ა ნ ბ ა ნ ი

ქართული		რუსული		ლათინური			ბერძნული		
ა	ა	А	а	A	a	ა	Α	α	ალფა
ბ	ბ	Б	б	B	b	ბე	Β	β	ბეტა
გ	გ	В	в	C	c	ცე	Γ	γ	გამა
დ	დ	Г	г	D	d	დე	Δ	δ	დელტა
ე	ე	Д	д	E	e	ე	Ε	ε	ეფსილონ
ვ	ვ	Е	е	F	f	ეფ	Ζ	ζ	ძეტა
ზ	ზ	Ё	ё	G	g	გე	Η	η	ეტა
თ	თ	Ж	ж	H	h	ჰაშ	Θ	ϑ θ	თეტა
ი	ი	З	з	I	i	ი	Ι	ι	იოტა
კ	კ	И	и	J	j	ჟი	Κ	κ	კაპა
ლ	ლ	Й	й	K	k	კა	Λ	λ	ლამბდა
მ	მ	К	к	L	l	ელ	Μ	μ	მიუ
ნ	ნ	Л	л	M	m	ემ	Ν	ν	ნიუ
ო	ო	М	м	N	n	ენ	Ξ	ξ	ქსი
პ	პ	Н	н	O	o	ო	Ο	ο	ომიკრონ
ჟ	ჟ	О	о	P	p	პე	Π	π	პი
რ	რ	П	п	Q	q	ქუ	Ρ	ρ	რო
ს	ს	Р	р	R	r	ერ	Σ	σ, ς	სიგმა
ტ	ტ	С	с	S	s	ეს	Τ	τ	ტაუ
უ	უ	Т	т	T	t	ტე	Υ	υ	იფსილონ
ფ	ფ	У	у	U	u	უ	Φ	φ	ფი
ქ	ქ	Ф	ф	V	v	ვე	Χ	χ	ხი
ღ	ღ	Х	х	W	w	დუბლვე	Ψ	ψ	ფსი
ყ	ყ	Ц	ц	X	x	იქს	Ω	ω	ომეგა
შ	შ	Ч	ч	Y	y	იგრეკ			
ჩ	ჩ	Ш	ш	Z	z	ზეტ			
ც	ც	Щ	щ						
ძ	ძ	Ъ	ъ						
წ	წ	Ы	ы						
ჭ	ჭ	Ь	ь						
ხ	ხ	Э	э						
ჯ	ჯ	Ю	ю						
ჰ	ჰ	Я	я						

ნ. თევზაძე
მეცნიერებისა და ტექნიკის დამსახურებული მოღვაწე,
ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

საინჟინრო გეოდეზია

III

(განაზომთა შეცდომების თეორია და გამოთვლების ტექნიკა)

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება“
თბილისი—1983

912
612.-1.528
= 403

საინჟინრო გეოდეზიის წინამდებარე მესამე ტომი „განაზომთა შეცდომების თეორია და გამოთვლების ტექნიკა“ მეორე გამოცემაა, რომელშიც განხილულია განაზომთა შეცდომების თეორიის კურსი საინჟინრო-გეოდეზიური და სამარკშეიდერო სპეციალობის სტუდენტებისათვის პროგრამის შესაბამისად მასში შეტანილია ყველა ის ცვლილება, რაც მოხდა განაზომთა შეცდომების თეორიაში 1957 წლიდან დღემდე. დამატებულია გამოთვლითი ტექნიკის თეორიისა და პრაქტიკის ძირითადი საკითხები; უწყვეტად მოქმედი და დისკრეტულად მოქმედი მექანიკური, ელექტრული და ელექტრონული არაავტომატური, ნახევრად ავტომატური და სრული ავტომატური გამომთვლელი მანქანები გამოყენების თვალთახედვით.

წიგნით შეიძლება ისარგებლოს ყველა პროფილის სტუდენტებმა და წარმოების მეცნიერმა და პრაქტიკოსმა მუშაკებმა.

რეცენზენტები:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ხ. შათაშვილი,
პროფ. ა. კაკუშაძე

Т $\frac{20701-078}{М-602(08)-83}$ 170—88

შინაარსი

თავი I

თავი II

გამოთვლების ტექნიკის არსი

თავი III

პირდაპირი დამოუკიდებელი ტოლზუსტი გაზომვები

თავი IV

არაპირდაპირი, დამოუკიდებელი, ტოლზუსტი გაზომვები

თავი V

პირდაპირი, დამოუკიდებელი არატოლზუსტი გაზომვები

თავი VI

არაპირდაპირი, დამოუკიდებელი არატოლზუსტი გაზომვები

თავი VII

შეცდომათა თეორიის გამოყენება გეოდეზიურ და ხამარკშეიდერო სამუშაოებზე

თავი I

შესავალი

მოვლენათა და სიდიდეთა შესწავლა ეყრდნობა უამრავი ფაქტისა და ექსპერიმენტის საფუძველზე დაგროვილი რიცხობრივი მასალის ანალიზს.

საჭირო რიცხობრივი მასალის დაგროვება ემყარება ფიზიკური სიდიდეების გაზომვებს, რომლებსაც თან ახლავს სხვადასხვა თვისებისა და ოდენობის შეცდომები.

ფიზიკური — რეალური — ნამდვილი სიდიდეებია ბუნებაში არსებული საგნები და მოვლენები, რომლებიც ცვალებადობენ რაოდენობრივად, შეიძლება მათი აღრიცხვა, გაზომვა და მოსახერხებელია მათი ოდენობის, ანუ რაოდენობრივი ცვლილების მათემატიკურად გამოსახვა.

სხეული ძირითადად ხასიათდება ორი ფიზიკური ნიშანთვისებით: *განფენილობით* და *მატერიალურობით* (ნივთიერადობით). პირველი შეისწავლება სხეულის გეომეტრიული ელემენტების — სიგრძეებისა და კუთხეების გაზომვით და მეორე — მისი მასის განსაზღვრით. ამასთანავე, ბუნების ყოველგვარი მოვლენა დაკავშირებულია სივრცისა და დროის გარკვეულ მომენტთან. მაშასადამე, ფიზიკური სხეულების დახასიათებისა და ურთიერთ შედარებისათვის საჭიროა მათი გეომეტრიული ელემენტების, მატერიის, ანუ მასისა და დროის ცოდნა.

სხეულის გაზომვა დაკავშირებულია *სათანადო* საზომი ერთეულის გამოყენებასთან. *სათანადო* საზომ ერთეულად ითვლება გასაზომი სხეულის *ერთგვაროვანი* სიდიდე. *ერთგვაროვნება* ნიშნავს იმას, რომ სხეულები თავისი არსით შეესაბამება ერთსა და იმავე განმარტებას, შინაარსს და განსხვავდება მხოლოდ რაოდენობრივად.

ამგვარად, რაიმე ობიექტის გაზომვა ნიშნავს შევადაროთ მას საზომ ერთეულად მიღებული სიდიდე, ანუ გავიგოთ თუ რამდენჯერ მოთავსდება სათანადო საზომი ერთეული გასაზომ საგანში. *თვლა* არის ისეთი მოქმედება, რომლითაც განისაზღვრება საგანთა რაოდენობა, და მრავალ შემთხვევაში იგი გაზომვების თანხლეიულია. აქედან, რიცხვი გამოხატავს მატერიალური სამყაროს რაოდენობრივ ფარდობას და მიიღება სიდიდის გაზომვის, გამოთვლის ან თვლის შედეგად.

ობიექტის (სიდიდის) ოდენობის გამომსახველი რიცხვითი მნიშვნელობა უკუპროპორციულია საზომი ერთეულის ოდენობისა. მაგალითად, ერთი კილომეტრი მანძილის შესაბამისი რიცხვი არის 1000, როცა საზომ ერთეულად

მიღებულია მეტრი, და 10, როცა საზომ ერთეულად მიღებულია ჰექტომეტრი· სიგრძის საზომი ერთეული (მეტრი, კილომეტრი) არ უნდა ავურიოთ სიგრძის გასაზომად გამოყენებულ ხელსაწყოში, ანუ მოკლედ, **საზომში** (20-მეტრიანი ბაფთა, 24-მეტრიანი ფოლადის ან ინვარის მავთული და სხვ.).

§. 1. 1. გაზაზომთა შეცდომების თეორიის საგანი

სამეცნიერო დარგები უმთავრესად სამყაროს შესახებ თავისი მონაცემების სივრცობრივად განლაგების გეომეტრიულად გამოსახვას საჭიროების მიხედვით ახდენენ არსებულ **რუკებზე, გეგმებსა და პროფილებზე**· ამ უკანასკნელთა შექმნისათვის კი საჭიროა თანამიმდევრობით სხვადასხვა კლასის გეოდეზიური საფუძვლის შექმნა და მასზე დაყრდნობით დედამიწის ბუნებრივი და სოციალ-ეკონომიკური ელემენტების აგეგმვები.

ცნობილია, რომ მაღალი კლასის გეოდეზიური საფუძველი არის საყრდენი და წარმოადგენს აუცილებელი კონტროლის საშუალებას მომდევნო (დაბალი) კლასის გეოდეზიური საფუძვლებისათვის· ასეთივე მნიშვნელობა აქვს მთლიანად გეოდეზიურ საფუძველს ყოველგვარი ტოპოგრაფიული, მარკშეიდერული და სხვადასხვა საინჟინრო სამუშაოთათვის, რომლებიც სრულდება გეოდეზიური მონაცემების საფუძველზე.

თანამედროვე ტექნიკის პირობებში, მრავალი სახის მშენებლობის მოთხოვნათა შესაბამისად, სამეცნიერო დარგების—გეოდეზიისა და მარკშეიდერიის კვლევის არეში შედის, გარდა დედამიწის ფიზიკური ზედაპირისა და წიაღის გამონამუშევართა აგეგმვისა, არსებული რუკებისა და გეგმების გამოყენება სხვადასხვა საინჟინრო საკითხის გადასაწყვეტად, პროექტის მონაცემთა გეგმიდან ადგილზე გადატანა და თვით პროექტის შესრულების კონტროლი (ზედამხედველობა)· ამასთანავე, ნებისმიერი საინჟინრო ნაგებობის (როგორც დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე, ისე მის წიაღში) დაპროექტება, მშენებლობა უსაფრთხოების უზრუნველყოფით და საერთოდ, ნაშენთა ხელსაყრელობა მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია გეოდეზიური, ტოპოგრაფიული და მარკშეიდერული მონაცემებისა და მშენებლობის პროცესში გეოდეზიური და სამარკშეიდერო მომსახურების ხარისხზე.

გეოდეზიისა და მარკშეიდერიის დარგის სპეციალისტებს მოეთხოვებათ სრული წარმოდგენა ჰქონდეთ იმ საინჟინრო ნაგებობის შესახებ, რომლებისათვისაც ისინი გეოდეზიურ, ტოპოგრაფიულ და მარკშეიდერულ მონაცემებს ამზადებენ და აგრეთვე მშენებლობის პროცესში უნდა იძლეოდნენ პროექტის შესაბამისად ნაგებობათა კონსტრუქციული ელემენტების გეომეტრიულად შენების გეზს. მაგალითად, მთელი რიგი დარგები, როგორიცაა: სამთო, შავი მეტალურგიის ქარხნების მშენებლობა, მეტროპოლიტენები, ჰიდროტექნიკური, ჰიდრომელიორაციული და სხვა, მოითხოვს გეოდეზიური, ტოპოგრაფიული და მარკშეიდერული პროექტის შედგენასა და მის შესრულებას ისე, რომ გამოყენებული გეოდეზიური საფუძველი, ტოპოგრაფიული და სამარკშეიდერო მასალები აკმაყოფილებდეს წინასწარ გათვალისწინებულ სიზუსტეს, რომელიც საჭიროა ნაგებობათა ძირითადი ღერძების გეომეტრიულად აგებისათვის. აღნიშნულის გამო ხაზების სიგრძეები და მიმართულებანი, ადგილზე დამაგრებული გეოდეზიური წერტილების თარაზული კოორდინატები და ნიშნულები სათანადო სიზუსტით უნდა იქნეს განსაზღვრული. მათი სიზუსტე ძირითადად

დამოკიდებულია *ყველზე წარმოებული გაზომვების* ხარისხზე. სათანადო სიზუსტეზე გადაჭარბებით საველე მასალის კამერალურად დამუშავება შედეგის სიზუსტეს არ ზრდის.

უდიდესი გამოცდილებით დადგენილია, რომ რამდენჯერაც არ უნდა იყოს გაზომვა ან გადაზომვა შესრულებული, ცალკეული გაზომვები უცილობლად განსხვავდება მცირე ოდენობის სიდიდეებით და ამასთანავე არ გადასცილდება გარკვეულ ზღვარს. უცილობლად ხდება ამა თუ იმ მხარეზე გაზომვის გადახრა გასაზომი სიდიდის ნამდვილი, ანუ ჭეშმარიტი მნიშვნელობიდან თუნდაც უდიდესი გულმოდგინებითა და საუკეთესო იარაღებით იქნეს გაზომვები შესრულებული. ჩვენ უგულებელვყოფთ იმ გარემოებას, რომ გასაზომი სიდიდე და ზომის ერთეულნი ხშირად უთანაზომონი არიან (კვადრატის დიაგონალი და გვერდი), რის შედეგად მათემატიკაში შემოვიდა ირაციონალური, ანუ არაპერიოდული უსასრულო ათწილადი რიცხვის ცნება. რაიმე ობიექტის (სიდიდის) ოდენობის ზუსტად განსაზღვრის შეუძლებლობა, თუგინდ გასაზომი სიდიდის ოდენობა რაციონალურ რიცხვს შეესაბამებოდეს, გამოწვეულია *საჭირო იარაღებისა და დამკვირვებლის* ნაკლოვანებებით, *გარემოს* გავლენის და გაზომვის პროცესში *გასაზომი ობიექტისა* და *საზომი ხელსაწყოს* ოდენობის ცვალებადობით.

გაზომვის შედეგის, ანუ განაზომის, ჭეშმარიტი ოდენობიდან გადახრას უწოდებენ „შეცდომას“,[1] **შეუკვრელობას (უზმაობას)**; მაგალითად, სამკუთხედის ან მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების გაზომვებით მიღებულ ჯამებსა და თეორიულად გამოთვლილ ჯამებს შორის სხვაობა. განაზომთა კამერალურად დამუშავებისას ე. წ. *ტლანქი, სისტემატური და მუდმივი* შეცდომები არ არის. შეუკვრელობის მიზეზად მხოლოდ *უცილობელ* შეცდომებს, უფრო ზუსტად, *შემთხვევითს და ნარჩენ სისტემატურ* შეცდომებს ვთვლით. გარდა ამისა, გაზომვის პროცესში გასაზომ ობიექტსა და საზომ ხელსაწყოს უცვლელს ვგულისხმობთ· მაშასადამე, რაიმე სიდიდის ოდენობის დასადგენად მისი გაზომვა *აუცილებელია*, ხოლო გაზომვის შემთხვევითი შეცდომა — *უცილობელი*.

როგორც ვთქვით, უცილობელი შეცდომები, ჩვეულებრივ, მცირე ოდენობისაა და მათი დაგროვება ხდება გარკვეული კანონის მიხედვით.

ჩვენი მიზანია გავითვალისწინოთ და მოვაწყოთ გეოდეზიური სამუშაოების შესრულება ისე, რომ სხვა თანაბარ პირობებში განაზომთა საბოლოო გამონათვლები მივიღოთ მოთხოვნილი სიზუსტის შესაბამისი, შევაფასოთ ცალკეული განაზომები, ანუ განვსაზღვროთ მათი სანდოობის ხარისხი და საბოლოოდ მრავალ შედეგთაგან[2] გამოვიტანოთ დასკვნა, მათი სიზუსტის შეფასება. ყოველივე ზემოთ ჩამოთვლილი საშუალებას მოგვცემს ვიმუშაოთ დასაშვები სიზუსტით, რომელიც მოთხოვნილი იქნება გეოდეზიური, სამარკშეიდერო და სხვა საინჟინრო წარმოების მიერ.

გეოდეზიური, ტოპოგრაფიული და სამარკშეიდერო სამუშაოების პროექტის შედგენისას პრაქტიკულ შედეგსა და თეორიულ შედეგს შორის განსხვავების ოდენობას ითვალისწინებენ შეუკვრელობების *დასაშვები ზღვრების* დაწესებით. ამრიგად, საჭირო ხდება დასაშვები ოდენობის შეუკვრელო-

---

[1] ხშირად „შეცდომის“ ნაცვლად ხმარობენ „ცდომილებას“, რასაც არსებითად ერთნაირი შინაარსი აქვს.

[2] შედეგში ვგულისხმობთ მრავალ განაზომთა გამონათვლებს.

ბების განაწილება, ანუ განაზომთა ეგრეთ წოდებული გაწონასწორება, რათა შედეგი საბოლოოდ საველე შეცდომათა რაც შეიძლება ნაკლები გავლენის ქვეშ იყოს.

გაწონასწორებისათვის თეორიულად შეიძლება გამოვიყენოთ მრავალი ხერხი, ეგრეთ წოდებული დამატებითი პირობების მიხედვით. პრაქტიკულად უფრო მიღებულია „უმცირეს კვადრატთა ხერხი“. ამ ხერხის არსი ისაა, რომ გაწონასწორებისათვის საძიებელ შესწორებათა კვადრატების ჯამი მინიმალურია სხვა მსგავს შესწორებათა კვადრატების ჯამზე. ამ მეთოდით მიღებული შესწორებული გაზაზომები უალბათესი, ანუ ჭეშმარიტი მნიშვნელობის უახლოესი სიდიდეებია. საველე მასალის წინასწარ შემოწმება-გაწონასწორების და შეფასების შემდეგ იწყება ამ მასალის საბოლოო დამუშავება. ამგვარად, **განაზომთა შეცდომების თეორია, ანუ შეცდომათა თეორია, არის გამოყენებითი მათემატიკის სამეცნიერო დარგი, რომელიც გვასწავლის განაზომთა უცილობელი შეცდომების თვისებებს, განმარტავს, თუ როგორი კანონით ხდება ამ შეცდომების წარმოშობა, დაგროვება და შედეგებზე მოქმედება, ადგენს შეცდომათა დასაშვებ ზღვრებს და გვაძლევს საერთო წესებს რაიმე სიდიდის განაზომთა გაწონასწორების და საბოლოო გამოთვლების საუკეთესო შედეგთა მიღებისა და შემოწმებისათვის.**

შეცდომათა თეორიას ინჟინერ-გეოდეზისტისათვის იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც სამშენებლო მექანიკას ინჟინერ-მშენებლობისათვის. შეცდომათა თეორიის საფუძველზე ინჟინერ-გეოდეზისტს შეუძლია შეასრულოს საჭირო გამოთვლები, შეადგინოს პროექტები და კრიტიკულად შეაფასოს უკვე შესრულებული სამუშაოები.

წინამდებარე კურსში შეცდომათა თეორია შეისწავლება მეტწილად საინჟინრო-გეოდეზიური და მარკშეიდერული გაზომვების თანხლებული უცილობელი შეცდომების ანალიზის შესაბამისად.

§ 1. 2. გაზომვათა სახეები

ობიექტების სახეობისა და ხასიათის მიხედვით მიმართავენ ხაზოვანსა და კუთხურ გაზომვებს; აგრეთვე ხშირად სრულდება გაზომვები ტემპერატურის, ჰაერის წნევისა და სხვ.

გაზომვებს ყოფენ

1. იმის მიხედვით, თუ როგორ არის მიღებული გასაზომი ობიექტის სიდიდე — პირდაპირ (უშუალო, უმეშვეო) და არაპირდაპირ (არაუშუალო, მეშვეობითი) გაზომვებად;

2. ობიექტის გაზომვათა რაოდენობის მიხედვით — უცილებელ და ჭარბ გაზომვებად;

3. თვისების მიხედვით — ერთგვაროვან და არაერთგვაროვან გაზომვებად;

4. პირობების მუდმივობის მიხედვით, რომელზედაც დამოკიდებულია განაზომთა სიზუსტე — ტოლზუსტ და არატოლზუსტ გაზომვებად;

5. ობიექტის ელემენტთა განაზომების ურთიერთდამოკიდებულების მიხედვით — დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ, პირობით და უპირობო გაზომვებად.

პირდაპირია გაზომვები იმ შემთხვევაში, როდესაც გასაზომი სიდიდე უშუალოდ შედარებული არის საზომთან, ანუ, როცა გასაზომი სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა მიიღება ამ სიდიდის მრავალჯერ უშუალოდ გაზომვის შედეგებიდან. მაგალითად, ხაზის სიგრძის გაზომვა საზომი ხელსაწყოთი, კუთხის გაზომვა კუთხმზომი იარაღით. ამ გზით მიღებული განაზომის სიზუსტე დამოკიდებულია საზომი ხელსაწყოს სიზუსტეზე, მზომავის გამოცდილებასა და მონდომებაზე, გაზომვის მეთოდზე, გასაზომი ობიექტის უცვლელობასა და იმ გარემო პირობებზე, რომელშიაც ხდება გაზომვები.

არაპირდაპირი გაზომვებია, როცა ობიექტის ან მისი რომელიმე ელემენტის ოდენობა მიიღება მასთან დაკავშირებული ელემენტების უშუალო განაზომთა სათანადო ფორმულებში ჩასმისა და ამოხსნის შედეგად. მაგალითად, თუ გავზომავთ უშუალოდ სამკუთხედის α, β, γ კუთხეებს და a გვერდს და ამ ელემენტების საშუალებით გამოვითვლით დანარჩენ b და c გვერდებს, მაშინ ეს გვერდები მეშვეობითი ხერხით არის განსაზღვრული; ასევე არაპირდაპირი გაზომვების ხაზის სიგრძის მანძილმზომის საშუალებით განსაზღვრა, წერტილების ნიშნულების ტრიგონომეტრიული ან ბარომეტრიული ნიველობით განსაზღვრა, წერტილთა კოორდინატების განსაზღვრა, ფართობების განსაზღვრა საჭირო ელემენტების უშუალოდ გაზომვით და სხვ. არაპირდაპირი გაზომვის სიზუსტე დამოკიდებულია გაზომილი ელემენტების უშუალოდ გაზომვის სიზუსტეზე, და აგრეთვე იმ ფუნქციის სახესა და სრულყოფილობაზე, რომლითაც გამოითვლება მოცემული ობიექტის ოდენობა, მაგალითად, ორ წერტილს შორის თარაზული მანძილის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ ერთ-ერთი ფორმულა $L_0 = Kn\cos^2\alpha + c\cos\alpha$, $L_0 \approx ((Kn+c)\cos^2\alpha$; პირველი უფრო ზუსტ შედეგს იძლევა, ვიდრე მეორე.

აუცილებელი გაზომვები ეწოდება ისეთს, რომელიც საჭიროა შევასრულოთ გასაზომი სიდიდის თუგინდ ერთი მნიშვნელობის მისაღებად.

ჭარბი (დამატებითი) გაზომვები გვაქვს, როცა ერთი და იმავე ობიექტის სიდიდის გასაგებად შესრულდება საჭირო ელემენტების გაზომვის გარდა კიდევ სხვა ელემენტების გაზომვა ან რაიმე სიდიდის გაზომვას ვიმეორებთ რამდენჯერმე. მაგალითად, სამკუთხედის ფართობის გასაგებად აუცილებლად საჭიროა ორი გვერდისა და მათ შორის კუთხის გაზომვა; დამატებით დანარჩენი ელემენტების გაზომვა ჩაითვლება ჭარბ გაზომვებად. ხაზის სიგრძის დასადგენად აუცილებლად საჭიროა მისი ერთჯერ მაინც გაზომვა; ყოველი ზედმეტი გაზომვა ჩაითვლება ჭარბ გაზომვად. ჭარბი გაზომვები არ უნდა გვესმოდეს ისე, როგორც ფუჭი ან ზედმეტი; პირიქით, ჭარბი გაზომვები საშუალებას გვაძლევს აღმოვაჩინოთ ყოველი მარცხი, ანუ ტლანქი შეცდომები, აგრეთვე გამოვავლინოთ უცილობელი შეცდომები გაზომვებში, გავზარდოთ გაზომვების სიზუსტე, ვიმსჯელოთ გაზომვათა სანდოობაზე და შევაფასოთ გაზომვების შედეგთა სიზუსტე. ჭარბი გაზომვები იძლევა დ ა მ ა ტ ე ბ ი თ პირობებს და შესაბამისად განტოლებების შედგენის საშუალებას, რაც შეუკვრელობათა განაწილებისათვის და საერთოდ განაზომთა გაწონასწორებისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობისაა.

ერთგვაროვანია გაზომვები მაშინ, როდესაც რაიმე სიდიდის ოდენობა განსაზღვრისათვის საჭიროა მისი ერთგვაროვანი ელემენტების გაზომვა. მა

ლითად, სამკუთხედის ფართობის ჰერონის ფორმულით განსაზღვრისათვის გაიზომება მხოლოდ გვერდები.

არაერთგვაროვანი გაზომვებია მაშინ, როდესაც რაიმე სიდიდის განსაზღვრისათვის საჭიროა მისი სხვადასხვაგვარი ელემენტების გაზომვა. მაგალითად, როცა სამკუთხედის ფართობის განსაზღვრისათვის იზომება ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე, ან გვერდი და მიმდებარე ორი კუთხე.

ტოლზუსტი ეწოდება ისეთ გაზომვებს, როდესაც გაზომვათა განმეორებისას ყველა ფაქტორი (პირობა) რჩება უცვლელი იმ ზომამდე, ვიდრე მათზე შეიძლება ზემოქმედება გაზომვათა დროს. მაგალითად, ტოლზუსტია განაზომთა რიგი, როცა რაიმე ობიექტის ერთგვარ ან სხვადასხვა ელემენტებს ზომავს ერთი და იგივე პირი ან იმდაგვარივე მომზადების სხვა პირი ტოლი განმეორებით, ერთი და იმავე სიზუსტის ინსტრუმენტით, ერთი და იმავე მეთოდით, დაახლოებით ერთსა და იმავე გარემო პირობებში და ერთნაირი მონდომებით. პრაქტიკულად, განაზომთა დამუშავების დროს, თუ რომელს მივაკუთვნოთ განაზომები — ტოლზუსტს, თუ არატოლზუსტს, გაითვალისწინებენ მხოლოდ იმ ფაქტორებს, რომელთა გავლენა შეცდომათა ოდენობაზე შეიძლება დადგინდეს საკითხის საკმარისად გადაწყვეტისათვის· ასეთ ფაქტორებად შეიძლება მივიჩნიოთ: გამოყენებული ინსტრუმენტების სიზუსტე, გაზომვების მეთოდები, გასაზომი ობიექტის ელემენტების გაზომვის სიძნელე, გაზომვათა რიცხვი. რაც შეეხება დანარჩენ ფაქტორებს, როგორიც არის მზომავის გამოცდილება და მუყაითობა, გარეშე ატმოსფერული პირობები და სხვა, რომელთა ზემოქმედება შეცდომებზე ზუსტად ვერ განისაზღვრება და შეიძლება მათი მიღება მხოლოდ მიახლოებით, ჩვეულებრივ, მხედველობაში იღებენ სამუშაოთა ორგანიზაციის და უშუალოდ გაზომვების წარმოების დროს.

უნდა აღინიშნოს, რომ რაიმე სიდიდის ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი გაზომვები არ გულისხმობს ერთი და იმავე სიდიდის დამოუკიდებელ განაზომთა ურთიერთ ტოლობას. იგი მხოლოდ გაზომვის პირობებს ახასიათებს, მოძრაობის, ანუ ცვალებადობის კანონს ემორჩილება ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ფაქტორი და ამის გამო არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება გაზომვების განმეორებისას ზუსტად დავიცვათ ფაქტორთა მუდმივობა, რომლებზედაც დამოკიდებულია ცალკეული განაზომები. ამ მიზეზით ტოლზუსტ გაზომვებში ცალკეული განაზომები ურთიერთგანსხვავდება, ე. ი. გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობიდან ვიღებთ სხვადასხვა შეცდომას·

როგორც წინა პარაგრაფში ითქვა, მრავალი დაკვირვებით დადგენილია, რომ შეცდომები მოცემულ პირობებში მცირე ოდენობის სიდიდეებია და არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს.

განაზომთა სანდოობას გამოსახავენ რიცხვით, რომელსაც წონას უწოდებენ. ტოლზუსტ განაზომებს გაწონასწორების დროს ერთნაირ წონას მიაკუთვნებენ.

არატოლზუსტია გაზომვები მაშინ, როდესაც ობიექტის ერთი და იმავე ელემენტის განმეორებით გაზომვების დროს იცვლება გაზომვის ძირითადი ფაქტორები ან, როდესაც ამ ობიექტის სხვადასხვა ერთგვაროვანი ელემენტის გაზომვა სრულდება ძირითადი ფაქტორების შეცვლით (იგივე ითქმის სხვადასხვა ობიექტის ერთგვაროვანი ელემენტების გაზომვის დროსაც). მაგალითად, სამკუთხედის რომელიმე კუთხის რამდენიმეჯერ გაზომვის დროს თუ გამოვიყენეთ სხვადასხვა სიზუსტის ინსტრუმენტი ან კუთხის გაზომვის მეთოდი, იმავე ან სხვადასხვა სამკუთხედების კუთხეების გაზომვა თუ შესრულდა სხვადასხვა

სიზუსტის ინსტრუმენტით ან მეთოდით და სხვ. არატოლზუსტი ეწოდება გაზომვებს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც სრულდება არაერთგვაროვანი გაზომვები და დაცული არ არის თანაბარი გავლენის პრინციპი. არატოლზუსტ განაზომებს გაწონასწორების დროს მიაკუთვნებენ სხვადასხვა წონას[1].

დამოუკიდებელი ეწოდება გაზომვებს იმ შემთხვევაში, როცა რაიმე ობიექტის ერთი და იგივე ან სხვადასხვა ელემენტები გაიზომება პირდაპირ ან არაპირდაპირ რამდენჯერმე და გაზომვების შედეგები მიღებულია ისე, რომ ერთის შეცდომა მეორის შეცდომაზე არ ახდენს გავლენას. მაგალითად, ბაფთით ხაზის წინ და უკან გაზომვის შედეგად ხაზის სიგრძედ მიიღება განაზომთა საშუალო არითმეტიკული, თუ[2] ამ განაზომთა ფარდობითი შეცდომა დასაშვებ სიდიდეს არ აღემატება; ტრიანგულაციის ქსელში გაზომილ მიმართულებათა საბოლოო ოდენობებად მიიღება განაზომთა საშუალო არითმეტიკული, თუ მიმართულებებში ორმაგი კოლიმაციური შეცდომის ცვალებადობა არ აღემატება კუთხმზომი იარაღის ორმაგ სიზუსტეს; სამკუთხედის რომელიმე გვერდის სიგრძის დასადგენად გაიზომება სხვა გვერდი და კუთხეები და გამოთვლილი გვერდი დამოუკიდებლად გაზომილად ითვლება.

დამოკიდებულია გაზომვები, როცა ერთი განაზომის შეცდომა დაკავშირებულია მეორე განაზომის შეცდომასთან. მაგალითად, ტრიანგულაციაში გაზომილ მიმართულებათა სხვაობებით გამოთვლილი მოსაზღვრე კუთხეების შეცდომები ურთიერთდაკავშირებულია, რადგანაც ორივე კუთხის შეცდომებში შედის მათი საერთო მიმართულების შეცდომა.

პირობითი გაზომვები ეწოდება ისეთ გაზომვებს, როცა გასაზომი ობიექტის ელემენტების დამოუკიდებლად გაზომილი შედეგებისადმი მოითხოვება გარკვეული მათემატიკური პირობის დაკმაყოფილება. მაგალითად, ბრტყელი სამკუთხედის კუთხეების ჯამი უნდა უდრიდეს 180°-ს, ხოლო მრავალკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი $2d(n-2)$; წრეტილის გარშემო გაზომილ კუთხეთა ჯამი უნდა უდრიდეს 360°-ს; შეკრულ მრავალკუთხედში სიმაღლეთა სხვაობების, ანუ აღმატებათა ჯამი და აგრეთვე კოორდინატთა ნაზრდების ჯამი ნულს უნდა უდრიდეს. როგორც ვხედავთ, ობიექტის ცალკეული ელემენტის გაზომვა დამოუკიდებელია, მაგრამ ასეთ გაზომვას ვუწოდებთ პირობითს, რადგანაც მოთხოვნილია, რომ ელემენტების ერთობლიობა გარკვეულ მათემატიკურ პირობას აკმაყოფილებდეს. მაშასადამე, გეოდეზიური ქსელის ელემენტების პირობითი გაზომვები უნდა აკმაყოფილებდეს ქსელის მათემატიკურ პირობებს.

უპირობოა გაზომვები, როცა მათ მიმართ არ არსებობს წინასწარი თეორიული პირობები.

საინჟინრო-გეოდეზიური და სამარკშეიდერო გაზომვების დროს განიხილება

1) პირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი ტოლზუსტი, დამოუკიდებელი განაზომების შეფასება-გაწონასწორება—*პირდაპირი, დამოუკიდებელი ტოლზუსტი* გაზომვები (3.3).

2) არაპირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი ტოლზუსტი ან არაერთგვაროვანი ტოლზუსტი, დამოუკიდებელი განაზომების შეფასება გაწონასწორება — *არაპირდაპირი, დამოუკიდებელი ტოლზუსტი* გაზომვები (3.4).

---

[1] იხილე 3.4.31.

[2] ამ შემთხვევაში კავშირი „თუ" უნდა უგულებელვყოთ, რადგანაც მისი მხედველობაში მიღება გაზომვას პირობითად ხდის. თავისთავად დამოუკიდებლობა არავითარ პირობითობას არ ემორჩილება — იგი შეზღუდული არ არის.

3) პირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი არატოლზუსტი, დამოუკიდებელი განაზომების შეფასება-გაწონასწორება — პ ი რ დ ა პ ი რ ი, დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა რ ა ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი გაზომვები (3. 5).

4. არაპირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი არატოლზუსტი, დამოუკიდებელი განაზომების შეფასება-გაწონასწორება — ა რ ა პ ი რ დ ა პ ი რ ი, დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა რ ა ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი გაზომვები (3. 6)

5) პირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი ტოლზუსტი, ერთგვაროვანი არატოლზუსტი, არაერთგვაროვანი ტოლზუსტი, არაერთგვაროვანი არატოლზუსტი პირობითი განაზომების შეფასება-გაწონასწორება—პ ი რ დ ა პ ი რ ი, პ ი რ ო ბ ი თ ი ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი დ ა ა რ ა ტ ო ლ ზ უ ს ტ ი გაზომვები[1].

6) არაპირდაპირი, ჭარბი, ერთგვაროვანი ტოლზუსტი, ერთგვაროვანი არატოლზუსტი არაერთგვაროვანი ტოლზუსტი, არაერთგვაროვანი არატოლზუსტი, დამოუკიდებელი პირობითი და უპირობო განაზომების შეფასება-გაწონასწორება—არაპირდაპირი, დამოუკიდებელი პირობითი ტოლზუსტი და არატოლზუსტი გაზომვები[2].

როგორც ვხედავთ, ობიექტების ელემენტთა გაზომვების სხვადასხვა სახეობა ცალკეულ განაზომთა შედეგების შეფასების, სათანადო დასკვნების გამოტანის და დასაშვები შეუკვრელობის ზღვრების დადგენისა და გაწონასწორებისათვის საჭირო დამატებითი განტოლებების შედგენის საშუალებას გვაძლევს.

8. 1. 8. განაზომების შეცდომები და შესწორებანი

გაზომვების დროს მხედველობაში უნდა გვქონდეს ორი გარემოება;

1) საზომი ხელსაწყოს გაზომვის პროცესში უცვლელობა. იმისათვის, რომ საზომის მცირედი ცვალებადობა მხედველობაში იქნეს მიღებული, საჭირო ხდება გაზომვის დაწყებამდე და მის შემდეგ შემოწმდეს საზომის სიგრძე, აგრეთვე გაზომვის პროცესში გარემოს ცვალებადობა აღირიცხოს (ტემპერატურა და სხვ.) და განაზომში შეტანილ იქნეს სათანადო შესწორება.

2) გასაზომი ობიექტის ოდენობა არ უნდა იცვლებოდეს გაზომვის პროცესში[3]. ბუნებაში აბსოლუტურად უცვლელი ობიექტები არ არსებობს, მაგრამ შეიძლება მოიძებნოს დროის ისეთი შუალედი, როცა გასაზომი სიდიდე გაზომვის სიზუსტის ფარგლებში მივიჩნიოთ უცვლელად. უმაღლესი სიზუსტით განსაზღვრულ რაიმე სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა დროის გარკვეულ მანძილზე უცვლელი რჩება, ეწოდება ნამდვილი, ანუ ჭეშმარიტი მნიშვნელობა გასაზომი სიდიდისა. მაგალითად, ინვარის მავთულით განსაზღვრული ხაზის სიგრძე ჭეშმარიტია დროის გარკვეულ პერიოდში, იმავე ხაზის ფოლადის ბაფთით გაზომვის შედეგთან შედარებით.

თუ რაიმე სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ X-ით და იმავე სიდიდის გაზომვის შედეგად მიღებულ მნიშვნელობას l_i-ით, ხოლო ჭეშმა-

---

[1] განიხილება მეოთხე ტომში.

[2] განიხილება მეოთხე ტომში.

[3] არის შემთხვევები, როცა გასაზომი ობიექტები გაზომვის პროცესში სწრაფად იცვლება. მაგალითად, მაგნიტური ისრის მიხრილობის ცვლა და სხვ. როცა დადგენილია გასაზომი ობიექტის ცვალებადობის კანონი მათემატიკურად, მაშინ მას სათანადოდ გაითვალისწინებენ.

რიტ შეცდომას δ_i-ით, მაშინ ჭეშმარიტი შეცდომა განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\delta_i = l_i - X \qquad (3.1.3.1)$$

და ჭეშმარიტი შესწორების ოდენობა, რომელსაც ε_i-ით აღვნიშნავთ, განტოლებით

$$\varepsilon_i = X - l_i. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3\ \ldots) \qquad (3.1.3.2)$$

შეცდომის ოდენობის დასადგენად *გაზომვით მიღებულ ოდენობას ვაკლებთ იმავე სიდიდის იმ მნიშვნელობას, რომელიც თეორიული გამოთვლით ან უზუსტესი გაზომვის მეთოდებით გვაქვს მიღებული*, მაგალითად, თუ შვიდკუთხა მრავალკუთხედის კუთხეთა ჯამი გაზომვის შედეგად შეადგენს 900°2′-ს, შეცდომა ანუ შეუკვრელობა იქნება +2′, ხოლო შესწორება—2 ბაფთის სიგრძე მიღებული გვაქვს 20 მეტრის ტოლად, სინამდვილეში შემოწმებით მივიღეთ, რომ იგი 20.008 მეტრის სიგრძისაა. ამ შემთხვევაში ბაფთის ნომინალური სიგრძის შეცდომა იქნება + 8 მმ. ხაზის გაზომვისას ასეთი ბაფთით ყოველ გადაზომვაში შეცდომა — 8 მილიმეტრია, ხოლო შესწორება იქნება + 8 მილიმეტრი. შეცდომისა და შესწორების ამგვარად განსაზღვრა ლოგიკურად სავსებით გამართლებულია ცხოვრებაში მიღებული წესის მხრივაც. მაგალითად, ამბობენ — შეცდომა მოვიცილოთ, უკუვაგდოთ და შესწორება მივიღოთ. მაშასადამე, შეცდომით მიღებული შედეგის შესასწორებლად საჭიროა განაზომს შეცდომის სიდიდე ალგებრულად გამოვაკლოთ ან შესწორება დავუმატოთ. მართლაც, (1) ფორმულიდან მივიღებთ,

$$X = l_i - \delta_i, \qquad (3.1.3.3)$$

ხოლო (2) ფორმულიდან გვექნება

$$X = l_i + \varepsilon_i. \qquad (3.1.3\ 4)$$

როგორც ვხედავთ, სიდიდის ჭეშმარიტი ოდენობის მათემატიკურად მიღება განაზომისაგან შეცდომის გამოკლებით ან შესწორების მიმატებით ხდება.

შეცდომის ან შესწორების ნიშნის არასწორად განსაზღვრა გამოიწვევს შედეგში შეცდომის გაორკეცებას, ამიტომ ზემოთ მიღებული წესი მუდამ უნდა გვახსოვდეს[1].

შეცდომასა და შესწორებას შორის განსხვავება მხოლოდ ნიშნების სხვადასხვაობაში არ მდგომარეობს, მათ შორის განსხვავება უნდა გვქონდეს წარმოდგენილი სხვაგვარადაც, მაგალითად,

1) ბაფთის დამზადების შეცდომასა და შესწორებას შორის ნიშნებშია განსხვავება და მათი აბსოლუტური სიდიდეები ტოლია, ე. ი.

$$|\delta| = |\varepsilon|.$$

2. გეოდეზიაში შეცდომის ოდენობას ადგენენ (1) ფორმულით. მაგალითად, პირობით განაზომებში შეცდომა ტოლია უშუალოდ შესრულებულ განაზომთა და თეორიულ გამონათვალთა შორის სხვაობისა, შესწორებები კი გაწონასწორების შედეგად მიღებული ოდენობებია; მხოლოდ ობიექტის ელე-

[1] ამ საკითხის შესახებ დამატებითი განმარტება იხილეთ (3.1.7) პარაგრაფში.

მენტთა შესწორებების აბსოლუტურ ოდენობათა ჯამი ტოლია ობიექტის პირობითი განაზომის შეცდომის აბსოლუტური ოდენობისა.

მაგალითად, ბრტყელი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის შეცდომა (W) გამოითვლება გამოსახულებით

$$W=(\alpha+\beta+\gamma)-180°,$$

კუთხეების შესწორებათა ჯამი კი ფორმულით

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=180°-(\alpha+\beta+\gamma),$$

ე.

$$|W|=|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|.$$

ამრიგად, შეცდომის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია შესწორებათა აბსოლუტური მნიშვნელობების ჯამისა, ანუ შესწორებათა ჯამი უდრის შეცდომას შებრუნებული ნიშნით.

3. შესწორება არაა შედეგი შეცდომის. მაგალითად,

ბაფთის სიგრძის შესწორება ტემპერატურის ცვალებადობის გამო

$$\varepsilon_t=\alpha(t-t_0)\,l,$$

სადაც α არის ტემპერატურული გაფართოების კოეფიციენტი;

t — ტემპერატურა ხაზის გაზომვის დროს.

t_0 — ტემპერატურა ბაფთის კომპარირების დროს;

l — კომპარირებით განსაზღვრული ბაფთის სიგრძე.

გაზომილი ხაზის თარაზულობაზე დაყვანა, ანუ შესწორება ხაზის დახრის გამო განისაზღვრება ფორმულით

$$\varepsilon_\nu=2L\sin^2\frac{\nu}{2},$$

სადაც L არის დახრილი ხაზის სიგრძე;

ν — ხაზის დახრის კუთხე.

ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ შესწორებასა და შეცდომას შორის განსხვავება არსებითია.

8. 1. 4. განაზომთა რიგების სახეები

სათანადო სიზუსტის ინსტრუმენტებისა და გაზომვის მეთოდების გამოყენება, გულმოდგინე, გამოცდილი დამკვირვებელი და გარემო პირობათა ხელსაყრელობა საწინდარია გაზომვებში შეცდომების შემცირებისა. ტოლზუსტ განაზომთა რიგის რიცხვების საერთო ციფრები ახასიათებენ თვით გაზომილ სიდიდეს. მაგალითად, 1, 2, და 3 ცხრილებში რიცხვები: 48° 50′. 840 და 146,308 ახასიათებენ გაზომილ სიდიდეებს. განაზომთა არასაერთო, ურთიერთ განსხვავებული დანარჩენი ციფრები შედეგია სხვადასხვა შეცდომებისა. განაზომთა რიგებში განსხვავებული ციფრები ორნაირი სახისაა და პრაქტიკაში შესაბამისად განაზომთა რიგებიც ორნაირი სახის გვხვდება.

განაზომთა პირველი სახის რიგი იქნება იმ შემთხვევაში, როცა გასაზომი ობიექტის მრავალჯერ გაზომვის შედეგები იცვლება რაიმე თვალსაჩინო წესის მიხედვით. განაზომთა პირველი სახის რიგის მაგალითად შეიძლება მო-

ცხრილი 3.1.4.1

№ რიგზე	s	φ
1	0°	48° 50′ 10,″ 9
2	10°	11,″ 8
3	22°	11,″ 9
4	31°	12,″ 1
5	40°	48° 50′ 13,″ 0
6	53°	13,″ 3
7	63°	13,″ 5
8	74°	14,″ 8

ცხრილი 3.1.4.2

განსაზღვრის წლები	სიმაღლე მმ-ში	განსაზღვრის წლები	სიმაღლე მმ-ში
1879	840,88	1888	840,59
1880	70	1889	55
1881	70	1890	61
1882	60	1891	52
1883	61	1892	44
1884	60	1895	51
1885	62	1898	42
1886	61	1901	39
1887	63	1904	30

ცხრილი 3 1 4.3

გაზომვათა №	ბაზისის სიგრძე მეტრებში	გაზომვათა №	ბაზისის სიგრძე მეტრებში
1	146,30876	6	146,30862
2	64	7	57
3	56	8	62
4	58	9	79
	50	10	73

ვიყვანოთ განედის განსაზღვრის დაკვირვებების ცხრილი 1 და ასტრონომიული სვეტის სიმაღლის პერიოდულად განსაზღვრის ცხრილი 2. ამ ცხრილების ყოველი თანამიმდევნო წევრის ოდენობა იცვლება ადვილად შესამჩნევი წესით. განაზომთა რიგის წევრების თანამიმდევრობა პირველ ცხრილში ზრდადია და მეორეში — კლებადი.

მეორე სახის რიგი არ ხასიათდება წევრთა ოდენობების კანონზომიერი ცვალებადობით. განვიხილოთ ცხრილი 3 ბაზისის გაზომვის პრაქტიკიდან. როგორც ვხედავთ, ამ ცხრილის ყოველი თანამიმდევნო წევრი ხან მეტია და ხან ნაკლები წინა წევრზე და არავითარი გარკვეული კანონზომიერების სახე ამ რიგს არა აქვს, რადგანაც წევრთა ოდენობის ცვალებადობა ყოველგვარი წესრიგის გარეშე მიმდინარეობს. ამ ცხრილში თვალნათლივ ჩანს რიგის წევრთა გაბნეულობა, ანუ დისპერსია. ქვემოთ დაწვრილებით განვიხილავთ, თუ როგორი შეცდომები იწვევს ამა თუ იმ სახის განაზომთა რიგს. განხილული რიგებიდან მესამე პარაგრაფში განმარტებული წესის მიხედვით გამოითვლება და მიიღება როგორც პირველი, ისე მეორე სახის შეცდომათა რიგები.

3. 1. 5. განაზომთა შეცდომების სახეები

განაზომთა რომელიმე რიგის მიღება დამოკიდებულია იმ კომპონენტებზე, რომლებიც იღებენ მონაწილეობას გაზომვებში (გასაზომი ობიექტი, ინსტრუმენტი, მზომავი ან გამომთვლელი და გარემო პირობები).

განაზომთა შეცდომებს ყოფენ.

წარმომშობი წყაროების მიხედვით — *ინსტრუმენტული, პირადი, გარემო პირობებისა და ობიექტით გამოწვეული;*

ხასიათის, ანუ თვისებათა მიხედვით — *ტლანქი, სისტემატური, მუდმივი და შემთხვევითი.*

ამა თუ იმ ბუნების ანუ თვისების შეცდომის წარმომშობი მიზეზი შეიძლება იყოს გაზომვების ცალკეული ფაქტორი ან ყველა ფაქტორი ერთად. ამიტომ თანამიმდევრობით განვიხილოთ შეცდომები მათი თვისებების მიხედვით და შევეხოთ მათზე ამა თუ იმ ფაქტორის გავლენას.

ტლანქი შეცდომა ეწოდება ისეთს შეცდომას, რომელიც არის შედეგი გაზომვების ან თვლის დროს მომხდარი მარცხისა. ამ სახის შეცდომების მოვლინება გაზომვებში არ არის უცილობელი, იგი განაზომებში შეიძლება იქნეს და შეიძლება არა, ე. ი. ტლანქი შეცდომები დამკვირვებლის უყურადღებობის შედეგია. მაგალითად, ხაზის გაზომვის დროს ჩხირების თვლაში შეცდომა ან ბაფთაზე ათვლის შეცდომა ციფრების არევით (ცხრისა და ექვსის, სამისა და რვის და სხვ.); მიმართულებათა გაზომვისას სამიზნებელი ხელსაწყოს არასაჭირო წერტილზე დამიზნება ან ლიმბზე რამდენიმე გრადუსით ან მინუტით მცდარად ათვლა; ნიველობის დროს — თარაზოს ბუშტულის გადახრით ანათვლის მცდარობა და საერთოდ ლარტყაზე მცდარი ანათვლების აღება; მანძილმზომით ხაზების განსაზღვრისას — შეცდომა ლარტყის ან შვეული წრედის რამდენიმე დანაყოფში; კამერალური გამოთვლების დროს — არასწორი ფორმულებით სარგებლობა: ციფრების შეცდომით დაწერა, მძიმის დასმა შეცდომით და სხვ. ტლანქი შეცდომის აღმოსაჩენად აუცილებელია საკონტროლო გაზომვების შესრულება. მაგალითად, ხაზის ან კუთხის ერთხელ გაზომვის შედეგად არ შეგვიძლია განაზომის შესახებ ვთქვათ არის თუ არა მასში ტლანქი შეცდომა; არც ორჯერ გაზომვით მიღებულ განაზომთა შესაბამისობაა სრული გარანტია იმისა, რომ განაზომებში ტლანქი შეცდომა არ არის. გამოცდილებით დადგენილია, რომ, თუ ობიექტის გაზომვა გაიმეორა ერთმა და იმავე პირმა, ერთი და იმავე ინსტრუმენტით და მეთოდით, პირველი გაზომვის დროს დაშვებული ტლანქი შეცდომა მოსალოდნელია განმეორდეს და ამით მისი გამოვლინება არ მოხდის. ამის გამო, როგორც წესი, მიღებულია, რომ საკონტროლო გაზომვები შესრულდეს სხვადასხვა ინსტრუმენტით ან სხვადასხვა მეთოდით, ან სხვადასხვა პირის მიერ. მაგალითად, ხაზების გაზომვა სხვადასხვა საზომით (20 და 24 მ), მიმართულებათა განსაზღვრა ილეთების ლონეობით; ნიველობის წარმოება ინსტრუმენტის ჰორიზონტის შეცვლით ან ლარტყის ორივე მხარეზე ანათვლების აღებით, დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე და მის წიაღში აგეგმვების კონტროლი მათი უმაღლესი რიგის დასაყრდენ წერტილებზე მიბმით და სხვ.

როგორც ზემოჩამოთვლილი, ისე სხვა მრავალი ხერხი საშუალებას გვაძლევს აღმოვაჩინოთ გაზომვების შედეგებში ტლანქი შეცდომები. გაზომვების კარგი ორგანიზაციის, შემსრულებლის მუყაითობისა და სათანადო გაზომვა-გამოთვლის მეთოდის შერჩევის საფუძველზე ტლანქი შეცდომები უნდა გამოვლინდეს და არ გაიპაროს განაზომებში. ტლანქი შეცდომების წარმომშობ მიზეზებს იკვლევს ფსიქოლოგია. შეცდომათა თეორიაში აღნიშნული მიზეზები არ შეისწავლება და იგულისხმება, რომ განაზომთა გამონათვლები ანუ შედეგები თავისუფალია ასეთი შეცდომებისაგან.

აქამდე განხილული იყო ისეთი ტლანქი შეცდომები, რომლებიც წარმოშობილი იყო გაზომვის ან თვლის დროს დაშვებული მარცხით. არსებობს ტლანქი შეცდომების სხვა გაგებაც.

ტლანქს უწოდებენ ისეთ შეცდომებსაც, რომლებიც ოდენობით აღემატება ამა თუ იმ პირობებისათვის წინასწარი ანგარიშით გათვალისწინებულ ე. წ. ზღვრულ[1] შეცდომებს. ტლანქი შეცდომა ზოგ შემთხვევაში აშკარა მარცხის შედეგი არაა, არამედ იგი არის შედეგი იმისა, რომ სამუშაოს შესრულების დროს ვერ იყო დაცული წინასწარ გათვალისწინებული პირობები. იგი გამოწვეულია ინსტრუმენტების არასათანადოდ შემოწმებებისა და შესწორებების შედეგად, გარემო პირობების არაშესაბამისობით; დამკვირვებლის არასაკმარისი მუყაითობით და სხვა მიზეზებით. განაზომთა ხარისხის თვალსაზრისით ასეთი ტლანქი შეცდომებიც არ არის უცილობელი, რადგან იგი შედეგია ისეთი მიზეზების, რომლებიც შეიძლებოდა ადრევე თავიდან აგვეცდინა. როგორც ითქვა, ასეთი შეცდომები განმეორებითი გაზომვებით უნდა მოვსპოთ.

სისტემატურს ვუწოდებთ ისეთ შეცდომებს, რომლებიც გაზომვების გარკვეულ პირობებში წარმოშობის წყაროებთან დაკავშირებით განაზომებში შედიან რაიმე კანონის მიხედვით. ამა თუ იმ სისტემატური შეცდომის გამოვლინების კანონზომიერება ცალკეულ განაზომებში საგანგებოდ დადგინდება. ტოლზუსტ გაზომვებში სისტემატური შეცდომები არსებითად უცვლელი რჩება ოდენობითა და ნიშნით. უცვლელობა არსებითად არ ნიშნავს, რომ შეცდომები სრულიად უცვლელია ოდენობით. ცალკეული განაზომები სისტემატურ შეცდომათა თვალსაზრისით ურთიერთგანსხვავებულია, ე. ი. ადგილი აქვს ნარჩენ სისტემატურ შეცდომებს. იმ შემთხვევაში, როცა შევცვლით გაზომვების პირობებს, მაშინ სისტემატური შეცდომების ოდენობა ან ნიშანი შეიცვლება გარკვეული კანონზომიერებით.

სისტემატური შეცდომების წყაროებად შეიძლება ჩაითვალოს ობიექტი, ინსტრუმენტი, სუბიექტი და გარემო პირობები. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ გაზომვათა პროცესში გასაზომი ობიექტი ნაგულისხმევია უცვლელად. პრაქტიკაში გვხვდება ისეთი შემთხვევა, როცა ობიექტი დაკვირვებათა პროცესში იცვლება მიუხედავად იმისა, რომ ყველა დანარჩენი ფაქტორი უცვლელია. მაგალითად, (2) ცხრილში ნათლად ჩანს განაზომთა პირველი სახის რიგი, რომელშიც ცალკეული შედეგი სისტემატურად კლებადია და ეს გამოწვეულია ინსტრუმენტის დასადგმელი ასტრონომიული სვეტის თანდათანობითი დაწევით. ასეთი შემთხვევის გამოკვლევა ხშირად დიდ ინტერესს იწვევს და შეადგენს მეცნიერული კვლევის საგანს. მაგალითად, სამთო საქმეში ობიექტების ასეთი ცვალებადობა საგანგებო დაკვირვების საგანია და ამის მიხედვით სწავლობენ დედამიწის ფიზიკური ზედაპირის ძვრებს. ანალოგიურია ჯებირებისა და ნაგებობათა საძირკვლების დაწევის საკითხი და სხვ.

ინსტრუმენტული სისტემატური შეცდომის მაგალითს წარმოადგენს განედის განსაზღვრის ცხრილი 1. ამ ცხრილში ცხადად ჩანს, რომ ზენიტური მანძილის მატებასთან ერთად კანონზომიერად იზრდება განედი. ამის მიზეზად უნდა ჩაითვალოს ჭოგრის თანდათანობითი ღუნვა, როგორც

[1] ზღვრული შეცდომების შესახებ იხილეთ 3,4,4.

ეხედავთ, დაკვირვებათა ცხრილი იღებს პირველი რიგის სახეს, ე. ი. მოცემულ ცხრილში უპირატესად სისტემატური შეცდომებია და ვინაიდან მათი წარმოშობი წყარო უმთავრესად ინსტრუმენტია, ამიტომ ასეთ შეცდომებს ვუწოდებთ ინსტრუმენტულ სისტემატურ შეცდომებს. ამგვარსავე შეცდომას იწვევს საზომის სიგრძის შეცდომა (მისი გავლენა განაზომზე გასაზომი ხაზის სიგრძის პროპორციულია), ყიბლანის წვეტანის ექსცენტრობა, წრედალიდადის ექსცენტრობა, ჭოგრის კოლიმაციური შეცდომა, შვეული წრედის ნულ-ადგილი, ყიბლანის ისრის მაგნიტური და გეომეტრიული ღერძების დაუმთხვევლობა, ნიველირის ჭოგრის მზერის ღერძისა და თარაზოს ღერძის არაწესივრობა და სხვ. ინსტრუმენტული სისტემატური შეცდომები არის როგორც მუდმივი (კოლიმაციური შეცდომა), ისე ცვლადი (წრედალიდადის ექსცენტრობის გავლენა).

სისტემატურ შეცდომას ეწოდება პირადი, როცა მისი წარმოშობის მიზეზი თვით დამკვირვებელია (სუბიექტი); მაგალითად, ერთი და იმავე ინსტრუმენტით ორი პიროვნება როცა მზერს რაიმე საგანს, ერთის დამიზნება ხდება მუდამ მარცხნივ, მეორის კი მუდამ მარჯვნივ, ან კიდევ, ანათვლები ლიმბზე ერთის არის მუდამ ნაკლები, ხოლო მეორისა — მუდამ მეტი. ჭეშმარიტთან შედარებით, ე. ი. დაკვირვებები ცალმხრივად მცდარია.

სისტემატური შეცდომის მიზეზი შეიძლება იქნეს გარემო პირობები. მაგალითად, ჰაერის ტემპერატურა, დედამიწის სიმრუდე, რეფრაქცია აღნიშნული სახის სისტემატურ შეცდომასთან დაკავშირებულია ეგრეთ წოდებული თეორიული შეცდომა, მაგალითად, სინათლის აბერაცია, რომელიც გამოწვეულია დედამიწის მოძრაობით, რაც წინათ დადგენილი არ იყო და ამის გამო მას არ იღებდნენ მხედველობაში, რეფრაქციის გავლენით გამოწვეული შედომა და სხვ.

ყოველგვარი სახის გაზომვის შესრულებისას სისტემატური შეცდომები შესწავლილი უნდა იქნეს და შესაძლებლობის ფარგლებში — აცილებული, ე. ი. განაზომები უნდა იყოს მეორე სახის რიგის. მაშასადამე, განაზომთა რიგის წევრების დისპერსია უნდა იყოს თვალსაჩინო. აღნიშნულის მიღწევა შეიძლება ან შეცდომების წარმომშობი წყაროების აცილებით, ან გაზომვის მეთოდების შერჩევით. მაგალითად, კოლიმაციური შეცდომის, ანუ მუდმივი სისტემატური შეცდომის შემცირება ჭოგრის ძაფთა ბადის გადაადგილებით, ხშული ნიველირის მზერის ღერძისა და თარაზოს ღერძის სწორივობის მიღწევა ძაფთა ბადის ხრახნებით და სხვ. აღნიშნული შესწორებები ინსტრუმენტებში საკმარისი არაა და ამიტომ ამ შესწორებათა გარდა გამოიყენება მეორე საშუალება მუშაობის პროცესში ამა თუ იმ მეთოდით შეცდომების მოსპობა. მაგალითად, გაზომილი მიმართულებები კოლიმაციური შეცდომისა და ალიდადის ექსცენტრისიტეტის შეცდომებისაგან (ანუ ცვლადი სისტემატური შეცდომებისაგან) იქნება თავისუფალი, თუ მიმართულებებს განვსაზღვრავთ წრედი მარჯვნივის და წრედი მარცხნივის ანათვალთა საშუალო არითმეტიკულით; ამავე დროს, ყოველ ანათვალს. ავიღებთ ორი ვერნიერის საშუალო არითმეტიკულით. ილეთების ხერხით მნიშვნელოვნად მცირდება ლიმბის სისტემატური და შემთხვევითი შეცდომების გავლენა; შვეული წრედის ნულადგილის გავლენა განაზომზე ისპობა სათანადო ფორმულების გამოყენებით; ბაფთით გაზომილი შედეგი სწორდება კომპარირებით დადგენილი შესწორებისა და ტემპერატურული შესწორებებით; ტრიგონომეტრიულ ნიველობაში შესწორება შეიტანება დე-

დამიწის სიმრუდისა და რეფრაქციისათვის; ანეროიდზე აღებული ანათვლები სწორდება სათანადო ემპირიული ფორმულებით დადგენილი შესწორებებით; ზუსტი ნიველობის დროს ლარტყის დგარებზე გადადებისა და ღერძის ირგვლივ შემობრუნებით ისპობა მთელი რიგი შეცდომები; პლანიმეტრის პოლუსის მდებარეობის შეცვლა ათვლელი ხელსაწყოს დოლის ხელმძღვანელი ბერკეტისადმი არაპარალელურობის შეცდომის მოსასპობად და სხვ.

ზემოხსენებული საშუალებებით სისტემატური შეცდომების სრულიად აცილება ვერ ხერხდება და გაზომვები მაინც შემცველია სისტემატური შეცდომის გავლენისა ე. წ. ნარჩენ სისტემატურ შეცდომათა სახით, რომლებიც შემთხვევით შეცდომებთან ერთად მოქმედებენ და თითქმის მათივე ბუნებისად გვევლინებიან.

როგორც ვხედავთ, სისტემატური შეცდომების წყაროების გარკვევა და ზუსტი ფორმულით მათი გასასაღვრის საშუალება ყოველთვის არ არის, ამიტომ მიმართავენ მრავალჯერადი განაზომების ურთიერთშედარების მეთოდს. ადარებენ გაზომვათა რიგებს და ის რიგი მიიჩნევა უფრო სანდოდ, რომლის წევრებსაც მცირედ ეტყობა კანონზომიერი ცვლა, ე. ი. რაც მეტია წევრთა ცვალებად ციფრებში გაბნევა (დისპერსია), მით რიგი სისტემატური შეცდომისაგან თავისუფალია.

როდესაც შესაძლებლობის ფარგლებში მოსპობილია ინსტრუმენტული, პირადი, გარემოსა და თეორიული სისტემატური შეცდომები და მაინც განაზომები პირველი რიგისაა, მაშინ საქმე გვაქვს **ობიექტისაგან გამოწვეულ სისტემატურ შეცდომებთან** და ის ცალკე შესწავლებაა. სისტემატურ შეცდომებს შეცდომათა თეორია არ სწავლობს, რადგანაც არ არსებობს საერთო წესი განაზომებში მათი ერთობლივი მოქმედების მოსპობისა. ეს წესები ურთიერთდამოუკიდებლად შემუშავდება სხვადასხვა ობიექტის ცალკეული გაზომვების შესრულებისათვის. ამის გამო სისტემატური შეცდომების შესწავლა და დადგენა ექსპერიმენტული გამოკვლევის საგანია.

მუდმივი ეწოდება ისეთ შეცდომას, რომელიც დამკვირვებლის მიერ იარაღის არასწორად გამოყენების ან გამოთვლებში რაიმე პარამეტრის მცდარად შეტანის შედეგია. მაგალითად, კუთხმზომი ინსტრუმენტის არასწორად დაცენტრვით ყოველ მიმართულებაში გვექნება მუდმივი შეცდომა; ანეროიდის ჩვენების სინდიყიან ბარომეტრზე გადასაყვანი ემპირიული ფორმულის მუდმივ a-ს მცდარად შეტანა აღნიშნულ ფორმულაში; მანძილმზომის ფორმულაში $c=K'+\delta$ მისამატებელი მუდმივის განსაზღვრის შეცდომის გავლენა მუდმივია და არ იცვლება გასაზომი სიგრძის მიხედვით; ტრიგონომეტრიული ნიველობის ფორმულებში იარაღის სიმაღლის და გეოდეზიური ნიშნის სიმაღლის მცდარად შეტანა და სხვ. მუდმივი შეცდომა მოქმედებათა (დაკვირვება, გამოთვლა) მრავალჯერ განმეორებით არ აღმოჩნდება, ის მუდამ შეუმჩნეველი რჩება განაზომებში თუ გინდ გარემო პირობებიც შეიცვალოს; მხოლოდ, თუ მაგალითად, ინსტრუმენტის დაცენტრვა ან მუდმივების განსაზღვრა განმეორებულ იქნა, მაშინ მუდმივი შეცდომა გვევლინება ცვლად სიდიდედ და განაზომთა რიგში იგი სხვა შეცდომებთან ერთად შედის როგორც უცილობელი შეცდომების შემადგენელი ნაწილი. აღნიშნული შეცდომის სიდიდის შემცირება შეიძლება გაზომვების ან გამოთვლის დიდი ყურადღებით შესრულების გზით. მუდმივ სისტემატურ და საერთოდ მუდმივ შეცდომათა ზუსტად გაცალკევება მათი ერთგვარი ბუნების გამო ძნელია. ამიტომ პრაქტიკულად საკითხი გადაწყვეტილად ითვლება, თუ განაზომს თან ახლავს მხოლოდ ნარჩენი

სისტემატური და ნარჩენი მუდმივი შეცდომები, რასაც მოკლედ ნარჩენ სისტემატურ შეცდომას უწოდებენ.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი შეცდომა ეწოდება მცირე ოდენობის უცილობელ შეცდომას, რომელიც წარმოიშობა ყოველგვარ გაზომვებში. ამ შეცდომების წარმოშობის მიზეზად შეიძლება ჩაითვალოს გაზომვის ყოველი ფაქტორი. მაგალითად, ჭოგრის დამიზნების დროს ძაფთა ბადის პარალაქსი, აქათის გამოცვეთის გამო ყიბლანის ისრით ათვლა, დამზერის დროს ჰაერის რხევა, ტემპერატურის მერყეობა, რეფრექცია, დასამზერი საგნის განათებულობა, ინსტრუმენტის არასაკმარისად შესწორება, თვით დამკვირვებლის ორგანოთა მანკიერება, გასაზომი ობიექტის მცირედი ცვალებადობა და სხვ. ლარტყაზე ანათვლის აღებისას წარმოშობილი შეცდომის მიზეზად შეიძლება ჩავთვალოთ ინსტრუმენტი, დამკვირვებლის მანკიერება, ტემპერატურის მერყეობა, ჰაერის რხევა, ცუდი განათება, რეფრაქცია და სხვ.

აღნიშნული ფაქტორები უმეტეს წილად სხვადასხვა ნიშნის შეცდომებს იწვევს განაზომებში და ამის გამო მათი ერთობლივი გავლენა მრავალჯერ შესრულებულ ტოლზუსტ გაზომვებში მცირეა და ხშირად ნულის ტოლია.

შემთხვევითი შეცდომები უცილობელია ყოველგვარ გაზომვებში; ეს შეცდომები მუდამ თან ახლავს გაზომვებს. აღნიშნულის გამო ცნება „შემთხვევითი" არ ნიშნავს იმას, რომ გაზომვების დროს შეცდომები შეიძლება წარმოიშვას და შეიძლება არა. ასეთი სახელწოდება ახასიათებს იმას, თუ გაზომვებში როგორი ფორმით წარმოიშობა ცალკეული შეცდომა. ცნობილია, რომ გაზომვებში სხვადასხვა ფაქტორისაგან უცილობლად უნდა წარმოიშვას შეცდომები, მაგრამ თუ რა ნიშნით, რა აბსოლუტური ოდენობით, სახელდობრ რომელი ფაქტორისაგან, ეს შემთხვევითია, მოულოდნელია და ჩვენ მისი წინასწარ გათვალისწინება არ შეგვიძლია, მიუხედავად იმისა, რომ ამ შეცდომებს აქვს თავისი მიზეზები.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში შემთხვევითს შინაარსობრივად ხმარობენ, როგორც არაუცილობელს. მეცნიერული თვალსაზრისით, სიტყვა „შემთხვევითი" არ უპირისპირდება მის კანონზომიერებას და უკანასკნელთან დიალექტიკურ ურთიერთობაშია. ცნობილია, რომ ქვეყნიერება არის მატერიის კანონზომიერი მოძრაობა, ე. ი. ყოველგვარი მოვლენა არის უცილობელი შედეგი წინა მოვლენის კანონზომიერი განვითარებისა.

ხშირად ბუნებისა და საზოგადოების შემთხვევითი მოვლენების კანონზომიერების დადგენა ჩვენთვის შეუცნობელი ხდება, მიუხედავად იმისა, რომ ამ მოვლენებს აქვს თავისი მიზეზი, შინაგანი ფარული კანონი. ამიტომ მეცნიერული გამოკვლევის მიზანია მოვლენათა შემთხვევითობის „უკან ამოფარებული" კანონზომიერების გახსნა. ტოლზუსტი გაზომვების შედეგთა შემთხვევითი შეცდომების კანონზომიერების გამოვლინება ხდება ტოლზუსტი მრავალი განაზომის ანალიზით და ურთიერთშედარებით.

როგორც ვთქვით, შემთხვევითი შეცდომების მიზეზი არის გაზომვების კომპონენტების (ფაქტორების) უსასრულო ცვალებადობა, რაც ისეთია, რომ ჩვენ მისი შემჩნევა და დადგენა გარკვეული ზღვრის შემდეგ არ შეგვიძლია. შემთხვევითი შეცდომის ოდენობა მით უფრო მცირეა, რაც უფრო ზუსტია იარაღი, რაც უფრო გამოცდილია დამკვირვებელი, რაც უფრო ზუსტად იქნება აღრიცხული გარემო პირობებისა და თვით გასაზომი ობიექტის ცვალებადობა. ამ შემთხვევაში უფრო მცირე იქნება ჩვენთვის შეუმჩნეველ შეცდომათა ცვალებადობის ამპლიტუდა.

როგორც ვხედავთ, ყოველი განაზომის ტლანქი, სისტემატური და მუდმივი შეცდომებისაგან გათავისუფლება შეიძლება; რაც შეეხება შემთხვევით შეცდომებს, მათი მოსპობა ჩვენ არ შეგვიძლია; ამ შეცდომებს ემატება ნარჩენი სისტემატური და მუდმივი შეცდომები, ანუ ჩვენთვის შეუმჩნეველი სისტემატური და მუდმივი შეცდომები. მათი ერთობლიობა, რომელსაც „უცილობელი" შეცდომა ეწოდება, გვაძლევს მეორე სახის რიგს. ყოველგვარ გაზომვაში ამ რიგის რიცხვთა ცვალებადი ციფრები მცირედ უნდა განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან, ე. ი. უცილობელი შეცდომები მინიმალური იყოს. ამგვარად, შეცდომათა თეორიის მიზანია უცილობელი შეცდომების სათანადო ანალიზის საფუძველზე მოგვცეს ზოგადი წესები საჭირო სიზუსტით საინჟინრო-გეოდეზიური და სამარკშეიდერო სამუშაოების შესრულებისა და აგრეთვე შეგვაძლებინოს გაზომვათა სიზუსტის შეფასება.

არსებული ინსტრუქციებით საინჟინრო საკითხების გადაწყვეტა ხშირად ზედმეტ ხარჯებს იწვევს, რადგანაც ინსტრუქციებში ყველა სახის საჭიროების გათვალისწინება შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში ინჟინერი მოვალეა შეასრულოს საჭირო გაანგარიშება და საკითხი რაციონალურად გადაწყვიტოს. ეს უკანასკნელი კი თეორიისა და პრაქტიკის სრულყოფილად დაუფლებას მოითხოვს.

§ 1. 6. შემთხვევით შეცდომათა თვისებები

სხვადასხვა ობიექტის მრავალჯერ განაზომთა ანალიზის საფუძველზე დადგენილია, რომ შემთხვევითი შეცდომები გარკვეულ პირობებში ტოლზუსტი გაზომვების რიგებში წარმოიქმნება ნორმალური სტატისტიკური განაწილების კანონით. ეს კანონზომიერება ერთნაირია ნებისმიერი სახის გაზომვებისათვის. შემთხვევით შეცდომათა ალბათური კანონზომიერება მით უფრო მკვეთრად მჟღავნდება, რაც მეტია რიგის წევრთა რიცხვი; ეს არის საერთო თვისება სტატისტიკური კანონზომიერებისა და მას დიდ რიცხვთა კანონს უწოდებენ.

ობიექტის მრავალჯერ ტოლზუსტი გაზომვის შედეგად მიღებულ მეორე სახის განაზომთა რიგის საფუძველზე შედგება შეცდომათა რიგი. შეცდომათა ეს რიგი იქნება *მეორე სახის* და მას ეწოდება *შემთხვევითი ხასიათის უცილებელ* შეცდომათა რიგი. იგი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1. შეცდომების აბსოლუტური ოდენობა არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს;

2. რაც უფრო დიდია შეცდომების აბსოლუტური მნიშვნელობანი, მით უფრო იშვიათად გვხვდება რიგში;

3. აბსოლუტურად ტოლი დადებითი და უარყოფითი შეცდომები დაახლოებით ერთგვარი რაოდენობით გვევლინება რიგში;

4. შეცდომათა საშუალო არითმეტიკული მცირე სასრული ოდენობისაა და გაზომვათა რიცხვის უსასრულოდ გადიდების შემთხვევაში მისი ზღვარი ნულის ტოლია.

პირველ ორ თვისებას აქვს დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა. მაგალითად, *პირველი თვისება* ახასიათებს გაზომვების პირობებს. სხვადასხვა ობიექტის მრავალჯერ ტოლზუსტი გაზომვის საფუძველზე დადგინდება ზღვრული (დასაშვები) შეცდომების ოდენობები და მსგავსი გაზომვებისათვის მუშავდება ინსტრუქციები, რომლებითაც მოითხოვება გარკვეულ პირობებში

შესრულებულ გაზომვებში მაქსიმალური ოდენობა შეცდომებისა არ გადასცილდეს წინასწარ გათვალისწინებულ ზღვრულ შეცდომას. მაგრამ როგორ პირობებშიაც არ უნდა ჩატარდეს გაზომვები, მაქსიმალური შეცდომა არ უნდა გადასცილდეს გამოყენებული ინსტრუმენტის სიზუსტეს. *მეორე თვისება* გამოხატავს შეცდომების ოდენობის კანონზომიერებას; ამით ხასიათდება გაზომვების საერთო დონე და ამიტომ საჭიროა, რომ გარკვეულ პირობებში შესრულებული გაზომვების შედეგად მიღებულ შეცდომათა რიგში აბსოლუტურად დიდი წევრები იყოს მცირე რაოდენობის. შეცდომების უკანასკნელი ორი თვისება შეცდომათა თეორიაში ძირითადია. *მესამე თვისება* ახასიათებს შეცდომების მიმართულების კანონზომიერებას. მართლაც არა გვაქვს საფუძველი ვთქვათ, რომ გახაზომები უფრო ხშირად ნაკლები იქნება მათ ჭეშმარიტ მნიშვნელობაზე ან, პირიქით. ვინაიდან სისტემატური შეცდომებისაგან გაზომვები თავისუფალია, შემთხვევითი შეცდომის ბუნების შესაბამისად მხოლოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ერთი და იმავე აბსოლუტური მნიშვნელობის მქონე შეცდომები შეიძლება რიგში ერთნაირი შესაძლებლობით შეგვხვდეს როგორც პლუს, ისე მინუს ნიშნით. მაგალითად, 30″ სიზუსტის ვერნიერის შემთხვევაში ვერ ვიტყვით, რომ შეცდომას ანათვლებში უფრო ხშირად დავუშვებთ + 15″-ს ან — 15″-ს; ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ 15″-ის შეცდომის მიღება მიმართულებათა გაზომვის დროს როგორც პლუსით, ისე მინუსით ერთგვარად მოსალოდნელია. საერთო შედეგში ხდება დადებითი და უარყოფითი შეცდომების კომპენსაცია. აღნიშნული თვისების მკაფიოდ გამომჟღავნება შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მასობრივი გაზომვების საფუძველზე. შემთხვევით შეცდომათა *მეოთხე თვისებას* სხვახაირად უწოდებენ შეცდომათა კომპენსაციის კანონს და მას მათემატიკურად გამოსახავენ შემდეგნაირად:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{n} = 0,$$

სადაც δ_i — ჭეშმარიტი შემთხვევითი შეცდომებია და n — მათი რიცხვი.

აღნიშნული გამოსახულების ნულისაკენ მისწრაფება არ უნდა გვესმოდეს წმინდა მათემატიკურად, ვინაიდან იგი არ იცვლება გარკვეული მათემატიკური კანონის მიხედვით. ნულისაკენ მისწრაფება ხდება მხოლოდ სტატისტიკურად. მაგალითად, წევრთა რიცხვის გადიდებით პროპორციულად არ მცირდება საშუალო არითმეტიკული, იგი პროპორციულ რიცხვზე ხან მეტი იქნება და ხან ნაკლები, მაგრამ საბოლოოდ ის მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ზემოაღნიშნულის ნათელსაყოფად განვიხილოთ შეცდომათა 1, 2, 3, 4, 5-ე ცხრილები. 1-ლი ცხრილი წარმოადგენს შეცდომათა რიგს, რომელიც მიღებულია ლოგარითმულ სახაზავზე სხვადასხვა ორნიშნა რიცხვების ნამრავლისა და იმავე რიცხვების ჭეშმარიტ (ზუსტ) ნამრავლთა სხვაობებისაგან.

მე-2 ცხრილის მისაღებად სახაზავ ქაღალდზე 23,4 სმ სიგრძის ხაზი გადავზომეთ საკონტროლო სახაზავით 40-ჯერ და ყოველი ხაზი თვალზომით გავყავით შუაზე. რიგის ყოველი წევრი განსაზღვრულია თვალზომით ხაზის გაყოფის შედეგად მიღებული სიგრძისა და 11,7 სმ-ის სხვაობით.

მე-3 ცხრილის მისაღებად საკონტროლო სახაზავით 40-ჯერ გადავზომეთ ხაზები სხვადასხვა სიგრძისა. შემდეგ იგივე ხაზები გაზომილ იქნა ლოგარითმული სახაზავით. სხვაობა ლოგარითმული სახაზავით გაზომილ სიგ-

ცხრილი 3.1.6.1

№	δ	№	δ	№	δ	№	δ	№	δ	შენიშვნა
1	—0,03	9	+0,03	17	+0,03	25	+0,04	33	—0,03	1. δ_{max} = —0,09
2	+0,02	10	+0,01	18	+0,01	26	—0,02	34	—0,01	2. 0,00—±0,02 არის 25 ცალი
3	—0,04	11	+0,04	19	—0,01	27	+0,02	35	+0,05	±0,02—±0,04 9
4	+0,01	12	+0,02	20	+0,02	28	—0,05	36	—0,02	±0,041—±0,06 „ 5
5	—0,02	13	+0,01	21	—0,02	29	+0,06	37	0,00	±0,061—±0,09 „ 1
6	—0,05	14	—0,01	22	—0,01	30	+0,02	38	+0,01	3. დადებითი 19, უარყ. 18;
7	0,00	15	+0,05	23	+0,01	31	—0,04	39	0,00	ჯამი +0,49; ჯამი —0,50
8	—0,02	16	—0,09	24	—0,02	32	+0,03	40	—0,01	4. $\frac{+0{,}49-0{,}50}{40} = \frac{-0{,}01}{40} =$
										$= -0{,}00025$

ცხრილი 3.1.6.2

№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	შენიშვნა
1	—0,8	9	+0,4	17	+0,9	25	—2,0	33	—1,9	1. δ_{max} = —3,9 მმ
2	+0,2	10	—0,9	18	—2,0	26	+0,9	34	+2,1	2. 0—±0,10 სმ არის 20 ცალი
3	—0,1	11	+0,4	19	+1,9	27	—0,2	35	—1,0	±0,11—±0,20 9
4	—2,5	12	—0,4	20	—2,0	28	—1,8	36	0,0	+0,21—±0,30 7
5	—0,1	13	+1,2	21	—1,2	29	+0,[illegible]	37	+0,7	±0,31—+0,39 „ 3
6	+0,6	14	—1,0	22	+1,5	30	+3,0	38	—2,0	3. დადებითი 19, უარყოფითი 20 ცალი
7	—2,8	15	—0,8	23	—2,7	31	—3,9	39	+3,1	+27,2 მმ; —29,0 მმ
8	+1,0	16	—2,0	24	+0,5	32	+3,5	40	—0,2	4. $\frac{+27{,}2-29{,}0}{40} = \frac{-1{,}8}{40} =$
										=0.045 მმ

ცხრილი 3.1.6.3

№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	№	δ (მმ)	შენიშვნა
1	—0,3	9	—0,4	17	—0,2	25	—0,2	33	—0,1	1. δ_{max} = —0,5 მმ
2	+0,1	10	—0,3	18	—0,3	26	+0,2	34	—0,1	2. 0,0—±0,2 არის 27 ცალი
3	0,0	11	+0,4	19	—0,3	27	+0,2	35	—0,2	±0,21—±0,4 12
4	—0,1	12	0,0	20	—0,4	28	+0,1	36	+0,1	±0,41—±0,5 „ 1
5	—0,2	13	+0,2	21	—0,2	29	+0,4	37	+0,1	3. დადებითი 14, უარყოფითი 24
6	+0,1	14	—0,1	22	—0,2	30	—0,3	38	+0,2	+2,5 მმ; —6,1 მმ
7	+0,1	15	—0,2	23	—0,2	31	—0,1	39	+0,1	4. $\frac{+2{,}5-6{,}1}{40} = \frac{-3{,}6}{40} =$
8	—0,4	16	—0,4	24	—0,5	32	—0,4	40	+0,2	= —0,09 მმ

რძესა და საკონტროლო სახაზავით გადაზომილ ხაზებს შორის მიღებულია ჭეშმარიტ შეცდომებად.

მე-4 ცხრილი მიღებულია (3. 1. 4. 3) ცხრილის ანალიზის შედეგად. აქ ჭეშმარიტ სიგრძედ ალებულია განაზომთა საშუალო არითმეტიკული, ე. ი. 146308,66 მმ. ყოველ განაზომს ვაკლებთ ამ სიგრძეს.

ცხრილი 3.1.6.4

№№	δ	№№	δ	შენიშვნა
1	+0,10 მმ	6	−0,01 მმ	1. $\delta_{max} = +0,21$ მმ
2	−0.02	7	+0,21	2. 0,02—±0,10 არის 6 ცალი
3	−0,10	8	−0,04	±0,11—±0,16 „ 3 „
4	−0,19	9	+0,13	±0,17—±0,21 „ 1 „
5	−0,16	10	+0,07	3. დადებითი 4, უარყოფითი 6
				+0,61 მმ; −0,49 მმ
				4. $\frac{+0.61-0,49}{10}=\frac{0,02}{10}=+0,002$ მმ

მე-5 ცხრილი შედგენილია ერთი და იმავე კუთხის თექვსმეტჯერ გაზომვის შედეგად. აქაც კუთხის ჭეშმარიტ ოდენობად მივიღეთ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული და ის გამოვაკელით ყოველ ცალკეულ განაზომს.

ცხრილი 3.1.6.5

№№	δ	№№	δ	№№	δ	შენიშვნა
1	−6″,1	6	+2″,5	11	+4″,8	1. $\delta_{max} = 13''{,}6$
2	+9,6	7	+13,6	12	−3,9	2. ±0″—±5″ არის 11 ცალი
3	−4,0	8	−3,2	13	+1,5	±5″,1—±10″ „ 4 „
4	−6,2	9	−4,5	14	−6,2	±10″,1—±15″,0 „ 1 „
5	+3,3	10	−2,2	15	−2,5	3. დადებითი 7, უარყოფითი 9
				16	+2,9	+38″,2; −38″,8
						4. $\frac{+38''{,}2-38''{,}8}{16}=\frac{-0''{,}6}{16}\approx 0''{,}04$

არსებობს ზოგადი პრაქტიკული წესი იმის გასარკვევად, თუ რომელი სახის რიგს ეკუთვნის ამა თუ იმ ობიექტის ტოლზუსტ განაზომთა შეცდომების ერთობლიობა.

1. რიგის წევრებს არ უნდა ემჩნეოდეს არავითარი კანონზომიერება თანამიმდევრობაში, ე. ი. რიგის ნებისმიერი მომიჯნავე წევრები უნდა განსხვავდებოდნენ ნიშნით ან ოდენობით.

2. რიგში დადებითი და უარყოფითი წევრების რაოდენობა უნდა იყოს დაახლოებით ტოლი, აგრეთვე მათი ცალკეული ჯამები ერთმანეთისაგან მცირე ოდენობით უნდა განსხვავდებოდეს.

3. რიგის წევრთა საშუალო არითმეტიკულის ოდენობა უნდა იყოს ნულთან ახლოს. პრაქტიკულად საშუალო არითმეტიკულის ოდენობა ბევრად ნაკ-

ლები უნდა იყოს რიგის ნებისმიერ მცირე წევრზე (აქ მხედველობაში არ მიიღება რიგში ნულის ტოლი წევრი). წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ რიგში სისტემატური შეცდომების მნიშვნელოვანი გავლენაა და საჭიროა ამ შეცდომების აცილება. როდესაც ეს სამი პირობა დაცულია განაზომთა რიგში, მ-ს მივაკუთნებთ მეორე ტიპს და ვგულისხმობთ, რომ ეს რიგი შემთხვევითი შეცდომების შედეგია. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ პირველი სახის რიგში არ შეიძლება იყოს შემთხვევითი შეცდომების გავლენა; ასევე მეორე სახის რიგშიც არის სისტემატური შეცდომები, მაგრამ მთავარი ისაა, თუ რიგში რომელი მათგანი ჭარბობს. **მაგალითად, მეორე სახის რიგში შეცდომათა საშუალო არითმეტიკული იმავე რიგში არსებული სისტემატური შეცდომის ოდენობაა.** ამის გამო საჭიროა, ის იყოს მეტად მცირე (ნულისაკენ მიმსწრაფი). რაც უფრო უახლოვდება შეცდომათა საშუალო არითმეტიკული რიგის მცირე წევრს, მით მეტია ეჭვი იმისა, რომ რიგში სისტემატურ შეცდომებს მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს. როგორც ვიცით, ამ შეცდომების მინიმუმამდე დაყვანა შეიძლება სათანადო ინსტრუმენტებისა და მეთოდების შერჩევა-გამოყენებით.

მოყვანილ ცხრილებს თან ახლავს ყველა შემოწმება, რომლებიდანაც ჩანს, რომ. მიუხედავად სხვადასხვა სახისა და სიზუსტის განაზომებისა, თითქმის ყველა მწკრივი გამოხატავს იმ სტატისტიკურ კანონებს, რომლებითაც უნდა ხასიათდებოდნენ მეორე სახის რიგები. აქ გამონაკლისს შეადგენს მხოლოდ მე-3 ცხრილი. ამ რიგში დადებით და უარყოფით წევრთა რაოდენობა და მათი ჯამები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, რის გამო საშუალო არითმეტიკული, ანუ სისტემატური შეცდომის გავლენა მნიშვნელოვანია. ეს მოსალოდნელიც იყო იმის გამო, რომ ლოგარითმული სახაზავის დანაყოფებს მეტი სისტემატური შეცდომა აქვს, ვიდრე საკონტროლო სახაზავს.

მოყვანილი ცხრილებით დავასკვნით, რომ შემთხვევითი ხასიათის უცილობელი შეცდომების თვისებათა ერთობლიობა წარმოადგენს შემთხვევით შეცდომათა რიგისათვის კანონზომიერებას, რომელიც რიგის ცალკეული წევრის შემთხვევითობის მოვლინების მიღმაა ამოფარებული. როგორც ითქვა, ამ კანონზომიერების გამოვლინება შეიძლება მხოლოდ მასობრივ (დიდი რაოდენობის) დაკვირვებათა მონაცემების შემოწმებით, რომლითაც ალბათობის თეორია სარგებლობს და რომელიც შემთხვევით შეცდომათა ზემოთ მოხსენებულ სტატისტიკურ კანონებს ავლინებს და აძლევს მათ მათემატიკური კანონის ფორმას. ამ კანონებს უწოდებენ „ნორმალური“ სტატისტიკური განაწილების კანონებს, ან კიდევ, გაუსის კანონებს, რადგანაც იგი პირველად გაუსმა აღმოაჩინა. ეს კანონები, ანუ შემთხვევით შეცდომათა თვისებები, გამოყენებულია შეცდომათა თეორიაში ტოლზუსტ გაზომვებში უცილობელი შეცდომების აღრიცხვისას და განაზომების შეფასებისას.

რაც შეეხება რიგის რომელიმე შემთხვევითი შეცდომის წარმოშობას, ამის შესახებ არსებობს ჰიპოთეზა ე. წ. ელემენტარული შეცდომებისა, ანუ ჰაგენის ჰიპოთეზა, რომლის თანახმადაც თითოეული შემთხვევითი შეცდომა არის ალგებრული ჯამი ურთიერთდამოუკიდებელი მცირე (ელემენტარული) შეცდომებისა, რომლებიც ოდენობით თითქმის ერთნაირია და ნიშნებით სხვადასხვა; ამასთანავე იგულისხმება, რომ ელემენტარული შეცდომების რაოდენობა, რომლითაც შეიქმნება ნამდვილი შეცდომები, შეიძლება იყოს ნებისმიერად დიდი, და გვქონდეს დადებითი და უარყოფითი ელემენ-

ტარული შეცდომების ყველანაირი კომბინაცია. ამ კომბინაციების სხვადასხვა შემთხვევისადმი ალბათობის თეორიის გამოყენებას მივყავართ გაუსის შეცდომების კანონთან.

ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ თვით გაუსის კანონიდან, როგორც შედეგი, გამომდინარეობს უკანასკნელი სამი ზემოთ ჩამოთვლილი შემთხვევითი შეცდომების თვისება.

3. 1. 7. ზოგიერთი საკითხი მათემატიკიდან

A. საზომი ერთეულები

გაზომვებისათვის საჭირო ერთეულები ძირითადად შვიდი სახისაა: გეომეტრიული, მასის, დროის, მექანიკური, ელექტრული, სითბური (ტემპერატურის) და ოპტიკური.

გეოდეზიური და მარკშეიდერული წარმოება ძირითადად იყენებს გეომეტრიულ ერთეულებს. ამის გამო ჩვენ განვიხილავთ უმთავრესად გაზომვებისათვის საჭირო გეომეტრიულ ერთეულებს. გეომეტრიული ერთეულებია:

1. სიგრძის — მეტრი (მ) და მისი წარმოებული ერთეულები (მეტრულ სისტემაში მეტრი ხაზოვანი ზომის ძირითადი ერთეულია).

2. ფართობის — კვადრატული მეტრი (კვ. მ); ტოპოგრაფიული ზედაპირებისათვის მიღებულია ჰექტარი (ჰა), კვადრატული კილომეტრი (კვ. კმ).

3. მოცულობის — კუბური მეტრი (კუბ. მ); სითხეებისა და ფხვიერი სხეულებისათვის და მათ შორის მარცვლეულისათვისაც მიღებულია ლიტრი (ლ);

ზემოთ ჩამოთვლილ მეტრულ-ათობით სისტემაში ხაზოვანი სახელდებული ერთეულების წარმოებული ოდენობების გამოსახვისათვის მიღებულია ბერძნული და ლათინური წინსართები. მაგალითად:

ბერძნული —	მირია (მრ) ნიშნავს	10000;
	კილო (კ)	1000;
	ჰექტო (ჰ)	100;
	დეკა (დკ)	10;
ლათინური —	დეცი (დ)	0,1;
	სანტი (ს)	0,01;
	მილი (მ) „	0,001.

მაგალითად, 24 კმ, 18 დკმ, 14 დმ, 21 სმ, 14 მმ.
შეიძლება დაიწეროს მეტრებში: 24181,624 მ;
ჰექტომეტრებში: 241,81624 ჰმ.

როგორც ვხედავთ, მოცემული რიცხვები მძიმეების გადაადგილებით გამოისახება სასურველ ერთეულებში. ამაში მდგომარეობს მეტრული ათობითი სისტემის უპირატესობა სხვა სისტემებთან შედარებით.

4. კუთხის საზომი ერთეულები:

კუთხის (რკალის) ძირითად საზომ ერთეულად შეიძლება მივიღოთ გრადუსი, გრადი ან რადიანი.

გრადუსი (°) არის სრული კუთხის (წრეწირის) $\frac{1}{360}$ ნაწილი; გრადუსის

$\frac{1}{60}$ ნაწილს ნიუტონი (′) ეწოდება, ხოლო ამ უკანასკნელის $\frac{1}{60}$-ს — სეკუნდი (″).

გრადული სისტემა შესაბამისია მეტრული ათობითი სისტემისა. გრადი (g) არის სრული კუთხის (წრეწირის) $\frac{1}{400}$, ანუ მართი კუთხის $\frac{1}{100}$ ნაწილი. გრადის $\frac{1}{100}$ ნაწილს ეწოდება გრადული მინუტი (′ ან ^{c}), ხოლო ამ უკანასკნელის $\frac{1}{100}$ — გრადული სეკუნდი (″ ან ^{cc}). ამ სისტემას არითმეტიკულ მოქმედებათა შესრულების თვალსაზრისით უპირატესობა აქვს გრადუსულ სისტემასთან. ისევე როგორც მეტრულ ათობით სისტემაში, აქაც სახელდებული რიცხვებისაგან მიღებული კუთხის ოდენობა შეგვიძლია სწრაფად გადავაქციოთ ათწილადად და მძიმის გადაადგილებით მივიღოთ კუთხე სასურველ განზომილებაში. მაგალითად, $36^g25'18''$ ($36^g25^c18^{cc}$) შეგვიძლია დავწეროთ გრადებში: $36^g,2518$, გრადულ მინუტებში $3625',18$ ან $3625^c.18$, გრადულ სეკუნდებში: $362518''$ ან 362518^{cc} და მართკუთხეებში: $0,362518\ d$.

ზემოხსენებული საზომი ერთეულები პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოხერხებულია, მხოლოდ თეორიული გამოკვლევების დროს აუცილებელი ხდება მივმართოთ კუთხის (რკალის) განყენებულ (ანალიზურ) ზომას. სიდიდეთა შედარება შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა საზომი ერთეული ბუნებრივადაა დაკავშირებული შესადარებელი ობიექტების გეომეტრიულ თვისებებთან. მაგალითად, კუთხეებისა და რკალების ზემოხსენებული საზომი ერთეულები საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს შევადაროთ მხოლოდ კუთხეები ან რკალები.

თეორიული კვლევებისა და სხვადასხვა საინჟინრო საკითხების გადაწყვეტისათვის ხშირად საჭირო ხდება ნებისმიერი ოდენობის კუთხეთა შედარება მათ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან. ამიტომ კუთხეები (რკალები) უნდა გამოისახოს განყენებული რიცხვებით. ამ რიცხვებს ვიღებთ იმავე ხერხით, რა ხერხითაც მიღებულია ამა თუ იმ კუთხის (რკალის) ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესაბამისი რიცხვები; სახელდობრ, ვყოფთ რკალის სიგრძეს მის შესაბამის რადიუსზე. თუ მოცემულია კუთხის გრადუსული ოდენობა, მას გავყოფთ გრადუსებში გამოსახულ რადიუსის ტოლ რკალზე ანუ ისეთი ოდენობის ცენტრალურ კუთხეზე, რომელსაც რადიუსის ტოლი რკალი შეესაბამება. ასეთ რკალს ან კუთხეს ვუწოდებთ რადიანს და აღვნიშნავთ ρ-თი. როგორც ვიცით,

$$\rho=\frac{180°}{\pi}=57°,2957795\cdots=3437',74677\cdots=206264'',80625\cdots,$$

ე. ი. რადიანი სახელდებული რიცხვია, მხოლოდ რადიანებში გამოსახული რკალი ან კუთხე განყენებულია. ამიტომ რადიანს უწოდებენ ანალიზურად (განყენებულად) გამოსახვის საზომ ერთეულს

მაგალითად:

სრული წრეწირის
ოდენობა რადიანულ (განყენებულ, ანალიზურ) განზომილებაში იქნება $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$[1]

ნახევარი წრეწირის
ოდენობა $\frac{\pi R}{R}=\pi$

მეოთხედი წრეწირის
ოდენობა " $\frac{\frac{\pi}{2}\cdot R}{R}=\frac{\pi}{2}$

რადიუსის
ტოლი რკალის $\frac{R}{R}=1$

სრული კუთხის
ოდენობა რადიანულ (განყენებულ, ანალიზურ) განზომილებაში იქნება $\frac{360^\circ}{\rho^\circ}=2\pi$

გაშლილი კუთხის
ოდენობა $\frac{180^\circ}{\rho^\circ}=\pi$

მართი კუთხის
ოდენობა $\frac{90^\circ}{\rho^\circ}=\frac{\pi}{2}$

რადიანის ტოლი კუთხის
ოდენობა $\frac{\rho^\circ}{\rho^\circ}=1.$

აქედან დავასკვნით, რომ რადიანი არის კუთხე (რკალი), რომლის ოდენობა რადიანულ (განყენებულ, ანალიზურ) განზომილებაში უდრის ერთს.

როგორც ვხედავთ, რკალის ოდენობა რადიანებში არის ის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენი რადიუსის ტოლი რკალი მოთავსდება მოცემულ რკალში. ამის შესაბამისად კუთხის ოდენობა რადიანებში არის ის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენი რადიანი, ანუ გრადუსებში გამოსახული რადიუსის ტოლი რკალი მოთავსდება მოცემულ კუთხეში.

აღვნიშნოთ რაიმე კუთხე α-თი, მისი შესაბამისი რკალი l-ით და რადიუსი R-ით, მაშინ

$$\frac{l}{R}=\frac{\alpha}{\rho}. \quad (3.1.7.1$$

(1) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ რაიმე კუთხის გრადუსული სიდიდე. თუ ცნობილია რკალი და რადიუსი. და პირიქით, მაგალითად.

$$\alpha=\frac{l}{R}\cdot\rho. \quad (3.1.7.2)$$

კუთხის გრადუსული ოდენობა უდრის რადიანებში რკალის ოდენობისა და რადიანის კუთხური ოდენობის (ρ) ნამრავლს

$$l=\frac{\alpha}{\rho}\cdot R. \quad (3.1.7.3)$$

რკალის სიგრძე უდრის რადიანებში კუთხის ოდენობისა და რადიუსის

[1] $\pi=3{,}1416\ldots=2^3\cdot3\cdot7\cdot11\cdot17\cdot10^{-4}$.

ნამრავლს. ხშირად სწერენ l-ის მაგიერ $\mathrm{arc}\,\alpha$-ს, რაც წაიკითხება ასე: „α კუთხის შესაბამისი რკალი“, მაგალითად:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathrm{arc}\,\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}\cdot R; \quad \text{როცა} \quad R=1, \ \text{მაშინ} & \mathrm{arc}\,\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}; \\
\mathrm{arc}\,1^{\circ}\approx\dfrac{1^{\circ}}{57^{\circ},3}\cdot R; & \mathrm{arc}\,1^{\circ}\approx\dfrac{1}{57,3}; \\
\mathrm{arc}\,1'\approx\dfrac{1'}{3438'}\cdot R; & \mathrm{arc}\,1'\approx\dfrac{1}{3438}; \\
\mathrm{arc}\,1''\approx\dfrac{1''}{206265''}\cdot R; & \mathrm{arc}\,1''\approx\dfrac{1}{206265}
\end{array}\right\} \qquad (3.1.7.4)$$

მოყვანილი ფარდობები კუთხესთან ან რკალთან ტრიგონომეტრიული ფუნქციის უშუალოდ შედარების საშუალებას გვაძლევს. მაგალითად, ავიღოთ $\sin 25^{\circ}$, $\mathrm{tg}\,25^{\circ}$ და შევადაროთ 25°-იანი კუთხის ან რკალის ოდენობას რადიანებში: $\sin 25^{\circ}\approx 0{,}4226$, $\mathrm{tg}\,25^{\circ}\approx 0{,}4663$; $\dfrac{25^{\circ}}{57^{\circ},3}\approx 0{,}4363$, ე. ი. მახვილი კუთხის (რკალის) ოდენობა რადიანებში მეტია კუთხის სინუსზე და ნაკლებია იმავე კუთხის ტანგენსზე.

მცირე კუთხეებისათვის $(0^{\circ}-5^{\circ})$ მოვიყვანოთ შემდეგი ცხრილი:

ცხრილი 3.1.7.1

	α რადიანებში $\dfrac{\alpha}{\rho}=\dfrac{l}{R}$		$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\cos\alpha$
$0^{\circ},5$	0,008727	0,008726	0,003727	0,999962
1°	0,017453	0,017452	0,017465	0,999848
2°	0,034907	0,034900	0,034921	0,999391
3°	0,052360	0,052336	0,052408	0,998630
5°	0,087266	0,087156	0,087489	0,996194

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ, რაც უფრო ნაკლებია კუთხე, მით უფრო მცირეა განსხვავება რადიანებში ამ კუთხის ოდენობისა $\sin\alpha$ და $\mathrm{tg}\,\alpha$-თან, ამავე დროს $\cos\alpha$-ს მნიშვნელობა ახლოსაა ერთთან. ამიტომ, მცირე კუთხეების შემთხვევაში, კუთხის სინუსის და ტანგენსის ოდენობები შეიძლება შევცვალოთ მათი კუთხის რადიანული განზომილებით, ხოლო კოსინუსი — ერთით. მაგალითად, $\sin\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}$, $\cos\alpha=1$. მწკრივების თეორიიდან ცნობილია, რომ უფრო ზუსტად:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}-\dfrac{\alpha^{3}}{3!\,\rho^{3}}+\cdots \\
\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\alpha}{\rho}+\dfrac{\alpha^{3}}{3\rho^{3}}+\cdots \\
\cos\alpha=1-\dfrac{\alpha^{2}}{2!\,\rho^{2}}+\cdots
\end{array}\right\}, \qquad (3.1.7.5)$$

სადაც α გრადუსულ განზომილებაშია. საქმე გაცილებით მარტივდება, როცა α-ს განყენებულ განზომილებაში გამოვსახავთ, მაშინ გვექნება

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \cdots \\ \cos\alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{3.1.7.6}$$

მიახლოებით კი იქნება

$$\sin\alpha = \alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha = \alpha \text{ და } \cos\alpha = 1. \tag{3.1.7.7}$$

საინჟინრო საქმეში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განიხილება არა მარტო კუთხეების ფუნქციებად, არამედ, უმრავლეს შემთხვევაში, როგორც განყენებული არგუმენტის ფუნქციები. ეს არგუმენტები სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეების ოდენობების გამომსახველი რიცხვებია (სიგრძეების, დროის, ტემპერატურის, წნევის ანათვლებისა და სხვ.); ამის გამო საშუალება გვექლევა სხვადასხვა ფიზიკური ბუნებისა და გეომეტრიული თვისების მქონე სიდიდეები შევადაროთ ერთმანეთს. ცნობილია, რომ ერთი და იმავე სახის ფუნქცია გამოხატავს სრულიად სხვადასხვა ბუნების მქონე სიდიდეთა დამოკიდებულებას. მაგალითად, $y=x^2$ კვადრატული ფუნქციაა და ეს ფუნქცია გამოხატავს კვადრატის ფართობსა (y) და მის გვერდს (x) შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას: $y=\frac{g}{2}t^2$ კვადრატული ფუნქციაა, მაგრამ ეს ფუნქცია გამოხატავს სიცარიელეში თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მიერ განვლილ მანძილსა (y) და მისი ვარდნის დროს (t) შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. როგორც ვხედავთ, კვადრატული ფუნქცია პირველ შემთხვევაში გამოხატავს კავშირს სიგრძესა და ფართობს შორის, მეორე შემთხვევაში მანძილსა და დროს შორის. ასევე ითქმის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებზეც.

მართლაც, ვთქვათ, მივიღეთ სხვადასხვა სიდიდეთა გაზომვების შედეგად ტრიგონომეტრიული ფუნქციის არგუმენტები: $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; 15; ეს რიცხვები მიღებულია გასაზომი საგნის სათანადო (ერთგვაროვან) ერთეულთან შეფარდებით, ე. ი. ფუნქციათა ურთიერთ შედარებისათვის უნდა ვიგულისხმოთ, რომ კუთხეები (რკალები) გამოსახული არის რადიანულ (განყენებულ, ანალიზურ) განზომილებაში. პრაქტიკულად გონიომეტრიული ფუნქციების გადასაწყვეტად საჭიროა ეს რიცხვები გადავამრავლოთ რადიანის კუთხურ ოდენობაზე, რადგანაც კუთხეების გაზომვების საშუალებანი და ცხრილებიც აგებულია გრადუსული სისტემის მიხედვით. ამ გზით შეიძლება მოხდეს შედარება სხვადასხვა ბუნების მქონე სიდიდეებისა. მაგალითად,

$$
\left.\begin{array}{ll}
\sin\frac{1}{2} \text{ ნიშნავს } & \sin\frac{1}{2}\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 28^\circ 39' \approx 0{,}479 \\
\sin 1 & \sin 1\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 57^\circ 18' \approx 0{,}841 \\
\sin\frac{3}{2} & \sin\frac{3}{2}\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 85^\circ 56' \approx 0{,}997 \\
\sin 2 & \sin 2\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 114^\circ 36' \approx 0{,}909 \\
\sin\frac{5}{2} & \sin\frac{5}{2}\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 143^\circ 14' \approx 0{,}598 \\
\sin 15 & \sin 15\cdot 57^\circ{,}3 \approx \sin 859^\circ 30' \approx 0{,}649
\end{array}\right| . \qquad (3.7.1.8)
$$

მოყვანილი ტაბულიდან ნათლად ჩანს, რომ განყენებული არგუმენტების ზრდით პროპორციულად არ იზრდება მათი სინუსები, და ამიტომ მხოლოდ განყენებული სიდიდეების უშუალო შედარებით მოცემული ფუნქციების შეფასებას ვერ მოვახდენთ.

როგორც ვხედავთ, განყენებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია ამავე არგუმენტის რადიანზე ნამრავლის თანამოსახელე (იგივე) ფუნქციის ტოლია.

განყენებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოყვანა საჭირო სიზუსტით შეიძლება მწკრივების საშუალებით, რასაც ხშირად მიმართავენ.

უმრავლეს შემთხვევაში დიფერენციალურ აღრიცხვაში კუთხეები წარმოდგენილია განყენებულ ზომებში, ამის გამო კუთხის დიფერენციალიც რადიანულ განზომილებაში უნდა იქნეს გამოსახული, ე. ი.:

$$d\alpha = \frac{(d\alpha)^\circ}{\rho^\circ} = \frac{(d\alpha)'}{\rho'} = \frac{(d\alpha)''}{\rho''}. \qquad (3.1.7.9)$$

საკმაო მიახლოებით შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$\frac{1}{\rho''} = \sin 1''. \qquad (3.1.7.10)$$

აქ ρ'' იგულისხმება როგორც განყენებული სიდიდე. ამის გამო ხშირად წერენ

$$d\alpha = (d\alpha)''\cdot\sin 1''. \qquad (3\ 1.7.11)$$

აქაც უნდა ვიგულისხმოთ $d\alpha''$ განყენებულ რიცხვად ანუ ნიშანი უნდა გვესმოდეს პირობითად და არა პირდაპირი მნიშვნელობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში (9) ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების განზომილება არ იქნება ერთნაირი. ეს პირობა თავიდან რომ ავიცილოთ, უმჯობესია მივიღოთ კუთხეების გამოსახვა რადიანებში (9) აღნიშვნის სახით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ძირითადად რადიანული და გრადუსული სისტემების ურთიერთდამაკავშირებელი ფორმულების, გრადუსული სისტემის ცხრილებისა და იმავე სისტემის დანაყოფების მქონე ინსტრუმენტების არსებობამ და სხვა მიზეზებმა მეტად შეუშალა ხელი გრადული სისტემის ფართოდ გავრცელებას.

B შეცდომათა თეორიაში დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენების საერთო საფუძვლები.

მათემატიკიდან ცნობილი რაიმე სიდიდის სასრული ნაზრდის ცნებას, შინაარსობრივი გაგებით, შეცდომათა თეორიაში გაზომილი სიდიდის „შეცდომისა" (შეუკვრელობის) და „შესწორების" ცნებებთან აიგივებენ და ხშირად, ისევე როგორც მათემატიკაში, სიმბოლურად აღნიშნავენ ამ სიდიდეთა წინ ბერძნული ასოს Δ-ს მიწერით.

ვთქვათ გვაქვს ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია $y=f(x)$; ამ ფუნქციის არგუმენტის dx დიფერენციალი ანუ ნაზრდი ეწოდება ნებისმიერად შეცვლილი არგუმენტის მნიშვნელობასა და მის ძველ მნიშვნელობას შორის სხვაობას, ე. ი.

$$dx=x_1-x.$$

არგუმენტის დიფერენციალის სიდიდე შეიძლება ორგვარად აღინიშნოს საჭიროების მიხედვით: უსასრულოდ მცირე სიდიდის სახით $dx=\Delta x$, როცა $\Delta x \to 0$-კენ ან სასრული მცირე სიდიდის სახით, dx-ს გავუტოლებთ Δx-ს, ე. ი.

$$dx=\Delta x. \tag{3 1.7.12}$$

საინჟინრო საქმეში არგუმენტის დიფერენციალს წარმოვიდგენთ მეორე გვარად, როგორც სასრულ სიდიდეს და აღვნიშნავთ Δx-ით. მათემატიკაში არგუმენტის დიფერენციალი განიხილება არგუმენტისაგან დამოუკიდებელ სიდიდედ[1], ე. ი. Δx ითვლება მუდმივად x-ის მიმართ, ასეთივეა შეცდომათა თეორიაში შეცდომების გაგებაც. შეცდომები მცირე, დამოუკიდებელი მუდმივი სიდიდეებია· ეს გარემოება უფლებას გვაძლევს არგუმენტების (უშუალოდ გაზომილი სიდიდის) შეცდომების გამო მათი ფუნქციების (გამონათვალთა) შეცდომების სიდიდეების განსაზღვრის დროს გამოვიყენოთ დიფერენციალური აღრიცხვის ფორმულები.

ფუნქციის Δy ნაზრდი, არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისად, ეწოდება სხვაობას ფუნქციის ახალ და ძველ მნიშვნელობებს შორის (გეომეტრიულად ფუნქციის ნაზრდი მრუდის ორდინატის ნაზრდია), ე. ი.

$$\Delta y=f(x_1)-f(x).$$

ასე წერა დიალექტიკურად გამართლებულია, მაგრამ უფრო ხშირად წერენ შემდეგი სახით:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

ფუნქციის წარმოებული განყენებული რიცხვია და იგი უდრის ფუნქციისა და არგუმენტის ნაზრდთა ფარდობის ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ. გეომეტრიულად ფუნქციის წარმოებული მრუდის მხების აბსცისათა x ღერძთან დახრის კუთხის ტანგენსია. ანალიზურად იწერება

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.1.7.13}$$

---

[1] დიალექტიკურად ეს სწორი არ არის, რადგანაც თვით x-შია წარმოშობილი Δx, ე. ი. Δx ნაყოფია x-ისა.

ფუნქციის დიფერენციალი სახელდებული რიცხვია და იგი უდრის ფუნქციის წარმოებულის არგუმენტის დიფერენციალზე ნამრავლს. გეომეტრიულად ფუნქციის დიფერენციალი მრუდის მხების ორდინატის ნაზრდია

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx = f'(x)\,\Delta x = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = \operatorname{tg}\alpha\,\Delta x\,[1]. \qquad (3.1.7.14)$$

აქედან შეიძლება დავწეროთ ფუნქციის წარმოებული სხვადასხვა სიმბოლოებით, მაგალითად,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x), \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

რთული $y = f(u)$ ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი, როცა $u = \varphi(x)$, შესაბამისად განისაზღვრება ფორმულით

$$\begin{aligned} y' &= f'(u) = f'(u)\,u' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \\ dy &= df(u) = f'(u)\,du = f_u'(u) \cdot \varphi'(x)\,dx. \end{aligned} \qquad (3.1.7.15)$$

$f_u'(u)$ წარმოებულის ამგვარად აღნიშვნა გულისხმობს, რომ არგუმენტად u-ს ვთვლით და ეს წარმოებული მოიძებნება ისე, რომ u-ს განვიხილავთ, როგორც უბრალო არგუმენტს და მას ვუწოდებთ საშუალედო (გამართულებელ) ცვლადს, ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულს, u საშუალედო (გამართულებელი) ცვლადის მიხედვით გადამრავლებულს u საშუალედო ცვლადის წარმოებულზე x დამოუკიდებელი ცვლადით. სრულიად ანალოგიურია დიფერენციალის განსაზღვრება.

ფუნქციის ნაზრდისა (Δy) და დიფერენციალის (dy) სიდიდეების შესადარებლად შეიძლება ვისარგებლოთ ტეილორის მწკრივით.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

$$\Delta y = dy + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \cdots \qquad (3.1.7.16)$$

აქ ყველა წარმოებული გამოთვლილია x არგუმენტის საწყისი მნიშვნელობისათვის (ჩვენ შემთხვევაში გაზომილი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის). ხშირად, გაზომილი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უცნობია, ამიტომ მას ვცვლით გაზომილი სიდიდის მიახლოებითი (უალბათესი) მნიშვნელობით. ვრცლად ამის შესახებ მოხსენებული იქნება ქვემოთ. როგორც ვხედავთ, ფუნქციის ნაზრდი მისივე დიფერენციალისაგან განსხვავდება არგუმენტის ნაზრდთა ხარისხებისა და რიგის შესაბამის წარმოებულთა ნამრავლის ჯამით, რომლებიც მოცემული არგუმენტისათვის მუდმივი რიცხვებია. როდესაც არგუმენტის ნაზრდი (Δx) მცირეა, ეს ნამრავლებიც მცირე იქნება და თანდათან ამ ნამრავლთა სიდიდე კლებულობს მწკრივის საწყისიდან დაშორებასთან ერთად. ჩვეულებრივ, გეოდეზიური სამუშაოების შესრულები-

[1] α არის მრუდის მხების აბსცისათა ღერძთან დახრის კუთხე.

სათვის საჭირო ფუნქციებში ხშირად ამ ნამრავლთა ჯამს უგულებელვყოფთ მისი სიმცირის გამო და მივიღებთ

$$\Delta y \approx dy. \tag{3.1.7.17}$$

მაშასადამე, დავწერთ

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta}{\Delta x} f(x).$$

ფუნქციის ნაზრდის გამოსახვა შეიძლება მისი სხვადასხვა რიგის დიფერენციალების ჯამით, მაგალითად,

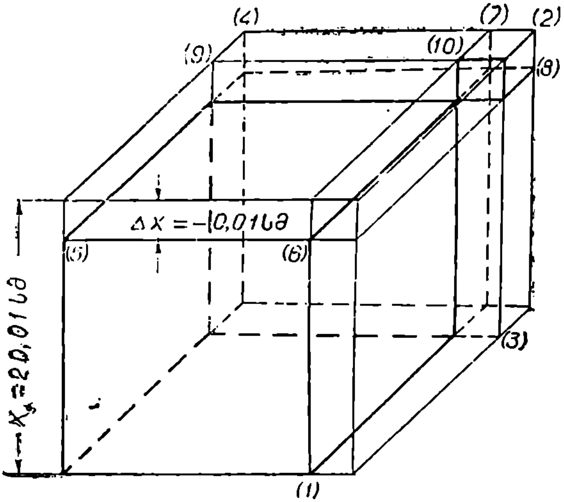
$$\Delta y = dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{6} d^3y + \frac{1}{24} d^4y + \cdots, \tag{3.1.7.18}$$

რადგანაც

$$dy = f'(x)\,\Delta x; \quad d^2y = d(dy) = [f'(x)\,\Delta x]'\,\Delta x = f''(x)\,\Delta x^2; \quad d^3y = f'''(x)\,\Delta x^3$$

და ასე შემდეგ.

არ უნდა ავურიოთ ერთმანეთში dy^n და d^ny. პირველი ნიშნავს dy-ის n ხარისხს, მეორე კი ფუნქციის n-ური თანრიგის დიფერენციალს.



ნახ. 3.1.7.1.

ამრიგად დავასკვნით, რომ, თუ დამოუკიდებელი ცვლადის უშუალოდ განაზომის შეცდომა განსაზღვრულია თავისი ნიშნით და მცირეა აბსოლუტური ოდენობით, მაშინ ფუნქციის (არაპირდაპირი განაზომის) შეცდომა შეიძლება მოინახოს მისი გადიფერენციალების საშუალებით, მხოლოდ შესაძლებელი უნდა იყოს ამ ფუნქციის მეორე და შემდეგი რიგის დიფერენციალების უგულებელყოფა.

მაგალითი. აღვნიშნოთ კუბის წიბო x-ით და მისი მოცულობა $v = x^3$-ით (ნახ. 1).

ვთქვათ, წიბოს სიგრძე გაზომილია საკონტროლო სახაზავით და უდრის 20,01 სმ (ჭეშმარიტი სიგრძე), ხოლო ლოგარითმული სახაზავით — 20 სმ; მაშინ წიბოს გაზომვაში შეცდომა იქნება

$$\Delta x = 20 - 20{,}01 = -0{,}01 \text{ სმ.}$$

მისი ფუნქციის, ანუ მოცულობის შეცდომა იქნება

$$\Delta v = dv + \frac{1}{2} d^2v + \frac{1}{6} d^3v = 3x_{ჭ}^2(\Delta x) + 3x_{ჭ}(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 =$$
$$= 3\cdot(20{,}01)^2\cdot(-0{,}01) + 3(20{,}01)\cdot(-0{,}01)^2 + (-0{,}01)^3 =$$
$$= -12{,}012003 + 0{,}006003 - 0{,}000001 = -12{,}006001 \text{ სმ}^3$$

ან

$$\Delta v = (20)^3 - (20{,}01)^3 = -12{,}006001 \text{ სმ}^3.$$

ამავე დროს სხვაობა

$$\Delta v - dv = 3x_{ჭ}(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 0{,}006003 - 0{,}000001 =$$
$$= 0{,}006002 \text{ სმ}^3$$

უგულებელსაყოფია და შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $\Delta v \approx dv$.

აღნიშნულის შესახებ სრულ წარმოდგენას გვაძლევს 1-ლი ნახაზი, რომლის მიხედვით განისაზღვრება მოცულობის გაზომვის შეცდომა

$$\Delta v = \begin{cases} dv = (1),(2) + (3),(4) + (5),(2) \\ + \dfrac{1}{2} d^2v = (2),(6) + (3),(7) + (8),(9) \\ + \dfrac{1}{6} d^3v = (8),(10) \end{cases}$$

დასკვნა. დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ რაიმე სიდიდის ნაზრდი უდრის ამ სიდიდის შეცვლილ მნიშვნელობას მინუს მისი საწყისი მნიშვნელობა. ფუნქციათა წარმოებულის ოდენობის გამოთვლისათვის ამ წარმოებულის გამოსახულებაში ჩაისმება არგუმენტთა საწყისი მნიშვნელობანი.

შეცდომათა თეორიის მათემატიკასთან ლოგიკურად დაკავშირების მიზნით, ნაზრდისა და შეცდომის ანალიზის საფუძველზე მივიღეთ, რომ ნაზრდი და შეცდომა შინაარსობრივად ერთნაირია (იდენტურია) აგრეთვე ერთნაირ თვისებად შეიძლება მივიჩნიოთ, ერთი მხრივ შეცვლილი ოდენობა და განაზომი, მეორე მხრივ, საწყისი მნიშვნელობა და ჭეშმარიტი[1] მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი წესი: **რაიმე შეცდომის ოდენობა უდრის ამ სიდიდის განაზომს მინუს მისი ჭეშმარიტი მნიშვნელობა. ფუნქციათა წარმოებულების გამოთვლისას მათში ჩაისმება გაზომილი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობანი.** ამ დასკვნით დასტურდება სამართლიანობა შეცდომის განსაზღვრის წესისა, რომელიც მიღებულ იქნა (3. 1. 3) პარაგრაფში.

[1] ჭეშმარიტი მნიშვნელობის მაგიერ იხმარება სიდიდის ნამდვილი ოდენობა, უალბათესი სიდიდე, თეორიული გამოთვლებით მიღებული ოდენობა ან მიახლოებითი ოდენობა.

ზ ო გ ა დ ი ს ა ხ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ი ს სრული დიფერენციალის ანუ შეცდომის განსაზღვრისათვის ვიყენებთ კერძო წარმოებულებს. ვთქვათ,

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta\cdots)\,[1].$$

კერძო წარმოებულის მოძებნის წესი ისეთივეა, როგორც ჩვეულებრივი ერთარგუმენტიანი ფუნქციისა, მხოლოდ გაწარმოება ხდება იმ არგუმენტის მიხედვით, რომელიც მიიღება ცვლადად (ჩვენს შემთხვევაში უშუალოდ გაზომილი სიდიდე). დანარჩენი არგუმენტები იგულისხმება მუდმივებად (უშეცდომოდ გაზომილ სიდიდეებად). მაგალითად, სამკუთხედის ფართობის

$$\omega=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

კერძო დიფერენციალი α-თი (იგულისხმება, რომ α უშუალოდ გაზომილი სიდიდეა) იქნება

$$d\omega_\alpha=\frac{1}{2}ab\cos\alpha\,\frac{(d\alpha)''}{\rho''}$$

ან

$$\Delta\omega_\alpha=\frac{1}{2}ab\cos\alpha\,\frac{(\Delta\alpha)''}{\rho''}.$$

ს რ უ ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს მისაღებად თანამიმდევრობით უნდა გაწარმოვდეს მთელი ფუნქცია ყველა არგუმენტის, როგორც დამოუკიდებელი უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების მიხედვით და შეჯამდეს; მხოლოდ, როცა ერთი არგუმენტი არის ცვლადად მიჩნეული, დანარჩენები მუდმივებად ანუ უშეცდომოდ გაზომილად იგულისხმება.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\cdots \qquad (3.1.7.19)$$

სამკუთხედისათვის გვექნება

$$d\omega=\frac{1}{2}b\sin\alpha\Delta a+\frac{1}{2}a\sin\alpha\Delta b+\frac{1}{2}a\cdot b\cos\alpha\,\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}.$$

აქ იგულისხმება, რომ α, a და b უშუალოდ არის გაზომილი და გამოსათვლელად მიღებულ ფორმულაში უნდა ჩაისვას მათი ჭეშმარიტი მნიშვნელობა, რადგანაც კერძო წარმოებულების გამოთვლისას, x, y, $z\cdots$ არგუმენტები უნდა ჩავსვათ მათი საწყისი ოდენობით (ჭეშმარიტი ან უალბათესი ოდენობით). მათი შეცვლილი ოდენობები იქნება $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z,\ldots$ (ჩვენს შემთხვევაში უშუალოდ გაზომილი სიდიდეები). ფუნქციის ეს წარმოებულები იქნება განსაზღვრული მუდმივი რიცხვები. როგორც ერთარგუმენტიანი ფუნქციის შემთხვევაში, (19) დამოკიდებულებაში უგულებელვყოფთ მეორე და უმაღლეს-

[1] ამ შემთხვევაში ფუნქციის გამოსათვლელად საჭირო არგუმენტთა უშუალო გაზომვებს ეწოდება არაერთგვაროვანი გაზომვები

რიგის წარმოებულებს და ფუნქციის კერძო დიფერენციალის ნაცვლად შეგვიძლია მივიღოთ მისი ნაზრდი

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z\cdots)-f(x,\ y,\ z\cdots)=\Delta u=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\cdots+R\cdots, \qquad (3.1.7.20)$$

სადაც R არის ჯამი უგულებელსაყოფი მცირე — მეორე, მესამე და ასე შემდეგ რიგის წევრებისა. თუ (20) დამოკიდებულებაში $\Delta x, \Delta y, \Delta z,\ldots$ ნაზრდებს ვიგულისხმებთ მცირე ჭეშმარიტ შეცდომებად, მაშინ გამოთვლილი კერძო დიფერენციალი ფუნქციის ჭეშმარიტი შეცდომა იქნება. როგორც ვხედავთ, ზოგადი სახის ფუნქციის შეცდომა იღებს წრფივი ფუნქციის სახეს.

$\frac{dy}{dx}$ ფარდობასა და $\frac{\partial y}{\partial x}$ აღნიშვნას შორის არსებითი განსხვავებაა. dy და dx ცალ-ცალკე გარკვეული სიდიდეებია, ხოლო ∂y და ∂x ცალ-ცალკე არავითარ სიდიდეს არ წარმოადგენს; ისინი ცალ-ცალკე არ დაიწერება.

C. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ფორმულები (3. 1. 7. 21)

1) $y=x;\ y'=f'(x)=1;\ dy=f'(x)\,dx=dx;\ f'(x)=\frac{dy}{dx}=1;$

2) $y=\alpha;\ y'=1;\ dy=d\alpha;$

როდესაც α გამოსახულია რადიანებში, მაშინ იწერება

$$dy=\frac{(d\alpha)^{\circ}}{\rho^{\circ}}=\frac{(d\alpha)'}{\rho'}=\frac{(d\alpha)''}{\rho''};$$

3) $y=k;\ y'=k'=0;\ dy=0$ (k მუდმივი რიცხვია);
4) $y=(k+x);\ y'=x'=1;\ dy=dx;$
5) $y=kx;\ y'=kx';\ dy=kdx;$
6) $y=x^k;\ y'=kx^{k-1}\cdot x';\ dy=kx^{k-1}\,dx;$
7) $y=k^x;\ y=k^x\ln k\cdot x';\ dy=k^x\ln k dx;$
8) $y=e^x;\ y'=e^x\cdot x';\ dy=e^x dx;$
9) $y=\ln x;\quad y'=\frac{x'}{x};\quad dy=\frac{dx}{x};$
10) $y=\lg x;\quad y'=M_{10}\frac{x'}{x};\ dy=M_{10}\frac{dx}{x}$ (M_{10}-ს მაგიერ ზოგჯერ სწერენ μ);
11) $y=x\pm z\pm\cdots\pm u;\ y'=x'\pm z'\pm\cdots\pm u';\ dy=dx\pm dz\pm\cdots\pm du.$
12) $y=xz;\ y'=z\cdot x'+x\cdot z';\ dy=zdx+xdz.$

ხშირად ნამრავლს ჯერ გაალოგარითმებენ და შემდეგ მოძებნიან წარმოებულს ან დიფერენციალს, მაგალითად,

13) $y=xz;\ \ln y=\ln x+\ln z$ ან $\lg y=\lg x+\lg z;$

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}+\frac{z'}{z};\qquad d(\ln y)=\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z};$$

$$(\lg y)'=M_{10}\frac{y'}{y}=M_{10}\frac{x'}{x}+M_{10}\frac{z'}{z};\quad d(\lg y)=M_{10}\frac{dy}{y}=M_{10}\frac{dx}{x}+M_{10}\frac{dz}{z}.$$

თუ დიფერენციალებს შეცდომებად განვიხილავთ, დავასკვნით, რომ დამოუკიდებლად გაზომილი სიდიდეების ნამრავლის ფარდობითი შეცდომა უდრის ამ სიდიდეების ფარდობით შეცდომათა ჯამს.

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობები $y = xz$-ზე, მივიღებთ

$$y' = zx' + xz'; \quad dy = zdx + xdz.$$

ზოგადად

14) $u = x \cdot y \cdot z \cdots t;$

$$u' = (y \cdot z \cdots t)\, x' + (x \cdot z \cdots t)\, y' + (x \cdot y \cdots t)\, z' + \cdots + (x \cdot y \cdot z \cdots)\, t';$$

$$du = (y \cdot z \cdots t)\, dx + (x \cdot z \cdots t)\, dy + (x \cdot y \cdots t)\, dz + \cdots + (x \cdot y \cdot z \cdots)\, dt;$$

15) $y = \dfrac{x}{z}; \qquad y' = \dfrac{z \cdot x' - x \cdot z'}{z^2}; \qquad dy = \dfrac{zdx - xdz}{z^2};$

16) $y = \dfrac{1}{z}; \qquad y' = -\dfrac{z'}{z^2}; \qquad dy = -\dfrac{dz}{z^2};$

17) $y = \sqrt{x}; \qquad y' = \dfrac{x'}{2\sqrt{x}}; \qquad dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}};$

18) $y = \sin x; \; y' = \cos x \cdot x'; \; dy = \cos x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

19) $y = \cos x; \; y' = -\sin x \cdot x'; \; dy = -\sin x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

20) $y = \operatorname{tg} x; \quad y' = \dfrac{x'}{\cos^2 x}; \quad dy = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''} = \sec^2 x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

21) $y = \operatorname{ctg} x; \; y' = -\dfrac{x'}{\sin^2 x}; \; dy = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''} = -\operatorname{cosec}^2 x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

22) $y = \ln \sin x; \; y' = \operatorname{ctg} x \cdot x'; \; dy = \operatorname{ctg} x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

23) $y = \ln \cos x; \; y' = -\operatorname{tg} x \cdot x'; \; dy = -\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{(dx'')}{\rho''};$

24) $y = \ln \operatorname{tg} x; \; y' = \dfrac{2 \cdot x'}{\sin 2x}; \quad dy = \dfrac{2}{\sin 2x} \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

25) $y = \ln \operatorname{ctg} x; \; y' = -\dfrac{2 \cdot x'}{\sin 2x}; \; dy = -\dfrac{2}{\sin 2x} \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''};$

26) $y = \lg \sin x; \; y' = M_{10} \operatorname{ctg} x \cdot x'; \; dy = M_{10} \operatorname{ctg} x \cdot \dfrac{(dx)''}{\rho''}.$

გამოთვლების დროს სიმარტივისათვის ამ უკანასკნელ ფორმულას აძლევენ სხვაგვარ სახეს, მაგალითად,

27) $dy = M_{10} \operatorname{ctg} x \dfrac{(dx)''}{\rho''} = \dfrac{4342945 \cdot 10^{-7}}{206264{,}8} \cdot \operatorname{ctg} x\, (dx)'' = 21{,}055 \cdot 10^{-7} \operatorname{ctg} x\, (dx)''.$

ამ ფორმულით განისაზღვრება კუთხის სინუსის ლოგარითმის შეცდომა, როდესაც ცნობილია კუთხის გაზომვის შეცდომა $(dx)''$. გამონათვალი იქნება

წულოვანი განზომილების რიცხვი, რომელიც გამოსახავს გაზომილი კუთხის სინუსის ლოგარითმის მანტისას მეშვიდე ნიშნის ერთეულებში. ვთქვათ, $dx = 10''$ და $x = 45°0'00''$, მაშინ $dy = d \lg \sin x = 210{,}55$ ლოგარითმის მანტისის მეშვიდე ათწილად ერთეულს (გასინჯეთ ლოგარითმების ცხრილში).

28) $y = \lg \cos x$; $y' = -M_{10} \operatorname{tg} x \cdot x'$: $dy = -M_{10} \operatorname{tg} x \cdot \frac{(dx)''}{\rho''}$.

29) $y = \lg \operatorname{tg} x$; $y' = M_{10} \frac{2}{\sin 2x} \cdot x'$: $dy = M_{10} \frac{2}{\sin 2x} \cdot \frac{(dx)''}{\rho''}$

30) $y = \lg \operatorname{ctg} x$; $y' = -M_{10} \frac{2}{\sin 2x} \cdot x'$; $dy = -M_{10} \frac{2}{\sin 2x} \frac{(dx)''}{\rho''}$.

31) $y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x'$; $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (dx)'' \cdot \rho''$.

აქ (31, 32, 33, 34) იგულისხმება, რომ y კუთხე სახელდებულ ერთეულებშია გამოსახული;

32) $y = \arccos x$; $y' = -\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$; $dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (dx)'' \cdot \rho''$.

33) $y = \operatorname{arctg} x$; $y' = \frac{x'}{1+x^2}$; $dy = \frac{1}{1+x^2} (dx)'' \rho''$.

34) $y = \operatorname{arcctg} x$; $y' = -\frac{x'}{1+x^2}$; $dy = -\frac{1}{1+x^2} (dx)'' \cdot \rho''$.

35) $y = shx$; $y' = chx \cdot x'$; $dy = chx \cdot dx$;

36) $y = chx$; $y' = shx \cdot x'$; $dy = shx \cdot dx$;

37) $y = \operatorname{tg} hx$; $y' = \frac{x'}{ch^2 x}$; $dy = \frac{dx}{ch^2 x}$;

38) $y = \operatorname{ctg} hx$; $y' = -\frac{x'}{sh^2 x}$; $dy = -\frac{dx}{sh^2 x}$.

საერთოდ, ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გადიფერენციალებისას კუთხეების ნაზრდები უნდა გამოვსახოთ რადიანებში. მართლაც, რაიმე ფუნქციის გაწარმოებისას, მაგალითად, $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გაწარმოებისას $\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)}{\Delta x}$ გამოსახულების მრიცხველი განყენებული სიდიდეა. მაშასადამე, მნიშვნელიც უნდა იქნეს განყენებული სიდიდე.

D. ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი

a) ერთი ცვლადის ფუნქცია

ნებისმიერ პირობებში არგუმენტისა და ფუქციის იმ რიცხვით ოდენობებს, როცა ფუნქციის ოდენობის ცვალებადობის სიჩქარე ნულს უტოლდება, უწოდებენ არგუმენტისა და ფუნქციის სტაციონარულ ანუ კრიტი-

კულ მნიშვნელობებს. ამ მნიშვნელობებისათვის ფუნქციის გრაფიკის წერტილს, ანუ იმ წერტილს, რომლის მხები აბსცისათა ღერძის პარალელურია (რომლის წარმოებულიც ნულია), ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის სტაციონარული წერტილი.

მთელ $[ab]$ შუალედში ფუნქციის უმცირეს ან უდიდეს მნიშვნელობას უწოდებენ ფუნქციის აბსოლუტურ მინიმუმს ან აბსოლუტურ მაქსიმუმს. ამავე შუალედში შეიძლება მოიძებნოს ფუნქციის გრაფიკის ისეთი წერტილები (თუ გინდ აბსოლუტური მაქსიმუმის ან მინიმუმის მქონე წერტილი), რომელთა შესაბამისი ორდინატების ოდენობები მათ ორივე მხრივ უახლოეს (მეზობელ) წერტილთა ორდინატების ოდენობებთან შედარებით უფრო ნაკლები ან მეტი ოდენობის იყოს. ფუნქციის გრაფიკის ასეთ წერტილებს პირველ შემთხვევაში ეწოდება შედარებითი მინიმუმის და მეორე შემთხვევაში კი შედარებითი მაქსიმუმის წერტილი.

საზოგადოდ, ფუნქციის გრაფიკის მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილებს უწოდებენ ფუნქციის გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილებს.

ფუნქციის იმ მნიშვნელობებს, რომელნიც შეესაბამება ფუნქციის გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილს, უწოდებენ ფუნქციის ექსტრემალურ მნიშვნელობას.

ფუნქციის გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილად უნდა იყოს მისი სტაციონალური წერტილი ან ის წერტილი, რომელშიც წარმოებული არ არსებობს ან უსასრულობაა, ე. ი. სადაც წარმოებული განიცდის წყვეტას.

ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები მოიძებნება შემდეგნაირად:

1. გამოვითვლით ფუნქციის პირველ წარმოებულს;
2. მიღებულ პირველ წარმოებულს გავუტოლებთ ნულს და გამოვითვლით არგუმენტის (უშუალოდ გაზომილი სიდიდის) სტაციონარულ მნიშვნელობებს;
3. გამოითვლება ფუნქციის მეორე წარმოებული;
4. მეორე წარმოებულში არგუმენტის ნაცვლად ჩაისმება თითოეული ფესვი ანუ არგუმენტის სტაციონარული მნიშვნელობა. თუ გამონათვალი მივიღეთ დადებითი, ფუნქციას ამ წერტილში ჰქონია ექსტრემალური მნიშვნელობა და ყოფილა მინიმალური. თუ გამონათვალი არის უარყოფითი, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობა იქნება მაქსიმალური.
5. იმ შემთხვევაში, როცა მეორე წარმოებული ტოლია ნულის ან წარმოებული არ არსებობს, ან უსასრულობაა, მაშინ გამოკვლევა უნდა შესრულდეს პირველი წარმოებულის ნიშნის მიხედვით, როცა მასში განსაზღვრულ ფესვს ნაკლებობით ან მეტობით შევიტანთ. მაგალითად, თუ x_0-ს მივიღებთ უშუალოდ გაზომილი სიდიდის სტაციონარულ მნიშვნელობად და h-ს საკმაოდ მცირე დადებით ოდენობად (შეცდომად), მაშინ გამოკვლევა შეიძლება შესრულდეს პირველი სქემის მიხედვით.

შენიშვნა. როცა $[ab]$ შუალედში არგუმენტის რომელიმე მნიშვნელობის დროს პირველი წარმოებული უტოლდება ნულს და ამავე დროს ამ წერტილში შეიძლება რამდენიმეჯერ წარმოებულის აღება, მაშინ, თუ პირველი ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული ლუწი რიგისაა და დადებითია, გრა-

---

[1] არის შემთხვევები, როცა სტაციონარული წერტილი ექსტრემუმის წერტილად ვერ გამოდგება.

ფიკის ეს წერტილი მინიმუმია და თუ უარყოფითია, მაშინ ეს წერტილი მაქსიმუმი იქნება. თუ პირველი ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული კენტი რიგისაა, მაშინ ექსტრემუმი არა გვაქვს (სქემა 1).

სქემა 3.1.7.1

$y' \backslash x$	(x_0-h)		x_0+h	$f(x)$	შენიშვნა
$f'(x)$	$-(a>90°)$	$0_{(\text{სტაც. წერტ.})}$	$+(a<90°)$	minimum, მაგალითად, $y=x^2$, როცა $x=0$	ფუნქცია იცვლის ზრდის ხასიათს, ე. ი. ექსტრემუმს ადგილი აქვს.
	$+(a<90°)$	$0_{(\text{სტაც. წერტ.})}$	$-(a>90°)$	maximum, მაგალითად, $y=-x^2$, როცა $x=0$	
	$+(a<90°)$	$f''(x_0)=0$ ან $f'(x_0)$ არ არსებობს	$+(a<90°)$	იზრდება	
	$-(a>90°)$		$-(a>90°)$	მცირდება	
	$+(a<90°)$	$0_{(\text{სტაც. წ.})}$	$+(a<90°)$	იზრდება, მაგალითად, $y=x^3$, როცა $x=0$	ფუნქცია ზრდის ხასიათს არ იცვლის, ე. ი. ექსტრემუმს ადგილი არ აქვს
	$-(a>90°)$	$0_{(\text{სტაც. წ.})}$	$-(a>90°)$	მცირდება, მაგალითად, $y=-x^3$, როცა $x=0$	

ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებისათვის გამოვთვალოთ არგუმენტისა და ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობა და შევამოწმოთ ეს მნიშვნელობები არის თუ არა ექსტრემალურები.

მაგალითი 3.1.7.1. $y=x^3-12x^2+36x-15;$

1. $y'=3x^2-24x+36;$

2. $3x^2-24x+36=0.$

არგუმენტის სტაციონარული მნიშვნელობები იქნება

$$x_1=2 \text{ და } x_2=6;$$

3. $y''=6x-24.$

4. გავიგოთ არის თუ არა მიღებული მნიშვნელობანი ექსტრემიალური და ამ მნიშვნელობათათვის ფუნქცია მაქსიმუმია თუ მინიმუმი. პირველი ფესვისათვის მივიღებთ

$$6\cdot 2-24=-12<0,$$

ე. ი. როცა $x=2$, გვაქვს ექსტრემუმი, ამ მომენტში ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს და მისი ოდენობაა

$$2^3-12\cdot 2^2+36\cdot 2-15=17.$$

მეორე ფესვისათვის გვექნება

$$6\cdot 6-24=12>0,$$

ე. ი. როცა $x=6$, გვაქვს ექსტრემუმი, ამ მომენტში ფუნქციას მინიმუმი აქვს და მისი ოდენობაა

$$6^3-12\cdot 6^2+36\cdot 6-15=-15.$$

მაგალითი 3.1.7.2. $y=\sin x+\cos x$.

1. $y'=\cos x-\sin x$;

2. $\cos x-\sin x=0$;

$$\operatorname{tg} x=1;$$

$$x_1=45^\circ \text{ რადიანებში } x_1=\frac{\pi}{4};$$

$$x_2=225^\circ \qquad x_2=\frac{5\pi}{4}.$$

ფუნქციის პერიოდულობის გამო სტაციონარული წერტილების მნიშვნელობას ვიღებთ $0-2\pi$-ს შორის.

3. $y''=-\sin x-\cos x$;

4. $-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0$.

ადგილი აქვს ექსტრემუმს და ფუნქცია მაქსიმუმია. ამ მომენტში ფუნქციის ოდენობა იქნება

$$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

მეორე ფესვისათვის გვექნება

$$-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0.$$

ადგილი აქვს ექსტრემუმს და ფუნქცია მინიმუმია. ამ მომენტში ფუნქციის ოდენობა იქნება

$$\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

მაგალითი 3.1.7.3. $y=(x+3)(x-1)^3$.

1. $y'=(x-1)^3+3(x-1)^2(x+3)=4(x+2)(x-1)^2$;

2. $4(x+2)(x-1)^2=0$;

$x=-2$; $x_2=1$;

3. $y''=4(x-1)^2+2\cdot 4(x-1)(x+2)=12(x^2-1)$.

როცა

$$x=-2,\ y''=12(-2^2-1)=36>0,$$

ე. ი. ადგილი აქვს ექსტრემუმს და ფუნქცია მინიმალურია. მისი ოდენობა ამ მომენტში უდრის

$$(-2+3)(-2-1)^3=-27.$$

როცა

$$x=1,\ y''=12(1-1)=0 \text{ და } y=(1+3)(1-1)^3=0.$$

ამ შემთხვევაში ფუნქციის ქცევა საჭიროა გამოკვლეულ იქნეს შემდეგნაირად ვთქვათ $x=1{,}1$;

მაშინ

$$y=(1{,}1+3)(1{,}1-1)^3=4{,}1\cdot(0{,}1)^3=0{,}0041>0;$$

როცა $x=0{,}9$, მაშინ

$$y=(0{,}9+3)(0{,}9-1)^3=3{,}9\cdot(-0{,}1)^3=-0{,}0039<0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მომენტში, როცა $x=1$, ფუნქცია იზრდება არგუმენტის ზრდით და პირიქით.

მაგალითი 3. 1. 7. 4. გამოვიკვლიოთ ტოლი პერიმეტრების მქონე მართკუთხედებს შორის ყველაზე დიდი ფართობი რომელ მართკუთხედს აქვს.

აღვნიშნოთ.

P — მართკუთხედის პერიმეტრი,

x და y — მართკუთხედის გვერდები;

ω — მართკუთხედის ფართობი.

1. $P=2x+2y$;

2. $y=\dfrac{P}{2}-x$;

3. $\omega=x\left(\dfrac{P}{2}-x\right)$ (მივიღეთ გამოსაკვლევი ფუნქცია);

4. $\omega'=\dfrac{P}{2}-2x$;

5. $\dfrac{P}{2}-2x=0$;

   $x=\dfrac{P}{4}$;

6. $\omega''=-2$,

ე. ი. როდესაც $x=\dfrac{P}{4}$ ფართობი მაქსიმალური იქნება, მხოლოდ ამ შემთხვევაში მეორე გვერდიც პირველის ტოლი იქნება, ე. ი. $y=\dfrac{P}{4}$. ასეთი მართკუთხედი კი კვადრატია. მაშასადამე, ტოლი პერიმეტრების მქონე მართკუთხედებიდან კვადრატს ექნება ყველაზე დიდი ფართობი. მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ტოლი პერიმეტრების მქონე ნაგებობებიდან იმ ნაგებობის სასარგებლო ფართობი იქნება მეტი, რომელსაც აქვს კვადრატის ფორმა.

ხ. მრავალი ცვლადის ფუნქცია

ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად მრავალი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილად ითვლება მისი ყველა კრიტიკული წერტილი, ე. ი. ის წერტილები, რომლებშიც ფუნქციის ყველა პირველი რიგის კერძო წარმოებული უდრის ნულს და ის წერტილები, რომლებშიც კერძო

წარმოებული არ არსებობს. ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილის არსებობისათვის სტაციონარული წერტილის არსებობა აუცილებელი პირობაა, მხოლოდ არა საკმარისი, ე. ი. სტაციონარული წერტილის არსებობა არ ნიშნავს. იმას, რომ ის ექსტრემუმის წერტილია. მოსალოდნელია, რომ სტაციონარული წერტილის შესაბამისი არგუმენტების უსასრულოდ მცირე ცვალებადობას შეესაბამებოდეს ორდინატის სტაციონარულ მნიშვნელობაზე მისი ხან მეტი და ხან ნაკლები ოდენობა. მაგალითად, როგორც ვიცით $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი ზედაპირებს გამოსახავს. ამ ზედაპირზე შეიძლება მოიძებნოს სტაციონარული წერტილი, ე. ი. ამ წერტილში გატარებული მხები სიბრტყე xoy სიბრტყის პარალელურია. შეიძლება მოხდეს, რომ ფუნქციის გრაფიკის ზედაპირი ამ სტაციონარული წერტილის მახლობლობაში (მის გარშემო სრული კუთხის ფარგლებში) ზოგან მხები სიბრტყის ზემოთ და ზოგან კი მის ქვემოთ იქნეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის სტაციონარული წერტილი ფუნქციის გრაფიკის ექსტრემუმის წერტილი არ არის. სტაციონარული წერტილი ექსტრემუმად გამოდგებოდა იმ შემთხვევაში, თუ ამ წერტილის მეზობლად ფუნქციის გრაფიკის ზედაპირი ხსენებული მხები სიბრტყის მთლიანად ზემოთ (მინიმუმი) ან მთლიანად ქვემოთ (მაქსიმუმი) მოექცეოდა. როგორც ვხედავთ, ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, აქაც საჭიროა გამოკვლევა იმისა, აკმაყოფილებს თუ არა სტაციონარული წერტილი ექსტრემუმის წერტილის აუცილებელ და საკმარის პირობას. გამოკვლევა უნდა შესრულდეს შემდეგნაირად:

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია

$$z=f(x, y).$$

1. გამოვთვლით ამ ფუნქციის პირველ წარმოებულს x-ით და y-ით და ცალ-ცალკე გავუტოლებთ ნულს, ე. ი.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

გამოვითვლით ამ ორუცნობიანი განტოლებების ნამდვილ ფესვებს ანუ x-ის და y-ის სტაციონარულ მნიშვნელობებს.

2. გამოვითვლით ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს x-ით და y-ით და ამოვიწერთ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ სიდიდეებს.}$$

ამ შემთხვევაში, თუ სტაციონარულ წერტილებში

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)<0,$$

მაშინ საკმარისობის პირობაც დაცულია, ე. ი. სტაციონარული წერტილი შეიძლება მივიღოთ ექსტრემუმის წერტილად. აღნიშნული დასტურდება იმით, რომ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ და } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ნულისაგან განსხვავებული ერთნაირი ნიშნის მქონე სიდიდეებია და აგრეთვე x-ისა და y-თვის სტაციონარულ მნიშვნელობათა უსასრულოდ მცირე ცვალებადობას სტაციონარული წერტილის მახლობლობაში (მის გარშემო სრული კუთხის ფარგლებში) ფუნქციის მხოლოდ ერთი მიმართულებით ცვალებადობა შეესაბამება და ფუნქციის სიდიდის შეცვლის ნიშანი იქნება ისეთივე, რაც აქვს

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3. გამოვიკვლევთ სტაციონარულ წერტილს.

თუ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0, \text{ მაშინ ფუნქციას მინიმუმი აქვს}$$

და, როცა

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0, \text{ მაშინ ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს.}$$

4. x და y-ის სტაციონარულ ანუ ექსტრემიალურ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ ფუნქციის ანალიზურ გამოსახულებებში, რითაც მივიღებთ ფუნქციის ექსტრემიალურ მნიშვნელობას.

იმ შემთხვევაში, როცა

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)>0,$$

მაშინ ექსტრემუმს ადგილი არა აქვს.

და, როცა

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

საკითხი გაურკვეველი რჩება და საჭიროა საგანგებო გამოკვლევა.

საინჟინრო საქმეში ხშირად ექსტრემუმის დასადგენად კმაყოფილდებიან არგუმენტთა და ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობების გამოთვლით, რისთვისაც პირველი რიგის წარმოებულებიდან განსაზღვრავენ ფესვებს.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial z}{\partial t}=0.$$

შემდეგ მეორე რიგის წარმოებულებში ფესვების ჩასმით დაადგენენ ჩვეულებრივი ხერხით მაქსიმუმსა და მინიმუმს. გამონათვალი თუ პლუსი ნიშნით მიიღება, ამ წერტილში ფუნქცია მინიმუმია და, თუ გამონათვალი მინუსია, გრაფიკის სტაციონარული წერტილი მაქსიმუმია.

ε. პირობითი ექსტრემუმი

წინა თავებში განხილული ექსტრემიალური მნიშვნელობები განისაზღვრა დამოუკიდებლად, ე. ი. არგუმენტთა ექსტრემიალურ მნიშვნელობათა მიმართ არ იყო მოთხოვნილი რაიმე მათემატიკური პირობის დაკმაყოფილება. იმ შემთხვევაში, როდესაც არგუმენტთა ექსტრემიალურ მნიშვნელობებს მოეთხო-

ვებათ გარკვეული პირობის დაკმაყოფილება, ვუწოდებთ პ ი რ ო ბ ი თ ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ს. ცნობილია, რომ მრავალკუთხედის უშუალოდ ტოლზუსტად გაზომილი შიგა კუთხეების ჯამი არ უდრის თეორიულ ჯამს. ვთქვათ, მრავალკუთხედი არის ხუთკუთხა, მისი შეუკვრელობა ანუ შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 2d(n-2), \qquad (a)$$

სადაც

W არის მრავალკუთხედის შეუკვრელობა,

α_i — უშუალოდ გაზომილი კუთხეები,

n — კუთხეთა რიცხვი.

მიღებული შეცდომა (თუ ის დასაშვებია) უნდა გაწონასწორდეს გაზომილ კუთხეებზე ისე, რომ მრავალკუთხედის შიგა კუთხეები მივიღოთ რაც შეიძლება ჭეშმარიტ მნიშვნელობებთან ახლო ოდენობების მქონე. ამ მიზნით გამოთვლილი შესწორებები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ პირობას:

1. მრავალკუთხედის კუთხეების შესწორებათა ჯამი უნდა უდრიდეს გამოთვლილ (W) შეუკვრელობას შებრუნებული ნიშნით, ე. ი.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + W = 0. \qquad (b)$$

აქ ε_i — მრავალკუთხედის თითოეული კუთხის შესწორებაა.

მიღებული ხუთუცნობიანი განტოლება არგუმენტთა (შესწორებათა) ცალსახა მნიშვნელობების გამოთვლის საშუალებას არ გვაძლევს, რადგანაც შეიძლება მოიძებნოს უცნობთა ნებისმიერი რაოდენობა, რომელიც დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ გეომეტრიულ პირობას, ამიტომ საჭირო ხდება მეორე პირობის დაცვა. მეორე მოთხოვნა ცნობილია ლ ე ჟ ა ნ დ რ-გ ა უ ს ი ს პირობის სახით.

