ნ. ღურგლიშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

II ნაწილი

მეორე გადამუშავებული გამოცემა

სსრ კავშირის უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დაშვებულია დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის.

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1980

Ხ. 1
დ. 921

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო შეიცავს შემდეგ თავებს: მრავალი ცვლადის ფუნქციები, ჯერადი და წირითი ინტეგრალები, მწკრივები, დიფერენციალური განტოლებები, მატრიცები, ველის თეორიის ელემენტები, ალბათობის თეორიის ელემენტები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები, ოპერაციული აღრიცხვის ელემენტები და მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება. კრებულში 2100-ზე მეტი მაგალითი და ამოცანაა. ისევე, როგორც I ნაწილში, აქაც ყოველ პარაგრაფს წინ უძღვის მოკლე თეორიული შესავალი. ყოველ სავარჯიშოს აქვს პასუხი და ზოგ შემთხვევაში — სათანადო მითითება.

$Д \dfrac{20203-115}{M-602(08)-83} 186-79$

I თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. ორი და რამდენიმე ცვლადის ფუნქციები

z ცვლადს ეწოდება x და y ცვლადების ცალსახა ფუნქცია, თუ x-ისა და y-ის ყოველ მნიშვნელობათა წყვილს მათი ცვლილების არიდან შეესაბამება z ცვლადის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. ამ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ასე აღნიშნავენ:

$$z=f(x,y).$$

x და y ცვლადებს ეწოდება არგუმენტები ანუ დამოუკიდებელი ცვლადები.

ანალოგიურად განიმარტება სამი და უფრო მეტი არგუმენტის ფუნქცია.

ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება xOy სიბრტყის იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელზედაც ეს ფუნქცია განსაზღვრულია. ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე გეომეტრიულად წარმოადგენს სიბრტყის სასრულ ან უსასრულო ნაწილს.

1. მოცემულია სამკუთხედის პერიმეტრი $2p$. გამოსახეთ სამკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი ორი x და y გვერდის ფუნქცია.

2. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და y სიმაღლის ფუნქცია.

3. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და ფუძის y რადიუსის ფუნქცია.

4. გამოსახეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი x სიმაღლისა და y გვერდითი წიბოს ფუნქცია.

5. 1) $f(x, y)=xy+\dfrac{x}{y}$. იპოვეთ $f(\frac{1}{2};\ 3)$, $f(1;\ -1)$;

2) $F(x,\ y)=\dfrac{x-2y}{2x-y}$. იპოვეთ $F(3;\ 1)$, $F(5;\ 3)$;

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f(2;-3)$, $f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$;

4) $z=e^{\sin(x+y)}$. იპოვეთ z, თუ $x=y=\dfrac{\pi}{2}$.

6. 1) $z=y^{x^2-1}+x^{y^2-1}$. იპოვეთ z, თუ $x=2$, $y=2$; $x=1$, $y=2$;

2) $F(x, y)=\dfrac{x}{x-y}$. აჩვენეთ, რომ $F(a, b)+F(b, a)=1$;

3) $f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{1}{f(x,y)}$.

იპოვეთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისა:

7. $z=x^2+y^2$.

8. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

9. $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

10. $z=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}$.

11. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

12. $z=\dfrac{xy}{y-x}$.

13. $z=\ln(x+y)$.

14. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

15. $z=\sqrt{xy}$.

16. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.

17. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$.

18. $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-4}$.

19. $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$.

20. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$.

21. 1) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$; 2) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

22. $u=\ln(x^2+y^2+z^2-1)$.

$z=f(x, y)$ ფუნქციის დ ო ნ ი ს წ ი რ ი ეწოდება ისეთ $f(x, y)=c$ წირს xOy სიბრტყეზე, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $z=c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის წირები შემდეგი ფუნქციებისა:

23. 1) $z=x+y$; 2) $z=x^2-y^2$; 3) $z=\ln(x^2+y)$; 4) $z=\sqrt{xy}$.

24. 1) $z=x^2+y^2$; 2) $z=x^2y$; 3) $z=\dfrac{x}{y^2}$; 4) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

$u=f(x, y, z)$ ფუნქციის დ ო ნ ი ს ზ ე დ ა პ ი რ ი ეწოდება ისეთ $f(x, y, z)=c$ ზედაპირს, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $u=c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის ზედაპირები შემდეგი ფუნქციებისა:

25. 1) $u=x+y+z$; 2) $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$; 3) $u=\sqrt{x^2+y^2}$;

4) $u=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}$.

26. 1) $u=5^{2x+3y-z}$; 2) $u=x^2+y^2+z^2$; 3) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

§ 2. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარი $P_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ ყოველი $P(x, y)$ წერტილისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\eta^2$ უტოლობებს, რასაც ასე ჩავწერთ:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A, \qquad \text{ანუ} \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

$z=f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x\to x_0$, $y\to y_0$, უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილზე:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0).$$

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

27. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

28. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$

29. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

30. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

31. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

33. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}$.

34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

35. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$.

36. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

37. 1) $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$; 2) $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$;

3) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $u=\dfrac{1}{z^2-x^2-y^2}$.

38. 1) $z=\dfrac{1}{x-y}$; 2) $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$; 3) $z=\dfrac{x^2+2y+4}{y-x^2}$; 4) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$.

§ 8. ფუნქციის კერძო ნაზრდები და წარმოებულები

$z=f(x, y)$ ფუნქციის კ ე რ ძ ო ნ ა ზ რ დ ე ბ ი x-ითა და y-ით (x, y) წერტილში ეწოდება შესაბამისად შემდეგ სხვაობებს:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y),\qquad \Delta_y z=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

თუ $z=f(x,y)$ და მივიღებთ, რომ y მუდმივი სიდიდეა, მაშინ z ფუნქციის კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი x-ით (x, y) წერტილში ეწოდება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=f'_x(x,y)$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს; ანალოგიურად, თუ მივიღებთ, რომ x მუდმივი სიდიდეა, მაშინ კერძო წარმოებული y-ით (x, y) წერტილში იქნება:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=f'_y(x,y),$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს.

ასევე განიმარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

იპოვეთ კერძო წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

39. $z=x^2\sin^2 y$.

40. $z=\dfrac{y}{x}$.

41. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

42. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

43. $z=\ln\ (x^2+y^2)$.

44. $z=\ln\ \sin\ (x-2y)$.

45. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$.

46. $z=x^3+3x^2y-y^3$.

47. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

48. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

49. $z=x^y$.

50. $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

51. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

52. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

53. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

54. $u=xy+yz+zx$.

55. $u=x^3y^2z+2x-3y+z+5$.

56. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$.

57. $u=(xy)^z$.

58. $u=z^{xy}$.

59. $f(x,\ y)=x^2+y^3$. იპოვეთ $f'_x\ (2;3)$, $f'_y(2;3)$.

60. $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$. იპოვეთ $f'_x(2;\ 1)$, $f'_y\ (2;\ 1)$.

61. $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$. იპოვეთ $f'_x(1;2;0)$, $f'_y(1;2;0)$, $f'_z(1;\ 2;\ 0)$.

62. $f(x,y,z)=2x^2+y^2-3z^2-3xy-2xz$. იპოვეთ $f'_x(0;0;1)$, $f'_y(0;\ 0;1)$, $f'_z(0;\ 0;1)$.

63. $z=e^{\frac{x}{y^2}}$. აჩვენეთ, რომ $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

64. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$. აჩვენეთ, რომ $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

65. $u=\ln\ (1+x+y^2+z^3)$. იპოვეთ $u'_x+u'_y+u'_z$, როცა $x=y=z=1$.

66. $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$.

67. $z=xy$. გამოთვალეთ $\Delta_x z$ და $\Delta_y z$, თუ $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}3$.

68. $z=x^2-xy+y^2$. გამოთვალეთ $\Delta_x z$ და $\Delta_y z$, თუ x იცვლება 2-დან 2,1-მდე, y იცვლება 2-დან 1,9-მდე.

ეილერის ფორმულა. $z=f(x,\ y)$ ფუნქციას ეწოდება n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი t-სათვის მართებულია

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y)$$

იგივეობა. n-ური რიგის ერთგვაროვანი წარმოებადი ფუნქციისათვის მართებულია ეილერის შემდეგი ფორმულა:

$$xf'_x(x,\ y)+yf'_y(x,\ y)=nf\ (x,\ y).$$

შეამოწმეთ ეილერის ფორმულა შემდეგ მაგალითებზე:

69. $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$.

70. $f(x,y)=\ln\dfrac{y}{x}$.

71. $f(x,\ y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

72. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x-y}$.

73. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

74. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

§ 4. ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი

$z=f(x, y)$ ფუნქციის ს რ უ ლ ი ნ ა ზ რ დ ი ეწოდება

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

სხვაობას. თუ $f(x, y)$ ფუნქციას (x, y) წერტილზე აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ მისი სრული ნაზრდი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

სადაც $\alpha\to0$, $\beta\to0$, როცა $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$. Δz ნაზრდის მთავარ ნაწილს z ფუნქციის სრული დიფერენციალი ეწოდება და ასე აღინიშნება:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (dx=\Delta x, \quad dy=\Delta y).$$

თუ Δx და Δy საკმაოდ მცირეა, მაშინ $\Delta z\approx dz$.

ანალოგიურად განიმარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი. კერძოდ, თუ $u=f(x, y, z)$, მაშინ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

იპოვეთ სრული დიფერენციალები შემდეგი ფუნქციებისა:

75. $z=x^2y^3$.

76. $z=x^3+y^3-3xy$.

77. $z=x^2+xy^2+\sin y$.

78. $z=\ln xy$.

79. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

80. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

81. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

82. $z=\arcsin\frac{x}{y}$.

83. $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

84. $u=xyz$.

85. $u=x^{yz}$.

86. $u=e^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z$.

87. იპოვეთ dz, თუ $x=\frac{u^2+v^2}{2}$, $y=\frac{u^2-v^2}{2}$, $z=uv$.

88. იპოვეთ dz, თუ $x=\sqrt{a}(\sin u+\cos v)$, $y=\sqrt{a}(\cos u-\sin v)$, $z=1+\sin(u-v)$.

89. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. გამოთვალეთ $df(x,y)$, როცა $x=1$, $y=0$, $dx=\frac{1}{2}$, $dy=\frac{1}{4}$.

90. $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$. გამოთვალეთ df $(1;1)$.

91. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^2y$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=3$, $y=4$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0{,}5$.

92. გამოთვალეთ $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

93. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=2$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=2+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

94. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^2y$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=1$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=1+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

გამოთვალეთ მიახლოებით:

95. $(1{,}02)^{3{,}01}$.

96. $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

97. $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$.

98. $\operatorname{arctg}\dfrac{5{,}01}{4{,}98}$.

99. მართკუთხედის ერთი გვერდი $a=10$ სმ, ხოლო მეორე — $b=24$ სმ. როგორ შეიცვლება მართკუთხედის l დიაგონალი, თუ a გვერდს გავადიდებთ 4 მმ-ით, ხოლო b გვერდს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

100. კონუსის სიმაღლე $H=30$ სმ, ფუძის რადიუსი $R=10$ სმ. როგორ შეიცვლება კონუსის მოცულობა, თუ H-ს გავადიდებთ 3 მმ-ით, ხოლო R-ს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

§ 5. რთული ფუნქციის გაწარმოება. სრული წარმოებული

1°. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ z ფუნქციის წარმოებული t-თი (სრული წარმოებული) გამოითვლება

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

ფორმულით. კერძოდ, თუ t ემთხვევა ერთ-ერთ არგუმენტს, მაგალითად, x-ს, მაშინ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}.$$

აქ F, f და φ წარმოებადი ფუნქციებია.

2°. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ და თუ F, f და φ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}.$$

აქ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია.

101. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\frac{x}{y}$, $x=e^{t}$, $y=\ln t$.

102. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^{3}$.

103. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

104. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=e^{2x^2-3y^2}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$.

105. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=x^2+\sqrt{y}$, $y=\sin x$.

106. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y=x^2$.

107. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=xyz$, $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\operatorname{tg} t$.

108. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=H$.

109. იპოვეთ $\frac{du}{dx}$, თუ $u=\operatorname{tg}(3x+2y^2-z)$, $y=\frac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$.

110. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=u^{v}$, $u=\sin x$, $v=2x$.

111. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=v+2u$.

112. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.

113. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=u+v^2$, $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$.

114. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=e^{u-2v}$, $u=\sin x$, $v=x^3+y^2$.

115. $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$-ს საშუალებით, თუ $z=f(x,y)$, სადაც $u=x+2y$, $v=x-y$.

116. $\frac{\partial u}{\partial r}$ და $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ გამოსახეთ $\frac{\partial u}{\partial x}$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$-ის საშუალებით, თუ $u=f(x,y)$, სადაც $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

117. აჩვენეთ, რომ $z=f(x+ay)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$ განტოლებას.

118. $z=y+f(u)$, სადაც $u=x^2-y^2$. აჩვენეთ, რომ $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x$.

119. აჩვენეთ, რომ $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ განტოლებას.

120. აჩვენეთ, რომ $z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ განტოლებას.

§ 6. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალები

1°. **მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.** ვთქვათ, მოცემულია $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ და $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. ამ წარმოებულების კერძო წარმოებულებს ეწოდება *მეორე რიგის კერძო წარმოებულები* და ასე აღინიშნება:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x, y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y).$$

ანალოგიურად განიმარტება და აღინიშნება მესამე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.

2°. **მაღალი რიგის დიფერენციალები.** $z=f(x, y)$ ფუნქციის *მეორე რიგის სრული დიფერენციალი* ეწოდება მისი პირველი რიგის სრული დიფერენციალის დიფერენციალს და ასე აღინიშნება: $d^2z=d(dz)$. ანალოგიურად, $d^3z=d(d^2z)$ და, საზოგადოდ, $d^nz=d(d^{n-1}z)$. თუ x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, მაშინ z ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი მოიძებნება

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

ფორმულით, რომელიც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: $d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2z$. ანალოგიურად, $d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3z$ და ა. შ.

თუ $z=f(x, y)$, სადაც x და y ერთი ან რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია, მაშინ

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

იპოვეთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

121. $z=\ln(x^2+y)$. **122.** $z=x^3-4x^2y+5y^2$.

123. $z=x^3y^2-3xy^3-xy$. **124.** $z=\frac{x^2}{1-2y}$.

125. $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$. **126.** $z=\cos xy$.

127. $z=x^y$. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

128. $z=e^x(\cos\ y+x\sin\ y)$. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

129. იპოვეთ $f''_{xx}(0;0)$, $f''_{xy}(0;0)$, $f''_{yy}(0;0)$, თუ $f(x,y)=(1+x)^m\,(1+y)^n$.

130. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. იპოვეთ $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$.

131. $u=xy+yz+zx$. იპოვეთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

132. იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, თუ $z=\sin\ xy$.

133. იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, თუ $z=e^{xy^2}$.

134. იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, თუ $u=x^a y^b z^c$.

135. იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, თუ $u=e^{xy}\sin z$.

136. იპოვეთ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}$, თუ $u=z^2e^{x+y^2}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

137. $z=\ln\ (x^2+y^2)$. **138.** $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

139. $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, სადაც φ და ψ მეორე რიგამდე წარმოებადი ნებისმიერი ფუნქციებია.

140. $u=A\sin(a\lambda t+\varphi)\cdot\sin x$.

141. იპოვეთ d^2z, თუ $z=3x^2y-2xy+y^2-1$.

142. იპოვეთ d^2z, თუ $z=x(\ln y-\ln x)$.

143. იპოვეთ d^2z, თუ $z=\ln(x-y)$.

144. იპოვეთ d^2z, თუ $z=e^{xy}$.

145. იპოვეთ dz და d^2z, თუ $z=2x^2-3xy-y^2$.

146. იპოვეთ dz და d^2z, თუ $z=x\sin^2y$.

147. $u=\sin(x+y+z)$. $d^2u=?$ 148. $u=xyz$. $d^2u=?$

149. $z=\sin(2x+y)$. იპოვეთ d^3z, როცა $x=0$, $y=\pi$.

150. $z=e^x\cos y$. $d^3z=?$

151. $u=\varphi(t)$, $t=xy$. იპოვეთ du და d^2u.

152. $u=\varphi(t)$, $t=x^2+y^2$. იპოვეთ du და d^2u.

153. იპოვეთ d^2z, თუ $z=f(u,v)$, სადაც $u=ax$, $v=by$.

154. იპოვეთ du და d^2u, თუ: 1) $u=\varphi(\xi,\eta)$, სადაც $\xi=x+y$, $\eta=x-y$; 2) $u=\varphi(\xi,\eta)$, სადაც $\xi=x^2+y^2$, $\eta=xy$.

§ 7. არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება

1°. თუ $f(x, y)=0$ განტოლება, სადაც $f(x, y)$ არის x-ითა და y-ით წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ფუნქციას და $f'_y(x, y)\neq0$, მაშინ ამ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \tag{1}$$

ფორმულით. მაღალი რიგის წარმოებულები მოიძებნება (1) ტოლობის მიმდევრობითი გაწარმოებით. ამასთან, მხედველობაში მიიღება, რომ y არის x-ის ფუნქცია.

2°. ანალოგიურად, თუ $f(x, y, z)=0$ განტოლება, სადაც $f(x, y, z)$ არის x, y, z ცვლადების მიმართ წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს z-ს, როგორც x და y დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციას და $f'_z(x,y,z)\neq0$, მაშინ ამ არაცხადი ფუნქციის კერძო წარმოებულები მოიძებნება

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)} \tag{2}$$

ფორმულებით.

თუ ორი განტოლების სისტემა

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v)=0, \\ F_2(x, y, u, v)=0 \end{cases} \tag{3}$$

განსაზღვრავს u-სა და v-ს, როგორც x და y ცვლადების ფუნქციებს და დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}\neq0,$$

მაშინ ამ ფუნქციების სრული დიფერენციალების მოსაძებნად საჭიროა გავადიფერენციროთ (3) განტოლებები და მიღებული სისტემა ამოვხსნათ du-სა და dv-ს მიმართ; ამით ვიპოვოთ u და v ფუნქციების სრულ დიფერენციალებს, ხოლო dx-ისა და dy-ის კოეფიციენტები მოგვცემს შესაბამის კერძო წარმოებულებს.

იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი არაცხადი ფუნქციებისა:

155. $ye^x+e^y=0$. **156.** $x=y-a\sin y$.

157. $x+y=e^{x-y}$. **158.** $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

159. $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$.

160. $x^2+y^3+e^{xy}=0$; იპოვეთ y', როცა $x=0$.

161. $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$; იპოვეთ y'', როცა $x=1$, $y=1$.

162. $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$; იპოვეთ y'', როცა $x=1$.

163. იპოვეთ $y^2-xy=4$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი $x=3$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილებში.

164. $x^2+y^2+z^2-6x=0$. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

165. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

166. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

167. $e^z-xyz=0$. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

168. $e^{-xy}-2z+e^z=0$. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

169. 1) $z^3-3xyz=a^3$. იპოვეთ dz;
2) $x^2+y^2+z^2=a^2$; იპოვეთ dz და d^2z.

170. $\ln z=x+y+z-1$. იპოვეთ dz და d^2z.

171. 1) $xyz=a^3$. აჩვენეთ, რომ $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2z$.

2) $z^2+\dfrac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$. აჩვენეთ, რომ $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}$.

იპოვეთ სრული დიფერენციალები და კერძო წარმოებულები u და v არაცხადი ფუნქციებისა:

172. 1) $\begin{cases} x+y+u+v=0, \\ x^2+y^2+u^2+v^2=b^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-u-v=0, \\ xu+yv=1. \end{cases}$

§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა

ზოგიერთ შემთხვევაში საჭირო ხდება დამოუკიდებელი ცვლადების შეცვლა ახალი ცვლადებით. ასეთი გარდაქმნა სრულდება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესების მიხედვით.

173. გარდაქმენით $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ განტოლება, თუ $x=e^t$.

174. გარდაქმენით $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{a^2}{x^2}y=0$ განტოლება, თუ $x=\dfrac{1}{t}$.

არგუმენტად მიიღეთ y და გარდაქმენით შემდეგი განტოლებები:

175. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$ **176.** $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-\dfrac{dy}{dx}=0.$

177. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გარდაქმენით $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$ გამოსახულება.

178. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გარდაქმენით $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ განტოლება.

გამოსახეთ ახალი დამოუკიდებელი u და v ცვლადებით:

179. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ განტოლება, თუ $u=x$, $v=x^2+y^2$.

180. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0$ განტოლება, თუ $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

181. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ განტოლება, თუ $u=y+ax$, $v=y-ax$.

182. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ განტოლება, თუ $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$.

183. $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ განტოლება, თუ $u=y$, $v=\dfrac{y}{x}$.

184. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ განტოლება, თუ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

§ 9. ტეილორის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

თუ $z=f(x, y)$ ფუნქციას (a, b) წერტილის მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (უკანასკნელის ჩათვლით), მაშინ ამ წერტილის მიდამოში მართებულია ტეილორის შემდეგი ფორმულა:

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{1}{1!}[f'_x(a, b)(x-a)+f'_y(a, b)(y-b)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2]+$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y), \qquad (1)$$

სადაც

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a+\Theta(x-a),\ b+\Theta(y-b)](0<\Theta<1).$$

სხვა აღნიშვნებით:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]+\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(x,y)+$$

$$+2hkf''_{xy}(x,y)+k^2f''_{yy}(x,y)]+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x,y)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x+\Theta h,\ y+\Theta k). \qquad (2)$$

(1) ფორმულის კერძო შემთხვევას, როცა $a=b=0$, ეწოდება მაკლორენის ფორმულა.

185. დაშალეთ $f(x+h,\ y+k)$ ფუნქცია h-ისა და k-ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x,y)=x^3+2y^3-xy$.

186. დაშალეთ $f\ (x+h,\ y+k)$ ფუნქცია h-ისა და k-ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f\ (x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2$.

187. დაშალეთ $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$. ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(-2;\ 1)$ წერტილის მიდამოში.

188. დაშალეთ $f(x,\ y)=e^{x+y}$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(1;\ -1)$ წერტილის მიდამოში მე-3 ხარისხის წევრებამდე (უკანასკნელის ჩათვლით).

189. დაშალეთ $f(x,\ y)=e^x\sin y$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

190. დაშალეთ $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

§ 10. არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმი

$F(x,\ y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი y ფუნქციის ექსტრემუმის მოსაძებნად საჭიროა ამოვხსნათ

$$F(x,\ y)=0, \qquad F'_x(x,\ y)=0 \qquad (1)$$

განტოლებათა სისტემა და განვიხილოთ მისი ისეთი ამონახსნები, რომელთათვისაც $F'_y(x,\ y)\neq 0$. თუ (1) სისტემის რომელიმე $(x_0,\ y_0)$ ამონახსნისათვის $F''_{xx}(x_0,\ y_0)$ და $F'_y(x_0,\ y_0)$ გამოსახულებებს აქვს ერთნაირი ნიშანი, მაშინ x_0 წერტილზე არაცხად y ფუნქციას ექნება მაქსიმუმი, თუ სხვადასხვა ნიშანი — მინიმუმი.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

191. $x^2-xy+y^2-x=0$.

192. $x^3+y^3-3axy=0 \quad (a>0)$.

193. $y^2+2x^2y-4x-3=0$.

194. $x^3+y^3-a^2x=0 \quad (a>0)$.

195. $x^4+y^4-4xy=0$.

196. $a^3x^2-2abxy^2-y^5=0 \quad (a>0,\ b>0)$.

§ 11. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

$f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ M_0 წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოს ყოველი $(x, y)\neq(x_0, y_0)$ წერტილისათვის შესრულებულია $f(x, y)<f(x_0, y_0)$ უტოლობა (ან შესაბამისად $f(x, y)>f(x_0, y_0)$).

$f(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობებია:

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0. \tag{1}$$

იმ (x_0, y_0) წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებათა სისტემას, *სტაციონარული წერტილი* ეწოდება. ზოგად შემთხვევაში $f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის (x_0, y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ასეთია:
აღვნიშნოთ $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta=AC-B^2$, სადაც (x_0, y_0) სტაციონარული წერტილია; თუ:

1) $\Delta>0$, მაშინ $\begin{cases} f(x_0, y_0)=z_{max}, & \text{როცა } A<0, \\ f(x_0, y_0)=z_{min}, & \text{როცა } A>0; \end{cases}$

2) $\Delta<0$, არა გვაქვს ექსტრემუმი;

3) $\Delta=0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, რომელიც დამატებით შესწავლას მოითხოვს.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

197. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

198. $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$.

199. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

200. $z=x^2-xy+y^2-3x-2y+2$.

201. $z=x^3+y^3+3xy$.

202. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

203. $z=(x-1)^2-2y^2$.

204. $z=x^2+y^2-3xy-27$.

205. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

206. $z=x^2-xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+1$.

207 $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

208. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

209 $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

210 $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4},\quad 0\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$.

211. $z=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

212. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

პირობითი ექსტრემუმი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z=f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x, y)=0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y),$$

სადაც λ უცნობი მამრავლია, და მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმი. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა დაიყვანება სამი განტოლების სისტემამდე:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\equiv\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

$$\varphi(x,y)=0,$$

საიდანაც განისაზღვრება x, y და λ.

იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

213. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\quad x+y=2$ პირობით.

214. $z=6-4x-3y$, $\quad x^2+y^2=1$ პირობით.

215. $z=x^2+y^2$, $\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ პირობით.

216. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ პირობით $(a>0)$.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრული და უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ არეში, მაშინ ის თავის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას მიაღწევს არის შიგა წერტილში, ან არის საზღვარზე.

217. იპოვეთ $z=1+x+2y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $x+y\leqslant1$ არეში.

218. იპოვეთ $z=x^2+2xy-4x+8y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში.

219. იპოვეთ $z=x^2y(2-x-y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0$, $y=0$, $x+y=6$ წრფეებით შემოსაზღვრულ სამკუთხედში.

220. იპოვეთ $z=x^2+y^2-xy+x+y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x\leqslant0$, $y\leqslant0$, $x+y\geqslant-3$ არეში.

221. იპოვეთ $z=x^2-y^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2+y^2\leqslant4$ წრეში.

222. იპოვეთ $z=x+y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2+y^2\leqslant1$ წრეში.

223. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ სამ ისეთ დადებით შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

224. $2p$ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებიდან იპოვეთ ისეთი სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

225. $y^2=4x$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც უმცირესი მანძილით არის დაშორებული $x-y+4=0$ წრფიდან.

226. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილები, რომლებიც უმცირესი და უდიდესი მანძილებით იქნებიან დაშორებული $2x+$ $+3y-6=0$ წრფიდან.

227. ყველა იმ მართკუთხა პარალელეპიპედიდან, რომელთაც მოცემული V მოცულობა აქვს, იპოვეთ ისეთი, რომლის სრული ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

228. თუნუქის ფურცელს აქვს მართკუთხედის ფორმა, რომლის სიგანე 24 სმ-ია. რა ზომაზე უნდა გადავღუნოთ ფურცელი და რა დახრილობა უნდა მივცეთ მას, რომ მიღებული პრიზმული ჭურჭელი უდიდესი მოცულობისა იყოს?

§ 12. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია $F(x, y, z)=0$ სახით, სადაც $F(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M(x, y, z)$ წერტილში, მაშინ ზედაპირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებია:

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \qquad \frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z},$$

სადაც X, Y, Z მხები სიბრტყის ან ნორმალის მიმდინარე კოორდინატებია.

თუ ზედაპირის რომელიმე წერტილზე $F'_x=F'_y=F'_z=0$, მაშინ ამ წერტილზე (განსაკუთრებული წერტილი) ზედაპირს არ ექნება არც მხები სიბრტყე და არც ნორმალი.

229. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=14$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1;2;3)$ წერტილში.

230. იპოვეთ $z=x^2+2y^2$ ელიფსური პარაბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1;\ 1;\ 3)$ წერტილში.

231. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ კონუსის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M\ (4;3;4)$ წერტილში.

232. იპოვეთ $4x^2+9y^2+36z^2=36$ ელიფსოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილში, სადაც $x=2,\ y=1,\ z>0$.

233. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილში.

234. იპოვეთ $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები M (1; 2;—1) წერტილში.

235. იპოვეთ $x^2+2y^2+3z^2=21$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x+4y+6z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

236. იპოვეთ $x^2+4y^2+z^2=36$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x+y-z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

237. დაწერეთ $x^2+y^2=z^2$ ზედაპირის ნორმალის განტოლება $M(3;4;5)$ წერტილში. ზედაპირის რომელ წერტილში არ არის ნორმალი განსაზღვრული?

238. იპოვეთ $2z=x^2-y^2$ ზედაპირის M (2; 2; 0) წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

239. იპოვეთ $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ ზედაპირის მხები სიბრტყე M (2; 2; 2) წერტილში.

240. იპოვეთ $z=xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

241. დაამტკიცეთ, რომ $xyz=a^3$ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო სიბრტყეებთან შედგენილი ტეტრაედრის მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. იპოვეთ ეს მოცულობა.

242. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ზედაპირის ყოველ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების ჯამი არის მუდმივი a სიდიდე.

243. რა კუთხით იკვეთება $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრი და $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ სფერო $M\left(\frac{R}{2};\ \frac{R\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$ წერტილში?

244. აჩვენეთ, რომ $xy=az^2$, $x^2+y^2+z^2=b$, $z^2+2x^2=c(z^2+2y^2)$ ზედაპირები ორთოგონალურია.

§ 13. ბრტყელი წირის განსაკუთრებული წერტილები

$M(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება $f(x, y)=0$ წირის განსაკუთრებული წერტილი, თუ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს შემდეგ სამ განტოლებას:

$$f(x_0, y_0)=0,\quad f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

ვთქვათ, განსაკუთრებულ M (x_0, y_0) წერტილზე მეორე რიგის

$$A=f''_{xx}(x_0, y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0, y_0),\ C=f''_{yy}(x_0, y_0)$$

წარმოებულები ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის და $\Delta=AC-B^2$. ამ შემთხვევაში:

1) თუ $\Delta>0$. მაშინ M არის *განმხოლოებული* წერტილი;

2) თუ $\Delta<0$, მაშინ M არის *ორჯერადი კვანძითი* წერტილი;

3) თუ $\Delta=0$, მაშინ M არის *პირველი ან მეორე გვარის უკუქცევის* წერტილი, ან *განმხოლოებული* წერტილი, ან კიდევ *თანახების* წერტილი.

უკუქცევისა და თანახების წერტილში მრუდის ორი შტოს მიმართ არსებობს ერთი საერთო მხები. წირს ორჯერად წერტილზე აქვს ორი მხები, რომელთა კუთხური კოეფიციენტები მოიძებნება

$$f''^{0}_{yy}y'^{2}+2f''^{0}_{xy}y'+f''^{0}_{xx}=0$$

განტოლებიდან.

შეისწავლეთ განსაკუთრებული წერტილები შემდეგი წირებისა:

245. $x^3-x^2-y^2=0$,

246. $x^4+y^4-x^2-y^2=0$.

247. $y^2=x^3-2x^2+x$.

248. $y^2=x^3+x^2$.

249. $x^3+y^3-3axy=0 \quad (a>0)$.

250. $y^2+x^4-x^2=0$.

251. $(2a-x)y^2=x^3$.

252. $y^2=(x+2)^3$.

253. $x^5-(y-x^2)^2=0$.

254. $(y-x)^2-x^3=0$.

255. $y^2-x^4+x^6=0$.

256. $y^2-x^3(2-x)=0$.

§ 14. ბრტყელ წირთა ოჯახის მომვლები

ბრტყელ წირთა ოჯახის მომვლები ეწოდება იმ წირს, რომელიც ეხება მოცემული ოჯახის ყოველ წირს, მასთან მისი ყოველი წერტილი განსახილავი ოჯახის რომელიმე წირის შეხების წერტილია.

$f(x, y, \alpha)=0$ წირთა ოჯახის მომვლები, თუ იგი არსებობს, მოიძებნება α პარამეტრის გამორიცხვით

$$f(x, y, \alpha)=0, \qquad f'_{\alpha}(x, y, \alpha)=0$$

განტოლებათა სისტემიდან, რაც მოგვცემს $F(x, y)=0$ სახის განტოლებას.

შეიძლება ისიც მოხდეს, რომ ამ გზით მიღებული წირი არ წარმოადგენდეს მომვლებს, არამედ იყოს წირთა ოჯახის განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლე.

იპოვეთ მომვლები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

257. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-3=0$.

258. $y=\alpha x+\alpha^2$.

259. $(x-\alpha)^2+y^2=R^2$.

260. $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$.

261. $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{(5-\alpha)^2}=1$.

262. $y=\alpha x-\sqrt{1+\alpha^2}$.

263. $y-1=(x-\alpha)^2$.

264. $y=(x-\alpha)^3$.

265. $x^2-(y-\alpha)^3=0$.

266. $(y-1)^2=(x-\alpha)^3$.

267. $y^3=(x-\alpha)^2$.

268. $(y-\alpha)^2=x^3$.

269. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლები, რომელთა მიერ კოორდინატთა ღერძებზე ჩამოჭრილი მონაკვეთების ჯამი მუდმივი a სიდიდეა.

270. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლები, რომელთა მონაკვეთები კოორდინატთა ღერძებს შორის მოთავსებული, არის მუდმივი a სიდიდე.

271. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლები, რომლებიც კოორდინატთა ღერძებთან ადგენს მუდმივი S ფართობის სამკუთხედს.

272. იპოვეთ იმ ელიფსების ოჯახის მომვლები, რომელთა სიმეტრიის ღერძები ემთხვევა კოორდინატთა ღერძებს, ხოლო ფართობი მუდმივი S სიდიდეა.

§ 15. სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

ვექტორული $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ ცნობილია მისი $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$ გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$\vec{r}=r_x(t)\,\vec{i}+r_y(t)\,\vec{j}+r_z(t)\,\vec{k},$$

სადაც $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებია.

ვექტორული ფუნქციის წარმოებული t სკალარული არგუმენტით ასე გამოითვლება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{dr_x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dr_y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dr_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

ვექტორული ფუნქციის წარმოებულის მოდული

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr_z}{dt}\right)^2}.$$

$\vec{r}=\vec{r}(t)$ ცვლადი ვექტორის ბოლო წერტილი სივრცეში აღწერს წირს, რომელსაც $\vec{r}$ ვექტორის *ჰოდოგრაფი* ეწოდება

თუ t აღნიშნავს დროს, მაშინ $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ არის $\vec{r}$ ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარე, ხოლო $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{w}$ — ბოლო წერტილის აჩქარება.

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის გაწარმოების ძირითადი წესებია:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}-\frac{d\vec{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\vec{a})=m\frac{d\vec{a}}{dt}$, სადაც m მუდმივი სკალარია;

3) $\frac{d}{dt}[\varphi(t)\vec{a}]=\frac{d\varphi}{dt}\vec{a}+\varphi\frac{d\vec{a}}{dt}$, სადაც $\varphi(t)$ არის t-ს სკალარული ფუნქცია;

4) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}+\vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{dt}$; 5) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\vec{a}[\varphi(t)]=\frac{d\vec{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$;   7) $\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}=0$,   თუ $|\vec{a}|=\text{const}$.

273. იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ვექტორებისა:

1) $\vec{r}=\text{ctg}t\cdot\vec{i}+\text{arctg}t\cdot\vec{j}$;   2) $\vec{r}=e^{-t}\cdot\vec{i}+2t\vec{j}+\ln t\cdot\vec{k}$;   3) $\vec{r}=t^2\vec{i}-\frac{1}{t}\vec{i}+\frac{1}{t^2}\vec{k}$.

274. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r}=4t\vec{i}-3t\vec{j}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

275. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი დროის ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r}=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

276. მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$. განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t=\frac{\pi}{2}$; $t=\pi$.

277. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=3t\vec{i}+(4t-t^2)\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარის ვექტორები, როცა $t=0$; 1; 2; 3.

278. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=3\cos t\cdot\vec{i}+4\sin t\cdot\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t=0;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}$.

279. განსაზღვრეთ, რომელი წირებია შემდეგი ვექტორული ფუნქციების ჰოდოგრაფები: 1) $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{c}$; 2) $\vec{r}=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$; 3) $\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{b}t$, სადაც $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორებია, მასთან $\vec{a}\perp\vec{b}$.

280. მოცემულია $\vec{r}=\vec{a}\cos\omega t+\vec{b}\sin\omega t$, სადაც ω, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივებია. აჩვენეთ, რომ:

1) $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega(\vec{a}\times\vec{b})$;   2) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\omega^2\vec{r}=0$.

281. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{r}=\vec{a}e^{\omega t}+\vec{b}e^{-\omega t}$, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივი ვექტორებია, მაშინ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}-\omega^2\vec{r}=0.$$

282. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{e}$ არის $\vec{E}$ ვექტორის მგეზავი, მაშინ

$$\vec{e}\times d\vec{e}=\frac{\vec{E}\times d\vec{E}}{\vec{E}^2}.$$

§ 10. სივრცის წირის ელემენტები

სივრცის წირის განტოლებები პარამეტრული სახით ასეთია:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

სადაც $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ წარმოადგენს t პარამეტრის მოცემულ ფუნქციებს. სივრცის წირის განტოლებები ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r}=f(t)\vec{i}+\varphi(t)\vec{j}+\psi(t)\vec{k}.$$

სივრცის წირის რკალის დიფერენციალი გამოითვლება

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

ფორმულით.

1°. **სივრცის წირის მხები წრფე და ნორმალური სიბრტყე.** სივრცის წირის მ ხ ე ბ ი წ რ ფ ე $M(x, y, z)$ წერტილში ეწოდება წირის MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როდესაც M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ მოცემული წირის გასწვრივ. სივრცის წირის M წერტილში მხები წრფის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს ეწოდება ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'},\qquad x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0,$$

სადაც X, Y, და Z მხები წრფის ან ნორმალური სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

მხები წრფის მიმართულების კოსინუსები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი შემდეგი წირებისა:

283. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\frac{t}{2}$.

284. $x=\cos t,\quad y=\sin t,\ z=\ln\cos t$.

285. $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t\sqrt{2}$.

286. $x=e^t\cos t,\ \ y=e^t\sin t,\ z=e^t$.

შეადგინეთ შემდეგი წირების მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები ნაჩვენებ წერტილებში და იპოვეთ მხების მიმართულების კოსინუსები:

287. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,$ როცა $t=1$.

288. $x=R\cos^2 t,\ y=R\sin t\cos t,\ z=R\sin t,$ როცა $t=\frac{\pi}{4}$.

289. იპოვეთ $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$ ხრახნწირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=\frac{\pi}{2}$.

290. იპოვეთ $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=1$.

291. იპოვეთ $x^2+y^2=10,\ y^2+z^2=25$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები $M(1;\ 3;\ 4)$ წერტილში.

292. იგივე $z=x^2+y^2,\ x=y$ წირისათვის $M(1;\ 1;\ 2)$ წერტილში.

2°. სივრცის წირის მიმხები სიბრტყე, ბინორმალი, მთავარი ნორმალი, გამწრფევი სიბრტყე. ბუნებრივი სამწახნაგა.

ავიღოთ სივრცის წირის განტოლება ვექტორული სახით

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+\varphi(t)\vec{j}+\psi(t)\vec{k}.$$

1) წირის $M\ (x,\ y,\ z)$ წერტილზე და წირზე მდებარე მის ორ მახლობელ წერტილზე გამავალი სიბრტყის ზღვრულ მდებარეობას, როცა მახლობელი წერტილები M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში. მიმხები სიბრტყე შეიცავს $\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ და $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ვექტორებს.

2) წირის M წერტილზე გამავალი მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს ეწოდება წირის ბინორმალი M წერტილში. ბინორმალის ვექტორია $\vec{B}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

3) წირის M წერტილზე გამავალ მხები წრფის მართობულ წრფეს, რომელიც მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში, ეწოდება წირის მთავარი ნორმალი M წერტილში. მთავარი ნორმალის ვექტორია $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$.

4) წირის M წერტილზე გამავალ მთავარი ნორმალის მართობულ სიბრტყეს ეწოდება წირის გამწრფევი სიბრტყე M წერტილში.

ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{B_x}=\frac{Y-y}{B_y}=\frac{Z-z}{B_z},\qquad B_x(X-x)+B_y(Y-y)+B_z(Z-z)=0,$$

ხოლო მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის განტოლებები —

$$\frac{X-x}{N_x}=\frac{Y-y}{N_y}=\frac{Z-z}{N_z},\qquad N_x(X-x)+N_y(Y-y)+N_z(Z-z)=0,$$

სადაც $X,\ Y,\ Z$ ბინორმალის, მიმხები სიბრტყის, მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

სამი ურთიერთმართობული სიბრტყე (ნორმალური, მიმხები და გამწრფევი) ქმნის ე. წ. ბუნებრივ სამწახნაგას. სამ ურთიერთმართობულ წრფეს

(მხები, ბინორმალი და მთავარი ნორმალი), რომლებიც საწვახნაგას წიბოებია, ხშირად ღებულობენ კოორდინატთა ღერძებად. მათ ერთობლიობას უწოდებენ ბ უ ნ ე ბ - რ ი ვ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა ს.

293. იპოვეთ $x=t^2$, $y=1-t$, $z=t^3$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები M (1; 0; 1) წერტილში.

294. იპოვეთ $y^2=x$, $x^2=z$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1;\ 1;\ 1)$ წერტილში.

295. იპოვეთ $x=t, y=-t, z=\frac{t^2}{2}$ წირის მთავარი ნორმალი და გამწრფევი სიბრტყე $t=2$ წერტილში.

296. იპოვეთ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ წირის მთავარი ნორმალი და გამწრფევი სიბრტყე $t=0$ წერტილში.

297. იპოვეთ $\vec{r}=\frac{t^4}{4}\vec{i}+\frac{t^3}{3}\,j+\frac{t^2}{2}\vec{k}$ წირის მხები წრფე, რომელიც $x+3y+2z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

298. შეადგინეთ $\vec{r}=\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j}+\ln\sin t\cdot\vec{k}$ წირის ბუნებრივი სამწახნაგას წახნაგების განტოლებები $t=\frac{\pi}{2}$ წერტილში.

§ 17. სივრცის წირის სიმრუდე და გრეხა

თუ სივრცის წირის განტოლება მოცემულია ვექტორული სახით:

$$\vec{r}=r(t)=f(t)\vec{i}+\varphi(t)\vec{j}+\psi(t)\vec{k},$$

მაშინ წირის სიმრუდე და გრეხა შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$K=\frac{1}{R}\frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3},$$

$$T=\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2},$$

სადაც R სიმრუდის რადიუსია, ხოლო ρ — გრეხის რადიუსი.

იპოვეთ სიმრუდე და გრეხა შემდეგი წირებისა:

299. $x=t, y=t^2, z=t^3$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=0$ წერტილში.

300. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=1$ წერტილში.

301. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ მის ნებისმიერ წერტილში.
302. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $z=e^t$, $t=0$ წერტილში.

303. იპოვეთ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ წირის სიმრუდე.
304. იპოვეთ $x^2=2az$, $y^2=2bz$ წირის სიმრუდე და გრეხა.
305. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2}$, $z=\frac{x^3}{3}$ წირის სიმრუდე და გრეხა, როცა $x=1$.
306. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2a}$, $z=\frac{x^3}{6a^2}$ წირის სიმრუდე და გრეხა.

II თავი

ჯერადი და წირითი ინტეგრალები

§ 1. ორჯერადი ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია xOy სიბრტყის დახურულ D არეზე. დავყოთ ეს არე ნებისმიერი წესით n ნაწილად: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, რომელთა ფართობები შესაბამისად იყოს $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. ყოველ ელემენტარულ σ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) არეზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ არეების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d\to 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც D არის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული D არეზე და აღინიშნება

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \text{ ან } \iint_D f(x, y)dxdy$$

სიმბოლოთი, სადაც $d\sigma$ ან $dxdy$ წარმოადგენს ფართობის ელემენტს. ამგვარად,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

გეომეტრიულად ორჯერადი ინტეგრალი იმ სხეულის მოცულობაა, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x, y)$ ზედაპირით, ქვემოდან — D არით, გვერდებიდან — ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მიმმართველი წირია D არის კონტური, ხოლო მსახველი oz ღერძის პარალელურია, ე. ი.

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

თუ $f(x, y)=1$, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი რიცხობრივად უდრის D არის ფართობს:

$$S=\iint\limits_D dxdy.$$

ორჯერადი ინტეგრალის თვისებები

1) თუ D არე გაყოფილია ორ D_1 და D_2 არედ, რომლებსაც არა აქვს საერთო შიგა წერტილები, მაშინ

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy;$$

2) $$\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint\limits_{D_1} f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{D_2} f_2(x,y)dxdy;$$

3) $$\iint\limits_D mf(x,y)dxdy=m\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$ სადაც m მუდმივია.

ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

თუ D არე განსაზღვრულია $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ უტოლობებით, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება ერთ-ერთი შემდეგი ფორმულით:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \text{ ან } \iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx.$$

თუ D არე განსაზღვრულია $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{(y_2x)} f(x, y)dy.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

307. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2+2y)dx.$

308. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_1^2 (x^2+y^2) dx.$

309. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}.$

310. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 e^{x+y}dy.$

311. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}.$

312. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 (5x^2y-2y^3)dx.$

313. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}$, 314. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy.$

315. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$ 316. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx.$

317. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{x}{a}}^{x} \frac{xdy}{x^2+y^2}.$ 318. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{y-a}^{2y} xydx.$

იპოვეთ ინტეგრების საზღვრები $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ ინტეგრალისათვის, თუ D არე შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

319. D არე შემოსაზღვრულია $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$ წრფეებით.

320. D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ წრფეებით.

321. D არე შემოსაზღვრულია $y=0$, $y=1-x^2$ წირებით.

322. D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$, $y=4-x^2$ წირებით.

323. D არე შემოსაზღვრულია $x^2-y^2=1$ ჰიპერბოლითა და $y=-3$, $y=3$ წრფეებით.

324. D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$, $y=\frac{2}{1+x^2}$ წირებით.

325. D არე შემოსაზღვრულია $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ წრეწირით.

326. D არე შემოსაზღვრულია $y^2-x^2=1$ ჰიპერბოლითა და $x^2+y^2=9$ წრეწირით (D არე შეიცავს კოორდინატთა სათავეს).

შეცვალეთ ინტეგრების რიგი შემდეგ ინტეგრალებში:

327. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy.$ 328. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^{2x} f(x,y)dy.$

329. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$ 330. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

331. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$ 332. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

333. $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ წრფეებით.

334. $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x$, $y=0$, $x=1$ წრფეებით.

335. $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=\pi$ და $y=x$ წრფეებით.

336. $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$. სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია O (0; 0), $A(1;-1)$, $B(1;1)$ წერტილები.

337. $\iint\limits_D xdxdy$, სადაც: 1) D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია O (0;0), $A(1;1)$, $B(0;1)$ წერტილები;

2) D არე შემოსაზღვრულია $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ წირებით.

338. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=1$, $y^2=x$ წირებით.

339. $\iint\limits_D (y^2+x)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლებით.

340. $\iint\limits_D xydxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ პარაბოლითა და კოორდინატთა ღერძებით.

341. $\iint\limits_D ydxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია Ox ღერძითა და $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი რკალით $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

342. $\iint\limits_D xydxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ ასტროიდის რკალით $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x, y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე ეწოდება $\bar{f} = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ რიცხვს, სადაც S გამოსახავს D არის ფართობს.

343. იპოვეთ $f(x,y)=xy^2$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც განსაზღვრულია $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ უტოლობებით.

344. იპოვეთ $f(x,y)=12-2x-3y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $2x+3y-12=0$, $x=0$ და $y=0$ წრფეებით.

345. იპოვეთ $f(x,y)=2x+y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა საკოორდინატო ღერძებითა და $x+y=3$ წრფით შემოსაზღვრულ სამკუთხედზე.

346. იპოვეთ $f(x, y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $x^2+y^2=R^2$ წრის შიგნით.

თუ m და M წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს D არეზე, მაშინ

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leqslant MS.$$

სადაც S აღნიშნავს D არის ფართობს.

შეაფასეთ მოცემული ინტეგრალები:

347. $\iint\limits_D (x+y+1)dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც განსაზღვრულია $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$ უტოლობებით.

348. $\iint\limits_D (x^2y+xy^2)dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს კვადრატს, რომელიც განსაზღვრულია $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$ უტოლობებით.

349. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2+y^2\leqslant 4$ წრეს.

350. $\iint\limits_D (x+y+10)dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2+y^2\leqslant 4$ წრეს.

§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში

თუ x და y ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u და v ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v) \tag{1}$$

ტოლობებით, სადაც φ და ψ ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია D' არეში, მაშინ

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_{D'} f\,[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]\ \ |J(u,v)|dudv. \tag{2}$$

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

გამოსახულებას ეწოდება (1) *გარდაქმნის იაკობიანი.*

კერძოდ, თუ გადავალთ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ პოლარულ კოორდინატებზე, მაშინ $|I|=r$, და (2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\ \varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr. \tag{3}$$

თუ D' არე განსაზღვრულია $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $r_1(\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\ \varphi,\ r\sin\ \varphi)\ rdr. \tag{4}$$

თუ D არე მოიცავს კოორდინატთა სათავეს, მაშინ

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy=\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi\int\limits_{0}^{r(\varphi)} f\ (r\cos\varphi,\ r\sin\ \varphi)rdr. \tag{5}$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

351. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{\frac{b}{2}}^{b} rdr.$ **352.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi\int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin\varphi d\varphi.$

353. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi dr.$

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

354. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy$. **355.** $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy$.

356. $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy$. **357.** $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy$.

358. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ ინტეგრალი, თუ D არის წარმოადგენს $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$ წრიული რგოლის მეოთხედ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია პირველ კვადრანტში.

359. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D ydxdy$ ინტეგრალი, სადაც D წარმოადგენს a დიამეტრისა და $C\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ ცენტრის მქონე ნახევარწრეს.

360. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D (h-2x-3y)dxdy$ ინტეგრალი, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \leqslant R^2$ წრეს.

361. გამოთვალეთ $\iint_D r^2 dr d\varphi$ ინტეგრალი, სადაც D არის შემოსაზღვრულია $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდითა და $r=a$ წრეწირით (D არე არ შეიცავს პოლუსს).

362. გამოთვალეთ $\iint_D xydxdy$ ინტეგრალი, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის პირველ კვადრანტში მოთავსებული რკალით.

§ 3. ფართობთა გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალებით

ბრტყელი D არის ფართობი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S=\iint_D dxdy.$$

თუ D არე განსაზღვრულია $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ უტოლობებით, მაშინ

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

თუ D არე პოლარულ კოორდინატებში განსაზღვრულია $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant$ $\leqslant r_2(\varphi)$ უტოლობებით, მაშინ

$$S = \iint_D r d\varphi dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

863. გამოთვალეთ $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

864. გამოთვალეთ $y=x$, $y=5x$, $x=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

865. გამოთვალეთ $y^2=2x$ პარაბოლითა და $y=x$ წრფით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

866. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $3y^2=25x$ და $5x^2=9y$ პარაბოლებს შორის.

867. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

868. გამოთვალეთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული არეების ფართობები:

869. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ (პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილი).

870. 1) $xy=4$, $x+y-5=0$; 2) $y=2-x^2$, $y=x$.

871. $y^2=4x+4$, $y=2-x$. **872.** $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$.

873. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $x+y=a$. **874.** $y=\dfrac{8}{x^2+4}$, $2y=x$, $x=0$.

875. გამოთვალეთ $r\cos\varphi=1$ წრფითა და $r=2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი (გამოსათვლელი ფართობი არ შეიცავს პოლუსს).

876. გამოთვალეთ $r=a\cos\varphi$ და $r=b\cos\varphi$ $(b>a)$ წრეწირებს შორის მოთავსებული არის ფართობი.

877. იპოვეთ $r=a\sin 2\varphi$ წირის ერთი მარყუჟით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

878. იპოვეთ $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული არეების ფართობები:

379. $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y=x,\ x=a.$

380. $(x^2+y^2)^2=2ax^3\quad(a>0).$

381. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4.$ **382.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}.$

383. გამოთვალეთ $xy=\frac{1}{2},\ xy=2,\ y=\frac{x}{2},\ y=2x$ წირებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

384. გამოთვალეთ $x^2=y,\quad x^2=2y,\quad y^2=x,\quad y^2=2x$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

§ 4. მოცულობათა გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალებით

385. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$ სიბრტყეებით.

386. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, ზემოდან $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ ელიფსური პარაბოლოიდით, ხოლო გვერდებიდან $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ სიბრტყეებით.

387. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, ზემოდან $z=4-x^2-y^2$ პარაბოლოიდით, ხოლო გვერდებიდან $x=\pm1,\quad y=\pm1$ სიბრტყეებით.

388. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+z^2=R^2$ ზედაპირითა და $y=0,\ y=H,\ z=0$ სიბრტყეებით.

389. იპოვეთ $x^2+y^2=a^2,\quad y^2+z^2=a^2$ ცილინდრებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

390. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z^2=xy,\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=a$ ზედაპირებით.

391. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=0,\quad y=\frac{b}{a}x,\ z=0$ ზედაპირებით.

392. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=x^2-y^2$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდითა და $x=1,\quad y=0,\quad z=0$ სიბრტყეებით.

393. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=1-4x^2-y^2$ ზედაპირითა და xOy სიბრტყით.

394. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$ და $z=0$ ზედაპირებით.

395. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

396. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$, $x+y+z=3a$ და $z=0$ ზედაპირებით.

397. გამოთვალეთ $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

398. გამოთვალეთ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ცილინდრითა და $z=xy$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა, რომელიც პირველ ოქტანტშია მოთავსებული.

399. იპოვეთ $y^2=az$, $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

400. იპოვეთ $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ ცილინდრული ზედაპირებითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ პოლარული და განზოგადებული პოლარული კოორდინატებით.

401. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრით, $Rz=2R^2+x^2+y^2$ პარაბოლოიდითა და $z=0$ სიბრტყით.

402. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=4a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (იგულისხმება ცილინდრის გარე ნაწილი).

403. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრსა და $x^2+y^2-z^2=-a^2$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდს შორის.

404. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $2az=x^2+y^2$ პარაბოლოიდსა, $x^2+y^2-z=a^2$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდსა და $z=0$ სიბრტყეს შორის.

405. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ და $z=bx$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

406. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრით, $x^2+y^2=z^2$ კონუსითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

407. გამოთვალეთ $z=\frac{4}{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=1$ და $x^2+y^2=4$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

408. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2=ax$ ცილინდრით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (ვივიანის ამოცანა).

409. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ პარაბოლოიდით, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}$ ცილინდრითა და $z=0$ სიბრტყით.

410. გამოთვალეთ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

§ 5. ზედაპირთა ფართობების გამოთვლა

$z=f(x, y)$ ცალსახა ზედაპირის S ფართობი, რომლის გეგმილი xOy სიბრტყეზე D არეა, გამოითვლება

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

ფორმულით.

411. იპოვეთ $6x+3y+2z=12$ სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

412. იპოვეთ $x+y+z=2a$ სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრით.

413. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

414. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=100$ სფეროს ზედაპირის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x=-8$ და $x=6$ სიბრტყეებს შორის.

415. 1) გამოთვალეთ $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც ჩამოჭრის $x^2+y^2=1$ ცილინდრი.

2) იპოვეთ $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ ცილინდრების საერთო ნაწილის ზედაპირის ფართობი.

416. იპოვეთ $z^2=2xy$ კონუსის ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის $x=a$ და $y=a$ სიბრტყეები ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$).

417. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც ამოჭრილია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსური ცილინდრით ($b<a$).

418. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროდან $x^2+y^2=ax$ ცილინდრით ამოჭრილი ზედაპირის ფართობი (ვივიანის ზედაპირის ფართობი).

419. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფერო $x^2+y^2=ax$ ცილინდრიდან.

420. გამოთვალეთ $y^2+z^2=x^2$ კონუსური ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $y+z=a$ სიბრტყით.

421. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ და $z=mx$ სიბრტყეებს შორის.

422. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ სიბრტყესა და $x^2+y^2=z^2$ კონუსს შორის.

423. იპოვეთ $az=xy$ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის შიგნით.

424. იპოვეთ $y^2+z^2=x^2$ კონუსის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის შიგნით.

§ 6. ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში

თუ D არის xOy სიბრტყეზე ფირფიტის მიერ დაკავებული არე, ხოლო $\rho(x, y)$ (x, y) წერტილში—ფირფიტის ზედაპირული სიმკვრივე, მაშინ Ox და Oy ღერძების მიმართ ფირფიტის M მასა და სტატიკური M_x და M_y მომენტები შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$M=\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy, \quad M_x=\iint\limits_D \rho(x, y)ydxdy, \quad M_y=\iint\limits_D \rho(x, y)\,xdxdy.$$

ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება

$$x_c=\frac{M_y}{M}, \qquad y_c=\frac{M_x}{M}$$

ფორმულებით.

ფირფიტის ინერციის მომენტები Ox, Oy ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$I_x=\iint\limits_D \rho(x, y)y^2dxdy, \quad I_y=\iint\limits_D \rho(x, y)x^2dxdy, \quad I_0=\iint\limits_D \rho(x, y)\,(x^2+y^2)dxdy.$$

როცა ფირფიტა ერთგვაროვანია, მაშინ $\rho(x, y)=\text{const}$. თუ დავუშვებთ, რომ $\rho(x, y)=1$, მივიღებთ ბრტყელი ფიგურის მომენტებს.

425. იპოვეთ იმ ფირფიტის მასა, რომელსაც აქვს a-რადიუსიანი წრის ფორმა, თუ მისი სიმკვრივე ცენტრიდან მანძილის უკუპროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია k).

426. იპოვეთ იმ ფირფიტის მასა, რომელსაც აქვს a-რადიუსიანი წრის ფორმა, თუ მისი სიმკვრივე ცენტრიდან მანძილის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია k).

427. იპოვეთ a და b გვერდების მქონე მართკუთხედის სტატიკური მომენტი a გვერდის მიმართ.

428. იპოვეთ R-რადიუსიანი ნახევარწრის სტატიკური მომენტი დიამეტრის მიმართ.

429. იპოვეთ a-გვერდიანი ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ სამკუთხედის სიმაღლე ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო წვერო-კოორდინატთა სათავეს.

430. იპოვეთ $x^2+y^2=a^2$ წრის ზედა ნახევრის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

431. იპოვეთ $y=\sin x$, $x=\frac{\pi}{4}$ და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

432. იპოვეთ a-რადიუსიანი წრიული სექტორის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი ბისექტრისა ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხეა 2α.

433. იპოვეთ Ox ღერძითა და $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

434. იპოვეთ $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

435. გამოთვალეთ სამკუთხედის ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ, თუ მისი გვერდების განტოლებებია: $x+y=2$, $x=2$, $y=2$.

436. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი Oy ღერძის მიმართ.

437. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2=4ax$ პარაბოლით, $y=2a$ წრფითა და Oy ღერძით.

438. გამოთვალეთ მართკუთხედის ინერციის მომენტი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ, თუ მისი გვერდებია a და b.

439. იპოვეთ d და D დიამეტრების ($d<D$) წრიული რგოლის ინერციის მომენტი: 1) ცენტრის მიმართ; 2) დიამეტრის მიმართ.

440. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a, ხოლო სიმაღლე h. იპოვეთ მისი ინერციის მომენტი წვეროს მიმართ.

441. იპოვეთ $r=a\sin 2\varphi$ წირის ერთი მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი პოლუსის მიმართ.

442. იპოვეთ $r=a(1-\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი პოლუსის მიმართ.

