

ივ. ჯაფარიძის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**გ. ჯანიანი**

**უწყვეტ გარემოთა  
მექანიკის მათემატიკური  
მოდელები**

*(ლექციების კურსი)*



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
თბილისი, 2004

ლექციების კურსში გადმოცემულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები. სახელდობრ: დრეკადი და პლასტიკური დეფორმადი სხეულების გეომეტრიულად და ფიზიკურად წრფივი და არაწრფივი მოდელების, ჰიდროდინამიკის, მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ძირითადი დამოკიდებულებები. მოყვანილია აგრეთვე ფირფიტების ღუნვის კორხპოფ-ლიავის და მინდლინ-რაისნერის მოდელები, ცვლადი სისქის ფირფიტების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელები, ღეროების ეილერ-ბერნულის და იერარქიული მოდელები. განხილულია აგრეთვე მოდელები ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით და ფირფიტის დრეკად ფუძეზე ღუნვის ვინკლერის მოდელი.

ლექციების კურსი განკუთვნილია მათემატიკური, საბუნებისმეტყველო და ტექნიკური პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის; შეიძლება გამოყენებულ იქნეს აგრეთვე როგორც ცნობარი აღნიშნული მოდელებით დაინტერესებულ პირთა მიერ.

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მეთოდსაბჭოს მიერ რეკომენდებულია მათემატიკური, საბუნებისმეტყველო და ტექნიკური პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის.

რედაქტორები: პროფ. დ. ნატროშვილი  
ფ.მ.მ.დ. ჯ. შარიტაძე

რეცენზენტები: დოც. ნ. ხხირტლაძე  
ფ.მ.მ.კ. ნ. ჩინჩალაძე

## წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

წინამდებარე ლექციების კურსი დაწერილია ავტორის მიერ წლების განმავლობაში ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის და გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტებისა და სოხუმის ფილიალის ფიზიკა-მათემატიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის წაკითხული არჩევითი კურსების საფუძველზე. ლექციების კურსში გადმოცემულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, სახელდობრ: დრეკადი და პლასტიკური დეფორმადი სხეულების გეომეტრიულად და ფიზიკურად წრფივი და არაწრფივი მოდელები; ჰიდროდინამიკის, მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ძირითადი დამოკიდებულებები. მოყვანილია ძირითადი ორგანზომილებიანი (ბრტყელი დეფორმაცია, ბრტყელი განზოგადებული დამბული მდგომარეობა, ფირფიტების ღუნვის კირხჰოფ-ლიავის და მინდლინ-რაისნერის კლასიკური თეორიები, ცვლადი სისქის ფირფიტების იერარქიული თეორია) და ერთგანზომილებიანი (ცვლადი განიკვეთის მქონე ღეროების ეილერ-ბერნულის თეორია, ცვლადი მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროების იერარქიული თეორია) მოდელები. განხილულია აგრეთვე მოდელი ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით და ფირფიტის დრეკად ფუძეზე ღუნვის ვინკლერის მოდელი. ამოცანების განზოგადებულ და ვარიაციულ ფორმულირებებთან და შესაბამისი არსებობის ზოგიერთ თეორემასთან დაკავშირებით, ლექციების კურსს ახლავს დამატება დამხმარე მასალით ფუნქციონალური ანალიზიდან. მითითებულია ლიტერატურა ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის დამტკიცებასა და კონკრეტული ამოცანების ამოხსნასთან დაკავშირებით. სტუდენტთა მომზადების დონიდან გამომდინარე ლექციების კურსის წაკითხვა შეიძლება

მთლიანად, როგორც ორსემესტრიანი კურსი (8 კრედიტი<sup>\*)</sup>), ან ნაწილობრივ, როგორც სემესტრული კურსები (2-4 კრედიტი), ამასთან მისი ნაწილების გამოყენება შეიძლება როგორც შესავალი კურსისა, რომელიც გაღრმავებული იქნება ციტირებული სპეციალური ლიტერატურის გამოყენებით. ის შეიძლება აგრეთვე გამოყენებულ იქნეს როგორც ცნობარი დეფორმადი მყარი სხეულების, სითხეებისა და გაზების და მათი ურთიერთქმედების ამოცანებით დაინტერესებულ პირთა მიერ. ლექციების კურსში შეტანილია ზოგიერთი უახლესი შედეგი და დასმულია ჯერ კიდევ გამოუკვლევია აქტუალური პრობლემები, რომლებიც შეიძლება იქცნენ როგორც საკურსო და სამაგისტრო, ასევე საკვალიფიკაციო ნაშრომების თემადად.