2. გამოთვლილ შესწორებათა კვადრატების ჯამი უნდა იყოს მინიმალური

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 = \text{minimum}. \qquad (c)$$

ეს ორი პირობა ერთად აკმაყოფილებს აუცილებლობისა და საკმარისობის პირობას. უცნობთა განსაზღვრის მიზნით ორივე პირობას აერთიანებენ ერთი ფუნქციის სახით, მხოლოდ გეომეტრიული პირობის გამოსახულებას წინასწარ ამრავლებენ გარკვეულ განუსაზღვრელ მამრავლზე (კორელატზე) შებრუნებული ნიშნით და შეუერთებენ მეორე პირობას. ამ მოქმედებით იღებენ ახალ ფუნქციას, რომელსაც ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ფუნქციას უწოდებენ

$$F = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) - 2K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + W) = \min. \qquad (d)$$

მიღებული ფუნქცია აკმაყოფილებს მინიმუმის პირობას, რადგანაც პირველი ფრჩხილები მინიმუმია და მეორე კი ნულის ტოლი. ამის შემდეგ გამოვითვლით არგუმენტთა იმ მნიშვნელობებს, რომელთა დროსაც ფუნქცია გადაიქცევა მინიმუმად.

(d) ფუნქციას გავაწარმოებთ ყველა უცნობით თანამიმდევრობით და გავუტოლებთ ნულს, საიდანაც გამოითვლება ყველა შესწორება:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = 2\varepsilon_1 - 2K = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} = 2\varepsilon_2 - 2K = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_3} = 2\varepsilon_3 - 2K = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_4} = 2\varepsilon_4 - 2K = 0, \qquad (e)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_5} = 2\varepsilon_5 - 2K = 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$\varepsilon_1 = K; \quad \varepsilon_2 = K; \quad \varepsilon_3 = K; \quad \varepsilon_4 = K; \quad \varepsilon_5 = K. \qquad (x)$$

ყველა შესწორება ტოლი გამოვიდა. ამიტომ გეომეტრიულ (b) პირობაში შესწორებათა მაგიერ შეგვიძლია შევიტანოთ კორელატები და ამით განვსაზღვროთ მათი სიდიდე.

$$K + K + K + K + K + W = 0, \qquad (g)$$

$$K = -\frac{W}{5}.$$

(r) ტოლობებიდან გვექნება

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = K = -\frac{W}{5}. \qquad (h)$$

როგორც ვხედავთ, მრავალკუთხედის ტოლზუსტად გაზომილ კუთხეთა შესწორებანი ურთიერთტოლი და შეცდომის შებრუნებული ნიშნის მქონე ოდენობებია. მართლაც, ვერ მოვძებნით შესწორებათა ისეთ სხვა ოდენობებს, რომ მათი კვადრატების ჯამი მიღებულ შესწორებათა კვადრატების ჯამზე ნაკლები იყოს.

მიღებული წესით ნებისმიერი პირობებისათვის შეიძლება გადაწყვეტა ზოგადი სახის ფუნქციისა. მის წრფივ სახეზე დასაყვანად დაგვჭირდება ტ ე ი ლ ო რ ი ს ფორმულის გამოყენება და კორელატებისათვის ნორმალური სახის მრავალუცნობიანი სისტემის გადაწყვეტა (ეს საკითხი გეოდეზიური თვალსაზრისით განხილულია [29]).

E. ზოგიერთი ცნობები ინტეგრალური აღრიცხვიდან

a. განუსაზღვრელი ინტეგრალების თვისებები (3.1.7.22)

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$ (ფორმულაში k მუდმივი რიცხვია);
4. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx;$

5. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, $\int v\,du = uv - \int u\,dv$, რადგანაც $d(uv) = u\,dv + v\,du$ და $\int d(uv) = uv = \int u\,dv + \int v\,du$;

6. $\int y\,dy + \int x\,dx = C$, რადგანაც $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, ანუ $y\,dy + x\,dx = 0$.

ხ. განუსაზღვრელი ინტეგრალების ძირითადი ცხრილი (3.1.7.23)

1. თუ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

მაშინ

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C; \quad (k,\ b \text{ და } C \text{ მუდმივებია});$$

2. $\int 0 \cdot dx = C$;

3. $\int dx = x + C$;

4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $(n \neq -1)$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

6. $\int k^x\,dx = \frac{k^x}{\ln k} + C \quad (k > 0,\ k \neq 1)$;

7. $\int e^x dx = e^x + C$;

8. $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$;

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

10. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

11. $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$;

12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$;

13. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;

14. $\int \frac{2dx}{\sin 2x} = -\ln \operatorname{ctg} x + C = \ln \operatorname{tg} x + C$;

15. $\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

16. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm k^2}|+C;$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + C;$

19. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C;$

20. $\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} + C;$

21. $\int \frac{dx}{k^2-x^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k+x}{k-x} + C;$

22. $\int ch x dx = sh x + C;$

23. $\int sh x dx = ch x + C;$

24. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C;$

$$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C.$$

ზოგიერთი ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრალები (3.1.7.24)

1. $\int x^n e^{kx} dx = \frac{1}{k} x^n e^{kx} - \frac{n}{k} \int x^{n-1} e^{kx} dx + C;$ (n და k მუდმივებია);

2. $\int x^n \ln x dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C \quad (n \neq -1);$

3. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$ რადგანაც $\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \right);$

4. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C, \qquad \left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right);$

5. $\int \sin(x+M) dx = \sin M \cdot \sin x - \cos M \cdot \cos x + C,$ (M — მუდმივი რიცხვია);

6. $\int \sin x \sin(x+M) dx = \cos M \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) -$

$-\sin M \cdot \frac{1}{4} \cos 2x + C;$

აქ შეიძლება შეიცვალოს

$$-\sin M \cdot \frac{1}{4} \cos 2x = \sin M \cdot \frac{1}{2} \sin^2 x = -\sin M \cdot \frac{1}{2} \cos^2 x;$$

7. $\int \sin^2(x+M) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2(x+M) + C.$

d. განსაზღვრული ინტეგრალები (3.1.7.25)

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a);$

2. $\int_0^{2\pi} \sin\Theta \cdot d\Theta = \Big|_0^{2\pi} -\cos\Theta = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0;$

3. $\int_0^{2\pi} \sin^2\Theta\, d\Theta = \frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi}\Theta - \frac{1}{4}\Big|_0^{2\pi}\sin 2\Theta = \pi;$

4. $\int_0^{2\pi} \sin(\Theta + M)\, d\Theta = \sin M \Big|_0^{2\pi} \sin\Theta - \cos M \Big|_0^{2\pi} \cos\Theta = 0,$ (M — მუდმივი);

5. $\int_0^{2\pi} \sin\Theta \cdot \sin(\Theta + M)\, d\Theta = \frac{\cos M}{2}\Big|_0^{2\pi}\Theta - \frac{\cos M}{4}\Big|_0^{2\pi}\sin 2\Theta + \frac{\sin M}{2}\Big|_0^{2\pi}\sin^2\Theta =$
$= \pi \cdot \cos M;$

6. $\int_0^{2\pi} \sin^2(\Theta + M)\, d\Theta = \frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi}\Theta - \frac{1}{4}\Big|_0^{2\pi}\sin 2(\Theta + M) = \pi;$

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\pi}$ (პუასონის ინტეგრალი);

8. $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}};$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (დირიხლეს ინტეგრალი).

F.1 მწკრივები

მრავალი სახის ალგებრულ გამოსახულებათა გადაწყვეტა ადვილად სრულდება მწკრივების საშუალებით. განყენებულარგუმენტიანი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გადაწყვეტის ერთ-ერთი რაციონალური საშუალება მწკრივებია.

ხშირად გვიხდება რაიმე x სიდიდის ოდენობის წარმოდგენა, როგორც მისი მიახლოებითი x_0 ოდენობისა და მცირედი Δx შესწორების ალგებრული ჯამისა. თვით x სიდიდე წარმოგვიდგება, როგორც ფუნქცია. ასეთ შემთხვევაშიაც ვიყენებთ მწკრივებს.

ძირითადად ფუნქციების მწკრივებად დაშლისათვის გამოყენებულია ტ ე ი ლ ო რ ი ს და მ ა კ ლ ო რ ე ნ ი ს ფორმულები.

ტ ე ი ლ ო რ ი ს ფორმულიდან მწკრივის ზოგადი სახეა

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{\Delta x}{1!}f'(x_0)+\frac{\Delta x^2}{2!}f''(x_0)+\frac{\Delta x^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots \quad (3.1.7.26)$$

მ ა კ ლ ო რ ე ნ ი ს ფორმულიდან მწკრივის ზოგადი სახეა

$$f(x)=f(0+x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots \quad (3.1.7.27)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 1) მწკრივის ყოველი წევრი მიიღება ფუნქციის თანამიმდევრობით გაწარმოებით და მასში არგუმენტის საწყისი, ჭეშმარიტი ან მიახლოებითი მნიშვნელობის ჩასმის შედეგად. 2) მწკრივები გამოიყენება თუ დაცულია უწყვეტობა როგორც ფუნქციის, ისე მისი წარმოებულისა: (22) შემთხვევაში არგუმენტის x_0-დან $(x_0+\Delta x)$ და (23) შემთხვევაში 0-დან $(0+x)$-მდე ცვალებადობის დროს.

ა. ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი ტეილორის ფორმულის გამოყენებით

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= \sin(x_0+\Delta x)=\sin x_0+\frac{\Delta x}{1!\rho}\cos x_0-\frac{\Delta x^2}{2!\rho^2}\sin x_0-\\
&\qquad -\frac{\Delta x^3}{3!\rho^3}\cos x_0+\frac{\Delta x^4}{4!\rho^4}\sin x_0+\cdots\\
\sin x &= \sin(x_0-\Delta x)=\sin x_0-\frac{\Delta x}{\rho}\cos x_0-\frac{\Delta x^2}{2\rho^2}\sin x+\\
&\qquad +\frac{\Delta x^3}{6\rho^3}\cos x_0+\frac{\Delta x^4}{24\rho^4}\sin x_0-\cdots\\
\cos x &= \cos(x_0+\Delta x)=\cos x_0-\frac{\Delta x}{1!\rho}\sin x_0-\frac{\Delta x^2}{2!\rho^2}\cos x_0+\\
&\qquad +\frac{\Delta x^3}{3!\rho^3}\sin x_0+\frac{\Delta x^4}{4!\rho^4}\cos x_0-\cdots\\
\cos x &= \cos(x_0-\Delta x)=\cos x_0+\frac{\Delta x}{\rho}\sin x_0-\frac{\Delta x^2}{2\rho^2}\cos x_0-\\
&\qquad -\frac{\Delta x^3}{6\rho^3}\sin x_0+\frac{\Delta x^4}{24\rho^4}\cos x_0+\cdots\\
\operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(x_0+\Delta x)=\operatorname{tg} x_0+\frac{\Delta x}{\rho\cos^2 x_0}+\frac{\Delta x^2\sin x_0}{\rho^2\cos^3 x_0}+\\
&\qquad +\frac{\Delta x^3}{3\rho^3}\,\frac{\cos^2 x_0+3\sin^2 x_0}{\cos^4 x_0}+\cdots
\end{aligned}\right\}. \quad (3.1.7.28)$$

აქ არგუმენტები იგულისხმება გრადუსულ სიდიდეებში. ρ-ს ექნება იგივე განზომილება, რაც აქვს Δx-ს.

ხ. განყენებულარგუმენტიანი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დაშლა მწკრივებად (მაკლორენის ფორმულით)

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)\\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \quad\right)\\
&\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots = x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \frac{17x^6}{315} + \ldots\right)\\
&\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{240} + \ldots = x\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{240} + \ldots\right)\\
&\ln\sin x = \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)\\
&\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)\\
&\ln\operatorname{tg} x = \ln x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \frac{17x^6}{315} + \ldots\right)\\
&\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln x + \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{240} + \ldots\right)
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.1.7.29)$$

ათობითი ლოგარითმების გამოსათვლელად უნდა გადავამრავლოთ ფორმულების ყოველი წევრი M_{10}-ზე.

c. ბ ი ნ ო მ უ რ ი მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 \pm \ldots \qquad (3.1.7.30)$$

ეს მწკრივი კრებადი იქნება, როცა $-1 \leqslant x < 1$. ხშირად გამოიყენება შემდეგი მწკრივები:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + \ldots\\
&\frac{1}{(1 \pm x)^2} = (1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp 6x^5 + \ldots\\
&\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \mp\\
&\qquad \mp \frac{63}{256}x^5 + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.7.31)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{1\pm x}=(1\pm x)^{1/2}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}\pm\frac{1}{16}x^{3}-\frac{5}{128}x^{4}\pm\\
&\qquad\qquad\pm\frac{7}{256}x^{5}-\ldots\\
&\sqrt{1-x^{2}}=(1-x^{2})^{1/2}=1-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{8}x^{4}-\frac{1}{16}x^{6}-\frac{5}{128}x^{8}-\ldots\\
&\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}=(1-x^{2})^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{8}x^{4}+\frac{5}{16}x^{6}+\frac{35}{128}x^{8}+\ldots
\end{aligned}\right\}. \quad (3.1.7.32)$$

d. ლოგარითმული მწკრივები

$$\left.\begin{aligned}
&\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{1}{2}x^{2}\pm\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{4}x^{4}\pm\frac{1}{5}x^{5}-\\
&\lg(1\pm x)=M_{10}\ln(1\pm x)=\pm M_{10}x-\frac{1}{2}M_{10}x^{2}\pm\frac{1}{3}M_{10}x^{3}-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{4}M_{10}x^{4}\pm\frac{1}{5}M_{10}x^{5}-\ldots\\
&\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\frac{x^{7}}{7}+\ldots\right)\\
&\lg\frac{1+x}{1-x}=M_{10}\,2\left(x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\frac{x^{7}}{7}+\ldots\right)\ \text{როცა}\ 0<x\leqslant 1
\end{aligned}\right\}. \quad (3.1.7.33)$$

e. მაჩვენებლიანი მწკრივები

$$\left.\begin{aligned}
&e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{5}}{5!}+\\
&a^{x}=1+x\ln a+\frac{1}{2!}(x\ln a)^{2}+\frac{1}{3!}(x\ln a)^{3}+\frac{1}{4!}(x\ln a)^{4}+\ldots\\
&10^{x}=1+\frac{x}{M_{10}}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{M_{10}}\right)^{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{M_{10}}\right)^{3}+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{M_{10}}\right)^{4}+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{M_{10}}\right)^{5}
\end{aligned}\right\}. \quad (3.1.7.34)$$

თავი II

გამოთვლების ტექნიკის არსი

განხილადი სიდიდეების (საგნები, მათი ელემენტები ან სხვადასხვა ნიშან-თვისებები, მოვლენები და სხვ.) რიცხვითი მნიშვნელობების, ანუ ოდენობების, დასადგენად შესაბამისი დარგის სპეციალისტები ადგენენ სხვადასხვა სირთულის (ფიზიკურ, ტექნიკურ, ეკონომიკურ და სხვ.) ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა ხდება ამა თუ იმ მათემატიკურ სახეზე (განტოლებები, ფორმულები და

სხვ.) მათი დაყვანის შემდეგ. ამ უკანასკნელთა ძირითად კომპონენტებს (ელემენტებს) კი წარმოადგენენ როგორც მუდმივი (e — ნეპერის რიცხვი, M_{10} — მოდული, ρ — რადიანი, π და სხვ.), ისე ცვლადი (განაზომი) სიდიდეები.

აღნიშნული სიდიდეები ერთმანეთისაგან განსხვავდება თავისი წარმოშობით: პირველი სახის სიდიდეებია მათემატიკური წარმოშობის; ხშირად ისინი ერთეულის უთანაზომოში არიან და შეიძლება დავწეროთ ნებისმიერი რაოდენობის ათწილადი ნიშნებით (ნებისმიერი სიზუსტის), ხოლო მეორე სახის სიდიდეები, გაზომვების შედეგად წარმოიშობა და გამოისახება მხოლოდ იმ სახით ციფრებით, რომელთა მიღებაც შეიძლება გაზომვების დროს მიღწეული სიზუსტით. მაგალითად, ირაციონალური (უსასრულო არაპერიოდული) $\sqrt{2}=1,414213...$ და ტრანსცენდენტური (სიდიდე, რომელიც არ აკმაყოფილებს მთელი კოეფიციენტების მქონე არც ერთ ალგებრულ განტოლებას), $\pi=3,1415926536....$ სიდიდეების ოდენობები შეიძლება დაიწეროს ნებისმიერი სიზუსტით, ხოლო განაზომის რიცხვითი ოდენობა — მხოლოდ მეორე ან მესამე ათწილად ნიშნამდე. მაგალითად, თეოდოლიტური სვლით გაზომილი გვერდის სიგრძე $S=136,26$ მ გამომთვლელის წინაშე ისმის საკითხი, თუ როგორი თანამიმდევრობითა და სიზუსტით აწარმოოს მათემატიკურ სახეზე დაყვანილი ნებისმიერი ამოცანის უცნობების ოდენობების დადგენა. ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს კვადრატული განტოლების ფესვის ოდენობა. ამისათვის თანამედროვე მიდგომით საჭიროა ოთხი ეტაპის შესრულება:

პირველ ეტაპზე შეარჩევენ რიცხვით მეთოდს. მაგალითად, შეიძლება ვისარგებლოთ ფესვების გამოსათვლელი ცნობილი ფორმულებით, რომლებშიც ჩაისმება განტოლების ცნობილი კოეფიციენტები და მივიღებთ ფესვის ზუსტ ან მიახლოებით რიცხვითს მნიშვნელობებს ან შეიძლება არ ვისარგებლოთ ცნობილი ფორმულებით და განტოლება ამოვხსნათ სხვა სახის რიცხვითი მეთოდით და სხვ.

მეორე ეტაპზე ადგენენ ალგორითმს, ანუ ისეთ მათემატიკურ მოქმედებათა ერთობლიობის სიმბოლურ, შემოკლებულ გამოსახვას, რომლის მიმართ დადგენილია წესი, თუ ცნობილი მათემატიკური ოპერაციებიდან რომელი მარტივი ოპერაციები უნდა შესრულდეს გარკვეული თანამიმდევრობით, რომ გამოსავალ მონაცემთა სათანადოდ მათში ჩასმით აუცილებლად მივიღოთ განხილადი მაგალითის ძიებული გამონათვალი.

მესამე ეტაპზე უშუალოდ ემზადებიან გამოთვლითი სამუშაოებისათვის: 1) ადგენენ, როგორი სიზუსტით უნდა აწარმოონ გამოთვლითი სამუშაოები, რომ გამონათვლები მიიღონ მოთხოვნილი სიზუსტით; 2) შეარჩევენ გამოთვლებისათვის საჭირო დამხმარე საშუალებებს (გამოთვლითი მანქანები, ცხრილები და სხვ.); 3) ამ უკანასკნელის შესაბამისად შეამზადებენ ბლანკებს, პროგრამასა და სხვა საჭირო დამხმარე საშუალებებს.

მეოთხე ეტაპზე სრულდება ყველა სახის გამოთვლები.

საერთოდ, მიახლოებითი რიცხვებით გამოთვლების დროს აუცილებელია გავითვალისწინოთ საჭირო სიზუსტის ოდენობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გამონათვალი და დავადგინოთ შესაძლებელია თუ არა ასეთი სიზუს-

ტის მიღება. მიახლოებითი რიცხვებით მოქმედებების გამოთვლების ტექნიკაში მიღებული წესების გამოყენებით მივაღწევთ დროის დიდ ეკონომიას და ავამაღლებთ საერთოდ გამოთვლების კულტურას.

3. 2. 1. გამოთვლების ტექნიკის ძირითადი ცნებები

A. ზუსტი და მიახლოებითი რიცხვები

როგორც ცნობილია, რიცხვი არის მატერიალური სამყაროს რაოდენობრივი ფარდობის გამოსახულება და მიიღება გამოთვლის, გაზომვის ან თვლის შედეგად.

სიდიდის ჭეშმარიტ რიცხვითს მნიშვნელობას ეწოდება *ზუსტი რიცხვი*, ხოლო მიახლოებით რიცხვითს მნიშვნელობას მოკლედ უწოდებენ *მიახლოებით რიცხვს*.

პრაქტიკაში ხშირად ვერ ხერხდება სიდიდის ზუსტი (ჭეშმარიტი) რიცხვითი მნიშვნელობის (ოდენობის) დადგენა ან იგი ისეთია, რომ მისი გამოყენება უხერხულია და ამავე დროს არ შეესაბამება მეცნიერებაში მიღებულ *აუცილებლობისა და საკმარისობის* ძირითად პრინციპს. მაგალითად, კრასოვსკის ელიფსოიდის პარამეტრების გამოსათვლელ (1. 6. 5. 1—1. 6. 5. 9) ფორმულებში შედის მრავალი განაზომი და გამონათვალი, რომელთა ოდენობები შეესაბამება გამოყენებული საზომი ინსტრუმენტების სიზუსტეს, რაც განაპირობებს, ვთქვათ, π რიცხვის *საკმარისი ოდენობით ხსენებულ ფორმულებში* შეტანის საკითხს. მაშასადამე, გამომთვლელმა ამოსახსნელ ფორმულებში უნდა შეიტანოს მიახლოებითი რიცხვების აუცილებელი და საკმარისი ოდენობები. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, არა აქვს აზრი π რიცხვის ცნობილი უზუსტესი ოდენობის შეტანას ამოსახსნელ ფორმულებში, მაშინ როცა უშუალოდ განაზომები შედარებით ნაკლები სიზუსტის არის. მიახლოებით რიცხვებს მაშინ აქვთ პრაქტიკული მნიშვნელობა, როცა შეგვიძლია მათი შეცდომისა და სიზუსტის შეფასება. მაშასადამე, *საჭიროა, ერთის მხრივ, სიდიდეთა გაზომვის სიზუსტისა* (განაზომთა შეცდომების თეორიისა) და, *მეორეს მხრივ, მიახლოებითი რიცხვების* (გამოთვლის ტექნიკის) *სიზუსტის ურთიერთ შესაბამისობის დაცვა*, რის შედეგად გამონათვლები მიიღება სასურველი სიზუსტით. როგორც ვხედავთ, *მიახლოებით გამოთვლებში იყენებენ სიდიდეთა მიახლოებით ოდენობებს, მიახლოებით მეთოდებს* ან ორივეს ერთად.

B. აბსოლუტური და ფარდობითი შეცდომა

შევინარჩუნოთ (3. 1. 3) პარაგრაფში გამოყენებული აღნიშვნები. X-ით აღვნიშნოთ ზუსტი რიცხვი (სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა), l-ით — ზუსტი X რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. იმ ფაქტს, რომ l არის სიდიდის მიახლოებითი, ხოლო X ზუსტი მნიშვნელობა, მათემატიკურად აღნიშნავენ ასე: $X \approx l$ და კითხულობენ X მიახლოებით ტოლია l-ისა. თუ ცნობილია, რომ $l < X$, მამინ l-ს უწოდებენ სიდიდის მიახლოებით ოდენობას *ნაკლებობით*, როცა $l > X$, მაშინ l იქნება სიდიდის მიახლოებითი ოდე-

ნობა მეტობით. ვთქვათ, $X=\sqrt{2}$. ცნობილია, რომ $1{,}41<X<1{,}42$. მაშასადამე, $l_1=1{,}41$ იქნება $\sqrt{2}$ მიახლოებითი ოდენობა ნაკლებობით, ხოლო $l_2=1{,}42$ — მიახლოებითი ოდენობა მეტობით.

(3. 1. 3) პარაგრაფში მიღებული წესის მიხედვით როგორი წარმოშობისაც არ უნდა იყოს რიცხვი, მიახლოებითი რიცხვის შეცდომას ვუწოდებთ მიახლოებით და ზუსტ ოდენობას შორის სხვაობას

$$\delta=l-X. \tag{3.2.1.1}$$

ცხადია, მიახლოებითი რიცხვის შეცდომას, რომელსაც აგრეთვე უწოდებენ ჭეშმარიტ შეცდომას, ექნება ორი ნიშანი $+$ და $-$.

სიდიდის მიახლოებით და ზუსტ ოდენობას შორის განსხვავება რომ დავახასიათოთ, საკმარისია ვიცოდეთ არა მიახლოებითსა და ზუსტ ოდენობას შორის სხვაობა, არამედ ამ სხვაობის აბსოლუტური ოდენობა. მაშასადამე, სიდიდის $|\delta|$ ჭეშმარიტი შეცდომის აბსოლუტური ოდენობა იქნება მისი მიახლოებითი და ჭეშმარიტი ოდენობების სხვაობის აბსოლუტური ოდენობა

$$|\delta|=|l-X|. \tag{3.2.1.2}$$

ჩვეულებრივ, სიდიდის ზუსტი ოდენობა უცნობია, რის გამო δ ჭეშმარიტი შეცდომისა და $|\delta|$ ჭეშმარიტი შეცდომის აბსოლუტური ოდენობის გამოთვლა შეუძლებელია. მაგრამ, სრულიად საკმარისია თუ შევძლებთ აბსოლუტური შეცდომის შეფასებას, ანუ იმის ჩვენებას, თუ რა ოდენობას არ შეიძლება აღემატებოდეს ჭეშმარიტი შეცდომის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ვთქვათ, ბაფთით ხაზის განაზომია 158,27 მეტრი. ვიცით რა გამოყენებული ბაფთის ხარისხი, შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ჭეშმარიტი შეცდომის აბსოლუტური ოდენობა არ აღემატება 0,01 მეტრს.

მიახლოებით l რიცხვის ზღვრულ აბსოლუტურ შეცდომას ვუწოდებთ ისეთ დადებით $|\delta_b|$ რიცხვს, რომელსაც შეესაბამება უტოლობა

$$\left.\begin{array}{l}|\delta|\leqslant|\delta_b|\\ \text{ანუ}\quad |l-X|\leqslant|\delta_b|\end{array}\right\}. \tag{3.2.1.3}$$

სიმარტივისათვის (3) უტოლობას წერენ ასე:

$$|l-X|\leqslant\delta_b,$$

საიდანაც

$$l-\delta_b\leqslant X\leqslant l+\delta_b. \tag{3.2.1.4}$$

მაშასადამე, $|l-\delta_b|$ არის X სიდიდის მიახლოებითი ოდენობა ნაკლებობით, ხოლო $|l+\delta_b|$ — მეტობით. (4) უტოლობის მაგიერ წერენ

$$X=l\pm\delta_b. \tag{3.2.1.5}$$

მაგალითად, $X=\sqrt{10}$ სიდიდის მიახლოებით ოდენობად თუ მივიღებთ $l=3{,}16$, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $l-X=3{,}16-\sqrt{10}<\delta_b=0{,}01$, რადგანაც ცნობილია, რომ $3{,}16<\sqrt{10}<3{,}17$. მაშასადამე, (5) ტოლობის მიხედვით

დავწერთ $\sqrt{10}=3{,}16\pm0{,}01$. მაგრამ, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $3{,}16<\sqrt{10}<3{,}16228$, მაშინ უფრო ზუსტი შეფასება იქნება $\delta_{\text{ზ}}=0{,}00228$ და თუ ამ რიცხვს შევცვლით უფრო დიდი და ჩასაწერად მარტივი რიცხვით, დავწერთ $\delta_{\text{ზ}}=0{,}003$, ე. ი. $\sqrt{10}=3{,}16\pm0{,}003$. პრაქტიკაში მეტად გამოიყენება ზღვრული აბსოლუტური შეცდომა. მოკლედ მას უწოდებენ აბსოლუტურ შეცდომას და ზოგადად აღნიშნავენ δ სიმბოლოთი. განაზომთა ზღვრული შეცდომა თავისებურ განსაზღვრებას შეესაბამება, რაც შემდეგ თავებში იქნება განხილული.

გამოთვლების ხარისხის დასახასიათებლად, გარდა აბსოლუტური შეცდომებისა, იყენებენ ფარდობით შეცდომებს.

მიახლოებითი l რიცხვის ფარდობითი ზღვრული δ' შეცდომა არის ფარდობა მისი ზღვრული აბსოლუტური $|\delta_{\text{ზ}}|$ შეცდომისა და შესაბამისი ზუსტი რიცხვის აბსოლუტური $|X|$ ოდენობისა

$$\delta'=\frac{|\delta_{\text{ზ}}|}{|X|}. \qquad (3.2.1.6)$$

ვინაიდან რიცხვის ზუსტი ოდენობა, ჩვეულებრივ, უცნობია, ამიტომ იყენებენ მისი მიახლოებითი ოდენობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას,

$$\left.\begin{aligned}&\delta'=\frac{|\delta_{\text{ზ}}|}{|l|}\\ \text{ანუ ალიქვოტურად}^{1}\quad&\delta'=\frac{1}{|l|:|\delta_{\text{ზ}}|}\end{aligned}\right\}. \qquad (3.2.1.7)$$

მაშასადამე, ფაქტობრივად საზღვრავენ მიახლოებითი რიცხვის ზღვრული ფარდობითი შეცდომის ოდენობას, მაგრამ მოკლედ უწოდებენ მიახლოებითი რიცხვის ფარდობით შეცდომას. მას აგრეთვე მიახლოებითი რიცხვის სიზუსტეს უწოდებენ და მარტივად აღნიშნავენ $\delta'=\delta_{\text{ზ}}:l$ ფარდობით.

მიახლოებითი რიცხვის ფარდობით (ზღვრულ ფარდობით) შეცდომას ხშირად გამოსახავენ პროცენტებში, რისთვისაც მას ამრავლებენ ასზე და მიუწერენ პროცენტის გამომსახველ სიმბოლოს (%).

$$\delta'=\frac{\delta}{l}\cdot100\,\%. \qquad (3.2.1.8)$$

ვთქვათ, $\sqrt{10}\approx3{,}16$. წინა მაგალითიდან ცნობილია, რომ $\delta=0{,}00228$. მაშინ (7) დამოკიდებულებით ზღვრული ფარდობითი შეცდომა იქნება $\delta'=\frac{0{,}00228}{3{,}16}$. გაყოფითა და დამრგვალებით (აუცილებლად გადიდებით) მივიღებთ $\delta'=0{,}00080$ და ასზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ $\delta'=0{,}08\%$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $\sqrt{10}\approx3{,}16$ არის მიღებული 0,00080 (ან ალიქვოტურად 1 : 1250) ფარდობითი ანუ 0,08% შეცდომით.

[1] წილადი, რომლის მრიცხველია ერთი.

C. მიახლოებითი რიცხვების ათწილადებში გამოსახვა

სიდიდეების მიახლოებითი ოდენობების გამომსახველ როგორც მათემატიკური წარმოშობის (გამოთვლებით მიღებული), ისე განაზომების ოდენობების გამომსახველი რიცხვები უფრო მოხერხებულია დაიწეროს სასრული ათწილადი რიცხვების სახით. ამავე დროს საჭიროა მიახლოებითი რიცხვის ათწილადის სახით დაწერა საშუალებას გვაძლევდეს თავისუფლად ვხედავდეთ მის აბსოლუტურ შეცდომას. ამ მიზნით გამოთვლების ტექნიკაში შემოტანილია მიახლოებითი რიცხვის *სანდო ციფრების* ცნება.

მიახლოებითი l რიცხვის α ციფრი (ცხადია, მის მარცხნივ ყველა ციფრი) *არის სანდო, თუ მისი აბსოლუტური შეცდომა არ აღემატება* α *ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს.*

$\pi=3,1415926\ldots$ რიცხვის მიახლოებით ოდენობად მივიღოთ $l=3,142$, ვინაიდან ადგილი აქვს $\delta=l-\pi=0,0004074<0,0005=\frac{1}{2}\cdot 0,001$ უტოლობას და ყველა (3, 1, 4 და 2) ციფრი სანდოა.

მიახლოებითი l რიცხვის იმ ციფრებს, რომელთა შესახებ არ ვიცით სანდოა თუ არა, *საეჭვო ციფრები* ეწოდება.

საერთოდ მიღებულია მიახლოებითი რიცხვები დაიწეროს მხოლოდ სანდო ციფრებით.

სანდო ციფრებით გამოსახული მიახლოებითი რიცხვის ზღვრული აბსოლუტური შეცდომა ტოლია მისი ბოლო თანრიგის ერთეულის ნახევრის. ვთქვათ, სანდო ციფრებით გამოსახულია შემდეგი მიახლოებითი რიცხვები: $l_1=23,15$, $l_2=0,882$, $l_3=2,000308$. მაშინ, შესაბამისად, ზღვრული აბსოლუტური შეცდომები იქნება $\delta'_{\text{ზ}}=0,005$, $\delta''_{\text{ზ}}=0,0005$, $\delta'''_{\text{ზ}}=0,0000005$.

როდესაც *მიახლოებითი რიცხვის* უკანასკნელ ათწილად ნიშნებს წარმოადგენენ სანდო ნულები, საჭიროა ისინი მიეწერონ მიახლოებით რიცხვს. მაგალითად, როცა $l_1=4,6$ და მისი შეცდომა არ აღემატება 0,005-ს, საჭიროა დაიწეროს $l_1=4,60$ ან როცა $l_2=38$, რომლის შეცდომა არ აღემატება 0,0005-ს, საჭიროა დაიწეროს $l_2=38,000$. მაშასადამე, *მიახლოებითი რიცხვის ბოლოში ყველა ნული იგულისხმება სანდო ციფრად, ხოლო ზუსტი ათწილადი რიცხვებისათვის ნულების მიწერა ბოლოში საჭირო არ არის.*

საჭიროა აღინიშნოს, რომ მიახლოებითი რიცხვის უკანასკნელი ნიშნის შეცდომის დადგენა საიმედოდ შეიძლება განისაზღვროს მათემატიკური წარმოშობის რიცხვებში; განაზომთა რიცხვები, თუგინდ ისინი დაგეგმილი სიზუსტით იყვნენ მიღებული, მაინც ვერ გვარწმუნებენ არამც თუ უკანასკნელი ათწილადი ნიშნის სანდოობაში, არამედ ამ უკანასკნელის წინა ციფრის სანდოობაშიც კი. მაგალითად, თუ ბაფთით გაზომილი ხაზის სიგრძეა 430,47 მეტრი, რადგანაც ბაფთით ხაზის გაზომვის სიზუსტეა 1 : 2 000, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ განაზომში საეჭვო ციფრი იქნება არა მხოლოდ მეორე ათწილადი, არამედ პირველი ათწილადი ნიშანი. მაგრამ, იმის გამო, რომ ბაფთაზე ანათვლებს ვიღებთ $\pm$ 1 სანტიმეტრამდე შეცდომით, ამიტომ ხაზების გა-

ნაზომები იწერება მეორე ათწილადი ნიშნის ჩათვლით. ასეთივე მდგომარეობაა მაღალი სიზუსტით კუთხეების გაზომვების დროს. მაგალითად, I კლასის ტრიანგულაციაში რამდენიმე ილეთით გაზომილი კუთხეების სიზუსტე გამოისახება სეკუნდების რამდენიმე მეათედებში, ხოლო განაზომი კუთხეები იწერება სეკუნდების მეასედებამდე სიზუსტით.

ზემოთ აღნიშნულის გამო გეოდეზიაში მიღებულია, როგორც ხაზოვან, ისე კუთხურ სიდიდეთა ოდენობების დაწერა ზედმეტი ერთი ათწილადი ნიშნით და ეს ოდენობები გამოიყენება შემდგომი გამოთვლების დროს, როგორც გამოსავალი მონაცემები. აგრეთვე მათი საშუალებით მიღებული გამონათვლება იწერება კიდევ ერთი ზედმეტი ნიშნით. მაგალითად, თუ გამოსავალი (განაზომი) რიცხვებია ორი ათწილადი ნიშნით, მათი საშუალებით გამოთვლილი რიცხვები დაიწერება სამ-სამი ათწილადი ნიშნით.

იმისათვის, რომ ადვილად გავარჩიოთ მოცემული მიახლოებითი რიცხვი სანდო ციფრებისგანაა შედგენილი თუ საეჭვო ციფრებიც ახლავს, მიღებულია შემდეგი წესი, ვთქვათ, გვაქვს მიახლოებითი რიცხვი 56242 შეცდომით არაუმეტეს 50 ანუ 56242 ± 50. მაშასადამე, უკანასკნელი ციფრები 4 და 2 საეჭვოა. ამ შემთხვევაში მათ მაგიერ იწერება ნულები, ე. ი. იწერება $l_1 = 56200$. ამ შემთხვევაში ნულები ნიშნავს, რომ უკანასკნელი ორი ციფრი საეჭვოა. ამავე დროს შეიძლება მოხდეს, რომ $l_2 = 56200$ რიცხვის ყველა ციფრი სანდოა. ისმის საკითხი, როგორ გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან l_1 და l_2 ამისათვის წესად მიღებულია $l_1 = 562 \cdot 10^2$, რაც ნიშნავს, რომ აქ მხოლოდ სამი ციფრი, 5, 6, 2 არის სანდო. $l_2 = 56200$, აქ კი ხუთივე ციფრი სანდოა. მაშასადამე, l_1 რიცხვის შეცდომა შეიძლება იყოს 100-მდე, ხოლო l_2 რიცხვის შეცდომა— ერთამდე. მაგალითად, როგორც ცნობილია, დედამიწის მასა არის $598 \cdot 10^{19}$ ტ. აქ 5, 9, 8 ციფრებია სანდო, ხოლო დანარჩენი ციფრები ან უცნობია და ან გადაგდებულია დამრგვალების მიზნით. ამიტომ მიღებულია ასეთი რიცხვების დაწერა ათის ხარისხებზე გამრავლებით $598 \cdot 10^{19}$ ტონა, ანსიტყვიერი ს ა ხ ე ლ წ ო დ ე ბ ი თ 598 ათ მილიარდ მილიარდი ტონა.

D. ნიშნადი ციფრები

მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ნ ი შ ნ ა დ ი ც ი ფ რ ე ბ ი ე წ ო დ ე ბ ა მ ი ს ყ ვ ე ლ ა ს ა ნ დ ო ც ი ფ რ ს, გ ა რ დ ა ი მ ნ უ ლ ე ბ ი ს ა, რ ო მ ლ ე ბ ი ც მ ი წ ე რ ი ლ ი ა მ ი ს მ ა რ ც ხ ნ ი ვ ნ უ ლ ი ს ა გ ა ნ გ ა ნ ს ხ ვ ა ე ბ უ ლ პ ი რ ვ ე ლ ც ი ფ რ ა მ დ ე (მ ა ს ე წ ო დ ე ბ ა პ ი რ ვ ე ლ ი ნ ი შ ნ ა დ ი ც ი ფ რ ი). როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი რიცხვის მარჯვენა ნულებს აქვს ორგვარი მნიშვნელობა, რაც წინა მუხლში იყო განმარტებული.

მაგალითად, 1 კმ = 1000 მ. აქ ყველა ციფრი სანდოა, რადგანაც იგი გამოხატავს ნამდვილ პასუხს, ე. ი. რიცხვი, შედგება 4 ნიშნადი ციფრისაგან; დედამიწის მთელი ატმოსფერო იწონის 5 მილიონ მილიარდ, ანუ $5 \cdot 10^{15}$ ტონას. აქ მხოლოდ ერთი ნიშნადი ციფრია (5). ნულები კი დაწერილია ჩვენთვის უცნობი ციფრების ნაცვლად; ასევე დედამიწაზე ამჟამად ცხოვრობს 3,68 მილიარდი ანუ $3{,}68 \cdot 10^9$ ადამიანი; $l = 38000 + 100$, ჩანაწერში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $l = 380 \cdot 10^2$, ე. ი. სამი (3, 8, 0) ნიშნადი ციფრია; $l = 0{,}003608$

ჩანაწერით იგულისხმება, რომ ყველა ციფრი სანდოა, მაშასადამე, აქ ოთხი ციფრი (3, 6, 0, 8) ითვლება ნიშნად ციფრად, ხოლო მის წინ ნულები არ ითვლება ნიშნად ციფრებად.

ანალოგიურად:

0,00204	რიცხვი	3	ნიშნადია,	შეცდომა	არ	აღემატება	0,000005
6,000405	„	7					0,0000005
4,8020		5	„				0,00005
200,652	„	6	„	„	„	„	0,0005

მაშასადამე, როდესაც არაა ცნობილი მიახლოებითი რიცხვის შეცდომა, მაშინ ასეთი რიცხვის შეცდომად ვიღებთ მისი უკანასკნელი ნიშნადი ციფრის ერთეულის ნახევარს, რასაც ზემოთ მიახლოებითი რიცხვის ზღვრული შეცდომა ვუწოდეთ.

E მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალების შესახებ

როგორც ცნობილია, ირაციონალური და ტრანსცენდენტური რიცხვები და საერთოდ, ყოველი უსასრულო შერეული რიცხვები და წილადები შეიძლება დაიწეროს სიზუსტით ნებისმიერ ათობით ნიშნამდე. ეს კი მიიღწევა მოცემულ რიცხვებში საჭირო რაოდენობის სანდო ნიშნების (ციფრების) დატოვებით. ამ მოქმედებას ეწოდება მიახლოებითი რიცხვის დ ა მ რ გ ვ ა ლ ე ბ ა. მაშასადამე, თუ l მიახლოებითი რიცხვის დამრგვალებული ოდენობაა $l_{დ}$, დამრგვალების $δ_{დ}$ შეცდომა გამოითვლება დამოკიდებულებით

$$δ_{დ}=|l_{დ}-l|. \qquad (3.2.1.9)$$

$l_{დ}$ რიცხვი ისეთი უნდა შეირჩეს, რომ დამრგვალების $δ_{დ}$ შეცდომა გამოვიდეს მცირე. მაგალითად, რადიანის ორი ოდენობა $\rho=206264''$, 806 და $\rho=206264''$, 806247 დაწერილია შესაბამისად სეკუნდის მეათასედი და მემილიონედი ათწილადებით. ვთქვათ, საჭიროა რადიანის დამრგვალება სეკუნდის მეასედამდე. ამ შემთხვევაში დავწერთ $\rho=206264'',81$ და არა $\rho=$ $=206264'',80$, რადგანაც პირველ შემთხვევაში ჩვენ ვუშვებთ $δ_{დ_1}=206264'',81-$ $-206264'',806247=+0'',003753\ldots$ შეცდომას, რომლის აბსოლუტური ოდენობა ნაკლებია $δ_{დ_2}=206264'',80-206264'',806247=-0'',006247$ მეორე შემთხვევის დამრგვალების აბსოლუტურ შეცდომასთან. ან კიდევ, ვთქვათ, საჭიროა ერთის შეცდომით დამრგვალდეს $l=2836,78$. ცხადია, უფრო სწორი იქნება $l_{დ_1}=2837$, ვიდრე $l_{დ_2}=2836$, რადგანაც დამრგვალების შეცდომა მეორე შემთხვევაში მეტი იქნება.

საერთოდ, მიღებულია დამრგვალების შემდეგი წესი: თუ დასამრგვალებელი მიახლოებითი რიცხვის მოსაცილებელ ნაწილში პირველი ციფრი არის 0, 1, 2, 3, ან 4, მაშინ დასატოვებელი ნაწილის ბოლო ციფრი უცვლელი რჩება; თუ მოსაცილებელი ნაწილის პირველი ციფრი არის 5, 6, 7, 8 ან 9, დასატოვებელი ნაწილის ბოლო ციფრი დიდდება ერთით. მაგალითად, მოყვანილი განსაზღვრების შესაბამისად არის მეორე ათწილადებამდე დამრგვალებული შემდეგი მიახლოებითი რიცხვები: $36,54509 \approx 36,55$; $36,65328 \approx 36,65$; $36,6450 \approx 36,65$; $36,63500 \approx 36,64$. განხილული წესით მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალებით ხდება დამრგვალების შეცდომების ნაწილობრივი კომპენ-

სალიაა ამიტომ გამომთვლელები თუ მუდამ ამ წესს მტკიცედ დაიცავენ და ისარგებლებენ ერთნაირი ფორმულებით, უნდა ელოდნენ, რომ მათი გამონათვლები იქნება ერთნაირად სანდო. როდესაც ამბობენ, რომ მოცემულ რიცხვს აქვს n სანდო ნიშანი (ციფრი), ვგულისხმობთ, რომ დამრგვალება ზემოხსენებული წესით არის შესრულებული.

იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა მეორეჯერ დამრგვალება ერთხელ დამრგვალებული რიცხვისა, რომელსაც ბოლოში 5 აქვს, ვვარდებით გაუგებრობაში. ვთქვათ, საჭიროა 36,65 რიცხვის 0,1 დამრგვალება, რომელიც 36,64728 მიახლოებითი რიცხვის 0,01 დამრგვალებით არის მიღებული, რაც ჩვენთვის უცნობია. ამიტომ მიღებული წესის მიხედვით დავწერთ, რომ $36{,}65 \approx 36{,}7$. ეს სწორი არ იქნება, ჩვენი არცოდნის გამო არ გავუწიეთ ანგარიში იმას, რომ 36,65 არის 36,64728 რიცხვის დამრგვალებით მიღებული, ე. ი. მეორედ დამრგვალებისას ჩვენ დავუშვით შეცდომა $-0{,}05272$. რომ გვცოდნოდა პირველ დამრგვალებამდე მიახლოებითი რიცხვის ოდენობა, მას გავითვალისწინებდით და დავწერდით $36{,}65 \approx 36{,}6$ და დავუშვებდით შეცდომას $+0{,}04728$, რომლის აბსოლუტური ოდენობა ნაკლებია პირველ შემთხვევასთან შედარებით. მიღებულია შემდეგი წესი: თუ დამრგვალებული რიცხვის უკანასკნელი ციფრი 5 შედეგია დატოვების, ანუ არ არის ციფრი 4-ის ერთი ერთეულით გაზრდის შედეგი, იწერება ხუთი ზემოდან 1 წერტილით. მაგალითად, 36,65328-ის 0,01-მდე დამრგვალებით მივიღებთ $36{,}6\dot{5}$ რაც იმას ნიშნავს, რომ კიდევ დამრგვალების დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ მოსაცილებელი ნაწილი მეტია 0,1-ის ნახევარზე, ე. ი. დავწერთ $36{,}6\dot{5} \approx 36{,}7$. წინააღმდეგ შემთხვევაში 5-ს ზემოდან გაესმის შ ტ რ ი ხ ი, რაც იმას ნიშნავს, რომ 5 მიღებულია 4-ის ერთი ერთეულით გაზრდის შედეგად. მაგალითად, უნდა დაიწეროს $36{,}64728 \approx 36{,}6\bar{5}$. მაშასადამე, როცა გვაქვს მხოლოდ $36{,}6\bar{5}$ და საჭიროა მისი მეათედამდე დამრგვალება, დავწერთ $36{,}6\bar{5} \approx 36{,}6$.

უნდა აღინიშნოს, რომ ნებისმიერი ცხრილები (ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობის და სხვ.) შედგენილია დამრგვალების ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით, მაგრამ უკანასკნელი ციფრის „ხუთის" ზემოთ წერტილი და შტრიხი აქვს მხოლოდ ზოგ მათგანს.

F. მიახლოებითი რიცხვის ნიშნად ციფრებსა და მის სიზუსტეს შორის დამოკიდებულება

როგორც ვიცით, მოცემული მიახლოებითი რიცხვის ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი შ ე ც დ ო მ ა მ ი ს ი უ კ ა ნ ა ს კ ნ ე ლ ი ა თ წ ი ლ ა დ ი ც ი ფ რ ი ს ე რ თ ე უ ლ ი ს ნ ა ხ ე ვ ა რ ი ა. მაგალითად: 999; 200; 200,0; 200,00; 200,000 მიახლოებითი რიცხვების ზღვრული აბსოლუტური შეცდომები შესაბამისად იქნება:

$$0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ 0{,}0005.$$

ფარდობითი შეცდომა ანუ სიზუსტე კი იქნება:

$$\frac{0{,}5}{999},\ \frac{0{,}5}{200},\ \frac{0{,}05}{200{,}0},\ \frac{0{,}005}{200{,}00},\ \frac{0{,}0005}{200{,}000};$$

ანუ

$$\frac{0{,}5}{999},\ \frac{0{,}5}{200},\ \frac{0{,}5}{2000},\ \frac{0{,}5}{20000},\ \frac{0{,}5}{200000};$$

ალიქვოტურად:

$$\frac{1}{1998}, \quad \frac{1}{400}, \quad \frac{1}{4000}, \quad \frac{1}{40000}, \quad \frac{1}{400000}.$$

მაშასადამე, მთელი ან მძიმის გარეშე დაწერილი (ნაგულისხმევი) მიახლოებითი ათწილადი რიცხვი რაც უფრო დიდი იქნება, მით ნაკლებია მისი ზღვრული ფარდობითი აბსოლუტური შეცდომა ანუ მით მეტი იქნება მისი სიზუსტე. როგორც ვხედავთ, მიახლოებით რიცხვში ათწილადი ნიშნების რაოდენობა ახასიათებს მის აბსოლუტურ ზღვრულ შეცდომას, ხოლო ნიშნადი ციფრების რაოდენობა — მის ზღვრულ ფარდობით შეცდომას ანუ სიზუსტეს. მაშასადამე, მიახლოებითი რიცხვის სიზუსტე დამოკიდებულია ნიშნადი ციფრების რაოდენობასა და ოდენობაზე და არა მძიმის მდებარეობაზე. მაგალითად, ზემოთ განხილული მაგალითის ანალოგიურად 638; 63,8; 6,38; 0,638; 0,00638; 0,0000638 მიახლოებითი რიცხვების სიზუსტეები ანუ ზღვრული ფარდობითი აბსოლუტური შეცდომები ურთიერთტოლებია და უდრის 0,5:638 ანუ ალიქვოტურად 1:1276, მაშასადამე, მიახლოებითი რიცხვის ზღვრული ფარდობითი აბსოლუტური შეცდომა (სიზუსტე) უდრის 0,5 გაყოფილს იმავე რიცხვზე მძიმის გარეშე ანუ ალიქვოტურად—ერთს გაყოფილს გაორკეცებულ იმავე რიცხვზე მძიმის გარეშე. აქ მთავარია ნიშნადი რიცხვის პირველი ციფრი, დანარჩენები შეიძლება შევცვალოთ ნულებით. მაგალითად, როცა $l=5{,}38$, ნაცვლად $0{,}5:538$ დავწერთ $0{,}5:500=0{,}001\times 100\%=0{,}1\%$. ახლა ვთქვათ, $l=0{,}0923$, მაშინ $ბ_{ზ}'=\frac{0.5}{900}=0{,}000625\times 100\%=0{,}0625\%$. მაშასადამე, რაც უფრო მცირეა მოცემული მიახლოებითი რიცხვის ნიშნადი ციფრები, მით დიდი იქნება მისი ფარდობითი შეცდომა ანუ ნაკლები იქნება სიზუსტე.

ზემოთ მოყვანილი წესით მრავალი მაგალითის განხილვის შედეგად შედგენილია (1) ცხრილი.

ცხრილი 3.2.1.1

როცა მიახლოებითი რიცხვის სანდო ნიშნადი ციფრების რაოდენობაა	მაშინ ზღვრული ფარდობითი შეცდომის ანუ სიზუსტის ოდენობას უნდა მოველოდეთ		
	ალიქვოტურად	ათწილადებში	პროცენტებში
2	$\frac{1}{200}-\frac{1}{20}$	0,005—0,05	0,5—5
3	$\frac{1}{2000}-\frac{1}{200}$	0,0005—0,005	0,05—0,5
4	$\frac{1}{20000}-\frac{1}{2000}$	0,00005—0,0005	0,005—0,05

ტექნიკური და სხვა ანალოგიური გამოთვლების დროს მოთხოვნილი არ არის დიდი სიზუსტე და საშუალოდ კმაყოფილდებიან პროცენტის მეათედი სიზუსტით. (1) ცხრილიდან ჩანს, რომ ასეთ მოთხოვნას აკმაყოფილებს სამ ნიშნადი რიცხვი. ამიტომ ტექნიკაში მიღებულია ანგარიშის წარმოება სამ-სამ ნიშნადი რიცხვებით. ამით აიხსნება ის, რომ ტექნიკური ანგარიშების შესრულება წარმოებს ნორმალური ლოგარითმული სახაზავით, რომელიც თავისუფლად იძლევა სამ-სამ ნიშნად რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების შესრულებისა და სათანადო გამონათვლების მიღების საშუალებას. საჭიროა საგანგებოდ შევნიშნოთ, რომ ზემოთ თქმული ეხება მხოლოდ სანდო ნიშნად ციფრებიან რიცხვებს. მაგალითად, რიცხვები $0{,}360\cdot 10^5$; $0{,}0360 . 10^6$; $0{,}360 . 10^{-4}$ ერთნაირი სიზუსტისაა $(0{,}5:360=0{,}0014 . 100\% \doteq 0{.}14\%)$. შესაბამისი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს ო დ ე ნ ო ბ ე ბ ი კი იქნება $0{,}0005 . 10^5 = 50$; $0{,}00005 . 10^6 = 50$; $0{,}0005 . 10^{-4} = 0{,}00000005$.

შებრუნებული ამოცანა

საჭიროა დადგინდეს რამდენ ნიშნად-ციფრიანი რიცხვი შეესაბამება წინასწარ ცნობილ სიზუსტეს. მაგალითად, რამდენი ნიშნადციფრიანი რიცხვი შეესაბამება 0,7%-ს. იმ შემთხვევაში, როცა სხვა არავითარი ცნობა არ მოგვეპოვება, მაშინ (1) ცხრილის მიხედვით ვნახავთ, რომ ორი ნიშნადი ციფრისაგან შემდგარი რიცხვით უნდა დავკმაყოფილდეთ. თუ ცნობილია რიცხვის პირველი ნიშნადი ციფრი, საკითხს უფრო ზუსტად ამოვხსნით. მაგალითად, თუ რიცხვის პირველი ციფრია 9, მაშინ მტკიცედ ვიტყვით, რომ საკმარისია ორი ნიშნადი რიცხვი. ხოლო, თუ პირველი ციფრია 6 და უფრო ნაკლები ციფრი, მაშინ საჭირო იქნება სამ ნიშნადციფრიანი რიცხვი. მართლაც $0{,}5:600 = 1:1200 = 0{,}0008 . 100\% = 0{,}08\%$ აკმაყოფილებს (1) ცხრილის მონაცემებს. არსებობს ცნობილი ზღვრული ფარდობითი შეცდომის (ანუ სიზუსტის) შესაბამისად მიახლოებითი რიცხვის საჭირო რაოდენობის ნიშნადი ციფრების მოძებნის წესი. ვთქვათ, $\delta = \frac{1}{10^m}$, მაშინ თუ რიცხვის პირველი ციფრია 4-ზე ნაკლები, საჭირო იქნება $(m+1)$ ნიშნადი ციფრებისაგან შემდგარი რიცხვი და თუ 4-ზე მეტია, მაშინ საკმარისია m ნიშნადი რიცხვი.

§.2.2. სხვადასხვა მათემატიკურ მოქმედებებში მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალების შესახებ

გამოთვლის ტექნიკაში ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა მათემატიკურ სახეზე დაყვანილი ფორმულების ამოხსნა. ამისათვის კი საჭირო ხდება განაზომებითა და დაკვირვებებით მიღებულ რიცხვებზე სხვადასხვა მათემატიკური მოქმედებების (შეკრება. გამოკლება. გამრავლება, გაყოფა, ახარისხება, ფესვის ამოღება, რიცხვების და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების მონახვა და სხვ.) შესრულება. ცხადია, გამონათვლებიც მიახლოებითი რიცხვები იქნება. გამომთვლელის წინაშე ისმის პ ი რ და პ ი რ ი და შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი ამოცანის ამოხსნა. პ ი რ ვ ე ლ ი მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ს იმაში, რომ ფორმულებში შეტანილი მიახლოებითი რიცხვების ცნობილი შეცდომების (ან სიზუსტის) გამოყენებით შეფასდეს ანუ დადგინდეს გამონათვლების სიზუსტე და მ ე ო რ ე,

გამონათვლის ცნობილი შეცდომის (ან სიზუსტის) ანუ შეფასების შესაბამისად დადგინდეს თუ როგორი შეცდომებით (ან სიზუსტეებით) ანუ შეფასებებით უნდა ხასიათდებოდეს ფორმულებში შეტანილი მიახლოებითი რიცხვები.

ზემოხსენებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკა განხილული იქნება განაზომთა შეცდომების თეორიის წინამდებარე კურსში. ამ პარაგრაფში კი განიხილება ხსენებულ მათემატიკურ მოქმედებებში არსებული მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალების საკითხი.

A. ალგებრული ჯამი

ალგებრული ჯამის წევრების ათწილადი ნიშნების რაოდენობა უნდა დავამრგვალოთ ერთით მეტ ათწილად ნიშნამდე, ვიდრე იგი აქვს ნაკლები ათწილადი ნიშნების მქონე შესაკრებს; ჯამი კი უნდა დამრგვალდეს ხსენებული შესაკრების ათწილად ნიშნების რაოდენობამდე. ვთქვათ, საჭიროა შეჯამდეს სამი მიახლოებითი რიცხვი:

$$\begin{array}{rr} + & 24{,}367805102 \\ & 5{,}35481 \\ + & 12{,}381 \\ \hline & 42{,}103615102 \end{array}$$

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრების თანახმად დამრგვალებით დავწერთ:

$$\begin{array}{rr} + & 24{,}3678 \\ & 5{,}3548 \\ + & 12{,}3810 \\ \hline & 42{,}1036 \approx 42{,}104. \end{array}$$

იმ შემთხვევაში, როცა ალგებრული ჯამის წევრები მრავალია ან საკლებები და მაკლებები ურთიერთ ახლო ოდენობებში არიან, საჭიროა შესაკრებთა დამრგვალება მოხდეს ზემოთ მოყვანილ წესთან შედარებით ერთით მეტი ათწილადი ნიშნით. მაგალითად:

$$5{,}35678102-5{,}12345632+3{,}68972-3{,}43867+6{,}28-6{,}17+0{,}324-$$
$$-0{,}122+6{,}6845-4{,}2265-2{,}8345=0.41987470.$$

ალგებრული ჯამი უნდა გამოვითვალოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{rr} & 5{,}3568 \\ & 3{,}6897 \\ + & 6{,}2800 \\ & 0{,}3240 \\ & 6{,}6845 \\ \hline & 22{,}3350 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & -5{,}1235 \\ & -3{,}4387 \\ + & -6{,}1700 \\ & -0{,}1220 \\ & -4{,}2265 \\ & -2{,}8345 \\ \hline & -21{,}9152 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} - & 22{,}3350 \\ & 21{,}9152 \\ \hline & 0{,}4198 = 0{,}42. \end{array}$$

B. გამრავლება და გაყოფა

სხვადასხვა მიახლოებითი რიცხვების გამრავლება-გაყოფის დროს უფრო ზუსტი რიცხვები საჭიროა დავამრგვალოთ ერთი ნიშნადი ციფრით მეტ რიცხვამდე, ვიდრე ეს აქვს ყველაზე ნაკლებისიზუსტის წევრს, ხოლო ის წევრები, რომელთა პირველი ნიშნადი ციფრი 5-ზე ნაკლებია, უნდა დამრგვალდეს ზედმეტ ორ ნიშნად ციფრამდე, გამონათვალი კი დამრგვალდება ზემოხსენებულ ყველაზე ნაკლებისიზუსტის რიცხვზე ერთი ნიშნადი ციფრით მეტ რიცხვამდე, მაგალითად.

$$\frac{0,06\cdot 85,40\cdot 86,51\cdot 85,50\cdot 86,50}{9,451\cdot 9,450\cdot 13,551\cdot 16,550\cdot 16,450}=9,9.$$

გამოსახულების წევრები შეიძლება დავამრგვალოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{0,06\cdot 85\cdot 87\cdot 86\cdot 87}{9,5\cdot 9,5\cdot 13,6\cdot 16,6\cdot 16,5}=9,9.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ზუსტი რიცხვი მრავლდება მიახლოებით რიცხვზე, ნამრავლში რჩება ამ უკანასკნელის ტოლი ნიშნადი ციფრი.

C. ახარისხება და ფესვის ამოღება

მიახლოებითი რიცხვის კვადრატში, კუბში ახარისხების ან კვადრატული და კუბური ფესვის ამოღებისას შედეგი უნდა დამრგვალდეს მოცემული მიახლოებითი რიცხვის ნიშნადი ციფრების რაოდენობამდე. ვთქვათ, საჭიროა გამოვითვალოთ $(3,34^2)$. როგორც ცნობილია, აქ ფუძეში სამი სანდო ნიშნადი ციფრია. ზუსტი გამოთვლით შედეგი იქნება 11,1556. მიღებული განსაზღვრების თანახმად, ეს შედეგი უნდა დამრგვალდეს სამ ნიშნად ციფრამდე. დამრგვალებით მივიღებთ 11,2. მაშასადამე, $(3,34)^2 \approx 11,2$.

D. შერეული მათემატიკური მოქმედებები

მიახლოებით რიცხვებზე შერეული მათემატიკური მოქმედებების თანამიმდევრობით შესრულების დროს საჭიროა შუალედი გამოთვლები შესრულდეს წინა მუხლებში მიღებული წესების დაცვით, მხოლოდ ეს შუალედი გამონათვლები უნდა დამრგვალდეს ერთით მეტ ციფრამდე, ვიდრე ეს მიღებულია წინა მუხლებში. საბოლოო შედეგში კი ეს სამარქაფო ციფრი მოიხსნება. ვთქვათ, საჭიროა შესრულდეს მიახლოებითი რიცხვებით გამოთვლები ფორმულით:

$$L=ab+\frac{c}{a+b}-\frac{a^2}{\sqrt{c}}.$$

მოქმედებების თანამიმდევრობა იქნება ასეთი: 1) A მუხლის შესაბამისად შეიკრიბება a და b; 2) B მუხლის შესაბამისად გადამრავლდება a და b; 3) B მუხლის შესაბამისად c გაიყოფა $(a+b)$-ზე; 4) C მუხლის შესაბამისად გამოითვლება a^2; 5) C მუხლის შესაბამისად გამოითვლება $\sqrt{c}$; 6) B მუხლის შესაბამისად a^2 გაიყოფა $\sqrt{c}$-ზე; 7) A მუხლის შესაბამისად ალგებრულად შეიკრიბება (2), (3), (6) შედეგები. მოყვანილ გამოთვლებში (1), (2), (4), (5), (6) მოქმედებები არის შუალედური, ხოლო (7) მოქმედება საბოლოოა.

ე. მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალებასთან დაკავშირებით შებრუნებული ამოცანა

ვთქვათ, ცნობილია შედეგის საჭირო ნიშნადი (ან ათწილადი) ციფრების რაოდენობა და მოითხოვება მათემატიკურ გამოსახულებაში შეტანილი მიახლოებითი რიცხვების მის შესაბამისად დამრგვალება. დავუშვათ, რომ შედეგის საჭირო ნიშნადი (ან ათწილადი) ციფრების რაოდენობა არის n, მაშინ მათემატიკური გამოსახულების ყველა კომპონენტი და შუალედი გამონათვლები უნდა დამრგვალდეს $n+1$ ნიშნად (ან ათწილად) ციფრამდე, საბოლოო გამონათვალი კი უნდა დამრგვალდეს n ნიშნად (ან ათწილად) ციფრამდე.

საერთოდ, მათემატიკური წარმოშობის რიცხვების ზუსტ ოდენობებს ადგენენ ფორმულებში მათი შეტანის მომენტამდე და ამიტომ ფორმულებში მათ სთვლიან უშეცდომო (მუდმივ, ჭეშმარიტ) რიცხვებად.

3. 2. 3. ლოგარითმების შესახებ

ლოგარითმების თეორიიდან ცნობილია, რომ N რიცხვის ბრიგის (ათობითი), ანუ ჩვეულებრივი, ლოგარითმი ეწოდება A ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ ფუძე 10, რომ მივიღოთ მოცემული N რიცხვი. მაშასადამე, $10^A=N$ ტოლობაში A რიცხვი არის N რიცხვის ბრიგის ლოგარითმი და იწერება ასე:

$$A=\lg N. \tag{3.2.3.1}$$

დ. ლოგარითმების თვისებები

$$\left.\begin{aligned}
&\lg(N_1\cdot N_2)=\lg N_1+\lg N_2\\
&\lg\frac{N_1}{N_2}=\lg N_1-\lg N_2\\
&\lg N^n=n\lg N\\
&\lg\sqrt[n]{N}=\frac{\lg N}{n}
\end{aligned}\right\}. \tag{3.2.3.2}$$

b. თუ დადებითი N რიცხვი წარმოადგენს ბრიგის ლოგარითმის ფუძის ხარისხს დადებითი ან უარყოფითი მთელი n მაჩვენებლით, ე. ი. თუ ადგილი აქვს ტოლობას $N=10^{\pm n}$, მაშინ N რიცხვის ლოგარითმი, შესაბამისად, ტოლია დადებითი ან უარყოფითი მთელი n რიცხვისა. მაგალითად:

$$\left.\begin{array}{lll}
\lg 1\ 000\ 000 = 6, & \text{რადგანაც} & 10^6 = 1\ 000\ 000 \\
\lg 1\ 000\ 00 = 5 & & 10^5 = 100\ 000 \\
\lg 10\ 000 = 4 & & 10^4 = 10\ 000 \\
\lg 1\ 000 = 3 & & 10^3 = 1\ 000 \\
\lg 100 = 2 & & 10^2 = 100 \\
\lg 10 = 1 & & 10^1 = 10 \\
\lg 1 = 0 & & 10^0 = 1 \\
\lg 0{,}1 = -1 & & 10^{-1} = 0{,}1 \\
\lg 0{,}01 = -2 & & 10^{-2} = 0{,}01 \\
\lg 0{,}001 = -3 & & 10^{-3} = 0{,}001 \\
\lg 0{,}0001 = -4 & & 10^{-4} = 0{,}0001 \\
\lg 0{,}00001 = -5 & & 10^{-5} = 0{,}00001 \\
\lg 0{,}000001 = -6 & & 10^{-6} = 0{,}000001
\end{array}\right\}; \qquad (3.2.3.3)$$

c. ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი სხვა რიცხვის ლოგარითმი არის ირაციონალური რიცხვი, რომელსაც გამოსახავენ ნებისმიერი სიზუსტის მიახლოებითი ათწილადის სახით. ამ უკანასკნელის მთელ ნაწილს (ნულიც რომ იყოს) ეწოდება ლოგარითმის მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი, წილად ნაწილს კი — ლოგარითმის მ ა ნ ტ ი ს ა. მართლაც, ვთქვათ, მოცემული $N>1$ არის მთელი ან შერეული რიცხვი, რომლის მთელი ნაწილი შედგება n ციფრისაგან. ცხადია, გვექნება

$$10^{n-1} < N < 10^n$$

უტოლობა, რომლის გალოგარითმებით მივიღებთ

$$n-1 < \lg N < n$$

უტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ მართებული იქნება

$$\lg N = (n-1) + 0, \ldots \qquad (3.2.3.4)$$

ტოლობა, სადაც $(n-1)$ მახასიათებელი იმდენ დადებით ერთეულს შეიცავს, რამდენი ციფრისაგანაც შედგება N რიცხვის მთელი ნაწილი ერთის გამოკლებით, ხოლო მეორე შესაკრები არის მანტისა.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია $N<1$, რომლის ნულების რაოდენობა პირველ ნიშნად ციფრამდე ნული მთელის ჩათვლით არის n. მაშინ გვექნება

$$10^{-n} < N < 10^{-(n-1)}$$

უტოლობა, რომლის გალოგარითმებით მივიღებთ

$$-n < \lg N < -(n-1)$$

უტოლობას. ვინაიდან $-n$ და $-(n-1)$ მთელი რიცხვებიდან ნაკლები არის $-n$, ამიტომ მართებული იქნება

$$\lg N = -n + 0,\ldots \qquad (3.2.3.5)$$

ტოლობა, სადაც $-n$ მახასიათებელი იმდენ უარყოფით ერთეულს შეიცავს, რამდენი ნულიცაა მოცემულ N რიცხვში მის პირველ ნიშნად ციფრამდე (ნული მთელის ჩათვლით), ხოლო მეორე შესაკრები არის დადებითი მანტისა. მაშასადამე, მოცემული რიცხვის ლოგარითმის მახასიათებელი შეიძლება იყოს ნული, მთელი დადებითი ან მთელი უარყოფითი რიცხვი, მანტისა კი ყოველთვის ითვლება დადებითად. ამიტომ პირობით მიღებულია, რომ უარყოფით მთელ მახასიათებელს თავზე დაესმის მინუს (—) ნიშანი. მაგალითად, $\lg 0{,}0035 = \bar{3}.544068$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მხოლოდ მახასიათებელია უარყოფითი მანტისა კი — დადებითი (ეს არის უარყოფითი ლოგარითმის „არასრული" — ხელოვნური ჩაწერა). ცხრილებში მოხერხებულად ჩაწერისათვის, მაგალითად, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმებს, რომელთა მახასიათებლები უარყოფითია, ხელოვნურად ვზრდით $+10$-ით. მაგალითად, ნაცვლად $\lg \sin 25°08'30'' = \bar{1}.628244$, წერენ 9.628244. ხშირად საჭირო ხდება „არასრული" ფორმის სრული ფორმით ჩაწერა და პირიქით. პირველ შემთხვევაში მახასიათებელს ემატება $+1$, ხოლო მანტისას აკლდება იგივე ოდენობა, მაგალითად, $\bar{3}.544068 = \overset{+1}{\bar{3}}.\overset{-1}{544068} \approx -2.455932$. მეორე შემთხვევაში კი მახასიათებელს ემატება -1 და მანტისას $+1$: მაგალითად, $-3.2780 = \overset{-1}{-3}.\overset{+1}{2780} = \bar{4}.7220$.

d. N, $10N$, $100N$, $1000N$, $0{,}1N$, $0{,}01N$ და ა. შ. რიცხვის ლოგარითმებს ექნებათ სხვადასხვა ოდენობის მახასიათებლები, ხოლო მანტისები ერთი და იმავე ოდენობის. მაშასადამე, რაიმე რიცხვის ლოგარითმის მანტისის ოდენობა არ არის დამოკიდებული ამ რიცხვში მძიმის მდებარეობაზე. მაგალითად:

$$\left.\begin{aligned} \lg 10N &= \lg 10 + \lg N = 1 + \lg N \\ \lg 100N &= \lg 100 + \lg N = 2 + \lg N \\ \lg 0{,}001N &= \lg 0{,}001 + \lg N = -3 + \lg N \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.3.6)$$

და ა. შ. ამ თვისების გამო ლოგარითმების ცხრილები წარმოადგენენ ნატურალური რიცხვების ლოგარითმების მანტისების ცხრილებს, ხოლო, როგორც ვნახეთ, მახასიათებლები ადვილად განისაზღვრება უშუალოდ მოცემული მთელი და შერეული რიცხვების მიხედვით. მაგალითად,

$$\lg 36 = 1.556303, \ \lg 360 = 2.556303, \ \lg 3600 = 3.556303,$$

$$\lg 36000 = 4.556303, \ \lg 0{,}0036 = \bar{3}.556303.$$

e. როგორც ცნობილია, გარდა ათობითი ლოგარითმებისა, დიდად გა-

მოიყენება ნატურალური ლოგარითმები, რომელთაც ფუძედ აქვთ e ნეპერის (ზოგი ეილერის რიცხვს უწოდებს) რიცხვი;

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71828182459045\ldots;$$

ამ რიცხვის ათობით ლოგარითმს უწოდებენ ათობითი ლოგარითმების მოდულს და აღნიშნავენ M_{10} ან μ-თი;

$$\left.\begin{aligned}&\lg e=M_{10}=0{,}434294481903251\cdots\\ \text{ანუ}\quad &10^{M_{10}}=e\end{aligned}\right\}.\qquad(3.2.3.7)$$

თუ ცნობილია რაიმე რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი, შეგვიძლია გამოვათვალოთ მისი ათობითი ლოგარითმი. ამისათვის ნატურალური ლოგარითმი უნდა გავამრავლოთ ათობითი ლოგარითმის მოდულზე

$$\lg B=M_{10}\ln B\ \text{ან პირიქით,}\ \ln B=\frac{\lg B}{M_{10}}.$$

მართლაც, დავუშვათ, რომ

$$\lg B=x\ \text{და}\ \ln B=y,$$

ე. ი.

$$10^x=B\ \text{და}\ e^y=B.$$

მაშასადამე,

$$10^x=e^y.$$

რადგანაც

$$e=10^{M_{10}},$$

მივიღებთ

$$10^x=(10^{M_{10}})^y,$$

ე. ი.

$$x=M_{10}\cdot y,$$

სადაც x და y მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ

$$\lg B=M_{10}\ln B^{1}.\qquad(3.2.3.8)$$

3. 2. 4. ლოგარითმების ცხრილების შესახებ

ლოგარითმების ცხრილების მიმართ ორგვარი საკითხია გადასაჭრელი, სახელდობრ:

а) როგორ შევარჩიოთ სათანადო ცხრილები, ანუ რამდენი ათწილადი ნიშნისაგან უნდა შედგებოდეს მანტისა მოცემული ფუნქციის (რიცხვის) ლოგარითმის მოძებნის დროს ან, პირიქით, ფუნქციის (რიცხვის) ლოგარითმის საშუალებით მოძებნილი რიცხვის რამდენი ნიშნადი ციფრი იქნება ს ა ნ დ ო.

ცდებით დადგენილია, რომ ერთი და იმავე ფუნქციის გამოთვლისათვის გამოყენებული სხვადასხვა რაოდენობის ნიშნაციფრებიანი ლოგარითმები მო-

---

[1] უარყოფითი რიცხვის ლოგარითმის (ნეგატივის) შესახებ იხილეთ II ტომის 233 გვერდი.

ითხოვს შესაბამისად მნიშვნელოვნად განსხვავებულ დროს. მაგალითად, ერთი და იმავე ალგებრული გამოსახულების შვიდ, ექვს და ხუთნიშნა ლოგარითმებით გამოთვლებისათვის საჭირო დრო პროპორციულია 3, 2, 1-ისა.

ალგებრული გამოსახულების ელემენტთა ოდენობების გამონათვალი, თუგინდ მაღალი სიზუსტისა იყოს ეს ელემენტები, მაინც ვერ მიიღება შესაფერისი სიზუსტით, როცა ვიხმართ ისეთ ცხრილებს, რომელთა მანტისები იქნება ნაკლები რაოდენობის ნიშნა ციფრებით, ვიდრე ეს საჭიროა და, პირიქით, დაბალი სიზუსტის მქონე განაზომთა საშუალებით ფუნქციის გამონათვალის სიზუსტეს ვერ გავზრდით, თუგინდ გამოვიყენოთ საჭიროზე მეტნიშნა ლოგარითმების ცხრილი.

ამის გამო ყოველი გამომთვლელის წინაშე დგას ამოცანა, აირჩიოს ცხრილები აუცილებელი და საკმარისი (მხოლოდ მინიმალური) ნიშნა ციფრებით.[1]

b) ლოგარითმის სათანადო ცხრილების გამოყენებით, თუ როგორ განვსაზღვროთ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომების საშუალებით განაზომთა ლოგარითმების საშუალო კვადრატული შეცდომები და, პირიქით, გამონათვალის (ფუნქციის) ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომის საშუალებით როგორ გამოვითვალოთ ამ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა. ეს საკითხი განხილულია (3. 4. 1)-ში.

A. ლოგარითმების სათანადო ცხრილების შერჩევა

***a*. აუცილებელი და საკმარისი რაოდენობის ნიშნა ლოგარითმების ცხრილების შერჩევა მოცემული რიცხვებისათვის.**

ათის ჯერადი რიცხვებისაგან განსხვავებული რიცხვების ათობითი ლოგარითმი უსასრულო ათწილადი რიცხვია. ამიტომ რაგინდ ზუსტი იყოს რიცხვი, მაინც მისი ლოგარითმების ცხრილური მნიშვნელობანი შეიცავენ შეცდომებს. ჩვენ უმრავლეს შემთხვევაში გვიხდება მიახლოებით რიცხვებზე (განაზომებზე) მოქმედება და ამიტომ კიდევ უფრო საფუძვლიანია მტკიცება იმისა, რომ მათი ლოგარითმები შეცდომებს შეიცავს. ამ შეცდომების ოდენობები შეიძლება აღწევდეს გამოყენებული ცხრილის მანტისის უკანასკნელი ციფრის ნახევარს.

დავადგინოთ დამოკიდებულება მოცემული რიცხვის ლოგარითმის შეცდომასა და თვით რიცხვის შეცდომას შორის.
(3. 2. 3. 8) ფორმულიდან

$$y = \lg x = M_{10} \ln x, \qquad (3.2.4.1)$$

სადაც

$$M_{10} = \lg e = 0{,}4342944819 \ldots$$

[1] ნატურალური და ათობითი ლოგარითმების გამომგონებლებმა ნეპერმა და ბრიგმა თავიანთი ცხრილები გამოსცეს მრავალი ათწილადი ნიშნებით. ნეპერმა თავისი ცხრილები გამოუშვა 1614 წელს 17 ათწილადი ნიშნით და ბრიგმა 1624 წელს 14 ათწილადი ნიშნით. ვეგას ცნობილი ცხრილები გამოიცა 1794 წელს 10 ათწილადი ნიშნით და მერე 7 ათწილადი ნიშნით. თითქმის ორი საუკუნის მანძილზე საშუალო სკოლებში იხმარებოდა შვიდნიშნა ცხრილები, მხოლოდ XIX საუკუნის ბოლოს შემოიღეს ხუთნიშნა ცხრილები, ამჟამად კი ჩვენს სკოლებში იხმარება ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილები, რომლებიც მრავალ შემთხვევაში იძლევიან საკმარის სიზუსტეს.

და

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}7182818285\ldots$$

მოყვანილი (1) ტოლობის x-ით გადიფერენციალებით და შემდეგ შეცდომებზე გადასვლით გვექნება

$$\Delta y=\Delta\lg x=M_{10}\frac{\Delta x}{x}, \qquad (3.2.4.2)$$

ე. ი. მოცემული რიცხვის ათობითი ლოგარითმის აბსოლუტური შეცდომა უდრის ამავე რიცხვის ფარდობითი შეცდომისა და მოდულის ნამრავლს. მიახლოებით კი მოცემული რიცხვის ათობითი ლოგარითმის აბსოლუტური შეცდომა უდრის ამავე რიცხვის ფარდობითი შეცდომის ნახევარს

$$\Delta\lg x\approx 0{,}5\,\frac{\Delta x}{x}\ldots \qquad (3.2.4.3)$$

ვთქვათ გვაქვს რიცხვები, $x_1=522$; $x_2=522{,}0$, $x_3=0{,}52200$ და საჭიროა დავადგინოთ თუ რამდენ ნიშნა ციფრებისაგან უნდა შედგებოდეს გამოყენებული ლოგარითმების ცხრილების მანტისები. ამისათვის გამოვიყენოთ (2) ფორმულა

$$\Delta\lg x_1=0{,}43\,\frac{0{,}5}{522}\approx\frac{0{,}2}{522}\approx 0{,}0004,$$

$$\Delta\lg x_2=0{,}43\,\frac{0{,}5}{5220}\approx\frac{0{,}2}{5220}\approx 0{,}00004,$$

$$\Delta\lg x_3=0{,}43\,\frac{0{,}5}{52200}\approx\frac{0{,}2}{52200}\approx 0{,}000004.$$

გამოდის, რომ ლოგარითმების რომელი ცხრილითაც არ უნდა ვაწარმოოთ გამოთვლები (ე. ი. მანტისები რამდენი ციფრისაგანაც არ უნდა შედგებოდეს), მიუხედავად ამისა, n-სანდო ნიშნადი ციფრებისაგან შემდგარი მიახლოებითი რიცხვის ლოგარითმს, რომელიც ამ ცხრილით არის მონახული, ექნება სანდო (უშეცდომო) მანტისის n ათწილადი ციფრი. არასანდო იქნება მანტისის $(n+1)$ ათწილადი ციფრი. მაგალითად, სამი სანდო ნიშნადი ციფრისაგან შემდგარი რიცხვის ლოგარითმს ექნება შეცდომა მანტისის მეოთხე ათწილად ციფრში, ოთხნიშნა რიცხვს — მეხუთე ათწილად ციფრში, ხუთნიშნა რიცხვს — მეექვსე ათწილად ციფრში და ასე შემდეგ. აღნიშნულის გამო მივიღებთ შემდეგ წესს:

როდესაც გამოთვლებს ვაწარმოებთ ლოგარითმების ცხრილების საშუალებით, საჭიროა შერჩეულ იქნეს იმდენნიშნა ცხრილი, რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრისაგანაც შედგება მოცემული რიცხვები.

ჩვეულებრივ, როდესაც ვაწარმოებთ არითმეტიკულ გამოთვლებს რამდენიმე მიახლოებითი რიცხვისას, ვირჩევთ ლოგარითმების ცხრილებს ერთით მეტი ნიშნით (თადარიგისათვის), ე. ი. ოთხნიშნა რიცხვის ლოგარითმს ვეძებთ

ხუთნიშნა ლოგარითმების ცხრილებში, ხუთნიშნას — ექვსნიშნა ლოგარითმების ცხრილებში და ა. შ.

ზუსტი გამოთვლების დროს უმჯობესია გვქონდეს რამდენიმე სხვადასხვა რაოდენობის ნიშნა ლოგარითმების ცხრილები და გამოთვლებში არსებული რიცხვების ნიშნადი ციფრების რაოდენობის შესაბამისად ვიხმაროთ საჭირო ნიშნა ათობითციფრებიანი ლოგარითმების ცხრილები; ამით გამოთვლების დრო შემცირდება და სიზუსტეზე კი უარყოფით გავლენას არ მოახდენს.

ზემოთ თქმული კიდევ დასტურდება (2) ფორმულის სხვაგვარად გამოყენებით: (2) ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ ლოგარითმების ცხრილების საშუალებით გამოთვლილ ფორმულებში შემავალი რიცხვების ფარდობითი შეცდომები (სიზუსტე) არ არის დამოკიდებული თვით რიცხვების ოდენობებზე. მათი ოდენობები დამოკიდებულია გამოყენებული ლოგარითმების ცხრილების მანტისების ციფრების რაოდენობაზე. მართლაც, თუ მივიღებთ $\Delta \lg x$ მაქსიმუმს ანუ აღებული ლოგარითმების ცხრილის მანტისის უკანასკნელი ციფრის 0,5-ს, რომელიც მათემატიკურად გამოისახება:

$$\Delta \lg x = 0{,}5 \cdot 10^{-n},$$

სადაც n — მანტისის ციფრთა რაოდენობაა,
გვექნება

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta \lg x}{M_{10}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-n}}{0{,}43} = \frac{1{,}2}{10^n}. \tag{3.2.4.4}$$

$\frac{\Delta x}{x}$ — რიცხვის ფარდობითი შეცდომაა, იგი ცვლადი სიდიდეა და მისი ტოლი $\frac{1{,}2}{10^n}$ — ფარდობითი შეცდომა, გამოთვლილი ლოგარითმების ცხრილით, მოცემული ცხრილისათვის მუდმივი სიდიდეა.

მაგალითად, 5; 50; 500; 0,5000 რიცხვების ფარდობითი შეცდომის მაქსიმალური მნიშვნელობანი შესაბამისად იქნება

$$\frac{0{,}5}{5} = \frac{1}{10}, \quad \frac{0{,}5}{50} = \frac{1}{100}, \quad \frac{0{,}5}{500} = \frac{1}{1000}, \quad \frac{0{,}5}{5000} = \frac{1}{10000}.$$

მაშინ, როდესაც ყველა ამ რიცხვების ფარდობითი შეცდომები, როცა ეს რიცხვები მონახული იქნება ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით, მუდმივი სიდიდეა და უდრის $\frac{1{,}2}{10^4} \approx \frac{1}{10000}$, ხუთნიშნა ლოგარითმების ცხრილების გამოყენებისას ფარდობითი შეცდომა იქნება $\frac{1{,}2}{10^5} \approx \frac{1}{100000}$, ექვსნიშნას შემთხვევაში $\frac{1{,}2}{10^6} \approx \frac{1}{1000000}$, შვიდნიშნას შემთხვევაში $\frac{1{,}2}{10^7} \approx \frac{1}{10000000}$.

განხილული მაგალითი ადასტურებს იმ გარემოებას, რომ სიზუსტის შესაბამისობა მაშინ არის დაცული, როცა ვხმარობთ n ნიშნა ლოგარითმის ცხრილებს n-ნიშნადი ციფრებისაგან შემდგარი რიცხვებისათვის. მაგალითად, ოთხნიშნა რიცხვის (0,5000) უცხრილოდ და ოთხნიშნა ცხრილით გამოთვლილი ფარდობითი შეცდომა ორივე შემთხვევაში უდრის 1 10 000.

(2) ფორმულის საშუალებით მტკიცდება, რომ ანტილოგარითმში, ანუ რიცხვში, რომელიც მოძებნილია ამა თუ იმ n ნიშნა ლოგარითმების ცხრილით, შეიძლება პასუხი ვაგოთ მხოლოდ $(n-1)$ ნიშნადი ციფრების სისწორეზე. ამისათვის ავიღოთ n ნიშნადი ციფრებისაგან შედგენილი x რიცხვი და ვთქვათ, რომ ის არის განსაზღვრული n ნიშნა ლოგარითმების ცხრილით და საჭიროა გავიგოთ თუ რა ფარგლებში შეიძლება იცვლებოდეს x რიცხვის Δx აბსოლუტური შეცდომა.

ცნობილი წესის მიხედვით Δx-ის გამოსათვლელად (4) ფორმულის გამოყენებით x-ის ფარდობითი შეცდომა, რომელიც გამოთვლილია ლოგარითმების ცხრილით $\left(\frac{1,2}{10^n}\right)$, უნდა გადავამრავლოთ x-ზე, მივიღებთ

$$\Delta x = \frac{1,2}{10^n}\, x. \tag{3.2.4.5}$$

ცხადია, n-ნიშნადი რიცხვი მეტია 10^{n-1}-ზე და ნაკლებია 10^n-ზე, მაგალითად,

$$10^2 < 999 < 10^3, \tag{3.2.4.6}$$

ე. ი. თუ x იქნება სამნიშნა რიცხვი, მაშინ

$$\Delta x_{min} = \frac{1,2 \cdot x^2_{min}}{10^3} = \frac{1,2 \cdot 10^2}{10^3} = 0,12,$$

ანუ

$$0,1 < \Delta x_{min}$$

და

$$\Delta x_{max} = \frac{1,2 \cdot x_{max}}{10^3} = \frac{1,2 \cdot 999}{10^3} = 1,1988,$$

ანუ

$$\Delta x_{max} < 1,2.$$

როგორც ვხედავთ, ამა თუ იმ ლოგარითმების ცხრილებით მოძებნილი n-ნიშნადი რიცხვის აბსოლუტური შეცდომა (Δx) მოქცეულია ზღვრებში

$$0,1 < \Delta x < 1,2. \tag{3.2.3.7}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ n ნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით ანუ ანტილოგარითმებით მოძებნილ რიცხვებში შეცდომა შეიძლება იცვლებოდეს n) ციფრის 0,1-დან 1,2-მდე. მაშასადამე, მიღებული რიცხვი სანდო იქნება $(n-1)$ ციფრის ფარგლებში. ამიტომ არ შეიძლება განისაზღვროს მეხუთე ნიშნა ციფრი ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილით, მეექვსე—ხუთნიშნათი, მეშვიდე—ექვსნიშნათი, მერვე— შვიდნიშნათი და ა. შ.

მიწისქვეშა პოლიგონების გვერდების სიგრძეები, ჩვეულებრივ, 100 მეტრს არ სცილდება და, თუ მოთხოვნილია გამოთვლის სიზუსტე 1:1000 000, მაშინ საკმარისია ვისარგებლოთ ხუთნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით, რადგანაც 99 მეტრი = 99 000 მმ—ხუთნიშნა რიცხვია; ან კიდევ, თუ 1-ლი კლასის ტრიანგულაციის ქსელის გამოთვლას ვაწარმოებთ, რომლის სამკუთხედების გვერდე-

ზის სიგრძე 20—30 კილომეტრია და საჭიროა ამ გვერდების და წვეროების კოორდინატების განსაზღვრა 1 მმ-მდე შეცდომით, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ რვანიშნა ცხრილებით, რადგანაც 30 კმ რვანიშნა რიცხვია მილიმეტრებში. როგორც ითქვა, ყოველთვის უმჯობესია გამოთვლების დროს ვიხმაროთ საჭიროზე ერთით მეტნიშნა ლოგარითმების ცხრილები.

ს. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების ცხრილების შერჩევა

გეოდეზიური გამოთვლების დროს ხშირად გვიხდება ლოგარითმული ცხრილების საშუალებით ამა თუ იმ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების მონახვა, და პირიქით, მოცემული ლოგარითმების საშუალებით კუთხის მოძებნა.

ვინაიდან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების არგუმენტები უშუალოდ გაზომილი სიდიდეებია, ამიტომ მათი შესაბამისი ცხრილები მიახლოებითია. ასეთი სიდიდეების საშუალებით გამოთვლების წარმოებისას უნდა შეირჩეს ცხრილები აუცილებელი და საკმარისი (არაზედმეტი) ათობითი ნიშნებით.

ცნობილია, რომ

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \lg\sin\alpha = M_{10}\cdot\ln\cdot\sin\alpha,\\
y_2 &= \lg\cos\alpha = M_{10}\cdot\ln\cdot\cos\alpha,\\
y_3 &= \lg\operatorname{tg}\alpha = M_{10}\cdot\ln\cdot\operatorname{tg}\alpha,\\
y_4 &= \lg\operatorname{ctg}\alpha = M_{10}\cdot\ln\cdot\operatorname{ctg}\alpha.
\end{aligned}
$$

ამ ფუნქციების α-თი დიფერენცირებით და მიღებული დიფერენციალების ნაზრდებით ანუ შეცდომებით შეცვლით მივიღებთ

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta\lg\sin\alpha &= M_{10}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\
\Delta\lg\cos\alpha &= -M_{10}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\
\Delta\lg\operatorname{tg}\alpha &= M_{10}\cdot\frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\
\Delta\lg\operatorname{ctg}\alpha &= -M_{10}\cdot\frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}
\end{aligned}
\right\}. \qquad (3.2.4.8)
$$

მიღებული ფორმულებიდან ჩანს, რომ უფრო ზუსტია: კუთხის სინუსის ლოგარითმი მაშინ, როცა კუთხე ახლოა 90°-სა ან 270°-თან; კუთხის კოსინუსის ლოგარითმი, — როცა კუთხე ახლოა 0° ან 180°-თან, და კუთხის ტანგენსის და კოტანგენსის ლოგარითმი, როცა კუთხე 45°-ის ახლოა. ყველა შემთხვევაში გაზომილი კუთხის შეცდომა უცვლელია და უდრის ($\Delta\alpha''$), ე. ი. როცა საჭიროა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისადმი ლოგარითმების გამოყენება, უნდა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ მცირე კუთხის სინუსების ლოგარითმებში შედარებით მეტი ოდენობის შეცდომებს ექნება ადგილი. ამგვარადვე ვუდგებით დანარჩენი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმებსაც. (8) ფორმულებით შეგვიძლია ორი საკითხის გადაწყვეტა: ცნობილია კუთხის ($\Delta\alpha$) შეც-

დომა, უნდა შეირჩეს საჭირო ცხრილები მოცემული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების მოსაძებნად და პირიქით, ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ლოგარითმი ანუ ცნობილია თუ რამდენნიშნა ლოგარითმული ცხრილია გამოყენებული და საჭიროა განისაზღვროს ლოგარითმების საშუალებით კუთხის განსაზღვრის შეცდომა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 4. 1. ვთქვათ, $\Delta\alpha = \pm 10''$, $\alpha = 45°$. დავადგინოთ, თუ რამდენნიშნა ლოგარითმული ცხრილის გამოყენებაა საჭირო. (8) დამოკიდებულებების გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta \lg \sin\alpha = 0{,}43 \cdot 1 \cdot \frac{10''}{206000''} \approx 0{,}00002,$$

$$\Delta \lg \cos\alpha = -0{,}43 \cdot 1 \cdot \frac{10''}{206000''} \approx -0{,}00002,$$

$$\Delta \lg \operatorname{tg}\alpha = 0{,}43 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{10''}{206000''} \approx 0{,}00004,$$

$$\Delta \lg \operatorname{ctg}\alpha = -0{,}43 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{10''}{206000''} \approx -0{,}00004.$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული მონაცემებისათვის საკმარისია ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილი, მაგრამ წინა თავში მიღებული წესის მიხედვით უმჯობესია ხუთნიშნა ცხრილის გამოყენება. ასე მოვიქცევით შემდეგშიაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 4. 2. გამოვითვალოთ თუ რა სიზუსტით იქნება განსაზღვრული კუთხე ხუთნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით, როცა ცნობილია, რომ $\lg\sin\alpha = 9.70202$.

იმავე ცხრილის იმავე სტრიქონიდან $\lg\operatorname{ctg}\alpha = 0.23449$ და ანტილოგარითმით $\operatorname{ctg}\alpha \approx 1{,}7$; აგრეთვე ცნობილია, რომ მაქსიმალური ოდენობა სინუსის ლოგარითმის შეცდომისა $\Delta\lg\sin\alpha = \pm 0.000005$. (8) დამოკიდებულებების პირველი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta\alpha'' = \frac{\Delta \lg \sin\alpha \cdot \rho''}{M_{10} \cdot \operatorname{ctg}\alpha} \approx \frac{0{,}5 \cdot 2{,}06}{0{,}43 \cdot 1{,}7} \approx \pm 1{,}''4.$$

ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილის გამოყენების შემთხვევაში იმავე მონაცემებისათვის გვექნებოდა: $\Delta\alpha = \pm 14''$, ხოლო ექვს და შვიდნიშნა ლოგარითმებით შესაბამისად მივიღებდით კუთხის გამოთვლის შეცდომებს: $0'',014$ და $0'',014$.

აქედან გასაგებია, რომ კუთხის გამოთვლის სიზუსტისა და მისი გაზომვის მოთხოვნილ სიზუსტეს შორის შესაბამისობა უნდა იყოს დაცული.

B. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილების შერჩევა

იმ შემთხვევაში, როდესაც გამოთვლებს საანგარიშო მანქანებით (არითმომეტრი და სხვ.) აწარმოებენ, მაშინ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების ცხრილების ნაცვლად იყენებენ ნატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილებს. ამიტომ საჭიროა განისაზღვროს დამოკიდებულება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შეცდომებსა და კუთხეების შეცდომებს შორის.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$ და $ctg\,\alpha$ ფუნქციების α-თი გადიფერენციალებისა და შემდეგ მიღებული დიფერენციალების ნაზრდებით, ანუ შეცდომებით, შეცვლით მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sin\alpha&=\cos\alpha\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\ \Delta\cos\alpha&=-\sin\alpha\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\ \Delta\,tg\,\alpha&=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\\ \Delta\,ctg\,\alpha&=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}\end{aligned}\right|. \qquad (3.2.4.9)$$

მიღებული ფორმულებიდან ჩანს, რომ უფრო ხელსაყრელია გამოთვლებში გამოვიყენოთ კუთხის სინუსები და კოტანგენსები, როცა კუთხე ახლოა 90° ან 270°-თან, კუთხის კოსინუსები და ტანგენსები, როცა კუთხე ახლოა 3° ან 180°-თან. აქ მხედველობაშია მისაღები ის გარემოებაც, რომ ცხრილების ათწილადი ნიშნების ერთნაირი რაოდენობის შემთხვევაში მანტისის დამრგვალებას უფრო მოხერხებულად ვახდენთ, როცა კუთხის სინუსს ვიღებთ 90° ან 270°-ის ახლოს და კუთხის კოსინუს--0° ან 180°-ის ახლოს.

მაგალითად,

$$\sin 89°10'10''=\cos 0°49'50''=0{,}999895;$$
$$\sin 0°49'50''=\cos 89°10'01''=0{,}014495.$$

პირველის დამრგვალებით მივიღებთ 1-ს და მეორის დამრგვალებით კი 0,014-ს. ცხადია, გამოთვლებში ერთის შეტანა უფრო მოხერხებულია, ვიდრე 0,014-ის.

(9) ფორმულიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ კუთხეების შეცდომები, როცა ცნობილია ამ კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha''&=\frac{\Delta\sin\alpha\cdot\rho}{\cos\alpha}\\ \Delta\alpha''&=-\frac{\Delta\cos\alpha\cdot\rho''}{\sin\alpha}\\ \Delta\alpha''&=\Delta\,tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\rho'',\\ \Delta\alpha''&=-\Delta\,ctg\,\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot\rho''\end{aligned}\right|. \qquad (3.2.4.10)$$

(10) ფორმულიდან ჩანს, რომ კუთხის მოძებნა ტანგენსით და კოტანგენსით უფრო ხელსაყრელია, ვიდრე სინუსით და კოსინუსით, თუ ვსარგებლობთ ამ ფუნქციებისათვის ერთნაირი ათწილადნიშნებიანი ცხრილებით.

ისევე, როგორც (8) ფორმულის შემთხვევაში, (10) ფორმულითაც შეგვიძლია ორი საკითხის გადაწყვეტა: ცნობილია კუთხის $\Delta\alpha$ შეცდომა და საჭიროა შეირჩეს თუ რამდენ ათწილადნიშნიანი ტრიგონომეტრიული ფუნქციენატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილებია საჭირო და, პირიქით, ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ნატურალური მნიშვნელობა ანუ ცნობი-

ლია თუ რამდენნიშნა ცხრილია გამოყენებული, და საჭიროა განისაზღვროს მონახული კუთხის განსაზღვრის შეცდომა ($\Delta\alpha$).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2.4.3. ვთქვათ, $\Delta\alpha = \pm 10''$ და $\alpha = 45°$; გამოვთვალოთ თუ რამდენი ათწილადნიშნიანი ცხრილია საჭირო გამოსაყენებლად.

$$\cos 45° = \sin 45° \approx 0{,}7 \text{ და } \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \approx 0{,}5.$$

(9) ფორმულებში სათანადო რიცხვითი სიდიდეების ჩასმით მივიღებთ

$$\Delta \sin\alpha \approx 0{,}7 \cdot \frac{10}{206000} \approx 0{,}00004;$$

$$\Delta \cos\alpha \approx 0{,}7 \cdot \frac{10}{206000} \approx 0{,}00004;$$

$$\Delta\, \mathrm{tg}\,\alpha \approx \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{10}{206000} \approx 0{,}000099 \approx 0{,}0001;$$

$$\Delta\, \mathrm{ctg}\,\alpha \approx -\frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{10}{206000} \approx -0{,}0001.$$

როგორც ჩანს, ასეთი მონაცემებისათვის საკმარისია ოთხნიშნა ცხრილები, სინამდვილეში ვხმარობთ ხუთნიშნა ცხრილებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 2. 4. რა სიზუსტით გამოითვლება კუთხე, თუ ამ კუთხის სინუსი უდრის 0,60147-ს.

ამ შემთხვევაში $\cos\alpha \approx 0{,}8$ და უდიდესი შეცდომა $\Delta\sin\alpha = 0{,}000005$, ამიტომ (10) დამოკიდებულებების პირველი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta\alpha'' = \frac{\Delta\sin\alpha \cdot \rho''}{\cos\alpha} \approx \pm \frac{0{,}5 \cdot 2{,}06}{0{,}8} \approx \pm 1'',3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 2. 5. შევარჩიოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილები თეოდოლიტური სვლების კოორდინატთა ნაზრდების გამოსათვლელად.

ცნობილია, რომ

$$\Delta x_i = l_i \cdot \cos\alpha_i,$$
$$\Delta y_i = l_i \cdot \sin\alpha_i.$$

ამასთანავე დავუშვათ, რომ ხაზის სიგრძე შეცდომას არ შეიცავს, ხოლო $\cos\alpha$ და $\sin\alpha$ ცხრილური მნიშვნელობის ზღვრული აბსოლუტური შეცდომები ურთიერთტოლია, რომელიც აღვნიშნოთ Δ_i-ით. ასეთ შემთხვევაში Δx და Δy აბსოლუტური შეცდომები, რომელთაც δ_i-თი აღვნიშნავთ, ურთიერთტოლი იქნება და

$$\delta_i = l_i \cdot \Delta_i;$$

აქედან

$$\Delta_i = \frac{\delta_i}{l_i}. \qquad (3.2.4.11)$$

ვთქვათ, $\delta_{max}=0{,}001$ მ და $l_{max}=100$ მ, მაშინ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ზღვრული აბსოლუტური შეცდომა (11) ფორმულით იქნება

$$\Delta_{max}=\frac{0{,}001}{100}=0{,}00001. \tag{3.2.4.12}$$

ამ შემთხვევაში ჯობს ნატურალური ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილები ავიღოთ ხუთი ათწილადი ნიშნით.

C. ცხრილები, რომლებიც უმთავრესად იხმარება გეოდეზიურ და სამარკშეიდერო წარმოებაში

1) ვ. ბრადისის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ოთხნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ოთხნიშნა რიცხვებია.

2) ე. პრჟევალსკის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ოთხნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ხუთნიშნა რიცხვებია.

3) ს. გლაზენაპის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ოთხ და ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ხუთნიშნა რიცხვებია.

4) დ. ოგლობლინის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ხუთნიშნა რიცხვებია.

5) კ. ბრემიკერის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ექვსნიშნა რიცხვებია.

6. გ. ვეგას ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები შვიდნიშნა რიცხვებია.

7) კ. ბრუნსის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები შვიდნიშნა რიცხვებია.

8) ი. ბრაუნშინგერისა და ი. პეტერსის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები რვანიშნა რიცხვებია.

9) გაუსის ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ოთხ და ხუთნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ხუთნიშნა რიცხვებია.

10) გეოდეზიისა და კარტოგრაფიის მთავარი სამმართველოს ლოგარითმების ცხრილები შედგენილია ოთხნიშნა რიცხვებისათვის და მანტისები ხუთნიშნა რიცხვებია.

11) გეოდეზიისა და კარტოგრაფიის მთავარი სამმართველოს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობის ექვსნიშნა ცხრილები.

12) იგივე რვანიშნა ცხრილები.

13) ლ. ხრენოვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური მნიშვნელობების შვიდნიშნა ცხრილები.

D. ჯამის აღნიშვნები (ალგორითმები)

ვთქვათ, გვაქვს რამდენიმე რიგი ალგებრული სიდიდეთა თანამიმდევრობისა

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\cdots,\ a_n;$$
$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\cdots,\ b_n;$$
$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\cdots,\ p_n.$$

ამ წევრებზე სხვადასხვა ალგებრულ მოქმედებათა ერთობლიობის ჯამის აღ-

ნიშნა მიღებულია ნიშნით []. ეს ნიშანი შემოღებულია გაუსის მიერ, ამიტომ მას ვუწოდებთ ჯამის გაუსის ნიშანს.

ქვემოთ მარცხენა მხარეზე ვწერთ ალგებრულ ჯამებს და მარჯვნივ მათ აღნიშვნებს

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=[a]$;

$a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2+a_3\cdot a_3+\cdots+a_n\cdot a_n=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=[aa]=[a^2]$;

$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\cdots+a_n\cdot b_n=[ab]$;

$a_1\cdot b_1\cdot p_1+a_2\cdot b_2\cdot p_2+a_3\cdot b_3\cdot p_3+\cdots+a_n\cdot b_n\cdot p_n=[a\cdot b\cdot p]$;

$$\frac{a_1\cdot b_1}{p_1}+\frac{a_2\cdot b_2}{p_2}+\frac{a_3\cdot b_3}{p_3}+\cdots+\frac{a_n\cdot b_n}{p_n}=\left[\frac{a\cdot b}{p}\right];$$

$$p_1\cdot a_1^2+p_2\cdot a_2^2+p_3\cdot a_3^2+\cdots+p_n\cdot a_n^2=[pa^2].$$

შემოკლებული აღნიშვნებისათვის საჭიროა *ჯამის ყოველი წევრის თანამამრავლი, უნიშნაკოდ დაწერილი, ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებოდეს და ყველა თანამამრავლს ნიშნაკები და ხარისხის მაჩვენებლები ჰქონდეს ერთნაირი*, მაგალითად,

$$a_1b_1+a_2p_2+a_3d_3+\cdots \quad \text{ან} \quad a_1b_2+a_2b_3^2+a_3b_1+\cdots$$

გამოსახულების შემოკლებული პირობითი აღნიშვნით დაწერა არ შეიძლება.

ზემოთ მიღებული აღნიშვნებით შეიძლება ვისარგებლოთ სხვადასხვა სახის ალგებრულ გამოსახულებათა მთელი რიგი ოპერაციების შემოკლებით ჩასაწერად, მაგალითად ვთქვათ, მოცემული გვაქვს განტოლებათა რიგი

$$a_i+b_i=l_i, \qquad (3.2.4.13)$$

სადაც

$$i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n.$$

თუ ყველა ამ განტოლების მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს ავიყვანთ კვადრატში და მერე შევკრებთ, შემოკლებულად შემდეგი სახით დაიწერება:

$$[a^2]+2[ab]+[b^2]=[l^2].$$

ასევე. თუ (13) განტოლებების წევრებს (თანამიმდევრობით შესაბამისი ნიშნაკებით) გადავამრავლებთ l_i-ზე და მერე შევკრებთ, მივიღებთ

$$[al]+[bl]=[l^2]. \qquad (3.2.4.14)$$

როცა (13) განტოლებების პირველი წევრები ურთიერთტოლი არის, ე. ი. $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=a$, მაშინ მისი კვადრატში ახარისხების და შეკრებისას დაიწერება

$$na^2+2a[b]+[b^2]=[l^2]$$

(14) გამოსახულებისათვის კი გვექნება

$$a[l]+[bl]=[l^2].$$

იმ შემთხვევაში, თუ (13) განტოლებები კვადრატში აყვანის შემდეგ თანა-

მიმდევრობით გადავამრავლეთ შესაბამისი ნიშნაკით p-ზე და შედეგები შევკრიბეთ (ე. ი. $a_i^2+2a_ib_i+b_i^2=l_i^2$ გავამრავლეთ p_i-ზე და შემდეგ შევკრიბეთ), დაიწერება

$$[pa^2]+2[pab]+[pb^2]=[pl^2].$$

შესაძლებელია აგრეთვე, რომ შეჯამების დროს შესაკრებებში თანამამრავლებად შედიოდეს ჯამი $[l]$, მაშინ ამ ჯამს გამოვიტანთ ფრჩხილებს გარეთ, როგორც საერთო მამრავლს კოეფიციენტის სახით, მაგალითად:

$$l_1[l]+l_2[l]+l_3[l]+\cdots+[l_n[l]=[l]\cdot[l]=[l]^2.$$

როგორც ვხედავთ, შემოკლებული აღნიშვნებით გამოსახულ ალგებრულ სიდიდეებზე შეიძლება ისევე ვიმოქმედოთ, როგორც ჩვეულებრივი სახის ალგებრულ გამოსახულებებზე.

8. 2. 5. საანგარიშო ლოგარითმული შიმშა

ლოგარითმული შიმშით შეიძლება ვაწარმოოთ ძირითადად სამ-ოთხ ციფრამდე დამრგვალებული (მრავალნიშნიანი მთელი რიცხვების ხუთნიშნამდე დამრგვალებისას ჩამოცილებული ციფრების ნაცვლად ნულები უნდა დაიწეროს) მიახლოებითი რიცხვების გამრავლება-გაყოფა, კვადრატში და კუბში ახარისხება, კვადრატული და კუბური ფესვების ამოღება, ბრიგის ლოგარითმებისა და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური ოდენობების მონახვა და სხვ.

საერთოდ, შიმშის სიგრძეა 12,5; 25 ან 50 სმ. საანგარიშო შიმშას აგრეთვე იყენებენ როგორც სახაზავს და ამიტომ მას ხშირად უწოდებენ **ლ ო გ ა რ ი თ მ უ ლ ს ა ხ ა ზ ა ვ ს ა ც**. საინჟინრო პრაქტიკაში უფრო გამოიყენება 25 სმ სიგრძის შიმშა, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

განხილადი შიმშის შესწავლისათვის აუცილებელია იგი შევიძინოთ, წინამდებარე ტექსტის მიხედვით მას გავეცნოთ და გამოყენების წესები შევითვისოთ.

საანგარიშო ლოგარითმული შიმშა (ნახ. 1) შედგება **კ ო რ პ უ ს ი ს ა გ ა ნ** ანუ ორი შეერთებული (შეწებებული) **უ ძ რ ა ვ ი** და მათ შორის **მ ო ძ რ ა ვ ი** შიმშისაგან. კორპუსზე (უძრავ შიმშაზე) გარედან ჩამოცმულია ალუმინის მოძრავი ჩარჩო, რომელშიც ჩასმულია მინა შტრიხით. ეს შტრიხი სკალებზე ანათვლების ასაღები ინდექსის როლს ასრულებს, ამიტომ მას მოკლედ **ი ნ დ ე ქ ს ი** ვუწოდოთ.

კორპუსის ქვემო ნაწილის (შიმშის) ზემო DD სკალას ეწოდება **რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს უ ძ რ ა ვ ი** ძირითადი სკალა, რომელსაც შეესაბამება მოძრავი შიმშის იგივე სახის ქვედა $D'D'$ სკალა ანუ **რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს მ ო ძ რ ა ვ ი** სკალა. კორპუსის ზემო ნაწილის (შიმშის) ქვემო $B'B$ სკალა კი ეწოდება DD ძირითადი სკალის **რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს უ ძ რ ა ვ ი ს კ ა ლ ა**, რომელსაც შეესაბამება მოძრავი შიმშის იმავე სახის ზედა $B'B'$ სკალა ანუ რიცხვების კვადრატების მოძრავი სკალა.

კორპუსის ზემო ნაწილის (ნიშნის) ზემო KK სკალას ეწოდება DD ძირითადი სკალის რიცხვების კუბების უძრავი სკალა. კორპუსის ქვემო ნაწი-

ლის (შიშის) ქვეშო LL სკალას ეწოდება უძრავი ძირითადი სკალის რიცხვების ლ ო გ ა რ ი თ მ ე ბ ი ს უ ძ რ ა ვ ი ს კ ა ლ ა.

მოძრავი შიშის მეორე მხარეზე. ზემოთ, აგებულია sin-ების სკალა 5°44′-დან 90°-მდე კუთხეებისათვის, რასაც შეესაბამება 0,1—1 რიცხვები, ქვემოთ კი არის tg-ის სკალა 5°44′-დან 45°-მდე კუთხეებისათვის, რასაც შეესაბამება 0,1—1 რიცხვები. ამ სკალებს შორის მოქცეულია საერთო სკალა ST, რომელიც წარმოადგენს sin-ბის და tg-ის ოდენობებს 34′-დან 5°44′-მდე კუთხეებისათვის, რასაც შეესაბამება 0,01 — 0,1 რიცხვები (იხ. 3. 1. 7. ცხრილი).

ზემოთ მოყვანილი სკალების აგების პრინციპი ერთნაირია. აქ გამოყენებულია ლოგარითმების ძირითადი თვისებები იმის შესახებ, რომ მათი საშუალებით მაღალი რიგის მათემატიკური მოქმედებები დაიყვანება დაბალი რიგის მოქმედებებზე. მაშასადამე, რიცხვების გამრავლებას შევცვლით მათი ლოგარითმების შეკრებით, რისთვისაც საჭირო იქნება ისეთი წყვილ-წყვილი სკალების შექმნა, რომლებზეც გადაიზომება მათზე წარწერილი რიცხვების ლოგარითმები. ასეთი ლოგარითმული სკალების ასაგებად ვსარგებლობთ ტოლობით

$$y=k\lg x, \qquad (3.2.5.1)$$

სადაც x არის სკალაზე წარწერილი რიცხვი;

k — მოდული ანუ შიშის სკალის სიგრძე;

y — ლოგარითმული სკალის ნულიდან x რიცხვის შესაბამის შტრიხამდე მანძილი.

განვიხილოთ ძირითადი DD სკალის შედგენის არსი. (1) ტოლობაში $k=25$ სმ, ხოლო x რიცხვი ავიღოთ 1—10-მდე და ვისარგებლოთ ბრიგის ლოგარითმების სამნიშნა ცხრილებით. (1) ტოლობის მიხედვით 0,01 სანტიმეტრამდე დამრგვალებით მივიღებთ

	ინტერვალები	სიზუსტე
$y_1=25$ სმ $\lg 1=25$ სმ$\cdot 0{,}000=0$ სმ		
	7,53 სმ	$\frac{1}{1506}$
$y_2=25$ „ $\lg 2=25$ სმ$\cdot 0{,}301=7{,}53$ სმ		
	4,40 სმ	$\frac{1}{880}$
$y_3=25$ „ $\lg 3=25$ სმ$\cdot 0{,}477=11{,}93$ სმ		
	3,12 სმ	$\frac{1}{624}$
$y_4=25$ „ $\lg 4=25$ სმ$\cdot 0{,}602=15{,}05$ სმ		
	2,43 სმ	$\frac{1}{406}$
$y_5=25$ „ $\lg 5=15$ სმ$\cdot 0{,}699=27{,}48$ სმ		
	1,97 სმ	$\frac{1}{394}$
$y_6=25$ „ $\lg 6=25$ სმ$\cdot 0{,}778=19{,}45$ სმ		
	1,68 სმ	$\frac{1}{336}$
$y_7=25$ „ $\lg 7=25$ სმ$\cdot 0{,}845=21{,}13$ სმ		
	1,45 სმ	$\frac{1}{290}$
$y_8=25$ $\lg 8=25$ სმ$\cdot 0{,}903=22{,}58$ სმ		
	1,27 სმ	$\frac{1}{254}$
$y_9=25$ „ $\lg 9=25$ სმ$\cdot 0{,}954=23{,}85$ სმ		
	1,15 სმ	$\frac{1}{230}$
$y_{10}=25$ $\lg 10=25$ სმ$\cdot 1{,}000=25{,}00$ სმ		

DD სკალა წარმოადგენს მიღებული სიგრძეების გადანაწილებისა და შესაბამისი ციფრების წარწერების ნიმუშს. 1 და 2 ციფრებს შორის 1,1; 1,2; 1,3; .....1,9 შუალედების შესაბამისი მონაკვეთები გამოითვლება ზემოთ მიღებული წესით, მაგალითად, 1,3 რიცხვის ლოგარითმი იგივე ცხრილიდან არის 0.114. მაშასადამე, სკალის საწყისიდან შესაბამისი მონაკვეთი იქნება.

$$25 \,.\, 0{,}114 = 2{,}85 \text{ სმ.}$$

ამავე წესით დგინდება 2 და 3; 3 და 4; 4 და 5 და ა. შ. შუალედების შესაბამისი მონაკვეთები. მაგალითად, 1,35 რიცხვის ლოგარითმი არის 0.130. მაშასადამე, სკალის საწყისიდან შესაბამისი მონაკვეთი იქნება

$$25 \,.\, 0{,}130 = 3{,}25 \text{ სმ.}$$

ცხადია, რაც უფრო გრძელი იქნება შიშა, ანუ დიდი იქნება *k* მოდული, მით ზუსტი იქნება სკალა.

თუ დავაკვირდებით, განხილად *DD* სკალაზე 1—10-მდე ინტერვალები თანდათან მცირდება. მაშასადამე, სათანადო სკალების სიზუსტეები მცირდება. მაგალითად, 1-დან 2-მდე რიცხვებს შორის ინტერვალია 7,53 სმ, შეცდომა 0,005 სმ ანუ სიზუსტე იქნება 1 1506. ეს ინტერვალი დაყოფილია 100 ნაწილად, ე. ი. მისი ერთი მცირე დანაყოფის საფასურია 0,0753 სმ, რომელსაც შეესაბამება რიცხვი 0,01; 2-დან 3-მდე რიცხვებს შორის ინტერვალია 4,40 სმ, შეცდომა 0,005 სმ ანუ სიზუსტე 1 880 და ინტერვალი დაყოფილია 50 ნაწილად, ე. ი. მისი საფასურია 0,0220 სმ, რომელსაც შეესაბამება რიცხვი 0,02; 3-დან 4-მდე რიცხვებს შორის ინტერვალია 3,12 სმ, სიზუსტეა 1 : 624. ინტერვალი დაყოფილია 50 ნაწილად, ე. ი. მისი საფასურია 0,0156 სმ და შესაბამისი რიცხვია 0.02. ანალოგიური მიდგომით 4-დან 10-მდე რიცხვებს შორის ვრწმუნდებით, რომ სიზუსტე მცირდება. მაგრამ მხედველობაში თუ მივიღებთ იმას, რომ ოთხნიშნა მიახლოებითი რიცხვი (რომლის აღება შეიძლება სახაზავზე) მით უფრო ზუსტია, რაც დიდია მისი პირველი ციფრი; დავასკვნით, რომ სახაზავზე ათვლილი მომდევნო რიცხვების მეტი სიზუსტე აწონასწორებს ზემოთ დადგენილ ნაკლებ სიზუსტეს და ვთვლით, რომ ლოგარითმული შიშის ყოველი სკალის მთელ სიგრძეზე ვიღებთ ერთნაირი სიზუსტის შედეგებს.

როგორც აღვნიშნეთ, *D'D'* რიცხვების მ ო ძ რ ა ვ ი ს კ ა ლ ა ზუსტად *DD* სკალის იგივურია, რაც საშუალებას მოგვცემს ნებისმიერი რიცხვების გამრავლება-გაყოფა შევასრულოთ მათი ლოგარითმების შეკრება-გამოკლებით და დავადგინოთ ნამრავლისა და წილადის ოდენობა.

BB სკალა (მაშასადამე, *B'B'* სკალაც) აგებულია იმავე (1) განტოლებით, სადაც *x* რიცხვებია 1-დან 100-მდე და მოდული $k = 12.5$ სმ, რის გამო 25 სანტიმეტრის სიგრძის შიშაზე ასეთი ორი სკალაა და მასზე წარწერილი რიცხვები იქნება *DD* ძირითადი უძრავი სკალის რიცხვების შესაბამისი კვადრატები, რისთვისაც მას ეწოდება ძირითადი სკალის რიცხვების კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს უ ძ რ ა ვ ი ს კ ა ლ ა.

ანალოგიურადაა აგებული კორპუსის *kk* სკალა, ხოლო ' *x* რიცხვებია

1-დან 1000-მდე და მოდული $k = 8{,}33$ (3), რის გამო 25 სანტიმეტრის სიგრძის შიმშაზე ასეთი სამი სკალაა და მასზე წარწერილი რიცხვები იქნება DD ძირითადი უძრავი სკალის შესაბამისი რიცხვების კუბები, რისთვისაც მას ვუწოდეთ ძირითადი სკალის რიცხვების კ უ ბ ე ბ ი ს უძრავი სკალა.

კორპუსის ქვემო ნაწილის LL სკალაზე მოცემულია ძირითადი DD სკალის რიცხვების ლოგარითმების მანტისები, რომელთა ოდენობები შეიძლება წაკითხულ იქნეს სამ ათწილად ნიშნამდე. ამ სკალაზე შეიძლება წავიკითხოთ მანტისები 0,001-დან 1-მდე.

ზოგიერთი მოძრავი შიშის $D'D'$ და $B'B'$ სკალებს შორის დაშტრიხულია DD' სკალის მსგავსი სკალა, მხოლოდ დანაყოფები და წარწერები 1-დან 10-მდე იზრდება მის საწინააღმდეგოდ (მარჯვნიდან მარცხნივ). ეს სკალა გამოიყენება $D'D'$ სკალაზე (მაშასადამე, DD ძირითად სკალაზე) არსებული რიცხვების შებრუნებული ოდენობების მასზე ასათვლელად და პირიქით, მასზე არსებული რიცხვების შებრუნებელი ოდენობების $D'D'$ -ზე ასათვლელად.

A. სკალებზე ანათვლების აღების წესი

განხილადი წესი ანალოგიურია და უფრო მარტივი (6.3) თავში მიღებული წესისა. ყოველთვის სჯობს სკალის უმცირესი დანაყოფი 0,1; 0,2; 0,3...0,9 ან 1:4; 1:2; 3:4 ავიღოთ ინდექსის დახმარებით. ინდექსის ანათვლებზე დაყენების ნიმუში მოცემულია (2) ნახაზზე. ანათვლებზე ინდექსის დაყენების ან, საერთოდ, ანათვლების აღების დროს შერეულ რიცხვებს ანუ მძიმეს ყურადღება არ ექცევა, მაგალითად, 2,59 იკითხება 2, 5, 9. ზოგჯერ უკეთესია მცირე დანაყოფის 1:4, 1:2, 3:4 აღება, მაგალითად, 14075 რიცხვისათვის უშუალოდ სკალაზე ვიღებთ 1, 4, 0 ციფრებს და ინდექსით დანაყოფის 3:4 ანუ 0,75, ან 2,605 რიცხვისათვის უშუალოდ სკალაზე ვიღებთ 2, 6, 0, 4 ციფრებს და ინდექსით დანაყოფის 1:2 ანუ $0{,}5.2 = 1$ ან 3,415 რიცხვისათვის უშუალოდ სკალაზე ვიღებთ 3,4 ინდექსით დანაყოფის 3:4 ანუ $0{,}75.2 = 1{,}5$.

როდესაც საჭიროა მრავალნიშნა რიცხვების გამოყენება, მათ ვამრგვალებთ სამ, ოთხ ან ხუთ ნიშნამდე და ჩამოცილებული ციფრების ადგილას ვიგულისხმებთ ნულებს. მაგალითად, ნაცვლად 17849567 რიცხვისა სკალაზე ავიღებთ 1785, ხოლო ვიგულისხმებთ, რომ რიცხვი არის რვანიშნა.

რიცხვების ლოგარითმების მახასიათებლების ცვალებადობისა და მანტისების მუდმივობის თვისების გამო სკალაზე წარწერილი ციფრების სახით შეიძლება ვიგულისხმოთ ნებისმიერი ოდენობის გამომსახველი რიცხვები.

B. რიცხვის რიგი

ერთზე მეტი რიცხვის რ ი გ ი ა დ ა დ ე ბ ი თ ი და უდრის მოცემული რიცხვის მთელი ნაწილის ციფრთა რაოდენობას. მაგალითად, 167,84 რიცხვის რიგია 3. ერთზე ნაკლები დადებითი ათწილადის რიგია უარყოფითი და უდრის მოცემული რიცხვის ათწილადი ნაწილის ნულების რაოდენობას პირველ ნიშნად ციფრამდე. მაგალითად, 0,000346 რიცხვის რიგია — 3. თუ ერთზე ნაკლებ ათწილადში პირველ ნიშნად ციფრამდე ნული არა გვაქვს, მაშინ მისი

რიგი იქნება 0. მაგალითად, 0,5179 რიცხვის რიგი ნულია. ამავე დროს ცნობილია, რომ 167,84 და 0,000346 რიცხვების ლოგარითმების მახასიათებლები შესაბამისად არის 2 და — 4. მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული რიცხვის რიგი ალგებრული რიცხვია და ტოლია მისი ლოგარითმის მახასიათებელს პლუს ერთი.

ზემოხსენებული შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ:

ნებისმიერი დადებითი x რიცხვი შეიძლება დაიწეროს სტანდარტულად $x=a\cdot 10^{\mp n}$, სადაც $0<a<1$. n-ს ეწოდება რიცხვის რიგი. მაგალითად,

$273=0,273\cdot 10^3$	$n=3$
$51,83=0,5183\cdot 10^2$	$n=2$
$0,8912=0,8912\cdot 10^0$	$n=0$
$400012=0,4\cdot 10^6$	$n=6$
$0,00051=0,5\cdot 10^{-3}$	$n=-3$
$1,002=0,1002\cdot 10^1$	$n=1.$

C. გამრავლება

ერთნაირი წყვილი DD და $D'D'$ სკალით ორი რიცხვის ნამრავლი უდრის DD სკალაზე სამრავლის ლოგარითმის მონაკვეთისა და $D'D'$ სკალაზე მამრავლის ლოგარითმის მონაკვეთის ჯამის შესაბამის რიცხვს, ათვლილს ძირითად DD სკალაზე. მაგალითად, 2 და 3 ნამრავლის მოძებნისათვის DD სკალაზე წარწერას 2-ს შევუთავსებთ $D'D'$ სკალის საწყის 1-ს და $D'D'$ სკალის წარწერა 3-ის ქვეშ DD სკალაზე ავიღებთ ანათვალს 6. ამ შემთხვევაში ვიყენებთ მოძრავი სკალის საწყისს ანუ ანათვალს ვიღებთ სამრავლიდან მარჯვნივ, რის გამო ნამრავლის რიგი გამოითვლება ფორმულით

$$q=m+n-1, \tag{3.2.5.2}$$

სადაც q, m, n შესაბამისად არის ნამრავლის, სამრავლისა და მამრავლის რიგი. მაშასადამე, 2 და 3 ნამრავლის რიგი $q=1$, რადგანაც $m=1$, $n=1$ და აგრეთვე გამოყენებულია მოძრავი სკალის საწყისი ანუ ანათვალს ვიღებთ სამრავლის მარჯვნივ.

ახლა შევასრულოთ გამრავლება 3 და 4 რიცხვისა. ზემოთ ხსენებული წესით რომ ვიმოქმედოთ, ვნახავთ, რომ ანათვლის აღებას ვერ შევძლებთ, რადგანაც სამრავლისა და მამრავლის ლოგარითმების მონაკვეთების ჯამი სკალის სიგრძეს გადასცილდება (ის ხომ 10-ის ლოგარითმის სიგრძის შესაბამისია). ამ შემთხვევაში ვიყენებთ მოძრავი $D'D'$ სკალის ბოლოს (10) და მის შესაბამის შტრიხს შევუთავსებთ DD სკალის 3-ის შტრიხს, ანათვალს კი ვიღებთ იმავე DD სკალაზე $D'D'$ სკალის 4-იანი შტრიხის შესაბამისად. ეს იქნება 1 და 2 ანუ სკალის მთელ სიგრძეზე 1,98 სანტიმეტრით მეტი [(11,93 სმ+15,05 სმ) − 25 სმ]: ამ შემთხვევაში ნამრავლის რიგი გამოითვლება ფორმულით

$$q=m+n. \tag{3.2.5.3}$$

ე. ი. $3 \cdot 4 = 12$, რადგანაც $m=1, n=1$ და გამოყენებულია მოძრავი სკალის ბოლო, ანუ ანათვალს ვიღებთ სამრავლის მარცხნივ.

იმ შემთხვევაში, როცა გადასამრავლებელია მრავალი რიცხვი, გადამრავლებას ვახდენთ თანამიმდევრობით საჭიროებისამებრ მოძრავი $D'D'$ სკალის საწყისის ან ბოლოს გამოყენებით და ნამრავლის რიგი იქნება თანამამრავლთა რიგების ალგებრული ჯამი მინუს იმდენი ერთეული, რამდენჯერაც იქნება გამოყენებული მოძრავი DD' სკალის საწყისი. მაგალითად, 2,3,4,5,6 ციფრების (ვგულისხმობთ რიცხვებად) გადამრავლებისას DD სკალაზე ვიღებთ ანათვალს 7 და 2. მისი თანრიგი იქნება $1+1+1+1+1=5$, ხოლო რადგანაც გამრავლების დროს ორჯერ იქნა გამოყენებული $D'D'$ მოძრავი სკალის საწყისი, ნამრავლის q თანრიგი იქნება $5-2=3$. მაშასადამე,

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 = 720.$$

ყოველთვის სჯობს სკალაზე ანათვალი ავიღოთ ცალ-ცალკე ციფრებით, როგორც ზემოთ მოვიქეცით (7,2) და შემდეგ განვსაზღვროთ მოქმედების რიგი (3), რაც საშუალებას მოგვცემს დავწეროთ შედეგის ოდენობა (720).

	მაგალითები	DD სკალაზე ანათვალი	თანამამრავლთა რიგების ალგებრული ჯამი	სამრავლიდან ანათვალი მარჯვნივ	ნამრავლის რიგი	ნამრავლი
1	2	3	4	5	6	7
1	1,38·1,35	1,8,6	1+1=2	−1	2−1=1	1,86
2	145·0,291	4,2	3+0=3	−1	3−1=2	42,0
3	143,6·0,0555	7,9,8	3+(−1)=2	−1	2−1=1	7,98
4	445·0,00022	9,7,9	3+(−3)=0	−1	0−1=−1	0,0979
5	0,002.·0,048	1,1,5,2	−2+(−1)=−3	—	−3	0,0001152
6	0,0050·0,0050	2,5	−2+(−2)=−4	—	−4	0,000025
7	250·0,005	1,2,5	3+(−2)=1	—	1	1,250
8	20.35·0,005·75·350	9,1,9	2+2+(−2)+2+3=7	−1+(−1)=−2	7−2=5	91900
9	548,78.0,000145	7,9,6	3+(−3)=0	−1	0−1=−1	0,0796
10	446,4·0,0625·56,4·1,275	4,0,7,5	3+(−1)+2+1=5	−1	5−1=4	4075,0

D. გაყოფა

ვთქვათ, საჭიროა 6 გაიყოს 3-ზე. ამისათვის DD ძირითად სკალაზე აღებულ გასაყოფს 6-ს შევუთავსებთ $D'D'$ მოძრავ სკალაზე ათვლილ გამყოფის (3) შტრიხს და განაყოფი აითვლება $D'D'$ მოძრავი სკალის საწყისით, ანუ ანათვალი აღებულია გასაყოფის მარცხნივ (2). ყოველივე ნიშნავს 6-ის და 3-ის ლოგარითმების შესაბამისი სიგრძეების სხვაობის სიგრძის შესაბამისი რიცხვის (2-ის) DD სკალაზე აღებას. ამ შემთხვევაში განაყოფის რიგი გამოითვლება ფორმულით

$$q = m - n + 1, \qquad (3.2.5.4)$$

სადაც q. m, n შესაბამისად არის განაყოფის, გასაყოფის და გამყოფის თანრიგი. მაშასადამე, 6:3 განაყოფის რიგი $q=1$, რადგანაც გასაყოფის რიგი $m=1$, გამყოფის თანრიგი $n=1$ და აგრეთვე გამოყენებულია $D'D'$ მოძრავი სკალის საწყისი ანუ ანათვალი აღებული გასაყოფის მარცხნივ, ე. ი. 6:3 = 2.

ახლა 12 გავყოთ 4-ზე, რისთვისაც საჭირო იქნება DD ძირითადი უძრავი სკალის 12 შესაბამის შტრიხს შევუთავსოთ $D'D'$ მოძრავი სკალის 4-ის შტრიხი და მისი ბოლოთი (10) ანუ გასაყოფიდან მარჯვნივ ავიღოთ ანათვალი DD ძირითად უძრავ სკალაზე (3). ამ შემთხვევაში განაყოფის რიგი გამოითვლება ფორმულით

$$q = m - n. \tag{3 2.5.5}$$

მაშასადამე, 12 : 4 განაყოფის რიგი $q=1$, რადგანაც გასაყოფის რიგი $m=2$, გამყოფის რიგი $n=1$ და აგრეთვე გამოყენებულია $D'D'$ მოძრავი სკალის ბოლო (10) შტრიხი, ანუ ანათვალი DD სკალაზე აღებულია გასაყოფის მ ა რ ჯ ვ ნ ი ვ, ე. ი. 12 : 4 = 3.

№	მაგალითები	ანათვალი DD სკალაზე	გასაყოფისა და გამყოფის რიგების ალგებრული სხვაობა	გასაყოფიდან ანათვალი მარცხნივ	განაყოფის რიგი	განაყოფი
1	2	3	4	5	6	7
1	314 : 0,485	6, 4, 6	3−0=3	—	3	647,0
2	314 : 0,0158	1, 9, 8, 5	3−(−1)=4	+1	4+1=5	19870,0
3	0,826 : 0,186	4, 4, 3	0−0=0	+1	0+1=1	4,44
4	0,385 ; 0,00162	2, 1, 0, 2	0−(−2)=2	+1	2+1=3	211,0
5	7,84 : 8,52	9, 2	1−1=0		0	0,92
6	89,6 : 0,036	2, , 8, 9	2−(−1)=3	+1	3+1=4	2488,0
7	0,058 ; 62,6	9, 2, 6	−1−2=−3	—	−3	0,000926
8	0,00086 : 40	2, 1, 5	−3−2=−5	+1	−5+1=4	0,0000215
9	640 : 0,008	8	3−(−2)=5	—	5	80000,0
10	388 : 20	1, 9, 3	3−2=1	+1	1+1=2	19,4
11	420 : 0,4	1, 0, 5	3−0=3	+1	3+1=4	1050,0

E. მრავალი რიცხვის გამრავლება-გაყოფა

ვთქვათ, საჭიროა შესრულდეს გამრავლება-გაყოფა შემდეგი გამოსახულების:

$$\frac{424 \cdot 26{,}6 \cdot 0.85 \cdot 0{,}00426}{4{,}28 \cdot 0{,}334 \cdot 7280 \cdot 0{,}00036} = \frac{4,\,0,\,8}{3,\,7,\,4} = \frac{40,\,8}{3.\,74} = 1,\,0,\,9,\,1 = 10{,}91.$$

მრიცხველის სრული ნამრავლის ანათვალია 4, 0, 8, რიგია 3+2—0+(—2) = 3 და ერთხელ იქნა გამოყენებული მოძრავი $D'D'$ სკალის საწყისი ანუ

სამრავლიდან ანათვალი აღებულ იქნა მარჯვნივ, ე. ი. მრიცხველის შედეგის რიგი იქნება 3—1=2. მაშასადამე, მრიცხველის შედეგი იქნება 40,8.

მნიშვნელის სრული ნამრავლის ანათვალია 3, 7, 4, რიგია 1+0+4+(—3)=2 და სამრავლიდან ერთხელ იქნა ანათვალი აღებული მარჯვნივ, ე. ი. მნიშვნელის შედეგის რიგი იქნება 2—1=1. მაშასადამე, მნიშვნელის შედეგი იქნება 3,74. 40,8:3,74 ანათვალია 1,0,9,1, რიგი 2—1=1, ხოლო ვინაიდან გასაყოფიდან ანათვალი აღებულია მარცხნივ ერთხელ, მას უნდა მიემატოს 1. მაშასადამე, განაყოფის რიგი იქნება 1+1=2 და განაყოფი იქნება 10,9.

გამოცდილ გამომთვლელს შეუძლია მთელი მოქმედებების ბოლოში ანუ ერთხელ აიღოს ანათვალი, მხოლოდ შედეგისათვის მძიმის დასმის მიზნით გულდასმით უნდა დაინიშნოს ანათვლის აღების შემთხვევები სამრავლიდან მარჯვნივ — 1, — 1, და გასაყოფიდან მარცხნივ + 1, + 1.

სკალების შტრიხების ურთიერთ ზუსტად დაყენებისა და მათზე საჭირო ანათვლების ზუსტად აღებისათვის საჭიროა მ ო ძ რ ა ვ ი ი ნ დ ე ქ ს ი ს გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა.

F. კვადრატში ახარისხება და კვადრატული ფესვის ამოღება

a. კვადრატში ახარისხება

როგორც ცნობილია, *BB* კვადრატების სკალის შესაბამისი რიცხვები წარმოადგენენ *DD* ძირითადი სკალის რიცხვების კვადრატებს. იგი გაყოფილია ზუსტად ორ ნაწილად: პირველია 1-დან 10-მდე და მეორე 10-დან 100-მდე. ამიტომ პირველ ნაწილს ეწოდება ე რ თ ნ ი შ ნ ა და მის ქვეშ *DD* სკალაზე წარწერილია ის რიცხვები, რომელთა კვადრატები არ აღემატება ერთნიშნა რიცხვს 10-მდე, მაგალითად, 4; 9; 10-ის შესაბამისი რიცხვებია 2; 3; 3.1625; მეორე ნაწილს კი ეწოდება ო რ ნ ი შ ნ ა და მის ქვეშ *DD* სკალაზე წარწერილია ის რიცხვები, რომელთა კვადრატები არ აღემატება ორნიშნა რიცხვს 100-მდე, მაგალითად, 10; 16; 25; 36; 49; 64; 81, 100-ის შესაბამისი რიცხვები *DD* სკალაზეა 3,1625; 4; 5; 6; 7; 8; 9, 10. ვინაიდან *DD* და *BB* სკალა ერთმანეთისაგან დაშორებულია, საჭიროა გამოყენებულ იქნეს მოძრავი ინდექსი.

მაშასადამე, აქ შეიძლება ორ შემთხვევასთან გვქონდეს საქმე: გამოყენებულ იქნეს ე რ თ ნ ი შ ნ ა ან ო რ ნ ი შ ნ ა სკალა.

პ ი რ ვ ე ლ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი კვადრატში ახარისხების დროს ხარისხის რ ი გ ი დადგინდება ტოლობით

$$q=2n-1, \qquad (3.2.5.6)$$

სადაც q არის ფუძის კვადრატის რიგი და იგი კ ე ნ ტ ი ა;

n — ფუძის რიგი.

მაგალითად, $3^2=9$, რადგანაც $n=1$ და ინდექსი მოხვდა ე რ თ ნ ი შ ნ ა სკალაზე.

მ ე ო რ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი კვადრატში ახარისხების ხარისხის რიგი დგინდება ტოლობით

$$q=2n \text{ და ლუწია.} \qquad (3.2.5.7)$$

მაგალითად, $55^2=3025$, რადგანაც $n=2$ და ინდექსი მოხვდა ორნიშნა სკალაზე.

№	მაგალითები	ანათვალი BB სკალაზე	ფუძის რიგი n	ინდექსი მოხვდა kk სკალის	ფუძის კვადრატის რიგი	ფუძის კვადრატი
1	2	3	4	5	6	7
1	$1{,}88^2$	3, 5, 3	1	ერთნიშნა ნაწ.	$2\cdot1-1=1$	3,53
2	$13{,}6^2$	2, 4, 5	2		$2\cdot2-1=3$	185,0
3	$30{,}5^2$	9, 3,	2		$2\cdot2-1=3$	930,0
4	$0{,}128^2$	1, 0, 6, 4	0		$2\cdot0-1=-1$	0,0164
5	$0{,}0128^2$	1, 0, 6, 4	-1		$2\cdot(-1)-1=-3$	0,000164
6	2500^2	6, 2, 5	4	„	$2\cdot4-1=7$	6250000,0
7	54^2	2, 9	2	ორნიშნა ნაწ.	$2\cdot2=4$	2920,0
8	$0{,}088^2$	7, 5, 4	-1		$2\cdot(-1)=-2$	0,00772
9	$0{,}918^2$	8, 4	0		$2\cdot0=0$	0,843
10	$6{,}8^2$	4, 6	1		$2\cdot1=2$	46,0

ბ. კვადრატული ფესვის ამოღება

I. კვადრატული ფესვის ამოღება 1-ზე მეტი რიცხვებიდან

კვადრატში ახარისხების დროს ვნახეთ, რომ BB სკალის როგორც ერთნიშნა (1-დან 10-მდე), ისე ორნიშნა (10-დან — 100-მდე) რიცხვებს DD სკალაზე შეესაბამება რიცხვები, რომელთა რიგებია ერთი. ასე რომ, 1-დან 100-მდე რიცხვებიდან კვადრატული ფესვის ამოღება სიძნელეს არ წარმოადგენს.

100-ზე მეტი მთელი ან შერეული რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოსაღებად მოცემული მთელი რიცხვი ან შერეული რიცხვის მთელი ნაწილი უნდა დავყოთ მარჯვნიდან (მძიმიდან) მარცხნივ ორნიშნა ჯგუფებად და თუ უკანასკნელ ჯგუფში (ანუ განხილადი რიცხვის I ჯგუფში) დაგვრჩა ერთი ნიშანი (ციფრი)) კვადრატულ ფესვს ამოვიღებთ BB სკალის ერთნიშნა ნაწილიდან, ხოლო თუ ხსენებულ ჯგუფში დაგვრჩა ორი ნიშანი (ციფრი), გამოვიყენებთ ორნიშნა ნაწილს. როგორც ვხედავთ, ამოსაფესვი რიცხვის მთელი ნაწილის მარჯვნიდან მარცხნივ უკანასკნელი ჯგუფის მიხედვით ვადგენთ, თუ BB სკალის რომელი ნაწილი უნდა გამოვიყენოთ (სად დავაყენოთ ინდექსი), ამიტომ ამ ჯგუფს ეწოდება გადამწყვეტი ჯგუფი.

ვთქვათ, საჭიროა განვსაზღვროთ ფესვი $\sqrt{4975256}$. დამრგვალებულ ფესვქვეშა გამოსახულებაში იქნება ოთხი ჯგუფი $\sqrt{4{\cdot}97{\cdot}50{\cdot}00}$ ხოლო რადგანაც მარჯვნიდან მარცხნივ უკანასკნელ ჯგუფშია ერთი ნიშანი (04), ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ BB სკალის ერთნიშნა ნაწილი და მოცემული რიცხვის დამრგვალებულ ოდენობაზე დაყენებული ინდექსის შესაბამისად DD სკალაზე ავიღებთ 2, 2, 3, ანათვალს. ცხადია, შედეგის რიგი იქნება რიცხვი, რომელიც გამოსახავს მოცემული ფესვქვეშა რიცხვის ჯგუფების რაოდენობას. მაშასადამე, $\sqrt{4975256}\approx\sqrt{4975000}\approx\sqrt{4{\cdot}97{\cdot}50{\cdot}00}=2230.$

ახლა ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს $\sqrt{4975,256}$. ამ შემთხვევაში მივიღებთ $\sqrt{4975,256} \approx \sqrt{4975,000} \approx \sqrt{49'75,00} \approx 7,\ 0,\ 5$ ანუ 70, 5. როგორც ვხედავთ, აქ გამოყენებულია BB სკალის ორნიშნა მხარე და რიგია ორი, რაც გამოსახავს ფესვქვეშა რიცხვის მთელი ნაწილის ჯგუფების რაოდენობას.

II. კვადრატული ფესვის ამოღება ერთზე ნაკლები რიცხვებიდან

წესიერი ათწილადიდან კვადრატული ფესვის ამოღებისათვის მისი მძიმიდან ათწილად ნაწილს მარჯვნივ ვყოფთ ორ-ორ ციფრიან ჯგუფებად. ამ დროს თუ უკანასკნელი ჯგუფი მივიღეთ ერთნიშნა (0.1,2,.....9), მას მიეწერება ნული (00, 10, 20, ..., 90). ნულებისაგან შემდგარ წინა ჯგუფებს ეწოდება ნულოვანი ჯგუფები, ხოლო გადამწყვეტი ჯგუფი იქნება მათ შემდეგ ერთ ან ორნიშნადი ჯგუფი (მაგალითად, 09 ერთნიშნადი ჯგუფია, ხოლო 90 ორნიშნადია). პირველ შემთხვევაში, ანუ როცა გადამწყვეტი ჯგუფია ერთნიშნა, ვიყენებთ BB სკალის ერთნიშნა ნაწილს, ხოლო მეორე შემთხვევაში—მის ორნიშნა ნაწილს. ინდექსის შესაბამისად DD სკალაზე ამოკითხულ რიცხვს მიეწერება მძიმემდე იმდენი ნული, რამდენი ნულოვანი ჯგუფიც გვაქვს მოცემულ ათწილადში, რაც გამოხატავს შედეგის (ფესვის) უარყოფით რიგს.

მაგალითად: $\sqrt{0,0000065} = \sqrt{0,00'00'06'50}$. აქ გადამწყვეტი ჯგუფია 06 ერთნიშნადი, ე. ი. ინდექსს ვაყენებთ BB სკალის ერთნიშნა ნაწილზე (650), რისი შესაბამისი ანათვალი DD სკალაზე იქნება 2, 5, 6,. ამავე დროს ნულოვანი ჯგუფია ორი ანუ რიგია (—2). მაშასადამე, პასუხი იქნება 0,00256.

ახლა გამოვითვალოთ $\sqrt{0,851} = \sqrt{0,85'10}$. აქ გადამწყვეტი ჯგუფია 85 ორნიშნადი, ე. ი. ინდექსს ვაყენებთ BB სკალის ორნიშნა ნაწილზე (851), რისი შესაბამისი ანათვალი DD სკალაზე იქნება 9, 2. 3. ნულოვანი ჯგუფი არ გვაქვს. მაშასადამე, პასუხი იქნება 0,922.

№	მაგალითები	გადამწყვეტი ჯგუფი	ინდექსის დაყენება BB სკალის	ჯგუფების რიცხვი	ნულოვანი ჯგუფების რაოდენობა	ფესვის რიგი	პასუხი (შედეგი)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{1,82} = 1,\ 3,\ 5$	(01)	ერთნიშნა ნაწ.	1	—	+1	1,35
2	$\sqrt{18,2} = 4,\ 2,\ 7$	(18)	ორნიშნა ნაწ.	1	—	+1	4,27
3	$\sqrt{36,8} = 6,\ 0.\ 7$	(36)	„ „	1	—	+1	6,07
4	$\sqrt{53900,9} \approx \sqrt{5'39'01} = 2,\ 3,\ 2,\ 2$	(05)	ერთნიშნა ნაწ.	3	—	+3	232,2
5	$\sqrt{8482,5} \approx \sqrt{84'82} = 9,\ 2,\ 1$	(84)	ორნიშნა ნაწ.	2	—	+2	92,1
6	$\sqrt{7,2125} = \sqrt{7,2126} = 2,\ 6,\ 9$	(07)	ერთნიშნა ნაწ.	1	—	+1	2,69
7	$\sqrt{0,422} = \sqrt{0.42'20} = 6,\ 5$	(42)	ორნიშნა ნაწ.	—	0	0	0,65
8	$\sqrt{0,064} = \sqrt{0,06'40} = 2,\ 5,\ 3$	(06)	ერთნიშნა ნაწ.	—	0	0	0,253
9	$\sqrt{0,00569} = \sqrt{0,00'56'90} = 7,\ 5$	(56)	ორნიშნა ნაწ.	—	1	−1	0,075
10	$\sqrt{0,000569} = \sqrt{0,00'05'69} = 2,\ 2,\ 5$	(05)	ერთნიშნა ნაწ.	—	1	−1	0,0225
11	$\sqrt{0,000068} = \sqrt{0,00'00'68} = 8,\ 2,\ 8$	(68)	ორნიშნა ნაწ.	—	2	−2	0,00828

ც. კუბში ახარისხება და კუბური ფესვის ამოღება

ა. კუბში ახარისხება

KK კუბების სკალის შესაბამისი რიცხვები წარმოადგენენ *DD* ძირითადი სკალის რიცხვების კუბებს. იგი გაყოფილია ზუსტად სამ ნაწილად: პ ი რ ვ ე ლ ი ა 1-დან 10-მდე (ათის მაგიერ წარწერილია 1), მ ე ო რ ე 10-დან 100-მდე (წარწერილია 1) და მ ე ს ა მ ე 100-დან 1000-მდე (წარწერილია 1). ამიტომ პ ი რ ვ ე ლ ნაწილს ეწოდება ე რ თ ნ ი შ ნ ა და მის ქვემოთ *DD* ძირითად სკალაზე წარწერილია ის რიცხვები, რომელთა კუბები არ აღემატება ერთნიშნა რიცხვს 10-მდე; მეორე ნაწილს ეწოდება ო რ ნ ი შ ნ ა და მის ქვეშ *DD* ძირითად სკალაზე წარწერილია ის რიცხვები, რომელთა კუბები არ აღემატება ორნიშნა რიცხვს, და მესამე ნაწილს ეწოდება ს ა მ ნ ი შ ნ ა და მის ქვემოთ *DD* ძირითად სკალაზე წარწერილია ის რიცხვები, რომელთა კუბები არ აღემატება სამნიშნა რიცხვს. აქაც *DD* და *KK* სკალების ერთმანეთისაგან დაშორების გამო საჭიროა მოძრავი ინდექსის გამოყენება.

KK სკალის ე რ თ ნ ი შ ნ ა ნაწილის გამოყენებისას ხარისხის რიგი დადგინდება ტოლობით:

$$q = 3n - 2, \qquad (3.2.5.8)$$

სადაც q არის ფუძის კუბის რიგი;

n — ფუძის რიგი.

მაგალითად, $1{,}65^3 = 4{,}5$, რადგანაც $n = +1$ და ინდექსი მოხვდა *KK* სკალის ერთნიშნა ნაწილზე.

ო რ ნ ი შ ნ ა ნ ა წ ი ლ ი ს გამოყენების დროს ხარისხის რიგი გამოითვლება ტოლობით:

$$q = 3n - 1. \qquad (3.2.5.9)$$

მაგალითად, $0{,}0035^3 = 0{,}0000000429$, რადგანაც $n = -2$ და ინდექსი მოხვდა ორნიშნა ნაწილზე.

ს ა მ ნ ი შ ნ ა ნ ა წ ი ლ ი ს გამოყენების დროს კი რიგი გამოითვლება ტოლობით

$$q = 3n. \qquad (3.2.5.10)$$

მაგალითად, $625^3 = 245000000$, რადგანაც $n = +3$ და ინდექსი მოხვდა სამნიშნა ნაწილზე.

№	მაგალითები	ანათვალი *KK* სკალაზე	ფუძის რიგი	ინდექსი მოხვდა *KK* სკალის	ფუძის კუბის რიგი q	ფუძის კუბი
1	2	3	4	5	6	7
1	$0{,}1275^3$	2, 0, 7	0	ერთნიშნა ნაწ.	$3\cdot0-2=-2$	0,00207
2	$1{,}275^3$	2, 0, 7	1	„	$3\cdot1-2=+1$	2,07
3	$18{,}26^3$	6, 0, 8	2	„	$3\cdot2-2=+4$	6080,0
4	$182{,}5^3$	6, 0, 8	3	„	$3\cdot3-2=+7$	6080000,0
5	245^3	1, 4, 7	3	ორნიშნა ნაწ.	$3\cdot3-1=+8$	14700000,0
6	$2{,}45^3$	1, 4, 7	1	„	$3\cdot1-1=+2$	14,7
7	$24{,}5^3$	1, 4, 7	2	„	$3\cdot2-1=+5$	14700,0
8	$0{,}00245^3$	1, 4, 7	—2	„	$3\cdot(-2)-1=-7$	0,0000000147
9	$0{,}628^3$	2, 4, 8	0	სამნიშნა ნაწ.	$3\cdot0=0$	0,248
10	$0{,}0628^3$	2, 4, 8	—1	„	$3\cdot(-1)=-3$	0,000248
11	628^3	2, 4, 8	3	„	$3\cdot3=+9$	248000000,0

ხ. კუბური ფესვის ამოღება

კუბური ფესვის ამოღება, როგორც ერთზე მეტი, ისე ერთზე ნაკლები, ანუ წესიერი, ათწილადიდან სრულიად ანალოგიურია კვადრატული ფესვის ამოღებისა. ფესვქვეშა რიცხვი შეიძლება იყოს ერთნიშნა, ორნიშნა ან სამნიშნა. ცხადია, შესაბამისად გამოიყენება *KK* სკალის ერთნიშნა, ორნიშნა ან სამნიშნა ნაწილი და ყველა შემთხვევაში ფესვი იქნება ერთნიშნა.

