_1\varphi_3Q_{13}+$$
$$+\varphi_1\varphi_2Q_{22}+2\varphi_1\varphi_3Q_{23}+ \tag{4.9.8.66}$$
$$+\varphi_3\varphi_3Q_{33}.$$

E. არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებული სიდიდეების ფუნქციების შებრუნებული წონის გარდაქმნილი ფორმულები

გაწონასწორებულ სიდიდეთა ფუნქციის შებრუნებული წონის გამოთვლა (66) ფორმულით შრომატევადია იმის გამო, რომ აქ საჭირო ხდება დამატებით განსაზღვრა წონითი Q_i კოეფიციენტებისა. ამ მიზეზით (66) ფორმულას მივცეთ უფრო მოხერხებული სახე. (66) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{P_u}=\varphi_1\varphi_1Q_{11}+\varphi_1\varphi_2Q_{12}+\varphi_1\varphi_3Q_{13}+$$
$$+\varphi_1\varphi_2Q_{12}+\varphi_2\varphi_2Q_{22}+\varphi_2\varphi_3Q_{23}+ \tag{4.9.8.67}$$
$$+\varphi_1\varphi_3Q_{13}+\varphi_2\varphi_3Q_{23}+\varphi_3\varphi_3Q_{33}.$$

ამ ტოლობის პირველი, მეორე, მესამე სვეტებიდან ან სტრიქონიდან შესაბამისად გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ φ_1, φ_2, φ_3, ანუ წევრები დავაჯგუფოთ მათი მიხედვით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_u}=(\varphi_1Q_{11}+\varphi_2Q_{12}+\varphi_3Q_{13})\varphi_1+$$
$$+(\varphi_1Q_{12}+\varphi_2Q_{22}+\varphi_3Q_{23})\varphi_2+ \tag{4.9.8.68}$$
$$+(\varphi_1Q_{13}+\varphi_2Q_{23}+\varphi_3Q_{33})\varphi_3.$$

(68) ტოლობის ფრჩხილებში მოქცეული გამოსახულებები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\varphi_1 Q_{11}+\varphi_2 Q_{12}+\varphi_3 Q_{13}\\ q_2&=\varphi_1 Q_{12}+\varphi_2 Q_{22}+\varphi_3 Q_{23}\\ q_3&=\varphi_1 Q_{13}+\varphi_2 Q_{23}+\varphi_3 Q_{33}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.8.69)$$

q_1, q_2, q_3 სიდიდეებს უწოდებენ [15] გ ა დ ა ს ა ყ ვ ა ნ კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ს. მაშასადამე, (68) გადაიწერება ასე:

$$\frac{1}{P_u}=q_1\varphi_1+q_2\varphi_2+q_3\varphi_3. \qquad (4.9.8.70)$$

(69) ტოლობები თანამიმდევრობით შესაბამისად გადავამრავლოთ ნორმალურ განტოლებათა

$$\left|\begin{array}{c|c|c} [Paa] & [Pab] & [Pac]\\ [Pab] & [Pbb] & [Pbc]\\ [Pac] & [Pbc] & [Pcc]\end{array}\right| \qquad (a)$$

ისტემის პირველ $[Paa][Pab][Pac]$ სვეტზე და შევკრიბოთ:

$$\begin{aligned} &[Paa]q_1+[Pab]q_2+[Pac]q_3=\\ &=([Paa]Q_{11}+[Pab]Q_{12}+[Pac]Q_{13})\varphi_1+\\ &+([Paa]Q_{12}+[Pab]Q_{22}+[Pac]Q_{23})\varphi_2+\\ &+([Paa]Q_{13}+[Pab]Q_{23}+[Pac]Q_{33})\varphi_3. \end{aligned} \qquad (4.9.8.71)$$

(3), (6), (8) ტოლობების გამოყენებით (71) გადაიწერება ასე:

$$[Paa]q_1+[Pab]q_2+[Pac]q_3-\varphi_1=0. \qquad (4.9.8.72)$$

(69) ტოლობის შესაბამისად (a) სისტემის მეორე $[Pab][Pbb][Pbc]$ და მესამე $[Pac]$ $[Pbc][Pcc]$ სვეტებზე გადამრავლებითა და წინამოქმედებების ანალოგიური ღონისძიებებით, მივიღებთ:

$$[Pab]q_1+[Pbb]q_2+[Pbc]q_3-\varphi_2=0, \qquad (4.9.8.73)$$

$$[Pac]q_1+[Pbc]q_2+[Pcc]q_3-\varphi_3=0. \qquad (4.9.8.74)$$

(72), (73), (74) ტოლობების სისტემას აქვს (4. 3. 2. 1) და (4. 9. 2. 20) სისტემის სახე. მაშასადამე, (4. 3. 2) პარაგრაფში მიღებული წესის შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ ე ლ ი მ ი ნ ა ც ი უ რ განტოლებათა სისტემა შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=-\frac{[Pab]}{[Paa]}q_2-\frac{[Pac]}{[Paa]}q_3+\frac{\varphi_1}{[Paa]}\\ q_2&=-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}q_3+\frac{[\varphi_2\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}\\ q_3&=+\frac{[\varphi_3\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2]}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.8.75)$$

(75) სისტემიდან შევიტანოთ (76) ტოლობაში q_1 მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+\left(\varphi_2-\frac{[Pab]\varphi_1}{[Paa]}\right)q_2+\left(\varphi_3-\frac{[Pac]\cdot\varphi_1}{[Paa]}\right)q_3. \qquad (4.9.8.76^1)$$

გაუსის ალგორითმის გამოყენებით (76¹) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+[\varphi_2\cdot 1]q_2+[\varphi_3\cdot 1]q_3. \qquad (4.9.8.76)$$

(76) ტოლობაში შევიტანოთ q_2 მნიშვნელობა (75) სისტემიდან, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}+\left([\varphi_3\cdot 1]-\frac{[Pbc\cdot 1][\varphi_2\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}\right)q_3. \qquad (4.9.8.77)$$

ანუ ალგორითმის გამოყენებით დავწერთ:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}+[\varphi_3\cdot 2]q_3,$$

ხოლო ამ განტოლებაში (75) სისტემიდან q_3 მნიშვნელობების შეტანით, მივიღებთ ფუნქციის შებრუნებული წონის საბოლოო ფორმულას:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}+\frac{[\varphi_3\cdot 2]^2}{[Pcc\cdot 2]}. \qquad (4.9.8.78)$$

(78) ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ნებისმიერი k რაოდენობის უცნობებისათვის ზოგადი სახით:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[Paa]}+\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[Pbb\cdot 1]}+\frac{[\varphi_3\cdot 2]^2}{[Pcc\cdot 2]}+\cdots+\frac{[\varphi_k(k-1)]^2}{[Pgg(k-1)]}. \qquad (4.9.8.79)$$

იმ შემთხვევაში, როცა არაპირდაპირ განაზომთა ფუნქციების უშუალოდ განაზომებია ტოლზუსტი, ანუ როცა $P_1=P_2=\cdots=P_n=1$, მაშინ (79) დაიწერება ამ სახით:

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\varphi_1^2}{[aa]}+\frac{[\varphi_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[\varphi_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\cdots+\frac{[\varphi_k(k-1)]^2}{[gg\cdot(k-1)]}. \qquad (4.9.8.80)$$

(79) და (80) ფორმულებით სრულიად მარტივად განისაზღვრება ზოგადი სახის წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონა გაუს-დულიტლის სქემების საშუალებით. ამისათვის სქემაში v სვეტის გვერდით მოთავსებულია φ სვეტი (იხ. 4. 9. 5. 1 სქემა). ამ სქემაში პირველი საფეხურის (ჯგუფის) პირველ a სტრიქონში იწერება φ_1, მეორე საფეხურის პირველ b სტრიქონში φ_2 და ასე შემდეგ. ამ რიცხვებზე ხდება ისეთივე მოქმედებები, როგორც სხვა ჩანაწერების მიმართ და φ სვეტის ბოლოს ვიღებთ (79) ან (80) ტოლობის შესაბამის პასუხს საფეხურების (ჯგუფის) ეკვივალენტურ და ელიმინაციურ ჩანაწერთა ნამრავლებს ჯამის სახით.

F. არაპირდაპირ გაზომვათა არგუმენტების გაწონასწორებული სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომებისა და წონების განსაზღვრა

როგორც ცნობილია, X, Y, Z არგუმენტთა გაწონასწორებული სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომები განისაზღვრება შემდეგი (3. 5. 4. 3) ფორმულებით:

$$M_X=\frac{\eta}{\sqrt{P_X}},\quad M_Y=\frac{\eta}{\sqrt{P_Y}},\quad M_Z=\frac{\eta}{\sqrt{P_Z}},\qquad (4.9.8.81)$$

სადაც η არის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომლის ოდენობა განისაზღვრება (4. 9. 8. 52) ფორმულით.

(81) ტოლობებით, რომ განვსაზღვროთ გაწონასწორებულ არგუმენტთა საშუალო კვადრატული შეცდომები, საჭიროა ვიცოდეთ P_X, P_Y, P_Z წონები. მათი გამოსათვლელი ფორმულების მისაღებად შევადგინოთ წ ო ნ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი.

$$\left.\begin{aligned} U_1&=X\\ U_2&=Y\\ U_3&=Z \end{aligned}\right\}.\qquad (4.9.8.82)$$

განვსაზღვროთ განხილადი წონითი ფუნქციების კოეფიციენტები:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial X}=\varphi_1=1, && \frac{\partial U_1}{\partial Y}=\varphi_2=0, && \frac{\partial U_1}{\partial Z}=\varphi_3=0\\ &\frac{\partial U_2}{\partial X}=\varphi_1=0, && \frac{\partial U_2}{\partial Y}=\varphi_2=1, && \frac{\partial U_2}{\partial Z}=\varphi_3=0\\ &\frac{\partial U_3}{\partial X}=\varphi_1=0, && \frac{\partial U_3}{\partial Y}=\varphi_2=0, && \frac{\partial U_3}{\partial Z}=\varphi_3=1 \end{aligned}\right\}.\qquad (4.9.8.83)$$

(83) კერძო წარმოებულების გამოყენებით (68) ტოლობაში P_X, P_Y, P_Z, სიდიდეები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{P_X}=\varphi_1^2Q_{11}=Q_{11};\qquad \frac{1}{P_Y}=\varphi_2^2Q_{22}=Q_{22};\qquad \frac{1}{P_Z}=\varphi_3^2Q_{33}=Q_{33},$$

საიდანაც

$$\left.\begin{aligned} P_X&=\frac{1}{Q_{11}}\\ P_Y&=\frac{1}{Q_{22}}\\ P_Z&=\frac{1}{Q_{33}} \end{aligned}\right\}.\qquad (4.9.8.84)$$

შევადგინოთ (4. 3. 2) პარაგრაფში მიღებული წესის მიხედვით (8) სისტემის შესაბამისი ეკვივალენტური (გარდაქმნილი) სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}[Paa]Q_{31}+[Pab]Q_{32}+[Pac]Q_{33}=0\\ [Pbb\cdot 1]Q_{32}+[Pbc\cdot 1]Q_{33}=0\\ [Pcc\cdot 2]Q_{33}=1\end{aligned}\right\}, \tag{4.9.8.85}$$

საიდანაც

$$Q_{33}=\frac{1}{[Pcc\cdot 2]}. \tag{4.9.8.86}$$

(85) სისტემის მეორე განტოლებაში (33) და (86) გამოყენებით დავწერთ:

$$Q_{32}=Q_{23}=-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1][Pcc\cdot 2]}. \tag{4.9.8.87}$$

Q_{22} სიდიდის განსაზღვრის მიზნით ვისარგებლოთ (6) წონითი განტოლებებით, რომელიც გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned}[Paa]Q_{21}+[Pac]Q_{23}+[Pab]Q_{22}=0\\ [Pac]Q_{21}+[Pcc]Q_{23}+[Pbc]Q_{22}=0\\ [Pab]Q_{21}+[Pbc]Q_{23}+[Pbb]Q_{22}=1\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.88}$$

მაშასადამე, აქ ურთიერთგადაადგილებულია მეორე და მესამე სვეტები და მეორე და მესამე სტრიქონები (განტოლება).

მიღებული წესის მიხედვით (88) სისტემის პირველი ეკვივალენტური (გარდაქმნილი) სისტემა იქნება შემდეგი სახის:

$$\left.\begin{aligned}[Pcc\cdot 1]Q_{23}+[Pbc\cdot 1]Q_{22}=0\\ [Pbc\cdot 1]Q_{23}+[Pbb\cdot 1]Q_{22}=1\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.8.89}$$

მიღებული სისტემის პირველი ტოლობიდან:

$$Q_{22}=-\frac{[Pcc\cdot 1]}{[Pbc\cdot 1]}Q_{23}. \tag{4.9.8.90}$$

მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ Q_{23} მნიშვნელობა (87) ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$Q_{22}=\frac{[Pcc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1][Pcc\cdot 2]}. \tag{4.9.8.91}$$

Q_{11} განვსაზღვროთ (3) წონითი განტოლებებიდან:

$$Q_{11}=-\frac{[Pab]}{[Paa]}Q_{12}-\frac{[Pac]}{[Paa]}Q_{13}+\frac{1}{[Paa]}. \tag{4.9.8.92}$$

დავწეროთ (3) სისტემის მეორე ტოლობის შესაბამისი ეკვივალენტური ტოლობა:

$$[Pbb\cdot 1]Q_{12}+[Pbc\cdot 1]Q_{13}=0,$$

საიდანაც

$$Q_{12}=-\frac{[Pbc\cdot 1]}{[Pbb\cdot 1]}Q_{13}. \tag{4.9.8.93}$$

Q_{13} წონითი კოეფიციენტი განვსაზღვროთ (8) სისტემის პირველი ტოლობიდან:

$$Q_{13} = Q_{31} = -\frac{[Pab]}{[Paa]}Q_{32} - \frac{[Pac]}{[Paa]}Q_{33}. \tag{4.9.8.94}$$

Q_{32} წონითი კოეფიციენტი განსაზღვრულია (87) ფორმულით:

მაშასადამე, (84) ტოლობებში ცნობილი ოდენობების სათანადო ჩასმით უცნობთა (არგუმენტთა) გაწონასწორებული მნიშვნელობების წონები იქნება:

$$P_X = \frac{1}{\frac{1}{[Paa]} - \frac{[Pab]}{[Paa]}Q_{12} - \frac{[Pac]}{[Paa[}Q_{13}}, \tag{4.9.8.95}$$

$$P_Y = \frac{[Pbb\cdot 1]}{[Pcc\cdot 1]}[Pcc\cdot 2] = \frac{[Pbb\cdot 1]}{[Pcc\cdot 1]}P_Z, \tag{4.9.8.96}$$

$$P_Z = [Pcc\cdot 2]. \tag{4.9.8.97}$$

გამოკვლევებით დადგენილია [15], რომ P_Z და P_Y წონები განისაზღვრება შედარებით მარტივად. მაგალითად, უკანასკნელი უცნობის წონა P_Y განისაზღვრება (4. 9. 5. 1) სქემის მესამე საფეხურის (ჯგუფის) მეოთხე სტრიქონის δ_Z სვეტში. ასევე, უკანასკნელის წინა უცნობის P_Y წონაც თავისუფლად განისაზღვრება სქემის მონაცემებით. რაც შეეხება დანარჩენ წინა უცნობებს, მათი წონების გამოთვლები დაკავშირებულია დიდ დროსა და შრომასთან, რაც ჩანს P_X გამოსათვლელი (95) ფორმულიდან, რისთვისაც საჭიროა Q_{11} წონითი კოეფიციენტის (92) ტოლობით გამოთვლა. ამიტომ წ ო ნ ე ბ ი ს გ ა მ ო ს ა თ ვ ლ ე ლ ა დ ს ჯ ო ბ ს ვ ი ს ა რ გ ე ბ ლ ო თ (80) ფ ო რ მ უ ლ ი თ, რ ი ს პ ა ს უ ხ ს ა ც ვ ი ღ ე ბ თ გ ა უ ს-დ უ ლ ი ტ ლ ი ს (4. 9. 5. 1) დ ა ს ხ ვ ა ს ქ ე მ ე ბ ი ს φ ს ვ ე ტ ი ს ბ ო ლ ო შ ი ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ დ ა ე ლ ი მ ი ნ ა ც ი უ რ ჩ ა ნ ა წ ე რ თ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს შ ე ჯ ა მ ე ბ ი თ.

4. 9. 9. ტრიანგულაციის ქსელში საყრდენი წერტილების ჩასმის ამოცანის ამოხსნისათვის არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების თეორიის გამოყენება

სამთო-სამრეწველო რაიონების მჭიდროდ დასახლებისა და სხვა საგანგებო მიზეზებით ძველთაგან და ახლაც ხდებოდა და ხდება არსებული ტრიანგულაციის ქსელში დამატებითი საყრდენი წერტილების ჩასმა, რის გამო იქმნება შემავსებელი ქსელები. ეს ამოცანა ამჟამად ხშირად ისმის დიდი საინჟინრო ნაგებობების მშენებლობებთან დაკავშირებით.

ტრიანგულაციის ქსელში საყრდენი წერტილების ჩასმისათვის ამოცანის გადასაწყვეტად არაპირდაპირი განაზომების გაწონასწორების თეორია ჩვენში პირველად გამოიყენეს სამარკშეიდერო საქმის ცნობილმა მეცნიერებმა — ვ. ბაუმანმა და ი. ბახურინმა. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ხსენებული მეცნიერები იხილავდნენ ამოცანებს ერთი წერტილის ჩასმის და თანადროულად ორი წერტილის ჩასმის შესახებ, რისთვისაც მოგვიწოდებდნენ, რომ ტრიანგულაციის პუნქტებზე გაგვეზომა კ უ თ ხ ე ე ბ ი, ჩასმულ წერტილებზე კი — მ ი მ ა რ თ უ-

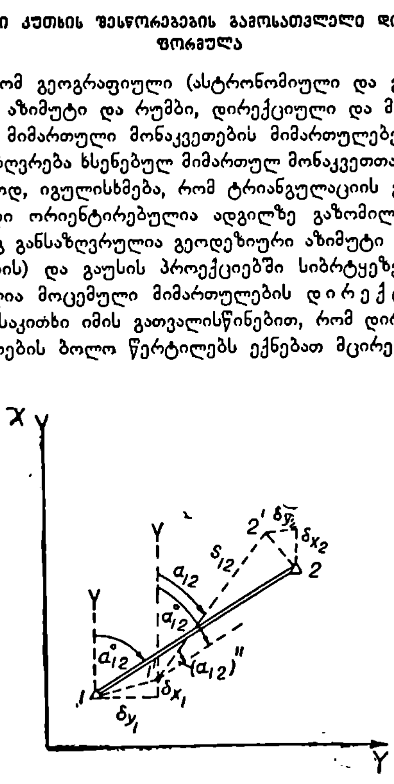
ლ ე ბ ე ბ ი. მათ მიერ მოწოდებული სქემით ორზე მეტი წერტილის ჩასმა, რაც ხშირად მოითხოვება, ძლიერ შრომატევადია. არსებობს ფ. კრასოვსკის მიერ დამუშავებული სქემა ნებისმიერი რაოდენობის წერტილთა თანადროულად ჩასმის შესახებ, სადაც მოითხოვება, რომ გაზომილ იქნეს როგორც ტრიანგულაციის, ისე ჩასასმელ წერტილებზე მხოლოდ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ე ბ ი. ამ მიზეზით იმღებულია, რომ შემავსებელი ქსელები გაწონასწორებულ იქნეს არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორების მეთოდით, სადაც უმცირეს კვადრატთა პრინციპით განსაზღვრული შესწორებებით დადგენილ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა თ ა მიხედვით განისაზღვრება ჩასასმელ წერტილთა კოორდინატების მიახლოებითი მნიშვნელობების შესწორებები. ასე, რომ მომავლისათვის განხილადი ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა გვქონდეს გაზომილი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ე ბ ი და არა კუთხეები.

A. დირექციული კუთხის შესწორებების გამოსათვლელი დიფერენციალური ფორმულა

ცნობილია, რომ გეოგრაფიული (ასტრონომიული და გეოდეზიური) აზიმუტი, მაგნიტური აზიმუტი და რუმბი, დირექციული და მიმართების კუთხეები წარმოადგენს მიმართული მონაკვეთების მიმართულებებს, რომელთა საშუალებით განისაზღვრება ხსენებულ მიმართულ მონაკვეთთა შორის კუთხეები.

აქ და საერთოდ, იგულისხმება, რომ ტრიანგულაციის გამოსავალი (გამოსასვლელი) გვერდი ორიენტირებულია ადგილზე გაზომილი ასტრონომიული აზიმუტით, შემდეგ განსაზღვრულია გეოდეზიური აზიმუტი და დაყვანისა (დაცენტვრა-რედუქციის) და გაუსის პროექციებში სიბრტყეზე დაყვანის შედეგად განსაზღვრულია მოცემული მიმართულების დ ი რ ე ქ ც ი უ ლ ი კუთხე.

განვიხილოთ საკითხი იმის გათვალისწინებით, რომ დირექციული კუთხის შესაბამისი მიმართების ბოლო წერტილებს ექნებათ მცირე ნაზრდები.



ნახ. 4.9.9.1.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს მიმართული მონაკვეთი, რომლის გ ა წ ო ნ ა ს წ ო რ ე ბ უ ლ ი მდებარეობა განსაზღვრულია 1 და 2 წერტილით, ხოლო მისი მიახლოებითი მდებარეობა ისაზღვრება 1^1 და 2^1 წერტილით (ნახ. 1).

მივიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

X_1, Y_1, X_2, Y_2, — შესაბამისად 1 და 2 წერტილების ჭეშმარიტი კოორდინატები მეტრებში;

x_1, y_1, x_2, y_2 — შესაბამისად 1^1 და 2^1 წერტილის კოორდინატები, ანუ 1 და 2 წერტილების მიახლოებითი კოორდინატები მეტრებში;

$\delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \delta_{x_2}, \delta_{y_2} =$ შესაბამისად 1^1 და 2^1 წერტილების კოორდინატების, ანუ 1 და 2 წერტილების მიახლოებითი კოორდინატების შესწორებები მეტრებში;

α_{12}° — 1·2 მიმართების გაწონასწორებული დირექციული კუთხე;

α_{12} — $1^1 \cdot 2^2$ მიმართების დირექციული კუთხე, ანუ 1·2 მიმართების მიახლოებითი დირექციული კუთხე;

$(\alpha_{12})''$ — α_{12} დირექციული კუთხის შესწორება;

S_{12} — 1^1 და 2^1 წერტილებს შორის მანძილი მეტრებში;

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ ალგებრული ჯამები:

$$\left.\begin{aligned} X_1=x_1+\delta_{x_1},\ Y_1=y_1+\delta_{y_1},\\ X_2=x_2+\delta_{x_2},\ Y_2=y_2+\delta_{y_2} \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.1}$$

$$\alpha_{12}^{\circ}=\alpha_{12}+(\alpha_{12})''. \tag{4.9.9.2}$$

შებრუნებული გეოდეზიური ამოცანის (2. 6. 1. 6) ფორმულით:

$$tg\alpha_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{4.9.9.3}$$

განვსაზღვროთ დამოკიდებულება დირექციული კუთხის $(\alpha_{12})''$ შესწორებებსა და კოორდინატების $\delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \delta_{x_2}, \delta_{y_2}$, შესწორებებს შორის. ამისათვის ავიღოთ (3) ტოლობის სრული დიფერენციალი კოორდინატების მიხედვით, დავწერთ:

$$\frac{d\alpha_{12}}{cos^2\alpha_{12}}=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}dx_1-\frac{1}{(x_2-x_1)}dy_1-\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}dx_2-\frac{1}{(x_2-x_1)}dy_2. \tag{4.9.9.4}$$

გავამრავლოთ (4) ტოლობა $\cos^2\alpha_{12}$ და კოორდინატთა სხვაობის მიმართ გამოვიყენოთ (2. 6. 1. 2) დამოკიდებულებები:

$$\left.\begin{aligned} y_2-y_1=S_{12}\ sin\ \alpha_{12}\\ x_2-x_1=S_{12}\ cos\ \alpha_{12} \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.5}$$

მივიღებთ:

$$d\alpha_1=\frac{sin\alpha_{12}}{S_{12}}dx_1-\frac{cos\alpha_{12}}{S_{12}}dy_1-\frac{sin\alpha_{12}}{S_{12}}dx_2+\frac{cos\alpha_{12}}{S_{12}}dy_2. \tag{4.9.9.6}$$

განაზომთა შეცდომების თეორიაში მიღებული წესისამებრ (6) ტოლობაში დიფერენციალები (ნაზრდები) შევცვალოთ შესწორებებით და დირექციული კუთხის დიფერენციალის (შესწორების) (3. 1. 7. 9) ფორმულის შესაბამისად გამოვსახოთ რადიანებში:

$$d\alpha_{12}=\frac{d''\alpha_{12}}{\rho''}=\frac{(\alpha_{12})''}{\rho''},$$

მაშინ (6) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$(\alpha_{12})''=\frac{\rho''\sin\alpha_{12}}{S_{12}}\delta_{x_1}-\frac{\rho''\cos\alpha_{12}}{S_{12}}\delta_{y_1}-\frac{\rho''\sin\alpha_{12}}{S_{12}}\delta_{x_2}+\frac{\rho''\cos\alpha_{12}}{S_{12}}\delta_{y_2}. \qquad (4.9.9.7)$$

ქვემოთ შესასრულებელი გამოთვლების გამარტივების მიზნით, (7) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მრიცხველისა და მნიშვნელის ყოველი წევრი გავყოთ 10000. მივიღებთ:

$$(\alpha_{12})''=\frac{20,6265\ \sin\alpha_{12}}{\frac{S_{12}}{1000}}\frac{\delta_{x_1}}{\frac{1}{10}}-\frac{20,6265\ \cos\alpha_{12}}{\frac{S_{12}}{1000}}\frac{\delta_{y_1}}{\frac{1}{10}}-$$
$$-\frac{20,6265\ \sin\alpha_{12}}{\frac{S_{12}}{1000}}\frac{\delta_{x_2}}{\frac{1}{10}}-\frac{20,6265\ \cos\alpha_{12}}{\frac{S_{12}}{1000}}\frac{\delta_{y_2}}{\frac{1}{10}} \qquad (4.9.9.8)$$

შევიტანოთ აღნიშვნები:

$$20,6265\ \sin\alpha_{12}=(a_{12}),\ \frac{(a_{12})}{S_{12}\,(\text{კმ})}=a_{12}; \qquad (4.9.9.9)$$

$$-20,6265\ \cos\alpha_{12}=(b_{12}),\ \frac{(b_{12})}{S_{12}\,(\text{კმ})}=b_{12}; \qquad (4.9.9.10)$$

$$\frac{S_{12}}{1000}=S_{12}\,(\text{კმ}),\ 10\delta_{x_i}=\xi_i;\ \ 10\delta_{y_i}=\eta_i\ (i=1,2). \qquad (4.9.9.11)$$

მიღებული აღნიშვნების შესაბამისად საჭიროა გვახსოვდეს:
1. a_{12} სიდიდის ნიშანი იქნება დირექციული კუთხის სინუსის შესაბამისი;
2. b_{12} სიდიდის ნიშანი იქნება დირექციული კუთხის კოსინუსის ნიშნის საწინააღმდეგო;
3. $\frac{S_{12}}{1000}=S_{12}(\text{კმ})$ არის მანძილი კილომეტრებში;
4. $10\delta_{x_i}=\xi_i$ და $\delta_{y_i}=\eta_i$ არის წერტილების კოორდინატების შესწორების გამოსახულება დეციმეტრებში.

მიღებული აღნიშვნების (8) ტოლობაში შეტანით, მივიღებთ:

$$(\alpha_{12})''=a_{12}\xi_1+b_{12}\eta_1-a_{12}\xi_2-b_{12}\eta_2. \qquad (4.9.9.12)$$

(12) ფორმულაში a_{12} და b_{12} კოეფიციენტების ოდენობები ტოლია დირექციული კუთხის ცვალებადობის იმ ოდენობისა სეკუნდებში, რომელსაც იწვევს *1* და *2* წერტილის ერთი დეციმეტრით გადაადგილება x და y საკოორდინატო ღერძების დადებითი მიმართულებით.

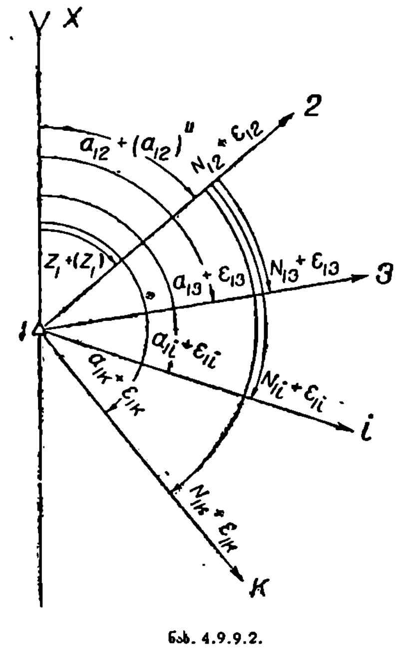
ცხადია, რომ (12) ტოლობის ანალოგიურ ტოლობას შევადგენთ ნებისმიერი გაზომილი მიმართების დირექციული კუთხის შესასწორებლად, აქ მხოლოდ შეიცვლება ინდექსები: მაგალითად, $1-i$ მიმართების დირექციული კუთხის შესწორება გამოისახება ფორმულით:

$$(\alpha_{1i})''=a_{1i}\,\xi_1+b_{1i}\eta_1-a_{1i}\xi_i-b_{1i}\eta_i. \qquad (4.9.9.13)$$

საინჟინრო გეოდეზიაში a და b კოეფიციენტები საკმარისია გამოთვლილ იქნეს მძიმის შემდეგ მეორე ციფრის ერთეული სიზუსტით, S სიგრძეები კი შეიძლება განისაზღვროს ერთი მეტრი შეცდომით.

B. ტრიანგულაციის ქსელში მიმართულებათა შესწორებების განტოლებების შედგენა

ვთქვათ 1 პუნქტზე (ნახ. 2) გაიზომა $1-2, 1-3, \ldots, 1-i, 1-k$ მიმართული მონაკვეთების (ტრიანგულაციის სამკუთხედთა გვერდების) მიმართების N_{12}, $N_{13}, \ldots, N_{1i}$, N_{1k} კუთხეები (კუთხეები კუთხსაზომი ინსტრუმენტის თარაზული ლიმბის ნულოვანი დიამეტრის მიმართ, რომლებიც დაყვანილია საწყის $1-2$ გვერდზე). ხსენებული მიმართების შესაბამისი შესწორებები აღვნიშნოთ $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \ldots, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{1k}$ სიმბოლოებით. განხილად მიმართებათა დირექციული კუთხეების მიახლოებითი სიდიდეები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1i}, \alpha_{1k}$-თი, ხოლო შესაბამისი შესწორებები $(\alpha_{12})''$, $(\alpha_{13})'', \ldots, (\alpha_{1i})''$, $(\alpha_{1k})''$ სიმბოლოებით; მაშინ ნებისმიერი მიმართების გაწონასწორებული დირექციული კუთხე გამოითვლება ფორმულით;



ნახ. 4.9.9.2.

$$\alpha^\circ = \alpha + (\alpha)'' \qquad (4.9.9.14)$$

განხილად სადგურზე საწყისი $1-2$ მიმართულების დირექციული კუთხის ოდენობა მივიღოთ მიახლოებით საორიენტირო კუთხედ და აღვნიშნოთ Z_1, ხოლო მისი შესწორება (z_1) სიმბოლოთი. მაშინ, ერთ-ერთი, ვთქვათ $1-i$ მიმართების გაწონასწორებული დირექციული კუთხე შეიძლება გამოვითვალოთ:

$$\alpha^\circ_{1i} = \alpha_{1i} + (\alpha_{1i})'' = N_{1i} + \varepsilon_{1i} + Z_1 + (Z_1) \qquad (4.9.9.15)$$

ფორმულით.

(15) გამოსახულებაში შევიტანოთ (13) გამოსახულებიდან $(\alpha_{1i})''$ მნიშვნელობა.

$$-(Z_1) + a_{1i}\xi_1 + b_{1i}\eta_1 - a_{1i}\xi_i - b_{1i}\eta_i + \alpha_{1i} - Z_1 - N_{1i} = \varepsilon_{1i}. \qquad (4.9.9.16)$$

საკითხის განხილვის არსისა და (2) ნახაზის მიხედვით ჩანს, რომ $\alpha_{1i} - Z_1$ წარმოადგენს $1-i$ მიმართების მიახლოებით მიმართულებას. მაშასადამე, $(\alpha_{1i} - Z_1) - N_{1i}$ სიდიდე იქნება $1-i$ მიმართების მიახლოებით მიმართულებისა და იმავე მიმართების გაზომილ მიმართულებას შორის

სხვაობა, რომელიც, თანახმად (4.9.2.11$_1$) აღნიშვნისა, წარმოადგენს შესწორებთა ტოლობის v_{1i} წევრს.

აღვნიშნოთ Z_1+N_{1i} ჯამი R_{1i} სიმბოლოთი და ვუწოდოთ მიახლოებით ორიენტირებული მიმართულება, ე. ი. დავწეროთ:

$$R_{1i}=Z_1+N_{1i}. \qquad (4.9.9.17)$$

ამ შემთხვევაში თავისუფალი v_{1i} წევრი გამოითვლება ტოლობით:

$$v_{1i}=\alpha_{1i}-R_{1i} \qquad (4.9.9.18)$$

და (16) ტოლობა გადაიწერება ასეთი სახით:

$$-(Z_1)+a_{1i}\xi+b_{1i}\eta_1-a_{1i}\xi_i-b_{1i}\eta_i-v_{1i}=\varepsilon_{1i}. \qquad (4.9.9.18^1)$$

(18) ტოლობა წარმოადგენს ტრიანგულაციაში გაზომილი მიმართულებების შესწორებათა განტოლებას.

როგორც ვხედავთ, შესწორებათა განტოლების შესადგენად საჭიროა განვსაზღვროთ a, b კოეფიციენტები და v თავისუფალი წევრი.

a, b კოეფიციენტები გამოითვლება (9), (10) ფორმულებით, აგრეთვე დანართის (1) ცხრილში, r ცხრილური კუთხეების, ანუ რუმბების და ერთი კილომეტრის შესაბამისად მოცემულია $(a)=20{,}6265 \sin r$, $(b)=20{,}6265 \cos r$ ფორმულებით გამოთვლილი სიდიდეები, რომელთა ოდენობების S მანძილებზე გაყოფით ვიღებთ a და b კოეფიციენტის ოდენობებს.

a კოეფიციენტს აქვს დირექციული კუთხის სინუსის შესაბამისი ნიშანი, ხოლო b კოეფიციენტის ნიშანი დირექციული კუთხის კოსინუსის საწინააღმდეგო იქნება, ნიშნების სისწორის შემოწმება ხდება (1) ცხრილის მიხედვით:

ცხრილი 4.9.9.1

დირექციული კუთხის ოდენობები	კოეფიციენტების ოდენობები	
	a	b
0°— 90°	+	—
90°—180°	+	+
180°—270°	—	+
270°—360°	—	—

a და b კოეფიციენტის გამოთვლის სისწორის საკონტროლოდ, ისინი, (9) და (10) აღნიშვნების მიხედვით, ავახარისხოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$a^2+b^2=\frac{\rho^2 sin\alpha}{S^2}+\frac{\rho^2 cos\alpha}{S^2},$$

საიდანაც

$$a^2+b^2=\frac{\rho^2}{S^2}(Sin^2\alpha+cos^2\alpha)=$$

$$=\frac{(20{,}6265)^2}{S^2(კმ)},$$

ანუ

$$a^2+b^2=\frac{425{,}45}{S^2(კმ)}=A. \qquad (4.9.9.19)$$

კონტროლისათვის A სიდიდის ოდენობებს ვიღებთ დანართის (2) ცხრილიდან მანძილების შესაბამისად. ამოღებულ ოდენობებს უნდა უდრიდეს გამოთვლილი კოეფიციენტების კვადრატების ჯამი. მაგრამ აქვე შევნიშნავთ, რომ (19) დამოკიდებულებაში a და b კოეფიციენტის ნიშნის სისწორე არ მოწმდება.

თავისუფალი v წევრის განსაზღვრისათვის აუცილებელია საორიენტაციო Z კუთხის მიახლოებითი ოდენობის განსაზღვრა. მაგალითად, (2)

ნახაზის მიხედვით საორიენტაციო კუთხის Z_1 მიახლოებითი ოდენობა გამოითვლება K-ჯერ:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1^{I}=\alpha_{12}-N_{12} \\ Z_1^{II}=\alpha_{13}-N_{13} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z_1^{(k)}=\alpha_{1k}-N_{1k} \end{array}\right\} . \tag{4.9.9.20}$$

$$\overline{[Z]_1=[\alpha-N]_1}$$

ე. ი. საორიენტირო კუთხის საშუალო ოდენობა იქნება:

$$Z_{1\text{საშ.}}=\frac{[Z]_1}{K}=\frac{[\alpha-N]}{K}. \tag{4.9.9.21}$$

ყოველი მიმართულების შესაბამისი თავისუფალი წევრი (17), (18) დამოკიდებულების გამოყენებით განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებებით:

$$\left.\begin{array}{l} v_{12}=\alpha_{12}-R_{12}=\alpha_{12}-N_{12}-Z_{1\text{საშ.}} \\ v_{13}=\alpha_{13}-R_{13}=\alpha_{12}-N_{13}-Z_{1\text{საშ.}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_{1k}=\alpha_{1k}-R_{1k}=\alpha_{1k}-N_{1k}-Z_{1\text{საშ.}} \end{array}\right\} \tag{4.9.9.22}$$

$$[v]_1=[\alpha-R]_1=[\alpha-N]_1-kZ_{1\text{საშ.}} \tag{4.9.9.23}$$

(23) ტოლობაში შევიტანოთ $Z_{1\text{საშ.}}$ მნიშვნელობა (21) ფორმულიდან, მივიღებთ:

$$[v[_1=[\alpha-N]_1-[\alpha-N]_1\frac{k}{k}, \tag{4.9.9.24}$$

ანუ

$$[v]_1=0. \tag{4.9.9.25}$$

მაშასადამე, განხილად სადგურზე შესწორებათა განტოლებების თავისუფალი წევრების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ნულის. ამით ხდება თავისუფალი წევრების გამოთვლის სისწორის კონტროლი. შესწორებების (18) განტოლება აუცილებლად უნდა შედგეს გასაწონასწორებელი ქსელის ყველა განაზომი (როგორც ჩასასმელი, ისე მყარი წერტილებიდან) მიმართულებებისათვის. მაშასადამე, შესწორებათა განტოლებების რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს განხილად ქსელში გაზომილი მიმართულებების რაოდენობისა.

შესწორებათა განტოლებების შედგენის დროს საჭიროა გავარჩიოთ ოთხი შემთხვევა:

1. როცა გაზომილი მიმართულებების I და i წერტილები არის ქსელში ჩასმული, მაშინ (18) ტოლობის შესაბამისად $I—i$ მიმართების მიმართულების შესწორების განტოლების სახე იქნება ასეთი:

$$-(Z_1)+a_{1i}\xi_1+b_{1i}\eta_1-a_{1i}\xi_i-b_{1i}\eta_i+v_{1i}=\varepsilon_{1i}, \tag{4.9.9.26}$$

2. როცა გაზომილი მიმართულების საწყისი I წერტილი ჩასასმელია და ბოლო i წერტილია ხისტი (მყარი), მაშინ

$$-(Z_1)+a_{1i}\xi_1+b_{1i}\eta_i+v_{1i}=\varepsilon_{1i}, \tag{4.9.9.27}$$

რადგანაც ხისტი i წერტილის კოორდინატების შესწორებები ნულია: $\xi_i=0, \eta_i=0$;

3. თუ განაზომი მიმართულების საწყისი l წერტილია ხისტი და ბოლო i ჩასასმელი, მაშინ

$$-(Z_1)-a_{1i}\xi_i-b_{1i}\eta_i+v_{1i}=\varepsilon_{1i}, \tag{4.9.9.28}$$

რადგანაც $\xi_1=0,\ \eta_1=0$;

4. როცა განაზომი მიმართულების l და ბოლო i წერტილი ხისტია, მაშინ

$$-(Z_1)+v_{1i}=\varepsilon_{1i}, \tag{4.9.9.29}$$

რადგანაც

$$\xi_1=0,\ \eta_1=0,\ \xi_i=0,\ \eta_i=0.$$

C. შესწორებათა განტოლებების გარდაქმნა და ნორმალური განტოლებების შედგენა

ყველა გაზომილი მიმართულებისათვის შესწორებათა განტოლებების საფუძველზე დგება ნორმალურ განტოლებათა სისტემა. განხილული შემთხვევის შესაბამისი ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ს რაოდენობა ედრება ჩასასმელი პუნქტების ბრტყელი კოორდინატების მიახლოებითი ოდენობების საძებნი შესწორებების რაოდენობისა და ყველა სადგურზე, სადაც კი გაიზომა მიმართულება, საორიენტაციო კუთხეების (Z) შესწორებების რაოდენობის ჯამს.

თუ ქსელში ჩასასმელი პუნქტების რაოდენობაა t, ხოლო იმ პუნქტების რაოდენობა, რომლებზეც გაიზომა მიმართულებები არის j, ნორმალური განტოლებების საერთო რაოდენობა q იქნება:

$$q=2t+j. \tag{4.9.9.30}$$

გეოდეზიური წარმოების პრაქტიკაში ხშირად კმაყოფილდებიან ნორმალური განტოლებების ისეთი სისტემით, რომელთა რაოდენობა $q=2t$, რომლებშიც უცნობებს წარმოადგენს ჩასასმელი პუნქტების ბრტყელი კოორდინატების მიახლოებითი ოდენობების ξ, η შესწორებები. ამ გამარტივებას აღწევენ იმით, რომ შესწორებათა (18) ტოლობების საერთო (Z) უცნობს აძლევენ გარდაქმნილ სახეს:

შემდგომი გამოთვლების გადაადგილების მიზნით ჩავთვალოთ, რომ საქმე გვაქვს მეორე შემთხვევასთან, ე. ი. i პუნქტია ხისტი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მაღალი კლასის ტრიანგულაციის ქსელში ხდება ერთი პუნქტის ჩასმა. ამ პირობით, ვთქვათ, ჩასასმელ l პუნქტზე გაზომილი k რაოდენობის მიმართულებებისათვის შევადგინოთ k რაოდენობის (27) მსგავსი საწყისი განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}
-(Z_1)+a_{12}\xi_1+b_{12}\eta_1+v_{12}&=\varepsilon_{12}\\
-(Z_1)+a_{13}\xi_1+b_{13}\eta_1+v_{13}&=\varepsilon_{13}\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\\
-(Z_1)+a_{1k}\xi_1+b_{1k}\eta_1+v_{1k}&=\varepsilon_{1k}
\end{aligned}\right\}\ \text{სულ } k \text{ მიმართულებაა} \tag{4.9.9.31}$$

შევადგინოთ წარმოდგენილი საწყისი განტოლებების სისტემის შესაბამისი ნორმალური განტოლებების სისტემა, რომელსაც ექნება ასეთი სახე:

$$\left.\begin{aligned}
K(Z_1)-[a]\xi_1-[b]\eta_1-[v]&=0\\
-[a](Z_1)+[aa]\xi_1+[ab]\eta_1+[av]&=0\\
-[b](Z_1)+[ab]\xi_1+[bb]\eta_1+[bv]&=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.32}$$

ამ სისტემის პირველი ტოლობიდან განვსაზღვროთ (Z_1) და გავითვალისწინოთ ის რომ, თანახმად (25) დამოკიდებულებებისა, $[v]=0$, ე. ი. დავწეროთ:

$$(Z_1)=\frac{[a]}{k}\xi_1+\frac{[b]}{k}\eta_1. \qquad (4.9.9.33^1)$$

(33^1) განტოლებით მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ (32) სისტემის მეორე და მესამე ტოლობებში, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}\left([aa]-\frac{[a][a]}{k}\right)\xi_1+\left([ab]-\frac{[a][b]}{k}\right)\eta_1+[av]=0\\ \left([ab]-\frac{[a][b]}{k}\right)\xi_1+\left([bb]-\frac{[b][b]}{k}\right)\eta_1+[bv]=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.9.9.33)$$

მიღებული სისტემა წარმოადგენს გარდაქმნილი სახის ნორმალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შედგენილია შესწორებების საწყის განტოლებათა (31) სისტემისათვის.

შევცვალოთ (31) სისტემა ისეთი ახალი სისტემით, სადაც k რაოდენობის განტოლება იქნება მიღებული (31) სისტემიდან საერთო (Z_1) უცნობის გამორიცხვის შემდეგ, ხოლო $k+1$ განტოლება იქნება ტოლი k ტოლობების ჯამის წონით—$\frac{1}{k}$, ტოლზუსტი გაზომვების დროს:

$$\left.\begin{aligned}a_{12}\xi_1+b_{12}\eta_1+v_{12}=\varepsilon'_{12},\quad P_1=1\\ a_{13}\xi_1+b_{13}\eta_1+v_{13}=\varepsilon'_{13},\quad P_2=1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1k}\xi_1+b_{1k}\eta_1+v_{1k}=\varepsilon'_{1k},\quad P_k=1\end{aligned}\right\}\ k\text{ ტოლობა} \qquad (4.9.9.34)$$

$$[a]\xi_1+[b]\eta_1+[v]=[\varepsilon'],\ P_{k+1}=-\frac{1}{k}\quad \Big\}\ K+1\text{ ტოლობა}$$

ამ სისტემისათვის შედგენილი ნორმალური განტოლებების სისტემა იქნება (33) სისტემის სრულიად იგივური.

მაშასადამე, გარდაქმნილი სახის შესწორებათა (34) სისტემა იქნება ეკვივალენტური (31) სისტემისა.

თუ მიმართულებები გაიზომა რამდენიმე პუნქტზე, მაშინ (31) სახის ტოლობათა სისტემა ყოველ პუნქტზე შეიძლება შეიცვალოს მისი ეკვივალენტური (34) სისტემით. ცალკეული სისტემების ერთობლიობები შექმნის გარდაქმნილი ტოლობების ახალ სისტემას, რომლის მიხედვით დგება ნორმალურ განტოლებათა სისტემა, ცალკეულ განტოლებათა წონების მხედველობაში მიღებით.

ნორმალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა ხდება გაუს-დულიტლის სრული სქემით, სადაც განისაზღვრება ჩასასმელ წერტილთა ბრტყელი კოორდინატების მიახლოებითი მნიშვნელობების ξ, η შესწორებები.