წინასიტყვაობის ბოლოს მაღლობას ვუხვდი რედაქტორებს დ. ნატროშვილსა და ჯ. შარიქაძეს და რეცენზენტებს ნ. სხირტლაძესა და ნ. ჩინჩალაძეს სასარგებლო დისკუსიებისა და რჩევებისათვის. ასევე მაღლობას ვუხვდი მ. ბიწაძეს ლექციების კურსის კომპიუტერზე აწყობისათვის, ხოლო ა. სლობოდინას და ნ. ცინაძეს ნახაზების აგებისათვის.

**გ. ჯაიანი**

---

<sup>\*)</sup> იგულისხმება ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მიღებული საკრედიტო სისტემით განსაზღვრული კრედიტი.



## მეთოდური მითითებები

წინამდებარე ლექციების კურსი აგებულია ისე, რომ მის საფუძველზე შეიძლება წაკითხული იქნეს შემდეგი კურსები:

1. უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელების შესავალი (8 კრედიტი);
2. ფირფიტების იერარქიული მოდელები (4 კრედიტი);
3. ღეროების იერარქიული მოდელები (4 კრედიტი);
4. ფირფიტების ღუნვის კირხჰოფ-ლიავის მოდელი (2 კრედიტი);
5. ფირფიტების ღუნვის რაისნერ-მინდლინის მოდელი (2 კრედიტი);
6. ღეროების ეილერ-ბერნულის მოდელი (2 კრედიტი);
7. დრეკად-პლასტიკური სხეულების მოდელები (2 კრედიტი);
8. წამახვილებული ფირფიტების მოდელები (4 კრედიტი);
9. წამახვილებული ღეროების მოდელები (3 კრედიტი);
10. დრეკადი მყარი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების მოდელები (3 კრედიტი);
11. ჰიდრომექანიკის შესავალი (3 კრედიტი);
12. დრეკადობის თეორიის შესავალი (4 კრედიტი);
13. სტაციონარული პროცესების მათემატიკური მოდელირება (6 კრედიტი).

ლექციების პირველი კურსის წაკითხვისას, თუ მხოლოდ მათემატიკური მოდელების აგებით შემოვიწახვრებით, შეიძლება გამოტოვებული იქნეს §1.21 და დამატებები.

ლექციების მეორე კურსის წაკითხვისას, თუ სტუდენტები არ იცნობენ დრეკადობის თეორიას, გამოტოვებული უნდა იქნეს §1.13, §1.22-1.30, §2.1-2.5 და ნაწილები III და IV, ხოლო თუ დრეკადობის თეორიის კურსი მოსმენილი აქვთ, მაშინ უნდა

წაკითხოს §2.6 გაღრმავებული იქვე მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების შესამე-შეექვსე კურსების წაკითხვისას უნდა ვისარგებლოთ ლექციების მეორე კურსის წაკითხვის მეთოდური მითითებებით იმ განსხვავებით, რომ §2.6 შესაბამისად შეიცვლება §3.2-ით, §2.4-ით, §2.5-ით და §3.1-ით.

ლექციების მერვე და მეცხრე კურსების წაკითხვისას უნდა ვისარგებლოთ მეოთხე და მეექვსე კურსების მეთოდური მითითებებით, იმ აუცილებელი დამატებით, რომ კურსი უნდა გაღრმავდეს შესაბამისად §2.4 და §2.6, და §3.1 და §3.2-ში მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების მეშვიდე კურსი გულისხმობს ნაწილი I-ის I-IV და VI თავების წაკითხვას, გარდა §1.13-სა, ხოლო თუ სტუდენტებს მოსმენილი აქვთ დრეკადობის თეორიის კურსი, მაშინ – მხოლოდ VI თავს გაღრმავებულს იქვე მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების მათე კურსის წაკითხვა მიზანშეწონილია მხოლოდ იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც მოსმენილი აქვთ დრეკადობის თეორიისა და ჰიდრომექანიკის კურსები, ამასთან გამოყენებული უნდა იქნეს ნაწილ IV-ში მითითებული ლიტერატურა.