იმ შემთხვევაში, როცა ფესვქვეშა რიცხვია სამზე მეტნიშნა, მაშინ მას მარჯვნიდან (ან მძიმიდან) მარცხნივ ვყოფთ სამ-სამ ჯგუფად, მაშასადამე, გადამწყვეტი (ანუ უკანასკნელი მარცხენა) ჯგუფი იქნება ერთნიშნა, ორნიშნა ან სამნიშნა, ამის შესაბამისად გამოვიყენებთ *KK* სკალის ერთნიშნა, ორნიშნა ან სამნიშნა ნაწილს, ხოლო ფესვის რიგი ტოლი იქნება ფესვქვეშა ჯგუფების რაოდენობისა.

წესიერი ათწილადიდან კუბური ფესვის ამოღებისას მძიმიდან მარჯვნივ მის ათწილად ნაწილს ვყოფთ სამ-სამ ციფრისაგან შემდგარ ჯგუფებად და უკანასკნელ ჯგუფს, თუ საჭიროა, ვავსებთ ნულებით. ნულებისაგან შემდგარ ჯგუფებს ეწოდება ნულოვანი ჯგუფები და მათ შემდეგ ერთნიშნა, ორნიშნა ან სამნიშნა გადამწყვეტი ჯგუფების შესაბამისად ვიყენებთ *KK* სკალის ერთნიშნა, ორნიშნა და სამნიშნა ნაწილს და ინდექსის შესაბამისად *DD* სკალაზე ამოკითხულ რიცხვს მიეწერება მძიმემდე იმდენი ნული, რამდენი ნულოვანი ჯგუფისაგანაც შედგება ფესვი; რაც გამოხატავს ფესვის უარყოფით რიგს.

№	მაგალითები	ინდექსის დაყენება *KK* სკალის	გადამწყვეტი ჯგუფი	ანათვალი *DD* სკალაზე	ჯგუფების რიცხვი	ნულოვანი ჯგუფები	ფესვის რიგი	ფესვი (შედეგი)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\sqrt[3]{640}$	სამნიშნა ნაწილზე	(640)	8, 6, 3	1	—	1	8,63
2	$\sqrt[3]{6400}=\sqrt[3]{6'400}$	ერთნიშნა	(6)	1, 8, 5	2	—	2	18,5
3	$\sqrt[3]{64000}=\sqrt[3]{64'000}$	ორნიშნა	(64)	4	2	—	2	40,0
4	$\sqrt[3]{640000}=\sqrt[3]{640'000}$	სამნიშნა	(640)	8, 6, 3	2	—	2	86,3
5	$\sqrt[3]{1260000}=\sqrt[3]{1'260'000}$	ერთნიშნა	(1)	1, 0, 8	3	—	3	108,0
6	$\sqrt[3]{6,4}=\sqrt[3]{6,400}$	ერთნიშნა	(6)	1, 8, 5	1	—	1	1,85
7	$\sqrt[3]{0,64}=\sqrt[3]{0,640}$	სამნიშნა	(640)	8, 6, 3	—	—	0	0,863
8	$\sqrt[3]{0,064}$	ორნიშნა	(64)	4	—	—	0	0,4
9	$\sqrt[3]{0,000640000}=\sqrt[3]{0,000'640'000}$	სამნიშნა	(640)	8, 6, 3	—	1	−1	0,0863
10	$\sqrt[3]{0,0000640}=\sqrt[3]{0,000'064'000}$	ორნიშნა	(64)	4	—	1	−1	0,04

H. გალოგარითმება

ნებისმიერი რიცხვის მახასიათებელი არის მისი რიგი ერთის გამოკლებით, ხოლო მანტისა ამოიკითხება *LL* სკალაზე მოძრავი ინდექსით, როცა იგი დაყენებულია *DD* ძირითადი სკალის იმ ანათვალზე, რომელიც შეესაბამე-

ბა მოცემულ რიცხვს. მაგალითად, lg 258 = 2.411, რადგანაც 258-ის რიგია 3, ე. ი. მახასიათებელია ორი, ხოლო *DD* სკალაზე 2, 5, 8 ანათვალზე დაყენებულ მოძრავ ინდექსს *LL* სკალაზე შეესაბამება ანათვალი 4, 1, 1.

ცხადია, შებრუნებული მოქმედებით, ანუ ცნობილი ლოგარითმით, შეიძლება მოიძებნოს შესაბამისი რიცხვი.

ვთქვათ lg$N$ = 2.411, მაშინ N = 258, რადგანაც მოცემული ლოგარითმის მახასიათებელია 2, ხოლო *LL* სკალის 4, 1, 1 ანათვალზე დაყენებულ მოძრავ ინდექსს *DD* ძირითად სკალაზე შეესაბამება 2, 5, 8 ანათვალი.

№	მაგალითები	მახასიათებელი	ანათვალი *DD* სკალაზე	ანათვალი *LL* სკალაზე	ლოგარითმი
1	2	3	4	5	6
1	lg 99	1	9, 9	9, 9, 6	1.996
2	„ 4400	3	4, 4	6, 4, 3	3.643
3	„ 2	0	2	3, 0, 1	0.301
4	„ 0,2	$\bar{1}$	2	3, 0, 1	$\bar{1}$.301
5	„ 0,02	$\bar{2}$	2	3, 0, 1	$\bar{2}$.301
6	„ 0,002	$\bar{3}$	2	3, 0, 1	$\bar{3}$.301
7	„ 0,000482	$\bar{4}$	4, 8, 2	6, 8, 3	$\bar{4}$.683
8	„ 38,30	1	3, 8, 3	5, 8, 3	1.583
9	„ 38,300	1	3, 8, 3,	5, 8, 3	1.583
10	„ 0,383	$\bar{1}$	3, 8, 3	5, 8, 3	$\bar{1}$.583

შებრუნებული მოქმედების შესრულება ადვილია.

II. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოთვლა

5°44′—90°-მდე სინუსების და 5°44′-დან 45°-მდე ტანგენსების; 41′-დან 5°44′-მდე თანადროულად სინუსებისა და ტანგენსების ოდენობების დასადგენად ვიყენებთ მოძრავი შიმშის მეორე მხარეს, რისთვისაც მას გადავაბრუნებთ ისე, რომ მისი tg-ბის სკალების თავი და ბოლო ზუსტად შეეთავსდეს *DD* ძირითადი სკალის თავსა და ბოლოს. ზუსტად დამზადებულ შიმშაში, ცხადია, sin-ბის სკალის თავი და ბოლო შეეთავსდება *BB* კვადრატების სკალის თავსა და ბოლოს. მაგალითად, sin = 35° = 0,573, რადგანაც sin-ბის სკალის 35-ზე დაყენებულ მოძრავ ინდექსს *DD* ძირითად სკალაზე შეესაბამება 5,7,3 ანათვალი და ამავე დროს ვიცით, რომ 0-დან 90°მდე კუთხის სინუსი იცვლება ნულიდან ერთამდე. ასევე tg 35° = 0,7, რადგანაც tg-ბის სკალის 35-ზე დაყენებულ მოძრავ ინდექსს *DD* ძირითად სკალაზე შეესაბამება ანათვალი 7 და ამავე დროს ცნობილია, რომ 0°-დან 45°-მდე კუთხის ტანგენსი ერთზე ნაკლებია. 41′-დან 5°44′-მდე კუთხეების sin-სა და tg-ს ვიღებთ თანადროულად შუა (საერთო) *SST* სკალის გამოყენებით. მაგალითად, sin 3°24′ = tg 3° 24′ = 0,0593, რადგანაც სინუსებისა და ტანგენსების საერთო სკალის 3°24′-ზე დაყენებულ მოძრავ ინდექსს *DD*

ძირითად სკალაზე შეესაბამება ანათვალი 5, 9, 3 და ამავე დროს ცნობილია, რომ 41′-დან 5°44′-მდე კუთხის სინუსები და ტანგენსები იცვლება 0,01-დან 0,1-მდე.

ზემოთ მოყვანილი გამოთვლები შეიძლება შესრულდეს მოძრავი შიმშის გადაუბრუნებლადაც, რისთვისაც ვიყენებთ კორპუსის მეორე მხარის თავში ერთ ქვედა უძრავ ინდექსს (კვესურს) tg-ბის სკალისათვის და ბოლოში ზედა ინდექსს sin-ბისათვის და ქვედას თანადროულად SgT ორივე ფუნქციისათვის. მაგალითად, sin 35° გამოთვლისათვის მოძრავ სკალას გაეწევთ მარჯვნივ ისე, რომ ზედა ინდექსს შეუთავსდეს სინუსების სკალის 35°. მერე გადავაბრუნებთ კორპუსს და DD ძირითადი სკალის ბოლო (10) შტრიხით ავიღებთ $D'D'$ სკალაზე ანათვალს 5, 7, 3, ე. ი. $\sin 35° = 0{,}573$. ასევე, $\sin 3°24' = \operatorname{tg} 3°24'$, SgT სკალის 3°24′ შევუთავსებთ ქვედა უძრავ ინდექსს, გადავაბრუნებთ კორპუსს და ანათვალი $D'D'$ სკალაზე იქნება 5, 9, 3, ე. ი. $\sin 3°24' = \operatorname{tg} 3°24' = 0{,}0593$. ანალოგიურად გამოითვლება tg 35°, რისთვისაც მოძრავი შიმშა უნდა გადავაადგილოთ მარცხნივ ისე, რომ ტანგენსის სკალის 35° შეუთავსდეს ქვედა ინდექსს, გადავაბრუნოთ კორპუსი და DD სკალის საწყისი შტრიხით (1) ავიღოთ ანათვალი $D'D'$ სკალაზე. ეს იქნება 7. მაშასადამე, $\operatorname{tg} 35° = 0{,}7$.

3. 2. 6. გამომთვლელი მანქანები

გამომთვლელ მანქანებს ყოფენ *უწყვეტად მოქმედ* და *დისკრეტულად მოქმედ* ჯგუფებად. *პირველი* ჯგუფის *მანქანებით* მიღებული შედეგები ხასიათდება შეზღუდული სიზუსტით. მათი საშუალებით ვიღებთ კონკრეტული ფიზიკური სიდიდეების ოდენობებს, როგორიცაა მონაკვეთების სიგრძეები, ფართობები და სხვ. მაგალითად, უწყვეტად მოქმედი მანქანების უმარტივეს სახეს წარმოადგენს წინა პარაგრაფში განხილული *ლოგარითმული საანგარიშო შიმშა*, რომელზეც რიცხვების ლოგარითმებს შეესაბამება წრფეების მონაკვეთები და მათი შეკრება-გამოკლებით სრულდება გადასამრავლებელი ან გასაყოფი რიცხვების ლოგარითმების შეკრება-გამოკლება; *კურვიმეტრი*, რომლითაც განისაზღვრება ხაზების სიგრძეები; *ანეროიდი* — ჰაერის წნევის გასაზომად; თერმომეტრი — ტემპერატურის გასაზომად; პლანიმეტრი, — გეგმებსა და რუკებზე ფართობების გასაზომად და სხვ. *მეორე ჯგუფის* მანქანებით პრინციპულად შეიძლება მივიღოთ შედეგი განუზღვრელი სიზუსტით. ამ მანქანებზე ამოცანების ამოხსნა ხდება არითმეტიკული მოქმედებების თანდათანობითი (თანმიმდევრულად) შესრულებით, რის გამო ციფრებით საანგარიშო ასეთ მანქანებს უწოდებენ დისკრეტულად გამომთვლელს. ისინი იყოფიან *მექანიკურ ელექტრულ* (ელექტრობით მოქმედ) და *ელექტრონულ* (ელექტრონიკასთან ანუ ელექტრონული ხელსაწყოების გამოყენებასთან დაკავშირებულ) ჯგუფებად. ციფრებით საანგარიშო მანქანებში გამოსავალი ციფრობრივი მონაცემების დაყენება ხდება *ავტომატურად* ან *ხელით*. პირველი ხასიათდება დიდი ნაყოფიერებით. ისინი იყოფიან: *საანგარიშო-ანალიზურ მანქანებად*, რომელთა კომპლექსში შედის რამდენიმე მანქანა შესაბამისი მოქმედებების შესასრულებლად, და *ელექტრონულ* მანქანებად, რომლებიც შეიძ-

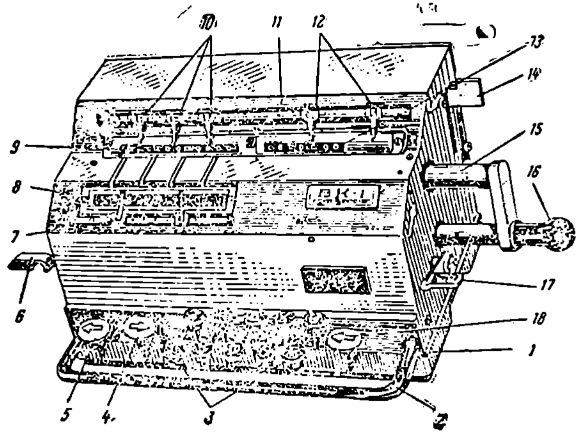
ლება იყოს უნივერსალური ან სპეციალური დანიშნულე-ბისათვის

მანქანები, რომლებშიც გამოსავალი ციფრობრივი მონაცემების დაყენება ხდება ხელით, იყოფა მაჯამებელ მანქანებად, — უმთავრესად შეკრება-გამოკლებისათვის (აქ შეიძლება ტექსტის ბეჭდვაც), და მცირე ზომის გამომთვლელ მანქანებად გამრავლება-გაყოფისათვის. ეს უკანასკნელნი შეიძლება იყოს: არაავტომატური, როგორიცაა არითმომეტრები და ზოგი ათკლავიშიანი (მაგალითად, ВК—1) მანქანები, ნახევრად ავტომატები და სრული ავტომატები.

ქვემოთ განვიხილავთ ათკლავიშიან „ВК—1", სრულ ავტომატ-„ВММ—2", ელექტრო და კლავიშებიან ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანას „ისკრა 111".

Ა. არაავტომატური ათკლავიშიანი მანქანა ВК—1

განხილადი მანქანა წარმოადგენს გაუმჯობესებულ არითმომეტრს, რომლის საშუალებით შეიძლება შესრულდეს რიცხვების მიმატება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა (ნახ. 1). მას გამოსავალი ციფრების დაყენებისათვის (აღებისათვის) აქვს კლავიატურა 3 ათი ცალი შავი კლავიშით, რომლებიც



ნახ. 3.2.6.1.

განლაგებული არიან ორ რიგად; ზედა რიგის ხუთი კლავიშზე წარწერილია 2, 4, 5, 7, 9. ქვედა ხუთ კლავიშზე კი 1, 3, 0, 6, 8 ციფრები. ამ მანქანაშია დასაყენებელი მოძრავი დოლი. მასზე აღინიშნება (დაყენდება) საჭირო გამოსავალი ციფრები კლავიატურის 3 კლავიშებზე თითის დაჭერით[1]. ამავე დროს ყოველ ჯერზე ხდება დოლის მარცხნივ გადაადგილება თითო ციფრით, რაც იხილება საკონტროლო ფანჯარაში 8. იმის შემდეგ, რაც დოლზე გადაიტანება საჭირო რიცხვი, შეიძლება მისი გადაადგილება მარცხნივ

[1] ტექსტში კლავიშზე თითის დაჭერა მის ჩართვას ნიშნავს.

ან მარჯვნივ, შესაბამისად 5 ან 4 წითელ კლავიშზე თითის დაჭერით. დოლის ერთბაშად ბოლომდე მარცხნივ გადაადგილება კი შეიძლება წითელ კლავიშზე 18 თითის დაჭერით, 4, 5, 18 კლავიშებზე დატანილია თეთრი ისრებით, რომლებიც გვიჩვენებენ დასაყენებელი დოლის გადაადგილების მიმართებას. განხილადი დოლი არის 9 თანრიგიანი, ანუ იგი საშუალებას იძლევა მასზე დავაყენოთ (ავიღოთ) არაუმეტეს 999 999 999 რიცხვისა. სრული ბრუნვების ალმრიცხველი, რომლის ფანჯარაა 18, რვა ნიშნიანია, ხოლო შედეგის ალმრიცხველი, რომლის ფანჯარაა 9, იტევს 13 ნიშანს (ციფრს). დოლზე დაყენებული რიცხვის ჩაშლა და დოლის საწყის მდებარეობაში (უკიდურესი მარჯვნივ) დაბრუნება ხდება მარჯვენა ხელის ცერის ბერკეტზე 17 ზევით ბოლომდე მიჭერით, ხოლო სრული ბრუნვების ალმრიცხველზე 18 რიცხვებისა და შედეგის ალმრიცხველის 9 რიცხვების ჩაშლა ხდება შესაბამისად თითებით 14 ბერკეტის სახელურისკენ და 0 ბერკეტის ქვევით გადაწევით. სრული ბრუნვებისა 18 და შედეგის 9 ფანჯრის ზემოთ 11 და დასაყენებელი მოძრავი დოლის საკონტროლო 8 ფანჯრის ქვევით ლითონის თამასებზე დაშტამპულია სათანადო ნიშნის მაჩვენებელი ციფრები, რომლებზეც საჭიროებისამებრ დგება მოძრავი მძიმეები 7, 10 და 12 მრგვალი ხვრეტებით.

გარდა ზემოთ ნაჩვენები ელემენტებისა, განხილად მანქანაში საყურადღებოა: ოპერაციული სახელური 16; პოსტამენტი 1; დამცავი ჩანგალი 2; ოპერატიული სახელურის კრონშტეინი 15.

ა. წინასწარი ღონისძიებები

სანამ შევუდგებოდეთ მანქანით გამოთვლებს, საჭიროა წინასწარ მისი (ნახ. 1) დაყენება საწყის მდგომარეობაში. ამისათვის სახელური 16 უნდა იდგეს შეეულად და აგრეთვე ჩამჯდარი იყოს მისი კრონშტეინის ბუდეში 15; დოლის, ბრუნვების და შედეგის ალმრიცხველები უნდა იყოს ჩაშლილი ანუ დოლს უნდა ჰქონდეს უკიდურესი მარჯვენა მდებარეობა (ფანჯარაში დოლი ციფრებით არ უნდა ჩანდეს, ხოლო ფანჯრებში 18 და 9 უნდა იხილებოდეს ნულები), რაც მიიღწევა შესაბამისად 17 ბერკეტის ზევით აწევით და 14 და 0 ბერკეტის სახელურისაკენ და ქვემოთ დაწევით.

განხილად მანქანაში მექანიზმების ის ნაწილები, რომლებიც გამოთვლებში არ მონაწილეობენ, ავტომატურად იკეტება. მაგალითად, დოლზე გადატანილი კლავიატურის 8 ციფრები იკეტება და სახელურის 10 ბრუნვით ან 3 და 4 წითელი კლავიშების ჩართვით არ ჩაიშლება. ნებისმიერი ჩაშლის დროს სახელური უნდა იყოს მისი კრონშტეინის 15 ბუდეში ჩაკეტილი; საერთოდ, უნდა ხდებოდეს სახელურის სრული ბრუნვა და ბუდეში ჩაკეტვა. კლავიატურის 8 რომელიმე კლავიშზე თითის დაჭერით შესაბამისი ციფრი თუ ვერ გადავიტანეთ დოლზე ანუ როცა კლავიში ბლოკირებულია (გამოთიშულია), საჭიროა მის ბერკეტს 17 მივაჭიროთ მარჯვენა ხელის ცერი, დოლი დავუბრუნოთ საწყის (მარჯვენა კიდური) მდებარეობას და ისევ დავიწყოთ ციფრების აკრეფა.

ბ. შეკრება

ვთქვათ, საჭიროა შეიკრიბოს

$$12694+449275{,}6+38{,}08+225{,}004=?$$

7 და 10 მოძრავი მძიმეებით გამოვყოფთ მარჯვნიდან მარცხნივ სამ-სამ

ათწილად ციფრს (ე. ი. თამასებზე მძიმეების ხვრეტებში უნდა ჩანდეს ციფრი (3), რადგანაც ერთ-ერთ (ბოლო) შესაკრებში ათწილადი ციფრების მაქსიმალური რაოდენობაა სამი. მაშასადამე, დანარჩენი შესაკრებებიც უნდა გამოისახოს სამ-სამი ათწილადი ნიშნით; მანქანას ვაყენებთ საწყის მდგომარეობაში;

კლავიატურის 8 ციფრებზე თანამიმდევრობით (ისე როგორც იკითხება რიცხვი) თითის დაჭერით დოლზე გადავიტანთ პირველ შესაკრებს (12694.000) და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით მას გადავიტანთ შედეგის აღმრიცხველზე 9; მარჯვენა ხელის ცერის ბერკეტზე 17 ზემოთ მიჭერით ჩავშლით დოლზე გადატანილ პირველ შესაკრებს, ანუ დოლს (კლავიატურას) ვაყენებთ საწყის მდებარეობაში, მასზე გადავიტანთ მეორე შესაკრებს (449275,600) და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით მას გადავიტანთ შედეგის აღმრიცხველზე 9, რომელზეც მიიღება პირველი და მეორე შესაკრების ჯამი (461969,600): ჩავშლით დოლზე გადატანილ მეორე შესაკრებს, მასზე გადავიტანთ მესამე შესაკრებს, (38,080) და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით ამ უკანასკნელს გადავიტანთ შედეგის აღმრიცხველზე, რომელზეც მიღებული სამი შესაკრების ჯამი იქნება 462007,680: ჩავშლით დოლზე გადატანილ მესამე შესაკრებს, მასზე გადავიტანთ მეოთხე შესაკრებს (225.004) და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით შედეგის აღმრიცხველზე მისი ფანჯრიდან 9 გამოჩნდება ოთხივე შესაკრების ძიებული ჯამი (462232.684), ხოლო ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 18 ვიხილავთ (4), რაც შესაკრებთა რაოდენობის ანუ სრული ბრუნვების რიცხვის მაჩვენებელია. მაშასადამე,

$$12694+449275{,}6+38{,}08+225{,}004=462232{,}684.$$

დ. გამოკლება

ეს მოქმედება სრულდება შეკრების ანალოგიურად, მხოლოდ აქ შედეგის აღმრიცხველზე საკლების გადატანის შემდეგ საჭირო ხდება სახელურის უკუღმა ბრუნვა.

ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს სხვაობა:

$$46\,2\,232{,}684-225{,}004-38{,}08-449\,275{,}6=?$$

საკლებს (462 232,684) გადავიტანთ დოლზე, და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით მას გადავიტანთ შედეგის აღმრიცხველზე; ჩავშლით დოლზე გადატანილ საკლებს და მის მაგიერ მასზე გადავიტანთ პირველ მაკლებს (225,004), სახელურის ერთი სრული უკუღმა ბრუნვით შედეგის აღმრიცხველზე მის ფანჯარაში 9 ამოვიკითხავთ პირველ სხვაობას (462 007.680); ჩავშლით დოლზე გადატანილ პირველ მაკლებს და მის მაგიერ დოლზე გადავიტანთ მეორე მაკლებს (38,080), სახელურის ერთი სრული უკუღმა ბრუნვით შედეგის აღმრიცხველზე მივიღებთ მეორე სხვაობას (461 969,600); ჩავშლით დოლზე გადატანილ მეორე მაკლებს და მის მაგიერ მასზე გადავიტანთ მესამე მაკლებს (449 275,600), სახელურის ერთი სრული უკუღმა ბრუნვით შედეგის აღმრიცხველზე მივიღებთ საბოლოო სხვაობას (12 694,000). მაშასადამე, 462 232,684—225,004—38,08—449 275,6 = 12 694,000.

d გამრავლება

განხილად მანქანაზე გამრავლება სრულდება არითმეტიკაში მიღებული წესის შესაბამისად, მხოლოდ აქ ხდება სამრავლის შეკრება თანამიმდევრობით მამრავლის ერთეულების, ათეულების, ასეულების და ასე შემდგომ ციფრების შესაბამისად.

ვთქვათ, საჭიროა განვსაზღვროთ ნამრავლი 9,206 · 15,8 = ?

მანქანას მოვიყვანთ საწყის მდგომარეობაში; შედეგის აღმრიცხველის ზემოთ თამასაზე **10** გამოვყოფთ მძიმით ოთხ ათწილად ციფრს, რადგანაც თანამამრავლების ათწილადი ციფრების რაოდენობაა ოთხი.

ერთ-ერთ თანამამრავლს, მაგალითად, 9,206 ვაყენებთ დოლზე და ფანჯარაში **8** ცქერით ვამოწმებთ დოლზე ამ თანამამრავლის დაყენების სისწორეს;

ჩვეულებრივი გამრავლების წესის მიხედვით ხსენებულ სამრავლს ვამრავლებთ რვაჯერ, რისთვისაც სახელურს ვაბრუნებთ წაღმა რვაჯერ, ე. ი. სამრავლი შეიკრიბა რვაჯერ ჩვეულებრივი გამრავლების წესის შესაბამისად;

მარცხენა ხელის ცერს ვაჭერთ წითელ კლავიშზე **5**, ანუ დოლს გადავაადგილებთ მარცხნივ ერთი ციფრით, რაც შეესაბამება მამრავლის მეორე ციფრს (5) მარჯვნიდან მარცხნივ და სახელურს ვაბრუნებთ წაღმა ხუთჯერ; ე. ი. სამრავლი შეიკრიბა ხუთ ათეულჯერ;

წითელ კლავიშზე **5** ცერის დაჭერით დოლს გადავაადგილებთ მარცხნივ, რაც შეესაბამება მამრავლის მესამე ციფრს (1) მარჯვნიდან მარცხნივ და სახელურს ვაბრუნებთ ერთხელ, ე. ი. სამრავლი შეიკრიბება ერთ ასეულჯერ.

ნამრავლი იქნება 145,4548, რომელსაც ამოვიკითხავთ შედეგის აღმრიცხველის ფანჯარაში **9**, ხოლო მამრავლი 15,8 ამოიკითხება ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში **13**, აგრეთვე დოლზე გადატანილი სამრავლი 9,206 უნდა ჩანდეს საკონტროლო ფანჯრიდან **8**, რაც გამრავლების პროცესში მისი დაყენების უცვლელობას აკონტროლებს.

მაშასადამე, 9,206 · 15,8 = 145,4548. ცხადია, რომ 9 206 . 158 = 1454546, ე. ი. მთელი რიცხვების გამრავლება იგივე წესით ხდება, სადაც ათწილადების გამოყოფა საჭირო არ არის. ახლა ვთქვათ, საჭიროა განვსაზღვროთ 9,206. 15,8 · 23 ნამრავლი. ამისათვის პირველი ორი თანამამრავლის ნამრავლი უნდა გადმოვიტანოთ დოლზე, რისთვისაც **17** და **14** ბერკეტებზე მარჯვენა ხელის ცერისა და საჩვენებელი თითის საშუალებით პირველ 9,206 და მეორე 15,8 თანამამრავლს ჩავშლით და კლავიატურის **8** სათანადო კლავიშებზე თითის დაჭერით დოლზე გადავიტანთ 145,4548-ს, ხოლო შედეგის თამასის **10** ოთხზე დაყენებული მძიმე ისევ ისე დარჩება. შემდეგ ბერკეტზე **6** მარცხენა ხელის ცერის დაჭერით ჩაიშლება ხსენებული ნამრავლი, რის შედეგად შედეგის ფანჯარაში **9** უნდა ვიხილოთ ნულები. სახელურს ვაბრუნებთ წაღმა 3-ჯერ, შემდეგ წითელ კლავიშზე **5** თითის დაჭერით დოლს გადავაადგილებთ მარცხნივ ერთი ციფრით, რაც მარჯვნიდან მარცხნივ მესამე მამრავლს (2) შეესაბამება და სახელურს ვაბრუნებთ წაღმა ორჯერ. შედეგის ფანჯარაში **9** გამოჩნდება 3345,4604, ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში **13** კი — მესამე მამრავლი 23, ხოლო დოლზე უნდა დარჩეს 145,4548. მაშასადამე, 9,206 . 15,8 . 23 = = 3345,4604.

ე. გაყოფა

გაყოფაც ჩვეულებრივი წესით ხდება, მხოლოდ აქ სრულდება თანამიმდევრობითი გამოკლებები ან გასაყოფის გამრავლება გამყოფის შებრუნებულ რიცხვზე.

ვთქვათ, საჭიროა განვსაზღვროთ განაყოფი 145,4548 : 15,8. გასაყოფსა და გამყოფს წარმოვიდგენთ უმძიმოდ (1454548:158). კლავიატურის 8 სათანადო კლავიშებზე თითის დაჭერით გასაყოფს (1454548) გადავიტანთ დოლზე; წითელ კლავიშზე 18 მარჯვენა ხელის ცერის დაჭერით ერთბაშად გადავაადგილებთ დოლს მარცხენა უკიდურეს მდებარეობაში და სახელურის ერთი სრული წალმა ბრუნვით დოლზე გადატანილ გასაყოფს (1454548) გადავიტანთ შედეგის აღმრიცხველზე, რაც უნდა იხილებოდეს მის ფანჯარაში 9. 17 და 14 ბერკეტის საშუალებით ჩავშლით (დავაყენებთ საწყის მდებარეობაში) დოლზე აღებულ გასაყოფსა და ბრუნვათა აღმრიცხველზე ერთიანს; კლავიატურის 8 სათანადო კლავიშებით გადავიტანთ გამყოფს (158) დოლზე; წითელ კლავიშზე 18 ცერის დაჭერით დოლს გადავაადგილებთ მარცხენა უკიდურეს მდებარეობაში; სახელურს ვაბრუნებთ უკუღმა მანამ, სანამ არ გავიგონებთ ზარს (ანუ შედეგის აღმრიცხველზე გადატანილი გასაყოფის წინა ციფრები არ მიიღება გამყოფის წინა ციფრებზე მეტი, მაგალითად, 98), რაც გვამცნობს იმას, რომ ერთი სრული უკუღმა ბრუნვა შესრულებულია ზედმეტად, მაშასადამე, უკანვე, ე. ი. ერთი სრული წალმა ბრუნვა უნდა შევასრულოთ, რის შედეგად ბრუნვების აღმრიცხველზე მივიღებთ განაყოფის პირველ ციფრს (9); შემდეგ წითელ კლავიშზე 4 ცერის დაჭერით დოლს გადავაადგილებთ მარჯვნივ ერთი ციფრით; სახელურს ვაბრუნებთ უკუღმა, მესამე სრულ ბრუნვაზე გავიგონებთ ზარს (ფანჯარაში გამოჩნდება 998). ე. ი. სახელური ერთხელ უნდა შევაბრუნოთ წალმა და ბრუნვების აღმრიცხველზე 13 გამოჩნდება 92; წითელ კლავიშზე 4 ცერის დაჭერით დოლს გადავაადგილებთ მარჯვნივ ერთი ციფრით: სახელურს ვაბრუნებთ უკუღმა, მაგრამ ზარი (ანუ შედეგის ფანჯარაში გასაყოფის წინ გამოჩენილი 9999) გვამცნობს, რომ საჭიროა სახელურის ისევ წალმა ერთი ბრუნვა და ბრუნვების აღმრიცხველზე ფანჯარაში 13 გამოჩნდება 920: ე. ი. საჭიროა დოლის გადაწევა წითელი კლავიშით 4 მარჯვნივ; სახელურს ვაბრუნებთ უკუღმა და ენახავთ რომ ექვსი ბრუნვის შემდეგ შედეგის ფანჯარაში 9 ნულებია. დოლის (საკონტროლო) ფანჯარაში 8 გამყოფი 158 იქნება, ხოლო ბრუნვების აღმრიცხველის ფანჯარაში 13 კი გამოჩნდება 9206.

განაყოფის რიგის დადგენისათვის მარცხნიდან მარჯვნივ ერთმანეთს ვადარებთ გასაყოფისა და გამყოფის პირველ, მეორე, მესამე... ციფრების ოდენობებს. ვინაიდან, გასაყოფისა და გამყოფის პირველი ციფრები (1) ტოლია, ვადარებთ მათი მეორე ციფრების ოდენობებს და რადგანაც გასაყოფის მეორე (4) ციფრი ნაკლებია გამყოფის მეორე (5) ციფრზე, განაყოფის q რიგის ოდენობას ვანგარიშობთ ფორმულით

$$q = m - n, \qquad (3.2.6.1)$$

სადაც q არის განაყოფის რიგი;

m, n — შესაბამისად გასაყოფისა და გამყოფის რიგი.

მაშასადამე, განხილად შემთხვევაში რადგანაც $m=3$ და $n=2$,

$$q=3-2=1.$$

ე. ი. 145,4548 : 15,8 = 9,206-ის ანალოგიურად:

145 4548 : 158000 = 9,206, რადგანაც $m=7$ და $n=6$;

1454548 : 158 = 9206, რადგანაც აქ $m=7$; $n=3$;

0,1454548 : 0,158 = 0,9206, რადგანაც $m=0$ და $n=0$;

0,01454548 : 0,00158 = 9,206, რადგან $m=-1$ და $n=-2$.

გასაყოფისა და გამყოფის მეორე ციფრებიც რომ ტოლი ყოფილიყო, შევადარებდით მესამე ციფრებს და ასე შემდეგ.

ახლა ვთქვათ, საჭიროა გამოვითვალოთ 860,76 : 37,1 = ? გაყოფა შესრულდება ცხობილი თანამიმდევრობით, მაგრამ ვინაიდან გასაყოფის პირველი ციფრი (8) მეტია გამყოფის პირველ (3) ციფრზე, განაყოფის რიგი q გამოითვლება ფორმულით:

$$q=m-n+1. \qquad (3.2.6.2)$$

ზემოთ მოყვანილი წესით შედეგის ფანჯარაში 9 ვიხილავთ ნაშთს 4, დოლის (საკონტროლო) ფანჯარაში გამყოფს 371, ხოლო ბრუნვების აღმრიცხველ ფანჯარაში 18 კი 232-ს. მაშასადამე, 860,76 :37,1 = 23,20 + 0,04, რადგანაც $m=3$ და $n=2$.

ანალოგიურად: 86076 : 3710 = 23,20 + 0,04, რადგანაც $m=5$ და $n=4$; 0,04 კი ნაშთია.

0,086076 : 0,371 = 0,23, რადგანაც $m=-1$; $n=0$;

0,0086076 : 0,0371 = 0,23 „ $m=-2$; $n=-1$.

306:30 = 10,2, რადგანაც $m=3$, $n=2$, და გასაყოფის მესამე ციფრია 6, ხოლო გამყოფის მესამე ციფრი იგულისხმება ნული, ე. ი. $6>0$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, (1) და (2) ფორმულის გამოყენება წყდება გასაყოფისა და გამყოფის პირველი ციფრების შედარებით, მაგალითად, თუ გასაყოფის პირველი ციფრი მეტია გამყოფის პირველ ციფრზე, განაყოფის რიგის დასადგენად ვიყენებთ (2) ტოლობას, წინააღმდეგ შემთხვევაში განაყოფის რიგის დასადგენად ვიყენებთ (1) ტოლობას. თუ გასაყოფისა და გამყოფის პირველი ციფრები ტოლია, მაშინ იგივე წესით საკითხი წყდება მეორე ციფრების მიხედვით. ასევე, როცა მეორე ციფრებიც ტოლია, მაშინ საკითხი წყდება მესამე ციფრებით და ასე შემდეგ.

f. BK—1 მანქანის შემოწმება

არსებობს განხილადი მანქანის შემოწმების რამდენიმე ხერხი, რაც სჯობს შესრულდეს გამრავლების ელემენტარული წესის გაცნობის შემდეგ.

1. ერთის წარწერის მქონე კლავიშზე ცხრაჯერ თითის დაჭერის შედეგად დასაყენებელ მოძრავ დოლზე დაუბრკოლებლივ უნდა იქნეს გადატანილი 111 111 111 რიცხვი, რომელიც უნდა ჩავშალოთ და იგივე გავიმეოროთ ცალ-ცალკე 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 წარწერებიანი კლავიშებით.

2. მანქანით უნდა შესრულდეს (1) ცხრილში მოყვანილი ოპერაციები..

ცხრილი 3.2.6.1

დოლზე გადატანილი რიცხვი (სამრავლი)	სახელურის წაღმა ბრუნვის რაოდენობები (მამრავლები)	შედეგის აღმრიცხველზე უნდა მივიღოთ რიცხვები (ნამრავლები)
123 456 789	9	1 111 111 101
123 456 789	18	2 222 222 202
123 456 789	27	3 333 333 303
123 456 789	36	4 444 444 404
123 456 789	45	5 555 555 505
123 456 789	54	6 666 666 606
123 456 789	63	7 777 777 707
123 456 789	72	8 888 888 808
123 456 789	81	9 999 999 909

3. უნდა შევასრულოთ (2) ცხრილში მოყვანილი ოპერაციები

ცხრილი 3.2.6.2

დოლზე გადატანილი რიცხვი (სამრავლი)	სახელურის წაღმა ბრუნვის რაოდენობა (მამრავლები)	შედეგის აღმრიცხველზე უნდა მივიღოთ რიცხვები (ნამრავლები)
12 345 679	9	111 111 111
12 345 679	99	11 222 222 221
12 345 679	999	12 333 333 321
12 345 679	9 999	123 444 444 321
12 345 679	9 9 999	1234 565 654 321

4. უნდა შესრულდეს (3) ცხრილში მოყვანილი ოპერაციები.

ცხრილი 3.2.6.3

დოლზე გადატანილი რიცხვი (სამრავლი)	სახელურის წაღმა ბრუნვის რაოდენობა (მამრავლები)	შედეგის აღმრიცხველზე უნდა მივიღოთ რიცხვები (ნამრავლები)
37 037 037	3	111 111 111
37 037 037	6	222 222 222
37 037 037	9	333 333 333
37 037 037	12	444 444 444
37 037 037	15	555 555 555
37 037 037	18	666 666 666
37 037 037	21	777 777 777
37 037 037	24	888 888 888
37 037 037	27	999 999 999

5. უნდა შესრულდეს (4) ცხრილში მოყვანილი ოპერაციები.

ცხრილი 3.2.6.4

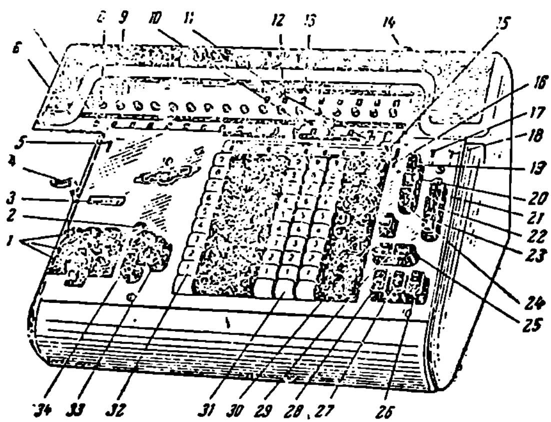
დოლზე გადატანილი რიცხვი (სამრავლი)	სახელურის წალმა ბრუნვის რაოდენობა (მამრავლები)	შედეგის აღმრიცხველზე უნდა მივიღოთ რიცხვები (ნამრავლები)
37 037 037	3	111 111 111
»	33	1 222 222 221
	333	1 2333 333 321
	3333	1 23 444 444 321
»	33333	1 234 555 554 321
»	333333	12345 666 654 321

6. დოლზე გადავიტანოთ ნებისმიერი რიცხვი და გავამრავლოთ იგი რაიმე რიცხვზე. შემდეგ ვიმოქმედოთ შებრუნებით, ანუ მიღებული ნამრავლი გავყოთ დოლზე გადატანილ რიცხვზე (თანამიმდევრობით ვაბრუნოთ სახელური უკუღმა), ბრუნვების აღმრიცხველ (მამრავლის) 18 და შედეგის (ნამრავლის) 9 ფანჯარაში უნდა ვიხილოთ ნულები, ხოლო დოლზე უცვლელად უნდა დარჩეს მასზე ადრე გადატანილი სამრავლი რიცხვი.

მანქანას შეიძლება ჰქონდეს ისეთი დეფექტი, რომელიც შეიძლება ვერ გამოვლინდეს ზემოთ მოყვანილი შემოწმებებით, ეს არის ამ ტიპის მანქანის ერთ-ერთი უარყოფითი თვისება. შედარებით უფრო სრული შემოწმებაა მესამე და მეხუთე, რადგანაც ეს შემოწმებები ეხება ბრუნვებისა და შედეგის აღმრიცხველის ყველა თანრიგს.

B. სრული ავტომატური გამომთვლელი მანქანა BMM—2

განხილად მრავალკლავიშიან გამომთვლელ მანქანას აგრეთვე უწოდებენ სრულკლავიშიან გამომთვლელ მანქანას, რომელსაც აქვს ელექტროძრავი. იგი ძირითადად განკუთვნილია რიცხვების გამრავლება-გაყო-



ნახ 3.2.6.

ფისათვის. მასზე აგრეთვე მოხერხებულია სხვადასხვა რთული არითმეტიკული მოქმედებების შესრულება (ნახ. 2).

ა. რიცხვების დასაყენებელი კლავიატურა

გამოსათვლელი რიცხვების ციფრების დაყენება ხდება ც ი ფ რ ე ბ ი ა ნ ი კ ლ ა ვ ი ა ტ უ რ ი თ 32, რომლის ციფრებიანი ჯგუფები, ადვილად გამოყენების მიზნით, შეღებილია შავი და თეთრი ფერებით. იგი ცხრაციფრიანია (შეიძლება აღება ცხრაციფრიანი რიცხვის). მის ყოველ ვერტიკალურ თანრიგოვან სვეტზე შეიძლება მხოლოდ ერთი ციფრის აღება: ხსენებული კლავიშებით აღებული რიცხვი უნდა გამოჩნდეს საკონტროლო მექანიზმის ფანჯარაში 16; ყოველ ვერტიკალურ სვეტში შეცდომით აღებული ციფრის ჩაშლა (წაშლა) ხდება მისი ქვედა კლავიშით 31, ხოლო აღებული მთელი რიცხვის ერთბაშად ჩაშლა შეიძლება კლავიშით 30, რომელსაც აქვს ვერტიკალურად სამი თეთრი შტრიხი (III), ცხადია, ამ დროს ეს რიცხვი წაიშლება საკონტროლო ფანჯარაშიც 15; რიცხვების შეკრება-გამოკლების დროს კლავიშა 20 (ანუ II წარწერიანი კლავიშა), რომლითაც ავტომატურად ხდება აღებული რიცხვების ჩაშლა, ა მ ო წ ე უ ლი (განთავისუფლებული) უნდა იყოს, რაც სრულდება მის ზემო კლავიშზე 19 თითის მსუბუქად დაჭერით. ერთი და იმავე რიცხვის რამდენიმეჯერ შეკრება-გამოკლების ან რიცხვის არაავტომატურად გამრავლების დროს საჭიროა კლავიში 20 (ანუ П) ჩაწეული იყოს, რისთვისაც მასზე მაგრად ვაჭერთ თითს. რიცხვების ავტომატურად გამრავლებისათვის ს ა მ რ ა ვ ლ ი აიღება ციფრებიანი კლავიატურის 32 ვერტიკალური სვეტის შესაბამის ციფრებზე თითის ღრმად დაჭერით, ხოლო მამრავლი აიღება მანქანის მარცხნივ განლაგებული ათციფრიანი კლავიატურის 1 სათანადო კლავიშებზე თითის მაგრად დაჭერით (წინააღმდეგ შემთხვევაში მანქანა ჩაიკეტება და არ იმუშავებს), აღებულ მამრავლს დავინახავთ მის ზემოთ მოწყობილ საკონტროლო ფანჯარაში 8 (აქ რვა ციფრისაგან შემდგარ რიცხვზე მეტი არ შეიძლება გამოჩნდეს, რადგანაც კლავიატურაზე 1 რვაციფრიანი რიცხვის აღება შეიძლება). მამრავლის კლავიატურაზე 1 ციფრები უნდა ავიღოთ ისე, როგორც ხდება რიცხვის წაკითხვა — მარცხნიდან მარჯვნივ. შეცდომით აღებული მამრავლის ჩაშლა ხდება ბერკეტის 4 ბოლომდე გადმოწევით; ავტომატური გამრავლებისათვის თითი უნდა დავაჭიროთ კლავიშს 34, რაზედაცაა დაკვესილი X (გამრავლების ნიშანი); გამრავლების დამთავრებისას ურიკა 6 უბრუნდება თავის საწყის მდებარეობას, მამრავლის საკონტროლო ფანჯრაში 8 მამრავლი ჩაქრება და კონტროლის მიზნით იგი უნდა გამოჩნდეს ბრუნვების აღმრიცხველის ფანჯარაში 13, რომელიც არის რ ვ ა თ ა ნ რ ი გ ი ა ნ ი (რვაციფრიანი).

ბ. აღმრიცხველი მექანიზმის ურიკა

შედეგის აღმრიცხველზე, რომლის საკონტროლო ფანჯარაა 7, გროვდება ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და ავტომატურად გადაიტანება გასაყოფი. აგრეთვე მასზე მბრუნავი თავების 8 საშუალებით უშუალოდ (არაავტომატურად) გადაიტანება გასაყოფი რიცხვი; ბრუნვათა აღმრიცხველი 13 გვიჩვენებს ბრუნვათა რიცხვს და როგორც ვთქვით ვიყენებთ მამრავლის საკონტროლოდ, ხოლო გაყოფის შემთხვევაში მასზე უნდა მივიღოთ განაყოფი; თამასებზეა შესაბამისად შედეგის აღმრიცხველის, კლავიატურის დაყენების საკონტროლო და ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯრების მოძრავი მძიმეები 10, 11, 12. უძრავი მაჩვენებელი 14 გვიჩვენებს კარეტის მდებარეობას ანუ ციფრთა იმ რაოდენობას, რო-

მელშიდაც მოცემულ მომენტში ხდება გამრთველები; 22 და 23 კლავიშებზე თითის დაჭერით, რომლებზეც ვერტიკალურად თეთრად დატანილია შტრიხი I და II, შესაბამისად ხდება ბრუნვათა 18 და შედეგის 7 ალმრიცხველის ჩაშლა ანუ ციფრებიანი ანათვლების ნულებზე დაყენება.

გ. ალმრიცხველების ავტომატურად ჩამშლელები

18 და 17 ბერკეტების ზემოთ გადაწევით მრავალი ნამრავლის ჯამს მივიღებთ შედეგის ფანჯარაში 7· ხოლო მამრავლთა რიცხვს (ან ბრუნვათა რიცხვს) მივიღებთ მის ფანჯარაში 13. იმავე ბერკეტების ქვემოთ გადაწევით ყოველი ახალი ნამრავლის წინ შესრულებული ნამრავლი და ბრუნვათა რიცხვი, რომლებიც ჩაწერილია 18 და 7 ფანჯრებში, ავტომატურად ჩაიშლება და მათ ნაცვლად ამ ფანჯრებში ყოველ ჯერზე მივიღებთ ცალკეულ ნამრავლებსა და მამრავლებს. ორივე ბერკეტი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მოქმედებს.

დ. მართვის კლავიშები

როცა П, ანუ კლავიში 20 მასზე თითის დაჭერით ჩ ა წ ე უ ლ ი ა, + წარწერიან კლავიშზე 27 თითის დაჭერით შესრულდება კლავიატურაზე 28 აღებული რიცხვის რამდენიმეჯერ შეკრება და პასუხს ვიღებთ შედეგის ალმრიცხველის ფანჯარაში 7. ამავე დროს ბრუნვების ალმრიცხველი ტრიალებს პლუს მიმართულებით და ყოველი სრული ბრუნვისას მის ფანჯარაში 18 რიცხვი იზრდება ერთეულით. — (მინუს) წარწერიან კლავიშზე 28 თითის დაჭერით ბრუნვებისა და შედეგის ალმრიცხველი ამოძრავდება უკუღმა და იმუშავებს გამოკლებაზე.

ბერკეტი 16 თუ გადავწიეთ პლუსიდან (ქვევიდან) მინუსისაკენ (ზემოთ) ბ რ უ ნ ვ ა თ ა ალმრიცხველი 18 დაიწყებს უკუღმა ბრუნვას, ე. ი. + კლავიშზე 27 თითის დაჭირებით იგი იმუშავებს გ ა მ ო კ ლ ე ბ ა ზ ე, ხოლო — კლავიშზე 28 თითის დაჭირებით იგი იმუშავებს მიმატებაზე; 26 და 29 ტრანსპორტის კლავიშებზე თითის დაჭირების შესაბამისად ხდება ურიკას 6 მარჯვნივ და მარცხნივ გადაადგილება; გამრავლების კლავიშზე 84 თითის დაჭერით ხდება რიცხვების ავტომატურად გამრავლება, ამავე დროს მიღებული ნამრავლები იკრიბება შედეგის ალმრიცხველზე 7 (თუ მე-17 ბერკეტი აწეულია ზემოთ), როცა დაგვჭირდება შესრულებული ნამრავლის გამოკლება შედეგის ალმრიცხველზე დაგროვილი რიცხვიდან, საჭიროა თითის დაჭერა X აღნიშვნიან კლავიშზე 2; გამრავლების შემდეგ ავტომატურად ურიკას დაბრუნება ხდება საწყის მდებარეობაში და გამოირთვება ბერკეტით 5. გამორთული ურიკა ჩერდება გამრავლების უკანასკნელი ოპერაციის შესაბამისი თანრიგის ადგილას, რის გამო შედეგის ალმრიცხველზე 7 მიღებული ნამრავლი შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც გასაყოფი შემდეგი გამოთვლებისათვის; შედეგის ალმრიცხველზე 7 არსებული რიცხვის გამრავლების მიზნით, ისევე როგორც სამრავლის გადატანა კლავიატურაზე 32 (რაც გამოჩნდება საკონტროლო ფანჯარაში 15), ხდება 

აღნიშვნიან კლავიშზე 21 თითის დაჭერით დაწეული ბერკეტის 18 დროს. კლავიატურაზე 32 აღებული რიცხვის, როგორც გასაყოფის

გადატანა შედეგის (ნამრავლის) აღმრიცხველზე 7 ხდება ÷ ნიშნიან კლავიშზე 88 თითის დაჭირებით. ამ დროს თითის დაჭირებით უნდა იქნეს დაყენებული გადამწევი (შემზღუდავი) ტაბულიარის 9 ერთ-ერთი კლავიში ისე, რომ მივიღოთ განაყოფი საჭირო სიზუსტით (განაყოფი გამოჩნდება მის ფანჯარაში 13); ავტომატურად გაყოფის ჩართვა ხდება ÷ ნიშნიან კლავიშზე 26 თითის დაჭერით, ამავე დროს კლავიში 10 ავტომატურად გადაირთვება მინუსზე, ე. ი. ბრუნვათა აღმრიცხველი იმუშავებს უკუღმა მინუსისაგან და გაყოფის დამთავრებისთანავე იგი ავტომატურად გადაირთვება ისევ პლუსზე; საჭიროები-

სამებრ ავტომატური გაყოფა შეიძლება შეწყდეს •‡ ნიშნიან კლა-

ვიშზე 24 აუღებლად თითის დაჭირებით.

ე. მანქანის გამზადება საექსპლუატაციოდ და დეფექტების გამოსწორება

I. დამცავი მოწყობილობის მოხსნა

ახალი მანქანის მიღებისას პირველ რიგში უნდა მოვხსნათ მისი კლავიატურის ხის დამცავი ფარი (დაფა) და დავათვალიეროთ მანქანა დაზიანებული ხომ არ არის.

მანქანის უკანა ფარის ზედა ხვრეტიდან უნდა ამოვხრახნოთ დამცავი ხრახნი, ელექტროძრავის ლილვის მარჯვენა განაპირა ხვრეტში ჩავუშვებთ სახრახნისს და ვაბრუნებთ წაღმა (საათის ისრის მოძრაობის შესაბამისად), მანამ კარეტა 6 არ დადგება სამუშაო მდებარეობაში. ამავე დროს თანრიგების უძრავი მაჩვენებელი 14 უნდა იდგეს ბრუნების აღმრიცხველის ფანჯრის 18 პირდაპირ და ჩაწეული ტრანსპორტის ერთ-ერთი კლავიში (25 ან 29) უნდა ამოიწიოს;

სამუშაო მდებარეობაში კარეტის დაყენების შემდეგ ხელით მისი გადაადგილება დაუშვებელია.

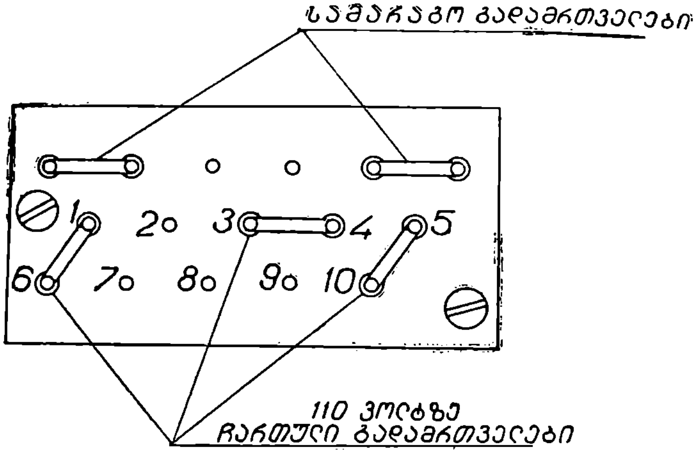
II. ელექტროძრავას ჩართვის შემოწმება

ქარხნის მიერ მანქანის ელექტროძრავა გადართულია 220 ვოლტ ცვლად ელექტროდენზე. ამიტომ საჭიროა ძრავას ამა თუ იმ ქსელში ჩართვამდე გაისინჯოს შეესაბამება თუ არა ქსელის ძაბვა ძრავას იმ ძაბვას, რომელზეც ის არის გადართული.

ცხადია, თუ ხსენებული ძაბვები არ არის ურთიერთშესაბამისი, საჭირო იქნება ძრავას გადართვა. ამისათვის კი პირველ რიგში საჭიროა ძრავას გამორთვა ელექტროქსელიდან.

ელექტროძრავას გადართვისათვის საჭიროა მის ქვემოთ გისოსისებური ფარის მოხსნა, რაც საშუალებას მოგვცემს მივუდგეთ ძრავას გადასართველ ჩარჩოს (კალაპოტს). ფარის შიგა გვერდზეა სამონტაჟო სქემა (რომელიც აქ

არ მოგვყავს). (3) ნახაზზე მოცემულია ჩარჩოზე განლაგებული დანომრილი ხვრეტები საკონტაქტო რკალების (გადამრთველებით) და ცხრილი.



ნახ. 3.2.6.3.

ვოლტი	ცვლადი დენი	მუდმივი დენი
110	1—6—3—4 5—10	1—6 3—4 5—10
120	1—2 4—5 9—10	1—6 3—8 5—10
130	1—6 3—8 5—10	1—7 2—8 9—10
160	1—6 3—8 4—5	1—6 3—8 4—9
200	1—6 3—8 4—9	1—2 8—9 4—10
220	1—6 2—8 4—9	1—6 8—9 4—10

ვთქვათ, საჭიროა მანქანის ელექტროძრავა გადაირთოს 110 ვოლტზე ცვლადი დენისათვის. ამისათვის, თანახმად ზემომოყვანილი ცხრილისა, ცვლადი ქსელისათვის საჭიროა საკონტაქტო რკალები (გადამრთველები) ისე იყოს დაყენებული, როგორც არის (3) ნახაზზე.

გადართვა სწორად არის შესრულებული, თუ ქსელში ჩართული მანქანის + კლავიშზე 27 ერთი წუთით თითის დაჭერას ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 18 შეესაბამება 460—480 რიცხვები. როცა მანქანა 480-ზე მნიშვნელოვნად მეტად ბრუნავს ან 460-ზე მნიშვნელოვნად ნაკლებ ბრუნავს, საჭიროა მისი გადართვის და ქსელის ძაბვის განმეორებით შემოწმება.

მანქანით მუშაობის უსაფრთხოების დასაცავად საჭიროა მისი დამიწება (ჩამიწება), რისთვისაც სპილენძის 5—2 მმ დიამეტრის სადენის (გამტარის) ერთ ბოლოს ჩავამაგრებთ მანქანის ქვემოთ არსებულ ორ ქანჩს შორის, რომლებიც წითელი ფერით არიან შეღებილი, ხოლო მეორე ბოლოს მივამაგრებთ მიწასთან შეერთებულ საერთო ს ა ლ ტ ე ზ ე. თუ აღნიშნული სალტე არ არსებობს, მაშინ დამიწება უნდა მოხდეს საერთო წესების მიხედვით.

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულის შესრულების შემდეგ შეიძლება შევუდგეთ მანქანის გამოყენებას, მაგრამ საჭიროა პირველ რიგში მოსალოდნელი დეფექტების შემოწმება-გამოსწორება.

III. დეფექტების გამოსწორება

საერთოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ მანქანის ნებისმიერი დეტალის ძალით ამუშავების ცდა დაუშვებელია.

საჭიროა გულდასმით გაისინჯოს შემდეგი:

1. როგორც წინა მუხლში აღვნიშნეთ, უნდა შემოწმდეს სწორად არის თუ არა მანქანა გადართული გამოყენებულ ელექტროქსელზე;

2. მანქანის მართვის კლავიშები (*d* მუხლი) იმყოფება თუ არა სწორ მდებარეობაში. მაგალითად, მართვის ერთ-ერთ ნებისმიერ კლავიშზე არაბოლომდე თითის დაჭერით ხდება ყველა დანარჩენი კლავიშებისა და ბერკეტების ბლოკირება, რისთვისაც საჭიროა ხსენებულ კლავიშს დავაჭიროთ თითი ბოლომდე (ღრმად). ამ პროცესის დამთავრების შემდეგ ხსენებული კლავიში უბრუნდება თავის საწყის მდებარეობას;

3. სწორად დგას თუ არა აღმრიცხველი მექანიზმის კარეტა 6. აქ უძრავი მაჩვენებელი 14 ზუსტად უნდა გვიჩვენებდეს ბრუნვების აღმრიცხველი 18 თუ რომელ თანრიგზეა დაყენებული, ანუ გვიჩვენებდეს კარეტის მდებარეობას;

4. იმ შემთხვევაში, როცა გავიგონებთ ძრავას ჭახანს (ტკაცანს) და გუგუნს, ელექტროძრავა ქსელიდან სასწრაფოდ უნდა გამოვრთოთ (შტეფსელი უნდა გამოვრთოთ როზეტიდან) და მივმართოთ გამოცდილ მექანიკოსს;

C. ავტომატური გამოთვლები

გამოთვლების დაწყებამდე საჭიროა მანქანის ყოველი ნაწილის საწყის მდებარეობაში დაყენება, რაც გულისხმობს: ციფრების 82 და 1 კლავიატურის განთავისუფლებას, ბრუნვებისა 13 და შედეგის 7 აღმრიცხველების ჩაშლას ანუ მათი ყველა თანრიგების დაყენებას ნულებზე.

ციფრების კლავიატურაზე რიცხვების აღების დროს საჭიროა მათი ციფრები სწორად იყოს განლაგებული თანრიგების მიხედვით. მაგალითად, საჭიროა ერთეულები, ათეულები და ასე შემდეგ თანრიგები სწორად იქნეს აღებული.

კლავიატურაზე 82 და 1 აღებული რიცხვების სისწორე შესაბამისად უნდა შემოწმდეს მათი საკონტროლო ფანჯრებით 15 და 8.

ზემოხსენებულის შემდეგ შეიძლება შევუდგეთ გამოთვლებს.

ა. შეკრება

ვთქვათ, საჭიროა შეიკრიბოს

$$12694+449275,6+38,08+225,004=?$$

აქაც ისევე, როგორც ВК—1 მანქანით რიცხვების შეკრების დროს, ყველა შესაკრებს გამოვსახავთ ერთ-ერთი შესაკრების მაქსიმალური რაოდენობის ათწილადი ნიშნების მიხედვით. განხილულ მაგალითში უკანასკნელი შესაკრების (225,004) ათწილადი ციფრების რაოდენობის (სამი) მიხედვით ციფრების კლა-

ვიატურის 82 და შედეგის კლავიატურის 7 საკონტროლო ფანჯრის თამასების მძიმეებით 11 და 10 გამოვყოფთ სამ-სამ ათწილადს მარჯვნიდან მარცხნივ· П კლავიში უნდა იყოს ამოწეული მის ამოსაწევ კლავიშზე 19 თითის მსუბუქად დაჭერით, რათა რიცხვების კლავიატურაზე და მის საკონტროლო ფანჯარაში რიცხვები ავტომატურად ჩაიშალოს

რიცხვების კლავიატურაზე 82 ავიღებთ 12694,000, რაც მის საკონტროლო ფანჯარაში 15 უნდა გამოჩნდეს. ჩავრთავთ + კლავიშს 27, რის შედეგად ხსენებული რიცხვი გადაიტანება შედეგის ფანჯარაში 7 და ამავე დროს ავტომატურად ჩაიშლება რიცხვების კლავიშები 82 და მის საკონტროლო ფანჯარაში 15 გამოჩნდება ნულები, ხოლო ბრუნვების აღმრიცხველის ფანჯარაში 18 უნდა გამოჩნდეს ერთი; რიცხვების კლავიატურაზე 82 ავიღებთ მეორე შესაკრებს 449275,600, რაც უნდა ჩანდეს საკონტროლო ფანჯარაში 15. ჩავრთავთ + კლავიშს 27, რის შედეგად მეორე შესაკრები შეიკრიბება პირველ შესაკრებთან და ჯამი 461969,600 უნდა გამოჩნდეს შედეგის ფანჯარაში 7. ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 18 კი უნდა გამოჩნდეს 2. აგრეთვე ავტომატურად უნდა გამოირთოს რიცხვების კლავიშები 82 და მის საკონტროლო ფანჯარაში 15 გამოჩნდება ნულები; ანალოგიურად შეიკრიბება მესამე (38,080) და მეოთხე (225,004) რიცხვები. საბოლოოდ შედეგის აღმრიცხველის ფანჯარაში 7 უნდა მივიღოთ ძიებული ჯამი 462232,684, ხოლო ბრუნვათა რიცხვის აღმრიცხველის 18 ფანჯარაში უნდა დაიწეროს 4 (შესაკრებთა რაოდენობა). მაშასადამე,

$$12694+449275,6+38,08+225,004=462232,684.$$

ცხადია, მთელი რიცხვების შეკრება უფრო მარტივად შეიძლება, თუ, რიცხვების შესაკრების ჩვეულებრივი წესის შესაბამისად, ყოველ ჯერზე კლავიატურაზე 82 უშეცდომოდ ავიღებთ შესაკრებ რიცხვებს. მაგალითად, $12694000+$ $+449275600+38080+225004=462232684.$

ბ. გამოკლება

ეს მოქმედებაც არითმეტიკაში მიღებული ჩვეულებრივი წესის შესაბამისად ხდება. აქაც П კლავიში 20 ამოწეული უნდა იყოს, რათა ყოველ ჯერზე ხდებოდეს აღებული რიცხვების ავტომატურად ჩაშლა რიცხვების კლავიატურაზე და მის საკონტროლო ფანჯარაში.

ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს სხვაობა

$$462232,684-225,004-38,08-449275,6=?$$

აქაც ყოველი წევრის ათწილადი ციფრების რაოდენობას გამოვსახავთ მაქსიმალური ათწილადი ციფრების მქონე წევრის მიხედვით (განხილად შემთხვევაში აიღება სამ-სამი ათწილადი ნიშანი), რაც მძიმეებით გამოიყოფა შედეგისა და ციფრების კლავიატურის საკონტროლო ფანჯრებში (7 და 15)·

ციფრების კლავიატურაზე 82 აღებულ და საკონტროლო ფანჯარაში 15 ხილულ საკლებს (462232,684) + კლავიშის 27 ჩართვით გადავიტანთ შედეგის ფანჯარაში 7, რის შედეგად ხსენებული რიცხვი ავტომატურად ჩაიშლება როგორც კლავიატურაზე, ისე მის საკონტროლო ფანჯარაში. ავიღებთ პირველ მაკლებს (225,004) ციფრების კლავიატურაზე, — (მინუს) კლავიშის 28 ჩართვით იგი გამოაკლდება საკლებს და შედეგის ფანჯარაში 7 უნდა დაგვრჩეს

პირველი სხვაობა (462007,680), თანადროულად ხდება პირველი მაკლების ჩაშლა; ანალოგიურად, პირველ სხვაობას ვაკლებთ მეორე მაკლებს (38,080), უნდა მივიღოთ მეორე სხვაობა (461969, 600) და თანადროულად ხდება მეორე მაკლების ჩაშლა; ბოლოს ავიღებთ მესამე მაკლებს (449275,600) და ვაკლებთ მეორე სხვაობას, შედეგის საკონტროლო ფანჯარაში 7 უნდა გვექნეს პასუხი 12694,000. როცა საჭიროა მანქანამ გვიჩვენოს ოპერაციათა რაოდენობა, დავითვლით მაკლებთა რაოდენობას და მის გაორკეცებულ რაოდენობაჯერ + კლავიშის ჩართვით პასუხი უნდა მივიღოთ ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 18 (განხილად შემთხვევაში უნდა მივიღოთ 4). იგივე პასუხს მივიღებდით, თუ ყოველი რიცხვის გამოკლების დროს წინასწარ გადავწევთ ზემოთ მინუსისაკენ ბრუნვათა რიცხვის გადამრთავ ბერკეტს 10, ხოლო საკლების გადატანის დროს კი იგივე ბერკეტი 10 უნდა გადაიწიოს პლუსისაკენ (ქვემოთ).

თანადროულად შეკრება-გამოკლებაც ზემოთ მოხსენებული წესით ხდება. როცა საჭიროა ერთი და იმავე ოდენობის შესაკრების რამდენიმეჯერ მიმატება ან საკლების რამდენიმეჯერ გამოკლება, საჭიროა მათი დამაგრება ავტომატური ჩაშლის n კლავიშის 20 ჩაწევით, ხოლო ახალი რიცხვის აღების დროს იგი გამანთავისუფლებელი კლავიშით 19 უნდა ამოიწიოს ზემოთ.

ი. გამრავლება

ვთქვათ საჭიროა განისაზღვროს ნამრავლი

$$435 \times 653 = ?$$

მანქანას ვაყენებთ საწყის მდგომარეობაში;

სამრავლი 435 ავიღოთ ციფრების კლავიატურაზე 32, რასაც დავინახავთ საკონტროლო ფანჯარაში 15, მამრავლი აიღება მამრავლის კლავიატურაზე 1 რიცხვის უდიდესი ნიშნიდან ანუ 653 6, 5, 3, რასაც დავინახავთ საკონტროლო ფანჯარაში 15; მამრავლი აიღება მამრავლის კლავიატურაზე 1, რიცხვის უდიდესი ნიშნიდან ანუ 653 = 6, 5, 3, რასაც დავინახავთ მამრავლის კლავიატურის აღების საკონტროლო ფანჯარაში 3; $\times$ გამრავლებისნიშნიანი კლავიშის 34 ჩართვით მანქანა შეასრულებს აღებული რიცხვების გამრავლებას, თანადროულად ჩაიშლება სამრავლი საკონტროლო ფანჯარაში 15 და მამრავლი მის საკონტროლო ფანჯარაში 3. ხოლო ეს უკანასკნელი (653) გადაიტანება ბრუნვათა მექანიზმის ფანჯარაში 18, რაც განმეორებითი კონტროლის საშუალებას იძლევა, ნამრავლი (284055) კი უნდა მივიღოთ შედეგის ფანჯარაში 7. გამრავლების დროს ბერკეტი 10 დაწეული უნდა იყოს ქვევით პლუსისაკენ. მაშასადამე,

$$435 \times 653 = 284\,055.$$

ახლა გავამრავლოთ ათწილადები·

$$4{,}35 \times 0{,}653 = ?$$

აქ მოქმედებები შესრულდება იმავე თანამიმდევრობით და ათწილადებს (მძიმეებს) ფანჯარაში 7 დავაყენებთ სამრავლისა და მამრავლის ათწილადი ციფრების რაოდენობის ჯამზე, ანუ განხილად შემთხვევაში მეხუთესა და მეექვსეს შორის. მაშასადამე, $4{,}35 \times 0{,}653 = 2{,}84055$. ცხადია 15 და 18 ფანჯრეფში მძი-

შეები იქნება დაყენებული შესაბამისად მეორე და მესამე და მეოთხე ციფრებს შორის.

ვთქვათ საჭიროა განისაზღვროს:

$$4{,}35 \times 0{,}653 \times 85{,}3 = ?$$

როგორც ვიცით, პირველი ორი რიცხვის ნამრავლია 2,84055, რომელიც გამოსახულია შედეგის ფანჯარაში 7 და მეორე თანამამრავლი (0,653) გადატანილია ბრუნვათა რიცხვის ფანჯარაში 18. ბერკეტებს 18 და 17 გადმოვწევთ ქვემოთ, შემდეგ დავაჭერთ თითს  კლავიშს 21, რის გამო ბრუნვათა 15 და შედეგის 7 აღმრიცხველების ფანჯრებში ჩაიშლება 0,653 და 2,84055, ხოლო ეს უკანასკნელი გადაიტანება საკონტროლო ფანჯრებში 15 ისე, რომ თვით რიცხვების კლავიატურაზე 32 სათანადო კლავიშები არ ჩაირთვება. შედეგის მძიმეს 10 დავაყენებთ მეექვსე და მეშვიდე ციფრებს შორის, ე. ი. გამოვყოფთ ექვს ათწილად ციფრს, ავიღებთ მესამე მამრავლს (85,3) მამრავლის ციფრებიან კლავიშზე 1 და $\times$ გამრავლების კლავიშს 34 ჩავრთავთ, რის შედეგად ბრუნვათა 18 და შედეგის 7 აღმრიცხველების ფანჯრებში, შესაბამისად, უნდა მივიღოთ 85,3 და 242,298 915 რიცხვები, ე. ი. $4{,}35 \times 0{,}653 \times 85{,}3 = 242{,}298915$, ხოლო საკონტროლო ფანჯარაში 15 გადატანილი 2, 84055 მასზე დარჩება ჩაუშლელი. ახლა ვთქვათ, მიღებული მამრავლი საჭიროა კიდევ გამრავლდეს 53-ზე. ისევე, როგორც წინათ, დავაჭერთ თითს გადასატან კლავიშს 21, მაგრამ ვნახავთ, რომ შედეგის აღმრიცხველის ფანჯარაში 7 მიღებული ნამრავლი არ გადაიტანება საკონტროლო ფანჯარაში 15, რადგანაც ათწილადი ციფრები ბევრია (6) (საერთოდ გადატანა შეიძლება სულ 8-ციფრიანი რიცხვის), აქ კი გადასატანი არის 9 ციფრი, ამიტომ საჭიროა დამრგვალება ხუთ ათწილად ციფრამდე ანუ ერთი ციფრით კარეტის 6 გადაწევა მარჯვნივ, რისთვისაც თითს დავაჭერთ მყისად ერთჯერ მარჯვნივ გადამწევ კლავიშს 25 და შემდეგ გადასატან კლავიშზე 21 თითის დაჭერით საკონტროლო ფანჯარაში გამოჩნდება 2,84055 და მის ნაცვლად შედეგის ფანჯრიდან 7 გადმოიტანება უკანასკნელი ნამრავლი დამრგვალებული, 242,29891. შემდეგ ავიღებთ მამრავლის კლავიატურაზე 1 უკანასკნელ მამრავლს 53 და ჩავრთავთ $\times$ გამრავლების კლავიშს 31, რის შედეგად ბრუნვათა აღმრიცხველის 18 და შედეგის ფანჯარაში 7 შესაბამისად უნდა გამოჩნდეს მამრავლი 53 და უკანასკნელი ნამრავლი 12841,84223. მაშასადამე,

$$4{,}35 \times 0{,}653 \times 85{,}3 \times 53 = 12\ 841,\ 84223.$$

ძ. ნამრავლთა შეკრება-გამოკლება

ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს საბოლოო შედეგი

$$13 \times 24 + 28 \times 17 - 31 \times 11 = ?$$

გადავწევთ ბერკეტს 17 ზევით, რითაც გამოირთვება გამრავლების ავტომატურად ჩამშლელი. 13-ს 24-ზე ჩვეულებრივი წესით ვამრავლებთ, ასევე შემდეგ ვამრავლებთ 28-ს 17-ზე, აქ გამრავლების კლავიშზე 34 თითის დაჭერით ჩაიშლება ბრუნვათა მექანიზმის ფანჯარაში 18 პირველი წევრის მამრავლი 24

და მის ნაცვლად დაიწერება მეორე წევრის მამრავლი 17 და შედეგის პირველ ნამრავლს (13×24) ემატება მეორე ნამრავლი (28×17), ე. ი. მივიღებთ 788-ს, შემდეგ სათანადო კლავიშებით ავიღებთ მესამე წევრის სამრავლს 31 და მამრავლს 11 და, რადგანაც მათი ნამრავლი უნდა გამოაკლდეს შედეგის აღმრიცხველზე მიღებულ პირველი ორი წევრის ნამრავლთა ჯამს, ჩავრთავთ × კლავიშს 2, რის გამო შედეგის აღმრიცხველის ფანჯარაში 7 მივიღებთ ნამრავლთა ალგებრულ ჯამს 447, ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 13 კი 11-ს გარდა ალგებრული ჯამისა, თუ საჭიროა ვიცოდეთ წევრების მამრავლთა ჯამი, უნდა გადავწიოთ ზევით ბერკეტიც 18 და საბოლოოდ შედეგის 7 და ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში. შესაბამისად, მივიღებთ 447-ს და 52-ს (24+17+11). მაშასადამე:

$$13\times24+28\times17-31\times11=447.$$

ე. გაყოფა

ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს განაყოფი

$$284\,055:653=?$$

მანქანას დავაყენებთ საწყის მდგომარეობაში, რისთვისაც ჩავრთავთ 22, 28 და 29 კლავიშებს; გასაყოფს (284 055) ავიღებთ ციფრებიან კლავიატურაზე 32 (უდიდესი ანუ მეცხრე თანრიგის სვეტიდან მარჯვნივ). გაყოფის მოსამზადებელი კლავიშის 33 ჩართვით ჩაქრება ყველა აღმრიცხველზე რიცხვები და კარეტა 6 ავტომატურად გადაადგილდება მარჯვნივ, ხსენებული გასაყოფი გადაიტანება შედეგის აღმრიცხველზე 7; შემდეგ ციფრებიან კლავიატურაზე აიღება გამყოფი (653) ისე, რომ მისი უმაღლესი თანრიგი მოხვდეს გასაყოფის უმაღლესი თანრიგის გასწვრივ (ქვემოთ): ÷ გაყოფის კლავიშის 20 ჩართვით განაყოფს (435) მივიღებთ ბრუნვათა აღმრიცხველის ფანჯარაში 13; გაყოფის დამთავრების შემდეგ ავტომატი გამოირთვება და ამავე დროს კლავიატურაზე აღებული რიცხვები ჩაიშლება.

ვთქვათ, უნდა შესრულდეს გაყოფა:

$$2{,}84\,055:0{,}653=?$$

ამ შემთხვევაში მძიმეებს ყურადღებას არ ვაქცევთ და ზემომოყვანილი წესით მივიღებთ 435. q რიგი ცნობილი წესით გამოითვლება (5) ფორმულით. განხილად მაგალითში $m=1$, $n=0$, ე. ი. (5) ფორმულით

$$q=1-0=1.$$

მაშასადამე,

$$2{,}84\,055:0{,}654=4{,}35.$$

გასაყოფის პირველი წევრი რომ მეტი იყოს გამყოფის პირველ წევრზე, მაშინ გამოვიყენებთ (2) ფორმულას.

მაგალითად, $0{,}008533:0{,}0371=0{,}23$, რადგანაც $m=-2$, $n=-1$ და (2) ფორმულით $q=-2-(-1)+1=0$.

განაყოფის რიგის დადგენა შეიძლება კიდევ ორი ხერხით:

პ ი რ ვ ე ლ ი ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ შედეგის ფანჯარაში გადატანილი 0,008533 რიცხვის მძიმის შემდეგ მარჯვნივ ციფრების (ნიშნების) რაო-

დენობას (15) გამოვაკლოთ საკონტროლო ფანჯარაში გადატანილი 0,0371 რიცხვის მძიმის შემდეგი მარჯვნივ ციფრების (ნიშნების) რაოდენობა (8). სხვაობა ($15-8=7$) იქნება ბრუნვათა რიცხვის ფანჯარაში მიღებული რიცხვის მძიმის შემდეგ მარჯვნივ ნიშნების რაოდენობა, ანუ ციფრების რაოდენობა თავიდან მძიმემდე, რაც გაყოფის შესრულებამდე უნდა დავნიშნოთ ხსენებული ფანჯრის თამასაზე მოძრავი მძიმით (მეშვიდე და მერვე ნიშანს შორის), ე. ი. განაყოფი იქნება 0,23.

მ ე ო რ ე ხერხით შედეგის ფანჯარაში გადატანილი 0,008533 და საკონტროლო ფანჯარაში გადატანილი 0,0371 რიცხვების მძიმეებს შორის ციფრების რაოდენობით (აქ ნული იქნება) უნდა გადავწიოთ მარჯვნივ ბრუნვათა რიცხვის ფანჯრის უძრავი ბერკეტის შესაბამისი ციფრიდან (ნიშნიდან) მოძრავი მძიმე. აქ პასუხი იქნება 0,23 (ე. ი. განხილად მაგალითში უძრავი მძიმის ქვემოთ (გასწვრივ) იქნება განაყოფის მოძრავი მძიმე). მაგალითად, $6754{,}62 : 53{,}82 = ?$ შედეგის ფანჯარაში მოძრავ მძიმეს დავაყენებთ მე-12 და მე-13 ციფრს შორის, ხოლო საკონტროლო ფანჯარაში მე-7 და მე-8 ციფრს შორის. ამ მძიმეებს შორის არის ორი ციფრი, ე. ი. უძრავი ინდექსის გასწვრივ ციფრიდან (8) ბრუნვათა რიცხვის (განაყოფის) ფანჯარაში მოძრავი მძიმე უნდა გადავწიოთ მარჯვნივ ორი ციფრით 5 და 6 ციფრს შორის, რაც შეესაბამება განაყოფის მთელს. პასუხია 125,504. მაშასადამე $6754{,}62 : 53{,}82 = 125{,}504$.

იგივე მაგალითი პირველი ხერხით: შედეგის ფანჯარაში 6754,62 მძიმიდან მარჯვნივაა 12 ნიშანი, საკონტროლო ფანჯარაში 53,82, მძიმიდან მარჯვნივაა 7 ნიშანი. სხვაობაა $12-7=5$. ამიტომ ბრუნვათა რიცხვის (განაყოფის) ფანჯარაში გაყოფის შესრულებამდე უნდა დავნიშნოთ მოძრავი მძიმე მარჯვნიდან მარცხნივ 5 ნიშნის გამოყოფით. პასუხი იქნება 125,504.

D. კლავიშებიანი ელექტრონული გამომთვლელი მანქანა „ისკრა 111"

განხილადი მანქანა განკუთვნილია სტატისტიკურ-სააღრიცხვო, საგეგმო-ეკონომიკური და საინჟინრო გაანგარიშებების შესასრულებლად.

a. ძირითადი ტექნიკური მახასიათებლები

1. შეტანისა (შეყვანისა) და გამოყვანის თვლის სისტემა—ათობითი;
2. გამოსავალი მონაცემებისა და გამონათვალთა (შედეგთა) ინდიკაცია (ჩვენება) თორმეტი ცალი აირგამმუხტველი ნათურით;
3. რეგისტრების (ჩასაწერი სტრიქონების) რაოდენობა ოთხი;
4. რეგისტრების ნიშნები ათობითი თანრიგებით თორმეტი;
5. თანადროულად ინდუცირებულ რეგისტრების რაოდენობა ერთი;
6. ოპერაციების შესრულების დრო: მიმატება, გამოკლება 0,05 წთ;
გამრავლება გაყოფა 0,34 წთ.

b. გაფრთხილება

განხილადი მანქანა მუშაობს მხოლოდ ერთფაზიან ცვლად დენზე, 220^{+22}_{-33} ვოლტ ძაბვაზე და 50 ± 1 ჰერც სიხშირეზე.

მუდმივ დენზე მანქანის ჩართვა აკრძალულია!

გარედან ან ცივი ოთახიდან სამუშაო ოთახში შეტანისას მანქანა დახლოებით 8 საათის განმავლობაში გამოუყენებლად უნდა იდგას, რათა მიიღოს სათავსის ტემპერატურა. წინააღმდეგ შემთხვევაში მანქანა შეიძლება გამოვიდეს წყობიდან ქსელში ჩართვის დროს.

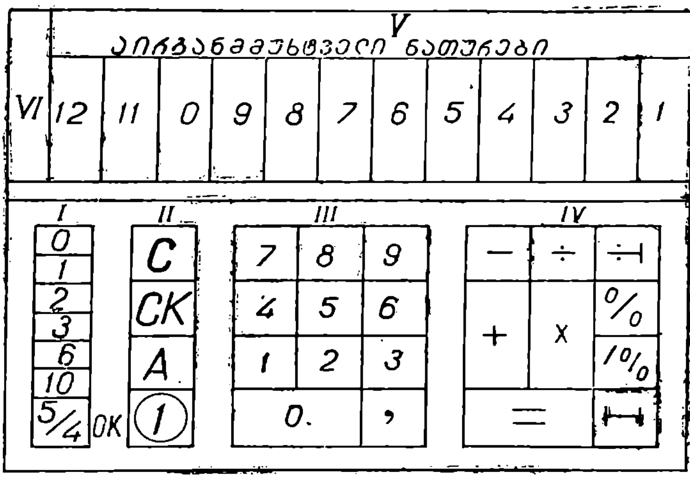
მანქანის სამუშაო პირობები: ტემპერატურა + 10-დან + 35°C, ფარდობითი ტენიანობა 30—80% ტემპერატურის ყველა დიაპაზონზე, ატმოსფერული წნევა 760±25 მმ ვერცხლისწყლიან ბარომეტრზე.

მანქანა დაცული უნდა იყოს სინესტისაგან!

მანქანა უნდა შეაკეთოს სპეციალისტმა.

c. კლავიატურები და ნათურები (ნახ. 3)

I კლავიატურა შედგება შვიდი კლავიშისაგან· აქედან ექვსი (0, 1, 2, 3, 6, 10) კლავიში წარმოადგენს მანქანაში შესატანი მთელი ან ათწილადი რიცხვების მძიმის მდებარეობის გადამრთველს. მეშვიდე 5/4 ანუ OK კლავიშის



ნახ. 3.2.6.4.

ჩართვით შედეგი მიიღება რიცხვების დამრგვალების წესის შესაბამისად დამრგვალებული;

II კლავიატურა შედგება ოთხი კლავიშისაგან. აქედან C კლავიშია საერთო ჩაშლის, რომლითაც მანქანის ქსელში ჩართვის შემდეგ ხდება მანქანის საწყის სამუშაო მდგომარეობაში დაყენება, აგრეთვე მისი ჩართვით ჩაიშლება მოქმედების შედეგად არსებული ინფორმაციები, გარდა მეხსიერების რეგისტრისა, რომელიც უნდა გამოირთოს (O) კლავიშის წარგზავნით (ჩართვით).

CK კ ლ ა ვ ი შ ი ჩაირთვება დაუყოვნებლივ მხოლოდ იმ ციფრის ჩასაშლელად, რომელიც შეცდომით ჩავრთეთ, ამის შემდეგ აიღება ის ციფრები, რომელთა აღება იყო საჭირო:

A კ ლ ა ვ ი შ ი ა გ ა დ ა გ ზ ა ვ ნ ი ს, რომლის ჩართვით მეხსიერების რეგისტრზე გადაიგზავნება შეტანილი ან შედეგის ინფორმაცია, იგი ჩაიშლება (O) კლავიშის ჩართვით:

1 კლავიშია დაგროვების.

III კ ლ ა ვ ი ა ტ უ რ ა შედგება თერთმეტი კლავიშისაგან, რომლების სათანადოდ ჩართვით შეიტანება მანქანაში მთელი ან ათწილადი რიცხვები იმის შემდეგ, რაც ჩაირთვება: C, საჭიროებისამებრ ერთ-ერთი I კლავიატურის ექვსი კლავიშიდან და აგრეთვე საჭიროებისამებრ OK კლავიში.

IV კ ლ ა ვ ი ა ტ უ რ ი თ ხდება ოპერაციების მართვა, მაგალითად:

(+) არის შეჯამების კლავიში;

(—) — გამოკლების "

(X) — გამრავლების

(÷) — გაყოფის "

(÷|)— შებრუნებული გაყოფის კლავიში;

(%) — რიცხვის პროცენტის გამოსათვლელი;

(/%) — რიცხვების პროცენტული დამოკიდებულების კლავიში:

(=) — შედეგის კლავიში:

(|—|)— ნიშნის შეცვლის კლავიში (ამით შეიტანება მანქანაში უარყოფითი რიცხვი ან ეცვლება რიცხვს ნიშანი), რომელიც გამოჩნდება XI ნათურაში.

შენიშვნა: მოქმედებების წერით ადვილად გამოსახვის მიზნით მართვის კლავიშების პირობითი აღნიშვნები ჩასმულია ფრჩხილებში.

V წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს 12 ცალ აირგანმუხტველ ნათურას, რომლებითაც ხდება 12 ნიშნამდე შემდგარი როგორც მთელი, ისე ათწილადი რიცხვის მანქანაში შეტანილი ან შედეგის ინფორმაციის ინდიკაცია (ჩვენება);

VI არის ნიშნის შეცვლის მაჩვენებელი ნათურა, რომელიც რიცხვის ნიშანს გვიჩვენებს (|—|) კლავიშის ჩართვით. მაგალითად, ალგებრული რიცხვი (—25) მანქანაზე დაიწერება 25(|—|), ე. ი. ჯერ რიცხვი და შემდეგ ნიშნის შეცვლის მაჩვენებელი.

d. მანქანის გამზადება სამუშაოდ

1. მანქანის შ ტ ე ფ ს ე ლ ს ჩავრთავთ ქსელის როზეტში და მანქანის უკან პერკეტს გადმოვწევთ ზევით, რის შედეგად აინთება 12 ნათურა ნულების ჩვენებით. ამ უკანასკნელით ვრწმუნდებით, რომ მანქანა ჩართულია ელექტროქსელში.

2. ჩავრთავთ C კლავიშს, რითაც მანქანის ყველა ნაწილი მიიღებს საწყის მდგომარეობას. თორმეტჯერ მყისად დავაჭერთ თითს III კლავიატურის ექვსიან კლავიშს. ამით V ნათურებში დაიწერება 666 666 666 666 რიცხვი შევჩერდებით 2—3 წუთით, რის შემდეგ მანქანა სამუშაოდ მზადაა. შემდეგ იგი გამოვრთოთ C კლავიშით. თუ მანქანა არ ამუშავდა, ყოველივე უნდა გავიმეოროთ.

ც. მანქანაზე ოპერაციების შესრულების წესრიგი

1. ნებისმიერი ოპერაციის შესრულების წინ საჭიროა დადგინდეს, თუ რა სიზუსტითაა საჭირო გამოთვლების წარმოება, ანუ უნდა დადგინდეს საჭირო ათწილადი ნიშნების რაოდენობა და I კლავიატურის ექვსი კლავიშიდან ერთ-ერთი კლავიში უნდა ჩავრთოთ. მანქანაში ინფორმაციის შეტანის დროს ათწილადი ნიშნების რაოდენობა არ უნდა ავიღოთ იმაზე მეტი, რაც ადრე დავადგინეთ და სათანადო კლავიში ჩავრთეთ. ნებისმიერი სირთულის ოპერაციას მანქანა შეასრულებს და შედეგს მოგვცემს სასურველ ათწილად ნიშნებში დაუმრგვალებლად.

თუ გვსურს, რომ შედეგი იყოს დამრგვალებული, საჭიროა აგრეთვე ჩავრთოთ OK (ანუ 5/4) კლავიში.

2. მანქანაში ინფორმაციის შეტანა ხდება ზუსტად ისეთი თანამიმდევრობით, როგორც იგი იწერება.

I. შეკრება და გამოკლება

1. ჩავრთავთ C კლავიშს, ანუ მანქანას მოვიყვანთ საწყის მდგომარეობაში;

2. ჩავრთავთ I კლავიატურის მძიმის გადამაადგილებელი ექვსი კლავიშიდან ერთ-ერთს (მთელი რიცხვების შეკრება-გამოკლების დროს საჭირო არ არის კლავიშის ჩართვა, ხოლო მათი გამრავლების დროს აუცილებელია O კლავიშის ჩართვა);

3. ათწილადი რიცხვების შეკრება-გამოკლების დროს საჭიროებისამებრ ჩავრთავთ OK კლავიშს, რითაც შედეგი მიიღება დამრგვალებული იმდენ ათწილად ციფრამდე, რამდენსაც გვიჩვენებს მ ძ ი მ ი ს გ ა დ ა მ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ე ლ ი კლავიში.

მაგალითები

1. 26785+345—1880=25250.

მანქანაზე იგივე თანამიმდევრობა ასე შესრულდება: ჩავრთავთ C კლავიშს და შევასრულებთ მოქმედებებს

36785 (+) 345 (—) 1880 (=)

შედეგი იქნება 000 000 025 250.

2. 1880 — 26785 — 345 =—25250. მანქანაზე

1880 (—) 26785 (—) 345 (=)

შედეგია — 000 000 025 250.

საყურადღებოა, რომ ყოველი ახალი ინფორმაციის შეტანისას წინა ინფორმაცია იშლება, რასაც მანქანა იმახსოვრებს და ვიღებთ სწორ შედეგს.

3. გამოვთვალოთ მძიმის შემდეგ სამი ათწილადი ნიშნით:

127,333+75,8=203,133.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 8.

127,333 (+) 75,8 (=)

შედეგია 000 000 203, 133.

4. გამოვთვალოთ მძიმის შემდეგ ორი ათწილადი ნიშნით

0,76—75,8 =—75,04.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 2.

0,76 (—) 75,8 (=)

შედეგია — 0 000 000 075,04.

5. გამოვითვალოთ მძიმის შემდეგ ორი ათწილადი ნიშნით

2,28 + 18,36 — 40,61 =—19,97.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 2.

2,28 (+) 18.36 (—) 40,61 (=)

შედეგია — 0 000 000 019,97.

6. გამოვითვალოთ მძიმის შემდეგ ორი ათწილადი ნიშნით

243,71—(—32,54) = 276,25.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 2.

243,71 (—) 32,54 (|—|), (=)

შედეგია 000 000 0276,25.

7. გამოვითვალოთ მძიმის შემდეგ სამი ათწილადი ნიშნით

12 694 + 449 275,6 + 38,08 + 225,004 = 462 232,684.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 8.

12 694 (+) 449 275,6 (+) 38,08 (+) 225,004 (=)

შედეგია 000 462 232, 684.

8. გამოვითვალოთ მძიმის შემდეგ ორი ათწილადი ნიშნით და დამრგვალებით

— 26,6 + 0,008 + 65,9667 = 39,38.

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 2 და OK.

26,6 (|—|) (+) 0,01 (+) 65,97 (=)

შედეგია 000 000 0039,38.

9. გამოვითვალოთ მძიმის შემდეგ სამი ათწილადი ნიშნით

462 232.684—225,004—38,08—449 275,6 = 12694,000.

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 8.

462 232,684 (—) 225,004 (—) 38,08 (—) 449 275,6 (=)

შედეგია 000012694,000.

II. გამრავლება და გაყოფა

1. ჩავრთავთ C კლავიშს, ანუ მანქანას მოვიყვანთ საწყის მდგომარეობაში;

2. დავადგენთ მძიმის შემდეგ რამდენი ათწილადი ნიშნით უნდა იყოს შესრულებული ოპერაცია, რის შესაბამისად ჩავრთავთ I კლავიატურის ექვსი კლავიშიდან ერთ-ერთს (მთელი რიცხვების გამრავლების დროს საჭიროა ჩაირთოს O კლავიში). როცა საჭიროა შედეგის მიღება დამრგვალებით, დამატებით უნდა ჩავრთოთ წითელი OK კლავიში და ოპერაციის დამთავრებამდე ორივე კლავიში უნდა იყოს სულ ჩართული. მანქანაში შეტანილი ათწილადი ციფრების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს დადგენილ რაოდენობას;

3. ავიღებთ პირველ რიცხვს (სამრავლს ან გასაყოფს);

4. ჩავრთავთ კლავიშს (×) გამრავლების დროს ან (÷) გაყოფის დროს;

5. ავიღებთ მამრავლს ან გამყოფს;

6. ჩავრთავთ (=) შედეგის კლავიშს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმიდან სამი ათწილადი ნიშნით

$$-121{,}32\times 2{,}1=-254{,}772.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 8 და OK

121,32 (|—|) (×) 2,1 (=)

შედეგია — 000 000 254,772.

2. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმიდან 6 ათწილადი ნიშნით

$$21{,}3:(-1{,}57)=-13{,}566879.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და კლავიში OK.

21,3 (:) 1,57 (|—|) (=)

შედეგია — 000013, 566879.

იგივე მაგალითის შედეგი დამრგვალების გარეშე, ანუ OK კლავიშის გამორთვით, იქნება

21,3 ( ) 1,57 (|—|) (=)

— 00001 3, 566878.

ორივე შემთხვევაში შეიძლებოდა დაგვეწერა

21,3 (:) (|—|) 1,57 (=)

პასუხი იგივე იქნებოდა, რადგანაც უარყოფითი რიცხვია გამყოფი და მის წინ შეტანილია გასაყოფი (რიცხვი).

ახლა გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმიდან 6 ათწილადი ნიშნით

$$-21{,}3:1{,}57=-13{,}566879$$

ანუ

21,3 (|—|) : 1,57 (=)

შედეგია — 0000 13,566879, ხოლო დაწერა ასე:

(|—|) 21,3 (÷) 1,57 (=) სწორი არ არის, რადგანაც შედეგია (არა მინუსი) + 000013,566879, მაშასადამე, ოპერაციის წინ (|—|) კლავიშის ჩართვა არ შეიძლება, საჭიროა ჯერ რიცხვის შეტანა და შემდეგ ნიშნის შეცვლის (|—|) კლავიშის ჩართვა. წინააღმდეგ შემთხვევაში. შედეგის ნიშანი სწორი არ იქნება.

2. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმის შემდეგ 3 ათწილადი ნიშნით

$$1270,55 \times (-5) \quad 153 = -41,521.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 3 და კლავიში OK.

1270,55 (×) 5 (|—|) (÷) 153 (=) ანუ 1270,55 (×) (|—|) 5 (÷) 153 (=)

შედეგია — 000000041,521.

3. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმის შემდეგ 6 ათწილადი ნიშნით.

$$4,35 \times 0,653, \times 85,3 = 242,298915.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და კლავიში OK.

4,35 (×) 0,653 (×) 85,2 (=)

შედეგია 000242,298915.

4. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმის შემდეგ 3 ათწილადი ნიშნით

$$0,055 \times 0,055 = 0,003.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 8 და კლავიში OK.

0,055 (×) 0, 055 (=)

შედეგია 000 000 000,003.

5. გამოვითვალოთ:

$$225 \times 628 = 141\,300.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში O.

225 (×) 628 (=)

შედეგია 000 000 141 300.

6. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმის შემდეგ 6 ათწილადი ნიშნით

$$0,008\,533 : 0,0371 = 0,23.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და კლავიში OK.

0,008 533 (÷) 0,0371 (=)

შედეგია 000 000,230000.

7. გამოვითვალოთ დამრგვალებით, მძიმის შემდეგ 6 ათწილადი ნიშნით

$$2,84055 : 0,654 = 4,343349.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და კლავიში OK.

2,84055 (÷) 0,654 (=)

შედეგია 000004,343349.

III. შებრუნებული გაყოფა·

1. ჩავრთავთ C კლავიშს;

2. დავადგენთ მძიმის შემდეგ საჭირო ათწილადი ციფრების რაოდენობას და მისი უკანასკნელი ციფრის დამრგვალების საჭიროებას, რის შესაბამისად ჩავრთავთ I კლავიატურის ერთ-ერთს ან OK კლავიშსაც;

3. ავიღებთ გ ა მ ყ ო ფ ს (ნიშნის მხედველობაში მიღებით) და ჩავრთავთ შებრუნებული გაყოფის (÷|) კლავიშს;

4 ავიღებთ გასაყოფს და ჩავრთავთ შედეგის (=) კლავიშს, რაც მოგვცემს შედეგს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. შევასრულოთ შებრუნებული გაყოფა მძიმის შემდეგ 6 ათწილადი ნიშნით და დამრგვალებით

$$14,224 : (-2,2) = -6,465455.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 6 და OK კლავიში. მანქანაზე

$$2,2\ (H) (\div|)\ 14,224\ (=)$$

შედეგია — 000 006,465 455.

2. შევასრულოთ მ თ ე ლ ი რიცხვების შებრუნებული გაყოფა

$$505 : 5 = 101.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში O მანქანაზე

$$5\ (\div|)\ 505\ (=)$$

შედეგია 000 000 101.

IV. რიცხვის პროცენტისა და რიცხვების პროცენტული დამოკიდებულებების განსაზღვრა

1. ჩავრთოთ C კლავიში, I კლავიატურის ერთ-ერთი ან საჭიროებისამებრ OK კლავიშიც;

2. ავიღოთ პირველი რიცხვი,

3. ჩავრთოთ (%) კლავიში (როცა საჭიროა პროცენტის მონახვა აღებული რიცხვიდან) ან (/%) კლავიში (როცა საჭიროა გავიგოთ აღებული რიცხვი მეორე რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენს, ანუ როგორია რიცხვების პროცენტული დამოკიდებულება);

4. ავიღოთ მეორე რიცხვი და ჩავრთოთ შედეგის (=) კლავიში. რაც მოგვცემს შედეგს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. გამოვთვალოთ 42-ის 18,8% მძიმის შემდეგ სამი ათწილადი ნიშნის დამრგვალებით

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 8 და OK კლავიში. მანქანაზე

42 (%) 18,8 (=), ანუ 18,8 (%) 42 (=)

შედეგია 000 000 007,896.

2, გამოვითვალოთ 53 და 36 პროცენტული დამოკიდებულება (ანუ პირველი მეორის რამდენი პროცენტია) მძიმის შემდეგ მესამე ათწილადი ნიშნის დამრგვალებით:

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 3 და OK კლავიში.

53 (/%) 36 (=)

შედეგია 000 000 147%, 222.

ახლა გავიგოთ 36 რიცხვი 53 რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენს

36 (/%) 53 (=)

შედეგია 000 000 067,925%.

V. მიმატება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა, შებრუნებული გაყოფა და პროცენტის გამოთვლა მუდმივებით

1. ჩავრთოთ C, I კლავიატურის ერთ-ერთი ან საჭიროებისამებრ OK კლავიშიც;

2. ავიღოთ პირველი რიცხვი და რიგის მიხედვით ჩავრთოთ ერთ-ერთი საოპერაციო (+), (—), (×), (÷), (÷|), (%), (/%) კლავიში;

3. ავიღოთ მეორე რიცხვი (მუდმივი) და ჩავრთოთ შედეგის (=) კლავიში, მივიღებთ პირველ შედეგს;

4. ავიღოთ რიგით შემდეგი რიცხვი (რომელზეც უნდა შესრულდეს იგივე ოპერაცია იგივე მუდმივით) და ჩავრთოთ შედეგის (=) კლავიში, რაც მოგვცემს ოპერაციის მეორე შედეგს მუდმივით.

შემდეგი რიცხვის აღება, შედეგის (=) კლავიშის ჩართვა და შემდეგი რიგის (მუდმივით) შედეგის მიღება გავიმეოროთ იმდენჯერ, რამდენჯერაცაა საჭირო.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შებრუნებული გაყოფის (მუდმივით) შესრულების დროს მუდმივად ითვლება პირველად აღებული რიცხვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. შესრულდეს მძიმის შემდეგ ორი ათწილადი ნიშნით

$$21,23+5=26,23;$$

$$145,51+5=150,51;$$

$$-80,62+5=-75,62.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 2.

შევასრულოთ შემდეგი მოქმედება:

21,23 (+) 5 (=)

პირველი შედეგია 000 000 0026,23.
შევასრულოთ

$$145,51\ (=)$$

მეორე შედეგია 000 000 0150,51.
შევასრულოთ

$$80,62\ (|—|)\ (=)$$

მესამე შედეგია 0000000075,62.

2. შევასრულოთ გამოთვლები სამი ათწილადი ნიშნით

$$3,2 \times 3,14 = 10,048,$$

$$7,8 \times 3,14 = 24,492,$$

$$5,3 \times 3,14 = 16,642.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 3.
შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

$$3,2\ (\times)\ 3,14\ (=)$$

პირველი შედეგია 000000010,048;

$$7,8\ (=)$$

მეორე შედეგია 000000024,492;

$$5,3\ (=)$$

მესამე შედეგია 000000016,642.

3. შესრულდეს სამი ათწილადი ნიშნით დამრგვალებით:

$$3,2:3,14 = 1,019,$$

$$7,8:3,14 = 2,484,$$

$$5,3:3,14 = 1,688.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 3 და OK კლავიში.
მანქანაზე შევასრულოთ

$$3,2\ (\div)\ 3,14\ (=)$$

პირველი შედეგია 000000001,019;

$$7,8\ (=)$$

მეორე შედეგია 000000002,484;

$$5,3\ (=)$$

მესამე შედეგია 000000001,688.

4. შესრულდეს მთელი რიცხვების მუდმივზე შებრუნებული გაყოფა

$$625:25 = 25,$$

$$150:25 = 6,$$

$$25:25 = 3.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის O კლავიში.
მანქანაზე შევასრულოთ

$$25\ (\div|)\ 625\ (=)$$

პირველი შედეგია 000000000025;

150 (=)

მეორე შედეგია 000000000006;

75 (=)

მესამე შედეგია 000000000003.

5. გამოვითვალოთ 2, 5, 10 და 15 პროცენტი 89,4 რიცხვისა სამ-სამი ათწილადი ნიშნით დამრგვალებით:

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 3 და OK.

შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

2(%) 89,4 (=)

პირველი შედეგია 000000001,788;

5 (=)

მეორე შედეგია 000000004,470;

10 (=)

მესამე შედეგია 000000008,940;

15 (=)

მეოთხე შედეგია 000000013,410.

VI. გამოთვლები მეხსიერების გამოყენებით

მანქანის მეხსიერების გათავისუფლება ხდება ავტომატურად მეხსიერებაში ყოველი ახალი რიცხვის წარგზავნისას.

ალებული (ახლად შეტანილი) რიცხვის ან შედეგის (გამონათვალის) მანქანის მეხსიერებაში წარგზავნა ხდება A კლავიშის ჩართვით რიცხვების მანქანაში შეტანის ან შედეგის (=) კლავიშის ჩართვის შემდეგ, ამავე დროს მეხსიერებაში ჩაწერილ რიცხვს მანქანა შედეგის სახით გვიჩვენებს.

მეხსიერებაში ჩაწერილი რიცხვის გამოძახება ხდება A კლავიშის ჩართვით იმის შემდეგ, როცა ჩართულია საჭირო ერთ-ერთი (+), (—), (×), (÷), (%), (/%), C კლავიში.

ამავე დროს გამოძახებული რიცხვი შედეგის სახით მოგვევლინება.

ალებული რიცხვების ან შედეგების მანქანის მეხსიერებაში დაგროვებისათვის საჭიროა: 1. შეტანილი რიცხვის ან მიღებული შედეგის წარგზავნა A კლავიშის ჩართვით; 2. შემდეგი რიცხვის ან მიღებული შედეგის აღების შემდეგ (რომლებიც წარსაგზავნია) ჩავრთავთ 1 კლავიშს, შესატან რიცხვს და (=) კლავიშს (ამით დაგროვდება წინ წარგზავნილი რიცხვები). ბოლოს ჩაირთვის 1 კლავიში, რის შედეგად დაგროვილი შედეგი მოგვევლინება ნათურებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. შევასრულოთ გამოთვლები სამ ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

3,5 2,7 = 1,296,

5,8 : 2,7 = 2,148,

6,3 2,7 = 2,333.

აგრეთვე გამოვითვალოთ მიღებული განაყოფების ჯამი

$$1{,}296+2{,}148+2{,}333=5{,}777.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 2 და OK.

შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

3,5 (:) 2,7 (=)

პირველი განაყოფია 000000001,296;

ჩავრთოთ (A) 5,8 (=) (აქ A კლავიშის ჩართვით პირველი განაყოფი წარიგზავნა მეხსიერებაში).

მეორე განაყოფია 000000002,148;

ჩავრთოთ (1) 6.3 (=)(აქ 1 კლავიშის ჩართვა გვიჩვენებს წინა ორი განაყოფის ჯამს).

მესამე განაყოფია 000000002,333;

ჩავრთოთ 1 კლავიში.

მივიღებთ მიღებული განაყოფების ჯამს

000000005,777.

2. შევასრულოთ გამოთვლები სამ ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

$$3{,}2\times3{,}14=10{,}048,$$
$$7{,}8\times3{,}14=24{,}492,$$
$$5{,}3\times3{,}14=16{,}642,$$

აგრეთვე გამოვითვალოთ ნამრავლთა ჯამი

$$10{,}048+24{,}492+16{,}642=51{,}182.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 3 და OK.

შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

3,2 (×) 3,14 (=)

პირველი ნამრავლია 000000010,048;

(A) 7,8 (=)

მეორე ნამრავლია 000000024,492:

(1) 5,3 (=)

მესამე ნამრავლია 000000016,642;

ჩავრთოთ (1) კლავიში.

ნამრავლთა ჯამია 000000051,182.

3. შევასრულოთ გამოთვლები სამი ათწილადი ნიშნით

$$78{,}953+21{,}047=100{,}000,$$
$$129{,}453+21{,}047=150{,}500,$$
$$145{,}065+21{,}047=166{,}112.$$

აგრეთვე გამოვითვალოთ ჯამი პირველი შესაკრებებისა

$$78{,}953+129{,}453+145{,}065=353{,}471.$$

ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში 8.
შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

78,953 (A) (+) 21,047 (=)

პირველი ჯამია 000 000 100,000 და მეხსიერებაში წარგზავნილია 78,953.

129,453 (1) (=) (1) ჩართვით შეიკრიბა 78,953 + 129,453 = 208,406).

მეორე ჯამია 000 000 150, 500 და 208, 406 დაგროვილია

145,065 (1)

მივიღებთ პირველი შესაკრებების ჯამს 000000353,471;
ჩავრთოთ შედეგის (=) კლავიში, მივიღებთ მესამე ჯამს

000 000 166,112.

4. შესრულდეს გამოთვლები კერძო შედეგთა შეჯამებით სამ-სამ ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

2%	25-ის	=	0,500
5%	30-ის	=	1,500
10%	50-ის	=	5,000
6%	20-ის	=	1,200
			8,200

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 8 და OK კლავიში.
მანქანაზე

2 (%) 25 (=) პირველი შედეგია 000000000,500
(A) 5 (%) 30 (=) მეორე შედეგია 000000001,500
1 10 (%) 50 (=) მესამე შედეგია 000000005,000
1 6 (%) 20 (=) მესამე შედეგია 000000001,200
1 შედეგთა ჯამია 000000008,200

5. შესრულდეს გამოთვლები კერძო შედეგთა შეჯამებით ორ-ორ ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით:

$$(-3)^2+(-0,8)^2+(-2,2)^2+(0,6)^2=14,84.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის 2 და OK კლავიში.
მანქანაზე

3 (×) (=) პირველი შედეგია 0000000009,00
(A) 0,8 (×) = მეორე შედეგია 0000000000,64
1 პირველი და მეორე შედეგთა ჯამია 0000000009,64
2,2 (×) (=) მესამე შედეგია 000000004,84
1 სამივე შედეგის ჯამია 0000000014,48
0,6 (×) (=) მეოთხე შედეგია 000000000,36
1 ოთხივე შედეგის ჯამია 0000000014,84

მაშასადამე, ზემოთ მოცემული რიცხვების კვადრატების ჯამი მანქანაზე პირდაპირ გამოითვლება ასე:

3 (×) (=) (A) 0,8 (×) (=) 1 2,2 (×) (=) 1 0,6 (×) (=) 1

ოთხივე შედეგის ჯამია 0000000014,84,

რომელიც ჩაშლილი (ანუ გამოძახებული) უნდა იქნეს (A) კლავიშის ჩართვით.

VII. შერეული გამოთვლები

1. შევასრულოთ გამოთვლები ექვს ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით.

$$\frac{14,51\times 6,084}{2,25+7,3}+0,6=9,843859.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და OK.

2,25 (+) 7,3 (÷|) 14,51 (×) 6,084 (+) 0,6 (=)

შედეგია 000009,843859.

2. გამოვითვალოთ დამრგვალებით მეექვსე ათწილად ნიშნამდე

$$2,2^9 = 1207,269219.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და OK.

2,2 (×) (×) (×) (×) (×) (×) (×) (×) (=)

შედეგია 001207,269219.

3. გამოვითვალოთ ექვს ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

$$\frac{(14,3+8,67)\times 3,14\times 2,64^2}{14,5:2,3}=79,736713$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და OK.

14,3 (+) 8,67 (×) 3,14 (×) 2,64 (×) (×) 2,3 (÷) 14,5 (=)

შედეგია 000079,736713. აქ ექვსი ათწილადით მოთხოვნილია გამოთვლების შესრულება იმის გამო, რომ თანამამრავლთა ათწილადი ციფრების რაოდენობაა ექვსი.

VIII. კვადრატული ფესვის ამოღება

განხილადი მოქმედება სრულდება ნახევრად ავტომატურად იტერაციული (ერთი და იმავე მათემატიკური ოპერაციის რამდენიმეჯერ განმეორების შედეგი) ფორმულით

$$y_{i+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y_i}+y_i\right),$$

სადაც x არის ფესვქვეშა გამოსახულება;

y_i — ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა იტერაციის (განმეორების) დროს.

ფესვის საწყისი y_0 ოდენობა შეირჩევა მიახლოებით, ხოლო y ფესვის ყოველი შემდეგი მნიშვნელობა მიიღება იტერაციული ფორმულით. ოპერაციის დამთავრების ნიშანია უკანასკნელი ორი იტერაციის შედეგთა თანმთხვევა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. გამოვითვალოთ, მძიმის შემდეგ მეათე ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

$$\sqrt{97,77}=9,8878713584.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 10 და OK.

გამოსათვლელი ფესვის საწყის მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ $y_0=9$. პასუხის მიღების თანამიმდევრობა იქნება შემდეგი:

97,77 (A) (÷) 9 (+) (÷) 2 (÷|) პირველი შედეგი		$y_1=09,9316666667$
გაგრძელება (A) (+) (÷) 2 (÷|)		$y_2=09,8879679197$
(A) (+) (÷) 2 (÷|)		$y_3=09,8878713589$
(A) (+) (÷) 2 (÷|)		$y_4=09,8878713584$
(A) (+) (÷) 2 (÷|)	"	$y_5=09,8878713584$

ვინაიდან $y_4=y_5$, ფესვი $y=9,8878713584$.

2. გამოვითვალოთ მესამე ათწილად ნიშნამდე დამრგვალებით

$$\sqrt{7.98}=2,825.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 3 და OK.

ფესვის საწყის ოდენობად მივიღოთ $y_0=2$.

პასუხის მისაღებად უნდა შესრულდეს:

7,98 (A) (÷) 2 (+) (÷) 2 (÷|) პირველი შედეგი	$y_1=2,995$
გაგრძელება A (+) (÷) 2 (÷|) მეორე	$y_2=2,830$
A (+) (÷) 2 (÷|) მესამე	$y_3=2,825$
A (+) (÷) 2 (÷|) მეოთხე	$y_4=2,825$

ვინაიდან $y_3=y_4$, $y=2,825$.

3. გამოვითვალოთ მეექვსე ათწილადი ნიშნის დამრგვალებით

$$\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-0,00669342}=\sqrt{0,9933}=0,996645.$$

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 6 და OK.

ფესვის საწყის ოდენობად მივიღოთ $y_0=0,9$.

0,9933 (A (÷) 0,9 (+) (÷) 2 (÷|) პირველი შედეგი	$y_1=1,001834$
გაგრძელება (A) (+) (÷) 2 (÷|) მეორე	$y_2=0,996658$
(A) (+) (÷) 2 (÷|) მესამე	$y_3=0,996645$
(A) (+) (÷) 2 (÷|) მეოთხე	$y_4=0,996645$

ვინაიდან $y_3=y_4$, პასუხია $y=0,996645$.

IX. კუბური ფესვის ამოღება

კუბური ფესვის ამოღებაც ხორციელდება ნახევრად ავტომატურად იტერაციული ფორმულით

$$y_{i+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y_i^2}+2y_i\right),$$

სადაც x არის ფესვქვეშა გამოსახულება;

y_i — ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა i იტერაციის დროს. ფესვის y_0 მნიშვნელობა მიახლოებითია, ხოლო მისი ყოველი შემდეგი მნიშვნელობა მიიღება იტერაციული ფორმულით. ოპერაცია დამთავრებულია, როცა უკანასკნელი ორი იტერაციის შედეგი ერთმანეთს დაემთხვევა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი

გამოვითვალოთ მეათე ათწილადის დამრგვალებით

$$\sqrt[3]{65}=4{,}0207257586.$$

ფესვის საწყის მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ $y_0=4$. ჩავრთოთ C, I კლავიატურის **10** და OK კლავიში. პასუხის მიღების თანამიმდევრობა იქნება შემდეგი:

65 (A) (÷) 4 (÷) (+) (+) (÷) 3 (÷|) პირველი შედეგი $y_1=04{,}0208333333$
(A) (÷) (+) (+) (÷) 3 (÷|) მეორე $y_2=04{,}0207257615$
(A) (÷) (+) (+) (÷) 3 (÷|) მესამე $y_3=04{,}0207257586$
(A) (÷) (+) (+) (÷) 3 (÷|) მეოთხე $y_4=04{,}0207257586$

ვინაიდან $y_3=y_4$, პასუხია $y=4{,}0207257586$.

X მანქანის გამოყენების ზღვრული თანრიგი

1. $83{,}3333333333\times 1{,}2=99{,}9999999999$

დამრგვალების გარეშე ჩავრთოთ C და I კლავიატურის კლავიში **10**
83,3333333333 (×) 1,2 (=)

შედეგია 99,9999999999, რაც განხილადი მანქანისათვის ზღვრულია.

2. იგივე მაგალითი დამრგვალებით განხილად მანქანაზე არ გამოიყენება და მანქანის შედეგის მაგიერ გვიჩვენებს წერტილებს. მართლაც, ჩავრთოთ C, I კლავიატურის **10** და OK კლავიში და შევასრულოთ იგივე გამრავლება

83,3333333333 (×) 1,2 (=)

შედეგი იქნება . . .

C კლავიშის ჩართვით მივიღეთ 00,0000000000.

3. შევკრიბოთ დამრგვალებით მეექვსე ათწილად ნიშნამდე 444444,444444 + 555555,555556 =. მანქანის თანრიგები არ გვეყოფა.

ჩავრთოთ C, I კლავიატურის **6** და OK კლავიში

444444,444444 + 555555,555556 (=)

შედეგი იქნება . .

CK ან C კლავიშის ჩართვით მივიღებთ 00000,000000.

f. შეთვალყურეობისა და მოვლის წესრიგი

I. ყოველდღიური შემოწმება

1. არ უნდა იყოს დაზიანებული მანქანის გარეგანი ნაწილები;
2. ტექნიკური ზამშით უნდა იწმინდებოდეს მტვრისაგან;
3. ქსელში ჩართვისას ყველა ნათურა უნდა ინთებოდეს;
4. ჩავრთოთ C და ნიშნის შეცვლის (|−|) კლავიში, რის შედეგად VI ნათურამ (ნახ. 3) უნდა გვიჩვენოს — ნიშანი;
5. ჩავრთოთ C, I კლავიატურის კლავიში 2 და ავიღოთ ციფრი 5 თორმეტჯერ, შემდეგ ჩავრთოთ (+) კლავიში, ამ დროს ნათურებმა უნდა გვიჩვენოს მხოლოდ მძიმეები;
6. ჩავრთოთ C კლავიში და ავიღოთ რიცხვი 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 და ჩავრთოთ (|—|) კლავიში და საოპერაციო (—), (+), (÷), (×), (÷|), (%) (/%), (|—|), (=) კლავიშები, რის შედეგად ნათურებით უნდა მივიღოთ შედეგი — 0000000001,00 რიცხვი.

II. ნახევარწლიანი შემოწმება

1. გაისინჯება მძიმის გადამრთველი (,) კლავიშის მუშაობა;
2. კლავიშები დაუბრკოლებლად უნდა მუშაობდეს;
3. კვების ზონარი არ უნდა იყოს გაწყვეტილი;
4. შტეფსელის ჩანგალი უნდა იყოს წესივრული;
5. მანქანის უკან ჩამრთავი ბერკეტი უნდა იყოს წესივრული;
6. ყველა ციფრი უნდა აიღებოდეს და ანათებდეს უნაკლოდ.

ყველა ციფრის ნორმალურად აღების შესამოწმებლად უნდა ჩაირთოს C, I კლავიატურის კლავიში 0 და თორმეტჯერ ჩავრთოთ 1 კლავიში, რის შედეგად ნათურების ყველა (თორმეტივე) თანრიგზე უნდა აინთოს ციფრი 1. შემდეგ (+) კლავიშის თანდათანობით 9-ჯერ ჩართვით ყველა ნათურაზე თანამიმდევრობით უნდა მივიღოთ შესაბამისად 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 და 9. მეათე ჩართვაზე მიიღება თორმეტი მძიმე.

მანქანის გაწმენდა უნდა ხდებოდეს მტვერსასრუტით.

კატეგორიულად აკრძალულია კვების კვანძების გასინჯვა ტ ე ს ტ ე რ ი თ.

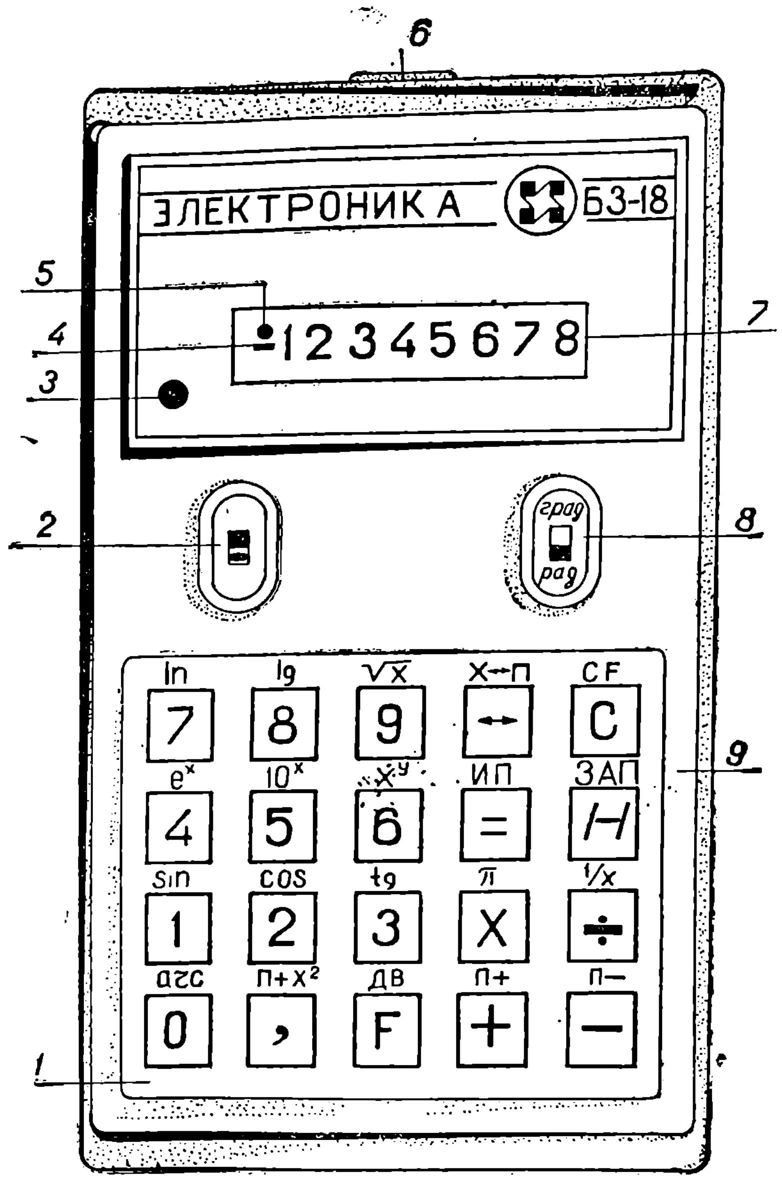
მანქანა უნდა ინახებოდეს მშრალ და თბილ სათავსში სათანადო ვენტილაციით. მისი ტრანსპორტირება შეიძლება ყველა დახურული მანქანით.

8. 2. 7. მიკროკალკულატორი ელექტრონიკა

ა. მიკროკალკულატორის გამზადება სამუშაოდ

მიკროკალკულატორით შეიძლება ვიმუშაოთ უ შ უ ა ლ ო დ კ ვ ე ბ ი ს ქ ს ე ლ ზ ე მ ი ს ი შ ე ე რ თ ე ბ ი ს ა ნ ბ ა ტ ა რ ე ე ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ.

პ ი რ ვ ე ლ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი, მიკროკალკულატორზე დართული БП2—1 საკვებ ბლოკს უშუალოდ შევუერთებთ შენობის ელექტრომკვებავ ქსელს, ხოლო მისი სადენის მეორე ბოლოს შევუერთებთ თვით კალკულატორის ბუ-


6
ЭЛЕКТРОНИКА
БЗ-18
5
4
3
12345678
7
2
град
рад
8
ln lg √x X↔П CF
7 8 9 ↔ C
9
e^x 10^x x^y ИП ЗАП
4 5 6 = /-/
sin cos tg π 1/x
1 2 3 X ÷
arc П+X² ДВ П+ П−
0 , F + −
1

Фиг. 3.2.7.1.

დეს 6· ჩავრთავთ კალკულატორის კვების გადამრთველს 2, რისთვისაც მას გადავწევთ ზევით ისე, რომ გამოჩნდეს წითელი წერტილი. ამ დროს შედეგის მაჩვენებლების ანუ ინდიკატორის ტაბლოზე 7 აინთება 0 (ნული), რაც ნიშნავს იმას, რომ მიკროკალკულატორი მზადაა სამუშაოდ. მუშაობის დაწყებისათვის სჯობს, სამჯერ მყის დავაჭიროთ თითი ანუ სამჯერ ჩავრთოთ „C“ კლავიში.

მეორე შემთხვევაში, თუ ბატარეები დატენილია, შეიძლება უწყვეტლივ მუშაობა სამი საათი. ცხადია, აქაც საჭირო იქნება კვების გადამრთველის 2 ჩართვა. ამ დროს, თუ, გარდა ნულისა, წითლად აინთო აკუმულატორის დაცლის ინდიკატორი 3, იმის მაჩვენებელია, რომ საჭიროა აკუმულატორების დატენა.

B. აკუმულატორების დატენა

წინა მუხლში აღწერილი წესით კალკულატორს შევაერთებთ БП 2—1 ბლოკის საშუალებით ელექტრომკვებავ ქსელთან კვების გადამრთველის 2-მდებარეობის მიუხედავად. ამ დროს გარემო ჰაერის ტემპერატურა უნდა იყოს 15°—25°C.

დატენვის პერიოდების ჯამი არ უნდა აღემატებოდეს 15 საათს. დაუშვებელია მიკროკალკულატორის ელექტროქსელში ჩართულ მდებარეობაში მუშაობა, როცა მისი აკუმულატორები ნორმალურად არის დატენილი.

ჩასაშლელი „C“ კლავიშების დანიშნულება

მიკროკალკულატორის კლავიატურა 20 კლავიშისაგან შედგება, რომელთა ჩართვა ხდება თითის მყის დაჭერით. „C“ კლავიშის ჩართვის შემდეგ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, კლავიშების ჩართვით ხდება შესაბამისი ციფრების შეტანა ინდიკატორის ტაბლოზე 7. „,“ კლავიშის ჩართვით კი ხდება წილადი რიცხვების ტაბლოზე შეტანა ისეთივე თანამიმდევრობით, როგორიც იქნება ნებისმიერი ათწილადი რიცხვი. დანარჩენი კლავიშებია სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისათვის, მაგალითად, ნებისმიერი „+“, „—“, „×“, „÷“ მოქმედების (შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფის) კლავიშის ჩართვით მივიღებთ ადრე შესრულებული მოქმედების (თუ ასეთი არსებობს) შედეგს (შესაკრებს, საკლებს, სამრავლს, გასაყოფს), ამავე დროს მანქანა მზად არის მიღებულ შედეგზე ჩართული კლავიშის შესაბამისი მოქმედების (შეკრებისათვის, გამოკლებისა და გამრავლებისათვის, გაყოფისათვის) შესასრულებლად

მაგალითი 3. 2. 7. 1· ვთქვათ, ადრე შესრულებული მოქმედებაა 8+4 და გვსურს მიღებული შედეგი გავზარდოთ ან შევამციროთ 3-ით, გავამრავლოთ ან გავყოთ 3-ზე.

ადრე შესრულებული მოქმედება იქნება (C) (8) (+) (4) შემდეგი მოქმედებები:

მიმატებისათვის	გამოკლებისათვის	გამრავლებისათვის	გაყოფისათვის
(+) I შესაკრებია 12	(—) საკლებია 12	(×) სამრავლია 12	(÷) გასაყოფია 12
(3) II შესაკრებია 3	(3) მაკლებია 3	(3) მამრავლია 3	(3) გამყოფია 3
(=) ჯამია 15	(=) სხვაობაა 9	(=) ნამრავლია 36	(=) განაყოფია 4

სანამ შედეგის „=“ კლავიშს ჩავრთავთ, შეიძლება ნებისმიერი რაოდენობის მოქმედებების შესრულება და ბოლოს „=“ ჩართვით საბოლოო შედეგის მიღება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩართული კლავიში პირობით ფრჩხილებშია აღნიშნული, შედეგი კი ფრჩხილების გარეშე იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 7. 2. განისაზღვროს მანქანაზე შემდეგი გამოსახულება

$$\frac{(8+4+3-1+2)\times 4}{8}=8.$$

მანქანაზე შესრულდება შემდეგი მოქმედებები და მიიღება შედეგი 8:

$$(C)(8)(+)(4)(+)(3)(-)(1)(+)(2)(\times)(4)(\div)(8)(=)\ 8.$$

„=“ კლავიშის ჩართვით, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ვიღებთ ადრე შესრულებული მოქმედების შედეგს (ე. ი. ეს ფუნქცია ერთნაირად სრულდება წინ განხილული ხუთივე მოქმედების კლავიშზე). ამავე დროს მანქანა დგება „კონსტანტა“-ს (მუდმივას) რეჟიმზე, რაც ნიშნავს იმას, რომ „=“ კლავიშის ჩართვის წინ ინდიკატორზე ციფრი (რიცხვი) იქნება მუდმივი (II შესაკრები, მაკლები, მამრავლი ან გამყოფი) ამ მოქმედებისათვის, რა მოქმედებაცაა ჩართული „=“ კლავიშის ჩართვამდე. „=“ კლავიშის ყოველი ჩართვით წინა შედეგი იზრდება; მცირდება, მრავლდება ან იყოფა ხსენებული მუდმივით (მუდმივზე). ხოლო თუ ნაცვლად „=“ კლავიშისა ჩავრთეთ სხვა (პლუსის, მინუსის, გამრავლების, გაყოფის) კლავიში, წინა მოქმედების შედეგს მივიღებთ, მუდმივი იგივე დარჩება, მაგრამ ჩართული კლავიშის შესაბამისად, ყოველ ახალ ჩართვაზე გაიზრდება, შემცირდება, გამრავლდება ან გაიყოფა წინა შედეგი ხსენებული მუდმივით (მუდმივზე).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 7. 3. მანქანაზე შესრულდეს შემდეგი მოქმედებები ოთხ მაგალითზე:

1. $36+6=42$	2. $36-6=30$	3. $36\times6=216$	4. $36:6=6$
$42+6=48$	$30-6=24$	$216\times6=1296$	$6:6=1$
$48+6=54$	$24-6=18$	$1296\times6=7776$	$1:6=0{,}1666666$

მანქანაზე ჩართვები და შესაბამისი შედეგები მიიღება შემდეგნაირად:

(C)——0	(C)——0	(C)——0	(C)——0
(36)——36	(36)——36	(36)——36	(36)——36
(+)——36	(−)——36	(×)——36	(÷)——36
(6)——6	(6)——6	(6)——6	(6)——6
(+) ან (=)——42	(−) ან (=)——30	(×) ან (=)——216	(÷) ან (=)——6
(+) ან (=)——52	(−) ან (=)——24	(×) ან (=)——1296	(÷) ან (=)——1
(+) ან (=)——54	(−) ან (=)——18	(×) ან (=)——7776	(÷) ან (=)——0,1666666
და ა. შ.	და ა. შ.	და ა. შ.	და ა. შ.

განხილულ მაგალითებში მანქანაზე ყოველი მაგალითის მეხუთე (42, 30, 216,6) შედეგი მიიღება ხუთიდან ნებისმიერი კლავიშის ჩართვით, ხოლო ამ შედეგების ოდენობები გაიზრდება ან შემცირდება 6-ით ან 6-ჯერ ხუთიდან ერთ-ერთი კლავიშის ახლად ჩართვის შესაბამისად. მაგალითად, მეოთხე მაგალითში მეხუთე მოქმედებაში ნაცვლად „÷“ ან „=“ კლავიშის ჩართვისა, რომ ჩავრ-

თოთ ხუთიდან ერთ-ერთი, ვთქვათ, გამრავლების „×“ კლავიში, პასუხი იქნება 6, ანუ იგივე, რაც შეესაბამება ზემოთ ჩართულ „÷“ კლავიშს, ხოლო შემდეგ თუ ჩავრთეთ „+“ კლავიში, შედეგი იქნება 36, ანუ წინა შედეგის 6-ის მუდმივ 6-ზე ნამრავლი. შემდეგ „+“ კლავიშის ჩართვით მიიღება 42, ანუ წინა შედეგზე 36-ზე მუდმივი 6 მიმატებით ისე, რომ ხუთიდან ნებისმიერი კლავიშის ჩართვით სრულდება წინ (ადრე) მიღებული შედეგის შეცვლა მუდმივით (როგორც II შესაკრები, მაკლები, მამრავლი ან გამყოფი). ნიშნის შეცვლის კლავიში „|—|“ საჭიროებისამებრ ჩაირთვება ინდიკატორზე გამოსახული რიცხვის ნიშნის შესაცვლელად. მაშასადამე, პირველ რიგში უნდა ჩავრთოთ რიცხვი და მერე მას შევუცვალოთ ნიშანი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 2. 7. 4. 36:(—6)=—6 36:6=—6.

მოქმედებები მანქანაზე სრულდება ასე:

(C)———0	ან	(C)———0,
(36)———36		(36)———36,
(|−|)———−36		(÷)———36,
(÷)———−36		(6)———6,
(6)———6		(|−|)———−6,
(=)———6		(=)———−6.

ყოველთვის სჯობს ჩასაშლელ „C“ კლავიშზე მყის სამჯერ ზედიზედ თითის დაჭერა (ჩართვა); პ ი რ ვ ე ლ ი ჩ ა რ თ ვ ი ს შედეგად ჩაიშლება (გაიწმინდება) მიკროკალკულატორი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს შ ე თ ა ვ ს ე ბ ი ს ა გ ა ნ (ასე ხსენებული ოცი კლავიშის წინ მიყენილი მოქმედებისათვის განზადებისაგან, რაც ხდება „F“ კლავიშის ჩართვით) ან გ ა დ ა ვ ს ე ბ ი ს ლექიისაგან (ანუ როცა გამოხათვალს აქვს 8-ზე მეტი ათწილადი ნიშანი ან მოცემულ რიცხვებზე არ შეიძლება მათემატიკური მოქმედების შესრულება — ამ დროს გადავსების ინდიკატორი 5 აინთება მსხვილი წერტილის სახით). მ ე ო რ ე ჩართვა წმენდს ი ნ დ ი კ ა ტ ო რ ს, მ ე ს ა მ ე ჩართვა კი წმენდს მ უ შ ა რ ე გ ი ს ტ რ ს. „C“ კლავიშის ჩართვით არ ხდება ჩაშლა მ ე ხ ს ი ე რ ე ბ ი ს რეგისტრისა. ამ რეგისტრის გაწმენდისათვის საჭიროა მეხსიერების რეგისტრში ვჩვენოთ 0, რაც ხდება თანმიმდევრობით „C“, „F“, „ЗАП“ კლავიშების ჩართვით ან კვების გადამრთველის გამორთვით.

რიცხვების შეცვლის კლავიში „↔“

ამ კლავიშის ჩართვით ხდება ინდიკატორზე და სამუშაო რეგისტრზე არსებული რიცხვების ურთიერთ შეცვლა. მაგალითად, 6×5=30, მანქანაზე (C) (6) (×) (5) (↔) ტოლი იქნება (5) (×) (6) მოქმედების და „=“ ჩართვით (=) მივიღებთ 30. ზემოხსენებული 20 კლავიში გამოიყენება მეორე სახის ფუნქციონალური მოქმედებების შესასრულებლად, რისთვისაც „F“ კლავიშის ჩართვის შემდეგ გვეძლევა შესაძლებლობა ნებისმიერი კლავიშის ჩართვით შევასრულოთ ინდიკატორზე მიღებულ გამოსახულებაზე ის მოქმედება, რაც მის (ნებისმიერი კლავიშის) წინ (არა ზემოდან) აწერია დაფას. ამიტომ „F“ კლავიშს ეწოდება ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს შ ე თ ა ვ ს ე ბ ი ს კ ლ ა ვ ი შ ი.

გარდა „arc“ და „ДВ“ შეთავსებული ფუნქციისა, ყველა შეთავსებული და ჩართული ფუნქციის რეჟიმი მთავრდება და ავტომატურად იხსნება ფუნქციის შეთავსების რეჟიმი, ინდიკატორზე კი დაიწერება გამონათვალი, მაგალითად, $\sin 30° = 0,5$. ავიღებთ კლავიშებზე 30-ს, შემდეგ ჩავრთავთ „F“ და ბოლოს „sin“, მივიღებთ პასუხს 0,5. ამავე დროს, გარდა „arc“ და „DB“, ყველა კლავიში შეთავსებისაგან გამორთულია.

„E“ კლავიშის ჩართვის შემდეგ იმავე ანუ „DB“ კლავიშის ჩართვით ხდება მონაცემთა აღდგენა. ვთქვათ, საჭიროა $\sin 30°$ გამოთვლა, შეცდომით ავიღეთ 35. ხუთის ნაცვლად ნულის მიწერისათვის ჩავრთავთ „F„ და შემდეგ „DB“ კლავიშს, შემდეგ ჩავრთავთ „CF“, რაც უფლებას იძლევა შევიტანოთ ხუთის ნაცვლად „0“. ამის შემდეგ ჩავრთოთ „F“ და „sin“ კლავიში. ინდიკატორზე მივიღებთ 0,5. ამდენ შრომას სჯობს 35 ჩავშალოთ და 30 ავღნიშნოთ, ანუ განმეორებით შევასრულოთ (C) (30) (F) (sin) = 0,5.

ვთქვათ, გვინდა 248 დაიმახსოვროს მანქანამ. ამისთვის ჩავრთავთ „C“ და 248 კლავიშებს, რაც ინდიკატორზე გამოისახება, შემდეგ ჩავრთავთ „F“ და მერე „ЗАП“ (დამახსოვრების კლავიშს). ამას, ვთქვათ, გვინდა მივუმატოთ 2, ჩავრთავთ 2-ს, ჩავრთავთ „F“ და მერე „Π_+“, „F“ და „ИП“ კლავიშს, ინდიკატორზე გამოისახება 250. ვთქვათ, კიდევ გვინდა ამას მივუმატოთ $\sin 30°$, მაშინ ავიღებთ 30°, მერე „F“ და „sin“-ს, მივიღებთ 0,5. მერე ჩავრთავთ „F“, „Π_+“, „F“ და ბოლოს „ИП“ კლავიშს, მივიღებთ 250,5. მანქანაზე ასე ვიმოქმედებთ: (C) (248) (F) (ЗАП) (2) (F) (Π_+) (F) (ИП) 250 (30) (F) (sin) (F) (Π_+) (F) (ИП) 250,5.

ვთქვათ, გვინდა მანქანამ დაიმახსოვროს $\sin 60°$, რომელსაც უნდა გამოაკლდეს $\sin 30°$. ამისათვის ჩავრთავთ „60“-ს, შემდეგ „F“-ს, მერე sin. ინდიკატორზე დაიწერება 0,866025, ჩავრთავთ „F“-სა და „ЗАП“-ს, ამით მანქანა იმახსოვრებს 0,866025, შემდეგ ჩავრთავთ „30“-ს, „F“-ს „sin“-ს. მივიღებთ 0,5, შემდეგ ჩაირთვის „F“, „Π_-“, „F“, „ИП“ და მივიღებთ 0,366025. იმავე პასუხს მივიღებთ თუ $\sin 60° - \sin 30°$. (60) (F) (sin) 0,866025 ჩავშლით და გამოვითვლით (30) (F) (sin) 0,5, შემდეგ პირველს გამოვაკლებთ მეორეს.

როგორც ზემოთ მოყვანილი მოქმედებებიდან ჩანს, „F„ კლავიშის ჩართვის შემდეგ „ЗАП“ კლავიშის ჩართვით ინდიკატორზე დაიწერება მეხსიერებაში ჩაწერილი რიცხვი და ეს რიცხვი მეხსიერებაში დარჩება შენარჩუნებული. მაგალითად, $\sin 60°$ დაიმახსოვროს მანქანამ, ე. ი. (60) (F) (sin) 0,866025 (F) (ЗАП) (0,866025 მანქანამ დაიმახსოვრა), შემდეგ მას გამოვაკლოთ $\sin 30°$. ამისათვის ვიღებთ (30) (F) (sin) 0,5 (F) (Π_-) (F) (ИП) 0,366025, ახლა ამას მივუმატოთ $\operatorname{tg} 45°$, ამისათვის ავიღოთ მანქანაზე (45) (F) (tg) (F) (Π_+) (F) (ИП) 1,3662025;

მივიღეთ პასუხი, რომელიც ჩაწერილია მანქანის მეხსიერებაში. როგორც ზემოთ ვნახეთ „ЗАП“ არის დამახსოვრების კლავიში. ჯერ უნდა ჩაირთოს მოცემული რიცხვი ან გამონათვალი, მეორე „F“ და ბოლოს „ЗАП“. ამ უკანასკნელის ჩართვით იშლება ადრე მეხსიერების რეგისტრზე ჩანაწერი. მაგალითად, $5 \times 4 = 20 + 5 = 25$ ამისათვის მანქანაზე (C) (5) (×) (4) (=) 20 (F) (ЗАП) (5) (F) (Π_+) (F) (ИП) 25.

ინდიკატორისა და მეხსიერების ჩანაწერთა შეცვლის კლავიში „$x \leftrightarrow П$“

„C“ და „F“ ჩართვის შემდეგ „$x \leftrightarrow П$“ კლავიშის ჩართვით ურთიერთ შეიცვლება ინდიკატორზე და მეხსიერებაში ჩანაწერი. მაგალითად, 24 მეხსიერებაშია, ე. ი. (C)(24)(F)(ЗАП). ახლა 24 მეხსიერებაში შევცვალოთ 12 რიცხვით. ამისათვის ავიღებთ მანქანაზე (12) და ($x \leftrightarrow П$). ახლა 12 არის მეხსიერებაში. ამას მივუმატოთ 8, ამისათვის ავიღოთ (8)(F), (П+), (F), (ИП) 20 (ანუ ინდიკატორზე მივიღებთ 20).

ინდიკატორზე ჩანაწერი რიცხვების კვადრატების ჯამის „$П+x^2$“ კლავიში

„C“ „რიცხვი“-ს და „F“ და „$П+x^2$“ კლავიშების ჩართვით ინდიკატორზე გამოსახული რიცხვის კვადრატით იზრდება მეხსიერებაში ჩანაწერები. მაგალითად, $2^2+3^2+4^2=$ (C)(2)(F)($П+x^2$)(3)(F)($П+x^2$)(4)(F)($П+x^2$)(F)(ИП) 29.

შენიშვნა. საერთოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ ყოველი ახალი მოქმედების შესრულების წინ საჭიროა მეხსიერების ჩაშლა (მასში ნულის შეტანა) ანუ (C)(F)(ЗАП) მოქმედებების შესრულება ან გამორთავთ კვების გადამრთველს 2 და ისევ ჩავრთავთ, ცხადია, თუ ადრე გამოყენებული იყო მეხსიერების რეგისტრი.

„π“ კლავიში

„F“-ის შემდეგ „π“ კლავიშის ჩართვის შედეგად ინდიკატორზე დაიწერება 3,1415926. მაგალითად (F)(π) 3,1415926.

„$\frac{1}{x}$“ კლავიში

„C“ და „F“-ის შემდეგ „$\frac{1}{x}$“ კლავიშის ჩართვით ინდიკატორზე მიიღება, ინდიკატორზე ადრე აკრეფილი რიცხვის შებრუნებული ოდენობა. მაგალითად, (C), (5), (F) $\left(\frac{1}{x}\right)$ 0,2.

„$\sqrt{x}$“ კლავიში

„C“ და „F“-ის შემდეგ „$\sqrt{x}$“ კლავიშის ჩართვით ინდიკატორზე მიიღება ინდიკატორზე ადრე აკრეფილი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი. მაგალითად, $\sqrt{64}$ მანქანაზე (C)(64)(F)($\sqrt{x}$) 8.

„x^y“ კლავიში

ამ ფუნქციის გამოთვლით x რიცხვი აიყვანება y ხარისხში, სადაც y წარმოადგენს ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს.

აღნიშნული ფუნქციის გამოთვლა სრულდება ორ ეტაპად. $x^y=e^{y\ln x}$, ანუ $y\ln x=y\ln x\ln e$, ე. ი. „C“, x რიცხვის, „F“-ის და „x^y“ კლავიშის ჩართვით გამოითვლება $\ln x$, შემდეგ (მეორე ეტაპი) შევიტანთ ანუ ჩავრთავთ y რიცხვს და „=“ კლავიშს, რის შედეგად ინდიკატორზე მივიღებთ „x^y“ ფუნ-

ქციის გამონათვალს. $27^{\frac{1}{5}}$ გამოთვლისათვის I ეტაპია (C)(27)(F)(x^y) 3,295836, II ეტაპია (0,333333)(=) 2,999995≈3. ან კიდევ, ვთქვათ, გამოსათვლელია 3^5. პირველი ეტაპია (C)(3)(F)(x^y) 1,098613, მეორე ეტაპია (5)(=) 243,0006≈243.

„sin“, „cos“, „tg“ კლავიშები

კუთხე, გამოსახული მხოლოდ გრადუსებში ან რადიანებში, აიღება ინდიკატორზე. შემდეგ ჩაირთვება „F“ კლავიში, შემდეგ კლავიში „sin“, „cos“ ან „tg“, ინდიკატორზე მივიღებთ კუთხის ფუნქციის ოდენობას. მაგალითად, sin 30° = (C)(30)(F)(sin). შედეგია 0,5. კუთხე თუ რადიანებშია 30 : 57,3 = =0,5235602, მაშინ ბერკეტს 8 დავაყენებთ რადიანებზე და მანქანაზე ავიღებთ (C)(0,5235602)(F)(sin), პასუხია 0,499965 ≈ 0,5.

„arc“ კლავიში

როდესაც მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ოდენობა, მას გამოვსახავთ ინდიკატორზე, შემდეგ ჩავრთავთ „F“, „arc“ და მოცემული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის კლავიშს, მივიღებთ კუთხის ოდენობას გრადუსებში ან რადიანებში (როცა ბერკეტი 8 გადართულია). მაგალითად, sin x = 0,5 (x = ?) მანქანაზე (C)(0,5)(F)(arc)(sin) 30°, ან 8 ბერკეტის რადიანებზე გადართვით და იგივე მოქმედების შესრულებით მივიღებთ 0,523599 რადიანს.

„ln“, „lg“, „e^x“, „10^x“, sin“, „cos“, „tg“ კლავიშები

„C“ და რომელიმე „x“ არგუმენტის და „F“ კლავიშის ჩართვის შემდეგ ერთ-ერთი ზემოთ მოყვანილი ფუნქციის კლავიშის ჩართვით ინდიკატორზე მიიღება ამ ფუნქციის რიცხვითი ოდენობა.

მაგალითად, ln e = 1. მანქანაზე (C)(2,71828)(F)(ln) 0,099998≈1;

lg e = 0,434294. მანქანაზე (C)(2,71828)(F)(lg) 0,434294;

lg 20 = 1. 30103. მანქანაზე (C)(20)(F)(lg) 1,30103;

ანტილოგარითმი e^3 = 20,08553. მანქანაზე (C)(3)(F)(e^x) 20,08553;

ანტილოგარითმი 10^3 = 1000. მანქანაზე (C)(3)(F)(10^x) 1000;

sin 30° = 0,5. მანქანაზე (C)(30)(F)(sin) 0,5;

cos 30° = 0,866026. მანქანაზე (C)(30)(F)(cos) 0,866026;

tg 30° = 0,57735. მანქანაზე (C)(30)(F)(tg) 0,57735;

arc sin 0,389 = 22,89229. მანქანაზე (C)(0,389)(F)(sin) 22°,89229;

arc cos 0,8660254 = 30. მანქანაზე (C)(0,8660254)(F)(cos) 30°;

arc tg = 45°. მანქანაზე (C)(F)(arc)(tg) 44,9999≈45;

arccse 2 = 30. მანქანაზე (C)(F)$\left(\frac{1}{x}\right)$(F)(arc)(sin) 30;

arcsec 1,9051 = 58,33802. მანქანაზე (C)(F)$\left(\frac{1}{x}\right)$(F)(arc)(cos) 58,33802;

arcctg 4,4909 = 12,55. მანქანაზე (C)(F) $\left(\frac{1}{x}\right)$(F)(arc)(tg) 12,55339;

cos (−35) = 0,819152. მანქანაზე (C)(35)(|−|)(F)(cos) 0,819152.

მაგალითები

1. $(4-2+3-4+5)\times2=8-4+6-8+10.$

   (C)(4)(×)(2)(=)8;
   (2)(|−|)(=) −4
   (3)(=) 6,
   (4)(|−|)(=) −8,
   (5)(=) 10.

2. $(4-2+3-4+5)\times2=12.$

   (C)(4)(−)(2)(+)(3)(−)(4)+(5)(×)(2)(=) 12.

3. $(4-2+3-4-5):(-4)=-1+0,5-0,75+1+1,25.$

   (C)(4)(÷);(4)(|-|)(=)−1;
   (2) (|−|)(=)0,5;
   (3) (=)−0,75;
   (4) (|−|)(=)1,00;
   (5) (|−|)(=)1,25.

4. $(4-2+3-4-5):(-4)=1.$

   (C)(4)(−)(2)(+)(3)(−)(4)(−)(5)(=)(|−|)(:)(4)(=) 1.

5. $2^2+3^2+4^2=29.$

ვგულისხმობთ, რომ მეხსიერებაში შეტანილია (0), ანუ „C"-ს სამჯერ ჩართვის შემდეგ ჩართული იყო „F" „ЗАП" კლავიში ან გამორთული და ჩართული იყო კვების გადართვის 2 კლავიში.

   (2)(F)(П+x^2)(3)(F)(П+x^2)(4)(F)(П+x^2)(F)(ИП) 29.

6. $2(-3)+3\times(-4)+4\times5=-6-12+20=2.$

   (C)(2)(×)(3)(|−|)(=) −6
   (F)(ЗАП)
   (3)(×)(4)(|−|)(=) −12,
   (F)($П_+$)
   (4)(×)(5)(=) 20,
   (F)($П_+$)(F)(ИП) 2.

7. $2\times(-3)+3\times(-4)+4\times5=2$

   (C)(2)(×)(3)(|−|)(F)(ЗАП)(3)(×)(4)(|−|)(F)($П_+$)(4)
   (×)(5)(F)($П_+$)(F)(ИП) 2.

8. $(2+2)\times3+(4-2)\times2-(5-3)\times3=12+4-6=10.$

   (C)(2)(+)(2)(×)(3)(=)12
   (F)(ЗАП)
   (4)(−)(2)(×)(2)(=) 4
   (F)($П_+$)
   (5)(−)(3)(×)(3)(|−|)(=) −6
   (|−|)(F)($П_-$)(F)(ИП) 10.

9. $3\times2^2+4\times3^2-5\times4^2=12+36-80=-32.$

   (C)(2)(F)(x^2)(2)(=)(×)(3)(=)12
   (F)(ЗАП)

(3)(F)(x^y)(2)(=)(×)(4)(=) 36,
(F)(П$_+$)
(4)(F)(x^y)(2)(=)(×)(5)(=)(|—|) —80
(|—|)(F)(П$_-$)(F)(ИП) —32.

10. $\sqrt{(2\times 5+3\times 2-4+6)}:10=1{,}3416407.$
(C)(2)(×)(5)(=)(F)(П$_+$)(F)(ИП)(3)(2) =
= (F)(П$_+$)(F)(ИП)(—)(4)(+)(6)(:)(10)(=)(=)(F)($\sqrt{x}$) 1,3416407.

თავი III

პირდაპირი დამოუკიდებელი ტოლზუსტი გაზომვები

3. 3. 1. განაზომთა საშუალო არითმეტიკული და მისი შეცდომა

რაიმე ობიექტის უშუალო, ტოლზუსტ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული, მისი სიცხადის გამო, გამოყენებულ იქნა შემთხვევით შეცდომათა თვისებების დახასიათებისათვის 3. 1. 6. 4 და 3. 1. 6. 5 ცხრილებში[1]

შემდეგში, როდესაც შევეხებით ამა თუ იმ ობიექტის განაზომთა სიზუსტის შეფასებას, ანუ განაზომთა სიზუსტის კრიტერიუმის დადგენის საკითხს, გაზომილი ობიექტი ჭეშმარიტი ოდენობის გარდა, საჭირო გახდება მისი საშუალო არითმეტიკულის, როგორც უალბათესი ოდენობის გამოყენება, რადგანაც ყოველთვის არა გვაქვს შესაძლებლობა ვიცოდეთ ამა თუ იმ სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა.

3. 3. 3 პარაგრაფში ახსნილია, რომ, თუ ცნობილია გასაზომი ობიექტის X ჭეშმარიტი ოდენობა და უშუალოდ მივიღეთ მისი განაზომები

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_n, \tag{3.3.1.1}$$

მაშინ ცალკეულ განაზომთა ჭეშმარიტი შემთხვევითი შეცდომები

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots,\ \delta_n \tag{3.3.1.2}$$

გამოითვლება სხვაობებით

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= l_1 - X \\ \delta_2 &= l_2 - X \\ \delta_3 &= l_3 - X \\ &\ \ \vdots \\ \delta_n &= l_n - X \end{aligned}\right\}. \tag{3.3.1.3}$$

ზოგადად, გვექნება

$$\delta_i = l_i - X. \tag{3.3.1.4}$$

---

[1] არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ტოლზუსტობის მხრივ იგულისხმება განმეორებითი გაზომვების დროს პირობების ანუ გაზომვების ყველა ფაქტორის უცვლელობა და არა ცალკეულ გასაზომთა ურთიერთ ტოლობა, რომლებიც, ჩვენგან დამოუკიდებელი მიზეზების გამო, სხვადასხვა ოდენობისაა.