§ 7. სამჯერადი ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია სივრცის დახურულ V არეზე. დავყოთ ეს არე ნებისმიერი წესით n ნაწილად: $v_1, v_2, \dots, v_n$, რომელთა მოცულობები შესაბამისად იყოს $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. ყოველ ელემენტარულ v_i $(i=1, 2, \dots, n)$ არეში ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $v_1, v_2, \dots, v_n$ არეების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d \to 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც V არის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x,y,z)$ ფუნქციის სამჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული V არეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv \quad \text{ან} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz,$$

სადაც dv ან $dxdydz$ მოცულობის ელემენტია. ამგვარად,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i.$$

თუ V არე განსაზღვრულია $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

როცა V არე $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=l$, $z=k$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული მართკუთხა პარალელეპიპედია და $f(x, y, z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, მაშინ

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy \cdot \int_l^k f_3(z)\,dz.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

443. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz.$ **444.** $\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{y^2} dz.$

445. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\,dz.$ **446.** $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2z\,dz.$

447. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_2^4 dy\int\limits_0^3 (x+y+z)dz.$ **448.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy\int\limits_0^{\sqrt{4x-y^2}} xdz.$

449. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-x-y} (x+2z)dz.$ **450.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$

მოძებნეთ ინტეგრების საზღვრები $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz$ ინტეგრალისათვის, თუ V არე შემდეგნაირადაა განსაზღვრული.

451. V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=2$, $z=0$ ზედაპირებით.

452. V არე $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული კონუსია $(c>0)$.

453. V არე შემოსაზღვრულია $z=0$ და $z=1-x^2-y^2$ ზედაპირებით.

454. V არე $2az\geqslant x^2+y^2$ პარაბოლოიდისა და $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$ სფეროს საერთო ნაწილია.

455. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ და $z=0$ სიბრტყეებით.

456. გამოთვალეთ $\iiint\limits_V xydxdydz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $z=xy$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ზედა ნაწილითა და $x+y=1$, $z=0$ სიბრტყეებით.

457. გამოთვალეთ $\iiint\limits_V zdxdydz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედა ნახევრითა და $z=0$ სიბრტყით.

458. გამოთვალეთ $\iiint\limits_V zdxdydz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყითა და $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის ზედა ნახევრით.

§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა სამჯერად ინტეგრალში

თუ x, y და z ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u, v და w ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x=\varphi(u, v, w),\ y=\psi(u, v, w),\ z=\omega(u, v, w) \qquad (1)$$

ტოლობებით, სადაც φ, ψ და ω ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია V' არეში, მაშინ

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[\varphi(u, v, w),\ \psi(u, v, w),\ \omega(u, v, w)]|I|dudvdw. \qquad (2)$$

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

გამოსახულებას ეწოდება (1) გარდაქმნის იაკობიანი.

კერძოდ, თუ გადავალთ ცილინდრულ კოორდინატებზე $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r<+\infty,\ -\infty<r<+\infty)$, მაშინ $|I|=r$ და (2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)rd\varphi drdz. \qquad (3)$$

ხოლო თუ გადავალთ სფერულ კოორდინატებზე $x=r\cos\varphi\sin\Theta$, $y=r\sin\varphi\ \sin\Theta$, $z=r\cos\Theta(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\Theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r<+\infty)$, მაშინ $|I|=r^2\sin\Theta$ და (2) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\Theta,\ r\sin\varphi\sin\Theta,\ r\cos\Theta)\ r^2\sin\Theta\ d\varphi d\Theta dr. \qquad (4)$$

ცილინდრულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

459. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$ **460.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\ dz.$

461. $\displaystyle\iiint\limits_V zdxdydz$, სადაც V წარმოადგენს $z=6-x^2-y^2$, $x^2+y^2=z^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრულ არეს.

462. $\displaystyle\iiint\limits_V dxdydz$, სადაც V წარმოადგენს $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრულ არეს, რომელიც შეიცავს $(0;\ 0;\ R)$ წერტილს.

463. სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ ინტეგრალი:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dz.$$

464. სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ ინტეგრალი, სადაც V არე განსაზღვრულია $z\geqslant0$, $R_1^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R_2^2$ უტოლობებით.

§ ९. მოცულობათა გამოთვლა სამჯერადი ინტეგრალებით

სივრცითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V=\iiint\limits_V dxdydz$$

ფორმულით. ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში შესაბამისად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$V=\iiint\limits_V r d\varphi dr dz, \qquad V=\iiint\limits_V r^2\sin\Theta d\varphi d\Theta dr.$$

465. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრითა და $z=0$, $z=2x$ სიბრტყეებით ($z\geqslant0$).

466. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=2a$, $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ზედაპირებით.

467. იპოვეთ $x^2+y^2-z=1$ პარაბოლოიდითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

468. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ ($\alpha>\beta$) ზედაპირებით.

469. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=4-y^2$, $z=2+y^2$ ცილინდრებითა და $x=-1$, $x=2$ სიბრტყეებით.

470. იპოვეთ $(x-1)^2+y^2=z$ პარაბოლოიდითა და $2x+z=2$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

471. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ცილინდრითა და $xy=cz$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდით ($a>0$, $b>0$, $a>R$, $b>R$).

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ ცილინდრული კოორდინატებით.

472. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრის იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ სიბრტყესა და $x^2+y^2=2az$ პარაბოლოიდს შორის.

473. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=4$ სფეროთი და $x^2+y^2=3z$ პარაბოლოიდით (პარაბოლოიდის შიგა ნაწილი).

474. იპოვეთ $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდითა და $z^2=xy$ კონუსით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სფერული კოორდინატებით.

475. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს მოცულობა.

476. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2-z^2=0$ კონუსით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (კონუსის გარეთ მოთავსებული ნაწილი).

477. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$).

478. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

479. გამოთვალეთ $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($a>0$).

480. გამოთვალეთ $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(x^2+y^2)^2$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($a>0$).

481. გამოთვალეთ $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

482. გამოთვალეთ $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

§ 10. სამჯერადი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში

იმ სხეულის მასა, რომელსაც V არე უკავია, გამოითვლება

$$M=\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

ფორმულით, სადაც $\rho(x, y, z)$ სხეულის სიმკვრივეა (x, y, z) წერტილში.

საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ სხეულის სტატიკური მომენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V \rho z dxdydz,\quad M_{yz}=\iiint\limits_V \rho x dxdydz,\quad M_{zx}=\iiint\limits_V \rho y dxdydz.$$

სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{M},\qquad y_c=\frac{M_{zx}}{M},\qquad z_c=\frac{M_{xy}}{M}.$$

თუ სხეული ერთგვაროვანია ($\rho=1$), მაშინ

$$x_c=\frac{1}{V}\iiint\limits_V x dxdydz,\quad y_c=\frac{1}{V}\iiint\limits_V y dxdydz,\quad z_c=\frac{1}{V}\iiint\limits_V z dxdydz.$$

ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და სიბრტყეების მიმართ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz,\qquad I_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)dxdydz,\qquad I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,$$

$$I_{xy}=\iiint\limits_V z^2dxdydz,\qquad I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\, dxdydz,\qquad I_{zx}=\iiint\limits_V y^2dxdydz,$$

ხოლო ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ არის

$$I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz.$$

483. განსაზღვრეთ იმ პირამიდის მასა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ტოლია ამ წერტილის z აპლიკატისა.

484. განსაზღვრეთ $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მასა, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე $\rho=x+y+z$.

485. მოცემულია R-რადიუსიანი ნახევარსფერო, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. განსაზღვრეთ მისი მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ $(x,\ y,\ z)$ წერტილში ამ წერტილიდან ფუძემდე მანძილის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია k).

486. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ და $x^2+y^2+z^2=4a^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მასა, თუ სიმკვრივე მის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილის უკუპროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია k).

487. იპოვეთ R-რადიუსიანი სფეროს სტატიკური მომენტი მისი მხები სიბრტყის მიმართ.

488. სხეული შემოსაზღვრულია $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდითა და xOy სიბრტყით. იპოვეთ მისი სტატიკური მომენტი ამ სიბრტყის მიმართ.

489. იპოვეთ $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

490. იპოვეთ იმ სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=a^2$ ნახევარსფეროთი და $z=0$ სიბრტყით $(z\geqslant 0)$.

491. იპოვეთ $az=a^2-x^2-y^2$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

492. იპოვეთ $z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$ პარაბოლოიდითა და $x^2+y^2+z^2=3a^2$

($z \geqslant 0$) სფეროთი შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (პარაბოლოიდის შიგა ნაწილი).

493. წრიული ცილინდრის ფუძის რადიუსია a, ხოლო სიმაღლე — h. იპოვეთ ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი ფუძის დიამეტრის მიმართ.

494. გამოთვალეთ $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

§ 11. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები

არასაკუთრივი ჯერადი ინტეგრალები

1°. **ინტეგრალის გაწარმოება პარამეტრით.** თუ ორ ცვლადზე დამოკიდებული $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო α-ს მიმართ — $[c, d]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx.$$

ეს ფორმულა მართებულია მაშინაც, როცა ინტეგრების ერთ-ერთი საზღვარი უსასრულოდ დიდია.

თუკი a და b საზღვრები დამოკიდებულია α-ზე, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

გააწარმოეთ პარამეტრით შემდეგი ინტეგრალები:

495. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}$ **496.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{arctg}\,\alpha x)^3 dx.$

497. 1) $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ $(\alpha>0)$; 2) $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$

498. $\displaystyle\int_{\alpha^2}^{3\alpha^2+1} \frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx.$

499. ისარგებლეთ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$ ტოლობით და გამოთვალეთ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$ ინტეგრალი.

500. ისარგებლეთ $\int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \ln |1+\alpha b|$ ტოლობით და გამოთვალეთ $\int\limits_0^{b} \frac{xdx}{(1+\alpha x)^2}$ ინტეგრალი.

501. ისარგებლეთ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$ ტოლობით და გამოთვალეთ $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$ ინტეგრალი, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $\alpha>0$.

502. ისარგებლეთ $\int\limits_0^{1} x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}$ ტოლობით და გამოთვალეთ $\int\limits_0^{1} x^\alpha \ln^k x dx$ ინტეგრალი, სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $\alpha>0$.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

503. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} dx.$

504. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin\alpha x}{x} dx.$

505. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx \ (\alpha>0, \quad \beta>0).$

506. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \ (\alpha>0, \ \beta>0).$

2°. **არასაკუთრივი ჯერადი ინტეგრალები.** ა) უსასრულო არის შემთხვევა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოუსაზღვრელ S არეში, მაშინ

$$\iint\limits_S f(x, y)dxdy = \lim_{\sigma \to S} \iint\limits_\sigma f(x, y)dxdy,$$

სადაც σ წარმოადგენს S არეში მოთავსებულ სასრულ არეს. $\sigma \to S$ აღნიშნავს იმას, რომ σ-ს ნებისმიერი კანონით გაფართოებისას, მასში მოთავსდება S არის ყოველი წერტილი. თუ მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ზღვარი არსებობს და არ არის დამოკიდებული σ არის არჩევაზე, მაშინ შესაბამის არასაკუთრივ ინტეგრალს უწოდებენ კრებადს, წინააღმდეგ შემთხვევაში—განშლადს.

ანალოგიურად განიმარტება არასაკუთრივი სამჯერადი ინტეგრალი სივრცის შემთხვევაში.

გამოთვალეთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალები:

507. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^2}$. **508.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

509. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$. **510.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

511. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

512. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xydxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^3}$.

ბ) წყვეტილი ფუნქციის შემთხვევა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრული დახურული S არის ყოველ წერტილზე, გარდა $P(a, b)$ წერტილისა, მაშინ

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S_\varepsilon} f(x, y)\,dxdy,$$

სადაც S_ε არე მიიღება S არიდან ε-რადიუსიანი ისეთი წრის ამოღებით, რომელიც შეიცავს P წერტილს. თუ მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ზღვარი არსებობს, მაშინ განსახილავ არასაკუთრივ ინტეგრალს უწოდებენ კრებადს, წინააღმდეგ შემთხვევაში—განშლადს.

ასევე განიმარტება არასაკუთრივი სამჯერადი ინტეგრალი წყვეტილი ფუნქციისათვის.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

513. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, სადაც S არე $x^2+y^2\leqslant 1$ წრეა.

514. $\iint\limits_S \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, სადაც S არე $x^2+y^2\leqslant 1$ წრეა.

515. $\iiint\limits_V \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, სადაც V წარმოადგენს R-რადიუსიან სფეროს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

516. $\iiint\limits_V \ln(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, სადაც V წარმოადგენს R-რადიუსიან სფეროს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

§ 12. წირითი ინტეგრალები

1°. **პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი.** ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია გლუვი L წირი. მასზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი. $P(x, y)$ იყოს L წირის წერტილების უწყვეტი ფუნქცია. L წირის AB რკალი დავყოთ რაიმე წესით n ნაწილად $A=A_0, A_1, A_2,\dots,A_n=B$ წერტილებით. ყოველ $A_{i-1}A_i=\Delta s_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი M_i (ξ_i, η_i) წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ Δs_i რკალების სიგრძეთა შორის უდიდესი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d\to 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც L წირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $P(x, y)$ ფუნქციის პირველი გვარის წ ი რ ი თ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი AB წირზე და აღინიშნება ასე:

$$\int\limits_{AB} P(x,\ y)\ ds=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i,$$

სადაც ds რკალის დიფერენციალია.

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int\sum_{AB} P(x,y)ds=\int\limits_{BA} P(x,\ y)ds$$

როცა წირის განტოლება მოცემულია $y=\varphi(x)$ სახით, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x, y)ds = \int\limits_a^b P[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\ dx,$$

სადაც a და b წირის A და B წერტილების აბსცისებია.

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2+y'^2}\ dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r=f(\varphi)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\leqslant\varphi_2)$, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\ d\varphi.$$

ანალოგიურად განიმარტება წირითი ინტეგრალი სივრცითი წირის შემთხვევაში. კერძოდ, თუ სივრცითი წირის განტოლებებია $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\ ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\ dt.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

517. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, სადაც L არის $y=\frac{x}{2}-2$ წრფის მონაკვეთი მოთავსებული $A(0; -2)$ და $B(4; 0)$ წერტილებს შორის.

518. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი მოთავსებული O $(0; 0)$ და $A(1; 2)$ წერტილებს შორის.

519. $\int\limits_L \frac{y}{x}\,ds$, სადაც L არის $y=\frac{1}{2}x^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული $A(1; \frac{1}{2})$ და $B(2; 2)$ წერტილებს შორის.

520. $\int\limits_L x^2ds$, სადაც L არის $y=\ln x$ წირის რკალი, როცა $1\leqslant x\leqslant 2$.

521. $\int\limits_L xyds$, სადაც: 1) L არის $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის რკალი მოთავსებული პირველ მეოთხედში;

2) L არის იმ მართკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$ წერტილები.

522. $\int\limits_L y\,ds$, სადაც L არის $y^2=2px$ პარაბოლის რკალი, რომელსაც ჩამოჭრის $x^2=2py$ პარაბოლა.

523. $\int\limits_L xy\,ds$, სადაც L არის $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსის რკალი მოთავსებული პირველ მეოთხედში.

524. $\int\limits_L y^2 ds$, სადაც L არის $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალი, როცა $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

525. $\int\limits_L ye^{-x}ds$, სადაც L არის $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arctg} t-t$ წირის რკალი, როცა $0\leqslant t\leqslant 1$.

526. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\;ds$, სადაც L არის $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ წირის რკალი, როცა $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

527. $\int\limits_L (x+y)\,ds$, სადაც L არის $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის მარჯვენა ფოთოლი.

528. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 ds$, სადაც L არის $r=ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის რკალი $A(a;0)$ წერტილიდან $O(0;-\infty)$ წერტილამდე.

529. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\;ds$, სადაც L არის $x^2+y^2=ax$ წრეწირის კონტური.

530. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n ds$, სადაც L არის $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის კონტური.

531. $\int\limits_L xyz\,ds$, სადაც L არის $x=t$, $y=\dfrac{t^2}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{8t^3}}{3}$ წირის რკალი, როცა $0\leqslant t\leqslant 1$.

532. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)ds$, სადაც L არის $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ წირის რკალი, როცა $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

533. $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\, ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$ წრეწირის ის ნახევარი, რომელშიც $z\geqslant 0$.

534. $\int\limits_L (x+y)ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$ წრეწირის მეოთხედი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

2°. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია გლუვი L წირი. მასზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი. $P(x, y)$ იყოს L წირის წერტილების უწყვეტი ფუნქცია. L წირის AB რკალი დავყოთ რაიმე წესით n ნაწილად $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$ წერტილებით. ვთქვათ, A_i, წერტილის კოორდინატებია (x_i, y_i) $(i=1, 2,\ldots,n)$. ყოველ $A_{i-1}A_i$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i, \text{ სადაც } \Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $max|\Delta x_i|$. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d\to 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც L წირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $P(x, y)$ ფუნქციის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი x-ით AB წირზე და აღინიშნება ასე:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

მეორე გვარის წირითი ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = -\int\limits_{BA} P(x, y)dx.$$

ანალოგიურად განიმარტება $\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy$ და $\int\limits_{AB} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ წირითი ინტეგრალები.

თუ $y=\varphi(x)$ არის L წირის განტოლება, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b \{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\, dx,$$

სადაც a და b წარმოადგენს A და B წერტილების აბსცისებს.

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

თუ AB სივრცითი წირის რკალია, მაშინ ანალოგიურად განიმარტება წირითი ინტეგრალი

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

535. $\int\limits_{L} 2xydx - x^2dy$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს O (0; 0) და A (2; 1) წერტილებს.

536. $\int\limits_{L} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, სადაც L არის $A(1;\ 1)$ და $B(2;\ 2)$ წერტილების შემაერთებელი $y = x$ წრფის მონაკვეთი.

537. $\int\limits_{L} \cos y dx - \sin x dy$, სადაც L არის A (2;—2) და B(—2; 2) წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

538. $\int\limits_{L} -x\cos y\, dx + y\sin x dy$, სადაც L არის O (0; 0) და M (π;2π) წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

539. $\int\limits_{L} (x^2 - y^2)dy$, სადაც L არის $y = x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული O (0; 0) და A(2; 4) წერტილებს შორის.

540. $\int\limits_{L} 2xydx - y^4dy$, სადაც L არის $x = 2y^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული O (0; 0) და A (2; 1) წერტილებს შორის.

541. $\int\limits_{L} (4x - y)dx + 5x^2ydy$, სადაც L არის $y = 3x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული O (0; 0) და A(1; 3) წერტილებს შორის.

542. $\int\limits_{L} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, სადაც L არის $y = x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული A (—1; 1) და B(1; 1) წერტილებს შორის.

543. $\int\limits_{L} xdy - ydx$, სადაც L არის $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ წრეწირის ზედა ნახევარი, აღებული საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

544. $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, სადაც L არის $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსის ზედა ნახევარი, აღებული საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

545. $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, სადაც L არის $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალი, აღებული $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ მნიშვნელობისათვის.

546. $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, სადაც L არის $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ ასტროიდის რკალი, მოთავსებული $A(R;\ 0)$ და $B(0;\ R)$ წერტილებს შორის.

547. მოცემულია $A(2;\ 0)$ და $B(2;\ 2)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int\limits_L (x+y)dx$ ინტეგრალი: 1) OB წრფის გასწვრივ; 2) $y=\frac{x^2}{2}$ პარაბოლის OB რკალის გასწვრივ; 3) OAB ტეხილის გასწვრივ.

548. მოცემულია $O\ (0;\ 0)$ და $A(1;\ 1)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $y=x^2$ პარაბოლის OA რკალის გასწვრივ; 3) $y=x^3$ წირის OA რკალის გასწვრივ.

549. გამოთვალეთ $\int\limits_L (x-y^2)dx+2xydy$ ინტეგრალი, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $O\ (0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ და $B(1;\ 1)$ წერტილები.

550. გამოთვალეთ $\int\limits_L xdy$ ინტეგრალი, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომელიც შედგენილია საკოორდინატო ღერძებითა და $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ წრფით.

551. გამოთვალეთ ინტეგრალი: 1) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, მოთავსებული $A\ (1;\ 1;\ 1)$ და $B\ (2;\ 3;\ 4)$ წერტილებს შორის;

2) $\int\limits_L x^2dx-yzdy+zdz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, მოთავსებული $A\ (1;\ 2;-1)$ და $B(3;\ 3;\ 2)$ წერტილებს შორის.

552. მოცემულია $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ a;\ 0)$ და $C(a;\ a;\ a)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int\limits_L ydx+zdy+xdz$ ინტეგრალი: 1) OC წრფის გასწვრივ; 2) $OABC$ ტეხილის გასწვრივ.

553. გამოთვალეთ $\int\limits_L yzdx+zxdy+xydz$ ინტეგრალი $x=a\cos t$, $y=\sin t$, $z=kt$ ხრახნწირის გასწვრივ, სადაც $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

554. გამოთვალეთ $\int\limits_L yzdx+z\sqrt{R^2-y^2}dy+xydz$ ინტეგრალი, სადაც L არის $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ ხრახნწირის რკალი მისი $z=0$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილიდან $z=a$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილამდე.

§ 13. გრინის ფორმულა

გრინის ფორმულა ამყარებს კავშირს ბრტყელ D არეზე გავრცელებულ ორჯერად ინტეგრალსა და ამ არის L კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალს შორის.

ვთქვათ, D არის L კონტურით შემოსაზღვრული ბრტყელი არე. თუ $P(x,\ y)$ და $Q(x,\ y)$ ფუნქციები $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ კერძო წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია დახურულ D არეზე, მაშინ მართებულია გრინის ფორმულა:

$$\int\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

როცა $P(x,\ y)=-y$, $Q(x,\ y)=x$, მივიღებთ

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_L xdy-ydx$$

ფორმულას, რომლითაც გამოითვლება L კონტურით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

თუ D არის ყოველ წერტილზე შესრულებულია

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ტოლობა, მაშინ $\int\limits_L Pdx+Qdy$ წირითი ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების გზისაგან.

გრინის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით შემდეგი წირითი ინტეგრალები:

555. $\int\limits_L (y+x^5)dx+(3x+y^3)dy.$ **556.** $\int\limits_L \cos 2y dx+2x\sin 2y dy.$

557. $\int\limits_L (e^{xy}+2x\cos y)dx+(e^{xy}-x^2\sin y)dy.$

558. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{(x^2+y^2)})]dy.$

გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალები და შედეგი შეამოწმეთ მოცემული ინტეგრალების უშუალო გამოთვლით:

559. $\int\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $A(a;\ 0)$, $B(a;\ a)$ და $C(0;\ a)$ წერტილები.

560. $\int\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $A\ (1;\ 1)$, $B(2;\ 2)$ და $C\ (1;\ 3)$ წერტილები.

გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

561. $\int\limits_L \frac{xdy+ydy}{x^2+y^2}$, სადაც L არის $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ წრეწირი.

562. $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, სადაც L არის $x^2+y^2=ax$ წრეწირი.

563. $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, სადაც L არის $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსი.

564. 1) გამოიკვლიეთ, არის თუ არა დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე ინტეგრალი $\int\limits_L (x^2+y^2)\ (xdx+ydy)$;

2) რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $f(x, y)$ ფუნქცია, რომ $\int\limits_L f(x.y)\ (xdx+ydy)$ ინტეგრალი არ იყოს დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე.

565. მოცემულია $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$ და $B(1;\ 0)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int\limits_L ydx+xdy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $x=y^2$ პარაბოლის გასწვრივ; 3) OBA ტეხილის გასწვრივ.

566. მოცემულია $O\ (0;\ 0)$, $A(2;\ 1)$ და $B(2;\ 0)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $y=\frac{x^2}{4}$ პარაბოლის გასწვრივ; 3) OBA ტეხილის გასწვრივ.

თუ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება D არეში რაიმე $u\ (x,\ y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია, ე. ი.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

მაშინ წირითი ინტეგრალი დამოუკიდებელია ინტეგრების გზისაგან და მართებულია ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა:

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} du(x,y)=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1),$$

სადაც $(x_1,\ y_1)$ და $(x_2,\ y_2)$ ინტეგრების გზის საწყისი და ბოლო წერტილებია. კერძოდ, თუ ინტეგრების L კონტური ჩაკეტილია, მაშინ

$$\int\limits_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

567. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx+xdy.$ **568.** $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx-xdy}{y^2}.$

569. $\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}.$ **570.** $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx+x^2dy.$

571. $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} x(1+2y^3)dx+3y^2(x^2-1)dy.$

572. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy.$

573. $\int\limits_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx+zxdy+xydz.$ **574.** $\int\limits_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

575. გამოთვალეთ $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

576. გამოთვალეთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდით შემოსაზღვრული არის ფართობი ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

577. გამოთვალეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის პირველი თაღითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (t იცვლება 2π-დან 0-მდე).

578. გამოთვალეთ $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

579. გამოთვალეთ $x^3+y^3-3axy=0$ დეკარტის ფოთლის მარყუჟით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

580. გამოთვალეთ $x^3+x^2-y^2=0$ წირის მარყუჟით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

§ 14. წირითი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში

თუ L ბრტყელი წირია, რომლის სიმკვრივე ყოველ წერტილში არის $\rho(x, y)$, მაშინ წირის მასა გამოითვლება

$$M=\int\limits_L \rho(x,y)ds$$

ფორმულით. როცა $\rho(x, y)=1$, მივიღებთ L წირის სიგრძეს: $l=\int\limits_L ds.$

საკოორდინატო ღერძების მიმართ L წირის სტატიკური მომენტებია:

$$M_x=\int\limits_L y\rho(x, y)ds, \qquad M_y=\int\limits_L x\rho(x,y)ds.$$

L წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c=\frac{M_y}{M}, \qquad y_c=\frac{M_x}{M}.$$

საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ L წირის ინერციის მომენტებია:

$$I_x=\int\limits_L y^2\rho(x,y)ds, \qquad I_y=\int\limits_L x^2\rho(x, y)ds, \quad I_0=\int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y)ds.$$

თუ $\vec{F}=P(x, y)\vec{i}+Q(x, y)\vec{j}$ არის ცვლადი ძალა, სადაც $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია L წირზე, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა L წირის გასწვრივ გამოითვლება

$$W=\int\limits_{L} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

ფორმულით.

581. იპოვეთ $y=\ln x$ წირის იმ წერტილებს შორის მოთავსებული ნაწილის მასა, რომელთა აბსცისებია $\sqrt{3}$ და $\sqrt{8}$, თუ ყოველ წერტილში მისი სიმკვრივე $\rho=x^2$.

582. იპოვეთ $x=\cos t$, $y=2\sin t$ ელიფსის იმ ნაწილის მასა, რომელიც მოთავსებულია პირველ კვადრანტში, თუ ყოველ წერტილში მისი სიმკვრივე $\rho=y$.

583. იპოვეთ $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ ხრახნწირის რკალის სიგრძე O $(0;0;0)$ წერტილიდან $A(a;\ 0;\ a)$ წერტილამდე.

584. იპოვეთ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ ხრახნწირის მასა, თუ მისი სიმკვრივე ყოველ წერტილში ამ წერტილის რადიუს—ვექტორის ტოლია $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

585. იპოვეთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდის პირველ მეოთხედში მოთავსებული რკალის სტატიკური მომენტი Ox ღერძის მიმართ და ინერციის მომენტი Oy ღერძის მიმართ.

586. იპოვეთ $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ ნახევარწრეწირის სტატიკური და ინერციის მომენტები მისი მომჭიმავი დიამეტრის მიმართ.

587. იპოვეთ $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ წრეწირის პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ.

588. იპოვეთ $y=-2x+1$ წრფის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ.

589. იპოვეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ნახევარრკალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

590. იპოვეთ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ ხრახნწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

591. გამოთვალეთ $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც დაიხარჯება ერთეული მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $O(0;\ 0)$ წერტილიდან $A(1;\ 1)$ წერტილამდე: 1) $y=x$ წრფის გასწვრივ; 2) $y=x^2$ პარაბოლის გასწვრივ.

592. გამოთვალეთ $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც დაიხარჯება ერთეული მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ წრეწირის გასწვრივ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

593. სიბრტყის ყოველ წერტილზე მოქმედებს მუდმივი $\vec{F}$ სიდიდის ტოლი ძალა, რომელიც ემთხვევა Ox ღერძის დადებით მიმართულებას.

გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა პირველ მეოთხედში m მასის მქონე წერტილის საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით გადასაადგილებლად $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის გასწვრივ.

594. გამოთვალეთ F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც საჭიროა m მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილამდე.

§ 15. ზედაპირული ინტეგრალები

1°. **პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი.** ვთქვათ, S გლუვი ზედაპირია და $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია S ზედაპირზე. დავყოთ რაიმე წესით მოცემული ზედაპირი n ნაწილად: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, რომელთა ფართობები იყოს $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. ყოველ $s_i (i=1, 2, \ldots, n)$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ დანაყოფების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის ზღვარი, როცა $d \to 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც S ზედაპირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x, y, z)$ ფუნქციის პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი გავრცელებული S ზედაპირზე და აღინიშნება ასე:

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta s_i.$$

თუ $z=\varphi(x, y)$ არის S ზედაპირის განტოლება, ხოლო D არე S ზედაპირის გეგმილია xOy სიბრტყეზე და Oz ღერძის პარალელური წრფე ამ ზედაპირს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}\, dxdy,$$

სადაც $ds=\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}\, dxdy$ ზედაპირის ელემენტია (φ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები უწყვეტია დახურულ D არეზე).

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გამოსახავს ზედაპირის $\rho(x, y, z)$ სიმკვრივეს, მაშინ ზედაპირის მასა გამოითვლება

$$M=\iint_S \rho(x, y, z)ds$$

ფორმულით.

ერთგვაროვანი ზედაპირის ($\rho=1$) სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c=\frac{1}{S}\iint_S x ds, \quad y_c=\frac{1}{S}\iint_S y ds, \quad z_c=\frac{1}{S}\iint_S z ds,$$

სადაც $S=\iint\limits_S ds$ არის ზედაპირის მოცემული ნაწილის ფართობი, ხოლო $\iint\limits_S xds$, $\iint\limits_S yds$, $\iint\limits_S zds$ ინტეგრალები—სტატიკური მომენტები შესაბამისად yOz, zOx და xOy სიბრტყეების მიმართ.

ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$I_x=\iint\limits_S (y^2+z^2)ds, \qquad I_y=\iint\limits_S (z^2+x^2)ds, \qquad I_z=\iint\limits_S (x^2+y^2)ds.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

595. $\iint\limits_S \left(2x+\dfrac{4}{3}y+z\right)ds$, სადაც S არის $6x+4y+3z-12=0$ სიბრტყის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

596. $\iint\limits_S (x+y+z)ds$, სადაც S არის $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ კუბის ზედაპირი.

507. $\iint\limits_S xds$, სადაც S არის $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედაპირის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

598. $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, სადაც S არის $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ნახევარსფეროს ზედაპირი $(z>0)$.

599. $\iint\limits_S zds$, სადაც S არის $z=\sqrt{x^2+y^2}$ კონუსის ზედაპირის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $z=1$ და $z=2$ სიბრტყეებს შორის.

600. $\iint\limits_S \dfrac{zds}{x^2+y^2}$, სადაც S არის $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის ნაწილი, რომელიც მასზე ამოიკვეთება $x^2+y^2=2$ ცილინდრით.

601. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, სადაც S არის $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$ კონუსის გვერდითი ზედაპირი $(0\leqslant z\leqslant b)$.

602. $\iint\limits_S \dfrac{ds}{r^2}$, სადაც S არის $z=0$, $z=H$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრის ზედაპირი, ხოლო r — მანძილი ზედაპირის წერტილიდან სათავემდე.

603. იპოვეთ $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ კუბის ზედაპირის მასა, თუ მისი ზედაპირული სიმკვრივე (x, y, z) წერტილში არის xyz.

604. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედაპირის მასა, თუ მისი ზედაპირული სიმკვრივე ყოველ წერტილში უდრის ამ წერტილის დაშორებას ვერტიკალური დიამეტრიდან.

605. იპოვეთ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ კონუსის ზედაპირის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

606. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის პირველ ოქტანტში მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

607. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

608. იპოვეთ $az=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2°. **მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი.** ვთქვათ, S რაიმე ზედაპირია, რომელზედაც არჩეულია ერთ-ერთი მხარე, განსაზღვრული $\vec{n}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ნორმალის მიმართულებით. $R(x, y, z)$ იყოს S ზედაპირის წერტილების უწყვეტი ფუნქცია. დავყოთ რაიმე წესით მოცემული ზედაპირი n ნაწილად: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, რომელთა ფართობები იყოს $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. ყოველ $s_i, (i=1, 2, \ldots, n)$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი M_i $(\xi_i, \eta_i, \vartheta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\ \Delta\sigma_i,$$

სადაც $\Delta\sigma_i$ იმ ბრტყელი არის ფართობია. ოომელიც მიიღება s_i დანაყოფის დაგეგმილებით xOy სიბრტყეზე. d ასოთი აღვნიშნოთ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ დანაყოფების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის ზღვარი, როცა $d\to 0$, და ის არ არის დამოკიდებული არც S ზედაპირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $R(x, y, z)$ ფუნქციის მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი, გავრცელებული S ზედაპირზე; იგი აღინიშნება ასე:

$$\iint\limits_{S} R(x, y, z)dxdy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

თუ $z=\varphi(x, y)$ არის S ზედაპირის განტოლება, ხოლო D ამ ზედაპირის გეგმილია xOy სიბრტყეზე, მაშინ

$$\iint\limits_{S} R(x,y,z)\ dxdy=\pm\iint\limits_{D} R[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)]dxdy,$$

სადაც დადებითი ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა ზედაპირის არჩეულ მხარეზე $\cos\gamma>0$, ხოლო უარყოფითი ნიშანი, როცა $\cos\gamma<0$. ანალოგიურად განიმარტება ზედაპირული ინტეგრალები:

$$\iint\limits_{S} P(x,\ y,\ z)dydz, \iint\limits_{S} Q(x,\ y,\ z)dxdz,$$

სადაც $P(x, y, z)$ და $Q(x, y, z)$ წარმოადგენს S ზედაპირზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

ხშირად განიხილება სამივე ინტეგრალის ჯამი

$$\iint_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dzdx+R(x, y, z)dxdy.$$

მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის საშუალებით ასე გამოისახება:

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

609. $\iint_S (x^2+y^2)\,dxdy$, სადაც S არის $x^2+y^2=R^2$ წრის ზედა მხარე.

610. $\iint_S zdxdy$, სადაც S არის $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედაპირის გარე მხარე.

611. $\iint_S (z-R)^2dxdy$, სადაც S არის $z=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ზედაპირის ზედა მხარე.

612. $\iint_S x^2y^2zdxdy$, სადაც S არის $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ზედაპირის დადებითი მხარე.

613. $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, სადაც S არის $x+2z=2$ სიბრტყის ზედა მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და ჩამოჭრილია $y=4$ სიბრტყით.

614. $\iint_S xzdxdy+xydydz+yzdzdx$, სადაც S არის $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის ზედაპირის გარე მხარე.

615. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, სადაც S არის $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ზედაპირის ზედა მხარე.

616. $\iint_S yzdxdy+zxdydz+xydzdx$, სადაც S არის $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=H$ სიბრტყეებითა და $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრით შემოსაზღვრუ-

ლი სხეულის ზედაპირის გარე მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

3°. **გაუსის ფორმულა.** გაუსის ფორმულა ამყარებს კავშირს სივრცის არეზე გავრცელებულ სამჯერად ინტეგრალსა და ამ არის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალს შორის.

თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y. z)$ ფუნქციები და $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტია დახურულ V არეში, მაშინ მართებულია გაუსის ფორმულა:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds,$$

სადაც S წარმოადგენს V არის შემომსაზღვრელ ზედაპირს და ინტეგრება ხდება ზედაპირის გარე მხარეზე.

გაუსის ფორმულა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

თუ გაუსის ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $P=x$, $Q=y$, $R=z$, მაშინ მივიღებთ ფორმულას:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

რომლითაც გამოითვლება S ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

იმისათვის, რომ ზედაპირული ინტეგრალი $\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ არ იყოს დამოკიდებული ინტეგრების ზედაპირისაგან, აუცილებელი და საკმარისია, რომ დახურულ V არეში მართებული იყოს შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{dQ}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

გაუსის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალები:

617. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds.$

618. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy.$

619. $\iint\limits_S yzdydz+zxdzdx+xydxdy.$

620. $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\, dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy.$

გაუსის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალები:

621. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, სადაც S არის $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის ზედაპირის გარე მხარე.

622. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, სადაც S არის $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ კუბის ზედაპირის გარე მხარე.

623. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, სადაც S არის $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის გარე მხარე.

624. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$, სადაც S არის $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის გარე მხარე.

625. იპოვეთ $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის მოცულობა.

626. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს მოცულობა.

4°. **სტოქსის ფორმულა.** სტოქსის ფორმულა ამყარებს კავშირს არაშეკრულ ზედაპირზე გავრცელებულ ინტეგრალსა და ამ ზედაპირის შემომსაზღვრელ კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალს შორის.

თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია S ზედაპირზე, ხოლო L — ამ ზედაპირის საზღვარი, მაშინ მართებულია სტოქსის ფორმულა:

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\alpha\right]ds,$$

სადაც $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ზედაპირის იმ ნორმალის მიმართულების კოსინუსებია, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.

სტოქსის ფორმულა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

თუ P, Q და R უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია სივრცის შეკრულ L წირზე, მაშინ $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$ წირითი ინტეგრალის ინტეგრების გზისაგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობებია:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით შემდეგი ინტეგრალები:

627. $\int\limits_L ydx+zdy+xdz.$ **628.** $\int\limits_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz.$

629. $\int\limits_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz.$

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული ინტეგრალები და შედეგები შეამოწმეთ უშუალო ინტეგრებით:

630. $\int\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$, სადაც L კონტური არის $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ წრეწირი, ხოლო S წარმოადგენს $x^2+y^2+z^2=a^2$ ნახევარსფეროს ზედაპირის ზედა მხარეს.

631. $\int\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$, სადაც L არის $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0:\ a)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის $ABCA$ კონტური.

632. სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ $\int\limits_L ydx+y^2dy+ +zdz$ ინტეგრალი, სადაც L არის $x^2+y^2=1$, $z=1$ წრეწირი, ხოლო S ზედაპირი — წრეწირზე გადაჭიმული $z=2-(x^2+y^2)$ პარაბოლოიდი.

633. სტოქსის ფორმულის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ

$$\int\limits_L yzdx+zxdy+xydz$$

ინტეგრალი ნულის ტოლია ნებისმიერი შეკრული კონტურის გასწვრივ. შეამოწმეთ ეს ინტეგრალის გამოთვლით OAB სამკუთხედის კონტურის გასწვრივ, სადაც სამკუთხედის წვეროებია $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ წერტილები.

634. იგივე $\int\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ ინტეგრალისათვის (იხ. ამოცანა №633).

მწკრივები

§ 1. რიცხვითი მწკრივი

1°. ძირითადი ცნებები. უსასრულო $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ მიმდევრობის წევრებისაგან შედგენილ

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

გამოსახულებას ეწოდება რიცხვითი მწკრივი. u_n-ს ეწოდება *მწკრივის ზოგადი წევრი*, ხოლო $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ ჯამს — მწკრივის n-ური *კერძო ჯამი*. როცა n გაირბენს 1, 2, 3,... მნიშვნელობებს, მიიღება კერძო ჯამების მიმდევრობა: $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$; თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,$$

მაშინ (1) მწკრივს ეწოდება *კრებადი*, S რიცხვს კი—მისი *ჯამი*. თუკი $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ (1) მწკრივს ეწოდება *განშლადი* და მას ჯამი არა აქვს.

$$R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$$

სხვაობას *მწკრივის ნაშთი* ეწოდება.

თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

ეს არის მწკრივის *კრებადობის აუცილებელი პირობა*.

იპოვეთ ზოგადი წევრი შემდეგი მწკრივებისა:

635. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ **636.** $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots$

637. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$ **638.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$

639. $\frac{3}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{5}{4^2}+\frac{6}{5^2}+\ldots$ **640.** $\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\ldots$

641. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$ **642.** $1+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\ldots$

ზოგადი წევრის მიხედვით დაწერეთ მწკრივის პირველი ოთხი წევრი:

643. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$. **644.** $u_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$.

645. $u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$. **646.** $u_n = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n^k}$.

647. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (პირველი სამი წევრი).

648. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$ (პირველი სამი წევრი).

შეამოწმეთ, შესრულებულია თუ არა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა შემდეგი მწკრივებისათვის:

649. $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \ldots$ **650.** $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

651. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots$ **652.** $\frac{1}{13} + \frac{2}{23} + \frac{3}{33} + \ldots$

653. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 7} + \ldots$ **654.** $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots$

იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამები:

655. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. **656.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

657. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **658.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

659. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$. **660.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

661. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$. **662.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{15^n}$.

663. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$. **664.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2°. **დადებითი მწკრივის კრებადობისა და განშლადობის საკმარისი პირობები.** ა) შ ე დ ა რ ე ბ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ნ ი შ ა ნ ი. ვთქვათ,

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

და

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (v)$$

დადებითი მწკრივებია. თუ რომელიმე წევრიდან დაწყებული $u_n \leqslant v_n$ და (v) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება აგრეთვე (u) მწკრივი. პირიქით, თუ რომელიმე წევრიდან დაწყებული $u_n \geqslant v_n$ და (v) მწკრივი განშლადია, მაშინ განშლადი იქნება (u) მწკრივიც.

ბ) შ ე დ ა რ ე ბ ი ს მ ე ო რ ე ნ ი შ ა ნ ი. თუ არსებობს სასრული და ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$, მაშინ (u) და (v) მწკრივები ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

შედარების პირველი ნიშნით სარგებლობისას უფრო მოხერხებულია გამოვიყენოთ გეომეტრიული პროგრესია

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a\neq 0),$$

რომელიც კრებადია, როცა $|q|<1$ და განშლადია, როცა $|q|\geqslant 1$, და

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

მწკრივი, რომელიც კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\leqslant 1$.

შედარების პირველი ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

665. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^4}+\ldots+\dfrac{1}{n^n}+\ldots$

666. $1+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 5^2}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 5^{n-1}}+\ldots$

667. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3+\ldots+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+$

668. $\dfrac{\sin 3}{3}+\dfrac{\sin 3^2}{3^2}+\dfrac{\sin 3^3}{3^3}+\ldots+\dfrac{\sin 3^n}{3^n}+\ldots$

669. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

670. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin^2 n\alpha}$. 672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1-\cos^2 n\alpha}$.

673. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. 674. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.

675. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$. 676. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

შედარების მეორე ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

677. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

678. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$

679. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

680. $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$

681. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$. 682. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$.

გ) დ ა ლ ა მ ბ ე რ ი ს ნ ი შ ა ნ ი. თუ მოცემულია დადებითი მწკრივი

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებადია, როცა $q<1$, განშლადია, როცა $q>1$; თუკი $q=1$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

დ) კ ო შ ი ს ნ ი შ ა ნ ი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q,$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებადია, როცა $q<1$, განშლადია, როცა $q>1$; თუკი $q=1$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

ე) *კოშის ინტეგრალური ნიშანი.* თუ $u_n=f(n)$, სადაც $f(x)$ არის დადებითი, მონოტონურად კლებადი და უწყვეტი ფუნქცია, როცა $x \geqslant a \geqslant 1$, მაშინ (1) მწკრივი და

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

ინტეგრალი ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$. **684.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. **686.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

687. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$. **688.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. **690.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$.

691. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$. **692.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

693. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$. **694.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

695. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$. **696.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n\sqrt{n}}$.

697. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. **698.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$.

კოშის ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

699. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$.

700. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$.

701. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n}\frac{\pi}{2n}$.

702. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^{n}\frac{1}{n}$.

703. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n^{4}}$.

704. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n\cdot 2^{n}}$.

705. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

706. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^{n}}$.

707. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}}$.

708. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

709. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

710. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n+1}$.

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

711. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}+1}$.

712. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{2}+1}$.

713. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{2}}$.

714. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{4}+1}$.

715. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

716. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{2}}$.

717. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{3}}$.

718. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{10n}}$.

719. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$.

720. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

721. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$.

722. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$.

723. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

724. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

3. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივები. აბსოლუტური კრებადობა. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი ასე ჩაიწერება:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots, \tag{1}$$

სადაც $u_1, u_2, u_3, \ldots$ დადებითი რიცხვებია.

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივისათვის მართებულია *ლაიბნიცის თეორემა*: თუ $u_1>u_2>u_3>\ldots$ და $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, მაშინ (1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S<u_1$, ხოლო ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია უკუგდებული პირველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე, ე. ი.,

$$|R_n|<u_{n+1}.$$

ვთქვათ, მოცემულია

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{2}$$

მწკრივი, რომლის წევრებს ნებისმიერი ნიშნები აქვს. ამ მწკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შევადგინოთ დადებითი მწკრივი:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{3}$$

თუ (3) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადია (2) მწკრივიც და ამ უკანასკნელს *აბსოლუტურად კრებადი* ეწოდება. თუ (2) მწკრივი კრებადია, ხოლო (3) განშლადი, მაშინ (2) მწკრივს პირობით კრებადი ეწოდება.

გამოიკვლიეთ აბსოლუტურად კრებადია თუ პირობით კრებადი შემდეგი მწკრივები:

725. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

726. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$.

728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

729. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

730. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

731. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$.

732. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$.

733. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n}$.

734. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

735. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$.

736. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

იპოვეთ მიახლოებითი ჯამი (სიზუსტით 0,01) შემდეგი მწკრივებისა:

737. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

738. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^3}$.

4°. **მოქმედებანი მწკრივებზე.** კრებადი მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრად გავამრავლოთ ნებისმიერ k რიცხვზე, ე. ი. თუ

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=S,$$

მაშინ

$$ku_1+ku_2+ku_3+\ldots+ku_n+\ldots=kS.$$

თუ მოცემულია ორი კრებადი მწკრივი

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=S_1, \qquad (u)$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=S_2, \qquad (v)$$

მაშინ მათი ჯამი და სხვაობა ასე განისაზღვრება:

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+(u_3\pm v_3)+\ldots+(u_n\pm v_n)+\ldots=S_1\pm S_2.$$

(u) და (v) მწკრივების ნამრავლი ეწოდება

$$c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n+\ldots \qquad (c)$$

მწკრივს, სადაც

$c_1=u_1v_1$, $c_2=u_1v_2+u_2v_1$, $c_3=u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1$ $\ldots$, $c_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1$.

თუ (u) და (v) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (c) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი არის S_1S_2.

739. შეამოწმეთ, კრებადია თუ არა ჯამი შემდეგი მწკრივებისა:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}.$$

740. შეამოწმეთ, კრებადია თუ არა სხვაობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ და } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

741. შეადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n}$ განშლადი მწკრივების სხვაობა და გამოიკვლიეთ მისი კრებადობა.

742. შეადგინეთ შემდეგი ორი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის ნამრავლი და იპოვეთ მისი ჯამი:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ და } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

743. შეადგინეთ $\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\dots+\frac{1}{7^{n-1}}+\dots\right)^2$ მწკრივი და იპოვეთ მისი ჯამი.

744. შეადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ მწკრივების ნამრავლი და გამოიკვლიეთ მისი კრებადობა.

§ 2. ფუნქციათა მწკრივი

თუ

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (1)$$

ფუნქციათა მწკრივში x ცვლადს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ სხვადასხვა რიცხვით მწკრივს, რომლებიც შეიძლება კრებადი იყოს ან განშლადი. x არგუმენტის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელთათვის (1) მწკრივი კრებადია, უწოდებენ ამ მწკრივის კრებადობის არეს.

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

ფუნქციას, სადაც

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x),$$

ხოლო x ეკუთვნის კრებადობის არეს, ეწოდება (1) მწკრივის ჯამი.

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots$$

სხვაობას ეწოდება მ წ კ რ ი ვ ი ს ნ ა შ თ ი.

უმარტივეს შემთხვევებში (1) მწკრივის კრებადობის არის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყენოთ კრებადობის ცნობილი ნიშნები.

განსაზღვრეთ კრებადობის არე შემდეგი მწკრივებისა:

745. $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$ **746.** $e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$

747. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots$

748. $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$

749. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$. **750.** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

751. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$. **752.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$.

753. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$. **754.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

§ 3. თანაბარი კრებადობა

ფუნქციათა მწკრივი

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

თანაბრად კრებადია რაიმე შუალედში, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება x-ისგან დამოუკიდებელი ისეთი N რიცხვი, რომ აღებული შუალედის ყოველი x წერტილისათვის

$$|R_n(x)|<\varepsilon, \text{ როცა } n>N.$$

ფუნქციათა მწკრივისათვის მართებულია თანაბრად კრებადობის შემდეგი პირობა (ვაიერშტრასის ნიშანი): თუ ფუნქციათა (1) მწკრივის წევრები $[a, b]$ სეგმენტის ყველა x წერტილისათვის აკმაყოფილებს

$$|u_n(x)|\leqslant A_n \qquad (n=1,2\ldots)$$

პირობას, სადაც

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$$

კრებადი მწკრივია, მაშინ (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ვაიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით აჩვენეთ თანაბარი კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა ნაჩვენებ შუალედებში:

755. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$, $(-\infty,+\infty)$. **756.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

757. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $[-1;\ 1]$.

758. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{\sqrt{n}}$, $[0;\ 1]$.

759. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, $(-\infty,\ +\infty)$.

760. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $(-\infty,\ +\infty)$.

761. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $[0,+\infty)$.

762. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-2}+nx}}$, $[0,\ +\infty)$.

თანაბრად კრებადობის განმარტების საფუძველზე აჩვენეთ თანაბარი კრებადობა შემდეგი ორი მწკრივისა:

763. $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$, $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ სეგმენტზე.

764. $(1-x)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+\ldots+$
$+\left(\frac{1}{n-1}x^{n-1}-\frac{1}{n}x^n\right)+\ldots$, $(-1,\ +1)$ ინტერვალში.

765. აჩვენეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ მწკრივის თანაბრად კრებადობა $[0;1]$ სეგმენტზე. n-ის რომელი მნიშვნელობიდან შესრულდება $|R_n(x)|<0,1$ უტოლობა ამ სეგმენტის ნებისმიერი x-ისათვის?

766. აჩვენეთ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n-1}}$ მწკრივი თანაბრად კრებადია, როცა $x\geqslant 0$. n-ის რომელი მნიშვნელობიდან შესრულდება $|R_n(x)|<$ $<0,001$ უტოლობა ნებისმიერი $x\geqslant 1$-ისათვის?

§ 4. ხარისხოვანი მწკრივები

ხარისხოვან მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{1}$$

სადაც a_0, $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ მუდმივებია, რომლებსაც ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ი მ წ კ რ ი ვ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ეწოდება.

ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისათვის არსებობს ისეთი დადებითი R რიცხვი, რომ $(-R, +R)$ შუალედის შიგნით მწკრივი კრებადია, ხოლო მის გარეთ—განშლადი. $x=\pm R$ წერტილებზე მწკრივი შეიძლება კრებადი ან განშლადი იყოს. ასეთ R რიცხვს ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი ეწოდება, ხოლო $(-R, +R)$ შუალედს—კრებადობის შუალედი. თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაშინ $R=0$, თუკი მწკრივი კრებადია ყველგან, მაშინ $R=+\infty$.

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება დალამბერის ან კოშის ნიშნებით. თუ ყველა a_n კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{და} \quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

ფორმულებით.

(1) ხარისხოვანი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე, რომელიც კრებადობის შუალედში მდებარეობს. ამ სეგმენტზე შეიძლება მისი წევრ-წევრა გაწარმოება და ინტეგრება. ე. ი. თუ

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S(x),$$

მაშინ

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=S'(x)$$

და

$$\int_{x_0}^{x} a_0dx+\int_{x_0}^{x} a_1xdx+\ldots+\int_{x_0}^{x} a_nx^ndx+\ldots=\int_{x_0}^{x} S(x)dx,$$

სადაც x_0 მიეკუთვნება მწკრივის კრებადობის შუალედს.

განსაზღვრეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის შუალედები და გამოიკვლიეთ მათი კრებადობა შუალედის ბოლოებზე:

767. $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$

768. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\ldots$

769. $x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots$

770. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^{n-1}}+\ldots$

771. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}+\ldots$

772. $x+\frac{x^2}{2\cdot 10}+\frac{x^3}{3\cdot 10^2}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$

773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

774. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n+1)}$.

776. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

777. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

778. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \lg \frac{1}{n}$.

779. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2+1}$.

780. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{(n+1)^2-1}$.

781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

783. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{3^{n-1} n \sqrt{n}}$.

784. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^{3n}}{3^n}$.

785. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}$.

786. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

787. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

788. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

იპოვეთ კრებადობის რადიუსი შემდეგი მწკრივებისა:

789. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n-1)3^{n-1}x^{n-1}$.

790. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}$.

791. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

792. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n^2}$.

793. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

794. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

წევრ-წევრა გაწარმოებისა და ინტეგრების გამოყენებით იპოვეთ ჯამები შემდეგი მწკრივებისა:

795. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

796. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$.

797. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

798. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

799. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$.

800. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

801. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

802. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

803. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$.

804. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$.

805. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.

806. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1}$.

807. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=e^{-x}+2e^{-2x}+\ldots+ne^{-nk}+\ldots$$

აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[1,+\infty)$ შუალედში და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx.$$

808. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=1+2\cdot 3x+3\cdot 3^2x^2+\ldots+n\cdot 3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ შუალედში და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{0}^{0,125} f(x)dx.$$

§ 5. ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივები

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და a წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს უწყვეტი წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (ჩათვლით), მაშინ ამ მიდამოში მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\Theta(x-a)],\quad 0<\Theta<1.$$

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, მაშინ მივიღებთ ტეილორის მწკრივს:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n.$$

როცა $a=0$, გვექნება მაკლორენის მწკრივი:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

809. დაშალეთ $f(x)=a^x$ ფუნქცია x-ის მთელ დადებით ხარისხებად და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის შუალედი.

810. დაშალეთ $f(x)=e^x$ ფუნქცია $(x-2)$-ის ხარისხებად და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის შუალედი.

811. დაშალეთ $f(x)=\cos x$ ფუნქცია $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$-ის ხარისხებად.

812. დაშალეთ $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ფუნქცია x-ის ხარისხებად.

813. დაშალეთ $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ ფუნქცია $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$-ის ხარისხებად.

814. დაშალეთ $f(x)=\sin^2 x$ ფუნქცია x-ის ხარისხებად.

815. დაშალეთ $f(x)=\ln x$ ფუნქცია $(x-1)$-ის ხარისხებად.

816. 1) დაშალეთ $f(x)=x^3-2x^2-5x-2$ ფუნქცია $(x+4)$-ის ხარისხებად;

2) დაშალეთ $f(x)=x^4-4x^2$ ფუნქცია $(x+2)$-ის ხარისხებად.

იპოვეთ x-ის ხარისხებად დაშლის პირველი სამი წევრი შემდეგი ფუნქციებისა:

817. $f(x)=\ln(1+e^x)$. **818.** $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$

819. $f(x)=e^{\sin x}$. **820.** $f(x)=\operatorname{tg} x$.

ფუნქციის მწკრივად დაშლისას ხშირად გამოიყენება შემდეგი ფორმულები:

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \qquad (-\infty<x<+\infty);$

2. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$
$(-\infty<x<+\infty);$

3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots \quad (-\infty<x<+\infty);$

4. $$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots \quad (-1<x<1);$$

5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots \qquad (-1<x\leqslant 1);$

6. $\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$
$(-1\leqslant x\leqslant 1);$

7. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots \quad (-1<x<1).$

821. $f(x)=e^{x^2}$.

822. $f(x)=xe^{-2x}$.

823. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

824. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

825. $f(x)=e^x \sin x$.

826. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

827. $f(x)=\cos^2 x$.

828. $f(x)=\operatorname{arctg}^2 x$.

829. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

830. $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$.

831. $f(x)=\frac{x}{2-x}$.

832. $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$.

833. $f(x)=\ln(1-x+x^2)$.

834. $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$.

835. $f(x)=\frac{1-x}{1-x-2x^2}$.

836. $f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}$.

837. დაშალეთ $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია $(x+2)$-ის ხარისხებად.

838. დაშალეთ $f(x)=\frac{1}{5-x}$ ფუნქცია $(x-2)$-ის ხარისხებად.

839. დაშალეთ $f(x)=e^{3x}$ ფუნქცია $(x-1)$-ის ხარისხებად.

840. დაშალეთ $f(x)=\sqrt{x}$ ფუნქცია $(x-4)$-ის ხარისხებად.

მწკრივის წევრ-წევრა ინტეგრების გამოყენებით დაშალეთ x-ის ხარისხოვან მწკრივებად შემდეგი ფუნქციები:

841. $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

842. $f(x)=\arcsin x$.

843. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

844. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

დაშალეთ x-ის ხარისხებად შემდეგი ფუნქციები:

845. $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}dx$.

846. 1) $\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^x \frac{e^x dx}{x^2}$.

847. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

848. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

849. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$.

850. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

851. აიღეთ e^x ფუნქციის მაკლორენის მწკრივად დაშლის პირველი სამი წევრი და გამოთვალეთ $\sqrt[3]{e}$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

852. იგივე (იხ. №851 ამოცანა) e^2 რიცხვისათვის (აიღეთ პირველი ექვსი წევრი).

853. აიღეთ $(1+x)^m$ ფუნქციის მწკრივად დაშლის პირველი ორი წევრი და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\sqrt{0,992}$; 2) $\sqrt{90}$; 3) $\sqrt[3]{130}$; 4) $\sqrt[3]{0,997}$.

854. იგივე (იხ. №853 ამოცანა) რიცხვებისათვის: 1) $\sqrt{1,005}$; 2) $\sqrt{23}$; 3) $\sqrt[3]{70}$; 4) $\sqrt[5]{40}$.

855. აიღეთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების მწკრივად დაშლის პირველი ორი წევრი და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\sin 18°$, 2) $\cos 12°$.

856. იგივე (იხ. №855 ამოცანა) რიცხვებისათვის: 1) $\sin 10°$; 2) $\cos 15°$.

857. ისარგებლეთ

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)$$

ფორმულით და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\ln 2$; 2) $\ln 3$; 3) $\ln 4$; 4) $\ln 6$.

858. გამოთვალეთ მიახლოებით $\ln 5$ და $\ln 10$, თუ $\ln 2 \approx 0{,}6931$ და აჩვენეთ, რომ მოდული

$$M=\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}4343.$$

859. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციის დაშლაში დაუშვით, რომ $x=1$ და იპოვეთ π რიცხვის მწკრივად დაშლა.

860. $f(x)=\arcsin x$ ფუნქციის დაშლაში დაუშვით, რომ $x=\frac{1}{2}$ და გამოთვალეთ π რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა (აიღეთ სამი წევრი).

გამოთვალეთ მიახლოებითი მნიშვნელობები შემდეგი ინტეგრალებისა:

861. $\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ (3 წევრი).

862. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ (3 წევრი).

863. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ (3 წევრი).

864. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (2 წევრი).

865. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 წევრი).

866. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}\,dx$ (2 წევრი).

§ 6. ტეილორის მწკრივი ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

$f(x, y)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივს (a, b) წერტილის მიდამოში აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(a, b)(x-a)+f'_y(a, b)(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a, b)(y-b)^2\right]+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b)+\ldots$$

როცა $a=b=0$, ვღებულობთ მაკლორენის მწკრივს:

$$f(x, y)=f(0; 0)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(0; 0)\,x+f'_y(0; 0)\,y\right]+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0; 0)x^2+\right.$$

$$\left.+2f''_{xy}(0; 0)\,xy+f''_{yy}(0; 0)y^2\right]+\ldots+\frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0; 0)+\ldots$$

867. დაშალეთ $f(x,y)=x^2y$ ფუნქცია $(x-1)$-ისა და $(y+1)$-ის ხარისხებად.

868. დაშალეთ $f(x,y)=x^3+2xy^2$ ფუნქცია $(x-1)$-ისა და $(y-2)$-ის ხარისხებად.

869. დაშალეთ $f(x,y)=y^x$ ფუნქცია $(x-2)$-ისა და $(y-1)$-ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე და გამოთვალეთ $(1,1)^{2,1}$.

870. დაშალეთ $f(x,y)=\sin(x+y)$ ფუნქცია x-ისა და $\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$-ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

871. დაშალეთ $f(x,y)=\ln(x-y)$ ფუნქცია x-ისა და $(y+1)$-ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

872. დაშალეთ $f(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ფუნქცია $(x-1)$-ისა და y-ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

873. დაწერეთ $f(x, y)=e^x\cos y$ ფუნქციის x-ისა და y-ის ხარისხებად მწკრივად დაშლის პირველი ოთხი წევრი.