ლექციების მეთერთმეტე კურსი ითვალისწინებს ნაწილი I-ის პირველი ორი და მეხუთე თავების და §1.13-ის წაკითხვას.

ლექციების მეთორმეტე კურსი გულისხმობს ნაწილი I-ის (გარდა §1.13-ის და თავი V და VI-სა) და ნაწილი II-ის თავი I-ის წაკითხვას.

ლექციების მეცამეტე კურსი ითვალისწინებს ლექციების პირველი კურსის მასალას არასტაციონარული პროცესების გამოკლებით.

ლექციების ყველა ამ კურსის წაკითხვისას სასურველია, ლექტორმა, თავისი შეხედულებების მიხედვით, სტუდენტებს და-

მოუკიდებლად მოამზადებინოს მასალის გარკვეული ნაწილი სასემინარო მუშაობისათვის.

ყველა ეს კურსი გათვალისწინებულია ბაკალავრიატის მაღალი კურსებისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის.

ყველა ამ კურსისათვის აუცილებელი მინიმუმია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ცოდნა. სასურველია აგრეთვე ანალიზური გეომეტრიისა და თეორიული მექანიკის საფუძვლების ცოდნა.

## შესავალი. ძირითადი კიპოთეზები

ჩვენ განვიხილავთ *მატერიალურ ობიექტებს*, რომელთა ქვეშ გვესმის ყოველგვარი სხეული, რომელსაც შესწავლის პროცესში შეუძლია ნებისმიერად იცვალოს ფორმა და მდებარეობა სივრცეში. ასეთებს განეკუთვნებიან გაზები, სითხეები ან მყარი სხეულები, რომელთაც სივრცეში გარკვეული მოცულობა უკავიათ. დაკვირვებებიდან ცნობილია, რომ მატერიალურ ობიექტებს მოლეკულური აგებულება აქვთ. მეორე მხრივ, რაგინდ მცირე არ უნდა ავიღოთ სხეულის მოცულობის ელემენტი, ის უამრავ მოლეკულას შეიცავს. მაგალითად, ჰაერის კუბი, რომლის წიბო 0,001 მმ-ია, შეიცავს  $2,7 \cdot 10^7$  მოლეკულას. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული დაყოფილია ამგვარ ელემენტებად, ისინი შეიძლება პრაქტიკულად უსასრულო მცირეებად ჩავთვალოთ და დავახასიათოთ სიჩქარის, აჩქარების და მოლეკულებზე მოქმედი ძალების საშუალო მნიშვნელობებით. ამგვარად შეიძლება მივიღოთ წარმოდგენა *უწყვეტ გარემოზე*, როგორადაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ სხეულებს. მატერიალური ობიექტების უწყვეტ გარემოდ მიღება გვაძლევს საშუალებას, გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის მეთოდები.

*მექანიკა* არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური ობიექტების მოძრაობასა და წონასწორობას სივრცესა და დროში. მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც ცნობილია *თეორიული მექანიკის* სახელით, მოიცავს მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის მათემატიკური აღწერის მეთოდებს. *მექანიკური მოძრაობა* კი ეწოდება სხეულების ფარდობით გადაადგილებას.

მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონებია *ნიუტონის<sup>7)</sup> კანონები*:

---

<sup>7)</sup> ი. ნიუტონი (1643-1727).