ამასთანავე ვიცით, რომ δ_i არის შემთხვევითი შეცდომა თავისი თვისებებით და ჭეშმარიტი თავისი მნიშვნელობით (ოდენობით)..

იმ შემთხვევაში, როდესაც არ ვიცით გასაზომი ობიექტის ნამდვილი (ჭეშმარიტი) ოდენობა, ყოველი ცალკეული განაზომის შედარებას ვახდენთ მათ საშუალო არითმეტიკულთან, ვინაიდან ამ საშუალო არითმეტიკულს ვგულისხმობთ, როგორც უალბათესს, ანუ ჭეშმარიტ ოდენობასთან უახლოესს. ხსენებულის გამო გამოთვლილ შეცდომებსაც ეწოდება ცალკეული განაზომის უალბათესი შემთხვევითი შეცდომა. ამგვარად, თუ რაიმე ობიექტს გავზომავთ ტოლზუსტად ორჯერ, მის საბოლოო ოდენობად უნდა მივიღოთ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული. ასევე უნდა მოვიქცეთ, როდესაც გვაქვს რაიმე ობიექტის ტოლზუსტ განაზომთა რიგი. აქედან გამომდინარე ცალკეულ განაზომთა (1) რიგიდან საშუალო არითმეტიკულს განვსაზღვრავთ ფორმულით·

$$\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}. \qquad (3.3.1.5)$$

საკითხის ამნაირად გადაწყვეტა გამომდინარეობს თვით ტოლზუსტობის (ერთნაირად სანდოობის) ცნებიდან.

(3) დამოკიდებულებათა შეკრებით მივიღებთ

$$[\delta]=[l]-nX,$$

საიდანაც n-ზე გაყოფით გვექნება

$$\frac{[\delta]}{n}=\frac{[l]}{n}-X. \qquad (3.3.1.6)$$

შემთხვევით შეცდომათა მეოთხე თვისების გამო, $\frac{[\delta]}{n}$ უსასრულო მცირე სიდიდეა და მისი ოდენობა მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა n უსასრულოდ იზრდება. ამის გამო $\frac{[l]}{n}$ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულიც X ჭეშმარიტი ოდენობისაკენ მიისწრაფვის, ე. ი. შეიძლება დაიწეროს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\delta]}{n}=0 \qquad (3.3.1.7)$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[l]}{n}=X. \qquad (3.3.1.8)$$

(7) და (8) გამოსახულებები საფუძველია იმისა, რომ ტოლზუსტ განაზომთა ერთობლიობიდან გამოთვლილ საშუალო არითმეტიკულს ვიღებთ უალბათესად და სიზუსტის შეფასებისთვის ცალკეულ განაზომს ვადარებთ მას, გაზომილი სიდიდის როგორც უფრო სანდო მნიშვნელობას.

სინამდვილეში გაზომვათა რიცხვის უსასრულოდ გაზრდა არ არის მიღებული, ამიტომ $\frac{[\delta]}{n}$ სასრული ოდენობაა და ის მით უფრო მცირეა, რაც უფრო ზუსტად და მეტჯერ არის ობიექტის გაზომვები შესრულებული.

აღვნიშნოთ

$$\frac{[l]}{n} = L\text{-ით} \quad (3.3.1.9)$$

და

$$\frac{[\delta]}{n} = \Delta\text{-თი.} \quad (3.3.1.10)$$

L-ს უწოდებენ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულს ან ტოლზუსტ განაზომთა უალბათეს სიდიდეს, ხოლო Δ-ს — ჭეშმარიტ შეცდომათა საშუალო არითმეტიკულს ან ტოლზუსტ განაზომთა უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტ შეცდომას.

(9) და (10) აღნიშვნების გამოყენებით (6) ტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\Delta = L - X, \quad (3.3.1.11)$$

$$X = L - \Delta. \quad (3.3.1.12)$$

მიღებული ტოლობები იკითხება ასე:

ობიექტის განაზომთა უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომა ტოლია განაზომთა უალბათეს და ჭეშმარიტ ოდენობათა სხვაობისა.

რაიმე სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ტოლია ამ სიდიდის განაზომთა უალბათესი მნიშვნელობისა და მისი ჭეშმარიტი შეცდომის სხვაობის.

განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის უალბათეს ოდენობად მიღება მათემატიკურად ვერ მტკიცდება, მაგრამ, სიცხადის გამო, მას, როგორც პოსტულატს, იყენებენ შეცდომათა თეორიის დებულებათა მტკიცების საფუძვლად (27).

არის მთელი რიგი მათემატიკური მოსაზრებანი, L-ის უპირატესობის დამადასტურებელი, მაგრამ არსებობს ამ პოსტულატის საწინააღმდეგო პოსტულატიც, რომელიც საშუალო არითმეტიკულს უპირისპირებს განაზომთა ოდენობების საშუალო ოდენობას. საშუალო ოდენობა ძიიღება თუ სიდიდის ცალკეულ განაზომებს დავალაგებთ ოდენობათა ზრდად ან კლებად რიგად და განაზომთა სანდო, უალბათეს სიდიდედ მივიღებთ ამ რიგის შუა წევრს. მოითხოვება ამასთანავე, რომ შესრულებული გაზომვების რაოდენობა კენტი რიცხვი იყოს, რაც გაზომვის პრაქტიკაში იშვიათია შემთხვევითი შეცდომების მესამე და მეოთხე თვისების გამო და ამიტომ მან ვერ ჰპოვა გამოყენება, გარდა მათემატიკური სტატისტიკისა.

როდესაც მრავალი განაზომი გვაქვს, მაშინ საშუალო არითმეტიკულის გამოთვლა სჯობს განაზომთა მიახლოებითი ოდენობის გამოყენებით. აღვნიშნოთ ასეთი მიახლოებითი ოდენობა l_0-ით და სხვაობა ყოველ l_i განაზომსა და l_0-ს შორის — δ_i-ით, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} \delta_{i_1} &= l_1 - l_0 \\ \delta_{i_2} &= l_2 - l_0 \\ &\cdot \\ \delta_{i_n} &= l_n - l_0 \end{aligned}\right\}. \quad (3.3.1.13)$$

შევკრიბოთ მიღებული დამოკიდებულებანი, მივიღებთ

$$[\delta_i]=[l]-nl_0;$$

n-ზე გაყოფა მოგვცემს

$$\frac{[\delta_i]}{n}=\frac{[l]}{n}-l_0,$$

საიდანაც

$$L=l_0+\frac{[\delta_i]}{n}. \qquad (3.3.1.14)$$

უფრო მარტივია უალბათესი ოდენობის (14) ფორმულით გამოთვლა, ვიდრე (9) ფორმულით.

§ 3. 2. ᲣᲐᲚᲑᲐᲗᲔᲡᲘ ᲨᲔᲪᲓᲝᲛᲔᲑᲘ

წინა პარაგრაფში დასაბუთებული იყო, რომ, როდესაც არ ვიცით გასაზომი ობიექტის ჭეშმარიტი ოდენობა, მაშინ სწორ მნიშვნელობად მიიღება ტოლზუსტ განაზომთა L საშუალო არითმეტიკული, რომელსაც შეადარებენ ყოველ ცალკეულ განაზომს. სხვაობას რაიმე ობიექტის ყოველ ცალკეულ განაზომსა და ამ განაზომთა უალბათეს ოდენობას შორის აღნიშნავენ v-თი და მას უწოდებენ უ ა ლ ბ ა თ ე ს შეცდომას.

ვთქვათ, გავზომეთ n-ჯერ რაიმე ობიექტი, რომლის ოდენობა ჩვენთვის უცნობია და მივიღეთ განაზომთა მეორე სახის რიგი.

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \dots ,\ l_n.$$

როგორც ვიცით, გაზომილი სიდიდის L უალბათესი მნიშვნელობა გამოითვლება (3. 3. 1. 9) ან 3. 3. 1. 14) ფორმულით. რაც შეეხება უალბათეს შეცდომებს, მათ განსაზღვრავენ შემდეგი ტოლობებით:

$$\left.\begin{array}{l} v_1=l_1-L \\ v_2=l_2-L \\ \\ v_n=l_n-L \end{array}\right\}. \qquad (3.3.2.1)$$

ზოგადი სახით დაიწერება

$$v_i=l_i-L; \qquad (3.4.2.2)$$

უალბათესი შესწორება ε_i განისაზღვრება ფორმულით

$$\varepsilon_i=L-l_i, \qquad (3.3.2.3)$$

(2) და (3) ტოლობებიდან გვექნება

$$L=l_i-v_i, \qquad (3.3.2.4)$$

$$L=l_i+\varepsilon_i. \qquad (3.3.2\ 5)$$

ე. ი. რაიმე სიდიდის განაზომთა უალბათესი ოდენობა უდრის ნებისმიერი ცალკეული განაზომისა და მისი უალბათესი შეცდომის ალგებრულ სხვაობას ან ცალკეული განაზომისა და მისივე შესწორების ალგებრულ ჯამს.

3. 3. 3. ჭეშმარიტ` და უალბათეს შეცდომებს შორის დამოკიდებულება

განვსაზღვროთ (3. 3. 1. 4) და (3. 3. 2. 2) ფორმულებიდან l_i.

$$l_i = X + \delta_i,$$

$$l_i = L + v_i;$$

აქედან

$$\delta_i = v_i + L - X.$$

ამასთანავე (3. 3. 1. 11) ფორმულიდან ვიცით, რომ

$$\Delta = L - X,$$

მაშასადამე,

$$\delta_i = v_i + \Delta. \qquad (3.3.3.1)$$

ე. ი. რაიმე სიდიდის ყოველი ცალკეული განაზომის ჭეშმარიტი შეცდომა უდრის ჯამს ყოველი ცალკეული განაზომის უალბათესი შეცდომისა და განაზომთა უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომისას. აქედან დავასკვნით, რომ უალბათესი შეცდომა მით უფრო ახლოა ჭეშმარიტ შეცდომასთან, რაც უფრო უახლოვდება განაზომთა საშუალო არითმეტიკული გაზომილი სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას.

როგორც ჩანს, გასაზომი ობიექტის უალბათესი სიდიდე (L) გამოიყენება თვით უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი (Δ) შეცდომისა და უალბათესი (v) შეცდომების გამოსათვლელად. პირველ შემთხვევაში გასაზომი ობიექტის ჭეშმარიტი (X) ოდენობა ცნობილია (3. 3. 2. 11 ფორმულა) და მეორე შემთხვევაში არა (3. 3. 2. 2. ფორმ.). ამაში მდგომარეობს ორმაგი აზრი საშუალოსი.

3. 3. 4. უალბათეს შეცდომათა თვისებები

უალბათესი შეცდომის ღრმა ანალიზის საფუძველზე დადგენილია მათი სამი თვისება.

პ ი რ ვ ე ლ ი თ ვ ი ს ე ბ ა — **ნებისმიერი რიგის ტოლზუსტ განაზომთა უალბათესი შეცდომების ჯამი უდრის ნულს.**

შევკრიბოთ თანამიმდევრობით უალბათესი შეცდომების გამოსათვლელი (3. 3. 2. 2. ფორმ.). ამაში მდგომარეობს ორმაგი აზრი საშუალოსი[1].

$$[v] = [l] - nL. \qquad (3.3.4.1)$$

შევცვალოთ ამ ფორმულაში L, თანახმად (3. 3. 1. 9) ტოლობისა,

$$L = \frac{[l]}{n},$$

მივიღებთ

$$[v] = [l] - n\frac{[l]}{n} = 0$$

[1] ერთის მხრივ, შესადარია (საკონტროლოა), როცა გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი ოდენობა ცნობილია და, მეორე მხრივ ის განაზომთა რიგის წარმომადგენელია, როცა ჭეშმარიტი ოდენობა უცნობია.

ანუ

$$[v]=0. \qquad (3.3.4.2)$$

უალბათესი შეცდომების ეს თვისება გამოიყენება იმის საკონტროლოდ, თუ რამდენად სწორად არის გამოთვლილი განაზომთა საშუალო არითმეტიკული და თვით უალბათესი შეცდომები.

მაგალითად, თუ საშუალო არითმეტიკული დამრგვალების გარეშეა გამოთვლილი, მაშინ $[v]=0$. ხოლო, როცა საშუალო არითმეტიკული გამოთვლილია მიახლოებით ანუ დამრგვალებით, უალბათეს შეცდომათა ჯამი არ უდრის ნულს და კონტროლი სრულდება (1) და (2) ფორმულებით მიღებულ გამონათვალთა ტოლობის მოთხოვნით.

სქემა 3.3.4.1

l_i	$\vartheta_i=l_i-X$	$v_i=l_i-L$
48°12′10″	+3″	+2″
6″	−1″	−2″
12″	+5″	+4″
4″	−3″	−4″
$L=48°12'8''$	$[\vartheta]=+4''$	$[v]=0$

ვთქვათ, გვაქვს განაზომთა რიგი (სქემა 1) კუთხისა, რომლის ჭეშმარიტი ოდენობა ტოლია 48°12′7″.

ტოლზუსტ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული

$$L=48°12'\frac{32''}{4}=48°12'8''$$

და მისი ჭეშმარიტი შეცდომა

$$\Delta=\frac{4''}{4}=1''.$$

ამრიგად, გამონათვლები განაზომთა საშუალო არითმეტიკულისა და უალბათესი შეცდომებისა სწორია (კონტროლი (2) ფორმულით).

განვიხილოთ განაზომთა რიგი, როცა საშუალო არითმეტიკული გამოთვლილია მიახლოებით. ავიღოთ შემდეგი მაგალითი:

$$\begin{array}{ll} l_1=1,0 & v_1=-0,03 \\ l_2=1,1 & v_2=+0,07 \\ l_3=1,0 & v_3=-0,03 \\ \hline [l]=3,1 & [v]=+0,01 \end{array}$$

$$L=\frac{3,1}{3}=1,03$$

(1) ფორმულით

$$[l]-L\cdot n=3,1-1,03\times 3=+0,01.$$

მიღებული სხვაობა უალბათეს შეცდომათა ჯამია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $[v]$ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული და უალბათესი შეცდომები სწორადაა გამოთვლილი..

მ ე ო რ ე   თ ვ ი ს ე ბ ა — **ნებისმიერი რიგის ტოლზუსტ განაზომთა უალბათესი შეცდომების კვადრატების ჯამი არის მინიმუმი, ანუ ამ რიგის ყოველი წევრიდან საშუალო არითმეტიკულის გადახრების კვადრატების ჯამი მუდამ ნაკლებია ამავე განაზომებიდან სხვა რომელიმე ნებისმიერი ოდენობის გადახრების კვადრატების ჯამზე.**

დავუშვათ, რომ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულისაგან განსხვავებული რიცხვი არის A (A შეიძლება იყოს გასაზომი ობიექტის ჭეშმარიტი ოდენობის

გამომსახველი რიცხვიც· თუ ეს ცნობილია, მაშინ, როგორც ვიცით, მას აღვნიშნავთ X-ით); განაზომთა A რიცხვისაგან გადახრა აღვნიშნოთ a_i-ით; ამ აღნიშვნების თანახმად დავწერთ შემდეგი სახის დამოკიდებულებებს:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ a_1 = l_1 - A; & v_1 = l_1 - L; \\ a_2 = l_2 - A; & v_2 = l_2 - L; \\ \cdot & \cdot \\ a_n = l_n - A; & v_n = l_n - L. \end{array}$$

პირველ დამოკიდებულებებს გამოვაკლოთ შესაბამისად მეორე, მივიღებთ

$$a_1 - v_1 = L - A$$
$$a_2 - v_2 = L - A$$
$$\cdot$$
$$a_n - v_n = L - A$$

თუ $L-A$-ს აღვნიშნავთ τ-თი და v_i-ს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეზე, გვექნება

$$a_1 = v_1 + \tau;$$
$$a_2 = v_2 + \tau:$$

$$a_n = v_n + \tau.$$

ამ ტოლობების კვადრატში აყვანისა და შეკრების შემდეგ მივიღებთ

$$[a^2] = [v^2] + 2\tau[v] + n\cdot\tau^2.$$

უალბათეს შეცდომათა ჯამის თვისების ანუ (2) ფორმულის თანახმად, $[v]=0$; ამიტომ

$$[a^2] = [v^2] + n\cdot\tau^2.$$

მიღებული ტოლობის სამივე წევრი არსებითად დადებითი სიდიდეებია, ამისგამო

$$[v^2] < [a^2].$$

რადგანაც A ნებისმიერი რიცხვია, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $[v^2]$ მუდამ არის მინიმუმი, ე. ი.

$$[v^2] = \text{minimum}. \qquad (3.3.4.3$$

უალბათესი შეცდომების ამ თვისებას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს განაზომთა დამუშავებისას და ის საფუძვლად უდევს უმცირეს კვადრატთა ხერხს, რომლითაც სრულდება გაწონასწორებითი გამოთვლები.

მ ე ს ა მ ე თ ვ ი ს ე ბ ა — **უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამი რაოდენობრივად დამახასიათებელია შესრულებულ განაზომთა რიგისა.**

მართლაც, რაც მეტი იქნება განსხვავება განაზომთა საშუალო არითმეტიკულსა და ნებისმიერად აღებულ რიცხვს შორის, მით უფრო მკვეთრად იჩენს თავს განსხვავება უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამსა და განაზომთა ამ ნებისმიერი რიცხვისაგან გადახრების კვადრატების ჯამს შორის, განაზომთა მოცემული რიგისათვის უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამი უცვლელი სიდიდეა და ამ სიდიდის ოდენობით შეიძლება როგორც განაზომთა ცალკეული

ელემენტების, ისე ამ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის სიზუსტის შეფასება.

გაზომვის სხვადასხვა რიგების შედეგთა სიზუსტე მკაფიოდ მჟღავნდება უალბათესი შეცდომების კვადრატების ჯამის საშუალებით იმ შემთხვევაშიც, როცა განაზომთა რაოდენობა არ არის დიდი, რადგანაც ტოლზუსტი გაზომვების განმეორების რაოდენობის ზრდით ან კლებით უმნიშვნელოდ (ფორმალურად) იზრდება ან იკლებს განაზომთა საშუალო არითმეტიკულიდან გადახრების კვადრატების ჯამი.

აღსანიშნავია, რომ უალბათეს შეცდომათა დასახელებული სამი თვისება დამახასიათებელია არა მარტო განაზომთა უალბათესი შეცდომებისა, არამედ ამ თვისებებით ხასიათდება გადახრათა ყველა რიგი, რომლებიც მიიღება ნებისმიერი რიცხვებისაგან მათი საშუალო არითმეტიკულის გამოკლებით.

ვ. 8. 5. განაზომთა მეორე სახის რიგის სიზუსტის შეფასება

როგორც ვიცით, ერთგვაროვანი ობიექტების სიდიდეთა ოდენობების რაც შეიძლება ზუსტად განსაზღვრისათვის საჭიროა მათი მრავალჯერ ტოლზუსტად გაზომვა. ცალკეულ განაზომთა და უალბათეს ოდენობათა შეფასებისათვის დგება ჭეშმარიტ ან უალბათეს შეცდომათა რიგები. ამ რიგების ურთიერთ შედარება არაფერს მოგვცემს, რადგანაც ყოველ რიგს ექნება შემთხვევით შეცტად არის გაზომილი. შეცდომათა რიგების წევრთა ცალ-ცალკე ურთიერთ შედარება არაფერს მოგვცემს, რადგანაც ყოველ რიგს ექნება შემთხვევით შეცდომათა შესაბამისი სხვადასხვა (მრავალი) დახასიათება. აგრეთვე, რადგან გაზომვები არის ტოლზუსტი, აუცილებელია, რომ რიგების სიზუსტის ს ა ზ ო მ ი, ანუ კ რ ი ტ ე რ ი უ მ ი განისაზღვროს ამ რიგებისადმი ერთნაირი მიდგომის საფუძველზე, ე. ი. კრიტერიუმი იყოს ისეთივე ბუნების სიდიდე, როგორიც თვით შესადარებელი ოდენობა და წარმოადგენდეს ყოველი რიგის შეცდომათა ერთობლივი გადაწყვეტის შედეგად განსაზღვრულ შემთხვევით შეცდომას. კ რ ი ტ ე რ ი უ მ ი ს სიდიდე იმ პირობებზეა დამოკიდებული, რომლებშიაც ხდებოდა ამა თუ იმ ობიექტის მრავალჯერ ტოლზუსტი გაზომვა. სიზუსტის კრიტერიუმი მით უფრო მცირე ოდენობის გამოვა, რაც უფრო მეტჯერ, კარგ გარემო პირობებში ზუსტი ინსტრუმენტითა და ზუსტი მეთოდებით იქნება გაზომვა შესრულებული გამოცდილი დამკვირვებლის მიერ. მაშასადამე, კრიტერიუმი უნდა ახასიათებდეს იმ პირობებს, რომლებშიაც წარმოებდა გაზომვები. ვთქვათ გვაქვს სამი ერთგვაროვანი სხვადასხვა ობიექტის ტოლზუსტ განაზომთა მეორე სახის რიგი[1]

$$l_1', \quad l_2', \quad l_3', \dots, l_n', \qquad L_1 = \frac{[l']}{n};$$

$$l_1'', \quad l_2'', \quad l_3'', \dots, l_n'', \qquad L_2 = \frac{[l'']}{n};$$

$$l_1''', l_2''', l_3''', \dots, l_n''', \qquad L_3 = \frac{[l''']}{n}$$

[1] უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ ობიექტთა გაზომვის არც ერთი კომპონენტი არ იცვლება.

და მათი ჭეშმარიტი შეცდომები

$$\delta_1', \quad \delta_2', \quad \delta_3', \ldots, \delta_n', \qquad \Delta_1 = \frac{[\delta']}{n};$$

$$\delta_1'', \quad \delta_2'', \quad \delta_3'', \ldots, \delta_n'', \qquad \Delta_2 = \frac{[\delta'']}{n};$$

$$\delta_1''', \delta_2''', \delta_3''', \ldots, \delta_n''', \quad \Delta_3 = \frac{[\delta''']}{n}.$$

ამ ობიექტების ჭეშმარიტი მნიშვნელობები აღვნიშნოთ შესაბამისად X_1, X_2, X_3-ით (ობიექტთა ოდენობები დაახლოებით ტოლებია). ეს რიგები შევადაროთ ერთმანეთს დაშვებული შეცდომების ოდენობების მიხედვით. ამისათვის ყოველი რიგიდან განვსაზღვრავთ კრიტერიუმს (შემთხვევით შეცდომას); რომელი რიგის კრიტერიუმიც ნაკლები ოდენობის აღმოჩნდება, ის რიგი უფრო სანდოა და იგულისხმება, რომ იგი, მიუხედავად ტოლზუსტობისა, მიღებულია უფრო ხელსაყრელ პირობებში გაზომვების ჩატარების შედეგად.

ყოველი კრიტერიუმი გამოიყენება თავისი რიგის წევრთა შემოწმებისათვის. მას ადარებენ ყველა ცალკეული განაზომის შეცდომას და კრიტერიუმისაგან რიგის ცალკეულ შეცდომათა დიდი გადახრა ამ ცალკეული გაზომვის პირობების სიცუდის მაჩვენებელია. ამავე დროს გარკვეული პირობებისათვის განსაზღვრული კრიტერიუმის ოდენობა გამოიყენება სხვადასხვა მსგავს განაზომთა სიზუსტის შეფასებისათვის. ამრიგად, კრიტერიუმი არის ცალკეული განაზომის შეცდომების შესადარი და გამოდგება შეცდომათა დასაშვები ნორმების დადგენისათვის.

მოცემული რიგებიდან კრიტერიუმის განსაზღვრა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით, მაგალითად: საშუალო კვადრატული შეცდომის, საშუალო არითმეტიკულისა და ალბათი შეცდომების სახით.

რაიმე რიგისა და რიგის თითოეული წევრის დახასიათებისათვის პირობით მიღებულია შემდეგი სიმბოლური აღნიშვნა; მაგალითად, თუ განვსაზღვრავთ მოცემული რიგებიდან განაზომთა უალბათესი ოდენობებისათვის M_1, M_2, M_3 კრიტერიუმები, დაიწერება

$$X_1 = L_1 \pm M_1;$$
$$X_2 = L_2 \pm M_2;$$
$$X_3 = L_3 \pm M_3.$$

ეს ტოლობები არაა მათემატიკური, არამედ პირობითია: აქ იგულისხმება, რომ პირველი რიგის განაზომთა საშუალო არითმეტიკული საშუალოდ გადახრილია ობიექტის ჭეშმარიტი მნიშვნელობიდან $\pm M_1$ ოდენობით, მეორე რიგის $\pm M_2$-ით და ასე შემდეგ. განაზომთა რიგის სანდოობა ხასიათდება კრიტერიუმის ოდენობით; ის რიგი უფრო სანდოა, რომლის კრიტერიუმიც მცირე ოდენობისაა; რაც შეეხება კრიტერიუმის წინ $\pm$ ნიშანს, იგი მიუთითებს იმაზე, რომ გადახრები ერთნაირად მოსალოდნელია როგორც პლუს, ისე მინუს ნიშნით.

განვიხილოთ კრიტერიუმების განსაზღვრის ხერხები.

A. საშუალო კვადრატული შეცდომა

ყოველი ცალკეული (ერთჯერ) განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის ± კვადრატულ ფესვს წილადიდან, რომლის მრიცხველია მოცემული რიგის ჭეშმარიტ შეცდომათა კვადრატების ჯამი და მნიშვნელი — განაზომთა რაოდენობა: გაუსის მიერ საშუალო კვადრატული შეცდომა ანალიზურად გამოისახა შემდეგნაირად:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\cdots+\delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}, \qquad (3.3.5.1)$$

სადაც m საშუალო კვადრატული შეცდომაა, δ_i — ცალკეული განაზომის ჭეშმარიტი აბსოლუტური შეცდომა და n — განაზომთა რაოდენობა რიგში.

B. საშუალო არითმეტიკული შეცდომა

ყოველი ცალკეული (ერთჯერ) განაზომის საშუალო არითმეტიკული შეცდომა უდრის ± წილადს, რომლის მრიცხველია მოცემული რიგის ჭეშმარიტ შეცდომათა აბსოლუტური მნიშვნელობების ჯამი და მნიშვნელი განაზომთა რაოდენობა. საშუალო არითმეტიკული შეცდომა ანალიზურად გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\vartheta = \pm\frac{|\delta_1|+|\delta_2|+|\delta_3|+\cdots+|\delta_n|}{n} = \pm\frac{[|\delta|]}{n}, \qquad (3.3.5.2)$$

სადაც ϑ საშუალო არითმეტიკული შეცდომაა, $|\delta_i|$ — ჭეშმარიტი აბსოლუტური შეცდომების აბსოლუტური მნიშვნელობანი.

ალბათობის თეორიიდან ცნობილია საშუალო კვადრატულისა და საშუალო არითმეტიკულ შეცდომათა შორის შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\left.\begin{aligned} m &= 1{,}2533\vartheta \approx 1{,}25\vartheta, \\ \vartheta &= 0{,}7979m \approx 0{,}8m. \end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.5.3)$$

(3) დამოკიდებულება სამართლიანია მხოლოდ n-ის დიდი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის.

C. ალბათი შეცდომა

ყოველი ცალკეული (ერთჯერ) განაზომის ალბათი შეცდომა არის შეცდომის ის რიცხვითი ოდენობა, რომელიც ამოღებულია შეცდომათა მოცემული რიგიდან იმ პირობით, რომ ერთი და იგივე რაოდენობით გვხვდებოდეს ამავე რიგში როგორც მასზე მეტი, ისე ნაკლები ოდენობის შემთხვევითი შეცდომები.

შეცდომათა რიგის წევრებს თუ დავალაგებთ მათი ოდენობების აბსოლუტური მნიშვნელობების ზრდადად ან კლებადად, მაშინ ალბათი შეცდომა იქნება ამ რიგის შუა წევრი და მას მივიღებთ რიგის წევრთა საზომად. მაგალითად, თუ გვაქვს შემთხვევით შეცდომათა რიგი

$$1{,}0;\ 1{,}2;\ 2{,}0;\ 2{,}3;\ \underline{2{,}5};\ 2{,}8;\ 3{,}4;\ 3{,}5;\ 4{,}3.$$

ალბათ შეცდომა იქნება $\pm 2{,}5$;

მეორე რიგისთვის: $1{,}1;\ 1{,}2;\ 2{,}2;\ 2{,}4;\ \underline{2{,}5};\ 2{,}9;\ 3{,}8;\ 4{,}5;\ 5{,}6.$

ალბათი შეცდომა ისევ $\pm$ 2,5 იქნება.

რიგში თუ წევრთა რიცხვი ლუწია, მაშინ ალბათი შეცდომის ოდენობა შუა ორი წევრის საშუალო არითმეტიკულით განისაზღვრება.

ალბათობის თეორიაში დადგენილია კავშირი ალბათ შეცდომასა და საშუალო კვადრატულ შეცდომას შორის.

$$r = 0{,}6745m \approx \frac{2}{3} m, \qquad (3.3.5.4)$$

სადაც r — ალბათი შეცდომაა.

ზემოთ მოყვანილი რიგებისათვის (1) ფორმულით შესაბამისად გვექნება

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{68{,}12}{9}} \approx \pm 2{,}7, \qquad m_2 = \pm\sqrt{\frac{93{,}96}{9}} \approx \pm 3{,}2,$$

ხოლო (4) ფორმულით იმავე რიგებისათვის ალბათი შეცდომები იქნება

$$r_1 = \pm\frac{2}{3}\cdot 2{,}7 = \pm 1{,}9, \qquad r_2 = \pm\frac{2}{3}\cdot 3{,}2 \approx \pm 2{,}0.$$

აქ 2,5-დან განსხვავება გამოწვეულია იმით, რომ რიგში წევრთა რიცხვი მცირე რაოდენობისაა.

ზემოთ მოყვანილი წესით მოძებნილი ალბათი შეცდომა, როგორც რიგის შუა წევრი, ოდენობით სრულად არ გამოხატავს განაზომთა ამა თუ იმ რიგის უპირატესობას, მართლაც, რომელიმე სხვა რიგში, რომელშიაც $r = 2{,}5$, შუადან დაწყებული შემდეგი წევრები უფრო დიდებიც რომ იყოს, ვიდრე პირველ რიგში, ალბათი შეცდომა მაინც იგივეა (2,5), მაშინ როდესაც ახალი რიგი უფრო ცუდი იქნებოდა, ვიდრე წინა რიგი (შეადარეთ ზემო რიგები). ამის გამო ყოველთვის ამჯობინებენ ალბათი შეცდომის განსაზღვრას (3.3.5.4) ფორმულით ამგვარად, რადგანაც ალბათი შეცდომის განსაზღვრა უფრო ზუსტია საშუალო კვადრატული შეცდომით, ჩვენში განაზომთა რიგის შეფასებისათვის ალბათს შეცდომას — კრიტერიუმად არ იყენებენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ალბათი შეცდომა არ უნდა ავურიოთ უალბათეს შეცდომასთან (იხ. 3. 3. 2 პარაგრაფი).

3. 3. 6. შეცდომათა კრიტერიუმების შედარება

კრიტერიუმების შედარებისათვის ავიღოთ ჭეშმარიტი შეცდომების ორი რიგი, რომლებიც მიღებულია ერთი და იგივე სიდიდის ათ-ათჯერ ტოლზუსტად გაზომვის შედეგად. შევაფასოთ შესრულებული გაზომვების სიზუსტე სხვადასხვა კრიტერიუმით.

შეცდომათა პირველი რიგია

$$+2,\ -3,\ +2,\ +4,\ -1,\ +1,\ +2,\ -3,\ -2,\ +1.$$

შეცდომათა მეორე რიგი

$$+1,\ 0,\ +7,\ -2,\ +1,\ -3,\ +1,\ 0,\ -5,\ -1.$$

კრიტერიუმების შეფასებისას ჩვენს მიზანს შეადგენს შეცდომათა ოდენობის და არა მათი ნიშნების გამორკვევა, ამის გამო განვიხილავთ შეცდომებს ნიშნების უგულებელყოფით. მართლაც, რომ აგვეღო შეფასებისათვის შეცდომათა

ალგებრული ოდენობების საშუალო არითმეტიკული, მივიღებდით პირველ შემთხვევაში + 0,3 და მეორე შემთხვევაში — 0,1. გამოდის, რომ მეორე რიგი სიზუსტით სჯობს პირველს, მაშინ როდესაც სინამდვილეში საწინააღმდეგო მოვლენას აქვს ადგილი. მიზეზი ისაა, რომ დიდ შეცდომებს შემთხვევით სხვადასხვა ნიშანი აქვთ მეორე რიგში და შეკრებისას მოხდა შეცდომათა ურთიერთკომპენსირება. გარდა ამისა, + 0,3 და — 0,1 ოდენობები მოცემული რიგების ცალკეულ შეცდომებს ვერ ახასიათებენ, ე. ი. ვერ გამოდგებიან რიგის წევრთა კრიტერიუმად.

თუ კრიტერიუმად მივიღებთ საშუალო არითმეტიკულ შეცდომას, რადგანაც

$$\vartheta_1 = \pm \frac{2+3+2+4+1+1+2+3+2+1}{10} = \pm 2{,}1,$$

ხოლო

$$\vartheta_2 = \pm \frac{1+0+7+2+1+3+1+0+5+1}{10} = \pm 2{,}1,$$

გამოდის, რომ ორივე რიგი ერთნაირად სანდოა. სინამდვილეში კი ამ რიგების უშუალოდ შედარებით შევამჩნევთ, რომ მეორე რიგის წევრები ჭეშმარიტი ოდენობისაგან უფრო მეტად არის გადახრილი, ვიდრე პირველი რიგის წევრები, ე. ი. გადახრის ამპლიტუდა აქ უფრო შესამჩნევია.

ახლა მივიღოთ იმავე რიგებისათვის კრიტერიუმად საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{2^2+3^2+2^2+4^2+1^2+1^2+2^2+3^2+2^2+1^2}{10}} = \pm 2{,}3$$

და

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{1^2+0^2+7^2+2^2+1^2+3^2+1^2+0^2+5^2+1^2}{10}} = \pm 3{,}0.$$

როგორც ჩანს, საშუალო კვადრატული შეცდომა, როგორც კრიტერიუმი, უფრო მისაღებია, ვინაიდან პირველი რიგის ყოველი განაზომი ჭეშმარიტი ოდენობისაგან გადახრილია საშუალოდ ± 2,3, მეორე რიგისა ±3,0. ე. ი. პირველი გაზომვების პირობები ჯობია მეორე რიგის პირობებს.

რიგების წევრთა რაოდენობა რომ დიდი ყოფილიყო, ორივე ხერხით განსაზღვრული კრიტერიუმები თითქმის ერთი და იგივე ოდენობის გამოვიდოდა. სინამდვილეში ერთი და იგივე ობიექტის ძლიერ დიდი რაოდენობით გაზომვას არავითარი გამართლება არა აქვს და ამიტომ გაზომვათა განმეორებას შეზღუდავენ 3—24-ით, იშვიათად 36-მდე. ასეთ შემთხვევაში განაზომთა შეფასება, როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, ჯობია საშუალო კვადრატული შეცდომის საშუალებით.

საშუალო კვადრატული შეცდომების ანალიზის საფუძველზე ირკვევა:

1) საშუალო კვადრატული შეცდომები გვაძლევს საშუალებას შეცდომათა თეორიისა და უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ძირითადი დებულებების მათემატიკურად დასაბუთებისა და გამოსახვისას;

2) საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობაზე თვალსაჩინო გავლენას ახდენს განაზომთა რიგში რომელიმე დიდი ზომის შეცდომა. საშუალო კვადრატული შეცდომა მკაფიოდ გვიჩვენებს განაზომთა რიგის ღირსეულებას.

მაგალითად, მეორე რიგის დიდი ზომის შეცდომებმა (+7 და —5) გამოიწვია ის, რომ $m_2 > m_1$-ზე, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ მეორე რიგის გაზომვები უფრო ცუდ პირობებშია შესრულებული.

3) საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობის განსაზღვრისათვის საჭირო არ არის გაზომვათა რიცხვის ძლიერ გაზრდა (3. 3. 7. 1 ცხრილი).

ალბათობათა თეორიაში დასაბუთებულია, რომ გაზომვათა რიცხვის მიხედვით საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრის შეცდომა და სიზუსტე შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულით.

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}; \quad \frac{m_m}{m} = \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{3.3.6.1}$$

ამ ფორმულით გამოდის, რომ ერთი და იგივე სიდიდის 2-ჯერ გაზომვით მიღებული საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრის შეცდომა უდრის დაახლოებით $\frac{1}{2}m$-ს (50%), ოთხჯერ გაზომვის — $\frac{1}{3}m$-ს (33%), რვა გაზომვის შედეგად — $\frac{1}{4}m$-ს (25%), ცამეტი გაზომვის შედეგად — $\frac{1}{5}m$(20%), თვრამეტი გაზომვის შედეგად — $\frac{1}{6}m$ (17%) და ასე შემდეგ.

როგორც ვხედავთ, შედარებით მცირე რაოდენობის გაზომვებით მიღებული საშუალო კვადრატული შეცდომა სანდოა, როგორც კრიტერიუმი და მაინცდამაინც მისი ოდენობა მნიშვნელოვნად არ იცვლება გაზომვათა რაოდენობის გაზრდით; აგრეთვე დავასკვნით, რომ საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა სრულიად საკმარისია ორი ნიშნადი ციფრით.

4) მესამე თვისების გამო, რაიმე პირობებისათვის განსაზღვრული საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა გამოდგება სხვა მსგავსი ობიექტის განაზომთა შეფასებისათვის თუგინდ გაზომვათა რაოდენობა მცირეც იყოს. გარკვეული პირობებისათვის შეგვიძლია გავიანგარიშოთ თუ რა ოდენობას არ უნდა გადასცდეს ცალკეულ განაზომთა საშუალო კვადრატული შეცდომები, ე. ი. წესდება შეცდომების ზღვრული დასაშვები ნორმები. მაგალითად, თუ 30″ — თეოდოლიტით სრული წრიული ილეთებით კუთხის ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა მივიღეთ ± 10″, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ იმგვარივე პირობებში ნებისმიერი კუთხის ცალკეული გაზომვის საშუალო შეცდომა უნდა ხასიათდებოდეს ± 10″.

5) საშუალო კვადრატული შეცდომა მარტივადაა დაკავშირებული ზღვრულ დასაშვებ შეცდომებთან (იხ. 3. 4. 4. პარაგრაფი).

საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ ლოგარითმული სახაზავით, რიცხვთა გამრავლების ან რიცხვთა კვადრატების ცხრილებით.

საშუალო კვადრატული შეცდომის ნაცვლად სიმარტივისათვის, ხშირად ხმარობენ ტერმინს „საშუალო შეცდომა“, მარკშეიდერები კი მას ხშირად უწოდებენ „შეცდომების საზომს“.

---

[1] იმავე პირობებში საშუალო არითმეტიკული შეცდომის გამოთვლის შეცდომა (ჰ) პროცენტულად უფრო დიდი გამოდის. ამიტომ, როცა განაზომთა რიცხვი (n) შედარებით მცირეა, ჯობს მისი შეფასება მოხდეს საშუალო კვადრატული შეცდომით.

3. 3. 7. განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა

უალბათეს სიდიდეთა სიზუსტეების ურთიერთშედარებისათვის მათდამი მიდგომა ისევე, როგორც შეცდომათა ყოველი რიგის ცალკეული წევრისადმი, ერთნაირი კრიტერიუმით უნდა ხდებოდეს. თანახმად ამისა, კრიტერიუმად აქაც საშუალო კვადრატულ შეცდომას მივიღებთ. ეჭვს გარეშეა აგრეთვე, რომ უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა უფრო მცირე იქნება, ვიდრე რიგის ყოველი განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა, ვინაიდან საშუალო არითმეტიკული ყოველთვის უფრო სანდოა, ვიდრე ცალკეული განაზომი.

ვიცით, რომ საშუალო არითმეტიკულის ჭეშმარიტი შეცდომა (Δ) უდრის უალბათეს (L) სიდიდესა და ჭეშმარიტ (X) ოდენობას შორის სხვაობას. იგი გამოითვლება ჭეშმარიტი შეცდომების მეორე სახის რიგის წევრთა საშუალო არითმეტიკულით

$$\Delta=\frac{[\delta]}{n}=\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{n}.$$

ავიყვანოთ კვადრატში ტოლობის ორივე მხარე, გვექნება

$$\Delta^2=\frac{[\delta^2]}{n^2}+\frac{2(\delta_1\delta_2+\delta_1\delta_3+\cdots+\delta_1\delta_n+\delta_2\delta_3+\cdots+\delta_2\delta_n+\cdots+\delta_{n-1}\delta_n)}{n^2}.$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრი, შემთხვევით შეცდომათა მეოთხე თვისების გამო, მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. მისი ოდენობის სიმცირის გამო იგი შეიძლება უგულებელვყოთ. ამ შემთხვევაში განაზომთა უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომის მიახლოებით ოდენობას აღვნიშნავთ M-ით და ვუწოდებთ განაზომთა უალბათესი სიდიდის ანუ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

$$\Delta^2\approx\frac{[\delta^2]}{n^2}=M^2. \qquad (3.3.7.1)$$

ამავე დროს (3.3.5.1) ფორმულით

$$m^2=\frac{[\delta^2]}{n},$$

რის გამოც მივიღებთ

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (3.3.7.2)$$

ამგვარად, ტოლზუსტ განაზომთა მეორე სახის რიგის საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა და მნიშვნელი — გაზომვათა რაოდენობიდან კვადრატული ფესვი.

როგორც ვხედავთ, უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა $\sqrt{n}$-ჯერ ნაკლებია ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე.

ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (m) განაზომთა მოცემული რიგის წევრთა სიზუსტის კრიტერიუმია, ე. ი. იგი ახა-

სიათებს განაზომთა რიგს. განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის M საშუალო კვადრატული შეცდომა კი ახასიათებს ამ რიგისაგან გამოთვლილ შედეგს, ანუ იგი არის ამ რიგისაგან გამოყვანილი შედეგის სიზუსტის კრიტერიუმი. ის გვიჩვენებს, თუ რამდენად მცირდება შემთხვევით შეცდომათა ზემოქმედება, გაზომვების რიცხვის გაზრდასთან დაკავშირებით.

როდესაც ცნობილია ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (m) და საჭიროა განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის მიღება სასურველი სიზუსტით, მაშინ (2) ფორმულით განვსაზღვრავთ n-ს ანუ გავიგებთ თუ რამდენჯერ უნდა გავიმეოროთ გაზომვა, რომ მივიღოთ M-ის საჭირო მნიშვნელობა.

მაგალითად, (2) ფორმულიდან

$$n=\frac{m^2}{M^2}. \qquad (3.3.7.3)$$

ვთქვათ, ერთი ილეთის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m=\pm 10''$ და გვსურს კუთხე იქნეს საბოლოოდ გაზომილი $M=\pm 5$ საშუალო კვადრატული შეცდომით; მაშინ (3) ფორმულით მივიღებთ

$$n=\frac{10''^2}{5''^2}=4,$$

მაშასადამე, კუთხე უნდა გავზომოთ 4 ილეთით.

(2) ფორმულის განხილვით ვიღებთ პრაქტიკისათვის მეტად მნიშვნელოვან შედეგს იმის შესახებ, რომ გაზომვის სიზუსტე არ იზრდება ტოლზუსტ გაზომვათა რაოდენობის ზრდის პროპორციულად. ვთქვათ $m=\pm 10''$; გამოვითვალოთ M-ის ოდენობები n-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

ცხრილი 3.3.7.1

n	1	2	4	6	8	10	20	30	40	50	100
M	10″	7″,1	5″,0	4″,1	3″,5	3″,2	2″,2	1″,8	1″,6	1″,4	1″
%	100,0	71,0	50,0	41,0	35,0	32,0	22,0	18,0	16,0	14,0	10

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ

10-ჯერ გაზომვის შემთხვევაში, განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა მცირდება 68%-ით
20-ჯერ " არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა დამატებით კლებულობს 10% "
30-ჯერ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა დამატებით კლებულობს 4% "
40-ჯერ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა დამატებით კლებულობს 2% "
50-ჯერ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა დამატებით კლებულობს 2% "

განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამომსახველია უალბათეს სიდიდეზე მხოლოდ შემთხვევით შეცდომათა გავლენის. ცხრილიდან ჩანს, რომ შემთხვევით შეცდომათა შემცირებაზე გაზომვათა

რაოდენობის ზედმეტად გაზრდას ეფექტი არ აქვს. სინამდვილეში გაზომვებს შემთხვევითი შეცდომების გარდა თან ახლავს ნარჩენი სისტემატური შეცდომები, რომლებიც დაბალი სიზუსტის ინსტრუმენტში შემთხვევით შეცდომებს სჭარბობს და მათი მოქმედების გამოვლინება არითმეტიკული საშუალოს მეშვეობით, რამდენჯერაც არ უნდა გავზარდოთ გაზომვათა რიცხვი, გარკვეული ზღვრის შემდეგ ეფექტს არ იძლევა. ამ მიზეზების გამო, უფრო ეფექტურია მაღალი სიზუსტის ინსტრუმენტით გაზომვების შესრულება, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში უფრო სწრაფად გამოვლინდება შემთხვევითი შეცდომები. მაგალითად, თუ 10″ სიზუსტის ინსტრუმენტით კუთხის 2″ შეცდომით გაზომვისათვის საჭიროა $n=25$ განმეორება, იგივე სიზუსტე 4″-იანი ინსტრუმენტით მიიღება $n=4$ განმეორებით.

3. 3. 8. ᲣᲐᲚᲑᲐᲗᲔᲡᲘ ᲨᲔᲪᲓᲝᲛᲔᲑᲘᲗ ᲧᲝᲕᲔᲚᲘ ᲪᲐᲚᲙᲔᲣᲚᲘ ᲒᲐᲜᲐᲖᲝᲛᲘᲡ ᲡᲐᲨᲣᲐᲚᲝ ᲙᲕᲐᲓᲠᲐᲢᲣᲚᲘ ᲨᲔᲪᲓᲝᲛᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲗᲕᲚᲐ

დავწეროთ (3. 3. 3. 1) ფორმულა, რომელიც გამოხატავს ჭეშმარიტ შეცდომებსა და უალბათეს შეცდომებს შორის დამოკიდებულებას

$$\delta_i = v_i + \Delta,$$

სადაც

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n.$$

ავიყვანოთ კვადრატში ამ განტოლებათა ორივე მხარე და მისი წევრები თანამიმდევრობით შევკრიბოთ. (3. 2. 4. 13) აღნიშვნის ანალოგიურად, გვექნება

$$[\delta^2] = [v^2] + 2\Delta\,[v] + n\Delta^2.$$

უალბათეს შეცდომათა პირველი თვისების თანახმად $[v]=0$, ამის გამო $2\Delta\,[v]=0$, და, მაშასადამე, დაიწერება

$$[\delta^2] = [v^2] + n\Delta^2. \qquad (3.3.8.1)$$

ამავე დროს (3. 3. 5. 1), (3, 3. 7. 1) და (3. 3. 7, 2) ფორმულებით

$$[\delta^2] = nm^2 \quad \text{და} \quad \Delta^2 \approx M^2 = \frac{m^2}{n};$$

ამ სიდიდეების (1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$nm^2 = [v^2] + m^2,$$

საიდანაც

$$m^2\,(n-1) = [v^2]$$

და საბოლოოდ

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \qquad (3.3.8.2)$$

ეს (2) კლასიკური ფორმულა პირველად ბ ე ს ე ლ ი ს მიერაა გამოყვანილი და მის სახელს ატარებს.

ამგვარად, მოცემული რიგის ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის ± კვადრატულ ფესვს წილადიდან, რომლის მრი-

ცხველი უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამმა, მნიშვნელი კი — გაზომვათა რიცხვი ერთის გამოკლებით.

(3. 3. 5. 1) და (2) ფორმულებს შორის არსებითი განსხვავებაა. ამ განსხვავების ნათელსაყოფად დავუშვათ, რომ რაიმე ობიექტი გაზომილია მხოლოდ ერთჯერ. იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია ამ ობიექტის ნამდვილი ოდენობა, ეს ერთი გაზომვაც გვაძლევს წარმოდგენას განაზომის სიზუსტეზე, სახელდობრ, $\delta=l-X$ და (3· 3· 5. 1) ფორმულით განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m=\pm\delta$. იმ შემთხვევაში კი, როცა ობიექტის ნამდვილი ოდენობა უცნობია, მაშინ საშუალო არითმეტიკული ედრება ამ ერთი განაზომის შედეგს, ე. ი. უალბათესი შეცდომა $v=l-l=0$ და (2) ფორმულით $m=\frac{0}{0}$, პასუხი განუზღვრელობაა. ეს იმას ნიშნავს, რომ განაზომის შედეგის სიზუსტეზე არავითარი წარმოდგენა არა გვაქვს — მისი სიზუსტის შეფასება შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში რომ (3.3.5.1) ფორმულა გამოგვეყენებია, მივიღებდით $m=\pm\sqrt{\frac{0}{1}}=0$ და გამოვიდოდა, რომ უცნობი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის განსაზღვრა თითქოს შეიძლება მისი ერთჯერ გაზომვით, რაც, ცხადია, სწორი არ იქნებოდა. როგორც ვხედავთ, როცა გასაზომი ობიექტის ნამდვილი ოდენობა უცნობია, მისი ერთჯერ განაზომის სიზუსტეზე (5. 1) ფორმულა ყალბ წარმოდგენას იძლევა და (2) ფორმულით კი პასუხი განუსაზღვრელობაა, ამიტომ უწოდებენ ბესელის (2) ფორმულას კლასიკურს. ამ მიზეზით ერთჯერ კიდევ დასტურდება საერთოდ მიღებული წესი იმის შესახებ, რომ ობიექტის სიდიდის რაც შეიძლება სანდო მნიშვნელობის მისაღებად და საშუალო არითმეტიკულის სიზუსტის შეფასებისათვის საჭიროა ჭარბი გაზომვების შესრულება.

3. 3. 9. უალბათესი შეცდომებით განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა

განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის ანუ განაზომთა უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როდესაც ცნობილია ჭეშმარიტი შეცდომები, განისაზღვრება ფორმულით

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ჭეშმარიტი შეცდომები უცნობია, მაშინ ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ უალბათესი შეცდომებით და ვიყენებთ ბესელის ფორმულას

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

ამ ფორმულებიდან განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის მივიღებთ

$$M=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \qquad (3.3.9.1)$$

ამგვარად, განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა ტოლია ± კვადრატული ფესვისა წილადიდან, რომლის მრიცხველია უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამი და მნიშვნელი ყველა გაზომვათა რიცხვის და მასზე ერთით ნაკლები რიცხვის ნამრავლი.

არითმეტიკული შუადის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა შეიძლება პროფ. პ. ლეონტოვსკის მიერ მოწოდებული ემპირიული ფორმულით

$$M = \pm \frac{l_{max} - l_{min}}{n}, \qquad (3.3.9.2)$$

სადაც l_{max} და l_{min} არის განაზომთა რიგიდან ამოღებული მაქსიმალური და მინიმალური ოდენობები,

n — გაზომვათა რაოდენობა.

3. 3. 10. პეტერსის ფორმულა

ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულები: (3. 3. 5. 1) და (3. 3. 8. 2). პირველი გამოიყენება, როცა ცნობილია ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგი, მეორე — როდესაც გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უცნობია, ანუ გვაქვს უალბათეს შეცდომათა რიგი. ამ ფორმულებიდან შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{[\delta^2]}{n} \approx \frac{[v^2]}{n-1},$$

საიდანაც

$$\frac{[\delta^2]}{[v^2]} \approx \frac{n}{n-1}.$$

დავუშვათ, რომ $[\delta^2]:[v^2]$ ფარდობა სამართლიანია ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგის ყოველი წევრის კვადრატსა და ამავე განაზომთა შესაბამის უალბათესი შეცდომების კვადრატებს შორისაც, ე. ი.

$$\frac{\delta_i^2}{v_i^2} = \frac{n}{n-1},$$

საიდანაც

$$\frac{\delta_i}{v_i} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

ეს დაშვება უფრო სამართლიანი იქნებოდა, თუ

$$\delta_1^2 = \delta_2^2 = \delta_3^2 = \cdots = \delta_n^2 = \delta^2$$

და

$$v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = \cdots = v_n^2 = v^2.$$

აქ δ და v-ს ნიშნები არ მოქმედებენ, ამის გამო შემდგომ მათ განვიხილავთ აბსოლუტური მნიშვნელობების მიხედვით და დავწერთ

$$\frac{|\delta_1|}{|v_1|} = \frac{|\delta_2|}{|v_2|} = \cdots = \frac{|\delta_n|}{|v_n|} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

ტოლ ფარდობათა მწკრივის თვისების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{|\delta_1|}{|v_1|}=\frac{|\delta_2|}{|v_2|}=\cdots=\frac{|\delta_n|}{|v_n|}=\frac{|\delta_1|+|\delta_2|+\cdots+|\delta_n|}{|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|}=\frac{[|\delta_n|]}{[|v|]}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{[|\delta|]}{[|v|]}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}},$$

საიდანაც

$$[|\delta|]=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}[|v|].$$

ტოლობის ორივე წევრი გავყოთ n-ზე, მივიღებთ

$$\frac{[|\delta|]}{n}=\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

გამოვიყენოთ საშუალო არითმეტიკული შეცდომის (3. 3. 5. 2) ფორმულა

$$\vartheta=\frac{[|\delta|]}{n},$$

გვექნება

$$\vartheta=\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (3.3.10.1)$$

საშუალო კვადრატულ შეცდომასა და საშუალო არითმეტიკულ შეცდომას შორის არსებობს (3. 3. 5. 3) დამოკიდებულება

$$m=\mp 1{,}25\vartheta!$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ (1) ფორმულით განსაზღვრულ ϑ სიდიდეს, მივიღებთ

$$m=\pm\frac{1{,}25}{\sqrt{n(n-1)}}[|v|]. \qquad (3.3.10.2)$$

ეს (2) ფორმულა გამოყვანილია პ ე ტ ე რ ს ი ს მიერ.

პეტერსის ფორმულას შეიძლება მივცეთ უფრო მარტივი სახე. იმ შემთხვევაში, როცა n შედარებით დიდ რიცხვს წარმოადგენს, მაშინ შეგვიძლია მიახლოებით მივიღოთ

$$n(n-1)\approx n^2-n+\frac{1}{4}=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2,$$

და შესაბამისად (2) ფორმულა დაიწერება

$$m=\pm\frac{1{,}25}{n-\frac{1}{2}}[|v|]. \qquad (3.3.10.3)$$

მიღებული ფორმულა მნიშვნელოვნად მარტივია ბესელის ფორმულასთან შედარებით, მაგრამ ის იძლევა სწორ შედეგს მხოლოდ მაშინ, როდესაც n დი-

დი რიცხვია, რასაც პრაქტიკაში ადგილი არა აქვს. ამ ფორმულით გამოთვლილი საშუალო კვადრატული შეცდომა თუმცა მიახლოებითია, მაგრამ ხშირად პრაქტიკულად დამაკმაყოფილებელი. აღნიშნული ფორმულა უმეტესად საველე პირობებში იხმარება ბესელის ფორმულის ნაცვლად და აგრეთვე ის გამოიყენება ბესელის ფორმულის საკონტროლოდ. როცა გაზომვათა n რაოდენობა დიდია, მაშინ ბესელისა და პეტერსის ფორმულებით მიღებული გამონათვლები ურთიერთტოლი უნდა გამოვიდეს და თუ მათ შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია, მაშინ მოსალოდნელია, რომ განაზომთა რიგში სისტემატური შეცდომები სჭარბობდეს შემთხვევით შეცდომებს.

იმისათვის, რომ პეტერსის ფორმულის გამოყენება გაადვილდეს, წინასწარ ვადგენთ ცხრილს. n-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის (ცხრილი 1).

ცხრილი 3.3.10.1

n	$\frac{1.253}{\sqrt{n(n-1)}}$
2	0.88
3	0,51
4	0.36
5	0,28
6	0,23
7	0,19
8	0.17
9	0,15
10	0,13
11	0.12
12	0,11

3. 3. 11. უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამის საკონტროლო ფორმულები

განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის გამოსათვლელად თუ ვსარგებლობთ (3. 3. 1. 9) ფორმულით

$$L=\frac{[l]}{n},$$

მაშინ უალბათეს შეცდომათა კვადრატების ჯამის საკონტროლოდ გამოვიყენებთ ფორმულას

$$[vv]=[vl]. \tag{3.3.11.1}$$

(1) ფორმულა ადვილად მიიღება; დავწეროთ $[vv]$ ჯამი გაშლილი სახით

$$[vv]=v_1v_1+v_2v_2+\cdots+v_nv_n.$$

ამ გამოსახულებაში $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ მამრავლები შევცვალოთ მათი მნიშვნელობებით. თანახმად (3. 3. 2. 1) დამოკიდებულებებისა, გვექნება

$$[vv]=v_1(l_1-L)+v_2(l_2-L)+\cdots+v_n(l_n-L),$$

ანუ

$$[vv]=[vl]-L[v].$$

მაგრამ (3. 3. 4. 2) ფორმულით $[v]=0$, მაშასადამე,

$$[vv]=[vl]. \tag{3.3.11.1}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის გამოსათვლელად გამოიყენება (3. 3. 1. 14) ფორმულა

$$L=l_0+\frac{[\delta_l]}{n},$$

მაშინ საკონტროლოდ იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$[vv]=[v\delta l]. \tag{3.3.11.2}$$

(2) ფორმულა მიიღება (1) ფორმულიდან

$$[vv]=[vl]=v_1l_1+v_2l_2+\cdots+v_nl_n.$$

თუ ამ გამოსახულებაში $l_1, l_2, \ldots, l_n$ შევცვლით მათი მნიშვნელობებით (3.3.1.13) დამოკიდებულებების მიხედვით, მივიღებთ

$$[vv]=[vl]=v_1(l_0+\delta_{l_1})+v_2(l_0+\delta_{l_2})+\cdots+v_n(l_0+\delta_{l_n}),$$

საიდანაც

$$[vv]=[vl]=l_0[v]+[v\delta_l]$$

და, რადგანაც $[v]=0$,

გვექნება

$$[vv]=[v\delta_l]. \qquad (3.3.11.3)$$

3. 3. 12. ტოლზუსტ განაზომთა რიგის დამუშავება

ტოლზუსტ განაზომთა მეორე სახის რიგის დამუშავება ხდება შემდეგი წესით:

1) განისაზღვრება განაზომთა საშუალო არითმეტიკული (3. 3. 1. 9) ან (3. 3. 1. 14) ფორმულების საშუალებით

$$L=\frac{[l]}{n};$$

$$L=l_0+\frac{[\delta_l]}{n};$$

2) გამოითვლება ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 3. 8. 2) ფორმულით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}};$$

3) გამოითვლება განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 3. 9. 1) ფორმულით

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}.$$

საკონტროლოდ გამოიყენება (3. 3. 4. 2) ან (3. 3. 4. 1), (3. 3. 11. 1) ან (3. 3. 11. 2) ფორმულები და ზოგჯერ პეტერსის (3. 3. 10. 2) ან (3. 3. 10. 3) ფორმულა, ე. ი.

$$[v]=0 \text{ ან } [v]=[l]-nL_0,$$

$$[vv]=[vl] \text{ ან } [vv]=]\delta_l v],$$

და

$$m=\pm\frac{1,25}{\sqrt{n(n-1)}}[|v|]\approx\pm\frac{1,25}{n-\frac{1}{2}}[|v|].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 3. 12. 1. ერთი და იგივე კუთხე გაზომილია ათჯერ. დამუშავდეს ზემოთ მიღებული წესით განაზომთა რიგი.

დამუშავების სქემა (1).

სქემა 3.3.12.1

№ რიგზე	l	ε_i	v	vv	$\varepsilon_i v$	შენიშვნა
1	85° 42′ 12″	+12″	+9″	81	+108	l_0 — არის მიახლოებითი მნიშვნელობა ცალკეული განაზომისა, რომელიც აიღეთ ტოლი 85° 42′ 00″ $m=\pm\sqrt{\frac{316}{9}}=\pm 5'',9;$ კონტროლისათვის პეტერსით $m=\pm\frac{1.25}{\sqrt{n(n-\ )}}[\lvert v\rvert]=\pm 0{,}13\times 48=$ $=\pm 6'',24$ (0.13 ამოღებულია (3.3.10.1) ცხრილიდან). (3.3.7.) ფორმულით $M=\pm\frac{5{,}9}{\sqrt{10}}=\pm 1'',9.$ (3.3.9.2) ფორმულით $M=\pm\frac{85°42'12''-85°41'54''}{10}=\pm 1'',8$
2	42 00	0	−3	9	0	
3	41 58	−2	−5	25	+10	
4	42 04	+4	+1	1	+4	
5	42 06	+6	+3	9	+18	
6	42 09	+9	+6	36	+54	
7	42 03	+3	0	0	0	
8	42 08	+8	+5	25	+40	
9	41 54	−6	−9	81	+54	
10	41 56	−4	−7	49	+28	
l_0	85° 42′ 00″	+30	+24	316	+316	
L	85° 42′ 03″	$\frac{[\varepsilon_i]}{n}=+3''$	−24 $[v]$	$[v^2]$	$[\varepsilon_i v]$	

მიღებული უალბათესი სიდიდე დაიწერება

$$L=85°\,42'\,03''\pm 1'',9.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 3. 12. 2 დამუშავდეს ოცმეტრიანი ბაფთით ხაზის ტოლზუსტ განაზომთა რიგი.

დამუშავების სქემა (2).

სქემა 3.3.12.2

№ რიგზე	l_i (მ)	ε_i (მმ)	v (მმ)	vv	$\varepsilon_i v$	შენიშვნა
1	346,535	−5	−4	16	+20	$m=\pm\sqrt{\frac{632}{6}}\approx\pm 11{,}24$ მმ; შემოწმებისათვის $m=\pm 0{,}23\times 52=\pm 11{,}96$ მმ. (0,23 ამოღებულია(3.3.10.1) ცხრილიდან) (3.3.9.1) ფორმულით $M=\pm\sqrt{\frac{632}{6\cdot 5}}\approx\pm 4{,}6$ მმ, (3.3.9.2) ფორმულით $M=\pm\frac{346{,}550-346{,}520}{6}=\pm 5$ მმ.
2	548	+8	+9	81	+72	
3	520	−20	−19	361	+380	
4	546	+6	+7	49	+42	
5	550	+10	+11	121	+110	
6	537	−3	−2	4	+6	
l_0	346,540	−4	+27	632	+630	$[v]=[l]-nL=$ $=2079{,}236-2079{,}234=+2$ მმ.
L	346,539	$\frac{[\varepsilon_i]}{n}=-0{,}7$	−5 $[v]=+2$	$[v^2]$	$[\varepsilon_i v]$	

$$L=346{,}539\pm 0{,}005 \text{ მ.}$$

3. 3. 13. ფარდობითი შეცდომები

წინა პარაგრაფებში განხილული ჭეშმარიტი, უალბათესი, საშუალო კვადრატული, საშუალო არითმეტიკული და ალბათი შეცდომები, რიცხვითი გამოსახულების ფორმის მხრივ შეიძლება იყოს აბსოლუტური და ფარდობითი. $\delta, u, m, \vartheta, r$ შეცდომებს აბსოლუტური შეცდომები ეწოდება. მათი განხილვის დროს არ უნდა ავერიოთ ერთმანეთში აბსოლუტური შეცდომა და შეცდომის აბსოლუტური მნიშვნელობა. პირველი ალგებრული სიდიდეა, მეორე კი — არითმეტიკული.

ფარდობითი შეცდომა წილადია, რომელიც მიიღება აბსოლუტური შეცდომის და გაზომილი სიდიდის ოდენობის ფარდობით. იგი გამოისახება პროცენტებში (იშვიათად), ან ალიქვოტურად, ე. ი. წილადის სახით, რომელსაც მრიცხველად ერთი აქვს და მნიშვნელად განაზომი სიდიდის ოდენობის და მისი შეცდომის განაყოფი. გეოდეზიაში უფრო მიღებულია ფარდობითი შეცდომის ალიქვოტურად გამოსახვა

$$\frac{m}{L}=\frac{1}{L:m}=\frac{1}{T};\qquad(3.3.13.1)$$

T-თი აღინიშნება $L:m$.

როგორც ვხედავთ, ფარდობითი შეცდომები განყენებული რიცხვებია და აქვთ ის ნიშანი, რაც აქვს მათ შესაბამის აბსოლუტურ შეცდომებს.

ფარდობითი შეცდომა შეიძლება განხილული იქნეს, როგორც ხვედრილი შეცდომა საზომ ერთეულზე. ამის გამო, მას ხშირად იღებენ გარკვეულ პირობებში განაზომთა შედეგების სიზუსტის შეფასების საზომად და მოკლედ სიზუსტეს[1] უწოდებენ.

ფარდობითი შეცდომის განსაზღვრისას გაზომილი სიდიდის ოდენობას იღებენ დამრგვალებით. ვთქვათ, ხაზი $L=523{,}4$ მ გაზომილია $\Delta=-0{,}2$ მ აბსოლუტური შეცდომით, მაშინ მისი ფარდობითი შეცდომა ანუ სიზუსტე იქნება[2]

$$\frac{\Delta}{L}=-\frac{0.2}{523{,}4}\approx-\frac{0{,}2}{520}=-\frac{1}{520:0{,}2}=-\frac{1}{2600}.$$

გეოდეზიაში უმთავრესად კუთხეები და ხაზები იზომება. რადგან ეს განაზომები ხშირად ერთად შედიან ტოლობაში, საჭირო ხდება ამ არაერთგვაროვან განაზომთა სიზუსტეების შესაბამისობის დადგენა. კუთხის გაზომვის შეცდომა არ არის დამოკიდებული კუთხის ოდენობაზე, ხაზის გაზომვის შეცდომა კი, პირიქით, დამოკიდებულია ხაზის სიგრძეზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ კუთხის გაზომვის სიზუსტის შეფასებისათვის საჭირო არაა კუთხის ოდენობის ცოდნა, ხაზის გაზომვის სიზუსტის შეფასებისათვის კი აუცილებლად საჭიროა ხაზის სიგრძის ცოდნა, მიახლოებით მაინც. მაგალითად, ვიტყვით ხაზი სიგრძით 300 მ გაზომილია ცუდად, ვიდრე ხაზი სიგრძით 5000 მ, როცა ორივე შემთხვევაში შეცდომა გაზომვაში დაშვებულია 1 მ; ამ ხაზების სიგრძე რომ არ გვცოდნოდა, შედარებას ვერ მოვახდენდით.

---

[1] შეცდომების პროცენტებში ან პრომილებში გამოსახვისათვის სიზუსტე $\frac{1}{T}$ უნდა გამრავლდეს 100-ზე ან 1 000-ზე.

[2] ფარდობითი შეცდომის ოდენობა სიზუსტის უკუპროპორციულია.

შესრულებული კუთხური და ხაზოვანი გაზომვების შეფასებისა და შედარების მიზნით საჭიროა როგორც კუთხური, ისე ხაზოვანი შეცდომები გამოვსახოთ ფარდობითი შეცდომების სახით. ამისათვის კუთხეების გაზომვის აბსოლუტური შეცდომა უნდა გამოვსახოთ რადიანულ (განყენებულ) განზომილებაში და ხაზების გაზომვების აბსოლუტური შეცდომები ფარდობითი შეცდომების სახით. შედეგად მოგვეცემა ორივე განაზომთა სიზუსტეების ურთიერთ შედარების საშუალება.

ვთქვათ, საჭიროა სამშენებლო ქსელის ერთ-ერთი გვერდის გამოყენებით ადგილზე გადატანილი იქნეს პროექტის რომელიმე C წერტილი (ნახ. 1); ამ წერტილის ადგილზე გადატანისათვის კი ანალიზურად განსაზღვრულია l და α შემდეგი ფორმულებით:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_c-y_0}{x_c-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{ხოლო} \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$l=\frac{\Delta x}{\cos\alpha}=\frac{\Delta y}{\sin\alpha}.$$

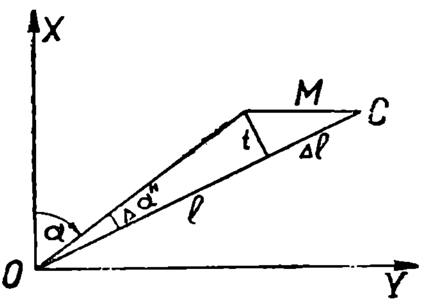
დაკვალვის დროს კუთხეში $\Delta\alpha''$ და სიგრძეში Δl შეცდომებია დაშვებული. მიღებულ აბსოლუტურ შეცდომათა შეფასებას მოვახდენთ შემდეგნაირად:

გამოვთვლით განივი გადაადგილების აბსოლუტურ ოდენობას, როგორც რკალის სიგრძეს (ეს გადაადგილება გამოწვეულია $\Delta\alpha''$ შეცდომით). ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$t=\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}l.$$

ფარდობითი ოდენობა განივი გადაადგილებისა, ანუ სიზუსტე განივი გადაადგილებისა იქნება

$$\frac{t}{l}=\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}. \quad (3.3.13.2)$$



ნახ. 3.3.13.1.

განივი გადაადგილების ფარდობითი ოდენობა ტოლია რადიანებში კუთხური შეცდომის ოდენობისა.

გრძივი გადაადგილების (შეცდომის) ფარდობითი ოდენობა (სიზუსტე) იქნება:

$$\frac{\Delta l}{l}.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლი გავლენის პრინციპის გამოყენებით შეგვიძლია განივი და გრძივი გადაადგილების ურთიერთშედარება, ფარდობითი შეცდომის გამოყენების საშუალებით. ტოლი გავლენის პრინციპით საჭიროა, რომ t განივი გადაადგილება და Δl გრძივი გადაადგილება ტოლი ოდენობების იყოს. მართლაც, უაზრობა იქნებოდა, რომ წერტილის ამა თუ იმ სიზუს-

ტით ადგილზე გადატანისას, გამოგვეყენებია მაღალი სიზუსტის კუთხმზომი ინსტრუმენტი, როცა ხაზოვანი გადაზომვა შედარებით ტლანქად სრულდება. ყოველთვის საჭიროა ხაზოვანი და კუთხური გაზომვები და გადაზომვები ერთნაირი სიზუსტით იქნეს შესრულებული. მაგალითად, თუ საჭიროა ხაზის გადაზომვა 1:5000 სიზუსტით, საჭიროა ამ ხაზის მიმართულებაც ამავე სიზუსტით იყოს გადატანილი, რისთვისაც უნდა იქნეს დაცული ტოლობა

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{t}{l} = \frac{1}{5000}.$$

მაგრამ (3. 3. 13. 2) ფორმულის თანახმად

$$\frac{t}{l} = \frac{\Delta \alpha''}{\rho''},$$

მაშასადამე,

$$\frac{\Delta \alpha''}{\rho''} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{5000}, \qquad (3.3.13.3)$$

საიდანაც

$$\Delta \alpha'' = \frac{200000''}{5000} \approx 40''.$$

აქ $\rho'' \approx 200000''$ (დამრგვალებულია).

მიღებული შედეგიდან დავასკვნით, რომ კუთხის გადაზომვა საკმარისია $\pm$ 40″-ს შეცდომით.

პრაქტიკაში ხაზების გაზომვის დასაშვებ ფარდობით შეცდომას ანუ საჭირო სიზუსტეს ალიკვოტურად იძლევიან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ხაზის განაზომის აბსოლუტური შეცდომა არ უნდა გადასცილდეს ხაზის სიგრძისა და ინსტრუქციით მოთხოვნილი სიზუსტის ნამრავლს.

ვთქვათ, ხაზებისა და კუთხეების გაზომვის მოთხოვნილი სიზუსტე არის $\frac{1}{5000}$, მაშინ, აბსოლუტური შეცდომა, მაგალითად, 50, 100, 150 მ სიგრძის ხაზებისათვის შესაბამისად იქნება

$$50 \cdot \frac{1}{5000} = 10 \text{ მმ},$$

$$100 \cdot \frac{1}{5000} = 20 \text{ მმ},$$

$$150 \cdot \frac{1}{5000} = 30 \text{ მმ};$$

ე. ი. ერთი და იგივე სიზუსტით გაზომილ სხვადასხვა სიგრძის ხაზებს სხვადასხვა აბსოლუტური შეცდომა შეესაბამება.

კუთხის გაზომვის დასაშვები აბსოლუტური შეცდომა, როგორი ოდენობის კუთხესაც არ უნდა ვზომავდეთ, რჩება უცვლელი, რადგან ეს შეცდომა გამოითვლება რადიანის გრადუსული ოდენობის გამრავლებით მოთხოვნილ სიზუსტეზე.

$$200000'' \cdot \frac{1}{5000} = 40''.$$

---

[1] იხილეთ (3.4.1.30) მაგალითი, ფორმულა (3.4.1.14).

მაშასადამე, მოთხოვნილი სიზუსტით პოლიგონში გვერდებისა და კუთხეების გაზომვისას გვერდების განაზომთა აბსოლუტური შეცდომები შეიძლება მივიღოთ მათი სიგრძეების პროპორციულად. ხოლო კუთხეების განაზომთა აბსოლუტური შეცდომები — მუდმივ სიდიდეებად. სინამდვილეში, გვერდების აბსოლუტური შეცდომები შემთხვევითი შეცდომების თვისების გამო, იზრდება ხაზის სიგრძიდან კვადრატული ფესვის პროპორციულად[1].

პრაქტიკულად დადგენილია, რომ გრძელი ხაზი შედარებით მოკლე ხაზთან უფრო ზუსტად იზომება.

თ ა ვ ი IV

არაპირდაპირი დამოუკიდებელი ტოლზუსტი გაზომვები

3. 4. 1. შემთხვევით შეცდომათა დაგროვების კანონი[1]

არაპირდაპირი ხერხით ობიექტის (სიდიდის) ოდენობის განსაზღვრისათვის საჭირო ხდება ამ ობიექტთან ფუნქციონალურად დაკავშირებული ელემენტების უშუალოდ, დამოუკიდებლად გაზომვა. ფუნქციის გამონათვლის შეცდომა შეიცავს, ერთი მხრივ, არგუმენტთა უშუალოდ გაზომვის შეცდომებს და, მეორე მხრივ, თვით გამოთვლების შეცდომებს. გამონათვალის სიზუსტის შეფასებისათვის საჭიროა შეცდომათა დაგროვების კანონების ანალიზურად გამოსახვა. გეოდეზიურ სამუშაოთა შესრულებისას ხშირად შეგვხვდება ამოცანები გამონათვალის სიზუსტის დადგენაზე როგორც წრფივი, ისე ზოგადი სახის ფუნქციისა. ამ ამოცანების გადაწყვეტა ხდება შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. მოცემული წრფივი ფუნქციისათვის დავადგენთ დამოკიდებულებას არგუმენტებისა და ფუნქციის ჭეშმარიტ შეცდომათა შორის.

ზემოთ (3. 1. 7 პარაგრაფში) განმარტებული იყო აღნიშნული საკითხი და მივიღეთ, რომ პრაქტიკულად ერთგვარი თვისების მქონედ შეგვიძლია მივიჩნიოთ შეცდომები და ნაზრდები, ე. ი. მოთხოვნილი სიზუსტის ფარგლებში შეცდომების მიმართ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი წესები. აგრეთვე ზოგადი სახის ფუნქციაც შეიძლება დიფერენციალური აღრიცხვის (კერძო წარმოებულების) წესებით დავიყვანოთ წრფივი ფუნქციის სახეზე და ვიმოქმედოთ უშუალოდ გაზომილ სიდიდეებსა და გამონათვლების შეცდომებზე ისევე, როგორც არგუმენტებისა და ფუნქციების ნაზრდებზე:

2. შევადგენთ ყოველი არგუმენტისათვის მრავალი გაზომვის შედეგად მიღებულ შეცდომათა რიგებს;

3. შეცდომათა ამ რიგების წევრთა ყოველნაირი შეერთების გამოყენებით შევადგენთ ფუნქციისა და არგუმენტების შეცდომათა დამოკიდებულებების რიგებს. ამით მივიღებთ დამოკიდებულებების იმდენ რიგს, რამდენი შეერთებაცაა შესაძლებელი მოცემული ფუნქციის მიხედვით არგუმენტების (უშუალოდ გაზომილი ელემენტების) სათანადო შეცდომებს შორის;

---

[1] გამონათვლების სიზუსტე.

4. შეცდომათა დამოკიდებულებების რიგების ერთობლივი გადაწყვეტით განვსაზღვრავთ ფუნქციისა და მისი არგუმენტების შესაბამის საშუალო კვადრატულ შეცდომათა დამოკიდებულების რიგს, ე. ი. გამოვთვლით ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას მისი შეცდომებით (3. 3. 5. 1) ფორმულის გამოყენებით.

როგორც ჩანს, წირული ფუნქცია უშუალოდ გაზომილ სიდიდედ მიიღება და საშუალო კვადრატული შეცდომის (3. 3. 5. 1) ფორმულით გამოსახულ თვისებას ვავრცელებთ დამოუკიდებლად გაზომილ სიდიდეთა წირულ ფუნქციაზედაც. ამის გამო ხშირად წირული ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას უწოდებენ *საშუალო კვადრატული შეცდომის გავრცელების კანონს.*

ალბათობის თეორიაში (27) წირული ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომათა გავრცელების კანონის დასაბუთება ემყარება იმ მოსაზრებს, რომ დამოუკიდებელ არგუმენტთა წირული ფუნქციების შემთხვევითი შეცდომები ნაწილდება იმავე კანონით, რომლითაც მათი განაწილება ხდება ერთი და იგივე სიდიდის მრავალჯერ, ტოლზუსტად, უმეშვეო დამოუკიდებელი გაზომვების დროს.

გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი წესი სხვადასხვა ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომების გამოსათვლელად ანუ გამოვიყვანოთ სხვადასხვა სახის ფუნქციისათვის საშუალო კვადრატულ შეცდომათა გავრცელების კანონები.

A. ალგებრული ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა

დამოუკიდებელ განაზომთა ალგებრული ჯამის წირული ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის ± კვადრატულ ფესვს შესაკრებთა საშუალო კვადრატული შეცდომების კვადრატების ჯამიდან.

ავიღოთ ფუნქცია

$$y = \pm a \pm b,$$

სადაც a და b არგუმენტები მიღებულია შესაბამისად n და k-ჯერ ურთიერთ დამოუკიდებელი უშუალო ტოლზუსტი გაზომვების შედეგად. გამოთქმული წესის დამტკიცება შეიძლება ზემოხსენებული თანამიმდევრობით:

1) ცნობილია, რომ ფუნქციის ნაზრდი არგუმენტთა ნაზრდების ჯამის ტოლია, ე. ი. დაიწერება

$$\Delta y_{ij} = \pm \Delta a_i \pm \Delta b_j, \tag{3.4.1.1}$$

სადაც

$$i = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n,$$
$$j = 1,\ 2,\ 3, \cdots, k.$$

არგუმენტთა ნაზრდები განსაზღვრული მცირე სასრული და გარკვეული ნიშნის სიდიდეებია. ამის გამო თვით ფუნქციის ნაზრდიც სასრული სიდიდეა. როგორც (3. 1. 7) პარაგრაფში იყო თქმული, ჭეშმარიტი შეცდომებიც სრულიად განსაზღვრული სასრული მცირე გარკვეული ნიშნის სიდიდეებია. ამიტომ არგუმენტების Δa_i და Δb_j ნაზრდები შეიძლება ჩავთვალოთ ჭეშმარიტ

შეცდომებად და ასევე ფუნქციის ნაზრდიც შეიძლება მივიღოთ ფუნქციის ჭეშმარიტ შეცდომად.

აქედან გამოდის, რომ **ალგებრული ჯამის შეცდომა უდრის შესაკრებთა შეცდომების ალგებრულ ჯამს.** ასეთივეა ალგებრული ჯამის დიფერენციალსა და შესაკრებთა დიფერენციალებს შორის დამოკიდებულება.

ამ ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომის (m_y-ს) გამოთვლა შესაკრებთა m_a და m_b საშუალებით ისე, როგორც მოვიქეცით (1) ფორმულით, (Δa, Δb) შეცდომათა შემთხვევაში არ შეიძლება. საშუალო კვადრატული შეცდომები, მიუხედავად მათი შემთხვევითი ხასიათისა, ორნიშნიანობის გამო ანუ როგორც დადებითი და უარყოფითი ნიშნების მქონე, განსაკუთრებული სიდიდეებია, და მათი გაიგივება ფუნქციისა და არგუმენტების ნაზრდებთან არ შეიძლება. ამგვარად, საშუალო კვადრატულ შეცდომათა უბრალო შეჯამება დაუშვებელია, რადგანაც აქ კომპენსაციის კანონს (ურთიერთგაბათილებას) ადგილი არ ექნება; საერთოდ, ეს შეცდომები ნიშნების მიხედვით გაურკვეველი სიდიდეებია ცალკეული განაზომების საშუალო კვადრატული შეცდომების განსაზღვრისათვის ჩვენ მიერ ერთობლივად განხილული იყო ერთი და იმავე ობიექტის განაზომების შეცდომათა რიგები. ამ შემთხვევაშიაც ანალოგიურად არგუმენტებისა და მათი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომების დამოკიდებულების გამოსაყვანად მივმართავთ არგუმენტთა მრავალჯერ დამოუკიდებელი განაზომების შეცდომებისა და მათი ფუნქციის დამოკიდებულებათა ცხადი სახით ერთობლივ განხილვას.

2) შემთხვევით შეცდომათა ცალკეული რიგები იქნება

$$\Delta a_1,\ \Delta a_2,\ \Delta a_3, \cdots,\ \Delta a_n,$$

$$\Delta b_1,\ \Delta b_2,\ \Delta b_3, \cdots,\ \Delta b_k;$$

3) $a \pm b$ ჯამსა და სხვაობაში თანაბარი ალბათობით მოსალოდნელია ყოველგვარი შეერთება ორივე $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \cdots, \Delta a_n$ და $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3, \cdots, \Delta b_k$ რიგის შეცდომათა. ამის გამო (1) დამოკიდებულების მსგავსად შევადგენთ ფუნქციისა და არგუმენტების შეცდომათა ცალკეული დამოკიდებულებების რიგებს, რომელთა რიცხვი იქნება $n \cdot k$.

$$\begin{array}{llll}
\Delta y_{1,1}=\Delta a_1 \pm \Delta b_1, & \Delta y_{2,1}=\Delta a_2 \pm \Delta b_1, & \Delta y_{3,1}=\Delta a_3 \pm \Delta b_1 \cdots & \Delta y_{n,1}=\Delta a_n \pm \Delta b_1 \\
\Delta y_{1,2}=\Delta a_1 \pm \Delta b_2, & \Delta y_{2,2}=\Delta a_2 \pm \Delta b_2, & \Delta y_{3,2}=\Delta a_3 \pm \Delta b_2 \cdots & \Delta y_{n,2}=\Delta a_n \pm \Delta b_2 \\
\Delta y_{1,3}=\Delta a_1 \pm \Delta b_3, & \Delta y_{2,3}=\Delta a_2 \pm \Delta b_3, & \Delta y_{3,3}=\Delta a_3 \pm \Delta b_3 \cdots & \Delta y_{n,3}=\Delta a_n \pm \Delta b_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Delta y_{1,k}=\Delta a_1 \pm \Delta b_k, & \Delta y_{2,k}=\Delta a_2 \pm \Delta b_k, & \Delta y_{3,k}=\Delta a_3 \pm \Delta b_k \cdots & \Delta y_{n,k}=\Delta a_n \pm \Delta b_k;
\end{array}$$

4) ამ ოდენობათა კვადრატების ჯამი, გაყოფილი $n \cdot k$ ნამრავლზე, მოგვცემს

$$m_y^2 = \frac{[\Delta y^2]_1^{nk}}{n \cdot k} = \frac{k[\Delta a^2]_1^n + n[\Delta b^2]_1^k \pm 2[\Delta a]_1^n[\Delta b]_1^k}{n \cdot k};$$

აქ

$$\frac{[\Delta a^2]_1^n}{n} = m_a^2, \quad \frac{[\Delta b^2]_1^k}{k} = m_b^2.$$

ხოლო შემთხვევით შეცდომათა მეოთხე თვისების თანახმად

$$\frac{[\Delta a]_1^n}{n} \cdot \frac{[\Delta b]_1^k}{k} = 0,$$

ამის გამო

$$m_y^2 = m_a^2 + m_b^2,$$

$$m_y = \sqrt{m_a^2 + m_b^2}. \qquad (3.4.1.2)$$

როგორც ჩანს, m_a და m_b საშუალო კვადრატული შეცდომები იკრიბება არა ალგებრულად, ე. ი. არა ჭეშმარიტი შეცდომების მსგავსად, არამედ გეომეტრიულად. ჯამის (m_y) საშუალო კვადრატული შეცდომა წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, m_a და m_b კი — კათეტებს. ასე, რომ ალგებრული ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა ნაკლებია შესაკრებთა საშუალო კვადრატული შეცდომების ჯამზე

$$m_y < m_a + m_b.$$

როდესაც a წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და b არის უშუალოდ გაზომილი სიდიდე, მაშინ

$$m_y = m_b, \qquad (3.4.1.3)$$

ე. ი. ფუნქციის სიზუსტე დამოკიდებულია მხოლოდ უშუალოდ გაზომილ b— სიდიდეზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 1[1]. გაზომილია ორი კუთხე

$$\begin{array}{r} \alpha = 56^\circ\ 47'\ 30'' \pm 8''; \\ \beta = 63^\circ\ 11'\ 20'' \pm 6''; \\ \hline \gamma = \alpha + \beta = 119^\circ\ 58'\ 50'' \pm 10''; \end{array}$$

რადგანაც (2) ფორმულით

$$m_\gamma = \pm\sqrt{8^2 + 6^2} = \pm 10''.$$

γ რომ იმავე კუთხეების სხვაობის შეადგენდეს, m_γ მაინც 10″ იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 2. გაზომილია ორი სწორი მონაკვეთი. გამოითვალოს თითოეული მონაკვეთის, მათი ჯამისა და სხვაობის ფარდობითი შეცდომა, თუ მოთხოვნილი სიზუსტე ანუ ფარდობითი შეცდომა არის $\frac{1}{2000}$-ის ტოლი.

$$\begin{array}{r} a = 626{,}48\ \text{მ} \pm 0{,}20\ \text{მ}; \\ b = 615{,}20\ \text{მ} \pm 0{,}14\ \text{მ}; \\ \hline c = a + b = 1241{,}68\ \text{მ} \pm 0{,}24\ \text{მ}; \\ d = a - b = 11{,}28\ \text{მ} \pm 0{,}24\ \text{მ}; \end{array}$$

ვინაიდან

$$m_c = m_d = \pm\sqrt{(0{,}20)^2 + (0{,}14)^2} = \pm 0{,}24\ \text{მ}.$$

[1] ნებისმიერი მაგალითის გამოყენების დროს წინასწარ უნდა დაიწეროს ფუნქცია ცხადად და შემდეგ მისი საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსაყვანად შესაბამისი ფორმულა

ფარდობითი შეცდომა (3. 3. 13. 1) ფორმულით იქნება

$$1)\ \frac{0{,}20}{626}\approx\frac{1}{3130};\qquad 2)\ \frac{0{,}14}{615}\approx\frac{1}{4400};$$

$$3)\ \frac{0{,}24}{1240}\approx\frac{1}{5100};\qquad 4)\ \frac{0{,}24}{11}\approx\frac{1}{50}.$$

მაგალითიდან ჩანს, რომ ფარდობითი შეცდომა სხვაობისა მეტია ამავე წევრების ჯამის ფარდობით შეცდომაზე. 1, 2 და 3 შეცდომები დამაკმაყოფილებელი ოდენობისაა. მე-4 კი არ აკმაყოფილებს მოთხოვნილ სიზუსტეს. ამიტომ რაიმე სიდიდის ოდენობის განსაზღვრისათვის გაზომილ სიდიდეთა სხვაობის გამოყენება არაა სასურველი.

დავუშვათ, რომ ფუნქციას აქვს სახე

$$y=\pm a\pm b\pm c,$$

სადაც ურთიერთდამოუკიდებელი a, b და c სიდიდეების შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომებია: m_a, m_b და m_c. ამ შემთხვევაში $(a\pm b)$ ჯამი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთი $u=a\pm b$ სიდიდე და მოცემული ფუნქცია დავწეროთ

$$y=\pm u\pm c.$$

ამ სახის ფუნქციისათვის, თანახმად (2) ფორმულისა, დაიწერება

$$m_y^2=m_u^2+m_c^2;$$

მაგრამ იგივე (2) ფორმულით

$$m_u^2=m_a^2+m_b^2,$$

მაშასადამე,

$$m_y=\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}.$$

რამდენი შესაკრებიც $(a,\ b,\ c,\ \ldots,\ q)$ არ უნდა იყოს, თანამიმდევრული შეჯგუფებების მეთოდის გამოყენებით ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის, მივიღებთ

$$m_y=\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2+\cdots+m_q^2}\,. \qquad (3.4.1.4)$$

იმ შემთხვევაში, თუ (4) ფორმულის $m_a=m_b=m_c=m_d=\cdots m_q=m$-ს, მაშინ

$$m_y=m\sqrt{n}, \qquad (3.4.1.5)$$

სადაც n შესაკრებთა რიცხვია.

დ ა ს კ ვ ნ ა: თუ დამოუკიდებელ განაზომთა საშუალო კვადრატული შეცდომები ურთიერთტოლია, მაშინ გაზომილი სიდიდეების ოდენობათა ალგებრული ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა ტოლი იქნება ნამრავლისა ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომისა და შესაკრებთა რიცხვიდან კვადრატული ფესვისა.

მაგალითად, თუ შეკრულ მრავალკუთხედში გაზომილია ყოველი კუთხე m_a საშუალო კვადრატული შეცდომით, მაშინ კუთხეთა ჯამის m_0 საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m_0=m_a\sqrt{n}\,.$$

დავუშვათ

$$m_\alpha = \pm 20'',$$

მაშინ

$$m_0 = \pm 20''\sqrt{n},$$

სადაც n კუთხეთა რიცხვია პოლიგონში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 3. სამკუთხედში გაზომილია ორი კუთხე $\alpha \pm 5''$ და $\beta \pm 5''$; საჭიროა მესამე (γ) კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა.

ფუნქციის პირველადი სახეა

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta,$$

ხოლო პირობის თანახმად

$$m_\alpha = m_\beta = \pm 5''.$$

ამ შემთხვევაში (5) ფორმულით მივიღებთ

$$m_\gamma = \pm 5''\sqrt{2} = \pm 7.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 4. მეოთხე კლასის ტრიანგულაციის სამკუთხედში კუთხეები გაზომილია $\pm 2''$ საშუალო შეცდომით; განისაზღვროს სამკუთხედში კუთხეთა ჯამის შეცდომა.

რადგან $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm 2''$, ხოლო $n = 3$, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (5) ფორმულით, ე. ი.

$$m_\Delta = m\sqrt{n};$$

რიცხვითი ოდენობების ჩასმით მივიღებთ

$$m_\Delta = \pm 2''\sqrt{3} = \pm 3'',5.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.5. ნიველობით მიღებულია სიმაღლეთა სხვაობები

$$h_1 = +\ 10,86 \text{ მ} \pm 0,11 \text{ მ};$$
$$h_2 = +168,64 \text{ მ} \pm 0,19 \text{ მ};$$
$$h_3 = -\ 26,09 \text{ მ} \pm 0,15 \text{ მ}.$$

სიმაღლეთა სხვაობების ჯამი $H = 153,41$ მ.

H-ის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (4) ფორმულით იქნება

$$m_H = \pm\sqrt{(0,11)^2 + (0,19)^2 + (0,15)^2} = \pm 0,26 \text{ მ}.$$

მოკლედ დაიწერება $H = +153,41$ მ $\pm 0,26$ მ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.6. n-კუთხიანი შეკრული მრავალკუთხედის ყოველი მიმართულების საშუალო კვადრატული შეცდომა არის 0,5; დავადგინოთ, რას უდრის ამ მრავალკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

1) ყოველი კუთხის, როგორც ორი მიმართულების სხვაობის, საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება $\pm 0',5\sqrt{2}$;

2) შიგა კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა კი (5) ფორმულით იქნება $\pm 0',5\sqrt{2}\cdot\sqrt{n} = \pm 0',5\sqrt{2n}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.7. 20-მეტრიანი ბაფთით გაზომილია 980 მეტრის სიგრძის ხაზი. გავიგოთ, რას უდრის ამ ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ბაფთით გასაზომ ხაზზე ყოველი გადაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის ± 1 სანტიმეტრი.
რადგან

$$n = 980 : 20 = 49,$$

ამიტომ (3. 4. 1. 5) ფორმულით მივიღებთ

$$m_L = \pm 1\sqrt{49} = \pm 7 \text{ სმ.}$$

B. საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა, როდესაც გვაქვს შეცდომების რამდენიმე დამოუკიდებელი წყარო

ყოველი შემთხვევითი შეცდომის წარმოშობის წყაროს წარმოადგენს სხვადასხვა ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი შეცდომები. მაგალითად, წარმოვიდგინოთ,

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_1' \pm \delta_2' \pm \delta_3' \pm \cdots \pm \delta_k' \\ \delta_2 &= \delta_1'' \pm \delta_2'' \pm \delta_3'' \pm \cdots \pm \delta_k'' \\ \delta_3 &= \delta_1''' \pm \delta_2''' \pm \delta_3''' \pm \cdots \pm \delta_k''' \\ & \\ \delta_n &= \delta_1^n \pm \delta_2^n \pm \delta_3^n \pm \cdots \pm \delta_k^n \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

ურთიერთდამოუკიდებლობა შეცდომათა სხვადასხვა წყაროებისა აუცილებელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში არ იქნებოდა გამართლებული შემთხვევით შეცდომათა 3. 1. 6 პარაგრაფში ჩამოთვლილი თვისებები. ამ შეცდომების ჯამი იქნება:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n.$$

ასეთივე დამოკიდებულებაშია წირული ფუნქციის ჭეშმარიტი შეცდომა გაზომილ არგუმენტთა შეცდომებთან. ასე რომ, მათ მიმართაც შეიძლება გავრცელდეს წირული ფუნქციისათვის გამოყვანილი (4) ფორმულა და დაიწეროს

$$m = \sqrt{m_{\delta_1}^2 + m_{\delta_2}^2 + m_{\delta_3}^2 + \cdots + m_{\delta_p}^2}\,, \qquad (3.4.1.6)$$

სადაც $m_{\delta_1}, m_{\delta_2}, m_{\delta_3}, \cdots, m_{\delta_n}$ განსაზღვრულია (*a*) დამოკიდებულებების შეცდომათა წყაროების მიმართ (4) ფორმულის გამოყენებით. თავის მხრივ, *a* დამოკიდებულებების მარჯვენა ნაწილის ელემენტების საშუალო კვადრატული შეცდომები გამოთვლილია (3. 3. 5. 1) ან (3. 3. 8. 2) ფორმულით ან სხვა ხერხით და ასე შემდეგ, ე. ი. თუ რაიმე სიდიდის გაზომვისას ცნობილია საშუალო კვადრატული შეცდომები ($m_{\delta_1}, m_{\delta_2}, m_{\delta_3}, \cdots, m_{\delta_n}$), რომლებიც წარმოშობილია სხვადასხვა დამოუკიდებელი წყაროებისაგან, მაშინ ამ წ ყ ა რ ო ე ბ ი ს ე რ თ ო ბ ლ ი ვ ი მ ო ქ მ ე დ ე ბ ი თ წ ა რ მ ო შ ო ბ ი ლ ი ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა ე დ რ ე ბ ა ა მ შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს ჯ ა მ ი დ ა ნ კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ე ს ვ ს.

ვთქვათ, რაიმე მიმართულების ერთჯერ დაკვირვების დროს გვქონდა შეცდომები: ანათვლის დამრგვალების $m_{\delta_1} = \pm 9''$, წერტილზე დამიზნების

$m_{\delta_2}=\pm 6''$ და ინსტრუმენტის დაცენტრვის $m_{\delta_3}=\pm 5''$. ამ შეცდომათა ერთობლივი მოქმედებით მიმართულების საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა იქნება

$$m=\sqrt{m_{\delta_1}^2+m_{\delta_2}^2+m_{\delta_3}^2}=\pm\sqrt{(9'')^2+(6'')^2+(5'')^2}=\pm 12''.$$

უნდა გავახსოვდეს, რომ ყოველ მაგალითში მოცემული ხაზებისა და მიმართულებების საშუალო კვადრატული შეცდომები გამოყვანილია (6) ფორმულით ან პრაქტიკული ხერხით (იხილეთ 3. 7 თავი).

C. მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია

$$y_i=k\cdot a_i,$$

სადაც k მუდმივი რიცხვია;

a—უშუალოდ n-ჯერ გაზომილი სიდიდე, რომლის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის m_a.

მიღებული წესის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$1.\ \Delta y_i=k\cdot\Delta a_i,$$

სადაც

$$i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n;$$

2. არგუმენტების n-ჯერ გაზომვის შედეგად მიღებული ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგი იქნება

$$\Delta a_1,\ \Delta a_2,\ \Delta a_3,\cdots,\ \Delta a_n;$$

3. ფუნქციის და არგუმენტის n-რაოდენობის დამოკიდებულებათა რიგები იქნება

$$\Delta y_1=k\,\Delta a_1,$$
$$\Delta y_2=k\,\Delta a_2,$$

$$\Delta y_n=k\,\Delta a_n;$$

4. საშუალო კვადრატული შეცდომის (m_y-ის) გამოსათვლელად ეს დამოკიდებულებანი ავახარისხოთ კვადრატში, შევაჯამოთ და გავყოთ n-ზე, მივიღებთ

$$\frac{[\Delta y^2]}{n}=k^2\frac{[\Delta a^2]}{n},$$

(3. 3. 5. 1) ფორმულის გამოყენებით

$$m_y=km_a. \tag{3.4.1.7}$$

ე. ი. რაიმე მუდმივისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის იმავე მუდმივისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომის ნამრავლს.

საყურადღებოა (5) და (7) ფორმულების შედარება. (5) ფორმულის გამოყვანისას $a, b, c, \cdots, q$ სიდიდეები იგულისხმება როგორც ურთიერთდამოუკიდებლად გაზომილი და ჩვენ გვქონდა შეცდომათა შორის დამოკიდებულება ასეთი:

$$\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \cdots + \Delta q.$$

აქ დამოუკიდებლად მიღებული შედეგების შეცდომათა შეკრებისას ადგილი აქვს კომპენსაციის კანონს, რომლის ძალით უგულებელვყოფთ, მაგალითად, $\Delta y = \Delta a + \Delta b$ ფუნქციისათვის მცირე ოდენობის $2\frac{[\Delta a]}{n} \cdot \frac{[\Delta b]}{k}$ სიდიდეს. ასეთ კომპენსაციას (7) ფორმულის შემთხვევაში ადგილი არა აქვს, რადგანაც $\Delta y = k \cdot \Delta a = \Delta a + \Delta a + \Delta a + \cdots \Delta a$ ტოლობაში ერთი და იგივე Δa შესაკრები მეორდება k-ჯერ.

ვთქვათ, $\alpha = \beta$ და $\gamma = \alpha + \beta$, ანუ $\gamma = 2\alpha$. თუ γ-ს მისაღებად ურთიერთ დამოუკიდებლად გავზომავთ α-ს და β-ს თუგინდ ერთგვარი საშუალო კვადრატული შეცდომით (ვთქვათ, $m_\alpha = m_\beta = \pm 5''$), ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (5) ფორმულით

$$m_\gamma = \pm 5''\sqrt{2} = \pm 7'',10$$

და თუ γ-ს განსაზღვრისათვის გავზომავთ რომელიმე ერთ კუთხეს და γ კუთხეს გამოვითვლით გაზომილი კუთხის გაორკეცებული სიდიდით ($\gamma = 2\alpha$), მაშინ უნდა ვისარგებლოთ (7) ფორმულით, ე. ი.

$$m_\gamma = \pm 2 \cdot 5'' = \pm 10''.$$

პირველ შემთხვევაში, შემთხვევით შეცდომათა კომპენსაციის გამო, საშუალო კვადრატული შეცდომა ნაკლებია, ვიდრე მეორე შემთხვევაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 8. ქაღალდზე 10-სანტიმეტრიანი რადიუსით შემოხაზულია ფარგლის საშუალებით წრეწირი. რადიუსის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_r = \pm 0{,}01$ სმ (გრაფიკული სიზუსტე). საჭიროა განისაზღვროს წრეწირის სიგრძის m_s საშუალო კვადრატული შეცდომა. ვინაიდან წრეწირის სიგრძე განისაზღვრება ფომულით: $S = 2\pi r$, ამის გამო (7) ფომულის მიხედვით წრეწირის სიგრძეში საშუალო კვადრატული შეცდომა გვექნება

$$m_s = 2\pi \cdot m_r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01 = \pm 0{,}06 \text{ სმ},$$
$$S = 62{,}83 \text{ სმ} \pm 0{,}06 \text{ სმ}.$$

D. ს რ უ ლ ი წ ი რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა (მრავალარგუმენტიანი, პირველი ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია)

საშუალო კვადრატული შეცდომა ფუნქციისა, რომელიც წარმოადგენს უშუალოდ გაზომილი დამოუკიდებელი არგუმენტებისა და რაიმე მუდმივი რიცხვების ნამრავლთა ჯამს, უდრის კვადრატულ ფესვს ჯამიდან, რომლის ყოველი წევრი ტოლია შესაბამისი მუდმივი რიცხვების კვადრატისა და არგუმენტების საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატების ნამრავლისა.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$y=k_1a\pm k_2b\pm k_3c\pm\cdots\pm k_nq.$$

a, b, $c,\cdots$, q არის უშუალოდ გაზომილი დამოუკიდებელი სიდიდეები, შესაბამისად m_a m_b, $m_c,\cdots$, m_q საშუალო კვადრატული შეცდომებით. k_1, k_2, $k_3,\cdots$, k_n ზუსტი მუდმივი რიცხვებია. აღვნიშნოთ ჯამის ყოველი ნამრავლი y_i-ით, გვექნება

$$y_1=\pm k_1a, \text{ ხოლო (7) ფორმულის ძალით } m_{y_1}=k_1m_a;$$

$$y_2=\pm k_2b \qquad m_{y_2}=k_2m_b;$$

$$y_3=\pm k_3c \qquad m_{y_3}=k_3m_c;$$

.

$$y_n=\pm k_nq \qquad m_{y_n}=k_nm_q.$$

მოცემული ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y=y_1\pm y_2\pm y_3\pm\cdots\pm y_n.$$

მაგრამ ასეთი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა (4) ფორმულის თანახმად, იქნება

$$m_y=\sqrt{m_{y_1}^2+m_{y_2}^2+m_{y_3}^2+\cdots+m_{y_n}^2};$$

ამ ფორმულაში თუ ჩავსვამთ m_{y_1}, $m_{y_2},\cdots$, m_{y_n}-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$m_y=\sqrt{k_1^2m_a^2+k_2^2m_b^2+k_3^2m_c^2+\cdots+k_n^2m_q^2} \tag{3.4.1.8}$$

გამოყვანილ ფორმულას დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს.

განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო შემთხვევა:

ა) ვთქვათ, წირული ფუნქციის მუდმივები ტოლია, ე. ი. $k_1=k_2=k_3=\cdots=k_n=k$, ხოლო არგუმენტთა შეცდომების კრიტერიუმები ურთიერთგანსხვავებულებია; მაშინ ამ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა (კრიტერიუმი) იქნება:

$$m_y=\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2+\cdots+m_q^2} \tag{3.4.1.9}$$

ბ) როდესაც დამოუკიდებელ განაზომთა შეცდომების კრიტერიუმები ურთიერთტოლია, ე. ი. $m_a=m_b=m_c=\cdots=m_q=m$ და მუდმივები არაა ერთმანეთის ტოლი, მაშინ გვექნება

$$m_y=m\sqrt{[k^2]}. \tag{3.4.1.10}$$

გ) როდესაც $m_a=m_b=m_c=\cdots=m_q=m$ და $k_1=k_2=k_3=\cdots=k_n=k$,

$$m_y=km\sqrt{n}, \tag{3.4.1.11}$$

ხოლო თუ $k=1$, მივიღებთ (5) ფორმულას

$$m_y=m\sqrt{n}.$$

როგორც ვხედავთ, (8) და მისი წარმოებული ფორმულები შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი სახის წირული ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 9. მოცემულია $y=0{,}3a-0{,}4b+0{,}5c-0{,}6d$ ფუნქცია, რომლის წევრების საშუალო კვადრატული შეცდომები: m_a, m_b, m_c და m_d ცნობილია. გამოითვალოს ამ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა. (8) ფორმულით მივიღებთ

$$m_y=\sqrt{0{,}09m_a^2+0{,}16m_b^2+0{,}25m_c^2+0{,}36m_d^2}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 10. გამოთვლილ იქნეს ნებისმიერი სიდიდის n-ჯერ ტოლ ზუსტ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

რაიმე სიდიდის n-ჯერ ტოლზუსტ განაზომთა L საშუალო არითმეტიკული გამოითვლება (3. 3. 1. 9) ფორმულით

$$L=\frac{[l]}{n}=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\frac{1}{n}l_3+\cdots+\frac{1}{n}l_n.$$

როგორც ჩანს, განაზომთა საშუალო არითმეტიკული წარმოადგენს წირული ფუნქციის კერძო შემთხვევას, სადაც $k_1=k_2=k_3=\cdots=\frac{1}{n}$ და $m_a=m_b=m_c=\cdots=m$. ამიტომ m_L, რომელსაც საზოგადოდ M-ით აღნიშნავენ, გამოითვლება (11) ფორმულით:

$$M=\frac{1}{n}\cdot m\sqrt{n}=\frac{m}{\sqrt{n}}.$$

მივიღეთ განაზომთა უილბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომის (3. 3. 7. 2) ფორმულა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 11. ტოლზუსტად გაზომილია a და b სიდიდეები, თითოეული $\pm m$ საშუალო კვადრატული შეცდომით. განვსაზღვროთ $r=3x-4y$ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ $x=a+b$ და $y=2b-3a$.

გამოვსახავთ r ფუნქციას ცხადად a-სა და b-ს საშუალებით, მივიღებთ:

$$r=3a+3b-8b+12a=15a-5b.$$

(10) ფორმულით, გვექნება

$$m_r=m\sqrt{k_1^2+k_2^2}=m\sqrt{15^2+5^2}=m\sqrt{250}$$

ახლა ვთქვათ, $x=a-b$ და $y=a-b$, მაშინ იმავე თანამიმდევრობით მივიღებთ:

$$r=3(a-b)-4(a-b)=b-a$$

და (10) ფორმულით

$$m_r=m\sqrt{2}.$$

ჯერ რომ (10) ფორმულით განგვესაზღვრა m_x, m_y და შემდეგ (8) ფორმულაში მათი ოდენობების შეტანით გამოგვეთვალა m_r, პირველ შემთხვევაში მივიღებდით $m_r=m\sqrt{226}$ და მეორეში — $m_r=m\sqrt{50}$. ასეთი მიდგომით აღ-

ნიშნული მაგალითის გამოთვლა სწორი არ იქნებოდა, რადგანაც x და y ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეები არაა, ორივე უშუალოდ გაზომილი a და b სიდიდეების ფუნქციებია.

დ ა ს კ ვ ნ ა. **ისეთი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომლის არგუმენტები ურთიერთგანსხვავებული ან ერთნაირი ფუნქციებია უშუალოდ გაზომილი ერთისა და იმავე სიდიდეებისა, მხოლოდ მაშინ გამოითვლება, როცა ამ ფუნქციას ცხადად გამოვსახავთ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების საშუალებით.**

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 12. გეომეტრიული ნიველობით განსაზღვრულია ორ წერტილს შორის სიმაღლეთა სხვაობა (აღმატება) $h=\dfrac{h_1+h_2}{2}$ ფორმულით, სადაც: $h_1=a_1-b_1$ და $h_2=a_2-b_2$.
გამოვთვალოთ სიმაღლეთა სხვაობის (m_h) საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ლარტყის შავ და წითელ მხარეზე ანათვლები m საშუალო კვადრატული შეცდომით არის მიღებული.

(10) ფორმულით:

$$m_{h_1}=m\sqrt{2} \text{ და } m_{h_2}=m\sqrt{2},$$

(11) ფორმულით

$$m_h=\frac{1}{2}\,m\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=m.$$

სადაც

$$k=\frac{1}{2},\ m_{h_1}=m_{h_2}=m\sqrt{2} \text{ და } n=2.$$

თუ ჯერ ცხადად განვსაზღვრავთ h-ს,

$$h=\frac{a_1-b_1+a_2-b_2}{2}.$$

(11) ფორმულით მივიღებთ იგივე პასუხს

$$m_h=\frac{1}{2}\,m\sqrt{4}=m.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 13. სიმაღლეთა სხვაობა განსაზღვრულია $h=a-b$ ფორმულის გამოყენებით, სადაც $a=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ და $b=\dfrac{b_1+b_2}{2}$.

გამოვთვალოთ სიმაღლეთა სხვაობის m_h საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ლარტყაზე ყოველი ანათვალი აღებულია m საშუალო კვადრატული შეცდომით.

(12) მაგალითის გადაწყვეტის ანალოგიურად, მივიღებთ
(11) ფორმულით

$$m_a=m_b=\frac{1}{2}\,m\sqrt{2}=\frac{m}{\sqrt{2}};$$

იგივე (11) ფორმულით

$$m_h=\frac{m}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=m;$$

აქ $k_1=k_2=1$ და $n=2$.

თუ ჯერ ცხადად განვსაზღვრავთ h-ს, ე. ი.

$$h=\frac{a_1+a_2-b_1-b_2}{2}$$

მაშინ (11) ფორმულით მივიღებთ იმავე პასუხს

$$m_h=\frac{1}{2}\cdot m\sqrt{4}=m,$$

დ ა ს კ ვ ნ ა (მე-12 და მე-13 მაგალითების მიხედვით). **ისეთი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომლის არგუმენტები ურთიერთგანსხვავებული ან ერთნაირი ფუნქციებია უშუალოდ გაზომილი სხვადასხვა დამოუკიდებელი სიდიდეებისა, შეიძლება გამოითვალოს ცალ-ცალკე თანამიმდევრობითი მოძებნით ან თავიდანვე ჩასმის წესით განისაზღვროს ფუნქცია ცხადად და შემდეგ შესაბამისი ფორმულებით გამოითვალოს მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა.** ამ მაგალითებში h_1, h_2, a და b ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეებია, რადგანაც ორივე მაგალითში a_1, a_2, b_1 და b_2 ანათვლები ურთიერთგანსხვავებული დამოუკიდებელი ანათვლებია,

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 14. სამანძილმზომი $L_0=Kn+c$ ფორმულის n ანათვალი განისაზღვრება ზედა და ქვედა სამანძილო ძაფით სამანძილმზომი ლარტყაზე ანათვალთა სხვაობით (ქვედა სამანძილო ძაფი შეთავსებულია ლარტყის ნულოვან შტრიხთან), ე. ი. $n=n_ზ-n_ქ$. თუ ერთი სამანძილო ძაფით ანათვლის აღების საშუალო კვადრატულ შეცდომას m-ით აღვნიშნავთ, მაშინ n-ის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_n (11) ფორმულის მიხედვით იქნება $=m\sqrt{2}$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ზედა ძაფი ემთხვევა ლარტყას დედამიწის ფიზიკური ზედაპირიდან ერთ მეტრზე ნაკლებ სიმაღლეზე, მაშინ n-ის განსაზღვრისათვის სავალდებულოა ძაფთა ბადის შუა ძაფის გამოყენება. ამ შემთხვევის დროს n-ის განსაზღვრა შეიძლება ორნაირად: შუა და ქვედა ძაფით ანათვალთა სხვაობას გავაორკეცებთ (ქვედა ძაფი შეთავსებულია ნულოვან შტრიხთან), ე. ი. $n=2(n_შ-n_ქ)$, მივიღებთ $m_n=2m\sqrt{2}$; ან შუა და ქვედა ძაფით ანათვლის სხვაობას (ქვედა ძაფი შეთავსებულია ნულოვან შტრიხთან) მივუმატებთ ზედა და შუა ძაფით ანათვლის სხვაობას (შუა ძაფი შეთავსებულია ნულოვან შტრიხთან), ე. ი. $n=(n_შ-n_ქ)+(n_ზ-n_შ)$, მივიღებთ $m_n=2m$. როგორც ჩანს, ამ შემთხვევის დროს სიზუსტის თვალსაზრისით საჭიროა მოვიქცეთ მეორენაირად, ე. ა. სჯობს n-ის განსაზღვრა სხვაობათა ჯამით და არა სხვაობის გაორკეცებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 15. თეოდოლიტს აქვს ორი ვერნიერი, რომელთა სიზუსტე (t) არის 30″. გამოვთვალოთ ამავე ვერნიერებით ლიმბზე აღებულ ანათვალთა საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვერნიერით ლიმბზე ანათვლის აღების შეცდომა უმთავრესად არის ანათვლის დამრგვალების შეცდომა, რომლის ზღვრული ოდენობა $a_{ზღ}=0{,}5t$. (ამ საკითხთან დაკავშირებით საჭიროა გავეცნოთ 3. 4. 5 და 3. 4. 6 პარაგრაფს).

1) ერთი ვერნიერით ლიმბზე ათვლის დროს დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა აღვნიშნოთ m'-ით; მაშინ (3. 4· 6· 6) ფორმულით მივიღებთ·

$$m' = \pm 0{,}3t.$$

2) ორი ვერნიერით ანათვალთა საშუალო არითმეტიკულის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელსაც $m_{სდ}$ აღვნიშნავთ, (11) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$m_{სდ} = km'\sqrt{2} = \frac{1}{2}\,0{,}3t\cdot\sqrt{2} = \pm\frac{0{,}3t}{\sqrt{2}} = \pm\frac{0\,3\cdot 30''}{\sqrt{2}} \approx \pm 6'',4.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. დანაყოფების ორი ამთვლელი ხელსაწყოთი აღებულ ანათვალთა საშუალო არითმეტიკულის (3· 4· 6. 6) და (11) ფორმულებით გამოთვლილ $m_{სდ}$ ანათვლის დამრგვალების საშუალო კვადრატულ შეცდომას ვუწოდოთ ა ნ ა თ ვ ლ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა და აღვნიშნოთ m_1-ით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 16. რას უდრის მიმართულების ერთი სრული წრიული ილეთით ტოლზუსტად განსაზღვრის m_2' შეცდომა, თუ

1) ანათვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_1 = \pm 6'',4$,

2) სამიზნე საგნის ადგილზე დანიშვნის (რედუქციის) საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_2 = \pm 6''$,

3) თეოდოლიტის დაცენტვრის შეცდომა $m_3 = \pm 6''$,

4) ჭოგრით დამიზნების საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_4 = \pm 3''$ (აქ ხედვის კრიტიკული კუთხე მიღებულია 60″ და ჭოგრის გამადიდებლობა 20^x).

1) (6) ფორმულით განვსაზღვრავთ ნახევარი წრიული ილეთის (m_1') საშუალო კვადრატულ შეცდომას,

$$m_1' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} = \pm\sqrt{6{,}4^2 + 6^2 + 6^2 + 3^2} \approx \pm 11'';$$

2) ერთი სრული წრიული ილეთის m_2' საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$m_2' = km_1'\sqrt{2} = \pm\frac{1}{2}\cdot 11''\cdot\sqrt{2} \approx 8''.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 17. კუთხე გამოთვლილია როგორც სხვაობა ორი მიმართულებისა. ორივე მიმართულება განსაზღვრულია ტოლზუსტად ერთი სრული წრიული ილეთით, რომლის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_2' = \pm 8''$. გამოვთვალოთ კუთხის განსაზღვრის m_α საშუალო კვადრატული შეცდომა.

(11) ფორმულით, მივიღებთ $m_\alpha = m_2'\sqrt{2} = \pm 8''\sqrt{2} \approx \pm 11''$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 18. ერთი სრული წრიული ილეთით კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_\alpha = \pm 11''$. გამოვითვალოთ ამავე კუთხის ოთხი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული m_α^{IV} შეცდომა.

(11) ფორმულით მივიღებთ

$$m_\alpha^{IV}=\frac{1}{4}\cdot m_\alpha\cdot\sqrt{4}=\pm\frac{11}{2}=\pm5'',5.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 19. სამკუთხედის ყოველი კუთხის ოთხი სრული წრიული ილეთით გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_\alpha^{IV}=\pm5'',5$. გამოვითვალოთ ამავე სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული $m_{|\alpha|}$ შეცდომა.

(11) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{|\alpha|}=m_\alpha^{IV}\sqrt{3}=\pm5'',5\times1,73=\pm9'',5\approx\pm10'';$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 20. სამკუთხედის ყოველი კუთხე გაზომილია ოთხი სრული წრიული ილეთით. გამოვითვალოთ ამ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა შემდეგი მონაცემებისათვის.

1) თეოდოლიტის ვერნიერის სიზუსტე $t=30''$, 2) სამიზნე საგნის ადგილზე დანიშვნის ე. წ. რედუქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის $\pm6''$) 3) თეოდოლიტის დაცენტვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა — $\pm6''$ და 4, ჭოგრით დამიზნების საშუალო კვადრატული შეცდომა — $\pm3''$-ს.

1) მეთხუთმეტე მაგალითში ერთი ვერნიერით ლიმბზე ათვლის დროს დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა, ანათვლის დამრგვალების ზღვრული შეცდომის შესაბამისად (3. 4. 6. 6) ფორმულით მივიღეთ

$$\pm0,3t;$$

ორივე ვერნიერით ანათვლების საშუალო კვადრატული შეცდომა კი (11) ფორმულით გამოვიდა

$$\pm\frac{0,3t}{\sqrt{2}}\approx\pm6'',4;$$

2) მიმართულების ნახევარი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (6) ფორმულით (16) მაგალითიდან არის

$$\pm\sqrt{6,4^2+6^2+6^2+3^2}\approx\pm11''.$$

იმავე მიმართულების ერთი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა კი გამოვიდა

$$\pm\frac{1}{2}\cdot11''\cdot\sqrt{2}\approx\pm8'';$$

3) სამკუთხედის ყოველი კუთხის ერთი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულით (17) მაგალითიდან არის

$$\pm8''\sqrt{2}\approx\pm11'';$$

4) იმავე კუთხის ოთხი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულით (18) მაგალითიდან არის

$$\pm\frac{11''}{\sqrt{4}}=\pm5'',5.$$

5) ოთხი სრული წრიული ილეთით სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულით (19) მაგალითიდან მივიღეთ

$$\pm 5'',5\sqrt{3} \approx \pm 10''.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იგივე პასუხს მივიღებთ თუ (11) ფორმულის მიხედვით მე-2 თანამიმდევრობის შემდეგ გამოვითვლიდით:

3) ამავე მიმართულების ოთხი სრული წრიული ილეთით განსაზღვრის საშუალო კვადრატულ შეცდომას

$$\pm \frac{1}{4} \cdot 8'' \cdot \sqrt{4} = \pm 4'';$$

4) ყოველი კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატულ შეცდომას

$$\pm 4''\sqrt{2} \approx \pm 6'';$$

5) სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის განსაზღვრის საშუალო კვადრატულ შეცდომას

$$\pm 6''\sqrt{3} \approx \pm 10''.$$

ამ მაგალითში გაერთიანებულია და თანამიმდევრობით გადაწყვეტილი მე-15, 16, 17, 18 და 19 მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 21. ტრიანგულაციის ქსელი შედგება ცხრა სამკუთხედისაგან. ყოველი სამკუთხედის ჭეშმარიტი შეცდომა (შეუკვრელობა) ω_i განსაზღვრულია და უდრის: $\omega_1 = -5''$; $\omega_2 = +3''$; $\omega_3 = +1''$; $\omega_4 = +4''$; $\omega_5 = -2''$; $\omega_6 = +1''$; $\omega_7 = -3''$; $\omega_8 = +2''$ და $\omega_9 = +1''$. განვსაზღვროთ ამ ქსელის ყოველი სამკუთხედის საშუალო კვადრატული შეცდომა, ანუ ყოველი სამკუთხედისათვის მისი კუთხეთა ჯამის $m_{[\alpha]}$ საშუალო კვადრატული შეცდომა.

(3. 3. 5. 1) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{[\alpha]} = \pm \sqrt{\frac{[\omega^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{70}{9}} \approx \pm 3''.$$

მაშასადამე, ტრიანგულაციის სამკუთხედთა კუთხეების ჯამი საშუალოდ გაზომილია $\pm 3''$-ის შეცდომით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 22. ტოლზუსად გაზომილია ტრიანგულაციის ქსელის n რაოდენობის სამკუთხედთა ყველა ცალკეული კუთხე. საჭიროა გავიგოთ თითოეული კუთხის m_α საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ყოველი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის ანუ ჭეშმარიტი შეცდომის (შეუკვრელობის) ოდენობა ω_1, $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$ ცნობილია ($\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ ფუნქციის ჭეშმარიტი შეცდომებია).

1) (19) მაგალითიდან ცნობილია, რომ სამკუთხედის ცალკეული კუთხის საშუალო შეცდომის (m_α-ს) საფუძველზე გამოითვლება კუთხეთა ჯამის ანუ ფუნქციის $m_{[\alpha]}$ შეცდომა (11) ფორმულით

$$m_{[\alpha]} = m_\alpha \sqrt{3}.$$

2) (21) მაგალითიდან იგივე შეცდომა გამოითვლება, ტრიანგულაციის სამ-

კუთხედთა (ფუნქციათა) ჭეშმარიტი შეცდომების (შეუკვრელობათა) საშუალებით, (3. 3. 5. 1) ფორმულით

$$m_{(\alpha)}=\pm\sqrt{\frac{[\omega^2]}{n}}.$$

3) ვინაიდან ჩვენთვის ცნობილია ყოველი სამკუთხედის (ფუნქციის) შეუკვრელობის ანუ მისი ჭეშმარიტი შეცდომების ოდენობა (პირობის თანახმად), მას გამოვიყენებთ ყოველი m_α კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ფორმულების მიხედვით მივიღებთ

$$m_\alpha\sqrt{3}=\pm\sqrt{\frac{[\omega^2]}{n}},$$

საიდანაც

$$m_\alpha=\pm\sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}}. \qquad (3.4.1.12)$$

როგორც ჩანს, ფუნქციის ჭეშმარიტი შეცდომების საშუალებით გამოითვლება არგუმენტების ანუ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების (კუთხეების) საშუალო კვადრატული შეცდომები. ასეთ ხერხს ხშირად მიმართავენ..

* შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (12) ფორმულა იტალიელ გეოდეზისტის გენერალ ფ ე რ რ ე რ ო ს მიერ იქნა წარდგენილი 1887 წელს ქ. ნიცაში (საფრანგეთი) „დედამიწის საერთაშორისო გაზომვის" სამეცნიერო კონფერენციაზე. კონფერენციამ სასურველად მიიჩნია, რომ ტრიანგულაციის ტექნიკური ანგარიშის შედგენისას სამკუთხედთა თითოეული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოთვლილიყო ამ სამკუთხედთა შეუკვრელობების ანუ ფერრეროს ფორმულით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 23. თექვსმეტგვერდიანი შეკრული პოლიგონის თითოეული შინაგანი კუთხე გაზომილია $m_\alpha=\pm15''$ საშუალო კვადრატული შეცდომით. გამოვითვალოთ პოლიგონის შინაგან კუთხეთა ჯამის m საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულით, მივიღებთ

$$m=m_\alpha\sqrt{n}=\pm15''\sqrt{16}=\pm60''=\pm1'.$$

$$k_1=k_2=k_3=\cdots=k_{16}=1;\ m_1=m_2=\cdots m_{16}=m_\alpha \text{ და } n=16.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.24. ერთი სრული წრიული ილეთით კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_\alpha=\pm15''$. რამდენი ილეთით უნდა გაიზომოს იგივე კუთხე, რომ განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის M საშუალო კვადრატული შეცდომა არ გადასცილდეს $\pm$ 5″-ს?

(3.3.7.3) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$n=\frac{m_\alpha^2}{M^2}=\frac{15^2}{5^2}=9.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.25. სამკუთხედის თითოეული კუთხის ერთი სრული წრიული ილეთით გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_\alpha=\pm15''$. რამდენი სრული წრიული ილეთით უნდა იქნეს გაზომილი ტრიანგულაციის სამკუთხედების თითოეული კუთხე, რომ ყოველი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის $m''_{(\alpha)}$ სა-

შუალო კვადრატული შეცდომა (სამკუთხედების საშუალო შეცდომა) არ აღემატებოდეს $\pm\ 10''$-ს.

1) ერთი სრული წრიული ილეთით სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულით იქნება

$$m^1_{[\alpha]}=m_\alpha\sqrt{3}=\pm15''\sqrt{3}=25,95\approx26''.$$

2) თუ ყოველი კუთხე გაიზომება n სრული წრიული ილეთით, მაშინ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის $m^n_{[\alpha]}$ საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$m^n_{[\alpha]}=\frac{1}{n}\cdot m^1_{[\alpha]}\cdot\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot m_\alpha\cdot\sqrt{3},$$

საიდანაც

$$n=\frac{3m^2_\alpha}{\left(m^n_{[\alpha]}\right)^2}=\frac{3\cdot15^2}{10^2}=6,75\approx7 \text{ ილეთს.}$$

პრაქტიკულად დამაკმაყოფილებელია 6 ილეთი.

როცა $m_\alpha=\pm10''$ და $m^n_{[\alpha]}=\pm\ 10''$, მაშინ კუთხეები უნდა გაიზომოს $\frac{3\cdot10^2}{10^2}=3$ ილეთით. ამ შედარებიდან ნათლად ჩანს, თუ რა მნიშვნელობა აქვს ინსტრუმენტის სიზუსტეს სამუშაოს შემცირების მხრივ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.26. B კუთხე წარმოადგენს ტოლზუსტად გაზომილ k კუთხეთა ჯამს. რას უდრის შემადგენელ კუთხეთა საშუალო კვადრატული შეცდომები, თუ ცნობილია B კუთხის m_B საშუალო კვადრატული შეცდომა?

პირობის თანახმად,

$$m_1=m_2=\cdots=m_k=m.$$

ასეთ შემთხვევაში m განისაზღვრება (11) ფორმულის მიხედვით

$$m=\frac{m_B}{\sqrt{k}}.$$

ვთქვათ

$$m_B=\pm20'',\quad k=4;$$

მაშინ

$$m=\pm\frac{20''}{\sqrt{4}}=\pm10''.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.27. ტრიანგულაციის ქსელის ყოველი სამკუთხედის თითოეული კუთხე გაზომილია n სრული წრიული ილეთით. თითოეული სრული წრიული ილეთის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის m. ობიექტური მიზეზების გამო საჭირო შეიქნა ერთ-ერთი (ვთქვათ, B) კუთხის გამოთვლა დამოუკიდებლად გაზომილი k რაოდენობის კუთხეების შეჯამებით. რამდენი ილეთით უნდა იქნეს გაზომილი თითოეული შემადგენელი კუთხე, რომ B კუთხე მივიღოთ ქსელის დანარჩენი კუთხეების სიზუსტით.

1) ტრიანგულაციის ქსელის თითოეული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა (11) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$\frac{1}{n}\cdot m\cdot m\sqrt{n}=\frac{m}{\sqrt{n}}\cdot$$

2) B კუთხის შემადგენელ კუთხეთა საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ მათ x რაოდენობის ილეთით განვსაზღვრავთ, იგივე ფორმულით იქნება[1]

$$\frac{1}{x}\cdot m\cdot\sqrt{x}=\frac{m}{\sqrt{x}}.$$

3) B კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე (11) ფორმულით ედრება

$$\frac{m}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{k}\,.$$

4) პირობის თანახმად B კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა უნდა უდრიდეს ტრიანგულაციის ქსელის სხვა დანარჩენი კუთხის საშუალო შეცდომას, ე. ი.

$$\frac{m}{\sqrt{x}}\sqrt{k}=\frac{m}{\sqrt{n}};$$

აქედან მივიღებთ

$$x=n\cdot k.$$

ვთქვათ, ტრიანგულაციის ქსელის ყოველი კუთხე უნდა იქნეს გაზომილი სამი სრული წრიული ილეთით. ერთ-ერთი კუთხე შედგენილია ორი კუთხის შეჯამებით. მაშინ ეს შემადგენელი კუთხეები უნდა გაიზომოს დამოუკიდებლად $x=n\cdot k=3\cdot 2=6$ ილეთით, რომ კუთხეების გაზომვის სიზუსტე იყოს ერთნაირი.

როგორც ვხედავთ საჭირო ილეთების რაოდენობა პროპორციულია შემადგენელ კუთხეთა რაოდენობისა.

მაგალითი 3.4.1.28. ხაზის უშუალოდ გაზომვისას, l სიგრძის საზომი ხელსაწყოს გასაზომ ხაზზე ყოველი გადაზომვის შეცდომის დამოუკიდებელი წყაროებია: დახრის კუთხის ან ბოლო წერტილების სიმაღლეთა სხვაობის არაზუსტად განსაზღვრა კომპარირების დროს გაჭიმვის არაშესაბამისი გაჭიმვა. ანათვლების შეცდომა, ტემპერატურის არაზუსტად გაზომვა და სამარკშეიდერო გაზომვების დროს სახურავის წერტილის არასწორად ჩამოგეგმილება ნიადაგზე ან პაზომზე. განვსაზღვროთ გასაზომ ხაზზე საზომით ყოველი გადაზომვის m_l საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ჩამოთვლილი წყაროების საშუალო კვადრატული შეცდომებია: m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

(6) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ

$$m_l=\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_5^2}$$

---

[1] ყველგან, სადაცაა გამოყენებული (11) ფორმულა, პირველი მამრავლი ერთის ჩათვლით ალგებრული გამოსახულების შესაკრებთა k კოეფიციენტების შესაბამისია $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{x}\right)$, ხოლო ფესვიანი მესამე მამრავლის ფესვქვეშა სიდიდე შესაკრებთა რაოდენობაა (n, x).

ცალკეული დაკვირვებებით განისაზღვრა: $m_1=\pm 4$ მმ; $m_2=\pm 2$ მმ; $m_3=$ $=\pm 5$ მმ; $m_4=\pm 5$ მმ; $m_5=\pm 10$ მმ.

მაშინ მივიღებთ

$$m_l=\pm\sqrt{4^2+2^2+5^2+5^2+10^2}\approx 13 \text{ მმ}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.29. ოცმეტრიანი ფოლადის ბაფთით გაზომილი ხაზის სიგრძე L გამოვიდა 626,60 მეტრი. გამოვითვალოთ ამ ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_L, თუ l ბაფთით გასაზომ ხაზზე ყოველი მოზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_l=\pm 1{,}3$ სმ.

ფუნქციის პირველადი სახე იქნება შემდეგი:

$$L=l+l+\cdots+l=nl.$$

(11) ფორმულით გვექნება

$$m_L=m_l\sqrt{n}=\pm 1{,}3\sqrt{\frac{626{,}60}{20}}\approx\pm 7 \text{ სმ}.$$

$k=1$; $m_1=m_2=\cdots=m_l$; n—ბაფთისგადადებათარიცხვია.

ბაფთა რომ ორმოცმეტრიანი ყოფილიყო და საშუალო კვადრატული შეცდომა იგივე, მაშინ ხაზი გაიზომებოდა $\pm$ 5,1 სმ საშუალო კვადრატული შეცდომით. მაშასადამე, ყოველთვის ჯობს საზომი ხელსაწყო ვიხმაროთ რაც შეიძლება გრძელი, მხოლოდ ყოველი მოზომვის შეცდომა უნდა იყოს ისეთივე, როგორიც აქვს მოკლე ბაფთას. იგივე მაგალითის გადასაწყვეტად შეიძლებოდა გამოგვეყენებია (5) ფორმულა (იხილეთ მე-7 მაგალითი).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.30. გამოვიყენოთ ნებისმიერი ხაზის გაზომვის m_L საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა. ვთქვათ, საზომი ხელსაწყოსა და ხაზის სიგრძე შესაბამისად არის l და L; მათი საშუალო კვადრატული შედომა m_l და m_L; გასაზომ ხაზზე საზომით მოზომვათა რიცხვი — n.

1) ხაზის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L=l+l+\cdots+l=nl. \tag{a}$$

2) (a) სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გამოიყენება (11) ფორმულა

$$m_L=m_l\cdot\sqrt{n}. \tag{b}$$

(11) ფორმულაში $k=1$ და $m_1=m_2=\cdots=m_l$.

(a) ტოლობიდან

$$n=\frac{L}{l}. \tag{c}$$

თუ შევიტანთ n-ის მნიშვნელობას (b) ტოლობაში, მივიღებთ

$$m_L=\frac{m_l}{\sqrt{l}}\cdot\sqrt{L}. \tag{d}$$

(d) ტოლობაში შევიტანოთ აღნიშვნა

$$\frac{m_l}{\sqrt{l}}=\mu, \tag{3.4.1.13}$$

მაშინ (d) ტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$m_L=\mu\sqrt{L}. \tag{3.4.1.14}$$

როგორც ვხედავთ, ხაზების გაზომვის შემთხვევითი შეცდომები იზრდება მათი სიგრძეებიდან კვადრატული ფესვის პროპორციულად.

თუ მივიღებთ, რომ L უდრის ერთს, მაშინ

$$m_L=\mu,$$

ე. ი. μ არის გამოყენებული საზომი ხელსაწყოსა და პირობებისათვის საზომ ერთეულზე მოსალოდნელი შემთხვევითი ხასიათის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა. μ-ს უწოდებენ შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტს. μ-ს ოდენობა დამოკიდებულია საზომი ხელსაწყოს სახეობაზე და სიგრძეზე, ნიადაგის ხასიათსა და თვისებაზე, გარეშე პირობებზე, გაზომვათა რაოდენობასა და გაზომვის მეთოდზე და მზომავის გამოცდილებაზე. μ-ს განსაზღვრავენ ექსპერიმენტულად და იღებენ როგორც კრიტერიუმს ხაზოვანი გაზომვების შეფასების დროს.

ჩვენში საზომ (ზომის) ძირითად ხაზოვან ერთეულად მიღებულია მეტრი, ხოლო საჭიროებისამებრ სხვადასხვა სიგრძის რიცხვითი ოდენობების გამოსასახად საზომ ერთეულებად მეტრის გარდა იყენებენ მეტრის წარმოებულ ერთეულებსაც (მმ, სმ, დმ, დკმ, ჰმ, კმ), ხოლო საზომი ხელსაწყო შეიძლება შეიცავდეს რამდენიმე საზომ ერთეულს ან პირიქით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.31. ხაზის საზომ ხელსაწყოდ გამოყენებულია ოცმეტრიანი ფოლადის ბაფთა, რომლითაც ყოველი მოზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_l = \pm 1,3$ სმ. განვსაზღვროთ შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი μ სხვადასხვა ოდენობის საზომი ერთეულებისათვის.

საზომ ერთეულად მიღებულია მეტრი, მაშინ (13) ფორმულაში საზომის l სიგრძე გამოისახება მეტრებში და მივიღებთ

$$\mu=\frac{m_l}{\sqrt{l}}=\pm\frac{1,3\ \text{სმ}}{\sqrt{20\ \text{მ}}}\approx\pm0,3\ \text{სმ ერთ მეტრზე.}$$

მიღებული შედეგი ნიშნავს, რომ გარკვეულ პირობებში, ოცმეტრიანი ბაფთით რომ ხაზი ერთჯერ გავზომოთ, უნდა მოველოდეთ ყოველ მეტრზე $\pm$ 0,3 სმ შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

m_l-იც რომ მეტრებში გამოგვესახა, მივიღებდით

$$\mu=\pm\frac{0.013\ \text{მ}}{\sqrt{20\ \text{მ}}}\approx\pm0,003.$$

მიღებული შედეგი ნიშნავს, რომ ერთ მეტრზე შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი ტოლია 0,003 მეტრის, ე. ი. როცა μ-ს განზომილება არ უწე-

რია, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ მისი განზომილება მიღებული საზომი ერთეულის სახელწოდების იქნება.

ვთქვათ, საზომ ერთეულად მიღებულია ჰექტომეტრი, მაშინ მივიღებთ

$$\mu = \pm \frac{1{,}3 \text{ სმ}}{\sqrt{0{,}20 \text{ ჰმ}}} \approx \pm 3 \text{ სმ ერთ ჰექტომეტრზე},$$

ანუ

$$\mu = \pm \frac{0{,}00013 \text{ ჰმ}}{\sqrt{0{,}20 \text{ ჰმ}}} \approx \pm 0{,}0003.$$

ერთ ჰექტომეტრზე μ ტოლია 0,0003 ჰექტომეტრის.

თუ საზომ ერთეულად მიღებულია კილომეტრი, მაშინ მივიღებთ

$$\mu = \pm \frac{1{,}3 \text{ სმ}}{\sqrt{0{,}020 \text{ კმ}}} \approx \pm 9 \text{ სმ ერთ კილომეტრზე},$$

ანუ

$$\mu = \pm \frac{0{,}000013 \text{ კმ}}{\sqrt{0{,}020 \text{ კმ}}} \approx \pm 0{,}00009.$$

ერთ კილომეტრზე μ ტოლია 0,00009 კილომეტრისა.

(14) ფორმულაში μ უნდა შევიტანოთ იმ საზომი ერთეულის შესაბამისი, რომელშიაც არის გამოსახული L ან, პირიქით, L უნდა გამოვსახოთ იმ საზომ ერთეულებში, რომლისთვისაც ცნობილია μ. მაგალითად, ვთქვათ, L ხაზში ი გ ი — ვ ე ბ ა ფ თ ა მოთავსდა ოთხმოცჯერ, მაშინ (14) ფორმულით მივიღებთ

თუ ზომის ერთეულად მიღებულია მეტრი,

$$m_L = \pm 0{,}003\sqrt{1600} \text{ მ} = \pm 0{,}12 \text{ მ} = \pm 12 \text{ სმ}.$$

თუ ზომის ერთეულად მიღებულია კილომეტრი, მაშინ

$$m_L = \pm 0{,}00003\sqrt{1{,}60} \text{ კმ} \approx \pm 0{,}00012 \text{ კმ} \approx \pm 12 \text{ სმ}.$$

ახლა ვთქვათ, გვაქვს μ გამოთვლილი ჰექტომეტრისათვის და უდრის 0,0003, მაშინ L-იც ჰექტომეტრებში უნდა მივიღოთ

$$m_L = \pm 0{,}0003\sqrt{16} \text{ ჰმ} = \pm 0{,}0012 \text{ ჰმ} = \pm 12 \text{ სმ}.$$

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ μ-ს განსაზღვრა შეიძლება იმ შემთხვევაშიაც, როცა ცნობილია ამა თუ იმ საზომი ხელსაწყოთი ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა და ხაზის სიგრძე, ამისათვის მივმართავთ (14) ფორმულას, საიდანაც მივიღებთ

$$\mu = \frac{m_L}{\sqrt{L}}. \qquad (3.4.1.14')$$

ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ m_L განსაზღვრულია (3. 3. 7. 2) ფორმულით, რადგანაც ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვად-

რატული შეცდომა და მნიშვნელი — გაზომვათა რაოდენობიდან კვადრატული ფესვი, ე. ი.

$$m_L = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.32. L ხაზი გაზომილია ტოლზუსტად n-ჯერ. ამ ხაზში l სიგრძის საზომი ხელსაწყო თავსდება n'-ჯერ. გამოვთვალოთ ყოველი ცალკეული (თითოჯერ) განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (m), ხაზის განაზომთა უალბათესი (L) სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_L, l საზომით ყოველი მოზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_l და გამოყენებული საზომი ხელსაწყოსა და პირობებისათვის ზომის ერთეულზე შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომა μ. საჭირო რიცხვითი მნიშვნელობები ამოვიღოთ (2. 3. 12. 2) მაგალითიდან.

1) (3. 3. 8. 2) ფორმულით

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{632}{5}} \approx \pm 11,24 \text{ მმ};$$

2) (3. 3. 7. 2) ფორმულით

$$m_L = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{11,24}{\sqrt{6}} \approx \pm 4,6 \text{ მმ};$$

3) (11) ფორმულით

$$m_l = \frac{m_L}{\sqrt{n'}} = \frac{m_L}{\sqrt{\frac{L}{l}}} = \pm\frac{4,6}{\sqrt{\frac{346.539}{20}}} \approx \pm 1,105 \text{ მმ}.$$

(11) ფორმულაში $k=1$; $m_1 = m_2 = \cdots = m_l$, საზომით მოზომვის რიცხვი არის n', აგრეთვე, საზომის სიგრძე მივიღეთ 20 მეტრის ტოლი.

4) (13) ან (14^1) ფორმულით შესაბამისად გვექნება

$$\mu = \frac{m_l}{\sqrt{l}} = \pm\frac{1,105}{\sqrt{20}} \approx \pm 0,248 \text{ მმ მეტრზე} \approx 0,000248,$$

$$\frac{m_L}{\sqrt{L}} = \pm\frac{4,6}{\sqrt{346,539}} \approx \pm 0,248 \text{ მმ მეტრზე} \approx 0,000248.$$

მიღებული μ შეესაბამება ხაზის n-ჯერ გაზომვას.

ერთჯერ გაზომვის შესაბამისი μ-ს გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ ხაზის ერთჯერ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა m. ამ შემთხვევაში (11) ფორმულით

$$m_l = \frac{m}{\sqrt{n'}} = \pm\frac{11,24}{\sqrt{\frac{L}{l}}} = \pm\frac{11,24}{\sqrt{\frac{346}{20}}} \approx \pm 2,7 \text{ მმ};$$

(13) ფორმულით

$$\mu_1 = \frac{m_l}{\sqrt{l}} = \pm\frac{2,7}{\sqrt{20}} \approx \pm 0,605 \text{ მმ მეტრზე} \approx 0,000605;$$

(14') ფორმულით

$$\mu_1=\frac{m}{\sqrt{L}}=\pm\frac{11,24}{\sqrt{346}}\approx\pm 0,605 \text{ მმ მეტრზე} \approx 0,000605.$$

ყოველთვის ანგარიში უნდა გავუწიოთ იმას, თუ ხაზის რამდენჯერ გაზომვის შედეგით არის μ გამოთვლილი. ჯობს μ გამოთვლილ იქნეს ერთჯერ გაზომვისათვის. ამავე მაგალითისათვის

$$\mu_{n-6}=\frac{\mu_1}{\sqrt{n}}=\pm\frac{0,000605}{\sqrt{6}}=\pm 0,000248.$$

(14) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ L-ზე, გვექნება

$$\frac{m_L}{L}=\frac{\mu}{\sqrt{L}}. \qquad (3.4.1.15)$$

(14) და (15) ფორმულებიდან დავასკვნით, რომ **ხაზების სიგრძის n-ჯერ გაზრდით შეცდომის აბსოლუტური ოდენობა იზრდება $\sqrt{n}$ და ფარდობითი შეცდომა მცირდება $\sqrt{n}$-ჯერ.**

ამ დასკვნას მაშინ აქვს გამართლება, როცა გაზომვებში მხოლოდ შემთხვევითი შეცდომებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.23. ტრაპეციის ფორმის ფიზიკური ზედაპირის ორივე ფუძე გაზომილია ტოლზუსტად $m=\pm 0,2$ მ შეცდომით; გამოვითვალოთ შუა ხაზის m_c საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ვიცით, რომ

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$

ვინაიდან

$$k_1=k_2=\frac{1}{2},\quad m_1=m_2=\pm 0,2 \text{ მ და } n=2,$$

(11) ფორმულით გვექნება

$$m_c=km\sqrt{n}=\frac{1}{2}\cdot 0,2 \text{ მ}\sqrt{2}=\pm 0,14 \text{ მ}.$$

E. ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ავიღოთ უწყვეტი ფუნქცია

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\cdots).$$

ასეთი სახის ფუნქციის შესახებ (3. 1. 7) პარაგრაფში დასაბუთებულია, რომ მცირე შეცდომების უგულებელყოფით უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების ჭეშმარიტ შეცდომათა და მათი ფუნქციის ჭეშმარიტ შეცდომას შორის დამოკიდებულება შეიძლება გამოისახოს ფორმულით

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial u}{\partial \alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial u}{\partial \beta}\Delta\beta\ [1]\cdots \qquad (3.4.1.16)$$

[1] მაგალითების გადაწყვეტის დროს (16) დამოკიდებულებაში კუთხეების გაზომვის შეცდომები უნდა გაიყოს რადიანზე, როცა ფუნქცია კუთხეს არ წარმოადგენს.

აქ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ გამოთვლილია უშუალოდ გაზომილ x, y, z, ... სიდიდეთა ჭეშმარიტი ან უალბათესი მნიშვნელობებისათვის და წარმოადგენენ განსაზღვრულ მუდმივებს. ასეთსავე დამოკიდებულებაშია სრული წრფივი ფუნქციის უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების ჭეშმარიტი შეცდომები, მათი ფუნქციის ჭეშმარიტ შეცდომასთან არის გამო (16) ტოლობის მიმართ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (8) ფორმულა და დავწეროთ

$$m_u=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2} \quad (3.4.1.17)$$

მაშასადამე, მრავალი ცვლადის **ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის კვადრატულ ფესვს ჯამიდან, რომლის ყოველი წევრი თანამიმდევრობით ფუნქციის უშუალოდ გაზომილი სიდიდით კერძო წარმოებულის კვადრატის და ამავე სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის ნამრავლია.**[1]

როგორც ზემოთ იყო თქმული, კერძო წარმოებულებში საჭიროა უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ჭეშმარიტი ან უალბათესი მნიშვნელობის ჩასმა. m_x, m_y, m_z, m_α, m_β, ... საშუალო კვადრატული შეცდომები განისაზღვრება (3. 3. 5. 1) ან (3. 3. 8. 2) ფორმულით. ხშირად საშუალო კვადრატული შეცდომების სიდიდეები გარკვეული არგუმენტებისათვის წინასწარ არის მოცემული.

(17) ფორმულა გამოსახავს ზოგადი სახის ფუნქციის შეცდომათა დაგროვების კანონს.

წრფივი ფუნქციებისათვის გამოყვანილი ყველა ფორმულა მხოლოდ და მხოლოდ კერძო შემთხვევებია (17) ფორმულისა. (17) ფორმულა ძირითადი გამოსავალი ფორმულაა გაზომვების შეცდომათა თეორიის ყველა შემდგომი გამოკვლევისათვის. როგორც ვიცით, ამ ფორმულაში არგუმენტები არის უშუალოდ გაზომილი ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეები, მაგრამ (17) ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა x, y, z, α, β, ... არგუმენტები არ არის უშუალოდ გაზომილი, მაგრამ ურთიერთდამოკიდებული სიდიდეებია. მაგალითად, ფუნქციაში

$$u=f\,(z,\ \alpha)$$

α არის უშუალოდ გაზომილი სიდიდე, ხოლო z—ურთიერთდამოუკიდებელი უშუალოდ გაზომილი x და y-ის ფუნქცია, ე. ი. $z=\varphi\,(x,\ y)$, აღვნიშნოთ საშუალო კვადრატული შეცდომები შესაბამისად m_u, m_α, m_x, m_y და m_z-ით; (17) ფორმულის თანახმად შეიძლება პირდაპირ დავწეროთ

$$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}\,, \qquad (3.4.1.18)$$

---

[1] ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში (7) ფორმულას ვიყენებთ.

სადაც იმავე (17) ფორმულით

$$m_z=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 m_y^2}$$

u ფუნქციას, როგორც რთულს, თუ გავადიფერენციალებთ x-ით და y-ით, მივიღებთ იმავე (18) გამოსახულებას; მართლაც,

$$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

$$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 m_y^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

$$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

როდესაც ფუნქცია u მოცემულია არაცხადი სახით

$$f(u,\ x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\cdots)=0,$$

მაშინ მისი სრული დიფერენციალი იქნება

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Delta z+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\Delta\alpha+\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\Delta\beta=0. \qquad (3.4.1.19)$$

ასეთი სახის წირული ფუნქციისათვის დაიწერება

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 m_u^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2,$$

საიდანაც განისაზღვრება ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_u=\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}m_x^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}m_y^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}m_z^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}m_\alpha^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}m_\beta^2+} \qquad (3.4.1.20)$$

ზოგადი სახის ფუნქციის კერძო წარმოებულების გამოთვლა სჯობია მოვახდინოთ თანდათანობით. მაგალითად: გამოვითვლით $u=f(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს, მხოლოდ x-ის, როგორც უშუალოდ გაზომილი დამოუკიდებელი სიდიდის მიხედვით, რომელსაც აქვს m_x საშუალო კვადრატული შეცდომა და დანარჩენებს ჩავთვლით უშეცდომოდ გაზომილად, ე. მივიღებთ, რომ $m_y=m_z=m_\alpha=m_\beta=0$, და განვსაზღვრავთ

$$\frac{\partial u}{\partial x}m_x=b;$$

ანალოგიურად, გარდა y-ისა, ყველა არგუმენტს ჩავთვლით უშეცდომოდ გაზომილად, ე. ი. მივიღებთ $m_x = m_z = m_\alpha = m_\beta = 0$ და განვსაზღვრავთ

$$\frac{\partial u}{\partial y} m_y.$$

ასე თანდათანობით განვსაზღვრავთ

$$\frac{\partial u}{\partial z} m_z, \; \frac{\partial u}{\partial \alpha} m_\alpha, \; \frac{\partial u}{\partial \beta} m_\beta, \ldots$$

დასასრულ, ყველა ცალკეულ გამონათვალს ავახარისხებთ კვადრატში და კვადრატების ჯამიდან ამოვიღებთ კვადრატულ ფესვს. მიღებული შედეგი იქნება ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელიც შეესაბამება (17) ფორმულას.

(17) ფორმულას გამოვიყენებთ იმ შემთხვევაში, როცა არგუმენტები ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეებია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს ფორმულა გამოუსადეგარია.

კერძო წარმოებულების მუდმივობა (17) ფორმულით იმას ნიშნავს, რომ კერძო წარმოებულები უცვლელი სიდიდეებია ან განიცდიან ცვლას მცირედ, უგულებელსაყოფ ფარგლებში (არიან უწყვეტნი) მაშინ, როცა მათში ჩავსვამთ არგუმენტების საწყისი (ჭეშმარიტი, უალბათესი) x, y, z, α, β მნიშვნელობების მაგიერ მათ შეცვლილ $(x+m_x)$, $(y+m_y)$, $(z+m_z)$, $(\alpha+m_\alpha)$-$(\beta+m_\beta)$ მნიშვნელობებს.