მაშასადამე, პუნქტის გაწონასწორებული კოორდინატები (1) ტოლობების შესაბამისად გამოითვლება:

$$X=x+\delta_x(\text{მ}),\ Y=y+\delta_y(\text{მ}), \qquad (4.9.9.35)$$

სადაც, (11) აღნიშვნების შესაბამისად,

$$\delta_x(მ) = \frac{1}{10}\xi(დმ), \quad \delta_y(მ) = \frac{1}{10}\eta\ (დმ). \qquad (4.9.9.36)$$

განხილად სადგურზე საორიენტაციო კუთხის (Z_1) შესწორება განისაზღვრება (33) ფორმულით:

$$(Z_1) = \frac{[a]\xi + [b]\eta.}{k} \qquad (4.9.9.37)$$

პუნქტზე გაზომილ მიმართულებათა ε_i შესწორება გამოითვლება ყოველი განაზომი მიმართულებისათვის შედგენილი შესწორების (26) განტოლების მიხედვით:

$$\varepsilon_{1i} = -(Z_1) + a_{1i}\xi_1 + b_{1i}\eta_1 - a_{1i}\xi_i - b_{1i}\eta_i + v_{1i}. \qquad (4.9.9.38)$$

თანახმად (15) და (17) ტოლობებისა, დირექციული კუთხის გაწონასწორებული ოდენობა მიიღება, ფორმულით:

$$\alpha^0_{1i} = R_{1i} + (Z_1) + \varepsilon_{1i}. \qquad (4.9.9.39)$$

D. ტრიანგულაციის ქსელში წერტილების ჩასმის სიზუსტის შეფასება

ხისტ ტრიანგულაციის ქსელში წერტილის ჩასმის ტოლზუსტი უშუალო განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როცა გაწონასწორება ხდება მიმართულებების მიხედვით, შეიძლება განისაზღვროს (4. 9. 8. 51) ფორმულით:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}.$$

თანახმად (30) ფორმულისა, ნორმალურ განტოლებათა q რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით: $q = 2t + j$.

ამ აღნიშვნებით საშუალო კვადრატული შეცდომა შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-q}}. \qquad (4.9.9.40)$$

არატოლზუსტი განაზომებისათვის η ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა კი გამოითვლება ფორმულით:

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{n-q}}. \qquad (4.9.9.41)$$

ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში:

n არის ყველა განაზომი მიმართულებების რაოდენობა;

k — აუცილებელ განაზომთა რაოდენობა (უცნობების რაოდენობა);

t — ქსელში ჩასმული პუნქტების რაოდენობა;

j — პუნქტების რაოდენობა, საიდანაც გაიზომა მიმართულებები.

გაწონასწორებულ სიდიდეთა შეფასება საბოლოოდ საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ ჩასმული პუნქტების პრტყელი კოორდინატების საშუალო კვადრატული შეცდომები:

$$M_X = \sqrt{\frac{\eta}{P_X}}, \quad M_Y = \sqrt{\frac{\eta}{P_Y}}. \tag{4.9.9.42}$$

ტრიანგულაციის ქსელში ერთი პუნქტის ჩასმისათვის გვექნება ორი ნორმალური განტოლება შედგენილი შესწორებების ორი გარდაქმნილი განტოლებისათვის. მაშასადამე, (4. 9. 9. 96) და (4. 9. 9. 97) ანალოგიით ჩასმული პუნქტის წონები გამოითვლება ფორმულებით:

$$P_X = \frac{[Paa]}{[Pbb]} \cdot [Pbb \cdot 1], \quad P_Y = [Pbb \cdot 1], \tag{4.9.9.43}$$

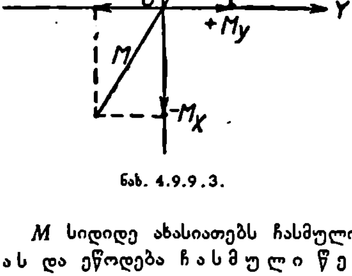
სადაც a და b სიდიდეები გარდაქმნილი სახის შესწორებათა (34) სისტემის კოეფიციენტებია. (43) შევიტანოთ (42) დამოკიდებულებები, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} M_X^2 &= \frac{\eta^2[Pbb]}{[Paa][Pbb\cdot 1]} = \frac{\eta^2[Pbb]}{[Paa][Pbb]-[Pab]^2} \\ M_Y^2 &= \frac{\eta^2}{[Pbb\cdot 1]} = \frac{\eta^2[Paa]}{[Paa][Pbb]-[Pab]^2} \end{aligned}\right\}, \tag{4.9.9.44}$$

სადაც, თანახმად (4. 4. 3) პარაგრაფში განხილული საკითხისა,

$$[Paa][Pbb]-[Pab]^2 = \begin{vmatrix} [Paa][Pab] \\ [Pab][Pbb] \end{vmatrix} = D. \tag{4.9.9.45}$$

წარმოადგენს ტრიანგულაციის ქსელში ჩასმული ერთი წერტილისათვის შედგენილი შესწორებების ორი გარდაქმნილი განტოლების შესაბამისად შედგენილი ორი განტოლების D დეტერმინანტს. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ:



ნახ. 4.9.9.3.

$$\begin{aligned} M_X^2 &= \frac{[Pbb]}{D}\eta^2, \\ M_Y^2 &= \frac{[Paa]}{D}\eta^2. \end{aligned} \tag{4.9.9.46}$$

M_X და M_Y ოდენობები ახასიათებს არსებული საკოორდინატო სისტემის ღერძების მიმართ ჩასმული წერტილის მდებარეობის შეცდომას. (3) ნახაზის მიხედვით დავწერთ:

$$M^2 = M_X^2 + M_Y^2. \tag{4.9.9.47}$$

M სიდიდე ახასიათებს ჩასმული წერტილის ხაზოვან გადაადგილებას და ეწოდება **ჩასმული წერტილის მდებარეობის საშუალო კვადრატული შეცდომა.**

შევიტანოთ (47) ტოლობაში მარჯვენა მხარის შესაბამისი ოდენობები (46) დამოკიდებულებებიდან, მივიღებთ:

$$M^2 = \frac{[Paa]+[Pbb]}{D}\eta^2. \qquad (4.9.9.48)$$

სხვადასხვა მიმართულებით ჩასმული პუნქტის მდებარეობის საშუალო კვადრატული შეცდომა არ არის ერთნაირი. მაშასადამე, უნდა ველოდეთ, რომ სიბრტყეზე არსებობს ისეთი მიმართულება, რომელზედაც მივიღებთ გადაადგილების მაქსიმალურ და მინიმალურ ოდენობას.

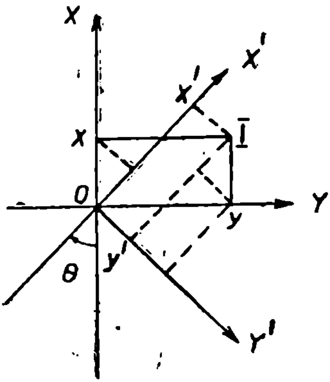
ამოვხსნათ ამოცანა ხსენებული გადაადგილების დადგენის შესახებ. პირველ რიგში მოვძებნოთ სიბრტყეზე მიმართულება, რომელზეც ჩასმული პუნქტის საშუალო გადაადგილება იქნება უდიდესი და უმცირესი. არსებული საკოორდინატო XY ღერძების სისტემა შევაბრუნოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით Θ კუთხით, რის შედეგად მივიღებთ ახალ პირობით $X'Y'$ საკოორდინატო სისტემას (ნახ. 4).

(4) ნახაზის შესაბამისად დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} X^{I} &= X\ cos\Theta + Y\ sin\Theta \\ Y^{I} &= Y\ cos\Theta + X\ sin\Theta \end{aligned}\right\}, \qquad (4.9.9.48^1)$$

სადაც X და Y არის არსებულ სისტემაში ჩასმული I წერტილის გაწონასწორებული კოორდინატები;

X^I და Y^I — იგივე წერტილის გაწონასწორებული კოორდინატები ახალ პირობით სისტემაში.



ნახ. 4.9.9.4.

ვგულისხმობთ რა, რომ (49) გამოსახულება წარმოადგენს არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებული სიდიდეების წონით ფუნქციას, განვსაზღვროთ მისი შებრუნებული წონები. ამისათვის განვსაზღვროთ განხილადი ფუნქციების წ ო ნ ი თ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი, როგორც კერძო წარმოებულები X და Y სიდიდეებისა:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X^I}{\partial X} &= \varphi_1^{X I} = cos\Theta; \quad \frac{\partial X^I}{\partial Y} = \varphi_2^{X I} = sin\Theta \\ \frac{\partial Y^I}{\partial X} &= \varphi_1^{Y I} = -Sin\Theta; \frac{\partial Y^I}{\partial Y} = \varphi_2^{Y I} = cos\Theta \end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.9.49)$$

მიღებული სიდიდეები შევიტანოთ (4. 9. 8. 66) გამოსახულებაში:

$$\frac{1}{P_{X^I}} = cos^2\Theta Q_{11} + sin^2\Theta Q_{22} + 2sin\Theta cos\Theta Q_{12}, \qquad (4.9.9.50)$$

$$\frac{1}{P_{Y^I}} = sin^2\Theta Q_{11} + cos^2\Theta Q_{22} - 2sin\Theta cos\Theta Q_{12}. \qquad (4.9.9.51)$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ Θ კუთხის რა ოდენობისათვის ექნება (50) და (51) გამოსახულებებს მაქსიმუმი და მინიმუმი, თანახმად განაზომთა თეორიაში

პირობითი ექსტრემუმის წესისა ავიღოთ განხილადი ფუნქციების კერძო წარმოებულები Θ კუთხის მიხედვით, მიღებული გამოსახულება გავუტოლოთ ნულს და განვსაზღვროთ Θ ოდენობა.

$$\frac{\partial \frac{1}{P_X{}^{I}}}{\partial\Theta}=-2Q_{11}sin\Theta cos\Theta+2Q_{22}sin\Theta cos\Theta+2Q_{12}cos2\Theta=0, \tag{4.9.9.52}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{P_Y{}^{I}}}{\partial\Theta}=2Q_{11}sin\Theta cos\Theta-2Q_{22}sin\Theta cos\Theta-2Q_{12}cos2\Theta=0, \tag{4.9.9.53}$$

ანუ

$$\frac{\partial \frac{1}{P_X{}^{I}}}{\partial\Theta}=-Q_{11}sin2\Theta+Q_{22}sin2\Theta+Q_{12}2cos2\Theta=0, \tag{4.9.9.54}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{P_Y{}^{I}}}{\partial\Theta}=Q_{11}sin2\Theta-Q_{22}sin2\Theta-Q_{12}2cos2\Theta=0. \tag{4.9.9.55}$$

(54) და (55) ტოლობებიდან განვსაზღვროთ Θ კუთხის ოდენობა. ამისათვის როგორც (54), ისე (55) ტოლობიდან დავწეროთ:

$$sin2\Theta(Q_{11}-Q_{22})=2Q_{12}cos2\Theta. \tag{4.9.9.56}$$

(56) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ cos 2Θ-ზე, მივიღებთ:

$$tg2\Theta=\frac{2Q_{12}}{Q_{11}-Q_{22}}. \tag{4.9.9.57}$$

იმის გამო, რომ ჩვენ გვაქვს ორი შუალედი სიდიდე, ანუ ორი არაპირდაპირი გზით განსასაზღვრელი (უცნობი X, Y არგუმენტი). Q_{11}, Q_{22} და Q_{12} წონითი კოეფიციენტები, თანახმად F მუხლში მოყვანილი განსაზღვრებებისა, დაიწერება ასე:

$$Q_{11}=\frac{[Pbb]}{[Paa][Pbb\cdot 1]}, \tag{4.9.9.58}$$

$$Q_{22}=\frac{1}{[Pbb\cdot 1]}, \tag{4.9.9.59}$$

$$Q_{12}=-\frac{[Pab]}{[Paa][Pbb\cdot 1]}. \tag{4.9.9.60}$$

მიღებული წონითი კოეფიციენტები შევიტანოთ (57) გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$tg2\Theta=\frac{-2[Pab]}{-([Paa]-[Pbb])}. \tag{4.9.9.61}$$

2Θ კუთხისათვის შესაბამისი კვადრანტი დგინდება ისევე, როგორც ეს ხდება შებრუნებული გეოდეზიური ამოცანის, ანუ მართკუთხა კოორდინატების საშუალებით დირექციული კუთხის განსაზღვრის წესის მიხედვით.

(61) ტოლობას აქვს ორი ამოხსნა: 2Θ და $2\Theta \pm 180°$ ანუ Θ და $\Theta \pm 90°$. ასე რომ, აქ იგულისხმება ორი ურთიერთმართობი მიმართულება, რომლებიც შეესაბამებიან ჩასმული წერტილის მდებარეობის საშუალო კვადრატული შეცდომის მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს. მაგალითად,

როცა $[Paa]=0$, მაშინ $\Theta=0$ ან $90°$, ე. ი. გადაადგილების მაქსიმუმი და მინიმუმი უთავსდება კოორდინატთა არსებული სისტემის X, Y ღერძებს.

როცა $[Pab]=0$ და სხვაობა $[Paa]-[Pbb]=0$, მაშინ $tg2\Theta=\frac{0}{0}$, ე. ი. ადგილი აქვს განუსაზღვრელობას. ამ შემთხვევაში წერტილთა საშუალო გადაადგილება ერთნაირი იქნება ყველა მიმართულებით და საშუალო კვადრატული შეცდომის მრუდი იქნება წრეხაზი.

განვსაზღვროთ ჩასმული წერტილის მაქსიმალური და მინიმალური გადაადგილების ოდენობები. ამისათვის გარდავქმნათ შებრუნებული წონის (50) ფორმულა, რომელშიც $sin^2\Theta$-ისა და $cos^2\Theta$-ის ნაცვლად, შესაბამისად შევიტანოთ $\frac{1-cos2\Theta}{2}$ და $\frac{1+cos2\Theta}{2}$ სიდიდეები, სადაც Θ არის გამოთვლილი (61) ფორმულით, დავწერთ:

$$\frac{1}{P_X{}^1}=Q_{11}\frac{1+cos2\Theta}{2}+Q_{22}\frac{1-cos2\Theta}{2}+Q_{12}sin2\Theta, \tag{4.9.9.62}$$

ანუ

$$\frac{1}{P_X{}^1}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+(Q_{11}-Q_{22})cos2\Theta+2Q_{12}sin2\Theta}{2}. \tag{4.9.9.63}$$

(57) ფორმულა შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$Q_{11}-Q_{22}=\frac{2Q_{12}}{tg2\Theta}, \tag{4.9.9.64}$$

მაშინ (63) ტოლობა შეიძლება ასეთი სახით დავწეროთ:

$$\frac{1}{P_X{}^1}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}\left(\frac{cos^2 2\Theta}{sin2\Theta}+\frac{sin^2 2\Theta}{sin2\Theta}\right)}{2}, \tag{4.9.9.65}$$

ანუ

$$\frac{1}{P_X{}^1}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+\frac{2Q_{12}}{sin2\Theta}}{2}. \tag{4.9.9.66}$$

(66) ტოლობაში შევიტანოთ Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} მნიშვნელობები შესაბამისად (58), (59), (60) ტოლობებიდან, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_X{}^1}=\frac{\frac{[Pbb]}{[Paa][Pbb\cdot 1]}+\frac{1}{[Pbb\cdot 1]}-\frac{2[Pab]}{[Paa][Pbb\cdot 1]sin2\Theta}}{2}. \tag{4.9.9.67}$$

ანუ $[Paa][Pbb.1]$ სიდიდეზე მარჯვენა მხარის მრიცხველისა და მნიშვნელის გამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_X{}^I}=\frac{[Paa]+[Pbb]-\dfrac{2[Pab]}{sin2\Theta}}{2[Paa][Pbb\cdot 1]} \qquad (4.9.9.68)$$

აღვნიშნოთ:

$$-\frac{2[Pab]}{sin2\Theta}=\omega \text{ სიმბოლოთი,} \qquad (4.9.9.69)$$

აგრეთვე

$$[Paa][Pbb\cdot 1]=[Paa][Pbb]-[Pab]^2.$$

ეს უკანასკნელი კი, თანახმად (45) დამოკიდებულებისა, არის D დეტერმინანტი, ე. ი.

$$[Paa[[Pbb\cdot 1]=D. \qquad (4.9.9.70)$$

(68) დამოკიდებულებაში (69) და (70) ოდენობების შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_X{}^I}=\frac{[Paa]+[Pbb]+\omega}{2D}. \qquad (4.9.9.71)$$

იგივე სახის მოქმედებები შევასრულოთ (51) ტოლობაზეც, რაც ჩავატარეთ (50) ტოლობის მიმართ:

მასშიც $sin^2\Theta$, $cos^2\Theta$ სიდიდეების ნაცვლად შესაბამისად შევიტანოთ, $\frac{1-cos2\Theta}{2}$ და $\frac{1+cos2\Theta}{2}$ სიდიდეები, სადაც Θ გამოთვლილია (61) ფორმულით.

$$\frac{1}{P_Y{}^I}=Q_{11}\frac{1-cos2\Theta}{2}+Q_{22}\frac{1+cos2\Theta}{2}-Q_{12}sin2\Theta. \qquad (4.9.9.72)$$

ანუ

$$\frac{1}{P_Y{}^I}=\frac{Q_{11}+Q_{22}-\{(Q_{11}-Q_{22})cos2\Theta-2Q_{12}sin2\Theta\}}{2}. \qquad (4.9.9.73)$$

(64) ტოლობის გამოყენებით (73) ტოლობას შეიძლება მიეცეს (65) და (66) ტოლობების სახე:

$$\frac{1}{P_Y{}^I}=\frac{Q_{11}+Q_{22}-\dfrac{2\,Q_{12}}{sin2\Theta}}{2}. \qquad (4.9.9.74)$$

(74) ფორმულაში თუ შევიტანთ Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} სიდიდეების შესაბამის გამოსახულებებს (58), (59), (60) ტოლობებიდან, მივიღებთ:

$$\frac{1}{P_Y{}^I}=\frac{\dfrac{[Pbb]}{[Paa][Pbb\cdot 1]}+\dfrac{1}{[Pbb\cdot 1]}+\dfrac{2[Pab]}{[Paa][Pbb\cdot 1]sin2\Theta}}{2}. \qquad (4.9.9.75)$$

(68), (69), (70) ფორმულებისათვის მიღებული ღონისძიებების შესრულებით (75) ტოლობა მიიღებს (71) ტოლობის ანალოგიურ სახეს:

$$\frac{1}{P_Y{}^{\mathrm{I}}}=\frac{[Paa]+[Pbb]-\omega}{2D}. \tag{4.9.9.76}$$

(71) და (76) ფორმულების შედარებით დავასკვნით, რომ $\frac{1}{P_X{}^{\mathrm{I}}}>\frac{1}{P_Y{}^{\mathrm{I}}}$. მაშასადამე, $\frac{1}{P_X{}^{\mathrm{I}}}$ შებრუნებული წონა შეესაბამება ჩასმული წერტილის მ ა ქ ს ი მ ა ლ უ რ გადაადგილებას, ხოლო $\frac{1}{P_Y{}^{\mathrm{I}}}$ შებრუნებული წონა—მინიმალურ გადაადგილებას. წერტილის მაქსიმალური გადაადგილების $M_X{}^{\mathrm{I}}$ და მინიმალური გადაადგილების $M_Y{}^{\mathrm{I}}$ სიდიდეები შესაბამისად აღვნიშნოთ A და B სიმბოლოებით. თანახმად (42) და (71) ფორმულებისა, დავწერთ:

$$M_{XI}^2=\eta^2\frac{1}{P_X{}^{\mathrm{I}}}=\eta^2\frac{[Paa]+[Pbb]+\omega}{2D}=A^2, \tag{4.9.9.77}$$

$$M_{YI}^2=\eta^2\frac{1}{P_Y{}^{\mathrm{I}}}=\eta^2\frac{[Paa]+[Pbb]-\omega}{2D}=B^2. \tag{4.9.9.78}$$

ანუ საბოლოოდ დავწერთ:

$$A^2=\eta^2\frac{[Paa]+[Pbb]+\omega}{2D}, \tag{4.9.9.79}$$

$$B^2=\eta^2\frac{[Paa]+[Pbb]-\omega}{2D}. \tag{4.9.9.80}$$

შევკრიბოთ (79) და (80) ტოლობები, აგრეთვე ვისარგებლოთ (47) და (48) ტოლობებით, მივიღებთ:

$$A^2+B^2=\eta^2\frac{[Paa]+[Pbb]}{D}=M^2=M_X^2+M_Y^2, \tag{4.9.9.81}$$

ანუ

$$A^2+B^2=M_X^2+M_Y^2. \tag{4.9.9.82}$$

მაშასადამე, ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ი ს ო დ ე ნ ო ბ ა ა რ ა რ ი ს დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ღ ე რ ძ ე ბ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ზ ე.

დავადგინოთ კანონი სხვადასხვა მიმართულებით წერტილის ს ა შ უ ა ლ ო გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ი ს.

X^{I} და Y^{I} პირობითი სისტემის ღერძები (ნახ. 4), რომლებიც მიმართული არიან წერტილის გადაადგილების A უდიდესი და B უმცირესი მიმართულებით, დამატებით შევაბრუნოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ϑ კუთხით. მაშინ, ახალი X^{II}, Y^{II} პირობითი სისტემისა და მოცემულ X, Y შორის კავშირი პირველი შემთხვევის ანალოგიურად დაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}X^{\mathrm{II}}&=X\cos(\Theta+\vartheta)+Y\sin(\Theta+\vartheta)\\ Y^{\mathrm{II}}&=Y\cos(\Theta+\vartheta)-X\sin(\Theta+\vartheta)\end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.83}$$

(83) სისტემა, (49) წონითი φ კოეფიციენტების დადგენის შემდეგ, გადაიწერება (50) და (51) ტოლობების ანალოგიურად შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_X{}^{II}}&=\cos^2(\Theta+\vartheta)Q_{11}+\sin^2(\Theta+\vartheta)Q_{22}+2\sin(\Theta+\vartheta)\cos(\Theta+\vartheta)Q_{12}\\ \frac{1}{P_Y{}^{II}}&=\sin^2(\Theta+\vartheta)Q_{11}+\cos^2(\Theta+\vartheta)Q_{22}-2\sin(\Theta+\vartheta)\cos(\Theta+\vartheta)Q_{12}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.9.84)$$

(84) დამოკიდებულებების გამოყენებით (77) და (78) ტოლობა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned}M_X^{2\,II}&=\eta^2\frac{1}{P_X{}^{II}}=\eta^2\Big\{Q_{11}\cos^2(\Theta+\vartheta)+Q_{22}\sin^2(\Theta+\vartheta)+\\&\qquad+2Q_{12}\sin(\Theta+\vartheta)\cos(\Theta+\vartheta)\Big\}\\ M_Y^{2\,II}&=\eta^2\frac{1}{P_Y{}^{II}}=\eta^2\Big\{Q_{11}\sin^2(\Theta+\vartheta)+Q_{22}\cos^2(\Theta+\vartheta)-\\&\qquad-2Q_{12}\sin(\Theta+\vartheta)\cos(\Theta+\vartheta)\Big\}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.9.85)$$

გარდავქმნათ (85) სისტემის პირველი ტოლობა. ამისათვის განვსაზღვროთ მისი მარჯვენა ნაწილის ფიგურულ ფრჩხილებში მოქცეული ყოველი წევრის მნიშვნელობა.

$$\left.\begin{aligned}Q_{11}\cos^2(\Theta+\vartheta)&=(\cos^2\Theta\cos^2\vartheta+\sin^2\Theta\sin^2\vartheta-2\cos\Theta\sin\Theta\sin\vartheta\cos\vartheta)Q_{11}\\ Q_{22}\sin^2(\Theta+\vartheta)&=(\sin^2\Theta\cos^2\vartheta+\cos^2\Theta\sin^2\vartheta+2\sin\Theta\cos\Theta\sin\vartheta\cos\vartheta)Q_{22}\\ 2Q_{12}\sin(\Theta+\vartheta)\cos(\Theta+\vartheta)&=2Q_{12}(\cos^2\Theta\sin\vartheta\cos\vartheta-\sin\Theta\cos\Theta\sin^2\vartheta+\\&\qquad+\sin\Theta\cos\Theta\cos^2\vartheta-\sin^2\Theta\sin\vartheta\cos\vartheta)\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.9.86)$$

მიღებული ოდენობები შევიტანოთ (85) სისტემის პირველ ტოლობაში:

$$\left.\begin{aligned}M_X^{2\,II}=\eta^2\cos^2\vartheta(Q_{11}\cos^2\Theta+Q_{22}\sin^2\Theta+2Q_{12}\sin\Theta\cos\Theta)+\\ +\eta^2\sin^2\vartheta(Q_{11}\sin^2\Theta+Q_{22}\cos^2\Theta-2Q_{12}\sin\Theta\cos\Theta)+\\ +\eta^2\sin\vartheta\cos\vartheta(-Q_{11}\sin2\Theta+Q_{22}\sin2\Theta+2Q_{12}\cos2\Theta)\end{aligned}\right\}. \qquad (4.9.9.87)$$

თანახმად (50), (51), (54) ტოლობებისა, (87) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ფრჩხილებს შორის მოქცეული გამოსახულებები შესაბამისად იქნება ტოლი $\frac{1}{P_X{}^I}$, $\frac{1}{P_Y{}^I}$ და 0. მაშასადამე, (87) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$M_X^{2\,II}=\eta^2\frac{1}{P_X{}^{II}}\cos^2\vartheta+\eta^2\frac{2}{P_Y{}^{II}}\sin^2\vartheta, \qquad (4.9.9.88)$$

საიდანაც, თანახმად (77) და (78) გამოსახულებისა, მივიღებთ:

$$M_X^{2\,II}=A^2\cos^2\vartheta+B^2\sin^2\vartheta. \qquad (4.9.9.89)$$

(85) სისტემის მეორე ტოლობის მიმართ ანალოგიური მოქმედებების შესრულებით მივიღებთ $M_{Y\,II}^2$ სიდიდეს:

$$M_Y^{2\,II}=A^2\sin^2\vartheta+B^2\cos^2\vartheta. \qquad (4.9.9.90)$$

(90) ტოლობა თავისუფლად მიიღება (89) ტოლობაში ϑ კუთხის ნაცვლად ($\vartheta \pm 90°$)-ის ჩასმით. ამიტომ, საერთოდ, სარგებლობენ (89) ტოლობით და M_{X}II აღნიშნავენ P სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$P^2 = A^2 cos^2\vartheta + B^2 sin^2\vartheta. \tag{4.9·9.91}$$

მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს ჩაკეტილი მრუდის განტოლებას. ამ მრუდს უწოდებენ პოდერს, ანუ პედალურ მრუდს. პოდერს ხშირად უწოდებენ საშუალო შეცდომის, ანუ სიზუსტის მრუდს.