1. *ინერციის კანონი*. სხეული იმყოფება მოსვენებულ (უძრავ) მდგომარეობაში ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად, თუ გარე ძალების მოქმედების შედეგად იგი არ იცვლის თავის მდგომარეობას, ე.ი. მისი სიჩქარე (ერთეული  $m/s = \text{მ/წმ}$ )<sup>\*)</sup> მუდმივია

$$\vec{v} = \text{const.}$$

2. *ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი*. მოძრავ სხეულზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალა (ერთეული  $N = \text{ნიუტონი}$ )<sup>\*\*)</sup> მისი  $m$  მასისა (ერთეული  $kg = \text{კგ}$ )<sup>\*\*\*)</sup> და  $\vec{a}$  აჩქარების (ერთეული  $m/s^2 = \text{მ/წმ}^2$ ) ნამრავლის ტოლია:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

3. *ქმედებისა და უკუქმედების კანონი*. ორი სხეულის ერთმანეთზე ზემოქმედების ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

*რაიმე წერტილის მიმართ ძალის მომენტი* ეწოდება ვექტორს, რომელიც ამ წერტილის ძალის მოდების წერტილთან შემაერთე-

<sup>\*)</sup> მეტრი არის სინათლის მიერ ვაკუუმში  $1/299\,792\,458$  წაშში გავლილი მანძილი. წაში არის ცეზიუმის ( $^{133}\text{Cs}$ ) ატომის ძირითადი მდგომარეობის ორ ზენაზ დონეს შორის გადასვლის შესაბამისი გამოსხივების  $9\,192\,631\,770$  პერიოდის ტოლი დრო. აქ და შემდგომში მითითებულია ერთეულები საერთაშორისო ერთეულთა SI სისტემაში. ამ სისტემაში ძირითად სიდიდეებად (ერთეულებად) მიღებულია სიგრძე (L), დრო (T), მასა, თერმოდინამიკური ტემპერატურა, ნივთიერების რაოდენობა, ელექტრული დენის ძალა და სინათლის ძალა. წარმოებული ერთეული (მაგალითად, სიჩქარის ერთეული) გამოისახება ძირითადი ერთეულების საშუალებით შესაბამისი მათემატიკური ფორმულით. ფიზიკური სიდიდეების ძირითად სიდიდეებად მიღებულ სიდიდეებზე დამოკიდებულების ფორმას განზომილება ეწოდება (მაგალითად,  $\text{dim } \vec{v} = \text{LT}^{-1}$ ).

<sup>\*\*)</sup> 1 ნიუტონი არის ის ძალა, რომელიც 1 კგ მასის მქონე სხეულს ანიჭებს 1  $\text{მ/წმ}^2$  აჩქარებას.

<sup>\*\*\*)</sup> 1 კგ მასა კილოგრამის საერთაშორისო პროტოტიპის მასის ტოლია.

ბელი ვექტორის (მის საწყის წერტილად მიღებულია წერტილი, რომლის მიმართაც ითვლება მომენტი) და ძალის ვექტორის ვექტორული ნამრავლის ტოლია.

სხეულზე მოქმედი ძალების, როგორც სრიალა ვექტორების, ჯამს ეწოდება სხეულზე მოქმედ ძალთა ნაკრები (მთავარი) ვექტორი, ხოლო მათი მომენტების ჯამს - ნაკრები (მთავარი) მომენტი.

ამბობენ, რომ სხეული წონასწორობის მდგომარეობაშია, თუ მასზე მოქმედი ძალებია წონასწორობაში, ხოლო ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, თუ მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

ამდენად, წონასწორობაში მყოფ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

დალაშერის<sup>\*)</sup> პრინციპის თანახმად მოძრავ სხეულზე მოქმედი გარე ძალები წონასწორდება ინერციის ძალით.

ინერციის ძალა ფიქტიური ძალაა, რომელიც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ( $-m\ddot{a}$ )-ს ტოლია.

თეორიული მექანიკის განტოლებები სრულად აღწერენ მატერიალურ წერტილთა სისტემებისა და აბსოლუტურად მყარი სხეულების (ე.ი. ისეთი მყარი სხეულების, რომელთა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია, მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ძალები მოქმედებენ მათზე) მოძრაობას. თუ მყარი სხეულის განხილვის პროცესში მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილი დროებით ან მუდმივად იცვლება, მაშინ მათ დეფორმად მყარ სხეულებს, ხოლო სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას დეფორმაციას ვუწოდებთ. დეფორმადი მყარი სხეულების ან გაზების და სითხეების მოძრაობის დასახასიათებლად თეორიული მე-

<sup>\*)</sup> ე.ლ. დალაშერი (1717-1783).