უშუალოდ გაზომილ სიდიდეებს (არგუმენტებს) შეიძლება ჰქონდეთ ისეთი ჭეშმარიტი (უალბათესი, საწყისი) მნიშვნელობანი, რომ მათი ოდენობების თუგინდ უმნიშვნელოდ შეცვლით, მნიშვნელოვნად იცვლებოდეს (წყვეტას განიცდიდეს) კერძო წარმოებულების ოდენობები. ამ შემთხვევაში (16) ტოლობა წრფივი არ იქნება და, რა თქმა უნდა, (17) ფორმულას მის მიმართ ვერ გამოვიყენებთ. ამიტომ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლისას ყოველთვის საჭიროა წინასწარ დავრწმუნდეთ ფუნქციის შემადგენელი წევრების კერძო წარმოებულების მუდმივობაში (მდგრადობაში). ფუნქციის უწყვეტობას, ანუ მდგრადობას ვამოწმებთ შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) წინასწარ დავნიშნავთ ფუნქციის საშუალო კვდარატული შეცდომის გამოთვლის სიზუსტეს პრაქტიკის მოთხოვნების შესაბამისად. სიზუსტის გამოთვლა ჩვეულებრივ მიღებულია 2—3 ნიშნად ციფრამდე;

2) დავწერთ მოცემული ფუნქციის სრულ დიფერენციალს უშუალოდ გაზომილი წევრების მიხედვით;

3) გამოვთვლით ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას პირველი მიახლოებით (ერთ-, ორ- ან სამნიშნადი ციფრებით);

4) მიღებულ გამონათვალს შევადარებთ წინასწარ დანიშნულ სიზუსტეს, რითაც დავადგენთ, თუ რამდენ ნიშნადი ციფრებით არის საჭირო პასუხი. ამ შედეგით განისაზღვრება ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლისათვის საჭირო კომპონენტები რამდენ ნიშნადი ციფრებით უნდა ყოფილიყო ფორმულაში ჩაწერილი;

5) გამოვარკვევთ, არის თუ არა კერძო წარმოებულები უცვლელი ჩვენს მიერ დადგენილი საჭირო ნიშნადი ციფრების ფარგლებში, როცა არგუმენტების ოდენობებს გავზრდით სათანადო საშუალო კვადრატული შეცდომებით;

6) თუ საჭირო იქნება, მეორედ გამოვთვლით ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას, რისთვისაც ამოვიწერთ არგუმენტების ყველა ოდენობას მეოთხე თანამიმდევრობაში განსაზღვრული ნიშნადი ციფრების რაოდენობით. თუ მესამე თანამიმდევრობაში კერძო წარმოებულების განსაზღვრის კომპონენტები არის ამოწერილი იმდენი ნიშნადი ციფრით, რასაც მოითხოვს მეოთხე თანამიმდევრობაში დადგენილი პასუხი, მაშინ საჭირო აღარ არის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის ხელმეორედ გამოთვლა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.33. მოცემულია $z=\sin x$, სადაც $x=45°$ და $m_x=\pm 5''$. საჭიროა განისაზღვროს m_z.

1) m_z-ის განსაზღვრა ვიგულისხმოთ $1\cdot 10^{-6}$ სიზუსტით;

2) $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''} = \cos x\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}$;

3) $m_z = \frac{\cos x\cdot m_x}{\rho} = \pm\frac{0,7\cdot 5}{2\cdot 10^5} = \pm 17,5\times 10^{-6}$,

აქ

$$\rho = 206265 \approx 2\cdot 10^5;$$

4) მიღებული გამონათვლის მოთხოვნილ სიზუსტესთან შედარებით, ვრწმუნდებით, რომ ორივესათვის ათის ხარისხის მაჩვენებელი ტოლია და ამავე დროს გამონათვლის თანამამრავლის ნიშნადი ციფრების რაოდენობა უდრის სამს (17,5), ე. ი. 3 ნიშნადი ციფრი საკმარისია. ამის გამო კერძო წარმოებულისა და ρ-ს ოდენობები m_z-ისგამოსათვლელ ფორმულაში საჭიროა ჩაიწეროს სამსამი ნიშნადი ციფრით;

5) შევამოწმოთ კერძო წარმოებულის მდგრადობა არგუმენტის შეცვლილი $(x+m_x)$ მნიშვნელობისათვის.

ამისათვის ფუნქციის შეცვლილ მნიშვნელობას ვადარებთ ძველ მნიშვნელობას.

$$\cos x = \cos 45° = 0,707107,$$

$$\cos(x+m_x) = \cos 45°5'' = 0,707089.$$

როგორც ჩანს, $\frac{\partial z}{\partial x}$ კერძო წარმოებული უცვლელი რჩება სამი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში, ე. ი. პირობა შესრულებულია;

6) ხელმეორედ გამოვთვალოთ m_z. ამისათვის მის გამოსათვლელ ფორმულაში ყველა კომპონენტი შევიტანოთ სამ-სამი ნიშნადი ციფრებით.

$$m_z = \pm\frac{0,707\cdot 5,00}{2,06\cdot 10^5} = \pm 17,1\cdot 10^{-6}.$$

პირველ გამონათვალთან შედარებით მეორე გამონათვალი უფრო ზუსტია, რადგანაც m_z გამოთვლილია საჭირო ანუ მეოთხე თანმიმდევრობაში დადგენილი სამ-სამი ნიშნადი ციფრებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.34. $z=\sin x$, სადაც $x=89°50'$, $m_x=\pm 5''$. საჭიროა განვსაზღვროთ m_z.

1. m_z — გამოთვლა დავისახოთ 1×10^{-7} სიზუსტით;

2. $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}=\cos x\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}$;

3. $m_z=\frac{\cos x m_x}{\rho}=\pm\frac{0{,}003\times 5}{2\times 10^5}\approx 0{,}8\times 10^{-7}$;

4. ვინაიდან m_z გამონათვალში 10^{-7} არის გამრავლებული ერთნიშნადციფრიან რიცხვზე (0,8), ამიტომ საკმარისია კერძო წარმოებულებისა და ρ-ს ოდენობები m_z-ის გამოსათვლელ ფორმულაში ჩაიწეროს თითო ნიშნადი ციფრით;

5. $\cos 89°50'=0{,}002909$,
$\cos 89°50'5''=0{,}002884$.

მიუხედავად იმისა, რომ $\cos x$ სწრაფად იცვლება არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის მისი ოდენობის უმნიშვნელო შეცვლით, მაინც ჩვენთვის მოთხოვნილი ნიშნადი ციფრის რაოდენობის ფარგლებში კერძო $\frac{\partial z}{\partial x}$ წარმოებული მდგრადია (ორივე შემთხვევაში თითო ნიშნადი ციფრი დარჩა უცვლელი). ე. ი. კერძო წარმოებულის მუდმივობის პირობა დაცულია და მეექვსე მოქმედების შესრულება, ანუ m_z-ის ხელახლა გამოთვლა, საჭირო არ არის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.35 მოცემულია $z=\cos x$, სადაც $x=89°50'$; $m_x=\pm 5''$; განისაზღვროს m_z.

1. m_z-ის განსაზღვრა საჭიროა $\pm 1\cdot 10^{-7}$ სიზუსტით;

2. $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}=-\sin x\,\frac{\Delta x''}{\rho''}$;

3. $m_z=\sin x\,\frac{m_x}{\rho}=\pm\frac{1\cdot 5}{2\cdot 10^5}=\pm 2{,}5\cdot 10^{-5}=\pm 250\cdot 10^{-7}$;

4. m_z-ის მიღებული მნიშვნელობიდან ჩანს, რომ $\sin x$ და ρ-ს ნაცვლად კერძო წარმოებულში საჭიროა იმდენი ნიშნადი ციფრის ამოწერა, რამდენიც არის 10^{-7}-ის წინა თანამამრავლში, ამ შემთხვევაში სამი. საერთოდ ჯობია ამოვიწეროთ ერთი ციფრით მეტი და m_z-ის გამოთვლაც ასეთივე სიზუსტით ვაწარმოოთ;

5. $\sin 89°50'=\pm 0{,}999996$;
$\sin 89°50'5''=\pm 0{,}999996$.

როგორც ჩანს, ოთხი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში კერძო წარმოებული რჩება უცვლელი, ე. ი. პირობა დაცულია;

6. $m_z=\pm\frac{0{,}9999\cdot 5}{2{,}063\cdot 10^5}=\pm\frac{1\cdot 5}{2{,}063\cdot 10^5}=\pm 242{,}4\cdot 10^{-7}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.36. მოცემულია $z=\operatorname{tg} x$, სადაც $x=89°50'$, $m_x=\pm 5''$; გამოვითვალოთ m_z.

1. m_z — უნდა განისაზღვროს $\pm 1\cdot 10^{-7}$ სიზუსტით;

2. $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\Delta x''}{\rho''}$;

3. $m_z = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{m_x}{\rho} = \pm \frac{5}{(0{,}003)^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = \pm \frac{5}{9 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5} =$
$= \pm 2{,}8 = \pm 28000000 \cdot 10^{-7};$

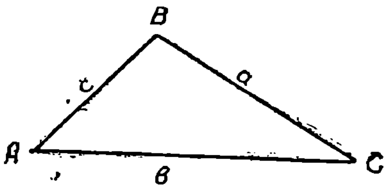
4. როგორც ჩანს, $\frac{1}{\cos^2 x}$ და ρ-ს მნიშვნელობები უნდა ამოიწეროს რვა-რვა ნიშნადი ციფრებით და გამოთვლაც უნდა შესრულდეს ასეთივე რაოდენობის ნიშნადი ციფრებით. ვიდრე ასეთ ჩასმას მოვახდენდეთ, წინასწარ გავსინჯოთ $\frac{\partial z}{\partial x}$-ის მდგრადობა;

5. $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\cos 89°50')^2} = 118147{,}81;$

$\frac{1}{(\cos 89°50'5'')^2} = 121067{,}18.$

მეორე ნიშნადი ციფრიდან იცვლება $\frac{\partial z}{\partial x}$-ის ოდენობა, როდესაც x შევცვალეთ $m_x = \pm 5''$-ით, ე. ი. კერძო წარმოებული მუდმივ სიდიდედ ვერ ჩაითვლება x-ის ამ მცირე ოდენობით შეცვლის ფარგლებში და ამიტომ მეექვსე მოქმედება საჭირო აღარ არის. ამრიგად, (17) ფორმულა არ გამოდგება მოცემული კომპონენტებისათვის. ანალოგიურ მდგომარეობას ექნება ადგილი $\operatorname{ctg} x$-ისათვის, როცა x ახლოა 0°-თან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 37. ბრტყელ ABC (ნახ.1) სამკუთხედში უშუალოდ ურთიერთდამოუკიდებლად გაზომილია გვერდი b და კუთხეები A და B, შესაბამისად, m_b, m_A და m_B საშუალო კვადრატული შეცდომებით. გამოვთვალოთ საჭირო სიზუსტით გვერდი a და მისი m_a საშუალო კვადრატული შეცდომა. ვიცით, რომ



ნახ. 3.4.1.1.

$$a = b\frac{\sin A}{\sin B}.$$

ამ ფუნქციის შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების შეცდომებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება (16) ფორმულის მიხედვით

$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial a}{\partial A}\frac{\Delta A''}{\rho''} + \frac{\partial a}{\partial B}\frac{\Delta B''}{\rho''};$$

ასეთი დამოკიდებულებისათვის, (17) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 \frac{m_A^2}{\rho''^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 \frac{m_B^2}{\rho''^2}}$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{\sin A}{\sin B}, \qquad \text{რადგან } \frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}, \qquad \text{დავწერთ } \frac{\partial a}{\partial b}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{\partial a}{\partial A}=\frac{b}{\sin B}\cdot\cos A, \qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}, \qquad \frac{\partial a}{\partial A}=a\cdot\operatorname{ctg} A;$$

$$\frac{\partial a}{\partial B}=-\frac{b\cdot\sin A\cdot\cos B}{\sin^2 B}, \qquad b\frac{\sin A}{\sin B}=a, \qquad \frac{\partial a}{\partial B}=-a\operatorname{ctg} B.$$

მიღებულ კერძო წარმოებულებს შევიტანთ m_a-ის გამოსათვლელ ფორმულაში, მივიღებთ

$$m_a=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 m_b^2+(a\operatorname{ctg} A)^2\cdot\left(\frac{m''_A}{\rho''}\right)^2+(a\operatorname{ctg} B)^2\cdot\left(\frac{m''_B}{\rho''}\right)^2} \qquad (3.4.1.21)$$

ავიღოთ ოდენობები

$$b=236{,}84 \text{ მ}; \qquad m_b=\pm 0{,}06 \text{ მ};$$
$$A=42°38',0; \qquad m_A=\pm 1',0;$$
$$B=103°24',5; \qquad m_B=\pm 0',5.$$

ამასთანავე $a=236{,}84\,\frac{0{,}67730}{0{,}97274}=164{,}91$ მ.

გამოვითვალოთ m_a — 0,001 მ სიზუსტით.

ჯერ განვსაზღვროთ პირველი მიახლოებით კერძო წარმოებულები, რისთვისაც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური ცხრილებიდან ამოვიწერთ ოდენობებს სამ-სამი ნიშნადი ციფრით. ასევე სხვა თანამამრავლებს ჩავსვამთ სამ-სამი ნიშნადი ციფრების ფარგლებში და გამოვითვლით m_a-ს.

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{a}{b}=\frac{165}{237}=0{,}696$$

ან

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 42°38'}{\sin 103°24',5}=\frac{0{,}677}{0{,}973}=0{,}696.$$

მიღებული შედეგების ტოლობა მიუთითებს იმაზე, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა ამოწერა ამ შემთხვევაში სამ-სამი ნიშნადი ციფრით საკმარისია.

$$\frac{\partial a}{\partial A}=a\operatorname{ctg} A=165\cdot\operatorname{ctg} 42°38'=165\cdot 1{,}09=180 \text{ მ};$$

$$\frac{\partial a}{\partial B}=-a\operatorname{ctg} B=-165\cdot\operatorname{ctg} 103°24',5=+165\cdot 0{,}238=+39{,}3 \text{ მ};$$

$$\frac{m'_A}{\rho'}=\pm\frac{1'}{3438'}=\pm 0{,}000291=\pm 290\cdot 10^{-6},$$

$$\frac{m_B}{\rho}=\pm\frac{0',5}{3438'}=\pm 145\cdot 10^{-6}.$$

(21) ფორმულაში შევიტანოთ წევრები სამ-სამი ნიშნადი ციფრით, გვექნება

$$m_a=\pm\sqrt{(0.696)^2\cdot(0.0600)^2+(180)^2\cdot(290\cdot10^{-6})^2+(39.3)^2\cdot(145\cdot10^{-6})^2}=$$
$$=\pm\sqrt{(10^{-6}\cdot696\cdot60.0)^2+(10^{-6}\cdot180\cdot290)^2+(10^{-6}\cdot39{,}3\cdot145)^2}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{(696\cdot60.0)^2+(180\cdot290)^2+(39.3\cdot145)^2}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{(418\cdot10^2)^2+(522\cdot10^2)^2+(570\cdot10)^2}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{175\cdot10^7+272\cdot10^7+325\cdot10^5}=\pm10^{-6}\sqrt{4500\cdot10^6}=$$
$$=\pm10^{-6}\cdot670\cdot10^2=\pm0.0670 \text{ მ.}$$

მიღებული გამონათვლის სიზუსტე შეესაბამება წინასწარ მოთხოვნილ სიზუსტეს: ამავე დროს პასუხი სამ ნიშნადციფრიანი რიცხვია, რაც იმას ნიშნავს, რომ კერძო წარმოებულები შეიძლება გამოთვლილ იქნეს სამნიშნაციფრებიანი რიცხვებით და თვით m-ის გამოსათვლელ ფორმულაშიც შეიძლება შეტანილ იქნეს ყველა ელემენტი ამავე რაოდენობის ნიშნადი ციფრებისაგან შემდგარი რიცხვებით (საერთოდ, ჯობია ერთი ნიშნადი ციფრის ზედმეტად აღება). ეს დებულება მართებულია იმ შემთხვევაში, თუ კერძო წარმოებულები უცვლელია სამ-სამი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში მაშინ, როცა უშუალოდ გაზომილ b, A, B და გამონათვალ a ოდენობის კერძო წარმოებულში შევიტანთ შესაბამისი შეცდომებით შეცვლილებს. შევამოწმოთ კერძო წარმოებულთა მდგრადობა.

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{a}{b}=\frac{165}{237}=\frac{165\pm0.067}{237\pm0{,}06}=0{,}696;$$

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 42°38'}{\sin 103°24',5}=\frac{\sin 42°38'\pm1'}{\sin 103°24',5\pm0',5}=\frac{0{,}677}{0{,}972}=0{,}696;$$

$$\frac{\partial a}{\partial A}=a\operatorname{ctg}A=165\cdot\operatorname{ctg}42°38'=(165\pm0{,}0670)\cdot\operatorname{ctg}42°38'\pm1'=$$
$$=(165\pm0{,}0670)\cdot1{,}09=180 \text{ მ;}$$

$$\frac{\partial a}{\partial B}=-a\operatorname{ctg}B=-165\cdot\operatorname{ctg}103°24',5=-(165\pm0{,}067)\cdot\operatorname{ctg}103°24',5\pm0',5=$$
$$=-(165\pm0.0670)\cdot0{,}239=-39\ 5 \text{ მ.}$$

როგორც ვხედავთ, კერძო წარმოებულთა მნიშვნელობები მდგრადია. m_a-ის გამონათვლის პასუხიდან ჩანს, რომ მოთხოვნილი სიზუსტის დასაკმაყოფილებლად საკმარისი იქნებოდა თავიდანვე ორ-ორი ნიშნადი ციფრის კომპონენტების ჩასმა. მართლაც თუ შევიტანთ (21) ფორმულაში კომპონენტების ორ-ორნიშნად ციფრებს, მივიღებთ

$$m_a=\pm\sqrt{(0{,}70)^2\cdot(0{,}060)^2+(18\cdot10)^2\cdot(29\cdot10\cdot10^{-6})^2+(39)^2\cdot(14\cdot10\cdot10^{-6})^2}=$$
$$=\pm\sqrt{(10^{-6}\cdot70\cdot10\cdot60)^2+(10^{-6}\cdot18\cdot29\cdot10^2)^2+(10^{-6}\cdot39\cdot14\cdot10)^2}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{(42\cdot10^3)^2+(52\cdot10^3)^2+(55\cdot10^3)^2}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{18\cdot10^8+27\cdot10^8+30\cdot10^8}=$$
$$=\pm10^{-6}\sqrt{45\cdot10^8}=\pm10^{-6}\cdot6{,}7\cdot10^4=\pm0{,}067 \text{ მ.}$$

$$m_a=\pm0{,}067 \text{ მ,}$$

როგორც ვხედავთ, m_u-ს გამოთვლისას კომპონენტების ამოწერა საკმარისი იყო ორ-ორი ნიშნადი ციფრებით. აღნიშნულით სრულიად მართლდება (3. 3. 6. 1) ფორმულიდან დასკვნა, და კერძოდ, პროფ. ა. ს. ჩებოტარევის [31] აზრი იმის შესახებ, რომ პრაქტიკულად საკმარისია საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლისას კომპონენტების ორ-ჰამ ნიშნად ციფრამდე დამრგვალება. ერთი ზედმეტი ციფრის შენარჩუნებით· ასე რომ, ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლისას კერძო წარმოებულები და ფორმულის სხვა ელემენტები უნდა შევიტანოთ 2—3 ნიშნადი ციფრებით· აგრეთვე კერძო წარმოებულების გამოთვლისას უნდა ვამოწმებდეთ მდგრადობას იმავე 2—3 ნიშნადი ციფრების ფარგლებში·

როგორც ვიცით, კერძო წარმოებულების შემოწმების შემდეგ m_u-ს განმეორებით გამოთვლა მხოლოდ მაშინ არის საჭირო, როცა კომპონენტებისათვის პირველად ამოწერილი ნიშნადი ციფრების რაოდენობა არ შეესაბამება მოთხოვნილ ნიშნადციფრთა რაოდენობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.38 გამოვითვალოთ ჭოგრის G გამადიდებლობა და მისი m_G საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ F ობიექტივისა და f ოკულარის მთავარი საფოკუსო მანძილები არის უშუალოდ გაზომილი შესაბამისად m_F და m_f საშუალო კვადრატული შეცდომებით·

გეოდეზიიდან ცნობილია, რომ

$$G=\frac{F}{f}.$$

ამ ფუნქციის შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების შეცდომებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება (16) ფორმულით

$$\Delta G=\frac{\partial G}{\partial F}\Delta F+\frac{\partial G}{\partial f}\Delta f.$$

(17) ფორმულის მიხედვით საშუალო კვადრატული შეცდომა გვექნება

$$m_G=\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial F}\right)^2\cdot m_F^2+\left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)^2\cdot m_f^2};$$

რადგან

$$\frac{\partial G}{\partial F}=\frac{1}{f} \quad \text{და} \quad \frac{\partial G}{\partial f}=-\frac{F}{f^2},$$

ამიტომ

$$m_G=\sqrt{\left(\frac{1}{f}\right)^2 m_F^2+\left(\frac{F}{f^2}\right)^2 m_f^2}$$

ამოვხსნათ მაგალითი შემდეგი რიცხვითი მონაცემების მიხედვით:

$$F=198 \text{ მმ}; \qquad m_F=\pm 2 \text{ მმ};$$

$$f=8 \text{ მმ}; \qquad m_f=\pm 0{,}05 \text{ მმ};$$

$$G=\frac{198}{8}=24{,}75^{\times}.$$

განვსაზღვროთ m_G 0,01 სიზუსტით.

კერძო წარმოებულები გამოვითვალოთ სამ-სამი ნიშნადი ციფრით.

$$\frac{\partial G}{\partial F} = \frac{1}{f} = \frac{1}{8,00} = 0,125;$$

$$\frac{\partial G}{\partial f} = -\frac{F}{f^2} = -\frac{198}{64,0} = -3,09;$$

$$m_G = \pm\sqrt{(0,125)^2\times(2,00)^2+(3.09)^2\times(0,0500)^2} =$$

$$= \pm\sqrt{(10^{-4}\times125\times10\times2,00)^2+(20^{-4}\times309\times5,00)^2};$$

$$m_G = \pm10^{-4}\sqrt{625\times10^4+239\times10^4} = \pm10^{-4}\sqrt{864\times10^4};$$

$$m_G = \pm10^{-4}\cdot2940 = \pm0,294.$$

მიღებული გამონათვალის დანიშნულ სიზუსტესთან შედარებით დავასკვნით, რომ ჩვენს მიერ კერძო წარმოებულებში ჩასმული მნიშვნელობანი სამ-სამ ნიშნად ციფრებიანი რიცხვების სახით სწორია. მხოლოდ ზემოთ მიღებული პასუხი მართებული იქნება იმ შემთხვევაში, თუ დაცული იქნება კერძო წარმოებულთა მდგრადობა სამ-სამი ნიშნადი ციფრების ფარგლებში.

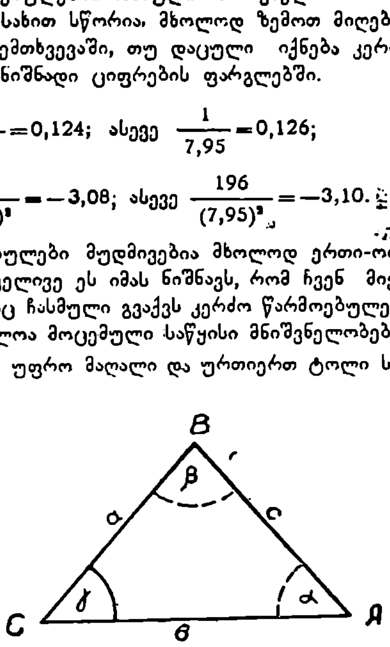
$$\frac{\partial G}{\partial F} = \frac{1}{8,00\pm0,05} = \frac{1}{8,05} = 0,124; \quad \text{ასევე} \quad \frac{1}{7,95} = 0,126;$$

$$\frac{\partial G}{\partial f} = -\frac{198\pm2}{(8\pm0,05)^2} = -\frac{200}{(8,05)^2} = -3,08; \quad \text{ასევე} \quad \frac{196}{(7,95)^2} = -3,10.$$

როგორც ჩანს, კერძო წარმოებულები მუდმივებია მხოლოდ ერთი-ორი ნიშნადი ციფრების ფარგლებში. ყოველივე ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ მიერ გამოყენებული ფორმულა, რომელშიაც ჩასმული გვაქვს კერძო წარმოებულები სამ-სამი ნიშნადი ციფრით, უსაფუძვლოა მოცემული საწყისი მნიშვნელობებისათვის (საჭირო იყო F-ისა და f-ის უფრო მაღალი და ურთიერთ ტოლი სიზუსტით გაზომვა). ასეთ შემთხვევაში იწერება

$$m_G = \pm0,2_9.$$

ე. ი. გამონათვალში სწორია მხოლოდ ერთი ნიშნადი ციფრი (2).



ნახ. 3.4.1.2.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.39. ABC სამკუთხედში (ნახ. 2) უშუალოდ გაზომილია γ კუთხე, m_γ საშუალო კვადრატული შეცდომით და ყველა გვერდი შესაბამისად m_a, m_b და m_c საშუალო კვადრატული შეცდომით. განისაზღვროს α და β კუთხეები და მათი შესაბამისი m_α და m_β საშუალო კვადრატული შეცდომა საჭირო სიზუსტით. ასეთ მაგალითთან გვაქვს საქმე, როდესაც საჭიროა დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე არსებულ გეოდეზიურ საფუძველს დავუკავშიროთ წიაღში არსებული გეოდეზიური საფუძველი. სამკუთხედის ფორმის მიხედვით მაგალითი გადაწყდება სინუსების ფორმულის ან გვერდების ფორმულის გამოყენებით.

თუ როდის რომელი ფორმულის გამოყენება ჯობია, ამას მაშინ შევეხებით, როდესაც საგანგებოდ განვიხილავთ დამაკავშირებელი სამკუთხედების საკითხს[1].

ახლა გამოვიყვანოთ ორივე შემთხვევისათვის საერთო m_α და m_β საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი ფორმულები.

ვთქვათ, გამოყენებულია სინუსების ფორმულები

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\cdot\sin\gamma,$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\cdot\sin\gamma.$$

პირველად გამოვითვალოთ m_α.

ასეთი სახის ფუნქციის შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების შეცდომებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება (19) ფორმულით

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}=\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\,\frac{\Delta\gamma''}{\rho''};$$

აქედან

$$\Delta\alpha''=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\cdot\Delta a\rho''+\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\cdot\Delta c\rho''+\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\,\Delta\gamma''.$$

საშუალო კვადრატული შეცდომა (20) ფორმულით იქნება

$$m_\alpha''=\sqrt{\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\right)^2 m_a^2\cdot\rho^2+\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\right)^2 m_c^2\cdot\rho^2+\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\right)^2 m_\gamma^2}$$

გამოვითვალოთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\frac{\partial\sin\alpha}{\partial\alpha}=\cos\alpha$$

$\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$; რადგან $\dfrac{\sin\gamma}{c}=\dfrac{\sin\alpha}{a}$, დავწეროთ $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1}{a}\operatorname{tg}\alpha;$

$\dfrac{\partial f}{\partial c}=-\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{c^2}$; " $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}=-\dfrac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot c\cdot\cos\alpha}=-\dfrac{1}{c}\operatorname{tg}\alpha;$

$\dfrac{\partial f}{\partial\gamma}=\dfrac{a\cdot\cos\gamma}{c}$; $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}=\dfrac{a\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\alpha}.$

[1] იხილეთ 3.7.3 პარაგრაფი.

გამოთვლილ კერძო წარმოებულების მნიშვნელობებს შევიტანთ m_a-ს გამოსათვლელ ფორმულაში.

$$m_\alpha = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\right)\rho^2+\frac{a^2\cdot\cos^2\gamma}{c^2\cdot\cos^2\alpha}\,m_\gamma^2} \qquad (3.4.1.22)$$

ანალოგიური თანამიმდევრობით მივიღებთ

$$m_\beta = \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta\left(\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\right)\rho^2+\frac{b^2\cdot\cos^2\gamma}{c^2\cdot\cos^2\beta}\,m_\gamma^2} \qquad (3.4.1.23)$$

როდესაც $m_a=m_b=m_c=m_s$, მაშინ გვექნება

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot m_s^2\cdot\rho^2+\frac{a^2\cdot\cos^2\gamma}{c^2\cdot\cos^2\alpha}\cdot m_\gamma^2} \\ m_\beta &= \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot m_s^2\cdot\rho^2+\frac{b^2\cdot\cos^2\gamma}{c^2\cdot\cos^2\beta}\cdot m_\gamma^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.1.24)$$

ვთქვათ, რიცხვითი მნიშვნელობებია

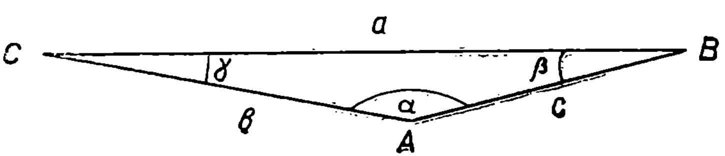
$a=6{,}5631$ მ$\pm 0{,}0007$ მ;

$b=4{,}5040$ მ$\pm 0{,}0005$ მ;

$c=2{,}0626$ მ$\pm 0{,}0004$ მ;

$\gamma=1^\circ\ 15'\ 55''\pm 11''$.

გამოვითვალოთ α და β კუთხე და მათი m_α და m_β საშუალო კვადრატული შეცდომა $\pm$ 1" სიზუსტით (ნახ. 3.)



ნახ. 3.4.1.3.

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\cdot\sin\gamma=\frac{6{,}5631}{2{,}0626}\cdot 0{,}022082=0{,}070264,$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\cdot\sin\gamma=\frac{4{,}5040}{2{,}0626}\cdot 0{,}022082=0{,}048215,$$

$$\alpha=180^\circ-4^\circ 01'45''=175^\circ 58'16'',$$

$$\beta=2^\circ 45'50''.$$

(22) ფორმულისათვის საჭირო კერძო წარმოებულების და სხვა წევრების მნიშვნელობები სამნიშნადი რიცხვებისათვის გვექნება

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{1}{a}\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{6,56}\operatorname{tg}4°01'14''=-\frac{1}{6,56}0,0704=-0,0107\frac{1}{\text{მ}};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=-\frac{1}{c}\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2,06}(-0,0704)=0,0342\frac{1}{\text{მ}};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{a\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\alpha}=\frac{6,56\cdot 1,00}{2,06\cdot 0,998}=3,18;$$

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)^2 m_a^2\cdot\rho^2=(-0,0107)^2\cdot(7,00\cdot 10^{-4})^2\cdot(20,6\cdot 10^4)^2=2'',2657;$$

$$\left(\frac{1}{c}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)^2\cdot m_c^2\cdot\rho^2=(0,0342)^2\cdot(4,00\cdot 10^{-4})^2\cdot(20,6\cdot 10^4)^2=0'',0739;$$

$$\left(\frac{a\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\alpha}\right)^2\cdot m_\gamma^2=(3,18)^2\cdot(11)^2=1155'';$$

ხოლო (22) ფორმულით

$$m_\alpha=\pm\sqrt{2'',2657+0'',0739+1155''}=\pm 34'';$$

ე. ი.

$$\alpha=175°58'16''\pm 34'';$$

ყველა მოქმედება გავიმეოროთ (23) ფორმულისათვის

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}}=\frac{1}{b}\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4,50}\operatorname{tg}2°45'50''=\frac{1}{4,50}\cdot 0,0483=0,0107\frac{1}{\text{მ}};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}}=-\frac{1}{c}\cdot\operatorname{tg}\beta=-\frac{1}{2,06}\cdot 0,0482=-0,0234\frac{1}{\text{მ}};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}}=\frac{b\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\beta}=\frac{4,50\cdot 1,00}{2,06\cdot 1,00}=2,19;$$

$$\frac{1}{b^2}\cdot\operatorname{tg}^2\beta\cdot m_b^2\cdot\rho^2=(0,0107)^2\cdot(5,00\cdot 10^{-4})^2\cdot(20,6\cdot 10^4)^2=1'',1558;$$

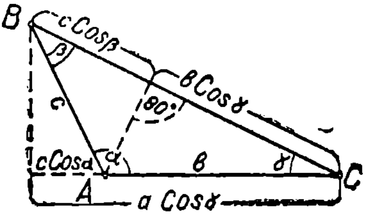
$$\frac{1}{c^2}\cdot tg^2\beta\cdot m_c^2\cdot\rho^2=(0{,}0234)^2\cdot(4{,}00\cdot10^{-4})^2\cdot(20{,}6\cdot10^4)^2=0'',0358;$$

$$\left(\frac{b\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\beta}\right)^2 m_\gamma^2=(2{,}19)^2\cdot(11)^2=580'';$$

$$m_\beta=\pm\sqrt{1'',1558+0'',0358+580''}=\pm\sqrt{581{,}1911}=\pm24'',1;$$

ე. ი.

$$\beta=2°45'49''\pm24''.$$



ნახ. 3.4.1.4.

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში საკმარისია სამ-სამი ნიშნით ციფრების ამოწერა. აგრეთვე, თუ გავსინჯავთ, დავრწმუნდებით, რომ არგუმენტების შეცდომებით შეცვლისას კერძო წარმოებულები უცვლელი რჩება სამი ნიშნადი ციფრის ფარგლებში.

მაგალითი 3.4.1.40. ABC სამკუთხედში (ნახ. 4) უშუალოდ გაზომილია γ კუთხე, a და b გვერდი შესაბამისად m_γ, m_a და m_b საშუალო კვადრატული შეცდომით; განისაზღვროს c გვერდი და მისი m_c საშუალო კვადრატული შეცდომა საჭირო სიზუსტით.

ვიყენებთ კოსინუსების ფორმულას

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \qquad (3.4.1.25)$$

(25) სახის ფუნქციისათვის (19) ფორმულის თანახმად, დავწეროთ

$$\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c=\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\Delta\gamma''}{\rho''},$$

საიდანაც

$$\Delta c=\frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\Delta a+\frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\Delta b+\frac{\frac{\partial f}{\partial\gamma}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\cdot\frac{\Delta\gamma''}{\rho''}, \qquad (3.4.1.26)$$

ხოლო (20) ფორმულის მიხედვით დაიწერება

$$m_c=\sqrt{\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial\gamma}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right)^2\cdot\left(\frac{m''\gamma}{\rho''}\right)^2} \qquad (3.4.1.27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}=2c;$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=(2a-2b\cos\gamma) \quad \text{და} \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial c}}=\frac{2(a-b\cos\gamma)}{2c}=\frac{(a-b\cos\gamma)}{c};$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=(2b-2a\cos\gamma) \quad \text{და} \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial f}{\partial c}}=\frac{2(b-a\cos\gamma)}{2c}=\frac{(b-a\cos\gamma)}{c};$$

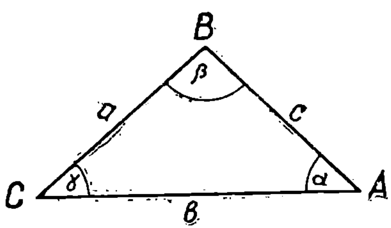
$$\frac{\partial f}{\partial\gamma}=2ab\cdot\sin\gamma \qquad \text{და} \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial\gamma}}{\frac{\partial f}{\partial c}}=\frac{2ab\cdot\sin\gamma}{2c}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{c}.$$

მიღებული კერძო წარმოებულების გამოსახულებანი შეგვიძლია გავამარტივოთ; ამისათვის მე-4 ნახაზიდან უშუალოდ დავწეროთ

$$\left.\begin{aligned} a-b\cdot\cos\gamma&=c\cdot\cos\beta\\ b-a\cdot\cos\gamma&=c\cdot\cos\alpha\\ b\cdot\sin\gamma&=c\cdot\sin\beta \end{aligned}\right\}, \tag{3.4.1.28}$$

ხოლო (27) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$m_c=\sqrt{\cos^2\beta\cdot m_a^2+\cos^2\alpha\cdot m_b^2+a^2\sin^2\beta\cdot\frac{m_\gamma^2}{\rho^2}} \tag{3.4.1.29}$$



ნახ. 3.4.1.5.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.41. ვთქვათ 39 მაგალითში α და β კუთხეების განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ გვერდების ფორმულები (ნახ. 5)

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ &\text{და}\\ &\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \end{aligned}\right\}, \tag{3.4.1.30}$$

სადაც

$$p=\frac{(a+b+c)}{2} \tag{3.4.1.31}$$

გამოვითვალოთ m_α და m_β საჭირო სიზუსტით.

წინანდებურად დაიწერება

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta\alpha=\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c; \tag{3.4.1.32}$$

$$\Delta\alpha=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\Delta a+\frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\Delta b+\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\Delta c. \tag{3.4,1.33}$$

$$m_\alpha=\sqrt{\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\right)^2 m_c^2}. \tag{3.4.1.34}$$

ვიდრე კერძო წარმოებულების გამოთვლას შევუდგებოდეთ, მოცემული ფუნქციის წევრები გამოვსახოთ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეებით

$$p=\frac{a+c+b}{2}; \qquad (p-c)=\frac{a+b-c}{2};$$

$$(p-b)=\frac{a+c-b}{2}; \qquad (p-a)=\frac{c+b-a}{2};$$

$$(p-b)(p-c)=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}; \qquad p(p-a)=\frac{c^2+b^2-a^2+2bc}{4}.$$

შევიტანოთ (30) ფორმულაში მიღებული გამოსახულებანი, გვექნება

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{d^2-b^2-c^2+2bc}{c^2+b^2-a^2+2bc}.$$

ავიღოთ ყველა ელემენტით კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=2\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\,\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2a(c^2+b^2-a^2+2bc)+2a(a^2-b^2-c^2+2bc)}{(c^2+b^2-a^2+2bc)^2}=$$

$$=\frac{8abc}{4^2p^2(p-a)^2}=\frac{abc}{2p^2(p-a)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{(2c-2b)(c^2+b^2-a^2+2bc)-(2c+2b)(a^2-b^2-c^2+2bc)}{(c^2+b^2-a^2+2bc)^2}=$$

$$=\frac{4c(c^2-a^2-b^2)}{4^2p^2(p-a)^2}=\frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4p^2(p-a)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}=\frac{(2b-2c)(c^2+b^2-a^2+2bc)-(2b+2c)(a^2-b^2-c^2+2bc)}{(c^2+b^2-a^2+2bc)^2}=$$

$$=\frac{4b(b^2-a^2-c^2)}{4^2p^2(p-a)^2}=\frac{b(b^2-a^2-c^2)}{4p^2(p-a)^2}$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{p(p-a)}{bc},$$

სამკუთხედის ფართობი

$$F=\pm\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

კოსინუსების ფორმულიდან

$$c^2-a^2-b^2=-2ab\cos\gamma$$

და

$$b^2-a^2-c^2=-2ac\cos\beta.$$

გამოვიყენოთ მიღებული მნიშვნელობანი კერძო წარმოებულთა ფარდობების გამოსათვლელად

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{abc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2p^2(p-a)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot p(p-a)}{2bc\cdot p^2(p-a)^2\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}=\frac{a}{2F};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{c(c^2-a^2-b^2)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\cdot p^2(p-a)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{-2abc\cdot\cos\gamma\cdot p(p-a)}{4bc\cdot p^2(p-a)^2\cdot\sqrt{\frac{(p-b)-(p-c)}{p(p-a)}}}=-\frac{a\cos\gamma}{2F};$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{b(b^2-a^2-c^2)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4p^2(p-a)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=-\frac{a\cdot\cos\beta}{2F}.$$

მიღებული ფარდობები ავიყვანოთ კვადრატში და ჩავსვათ (34) ფორმულაში, მხოლოდ სათანადოდ გადავამრავლოთ ρ-ზე, მივიღებთ

$$m_\alpha=\frac{a\cdot\rho''}{2F}\sqrt{m_a^2+\cos^2\gamma\cdot m_b^2+\cos^2\beta\cdot m_c^2}; \qquad (3.4.1.35)$$

ანალოგიურად მიიღება

$$m_\beta=\frac{b\cdot\rho''}{2F}\sqrt{m_b^2+\cos^2\gamma\cdot m_a^2+\cos^2\alpha\cdot m_c^2} \qquad (3.4.1.36)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $m_a=m_b=m_c=m_s$,

მაშინ

$$m_\alpha=\frac{m_s\cdot a\cdot\rho''}{2F}\sqrt{1+\cos^2\gamma+\cos^2\beta} \qquad (3.4.1.37)$$

და

$$m_\beta=\frac{m_s\cdot b\cdot\rho''}{2F}\sqrt{2+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}. \qquad (3.4.1.38)$$

ხშირად საჭირო ხდება სამკუთხედების შეუკვრელობათა შემოწმება სინუ-

სების ფორმულებით გამოთვლილი α და β კუთხეების და უშუალოდ გაზომილი γ კუთხის საშუალებით.

ვთქვათ, სამკუთხედებში შეუკვრელობა არის ω და საჭიროა მისი საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა.

ვინაიდან α და β გამოთვლილია სინუსების ფორმულებით.

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\cdot\sin\gamma, \tag{3.4.1.39}$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\cdot\sin\gamma, \tag{3.4.1.40}$$

ხოლო γ უშუალოდაა გაზომილი, კუთხეთა ჯამის შეცდომის

$$\omega=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ \tag{1.4.1.41}$$

ანუ ფუნქციის ცხადად გამოსახული პირველადი სახე იქნება

$$\omega=\arcsin\left(\frac{a}{c}\cdot\sin\gamma\right)+\arcsin\left(\frac{b}{c}\cdot\sin\gamma\right)+\gamma-180^\circ. \tag{3.4.1.42}$$

ასეთი სახის ფუნქციის შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება დაიწერება ასე:

$$\Delta\omega=\frac{\partial\omega}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial\omega}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial\omega}{\partial c}\Delta c+\frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma''.$$

მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m''_\omega=\sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial a}\right)^2 m_a^2\rho^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial b}\right)^2 m_b^2\rho^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial c}\right)^2 m_c^2\rho^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\right)^2 m^2\gamma}.$$

თანამიმდევრობით გამოვითვალოთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

$$\frac{\partial\omega}{\partial a}=\frac{\dfrac{\sin\gamma}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}\sin^2\gamma}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{a}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial b}=\frac{\dfrac{\sin\gamma}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{c^2}\cdot\sin^2\gamma}}=\frac{\dfrac{\sin\beta}{b}}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=\frac{1}{b}\cdot\operatorname{tg}\beta;$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial c}=\frac{-\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}\sin^2\gamma}}+\frac{-\dfrac{b\cdot\sin\gamma}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{c^2}\sin^2\gamma}}=-\frac{\dfrac{\sin\alpha}{c}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}-$$

$$-\frac{\dfrac{\sin\beta}{c}}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)=-\frac{1}{c}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta);$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}=-\frac{\frac{a\cdot\cos\gamma}{c}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\gamma}}+\frac{\frac{b\cdot\cos\gamma}{c}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}\sin^2\gamma}}+1=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+$$

$$+\frac{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}+1=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+1=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma^{1)}}{\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

მიღებული კერძო წარმოებულები ავიყვანოთ კვადრატში და შევიტანოთ m_ω-ს გამოსათვლელ ფორმულაში, მივიღებთ

$$m_\omega=\sqrt{\left(\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m_a}{a}\right)^2\rho^2+\left(\operatorname{tg}\beta\cdot\frac{m_b}{b}\right)^2\rho^2+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{c}\right)^2 m_c^2\cdot\rho^2+(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot m_\gamma)^2}.\tag{3.4.1.43}$$

α და β რომ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეები იყოს, მაშინ კუთხეთა ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლებოდა ფორმულით

$$m_\omega^2=m_\alpha^2+m_\beta^2+m_\gamma^2.\tag{3.4.1.44}$$

მაშასადამე, ვინაიდან α და β თვით ფუნქციებია ერთი და იმავე c და γ უშუალოდ გაზომილი სიდიდეებისა, ამიტომ ω-ს გამოსათვლელ ფორმულაში α და β შევიტანეთ ცხადად, ე. ი. გამოვსახეთ α და β შესაბამისად a, b, c და γ-თი და შემდეგ გამოვითვალეთ m_ω. როგორც ვხედავთ, ასეთ შემთხვევაში არ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს (44) ფორმულა, ე. ი. არ გამოიყენება (22) და (23) ფორმულებით გამოყვანილი m_α და m_β სიდიდეები. აქ გამოსადეგია ის წესი, რომელიც დადგენილი იყო 11, 12-ე და 13-ე მაგალითებში.

განვსაზღვროთ 39 მაგალითში სინუსების თეორემით გამოთვლილი α, β და უშუალოდ გაზომილი γ კუთხის ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

გვაქვს

$$\begin{aligned}
a&=6{,}5631\pm0{,}0007 \text{ მ};\\
b&=4{,}5040\pm0{,}0005 \text{ მ};\\
c&=2{,}0626\pm0{,}0004 \text{ მ};\\
\gamma&=1^\circ15'55''\pm11'';\\
\alpha&=175^\circ58'16''\pm34'';\\
\beta&=2^\circ45'50''\pm24''.
\end{aligned}$$

---

[1] ეს ტოლობა დასტურდება

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\sin\gamma\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma;$$

$$-\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$0=0.$$

(41) ფორმულით სამკუთხედის შეუკვრელობა

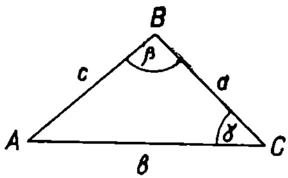
$$\omega=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=175^\circ58'16''+2^\circ45'50''+1^\circ15'55''-180^\circ=0^\circ00'01'';$$

ხოლო (43) ფორმულით სამკუთხედის შეუკვრელობის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m_\omega=\pm\sqrt{2'',2657+1'',1558+\left(\frac{0,0704+0,0482}{2,06}\right)^2\cdot(4\cdot10^{-4}\cdot20,6\cdot10^4)^2+(0,0704\cdot0,0482\cdot11'')^2}=$$

$$=\pm\sqrt{2'',2657+1'',1558+22''14+0'',00139}=\pm\sqrt{25'',5628}=\pm\,4'',6\approx\pm5''$$

მაგალითი 3.4.1.43. ბრტყელ ABC (ნახ. 6) სამკუთხედში უშუალოდ გაზომილია a გვერდი და β და γ კუთხე, შესაბამისად, m_a, m_β და m_γ საშუალო კვადრატული შეცდომებით. საჭიროა გამოვთვალოთ b გვერდი და მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა m_b მოთხოვნილი სიზუსტით.



ნახ. 3.4.1.6.

ფუნქციის პირველადი სახეა

$$b=a\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\,.$$

ამ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსახულება იქნება

$$m_b=\sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\partial b}{\partial\beta}\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{\partial b}{\partial\gamma}\right)^2 m_\gamma^2}$$

აქ

$$\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{b}{a}\,;$$

$$\frac{\partial b}{\partial\beta}=\frac{a[\cos\beta\cdot\sin(\beta+\gamma)-\sin\beta\cdot\cos(\beta+\gamma)]}{\sin^2(\beta+\gamma)}=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}\,;$$

$$\frac{\partial b}{\partial\gamma}=-\frac{a\cdot\sin\beta\cdot\cos(\beta+\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)}=-b\,\mathrm{ctg}\,(\beta+\gamma);$$

$$m_b=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 m_a^2+\left[\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}\right]^2\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2+[-b\,\mathrm{ctg}\,(\beta+\gamma)]^2\left(\frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2}\,. \quad (3.4.1.45)$$

ავიღოთ შემდეგი ოდენობები:

$$a=514,18\ \text{მ.}\pm0,05\ \text{მ},$$
$$\beta=57^\circ08'16''\pm7'',$$
$$\gamma=75^\circ28'30''\pm7'',$$

ხოლო

$$b=\frac{514,18\cdot0,839978}{0,735946}=586,86\ \text{მ.}$$

გამოვითვალოთ m_b 0,001 მეტრის სიზუსტით.

კერძო წარმოებულებს გამოვითვლით სამნიშნადი რიცხვებით

$$\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{0{,}840}{0{,}736}=1{,}14 \text{ ანუ } \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{b}{a}=\frac{587}{514}=1{,}14;$$

$$\frac{\partial b}{\partial \beta}=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}=\frac{514\times0{,}968}{(0{,}736)^2}=\frac{498}{0{,}542}=919;$$

$$\frac{\partial b}{\partial \gamma}=-b\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=+587\times0{,}920=540 \text{ მ.}$$

(45) ფორმულაში ყველა წევრის მნიშვნელობები შევიტანოთ სამნიშნადი ციფრით, მივიღებთ

$$m_b=\pm\sqrt{(1{,}14)^2\cdot(0{,}0500)^2+(919)^2\cdot\left(\frac{7{,}00}{20{,}6\cdot10^4}\right)^2+(540)^2\cdot\left(\frac{7{,}00}{20{,}6\cdot10^4}\right)^2}=$$

$$=\pm\sqrt{32{,}5\cdot10^{-4}+845\cdot10^3\cdot0{,}115\cdot10^{-8}+292\cdot10^3\cdot0{,}116\cdot10^{-8}}=$$

$$=\pm\sqrt{32{,}5\cdot10^{-4}+84{,}5\cdot0{,}115\cdot10^{-4}+29{,}2\cdot0{,}115\cdot10^{-4}}=$$

$$=\pm10^{-2}\sqrt{32{,}5+84{,}5\cdot0{,}115+29{,}2\cdot0{,}115}=$$

$$=\pm10^{-2}\sqrt{32{,}5+13{,}11}=\pm10^{-2}\cdot6{,}75=\pm0{,}0675 \text{ მ.}$$

მიღებული შედეგის ($67{,}5\cdot10^{-3}$)მოთხოვნილ სიზუსტესთან ($1\,.\,10^{-3}$)შედარებიდან ჩანს, რომ კერძო წარმოებულებისა და m_b-ის გამოსათვლელად საჭიროა კომპონენტების სამნიშნადი ციფრებით მის ფორმულაში ჩაწერა, ე. ი. ისევე, როგორც თავიდანვე მოვიქეცით. თუ კერძო წარმოებულები მდგრადი აღმოჩნდა კომპონენტების შეცდომებით შეცვლის შემთხვევაში, m_b-ის გამონათვალი სწორად ჩაითვლება და მისი დამატებით გამოთვლა საჭირო არ იქნება. შევამოწმოთ კერძო წარმოებულების მდგრადობა.

$$\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{587\pm0{,}0657}{514\pm0{,}0500}=1{,}14;$$

$$\frac{\partial b}{\partial \beta}=\frac{(514\pm0{,}0500)\cdot\sin 75°28'30''\pm7''}{\sin^2 132°\,36'\,46''\pm14''}=\frac{514{,}05\cdot0{,}968046}{(0{,}735900)^2}=919;$$

$$\frac{\partial b}{\partial \gamma}=(587\pm0{,}0657)\cdot0{,}919950=540 \text{ მ.}$$

როგორც ვხედავთ, კერძო წარმოებულები მუდმივებია სამ-სამნიშნადი ციფრის ფარგლებში და ამით პირობა დაცულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.44. უშუალოდ გაზომილია სამკუთხედის ფუძე $b=112{,}00$ მ. $\pm$ 0,05 მ და სიმაღლე $h=60{,}18$ მ$\pm0{,}03$ მ. განისაზღვროს სამკუთხედის F ფართობი და მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა$\pm0{,}1$ კვ. მ. სიზუსტით

$$F=\frac{bh}{2}=\frac{112.00\cdot60{,}18}{3}=3370{,}08 \text{ კვ. მ;}$$

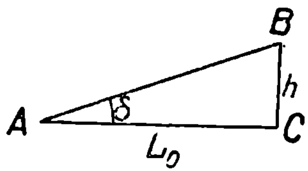
$$m_F=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)^2 m_h^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 m_h^2}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(60,2)^2(5,00\cdot 10^{-2})^2+(112)^2\cdot(3,00\cdot 10^{-2})^2}=$$

$$=\pm\frac{10^{-2}}{2}\sqrt{(60,2)^2\cdot 5^2+112^2\cdot 3^2}=\pm 2,25 \text{ კვ. მ.}$$

შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ მოთხოვნილი სიზუსტე და კერძო წარმოებულთა მნიშვნელობების მდგრადობა დაცულია სამნიშნადი ციფრის ფარგლებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.45. უშუალოდ გაზომილია ორ წერტილს შორის თარაზული მანძილი $L_0=124,18$ მ $\pm 0,03$ მ და $\delta=19°41'30''\pm 40''$ დახრის კუთხე (ნახ. 7). გამოვთვალოთ ალმატება h და მისი m_h საშუალო კვადრატული შეცდომა $\pm 0,01$ მეტრის სიზუსტით.



ნახ. 3.4.1.7.

ალმატება

$$h=L_0\cdot\mathrm{tg}\,\delta=124,18\cdot 0,357888=44,44 \text{ მ.}$$

$$m_h=\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial L_0}\right)^2 m^2_{L_0}+\left(\frac{\partial h}{\partial \delta}\right)^2\left(\frac{m_\delta}{\rho}\right)^2}$$

$$m_h=\sqrt{\mathrm{tg}^2\delta\cdot m^2_{L_0}+\left(\frac{L_0}{\cos^2\delta}\right)^2\left(\frac{m_\delta}{\rho}\right)^2}=$$

$$=\pm\sqrt{(0,358)^2\cdot(3,00\cdot 10^{-2})^2+\left(\frac{124}{0,942}\right)^2\left(\frac{40,0}{20,6\cdot 10^4}\right)^2}=$$

$$=\pm 10^{-2}\sqrt{0,128\cdot 9+173\cdot 10^2\,\frac{16,0\cdot 10^2}{424\cdot 10^4}}=\pm 10^{-2}\sqrt{1,15+6,52}=$$

$$=\pm 10^{-2}\cdot 2,77\approx\pm 0,03 \text{ მ.}$$

შემოწმებით დავრწმუნდით, რომ სამსამნიშნადციფრებიანი რიცხვებით m_h-ის გამოანგარიშება დამაკმაყოფილებელია და კერძო წარმოებულები მდგრადებია ამდენივე რაოდენობის ნიშნადი ციფრების ფარგლებში.

F. ლოგარითმული ხერხით ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა

ფუნქციის სრული დიფერენციალის პირდაპირ გამოთვლა ხშირად ძნელდება ფუნქციის სირთულის გამო. ასეთ შემთხვევაში, თუ ფუნქციას აქვს ლოგარითმული სახე ან შეიძლება მისი სალოგარითმო სახეზე დაყვანა, ე. ი. ფუნქცია წარმოდგენილი იქნება ნამრავლის, წილადის, ხარისხის, ფესვის ან ერთობლივ ყველა ჩამოთვლილ მოქმედებათა სახით, მაშინ ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა ადვილად გამოითვლება გალოგარითმების ხერხით.

როგორც ცნობილია, გალოგარითმებით მაღალი რიგის ალგებრული მოქმედებანი დაიყვანება დაბალი რიგის ალგებრულ მოქმედებაზე, რითაც ადვილდება გამოთვლების წარმოება. მაგალითად, მესამე რიგის ალგებრული მოქმედება (ხარისხი და ფესვი) დაიყვანება მეორე რიგის ალგებრულ მოქმედებაზე (გამრავლება და გაყოფა) და მეორე რიგის — პირველ რიგზე (შეკრება-გამოკლება).

პირველი ხერხი

1) ფუნქციას გავალოგარითმებთ; ამით ფუნქცია მიიღებს წირულ სახეს;

2) დავწერთ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს;

3) განვსაზღვრავთ ცხადად ფუნქციის შეცდომას, ანუ დავწერთ გამონათვლის (ფუნქციის) შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი ელემენტების შეცდომებს შორის დამოკიდებულებას.

4. მიღებული წირული ფუნქციისათვის გამოვიყენებთ (17) ფორმულას. ვთქვათ, ფუნქციას აქვს სახე

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma.$$

გალოგარითმებით მივიღებთ

$$\lg\sin\alpha=\lg a-\lg c+\lg\sin\gamma.$$

ამ გამოსახულების სრული დიფერენციალი იქნება

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\rho}=\frac{1}{a}\Delta a-\frac{1}{c}\Delta c+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\cdot\frac{\Delta\gamma}{\rho}.$$

აქედან განვსაზღვროთ $\Delta\alpha$;

$$\Delta\alpha=\frac{1}{a}\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta a\cdot\rho-\frac{1}{c}\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta c\cdot\rho+\frac{a}{c}\,\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\Delta\gamma.$$

მივიღეთ წირული ფუნქცია, რომლის არგუმენტთა შეცდომების (Δa, Δc, $\Delta\gamma$) კოეფიციენტები კერძო წარმოებულებია. ასეთი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (17) ფორმულით და იქნება

$$m_\alpha=\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\right)\cdot\rho^2+\frac{a^2\cos^2\gamma}{c^2\cos^2\alpha}\cdot m_\gamma^2}$$

მივიღეთ (39) მაგალითის შესაბამისი (22) ფორმულა.

კერძო წარმოებულთა მდგრადობა ისეთივე წესით შემოწმდება, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები.

მ ე ო რ ე ხ ე რ ხ ი

ვიყენებთ ლოგარითმების სათანადო ცხრილებს[1].

როგორც ვიცით, ლოგარითმებს შორის სხვაობები შესაბამის რიცხვებს შორის სხვაობების პროპორციულია. მაშასადამე, თუ უშუალოდ გაზომილ სიდიდე-

---

[1] ლოგარითმების სათანადო ცხრილების შერჩევის შესახებ იხილეთ 3.2.4 პარაგრაფი.

თა შესაბამის რიცხვებს გავზრდით მათი საშუალო კვადრატული შეცდომებით. მაშინ ლოგარითმებიც (მანტისები) შესაბამისად გაიზრდება და, პირიქით, მანტისების შეცვლით, შესაბამისი რიცხვები პროპორციულად შეიცვლება.

ლოგარითმების აღნიშნული თვისება საშუალებას გვაძლევს უბრალო შეკრება-გამოკლების გამოყენებით გამოვითვალოთ ნებისმიერი სიდიდის (რიცხვის) ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როცა ცნობილია თვით ამ რიცხვის საშუალო კვადრატული შეცდომა, და, პირიქით, გამოვითვალოთ რაიმე რიცხვის საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ ცნობილია ამ რიცხვის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ლოგარითმების ეს თვისება ანალოგიურია (3. 2. 4. 2), (3. 2. 4. 8), (3. 2. 4. 9) ფორმულებით განსაზღვრული შეცდომებისა, ამიტომ ამ ფორმულებში Δ ნიშნაკები შეგვიძლია შევცვალოთ m-ით და შესაბამისად დავწეროთ

$$m_{\lg x} = M_{10} \frac{m_x}{x}, \tag{3.4.1.46}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{\lg \sin\alpha} &= M_{10} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\lg \cos\alpha} &= -M_{10} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\lg \mathrm{tg}\,\alpha} &= M_{10} \frac{2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\lg \mathrm{ctg}\,\alpha} &= -M_{10} \frac{2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{m''_\alpha}{\rho''} \end{aligned}\right\}, \tag{3.4.1.47}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{\sin\alpha} &= \cos\alpha \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\cos\alpha} &= -\sin\alpha \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\mathrm{tg}\,\alpha} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{m''_\alpha}{\rho''} \\ m_{\mathrm{ctg}\,\alpha} &= -\frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{m''_\alpha}{\rho''} \end{aligned}\right\}. \tag{3.4.1.48}$$

როგორც ითქვა, რაიმე ფუნქციის ან მისი ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად (46), (47), (48) ფორმულების ნაცვლად უფრო ადვილი და მოსახერხებელია გამოვიყენოთ სათანადოდ შერჩეული ლოგარითმების ან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური სიდიდეების ცხრილები.

გამოთვლები უნდა შესრულდეს შემდეგი თანამიმდევრობით:

1. გავალოგარითმებთ ფუნქციას

$$\lg \Phi = \lg x_1 \pm \lg x_2 \pm \cdots \pm \lg x_n; \tag{3.4.1.49}$$

2. დავწერთ ფუნქციის ლოგარითმის შეცდომას და უშუალოდ გაზომილი ელემენტების ლოგარითმების შეცდომებს შორის დამოკიდებულებას

$$\Delta \lg \Phi = \Delta \lg x_1 \pm \Delta \lg x_2 \pm \cdots \pm \Delta \lg x_n; \qquad (3.4.1.50)$$

3. ასეთი დამოკიდებულებისათვის ფუნქციის ლოგარითმის საშუალო კვადრატულ შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი ელემენტების ლოგარითმების საშუალო კვადრატულ შეცდომათა შორის (4) ფორმულით მივიღებთ

$$m^2_{\lg \Phi} = m^2_{\lg x_1} + m^2_{\lg x_2} + \cdots + m^2_{\lg x_n}. \qquad (3.4.1.51)$$

მართლაც, როგორი დამოკიდებულებაც არის ფუნქციის შეცდომასა და უშუალოდ გაზომილი ელემენტების შეცდომებს შორის, ისეთივე დამოკიდებულება იქნება მათი ლოგარითმების შეცდომებს შორის.

(51) ტოლობის საფუძველზე ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად ვიყენებთ ლოგარითმების სათანადო ცხრილებს. პირველ რიგში უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომებით გამოვითვლით მათ შესაბამის ლოგარითმულ საშუალო კვადრატულ შეცდომებს; შემდეგ ამ სიდიდეებით გამოვითვლით ფუნქციის ლოგარითმის საშუალო კვადრატულ შეცდომას და ბოლოს ანტილოგარითმის საშუალებით ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

გამოვითვალოთ ამავე პარაგრაფის რიცხვითი მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 46. იხილეთ მაგალითი 38 ჰოგრის გამადიდებლობისა და მისი საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლის შესახებ.

$$G = \frac{F}{f},$$

სადაც $F = 198$ მმ, $\qquad m_F = \pm 2$ მმ,

$f = 8$ მმ, $\qquad m_f = \pm 0{,}05$ მმ.

(49), (50) და (51) ფორმულების მიხედვით

$$\lg G = \lg F - \lg f;$$
$$\Delta \lg G = \Delta \lg F - \Delta \lg f;$$
$$m^2_{\lg G} = m^2_{\lg F} + m^2_{\lg f}.$$

შეცდომების გამოსათვლელად გამოყენებულია ბრადისის ლოგარითმული ცხრილი და გამოთვლები შესრულებულია პირველი სქემის მიხედვით.

გამოთვლების თანამიმდევრობა სქემაში ნაჩვენებია არაბული ციფრებით კომპონენტების ოდენობების ზემოთ. სქემაში სვეტები და სტრიქონები დასათაურებულია შემდეგნაირად:

1. პირველი სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება უშუალოდ გაზომილი სიდიდეები x_i, აქ $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. განსახილველი მაგალითისათვის $x_1 = F = 198$ და $x_2 = f = 8{,}00$ მმ.

2. მეორე სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების ოდენობები მათი საშუალო კვადრატული შეცდომით გადიდებული, მისი ოდენობა გამოითვლება ფორმულით $x_i' = x_i + m_{x_i}$.

მაგალითში: $x_1' = F + m_F = 198 + 2 = 200$ და $x_2 = f + m_f = 8{,}00 + 0{,}05 = 8{,}05$;

3. მესამე სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება $\lg x_i$

$$\lg x_1 = \lg F = 2.2967, \quad \lg x_2 = \lg f = 0.9031;$$

4. მეოთხე სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება $\lg x_i'$. მაგალითში:

$$\lg x_1' = \lg 200 = 2.3010, \quad \lg x_2' = \lg 8{,}05 = 0.9058;$$

5. მეხუთე სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების $m_{\lg x_i}$ ლოგარითმების საშუალო კვადრატული შეცდომები, განსაზღვრული ფორმულით

$$m_{\lg x_i} = \lg x_i' - \lg x_i. \tag{3.4.1.52}$$

მაგალითში

$$m_{\lg x_1} = \lg x_1' - \lg x_1 = 2.3010 - 2.2967 = 43,$$
$$m_{\lg x_2} = \lg x_2' - \lg x_2 = 0.9058 - 0.9031 = 27;$$

6. მეექვსე სვეტის პირველ სტრიქონში იწერება მეხუთე სვეტის პირველ სტრიქონში ჩაწერილი სიდიდეების კვადრატები, ე. ი. $m^2_{\lg x_i}$.
მაგალითისათვის

$$m^2_{\lg x_1} = (43)^2 = 1849, \quad m^2_{\lg x_2} = (27)^2 = 729;$$

7. მეექვსე სვეტის მეორე სტრიქონში იწერება ფუნქციის ლოგარითმის $m^2_{\lg \Phi}$ საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატი.
მაგალითში

$$m^2_{\lg \Phi} = m^2_{\lg G} = m^2_{\lg x_1} + m^2_{\lg x_2} = 1849 + 729 = 2578;$$

8. მეექვსე სვეტის მესამე სტრიქონში იწერება ფუნქციის ლოგარითმის $m_{\lg \Phi}$ საშუალო კვადრატული შეცდომა.
მაგალითში

$$m_{\lg \Phi} = m_{\lg G} = \sqrt{2578} = \pm 51;$$

9. მესამე სვეტის მეორე სტრიქონში იწერება $\lg \Phi$ (ფუნქციის ლოგარითმის) მნიშვნელობა, გამოთვლილი ფორმულით

$$\lg \Phi = \lg x_1 + \lg x_2 + \cdots$$

მაგალითში

$$\lg G = \lg F - \lg f = 2.2967 - 0.9031 = 1.3936;$$

10. მესამე სვეტის მესამე სტრიქონში იწერება ფუნქციის ლოგარითმის $\lg \Phi'$ მცდარი მნიშვნელობა, გამოთვლილი ფორმულით

$$\lg \Phi' = \lg \Phi + m_{\lg \Phi}. \tag{3.4.1.53}$$

მაგალითში

$$\lg \Phi' = \lg G + m_{\lg G} = 1.3936 + 51 = 1.3987.$$

11. მეორე სვეტის მეორე სტრიქონში იწერება Φ ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც გამოითვლება ანტილოგარითმის საშუალებით.

მაგალითში 1.3936-ის ანტილოგარითმი

$$\Phi = G = 24,75.$$

12. მეორე სვეტის მესამე სტრიქონში იწერება ფუნქციის Φ' მცდარი მნიშვნელობის ანტილოგარითმი.
მაგალითში 1.3987-ის ანტილოგარითმი

$$\Phi' = G' = 25,04;$$

13. პირველი სვეტის მესამე სტრიქონში იწერება ფუნქციის m_Φ საშუალო კვადრატული შეცდომა. მაგალითში

$$m_\Phi = m_G = \Phi' - \Phi \qquad (3.4.1.54)$$

ანუ

$$m_\Phi = G' - G = 25,04 - 24,75 = \pm 0,29.$$

მიღებული გამონათვალი არის მაგალითის პასუხი, რომელიც იწერება მეშვიდე სვეტში ან სქემის ქვემოთ. $G = 24.75 \pm 0,29$.

სქემა 3.4.1.1

№№ სტრიქონების							პასუხი
	1) x_i	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x_i}$	
	—	11) Φ	9) $\lg \Phi$	—	—	7) $m^2_{\lg \Phi}$	
	13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$	—	—	8) $m_{\lg \Phi}$	
	1	2	3	4	5	6	
1	1) 199 1) 8,00	2) 200 2) 8,05	3) 2.2967 3) 0.9031	4) 2,3010 4) 0.9058	5) 43 5) 27	6) 1849 6) 729	$G = 24,75 \pm 0,29$
2		11) 24,75	9) 1.3936 +51	—	—	7) 2578	
3	13) $\pm 0,29$	12) 25,04	10) 1.3987	—	—	8) 51	

მაგალითი 3.4.1.47. (იხილეთ მაგალითი 44) სქემა 2. $F = \frac{bh}{2}$,
სადაც $b = 112,00$ მ$\pm 0,05$ მ, $h = 60,18$ მ$\pm 0,03$ მ.
განისაზღვროს F და m_F. $\lg F = \lg b + \lg h + \lg 0,5$; $m^2_{\lg s} = m^2_{\lg b} + m^2_{\lg h}$.

სქემა 3.4.1.2

1)	2)	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x_i}$	პასუხი $\Phi \pm m_\Phi$
	11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$			8) $m_{\lg \Phi}$	
1	2	3	4	5	6	7
1) 112,00 1) 60,18 1) 0,50	2) 112,05 2) 60,21	3) 2.04922 3) 1.77945 3) $\bar{1}.69897$	4) 2.04942 4) 1.77967	5) 20 5) 22	6) 400 6) 484	
	11) 3370,1	9) 3.52764 +30			7) 884	
13) ±2,3	12) 3372,4	10) 3.52794			8) 30	$F = 3370{,}1 \pm 2{,}3$ მ²

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 48. (იხილეთ მაგალითი 45) სქემა 3,

სა დაც: $h = L_0 \operatorname{tg} \delta$,

$L_0 = 124{,}18 \pm 0{,}03$ მ,

$\delta = 19°41'30'' \pm 40''$.

განისაზღვროს h და m_h.

$$\lg h = \lg L_0 + \lg \operatorname{tg} \delta,$$

$$m^2_{\lg h} = m^2_{\lg L_0} + m^2_{\lg \operatorname{tg} \delta}.$$

ვსარგებლობთ ოგლობლინის ლოგარითმების ცხრილებით.

სქემა 3.4.1.3

1) x_i	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x_i}$	პასუხი
	11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$			8) $m_{\lg \Phi}$	
1	2	3	4	5	6	7
124,18 tg 19°41′30″	124,21 tg 19°42′10″	2.09405 $\bar{1}.55375$	2.09416 $\bar{1}.55401$	11 26	121 676	
	44,443	1.64780 +28			797	
±0,028	44,471	1.64808			28	$h = 44{,}443 \pm 0{,}03$ მ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 49. (იხილეთ მაგალითი 37) სქემა 4.

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

სადაც $b = 236{,}84$ მ. $\pm 0{,}06$ მ;

$A = \alpha = 42^\circ 38',0 \pm 1'$;

$B = \beta = 103^\circ 24',5 \pm 0',5.$

გამოვითვალოთ a და m_a.

$$\lg a = \lg b + \lg \sin \alpha - \lg \sin \beta;$$

$$m^2_{\lg a} = m^2_{\lg b} + m^2_{\lg \sin \alpha} + m^2_{\lg \sin \beta}.$$

სქემა 3.4.1.4

	1) x_i	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x_i}$	პასუხი
		11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
	13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$			8) $m_{\lg \Phi}$	
	1	2	3	4	5	6	7
1	236,84	236,90	2.37446	2.37457	11	121	
	sin 42°38′	sin 42°39′	$\bar{1}$.83073	$\bar{1}$.83092	14	196	
	sin 103°24′,5	sin 103°25′	0.01200	0.01202	2	4	
2		164,91	2.21724 +18			321	
3	0,08	164,99	2.21742			17,91	$a = 164{,}91 \pm 0{,}08$ მ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 1. 50. (იხ. მაგალითი 39) სქემა 5 და 6.

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \cdot \sin \gamma, \qquad \sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma,$$

სადაც $b = 4{,}5040$ მ $\pm 0{,}0005$ მ; $\quad a = 6{,}5631 \pm 0{,}0007$ მ;

$c = 2{,}0626$ მ $\pm 0{,}0004$ მ; $\quad c = 2{,}0626 \pm 0{,}0004$ მ;

$\gamma = 1^\circ 15' 55'' \pm 11''$; $\quad \gamma = 1^\circ 15' 55'' \pm 11''$;

განისაზღვროს β და m_β. განისაზღვროს α და m_α.

გამოთვლა (იხ. სქემა 5) გამოთვლა (იხ. სქემა 6)

$$\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \gamma - \lg c; \qquad \lg \sin \alpha = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg c;$$

$$m^2_{\lg \sin \beta} = m^2_{\lg b} + m^2_{\lg \sin \gamma} + m^2_{\lg c}. \qquad m^2_{\lg \sin \alpha} = m^2_{\lg a} + m^2_{\lg \sin \gamma} + m^2_{\lg c}.$$

ვსარგებლობთ ოგლობლინის ცხრილებით.

სქემა 3.4.1.5

1)	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x_i}$	პასუხი
	11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$			8) $m_{\lg \Phi}$	
1	2	3	4	5	6	7
4.5040	4,5045	0.65360	0,65365	5	25	
sin 1°15′55″	sin 1°16′06″	$\bar{2}$.34403	$\bar{2}$.34508	105	11025	
2.0626	2 0630	$\bar{1}$.68558	$\bar{1}$.68550	8	64	
—	2°45′50″	$\bar{2}$ 68321 +105			11114	
±24″	2°46′14″	$\bar{2}$ 68426			105,4	β=2°45′50″±24″

სქემა 3.4.1.6

1) x_i	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_1}$	6) $m^2_{\lg x_1}$	პასუხი
	11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi$			$m_{\lg \Phi}$	
1	2	3	4	5	6	7
6,5631	6 5638	0.81711	0.81716	5	25	
sin 1°15′55″	sin 1°16′06″	$\bar{2}$.34403	$\bar{2}$.34508	105	11025	
2,0626	2,0630	$\bar{1}$.68558	$\bar{1}$.68550	−8	64	
	4°01′45″	$\bar{2}$.84672 +105			11114	
±35″	4°02′20″	$\bar{2}$.84777			105.4	α=180°0′0″— —4°01′45″= =175°58′16″±35″

მაგალითი 3.4.1.51 (იხ. მაგალითი 43) სქემა 7.

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)},$$

სადაც

$$a = 514{,}18\ \text{მ} \pm 0{,}05\ \text{მ};$$

$$\beta = 57°08'16'' \pm 7'';$$

$$\gamma = 75°28'30'' \pm 7''.$$

განისაზღვროს b და m_b.

$$\lg b = \lg a + \lg \sin \beta - \lg \sin(\beta + \gamma);$$

$$m^2_{\lg b} = m^2_{\lg a} + m^2_{\lg \sin \beta} + m^2_{\lg \sin (\alpha+\gamma)}.$$

ვინაიდან α კუთხე არის β და γ კუთხეების ფუნქცია, ანუ $\alpha = 180° - (\beta+\gamma)$, უნდა გამოვითვალოთ მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა ფორმულით

$$m_\alpha = m_{(\beta+\gamma)} = \pm\sqrt{m^2_\beta + m^2_\gamma} = \pm\sqrt{7^2 + 7^2} = \pm 10'',$$

ე. ი. $\lg \sin(\beta+\gamma)$-ის არგუმენტი $(\beta+\gamma)$ შეიცვლება 10″-ით.

სქემა 3 4.5.7

1) x_i	2) x_i'	3) $\lg x_i$	4) $\lg x_i'$	5) $m_{\lg x_i}$	6) $m^2_{\lg x}$	პასუხი
	11) Φ	9) $\lg \Phi$			7) $m^2_{\lg \Phi}$	
13) m_Φ	12) Φ'	10) $\lg \Phi'$			8) $m_{\lg \Phi}$	$\Phi \pm m_\Phi$
1	2	3	4	5	6	7
514,18	514,23	2.71112	2.71116	4	16	
sin 57°08′16″	sin 57°08′23″	$\bar{1}$.92126,6	$\bar{1}$.92127,6	1	1	
sin 132°36′46″	sin 132°36′56″	0.133152	0.13317,2	2	4	
	586,87 მ	2.76854 +5			21	$b = 586{,}87 \pm 0{,}06$ მ
±0,066 მ	586,935	2.76859			4,58	

ხშირად მოცემულია უცნობი სიდიდის ფარდობითი შეცდომა და საჭიროა ამ სიდიდის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომის პოვნა და, პირიქით, მოცემულია უცნობი სიდიდის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა და საჭიროა მოინახოს ამ სიდიდის ფარდობითი შეცდომა.

ასეთ შემთხვევაში გამოიყენება (46) ფორმულა

$$m_{\lg x} = M_{10} \cdot \frac{m_x}{x},$$

სადაც

$$M_{10} = \lg e \approx 0{,}4342945 \approx 0{,}43.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.52. განისაზღვროს ტ ო ლ გ ვ ე რ დ ა ს ა მ კ უ თ ხ ე დ ე ბ ი ა ნ ი ტრიგონომეტრიული ქსელის b გვერდის ფარდობითი შეცდომა, როდესაც ცნობილია გამოსავალი a გვერდის ფარდობითი შეცდომა და კუთხეთა გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა (ნახ. 8); აქ იგულისხმება, რომ უშუალოდაა გაზომილი მხოლოდ დამაკავშირებელი კუთხეები

$$\frac{m_a}{a} = \pm 0,5\times 10^{-4};\quad m_\alpha = \pm 10''.$$

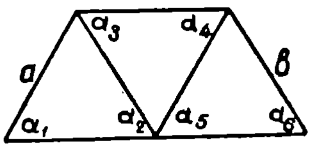
b გვერდი გამოითვლება ფორმულით

$$b=\frac{\alpha\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3\cdot\sin\alpha_5}{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_4\cdot\sin\alpha_6};$$

გალოგარითმებით გვექნება

$$\lg b=\lg a+\lg\sin\alpha_1+\lg\sin\alpha_3+\lg\sin\alpha_5-\lg\sin\alpha_2-\lg\sin\alpha_4-\lg\sin\alpha_6;$$

ასეთი სახის წრფივი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (51) ფორმულით



ნახ. 3.4.1.8.

$$m^2_{\lg b}=m^2_{\lg a}+6m^2_{\lg\sin\alpha}.$$

(46) ფორმულით გვექნება;

$$m_{\lg a}=0,43\cdot0,5\cdot10^{-4}=0,2\cdot10^{-4}=$$
$$=2\cdot10^{-5}$$

ანუ 2 ერთეულის ხუთნიშნა ლოგარითმების მანტისისა.

(52) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{\lg\sin\alpha}=\lg\sin 60^\circ0'10''-\lg\sin 60^\circ=\bar{1}.93754-\bar{1}.93753=0.00001=1\cdot10^{-5}$$

და

$$m_{\lg b}=\pm\sqrt{2^2+6\cdot1^2}=\pm\sqrt{10}=\pm3,16,$$

ე. ი.

$$m_{\lg b}=\pm3,16\cdot10^{-5}.$$

(46) ფორმულით მივიღებთ პასუხს

$$\frac{m_b}{b}=\frac{m_{\lg b}}{M_{10}}\;\frac{3,16\cdot10^{-5}}{0,43}=7,34\cdot10^{-5}\approx7.10^{-5}.$$

როდესაც ქსელი n ტოლგვერდა სამკუთხედისაგან შედგება, მაშინ:

$$m^2_{\lg b}=m^2_{\lg a}+2\cdot n\cdot m^2_{\lg\sin\alpha}\,. \qquad (3.4.1.55)$$

ამ ფორმულით შეიძლება განისაზღვროს ქსელში ტოლგვერდა სამკუთხედების მაქსიმალური რაოდენობა, როდესაც ვიცით a გვერდის ფარდობითი შეცდომა და მოითხოვება, რომ b გვერდის ფარდობითი შეცდომა არ აღემატებოდეს გარკვეულ ზღვარს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.53. ვთქვათ, $\frac{m_a}{a}=\pm0,5\cdot10^{-4}$ და კუთხის გაზომვის სა-

შუალო კვადრატული შეცდომა $m_\alpha=\pm 10''$. საჭიროა განისაზღვროს ქსელში ტოლგვერდა სამკუთხედების მაქსიმალური რაოდენობა ისე, რომ $\frac{m_b}{b}$ არ აღემატებოდეს $\pm 1\times 10^{-4}$.

გამოვიყენოთ ნახაზი 8. (55) ფორმულიდან

$$n=\frac{m^2_{\lg b}-m^2_{\lg a}}{2m^2_{\lg \sin\alpha}}. \qquad (3.4.1.56)$$

წინა მაგალითიდან გამოთვლილია, რომ

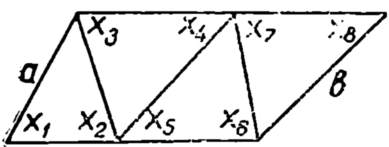
$$m_{\lg a}=2\cdot 10^{-5};$$
$$m_{\lg \sin\alpha}=1\cdot 10^{-5}.$$

გამოვითვალოთ (46) ფორმულით $m_{\lg b}$. იგი ტოლია $0{,}43\cdot 1\cdot 10^{-4}\approx 4\cdot 10^{-5}$ ჩავსვათ (56) ფორმულაში აღნიშნული ოდენობები, მივიღებთ

$$n=\frac{4^2-2^2}{2\cdot 1^2}=\frac{16-4}{2}=6.$$

ამგვარად, ქსელი შეიძლება შედგებოდეს ტოლგვერდა სამკუთხედისაგან არა უმეტეს ექვსისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.54. დავუშვათ, რომ გაზომილია არატოლგვერდასამკუთხედებიანი ტრიგონომეტრიული ქსელის (ნახ. 9) a გვერდი $\frac{m_a}{a}$ ფარდობითი შეცდომით და დამაკავშირებელი კუთხეები m საშუალო კვადრატული შეცდომით. საჭიროა განვსაზღვროთ გამოთვლილი b გვერდის $\frac{m_b}{b}$ ფარდობითი შეცდომა.



ნახ. 3.4.1.9.

ამოცანის გადასაწყვეტად ვიყენებთ ფორმულას

$$b=\frac{a\cdot\sin x_1\cdot\sin x_3\cdot\sin x_5\cdot\sin x_7}{\sin x_2\cdot\sin x_4\cdot\sin x_6\cdot\sin x_8};$$

გალოგარითმებით მივიღებთ

$$\lg b=\lg a+\lg\sin x_1+\lg\sin x_3+\lg\sin x_5+\lg\sin x_7-$$
$$-\lg\sin x_2-\lg\sin x_4-\lg\sin x_6-\lg\sin x_8;$$

(31) ფორმულით გვექნება

$$m^2_{\lg b}=m^2_{\lg a}+m^2_{\lg\sin x_1}+m^2_{\lg\sin x_3}+m^2_{\lg\sin x_5}+m^2_{\lg\sin x_7}+$$
$$+m^2_{\lg\sin x_2}+m^2_{\lg\sin x_4}+m^2_{\lg\sin x_6}+m^2_{\lg\sin x_8}.$$

მაგრამ (46) ფორმულით

$$m_{\lg a}=M_{10}\cdot\frac{m_a}{a}$$

და დანარჩენი შესაკრებები კი გამოიყვანება (52) ფორმულით ყველა ცალცალკე, რადგანაც დ ა მ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ ე ლ ი კ უ თ ხ ე ე ბ ი ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ო დ ე ნ ო ბ ი ს ა ა.

$$m_{\lg\sin x_i}=\lg\sin(x_i+m)-\lg\sin x_i,$$

მიღებული გამონათვლების სათანადო ჩასმით გვექნება

$$m^2_{\lg b}=m^2_{\lg a}+\sum_{i=1}^{n}m^2_{\lg\sin x_i}. \tag{3.4.1.57}$$

ჩვენს შემთხვევაში $n=8$. (46) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{m_b}{b}=\frac{m_{\lg b}}{M_{10}}.$$

(57) ფორმულას შეგვიძლია მივცეთ უფრო ადვილად გამოსაყენებელი სახე, მაგალითად, (47) ფორმულის მიხედვით დავწერთ

$$m_{\lg\sin x_i}=M_{10}\cdot\mathrm{ctg}\,x_i\cdot\frac{m_x''}{\rho''};$$

ვინაიდან $m_1=m_2=\cdots=m_i=m$,

$$m_{\lg\sin x_i}=\frac{M_{10}m''}{\rho''}\cdot\mathrm{ctg}\,x_i;$$

ხოლო მიღებული გამოსახულების (57) ფორმულაში ჩასმით გვექნება

$$m^2_{\lg b}=m^2_{\lg a}+\left(\frac{M_{10}m''}{\rho''}\right)^2\sum_{i=1}^{8}\mathrm{ctg}^2\,x. \tag{3.4.1.58}$$

მაშასადამე, როდესაც სხვადასხვა ოდენობის დამაკავშირებელი კუთხეები ერთნაირი სიზუსტითაა გაზომილი, მაშინ კვადრატებისა და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური ცხრილების საშუალებით გამოვითვლით მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური სიდიდეების ცხრილები, მაშინ ვიყენებთ (17) ფორმულას, მხოლოდ კერძო წარმოებულებს ავიღებთ არა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების არგუმენტებით (უშუალოდ გაზომილი სიდიდეები), არამედ თვით ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით, მაგრამ ეს ფუნქციები ერთიმეორისაგან უნდა იქნეს დამოუკიდებელი. აღნიშნულის ნათელსაყოფად განვიხილოდ მაგალითი.

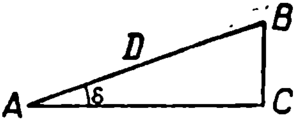
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.1.55. საჭიროა განისაზღვროს h აღემატება (ნახ. 10) და m_h, სიზუსტით $\pm0{,}001$ მ-მდე.

აღმატება განისაზღვრება ფორმულით

$$h = D\sin\delta,$$

სადაც $D = 30{,}000$ მ $\pm\, 0{,}005$ მ,
$\delta = 20°00'00'' \pm 10''$.

აქ $\sin\delta$ არის ფუნქცია დამოუკიდებლად გაზომილი δ არგუმენტისა და თვით $\sin\delta$ ფუნქციაც დამოუკიდებელია.



ნახ. 3.4.1.10.

$$h = D\cdot\sin\delta = 30{,}000\times\sin 20° = 30{,}000\times 0{,}34 = 10.260 \text{ მ}.$$

(17) ტოლობის ძალით, დაიწერება

$$m_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial D}\right)^2 m_D^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \sin\delta}\right)^2 m_{\sin\delta}^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial D} = \sin\delta \quad \text{და} \quad \frac{\partial h}{\partial \sin\delta} = D.$$

$m_{\sin\delta}$-ს გამოვთვლით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალური ცხრილების საშუალებით

$$m_{\sin\delta} = \sin(\delta + m_\delta) - \sin\delta,$$
$$m_{\sin\delta} = \sin 20°00'10'' - \sin 20° = 46\cdot 10^{-6}.$$

აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m_h = \pm\sqrt{\sin^2\delta\cdot m_D^2 + D^2\cdot m_{\sin\delta}^2} = \pm\sqrt{(0{,}342\cdot 5\cdot 10^{-3})^2 + (30\cdot 46\cdot 10^{-6})^2} =$$
$$= \pm\sqrt{(17{,}1\cdot 10^{-4})^2 + (13{,}8\cdot 10^{-4})^2} = \pm\sqrt{292\cdot 10^{-8} + 190\cdot 10^{-8}} =$$
$$= \pm\sqrt{482\cdot 10^{-8}} = \pm 22\cdot 10^{-4} = \pm 0{,}0022 \text{ მ}.$$

შემოწმებით დავრწმუნდით, რომ მოთხოვნილი სიზუსტე დაკმაყოფილებულია და კერძო წარმოებულების მდგრადობაც დაცულია.

გამოვიყვანოთ იგივე მაგალითი უშუალოდ გაზომილი სიდიდის δ კერძო წარმოებულის საშუალებით

$$\frac{\partial h}{\partial D} = \sin\delta, \quad \frac{\partial h}{\partial \delta} = D\cdot\cos\delta.$$

შევიტანოთ კერძო წარმოებულები (17) ფორმულაში, მივიღებთ

$$m_h = \pm\sqrt{(\sin\delta\cdot m_D)^2 + \left(D\cdot\cos\delta\,\frac{m_\delta}{\rho}\right)^2} =$$
$$= \pm\sqrt{(0{,}342\cdot 5\cdot 10^{-3})^2 + \left(\frac{30\cdot 0{,}940\cdot 10}{2{,}06\cdot 10^{-5}}\right)^2} = \pm\sqrt{481\cdot 10^{-8}} =$$
$$= \pm 21{,}9\cdot 10^{-4} = \pm 0{,}0022 \text{ მ}.$$

იგივე მაგალითი გამოვიყვანოთ გალოგარითმების და დიფერენცირების შემდეგ (17) ფორმულის საშუალებით

$$\lg h = \lg D + \lg\sin\delta.$$

ამ გამოსახულების სრული დიფერენციალი იქნება

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{\Delta D}{D}+\operatorname{ctg}\delta\frac{\Delta\delta}{\rho};$$

აქედან

$$\Delta h=\sin\delta\cdot\Delta D+D\cos\delta\frac{\Delta\delta}{\rho}.$$

(17) ფორმულით მივიღებთ

$$m_h=\sqrt{(\sin\delta\cdot m_D)^2+\left(D\cos\delta\frac{m_\delta}{\rho}\right)^2}=\pm0{,}0022 \text{ მ.}$$

დასასრულ ამოვხსნათ იგივე მაგალითი ლოგარითმების ცხრილის საშუალებით (იხ. სქემა 8).

გამოვიყენოთ სათანადო ცხრილი

$$h=D\sin\delta$$

$$\lg h=\lg D+\lg\sin\delta,$$

$$m^2_{\lg h}=m^2_{\lg D}+m^2_{\lg\sin\delta}.$$

სქემა 3.4.1.8

x_i — m_Φ	x_i' Φ Φ'	$\lg x_i$ $\lg\Phi$ $\lg\Phi'$	$\lg x_i$	$m_{\lg x_i}$	$m^2_{\lg x_i}$ $m^2_{\lg\Phi}$ $m_{\lg\Phi}$	პასუხი $\Phi\pm m_\Phi$
1	2	3	4	5	6	7
30,000 sin 20°	30,005 sin 20°00′10″	1.47712 $\bar{1}$.53405	1.47719 $\bar{1}$.53411	7 6	49 36	
	10,26050	1·01117 +9			85	h=10,2605± ±0,0022 მ
±0,0025	10,26275	1.01126			9	

პასუხი ყველა შემთხვევაში ერთნაირი მივიღეთ. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტის დროს უფრო მოსახერხებელია ლოგარითმების ცხრილების საშუალებით გამოთვლების წარმოება.

რომ მოცემული ყოფილიყო მხოლოდ D ხაზის $\frac{m_D}{D}$ ფარდობითი შეცდო-

ა და ბ კუთხის გაზომვის m_{β} საშუალო კვადრატული შეცდომა, მაშინ გამოვიყენებდით (46) და (52) ფორმულებს და გამოვითვლიდით $\frac{m_h}{h}$ აღმატების ფარდობით შეცდომას.

3. 4. 2. საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა ერთგვაროვანი და ტოლზუსტი ორმაგი განაზომების რიგის საშუალებით

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სიდიდის ზედიზედ ორი l_1 და l_2 განაზომი. განაზომების სხვაობა აღვნიშნოთ d-თი, გვექნება

$$d = l_1 - l_2. \tag{3.4.2.1}$$

ორივე განაზომი რომ სრულიად უშეცდომო იყოს ან რომ ყოველი განაზომის შეცდომის ოდენობა და ნიშანი უცვლელი იყოს, მაშინ მათი სხვაობა ნული იქნება. ამის გამო დავასკვენით, რომ **ერთი და იგივე სიდიდის ზედიზედ ორი განაზომის d სხვაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხვაობის ჭეშმარიტი შეცდომა.**

ვთქვათ, გვაქვს ტოლზუსტ ორ-ორ განაზომთა $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ სხვაობები. ეს სხვაობები შეიძლება მივიღოთ, თუ ერთი და იმავე X სიდიდის ზედიზედ წყვილ გაზომვას k-ჯერ შევასრულებთ ან k რაოდენობის ერთგვაროვან [1] $X_1, X_2, \ldots, X_k$ სიდიდეების ზედიზედ ორ გაზომვას ვაწარმოებთ. ასეთ გაზომვას უწოდებენ ორმაგ გაზომვას. ორმაგი განაზომების d_1 d_2 $d_3, \ldots, d_k$ სხვაობები, როგორც ვთქვით, შეგვიძლია მივიღოთ სხვაობების ჭეშმარიტ შეცდომებად და ამ შეცდომათა საშუალებით შეიძლება (3. 3. 5. 1) ფორმულით გამოვითვალოთ რიგის ყოველი ცალკეული წევრის ანუ ერთი წყვილი განაზომის სხვაობის m_d საშუალო კვადრატული შეცდომა, სახელდობრ

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{k}}, \tag{3.4.2.2}$$

ე. ი. პრაქტიკულად ერთი წყვილი განაზომის სხვაობა უნდა უდრიდეს მისივე საშუალო კვადრატულ შეცდომას, ანუ

$$m_d = \pm d. \tag{3.4.2.2'}$$

ამავე დროს ვიცით, რომ ტოლზუსტ განაზომთა სხვაობის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 4. 1. 5) ფორმულით

$$m_d = m\sqrt{2}. \tag{3.4.2.3}$$

(3) ფორმულაში m არის ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

---

[1] აქ ერთგვაროვნობის ქვეშ ვგულისხმობთ სიდიდეთა როგორც შინაარსით და თვისებით, ისე რაოდენობითაც დაახლოებით ტოლობას.

(2) და (3) ფორმულების შედარებით მივიღებთ

$$m\sqrt{2} = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{k}},$$

საიდანაც

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2k}}. \qquad (3.4.2.4)$$

იმ შემთხვევაში, როცა k უდრის ერთს, ე. ი. თუ გვაქვს მხოლოდ ერთი წყვილი განაზომი როგორც, მაგალითად, პოლიგონის ცალკეული გვერდების წინ და უკან გაზომვისას, მაშინ (4) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}. \qquad (3.4.2.5)$$

(5) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს რაიმე სიდიდის ცნობილი საშუალო კვადრატული შეცდომით შევამოწმოთ იმდაგვარივე სიდიდის ორი განაზომის სხვაობის დასაშვებობა; მაგალითად, თუ მივიღებთ, რომ $d = m\sqrt{2}$, მაშინ ეს მაჩვენებელი... გაყოფილდებით ამ სიდიდის ორჯერ განაზომის საშუალო არითმეტიკულით (იხ. ამავე პარაგრაფში 1, 2, 3 მაგალითები), ორმაგი გაზომვების დროს (ყველა ფაქტორი თუ სრულიად უცვლელია), თუ დაცულია წყვილწყვილ გაზომვათა ტოლზუსტობა, მაშინ შეცდომათა სხვადასხვა წყაროს ყოველ წყვილ განაზომზე ერთნაირი გავლენა ექნება და წყვილ განაზომთა სხვაობებში ეს გავლენა შესუსტდება ან სრულიად მოისპობა. მაგალითად, ხაზის ორჯერ გაზომვის დროს ყოველი წყვილი განაზომის სხვაობაში სისტემატური გავლენის წილი, როგორიცაა საზომი ხელსაწყოს კომპარირების, ჩაღუნვა-აღუნვის და გაღუნვის, ძლიერ მცირეა; შედარებით მეტ გავლენას იწვევს დახრილი ხაზის აღმართისა და დაღმართის გაზომვის თავისებურება და დაჭიმვის ცვალებადობა ხახუნის გამო. შემთხვევითი გავლენის წილიც მცირეა, რადგან ხაზის ორჯერ ზედიზედ გაზომვის მცირე პერიოდში უმნიშვნელოა ტემპერატურის, მზომავის შეცდომების და საზომის მდგომარეობის ცვალებადობა. როგორც ვხედავთ, მიუხედავად იმისა, რომ ცალკეულ განაზომზე შეცდომების გამომწვევი წყაროების მოქმედება საკმაოდ მკვეთრია, ყოველი წყვილი განაზომის სხვაობა არ ასახავს სრულად შეცდომათა ყველა წყაროს გავლენას და წყვილი გაზომვების შედეგად (4) ფორმულით გამოთვლილი საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოდის შემცირებული ნამდვილ შეცდომასთან შედარებით. პრაქტიკულად დადგენილია, რომ (4) ფორმულით გამოთვლილი m საშუალო კვადრატული შეცდომა, ხაზოვანი გაზომვებისა 3—4-ჯერ, ხოლო კუთხეთა გაზომვებისა 2—3-ჯერ შემცირებული გამოდის, ვიდრე (3. 3. 5. 1) ფორმულით გამოთვლილი, ეს გარემოება ყოველთვის უნდა მივიღოთ მხედველობაში (4) ფორმულით განაზომთა სიზუსტის შეფასების დროს.

ორმაგი გაზომვების ხერხით ამჯობინებენ ინსტრუმენტების გამოკვლევას ან კიდევ გაზომვის პირობების შესწავლას. ეს ხერხი ბევრ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ სისტემატური შეცდომები და შესაფერისად შევისწავლოთ ამა თუ იმ სახის სისტემატური შეცდომების გავლენის სიდიდე, მაგალითად, ლიმბის ძვრა წრედალიდადის ბრუნვით დამკვირვებლის

პირადი სისტემატური შეცდომა, სხვადასხვა მიკრომეტრიული ხრახნების სისტემატური შეცდომები და სხვ.

(4) ფორმულა სამართლიანია მაშინ, როდესაც $d_1, d_2, \cdots, d_k$ წევრები მხოლოდ შემთხვევითი შეცდომებია. მაგრამ ცნობილია, რომ ყოველი განაზომი შეიცავს როგორც შემთხვევით, ისე ნარჩენ სისტემატურ შეცდომას· ამის გამო ყოველი d ჭეშმარიტი შეცდომა, რომელიც მიღებულია ორი განაზომის სხვაობით, შეიცავს როგორც შემთხვევით, ისე სისტემატური შეცდომების შემადგენლებს. მაგრამ ამ შეცდომათა შეკრებისას, როცა მათი რიცხვი დიდია, ხდება შემთხვევითი ხასიათის შემადგენელთა ურთიერთგაბათილება და სისტემატური შემადგენელთა შეჯამება. ამიტომ სისტემატური შეცდომის სიდიდე, რომელიც აღნიშნულია Θ-თი, ჭეშმარიტ შეცდომათა საშუალო არითმეტიკულს უტოლდება, ე. ი.

$$\Theta = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{k} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k}{k}, \tag{3.4.2.6}$$

სადაც $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ არის სისტემატური შეცდომების წილი შესაბამისად ყოველ $d_1, d_2, \cdots, d_k$ სხვაობაში.

როგორც ვიცით, სისტემატური შეცდომები არ ემორჩილება შემთხვევით შეცდომათა კანონებს, ამიტომ მათი გავლენიდან უნდა გავათავისუფლოთ ყოველი წყვილი განაზომის ჭეშმარიტი შეცდომა, ე ი· უნდა მივიღოთ მეორე სახის რიგი· ამისათვის თანამიმდევრობით ყოველ წყვილ განაზომთა სხვაობას უნდა გამოვაკლოთ (6) ფორმულით გამოთვლილი Θ სისტემატური შეცდომა.

თუ აღვნიშნავთ სისტემატური Θ შეცდომისაგან (შესაძლებლობის ფარგლებში) განთავისუფლებული ორმაგი განაზომის სხვაობის ჭეშმარიტ შეცდომებს $d_1', d_2', \cdots, d_k'$-თი, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left.\begin{aligned} d_1' &= d_1 - \Theta \\ d_2' &= d_2 - \Theta \\ &\;\; \\ d_k' &= d_k - \Theta \end{aligned}\right\}; \tag{3.4.2.7}$$

და ზოგადად . . . $d_i' = d_i - \Theta$;

აქედან შეკრებით მივიღებთ

$$[d'] = [d] - k\Theta;$$

და, ვინაიდან

$$\Theta = \frac{[d]}{k},$$

$$[d'] = 0.$$

მაშასადამე, (7) ტოლობებით გამოთვლილი ორმაგი განაზომის სხვაობების ჭეშმარიტი შეცდომები, როგორც სისტემატური შეცდომისაგან თავისუფალი, უალბათესი შეცდომების თვისების მქონეა. ამის გამო ყოველი ცალკეული ორმაგი განაზომის სხვაობის m_d საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა შეგვიძლია, ნაცვლად (2) ფორმულისა, ბესელის ფორმულით

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[d'd']}{k-1}}. \tag{3.4.2.8}$$

(3) და (8) ფორმულების შედარებით გამოითვლება ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელიც თავისუფალია სისტემატური შეცდომისაგან

$$m=\frac{m'}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(\tau-1)}}. \qquad (3.4.2.9)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.1. კუთხე გაზომილია ოთხი სრული წრიული ილეთით და მისი ოდენობა განსაზღვრულია $M=\pm3''$-ს საშუალო კვადრატული შეცდომით (ეს ოდენობა მიღებულია დასაშვებად). განვსაზღვროთ ერთი წყვილი ილეთის დასაშვები m_d საშუალო კვადრატული შეცდომა.

პ ა ს უ ხ ი.

1) ერთი სრული წრიული ილეთით მიღებული კუთხის m საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 3. 7.2) ფორმულით

$$m=M\sqrt{n}=\pm3''\sqrt{4}=\pm6'';$$

2) ყოველი ერთი სრული წრიული ილეთის შედეგთა ურთიერთგანსხვავებისათვის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა (3) ფორმულით იქნება

$$m_d=m\cdot\sqrt{2}=\pm6''\times1,41\approx8'',5,$$

ე. ი. ერთი და იმავე კუთხის ზედიზედ გაზომვით მიღებული ორი განაზომის სხვაობა არ უნდა აღემატებოდეს $\pm$ 8", 5-ს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.2. სამკუთხედის თითოეული კუთხის გაზომვის m საშუალო კვადრატული შეცდომა დასაშვებია $\pm3''$. სამკუთხედში კუთხეთა შეუკვრელობა ω მივიღეთ — 5". განვსაზღვროთ დასაშვებია თუ არა ასეთი ოდენობის შეუკვრელობა.

პ ა ს უ ხ ი.

1) ცნობილია, რომ ბრტყელი სამკუთხედის შიგნით კუთხეთა პრაქტიკულ ჯამს და თეორიულ ჯამს შორის სხვაობა უნდა უდრიდეს ნულს. მაგრამ სინამდვილეში მიღებულია $\omega=-5''$, რაც $[(\alpha+\beta+\gamma)-180°]$ სხვაობის შეცდომას წარმოადგენს, მაგრამ აქ (3) ფორმულა ვერ გამოდგება, რადგანაც მაკლები არ არის უშუალოდ გაზომილი სიდიდე. ასეთი გამოსახულების საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 4. 1. 4) ფორმულით

$$m_\omega=\sqrt{m_\alpha^2+m_\beta^2+m_\gamma^2}.$$

პირობის თანახმად $m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=m=\pm3''$,

მაშასადამე, დასაშვები შეუკვრელობა

$$m_\omega=\sqrt{3m^2}=\pm m\sqrt{3}=\pm3\sqrt{3}\approx5'',1.$$

ამგვარად,

$$5''\leqslant3\sqrt{3}\approx5'',1,$$

ე. ი. მიღებული შეუკვრელობა დასაშვებია.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვიმსჯელოთ სათანადო კლასის ტრიანგულაციის ორ პუნქტს შორის გაშლილი პოლიგონის კუთხეთა შეუკვრელობის შესახებაც.

მაგალითად, ვიცით, რომ $\omega = \sum_{1}^{n+1} \beta - (\alpha_k - \alpha_H) + (n+1)\,180°$, სადაც α_H და α_k პოლიგონის საწყისი და ბოლო გვერდის დირექციული კუთხეებია. β_i არის მარცხენა კუთხეები და n—გვერდების რიცხვი. თუ ამ დირექციულ კუთხეებს მივიღებთ უშეცდომო სიდიდეებად და β_i კუთხეებს ჩავთვლით ტოლზუსტად გაზომილ სიდიდეებად, მაშინ უნდა იქნეს დაცული შემდეგი უტოლობა:

$$\omega \leqslant m\sqrt{n+1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.3. ჩვეულებრივ, პოლიგონის გვერდებს ზომავენ ორჯერ ზედიზედ და, თუ განაზომთა სხვაობა არ გადასცილდა გარკვეულ ზღვარს, მაშინ პოლიგონის თითოეული გვერდის უალბათეს სიდიდედ მიიღება ორმაგი განაზომის საშუალო არითმეტიკული. ვთქვათ, რომელიმე გვერდის ორი განაზომი არის

$$l_1 = 94{,}375 \text{ მ და } l_2 = 94{,}381 \text{ მ, ე. ი.}$$

$$k = 1;$$

$$d = l_1 - l_2 = 94{,}375 - 94{,}381 = -0{,}006 \text{ მ.}$$

(5) ფორმულით ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0{,}006}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}0043 \text{ მ.}$$

მიღებული შედეგი სრულიად აკმაყოფილებს ხაზის ბაფთით გაზომვის (1:2000) სიზუსტეს, ე. ი. ხაზის ასეთი სიზუსტით ორჯერ გაზომვა საკმარისია (საბოლოო სიდიდედ მიიღება განაზომთა საშუალო არითმეტიკული).

იგივე მაგალითის გამოყვანა შეიძლება ბესელის ფორმულის გამოყენებით, სქემა 1.

სქემა 3.4.2.1

№ რიგ.	l	v	v^2	შენიშვნა
1 2	94,375 94,381	−3 +3	9 9	$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{18}{1}} = \pm 4{,}2$ მმ
L_0	94,378	0	18	

თვით გვერდის ორმაგი განაზომის L_0 უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{4{,}2}{1{,}41} \approx \pm 3{,}0 \text{ მმ,}$$

ე. ი.

$$L_0 = 94{,}378 \pm 0{,}003 \text{ მ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.4. სამთო გამონამუშევრის გვირაბში დანიშნულია 8-გვერდიანი პოლიგონი. გვერდების სიგრძეები დაახლოებით ერთნაირია და გა-

რემო პირობებიც უცვლელია, ე. ი. გაზომვები ერთგვაროვანი და ტოლზუსტია. გვერდები გაზომილია ორ-ორჯერ; საჭიროა თითოეული განაზომის m საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა.

ს ქ ე მ ა 3.4.2.2

გვერ-დის №	l' განაზომი წინ მეტ-რებში	l'' განაზო-მი უკან მეტრებში	d სმ	d^2	d', სმ	$d'd'$	L
1	2	3	4	5	6	7	8
1	85,54	85,61	−7	49	−6	36	85,58
2	84,80	84,85	−5	25	−4	16	84,82
3	86,26	86,20	+6	36	+7	49	86,23
4	85,35	85,31	+4	16	+5	25	85,33
5	85,46	85,52	−6	36	−5	25	85,49
6	84,75	84,79	−4	16	−3	9	84,77
7	86,15	86,15	0	0	+1	1	86,15
8	84,64	84,60	+4	16	+5	25	84,62
			+14 −22 $[d]=-8$	194 $[d^2]$	+18 −18 $[d']=0$	168 $[d'd']$	

$$\Theta=\frac{[d]}{k}=-\frac{8}{8}=-1 \text{ სმ.}$$

მე-4 სვეტში (სქემა 2) მოთავსებული ორმაგ განაზომთა სხვაობებით მიღე-ბული ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგი მეორე სახისაა; რადგან სისტემატური შეც-დომის გავლენა ნაკლებია, ამიტომ მე-5 და მე-7 სვეტების შედეგებიც თით-ქმის ერთნაირია. ამის გამო თითოეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა შეიძლება გამოთვლილ იქნეს (4) ფორმულით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2k}}=\pm\sqrt{\frac{194}{2\cdot 8}}\approx\pm 3,5 \text{ სმ.}$$

ყოველი გვერდის ორჯერ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა გა-მოითვლება (3. 3. 7. 2) ფორმულით

$$m_L=\frac{m}{\sqrt{2}}=\pm\frac{3,5}{\sqrt{2}}\approx\pm 2,5 \text{ სმ.}$$

ყოველი ხაზის გაზომვის სიზუსტე გამოითვლება (3. 3. 13. 1) ფორმულით და იქნება მიახლოებით

$$\frac{m_L}{L}=\pm\frac{2,5}{8500}\approx\frac{1}{3000}.$$

გამოყენებული საზომისა და პირობებისათვის ხაზის ერთჯერ გაზომვის მოსალოდნელი შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომა გა-მოითვლება (3. 4. 1. 14′) ფორმულით და იქნება მიახლოებით

$$\mu=\frac{m}{\sqrt{L}}=\pm\frac{3,5}{\sqrt{8500}}\approx\pm 0,038.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.5. გაზომილია პოლიგონის შვიდი კუთხე. თითოეული კუთხე განსაზღვრულია წრედი მარჯვნივ (R) და წრედი მარცხნივ (L) საშუალებით. საბოლოოდ ყოველი კუთხის ოდენობა გამოთვლილია როგორც საშუალო ორი წრედის ანათვლებისა. საჭიროა გამოითვალოს კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა როგორც ერთი წრედის, ისე ორივე წრედის საშუალო არითმეტიკულისათვის

სქემა 3.4.2.3

კუთხე №	განაზომები		$d=R-L$	d^2	$d'=d_i-\Theta$	$d'd'$	L_0
	წრ. მჯ. (R)	წრ. მც. (L)					
1	2	3	4	5	6	7	8
1	178° 15′,8	178° 17′,2	−1,4	1,96	−0′,4	0,16	178° 16′,5
2	182° 24′,4	182° 25′,2	−0,8	0,64	+0′,2	0,04	182° 24′,8
3	140° 40′,1	140° 40′,7	−0,6	0,36	+0′,4	0,16	140° 40′,4
4	99° 52′,4	99° 53′,8	−1,4	1,96	−0′,4	0,16	99° 53′,1
5	175° 29′,2	175° 29′,7	−0,5	0,25	+0′,5	0,25	175° 29′,4
6	190° 55′,6	190° 56′,3	−0,7	0,49	+0′,3	0,09	190° 56′,0
7	182° 26′,2	182° 27′,8	−1,6	2,56	−0′,6	0,36	182° 27′,0
			−7,0 $[d]$	8,22 $[d^2]$	+1,4 −1,4 $[d']=0$	1,22 $[d'd']$	

$$\Theta=\frac{[d]}{k}=-\frac{7}{7}=-1'.$$

მე-4 სვეტის (სქემა 3) ჭეშმარიტი შეცდომები მიღებულია სულ ერთი ნიშნით, ე. ი. გვაქვს სისტემატური შეცდომები. შეცდომათა თეორიის თანახმად, აღნიშნული თეოდოლიტით კუთხის განსაზღვრის სიზუსტის სწორად შეფასებისათვის საჭიროა სისტემატური გავლენისაგან მე-4 სვეტის ოდენობების განთავისუფლება. მე-6 სვეტი შედგენილია თანამიმდევრობით $d_1'=d_1-\Theta$, $d_2'=d_2-\Theta$ და ა. შ.

ყოველი კუთხის ერთი წრედით განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (9) ფორმულით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(k-1)}}=\pm\sqrt{\frac{1.22}{2\cdot 6}}=\pm\sqrt{\frac{1,22}{12}}=\pm 0',3.$$

კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როგორც შედეგი ორი წრედის შედეგთა $\frac{R+L}{2}$ საშუალო არითმეტიკულისა, ტოლი იქნება

$$M'_\alpha=\frac{m}{\sqrt{2}}=\pm\frac{0',3}{\sqrt{2}}\approx\pm 0',2.$$

ვთქვათ. გაზომვათა რიცხვი არის ოთხი (ორი სრული გაზომვა), მაშინ ყოველი კუთხე იქნება განსაზღვრული

$$M_\alpha = \frac{m}{\sqrt{4}} = \pm \frac{0',3}{2} = \pm 0'.15$$

საშუალო კვადრატული შეცდომით, ანუ $\frac{0,15}{3438} \approx \frac{1}{23000}$ სიზუსტით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.6. ქვემოთ მოთავსებული სქემის მეორე სვეტში მოცემულია სხვადასხვა რიცხვების $\frac{a \cdot b}{c}$ გამოსახულების გამონათვლები 0,1 სიზუსტით; ეს გამონათვლები მივიღოთ ჭეშმარიტ ოდენობებად. იგივე გამოსახულება ურთიერთდამოუკიდებლად ორმა პირმა გამოთვალა ერთი და იგივე 25—სანტიმეტრიანი ლოგარითმული სახაზავით. პირველი რიგის გამონათვალი ჩაწერილია ცხრილის მე-3 სვეტში და მეორესი — მე-6 სვეტში, საჭიროა გაირკვეს თუ $\frac{a \cdot b}{c}$ გამოსახულების ორმაგი გამონათვლების სხვაობები, ანუ ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგი რომელი სახისაა, და შემდეგ გამოთვლილ იქნეს ყოველი ცალკეული გამონათვალის საშუალო კვადრატული შეცდომა როგორც ორმაგი განაზომების ფორმულით, ისე ცალკეულ გამონათვალთა ზუსტი გამონათვლისაგან გადახრების საშუალებით (სქემა 4).

სქემა 3.4.2.4

№№ რიგზე	გამოსახულება და პასუხი სიზუსტით 0,1	ლოგარითმულ სახაზავზე გამონათვლები						$d=l''-l'$	d^2	შენიშვნა
		პირველი პირის მიერ			მეორე პირის მიერ					
		l'	δ	$δ^2$	l''	δ	$δ^2$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\frac{2\ .4 \times 38,3}{1,48}=599,9$	601	+1,1	1,21	600	0,1	0,01	+1	1	
2	$\frac{20,2 \times 40,4}{1,28}=637,6$	638	−0,4	0,16	639	+1,4	1,96	−1	1	$[δ^2]$= მე-5 და მე-8 სვეტების ჩანაწერთა ჯამს
3	$\frac{42,2 \times 22,3}{1,62}=580,9$	580	−0,9	0,81	579	−1,9	3,61	+1	1	
4	$\frac{43,9 \times 21,2}{1,32}=703,4$	704	+0,6	0,36	705	−1,6	2,56	−1	1	
5	$\frac{16,3 \times 88,4}{2,14}=632,0$	632	0,0	0,0	632	0	0	0	0	
						−1,6 [δ]	10,68 $[δ^2]$	0 [d]	4 $[d^2]$	

როგორც მე-9 სვეტიდან ჩანს, ორმაგ გამონათვალთა სხვაობების ჭეშმარიტ შეცდომათა რიგი მეორე სახისაა, ე. ი. სისტემატური შეცდომების გავ-

ლენა განაზომებზე უმნიშვნელოა; ამიტომ ყოველი გამონათვალის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრისათვის ვისარგებლებთ (4) ფორმულით

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2k}} = \pm \sqrt{\frac{4}{2 \cdot 5}} = \pm 0{,}63.$$

ამ მაგალითში ცნობილია ყოველი გამოსახულების ჭეშმარიტი ოდენობა საჭირო სიზუსტით, რომელიც მოთავსებულია მე-2 სვეტში; აგრეთვე გამოთვლილია ლოგარითმულ სახაზავზე ყოველ გამონათვალსა და შედარებით ზუსტ გამონათვალს შორის სხვაობები და მათი კვადრატები და მოთავსებულია მე-4—5 და მე-7—8 სვეტებში. შეცდომების მიღებული რიგი სრულად ავლინებს მეორე სახის რიგის შეცდომების თვისებებს, ამიტომ ყოველი ცალკეული გამონათვალის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოვითვალოთ (3. 3. 5. 1) ფორმულით

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{10{,}68}{10}} = \pm 1{,}03.$$

როგორც ვხედავთ, (4) ფორმულით გამოთვლილი საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე შედარებით მცირეა. როგორც შეცდომათა რიგებიდან ჩანს (ორივე მეორე სახისაა), გამონათვლებზე ვერ მოახდინა გავლენა გამოთვლების ერთნაირმა პირობებმა, მაგრამ მაინც უნდა ვიფიქროთ, რომ სისტემატური შეცდომების მრავალი წყარო ორმაგ გამონათვალთა სხვაობებში ერთმანეთს აბათილებს და ამიტომ შედარებით მცირეა (4) ფორმულით გამოთვლილი m.

მართლაც, სისტემატური შეცდომის ოდენობა Θ ორმაგი d_i სხვაობებით იქნება

$$\Theta = \frac{[d]}{k} = \frac{0}{5} = 0$$

და δi ცალკეული განაზომების სიდიდის ჭეშმარიტი ოდენობიდან გადახრების საშუალებით გამოთვლილი კი იქნება

$$\Theta' = \frac{[\delta]}{n} = \frac{-1{,}6}{10} = -0.16,$$

$$\text{ქ} \qquad n = 2k.$$

ე. ი. $\Theta < \Theta'$. ამიტომ (m) საშუალო კვადრატული შეცდომა, გამოთვლილი (4) ფორმულით, მცირეა (3. 3. 5. 1) ფორმულით გამოთვლილ საშუალო კვადრატულ შეცდომასთან შედარებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.2.7. გაზომილია ხაზი ათჯერ წინ და უკან. გამოვითვალოთ ხაზის უალბათესი სიგრძე და μ შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი (სქემა 5).

ხაზის თითოჯერ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა (9) ფორმულით იქნება

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d'd']}{2(k-1)}} = \pm \sqrt{\frac{167}{2(10-1)}} = \pm 3{,}0 \text{ მმ.}$$

№ რიგზე	განაზომები წინ (s'), მ	განაზომები უკან (s''), მ	d (მმ)	d' (მმ)	d'd'	v წინ (მმ)	v² წინ	v უკან (მმ)	v² უკან	შენიშვნა
1	376,350	376,356	−6	+4	16	−5	25	−9	81	$\theta = \frac{-105}{10} =$
2	360	368	−18	−8	64	−5	25	+3	9	$= -10,5 \approx -10$ მმ
3	355	362	−7	+3	9	0	0	−3	9	$d_i' = d_i - \theta$
4	335	352	−17	−7	49	−20	400	−13	169	
5	348	360	−12	−2	4	−7	49	−5	25	
6	370	380	−10	0	0	+15	225	+15	225	
7	360	370	−10	0	0	+5	25	+5	25	$v_{წინ} = s' - L'$
8	350	360	−10	0	0	−5	25	−5	25	
9	370	375	−5	+5	25	+15	225	+10	100	$v_{უკან} = s'' - L''$
10	360	370	−10	0	0	+5	25	+5	25	
	376,355 L'	376,365 L''	−105	−5	167	−2	1024	+3	693	
L	376,360 მ									

(3· 4. 1· 14') ფორმულით ერთჯერ გაზომვისათვის შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი იქნება.

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{L}} = \pm \frac{3,0}{\sqrt{376360}} \approx \pm 0,00016,$$

(3· 3. 8· 2) ფორმულით

$$m_{წინ} = \pm \sqrt{\frac{[v^2_{წინ}]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{1024}{9}} \approx \pm 11 \text{ მმ}$$

და

$$m_{უკან} = \pm \sqrt{\frac{[v^2_{უკან}]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{693}{9}} \approx \pm 8,8.$$

საშუალოდ

$$m = \frac{m_წ + m_უ}{2} = \frac{11+8,8}{2} \approx 10 \text{ მმ},$$

$$\mu = \pm \frac{10}{\sqrt{376360}} \approx \pm 0,0006.$$

როგორც ვხედავთ, საშუალო კვადრატული შეცდომა (3· 3. 8· 2) ფორმულით გამოთვლილი სამჯერ მეტია (9) ფორმულით გამონათვალთან შედარებით.

3. 4. 3. ბესელის ფორმულის გამოყვანა ორმაგ განაზომთა ფორმულის გამოყენებით

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სიდიდის n ტოლზუსტ განაზომთა $l_1, l_2, \ldots, l_n$ მწკრივი, რომლის საშუალო არითმეტიკული L-ია და უალბათესი შეცდომა v_i. ვიცით, რომ

$$v_1 = l_1 - L$$
$$v_2 = l_2 - L$$

$$v_n = l_n - L,$$

საიდანაც შეიძლება დაიწეროს

$v_1 - v_2 = l_1 - l_2 = d_{1,2}$

$v_1 - v_2 = l_1 - l_3 = d_{1,3} \quad v_2 - v_3 = l_2 - l_3 = d_{2,3}$

$v_1 - v_4 = l_1 - l_4 = d_{1,4} \quad v_2 - v_4 = l_2 - l_4 = d_{2,4} \quad v_3 - v_4 = l_3 - l_4 = d_{3,4}$

$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$

$v_1 - v_n = l_1 - l_n = d_{1,n} \quad v_2 - v_n = l_2 - l_n = d_{2,n} \quad v_3 - v_n = l_3 - l_n = d_{3,n} \quad v_{n-1} - v_n = l_{n-1} - l_n = d_{(n-1),n}.$

როგორც ვხედავთ, რაიმე სიდიდის n განაზომთა რიგიდან შეიძლება მივიღოთ იმდენი k სხვაობა, რამდენი ორელემენტიანი ჯუფთებათა რიცხვის შედგენაც შეიძლება n ელემენტისაგან, ე. ი.

$$k = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\,. \tag{3.4.3.1}$$

აგრეთვე ნათლად ჩანს, რომ განაზომთა ყოველი სხვაობის შეცვლა შეგვიძლია თანამიმდევრობით შესაბამისი უალბათესი შეცდომების სხვაობით. ამ k რაოდენობის სხვაობებში თითოეული უალბათესი შეცდომა მეორდება $(n-1)$-ჯერ.

(3. 4. 2. 4) ფორმულაში $[d^2]$ სიდიდე გამოვსახოთ უალბათესი შეცდომების საშუალებით, რისთვისაც ზემოთ მიღებული v_i -ის სხვაობები თანამიმდევრობით ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$[d^2] = (n-1)[v^2] - 2[v_i \cdot v_j]. \tag{3.4.3.2}$$

ვისარგებლოთ ცნობილი იგივეობით

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n)^2 = [v^2] + 2[v_i \cdot v_j],$$

მაგრამ

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n) = [v] = 0;$$

მაშასადამე,

$$-2[v_i \cdot v_j] = +[v^2].$$

თუ ამ დამოკიდებულებას გამოვიყენებთ, (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$[d^2] = (n-1)[v^2] + [v^2] = n[v^2],$$

ანუ

$$[d^2]=n\,[v^2]. \qquad (3.4.3.3)$$

ახლა უკვე (3. 4. 2. 4) ფორმულისათვის საჭირო ელემენტები ცნობილია და, თუ მასში ჩავსვამთ (1) ტოლობიდან k-სა და (3)-დან $[d^2]$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2k}}=\pm\sqrt{\frac{n\,[v^2]}{2\,\frac{n\,(n-1)}{2}}},$$

ანუ

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

ამგვარად, თუ გვექნება რაიმე ობიექტის n ტოლზუსტ განაზომთა რიგი და მოვისურვებთ ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრას ორმაგი გაზომვების (3· 4· 2· 4) ფორმულით, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ (1) და (3) დამოკიდებულებებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.3.1. ერთი და იმავე კუთხის ხუთჯერ ზედიზედ ტოლზუსტ განაზომთა შედეგების შეფასება მოვახდინოთ ბესელისა და ორმაგი გაზომვების ფორმულების საშუალებით. სქემა 1.

სქემა 3.4.3.1

№ რიგზე	l	v	v^2	$d=l_i-l_j=v_i-v_j$	d^2
1	42°35′12″	−2″	4	−5″, +2″, −6″, −1″	25+4+36+1=66
2	17″	+3″	9	+7″ −1″, +4″	49+1+16=66
3	10″	−4″	16	−8″, −3″	64+9+73
4	18″	+4″	16	+5″	25=25
5	13″	−1″	1		
L	42°35′14″ $n=5$	0 $[v]$	46 $[v^2]$	$k=10$	$[d^2]=230$

შევამოწმოთ გამონათვლები (3) ფორმულით, მივიღებთ

$$[d^2]=230 \text{ და } n\,[v^2]=5\cdot 46=230,$$

ე. ი. $[d^2]=n\,[v^2]$, რაც გამოთვლის სისწორეს ადასტურებს;
მართლაც, (1) ფორმულით,

$$k=\frac{n\,(n-1)}{2}=\frac{5\,(5-1)}{2}=10.$$

ბესელის ფორმულით გვექნება

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{46}{4}}=\pm 3'',4.$$

ორმაგი გაზომვების ფორმულით

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2k}}=\pm\sqrt{\frac{230}{2\cdot 10}}=\pm 3'',..$$

საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\frac{3'',4}{\sqrt{5}}=\pm 1'',5.$$

მაშასადამე, კუთხის სიდიდე

$$L=42^\circ 35' 14''\pm 1'',5.$$

მიღებული შედეგი ნიშნავს, რომ კუთხე გაზომილია $\pm$ 1″,5 შეცდომით, ანუ

$$\frac{1,5}{206265}\approx\frac{1}{140000}\ \text{სიზუსტით.}$$

§ 4. 4. ზღვრული და დასაშვები შეცდომები

განაზომების შეცდომათა სახეობის (3. 1. 5 პარაგრაფი) გარჩევის დროს აღნიშნული იყო, რომ ტლანქი შეცდომები შეიძლება გაგებულ იქნეს ორგვარად. პირველი გაგებით ტლანქი შეცდომა ვუწოდეთ ისეთს, რომელიც შედეგია დამკვირვებლის უყურადღებობისა, გაზომვების დროს მარცხისა, და შევნიშნეთ, რომ ასეთი სახის შეცდომები განაზომებში შეიძლება იყოს და შეიძლება არა. ტლანქი შეცდომების მოვლინება დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი სერიოზულობით ასრულებს დამკვირვებელი თავის მოვალეობას. სხვა გაგებით ტლანქს უწოდებენ ისეთ შეცდომას, რომელიც აღემატება რაიმე პირობებისათვის წინასწარი გაანგარიშებით გათვალისწინებულ ზღვრულ შეცდომას. ასეთი შეცდომები არაა მარცხის ან უყურადღებობის შედეგი. მათი მოვლინება გამოწვეულია იმით, რომ სამუშაოს შესრულების პროცესში ვერ იყო დაცული წინასწარი გაანგარიშებით გათვალისწინებული პირობები ან გაზომვების დროს ჩვენგან შეუმჩნევლად შეცვლილმა გარემო პირობებმა მოახდინა უარყოფითი გავლენა წინასწარ დაგეგმილ და განხორციელებულ სამუშაოს ორგანიზაციაზე.

ამ პარაგრაფში ჩვენს მიზანს შეადგენს შევისწავლოთ საკითხი ზღვრული შეცდომის შესახებ, ე. ი. ისეთი შეცდომის შესახებ, რომელზედაც უფრო მეტი ოდენობის შეცდომა შესრულებულ გაზომვებში ტლანქ შეცდომად მიიჩნევა.

გარკვეულ პირობებში შესრულებული გაზომვების შედეგად მიღებული შეცდომების მეორე სახის რიგის **ზღვრული შეცდომა ეწოდება შემთხვევითი შეცდომის იმ უდიდეს მნიშვნელობას, რომელსაც შეიძლება მიაღწიოს ამ რიგის რომელიმე შემთხვევითმა შეცდომამ და რომელზედაც უფრო დიდი შეცდომის მოვლინება პრაქტიკულად ნაკლებად მოსალოდნელია (ნაკლებად ალბათიერია).**

პრაქტიკის სრული გარკვეულობით არა აქვს გადაწყვეტილი საკითხი ამა თუ იმ პირობებში ჩატარებული გაზომვებისათვის მოსალოდნელი შემთხვევითი შეცდომების უდიდესი ზღვრის შესახებ. ამიტომ თეორიაშიც გვაქვს ერთგვარი განუსაზღვრელობა ზღვრული შეცდომების ოდენობის დადგენის შესა-

ხებ. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია ამა თუ იმ პირობებისათვის საშუალო კვადრატული შეცდომა, თ ე ო რ ი ა ს ა შ უ ა ლ ე ბ ა ს გ ვ ა ძ ლ ე ვ ს ვ თ ქ ვ ა თ, თუ რ ო გ ო რ ი ს ი ხ შ ი რ ი თ შ ე ი ძ ლ ე ბ ა მ ო გ ვ ე ვ ლ ი ნ ო ს ა ნ ა ლ ო გ ი უ რ ი პ ი რ ო ბ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს ტ ო ლ ზ უ ს ტ გ ა ნ ა ზ ო მ თ ა რ ი გ ე ბ შ ი ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ო დ ე ნ ო ბ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი შ ე ც დ ო-მ ე ბ ი, რ ო მ ლ ე ბ ი ც გ ა მ ო ი ს ა ხ ე ბ ი ა ნ ც ნ ო ბ ი ლ ი ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს ჯ ე რ ა დ ი ო დ ე ნ ო ბ ე ბ ი თ.

ამგვარად, ყოველი ცალკეული განაზომის (m) საშუალო კვადრატული შეცდომა, ერთის მხრივ, იხმარება კრიტერიუმად შესრულებული გაზომვებისათვის და, მეორე მხრივ, მას ვუკავშირებთ განაზომთა რიგის ყოველ ცალკეულ შეცდომას. მაგალითად, თუ ცნობილია ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (m), ანალოგიური პირობებისათვის ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ნებისმიერი შემთხვევითი შეცდომის მოვლინების სიხშირე, გამოსახული m-ის ჯერადი რიცხვით.

ალბათობის თეორიაში დადგენილია, რომ, რაც უფრო დიდია ყოველი ცალკეული განაზომის შემთხვევითი შეცდომის სიდიდე, მით მისი მოვლინება გარკვეულ პირობებში ნაკლებად მოსალოდნელია. დადგენილია, რომ შემთხვევითი შეცდომების მოსალოდნელი მოვლინება, როდესაც შეცდომები ნაკლებია ამავე რიგისათვის გამოთვლილ საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე, 2/3 უდრის, მაშინ როცა m-ზე უფრო დიდი შეცდომების მოვლინების ალბათობა 1/3-ის ტოლია. ცალკეულ განაზომებში სხვადასხვა აბსოლუტური ოდენობის შემთხვევითი შეცდომების მოსალოდნელი მოვლინების გაამოსათვლელად ალბათობათა თეორია იძლევა ფორმულას [27].

$$w_{-km}^{+km}=w_0^{km}=k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{k^2}{6}+\frac{k^4}{40}-\frac{k^6}{336}+\frac{k^8}{3458}+\cdots\right). \qquad (3.4.4.1)$$

(1) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ გაზომვებში შეცდომების მოვლინების ალბათობა, რომელთა ოდენობა იცვლება $-km$-სა და $+km$ შორის ან, რაც იგივეა, აბსოლუტურად იცვლება 0-დან km-მდე, ამ ფორმულის საშუალებით სხვადასხვა ჯერადობის k კოეფიციენტისათვის შეიძლება შედგეს ცხრილი (ცხრილი 1), რომელიც სრულ წარმოდგენას იძლევა იმის შესახებ, თუ ტოლზუსტ განაზომებში როგორი სიხშირითაა მოსალოდნელი ამა თუ იმ ოდენობის ცალკეული შეცდომა.

მოყვანილი ცხრილიდან ნათლად ჩანს, რომ, რაც უფრო დიდია ცალკეული შემთხვევითი შეცდომის ოდენობა, მით მისი მოვლინების ალბათობა ნაკლებია; ასე მაგალითად, თუ ჩვენ ზღვრულ შეცდომად მივიღებთ $2m$-ს, მაშინ ამ ოდენობაზე ნაკლები ზომის შეცდომების მოვლინების ალბათობა იქნება 95,45% (მესამე სვეტი) და უფრო მეტი ოდენობის მქონე შეცდომების მოვლინების ალბათობა კი ედრება 4,55% (მე-4 სვეტი). მაშასადამე, განაზომებში რომ მივიღოთ ერთჯერ მაინც $2m$-ის ტოლი შეცდომა, საჭიროა 22-ჯერ გაზომვის შესრულება (მე-7 სვეტი). ახლა თუ ზღვრულ შეცდომად მივიღებთ $3m$-ს, მაშინ ამავე ცხრილიდან შეცდომების მოვლინების ალბათობა იქნება 99,73%—0,27% და 370. როგორც ჩანს, პირველ შემთხვევაში გაბედვა (რის-

ცხრილი 3.4.4.1

k ჯერადი რიცხვი	km	w^{km} ალბათობა %-ში ისეთი შეცდომის მოვლინებისა, რომლის ნაკლები იქნება km ზე	$1-w^{km}$ ალბათობა %-ში ისეთი შეცდომების მოვლინებისა, რომელიც მეტი იქნება km-ზე	შეცდომათა რაოდენობა 1000-მდე		განაზომთა საჭირო რაოდენობა, რომ მივიღოთ ერთი ცალკეული შეცდომა km-ს ტოლი $100:(1-w^{km})$
				km-ზე ნაკლები სიდიდის	km-ზე მეტი სიდიდის	
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	100,00	0	1000,0	1
0,5	0,5 m	38,30	61,70	383,0	617,0	2
1,0	1,0 m	68,27	31,73	682,7	317,3	3
1,5	1,5 m	86,60	13,40	866,0	134,0	8
2,0	2,0 m	95,45	4,55	954,5	45,5	22
2,5	2,5 m	98,80	1,20	988,0	12,0	82
3,0	3,0 m	99,73	0,27	997,3	2,7	370
3,5	3,5 m	99,95	0,05	999,5	0,5	2000
4,0	4,0 m	99,99	$0.00634 \approx 0,01$	999,9	0,1	15800

კი) უფრო დიდია, ვიდრე მეორე შემთხვევაში, ე. ი. უნდა მოველოდეთ იმას, რომ პირველ შემთხვევაში დაწუნებული ცალკეული განაზომების რიცხვი ედრება შესრულებული გაზომვების 4,55%-ს, მაშინ როდესაც მეორე შემთხვევაში გაცილებით უფრო ნაკლები რაოდენობის ფუჭ გაზომვას უნდა მოველოდეთ; მაგალითად, მიუღებელი შეცდომების რიცხვი სულ იქნება 0,27%.

გეოდეზიურ და სამარკშეიდერო გაზომვებში ზღვრულ შეცდომად მეტწილად იღებენ $2m$-ს. თუ ზღვრულ შეცდომას აღვნიშნავთ Δ_{lim}-ით, მაშინ

$$\Delta_{lim} = 2m. \tag{3.4.4.2}$$

ამ შემთხვევაში იგულისხმება სამუშაოს ისეთი ორგანიზაცია, რომ გაზომვებში დროულად შემჩნეული და აცილებული იქნეს ყოველი მარცხი; აგრეთვე ინსტრუმენტის შემოწმება-შესწორებით სათანადო გარემო პირობების შერჩევით და სამუშაოს გულმოდგინედ შესრულებით მიღებულ იქნეს განაზომები შეცდომათა რიგის იმ დახასიათებით, რასაც იძლევა თეორია ამასთანავე დაწუნებულ განაზომთა 4,55%-ის მოლოდინი დაყვანილი უნდა იქნეს მინიმუმამდე. გაზომვების შესრულების დროს სხვადასხვა ოდენობის შეცდომების მოვლინების სიხშირე უნდა შეესაბამებოდეს მე-2 ცხრილში მოყვანილ მონაცემებს.

დამკვირვებლები ხშირად ცდილობენ გაიმეორონ გაზომვა, თუ რომელიმე შეცდომა გადასცილდა ზღვრულ შეცდომას, და ამით როგორმე მიიღონ ცალკეული განაზომი დადგენილ ზღვრულ შეცდომაზე ნაკლები ან მისი ტოლი შეცდომებით. საკითხის ასეთი გადაწყვეტა არ არის თეორიულად სწორი ყოველთვის უნდა ვეცადოთ სამუშაოს შესრულება ისე იქნეს მოწყობილი, რომ ცალკეული შეცდომების რაოდენობა ოდენობის მიხედვით გამოისახოს პროცენტულად მე-2 ცხრილის შესაბამისად და არა ისე, რომ ყველა

შეცდომები 0—km	რაოდენობა %-ში	დამრგვალებით %-ში	შენიშვნა
0			
0—0,5m	38,30	38	1) 0—1m=68% ანუ 2/3
0,5m—1,0m	29,97	30	1m—4m=32% ანუ 1/3
1,0m—1,5m	16,33	16	
1,5m—2,0m	8,85	9	2) ჩვენს მიზანს შეადგენს,
2,0m—2,5m	3,35	3	რაც შეიძლება მცირე იქნეს
2,5m—3,0m	0,93	1	მოცემულ განაზომთა რიგში
3,0m—3,5m	0,22	1	2m-ზე გადაცილებული შემთხვე-
3,5m—4,0m	0,04	—	-ვითი შეცდომების რიცხვი.
	100%	100%	

მონაცემი ზღვრულზე ნაკლები, მაგრამ მასთან დაახლოებული გამოვიდეს.

არ უნდა ავურიოთ ერთმანეთში გარკვეული პირობებისათვის დადგენილი შეცდომების შეფასების კრიტერიუმის ოდენობა ყოველი ცალკეული შემთხვევითი შეცდომის ზღვრულ ოდენობასთან. პირველი ახასიათებს განაზომთა შეცდომების რიგს და მას ეწოდება საშუალო კვადრატული შეცდომა. ამ კრიტერიუმით ხდება შედარება შეცდომათა ერთგვაროვანი რიგებისა. მეორე კი ახასიათებს ამა თუ იმ რიგში ყოველ ცალკეულ შეცდომას და მას ეწოდება ზღვრული შეცდომა. ამ შეცდომით ვადგენთ დასაშვებია თუ არა აბსოლუტური ოდენობის მიხედვით განაზომებში მოვლინებული შემთხვევითი შეცდომა. მაგალითად, როდესაც მოცემულია შეცდომათა მეორე სახის რიგისათვის საშუალო კვადრატული შეცდომის დასაშვები ოდენობა, ანუ დაშვება, მაშინ მისი ჯერად ზღვრულ შეცდომას ეწოდება ყოველი ცალკეული შემთხვევითი შეცდომის დაშვება.

მაგალითი 3.4.4.1. ექვსი სრული წრიული ილეთით გაზომილი კუთხის M_α საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის $\pm 2''$,5-ს; განვსაზღვროთ თითოეული ილეთით განაზომთა ურთიერთ სხვაობის ზღვრული შეცდომის სიდიდე.

1) ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 3. 7. 2) ფორმულით იქნება

$$m = M_\alpha \cdot \sqrt{6}$$

2) ილეთებს შორის განსხვავების საშუალო კვადრატული შეცდომა (3.4.2.3) ფორმულით იქნება

$$m_{(\alpha_1-\alpha_2)} = m \cdot \sqrt{2} = M_\alpha \sqrt{6} \quad \sqrt{2} = \pm 8'',6.$$

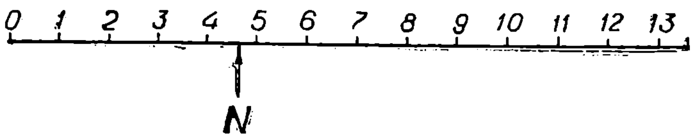
3) ზღვრული შეცდომა ილეთებს შორის განსხვავებისათვის გამოვითვალოთ (3. 4. 4. 2) ფორმულით

$$\Delta_{ზღ} = 2 \cdot m_{(\alpha_1-\alpha_2)} = \pm 2 \cdot 8,6 = 17'',2 \approx \pm 17''.$$

თუ ზღვრულ შეცდომად მივიღებთ $3m_{(\alpha_1-\alpha_2)}$-ს, მაშინ $\Delta_{lim}\approx 26''$. როცა საჭიროა წინასწარ საგანგებოდ გაანგარიშება სამუშაოს მეთოდის ან ინსტრუმენტის შერჩევის შესახებ, მაშინ ზღვრული მოსალოდნელი შეცდომის ოდენობად იღებენ $3m$-ს; ამ შემთხვევაში რისკს უშვებენ 0,3% ანუ სამ შემთხვევას 1000 შეცდომიდან. როდესაც ვასრულებთ წინასწარ გაანგარიშებას უაღრესად საპასუხისმგებლო სამუშაოებისას, მაშინ მოსალოდნელ ზღვრულ შეცდომად ვიღებთ $4m$-ს: და ამით მოსალოდნელი ფუჭი შრომა, ანუ გაბედვა (რისკი), მცირდება $\approx 0{,}01\%$-მდე. ცხადია, რომ ამ შემთხვევებში სათანადო მეთოდიკა და მაღალი სიზუსტის ინსტრუმენტების გამოყენების გამო m შესაბამისად მცირე იქნება.

3. 4. 5. დამრგვალების შეცდომები

ყოველ გაზომვას თან ახლავს სხვადასხვა სახის სკალებზე ანათვლების აღება. სკალებზე ანათვლების აღება ხდება უშუალოდ ან დანაყოფების ამთვლელი სპეციალური ხელსაწყოების საშუალებით. როგორც ვიცით, ყოველ განაზომში შედის როგორც გაზომვის, აგრეთვე თვით ანათვლების აღების შეცდომები, რომელთა ჭეშმარიტი ოდენობა ჩვენთვის უცნობია.



ნახ. 3.4.5.1.

პრაქტიკაში, ჩვეულებრივ, ანათვლებს იღებენ უახლოეს რიცხვამდე დამრგვალებით. ამის გამო საჭირო შეიქნა დამრგვალების შეცდომის დაწვრილებითი შესწავლა.

პირველ რიგში ისმის საკითხი — შეიძლება თუ არა დამრგვალების დასაშვები (უდიდესი) შეცდომის ზუსტად განსაზღვრა. წინასწარ უნდა ითქვას, რომ საკმარისი სიზუსტით პრაქტიკულად შეიძლება ვუჩვენოთ დამრგვალების დასაშვები შეცდომის ოდენობა. ავიღოთ სწორხაზოვანი სკალა AB (ნახ. 1) და დავუშვათ, რომ N ინდექსი დგას მე-4 და მე-5 შტრიხს შორის. ამავე დროს წინასწარ დათქმულია, რომ ანათვალი აღებულ იქნეს დამრგვალებით, სახელდობრ, ინდექსის მახლობელი მთელი დანაყოფის ოდენობამდე. ნახაზიდან ჩანს, რომ ინდექსის მახლობელი ხაზია 5. ამის გამო ჩავწერთ სკალაზე აღებულ დამრგვალებულ ანათვლად 5-ს. ვთქვათ, ზუსტად განვსაზღვრეთ ანათვალი და გამოვიდა 4,65, მაშინ **დამრგვალების ჭეშმარიტი შეცდომა იქნება**

$$\delta_{დ} = 5{,}0 - 4{,}65 = +0{,}35.$$

იმ შემთხვევაში, თუ ანათვალი შესაძლებლობის ფარგლებში ავიღეთ დამრგვალების გარეშე, და მივიღეთ 4,7, მაშინ **ანათვალის აღების ჭეშმარიტი შეცდომა იქნება**

$$\delta_{ან} = 4{,}70 - 4{,}65 = +0{,}05.$$

ზემოხსენებული წესით, თუ სკალაზე ინდექსის სხვადასხვა მდებარეობაში მრავალჯერ ავიღებთ ანათვლებს დამრგვალებით დანაყოფის მთელ ოდენობამდე და განვიხილავთ დამრგვალების ჭეშმარიტ შეცდომათა მიღებულ რიგს, შევნიშნავთ შემდეგ სამ თვისებას:

1. დამრგვალების არც ერთი შეცდომა აბსოლუტური ოდენობით არ აღემატება სკალის 0,5 დანაყოფს, რადგანაც ადამიანის თვალი საკმარისი სიზუსტით არჩევს ინდექსიდან მეზობელი შტრიხის უთანასწორო მდებარეობას;

2. სხვადასხვა შეცდომა აბსოლუტური ოდენობით 0—0,5 ფარგლებში ერთნაირად მოსალოდნელია, რადგანაც ინდექსს შეუძლია ჰქონდეს სკალის ამა თუ იმ შტრიხამდე ნებისმიერი მდებარეობა;

3. დადებითი და უარყოფითი შეცდომების მოვლინება ერთნაირად მოსალოდნელია, რადგანაც ერთნაირი შესაძლებლობაა ინდექსის ახლობლობისა სკალის როგორც უმცროს, ისე უფროსი შტრიხის მიმართ. როდესაც ინდექსი უმცროსი შტრიხის ახლოსაა, მაშინ შეცდომას ექნება მინუსი ნიშანი (დამრგვალებული ანათვალი ნაკლებია ჭეშმარიტ ანათვალზე) და როცა ინდექსი უფროსი შტრიხის მახლობლადაა, მაშინ შეცდომა პლუს ნიშნით იქნება (დამრგვალებული ანათვალი მეტია ჭეშმარიტ ანათვალზე).

როგორც ჩანს, დამრგვალების თითოეული შეცდომა ფორმით შემთხვევითი ხასიათისაა. ასეთი სახის შეცდომათა მწკრივების ერთობლივად განხილვა ავლინებს ამ შეცდომების მოვლინების იმ კანონზომიერებას, რომელიც ზემოთ იყო მოცემული დამრგვალების შეცდომათა სამი თვისების სახით.

განაზომთა შემთხვევითი შეცდომების და დამრგვალების შეცდომების პირველი და მესამე თვისება ერთი და იგივეა, მხოლოდ განსხვავება მეორე თვისებაშია. მაგალითად, თუ განაზომთა შემთხვევითი შეცდომების მეორე თვისების თანახმად აბსოლუტური ოდენობით მცირე შემთხვევითი შეცდომების მოვლინების სიხშირე მეტია შედარებით დიდ შეცდომებთან, დამრგვალების შეცდომების რიგის მეორე თვისებით 0—0,5 ზღვრებს შორის სხვადასხვა ოდენობის შეცდომის მოვლინება *ერთნაირად შესაძლებელია*. უნდა აღვნიშნოთ ისიც, რომ განაზომთა შემთხვევითი შეცდომებისა და დამრგვალების შეცდომების რიგების პირველი თვისებებიც სავსებით ერთნაირი არაა; დამრგვალების უდიდესი შეცდომის ზღვარი პრაქტიკულად უფრო განსაზღვრულია, ვიდრე განაზომთა რიგის ყოველი შემთხვევითი შეცდომისათვის.

დამრგვალების ზღვრული შეცდომა ეწოდება დამრგვალების უდიდეს შესაძლებელ შეცდომას. ზემოთ განხილულ მაგალითში (ნახ. 1) ასეთ სიდიდედ შეიძლება მივიღოთ დანაყოფის $\pm$ 0,5. ანალოგიურად ნებისმიერ კონკრეტულ შემთხვევაში ანათვალების დამრგვალების შეცდომის ზღვრული ოდენობა საკმარისი სიზუსტით შეგვიძლია დავნიშნოთ. მაგალითად, ვერნიერებზე ანათვალების აღების შეცდომები დამრგვალების შეცდომებია, რომელთა ზღვრული მნიშვნელობა $1'$, $30''$ და $10''$ ვერნიერებისათვის შესაბამისად იქნება $\pm 0',5$; $\pm 15''$ და $\pm 5''$. ან კიდევ, თუ საჭიროა ანათვალის დამრგვალება 1 დეციმეტრამდე, მაშინ დამრგვალების ზღვრული შეცდომა იქნება $\pm$0,5 დეციმეტრი. მაშასადამე, დამრგვალების ზღვრული შეცდომა არის 0,5 იმ თანრიგის ერთეულისა, სანამდეც მიღებულია ანათვალის დამრგვალება.

გეოდეზიური, სამარკშეიდერო და სხვა გამოთვლებისათვის საჭირო ფორმულებში, გარდა განაზომთა შედეგებისა, რომლებსაც ახლავთ გაზომვების

შემთხვევითი და დამრგვალების შეცდომები, შედის სხვადასხვა მუდმივი სიდიდეებიც. ეს სიდიდეები ჩათვლილია უშეცდომო სიდიდეებად და მათ შესახებ, როგორც შედეგის შეცდომაზე გავლენის მქონეზე, არ ვმსჯელობთ. უმეტეს შემთხვევაში ეს მუდმივი სიდიდეები წარმოადგენს სხვადასხვა ირაციონალურ, ანუ უსასრულო, არაპერიოდულ ათწილად რიცხვებს, როგორიცაა π, e, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, ლოგარითმები და სხვა. ამ სიდიდეთა გამოყენება გვიხდება საჭირო სიზუსტემდე მათი ოდენობების დამრგვალებით. მაშასადამე, არსებითად საქმე გვაქვს დამრგვალებულ მიახლოებით ოდენობებთან.

რიცხვების დამრგვალებისათვის არსებობს შემდეგი წესი:

დამრგვალებული ირაციონალური რიცხვის უკანასკნელ ათწილად ნიშანს გავადიდებთ ერთი ერთეულით იმ შემთხვევაში, თუ გადაგდებული ათწილადი ნაწილი მეტია დატოვებული ათწილადის უკანასკნელი ციფრის ერთეულის ნახევარზე, და დავტოვებთ უცვლელად, თუ გადაგდებული ათწილადი ნაწილი ნაკლებია ამ ოდენობაზე.

მაგალითად, ამ წესით π და e რიცხვი დამრგვალდება შემდეგნაირად:

3,141593; 3,14159; 3,1416; 3,142; 3,14.
2,718281; 2,71828; 2, 7183; 2,718; 2,72.

იმ შემთხვევაში, როდესაც რაციონალურ რიცხვებს ვამრავლებთ, გვხვდება ისეთი შემთხვევა, რომელსაც ადგილი არა აქვს ირაციონალური რიცხვების დამრგვალებისას, მაგალითად, ჩამოცილებული ნაწილი ზუსტად უდრის დატოვებული ათწილადის უკანასკნელი ციფრის ერთეულის 0,5-ს, ამ შემთხვევაში მიღებულია გადიდება ერთი ერთეულით დატოვებული ათწილადის უკანასკნელი ციფრისა. მაგალითად: 2,335 დამრგვალდება 2,34. გარდა ამისა, როცა ასეთი წესით დამრგვალებული რიცხვები დიდი რაოდენობისაა, მაშინ $+0,5$ და $-0,5$ დამრგვალებათა რიცხვი ერთნაირი სიხშირით მოგვევლინება და ურთიერთ კომპენსირების გამო შედეგებზე გავლენა ნაკლები გვექნება. ისევე, როგორც ანათვალების დამრგვალებისას, რიცხვის დამრგვალების ჭეშმარიტი შეცდომა უდრის დამრგვალებულ რიცხვს მინუს მისი ჭეშმარიტი ოდენობა. მაგრამ რიცხვის ჭეშმარიტი ოდენობა ხშირად უცნობია, ამიტომ უმრავლეს შემთხვევაში უცნობია ჭეშმარიტი შეცდომაც როგორც აბსოლუტური ოდენობით, ისე ნიშნით. მაგრამ ზემოხსენებული დამრგვალების წესის საფუძველზე დამრგვალებული რიცხვით შეიძლება დავადგინოთ დამრგვალების ზღვრული შეცდომის ოდენობა. მართლაც, **რიცხვის დამრგვალების ზღვრული შეცდომის ოდენობა უდრის დამრგვალებული რიცხვის უკანასკნელი ათწილადი ნიშნის ერთეულის ნახევარს.**

მაგალითად, თუ არ ვიცით მეოთხე ათწილადი ნიშანი დამრგვალებული 3,456 რიცხვისა, მაშინ ამ რიცხვის ზღვრულ შეცდომად მიიღება $\pm 0,0005 = 0,5 \times 10^{-3}$. საერთოდ, როცა დამრგვალებული რიცხვი n ათწილადი ნიშნისაგან შედგება, მაშინ დამრგვალების ზღვრული შეცდომა იქნება $0,5 \times 10^{-n}$, ხუთნიშნა ლოგარითმის დამრგვალების შეცდომაა $0,5 \times 10^{-5}$.