სიზუსტის მრუდის (პოდერის) აგებისათვის საშუალო შეცდომის A მაქსიმალურ და B მინიმალურ ოდენობებს ვიღებთ შეცდომების ელიფსის დიდ და მცირე ნახევარღერძებად, შემდეგ ამ ელიფსის ცენტრიდან ვატარებთ მასზე უწყვეტლივ მოძრავი წერტილის მიმართ მხების P მართობს.

P მართობს ეწოდება პოდერის რადიუს-ვექტორი, რომლის ბოლო, ანუ ელიფსის მხებისადმი მართობი წერტილების შემაერთებელი მრუდი იქნება პოდერი.

ტრიანგულაციის ქსელში ორი წერტილის ჩასმისათვის გვექნება შესწორებათა გარდაქმნილი განტოლებისათვის შედგენილი ოთხი განტოლების ნორმალური სისტემა. ამ განტოლებებიდან პირველი ჩასასმელი პუნქტის კოორდინატების მიახლოებითი ოდენობების შესწორებების გამორიცხვით მივიღებთ მეორე ჩასასმელი პუნქტის კოორდინატების მიახლოებითი ოდენობების შესწორებათა გარდაქმნილ სისტემას, რომელშიც იქნებიან უკანასკნელი და უკანასკნელის წინა უცნობები:

$$\left.\begin{aligned} [Pcc\cdot 2]\xi_2 + [Pcd\cdot 2]\eta_2 + [Pcv\cdot 2] = 0 \\ [Pcd\cdot 2]\xi_2 + [Pdd\cdot 2]\eta_2 + [Pdv\cdot 2] = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.92}$$

ამ შემთხვევაში მეორე ჩასმული პუნქტის გაწონასწორებული კოორდინატების წონები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} P_{Y_2} &= [Pdd\cdot 3] \\ P_{X_2} &= \frac{[Pcc\cdot 2]}{[Pdd\cdot 2]}[Pdd\cdot 3] \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.93}$$

ხოლო პოდერის ელემენტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} tg2\Theta &= \frac{-2[Pcd\cdot 2]}{-([Pcc\cdot 2]-[Pdd\cdot 2]} \\ A^2 &= \eta^2\frac{[Pcc\cdot 2]+[Pdd\cdot 2]+\omega}{2D} \\ B^2 &= \eta^2\frac{[Pcc\cdot 2]+[Pdd\cdot 2]-\omega,}{2D} \\ \text{სადაც }\ \omega &= \frac{-2[Pcd\cdot 2]}{sin2\Theta} \\ D &= [Pcc\cdot 2][Pdd\cdot 2]-[Pcd\cdot 2]^2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.9.9.94}$$

ტრიანგულაციაში სამი პუნქტის ჩასმის დროს უკანასკნელი, ანუ იმ პუნქტის, რომელთა შესწორებები უკანასკნელი და მისი წინა უცნობებია, ნორმა-

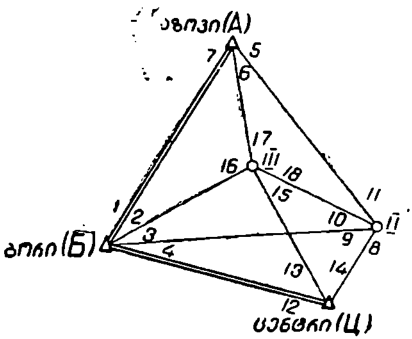
ლური განტოლებების სისტემაში გაწონასწორებული კოორდინატების სიზუსტის შეფასება და პოდერის ელემენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$
\left.
\begin{aligned}
P_{Y_3} &= [Pgg\cdot S]\\
P_{Y_3} &= \frac{[Pee\cdot 4]}{[Pgg\cdot 4]}[Pgg\cdot 5]\\
tg2\Theta &= \frac{-2[Peg\cdot 4]}{-([Pee\cdot 4]-[Pgg\cdot 4])}\\
A^2 &= \eta^2\frac{[Pee\cdot 4]+[Pgg\cdot 4]+\omega}{2D}\\
B^2 &= \eta^2\frac{[Pee\cdot 4]+[Pgg\cdot 4]-\omega}{2D},\\
\text{სადაც}\ \omega &= \frac{-2[Peg\cdot 4]}{sin2\Theta}\\
D &= [Pee\cdot 4][Pgg\cdot 4]-[Peg\cdot 4]^2
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.9.9.95)
$$

ნებისმიერი შემთხვევის P პოდერის ოდენობას ანგარიშობენ (91) ფორმულით ან გრაფიკულად.

E. ხისტ ტრიანგულაციის ქსელში ორი წერტილის ჩასმის მაგალითი [1ც]

ხისტ ტრიანგულაციის ქსელში საჭიროა ჩაისვას II და III პუნქტები (ნახ. 5), ანუ გაზომილი მიმართულებებით განისაზღვროს ჩასმული პუნქტების გაწონასწორებული კოორდინატები.



ნახ. 4 9.9.5.

ხისტი პუნქტებია „აზოვი“, „ბორი“ და „ცენტრი“, რომელთა ხისტი (გამოსავალი) კოორდინატებია მოცემული (2) ცხრილში.

ცხრილი 4.9.9.2

ხისტი პუნქტები	კოორდინატები	
	X, მ	Y, მ
აზოვი	6 418 071,71	7 557 951,96
ბორი	6 411 801,16	7 555 809,62
ცენტრი	6 411 023,10	7 560 851,17

მიმართულებები გაზომილია ყველა პუნქტზე და დაყვანილი ოდენობები მოცემულია (3) ცხრილში:

ჩასასმელი II, III პუნქტების მიახლოებითი კოორდინატები განსაზღვრულია პირდაპირი გადაკვეთის ამოხსნით და ტოლობით:

ცხრილი 4.9.9.3

პ უ ნ ქ ტ ი	მიმართება	გაზომილი და დაყვანილი ბრტყელი მიმართულებები №		
		0	′	″
ბორი	1— 7	0	00	00
	2—16	24	39	08,3
	3— 9	48	29	37,1
	4—12	79	54	38,8
აზოვი	5—11	0	00	00
	6—17	26	27	26,5
	7— 1	62	52	03,1
I I	8—14	0	00	00
	9— 3	53	20	37,5
	10—18	92	37	10,7
	11— 5	121	58	59,8
ცენტრი	12— 4	0	00	00
	13—15	55	28	53,0
	14— 8	95	14	17,7
I I I	16— 2	0	00	00
	17— 6	118	56	15,0
	18—10	243	06	58,1
	15—13	290	44	18,3

$x_{II}=6414239{,}20;\quad y_{II}=9561653{,}78;$
$x_{III}=6415060{,}34;\quad y_{III}=9558904{,}09.$

ა. განონასწორებითი სამუშაოები

I. მიმართებათა დირექციული კუთხეების და ცხრილური კუთხეების გამოთვლა მყარი წერტილების კოორდინატებისა და ჩასასმელი კოორდინატების მიახლოებითი ოდენობების მიხედვით შესრულებულია (1) სქემაში. ამ სქემაში ყოველი მიმართების საწყისი წერტილის (სათავის) კოორდინატი აღნიშნულია $x_н$, $y_н$ სიმბოლოთი, ხოლო ბოლო წერტილის—$x_к$, $y_к$ სიმბოლოთი, ჩაწერის გაადვილების მიზნით ყოველ კოორდინატს სქემაში აკლია პირველი ორი ციფრი, მაგალითად, აზოვის $x_к$ და $y_к$ ნაცვლად 6418071,71 და 7557951,96 მეტრისა ამოწერილია 18071, 71 და 57951,96 მ. ბორის $x_н$, $y_н$ ნაცვლად 6411801,16 და 7555809,62 მეტრისა ამოწერილია 11801,16 და 55809,62 მ.

II. სადგურებზე გაზომილი მიმართულებების შესწორებათა განტოლებები შედგენილია (2) სქემაში (5) ნახაზისა და (26) (27) (28) (29) ფორმულების შესაბამისად;

III. შესწორებათა განტოლებების თავისუფალი v წევრების გამოთვლები შესრულებულია (3) სქემაში, თანახმად ამ პარაგრაფის B მუხლში მიღებული (17), (18), (20), (25) ფორმულებისა;

IV. შესწორებათა განტოლებების a და b კოეფიციენტების გამოთვლა შესრულებულია (4) სქემაში, (9), (10) ფორმულების მიხედვით, რომლებშიც (a) და (b) სიდიდეები ამოღებულია I დანართიდან, რომელიც შედგენილია ერთი კილომეტრისათვის (a) = 20,6265 $sin\ z$ და (b) = 20,6265 $cos\ z$ (სადაც z არის ცხრილური კუთხე, ანუ რუმბი). a და b კოეფიციენტების ნიშნები დგინდება (1) ცხრილის მიხედვით მოცემული მიმართებების დირექციული კუთხეების შესაბამისად. საკონტროლო A სიდიდის ოდენობას (19 ფორმულა) ვიღებთ დანართის (2) ცხრილიდან, საიდანაც ამონაწერი ოდენობები უნდა უდრიდეს (a^2+b^2) ოდენობას.

V. ნორმალური განტოლებების კოეფიციენტების გამოთვლა შესწორებათა გარდაქმნილი (34) განტოლებების შესაბამისად შესრულებულია (5) სქემაში, რისთვისაც a, b,... კოეფიციენტებს ამოვიწერთ (2) სქემის შესაბამისად (4) სქემიდან, ხოლო თავისუფალ v წევრებს (2) სქემის შესაბამისად ამოვიღებთ (3) სქემიდან;

VI. (5) სქემის მიხედვით შევადგენთ (33) ნორმალური განტოლებების ანალოგიურ სისტემას:

$$110,13\ \xi_{III}+37,59\ \eta_{III}-67,27\ \xi_{II}-35,51\ \eta_{II}-202,56=0$$

$$37,59\ \xi_{III}+117,47\ \eta_{III}-16,43\ \xi_{II}-23,22\ \eta_{II}-140,46=0$$

$$-67,27\ \xi_{III}-16,43\ \eta_{III}+65,10\ \xi_{II}-24,17\ \eta_{II}-148,58=0$$

$$-35,51\ \xi_{III}-23,22\ \eta_{III}+24,17\ \xi_{II}+82,43\ \eta_{II}+133,96=0$$

შეიძლებოდა (5) სქემის მონაცემები პირდაპირ შეგვეტანა გაუს-დულიტლის სქემაში და ამოგვეხსნა ნორმალურ განტოლებათა სისტემა.

VII. ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შესრულებულია გაუს-დულიტლის სქემით (6); II—III გვერდის დირექციული კუთხის, როგორც წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები (2) სქემის შესაბამისად ამოღებულია (4) სქემიდან. მაგალითად, (2) სქემაში ξ_{III} შესწორების კოეფიციენტია $+a_{18.10}$, რომელსაც (4) სქემაში შეესაბამება $+6,89$ და η_{III} შესწორების კოეფიციენტია $+b_{18.10}$, რომელსაც (4) სქემიდან შეესაბამება $+2,06$. ასევე ξ_{II} შესწორების კოეფიციენტია$-a_{18.10}$, რომელსაც (4) სქემიდან შეესაბამება $a_{10.18}$, ანუ $-6,89$ და η_{II}-ის კოეფიციენტია$-b_{18.10}$, ანუ (4) სქემიდან მას შეესაბამება $b_{10.18}$ ანუ$-2,06$. (6) სქემაში 6, 89, 2, 06, — 6, 89, — 2, 06 კოეფიციენტები შესაბამისად აღნიშნულია წონითი ფუნქციის $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ს ა ხ ი თ და ამ სქემაში ისინი შეგვაქვს უკანასკნელ სვეტში და მათზე ვმოქმედებთ ისევე. როგორც a, b, c, d კოეფიციენტებზე. ამით უკანასკნელი სვეტი გვაძლევს წონითი ფუნქციის შებრუნებული წონის ოდენობას.

VIII. პუნქტ „ბორს" შეესაბამება 1, 2, 3, 4 განტოლება, რომელთა შესაბამისად (Z) შესწორებების სვეტში (2) სქემიდან ამოვიწერთ კოეფიციენტებს —1, —1, —1, —1, ხოლო a, b, c, d სვეტებში (2) და (4) სქემის შესაბამისად — ყოველი ტოლობის კოეფიციენტებს. ასევე, (7) სქემის a, b, c, d სვეტების სათაურებში ამოვიწერთ

$\xi_{III}=\xi_I=0{,}656$, $\eta_{III}=\eta_1=0{,}665$, $\xi_{II}=\xi_2=-1{,}131$, $\eta_{II}=\eta_2=-0{,}824$ შესწორებათა ოდენობებს, რომელთა ნამრავლი ყოველი განტოლების შესაბამისი კოეფიციენტის ოდენობაზე იწერება ამ განტოლებათა მეორე სტრიქონში (მაგალითად, მე-2 განტოლების მეორე სტრიქონის a სვეტშია $-3{,}16\times0{,}656=$ $=-2{,}07$, b სვეტის მეორე სტრიქონში კი $+3{,}33\times0{,}665=+2{,}21$) და ასე შემდეგ. ოთხივე განტოლებისათვის გამოთვლილი მეორე სტრიქონების ჩანაწერთა საშუალო $(Z_Б)=0{,}63$ ოდენობა იწერება (Z) სვეტში ამოწერილ -1 ოდენობების ქვეშ შებრუნებული ნიშნით. v სვეტის ყოველი განტოლებისათვის (3) სქემიდან ამოიწერება შესაბამისი ოდენობები. ყოველი განტოლების მეორე სტრიქონების ალგებრული ჯამით გამოითვლება შესაბამისი ε. ასე მეორდება პუნქტ „აზოვის", II, „ცენტრისა" და III პუნქტის შესაბამისი განტოლებების სტრიქონების დამუშავება.

IX. ჩასმული პუნქტების გაწონასწორებული კოორდინატების გამოანგარიშება ხდება (II) და (I) ფორმულების მიხედვით:

$$\delta_{x_{II}}=\frac{1}{10}\xi_{II}=-0{,}11\ \text{მ};\quad \delta_{y_{II}}=\frac{1}{10}\eta_{II}=-0{,}08\ \text{მ};$$

$$\delta_{x_{III}}=\frac{1}{10}\xi_{III}=\ 0{,}07\ \text{მ};\quad \delta_{y_{III}}=\frac{1}{10}\eta_{III}=0{,}07\ \text{მ};$$

$$X_{II}=6\,414\,239{,}20-0{,}11=6\,414\,239{,}09\ \text{მ};$$

$$Y_{II}=9\,561\,653{,}78-0{,}08=6\,561\,653{,}70\ \text{მ};$$

$$X_{III}=6\,415\,060{,}34+0{,}07=6\,415\,060{,}41\ \text{მ};$$

$$Y_{III}=9\,558\,904{,}09+0{,}07=9\,558\,904{,}16\ \text{მ}.$$

X. დირექციული კუთხეებისა და გაზომილი მიმართულებების გაწონასწორებული ოდენობების გამოთვლა მოცემულია (8) სქემაში.

XI. დასკვნითი კონტროლი სრულდება პუნქტების გაწონასწორებული კოორდინატების საშუალებით ქსელის ყველა მიმართებების დირექციული კუთხეების გამოთვლით (შებრუნებული გეოდეზიური ამოცანა), რომელიც შესრულებულია (9) სქემაში.

სქემა 4.9.9.1

მიმართება	$x_к$ / $x_н$ / $\Delta x=x_к-x_н$ / $\Delta x+\Delta y$	$y_к$ / $y_н$ / $\Delta y=y_к-y_н$ / $\Delta x-\Delta y$	lg Δy / lg Δx / lg tgα / r_a	lg $(\Delta x+\Delta y)$ / lg $(\Delta x-\Delta y)$ / r / $a+45°$	lg Δy / lg sin α / lg S / S	lg Δx / lg cos α / lg S
ბორი—აზოვი	18 071,71 11 801,16 + 6 270,55 8 412,89	57 951,96 55 809,62 + 2 142,34 + 4 128,21	3.3308884 3.7973056 9.5335828 18°51′46″,04 18 51 46 ,04	3.9249452 3.6157618 0.3091834 63°51′46″,02 63 51 46 ,02	3.3308884 9.5096096 3.8212788 6626,4	3.7973056 9.9760268 3.8212788
ბორი—III	15 060,34 11 801,16 + 3 259,18 + 6 353,65	58 904,09 55 809,62 + 3 094,47 + 164,71	3.4905863 3.5131083 9.9774780 43°30′54″,08 43 30 54 ,08	3.8030233 2.2167200 1.5863033 88°30′54″,07 88 30 54 ,07	3.4905863 9.8379323 3.6526540 4494,2	3.5131083 9.8604541 3.6526542

მიმარ-თება	$x_к$ $x_н$ $\Delta x = x_к - x_н$ $\Delta x + \Delta y$	$y_к$ $y_н$ $\Delta y = y_к - y_н$ $\Delta x - \Delta y$	$lg\ \Delta y$ $lg\ \Delta x$ $lg\ tg\alpha$ r α	$lg(\Delta x + \Delta y)$ $lg(\Delta x - \Delta y)$ r $\alpha + 45°$	$lg\ \Delta y$ $lg\ sin\ \alpha$ $lg\ S$ S	$lg\ \Delta x$ $lg\ cos\ \alpha$ $lg\ S$
ბორი—II	14 239,20 11 801,16 + 2 438,04 + 8 282,20	61 653,78 55 809,62 + 5 844,16 — 3 406,12	3.7667221 3.3870408 3.3796813 67°21'19",09 67 21 19 ,09	3.9181457 3.5322600 *n* 0.3858857 *n* 67°38'40'',90 112 21 19 ,10	3.7667221 9.9651594 3.8015627 6332,3	3.3870408 9.5854781 3.8015627
ბორი—ცენტრი	11 023,10 11 801,16 — 778,06 + 4 263,49	60 851,17 55 809,62 + 5 041,55 — 5 819,61	3.7025641 2.8910131 *n* 0.8115510 *n* 81°13'36",41 98 46 23 ,59	3.6297653 3.7648939 *n* 9.8648714 *n* 36°46'36",44 143 13 23 ,56	3.7025641 9.9948887 3.7076754 5101,2	2.8910131 9.1833380 3.7076751
აზოვი—II	14 239,20 18 071,71 — 3 832,51 — 130,69	61 653,78 57 951,96 + 3 701,82 — 7 534,33	3·5684153 3.5834833 *n* 9.9849220 *n* 44°00'22'',50 135 59 37 ,50	2.1162424 *n* 3.8770446 *n* 8.2391978 0°59'37'',49 180 59 37 ,49	3.5684153 9.8418204 3.7265949 5328,4	3.5834833 9.8568883 3.7265950
აზოვი—III	15 060,34 18 071,71 — 3 011,37 — 2 059,24	58 904,09 57 951,96 + 952,13 — 3 963,50	2.9786962 3.4787641 *n* 9.4999321 *n* 17°32'44'',97 162 27 15 ,03	3.3137069 *n* 3.5980789 *n* 9.7156280 27°27'15'',01 207 27 15 ,01	2.9786962 9.4792419 3.4994543 3158,3	3.4787641 9.9793098 3.4994543
II—ცენტრი	11 023,10 14 239,20 — 3 216,10 — 4 018,71	60 851,17 61 653,78 — 802,61 — 2 413,49	2.9045046 *n* 3.5073295 *n* 9.3971751 14°00'45'',07 194 00 45 ,07	3.6040867 *n* 3.3826455 *n* 0.2214412 59°00'45'',07 239 00 45 ,07	2.9045046 9.3840556 3.5204490 3314,7	3.5073295 9.9868801 3.5204494
II—III	15 060,34 14 239,20 + 821,14 — 1 928,55	58 904,09 61 653,78 — 2 749,69 + 3 570,83	3.4392837 *n* 2.9144172 0.5248665 *n* 73°22'22'',06 286 37 37 ,94	3.2852309 *n* 3.5527692 9.7324617 *n* 28°22'22'',06 331 37 37 ,94	3.4392837 9.9814502 3.4578335 2869,7	2.9144172 9.4565837 3.4578335
III—ცენტრი	11 023,10 15 060,34 — 4 037,24 — 2 090,16	60 851,17 58 904,09 + 1 947,08 — 5 984,32	3.2893838 3.6060864 *n* 9.6832992 *n* 25°44'49'',48 154 15 10 ,52	3.3201795 *n* 3.7770148 *n* 9.5431647 19°15'10'',50 199 15 10 ,50	3.2893838 9.6378891 3.6514947 4482,2	3.6060846 9.9545900 3.6514946

სქემა 4.9.9.2

პუნქტი	მიმართება	შესწორებე-ბის ტოლო-ბის №№	შესწორებების ტოლობები	სადგურზე გაზომილი მიმართულებე-ბის რაოდე-ნობა
ბორი	1— 7 2—16 3— 9 4—12	1 2 3 4	$-(Z_Б)+ \qquad +v_{1\cdot 7}=\varepsilon_{1\cdot 7}$ $-(Z_Б)-a_{2\cdot 16}\,\xi_{III}-b_{2\cdot 16}\,\eta_{III}+ \qquad +v_{2\cdot 16}=\varepsilon_{2\cdot 16}$ $-(Z_Б)-a_{3\cdot 9}\,\xi_{II}-b_{3\cdot 9}\,\eta_{II}+ \qquad +v_{3\cdot 9}=\varepsilon_{3\cdot 9}$ $-(Z_Б)+ \qquad +v_{4\cdot 12}=\varepsilon_{4\cdot 12}$	$K_Б=4$