874. დაწერეთ $f(x, y)=(1+x)^{1+y}$ ფუნქციის x-ისა და y-ის ხარისხებად მწკრივად დაშლის პირველი სამი წევრი.

§ 7. ფურიეს მწკრივი და ფურიეს ინტეგრალი

1°. **ფურიეს მწკრივი.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია 2π. ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ეწოდება ტრიგონომეტრიულ მწკრივს

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

სადაც დაშლის კოეფიციენტები ასე განისაზღვრება:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\ldots)\cdot$$

ან ასე:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \quad (n=1, 2, \ldots).$$

არსებობს სხვადასხვა სახის საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლებოდეს ფურიეს მწკრივით. ამ მხრივ აღსანიშნავია დ ი რ ი ხ ლ ე ს შემდეგი თ ე ო რ ე მ ა: ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლოა, ზოგიერთი წერტილისა, რომლებშიც ფუნქცია პირველი გვარის წყვეტას განიცდის. თუ ამ სეგმენტზე ფუნქციას აქვს ექსტრემუმის სასრული რიცხვი, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ ყველგან, სადაც $f(x)$ უწყვეტია. თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ ფურიეს მწკრივი კრებადია $\frac{f(x_{0-})+f(x_{0+})}{2}$ მნიშვნელობისაკენ, ხოლო $\pm\pi$, წერტილებში მწკრივი კრებადია $\frac{f(-\pi_+)+f(\pi_-)}{2}$ მნიშვნელობისაკენ.

როცა $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს, მაშინ დავწერთ:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

თუ $f(x)$ ლუწი პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

სადაც

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

თუკი $f(x)$ კენტი პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \text{ სადაც } \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს $[-l, l]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

სადაც

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

დაშალეთ ფურიეს მწკრივებად 2π-პერიოდიანი ფუნქციები:

875. $f(x)=x$ $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში.

876. $f(x)=x^2$ $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში.

877. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } -\pi<x\leqslant 0, \\ -2, & \text{როცა } 0<x<\pi. \end{cases}$

878. $f(x)=\begin{cases} -c, & \text{როცა } -\pi<x<0, \\ c, & \text{როცა } 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$

879. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } -\pi<x\leqslant 0. \\ x, & \text{როცა } 0<x<\pi. \end{cases}$

880. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } -\pi<x\leqslant 0, \\ 2x, & \text{როცა } 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$

881. $f(x)=|x|$ $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში.

882. $f(x)=|\sin x|$ $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში.

883. დაშალეთ $f(x)=\cos ax$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში (a მთელი არ არის).

884. დაშალეთ $f(x)=\operatorname{sh} ax$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(-\pi, \ \pi)$ ინტერვალში.

885. დაშალეთ $f(x)=x\cos x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; \ 2\pi)$ ინტერვალში.

886. დაშალეთ $f(x)=e^x-1$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; \ 2\pi)$ ინტერვალში.

887. დაშალეთ $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; \ 2\pi)$ ინტერვალში.

888. დაშალეთ ფურიეს მწკრივად

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{როცა } 0<x<\pi, \\ 0, & \text{როცა } \pi\leqslant x<2\pi. \end{cases}$$

ფუნქცია.

889. დაშალეთ $f(x)=e^x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(-l, \ l)$ ინტერვალში.

დაშალეთ ფურიეს მწკრივებად ნაჩვენებ შუალედებში შემდეგი ფუნქციები:

890. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } -l<x\leqslant 0, \\ x, & \text{როცა } 0\leqslant x<l. \end{cases}$

891. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } -1<x<0, \\ x, & \text{როცა } 0\leqslant x<1. \end{cases}$

892. დაშალეთ $f(x)=10-x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(5;\ 15)$ შუალედში.

893. დაშალეთ $f(x)=\sin x$ ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად $(0;\ \pi)$ ინტერვალში.

894. დაშალეთ $f(x)=\cos 2x$ ფუნქცია სინუსების მწკრივად $(0;\ \pi)$ ინტერვალში.

895. დაშალეთ $f(x)=x(\pi-x)$ ფუნქცია სინუსების მწკრივად $(0;\ \pi)$ ინტერვალში და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ შემდეგი მწკრივის ჯამის მოსაძებნად:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\dots(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\dots$$

896. დაშალეთ $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად $(0;\ \pi)$ ინტერვალში.

2°. **ფურიეს ინტეგრალი.** თუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია ამ შუალედში, ე. ი. არსებობს $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ ინტეგრალი და ყოველ სასრულ არეზე აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფურიეს ინტეგრალის სახით:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha\,(t-x)\,dt\right]d\alpha.$$

დაწერეთ ფურიეს ინტეგრალები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

897. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } 0<x<1, \\ 0, & \text{როცა } x>1 \end{cases}$ და $f(-x)=-f(x)$.

898. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } -1<x<1, \\ 0, & \text{როცა } |x|>1. \end{cases}$

899. $f(x)=e^{-\beta x}$, როცა $x\geqslant 0$ და $f(-x)=f(x)$.

900. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ 0, & \text{როცა } x<0 \text{ და } x>\pi. \end{cases}$

901. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } 0<x<1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{როცა } x=0 \text{ და } x=1, \\ 0, & \text{როცა } x<0 \text{ და } x>1. \end{cases}$

902. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, \text{ როცა } x>0, \\ 0, \text{ როცა } x=0, \\ -e^{x}, \text{ როცა } x<0, \quad f(-x)=-f(x). \end{cases}$

იპოვეთ ფურიეს გარდაქმნა შემდეგი ფუნქციებისათვის:

903. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ როცა } |x|\leqslant\pi, \\ 0, \text{ როცა } |x|>\pi. \end{cases}$

904. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ როცა } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ როცა } |x|>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

905. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } |x|>2, \\ 1, \text{ როცა } 1<|x|\leqslant 2, \\ -x^2+2, \text{ როცა } |x|\leqslant 1. \end{cases}$

906. $f(x)=\begin{cases} -x+1, \text{ როცა } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -x-1, \text{ როცა } -1\leqslant x<0, \\ 0, \text{ როცა } |x|>1. \end{cases}$

IV თავი

დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. ძირითადი ცნებები

ჩვეულებრივი *დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც შეიცავს დამოუკიდებელ x ცვლადს, ამ ცვლადის უცნობ $y=f(x)$ ფუნქციას და მის $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ წარმოებულებს.

ჩვეულებრივი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

$y=f(x)$ ფუნქციას, რომელიც (1) განტოლებას იგივეობად გადააქცევს, ეწოდება ამ *განტოლების ამონახსნი*, ამ ფუნქციის გრაფიკს კი — დიფერენციალური განტოლების *ინტეგრალური წირი*. თუ განტოლების ამონახსნი მოცემულია არაცხადი $\Phi(x, y)=0$ სახით, მაშინ მას *დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს* უწოდებენ.

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქციები აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებს:

907. $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$, $\qquad y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

908. $y=\dfrac{c^2-x^2}{2x}$, $\qquad x+y+x\dfrac{dy}{dx}=0.$

909. $x^2-xy+y^2=c^2$, $\qquad (x-2y)y'=2x-y.$

910. $y=x+ce^{y}$, $\qquad (x-y+1)y'=1.$

911. $y=c_1x+c_2x^2$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x^2}=0.$

912. $y=c_1x+\dfrac{c_2}{x}+c_3$, $\qquad y'''+\dfrac{3}{x}y''=0.$

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლებები წირთა მოცემული ოჯახებისათვის:

913. $y=ax$.

914. $x^2+y^2=a^2$.

915. $y^2=2px$.

916. $y=ax+a^2$.

917. $y=ae^{\frac{x}{a}}$.

918. $\ln\dfrac{x}{y}=1+ay$.

919. $y=c_1(x-c_2)^2$.

920. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

921. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

922. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე იმ პარაბოლების ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, რომელთა ღერძები Oy ღერძის პარალელურია.

923. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე წრეწირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

924. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, რომლებიც საკოორდინატო ღერძებიდან მოჰკვეთს მუდმივი S ფართობის სამკუთხედს.

§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{1}$$

თუ ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას y'-ის მიმართ, მაშინ

$$y'=f(x,\ y), \tag{2}$$

სადაც $f(x,\ y)$ მოცემული ფუნქციაა. (2) სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით:

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0. \tag{3}$$

სადაც $M\ (x,\ y)$ და $N\ (x,\ y)$ მოცემული ფუნქციებია.

$y'=f(x,\ y)$ დიფერენციალური განტოლების ზ ო გ ა დ ი ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი ეწოდება $y=\varphi(x,\ c)$ ფუნქციას, რომელიც ერთ ნებისმიერ c მუდმივს შეიცავს და c-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაწერილია არაცხადი $\Phi\ (x,\ y,\ c)=0$ სახით, მაშინ მას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება $y=\varphi(x, c_0)$ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი $y=\varphi(x, c)$ ამონახსნიდან ნებისმიერი c მუდმივის კერძო $c=c_0$ მნიშვნელობისათვის; $\Phi(x, y, c_0)=0$ დამოკიდებულებას კ ე რ ძ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება.

$\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$ მიმართულებათა ერთობლიობას ეწოდება (2) განტოლების მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა თ ა ველი. $f(x, y)=k$ წირებს, რომელთა წერტილებშიც ველის დახრილობას აქვს მუდმივი k-ს ტოლი მნიშვნელობა, ეწოდება ი ზ ო კ ლ ი ნ ე ბ ი.

იზოკლინების მეთოდით მიახლოებით ააგეთ ინტეგრალური წირების ველი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებისათვის:

925. $y'=x$. **926.** $y'=-\dfrac{x}{y}$.

927. $y'=\dfrac{y}{x}$. **928.** $y'=-\dfrac{y}{x}$.

ე ი ლ ე რ ი ს მ ე თ ო დ ი. (2) განტოლების იმ ინტეგრალური წირის მიახლოებითი აგებისათვის, რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, ააგებენ ტეხილ წირს, რომლის წვეროები მოთავსებულია $M_i(x_i, y_i)$ წერტილებში, სადაც

$$x_{i+1}=x_i+\Delta x_i, \qquad y_{i+1}=y_i+\Delta y_i, \qquad \Delta x_i=h \quad \text{(ბიჯი)}.$$

$$\Delta y_i=hf(x_i, y_i) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

ეილერის მეთოდით იპოვეთ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებათა კერძო ამონახსნები x-ის ნაჩვენები მნიშვნელობებისათვის:

929. $y'=\dfrac{xy}{2}$, $y(0)=1$. იპოვეთ $y(1)$, $(h=0{,}1)$.

930. $y'=y$, $y(0)=1$. იპოვეთ $y(1)$, $(h=0{,}1)$.

931. $y'=x+y$, $y(0)=1$. იპოვეთ $y(1)$, $(h=0{,}1)$.

932. $y'=y-\dfrac{2x}{y}$, $y(0)=1$. იპოვეთ $y(1)$, $(h=0.2)$.

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განცალებადცვლადებიანი განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C.$$

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

განტოლებას ეწოდება განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(x)}{N_1(y)}dy=c.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია იპოვეთ ის კერძო ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს:

933. $yy'+x=0;\quad x=1,\quad y=\sqrt{3}$.

934. $y'=3x^2-2x+1;\quad x=1,\quad y=2$.

935. $xy'-y=0;\quad x=\frac{1}{2},\quad y=2$.

936. $y'=y;\quad x=-2,\quad y=4$.

937. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$.

938. $(1+y^2)dx+xydy=0$.

939. $xyy'=1-x^2$.

940. $y'\,\mathrm{tg}x=y$.

941. $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

942. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$.

943. $(t^2-xt^2)\frac{dx}{dt}+x^2+x^2t=0$.

944. $zdt-(t^2-a^2)dz=0$.

945. $\varphi^2dr+(r-a)d\varphi=0$.

946. $sec^2\Theta\,\mathrm{tg}\varphi d\varphi+sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\Theta d\Theta=0$

947. $3e^x\,\mathrm{tg}ydx+(1-e^x)sec^2ydy=0$.

948. $sec^2x\,\mathrm{tg}ydx+sec^2y\,\mathrm{tg}xdy=0$.

949. $y'\sin x=y\ln y;\quad x=\frac{\pi}{2},\ y=1$.

950. $(1+e^x)yy'=e^x;\ x=1,\quad y=1$.

951. $y'=(2y+1)\ \mathrm{ctg}\ x;\ x=\frac{\pi}{4},\quad y=\frac{1}{2}$.

952. $y'=10^{x+y}$.

953. $xy'+2y=xyy'$.

954. $y'=(x-y)^2+1$.

955. $y'=\sin\ (x-y)$.

956. $y'=(8x+2y+1)^2$.

§ 3. ერთგვაროვანი განტოლება

დიფერენციალური

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)\ dy=0$$

განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი განტოლება, თუ $M(x,\ y)$ და $N(x,\ y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. $y=ux$ ან $x=uy$ ჩასმით, სადაც u ახალი ფუნქციაა, ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებამდე.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

957. $(y-x)ydx+x^2dy=0$.

958. $(x-y)dx+xdy=0$.

959. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

960. $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.

961. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

962. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$.

963. $(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$.

964. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

965. $yy'=2y-x$.

966. $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$.

967. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$; $\quad x=2,\ y=1$.

968. $xydy-(x^2+y^2)dx=0$; $\quad x=-1,\ y=0$.

969. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$; $\quad x=1,\ y=0$.

970. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$; $\quad x=-1,\ y=1$.

თუ მოცემული $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ განტოლება და $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, მაშინ $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ ჩასმით, სადაც α და β მუდმივები განისაზღვრება

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან, მივიღებთ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას u და v ცვლადების მიმართ.

თუკი $\Delta=0$, მაშინ $u=a_1x+b_1y$ ჩასმით მივიღებთ განცალებადცვლადებიან განტოლებას.

ამოხსენით განტოლებები:

971. $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

972. $(3x-4y-2)dx-(3x-4y-3)dy=0$.

973. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

974. $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

975. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x-3}$.

976. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-2y+5}{2x-y+4}$.

§ 4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

დიფერენციალურ

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

განტოლებას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენს x-ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, ეწოდება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=e^{-\int Pdx}\left(c+\int Qe^{\int Pdx}dx\right)$$

ფორმულით.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

977. $y'-\frac{y}{x}=x$.

978. $y'+y=e^{-x}$.

979. $(1+x^2)y'-xy=x+x^3$.

980. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$.

981. $y'-\frac{ny}{x}=e^xx^n$.

982. $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$.

983. $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\cos x.$

984. $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3.$

985. $xy'+y=x+1;\ x=2,\ y=3.$

986. $xy'+2y=3x;\ x=-2,\ y=0.$

987. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x};\ x=0,\ y=0.$

988. $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1;\quad x=1,\ y=0.$

989. $y'+y\cos x=\sin x\cos x;\quad x=0,\ y=1.$

990. $(1-x^2)y'+xy=1;\quad x=0;\quad y=1.$

შემდეგი განტოლებები წრფივია, თუ y-ს მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო x-ს — ფუნქციად.

991. $(y^2-6x)y'+2y=0.$

992. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0.$

§ 5. ბერნულის განტოლება

ბერნულის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,$$

სადაც $n\neq 0$ და $n\neq 1$; $z=y^{1-n}$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

993. $\frac{dy}{dx}+xy=xy^3.$

994. $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-x^3y^2.$

995. $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}.$

996. $ny^{n-1}\frac{dy}{dx}+y^n=x.$

997. $\frac{dy}{dx}-\frac{\sin x}{3}y=-y^4\sin x.$

998. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}y^2.$

999. $(1-x^2)y'-xy=xy^2;\quad x=0,\quad y=0{,}5.$

1000. $\frac{dy}{dx}-\frac{x}{2(x^2-1)}y=\frac{x}{2y};\quad x=0.\quad y=1.$

შემდეგ ორ მაგალითში x მიიღეთ ფუნქციად, ხოლო y— არგუმენტად:

1001. $(x^2y^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy^3=0.$

1002. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy(1+xy^2)}.$

§ 6. განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

პირველი რიგის

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$$

განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში,

თუ მისი მარცხენა ნაწილი რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია:

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=du.$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

ამ შემთხვევაში $u(x, y)=c$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. $u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

განტოლებათა სისტემიდან.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1003. $(7x+3y)dx+(3x-5y)dy=0.$

1004. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0.$

1005. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0.$

1006. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0.$

1007. $2x\cos^2y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0.$

1008. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y\,dy=0.$

1009. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy=0.$

1010. $\dfrac{x}{(x+y)^2}dx+\dfrac{2x+y}{(x+y)^2}dy=0.$

1011. $\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dy=0; \quad x=1, \quad y=1.$

1012. $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0; \quad x=0, \quad y=2.$

იპოვეთ $u(x, y)$ ფუნქცია, თუ:

1013. $du=4(x^3-xy^2)dx+4(y^3-x^2y)dy.$

1014. $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy.$

1015. $du=(x+\ln y)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\sin y\right)dy.$

1016. $du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

იმისათვის, რომ $P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$ გამოსახულება იყოს რაიმე $u(x, y, z)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

შეამოწმეთ, რომ მოცემული გამოსახულებები რაიმე ფუნქციების სრული დიფერენციალებია და იპოვეთ ეს ფუნქციები:

1017. $(3x^2+3y-1)dx+(3x+z^2)dy+(2yz+1)dz.$

1018. $(yz-2x)dx+(xz+y)dy+(xy-z)dz.$

1019. $(\ln y-\cos 2z)dx+\left(\frac{x}{y}+z\right)dy+(y+2x\sin 2z)dz$.

1020. $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$.

§ 7. მაინტეგრებელი მამრავლი

თუ $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ განტოლებაში $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ და არსებობს ისეთი $\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$\mu M dx+\mu N dy=0$$

არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ $\mu(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მ ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ე ლ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი.

მაინტეგრებელი მამრავლი ადვილად მოიძებნება შემდეგ შემთხვევებში:

1) როცა $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$, მაშინ $\mu=e^{\int\varphi(x)dx}$;

2) როცა $-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi_1(y)$, მაშინ $\mu=e^{\int\varphi_1(y)dy}$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1021. $(2+2x-y^2)\,dx-2ydy=0$. 1022. $(\sin x+e^y)dx+\cos x dy=0$.

1023. $(x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$.

1024. $(x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+x\ln x)dy=0$.

1025. $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$. 1026. $(1+3x^2\sin y)dx-x\operatorname{ctg} y dy=0$.

1027. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$. 1028. $(y\operatorname{tg}x+\cos x)dx-dy=0$.

§ 8. პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები

თუ $F(x, y, y')=0$ დიფერენციალური განტოლება არ არის პირველი ხარისხის y' წარმოებულის მიმართ, მაშინ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ასეთი განტოლების ინტეგრება.

1°. განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას, ე. ი. $F(x, y')=0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, მივიღებთ $y'=\varphi(x)$ საიდანაც $y=\int\varphi(x)\,dx+C$;

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება x-ის მიმართ, მაშინ $x=f(y')$ და $x=f(p)$, $y=\int pf'(p)dp+C$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1029. $xy'=\sqrt{1+y'^2}$. 1030. $x^3+y'^2=x^2$.

1031. $x=2y'-\frac{1}{y'^2}$. 1032. $x=\sin y'+\ln y'$.

1033. $x=ay'+by'^2$. 1034. $e^{y'}+y'=x$.

2°. მოცემული განტოლება ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს

$$F(y,\ y')=0.$$

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, ე. ი. თუ $y'=\varphi(y)$, მაშინ $x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}+C$ იქნება ზოგადი ამონახსნი;

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება y-ის მიმართ, მაშინ $y=f(y')$ და $x=\int\frac{f'(p)dp}{p}+C$, $y=f(p)$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1035. $e^{y}(y'+1)=1.$ **1036.** $y'^2=\frac{1-y^2}{y^4}.$

1037. $y=y'^2+y'^3.$ **1038.** $y=y'^2+2\ln y'.$

1039. $y=y'\ln y'.$ **1040.** $y=e^{y'}\cdot y'^2.$

განსაზღვრეთ y' და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1041. $yy'+y'^2=x^2+xy.$ **1042.** $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0.$

1043. $y'^2-\frac{xy}{a^2}=0.$ **1044.** $y'^2+2yy'\operatorname{ctg}x-y^2=0.$

§ 6. განსაკუთრებული წერტილები და ამონახსნები

1°. **განსაკუთრებული წერტილები.** $y'=f(x,\ y)$ დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები უნდა ვეძებოთ $f(x,\ y)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, სადაც არ არსებობს $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებული.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების განსაკუთრებული წერტილები:

1045. 1) $y'=\frac{2y}{x}$; 2) $y'=\frac{y}{x}.$ **1046.** $y'=-\frac{x}{y}.$

1047. $y'=-\frac{y}{x}.$ **1048.** $y'=\frac{x+y}{x-y}.$

2°. **განსაკუთრებული ამონახსნები.** $F(x,\ y,\ y')=0$ განტოლებას, ზოგადი $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ ინტეგრალისა და კერძო ინტეგრალის გარდა, შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებული ინტეგრალი, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან მუდმივის არავითარი კერძო მნიშვნელობისათვის.

განსაკუთრებული ამონახსნი გეომეტრიულად $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ წირთა ოჯახის მომვლებია. ის მიიღება C-ს გამორიცხვით

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0,\quad \Phi'_C(x,\ y,\ C)=0$$

განტოლებათა სისტემიდან, ან კიდევ $p=y'$-ის გამორიცხვით

$$F(x, y, p)=0, \qquad F'_p(x, y, p)=0$$

განტოლებათა სისტემიდან.

იპოვეთ ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

1049. $y'^2=4(y-1)$. **1050.** $9yy'^2-4=0$.

1051. $y^2(1+y'^2)=a^2$. **1052.** $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$.

1053. იპოვეთ $y'^2+y^2=1$ განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის $M(0;\frac{1}{2})$ წერტილზე.

1054. იპოვეთ $y'^2+y=1$ განტოლების ორი ინტეგრალური წირი, რომლებიც გადიან $M(1;\ \frac{3}{4})$ წერტილზე.

§ 10. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

1°. ლაგრანჟის განტოლება. ლაგრანჟის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

სადაც $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ წარმოადგენს y' წარმოებულის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, რომელთაგან $\varphi(y')\neq y'$. $y'=p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება წრფივ განტოლებამდე.

2°. კლეროს განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y=xy'+\psi(y').$$

$y=Cx+\psi(C)$ წარმოადგენს კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს;

$$\left\{\begin{array}{l} x+\psi'(p)=0, \\ y=px+\psi(p) \end{array}\right.$$

განტოლებათა სისტემიდან p-ს გამორიცხვა გვაძლევს კლეროს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლებები:

1055. $y=2xy'-y'^2$. **1056.** $y=2xy'+\frac{1}{y'}$.

1057. $y=x(1+y')+y'^2$. **1058.** $y=2xy'+\sin y'$.

1059. $y=xy'^2+y'^2$. **1060.** $2y(y'+2)=xy'^2$.

იპოვეთ კლეროს განტოლების ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

1061. $y=xy'+y'^2$. **1062.** $y=xy'+\frac{1}{y'}$.

1063. $y=xy'-a\sqrt{1+y'^2}$. **1064.** $y=xy'+\frac{1}{2y'^2}$.

1065. $y=xy'+y'-y'^2$. **1066.** $y=xy'+y'+e^{y'}$.

§ 11. იზოგონალური და ორთოგონალური ტრაექტორიები. ევოლვენტები

თუ მოცემულია წირთა ოჯახი

$$F(x,\ y,\ a)=0 \qquad (1)$$

სადაც a პარამეტრია, მაშინ იმ წირთა ოჯახს, რომლის ყოველი წირი მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს ერთი და იმავე α კუთხით, ეწოდება მოცემული ოჯახის *იზოგონალური ტრაექტორიები*. კერძოდ, როცა $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ *ორთოგონალურ ტრაექტორიებს*.

თუ $\Phi(x,\ y,\ y')=0$ არის (1) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისად არის:

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)=0, \quad \Phi\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0 \qquad (k=\operatorname{tg}\alpha).$$

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე წირის ევოლუტის განტოლება

$$y_c=f(x_c)$$

და საძიებელია თვით წირი, ე. ი. ევოლვენტა. თუ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f'(x_c)}, \qquad \frac{y-f(x_c)}{x-x_c}=f'(x_c)$$

განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხავთ x_c პარამეტრს, მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ამონახსნი მოგვცემს ევოლვენტების ოჯახს.

იპოვეთ ორთოგონალური ტრაექტორიები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

1067. $y^2=ax$. **1068.** $xy=a$.

1069. $x^2+y^2=a^2$. **1070.** $ay^2=x^3$.

1071. $x^2+2y^2=a^2$. **1072.** $x^2+y^2+2ay=0$.

1073. იპოვეთ $\frac{x^2}{1+a}+\frac{y^2}{a}=1$ კონფოკალური ელიფსების ორთოგონალური ტრაექტორიები ($a>0$, ფოკუსები მოთავსებულია $F(\pm 1;\ 0)$ წერტილებში).

1074. იპოვეთ ისეთი ელიფსების ორთოგონალური ტრაექტორიები, რომლებსაც საერთო აქვთ დიდი ღერძი ($2\ a$-ს ტოლი).

1075. იპოვეთ $r=2a\sin\varphi$ ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

1076. იპოვეთ $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდების ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

1077. იპოვეთ $y=Cx$ წრფეთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიები, რომლებიც მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს α კუთხით, სადაც $\operatorname{tg}\alpha=k$.

1078. იპოვეთ წირები, რომლებიც $r=ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიების ოჯახის წირებს კვეთს $\alpha=\frac{\pi}{4}$ კუთხით.

1079. იპოვეთ $4y^3_c-27\ x^2_c=0$ წირის ევოლვენტა.

1080. იპოვეთ $y_c=\frac{x^2_c}{2h}$ წირის ევოლვენტა, სადაც h მუდმივია.

1081. იპოვეთ $x^2_c+y_c^2=a^2$ წრეწირის ევოლვენტა.

1082. იპოვეთ $8(x_c-1)^3-27y^2_c=0$, წირის ევოლვენტა.

§ 12. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენაზე

1083. იპოვეთ წირი, რომლის მხების სიგრძე შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორის ტოლია.

1084. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა უდრის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის ჯამს.

1085. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა არის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის საშუალო არითმეტიკული.

1086. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალი აბსცისათა ღერძზე ჩამოჭრის $\frac{y^2}{x}$ სიდიდის მონაკვეთს.

1087. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

1088. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

1089. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, მუდმივი a სიდიდეა.

1090. იპოვეთ წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი უდრის ამ წერტილის რადიუს-ვექტორს.

1091. იპოვეთ წირი, თუ მხებქვეშას და ნორმალქვეშას ნახევარსხვაობა უდრის შეხების წერტილის აბსცისას.

1092. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის $M_0(3;\ 2)$ წერტილზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) მისი მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა; 2) მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე ორჯერ აღემატება შეხების წერტილის ორდინატს.

1093. იპოვეთ წირი, თუ მისი მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთია $a\sec\varphi$, სადაც φ არის კუთხე რადიუსვექტორსა და Ox ღერძს შორის.

1094. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე, თუ მისი ნორმალის მონაკვეთის შუაწერტილი მოთავსებულია $y^2=ax$ პარაბოლაზე.

1095. იპოვეთ წირი, თუ ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით, საძიებელი წირის მხებითა და შეხების წერტილის ორდინატით, უდრის a^2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(a;\ a)$ წერტილზე.

1096. იპოვეთ წირი, თუ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი $M\ (x,\ y)$ წერტილის OM რადიუსით, ამ წერტილზე გავლებული მხებითა და Ox ღერძით, უდრის 2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0\ (2;\ -2)$ წერტილზე.

1097. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: თუ წირის ნებისმიერ $M(x,\ y)$ წერტილზე გავავლებთ კოორდინატთა ღერძების პარალელურ წრფეებს ამ ღერძების გადაკვეთამდე, მაშინ მიღებული მართკუთხედი გაიყოფა ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთის ფართობი (Ox ღერძთან მიმდებარე ნაწილის) ორჯერ მეტი იქნება მეორეზე. გამოყავით ის წირი, რომელიც გადის $M_0\ (2;\ 4)$ წერტილზე.

1098. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი რკალით, ორი ორდინატითა და Ox ღერძით, ამ რკალის სიგრძის პროპორციულია. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(0;a)$ წერტილზე.

1099. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი, ამასთან, არევის საშუალებით კონცენტრაცია თანაბარი რჩება მთელ რეზერვუარში. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 საათის შემდეგ?

1100. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში ჭურჭელში ჩადის b ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

1101. განსაზღვრეთ, რა დროის განმავლობაში დაიცლება წყლით სავსე კონუსური ჭურჭელი, რომლის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო კუთხე წვეროსთან $\alpha = 60^\circ$. კონუსის ძირში გაკეთებულია ხვრელი, რომლის ფართობიც უდრის 0,5 სმ^2-ს.

1102. D დიამეტრისა და H სიმაღლის მქონე წრიული ცილინდრული ჭურჭელი ავსებულია წყლით. გაიგეთ, რა დროის შემდეგ დაიცლება ჭურჭელი მის ძირში გაკეთებული ხვრელის საშუალებით, თუ ხვრელის დიამეტრია a ($D = 1$მ, $H = 1{,}5$მ, $a = 0{,}05$ მ).

§ 13. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1°. $F(x,\ y^{(n)}) = 0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს უცნობ y ფუნქციასა და მის წარმოებულებს $(n-1)$ რიგამდე. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) როცა განტოლება ამოიხსნება $y^{(n)}$-ის მიმართ, მაშინ $y^{(n)}=f(x)$. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y=\overbrace{\int dx\ldots\int}^{n\text{-ჯერ}} f(x)dx+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n.$$

ბ) როცა განტოლება ამოიხსნება x-ის მიმართ, გვექნება $x=\varphi(y^{(n)})$. აღვნიშნოთ $y^{(n)}=p$, მაშინ $x=\varphi(p)$, ხოლო $y^{(n-1)}=\int p\varphi'(p)dp+C_1$. აქედან $(n-1)$-ჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება მოგვცემს $y=f(p, C_1, C_2,\ldots C_n)$. ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება:

$$x=\varphi(p),\quad y=f(p,\ C_1,\ C_2,\ldots,\ C_n).$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1103. $y''-x=0;\quad x=1,\quad y=1,\quad y'=2.$

1104. $y''-4\cos 2x=0;\quad x=0,\quad y=0,\quad y'=0.$

1105. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x};\quad x=\dfrac{\pi}{4},\quad y=\ln\sqrt{2},\quad y'=1.$

1106. $y'''=\dfrac{6}{x^3};\quad x=1,\quad y=2,\quad y'=1,\quad y''=1.$

1107. $y'''=e^{-x};\quad x=0,\quad y=0,\quad y'=0,\quad y''=0.$

1108. $y'''=e^{2x+1}.$

1109. $y'''=\sin x-\cos x.$

1110. $y'''\sin^4 x=\sin 2x.$

1111. $y'''=\ln x.$

1112. $y''^2-3y''+2=0.$

1113. $x=y''^3+1.$

1114. $x=e^{y''}+y''.$

2°. $F(x, y', y'',\ldots, y^{(n)})=0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას. ამ შემთხვევაში $y'=p$ ჩასმით განტოლების რიგი ერთი ერთეულით დაიწევს:

$$F(x,\ p,\ p',\ldots,\ p^{(n-1)})=0.$$

ასევე, $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},\ldots, y^{(n)})=0$ განტოლებაში $y^{(k)}=p$ ჩასმით განტოლების რიგი k ერთეულით დაიწევს:

$$F(x,\ p,\ p',\ldots,\ p^{(n-k)})=0.$$

ბოლოს, თუ მოცემულია $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ განტოლება, მაშინ $y^{(n-1)}=p$ ჩასმით მიიღება პირველი რიგის განტოლება

$$F(x,\ p,\ p')=0.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1115. $xy''+y'=x^2.$

1116. $x^3y''+x^2y'=1.$

1117. $x^2y''+xy'=1.$

1118. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x.$

1119. $y''(x^2+1)=2xy';\quad x=0,\quad y=1,\quad y'=3.$

1120. $xy''+xy'^2-y'=0;\quad x=2,\quad y=2,\quad y'=1.$

1121. $xy'''+y''=3x+1.$

1122. $x^2y'''=y''^2.$

3°. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ **სახის განტოლება.** $y^{(n-1)}=p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებამდე.

ამოხსენით განტოლებები:

1123. $y''^2=y'$. **1124.** $y^{IV}+y'''=0$.

1125. $y'''=y''^3$. **1126.** $y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

4°. $F(y, y', y'')=0$ **სახის განტოლება.** $y'=p$ ჩასმით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

იპოვეთ ზოგადი და კერძო ამონახსნები (იქ, სადაც მოცემულია საწყისი პირობები) შემდეგი განტოლებებისა:

1127. $yy''+y'^2=0$. **1128.** $yy''-y^2y'-y'^2=0$.

1129. $(y-1)y''-2y'^2=0$. **1130.** $2yy''+y'^2+y'^4=0$.

1131. $2yy''-y'^2=0$; $x=-1$, $y=4$, $y'=1$.

1132. $yy''+y'^2=1$; $x=0$, $y=1$, $y'=1$.

5°. თუ $F(x, y, y', y'')=0$ განტოლებაში F ფუნქცია ერთგვაროვანია y უცნობი ფუნქციისა და მისი y', y'' წარმოებულების მიმართ, მაშინ $y'=yz$ ჩასმით განტოლების რიგი დაიწევს ერთი ერთეულით.

1133. $xyy''-xy'^2-yy'=0$. **1134.** $x^2yy''=(y-xy')^2$.

1135. $yy''-y'^2=\dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$. **1136.** $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

6°. მარტივი გარდაქმნებით დასწიეთ რიგი შემდეგ მაგალითებში:

1137. $yy''=2y'^2$. **1138.** $\dfrac{y''}{y'}-\dfrac{2yy'}{1+y^2}=0$.

1139. $yy''-y'^2-y^2=0$. **1140.** $yy'''-y'y''=0$.

1141. იპოვეთ წირი, რომლის სიმრუდის რადიუსი მუდმივი a სიდიდის ტოლია.

1142. იპოვეთ წირი, რომლის სიმრუდის ρ რადიუსსა და ნორმალის N მონაკვეთს შორის არსებობს დამოკიდებულება $\rho=\dfrac{N^3}{h}$, სადაც h მუდმივია.

§ 14. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

1°. **ერთგვაროვანი განტოლება.** n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წ რ ფ ი ვ ი, თუ ის პირველი ხარისხისაა უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. ამ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \qquad (1)$$

სადაც $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ არის x-ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე შუალედში, ხოლო y უცნობი ფუნქცია.

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)=0$, განტოლებას ეწოდება *ერთგვაროვანი*, თუკი $f(x)\neq 0$, მაშინ განტოლება არაერთგვაროვანია.

წრფივი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \tag{2}$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{3}$$

სადაც $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია (ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა), ხოლო $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — ნებისმიერი მუდმივები.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციებს ეწოდება *წრფივად დამოკიდებული* რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ყოველი x-ისათვის აღნიშნულ შუალედში მართებულია ტოლობა:

$$C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n\equiv 0;$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

კერძოდ, მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{4}$$

დიფერენციალური განტოლების ორ y_1 და y_2 ამონახსნს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი λ რიცხვი, რომ

$$\frac{y_1}{y_2}=\lambda \quad \text{ანუ} \quad y_1=\lambda y_2.$$

თუკი ფარდობა $\frac{y_1}{y_2}\neq\text{const}$, მაშინ აღნიშნულ ფუნქციებს ეწოდება *წრფივად დამოუკიდებელი*.

თუ ცნობილია (4) განტოლების კერძო ამონახსნი y_1, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

სადაც

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx.$$

გამოიკვლიეთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემები:

1143. $y_1=x,\ y_2=x+1.$ **1144.** $y_1=e^{ax}\sin bx,\ y_2=e^{ax}\cos bx.$

1145. $y_1=x,\ y_2=x+1,\ y_3=x+2.$ **1146.** $y_1=\sin^2x,\ y_2=\cos^2x,\ y_3=1.$

1147. $y_1=x,\ y_2=x^2,\ y_3=x^3.$ **1148.** $y_1=e^x,\ y_2=e^{2x},\ y_3=e^{3x}.$

შეადგინეთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფუნდამენტური ამონახსნი:

1149. $y_1=x,\quad y_2=x^2.$ **1150.** $y_1=\sin x,\quad y_2=\cos x.$

1151. $y_1=1,\quad y_2=\cos 2x.$ **1152.** $y_1=e^x,\quad y_2=xe^x.$

1153. $y_1=x^2$ და $y_2=x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=1$, $y'=0$.

1154. $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მესამე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=0$, $y'=-1$, $y''=2$.

ამოხსენით განტოლებები, თუ ცნობილია მათი თითო კერძო ამონახსნი:

1155. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0;\qquad y_1=\frac{\sin x}{x}.$

1156. $y''+\frac{4}{x}y'-\frac{4}{x^2}y=0;\qquad y_1=x.$

1157. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0;\quad y_1=x.$

1158. $y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2x\cdot y=0;\quad y_1=\sin x.$

1159. $y''\sin^2x-2y=0;\quad y_1=\operatorname{ctg}x.$

1160. $x(1-x^2)y''=2y;\qquad y_1=\frac{x}{1-x}.$

2°. **არაერთგვაროვანი განტოლება.** წრფივი არაერთგვაროვანი

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=\bar{y}+V$$

ფორმულით, სადაც $\bar{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

თუ ცნობილია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა $y_1, y_2, \ldots, y_n$, მაშინ შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n$$

ფორმულით, სადაც $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან (ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი):

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{array}\right.$$

იპოვეთ შემდეგ არაერთგვაროვან განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი:

1161. $x^2y''+xy'-y=x^2; \quad y_1=x.$

1162. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3; \quad y_1=x.$

1163. $xy''-y'=x^2; \qquad y_1=x^2.$

1164. $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1; \qquad y_1=e^x.$

§ 15. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1°. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{1}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ $y=C_1y_1+C_2y_2$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2+a_1k+a_2=0. \tag{2}$$

ადგილი აქვს შემდეგ სამ შემთხვევას:

I. მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია, ე. ი. $k_1 \neq k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები: $k_1=k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=(C_1+C_2x)e^{k_1x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები $k_1=a+ib$, $k_2=a-ib$. მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=(C_1\cos bx+C_2\sin bx)\,e^{ax}.$$

ამოხსენით განტოლებები:

1165. $y''-y'-2y=0.$

1166. $y''-4y'+3y=0.$

1167. $y''-5y'+6y=0.$

1168. $y''-9y=0.$

1169. $y''-y'=0.$

1170. $y''+3y'=0.$

1171. $3y''-2y'-8y=0.$

1172. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}-4x=0.$

1173. $y''-5y'+4y=0; \quad x=0, \quad y=5, \quad y'=8.$

1174. $8y''+2y'-3y=0; \quad x=0, \quad y=-6, \quad y'=7.$

1175. $y''+2y'+y=0.$

1176. $4y''-12y'+9y=0.$

1177. $16y''-24y'+9y=0.$

1178. $16y''+8y'+y=0.$

1179. $y''+4y'+4y=0$; $\quad x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{2}, \quad y'=-4$

1180. $y''-6y'+9y=0$; $\quad x=0, \quad y=0, \quad y'=2.$

1181. $y''+2y'+5y=0.$ **1182.** $y''-4y'+13y=0.$

1183. $y''+y'+y=0.$ **1184.** $y''+4y'+8y=0.$

1185. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0.$ **1186.** $y''+y=0.$

1187. $y''+4y=0$; $\quad x=0, \quad y=0, \quad y'=2.$

1188. $y''+2y'+2y=0$; $\quad x=0, \quad y=1, \quad y'=1.$

3°. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება $y=\bar{y}+V$ ფორმულით. სადაც $\bar{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

კერძო ამონახსნი მოიძებნება მუდმივების ვარიაციის მეთოდით. ზოგ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილი m-ური ხარისხის მრავალწევრია: $f(x)=P_m(x)$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ნულოვანი ფესვები. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) მახასიათებელ განტოლებას აქვს l ჯერადობის ნულოვანი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$). მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=x^l Q_m(x)$ სახით. სადაც $Q_m(x)$ აგრეთვე m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია.

ამოხსენით განტოლებები:

1189. $y''-4y'+4y=x^2.$ **1190.** $y''-y=x^2-x+1.$

1191. $3y''-2y'-y=x^2+1.$ **1192.** $y''+y'+y=3x-2.$

1193. $y''+y'=3.$ **1194.** $y''-3y'=2-6x.$

1195. $y''-2y'=x^2-1.$ **1196.** $2y''+5y'=5x^2-2x-1.$

II. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=P_m(x)e^{ax}.$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური ხარისხის მოცემული მრავალწევრი, ხოლო a მუდმივია. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი. მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=Q_m(x)e^{ax}$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, მისი უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) a არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$). მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=x^l Q_m(x)e^{ax}$ სახით.

ამოხსენით განტოლებები:

1197. $y''+2y'+y=e^{2x}$. **1198.** $y''+y=4e^{x}$.

1199. $y''-2y'-y=6xe^{x}$. **1200.** $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$.

1201. $y''-2y'+y=e^{x}$. **1202.** $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

III. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=e^{ax}\,[P_p(x)\cos bx+Q_q(x)\sin bx],$$

სადაც $P_p(x)$ და $Q_q(x)$ შესაბამისად p და q ხარისხების მოცემული მრავალწევრებია, ხოლო a და b — ნამდვილი რიცხვები. მივიღოთ, რომ $p\geqslant q$. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) $a\pm ib$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$V=e^{ax}[M_p(x)\cos bx+N_p(x)\sin bx]$$

სახით, სადაც $M_p(x)$ და $N_p(x)$ უცნობკოეფიციენტებიანი p ხარისხის მრავალწევრებია;

2) $a\pm ib$ არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი (მეორე რიგის განტოლებისათვის $l=1$), მაშინ

$$V=x^l e^{ax}\,[M_p(x)\cos bx+N_p(x)\sin bx].$$

ამოხსენით განტოლებები:

1203. $y''-7y'+6y=\sin x$. **1204.** $y''+y'-2y=8\sin 2x$.

1205. $y''+y=10e^{x}\sin 2x$. **1206.** $y''+4y=5\sin 3x-10\cos 3x$.

1207. $y''+y=\cos x$. **1208.** $y''+4y=\sin 2x$.

თუ მოცემულია

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

განტოლება და $V_1, V_2, \ldots, V_n$ კერძო ამონახსნებია

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$y''+a_1y'+a_2y=f_n(x)$$

განტოლებებისა, მაშინ $V=V_1+V_2+\ldots+V_n$ ჯამი იქნება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1209. $y''-y'=2x-1-3e^{x}$. **1210.** $y''+y=\sin x+\cos 2x$.

1211. $y''-y=\cos x\cos 3x$. **1212.** $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\dfrac{x}{2}$.

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

1213. $y''-y'=2(1-x)$; $x=0$, $y=1$, $y'=1$.

1214. $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$; $x=0$, $y=0$, $y'=0$.

1215. $y''-2y'=(x^2+x-3)e^{x}$; $x=0$, $y=2$, $y'=2$.

1216. $y''+y=-\sin 2x$; $x=\pi$, $y=1$, $y'=1$.

როდესაც $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ერთ-ერთი ზემოთ აღნიშნული სახე, საჭიროა მივმართოთ ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1217. $y''+y=\operatorname{tg}x$. **1218.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$.

1219. $y''-y'=\frac{e^x}{e^x+1}$. **1220.** $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

1221. იპოვეთ $y''-y=0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y=x$ წრფეს (0; 0) წერტილში.

1222. იპოვეთ $y''+2y'+2y=0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y=x+1$ წრფეს (0; 1) წერტილში.

1223. იპოვეთ $y''-4y'+3y=0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y=x+2$ წრფეს (0; 2) წერტილში.

1224. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w=-\frac{5}{4}s-v$. როცა $t=0$, მაშინ $s=0$ და $v=2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

1225. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w=-4s+2\cos 2t$. როცა $t=0$, მაშინ $s=0$ და $v=2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

1226. მატერიალური m წერტილი თავისუფლად ვარდება სიმძიმის ძალის გავლენით. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, თუ ჰაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში არ მივიღებთ. საწყის $t=0$ მომენტში წერტილის სიჩქარეა v_0, ათვლის ადგილიდან მისი დაშორება კი y_0.

1227. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ვარდება 10 მ სიმაღლიდან $v_0=0$ საწყისი სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ დავარდება სხეული მიწაზე?

1228. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ზემოთ $v_0=1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 10. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1°. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{1}$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ მუდმივებია.

თუ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{2}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოიხსნას მახასიათებელი განტოლება:

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0. \tag{3}$$

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. მახასიათებელი განტოლების $k_1, k_2, \dots, k_n$ ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\dots+C_ne^{k_nx}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი ჯერადი ფესვები; ვთქვათ, k_1 არის p ჯერადობის ფესვი ($p<n$, ე. ი. $k_1=k_2=\dots=k_p$), ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივია. მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\dots+C_px^{p-1})e^{k_1x}+C_{p+1}e^{k_{p+1}x}+\dots+C_ne^{k_nx}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ, $k_1=a+ib$, $k_2=a-ib$, ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივი და ნამდვილია. მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y=(C_1\cos bx+C_2\sin bx)e^{ax}+C_3e^{k_3x}+\dots+C_ne^{k_nx}.$$

IV. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ $k_1=a+ib$, $k_2=a-ib$ არის მახასიათებელი განტოლების p ჯერადობის ფესვები ($2p<n$), ხოლო დანარჩენი ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y=e^{ax}(A_1+A_2x+\dots+A_px^{p-1})\cos bx+e^{ax}(B_1+B_2x+\dots+B_px^{p-1})\sin bx+$$
$$+C_{2p+1}e^{k_{2p+1}x}+\dots+C_ne^{k_nx}.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1229. $y'''-5y''+6y'=0.$
1230. $y'''-13y''+12y'=0.$
1231. $y'''-6y''+11y'-6y=0.$
1232. $y'''-2y''-y'+2y=0.$
1233. $y'''-13y'-12y=0.$
1234. $y'''-y'=0.$
1235. $y^{IV}-5y''+4y=0.$
1236. $y^{V}-10y'''+9y'=0.$
1237. $y'''-5y''+8y'-4y=0.$
1238. $y'''-3y''+4y=0.$
1239. $y'''-6y''+12y'-8y=0.$
1240. $y'''-3y''+3y'-y=0.$
1241. $y^{IV}+2y'''+y''=0.$
1242. $y^{IV}-8y''+16y=0.$
1243. $y'''-8y=0.$
1244. $y'''+y=0.$
1245. $y'''+3y''+9y'-13y=0.$
1246. $y'''-5y''+17y'-13y=0.$
1247. $y^{IV}-16y=0.$
1248. $y^{IV}+y'=0.$
1249. $y^{IV}+4y=0.$
1250. $y^{IV}+5y''+4y=0.$
1251. $y^{IV}-3y''-4y=0.$
1252. $y^{IV}-2y'''+2y''-2y'+y=0.$
1253. $y^{IV}+2y''+y=0.$
1254. $y^{IV}+6y''+9y=0.$
1255. $y^{V}+8y'''+16y'=0.$
1256. $y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+y=0.$

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

1257. $y'''+y'=0;\quad x=0,\quad y=2,\quad y'=0,\quad y''=-1.$
1258. $y'''-y'=0;\quad x=2,\quad y=1,\quad y'=0,\quad y''=0.$

1259. $y^{IV}-y=0$; $x=0$, $y=1$, $y'=1$, $y''=1$, $y'''=1$.

1260. $y^{V}-y'=0$: $x=0$, $y=0$, $y'=1$, $y''=0$, $y'''=1$, $y^{IV}=2$.

9°. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=\overline{y}+V$$

ფორმულით, სადაც $\overline{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1261. $y'''-y=x^3-1$.

1262. $y'''-y''=-3x+1$.

1263. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$.

1264. $y^{IV}-2y'''+y''=x^2$.

1265. $y'''+y''+y'+y=xe^x$.

1266. $y'''-3y'+2y=(4x^2+4x-10)e^{-x}$.

1267. $y'''-2y''+y'=e^x$.

1268. $y^{IV}-81y=27e^{-3x}$.

1269. $y^{IV}+4y=\sin 2x$.

1270. $y^{IV}+y'''=\cos 4x$.

1271. $y'''+y''=x^2+1+3xe^x$.

1272. $y^{IV}-y=xe^x+\cos x$.

1273. $y'''+y'=\operatorname{tg}x\cdot\sec x$.
1274. $y'''+y''=x^2$.
$\Big\}$ ლაგრანჟის მეთოდით.

1275. $y'''-y'=3(2-x^2)$; $x=0$, $y=1$, $y'=1$, $y''=1$.

1276. $y'''+2y''+2y'+y=x$; $x=0$, $y=0$, $y'=0$, $y''=1$.

§ 17. ეილერის განტოლება

ეილერის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x).$$

სადაც a_1, $a_2,\ldots,$ a_n მუდმივებია. $x=e^t$ ჩასმით ეილერის განტოლება დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებამდე.

ამოხსენით განტოლებები:

1277. $x^2y''-4xy'+6y=0$.

1278. $x^2y''+3xy'+y=0$.

1279. $x^2y''+xy'+y=0$.

1280. $x^2y''+2xy'-n(n+1)y=0$.

1281. $x^2y''-xy'+y=2x$.

1282. $x^2y''-2y=2x\ln x$.

1283. $(x+1)^2y''-2(x+1)y'+2y=0$.

1284. $(x+1)^2y''-3(x+1)y'+4y=(x+1)^3$.

თუ გვაქვს მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,$$

მაშინ $y=e^{-\int\frac{a_1(x)}{2}dx}\cdot z$ ჩასმით მივიღებთ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს უცნობი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულს. იგივე ჩასმა გამოდგება აგრეთვე არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის.

ამოხსენით განტოლებები:

1285. $y''-2xy'+x^2y=0.$ **1286.** $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0.$

1287. $y''+\frac{2}{x}y'-a^2y=2.$ **1288.** $xy''+2y'-xy=e^x.$

§ 18. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით

თუ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შეუძლებელია ან დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, მაშინ მისი ამონახსნი ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n. \tag{1}$$

განუსაზღვრელი C_n ($n=0, 1, 2,\ldots$) კოეფიციენტების მოსაძებნად საჭიროა (1) მწკრივი შევიტანოთ სათანადო დიფერენციალურ განტოლებაში და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილში ერთმანეთს გავუტოლოთ $(x-x_0)$ ორწევრის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები.

ამოხსენით განტოლებები:

1289. $y'=x+y;\quad x=0,\quad y=1.$

1290. $y'=y+x^2;\quad x=0,\quad y=-2.$

1291. $y'=x^2+y^2;\quad x=0,\quad y=1$ (პირველი ოთხი წევრი).

1292. $y''=2xy'+4y;\quad x=0,\quad y=0,\quad y'=1.$

1293. $y''-xy=0;\quad x=0,\quad y=1,\quad y'=0.$

1294. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0;\quad x=0,\quad y=1,\quad y'=0.$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ აგრეთვე ტეილორის ან მაკლორენის მწკრივის საშუალებით:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{ან} \quad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

ამოხსენით განტოლებები:

1295. $y'=y^3-x;\quad x=0,\quad y=1.$

1296. $y'=x^2y^2-1;\quad x=0,\quad y=1.$

1297. $y'=e^y+xy;\quad x=0,\quad y=0.$

1298. $y'=x^2-y^2;\quad x=0,\quad y=0$ (პირველი ორი წევრი).

1299. $y''=yy'-x^2;\quad x=0,\quad y=1,\quad y'=0.$

1300. $y''=e^y+x;\quad x=0,\quad y=1,\quad y'=0.$

§ 10. ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲐᲗᲐ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲔᲑᲘ

ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{1}$$

სადაც x არგუმენტია, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — უცნობი ფუნქციები, $f_1, f_2, \dots, f_n$ კი $x, y_1, y_2, \dots, y_n$-ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე არეში. n-ს ეწოდება მოცემული სისტემის რიგი.

(1) სისტემას, რომლის განტოლებათა მარცხენა ნაწილებში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებია, ხოლო მარჯვენა ნაწილები წარმოებულებს არ შეიცავს, ეწოდება ნორმალური სისტემა.

(1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით:

$$\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=\dots=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{1}. \tag{2}$$

ზოგიერთი ნორმალური სისტემის ინტეგრება ადვილად ხერხდება მოცემული n განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის ერთ n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე დაყვანით. ამისათვის საჭიროა სისტემის ერთი განტოლება მიმდევრობით გავაწარმოოთ და გამოვრიცხოთ ყველა უცნობი ფუნქცია, გარდა ერთისა. მიღებული განტოლების ინტეგრებით ღებულობენ მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

1301. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z, \\ \dfrac{dz}{dx}=-y. \end{cases}$

1302. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+a^2z=0, \\ \dfrac{dz}{dx}+b^2y=0. \end{cases}$

1303. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z-y, \\ \dfrac{dz}{dx}=-y-3z. \end{cases}$

1304. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+7y-z=0, \\ \dfrac{dz}{dx}+2y+5z=0. \end{cases}$

1305. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y+\dfrac{3}{2}t^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-2y+4t+1. \end{cases}$

1306. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+y=\cos t. \\ 4\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+3x=\sin t. \end{cases}$

1807. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y-x}; \end{cases}$ $y = -1, \ z = 1,$ როცა $x = 0.$

1808. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{z}, \\ z' = y; \end{cases}$ $y = 1, \ z = 1,$ როცა $x = 0.$

1809. $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0; \end{cases}$ $y = 1, \ y' = 1, \ z = 1, \ z' = 0,$ როცა $x = 0.$

1810. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x. \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

1811. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

1812. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$ **1813.** $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$ **1814.** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + z, \\ z' = x + z - 4t. \end{cases}$

ზოგ შემთხვევაში საჭიროა მოცემული სისტემა ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით და ინტეგრება შევასრულოთ ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით.

ამოხსენით სისტემები:

1815. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$ **1816.** $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{zdz}{xy}.$

1817. 1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{\frac{1}{2}};$ 2) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}.$

1818. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$ **1819.** $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}.$

1820. $\dfrac{dx}{(z-y)^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}.$

დაიყვანეთ ნორმალურ სისტემამდე მაღალი რიგის დიფერენციალუ-განტოლებები:

1321. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$

1322. $y''=-\dfrac{y'}{x}-y.$

1323. $y'''=y.$

1324. $y^{IV}=-x^2y.$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემები:

1325. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2y+z,\\ \dfrac{dz}{dx}=-6y-3z.\end{cases}$

1326. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=3y-z,\\ \dfrac{dz}{dx}=10y-4z.\end{cases}$

1327. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y-2z,\\ \dfrac{dz}{dx}=3y+4z;\end{cases}$ $y=-1,\ z=2,$ როცა $x=0.$

1328. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2y+2z,\\ \dfrac{dz}{dx}=y+3z;\end{cases}$ $y=1,\ z=1,$ როცა $x=0.$

1329. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x-3y+2e^{3t},\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y+5e^{-t}.\end{cases}$

1330. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y-2z+2e^{-x},\\ \dfrac{dz}{dx}=3y+4z+e^{-x}.\end{cases}$

1331. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y+z.\end{cases}$

1332. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y-z,\\ \dfrac{dy}{dt}=12x-4y-12z,\\ \dfrac{dz}{dt}=-4x+y+5z.\end{cases}$

1333. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+12y-4z,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=-x-12y+6z.\end{cases}$

1334. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x+3y+3z,\\ \dfrac{dy}{dt}=-8x-5y-4z,\\ \dfrac{dz}{dt}=-x-y-2z.\end{cases}$

V თავი

მატრიცები

§ 1. მატრიცების შეკრება და გამრავლება

რიცხვთა ერთობლიობას, მოთავსებულს n სტრიქონისა და m სვეტის მართკუთხა ცხრილში, მართკუთხა მატრიცა ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ან მოკლედ $A=(a_{ij})$, $(i=1, 2, \dots, n;\ j=1, 2, \dots, m)$. a_{ij} რიცხვებს მ ა ტ რ ი ც ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ეწოდება. როცა $m=n$, მაშინ მატრიცა კვადრატულია; ამ შემთხვევაში n არის მატრიცის რიგი.

კვადრატული მატრიცებიდან აღსანიშნავია:

1. დიაგონალური მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. ერთეულოვანი მატრიცა (აღინიშნება E ასოთი):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. სამკუთხა მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის ნამრავლი k სკალარზე განმარტებულია შემდეგი ტოლობით:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{n1} & ka_{n2} & & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

A და B მატრიცების $A+B$ ჯამი არის ისეთი მესამე მატრიცა, რომლის ელემენტები უდრის მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს.

თუ მოცემულია ორი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

სადაც A მატრიცის სვეტების რაოდენობა უდრის B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას, მაშინ ამ მატრიცების AB ნამრავლი არის ისეთი C მატრიცა, რომლის c_{ij} ელემენ-

ტი წარმოადგენს A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვეტის ელე-
მენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $AB=C$ და

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ldots,\ p).$$

თუ A კვადრატული მატრიცაა, ხოლო E იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, მაშინ

$AE=EA=A$. საზოგადოდ $AB\neq BA$.

1335. $k=4$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, იპოვეთ kA.

1336. $k=-2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, იპოვეთ kA.

იპოვეთ $A+B$, თუ:

1337. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1338.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ $A-B$, თუ:

1339. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1340. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

1341. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1342. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1343. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. **1344.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1345. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. **1346.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB და BA ნამრავლები, თუ:

1847. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. **1848.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1849. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=(3\ 4\ 1\ 5)$.

1850. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AB=?$

1851. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $AB=?$

1852. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $AB=?$

1853. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB=?$

1854. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AE=?$ $EA=?$

1855. $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$. $AB=?$, $BA=?$

1856. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

1857. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 9 & -10 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & -21 & 28 \end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

1858. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

1859. $A=(1\quad 2)$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB)C=?$, $A(BC)=?$

1860. $A=(1\ 2)$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $A(B+C)=?$, $AB+AC=?$

თუ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

მატრიცაში სტრიქონებს გადავანაცვლებთ სვეტებში და, პირიქით, სვეტებს — სტრიქონებში. მივიღებთ A მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს;

$$E'=E, \quad (A')'=A, \quad (AB)'=B'A'.$$

კვადრატულ $A=(a_{ij})$ მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ $a_{ij}=a_{ji}$. სიმეტრიული მატრიცის შემთხვევაში $A=A'$.

კვადრატული $A=(a_{ij})$ მატრიცის *დეტერმინანტი* ეწოდება ამ მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს და აღინიშნება $|A|$ სიმბოლოთი.

თუ A მატრიცა არ არის ვექტორ-სვეტი ან ვექტორ-სტრიქონი, მაშინ მისი ელემენტებისაგან შეიძლება შედგეს სხვადასხვა რიგის კვადრატული ქვემატრიცები. A მატრიცის რანგი არის იმ უდიდესი კვადრატული ქვემატრიცის რიგი, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ B მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$A\cdot B=E$$

პირობას, ეწოდება A მატრიცის *შებრუნებული მატრიცა* და აღინიშნება A^{-1}-ით, ე. ი.

$$A\cdot A^{-1}=E.$$

თუ $A=(a_{ij})$ კვადრატული მატრიცაა, ხოლო A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება, მაშინ

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება A მატრიცის *მიკავშირებული მატრიცა*. როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, გვაქვს:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}.$$

1801. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. აჩვენეთ, რომ $(AB)'=B'A'$.

1862. $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&7\\1&3\end{pmatrix}$. აჩვენეთ, რომ $(AB)'=B'A'$.

1863. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$.

1864. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A=\begin{pmatrix}2&5\\2&1\end{pmatrix}$.

1865. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$.

1866. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

1867. 1) $\begin{pmatrix}1&1&-8\\3&2&-6\\0&1&3\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}1&2&-4\\-1&1&-5\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$.

1868. 1) $\begin{pmatrix}1&4&1\\3&1&3\\2&8&-1\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&4&2\\3&7&3\end{pmatrix}$.