ქანიკის განტოლებები უკვე აღარ გამოდგება. მექანიკის იმ დარგს, რომელიც დეფორმად მყარ სხეულებს, გაზებს და სითხეებს შეისწავლის, ეწოდება *უწყვეტ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა*.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში მიღებულია ე.წ. *გამყარების პრინციპი*, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

დეფორმადი სხეულის წონასწორობისათვის მასზე მოქმედმა გარე ძალებმა უნდა დააკმაყოფილონ იმავე ფორმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები.

გამყარების პრინციპის თანახმად, დეფორმადი სხეულის წონასწორობის ქვეშ ჩვენ გვესმის ის მდგომარეობა, როცა მისი და მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილის ფორმის მქონე აბსოლუტურად მყარი სხეული წონასწორობაშია დეფორმად სხეულზე და შესაბამისად მის ნებისმიერ ნაწილზე მოღებულ გარე ძალების მოქმედების პირობებში.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკა იყოფა *ჰიდროაერომექანიკად* ან, რაც იგივეა, გაზების და სითხეების მექანიკად და *დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკად*.

სხეულის თვისებას, მასზე მოღებულ გარე ძალების მოხსნის შემდეგ დაიბრუნოს თავისი პირვანდელი მდგომარეობა, *დრეკადობა* ეწოდება.

სხეულის თვისებას, გარე ძალების მოქმედების შედეგად განიცადოს დიდი *პლასტიკური დეფორმაცია*, ე.ი. დეფორმაცია, რომელიც გარე ძალების მოხსნის შემდეგ რჩება, *პლასტიკურობა* ეწოდება.

ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების შესაბამისად დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკა იყოფა *დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორიებად*. ჩვენ ძირითადად შევისწავლით დრეკადობის თეორიის ელემენტებს (ფირფიტებისა და ღეროების თეორიების ჩათვლით), თუმცა განვიხილავთ აგრეთვე პლასტიკურობის

თეორიის, სითხის მოძრაობისა და დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების მოდელებსაც.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, დრეკადობის თეორია მექანიკის ის დარგია, რომელიც შეისწავლის მოძრავ ან წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფ დეფორმად მყარ სხეულში დეფორმაციებს და ამასთან დაკავშირებით წარმოქმნილ შინაგან ძალებს, რომლებიც გარეშე ფიზიკური ზემოქმედების შედეგად წარმოიშვებიან და რომლებიც ცდილობენ, დააბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარეობაში.

ასეთივე ამოცანები შეისწავლება მექანიკის სხვა დარგშიც — მასალათა გამძლეობაშიც, მაგრამ მისი უხეში მეთოდები, რომლებიც მისაღებია ცალკეული ღეროებისაგან შედგენილი სხვადასხვა კონსტრუქციების შესასწავლად, გამოუსადეგარია ფირფიტებისა და გარსების შესწავლის დროს, საერთოდ რომ არაფერი ვთქვათ ზოგად სამგანზომილებიან ამოცანებზე.

დრეკადობის თეორია მჭიდროდ არის დაკავშირებული სამშენებლო მექანიკასთან, რაც წარმოადგენს მექანიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ღეროებისაგან შემდგარი სისტემების — ბრტყელი და სივრცული ფერმების, თალების, საყრდენი კედლებისა და სხვათა სიმტკიცის, სიხისტიისა და მდგრადობის გათვლის თეორიას.

პირველი ცდა იმ ტიპის ამოცანების ამოხსნისა, რომელთაც დრეკადობის თეორია შეისწავლის, ეკუთვნის იტალიელ მეცნიერს გალილეო გალილეის (1564-1642), რომელიც შეეცადა, ამოეხსნა ამოცანა ღეროს ღუნვისა და გაჭიმვის შესახებ.

ინგლისელმა მეცნიერმა რობერტ ჰუკმა (1635-1702) 1678 წელს გამოქვეყნებული ნაშრომით, რომელიც ეხებოდა მის მიერ ექსპერიმენტულად აღმოჩენილ კანონს გაჭიმვის დროს გარკვეულ საზღვრებში დატვირთვისა და დეფორმაციას შორის წრფივი დამოკიდებულების შესახებ, ფაქტობრივად საფუძველი დაუდო დრეკადი სხეულების მექანიკას (იხ. §1.12).