პუნქტი	მიმართება	შესწორება-ბის ტოლო-ბის №№	შესწორებების ტოლობები	სადგურზე გაზომილი მიმართულე-ბების რაო-დენობა
აზოვი	5—11	5	$-(Z_A)-a_{5\cdot11}\,\xi_{II}-b_{5\cdot11}\,\eta_{II}+ \quad +v_{5\cdot11}=\varepsilon_{5\cdot11}$	$K_A=3$
	6—17	6	$-(Z_A)-a_{6\cdot17}\,\xi_{III}-b_{6\cdot17}\,\eta_{III}+ \quad +v_{6\cdot17}=\varepsilon_{6\cdot17}$	
	7— 1	7	$-(Z_A)+ \quad +v_{7\cdot1}=\varepsilon_{7\cdot1}$	
II	8—14	8	$-(Z_{II})+a_{8\cdot14}\,\xi_{II}+b_{8\cdot14}\,\eta_{II}+ \quad +v_{8\cdot14}=\varepsilon_{8\cdot14}$	$K_{II}=4$
	9— 3	9	$-(Z_{II})+a_{9\cdot3}\,\xi_{II}+b_{9\cdot3}\,\eta_{II}+ \quad +v_{9\cdot3}=\varepsilon_{9\cdot3}$	
	10—18	10	$-(Z_{II})+a_{10\cdot18}\,\xi_{II}+b_{10\cdot18}\,\eta_{II}-$ $-a_{10\cdot18}\,\xi_{III}-b_{10\cdot18}\,\eta_{III}+ \quad +v_{10\cdot18}=\varepsilon_{10\cdot18}$	
	11— 5	11	$-(Z_{II})+a_{11\cdot5}\,\xi_{II}+b_{11\cdot5}\,\eta_{II}+ \quad +v_{11\cdot5}=\varepsilon_{11\cdot5}$	
ცენტრი	12— 4	12	$-(Z\text{ц})+ \quad +v_{12\cdot4}=\varepsilon_{12\cdot4}$	$K\text{ц}=3$
	13—15	13	$-(Z\text{ц})-a_{13\cdot15}\,\xi_{III}-b_{13\cdot15}\,\eta_{III}+ \quad +v_{13\cdot15}=\varepsilon_{13\cdot15}$	
	14— 8	14	$-(Z\text{ц})-a_{14\cdot8}\,\xi_{II}-b_{14\cdot8}\,\eta_{II}+ \quad +v_{14\cdot8}=\varepsilon_{14\cdot8}$	
III	15—13	15	$-(Z_{III})+a_{15\cdot13}\,\xi_{III}+b_{15\cdot13}\,\eta_{III}+ \quad +v_{15\cdot13}=\varepsilon_{15\cdot13}$	$K_{III}=4$
	16— 2	16	$-(Z_{III})+a_{16\cdot2}\,\xi_{III}+b_{16\cdot2}\,\eta_{III}+ \quad +v_{16\cdot2}=\varepsilon_{16\cdot2}$	
	17— 6	17	$-(Z_{III})+a_{17\cdot6}\,\xi_{III}+b_{17\cdot6}\,\eta_{III}+ \quad +v_{17\cdot6}=\varepsilon_{17\cdot6}$	
	18—10	18	$-(Z_{III})+a_{18\cdot10}\,\xi_{III}+b_{18\cdot10}\,\eta_{III}-$ $-a_{18\cdot10}\,\xi_{II}-b_{18\cdot10}\,\eta_{II} \quad +v_{18\cdot10}=\varepsilon_{18\cdot10}$	

სქემა 4.9.9.3

პუნქტი	მიმართება	გაზომილი და დაყვანილი მიმართულებები № ((3) ცხრილიდან)			დირექციული კუთხე α ((1) სქემიდან)			მიახლოებითი საორიენტირო კუთხე $Z=\alpha-N$ ((20) დამოკიდებულებიდან) (20 ფორმულით)			მიახლოებითი საორიენტირო მიმართულება $R=Z_{საშ}+N$ (17 ფორმულით)			თავისუფალი წევრი $v=\alpha-R$ (18 ფორმულით)
		°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
ბორი	1—7	0	00	00,00	18	51	46,04	18	51	46,04	18	51	44,65	+1,39
	2—16	24	39	08,30	43	30	54,08			45,78	43	30	52,95	+1,13
	3—9	48	29	37,10	67	21	19,09			41,99	67	21	21,75	—2,66
	4—12	79	54	38,80	98	46	23,59			44,79	98	46	23,45	+0,14
	Σ			24,20			22,80	58,60		58,60				0,00
								$Z_{საშ}=18°51'44'',65$						
აზოეი	5—11	0	00	00,00	135	59	37,50	135	59	37,50	135	59	42,99	—5,49
	6—17	26	27	26,50	162	27	15,03			48,53	162	27	09,49	+5,54
	7—1	62	52	03,10	198	51	46,04			42,94	198	51	46,09	—0,05
	Σ			29,6			38,57	8,97		8,97				0,00
								$Z_{საშ}=135°59'42'',99$						
II	8—14	0	00	00,00	194	00	45,07	194	00	45,07	194	00	37,90	+ 7,17
	9—3	53	20	37,50	247	21	19,09			41,59	247	21	15,40	+ 3,69
	10—18	92	37	10,70	286	37	37,94			27,24	286	37	48,60	—10,66
	11—5	121	58	59,80	315	59	37,50			37,70	315	59	37,70	— 0,20
	Σ			48,00			19,60	31,60		31,60				— 0,00
								$Z_{საშ}=194°00'37'',90$						
ცენტრი	12—4	0	00	00,00	278	46	23,59	278	46	23,59	278	46	22,83	+0,76
	13—15	55	28	53,00	334	15	10,52			17,52	334	15	15,83	—5,31
	14—8	95	14	17,70	14	00	45,07			27,37	14	00	40,53	+4,54
	Σ			10,70			19,18	8,48		8,48				—0,01
								$Z_{საშ}=278°46'22'',83$						
III	16—2	0	00	00,00	223	30	54,08	223	30	54,08	223	30	51,54	+ 2,54
	17—6	118	56	15,00	342	27	15,03		31	00,03	342	27	06,54	+ 8,49
	18—10	243	06	58,10	106	37	37,94		30	39,84	106	37	49,64	—11,70
	15—13	290	44	18,30	154	15	10,52		30	52,22	154	15	09,84	+ 0,68
	Σ			31,40			57,57	26,17		26,17				+ 0,01
								$Z_{საშ}=223°30'51'',54$						

სქემა 4.9.9.4

მიმართება	დირექციული კუთხე α	კოეფიციენტები (a)	კოეფიციენტები (b)	S, კმ	კოეფიციენტები $\frac{(a)}{S}=a$	კოეფიციენტები $\frac{(b)}{S}=b$	a^2	b^2	a^2+b^2	$A=\frac{425,45}{S^2}$ (კმ)
ბორი—III (2—16)	43° 31′	14,20	—14,97	4,494	+3,16	—3,33	9,99	11,09	21,08	21,1
ბორჯ—II (3— 9)	67 21	19,03	— 7,94	6,332	+3,01	—1,25	9,06	1,56	10,62	10,6
აზოვი—II (5—11)	136 00	14,33	14,84	5,328	+2,69	+2,79	7,24	7,78	15,02	15,0
აზოვი—III (6—17)	162 27	6,21	19,67	3,158	+1,97	+6,23	3,88	38,81	42,69	42,6
II—ცენტრი (8—14)	194 01	— 5,00	20,01	3,315	—1,51	+6,04	2,28	36,48	38,76	38,8
II—III (10 — 18)	286 38	—19,76	— 5,91	2,870	—6,89	—2,06	47,47	4,24	51,71	51,7
III—ცენტრი (15—13)	154 15	8,96	18,58	4,482	+2,00	+4,15	4,00	17,22	21,22	21,2

სქემა 4.9.9.5

შესწორებათა განტოლებების №№	ξ_{III} a	η_{III} b	ξ_{II} c	η_{II} d	v	S	P	Paa	Pab	Pac	Pad	Pav	PaS	Pbb
1	0	0	0	0	1,39	1,39	1	0	0	0	0	0	0	0
2	—3,16	3,33	0	0	1,13	1,30	1	9,99	—10,52	0	0	—3,57	—4,11	11,09
3	0	0	—3,01	1,25	—2,66	—4,42	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0,14	0,14	1	0	0	0	0	0	0	0
$K_Б+1$	—3,16	3,33	—3,01	1,25	0	—1,59	$-\frac{1}{4}$	—2,49	2,63	—2,38	0,99	0	—1,26	—2,77
5	0	0	—2,69	—2,79	—5,49	—10,97	1	0	0	0	0	0	0	0
6	—1,97	—6,23	0	0	5,54	— 2,66	1	3,88	12,27	0	0	—10,91	5,24	38,81
7	0	0	0	0	—0,05	— 0,05	1	0	0	0	0	0	0	0
K_A+1	—1,97	—6,23	—2,69	—2,79	0	—13,68	$\frac{1}{3}$	—1,29	—4,09	—1,73	—1,83	0	—8,95	—12,94
8	0	0	—1,51	6,04	7,17	11,70	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	—3,01	1,25	3,69	1,93	1	0	0	0	0	0	0	0
10	6,89	2,06	—6,89	—2,06	—10,66	—10,66	1	47,47	14,19	—47,47	—14,19	—73,45	—73,45	4,24
11	0	0	—2,69	—2,79	— 0,20	— 5,68	1	0	0	0	0	0	0	0
$K_{II}+1$	6,89	2,06	—14,10	2,44	0	— 2,71	$-\frac{1}{4}$	—11,87	— 3,55	24,29	— 4,20	0	4,67	—1,06
12	0	0	0	0	0,76	0,76	1	0	0	0	0	0	0	0
13	2,00	4,15	0	0	—5,31	0,84	1	4,00	8,30	0	0	—10,62	1,68	17,22
14	0	0	—1,51	6,04	4,54	9,07	1	0	0	0	0	0	0	0
$K_Ц+1$	2,00	4,15	—1,51	6,04	0	10,68	$-\frac{1}{3}$	—1,33	—2,77	1,01	—4,03	0	—7,12	—5,74
15	2,00	4,15	0	0	0,68	6,83	1	4,00	8,30	0	0	1,36	13,66	17,22
16	—3,16	3,33	0	0	2,54	2,71	1	9,99	—10,52	0	0	— 0,83	8,56	11,09
17	—1,97	—6,23	0	0	8,49	0,29	1	3,88	12,27	0	0	—16,73	— 0,57	38,81
18	6,89	2,06	—6,89	—2,06	—11,70	—11,70	1	47,47	14,19	47,47	—14,19	—80,61	—80,62	4,24
$K_{III}+1$	3,76	3,31	—6,89	—2,06	0	—1,87	$-\frac{1}{4}$	—3,53	—3,11	6,48	1,94	0	1,76	—2,74
Σ								110,13	37,59	—67,27	—35,51	—202,56	—157,61	117,47

შესწორებათა განტოლებების №№	Pbc	Pbd	Pbv	PbS	Pcc	Pcd	Pcv	PcS	Pdd	Pdv	PdS	Pvv	PvS'	Pss'
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,93	1,93	1,93
2	0	0	3,76	4,33	0	0	0	0	0	0	0	1,28	1,47	1,68
3	0	0	0	0	9,06	—3,76	8,01	13,30	1,56	—3,32	—5,52	7,08	11,76	19,54
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,01	0,02
$K_Б+1$	2,50	—1,04	0	1,32	—2,26	0,94	0	—1,20	—0,39	0	0,50	0	0	0,63
5	0	0	0	0	7,24	7,51	14,77	29,51	7,78	15,32	30,61	30,14	60,23	120,34
6	0	0	—34,51	16,57	0	0	0	0	0	0	0	30,69	—14,74	7,08
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_А+1$	—5,59	—5,79	0	—28,41	—2,41	2,50	0	—12,26	—2,59	0	—12,72	0	0	62,38
8	0	0	0	0	2,28	—9,12	—10,83	—17,67	36,48	43,31	70,67	51,41	83,89	136,89
9	0	0	0	0	9,06	—3,76	—11,11	— 5,81	1,56	4,61	2,41	13,62	7,12	3,72
10	—14,19	—4,24	—21,96	—21,96	47,47	14,19	73,45	73,45	4,24	21,96	21,96	113,64	113,64	113,63
11	0	0	0	0	7,24	7,51	0,54	15,28	7,78	0,56	15,85	0,04	1,14	32,26
$K_{II}+1$	7,25	—1,26	0	1,40	—49,70	8,60	0	— 9,55	—1,49	0	1,65	0	0	1,84
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,58	0,58	0,58
13	0	0	—22,04	3,49	0	0	0	0.	0	0	0	28,20	— 4,46	0,71
14	0	0	0	0	2,28	—9,12	—6,86	—13,70	36,48	27,42	54,78	20,61	41,18	82,26
$K_Ц+1$	2,09	—8,35	0	—14,77	—0,76	3,04	0	5,37	—12,16	0	—21,50	0	0	38,02
15	0	0	2,82	28,34	0	0	0	0	0	0	0	0,46	4,64	46,65
16	0	0	8,46	9,02	0	0	0	0	0	0	0	6,45	6,88	7,34
17	0	0	—52,89	— 1,81	0	0	0	0	0	0	0	72,08	2,46	0,08
18	—14,19	— 4,24	—24,10	—24,10	47,47	14,19	80,61	80,61	4,24	24,10	24,10	136,89	136,89	136,89
$K_{III}+1$	5,70	1,70	0	1,55	—11,87	—3,55	0	—3,22	—1,06	0	—0,96	0	0	0,87
Σ	—16,43	—23,22	—140,46	—25,03	65,10	24,17	148,58	154,11	82,43	133,96	181,83	515,13	454,62	

სქემა 4.9.9.6

№№	სტრიქონების აღნიშვნა	a ξ_{III}	b η_{III}	c ξ_{II}	d η_{II}	v	S'	φ	
1	a	110,13	37,59	—67,24	—35,51	—202,56	—157,62	6,89	$\varphi_1 = a_{19\cdot 10}$
2	E_1	—1	—0,34132	0,61055	0,32244	1,83928	1,43122	—0,06	
3		$\xi_{III}=0,65590$	—0,22675	—0,69014	—0,26649	1,83928			
1	b		117,57	—16,43	—23,22	—140,46	—25,03	2,06	$\varphi_2 = b_{18\cdot 0}$
2	$E_1 \times a_2$		— 12,83	22,95	12,12	69,14	53,80	—2,26	
3	$b\ 1$		104,64	6,52	—11,10	— 71,32	28,77	—0,20	
4	E_2		— 1	—0,06231	0,10608	0,68157	—0,27494	0	
5			$\eta_{III}=0,66433$	0,07043	—0,08767	0,68157			
1	c			65,10	24,17	148,58	154,11	—6,89	$\varphi_3 = a_{10\cdot 18}$
2	$E_1 \times a_3$			—41,05	—21,68	—123,67	— 96,24	4,03	
3	$E_2 \times b \cdot 1_3$			— 0,41	0,69	4,44	— 1,79	0	
4	$c \cdot 2$			23,64	3,18	29,35	56,08	—2,86	
5	E_3			— 1	—0,13452	—1,24154	—2,37225	0,12	
6				$\xi_{II}=—1,13036$	0,11118	—1,24154			
1	d				82,43	133,96	181,83	—2,06	$\varphi_4 = b_{12\cdot 18}$
2	$E_1 \times a_4$				—11,43	— 65,31	— 50,82	2,13	
3	$E_2 \times b \cdot 1_4$				— 1,18	— 7,57	3,04	0	
4	$E_3 \times c \cdot 2_4$				— 0,43	— 3,95	— 7,54	0,28	
5	$d \cdot 3$				69,39	57,35	126,51	0,35	
6	E_4				— 1	—0,82649	—1,82317	0,01	
7					$\eta_{II}=—0,82649$				
						515,13	454,62	0	
						—372,56	—289,91	0,41	
						— 48,61	19,61	0	
						— 36,44	— 69,63	0,34	
						— 47,40	—104,56	0	
						10,12	10,13	0,75	
						$[Pvv \cdot 4]$	$[PvS \cdot 4]$	$\frac{1}{P_{II-III}}$	

სქემა 4.9.9.7

პუნქტი	განტოლების №№	(Z)	a $\xi_{III}=$ $=0,656$	b $\eta_{III}=$ $=0,664$	c $\xi_{II}=-$ $-1,130$	d $\eta_{II}=-$ $-0,826$	v	ε	ε^2
ბორი	1	—1 —0,63	0 0	0 0	0 0	0 0	1,39	0,76	0,58
	2	—1 —0,63	—3,16 —2,07	3,33 2,21	0 0	0 0	1,13	0,64	0,41
	3	—1 —0,63	0 0	0 0	—3,01 3,40	1,25 —1,03	—2,66	—0,92	0,85
	4	—1 —0,63	0 0	0 0	0 0	0 0	0,14	—0,49	0,24
		$(Z_Б)=\dfrac{-2,07\quad+2,21\quad+3,40\quad-1,03}{4}=0,63$							
აზოვი	5	—1 +0,03	0 0	0 0	—2,69 3,04	—2,79 2,30	—5,49	—0,12	0,01
	6	—1 +0,03	—1,97 —1,29	—6,23 —4,14	0 0	0 0	5,54	0,14	0,02
	7	—1 +0,03	0 0	0 0	0 0	0 0	—0,05	—0,02	0,00
		$(Z_A)=\dfrac{-1,29\quad-4,14\quad+3,04\quad+2,30}{3}=-0,03$							
II	8	—1 —4,95	0 0	0 0	—1,51 1,71	6,04 —4,99	7,17	—1,06	1,12
	9	—1 —4,95	0 0	0 0	—3,01 3,40	1,25 —1,03	3,69	1,11	1,23
	10	—1 —4,95	6,89 4,52	2,06 1,37	—6,89 7,79	—2,06 1,70	—10,66	—0,23	0,05
	11	—1 —4,95	0 0	0 0	—2,69 3,04	—2,79 2,30	— 0,20	0,19	0,04
		$(Z_{II})=\dfrac{4,52\quad+1,37\quad+15,94\quad-2,02}{4}=4,95$							
ცენტ-რი	12	—1 —0,26	0 0	0 0	0 0	0 0	0,76	0,50	0,25
	13	—1 —0,26	2,00 1,31	4,15 2,76	0 0	0 0	—5,31	—1,50	2,25
	14	—1 —0,26	0 0	0 0	—1,51 1,71	6,04 —4,99	4,54	1,00	1,00
		$(Z_{II})=\dfrac{1,31\quad+2,76\quad+1,71\quad-4,99}{3}=0,26$							
III	15	—1 —3,54	2,00 1,31	4,15 2,76	0 0	0 0	0,68	1,21	1,46
	16	—1 —3,54	—3,16 —2,07	3,33 2,21	0 0	0 0	2,54	—0,86	0,74
	17	—1 —3,54	—1,97 —1,29	—6,23 —4,14	0 0	0 0	8,49	—0,48	0,23
	18	—1 —3,54	6,89 4,52	2,06 1,37	—6,89 7,79	—2,06 1,70	—11,70	0,14	0,02
		$(Z_{III})=\dfrac{2,47\quad+2,20\quad+7,79\quad+1,70}{4}=3,54$							

ს ქ ე მ ა 4.9.9.8

პუნქტი	მიმართება	მიახლოებითი ორიენტირებული მიმართულება R (3) სქემიდან			(Z) (7) სქემიდან	ε (7) სქემიდან	გაწონასწორებული დირექციული კუთხე $\alpha^{\circ}=R+(Z)+\varepsilon$ (4.9.9.39) ფორმ.			გაზომილი მიმართულება N (3) ცხრილიდან			$e_o=\varepsilon_1-e_1$	გაწონასწორებული მიმართულება $N+e_o$		
		°	′	″			°	′	″	°	′	″		°	′	″
ბორი	1—7	18	51	44,65	0,63	0,76	18	51	46,04	0	00	00	0	0	00	00
	2—16	43	30	52,95	0,63	0,64	43	30	54,22	24	39	08,30	—0,12	24	39	08,18
	3—9	67	21	21,75	0,63	—0,92	67	21	21,46	48	29	31,10	—1,68	48	29	35,40
	4—12	98	46	23,45	0,63	—0,49	98	46	23,59	79	54	38,8	—1,25	79	54	37,55
აზოვი	5—11	135	59	42,99	—0,03	—0,12	135	59	42,84	0	0	0	0	0	0	00
	6—17	162	27	09,49	—0,03	0,14	162	27	09,60	26	27	26,5	0,26	26	27	26,76
	7—1	198	51	46,09	—0,03	—0,02	198	51	46,04	62	52	03,1	0,10	62	52	03,20
II	8—14	194	00	37,90	4,96	—1,06	194	00	41,80	0	00	00	0	0	00	00
	9—3	247	21	15,40	4,96	1,10	247	21	2',46	53	20	37,50	2,16	53	20	39,66
	10—18	286	37	48,60	4,96	—0,24	286	37	53,32	92	37	10,70	0,82	92	37	11,52
	11—5	315	59	37,70	4,96	0,18	315	59	42,84	121	58	59,80	1,24	121	59	01,04
ცენტრი	12—4	278	46	22,83	0,27	0,49	278	46	23,59	0	00	00	0	0	00	00
	13—15	334	15	15,83	0,27	—1,51	334	15	14,59	55	28	53,00	—2,00	55	28	51,00
	14—8	14	00	40,53	0,27	1,00	14	00	41,80	95	14	17,70	0,51	95	14	18,21
III	15—13	223	30	51,54	3,54	—0,86	223	30	54,22	0	00	0	0	0	00	00
	16—2	342	27	06,54	3,54	—0,48	342	27	09,60	118	56	15,00	0,38	118	56	15,38
	17—6	106	37	49,64	3,54	0,14	106	37	53,32	243	06	58,10	1,00	243	06	59,10
	18—10	154	15	09,84	3,54	1,21	154	15	14,59	230	44	18,30	2,07	290	44	20,37

ს ქ ე მ ა 4.9.9 .9

მიმართება	$X_н$ $X_к$ $\Delta X=X_к-X_н$	$Y_н$ $Y_к$ $\Delta Y=Y_к-Y_н$	$\lg\Delta Y$ $\lg\Delta X$ $\lg\ tg\alpha$ α
ბორი—III	11 801,160 15 060,406 3 259,246	55 809,620 58 904,156 3 094,536	3.490 5955 3.513 1171 9.977 4784 34°30′54″,20
ბორი—II	11 801, 160 14 239, 087 2 437, 927	55 809, 620 61 653, 698 5 844, 078	3.766 7160 3.387 0207 0.379 6953 67°21′21″,45
აზოვი—II	18 071, 710 14 239, 087 —3 832, 623	57 951, 960 61 653, 698 3 701, 738	3.568 4057 3.583 4961*n* 9.984 9096*n* 135°59′42″82
აზოვი—III	18 071, 710 15 060, 406 +3 011, 304	57 951, 960 58 904, 156 952, 196	2.978 7264 3.478 7546*n* 9.499 9718*n* 162°27′09″60
II—III	14 239, 087 15 060, 406 821, 319	61 653, 698 58 904, 156 +2 749, 542	3.439 2603*n* 2.914 5119 0.524 7884*n* 286°37′53″, 32
II—ცენტრი	14 239, 087 11 023, 100 +3 215, 987	61 653, 698 60 851, 170 +802, 528	2.904 4602 *n* 3.507 3149 *n* 9.397 1460 194°00′41″, 82
III—ცენტრი	15 060, 406 11 023, 100 + 4 037, 306	58 904, 156 60 851, 170 1 947, 014	3.289 3690 3.606 0916 *n* 9.683 2774 154°15′ 14″, 57

I. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

თანახმად (41) ფორმულისა:

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\varepsilon\varepsilon]}{n-q}}=\pm\sqrt{\frac{10,50}{18-9}}=\pm 1'',08,$$

სადაც $n=18$ არის ყველა განაზომი მიმართულების რაოდენობა,
$q=9$ — ნორმალური განტოლებების საერთო რაოდენობა გამოთვლილი (30) ფორმულით.