1869. $\begin{pmatrix}1&2&5&6\\2&3&-2&-4\\5&8&1&-2\end{pmatrix}$.

1870. $\begin{pmatrix}2&-3&8&2\\2&12&-2&12\\1&3&1&4\end{pmatrix}$.

1871. $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\4&5&-5&-6&1\end{pmatrix}$.

1872. $\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\3&-1&5&-3&-1\\2&1&2&-2&-3\end{pmatrix}$.

1873. $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$.

1874. $\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&-1&-3\\1&0&-3&-1\\0&2&-6&3\end{pmatrix}$.

1875. $\begin{pmatrix}14&12&6&8&2\\6&104&21&9&17\\7&6&3&4&1\\35&30&15&20&5\end{pmatrix}$.

1876. $\begin{pmatrix}-1&3&3&2&5\\-3&5&2&3&4\\-3&1&-5&0&-7\\-5&7&1&4&1\end{pmatrix}$.

წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left\{\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{array}\right. \qquad (1)$$

მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$AX=B,$$

სადაც

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

სისტემის მატრიცაა, ხოლო

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

— ვექტორ-სვეტები როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, მაშინ (1) სისტემის ამონახსნია.

$$X=A^{-1}B=\frac{A^*B}{|A|}.$$

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

1377. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 5x+4y+3z=22, \\ 10x+5y+z=23. \end{cases}$

1378. $\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$

1379. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

1380. $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

1381. $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 4x-3y+z=1, \\ 2x+y=5. \end{cases}$

1382. $\begin{cases} 7x-5y=31, \\ 4x+11z=-43, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. A მატრიცას (1) სისტემის ძ ი რ ი თ ა დ ი მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება, ხოლო

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

მატრიცას — ამ სისტემის გ ა ფ ა რ თ ო ე ბ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ა. კრონეკერ-კაპელის თეორემა შემდეგში მდგომარეობს: წრფივ განტოლებათა (1) სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძირითადი მატრიცის რანგი უდრიდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს: $r(A)=r(B)$.

თუ $r(A)=3$, მაშინ სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიძებნება მატრიცული მეთოდით ან კრამერის ფორმულებით.

თუ $r(A)=2$, მაშინ ადგილი აქვს ორ შემთხვევას:

ა) $r(B)=3$, ამ შემთხვევაში სისტემა არათავსებადია,

ბ) $r(B)=2$, ამ შემთხვევაში სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

თუ სისტემა თავსებადია, მაშინ მისი დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი უდრის A მატრიცის რანგს.

გამოიკვლიეთ შემდეგი სისტემები:

1883. $\begin{cases} x-2y+z=3, \\ x+3y-z=1, \\ 3x+4y-z=5. \end{cases}$ **1884.** $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+3y-2z=2, \\ 3x+2y+z=5. \end{cases}$

1885. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 2x-8y+5z=5. \end{cases}$ **1886.** $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+5z=9. \end{cases}$

1887. $\begin{cases} 5x-y+3z=2, \\ x-3y+2z=-1, \\ 4x+2y+z=7. \end{cases}$ **1888.** $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x-7y+2z=6. \end{cases}$

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფივი გარდაქმნა:

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, \\ z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x''=b_{11}x'+b_{12}y'+b_{13}z', \\ y''=b_{21}x'+b_{22}y'+b_{23}z', \\ z''=b_{31}x'+b_{32}x'+b_{33}z'. \end{cases}$$

წრფივი გარდაქმნა, რომელიც x'', y'', z''-ს გამოსახავს x, y, z-ის საშუალებით, ასე ჩაიწერება:

$$X''=BAX,$$

სადაც

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X''=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ წრფივი გარდაქმნა, რომელიც x'', y'', z''-ს გამოსახავს x, y, z-ის საშუალებით:

1889. $\begin{cases} x'=2x-y+5z, \\ y'=x+4y-z, \\ z'=3x-5y+2z \end{cases}$ და $\begin{cases} x''=x'+4y'+3z', \\ y''=5x'-y'-z', \\ z''=3x'+6y'+7z'. \end{cases}$

1890. $\begin{cases} x'=5x-y+3z, \\ y'=x-2y, \\ z'=7y-z \end{cases}$ და $\begin{cases} x''=2x'+z', \\ y''=y'-5z', \\ z''=2z'. \end{cases}$

1891. $\begin{cases} x'=x+2y+2z, \\ y'=-3y+z, \\ z'=2x+3z \end{cases}$ და $\begin{cases} x''=3x'+y', \\ y''=x'-2y'-z', \\ z''=3y'+2z'. \end{cases}$

1892. $\begin{cases} x'=x-3y+4z, \\ y'=2x+y-5z, \\ z'=-3x+5y+z \end{cases}$ და $\begin{cases} x''=4x'+5y'-3z', \\ y''=x'-y'-z', \\ z''=7x'+4z'. \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა ასე მოიძებნება:

$$X = A^{-1}X',$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

იპოვეთ შებრუნებული გარდაქმნები შემდეგი წრფივი გარდაქმნებისა:

1893. $\begin{cases} x' = 3x - y - z, \\ y' = 2x + y + 2z, \\ z' = x + 3y - 2z. \end{cases}$ **1894.** $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = -x + 4y + 7z, \\ z' = 8x + y - z. \end{cases}$

x, y და z გამოსახეთ x'', y'' და z''-ის საშუალებით (აქ $X = A^{-1}B^{-1}X''$):

1895. $\begin{cases} x' = 4x + 3y + 2z, \\ y' = -2x + y - z, \\ z' = 3x + y + z \end{cases}$ და $\begin{cases} x'' = x' - 2y' - z', \\ y'' = 3x' + y' + 2z', \\ z'' = x' + 2y' + 2z'. \end{cases}$

1896. $\begin{cases} x' = 7x + 4z, \\ y' = 4y - 9z, \\ z' = 3x + y \end{cases}$ და $\begin{cases} x'' = y' - 6z', \\ y'' = 3x' + 7z', \\ z'' = x' + y' - z'. \end{cases}$

§ 8. კვადრატული მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები. მატრიცის მახასიათებელი განტოლება

რაიმე არანულოვან $\vec{a}$ ვექტორს ეწოდება წრფივი A გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, თუ

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}, \tag{1}$$

სადაც λ რაიმე ნამდვილი რიცხვია, რომელსაც წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი რიცხვი ეწოდება.

თუ A და $\vec{a}$ მოცემულია შემდეგნაირად:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

მაშინ (1) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)l+a_{12}m+a_{13}n=0, \\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m+a_{23}n=0, \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)n=0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

განტოლებას ეწოდება A მატრიცის მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი განტოლება. ამ განტოლების ყოველი ნამდვილი λ ფესვი A გარდაქმნის საკუთრივი რიცხვია. λ რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კოორდინატები მოიძებნება (2) სისტემიდან. (2) სისტემის ამონახსნს ეწოდება ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი, თუ $l^2+m^2+n^2=1$; ამ შემთხვევაში $\vec{a}(l,m,\ n)$ ერთეულოვანი ვექტორია.

თუ A მატრიცა სიმეტრიულია, მაშინ მისი საკუთრივი რიცხვები ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ურთიერთმართობულია. თუ ამ ვექტორებს მივიღებთ ბაზისურ ვექტორებად, მაშინ A მატრიცა მიიღებს დიაგონალურ სახეს

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

1397. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი ვექტორები.

1398. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი ვექტორები, სადაც $0<\alpha<\pi$.

1399. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები.

1400. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

1401. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

1402. მოცემულია $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ მატრიცა. განსაზღვრეთ, $\vec{P}_1(0;\ 1)$, $\vec{P}_2\,(1;\ 0)$, $\vec{P}_3\,(1;\ -1)$, $\vec{P}_4\,(-1;\ -1)$ ვექტორებიდან რომელია A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი და იპოვეთ შესაბამისი საკუთრივი რიცხვები.

1403. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები.

იპოვეთ ნორმირებული საკუთრივი ვექტორები შემდეგი მატრიცებისა:

1404. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1405.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **1406.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

თუ $xOyz$ სისტემაში x, y, z ცვლადების მიმართ გვაქვს კვადრატული ფორმა

$$F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz,$$

მაშინ ეს უკანასკნელი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

მატრიცის ნორმირებულ საკუთრივ ვექტორთა სისტემაში მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2,$$

სადაც λ_1, λ_2, λ_3 A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო x', y', z' — წერტილის ახალი კოორდინატები.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახემდე მეორე რიგის წირების განტოლებები:

1407. $5x^2+4xy+2y^2=24$. **1408.** $17x^2+12xy+8y^2=20$.

1409. $11x^2+24xy+4y^2=20$. **1410.** $2x^2+4xy-y^2=12$.

1411. $5x^2+8xy+5y^2+8x+10y-4=0$.

1412. $2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$.

1413. $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.

1414. $x^2+2xy+y^2+2x+y=0$.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახემდე მეორე რიგის ზედაპირების განტოლებები:

1415. $5x^2+7y^2+6z^2-4xz-4yz-9=0$.

1416. $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz-32=0$.

1417. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-24=0$.

1418. $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-5=0$.

1419. $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+2x-6y-2z=0$.

1420. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+28=0$.

1421. $2x^2+2y^2+z^2-2xz-2yz+x+y+2z=0$.

1422. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$.

VI თავი

ველის თეორიის ელემენტები

§ 1. წარმოებული მოცემული მიმართულებით. გრადიენტი

სკალარული $U=f(x, y, z)$ ფუნქციის წარმოებული l მიმართულებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

სადაც α, β და γ აღნიშნავს კუთხეებს l მიმართულებასა და საკოორდინატო ღერძებს შორის.

$z=f(x, y)$ ფუნქციის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

სადაც α არის კუთხე l მიმართულებასა და Ox ღერძს შორის.

$U=f(x, y, z)$ ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომლის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე არის $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$; იგი აღინიშნება ასე:

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

ეს ტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\operatorname{grad} U=\nabla U,$$

სადაც $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ არის ნაბლა ოპერატორი.

ფუნქციის წარმოებული მოცემული l მიმართულებით ფუნქციის გრადიენტთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad} U\cdot\vec{n}=|\operatorname{grad} U|\cos\Theta,$$

სადაც $\vec{n}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ არის l მიმართულების მგეზავი, ხოლო Θ — კუთხე გრადიენტსა და $\vec{n}$ მგეზავს შორის. ცხადია, რომ

$$\max\frac{\partial U}{\partial l}=|\operatorname{grad} U|.$$

1428. იპოვეთ $z=3x^4-xy+y^3$ ფუნქციის წარმოებული M (1;2) წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

1424. იპოვეთ $z=2x^2-3y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 0)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 120°-იან კუთხეს.

1425. იპოვეთ $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 2)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს $Q\ (4;\ 6)$ წერტილთან.

1426. იპოვეთ $z=5x^2-3x-y-1$ ფუნქციის წარმოებული $M\ (2;\ 1)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს $Q\ (5;\ 5)$ წერტილთან.

1427. იპოვეთ $u=x^2+y^2+z^2$ ფუნქციის წარმოებული $M\ (1;\ 1;\ 1)$ წერტილში $\vec{l}$ (cos 45°, cos 60°, cos 60°) მიმართულებით.

1428. იპოვეთ $u=x^2-3yz+5$ ფუნქციის წარმოებული $M\ (1;\ 2;\ -1)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც კოორდინატთა ღერძებთან ტოლ მახვილ კუთხეებს ადგენს.

1429. იპოვეთ $u=xy+yz+zx$ ფუნქციის წარმოებული $M(2;\ 1;\ 3)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც ამ წერტილს აერთებს $Q\ (5;\ 5;\ 15)$ წერტილთან.

1430. იპოვეთ $u=xyz$ ფუნქციის წარმოებული $M\ (5;\ 1;\ -8)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც ამ წერტილს აერთებს $Q\ (9;\ 4;\ 4)$ წერტილთან.

1431. იპოვეთ $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 1;\ 1)$ წერტილში $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$ ვექტორის მიმართულებით.

იმ წერტილს, რომელშიაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია ნებისმიერი მიმართულებით, ეწოდება ამ ფუნქციის *სტაციონარული წერტილი*.

იპოვეთ სტაციონარული წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

1432. $z=x^3+y^3-3xy$. **1433.** $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$.

1434. აჩვენეთ, რომ $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M\left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3}\right)$ წერტილში ნულის ტოლია ნებისმიერი მიმართულებით.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა, სადაც U და V წარმოებადი ფუნქციებია, ხოლო C მუდმივია:

1435. 1) $\operatorname{grad}(U+V)=\operatorname{grad}U+\operatorname{grad}V$; 2) $\operatorname{grad}(CU)=C\operatorname{grad}U$; 3) $\operatorname{grad}(UV)=U\operatorname{grad}V+V\operatorname{grad}U$; 4) $\operatorname{grad}(U^n)=nU^{n-1}\operatorname{grad}U$.

1436. 1) $\operatorname{grad}(C+U)=\operatorname{grad}U$; 2) $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right)\frac{V\operatorname{grad}U-U\operatorname{grad}V}{V^2}$;

3) $\operatorname{grad}[\varphi(U)]=\frac{d\varphi}{dU}\operatorname{grad}U$.

1437. იპოვეთ: 1) $\operatorname{grad} r$; 2) $\operatorname{grad} r^2$; 3) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, თუ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1438. იპოვეთ grad z, თუ $z=\varphi(u, v)$, ხოლო $u=u(x, y)$, $v=v(x,y)$.

1439. იპოვეთ და ააგეთ $z=x^2-2xy+3y-1$ ფუნქციის გრადიენტი $M(1;\ 2)$ წერტილში.

1440. იპოვეთ და ააგეთ $z=x^2y$ ფუნქციის გრადიენტი $M\ (1;\ 1)$ წერტილში.

1441. იპოვეთ $z=\sqrt{x^2-y^2}$ ფუნქციის გრადიენტი $M\ (5;\ 3)$ წერტილში.

1442. იპოვეთ $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$ ფუნქციის გრადიენტი $M\ (2;\ 1)$ წერტილში.

1443. იპოვეთ $|\mathrm{grad}\ U|$ $M(1;\ 2;\ 3)$ წერტილში, თუ $U=xyz$.

1444. იპოვეთ $|\mathrm{grad}\ U|$ $M\ (2;\ 2;\ 4)$ წერტილში, თუ $U=x^y-z$.

1445. იპოვეთ $u=x^2+y^2+z^2$ ფუნქციის წარმოებული $M\ (1;\ 1;\ 1)$ წერტილში ამ ფუნქციის გრადიენტის მიმართულებით.

1446. იპოვეთ კუთხე $U=\sqrt{x^2+y^2}$ და $V=x-3y+\sqrt{3xy}$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M\ (3;\ 4)$ წერტილში.

1447. იპოვეთ კუთხე $U=x^2+y^2-z^2$ და $V=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M\ (1;\ 1;\ \sqrt{7})$ წერტილში.

1448. იპოვეთ კუთხე $z=\ln\dfrac{y}{x}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4}\right)$ და $M_2\ (1;\ 1)$ წერტილებში.

§ 2. ვექტორული ველის დივერგენცია და როტორი

ვექტორული $\vec{F}=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}$ ველის დივერგენცია ეწოდება $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ ჯამს და ასე ჩაიწერება:

$$\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

∇ ოპერატორის გამოყენებით გვექნება:

$$\mathrm{div}\,\vec{F}=\nabla\vec{F}.$$

ამ აღნიშვნებში გაუსის ფორმულა

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint\limits_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dv,$$

სადაც $\overline{n}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ წარმოადგენს S ზედაპირის გარე ნორმალის მგეზავს.

$\vec{F}$ ვექტორის როტორი ასე აღინიშნება:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

∇ ოპერატორის გამოყენებით დავწერთ

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

ხოლო სტოქსის ფორმულა

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds$$

მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int\limits_L\vec{F}\,d\,\vec{r}=\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds.$$

$\vec{F}$ ვექტორის წირითი ინტეგრალი L კონტურის გასწვრივ $\int\limits_L\vec{F}\,d\,\vec{r}$ გამოსახავს $\vec{F}$ ვექტორის ველის მუშაობას. თუ L შეკრული წირია, მაშინ $\int\limits_L\vec{F}\,d\,\vec{r}$ ინტეგრალს ეწოდება $\vec{F}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია L კონტურის გასწვრივ.

$\vec{F}$ ვექტორულ ველს ეწოდება პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი, თუ ველის ყოველ წერტილზე $\operatorname{rot}\vec{F}=0$. ამ შემთხვევაში არსებობს U პოტენციალი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$U=\int\limits_{M_0}^{M} Pdx+Qdy+Rdz,$$

სადაც M_0 (x_0, y_0, z_0) რომელიმე ფიქსირებული წერტილია, ხოლო M (x, y, z) — ცვლადი წერტილი.

$\vec{F}$ ვექტორულ ველს ეწოდება ს ო ლ ე ნ ო ი დ უ რ ი, თუ ყოველ წერტილზე ველის ვექტორი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\operatorname{div}\vec{F}=0.$$

თუ ველი ერთდროულად პოტენციალური და სოლენოიდურია, მაშინ $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)=0$ და პოტენციალური U ფუნქცია წარმოადგენს ჰარმონიულ ფუნქციას, ე. ი. აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

ანუ $\Delta U=0$, სადაც $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ლაპლასის ოპერატორია.

დაამტკიცეთ მართებულობა შემდეგი ტოლობებისა:

1449. 1) $\operatorname{div}(\vec{F}+\vec{\Phi})=\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{div}\vec{\Phi}$, სადაც $\vec{F}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორული ფუნქციებია;

2) $\operatorname{div}(U\vec{c})=\operatorname{grad} U\cdot\vec{c}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა, ხოლო $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორია;

3) $\operatorname{div}\vec{F}(f)=\operatorname{grad} f\cdot\frac{d\vec{F}}{df}$, სადაც $\vec{F}$ არის f სკალარული ფუნქციის ვექტორული ფუნქცია.

1450. 1) $\operatorname{div}(U\cdot\vec{F})=U\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}U\cdot\vec{F}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა:

2) $\operatorname{div}(r\vec{c})=\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$, სადაც $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორია, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, ხოლო $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

3) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{\Phi})=\vec{\Phi}\operatorname{rot}\vec{F}-\vec{F}\operatorname{rot}\vec{\Phi}$.

1451. 1) $\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{\Phi})=\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{rot}\vec{\Phi}$;

2) $\operatorname{rot}(U\cdot\vec{c})=\operatorname{grad}U\times\vec{c}$, სადაც $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორია;

3) $\operatorname{rot}\vec{F}(f)=\operatorname{grad}f\times\frac{d\vec{F}}{df}$.

1452. 1) $\operatorname{rot}(U\vec{F})=U\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}U\times\vec{F}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა;

2) $\operatorname{rot}\vec{r}=0$; სადაც $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$;

3) $\operatorname{rot}(r\vec{c})=\frac{\vec{r}\times\vec{c}}{r}$, სადაც $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორია, ხოლო $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

იპოვეთ მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორები:

1453. 1) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})$; 2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U)$.

1454. 1) $\Delta(U \cdot V)$; 2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$.

გამოთვალეთ:

1455. 1) $\operatorname{div} \vec{r}$; 2) $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$; 3) $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)$, სადაც $\vec{r}=x\vec{i}+$ $+y\vec{j}+z\vec{k}$, ხოლო $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1456. 1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^2)$; 2) $\operatorname{div} f(r) \cdot \vec{r}$; 3) $\operatorname{div} f(r) \cdot \vec{c}$, სადაც $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორია.

1457. იპოვეთ $\vec{F}=\vec{b}\times\vec{r}$ ველის დივერგენცია, სადაც $\vec{b}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

1458. იპოვეთ $\vec{F}=f(r)\vec{r}$ ვექტორული ველის როტორი.

1459. მოცემულია $U=xyz$ ფუნქცია და $\vec{F}=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ ვექტორი. M (x, y, z) წერტილში გამოთვალეთ: 1) $\operatorname{grad} U$; 2) $|\operatorname{grad} U|$; 3) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$; 4) $\operatorname{rot}\vec{F}$.

1460. მოცემულია სკალარული ველი $U=\operatorname{div}(xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k})$. აჩვენეთ, რომ $|\operatorname{grad} U|$ $M(x, y, z)$ წერტილში უდრის ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე გაორკეცებულ მანძილს.

1461. იპოვეთ $\vec{F}=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ სამკუთხედის გასწვრივ, რომელსაც ამოკვეთს საკოორდინატო სიბრტყეები $x+y+z=1$ სიბრტყიდან, სიბრტყის იმ ნორმალის მიმართულებით, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.

1462. იპოვეთ $\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(z+y)\vec{j}+(2x+y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ სამკუთხედის გასწვრივ, რომელსაც ამოკვეთს საკოორდინატო სიბრტყეები $2x+y-z-1=0$ სიბრტყიდან, სიბრტყის იმ ნორმალის მიმართულებით, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.

1463. იპოვეთ $\vec{F}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $y=$ $=x^2+z^2$ ბრუნვის პარაბოლოიდის გარე ნაწილის გასწვრივ, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $y=1$ სიბრტყით $(0\leqslant y\leqslant 1)$.

1464. იპოვეთ $\vec{F}=x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2+z^2=9$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის გასწვრივ, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

1465. იპოვეთ $\vec{F}=(x-2z)\vec{i}+(3z-4x)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ პირამიდის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომლის წვეროებია O (0; 0; 0), A (1; 0; 0), B(0; 1; 0) და C (0; 0; 1) წერტილები.

1466. იპოვეთ $\vec{F}=x^2\vec{i}-z^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ პირამიდის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომელსაც ქმნის $2x+y+z=2$ სიბრტყე საკოორდინატო სიბრტყეებთან.

1467. გაუსის ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი ნებისმიერი შეკრული S ზედაპირის გასწვრივ უდრის ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის გასამკეცებულ მოცულობას.

1468. იპოვეთ $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2=R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$ ცილინდრის სრული ზედაპირის გასწვრივ.

1469. იპოვეთ $\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(z+y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=y$ $(z\geqslant 0)$ შეკრული ზედაპირის გასწვრივ.

1470. იპოვეთ $\vec{F}=yz\vec{i}-x\vec{j}-y\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2-z^2=0$ კონუსის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=1$ სიბრტყით $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

1471. იპოვეთ $\vec{F}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2+z^2=4$ სფეროს ზედაპირის გასწვრივ.

1472. იპოვეთ $\vec{F}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედაპირის გასწვრივ.

1473. გამოთვალეთ $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორის წირითი ინტეგრალი $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=ht$ ხრახნწირის გასწვრივ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1474. გამოთვალეთ $\vec{F}=(x^2+y^2-2Rx)\vec{i}+R(x+y)\vec{j}$ ვექტორის წირითი ინტეგრალი $(x-R)^2+y^2=R^2$, $z=0$ წრეწირის გასწვრივ $O(0;0;0)$ წერტილიდან $A(R;R;0)$ წერტილამდე.

1475. გამოთვალეთ $\vec{F}=-a\cos t\cdot\vec{i}-b\sin t\cdot\vec{j}$ ვექტორის ველის მუშაობა $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსის რკალის გასწვრივ, სადაც $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

1476. გამოთვალეთ $\vec{F}=(2a-y)\vec{i}+(y-a)\vec{j}$ ვექტორის ველის მუშაობა $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალის გასწვრივ სადაც $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

შემდეგ ორ ამოცანაში მოცემულია $\vec{F}$ ვექტორი და (π) სიბრტყე, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეებთან ერთად ქმნის რაიმე პირამიდას. გამოთვალეთ $\vec{F}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია (π) სიბრტყის საკოორდინატო სიბრტყეებთან გადაკვეთის წრფეების გასწვრივ უშუალოდ და სტოქსის ფორმულის გამოყენებით. ამასთან, სტოქსის ფორმულაში

ინტეგრების ზედაპირად მიიღეთ სამი წახნაგი, რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეებზეა მოთავსებული.

1477. $\vec{F}=x^2\vec{i}-z^2\vec{j}+y^2\vec{k}$, $2x+y+z=2$. (π)

1478. $\vec{F}=(x+z^2)\vec{i}+xz\vec{j}+2xy\vec{k}$, $3x+2y+z=6$. (π)

1479. გამოთვალეთ $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ შეკრული წირის გასწვრივ.

1480. გამოთვალეთ $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$ შეკრული წირის გასწვრივ.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სტოქსის ფორმულით.

1481. გამოთვალეთ $\vec{F}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ წრეწირის გასწვრივ: ზედაპირად მიიღეთ $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ნახევარსფერო.

1482. გამოთვალეთ $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც შედგება საკოორდინატო ღერძების მონაკვეთებისა და $x=R\cos^3t$, $y=R\sin^3t$ ასტროიდის რკალისაგან $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z=0)$.

1483. გამოთვალეთ $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც მიიღება $z=2(1-x^2-y^2)$ ზედაპირისა და xOy სიბრტყის გადაკვეთით.

1484. გამოთვალეთ $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც მიიღება $x^2+y^2=1$ და $x+y+z=1$ ზედაპირების გადაკვეთით.

გამოარკვიეთ, აქვს თუ არა მოცემულ ველს U პოტენციალი და იპოვეთ U თუ იგი არსებობს:

1485. 1) $\vec{F}=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}$; 2) $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$.

1486. 1) $\vec{F}=(5x^2y-4xy)\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}$; 2) $\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(z+x)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

1487. აჩვენეთ, რომ $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია. იპოვეთ მისი პოტენციალი.

1488. აჩვენეთ, რომ $\vec{F}=f(r)\vec{r}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია. იპოვეთ მისი პოტენციალი.

1489. აჩვენეთ, რომ $\vec{F}=\dfrac{2l}{r^2}(-y\vec{i}+x\vec{j})$ ვექტორული ველი სოლენოიდურია.

1490. იქნება თუ არა $\vec{F}=r(\vec{c}\times\vec{r})$ ვექტორული ველი სოლენოიდური, სადაც c მუდმივი ვექტორია.

1491. აჩვენეთ, რომ $\vec{F}=f(r)\vec{r}$ ვექტორული ველი იქნება სოლენოიდური მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $f(r)=\dfrac{c}{r^3}$, სადაც c მუდმივია.

1492. აჩვენეთ, რომ $\vec{F}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ ვექტორული ველი არის პოტენციალური და სოლენოიდური, ხოლო მისი პოტენციალი ჰარმონიული ფუნქციაა.

VII თავი

ალბათობის თეორიის ელემენტები

§ 1. ალბათობის უშუალო გამოთვლა

ალბათობის თეორიაში რაიმე მოვლენის მოხდენის ფაქტს *ხდომილობა* ეწოდება.

ხდომილობანი შეიძლება შემდეგ სამ სახედ დაიყოს: აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ყოველი ცდის ან დაკვირვების დროს მას ადგილი ექნება, მაშინ ასეთ ხდომილობას *აუცილებელს* უწოდებენ.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ცდის ან დაკვირვების გამეორებისას მას არასოდეს არ ექნება ადგილი, მაშინ ასეთ ხდომილობას *შეუძლებელს* უწოდებენ.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ამა თუ იმ ცდის ან დაკვირვების დროს მას შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი, მაშინ მას *შემთხვევითი ხდომილობა* ეწოდება.

ხდომილობებს ერთმანეთის მიმართ *არათავსებადი* ეწოდება, თუ მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია. პირიქით, თუ ხდომილობათა ერთდროულად მოხდენა შესაძლებელია, მაშინ მათ ეწოდება *თავსებადი* ხდომილობანი.

თუ რომელიმე ხდომილობის მოხდენას ან არმოხდენას არავითარი გავლენა არა აქვს მეორის მოხდენაზე, მაშინ ასეთი ხდომილობანი *ურთიერთდამოუკიდებელია*. წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდომილობანი *ურთიერთდამოკიდებულია*.

რომელიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა ნიშნავს A ხდომილობის არმოხდენას და აღინიშნება $\overline{A}$-თი.

თუ გვაქვს რამდენიმე ხდომილობა, რომელთაგან ერთ-ერთს აუცილებლად ექნება ადგილი, ხოლო ნებისმიერი ორის ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, მაშინ ასეთი ხდომილობანი ქმნიან წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობათა სრულ სისტემას.

ორი A და B ხდომილობის $A+B$ ჯამს მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ერთ-ერთი შესაკრები ხდომილობა მაინც გვაქვს.

ორი A და B ხდომილობის AB ნამრავლს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ორივე ხდომილობა ერთდროულად გვაქვს.

A ხდომილობის ალბათობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

სადაც m არის ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი, ხოლო n — ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი.

აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა ერთის ტოლია:

$$P(U)=1.$$

შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია:

$$P(V)=0$$

შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა არის დადებითი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის:

$$0<P(A)<1.$$

A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე განისაზღვრება ფორმულით:

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

სადაც m არის ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი, ხოლო n—ცდათა საერთო რიცხვი.

1493. ყუთში მოთავსებულია 50 ერთნაირი ბირთვი, რომელთაგან 5 წითელია. აქედან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი ფერის?

1494. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქაღალდიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული კარტი იქნება ტუზი?

1495. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას ზედა მხარეზე გამოჩნდება ქულების ლუწი რიცხვი?

1496. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ორივეზე გამოჩნდება ქულების ერთნაირი რიცხვი?

1497. ყუთში მოთავსებულია 60 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 60-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვის ნომერი არ შეიცავს 5-იანს.

1498. პირველი ასი რიცხვიდან (1, 2, 3,..., 100) შემთხვევით იღებენ ერთ რიცხვს; ხდომილობა A მდგომარეობს იმაში, რომ ამოღებული რიცხვი გაიყოფა 3-ზე, ხდომილობა B— იმაში, რომ ამოღებული რიცხვი გაიყოფა 4-ზე. გამოთვალეთ $P(A)$ და $P(B)$.

1499. ყუთში მოთავსებულია 80 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 80-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვის ნომერი არ გაიყოფა არც 2-ზე და არც 3-ზე.

1500. ასაწყობად მიღებულია პირველ ავტომატზე დამზადებული 300 დეტალი და მეორე ავტომატზე დამზადებული 200 დეტალი. პირველი ავტომატი იძლევა 2% წუნდებულ დეტალს, ხოლო მეორე, — 3%-ს.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი იქნება წუნდებული.

1501. ყუთში მოთავსებულია 6 ერთნაირი კუბი. ყოველი კუბის ყველა წახნაგზე დაწერილია ერთ-ერთი შემდეგი ასო: ო, პ, რ, ს, ტ, ი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თითო-თითოდ ამოღებულ და ერთ ხაზზე დალაგებულ კუბებზე შეიძლება წავიკითხოთ სიტყვა „სპორტი".

1502. ყუთში მოთავსებულია 5 ერთნაირი ქაღალდი. თითოეულ ქაღალდზე დაბეჭდილია ერთ-ერთი შემდეგი ასო: ა, კ, ი, ც, ც. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თითო-თითოდ ამოღებულ და ერთ ხაზზე დალაგებულ ქაღალდებზე შეიძლება წავიკითხოთ სიტყვა „კაცი".

1503. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა ერთი ციფრი და იგი შემთხვევით აკრიფა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სწორედ საჭირო ციფრია აკრეფილი.

1504. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა ორი უკანასკნელი ციფრი და, ახსოვდა რა, რომ ეს ციფრები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, აკრიფა ისინი შემთხვევით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილია საჭირო ციფრები.

1505. წრეში ჩახაზულია კვადრატი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი კვადრატის შიგნით მოხვდება?

1506. ამოხსენით იგივე ამოცანა წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედისა და წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში (იხ. წინა ამოცანა).

1507. გაგორებულია ორი კამათელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ერთ-ერთ კამათელზე მაინც შაში (ექვსი წერტილი) გამოჩნდება.

1508. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქაღალდიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი აუცილებლად რვიანი იქნება?

1509. საგამოცდო ბილეთებში შედის 40 საკითხი, რომელთაგან სტუდენტმა მოამზადა 30. რას უდრის ალბათობა იმისა, სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთი, რომელიც ორ საკითხს შეიცავს, შედგენილი იქნება მის მიერ მომზადებული საკითხებისაგან?

1510. ჯგუფში, რომელშიც 17 სტუდენტია და აქედან 8 ვაჟია, გათამაშდა 7 ბილეთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გათამაშებული ბილეთებიდან 4 შეხვდებოდა ვაჟებს?

1511. ყუთში 10 ერთნაირი ზომის ბირთვია, რომლებიც დანომრილია 1-დან 10-მდე. ყუთიდან რიგრიგობით იღებენ 5 ბირთვს ისე, რომ ერთხელ ამოღებულს უკან აღარ აბრუნებენ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხუთივე ამოღებული ბირთვი იქნება ლუწი ნომრის?

1512. ყუთში 25 ბირთვია, რომელთაგან 10 შავია და 15 თეთრი. მათგან შემთხვევით იღებენ რომელიმე 5 ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აქედან 2 იქნება შავი?

1513. შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ შემთხვევით არჩეულ 100 დეტალში 5 იყო არასტანდარტული. რას უდრის არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე?

1514. მიზანში სროლისას მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე უდრის 0,85. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვი, თუ სულ 120-ჯერ გაისროლეს.

§ 2. ალბათობათა შეკრების თეორემა

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ წყვილ-წყვილად არათავსებადი ხდომილობანია, მაშინ

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

A და $\overline{A}$ ურთიერთსაწინააღმდეგო ხდომილობათა ალბათობების ჯამი ერთის ტოლია, ე. ი.

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \text{ აქედან } P(\overline{A})=1-P(A),$$

ანე $p+q=1$, სადაც $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})$.

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, მაშინ

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1$$

1515. ყუთში მოთავსებულია 60 ბირთვი, რომელთაგან 20 წითელია, 10 — ლურჯი და 30 — თეთრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი ან წითელი, ან ლურჯი ფერისაა.

1516. ყუთში 50 ბირთვია, რომელთაგან 30 წითელია, 10 — ყვითელი, 6 — შავი და 4 — თეთრი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი ან წითელი, ან შავი ფერისაა?

1517. A, B, C და D ხდომილობანი ადგენს სრულ სისტემას. A, B და C ხდომილობათა ალბათობანია: $P(A)=0,1$; $P(B)=0,4$; $P(C)=0,3$. რას უდრის D ხდომილობის ალბათობა?

1518. A, B, C, D და E ხდომილობანი ადგენს სრულ სისტემას. A, B, C და D ხდომილობათა ალბათობანი შესაბამისად არის: 0,2; 0,1; 0,25 და 0,15. რას უდრის E ხდომილობის ალბათობა?

1519. მსროლელი ისვრის მიზანში, რომელიც სამ ნაწილად არის გაყოფილი. პირველ ნაწილში მოხვედრის ალბათობა არის 0,45, მეორეში — 0,35. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი გასროლით მსროლელი მოახვედრებს ან პირველ, ან მეორე ნაწილს.

1520. საომარ იარაღთა სამი საწყობის ასაფეთქებლად ისვრიან ერთ ყუმბარას. პირველ საწყობში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,01-ს, მეორეში — 0,008-ს, მესამეში — 0,025-ს. ერთ-ერთ საწყობში მოხვედრით მოხდება სამივე საწყობის აფეთქება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საწყობები აფეთქებული იქნება.

1521. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოაგროვებს 10 ქულას, უდრის 0,1-ს, 9 ქულას — 0,3-ს, 8 ქულას ან ნაკლებს — 0,6-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი გასროლით მსროლელი 9 ქულაზე ნაკლებს არ მოაგროვებს.

1522. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოაგროვებს 10 ქულას, უდრის 0,2-ს, 9 ქულას — 0,4-ს, 8 ქულას — 0,2-ს, 7 ქულას — 0,1-ს, 6 ქულას და უფრო ნაკლებს — 0,1-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით 8 ქულაზე ნაკლებს არ მოაგროვებს.

1523. ლატარიაში 10 000 ბილეთია. აქედან, 150 არის ნივთების მომგებიანი, ხოლო 50 — ფულის მომგებიანი. რომელიმე პიროვნება ყიდულობს ერთ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბილეთი იქნება მომგებიანი (სულ ერთია, ნივთების თუ ფულის)?

1524. ლატარიაში 1000 ბილეთია. ამათგან 1 ბილეთი იგებს 500 მანეთს, 10 ბილეთი — 100 მანეთს თითოეული, 50 ბილეთი — 20 მანეთს თითოეული, 100 ბილეთი — 5 მანეთს თითოეული, დანარჩენი ბილეთები არამომგებიანია. რომელიმე პიროვნება ყიდულობს ერთ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი 20 მანეთზე ნაკლებს არ მოიგებს?

1525. სახარატო დაზგის 20 გაჩერებიდან 10 გაჩერება გამოწვეულია საჭრისის გამოცვლის გამო. 3 — ამძრავის უწესივრობის და 2 — ნამზადის არადროული მიწოდების გამო. სხვა გაჩერებები ხდება სხვადასხვა ტექნიკური მიზეზით. იპოვეთ დაზგის გაჩერების ალბათობა ამ უკანასკნელი შემთხვევისათვის.

1526. წრიული სამიზნე შედგება სამი ზონისაგან. პირველ ზონაში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას არის 0,15, მეორე ზონაში — 0,23, მესამეში — 0,17. რას უდრის აცდენის ალბათობა?

1527. სათამაშო ქაღალდიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი მაინც იქნება ტუზი?

1528. სათამაშო ქაღალდიდან (52 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი მაინც იქნება ტუზი?

§ 8. ალბათობათა გამრავლების თეორემა

თუ A_1, $A_2, \ldots, A_n$ დამოუკიდებელი ხდომილობანია, მაშინ

$$P(A_1 \; A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n),$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ამ ხდომილობებიდან ერთ-ერთს მაინც ექნება ადგილი (აღვნიშნოთ ეს ხდომილობა A ასოთი), გამოითვლება ფორმულით:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \ldots q_n,$$

სადაც $q_1, q_2, \ldots, q_n$ შესაბამისად $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ საწინააღმდეგო ხდომილობათა ალბათობებია.

კერძოდ, თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილობათა ალბათობები ერთმანეთის ტოლია და უდრის p-ს, მაშინ

$$P(A)=1-q^n.$$

თუ A და B ხდომილობანი დამოკიდებულია, მაშინ პირობითი ალბათობა $P_A(B)$ ეწოდება B ხდომილობის ალბათობას იმ დაშვებით, რომ A ხდომილობას უკვე ჰქონდა ადგილი.

ორი დამოკიდებული ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

სამი დამოკიდებული ხდომილობის შემთხვევაში გვაქვს:

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

1529. ორი კომპლექტიდან თითო კარტს ვიღებთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი ჯვრისა იქნება (კომპლექტში 52 კარტია)?

1530. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ლითონის ორი ფულის აგდებისას ორივეზე ღერბი გამოჩნდება.

1531. აგდებულია ლითონის ფული და გაგორებულია კამათელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად ლითონის ფულზე გამოჩნდება ღერბი, ხოლო კამათელზე — შაში.

1532. ორ ყუთში მოთავსებულია დეტალები: პირველში — 10, რომელთაგან 3 სტანდარტულია, მეორეში — 15, რომელთაგან 6 სტანდარტულია. ორივე ყუთიდან შემთხვევით იღებენ თითო დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დეტალი იქნება სტანდარტული.

1533. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოახვედრებს მიზანში, უდრის 0,9-ს. მსროლელმა გაისროლა სამჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამივე გასროლა მოხვდება მიზანში?

1534. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი ერთი გასროლით მოახვედრებს მიზანში, უდრის 0,8-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მეორე მსროლელი მოახვედრებს მიზანში — 0,9-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი მოახვედრებს მიზანში.

1535. მიმდინარეობს სამხედრო ობიექტის დაბომბვა. მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,7-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ბომბი არ აფეთქდება — 0,08-ს. იპოვეთ ობიექტის დანგრევის ალბათობა, თუ ჩამოგდებულია ერთი ბომბი.

1536. ორი მსროლელი ისვრის მიზანში თითოჯერ. პირველი მსროლელის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,7-ს, მეორის — 0,8-ს, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოახვედრებს: 1) ორივე; 2) მხოლოდ ერთი; 3) არც ერთი.

1537. საწარმოს მიერ დამზადებულ ნაკეთობათა 95% სტანდარტულია, აქედან 86% პირველი ხარისხისაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საწარმოს მიერ დამზადებული ნებისმიერი ნაკეთობა იქნება პირველი ხარისხის?

1538. ხელსაწყო შედგება სამი კვანძისაგან, რომელთაგან თითოეული სხვებისაგან დამოუკიდებლად, t დროის განმავლობაში შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან და ამით მწყობრიდან გამოვა მთელი ხელსაწყო. t დროის განმავლობაში პირველი კვანძის შეუფერხებელი მუშაობის ალბათობა $p_1=0{,}8$, მეორისა — $p_2=0{,}9$ და მესამის — $p_3=0{,}7$. იპოვეთ ხელსაწყოს შეუფერხებლად მუშაობის ალბათობა.

1539. მუშა ემსახურება ოთხ დაზგას. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში დაზგებს არ დასჭირდება მუშის ჩარევა, პირველი დაზგისათვის უდრის 0,3-ს, მეორისათვის — 0,4-ს, მესამისათვის — 0,7-ს, ხოლო მეოთხისათვის — 0,4-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში არც ერთი დაზგა არ მოითხოვდეს მუშის ჩარევას.

1540. სტამბაში ოთხი საბეჭდი მანქანაა. ყოველი მანქანისათვის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ის მუშაობს, უდრის 0,9-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ერთი მანქანა მაინც იმუშავებს.

1541. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას ერთზე მაინც შაში მოვა?

1542. სამი მსროლელი ისვრის ერთსა და იმავე მიზანში. მოხვედრის ალბათობები შესაბამისად არის: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}7$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში ერთ მოხვედრას მაინც ექნება ადგილი.

1543. მუშა ემსახურება სამ დაზგას, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მუშაობენ. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში დაზგებს არ დასჭირდება მუშის ჩარევა, პირველი დაზგისათვის უდრის 0,9-ს, მეორისათვის — 0,8-ს და მესამისათვის — 0,7-ს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი დაზგიდან ერთი მაინც არ მოითხოვს მუშის ჩარევას ერთი საათის განმავლობაში.

1544. რაციონალური წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი დაწერილია შემთხვევით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს წილადი არ შეიკვეცება 5-ზე?

1545. ყუთში მოთავსებულია ძაფები, რომელთა შორის 30% თეთრია, დანარჩენი კი — წითელი. იპოვეთ: 1) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი ძაფი ერთნაირი ფერისა იქნება; 2) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი ძაფი სხვადასხვა ფერისა იქნება.

1546. ყუთში 5 თეთრი და 7 შავი ბირთვია. აქედან შემთხვევით ორჯერ იღებენ თითო ბირთვს და უკან აღარ აბრუნებენ. იპოვეთ თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობა მეორე ცდისას, თუ პირველი ცდისას ამოღებული იყო შავი ბირთვი.

1547. 1) ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. აქედან რიგრიგობით იღებენ ნებისმიერ ორ ბირთვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბირთვი იქნება თეთრი; 2) იგივე პირობები, რაც წინა ამოცანაში, მხოლოდ პირველი ამოღების შემდეგ ბირთვი უკანვე ბრუნდება.

1548. ყუთში 2 თეთრი და 2 შავი ბირთვია. აქედან რიგრიგობით იღებენ ორ ბირთვს. განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ბირთვი იქნება თეთრი, ხოლო მეორე — შავი. განიხილეთ ორი შემთხვევა: 1) როცა ამოღებული ბირთვი უკანვე ბრუნდება; 2) როცა ამოღებული ბირთვი უკან აღარ ბრუნდება.

1549. ყუთში 100 თეთრი და 200 შავი ბირთვია. 100 თეთრი ბირთვიდან დაშტრიხულია 60, 200 შავი ბირთვიდან კი — 50. 1) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი დაშტრიხულია, თუ ცნობილია, რომ იგი არის თეთრი; 2) ცნობილია, რომ ამოღებული ბირთვი დაშტრიხულია; რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი არის თეთრი?

1550. 50 ნათურიდან 3 არასტანდარტულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად აღებული ორი ნათურა არასტანდარტული იქნება.

1551. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქაღალდიდან (52 კარტი) შემთხვევით რიგრიგობით იღებენ ორ კარტს. ამოღებული კარტი უკან აღარ ბრუნდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ამოღებული კარტი ჯვრისა იქნება?

1552. ამწყობს 3 კონუსური და 7 ელიფსური ლილვაკი აქვს. მან შემთხვევით აიღო 2 ლილვაკი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღებული ლილვაკებიდან ერთი კონუსურია, ხოლო მეორე — ელიფსური.

1553. ფეხსაცმელების ფაბრიკაში დამზადებული ყოველი 100 წყვილი ფეხსაცმლიდან საშუალოდ 97 არის ვარგისი და მათგან 68 პირველი ხარისხისაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ვარგისი წყვილი ფეხსაცმელი იქნება პირველი ხარისხისა?

1554. 1) რომელიღაც ადგილზე მზიანი დღეების საშუალო რიცხვი ივლისის თვეში უდრის 25-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ივლისის პირველი ორი დღე იქნება მზიანი.

2) რომელიღაც ადგილზე წვიმიანი დღეების საშუალო რიცხვი აგვისტოს თვეში უდრის 11-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აგვისტოს პირველი ორი დღე იქნება წვიმიანი.

1555. ყუთში 5 თეთრი, 4 შავი და 3 ლურჯი ბირთვია. აქედან შემთ-

ხვევით იღებენ ერთ ბირთვს და უკან აღარ აბრუნებენ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ცდისას გამოჩნდება თეთრი, მეორე ცდისას — შავი და მესამე ცდისას — ლურჯი ბირთვი.

1556. ყუთში 5 თეთრი და 20 შავი ბირთვია. აქედან ბირთვებს იღებენ მანამდე, სანამ არ გამოჩნდება თეთრი ბირთვი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ თეთრ ბირთვამდე ამოღებული იქნება 2 შავი ბირთვი.

§ 4. ნებისმიერ ხდომილობათა ჯამის ალბათობა, სრული ალბათობა, ბაიესის ფორმულა

ორი ნებისმიერი ხდომილობის ჯამის ალბათობა უდრის შესაკრებ ხდომილობათა ალბათობების ჯამს მინუს ორივეს ერთდროულად მოხდენის ალბათობა:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

თუ ხდომილობანი დამოუკიდებელია, მაშინ

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

დამოკიდებული ხდომილობებისათვის

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B).$$

თუ A და B ხდომილობანი არათავსებადია, მაშინ $P(AB)=0$, რის გამოც

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

ვთქვათ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, ხოლო A — ნებისმიერი ხდომილობა. თუ A ხდომილობას ადგილი ექნება, ის მოხდება მოცემული სისტემის ერთ-ერთ ხდომილობასთან ერთად. თუ ცნობილია ამ ხდომილობათა ალბათობები და პირობითი ალბათობები $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A), \ldots, PB_B(A)$, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

ამ ფორმულას სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

ვთქვათ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ A ხდომილობას ადგილი ჰქონდა ყოველ B_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ხდომილობასთან ერთად და ცნობილია ამ ხდომილობათა ალბათობები და $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$ პირობითი ალბათობები, მაშინ B_i ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდა A ხდომილობას, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)},\ (i=1, 2, \ldots n).$$

ამ ფორმულას ბაიესის ფორმულა ეწოდება.

1557. ორი მსროლელი თითოჯერ ისვრის მიზანში. პირველი მსროლელის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,7, მეორე მსროლელისაკი — 0,6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი მსროლელი მაინც მოახვედრებს მიზანში.

1558. ერთი მსროლელი ყოველი 100 გასროლიდან საშუალოდ 90-ჯერ ახვედრებს მიზანში, მეორე კი იმავე პირობებში — 80-ჯერ. რას უდრის ორივე მსროლელის მიერ ერთდროული სროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა?

1559. ორი კომპლექტი სათამაშო ქაღალდიდან (კომლექტში 52 კარტია) შემთხვევით იღებენ თითო კარტს თითოეულიდან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი მათგანი ჯვრის ათიანი იქნება?

1560. ყუთში 20 დეტალია: აქედან 16 დამზადებულია № 1 ქარხანაში, ხოლო 4—№ 2 ქარხანაში. შემთხვევით ამოღებულია 2 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი დეტალი მაინც დამზადებული იქნება № 1 ქარხანაში.

1561. ყუთში 20 დეტალია; აქედან 6 დამზადებულია № 1 ქარხანაში, 10 —№ 2 ქარხანაში, ხოლო 4—№ 3 ქარხანაში. შემთხვევით ამოღებულია 2 დეტალი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი დეტალი მაინც აღმოჩნდება № 1 ან № 2 ქარხანაში დამზადებული?

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სრული ალბათობის ფორმულით.

1562. ორი დაზგა ამზადებს ერთი და იმავე ტიპის დეტალებს. პირველი დაზგის წუნდებულობის ალბათობა უდრის 0,03-ს, მეორისა კი — 0,02-ს. დამუშავებულ დეტალებს ერთად აწყობენ; ამასთან, პირველ დაზგაზე ორჯერ მეტი დეტალია დამზადებული, ვიდრე მეორეზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად აღებული დეტალი არ იქნება წუნდებული.

1563. ორი ავტომატი ამზადებს დეტალებს, რომლებიც იგზავნება საერთო კონვეიერზე. პირველ ავტომატზე არასტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა უდრის 0,06-ს, მეორეზე კი — 0,09-ს. მეორე ავტომატი ორჯერ მეტ დეტალს ამზადებს, ვიდრე პირველი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კონვეიერიდან შემთხვევით აღებული დეტალი არასტანდარტული იქნება.

1564. ქარხანაში მოცემული სახის დეტალებს ამზადებს სამი ტიპის დაზგები. პირველი ტიპის დაზგები ამზადებს დეტალების 10 %, მეორე ტიპისა — 30 %-ს, ხოლო მესამე ტიპისა — 60 %-ს. პირველი ტიპის დაზგების წუნდებულობა 3 %-ია, მეორე ტიპისა — 1 %, ხოლო მესამე ტიპისა — 0,5 %. ერთ დღეში დამზადებულია 1000 დეტალი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად აღებული დეტალი იქნება წუნდებული?

1565. პირველი ავტომატიდან ასაწყობად მიღებულია დეტალების 40 %, მეორიდან — 30 %, მესამიდან — 20 %, მეოთხიდან — 10 %. პირველი ავტომატი იძლევა 0,1 % წუნდებულ დეტალს, მეორე—0,2 %-ს, მესამე — 0,25 %-ს, ხოლო მეოთხე — 0,5 %-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი იქნება წუნდებული.

1566. მოცემულია დეტალების სამი პარტია: პირველ პარტიაში წუნდებული დეტალები 25%-ია, მეორე და მესამე პარტიაში ყველა დეტალი ვარგისია. ნებისმიერად არჩეული პარტიიდან შემთხვევით იღებენ ერთ დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დეტალი წუნდებულია.

1567. მოცემულია ორი ყუთი, რომელთაგან თითოეულში 20 დეტალია; ამასთან, პირველ ყუთში 15 და მეორეში 14 სტანდარტული დეტალია. პირველი ყუთიდან შემთხვევით ამოღებულია ერთი დეტალი და ჩადებულია მეორე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული დეტალი იქნება სტანდარტული.

1568. ჯგუფში 30 სპორტსმენია; აქედან 20 მეთხილამურეა, 6 — ველოსიპედისტი და 4 — მორბენალი. საკვალიფიკაციო ნორმის შესრულების ალბათობა მეთხილამურესათვის უდრის 0,9-ს, ველოსიპედისტისათვის — 0,8-ს და მორბენლისათვის — 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად გამოძახებული სპორტსმენი შეასრულებს ნორმას.

1569. მოცემულია 5 ყუთი, რომელთაგან:

2 არის B_1 შედგენილობისა (2 თეთრი და 1 შავი ბირთვი),

1 არის B_2 შედგენილობისა (10 შავი და არც ერთი თეთრი ბირთვი),

2 არის B_3 შედგენილობისა (3 თეთრი და 1 შავი ბირთვი).

შემთხვევით ირჩევენ ყუთს და იქიდან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათბა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი იქნება თეთრი?

1570. მოცემულია 10 ყუთი, რომელთაგან:

4 არის B_1 შედგენილობისა (6 თეთრი და 2 შავი ბირთვი),

3 არის B_2 შედგენილობისა (5 თეთრი და 4 შავი ბირთვი),

2 არის B_3 შედგენილობისა (4 შავი და არც ერთი თეთრი ბირთვი),

1 არის B_4 შედგენილობისა (2 თეთრი და 2 შავი ბირთვი).

შემთხვევით ირჩევენ ყუთს და იქიდან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი იქნება თეთრი?

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ ბაიესის ფორმულით.

1571. მოცემულია 5 ყუთი, რომელთაგან:

2 არის B_1 შედგენილობისა (2 თეთრი და 3 შავი ბირთვი),

2 არის B_2 შედგენილობისა (1 თეთრი და 4 შავი ბირთვი),

1 არის B_3 შედგენილობისა (4 თეთრი 1 შავი ბირთვი).

შემთხვევით არჩეული ყუთიდან ამოღებული ბირთვი თეთრია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი ამოღებულია მესამე შედგენილობიდან?

1572. ესვრიან B_1 ტიპის 5 მიზანს, B_2 ტიპის 3 მიზანს და B_3 ტიპის 2 მიზანს. B_1 ტიპის მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს, B_2 ტიპის მიზანში მოხვედრისა — 0,1-ს, ხოლო B_3 ტიპის მიზანში მოხვედრისა — 0,15-ს. გასროლისას მოახვედრეს ერთ-ერთ მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანებულია B_1 ტიპის მიზანი.

1573. ორი მსროლელი ერთმანეთის დამოუკიდებლად ისვრის ერთსა და იმავე მიზანში თითოჯერ. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს მოახვედრებს არის 0,8, მეორე რომ მოახვედრებს — 0,4. მიზანში მოახვედრეს ერთხელ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს მოხვედრა ეკუთვნის პირველ მსროლელს.

1574. პირველი ავტომატიდან ასაწყობად მიღებულია დეტალების 20%, მეორიდან — 30%, მესამიდან — 50%. პირველი ავტომატი საშუალოდ იძლევა 0,2% წუნდებულ დეტალებს, მეორე — 0,3%-ს, მესამე — 0,1%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული წუნდებული დეტალი დამზადებულია მეორე ავტომატზე.

§ 5. ცდათა გამეორება

I. **ბერნულის ფორმულა.** ალბათობა იმისა, რომ n-ჯერ ჩატარებული დამოუკიდებელი ცდის დროს ჩვენთვის სასურველ ხდომილობას ადგილი ექნება k-ჯერ, გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(k)=C^k_n p^k q^{n-k}, \text{ ანუ } P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\, q^{n-k},$$

სადაც p არის A ხდომილობის ალბათობა, ხოლო $q=1-p$.

$k=k_0$ რიცხვს, რომლისთვისაც $P_n(k)$ უველაზე დიდ მნიშვნელობას ღებულობს, უ ა ლ ბ ა თ ე ს ი რ ი ც ხ ვ ი ეწოდება. ეს რიცხვი შემდეგი უტოლობებით განისაზღვრება:

$$np-q\leqslant k_0<np+p.$$

როდესაც $np-q$ არამთელი რიცხვია, k_0-სათვის გვექნება ერთადერთი უალბათესი მნიშვნელობა, ხოლო როდესაც $np-q$ მთელი რიცხვია, მაშინ k-ს ექნება ორი უალბათესი მნიშვნელობა.

1575. ლითონის ფულს ვაგდებთ 7-ჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ღერბი გამოჩნდება ზუსტად 3-ჯერ?

1576. მსროლელი მიზანში ისვრის 5-ჯერ. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას უდრის 0,8-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი მიზანში მოახვედრებს 4-ჯერ?

1577. ყუთში 8 ბირთვია, აქედან 5 — თეთრი და 3 — შავი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 ცდისას თეთრი ბირთვი ამოღებული იქნება 3-ჯერ. ამოღებული ბირთვები უკანვე ბრუნდება.

1578. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში 10 ბავშვიდან ქალვაჟთა რაოდენობა თანაბარი იქნება, თუკი ვაჟიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია?

1579. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,05-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული 5 დეტალიდან 4 სტანდარტული იქნება.

1580. ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე პიროვნება გარდაიცვლება 71 წლის ასაკში, უდრის 0,04-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 3 პიროვნებიდან, რომელთაგან თითოეული 70 წლისაა, 2 იცოცხლებს 71 წლამდე?

1581. ორი ტოლძალოვანი მოთამაშე თამაშობს ჭადრაკს; რომელი ალბათობა იქნება უფრო მეტი: ერთი მეორეს რომ 4 პარტიიდან 3-ს მოუგებს, თუ 8 პარტიიდან 5-ს?

1582. რომელიმე მცენარის თესლის აღმოცენების უნარი უდრის 90%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა. რომ დათესილი 4 თესლიდან აღმოცენდება: 1) სამი; 2) სამზე არანაკლები.

1583. საამქროში 6 მოტორია, თითოეული მოტორისათვის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში იქნება ჩართული, უდრის 0,8-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული მომენტისათვის: 1) ჩართული იქნება 4 მოტორი; 2) ჩართული იქნება ყველა მოტორი; 3) გამორთული იქნება ყველა მოტორი.

1584. ალბათობა იმისა, რომ ლატარიის ბილეთი მოიგებს, უდრის $\frac{1}{7}$-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 6 ბილეთიდან მოიგებს 2 ბილეთზე არანაკლები.

1585. იპოვეთ A ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი 10 ცდაში, თუ ყოველი ცდისას $P(A)=\frac{2}{3}$.

1586. 1) იპოვეთ A ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი 6 ცდაში, თუ ყოველი ცდისას $P(A)=0,2$.

2) კამათელს აგორებენ 100-ჯერ. იპოვეთ შაშის მოსვლის უალბათესი რიცხვი.

1587. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას $p=\frac{4}{7}$. იპოვეთ 13 გასროლის შემთხვევაში მოხვედრათა უალბათესი რიცხვი.

1588. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას $p=0,8$. იპოვეთ 19 გასროლის შემთხვევაში მოხვედრათა უალბათესი რიცხვი.

1589. ვთქვათ. ალბათობა იმისა. რომ სტუდენტს დააგვიანდება ლექციაზე, უდრის 0,02-ს. იპოვეთ დაგვიანებული სტუდენტების უალბათესი რიცხვი 800 სტუდენტიდან.

1590. საწყობში მიღებულია 30 ყუთი მინის ნაკეთობა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ ყუთში ნაკეთობა აღმოჩნდება მთელი, უდრის 0,9-ს. იპოვეთ იმ ყუთების უალბათესი რიცხვი, რომლებშიაც ყველა ნაკეთობა იქნება მთელი.

1591. მიზანში ისვრიან 14-ჯერ. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,2-ის ტოლია. განსაზღვრეთ უალბათესი რიცხვი და იპოვეთ ამ უალბათესი რიცხვის ალბათობა.

1592. მიმდინარეობს 10 დამოუკიდებელი ცდა; ყოველ ცდაში A ხდომილობის ალბათობა უდრის 0,1-ს. იპოვეთ: 1) A ხდომილობის მოხდენათა უალბათესი რიცხვი; 2) ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობას ადგილი ექნება უალბათეს რიცხვჯერ.

1593. რას უდრის A ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში, თუ მისი უალბათესი რიცხვი 100 ცდაში უდრის 20-ს?

1594. A ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში $p=0{,}3$. რამდენი დამოუკიდებელი ცდის ჩატარებაა საჭირო, რომ A ხდომილობის მოხდენის უალბათესი რიცხვი იყოს 60?

1595. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი წუნდებულია, უდრის 0,1-ს. რამდენი დეტალი უნდა ავიღოთ, რომ ვარგისი დეტალების უალბათესი რიცხვი იყოს 50?

II. **ლაპლასის ლოკალური თეორემა.** თუ A ხდომილობის მოხდენის p ალბათობა ყოველი ცდის დროს მუდმივია და განსხვავდება ნულისა და ერთისაგან $(0<p<1)$, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n ცდის დროს k-ჯერ მოხდება, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, ხოლო $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

$\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი მოიძებნება ცხრილებიდან. როცა $x>5$, მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ $\varphi(x)=0$.