ინგლისელმა *თომას იუნგმა* (1773-1829) XIX საუკუნის დასაწყისში შემოიღო დრეკადობის მოდულის ცნება. მან დაადგინა აგრეთვე განსხვავება გაჭიმვა-შეკუმშვისა და ძერის დეფორმაციებს შორის. ამ დროისათვის *ჟ. ლაგრანჟის* (1736-1813), *სოფი ჟერმენის* (1776-1831), *ს. ჰუსონის* (1781-1840) და *ლ.მ. ნავიეს* (1785-1836) შრომებით ფაქტობრივად შეიქმნა ფირფიტების თეორიის საფუძვლები.

ამდენად, XVIII-XIX საუკუნეების მიჯნაზე საფუძველი ჩაეყარა დრეკადობის თეორიას, რომელმაც შემდგომი არსებითი განვითარება კპოვა ფრანგი მეცნიერის *ო. კოშის* (1789-1857) შრომებში. მან შემოიღო დეფორმაციისა და ძაბვის ცნებები და საგრძნობლად გაამარტივა ძირითადი განტოლებების გამოყვანა.

1828 წელს *გ. ლამესა* (1795-1870) და *ბ. კლაპეირონის* (1799-1864) შრომებით ფაქტობრივად დასრულდა დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ძირითადი აპარატის შექმნა.

დრეკადობის თეორიის განვითარებაში თვისობრივად ახალი ნაბიჯი იქნა გადადგმული *ბ. სენ-ვენანის* (1797-1886) მიერ მისივე სახელით ცნობილ პრინციპის ჩამოყალიბებით (იხ. § 1.20).

დრეკადობის თანამედროვე თეორიის შექმნაში უცხოელ მეცნიერებთან ერთად აღსანიშნავია ქართველი მეცნიერების *ნ. მუსხელიშვილის* (1891-1976), *ი. ვეკუას* (1907-1977), *ვ. კუპრაძის* (1903-1985) და მათი მოწაფეების ღვაწლიც.

პიდროაერომექანიკაში ჰუკის ექსპერიმენტული კანონის როლს თამაშობს ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონი (იხ. §1.13). განიხილავენ სითხის ორ მოდელს: იდეალურსა და ბლანტს. იდეალური სითხის განტოლებები გამოიყვანა *ლ. ეილერმა* (1707-1783), ხოლო ბლანტი სითხისა კი *ლ.მ. ნავიემ* და *ჯ.გ. სტოქსმა* (1819-1903) (იხ. §1.23). პიდრომექანიკის ამოცანების შესწავლაში დიდი როლი შეასრულეს *ნ.ე. ჟუკოვსკისა* (1847-1921) და *ს.ა. ჩაპლიგინის* (1869-1942) შრომებმა. აღსანიშნავია *ლ. პრანდტლის* (1875-1953), *თ. კარმანის* (1881-1963)

და *ო. რეინოლდსის* (1842-1912) დამსახურება ბლანტი სითხის მოძრაობის შესწავლის საქმეში. გასული საუკუნის 30-იან წლებში გეტინგენის ჰიდრომექანიკის ინსტიტუტის *ლ. პრანდტლის* ლაბორატორიაში უნიკალური ექსპერიმენტები ჩაატარა *ი. ნიკურაძემ* (1894-1979). თბილისში მოღვაწე ქართველმა მეცნიერებმა (*დ. დოლიძე* (1908-1960) და მისი მოწაფეები) გარკვეული წვლილი შეიტანეს ჰიდროაერომექანიკის განვითარებაში.

# ნაწილი I. სამბანჯომილუბიანი მოდელები

## თავი I. კავშირის თეორია

### §1.1. მოცულობითი და ზედაპირული ძალები

მექანიკაში არჩევენ ორი სახის ძალებს: *მოცულობითს* და *ზედაპირულს*, იმისდა მიხედვით, თუ რაზე მოქმედებენ ისინი: მოცულობით თუ ზედაპირულ ელემენტზე (იხ. მაგ., [2], [35], [52]). მოცულობითი ძალის ტიპური მაგალითია სიმძიმის და ინერციის ძალები, ხოლო ზედაპირული ძალისა კი წნევა.