II. ჩასასმელი II პუნქტის კოორდინატების საშუალო კვადრატული შეცდომები

თანახმად (42) ფორმულებისა:

$$M_{X_{II}}=\eta\sqrt{\frac{1}{P_{X_{II}}}}=\pm 1'',08\sqrt{\frac{69,81}{23,64\times 69,399}}=\pm 0,22 \text{ მ};$$

$$M_{Y_{II}}=\eta\sqrt{\frac{1}{P_{Y_{II}}}}=\pm 1'',08\sqrt{\frac{1}{69,39}}=\pm 0,13 \text{ მ},$$

სადაც (93) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{1}{P_{Y_{II}}}=\frac{1}{[Pdd\cdot 3]}=\frac{1}{69,39};\ \frac{1}{P_{X_{II}}}=\frac{[Pdd\cdot 2]}{[Pcc\cdot 2][Pdd\cdot 3]}=\frac{69,81}{23,60\times 69,39}.$$

$$M^2=M^2_{X_{II}}+M^2_{Y_{II}}=0,065.$$

III. სიზუსტის შეფასება დამატებით II პუნქტისათვის პოდერის აგებით

თანახმად (94) ფორმულებისა:

$$tg2\Theta=\frac{-2[Pcd\cdot 2]}{-[Pcc\cdot 2]-[Pcd\cdot 2]}=\frac{-2\times 3,17}{-(23,60-69,81)}=\frac{-6,34}{+46,21}=0,13720$$

$$2\Theta=360^\circ-7^\circ 49'=352^\circ 11',\ \ \Theta=176^\circ 06';$$

$$A^2=\eta^2\frac{[Pcc\cdot 2]+[Pdd\cdot 2]+\omega}{2D}=(1,08)^2\frac{23,6+69,8+46}{2\times 1640}=0,049;$$

$$A=\pm 0,23_{\text{მმ}}=\pm 23 \text{ მმ};$$

$$B^2=\eta^2\frac{[Pcc\cdot 2]+[Pdd\cdot 2]-\omega}{2D}=(1,08)^2\frac{23,6+69,8-46}{2\times 1640}=0,017;$$

$$B=\pm 0,12_{\text{მმ}}=\pm 12 \text{ მმ.},$$

$$\text{სადაც } \omega=\frac{-2[Pcd\cdot 2]}{sin 2\Theta}=\frac{-2\times 3,17}{sin\ 352^\circ 11'}=46;$$

$$D=[Pcc\cdot 2][Pdd\cdot 2]-[Pcd\cdot 2]^2=23,60\times 69,81-(3,17)^2=1640;$$

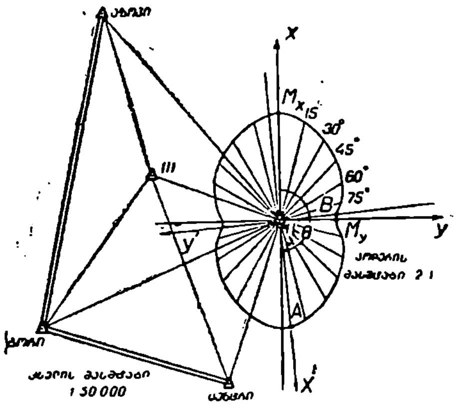
$$A^2+B^2=0,066.$$

პოდერის P რადიუს-ვექტორს საზღვრავენ (91) ფორმულის შესაბამისი (10) სქემის საშუალებით:

ს ქ ე მ ა 4.9.9.10

ϑ გრადუსებში	A^2	$\cos\vartheta$	$\cos^2\vartheta$	$A^2\cos^2\vartheta$	B^2	$\sin\vartheta$	$\sin^2\vartheta$	$B^2\sin^2\vartheta$	P^2	P, დცმ	P, მმ
15	0,049	0,966	0,933	0,046	0,017	0,259	0,067	0,001	0,047	0,22	22
30	0,049	0,866	0,750	0,037	0,017	0,500	0,250	0,004	0,041	0,20	20
45	0,049	0,707	0,500	0,025	0,017	0,707	0,500	0,008	0,033	0,18	18
60	0,049	0,500	0,250	0,012	0,017	0,866	0,750	0,013	0,025	0,16	16
75	0,049	0,259	0,067	0,003	0,017	0,966	0,933	0,016	0,019	0,14	14

მიღებული მონაცემებით ვაგებთ პ ო დ ე რ ს (ნახ. 6)



ნახ. 4.9.9.6.

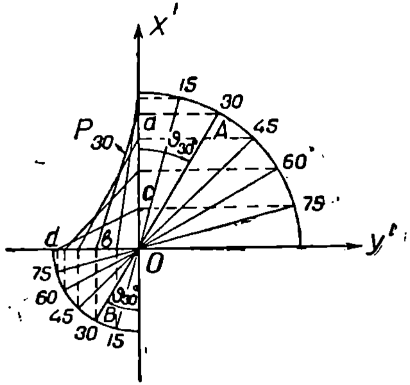
პოდერის P რადიუს-ვექტორის განსაზღვრა შეიძლება გრაფიკულად, რისთვისაც X^I და Y^I ღერძებს პირველ კვადრანტში გადავკვეთავთ A რადიუსის შესაბამისი რკალით (ნახ. 7) და მესამე კვადრანტში კი B რადიუსის რკალით. შემდეგ, წინასწარ მივიღებთ ϑ კუთხისათვის გარკვეულ ინტერვალს, ვთქვათ 15° და მის ოდენობებს გადავზომავთ ორივე კვადრანტში ჩახაზულ რკალებზე $+X^I$-დან $+Y^I$ და $-X^I$-დან $-Y^I$ მიმართებით. I კვადრანტში X^I ღერძის დადებით მიმართებაზე დაგეგმილებული ხსენებული წერტილებისა და II კვადრანტში Y^I ღერძის უარყოფით მიმართებაზე დაგეგმილებული წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთები იქნება განხილული პოდერის $P_{15°}$, $P_{30°}$, $P_{45°}$, $P_{60°}$, $P_{75°}$ რადიუს-ვექტორები. მაგალითად, I კვადრანტში $\vartheta = 30°$. შესაბამისი წერტილის პროექცია $+X^I$ ღერძზე იქნება $\overline{Oa}$ (ნახ. 7), ხოლო II კვადრანტში $-Y^I$ ღერძზე $-\overline{Ob}$, $\overline{ab}$ კი არის მათი შესაბამისი $P_{30°}$ პოდერის რადიუს-ვექტორი. ასევე $\vartheta = 75°$

შესაბამისი პოდერის რადიუს-ვექტორი იქნება $P_{75^\circ}=cd$. მაგალითად, ნახაზის მიხედვით:

$$\overline{Oa}=A\cos\vartheta,$$
$$\overline{Ob}=B\sin\vartheta,$$

ანუ

$$\overline{ab}^2=\overline{Oa}^2+\overline{Ob}^2=A^2\cos^2\vartheta+B^2\sin^2\vartheta=A^2\cos^2 30^\circ+B^2\sin^2 30^\circ=P^2_{30^\circ}.$$



ნახ. 4.9.9.7.

მაშასადამე, $\overline{ab}=P_{30^\circ}$. ასეთი წესით განისაზღვრება ϑ კუთხის ყოველი ოდენობის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი. ყველა კვადრანტში ანალოგიური მოქმედებებით მივიღებთ შეკრულ მრუდს პ ო დ ე რ ი ს სახით.

IV. ჩასასმელი პუნქტების II—III გვერდების დირექციული კუთხის, როგორც წონითი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა

წონითი ფუნქცია იქნება ასეთი სახის:

$$\alpha_{\mathrm{II-III}}=\mathrm{arc}\,tg\frac{Y_{\mathrm{III}}-Y_{\mathrm{II}}}{X_{\mathrm{III}}-X_{\mathrm{II}}}.$$

წონითი ფუნქციის კოეფიციენტები (2) სქემით იქნება:

$$\varphi_1=a_{10\cdot18}=6{,}89;\quad \varphi_2=b_{10\cdot18}=2{,}06;$$

$$\varphi_3=-a_{10\cdot18}=-6{,}89;\quad \varphi_4=-b_{10\cdot18}=-2{,}06.$$

(6) სქემაში φ სვეტში გამოთვლილია სათანადო შებრუნებული წონა (80) ფორმულის შესაბამისად:

$$m_{\alpha_{\mathrm{II-III}}}=\eta\sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{\mathrm{II-III}}}}}=\pm 1{,}''08\sqrt{0{,}69}=\pm 0{,}''9.$$

(a) და (b) კოეფიციენტები, გამოთვლილი (a)=20,6265 sin r, (b)=20,6265 cos r ფორმულებით ცხრილური კუთხის 10 ინტერვალების შესაბამისად ერთი კილომეტრი მანძილისათვის

r	(*a*)	(*b*)		*r*	(*a*)	(*b*)	
0° 0′	0,00	20,63	90° 0′	7° 0′	2,51	20,47	83° 0′
10	0,06	20,63	50	10	2,57	20,47	50
20	0,12	20,63	40	20	2,63	20,46	40
30	0,18	20,63	30	30	2,69	20,45	30
40	0,24	20,63	20	40	2,75	20,44	20
50	0,30	20,62	10	50	2,81	20,43	10
1° 0′	0,36	20,62	89° 0′	8° 0′	2,87	20,43	82° 0′
10	0,42	20,62	50	10	2,93	20,42	50
20	0,48	20,62	40	20	2,99	20,41	40
30	0,54	20,62	30	30	3,05	20,40	30
40	0,60	20,62	20	40	3,11	20,39	20
50	0,66	20,62	10	50	3,17	20,38	10
2° 0′	0,72	20,61	88° 0′	9° 0′	3,23	20,37	81° 0′
10	0,78	20,61	50	10	3,29	20,36	50
20	0,84	20,61	40	20	3,35	20,35	40
30	0,90	20,61	30	30	3,40	20,34	30
40	0,96	20,60	20	40	3,46	20,33	20
50	1,02	20,60	10	50	3,52	20,32	10
3° 0′	1,08	20,60	87° 0′	10° 0′	3,58	20,31	80° 0′
10	1,14	20,59	50	10	3,64	20,30	50
20	1,20	20,59	40	20	3,70	20,29	40
30	1,26	20,59	30	30	3,75	20,28	30
40	1,32	20,58	20	40	3,82	20,27	20
50	1,38	20,58	10	50	3,88	20,26	10
4° 0′	1,44	20,58	86° 0′	11° 0′	3,94	20,25	79° 0′
10	1,50	20,57	50	10	3,99	20,24	50
20	1,56	20,57	40	20	4,05	20,22	40
30	1,62	20,56	30	30	4,11	20,21	30
40	1,68	20,56	20	40	4,17	20,20	20
50	1,74	20,55	10	50	4,23	20,19	10
5° 0′	1,80	20,55	85° 0′	12° 0′	4,29	20,18	78° 0′
10	1,86	20,54	50	10	4,35	20,16	50
20	1,92	20,54	40	20	4,41	20,15	40
30	1,98	20,53	30	30	4,46	20,14	30
40	2,04	20,53	20	40	4,52	20,12	20
50	2,10	20,52	10	50	4,58	20,11	10
6° 0′	2,16	20,51	84° 0′	13° 0′	4,64	20,10	77° 0′
10	2,22	20,51	50	10	4,70	20,08	50
20	2,28	20,50	40	20	4,76	20,07	40
30	2,33	20,49	30	30	4,82	20,06	30
40	2,39	20,49	20	40	4,87	20,04	20
50	2,45	20,48	10	50	4,93	20,03	10
7° 0′	2,51	20,47	83° 0′	14° 0′	4,99	20,01	76° 0′
	(*b*)	(*a*)	(*r*)		(*b*)	(*a*)	(*r*)

r	(a)	(b)		r	(a)	(b)	
14° 0′	4,99	20,01	76° 0′	22° 0′	7,73	19,12	68° 0′
10	5,05	20,00	50	10	7,78	19,10	50
20	5,11	19,98	40	20	7,84	19,08	40
30	5,16	19,97	30	30	7,89	19,06	30
40	5,22	19,95	20	40	7,95	19,03	20
50	5,28	19,94	10	50	8,00	19,01	10
15° 0′	5,34	19,92	75° 0′	23° 0′	8,06	18,99	67° 0′
10	5,40	19,91	50	10	8,11	18,96	50
20	5,45	19,89	40	20	8,17	18,94	40
30	5,51	19,88	30	30	8,22	18,92	30
40	5,57	19,86	20	40	8,28	18,89	20
50	5,63	19,84	10	50	8,33	18,87	10
16° 0′	5,69	19,83	74° 0′	24° 0′	8,39	18,84	66° 0′
10	5,74	19,81	50	10	8,44	18,82	50
20	5,80	19,79	40	20	8,50	18,79	40
30	5,86	19,78	30	30	8,55	18,77	30
40	5,92	19,76	20	40	8,61	18,74	20
50	5,97	19,74	10	50	8,66	18,72	10
17° 0′	6,03	19,73	73° 0′	25° 0′	8,72	18,69	65° 0′
10	6,09	19,71	50	10	8,77	18,67	50
20	6,15	19,69	40	20	8,83	18,64	40
30	6,20	19,67	30	30	8,88	18,62	30
40	6,26	19,65	20	40	8,93	18,59	20
50	6,32	19,64	10	50	8,99	18,57	10
18° 0′	6,37	19,62	72° 0′	26° 0′	9,04	18,54	64° 0′
10	6,43	19,60	50	10	9,10	18,51	50
20	6,49	19,58	40	20	9,15	18,49	40
30	6,54	19,56	30	30	9,20	18,46	30
40	6,60	19,54	20	40	9,26	18,43	20
50	6,66	19,52	10	50	9,31	18,41	10
19° 0′	6,72	19,50	71° 0′	27° 0′	9,36	18,38	63° 0′
10	6,77	19,48	50	10	9,42	18,35	50
20	6,83	19,46	40	20	9,47	18,32	40
30	6,89	19,44	30	30	9,52	18,30	30
40	6,94	19,42	20	40	9,58	18,27	20
50	7,00	19,40	10	50	9,63	18,24	10
20° 0′	7,05	19,38	70° 0′	28° 0′	9,68	18,21	62° 0′
10	7,11	19,36	50	10	9,74	18,18	50
20	7,17	19,34	40	20	9,79	18,16	40
30	7,22	19,32	30	30	9,84	18,13	30
40	7,28	19,30	20	40	9,89	18,10	20
50	7,34	19,28	10	50	9,95	18,07	10
21° 0′	7,39	19,26	69° 0′	29° 0′	10,00	18,04	61° 0′
10	7,45	19,23	50	10	10,05	18,01	50
20	7,50	19,21	40	20	10,10	17,98	40
30	7,56	19,19	30	30	10,16	17,95	30
40	7,62	19,17	20	40	10,21	17,92	20
50	7,67	19,15	10	50	10,26	17,89	10
22° 0′	7,73	19,12	68° 0′	30° 0′	10,31	17,86	60° 0′
	(b)	(a)	(r)		(b)	(a)	(r)

r	(a)	(b)		r	(a)	(b)	
30° 0′	10,31	17,86	60° 0′	38° 0′	12,70	16,25	52° 0′
10	10,37	17,83	50	10	12,75	16,22	50
20	10,42	17,80	40	20	12,79	16,18	40
30	10,47	17,77	30	30	12,84	16,14	30
40	10,52	17,74	20	40	12,89	16,10	20
50	10,57	17,71	10	50	12,93	16,07	10
31° 0′	10,62	17,68	59° 0′	39° 0′	12,98	16,03	51° 0′
10	10,67	17,65	50	10	13,03	15,99	50
20	10,73	17,62	40	20	13,07	15,95	40
30	10,78	17,59	30	30	13,12	15,92	30
40	10,83	17,56	20	40	13,17	15,88	20
50	10,88	17,52	10	50	13,21	15,84	10
32° 0′	10,93	17,49	58° 0′	40° 0′	13,26	15,80	50° 0′
10	10,98	17,46	50	10	13,30	15,76	50
20	11,03	17,43	40	20	13,35	15,72	40
30	11,08	17,40	30	30	13,40	15,68	30
40	11,13	17,37	20	40	13,44	15,65	20
50	11,18	17,33	10	50	13,49	15,61	10
33° 0′	11,23	17,30	57° 0′	41° 0′	13,53	15,57	49° 0′
10	11,28	17,27	50	10	13,58	15,53	50
20	11,33	17,23	40	20	13,62	15,49	40
30	11,38	17,20	30	30	13,67	15,45	30
40	11,43	17,17	20	40	13,71	15,41	20
50	11,48	17,13	10	50	13,76	15,37	10
34° 0′	11,53	17,10	56° 0′	42° 0′	13,80	15,33	48° 0′
10	11,58	17,07	50	10	13,85	15,29	50
20	11,63	17,03	40	20	13,89	15,25	40
30	11,68	17,00	30	30	13,94	15,21	30
40	11,73	16,96	20	40	13,98	15,17	20
50	11,78	16,93	10	50	14,02	15,13	10
35° 0′	11,83	16,90	55° 0′	43° 0′	14,07	15,09	47° 0′
10	11,88	16,86	50	10	14,11	15,04	50
20	11,93	16,83	40	20	14,15	15,00	40
30	11,98	16,79	30	30	14,20	14,96	30
40	12,03	16,76	20	40	14,24	14,92	20
50	12,08	16,72	10	50	14,28	14,88	10
36° 0′	12,12	16,69	54° 0′	44° 0′	14,33	14,84	46° 0′
10	12,17	16,65	50	10	14,37	14,80	50
20	12,22	16,62	40	20	14,41	14,75	40
30	12,27	16,58	30	30	14,46	14,71	30
40	12,32	16,54	20	40	14,50	14,67	20
50	12,37	16,51	10	50	14,54	14,63	10
37° 0′	12,41	16,47	53° 0′	45° 0′	14,59	14,59	45° 0′
10	12,46	16,44	50				
20	12,51	16,40	40				
30	12,56	16,36	30				
40	12,60	16,33	20				
50	12,65	16,29	10				
38° 0′	12,70	16,25	52° 0′				
	(b)	(a)	(r)		(b)	(a)	(r)

a და b კოეფიციენტების გამოთვლის საკონტროლო A სიდიდის ოდენობები

$$A = \frac{425.45}{S^2 \text{ კმ}} = a^2 + b^2$$

	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1,0	425	417	409	401	393	386	379	372	365	358
1,1	352	345	339	333	327	322	316	311	306	300
1,2	295	291	286	281	277	272	268	264	260	256
1,3	252	248	244	241	237	233	230	227	223	220
1,4	217	214	211	208	205	202	200	196	194	192
1,5	189	187	184	182	179	177	175	173	170	168
1,6	166	164	162	160	158	156	154	153	151	149
1,7	147	145	144	142	141	139	137	136	134	133
1,8	131	130	128	127	126	124	123	122	120	119
1,9	118	117	115	114	113	112	111	110	109	107
2,0	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97
2,1	96	96	95	94	93	92	91	90	89	89
2,2	88	87	86	86	85	84	83	83	82	81
2,3	80	80	79	78	78	77	76	76	75	74
2,4	74	73	73	72	72	71	70	70	69	69
2,5	68,1	67,5	67,0	66,5	66,0	65,4	65,0	64,4	63,9	63,4
2,6	62,9	62,5	62,0	61,5	61,0	60,6	60,1	59,7	59,2	58,8
2,7	58,4	57,9	57,5	57,1	56,7	56,3	55,8	55,4	55,0	54,6
2,8	54,3	53,9	53,5	53,1	52,7	52,4	52,0	51,7	51,3	50,9
2,9	50,6	50,3	49,9	49,6	49,2	48,9	48,6	48,2	47,9	47,6
3,0	47,3	47,0	46,6	46,3	46,0	45,7	45,4	45,1	44,9	44,6
3,1	44,3	44,0	43,7	43,4	43,2	42,9	42,6	42,3	42,1	41,8
3,2	41,5	41,3	41,0	40,8	40,5	40,3	40,0	39,8	39,5	39,3
3,3	39,1	38,8	38,6	38,4	38,1	37,9	37,7	37,5	37,2	37,0
3,4	36,8	36,6	36,4	36,2	36,0	35,7	35,5	35,3	35,1	34,9
3,5	34,7	34,5	34,3	34,1	33,9	33,8	33,6	33,4	33,2	33,0
3,6	32,8	32,6	32,5	32,3	32,1	31,9	31,7	31,6	31,4	31,2
3,7	31,1	30,9	30,7	30,6	30,4	30,3	30,1	29,9	29,8	29,6
3,8	29,5	29,3	29,2	29,0	28,9	28,7	28,6	28,4	28,3	28,1
3,9	28,0	27,8	27,7	27,5	27,4	27,3	27,1	27,0	26,9	26,7
4,0	26,6	26,5	26,3	26,2	26,1	25,9	25,8	25,7	25,6	25,4
4,1	25,3	25,2	25,1	24,9	24,8	24,7	24,6	24,5	24,3	24,2
4,2	24,1	24,0	23,9	23,8	23,7	23,6	23,4	23,3	23,2	23,1
4,3	23,0	22,9	22,8	22,7	22,6	22,5	22,4	22,3	22,2	22,1
4,4	22,0	21,9	21,8	21,7	21,6	21,5	21,4	21,3	21,2	21,1
4,5	21,0	20,9	20,8	20,7	20,6	20,6	20,5	20,4	20,3	20,2
4,6	20,1	20,0	19,9	19,8	19,8	19,7	19,6	19,5	19,4	19,8
4,7	19,3	19,2	19,1	19,0	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5
4,8	18,5	18,4	18,3	18,2	18,2	18,1	18,0	17,9	17,9	17,8
4,9	17,7	17,6	17,6	17,5	17,4	17,4	17,3	17,2	17,2	17,1
5,0	17,0	17,0	16,9	16,9	16,8	16,7	16,7	16,6	16,5	16,4
5,1	16,4	16,3	16,2	16,2	16,1	16,0	16,0	15,9	15,9	15,8
5,2	15,7	15,7	15,6	15,6	15,5	15,4	15,4	15,3	15,3	15,2
5,3	15,1	15,1	15,0	15,0	14,9	14,9	14,8	14,8	14,7	14,6
5,4	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3	14,3	14,2	14,2	14,1
5,5	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,8	13,8	13,7	13,7	13,6
5,6	13,6	13,5	13,5	13,4	13,4	13,3	13,3	13,2	13,2	13,1
5,7	13,1	13,0	13,0	13,0	12,9	12,9	12,8	12,8	12,7	12,7
5,8	12,6	12,6	12,6	12,5	12,5	12,4	12,4	12,3	12,3	12,3
5,9	12,2	12,2	12,1	12,1	12,1	12,0	12,0	11,9	11,9	11,9
6,0	11,8	11,8	11,7	11,7	11,7	11,6	11,6	11,5	11,5	11,5

მოკლე ისტორიული ცნობები განაზომთა მათემატიკური დამუშავების შესახებ

სხვადასხვა სამეცნიერო დარგის მოთხოვნათა შესაბამის დაკვირვებებსა და გაზომვებს ხანგრძლივი ისტორია აქვს. დაკვირვებებისა და გაზომვების შესრულების ხარისხი ბუნებრივადაა დაკავშირებული მათდამი თანხლებული შეცდომების ყოველმხრივ შესწავლასთან. მიუხედავად აღნიშნულისა, ვერ ვნახავთ გაზომვებთან დაკავშირებულ ვერც ერთ ძველ შრომას, რომელშიაც არამცთუ საგანგებოდ, არამედ ზერელედ მაინც იყოს განხილული საკითხი განაზომთა შეცდომების შესახებ. მაგალითად, ახლაც გვხვდება ისეთი სახელმძღვანელო გეოდეზიაში, რომელშიაც სრულიად არ არის განხილული განაზომთა შეცდომების საკითხები და ზოგიერთში კი აღნიშნული საკითხების შესახებ მხოლოდ გაურკვეველი, ბუნდოვანი აზრებია გამოთქმული. აღსანიშნავია, რომ ძველად გამოცემული ინსტრუქციები გეოდეზისტს ფიცის სახით ავალებდა შეესრულებინა გაზომვები „სრულიად ზუსტად". გაზომვების საქმეში ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანად ითვლებოდა განაზომთა ზღვრული შეცდომების ემპირიული დაწესება და შემოღება საშუალო შეცდომის ცნებისა, რომელსაც ხშირად არასწორად ითვლიდნენ. შემდეგი მიღწევა მდგომარეობდა იმაში, რომ განაზომთა სიზუსტის ყოველნაირი განსაზღვრა გამოიხატებოდა მხოლოდ ალიქვოტურად ან პროცენტებში, ისიც არასწორად. მაგალითად, ამბობდნენ, რომ ჯაჭვით გაზომვის საშუალო შეცდომა ტოლია 1 : 1000, ნიველობის სიზუსტე ტოლია სიგრძის 1 : 500000 ან კიდევ ფართობის განსაზღვრის დასაშვები სიზუსტე ტოლია ამ ფართობის 1/2%-სა და სხვ. გეოდეზიაში გაბატონებული იყო შეცდომების შენიღბვა, რაც თანდათანობით აღმოიფხვრა განაზომთა შეცდომების და საერთოდ, განაზომთა მთელი სისტემის შემფასებელი არა ზოგადი, მაგრამ ნაწილობრივ დამაკმაყოფილებელი და, ზოგ შემთხვევაში სრულიად დამაკმაყოფილებელი მეთოდების ჩამოყალიბების გამო. მიუხედავად იმისა, რომ დროთა განმავლობაში განაზომთა შეცდომების თეორიაში იყო დიდი მიღწევები, განაზომთა როგორც შეფასების, ისე გაწონასწორების მხრივ, მაინც არ არსებობდა მეცნიერულად ჩამოყალიბებული ზოგადი მეთოდოლოგია, რომელიც ნებისმიერ შემთხვევაში გამოსადეგი იქნებოდა როგორც განაზომთა სიზუსტის შეფასების, ისე მათი გაწონასწორებისა და გაწონასწორებული სიდიდეების შეფასებისათვის. ხშირად უხდებოდათ შესრულებული სამუშაოების დაწუნება, მათი ხელმეორედ გადაკეთება, სხვადასხვა ცდისა და ძიების წარმოება და სხვ. იმ დროიდან არის შემონახული მოსწრებული თქმულება: „თუ საქმე არ გამოდის, მაშინ აგზავნიან გეოდეზისტს ველზე და აიძულებენ ზომოს კუთხე მანამ, სანამ ეს კუთხე არ გაიზრდება ან შემცირდება 3″-ით".