1596. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 400 ცდის დროს მოხდება ზუსტად 80-ჯერ, თუ ყოველი ცდისას მისი მოხდენის ალბათობა $p=0{,}2$.

1597. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 400 ცდისას მოხდება ზუსტად 104-ჯერ, თუ ყოველი ცდისას $P(A)=0{,}2$.

1598. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი 10 გასროლიდან მიზანში მოახვედრებს 8-ჯერ, თუ ერთი გასროლით მოხვედრის ალბათობა $p=0{,}75$.

III. **პუასონის ფორმულა.** თუ A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p ყოველი ცდის დროს ერთი და იგივეა და ძალიან მცირეა, ხოლო ცდათა რიცხვი n საკმაოდ დიდია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობას ადგილი ექნება k-ჯერ, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

სადაც $\lambda=np$. ამ ფორმულით სარგებლობისას უნდა გამოვიყენოთ სათანადო ცხრილები.

1599. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 200 კაციდან 4 აღმოჩნდება ცაცია, თუ ცაციები საშუალოდ შეადგენენ 1%-ს.

1600. ალბათობა იმისა, რომ პიროვნება გარდაიცვლება 21 წლის ასაკში, უდრის 0,006-ს. დაზღვეულია 1000 კაცი 20 წლის ასაკში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი წლის განმავლობაში გარდაიცვლება 5 დაზღვეული პიროვნება?

1601. წუნდებული დეტალის დამზადების ალბათობა უდრის 0,008-ს. იპოვეთ წუნდებული დეტალების უალბათესი რიცხვი 1000 დეტალიდან და ასეთი რიცხვის ალბათობა მოცემულ პარტიაში.

IV. **ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა.** თუ A ხდომილობის მოხდენის p ალბათობა ყოველი ცდის დროს ერთი და იგივეა და განსხვავდება ნულისა და ერთისაგან, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n ცდის დროს მოხდება არანაკლებ k_1-ჯერ და არაუმეტეს k_2-ჯერ, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

სადაც

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

ხოლო $\Phi(x)$ ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

ამ ფუნქციას ლ ა პ ლ ა ს ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ეწოდება. მისი მნიშვნელობანი მოიძებნება ცხრილებიდან, როცა $x > 5$, მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ $\Phi(x) = 0,5$.

V. **ფარდობითი სიხშირის გადახრის ალბათობა მუდმივი ალბათობიდან დამოუკიდებელი ცდების დროს.** თუ ვატარებთ n დამოუკიდებელ ცდას და თითოეული ცდის დროს A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ერთი და იგივეა და უდრის p-ს $(0 < p < 1)$, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ $\frac{m}{n}$ ფარდობითი სიხშირის გადახრა მუდმივი p ალბათობიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ გადააჭარბებს წინასწარ მოცემულ $\varepsilon > 0$ რიცხვს, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

1602. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არ არის შემოწმებული, უდრის 0,2-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული 400 დეტალიდან შემოწმებული იქნება 70-დან 100-მდე.

1603. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მიზანში მოახვედრებს არის 0,75. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 1000 გასროლისას მსროლელი მიზანში მოახვედრებს: 1) არანაკლებ 71-ჯერ და არა უმეტეს 80-ჯერ; 2) არანაკლებ 81-ჯერ.

1604. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მიზანში მოახვედრებს უდრის 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლისას მსროლელი მიზანში მოახვედრებს: 1) არანაკლებ 70-ჯერ და არა უმეტეს 80-ჯერ; 2) არა უმეტეს 80-ჯერ.

1605. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველი 10 000 დამოუკიდებელი ცდისას მუდმივია და უდრის 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობის მოხდენის ფარდობითი სიხშირე მისი ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,001-ისა.

1606. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,1-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 400 დეტალიდან არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე მისი 0,1 ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,03-ისა.

1607. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,1-ს. განსაზღვრეთ, რამდენი დეტალი უნდა ავარჩიოთ, რომ $P=0{,}9544$ ალბათობით არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე მუდმივი 0,1 ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,03-ისა.

1608. ლითონის ფულის აგდებისას ღერბის მოსვლის ალბათობა $p=0{,}5$. რამდენჯერ უნდა ავაგდოთ ლითონის ფული, რომ $P=0{,}6$ ალბათობით ღერბის მოსვლათა ფარდობითი სიხშირე $p=0{,}5$ ალბათობიდან გადაიხაროს არა უმეტეს 0,01-ისა.

1609. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ცდაში მუდმივია და უდრის 0,64-ს. განსაზღვრეთ $P=0{,}997$ ალბათობით რომელ საზღვრებში იქნება მოთავსებული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, თუ ცდათა რიცხვი $n=2500$.

1610. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ცდაში მუდმივია და უდრის 0,2-ს. განსაზღვრეთ $P=0{,}9128$ ალბათობით რომელ საზღვრებში იქნება მოთავსებული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, თუ ცდათა რიცხვი $n=5000$.

§ 6. შემთხვევითი სიდიდეები და განაწილების ფუნქცია

სიდიდეს, რომელსაც მოცემულ პირობებში შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობა სათანადო ალბათობებით, ეწოდება შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ე.

შემთხვევითი სიდიდეები ორი ტიპისაა: დისკრეტული (წყვეტილი) შემთხვევითი სიდიდეები და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები.

დ ი ს კ რ ე ტ უ ლ ი ეწოდება ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ცალკეული, იზოლირებული მნიშვნელობები განსაზღვრული ალბათობებით.

უწყვეტი ეწოდება ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა რომელიმე სასრული ან უსასრულო შუალედიდან.

კანონს, რომლის მიხედვით შემთხვევითი სიდიდის ყოველ შესაძლო რიცხვითს მნიშვნელობას შეესაბამება სათანადო ალბათობა, ეწოდება **შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი**. განაწილების კანონი შედგება ცხრილისაგან, რომლის პირველ სტრიქონში მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი, ხოლო მეორე სტრიქონში — მათი შესაბამისი ალბათობანი:

$$X\begin{cases} x_1 \; x_2 \ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \ldots \; p_n. \end{cases}$$

აქ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ალბათობანი სრულ სისტემაში შემავალ ხდომილობათა ალბათობებია, ამიტომ

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების $F(x)$ ფუნქცია არის ალბათობა იმისა, რომ ეს შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს რომელიმე ფიქსირებულ x რიცხვზე უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას, ე. ი.

$$F(x)=P(X<x).$$

განაწილების ფუნქციის თვისებებია:

1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$; 2) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$;

3) თუ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობა ავსებს მხოლოდ სასრულ (a, b) ინტერვალს, მაშინ $F(x)=0$, როცა $x<a$, და $F(x)=1$, როცა $x>b$. ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდის მიერ მიღებული შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები მოთავსებული იქნება (a, b) ინტერვალში, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

დისკრეტული ტიპის შემთხვევით X და Y სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი i-ისა და j-ისათვის დამოუკიდებელია $X=x_i$ და $Y=y_j$ ხდომილობანი. ვთქვათ, X და Y სიდიდეების განაწილების კანონებია

$$X\begin{cases} x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \ldots \; p_n \end{cases} \quad \text{და} \quad Y\begin{cases} y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_m \\ q_1 \; q_2 \; \ldots \; q_m. \end{cases}$$

ამ სიდიდეების $X+Y$ ჯამი არის ახალი შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ღებულობს შემდეგი სახის ყველა მნიშვნელობას:

$$x_i+y_j \quad (i=1, 2, \ldots, n, \; j=1, 2, \ldots, m),$$

რომელთა ალბათობებია $p_{ij}=p_i \cdot q_j$ (X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია).

განაწილების ფუნქციის წარმოებულს ეწოდება განაწილების სიმკვრივე:

$$F'(x)=f(x) \qquad (f(x)\geqslant 0).$$

მართებულია შემდეგი ტოლობები:

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

3) თუ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობა ავსებს სასრულ $(a,\ b)$ ინტერვალს, მაშინ $\int\limits_a^b f(x)dx=1.$

ალბათობა იმისა, რომ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი X სიდიდის მიერ მიღებული შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობანი მოთავსებული იქნება $(a,\ b)$ ინტერვალში, გამოითვლება ფორმულით:

$$P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

თუ ცნობილია განაწილების სიმკვრივე $f(x)$, მაშინ განაწილების ფუნქცია ასე განისაზღვრება:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\ dx.$$

1611. მიზანში ისვრიან ერთხელ: მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. შემთხვევითი X სიდიდე არის მიზანში მოხვედრათა რიცხვი. დაწერეთ X სიდიდის განაწილების კანონი.

1612. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. ცნობილია პირველი ორი შესაძლო მნიშვნელობის ალბათობები: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}15$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

1613. ლატარიაში გამოშვებულია 1000 ბილეთი. აქედან გათამაშდება ერთი მოგება 1000-მანეთიანი, ოთხი მოგება — თითო 500-მანეთიანი, ხუთი მოგება — თითო 400-მანეთიანი და 10 მოგება — თითო 100-მანეთიანი. იპოვეთ ერთი ბილეთის მოგების განაწილების კანონი.

1614. მსროლელი მიზანში ისვრის 3-ჯერ; ყოველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. დაწერეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

1615. კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. დაწერეთ შაშის მოსვლათა განაწილების კანონი.

1616. ლითონის ფულს აგდებენ 4-ჯერ. დაწერეთ ღერბის მოსვლათა განაწილების კანონი.

1617. მსროლელი, რომელსაც 3 ვაზნა აქვს, ესვრის მიზანში პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,8-ს. იპოვეთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

1618. მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,6-ს. იპოვეთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

1619. ორი მსროლელი ისვრის ერთ მიზანში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანში მოახვედრებს არის 0,5, მეორე რომ მოახვედრებს — 0,4. შეადგინეთ მიზანში მოხვედრათა განაწილების კანონი.

1620. მონადირე ესვრის ნადირს პირველ მოხვედრამდე და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. შეადგინეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას უდრის 0,7-ს.

1621. ალბათობა იმისა, რომ ბიბლიოთეკაში სტუდენტისათვის საჭირო წიგნი თავისუფალია, უდრის 0,4-ს. შეადგინეთ იმ ბიბლიოთეკების განაწილების კანონი, რომლებიც უნდა ინახულოს სტუდენტმა, თუ ქალაქში 4 ბიბლიოთეკაა.

1622. ოჯახში 4 ბავშვია. შეადგინეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც გამოსახავს ვაჟთა რაოდენობას, თუ ვაჟიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია.

1623. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\begin{cases}1 & 3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{cases} \quad \text{და} \quad Y\begin{cases}2 & 4\\ 0{,}2 & 0{,}8.\end{cases}$$

შეადგინეთ $X+Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1624. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\begin{cases}4 & 6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{cases} \quad \text{და} \quad Y\begin{cases}1 & 2\\ 0{,}8 & 0{,}2.\end{cases}$$

შეადგინეთ $X—Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1625. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\begin{cases}-2 & 0 & 1 & 3\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1.\end{cases}$$

შეადგინეთ X^2 და $3X$ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

1626. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\begin{cases}-1 & 0 & 1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{cases} \quad \text{და} \quad Y\begin{cases}0 & 1 & 2 & 3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4.\end{cases}$$

შეადგინეთ XY შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1627. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია.

1628. მიზანში ისვრიან 4-ჯერ; ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,3. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია და განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება $1\leqslant X\leqslant 4$ შუალედში.

1629. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x<-1, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}, \text{ როცა } -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 1, \text{ როცა } x>2. \end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება (0; 1) შუალედში.

1630. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x<2, \\ \dfrac{x}{2}-1, \text{ როცა } 2\leqslant x\leqslant 4, \\ 1, \text{ როცა } x>4. \end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება (2; 3) შუალედში.

1631. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x\leqslant 0, \\ \dfrac{x}{3}, \text{ როცა } 0<x\leqslant 3, \\ 1, \text{ როცა } x>3. \end{cases}$$

იპოვეთ: 1) განაწილების $f(x)$ სიმკვრივე, 2) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ შუალედში. ააგეთ $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების გრაფიკები.

1632. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x, \text{ როცა } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ როცა } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

იპოვეთ : 1) კოეფიციენტი a; 2) განაწილების $F(x)$ ფუნქცია; 3) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ შუალედში.

1033. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x<0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ როცა } 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ 0, \text{ როცა } x>\pi. \end{cases}$$

იპოვეთ: 1) განაწილების ფუნქცია; 2) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ შუალედში.

1034. 1) მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე $f(x)=\frac{A}{1+x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$. იპოვეთ კოეფიციენტი A და X სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

2) შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია თანაბრად, ე. ი. მისი განაწილების სიმკვრივე $f(x)=A$, როცა $a\leqslant x\leqslant b$ და $f(x)=0$, როცა $x<a$ და $x>b$. განსაზღვრეთ კოეფიციენტი A.

§ 7. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

თუ შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია

$$X \begin{cases} x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \; \ldots \; p_n, \end{cases}$$

მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი არის

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

თუ X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივე არის $f(x)$, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი ასე გამოისახება:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

თუკი ამ ინტეგრალს აქვს აზრი.

თუ შემთხვევითი X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა მოთავსებულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx.$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ M(C)=C, \\ 2)\ M(CX)=CM(X), \end{array}\right\} C \text{ მუდმივი სიდიდეა.}$$

3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$,

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია,

5) $X - M(X)$ სხვაობას ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის **გადახრა** თავისი საშუალო მნიშვნელობიდან. გადახრის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია

$$M[X - M(X)] = 0.$$

გადახრის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \\ + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

დისპერსიის გამოსათვლელად შეგვიძლია ვისარგებლოთ აგრეთვე შემდეგი ფორმულით:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

თუ X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ დისპერსიისათვის გვექნება:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx,$$

სადაც

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

დისპერსიის თვისებებია:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ D(C) = 0, \\ 2)\ D(CX) = C^2 D(X) \end{array}\right\} \ C \text{ მუდმივი სიდიდეა,}$$

3) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, კერძოდ, $D(C + X) = D(X)$,
სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა**:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1635. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მისი განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 6 & 3 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5. \end{cases}$$

1636. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მისი განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 3 & 5 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3. \end{cases}$$

1637. იპოვეთ A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ერთი ცდისას, თუ $P(A) = p$.

1638. ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,9-ს. ისვრიან პირველ მოხვედრამდე; ერთხელ მოხვედრისათვის გასროლათა რიცხვი არ უნდა აღემატებოდეს 3-ს. იპოვეთ გასროლათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1639. 3 გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობებია $p_1=0,4$, $p_2=0,3$ და $p_3=0,6$. იპოვეთ მოხვედრათა საერთო რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1640. 4 გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობებია: $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$, $p_4=0,7$. იპოვეთ მოხვედრათა საერთო რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1641. იპოვეთ ერთი კამათლის გაგორებისას მიღებული ქულის ლოდინი და დისპერსია.

1642. იპოვეთ ორი კამათლის ერთდროული გაგორებისას ჯამში მიღებული ქულის მათემატიკური ლოდინი და ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი.

1643. მოცემულია დამოუკიდებელი შემთხვევითი X და Y სიდიდეების განაწილების კანონები:

$$X\begin{cases} 5 & 2 & 4 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3, \end{cases} \qquad Y\begin{cases} 7 & 9 \\ 0,8 & 0,2. \end{cases}$$

იპოვეთ შემთხვევითი XY სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

1644. შემთხვევითი X სიდიდე ღებულობს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას $+c$ და $-c$, რომელთაგან თითოეულის ალბათობაა 0,5. იპოვეთ ამ სიდიდის დისპერსია.

1645. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია, თუ ამ სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X\begin{cases} 1 & 2 & 5 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2. \end{cases}$$

1646. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია, თუ ამ სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X\begin{cases} 0,1 & 2 & 10 & 20 \\ 0,4 & 0,2 & 0,15 & 0,25. \end{cases}$$

1647. 1) ცნობილია ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია: $D(X)=4$ და $D(Y)=3$. იპოვეთ ამ სიდიდეთა ჯამის დისპერსია.

2) შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია $D\ (X)=5$. იპოვეთ შემდეგი სიდიდეების დისპერსია: ა) $X-1$; ბ) $-2X$; გ) $3X+6$.

1648. მიზანში ისვრიან ერთხელ, მოხვედრის ალბათობა უდრის p-ს

იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1649. შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X\begin{cases} 2 & 3 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.

1650. შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X\begin{cases} 2 & 4 & 8 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.

შემდეგ ორ ამოცანაში იპოვეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც მხოლოდ ორ მნიშვნელობას ღებულობს: x_1-ს (p_1 ალბათობით) და x_2-ს. ამასთან $x_1 < x_2$. ცნობილია X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M(X)$ და დისპერსია $D(X)$.

1651. $p_1=0{,}5$, $M(X)=3$, $D(X)=1$.

1652. $p_1=0{,}9$, $M(X)=4{,}1$, $D(X)=0{,}09$.

1653. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<0, \\ x, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

1654. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ 1, & \text{როცა } x>\pi. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1655. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<0, \\ ax, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$$

იპოვეთ კოეფიციენტი a, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1656. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x\leqslant -2, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, \text{ როცა } -2<x<2, \\ 0, \text{ როცა } x\geqslant 2. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1657. შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია თანაბრად. მისი განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x<1, \\ a, \text{ როცა } 1\leqslant x\leqslant 10, \\ 0, \text{ როცა } x>10. \end{cases}$$

განსაზღვრეთ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

1658. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=ae^{-|x|}.$$

იპოვეთ კოეფიციენტი a, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

§ 8. შემთხვევითი სიდიდის ბინომური და ნორმალური განაწილების კანონი

შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აკმაყოფილებს ბერნულის ფორმულას

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k},$$

ემორჩილება ბინომური განაწილების კანონს. ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$X\begin{cases} 0 & 1 & 2 & \ldots n-1 & n \\ q^n & C_n^1pq^{n-1} & C_n^2p^2q^{n-2} & \ldots C_n^{n-1}p^{n-1}q & p^n \end{cases}$$

ბინომური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$M(X)=np, \quad D(X)=npq.$$

შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც a შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია, ხოლო σ^2 — დისპერსია.

თუ შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ: 1) ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს რაიმე მნიშვნელობას (α, β) ინტერვალიდან, უდრის

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

სადაც σ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრაა, ხოლო $\Phi(x)$ — ლაპლასის ფუნქცია;

2) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება მოცემულ დადებით α რიცხვს, უდრის

$$P(|X-a|\leqslant\alpha)=2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

1659. მიზანში მოხვედრის ალბათობა $p=0{,}4$. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ გაისროლეს სამჯერ.

1660. იპოვეთ ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა და გასროლათა რიცხვი, თუ მოხვედრათა საშუალო რიცხვი უდრის 72-ს, ხოლო შემთხვევითი X სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა— 6-ს (X აღნიშნავს მოხვედრათა რიცხვს).

1661. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 6-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 8-ს იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია (10; 12) ინტერვალში.

1662. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 1-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 3-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია (4: 7) ინტერვალში.

1663. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 20-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 10-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იქნება 3-ზე.

1664. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 0-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 4-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იქნება 2-ზე.

§ 9. დიდ რიცხვთა კანონი

1. მარკოვის უტოლობა. თუ შემთხვევითი X სიდიდე არ ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს რაიმე დადებით A რიცხვზე მეტ მნიშვნელობას, არ აღემატება $\frac{M(X)}{A}$ წილადს, ე. ი.

$$P(X>A)<\frac{M(X)}{A},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს A რიცხვზე არაუმეტეს მნიშვნელობას, ნაკლები არ არის $1-\frac{M(X)}{A}$ რიცხვზე, ე. ი.

$$P(X<A)\geqslant 1-\frac{M(X)}{A}.$$

1665. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ უახლოესი დღის განმავლობაში წყლის მოთხოვნილება დასახლებულ პუნქტში გადააჭარბებს 100 000 ლიტრს, თუ საშუალო სადღეღამისო მოთხოვნილებაა 10 000 ლიტრი.

1666. დედამიწის მოცემულ ადგილზე ნალექების საშუალო რაოდენობა შეადგენს 300 მმ წელიწადში. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ადგილზე ერთი წლის განმავლობაში ნალექების რაოდენობა აღემატება 800 მმ-ს.

1667. ქარის საშუალო სიჩქარე დედამიწის მოცემულ ადგილზე უდრის 15 კმ/სთ. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ადგილზე ქარის სიჩქარე არ გადააჭარბებს 60 კმ/სთ.

1668. მსროლელი ისვრის მიზანში და მიზნის ცენტრიდან გადახრის მათემატიკური ლოდინი უდრის 5 სმ-ს. შეაფასეთ მოხვედრის ალბათობა წრიულ სამიზნეში, რომლის რადიუსი 25 სმ-ია.

II. **ჩებიშევის უტოლობა.** ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური a ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით გადააჭარბებს მუდმივ $\varepsilon>0$ რიცხვს, არ აღემატება $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ წილადს, ე. ი.

$$P(|X-a|>\varepsilon)\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური a ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება $\varepsilon>0$ რიცხვს, ნაკლები არ არის $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$-ზე, ე. ი.

$$P(|X-a|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

1669. რომელიმე ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველი ცდისას არის 0,3. ცდათა რიცხვი $n=1000$. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან მეტი იქნება 30-ზე.

1670. დასახლებულ პუნქტში ელექტროენერგიის დანახარჯი დღეღამის განმავლობაში შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა უდრის 10 000 კვტ. სთ. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ პუნქტში ერთი დღის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯის გადახრა მისი მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით მეტი იქნება 25000 კვტ. საათზე.

1671. მოცემულ სიმაღლეზე ქარის სიჩქარის მათემატიკური ლოდინი უდრის 25 კმ/სთ-ს, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა — 4,5 კმ/სთ-ს. 0,9-ზე არანაკლები ალბათობის რა სიჩქარის ქარებს უნდა მოველოდეთ ამ სიმაღლეზე?

1672. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ 1200 ახალშობილ ბავშვს შორის ვაჟები იქნება 550-დან 650-მდე (ჩათვლით), თუ ქალებისა და ვაჟების დაბადება ტოლალბათია.

1673. ისარგებლეთ ჩებიშევის უტოლობით და იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $|X-M(X)|<0{,}1$, თუ $D(X)=0{,}001$.

1674. მოცემულია $P(|X-M(X)|<\varepsilon)=0{,}9$, $D(X)=0{,}004$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იპოვეთ ε.

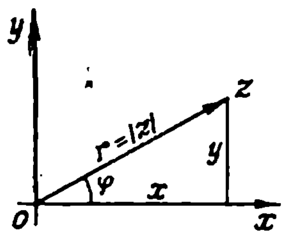
VIII თავი

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები

§ 1. კომპლექსური რიცხვები

კომპლექსური რიცხვი ეწოდება $z=x+iy$ სახის გამოსახულებას, სადაც x და y ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i=\sqrt{-1}$ — წარმოსახვითი ერთეული. x-სა და y-ს შესაბამისად ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები და აღინიშნება ასე:

$$x=Re\,z, \qquad y=Im\,z.$$



ნახ. 1.

$z=x+iy$ და $\bar{z}=x-iy$ სახის რიცხვებს ეწოდება ურთიერთ შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ ორ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება ტოლი, თუ $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$. კომპლექსური რიცხვი $z=x+iy=0$, როცა $x=0$ და $y=0$.

$z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვი xOy სიბრტყეზე გამოისახება წერტილით, რომლის კოორდინატებია (x, y). z რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ ვექტორი, რომელიც მიმართულია O წერტილიდან z წერტილისაკენ (ნახ. 1). ამ ვექტორის r სიგრძეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული და აღინიშნება $r=|z|$ სიმბოლოთი. φ კუთხეს, რომელსაც $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ეწოდება z რიცხვის არგუმენტი და აღინიშნება ასე: $\varphi=Arg\,z$. არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\arg z$ განისაზღვრება $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ უტოლობებით და მაშინ

$$Arg\,z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}, \qquad \sin\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმაა

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (z\neq 0)$$

სადაც

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi=Arg z.$$

კომპლექსური რიცხვების შეკრება—გამოკლება:

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

გამრავლება:

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\ (x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების შემთხვევაში გვაქვს:

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

გაყოფა:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2{}_2+y^2{}_2}+i\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x^2{}_2+y^2{}_2} \qquad (z_2\neq 0).$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

ახარისხება:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია. კერძოდ, როცა $r=1$, მაშინ $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+$ $+i\sin n\varphi$ (მუავრის ფორმულა). შევნიშნოთ, რომ

$$i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=1$$

და, საზოგადოდ,

$$i^{4k}=1, \quad i^{4k+1}=i, \quad i^{4k+2}=-1, \quad i^{4k+3}=-i.$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.
ამოფესვა: თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

სადაც $k=0, 1, 2,\ldots, n-1$, $\varphi=\arg z$.

კომპლექსური z რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ასე გამოისახება.

$$Re z=\frac{\bar z+z}{2}, \qquad Im z=i\frac{\bar z-z}{2}.$$

შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედებები:

1675. $(3+5i)(4-i)$. **1676.** $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$.

1677. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}i\right)$.

1678. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

1679. $\frac{1+i}{1-i}$. **1680.** $\frac{2i}{1+i}$. **1681.** $\frac{3-i}{4+5i}$.

1682. $\frac{4-3i}{4+3i}$. **1683.** $(1+i)^3$. **1684.** $(1+i)^4$.

1685. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$. **1686.** იპოვეთ i^{89}, i^{82}, i^{-39}, i^{-45}.

წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი რიცხვები:

1687. $1+i$. **1688.** $1-i$. **1689.** $-1+i\sqrt{3}$. **1690.** $-\sqrt{3}+i$.

1691. 1) $-2i$; 2) m. **1692.** $-45-15i\sqrt{3}$. **1693.** $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

1694. $1+\sin\alpha-i\cos\alpha$.

წარმოადგინეთ ალგებრული ფორმით შემდეგი რიცხვები:

1695. $6(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$. **1696.** $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

1697. $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **1698.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედებები:

1699. $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

1700. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

1701. $3(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)\cdot 4(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$.

1702. $12(\cos 55^\circ+i\sin 55^\circ)\cdot 3(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$.

1703. $2(1+i\sqrt{3})\cdot(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$.

1704. $2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)\cdot 5(\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ)\cdot 3(\cos 10^\circ+$ $+i\sin 10^\circ)$.

1705. $8(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ):2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.

1706. $2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ):(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.

1707. $\sqrt{3}(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ):2(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$.

1708. $(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ):(1+i)$.

იპოვეთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები შემდეგი კომპლექ-
სური რიცხვებისა:

1709. $\dfrac{1}{1-i}$. **1710.** $\dfrac{2}{1-3i}$, **1711.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1712. $(1+i\sqrt{3})^3$. **1713.** $\left(\dfrac{i^5+1}{i^{19}+1}\right)^2$. **1714.** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1715. 1) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$; 2) $\overline{(\bar{z})}=z$; 3) $\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

1716. 1) $|\bar{z}|=|z|$; 2) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; 3) $\bar{z}\cdot z=|z|^2$.

მუავრის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი რიცხვები:

1717. $(1-i)^6$. **1718.** $(-1+i)^5$. **1719.** $(1+i\sqrt{3})^9$.

1720. $\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$. **1721.** $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$.

1722. $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$.

გამოსახეთ $\sin\varphi$-სა და $\cos\varphi$-ს საშუალებით შემდეგი ფუნქციები:

1723. $\cos 3\varphi$ და $\sin 3\varphi$. **1724.** $\cos 4\varphi$ და $\sin 4\varphi$.

ჯერადი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით გა-
მოსახეთ შემდეგი ფუნქციები:

1725. $\cos^3\varphi$ და $\sin^3\varphi$. **1726.** $\cos^4\varphi$ და $\sin^4\varphi$.

1727. დაამტკიცეთ, რომ $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}$.

1728. თუ $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$, მაშინ აჩვენეთ, რომ $z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos m\alpha$.

იპოვეთ მნიშვნელობები შემდეგი რიცხვებისა:

1729. 1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[3]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

1730. 1) $\sqrt{16(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1731. $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$. **1732.** $4x+2ix-2y-3iy=5+4i$.

1733. $(x+i)y+xi=6+5i$. **1734.** $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

1735. $z^2+(1-2i)z-2i=0$. **1736.** $z^3+8=0$.

1737. $z^3-2i=0$. **1738.** $z^4+4=0$. **1739.** $z^6-1=0$.

1740. $\sqrt{a+ib}=x+iy$.

წინა მაგალითის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ორი ფესვი:

1741. $\sqrt{3+4i}$. **1742.** $\sqrt{-7+24i}$.

სად მდებარეობს წერტილები, რომელთათვისაც ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

1743. 1) $1 \leqslant Rez < 3$; 2) $Imz \geqslant 3$; 3) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$;

4) $|z| = Rez + 1$; 5) $Re(z^2) = a$; 6) $|z| \leqslant 2$;

7) $|z| > 1$; 8) $|z - i| \leqslant 1$;

9) $2 < |z| < 4$; $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$.

1744. 1) $0 \leqslant Rez \leqslant 2$, $-1 < Imz \leqslant 3$; 2) $Rez \geqslant \frac{1}{2}$; 3) $|z + i| > 1$;

4) $|z + 1 - i| \leqslant 2$; 5) $1 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$;

6) $1 \leqslant |z - 1 - i| < 2$; 7) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; 8) $0 < Re(iz) < 1$;

9) $|z^2 - 1| = 2$.

გამოარკვიეთ, როგორ წირებს გამოსახავს შემდეგი განტოლებები:

1745. 1) $Re\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$; 2) $Im\frac{z-1}{z+1} = 0$; 3) $|z - 2| - |z + 2| = 2$.

1746. 1) $Im(z^2) = a$; 2) $Re\frac{z-a}{z+a} = 0$, $a > 0$, 3) $|z - i| + |z + i| = 4$.

დაწერეთ კომპლექსური სახით განტოლებები შემდეგი წირებისა:

1747. $Ax + By + C = 0$. **1748.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

1749. $x^2 - y^2 = a^2$.

1750. რა წირს გამოსახავს xOy სიბრტყეზე $\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$ განტოლება?

§ 2. ელემენტარული ფუნქციები

თუ $z = x + iy$ ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას D არიდან შეესაბამება w ცვლადის ერთი ან რამდენიმე მნიშვნელობა, მაშინ D არეში განსაზღვრულია კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია

$$w = f(z) = u\ (x,\ y) + iv\ (x,\ y),$$

სადაც $u\ (x, y)$ და $v\ (x, y)$ წარმოადგენს $f(z)$ ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. თუ ყოველ z-ს შეესაბამება w-ს ერთი მნიშვნელობა, მაშინ ფუნქციას ეწოდება ცალსახა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — მრავალსახა.

კომპლექსური ცვლადის ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y),$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$ch z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad sh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

$$th z=\frac{sh z}{ch z},\quad cth z=\frac{ch z}{sh z}.$$

კომპლექსური რიცხვი მაჩვენებლიანი ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}.$$

$\cos z$, $\sin z$ ფუნქციების ძირითადი პერიოდია 2π, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ ფუნქციებისა π, e^{z}, $ch z$, $sh z$-ისა $2\pi i$, ხოლო $th z$, $cth z$-ისა πi.

კომპლექსური რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი განისაზღვრება ასე:

$$\mathrm{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi)\qquad (z\neq 0),$$

სადაც $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$ ლოგარითმის მთავარი მნიშვნელობა არის

$$\ln z=\ln r+i\varphi.$$

ლოგარითმული ფუნქციის საშუალებით განისაზღვრება მაჩვენებლიანი და ხარისხოვანი ფუნქციები:

$$a^{z}=e^{z\,\mathrm{Ln}\,\alpha},\quad z^{\alpha}=e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z},$$

სადაც a, α და z ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან, $a\neq 0$, $z\neq 0$.

ჩაწერეთ $re^{i\varphi}$ სახით შემდეგი რიცხვები:

1751. 1) $1+i$; 2) $1+i\sqrt{3}$; 3) 5; 4) $-i$.

1752. 1) -1; 2) $4+4i$; 3) $-1+i\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

იპოვეთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები შემდეგი კომპლექსური რიცხვებისა:

1753. 1) $e^{2-\frac{\pi}{3}i}$; 2) $e^{\frac{1}{2}-3i}$; 3) $\cos(2+i)$; 4) $\sin(1-5i)$.

1754. 1) $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$; 2) $\cos(1-i)$; 3) $\sin i$; 4) $ch(1+2i)$.

დაამტკიცეთ მართებულობა შემდეგი ტოლობებისა:

1755. 1) $\sin^{2}z+\cos^{2}z=1$; 2) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$; 3) $\cos iz=ch z$; 4) $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

1756. 1) $ch^{2}z-sh^{2}z=1$; 2) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$; 3) $\sin iz=i\,sh z$; 4) $ch^{2}z+sh^{2}z=ch 2z$.

1757. იპოვეთ $Re(\sin z)$, $Im(\sin z)$, $|\sin z|$.

1758. იპოვეთ $Re(ze^z)$, $Im(ze^z)$.

1759. აჩვენეთ, რომ $\sin 2i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული მეტია 1-ზე.

1760. აჩვენეთ, რომ $\cos 3i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული მეტია 1-ზე.

იპოვეთ შემდეგი ჯამები:

1761. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$,

2) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$.

1762. 1) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\ldots+\sin (2n-1)x$,

2) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x\ldots+\cos (2n-1)x$.

გამოთვალეთ:

1763. 1) $\mathrm{Ln}\, 4$; 2) $\mathrm{Ln}(-i)$; 3) $\mathrm{Ln}(1+7i)$.

1764. 1) $\mathrm{Ln}(-1+i)$; 2) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; 3) $\mathrm{Ln}(2-3i)$.

1765. 1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) i^i; 3) $(1+i)^i$.

1766. 1) 1^{-i}; 2) 2^i; 3) 3^{2+i}.

განმარტების ძალით, $w=\mathrm{Arc}\sin z$ ეკვივალენტურია $z=\sin w$ ტოლობისა. ასევე განიმარტება $\mathrm{Arc}\cos z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, z$ და შექცეული ჰიპერბოლური $\mathrm{Ar}\, shz$, $\mathrm{Ar}\, chz$, $\mathrm{Ar}\, thz$ ფუნქციები.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1767. 1) $\mathrm{Arc}\sin z=-i\mathrm{Ln}\,(iz\pm\sqrt{1-z^2})$,

2) $\mathrm{Arc}\cos z=-i\,\mathrm{Ln}\,(z\pm\sqrt{z^2-1})$,

3) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}z=-\dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{i-z}{i+z}$, $z\neq\pm i$.

1768. 1) $\mathrm{Ar}shz=\ln(z\pm\sqrt{z^2+1})$,

2) $\mathrm{Ar}\, chz=\mathrm{Ln}\,(z\pm\sqrt{z^2-1})$,

3) $\mathrm{Ar}\, thz=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$, $z\neq\pm 1$.

გამოთვალეთ:

1769. 1) $\mathrm{Arc}\sin i$; 2) $\mathrm{Arc}\cos\dfrac{1}{2}$; 3) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, 2i$.

1770. 1) $\mathrm{Ar}\, sh\,(-1)$; 2) $\mathrm{Ar}ch\, 2i$; 3) $\mathrm{Ar}\, thi$.

§ 8. კომპლექსური ფუნქციის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ ფუნქცია z სიბრტყეზე მოცემულ $F(x, y)=0$ წირს ასახავს w სიბრტყის რომელიმე $\Phi(u, v)=0$ წირში. იმისათვის რომ ვიპოვოთ მიღებული წირის განტოლება, საჭიროა x და y სიდიდეები გამოვრიცხოთ შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან:

$$F(x, y)=0,\quad u=u(x, y),\quad v=v(x, y).$$

განსაზღვრეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული წირები (t ნამდვილი პარამეტრია):

1771. 1) $z=e^{it}$; 2) $z=6e^{it}+2e^{-it}$; 2) $z=t+it^2$.

1772. 1) $z-a=re^{it}$, $a=\alpha+i\beta$, $r>0$; 2) $z=t+\dfrac{i}{t}$;

3) $z=a(t+i-ie^{-it})$.

1773. z სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $x=2$; 2) $y=1$; 3) $xy=1$; 4) $x^2+y^2=4$. $w=z^2$ გარდაქმნით ეს წირები ასახულია w სიბრტყეზე. იპოვეთ მიღებული წირების განტოლებები.

1774. z სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $y=x$; 2) $x^2+y^2=R^2$, 3) $y=4$. $\omega=\dfrac{1}{z}$. გარდაქმნით ეს წირები ასახულია w სიბრტყეზე. იპოვეთ მიღებული წირების განტოლებები.

1775. w სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $u=2$; 2) $v=3$. იპოვეთ მათი წინა სახე $w=z^2$ გარდაქმნისას.

1776. w სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $u=-1$; 2) $v=5$. იპოვეთ მათი წინა სახე $w=\dfrac{1}{z}$ გარდაქმნისას.

1777. იპოვეთ $|z|=R$ წრეწირის ასახვა $w=z+\dfrac{1}{z}$ ფუნქციის საშუალებით.

1778. იპოვეთ $|z|=R$ წრეწირის ასახვა $w=z-\dfrac{1}{z}$ ფუნქციის საშუალებით.

§ 4. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის წარმოებული

1°. კოში-რიმანის პირობები. $w=f(z)$ ცალსახა ფუნქციის წარმოებული განისაზღვრება ასე:

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

გაწარმოების ყველა წესი და თვისება, რომლებიც ცნობილია ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისათვის, გამოდგება აგრეთვე კომპლექსური ცვლადის შემთხვევაში. ზემოთ განხილული ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები წარმოებადია მათი განსაზღვრის არეში, ამასთან ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$(z^n)'=nz^{n-1}\ (n=1,\ 2,\dots),\quad (e^z)'=e^z,\ (\sin z)'=\cos z.$$

$$(\cos z)'=-\sin z,\ (\mathrm{sh} z)'=\mathrm{ch} z,\ (\mathrm{ch} z)'=\mathrm{sh} z,\ (\ln z)'=\frac{1}{z}.$$

იმისათვის, რომ $f(z)=u\,(x,\ y)+iv\,(x,\ y)$ ფუნქცია წარმოებადი იყოს $z=x+iy$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $u\,(x,\ y)$ და $v\,(x,\ y)$ ფუნქციები დიფერენ-

ცირებადი იყოს z წერტილზე და ამ წერტილზე შესრულდეს კოში-რიმანის პირობები:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ამ შემთხვევაში $f(z)$ ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება ასე:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ცალსახა $f(z)$ ფუნქციას, რომელიც წარმოებადია D არის ყოველ წერტილზე, ეწოდება ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი ფუნქცია (ან რეგულარული) ამ არეში.

შეამოწმეთ, შესრულებულია თუ არა კოში-რიმანის პირობები, შემდეგი ფუნქციებისათვის და იპოვეთ მათი წარმოებულები, თუ ისინი არსებობს:

1779. 1) $w=z$; 2) $w=\bar{z}$; 3) $w=z^2$; 4) $w=e^z$; 5) $w=\sin z$.

1780. 1) $w=|z|$; 2) $w=z^3$; 3) $w=\frac{1}{z}$; 4) $w=\cos z$; 5) $w=\ln z$.

1781. თუ $f'(z)=0$ რაიმე არის ყოველ წერტილზე, მაშინ აჩვენეთ, რომ $f(z)$ მუდმივი სიდიდეა ამ არეში.

1782. დაამტკიცეთ, რომ $w=z\mathrm{Re}\,z$ ფუნქცია წარმოებადია მხოლოდ $z=0$ წერტილზე და აჩვენეთ, რომ $w'(0)=0$.

1783. აჩვენეთ, რომ კოში-რიმანის პირობებს პოლარულ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

1784. შეამოწმეთ წინა ამოცანის პირობები

$$f(r, \varphi)=r^3\ (\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$$

ფუნქციისათვის.

2°. ჰარმონიული ფუნქციები. $u\ (x, y)$ ფუნქციას, რომელსაც რაიმე არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით და აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

ეწოდება ჰარმონიული ფუნქცია. $u\ (x, y)$ და $v\ (x, y)$ ჰარმონიულ ფუნქციებს ეწოდება ურთიერთშეუღლებული, თუ ისინი დაკავშირებულია კოში-რიმანის პირობებით. იმ ჰარმონიული ფუნქციის მოძებნა, რომელიც მოცემული ჰარმონიული ფუნქციის შეუღლებულია, წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის ინტეგრების ცნობილ ამოცანას.

იპოვეთ მოცემული ჰარმონიული ფუნქციების შეუღლებული ფუნქციები:

1785. $u\ (x, y)=x^2-y^2+2x$. **1786.** $u\ (x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

იპოვეთ $f(z)$ ანალიზური ფუნქცია მისი მოცემული ნამდვილი ან არმოსახვითი ნაწილის მიხედვით:

1787. $v(x, \ y)=x+y-3.$ **1788.** $u(x, \ y)=x^3-2xy-3xy^2.$

1789. $v(x,y)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}$, $f(0)=0.$ **1790.** $v(x, \ y)=x^3-3xy^2, \ f(i)=i.$

1791. $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y, \ f(1)=0.$

1792. $u(x, \ y)=x^2-y^2+xy, \quad f(0)=0.$

§ 5. კონფორმული ასახვები

1°. ანალიზური ფუნქციით განხორციელებული ასახვა. თუ $w=f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეზე, მაშინ ამ ფუნქციით განხორციელებულ ასახვას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. z სიბრტყის ყოველ D არეს $w=f(z)$ ფუნქცია ასახავს w სიბრტყის D' არეში შემოვლის მიმართულების შენარჩუნებით.

2. D არის ყოველი უწყვეტი γ წირი აისახება D' არის უწყვეტ γ' წირში.

3. ვთქვათ, $w_0=f(z_0)$ და z_0 წერტილიდან გამოსული γ_1 და γ_2 წირები აისახა w_0 წერტილიდან გამოსულ γ_1' და γ'_2 წირებში, მაშინ კუთხე γ_1 და γ_2 წირებს შორის z_0 წერტილში უდრის კუთხეს γ_1' და γ_2' წირებს შორის w_0 წერტილში.

4. ვთქვათ, γ წირი, რომელიც აერთებს z_0 და z წერტილებს, $w=f(z)$ ფუნქციით აისახა γ' წირში, რომელიც შესაბამისად აერთებს w_0 და w წერტილებს. ამ შემთხვევაში გაჭიმვის კოეფიციენტი z_0 წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$k=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|.$$

როცა $k>1$, მაშინ ადგილი აქვს გაჭიმვას, ხოლო როცა $k<1$, — შეკუმშვას. ანალიზური $f(z)$ ფუნქციისათვის $k=|f'(z_0)|$, სადაც $f'(z_0)\neq 0$.

ასახვას, რომელიც ხასიათდება მე-3 და მე-4 თვისებებით, ეწოდება *კონფორმული* ასახვა. ამრიგად, ანალიზური ფუნქცია, რომლის წარმოებული განსხვავდება ნულისაგან, ახორციელებს კონფორმულ ასახვას. ამასთან, $f'(z_0)$ წარმოებულის მოდული გაჭიმვის კოეფიციენტია z_0 წერტილში, ხოლო $\Theta=\arg f'(z_0)$ წარმოადგენს ამ წერტილიდან გამოსული სხივების მობრუნების კუთხეს.

იპოვეთ მობრუნების Θ კუთხე და გაჭიმვის k კოეფიციენტი $w=f(z)$ ფუნქციით განხორციელებული ასახვისას ნაჩვენებ წერტილებში:

1793. $w=z^3$, 1) $z=1$; 2) $z=-\dfrac{1}{4}$; 3) $z=1+i$.

1794. $w=2z^2+z$, 1) $z=5$; 2) $z=-\dfrac{i}{4}$; 3) $z=-\dfrac{1}{4}+i$.

z სიბრტყის რომელი ნაწილი იკუმშება და რომელი ნაწილი იჭიმება შემდეგი ფუნქციებით განხორციელებული ასახვისას:

1795. 1) $w=z^2$; 2) $w=2z^2-8z-1$; 3) $w=\dfrac{1}{z}$.

1796. 1) $w=3z^3$; 2) $w=z^2+2z$; 3) $w=e^z$.

აჩვენეთ სიბრტყის ის წერტილები, რომლებშიც დარღვეულია შემდეგ ასახვათა კონფორმულობა:

1797. 1) $w=z^3-3z^2-9z+2$; 2) $w=\sin z$.

1798. 1) $w=z^4+4z$; 2) $w=\cos 2z$.

2°. წილად-წრფივი და წრფივი ასახვა. $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad\neq bc)$ წილად-წრფივი ფუნქცია z სიბრტყეს კონფორმულად ასახავს w სიბრტყეზე, ამასთან $z=\infty$ წერტილი აისახება $w=\dfrac{a}{c}$ წერტილში, ხოლო $z=-\dfrac{d}{c}$ წერტილი— $w=\infty$ წერტილში. წილად-წრფივ ასახვას შემდეგი თვისებები ახასიათებს:

1. z სიბრტყის ყოველი წრფე და ყოველი წრეწირი აისახება w სიბრტყის წრფეში ან წრეწირში.

2. ორი ნებისმიერი z_1 და z_2 წერტილი, რომლებიც სიმეტრიულია z სიბრტყეზე მდებარე l წრეწირის მიმართ, აისახება w სიბრტყის w_1 და w_2 წერტილებში, რომლებიც სიმეტრიულია ამ სიბრტყეზე მდებარე λ წრეწირის მიმართ, სადაც λ წარმოადგენს l წრეწირის სახეს w სიბრტყეზე.

3. არსებობს ერთადერთი წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც z სიბრტყეს ასახავს w სიბრტყეზე ისე, რომ სამი მოცემული z_1, z_2 და z_3 წერტილი შესაბამისად აისახება სამ მოცემულ w_1, w_2 და w_3 წერტილში. ეს ასახვა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

თუ z_k ან w_k $(k=1, 2, 3)$ წერტილებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდია, მაშინ (1) ფორმულაში ის სხვაობები, რომლებშიც ეს წერტილები მონაწილეობს, უნდა შეიცვალოს ერთიანებით.

$w=az+b$ წრფივი ფუნქცია წარმოადგენს წილად-წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევას (როცა $c=0$, $d=1$). $z=\infty$ წერტილს ეს ფუნქცია ასახავს $w=\infty$ წერტილში. ამიტომ წრფივი ფუნქცია წრფეს ასახავს წრფეში, ხოლო წრეწირს — წრეწირში.

1799. გამოარკვიეთ $w=az+b$ წრფივი ასახვის a და b პარამეტრების გეომეტრიული მნიშვნელობა.

1800. იპოვეთ უძრავი წერტილები შემდეგი ასახვებისა:
1) $w=az+b$; 2) $w=iz+3$; 3) $w=(3i+1)z-i$.

1801. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0=1-i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z=2-i$ წერტილს გადაიყვანს $w=i$ წერტილში.

1802. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0=-2i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z=1$ წერტილს გადაიყვანს $w=1+i$ წერტილში.

1803. იპოვეთ წრფივი $w=f(z)$ ფუნქცია, რომელიც სამკუთხედს (წვეროებით 0; 1; i წერტილებში) ასახავს მის მსგავს სამკუთხედში (წვეროებით 0; 2; $1+i$ წერტილებში).

1804. იპოვეთ წრფივი $w=f(z)$ ფუნქცია, რომელიც $-7\leqslant Rez\leqslant-3$, $2\leqslant Imz\leqslant 4$ მართკუთხედს ასახავს— $4\leqslant Rew\leqslant 0$, $-8\leqslant Imw\leqslant 0$ მართკუთხედში.

1805. იპოვეთ წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z+i|<1$ წრეს ასახავს $|w-1|<3$ წრეში.

1806. იპოვეთ წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z|<1$ წრეს ასახავს $|w-1+i|<1$ წრეში.

1807. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $z_1=i$, $z_2=1$, $z_3=\infty$ წერტილებს ასახავს შესაბამისად $w_1=0$, $w_2=\infty$, $w_3=1-i$ წერტილებში.

1808. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $z_1=-1$, $z_2=\infty$, $z_3=i$ წერტილებს ასახავს შესაბამისად $w_1=\infty$, $w_2=i$, $w_3=1$ წერტილებში.

1809. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z|<1$ წრეს ასახავს $|w-i|<3$ წრეში ისე, რომ $|z|=1$ წრეწირის $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1$ წერტილები აისახოს შესაბამისად $|w-i|=3$ წრეწირის $w_1=-3+i$, $w_2=4i$, $w_3=3+i$ წერტილებში.

1810. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z|<1$ წრეს ასახავს $Im w>0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ -1; 1; i წერტილები აისახოს ∞; -1; 2 წერტილებში.

გამოარკვიეთ, რომელ არეებში აისახება ნაჩვენები არეები მოცემული გარდაქმნებით:

1811. $|z|<1$, $Im z>0$ ნახევარწრე; $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$.

1812. $Re z>0$, $Im z>0$ კვადრანტი; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1813. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $Im z>0$ ნახევარსიბრტყეს ასახავს $Re w>0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ $Im z>0$ არის საზღვრის ∞; 0; 1 წერტილები აისახოს $Re w>0$ არის საზღვრის 0; $-i$; ∞ წერტილებში.

1814. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $Re z<0$ ნახევარსიბრტყეს ასახავს $Im w<0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ i, $-i$; $-2i$ წერტილები აისახოს -1; 0; 2 წერტილებში.

1815. იპოვეთ წერტილი, რომელიც სიმეტრიულია მოცემული z წერტილისა $|z|=1$ წრეწირის მიმართ.

1816. იპოვეთ წერტილი, რომელიც სიმეტრიულია $2+i$ წერტილისა: 1) $|z|=1$ წრეწირის მიმართ; 2) $|z-i|=3$ წრეწირის მიმართ.

3°. ასახვა ხარისხოვანი ფუნქციის მეშვეობით. ვთქვათ, z სიბრტყეზე მოცემულია სექტორი, რომლის წვერო მოთავსებულია $z=a$ წერტილში, ხოლო Θ კუთხე არ აღემატება $\dfrac{2\pi}{n}$-ს; $w=(z-a)^n$ ხარისხოვანი ფუნქცია ამ სექტორის შიგა ნაწილს ურთიერთ ცალსახად და კონფორმულად ასახავს w სიბრტყეზე მოთავსებული იმ სექტორის შიგა ნაწილში, რომლის წვეროც კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო კუთხე უდრის $n\Theta$-ს.

1817. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0<\arg z<\frac{\pi}{6}$ არეს ასახავს $Im w>0$ ნახევარსიბრტყეში.

1818. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ არეს ასახავს $Re w>0$ ნახევარსიბრტყეში.

1819. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $-\frac{\pi}{8}<\arg(z+i)<<\frac{\pi}{8}$ არეს ასახავს $-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}$ არეში.

1820. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0<\arg(z+2)<\frac{\pi}{8}$ არეს ასახავს $-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}$ არეში.

1821. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z|<1$, $Im z\geqslant 0$ ნახევარწრეს ასახავს $Im w>0$ ნახევარსიბრტყეში შემდეგი პირობების მიხედვით: $w(-1)=0$, $w(0)=1$, $w(1)=\infty$.

1822. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ სექტორს ასახავს $Im w>0$ ნახევარსიბრტყეში.

4°. ასახვა მაჩვენებლიანი ფუნქციის მეშვეობით. $w=e^z$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ნამდვილი ღერძის პარალელურ ნებისმიერ ზოლს, რომლის სიგანე $h<2\pi$, ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს იმ კუთხეში, რომლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო სიდიდე h-ის ტოლია.

1823. იპოვეთ $x=C$, $y=C$ მართკუთხა ბადის სახე $w=e^z$ ასახვისას.

1824. იპოვეთ $y=kx+b$ წრფეების სახე $w=e^z$ ასახვისას.

იპოვეთ შემდეგი არეების სახე $w=e^z$ ასახვისას.

1825. $0<x<+\infty$, $0<y<\frac{\pi}{2}$ ნახევარზოლის.

1826. 1) $0<x<+\infty$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ნახევარზოლის;

2) $-\infty<x<0$, $0<y<\pi$ ნახევარზოლის.

1827. $0<x<1$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{4}$ მართკუთხედის.

1828. $1<x<2$, $-\frac{\pi}{3}<y<\pi$ მართკუთხედის.

1829. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $1<Rez<2$ ვერტიკალურ ზოლს ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1830. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $y=x$, $y=x+h$ ზოლს ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1831. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $0<x<2$, $y>0$ ნახევარზოლს ასახავს $|w|<1$, $Imw>0$ ნახევარწრეში.

1832. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $-1<x<0$, $y<0$ ნახევარზოლს ასახავს $|w|<2$, $Imw<0$ ნახევარსიბრტყეში.

ჵ°. ასახვა ჟუკოვსკის ფუნქციის მეშვეობით. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქცია $|z|<1$ წრის როგორც შიგა, ისე გარე ნაწილს ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს $|Rew|\leqslant 1$ სეგმენტის გარე ნაწილში. ამასთან, ყოველი $|z|=r<1$ წრეწირი აისახება ელიფსში, რომლის ცენტრია $w=0$ წერტილი, ნახევარღერძები კი $a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$, ხოლო $|z|=r>1$ წრეწირები აისახება ელიფსში, რომლის ცენტრია $w=0$ წერტილი, ხოლო ნახევარღერძები $a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$.

1833. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქციის მეშვეობით იპოვეთ $|z|=r$, $\arg z=$ $=\varphi$ პოლარული ბადის ასახვა.

1834. რომელ არეში ასახავს $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქცია $\frac{\pi}{4}<$ $<\arg z<\frac{3\pi}{4}$ კუთხეს?

1835. აჩვენეთ, რომ $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქცია $|z|<1$, $Imz>0$ ნახევარწრეს ასახავს $Imw<0$ ქვედა ნახევარსიბრტყეში.

1836. აჩვენეთ, რომ $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქცია ზედა ნახევარსიბრტყეს, რომლიდანაც ამოღებულია $|z|<1$, $Imz>0$ ნახევარწრე, ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1837. აჩვენეთ, რომ $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ფუნქცია $Imz>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეს ასახავს მთელ w სიბრტყეზე $(-\infty, -1]$ და $[1,+\infty)$ ჭრილებით.

1838. იპოვეთ ფუნქციები, რომლებიც ზედა ნახევარსიბრტყეზე ასახავს შემდეგ არეებს: 1) $|z-1|<1$, $Imz<0$: 2) $|z+2|<1$, $Imz>0$.

8°. ასახვები რადიკალის, ლოგარითმის და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

1839. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $Imz>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეს (ჭრილით $z_1=0$ წერტილიდან $z_2=i$ წერტილამდე) ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1840. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც სიბრტყეს (ჭრილით $z_1=-1$ წერტილიდან $z_2=1$ წერტილამდე) ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1841. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z|<1$ წრეს (ჭრილით $z_1=0$ წერტილიდან $z_2=1$ წერტილამდე) ასახავს $Imw>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1842. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $0<Imz<\pi$ ზოლს $-\infty<$ $<Rez\leqslant 0$ $\left(Imz=\dfrac{\pi}{2}\text{ ჭრილით}\right)$ ასახავს $0<Imw<\pi$ ზოლში.

1843. იპოვეთ $0<Rez<\pi$ ზოლის სახე $w=\cos z$ ასახვისას.

1844. იპოვეთ $0<Rez<\pi$, $Imz<0$ ზოლის სახე $w=\cos z$ ასახვისას.

§ 6. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა ინტეგრება

$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალი l წირის გასწვრივ განისაზღვრება ინტეგრალური ჯამის ზღვრის საშუალებით და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\int_l f(z)dz=\int_l u(x, y)dx-v(x, y)dy+i\int_l v(x, y)\,dx+u(x, y)\,dy=$$

$$=\int_l (u+iv)(dx+idy).$$

ინტეგრალის ძირითადი თვისებებია:

1) $\displaystyle\int_l [f_1(z)+f_2(z)]dz=\int_l f_1(z)\,dz+\int_l f_2(z)dz;$

2) $\displaystyle\int_l af(z)\,dz=a\int_l f(z)\,dz$, სადაც a მუდმივია;

3) $\displaystyle\int_l f(z)\,dz=-\int_{l^-} f(z)dz$, სადაც l^- აღნიშნავს l წირის გავლას საწინააღმდეგო მიმართულებით;

4) $\displaystyle\int_{l_1+l_2} f(z)\,dz=\int_{l_1} f(z)\,dz+\int_{l_2} f(z)dz$, სადაც l_1+l_2 აღნიშნავს l_1 და l_2 ნაწილებისაგან შედგენილ წირს.

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მარტივად ბმულ D არეში, მაშინ მართებულია ნიუტონ—ლაიბნიცის

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

ფორმულა, სადაც $F'(z)=f(z)$, ხოლო z_1 და z_2 არის D არის ორი ნებისმიერი წერტილი.

თუ $f(z)$ და $\varphi(z)$ ფუნქციები ანალიზურია მარტივადბმულ D არეში, ხოლო z_1 და z_2 ამ არის ნებისმიერი წერტილებია, მაშინ მართებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = \Big[\, f(z)\,\varphi(z) \,\Big]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f'(z)dz.$$

1845. გამოთვალეთ შეჯამების საშუალებით შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int_{z_0}^{z} dz$; 2) $\int_{z_0}^{z} zdz$.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1846. $\int_l |z|dz$, სადაც l არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $z_1=0$ და $z_2=2+i$ წერტილებს.

1847. $\int_l \mathrm{Re}\, z dz$, სადაც l არის $|z|=1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ ნახევარწრეწირი.

1848. $\int_l (2z+1)\bar{z}\, dz$, სადაც l არის $|z|=1$ წრეწირი.

1849. $\int_0^{Re^{\frac{\pi i}{4}}} |z|^2 dz$, თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს მონაკვეთს, რომელიც აერთებს $z_1=0$ და $z_2=Re^{\frac{\pi i}{4}}$ წერტილებს.

1850. $\int_0^{1+i} e^{\bar{z}} dz$, თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს ტეხილს, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ წერტილები.

1851. $\int_l \bar{z}\, dz$, სადაც l არის ტეხილი, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$ წერტილები.

1852. $\int\limits_{l} |z|\,\overline{z}\,dz$, სადაც l შეკრული კონტურია, რომელიც შედგება $|z|=1$ ზედა ნახევარწრეწირისა და $-1\leqslant x\leqslant 1$ მონაკვეთისაგან.

1853. $\int (z-z_0)^m dz$, თუ ინტეგრების გზა წრეწირია, რომლის ცენტრია z_0 წერტილი, ხოლო რადიუსი R (m მთელი რიცხვია).

1854. დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{l} \overline{z}\,dz=2iS$, სადაც l მარტივი შეკრული კონტურია, რომელიც შემოსაზღვრავს S ფართობს.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1855. $\int\limits_{0}^{1+i} z^2 dz.$ **1856.** $\int\limits_{i}^{1} (iz^2-2z)dz.$

1857. $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)dz.$ **1858.** $\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz.$

1859. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (z-1)\cos z\,dz.$ **1860.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}i} ze^z dz.$

§ 7. კოშის თეორემა და კოშის ფორმულა

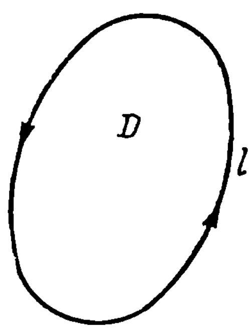
კოშის თეორემა (მარტივადბმული არისათვის). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მარტივადბმულ დახურულ $\overrightarrow{D}$ არეში, მაშინ ამ ფუნქციის ინტეგრალი l კონტურის გასწვრივ, რომელიც D არეს შემოსაზღვრავს, უდრის ნულს (ნახ. 2):

$$\int\limits_{l} f(z)dz=0.$$

კოშის თეორემა (მრავლადბმული არისათვის). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მრავლადბმულ დახურულ D არეში (მე-3 ნახაზზე აღებულია სამადბმული არე), რომელიც გარედან შემოსაზღვრულია l კონტურით, ხოლო შიგნიდან — l_1 და l_2 კონტურებით, მაშინ

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{l} f(z)\,dz + \int\limits_{l_1} f(z)\,dz + \int\limits_{l_2} f(z)dz=0,$$

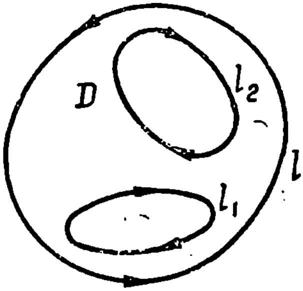
სადაც Γ წარმოადგენს D არის სრულ საზღვარს. აქ გარე l კონტურის შემოვლა ხდება საათის ისრის მოძ-



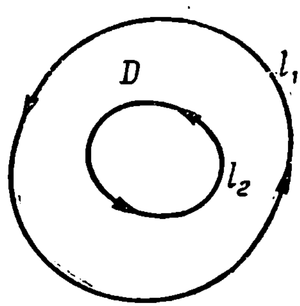
ნახ. 2.

რაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო შიგა l_1 და l_2 კონტურებისა — საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. თუ l და l_2 კონტურებში შემოვლის მიმართულებას შევცვლით, მაშინ:

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)dz,$$



ნახ. 3.



ნახ. 4.

სადაც ყველა კონტურის შემოვლა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. კერძოდ, თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია l_1 და l_2 კონტურებით შემოსაზღვრულ რგოლში და თვით ამ კონტურებზე (ნახ. 4), მაშინ

$$\int_{l_1} f(z)\,dz = \int_{l_2} f(z)dz.$$

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია უბან-უბან გლუვი შეკრული l კონტურის შიგნით და l-ზე, მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)dz}{z-a},$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},\ (n=1, 2,\ldots)$$

სადაც a წერტილი მოთავსებულია l კონტურის შიგნით, რომლის შემოვლა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამ ფორმულებს ეწოდება *კოშის ინტეგრალური ფორმულები*.

1801. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_l \frac{dz}{(z-a)^n}$ შეკრული l კონტურის გასწვრივ, სადაც n მთელი რიცხვია, ხოლო a — მუდმივი.

1862. ისარგებლეთ კოშის თეორემითა და წინა მაგალითის შედეგით და გამოთვალეთ $I=\int\limits_{l} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$ ინტეგრალი, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც არ გადის $z=1$ და $z=2$ წერტილებზე.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1863. $\int\limits_{l} \frac{dz}{1-z^2}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=1$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

1864. $\int\limits_{l} \frac{dz}{z^3(z^2+1)}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=i$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

1865. $\int\limits_{l} \frac{dz}{z^2+1}$, სადაც l აღნიშნავს შემდეგ წრეწირებს: 1) $|z-1|=1$; 2) $|z+i|=1$; 3) $|z|=2$.

1866. $\int\limits_{l} \frac{zdz}{z^4-1}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=2$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1867. $\int\limits_{l} \frac{\cos z dz}{z+2i}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=-i$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1868. $\int\limits_{l} \frac{\sin\frac{\pi}{4} z}{z^2-1}\, dz$, სადაც l არის $|z-1|=1$ წრეწირი.

1869. $\int\limits_{l} \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=2$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=\frac{3}{2}$.

1870. $\int\limits_{l} \frac{e^{2z}dz}{z-\pi i}$, სადაც l არის: 1) $|z|=4$ წრეწირი; 2) $|z+i|=1$ წრეწირი.

1871. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, სადაც l კონტური თავის შიგნით მოიცავს $|z|\leqslant a$ წრეს.

1872. $\int\limits_l \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}dz$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=0$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

შემდეგ მაგალითებში ისარგებლეთ ფორმულით:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (n=1,\ 2,\ldots)$$

1873. $\int\limits_l \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=0$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1874. $\int\limits_l \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც მოიცავს $z=i$ წერტილს.

1875. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც მოიცავს $z=a$ წერტილს.

1876. $\int\limits_l \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=1$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

§ 8. კომპლექსურწევრებიანი მწკრივები

1°. კომპლექსურწევრებიანი რიცხვთა მწკრივები. $c_1=a_1+ib_1$, $c_2=a_2+ib_2,\ldots,c_n=a_n+ib_n,\ldots$ კომპლექსურ რიცხვთა მიმდევრობას ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი, ხოლო $c=a+ib$ რიცხვს — მისი ზღვარი ($c=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$), თუ არსებობს სასრული ზღვრები $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

კომპლექსურ რიცხვთა მწკრივს

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი, თუ არსებობს სასრული ზღვარი $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, სადაც

$$S_n=c_1+c_2+\ldots+c_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$$

მწკრივის პირველი n წევრის ჯამია. S რიცხვს მწკრივის ჯ ა მ ი ეწოდება. კომპლექსურ-წევრებიან რიცხვთა მწკრივს ეწოდება ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი, თუ კრებადია $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ მწკრივი.

კომპლექსურწევრებიანი რიცხვთა მწკრივისათვის მართებულია კრებადობის შემდეგი ნიშნები:

1) თუ კრებადია დადებითწევრებიანი $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ მწკრივი და ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $|c_n|\leqslant A_n$, მაშინ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

2) თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=q$, მაშინ როცა $q<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო როცა $q>1$, — განშლადი (დალამბერის ნიშანი).

3) თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=q$, მაშინ როცა $q<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო როცა $q>1$, — განშლადი (კოშის ნიშანი).

გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

1877. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$.

1878. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n+i\sin n}{n^2}$.

1879. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

1880. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

1881. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

1882. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$.

1883. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$.

1884. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

1885. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i(2n+i)}{4n}\right]^n$.

1886. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2°. კომპლექსურწევრებიანი ხარისხოვანი მწკრივები. კომპლექსურწევრებიანი ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს:

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

სადაც $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადია, ხოლო c_n ($n=0, 1,\ldots$) და a — კომპლექსური რიცხვები. როცა $a=0$, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის მწკრივს:

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n.$$

ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისათვის, არსებობს წრე, რომლის შიგნითაც მწკრივი კრებადია, ხოლო მის გარეთ — განშლადი. წრის საზღვარზე მწკრივი შეიძლება იყოს კრებადი ან განშლადი. ამ წრეს ეწოდება კრებადობის წრე, ხოლო მის R რადიუსს — კრებადობის რადიუსი ($R=\infty$, თუ მწკრივი კრებადია მთელს სიბრტყეზე, $R=0$, როცა იგი კრებადია მხოლოდ წრის ცენტრში).

კრებადობის წრეს ჩვეულებრივად განსაზღვრავენ დალამბერის ან კოშის ნიშნებით. კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

განსაზღვრეთ კრებადობის წრე და რადიუსი შემდეგი მწკრივებისა:

1887. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1888. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.

1889. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

1890. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$.

1891. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

1892. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{2^n}$.

1893. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s=0;\ 1;\ 2.$

1894. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}.$

1895. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+ni)z^n.$

1896. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n.$

1897. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n}.$

1898. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}.$

1899. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}.$

1900. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}.$

1901. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)\cdot 2^n}}.$

1902. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}.$

იპოვეთ მწკრივის კრებადობის არე შემდეგ მაგალითებში:

1903. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$

1904. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$

8°. ტეილორის მწკრივი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $|z-a|<R$ $0\leqslant R<\infty$ წრეში, მაშინ იგი ამავე წრეში დაიშლება ხარისხოვან მწკრივად

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{1}$$

და ასეთი დაშლა ერთადერთია. დაშლის c_n კოეფიციენტებს აქვს შემდეგი სახე:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{2}$$

სადაც $0<r<R$. (1) მწკრივს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი. იმ შემთხვევაში, როდესაც წრის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე. ი. $a=0$, მაშინ $f(z)$ ფუნქცია ამავე წრეში იშლება ხარისხოვან მწკრივად

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{3}$$

რომელსაც მ ა კ ლ ო რ ე ნ ი ს მ წ კ რ ი ვ ი ეწოდება. ტეილორის მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრად ვაწარმოოთ და ვაინტეგროთ მისი კრებადობის არეში.

დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად შემდეგი ფუნქციები და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის რადიუსი;

1905. 1) e^z; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$.

1906. 1) shz; 2) chz;

1907. დაშალეთ $f(z)=\ln z$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $z=1$ წერტილის მიდამოში და იპოვეთ მისი კრებადობის წრე.

1908. დაშალეთ $f(z)=\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად და იპოვეთ მისი კრებადობის რადიუსი.

დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად შემდეგი ფუნქციები:

1909. $f(z)=\cos 2z$. **1910.** $f(z)=\sin 2z$.

1911. $f(z)=\sin^2 z$. **1912.** $f(z)=\cos^2 z$.

1913. დაშალეთ ხარისხოვან მწკრივად $f(z)=\sqrt[m]{z}$ ფესვის მთავარი მნიშვნელობა $z=1$ წერტილის მიდამოში; გამოთვალეთ შედეგი, როცა $m=2$.

1914. გამოთვალეთ $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ ფუნქციის ხარისხოვანი მწკრივის პირველი სამი წევრი.

1915. დაშალეთ $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად $|z|<2$ წრეში.

1916. დაშალეთ $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად $|z|<1$ წრეში.

იპოვეთ მთავარი მნიშვნელობის ხარისხოვანი მწკრივი $z=0$ წერტილის მიდამოში და მწკრივის კრებადობის რადიუსი შემდეგი ფუნქციებისა:

1917. $f(z)=\operatorname{arctg} z$. **1918.** $f(z)=\arcsin z$.

დაშალეთ ხარისხოვან მწკრივად შემდეგი ფუნქციები:

1919. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^3}$. **1920.** $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-i)}$.

1921. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$. **1922.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

4°. **ლორანის მწკრივი.** თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $r<|z-a|<R$ წრიულ რგოლში, მაშინ ამ რგოლში ეს ფუნქცია დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n},$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},\quad (n=0,\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

სადაც $r<\rho<R$ და ეს დაშლა ერთადერთია.

ლორანის მწკრივის პირველი ნაწილი $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ წარმოადგენს მწკრივს $(z-a)$-ს დადებითი ხარისხების მიხედვით და მას ეწოდება *ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი*; მეორე ნაწილი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ წარმოადგენს მწკრივს $(z-a)$-ს უარყოფითი ხარისხების მიხედვით. მას ეწოდება *ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი*.

ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი კრებადია R-რადიუსიანი წრის შიგნით, ხოლო მთავარი ნაწილი — r-რადიუსიანი წრის გარეთ. მთელი მწკრივი კრებადია $r<|z-a|<R$ წრიულ რგოლში.

დაშალეთ ლორანის მწკრივად ნაჩვენებ რგოლში ან ნაჩვენები წერტილის მიდამოში შემდეგი ფუნქციები და განსაზღვრეთ კრებადობის არე უკანასკნელ შემთხვევაში:

1923. $f(z)=\frac{1}{z-3},\quad z=0.$ **1924.** $f(z)=\frac{1}{z-2},\quad z=\infty.$

1925. $f(z)=\frac{1}{z(1-z)},\quad z=0,\ z=1,\ z=\infty.$

1926. $f(z)=\frac{1}{z(z+2)},\quad z=0,\ z=-2,\ z=\infty.$

1927. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$, $1<|z|<2$ და $2<|z|<\infty$ რგოლებში.

1928. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$ რგოლში.

1929. $f(z)=\frac{1}{1+z^2},\ z=i.$ **1930.** $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}},\ 0<|z|<\infty.$

1931. $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}, \quad 0<|z-1|<\infty.$

1932. $f(z)=(1-z)\sin\frac{1}{z^2}, \quad 0<|z|<\infty.$

1933. $f(z)=\sin\frac{1}{(z-i)^3}, \quad z=i.$

1934. $f(z)=(z+i)^2\cos\frac{1}{z+i}, \quad z=-i.$

§ 9. ანალიზური ფუნქციის ნულები და განსაკუთრებული წერტილები

$z=a$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის n-ური რიგის ნული, თუ

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

იმისათვის, რომ $z=a$ წერტილი იყოს $f(z)$ ფუნქციის n-ური რიგის ნული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ a წერტილის მიდამოში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z), \tag{1}$$

სადაც $\varphi(z)$ ანალიზური ფუნქციაა a წერტილის მიდამოში და $\varphi(a)\neq 0$. როცა $n=1$, მაშინ გვაქვს მარტივი ნული, ხოლო როცა $n>1$, — ჯერადი.

იმ წერტილებს, რომლებშიაც დარღვეულია ფუნქციის ანალიზურობა, ეწოდება განსაკუთრებული წერტილები.

$z=a$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ამ წერტილის რომელიმე მიდამოში, გარდა თვით a წერტილისა. a წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{2}$$

ადგილი აქვს სამ შემთხვევას:

1) a წერტილს ეწოდება ასაცილებელი განსაკუთრებული წერტილი, თუ (2) მწკრივი არ შეიცავს მთავარ ნაწილს, ე. ი. $c_{-1}=c_{-2}=\ldots=0$. ამ შემთხვევაში განსაკუთრებულობა შეიძლება ავიცილოთ, თუ დავუშვებთ, რომ $z=a$ წერტილზე $f(a)=c_0$. მიღებული ფუნქცია ანალიზური იქნება როგორც a წერტილის მიდამოში, ასევე თვით a წერტილზე ასაცილებელი წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

2) a წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის პოლუსი, თუ (2) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაკრებთა სასრულ რაოდენობას. ამასთან, თუ $c_{-n}\neq 0$, ხოლო $c_{-(n+1)}=c_{-(n+2)}=\ldots=0$, მაშინ a წერტილს ეწოდება n-ური რიგის პოლუსი. როცა $n=1$, მაშინ პოლუსს ეწოდება მარტივი. პოლუსის საკმარისად მცირე მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია.

3) a წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, თუ ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაკრებთა

უსასრულო რაოდენობას. არსებითად განსაკუთრებულ წერტილზე ფუნქცია განუსაზღვრელია.

თუ $z=a$ წერტილი $f(z)$ ფუნქციის n-ური რიგის ნულია, მაშინ იგივე წერტილი $\frac{1}{f(z)}$ ფუნქციის n-ური რიგის პოლუსია და, პირიქით.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ნულები და განსაზღვრეთ მათი რიგი:

1935. 1) $z^2(1-z)$; 2) $(z^3+1)^2$; 3) $\cos z$; 4) $\sin^3 3z$.

1936. 1) $(z^2+2z+1)^3$; 2) $\frac{z^2+1}{z+1}$; 3) $\operatorname{tg}^3 z$; 4) $\operatorname{ctg}^2 z$.

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების განსაკუთრებული წერტილები, განსაზღვრეთ მათი ხასიათი, პოლუსების შემთხვევაში განსაზღვრეთ რიგი:

1937. 1) $\frac{1}{z-z^3}$; 2) $\frac{3}{z^4(z^2+4)^2}$; 3) $e^{\frac{z}{1-z}}$;

4) $\sin\frac{1}{z}$; 5) $\frac{\sin z}{z}$; 6) $\frac{1-\cos z}{z^4}$.

1938. 1) $\frac{z^4}{1+z^4}$; 2) $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$; 3) $\sin\frac{1}{1-z}$;

4) $ze^{\frac{1}{z}}$; 5) $\frac{\sin z}{z+\pi}$; 6) $\frac{\cos z}{z^2}$.

ანალიზური ფუნქციის ყოფაქცევა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $z=\infty$ წერტილის მიდამოში, $z=\frac{1}{\zeta}$ გარდაქმნა ამ მიდამოს გადასახავს $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში და $f(z)$ ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა დაიყვანება $f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$ ფუნქციის შესწავლაზე $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში. ამ შემთხვევაში $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\zeta^n}. \tag{3}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\zeta=\frac{1}{z}$, მივიღებთ $f(z)$ ფუნქციის დაშლას ლორანის მწკრივად $z=\infty$ წერტილის მიდამოში:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n. \tag{4}$$

ასეთი გარდაქმნისას ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი შეიცვლება მთავარი ნაწილით და პირიქით.

შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1) $z=\infty$ იქნება ასაცილებელი განსაკუთრებული წერტილი, თუ (4) მწკრივი არ შეიცავს z-ის დადებით ხარისხებს, ე. ი.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$$

თუ დავუშვებთ, რომ $f(\infty)=c_0$, მაშინ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზური იქნება $z=\infty$ წერტილში.

2) $z=\infty$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის პოლუსი, თუ (4) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაკრებთა სასრულ რაოდენობას. ამასთან თუ $c_{-n}\neq 0$, ხოლო $c_{-(n+1)}=c_{-(n+2)}=\ldots=0$, მაშინ $z=\infty$ წერტილს ეწოდება n-ური რიგის პოლუსი.

3) $z=\infty$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, თუ ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაკრებთა უსასრულო რაოდენობას.

თუ

$$f(z)=\frac{c_n}{z^n}+\frac{c_{n+1}}{z^{n+1}}+\ldots,\quad (c_n\neq 0)$$

მაშინ $z=\infty$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის n-ური რიგის ნული, როცა $n=1$, მას ეწოდება მარტივი ნული. $z=\infty$ წერტილში მართებულია თეორემა ნულსა და პოლუსს შორის კავშირის შესახებ.

თუ $z=\infty$ არის ასაცილებელი წერტილი, პოლუსი ან არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ ზღვარი $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ შესაბამისად იქნება სასრული, უსასრულოდ დიდი ან ეს ზღვარი არ იარსებებს.

შეისწავლეთ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში შემდეგ ფუნქციათა ყოფაქცევა.

1939. 1) $\dfrac{1}{z+i}$; 2) $\dfrac{z^2+4}{e^z}$; 3) $1+\dfrac{1}{z}$;

4) $\dfrac{1}{\cos z}$; 5) $\sin z$; 6) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

1940. 1) $\sin\dfrac{1}{1-z}$; 2) $e^{z-\frac{1}{z}}$; 3) $e^{-\frac{1}{z^2}}$;

4) $\dfrac{1}{\sin z}$; 5) $\dfrac{\sin z}{z}$; 6) $\cos z-\sin z$.

§ 10. ნაშთები და მათი გამოყენება

1°. ნაშთები. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი $z=a$ იზოლირებულ განსაკუთრებულ წერტილზე ეწოდება ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივის c_{-1} კოეფიციენტს და აღინიშნება ასე:

$$\operatorname{res} f(a)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} f(z)dz,$$

სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც მოიცავს a წერტილს, ხოლო $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ამ კონტურის შიგნით, გარდა $z=a$ წერტილისა.

ნაშთები გამოითვლება შემდეგი ფორმულების მიხედვით: თუ a არის $f(z)$ ფუნქციის მარტივი პოლუსი, მაშინ

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}\,[(z-a)\,f(z)]$$

კერძოდ, თუ $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, სადაც $\varphi(z)$ და $g(z)$ ანალიზური ფუნქციებია a წერტილზე, ამასთან, $\varphi(a)\neq 0$, $g(a)=0$, მაგრამ $g'(a)\neq 0$, მაშინ

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{\varphi(a)}{g'(a)}.$$

n-ური რიგის პოლუსის შემთხვევაში

$$\operatorname{res} f(a)=c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)],$$

ანუ

$$c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\,[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

გამოთვალეთ ნაშთები ყოველ განსაკუთრებულ წერტილზე შემდეგი ფუნქციებისა:

1941. 1) $\dfrac{z^3}{z^2-1}$; 2) $\dfrac{z}{(z-3)(z-4)^2}$; 3) $\dfrac{z^6}{(z-1)^4}$;

4) $e^{\frac{z}{1-z}}$; 5) $\dfrac{\sin z}{z}$; 6) $\operatorname{tg} z$.

1942. 1) $\dfrac{2z-3}{z^2(z-3)}$; 2) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$; 3) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

4) $e^{\frac{1}{z}}$; 5) $\dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}$; 6) $\dfrac{1}{\sin z}$.

2°. ფუნქციის ნაშთი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $z=\infty$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით ამ წერტილისა. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი $z=\infty$ წერტილში უდრის ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივად დაშლაში შემავალ $\frac{1}{z}$ წევრთან მდგომ კოეფიციენტს შებრუნებული ნიშნით და აღინიშნება ასე:

$$\operatorname{res} f(\infty)=-a_1.$$

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია z ცვლადის მთელს სიბრტყეზე, გარდა $a_1, a_2 \ldots, a_n$ განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ ამ ფუნქციის ნაშთების ჯამი ყველა განსაკუთრებული წერტილის მიმართ, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით, ნულის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k)+\operatorname{res} f(\infty)=0.$$

იპოვეთ ნაშთები უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემდეგი ფუნქციებისა:

1943. 1) $1+\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}$; 2) $\frac{3}{z+i}$; 3) $\frac{z^5}{z^2-1}$; 4) $e^{\frac{1}{z}}$.

1944. 1) $\frac{z^5}{(z-1)^3}$; 2) $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$; 3) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 4) $\sin\frac{1}{z}$.

3°. ინტეგრალების გამოთვლა ნაშთების მეშვეობით (ძირითადი თეორემა ნაშთების შესახებ). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში და შეკრულ l კონტურზე, რომელიც D არეს შემოსაზღვრავს, გარდა D არეში მდებარე a_1, a_2, ..., a_n სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ მართებულია ტოლობა.

$$\int_l f(z)dz=2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k).$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1945. $\int\limits_l \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, სადაც l არის $|z-2|=\frac{1}{2}$ წრეწირი.

1946. $\int\limits_l \frac{dz}{z^3(z^2-1)}$, სადაც l არის $|z|=3$ წრეწირი.

1947. $\int\limits_l \frac{dz}{z^3+1}$, სადაც l არის $|z-1-i|=1$ წრეწირი.

1948. $\int\limits_l \frac{dz}{z^4+1}$, სადაც l არის $|z-1|=1$ წრეწირი.

1949. $\int\limits_l \frac{\operatorname{ctg} z\,dz}{4z-\pi}$, სადაც l არის $|z|=1$ წრეწირი.

1950. $\int\limits_l \frac{\operatorname{tg} z\,dz}{z-1}$, სადაც l არის რომბი, რომლის წვეროები მოთავსებულია $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$, $z_4=-i$ წერტილებში.

1951. $\int\limits_l e^{\frac{z}{1-z}}dz$, სადაც l არის $|z|=2$ წრეწირი.

1952. 1) $\int\limits_l \sin\frac{1}{z}\,dz$, 2) $\int\limits_l \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, სადაც l არის $|z|=r$ წრეწირი.

1953. $\int\limits_l \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, სადაც l არის $|z|=1$ წრეწირი.

ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში ისარგებლეთ შემდეგი თეორემით: თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მთელს z სიბრტყეზე. გარდა რამდენიმე იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილისა, ამასთან, ყველა სასრული განსაკუთრებული წერტილი მოთავსებულია შეკრული l კონტურის შიგნით, მაშინ

$$\int\limits_l f(z)dz=-2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

1954. გამოთვალეთ $\int\limits_l \frac{z^3dz}{2z^4+1}$ ინტეგრალი, სადაც l არის $|z|=1$ წრეწირი.

1955. გამოთვალეთ $\int\limits_l \frac{z^{20}dz}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3}$ ინტეგრალი, სადაც l არის $|z|=2$ წრეწირი.

1956. გამოთვალეთ $\int\limits_l \frac{z^{15}dz}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}$ ინტეგრალი, სადაც l არის $|z|=4$ წრეწირი.

4°. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაშთების მეშვეობით. ნამდვილი ცვლადის ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალი შეიძლება გამოვსახოთ კომპლექსური ცვლადის ინტეგრალის საშუალებით შეკრული კონტურის გასწვრივ, რაც საშუალებას მოგ-

ეცემს ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ძირითადი თეორემა ნაშთების შესახებ.

ნაშთების თეორია შეიძლება გამოვიყენოთ აგრეთვე ზოგიერთი არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოსათვლელად. ამასთან დაკავშირებით ვისარგებლებთ შემდეგი თეორემებით:

თეორემა 1. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას: 1) $z=\infty$ წერტილი წარმოადგენს $f(z)$ ფუნქციის ნულს, რომლის რიგი 2-ზე ნაკლები არ არის ე. ი. ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივს $z=\infty$ წერტილის მიდამოში აქვს შემდეგი სახე:

$$f(z)=\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots$$

($c_2=0$ შემთხვევა გამორიცხული არ არის), 2) $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა ნამდვილ ღერძზე, 3) $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $Imz>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში, გარდა $a_1, a_2, \dots, a_n$ სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(a_k).$$

თეორემა 2. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სამ პირობას: 1) $f(z)=e^{iaz}\, g(z)$, სადაც $a>0$ და $g(z)\to 0$, როცა $z\to\infty$, ამასთან, $Imz\geq 0$, 2) $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა ნამდვილ ღერძზე, 3) $f(z)$ ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში, გარდა $a_1, a_2, \dots, a_n$ სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(a_k).$$

თეორემა 3. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს წინა თეორემის 1) და 3) პირობებს და ნამდვილ ღერძზე აქვს მარტივი პოლუსების სასრული რიცხვი, $x_1, x_2, \dots, x_m$, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} res\, f(x_k)\right].$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1957. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}\quad (a>1).$ **1958.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}.$

1959. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}.$ **1960.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

1961. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}.$ **1962.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}.$

1963. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2+4}$. **1964.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$.

1965. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)}$. **1966.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$.

§ 11. ლოგარითმული ნაშთი. არგუმენტის პრინციპი. რუშეს თეორემა

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია შეკრულ l კონტურზე, მაშინ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

სიდიდეს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის *ლოგარითმული ნაშთი* ამ კონტურის მიმართ.

არგუმენტის პრინციპი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია l კონტურით შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში, გარდა სასრული რაოდენობის პოლუსებისა D-ში, და კონტურზე არა აქვს არც ერთი ნული და პოლუსი, მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P,$$

სადაც N არის $f(z)$ ფუნქციის ნულების რიცხვი, ხოლო P — პოლუსების რიცხვი. ყოველი ნული და პოლუსი აიღება იმდენჯერ, რამდენიც მათი ჯერადობაა.

რუშეს თეორემა. თუ $f(z)$ და $\varphi(z)$ ფუნქციები ანალიზურია l კონტურით შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში და ამ კონტურის ყოველ წერტილზე მართებულია $|f(z)|>|\varphi(z)|$ უტოლობა, მაშინ $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ და $f(z)$ ფუნქციებს D არეში აქვს ნულების ერთი და იგივე რიცხვი. ყოველი ნული იმდენჯერ აიღება, რამდენიც არის მისი ჯერადობა.

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ლოგარითმული ნაშთები ნაჩვენები კონტურების მიმართ:

1967. $f(z)=\frac{z}{1+z^3}$, $|z|=2$.

1968. $f(z)=\frac{\sin^2 z}{(z^3+8)(z+4)}$, $|z|=3$.

1969. $f(z)=\cos z+\sin z$, $|z|=4$.

1970. $f(z)=(e^z-2)^2$, $|z|=8$.

1971. $f(z)=\operatorname{tg}^3 z$, $|z|=6$.

1972. $f(z)=\frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$, $|z|=\pi$.

1973. $f(z)=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2(e^{iz}-1)}, \qquad |z|=3.$

1974. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}, \qquad |z|=3.$

1975. იპოვეთ $F(z)=z^5+5z-1$ ფუნქციის ნულების რიცხვი $|z|<1$ წრეში.

1976. იპოვეთ $F(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ ფუნქციის ნულების რიცხვი $|z|<1$ წრეში.

1977. იპოვეთ $z^4-3z^3-1=0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z|<2$ წრეში.

1978. იპოვეთ $z^5+z^2+1=0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z|<2$ წრეში.

1979. იპოვეთ $z^3+z+1=0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z|<\dfrac{1}{2}$ წრეში.

1980. იპოვეთ $z^8-6z+10=0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z|<1$ წრეში.

IX თავი

ოპერაციული აღრიცხვის ელემენტები

§ 1 ორიგინალები და მათი გამოსახულებანი. ლაპლასის გარდაქმნა

ორიგინალი ეწოდება ისეთ $f(t)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1. $f(t)$ ფუნქცია უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად $0\leqslant t\leqslant+\infty$ შუალედში, ცალკეული წერტილების გარდა, რომლებშიც $f(t)$ ან მისი წარმოებულები განიცდის პირველი გვარის წყვეტას. ამასთან, ფუნქციას ყოველ სასრულ შუალედში შეიძლება ჰქონდეს წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა.

2. $f(t)=0$, როცა $t<0$.

3. $f(t)$ იზრდება უფრო ნელა, ვიდრე მაჩვენებლიანი ფუნქცია, ე. ი. არსებობს ისეთი $M>0$ და $s_0\geqslant 0$ მუდმივები, რომ t-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $|f(t)|<Me^{s_0 t}$. s_0 რიცხვს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ზრდის მაჩვენებელი.

$f(t)$ *ორიგინალის გამოსახულება* ეწოდება $p=s+i\sigma$ კომპლექსური ცვლადის $F(p)$ ფუნქციას, რომელიც შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის *ლაპლასის ინტეგრალი*. $F(p)$ ფუნქციას ეწოდება $f(t)$ ორიგინალის ლაპლასის გამოსახულება. იმ ფაქტს, რომ $F(p)$ წარმოადგენს $f(t)$ ფუნქციის გამოსახულებას, ასე აღნიშნავენ:

$$F(p)\doteqdot f(t), \text{ ან } f(t)\doteqdot F(p).$$

დაადგინეთ, რომელი ფუნქციებია ორიგინალები და იპოვეთ მათი ზრდის მაჩვენებელი შემდეგ მაგალითებში:

1981. $f(t)=e^{(3+i)t}$. **1982.** $f(t)=e^{(2+3i)t}$.

1983. $f(t)=t$. **1984.** $f(t)=\sin\frac{1}{t}$.

1985. $f(t)=e^{t^3}$.

1986. $f(t)$ ფუნქცია ნებისმიერი t-სათვის აკმაყოფილებს $|f(t)|<$ უტოლობას, $<Me^{at}$, სადაც $M>0$, $a\geqslant 0$.

იპოვეთ შემდეგ ორიგინალთა გამოსახულებანი:

1987. $f(t)=\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{როცა } t<0,\\ 1, & \text{როცა } t\geqslant 0.\end{cases}$

1988. $f(t)=C=\text{const}$. **1989.** $f(t)=t$.

1990. 1) $f(t)=e^{at}$; 2) $f(t)=a^t$. **1991.** $f(t)=\sin t$.

1992. $f(t)=\cos t$. **1993.** $f(t)=sh t$. **1994.** $f(t)=ch t$.

§ 2. ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები

1. **წრფივობის თვისება.** თუ $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$ და $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$, მაშინ

$$C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\doteqdot C_1F_1(p)+C_2F_2(p),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია.

2. **მსგავსების თეორემა.** თუ $f(t)\doteqdot F(p)$ და $\alpha>0$ მუდმივია, მაშინ

$$f(\alpha t)\doteqdot \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. **დაგვიანების თეორემა.** თუ $f(t)\doteqdot F(p)$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი τ-სათვის

$$f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$

4. **ძვრის თეორემა.** თუ $f(t)\doteqdot F(p)$, მაშინ ნებისმიერი კომპლექსური p_0-სათვის

$$e^{p_0t}f(t)\doteqdot F(p-p_0).$$

5. **გამოსახულების გაწარმოება.** თუ $F(p)\doteqdot f(t)$, მაშინ

$$F'(p)\doteqdot -tf(t),\quad F''(p)\doteqdot(-t)^2f(t),\dots,\quad F^{(n)}(p)\doteqdot(-t)^nf(t).$$

6. **გამოსახულების ინტეგრება.** თუ $f(t)\doteqdot F(p)$ და არსებობს $\int\limits_p^\infty F(p)dp$ ინტეგრალი, მაშინ ის წარმოადგენს $\frac{f(t)}{t}$ ფუნქციის გამოსახულებას, ე. ი.

$$\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int\limits_p^\infty F(p)dp.$$

7. **ორიგინალის გაწარმოება.** თუ $f(t)\doteqdot F(p)$ და $f'(t)$ წარმოადგენს ორიგინალს, მაშინ

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0),\quad f''(t)\doteqdot p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$
$$f'''(t)\doteqdot p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0)$$ და, საზოგადოდ,

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

თუ $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, მაშინ

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p).$$

8. ორიგინალის ინტეგრება. თუ $f(t) \div F(p)$, მაშინ

$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

ზოგიერთი გამოსახულების ცხრილი

№	$f(t),\ t>0$	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^ne^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
6	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^3+\beta^2}$
7	$sh\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
8	$ch\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
9	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
10	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^3+\beta^2}$
11	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
12	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

იპოვეთ შემდეგ ორიგინალთა გამოსახულებანი:

1995. $f(t)=4-5e^{2t}$. **1996.** $f(t)=\frac{1}{3}\sin 3t-5$.

1997. $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$. **1998.** $f(t)=2\sin 2t+3sh2t$.

1999. $f(t)=\sin t\cdot\sin 2t$. **2000.** $f(t)=\cos 2t\cdot\cos 3t$.

2001. $f(t)=ch2t+2e^{-3t}+1$. **2002.** $f(t)=e^{-t}+3e^{-2t}+t$.

2003. $f(t)=\cos^2 t$. **2004.** $f(t)=\sin^2 t$.

2005. $f(t)=3t^2+2t-5$. **2006.** $f(t)=3t^3e^{-t}+2t^2-1$.

2007. $f(t)=t^2e^t+2te^{-t}+4ch2t$. **2008.** $f(t)=tchbt$.

2009. $f(t)=\frac{\sin t}{t}$. **2010.** $f(t)=\frac{sht}{t}$.

2011. $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$. **2012.** $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$.

2013. $f(t)=t^3e^{2t}$. **2014.** $f(t)=cht\cdot\sin t$.

2015. $f(t)=e^{-\alpha t}sh\beta t$. **2016.** $f(t)=e^{\alpha t}ch\beta t$.

2017. $f(t)=\begin{cases}0, & \text{როცა } t<a,\\ 1, & \text{როცა } t>a.\end{cases}$

2018. $f(t)=\begin{cases}0, & \text{როცა } t<2,\ t>3,\\ 1, & \text{როცა } 2<t<3.\end{cases}$

2019. $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$. **2020.** $f(t)=(t-2)^3$.

2021. $f(t)=ch(t-3)$. **2022.** $f(t)=\sin^2(t-a)$.

§ 8. ორიგინალთა ნახვევი. გამრავლების თეორემა. დიუამელის ფორმულა. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი და სისტემები

$f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალთა ნახვევი აღინიშნება $f_1(t)*f_2(t)$ სიმბოლოთი და ასე განიმარტება:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau,$$

ამასთან,

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau.$$

გამრავლების თეორემა. $f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალთა $f_1(t)*f_2(t)$ ნახვევის გამოსახულება ამ ორიგინალების გამოსახულებების ნამრავლის ტოლია, ე.ი. თუ $f_1(t)\div F_1(p)$ და $f_2(t)\div F_2(p)$, მაშინ

$$f_1(t)*f_2(t)\div F_1(p)\cdot F_2(p).$$

დიუჰამელის ფორმულა. თუ $[0, +\infty)$ შუალედში $f_1(t)$ ორიგინალი უწყვეტია, ხოლო $f_2(t)$ ორიგინალი უწყვეტად წარმოებადი, მაშინ მართებულია დიუჰამელის ფორმულა:

$$pF_1(p)\cdot F_2(p) \div f_1(t)\cdot f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f'_2(t-\tau)d\tau,$$

სადაც $F_1(p) \div f_1(t)$, $\quad F_2(p) \div f_2(t)$.

იპოვეთ მოცემული ორიგინალების ნახვევი და ნახვევის გამოსახულება:

2023. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\cos t$. **2024.** $f_1(t)=t$, $f_2(t)=e^t$.

2025. $f_1(t)=e^t$, $t_2(t)=e^{-t}$. **2026.** $f_1(t)=\cos t$, $f_2(t)=\cos t$.

მოცემულ გამოსახულებათა მიხედვით იპოვეთ ორიგინალები:

2027. $F(p)=\frac{12}{p^2+16}$. **2028.** $F(p)=\frac{10}{p^2-25}$.

2029. $F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}$. **2030.** $F(p)=\frac{1}{p^2+2p}$.

2031. $F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}$. **2032.** $F(p)=\frac{1}{p^2-2p+5}$.

2033. $F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}$. **2034.** $F(p)=\frac{p+3}{p^2+6p+11}$.

2035. $F(p)=\frac{3p-1}{p^2-4p+7}$. **2036.** $F(p)=\frac{p+1}{p^2-7p+6}$.

2037. $F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}$. **2038.** $F(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+p}$.

2039. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. **2040.** $F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.

2041. $F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$. **2042.** $F(p)=\frac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$.

გამრავლების თეორემის გამოყენებით მოცემულ გამოსახულებათა მიხედვით იპოვეთ შემდეგი ორიგინალები:

2043. $F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}$. **2044.** $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

2045. $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$. **2046.** $F(p)=\frac{1}{(p^2+\beta^2)^2}$.

დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ორიგინალები მათი გამოსახულების მიხედვით:

2047. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-1}$. **2048.** $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)p^3}$.

ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

2049. $x'+x=1,\quad x(0)=0.$ **2050.** $x'-2x=0,\quad x(0)=1.$

2051. $x''+9x=1,\quad x(0)=x'(0)=0.$ **2052.** $x''-x'=1,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2053. $x''-4x'+5x=0,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1.$

2054. $x''+3x'+2x=0,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=2.$

2055. $x''-2x'+2x=0,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=1.$

2056. $x''+3x'+2x=t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2057. $x''-x'=t^2,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2058. $x''+x'=t^2+2t,\quad x(0)=4,\quad x'(0)=-2.$

2059. $x''+x'-2x=e^{-t},\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1.$

2060. $x''-2x'-3x=e^{3t},\quad x(0)=x'(0)=0.$

2061. $x''+x=\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2062. $x''+x=\sin t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2063. $x''+4x=\sin 3t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2064. $x''+x=t\cos 2t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2065. $x'''+4x'=1,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

2066. $x'''-6x''+11x'-6x=0,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1,\quad x''(0)=0.$

2067. $x'''+x=1,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

2068. $x'''+x'=e^{2t},\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

2069. $x^{IV}+x'''=\cos t,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\quad x'''(0)=2.$

2070. $x^{IV}-2x''+x=\sin t,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$

დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

2071. $x''-x'=t-2,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2072. $x''+x=5t^2,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2073. $x''-5x'+6x=\sin t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2074. $x'''+x'=e^t,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

ამოხსენით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

2075. $\begin{cases} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=1.$

2076. $\begin{cases} x'-x-2y=0, \\ y'-2x-y=1, \end{cases}\quad x(0)=0,\quad y(0)=5.$

2077. $\begin{cases} x'+2x+2y=10e^{2t}, \\ y'-2x+y=7e^{2t}, \end{cases}$ $\quad x(0)=1, \quad y(0)=3.$

2078. $\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, \\ y'+x+2y=\sin t, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=0.$

2079. $\begin{cases} x''+y=1, \\ y''+x=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0.$

2080. $\begin{cases} x''+3y''-x=0, \\ x'+3y'-2y=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=x'(0)=y(0)=0, \quad y'(0)=-\frac{2}{3}.$

2081. $\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=z+x, \\ z'=x+y, \end{cases}$ $\quad x(0)=1, \quad y(0)=0, \quad z(0)=0.$

2082. $\begin{cases} x'=z+y-x, \\ y'=z+x-y, \\ z'=x+y+z, \end{cases}$ $\quad x(0)=1, \quad y(0)=z(0)=0.$

X თავი

პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები. მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება

§ 1. პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots +$$
$$+ a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \qquad (*)$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადებია, z — მათზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქცია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — მოცემული ფუნქციები. თუ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ კოეფიციენტებში z ფუნქცია არ მონაწილეობს და მარჯვენა ნაწილი იგივურად ნულის ტოლია, მაშინ ასეთ განტოლებას ეწოდება ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ეწოდება ა რ ა ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი.

(*) განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა დავწეროთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}$$

და ვიპოვოთ ამ სისტემის n დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=C_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=C_n. \end{cases}$$

(*) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არაცხადი სახით ასე დაიწერება:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)=0,$$

სადაც F ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები, და სადაც ნაჩვენებია, იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებენ:

2083. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0; \qquad x=0, \quad z=2y.$

2084. $(1+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0; \quad x=0, \quad z=y^2.$

2085. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{z}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0; \quad x=1, \quad u=y+z^2.$

2086. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0; \quad x=1, \quad u=y-z.$

2087. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0; \quad z=1, \quad u=x^y.$

2088. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial y}=0; \quad x=1, \quad u=\ln z-\dfrac{1}{y}.$

2089. $(z-y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

2090. $(mz-ny)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ly-mx)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

2091. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad x=2, \quad z=y-4.$

2092. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z, \quad x=1, \quad z=y.$

2093. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

2094. $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y-x.$

2095. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=z. \quad z=z(x,y); \ x=1, \quad z=y.$

2096. $yz\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0;\quad y=1,\quad z=x^2.$

2097. $(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2;\quad y=0,\quad z=2x.$

2098. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u;\quad x=2,\quad u=\frac{1}{2}(y+z).$

§ 2. მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა ტიპები. კანონიკურ სახეზე დაყვანა

მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

არის ჰიპერბოლური ტიპისა, თუ $b^2-ac>0$, — პარაბოლური ტიპისა, თუ $b^2-ac=0$ და — ელიფსური ტიპისა, თუ $b^2-ac<0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=F\left(x,y,u,\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას ეწოდება *ჰიპერბოლური ტიპის კანონიკური განტოლება*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას—*პარაბოლური ტიპის კანონიკური განტოლება*, ხოლო

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას—*ელიფსური ტიპის კანონიკური განტოლება*.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

2099. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2100. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2101. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

2102. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2103. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2104. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2105. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2106. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2107. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

2108. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial u^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

2109. $\operatorname{tg}^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg}x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

2110. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

იპოვეთ შემდეგ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი და კერძო ამონახსნი, თუ მოცემულია საწყისი პირობები:

2111. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2112. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=8y.$

2113. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$

2114. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1.$

2115. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{x}{y}+1.$

2116. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

2117. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\qquad u\Big|_{x=1}=y^3,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=y^2.$

2118. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\qquad u\Big|_{x=0}=\sin y,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=y.$

2119. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2120. $t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$

2121. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;\qquad u\Big|_{x=0}=0,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-y-1.$

2122. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;\qquad u\Big|_{x=1}=2y+1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=y.$

§ 3. სიმის რხევის განტოლება

1°. სიმის რხევის განტოლების ამოხსნა დალამბერის მეთოდით

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

საწყის პირობებს, მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2123. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\quad u\Big|_{t=0}=x^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

2124. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\quad u\Big|_{t=0}=x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x.$

2125. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\quad u\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$

2126. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\quad u\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x.$

2127. იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლებით განსაზღვრული სიმის ფორმა $t=\dfrac{\pi}{2a}$ მომენტში, თუ $u\Big|_{t=0}=\sin x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1.$

2128. იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლებით განსაზღვრული სიმის ფორმა $t=\pi$ მომენტში, თუ $u\Big|_{t=0}=\sin x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x.$

2° სიმის რხევის განტოლების ამოხსნა ფურიეს მეთოდით.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

საწყის პირობებს და

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=l}=0$$

სასაზღვრო პირობებს, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივის საშუალებით:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

სადაც

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

მოცემული სასაზღვრო პირობებისა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2129. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=0,\ u\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1.$

2130. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=0,\ u\Big|_{t=0}=x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

2131. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\ u\Big|_{x=l}=0,\ u\Big|_{t=0}=A\sin\dfrac{\pi x}{l},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

2132. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=0,$

$$u\Big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{2x}{l}, & \text{როცა}\quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\[2mm] \dfrac{2(l-x)}{l}, & \text{როცა}\quad \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l,\end{cases}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

2133. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=l}=0,$

$$u\Big|_{t=0}=\frac{4x(l-x)}{l^2},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

2134. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ თუ $u\Big|_{x=0}=0,\ u\Big|_{x=l}=0,\ u\Big|_{t=0}=\dfrac{x}{l},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

§ 4. სითბოგამტარობის განტოლება

თუ სხეული წარმოადგენს ღეროს, რომელიც მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ მაშინ სითბოგამტარობის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

1°. უსასრულო ღეროს შემთხვევა. უნდა მოიძებნოს (1) განტოლების $u(x, t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u(x,\ 0)=f(x),\qquad -\infty<x<+\infty\qquad (t>0)$$

საწყის პირობას. ფურიეს მეთოდის გამოყენებით ვღებულობთ ამ განტოლების ამონახსნს:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

2°. ერთი მხრიდან შემოსაზღვრული ღეროს შემთხვევა. (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $u(x,0)=f(x)$ საწყის პირობასა და $u(0,t)=\varphi(x)$ სასაზღვრო პირობას, მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \varphi(\eta)\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}\cdot(t-\eta)^{-\frac{3}{2}}d\eta.$$

3°. ორივე მხრიდან შემოსაზღვრული ღეროს შემთხვევა. უნდა მოიძებნოს (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $u|_{t=0}=f(x)$ საწყის პირობასა და $u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0$ სასაზღვრო პირობებს. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება შემდეგი მწკრივის სახით:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

სადაც

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

2135. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} u_0, & \text{როცა } x_1<x<x_2,\\ 0, & \text{როცა } x<x_1 \text{ და } x>x_2.\end{cases}$$

2136. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<-l,\\ u_0, & \text{როცა } -l<x<l,\\ 0, & \text{როცა } x>l.\end{cases}$$

2137. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0)=f(x)=u_0 \quad \text{და} \quad u(0,t)=\varphi(t)=0.$$

2138. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0)=f(x)=0 \quad \text{და} \quad u(0,t)=\varphi(t)=u_0.$$

2139. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u\Big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } 0<x\leqslant \frac{l}{2}, \\ l-x, & \text{როცა } \frac{l}{2}\leqslant x<l. \end{cases}$$

საწყის პირობებსა და $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$ სასაზღვრო პირობებს.

2140. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $u\Big|_{t=0}=f(x)=\frac{x(l-x)}{l^2}$ საწყის პირობასა და $u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0$ სასაზღვრო პირობებს.

პასუხები

I თავი

1. $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. 2. $V=\frac{\pi}{3}y(x^2-y^2)$. 3. $\frac{\pi}{3}y^2\sqrt{x^2-y^2}$. 4. $\frac{2}{3}x(y^2-x^2)$. 5. 1) $\frac{5}{3}$; -2; 2) $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{7}$; 3) $-\frac{13}{12}$; $\frac{x^2+y^2}{2xy}$; 4) 1. 6. 1) 16; 2; 3) $\frac{y^2-x^2}{2xy}$; $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. 7. განსაზღვრულია ყველგან. 8. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა O (0; 0) წერტილისა. 9. განსაზღვრულია $x^2+y^2=4$ წრეწირის შიგნით. 10. განსაზღვრულია,როცა $x^2+y^2\leqslant 1$, $y\neq x$. 11. განსაზღვრულია, როცა $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 12. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $y=x$ წრფის წერტილებისა. 13. განსაზღვრულია, როცა $y>-x$. 14. განსაზღვრულია, როცა $x<\frac{y^2}{4}+2$. 15. განსაზღვრულია პირველ და მესამე საკოორდინატო კუთხეებში. 16. განსაზღვრულია $1\leqslant x^2+y^2<4$ წრიულ რგოლში. 17. განსაზღვრულია $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 2$ მართკუთხედში. 18. განსაზღვრულია, როცა $|x|\geqslant 2$, $|y|\geqslant 2$. 19. განსაზღვრის არეებია: 1) $-2\leqslant x\leqslant 0$, $-\infty<y\leqslant 0$; 2) $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y<+\infty$. 20. განსაზღვრულია ყველგან. 21. 1) განსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=1$ სფეროს ზედაპირზე და მის შიგნით; 2) განსაზღვრულია პირველ ოქტანტში. 22. განსაზღვრულია, როცა $x^2+y^2+z^2>1$. 23. 1) $x+y=c$ ($y=-x$ წრფის პარალელური წრფეები); 2) $x^2-y^2=c$ (ტოლფერდა ჰიპერბოლები); 3) $y=c-x^2$ ($c>0$, პარაბოლები); 4) $xy=c$ ($c>0$, ტოლფერდა ჰიპერბოლები). 24. 1) $x^2+y^2=c$ (კონცენტრული წრეწირები); $y=\frac{c}{x^2}$; 3) $x=cy^2$ (პარაბოლები); 4) $\left(x-\frac{1}{c}\right)^2+y^2=\frac{1}{c^2}$ (წრეწირები). 25. 1) $x+y+z=c$ ($x+y+z=0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები); 2) $x^2+y^2=cz$ (ბრუნვის პარაბოლოიდები); 3) $x^2+y^2=c$ (ცილინდრები); 4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$ (ელიფსოიდები). 26. 1) $2x+3y-z=c$; 2) x^2+

$+y^2+z^2=c$ (კონცენტრული სფეროები); 3) $x^2+y^2=\frac{z^2}{c^2}$ (კონუსური ზედაპირები). **27.** $-\frac{1}{4}$. ა მ ო ხ ს ნ ა: აღვნიშნოთ $xy=\alpha$; როცა $x\to 0$, $y\to 0$, მაშინ $\alpha\to 0$, რის გამოც საკითხი დაიყვანება $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{2-\sqrt{\alpha+4}}{\alpha}$ ზღვრის მოძებნამდე; ეს ზღვარი უდრის $-\frac{1}{4}$-ს. **28.** 2. **29.** e^k. **30.** $\ln 2$ (ზღვარი გამოითვლება უშუალო ჩასმით). **31.** 0. მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ პოლარული კოორდინატები; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; როცა $x\to\infty$, $y\to\infty$, მაშინ $r\to\infty$ და მივიღებთ $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{r}$ ზღვარს, რაც ნულის ტოლია. **32.** არ არსებობს. **33.** 0. **34.** 0. **35.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$. **36.** 1. **37.** 1) წყვეტას განიცდის $x^2+y^2=9$ წრეწირის წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცდის $y=x$ და $y=-x$ წრფეების წერტილებზე; 3) წყვეტას განიცდის კოორდინატთა სათავეზე; 4) წყვეტის ზედაპირია $z^2=x^2+y^2$ კონუსი. **38.** 1) წყვეტას განიცდის $y=x$ წრფის წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცდის კოორდინატთა სათავეზე; 3) წყვეტას განიცდის $y=x^2$ პარაბოლის წერტილებზე; 4) წყვეტას განიცდის $x=0$, $y=0$ ღერძებზე. **39.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin 2y$. **40.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$. **41.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. **42.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **43.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.
44. $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}(x-2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\operatorname{ctg}(x-2y)$. **45.** $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$. **46.** $\frac{\partial z}{\partial x}=3x(x+2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3(x^2-y^2)$. **47.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **48.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. **49.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.
50. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$. **51.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

52. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y|x|}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2+y^2}}$. 53. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 54. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y+x$. 55. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1$.
56. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2ze^{x^2+y^2+z^2}$. 57. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$. 58. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy\cdot z^{xy-1}$. 59. $f'_x(2;\ 3)=4$; $f'_y(2;\ 3)=27$. 60. $f'_x(2;1)=\frac{1}{2}$; $f'_y(2;\ 1)=0$. 61. $f'_x(1;\ 2;\ 0)=1$; $f'_y(1;\ 2;\ 0)=\frac{1}{2}$; $f'_z(1;\ 2;\ 0)=\frac{1}{2}$. 62. $f'_x(0;\ 0;\ 1)=-2$; $f'_y(0;\ 0;\ 1)=0$; $f'_z(0;\ 0;\ 1)=-6$. 65. $\frac{3}{2}$.
67. $\Delta_x z=0,4$; $\Delta_y z=0,3$. 68. $\Delta_x z=0,21$; $\Delta_y z=-0,19$. 75. $dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy$. 76. $dz=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$. 77. $dz=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy$. 78. $dz=\frac{ydx+xdy}{xy}$. 79. $dz=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.
80. $dz=\sin 2xdx-\sin 2ydy$. 81. $dz=0$. 82. $dz=|y|\frac{ydx-xdy}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}$.
83. $dz=-\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy$. 84. $du=yzdx+zxdy+xydz$.
85. $du=x^{yz-1}(yzdx+zx\ln xdy+xy\ln xdz)$. 86. $du=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 zdx+2y\sin^2 zdy+\sin 2zdz)$. 87. $dz=\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 88. $dz=\frac{xdx+ydy}{a}$.
89. $\frac{1}{2}$. 90. $2x-2dy$. 91. $\Delta f=36$; $df=28,5$. 92. $\Delta f\approx 0,071$; $df=0,075$. 93. $\Delta f(x,y)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$. 94. $\Delta f(x,y)=2h+k+h^2+2hk+h^2k$. 95. $\approx 1,06$. 96. $\approx 4,998$. 97. ≈ 1. 98. $\approx 0,788$. 99. $\Delta l\approx 0,062$ სმ (გადიდება). 100. $\Delta v\approx -31,4$ სმ^3 (შემცირება). 101. $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$. 102. $\frac{dz}{dt}=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.
103. $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. 104. $\frac{dz}{dt}=-4e^{2\cos 2t}\sin 2t$. 105. $\frac{dz}{dx}=2x+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

106. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$. 107. $\frac{du}{dt}=2t\ln t\cdot \operatorname{tg}t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg}t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$.

108. 0. 109. $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2(3x+\frac{2}{x^2}-\sqrt{x})}\left(3-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 110. $\frac{dz}{dx}=$

$=2(\sin x)^{2x}(x\operatorname{ctg}x+\ln\sin x)$. 111. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-$

$-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$. 112. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$; $\frac{\partial z}{\partial v}=1$. 113. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{2v}{x+y}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+\frac{2v}{x+y}$. 114. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-4ye^{u-2v}$.

115. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$. 116. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$;

$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right)r$. 121. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$

$=\frac{-2x}{(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{(x^2+y)^2}$. 122. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-8x$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10$. 123. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$=2x^3-18xy$. 124. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{1-2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{4x}{(1-2y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$=\frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. 125. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\sin y\cdot\ln x$. 126. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin xy-$

$-xy\cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\cos xy$. 129. $f''_{xx}(0;\ 0)=m(m-1)$; $f''_{xy}(0;\ 0)=$

$=mn$; $f''_{yy}(0;\ 0)=n(n-1)$. 130. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$. 131. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$

$=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1$. 132. $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-x(2\sin xy+$

$+xy\cos xy)$. 133. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial y}=2y^3e^{xy^2}(2+xy^2)$. 134. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=$

$=abcx^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}$. 135. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+xy)e^{xy}\cos z$. 136. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}=$

$=4yze^{x+y^2}$. 141. $d^2z=6ydx^2+4(3x-1)dxdy+2dy^2$. 142. $d^2z=-$

$-\frac{(ydx-xdy)^2}{xy^2}$. 143. $d^2z=-\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^3}$. 144. $d^2z=e^{xy}[(ydx+$

$+xdy)^2+2dxdy]$. **145.** $dz=(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$; $d^2z=4dx^2-6dxdy-2dy^2$. **146.** $dz=\sin^2 y\,dx+x\sin 2y\,dy$; $d^2z=2\sin 2y\,dxdy+2x\cos 2y\,dy^2$. **147.** $d^2u=-\sin(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)^2$. **148.** $d^2u=2(z\,dxdy+y\,dxdz+x\,dydz)$. **149.** $(2dx+dy)^3$. **150.** $d^3z=e^x(\cos y\,dx^3-3\sin y\,dx^2dy-3\cos y\,dxdy^2+\sin y\,dy^3)$. **151.** $du=\varphi'(t)\,(ydx+xdy)$; $d^2u=\varphi''(t)\,(ydx+xdy)^2+2\varphi'(t)dxdy$. **152.** $du=2\varphi'(t)(xdx+ydy)$; $d^2u=4\varphi''(t)(xdx+ydy)^2+2\varphi'(t)\,(dx^2+dy^2)$. **153.** $d^2z=a^2f''_{uu}(u,v)dx^2+2abf''_{uv}(u,v)dxdy+b^2f''_{vv}(u,v)dy^2$. **154.** 1) $du=\frac{\partial u}{\partial\xi}(dx+dy)+\frac{\partial u}{\partial\eta}(dx-dy)$; $d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}(dx^2-dy^2)+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}(dx-dy)^2$; 2) $du=2\frac{\partial u}{\partial\xi}(xdx+ydy)+\frac{\partial u}{\partial\eta}(ydx+xdy)$; $d^2u=4\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}(xdx+ydy)^2+4\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}(xdx+ydy)(ydx+xdy)+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}(ydx+xdy)^2+2\frac{\partial u}{\partial\xi}(dx^2+dy^2)+2\frac{\partial u}{\partial\eta}dxdy$. **155.** $y'=\frac{y}{y-1}$; $y''=-\frac{y}{(y-1)^3}$. **156.** $y'=\frac{1}{1-a\cos y}$; $y''=-\frac{a\sin y}{(1-a\cos y)^3}$. **157.** $y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}$; $y''=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **158.** $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **159.** $y'=-\frac{y}{x}$; $y''=\frac{2y}{x^2}$. **160.** $\frac{1}{3}$. **161.** $-\frac{1}{3}$. **162.** 8 და -8. **163.** $\frac{1}{5}$ და $\frac{4}{5}$. **164.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$.

165. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-6z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-4y-z}{y-6z}$. **166.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$. **167.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$. **168.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}$. **169.** 1) $dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$; 2) $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$; $d^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy+\frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$. **170.** $dz=-\frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z=\frac{z}{(1-z)^3}(dx+dy)^2$. **172.** 1) $du=\frac{(v-x)dx+(v-y)dy}{u-v}$; $dv=\frac{(u-x)dx+(u-y)dy}{v-u}$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v-x}{u-v}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=$

$=\dfrac{v-y}{u-v}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{u-x}{v-u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{u-y}{v-u}$; 2) $du=-\dfrac{(u+y)dx+(v+y)dy}{x-y}$, $dv=\dfrac{(u+x)dx+(v+x)dy}{x-y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{v+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{u+x}{x-y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{v+x}{x-y}$. **173.** $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0$. **174.** $\dfrac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$. **175.** $\dfrac{d^2x}{dy^2}-2y\dfrac{dx}{dy}=0$. **176.** $x\dfrac{d^2x}{dy^2}+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2-1=0$. **177.** $\dfrac{1}{r}\,\dfrac{dr}{d\varphi}$. **178.** $\dfrac{dr}{d\varphi}=r$. **179.** $\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **180.** $u\dfrac{\partial z}{\partial u}-z=0$. **181.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. **182.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{2u}\,\dfrac{\partial z}{\partial v}$. **183.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\dfrac{1}{u}\,\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$. **184.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}=0$. **185.** $f(x+h,\ y+k)=x^3+2y^3-xy+h(3x^2-y)+k(6y^2-x)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$. **186.** $f(x+h,y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2$. **187.** $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$. **188.** $1+[(x-1)+(y+1)]+\dfrac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+\dfrac{[(x-1)+(g+1)]^3}{3!}$. **189.** $y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}$. **190.** $y+\dfrac{1}{2!}\left(2xy-y^2\right)+\dfrac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$. **191.** $y(1)=1$ მაქსიმუმი; $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$ მინიმუმი. **192.** $y(a\sqrt[3]{2})=a\sqrt[3]{4}$ მაქსიმუმი. **193.** $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ მაქსიმუმი. **194.** $y\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)=a\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$ მაქსიმუმი; $y\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)=-a\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$ მინიმუმი. **195.** $y(\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{27}$ მაქსიმუმი; $y(-\sqrt[3]{3})=-\sqrt[3]{27}$ მინიმუმი. **196.** $y\left(\dfrac{b^5}{a^4}\right)=-\dfrac{b^2}{a}$ მინიმუმი. **197.** $z(4;-2)=13$ მაქსიმუმი. **198.** $z(1;2)=-1$ მინიმუმი. **199** $z(1;0)=-1$ მინიმუმი. **200.** $z\left(\dfrac{8}{3};\ \dfrac{7}{3}\right)=-\dfrac{13}{3}$ მინიმუმი. **201.** $z(-1;\ -1)=1$ მაქსიმუმი. **202.** $z(4;\ 4)=12$ მაქსიმუმი. **203.** არა აქვს ექსტრემუმი. **204.** არა აქვს ექსტრემუმი. **205.** $z(2;\ 1)=-28$ მინიმუმი; $z(-2;\ -1)=28$ მაქსიმუმი. **206.** $z(1;\ 1)=4$ მინიმუმი. **207.** $z\left(\dfrac{1}{2};\ -1\right)=$

$=-\frac{e}{2}$ მინიმუმი. **208.** $z(-2;\ 0)=-\frac{2}{e}$ მინიმუმი. **209.** $z\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ მაქსიმუმი. **210.** $z\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ მაქსიმუმი. **211.** არა აქვს ექსტრემუმი. **212.** $z(\pm\sqrt{2};\mp\sqrt{2})=-8$ მინიმუმი. **213.** $z(1;\ 1)=2$ მინიმუმი. **214.** $z\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)=11$ მაქსიმუმი; $z\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)=1$ მინიმუმი. **215.** $z\left(\frac{18}{13};\ \frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}$ მინიმუმი. **216.** $z(a\sqrt{2};\ a\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{a}$ მაქსიმუმი; $z(-a\sqrt{2};\ -a\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{a}$ მინიმუმი. **217.** $z(0;\ 1)=3$ უდიდესი მნიშვნელობა. **218.** $z(1;2)=17$ უდიდესი მნიშვნელობა; $z(1;\ 0)=-3$ უმცირესი მნიშვნელობა; $(-4;\ 6)$ სტაციონარული წერტილი ძევს მართკუთხედის გარეთ. **219.** $z\left(1;\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ უდიდესი მნიშვნელობა; $z(4;\ 2)=-128$ უმცირესი მნიშვნელობა. **220.** $z(-3;\ 0)=z(0;\ -3)=6$ უდიდესი მნიშვნელობა; $z(-1;\ -1)=-1$ უმცირესი მნიშვნელობა. **221.** $z(\pm 2;\ 0)=4$ უდიდესი მნიშვნელობა; $z(0;\ \pm 2)=-4$ უმცირესი მნიშვნელობა; სტაციონარული წერტილი $(0;\ 0)$ არ იძლევა ექსტრემუმს. **222.** $z\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$ უდიდესი მნიშვნელობა; $z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$ უმცირესი მნიშვნელობა. **223.** $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$ და $\frac{a}{3}$. **224.** ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდია $\frac{2p}{3}$. **225.** $(1;\ 2)$; $h_{უმც.}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **226.** $\left(\frac{8}{5};\ \frac{3}{5}\right)$; $\left(-\frac{8}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$; $h_{უმც.}=\frac{1}{\sqrt{13}}$; $h_{უდიდ.}=\frac{11}{\sqrt{13}}$. **227.** კუბი, რომლის წიბო არის $\sqrt[3]{V}$; $S_{უმც.}=6\sqrt[3]{V^2}$. **228.** უდიდესი, როცა $x=8$ სმ; $\alpha=60°$, სადაც x-ით აღნიშნულია თუნუქის ფურცლის გადაღუნული ნაწილის სიგანე, ხოლო α-თი — დახრილობის კუთხე. **229.** $x+2y+3z-14=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$. **230.** $2x+4y-z-3=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

231. $3x+4y-6z=0$; $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$. 232. $8x+9y+6\sqrt{11}\,z-36=0$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{9}=\frac{6z-\sqrt{11}}{36\sqrt{11}}$. 233. $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1$; $\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{-\frac{z_1}{c^2}}$. 234. $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$. 235. $x+4y+6z\pm21=0$. 236. $x+y-z\pm9=0$. 237. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{-5}$. ნორმალი განსაზღვრული არ არის O (0; 0; 0) წერტილში. 238. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$. 239. $3x-3y+z-2=0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. u და v პარამეტრების გამორიცხვა გვაძლევს $x^3-3xy+2z=0$ განტოლებას. 240. $2x+y-z-2=0$. 241. $\frac{9}{2}a^3$. 243. 60° ან 120°. მ ი თ ი თ ე ბ ა. კუთხე ორ ზედაპირს შორის ეწოდება ამ ზედაპირების გადაკვეთის წირის წერტილში მათდამი გავლებულ მხებ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ კუთხეს. 244. ზედაპირებს ეწოდება ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი, თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთება მათი გადაკვეთის წირის ყოველ წერტილში. 245. (0; 0) განმხოლოებული წერტილი. 246. (0; 0) განმხოლოებული წერტილი. 247. (1; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y=\pm(x-1)$. 248. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y=\pm x$. 249. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $x=0$, $y=0$. 250. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y=\pm x$. 251. (0; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 252. (—2; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 253. (0; 0) მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 254. (0; 0) მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=x$. 255. (0; 0) თანახების წერტილი; მხებია $y=0$. 256. (0; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 257. $x^2+y^2=9$. 258. $y=-\frac{x^2}{4}$. 259. $y=\pm R$. 260. $x=0$, $y=0$. 261. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$. 262. $x^2+y^2=1$. 263. $y=1$ (მომვლები წრფე). 264. $y=0$ წრფე არის გადაღუნვის წერტილთა სიმრავლე და მომვლები. 265. $x=0$ წრფე არის უკუქცევის წერტილთა სიმრავლე და მომვლები. 266. $y=1$ წრფე არის უკუქცევის წერტილთა სიმრავლე და მომვლები. 267. Ox ღერძის წერტილები უკუქცევის წერ-

ტილებია; მომვლები არა აქვს. 268. Oy ღერძის წერტილები უკუქცევის წერტილებია; მომვლები არა აქვს. 269. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. 270. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. 271. $xy=\frac{s}{2}$. 272. $xy=\pm\frac{s}{2\pi}$. 273. 1) $\frac{d\vec{r}}{dt}=-\frac{1}{\sin^2 t}\vec{i}+\frac{1}{1+t^2}\vec{j}$; 2) $\frac{d\vec{r}}{dt}=-e^{-t}\vec{i}+2\vec{j}+\frac{1}{t}\vec{k}$; 3) $\frac{d\vec{r}}{dt}=2t\vec{i}+\frac{1}{t^2}\vec{j}-\frac{2}{t^3}\vec{k}$. 274. $3x+4y=0$—ტრაექტორია; $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{w}=0$; $|\vec{v}|=5$; $|\vec{w}|=0$. 275. $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}$; $\vec{v}=-8t\vec{j}+6t\vec{k}$; $\vec{w}=-8\vec{j}+6k$; $|\vec{v}|=10|t|$; $|\vec{w}|=10$. 276. $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\vec{i}+a\vec{j}$; $\vec{v}(\pi)=2a\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\vec{i}$; $\vec{w}(\pi)=-a\vec{j}$. 277. $y=\frac{4}{3}x-\frac{x^2}{9}$—ტრაექტორია; $\vec{v}=3\vec{i}+2(2-t)\vec{j}$; $\vec{v}(0)=3\vec{i}+4\vec{j}$; $\vec{v}(1)=3\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{v}(2)=3\vec{i}$; $\vec{v}(3)=3\vec{i}-2\vec{j}$. 278. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$— ტრაექტორია; $\vec{v}=-3\sin t\cdot\vec{i}+4\cos t\cdot\vec{j}$; $\vec{w}=-3\cos t\cdot\vec{i}-4\sin t\cdot\vec{j}$; $v(0)=4\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\vec{i}$; $\vec{w}(0)=-3\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i}-2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\vec{j}$ 279. 1) $\frac{x-c_x}{a_x}=\frac{y-c_y}{a_y}$ (წრფე); 2) $\frac{x_2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $x=\frac{a}{b^2}y^2$. 283. $ds=2dt$. 284. $ds=\sec t dt$. 285. $ds=(e^t+e^{-t})dt$. 286. $ds=\sqrt{3}e^t dt$. 287. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$; $x+2y+3z-6=0$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$. 288. $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{R\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$; $2x-\sqrt{2}z=0$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 289. $\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=$

$= \dfrac{z-\dfrac{k\pi}{2}}{k}$; $xR-zk+\dfrac{k^2\pi}{2}=0$. **290.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; $2x+y+$ $+2z-6=0$. **291.** $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$. **292.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{4}$; $x+y+4z-10=0$. **293.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ (ბინორმალი); $3x+3y-z-2=0$ (მიმხები სიბრტყე). **294.** $\dfrac{x-1}{-6}=$ $=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-1}{1}$; $6x-8y-z+3=0$. **295.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ (მთავარი ნორმალი); $x-y-z-2=0$ (გამჭრფევი სიბრტყე). **296.** $\dfrac{x-1}{1}=$ $=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{0}$; $x+y-2=0$. **297.** $\dfrac{4x-1}{4}=\dfrac{3y+1}{-3}=\dfrac{2z-1}{2}$; $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{3y+8}{-6}=\dfrac{z-2}{1}$. **298.** $x+y=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ (ნორმალური სიბრტყე); $x-y=0$ მიმხები სიბრტყე); $z=0$ (გამჭრფევი სიბრტყე). **299.** $K=$ $=\dfrac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\sqrt{(9t^4+4t^2+1)^3}}$; $T=\dfrac{3}{9t^4+9t^2+1}$; $K(0)=2$; $T(0)=3$. **300.** $K=\dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$; $T=-\dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$; $K(1)=\dfrac{2}{9}$; $T(1)=-\dfrac{2}{9}$. **301.** $K=$ $=\dfrac{a}{a^2+b^2}$; $T=\dfrac{b}{a^2+b^2}$. **302.** $K=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $T=-\dfrac{1}{3}$. **303.** $K=$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. **304.** $K=\dfrac{a}{a^2+ab+t^2}\sqrt{\dfrac{a(a+b)}{a^2+ab+t^2}}$; $T=0$. **305.** $K=$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $T=\dfrac{1}{3}$. **306.** $K=T=\dfrac{a}{(a+y)^2}$.

II თავი

307. $\dfrac{14}{3}$. **308.** $\dfrac{8}{3}$. **309.** $\dfrac{\pi}{12}$. **310.** $(e-1)^2$. **311.** $\ln\dfrac{25}{24}$. **312.** 660. **313.** $\dfrac{9}{4}$. **314.** $\dfrac{15}{4}$. **315.** 9. **316.** $\dfrac{1}{2}$. **317.** $\dfrac{\pi a}{5}-a\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}$.

318. $\frac{11a^4}{24}$. 319. $\int\limits_2^3 dx \int\limits_{-1}^5 f(x,y)dy$. 320. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$. 321. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)dy$. 322. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$. 323. $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx$.

324. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)dy$. 325. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\, dy$. 326.

$\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.

327. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$. 328. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx$. 329. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$.

330. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx$. 331. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)dx$.

332. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x, y)dy$. 333. $\frac{35}{8}$. 334. $\frac{e-1}{2}$.

335. -2. 336. $\frac{\pi}{6}$. 337. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. 338. $\frac{1}{2}$. 339. $\frac{33}{140}$.

340. $\frac{1}{280}$. 341. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 342. $\frac{R^4}{80}$. 343. $\frac{1}{6}$. 344. 4. 345. 3. 346. $\frac{2}{3}R$.

347. $2<I<8$, სადაც I აღნიშნავს მოცემულ ინტეგრალს. 348. $0<I<64$.

349. $36\pi<I<100\pi$. 350. $8\pi(5-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2})$. 351. $\frac{3\pi b^2}{16}$.

352. $\frac{4a^3}{3}$. 353. $\frac{12}{5}$. 354. $\frac{\pi a^3}{6}$. 355. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 356. $\frac{\pi}{4}$. 357. $\frac{\pi a^2}{2}$. 358. $\frac{\pi e(e^3-1)}{4}$. 359. $\frac{a^3}{12}$. 360. $\pi R^2 h$. 361. $a^3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{22}{9}\right)$.

362. $\frac{a^2b^2}{8}$. მითითება. $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$. 363. $\frac{1}{2}$. 364. 2. 365. $\frac{2}{3}$. 366. 5. 367. πa^2. 368 πab. 369. $\sqrt{2}-1$. 370. 1) $\frac{1}{2}(15-8\ln 4)$; 2) $\frac{9}{2}$. 371. $\frac{64}{3}$. 372. $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$. 373. $\frac{a^2}{3}$. 374. $\pi-1$. 375. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. 376. $\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$. 377. $\frac{\pi a^2}{8}$. 378. a^2. 379. $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$. 380. $\frac{5}{8}\pi a^2$. 381. $\frac{3}{4}\pi$. 382. $\frac{a^2b^2}{c^2}$. მითითება. $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$. 383. $\frac{3}{2}\ln 2$. მითითება. შემოიღეთ ახალი ცვლადები: $xy=u$, $y=vx$. 384. $\frac{1}{3}$. მითითება. შემოიღეთ ახალი ცვლადები: $x^2=uy$, $y^2=vx$. 385. $\frac{abc}{6}$. 386. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. 387. $13\frac{1}{3}$. 388. $\frac{\pi R^2H}{2}$. 389. $\frac{16}{3}a^3$. 390. $\frac{8}{9}a^3$. 391. $\frac{abc}{3}$. 392. $\frac{1}{6}$. 393. $\frac{\pi}{4}$. 394. $\frac{88}{105}$. 395. $\frac{4}{3}\pi abc$. 396. $3\pi a^3$. 397. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 398. π. 399. $\frac{\pi R^4}{4a}$. 400. $12\frac{4}{21}$. 401. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 402. $4\sqrt{3}\pi a^3$. 403. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$. 404. $\frac{\pi a^3}{4}$. 405. $\frac{4}{3}a^3b$. 406. $\frac{32}{9}a^3$. 407. $8\pi\ln 2$. 408. $\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. 409. $\frac{3}{2}\pi ab$. 410. $\frac{4}{35}\pi a^3$. მითითება. შემოიღეთ კოორდინატები: $x=r\cos^3\varphi$, $y=r\sin^3\varphi$. 411. 14. 412. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2$. 413. $4\pi a^2$. 414. 280. π. 415. 1) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$; 2) $16a^2$. 416. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$. 417. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 418. $2a^2(\pi-2)$. 419. $4a^2$. 420. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. 421. $2a^2m$. 422. $8a^2$. 423. $\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 424. $2\pi a^2$. 425. $2\pi ak$. 426. $\frac{2}{3}\pi a^3k$. 427. $\frac{ab^2}{2}$. მითითება. $\rho=1$; a გვერდი შეუთავსეთ Ox ღერძს, ხოლო b გვერდი — Oy ღერძს. 428. $\frac{2}{3}R^3$. მი-

თ ი თ ე ბ ა. დიამეტრი შეუთავსეთ ერთ-ერთ ღერძს. 429. $x_c=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $y_c=0$. 430. $x_c=0$; $y_c=\frac{4a}{3\pi}$. 431. $x_c=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$; $y_c=$ $=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(\sqrt{2}+1)$. 432. $x_c=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$; $y_c=0$. 433. $x_c=\pi a$; $y_c=\frac{5}{6}a$. 434. $x_c=\frac{5}{6}a$; $y_c=0$. 435. $I_x=4$. 436. $I_y=\frac{\pi a^3 b}{4}$. 437. $I_0=\frac{178}{105}a^4$. 438. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი შეუთავსეთ კოორდინატთა სათავეს. 439. 1) $\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$; 2) $\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$. 440. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სამკუთხედის წვერო მოათავსეთ კოორდინატთა სათავეში. 441. $I_p=\frac{3\pi a^4}{64}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ ინერციის მომენტებია: $I_x=\iint\limits_D r^3\sin^2\varphi d\varphi dr$; $I_y=\iint\limits_D r^3\cos^2\varphi d\varphi dr$; $I_C=I_p=\iint\limits_D r^3 d\varphi dr$. 442. $I_p=\frac{35}{16}\pi a^4$. 443. 6. 444. $\frac{5}{4}$. 445. $\frac{a^6}{48}$. 446. $\frac{a^{11}}{110}$. 447. 30. 448. $\frac{8}{3}\pi$. 449. $\frac{19}{12}$. 450. $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. 451.

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}dy\int\limits_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$$ 452. $$\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}f(x,y,z)dz.$$

453. $$\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{0}^{1-x^2-y^2}f(x,y,z)dz.$$ 454. $$\int\limits_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a}dx\int\limits_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}}dy\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz.$$

455. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. 456. $\frac{1}{180}$. 457. $\frac{\pi R^4}{4}$. 458. $\frac{\pi abc^3}{4}$. 459. $\frac{\pi a}{2}$. 460. $\frac{8}{9}a^2$. 461. $\frac{92}{3}\pi$. 462. πR^3. 463. $\frac{\pi}{8}$. 464. $\frac{4\pi}{15}\left(R^5{}_2-R^5{}_1\right)$

465. $\frac{4}{3}a^3$. 466. $2\pi abc$. 467. $\frac{\pi}{2}$. 468. $\pi a^3(\alpha-\beta)$. 469. 8. 470. $\frac{\pi}{2}$. 471. $\frac{\pi abR^2}{c}$. 472. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 473. $\frac{19}{6}\pi$. 474. $\frac{\pi}{96}$. 475. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 476. $\frac{2\pi a^3}{3}(2-\sqrt{2})$. 477. $\frac{21\pi}{4}(2-\sqrt{2})$. 478. $\frac{4}{3}\pi abc$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ განზოგადებული სფერული კოორდინატებით: $x=ar\cos\varphi\sin\Theta$, $y=br\sin\varphi\sin\Theta$, $z=cr\cos\Theta$. 479. $\frac{\pi a^3}{3}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სხეული მოთავსებულია იმ ოქტანტებში, სადაც $z>0$. 480. $\frac{64\pi a^3}{105}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სხეული მოთავსებულია ყველა ოქტანტში.

481. $\frac{\pi^2 abc}{4}$. 482. $\frac{abc}{90}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ ახალი კოორდინატები: $x=ar\cos^4\varphi\sin^4\Theta$, $y=br\sin^4\varphi\sin^4\Theta$, $z=cr\cos^4\Theta$. 483. $\frac{a^4}{24}$. 484. $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. 485. $\frac{k\pi R^4}{4}$. 486. $6k\pi a^2$. 487. $\frac{4}{3}\pi R^4$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სფეროს ცენტრი მოათავსეთ $(0;0;R)$ წერტილში, მაშინ მხები სიბრტყე იქნება xOy სიბრტყე. 488. $\frac{\pi abc^3}{4}$. 489. $\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{4}\right)$.

490. $\left(0;\ 0;\ \frac{3a}{8}\right)$. 491. $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{3}\right)$. 492. $\left(0;\ 0;\ \frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)\right)$.

493. $I_x=\frac{\pi a^2h}{12}(3a^2+4h^2)$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ფუძის დიამეტრი შეუთავსეთ Ox ღერძს. 494. $I_z=\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. 495. $-\frac{1}{2}\int\limits_1^3\frac{x^2dx}{\sqrt{(1+\alpha x^3)^3}}$.

496. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3x(\mathrm{arctg}\,\alpha x)^2dx}{1+\alpha^2x^2}$. 497. 1) $-\int\limits_\alpha^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx-e^{-\alpha^3}$; 2) $\frac{2\sin\alpha^2}{\alpha}$.

498. $e^{(3\alpha^2+1)\alpha}\cdot\frac{9\alpha^3+1}{(3\alpha^2+1)\alpha}-\frac{3}{\alpha}e^{\alpha^3}$. 499. $\frac{\pi}{4\alpha^3}$. 500. $\frac{1}{\alpha^2}\ln(1+\alpha b)-\frac{b}{\alpha(1+\alpha b)}$. 501. $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. 502. $\frac{(-1)^k k!}{(1+\alpha)^{k+1}}$. 503. $\ln(1+\alpha)$. 504. $\mathrm{arc\,tg}\,\alpha$. 505. $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. გააწარმოეთ α-თი ან β-თი.

506. $\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. 507. $\frac{\pi}{4a^2}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. σ არედ მიიღეთ R-რადიუსიანი წრის მეოთხედი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული, და გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 508. $\frac{1}{4}$. 509. α. მ ი თ ი თ ე ბ ა. σ არედ მიიღეთ R-რადიუსიანი წრე (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში) და გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 510. 2π. 511. $\frac{\pi^2}{8}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. σ არედ მიიღეთ R-რადიუსიანი სფეროს მერვედი ნაწილი, რომელიც პირველ ოქტანტშია მოთავსებული, და გადადით სფერულ კოორდინატებზე. 512. $\frac{\pi}{16}$. 513. $\frac{3\pi}{2}$. 514. $\frac{\pi}{2}$. 515. $4\pi R(\ln R-1)$. 516. $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R-\frac{1}{3}\right)$. 517. $\sqrt{5}\ln 2$. 518. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 519. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$. 520. $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$. 521. 1) $\frac{a^3}{2}$; 2) 24. 522. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. 523. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 524. $\frac{256}{15}a^3$. 525. $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln 2}{2}$. 526. $\frac{a^2}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 527. $\sqrt{2}\,a^2$. 528. $\frac{\sqrt{2}}{5}a^5$. 529. $2a^2$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 530. $2\pi a^{2n+1}$. 531. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$. 532. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$. 533. πa^2. 534. $\sqrt{2}\,R^2$. 535. $\frac{4}{3}$. 536. $\ln 2$. 537. $-2\sin 2$. 538. 4π. 539. $-\frac{40}{3}$. 540. 3. 541. 16. 542. $-\frac{14}{15}$. 543. $-\pi a^2$. 544. $\frac{4}{3}ab^2$. 545. $-2\pi a^2$. 546. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$. 547. 1) 4; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2. 548. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $-\frac{1}{20}$. 549. $\frac{2}{3}$. 550. 3. 551. 1) 13; 2) $\frac{26}{3}$. 552. 1) $\frac{3}{2}a^2$; 2) a^2. 553. 0. 554. 0. 555. $2\iint\limits_D dxdy$. 556.

$4 \iint\limits_D \sin 2y\,dx\,dy$. 557. $\iint\limits_D (y-x)e^{xy}\,dx\,dy$. 558. $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$. 559.
$\frac{2}{3}a^3$. 560. $-\frac{4}{3}$. 561. 0. 562. $-\frac{\pi a^3}{8}$. 563. 0. 564. 1) არა, 2) $\frac{f'_x}{x} =$
$= \frac{f'_y}{y}$. 565. 1. 566. 4. 567. 8. 568. $\frac{3}{2}$ (ინტეგრების გზა არ
კვეთს Ox ღერძს). 569. $\ln\frac{13}{5}$ (კოორდინატთა სათავე არ ძევს ინტეგ-
რების გზაზე). 570. 4. 571. $\frac{1}{2}$. 572. 62. 573. 0. 574. $5\sqrt{2}$. 575. πab.
576. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 577. $3\pi a^2$. 578. $6\pi a^2$. 579. $\frac{3}{2}a^2$. მ ი თ ი თ ე ბ ა.
გადადით პარამეტრულ განტოლებებზე: $x = \frac{3at}{t^3+1}$, $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$; $0 \leqslant t <$
$< +\infty$. 580. $\frac{8}{15}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. გადადით პარამეტრულ განტოლე-
ბებზე: $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $0 \leqslant t \leqslant 1$. 581. $\frac{19}{3}$. 582. $2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(\sqrt{3}+2)$.
583. $a\sqrt{3}$. 584. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2b^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b + \sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$.
585. $M_x = \frac{3}{5}a^2$; $I_y = \frac{3}{8}a^3$. 586. $M_x = 2R^2$; $I_x = \frac{\pi R^3}{2}$. მ ი თ ი თ ე-
ბ ა. დიამეტრი შეუთავსეთ Ox ღერძს. 587. $I_x = I_y = 2\pi$; $I_0 = 4\pi$.
588. $I_x = \frac{\sqrt{5}}{6}$; $I_y = \frac{\sqrt{5}}{24}$; $I_0 = \frac{5\sqrt{5}}{24}$. 589. $\left(\frac{4a}{3};\ \frac{4a}{3}\right)$. 590.
$\left(0;\ \frac{2a}{\pi};\ \frac{b\pi}{2}\right)$. 591. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$. 592. πa^2. 593. mFR. 594.
$mg(z_1 - z_2)$. 595. $4\sqrt{61}$. 596. 9. 597. $\frac{\pi R^3}{4}$. 598. $\frac{4}{3}\pi a^4$.
599. $\frac{14\sqrt{2}\,\pi}{3}$. 600. $\frac{13\pi}{3}$. 601. $\frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}$. 602.
$2\pi \operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. 603. $\frac{3}{4}$. 604. π^2R^3. 605. $\frac{\pi h^4}{\sqrt{2}}$. 606. $\frac{\pi a^4}{3}$. 607.
$\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$. 608. $\left(0;\ 0;\ \frac{a(25\sqrt{5}+1)}{10(5\sqrt{5}-1)}\right)$. 609. $\frac{\pi R^4}{2}$. 610.

$\frac{4}{3}\pi R^3$. **611.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **612.** $-\frac{2\pi a^7}{105}$. **613.** 8. მითითება.

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+\Theta(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz+$ $+\iint\limits_{D_{zx}}\Theta[x,y(x,z),z]dzdx+\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$. **614.** $\frac{1}{8}$. **615.** $\frac{\pi a^4}{2}$.

616. $HR^2\left(\frac{2R}{3}+\frac{H\pi}{8}\right)$. **617.** $3\iiint\limits_V dxdydz$. **618.** $2\iiint\limits_V (x+y+$ $+z)dxdydz$. **619.** 0. **620.** $\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)dxdydz$. **621.**

$\frac{a^3}{2}$. **622.** $3a^4$. **623.** $\frac{12}{5}\pi a^3$. **624.** $4\pi abc$. **625.** $\frac{1}{6}$. **626.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

627. $-\iint\limits_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds$. **628.** $2\iint\limits_S[(y-z)\cos\alpha+(z-$ $-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma)]ds$. **629.** 0. **630.** $-\frac{\pi a^6}{8}$. **631.** $-a^3$. მითითება. ორჯერადი ინტეგრალი შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერ ზედაპირზე, რომელიც ABC სამკუთხედის პერიმეტრზე გადის. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ $x+y+z=a$ სიბრტყე. **632.** $-\pi$.

III თავი

635. $\frac{1}{2n-1}$. **636.** $\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$. **637.** $\frac{n}{2^{n-1}}$. **638.** $\frac{1}{n(n+1)}$. **639.** $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **640.** $\frac{n}{100n+1}$. **641.** $\frac{2n}{3n+2}$. **642.** $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdots(3n-2)}$.

643. $\frac{1}{2}+\frac{8}{3}+\frac{27}{4}+\frac{64}{5}+\ldots$ **644.** $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\ldots$ **645.** $-\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\ldots$ **646.** $\frac{a}{1^k}-\frac{a^2}{2^k}+\frac{a^3}{3^k}-\frac{a^4}{4^k}+\ldots$ **647.** $\frac{1}{2}+$ $+\frac{4}{24}+\frac{36}{720}+\ldots$ **648.** $(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2})+(\sqrt[3]{9}-\sqrt{5})+(\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{10})+\ldots$

649. კი. **650.** კი. **651.** არა. **652.** არა. **653.** კი. **654.** კი. **655.** 1. **656.** $\frac{3}{4}$. **657.** $\frac{1}{2}$. **658.** $\frac{1}{3}$. **659.** $\frac{7}{24}$. **660.** $\frac{1}{4}$. **661.** $\frac{5}{2}$. **662.** $\frac{3}{4}$.

663. $\frac{3}{2}$. **664.** 1. **665.** კრებადია. **666.** კრებადია. **667.** კრებადია. **668.** კრებადია. **669.** განშლადია. **670.** განშლადია. **671.** კრებადია. **672.** განშლადია. **673.** განშლადია. **674.** კრებადია. **675.** კრებადია. **676.** განშლადია. **677.** განშლადია. **678.** განშლადია. **679.** კრებადია. **680.** კრებადია. **681.** განშლადია. **682.** კრებადია. **683.** კრებადია. **684.** კრებადია. **685.** კრებადია. **686.** კრებადია. **687.** განშლადია. **688.** განშლადია. **689.** კრებადია. **690.** კრებადია. **691.** განშლადია. **692.** განშლადია. **693.** კრებადია. **694.** კრებადია. **695.** კრებადია. **696.** განშლადია. **697.** განშლადია. **698.** განშლადია. **699.** კრებადია. **700.** კრებადია. **701.** კრებადია. **702.** კრებადია. **703.** განშლადია. **704.** განშლადია. **705.** კრებადია. **706.** კრებადია. **707.** კრებადია. **708.** კრებადია. **709.** განშლადია. **710.** განშლადია. **711.** კრებადია. **712.** განშლადია. **713.** განშლადია. **714.** კრებადია. **715.** განშლადია. **716.** კრებადია. **717.** კრებადია. **718.** განშლადია. **719.** კრებადია. **720.** კრებადია. **721.** განშლადია. **722.** კრებადია. **723.** კრებადია. **724.** კრებადია. **725.** აბსოლუტურად კრებადია. **726.** აბსოლუტურად კრებადია. **727.** აბსოლუტურად კრებადია. **728.** აბსოლუტურად კრებადია. **729.** პირობით კრებადია. **730.** პირობით კრებადია. **731.** განშლადია. **732.** განშლადია. **733.** აბსოლუტურად კრებადია. **734.** აბსოლუტურად კრებადია. **735.** პირობით კრებადია. **736.** პირობით კრებადია. **737.** 0,62. **738.** 0,11. **739.** კრებადია. **740.** განშლადია. **741.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$; კრებადია. **742.** $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots$; $S=\frac{4}{3}$. **743.** $1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ldots+\frac{n}{7^{n-1}}+\ldots$; $S=\frac{49}{36}$. **744.** $1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+\ldots$; კრებადია. **745.** $\frac{1}{e}<x<e$. **746.** $0<x<+\infty$. **747.** $0\leqslant x<+\infty$. **748.** $-\infty<x<+\infty$. **749.** $-\infty<x<+\infty$. **750.** $-2<x<2$. **751.** განშლადია ყველგან. **752.** კრებადია, როცა $x\neq 0$. **753.** $-\sqrt{3}<x<-1$, $1<x<\sqrt{3}$. **754.** $|x|<1$. **765.** $n\geqslant 9$. **766.** $n\geqslant 11$. **767.** $-1<x<1$. **768.** $-1<x<1$. **769.** კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილზე. **770.** $-2<x<2$. **771.** $-3\leqslant x<3$. **772.** $-10\leqslant x<10$. **773.** $-\infty<x<+\infty$. **774.** $-\infty<x<+\infty$. **775.** $-2\leqslant x<2$. **776.** $-0,1\leqslant x<0,1$. **777.** $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$. **778.** $-1\leqslant x<1$. **779.** $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. **780.** $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. **781.** $-1<x<1$. **782.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **783.** $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. **784.** $(-\sqrt[3]{3e}$;

$\sqrt[3]{3e}$). 785. $-5\leqslant x<3$. 786. $-2\leqslant x<8$. 787. $-1\leqslant x<0$. 788. $0\leqslant x<4$. 789. $\frac{1}{3}$. 790. 3. 791. 2. 792. 1. 793. e. 794. 4. 795. $S(x)=-\ln(1-x)$; $-1\leqslant x<1$. 796. $S(x)=\operatorname{arctg}x$; $-1\leqslant x\leqslant 1$. 797. $S(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$; $|x|<1$. 798. $S(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; $|x|<1$. 799. $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$; $|x|<1$ 800. $S(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $|x|<1$. 801. $S(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$; $|x|<1$. 802. $S(x)=\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; $|x|<1$. 803. 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ხარისხოვანი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$ და შემდეგ მიიღეთ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\right)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ხარისხოვანი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n-2}}{3n-2}$ და შემდეგ მიიღეთ $x=1$. 804. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$. 805. $\frac{\pi}{8}$. 806. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 807. $\frac{1}{2}$. 808. 0,2. 809. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$; $(-\infty,+\infty)$. 810. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$; $(-\infty,+\infty)$. 811.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}$. 812. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}$. 813. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{2^n n!}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}$. 814. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$. 815. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$. 816. 1) $-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3$; 2) $-16(x+2)+20(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$. 817. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\dots$

818. $1+x+\frac{x^2}{2}+\dots$ 819. $1+x+\frac{x^2}{2}+\dots$ 820. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots$

821. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$. 822. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$. 823. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. 824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$. 825. $x+x^2+\frac{x^3}{3}+\dots$ 826. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\dots$

827. $1-x^2+\frac{x^4}{3}-\dots$ 828. $x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{23}{45}x^6-\frac{44}{105}x^8$. 829. $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^6+\dots$ 830. $2+\frac{x}{2^2\cdot3\cdot1!}-\frac{2x^2}{2^5\cdot3^2\cdot2!}+\frac{2\cdot5x^3}{2^8\cdot3^3\cdot3!}-\dots$ 831. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$. 832. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$.

833. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n(x^{2n}-1)}{n}$. 834. $\ln2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2^{-n}\right)\frac{x^n}{n}$. 835. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n2}{3}x^n$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული წილადი დაშალეთ უმარტივესი წილადების ჯამად. 836. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n2^{n+1}]x^n$. 837. $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\frac{1}{x}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)}$. 838. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$. 839. $e^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{n!}$. 840. $2\left[1+\frac{x-4}{2^3\cdot1!}-\frac{(x-4)^2}{2^6\cdot2!}+\frac{1\cdot3(x-4)^3}{2^9\cdot3!}-\frac{1\cdot3\cdot5(x-4)^4}{2^{12}\cdot4!}+\dots\right]$. მ ი თ ი თ ე ბ ა.

$$\sqrt{x}=\sqrt{4+(x-4)}=2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}=2\left(1+\frac{x-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 841. $x-$

$-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots;\ |x|\leqslant 1$. 842. $x+\frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{x^7}{7}+\dots;$ $|x|<1$. 843. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots;\ |x|<1$. 844. $x-\frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{x^7}{7}+\dots;\ |x|\leqslant 1$. 845. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$;

$(-\infty<x<+\infty)$. 846. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$; $(-\infty<x<+\infty)$;

2) $-\frac{1}{x}+\ln|x|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)\cdot n!}$; $(-\infty<x<0)$, $(0<x<+\infty)$. 847.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+12}}{(2n+1)^2}$; $|x|\leqslant 1$. 848. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$; $|x|\leqslant 1$. 849.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$; $|x|<1$. 850. $x+\frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^9}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{x^{13}}{13}+\dots;$
$|x|<1$. 851. 1,39. 852. 7,27. 853. 1) 0,996; 2) 9.5; 3) 5,07; 4) 0, 999. 854. 1) 1.0025; 2) 4,8; 3) 4,125; 4) 2.1. 855. 1) 0,319; 2) 0,978. 856. 1) 0,173; 2) 0,966. 857. 1) 0.6931; 2) 1,0984; 3) 1,3862; 4) 1,7915. მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა: $\frac{1+x}{1-x}=$

$=\frac{n+1}{n}$, აქედან $x=\frac{1}{2n+1}$; როცა $n=0$, მაშინ $0<x<1$, ამიტომ

გვექნება: $\ln(n+1)=\ln n+\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]$.

858. $\ln 5\approx 1,6093$; $\ln 10\approx 2,3024$. 859. $\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\right.$

$\left.-\frac{1}{7}+\dots\right)$. 860. 3.14. 861. 1,92. 862. 0.76. 863. $\frac{23}{30}$. 864.
$\frac{71}{144}$. 865. $\frac{159}{320}$. 866. $\frac{513}{2048}$. 867. $-1-2(x-1)+(y+1)-$
$-(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(x-1)^2(y+1)$. 868. $9+11(x-1)+8(y-2)+$
$+3(x-1)^2+8(x-1)(y-2)+2(y-2)^2+(x-1)^3+2(x-1)(y-2)^2$. 869.
$1+2(y-1)+(x-2)(y-1)+(y-1)^2+\dots;\ \approx 1,22$. 870. $1-\frac{1}{2}\left[x+\right.$

$+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\Big]^2+\dots$ 871. $x-(y+1)-\frac{x^2}{2}+x(y+1)-\frac{(y+1)^2}{2}+\dots$

872. $y-(x-1)y+\dots$ 873. $1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+\frac{1}{3!}(x^3-3xy^2)+\dots$

874. $1+x+xy+\dots$ 875. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$. 876. $\frac{\pi^2}{3}+$
$+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. 877. $-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. 878.
$\frac{4c}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. 879. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+$
$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$. 880. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\right.$
$\left.+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+3\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\right.$
$\left.+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$. 881. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 882. $\frac{2}{\pi}-$
$-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. 883. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$.

884. $\frac{2sh\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin nx}{a^2+n^2}$. 885. $-\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}$.

886. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2+1}-\frac{n\sin nx}{n^2+1}\right)\right]-1$. 887. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

888. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. 889. $shl\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\right.$
$\left.\times\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$. 890. $\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\dots\right)+$
$+\frac{l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l}+\dots\right)$. 891. $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\dots\right)-$

$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1}+\frac{\sin 2\pi x}{2}+\dots\right)$. **892.** $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$. მითითება. მოცემული შუალედი ასე ჩავწეროთ: (5; 5+10), მისი სიგრძე $2l=10$, საიდანაც $l=5$. ინტეგრების საზღვრები იქნება 5 და 15. **893.** $\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\dots\right)$. **894.** $-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{2^2-1^2}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\dots\right)$. **895.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi}{(2n-1)^3}$; $S=\frac{\pi^3}{32}$. მითითება. დაუშვით, რომ $x=\frac{\pi}{2}$. **896.** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **897.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\times\sin\alpha x\,d\alpha$. **898.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$. **899.** $\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\,d\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

900. $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{(\pi-2x)\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\,d\alpha$. **901.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}\,d\alpha$.

902. $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha$. **903.** $\frac{2i\sin\pi\alpha}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha^2)}$. მითითება. $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა ეწოდება $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt$ ფუნქციას. **904.** $\frac{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha^2)}$. **905.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin\alpha}{\alpha}\left(2\cos\alpha-\frac{2i}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}\right)$.

906. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i}{\alpha}\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$.

IV თავი

913. $xy'-y=0$. **914.** $x+yy'=0$. **915.** $y-2xy'=0$. **916.** $y=xy'+y'^2$. **917.** $xy'-y\ln y'=0$. **918.** $y=xy'\ln\frac{x}{y}$. **919.** $2yy''-y'^2=0$. **920.**

$y''-y'-2y=0$. **921.** $y''=0$. **922.** $y'''=0$. **923.** $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$. **924.** $(xy'-y)^2+2sy'=0$. **929.** $y(1)=1{,}2479$. **930.** $y(1)=2{,}593$. **931.** $y(1)=3{,}188$. **932.** $y(1)=1{,}826$. **933.** $x^2+y^2=C^2$; $x^2+y^2=4$. **934.** $y=x^3-x^2+x+C$; $y=x^3-x^2+x+1$. **935.** $y=Cx$; $y=4x$. **936.** $y=Ce^x$; $y=4e^{x+2}$. **937.** $(1-x)(1+y)=C$. **938.** $x^2(1+y^2)=C$. **939.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **940.** $y=C\sin x$. **941.** $\arcsin x+\arcsin y=C$. **942.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. **943.** $\frac{x+t}{xt}+\ln\frac{x}{t}=C$. **944.** $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$. **945.** $r=Ce^{\frac{1}{\varphi}}+a$. **946.** $\sin^2\varphi+\sin^2\Theta=C$. **947.** $\operatorname{tg}y=C(1-e^x)^3$. **948.** $\operatorname{tg}x\times\operatorname{tg}y=C$. **949.** $y=e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; $y=1$. **950.** $\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$; $y^2-1=2\ln\frac{1+e^x}{1+e}$. **951.** $2y=C\sin^2x-1$; $y=2\sin^2x-\frac{1}{2}$. **952.** $10^x+10^{-y}=C$. **953.** $x^2y=Ce^y$. **954.** $y=x-\frac{1}{x-C}$. მითითება. აღნიშნეთ $x-y=u$. **955.** $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)$. **956.** $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$. მითითება. აღნიშნეთ $8x+2y+1=u$. **957.** $\ln x-\frac{x}{y}=C$. **958.** $y=x\ln\frac{C}{x}$. **959.** $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C$. **960.** $y=x\ln\frac{y}{C}$. **961.** $1+2Cy-C^2x^2=0$. **962.** $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. **963.** $\sin\frac{y}{x}=\ln\frac{C}{x}$. **964.** $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$. **965.** $y-x=Ce^{\frac{y}{y-x}}$. **966.** $y=xe^{1+Cx}$. **967.** $x^3=C(y^2-x^2)$; $3x^3=8(x^2-y^2)$. **968.** $y=x\sqrt{C+2\ln|x|}$; $y=x\sqrt{2\ln|x|}$. **969.** $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$; $\sqrt{x^2+y^2}=e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$. **970.** $y=\frac{2x}{1-Cx^2}$; $y=\frac{2x}{1-3x^2}$. **971.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **972.** $\ln|3x-4y+1|=x-y+C$. **973.** $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$. **974.** $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$. **975.** $\ln|2x-3|-\frac{4y+5}{2x-3}=C$. **976.** $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **977.** $y=Cx+x^2$. **978.** $y=e^{-x}(C+x)$. **979.** $y=$

$=\sqrt{1+x^2}\cdot(C+\sqrt{1+x^2})$. **980.** $y=\frac{C}{x^2}+\frac{x^4}{6}$. **981.** $y=x^n(C+e^x)$. **982.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{2}{3}x^3\right)$. **983.** $y=\frac{1}{\cos x}\left(C+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)$. **984.** $y=C(x+1)^2+\frac{(x+1)^4}{2}$. **985.** $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}+1$; $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$. **986.** $y=\frac{C}{x^2}+x$; $y=\frac{8}{x^2}+x$. **987.** $y=\frac{C+x}{\cos x}$; $y=\frac{x}{\cos x}$. **988.** $y=\frac{C}{x}+x\ln x$; $y=x\ln x$. **989.** $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$; $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$. **990.** $y=C\sqrt{1-x^2}+x$; $y=\sqrt{1-x^2}+x$. **991.** $y^2-2x=Cy^3$. **992.** $x=y^2\left(Ce^{\frac{1}{y}}+1\right)$. **993.** $y^2(Ce^{x^2}+1)=1$. **994.** $y\left(C+\frac{x^7}{7}\right)=x^3$. **995.** $y=x^4\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right)^2$. **996.** $y^n=Ce^{-x}+x-1$. **997.** $y^3(Ce^{\cos x}+3)=1$. **998.** $y(Cx+\ln x+1)=1$ **999.** $y=\frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$; $y=\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}$. **1000.** $y=\sqrt{C\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$; $y=\sqrt{2\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$. **1001.** $x^2y^2+1=Cy$. **1002.** $x^{-1}=Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2$. **1003.** $7x^2+6xy-5y^2=C$. **1004.** $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$. **1005.** $x^3e^y-y=C$. **1006.** $xe^y-y^2=C$. **1007.** $x^2+\cos^2y+y^2=C$. **1008.** $\frac{x^2}{2}\cos 2y+x=C$. **1009.** $x^y=C$. **1010.** $\ln|x+y|+\frac{y}{x+y}=C$. **1011.** $x+y+\frac{y}{x}=C$; $x+y+\frac{y}{x}=3$. **1012.** $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=C$; $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$. **1013.** $u=x^4-2x^2y^2+y^4+C$. **1014.** $u=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$. **1015.** $u=\frac{x^2}{2}+x\ln y-\cos y+C$. **1016.** $u=\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1017.** $u=x^3+3xy-x+yz^2+z+C$. **1018.** $u=xyz-x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}+C$. **1019.** $u=x\ln y-x\cos 2z+yz+C$. **1020.** $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C$. **1021.** $2xe^x-y^2e^x=C$. **1022.** $e^{-y}\cos x=x+C$. **1023.** $x+$

$+\frac{y}{x}+\frac{y^3}{3}=C$. **1024.** $x\sin y+y\ln x=C$. **1025.** $x^2y+\frac{1}{y}=C$. **1026.** $\frac{x}{\sin y}+x^3=C$. **1027.** $\frac{\ln x}{y}+\frac{y^2}{2}=C$. **1028.** $y\cos x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x=C$. **1029.** $y+C\pm\ln|x+\sqrt{x^2-1}|=0$. **1030.** $15y+C=\pm[6\sqrt{(1-x)^5}-10\sqrt{(1-x)^3}]$. **1031.** $x=2p-\frac{1}{p^2}$, $y=p^2-\frac{2}{p}+C$. **1032.** $x=\sin p+\ln p$, $y=p\sin p+\cos p+p+C$. **1033.** $x=ap+bp^2$, $6y=3ap^2+4bp^3+C$. **1034.** $x=e^p+p$. $y=e^p(p-1)+\frac{p^2}{2}+C$. **1035.** $x=C-\ln|e^y-1|$. **1036.** $x=\pm\frac{1}{2}(\arcsin y-y\sqrt{1-y^2})+C$. **1037.** $x=2p+\frac{3}{2}p^2+C$, $y=p^2+p^3$. **1038.** $x=2p-\frac{2}{p}+C$, $y=p^2+2\ln p$. **1039.** $x=\frac{1}{2}\ln^2p+\ln p+C$, $y=p\ln p$. **1040.** $x=e^p(p+1)+C$, $y=p^2e^p$. **1041.** $(x^2-2y+C)\cdot(x+y-1-Ce^{-x})=0$. **1042.** $(xy-C)\cdot(x^2y-C)=0$. **1043.** $(\sqrt{y}-C)^2-\frac{x^3}{9a^2}=0$. **1044.** $\left(y-\frac{c}{1+\cos x}\right)\left(y-\frac{c}{1-\cos x}\right)=0$.

1045. 1) ზოგადი ამონახსნი $y=Cx^2$ წარმოადგენს იმ პარაბოლების ოჯახს, რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეშია. გარდა ამისა, განტოლებას აქვს კიდევ ინტეგრალური წირი $x=0$. კოორდინატთა სათავეზე როგორც $f(x, y)=\frac{2y}{x}$, ასევე $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{x}$ განიცდის წყვეტას. ასეთ განსაკუთრებულ წერტილს *კვანძითი წერტილი* ეწოდება; 2) $y=Cx(x\neq0)$ — ნახევარწრფეთა ოჯახი. $O(0; 0)$ წერტილი წარმოადგენს კვანძით წერტილს. **1046.** $x^2+y^2=C^2$ — წრეწირთა ოჯახი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში). თვით განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი. ასეთ წერტილს ეწოდება ცენტრი. **1047.** $xy=C$ — ჰიპერბოლების ოჯახი. როცა $C=0$, მივიღებთ საკოორდინატო ღერძებს $x=0$, $y=0$. ეს წირები გადის სათავეზე. დანარჩენი წირები განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის. ასეთი სახის განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება *უნაგირა წერტილი*. **1048.** $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$; პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ $r=Ce^{\varphi}$. $O(0; 0)$ განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება *ფოკუსი*. **1049.** $y-1=(x-C)^2$; $y=1$. **1050.** $y^3=(x+C)^2$; განსაკუთრებული ამონახსნი არა აქვს. $y=0$ წრფე არის მიღებულ წირთა ოჯახის

უკუქცევის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. **1051.** $(x-C)^2+y^2=a^2$; $y=\pm a$. **1052.** $(x+\sqrt{2}C)^2+y^2=C^2$; $y=\pm x$. **1053.** $y=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$. **1054.** $y=1-\frac{x^2}{4}$; $y=x-\frac{x^2}{4}$. **1055.** $x=\frac{C}{p^2}+\frac{2p}{3}$, $y=\frac{2C}{p}+\frac{p^2}{3}$. **1056.** $x=\frac{C+\ln p}{p^2}$, $y=\frac{2}{p}(C+\ln p)+\frac{1}{p}$. **1057.** $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$. **1058.** $x=\frac{1}{p^2}(C-p\sin p-\cos p)$, $y=2xp+\sin p$. **1059.** $y=(C+\sqrt{x+1})^2$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნი. **1060.** $Cy=(x-C)^2$; $y=0$ და $y=-4x$ — განსაკუთრებული ამონახსნები. **1061.** $y=Cx+C^2$; $y=-\frac{x^2}{4}$. **1062.** $y=Cx+\frac{1}{C}$; $y^2=4x$. **1063.** $y=Cx-a\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=a^2$. **1064.** $y=Cx+\frac{1}{2C^2}$; $y^3=\frac{27}{8}x^2$. **1065.** $y=Cx+C-C^2$; $y=\frac{(x+1)^2}{4}$. **1066.** $y=Cx+C+e^C$; $y=(x+1)\ln|-x-1|-x-1$. **1067.** $2x^2+y^2=C$. **1068.** $x^2-y^2=C$. **1069.** $y=Cx$. **1070.** $2x^2+3y^2=C$. **1071.** $y=Cx^2$. **1072.** $x^2+y^2-2Cx=0$. **1073.** კონფოკალური ჰიპერბოლები. **1074.** $x^2+y^2=2a^2\ln Cx$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული ელიფსების ოჯახის განტოლებაა $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, სადაც a მუდმივია, ხოლო b — ცვლადი პარამეტრი. **1075.** $r=2C\cos\varphi$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. როცა წირთა ოჯახი მოცემულია პოლარული კოორდინატებით $F(r,\varphi,a)=0$ და $\Phi(r,\varphi,r')=0$ არის ამ ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისად არის: $\Phi\left(r,\varphi,-\frac{r^2}{r'}\right)=0$, $\Phi\left(r,\varphi,\frac{r'+kr}{r-kr'}r\right)=0$ $(k=\operatorname{tg}\alpha)$.

1076. $r=c(1-\cos\varphi)$. **1077.** $\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, ან პოლარულ კოორდინატებში: $r=Ce^{\frac{\varphi}{k}}$. **1078.** $r=C$. **1079.** $x=-\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}+2p$, $y=p^2-\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}-2$. **1080.** $x=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left[C+\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{p^2+1}+1}{p}-\right.\right.$

$-\frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2}\Big)\Big]$, $y=-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\Big[C+\frac{h}{2}\Big(\ln\frac{\sqrt{p^2+1}+1}{p}-\frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2}\Big)\Big]-$ $-\frac{h}{2p^2}$. **1081.** $x=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Big[C+a\Big(\frac{1}{p}+\operatorname{arc\,tg} p\Big)\Big]$, $y=-$ $-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\Big[C+a(\operatorname{arctg}p-p)\Big)\Big]$. **1082.** $x=-\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{2p^2}$,

$y=\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{p}$. **1083.** $y=Cx$ და $y=\frac{C}{x}$. **1084.** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$. **1085.** $(x-y)^2-Cy=0$. **1086.** $y^2=2x^2\ln\frac{C}{x}$. **1087.** $x^2+y^2=a^2(x-C)^2$. **1088.** $y=\frac{x}{2}\Big[\Big(\frac{C}{x}\Big)^a-\Big(\frac{x}{C}\Big)^a\Big]$. **1089.** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. **1090.** $x^2=$ $=C(2y+C)$. **1091.** $2Cx=y^2-C^2$. **1092.** 1), 2) $xy=6$. **1093.** $y=$ $=\frac{x}{2}\Big(Ce^{\frac{a}{x}}-\frac{1}{C}e^{-\frac{a}{x}}\Big)$. **1094.** $y^2=4ax+4a^2\Big(1-e^{\frac{x}{a}}\Big)$. **1095.** $y=$ $=Cx^2+\frac{2a^2}{3x}$. **1096.** $Cy^2-xy+2=0$; $3y^2+2xy-4=0$. **1097.** $y^2=$

$=Cx$; $y^2=8x$. **1098.** $y=\frac{1}{2C}\Big(C^2e^{\pm\frac{x}{a}}+a^2e^{\mp\frac{x}{a}}\Big)$, $y=\frac{a}{2}\Big(e^{\pm\frac{x}{a}}+$ $+e^{\mp\frac{x}{a}}\Big)$. **1099.** $\approx 3{,}9$ კგ. **1100.** $x=Ce^{-\frac{bt}{a}}$, სადაც x-ით აღნიშნულია მარილის რაოდენობა ჭურჭელში მოცემული t მომენტისათვის. **1101.** $t\approx 10$ წამს. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ხვრელიდან გამოსული წყლის სიჩქარე გამოითვლება $V=0{,}6\sqrt{2gh}$ სმ/წმ ფორმულით, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო h — მანძილი წყლის ზედაპირიდან ხვრელამდე. **1102.** $t=\frac{D^2\sqrt{H}}{0{,}3a^2\sqrt{2g}}$; $t\approx 5$ წუთს და 56 წამს. **1103.** $y=$ $=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$; $y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}$. **1104.** $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$; $y=-\cos 2x+1$. **1105.** $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$; $y=-\ln|\cos x|$. **1106.** $y=3\ln x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=3\ln x+2x^2-6x+6$. **1107.** $y=-$

$-e^{-x}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x+1$. **1108.** $y=\frac{1}{8}e^{2x+1}+$ $+C_1x^2+C_2x+C_3$. **1109.** $y=\cos x+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$. **1110.** $y=$ $=\ln|\sin x|+C_1x^2+C_2x+C_3$. **1111.** $y=\frac{x^3}{6}\ln x-\frac{11x^3}{36}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

1112. $\left(y-\frac{x^2}{2}-C_1x-C_2\right)\cdot(y-x^2-C_1x-C_2)=0$. **1113.** $x=p^3+1$; $y=\frac{9}{28}p^7+C_1p^3+C_2$. **1114.** $x=e^p+p$; $y=\left(\frac{1}{2}p-\frac{3}{4}\right)e^{2p}+\left(\frac{1}{2}p^2-\right.$ $\left.-1+C_1\right)e^p+\frac{p^3}{6}+C_1p+C_2$. **1115.** $y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$. **1116.** $y=$ $=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. **1117.** $y=\frac{1}{2}\ln^2x+C_1\ln x+C_2$. **1118.** $y=C_1\sin x-$ $-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$. **1119.** $y=\frac{C_1}{3}x^3+C_1x+C_2$; $y=x^3+3x+1$. **1120.** $y=\ln(x^2+2C_1)+C_2$; $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$. **1121.** $y=C_1x\ln x+C_2x+C_3+\frac{x^3}{4}+$ $+\frac{x^3}{4}$. **1122.** $y=\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3-C_1^2(x+C_1)[\ln(x+C_1)-1)]$. **1123.** $12y=(x+C_1)^3+C_2$. **1124.** $y=-C_1e^{-x}+C_2x^2+C_3x+C_4$. **1125.** $y=$ $=\frac{1}{3}\left(1-2x\right)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$. **1126.** $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$. **1127.** $y^2=$ $=C_1x+C_2$; $y=C$. **1128.** $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|+C_2$; $y=C$. **1129.** $(x+C_2)\times$ $\times(y-1)=C_1$. **1130.** $\frac{3}{2}C_1x+C_2=\left(C_1y-1\right)^{\frac{3}{2}}$. **1131.** $y=\frac{(x+9)^2}{16}$.

1132. $y=x+1$. **1133.** $y=C_2e^{C_1x^2}$. **1134.** $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$. **1135.** $\ln y=$ $=C_1[x^2+x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]+C_2$. **1136.** $y=C_2\sqrt{C_1+x^2}$. **1137.** $y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$. ამოხსნა: $\frac{y''}{y'}=\frac{2y'}{y}$, $\frac{1}{y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy'}{y'}=$ $=2\frac{dy}{y}$, $\ln y'=2\ln y+\ln C_1$, $y'=C_1y^2$, $\frac{dy}{dx}=C_1y^2$, $\frac{dy}{y^2}=C_1dx$, $-\frac{1}{y}=$

$=C_1x+C_2$, $y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$. **1138.** $\operatorname{arctg} y=C_1x+C_2$. **1139.** $y=C_2e^{\frac{(x+C_1)^2}{2}}$

1140. $\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|\sqrt{C_1}\,y+\sqrt{C_1y^2+C_2}\right|=x+C_3$. **1141.** $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$. **1142.** $C_1y^2-C_1^2(x-C_2)^2=h$. **1143.** წრფივად დამოუკიდებელია. **1144.** წრფივად დამოუკიდებელია. **1145.** წრფივად დამოკიდებულია. **1146.** წრფივად დამოკიდებულია. **1147.** წრფივად დამოუკიდებელია. **1148.** წრფივად დამოუკიდებელია. **1149.** $x^2y''-2xy'+2y=0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. საძიებელი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=C_1x+C_2x^2$, აქედან $y'=C_1+2C_2x$, $y''=2C_2$. მიღებული სისტემიდან C_1 და C_2 მუდმივების გამორიცხვა მოგვცემს საძიებელ განტოლებას. **1150.** $y''+y=0$. **1151.** $\sin 2x\cdot y''-2\cos 2x\cdot y'=0$. **1152.** $y''-2y'+y=0$. **1153.** $y=3x^2-2x^3$. **1154.** $y=3x-5x^2+2x^3$. **1155.** $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. **1156.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x^4}$. **1157.** $y=C_1x+C_2\ln x$. **1158.** $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$. **1159.** $y=C_2+(C_1-C_2x)\operatorname{ctg} x$. **1160.** $y(1-x)=C_1x+C_2(1-x^2+2x\ln x)$. **1161.** $y=Ax+\frac{B}{x}+\frac{x^2}{3}$. **1162.** $y=Ax+Bx^2+x^3$. **1163.** $y=Ax^2+B+\frac{x^3}{3}$. **1164.** $y=Ae^x+Bx-x^2-1$. **1165.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$. **1166.** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. **1167.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **1168.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$. **1169.** $y=C_1+C_2e^x$. **1170.** $y=C_1+C_2e^{-3x}$. **1171.** $y=C_1e^{-\frac{4x}{3}}+C_2e^{2x}$. **1172.** $x=C_1e^{-4t}+C_2e^t$. **1173.** $y=4e^x+e^{4x}$. **1174.** $y=2e^{\frac{x}{2}}-8e^{-\frac{3}{4}x}$. **1175.** $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$. **1176.** $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{3}{2}x}$. **1177.** $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{4}x}$. **1178.** $y=(C_1+C_2x)\,e^{-\frac{x}{4}}$. **1179.** $y=(2-3x)e^{1-2x}$. **1180.** $y=2xe^{3x}$. **1181.** $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}$. **1182.** $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^{2x}$. **1183.** $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$. **1184.** $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-2x}$. **1185.** $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. **1186.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. **1187.** $y=\sin 2x$. **1188.** $y=(\cos x+2\sin x)e^{-x}$. **1189.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+$

$+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$. **1190.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2+x-3$. **1191.** $y=C_1e^x+$
$+C_2e^{-\frac{x}{3}}-x^2+4x-15$. **1192.** $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+$
$+3x-5$. **1193.** $y=C_1+C_2e^{-x}+3x$. **1194.** $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. **1195.** $y=$
$=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$. **1196.** $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{7x}{25}-\frac{3x^2}{5}+\frac{x^3}{3}$.
1197. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{e^{2x}}{9}$. **1198.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x$. **1199.**
$y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}-3xe^x$. **1200.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+$
$+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$. **1201.** $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$. **1202.** $y=C_1e^{2x}+$
$+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$. **1203.** $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$.
1204. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$. **1205.** $y=C_1\cos x+$
$+C_2\sin x-e^x(2\cos 2x+\sin 2x)$. **1206.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+$
$+2\cos 3x-\sin 3x$. **1207.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$. **1208.** $y=$
$=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$. **1209.** $y=C_1+C_2e^x-x-x^2-3xe^x$.
1210. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$. **1211.** $y=C_1e^x+$
$+C_2e^{-x}-\frac{1}{34}\cos 4x-\frac{1}{10}\cos 2x$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\cos x\cos 3x=$
$=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **1212.** $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$. **1213.**
$y=e^x+x^2$. **1214.** $y=\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$. **1215.** $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$. **1216.**
$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$. **1217.** $y=A\cos x+B\sin x-\cos x\times$
$\times\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1218.** $y=(A+Bx)e^x+xe^x\ln x$. **1219.** $y=(x+B)e^x-$
$-(e^x+1)\ln(e^x+1)+A$. **1220.** $y=A\cos x+B\sin x-x\cos x+\sin x\times$
$\times\ln\sin x$. **1221.** $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. **1222.** $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$. **1223.**

$y=\frac{5}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}$. **1224.** $s=2e^{-\frac{t}{2}}\sin t$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $v=\frac{ds}{dt}$, $w=\frac{d^2s}{dt^2}$. **1225.** $s=\left(1+\frac{t}{2}\right)\sin 2t$. **1226.** $y=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0$. **1227.** $y=1000-490{,}5\,t^2$; $t\approx 1{,}43$ წმ. **1228.** $y=y_0+100t-490{,}5\,t^2$; $t\approx 0{,}1$ წმ.
1229. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$. **1230.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$. **1231.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$. **1232.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$. **1233.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+C_3e^{-3x}$. **1234.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$. **1235.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **1236.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$. **1237.** $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}$. **1238.** $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{2x}$. **1239.** $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{2x}$. **1240.** $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$. **1241.** $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. **1242.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+(C_3+C_4x)e^{-2x}$. **1243.** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x)$. **1244.** $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **1245.** $y=C_1e^x+e^{-2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$. **1246.** $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$. **1247.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. **1248.** $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **1249.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.
1250. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. **1251.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **1252.** $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$. **1253.** $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **1254.** $y=(C_1+C_2x)\times\cos\sqrt{3}\,x+(C_3+C_4x)\sin\sqrt{3}\,x$. **1255.** $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$. **1256.** $y=\left[(C_1+C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+(C_3+C_4x)\times\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]e^{-\frac{x}{2}}$. **1257.** $y=1+\cos x$. **1258.** $y=1$. **1259.** $y=e^x$.
1260. $y=e^x+\cos x-2$. **1261.** $y=C_1e^x+\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}-x^3-5$. **1262.** $y=C_1+C_2x+C_3e^x+\frac{x^3}{2}+x^2$.