მოცულობითი ძალები მოქმედებენ გარემოს სხვადასხვა ელემენტის მოცულობაზე, უფრო სწორად, მასაზე. მიღებულია, რომ მოცულობის  $dV$  უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.1) მოქმედ მოცულობით ძალას აქვს  $\vec{\Phi}dV$  სახე, სადაც  $\vec{\Phi}$  რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის მოდების წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნეს  $dV$  ელემენტის ნებისმიერი შიგა  $x = (x_1, x_2, x_3)$  \*) წერტილი.  $\vec{\Phi}$ -ს ეწოდება მოცულობის ერთეულზე გათვლილი *მოცულობითი ძალა*. ე.ი. მისი ერთეულება

$$N / m^3 = \text{ნიუტონი/მ}^3 = ((\text{კგ} \cdot \text{მ}) / \text{წმ}^2) / \text{მ}^3 = \\ ((\text{კგ} \cdot \text{მ}) / \text{ს}^2) \text{მ}^3 = \text{კგ} / \text{მ}^2 \text{ს}^2.$$

თუ  $\rho$  აღნიშნავს გარემოს *სიმკვრივეს*, ე.ი. მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ მასას, მაშინ მასის ერთეულზე გათვლილი მოცულობითი ძალა, რომელსაც *მასობრივ ძალას* უწოდებენ,  $\vec{\Phi} / \rho$  -ს ტოლია.  $\vec{\Phi}$  დამოკიდებულია ელემენტის მდებარეო-

---

\*) კვებით, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩვენ განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა მარჯვენა  $x_1 x_2 x_3$  სისტემას, რომლის ბაზისია  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

ბაზე გარემოში ე.ი.  $x$  წერტილის კოორდინატებზე, ხოლო დინამიკურ შემთხვევაში – დროზეც. მთელ  $V$  მოცულობაზე მოქმედი მოცულობითი ძალა გამოისახება შემდეგი სამჯერადი ინტეგრალით (მისი ერთეულია  $N$  ნიუტონი)

$$\bar{\Psi} = \iiint_V \bar{\Phi} dV,$$

ხოლო მთავარი მომენტი – ინტეგრალით (მისი ერთეულია  $N \cdot m =$  ნიუტონი  $\cdot$  მ)

$$\bar{M} = \iiint_V [\bar{x}, \bar{\Phi}] dV, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

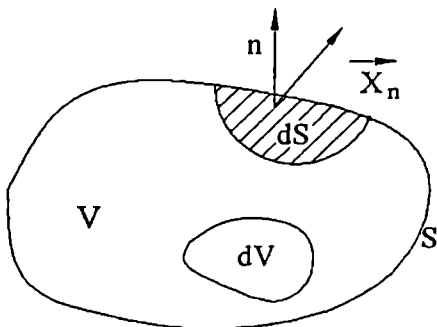
( $\bar{x}$ ,  $\bar{\Phi}$  და  $[\bar{x}, \bar{\Phi}]$  ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს). ამ უკანასკნელის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე მოგვცემენ მთავარ მომენტებს მათ მიმართ.

მიღებულია, რომ  $\bar{n}$  ნორმალის მქონე ზედაპირის  $dS$  უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.1) მოქმედ ზედაპირულ ძალას აქვს  $\bar{X}_n dS$  სახე, სადაც  $\bar{X}_n$  რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის მოდების წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნეს  $dS$  ელემენტის ნებისმიერი  $x$  შიგა წერტილი.  $\bar{X}_n$ -ს ეწოდება ფართის ერთეულზე გათვლილი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია  $Pa = N / m^2$  პასკალი). მთელ  $S$  ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია  $Pa \cdot m^2 = N$  ნიუტონი) გამოისახება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით

$$\bar{F} = \iint_S \bar{X}_n dS,$$

ხოლო მთავარი მომენტი (მისი ერთეულია  $m \cdot Pa \cdot m^2 = N \cdot m$ ) – ინტეგრალით

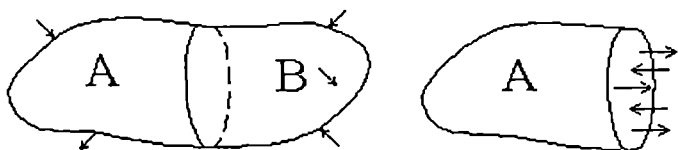
$$\bar{X} = \iint_S [x, \bar{X}_n] dS.$$