როგორც ვხედავთ, რიცხვის დამრგვალების შეცდომათა თვისებები

სრულიად იგივეა, რაც ანათვალების დამრგვალებისა. აღნიშნულს ადასტურებს პროფ. ა. ჩებოტარევის მიერ ჩატარებული ცდა შვიდნიშნა ლოგარითმების ცხრილის 1020-ჯერ ანაზდეულად გაშლით და ანაზდეულად მანტისის ამოკითხვის შემდეგ მათი დამრგვალებით ხუთნიშნამდე[1]. იგი აგდებდა, როცა მანტისის უკანასკნელი ორი ციფრი 50-ზე ნაკლები იქნებოდა, და ადიდებდა მანტისის მეხუთე ციფრს ერთი ერთეულით, როცა გადაგდებული უკანასკნელი ორი ციფრი მანტისისა მეტი იქნებოდა 50-ზე. ამგვარად მიიღო დადებითი შეცდომები 503 და უარყოფითი 517. აგრეთვე დამრგვალების შეცდომები ოდენობის მიხედვით განაწილდა შემდეგნაირად:

0-დან —	9-მდე	197	შეცდომა
10	19	213	"
20	29	204	"
30	39	195	"
40	49 "	211	"
	სულ	1020	

ეს ცდა ნათლად ადასტურებს იმ თვისებებს, რომლითაც ზემოთ დახასიათებული იყო ანათვლების დამრგვალების შედეგად მიღებული შეცდომების რიგი.

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ შემთხვევითი შეცდომებისა და დამრგვალების შეცდომების მეორე თვისება ერთნაირი არ არის. აღნიშნულ გარემოებას არა აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა, რადგანაც შემთხვევით შეცდომათა გავრცელების კანონების ახსნისათვის (მაგალითად, საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოყვანის დროს) ამ თვისებით არ ვსარგებლობდით. ასე რომ, დამრგვალების შეცდომებზეც შეიძლება გამოვიყენოთ ის წესები, რომლებიც მიღებული იყო გაზომვათა შემთხვევითი შეცდომების კანონის გავრცელების შესახებ. ამასთან დავასკვნით, რომ დამრგვალების შეცდომები იგივე ბუნების მქონედ შეიძლება ჩაითვალოს, როგორც გაზომვების შეცდომები და განვიხილოთ ისინი შემთხვევით შეცდომებად. დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 3. 5. 1) ფორმულით. მხოლოდ დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომის კავშირი ზღვრულ შეცდომასა და ალბათურ შეცდომასთან სხვა სახისაა, რაშიც ქვემოთ დავრწმუნდებით.

გ. 4. 6. დამრგვალების შეცდომების ზღვრული შეცდომებისა და საშუალო კვადრატული შეცდომების დამოკიდებულება

ვთქვათ, დამრგვალების ზღვრული შეცდომა არის სკალის ერთი დანაყოფის ნახევარი ან 0,5 რაიმე ზომის ერთეულისა (1 სმ, 1′), ან 0,5 დამრგვალებული რიცხვის უკანასკნელი ნიშნადი ციფრის ერთეულისა.

აღვნიშნოთ დამრგვალების ზღვრული შეცდომა α_e-ით. ცხადია, რომ დამრგვალების შეცდომები მოექცევა შემდეგ ინტერვალში:

$$-0{,}5 = -\alpha_e \leqslant \delta_e \leqslant +\alpha_e = 0{,}5,$$

[1] А. С. Чеботарев. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятности. М., 1936 г. стр. 68.

სადაც δ_φ-თი აღნიშნულია დამრგვალების შეცდომა. დავუშვათ, რომ ამ ინტერვალში დამრგვალების შეცდომების ვარიაცია (ცვალებადობა) ხდება 0,1-ით. მაშინ ყველა შესაძლო დამრგვალების შეცდომები იქნება

$$-0{,}5;\ -0{,}4;\ -0{,}3;\ -0{,}2;\ -0{,}1;\ 0{,}0;\ +0{,}1;\ +0{,}2;\ +0{,}3;\ +0{,}4;\ +0{,}5.$$

თუ მოვისურვებთ დამრგვალების მნიშვნელობათა უფრო ზუსტად დაწერას, მაგალითად, ყოველ 0,01 შუალედში, მაშინ მწკრივი იქნება ასეთი:

$$-0{,}50;\ -0{,}49;\ \ldots;\ -0{,}02;\ -0{,}01;\ 0{,}00;\ +0{,}01;\ +0{,}02;\ \ldots;\ +0{,}49;\ +0{,}50$$

ასეთი რიგის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 3. 5. 1) ფორმულით გამოითვლება და იქნება

$$m_\varphi = \pm\sqrt{\frac{[\delta_\varphi^2]}{n}},$$

სადაც n არის ინტერვალში დამრგვალების შეცდომათა რაოდენობის გამომსახველი რიცხვი. პირველ შემთხვევაში $n=11$ და მეორე შემთხვევაში $n=101$.

კერძოდ, პირველი რიგიდან გვექნება

$$m_\varphi = \pm\sqrt{\frac{2\,(0{,}5^2+0{,}4^2+0{,}3^2+0{,}2^2+0{,}1^2)}{11}} \approx \pm 0{,}3.$$

დავწეროთ დამრგვალების შეცდომათა მწკრივი ზოგადი სახით, სადაც იგულისხმება დამრგვალების ყოველნაირი ოდენობის შეცდომების თანამიმდევრობა რაიმე ინტერვალში. დამრგვალების შეცდომათა ცვალებადობის გამომსახველი რიცხვი აღვნიშნოთ ε-ით (ε-ის შესაბამის ოდენობებად ზემოთ დაწერილ მწკრივში მიღებული იყო 0,1 და 0,01), მაშინ მისი სიდიდე იქნება

$$\varepsilon = \frac{\alpha_\varphi}{k} \tag{3.4.6.1}$$

ანუ

$$\alpha_\varphi = k\cdot\varepsilon, \tag{3.4.6.2}$$

სადაც k არის მთელი რიცხვი, რომელიც შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი ოდენობის, მაგალითად, პირველ მწკრივში $k=5$ და მეორეში $k=50$.

ამის შემდეგ შეგვიძლია დავწეროთ ზოგადი სახით დამრგვალების შეცდომათა მწკრივი $-\alpha_\varphi$ და $+\alpha_\varphi$ ინტერვალში

$$-k\varepsilon;\ -(k-1)\,\varepsilon;\ -\cdots-3\varepsilon;\ -2\varepsilon;\ -\varepsilon;\ 0;$$
$$+\varepsilon;\ +2\varepsilon;\ +3\varepsilon;\ +\cdots+(k-1)\,\varepsilon;\ +k\varepsilon.$$

ადვილი გასარკვევია, რომ ამ მწკრივში შეცდომათა n რაოდენობა ტოლია $(2k+1)$, ე. ი. $n=2k+1$.

მაშინ დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოისახება ზოგადად (3. 3. 5. 1) ფორმულით

$$m_\varphi^2 = \frac{2\,[\varepsilon^2+(2\varepsilon)^2+(3\varepsilon)^2+\cdots+(k\varepsilon)^2]}{2k+1},$$

ანუ

$$m_{\text{დ}}^2 = 2\varepsilon^2 \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}$$

ცნობილია, რომ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

ამიტომ გვექნება

$$m_{\text{დ}}^2=2\varepsilon^2 \frac{k(k+1)(2k+1)}{(2k+1)\cdot 6} = \frac{k^2\varepsilon^2(k+1)}{3k},$$

(2) ფორმულიდან $k^2\varepsilon^2$-ის მაგიერ შევიტანოთ $\alpha_{\text{დ}}^2$, მივიღებთ

$$m_{\text{დ}}^2=\frac{\alpha_{\text{დ}}^2(k+1)}{3k}=\alpha_{\text{დ}}^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3k}\right),$$

ანუ

$$m_{\text{დ}}=\pm\alpha_{\text{დ}}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3k}}. \qquad (3.4.6.3)$$

დამრგვალების ზღვრული შეცდომის ($\alpha_{\text{დ}}$) მოცემული (0,5) მნიშვნელობისათვის დამრგვალების $m_{\text{დ}}$ საშუალო კვადრატული შეცდომა მოიძებნება მით უფრო ზუსტად, რაც მეტია მწკრივის წევრთა რიცხვი, ანუ რაც მეტი ოდენობისაა k, რადგანაც წილადი $\frac{1}{3k}$ მიუახლოვდება 0-ს. ამიტომ დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომის ზუსტი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით

$$m_{\text{დ}}=\pm\frac{\alpha_{\text{დ}}}{\sqrt{3}}=\pm 0{,}58\alpha_{\text{დ}}\approx\pm 0{,}6\alpha_{\text{დ}}; \qquad (3.4.6.4)$$

აქედან

$$\alpha_{\text{დ}}=m_{\text{დ}}\sqrt{3}\approx 1{,}7m_{\text{დ}}. \qquad (3.4.6.5)$$

ცნობილია, რომ დანაყოფების ამთვლელი ხელსაწყოებით (ვერნიერი, მიკროსკოპი მაჩვენებლით, სკალით, მიკრომეტრით) მიღებული ანათვლების შეცდომები არის დამრგვალების შეცდომები. ცდებით დადგენილია, რომ ამ ხელსაწყოებით ანათვალის აღების დამრგვალების ზღვრული შეცდომა ტოლია გამოყენებული ხელსაწყოს t სიზუსტის ნახევრისა, ე. ი.

$$\alpha_{\text{დ}}=\pm 0{,}5t.$$

მაშასადამე, ანათვლის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (4) ფორმულით

$$m_{\text{დ}}\approx\pm 0{,}6\times 0{,}5t\approx\pm 0{,}3t, \qquad (3.4.6.6)$$

სადაც t არის დანაყოფების ასათვლელად გამოყენებული ხელსაწყოს სიზუსტე. ხშირად $m_{\text{დ}}$-ს უწოდებენ ანათვლის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

მიღებული ფორმულები გამოსახავს დამრგვალების ზღვრულ და საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შორის დამოკიდებულებას. მაგალითად, თუ 245,3; 608 და 0,002 რიცხვებისათვის დამრგვალების ზღვრული შეცდომა შესაბამისად არის 0,05; 0,5 და 0,0005, მაშინ (4) ფორმულით საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება 0,03; 0,3 და 0,0003. თუ რაიმე სიდიდის დამრგვალების შეცდომა ცნობილია დაახლოებით, მისი საშუალო კვადრატული შეცდომაც მიახლოებით იქნება.

$$m_{მაქ} = 0,6 a_{მაქ}.$$

როგორც ჩანს, კავშირი დამრგვალების ზღვრულ შეცდომასა და საშუალო კვადრატულ შეცდომას შორის სრულიად განსაზღვრულია და თ ე ო რ ი უ ლ ა დ დ ა ს ა ბ უ თ ე ბ უ ლ ი (ფორმულა (5)), ხოლო, როგორც 3.4.4 პარაგრაფში იყო ახსნილი, ყოველი ცალკეული გაზომვის შემთხვევითი შეცდომის ზ ღ ვ რ უ ლ შეცდომასა და ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ შ ე ც დ ო მ ა ს შორის დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა ს არა აქვს მ ტ კ ი ც ე თ ე ო რ ი უ ლ ი ს ა ფ უ ძ ვ ე ლ ი და ეს დამოკიდებულება მხოლოდ ცდებით წესდება ერთ და იმავე სიდიდეზე მრავალი დაკვირვების შედეგად (ფორმულა 3. 4. 4. 2).

(5) დამოკიდებულებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ანათვალების აღების დროს, თუ დამრგვალების შეცდომები არარსებულ სხვადასხვა სახის შემთხვევით შეცდომებს, მაშინ ზღვრულ დასაშვებ შეცდომად უფრო ზუსტი იქნება მივიღოთ

$$\Delta_{ზღ} = a_{მ} \approx 2m. \qquad (3.4.6.7)$$

ზემოთ იყო თქმული, რომ სკალაზე ანათვალების აღების დროს დ ა მ რ გ ვ ა ლ ე ბ ი ს შ ე ც დ ო მ ა და ა ნ ა თ ვ ლ ე ბ ი ს შ ე ც დ ო მ ა ე რ თ მ ა ნ ე თ შ ი არ უ ნ დ ა ა ვ უ რ ი ო თ. როგორც ვიცით, თუ სკალაზე ზუსტი 4,65 ანათვალის ნაცვლად ავიღეთ 5 დამრგვალებული ანათვალი, დამრგვალების შეცდომა იქნება $+0,35$ და, თუ დამრგვალების გარეშე ანათვალი, 4,70-ის ტოლია, მაშინ მივიღებთ ანათვალის შეცდომას, რომელიც ედრება 0,05; მეორე შემთხვევაში საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად (4) ფორმულის გამოყენება არ შეიძლება; აქ გამოიყენება (3. 3. 5. 1) ფორმულა.

3. 4. 1 პარაგრაფში სხვადასხვა ფუნქციის (ალგებრული ჯამის, ზოგადი სახის და სხვ.) საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი ფორმულების გამოყვანის დროს შემთხვევითი შეცდომის მეორე თვისებით არ ვსარგებლობდით, ამიტომ იმ ფუნქციათა საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლისას, რომლის წევრებიც (არგუმენტები) არის დამრგვალებული სიდიდეები, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ყველა ის ფორმულა, რომლებიც 3. 4. 1 პარაგრაფში იყო მოცემული.

დასასრულ უნდა შევნიშნოთ, რომ დამრგვალების შეცდომა თავისი ოდენობით თუ აღემატება შემთხვევითი შეცდომების სხვა წყაროების გავლენას და რამდენიმეჯერ გავიმეორებთ ერთი და იმავე სიდიდის გაზომვას, ათვლელი ინდექსის საწყისი მდებარეობიდან გადაუადგილებლად (მაგალითად, ვერნიერის ნულ-პუნქტის ლიმბის შტრიხისადმი გადაუადგილებლად), მაშინ ანათვლები ერთნაირი იქნება და განმეორებითი გაზომვები საბოლოო შედეგის სიზუსტეს არ გაზრდის. ამ შემთხვევაში დამრგვალების შეცდომები წარმოგვიდგება, როგორც მუდმივი შეცდომები. კომპენსაციის თვისებას მაშინ ექნება ადგილი, თუ განმეორებითი გაზომვებისათვის შეირჩევა ისეთი პირობე-

ბი, რომ ერთნაირად მოსალოდნელი იქნება სხვადასხვა ოდენობის დამრგვალების შეცდომები, ანუ ადგილი ექნება შეცდომების მეორე და მესამე თვისებას. ამიტომ, როდესაც გამოყენებული გვაქვს დაბალი სიზუსტის იარაღი, საჭიროა გაზომვის ყოველი განმეორების დროს ამთვლელი მოწყობილობის საწყისი ინდექსი გადაადგილებულ იქნეს სკალის ნებისმიერი სხვადასხვა შტრიხიდან (თეოდოლიტი, პლანიმეტრი და სხვ.). ამით მინიმუმამდე იქნება დაყვანილი როგორც ლიმბის სისტემატური და შემთხვევითი შეცდომები, ისე ლიმბზე ანათვლების დამრგვალების შეცდომების გავლენა.

8. 4. 7. განაზომთა სიზუსტის დახასიათება შემთხვევით და სისტემატურ შეცდომათა თანადროულად მოქმედების შემთხვევაში

შეცდომათა თეორიის ძირითადი ფორმულების გამოყვანისას იგულისხმებოდა, რომ განაზომთა შედეგებზე მოქმედებს მხოლოდ შემთხვევითი შეცდომები. თეორიულად დავადგინეთ, რომ ეს შეცდომები გროვდება გასაზომი სიდიდის ოდენობიდან კვადრატული ფესვის პროპორციულად; რაც შეეხება სისტემატურ შეცდომებს, მათ შესახებ თქმული იყო რომ შეცდომათა თეორიაში ასეთი სახის შეცდომები არ შეისწავლება, რადგანაც მათი ოდენობის განსაზღვრა ექსპერიმენტულად შეიძლება და შედეგზე მათი გავლენა ისპობა ინსტრუმენტის შესწორებით და გაზომვის სათანადო მეთოდის გამოყენებით. სინამდვილეში, მიუხედავად საჭირო ზომების მიღებისა, სისტემატური ხასიათის გავლენა განაზომთა შედეგებზე სრულიად ვერ ისპობა და განაზომში გვაქვს ე. წ. ნარჩენი სისტემატური შეცდომები, რასაც მოვლენების ფორმით შემთხვევითი შეცდომების ხასიათი აქვს. მიუხედავად იმისა, რომ ნარჩენი სისტემატური შეცდომები ოდენობის მიხედვით შემთხვევითი ხასიათისაა, მაინც მათი ნიშნის უცვლელობის გამო არ შეიძლება გამოყენება შეცდომათა თეორიის ძირითადი ფორმულებისა, როდესაც განაზომებში ასეთი სახის შეცდომები იგულისხმება და საჭირო ხდება შედეგთა შეფასება როგორც შემთხვევითი, ისე ნარჩენი სისტემატური გავლენის მხედველობაში მიღებით. ამავე დროს იგულისხმება, რომ განაზომთა შეცდომებში ნარჩენი სისტემატური გავლენის წილი შედარებით მცირეა.

გამოვიყვანოთ საშუალო კვადრატული შეცდომის ფორმულა ისეთ განაზომთა მწკრივისა, რომლის შ ე ც დ ო მ ე ბ ი რ ო გ ო რ ც შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი, ი ს ე ნ ა რ ჩ ე ნ ი ს ი ს ტ ე მ ა ტ უ რ ი შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს თ ა ნ ა დ რ ო უ ლ ა დ გ ა ვ ლ ე ნ ი ს შ ე დ ე გ ი ა. ამავე დროს დავუშვათ, რომ შეცდომათა წყარო თითოა როგორც შემთხვევითი შეცდომებისათვის, ისე ნარჩენი სისტემატური შეცდომისათვის.

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სიდიდის n ტოლზუსტ განაზომთა მწკრივი

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \cdots,\ l_n,$$

რომლის ჭეშმარიტი შეცდომები შესაბამისად არის

$$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3, \cdots,\ \partial_n.$$

ამ მწკრივის ყოველი შეცდომა შედეგია, როგორც შემთხვევითი, ისე

ნარჩენი სისტემატური შეცდომისა· პირველი აღვნიშნოთ δ_i-ით და მეორე σ_i-ით; ამ შემთხვევაში ნებისმიერ ჯამს

$$\partial_i = \delta_i + \sigma_i \tag{3.4.7.1}$$

უწოდებენ *რეზულტატურ* შეცდომას.

დავწეროთ გაშლილი სახით (1) ტოლობა

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 = \delta_1 + \sigma_1 \\ \partial_2 = \delta_2 + \sigma_2 \\ \\ \\ \partial_n = \delta_n + \sigma_n \end{array}\right\}. \tag{3.4.7.2}$$

ავიყვანოთ კვადრატში (2) ტოლობათა ყოველი წევრი, შემდეგ შევკრიბოთ და მიღებული ჯამი გავყოთ n-ზე, მივიღებთ

$$\frac{[\partial^2]}{n} = \frac{[\delta^2]}{n} + \frac{[\sigma^2]}{n} + 2\frac{[\delta\sigma]}{n}. \tag{3.4.7.3}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მესამე წევრის შემადგენლის ყოველი ხამრავლი შემთხვევითი და სისტემატური ერთობლივი გავლენისა ($\delta_i\sigma_i$) და ხასიათდება შემთხვევითი შეცდომების თვისებებით, ამის გამო უკანასკნელი წევრი $\frac{2[\delta\sigma]}{n}$, სხვა წევრებთან შედარებით, უმნიშვნელო იქნება, როდესაც (n) განაზომთა რიცხვი დიდია და ამიტომ მას უგულებელვყოფთ.

აღვნიშნოთ აგრეთვე შეცდომათა საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატები შესაბამისად

$$m_\partial^2 = \frac{[\partial^2]}{n}; \quad m_\delta^2 = \frac{[\delta^2]}{n}; \quad m_\sigma^2 = \frac{[\sigma^2]}{n}.$$

(3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$m_\partial^2 = m_\delta^2 + m_\sigma^2,$$

ანუ

$$m_\partial = \sqrt{m_\delta^2 + m_\sigma^2} \tag{3.4.7.4}$$

ე· ი· ერთი და იმავე სიდიდის ტოლზუსტ განაზომთა რიგის ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როდესაც იგი შედეგია შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომისა, ანუ იგი წარმოადგენს რეზულტატურ საშუალო კვადრატულ შეცდომას, უდრის კვადრატულ ფესვს შემთხვევითი გავლენისა და სისტემატური გავლენის საშუალო კვადრატულ შეცდომათა კვადრატების ჯამიდან·

უნდა აღინიშნოს, რომ ყოველი ცალკეული განაზომის *რეზულტატურ საშუალო კვადრატულ შეცდომასა* და *ზღვრულ შეცდომას შორის კავშირი იგივე წესით* არ *შეიძლება გამოისახოს, როგორც* ეს *მოცემული იყო* 3· 4. 4 პარაგრაფში. იქ საქმე გვქონდა მხოლოდ შემთხვევით შეცდომებთან, აქ კი გვაქვს ნარჩენი სისტემატური შეცდომებიც· ამავე დროს, კავშირი შემთხვევითი შეცდომის საშუალო კვადრატულ

შეცდომასა და მისივე ზღვრულ შეცდომას შორის განსხვავებულია სისტემატური შეცდომის საშუალო კვადრატული შეცდომისა და მისივე ზღვრული შეცდომისაგან. ცნობილია, რომ მუდმივ შეცდომას აქვს უცვლელი როგორც აბსოლუტური ოდენობა, ისე ნიშანი, იგი გაზომვების პროცესში უცვლელია. სისტემატურ შეცდომას შეიძლება ოდენობა ეცვლებოდეს (იგი ოდენობით შემთხვევითია) და ნიშანი არა (მაგალითად, გასწორივობის შეცდომა, შეცდომა რელიეფის სხვადასხვაობის გამო და სხვ.), აგრეთვე შეიძლება იცვლებოდეს როგორც ოდენობა, ისე ნიშანი (მაგალითად, ლიმბის დანაყოფების სისტემატური შეცდომა, წრედალიდადის ექსცენტრობის გავლენა, თეოდოლიტის ღერძების დახრის კუთხეების გაზომვის დროს და სხვ.), ამ მიზეზების გამო სისტემატური გავლენის ოდენობა ხან დიდი იქნება და ხან უმნიშვნელო. ამიტომ, როგორც შევნიშნეთ, მხოლოდ შემთხვევითი შეცდომების კომპენსაციის კანონს ემყარება საშუალო კვადრატულ შეცდომასა და ზღვრულ შეცდომას შორის კავშირი. ზღვრული სისტემატური შეცდომა ხან ტოლი იქნება მისი საშუალო კვადრატული m_σ შეცდომისა და ხან გაცილებით მეტი. m_σ გვიჩვენებს ზღვრული შეცდომის მხოლოდ შესაძლო უმცირეს ოდენობას. ასე რომ, m_∂ **ვერ გამოიყენება ზღვრული შეცდომის განსაზღვრისათვის, მაგრამ, როგორც კრიტერიუმი განაზომთა რიგების შეფასებისათვის, ის გამოსაყენებელია.**

შევისწავლოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ შედარებით რა ოდენობისა უნდა იყოს ყოველ ცალკეულ რეზულტატურ შეცდომაში წილი სისტემატური გავლენისა, რომ მას განაზომთა რიგის სიზუსტის შემოწმებაზე გავლენა არ ჰქონდეს, ე. ი. შეიძლებოდეს სისტემატური გავლენის უგულებელყოფა.

დავუშვათ, რომ სისტემატური გავლენის სიდიდე განაზომებში მუდმივია როგორც აბსოლუტური ოდენობით, ისე ნიშნით და ზოგადად მისი ოდენობები აღვნიშნოთ σ_i-თი.

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\cdots=\sigma_n=\sigma,$$

მაშინ (2) დამოკიდებულებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} \partial_1&=\delta_1+\sigma\\ \partial_2&=\delta_2+\sigma\\ &\;\;\vdots\\ \partial_n&=\delta_n+\sigma \end{aligned}\right\}.$$

წინანდებურად ყოველი ტოლობა ავიყვანოთ კვადრატში, შევკრიბოთ და მიღებული ჯამი გავყოთ n-ზე, მივიღებთ

$$\frac{[\partial^2]}{n}=\frac{[\delta^2]}{n}+\sigma^2+2\sigma\frac{[\delta]}{n};$$

თუ ზემოთ მიღებულ აღნიშვნებს დავიცავთ და სიმცირის გამო $2\sigma\frac{[\delta]}{n}$-ს უგულებელვყოფთ, დავწერთ

$$m_\partial^2=m_\delta^2+\sigma^2.$$

აქედან

$$m_გ=\sqrt{m_დ^2-\sigma^2}=m_დ\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{m_დ^2}}.$$

როცა $|x|<1$, შეიძლება დავწეროთ

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\dots\approx 1-\frac{x}{2}.$$

ანალოგიურად, ჩვენთვის საკმარისი სიზუსტით შეგვიძლია მივიღოთ

$$m_გ=m_დ\left(1-\frac{\sigma^2}{2m_დ^2}\right). \tag{3.4.7.5}$$

თუ მოთხოვნილი იქნება, რომ $\frac{\sigma^2}{2m_დ^2}<0{,}01$, მაშინ უნდა დავიცვათ უტოლობა

$$|\sigma|<0{,}14|m_დ|.$$

იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა $\frac{\sigma^2}{2m_დ^2}<0{,}1$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$|\sigma|<0{,}45|m_დ|.$$

ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრის შეფარდებითი შეცდომის გამოსათვლელად (3. 3. 6. 1) ფორმულას

$$\frac{m_m}{m}=\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

და მოვითხოვთ, რომ დაცულ იქნეს უტოლობა

$$\frac{\sigma^2}{2m_დ^2}<\frac{m_m}{m}=\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

მივიღებთ

$$\sigma^2<\frac{2m_დ^2}{\sqrt{2n}}, \tag{3.4.7.6}$$

სადაც n არის ჭეშმარიტ შეცდომათა რაოდენობა, რომელთა საშუალებითაც გამოთვლილი იყო საშუალო კვადრატული შეცდომა.

როცა $n=50$, მაშინ (6) ფორმულით გვექნება

$$|\sigma|<0{,}45|m_დ|.$$

აქედან დავასკვნით, რომ ტოლზუსტ განაზომთა რიგის სიზუსტის დახასიათებისას, როცა σ სიდიდე[1] აკმაყოფილებს (6) უტოლობას, შეიძლება არ მივაქციოთ ყურადღება სისტემატურ გავლენას და მივიღოთ

$$m_გ=m_დ=m.$$

[1] σ ნარჩენი სისტემატური შეცდომა გამოითვლება სხვადასხვანაირად: აბსოლუტურ შეცდომათა საშუალო არითმეტიკულით, ორმაგი განაზომებით ან ექსპერიმენტული გზით.

ამასთანავე უნდა აღინიშნოს, რომ მაშინაც კი, როცა სისტემატური გავლენის სიდიდე მცირეა იმდენად, რომ ტოლზუსტ განაზომთა დახასიათებისათვის იგი უგულებელსაყოფია, მაინც m_g-ს სიდიდით შეცდომათა თეორიის წესებით რაიმე დასკვნების გაკეთებისათვის საჭიროა დიდი სიფრთხილე, ასეთ შემთხვევებში, როდესაც გამოითვლება განაზომთა რაიმე ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა, შეიძლება დავუშვათ ფუნქციის სიზუსტის დახასიათებისათვის მხოლოდ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი გ ა ვ ლ ე ნ ა და არაშემთხვევითი და სისტემატურ შეცდომათა ერთობლივი გავლენა. საერთოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ, როდესაც გაზომვებში სისტემატური შეცდომებია, მაშინ საშუალო განაზომთა ფუნქციების შეცდომების შესახებ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში საკითხი განსაკუთრებით უნდა იქნეს განხილული.

3. 4. 9- პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება, რომ იმ შემთხვევაშიაც, როცა სისტემატური გავლენის სიდიდე მცირეა, თითოეული ცალკე განაზომის ფუნქციის შეცდომა გარკვეულ პირობებში დიდ ოდენობას აღწევს და მის გარეშე განსაზღვრული ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა არ შეიძლება მიღებულ იქნეს ფუნქციის შეცდომის დამახასიათებლად.

3. 4. 8. განაზომთა სიზუსტის დახასიათება შემთხვევით და სისტემატურ შეცდომათა რამდენიმე წყაროს ერთდროულად მოქმედების შემთხვევაში

წინა პარაგრაფში ვგულისხმობდით, რომ განაზომებზე გავლენას ახდენს შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომის მხოლოდ თითო წყარო და ამის შესაბამისად მივიღეთ (3. 4. 7. 4) ფორმულა.

როდესაც შეცდომათა წყარო მრავალია, მაშინ განაზომებზე მოახდენს გავლენას შემთხვევითი და სისტემატური ხასიათის შეცდომები, როგორც რამდენიმე დამოუკიდებელი წყაროს შედეგი. ვთქვათ, მიღებული გვაქვს განაზომთა მწკრივი

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \cdots,\ l_n;$$

ამ მწკრივის ყოველი წევრი შეიცავს შესაბამისად

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \cdots,\ \delta_n$$

შემთხვევით შეცდომებს და

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3, \cdots,\ \sigma_n$$

ნარჩენ სისტემატურ შეცდომებს.

თავის მხრივ, ყოველი შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომა რამდენიმე წყაროს შედეგია.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ შეცდომების წარმომშობი წყაროები არის ორ-ორი როგორც შემთხვევითი, ისე სისტემატური ხასიათისა. მაშინ შემთხვევითი შეცდომებისათვის პირველი სახის წყაროები იქნება

$$\delta_1',\ \delta_2',\ \delta_3', \cdots,\ \delta_n'$$

და მეორე სახისა კი

$$\delta_1'',\ \delta_2'',\ \delta_3'', \cdots,\ \delta_n''.$$

ნარჩენი სისტემატური შეცდომებისათვის გვექნება

პირველი სახის წყაროები

$$\sigma_1',\ \sigma_2',\ \sigma_3', \cdots,\ \sigma_n'$$

და მეორე სახის წყაროები

$$\sigma_1'',\ \sigma_2'',\ \sigma_3'', \cdots,\ \sigma_n''.$$

ამ აღნიშვნებით ყოველი შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომა ზოგადად გამოისახება შემდეგი ტოლობებით:

$$\delta_i = \delta_i' + \delta_i'',$$

$$\sigma_i = \sigma_i' + \sigma_i'',$$

სადაც $i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$.

თუ ამ ტოლობების წევრებს ავიყვანთ კვადრატში, შევკრებთ და n-ზე გავყოფთ, მივიღებთ

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\delta'\delta']}{n} + \frac{[\delta''\delta'']}{n} + 2\frac{[\delta'\delta'']}{n},$$

$$\frac{[\sigma^2]}{n} = \frac{[\sigma'\sigma']}{n} + \frac{[\sigma''\sigma'']}{n} + 2\frac{[\sigma'\sigma'']}{n};$$

თუ წინანდებურად აღვნიშნავთ მიღებულ საშუალო კვადრატულ შეცდომებს, გვექნება

$$m_\delta^2 = m_{\delta'}^2 + m_{\delta''}^2 + 2\,\frac{[\delta'\delta'']}{n}; \tag{3.4.8.1}$$

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\,\frac{[\sigma'\sigma'']}{n}. \tag{3.4.8.2}$$

მრავალწევრის კვადრატის წესის მიხედვით მიღებული ყოველი წევრის ყველა დანარჩენ წევრებზე გაორკეცებული ნამრავლები ამ ფორმულებში შეგვიძლია შევცვალოთ შეცდომათა ყოველი სახის წყაროს (ერთობლიობის) საშუალო არითმეტიკულთა ნამრავლების გაორკეცებული სიდიდეებით. მაშასადამე, გვექნება

$$2\,\frac{[\delta'\delta'']}{n} \approx 2\frac{[\delta']}{n}\cdot\frac{[\delta'']}{n};$$

$$2\,\frac{[\sigma'\sigma'']}{n} \approx 2\frac{[\sigma']}{n}\cdot\frac{[\sigma'']}{n}.$$

როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ, შემთხვევით შეცდომათა თვისების თანახმად, $2\frac{[\delta'\delta'']}{n}$ წევრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო $2\frac{[\sigma'\sigma'']}{n}$ წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

მართლაც, თუ ყოველი სახის შეცდომას წარმოვიდგენთ საშუალო არითმეტიკულის სახით, მივიღებთ

$$\delta' = \frac{\delta_1' + \delta_2' + \delta_3' + \cdots + \delta_n'}{n} = \frac{[\delta']}{n} = 0$$

და

$$\delta'' = \frac{\delta_1'' + \delta_2'' + \delta_3'' + \cdots + \delta_n''}{n} = \frac{[\delta'']}{n} = 0.$$

მაგრამ სისტემატური შეცდომები ემორჩილება არა კომპენსაციის კანონს, არამედ სტატისტიკური კრებადობის და საბოლოოდ ზრდის კანონს. ამიტომ უნდა მივიღოთ, რომ

$$\sigma' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' + \cdots + \sigma_n'}{n} = \frac{[\sigma']}{n} = \Theta'$$

და

$$\sigma'' = \frac{\sigma_1'' + \sigma_2'' + \sigma_3'' + \cdots + \sigma_n''}{n} = \frac{[\sigma'']}{n} = \Theta''.$$

ამრიგად (1) და (2) ტოლობები დაიწერება შემდეგი სახით:

$$m_\delta^2 = m_{\delta'}^2 + m_{\delta''}^2; \tag{3.4.8.3}$$

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\Theta'\Theta''. \tag{3.4 8.4}$$

ზოგადად გვექნება

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + m_{\sigma'''}^2 + \cdots + m_{\sigma^n}^2 + 2\Theta'\Theta'' + 2\Theta'\Theta''' + \cdots +$$
$$+ 2\Theta'\Theta^n + \cdots + 2\Theta^{n-1}\Theta^n. \tag{3.4.8.4'}$$

როგორც ვხედავთ, სისტემატური შეცდომის მრავალი წყაროს არსებობის შემთხვევაში არ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შეცდომათა თეორიის ფორმულები. ამ შემთხვევაში ყოველი შეცდომა წარმოდგენილი უნდა იქნეს როგორც ერთობლივი ჯამი, (4') სახის ფორმულებით განსაზღვრული[1]. (3) და (4') ფორმულებით შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომების გამოთვლის შემდეგ, ამ შეცდომების სიდიდეთა საშუალებით, (3. 4. 7. 4) ფორმულით გამოითვლება ყოველი განაზომის რეზულტატური ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომის საბოლოო სიდიდე

$$m_d = \sqrt{m_\delta^2 + m_\sigma^2}.$$

განვიხილოთ ორი მაგალითი, რომელთაც გეოდეზიური პრაქტიკისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 8. 1. საჭიროა განისაზღვროს L კილომეტრის სიგრძის ნიველირსავლის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელზედაც ერთობლივად მოქმედებს შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომები.

ვთქვათ, ნიველირის ერთი დგომის შესაბამისი აღმატების შემთხვევითი და სისტემატური გავლენის საშუალო კვადრატულ შეცდომათა სიდიდეებია $m_{\delta'}$ და $m_{\sigma'}$; დავუშვათ, რომ ლარტყების დგომათა შორის l მანძილი გამოსახულია კილომეტრებში.

შემთხვევითი გავლენის ოდენობა იცვლება ნიველირის დგომათა რიცხვიდან კვადრატული ფესვის პროპორციულად, ხოლო სისტემატური გავლენისა— ნიველირის დგომათა რიცხვის პროპორციულად. ერთ კილომეტრზე ნიველი-

[1] კონკრეტული საკითხების გადაწყვეტისას თუ დადგენილ იქნა სისტემატური შეცდომების წყაროების ორნიშნიანობა, მაშინ შეიძლება გაორკეცებულ წევრთა უგულებელყოფა (იხილეთ შენიშვნა, გვერდი 376, სადაც გამოყენებულია შეცდომათა თეორიის 22.6 ფორმულა).

რის დგომათა რიცხვი იქნება $\frac{1\ კმ}{l\ კმ}$ და L კილომეტრზე კი $\frac{L\ კმ}{l\ კმ}$, მაშინ შემთხვევითი გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე L კილომეტრზე იქნება

$$m_{შ}=m_{შ'}\sqrt{\frac{L}{l}},$$

სისტემატური გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე კი იქნება

$$m_{ს}=m_{ს'}\frac{L}{l}.$$

საძიებელი ერთობლივი გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე ნიველირსავალის მთელი აღმატებისათვის იქნება

$$m_H=\sqrt{m_{შ}^2+m_{ს}^2}=\sqrt{(m_{შ'})^2\frac{L}{l}+(m_{ს'})^2\left(\frac{L}{l}\right)^2}$$

თუ აღვნიშნავთ $\frac{L}{l}=n$-ით, მივიღებთ

$$m_H=\sqrt{(m_{შ}')^2 n+(m_{ს}')^2 n^2}. \tag{3.4.8.5}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 4. 8. 2. განვსაზღვროთ საზომი ხელსაწყოთი ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე, თუ გამოყენებული საზომისა და პირობებისათვის შემთხვევითი და სისტემატური გავლენის კოეფიციენტებია μ და λ.

აღვნიშნოთ ხაზის სიგრძე L-ით, მაშინ შემთხვევითი გავლენის სიდიდე (6. 4. 1. 14) ფორმულის გამოყენებით იქნება

$$m_{L_{შემთ.}}=\mu\sqrt{L},$$

ხოლო სისტემატური გავლენა, როგორც მანძილის პროპორციული, გამოითვლება (3. 4. 1. 7) ფორმულის გამოყენებით

$$m_{L_{სისტ.}}=\lambda\cdot L.$$

ამ შეცდომათა ერთობლივი გავლენის m_L სიდიდე გამოისახება

$$m_L^2=\mu^2 L+\lambda^2 L^2,$$

საიდანაც

$$m_L=\sqrt{\mu^2 L+\lambda^2 L^2} \tag{3 4.8.6}$$

და

$$\frac{m_L}{L}=\sqrt{\frac{\mu^2}{L}+\lambda^2}. \tag{3.4.8.7}$$

მოცემული საზომი ხელსაწყოსა და პირობებისათვის μ და λ მუდმივი სიდიდეებია. აქედან, მანძილების გაზრდისას განაზომის აბსოლუტური შეცდომა იზრდება, ფარდობითი შეცდომა კი მცირდება. აგრეთვე, რაც უფრო

მოკლეა გასაზომი ხაზის სიგრძე, მით მეტია შემთხვევითი გავლენის წილი და პირიქით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ μ არის გამოყენებული საზომი ხელსაწყოსა და პირობებისათვის ზომის ერთეულზე (მეტრზე, კილომეტრზე) მოსალოდნელი შემთხვევითი ხასიათის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა და იგი უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია გამოყენებული საზომის ყოველი ცალკეული მოზომვის საშუალო კვადრატული (m_l შემთხვევითი) შეცდომა და მნიშვნელი — ზომის ერთეულებში გამოსახული საზომის l სიგრძიდან კვადრატული ფესვი (იხილეთ (3. 4. 1. 13) ფორმულა). აგრეთვე λ არის გამოყენებული საზომისა და პირობებისათვის ზომის ერთეულზე მოსალოდნელი სისტემატური ხასიათის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა და იგი უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია გამოყენებული საზომის სისტემატური ხასიათის ყოველი ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული (m_l სისტემატური) შეცდომა და მნიშვნელი —საზომის l სიგრძე გამოსახული ზომის ერთეულებში. მართლაც, თუ გასაზომ L ხაზზე l სიგრძის საზომის ყოველი გადადების სისტემატურ შეცდომას აღვნიშნავთ σ_l-ით, მაშინ მთელი L სიგრძის გაზომვის სისტემატური შეცდომა σ_L გამოითვლება

$$\sigma_L = n\,\sigma_l. \tag{3.4.8.8}$$

აქ n —საზომის გადადებათა რიცხვია.

ასეთი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 4. 1. 7) ფორმულით

$$m_{L_{\text{სისტ.}}} = \pm\, n m_{l_{\text{სისტ.}}} \tag{3.4.8.9}$$

მაგრამ

$$n = \frac{L}{l};$$

ამის გამო

$$m_{L_{\text{სისტ.}}} = \frac{m_{l_{\text{სისტ.}}}}{l} \cdot L. \tag{3.4.8.10}$$

აღვნიშნოთ (10) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის წილადი კოეფიციენტი λ-თი, მივიღებთ

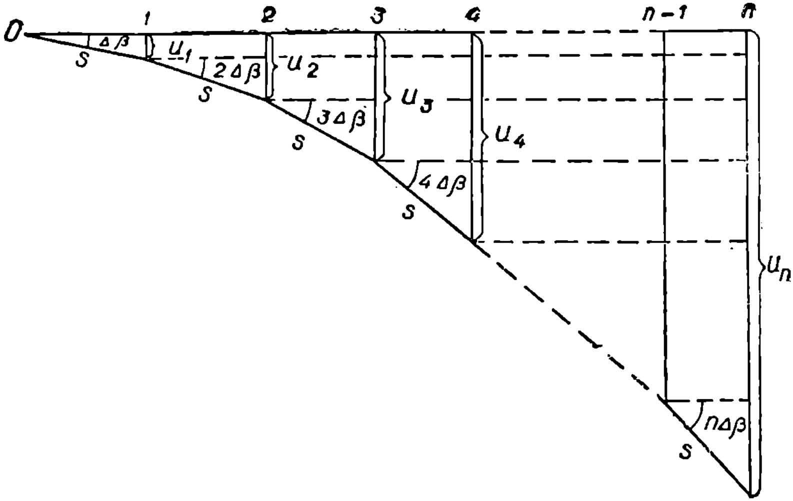
$$m_{L_{\text{სისტ.}}} = \lambda \cdot L. \tag{3.4.8.11}$$

კოეფიციენტები μ და λ განისაზღვრება ექსპერიმენტული კვლევის საფუძველზე და გამოიყენება ყოველ ცალკეულ პირობებში სხვადასხვა საზომი ხელსაწყოთი ხაზების გაზომვის დროს დასაშვები ნორმების დასადგენად.

3. 4. 9. გაზომვებზე მცირე სიდიდის სისტემატური შეცდომების გავლენები

3. 4. 7 პარაგრაფში აღნიშნული იყო, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემატური შეცდომები მცირე სიდიდეებია, მაგრამ მუდმივი ნიშნისაა, შედეგი ცალმხრივად მახინჯდება; ამის გამო საჭიროა მათი გავლენის თავიდან აცილება

მართლაც, ვთქვათ, გვსურს გავიგოთ თავისუფალი გაშლილი პოლიგონომეტ-რიული სვლის უკანასკნელი პუნქტის როგორც განივი, ისე გრძივი გადაად-გილება, რომელიც გამოწვეულია კუთხეების გაზომვის მცირე სიდიდის Δβ ნარჩენი სისტემატური შეცდომით. როგორც ითქვა, იგულისხმება, რომ ეს შეც-დომები აუცილებლად უცვლელია ნიშნით, ხოლო აბსოლუტური ოდენობით შე-იძლება ცვალებადიც. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ Δβ შეცდომის სიდი-



ნახ 3.4.9.1.

დე მუდმივია, პოლიგონომეტრიული სვლის გვერდები — ურთიერთ ტოლი და ყველა გვერდი გაზომილია უშეცდომოდ.

u_i განივი გადაადგილება (ნახ. 1) პოლიგონომეტრიული სვლის ყველა წერტილისა *on* მიმართულებასთან შედარებით იქნება

$$u_1=\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot s,$$

$$u_2=u_1+\frac{2\Delta\beta}{\rho}\cdot s=\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{2\Delta\beta}{\rho}\cdot s,$$

$$u_3=u_2+\frac{3\Delta\beta}{\rho}\cdot s=\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{2\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{3\Delta\beta}{\rho}\cdot s,$$

$$u_4=u_3+\frac{4\Delta\beta}{\rho}\cdot s=\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{2\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{3\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{4\Delta\beta}{\rho}\cdot s,$$

$$u_n=\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{2\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\frac{3\Delta\beta}{\rho}\cdot s+\cdots+\frac{n\Delta\beta}{\rho}\cdot s.$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილიდან გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ საერთო მამრავლი, მივიღებთ

$$u_n = s\frac{\Delta\beta}{\rho}(1+2+3+\cdots+n), \qquad (3.4.9.1)$$

მაშასადამე, nე წერტილის მდებარეობის განივი შეცდომა (განივი გადაადგილება) იქნება

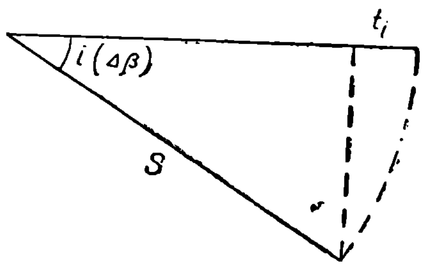
$$u_n = s\frac{\Delta\beta}{\rho}\,\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3.4.9.2)$$

იმავე $\Delta\beta$ სისტემატური შეცდომით გამოწვეული t_i გრძივი გადაადგილების სიდიდე ყოველი გვერდისათვის ნახ. 2-ის მიხედვით გამოისახება

$$t_i = (s - s\cos i\Delta\beta),$$

სადაც

$$i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n.$$



ნახ. 3.4.9.2.

გრძივი გადაადგილება მთელ on სიგრძეზე იქნება

$$t_n = (s - s\cos\Delta\beta) + (s - s\cos 2\Delta\beta) + (s - s\cos 3\Delta\beta) + \cdots + (s - s\cos n\Delta\beta) =$$
$$= s[(1-\cos\Delta\beta) + (1-\cos 2\Delta\beta) + (1-\cos 3\Delta\beta) + \cdots + (1-\cos n\Delta\beta)].$$

x კუთხის კოსინუსის მწკრივად დაშლით

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!\rho^2} + \frac{x^4}{4!\rho^4} - \cdots$$

და $\Delta\beta$-ს სიმცირის გამო მწკრივის ორი წევრით დაკმაყოფილებით მივიღებთ

$$t_n = s\left[\left(1 - 1 + \frac{1^2\Delta\beta^2}{2\rho^2}\right) + \left(1 - 1 + \frac{2^2\Delta\beta^2}{2\rho^2}\right) + \left(1 - 1 + \frac{3^2\Delta\beta^2}{2\rho^2}\right) + \cdots + \right.$$
$$\left. + \left(1 - 1 + \frac{n^2\Delta\beta^2}{2\rho^2}\right)\right],$$

ანუ

$$t_n = s\,\frac{\Delta\beta^2}{2\rho^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

რადგანაც

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ამიტომ n წერტილის გრძივი გადაადგილების შეცდომა იქნება

$$t_n=s\frac{\Delta\beta^2}{2\rho^2}\quad\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3.4.9.3}$$

მიღებულ ფორმულაში თუ (2) ფორმულიდან ჩავსვამთ განივი გადაადგილების სიდიდეს, მივიღებთ

$$t_n=u_n\cdot\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot\frac{2n+1}{6}. \tag{3.4.9.4}$$

მთელი სვლის $M_{\Delta\beta}$ სრული გადაადგილების სიდიდე ნამდვილ მდებარეობასთან შედარებით იქნება

$$M_{\Delta\beta}=\pm\sqrt{u_n^2+t_n^2} \tag{3.4.9.5}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.9.1. $s=200$ მ; $\Delta\beta=0',1$ და $n=25$ ანუ როცა გვაქვს სწორ ხაზოვანი მიმართულების პოლიგონომეტრიული სვლა სიგრძით 5 კმ და ურთიერთ ტოლი გვერდებით, მაშინ უკანასკნელი პუნქტის განივი და გრძივი გადაადგილება (2) და (4) ფორმულებით შესაბამისად იქნება

$$u_n=200\cdot\frac{0',1\cdot25\cdot26}{3438'\cdot2}=1,89 \text{ მ};$$

$$t_n=1,89\cdot\frac{0',1\cdot51}{3438'\cdot6}=0,0005 \text{ მ}.$$

როგორც ვხედავთ, კუთხეების გაზომვის ნარჩენი სისტემატური შეცდომები ძირითადად იწვევენ განივ გადაადგილებას.

$\Delta\beta$ შეცდომა გამოწვეული რომ ყოფილიყო შემთხვევითი გავლენით, მაშინ განივი გადაადგილება იქნებოდა

$$(u_n)_{\text{შემთხ}}=s\frac{\Delta\beta}{\rho}\sqrt{n}=\pm200\cdot\frac{0'.1}{3438'}\sqrt{25}=\pm\ 0,03 \text{ მ}.$$

u_n სისტემატური u_n შემთხვევითზე 63-ჯერ მეტია: აგრეთვე სისტემატური შეცდომით გამოწვეული კუთხური შეუკვრელობა იქნება

$$\omega_{\beta\,\text{სის}\delta}=\Delta\beta\cdot n=0',1\cdot25=2',5$$

და შემთხვევითი შეცდომით კი იქნება

$$\omega_{\beta_{\text{შემთხ}}}=\pm\Delta\beta\sqrt{n}=\pm0',1\sqrt{25}=\pm0',5.$$

განხილული მაგალითიდან ჩანს, რომ ყოველთვის საჭიროა ანგარიში გაეწიოს თუგინდ უმნიშვნელო სიდიდის ნარჩენ სისტემატურ შეცდომებს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეიძლება მოხდეს, რომ ნამდვილი მიზეზი მნიშვნე-

ლოვანი სიდიდის შეუკვრელობებისა დარჩეს უცნობი და გაწონასწორება და შედეგის შეფასება შეცდომით მოვახდინოთ შეცდომათა თეორიის ხერხებით; ამით ფორმალურად მოვსპობთ შეუკვრელობებს, მაგრამ სინამდვილეში შედეგს დავამახინჯებთ.

თავი V

პირდაპირი, დამოუკიდებელი არატოლზუსტი გაზომვები

§. 5 1 საერთო შენიშვნები არატოლზუსტი გაზომვების შესახებ

გაზომვის სახეების საკითხის 3.1.2 პარაგრაფში განხილვის დროს პირობების მუდმივობის თვალსაზრისით განვასხვავეთ ტოლზუსტი და არატოლზუსტი გაზომვები. პირველი სახის გაზომვების შესახებ წინა თავში მოცემულია შეცდომათა თეორიის ძირითადი ფორმულები, რომლებიც გამოიყენება ტოლზუსტ განაზომთა შეფასებისა და გაწონასწორებისათვის.

როგორც ვიცით, არატოლზუსტი გაზომვა ეწოდება ისეთ გაზომვებს, რომლებიც ყოველი განმეორებისას სრულდება რაოდენობრივად ან თვისებრივად შეცვლილ პირობებში. ამ სახის გაზომვების დასახასიათებლად შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითები:

1. როდესაც ერთი და იგივე სიდიდე ან ერთგვაროვანი სხვადასხვა, დაახლოებით ტოლი სიდიდეები იზომება რამდენიმე სერიად და ყოველ სერიაში ტოლზუსტ გაზომვათა რაოდენობა სხვადასხვაა. მაგალითად, თუ ხაზი გაიზომა ოთხ სერიად და თითოეულ სერიაში ტოლზუსტ გაზომვათა შესაბამისი რაოდენობა n_1, n_2, n_3 და n_4 არის სხვადასხვა ან დაახლოებით ტოლი სიგრძის ოთხი ხაზი გაზომილია შესაბამისად n_1, n_2, n_3, n_4-ჯერ და ან კიდევ სამკუთხედში α კუთხე გაზომილია სამჯერ, β—ორჯერ და γ—ხუთჯერ.

2. როდესაც ერთი და იგივე სიდიდე ან ერთგვაროვანი სხვადასხვა სიდიდეები იზომება ერთი და იმავე ხერხით და რაოდენობით, მაგრამ ყოველი გაზომვის დროს გამოიყენება სხვადასხვა სიზუსტის ინსტრუმენტი. მაგალითად, როცა პოლიგონის ერთი და იგივე ან სხვადასხვა გვერდი იზომება სხვადასხვა სიზუსტის საზომი ხელსაწყოებით (ფოლადის მავთული და ბაფთა) ან პოლიგონის ერთი და იგივე ან სხვადასხვა კუთხე იზომება სხვადასხვა სიზუსტის თეოდოლიტით (30″ და 10″).

3. როდესაც გაზომვა წარმოებს ერთი და იმავე სიზუსტის ინსტრუმენტით, მაგრამ იცვლება გაზომვის მეთოდი. მაგალითად, როცა პოლიგონის ან სამკუთხედის ერთი და იგივე ან სხვადასხვა კუთხე იზომება სხვადასხვა მეთოდით (ილეთების, სრული წრიული ილეთების, განმეორების და სხვა ხერხით).

4. როდესაც გამოყენებულია გაზომვის სხვადასხვა მეთოდი სათანადო ინსტრუმენტების შერჩევით. მაგალითად, ერთი და იმავე წერტილის სიმაღლის განსაზღვრა ბარომეტრული ნიველობით, ტახეომეტრიული ნიველობით ან გეომეტრიული ნიველობით.

5. როდესაც გამოყენებულია ერთი და იგივე მეთოდი და ინსტრუმენტი,

მხოლოდ აუცილებელ გაზომვათა რიცხვი სხვადასხვაა. მაგალითად, როცა ერთი და იმავე წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია სამი სხვადასხვა სიგრძის სანიველო სვლით; ვთქვათ, პირველი სვლის სიგრძე $L_1=3$ კმ, მეორისა $L_2=2$ კმ და მესამის $L_3=5$ კმ; აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის გარემოებაც, რომ გაზომვათა რაოდენობა რელიეფის სირთულეზეც არის დამოკიდებული, ე. ი. სხვადასხვა სვლისათვის თითოეულ კილომეტრზე შტატივების რაოდენობა სხვადასხვა იქნება.

ბ. როდესაც არ არის დაცული სიზუსტის შესაბამისობა არაერთგვაროვანი სახის გაზომვებში. მაგალითად, თუ მოითხოვება, რომ პოლიგონის გვერდების გაზომვის სიზუსტე იყოს $\frac{1}{5000}$, მაშინ კუთხეებიც უნდა იქნეს გაზომილი იმავე სიზუსტით, ე. $200000'' \frac{1}{5000}=40''$ შეცდომით. წინააღმდეგ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი სიდიდეების გაზომვები იქნება არატოლზუსტი.

3. 5. 2. განაზომთა წონა

ტოლზუსტი გაზომვების საკითხის განხილვის დროს გამოირკვა, რომ განაზომთა ღირსება განისაზღვრება უალბათეს სიდიდეთა საშუალო კვადრატულ შეცდომათა ოდენობით ან ფარდობითი ოდენობით — განაზომთა სიზუსტით.

ვთქვათ, ხაზი გაიზომა ოთხ სერიად ერთი და იგივე საზომი ხელსაწყოთი. გაზომვათა რიცხვი სერიებში გვაქვს: $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$, და $n_4=4$. ყოველ სერიაში ხაზი გაზომილია ტოლზუსტად და ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის m. აღვნიშნოთ თანამიმდევრობით ყოველი სერიის არატოლზუსტი უალბათესი ოდენობები

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4\text{-ით;}$$

მათი საშუალო კვადრატული შეცდომები

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4\text{-ით.}$$

მაშინ (3. 3. 7. 2) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\left.\begin{aligned} M_1&=\frac{m}{\sqrt{n_1}}=\frac{m}{\sqrt{1}}\\ M_2&=\frac{m}{\sqrt{n_2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}\\ M_3&=\frac{m}{\sqrt{n_3}}=\frac{m}{\sqrt{3}}\\ M_4&=\frac{m}{\sqrt{n_4}}=\frac{m}{\sqrt{4}}\end{aligned}\right\}. \tag{3.5.1.1}$$

ასევე, როცა სამკუთხედის კუთხეები გაზომილია ერთი და იმავე ინსტრუმენტით არატოლზუსტად, მაგალითად, α კუთხის გაზომვათა რაოდენო-

ბა $n_\alpha=2$, β-სი $n_\beta=3$ და γ-სი $n_\gamma=5$, მაშინ ყოველი სერიის უალბათესი სიდიდის ოდენობის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$\left.\begin{aligned} M_\alpha &= \frac{m}{\sqrt{n_\alpha}} = \frac{m}{\sqrt{2}} \\ M_\beta &= \frac{m}{\sqrt{n_\beta}} = \frac{m}{\sqrt{3}} \\ M_\gamma &= \frac{m}{\sqrt{n_\gamma}} = \frac{m}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.5.2.2)$$

როგორც ვხედავთ, ყოველი სერიის უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა ურთიერთ განსხვავებულია, მიუხედავად იმისა, რომ ყველგან m ერთი და იგივეა. აგრეთვე განზომვათა რაოდენობის ზრდასთან ერთად M_1, M_2, M_3 და M_4 არაპროპორციულად მცირდება. მათი სიდიდეები განაზომთა რაოდენობასთან გარკვეულ მათემატიკურ ურთიერთერთობაშია.

განაზომთა საშუალო არითმეტიკულის სანდოობის ხარისხის ან განაზომთა უალბათესი სიდიდის ღირსეულების დასახასიათებლად, გარდა აღნიშნული კრიტერიუმისა, შემოღებულია ე. წ. წონის ცნება. *წონა არის რიცხვი, რომელიც შეესაბამება განაზომთა განსაზღვრულ შედეგს. ხშირად განაზომთა შედეგების წონის ნაცვლად ხმარობენ „განაზომთა წონას“ ან „წონას“*. მისი აღნიშვნა მიღებულია P_i-ით ($i=1, 2, 3, \cdots, k$).

არატოლზუსტი გაზომვების დროს წონებს დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს, რადგან მათი საშუალებით ყალიბდება შეცდომათა თეორიის წესები და სრულდება არატოლზუსტ განაზომთა შედეგების შეფასება-დამუშავება.

განაზომთა წონის ცნება შეცდომათა თეორიაში იგივე გაგებით იხმარება, როგორც ჩვენ მას ვხმარობთ ყოველდღიურ ცხოვრებაში; მაგალითად, გარკვეულ საკითხზე მსჯელობის დროს ვამბობთ, რომ „ამა და ამ მოსაზრების გამო პირველ დასკვნას მეტი წონა აქვს, ვიდრე მეორეს“. ასევე, რაც უფრო სანდოა ანუ ზუსტია განაზომთა შედეგი, მით მეტია მისი შესაბამისი რიცხვი ანუ წონა.

ზოგადი განმარტებით „წონა“ არის რიცხვი, რომელიც გამოხატავს სხვადასხვა სახის განაზომთა შედეგების სანდოობის ანუ ღირსების შედარებით ხარისხს.

განაზომთა წონები ყოველთვის დადებითი რიცხვებია; *უარყოფითი სანდოობა* პრაქტიკულად უაზრობაა, ამიტომ უარყოფით წონას თეორიაში უწოდებენ *ფაქტიურ წონას*.

არატოლზუსტი გაზომვების სხვადასხვა შემთხვევისათვის ეს რიცხვი მიიღება შესაბამის მოსაზრებათა შედეგად. გარკვეული ფორმულა ან წესი განაზომთა შედეგების წონის შესაბამისი რიცხვის მიღებისა არ არსებობს. შევისწავლოთ, თუ როგორ ხდება შედეგთა წონების განსაზღვრა სხვადასხვა შემთხვევისათვის.

ისევე როგორც საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრისას, წონის დადგენისასაც იგულისხმება, რომ განაზომებში ადგილი აქვს ძირითადად შემთხვევით შეცდომებს; წინააღმდეგ შემთხვევაში განაზომთა წონა ნულის ტოლი იქნებოდა და, ცხადია, რომ ასეთი განაზომები არ იქნებოდა არავითარი ნდობის ღირსი. (1) და (2) ფორმულებიდან ნათლად ჩანს, რომ უალბათესი სიდიდე ანუ განაზომთა საშუალო არითმეტიკული უფრო ზუსტია. უფრო სანდოა და უფრო მაღალი ღირსებისაა, ე. ი. მისი წონა უფრო დიდია, ვიდრე ყოველი ცალკეული განაზომისა.

თუ ყოველი ცალკეული გაზომვის წონას აღვნიშნავთ p-თი და ასეთი სახის გაზომვებს გავიმეორებთ n_i-ჯერ, მაშინ წონა უალბათესი სიდიდისა, რომელსაც P_i აღვნიშნავთ ($i=1, 2, 3, \cdots, k$), იქნება

$$P_i=p\cdot n_i, \tag{3.5.2.3}$$

ე. ი. საშუალო არითმეტიკულის, ანუ უალბათესი სიდიდის წონა არის რიცხვი, რომელიც განაზომთა რაოდენობის პროპორციულია.

ერთეული განაზომის p წონა არის რიცხვი, რომელიც შეესაბამება ყოველი ცალკეული განაზომის m საშუალო კვადრატულ შეცდომას და ის (3) ფორმულაში მათემატიკური თვალსაზრისით პროპორციულობის კოეფიციენტია. p წონის რიცხვითი ოდენობის დანიშვნა ყოველი კონკრეტული შემთხვევისათვის ნებისმიერად ხდება. სიმარტივისათვის ამჯობინებენ p სიდიდე ყოველთვის ერთს გაუტოლონ. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **უალბათესი სიდიდის წონა არის რიცხვი, რომელიც გამოხატავს რაიმე სიდიდის ტოლზუსტ გაზომვათა რაოდენობას.**

წონის ცნების ამნაირად გაგებით, ზემოთ განხილულ მაგალითებში გაზომვების ცალკეულ სერიათა უალბათესი სიდიდეების წონები (3) ფორმულის შესაბამისად იქნება

$$P_1=p\cdot n_1=1\cdot n_1=1;\ P_2=p\cdot n_2=1\cdot n_2=2;\ P_3=p\cdot n_3=1\cdot n_3=3;$$
$$P_4=p\cdot n_4=1\cdot n_4=4$$

და

$$P_\alpha=p\cdot n_\alpha=1\cdot n_\alpha=2;\ P_\beta=p\cdot n_\beta=1\cdot n_\beta=3;\ P_\gamma=p\cdot n_\gamma=1\cdot n_\gamma=5.$$

ორივე მაგალითში ყოველი ცალკეული განაზომის p წონად მივიღეთ 1. თუ მივიღებთ $p=0{,}5$, მაშინ იმავე (3) ფორმულით უალბათესი სიდიდეების წონები გვექნება ორჯერ შემცირებული

$$P_1=0{,}5;\ P_2=1;\ P_3=1{,}5 \text{ და } P_4=2;$$
$$P_\alpha=1{,}0;\ P_\beta=1{,}5 \text{ და } P_\gamma=2{,}5,$$

ე. ი. უალბათესი სიდიდეების წონებად შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი, მაგრამ ყველა უალბათესი სიდიდისათვის ერთი და იმავე რიცხვის პროპორციული რიცხვები (ყველა წონა უნდა გამრავლდეს ან გაიყოს ერთი და იმავე დადებით მამრავლზე, გარდა ნულისა).

ამრიგად, ერთი და იმავე ან სხვადასხვა ერთგვაროვანი სიდიდის არატოლზუსტად გაზომვისათვის, როცა გა-

მოყენებულია ერთი და იგივე ინსტრუმენტი ანუ როცა ყოველი ცალკეული განაზომის (m) საშუალო კვადრატული შეცდომა შესრულებული სერიებისათვის დაახლოებით მუდმივია, მაშინ სერიათა უალბათესი სიდიდეების წონა მიიღება (3) ფორმულით, როგორც ყოველ სერიაში გაზომვათა რაოდენობის პროპორციული სიდიდეები. ეს სიდიდეები სრულიად საკმარისია უალბათეს სიდიდეთა სიზუსტეების შესადარებლად. ამ შემთხვევაში (1) და (2) დამოკიდებულებების შესაბამისად სერიათა უალბათესი სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომების გამოსათვლელი ფორმულები ზოგადად გამოისახება შემდეგნაირად:

$$M_i = \frac{m}{\sqrt{P_i}}. \tag{3.5.2.4}$$

ყველა სერიისათვის m შეიძლება გავუტოლოთ ერთს. ასე რომ მისი ოდენობის ცოდნა საჭირო არაა. ამ წესით მიღებული საშუალო კვადრატული შეცდომები სერიათა სიზუსტეების შესადარებლად სრულიად საკმარისია. აღნიშნულის საფუძველზე დავწერთ

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{P_i}}. \tag{3.5.2.5}$$

როგორც ვხედავთ, წონებსა და საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შორის არსებობს გარკვეული მათემატიკური კავშირი და ეს კავშირი ზოგადად შეიძლება დაიწეროს შემდეგნაირად:

$$P_i = \frac{1}{M_i^2}. \tag{3.5.2.6}$$

ე. ი. ყოველი უალბათესი სიდიდის წონა ტოლია მისივე საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის შებრუნებული სიდიდისა.

ეს დამოკიდებულება უალბათესი სიდიდის წონასა და საშუალო კვადრატულ შეცდომას შორის ზოგადია და გამოდგება ნებისმიერი შემთხვევისათვის, მაგალითად, თუ ერთი და იმავე ან სხვადასხვა ერთგვაროვანი სიდიდის გაზომვისათვის გამოყენებულია სხვადასხვა სიზუსტის ინსტრუმენტი, ე. ი. ყოველი ცალკეული განაზომის (m) საშუალო კვადრატული შეცდომა სხვადასხვა ოდენობისაა, მაშინ გაზომვის სერიათა წონების გამოთვლა (3) ფორმულით არ შეიძლება. პირველ რიგში ყოველი სერიისათვის (3. 3. 7. 2) ფორმულით უნდა გამოვითვალოთ საშუალო კვადრატული შეცდომა და შემდეგ მათი წონები განვსაზღვროთ (6) ფორმულით.

ვთქვათ, სამკუთხედში კუთხეები გაზომილია სამი სხვადასხვა სიზუსტის თეოდოლიტით, რომელთა მონაცემები შემდეგია:

$$m_\alpha = \pm 2'', \qquad n_\alpha = 2;$$
$$m_\beta = \pm 3'', \qquad n_\beta = 3;$$
$$m_\gamma = \pm 5'', \qquad n_\gamma = 5.$$

(3. 3. 7. 2) ფორმულით მივიღებთ

I სერიისათვის $$M_\alpha=\pm\frac{2''}{\sqrt{2}};$$

II $$M_\beta=\pm\frac{3''}{\sqrt{3}};$$

III $$M_\gamma=\pm\frac{5''}{\sqrt{5}}.$$

სათანადო წონები გამოითვლება (6) ფორმულით და გვექნება

I სერიისათვის $$P_\alpha=\frac{1}{\frac{4}{2}}=\frac{1}{2};$$

II $$P_\beta=\frac{1}{\frac{9}{3}}=\frac{1}{3};$$

III $$P_\gamma=\frac{1}{\frac{25}{5}}=\frac{1}{5}.$$

სერიათა სიზუსტეების უფრო თვალსაჩინოდ შედარებისათვის ყველა წონა გადავამრავლოთ 30-ზე, მივიღებთ

$$P_\alpha=15;\ P_\beta=10 \text{ და } P_\gamma=6.$$

როგორც ვხედავთ, α კუთხე უფრო ზუსტად არის გაზომილი, ვიდრე β და ეს უკანასკნელი კი უფრო ზუსტია, ვიდრე γ.

განხილულ მაგალითში სერიების სიზუსტეების შესაფასებლად რომ მარტო განაზომთა რაოდენობისათვის გაგვეწია ანგარიში და წონები (3) ფორმულით განგვესაზღვრა, მივიღებდით საწინააღმდეგო სურათს. ასეთ შემთხვევაში ყოველთვის ანგარიშს ვუწევთ, გარდა გაზომვათა რაოდენობისა, გამოყენებული ინსტრუმენტების სიზუსტესაც. ამ წესის ზოგადობის გამო, თუ გვაქვს შესაძლებლობა, ყოველთვის ჯობს პირველ რიგში რაიმე ხერხით განვსაზღვროთ უალბათეს სიდიდეთა საშუალო კვადრატული შეცდომები და შემდეგ (6) ფორმულით გამოვითვალოთ მათი წონები.

ხშირია შემთხვევა, როდესაც შესაძლებლობა არაა არატოლზუსტი განაზომებისათვის გამოვითვალოთ შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომები. ასეთ შემთხვევაში დამოუკიდებლად განვსაზღვრავთ წონებს. ასე, მაგალითად, როცა წერტილის სიმაღლის განსაზღვრა შესრულებულია სხვადასხვა მანძილებით დაშორებული გამოსავალი წერტილებიდან და შესაბამისი ალმატებანი ამ გამოსავალი წერტილებიდან თითოჯერ არის განსაზღვრული, ჩვენ არ გვექნება მონაცემები ამ ალმატებათა საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობის გამოსათვლელად. ცნობილია აგრეთვე, რომ სხვადასხვა სიგრძის ნიველირსავალით დაშორებულ წერტილებს შორის განსაზღვრული ალმატებები დანარჩენი ერთგვარი პირობების შემთხვევაშიც არ იქნება ტოლზუსტი. ამი-

ტომ საჭიროა წონების ოდენობების განსაზღვრა, როგორც მანძილების ან იარაღის დგომათა (შტატივების) რაოდენობის ფუნქციებისა.

ვთქვათ, რაიმე წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია გეომეტრიული ნიველობით სამი სხვადასხვა მანძილით დაშორებული გამოსავალი წერტილიდან. აგრეთვე ვიგულისხმოთ, რომ გამოსავალი წერტილების ნიშნულები არ შეიცავს შეცდომებს და აგრეთვე ნიველობის სხვა დანარჩენი პირობები ერთნაირია. განსახილველი შემთხვევისათვის გავიხსენოთ, რომ L_i მანძილით დაშორებულ წერტილებს შორის სიმაღლეთა სხვაობის M_{H_i} საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$M_{H_i}=\pm m_k\sqrt{n_i} \qquad (3.5.2.7)$$

აქ m_k არის ნიველირის ცალკეული დგომის, ანუ მარტივი ნიველობის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

n_i — L_i მანძილში შტატივთა, ანუ მარტივ ნიველობათა რაოდენობა, $i=\text{I, II, III}$.

თუ ლარტყებს შორის მანძილებს l-ით აღვნიშნავთ, მაშინ შტატივების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$n=\frac{L_{i\,კმ}}{l_{კმ}}=\frac{L_{i\,მ}}{l_{მ}}$$

და (7) ფორმულა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$M_{H_i}=\pm\frac{m_k}{\sqrt{l}}\sqrt{L_i}=\pm k\sqrt{L_i}\,, \qquad (3.5.2.8)$$

k — გამოყენებული ნიველირისათვის და პირობებისათვის, ნიველირსავალი ხაზის ზომის ერთეულზე ნიველობის მოსალოდნელი საშუალო კვადრატული შეცდომა.

წონების განსაზღვრისათვის (7) და (8) ფორმულებით მიღებული საშუალო კვადრატული შეცდომების მნიშვნელობები ჩაისმება (6) ფორმულაში

$$P_{H_i}=\frac{1}{M^2_{H_i}}=\frac{1}{m^2{}_k n_i} \qquad (3.5.2.9)$$

ან

$$P_{H_i}=\frac{1}{M^2_{H_i}}=\frac{1}{k^2L_i}\,. \qquad (3.5.2.10)$$

თუ ყველა ნიველირსავალში გამოყენებულია ერთნაირი სიზუსტის იარაღი ან ნიველობის მეთოდი, ე. ი. m_k და k ერთნაირია, მაშინ შეგვიძლია ყველა სერიისათვის მივიღოთ m_k და k ოდენობები ტოლად და გვექნება

$$P_{H_i}=\frac{1}{n_i}\,, \qquad (3.5.2.11)$$

$$P_{H_i}=\frac{1}{L_i}\,, \qquad (3.5.2.12)$$

ე. ი. **ნიველირსავალის ალმატების განსაზღვრის წონა შტატივთა რაოდენობის ან ნიველირსავალის სიგრძის შებრუნებული სიდიდეა.** უფრო მიზანშეწონილია წონების (11) ფორმულით განსაზღვრა, რადგანაც დგომათა რაოდენობით უფრო ხასიათდება რელიეფის თავისებურების გაელენა.

ასეთივე მიდგომაა საჭირო ხაზების სიგრძეების განაზომთა უალბათესი სიდიდეების შეფასების დროსაც; მაგალითად, ვიცით, რომ L_i სიგრძის ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულა

$$M_{L_i}=\mu\sqrt{L_i}\,. \tag{3.5.2.13}$$

უალბათეს სიდიდეთა წონების გამოსათვლელად კი (6) ფორმულით გვექნება

$$P_{L_i}=\frac{1}{M^2_{L_i}}=\frac{1}{\mu^2 L_i}\,. \tag{3.5.2.14}$$

თუ ყველა სერიაში გამოყენებულია ერთნაირი სიზუსტის საზომი, ანუ თუ μ მუდმივია, მაშინ მისი ოდენობა სერიებში შეიძლება მივიღოთ ერთეულის ტოლად და წონები განისაზღვროს ფორმულით

$$P_{L_i}=\frac{1}{L_i}\,. \tag{3.5.2.15}$$

გარკვეული საზომისათვის ხაზის სიგრძის განსაზღვრის წონა ხაზის სიგრძის შებრუნებული სიდიდეა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.1. B წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია ერთნაირი რელიეფის პირობებში სამი ნიველირსავალით განვსაზღვროთ უალბათეს სიდიდეთა წონები, თუ პირველი ნიველირსავალის სიგრძე უდრის 2 კმ, მეორისი — 3 კმ და მესამის — 5 კმ; ამასთანავე ყველა სვლაში k მუდმივია.

უალბათეს სიდიდეთა წონების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (12) ფორმულას

$$P_1=\frac{1}{2};\qquad P_2=\frac{1}{3}\qquad \text{და}\qquad P_3=\frac{1}{5}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.2. B წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია ერთნაირი სიგრძის სხვადასხვა რელიეფის პირობებში სამი ნიველირსავალით. განვსაზღვროთ უალბათეს სიდიდეთა წონები, თუ პირველ ნიველირსავალში ნიველირის დადგმა დასჭირდათ 20-ჯერ, მეორეში — 30-ჯერ და მესამეში — 50-ჯერ; აგრეთვე ყველა სვლაში m_h მუდმივია.

უალბათესი სიდიდეების წონების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (11) ფორმულას, გვექნება

$$P_1=\frac{1}{20};\qquad P_2=\frac{1}{30}\qquad \text{და}\qquad P_3=\frac{1}{50}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.3. ავიღოთ შემთხვევა, როცა პირველ მაგალითში k არის სხვადასხვა ოდენობის, მაგალითად: პირველი ნიველირსავალისათვის $k=0{,}5$ მმ; მეორისათვის $k_2=\pm 0{,}3$ მმ და მესამისათვის $k_3=\pm 0{,}2$ მმ; მაშინ უალ-

ბათეს სიდიდეთა წონების გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ (10) ფორმულა, მივიღებთ

$$P_1=\frac{1}{0{,}5^2\cdot 2}=2;\quad P_2=\frac{1}{0{,}3^2\cdot 3}=3{,}9;\quad P_3=\frac{1}{0{,}2^2\cdot 5}=5.$$

(შეადარეთ მიღებული წონები პირველი მაგალითის წონებს).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.4. ვთქვათ, მეორე მაგალითში $m_1=\pm 5$ მმ; $m_2=\pm$ ± 3 მმ და $m_3=\pm 2$ მმ. ამ შემთხვევაში წონები განისაზღვრება (9) ფორმულით

$$P_1=\frac{1}{5^2\cdot 20}=\frac{1}{500};\quad P_2=\frac{1}{3^2\cdot 30}=\frac{1}{270};\quad P_3=\frac{1}{2^2\cdot 50}=\frac{1}{200}.$$

(შეადარეთ მიღებული წონები მეორე მაგალითში განსაზღვრულ წონებს)·

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.5. სამი ხაზი გაზომილია ერთნაირი სიზუსტის საზომი ხელსაწყოთი. განვსაზღვროთ წონები, თუ პირველი ხაზის სიგრძეა 2 კმ, მეორის 3 კმ და მესამის 5 კმ·

ამ შემთხვევაში გამოვიყენებთ (12) ფორმულას, გვექნება

$$P_1=\frac{1}{2};\qquad P_2=\frac{1}{3}\quad \text{და}\quad P_3=\frac{1}{5}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.2.6. ვთქვათ, მეხუთე მაგალითში ხაზები გაზომილია სხვადასხვა საზომით და შესაბამისად შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტებია μ_1, μ_2 და μ_3.

ამ შემთხვევაში უალბათეს სიდიდეთა წონების გამოსათვლელად გამოიყენება (14) ფორმულა

$$P_1=\frac{1}{\mu_1^2\cdot 2};\qquad P_2=\frac{1}{\mu_2^2\cdot 3};\qquad P_3=\frac{1}{\mu_3^2\cdot 5}.$$

განხილული მაგალითები ეხება მხოლოდ ერთგვაროვან გაზომვებს. ამიტომ მიღებული წონები ნულოვანი განზომილებისაა, ე· ი. ყველგან წონების განსაზღვრისას მნიშვნელისა და მრიცხველის განზომილებები ერთნაირია. პირველ მაგალითში ერთეულ წონად მიღებულია წონა ერთი კილომეტრის ნიველირსავალისა. შეიძლებოდა ერთეულ წონად მიგვეღო წონა 5 კმ სიგრძის ნიველირსავალისა, მაშინ ყველა წონა გადამრავლდებოდა 5-ზე და მივიღებდით

$$P_1=\frac{5}{2};\qquad P_2=\frac{5}{3}\quad \text{და}\quad P_3=1$$

ან კიდევ ერთეული წონის მქონედ შეიძლება მიგვეღო 30 კმ ნიველირსვლა. მაშინ მივიღებდით:

$$P_1=\frac{30}{2}=15;\quad P_2=\frac{30}{3}=10\quad \text{და}\quad P_3=\frac{30}{5}=6.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვიმსჯელოთ ყველა მაგალითის შესახებ.

§. 5. 3. საერთო საშუალო არითმეტიკული (წონითი საშუალო)

ვთქვათ, გვაქვს ერთი და იმავე სიდიდის k სერიად შესრულებული n არატოლზუსტ განაზომთა უალბათესი სიდიდეები; $L_1, L_2, \cdots, L_k$.

საჭიროა გამოთვლილ იქნეს ამ სიდიდეთა საშუალებით საბოლოო შედეგი. ეს შედეგი აღვნიშნოთ L_0-ით და ვუწოდოთ **საერთო საშუალო არითმეტიკული**, **წონითი საშუალო** ან **არატოლზუსტ განაზომთა უალბათესი სიდიდე**.

განაზომების სერიათა ცალკეული უალბათესი სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული საბოლოო შედეგად რომ მივიღოთ, არ იქნება სწორი, რადგანაც გაზომვები არის არატოლზუსტი. ყოველმა განაზომმა საბოლოო შედეგზე, ანუ წონითი საშუალოზე, სიზუსტის მხრივ, უნდა მოახდინოს თავისი წონითი გავლენა. დავუშვათ, რომ

გაზომვების I-ლი სერია არის $\overset{(1)}{l_1}, \overset{(1)}{l_2}, \cdots, \overset{(1)}{l_{n_1}}$

II $\quad \overset{(2)}{l_1}, \overset{(2)}{l_2}, \cdots, \overset{(2)}{l_{n_2}}$

. . .

„ k „ $\overset{(k)}{l_1}, \overset{(k)}{l_2}, \cdots, \overset{(k)}{l_{n_k}}$

თითოეული სერიის უალბათესი სიდიდე შესაბამისად იქნება

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overset{(1)}{l_1}+\overset{(1)}{l_2}+\cdots+\overset{(1)}{l_{n_1}}}{n_1}=L_1 \\[2ex] \dfrac{\overset{(2)}{l_1}+\overset{(2)}{l_2}+\cdots+\overset{(2)}{l_{n_2}}}{n_2}=L_2 \\[2ex] \cdots\cdots\cdots \\[2ex] \dfrac{\overset{(k)}{l_1}+\overset{(k)}{l_2}+\cdots+\overset{(k)}{l_{n_k}}}{n_k}=L_k \end{array}\right\}. \tag{3.5.3.1}$$

როგორც ვხედავთ, შესრულებულია მოცემული სიდიდის $n_1+n_2+\cdots+n_k$ რაოდენობის ტოლზუსტი გაზომვა. ამიტომ საბოლოო შედეგად უნდა მივიღოთ საშუალო არითმეტიკული ყველა ტოლზუსტი განაზომიდან, ე. ი.

$$L_0=\frac{(\overset{(1)}{l_1}+\overset{(1)}{l_2}+\cdots+\overset{(1)}{l}n_1)+(\overset{(2)}{l_1}+\overset{(2)}{l_2}+\cdots+\overset{(2)}{l}n_2)+\cdots+(\overset{(k)}{l_1}+\overset{(k)}{l_2}+\cdots+\overset{(k)}{l}n_k)}{n_1+n_2+\cdots+n_k}. \tag{3.5.3.2}$$

(1) ტოლობიდან განვსაზღვროთ ყოველი სერიის განაზომთა ჯამი.

$$\begin{array}{l} \overset{(1)}{l_1}+\overset{(1)}{l_2}+\cdots+\overset{(1)}{l_{n_1}}=L_1\cdot n_1 \\ \overset{(2)}{l_1}+\overset{(2)}{l_2}+\cdots+\overset{(2)}{l_{n_2}}=L_2\cdot n_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overset{(k)}{l_1}+\overset{(k)}{l_2}+\cdots+\overset{(k)}{l_{n_k}}=L_k\cdot n_k. \end{array} \tag{3.5.3.3}$$

ყოველი სერიის გაზომვათა რაოდენობა, (3. 5. 2· 3) ფორმულის თანახმად, შევცვალოთ წონებით, გვექნება

$$n_1=P_1;\quad n_2=P_2;\cdots;\ n_k=P_k;$$

მაშინ ყველა განაზომის ჯამი $n_1+n_2+\cdots+n_k$ შეიცვლება წონათა ჯამით

$$P_1+P_2+\cdots+P_k.$$

მიღებული სიდიდეების (2) ფორმულაში შეტანით გვექნება

$$L_0=\frac{L_1P_1+L_2P_2+\cdots+L_kP_k}{P_1+P_2+\cdots+P_k} \tag{3.5.3.4}$$

(4) ტოლობა შემოკლებულად დაიწერება ასე:

$$L_0=\frac{[LP]}{[P]}=\frac{[LP]}{n}. \tag{3.5.3.5}$$

(4) ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ საერთო საშუალო არითმეტიკულზე[1] მეტ გავლენას ახდენს იმ სერიის ტოლზუსტი გაზომვების უალბათესი სიდიდე, რომელსაც მეტი წონა აქვს. ამგვარად, **საერთო საშუალო არითმეტიკული ანუ წონითი საშუალო უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია სერიათა უალბათესი სიდიდეებისა და შესაბამის წონათა ნამრავლების ჯამი, ხოლო მნიშვნელი — ყველა წონათა ჯამი.**

იმ შემთხვევაში, როცა

$$P_1=P_2=\cdots=P_k=P=1,$$

მაშინ

$$L_0=L=\frac{[L]}{k}=\frac{[l]}{n},$$

ე. ი. წონითი საშუალო გადაიქცა საშუალო არითმეტიკულ სიდიდედ; მაშასადამე, საშუალო არითმეტიკული არის კერძო შემთხვევა საერთო საშუალო არითმეტიკულისა.

როგორც ტოლზუსტი გაზომვების დროს მოვიქეცით, ასევე აქაც წონითი საშუალოს უფრო ადვილად გამოთვლის მიზნით შევარჩევთ $L_1, L_2, \ldots, L$ უალბათესი სიდიდეების ოდენობის მიახლოებითი მნიშვნელობის რიცხვს და მისი გამოყენებით გამოვითვლით L_0-ს. ვთქვათ, ასეთი რიცხვია l_0. ამ რიცხვით ყოველი სერიის განაზომი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{array}{l} L_1=l_0+\Delta L_1 \\ L_2=l_0+\Delta L_2 \\ \\ L_k=l_0+\Delta L_k \end{array}\right\}. \tag{3.5.3.6}$$

აქედან ზოგადად

$$L_i=l_0+\Delta L_i$$

და

$$\Delta L_i=L_i-l_0. \tag{3.5.3.7}$$

[1] L_0-ს შეიძლება ვუწოდოთ სერიათა უალბათესი სიდიდეების უალბათესი სიდიდე; აგრეთვე $[P]=P_0=n$ იქნება მისი წონა.

(6) ტოლობების გამოყენებით (4) ფორმულა გადაიწერება, შემდეგი სახით:

$$L_0 = \frac{P_1(l_0+\Delta L_1)+P_2(l_0+\Delta L_2)+P_3(l_0+\Delta L_3)+\cdots+P_k(l_0+\Delta L_k)}{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_k},$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$L_0 = l_0+\frac{[P\Delta L]}{[P]}. \quad (3.5.3.8)$$

მაშასადამე წონით საშუალოს გამოსათვლელად საჭიროა წინასწარ სხვადასხვა სერიების უალბათესი სიდიდეებიდან მახლობელი ოდენობის რიცხვის (l_0) არჩევა; შემდეგ (7) ფორმულის საშუალებით გამოითვლება ΔL_i სხვაობა ყოველი სერიის განაზომთა უალბათეს სიდიდესა და l_0 შორის; მიღებული სხვაობები გადამრავლდება შესაბამის წონებზე და ნამრავლთა ჯამს წონების ჯამზე გაყოფილს მივუმატებთ l_0-ს.

აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ, თუ (4) განტოლების წონებს შესაბამისად გადავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ დადებით რიცხვზე, ამით წონითი საშუალო არ შეიცვლება; მართლაც,

$$L_0 = \frac{P_1L_1+P_2L_2+\cdots+P_kL_k}{P_1+P_2+\cdots+P_k}$$

ტოლობის წონებს თუ c-ზე გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$L_0 = \frac{cP_1L_1+cP_2L_2+\cdots+cP_kL_k}{cP_1+cP_2+\cdots+cP_k}.$$

როგორც ვხედავთ, $P_1, P_2, \cdots, P_k$-ის მაგიერ მივიღეთ წონათა პროპორციული $cP_1, cP_2, \cdots, cP_k$ სიდიდეები, მაგრამ ამით L_0 არ შეცვლილა.

ამის გამო დავასკვნით, **რომ წონითი საშუალოს გამოთვლისას ნამდვილი წონების მაგიერ შეიძლება გამოვიყენოთ ამ წონათა ნებისმიერი პროპორციული რიცხვები.**

მაგალითი 3.5.3.1. ერთ-ერთი ხაზის სამ სერიად გაზომვით მიღებულია განაზომები

I სერია: 94,46 მ; 94,45 მ; 94,44 მ;
II „ 94,45 მ; 94,47 მ;
III „ 94,47 მ; 94,47 მ; 94,46 მ; 94,44 მ; 94,46 მ.

თითოეული სერიის საშუალო არითმეტიკული იქნება

I სერიისა $L_1 = 94{,}45$ მ;
II „ $L_2 = 94{,}46$ მ;
III „ $L_3 = 94{,}46$ მ.

ამ სერიებისათვის შესაბამისი წონები იქნება 3,2 და 5.

წონითი საშუალო განისაზღვრება, თუ ყველა განაზომს შევკრებთ და მიღებულ ჯამს გავყოფთ შესაკრებთა რიცხვზე.

$$L_0 = \frac{94{,}46+94{,}45+94{,}44+\cdots+94{,}46+94{,}44+94{,}46}{3+2+5} = 94{,}457 \text{ მ}.$$

იგივე პასუხს უფრო მარტივად მივიღებთ არატოლზუსტი გაზომვების (4) ფორმულით

$$L_0=\frac{94,45\cdot 3+94,46\cdot 2+94,46\cdot 5}{3+2+5}=94,457 \text{ მ}$$

ან კიდევ, უფრო ადვილად, (8) ფორმულით

$$L_0=94,45+\frac{0\cdot 3+0,01\cdot 2+0,01\cdot 5}{10}=94,457 \text{ მ}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.3.2. β კუთხე გაზომილია სამ სერიად არატოლზუსტად და მიღებულია შედეგები

$\beta_1=52^\circ 58' 10''$, $P_1=2$ წონით;

$\beta_2=52^\circ 58' 20''$, $P_2=4$

$\beta_3=52^\circ 58' 30''$, $P_3=10$

განისაზღვროს განაზომთა წონითი საშუალო (6) ფორმულით

$$L_0=52^\circ 58' 10''+\frac{0\cdot 2+10\cdot 4+20\cdot 10}{2+4+10}=52^\circ 58' 10''+\frac{240''}{16}=52^\circ 58' 25''.$$

იმავე პასუხს მივიღებთ, თუ წონებს ორჯერ შევამცირებთ, მაშინ წონები შესაბამისად იქნება 1, 2 და 5.

$$L_0=52^\circ 58' 10''+\frac{0\cdot 1+10\cdot 2+20\cdot 5}{1+2+5}=52^\circ 58' 10''+\frac{120''}{8}=52^\circ 58' 25''.$$

წონითი საშუალოს ღირსების შესახებ ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს შემდეგი მსჯელობა: ვთქვათ, ჭეშმარიტი X სიდიდე გაზომილია k სერიად არატოლზუსტად, რომლის შედეგადაც მიღებული გვაქვს L_1, $L_2, \dots, L_k$ უალბათესი სიდიდეები P_1, $P_2, \dots, P_k$ წონებით. საჭიროა განვსაზღვროთ L_0 წონითი საშუალოს ჭეშმარიტი X სიდიდის ოდენობიდან გადახრა Δ_0 და მისი სიდიდის საშუალებით ვიმსჯელოთ L_0-ის შესახებ.

(3. 3. 1. 11) ფორმულის ანალოგიურად ყოველი სერიისათვის დავწეროთ ჭეშმარიტი გადახრების სიდიდეები, მივიღებთ

$$\Delta_1=L_1-X;$$
$$\Delta_2=L_2-X;$$
$$\vdots$$
$$\Delta_k=L_k-X.$$

ეს დამოკიდებულებები გადავამრავლოთ შესაბამის წონაზე, შევკრიბოთ და ჯამი გავყოთ წონათა ჯამზე, მივიღებთ

$$\frac{[P\Delta]}{[P]}=\frac{[PL]}{[P]}-\frac{[P]X}{[P]}. \qquad (3.5.3.9)$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{[P\Delta]}{[P]}=\Delta_0; \tag{3.5.3.10}$$

ამავე დროს ვიცით, რომ (5) ფორმულით

$$\frac{[PL]}{[P]}=L_0.$$

(9) ტოლობა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Delta_0=L_0-X. \tag{3.5.3.11}$$

Δ_0 არის წონითი საშუალოს ჭეშმარიტი სიდიდის ოდენობიდან გადახრა.

$$\lim_{[P]\to\infty}\frac{[P\Delta]}{[P]}=0 \quad \text{და} \quad \lim_{[P]\to\infty}\frac{[PL]}{[P]}=X.$$

დასკვნა. წონითი საშუალოს სანდოობის ღირსება მისი $[P]=P_0$ წონის პროპორციულია.

3. 5. 4. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

3. 5. 2. პარაგრაფში განმარტებული იყო, რომ არატოლზუსტი I, II,,..., k სერიის უალბათეს სიდიდეთა წონები არის რიცხვები, რომელთა ოდენობები სხვადასხვა ხერხით შეიძლება განისაზღვროს. აგრეთვე როგორც (3. 5. 2), ისე (3. 5. 3) პარაგრაფში დავრწმუნდით, შესაფასებლად სრულიად საკმარისია, თუ ყველა სერიისათვის ნამდვილი წონები შეიცვლება სხვა რიცხვებით. ამით წონითი საშუალო არ შეიცვლება და საერთოდ განაზომთა შეფასებაზე წონების აღნიშნული პროპორციული ცვალებადობა გავლენას არ მოახდენს.

თუ რაიმე სიდიდის წონითი საშუალოს განსაზღვრისათვის ჩავატარებთ გაზომვების არატოლზუსტ k სერიას, მაშინ ყოველი სერიისათვის (3. 5. 2. 6) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$P_1=\frac{1}{M_1^2}, \qquad P_2=\frac{1}{M_2^2},\ldots,\ P_k=\frac{1}{M_k^2}\cdots \tag{a}$$

როგორც ითქვა, წონითი საშუალო არ შეიცვლება, თუ $P_1, P_2,\ldots, P_k$ წონებს შევცვლით პროპორციული სიდიდეებით, ე. ი. ყველა ტოლობის მარჯვენა მხარეს გადავამრავლებთ რაიმე დადებით რიცხვზე. ეს რიცხვები შეირჩევა ფაქტიური ან ფიქტიური რიგიდან ისეთნაირად, რომ მათზე გადამრავლების შემდეგ უალბათეს სიდიდეთა წონები იქნეს გამოსაყენებლად უფრო მოსახერხებელი რიცხვები. ვთქვათ, ასეთ სიდიდედ მიღებულია პირველი სერიის უალბათესი სიდიდის (M_1) საშუალო კვადრატული შეცდომა, მაშინ (a) მწკრივის ნაცვლად მივიღებთ

$$P_1^1=\frac{M_1^2}{M_1^2}=1, \qquad P_2^1=\frac{M_1^2}{M_2^2},\ldots,\ P_k^1=\frac{M_1^2}{M_k^2}. \tag{b}$$

აქ პირველი სერიის წონა მივიღეთ ერთის ტოლად და მისი შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატთან არის შედარებული სხვა სერიების საშუალო კვადრატულ შეცდომათა კვადრატები.

ახლა ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მივიღოთ M_2, გვექნება

$$P_1'' = \frac{M_2^2}{M_1^2}; \qquad P_2'' = \frac{M_2^2}{M_2^2} = 1, \ldots, P_k'' = \frac{M_2^2}{M_k^2}. \qquad (c)$$

წონების ანალოგიურ მწკრივს მივიღებთ, თუ რომელიმე ნებისმიერი სერიის საშუალო კვადრატულ შეცდომას ერთეულ წონას მივაკუთვნებთ, ე. ი. მას შევადარებთ ყველა დანარჩენ სერიას. **საერთოდ, წონები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატების შებრუნებული სიდიდეები.**

როგორც 3. 5. 2· პარაგრაფში განვმარტეთ, განაზომთა ყალბათესი სიდიდეების სანდოობის ანუ ღირსების გარდა, წონები **ფარდობითი სიზუსტის** დადგენის საშუალებასაც იძლევა. მართლაც, ერთი განაზომის წონა ან მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა განაზომის ღირსებაზე წარმოდგენას ვერ მოგვცემს, თუ არა გვაქვს იმდაგვარივე სახის სხვა განაზომთა წონა ან საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ვთქვათ, წერტილთა შორის აომატება განსაზღვრულია სამ სერიად, რომელთა საშუალო კვადრატული შეცდომები შესაბამისად არის

$$M_1 = \pm 2 \text{ სმ}, \ M_2 = \pm 5 \text{ სმ და } M_3 = \pm 10 \text{ სმ}.$$

საჭიროა განისაზღვროს გაზომვების ამ სერიათა წონები. (a) მწკრივის მიხედვით დავწერთ

$$P_1 = \frac{1}{M_1^2}, \quad P_2 = \frac{1}{M_2^2} \quad \text{და} \quad P_3 = \frac{1}{M_3^2}$$

ვთქვათ, მოვისურვეთ პირველ სერიასთან შედარება დანარჩენი ორი სერიისა, ანუ პირველი სერიის წონა მივიღეთ ერთის ტოლად, მაშინ გვექნება

$$P_1 = \frac{M_1^2}{M_1^2} = \frac{2^2}{2^2} = 1; \quad \frac{P_2}{P_1} = P_2 = \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25};$$

$$\frac{P_3}{P_1} = P_3 = \frac{M_1^2}{M_3^2} = \frac{2^2}{10^2} = \frac{4}{100},$$

ე. ი.

$$P_1 = 1; \quad P_2 = \frac{4}{25} \quad \text{და} \quad P_3 = \frac{4}{100}.$$

თუ M_2-ს მივაკუთვნებთ ერთეულ წონას, მაშინ

$$\frac{P_1}{P_2} = P_1 = \frac{25}{4}; \quad P_2 = 1; \quad \frac{P_3}{P_2} = P_3 = \frac{25}{100}.$$

ამრიგად, როდესაც მოცემული გვაქვს ერთი და იმავე სიდიდის განაზომთა რამდენიმე სერია სათანადო საშუალო კვადრატული შეცდომებით და

საჭიროა სერიათა წონების შესაბამისი ადვილად გამოსაყენებელი რიცხვების განსაზღვრა, მივიჩნევთ ერთეული წონის მქონედ რომელიმე სერიის საშუალო კვადრატულ შეცდომას და მის კვადრატს შევადარებთ ყველა დანარჩენი სერიების საშუალო კვადრატულ შეცდომათა კვადრატებს; ამით შესაბამისად განვსაზღვრავთ ყველა დანარჩენი სერიის წონების პროპორციულ რიცხვებს.

ხშირად არატოლზუსტ განაზომთა წონების უფრო თვალსაჩინოდ შედარება შესაძლებელია, თუ ერთეული წონის მქონედ ავიღებთ საშუალო კვადრატულ შეცდომას. განსაზღვრულს როგორც M_1, M_2 და M_3 რიცხვების საერთო უმცირეს ჯერადს. განხილული მაგალითისათვის ეს რიცხვი იქნება 10 სმ. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$P_1=\frac{10^2}{2^2}=25,\qquad P_2=\frac{10^2}{5^2}=4,\quad P_3=\frac{10^2}{10^2}=1.$$

ან კიდევ, ვთქვათ, გაზომილია სამკუთხედის კუთხეები $M_\alpha=\pm 0',2$, $M_\beta=\pm 0',4$, და $M_\gamma=\pm 0',6$ საშუალო კვადრატული შეცდომებით. საჭიროა განსაზღვრულ იქნეს ამ განაზომთა წონები.

წონებად უფრო მოსახერხებელი რიცხვების მიღების მიზნით, ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად თუ მივიღებთ β კუთხის $M_\beta=0',4$ საშუალო კვადრატულ შეცდომას, მაშინ

$$P_1=\frac{M_\beta^2}{M_\alpha^2}=\frac{(0,4)^2}{(0,2)^2}=4;\quad P_2=\frac{(0,4)^2}{(0,4)^2}=1;\quad P_3=\frac{(0,4)^2}{(0,6)^2}=\frac{4}{9}.$$

ასევე შეგვეძლო α ან γ კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა მიგვეღო ერთეული წონის ტოლად. მაგრამ ისევე, როგორც წინა მაგალითში, უკეთესია თუ ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მივიღებთ მოცემული შეცდომების საერთო უმცირეს ჯერადს.

ამ რიცხვთა საერთო ჯერადი იქნება $1',2$.
მაშინ მივიღებთ

$$P_1=\frac{(1',2)^2}{(0',2)^2}=36;\qquad P_2=\frac{(1',2)^2}{(0',4)^2}=9;\quad P_3=\frac{(1',2)^2}{(0',6)^2}=4.$$

განხილულ მაგალითებში მიღებული რიცხვები შედარებით უფრო თვალსაჩინოა სერიათა უალბათესი სიდიდეების სიზუსტეების შედარებისათვის და აგრეთვე წონით საშუალოს გამოთვლისათვის ადვილად გამოსაყენებელი. აქედან ცხადია, თუ რად მივმართავთ ხოლმე ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

როგორც ვხედავთ, ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად შეგვიძლია მივიღოთ *ნამდვილი* ან *ფიქტიური* რიგიდან ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. შედეგთა სიზუსტეების შედარებისათვის მას იმავე მნიშვნელობა აქვს, როგორც ზომის ერთეულს სიდიდეთა გაზომვების დროს. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი η-ით. *ამგვარად*, η-ს *ვუწოდებთ ნამდვილი ან ფიქტიური რიგის განაზომთა ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.*

იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა ერთგვაროვანი განაზომების წონების გამოთვლა, მაშინ η-ს განზომილება უნდა მივიღოთ ისეთივე, როგორიც აქვს შესაფასებელი რიგების საშუალო კვადრატულ შეცდომებს და ისევე, როგორც ზემოთ განხილულ მაგალითებში გამოთვლილი წონების განზომილებები მიიღებს ნულოვანი. მხოლოდ, როცა საჭიროა ა რ ა ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი განაზომების წონების გამოთვლა, მაშინ η უნდა მივიღოთ გ ა ნ ყ ე ნ ე ბ უ ლ რ ი ც ხ ვ ა დ, ე. ი. მ ი ს ი გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ა ი ქ ნ ე ბ ა ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი და გამოთვლილი წონები მიიღება სახელდებული რიცხვების სახით.

მაგალითად, ვთქვათ, სამკუთხედში გაზომილია არატოლზუსტად ორი გვერდი და ერთი კუთხე

$$M_a = \pm 0{,}28 \text{ მმ},$$

$$M_b = \pm 0{,}44 \text{ მმ},$$

$$M_\alpha = \pm 15''.$$

საჭიროა განისაზღვროს მათი წონები.

ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა η მივიღოთ **15-ის** ტოლად, მაშინ

$$P_a = \left(\frac{15}{0{,}28 \text{ მმ}}\right)^2 = 2898 \left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right];$$

$$P_b = \left(\frac{15}{0{,}44 \text{ მმ}}\right)^2 = 1174 \left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right];$$

$$P_\alpha = \left(\frac{15}{15 \text{ სეკ}}\right)^2 = 1 \left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right]$$

ნათქვამის საფუძველზე (3. 5. 2. 6) ფორმულა ზოგადად შეიძლება დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$P_i = \frac{\eta^2}{M_i^2}. \tag{3.5.4.1}$$

მხოლოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ, როცა საჭიროა სხვადასხვა ერთგვაროვანი ან არაერთგვაროვანი არატოლზუსტი განაზომის უალბათესი სიდიდეების წონების განსაზღვრისათვის (1) ფორმულის გამოყენება, პირველ შემთხვევაში η უნდა შევიტანოთ იმავე განზომილებით, რაც აქვს ერთგვაროვან რიგებს და მეორე შემთხვევაში კი მისი განზომილება უნდა მივიღოთ განყენებულ რიცხვად. ასეთ მიდგომას არსებითი მნიშვნელობა აქვს, მაგალითად, მაღალი ტრიანგულაციისათვის და სხვ.

ზემოხსენებულის შემდეგ (1) ფორმულა ზოგადად ასე გამოითქმება: **ნებისმიერი განაზომის წონა უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ერთი და იგივე ან სხვადასხვა ერთგვაროვან, ან არაერთგვაროვან, ნამდვილ ან ფიქტიურ განაზომთა ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატი და მნიშვნელი — საძიებელი წონის შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომების კვადრატი.**

როდესაც ცნობილია განაზომთა სხვადასხვა სერიიდან მხოლოდ ერთი

სერიის უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა და წონა, მაშინ პირველ რიგში გამოითვლება η (1) ფორმულის საშუალებით.

$$\eta = M_i\sqrt{P_i} \tag{3.5.4.2}$$

ამის შემდეგ შეიძლება გამოთვლილ იქნეს ნებისმიერი სერიის ან საერთოდ ნებისმიერ განაზომთა უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა, თუ გვეცოდინება მათი წონები, იმავე (1) ფორმულის გამოყენებით

$$M_i = \frac{\eta}{\sqrt{P_i}} \tag{3.5.4.3}$$

ვთქვათ, გაზომილი გვაქვს რაიმე კუთხე სამ სერიად. ცნობილია მხოლოდ პირველი სერიის უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა $M_1 = \pm 6''$ და წონა $P_1 = 2$. მეორე და მესამე სერიის შედეგების ანუ უალბათესი სიდიდეების კი ვიცით მხოლოდ წონები: $P_2 = 4$ და $P_3 = 8$. საჭიროა განისაზღვროს მეორე და მესამე სერიის შედეგთა საშუალო კვადრატული შეცდომები. პირველ რიგში (2) ფორმულით განვსაზღვრავთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას, იქნება

$$\eta = \pm 6''\sqrt{2} \approx \pm 8'',5,$$

შემდეგ (3) ფორმულით განისაზღვრება მეორე და მესამე სერიების საშუალო კვადრატული შეცდომები

$$M_2 = \pm\frac{8'',5}{\sqrt{4}} \approx \pm 4'',3;$$

$$M_3 = \pm\frac{8'',5}{\sqrt{8}} \approx \pm 3'',0.$$

ამ შემთხვევაში ჯობდა ჯერ ყველა წონა გაგვეყო 2-ზე, ე. ი. ერთეულ წონად მიგვეღო პირველი სერიის შედეგის წონა და მისი შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომა მიგვეღო η-დ. წონების ორზე გაყოფით მივიღებთ $P_1 = 1$: $P_2 = 2$ და $P_3 = 4$. (2) ფორმულით η განსაზღვრა საჭირო აღარ იქნება. მართლაც, რომ შევამოწმოთ (2) ფორმულით, η-ს სიდიდე M_1-ის ტოლი იქნება

$$\eta = M_1\sqrt{P_1} = \pm 6''$$

(3) ფორმულით კი

$$M_2 = \pm\frac{6''}{\sqrt{2}} \approx \pm 4'',3;$$

$$M_3 = \pm\frac{6''}{\sqrt{4}} = \pm 3'',0.$$

როგორც ვხედავთ, წონების პროპორციულად შეცვლით, ანუ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის შეცვლით სხვა შედეგების შეფასებაზე არავითარი გავლენა არ მოგვიხდენია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.1. სამკუთხედში გაზომილია ყველა კუთხე სხვადასხვა სიზუსტის თეოდოლიტით და სხვადასხვა სერიებად.

ყოველი ცალკეული განაზომის m საშუალო კვადრატული შეცდომა და გაზომვათა n რაოდენობა შესაბამისად არის

$$\text{I თეოდოლიტისათვის } m_1 = \pm 2'',0, \quad n_1 = 4;$$
$$\text{II} \qquad m_2 = \pm 3'',0, \quad n_2 = 9;$$
$$\text{III} \qquad m_3 = \pm 4'',0, \quad n_3 = 16.$$

გამოვითვალოთ უალბათეს სიდიდეთა P_1, P_2 და P_3 წონები,

პირველ რიგში (3. 3. 7. 2) ფორმულით გამოვითვლით უალბათეს სიდიდეთა საშუალო კვადრატულ შეცდომებს

$$M_1 = \pm \frac{2''}{\sqrt{4}} = \pm 1'',0; \quad M_2 = \pm \frac{3''}{\sqrt{9}} = \pm 1'',0 \text{ და } M_3 = \pm \frac{4''}{\sqrt{16}} = \pm 1''0.$$

ვინაიდან შედეგთა საშუალო კვადრატული შეცდომები ტოლებია, მათი წონებიც ტოლები იქნება ე. ი. მივიღებთ.

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.2. ხუთკუთხედში გაზომილია ყველა კუთხე სხვადასხვა სიზუსტის თეოდოლიტით და სხვადასხვა სერიებად. მონაცემები არის შემდეგი:

$$\text{I თეოდოლიტისათვის } m_1 = \pm 3'',0, \quad n_1 = 4;$$
$$\text{II} \qquad m_2 = \pm 5'',0, \quad n_2 = 16;$$
$$\text{III} \qquad m_3 = \pm 4'',0, \quad n_3 = 12;$$
$$\text{IV} \qquad m_4 = \pm 2'',0, \quad n_4 = 3;$$
$$\text{V} \qquad m_5 = \pm 7'',0, \quad n_5 = 20.$$

გამოვითვალოთ უალბათეს სიდიდეთა P_1, P_2, P_3, P_4 და P_5 წონები (3. 3. 7. 2) ფორმულით

$$M_1 = \pm \frac{3''}{\sqrt{4}}; \quad M_2 = \pm \frac{5''}{\sqrt{16}}; \quad M_3 = \pm \frac{4''}{\sqrt{12}};$$
$$M_4 = \pm \frac{2''}{\sqrt{3}}; \quad M_5 = \pm \frac{7''}{\sqrt{20}}.$$

ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მივიღოთ მეორე კუთხის გაზომვის $\eta = M_2$ საშუალო კვადრატული შეცდომა, მაშინ (1) ფორმულით გვექნება

$$P_1 = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{9}{4}} \approx 0,7; \quad P_2 = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16}} = 1; \quad P_3 = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{16}{12}} \approx 1,2;$$
$$P_4 = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{4}{3}} \approx 1,2; \quad P_5 = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{49}{20}} \approx 0,6,$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.3. ხუთკუთხედში, გარდა კუთხეებისა, გაზომილია გვერდები არატოლზუსტად. დამატებით მეორე მაგალითის მონაცემებისა, გვაქვს გვერდების განაზომთა შედეგების საშუალო კვადრატული შეცდომები

$$M_1'=\pm 2 \text{ მმ}; \ M_2'=\pm 3 \text{ მმ}; \ M_3'=\pm 5 \text{ მმ}; \ M_4'=\pm 4 \text{ მმ და } M_5'=\pm 6 \text{ მმ}.$$

ამ შემთხვევაში η იქნება განყენებული რიცხვი და ედრება $\frac{5}{\sqrt{16}}$.

(1) ფორმულით მივიღებთ

$$P_1\approx 0{,}7\left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right]; \ P_2=1\left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right]; \ P_3\approx 1{,}2\left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right]; \ P_4\approx 1{,}2\left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right] \text{ და}$$

$$P_5\approx 0{,}6\left[\frac{1}{\text{სეკ}^2}\right].$$

$$P_1'\approx\frac{\frac{25}{16}}{2^2}\approx 0{,}4\left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right]; \qquad P_2'=\frac{\frac{25}{16}}{3^2}\approx 0{,}17\left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right];$$

$$P_3'=\frac{\frac{25}{16}}{5^2}\approx 0{,}6\left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right]; \ P_4'=\frac{\frac{25}{16}}{4^2}\approx 0{,}1\left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right] \text{ და } P_5'=\frac{\frac{25}{16}}{6^2}\approx 0{,}04\left[\frac{1}{\text{მმ}^2}\right].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.4. განისაზღვროს წონა L კილომეტრი სიგრძის ნიველირსავალის ალმატებისა, თუ l კილომეტრი ნიველირსავალის წონას მივიღებთ ერთეულად.

l და L კილომეტრი სიგრძის ნიველირსავალის ალმატებათა წონები გამოითვლება (3. 5. 2. 12) ფორმულით და შესაბამისად მივიღებთ

$$P_l=\frac{1}{l} \text{ და } P_L=\frac{1}{L}.$$

შემდეგ, თუ P_L-ს გავყოფთ P_l-ზე, გვექნება

$$\frac{P_L}{P_l}=\frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{l}}=\frac{l}{L};$$

მაგრამ, პირობის თანახმად, $P_l=1$, ამის გამო

$$P_L=\frac{l}{L}.$$

თავიდანვე განსაზღვრული წონების l-ზე გამრავლებითაც იმავე პასუხს მივიღებდით, მართლაც

$$P_l=1 \text{ და } P_L=\frac{l}{L}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.5. განისაზღვროს წონა L კილომეტრი სიგრძის ნიველირსავალის ალმატებისა, თუ l კილომეტრი ნიველირსავალის წონას მივი-

ლებთ ერთეულად. ამავე დროს პირველი ნიველირსავალის ზომის ერთეულზე აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა არის k_1 და მეორე ნიველირსავალისათვის—k_2.

ამ შემთხვევაში წონათა განსაზღვრისთვის გამოვიყენებთ (3. 5. 2. 10) ფორმულას, გვექნება

$$P_l=\frac{1}{k_2^2 l} \text{ და } P_L=\frac{1}{k_1^2 L}.$$

პირობის გამოყენებით პასუხი იქნება·

$$P_L=\frac{k_2^2 l}{k_1^2 L}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.6. 100 მეტრი სიგრძის ხაზის ერთჯერ გაზომვის წონა მივიღოთ ერთის ტოლად. რამდენჯერ უნდა გავზომოთ 375 მეტრი სიგრძის მანძილი იმავე საზომით, რომ შედეგის წონა გამოვიდეს $\frac{1}{2}$.

375 მეტრის სიგრძის ხაზის ერთჯერ გაზომვის წონა, როცა 100-მეტრიანი ხაზის გაზომვის წონა ერთის ტოლად მივიღეთ, იქნება

$$P_{375}=\frac{100}{375}.$$

ამ ხაზის იმავე საზომით n-ჯერ გაზომვის წონა (3. 5. 2. 3) ფორმულით გამოითვლება და მივიღებთ

$$P'_{375}=P_{375}\cdot n=\frac{100\cdot n}{375}.$$

პირობის თანახმად

$$\frac{1}{2}=\frac{100\cdot n}{375},$$

საიდანაც

$$n\approx 2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.7. სამკუთხედის α კუთხე გაზომილია თეოდოლიტით 10-ჯერ, რომლის ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის $\pm 6''$. β და γ კუთხის გაზომვად გამოყენებულია სხვა თეოდოლიტი, რომლისთვისაც ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის $\pm 8''$ რამდენჯერ უნდა გაიზომოს β და γ კუთხეები, რომ სამკუთხედის სამივე კუთხის წონები ტოლი იყოს.

(3. 3. 7. 2) ფორმულით

$$M_\alpha=\pm\frac{6''}{\sqrt{10}}; \qquad M_\beta=M_\gamma=\pm\frac{8''}{\sqrt{n}};$$

(3. 5. 2. 6) ფორმულით

$$P_\alpha=\frac{10}{36}; \qquad P_\beta=P_\gamma=\frac{n}{64}.$$

პირობის თანახმად

$$\frac{n}{64}=\frac{10}{36};$$

აქედან

$$n\approx 18,$$

ე. ი. β და γ კუთხეები თითოეული ცალ-ცალკე უნდა გაიზომოს 18-ჯერ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.8. სამკუთხედის კუთხეები გაზომილია წონებით 9,12 და 16. ძოიძებნოს საშუალო კვადრატული შეცდომები ამ კუთხეებისა, თუ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა მივიღეთ ფიქტიური რიგიდან და ტოლია ± 10″.

(3) ფორმულით

$$M_1=\pm\frac{10''}{\sqrt{9}}\approx\pm 3'',3;\quad M_2=\pm\frac{10''}{\sqrt{12}}\approx 2'',9 \quad \text{და}\quad M_3=\pm\frac{10''}{\sqrt{16}}=2'',5.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.4.9. კუთხის განაზომთა შედეგის საშუალო კვადრატული შეცდომა $M_\alpha=\pm 0'',5$ და იისი წონა $P_\alpha=6$. გამოვითვალოთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

(2) ფორმულით

$$\eta=\pm 0,5\sqrt{6}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 5. 4. 10. 500 ნიველირდგომის ნიველირსავლის წონა არის 2. რამდენი ნიველირდგომის ნიველირსავალი შეესაბამება ერთეულ წონას?

(3. 5. 2. 11) ფორმულის მიხედვით

$$P_1=\frac{1}{500};\quad P_2=\frac{1}{x}.$$

პირობის თანახმად დაიწერება

$$\frac{P_1}{P_2}=2=\frac{x}{500};$$

აქედან

$$x=1000 \text{ შტატივს.}$$

ს ა ე რ თ ო დ ა ს კ ვ ნ ა: ნებისმიერი შედეგის წონა უდრის ამ წონის შესაბამისი რიცხვისა და ერთეული წონის შესაბამისი რიცხვის ფარდობას.

განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ კიდევ რისთვის გვჭირდება ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა. ამისათვის გამოვიყენოთ წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომის და მისივე წონის გამოსათვლელი ფორმულა.

3. 5. 5. წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა და წონა

როგორი სახის გაზომვაც არ უნდა გვქონდეს, სიზუსტის შეფასებისათვის საჭიროა საბოლოო შედეგის ანუ უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა.

ასევე არატოლზუსტი გაზომვების შემთხვევაშიაც საჭიროა წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა.

როგორც ვიცით, წონითი საშუალო გამოითვლება (3. 5. 3. 4) ფორმულით

$$L_0 = \frac{L_1P_1 + L_2P_2 + \cdots + L_kP_k}{[P]}$$

ანუ

$$L_0 = \frac{P_1}{[P]} \cdot L_1 + \frac{P_2}{[P]} \cdot L_2 + \cdots + \frac{P_k}{[P]} \cdot L_k. \qquad (a)$$

როგორც ჩანს, წონითი საშუალო შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც სრული წრფივი ფუნქცია უშუალოდ გაზომილ $L_1, L_2, \cdots, L_k$ სიდიდეებისა, რომელთა საშუალო კვადრატული შეცდომები და წონები შესაბამისად არის

$$M_1, M_2, \cdots, M_k \text{ და } P_1, P_2 \cdots, P_k.$$

აღვნიშნოთ საერთო არითმეტიკულ საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა M_0-ით და მისი წონა P_0-ით; მაშინ (3. 4. 1. 8) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ

$$M_0^2 = \frac{P_1^2}{[P]^2} M_1^2 + \frac{P_2^2}{[P]^2} M_2^2 + \cdots + \frac{P_k^2}{[P]^2} M_k^2; \qquad (b)$$

მაგრამ (3. 5. 4. 2) ფორმულის თანახმად

$$\eta^2 = M_1^2 P_1 = M_2^2 P_2 = \cdots = M_k^2 P_k;$$

ამ სიდიდის (b) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ

$$M_0^2 = \frac{P_1\eta^2}{[P]^2} + \frac{P_2\eta^2}{[P]^2} + \cdots + \frac{P_n\eta^2}{[P]^2},$$

საიდანაც

$$M_0^2 = \frac{\eta^2}{[P]};$$

საბოლოოდ გვექნება

$$M_0 = \frac{\eta}{\sqrt{[P]}}. \qquad (3.5.5.1)$$

ე. ი. წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა და მნიშვნელი — კვადრატული ფესვი წონების ჯამიდან.

როგორც ჩანს, აქაც საჭიროა ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

საერთო არითმეტიკულ საშუალოს წონის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (3. 5. 4. 1) ფორმულა; ამ ფორმულით გამოითვლება ნებისმიერი განაზომის და მათ რიცხვში საერთო არითმეტიკული საშუალოს წონაც

$$P_0 = \frac{\eta^2}{M_0^2}.$$

მაგრამ (1) ფორმულით

$$M_0^2 = \frac{\eta^2}{[P]},$$

ამიტომ

$$P_0=\frac{\eta^2}{\frac{\eta^2}{[P]}},$$

ე. ი.

$$P_0=[P]. \qquad (3.5.5.2)$$

მაშასადამე, საერთო არითმეტიკულ საშუალოს წონა უდრის ყველა არატოლზუსტი განაზომის წონების ჯამს.

როდესაც $P_1=P_2=\cdots P_k=1$, ე. ი. თუ გვაქვს ტოლზუსტი გაზომვები, მაშინ ტოლზუსტ განაზომთა უალბათესი სიდიდის წონა განაზომთა რაოდენობის გამომხატველი რიცხვი იქნება

$$P_0=[P]=n.$$

ვიდრე შევუდგებოდეთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრას, განვიხილოთ თვისებები, რომლითაც ხასიათდება გაზომვების სერიათა უალბათესი სიდიდეებიდან საერთო არითმეტიკულ საშუალოს გადახრები.

3. 5. 6. წონითი საშუალოდან უალბათესი სიდიდეების გადახრები და მათი თვისებები

ვთქვათ, გვაქვს არატოლზუსტი $L_1, L_2, \cdots, L_k$ განაზომები $P_1, P_2, \cdots, P_k$ წონებით. დავადგინოთ წონითი საშუალოდან განაზომთა არატოლზუსტი შედეგების გადახრების თვისებები. გადახრები აღვნიშნოთ V_i-ით. (3. 1. 3 პარაგრაფში) მიღებული წესის მიხედვით ეს გადახრები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} V_1&=L_1-L_0\\ V_2&=L_2-L_0\\ &\cdots\\ V_k&=L_k-L_0 \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

გადავამრავლოთ ყოველი ტოლობა სათანადო წონაზე და ნამრავლები წევრწევრად შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} P_1V_1&=P_1L_1-P_1L_0,\\ P_2V_2&=P_2L_2-P_2L_0,\\ &\cdots\\ P_kV_k&=P_kL_k-P_kL_0\\ \hline [PV]&=[PL]-[P]L_0 \end{aligned}$$

აქედან, რადგან

$$L_0=\frac{[PL]}{[P]},$$

გვექნება

$$[PV]=0, \qquad (3.5.6.1)$$

ე. ი. **განაზომთა ცალკეული სერიის უალბათეს სიდიდეთა წონითი საშუალოდან გადახრებისა და წონების ნამრავლების ჯამი 0-ს უდრის.**

ეს თვისება ანალოგიურია უალბათეს შეცდომათა პირველი თვისებისა.

ტოლზუსტი გაზომვების ანალოგიურად დადგინდება გადახრათა კვადრატებისა და სათანადო წონების ნამრავლების ჯამის მეორე თვისება.

ვთქვათ, გვაქვს წონითი საშუალოს არატოლი ნებისმიერი B რიცხვიდან არატოლზუსტი შედეგების გადახრები. ეს გადახრები აღვნიშნოთ σ_i-ით. (a) დამოკიდებულების ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= L_1 - B \\ \sigma_2 &= L_2 - B \\ & \dots \\ \sigma_k &= L_k - B \end{aligned}\right\}. \qquad (b)$$

(b) ტოლობებიდან (a) ტოლობების შესაბამისად გამოკლებით მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - V_1 &= L_0 - B \\ \sigma_2 - V_2 &= L_0 - B \\ & \dots \\ \sigma_k - V_k &= L_0 - B \end{aligned}\right\}. \qquad (e)$$

$L_0 - B$ სხვაობას თუ აღვნიშნავთ ε-ით, გვექნება

$$\sigma_1 = V_1 + \varepsilon;$$
$$\sigma_2 = V_2 + \varepsilon;$$
$$\dots$$
$$\sigma_k = V_k + \varepsilon.$$

კვადრატში ახარისხებისა და შემდეგ სათანადო წონებზე გადამრავლებით მივიღებთ

$$P_1\sigma_1^2 = P_1V_1^2 + P_1\varepsilon^2 + 2P_1\varepsilon V_1,$$
$$P_2\sigma_2^2 = P_2V_2^2 + P_2\varepsilon^2 + 2P_2\varepsilon V_2,$$
$$\dots$$
$$\underline{P_k\sigma_k^2 = P_kV_k^2 + P_k\varepsilon^2 + 2P_k\varepsilon V_k,}$$

საიდანაც შეკრებით გვექნება

$$[P\sigma^2] = [PV^2] + \varepsilon^2[P] + 2\varepsilon[PV].$$

(1) ფორმულის თანახმად, $2\varepsilon[PV]$ წევრი ნულს უდრის. განტოლების ყველა დანარჩენი წევრი კი დადებითია, მაშასადამე,

$$[PV^2] < [P\sigma^2] \text{ ანუ } [PV^2] = \text{minimum}. \qquad (3.5.6.2)$$

რადგან σ არის ნებისმიერი (წონითი საშუალოს არატოლი) რიცხვიდან გადახრა, ამიტომ **წონითი საშუალოდან არატოლზუსტ განაზომთა გადახრების კვადრატების წონებზე ნამრავლთა ჯამი მინიმალურია შედარებით სხვა სიდიდისაგან, თუგინდ ჭეშმარიტი სიდიდისაგან, გადახრებისა და შესაბამის წონების ნამრავლების ჯამზე.**

ეს თვისებაც ანალოგიურია უალბათესი შეცდომების მეორე თვისებისა, ივივე ითქმის მესამე თვისების შესახებაც, ე. ი. გადახრათა კვადრატების სათანადო წონებზე ნამრავლთა ჯამი რაოდენობრივად დამახასიათებელია შესრულებულ განაზომთა რიგებისა.

ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად, გარდა (3. 5. 4. 2) ფორმულისა, არსებობს კიდევ სხვა ფორმულებიც.

3. 5. 7. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია დამოუკიდებლად განსაზღვრულ არატოლზუსტ განაზომთა საშუალო კვადრატული შეცდომები და წონები

როგორც ვიცით, საშუალო კვადრატული შეცდომა დამახასიათებელია გაზომვათა ყველა პირობების ერთობლიობისა.

როდესაც წონები განსაზღვრულია (3. 5. 4. 1) ფორმულით და საშუალო კვადრატული შეცდომები მრავალი განაზომით დადგენილი სიდიდეებია, მაშინ თვით წონებიც უფრო სანდოა და შედარებით სრულად გამოხატავენ არატოლზუსტ განაზომთა ღირსებას.

როგორც ვიცით, წონები შეიძლება განისაზღვროს სრულიად დამოუკიდებლად იმისდა მიხედვით, თუ გაზომვის რომელი კომპონენტია ცვალებადი. ცხადია, რომ წონები, როგორც მიახლოებითი სიდიდეები, არატოლზუსტობას გარკვეული მიახლოებით, მაგრამ საკმარისი სიზუსტით ასახავს. ამ შემთხვევაშიაც ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება (3.5.4.2) ფორმულით, ე. ი. $\eta = M_i\sqrt{P_i}$.

ვთქვათ, გვაქვს არატოლზუსტ განაზომთა $L_1, L_2, \ldots, L_k$ შედეგების, ანუ უალბათეს სიდიდეთა რიგი, შესაბამისად $M_1, M_2, \ldots, M_k$ საშუალო კვადრატული შეცდომებით და $P_1, P_2, \cdots, P_k$ წონებით. ამავე დროს წონები მიღებულია განაზომთა საშუალო კვადრატული შეცდომებისაგან დამოუკიდებლად, მაგრამ ერთნაირი გაგებით (მიდგომით) და წესით. ასეთ შემთხვევაში (3. 5. 4. 2) ფორმულით გამოთვლილი ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომები ურთიერთტოლი არ იქნება

$$\eta_1 = M_1\sqrt{P_1}, \ \eta_2 = M_2\sqrt{P_2}, \cdots, \ \eta_k = M_k\sqrt{P_k}.$$

მაგრამ ამ სიდიდეებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ საშუალო კვადრატული სიდიდე, რაც ზოგადი მნიშვნელობა იქნება ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომისა, მართლაც

$$\eta^2 = \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_k^2}{k}, \tag{3.5.7.1}$$

ანუ

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \cdots + P_kM_k^2}{k}},$$

ე. ი.

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[PM^2]}{k}}, \tag{3.5.7.2}$$

სადაც k შედეგთა რაოდენობაა.

ამ წესით განსაზღვრული ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა დამახასიათებელია მოცემული არატოლზუსტი განაზომების შედეგების ტოლზუსტი წარმომადგენლისა. სხვანაირად, მოცემული არატოლზუსტი განაზომების მწკრივები შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც დაშლილი ტოლზუსტი განაზომების მწკრივად და ტოლზუსტ განაზომად ავიღოთ ერთეული წონის განაზომი· საერთოდ ასეთი სახით ერთეული წონის განაზომები დადგინდება ნებისმიერად, მაგრამ ერთგვარად, ერთად განხილვით ყველა განაზომის ცალკეული შედეგისათვის.

ვთქვათ, სამი კუთხე გაზომილი არის არატოლზუსტად და მათი შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომებია

$$M_1=\pm 2'',0,\ M_2=\pm 1'',5 \text{ და } M_3=\pm 2'',5.$$

განაზომთა წონები განსაზღვრულია ამ საშუალო კვადრატული შეცდომებისაგან დამოუკიდებლად და მათი სიდიდეებია

$$P_1=4,\ P_2=6 \text{ და } P_3=2.$$

ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (2) ფორმულით

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[PM^2]}{k}}=\pm\sqrt{\frac{4\cdot(2,0)^2+6\cdot(1,5)^2+2\cdot(2,5)^2}{3}}=\pm 3'',7.$$

ამ მაგალითში ერთეული წონის მქონედ მიღებულია კუთხის ისეთი განაზომი, რომელიც ხასიათდება $\eta=\pm 3'',7$ საშუალო კვადრატული შეცდომით, რომ გვქონდეს გარკვეული წარმოდგენა ასეთ განაზომებზე, საჭიროა გავიხსენოთ, თუ როგორ ვადგენდით შესასრულებელ განაზომთა წონებს. მაგალითად, თუ ერთეულ წონას მივაკუთვნებდით კუთხის ერთი ილეთით გაზომვას, მაშინ η-ს მიღებული ოდენობა იქნება დამახასიათებელი კუთხის ერთი ილეთით გაზომვისა. მაგრამ აღნიშნული საკითხის გამორკვევა თავისთავად ნაკლებად საინტერესოა, მთავარი ისაა, რომ ყველა წონა იქნეს განსაზღვრული ერთნაირი წესით.

სიზუსტის თვალსაზრისით წონების შესახებ ასეც შეიძლება ვიმსჯელოთ: **ყოველი სიდიდე, რომელსაც აქვს P წონა, ტოლზუსტია ერთეული წონის მქონე იმდაგვარივე სიდიდეებისა, რომელთა რაოდენობა $\frac{1}{P}$ უდრის.**

დავუშვათ, რომ რომელიმე სიდიდეს აქვს P წონა და საჭიროა დადგენა ერთეული წონის ამდაგვარ სიდიდეთა x რიცხვისა ანუ საჭიროა გავიგოთ მოცემული სიდიდე ერთეული წონის რამდენი იმდაგვარივე სიდიდით შეიძლება შეიცვალოს. ამისათვის ვწერთ პროპორციას

1 სიდიდე—P წონის,

x სიდიდე—1 წონის.

$$x=\frac{1}{P}, \tag{3.5.7.3}$$

სადაც x-ით აღვნიშნეთ ერთეული წონის სიდიდეთა რაოდენობა· ვთქვათ, სამ-

კუთხედში $P_\alpha = 1$, $P_\beta = \frac{2}{5}$ და $P_\gamma = \frac{2}{3}$. (3) ფორმულის თანახმად, ყოველი კუთხის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ერთეული წონის მქონე კუთხეები; მაგალითად, α კუთხის ნაცვლად სხვა კუთხე არ მიიღება, რადგანაც $P_\alpha = 1$; მაგრამ β კუთხის ნაცვლად კი მიიღება ერთეული წონის მქონე $\frac{1}{P_\beta} = \frac{5}{2}$ რაოდენობის კუთხე და γ კუთხის ნაცვლად $\frac{1}{P_\gamma} = \frac{3}{2}$. სულ α, β და γ-ს მაგიერ მიიღება ერთეული წონის ხუთი კუთხე. ვთქვათ, სამკუთხედში შეუკვრელობის სიდიდე $15''$-ს უდრის, მაშინ ერთეული წონის მქონე კუთხეზე შეცდომის სიდიდე იქნება $\frac{15''}{5} = 3''$. ასე რომ, სამკუთხედის ყოველ კუთხეზე ეს შეუკვრელობა განაწილდება წონათა შებრუნებული რიცხვების პროპორციულად, სახელდობრ:

α კუთხეზე შესწორება იქნება	$3'' \cdot (-1) = -3''$
β კუთხეზე	$3'' \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -7'',5$
γ კუთხეზე	$3'' \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -4'',5$
სულ	$-15''$

როგორც ვხედავთ, დაშვებული შეცდომების განაწილება შესრულებულია მხოლოდ წონების მხედველობაში მიღებით.

3. 5. 8. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა ჭეშმარიტი სიდიდიდან არატოლზუსტი შედეგების გადახრების და წონების საშუალებით

ვთქვათ, სიდიდე, რომლის ჭეშმარიტი მნიშვნელობაა X, გაიზომა k სერიად, სერიათა შედეგების, ანუ უალბათესი $L_1, L_2, \cdots, L_k$ სიდიდეების წონები და საშუალო კვადრატული შეცდომები არის შესაბამისად $P_1, P_2, \cdots, P_k$ და $M_1, M_2, \cdots, M_k$. შევადგინოთ დამოკიდებულებები ჭეშმარიტი სიდიდიდან გამოთვლილი უალბათესი სიდიდეების გადახრებისა

$$\left.\begin{array}{l} L_1 - X = \Delta_1 \\ L_2 - X = \Delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_k - X = \Delta_k \end{array}\right\}. \qquad (a)$$

(a) დამოკიდებულებებში Δ_i გადახრები შინაარსობრივად განსხვავდება უშუალოდ ტოლზუსტ განაზომთა ჭეშმარიტი შეცდომებისაგან, რადგან $L_1, L_2, \cdots, L_k$ სიდიდეები გამოთვლილია ცალკეული სერიის უშუალო განაზომთა საშუალებით და ეს შედეგები (უალბათესი სიდიდეები) არატოლზუსტია, რო-

მელთაც შეესაბამება სხვადასხვა $M_1, M_2, \cdots, M_k$ საშუალო კვადრატული შეცდომები და $P_1, P_2, \cdots, P_k$ წონები.

ტოლზუსტი გაზომვების განხილვისას მეთხუთმეტე პარაგრაფში მივიღეთ, რომ საუგულვებელი შეცდომის დაშვებით ტოლზუსტ განაზომთა უალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომა ტოლია მისივე საშუალო კვადრატული შეცდომისა, ე. ი. $\Delta \approx M$. აქაც უგულებელსაყოფ შეცდომას დავუშვებთ, თუ ჭეშმარიტი სიდიდისაგან ყოველი სერიის უალბათესი სიდიდეების გადახრებს ჩავთვლით მათივე საშუალო კვადრატულ შეცდომის ტოლად, ე. ი. დავუშვებთ, რომ

$$\Delta_i \approx M_i, \tag{3.5.8.1}$$

მაშინ (3. 5. 4. 2) ფორმულა ყოველი სერიის შესაბამისად ასე დაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 &= M_1^2 P_1 \approx \Delta_1^2 P_1 \\ \eta^2 &= M_2^2 P_2 \approx \Delta_2^2 P_2 \\ & \\ \eta^2 &= M_k^2 P_k \approx \Delta_k^2 P_k \end{aligned}\right\}. \tag{b}$$

შეკრებით მივიღებთ

$$k\eta^2 = [M^2 P] = [\Delta^2 P],$$

ანუ

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[M^2 P]}{k}}, \tag{3.5.8.2}$$

და

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2 P]}{k}}. \tag{3.5.8.3}$$

(2) ფორმულა ანალოგიურია (3. 5. 7. 2) ფორმულისა, მაგრამ ამ ფორმულებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია. (3. 5. 7. 2) ფორმულაში წონები და საშუალო კვადრატული შეცდომები ურთიერთდამოუკიდებლად განსაზღვრულებია, მაშინ როდესაც (2) ფორმულაში ორივე მიღებულია არატოლზუსტ განაზომთა ერთობლივი გადაწყვეტით.

რაც შეეხება (3) ფორმულას, ამ ფორმულით ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლა პრაქტიკულად იშვიათად ხდება, ვინაიდან გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობები მეტწილად უცნობია.

3. 5. 9. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა წონითი საშუალოდან არატოლზუსტი შედეგების გადახრების და წონების საშუალებით

შევადგინოთ ჭეშმარიტი გადახრებისა და უალბათესი გადახრების განმსაზღვრელი დამოკიდებულებები

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= L_1 - X \\ \Delta_2 &= L_2 - X \\ & \\ \Delta_k &= L_k - X \end{aligned}\right\} \quad (a) \qquad \left.\begin{aligned} V_1 &= L_1 - L_0 \\ V_2 &= L_2 - L_0 \\ & \\ V_k &= L_k - L_0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

(a) დამოკიდებულებებს გამოვაკლოთ წევრ-წევრად (b) დამოკიდებულებები, მივიღებთ

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 - V_1 = L_0 - X \\ \Delta_2 - V_2 = L_0 - X \\ \\ \\ \Delta_k - V_k = L_0 - X \end{array}\right\} \quad (c)$$

როგორც ვიცით, $\Delta_0 = L_0 - X$ არის ჭეშმარიტი სიდიდისაგან წონითი საშუალოს გადახრა და მიიღება გამოსახულებისაგან $\frac{[P\Delta]}{[P]} = \Delta_0$; (3.5.3.10) და (3.3.7.1) ფორმულების ანალოგიურად, მივიღებთ, რომ ის ტოლია წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომისა (M_0); ამიტომ (c) დამოკიდებულებანი გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Delta_1 = V_1 + M_0;$$
$$\Delta_2 = V_2 + M_0;$$

$$\Delta_k = V_k + M_0.$$

ეს ტოლობები ავიყვანოთ კვადრატში, გადავამრავლოთ შესაბამის წონებზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$P_1\Delta_1^2 = P_1V_1^2 + P_1M_0^2 + 2P_1M_0 \cdot V_1;$$
$$P_2\Delta_2^2 = P_2V_2^2 + P_2M_0^2 + 2P_2M_0 \cdot V_2;$$

$$P_k\Delta_k^2 = P_kV_k^2 + P_kM_0^2 + 2P_kM_0 \cdot V_k.$$
$$\overline{[P\Delta^2] = [PV^2] + [P]M_0^2 + 2M_0[PV]}$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა ნაწილი, (3.5.8.3) ფორმულის თანახმად, დაიწერება შემდეგნაირად:

$$[P\Delta^2] = \eta^2 \cdot k.$$

მარჯვენა ნაწილის $[P]M_0^2$ წევრი (3. 5. 5. 1) ფორმულის ძალით შეიძლება შეიცვალოს η^2-ით და $2M_0[PV]$ წევრი კი ნულს უდრის (3. 5. 6. 1) ფორმულის თანახმად, მაშასადამე გვექნება

$$\eta^2 k = [PV^2] + \eta^2.$$

აქედან ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{k-1}}, \qquad (3.5.9.1)$$

სადაც k არატოლზუსტ განაზომთა, ანუ სერიათა რაოდენობაა, ე. ი. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა უდრის $\pm$ კვადრატულ ფესვს

წილადიდან, რომლის მრიცხველია უალბათესი გადახრების კვადრატების შესაბამის წონებზე ნამრავლების ჯამი და მნიშვნელი — არატოლზუსტ განაზომთა სერიების რაოდენობა ერთის გამოკლებით.

(3. 5. 5· 1) ფორმულით ვიცით, რომ

$$M_0=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}. \qquad (3.5.9.2')$$

შევიტანოთ ამ· ფორმულაში η-ს მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$M_0=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{[P](k-1)}}. \qquad (3.5.9.2)$$

ამ ფორმულით გამოითვლება წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა, როდესაც ცნობილია წონითი საშუალოდან უალბათესი სიდიდეების V_i გადახრები, მათი k რაოდენობა და P_i წონები.

8. ხ· 10. საკონტროლო ფორმულები

წონითი საშუალოს გამოსათვლელად ვსარგებლობთ (3. 5. 3. 5) ფორმულით

$$L_0=\frac{[PL]}{[P]}$$

ან (3· 5. 3. 8) ფორმულით

$$L_0=l_0+\frac{[P\Delta L]}{[P]}.$$

ამავე დროს ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდისა და წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომის დასადგენად საჭიროა $[PV^2]$ გამოთვლა· ამ გამონათვალის კონტროლისათვის გამოიყენება ფორმულა, შემდეგნაირად:

$$[PV^2]=P_1V_1(L_1-L_0)+P_2V_2(L_2-L_0)+\cdots+P_kV_k(L_k-L_0);$$

(3. 5. 6. 1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ფორმულას

$$[PV^2]=[PVL]. \qquad (3.5.10.1)$$

ეს ფორმულა გამოიყენება საკონტროლოდ, როცა წონითი საშუალოს ვითვლით (3· 5. 3. 5) ფორმულით.

ახლა (1) ფორმულაში მოცემული L_i-ის მაგიერ თუ შევიტანთ (3. 5. 3. 7) ფორმულიდან $l_0+\Delta L_i$, მივიღებთ

$$[PVL]=P_1V_1(l_0+\Delta L_1)+P_2V_2(l_0+\Delta L_2)+\cdots+P_kV_k(l_0+\Delta L_k).$$

აქაც (3. 5. 6. 1) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$[PVL]=[PV\Delta L],$$

ე. ი.

$$[PV^2]=[PV\Delta L]. \qquad (3.5.10.2)$$

(2) ფორმულა გამოიყენება საკონტროლოდ, როცა წონით საშუალოს ვითვლით (3. 5. 3. 8) ფორმულით·

ს ა ე რ თ ო შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ დავაკვირდებით ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელ (3. 5. 4. 2), (3. 5. 7. 2), (3. 5. 8. 3) და (3. 5· 9· 1) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ წონების შეცვლით იცვლება შეცდომების ოდენობები; აგრეთვე იცვლება წონითი საშუალოს წონაც (3· 5. 5. 2 ფორმულა); მხოლოდ თვით წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე უცვლელი რჩება (3. 5. 5. 1 და 3. 5· 9. ფორმულები)·

3. 5. 11. არატოლზუსტი განაზომების დამუშავება

სანამ შევუდგებოდეთ არატოლზუსტ განაზომთა დამუშავების განხილვას, უნდა შევნიშნოთ ერთი გარემოება.

არატოლზუსტი განაზომების წონებისა და საშუალოს დადგენას გამოთვლების დაწყებამდე აწარმოებენ, მაგრამ განაზომთა წონებისა და გამონათვალთა სიზუსტეების დახასიათება სრულდება აგრეთვე გაწონასწორებითი გამოთვლების ე. წ. უ მ ც ი რ ე ს კ ვ ა დ რ ა ტ თ ა ხ ე რ ხ ი ს საშუალებით შესრულების დროს.

ამ უკანასკნელ საკითხს შემდეგ საგანგებოდ განვიხილავთ [28]. გადავიდეთ არატოლზუსტი განაზომების დამუშავებაზე.

1· არატოლზუსტი განაზომებიდან გამოთვლიან წონითი საშუალოს (3. 5. 3. 5) ან (3. 5. 3. 8) ფორმულით, ე· ი,

$$L_0 = \frac{[PL]}{[P]},$$

$$L_0 = l_0 + \frac{[P\Delta L]}{[P]}.$$

2· გამოითვლება ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 5. 4. 2), (3· 5. 7. 2), (3. 5. 8. 2), (3. 5. 8. 3) და (3. 5. 9. 1) ფორმულით. იმ შემთხვევაში, როცა წონითი საშუალოს გამოსათვლელად (3· 5. 3.5) ფორმულაა გამოყენებული, მაშინ საკონტროლოდ გამოიყენება (3, 5. 10· 1) ფორმულა

$$[PV^2] = [PVL],$$

ხოლო, როცა წონითი საშუალოს ვანგარიშობთ (3. 5. 3· 8) ფორმულით, მაშინ საკონტროლოდ (3. 5· 10. 2) ფორმულას ვიყენებთ

$$[PV^2] = [PV\Delta L].$$

3. გამოითვლება წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 5· 5. 1) ან (3. 5. 9. 1) ფორმულით, ე. ი.:

$$M_0 = \pm \frac{\eta}{\sqrt{[P]}},$$

$$M_0 = \pm \sqrt{\frac{[PV^2]}{[P](k-1)}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 5. 11. 1. β კუთხე არის გაზომილი ხუთ არატოლზუსტ სერიად (ხშირად ამბობენ კუთხე გაზომილია ხუთჯერ არატოლზუსტად).

1. პირველი სერიის შედეგია 48° 25′ 33″, გაზომვათა რაოდ-ბა = 2
2. მეორე „ „ 48° 25′ 35″ „ 6
3. მესამე „ „ 48° 25′ 35″ „ 8
4. მეოთხე „ „ 48° 25′ 43″ „ 4
5. მეხუთე „ „ 48° 25′ 40″ „ 4

საჭიროა გამოთვლილ იქნეს ხუთი არატოლზუსტი განაზომის წონითი საშუალო, ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა, წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა და ყოველი სერიის უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ყოველი სერიისათვის წონების ოდენობებად (3. 5. 2. 3) ფორმულის მიხედვით მივიღოთ განაზომთა რაოდენობის პროპორციული რიცხვები (2, 6. 8, 4, და 4). სიმარტივისათვის განაზომთა რიცხვები გავყოთ მათ საერთო უდიდეს გამყოფზე, მივიღებთ: $P_1 = 1$, $P_2 = 3$, $P_3 = 4$, $P_4 = 2$, $P_5 = 2$. ვინაიდან არა გვაქვს არც ერთი სერიის უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა, ამიტომ (3. 5. 5. 1) ფორმულით განვსაზღვრავთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას.

ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ 1-ლი სქემა.

ს ქ ე მ ა 3.5.11.1

№№ რიგ	β	$\Delta\beta_i=\beta_i-l_0$	P	$P\Delta\beta$	$v=\beta_i-\beta_0$	Pv	Pv^2	$Pv\Delta\beta$	შენიშვნა
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	48° 25′ 33″	0	1	0	−4	−4	16	0	
2	35″	+2	3	+6	−2	−6	12	−12	
3	35″	+2	4	+8	−2	−8	16	−16	
4	45″	+10	2	+20	+6	+12	72	+120	
5	40″	+7	2	+14	+3	+6	18	+42	
l_0	48° 25′ 33″	—	12	48	—	0	+134	+134	
β_0	48° 25′ 37″		$[P]$	$[P\Delta\beta]$		$[Pv]$	$[Pv^2]$	$[Pv\Delta\beta]$	

მიახლოებით სიდიდედ ავიღოთ $l_0 = 48° 25' 33''$, რომელიც ჩაიწერება სქემის 1 და 2 სვეტში. შემდეგ გამოითვლება სხვაობები ყოველ განაზომსა და მიღებულ მიახლოებით სიდიდეს შორის ფორმულით $\Delta\beta_i = \beta_i - l_0$, გამონათვლები ჩაიწერება მესამე სვეტში. მეოთხე სვეტში იწერება წონები. მეხუთე სვეტში შესაბამისად მესამე და მეოთხე სვეტების ნამრავლები. ამის შემდეგ გამოითვლება წონითი საშუალო, რომელსაც აღვნიშნავთ β_0

$$\beta_0 = l_0 + \frac{[P\Delta\beta]}{[P]} = 48° 25' 33'' + \frac{48}{12} = 48° 25' 37''.$$

მიღებული წონითი საშუალო იწერება მეორე სვეტში. შემდეგ გამოითვლება უალბათესი გადახრები

$$V_i = \beta_i - \beta_0$$

და ეს გადახრები იწერება მეექვსე სვეტში.

მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სვეტების საფუძველზე კონტროლის მიზნით შეივსება მეშვიდე, მერვე და მეცხრე სვეტები. გარდა ამისა, მერვე სვეტის ჯამით გამოითვლება η. მაგალითად, როგორც ცხრილიდან ჩანს,

$$[PV]=0 \text{ და } [PV^2]=[P\cdot V\cdot\Delta\beta].$$

შემდეგ (3. 5. 5. 1) ფორმულით გამოითვლება ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{k-1}}=\pm\sqrt{\frac{134}{4}}\approx\pm5'',8\approx\pm6'',0,$$

სადაც k — სერიათა რაოდენობაა.

წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 5. 5. 2) ფორმულით

$$M_0=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{[P](k-1)}}=\pm\sqrt{\frac{134}{12\cdot4}}\approx\pm1'',7\approx\pm2'',0.$$

პირველი სერიის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება $\pm6''$, რადგან მისი წონა უდრის ერთს; მართლაც, (3. 5. 4. 3) ფორმულით

$$M_1=\frac{\eta''}{\sqrt{P_1}}=\pm\frac{6''}{\sqrt{1}}=\pm6'',$$

ე. ი. $M_1=\eta$.

ამავე ფორმულით გამოითვლება ყველა დანარჩენი სერიის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$M_2=\frac{\eta''}{\sqrt{P_2}}=\pm\frac{6''}{\sqrt{3}}=\pm3'',5;$$

$$M_3=\frac{\eta''}{\sqrt{P_3}}=\pm\frac{6''}{\sqrt{4}}=\pm3'',0;$$

$$M_4=\frac{\eta''}{\sqrt{P_4}}=\pm\frac{6''}{\sqrt{2}}=\pm4'',3;$$

$$M_5=\frac{\eta''}{\sqrt{P_5}}=\pm\frac{6''}{\sqrt{2}}=\pm4'',3.$$

როდესაც ცნობილია სერიათა $M_1, M_2, \ldots, M_k$ საშუალო კვადრატული შეცდომები და მათი საშუალებით განსაზღვრული წონებით ვაწონასწორებთ უშუალოდ არატოლზუსტად გაზომილ სიდიდეს, მოითხოვება, რომ გაწონასწორების შედეგად მიღებული უალბათესი გადახრებით გამოთვლილი $M_1', M_2', \cdots, M_k'$ საშუალო კვადრატული შეცდომები იყოს ტოლი ცნობილი საშუალო კვადრატული შეცდომებისა. ცნობილი M_i და გაწონასწორების შემდეგ განსა-

ზღვრული M_i' საშუალო კვადრატულ შეცდომათა განსხვავება მიუთითებს წარმოებულ განაზომებში სისტემატური შეცდომების არსებობისა და გამოყენებული მეთოდიკის შეუსაბამობის შესახებ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 5. 11. 2. ერთ-ერთი მოედნის ფართობი გეგმაზე გამოთვლილია სამ სერიად სხვადასხვა პლანიმეტრით და მიღებულია შემდეგი განაზომები:

$$\omega_1 = 45{,}4 \text{ სმ}^2; \ \omega_2 = 45{,}1 \text{ სმ}^2 \text{ და } \omega_3 = 44{,}9 \text{ სმ}^2,$$

შესაბამისად,

$$M_1 = \pm 0{,}30 \text{ სმ}^2; \ M_2 = \pm 0{,}12 \text{ სმ}^2 \text{ და } M_3 = \pm 0{,}18 \text{ სმ}^2$$

საშუალო კვადრატული შეცდომებით. საჭიროა განისაზღვროს გაზომილი სიდიდის წონითი საშუალო და აგრეთვე შემოწმდეს ტოლი არის თუ არა გაწონასწორების შედეგებით და უშუალო გაზომვებით მიღებულ სერიათა საშუალო კვადრატული შეცდომები.

მივიღოთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მეორე სერიის საშუალო კვადრატული შეცდომა, ე. ი. $\eta = M_2 = 0{,}12$ სმ² და (3.5.4.1) ფორმულით გამოვითვალოთ დანარჩენი სერიების წონები

$$P_1 = \frac{0{,}12^2}{0{,}30^2} = 0{,}16; \quad P_2 = 1; \quad P_3 = \frac{0{,}12^2}{0{,}18^2} = 0{,}44.$$

პირველი მაგალითის ანალოგიურად, საჭირო გამოთვლებს ვაწარმოებთ შემდეგი მე-2 სქემით.

სქემა 3.5.11.2

№№ რიგ.	ω	$\Delta\omega = \omega_i - l_0$	P	$P\Delta\omega$	$v = \omega_i - \omega_0$	Pv	Pv^2	$Pv\Delta\omega$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	45,4	0,4	0,16	0,064	+0,32	+0,0512	+0,016384	0,02048
2	45,1	0,1	1,00	0,100	+0,02	+0,0200	+0,000400	0,00200
3	44,9	—0,1	0,44	—0,044	—0,18	—0,0792	+0,014256	0,00792
l_0	45,0		1,60	+0,120		—0,0080	0,031040	0,03040
ω_0	45,08		$[P]$	$[P\Delta\omega]$		$[Pv]$	$[Pv^2]$	$[Pv\Delta\omega]$

უალბათესი გადახრებით (სვეტი 8) გამოვითვლით ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას (3. 5. 5. 1) ფორმულით

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[PV^2]}{k-1}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}031040}{2}} = \pm 0{,}12 \text{ სმ}^2.$$

წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 5. 5. 2) ფორმულით და იქნება

$$M_0 = \pm \sqrt{\frac{[PV^2]}{[P](k-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}031040}{1{,}6 \times 2}} = \pm 0{,}10 \text{ სმ}^2,$$

ე. ი. გამოთვლილი ფართობი $\omega_0 = 45{,}08$ სმ² $\pm 0{,}10$ სმ².