1263. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4$. **1264.** $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2$. **1265.** $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)e^x$.
1266. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}$. **1267.** $y=C_1+\left(C_2+C_3x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$. **1268.** $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$. **1269.** $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+(C_3\cos x+C_4\sin x)\times e^x+\frac{\sin 2x}{20}$. **1270.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$. **1271.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)e^x$.
1272. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x+\frac{x^2-3x}{8}e^x-\frac{x\sin x}{4}$. **1273.** $y=A+B\cos x+C\sin x+\sec x+\cos x\cdot\ln|\cos x|-\operatorname{tg}x\sin x+x\sin x$.
1274. $y=A+Bx+Ce^{-x}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+x^2$. **1275.** $y=e^x+x^3$. **1276.** $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x-2$. **1277.** $y=C_1x^2+C_2x^3$.
1278. $y=(C_1+C_2\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. **1279.** $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$.
1280. $y=C_1x^n+C_2x^{-(n+1)}$. **1281.** $y=C_1x+C_2x\ln x+x\ln^2 x$. **1282.** $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^2-\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)x$. **1283.** $y=C_1(x+1)+C_2(x+1)^2$. მითითება. აღნიშნეთ $x+1=u$. **1284.** $y=(x+1)^2\left[C_1+C_2\ln|x+1|\right]+(x+1)^3$. **1285.** $y=e^{\frac{x^2}{2}}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **1286.** $y=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
1287. $y=C_1\frac{e^{ax}}{x}+C_2\frac{e^{-ax}}{x}-\frac{2}{a^2}$. **1288.** $y=C_1\frac{e^x}{x}+C_2\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^x}{2}$. **1289.** $y=2e^x-x-1$. **1290.** $y=-2-2x-x^2$. **1291.** $y=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\dots$ **1292.** $y=xe^{x^2}$. **1293.** $y=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\dots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3k-1)3k}+\dots$

1294. $y=\frac{\sin x}{x}$. 1295. $y=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\dots$ 1296. $y=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\dots$ 1297. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11}{24}x^4+\dots$ 1298. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 9}+\dots$ 1299. $y=1+x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)!}$. 1300. $y=1+\frac{ex^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^2x^4}{4!}+\frac{ex^5}{5!}+\dots$ 1301. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; $z=C_2\cos x-C_1\sin x$. 1302. $y=C_1e^{abx}+C_2e^{-abx}$; $z=-\frac{b}{a}(C_1e^{abx}-C_2e^{-abx})$.

1303. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$; $z=(C_2-C_1-C_2x)e^{-2x}$. 1304. $y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; $z=e^{-6x}[(C_2+C_1)\cos x+(C_2-C_1)\sin x]$. 1305. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{t^2}{2}$; $y=-C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t$. 1306. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$; $y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t$. 1307. $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$; $z=C_2e^{C_1x}$; $y=x-e^x$; $z=e^{-x}$. 1308. $y=C_1C_2e^{C_1x}$; $z=C_2e^{C_1x}$; $y=e^x$; $z=e^x$. 1309. $y=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$; $z=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$. 1310. $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3\cos x+C_4\sin x-2x+e^x$; $z=-C_1e^{\sqrt{2}x}-C_2e^{-\sqrt{2}x}-\frac{C_3}{4}\cos x-\frac{C_4}{4}\sin x+x-\frac{e^x}{2}$. 1311. $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; $y=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; $z=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. 1312. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$; $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$; $z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$. 1313. $x=C_1+3C_2e^{2t}$; $y=-2C_2e^{2t}-\frac{C_3}{2}e^{-t}$; $z=C_1+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$. 1314. $x=-C_1+e^t(C_3\cos t-C_2\sin t)+t^2+2t$; $y=-C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)+t^3-2$; $z=C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)-t^2$.

1315. $y=C_1x;\ z=C_2x$. 1316. $y=C_1x;\ xy=z^2+C_2$. 1317. 1) $\sqrt{y}-\sqrt{x}=C_1;\quad z-\sqrt{x}=C_2$; 2) $y=C_1;\ z=C_2e^{\frac{x}{y}}$. 1318. $x+y+z=C_1;\ x^2+y^2+z^2=C_2$. 1319. $z-x=C_1(y-x);\ (x+y+z)\cdot(x-y)^2=C_2$. 1320. $y^2-z^2=C_1;\ 2x+(z-y)^2=C_2$. 1321. $\frac{dx_1}{dt}=x_2,\ \frac{dx_2}{dt}=-k^2x$, სადაც $x_1=x,\ x_2=\frac{dx}{dt}$. 1322. $y'_1=y_2,\ y'_2=-\frac{y_2}{x}-y_1$, სადაც $y_1=y,\ y_2=y'$. 1323. $y'_1=y_2,\ y'_2=y_3,\ y'_3=y_1$, სადაც $y_1=y,\ y_2=y',\ y_3=y''$. 1324. $y'_1=y_2,\ y'_2=y_3,\ y'_3=y_4,\ y'_4=-x^2y_1$, სადაც $y_1=y,\ y_2=y',\ y_3=y'',\ y_4=y'''$. 1325. $y=C_1+C_2e^{-x};\ z=-2C_1-3C_2e^{-x}$. 1326. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x};\quad z=2C_1e^x+5C_2e^{-2x}$. 1327. $y=C_1e^x+C_2e^{2x};\quad z=-C_1e^x-\frac{3}{2}C_2e^{2x};\ y=e^x-2e^{2x};\ z=-e^x+3e^{2x}$. 1328. $y=C_1e^x+C_2e^{4x};\ z=-\frac{C_1}{2}e^x+C_2e^{4x};\ y=e^{4x};\ z=e^{4x}$. 1329. $x=D_1e^{2t}+3D_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t};\ y=D_1e^{2t}+D_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$. 1330. $y=D_1e^x+D_2e^{2x}-2e^{-x};\quad z=-D_1e^x-\frac{3}{2}D_2e^{2x}+e^{-x}$. 1331. $x=D_1e^{-t}+D_2e^{2t}+D_3e^{-2t};\ y=D_1e^{-t}+D_2e^{2t}-D_3e^{-2t};\quad z=-D_1e^{-t}+2D_2e^{2t}$. 1332. $x=D_1+D_2e^t+D_3e^{2t};\ y=\frac{3}{2}D_1-2D_3e^{2t};\quad z=\frac{1}{2}D_1+D_2e^t+2D_3e^{2t}$. 1333. $x=-2D_1e^t-8D_2e^{2t}-3D_3e^{3t};\ y=D_1e^t+3D_2e^{2t}+D_3e^{3t};\ z=2D_1e^t+7D_2e^{2t}+3D_3e^{3t}$. 1334. $x=D_2e^{-3t}-D_3e^{3t};\quad y=D_1e^{-t}-2D_2e^{-3t}+D_3e^{3t};\ z=-D_1e^{-t}-D_2e^{-3t}$.

V თავი

1335. $\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. 1336. $\begin{pmatrix}-2 & -8 & -2\\ -4 & 0 & -6\end{pmatrix}$. 1337. $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$. 1338. $\begin{pmatrix}5 & 5 & 7\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$. 1339. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 6\\ 2 & 8\end{pmatrix}$. 1340. $\begin{pmatrix}-4 & -8 & -4\\ -2 & 8 & -10\end{pmatrix}$. 1341. $\begin{pmatrix}11 & 16\\ 16 & 22\end{pmatrix}$.

1342. $\begin{pmatrix}0 & -7\\ 0 & 7\end{pmatrix}$. 1343. $\begin{pmatrix}22\\ 29\end{pmatrix}$. 1344. $\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}$. 1345. $\begin{pmatrix}12 & 21\\ 10 & 15\\ 32 & 51\end{pmatrix}$. 1346. $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. 1347. $AB=\begin{pmatrix}0 & -7\\ 10 & 23\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 14 & 21\end{pmatrix}$. 1348. $AB=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1349.** $AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $BA=(16)$.

1350. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1351.** $\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$. **1352.** $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}$.

1353. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{pmatrix}$. **1354.** $AE=EA=A$. **1355.** $AB=BA=$

$=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. **1356.** $AB=BA=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1357. $AB=BA=42\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1358.** $AB=BA=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1359. $(AB)C=A(BC)=(51 \;\; 6 \;\; 14)$. **1360.** $A(B+C)=AB+AC=(9 \;\; 30)$.

1361. $(AB')=B'A'=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$. **1362.** $(AB)'=B'A'=\begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$.

1363. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. **1364.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. **1365.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1366. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. **1367.** 1) 3; 2) 2. **1368.** 1) 3; 2) 2.

1369. 2. **1370.** 2. **1371.** 3. **1372.** 2. **1373.** 2. **1374.** 3. **1375.** 2. **1376.** 3. **1377.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **1378.** $x=8$, $y=4$, $z=2$. **1379.** $x=\frac{53}{22}$, $y=-\frac{41}{44}$, $z=\frac{9}{4}$. **1380.** $x=3$, $y=-1$, $z=0$. **1381.** $x=1$, $y=3$, $z=6$. **1382.** $x=3$, $y=-2$, $z=-5$. **1383.** $x=\frac{11-z}{5}$, $y=\frac{2(z-1)}{5}$, სადაც z ნებისმიერია. **1384.** $x=\frac{11-7z}{7}$, $y=\frac{1+7z}{7}$, სადაც z ნებისმიერია. **1385.** $x=\frac{57-z}{26}$, $y=\frac{8z-1}{13}$, სადაც z ნებისმიერია. **1386.** $x=\frac{4+10z}{11}$, $y=\frac{19-13z}{11}$, სადაც z ნებისმიერია.

1387. არათავსებადია. **1388.** არათავსებადია. **1389.** $x''=15x+7z$, $y''=6x-4y+24z$, $z''=33x-14y+23z$. **1390.** $x''=10x+5y+5z$, $y''=x-37y+5z$, $z''=14y-2z$. **1391.** $x''=3x+3y+7z$, $y''=-x+8y-3z$, $z''=4x-9y+9z$. **1392.** $x''=23x-22y-12z$, $y''=2x-9y+8z$, $z''=-5x-y=32z$. **1393.** $x=\frac{8}{35}x'+\frac{1}{7}y'+\frac{1}{35}z'$, $y=-\frac{6}{35}x'+\frac{1}{7}y'+\frac{8}{35}z'$, $z=-\frac{1}{7}x'+\frac{2}{7}y'-\frac{1}{7}z'$. **1394.** $x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{33}y'+\frac{1}{11}z'$, $y=-\frac{5}{3}x'-\frac{7}{33}y'+\frac{2}{11}z'$, $z=x'+\frac{3}{11}y'-\frac{1}{11}z'$. **1395.** $x=\frac{17}{5}x''-\frac{21}{5}y''+\frac{36}{5}z''$, $y=-2x''+\frac{8}{5}y''-\frac{13}{5}z''$, $z=-8x''+7y''-12z''$. **1396.** $x=\frac{71}{120}x''+\frac{37}{120}y''-\frac{13}{40}z''$, $y=-\frac{43}{20}x''-\frac{21}{20}y''+\frac{27}{20}z''$, $z=-\frac{49}{60}x''-\frac{23}{60}y''+\frac{7}{20}z''$. **1397.** არა აქვს. **1398.** არა აქვს. **1399.** $\lambda=\pm\sqrt{2}$. **1400.** $\lambda_1=20$, $\lambda_2=-5$, $\vec{a}_1(4t,3t)$, $\vec{a}_2(-3t,4t)$, $t\neq 0$. **1401.** $\lambda_1=2$, $\lambda_2=7$; $\vec{a}_1(-t, 2t)$, $\vec{a}_2(2t, t)$, $t\neq 0$. **1402.** საკუთრივი ვექტორებია $\vec{P}_1(0;\ 1)$ და $\vec{P}_4\ (-1;\ -1)$, მათი შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_1=-1$ და $\lambda_2=2$. **1403.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. **1404.** $\vec{e}_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **1405.** $\vec{e}_1\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3\left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$. **1406.** $\vec{e}_1\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\vec{e}_2\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. **1407.** $x'^2+6y'^2=24$. **1408.** $4x'^2+y'^2=4$. **1409.** $4x'^2-y'^2=4$. **1410.** $3x'^2-2y'^2=12$. **1411.** $x''^2+9y''^2=9$. **1412.** $x''^2+6y''^2=\frac{131}{24}$. **1413.** $\sqrt{5}y''^2-6x''=0$. **1414.** $2x''^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y''=0$. **1415.** $x'^2+2y'^2+3z'^2=3$. **1416.** $2x'^2+5y'^2+8z'^2=32$. **1417.** $x'^2+y'^2-2z'^2=-8$. **1418.** $6y'^2+6z'^2-2x'^2=5$. **1419.** $2x''^2+3y''^2+6z''^2=3$. **1420.** $x''^2+y''^2-2z''^2=4$. **1421.** $\sqrt{6}\ z'=2x'^2+3y'^2$. **1422.** $5\sqrt{2}\,z''=2x''^2+5y''^2$.

1423. $5+\frac{11\sqrt{3}}{2}$. 1424. —2. 1425. 1. 1426. 9,4. 1427. $2+\sqrt{2}$. 1428. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1429. $\frac{68}{13}$. 1430. $-\frac{92}{13}$. 1431. 12. 1432. (0; 0) და (1; 1). 1433. (2; 0). 1437. 1) $\frac{\vec{r}}{r}$; 2) $2\vec{r}$; 3) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$. 1438. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad}u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad}v$. 1439. $-2\vec{i}+\vec{j}$. 1440. $2\vec{i}+\vec{j}$. 1441. $\frac{1}{4}(5\vec{i}-3\vec{j})$. 1442. $\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j})$. 1443. 7. 1444. $\sqrt{17+16\ln^2 2}$. 1445. $2\sqrt{3}$. 1446. $\cos\Theta=-\frac{12}{5\sqrt{145}}$. მითითება. $\cos\Theta=\frac{\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v}{|\operatorname{grad}u|\cdot|\operatorname{grad}v|}$. 1447. $\frac{\pi}{2}$.

1448. $\cos\Theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$. 1453. 1) $\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$; 2) 0. 1454. 1) $v\Delta u+u\Delta v+2(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v)$; 2) 0. 1455. 1) 3; 2) $\frac{2}{r}$; 3) 0. 1456. 1) 6; 2) $3f(r)+f'(r)\cdot r$; 3) $f'(r)\frac{\vec{r}\cdot\vec{c}}{r}$. 1457. 0. 1458. 0. 1459. 1). $yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$; 2) $\sqrt{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}$; 3) $(2-2y)\vec{i}-2x\vec{j}+2\vec{k}$; 4) $-y^2\vec{k}$.

1461. $\frac{5}{3}$. მითითება. ველის ნაკადი გამოითვლება $\iint_S \vec{F}\vec{n}\,ds=\iint_{D_{xy}}\frac{\vec{F}\vec{n}}{|\cos\gamma|}dx\,dy$ ფორმულით, სადაც $ds=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ ზედაპირის ფართობის ელემენტია. 1462. $-\frac{1}{6}$. 1463. $\frac{1}{15}$. 1464. $\frac{27}{2}\pi$.

1465. $\frac{1}{6}$. მითითება. შეკრული S ზედაპირის შემთხვევაში ველის ნაკადი გამოითვლება $\iint_S \vec{F}\vec{n}\,ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv$ ფორმულით, სადაც V მოცულობა შემოსაზღვრულია S ზედაპირით. 1466. $\frac{1}{3}$. 1468.

$3\pi R^2H$. **1469.** 36. **1470.** 0. **1471.** $\frac{64}{3}\pi$. **1472.** $\frac{4}{5}\pi R^5$. **1473.** $2h^2\pi^2$. **1474.** $R^3\frac{6-\pi}{4}$. **1475.** $\frac{a^2-b^2}{2}$. **1476.** πa^2. **1477.** $\frac{16}{3}$. **1478.** 24. **1479.** $-\frac{3\pi R^2}{4}$. **1480.** -4π. **1481.** $-\frac{\pi R^6}{8}$. **1482.** $-\frac{3\pi R^2}{16}$. მითითება. S ზედაპირად მიიღეთ xOy სიბრტყის ის ნაწილი, რომელიც L წირით არის შემოსაზღვრული, მისთვის $\vec{n}=\vec{k}$. **1483.** $-\pi$. **1484.** $-\pi$. **1485.** 1) $u=3x^2y-y^2+C$. მითითება. $u(x, y, z) =$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz;$$ 2) $u=xyz+C$.

1486. 1) არა აქვს; 2) $u=xy+yz+zx+C$. **1487.** $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+C$. **1488.** $\int_{r_0}^{r} f(r)\,rdr$. **1489.** არის.

VII თავი

1493. $\frac{1}{10}$. **1494.** $\frac{1}{9}$. **1495.** $\frac{1}{2}$. **1496.** $\frac{1}{6}$. **1497.** $\frac{3}{4}$. **1498.** $P(A)=\frac{33}{100}$, $P(B)=\frac{1}{4}$. **1499.** $\frac{27}{80}$. **1500.** 0,024. **1501.** $\frac{1}{720}$. **1502.** $\frac{1}{120}$. **1503.** $\frac{1}{10}$. **1504.** $\frac{1}{90}$. **1505.** $\frac{2}{\pi}$. **1506.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. **1507.** $\frac{11}{36}$. **1508.** $\approx 0,28$. **1509.** $\approx 0,56$. **1510.** $\approx 0,302$. **1511.** $\frac{1}{252}$. **1512.** $\approx 0,385$. **1513.** 0,05. **1514.** 102. **1515.** $\frac{1}{2}$. **1516.** $\frac{18}{25}$. **1517.** 0,2. **1518.** 0,3. **1519.** 0,8. **1520.** 0,043. **1521.** 0,4. **1522.** 0,8. **1523.** 0,02. **1524.** 0,061. **1525.** 0,25. **1526.** 0,45. **1527.** $\approx 0,305$. **1528.** $\approx 0,217$. **1529.** $\frac{1}{16}$. **1530.** $\frac{1}{4}$. **1531.** $\frac{1}{12}$. **1532.** 0,12. **1533.** 0,729. **1534.** 0,72. **1535.** 0,644. **1536.** 1) 0,56; 2) 0,38; 3) 0,06. **1537.** 0,817. **1538.** 0,504. **1539.** 0,0336. **1540.** 0,9999. **1541.** $\frac{91}{216}$. **1542.** 0,91. **1543.**

0,994. **1544.** 0,96. **1545.** 1) 0,58; 2) 0,42. **1546.** $\frac{5}{11}$. **1547.** 1) 0,1; 2), 0,16. **1548.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$. **1549.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{6}{11}$. **1550.** $\approx$0,0024. **1551.** $\frac{1}{17}$. **1552.** $\frac{7}{30}$. **1553.** $\frac{68}{97}$. **1554.** 1) $\frac{20}{31}$; 2) $\frac{11}{93}$. **1555.** $\frac{1}{22}$. **1556.** $\frac{19}{138}$. **1557.** 0,88. **1558.** 0,98. **1559.** $\approx$0,038. **1560.** 0,84. **1561.** $\approx$0,642. **1562.** $\frac{73}{75}$. **1563.** 0,08. **1564.** 0,009. **1565.** 0,002. **1566.** $\frac{1}{12}$. **1567.** $\approx$0,7024. **1568.** 0,86. **1569.** $\frac{17}{30}$. **1570.** $\frac{31}{60}$. **1571.** $\frac{2}{5}$. **1572.** $\frac{10}{13}$. **1573.** $\frac{6}{7}$. **1574.** $\frac{1}{2}$. **1575.** $\frac{35}{128}$. **1576.** $\approx$ 0,41. **1577.** $\approx$ 0,366. **1578.** $\approx$ 0,25. **1579.** $\approx$ 0,2036. **1580.** $\approx$ 0,1106. **1581.** $P_4(3) > P_8(5)$. **1582.** 1) 0,2916; 2) 0,9477. **1583.** 1) $\approx$0,246; 2) $\approx$0,26; 3) 0,000064. **1584.** $\approx$0,2069. **1585.** 7. **1586.** 1) 1; 2) 16. **1587.** 7 და 8. **1588.** 15 და 16. **1589.** 16. **1590.** 27. **1591.** 2 და 3; $\approx$0,25. **1592.** 1) 1; 2) $\approx$0,3875. **1593.** $0,198 < p \leqslant 0,2079$. **1594.** $n = 200$, 201, 202. **1595.** 55. **1596.** 0,04986. **1597.** 0,0006. **1598.** 0,273. **1599.** $\approx$ 0,090224. **1600.** $\approx$ 0,160623. **1601.** 8; $\approx$ 0,139587. **1602.** 0,8882. **1603.** 1) 0,6961; 2) 0,0838. **1604.** 1) 0,7498; 2) 0,8749. **1605.** 0,182. **1606.** 0,9544. **1607.** 400. **1608.** 1764. **1609.** $0,61 \leqslant \frac{m}{2500} \leqslant 0,67$. **1610.** $0,1903 \leqslant \frac{m}{5000} \leqslant 0,2097$. **1611.** $X \begin{cases} 0 & 1 \\ 0,7 & 0,3 \end{cases}$.

1612. $X \begin{cases} 2 & 5 & 8 \\ 0,4 & 0,15 & 0,45 \end{cases}$. **1613.** $X \begin{cases} 1000 & 500 & 400 & 100 & 0 \\ 0,001 & 0,004 & 0,005 & 0,01 & 0,98 \end{cases}$.

1614. $X \begin{cases} 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \end{cases}$. **1615** $X \begin{cases} 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216} \end{cases}$.

1616. $X \begin{cases} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{cases}$. **1617.** $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0,8 & 0,16 & 0,04 \end{cases}$.

1618. $X \begin{cases} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,064 \end{cases}$. **1619.** $X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{cases}$.

1620. $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,7 & 0,21 & 0,063 & 0,027 \end{cases}$. **1621.** $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,24 & 0,144 & 0,216 \end{cases}$.

1622. $X\begin{cases}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}0625.\end{cases}$ **1623.** $X+Y\begin{cases}3 & 5 & 7\\ 0{,}08 & 0{,}44 & 0{,}48.\end{cases}$

1624 $X-Y\begin{cases}2 & 3 & 4 & 5\\ 0{,}06 & 0{,}24 & 0{,}14 & 0{,}56.\end{cases}$ **1625.** $X^2\begin{cases}0 & 1 & 4 & 9\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1,\end{cases}$

$3X\begin{cases}-6 & 0 & 3 & 9\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1.\end{cases}$

1626. $XY\begin{cases}-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}37 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20.\end{cases}$

1627. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\leqslant 0,\\ 0{,}7, & \text{როცა } 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{როცა } x>1,\end{cases}$

მითითება. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\leqslant 0,\\ \sum\limits_{k<x} P_n(k), & \text{როცა } 0<x\leqslant n,\\ 1, & \text{როცა } x>n.\end{cases}$

1628. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } x\leqslant 0;\ 0{,}2401, \text{ როცა } 0<x\leqslant 1;\ 0{,}6517, \text{ როცა}\\ 1<x\leqslant 2;\ 0{,}9163, \text{ როცა } 2<x\leqslant 3;\ 0{,}9919, \text{ როცა}\\ 3<x\leqslant 4;\ 1, \text{ როცა } x>4.\end{cases}$

$P(1\leqslant X\leqslant 4)=F(4)-F(1)=0{,}7518.$ **1629.** $\frac{1}{3}$. **1630.** $\frac{1}{2}$.

1631. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{3}, & \text{როცა } 0<x\leqslant 3,\\ 0, & \text{როცა } x>3.\end{cases}$ $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=\frac{1}{6}$.

1632. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & \text{როცა } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & \text{როცა } x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$

3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1633.** 1) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & \text{როცა } x>\pi;\end{cases}$

2) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **1634.** 1) $A=\frac{1}{\pi}$; $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x$; 2) $A=\frac{1}{6-a}$.

1635. 2,6. **1636.** 3,9. **1637.** p. **1638.** 1,11. **1639.** 1,3. **1640.** 2,2.

1641. $3\frac{1}{2}$; $2\frac{11}{12}$. **1642.** 7; 12,25. **1643.** 32,56. **1644.** c^2. **1645.**

2,01. **1046.** 67,64. **1047.** 1) 7; 2) ა) 5; ბ) 20; გ) 46. **1048.** pq; $\sqrt{pq}$. **1049.** $\approx 3{,}61$. **1050.** 2,2. **1051.** $X\begin{cases} 2 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}5. \end{cases}$ **1052.** $X\begin{cases} 4 & 5 \\ 0{,}9 & 0{,}1. \end{cases}$

1053. $M(X)=\frac{1}{2}$; $D(X)=\frac{1}{12}$. **1054.** $M(X)=\frac{\pi}{2}$; $\sigma(X)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2-8}$.

1055. $a=2$; $M(X)=\frac{2}{3}$; $D(X)=\frac{1}{18}$; $\sigma(X)=\frac{1}{3\sqrt{2}}$. **1056.** $M(X)=0$; $\sigma(X)=\sqrt{2}$. **1057.** $M(X)=5{,}5$; $D(X)=6{,}75$. **1058.** $a=\frac{1}{2}$; $M(X)=0$; $D(X)=2$. $\sigma(X)=\sqrt{2}$. **1059.** 1, 2; 0,72. **1060.** $p=\frac{1}{2}$, $n=144$. **1061.** 0,0819. **1062.** 0,1359. **1063.** 0,2358. **1064.** 0,383. **1065.** $\leqslant 0{,}1$. **1066.** $\leqslant 0{,}375$. **1067.** $\geqslant 0{,}375$. **1068.** $\geqslant 0{,}8$. **1069.** $\leqslant 0{,}233$. **1070.** $\leqslant 0{,}16$. **1071.** $10{,}8 \leqslant X \leqslant 39{,}2$ კმ/სთ. **1072.** $P(550 \leqslant X \leqslant 650)=P(|X-600| \leqslant 50) \geqslant 0{,}88$. **1073.** $P \geqslant 0{,}9$. **1074.** $\varepsilon=0{,}2$.

VIII თავი

1675. $17+17i$. **1676.** x^2+6. **1677.** $1\frac{1}{6}+\frac{5}{12}i$. **1678.** $2\sqrt{10}$.

1679. i. **1680.** $1+i$. **1681.** $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. **1682.** $\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$. **1683.** $-2+2i$.

1684. -4. **1685.** 100. **1686.** i; -1; i; $-i$. **1687.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **1688.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **1689.** $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. **1690.** $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. **1691.** 1) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $m(\cos 0+i\sin 0)$. **1692.** $30\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. **1693.** $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **1694.** $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$. **1695.** $3+3i\sqrt{3}$. **1696.** $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ **1697.** $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1698.** $-1-i$. **1699.**

$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. **1700.** -1. **1701.** $6\sqrt{2}\,(1+i)$. **1702.** $36i$. **1703.** $4\,(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$. **1704.** 30. **1705.** $4i$. **1706.** $1+i\sqrt{3}$. **1707.** $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)$. **1708.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i)$. **1709.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **1710.** $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$. **1711.** 0; 1. **1712.** -8; 0. **1713.** -2; $\frac{3}{2}$. **1714.** 2; 0. **1717.** $8i$. **1718.** $4(1-i)$. **1719.** -2^9. **1720.** 1. **1721.** $2(3+2\sqrt{2})i$. **1722.** -27. **1723.** $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$. **1724.** $\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$, $\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi$. **1725.** $\cos^3\varphi=\frac{1}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$, $\sin^3\varphi=\frac{1}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$. **1726.** $\cos^4\varphi=\frac{1}{8}(3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)$, $\sin^4\varphi=\frac{1}{8}(3-4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)$. **1729.** 1) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; 2) -1; $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt[6]{2}\,(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $\varphi=45^\circ,\ 165^\circ,\ 285^\circ$. **1730.** 1) $\pm 2(\sqrt{3}+i)$; 2) $-i$, $\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(-1+i\sqrt{3})$. **1731.** (4; 2). **1732.** $\left(\frac{7}{8};\ -\frac{3}{4}\right)$. **1733.** (2; 3), (3; 2). **1734.** $-2+i$; $-3+i$. **1735.** $2i$; -1. **1736.** -2; $1\pm i\sqrt{3}$. **1737.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$; $-i\sqrt[3]{2}$. **1738.** ± 1; $\pm i$. **1739.** ± 1; $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1740.** $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. **1741.** $\pm(2+i)$. **1742.** $\pm(3+4i)$. **1745.** 1) $x^2+y^2=ax$ (წრეწირი); 2) $y=0$ (Ox ღერძი); 3) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ (ჰიპერბოლა). **1746.** 1) $xy=\frac{a}{2}$ (ჰიპერბოლა); 2) $x^2+y^2=a^2$ (წრეწირი); 3) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ (ელიფსი). **1747.** $\bar{a}z+a\bar{z}+2C=0$, სადაც $a=$

$=A+iB$. **1748.** $z\bar{z}+(1-i)z+(1+i)\bar{z}=0$. **1749.** $z^2+\bar{z}^2=2a^2$.

1750. $x^2+(y-1)^2=3$ (წრეწირი). **1751.** 1) $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; 2) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$; 3) $5e^{0i}$, 4) $e^{\frac{3\pi}{2}i}$. **1752.** 1) $e^{\pi i}$; 2) $4\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; 3) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$; 4) $2e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

1753. 1) $\frac{1}{2}e^2$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}e^2$; 2) $\sqrt{e}\cos 3$; $-\sqrt{e}\sin 3$; 3) ch 1 cos2; —sh 1 sin 2; 4) ch5sin1;—sh 5 cos 1. **1754.** 1) 0; $-e$; 2) ch 1 cos 1; sh 1 sin 1; 3) 0; sh 1; 4) ch 1 cos 2; sh 1 sin 2. **1757.** $\sin x \operatorname{ch} y$; $\cos x \operatorname{sh} y$; $\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$. **1758.** $e^x(x\cos y-y\sin y)$; $e^x(x\sin y+y\cos y)$.

1761. 1) $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; 2) $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. მითითება. იპოვეთ ჯამი შემდეგი გეომეტრიული პროგრესიისა: $e^{xi}+e^{2xi}+\ldots+e^{nxi}$.

1762. 1) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$ **1763.** 1) $\ln 4+2k\pi i$; 2) $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$; 3) $\frac{1}{2}\ln 50+i\,(\operatorname{arctg} 7+2k\pi)$. **1764.** 1) $\frac{1}{2}\ln 2+\Big(\frac{3}{4}+2k\ \ \pi i$; 2) $\frac{\pi}{4}(8k+1)i$; 3) $\frac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)i$. **1765.** 1) $e^{2\sqrt{2}k\pi i}$; 2) $e^{-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}$; 3) $e^{-\left(\frac{1}{4}+2k\right)\pi+i\ln\sqrt{2}}$. **1766.** 1) $e^{2k\pi}$; 2) $e^{-2k\pi+i\ln 2}$; 3) $e^{2\ln 3-2k\pi+i(\ln 3+4k\pi)}$. **1769.** 1) $k\pi-i\ln[\sqrt{2}-(-1)^k]$; 2) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $\dfrac{2k+1}{2}\pi+\dfrac{i\ln 3}{2}$. **1770.** 1) $k\pi i+\ln[\sqrt{2}-(-1)^k]$; 2) $\ln(\sqrt{5}\pm 2)+\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)\pi i$; 3) $\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i$. **1771.** 1) $x^2+y^2=1$; 2) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 3) $y=x^2$. **1772.** 1) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. **1773.** 1) $16u=64-v^2$ (პარაბოლა); 2) $4u=v^2-4$ (პარაბოლა); 3) $v=2$ (წრფე); 4) $u^2+v^2=16$ (წრეწირი). **1774.** 1) $u+v=0$ (წრფე); 2) $u^2+v^2=\dfrac{1}{R^2}$ (წრეწირი);

3) $u^2+\left(v+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$ (წრეწირი). **1775.** 1) $x^2-y^2=2$; 2) $xy=\frac{3}{2}$. **1776.** 1) $x^2+x+y^2=0$; 2) $x^2+y^2+\frac{y}{5}=0$. **1777.** $w=z+\frac{1}{z}$ ფუნქცია $|z|=R\neq 1$ წრეწირებს ასახავს $\frac{u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ელიფსებში, ხოლო $|z|=1$ წრეწირს $v=0$, $-2\leqslant u\leqslant 2$ მონაკვეთში. **1778.** $w=z-\frac{1}{z}$ ფუნქცია $|z|=R\neq 1$ წრეწირებს ასახავს $\frac{u^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ელიფსებში, ხოლო $|z|=1$ წრეწირს $u=0$, $-2\leqslant v\leqslant 2$ მონაკვეთში. **1779.** 1) კი, 1; 2) არა; 3) კი, $2z$; 4) კი, e^z; 5) კი, $\cos z$. **1780.** 1) არა; 2) კი, $3z^2$; 3) კი, $-\frac{1}{z^2}$; 4) კი, $-\sin z$; 5) კი, $\frac{1}{z}$. **1785.** $v(x, y)=2xy+2y+C$. **1786.** $v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C$. **1787.** $f(z)=(1+i)z-3i+C$. **1788.** $f(z)=z^2(z+i)+Ci$. **1789.** $f(z)=\frac{z}{2}(3+i)$. **1790.** $f(z)=iz^3+i-1$. **1791.** $f(z)=\frac{1}{z}+2iz-2i-1$. **1792.** $f(z)=\frac{z^2}{2}(2-i)$. **1793.** 1) 0; 3; 2) 0; $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 6. **1794.** 1) 0; 21; 2) $-\frac{\pi}{4}$; $\sqrt{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4. **1795.** 1) იკუმშება, როცა $|z|<\frac{1}{2}$, იჭიმება, როცა $|z|>\frac{1}{2}$; 2) იკუმშება, როცა $|z-2|<\frac{1}{4}$, იჭიმება, როცა $|z-2|>\frac{1}{4}$; 3) იკუმშება, როცა $|z|>1$, იჭიმება, როცა $|z|<1$. **1796.** 1) იკუმშება, როცა $|z|<\frac{1}{3}$, იჭიმება, როცა $|z|>\frac{1}{3}$; 2) იკუმშება, როცა $|z+1|<\frac{1}{2}$, იჭიმება, როცა $|z+1|>\frac{1}{2}$; 3) იკუმშება, როცა $Re z<0$, იჭიმება, როცა $Re z>0$. **1797.** 1) -1; 3; 2) $\frac{\pi}{2}+k\pi$. **1798.** 1) $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; -1; 2) $\frac{k\pi}{2}$. **1799.** რომ ვიპოვოთ z

წერტილის სახე $w=az+b$ გადასახვისას, საჭიროა $\vec{z}$ ვექტორი მოვაბრუნოთ $\beta=\arg a$ კუთხით, შევცვალოთ მისი სიგრძე $\alpha=|a|$ -ჯერ და პარალელურად გადავიტანოთ $\vec{b}$ ვექტორით. **1800.** 1) როცა $a\neq1$, მაშინ უძრავი წერტილია $z=\frac{b}{1-a}$; როცა $a=1$, $b\neq0$, მაშინ უძრავი წერტილი არ არსებობს; როცა $a=1$, $b=0$, მაშინ ყველა წერტილი უძრავია; 2) $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$; 3) $\frac{1}{3}$. მითითება, $w=f(z)$ გადასახვის უძრავი წერტილი ეწოდება ისეთ სასრულო წერტილს, რომლისთვისაც შესრულებულია $w=z$ ტოლობა. **1801.** $w=(-1+2i)z-4i$. **1802.** $w=\frac{7+i}{5}z-\frac{2-4i}{5}$. **1803.** $w=(1+i)(1-z)$. **1804.** $w=2zi+6i+4$. **1805.** $w=3e^{i\alpha}z+1+3ie^{i\alpha}$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. **1806.** $w=e^{i\alpha}z+1-i$. **1807.** $w=\frac{(1-i)z-1-i}{z-1}$. **1808.** $w=\frac{zi+2+i}{z+1}$. **1809.** $w=3z+i$. **1810.** $w=-\frac{(1+3i)z+1-3i}{z+1}$. **1811.** $0<\arg w<\frac{\pi}{2}$ სექტორი. **1812.** $|w|<1$, $Im\, w<0$ ნახევარწრე. **1813.** $w=\frac{1}{z-1}$. **1814.** $w=-2\frac{z+i}{z+3i}$. **1815.** $\frac{1}{z}$. **1816.** 1) $\frac{2+i}{5}$; 2) $\frac{9}{2}+i$. **1817.** $w=z^6$. **1818.** $w=z^4e^{-i\frac{\pi}{2}}$. **1819.** $w=(z+i)^2$. **1820.** $w=(z+2)^4e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **1821.** $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. **1822.** $w=\left(\frac{z^2+4}{z^2-4}\right)^2$. **1823.** პოლარული ბადე; $\rho=\text{const}$, $\Theta=\text{const}$, სადაც ρ და Θ წერტილის პოლარული კოორდინატებია. **1824.** $\rho=e^{\frac{\Theta-k}{b}}$ სპირალები. **1825.** $|w|>1$ წრის გარე ნაწილი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული. **1826.** 1) $|w|>1$, $Re\,w>0$ ნახევარწრის გარე ნაწილი: 2) $|w|<1$, $Im\,w>0$ ნახევარწრე. **1827.** $1<|w|<e$, $-\frac{\pi}{2}<\arg w<\frac{\pi}{4}$. **1828.** $e<|w|<e^2$, $-\frac{\pi}{3}<\arg w<\pi$. **1829.** $w=e^{\pi i(z-1)}$. **1830.** $w=e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$. **1831.** $w=e^{\frac{\pi}{2}iz}$ **1832.** $w=-2e^{-i\pi z}$. **1833.** $|z|=r$

წრეწირებს შეესაბამება კონფოკალური ელიფსები $\frac{4u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$ ($|z|=1$ წრეწირს შეესაბამება $v=0$, $-1\leqslant u\leqslant 1$ მონაკვეთი); $\arg z=\varphi$ სხივებს შეესაბამება $\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1$ კონფოკალური ჰიპერბოლების შტოები ($\arg z=0$ სხივს შეესაბამება $v=0$, $u\geqslant 1$ სხივი, $\arg z=\pi$ სხივს შეესაბამება $v=0$, $u\leqslant -1$ სხივი, $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$ სხივებს $u=0$ ღერძი). მ ი თ ი თ ე ბ ა. $w=u+iv$, $z=re^{i\varphi}$.

1834. $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ ჰიპერბოლის შტოებს შორის მოთავსებულ არეში. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგით. **1838.** 1) $w=\frac{1}{2}\left(z-1+\frac{1}{z-1}\right)$; 2) $w=-\frac{1}{2}\left(z+2+\frac{1}{z+2}\right)$. **1839.** $w=\sqrt{z^2+1}$. **1840.** $w=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$. **1841.** $w=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$. **1842.** $w=\frac{1}{2}\ln(e^{2z}+1)$. **1843.** w სიბრტყე $(-\infty, -1)]$ და $[1, +\infty)$ ჭრილებით ნამდვილი ღერძის გასწვრივ. **1844.** ზედა ნახევარსიბრტყე. **1845.** 1) $z-z_0$; 2) $\frac{1}{2}(z^2-z_0^2)$. **1846.** $\frac{\sqrt{5}}{2}(2+i)$. **1847.** $\frac{\pi}{2}i$. **1848.** $2\pi i$. **1849.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. **1850.** $2e-e^{1-i}-1$. **1851.** $\frac{5}{2}+2i$. **1852.** πi. **1853.** 0, როცა $m\geqslant 0$ ან $m<-1$; $2\pi i$, როცა $m=-1$. **1855.** $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$. **1856.** $-\frac{7}{3}+\frac{i}{3}$. **1857.** $7+19i$. **1858.** $i\sin i+\cos i-1$. **1859.** -2. **1860.** $1-\frac{\pi}{2}-i$. **1861.** 0, როცა $n\neq 1$; $2\pi i$, როცა $n=1$. **1862.** როცა l კონტური თავის შიგნით არ მოიცავს $z=1$ და $z=2$ წერტილებს, მაშინ $I=0$; როცა l მოიცავს $z=1$ წერტილს და არ მოიცავს $z=2$ წერტილს, მაშინ $I=-2\pi i$; როცა მოიცავს $z=2$ წერტილს და არ მოიცავს $z=1$ წერტილს, მაშინ $I=4\pi i$; როცა l მოიცავს ორივე წერტილს, მაშინ

$I=2\pi i$. **1863.** $-\pi i$. **1864.** πi. **1865.** 1) π; 2) $-\pi$; 3) 0. **1866.** $\frac{\pi}{2} i$.

1867. $\pi(e^2+e^{-2})i$. **1868.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}} i$. **1869.** $\frac{2}{3}\pi e^3 i$. **1870.** 1) $2\pi i$; 2) 0.

1871. $\frac{\sin a}{a}$. **1872.** $\pi i \cos 1$. **1873.** $12\pi i$. **1874.** $\pi(i\cos 1-\sin 1)$. **1875.** $e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$. **1876.** $-\frac{\pi^2}{2} i$. **1877.** აბსოლუტურად კრებადია. **1878.** აბსოლუტურად კრებადია. **1879.** განშლადია. **1880.** განშლადია. **1881.** პირობით კრებადია. **1882.** პირობით კრებადია. **1883.** აბსოლუტურად კრებადია. **1884.** აბსოლუტურად კრებადია. **1885.** აბსოლუტურად კრებადია. **1886.** აბსოლუტურად კრებადია. **1887.** $R=\infty$. **1888.** $|z|<1$, $R=1$. **1889.** $R=0$. **1890.** $|z|<1$, $R=1$. **1891.** $|z|<\sqrt{2}$, $R=\sqrt{2}$. **1892.** $|z|<2$, $R=2$. **1893.** $s=0$: $|z|<1$, $R=1$; $s=1$: $|z|<1$, $R=1$, $z=1$ წერტილზე განშლადია, $z=-1$ წერტილზე — კრებადი; $s=2$: $|z|\leqslant 1$, $R=1$. **1894.** $|z|<e$, $R=e$. **1895.** $|z|<1$, $R=1$. **1896.** $|z|<\frac{1}{2}$, $R=\frac{1}{2}$. **1897.** $|z+1|<2$, $R=2$. **1898.** $|z-1|\leqslant 1$, $R=1$.

1899. $|z-2i|<3$, $R=3$. **1900.** $|z-i|\leqslant\sqrt{2}$, $R=\sqrt{2}$. **1901.** $|z-1|<\frac{\sqrt{2}}{3}$, $R=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **1902.** $|z-2|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1903.** $1<|z|<5$. **1904.** $1<|z-2i|<2$. **1905.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $R=\infty$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **1906.**

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **1907.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$, $|z-1|<1$. **1908.** 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

1909. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$. **1910.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1911. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$. **1912.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$.

1913. $1+\frac{1}{m}(z-1)+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{(z-1)^2}{2!}+\ldots$; $1+\frac{1}{2}(z-1)-$
$-\frac{1}{2^2\cdot 2!}(z-1)^2+\ldots$ **1914.** $e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\ldots\right)$. **1915.**
$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$. **1916.** $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$. **1917.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

1918. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!z^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$, $R=1$. **1919.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$, $|z|<1$.

1920. $\frac{1-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(i^{n+1}-1)z^n$, $|z|<1$. **1921.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left\{\frac{i^n}{2}[1+\right.$
$\left.+i+(1-i)(-1)^n]-1\right\}$, $|z|<1$. **1922.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[n+2-\right.$
$\left.-i^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{2}\right]$, $|z|<1$. **1923.** $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$, $|z|<3$.

1924. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$, $|z|>2$. **1925.** $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$; $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$,
$|z|>1$; $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$. **1926.** $\frac{1}{2z}+$
$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{2^{n+2}}$, $|z|<2$; $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+2}}$, $|z|>2$;
$-\frac{1}{2(z+2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$, $0<|z+2|<2$. **1927.** $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-$
$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$, $1<|z|<2$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$, $2<|z|<\infty$.

1928. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$. **1929.** $\frac{1}{2i}-\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(z-i)^n}{2^{n+2}}$,

$0<|z-i|<2$. **1930.** $\frac{1}{6}+\frac{z}{2}+z^2+z^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!z^n}$.

1931. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(z-1)^n}$. **1932.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-z)}{(2n+1)!z^{4n+2}}$

1933. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{3(2n-1)}}$, $0<|z-i|<\infty$.

1934. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+i)^{2n-2}}$, $0<|z+i|<\infty$. **1935.** 1) $z=0$—მეორე რიგის ნული, $z=1$—მარტივი ნული; 2) $z=-1$, $z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ — მეორე რიგის ნულები; 3) $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm\ldots$ — მარტივი ნულები; 4) $z=\frac{k\pi}{3}$ — მესამე რიგის ნულები. **1936** $z=-1$ — მე-6 რიგის ნული; 2) $z=\pm i$—მარტივი ნულები; 3) $z=k\pi$—მესამე რიგის ნულები; 4) $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ — მეორე რიგის ნულები. **1937.** 1) $z=0$, $z=\pm 1$—მარტივი პოლუსები; 2) $z=0$ —მეოთხე რიგის პოლუსი, $z=\pm 2i$ — მეორე რიგის პოლუსები; 3) $z=1$—არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 4) $z=0$—არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 5) $z=0$—ასაცილებელი წერტილი; 6) $z=0$—მეორე რიგის პოლუსი. **1938.** 1) $z=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$—მარტივი პოლუსები; 2) $z=0$—მეორე რიგის პოლუსი, $z=k\pi i$—მარტივი პოლუსები; 3) $z=1$—არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 4) $z=0$—არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 5) $z=-\pi$—ასაცილებელი წერტილი; 6) $z=0$—მეორე რიგის პოლუსი. **1939.** 1) $z=\infty$—წესიერი წერტილი; (მარტივი ნული); 2) $z=\infty$— არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 3) $z=\infty$—ასაცილებელი წერტილი; 4) $z=\infty$—პოლუსების ზღვარითი წერტილი; 5) $z=\infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 6) $z=\infty$—მესამე რიგის პოლუსი. **1940.** 1) $z=\infty$— წესიერი წერტილი (მარტივი ნული); 2) $z=\infty$—არსებითად განსაკუთრებული წერტილი;

3) $z=\infty$ — ასაცილებელი წერტილი; 4) $z=\infty$ — პოლუსების ზღვარითი წერტილი; 5) $z=\infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 6) $z=\infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი. **1941.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 3; —3; 3) 20; 4) $-e^{-1}$; 5) 0; 6) —1. **1942.** 1) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 2) 1; —1; 3) 2sin2; 4) 1; 5) 0; 6) $(-1)^k$, $k=0, \pm1, \pm\ldots$ **1943.** 1) —2; 2) —3; 3) —1; 4) —1. **1944.** 1) —10; 2) —1; 3) 0; 4) —1. **1945.** $-2\pi i$. **1946.** 0. **1947.** $\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$. **1948.** $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **1949.** $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$.
1950. $2\pi i\left(\operatorname{tg}1-\frac{8}{\pi^2-4}\right)$. **1951.** $-\frac{2\pi i}{e}$. **1952.** 1) $2\pi i$; 2) 0.
1953. $-\frac{2}{9}\pi i$. **1954.** πi. **1955.** $-\frac{\pi}{2}i$. **1956.** $2\pi i$. **1957.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
მითითება. შემოიღეთ აღნიშვნა $z=e^{ix}$. **1958.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **1959.** $-\frac{\pi}{2}$.
1960. $\frac{3}{8}\pi$. **1961.** $\frac{\pi}{8}$. **1962.** $-\frac{\pi}{27}$. **1963.** $\frac{\pi}{e^2}$. **1964.** $\frac{\pi}{2e}$.
1965. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **1966.** π. **1967.** —2. **1968.** —1. **1969.** 3. **1970.** 6.
1971. —3. **1972.** —12. **1973.** 3. **1974.** —3. **1975.** 1. **1976.** 5.
1977. 3. **1978.** 5. **1979.** არა აქვს. **1980.** არა აქვს.

IX თავი

1981. კი, $s_0=3$. **1982.** კი, $s_0=2$. **1983.** კი, $s_0=0$. **1984.** კი, $s_0=0$.
1985. არა, $s_0=+\infty$. **1986.** კი, $s_0=-\infty$. **1987.** $\frac{1}{p}$. **1988.** $\frac{c}{p}$.
1989. $\frac{1}{p^2}$. **1990.** 1) $\frac{1}{p-\alpha}$; 2) $\frac{1}{p-\ln a}$. **1991.** $\frac{1}{p^2+1}$. **1992.** $\frac{p}{p^2+1}$.
1993. $\frac{1}{p^2-1}$. **1994.** $\frac{p^2}{p^2-1}$. **1995.** $\frac{8+p}{2p-p^2}$. **1996.** $\frac{1}{p^2+9}-\frac{5}{p}$.
1997. $\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}$. **1998.** $\frac{10p^2+8}{p^4-16}$. **1999.** $\frac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.
2000. $\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$. **2001.** $\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{p+3}+\frac{1}{p}$. **2002.** $\frac{1}{p+1}+$

$+\frac{3}{p+2}+\frac{1}{p^2}$. **2003.** $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **2004.** $\frac{2}{p(p^2+4)}$. **2005.** $\frac{6}{p^3}+\frac{2}{p^2}-$
$-\frac{5}{p}$. **2006.** $\frac{18}{(p+1)^4}+\frac{4}{p^3}-\frac{1}{p}$. **2007.** $\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{4p}{p^2-4}$.
2008. $\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}$. **2009.** $\operatorname{arcctg} p$. **2010.** $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$. **2011.** $\ln\frac{p}{p-1}$.
2012. $\ln\frac{p-b}{p-a}$. **2013.** $\frac{6}{(p-2)^4}$. **2014.** $\frac{p^2+2}{p^2+4}$. **2015.** $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$.
2016. $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$. **2017.** $\frac{e^{-ap}}{p}$. **2018.** $\frac{e^{-2p}-e^{-3p}}{p}$. **2019.** $\frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.
2020. $\frac{6e^{-2p}}{p^4}$. **2021.** $\frac{pe^{-3p}}{p^2-1}$. **2022.** $\frac{2e^{-ap}}{p(p^2+4)}$. **2023.** $1-\cos t$; $\frac{1}{p(p^2+1)}$.
2024. e^t-t-1; $\frac{1}{p^2(p-1)}$. **2025.** $Sh t$; $\frac{1}{p^2-1}$. **2026.** $\frac{\sin t+t\cos t}{2}$;
$\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$. **2027.** $3\sin 4t$. **2028.** $2sh5t$. **2029.** $\frac{5}{2}\sin 2t+20\cos 3t$.
2030. $e^{-t}sh t$. **2031.** $\frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$. **2032.** $\frac{1}{2}e^t\sin 2t$. **2033.** $e^{-t}\cos 3t+$
$+\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$. **2034.** $e^{-3t}\cos\sqrt{2}\,t$. **2035.** $3e^{2t}\cos\sqrt{3}\,t+\frac{5}{\sqrt{3}}e^{2t}\sin\sqrt{3}\,t$.
2036. $-\frac{2}{5}e^t+\frac{7}{5}e^{6t}$. **2037.** $-\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t}$.
2038. $1-e^{-t}-te^{-t}$. **2039.** $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$. **2040.** $\frac{3}{4}e^t+$
$+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}$. **2041.** $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{12}\cos 2t$. **2042.** $te^{2t}+$
$+\frac{1}{2}\sin 2t$. **2043.** $1-\cos t$. **2044.** $t-\sin t$. **2045.** $\frac{\sin t+t\cos t}{2}$.
2046. $\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)$. **2047.** $\operatorname{ch} t$. **2048.** $\frac{t^2}{2}+\cos t-1$.
2049. $x=1-e^{-t}$. **2050.** $x=e^t$. **2051.** $x=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t$. **2052.** $x=e^t-$
$-t-1$. **2053.** $x=e^{2t}\sin t$. **2054.** $x=4e^{-t}-3e^{-2t}$. **2055.** $x=e^t\cos t$.
2056. $x=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$. **2057.** $x=2e^t-\frac{t^3}{3}-t^2-2t-2$.

2058. $x=2+\frac{t^3}{3}+2e^{-t}$. **2059.** $x=\operatorname{sh}t$. **2060.** $x=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+$ $+\frac{1}{16}e^{-t}$. **2061.** $x=\frac{t}{2}\sin t$. **2062.** $x=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$. **2063.** $x=$ $=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t$. **2064.** $x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-t\cos 2t\right)+\frac{5}{18}\sin 2t-$ $-\frac{5}{9}\sin t$. **2065.** $x=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t$. **2066.** $x=-\frac{5}{2}e^{t}+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}$.

2067. $x=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **2068.** $x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+$ $+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$. **2069.** $x=t^2-t+1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t$.

2070. $x=\frac{1}{8}[e^{t}(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\sin t]$. **2071.** $x=1+t-\frac{t^2}{2}-e^{t}$.

2072. $x=5(t^2-2+2\cos t)$. **2073.** $x=\frac{1}{10}(e^{3t}-2e^{2t}+\sin t+\cos t)$.

2074. $x=\frac{1}{2}(e^{t}-\sin t+\cos t-2)$. **2075.** $x=e^{-2t}(1-2t)$, $y=e^{-2t}(1+2t)$.

2076. $x=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$, $y=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$. **2077.** $x=e^{2t}$, $y=3e^{2t}$. **2078.** $x=2+4t-2\cos t-3\sin t$, $y=2\sin t-2t$. **2079.** $x=$ $=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$, $y=1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$. **2080.** $x=$ $=\frac{16}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}$, $y=-\frac{4}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}$. **2081.** $x=\frac{2}{3}e^{-t}+$ $+\frac{1}{3}e^{2t}$, $y=z=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}$. **2082.** $x=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}$, $y=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}$, $z=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}$.

X თავი

2083. $z=F(x^2-y^2)$ (ზოგადი ამონახსნი); $z=2\sqrt{y^2-x^2}$. **2084.** $z=F\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$; $z=\frac{y^2}{1+x^2}$. **2085.** $u=F\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x}\right)$; $u=\frac{y+z^2}{x}$.

2086. $u=F(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{x}-\sqrt{z})$; $u=y-z+2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{z}-\sqrt{y})$. **2087.** $u=F\left(y,\ \frac{x^y}{z}\right)$; $u=\frac{x^y}{z}$. **2088.** $u=F\left(y,\ \ln z-\frac{x}{y}\right)$; $u=\ln z-\frac{x}{y}$. **2089.** $u=F[y^2-z^2,\ 2x+(z-y)^2]$. **2090.** $u=F(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)$. **2091.** $F\left(\frac{y-x^2}{x},\ \frac{z}{x}\right)=0$ ანუ $z=xf\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$; $z=y-x^2$. **2092.** $F\left(\frac{y}{x};\ \frac{z}{x^2}\right)=0$ ანუ $z=x^2f\left(\frac{y}{x}\right)$; $z=xy$.
2093. $F\left(z, \ln x+\frac{y}{z}\right)=0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ეს განტოლება არაერთგვაროვანია, რადგანაც უცნობი z ფუნქცია მონაწილეობს განტოლების ერთ-ერთ კოეფიციენტში. **2094.** $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$. **2095.** $F\left(y,\ \frac{z}{x}\right)=0$, ანუ $z=xf(y)$; $z=xy$. **2096.** $F(z,\ x^2-y^2z)=0$; $z=\frac{x^2}{y^2}$.
2097. $F(z-2y,\ y+2\sqrt{z-x-y})=0$; $4y\sqrt{z-x-y}=4x-2z-y^2$.
2098. $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right)=0$ ანუ $u=xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; $u=\frac{y+z}{2}$.
2099. $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, $\xi=x-y$, $\eta=x+y$. **2100.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=xy$, $\eta=\frac{y}{x}$. **2101.** $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+5\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}+u=0$, $\xi=x+y$, $\eta=y$. **2102.** $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$, $\xi=\frac{y}{x}$, $\eta=y$. **2103.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=y^2$, $\eta=x^2$. **2104.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=x$. **2105.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt{y}$, როცა $y>0$; $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, $\xi=x+2\sqrt{-y}$, $\eta=x-2\sqrt{-y}$, როცა $y<0$. **2106.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=\sqrt{x}$, $\eta=\sqrt{y}$, როცა $xy>0$; $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)$, $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x}$, $\eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$, როცა $xy<0$. **2107.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=3x-y$. **2108.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+$

$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,\ \xi=2x-y,\ \eta=x.$ **2109.** $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \xi=y\sin x,\ \eta=y.$ **2110.** $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\ \xi=2x+\sin x+y,$ $\eta=2x-\sin x-y.$ **2111.** $u=y\varphi(x)+\psi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. **2112.** $u=\frac{4}{3}y^3+y\varphi(x)+\psi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. **2113.** $u=\varphi(x)+f(y)$. **2114.** $u=xy+\varphi(x)+f(y)$. **2115.** $u=\frac{x^2}{2}\ln y+xy+\varphi(x)+f(y)$. **2116** $u=xf(y)+\varphi(x)$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა: $\frac{\partial u}{\partial y}=z$, მაშინ. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$. **2117.** $u=xf(y)+\varphi(y)$; $u=y^2(x+y-1)$. **2118.** $u=\varphi(x-y)+f(x+y)$; $u=xy+\sin x\cos y$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული განტოლება დაიყვანეთ კანონიკურ სახემდე: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0,\ \xi=x-y,\ \eta=x+y.$ **2119.** $u=\varphi(\xi)+f(\eta)=\varphi(x+y)+f(3x+y)$. **2120.** $u=\sqrt{tx}\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)+\psi(tx)$. **2121.** $u=e^{-y}\varphi(y-x)+\psi(y)$; $u=(y-x)\ e^{-x}-y$. **2122.** $u=y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi(y)$; $u=y\ln x+2y+1$. **2123.** $u=x^3+t^3$. **2124.** $u=x(1-t)$. **2125.** $u=tx$. **2126.** $u=\frac{\cos x\sin 3t}{3}$. **2127.** $u=\frac{\pi}{2a}$, სიმი Ox ღერძის პარალელურია. **2128.** $u=-\sin x$. **2129.** $u(x,\ t)=\frac{2l}{\pi^2 a}\times$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\pi}{k^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

2130. $u(x,t)=$

$$=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

2131. $u(x,t)=A\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$.

2132. $u(x,\ t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}$. **2133.** $u(x,t)=$

$$=\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2134. $u(x,t)=$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$ **2135.** $u(x, t) =$

$$= \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right],$$ სადაც $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu$ ალბათობის ინტეგრალია. **2136.** $u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right].$ **2137.** $u(x, t) = u_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right).$

2138. $u(x, t) = \frac{u_0}{x\sqrt{t}}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$

2139. $u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

2140. $u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

ცხრილები

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2856	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0116	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	9,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	9,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	9,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	9,2054	0,86	0,3051		
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	9,3106	1,19	0,3830
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133		
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,20	0,3849
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,21	0,3869
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,22	0,3883
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,23	0,3907
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,24	0,3925
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,25	0,3944

1	2	3	4	5	6	7	8
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1.35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	9,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

შინაარსი

ИБ № 751

რედაქტორები: მ. მრელაშვილი, ზ. სუთიძე
მხატვრული რედაქტორი ე. ქიშმარაია
ტექნიკური რედაქტორი რ. გოგიშვილი
კორექტორი ნ. ქაფიანიძე
უფროსი კორექტორი ნ. დოლბაძე
გამომშვები ო. მაჭავარიანი

გადაეცა წარმოებას 4/XII-79 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 28/VII-80 წ. ქაღალდის ზომა 60×90 1/16. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ნაბეჭდი თაბახი 17. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17,99.
უე № 04075. ტირაჟი 5000. შეკვ. № 1337.

ფასი 76 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили № 5.

1980

საქართველოს სსრ გამსახკომის საგამომცემლო-პოლიგრაფიული გაერთიანება „განათლების" კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5
Комбинат издательско-полиграфического объединения «Ганатлеба» Госкомиздата Грузинской ССР, Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.