ზემოხსენებული ხარვეზი სრულიად შეივსო დაკვირვებებისა და გაზომვების ზოგადი თეორიის ჩამოყალიბების შემდეგ, რომელსაც ეწოდება უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა მ ე თ ო დ ი. ეს მეთოდი გამოსადეგია ნებისმიერი სახის განაზომთა როგორც შეფასების, ისე გაწონასწორებისა და გაწონასწორებული სიდიდეების სიზუსტის მკაცრად შეფასებისათვის. ამ მეთოდის ზოგადობამ და სიზუსტემ განაზომთა შეცდომების თეორიას მისცა მეცნიერულად ჩამოყალიბებული სახე. ამიტომ უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა მ ე თ ო დ ი ს წარმოშობის ეპოქას თვლიან შეცდომათა თეორიის, როგორც სამეცნიერო დარგის დასაბამად.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის წინამორბედად უნდა ჩაითვალოს XVIII საუკუნის მეცნიერთა რ. კ ო ტ ს ი ს, ლ. ე ი ლ ე რ ი ს, ტ. ს ი მ პ ს ო ნ ი ს, რ. ბ ო ს კ ო ვ ი ჩ ი ს, ი. ლ ა მ ბ ე რ ტ ი ს, ჟ. ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს, პ. ლ ა პ ლ ა ს ი ს თ ე ო რ ი ე ბ ი. მაგალითად, 1722 წელს კემბრიჯში გამოვიდა რ. კ ო ტ ს ი ს შრომა, რომელშიც პირველადაა მოყვანილი განაზომთა წ ო ნ ე ბ ი ს ცნება; 1748 წელს ლ. ეილერი შეეცადა ამოეხსნა განაზომთა მიზანშეწონილი კომბინაციის ამოცანა; 1755 წელს ტ. სიმპსონის მიერ დადგენილ იქნა ს ა შ უ ა ლ ო ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი ს ცნება; იმავე წელს იტალიელი ასტრონომის რ. ბოსკოვიჩის მიერ შემოღებულ იქნა წესი განაზომთა და გამონათვალთა სხვაობების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ჯამის მინიმუმის პირობის დაცვით წრფივ ტოლობათა ისეთი სისტემის ამოხსნისა, რომლის ტოლობათა რაოდენობა მეტია უცნობთა რაოდენობაზე; 1765 წელს გამოცემულ შრომაში ი. ლამბერტი უკვე ასხვავებს სისტემატურ და შემთხვევით შეცდომებს. შემთხვევით (უცილობელ) შეცდომათა თვისებებისა და მათი წარმოშობის „შესაძლებლობის“ მრუდის სახის ი. ლამბერტისეული გაგება, საკმაოდ ახლოა შემთხვევით შეცდომათა თვისებების და მათი ალბათობის მრუდის თანამედროვე გაგებასთან; 1770 წელს ჟ. ლაგრანჟმა პირველმა გამოიყენა ალბათობის თეორიის მეთოდები განაზომთა შემთხვევითი შეცდომების ანალიზისათვის; 1789 წელს პ. ლაპლასი აკრიტიკებდა რა რ. ბოსკოვიჩის მეთოდს, როგორც არასაკმარისს, დასმული ამოცანის ერთსახად გადაწყვეტის შეუძლებლობის გამო, ლაპლასმა წინადადება შეიტანა გაეწონასწორებინათ ნარჩენი შეცდომები ალგებრული ჯამის ნულის ტოლობის პირობის დაცვით. 1802 წელს პ. ლაპლასმა გამოაქვეყნა გაწონასწორების უფრო სრულყოფილი თეორია დედამიწის გრადუსული გაზომვების საფუძველზე დედამიწის ელემენტების ზომების განსაზღვრის დროს. რამდენიმე განტოლებიდან უცნობთა განსაზღვრისას პ. ლაპლასი გამოდიოდა ორი პირობის დაცვის პრინციპიდან: 1. ნარჩენ შეცდომათა ალგებრული ჯამი უნდა ყოფილიყო ნული, 2. ამ შეცდომათა აბსოლუტური ჯამი უნდა ყოფილიყო მინიმალური.

აღნიშნულ მეცნიერთა საერთო მიზანი იყო გამოეთვალათ უცნობთა მნიშვნელობანი იმ განტოლებებიდან, რომელთა რაოდენობა მეტი იქნებოდა უცნობთა რაოდენობაზე. უცნობთა ეს მნიშვნელობანი უნდა ყოფილიყო ისეთი, რომელიც საუკეთესოდ დააკმაყოფილებდა ყველა განტოლებას თანაბრად. აგრეთვე არც ერთს ამ განტოლებათაგან არ ეძლეოდა უპირატესობა და ამავე დროს ამ განტოლებებიდან არც ერთი არ გამოირიცხებოდა, თუ არ იქნებოდა კანონიერი საფუძველი. ზემოხსენებული ამოცანის დასმის ერთ-ერთი ძირითადი მიზეზი იყო ის, რომ საჭირო შეიქნა უშუალოდ დამოკიდებულ განაზომთა უალბათესი სიდიდეების გამოთვლის, ანუ განაზომთა გაწონასწორების საკითხის გადაწყვეტა. მიზნის მიღწევა კი შეიძლებოდა უშუალოდ დამოუკიდე-

ბელ განაზომთა და უ ც ნ ო ბ ე ბ ი ს ს ა ხ ი თ მათი უალბათეს მნიშვნელობათა ფუნქციონალურად დაკავშირებული სათანადო განტოლებების გადაწყვეტით. განტოლებათა რაოდენობა იმდენი რომ შედგეს, რამდენი უცნობიც გვაქვს, მაშინ ამ განტოლებებს ჩვეულებრივ ამოვხსნით ალგებრული ხერხით და ამავე დროს უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი თანადროულად საუკეთესოდ დააკმაყოფილებს ყველა განტოლებას, მხოლოდ აუცილებელი შეცდომების გამო არ გვექნებოდა წარმოდგენა განაზომთა არათუ სიზუსტეზე, არამედ ტლანქ შეცდომებზეც კი. ამ მიზეზით სრულდება ჭარბი გაზომვები, რაც საშუალებას გვაძლევს, ერთი მხრივ, გამოვითვალოთ უცნობთა პირველადი სახის უალბათესი სიდიდეები და, მეორე მხრივ, შევადგინოთ უცნობთა რაოდენობაზე მეტი რაოდენობის განტოლებები ამ უალბათეს სიდიდეთა მათი საბოლოოდ გაწონასწორებული მნიშვნელობის მიღების მიზნით.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდი განაზომთა უალბათესად გაწონასწორებული სიდიდეების მიღების საუკეთესო საშუალებას გვაძლევს იმ პრინციპის საფუძველით, რომ მოითხოვს დაცული იყოს შესწორებათა კვადრატების ჯამის მინიმუმის პირობა. ამგვარად, გვეძლევა როგორც განაზომთა უალბათესი სიდიდეების მიღების, ისე მათი სიზუსტეების შეფასების საშუალება.

როგორც ზემომოყვანილიდან ჩანს, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის უშუალო წინამორბედია ლაპლასის მიერ შესრულებული ცდა გაწონასწორების თეორიის შესახებ.

ტერმინი „უმცირეს კვადრატთა მეთოდი“ პირველად იხმარა ფრანგმა მათემატიკოსმა ლეჟანდრემ, რომელმაც 1806 წელს პირველმა გამოაქვეყნა ამ მეთოდის შინაარსი შრომაში „კომეტების ორბიტის განსაზღვრის ახალი მეთოდები“. შრომაში, როგორც ნიმუში, ამ მეთოდით დაამუშავა საფრანგეთში გაზომილი ხუთი განედის და მათ შორის მერიდიანის ოთხი რკალის განაზომთა საფუძველზე დედამიწის ზომების გამოთვლის მაგალითი.

ლეჟანდრე აღნიშნავს, რომ განაზომთაგან ყველაზე უფრო ზუსტი შედეგების მისაღებად გვიხდება ისეთი წრფივი სისტემის ამოხსნა, რომლის განტოლებათა რაოდენობა მეტია უცნობთა რაოდენობაზე. განაზომთა მნიშვნელობებისაგან შემდგარი ასეთი სისტემა განაზომთა შეცდომების გამო სრულად ვერ კმაყოფილდება და განტოლებათა თავისუფალ წევრებში არ ბათილდება ნარჩენი შეცდომები. აღნიშნულის მიზეზით აუცილებელია გარკვეული (ერთგვარი) თვითნებურობა (ნებისმიერობა) განაზომთა შორის შეცდომების განაწილების დროს. [10] შრომაში მოყვანილია ნ. ი დ ე ლ ს ო ნ ი ს მიერ თარგმნილი ლეჟანდრეს ზემოხსენებული შრომიდან „არ უნდა ველოდოთ, რომ აქ ყველა ჰიპოთეზა მოგვცემს ერთნაირ შედეგს; უწინარეს ყოვლისა, უნდა ვეცადოთ, რომ კიდეგანი (უკიდურესი) შეცდომები, მიუხედავად მათი ნიშნებისა, მოექცეს ყველაზე უფრო ვიწრო საზღვრებში. ყველა იმ პრინციპიდან, რომელიც შეიძლება მოწოდებული იყოს ამ მიზნით, არ არსებობს უფრო მარტივი (უფრო ზუსტი, შედარებით ზოგადი — ნ. თ.) ვიდრე ის, რომლითაც ჩვენ ვსარგებლობდით ზემოხსენებულ შრომაში; მისი არსია მინიმუმად გადააქციოს ცდომილებათა კვადრატების ჯამი. ამ წესის დახმარებით ცდომილებებს შორის მყარდება ერთგვარი წონასწორობა, რომელიც არ აძლევს საშუალებას მათ შორის სიდიდით კიდეგან ცდომილებებს მოახდინოს ჭარბი გავლენა. ამგვარად, ეს პრინციპი სრულად გამოსადეგია იმისათვის, რომ გადაგვიშალოს ყველაზე უფრო ჭეშმარიტი სურათი მთელი სისტემის მდგომარეობის შესახებ“.

იმავე მეთოდს ხიუზელმა უწოდა „უმცირესი კვადრატული ჯამის თეორია". მიუხედავად იმისა, რომ ეს სახელწოდება უფრო გამოხატავს ამ მეთოდის შინაარსს, თანამედროვე ლიტერატურაში მაინც მიღებულია ლეჟანდრესეული სახელწოდება „უმცირეს კვადრატთა მეთოდი".

სრულიად დამოუკიდებლად, ჩვიდმეტი წლის ასაკში გეტინგენის უნივერსიტეტის მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტმა გ ა უ ს მ ა, 1794 წელს, გამოიგონა და ჩამოაყალიბა დაკვირვებათა და განაზომთა გაწონასწორების ის ხერხი, რომელსაც ლეჟანდრემ „უმცირეს კვადრატთა მეთოდი" უწოდა. გაუსმა პალერმოში მუშაობის დროს ამ მეთოდით გამოითვალა 1801 წლის 1 იანვარს იოსებ პიაცის მიერ მარსსა და იუპიტერს შორის აღმოჩენილი პირველი ასტეროიდის (მცირე პლანეტის) — ცერერას ორბიტი. გაუსის მიერ შედგენილი ეფემერიდი უმნიშვნელოდ განსხვავდებოდა ნამდვილისგან, რომლის შესახებ, პიაცის შემდეგ ამ პლანეტის მეორედ აღმომჩენმა ცახმა განაცხადა, რომ გაუსის ელიფსი განსაცვიფრებლად ზუსტად ემთხვევა პლანეტის (ცერერის) მდებარეობას, რის საფუძველზე ასტრონომები სთხოვდნენ გაუსს თავისი მეთოდის გამოქვეყნებას. მიუხედავად ამისა, გაუსი არ ჩქარობდა ამ მეთოდის გამოქვეყნებას და მან უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, ალბათობის თეორიის საფუძველზე დამუშავებული, მნიშვნელოვნად გაფართოებული და სრულყოფილად ჩამოყალიბებული სახით გამოაქვეყნა 1809 წელს სახელწოდებით — „მზის გარშემო კონუსური კვეთილობით მოძრავი ციური სხეულების მოძრაობის თეორია". როგორც ვხედავთ, პირველობა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ჩამოყალიბებისა ეკუთვნის გაუსს. მანვე დაამუშავა „უალბათეს შეცდომათა განაწილების ნორმალური კანონი", რაც გამოსახა $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhvv}$ მაჩვენებლიანი ფუნქციით. ამ კანონს ლიტერატურაში გაუსის კანონს უწოდებენ. მასვე ეკუთვნის არაპირდაპირ განაზომთა გაწონასწორებისა და წონების განსაზღვრის ხერხის და ნორმალური განტოლებების გადაწყვეტის საგანგებო ხერხისა და სქემების დამუშავება, სათანადო ალგორითმების შემოტანით, შედეგთა სიზუსტის შემფასებელი ფორმულების დადგენა და სხვ. გაუსმა პირველი რიცხვითი მაგალითი გამოაქვეყნა 1823 წელს ტრიანგულაციაში შებრუნებული გადაკვეთის გაწონასწორების შესახებ; ხოლო 1826 წელს მან გამოაქვეყნა ორი მაგალითი ტრიანგულაციის ქსელის გაწონასწორების შესახებ. საერთოდ, 1819—1826 წლებში გაუსმა ზემოხსენებული მასალა და სხვა ცნობილი „დიდი მემუარის" სახით გამოსცა, რომელსაც უწოდა „დაკვირვებათა ისეთი კომბინაციის თეორია, რომლის მიხედვითაც გამოთვლილი უცნობები რაც შეიძლება ნაკლებად იქნება დამახინჯებული განაზომთა შეცდომებით". გაუსის თეორიები, ნაწილობრივ ბესელის მიერ გადამუშავებული სახით, გამოსცა ე ნ კ ე მ 1834, 1835 და 1836 წლებში. რაც შეეხება გაუსის პრაქტიკულ ნამუშევარს, მისი თეორიების ტრიანგულაციის ქსელის გაწონასწორების საქმეში გამოყენების შესახებ, უფრო გვიან აღწერილი და გამოქვეყნებული იყო 1879 წელს პოლკოვნიკ შრეიბერის მიერ და შემდეგ მაიორ გ ე დ ე ს მიერ 1882 და 1885 წლებში.

1812 წელს ლაპლასმა თავის ფუნდამენტურ ტრაქტატში „ალბათობის ანალიზური თეორია" სხვა დიდი პრობლემების გადაწყვეტის პარალელურად მოგვცა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ახალი დასაბუთება. ლაპლასმა გვიჩვენა, რომ განაზომთა შეცდომების ალბათობის ფუნქციის სახეობის მიუხედავად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი ყოველთვის მიგვიყვანს განაზომთა შედარებით

უფრო მიზანშეწონილ შეხამებამდე, თუ დადებითი და უარყოფითი შეცდომები ტოლალბათურია და განაზომთა რაოდენობა განუსაზღვრელად (შეუზღუდავად) იზრდება. ლაპლასის ეს დასაბუთება გააკრიტიკა გაუსმა 1819 წელს შემდეგნაირად: „ეს დასაბუთება ჩვენ გვტოვებს სრულ გაუგებრობაში, თუ როგორ უნდა მოვიქცეთ მაშინ, როცა განაზომთა რაოდენობა შეზღუდულია. ამ შემთხვევაში უმცირეს კვადრატთა მეთოდი არ იქნება კ ა ნ ო ნ ი ს მნიშვნელობის, რაც ალბათობის თეორიის გზითაა დასაბუთებული; ის მხოლოდ გამოირჩევა მასზედ დაყრდნობილი ოპერაციების სიმარტივით" [10].

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ჩამომყალიბებელთა შორის საჭიროა დავასახელოთ ბ ე ს ე ლ ი. თავის შრომებში „კომეტა ოლბერსის ორბიტის გამოკვლევა" ბესელმა 1812—1813 და 1818 წლებში მოგვცა გამოკვლევა დიდი რაოდენობის დანაკვირევებთა რიგებში შეცდომათა განაწილების შესახებ; მანვე მოგვცა კლასიკური ფორმულა უალბათეს შეცდომათა საშუალებით საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად. წიგნში „აღმოსავლეთ პრუსიის გრადუსული გაზომვა 1837 წელს" ბესელმა გადაწყვიტა გაუსის მიერ განუხილველი ამოცანა „არაპირდაპირი დაკვირვებები პირობითი განტოლებების" შესახებ. ეს თეორია ბესელმა გამოიყენა ისეთი ტრიგონომეტრიული ქსელის გაწონასწორებისათვის, რომლის მიმართულებები იყო დაკვირვებული არასრული რაოდენობის ილეთებით და ამავე დროს წონები და შეცდომები არ ისაზღვრებოდა.

ბესელის მოწაფემ ინჟინერ ჰიდროტექნიკოსმა ჰ ა გ ე ნ მ ა 1837 წელს ჩამოაყალიბა თეორია (ჰიპოთეზის სახით), რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ დანაკვირვებთა თითოეული შეცდომა შედგება დიდი რაოდენობის მეტისმეტად მცირე სიდიდის, ნაწილობრივ დადებითი და ნაწილობრივ უარყოფითი, მაგრამ აბსოლუტური სიდიდით ტოლი ელემენტარული შეცდომებისაგან. ამ ელემენტარული შეცდომების ყოველნაირი კომბინაციის სხვადასხვა შემთხვევისადმი ალბათობის თეორიის გამოყენებას მივყევართ გაუსის შეცდომების კანონთან.

გაუსის თეორიის პირველი გამავრცელებელი და მასწავლებელი იყო ჰაგენი. მან 1837 წელს ალბათობის თეორიით დაიწყო პრაქტიკოსების სწავლება გაუსის თეორიისა, მაგრამ ჰაგენმა მაინც ვერ შეძლო ამ ახალი მეთოდის პრაქტიკული გავრცელება. გაუსის მოწაფემ მარბურგის პროფესორმა გ ე რ ლ ი ნ გ მ ა 1843 წელს პირველ ადგილზე წამოაყენა უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. გერლინგმა გამოიყენა რა თავისი გამოცდილება, გესენის ტრიანგულაციის მკითხველებს მიაწოდა ახალი მეთოდი იმდენად თვალსაჩინოდ, რომ საშუალო კვადრატული შეცდომის ცნება და ტრიგონომეტრიული ქსელების გაწონასწორების საფუძვლები რამდენიმე წელიწადში საკმაოდ განვითარდა. გერლინგი თავისი შრომის წინასიტყვაობაში — „პრაქტიკულ გეომეტრიაში გაწონასწორებითი გამოთვლები, ანუ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი", წერს: „მე კარგად მახსოვს ის დრო, როდესაც მიწისმზომელი, რომელმაც იცოდა ლოგარითმების ხმარება, თავის კოლეგებში ითვლებოდა მეცნიერად. ამჟამად კი სასაცილო იქნებოდა გამოცდებზე გასვლა ამ ცოდნის გარეშე, ახლოსაა ის დრო, როდესაც იგივე ითქმის გაწონასწორებით სამუშაოებზეც". მართლაც, თანამედროვე გეოდეზისტი ძნელი წარმოსადგენია გაწონასწორებითი სამუშაოების ცოდნის გარეშე. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის სწრაფად გავრცელებას ხელი შეუშალა იმ აზრმა, რომელიც ამტკიცებდა, რომ ამ მეთოდით არ ხდება გამოთვლითი სამუშაოების შემცირება. არ უწევდნენ ანგარიშს იმ გარემოებას, რომ ზოგადი მეთოდის გამოყენება საჭირო არაა იმ შემთხვევაში, როცა ესა თუ ის საკითხი

შეიძლება უფრო მარტივი, მაგრამ არა ზოგადი ხერხით გადაწყდეს. მაგალითად, ზოგადი მეთოდის უქონლობის გამო, ანუ სანამ უმცირეს კვადრატთა მეთოდს გამოიყენებდნენ, მრავალი ათეული წლის განმავლობაში ვერ შესძლეს ბავარიის ტრიანგულაციის მთლიანად გაწონასწორება. საბჭოთა კავშირის ტერიტორიის მთლიანი სატრიანგულაციო ქსელი უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მკაცრად გამოყენების საშუალებითაა გაწონასწორებული, რის საფუძველზე შედგენილია საბჭოთა კავშირის რუკა ერთიან კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც საბჭოთა მეცნიერების მიერაა მოცემული. არსებობს ბევრი მიახლოებითი, გამარტივებული მეთოდები გაწონასწორებისა, მაგრამ ამ მეთოდთავარგისობა მოწმდება იმით, თუ რამდენად ახლოა მიღებული შედეგები უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შედეგებთან, ე. ი. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი შესადარია ყველა არსებული მეთოდებისათვის. ამით მიიღწევა ის, რომ ყველა ეს გამარტივებული (შემოწმებული) მეთოდი გამოიყენება ცალკეულ შემთხვევაში, როგორც ნაკლები დროის და სახსრების მომთხოვნი და ამავე დროს დამაკმაყოფილებელი სიზუსტის მომცემი. თავისი მეთოდის გამოყენების შესახებ 1830 წელს გაუსი ბესელს სწერს: „მე გულდასმით შევასრულე ჩემი მთავარი სამკუთხედების სისტემის გაწონასწორება სანებური ხერხებისა (ოპერაციების) და შერჩევის გარეშე“.