შემოწმების მიზნით გამოვითვალოთ ყოველი სერიის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3· 5. 5. 1) ფორმულით განსაზღვრული ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომით. ამისათვის გამოვიყენოთ (3. 5. 4. 2) ფორმულა, მივიღებთ

$$M_1' = \frac{\eta}{\sqrt{P_1}} = \pm\frac{0{,}12}{\sqrt{0{,}16}} = \pm 0{,}3 \text{ სმ}^2;$$

$$M_2' = \frac{0{,}12}{\sqrt{1}} = \pm 0{,}12 \text{ სმ}^2;$$

$$M_3' = \frac{0{,}12}{\sqrt{0{,}44}} = \pm 0{,}18 \text{ სმ}^2.$$

როგორც ვხედავთ

$$M_1 = M_1';\ M_2 = M_2' \text{ და } M_3 = M_3'.$$

მიღებული შედეგების ტოლობა ნიშნავს გაზომვისათვის გამოყენებული მეთოდიკის შესაბამისობას და გაზომვებში მხოლოდ შემთხვევითი ხასიათის შეცდომების არსებობას· ამ შემთხვევაში ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის უშუალოდ გამოსაყვანად შეგვეძლო გამოგვეყენებია (3· 5· 8· 2) ფორმულა. მართლაც,

$$\eta = \sqrt{\frac{[PM^2]}{k}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}16\times 0{,}3^2 + 1{,}0\times 0{,}12^2 + 0{,}44\times 0{,}18^2}{3}} =$$
$$= \pm 0{,}12 \text{ სმ}^2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 5· 11· 3. ერთი და იგივე კუთხე გაზომილია არატოლზუსტად სამ სერიად· სერიათა შედეგებია

$$\beta_1 = 180°\,24'40'';\quad \beta_2 = 180°\,24'55'' \quad \text{და} \quad \beta_3 = 180°\,24'20'';$$

შესაბამისად

$$M_1 = \pm 8'';\ M_2 = \pm 16'' \text{ და } M_3 = \pm 10'',7.$$

საჭიროა განისაზღვროს გაზომილი კუთხის წონითი საშუალო და შემოწმდეს გაწონასწორების შედეგებით და უშუალოდ გაზომვებით მიღებულ სერიათა საშუალო კვადრატული შეცდომების ოდენობების შესაბამისობა.

გამოთვლების სიადვილისათვის მივიღებთ ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომად მეორე სერიის საშუალო კვადრატულ შეცდომას, ე. ი. $\eta = M_2 = 16''$ და (3· 5. 4. 1) ფორმულით გამოვითვლით დანარჩენი სერიების წონებს

$$P_1 = \frac{16^2}{8^2} = 4{,}0;\quad P_2 = \frac{16^2}{16^2} = 1{,}0 \quad \text{და} \quad P_3 = \frac{16^2}{(10{,}7)^2} = 2{,}2.$$

ანალოგიურად პირველი და მეორე მაგალითისა, საჭირო გამოთვლებს ვაწარმოებთ შემდეგი მე-3 სქემით:

№№ რიგ.	β	Δβ	P	PΔβ	v	Pv	Pv²	PvΔβ	შენიშვნა
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	180° 24′ 40″	+20	4,0	+80″	+4″	+16″	64	320	
2	55″	+35	1,0	+35″	+19″	+19″	361	665	
3	20″	+00	2,2	+00″	−16″	−35″2	563,2	0	
Σ	180° 24′ 20″		7,2	+115″		0,2	988,2	985	
β⁰	180° 24′ 36″		[P]	[PΔβ]		[Pv]	[Pv²]	[PvΔβ]	

უალბათესი გადახრებით (სქემის სვეტი 8) გამოვითვლით ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას. (3. 5. 5. 1) ფორმულით გვექნება

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{988{,}2}{2}}\approx\pm 22''.$$

წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 5. 5. 2) ფორმულით და იქნება

$$M_0=\pm\sqrt{\frac{988{,}2}{7{,}2\cdot 2}}\approx\pm 8'',3,$$

ე. ი. გამოთვლილი კუთხე;

$$\beta_0=180^\circ\,24'\,36''\pm 8'',3.$$

როგორც ვხედავთ, უშუალოდ გაზომილი შედეგების საფუძველზე მიღებული η და გაწონასწორების შედეგად მიღებული η ურთიერთ განსხვავდება. ცხადია, სათანადო საშუალო კვადრატული შეცდომებიც განსხვავებული იქნება; მართლაც,

$$M_{1,y}=\pm\frac{22''}{\sqrt{4}}=\pm 11''; \qquad M_{2,y}=\pm\frac{22''}{\sqrt{1}}=\pm 22'' \quad \text{და}$$

$$M_{3,y}=\pm\frac{22''}{\sqrt{2{,}2}}=\pm 15''.$$

ყველა ეს შეცდომა საშუალოდ 1,4-ჯერ დიდი გამოვიდა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როცა მოცემული გვაქვს სერიათა საშუალო კვადრატული შეცდომები, წონითი საშუალოს შეფასება ჯობს მოვახდინოთ უალბათესი გადახრებით განსაზღვრული ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომით (3. 5. 5. 1) ფორმულით). ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა რომ გამოვიყენოთ (3. 5. 8. 2) ფორმულით, აგრეთვე არ იქნება თანხვედრა; მართლაც,

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{4\cdot(8)^2+1\cdot(16)^2+2{,}2\cdot(10{,}7)^2}{3}}\approx\pm 14''.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 5. 11. 4. A წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია ხუთი საყრდენი პუნქტიდან. გამოსავალი პუნქტების სიმაღლეები ჩავთვალოთ უშეცდომოდ, რადგან ისინი განსაზღვრულია მაღალი კლასის ნიველობით. საჭიროა განისაზღვროს A წერტილის სიმაღლე, როგორც წონითი საშუალო და მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა. ყველა მონაცემი და გამოთვლები მოცემულია მე-4 სქემაში.

სქემა 3.5.11.4

№ რიგ.	h მეტრებში	D, კმ	P	Δh, მმ	$P\Delta h$	v, მმ	Pv	Pv^2	$Pv\Delta h$	შენიშვნა
1	112,814	2,5	4,0	+14	+56,0	−1	−4,0	4,0	−56,0	h—სერიების შედეგები ანუ ნიშნულები
2	807	4,0	2,5	+07	+17,5	−8	−20,0	160,0	−140,0	
3	802	5,0	2,0	+02	+ 4,0	−13	−26,0	338,0	−52,0	D—ნიველირსავალთა სიგრძეები
4	817	0,5	20,0	+17	+340,0	+2	+40,0	80,0	+680,0	
5	816	1,0	10,0	+16	+160,0	+1	+10,0	10,0	+160,0	L_0=112,815±±0,002 მ.
l_0	112,800		38,5		577,5		0	592,0	592,0	
L_0	112,815									

წონები განისაზღვრება 3. 5. 2. 12 ფორმულით, მხოლოდ სიადვილისათვის ერთეულ წონად მივიღოთ 10 კმ ნიველირსავალის წონა, ე. ი. ყველა წონა გადამრავლდება 10 კმ-ზე, მივიღებთ

$$P_1=\frac{10}{2,5}=4,0; \qquad P_2=\frac{10}{4}=2,5;$$

$$P_3=\frac{10}{5}=2; \quad P_4=\frac{10}{0,5}=20,0 \text{ და } P_5=\frac{10}{1}=10,0.$$

ამ წონებით გამოთვლილი ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება ათი კილომეტრი სიგრძის ნიველირსავალის ამატების განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რაც (3. 5. 5. 1) ფორმულით იქნება

$$\eta_{10}=\pm\sqrt{\frac{592}{4}}\approx\pm 12,2 \text{ მმ.}$$

(3. 5. 2. 4) ფორმულით გამოითვლება წონითი საშუალოს საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$M_0=\pm\sqrt{\frac{592}{38,5\cdot 4}}\approx\pm 2 \text{ მმ.}$$

ერთეულ წონად რომ 100 კმ ნიველირსავალის ამატება მიგვეღო, მაშინ მისი შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნებოდა

$$\eta_{100}=\eta_{10}\cdot\sqrt{10}\approx\pm 12,2\cdot 3,16\approx\pm 38,8 \text{ მმ.}$$

ერთი კილომეტრისათვის კი

$$\eta_{კ}=\frac{\eta_{10}}{\sqrt{10}}=\pm\frac{12,2}{3,16}\approx\pm 3,9 \text{ მმ.}$$

ზომის ერთეულზე, ვთქვათ, მეტრზე აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა გვექნება

$$\eta_{მ}=\pm\frac{3,9}{\sqrt{1000}}=\pm 0,12 \text{ მმ}=\pm 0,00012.$$

თ ა ვ ი VI

არაპირდაპირი, დამოუკიდებელი არატოლზუსტი გაზომვები

§. 6. 1. ძირითადი თეორემები დამოუკიდებელ არატოლზუსტ განაზომთა ფუნქციების წონების შესახებ

3. 4. 1. პარაგრაფში ახსნილია სხვადასხვა სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოთვლის წესები, როდესაც ცნობილია უშუალო ტოლზუსტად გაზომილი სიდიდეების საშუალო კვადრატული შეცდომები. აგრეთვე (3. 5. 2) და (3. 5. 4) პარაგრაფებში დაწვრილებით გავეცანით უშუალოდ გაზომილ სიდიდეთა წონების განსაზღვრის წესებს.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა განისაზღვროს უშუალოდ, დამოუკიდებელ და არატოლზუსტად გაზომილ სიდიდეთა ფუნქციების (გამონათვლების) წონები, როდესაც ცნობილია უშუალოდ განაზომთა (არგუმენტთა) წონები.

A. არატოლზუსტ განაზომთა ალგებრული ჯამის წონა

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია

$$y=a\pm b\pm c\pm\cdots$$

საჭიროა განისაზღვროს ამ ფუნქციის P_y წონა.

(3. 4. 1. 4) ფორმულით განვსაზღვრავთ მოცემული ფუნქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას

$$m_y^2=m_a^2+m_b^2+m_c^2+\cdots, \tag{3.6.1.1}$$

ხოლო (3. 5. 4. 3) ფორმულით ცნობილია, რომ

$$m_y^2=\frac{\eta^2}{P_y},\quad m_a^2=\frac{\eta^2}{P_a},\quad m_b^2=\frac{\eta^2}{P_b}\ \text{ და }\ m_c^2=\frac{\eta^2}{P_c}.$$

ამ სიდიდეთა (1) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{\eta^2}{P_y}=\frac{\eta^2}{P_a}+\frac{\eta^2}{P_b}+\frac{\eta^2}{P_c}+\cdots, \tag{3.6.1.2}$$

სადაც η არის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

(2) ტოლობის η^2-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_y}=\frac{1}{P_a}+\frac{1}{P_b}+\frac{1}{P_c}+\cdots \tag{3.6.1.3}$$

თუ (3) ტოლობაში შებრუნებულ წონებს აღვნიშნავთ შესაბამისად q-თი $\left(q_i=\frac{1}{P_i}\right)$, მივიღებთ

$$q_y=q_a+q_b+q_c+\cdots \tag{3.6.1.4}$$

ე. ი. ურთიერთდამოუკიდებელი არატოლზუსტი განაზომების ალგებრული ჯამის შებრუნებული წონა უდრის შესაკრებთა შებრუნებული წონების ჯამს.

იმ შემთხვევაში, როცა განაზომები ტოლზუსტია, ანუ

$$m_a=m_b=m_c=\eta,\ \text{ე. ი.}\ P_a=P_b=P_c=P\ \text{ანუ}\ q_a=q_b=q_c=q,$$

მაშინ (3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{P_y}=\frac{1}{P}+\frac{1}{P}+\frac{1}{P}=\frac{3}{P}.$$

როცა შესაკრებთა რიცხვი n-ს უდრის და თითოეული შესაკრების წონა P რიცხვის ტოლია, მაშინ

$$\text{და}\quad \left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{P_y}=\dfrac{n}{P}\\[2ex] P_y=\dfrac{P}{n}\end{array}\right\}, \tag{3.6.1.5}$$

როცა შესაკრებთა წონები ურთიერთტოლია და უდრის ერთს ($P=1$), მაშინ

$$\text{და}\quad \left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{P_y}=\dfrac{n}{1}=n\\[2ex] P_y=\dfrac{1}{n}\end{array}\right\}, \tag{3.6.1.6}$$

ე. ი. წონა n დამოუკიდებელ ტოლზუსტ განაზომთა ალგებრული ჯამისა თითოეული შესაკრების წონაზე n-ჯერ ნაკლებია (აქ იგულისხმება, რომ შესაკრებთა წონები ურთიერთტოლია).

(6) ფორმულით დავასკვნით, რომ, თუ რაიმე სიდიდეს აქვს P წონა და გვსურს შევცვალოთ იგი ერთეული წონის ერთგვაროვანი სიდიდეებით, მაშინ, ამ სიდიდეთა რაოდენობა $\frac{1}{P}$-ს ტოლი იქნება. მაგალითად, γ კუთხე, რომლის წონა $P_\gamma=\frac{2}{3}$, შეიძლება შეიცვალოს ერთეული წონის $n=\frac{1}{P_\gamma}=\frac{3}{2}$ რაოდენობის კუთხეებით და ამით სიზუსტე არ დაირღვევა (იხილეთ ფორმულა (3. 5. 7. 3) და მაგალითი).

B. მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის წონა

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია

$$y_i = ka_i.$$

მოცემულ ფუნქციაში k არის მუდმივი რიცხვი და a უშუალოდ გაზომილი სიდიდე. ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3. 4. 1. 7) ფორმულით გვექნება

$$m_y^2 = k^2 m_a^2. \qquad (3.6.1.7)$$

აქედან (3. 5. 4. 3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$m_y^2 = \frac{\eta^2}{P_y} \text{ და } m_a^2 = \frac{\eta^2}{P_a}.$$

ამ სიდიდეების (7) ფორმულაში ჩასმის და η^2-ზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$\frac{1}{P_y} = \frac{k^2}{P_a}, \qquad (3.6.1.8)$$

ანუ

$$q_y = k^2 \cdot q_a. \qquad (3.6.1.9)$$

მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის შებრუნებული წონა უდრის მუდმივი რიცხვის კვადრატისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის შებრუნებული წონის ნამრავლს.

(8) ფორმულიდან

$$P_y = \frac{P_a}{k^2}. \qquad (3.6.1.10)$$

ე. ი. მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის წონა უდრის უშუალოდ გაზომილი სიდიდის წონისა და მუდმივი რიცხვის კვადრატის ფარდობას.

C. **სრული წირული ფუნქციის წონა**

$$y = k_1 a \pm k_2 b \pm k_3 c \pm \cdots$$

აქ k_1, k_2 და k_3 არის მუდმივი რიცხვები, ხოლო a, b და c — დამოუკიდებლად გაზომილი სიდიდეები.

ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3. 4. 1. 8) ფორმულით დავწერთ

$$m_y^2 = k_1^2 m_a^2 + k_2^2 m_b^2 + k_3^2 m_c^2 + \cdots \qquad (3.6.1.11)$$

და (3. 5. 4. 2) ფორმულით კი

$$m_y^2 = \frac{\eta^2}{P_y}, \quad m_a^2 = \frac{\eta^2}{P_a}, \quad m_b^2 = \frac{\eta^2}{P_b} \text{ და } m_c^2 = \frac{\eta^2}{P_c}$$

ამ სიდიდეების (11) ტოლობაში ჩასმით და η^2-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_y} = k_1^2 \frac{1}{P_a} + k_2^2 \frac{1}{P_b} + k_3^2 \frac{1}{P_c} + \cdots \qquad (3.6.1.12)$$

ანუ

$$q_y = k_1^2 q_a + k_2^2 q_b + k_3^2 q_c + \cdots \qquad (3.6.1.13)$$

წირული ფუნქციის შებრუნებული წონა უდრის ჯამს, რომლის ყოველი შესაკრები შესაბამისად ტოლია მუდმივის კვადრატისა და არგუმენტის შებრუნებული წონის ნამრავლისა.

D. ზოგადი სახის ფუნქციის წონა

მოცემული გვაქვს ფუნქცია

$$u = f(x, y, z, \alpha, \beta, \cdots).$$

საჭიროა განისაზღვროს ფუნქციის P_u წონა.

ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3. 4. 1. 17) ფორმულის თანახმად დაიწერება

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2 + \cdots, \quad (3.6.1.14)$$

ხოლო (3. 5. 4. 2) ფორმულით

$$m_u^2 = \frac{\eta^2}{P_u}, \quad m_x^2 = \frac{\eta^2}{P_x}, \quad m_y^2 = \frac{\eta^2}{P_y}, \quad m_z^2 = \frac{\eta^2}{P_z}, \quad m_\alpha^2 = \frac{\eta^2}{P_\alpha} \text{ და } m_\beta^2 = \frac{\eta^2}{P_\beta}.$$

ამ სიდიდეების (14) ტოლობაში ჩასმით და η^2-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{P_x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{P_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{P_z} + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{P_\alpha} + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 \frac{1}{P_\beta} + \quad (3.6.1.15)$$

თუ შებრუნებულ წონებს შესაბამისად q-თი აღვნიშნავთ, გვექნება

$$q_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 q_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 q_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 q_z + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 q_\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 q_\beta + \cdots \quad (3.6.1.16)$$

(15) და (16) ფორმულებით შეგვიძლია შევცვალოთ ამ პარაგრაფის ყველა ფორმულა, ე. ი. ზოგადი სახის ფუნქციის შებრუნებული წონა უდრის ჯამს, რომლის ყოველი შესაკრები ფუნქციის თითოეული არგუმენტით აღებული კერძო წარმოებულის კვადრატისა და არგუმენტის შებრუნებული წონის ნამრავლია.

ტოლზუსტი გაზომვების შემთხვევაში უშუალოდ გაზომილი სიდიდეების წონები ურთიერთტოლია და თითოეული მათგანი შეიძლება გავუტოლოთ ერთს, მაშინ (15) და (16) ტოლობები შესაბამისად დაიწერება

$$\frac{1}{P_u} = q_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \cdots \quad (3.6.1.17)$$

ე. ი. დამოუკიდებელ ტოლზუსტ განაზომთა ზოგადი სახის ფუნქციის შებრუნებული წონა უდრის ამავე ფუნქციის თითოეული არგუმენტით აღებულ კერძო წარმოებულების კვადრატების ჯამს.

როდესაც $P_x = P_y = P_z = \cdots = P_\beta = P$, მაშინ (15) და (16) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \cdots\right\} \quad (3.6.1.18)$$

ან

$$P_u = \frac{P}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2}. \quad (3.6.1.19)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 1. სამკუთხედში გაზომილია კუთხეები

α წონით $P_\alpha = 2$,

β $P_\beta = 3$,

γ $P_\gamma = 4$.

გამოვითვალოთ ამ კუთხეთა ჯამის P_s წონა.

ფუნქციის პირველადი სახეა

$$s = \alpha + \beta + \gamma;$$

ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3) ფორმულით დავწერთ

$$\frac{1}{P_s} = \frac{1}{P_\alpha} + \frac{1}{P_\beta} + \frac{1}{P_\gamma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12};$$

აქედან მივიღებთ

$$P_s = 0,92.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 2. დავუშვათ, რომ ყველა კუთხე გაზომილია ტოლზუსტად, ე. ი.

$$P_\alpha = P_\beta = P_\gamma = P = 1,$$

მაშინ (6) ფორმულით მივიღებთ

$$P_s = \frac{1}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 3. სამკუთხედში α და β კუთხეები ტოლზუსტად გაზომილია, ხოლო γ კუთხე მიღებულია გამოთვლით; განვსაზღვროთ P_γ.

ფუნქციის პირველადი სახე იქნება

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta,$$

რადგან, პირობის თანახმად, (6) ფორმულით $P_\alpha = P_\beta = P = 1$,

$$P_\gamma = \frac{1}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 4. განვსაზღვროთ n-კუთხა პოლიგონის კუთხეთა ჯამის P_s წონა, თუ კუთხეები გაზომილია უშუალოდ და ტოლზუსტად. ფუნქციის

პირველადი სახე იქნება $s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n$, პირობის თანახმად, $P_{\alpha_1}=P_{\alpha_2}=\cdots=P=1$. ამის გამო (6) ფორმულით გვექნება

$$P_s=\frac{1}{n}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 5. ტრიანგულაციის ერთ-ერთ გვერდზე მიბმულია n-კუთხა პოლიგონი. ყოველი კუთხე გაზომილია ტოლზუსტად, ე. ი. $m_1=m_2=\cdots=m=\eta$ და $P_1=P_2=\cdots=P=1$. საჭიროა განისაზღვროს პოლიგონის უკანასკნელი გვერდის დირექციული კუთხის m_{α_n} საშუალო კვადრატული შეცდომა და მისივე P_{α_n} წონა იმ პირობით, რომ ტრიანგულაციის გვერდის α_0 დირექციული კუთხის შეცდომა ნულის ტოლია, ე. ი.

$$m_{\alpha_0}=0.$$

ფუნქციის პირველადი სახე იქნება

$$\alpha_n=\alpha_0+\sum_1^n\beta-n\cdot 180^\circ.$$

ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3. 4. 1. 5) ფორმულით გვექნება

$$m_{\alpha_n}=\pm m\sqrt{n},$$

აგრეთვე (3. 5. 4. 1) ფორმულით დავწერთ

$$P_{\alpha_n}=\frac{\eta^2}{m_{\alpha_n}^2}=\frac{\eta^2}{m^2\cdot n};$$

პირობის თანახმად,

$$m^2=\eta^2, \text{ ე. ი.}$$

$$P_{\alpha_n}=\frac{1}{n}.$$

იმავე პასუხს მივიღებთ (6) ფორმულის გამოყენებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 6. გვაქვს რამდენიმე (k) თეოდოლიტური სვლა, თითოეულ სვლაში ტოლზუსტად გაზომილ კუთხეთა რაოდენობა შესაბამისად აღვნიშნოთ n_1, n_2, $n_3,\cdots$, n_k-ით და ამ სვლების შეუკვრელობანი, რომლებიც წარმოადგენენ ჭეშმარიტ შეცდომებს, აღვნიშნავთ ω_1, ω_2, $\omega_3,\ldots$, ω_k-ით. საჭიროა განისაზღვროს ერთი (ანუ ერთეული წონის მქონე) კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა $m=\eta$.

პირობის თანახმად, თითოეული კუთხის გაზომვის წონა შეგვიძლია მივიღოთ ერთის ტოლად. მაშინ (6) ფორმულით სვლების კუთხეთა ჯამის წონები შესაბამისად იქნება

$$P_1=\frac{1}{n_1},\quad P_2=\frac{1}{n_2},\cdots,\ P_k=\frac{1}{n_k}.$$

ვინაიდან პოლიგონების კუთხეთა უბმაობა ანუ კუთხეთა ჯამის ჭეშმარიტი შეცდომები ცნობილია და მათი წონებიც განვსაზღვრეთ, (3. 5· 8. 3) ფორმულით გამოვითვლით ერთეული წონის საშუალო კვადრატულ შეცდომას

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\omega^2]}{k}}=\pm\sqrt{\frac{\left[\frac{\omega^2}{n}\right]}{k}}\,.$$

მიღებული ფორმულა (3. 4. 1) პარაგრაფში მოყვანილი (3. 4. 1· 12) ფერეროს ფორმულის კერძო შემთხვევაა. მართლაც, როცა თეოდოლიტური სვლები სამკუთხედის სახისაა, ე· ი. როცა $n_1=n_2=\cdots=n_i=3$, მაშინ

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[\omega^2]}{3k}}$$

ამავე მაგალითისათვის რიცხვითი ამოხსნა მოცემულია შემდეგ 1-ლ სქემაში.

სქემა 3.6 1.1

თეოდოლიტური სვლების №№		ω მინუტებში		$\frac{\omega^2}{n}$	პასუხი
1	8	2,25	5,0625	0,6328	
2	10	1,25	1,5625	0,1563	
3	8	0,75	0,5625	0,0703	$\eta=\pm\sqrt{\frac{2,3074}{6}}=\pm0',62$
4	7	0,25	0,0625	0,0089	
5	8	1,75	3,0625	0,3828	
6	10	3,25	10,5625	1,0563	
$k=6$				2,3074	

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ მაგალითში თეოდოლიტური სვლები შეიძლება იყოს როგორც შეკრული, ისე ღია, ხოლო გამოსავალი გვერდის დირექციული კუთხის შეცდომა უნდა იყოს საუგულებელყოფო (მცირე) ოდენობის. აქაც ისევე მოვიქცევით, როგორც მე-5 მაგალითში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6· 1· 7· n-კუთხა პოლიგონის შიგა კუთხეთა ჯამის წონა ერთის ტოლია; რას უდრის თითოეული კუთხის P წონა, თუ კუთხეები გაზომილია ტოლზუსტად.

პირობის თანახმად, $P_s=1$ და $P_\alpha=P_\beta=\cdots=P$. (5) ფორმულით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_s}=1=\frac{n}{P}\,.$$

აქედან

$$P=n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 8. გამოითვალოს $y=l\sqrt{P}$ ფუნქციის წონა, თუ უშუალოდ გაზომილი l სიდიდის წონა არის P.

(10) ფორმულით მივიღებთ

$$P_\varphi=\frac{P}{(\sqrt{P})^2}=1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 9. კუთხე $\alpha=\beta+\frac{1}{2}\gamma$; $P_\beta=P_\gamma=10$. გამოვითვალოთ P_α.

(12) ფორმულით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_\alpha}=1^2\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{8}.$$

$$P_\alpha=8.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 10. გამოვთვალოთ $y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{6}$ ფუნქციის წონა.

(12) ფორმულით

$$\frac{1}{P_y}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{P_a}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{P_b}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{P_c}=\frac{1}{4P_a}+\frac{1}{16P_b}+\frac{1}{36P_c}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 11. გამოვთვალოთ $u=xy$ ფუნქციის წონა, თუ $P_x=P_y=1$.

(17) ფორმულის თანახმად,

$$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=y^2+x^2,$$

ანუ

$$P_u=\frac{1}{y^2+x^2}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $P_x=P_y=P$, (19) ფორმულით გვექნება

$$P_u=\frac{P}{y^2+x^2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 1. 12. გამოვთვალოთ $u=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\beta}$ ფუნქციის წონა, თუ უშუალოდ გაზომილი კუთხეების წონები არის P_α და P_β.

(15) ფორმულით გვექნება

$$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2\frac{1}{P_\alpha}+\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2\cdot\frac{1}{P_\beta}.$$

კერძო წარმოებულები იქნება

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\frac{1}{\beta\cos^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)};\quad \frac{\partial u}{\partial\beta}=-\frac{\alpha}{\beta^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

კერძო წარმოებულთა ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{1}{P_u}=\frac{1}{P_\alpha\cdot\beta^2\cos^4\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}+\frac{\alpha^2}{P_\beta\cdot\beta^4\cos^4\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{P_\beta\cdot\beta^2+P_\alpha\cdot\alpha^2}{P_\alpha\cdot P_\beta\beta^4\cos^4\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)},$$

$$P_{u}=\frac{P_{\alpha}P_{\beta}\beta^{2}\cos^{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{P_{\beta}\cdot\beta^{2}+P_{\alpha}\cdot\alpha^{2}}=\frac{\beta^{4}\cos^{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\frac{\beta^{2}}{P_{\alpha}}+\frac{\alpha^{2}}{P_{\beta}}}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (15) ფორმულით შეიძლებოდა გამოგვეთვალა ამ პარაგრაფში მოყვანილია ყველა მაგალითი.

3. 6. 2. ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა არატოლზუსტ ორმაგ განაზომთა რიგის საშუალებით

ვთქვათ, გვაქვს ერთი და იმავე X სიდიდის k რაოდენობის წყვილ ან k ერთგვაროვანი[1] სიდიდის ორ-ორჯერ განაზომთა რიგი. აქ იგულისხმება, რომ ყოველი წყვილი განაზომის წევრები ტოლზუსტია, მხოლოდ სხვადასხვა წყვილები — არატოლზუსტი.

ალვნიშნოთ ყოველი წყვილი განაზომი

$$l_1' \text{ და } l_1'',\ l_2' \text{ და } l_2'',\cdots,\ l_k' \text{ და } l_k''.$$

შესაბამისად ყოველი წყვილის ცალკეული განაზომის წონები

$$P_1,\ P_2,\cdots,\ P_k.$$

წყვილი განაზომის სხვაობის ჭეშმარიტი შეცდომები

$$d_1=l_1'-l_1'',\ d_2=l_2'-l_2'',\cdots,\ d_k=l_k'-l_k''.$$

გამოვითვალოთ ამ სხვაობების ჭეშმარიტი შეცდომების წონები.

ასეთი სახის ფუნქციისათვის (3. 6. 1. 5) ფორმულით წონათა სიდიდეები შესაბამისად გვექნება

$$P_{d_1}=\frac{P_1}{2},\quad P_{d_2}=\frac{P_2}{2},\ \cdots,\ P_{d_k}=\frac{P_k}{2}.$$

არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს $l_i'-l_i''$-ის მიხედვით შევადგენთ სხვაობებს, თუ $l_i''-l_i'$-ით. საჭიროა მხოლოდ დავიცვათ მიღებული წესი ყველა წყვილისათვის სხვაობების გამოთვლის დროს. აგრეთვე უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ სხვაობებს ვგულისხმობთ შემთხვევითი ხასიათის ჭეშმარიტ შეცდომებად. ამ ჭეშმარიტი შეცდომებითა და წონებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ გაზომილ სიდიდეთა ყოველი ცალკეული (ერთჯერ) განაზომის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 5. 8. 3) ფორმულის გამოყენებით. თუ (3.5.8.3) ფორმულაში Δ_i-ს და P_i-ის ნაცვლად d_i-ის და P_{d_i}-ის შევიტანთ, მივიღებთ

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{P_{d_1}\cdot d_1^2+P_{d_2}\cdot d_2^2+\cdots+P_{d_k}\cdot d_k^2}{k}}=\pm\sqrt{\frac{[P_d\cdot d^2]}{k}}.$$

[1] აქ ერთგვაროვნების ქვეშ იგულისხმება მხოლოდ შინაარსით (თვისებით) ერთგვარობა.

ანუ

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\frac{P_1}{2} d_1^2 + \frac{P_2}{2} d_2^2 + \cdots + \frac{P_k}{2} d_k^2}{k}} = \pm \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2k}}. \qquad (3.6.2.1)$$

იმ შემთხვევაში[1], როდესაც წყვილ განაზომთა სხვაობების რიგი სისტემატურ შეცდომებსაც შეიცავს, (1) ფორმულას ვერ გამოვიყენებთ. პირველ რიგში საჭიროა ამ შეცდომების გამორიცხვა ყოველი სხვაობისაგან. სისტემატური შეცდომის საშუალო მნიშვნელობა გამოითვლება (3. 4. 2. 6) ფორმულით

$$\Theta_0 = \frac{[d]}{k} = \frac{[\sigma]}{k}, \qquad (3.4.2.6)$$

სადაც $[\sigma]$ არის $[d]$ სხვაობებში არსებული სისტემატური შეცდომების ჯამი. სისტემატური შეცდომებისაგან თავისუფალ ჭეშმარიტ შეცდომას თუ აღვნიშნავთ d_i'-ით, მაშინ გვექნება შემთხვევითი შეცდომების რიგი

$$d_1' = d_1 - \Theta_0,$$
$$d_2' = d_2 - \Theta_0,$$

$$d'_k = d_k - \Theta_0,$$

საიდანაც შეკრებით მივიღებთ

$$[d'] = [d] - k\Theta_0$$

და, რადგან

$$\Theta_0 = \frac{[d]}{k},$$

ამის გამო

$$[d'] = 0.$$

მაშასადამე, ორმაგ განაზომთა სხვაობების ჭეშმარიტი შეცდომები, როდესაც ეს შეცდომები განთავისუფლებულია სისტემატური გავლენისაგან, უალბათესი შეცდომების თვისებისაა. ამ შეცდომების წონები შესაბამისად არის

$$\frac{P_1}{2}, \ \frac{P_2}{2}, \ldots, \frac{P_k}{2}.$$

გაზომილ სიდიდეთა ყოველი (ერთჯერ) ცალკეული განაზომის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გამოიყენება (3. 5. 9. 1) ფორმულა. მასში სათანადო სიდიდეების ჩასმით მივიღებთ

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[Pd'd']}{2(k-1)}}. \qquad (3.6.2.2)$$

ეს ფორმულა გამოიყენება მაშინაც, როცა d_i' გამოითვლება იმავე წე-

[1] (1) ფორმულა მიიღება იმ შემთხვევაშიც, თუ არატოლზუსტობის გამო (3.4.2.4) ფორმულაში შესაბამისად შევიტანთ ერთჯერ განაზომთა წონებს, რადგანაც აქ იგულისხმება, რომ სხვაობის წონა $P_{d_i} = \frac{P_i}{2}$.

სით, რომლითაც ვსაზღვრავთ ყოველი ცალკეული განაზომის უალბათეს შეცდომას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 2. 1. დამუშავდეს ნიველირსავლის ორმაგი ნიველობის მონაცემები სათანადო ფორმულის გამოყენებით. გამოთვლა შევასრულოთ პირველი სქემის მიხედვით.

სქემა 3.6.2.1

მალების №	მალების დასახელება	აღმატებათა სხვაობები d_i მმ	ყოველ მალში შტატ. რიცხვი n_i	სისტემატური შეცდომები Θ	შემთხვ. შეცდომები $d_i'=d_i-\Theta$	$d'd'$	წონები $P_i=\frac{100}{n_i}$	$P_i d'd'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A—I	−2	20	−4	+2	4	5	20
2	I—II	−6	25	−5	−1	1	4	4
3	II—III	−10	40	−8	−2	4	2,5	10
4	III—IV	+2	10	−2	+4	16	10	160
5	IV—B	−8	25	−5	−3	9	4	36
		$[d]=-24$	120	−24				230

ამ სქემიდან ჩანს, რომ ყოველ შტატივზე სისტემატური შეცდომა

$$\Theta_0=\frac{[d]}{[n]}=\frac{-24}{120}=-0,2 \text{ მმ}.$$

მივიღოთ, რომ სისტემატური შეცდომები პროპორციულია სადგურების რაოდენობისა, მაშინ ყოველ მალში სისტემატური შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$\Theta_i=\Theta_0\cdot n_i.$$

გამონათვლები მოთავსებულია სქემის მე-5 სვეტში. ერთეულ წონად მიღებულია ნიველირსავალის 100 შტატივზე აღმატების წონა. მე-8 სვეტში ჩაწერილია $P_i=\frac{100}{n_i}$ და იგი გამოსახავს ნიველირსავალის ყოველი მალის წონას. სხვაობების წონები $\frac{P_i}{2}$-ის ტოლია და ყოველი წყვილი განაზომის სხვაობის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა (2) ფორმულით გამოითვლება

$$\eta_{100}=\pm\sqrt{\frac{[Pd'^2]}{2(k-1)}}=\pm\sqrt{\frac{230}{8}}=\pm5,4 \text{ მმ},$$

ხოლო ნიველირსავალისათვის, ნიველირის ერთი დგომის შესაბამისი აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$\eta_{\text{შტ}}=\pm\frac{\eta_{100}}{\sqrt{100}}=\pm\frac{5,4 \text{ მმ}}{10}=\pm0,54 \text{ მმ}$$

და ერთი კილომეტრი ნიველირსავალის აღმატებისათვის

$$\eta_{კმ} = \pm \frac{\eta_{100}}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{[n]}{[L]}}, \qquad (3.6.2.3)$$

სადაც $[L]$ ნიველირსავლის (A და B შორის) სიგრძეა კილომეტრებში და $\frac{[n]}{[L]}$ საშუალო რაოდენობა ინსტრუმენტის დგომისა ერთ კილომეტრზე. ვთქვათ, ნიველირსავალი 18 კმ-ის სიგრძისაა, მაშინ საშუალო კვადრატული შეცდომა ნიველირსავლისა 1 კმ-ზე იქნება

$$\eta_{კმ} = \pm \frac{5,4}{10} \sqrt{\frac{120}{18}} = \pm 1,4 \text{ მმ.}$$

ხშირად ერთეულ წონად იღებენ სვლის 10 შტატივს (პირობითი კილომეტრი). მაშინ პირობით კილომეტრზე ნიველობის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება

$$\eta_{კმ\ პირობით} = \pm \frac{5,4}{10} \sqrt{\frac{180}{18}} = \pm 1,7 \text{ მმ.}$$

საბოლოო შედეგი, ანუ ორმაგი ნიველობის საშუალო კვადრატული შეცდომა ერთი პირობით კილომეტრზე იქნება

$$M_{პირ.\ კმ} = \pm \frac{\eta_{პირ.\ კმ}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1,7}{\sqrt{2}} = \pm 1,2 \text{ მმ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 2. 2. პოლიგონის გვერდები გაზომილია ორ-ორჯერ. განისაზღვროს ყოველი გვერდის გაწონასწორებული ოდენობა; ორმაგ განაზომთა სხვაობების საშუალებით განისაზღვროს ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა ყოველი გვერდის როგორც ერთი, ისე ორი განაზომის საშუალოსათვის. იგივე გვერდებისათვის განსაზღვრულ იქნეს შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტები. ყველა გვერდის განაზომი შეფასდეს როგორც წონითი, ისე ტოლზუსტი განაზომების ფორმულებით. გამოთვლილ იქნეს პოლიგონის გვერდების გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა და სიზუსტე მთელი პოლიგონისათვის გამოთვლილი ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომის მიხედვით.

გამოთვლის თანამიმდევრობა ნაჩვენებია 2 სქემაში.

ერთეული წონის ტოლად მიღებულია ერთი მეტრის სიგრძის გაზომვის წონა, ე. ი. ყოველი გვერდის წონა გამოთვლილია ფორმულით

$$P_i = \frac{1}{L_i}.$$

სქემის (8) და (16) სვეტებიდან ჩანს, რომ ყოველი გვერდისათვის ერთეული წონის ა ნ უ ე რ თ ი მ ე ტ რ ი ს ე რ თ ჯ ე რ გ ა ზ ო მ ვ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა η იქნება იგივე, რაც ყოველი გვერდისათვის შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი μ. ერთი მეტრის ორი განაზომის შედეგისათვის გვექნება

$$\eta' = \pm \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \quad (\text{სვეტი } 10)$$

სქემა 3.6.2.2

წვეროების №	განაზომები მეტრებში		$d=L_1-L_2$	d^2	$L_0=\frac{L_1+L_2}{2}$	$Pd^2=\frac{d^2}{L_0}$	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[Pd^2]}{2k}}$	η^2	$\eta'=\pm\frac{\eta}{\sqrt{2}}$	$v'=L_1-L_0$	$v''=L_2-L_0$	$[v^2]=(v')^2+(v'')^2$	$m=\pm\frac{d}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$	$M=\pm\frac{\eta'}{\sqrt{P}}=\pm\frac{m}{\sqrt{2}}$	$u=\pm\frac{m}{\sqrt{L_0}}$	$M'_{საშ}=\pm\frac{\eta'_{საშ}}{\sqrt{P}}$	საშუალო სიზუსტე $\frac{M'}{L_0}$
	წინ L_1	უკან L_2															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	391,58	391,73	−15	225	391,66	0,574	0,54	0,29	0,38	−8	+7	113	10,63	7,54	0,54	5,15	1 : 7600
2	221,51	221,42	+9	81	221,46	0,367	0,43	0,18	0,30	+5	−4	41	6,40	4,58	0,43	3,88	1 : 5700
3	440,55	440,65	−10	100	440,60	0,227	0,34	0,12	0,24	−5	+5	50	7,07	5,03	0,34	5,46	1 : 8100
4	250,10	250,16	−6	36	250,13	0,144	0,27	0,07	0,19	−3	+3	18	4,24	3,02	0,27	4,10	1 : 6200
5	366,68	366,64	+4	16	366,66	0,044	0,15	0,02	0,11	+2	−2	8	2,83	2,01	0,15	5,00	1 : 7300
6	139,13	139,07	+6	36	139,10	0,259	0,36	0,13	0,25	+3	−3	18	4,24	3,00	0,36	3,06	1 : 4000
7	115,64	115,64	0	0	115,64	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,80	1 : 4200
8	133,84	133,76	+8	64	133,80	0,478	0,49	0,24	0,35	+4	−4	32	5,66	4,02	0,49	3,00	1 : 4500
9	168,55	168,55	0	0	168,55	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,40	1 : 5000
10	288,07	285,99	+8	64	288,03	0,224	0,34	0,12	0,24	+4	−4	32	5,66	4,02	0,34	4,40	1 : 6500
11	347,63	347,48	+15	225	347,56	0,648	0,57	0,33	0,40	+7	−8	113	10,63	7,54	0,57	4,65	1 : 7200
1																	
						2,965		1,50	2,46								

ორმაგად განაზომი გვერდების გაწონასწორებული სიდიდეების შესაბამისი საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$M_i = \pm \frac{\eta'}{\sqrt{P_i}}$$

ან

$$M_i = \pm \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \quad \text{(სვეტი 15)}$$

გამოვითვალოთ η მთელი პოლიგონისათვის (1) ან (3. 5. 7. 1) ფორმულით

$$\eta_{საშ} = \pm \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2k}} = \pm \sqrt{\frac{2,963}{2 \cdot 11}} \approx \pm 0,37 \text{ სმ} = \pm 0,0037 \text{ მ},$$

$$\eta_{საშ} = \pm \sqrt{\frac{[\eta^2]}{k}} = \pm \sqrt{\frac{1,50}{11}} \approx \pm 0,37 \text{ სმ} = \pm 0,0037 \text{ მ}.$$

გამოთვლილი ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის საშუალო სიდიდე საერთოდ და ახასიათებს პოლიგონის ყოველ გვერდს. ორმაგი განაზომის საშუალოსათვის მივიღებთ

$$\eta'_{საშ} = \pm \frac{\eta_{საშ}}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,26 \text{ სმ.} = \pm 0,0026 \text{ მ.}$$

ამ წესით გამოთვლილი ყოველი გვერდის გაწონასწორებული სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა მოთავსებულია მე-17 სვეტში. ამ სვეტის მონაცემებით ზოგადად ხასიათდება პოლიგონის გვერდების გაზომვა. ასეთივე მნიშვნელობისაა მე-18 სვეტის მონაცემები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 2. 3. ბაზისი გაიზომა ორმაგად ნაწილ-ნაწილ. განისაზღვროს ბაზისის უალბათესი სიგრძე და მისი საშუალო კვადრატული შეცდომა. გამოთვლა შესრულებულია მესამე სქემის მიხედვით.

ს ქ ე მ ა 3.6.2.3

წერტილის №	განაზომი მეტრებში: პირველი	განაზომი მეტრებში: მეორე	d მმ	d^2	$P_i=\frac{1}{L_i}$	$P_i d^2=\frac{d^2}{L_i}$	შენიშვნა
1							
2	815,3365	815,3405	−4,0	16,000	1 : 0,82	19,50	ერთეულ წონად მიღებულია ერთი კილომეტრის გაზომვის წონა
3	846,9594	846,9591	+0,3	0,09	1 : 0,85	0,11	
4	925,9406	925,9401	+0,5	0,25	1 : 0,93	0,27	
5	873,7033	873,7038	−0,5	0,25	1 : 0,87	0,29	
6	932,8154	932,8176	−2,2	4,84	1 : 0,93	5,20	
7	842,3548	842,3520	+2,8	7,84	1 : 0,84	9,31	
8	638,1323	638,1328	−0,5	0,25	1 : 0,64	0,39	
	5875,2423	5875,2459				35,07	

ბაზისის უალბათესი სიგრძე,

$$L=\frac{5875{,}2423+5875{,}2459}{2}=5875{,}2441\ მ.$$

ბაზისის ერთი კილომეტრის ერთჯერ გაზომვის (ანუ ერთეული წონის) საშუალო კვადრატული შეცდომა (1) ფორმულით იქნება

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[Pa^2]}{2k}}=\pm\sqrt{\frac{35.07}{2\times 7}}\approx\pm 1{,}6\ მმ,$$

ხოლო ორჯერ გაზომვის საშუალოსთვის კი

$$\eta'=\pm\frac{\eta}{\sqrt{2}}=\pm\frac{1{,}6}{1{,}41}\approx 1{,}13\ მმ.$$

ბაზისის უალბათესი სიგრძის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$M=\pm\frac{\eta'}{\sqrt{P}}=\pm\eta'\sqrt{L}=\pm 1{,}13.\sqrt{5{,}88}=\pm 2{,}7\ მმ,$$

ე. ი.

$$L=5875{,}2441\ მ\pm 0{,}0027\ მ.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 6. 2. 4. მანძილმზომით გაზომილია მნიშვნელოვნად განსხვავებული მანძილები ორმაგად, ლარტყის ორივე მხარის გამოყენებით. განისაზღვროს მანძილების უალბათესი სიგრძეები და მათი საშუალო კვადრატული შეცდომები. გამოთვლა შესრულებულია მეოთხე სქემის მიხედვით.

სქემა 3.6.2.4

№ რიგ.	გაზომილი მანძილები მეტრებში		საშუალო სიგრძე L_i	d მეტრებში	θ	d'	$d'd'$	$P=\frac{100}{L_i}$	$Pd'd'=\frac{100d'd'}{L_i}$
	ლარტყ. 1 გვერ.	ლარტყ. 2 გვერ.							
1	65,2	65,6	65,4	−0,4	−0,2	−0,2	0,04	1,5	0,060
2	189,8	190,5	190,2	−0,7	−0,6	−0,1	0,01	0,5	0,005
3	250,5	251,0	250,8	−0,5	−0,8	+0,3	0,09	0,4	0,036
			506,4	−1,6		0			0,101

$$\Theta_0=\frac{-1{,}6}{506{,}4}=-0{,}003\ მ\ და\ \Theta_i=\Theta_0\cdot L_i.$$

ერთეული წონის ანუ ყოველი ასი მეტრის ერთჯერ გაზომვის შეცდომა იქნება

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[Pd'd']}{2(k-1)}}=\pm\sqrt{\frac{0{,}1010}{2\cdot 2}}\approx\pm 0{,}16\ მ.$$

ორჯერ გაზომვისათვის კი იქნება

$$\eta'=\pm\frac{\eta}{\sqrt{2}}=\pm\frac{0.16}{1{,}41}\approx\pm 0{,}11\ მ.$$

ყოველი გვერდის ულბათესი სიგრძისათვის შესაბამისად იქნება

$$M_1 = \pm\frac{\eta'}{\sqrt{P_1}} = \pm\eta'\sqrt{L_1} = \pm\, 0{,}11\cdot\sqrt{0{,}6540} \approx \pm 0{,}09 \text{ მ}.$$

ანალოგიურად

$$M_2 \approx \pm 0{,}15 \text{ მ და } M_3 \approx \pm 0{,}18 \text{ მ},$$

ე. ი. ხაზების ულბათესი სიდიდეების ოდენობებია

$$L_1 = 65{,}4 \pm 0{,}09 \text{ მ},$$

$$L_2 = 190{,}2 \pm 0{,}15 \text{ მ},$$

$$L_3 = 250{,}8 \pm 0{,}18 \text{ მ}.$$

თავი VII

შეცდომათა თეორიის გამოყენება გეოდეზიურ და სამარკშეიდერო სამუშაოებზე

8.7.1. კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა

კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობის განსაზღვრა შეიძლება სხვადასხვანაირად, მაგალითად,

A. გაზომვის კომპონენტებისაგან წარმოშობილი წყაროების მიხედვით;

B. თანაბარი გავლენის პრინციპის გამოყენებით;

C. ფერეროს ფორმულის გამოყენებით. ეს საკითხი განხილულია 3· 4· 1. პარაგრაფში·

მხოლოდ აქ დავსძენთ, რომ ხშირად ფერეროს (3·4.1·12) ფორმულა ვერ იძლევა ზუსტ შედეგებს, როდესაც კუთხეები იზომება სრული წრიული ილეთებით. მიუხედავად ამისა, იგი მაინც გამოიყენება მისი სიმარტივის გამო.

A. **საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრა გაზომვის კომპონენტებისაგან წარმოშობილი წყაროების მიხედვით·**

ცნობილია, რომ კუთხის გაზომვაზე მოქმედებს ურთიერთდამოუკიდებელი წყაროები. ეს წყაროები შეიძლება განაწილდეს გაზომვის კომპონენტების მიხედვით შემდეგნაირად:

ა. სუბიექტისაგან (დამკვირვებლისაგან, პირადად) გამოწვეული შეცდომები

1· ანათვლების დამრგვალების;

2· დამიზნების;

3· გაზომვისათვის გამოყენებული მეთოდით გამოწვეული·

ბ. ინსტრუმენტისაგან გამოწვეული შეცდომები

1· თარაზული ლიმბის მთავარი (წრედ-ალიდადის ღერძისადმი) და

შვეული ლიმბის ჭოგრის ბრუნვის ღერძისადმი არამართობულობით გამოწვეული შეცდომები;

2. წრედ-ალიდადის ღერძის ბრუნვის დროს მისი რხევით გამოწვეული შეცდომები;

3. განმეორებით თეოდოლიტში თარაზული წრედისა და მისი ალიდადის ბრუნვის გეომეტრიული ღერძების ურთიერთ შეუთავსებლობით ან არაპარალელურობით გამოწვეული შეცდომები;

4. ლიმბისა და ვერნიერების დანაყოფების ნაკლით გამოწვეული შეცდომები;

5. თარაზოს მგრძნობიარობისა და ჭოგრის ოპტიკური ძალის შეუსაბამობით გამოწვეული შეცდომები;

6. სხვადასხვა მანძილებზე ფოკუსირების დროს ჭოგრის სამიზნე ღერძის ცვალებადობით ანუ მდებარეობის შეცვლით გამოწვეული შეცდომები;

7. თეოდოლიტის მთავარი ღერძის დასაშვები კუთხით დახრის დროს მისი კომპენსატორით შვეულ წრედზე ანათვლის ცვალებადობით გამოწვეული შეცდომები;

8. ჭოგრის ნაკლით (გამადიდებლობის, მხედველობის არის, გამოსახულების ნათელობის, აბერაციებისა და სხვ.) გამოწვეული შეცდომები;

9. ოპტიკური მიკრომეტრის რენით გამოწვეული შეცდომები;

10. წრედ-ალიდადისა და თარაზული წრის ცენტრების ურთიერთ და ლიმბის ცენტრისადმი შეუთავსებლობით (ექსცენტრისიტეტით) გამოწვეული შეცდომები;

11. მთავარი (წრედ- ალიდადის) ღერძის დახრით გამოწვეული შეცდომები;

12. კოლიმაციური შეცდომით გამოწვეული შეცდომები;

13. ჭოგრის ბრუნვის ღერძის მთავარი ღერძისადმი არამართობულობით გამოწვეული შეცდომები;

14. თეოდოლიტის ლიმბის დანაყოფების შემთხვევითი და სისტემატიური შეცდომები და სხვ.

c. გარემო პირობებით გამოწვეული შეცდომები

1. სამიზნე საგნების გრეხა;

2. თეოდოლიტის მდგრადობის ცვალებადობა;

3. ატმოსფეროს არაერთგვაროვნება, რეფრაქცია შვეული და გვერდითი;

4. განათების პირობების ცვალებადობა და სხვ.

d. ობიექტისაგან გამოწვეული შეცდომები

1. რედუქციის ანუ სამიზნე საგნების დაცენტვრის შეცდომები;

2. თეოდოლიტის დაცენტვრის შეცდომები;

ინსტრუმენტმცოდნეობიდან ცნობილია, რომ თანამედროვე ინსტრუმენტების შეცდომები სხვა შეცდომებთან შედარებით უმნიშვნელო სიდიდეებია. გარდა ამისა, კუთხეების გაზომვის სათანადო მეთოდის გამოყენებით ეს შეცდომები თითქმის ისპობა· გამოყენებული გაზომვის მეთოდით გარემოს გავლენის შეცდომებიც უგულებელსაყოფ ოდენობამდე დაიყვანება. ამიტომ, გაადვილების თვალსაზრისით, ინსტრუმენტული და გარემო პირობებით გამოწვეული შეცდომები გამოყენებული გაზომვის მეთოდის შეცდომების შემადგენლად მივიჩნიოთ და პირადი შეცდომების ჯგუფში შევიტანოთ და ვუწო-

დოთ მას კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა და აღვნიშნოთ m_i-ით.

ამ საფუძველზე კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის დამოუკიდებელ წყაროებად შეიძლება მივიღოთ კუთხის საკუთრივ გაზომვის (m_i), რედუქციის (m_r) და დაცენტრვის (m_c) საშუალო კვადრატული შეცდომები. მაშასადამე, კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად (3. 4. 1. 6) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$m_\beta = \pm\sqrt{m_i^2 + m_{r_A}^2 + m_{r_B}^2 + m_C^2}\,. \tag{3.7.1.1}$$

m_i არის კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა;

m_{r_A} — A წერტილზე სამიზნე საგნის დასმის ან დახრის საშუალო კვადრატული შეცდომა;

m_{r_B} — B წერტილზე სამიზნე საგნის დასმის ან დახრის საშუალო კვადრატული შეცდომა;

m_C — C წერტილზე ინსტრუმენტის დაცენტვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

დავადგინოთ (1) ფორმულის ყველა კომპონენტის ოდენობა და ჩავსვათ მასში.

ε. კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ძირითადად ცნობილია კუთხეთა გაზომვის შემდეგი ხერხები: ყველა კომბინაციის, შრაიბერის სრული წრიული ილეთების, ილეთებისა და განმეორების ხერხი. კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა გარკვეული ინსტრუმენტისა და პირობებისათვის ძირითადად დამოკიდებულია კუთხის გაზომვის ხერხზე. ამიტომ პირველ რიგში საჭიროა დაიწეროს კუთხის გაზომვისათვის გამოყენებული ხერხის შესაბამისი ფორმულა. როგორც ცნობილია, ამ ფორმულის დაწერის შემდეგ საშუალება მოგვეცემა გამოვიყენოთ შეცდომათა თეორიის შესაბამისი ფორმულა. საილუსტრაციოდ გამოვიყვანოთ ილეთებისა და განმეორებითი ხერხით კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელი ფორმულა და შედეგები ერთმანეთს შევადაროთ.

კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის ფორმულის გამოსაყვანად ვისარგებლოთ შეცდომათა ისეთი დამოუკიდებელი წყაროებით, რომლებიც დამახასიათებელია გამოყენებული გაზომვის მეთოდისათვის: ასეთ წყაროებს მიეკუთვნება ანათვლების დამრგვალების და საგანზე დამიზნების შეცდომები. სხვა შეცდომების გავლენას მხედველობაში არ ვიღებთ ყველა მეთოდისათვის დაახლოებით მათი ერთგვარი გავლენის გამო. ამავე დროს ვგულისხმობთ, რომ კუთხის წვეროზე დაცენტრილია გამოსაყენებლად სრულიად ვარგისი ინსტრუმენტი და კუთხის გაზომვას კარგ გარემო პირობებში აწარმოებს ორივე მეთოდისადმი ერთნაირად დაუფლებული დამკვირვებელი.

ილეთების (სტრუვეს) ხერხით

(6·8·12.7) ნახაზის შესაბამისად n ილეთით β კუთხე ისაზღვრება (6.8.12·22) ფორმულით

$$\beta_n = \frac{\left[\gamma_D^L + \gamma_L^R\right]_1^n - \left[\gamma_B^L + \gamma_B^R\right]_1^n}{2n}, \qquad (3.7.1.2)$$

სადაც n არის ილეთების რაოდენობა;

γ_D^L, γ_D^R, γ_B^L და γ_B^R — ანათვალი თარაზულ ლიმბზე D და B წერტილზე ჭოგრის დამიზნების დროს, როცა შვეული ლიმბი ოკულარიდან მარცხნივ (L) და მარჯვნივ (R) არის.

β კუთხის n ილეთით განსაზღვრისათვის ლიმბზე ანათვლებს ვიღებთ $4n$-ჯერ; ასევე B და D საგნებს ჭოგრს ვუმიზნებთ $4n$-ჯერ.

აღვნიშნოთ $m_{ა.ღ}$ — ორი ვერნიერის ან მიკროსკოპის ანათვალთა საშუალო არითმეტიკულის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

$m_{ღ}$ — ჭოგრით საგანზე დამიზნების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

$m_{\beta_{n ა.ღ}}$ — n ილეთით β კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელიც გამოწვეულია ლიმბზე ანათვლების დამრგვალებით.

$m_{\beta_{n ღ}}$ — n ილეთით β კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა, რომელიც გამოწვეულია ჭოგრის B და D საგანზე დამიზნებით.

(2) გამოსახულებისათვის, როგორც წრიული ფუნქციისათვის, (3. 4. 1. 11) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{\beta_{n ა.ღ}} = \pm\frac{1}{2n} m_{ა.ღ}\sqrt{4n} = \pm\frac{m_{ა.ღ}}{\sqrt{n}},$$

$$m_{\beta_{n ღ}} = \pm\frac{1}{2n} m_{ღ}\sqrt{4n} = \pm\frac{m_{ღ}}{\sqrt{n}}.$$

რადგან ლიმბზე ანათვლების დამრგვალებისა და საგანზე დამიზნების საშუალო კვადრატული შეცდომები კუთხის საკუთრივ გაზომვის შეცდომის დამოუკიდებელი წყაროებია, ამიტომ β კუთხის n ილეთით გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა, ანათვლების დამრგვალებისა და დამიზნების შეცდომებით გამოწვეული, გამოითვლება (3.4.1.6) ფორმულით

$$m_i = \pm\sqrt{m^2_{\beta_{n ა.ღ}} + m^2_{\beta_{n ღ}}} = \pm\sqrt{\frac{m^2_{ა.ღ}}{n} + \frac{m^2_{ღ}}{n}} \qquad (3.7.1.3)$$

განმეორებითი (გაუსის) ხერხით, რომელსაც გეოდეზისტები იყენებენ. თანახმად (6. 8. 12. 2) ნახაზისა, β კუთხე ისაზღვრება (6·8·12.13) ფორმულით

$$\beta_n = \frac{\left(k_1\cdot 360° + \overset{2}{\gamma_D^L} - \overset{1}{\gamma_B^L}\right) + (n-k_2)\cdot 360° + \overset{3}{\gamma_D^R} - \overset{4}{\gamma_B^R}}{2\cdot n}, \qquad (3.7.1.4)$$

სადაც n არის განმეორებათა რაოდენობა;

k_1 და k_2 — შვეული წრედი მარცხნივ და მარჯვნივ დროს წრედ-ალიდადის სრული ბრუნვათა რიცხვი;

$\overset{1}{\gamma}{}_B^L$ და $\overset{2}{\gamma}{}_D^L$ — ანათვალი თარაზულ ლიმბზე B და D წერტილზე ჭოგრის დამიზნების დროს, შვეული ლიმბი მარცხნივ (L) n განმეორების დასაწყისში და ბოლოს;

$\overset{3}{\gamma}{}_D^R$ და $\overset{4}{\gamma}{}_B^R$ — ანათვლები თარაზულ ლიმბზე D და B წერტილზე ჭოგრის დამიზნების დროს, შვეული ლიმბი მარჯვნივ (R) n განმეორების დასაწყისში და ბოლოს.

β კუთხის n განმეორებით გაზომვისათვის ლიმბზე ანათვლებს ვიღებთ მხოლოდ 4-ჯერ (აქ მხედველობაში არ მიიღება საკონტროლო ანათვალი β_0 და β_0'), საგნებზე დამიზნებას კი ვახდენთ $4n$-ჯერ.

მივიღოთ იგივე აღნიშვნები, რაც გვქონდა ზემოთ, მხოლოდ n ილეთის მაგიერ ვიგულისხმოთ n განმეორება, მაშინ (4) წირული ფუნქციისათვის გამოვიყენებთ იმავე (3.4.1.11) ფორმულას.

$$m_{\beta_{n\,ა.დ}} = \pm \frac{1}{2n} m_{ა.დ} \sqrt{4} = \pm \frac{m_{ა.დ}}{n};$$

$$m_{\beta_{n\,დ}} = \pm \frac{1}{2n} m_{დ} \sqrt{4n} = \pm \frac{m_{დ}}{\sqrt{n}}.$$

(3.4.1.6) ფორმულის გამოყენებით, n განმეორებით β კუთხის საკუთრივ გაზომვის m_i საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება გამოსახულებისაგან

$$m_i = \pm \sqrt{m^2_{\beta_{n\,ა.დ}} + m^2_{\beta_{n\,დ}}} = \pm \sqrt{\frac{m^2_{ა.დ}}{n^2} + \frac{m^2_{დ}}{n}} \qquad (3.7.1.5)$$

განმეორებით ხერხით, რომელსაც მარკშეიდერები იყენებენ. თანახმად (6.8.12.3) ნახაზისა, β კუთხე ისაზღვრება (6.8.12.15) ფორმულით

$$\beta_n = \frac{k \cdot 360^\circ + \overset{2}{\gamma}{}_D^R - \overset{1}{\gamma}{}_B^L}{2 \cdot n}, \qquad (3.7.1.6)$$

სადაც n არის განმეორებათა რაოდენობა;

k — წრედ-ალიდადის სრულ ბრუნვათა რაოდენობა;

$\overset{1}{\gamma}{}_B^L$ — ანათვალი თარაზულ ლიმბზე განმეორების დასაწყისში, როცა შვეული ლიმბი მარცხნივ არის;

$\overset{2}{\gamma}{}_D^R$ — ანათვალი თარაზულ ლიმბზე შვეული ლიმბი მარცხნივ (L) n განმეორებისა და მარჯვნივ $(R)n$ განმეორების ბოლოს.

როგორც (6) ფორმულიდან ჩანს, β კუთხის n განმეორებით განსაზღვრისათვის ლიმბზე ანათვლებს ვიღებთ მხოლოდ 2-ჯერ (აქ მხედველობაში არ მიიღება საკონტროლო ანათვალი β_0), საგნებზე დამიზნებას კი ვახდენთ $4n$-ჯერ.

მიღებული აღნიშვნების დაცვით (6) ფუნქციისათვის (3. 4. 1. 11) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{\beta_{n\,ა.დ}}=\pm\frac{1}{2n}\,m_{ა.დ}\sqrt{2}=\pm\frac{m_{ა.დ}}{n\sqrt{2}}\,,$$

$$m_{\beta_{n\,დ}}=\pm\frac{1}{2n}m_{დ}\sqrt{4n}=\pm\frac{m_{დ}}{\sqrt{n}}\,.$$

(3.4.1.6) ფორმულით

$$m_i=\pm\sqrt{m^2_{\beta_{n\,ა.დ}}+m^2_{\beta_{n\,დ}}}=\pm\sqrt{\frac{m^2_{ა.დ}}{2n^2}+\frac{m^2_{დ}}{n}} \tag{3.7.1.7}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 7. 1. 1. თეოდოლიტით, რომლის ვერნირის სიზუსტე $t=30''$ და ჭოგრის გამადიდებლობა $G=20^{\times}$, გაზომილია β კუთხე ზემოთ განხილული ორივე მეთოდით ურთიერთდამოუკიდებლად სამი ილეთით და სამი განმეორებით. საჭიროა ორივე ხერხისათვის გამოითვალოს β კუთხის საკუთრივ გაზომვის m_i საშუალო კვადრატული შეცდომა.

(3. 4. 1. 15) მაგალითიდან ცნობილია, რომ ორი ვერნიერით აღებული ანათვლების საშუალო არითმეტიკულის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{ა.დ}=\pm\frac{0,3\tau}{\sqrt{2}}=\pm\frac{0,3\cdot 30''}{\sqrt{2}}=\pm 6'',4.$$

აგრეთვე ცნობილია, რომ სამიზნე საგანზე დამიზნების საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_{დ}=\pm\frac{60''}{G}=\pm\frac{60''}{20}=\pm 3'';$$

სამი ილეთისათვის (3) ფორმულით

$$m_i=\pm\sqrt{\frac{6,4^2}{3}+\frac{3^2}{3}}\approx\pm 4'',1,$$

სამი განმეორებისათვის (5) ფორმულით

$$m_i=\pm\sqrt{\frac{6,4^2}{3^2}+\frac{3^2}{3}}\approx\pm 2'',8.$$

ხოლო (7) ფორმულით

$$m_i\approx\pm\sqrt{\frac{6.4^2}{2\cdot 3^2}+\frac{3^2}{3}}\approx\pm 2'',3.$$

განხილული მაგალითიდან და თვით ძირითადი ფორმულების ურთიერთ შედარებიდან ჩანს, რომ ერთგვარ პირობებში კუთხის n ილეთით გაზომვის

საშუალო კვადრატული შეცდომა უფრო დიდია, ვიდრე იმავე კუთხის n-ჯერ განმეორებით გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა. თუმცა ფორმულის მიხედვით გამოდის, რომ განმეორებითი ხერხით გაზომილი კუთხე უფრო ზუსტია, ვიდრე ილეთების ხერხით, მაგრამ არსებითად ეს სწორი არაა; სინამდვილეში, განმეორებითი ხერხით კუთხის გაზომვა პრაქტიკის მონაცემებით და შემთხვევით შეცდომებთან ერთად სისტემატური შეცდომების მხედველობაში მიღებით, ილეთების ხერხთან შედარებით, ნაკლებ სიზუსტეს ავლინებს.

ცნობილია, რომ კუთხის გაზომვის განმეორებითი ხერხით შესრულების უპირატესობაა: 1) ლიმბზე ანათვლების დამრგვალების შეცდომის გავლენის რაც შეიძლება შემცირება; 2) დროის ეკონომია, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს საერთოდ გაზომვების და განსაკუთრებით მიწისქვეშა გეოდეზიური სამუშაოების შესრულების დროს (ამით აიხსნება მარკშეიდერების მიერ მიღებული წესი კუთხის გაზომვისა); 3) საგანზე დამიზნების შეცდომის რაც შეიძლება შემცირება.

ამ მეთოდით კუთხის გასაზომად იხმარება განმეორებითი თეოდოლიტი, რომლის ნაკლი ის არის, რომ, ერთი მხრით, ბრუნვის დროს ალიდადის მიერ ლიმბის წატაცება ხდება, ე. ი. ძვრა იმ მიმართულებით, საითაც ვაბრუნებთ ალიდადას და, მეორე მხრით, ალიდადა ინერციის გამო ჩამორჩება ხოლმე ლიმბს, როცა ლიმბსა და ალიდადს ერთად ვაბრუნებთ მარცხენა საგნისაკენ. ამ უკანასკნელ შეცდომას **განმეორებითი შეცდომა** ეწოდება. აღნიშნული შეცდომების გავლენა ზემოთ შესრულებულ გამოთვლაში ჩვენ არ მიგვიღია. თუ გამოვიყენებთ ისეთ თეოდოლიტს, რომელსაც მაღალი სიზუსტის ანათვლელი ხელსაწყოები აქვს, მაშინ $m_{s.დ}$ სიმცირისა და ილეთების ხერხით ლიმბის დანაყოფების შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომების მნიშვნელოვნად შემცირების გამო, აგრეთვე, თუ მხედველობაში მივიღებთ განმეორებითი ხერხის სპეციფიკურ შეცდომას, ილეთების ხერხით კუთხის გაზომვის სიზუსტე, როგორც შევნიშნეთ, უფრო მაღალი იქნება, ვიდრე განმეორებითი ხერხით.

ამის გამო თანამედროვე ზუსტი კუთხმზომი იარაღები არაგანმეორებითია (ლიმბი და წრედ-ალიდადა ურთიერთ დამოუკიდებლად მაგრდება), რომელთა საშუალებით მაღალი სიზუსტით იზომება კუთხე ილეთების, სრული წრიული ილეთების, ყველა კომბინაციის ან შრაიბერის ხერხით.

პრაქტიკულად კუთხის გაზომვის საკითხი უნდა გადაწყდეს შემდეგნაირად:

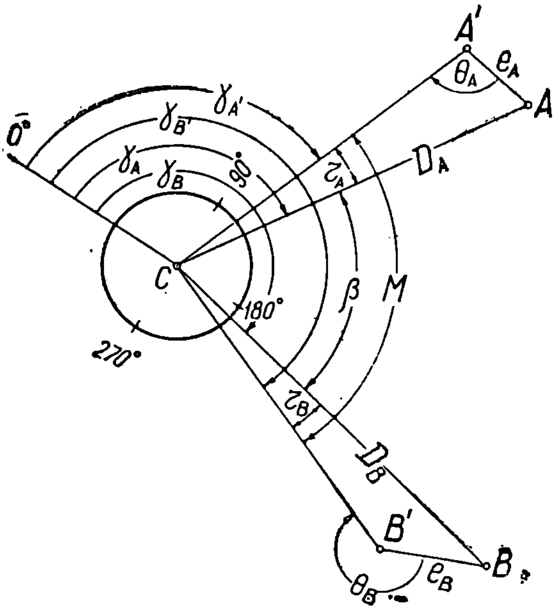
1) როდესაც საჭიროა შედარებით მაღალი სიზუსტით ერთი კუთხის გაზომვა და დროის ეკონომიას დიდი მნიშვნელობა აქვს, მაშინ უმჯობესია გამოვიყენოთ განმეორებითი ხერხი, თუ გვაქვს ინსტრუმენტი $t > 20''$ სიზუსტის, ხოლო თუ $t < 20''$-სა, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ილეთების ხერხი.

2) როდესაც საჭიროა სადგურზე ერთდროულად რამდენიმე კუთხის მაღალი სიზუსტით გაზომვა, მაშინ გამოიყენება მაღალი სიზუსტის არაგანმეორებითი თეოდოლიტი და სრული წრიული ილეთების, ყველა კომბინაციის ან შრეიბერის ხერხი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვინაიდან m_i-ის ნამდვილი სიდიდის გამოსათვლელად (3), (5) და (7) ფორმულები ვერ იძლევა სრულიად ამომწურავ პასუხს, ამიტომ m_i-ის გამოსათვლელად მიმართავენ პრაქტიკულ ხერხს. იხილეთ 327 გვერდი.

f. რედუქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ვთქვათ, თეოდოლიტი დაცენტრილია გასაზომი კუთხის C წვეროზე უშეცდომოდ. ამავე დროს სამიზნე საგნები დაიცენტრა შეცდომით A' და B' წერტილებზე ნაცვლად A და B წერტილებისა. ასეთ შეცდომას უწოდებენ რედუქციის შეცდომას.



ნახ. 3.7.1.1.

(1) ნახაზზე β არის გასაზომი კუთხის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა,

M —	კუთხის გაზომილი მნიშვნელობა,
r_A და r_B —	კუთხის რედუქციის შეცდომები მიმართულებებში,
e_A და e_B —	ხაზოვანი ელემენტები,
Θ_A და Θ_B —	კუთხური ელემენტები,
D_A და D_B —	გვერდების სიგრძეები.

შემთხვევითი გავლენის გამო რედუქციის შეცდომები ყოველთვის ხდება. ნახ. 1-დან β ჭეშმარიტი კუთხე გამოითვლება ტოლობით

$$\beta = M - (r_A + r_B). \tag{3.7.1.8}$$

აქ კუთხის რედუქციის შესწორების სიდიდე

$$r = r_A + r_B, \tag{3.7.1.9}$$

$$r''_A = \frac{e_A}{D_A} \cdot \rho'' \cdot \sin \Theta_A, \tag{3.7.1.10}$$

$$r''_B = \frac{e_B}{D_B} \cdot \rho'' \cdot \sin \Theta_B. \tag{3.7.1.11}$$

როდესაც სამიზნე საგნად გამოყენებულია სიგნალი ან პირამიდა, მაშინ e და Θ რედუქციის ხაზოვანი და კუთხური ელემენტების განსაზღვრა მიღებულია გრაფიკულად ან ანალიზურად (იხ. VIII ტ.), ხოლო მოკლე მანძილებზე სხვადასხვა სამიზნე (სარი, შვეული, ჩხირი) საგნების გამოყენების შემთხვევაში აღნიშნულ ელემენტთა ოდენობების დადგენა ხდება ექსპერიმენტულად.

რედუქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის ფორმულის გამოსაყვანად ვიგულისხმოთ, რომ სამიზნებლად გამოყენებული საგნებისათვის ხაზოვანი ელემენტები არის ტოლები, ე. ი.

$$e_A = e_B = e_r. \tag{3.7.1.12}$$

რაც შეეხება რედუქციის კუთხურ ელემენტს, მისი ოდენობა შემთხვევითობის გავლენით შეიძლება იღებდეს ყოველგვარ მნიშვნელობას. 0°+360° შორის n -ჯერ, რაც კუთხის განსაზღვრის სიზუსტეზე დიდ გავლენას ახდენს. აღნიშნულის გამო რედუქციის r_A და r_B შეცდომები შეგვიძლია ჩავთვალოთ შემთხვევით შეცდომებად და რედუქციის საშუალო კვადრატული შეცდომების კვადრატი შეიძლება გამოვთვალოთ (3.3.5.1) ფორმულებით

$$m^2_{r_A} = \frac{[r^2_A]}{n}, \tag{3.7.1.13}$$

$$m^2_{r_B} = \frac{[r^2_B]}{n}, \tag{3.7.1.14}$$

ხოლო, რადგან r_A და r_B (9) ფორმულის მიხედვით რედუქციის დამოუკიდებელი წყაროებია (ერთის არსებობა მეორის არსებობას არ გულისხმობს), მათი ერთობლივი გავლენის m_r საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატი გამოითვლება (3.4.1.6) ფორმულით

$$m^2_r = m^2_{r_A} + m^2_{r_B}. \tag{3.7.1.15}$$

(13) და (14) ფორმულებში შევიტანოთ (10) და (11) ფორმულებიდან r_A-სა და r_B-ს მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$m_{r_A}^2 = \frac{[e_{r_A} \cdot \rho^2 \cdot D_A^{-2} \cdot \sin^2 \Theta_A]}{n}. \tag{3.7.1.16}$$

$$m_{r_B}^2 = \frac{[e_r^2 \cdot \rho^2 \cdot D_B^{-2} \cdot \sin^2 \Theta_B]}{n}. \tag{3.7.1.17}$$

როგორც აღვნიშნეთ, (3. 4. 1. 6) და (17) ფორმულებში n ცვლადი სიდიდეა და მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია Θ კუთხის $d\Theta_i$ ნაზრდის ოდენობაზე, ე. ი. n წარმოადგენს მუდმივი და ცვლადი სიდიდის ფარდობას, სახელდობრ

$$n = \frac{2\pi}{d\Theta_i}. \tag{3.7.1.18}$$

(16) და (17) ფორმულებში შევიტანოთ (18) ფორმულიდან n-ის მნიშვნელობა, აგრეთვე მუდმივი სიდიდეები გამოვიტანოთ გაუსის ფრჩხილებს გარეთ, ხოლო $d\Theta$, როგორც ცვლადი, ფრჩხილებს შიგნით შევიტანოთ, გვექნება

$$m_{r_A}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi \cdot D_A^2} [\sin^2 \Theta_A \cdot d\Theta_A]. \tag{3.7.1.19}$$

$$m_{r_B}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi \cdot D_B^2} [\sin^2 \Theta_B \cdot d\Theta_B]. \tag{3.7.1.20}$$

მიღებულ (19) და (20) ფორმულებში ჯამები შევცვალოთ ინტეგრალებით, გვექნება

$$m_{r_A}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi \cdot D_A^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta_A \cdot d\Theta_A, \tag{3.7.1.21}$$

$$m_{r_B}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi \cdot D_B^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta_B \cdot d\Theta_B. \tag{3.7.1.22}$$

ცნობილია, რომ (3. 1. 7 პარაგრაფი)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta \cdot d\Theta = \pi.$$

ამის გამო

$$m_{r_A}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi D_A} \cdot \pi = \pm \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2D_A} \tag{3.7.1.23}$$

$$m_{r_B}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2\pi D_B^2} \cdot \pi = \pm \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2D_B^2}. \tag{3.7.1.24}$$

(15) ფორმულაში შევიტანოთ $m^2_{r_A}$ და $m^2_{r_B}$-ის მნიშვნელობები (23) და (24) ფორმულებიდან, მივიღებთ

$$m_r^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_r^2}{2D_A^2\, D_B^2} (D_A^2 + D_B^2). \tag{3.7.1.25}$$

მიღებული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ კუთხის გაზომვის შეცდომაზე მით ნაკლები იქნება რედუქციის გავლენა, რაც უფრო გრძელია გვერდები.

ვთქვათ, გვერდების სიგრძეები დაახლოებით ტოლებია, ე. ი.

$$D_A \approx D_B = D,$$

მაშინ კუთხის გაზომვაზე რედუქციის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_r = \pm \frac{\rho \cdot e_r}{D} \tag{3.7.1.26}$$

და თითოეულ მიმართულებაზე რედუქციის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m_{r_A} = m_{r_B} = \pm \frac{\rho \cdot e_r}{D \cdot \sqrt{2}}. \tag{3.7.1.27}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.1.2. განისაზღვროს კუთხის გაზომვაზე რედუქციის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_r, თუ: $D_A = 20$ მ, $D_B = 30$ მ; აგრეთვე ექსპერიმენტულად განსაზღვრულია გარკვეული სამიზნე საგნებისათვის რედუქციის ხაზოვანი ელემენტი $e_r = 2$ მმ.

ჩავსვათ მოცემული სიდიდეები (25) ფორმულაში, გვექნება

$$m_r^2 = \frac{206265^2 \cdot 0{,}002^2}{2 \cdot 20^2 \cdot 30^2} (20^2 + 30^2) \approx 307,$$

$$m_r = \pm 17'',5.$$

გ. თეოდოლიტის დაცენტრის საშუალო კვადრატული შეცდომა

ახლა ვთქვათ რედუქციის შეცდომა არ არსებობს, ე. ი. სამიზნე საგნები ზუსტად A და B წერტილებზეა დაცენტრილები, ხოლო თეოდოლიტი C კუთხის წვეროს ნაცვლად დაცენტრილია I წერტილზე.

(2) ნახაზზე β არის გასაზომი კუთხის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა;

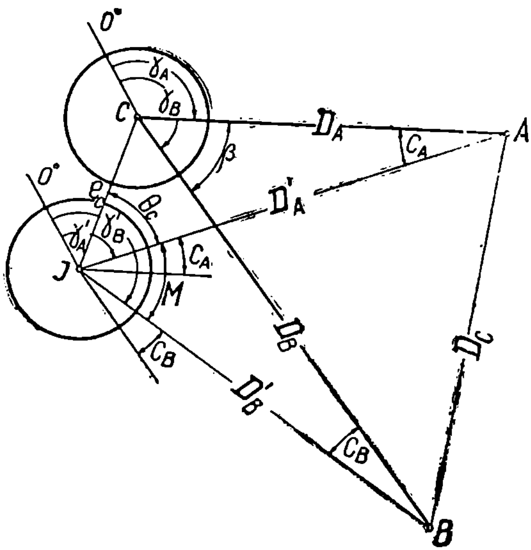
M — „ „ გაზომილი მნიშვნელობა;

e_A და e_B — არის გასაზომი კუთხის დაცენტრის შეცდომები

e_C — „ თეოდოლიტის დაცენტრის ხაზოვანი ელემენტი;

Θ'_C — გასაზომი კუთხის თეოდოლიტის დაცენტრის კუთხური ელემენტი,

დაცენტვრის შეცდომა შეიძლება მივიღოთ ნებით და უნებლიეთ. პირველი შემთხვევის მიზეზია გასაზომი კუთხის წვეროსა და სამიზნე საგნებს შორის რაიმე დაბრკოლების არსებობა. ამ შემთხვევაში ინსტრუმენტს დავცენტრავთ სხვა ადგილას, ე. ი. ინსტრუმენტს ჩვენი ნებით მცირე მანძილით



ნახ. 3.7.1.2.

გადავაადგილებთ (ნახ. 2-ზე I წერტილი). მეორე შემთხვევასთან გვაქვს საქმე ყოველთვის, სულერთია ინსტრუმენტს დავცენტრავთ თავის თუ სხვა ადგილას; შემთხვევითი გავლენის გამო მაინც დავუშვებთ დაცენტვრის შეცდომას. ორივე შემთხვევაში ფორმულები ერთნაირი იქნება.

β კუთხის ჭეშმარიტი ოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$\beta=(\gamma'_B+c_B)-(\gamma'_A+c_A)=M+(c_B-c_A). \qquad (3.7.1.28)$$

აქ კუთხის დაცენტვრის შეცდომა იქნება c და ის გამოითვლება ფორმულით

$$c=c_B-c_A. \qquad (3.7.1.29)$$

აგრეთვე მცდარი დაცენტვრის გამო მიმართულებების შეცდომები გამოითვლება

$$c''_A=\frac{e_C}{D_A}\cdot\rho''\cdot\sin\Theta_C, \qquad (3.7.1.30)$$

$$c''_B=\frac{e_C}{D_B}\cdot\rho''\cdot\sin(\Theta_C+M). \qquad (3.7.1.31)$$

როგორც ვხედავთ, c_A და c_B ურთიერთდამოუკიდებლად განსაზღვრული სიდიდეები არაა; ისინი ორივენი არიან ფუნქციები ერთი და იმავე ცვლად c_C და Θ_C სიდიდეებისა (დაცენტვრის შეცდომა იწვევს აუცილებლად როგორც c_A-ს ისე c_B-ს არსებობას). ასეთ შემთხვევაში უნდა განისაზღვროს ცხადად c დაცენტვრის შეცდომა და დაცენტვრის საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ მხოლოდ (3.3.5.1) ფორმულა

$$m_C^2=\frac{[c^2]}{n}=\frac{[(c_B-c_A)^2]}{n} \qquad (3.7.1.32)$$

(32) ტოლობაზე შევასრულოთ ალგებრული მოქმედება, მივიღებთ

$$m_C^2=\frac{1}{n}[c_A^2+c_B^2-2c_A\ c_B]. \qquad (3.7.1.33)$$

(33) ტოლობაში (30) და (31) ტოლობებიდან შევიტანოთ c_A და c_B მნიშვნელობები, მხოლოდ მუდმივი სიდიდეები გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ. c_C სიდიდის შესახებ ძალაში რჩება ყოველივე, რაც ითქვა e_r-ის მიმართ ამიტომ e_C-ს ვიღებთ როგორც მუდმივ სიდიდეს. რაც შეეხება Θ_C კუთხურ სიდიდეს, მისი ოდენობა, ისევე როგორც რედუქციის შემთხვევაში, შეიძლება იცვლებოდეს 0°-დან 360°-მდე ანუ რადიანებში 0-დან 2π-მდე. ეს ცვალებადობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ უსასრულოდ მცირე $d\Theta_C$-ის სიდიდით ასე რომ, c-ს გამოთვლა შეიძლება იმდენჯერ, რამდენჯერაც $d\Theta_C$ მოთავსდება 2π-ში. ამის საფუძველზე c-ს განსაზღვრათა რაოდენობა n გამოითვლება

$$n=\frac{2\pi}{d\Theta_C}. \qquad (3.7.1.34)$$

აქ მრიცხველი მუდმივი სიდიდეა და მნიშვნელი ცვლადი. ასე რომ, (32) გამოსახულებაში 2π მუდმივი ფრჩხილებს გარეთ გამოვა და ცვლადი $d\Theta_C$ შევა გაუსის ფრჩხილებში, ე. ი. გვექნება

$$m_C^2=\frac{\rho^2 e_C^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{D_A^2}[\sin^2\Theta_C\cdot d\Theta_C]+\frac{1}{D_B^2}[\sin^2(\Theta_C+M)\,d\Theta_C]-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{D_A\,D_B}[\sin\Theta_C\cdot\sin(\Theta_C+M)\cdot d\Theta_C]\right\}. \qquad (3.7.1.35)$$

(35) ტოლობაში ჯამები შევცვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალებით, მივიღებთ

$$m_C^2=\frac{\rho^2 e_C^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{D_A^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\Theta_C\cdot d\Theta_C+\frac{1}{D_B^2}\int_0^{2\pi}\sin^2(\Theta_C+M)\,d\Theta_C-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{D_A\cdot D_B}\int_0^{2\pi}\sin\Theta_C\cdot\sin(\Theta_C+M)\,d\Theta_C\right\}. \qquad (3.7.1.36)$$

ცნობილია, რომ (3·1·7 პარაგრაფი)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta_C \cdot d\Theta_C = \pi$$

და

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 (\Theta_C + M)\, d\Theta_C = \pi,$$

ხოლო

$$\int_0^{2\pi} \sin \Theta_C \cdot \sin (\Theta_C + M)\, d\Theta_C = \pi \cos M,$$

სადაც M მუდმივად ითვლება.

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (36) ტოლობაში, გვექნება

$$m_C^2 = \frac{\rho^2 \cdot e_C^2}{2} \left(\frac{1}{D_A^2} + \frac{1}{D_B^2} - \frac{2 \cos M}{D_A \cdot D_B} \right),$$

ანუ

$$m_C^2 = \frac{\rho^2 e_C^2}{2 D_A^2\, D_B^2} (D_A^2 + D_B^2 - 2 D_A\, D_B \cdot \cos M). \qquad (3.7.1.37)$$

საუგულვებელყოფო განსხვავების გამო მივიღებთ, რომ $D_A \approx D_A'$ და $D_B \approx D_B'$, მაშინ, თუ შევაერთებთ A და B წერტილებს და გვერდის სიგრძეს აღვნიშნავთ D_C-ით, მისი სიდიდე იქნება

$$D_C^2 = D_A^2 + D_B^2 - 2 D_A D_B \cos M. \qquad (3.7.1.38)$$

შევიტანოთ მიღებული სიდიდე (37) ფორმულაში, გვექნება

$$m_C^2 = \frac{\rho^2 e_C^2}{2 D_A^2\, D_B^2} \cdot D_C^2. \qquad (3.7.1.39)$$

მიღებული ფორმულიდან დავასკვნით, რომ დაცენტრის შეცდომის გაზომილ კუთხეზე ნაკლები გავლენისათვის საჭიროა e_C ხაზოვანი ელემენტი რაც შეიძლება მცირე იყოს, აგრეთვე გვერდების სიგრძე დიდი და შეძლებისამებრ ტოლები. ამასთანავე რედუქციის შეცდომასთან განსხვავებით დაცენტრვის შეცდომის გაზომილ კუთხეზე გავლენა დამოკიდებულია თვით გაზომილი კუთხის ოდენობაზე. მართლაც, როცა გაზომილი M კუთხე მახვილია, მაშინ D_C მცირეა, ე. ი. m_C მცირეა; როცა M უახლოვდება 180°-ს, D_C იზრდება და შესაბამისად m_C-იც იზრდება. აქედან დასკვნა,—როცა გასაზომი კუთხე ბლაგვია, საჭიროა თეოდოლიტის რაც შეიძლება სიფრთხილით დაცენ-

ტრვა. დაცენტრისადმი ასეთ მიდგომას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს პოლიგონომეტრიულ სვლებში.

ახლა, ვთქვათ, $D_A = D_B = D$ და $D_C = 2D$, ანუ $M = 180°$, მაშინ (39) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$m_e = \pm \frac{\rho e_C}{D} \sqrt{2} \qquad (3.7.1.40)$$

განვიხილოთ რედუქციისა და დაცენტრვის ერთობლივი მოსალოდნელი გავლენა კუთხის გაზომვაზე. ამისათვის შევადაროთ (37) და (26) ფორმულები და მოვითხოვოთ ტოლი გავლენის პრინციპის საფუძველზე მათი ტოლობა, მივიღებთ

$$m_e = \pm \frac{\rho e_C}{D} \sqrt{2} = \pm \frac{\rho e_r}{D};$$

აქედან

$$e_C = \frac{e_r}{\sqrt{2}}. \qquad (3.7.1.41)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთნაირ პირობებში იარაღის დაცენტრვას უფრო მეტი ყურადღება უნდა მიექცეს. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, თუ $e_r = 0{,}002$ მ, e_C უნდა მივიღოთ

$$e_C = \frac{0{,}002}{\sqrt{2}} \approx 0{,}0015 \text{ მ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.1.3. გვერდების სიგრძე იგივე, რაც მე-2 მაგალითში, ხოლო $e_C = 1{,}5$ მმ და $M = 150°$. ჩავსვათ (34) ფორმულაში მიღებული სიდიდეები, გვექნება

$$m_C^2 = \frac{206265^2 \cdot 0{,}0015^2}{2 \cdot 20^2 \cdot 30^2} (20^2 + 30^2 - 2 \times 20 \times 30 \cos 150°) \approx 34{,}06.$$

$$m_C = \pm 5'',8.$$

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ კ უ თ ხ ი ს გ ა ზ ო მ ვ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ა. ამისათვის (1) ფორმულაში შევიტანოთ (22), (24) და (37) ფორმულებიდან $m_{r_A}^2$, $m_{r_B}^2$ და m_C^2 მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$m_\beta = \pm \sqrt{m_i^2 + \frac{\rho^2}{2D_A^2 D_B^2}\left[e_r^2(D_A^2 + D_B^2) + e_C^2(D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B \cos M)\right]}. \qquad (3.7.1.42)$$

მიღებული ფორმულა არის საერთო ფორმულა გაზომილი კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად.

თუ გავაერთიანებთ კუთხის გაზომვის ყველა წესს, დავასკვნით შემდეგს:

1. როდესაც საჭიროა შედარებით მაღალი სიზუსტით ერთი კუთხის გა-

ზომვა და დროის ეკონომიას დიდი მნიშვნელობა აქვს, მაშინ უმჯობესია გამოვიყენოთ განმეორებითი ხერხი. თუ გვაქვს ინსტრუმენტი $t < 20''$, ხოლო, თუ $t < 20''$-ია, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ილეთების ხერხი.

2. როდესაც საჭიროა სადგურზე ერთდროულად რამდენიმე კუთხის მაღალი სიზუსტით გაზომვა, მაშინ გამოიყენება მაღალი სიზუსტის არაგანმეორებითი, როგორც დიდი (1"; 2"), ასევე ოპტიკური (0",2; 1") თეოდოლიტები და გაზომვის სრული წრიული ილეთების, ყველა კომბინაციის ან შრაიბერის ხერხი.

3. რედუქციისა და თეოდოლიტის დაცენტრვის კუთხის გაზომვის სიზუსტეზე ნაკლები გავლენის მიზნით, სჯობს კუთხის გვერდების სიგრძეები იქნეს რაც შეიძლება დიდი.

4. როცა გასაზომი კუთხე უახლოვდება ბლაგვს, მაშინ თეოდოლიტის დაცენტრვას უნდა მიექცეს განსაკუთრებული ყურადღება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.1.4. პირველი მაგალითიდან $m_i^2 \approx 20$, მეორე მაგალითიდან $m_r^2 \approx 307$ და მესამე მაგალითიდან $m_C^2 \approx 34$. გამოვითვალოთ შეცდომა (1) ფორმულით, მივიღებთ

$$m_\beta = \pm\sqrt{20+307+34} \approx \pm 19''.$$

h. ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს პ რ ა ქ ტ ი კ უ ლ ი ხ ე რ ხ ი თ გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა

როგორც ვთქვით, კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელ (42) ფორმულაში შემავალი ხაზოვანი e_r და e_C ელემენტები გარკვეული სახის სამიზნე საგნებისა და ინსტრუმენტისათვის ექსპერიმენტულად განისაზღვრება. გარდა ამისა, ექსპერიმენტულად შეიძლება განისაზღვროს m_i კუთხის საკუთრივ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომაც. ამ m_i, e_r, e_C ეგრეთ წოდებული ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი შეცდომების ექსპერიმენტულად განსაზღვრის მრავალ ხერხთაგან მოვიყვანოთ ვ. ბაუმანის ხერხი: აღნიშნული ხერხით ელემენტარული შეცდომები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

შევარჩევთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირს და გარემო პირობებს დაახლოებით ისეთს, როგორსაც მოველით დაპროექტებული გეოდეზიური ან სამარკშეიდერო სამუშაოების შესასრულებლად და დავამაგრებთ კუთხეს დაახლოებით ტოლი გვერდებით. ადგილზე დამაგრებულ კუთხეს გავზომავთ სამ სერიად.

პ ი რ ვ ე ლ ი ს ე რ ი ა. შერჩეული წესის მიხედვით (ილეთების, განმეორებითი, წრიული ილეთების და სხვ.) ვაწარმოებთ კუთხის მრავალჯერ გაზომვას ისე, რომ სერიის დამთავრებამდე არ უნდა დაიძრას ადგილიდან თეოდოლიტი და სამიზნე საგნები. კუთხის მრავალი განაზომიდან გამოვითვლით მის უალბათეს სიდიდეს და ამით საშუალება მოგვეცემა ბესელის ფორმულით განვსაზღვროთ კუთხის ყოველი ცალკეული განაზომის (m_{β_1}) ანუ, ამ შემთხვევაში, კუთხის საკუთრივ გაზომვის (m_i) საშუალო კვადრატული შეცდომა.

მ ე ო რ ე ს ე რ ი ა. იმავე წესით ვაწარმოებთ კუთხის მრავალჯერ გაზომვას, მხოლოდ კუთხის გაზომვის ყოველი სერიის შესრულებისას ერთ-ერთ სა-

მიზნე საგანს (ვთქვათ A) ხელმეორედ დავცენტრავთ ყოველ ჯერზე თეოდოლიტს და მეორე სამიზნე საგანს (B) უძრავად ვტოვებთ. ასეთ შემთხვევაში განსაზღვრული კუთხის ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა (m_{β_2}) იქნება შედეგი როგორც უკვე ცნობილი კუთხის საკუთრივ გაზომვის m_i საშუალო კვადრატული შეცდომის, ისე მისგან დამოუკიდებელი, რედუქციის m_{rA} საშუალო კვადრატული შეცდომისა, ე. ი:

$$m''_{\beta_2} = \pm\sqrt{m_i^2 + m_{rA}^2} \tag{3.7.1.43}$$

აქედან გამოვითვლით რედუქციის საშუალო კვადრატულ შეცდომას ფორმულით

$$m''_{rA} = \pm\sqrt{m_{\beta_2}^2 - m_i^2}. \tag{3.7.1.44}$$

ამავე დროს ვიცით, რომ რედუქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად არსებობს ფორმულა (27)

$$m_{rA} = \pm\frac{\rho\cdot e_r}{D\cdot\sqrt{2}},$$

საიდანაც რედუქციის ხაზოვანი ელემენტი

$$e_r = \frac{m_{r_A}\cdot D\cdot\sqrt{2}}{\rho}. \tag{3.7.1.45}$$

მ ე ს ა მ ე ს ე რ ი ა. იმავე წესით ვაწარმოებთ კუთხის მრავალჯერ გაზომვას, მხოლოდ კუთხის გაზომვის ყოველი სერიის შესრულების დროს თეოდოლიტს ვიღებთ და ისევე ვცენტრავთ კუთხის წვეროზე, მაგრამ სიგნალებს ხელს არ ვახლებთ. ასეთ პირობებში განსაზღვრული ყოველი ცალკეული განაზომის (m_{β_3}) საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება შემცველი თეოდოლიტის დაცენტრვის უცნობი m_C საშუალო კვადრატული შეცდომისა და კუთხის საკუთრივ გაზომვის უკვე ცნობილი m_i საშუალო კვადრატული შეცდომისა, მაშასადამე,

$$m_{\beta_3} = \pm\sqrt{m_i^2 + m_C^2}, \tag{3.7.1.46}$$

აქედან

$$m_C = \pm\sqrt{m_{\beta_3}^2 - m_i^2} \tag{3.7.1.47}$$

ამავე დროს (37) ფორმულით

$$m_C^2 = \frac{\rho^2 e_C^2}{2D_A^2 D_B^2}\,(D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B\cdot\cos M).$$

მაგრამ

$$D_A = D_B = D,$$

ამიტომ

$$m_C^2=\frac{\rho^2\cdot e_C^2}{D^2}(1-\cos M), \tag{3.7.1.48}$$

ანუ

$$m_C=\pm\frac{\sqrt{2}\cdot\rho\cdot e_C}{D}\sqrt{\frac{1-\cos M}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}\cdot\rho\cdot e_C}{D}\cdot\sin\frac{M}{2}, \tag{3.7.1.49}$$

საიდანაც დაცენტრვის შეცდომის ხაზოვანი ელემენტი განისაზღვრება გამოსახულებიდან

$$e_C=\frac{m_C\cdot D}{\sqrt{2}\cdot\rho\cdot\sin\frac{M}{2}}. \tag{3.7.1.50}$$

ბაუმანმა შახტში ერთმინუტიანი თეოდოლიტის ზონრიანი შვეულით დაცენტრვისა და კუთხის ერთი განმეორებით გაზომვისათვის მიიღო

$$m_i=\pm 26'',\quad e_r=1,5 \text{ მმ} \quad \text{და} \quad e_C=1,3 \text{ მმ}.$$

B. თანაბარი გავლენის პრინციპი

საერთოდ, სასურველია როგორც ერთგვაროვანი, ისე არაერთგვაროვანი გეოდეზიური გაზომვები შესრულდეს ტოლი სიზუსტით. ამიტომ წინასწარი ანგარიშის დროს ხშირად თანაბარი გავლენის პრინციპს იყენებენ. აღსანიშნავია, რომ ამ პრინციპზე დამყარებული წინასწარი ანგარიში და დაშვებები გაზომვებზე გავლენის მქონე ფაქტორების უსასრულოდ ცვალებადობის გამო ზუსტად ვერ მართლდება.

მაგალითისათვის ავიღოთ მაღალი კლასის ტრიანგულაციის ორ წერტილს შორის გაშლილი პოლიგონომეტრიული სვლა. მივიღოთ აღნიშვნები.

L —პოლიგონომეტრიული სვლის ჩამკეტი გვერდის ანუ ტრიგონომეტრიული წერტილების შემაერთებელი ხაზის სიგრძე;

S_i —პოლიგონომეტრიული სვლის გვერდების სიგრძე;

n —სვლაში გვერდების რაოდენობა;

f_s — სვლის პერიმეტრის ზღვრული შეუკვრელობა;

t_s —სვლის ზღვრული გრძივი ძვრა (შეუკვრელობა, გადაადგილება);

u_s —სვლის ზღვრული განივი ძვრა;

M —პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა;

m_t —პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო წერტილის გრძივი გადაადგილების საშუალო კვადრატული შეცდომა;

m_u —პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო წერტილის განივი გადაადგილების საშუალო კვადრატული შეცდომა:

(3.4·4.2) ფორმულის მიხედვით მივიღოთ, რომ

$$f_ზ = 2M, \tag{3.7.1.51}$$

$$\left.\begin{aligned} t_ზ &= 2m_t \\ u_ზ &= 2m_u \end{aligned}\right\}. \tag{3.7.1.52}$$

აგრეთვე გეოდეზიის კურსიდან ცნობილია

$$f_ზ = \sqrt{(t_ზ)^2 + (u_ზ)^2}, \tag{3.7.1.53}$$

$$M = \pm\sqrt{m_t^2 + m_u^2}, \tag{3.7.1.54}$$

ხოლო თანაბარი გავლენის პრინციპის მიხედვით მივიღებთ

$$t_ზ = u_ზ = \frac{f_ზ}{\sqrt{2}}, \tag{3.7.1.55}$$

$$m_t = m_u = \frac{M}{\sqrt{2}}. \tag{3.7.1.56}$$

$$\frac{t_ზ}{L} = \frac{u_ზ}{L} = \frac{f_ზ}{L\sqrt{2}} \text{ (ზღვრული სიზუსტე)}, \tag{3.7.1.57}$$

$$\frac{m_t}{L} = \frac{m_u}{L} = \frac{M}{L\sqrt{2}} = \frac{f_ზ}{2L\cdot\sqrt{2}} \text{ (სიზუსტე)}. \tag{3.7.1.58}$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{f_ზ}{L} = \frac{1}{T} \text{ (პოლიგონომეტრიული ქსელის ზღვრული სიზუსტე)}. \tag{3.7.1.59}$$

ეს აღნიშვნა შევიტანოთ (57) და (58) ტოლობებში, გვექნება

$$\frac{t_ზ}{L} = \frac{u_ზ}{L} = \frac{1}{T\sqrt{2}}, \tag{3.7.1.\ \ }$$

$$\frac{m_t}{L} = \frac{m_u}{L} = \frac{1}{2T\cdot\sqrt{2}}. \tag{3.7.1.61}$$

ცნობილია, რომ გრძივ გადაადგილებას ძირითადად იწვევს პოლიგონომეტრიული სვლის გვერდების გაზომვების შეცდომები, ხოლო განივს—კუთხეების გაზომვის შეცდომები. საერთოდ წინასწარ იძლევიან აგეგმვის მასშტაბის ზღვრული სიზუსტისა და პოლიგონომეტრიული სვლის (L) სიგრძის მიხედვით დადგენილ ($1:T$) ზღვრულ სიზუსტეს და ამის საფუძველზე უნდა მოეწყოს გეოდეზიური გაზომვების შესრულება საჭირო სიზუსტით ვთქვათ, მოთხოვნილია, რომ პოლიგონომეტრიული სვლის გაზომვები შესრულდეს ზღვრული $\frac{1}{T} = \frac{1}{10000}$ სიზუსტით. მაშინ (60) და (61) თანახმად, ხაზოვანი და კუთხური გაზომვები უნდა შესრულდეს.

$$\frac{t_ზ}{L} = \frac{u_ზ}{L} = \frac{1}{10000\cdot\sqrt{2}} \approx \frac{1}{14000} \text{ ზღვრული სიზუსტით}$$

და

$$\frac{m_l}{L} = \frac{m_u}{L} = \frac{1}{T_{m_l}} = \frac{1}{T_{m_u}} = \frac{1}{28000} \text{ სიზუსტით.}$$

მაშასადამე, ხაზოვანი და კუთხური განაზომების ზღვრული და საშუალო კვადრატული შეცდომები არ უნდა გადასცილდეს შემდეგ ოდენობებს:

$$t_s = u_s = \frac{L}{T\sqrt{2}} = \frac{L}{14000} \qquad (3.7.1.62)$$

და

$$m_l = m_u = \frac{L}{2T\sqrt{2}} = \frac{L}{28000}. \qquad (3.7.1.63)$$

საკითხის ამგვარად გადაწყვეტა მით უფრო სამართლიანია, რაც უფრო გაშლილი იქნება პოლიგონომეტრიული ქსელი, ე. ი. როცა

$$L \approx [S]. \qquad (3.7.1.64)$$

გამოვიყენოთ ასეთი სახის პოლიგონომეტრიული სვლა ხაზოვანი და კუთხური გაზომვების წინასწარი ანგარიშისა და დაშვების ფორმულების გამოსაყვანად თანაბარი გავლენის პრინციპის საფუძველზე. პირველ რიგში განვიხილოთ საკითხი გრძივი გადაადგილების შესახებ.

a. გრძივი გადაადგილება

გეოდეზიიდან ცნობილია, რომ t გრძივ შეუკვრელობას იწვევს ხაზების უშუალოდ გაზომვის თანხლებული ათი სხვადასხვა სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის ელემენტარული შეცდომა[1]. თუ ამ შეცდომების ალგებრულ ჯამს აღვნიშნავთ ∂-თი, მივიღებთ

$$\partial = -t = \pm\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \pm \Delta_5 \pm \sigma_6 \pm \sigma_7 \pm \sigma_8 \pm \Delta_9 \pm \Delta_{10}, \qquad (3.7.1.65)$$

საიდანაც

σ_i არის სისტემატური ხასიათის ელემენტარული შეცდომები,

Δ_i —შემთხვევითი ხასიათის ელემენტარული შეცდომები.

თანამიმდევრობით ეს შეცდომებია: საზომის კომპარირების, ხაზის დასარვის ანუ გასწვრივობის, ადგილის რელიეფის გამო საზომის ჩაღუნვა-აღუნვის, თვით საზომის გაღუნვის, ადგილის დახრის, ტემპერატურის, საზომის დაჭიმვის, საზომის მიწაზე ხახუნის, ხაზის საკუთრივ გაზომვის და გამოსავალი წერტილის მდებარეობისა.

ჩამოთვლილი შეცდომებიდან მეორეს, მესამესა და მეოთხეს აქვს ერთნაირი ნიშანი, ისინი გასაზომი ხაზის სიგრძეს ადიდებენ, ე. ი. ჭეშმარიტ სიგრძეზე მეტს ავლინებენ და მოქმედებენ სწორედ ისე, როგორც ერთი შეცდომა ერთი ნიშნით და ამიტომ ეს შეცდომები უნდა შეიკრიბოს; ამგვარად, (65) ტოლობა გადაიწერება

$$\partial = -t = \pm\sigma_1 + 3\sigma_{2,3,4} \pm \Delta_5 \pm \sigma_6 \pm \sigma_7 + \sigma_8 \pm \Delta_9 \pm \Delta_{10} \qquad (3.7.1.66)$$

[1] იხ. А. С. Чеботарев, „Геодезия", часть II, 1949 г. М., § 40, გვ. 107.

ასეთი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (3.4.1.6) ფორმულას, გვექნება[1]

$$m_\partial^2 = m_t^2 = m_{\sigma_1}^2 + 9m_{\sigma_{2,3,4}}^2 + m_{\Delta_5}^2 + m_{\sigma_6}^2 + m_{\sigma_7}^2 + m_{\sigma_8}^2 + m_{\Delta_9}^2 + m_{\Delta_{10}}^2. \quad (3.7.1.67)$$

მაგრამ, თუ გამოვიყენებთ თანაბარი გავლენის პრინციპს, ე. ი. ჩავთვლით, რომ სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის შეცდომები ტოლი სიდიდეებია, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$m_{\sigma_1} \approx m_{\sigma_{2,3,4}} \approx m_{\Delta_5} \approx m_{\sigma_6} \approx m_{\sigma_7} \approx m_{\sigma_8} \approx m_{\Delta_9} \approx m_{\Delta_{10}} = m.$$

მაშინ (67) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m_\partial = m_t = 4m. \quad (3.7.1.68)$$

იმავე პრინციპით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ m_t გრძივი შეუკვრელობის წარმომშობი თანაბარი წყაროებია როგორც m_σ სისტემატური, ისე m_Δ შემთხვევითი შეცდომები; ამიტომ უფლება გვაქვს დავწეროთ, რომ $m = m_\sigma = m_\Delta$ და შესაბამისად (68) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$m_t = 4m_\sigma = 4m_\Delta. \quad (3.7.1.69)$$

აქედან

$$m_\sigma = m_\Delta = \frac{m_t}{4}. \quad (3.7.1.70)$$

ანალოგიურად

$$\sigma_{\text{ზ}} = \Delta_{\text{ზ}} = \frac{t_{\text{ზ}}}{4}. \quad (3.7.1.71)$$

(70) და (71) ტოლობებში ჩავსვათ m_t-სა და $t_{\text{ზ}}$-ის მნიშვნელობები (56) და (55) ტოლობებიდან, მივიღებთ

$$\sigma_{\text{ზ}} = \Delta_{\text{ზ}} = \frac{L}{4 \cdot T \cdot \sqrt{2}} \approx \frac{L}{6T} \approx \frac{[S]}{6T}, \quad (3.7.1.72)$$

$$m_\sigma = m_\Delta = \frac{L}{4 \cdot 2 \cdot T \cdot \sqrt{2}} \approx \frac{L}{12T} \approx \frac{[S]}{12T} \quad (3.7.1.73)$$

თუ შესრულებულ ხაზოვან გაზომვებში სისტემატური და შემთხვევითი ხაზოვანი შეცდომები არ აღემატება (72) და (73) ფორმულებით გამოთვლილს, მაშინ იგულისხმება, რომ პოლიგონომეტრიული ქსელის ხაზოვანი გაზომვების სიზუსტე დაცულია და შეადგენს $1:T$ ოდენობას.

---

[1] იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ (3.4.7.4) ფორმულას, რომელშიც (3.4.8.3) ფორმულით $m_\partial^2 = m_{\partial_8}^2 + m_{\partial_9}^2 + m_{\partial_{10}}^2$ და (3.4.8.4′) ფორმულით $m_\sigma^2 = m_{\sigma_1}^2 + 9m_{\sigma_{2,3,4}}^2 + m_{\sigma_6}^2 + m_{\sigma_7}^2 + m_{\sigma_8}^2$ (აქ სისტემატურ შეცდომათა ორნიშნიანობის გამო გაორკეცებული ჯამი უგულებელყოფილია).

დავადგინოთ (72) და (73) ფორმულების გამოყენებით, თუ რა ოდენობას არ უნდა გადასცილდეს პოლიგონომეტრიული სვლისათვის შერჩეული საზომით, ყოველი (ერთჯერ) გადაზომვის სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის ზღვრული და საშუალო კვადრატული შეცდომები. მივიღოთ აღნიშვნები

l —საზომის სიგრძე;

n —საზომით გადაზომვის რიცხვი პოლიგონომეტრიულ სვლაში;

$\Delta l_{სს}$—საზომით ყოველი გადაზომვის სისტემატური შეცდომის ზღვრული ოდენობა;

$\Delta l_{სშ}$—საზომით ყოველი გადაზომვის შემთხვევითი შეცდომის ზღვრული ოდენობა;

$m_{lს}$ —საზომით ყოველი გადაზომვის სისტემატური ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომა;

$m_{lშ}$ —საზომით ყოველი გადაზომვის შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

საზომით ერთჯერ გადაზომვის ზღვრული სისტემატური შეცდომის გამოსათვლელად (72) ფორმულით გამოთვლილი ზღვრული სისტემატური შეცდომა ($\sigma_ზ$) უნდა გავყოთ n-ზე, ხოლო ზღვრული შემთხვევითი შეცდომის გამოსათვლელად კი იმავე (72) ფორმულით გამოთვლილი ზღვრული შემთხვევითი შეცდომა ($\Delta_ზ$) უნდა გავყოთ $\sqrt{n}$-ზე. შესაბამისად მივიღებთ

$$\Delta l_{სს}=\frac{\sigma_ზ}{n}=\frac{L}{6T\cdot n}=\frac{[s]}{6T\frac{[s]}{l}}=\frac{l}{6T}, \tag{3.7.1.74}$$

$$\Delta l_{სშ}=\frac{\Delta_ზ}{\sqrt{n}}=\frac{L}{6T\cdot\sqrt{n}}=\frac{[s]\sqrt{n}}{6Tn}=\frac{[s]}{6T\frac{[s]}{l}}\sqrt{\frac{[s]}{l}}=\frac{l}{6T}\sqrt{\frac{[s]}{l}}. \tag{3.7.1.75}$$

ანალოგიურად (73) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$m_{lს}=\frac{l}{12T}, \tag{3.7.1.76}$$

$$m_{lშ}=\frac{l}{12T}\sqrt{\frac{[s]}{l}} \tag{3.7.1.77}$$

გამოყენებული საზომისა და გაზომვის პირობებისათვის ზომის ერთეულზე მოსალოდნელი სისტემატური ხასიათის გავლენის საშუალო კვადრატული შეცდომა λ გამოითვლება

$$\lambda=\frac{m_{lს}}{l}=\frac{1}{12T}. \tag{3.7.1.78}$$

მხოლოდ იმავე საზომისა და გაზომვის პირობებისათვის ზომის ერთეულზე მოსალოდნელი შემთხვევითი ხასიათის (μ გავლენის) საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება

$$\mu=\frac{m_{lშ}}{\sqrt{l}}=\frac{1}{12T}\sqrt{[s]}. \tag{3.7.1.79}$$

შენიშვნა. დამოკიდებულება სისტემატური ხასიათის ზღვრულ და საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შორის ისეთივე არაა, როგორიც არის შემთხვევითი ხასიათის ზღვრულ და საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შორის (3. 4. 4. 2) ფორმულის მიხედვით დაშვება $\sigma_{ზ}=2m_{ა}$-ს პირობითია და შეიძლება ცალკეულ შემთხვევებში მას ადგილი არ ჰქონდეს. $m(l)$ სისტემატურში იგულისხმება ზღვრული სისტემატური შეცდომის მინიმალური მნიშვნელობა. ამგვარად, როგორც (73), (76), (78) ფორმულებში, აგრეთვე სხვა ანალოგიურ გამოსახულებაში, სისტემატური ხასიათის ზღვრულ და საშუალო კვადრატულ შეცდომებს შორის დამოკიდებულების სწორად გაგებისათვის აღნიშნული გარემოება მუდამ უნდა გვქონდეს მხედველობაში.

ვთქვათ, პოლიგონომეტრიული სვლის გვერდების საშუალო სიგრძე არის S_0 და მასში k-ჯერ თავსდება l სიგრძის საზომი, აგრეთვე გვერდების რიცხვი არის n, მაშინ (75) და (76) ფორმულები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\Delta l_{ზმ}=\frac{1}{6T}\sqrt{n\cdot k}, \tag{3-7.1.80}$$

$$m_{ზმ}=\frac{l}{12T}\sqrt{n\cdot k}. \tag{3.8.1.81}$$

მაგალითი. $T=10000$; $[s]=20$ კმ: $s_0=500$ მ;

$$l=20,\ \text{ე. ი. } k=\frac{500}{20}=25;\quad n=\frac{20000}{500}=40.$$

(74) ფორმულით მივიღებთ

$$\Delta l_{სს}=\frac{20000}{60000}=\frac{1}{3}=0,33 \text{ მმ.}$$

(80) და (81) ფორმულებით გვექნება

$$\Delta l_{ზმ}=\frac{20}{60000}\sqrt{40\cdot 25}=\pm 10,50 \text{ მმ;}$$

$$ml_{ზმ}=\frac{20}{120000}\sqrt{40\cdot 25}=\pm 5,25 \text{ მმ.}$$

როგორც ვხედავთ, პერიმეტრის შემცირებით ან საზომის სიგრძის გადიდებით შეიძლება შემცირება ყოველი ცალკეული გადაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომისა. აგრეთვე საჭიროა რაც შეიძლება მინიმუმამდე იქნეს დაყვანილი სისტემატური გავლენის ოდენობა.

ბ. განივი გადაადგილება

როგორც ითქვა, განივი (u) გადაადგილების ძირითადი მიზეზი კუთხეების გაზომვის სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის შეცდომებია. (3.4.9) პარაგრაფში დასაბუთებულია, რომ გაზომვებში მეტად სახიფათოა თუგინდ მცირე სისტემატური ხასიათის შეცდომის დაშვება. განვიხილოთ მხოლოდ სისტემატური შეცდომებით გამოწვეული განივი გადაადგილების საკითხი.

ტოლი გავლენის პრინციპის თანახმად, დავუშვათ, რომ ყველა შეცდომის სისტემატური გავლენის წილი ერთნაირია და მათი ჯამი აღვნიშნოთ $\Delta\beta_{სს}$-ით.

ვისარგებლოთ (3.4.9.2) ფორმულით

$$u_{გ}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot s\cdot\frac{\Delta\beta_{სს}}{\rho}. \qquad (3.7.1.82)$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $ns=L$, ე. ი. დავუშვათ, რომ გვერდები ტოლია. (82) ტოლობა გავყოთ L-ზე და გამოვიყენოთ (60) ფორმულა. მივიღებთ

$$\frac{1}{T\sqrt{2}}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\Delta\beta_{სს}}{\rho}. \qquad (3.7.1.83)$$

აქედან გვექნება

$$\Delta\beta_{სს}=\frac{1}{T}\,\frac{\sqrt{2}}{n+1}\cdot\rho''. \qquad (3.7.1.84)$$

(84) ფორმულით დავასკვნით, რომ პოლიგონომეტრიული სვლის მოთხოვნილი $(1:T)$ სიზუსტის შემთხვევაში კუთხის გაზომვის დასაშვები სისტემატური გავლენის წილი მით ნაკლები იქნება, რაც მეტია (n) გვერდების რიცხვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $T=10\,000$, $L=20\,000$ მ, $s_0=500$ მ, ე. ი. $n=40$.

ჩავსვათ (84) ფორმულაში მოცემული სიდიდეები, მივიღებთ

$$\Delta\beta_{სს}=\frac{1}{10\,000}\cdot\frac{\sqrt{2}}{41}\cdot\rho\approx\pm0'',6 \text{ არ უნდა გადასცილდეს.}$$

გ ა ნ ვ ი ხ ი ლ ო თ ს ა კ ი თ ხ ი მ ხ ო ლ ო დ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ხ ა ს ი ა თ ი ს შ ე ც დ ო მ ე ბ ი ს გ ა ვ ლ ე ნ ი თ გ ა ნ ი ვ ი გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ი ს ა.

იმავე თანაბარი გავლენის პრინციპით დავუშვათ, რომ ყველა შემცდომის შემთხვევითი გავლენის წილი ერთნაირია და დამოუკიდებელი. აღვნიშნოთ ყოველი ცალკეული შეცდომის საშუალო კვადრატული შეცდომა m_0-ით. ამ შემთხვევაში (3.4.2.6) ფორმულით გამოითვლება კუთხის გაზომვის m_β საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$m_\beta=m_0\sqrt{6}. \qquad (3.7.1.85)$$

აქ ექვსი შეცდომის ქვეშ იგულისხმება ამ პარაგრაფის დასაწყისში ჩამოთვლილი ყველა შეცდომა: რედუქციის (ორი), თეოდოლიტის დაცენტრვის, ინსტრუმენტული, გარემოსა და გამოსავალი მონაცემების, როგორც შედარებით უფრო მნიშვნელოვანი გავლენის მქონე წყაროებისა.

უნდა ჩავთვალოთ, რომ (85) ფორმულით განსაზღვრული m_β კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა იწვევს განივი გადაადგილების m_u საშუალო კვადრატულ შეცდომას. m_u-ის განსაზღვრისათვის მივმართოთ განივი გადაადგილების ალგებრული (3.4.9.1) გამოსახულებას, მხოლოდ ყველა წევრები განვიხილოთ შემთხვევით, დამოუკიდებელ და ტოლ შეცდომებად. ასეთი

სახის წირული ფუნქციისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ (3·4·1.8) ფორმულა. მივიღებთ

$$m_u^2=\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot s^2(1^2+2^2+\cdots+n^2).$$

მაგრამ

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ამიტომ გვექნება

$$m_u^2=\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\,s^2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3.7.1.86}$$

ამ გამოსახულებაში s შევცვალოთ, თანახმად პირობისა, $s=\frac{L}{n}$-ით, მაშინ გვექნება

$$m_u^2=\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot L^2\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \tag{3.7.1.87}$$

მრიცხველისა და მნიშვნელის $2n$-ზე გაყოფით და სიმცირის გამო მრიცხველში $\frac{1}{2n}$-ის უგულებელყოფით მივიღებთ

$$m_u=\frac{m_\beta}{\rho}\cdot L\cdot\sqrt{\frac{n+1.5}{3}}. \tag{3.7.1.88}$$

(88) ფორმულით განისაზღვრება განივი გადაადგილების საშუალო კვადრატული შეცდომა კიდული პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო პუნქტისა. აქ იგულისხმება, რომ კუთხეების შეუკვრელობა პოლიგონომეტრიული სვლის კუთხეებს შორის განაწილებული არ არის. ჩვენ კი გვაქვს სვლა ალებული ტრიანგულაციის ორ პუნქტს შორის და ადგილი ექნება კუთხეების შეუკვრელობას, რომელიც თანაბრად უნდა განაწილდეს ყველა კუთხეზე. ასეთ შემთხვევაში უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ყველაზე ცუდ პირობებში იქნება სვლის შუა პუნქტი. ამ პუნქტის განივი გადაადგილების ოდენობა განვსაზღვროთ ორივე ტრიგონომეტრიული პუნქტიდან. სათანადო ფორმულის დასადგენად მივიღოთ შემდეგი პირობა: გვერდების რიცხვი ლუწია და შუა პუნქტის განივი გადაადგილების ჩამკეტი ხაზის ორივე მხარეზეა (უცუდესი შემთხვევა). ამ პირობების საფუძველზე (86) ფორმულის მარჯვენა მხარე გავაორკეცოთ და n-ის ნაცვლად შევიტანოთ n-ის ნახევარი, მივიღებთ

$$m_u^2=2\cdot\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot s^2\cdot\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(2\,\frac{n}{2}+1\right)}{6},$$

ანუ

$$m_u^2=\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\,L^2\frac{(n+2)(n+1)}{12n}.$$

წილადი შევკვეცოთ n-ზე. შემდეგ უგულებელვყოთ $2:n$, როგორც მცირე სიდიდე, მივიღებთ

$$m_{u}=\frac{m_{\beta}}{\rho}\cdot L\sqrt{\frac{n+3}{12}}. \qquad (3.7.1.89)$$

მეორე მხრივ, (56) ფორმულის თანახმად,

$$m_{u}=\frac{L}{2T\cdot\sqrt{2}},$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{2T\cdot\sqrt{2}}=\frac{m_{\beta}}{\rho}\sqrt{\frac{n+3}{12}}. \qquad (3.7.1.90)$$

აქედან მივიღებთ

$$m_{\beta}=\frac{1}{T}\quad\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{12}{n+3}}. \qquad (3.7.1.91)$$

(91) ფორმულაში ჩავსვათ თანაბარი გავლენის პრინციპით განსაზღვრული m_{β}-ს მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$m_{0}\cdot\sqrt{6}=\frac{1}{T}\cdot\frac{\rho''}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{12}{n+3}}.$$

მაშასადამე, ყოველი (ცალკეული) შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$m_{0}=\frac{1}{T}\cdot\frac{\rho''}{2\sqrt{n+3}}, \qquad (3.7.1.92)$$

ხოლო ყოველი დამოუკიდებელი შემთხვევითი წყაროს ზღვრული შეცდომა დადგინდება ფორმულით

$$\Delta\beta_{0\,\text{ზე}}=\frac{1}{T}\cdot\frac{\rho''}{\sqrt{n+3}} \qquad (3.7.1.93)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $T=10\,000$; $L=20\,000$ მ; $s_0=500$ მ; $n=40$. (93) ფორმულით

$$\Delta\beta_{0\,\text{ზე}}=\pm\frac{1}{10\,000}\quad\frac{\rho''}{\sqrt{43}}\approx 3'',1;$$

(92) ფორმულით

$$m_{0}\approx 1'',6;$$

(85) ან (91) ფორმულით

$$m_{\beta}=\pm 3'',85$$

და

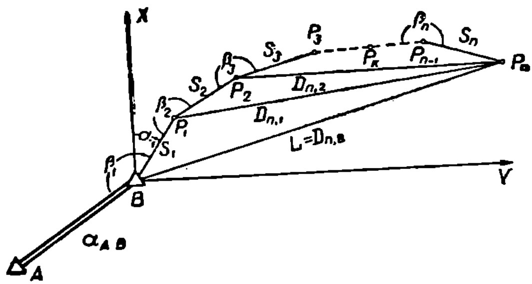
$$\Delta\beta_{\text{ზე}}=\pm 7'',7.$$

როგორც ვხედავთ, თანაბარი გავლენის პრინციპი წინასწარი ანგარიშების შესასრულებლად და დაშვებების დასადგენად სასურველი საშუალებაა, მხოლოდ საჭიროა რაც შეიძლება დაცულ იქნეს პოლიგონომეტრიული ქსელის მოთხოვნილი $(1:T)$ სიზუსტე.

3.7.2. პოლიგონომეტრიული პუნქტების მდებარეობის განსაზღვრის შეცდომები

პოლიგონომეტრიული სამუშაოების საბოლოო მიზანია პოლიგონომეტრიული პუნქტების კოორდინატების განსაზღვრა. პოლიგონომეტრიული პუნქტების კოორდინატების განსაზღვრის სიზუსტე დამოკიდებულია კოორდინატთა ნაზრდების სიზუსტეზე; თვით ნაზრდების განსაზღვრის სიზუსტე კი დამოკიდებულია უშუალოდ მიღებული ხაზოვანი და კუთხური განაზომების სიზუსტეზე.

სანიმუშოდ ავიღოთ თავისუფალი პოლიგონომეტრიული სვლა, რომელიც დაყრდნობილია მაღალი სიზუსტით განსაზღვრული ტრიანგულაციის $B(x_B, y_B)$ პუნქტზე და AB გვერდის α_{AB} დირექციულ კუთხეზე. ასეთი სვლა შედარებით ნაკლებად საიმედოა, რადგანაც არ არის შესაძლებლობა უშუალოდ გაზომილ კუთხეთა და კოორდინატთა ნაზრდების გაწონასწორებისა და არც კონტროლის განხორციელებისა. განსახილველ პოლიგონომეტრიულ



ნახ. 3.7.2.1.

სვლაში (1) ნახაზზე მოცემულია n რაოდენობის თარაზული კუთხე და იმავე რაოდენობის გვერდების თარაზული პროექცია.

ვთქვათ, ჩვენი მიზანია კოორდინატებით განსაზღვრული P_n პუნქტის მდებარეობის სიზუსტის შეფასება. დასახული მიზნისათვის საჭირო ფორმულების გამოსაყვანად ვისარგებლოთ გეოდეზიიდან ცნობილი ფორმულებით

$$x_n = x_B + \sum_1^n \Delta x = x_B + \sum_1^n s_i \cos \alpha_i, \qquad (3.7.2.1)$$

$$y_n = y_B + \sum_1^n \Delta y = y_B + \sum_1^n s_i \sin \alpha_i, \qquad (3.7.2.2)$$

(1) და (2) ფორმულებში $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ დირექციული კუთხეები ფუნ-

ქციება უშუალოდ გაზომილი $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$, კუთხეებისა და გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha_i = \alpha_{AB} + \sum_1^n \beta_i \pm i \cdot 180^\circ, \qquad (3.7.2.3)$$

$$i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n.$$

(1), (2) და (3) ფორმულებში x_B, y_B და α_{AB} უშუალოდ გაზომილ s_i გვერდებისა და β_i კუთხეების გაზომვის სიზუსტისაგან დამოუკიდებელი სიდიდეებია. ამასთანავე ეს სიდიდეები განსაზღვრულია უფრო მეტი სიზუსტით, ვიდრე s_i და β_i.

ავიღოთ (1) დამოკიდებულებების სრული დიფერენციალი s_i და α_i-ის მიხედვით, მხოლოდ x_B, y_B და α_{AB}, როგორც მაღალი სიზუსტის სიდიდენი, ვიგულისხმოთ უშეცდომო სიდიდეებად

$$d \sum_1^n \Delta x_i = \sum_1^n d\, \Delta x_i = \sum_1^n \cos \alpha_i\, ds_i - \frac{1}{\rho} \sum_1^n s_i \sin \alpha_i\, d\alpha_i,$$

ანუ

$$\sum_1^n d\, \Delta x_i = \sum_1^n \cos \alpha_i\, ds_i - \frac{1}{\rho} \sum_1^n \Delta y_i\, d\alpha_i. \qquad (3.7.2.4)$$

$$i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n.$$

როგორც ითქვა, α_i დირექციული კუთხეები თვით ფუნქციებია უშუალოდ გაზომილი β_i კუთხეებისა; მაგალითად, (3) ტოლობიდან ჩანს, რომ α_i-ის შეცდომა დამოკიდებულია მხოლოდ β_1-ის გაზომვის შეცდომაზე, ე. ი. $d\alpha_1 = d\beta_1$, α_2-ის შეცდომა კი დამოკიდებულია β_1-ისა და β_2-ის შეცდომებზე, ე. ი. $d\alpha_2 = d\beta_1 + d\beta_2$ და ასე შემდეგ. ამის საფუძველზე (4) ტოლობის მარჯვენა მხარის $\Delta y_i \cdot d\alpha_i$ წევრი $d\alpha_i$ შესაბამისად გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_1 \cdot d\alpha_1 &= \Delta y_1 \cdot d\beta_1 \\ \Delta y_2 \cdot d\alpha_2 &= \Delta y_2 (d\beta_1 + d\beta_2) \\ & \\ \Delta y_n \cdot d\alpha_n &= \Delta y_n (d\beta_1 + d\beta_2 + \cdots + d\beta_n) \end{aligned}\right\}. \qquad (3.7.2.5)$$

(5) ტოლობათა შეკრებით, მარჯვენა მხარის ფრჩხილების გახსნისა და კუთხეთა შეცდომების მიხედვით საერთო მამრავლთა ფრჩხილებს გარეთ გამოტანით, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n \Delta y_i\, d\alpha_i = (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \cdots + \Delta y_n)\, d\beta_1 + \\ + (+\Delta y_2 + \Delta y_3 + \cdots + \Delta y_n)\, d\beta_2 + \\ + (\qquad +\Delta y_3 + \cdots + \Delta y_n)\, d\beta_3 + \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ + (\qquad\qquad\qquad +\Delta y_n)\, d\beta_n \end{aligned}\right\}. \qquad (3.7.2.6)$$

თუ ნაზრდების ჯამს შევცვლით შესაბამის კოორდინატთა სხვაობებით, გვექნება

$$\sum_1^n \Delta y_i\, d\alpha_i = (y_n - y_B)\, d\beta_1 + (y_n - y_1)\, d\beta_2 + (y_n - y_2)\, d\beta_3 + \cdots + (y_n - y_{n-1})\, d\beta_n$$

ანუ

$$\sum_1^n \Delta y_i\, d\alpha_i = \sum_1^n (y_n - y_i)\, d\beta_i. \qquad (3.7.2.7)$$

აქ იგულისხმება, რომ y_i იცვლება y_B-დან y_{n-1}-მდე. $d\beta_i$ კი იცვლება $d\beta_1$-დან $d\beta_n$-მდე.

(7) გამოსახულების გამოყენებით გარდავქმნათ (4) ტოლობა, მივიღებთ

$$\sum_1^n d\Delta x_i = \sum_1^n \cos\alpha_i\, ds_i - \frac{1}{\rho} \sum_1^n (y_n - y_i)\, d\beta_i. \qquad (3.7.2.8)$$

ასეთი სახის წრფივი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3.4·1·17) ფორმულით და იქნება

$$m_{x_n}^2 = [\cos^2\alpha \cdot m_s^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [(y_n - y_i)^2]. \qquad (3.7.2.9)$$

აქ ნაგულისხმევია, რომ კუთხეები ტოლზუსტად გაზომილია, ე. ი.

$$m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_{\beta_3} = \cdots = m_{\beta_n} = m_\beta.$$

ანალოგიური მსჯელობით (2) ტოლობიდან მიიღება P_n პუნქტის ორდინატის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა და გვექნება

$$m_{y_n}^2 = [\sin^2\alpha \cdot m_s^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [(x_n - x_i)^2]. \qquad (3.7.2.10)$$

აქ x_i იცვლება x_B-დან x_{n-1}-მდე.

კუთხის გაზომვის m_β საშუალო კვადრატული შეცდომა განმარტებულია წინა პარაგრაფში. რაც შეეხება გვერდების გაზომვის საკითხს, აქ საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ შემთხვევითი და სისტემატური შეცდომების გავლენა. s_i გვერდის გაზომვის შემთხვევითი ხასიათის საშუალო კვადრატული შეცდომის კვადრატი გამოითვლება (3·4·1.14) ფორმულით და გვექნება

$$m_{s_i}^2 = \mu^2 S_i,$$

ხოლო პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო პუნქტისათვის ანუ მთელი სვლისათვის, (9) და (10) ტოლობათა შესაბამისად, იქნება

$$m_{\delta_x}^2 = [\cos^2\alpha \cdot m_s^2] = \mu^2 [s \cdot \cos^2\alpha], \qquad (3.7.2.11)$$

$$m_{\delta_y}^2 = [\sin^2\alpha \cdot m_s^2] = \mu^2 [s \cdot \sin^2\alpha]. \qquad (3.7.2.12)$$

სისტემატური შეცდომების გავლენა პროპორციული იქნება ნაზრდების ოდენობებისა და მთელი სვლისათვის, ანუ სვლის ბოლო პუნქტისათვის, დადგინდება გამოსახულებიდან

$$m_{o_x} = \lambda \cdot \Delta x_1 + \lambda \Delta x_2 + \cdots + \lambda \Delta x_n = \lambda [\Delta x] \tag{3.7.2.13}$$

ან

$$m_{o_y} = \lambda \cdot \Delta y_1 + \lambda \Delta y_2 + \cdots + \lambda \Delta y_n = \lambda [\Delta y]. \tag{3.7.2.14}$$

როდესაც პოლიგონომეტრიული სვლა გაშლილია და დაახლოებით სწვრივია y ღერძისა, მაშინ გამოსავალი გვერდის α_{AB} დირექციული კუთხის შეცდომის გამო ბოლო წერტილი გადაადგილდება. ამ შემთხვევაში აბსცისის განსაზღვრის შეცდომის დამოუკიდებელი წყარო დადგინდება გამოსახულებიდან

$$\frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho} [\Delta y] = \frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho} (y_n - y_A). \tag{3.7.2.15}$$

ანალოგიურად გამოისახება x ღერძის სწვრივად გაჭიმული სვლის ორდინატის განსაზღვრის შეცდომა

$$\frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho} [\Delta x] = \frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho} (x_n - x_A). \tag{3.7.2.16}$$

როგორც ვხედავთ, პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო პუნქტის კოორდინატების განსაზღვრაზე მოქმედებს შეცდომათა ოთხი დამოუკიდებელი წყარო, სახელდობრ: გვერდების გაზომვის შემთხვევითი და სისტემატური გავლენის, კუთხის გაზომვის და გამოსავალი გვერდის დირექციული კუთხის განსაზღვრის შეცდომები. ამის გამო (3.4·1·6) ფორმულის საფუძველზე (9) და (10) ტოლობებში, (11), (12), (13), (14), (15) და (16) ფორმულების შესაბამისად ჩასმით, მივიღებთ

$$m_{x_n}^2 = \mu^2 [s \cos^2 \alpha] + \lambda^2 [\Delta x^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [(y_n - y_i)^2] + \frac{m_{\alpha_{AB}}^2}{\rho^2} (y_n - y_A)^2, \tag{3.7.2.17}$$

$$m_{y_n}^2 = \mu^2 [s \sin^2 \alpha] + \lambda^2 [\Delta y^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [(x_n - x_i)^2] + \frac{m_{\alpha_{AB}}^2}{\rho^2} (x_n - x_A)^2. \tag{3.7.2.18}$$

პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო პუნქტის მდებარეობის განსაზღვრის M_n საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება გამოსახულებიდან

$$M_n^2 = m_{x_n}^2 + m_{y_n}^2 \tag{3.7.2.19}$$

(19) ფორმულაში (17)-ისა და (18)-ის ჩასმით მივიღებთ

$$M_n^2 = \mu^2 [s] + \lambda^2 L^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [D_{n,i}^2] + \frac{m_{\alpha_{AB}}^2}{\rho^2} L^2. \tag{3.7.2.20}$$

აქ L — მთელი სვლის ჩამკეტი ხაზია.

$D_{n,i}$ — მანძილები უკანასკნელ (გამოსაკვლევ) n პუნქტისა და პოლიგონომეტრიული სვლის პუნქტებს შორის·

$$i = B,\ P_1,\ P_2,\ P_3, \cdots,\ P_{n-1}.$$

(20) ფორმულით შეიძლება ნებისმიერი პუნქტის მდებარეობის შეცდომის განსაზღვრა.

(20) ფორმულაში პ ი რ ვ ე ლ ი შესაკრები წარმოადგენს ხაზოვანი გაზომვის შემთხვევითს შეცდომას, რომლის ოდენობა პროპორციულია სვლის პერიმეტრისა; მ ე ო რ ე შესაკრები ხაზოვანი გაზომვის სისტემატური შეცდომაა და მისი ოდენობა პროპორციულია პოლიგონომეტრიული ქსელის ჩამკეტის სიგრძის კვადრატისა; მ ე ს ა მ ე შესაკრები არის კუთხეთა გაზომვით გამოწვეული შეცდომა და მისი ოდენობა პროპორციულია ბოლო (გამოსაკვლევ) პუნქტსა და თანამიმდევრობით სვლის B პუნქტისაკენ (მისივე ჩათვლით) მდებარე ყველა პუნქტამდე მანძილების კვადრატების ჯამისა; მ ე ო თ ხ ე შესაკრები არის გამოსავალი AB გვერდის α_{AB} დირექციული კუთხის განსაზღვრის შეცდომის გავლენა და მისი ოდენობა პროპორციულია სვლის ჩამკეტი ხაზის კვადრატისა·

იმ შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა m_{x_i}, m_{y_i} და M_i სიდიდეების ოდენობების განსაზღვრა პუნქტების კოორდინატების განსაზღვრამდე, მაგალითად, პოლიგონომეტრიის პროექტის შედგენის დროს, შეიძლება ვისარგებლოთ ცნობილი დირექციული (ან პოლიგონის) კუთხეებისა და გვერდების საფუძველზე აგებული ნახაზით (20) ფორმულისათვის, და კოორდინატთა ღერძებზე ან ნებისმიერ ურთიერთმართობულ ღერძებზე პროექციების საშუალებით მივიღოთ მონაცემები (17) და (18) ფორმულებისათვის.

3·7.3· დამაკავშირებელი სამკუთხედების შესახებ

ცნობილია, რომ დედამიწის ფიზიკური ზედაპირისა და წიაღის გამონამუშევრების გეგმების საერთო კოორდინატთა სისტემის საფუძველზე შედგენის მიზნით, სრულდება დ ა მ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ ე ლ ი აგეგმვა. დამაკავშირებელი აგეგმვის ძირითადი მიზანია წიაღში თეოდოლიტური სვლის საწყისი გვერდის დირექციული კუთხისა და ერთი პუნქტის მაინც სამი (x, y, z) კოორდინატის განსაზღვრა. დირექციული კუთხის და თარაზული (x, y) კოორდინატების განსაზღვრა სრულდება თანადროულად, რასაც წიაღის გამონამუშევართა აგეგმვის ო რ ი ე ნ ტ ი რ ე ბ ა ს უწოდებენ. მესამე კოორდინატის, ანუ ფიზიკური ზედაპირიდან გამონამუშევრის ჰორიზონტზე (საორიენტაციო ჰორიზონტზე) ნიშნულის გადატანა სრულდება დამოუკიდებლად საგანგებო ხერხით. დედამიწის ფიზიკური ზედაპირისა და წიაღის საჭირო (საორიენტაციო) ჰორიზონტის დამაკავშირებელი გამონამუშევრების სახეობის მიხედვით იყენებენ დაკავშირებული აგეგმვის ამა თუ იმ მეთოდს. ამ პროგრამაში განიხილება საკითხი ერთი ვერტიკალური ჭაურის შემთხვევაში ორიენტირებისათვის საჭირო დამაკავშირებელი სამკუთხედების ელემენტთა განსაზღვრის შეცდომების შესახებ

ორიენტირებისათვის აუცილებელია დედამიწის ფიზიკური ზედაპირიდან რაიმე მიმართულების ჩატანა საორიენტაციო ჰორიზონტზე ისე, რომ ეს მიმართულება ერთ ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარეობდეს ფიზიკურ ზედაპირზე მოცემულ მიმართულებასთან. საორიენტაციო ჰორიზონტზე ჩასატან მიმართულებად მიღებულია დედამიწის ფიზიკური ზედაპირიდან ჭაურში ჩაშვებული ორი (A და B) შვეულის შემაერთებელი ხაზის მიმართულება. ამ ხაზის გეგმილის (A_0B_0) საორიენტირო ჰორიზონტზე მიღება წიაღის გამონამუშევრის ორიენტირების საშუალებას იძლევა. დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირსა და წიაღის საორიენტირო ჰორიზონტზე AB და A_0B_0 ხაზებისადმი თეოდოლიტით მათ გასწვრივობაში დგომით მიმხრობის შეუძლებლობის გამო საგანგებოდ აიგება მიმხრობის, ანუ დამაკავშირებელი ABC და A_0B_0C სამკუთხედები (ნახ. 1).

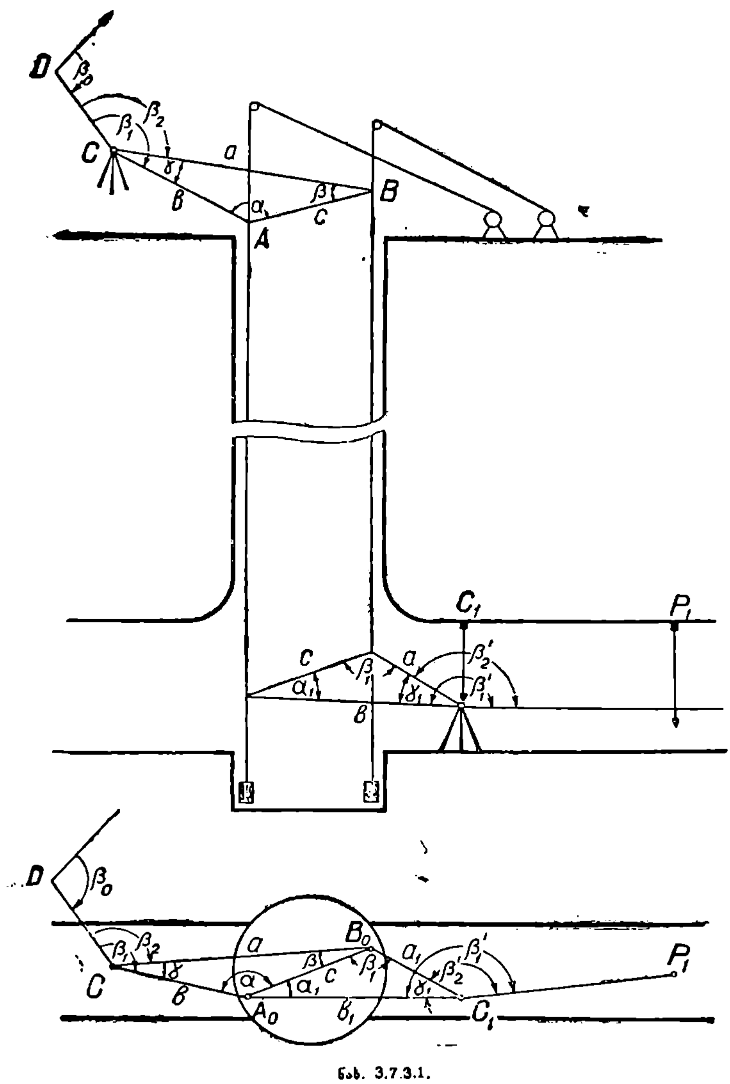
დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე მოცემული გეოდეზიური პუნქტების საფუძველზე განისაზღვრება DC ხაზის დირექციული კუთხე და C წერტილის კოორდინატები. ამავე ზედაპირზე გაიზომება: კუთხეები, β_1 და β_2 გვერდების სიგრძეები a, b და c. ამ მონაცემებით გამოითვლება α და β კუთხეები (საკონტროლოდ). შემდეგ განისაზღვრება AB გვერდის დირექციული კუთხე და A და B წერტილების კოორდინატები. საორიენტირო ჰორიზონტზე C_1 წერტილში გაიზომება γ_1 კუთხე, a, b და c გვერდები. გამოითვლება α_1 და β_1 კუთხეები, შემდეგ განისაზღვრება A_0C_1 და B_0C_1 მიმართულების დირექციული კუთხე და C_1 წერტილის კოორდინატები. C_1 წერტილში გაიზომება β_1' და β_2' კუთხეები. მიღებული მონაცემებით განისაზღვრება C_1P_1 ხაზის დირექციული კუთხე და P_1 წერტილის კოორდინატები. მიმხრობისათვის როგორც დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე, ისე საორიენტირო ჰორიზონტზე უშუალო გაზომვები სრულდება თანადროულად. აღწერილ მოქმედებას უწოდებენ ორიენტირებისათვის დამაკავშირებელი სამკუთხედებით A და B შვეულებისადმი მიმხრობას. როგორც ითქვა, ჩვენი მიზანია დამაკავშირებელი სამკუთხედების გაზომილი და გამოთვლილი ელემენტების სიზუსტის შეფასება.

ობიექტური მიზეზების გამო დამაკავშირებელი სამკუთხედების ფორმა უახლოვდება წაგრძელებულს (ნახ. 3.4.1.3) ან ტოლფერდას (ნახ. 3.1.4.5). პირველ შემთხვევაში შვეულებთან α, β, α_1 და β_1 კუთხეები გამოითვლება სინუსების ფორმულით და მათი გამოთვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება (3.4.1.22), (3.4.1.23) ან (3.4.1.24) ფორმულებით. შეიძლება ისეთი შემთხვევაც, როცა α კუთხე უახლოვდება 0°-ს, β კი 180°-ს. ამ შემთხვევაში სამკუთხედი მეტად ვიწროა და მას ეწოდება წ а г ძ е л е ბ უ л и სამკუთხედი. წაგრძელებული სამკუთხედის შემთხვევაში ზემოხსენებული ფორმულები მარტივდება, მაგალითად, (3.4.1.24) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \pm\frac{a}{c}\, m_\gamma \\ m_\beta &= \pm\frac{b}{c}\, m_\gamma \end{aligned}\right\} . \qquad (3.7.3.1)$$

გამოდის, რომ დამაკავშირებელი სამკუთხედის უფრო ხელსაყრელი ფორმაა წაგრძელებული. ამ ფორმულების ანალიზით შეიძლება შემდეგი დასკვნების გამოტანა:

1) წაგრძელებული სახის დამაკავშირებელი სამკუთხედის α და β კუთხის



ნახ. 3.7.3.1.

გამოთვლის შეცდომაზე გავლენას არ ახდენს ხაზოვანი გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომები;

2) როდესაც სამკუთხედის ფორმა უახლოვდება წაგრძელებულ ფორმას, მაშინ შვეულებთან α და β კუთხის გამოთვლის შეცდომებზე ხაზოვანი გაზომვების საშუალო კვადრატული შეცდომების გავლენა უმნიშვნელოა და ამიტომ არ არის საჭირო განსაკუთრებული ყურადღება მივაქციოთ ხაზოვანი გაზომვების მაღალი სიზუსტით შესრულებას.

3) როდესაც სამკუთხედი არის წაგრძელებული ფორმის, მაშინ უნდა ვეცადოთ რაც შეიძლება დიდი იყოს შვეულებს შორის c მანძილი და ამავე დროს A და B შვეულებიდან რაც შეიძლება ახლოს იყოს შერჩეული თეოდოლიტის დგომის C და C_1 წერტილები;

4) როდესაც α კუთხე მახვილია, ის უფრო ზუსტად განისაზღვრება, ვიდრე ბლაგვი β კუთხე და პირიქით;

5) ბლაგვი β კუთხის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა ყოველთვის უფრო დიდი გამოდის, ვიდრე კუთხის უშუალოდ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

უშუალოდ გაზომილი c გვერდის სიგრძის საკონტროლოდ ვიყენებთ კოსინუსების (3.4.1.25) ფორმულას; ამ გვერდის გამოთვლილი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ c_1-ით. შეცდომა იქნება გამოთვლილსა და გაზომილს შორის სხვაობა

$$\Delta c = c_1 - c. \qquad (3.7.3.2)$$

ასეთი ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება ფორმულით

$$m^2_{\Delta_c} = m^2_{c_1} + m^2_c. \qquad (3.7.3.3)$$

(3.4.1.29) ფორმულის მიხედვით ვიცით, რომ[1]

$$m^2_{c_1} = \cos^2\beta \cdot m^2_a + \cos^2\alpha \cdot m^2_b + a^2 \cdot \sin^2\beta \frac{m^2_\gamma}{\rho^2}. \qquad (3.7.3.4)$$

თუ $m^2_{c_1}$-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) ფორმულაში, გვექნება

$$m_{\Delta_c} = \pm\sqrt{m^2_c + \cos^2\beta \cdot m^2_a + \cos^2\alpha \cdot m^2_b + a^2 \cdot \sin^2\beta \frac{m^2_\gamma}{\rho^2}}. \qquad (3.7.3.5)$$

განსახილველ შემთხვევაში, ე. ი. როდესაც დამაკავშირებელი სამკუთხედი წაგრძელებული ფორმისაა, (5) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m_{\Delta_c} = \pm\sqrt{m^2_c + m^2_a + m^2_b}. \qquad (3.7.3.6)$$

(5) ფორმულაში პირველი წევრის ოდენობა სამკუთხედის ფორმაზე არ არის დამოკიდებული.

[1] კერძო წარმოებულების გამოთვლის დროს ნაგულისხმევია, რომ $c' = c$; ამით დაშვებული შეცდომა უგულებელსაყოფი იქნება.

(5) და (6) ფორმულების საფუძველზე დავასკვნით, რომ

1) როდესაც დამაკავშირებელი სამკუთხედი წაგრძელებული სახისაა, მაშინ კოსინუსების ფორმულით კონტროლი ეფექტურია მხოლოდ ხაზოვანი გაზომვების შეცდომების მიმართ;

2) იმ შემთხვევაში, როდესაც სამკუთხედის ფორმა მნიშვნელოვნად განსხვავებულია წაგრძელებული ფორმისაგან, მაშინ კოსინუსების ფორმულით კონტროლი, გარდა ხაზოვანი გაზომვებისა, ავლინებს γ კუთხის გაზომვის ტლანქ შეცდომებსაც;

3) როდესაც სამკუთხედის ფორმა უახლოვდება წაგრძელებულს, მაშინ კოსინუსების ფორმულით კონტროლი განხილული უნდა იქნეს როგორც დამატებითი საშუალება გაზომვებში ტლანქი შეცდომების აღმოჩენისა, იმის გულვებით, რომ ხაზოვანი გაზომვების საშუალო კვადრატული შეცდომები ნაკლებ გავლენას ახდენს α და β კუთხეების გამოთვლის შეცდომებზე.

განვსაზღვროთ დამაკავშირებელი AB (A_0B_0) გვერდის გამოთვლილ (c_1) და გაზომილ (c) მნიშვნელობათა სხვაობის (Δc) ზ ღ ვ რ უ ლ ი შ ე ც დ ო მ ი ს სიდიდე.

დამაკავშირებელი გვერდის გამოთვლილი და გაზომილი სიდიდეების სხვაობის ზღვრული ოდენობა შეიძლება განვსაზღვროთ (3.4.4.2) ფორმულის ანალოგიურად, ე. ი. გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\Delta c_{\text{ზ}} = \pm 2 m_{\Delta c}. \tag{3.7.3.7}$$

ჩავსვათ (7) ფორმულაში $m_{\Delta c}$-ის მნიშვნელობა (6) ფორმულიდან

$$\Delta c_{\text{ზ}} = \pm \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}. \tag{3.7.3.8}$$

პრაქტიკულად გვერდების გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა შეიძლება მივიღოთ

$$m_a \approx m_b \approx m_c = m_s,$$

მაშინ დაიწერება

$$\Delta c = \pm 2 m_s \sqrt{3} \approx 3 m_s. \tag{3.7.3.9}$$

მაშასადამე, წაგრძელებული სახის დამაკავშირებელ სამკუთხედში გამოთვლილ (c_1) და გაზომილ (c) მნიშვნელობათა სხვაობის ზღვრული ოდენობა დამოკიდებულია მხოლოდ გვერდების გაზომვის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე.

დამაკავშირებელი სამკუთხედების სინუსების ფორმულით გამოთვლის დროს შეიძლება განვსაზღვროთ გამოთვლილი (c_1) და გაზომილი (c) გვერდების სხვაობის დასაშვები ოდენობა.

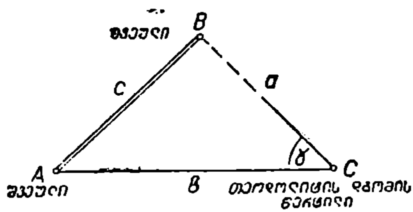
თუ ვიგულისხმებთ, რომ დამაკავშირებელი სამკუთხედის გვერდები ტოლზუსტად გაზომილია, მაშინ გვერდის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომის (m_s) ფაქტობრივი ოდენობა გამოითვლება, როგორც (2) ფორმულით განსაზღვრული (Δ_c) ფაქტობრივი სხვაობის შედეგი

$$m_s = \pm \frac{\Delta c}{\sqrt{3}}. \tag{3.7.3.10}$$

(10) ფორმულით განსაზღვრულ m_s-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ (3.4.1·24) ფორმულაში და გამოვითვლით m_α-ს. თუ მივიღეთ, რომ $m_\alpha < 30''$, მაშინ Δc-ს ფაქტობრივი მნიშვნელობა ჩაითვლება დასაშვებად.

როგორც ვხედავთ, Δc-ს შესაძლებელი (ზღვრული) მნიშვნელობის ოდენობა გამოითვლება (9) ფორმულით და დამოკიდებულია მხოლოდ გვერდების გაზომვის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე, მხოლოდ Δc-ს დასაშვები მნიშვნელობის ოდენობა დამატებით დამოკიდებულია იმ ფორმულაზე, რომლითაც გამოთვლილია შეეულთან მახვილი კუთხე. დასაშვები (Δc) სხვაობა შეიძლება იყოს როგორც მეტი ზღვრულზე (როცა სამკუთხედი წაგრძელებულია), ისე ნაკლები (როცა სამკუთხედი წაგრძელებულიდან განსხვავებულია).

ამგვარად, წაგრძელებული სახის დამაკავშირებელ სამკუთხედებში Δc-ს დიდი მნიშვნელობაც კი არ გვაძლევს საშუალებას ამომწურავად ვიმსჯელოთ მიმხრობისათვის საჭირო უშუალო გაზომვების ღირსეულობის შესახებ, რადგანაც კოსინუსების ფორმულით კონტროლი მგრძნობიერია მხოლოდ ხაზოვანი გაზომვების საშუალო კვადრატული შეცდომებისადმი, რომლებიც თითქმის არ ახდენენ გავლენას შეეულებთან კუთხეების გამოთვლის სიზუსტეზე.



ნახ 3.7.ა.z.

დამაკავშირებელი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ოდენობათა საკონტროლოდ იხმარება (3.4.1.42) და (3.4.1.43) ფორმულები. (3.4.1.43) ფორმულის ანალიზით დავასკვნით, რომ

1) წაგრძელებული ფორმის სამკუთხედში m_ω უტოლდება ნულს, ამის გამო კუთხეთა ჯამით კონტროლი ვერ გაეწევა გაზომვებში დაშვებულ თუგინდ ტლანქ შეცდომასაც.

2) როდესაც სამკუთხედი გადახრილია ფორმით წაგრძელებულისაგან, მაშინ m_ω ძირითადად დამოკიდებული იქნება გვერდების შეცდომაზე, კერძოდ, c გვერდის გაზომვის საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე.

ამგვარად, როდესაც სამკუთხედი წაგრძელებული ფორმისაა, მაშინ (3·4.1.42) ფორმულით გამოითვლება ω მხოლოდ იმ მიზნით, რომ მისი ოდენობა დიდი არ გამოვიდეს. თუ ω გამოვიდა დიდი, მაშინ γ კუთხე და გვერდები ხელმეორედ იზომება, არადამაკმაყოფილებელი შედეგის შემთხვევაში იმეორებენ უშუალო გაზომვებს.

როდესაც დამაკავშირებელი სამკუთხედი ტოლფერდა სახისაა, მაშინ α და β კუთხეების გამოსათვლელად გამოიყენება გვერდების (3.4·1·30) ფორმულა და მათი საშუალო კვადრატული შეცდომების განსაზღვრისათვის ვსარგებლობთ (3·4.1·35), (3.4.1.36), (3.4.1·37) და (3·4·1·38) ფორმულებით. საკონტროლოდ გამოითვლება γ კუთხე და მისივე საშუალო კვადრატული შეცდომა.

უკანასკნელ ხანებში ინჟინერ შევერდინის[1] გამოკვლევის საფუძველზე დადგინდა, რომ ნებისმიერი ფორმის დამაკავშირებელი სამკუთხედისათვის გამოსადეგია ე. წ. ტანგენსების ფორმულა (ნახ. 2)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}, \tag{3.7.3.11}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b\cdot\sin\gamma}{a-b\cos\gamma}. \tag{3.7.3.12}$$

(11) სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსაყვანად, არაცხადი ფუნქციის შესახებ (3·4·1) პარაგრაფში განხილული წესის მიხედვით, ავიღებთ ამ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამისათვის კი გამოვითვლით კერძო დიფერენციალებს უშუალოდ გაზომილი სიდიდეებით

$$\frac{\partial\operatorname{tg}\alpha}{\partial\alpha}\Delta\alpha=\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{\partial\operatorname{tg}\alpha}{\partial a}=\frac{\sin\gamma\,(b-a\cos\gamma)\,\Delta a+\cos\gamma\cdot a\cdot\sin\gamma\cdot\Delta a}{(b-a\cos\gamma)^2}=$$

$$=\frac{\sin\gamma\,[(b-a\cos\gamma)+a\cos\gamma]\,\Delta a}{(b-a\cos\gamma)^2}=\frac{b\cdot\sin\gamma\cdot\Delta a}{c^2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin\beta}{c\cdot\cos^2\alpha}\Delta a;$$

$$\frac{\partial\operatorname{tg}a}{\partial b}=-\frac{a\cdot\sin\gamma\cdot\Delta b}{(b-a\cos\gamma)^2}=-\frac{a\cdot\sin\gamma\Delta b}{c^2\cos^2\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{c\cos^2\alpha}\Delta b;$$

$$\frac{\partial\operatorname{tg}\alpha}{\partial\gamma}=\frac{[a\cos\gamma\cdot(b-a\cos\gamma)-a^2\sin^2\gamma]\cdot\Delta\gamma}{(b-a\cos\gamma)^2}=\frac{(ab\cos\gamma-a^2)\,\Delta\gamma}{c^2\cos^2\alpha}=$$

$$=-\frac{(a^2-ab\cos\gamma)\,\Delta\gamma}{c^2\cos^2\alpha}=-\frac{a\,(a-b\cos\gamma)\,\Delta\gamma}{c^2\cos^2\alpha}=$$

$$=-\frac{ac\cdot\cos\beta}{c^2\cos^2\alpha}\Delta\gamma=-\frac{a\cos\beta}{c\cos^2\alpha}\Delta\gamma.$$

მიღებული კერძო წარმოებულების (3·4.1.20) ტოლობაში ჩასმით გვექნება

$$m_\alpha=\pm\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{c^2}\cdot m_a^2\cdot\rho^2+\frac{\sin^2\alpha}{c^2}\cdot m_b^2\cdot\rho^2+\frac{a^2\cos^2\beta}{c^2}\cdot m_\gamma^2}$$

დავუშვათ, რომ გვერდები გაზომილია ტოლზუსტად, ე. ი.

$$m_a=m_b=m_s,$$

მაშინ m_α-ის გამოსახულება იქნება

$$m_\alpha=\pm\frac{1}{c}\sqrt{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\,m_s^2\cdot\rho^2+a^2\cos^2\beta\cdot m_\gamma^2} \tag{3.7.3.13}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება m_β.

$$m_\beta=\pm\frac{1}{c}\sqrt{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\,m_s^2\cdot\rho^2+b^2\cos^2\alpha\cdot m_\gamma^2} \tag{3.7.3.14}$$

[1] Инж. П. Г. Шевердин, „Новая формула для решения соединительных треугольников". Маркшейдерское дело. Металлургиздат, 1956 год.

α, β, და γ კუთხეების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის გამოსადეგია (13) და (14) ფორმულები, ვინაიდან როგორი ფორმის სამკუთხედიც არ უნდა გვქონდეს, პასუხი უსასრულობა არ იქნება და გამონათვალთა შეფასება ყოველთვის შეიძლება.

გამოკვლევით მტკიცდება, რომ, თუ c დამაკავშირებელი გვერდის სიგრძე 2,5—3 მეტრია, (13) და (14) ფორმულის მონაცემები სრულიად ემთხვევა (3.4.1.24) ფორმულის მონაცემებს. აგრეთვე ტოლფერდა სამკუთხედში ტანგენსების ფორმულით გამოთვლილ შეცდომის მაქსიმალურ მნიშვნელობებს არ სცილდება გვერდების ფორმულით გამოთვლილი შეცდომის ოდენობები. განსახილველი საკითხის გადაწყვეტის შესახებ საბოლოო დასკვნა ასეთია:

1) თუ სამკუთხედის გვერდები გაზომილი იქნება მაღალი სიზუსტით (საშუალო კვადრატული შეცდომა არ გადასცილდება ±0,4 მმ), გამონათვალთა სიზუსტეზე სამაკუთხედის ფორმას არა აქვს გავლენა და თეოდოლიტის დგომის $C\,(C_1)$ წერტილი შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერ, მოსახერხებელ ადგილას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 7. 3. 1. (3. 4. 1. 5) სქემაში განხილული მაგალითის მონაცემების საფუძველზე გამოვითვალოთ შეუღლებთან კუთხეები ტანგესების ფორმულის საშუალებით.

$$a=6{,}5631\ \text{მ}\pm 0{,}0007\ \text{მ};\quad b=4{,}5040\ \text{მ}\pm 0{,}0005\ \text{მ};$$
$$c=2{,}0626\ \text{მ}\pm 0{,}0004\ \text{მ};\quad \gamma=1^\circ 15'55''\pm 11''$$

ვიყენებთ ფორმულებს

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b\cdot\sin\gamma}{a-b\cos\gamma};$$

$$\lg\operatorname{tg}\beta=\lg b+\lg\sin\gamma-\lg(a-b\cos\gamma);$$

$$m^2_{\lg\operatorname{tg}\beta}=m^2_{\lg b}+m^2_{\lg\sin\gamma}+m^2_{\lg(a-b\cdot\cos\gamma)};$$

$$(a-b\cdot\cos\gamma)=6{,}5631-4{,}5040\cdot\cos 1^\circ 15'55''=6{,}5631-4{,}5040\cdot 0{,}99976=$$
$$=6{,}5631-4{,}5040=2{,}0591;$$

$$(a'-b'\cos'\gamma)=6{,}5638-4{,}5045\cdot\cos 1^\circ 16'06''=6{,}5638-4{,}5045\cdot 1=2{,}0593.$$

სქემა 3.7.3.1

x_i / — / m_Φ	x_i' / Φ / Φ'	$\lg x_i$ / $\lg\Phi$ / $\lg\Phi'$	$\lg x_i'$	$m_{\lg x_i}$	$m^2_{\lg x_i}$ / $m^2_{\lg\Phi}$ / $m_{\lg\Phi}$
4,5040	4,5045	0,65360	0,65365	5	25
sin 1°15′55″	sin 1°16′06″	$\bar{2}$,34403	$\bar{2}$,34508	105	11025
		$\boxed{-0{,}31368}$	−0,31372	4	16
2,0591	2,0593	1,68632			
	2°45′55″	$\bar{2}$,64395 +105			11066
$m_\beta=\pm 24''$	2°46′19″	$\bar{2}$,64500			105

$$\beta=2^\circ 45'55''\pm 24''$$

შემდეგ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{b-a\cos\gamma};$$

$$\lg\operatorname{tg}\alpha=\lg a+\lg\sin\gamma-\lg(b-a\cos\gamma);$$

$$m^2_{\lg\operatorname{tg}\alpha}=m^2_{\lg a}+m^2_{\lg\sin\gamma}+m^2_{\lg(b-a\cos\gamma)}.$$

$$(b-a\cos\gamma)=4{,}5040-6{,}5631\cdot\cos 1^\circ15'55''=4{,}5040-6{,}5631\cdot 1=-2{,}0591;$$

$$(b'-a'\cos\gamma')=4{,}5045-6{,}5638\cdot\cos 1^\circ16'06''=4{,}5045-6{,}5638\cdot 1=-2{,}0593.$$

სქემა 3.7.3.2

x_i	x_i'	$\lg x_i$	$\lg x_i'$	$m_{\lg x_i}$	$m^2_{\lg x_i}$
	Φ	$\lg\Phi$			$m^2_{\lg\Phi}$
m_Φ	Φ'	$\lg\Phi'$			$m_{\lg\Phi}$
6,5631	6,5638	0.81711	0,81716	5	25
sin 1°15′55″	sin 1°16′06″	$\bar{2}$.34403	$\bar{2}$.34508	105	11025
		$\boxed{-0.31568n}$	−0.31372		
2,0591	2,0593	$\bar{1}$.68632n		4	16
	4°1′33″	$\bar{2}$.84746n +105			11066
$m_\alpha=\pm 35''$	4° 2′ 8″	$\bar{2}$.84851			105

იმის გამო, რომ $(b-a\cos\gamma)$ უარყოფითი ნიშნით არის

$$\alpha=180^\circ-4^\circ1'33''=175^\circ58'27'',$$

$$\alpha=175^\circ58'27''\pm 35''.$$

ტანგენსების ფორმულას სინუსების ფორმულასთან კიდევ ის უპირატესობა აქვს, რომ ნახაზის შეუდგენლად ვარკვევთ თუ რომელი კუთხეა ბლაგვი, მაგალითად, როცა $(a-b\cos\gamma)$ უარყოფითია, მაშინ β კუთხე ბლაგვია და საჭიროა 180°-ს გამოვაკლოთ სქემით მიღებული β-ს მნიშვნელობა, ხოლო, როცა $(b-a\cos\gamma)$ არის უარყოფითი, მაშინ α კუთხეა ბლაგვი და 180°-ს უნდა გამოაკლდეს სქემით მიღებული სიდიდე. იხილეთ სქემა 2.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.3.2. $a=6{,}841$ მ; $b=6{,}715$ მ; $c=5{,}524$ მ; $\gamma=48^\circ05'10''$.

$$m_a=m_b=m_c=\pm 0{,}001 \text{ მ}; \quad m_\gamma=\pm 15''.$$

განისაზღვროს α, β, m_α და m_β.

გამოსაყენებელი ფორმულებია

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma};\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{b\cdot\sin\gamma}{a-b\cos\gamma};$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg (b - a \cos \gamma); \quad \lg \operatorname{tg} \beta = \lg b + \lg \sin \gamma - \lg (a - b \cos \gamma);$$

$$m^2_{\lg \operatorname{tg} \alpha} = m^2_{\lg a} + m^2_{\lg \sin \gamma} + m^2_{\lg (b - a \cos \gamma)};$$

$$m^2_{\lg \operatorname{tg} \beta} = m^2_{\lg b} + m^2_{\lg \sin \gamma} + m^2_{\lg (a - b \cos \gamma)};$$

$$b - a \cos \gamma = 6{,}715 - 6{,}841 \times 0{,}6680 = 2{,}145;$$

$$a - b \cos \gamma = 6{,}841 - 6{,}715 \times 0{,}6680 = 2{,}355;$$

$$b' - a' \cos \gamma' = 6{,}716 - 6{,}842 \times 0{,}6680 = 2{,}146;$$

$$a' - b' \cos \gamma' = 6{,}842 - 6{,}716 \times 0{,}6680 = 2{,}356.$$

სქემა 3.7.3.3

x_i	x_i'	$\lg x_i$	$\lg x_i'$	$m_{\lg x_i}$	$m^2_{\lg x_i}$
	Φ	$\lg \Phi$			$m^2_{\lg \Phi}$
m_Φ	Φ'	$\lg \Phi'$			$m_{\lg \Phi}$
6,841 sin 48°05′10″ 2,145	6,842 sin 48°05′25″ 2,146	0.83512 $\bar{1}$.87166 $\bar{1}$.66857	0.83518 $\bar{1}$.87169 $\bar{1}$.66837	6 3 —20	36 9 400
	67°09′06″	0.37535 21			445
$m_\alpha = \pm 36''$	67°09′42″	0.37556			21

$$\alpha = 67°09'06'' \pm 36''.$$

სქემა 3.7.3.4

x_i	x'	$\lg x_i$	$\lg x_i'$	$m_{\lg x_i}$	$m^2_{\lg x_i}$
	Φ	$\lg \Phi$			$m^2_{\lg \Phi}$
m_Φ	Φ'	$\lg \Phi'$			$m_{\lg \Phi}$
6,715 sin 48°05′10″ 2,355	6,716 sin 48°05′25″ 2,356	0.82705 $\bar{1}$.87166 $\bar{1}$.62801	0.82711 $\bar{1}$.87169 $\bar{1}$.62819	6 3 18	36 9 324
	64°45′58″	0.32872 19			369
$m_\beta = \pm 32''$	64°46′12″	0.32691			19

$$\beta = 64°45'58'' \pm 32''$$

იგივე მაგალითი გამოვიყვანოთ გვერდების (3.4.2.30) ფორმულით და კუთხეთა გამოთვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა განვსაზღვროთ (3.4.2.37) და (3.4.2.38) ფორმულებით·

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6,841+6,715+5,524}{2}=9,540;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(9,540-6,715)(9,540-5,524)}{9,540\cdot(9,540-6,841)}}=\sqrt{\frac{2,825\cdot 4,016}{9,540\cdot 2,699}}\approx 0,66378;$$

$$\alpha=67°09'02''.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\sqrt{\frac{2,699\cdot 4,016}{9,540\cdot 2,825}}\approx 0,63419;$$

$$\beta=64°45'54''$$

$$F=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9,540\cdot 2,699\cdot 2,825\cdot 4,016}=14,606 \text{ კვ. მ.}$$

$$m_\alpha=\pm\frac{m_s\cdot a\cdot\rho}{2F}\sqrt{1+\cos^2\gamma+\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{0.001\cdot 6,841\cdot 206265}{2\cdot 14,606}\sqrt{1+0,44624+0,18177}\approx\pm 58'';$$

$$m_\beta=\pm\frac{m_s\cdot b\cdot\rho}{2F}\sqrt{1+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{0,001\cdot 6,715\cdot 206265}{2\cdot 14,606}\sqrt{1+0,44624+0,15079}\approx\pm 53''.$$

პირველ მაგალითში სინუსებისა და ტანგენსების ფორმულით გამონათვალთა საშუალო კვადრატული შეცდომები ტოლებია· მეორე მაგალითში კი ტანგენსების და გვერდების ფორმულით გამონათვლები ერთმანეთისგან განსხვავდება 4″-ით; აგრეთვე გამონათვალთა საშუალო კვადრატული შეცდომა პირველ შემთხვევაში ნაკლებია, ვიდრე მეორე შემთხვევაში. მაშასადამე, ნებისმიერი ფორმის დამაკავშირებელი სამკუთხედების ელემენტთა გამოსათვლელად მისაღებია ტანგენსების ფორმულა·

3.7.4. ტახეომეტრიული ნიველობის სიზუსტე

A. წინ და უკან განსაზღვრული აღმატებების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა სხვაობების დასაშვები ოდენობა (დაშვება)

ვისარგებლოთ აღმატების გამოსათვლელი ფორმულით

$$h=\frac{1}{2}L_1\cdot\sin 2\nu+i-v+f. \tag{3.7.4.1}$$

ვგულისხმობთ, რომ ინსტრუმენტის სიმაღლე (i) და ნიშნის სიმაღლე (v) განსაზღვრულია მაღალი სიზუსტით; აგრეთვე დედამიწის სიმრუდისა და რეფ-

რაქციის გავლენა (f). როცა ხაზი 200 მეტრზე ნაკლებია, უგულებელსაყოფია. მაშასადამე, ალმატების განსაზღვრის სიზუსტეზე გავლენას ახდენს მანძილი მზომით გაზომილი L_1 სხივისა და მისი ν დახრის კუთხის გაზომვის შეცდომები. ამიტომ (1) ფორმულის სრული დიფერენციალი უნდა ავიღოთ L_1-ით და ν-თი, მივიღებთ

$$\Delta h=\frac{1}{2}\sin 2\nu\cdot\Delta L_1+L_1\cdot\cos 2\nu\frac{\Delta\nu}{\rho}. \tag{3.7.4.2}$$

ჩვეულებრივ, დედამიწის ფიზიკურ ზედაპირზე შესრულებული ტახეომეტრიული პოლიგონის გვერდების დახრის კუთხეების ოდენობები არ არის დიდი, იშვიათად გადასცილდება 5°-ს. ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$\left.\begin{aligned}\cos 2\nu&=\cos^2\nu,\\ \frac{\sin 2\nu}{2}&=\sin\nu,\end{aligned}\right\} \tag{3.7.4.3}$$

მაშინ (2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Delta h=L_1\cdot\cos^2\nu\frac{\Delta\nu}{\rho}+\Delta L_1\cdot\sin\nu. \tag{3.7.4.4}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია ჭეშმარიტი შეცდომა, საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე გადასვლა საჭირო არ არის და ვკმაყოფილდებით დიფერენციალური ფორმულით. ცნობილია, რომ წინ და უკან განსაზღვრულ ალმატებათა აბსოლუტური მნიშვნელობების სხვაობა უნდა იყოს ნული. მაშასადამე, Δh არის ჭეშმარიტი შეცდომა და ამიტომ პირდაპირ გამოვიყენებთ (4) ფორმულას.

მანძილმზომის თეორიიდან ცნობილია, რომ L_1 სიგრძის დახრილი სხივის L_0 თარაზული პროექცია გამოითვლება ფორმულით

$$L_0=L_1\cdot\cos^2\nu. \tag{3.7.4.5}$$

აგრეთვე ΔL_1 ჰორიზონტზე დაყვანის, ანუ L_1 დახრილი სხივის თარაზულობაზე დაყვანისათვის შესწორების საუგულვებელი სიდიდე, როდესაც მანძილებს ვსაზღვრავთ ძაფებიანი მანძილმზომით $\left(\text{მისი სიზუსტე მიღებულია } \frac{1}{300}\right)$, მიიღება $0{,}003L_1$, ე. ი.

$$\Delta L_1=0{,}003L_1, \tag{3.7.4.6}$$

(5) და (6) სიდიდეების (4) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ

$$\Delta h=L_0\frac{\Delta\nu}{\rho}+0{,}003L_1\sin\nu.$$

ამავე დროს ვიცით, რომ

$$L_1\cdot\sin\nu=h,$$

ამიტომ

$$\Delta h = L_0 \frac{\Delta \nu}{\rho} + 0{,}003 h. \qquad (3.7.4.7)$$

ჩვეულებრივ, $\Delta \nu$ არ გადასცილდება $1'$-ს. ამის გამო (7) ტოლობის პირველი შესაკრები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{L_0 \cdot 1'}{3438'} \text{ მ} = \frac{L_0}{100} \cdot \frac{3}{100} \text{ მ} = 3 \frac{L_0}{100} \text{ სმ}, \qquad (3.7.4.8)$$

ე. ი. თარაზული მანძილის ყოველ 100 მეტრზე დასაშვებია წინ და უკან განსაზღვრულ ამატებებს შორის განსხვავება 3 სმ. მეორე შესაკრები დაიწერება ასე:

$$0{,}003\ h \text{ მ} = \frac{3}{1000}\ h \text{ მ} = 3 \frac{h}{10} \text{ სმ}, \qquad (3.7.4.9)$$

ე. ი. ამატების ყოველ 10 მეტრზე დასაშვებია წინ და უკან განსაზღვრულ ამატებათა 3 სმ სხვაობა.

(8) და (9) მნიშვნელობების (7) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$\Delta h = \pm \left(3 \frac{L_0}{100} + 3 \frac{h}{10} \right) \text{ სმ}; \qquad (3.7.4.10)$$

აქ L_0 და h უნდა შევიტანოთ მეტრებში, პასუხი მიიღება სანტიმეტრებში.

წიაღის გამონამუშევრებში, როდესაც სრულდება გეოდეზიური ნიველობა, ამატების გამოსათვლელად მიღებულია ფორმულა

$$h = L \cdot \sin \delta + i - v, \qquad (3.7.4.11)$$

სადაც L არის ხვეულათი უშუალოდ გაზომილი მანძილი თეოდოლიტის ჭოგრის ბრუნვის ღერძსა და იმ წერტილს შორის, რომელსაც ვუმიზნებთ ჭოგრს;

i — ინსტრუმენტის სიმაღლე, ანუ მანძილი ვერტიკალური მიმართულებით ინსტრუმენტის დგომის წერტილიდან თეოდოლიტის ჭოგრის ბრუნვის ღერძამდე;

v — ნიშნის სიმაღლე, ანუ მანძილი ვერტიკალური მიმართულებით, მოცემული წერტილიდან იმ წერტილამდე, რომელსაც ვუმიზნებთ ჭოგრს.

(11) ტოლობაში დახრის კუთხე[1] (δ) ჩვეულებრივად შეიტანება თავისი ნიშნით, ხოლო i და v სიდიდეებს ექნება უარყოფითი ნიშანი, როცა მოცემული სანიველო წერტილები სამთო გამონამუშევრის ჭერზეა (სახურავზეა). საერთოდ დახრის კუთხე (δ) მნიშვნელოვანი ოდენობისაა (10°—80°).

ავიღოთ (11) ფორმულის კერძო დიფერენციალი δ-თი, L-ით, i-ით და v-თი, მივიღებთ

$$\Delta h = L \cdot \cos \delta \frac{\Delta \delta}{\rho} + \Delta L \cdot \sin \delta \pm \Delta i \mp \Delta v. \qquad (3.7.4.12)$$

---

[1] მარკშეიდერები ჭოგრის სამზერი სხივის დახრის კუთხეს აღნიშნავენ β-თი, გეოდეზისტები კი ν-თი.

მიღებულ ფორმულაში

$$L_0 = L\cdot\cos\delta,$$

$\Delta L = 0{,}001\,L$ (ხვეულის სიზუსტე 0,001),

$$h = L\cdot\sin\delta,$$

$\Delta i \approx \Delta v$ და აღწევს 10 მმ-ს.

ამ სიდიდეების (12) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\Delta h = L_0\frac{\Delta\delta}{\rho} + 0{,}001h \pm \Delta i \mp \Delta v. \qquad (3.7.4.13)$$

(13) მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები დაიწერება

$$\frac{L_0\cdot 1'}{3438'} = \frac{L_0}{100}\cdot\frac{3}{100} = 3\frac{L_0}{100} \text{ სმ.}$$

აქ მივიღეთ, რომ $\Delta\delta \approx 1'$.
მეორე შესაკრები იქნება

$$0{,}001h = \frac{h}{1000} = \frac{h}{10} \text{ სმ,}$$

ე. ი. ალმატების ყოველ 10 მეტრზე დასაშვებია 1 სმ შეცდომა, მიღებული სიდიდეების (13) ფორმულაში შეტანით გვექნება

$$\Delta h = \left(3\frac{L_0}{100} + \frac{h}{10} \pm 1 \mp 1\right) \text{ სმ.} \qquad (3.7.4.14)$$

Δi და Δv შეცდომებს შეიძლება ჰქონდეს ოთხნაირი ნიშანი.

(10) და (14) ფორმულების შედარებით დავასკვნით, რომ როგორც ტახეომეტრიული, ისე წიაღში გეოდეზიური ნიველობის ხერხით წინ და უკან განსაზღვრული ალმატებების სხვაობა (შეცდომა) უცუდეს პირობებში არ უნდა გადაცილდეს ექვს სანტიმეტრს. ეს ფორმულები იდენტურია, ასე რომ, შეგვიძლია ორივე შემთხვევაში გამოვიყენოთ (10) ფორმულა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.4.1. პოლიგონის გვერდის თარაზული პროექცია $L_0 = 200$ მ, ალმატების სიდიდე $h = 8$ მ; განვსაზღვროთ, თუ რას არ უნდა გადასცილდეს წინ და უკან განსაზღვრულ ალმატებათა აბსოლუტური მნიშვნელობების სხვაობა.

(10) ფორმულით გვექნება

$$\Delta h = 3\frac{200}{100} + 3\frac{8}{10} \approx 8 \text{ სმ.}$$

B. ტ ა ხ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ს ვ ლ ი ს ა ლ მ ა ტ ე ბ ა თ ა ჯ ა მ ი ს შ ე ც დ ო მ ა თ ა დ ა შ ვ ე ბ ა (დ ა ს ა შ ვ ე ბ ი შ ე უ კ ვ რ ე ლ ო ბ ა)

(1) ფორმულით გამოთვლილი ყოველი ალმატების საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობა (10) ფორმულის შესაბამისად დაიწერება და იქნება

$$m_h = \pm\sqrt{\left(3\frac{L_0}{100}\right)^2 + \left(3\frac{h}{10}\right)^2} \text{ სმ.} \qquad (3.7.4.15)$$

იგულისხმება, რომ m_h გამოთვლილია L_0 და h თარაზული მანძილების და აღმატებათა საშუალო მნიშვნელობებისათვის. n-გვერდიანი ტახეომეტრიული სვლისათვის აღმატებათა ჯამის m_{Σ_h} საშუალო კვადრატული შეცდომის სიდიდე იქნება $\sqrt{n}$-ჯერ მეტი, ანუ

$$m_{\Sigma_h} = \pm m_h\sqrt{n} \tag{3.7.4.16}$$

(16) ფორმულა მიღებულია ყოველი აღმატების ერთჯერ (წინ) განსაზღვრისათვის; სინამდვილეში აღმატებას ვითვლით ორჯერ (წინ და უკან) და საბოლოო სიდიდედ ვიღებთ მათ საშუალო არითმეტიკულს, თუ (10) პირობა დაცულია. ამ შემთხვევაში აღმატებათა ჯამის დასაშვები საშუალო კვადრატული შეცდომა შემცირდება $\sqrt{2}$-ჯერ და მივიღებთ

$$m'_{\Sigma_h} = \pm\frac{m_{\Sigma_h}}{\sqrt{2}}. \tag{3.7.4.17}$$

აღვნიშნოთ გაუწონასწორებელი აღმატებების ჯამის ზღვრული შეუკვრელობა $f_{\Sigma_{h_\text{ზ}}}$-ით. თუ მივიღებთ, რომ ზღვრული შეუკვრელობა ორჯერ მეტი იქნეს საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე, გვექნება

$$f_{\Sigma_h} = \pm 2m'_{\Sigma_h} = m_{\Sigma_h}\sqrt{2} = \pm m_h\sqrt{2n}. \tag{3.7.4.18}$$

(18) ფორმულაში ჩავსვათ m_h-ის მნიშვნელობა (15) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$f_{\Sigma_{h_\text{ზ}}} = \pm\sqrt{2n\left\{\left(3\frac{L_0}{100}\right)^2+\left(3\frac{h}{10}\right)^2\right\}}\ \text{სმ}. \tag{3.7.4.19}$$

დროებით უგულებელვყოთ (19) ფორმულის მეორე შესაკრები, მივიღებთ

$$f_1 = \pm 3\frac{L_0}{100}\sqrt{2n}.$$

აღვნიშნოთ n რაოდენობის აღმატებიანი სვლის პერიმეტრი P-თი, მაშინ $L_0 = \frac{P}{n}$; L_0-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ წინა გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$f_1 = \pm\frac{0{,}04P}{\sqrt{n}}\ \text{სმ}. \tag{3.7.4.20}$$

ახლა უგულებელვყოთ (19) ფორმულის პირველი შესაკრები, მივიღებთ

$$f_2 = \pm 3\frac{h}{10}\sqrt{2n}.$$

აღვნიშნოთ აღმატებათა აბსოლუტური მნიშვნელობების ჯამი $\Sigma|h|$-ით, მაშინ ყოველი ცალკეული აღმატება გამოითვლება ფორმულით

$$h = \frac{\Sigma|h|}{n}.$$

h-ის მნიშვნელობის წინა ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$f_2 = \pm \frac{0{,}4\Sigma|h|}{\sqrt{n}} \text{ სმ}, \qquad (3.7.4.21)$$

ხოლო (20) და (21) მნიშვნელობების (19) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ სრული შეუკვრელობის ფორმულას

$$f_{\Sigma h_0} = \pm \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}04P}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}4\Sigma|h|}{\sqrt{n}}\right)^2}. \qquad (3.7.4.22)$$

აქ P და h უნდა შევიტანოთ მეტრებში, პასუხი მიიღება სანტიმეტრებში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იმ შემთხვევაში, როდესაც დახრის კუთხის განსაზღვრის შეცდომა $\Delta\nu$ ედრება 0′,5-ს, მაშინ (19) ფორმულებში $\frac{L_0}{100}$ სიდიდის კოეფიციენტი მიიღება არა 3 სმ, არამედ 1,5 სმ. ამგვარად, (20) ფორმულაში კოეფიციენტი 0,04 სმ-ის მაგიერ იქნება 0,02, ე. ი. (22) ფორმულა დაიწერება ასეთი სახით:

$$f_{\Sigma h_0} = \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}02P}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}4\Sigma|h|}{\sqrt{n}}\right)^2} \qquad (3.7.4.23)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნაწიველო სვლა გრძელია და წარმოადგენს ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ს ი გ რ ძ ი ს ა და დ ა ხ რ ი ს კ უ თ ხ ი ს მქონე მონაკვეთების აღმატებათა ალგებრულ ჯამს. აგრეთვე ვიგულისხმოთ, რომ ნიველობა სრულდება წიალის გამონამუშევარში.

ავიღოთ (11) ტოლობის კერძო დიფერენციალი δ-თი, L-ით, i-ით და v-თი და შემდეგ გადავიდეთ საშუალო კვადრატულ შეცდომაზე, მივიღებთ

$$m_{h_i} = \pm \sqrt{L^2 \cos^2\delta \frac{m_\delta^2}{\rho^2} + \sin^2\delta \cdot m_L^2 + m_i^2 + m_v^2} \qquad (3.7.4.24)$$

m_h — ყოველი ცალკეული აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომაა.

სრული აღმატება A და B წერტილებს შორის იქნება

$$\sum_1^n h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n. \qquad (3.7.4.25)$$

ასეთი სახის ფუნქციისათვის საშუალო კვადრატული შეცდომა დაიწერება

$$m_{\Sigma_h}^2 = m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2. \qquad (3.7.4.26)$$

თუ ყოველი აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომის ოდენობას, გამოთვლილს (24) ფორმულით, შევიტანთ (26) ტოლობაში, მივიღებთ

$$m_{\Sigma_h}^2 = \sum_1^n L^2 \cos^2\delta \frac{m^2\delta}{\rho^2} + \sum_1^n \sin^2\delta\, m_L^2 + \sum_1^n m_i^2 + \sum_1^n m_v^2. \qquad (3.7.4.27)$$

ხაზის უშუალოდ გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3. 4· 8. 6) ფორმულით. დახრის კუთხის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა კი დადგინდება ფორმულით

$$m_{\delta}=\pm\sqrt{m^{2}_{ა.დ}+m^{2}_{დ}} \tag{3.7.4.28}$$

სადაც

$$m_{ა.დ}=\pm\frac{0,3t}{\sqrt{2}}$$

არის ანათვლის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

t — ვერნიერის სიზუსტე და $m_{დ}=\pm\frac{60''}{G}$ — ჭოგრით დამიზნების შეცდომა.

აგრეთვე ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ $m_i\approx m_v\approx2-3$ მმ და მათი გავლენა, როგორც სისტემატური ხასიათისა, მნიშვნელოვანია, ამიტომ საჭიროა i და v-ს გაზომვას სერიოზული ყურადღება მიექცეს.

3· 7. 5. ორ მყარ წერტილს შორის ტრიგონომეტრიული ან ტახეომეტრიული ნიველობის გაწონასწორება

მაღალი სიზუსტით განსაზღვრულ A და B წერტილებს შორის ტრიგონომეტრიული ნიველობის სვლის შეუკვრელობა გამოითვლება დამოკიდებულებით

$$f_{\Sigma_h}=\sum^{n} h-(H_B-H_A), \tag{3.7.5.1}$$

სადაც ყოველი h აღმატება განსაზღვრულია (3.7.4.11) ან (3.7.4·1) ფორმულით. f_{Σ_h} შეუკვრელობის გაწონასწორება ძლიერ ძნელდება აღმატებათა

ნახ. 3.7.5.1.

განსაზღვრის არატოლზუსტობის გამო, ე. ი., როდესაც შუალედ წერტილებს შორის მანძილები და დახრის კუთხეები ტოლები არაა.

ვთქვათ, თანამიმდევრობით აღმატებათა განსაზღვრის წონებია $P_1, P_2,\ldots,P_3$. ავიღოთ სვლის ერთ-ერთი რომელიმე წერტილი, ვთქვათ, k (ნახ. 1). k წერტილის ნიშნული შეიძლება განისაზღვროს ორჯერ A და B წერტილებიდან k-მდე სვლებით

$$H_k'=H_A+\sum_{1}^{k} h,$$

$$H_k''=H_B-\sum_{n}^{k+1} h. \tag{3.7.5.2}$$

თუ H_k' და H_k'' განსაზღვრის წონებს შესაბამისად აღვნიშნავთ P_k' და P_k'', მაშინ გაწონასწორებული ნიშნული, ანუ წონითი საშუალო იქნება

$$H_k=\frac{H_k'\cdot P_k'+H_k''\cdot P_k''}{P_k'+P_k''}. \tag{3.7.5.3}$$

P_k' და P_k'' განსაზღვრისათვის დავწეროთ გაშლილად H_k' და H_k''.

$$\begin{aligned} H_k' &= H_A+h_1+h_2+\cdots+h_k, \\ H_k'' &= H_B-h_{k+1}-h_{k+2}-\cdots-h_n. \end{aligned} \tag{3.7.5.4}$$

(4) გამოსახულების შებრუნებული წონა (3. 6. 1. 3) ფორმულის საფუძველზე იქნება

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_k'} &= \frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\cdots+\frac{1}{P_k}=\left[\frac{1}{P}\right]_1^k \\ \frac{1}{P_k''} &= \frac{1}{P_{k+1}}+\frac{1}{P_{k+2}}+\cdots+\frac{1}{P_n}=\left[\frac{1}{P}\right]_{k+1}^n \end{aligned}\right\}. \tag{3.7.5.5}$$

აქ ნაგულისხმევია, რომ H_A და H_B არის მაღალი სიზუსტის. გავყოთ (3) გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელი P_k' P_k''-ზე, მივიღებთ

$$H_k=\frac{H_k'\dfrac{1}{P_k''}+H_k''\dfrac{1}{P_k'}}{\dfrac{1}{P_k'}+\dfrac{1}{P_k''}},$$

ანუ

$$H_k=\frac{H_k'\left[\dfrac{1}{P}\right]_{k+1}^n+H_k''\left[\dfrac{1}{P}\right]_1^k}{\left[\dfrac{1}{P}\right]_1^n}. \tag{3.7.5.6}$$

გამარტივების მიზნით დავწეროთ სხვაობა

$$H_k'-H_k''=H_A-H_B+\sum_1^k h+\sum_n^{k+1} h=H_A-H_B+\sum_1^k h+\sum_{k+1}^n h,$$

ანუ მივიღებთ

$$H_k'-H_k''=\sum_1^n h-(H_B-H_A).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1) ტოლობას, გვექნება

$$H_k'-H_k''=f_{\Sigma h},$$

საიდანაც

$$H_k''=H_k'-f_{\Sigma h}. \tag{3.7.5.7}$$

(7) სიდიდის (6) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$H_k = \frac{H_k'\left[\frac{1}{P}\right]_{k+1}^{n} + (H_k' - f_{\Sigma_k})\left[\frac{1}{P}\right]_1^{k}}{\left[\frac{1}{P}\right]_1^{n}},$$

ანუ

$$H_k = H_k' - \frac{\left[\frac{1}{P}\right]_1^{k}}{\left[\frac{1}{P}\right]_1^{n}} \cdot f_{\Sigma_k}. \qquad (3.7.5.8)$$

(8) ფორმულიდან ჩანს, რომ ორ მყარ წერტილს შორის შესრულებული ტრიგონომეტრიული ნიველობის შეუკვრელობა უნდა განაწილდეს ყოველ შუალედ წერტილზე ცალკეულ მონაკვეთთა შებრუნებული წონების ჯამის პროპორციულად და შებრუნებული ნიშნით.

როდესაც მანძილები და დახრის კუთხეები დაახლოებით ერთნაირია და გაზომვები ტოლზუსტად არის შესრულებული, მაშინ

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 1.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\left[\frac{1}{P}\right]_1^{k} = k, \quad \left[\frac{1}{P}\right]_1^{n} = n$$

და (8) ფორმულა მიიღებს მარტივ სახეს:

$$H_k = H_k' - \frac{f_{\Sigma_k}}{n} \cdot k. \qquad (3.7.5.9)$$

(8) ფორმულაში წონების ოდენობები თავისუფლად მოინახება (3. 7. 4. 24) ფორმულის გამოყენებით, მხოლოდ წინ და უკან ალმატებათა საშუალოსათვის მივიღებთ $\frac{m_{h_i}}{\sqrt{2}}$ და მერე გამოითვლება ფორმულით $P_i = \frac{2}{m_{h_i}^2}$. გაწონასწორებული H_k ნიშნულის განსაზღვრის წონა (3. 5. 5. 2) ფორმულის ძალით იქნება

$$P_k = P_k' + P_k''. \qquad (3.7.5.10)$$

მაგრამ (5) ფორმულის მიხედვით

$$P_k' = \frac{1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1^{k}}, \qquad P_k'' = \frac{1}{\left[\frac{1}{P}\right]_{k+1}^{n}};$$

ამ სიდიდეების (10) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$P_k = \frac{1}{\left[\frac{1}{P}\right]_1^{k}} + \frac{1}{\left[\frac{1}{P}\right]_{k+1}^{n}}.$$

ამის შემდეგ გამოითვლება გაწონასწორებული ქსელის ნებისმიერი წერტილის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 5. 4. 3) ფორმულით და გვექნება

$$M_i = \frac{\eta}{\sqrt{P_i}}, \tag{3.7.5.11}$$

სადაც η ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომაა·

3. 7. 6. გეომეტრიული ნიველობის სიზუსტე

A. ლარტყაზე ანათვლის აღების საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ნიველობის სიზუსტეზე გავლენას ახდენს რიგი ფაქტორებისა. ლარტყაზე ანათვლის აღების შეცდომა ძირითადად დამოკიდებულია შემდეგ ფაქტორებზე:

1· ჭოგრის გაყოფადობის (განჩხოლოების, გარჩევის) ძალა (უნარი) და გამადიდებლობა, თარაზოს მგრძნობიარობა (საფასურის ოდენობა):

2. გარემოს გავლენა, ჰაერის გამჭვირვალობა, ლარტყის განათებულობა;

3. ლარტყის დაშორება ნიველირიდან;

4. ლარტყის დანაყოფების შეცდომა.

ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ მეოთხე სახის შეცდომა უმნიშვნელოა; მაგალითად, ლარტყის დაყოფის ზღვრული შეცდომა არ აღემატება 0,5 მმ, მაშინ ანათვლის დამრგვალების საშუალო კვადრატული შეცდომა (3.4.6.4) ფორმულით იქნება

$$m_{ს.დ} = 0{,}5 \times 0{,}6 = \pm 0{,}3 \text{ მმ.}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ანათვალი მიიღება სამი ძაფით, გვექნება

$$\frac{m_{ს.დ}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{0{,}3}{1{,}7} = \pm 0{,}18 \text{ მმ.}$$

აღნიშნული ოდენობა უგულებელსაყოფია.

პირველი სამი შეცდომის გავლენა ანგარიშის გაადვილების მიზნით შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორი ფაქტორის გავლენის სახით:

1. ლარტყაზე ანათვლის აღების შეცდომა ლარტყაზე ჭოგრის დამიზნების შეცდომის გამო $(m_{დ})$;

2. ლარტყაზე ანათვლის აღების შეცდომა თარაზოს ღერძის დახრის გამო $(m_{თ})$;

მაშასადამე, ლარტყაზე ანათვლის აღების საშუალო კვადრატული შეცდომა შეიძლება გამოვითვალოთ (3. 4· 1. 6) ფორმულით და გვექნება

$$m_{ლ} = \sqrt{m_{დ}^2 + m_{თ}^2}. \tag{3.7.6.1}$$

ჭოგრის გაყოფადობის საზომად მიახლოებით აიღება კუთხე T, რომელიც განისაზღვრება გამოსახულებიდან

$$T = \frac{60''}{G},$$

სადაც G ჭოგრის გამადიდებლობაა.

ნიველირიდან L მანძილით დაშორებულ ლარტყაზე ჰოგრის დამიზნების შეცდომით გამოწვეული ანათვლის ($m_{დ}$) საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება ფორმულით

$$m_{დ}=\pm\frac{60''}{\rho'' G}\cdot L. \qquad (3.7.6.2)$$

ცდით დადგენილია, რომ თარაზოს ღერძის თარაზულად დაყენების შეცდომა მიახლოებით შეადგენს მისი τ საფასურის 15%-ს, ე. ი. შეგვიძლია დავწეროთ

$$m_{თ}=\pm\frac{0,15\cdot\tau''}{\rho''}\cdot L. \qquad (3.7.6.3)$$

(2) და (3) გამოსახულებათა გამოყენებით (1) ტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$m_{ლ}=\pm\frac{L}{\rho''}\sqrt{\frac{3600}{G^2}+0,0225\tau^2}=\pm\frac{L\ მ}{206265''}\cdot\frac{15}{100}\sqrt{\frac{36\cdot10^6}{225\cdot G^2}+\tau^2}\ .$$

საბოლოოდ გვექნება

$$m_{ლ}=\pm\frac{L\ მ}{1400}\sqrt{\frac{16\cdot10^4}{G^2}+\tau^2}. \qquad (3.7.6.4)$$

აქ იგულისხმება, რომ L მანძილი ნიველირიდან ლარტყამდე მეტრებშია, პასუხი კი მილიმეტრებში მიიღება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.6.1. $L=50$ მ, $G=20^{\times}$, $\tau=20''$. (4) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{ლ}=\pm\frac{50}{1400}\sqrt{\frac{16\cdot10^4}{20\cdot20}+20^2}\approx\pm1\ \text{მმ}.$$

ცნობილია, რომ ჰოგრის გაყოფადობის ძალა და თარაზოს მგრძნობიარობა შესაბამისი უნდა იყოს, ე. ი. საჭიროა დაცულ იქნეს ტოლობა

$$0,15\tau=\frac{60''}{G},$$

საიდანაც

$$\tau''=\frac{400''}{G} \qquad (3.7.6.5)$$

და

$$G=\frac{400''}{\tau''}. \qquad (3.7.6.6)$$

შევიტანოთ (5) და (6) სიდიდეები თანამიმდევრობით (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$m_{ლ}\approx\pm0,4\,\frac{L}{G}, \qquad (3.7.6.7)$$

$$m_{ლ}\approx\pm0,001L\cdot\tau. \qquad (3.7.6.8)$$

(7) ფორმულა გამოიყენება, როცა ცნობილია ჭოგრის გამადიდებლობა და (8) კი, როცა ცნობილია თარაზოს საფასური.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.6.2 განვსაზღვროთ ლარტყაზე ნიველირით ანათვლის აღების შეცდომა, თუ ცნობილია, რომ $G=20^{\times}$ და $L=50$ მ.

(7) ფორმულით

$$m_{\frown}=\pm 0{,}4\frac{50}{20}=\pm 1 \text{ მმ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.6.3. $\tau=20''$, $L=50$ მ, მაშინ (8) ფორმულით მივიღებთ

$$m_{\frown}=\pm 0{,}001\cdot 50\cdot 20=1 \text{ მმ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.6.4. ჭოგრის გამადიდებლობა $G=40^{\times}$.
განვსაზღვროთ ზღვრული მანძილი ნიველირიდან ლარტყამდე იმ პირობით, რომ ლარტყაზე ანათვლის შეცდომა არ გადასცილდეს 1 მმ.

(7) ფორმულიდან

$$L=\frac{m_{\frown}\cdot G}{0{,}4}=\frac{1\cdot 40}{0{,}4}=100 \text{ მ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.6.5. გადავწყვიტოთ მეოთხე მაგალითი იმ შემთხვევისათვის, როცა $\tau=10''$.

(8) ფორმულის ძალით

$$L=\frac{m_{\frown}}{0{,}001\tau}=\frac{1}{0{,}001\times 10}=100 \text{ მ.}$$

B. გეომეტრიული ნიველობის საშუალო კვადრატული შეცდომა

შუადან ნიველობით აღმატების განსაზღვრისათვის, მშვიდი რელიეფის შემთხვევაში, ვსარგებლობთ ფორმულით

$$h_i=a_i-b_i,$$

ხოლო აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის გამოსაყენებელია ფორმულა

$$m_h=m_{\frown}\cdot\sqrt{2}. \qquad (3.7.6.9)$$

აქ იგულისხმება, რომ აღმატება განსაზღვრულია ერთი ჰორიზონტით და შუა თარაზული ძაფით.

რთული ნიველობით სიმაღლის *A*-დან *B*-ზე გადაცემისათვის მიღებულია ფორმულა

$$H_B=H_A+\sum_1^n a-\sum_1^n b=H_A+\sum_1^n h.$$

ამ შემთხვევაში საშუალო კვადრატული შეცდომა დადგინდება ფორმულით

$$m_B=m_A+m_{h_i}\sqrt{n}=m_A+m_{\frown}\sqrt{2n}. \qquad (3.7.6.10)$$

ვინაიდან m_A პირველი შესაკრები შესრულებული ნიველობის სიზუსტეზე არ არის დამოკიდებული და რადგან ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ *A* წერ-

ტილის ნიშნული არის შედარებით მაღალი სიზუსტით განსაზღვრული, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$m_B = m_{\text{ლ}}\sqrt{2n}. \qquad (3.7.6.11)$$

სანიველო სვლის შუა წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის კი გვექნება ფორმულა

$$m_{\text{შუა}} = m_{\text{ლ}}\sqrt{2\frac{n}{2}} = \pm m_{\text{ლ}}\sqrt{n}. \qquad (3.7.6.12)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 7. 6. 6. განვსაზღვროთ ერთი კილომეტრი ნიველირსავალის ზღვრული შეცდომა,

ვიგულისხმოთ, რომ რელიეფი არის მშვიდი და ერთი კილომეტრის ნიველობისათვის, საჭიროა ათჯერ მარტივი ნიველობის შესრულება, ე. ი. $n=10$; $m_{\text{ლ}}=\pm 1$ მმ; მაშინ (11)ფორმულით გვექნება

$$m_{\text{კმ}} = \pm\sqrt{2\cdot 10} \approx 4{,}5 \text{ მმ}.$$

ზღვრული შეცდომა კი იქნება

$$\delta_{\text{ზღ}} = \pm 2\times 4{,}5 \approx 9 \text{ მმ}.$$

ორმაგი ნიველობისათვის ანუ წინ და უკან განსაზღვრული აღმატებების სხვაობისათვის ერთ კილომეტრზე ზღვრული შეცდომა იქნება

$$9\cdot\sqrt{2} \approx 13 \text{ მმ}.$$

ორივე აღმატებათა საშუალო არითმეტიკულისათვის ზღვრული შეცდომა იქნება

$$\frac{9 \text{ მმ}}{\sqrt{2}} \approx 6 \text{ მმ}.$$

3. 7. 7. ორ მყარ წერტილს შორის შესრულებული ერთმაგი გეომეტრიული ნიველობის გაწონასწორება და სიზუსტის შეფასება

ვთქვათ, შესრულებულია ნიველობა მაღალი სიზუსტის A და B სიმაღლის წერტილებს შორის (ნახ. 1)·

აღვნიშნოთ H_A, H_B — A და B წერტილების ნიშნულები;

$h_1, h_2, \ldots, h_n$ — აღმატებები ანუ სიმაღლეთა სხვაობები,

n — სადგურთა რაოდენობა, ანუ ნიველირის დგომათა რიცხვი.

f_{Σ_h} — სანიველო სვლის შეუკვრელობა.

მაშინ

$$f_{\Sigma_h} = \sum_1^n h - (H_B - H_A). \qquad (3.7.7.1)$$

ნიველობა იგულისხმება ტოლზუსტად, რადგანაც სამუშაო სრულდება ერთი და იმავე დამკვირვებლის მიერ ერთი და იგივე ინსტრუმენტით, იარა-

ლიდან ლარტყამდე ტოლი მანძილებით. მაშასადამე, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი აღმატება განსაზღვრულია m_h საშუალო კვადრატული შეცდომით.

განვიხილოთ საკითხი, თუ როგორ უნდა განაწილდეს მიღებული შეუკვრელობა ნიველობით განსაზღვრულ აღმატებებზე ანუ როგორ უნდა განისაზღვროს სანიველო სვლის რეპერების და პიკეტების უალბათესი ნიშნულები

ნახ. 3.7.7.1.

განვსაზღვროთ სვლის ნებისმიერი k წერტილის ნიშნული. ამ წერტილის H_k ნიშნული განისაზღვრება A და B წერტილებიდან, ე. ი. ორჯერ. პირველ შემთხვევაში სადგურთა რაოდენობა იქნება k და მეორე შემთხვევაში კი $(n-k)$, ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left.\begin{aligned} H_k' &= H_A + \sum_1^k h \\ H_k'' &= H_B - \sum_{k+1}^n h \end{aligned}\right\}. \qquad (3.7.7.2)$$

აქედან k წერტილის სიმაღლის წონითი საშუალო, ანუ გაწონასწორებული ნიშნული იქნება

$$H_k = \frac{H_k' \cdot P_k' + H_k'' \cdot P_k''}{P_k' + P_k''}, \qquad (3.7.7.3)$$

სადაც (3· 5. 2. 11) ფორმულის ძალით წონები გამოითვლება

$$\left.\begin{aligned} P_k' &= \frac{1}{k} \\ P_k'' &= \frac{1}{n-k} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.7.7.4)$$

აგრეთვე გამარტივების მიზნით დავწერთ სხვაობას

$$H_k' - H_k'' = H_A - H_B + \sum_1^k h + \sum_{k+1}^n h = \sum_1^n h - (H_B - H_A),$$

ხოლო (1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$H_k' - H_k'' = \sum_1^n h - (H_B - H_A) = f_{\Sigma h},$$

საიდანაც

$$H_k''=H_k'-f_{\Sigma_h}. \qquad (3.7.7.5)$$

(3) ფორმულაში თუ მოვახდენთ სათანადო ჩასმებს, გვექნება

$$H_k=\frac{H_k'\frac{1}{k}+(H_k'-f_{\Sigma_h})\frac{1}{n-k}}{\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}}$$

ანუ

$$H_k=H_k'-\frac{f_{\Sigma_h}}{n}k=H_A+\sum_1^k h-\frac{f_{\Sigma_h}}{n}k. \qquad (3.7.7.6)$$

მიღებულ ფორმულაში $-\frac{f_{\Sigma_h}}{n}$ წევრი არის შესწორება ყოველ აღმატებაზე. გაწონასწორების დროს სანიველო სვლის მარკების, რეპერების, პიკეტების ნიშნულების გაწონასწორებული ანუ უალბათესი სიდიდეები მიიღება, თუ ყოველ აღმატებაში შევიტანთ $-\frac{f_{\Sigma_h}}{n}$ შესწორებას თანაბრად და შემდეგ ამ შესწორებული აღმატებებით განვსაზღვრავთ ნიშნულებს. პასუხი იგივე იქნება, თუ (2) ფორმულით ადრე განსაზღვრულ ნიშნულებში (6) ფორმულის გამოყენებით შევიტანთ შესწორებებს სადგურთა რაოდენობის პროპორციულად.

შეკრული ნიველირსავალის შემთხვევაში, რაც განხილული ერთმაგი ნიველობის კერძო შემთხვევაა, გაწონასწორება სრულდება ზუსტად, ისევე, როგორც ზემოთაა განმარტებული.

როდესაც სანიველო სვლა დაწყებული ერთი მყარი წერტილიდან არ მთავრდება მეორე მყარი წერტილით, ანუ როდესაც ნიველირსავალი არის კიდული, მაშინ ნიველობა სრულდება წინ და უკან იმავე საწყის წერტილამდე. აქ მიღებული შეუკვრელობა გაიყოფა შუაზე და ის განაწილდება მხოლოდ წინსვლაზე, მიღებული წესით.

შ ე ვ ა ფ ა ს ო თ გაწონასწორებული ერთმაგი ნიველირსავალის სიზუსტე. ამისათვის განვსაზღვროთ წერტილის გაწონასწორებული ნიშნულის ანუ წონითი საშუალოს P_k წონა. (3. 5. 5. 2) ფორმულის ძალით ვწერთ

$$P_k=P_1+P_2=\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}=\frac{n}{k(n-k)}. \qquad (3.7.7.7)$$

მიღებული ტოლობიდან ჩანს, რომ ამა თუ იმ წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის წონა სხვადასხვა ოდენობისაა, მისი ოდენობა დამოკიდებულია მოცემული n-სათვის k-ს ოდენობაზე. P_k-ის მინიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება (7) ტოლობის მნიშვნელის მაქსიმუმს. k სიდიდის ექსტრემიალური მნიშვნელობის მოსაძებნად დავწერთ

$$\frac{\partial[k(n-k)]}{\partial k}=n-2k=0,$$

საიდანაც

$$k=\frac{n}{2}. \tag{3.7.7.8}$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial(n-2k)}{\partial k}=-2.$$

ფუნქცია $k(n-k)$ არის მაქსიმუმი $k=\frac{n}{2}$ მნიშვნელობისათვის, ე. ი. ამ დროს P_k მინიმუმია. ყოველივე ეს ნიშნავს იმას, რომ ნიველირსავალის შუა წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის სიზუსტე შედარებით სხვა წერტილებთან ნაკლებია.

ამ შემთხვევაში შუა წერტილის წონის სიდიდე (7) და (8) ტოლობების გამოყენებით იქნება

$$P_{ვ}=\frac{n}{\frac{n}{2}\left(n-\frac{n}{2}\right)}=\frac{4}{n}; \tag{3.7.7.9}$$

(3. 5. 4. 3) ფორმულის ძალით

$$M_k=\frac{\eta}{\sqrt{P_k}};$$

შუა წერტილისათვის დაიწერება

$$M_{ვ}=\frac{\eta}{\sqrt{P_{ვ}}}.$$

მივიღოთ, რომ $\eta=m_{*}$.

მაშინ მიღებული სიდიდის და (9) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$M_{ვ}=\frac{m_h}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=\frac{m_h}{2}\sqrt{n} \tag{3.7.7.10}$$

(3. 7. 6. 9) ფორმულის გამოყენებით დავწერთ

$$M_{ვ}=\frac{m_{ლ}\cdot\sqrt{2n}}{2}. \tag{3.7.7.11}$$

თუ მივიღებთ, რომ

$$m_B=f_{\Sigma_h},$$

მაშინ (3. 7. 6. 11) ფორმულის გამოყენებით

$$m_{ლ}=\frac{f_{\Sigma_h}}{\sqrt{2n}}. \tag{3.7.7.12}$$

მაშასადამე (11) ფორმულა დაიწერება ასე:

$$M_{ვ}=\frac{f_{\Sigma_h}}{2}. \tag{3.7.7.13}$$

(3.7.6.12) ფორმულით შუა წერტილის გ ა უ წ ო ნ ა ს წ ო რ ე ბ ე ლ ი ნიშნულის საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის გვაქვს გამოსახულება

$$M_{\text{მ}} = m_{\subset}\sqrt{\frac{2n}{2}} = m_{\subset}\sqrt{n},$$

$$f_{\Sigma_{h_{\text{ხ}\subset}}} = 2m_{\subset}\sqrt{n},$$

ხოლო (11) ფორმულის იმავე წერტილის გაწონასწორებული ნიშნულის საშუალო კვადრატული შეცდომა არის

$$M_{\text{მ}} = \frac{m_{\subset}\sqrt{2n}}{2}$$

ამ შედარებიდან ჩანს, რომ შუა წერტილის გაწონასწორებული ნიშნულის შეცდომა $\sqrt{2}$-ჯერ ნაკლებია მისივე გაუწონასწორებელი მნიშვნელობის შეცდომაზე.

როგორც ვხედავთ, გაწონასწორებული ნიშნულები შედარებით უფრო ალბათიერია, ვიდრე გაუწონასწორებელი ნიშნულები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.7.1. ორ მყარ წერტილს შორის ჩატარებულია გეომეტრიული ნიველობა; სადგურთა რაოდენობა არის 40; ნიველირსავალის შეუკვრელობა $f_{\Sigma_h} = -10{,}0$ მმ. განვსაზღვროთ ლარტყაზე ანათვლის აღების საშუალო კვადრატული შეცდომა (12) ფორმულით

$$m_{\subset} = \pm\frac{10}{\sqrt{2\cdot 40}} \approx \pm 1\text{ მმ}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.7.2. ნიველირსავალის სიგრძე არის 1 000 მ; ნიველობა შესრულებულია შუადან ინსტრუმენტის ერთი ჰორიზონტით. საშუალო სიგრძე სადგურებს შორის 50 მეტრია, თარაზოს საფასური არის 40″. განვსაზღვროთ ნიველირსავალის ყველაზე უფრო სუსტი ადგილის გაწონასწორებული მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ნიველირდგომათა რიცხვი

$$n = \frac{1000}{50} = 20.$$

ლარტყაზე ანათვლის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება (3.7.6.8) ფორმულით და მივიღებთ

$$m_{\subset} = \pm 0{,}001\cdot\frac{50}{2}\cdot 40 = \pm 1\text{ მმ}.$$

ვინაიდან ყველაზე უფრო სუსტი ადგილი სიზუსტის მხრივ არის ნიველირსავალის შუა წერტილი, ამიტომ (11) ფორმულით

$$M_{\text{მ}} = \pm\frac{1\cdot\sqrt{2\cdot 20}}{2} \approx \pm 3\text{ მმ}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.7.3. საჭიროა შესრულდეს ერთ ჰორიზონტით ნიველობა ორ მყარ წერტილს შორის იმ ვარაუდით, რომ ყველაზე სუსტი ადგილის გაწონასწორებული მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომა არ აღე-

შატებოდეს 3 მმ. ნიველირის დგომათა რიცხვი უდრის 20, ხოლო საშუალო სიგრძე სადგურებს შორის 100 მეტრია. გამოვარკვიოთ, თუ როგორი ნიველირით არის საჭირო სამუშაოს შესრულება.

ლარტყაზე ერთი ანათვლის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (11) ფორმულას, მივიღებთ

$$m_{\text{ლ}}=\frac{2\cdot M_{\text{მ}}}{\sqrt{2n}}=\pm\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2\cdot 20}}\approx 1 \text{ მმ.}$$

თანახმად (3. 7. 6. 7) და (3. 7. 6. 8) ფორმულებისა, გვექნება

$$G=0{,}4\frac{L}{m_{\text{ლ}}}=0{,}4\frac{50}{1}=20^{\times},$$

$$\tau=\frac{m_{\text{ლ}}}{0{,}001\cdot L}=\frac{1}{0{,}001\cdot 50}=20''.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.7.4. ერთ ჰორიზონტით განსაზღვრული აღმატების საშუალო კვადრატული შეცდომა $m_h=\pm 1{,}4$ მმ; რელიეფის მიხედვით საშუალო სიგრძე სადგურებს შორის შეიძლება მივიღოთ 80 მეტრი. განვსაზღვროთ ნიველირსავალის საპროექტო სიგრძე იმ ვარაუდით, რომ რეპერების ნიშნულების განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა არ გადასცდეს 14 მმ.

(10) ფორმულის მიხედვით განვსაზღვრავთ სადგურების რაოდენობას

$$n=\left(\frac{2M_{\text{მ}}}{m_h}\right)^2=\left(\frac{2\cdot 14}{1{,}4}\right)^2,$$

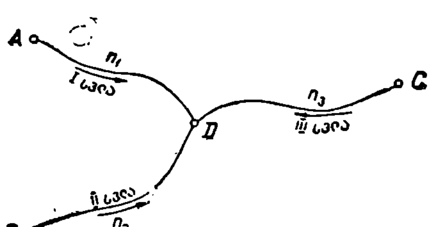
ანუ

$$n<400.$$

მაშასადამე, ნიველირსავალის საპროექტო სიგრძე იქნება $80\times 400=32$ კმ.

3. 7. 8. გეომეტრიული ნიველობის ქსელის გაწონასწორება

აქ განიხილება შემთხვევა, როდესაც საჭიროა რაიმე წერტილის ნიშნულის განსაზღვრა ორზე მეტი საყრდენი წერტილიდან. ასეთ წერტილს უწოდებენ ს ა კ ვ ა ნ ძ ო წერტილს. ქსელში შეიძლება იყოს რამდენიმე საკვანძო წერტილი. ხშირად ასეთი ქსელის გაწონასწორებას უწოდებენ გაწონასწორებას კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი ს ხერხით. ასეთ შემთხვევაში ჯერ განსაზღვრავენ საკვანძო წერტილის ნიშნულის უალბათეს მნიშვნელობას; ამ საკვანძო წერტილს თვლიან მყარ წერტილად და ახდენენ გაწონასწორებას საკვანძო წერტილსა და დანარჩენ მყარ წერტილებს შორის ერთმაგი ნიველირსავალის გაწონასწორების წესით.



ნახ. 3.7.8.1.

Δ. ქსელი შედგება ერთი საკვანძო წერტილისაგან

ვთქვათ, საჭიროა D წერტილის ნიშნულის განსაზღვრა A და C რეპერებიდან და B მარკიდან. AD სვლაში ნიველირდგომათა რიცხვი არის n_1, BD-ში n_2 და CD-ში n_3 (ნახ. 1).

D წერტილის ნიშნული შეიძლება განისაზღვროს სამივე სვლიდან დამოუკიდებლად

$$H^{I}_{D}=H_A+\sum_{1}^{n_1} h_{AD},$$

$$H^{II}_{D}=H_B+\sum_{1}^{n_2} h_{BD},\qquad (3.7.8.1)$$

$$H^{III}_{D}=H_C+\sum_{1}^{n_3} h_{CD}.$$

ყოველი სვლის წონა გამოითვლება (3. 5. 2. 11) ფორმულით და იქნება

$$\left.\begin{aligned} P_1&=\frac{1}{n_1}\\ P_2&=\frac{1}{n_2}\\ P_3&=\frac{1}{n_3}\end{aligned}\right\},\qquad (3.7.8.2)$$

D საკვანძო წერტილის ნიშნული გამოითვლება როგორც წონითი საშუალო

$$H_D=\frac{H^{I}_{D}\cdot P_1+H^{II}_{D}\cdot P_2+H^{III}_{D}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}.\qquad (3.7.8.3)$$

ამის შემდეგ გამოითვლება ცალ-ცალკე სამივე სვლისათვის შეუკვრელობა

$$\left.\begin{aligned} f^{I}_{\Sigma h_{AD}}&=H^{I}_{D}-H_D\\ f^{II}_{\Sigma h_{BD}}&=H^{II}_{D}-H_D\\ f^{III}_{\Sigma h_{CD}}&=H^{III}_{D}-H_D\end{aligned}\right\}.\qquad (3.7.8.4)$$

მიღებული შეუკვრელობები განაწილდება ყოველ სვლაზე ისე, როგორც ერთმაგი ნიველირსავალის შემთხვევაში (გამოსავალი წერტილიდან სადგურთა რაოდენობით პროპორციულად).

(4) ტოლობებში შეუკვრელობები უალბათესი შეცდომებია

$$H_D^{\mathrm{I}}-H_D=V_1,$$

$$H_D^{\mathrm{II}}-H_D=V_2,$$

$$H_D^{\mathrm{III}}-H_D=V_3.$$

გამოდის რომ გაწონასწორების შედეგად მიღებული უალბათესი შეცდომები ნაწილდება სადგურთა რაოდენობის პროპორციულად შებრუნებული ნიშნით.

გაწონასწორებული საკვანძო წერტილის ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა (3. 5. 9. 1) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\cdot V^2]}{k-1}}. \qquad (3.7.8.5)$$

k — დასაყრდენ წერტილთა რაოდენობაა,
ხოლო (3. 5. 5. 1) ფორმულით

$$M_D=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}. \qquad (3.7.8.6)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.8.1. D წერტილის ნიშნული გამსაზღვრულია გეომეტრიული ნიველობით A, B და C დასაყრდენი წერტილებიდან დამოუკიდებლად და მივიღებთ $H_D^{\mathrm{I}}=432{,}236$ მ; $H_D^{\mathrm{II}}=432{,}245$ მ; $H_D^{\mathrm{III}}=432{,}256$ მ; $n_1=25$; $n_2=20$; $n_3=10$.

განისაზღვროს D წერტილის საბოლოო ნიშნული და ყოველი სვლის შეუკვრელობა. შეფასდეს D წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის სიზუსტე.

წონითი საშუალო იქნება

$$H_D=432{,}230+\frac{6\frac{1}{25}+15\frac{1}{20}+26\frac{1}{10}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}}\approx 432{,}249 \text{ მ}.$$

თითოეული სვლისათვის შეუკვრელობა იქნება

$$f_{\Sigma h}^{\mathrm{I}}=432{,}236-432{,}249=-0{,}013 \text{ მ},$$

$$f_{\Sigma h}^{\mathrm{II}}=432{,}245-432{,}249=-0{,}004 \text{ მ},$$

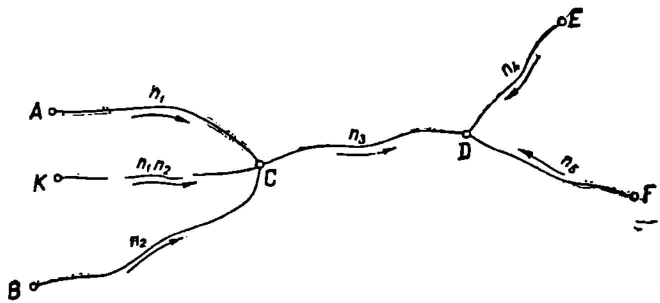
$$f_{\Sigma h}^{\mathrm{III}}=432{,}256-432{,}249=+0{,}007 \text{ მ}.$$

მიღებული შეუკვრელობები განაწილდება ყოველ სვლაზე საწყისი წერტი-

ლიდან სადგურების რაოდენობის პროპორციულად, შებრუნებული ნიშნით. (5) და (6) ფორმულებით გვექნება

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{25}(13)^2+\frac{1}{20}(4)^2+\frac{1}{10}(7)^2}{3-1}}\approx 2{,}5 \text{ მმ},$$

$$M_D=\pm\frac{2{,}5}{\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}}}\approx\pm 5 \text{ მმ}.$$



ნახ. 3.7.8.2.

B. ქსელი შედგება ორი საკვანძო წერტილისაგან

ქსელი ეყრდნობა ოთხ *A*, *B*, *E* და *F* წერტილს. საჭიროა განისაზღვროს ამ ქსელის *C* და *D* კვანძების ნიშნულები და მოხდეს ქსელის გაწონასწორება. დასმული კითხვა გადაწყდება წინა შემთხვევის ანალოგიურად (ნახ. 2)·

აღვნიშნოთ თანამიმდევრობით სვლებისათვის საყრდენი წერტილებიდან საკვანძო წერტილებამდე და მათ შორის სვლათა ნუმერაცია და მათში სადგურთა რაოდენობა n_1, n_2, n_3, n_4, n_5-ით; განვესაზღვროთ *A* და *B* წერტილებიდან *C* საკვანძო წერტილის $H_{C_{1,2}}$ ნიშნული, მივიღებთ ფორმულით

$$H_{C_{1,2}}=\frac{H_{C_1}\cdot P_1+H_{C_2}\cdot P_2}{P_1+P_2}, \tag{3.7.8.7}$$

სადაც

$$P_1=\frac{1}{n_1}, \qquad P_2=\frac{1}{n_2}.$$

ორი სვლით განსაზღვრული წონითი საშუალოს ანუ $H_{C_{1,2}}$-ის წონა, რომელსაც $P_{1,2}$-ით აღვნიშნავთ, იქნება

$$P_{1,2}=P_1+P_2=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}. \tag{3.7.8.8}$$

ორივე სვლა რომ ერთი სვლით შევცვალოთ, მაშინ ამ ფაქტობრივი სვლის $n_{1,2}$ სადგურების რაოდენობა (3. 5. 2· 11) ფორმულის თანახმად, $P_{1,2}$ წონის შებრუნებული სიდიდე იქნება, ე. ი.

$$n_{1,2}=\frac{1}{P_{1,2}}=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}. \qquad (3.7.8.9)$$

ნახაზზე ეს სვლა k წერტილიდან C-მდე წყვეტილი ხაზითაა აღნიშნული, როგორც წარმოდგენითი, ე. ი. ფიქტობრივი სვლა, რასაც ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი სვლა ეწოდება. ამ ეკვივალენტურ სვლას თუ განვაგრძობთ C და D საკვანძო წერტილებს შორის მესამე სვლით მივიღებთ ქსელს ერთი საკვანძო წერტილით; ეს წერტილი იქნება D. მაშასადამე, განვსაზღვრავთ D წერტილის ნიშნულს სამივე $(n_{1,2}+n_3)$, n_4 და n_5 სვლით, რის შედეგად მივიღებთ D წერტილის $H_{D_{1,2,3}}$, H_{D_4} და H_{D_5} სამ ნიშნულს წონებით

$$P_{1,2,3}=\frac{1}{n_{1,2}+n_3}; \qquad P_4=\frac{1}{n_4}; \qquad P_5=\frac{1}{n_5}. \qquad (3.7.8.10)$$

ამ მონაცემთა შედეგად შეგვიძლია გამოვითვალოთ D წერტილის ნიშნული, როგორც წონითი საშუალო

$$H_D=\frac{H_{D_{1,2,3}}\cdot P_{1,2,3}+H_{D_4}\cdot P_4+H_{D_5}\cdot P_5}{P_{1,2,3}+P_4+P_5}. \qquad (3.7.8.11)$$

თანამიმდევრობით განვსაზღვრავთ სვლებში შეუკვრელობებს.

ეკვივალენტური და მესამე სვლის შეუკვრელობა იქნება $f_{1,2,3}=H_{D_{1,2,3}}-H_D$,

მეოთხე „ „ $f_4=H_{D_4}-H_D$,

მეხუთე „ „ $f_5=H_{D_5}-H_D$.

მეოთხე და მეხუთე სვლის გაწონასწორება მოხდება ჩვეულებრივად სადგურთა რიცხვის პროპორციულად შებრუნებული ნიშნით. ეკვივალენტური და მესამე სვლისათვის განვსაზღვრავთ ერთი სადგურის, ანუ აღმატების a შესწორებას, შემდეგი ფორმულით:

$$a=-\left(\frac{f_{1,2,3}}{n_{1,2}+n_3}\right)=-\frac{f_{1,2,3}}{n_{1,2,3}}. \qquad (3.7.8.12)$$

a-ს გამოთვლის შემდეგ სადგურთა რიცხვის პროპორციულად მოვახდენთ მესამე სვლის გაწონასწორებას; ამით მივიღებთ მესამე სვლის წერტილების საბოლოო ნიშნულებს. C საკვანძო წერტილის საბოლოო მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის (6) ფორმულის ანალოგიურად ვწერთ

$$H_C=H_{C_{1,2}}+a\cdot n_{1,2}. \qquad (3.7.8.13)$$

შემდეგ განვსაზღვრავთ შეუკვრელობებს

$$\left.\begin{array}{ll} \text{პირველი სვლისათვის} & f_1=H_{C_1}-H_C, \\ \text{მეორე} & f_2=H_{C_2}-H_C. \end{array}\right\} \qquad (3.7.8.14)$$

მიღებულ შეუკვრელობებს გავანაწილებთ ორივე სვლაზე სადგურთა რიცხვის პროპორციულად.

განხილული მეთოდით შეიძლება მოვახდინოთ ორზე მეტი საკვანძო წერტილის მქონე ქსელის გაწონასწორება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.8.2. მოვახდინოთ გაწონასწორება გეომეტრიული ნიველობის ქსელისა ორი საკვანძო წერტილით (ნახ. 2), თუ ცნობილია

$$H_A=+112{,}008 \text{ მ}; \quad n_1=24; \qquad \sum_1^{n_1} h=+2{,}483 \text{ მ};$$

$$H_B=+109{,}773 \text{ მ}; \quad n_2=38; \qquad \sum_1^{n_2} h=+4{,}708 \text{ მ};$$

$$H_E=+117{,}758 \text{ მ}; \quad n_4=16; \qquad \sum_1^{n_4} h=-2{,}008 \text{ მ};$$

$$H_F=+119{,}437 \text{ მ}; \quad n_5=44; \qquad \sum_1^{n_5} h=-3{,}699 \text{ მ};$$

$$n_3=29; \qquad \sum_1^{n_3} h=+1{,}252 \text{ მ}.$$

1. გამოვითვლოთ C წერტილის ნიშნულს H_A და H_B წერტილებიდან

$$H_{C_1}=112{,}008+2{,}483=+114{,}491 \text{ მ};$$

$$H_{C_2}'=109{,}773+4{,}708=+114{,}481 \text{ მ};$$

წონითი საშუალო (7) ფორმულით იქნება

$$H_{C_{1,2}}=114{,}480+\frac{11\cdot\frac{1}{24}+\frac{1}{38}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{38}}=114{,}487 \text{ მ}.$$

ეკვივალენტური სვლის შესაბამისი სადგურების რაოდენობა გამოითვლება (9) ფორმულით

$$n_{1,2}=\frac{24\cdot 38}{24+38}=15.$$

2. გამოვითვლოთ D წერტილის ნიშნულს სამივე სვლიდან

$$H_{D_{1,2,3}}=114{,}487+1{,}252=+115{,}739 \text{ მ};$$

$$H_{D_4}=117{,}758-2{,}008=+115{,}750 \text{ მ};$$

$$H_{D_5}=119{,}437-3{,}699=+115{,}738 \text{ მ}.$$

3. გამოვითვლით D წერტილის ნიშნულის წონით საშუალოს, ანუ გაწონასწორებულ ნიშნულს (11) ფორმულით

$$H_D = 115{,}738 + \frac{\frac{1}{15+29} + 12\frac{1}{16} + 0\frac{1}{44}}{\frac{1}{15+29} + \frac{1}{16} + \frac{1}{44}} = 115{,}745 \text{ მ.}$$

4. განვსაზღვრავთ შეუკვრელობებს სვლებში

$$f_{1,2,3} = 115{,}739 - 115{,}745 = -0{,}006 \text{ მ;}$$

$$f_4 = 115{,}750 - 115{,}745 = +0{,}005 \text{ მ;}$$

$$f_5 = 115{,}738 - 115{,}745 = -0{,}007 \text{ მ.}$$

5. განვსაზღვრავთ ეკვივალენტური და მესამე სვლისათვის ერთი სადგურის შესწორებას

$$a = +\frac{0{,}006}{15+29}.$$

6. განვსაზღვრავთ C წერტილის ნიშნულის საბოლოო მნიშვნელობას (13) ფორმულით

$$H_C = 114{,}487 + a \cdot 15 = 114{,}487 + \frac{0{,}006}{44} \cdot 15 = 114{,}489 \text{ მ.}$$

7. განვსაზღვრავთ შეუკვრელობებს (14) ფორმულით

$$f_1 = 114{,}491 - 114{,}489 = +0{,}002 \text{ მ,}$$

$$f_2 = 114{,}481 - 114{,}489 = -0{,}008 \text{ მ.}$$

8. მიღებულ f_1, f_2, f_4 და f_5 შეუკვრელობებს შებრუნებული ნიშნით გავანაწილებთ პირველ, მეორე, მეოთხე და მეხუთე სვლებზე. მესამე სვლის ყოველი აღმატება შესწორდება a-ს მნიშვნელობის მიხედვით; მაგალითად, D წერტილიდან C წერტილამდე შესწორებები იქნება

პირველი წერტილისათვის	a,
მეორე	$2a$,
მესამე	$3a$,
. . . .	
ოცდამერვე	$28a$.

§ 7. 9. შეკრული სანიველო სვლების გაწონასწორება

A. შეკრული პოლიგონი ორი საკვანძო წერტილით

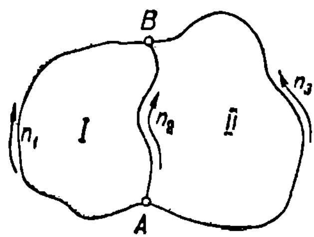
ვთქვათ, გვაქვს ორი (I და II) პოლიგონი AB საერთო გვერდით. მოცემული გვაქვს A პიკეტის ნიშნული. საჭიროა განისაზღვროს B პიკეტის ნიშნული და მოხდეს პოლიგონების გაწონასწორება (ნახ. 1).

B პიკეტის ნიშნული განისაზღვრება სამივე, ანუ n_1, n_2 და n_3 სვლით. მივიღებთ B პიკეტის სამ H_{B_1}, H_{B_2} და H_{B_3} ნიშნულს, რომელთა წონები იქნება P_1, P_2 და P_3.

B წერტილის საბოლოო ნიშნული განისაზღვრება გამოსახულებით

$$H_B=\frac{H_{B_1}\cdot P_1+H_{B_2}\cdot P_2+H_{B_3}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}. \tag{3.7.9.1}$$

გამოვითვლით შეუკვრელობებს სამივე სვლისათვის



ნახ 3.7.9.1.

$$f_1=H_{B_1}-H_B;$$
$$f_2=H_{B_2}-H_B; \tag{3.7.9.1'}$$
$$f_3=H_{B_3}-H_B.$$

მიღებულ შეუკვრელობებს გავანაწილებთ ნიშნულებზე, უკვე ცნობილი წესით სადგურთა რიცხვის პროპორციულად და შებრუნებული ნიშნით.

ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{[Pf^2]}{k-1}}, \tag{3.7.9.2}$$

სადაც

$k=3$— სვლათა რაოდენობაა.

B პიკეტის გაწონასწორებული ნიშნულის საშუალო კვადრატული შეცდომა გამოითვლება ფორმულით

$$M_B=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}. \tag{3.7.9.3}$$

B. შეკრული პოლიგონი ოთხი საკვანძო წერტილით

ასეთ შემთხვევაში ჯობს ყოველი სვლის აღმატების გაწონასწორება და შემდეგ საკვანძო პიკეტების ნიშნულების გამოთვლა.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A პიკეტის ნიშნული (ნახ. 2).

განვსაზღვრავთ პირველი და მეორე სვლის h_1 და h_2 აღმატებებს, რომელთა წონებია

$$P_1=\frac{1}{n_1};\qquad P_2=\frac{1}{n_2};$$

A-დან B-მდე h_1 და h_2 აღმატებების წონითი საშუალო იქნება

$$h_{1,2}=\frac{h_1\cdot P_1+h_2\cdot P_2}{P_1+P_2} \tag{3.7.9.4}$$

$h_{1,2}$ აღმატების წონა

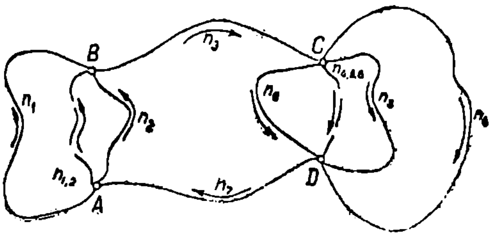
$$P_{1,2}=P_1+P_2. \tag{3.7.9.5}$$

პირველი და მეორე სვლის ეკვივალენტური სვლის სადგურთა რაოდენობა (3. 7. 8. 9) ფორმულით გამოითვლება

$$n_{1,2}=\frac{1}{P_{1,2}};\qquad(3.7.9.6)$$

მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სვლების წონები არის

$$P_4=\frac{1}{n_4};\qquad P_5=\frac{1}{n_5};\qquad P_6=\frac{1}{n_6}.\qquad(3.7.9.7)$$



ნახ. 3.7.9.2.

C-დან D-მდე h_4, h_5 და h_6 აღმატების წონითი საშუალო შეადგენს

$$h_{4,5,6}=\frac{h_4\cdot P_4+h_5\cdot P_5+h_6\cdot P_6}{P_4+P_5+P_6}\qquad(3.7.9.8)$$

ამ აღმატების წონა იქნება

$$P_{4,5,6}=P_4+P_5+P_6.\qquad(3,7,9,9)$$

მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სვლის ეკვივალენტური სვლის სადგურთა რაოდენობა (3. 7· 8. 9) ფორმულით

$$n_{4,5,6}=\frac{1}{P_{4,5,6}}.\qquad(3.7.9.10)$$

ვინაიდან $n_{1,2}$ არის ეკვივალენტური n_1 და n_2 სვლისა და $n_{4,5,6}$—n_4, n_5 და n_6 სვლის, სიზუსტის თვალსაზრისით შეგვიძლია შეიდი სვლის ეკვივალენტურად ჩავთვალოთ სვლა $n_{1,2}$, n_3, $n_{4,5,6}$ და n_7, ანუ სვლა $ABCDA$. ამ სვლის აღმატება $h_{1,2}$, h_3, $h_{4,5,6}$ და h_7 ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი, მაგრამ პრაქტიკულად ის ნულს არ ედრება და ვიღებთ შეუკვრელობას, რომელსაც აღვნიშნავთ f-ით; მაშასადამე,

$$h_{1,2}+h_3+h_{4,5,6}+h_7=f.\qquad(3.7.9.11)$$

ამ სვლის სადგურთა n რაოდენობა მიიღება ყველა სვლათა შეჯამებით

$$n_{1,2}+n_3+n_{4,5,6}+n_7=n.\qquad(3.7.9.12)$$

ყოველ სადგურზე აღმატების შესწორება გამოითვლება ფორმულით

$$a=-\frac{f}{n}.\qquad(3.7.9.13)$$

ამ ოდენობით შევასწორებთ მესამე და მეშვიდე სვლას.

გამოვითვლით ალმატების შესწორებულ მნიშვნელობას A-დან B-მდე და C-დან D-მდე

$$\left.\begin{array}{l} h_{AB}=h_{1,2}+a\cdot n_{1,2} \\ h_{CD}=h_{4,5,6}+a\cdot n_{4,5,6} \end{array}\right\}. \qquad (3.7.9.14)$$

გამოვითვლით შეუკვრელობებს

$$\left.\begin{array}{l} f_1=h_1-h_{AB} \\ f_2=h_2-h_{AB} \\ f_4=h_4-h_{CD} \\ f_5=h_5-h_{CD} \\ f_6=h_6-h_{CD} \end{array}\right\}. \qquad (3.7.9.15)$$

მიღებულ შეუკვრელობებს გავანაწილებთ სათანადო ალმატებებზე თანაბრად. მაგალითად, f_1-ს n_1 რაოდენობის ალმატებაზე, f_2 — n_2 რაოდენობის ალმატებაზე f_4 — n_4-ზე, f_5 — n_5-ზე, f_6 — n_6-ზე.

შესწორებული ალმატებებით და A წერტილის ნიშნულით გამოითვლება ქსელის ყველა წერტილის შესწორებული ნიშნული.

§ 7. 10. კუთხზომითი აგეგმვის პოლიგონების გაწონასწორება

კუთხზომითი აგეგმვის დაბალი სიზუსტის პოლიგონების გაწონასწორება ხდება ორ სტადიად. პირველი სტადია ეხება უშუალოდ გაზომილი კუთხეების გაწონასწორებას და მეორე — პოლიგონის წვეროების კოორდინატების ან პოლიგონების გვერდთა ნაზრდების გაწონასწორებას.

A. საკვანძო გვერდის დირექციული კუთხის გაწონასწორება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სამი თეოდოლიტური სვლის A_1A_2, B_1B_2 და C_1C_2 გამოსავალი გვერდების დირექციული კუთხეები (A_1A_2), (B_1B_2) და (C_1C_2) (ნახ. 1); აგრეთვე უშუალოდ გაზომილია სვლების მარჯვენა ან მარცხენა კუთხეები. საჭიროა განისაზღვროს საკვანძო D_1D_2 გვერდის დირექციული კუთხის უალბათესი მნიშვნელობა (D_1D_2) და შემდეგ გაწონასწორდეს სამივე სვლის კუთხეები.

D_1D_2 საკვანძო გვერდის დირექციული კუთხე (D_1D_2) განისაზღვრება სამივე სვლიდან. ვინაიდან სვლებში n_1, n_2, n_3 კუთხეთა რაოდენობა სხვადასხვაა, მიუხედავად იმისა, რომ კუთხეები გაზომილია ტოლზუსტად, მაინც სამი ცალკეული სვლიდან გამოთვლილი დირექციული კუთხე არ იქნება ერთი და იმავე მნიშვნელობისა. ამიტომ საჭიროა წონითი საშუალოს გამოთვლა ფორმულით.

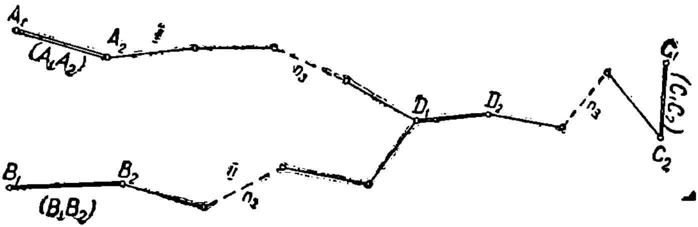
$$(D_1D_2)=\frac{(D_1D_2)_1\cdot P_1+(D_1D_2)_2\cdot P_2+(D_1D_2)_3\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}; \qquad (3.7.10.1)$$

სადაც წონები 3. 5· 2 პარაგრაფში განხილული წესის მიხედვით შეგვიძლია მივიღოთ გაზომილ კუთხეთა რაოდენობის შებრუნებულ სიდიდეებად, ე. ი.

$$P_1=\frac{1}{n_1};\quad P_2=\frac{1}{n_2};\ P_3=\frac{1}{n_3};\tag{3.7.10.2}$$

(D_1D_2) დირექციული კუთხის წონა კი იქნება

$$P_{1,2,3}=P_1+P_2+P_3.\tag{3.7.10.3}$$



ნახ. 3.7.10.1.

ამის შემდეგ განისაზღვრება სამივე სვლის შეუკვრელობებით

$$\left.\begin{aligned} f_1&=(D_1D_2)_1-(D_1D_2)\\ f_2&=(D_1D_2)_2-(D_1D_2)\\ f_3&=(D_1D_2)_3-(D_1D_2)\end{aligned}\right\}.\tag{3.7.10.4}$$

აღნიშნული შეუკვრელობები განაწილდება თანაბრად სამივე სვლის უშუალოდ გაზომილ კუთხეებზე შებრუნებული ნიშნით.

გაწონასწორებული საკვანძო გვერდის დირექციული კუთხის საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$M_{D_1D_2}=\pm\sqrt{\frac{[Pf^2]}{[P](k-1)}},\tag{3.7.10.5}$$

სადაც

$$k=3.$$

B. საკვანძო წერტილის კოორდინატების გაწონასწორება

მოცემულია $A_1(X_{A_1},\ Y_{A_1})$, $B_1(X_{B_1},\ Y_{B_1})$ და $C_1\,(X_{C_1},\ Y_{C_1})$ გამოსავალი წერტილები. უშუალოდ გაზომილია n_1, n_2, n_3 რაოდენობის გვერდები, რომელთა სიგრძე ყოველ სვლაში არის s_1, s_2 და s_3. საჭიროა განისაზღვროს D_1 საკვანძო წერტილის კოორდინატების გაწონასწორებული მნიშვნელობა და გაწონასწორდეს სამივე სვლის წვეროების კოორდინატები ((1) ნახაზი). ვიყენებთ ფორმულებს

$$x_{D_1}=\frac{x^{\mathrm{I}}_{D_1}\cdot P_1+x^{\mathrm{II}}_{D_1}\cdot P_2+x^{\mathrm{III}}_{D_1}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}$$

$$y_{D_1}=\frac{y^{\mathrm{I}}_{D_1}\cdot P_1+y^{\mathrm{II}}_{D_1}\cdot P_2+y^{\mathrm{III}}_{D_1}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}.\tag{3.7.10.6}$$

კოორდინატების განსაზღვრის შეცდომების მიზეზად უნდა ჩაითვალოს გვერდების გაზომვაში დაშვებული შეცდომები, რადგანაც კუთხეები უკვე გაწონასწორებული გვაქვს. აგრეთვე 3. 5. 2 პარაგრაფში განხილული წესის მიხედვით წონები შეიძლება მივიღოთ სვლათა სიგრძის შებრუნებულ სიდიდეებად

$$P_1=\frac{1}{s_1};\qquad P_2=\frac{1}{s_2};\qquad P_3=\frac{1}{s_3};\tag{3.7.10.7}$$

წონით საშუალოს წონა კი იქნება

$$P_{1,2,3}=P_1+P_2+P_3.\tag{3.7.10.8}$$

განვსაზღვრავთ სამივე სვლისათვის შეუკვრელობებს

$$\left.\begin{aligned} f_{x_1}&=x^{\mathrm{I}}_{D_1}-x_{D_1}\\ f_{x_2}&=x^{\mathrm{II}}_{D_1}-x_{D_1}\\ f_{x_3}&=x^{\mathrm{III}}_{D_1}-x_{D_1}\\ f_{y_1}&=y^{\mathrm{I}}_{D_1}-y_{D_1}\\ f_{y_2}&=y^{\mathrm{II}}_{D_1}-y_{D_1}\\ f_{y_3}&=y^{\mathrm{III}}_{D_1}-y_{D_1} \end{aligned}\right\};\tag{3.7.10.9}$$

განვსაზღვრავთ სვლების სიგრძის ზომის ერთეულზე შესწორებებს ფორმულით

$$\left.\begin{aligned} &\text{I სვლისათვის}\ -\frac{f_{x_1}}{s_1}=\varepsilon_{x_1};\quad -\frac{f_{y_1}}{s_1}=\varepsilon_{y_1}\\ &\text{II სვლისათვის}\ -\frac{f_{x_2}}{s_2}=\varepsilon_{x_2};\quad -\frac{f_{y_2}}{s_2}=\varepsilon_{y_2}\\ &\text{III სვლისათვის}\ -\frac{f_{x_3}}{s_3}=\varepsilon_{x_3};\quad -\frac{f_{y_3}}{s_3}=\varepsilon_{y_3} \end{aligned}\right\}.\tag{3.7.10.10}$$

როგორც აბსცისის, ისე ორდინატის ნაზრდებში შევიტანთ მიღებულ შესწორებებს სვლის გვერდების სიგრძეების პროპორციულად.

ამის შემდეგ გამოითვლება სვლის ყოველი წერტილის კოორდინატების გაწონასწორებული მნიშვნელობები.

აღწერილი წესი გაწონასწორებისა მართებულია შეკრული პოლიგონისათვისაც.

საკვანძო D_1 წერტილის გაწონასწორებული კოორდინატების საშუალო კვადრატული შეცდომა იქნება

$$\left.\begin{aligned} M_{x_{D_1}}&=\pm\sqrt{\frac{[Pf_x^2]}{[P](k-1)}}\\ M_{y_{D_1}}&=\pm\sqrt{\frac{[Pf_y^2]}{[P](k-1)}} \end{aligned}\right\}.\tag{3.7.10.11}$$

სადაც

$$[P]=P_1+P_2+P_3,\qquad k=3.$$

დანართი

A. ზოგიერთი მუდმივი სიდიდე

	რიცხვები	ლოგა-რითმები		რიცხვები	ლოგა-რითმები
π	3.1416	0.49715	$1:\pi$	0.31831	9.50285
2π	6.2832	0.79818	$1:2\pi$	0.15915	9.20181
π^2	9.8696	0.99430	$\pi:2$	1.5708	0.19612
$2\pi^2$	19.739	1.29533	$\pi:3$	1.0472	0.02003
$\sqrt{\pi}$	1.7725	0.24859	$2:\pi$	0.63662	9.80388
$\sqrt{2\pi}$	2.5066	0.39909	$3:\pi$	0.95493	9.97997
$2\sqrt{\pi}$	3.5449	0.54960	$4:\pi$	1.2732	0.10490
$\sqrt{\pi:2}$	1.2533	0.09806	$\sqrt{\pi:2}$	0.88623	9.94755
$\sqrt[3]{\pi}$	1.4646	0.16572	e^2	7.3891	0.86859
$\pi:360$	0.0087266	7.94085	$\sqrt{e}$	1.6487	0.21714
$360:\pi$	114.59	2.05916	$1:\rho^\circ$	0.017453	8.24187
$\pi:180$	0.017453	8.24187	$1:\rho'$	0.00029089	6.46373
$180:\pi$	57.296	1.75812	$1:\rho''$	0.00000 8481	4.68557
ρ°	57.296	1.75812	$1:e$	0.36788	9.56571
ρ'	3437'.7	3.53627	$1:e^2$	0.13534	9.13143
ρ''	206 265	531443	M	0.43429	9.63778
e	2.7183	0.43430	$1:M$	2.3026	0.36222

	რიცხვები	ლოგა-რითმები		რიცხვები	ლოგა-რითმები
$1:\sqrt{2}$	0.70711	9.84949	$1:\sqrt{8}$	0.35355	9.54845
$1:\sqrt{3}$	0.57735	9.76144	$1:\sqrt{10}$	0.31623	9.50000
$1:\sqrt{5}$	0.44721	9.65051	$\sqrt[3]{2}$	1.2599	0.10034
$1:\sqrt{6}$	0.40825	9.61093	$\sqrt[3]{10}$	2.1544	0.33333
$1:\sqrt{7}$	0.37796	9.57745	$\sqrt[3]{100}$	4.6416	1.66667

B. ტრიგონომეტრია

1. მახვილი კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\quad \cos\alpha=\frac{b}{c};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a};\quad \sec\alpha=\frac{c}{b};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{a}.$$

2. ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ოდენობები

კვადრანტები	კუთხეები	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	0°	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	2
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	90°	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
II	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
	180°	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\mp\infty$
III	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	270°	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
IV	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2

3. კუთხეების გამოხატვა რადიანებში

$$1 \text{ რადიანი} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44'',8 \approx 57^\circ,2958;$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017453 \text{ რადიანი}; \quad 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \approx 0,000291 \text{ რადიანი};$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0,000005 \text{ რადიანი}.$$

გრადუსებისა და რადიანების ზომების ცხრილი

კუთხეები გრადუსებში	360°	180°	90°	60°	45°	30°
კუთხეები რადიანებში	2π	π	$\pi:2$	$\pi:3$	$\pi:4$	$\pi:6$

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები კვადრანტების მიხედვით

კვადრანტები	კუთხეები	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	0°—90°	+	+	+	+	+	+
II	90°—180°	+	—	—	—	—	+
III	180°—270°	—	—	+	+	—	—
IV	270°—360°	—	+	—	—	+	—

5. ერთი და იმავე კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დამოკიდებულება

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}; \quad \sec^2\alpha = 1+\mathrm{tg}^2\alpha;$$

$$\mathrm{cosec}^2\alpha = 1+\mathrm{ctg}^2\alpha; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1;$$

$$\sin\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\alpha = 1; \quad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1;$$

6. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ურთიერთგამოხატვა

$$\sin\alpha = \frac{1}{\mathrm{cosec}\,\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha - 1}}{\mathrm{cosec}\,\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha-1}}=$$

$$=\sqrt{\sec^2\alpha-1};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1};$$

7. შეკრება-გამოკლების ფორმულები

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha};$$

8. გაორკეცებული და ნახევარი კუთხეების ფორმულები

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}==\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha};$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha};$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

9. დაყვანის ფორმულები

ფუნ-ქციები	კუთხეები							
	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$
cosec	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\operatorname{cosec}\alpha$

10. ჯამისა და სხვაობების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დაყვანა სალოგარითმო სახეზე

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha);$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ-\alpha);$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

11. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლები

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}+\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

12. ბრტყელი სამკუთხედების საანგარიშო ფორმულები

$$A+B+C=180^\circ;$$

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (სინუსების თეორემა; R შემოხაზული წრეწირის რადიუსი).

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A;\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (კოსინუსების ფორმულა).

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)};\quad a+b=c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)};$$

$$a-b=c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)};\qquad p=\frac{a+b+c}{2};$$

$k=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ (ჩახაზული წრეწირის რადიუსი);

გვერდების ფორმულა

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{k}{p-a};$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{k}{p-b};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{k}{p-c};\quad a=\sqrt{(b+c+s)(b+c-s)},$$

სადაც $s=2\sqrt{bc}\cdot\cos\dfrac{A}{2};$

$$F=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=k\cdot p.$$

C. განაზომთა შეცდომების თეორიის ფორმულები

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.1.3.1)	ჭეშმარიტი შეცდომა	$\delta_i = l_i - X$
(3.1.3.2)	შესწორება	$\varepsilon_i = X - l_i$
(3.1.3.3)	ჭეშმარიტი სიდიდე	$X = l_i - \delta_i$
(3.1.3.4)	" "	$X = l_i + \varepsilon_i$
(3.2.4.13)	$a_i + b_i = l_i$ ტოლობის l_i ზე ნამრავლთა ჯამი	$[al]+[bl]=[l^2]$
(3.3.1.9) (3.3.1.14)	განაზომთა ალბათესი სიდიდე	$L=\frac{[l]}{n}$; $L=l_0+\frac{[\delta_i]}{n}$
(3.3.1.10)	ალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომა	$\Delta=\frac{[\delta]}{n}$
(3.3.1.11)	იგივე	$\Delta = L - X$
(3.3.1.12)	ჭეშმარიტი სიდიდის	$X = L - \Delta$
(3.3.2.2)	ალბათესი შეცდომა	$v_i = l_i - L$
(3.3.2.3)	ალბათესი შესწორება	$\varepsilon_i = L - l_i$
(3.3.2.4)	ალბათესი სიდიდე	$L = l_i - v_i$
(3.3.2.5)	იგივე	$L = l_i + \varepsilon_i$
(3.3.3.1)	ჭეშმარიტი შეცდომა	$\delta_i = v_i + \Delta$
(3.3.4.1)	ალბათეს შეცდომათა პირველი თვისების გამომსახველი	$[v]=[l]-nL$
(3.3.4.2)	იგივე	$[v]=0$
(3.3.4.3)	მეორე თვისების გამომსახველი	$[v^2]=minimum$
(3.3.5.1)	ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m=\pm\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\dots+\delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}$
(3.3.5.2)	ყოველი ცალკეული განაზომის საშუალო არითმეტიკული შეცდომა	$\vartheta=\pm\frac{[\delta_1]+[\delta_2]+\dots+[\delta_n]}{n}=\pm\frac{[\lvert\delta\rvert]}{n}$
(3.3.5.3)	საშუალო კვადრატულ შეცდომასა და საშუალო არითმეტიკულ შეცდომას შორის დამოკიდებულება	$\begin{cases} m=1.2533\vartheta\approx 1.25\vartheta \\ \vartheta=0{,}7979m\approx 0.8m \end{cases}$
(3.3.5.4)	ალბათი შეცდომასა და საშუალო კვადრატულ შეცდომას შორის დამოკიდებულება	$r=0.6745m\approx\frac{2}{3}m$
(3.3.6.1)	საშუალო კვადრატული შეცდომის განსაზღვრის საშ. კვადრატ. შეცდომა და სიზუსტე	$m_m=\frac{m}{\sqrt{2n}}$; $\frac{m_m}{m}=\frac{1}{\sqrt{2n}}$
(3.3.7.1)	განაზომთა ალბათესი სიდიდის ჭეშმარიტი შეცდომა	$\Delta^2\approx\frac{[\delta^2]}{n^2}=M^2$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.3.7.2)	განაზომთა უალბათესი სადიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$M=\frac{m}{\sqrt{n}}$
(3.3.7.3)	გაზომვათა საჭირო რაოდენობა	$n=\frac{m^2}{M^2}$
(3.3.8.1)	ჭეშმარიტ შეცდომათა კვადრატების ჯამი	$[\delta^2]=[v^2]+n\Delta^2$
(3.3.8.2)	ბესელის ფორმულა	$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$
(3.3.9.1)	განაზომთა უალბათესი სიდიდის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$M=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}$
(3.3.9.2)	ლეონტოვსკის ფორმულა.	$M=\pm\frac{l_{max}-l_{min}}{n}$
(3.3.10.2)	პეტერსის ფორმულა	$m=\pm\frac{1.25}{\sqrt{n(n-1)}}\cdot[\|v\|]$
(3.3.10.3)	იმავე გამარტივებული სახის	$m=\pm\frac{1.25}{n-\frac{1}{2}}[\|v\|]$
(3.3.11.1)	უალბათეს შეცდომათა ჯამის საკონტროლო	$[vv]=[vl]$
(3.3.11.2)	იმავე სხვა სახით . .	$[vv]=[v^2 l]$
(3.3.13.1)	ფარდობითი შეცდომა (სიზუსტე)	$\frac{m}{L}=\frac{1}{L:m}=\frac{1}{T}$
(3.3.13.2)	ხაზოვანი და კუთხური სიზუსტეების დამოკიდებულება	$\frac{t}{l}=\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}$
(3.4.1.4)	ალგებრული ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_y=\sqrt{m_a^2+m_b^2+\cdots+m_q^2}$
(3.4.1.5)	ალგებრული ჯამის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როდესაც $m_a=m_b=\ldots m_q=m$.	$m_y=m\sqrt{n}$
(3.4.1.6)	საშ. კვ. შეცდომა რამნიმე დამოუკიდ. წყაროს მიხედვით	$m=\sqrt{m_{\delta_1}^2+m_{\delta_2}^2+\cdots+m_{\delta_n}^2}$
(3.4.1.7)	მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის საშუალო კვადრატული შეცდომა . .	$m=km_a$
(3.4.1.8)	სრული წირული ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_y=\sqrt{k_1^2m_a^2+k_2^2m_b^2+\cdots+k_n^2m_q^2}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.4.1.9)	„ როცა $k_1=k_2=...=k$	$m_y=k\sqrt{m_a^2+m_b^2+\dots+m_q^2}$
(3.4.1.10)	„ როცა $m_1=m_2=...=m$	$m_y=m\sqrt{[k^2]}$
(3.4.1.11)	„ როცა $k_1=k_2=...=k$ და $m_1=m_2=...=m$	$m_y=km\sqrt{n}$, როცა $k=1$, მაშინ $m_y=m\sqrt{n}$
(3.4.1.12)	ფერეროს ფორმულა	$m_\alpha=\pm\sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}}$
(3.4.1.13)	შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი	$\mu=\frac{m_l}{\sqrt{l}}$ ან (22.14') $\mu=\frac{m_L}{\sqrt{L}}$
(3.4.1.14)	ხაზის გაზომვის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_L=\mu\sqrt{L}$
(3.4.1.17)	ზოგადი სახის ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2+\dots}$
(3.4.1.18)	რთული ფუნქციის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_\alpha^2}$, აქ $z=\varphi(x, y)$
(3.4.1.20)	არაცხადი ფუნქციის საშ. კვადრ. შეცდომა	$m_\omega=\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} m_x^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} m_y^2+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} m_\alpha^2+\dots}$
(3.4.1.21)	სამკუთხედის გამოთვლილი გვერდის საშ. კვადრატული შეცდომა	$m_a=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 m_b^2+(a\,\mathrm{ctg}\,A)^2\left(\frac{m''_A}{\rho''}\right)^2+(a\,\mathrm{ctg}\,B)^2\left(\frac{m''_B}{\rho''}\right)^2}$
(3.4.1.24)	სამკუთხედში სინუსების ფორმულით გამოთვლილი კუთხეების საშ. კვ. შეცდომა	$\begin{cases} m_\alpha=\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)m_s^2\rho^2+\frac{a^2\cos^2\gamma}{c^2\cos^2\alpha}m^2_\gamma} \\ m_\beta=\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)m_s^2\rho^2+\frac{b^2\cos^2\gamma}{c^2\cos^2\beta}m^2_\gamma} \end{cases}$
(3.4.1.29)	სამკუთხედში კოსინუსების ფორმულით გამოთვლილი გვერდის საშ. კვ. შეცდომა	$m_c=\sqrt{\cos^2\beta\, m_a^2+\cos^2\alpha\cdot m_b^2+a^2\cdot\sin^2\beta\,\frac{m_\gamma^2}{\rho^2}}$ a, b და γ უშუალოდ გაზომილია. α და β გამოთვლილია სინუსების ფორმულით.
(3.4.1.35)	გვერდების ფორმულით გამოთვლილი α კუთხის საშ. კვად. შეცდომა	$m_\alpha=\frac{a\cdot\rho''}{2F}\sqrt{m_a^2+\cos^2\gamma\cdot m_b^2+\cos^2\beta\cdot m_c^2}$
(3.4.1.36)	იმავე β კუთხისათვის	$m_\beta=\frac{b\,\rho''}{2F}\sqrt{m_b^2+\cos^2\gamma\cdot m_a^2+\cos^2\alpha\cdot m_c^2}$
(3.4.1.37)	იმავე α კუთხისათვის, როდესაც $m_a=m_b=m_c=m_s$	$m_\alpha=\frac{m_s\cdot a\cdot\rho''}{2F}\sqrt{1+\cos^2\gamma+\cos^2\beta}$
(3.4.1.38)	იმავე β კუთხისათვის	$m_\beta=\frac{m_s\cdot b\cdot\rho''}{2F}\sqrt{1+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.4.1.44)	სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშ. კვად. შეცდომა	$m_\omega=\sqrt{\left(\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m_a}{a}\right)^2\rho^2+\left(\operatorname{tg}\beta\cdot\frac{m_b}{b}\right)^2\rho^2+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{c}\right)^2 m_c^2\rho^2+(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot m_\gamma)^2}$ α და β გამოთვლილია სინუსების თეორემით. γ, a, b, c — უშუალოდ გაზომილია.
(3.4.1.45)	სამკუთხედში b გვერდის საშ. კვად. შეცდომა, როცა უშუალოდ გაზომილია a გვერდი, β და γ კუთხე	$m_b=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 m_a^2+\left[\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}\right]^2\cdot\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2+[b\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)]^2\cdot\left(\frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2}$
(3.7.3.13)	სამკუთხედში ტანგენსების ფორმულით გამოთვლილი α კუთხის საშ. კვად. შეცდომა	$m_\alpha=\frac{1}{c}\sqrt{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\cdot m_s^2\cdot\rho^2+a^2\cos^2\beta\cdot m_\gamma^2}$
(3.7.3.14)	იმავე β კუთხისათვის	$m_\beta=\frac{1}{c}\sqrt{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\, m_s^2\cdot\rho^2+b^2\cdot\cos^2\alpha\cdot m_\gamma^2}$
(3.4.1.46)	რიცხვის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_{\lg x}=M_{10}\frac{m_x}{x}$
(3.4.1.47)	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_{\lg\sin\alpha}=M_{10}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\lg\cos\alpha}=-M_{10}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\lg\operatorname{tg}\alpha}=M_{10}\cdot\frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\lg\operatorname{ctg}\alpha}=-M_{10}\frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$
(3.4.1.48)	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა საშუალო კვადრატული შეცდომები	$m_{\sin\alpha}=\cos\alpha\,\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\cos\alpha}=-\sin\alpha\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$ $m_{\operatorname{ctg}\alpha}=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{m''_\alpha}{\rho''}$

ფორმ №	დასახელება	ფორმულა
(3.4.1.51)	ფუნქციის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m^2_{\lg\Phi} = m^2_{\lg x_1} + m^2_{\lg x_2} + \dots + m^2_{\lg x_n}$
(3.4.1.52)	უშუალოდ გაზომილ სიდიდეთა ლოგარითმის საშ. კვადრ. შეცდომა	$m_{\lg x_i} = \lg x_i' - \lg x_i$ სადაც $x_i' = x_i + m_{x_i}$
(3.4.1.53)	ფუნქციის მცდარი მნიშვნელობის ლოგარითმი	$\lg \Phi' = \lg \Phi + m_{\lg \Phi}$
(3.4.1.54)	ფუნქციის საშ. კვად. შეცდომა	$m_{\Phi} = \Phi' - \Phi$
(3.4.1.55)	n რაოდენობის ტოლგვერდასამკუთხედიანი ტრიგონომეტრიული ქსელის უკანასკნელი (b) გვერდის ლოგარითმის საშ. კვად. შეცდომა	$m^2_{\lg b} = m^2_{\lg a} + 2 \cdot n \cdot m^2_{\lg \sin \alpha}$
(3.4.1.56)	ტრიგონომეტრიულ ქსელში ტოლგვერდა სამკუთხედების მაქსიმალური რაოდენობა, როცა მოცემულია საწყისი და ბოლო გვერდის დასაშვები სიზუსტე	$n = \dfrac{m^2_{\lg b} - m^2_{\lg a}}{2\, m^2_{\lg \sin \alpha}}$
3.4.1.57)	n-სამკუთხედიანი ტრიგონომეტრიული ქსელის უკანასკნელი (b) გვერდის ლოგარითმის საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m^2_{\lg b} = m_{\lg a} + \sum_{i=1}^{n} m^2_{\lg \sin x_i}$
(3.4.1.58)	იგივე, როდესაც $m_1 = m_2 = \dots = m_i = m$	$m^2_{\lg b} = m^2_{\lg a} + \left(\dfrac{M_{10} \cdot m}{\rho}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ctg}^2 x$
(3.4.2.2)	ორმაგ განაზომთა სხვაობის საშუალო კვდრატ. შეცდომა	$m_d = \pm \sqrt{\dfrac{[d^2]}{k}}$. k—წყვილ განაზომთა რაოდენობა.
(3.4.2.2')	იგივე, როცა $k=1$	$m_d = \pm d$
(3.4.2.4)	ყოველი ცალკეული განაზომის საშ. კვ. შეცდომა ორმაგ განაზომთა სხვაობებით	$m = \pm \sqrt{\dfrac{[d^2]}{2k}}$
(3.4.2.5)	იგივე, როცა $k=1$	$m = \pm \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.4.2.6)	სისტემატური შეცდომის სიდიდე ორმაგ განაზომთა სხვაობებში	$\theta = \frac{d_1+d_2+\cdots+d_k}{k} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k}{k}$
(3.4.2.8)	ორმაგი განაზომის სხვაობის საშ. კვ. შეცდომა ბესელის ფორმულით	$m_d = \pm\sqrt{\frac{[d'd']}{k-1}}$
(3.4.2.9)	ყოველი ცალკეული განაზომის საშ. კვად. შეცდომა სისტემატურ შეცდომათაგან თავისუფალი ორმაგი გაზომვების სხვაობებით გამოთვლილი	$m = \pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(k-1)}}$
(3.4.4.1)	m-ის ჯერადი სხვადასხვა აბსოლუტური სიდიდის შემთხვევითი შეცდომის ალბათობის ფორმულა	$W_{-km}^{+km} = W_{0}^{km} = k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{k^2}{6}+\frac{k^4}{40}-\frac{k^6}{336}+\frac{k^8}{3458}\right)$
(3.4.4.2)	ზღვრულ და საშ. კვ. შეცდომას შორის დამოკიდებულება	$\Delta_{lim} = 2m$
(3.4.6.4)	ანათვლის დამრგვალების საშ. კვად. შეცდომა	$m_{\text{დ}} = \pm\frac{a_{\text{დ}}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6a$
(3.4.6.5)	ანათვლის დამრგვალების ზღვრული შეცდომა	$a = m_{\text{დ}}\sqrt{3} \approx 1{,}7m_{\text{დ}}$
(3.4.6.6)	t სიზუსტის ათვლელი ხელსაწყოს დამრგვალების საშ. კვადრატული შეცდომა	$m_{\text{დ}} \approx \pm 0{,}6a \approx \pm 0.6\cdot 0{,}5t \approx \pm 0.3t$
(3.4.7.4)	რეზულტატური საშუალო კვადრატული შეცდომა	$m_{\text{რ}} = \sqrt{m_{\text{შ}}^2 + m_{\sigma}^2}$
(3.4.7.5)	შემთხვევითი ხასიათის საშ. კვ. შეცდომის კავშირი რეზულტატურ საშ. კვ. შეცდომასთან და სისტემატურ შეცდომასთან	$m_{\text{შ}} = m_{\text{რ}}\left(1-\frac{\sigma^2}{2m_{\text{რ}}^2}\right)$
(3.4.7.6)	სისტემატური შეცდომის უგულებელსაყოფი პირობა	როცა $\sigma^2 < \frac{2m_{\text{რ}}^2}{\sqrt{2n}}$
(3.4.8.3)	შემთხვევით შეცდომათა მრავალი წყაროს ერთობლივი გავლენის საშ. კვ. შეცდომა	$m_{\text{შ}}^2 = m_{\text{შ}'}^2 + m_{\text{შ}''}^2 + \cdots$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.4.8.4′)	სისტემატურ შეცდომათა მრავალი წყაროს ერთობლივი გავლენის საშ. კვ. შეცდომა	$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + m_{\sigma'''}^2 + \dots + m_{\sigma^n}^2 + 2\theta'\theta'' + 2\theta'\theta''' + \dots + 2\theta'\theta^n + 2\theta^{n+1}\cdot\theta^n$
(3.4.8.5)	L კმ სიგრძის ნიველირსავალის საშ. კვ. შეცდომა	$m_{II} = \sqrt{(m_{\delta'})^2\cdot n + (m_{\sigma'})^2 n^2}$
(3.4.8.6)	ხაზის გაზომვის საშ. კვ. შეცდომა	$m_L = \sqrt{\mu^2 L + \lambda^2 L^2}$
(3.5.2.3)	უალბათესი სიდიდის წონა	$P_i = p\cdot n_i$
(3.5.2.4)	უალბათესი სიდიდის საშ. კვ. შეცდომა	$M_i = \frac{m}{\sqrt{P_i}}$, სადაც $i=1, 2, \dots, k$
(3.5.2.5)	იგივე, როცა ყველა სერიაში m თანატოლია	$M_i = \pm\frac{1}{\sqrt{P_i}}$
(3.5.2.6)	როცა ყველა სერიაში m ტოლია, მაშინ ნებისმიერი სერიის უალბათესი სიდიდის წონა	$P_i = \frac{1}{M_i^2}$ (წონის ზოგადი სახე)
(3.5.2.9)	ნიველობის წონა ნებისმიერი სვლისათვის	$P_{II_i} = \frac{1}{m_k^2\cdot n_i}$
(3.5.2.10)	იგივე	$P_{II_i} = \frac{1}{k^2\cdot L_i}$
(3.5.2.11)	იგივე, როცა m_k ყველა აღმატებაში ტოლია	$P_{II_i} = \frac{1}{n}$
(3.5.2.12)	იგივე, როცა k ყველა სვლაში ტოლია	$P_{II_i} = \frac{1}{L}$
(3.5.2.14)	ხაზების გაზომვის წონები	$P_{L_i} = \frac{1}{\mu^2 L_i}$
3.5.2.15)	იგივე, როცა μ ყველგან ტოლია	$P_L = \frac{1}{L}$
(3.5.3.5)	წონითი საშუალო	$L_0 = \frac{[PL]}{[P]}$
(3.5.3.8)	იგივე	$L_0 = l_0 + \frac{[P\,lL]}{[P]}$
(3.5.4.1)	უალბათესი სიდიდის წონა, როცა გვსურს მისი სიდიდის მოხერხებული რიცხვითი განსაზღვრა (წონის ზოგადი სახე).	$P_i = \frac{\eta^2}{M_i^2}$
(3.5.4.2)	ერთეული წონის საშ. კვ. შეცდომა	$\eta = M_i\sqrt{P_i}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.5.4.2)	ნებისმიერი სერიის უალბათესი სიდიდის საშ. კვ. შეცდომა	$M_i=\frac{\eta}{\sqrt{P_i}}$
(3.5.4.3)	წონითი საშუალოს საშ. კვად. შეცდომა	$M_0=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}$
(3.5.5.1)	წონითი საშუალოს წონა	$P_0=[P]$
(3.5.5.2)	წონითი საშუალოდან უალბათესი სიდიდეების გადახრების თვისებები:	
(3.5.6.1)	I-ლი თვისება	$[PV]=0$
(3.5.6.2)	II-ე თვისება	$[PV^2]=minimum$
(3.5.7.2)	ერთეული წონის საშ. კვ. შეცდომა	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[PM^2]}{k}}$
(3.5.8.3)	იგივე	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{k}}$
(3.5.9.1)	იგივე	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{k-1}}$
(3.5.9.2)	წონითი შუალის საშ. კვ. შეცდომა	$M_0=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{[P](k-1)}}$
(3.5.10.1)	საკონტროლო	$[PV^2]=[PVL]$
(3.5.10.2)	იგივე	$[PV^2]=[PV\Delta L]$
(3.6.1.3)	ალგებრული ჯამის შებრუნებული წონა	$\frac{1}{P_y}=\frac{1}{P_a}+\frac{1}{P_b}+\frac{1}{P_c}+\cdots$
(3.6.1.5)	იგივე, როცა $P_a=P_b=\ldots=P$	$\frac{1}{P_y}=\frac{n}{P}$, ანუ $P_y=\frac{P}{n}$
(3.6.1.6)	იგივე, როცა $P_a=P_b=\ldots P=1$	$\frac{1}{P_y}=\frac{n}{1}=n$, ანუ $P_y=\frac{1}{n}$
(3.6.1.8)	მუდმივი რიცხვისა და უშუალოდ გაზომილი სიდიდის ნამრავლის შებრუნებული წონა	$\frac{1}{P_y}=\frac{k^2}{P_a}$, ანუ $P_y=\frac{P_a}{k^2}$
(3.6.1.12)	სრული წრფივი ფუნქციის შებრუნებული წონა	$\frac{1}{P_y}=k_1^2\frac{1}{P_a}+k_2^2\frac{1}{P_b}+\cdots$
(3.6.1.15)	ზოგადი სახის ფუნქციის შებრუნებული წონა	$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{1}{P_x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{1}{P_y}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\frac{1}{P_z}+\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2\frac{1}{P_a}+\cdots$
(3.6.1.17)	იგივე, როცა $P_x=P_y=\ldots=P=1$	$\frac{1}{P_u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\cdots$
(3.6.1.18)	იგივე, როცა $P_x=P_y=P$	$\frac{1}{P_u}=\frac{1}{P}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\cdots\right.$ ანუ $P_u=\frac{P}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\cdots}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3 6 2 1)	ერთეული წონის საშუალო კვადრატული შეცდომა არატოლზუსტ ორმაგ განაზომთა სხვაობების საშუალებით	$\eta = \pm\sqrt{\frac{[P d^2]}{2k}}$
(3.6 2.2)	იგივე, როცა სხვაობები თავისუფალია სისტემატური შეცდომებისაგან	$\eta = \pm\sqrt{\frac{[P d' d']}{2(k-1)}}$
(3 7.1 3)	კუთხის საკუთრივ განსაზღვრის საშუალო კვადრატული შეცდომა, როცა კუთხე განსაზღვრულია ილეთების ხერხით.	$m_t = \sqrt{\frac{m^2_{ა.დ}}{n} + \frac{m^2_{დ}}{n}}$
(3 7.1 5)	იგივე, როცა კუთხე განსაზღვრულია გეოდეზიაში მიღებული განმეორებითი ხერხით	$m_t = \sqrt{\frac{m^2_{ა.დ}}{n^2} + \frac{m^2_{დ}}{n}}$
(3.7 1 7)	იგივე, როცა კუთხე განსაზღვრულია მარკშეიდერიაში მიღებული განმეორების ხერხით	$m_t = \sqrt{\frac{m^2_{ა.დ}}{2n^2} + \frac{m^2_{დ}}{n}}$
(3 7 1 23)	რედუქციის საშ. კვად. შეცდომა A სიგნალზე დამიზნებისას	$m^2_{r_A} = \frac{\rho^2 e_r^2}{2D^2_A}$
(3 7.1 24)	იგივე, B სიგნალზე დამიზნებისას	$m^2_{r_B} = \frac{\rho^2 e_r^2}{2D^2_B}$. აქ მიღებულია $e_A = e_B = e_r$
(3.7.1.25)	იგივე, ორივე სიგნალზე დამიზნებისას	$m_r^2 = \frac{\rho^2 e_r^2}{2D^2_A D^2_B}\left(D^2_A + D^2_B\right)$
(3 7 1 26)	იგივე, როცა $D_A = D_B = D$	$m_r = \pm\frac{\rho e_r}{D}$, ხოლო $m_{r_A} = m_{r_B} = \pm\frac{\rho e_r}{D\sqrt{2}}$
(3.7.1 37)	თეოდოლიტის დაცენტრების საშ. კვ. შეცდომა	$m_c^2 = \frac{\rho^2 e_c^2}{2D^2_A \cdot D^2_B}\left(D^2_A + D^2_B - 2D_A \cdot D_B \cdot \cos M\right)$
(3 7 1.39)	იგივე	$m_c^2 = \frac{\rho^2 e_c^2}{2D^2_A \cdot D^2_B} \cdot D_c^2$
(3 7 1..0)	იგივე, როცა $D_A = D_B = D$ და $D_C = 2D$	$m_c = \pm\frac{\rho e_c}{D}\sqrt{2}$
(3 7.1.41)	დაცენტრების და რედუქციის ხაზოვანი ელემენტების დამოკიდებულება	$e_0 = \frac{e_r}{\sqrt{2}}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.1 42)	კუთხის გაზომვის საშ. კვ. შეცდომა	$m_\beta = \sqrt{m_i^2 + \frac{\rho^2}{2D_A^2 D_B^2}\left[c_r^2\left(D_A^2 + D_B^2\right) + e_c^2\left(D_A^2 + D_B^2 - 2D_A \cdot D_B \cdot \cos M\right)\right]}$
(3.7 1 60)	ორ მყარ წერტილს შორის პოლიგონომეტრული სვლის გრძივი და განივი გადაადგილების ზღვრული სიზუსტე თანაბარი გავლენის პრინციპით	$\frac{t_{\text{გ}}}{L} = \frac{u_{\text{გ}}}{L} = \frac{1}{T\sqrt{2}}$
(3.7.1 61)	იმავე შემთხვევისათვის — — სიზუსტე (დაშვება)	$\frac{m_t}{L} = \frac{m_u}{L} = \frac{1}{2T\sqrt{2}}$
(3.7.1 72)	ორ მყარ წერტილს შორის პოლიგონომეტრული სვლის გრძივი გადაადგილების გამომწვევი ზღვ. სისტემატური და ზღვ. შემთხვევითი შეცდომების თანაბარი გავლენის პრინციპით (დაშვება).	$\sigma_{\text{ზ}} = \Delta_{\text{ზ}} = \frac{L}{6T} = \frac{[S]}{6T}$
(3.7.1.74)	საზომით ერთჯერ გადაზომვის ზღვრული სისტემატური შეცდომა	$\Delta l_{\text{ზს}} = \frac{l}{6T}$
(3.7 1.75)	იმავე შემთხვევაში ზღვრული შემთხვევითი შეცდომა	$\Delta l_{\text{ზშ}} = \frac{l}{6T}\sqrt{\frac{[S]}{l}}$
(3.7.1 76)	იმავე შემთხვევაში სისტემატური ხასიათის საშუალო კვ. შეცდომა.	$m_{l\text{ს}} = \frac{l}{12T}$ (პირობითი)
(3 7 1.77)	იმავე — შემთხვევითი ხასიათის საშ. კვ. შეცდომისას	$m_{l\text{შ}} = \frac{l}{12T}\sqrt{\frac{[S]}{l}}$
(3.7.1.78)	გამოყენებული საზომის და პირობებისათვის ზომის ერთეულზე მოსალოდნელი სისტემატური ხასიათის გავლენის საშ. კვ. შეცდომა	$\lambda = \frac{m_{l\,\text{სისტ.}}}{l} = \frac{1}{12T}$
(3.7.1.79)	იმავე შემთხვევაში — შემთხვევითი გავლენის კოეფიციენტი	$\mu = \frac{m_{l\,\text{შემთ.}}}{\sqrt{l}} = \frac{1}{12T}\sqrt{S}$

ფორმ №	დასახელება	ფორმულა
	თავისუფალ პოლიგონომეტრულ სვლაში მცირე სიდიდის სისტემატური შეცდომის არსებობის დროს . .	
(3.4.9 2)	განივი გადაადგილება ბოლო წერტილისა	$u_n = s\frac{\Delta\beta}{\rho}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$
(3 4.9.3)	იგივე — გრძივი გადაადგილების	$t_n = s\frac{\Delta\beta^2}{2\rho^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(3.4.9.4)	იგივე — სრული გადაადგილების	$M_{\Delta\beta} = \pm\sqrt{u_n^2 + t_n^2}$
(3.7.1 81)	თავისუფალ პოლიგონომეტრულ სვლაში განივი გადაადგილებით გამოწვეული ზღვრული სისტემატური ხასიათის შეცდომა (დაშვება)	$\Delta\beta_{\text{ხს}} = \frac{1}{T}\,\frac{\sqrt{2}}{n+1}\cdot\rho''$
(3 7.1 85)	თანაბარი გაელენის პრინციპით კუთხის გაზომეის საშ. კვად. შეცდომა	$m_\beta = m_0\sqrt{6}$
(3.7.1.88)	თავისუფალ პოლიგონომეტრიულ სვლაში განივი გადაადგილების საშ. კვ. შეცდომის სიდიდე შემთხვევითი ხასიათის შეცდომით გამოწვეული	$m_u = \frac{m_\beta}{\rho}\cdot L\sqrt{\frac{n+1.5}{3}}$
(3 7.1 89)	ორ მყარ წერტილს შორის პოლიგონომეტრიული სვლის განივი გადაადგილების საშ. კვ. შეცდომა, გამოწვეული შემთხვევითი შეცდომით .	$m_u = \frac{m_\beta}{\rho}\cdot L\sqrt{\frac{n+3}{12}}$
(3.7.1.91)	იმავე შემთხვევაში მოცემული სიზუსტისათვის კუთხის გაზომვის საშ. კვადრატული შეცდომის	$m_\beta = \frac{1}{T}\cdot\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{12}{n+3}}$
(3.7.1.92)	იმავე შემთხვევაში ყოველი ცალკეული დამოუკიდებელი შემთხვევითი ხასიათის საშ. კვად. შეცდომა, რომლისგანაც შედგება m_β . .	$m_0 = \frac{1}{T}\cdot\frac{\rho''}{2\sqrt{n+3}}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.1.93)	იმავე შემთხვევაში ყოველი ცალკეული დამოუკიდებელი შემთხვევითი შეცდომის ზღვრული სიდიდე .	$\Delta\beta_{\text{ზღ}} = \frac{1}{T}\,\frac{\rho''}{\sqrt{n+3}}$
(3.7.2.17)	კიდული (თავისუფალი) პოლიგონომეტრიული სვლის ბოლო წერტილის აბსცისის განსაზღვრის საშ. კვ. შეცდომა	$m^2_{x_n} = \mu^2[s\cos^2\alpha] + \lambda^2[\Delta x^2] + \frac{m^2_\beta}{\rho^2}[(y_n - y_i)^2] + \frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho}(y_n - y_A)^2$
(3.7.2.18)	იმავე შემთხვევაში ორდინატის განსაზღვრის საშ. კვ. შეცდომა	$m^2_{y_n} = \mu^2[s\sin^2\alpha] + \lambda^2[\Delta y^2] + \frac{m^2_\beta}{\rho^2}[(x_n - x_i)^2] + \frac{m_{\alpha_{AB}}}{\rho}(x_n - x_A)^2$
(3.7.2.20)	იმავე შემთხვევაში ბოლო წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის საშ. კვად. შეცდომა .	$M_n^2 = \mu^2[s] + \lambda^2 L^2 + \frac{m^2_\beta}{\rho^2}[D^2_{n,i}] + \frac{m^2_{\alpha_{AB}}}{\rho^2}L^2$
(3.7.4.10)	ტახეომეტრიული აგეგმვის დროს წინ და უკან განსაზღვრული ალმატებების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა სხვაობების დაშვება .	$\Delta h = \left(3\frac{L_n}{100} + 3\frac{h}{10}\right)$ სმ
(3.7.4.14)	იმავე სიდიდის გამოსათვლელი, წიაღში ტრიგონომეტრიული ნიველობისათვის	$\Delta h = \left(3\frac{L_n}{100} + \frac{h}{10} \pm 1 \mp 1\right)$ სმ
(3.7.4.22)	ტახეომეტრიული სვლის ალმატებათა ჯამის შეცდომა, როცა გვერდები დაახლოებით ტოლია.	$f_{\Sigma_h} = \pm\sqrt{\left(\frac{0.04P}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{0.4\sum\lvert h\rvert}{\sqrt{n}}\right)^2}$ შვეული კუთხის გაზომვის შეცდომა $\Delta\nu' = 1'$
(3.7.4.27)	ტახეომეტრიული სვლის ალმატებათა ჯამის საშ. კვ. შეცდომა, როდესაც გვერდების სიგრძეები და დახრის კუთხეები სხვადასხვაა	$m^2_{\Sigma_h} = \sum_1^n L^2\cos^2\delta\,\frac{m^2_\delta}{\rho^2} + \sum_1^n \sin^2\delta\, m^2_L + \sum_1^n m_i^2 + \sum_1^n m_v^2$

ფორმ №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.5 3)	ორ მყარ წერტილს შორის ტრიგონომეტრიული ან ტახეომეტრიული ნიველირსავალის ნებისმიერი წერტილის წონითი საშუალო (გაწონასწორებული სიდიდე)	$H_k=\frac{H_k'\cdot P_k'+H_k''\cdot P_k''}{P_k'+P_k''}$
(3.7 5.8)	იგივე — შეუკვრელობის საშუალებით	$H_k=H_k'-\frac{\left[\frac{1}{P}\right]_1^k}{\left[\frac{1}{P}\right]_1^n}\cdot f_{\Sigma_h}$
(3.7.5.4)	იმავე შემთხვევისათვის .	$H_k'=H_A+h_1+h_2+\cdots+h_k$ $H_k''=H_B-h_{k+1}-h_{k+2}-\cdots-h_n$
(3.7.5 5)	იმავე შემთხვევისათვის შებრუნებული წონა	$\frac{1}{P_k'}=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\cdots+\frac{1}{P_k}=\left[\frac{1}{P}\right]_1^k$ $\frac{1}{P_k''}=\frac{1}{P_{k+1}}+\frac{1}{P_{k+2}}+\cdots+\frac{1}{P_n}=\left[\frac{1}{P}\right]_{k+1}^n$
(3.7 5 9)	იმავე შემთხვევისათვის, როცა $P_1=P_2=\ldots P_n=1$	$H_i=H_k'-\frac{f_{\Sigma_h}}{n}\cdot k$
(3.7.5 10)	გაწონასწორებული წერტილის წონა	$P_k=P_k'+P_k''$
(3.7.5.11)	გაწონასწორებული წერტილის საშ. კვ. შეცდომა	$M_k=\frac{\eta}{\sqrt{P_k}}$
(3.7.6.1)	გეომეტრიული ნიველობის დროს ლარტყაზე ანათვლის აღების საშ. კვ. შეცდომა	$m_{\text{ლ}}=\sqrt{m_{\text{დ}}^2+m_{\text{თ}}^2}$
(3 7 6.4)	იმავე $m_{\text{დ}}$ და $m_{\text{თ}}$-ს მნიშვნელობათა ჩასმით	$m_{\text{ლ}}=\pm\frac{J_{\text{ვ}}}{1400}\sqrt{\frac{160\,000}{G^2}+\tau^2}$
(3.7.6 2)	ჭოგრის ლარტყაზე დამიზნების შეცდომა	$m_{\text{დ}}=\pm\frac{60''}{\rho'' G}\cdot L$
(3.7.6 3)	ანათვლების შეცდომა თარაზოს ღერძის დახრით	$m_{\text{თ}}=\pm\frac{0\,15\cdot\tau''}{\rho''}\cdot L$
(3.7 6 5)	თარაზოს საფასური	$\tau''=\frac{400''}{G}$
(3 7.6 6)	ჭოგრის გამადიდებლობა	$G=\frac{400''}{\tau''}$
(3.7 6.7)	გეომეტრიული ნიველობის დროს ლარტყაზე, ანათვლის აღების საშ. კვ. შეცდომა (მიახლოებით)	$m_{\text{ლ}}\approx\pm\,0.4\,\frac{L}{G}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.6.8)	იგივე	$m_{\text{ლ}} \approx \pm 0{,}001 L \cdot \tau$
(3.7.6.9)	გეომეტრიული ნიველობით ყოველი ალმატების საშ. კვ. შეცდომა ერთი ჰორიზონტით და შუა ძაფით	$m_h = m_{\text{ლ}} \sqrt{2}$
(3.7.6.11)	გაუწონასწორებელი ბოლო B წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის საშ. კვ. შეცდომა	$m_B = m_{\text{ლ}} \cdot \sqrt{2n}$
(3.7.6.12)	იმავე შემთხვევაში სვლის შუა წერტილის ნიშნულის განსაზღვრის საშ. კვ. შეცდომისა	$m_{\text{შუა}} = m_{\text{ლ}} \sqrt{\frac{2n}{2}} = \pm m_{\text{ლ}} \sqrt{n}$
(3.7.7.3)	ორ მყარ წერტილს შორის, ანუ ერთმაგი გეომეტრიული ნიველობის ნებისმიერი (k) წერტილის ნიშნულის წონითი შუადი	$\Pi_k = \frac{H_k' \cdot P_k' + H_k'' \cdot P_k''}{P_k' + P_k''}$
(3,7.7.4)	იმავე შემთხვევაში წონები	$P_k' = \frac{1}{k}$
		$P_k'' = \frac{1}{n-k}$
(3.7.7.6)	იმავე შემთხვევაში	$\Pi_k = H_A + \sum_1^k h - \frac{f_{\Sigma h}}{n} k$
(3.7.7.9)	გაწონასწორებული შუა წერტილის წონა	$P_{\text{შუა}} = \frac{4}{n}$
(3.7.7.10)	იმავე შემთხვევაში საშ. კვ. შეცდომა	$M_{\text{შუა}} = \frac{m_h}{2} \sqrt{n}$
(3.7.7.11)	იმავე შემთხვევაში საშ. კვ. შეცდომა	$M_{\text{შუა}} = \frac{m_{\text{ლ}} \sqrt{2n}}{2}$
(3.7.7.12)	იმავე შემთხვევაში ლარტყაზე ანათ. ალების საშ. კვად. შეცდომა	$m_{\text{ლ}} = \frac{f_{\Sigma h}}{\sqrt{2n}}$
(3.7.7.13)	იმავე შემთხვევაში საშ. კვ. შეცდომა	$m_{\text{შუა}} = \frac{f_{\Sigma h}}{2}$
(3.7.8.3)	გეომეტრიული ნიველობის ქსელის ერთი საკვანძო წერტილის ნიშნულის გაწონასწორებული სიდიდე	$H_D = \frac{H_D^{\mathrm{I}} \cdot P_1 + H_D^{\mathrm{II}} \cdot P_2 + H_D^{\mathrm{III}} \cdot P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.8.2)	წონები იმავე შემთხვევისათვის	$P_1=\frac{1}{n_1};\ P_2=\frac{1}{n_2};\ P_3=\frac{1}{n_3}$
(3.7.8.5)	იმავე შემთხვევაში ერთეული წონის საშ. კვ. შეცდომა	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[PV^2]}{k-1}}$
(3.7.8.6)	გაწონასწორებული საკვანძო წერტილის საშ. კვ. შეცდომა	$M_D=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}$
	გეომეტრიული ქსელი ეყრდნობა ოთხ *A*, *B*, *E* და *F* მაღალი სიზუსტით განსაზღვრულ წერტილებს, საჭიროა ამ ქსელის *C* და *D* საკვანძო წერტილების საბოლოო ნიშნულების განსაზღვრა და სვლების გაწონასწორება	
(3.7.8.7)	ამ შემთხვევაში *A* და *B* წერტილებიდან *C* საკვანძო წერტილის ნიშნული	$H_{C_{1,2}}=\frac{H_{C_1}\cdot P_1+H_{C_2}\cdot P_2}{P_1+P_2}$; აქ $P_1=\frac{1}{n_1}$ და $P_2=\frac{1}{n_2}$
(3.7.8.8)	*AC* და *BC* სვლის წონა	$P_{1,2}=P_1+P_2=\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}$
(3.7.8.9)	*AC* და *BC* სვლების ეკვივალენტური სვლის სადგურთა რაოდენობა	$n_{1,2}=\frac{1}{P_{1,2}}=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$
(3.7.8.11)	*D* საკვანძო წერტილის გაწონასწორებული სიდიდე	$H_D=\frac{H_{D_{1,2,3}}\cdot P_{1,2,3}+H_{D_4}\cdot P_4+H_{D_5}\cdot P_5}{P_{1,2,3}+P_4+P_5}$
(3.7.8.10)	წონები	$P_{1,2,3}=\frac{1}{n_{1,2}+n_3};\ P_4=\frac{1}{n_4};\ P_5=\frac{1}{n_5}$
(3.7.8.12)	ერთ სადგურზე შესწორება	$a=-\left(\frac{H_{D_{1,2,3}}-H_D}{n_{1,2}+n_3}\right)=-\frac{f_{1,2,3}}{n_{1,2,3}}$
(3.7.8.13)	*C* წერტილის გაწონასწორებული ნიშნულის სიდიდე	$H_C=H_{C_{1,2}}+a\cdot n_{1,2}$
(3.7.8.14)	*AC* და *BC* სვლებში შეუკვრელობები	$f_1=H_{C_1}-H_C$ $f_2=H_{C_2}-H_C$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.9.1)	შეკრული პოლიგონის B საკვანძო წერტილის საბოლოო ნიშნულის სიდიდე: A ცნობილი საკვანძო წერტილის ნიშნულით და n_1, n_2 და n_3 სადგურებიანი სვლით:	$H_B=\frac{H_{B_1}\cdot P_1+H_{B_2}\cdot P_2+H_{B_3}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}$
(3.7.9.1')	სამივე სვლის შეუკვრელობები	$f_1=H_{B_1}-H_B$; $f_2=H_{B_2}-H_B$; $f_3=H_{B_3}-H_B$
(3.7.9.2)	ერთეული წონის საშუალო კვ. შეცდომა	$\eta=\pm\sqrt{\frac{[Pf]}{k-1}}$
(3.7.9.3)	B პიკეტის გაწონასწორებული ნიშნულის საშ. კვ შეცდომა	$M_B=\frac{\eta}{\sqrt{[P]}}$
	გეომეტრიული ნიველობის დროს ოთხი საკვანძო წერტილის მქონე პოლიგონის გაწონასწორება·	
(3.7.9.4)	A და B საკვანძო წერტილამდე აღმატების წონითი შუალი	$h_{1,2}=\frac{h_1\cdot P_1+h_2\cdot P_2}{P_1+P_2}$
(3.7.9.5)	$h_{1\cdot 2}$ აღმატების წონა	$P_{1,2}=P_1+P_2$, სადაც $P_1=\frac{1}{n_1}$ და $P_2=\frac{1}{n_2}$
(3.7.9.6)	პირველი და მეორე სვლის ეკვივალენტური სვლის სადგურთა რაოდენობა	$n_{1,2}=\frac{1}{P_{1,2}}$
(3.7.9.8)	C-დან D-მდე h_4, h_5 და h_6 აღმატების წონითი საშუალო	$h_{4,5,6}=\frac{h_4\cdot P_4+h_5\cdot P_5+h_6\cdot P_6}{P_4+P_5+P_6}$ სადაც $P_4=\frac{1}{n_4}$; $P_5=\frac{1}{n_5}$; $P_6=\frac{1}{n_6}$
(3.7.9.9)	n_4, n_5 და n_6-სადგურებიანი სვლის წონა	$P_{4,5,6}=P_4+P_5+P_6$
(3.7.9.10)	მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სვლის ეკვივალენტური სვლის სადგურთა რაოდენობა	$n_{4,5,6}=\frac{1}{P_{4,5,6}}$
(3.7.9.11)	სრული შეუკვრელობა	$f=h_{1,2}+h_3+h_{4,5,6}+h_7$
(3.7.9.12)	სულ სადგურთა რაოდენობა	$n=n_{1,2}+n_3+n_{4,5,6}+n_7$
(3.7.9.13)	ყოველ სადგურზე აღმატების შესწორება	$a=-\frac{f}{n}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3.7.9.14)	გაწონასწორებული ამაღლება A-დან B-მდე და C-დან D-მდე . . .	$h_{AB}=h_{1,2}+a\cdot n_{1,2}$ $h_{CD}=h_{4,5,6}+a\cdot n_{4,5,6}$
(3.7.9.15)	შეუკვრელობების	$f_1=h_1-h_{AB}$ $f_2=h_2-h_{AB}$ $f_4=h_4-h_{CD}$ $f_5=h_5-h_{CD}$ $f_6=h_6-h_{CD}$
(3.7.10.1)	კუთხზომითი აგეგმვის პოლიგონის საკვანძო გვერდის გაწონასწორებული დირექციული კუთხე	$(D_1D_2)=\frac{(D_1D_2)_1\cdot P_1+(D_1D_2)_2\cdot P_2+(D_1D_2)_3\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}$
(3.7.10.2)	წონები (გაზომილ კუთხეთა რაოდენობის შებრუნებული სიდიდეებია)	$P_1=\frac{1}{n_1};\ P_2=\frac{1}{n_2};\ P_3=\frac{1}{n_3}$
(3.7.10.4)	შეუკვრელობები.	$f_1=(D_1D_2)_1-(D_1D_2)$ $f_2=(D_1D_2)_2-(D_1D_2)$ $f_3=(D_1D_2)_3-(D_1D_2)$
(3.7.10.5)	გაწონასწორებული საკვანძო გვერდის დირექციული კუთხის საშ. კვ. შეცდომა	$MD_{1D^2}=\pm\sqrt{\frac{[Pf^2]}{[P](k-1)}}$
(3.7.10.6)	კუთხზომითი აგეგმვის პოლიგონის საკვანძო წერტილის გაწონასწორებული კოორდინატები .	$x_{D_1}=\frac{x^{I}_{D_1}\cdot P_1+x^{II}_{D_1}\cdot P_2+x^{III}_{D_1}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}$ $y_{D_1}=\frac{y^{I}_{D_1}\cdot P_1+y^{II}_{D_1}\cdot P_2+y^{III}_{D_1}\cdot P_3}{P_1+P_2+P_3}$
(3.7.10.7)	წონების	$P_1=\frac{1}{S_1};\ P_2=\frac{1}{S_2};\ P_3=\frac{1}{S_3}$
(3.7.10.9)	შეუკვრელობები	$f_{x_1}=x^{I}_{D_1}-x_{D_1}$ $f_{x_2}=x^{II}_{D_1}-x_{D_1}$ $f_{x_3}=x^{III}_{D_1}-x_{D_1}$ $f_{y_1}=y^{I}_{D_1}-y_{D_1}$ $f_{y_2}=y^{II}_{D_1}-y_{D_1}$ $f_{y_3}=y^{III}_{D_1}-y_{D_1}$

ფორმ. №	დასახელება	ფორმულა
(3 7 10 10)	სვლებში სიგრძის ზომის ერთეულზე შესწორება	I სვლისათვის— $\frac{f_{x_1}}{S_1}=\varepsilon_{x_1}$; $-\frac{f_{y_1}}{S_1}=\varepsilon_{y_1}$ II $-\frac{f_{x_2}}{S_2}=\varepsilon_{x_2}$; $-\frac{f_{y_2}}{S_2}=\varepsilon_{y_2}$ III $-\frac{f_{x_3}}{S_3}=\varepsilon_{x_3}$; $-\frac{f_{y_3}}{S_3}=\varepsilon_{y_3}$
(3.7.10 11)	საკვანძო წერტილის გაწონასწორებული კოორდინატების საშ. კვადრატული შეცდომა	$M_{x_{D_1}}=\pm\sqrt{\frac{[Pf_x^2]}{[P](k-1)}}$ $M_{y_{D_1}}=\pm\sqrt{\frac{[Pf_y^2]}{[P](k-1)}}$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Абрамов Н. М., Технические вычисления, 1928.
2. Андреев П. П., БЕЛЕНСКИЙ Н. С., Техника вычислений, 1953.
3. Бахурин И. М., Курс маркшейдерского искусства (спец. часть), 1932.
4. ბენაშვილი ა. ტოპოგრაფია, ნაწილი I, თბილისი, 1933.
5. Безикович Я., Приближенные вычисления, 1952.
6. Бермант А. Ф., Курс математического анализа, ч. I и II, 1950.
7. Большаков В. Д., Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей, 1965.
8. Большаков В. Д., Гайдаев П. А., Теория математической обработки геодезических измерений, 1977.
9. Боярский А. Я. и др., Теория математической статистики, 1931.
10. Брадис В., Как надо вычислять, 1934.
11. Брадис В., Теория и практика вычислений, 1933.
12. Буткевич Т. В. и Оглоблин Д. Н. Справочник маркшейдера, 1953,
13. Виттинг А., Приближенные вычисленния, 1952.
14. Закатов П. С. и др., Геодезия ч. I и II, 1954.
15. Келль Н. Г., Высшая геодезия и геодезические работы, ч I и II 1932—33.
16. Красовский Ф. Н., Избранные сочинения, т. I, III, IV, 1953, 1955.
17. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, 1950.
18. Кузьмин Б. С., Основы теории ошибок измерений, 1946.
19. Ларченко Е. Г., Техника вычислений, 1952 г.
20. Павлов Ф. Ф. Предвычисление погрешностей в основных маркшейдерских работах, 1950.
21. Петров Н. С. Основы теории ошибок измерений, 1953
22. Рабинович Б. Н. Основы построена опорных геодезических сетей, 1954.
23. Романов В. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов, 1952.
24. Смирнов В. И., Курс высшей математики для техников и физиков, т. I, 1933.
25. ტაბატაძე კ., უმაღლესი გეოდეზია, II, ცოდნა, თბილისი, 1963.
26. თევზაძე ნ., მანძილმზომები, ტექნიკა და შრომა, თბილისი, 1957.
27. თევზაძე ნ., საინჟინრო გეოდეზია, I, განათლება. თბილისი, 1974.
28. თევზაძე ნ., საინჟინრო გეოდეზია, II, განათლება, თბილისი, 1974.
29. თევზაძე ნ., განაზომთა ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ცოდნა, თბილისი, 1960.
30. თევზაძე ნ., უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, ცოდნა, თბილისი, 1964.
31. თევზაძე ნ., საინჟინრო გეოდეზია, VI, განათლება. თბილისი, 1975.
32. თევზაძე ბ., საინჟინრო გეოდეზია, VII, განათლება, თბილისი, 1976.
33. Чеботарев А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, 1936.

ИБ № 1643

რედაქტორი პ. ლაბარტყავა
მხატვრული რედაქტორი ო. მესხი
ტექნიკური რედაქტორი მ. ოსიტაშვილი
უფროსი კორექტორი ი. დონაძე
კორექტორი ი. მანჯავეიძე
გამომშვები ლ. გაბარაშვილი

გადაეცა წარმოებას. 6.09.82 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდად 8.07.83 წ., ქაღალდის ზომა 70X108/16. საბეჭდი ქაღალდი № 1, პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 35.7, სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 24,11
ტირაჟი 3000 შეკვეთა № 1367

ფასი 1 მან. 60 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, მარჯანიშვილის ქ., 5.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили 5.

1983

სპი-ის სტამბა, თბილისი, ლენინის ქ., 69.
Типография ГПИ, Тбилиси, ул. Ленина, № 69.