გარდა ზემოხსენებული მეცნიერებისა, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ცალკეულ საკითხებს იხილავდნენ ჰ ა ნ ზ ე ნ ი, შ რ ე ი ბ ე რ ი, ი ო რ დ ა ნ ი, ჰ ე ლ მ ე რ ტ ი და დანიელი ა ნ დ რ ე.

მიუხედავად ამისა, შრომების რაოდენობის და მათი ღირსშესანიშნაობის გამო გაუსი ითვლება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ღირსეულ ფუძემდებლად. თითქმის ყველა ეს შრომა თავმოყრილია [3] შრომაში.

რაც შეეხება გ ა უ ს-ლ ე ჟ ა ნ დ რ ე ს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის სახელმძღვანელოებში გამოქვეყნების პრიორიტეტს, ეს უნდა მიეკუთვნოს რუს მეცნიერს პროფ. პ. ბ ო ლ ო ტ ო ვ ს, რომელმაც 1836 წელს სანკტ-პეტერბურგში გამოსცა „უმაღლესი და უდაბლესი გეოდეზიის“ კურსის პირველი ნაწილი და რომელშიც შედიოდა ნ. შ ა ი ა ნ ო ვ ი ს მიერ დაწერილი ცალკე თავი „უმცირეს კვადრატთა მეთოდის“ შესახებ. გერმანიაში კი პირველ სახელმძღვანელოდ, რომელშიაც გადმოცემულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, ითვლება გერლინგის მიერ შედგენილი და 1843 წელს გამოცემული წიგნი.

აკადემიკოს ვ. ბ უ ნ ი ა კ ო ვ ს კ ი ს 1846 წელს გამოცემულ წიგნში — „ალბათობის მათემატიკური თეორიის საფუძვლები“, უმცირეს კვადრატთა მეთოდს გარკვეული ადგილი აქვს დათმობილი.

1857 წელს გამოცემულ აკადემიკოს ა. ს ა ვ ი ჩ ი ს წიგნში — „ალბათობის თეორიის გამოყენება დანაკვირვებთა და გეოდეზიურ განაზომთა გამოთვლის დროს“, რომელიც ითარგმნა გერმანულ ენაზე, მაგალითების დამუშავების დროს გამოყენებულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

1859 წელს აკადემიკოსმა პ. ჩ ე ბ ი შ ე ვ მ ა გამოაქვეყნა თავისი მეთოდი — უმცირეს კვადრატთა ხერხით ინტერპოლირება.

აკადემიკოსმა ა. მ ა რ კ ო ვ მ ა 1898 წელს გამოაქვეყნა სტატია „დიდ რიცხვთა კანონი და უმცირეს კვადრატთა მეთოდი“. მანვე გამოსცა კაპიტალური შრომა „ალბათობათა გამოთვლები“, რომელშიც გულდასმით და დიდი სიღრმითაა განხილული უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

რუსი გეოდეზისტების უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გაწონასწორებითი საკითხების გადაწყვეტისათვის მომზადების საქმეში დიდი როლი შეასრულა

პროფესორების ვ. ვიტკოვსკის „პრაქტიკული გეოდეზიის“ (1893 წ. და „ტოპოგრაფიის“ — 1904 წ.). ნ. ცინგერის „ასტრონომიის კურსის“ (1899 წ.) და ი. ივერენოვის „უმცირეს კვადრატთა ხერხის“ გამოქვეყნებამ.

აქვე საჭიროა დიდის მოკრძალებით აღინიშნოს, რომ რევოლუციამდელ რუსეთში მუშაობდნენ და მნიშვნელოვანი გეოდეზიური და ასტრონომიული სამუშაოები შეასრულეს ისეთმა დიდმა მეცნიერებმა, როგორებიცაა: ფრანგი ასტრონომი დელილი, რომელიც მოწვეული იყო კარტოგრაფიული სამუშაოების ხელმძღვანელად რუსეთის აკადემიაში 1726 წელს; ეილერი, რომელიც ხელმძღვანელობდა გენერალური რუკის შედგენას და რომლის ხელმძღვანელობით გამოვიდა რუსეთის ატლასი 1745 წელს; შემდეგ ამ საქმის ხელმძღვანელია ლომონოსოვი (1757—1765 წწ.); კრასილნიკოვი, რომელმაც განსაზღვრა 11 ასტრონომიული პუნქტი ბალტიის ზღვიდან კამჩატკამდე; შუბერტი, რომელმაც მოამზადა ასტრონომთა კადრები და გამოუშვა ასტრონომიული პუნქტების ტრაქტატი; აკადემიკოსი ვიშნევსკი, რომელმაც 1806—1815 წლების პერიოდში განსაზღვრა 225 პუნქტის განედი და გრძედი; ტენნერი, რომელმაც გადააკეთა დალამბერის საბაზისო ხელსაწყო, რითაც გაზარდა გაზომვების სიზუსტე და საერთოდ დიდი სამუშაოები შესრულდა. მისი ხელმძღვანელობით 1816—1852 წლებში ჩატარდა დიდი გრადუსული გაზომვები; სტრუვე, რომელმაც ტენნერის პარალელურად შეასრულა დიდი მასშტაბით გრადუსული გაზომვები, შემოიღო კუთხეების გაზომვის ილეთების ხერხი, შექმნა უზუსტესი საბაზისო ხელსაწყო, რომლითაც აღწევდნენ 1 : 1000000 სიზუსტეს, მოგვცა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით ტრიანგულაციის დამუშავების პრინციპები, განავითარა ასტრონომიული დაკვირვებები და სხვ. ტენნერისა და სტრუვეს მიერ შესრულებული სამუშაოების დახმარებით ბესელმა და კლარკმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად განსაზღვრეს ელიფსოიდის ზომები, ამ მონაცემებით სარგებლობენ რეფერენც ელიფსოიდის ელემენტების განსაზღვრის დროსაც; სამხედრო გეოდეზისტმა შუბერტმა, რომელიც მიუხედავად იმისა, რომ წინააღმდეგი იყო გრადუსული გაზომვებისა, ბევრი გააკეთა ტრიანგულაციის საქმეში, შუბერტი წინააღმდეგი იყო გეოდეზიური ნიველობისაც; სამხედრო გეოდეზისტი ხოძკო ხელმძღვანელობდა კავკასიის ტრიანგულაციას, რომელიც დაიწყო 1847 წელს; პავლოვი, რომელმაც შეასრულა მეცნიერულად ჩამოყალიბებული ტრიანგულაცია ციმბირში, 1909 წლიდან მისი I კლასის სატრიანგულაციო ქსელი ჩართულ იქნა 1932 წელს შესრულებული I კლასის ქსელში; ბაუმანი, რომელმაც შეადგინა დონბასის ტრიანგულაცია; პულკოვოს ასტრონომიული ობსერვატორიის აღზრდილები: ცინგერი, შჩეტკინი, ვიტრამი, პავლოვი, ვიტკოვსკი, შარნგორსტი, კულბერგი, რომლებმაც 1873—1876 წლებში განსაზღვრეს მოსკოვიდან ვლადივოსტოკამდე მნიშვნელოვანი ქალაქების გრძედები. სამხედრო ტოპოგრაფთა კორპუსი ეწეოდა დიდ მუშაობას, მაგალითად, ი. პომერანცევის I კლასის ტრიანგულაციის სქემა და გაწონასწორების მეთოდი და სხვ. 1822—1877 წლები იყო შედარებით ნაყოფიერი საფეხური გეოდეზიური სამუშაოების განვითარებისა. ამ პერიოდში შედარებით კარგად შემუშავდა კუთხური და საბაზისო გაზომვები, ასტრონომიული დაკვირვებები და სხვ., რომლის სულის ჩამდგმელი იყო სტრუვე, ამიტომ ის ითვლება რუსული გეოდეზიური სკოლის მამამთავრად.

მიუხედავად ზემოხსენებულისა, უნდა აღინიშნოს, რომ შეცდომათა თეორიისა და უმცირეს კვადრატთა მეთოდით სრულყოფილი, ერთიანი, გაწონა-

სწორებითი სამუშაოების საქმეში რევოლუციამდელი რუსეთი XX საუკუნეების ოციან წლებამდე მნიშვნელოვნად დაბალ დონეზე იყო.

გეოდეზიური ციკლის სამეცნიერო დარგებისა და კერძოდ, განაზომთა შეცდომების თეორიისა და უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ფართო მასშტაბით განვითარების თარიღად ითვლება 1919 წლის 23 მარტი, რადგანაც ვ. ი. ლ ე ნ ი ნ ი ს მიერ ხელმოწერილი დეკრეტის საფუძველზე ამ წლიდან იწყება გაერთიანება ყველა სახის გეოდეზიური სამუშაოებისა ერთი ცენტრალური ორგანოს განმგებლობაში, რომელიც ჩამოყალიბდა უ მ ა ღ ლ ე ს ი გ ე ო დ ე ზ ი უ რ ი ს ა მ მ ა რ თ ვ ე ლ ო ს სახელწოდებით. ცენტრალური ხელმძღვანელი ორგანოს არარსებობის გამო თავისი მიზნებისათვის სხვადასხვა უწყების მიერ შესრულებულ განაზომთა გამონათვლები არ იძლეოდა წარმოდგენას ჩვენი ქვეყნის ბუნებრივ და სოციალ-ეკონომიკური ელემენტების სივრცობრივი განლაგებისა და ზომების შესახებ, რის გარეშე ყოვლად შეუძლებელი იყო სახელმწიფოს მართვა და მისი დაცვის ორგანიზაცია.

მიუხედავად დიდი სამზადისისა, ჯერ კიდევ 1929-1930 წლამდე გაწონასწორებითი სამუშაოები სრულდებოდა საერთო გეგმის გარეშე. ტრიანგულაციური ქსელების გაწონასწორებისათვის დამუშავებული და გასინჯული მეთოდები არ არსებობდა. ჩვეულებრივ იყენებდნენ გაწონასწორების გამარტივებულ ხერხებს დამკავშირებელ კუთხეთა შესწორებების კვადრატების ჯამის მინიმუმის პირობის დაცვით. პოლიგონური გაწონასწორებისათვის იყენებდნენ ხ ა ტ ტ ი ს ა და სხვადასხვა ხერხს, რომლითაც მართალია, სწრაფად ასრულებდნენ გაწონასწორებით სამუშაოებს, მაგრამ უმრავლეს შემთხვევაში მიღებული შედეგები არ აკმაყოფილებდა განაზომი კუთხეების საჭირო სიზუსტეს; ამის გამო იძულებული ხდებოდნენ ჩატარებული სამუშაოები განმეორებით შეესრულებინათ.

1929 წელს პროფ. ა. ფ. კ რ ა ს ო ვ ს კ ი ს მიერ დამუშავებული და მოწოდებულ იქნა ჰ ე ლ მ ე რ ტ ი ს სახეშეცვლილი მეთოდი საბჭოთა კავშირის ევროპული ნაწილის ტერიტორიის ასტრონომიულ-გეოდეზიური ქსელის გაწონასწორებისა, რომლის დიდი ღირსება დადასტურდა ამ მეთოდით 1930-1931 წლებში საბჭოთა კავშირის ევროპული ნაწილის უდიდეს ტერიტორიაზე გაშლილი I კლასის პირველი ცხრა პოლიგონის გაწონასწორების ხარისხიანი შედეგით. თანადროულად I კლასის პოლიგონში II კლასის გაწონასწორება ვერ სრულდებოდა, გაწონასწორებები სრულდებოდა შეუსაბამო თანამიმდევრობით, მაგალითად, II კლასის ყოველი ახალი ქსელის ჩასმისას მის დასაყრდენად, როგორც მყარი გამოსავალი იყენებდნენ ადრე შესრულებული იმავე სახის ქსელის კოორდინატებს და სხვა ელემენტებს. ასეთი ხერხით გაწონასწორება, რა თქმა უნდა, განაპირობებდა კუთხეებში დაუშვებელ შესწორებებს. 1930-1931 წწ. პროფ. უ რ მ ა ე ვ მ ა მოგვაწოდა პოლიგონალური რიგების გაწონასწორების ამერიკული მკაცრი მეთოდი კ რ ი უ გ ე რ ი ს ორჯგუფიანი ხერხის მოხერხებულად გამოყენებით მეორე ჯგუფის ტოლობათა კოეფიციენტების შესაბამისად გარდაქმნის საშუალებით. იმის გამო, რომ გამოთვლების ტექნიკა სუსტი იყო, ამ მეთოდმა გამოყენება პოვა მხოლოდ ცალკეული რიგების ჩართვის შემთხვევაში. რიგების სისტემისათვის პროფ. უ რ მ ა ე ვ მ ა მოგვცა ბ ო ვ ი ს სახეშეცვლილი ხერხი, რაც მდგომარეობდა იმაში, რომ გაწონასწორების დროს უშუალოდ დამოუკიდებლად გაზომილ სიდიდეებად ითვლებოდა რიგების გადაკვეთაზე განლაგებული მოსაზღვრე საკვანძო ფიგურების გვერდების კოორდინატთა, სიგრძეთა და აზიმუტების სხვაობები. ასეთი

დაშვების გამო რიგების მთელი ერთობლიობიდან საკვანძო ფიგურების გვერდების კოორდინატების, სიგრძეების და აზიმუტების უალბათესი სიდიდეების განსაზღვრა წყდებოდა ადვილად. კამერული მუშაობის შემდეგი საფეხური მდგომარეობდა ამერიკული მეთოდით საკვანძო ფიგურებს შორის რიგების ჩასმაში. ბოვის მეთოდი არ გამოდგა II კლასის რიგების გაწონასწორებისათვის, რადგანაც კუთხეების შესწორებების სიდიდეები გაცილებით დიდი გამოდიოდა ამ კუთხეების განაზომების შეცდომების სიდიდეებთან შედარებით; ასეთ მდგომარეობას განსაკუთრებით მაშინ ჰქონდა ადგილი, როცა საკვანძო ფიგურებს შორის მცირე რაოდენობის სამკუთხედებიანი რიგები იყო განლაგებული. აღნიშნულის გამო, 1933 წლიდან, დაიწყეს II კლასის ტრიანგულაციის გაწონასწორება მკაცრი მეთოდით, რაც გამოიხატებოდა პოლიგონის შიგნით განლაგებული რიგების მთელ სისტემაში წარმოშობილი განტოლებების თანადროულად გადაწყვეტაში. II და III კლასების ტრიანგულაციის როგორც რიგების, ისე მთელი ქსელის გაწონასწორების მკაცრ მეთოდად მიღებულ იქნა უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა მ ე თ ო დ ი, მხოლოდ ტოლობათა დიდი რაოდენობის გადაწყვეტისას იყენებენ ინჟინერ პ რ ა ნ ს ი ს-პ რ ა ნ ე ვ ი ჩ ი ს მიერ მოწოდებული გ ა წ ო ნ ა ს წ ო რ ე ბ ი ს მ რ ა ვ ა ლ ჯ გ უ ფ ი ა ნ ხ ე რ ხ ს ა ნ კ რ ა ს ო ვ ს კ ი ს დ ა უ რ მ ა ე ვ ი ს არაპირდაპირ განაზომთა ხერხს ნორმალური განტოლებების თანდათანობითი მიახლოების ხერხით. ძველად გადაუწყვეტელი პრობლემა 30—40 პუნქტის მკაცრი ხერხით თანადროულად გაწონასწორებისა, ამჟამად გადაწყვეტილია და თავისუფლად შეგვიძლია ნებისმიერი რაოდენობის ქსელების თანადროულად გაწონასწორება კ რ ა ს ო ვ ს კ ი ს, ი ზ ო ტ ო ვ ი ს, პ რ ა ნ ი ს-პ რ ა ნ ე ვ ი ჩ ი ს და სამხედრო გეოდეზისტების უ რ მ ა ე ვ ი ს, მ ა ქ ს ი მ ო ვ ი ს ა და სხვათა ნაყოფიერი შრომის შედეგად.

განსაკუთრებითი მნიშვნელობისაა პროფ. ა. ჩ ე ბ ო ტ ა რ ე ვ ი ს ღვაწლი განაზომთა მათემატიკური დამუშავების საკითხების დამუშავებაში: მას დაახლოებით 150 ორიგინალური ნაშრომი აქვს. ასევე განაზომთა გაწონასწორების საკითხში დიდი ღვაწლი მიუძღვის აკადემიკოს ვ. პ ო პ ო ვ ს, აკადემიის წევრკორესპონდენტს ნ. კ ე ლ ს, პროფ. შ ი ლ ო ვ ს, პროფ. ი დ ე ლ ს ო ნ ს, პროფ. ვ. დ ა ნ ი ლ ო ვ ს, პროფ. ა. ბ ე ნ ა შ ვ ი ლ ს და სხვებს.

ამერიკელმა ჰ ე ი ფ ო რ დ მ ა 1909 წელს გამოითვალა დედამიწის ელიფსოიდის ზომები ჩრდილოეთ ამერიკის შეერთებული შტატების მონაცემთა საფუძველზე. ჰეიფორდის ელიფსოიდი მიღებულ იქნა საერთაშორისოდ 1924 წლიდან. ამ მიზნისათვის ჰეიფორდმა გრადუსული განაზომებიდან გამოიყენა დაახლოებით 700 განტოლება. საბჭოთა კავშირის ე. წ. რეფერენც ელიფსოიდის, რომელიც კრასოვსკის ხელმძღვანელობითა და ა. ა. იზოტოვის დიდი შრომითაა განსაზღვრული, დასჭირდა საბჭოთა კავშირის ტერიტორიაზე შესრულებული ასტრონომიულ-გეოდეზიური გაზომვებიდან 1000-ზე მეტი განტოლება, რასაც დაემატა მთლიანად ის მასალები, რაც ჰქონდა ჰეიფორდს გამოყენებული და აგრეთვე დასავლეთ ევროპის გრადუსული გაზომვების შესაბამისი განტოლებები. როგორც ვხედავთ, საბჭოთა კავშირის მიერ განსაზღვრული ელიფსოიდის განსაზღვრისათვის გაცილებით მეტი მასალაა გამოყენებული, ვიდრე ჰეიფორდის ელიფსოიდისა. ამიტომ ჩვენი ელიფსოიდი საბჭოთა კავშირის ტერიტორიისათვის ითვლება რეფერენც ელიფსოიდად.

საბჭოთა მათემატიკოსები მტკიცედ იცავენ წამყვან როლს აკადემიკოს პ. ჩებიშევის მიერ დაფუძნებული ალბათობის თეორიის განვითარებაში.

პროფ. ა. მ ა ზ მ ი შ ვ ი ლ ს პირველს ეკუთვნის გაწონასწორებითი გამოთვლების დარგში ვექტორული და მატრიცული ალგებრის სრულყოფილი გამოყენებითი ორიგინალური მეთოდის დამუშავება (1950 წ.).

ჩვენს მიერ ქართულ ენაზე პირველად შედგენილი და გამოცემულია „განაზომთა შეცდომების თეორია“ (1957 წ.) და „განაზომთა ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა“ (1960 წ.). ამასთანავე მეორე სახელმძღვანელო საერთოდ პირველი გამოცემაა განაზომთა მათემატიკური დამუშავების თეორიაში.

გეოდეზიურ და სამარკშეიდერო განაზომთა მათემატიკური დამუშავების საქმეში დიდი და ნაყოფიერი მუშაობა ჩაატარეს მეცნიერებმა: თ. პ ა ვ ლ ო ვ მ ა (შეცდომების წინასწარი გამოთვლები), პ. რ ი ჟ ო ვ მ ა, ნ. ვ ი დ უ ე ვ მ ა, ლ. ხ რ ე ნ ო ვ მ ა, დ. ო გ ლ ო ბ ლ ი ნ მ ა, ვ. გ ა ნ შ ი ნ მ ა, პ. გ ა ი დ ა ე ვ მ ა, ა. კ ო ბ ი ლ ი ნ მ ა, ა. მ ა ს ლ ო ვ მ ა, გ. ბ უ რ მ ი ს ტ რ ო ვ მ ა, ქ. ტ ა ბ ა ტ ა ძ ე მ, გ. მ ე ფ უ რ ი შ ვ ი ლ მ ა, ს. შ ა რ უ პ ი ნ მ ა, ბ. ბ ე ლ ი ა ე ვ მ ა და სხვ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. **Баршай С. Е.**, Уравновешивание типовых фигур триангуляции по готовым формулам, Геодезиздат, 1960 г.
2. **Беляев Б. И.**, Теория ошибок измерений, М., 1962 г.
3. **Большаков В. Д.**, **Гайдаев П. А.**, Теория математической обработки геодезических измерений, Недра, М., 1977 г.
4. **Бурмистров Г. А.**, Задачник по способу наименьших квадратов, Геодезиздат, М., 1960 г.
5. **Гаусс К. Ф.**, Способ наименьших квадратов, Избранные сочинения,, том I, М., Геодезидат, 1957 г.
6. **Гайдаев П. А.**, Уравновешивание триангуляции, Геодезиздат, 1960 г.
7. **Кобылин А. И.**, Групповое уравновешивание рудничной триангуляции, Металлургиздат, 1955 г.
8. **Курош А. Г.**, Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1949 г.
9. **Купчинов И. И.**, Уравновешивание сетей триангуляции и полигонометрии, Геодезиздат, 1962 г.
10. **Ляпин Е. С.**, Курс высшей алгебры, Учпедгиз, 1953 г.
11. **Мазмишвили А. И.**, **Беляев Б. И.**, Способ наименьших квадратов, Геодезиздат, 1959 г.
12. **Мазмишвили А. И.**, **Беляев Б. И.**, Сборник задач по теории ошибок и способу наименьших квадратов, М., 1960 г.
13. **Мазмишвили А. И.**, Способ наименьших квадратов, Недра, М., 1968 г.
14. **Идельсон Н. И.**, Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений, Геодезиздат, 1947 г.
15. **Папазов М. Г.** и др., Теория ошибок и способ наименьших квадратов, Недра, М., 1968 г.
16. **Попов В. В.**, Уравновешивание полигонов, Геодезиздат, 1952 г.
17. **Пранис-Праневич И. Ю.**, Руководство по уравнительным вычислениям заполняющей триангуляции, II, III, и IV кл, 1941 г.
18. **თევზაძე ნ. ა.**, განაზომთა შეცდომების თეორია, „ტექნიკა და შრომა", თბ, 1957 წ.
19. **თევზაძე ნ. ა.**, განაზომთა ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, „ცოდნა", 1960 წ.
20. **ტაბატაძე კ. ტ.**, უმაღლესი გეოდეზია I და II ნაწილი, „ცოდნა", 1959, 1963 წწ.
21. **Рабинович Б. Н.** Основы построения опорных геодезических сетей, Геодезиздат, 1954 г.
22. **Романов В. А.**, Теория ошибок и способ наименьших квадратов, Углетехиздат, 1952 г.
23. **Чеботарев А. С.**, Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, Гостехиздат, 1958 г.
24. **Шилов П. И.**, Способ наименьших квадратов, Гостехиздат, 1941 г.
25. **Яковлев К. П.**, Математическая обработка результатов измерений, Гостехиздат, 1953 г.

Тевзадзе Николай Артемьевич

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОДЕЗИЯ

IV

(Метод наименьших квадратов)

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1983

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. ბახტაძე
ტექნიკური რედაქტორი ა. ომიაძე
კორექტორი ც. კვანტალიანი

სბ 491

გადაეცა წარმოებას 10.09.82. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.12.83. უე 04060. საბეჭდი ქაღალდი $70 \times 108^{1}/_{16}$. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 43,1. სააღრ.-საგამომც. თაბახი 36,03.
ტირაჟი 2 000. შეკვეთის № 3690.
ფასი 1 მან. 60 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Типография АН Груз. ССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19