ნახ. 1.1.1

არადეფორმირებულ სხეულში ნაწილაკების განლაგება შეესაბამება სხეულის სითბურ წონასწორობას. თუ სხეულიდან აზრობრივად გამოვყოფთ რაიმე მოცულობას, მაშინ ყველა ძალა, რომელიც მასზე მოქმედებს სხეულის სხვა ნაწილების მხრიდან, გაწონასწორებული იქნება; გარე ძალების მოქმედების შედეგად კი ნაწილაკების განლაგება სხეულში იცვლება, ე.ი. სხეული განიცდის დეფორმაციას, რის შედეგადაც წარმოიშობა შინაგანი ძალები, რომლებიც ცდილობენ დაუბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარეობას. მათი განსაზღვრისათვის გამოიყენება ე.წ. *კუთის მეთოდი*. ვთქვათ, გარე ძალების მოქმედებით დეფორმირებული სხეული წონასწორობაშია. აზრობრივად გავკვეთოთ ის რაიმე ზედაპირით (იხ. ნახ. 1.1.2) ორ  $A$  და  $B$  ნაწილებად. აზრობრივად ჩამოვაშოროთ  $B$  ნაწილი და მისი მოქმედება  $A$  ნაწილზე შევცვალოთ კვეთის გასწვრივ მოდებული ისეთი ძალების მოქ-

მედებით, რომლებიც არ გამოიწვევენ  $A$  ნაწილის დეფორმირებული მდგომარეობის შეცვლას. ეს უკანასკნელი ძალები ახლა შეიძლება გავიგოთ, როგორც  $A$  ნაწილზე მოდებული გარე ზედაპირული ძალები.



ნახ. 1.1.2

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნახ. 1.1.1-ზე გამოსახული სხეული რაიმე სხვა სხეულებიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნაწილია, მაშინ  $\vec{X}_n dS$ -ს უწოდებენ დაძაბულობის ძალას ან ძაბვას, ხოლო  $\vec{X}_n$ -ს – ფართის ერთეულზე გაანგარიშებულ ძაბვას ან ძაბვის ვექტორს. ე.ი. მისი ერთეულია  $Pa = N / m^2$ .

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ  $\vec{X}_n dS$  გამოხატავს იმ ზედაპირულ ძალას, რომლითაც  $dS$ -ის საშუალებით  $S$  ზედაპირის გარეთ მდებარე გარემოს ნაწილი მოქმედებს მის შიგნით მდებარე ნაწილზე. მაშინ, ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, შიგა ნაწილი  $dS$ -ის საშუალებით გარე ნაწილზე იმოქმედებს  $\vec{X}_{-n} dS = -\vec{X}_n dS$  ზედაპირული ძალით. ინდექსი  $n$  აღნიშნავს, რომ  $\vec{X}_n = (X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})$  ძაბვის ვექტორი მოქმედებს

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  ნორმალის მქონე ფართზე. მის გეგმილს  $\vec{n}$  ნორმალის მიმართულებაზე ეწოდება დაბვის ვექტორის  $\sigma_n$  ნორმალური მდგენელი, ხოლო მოდების წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე გეგმილს -  $\tau_n$  მხები მდგენელი.

დაბვის ტენზორის კომპონენტების აღსანიშნავად გამოიყენება სხვადასხვა აღნიშვნა, რომლებზეც ნათელ წარმოდგენას გვაძლევნ შემდეგი მატრიცული ტოლობები:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

### §1.2. დაბვის ვექტორის დამოკიდებულება ფართის ორიენტაციაზე

$X_{ij}$ -თ,  $i, j = 1, 2, 3$ , აღნიშნოთ  $x_i$  ნორმალის მქონე ფართზე მოქმედი დაბვის ვექტორის გეგმილი  $x_j$  ღერძზე.

ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს კოშის შემდეგ ფორმულებს (იხ., მაგალითად, [2], [35], [52])

$$X_{ni} = X_{ji} n_j^* \quad (1.2.1)$$

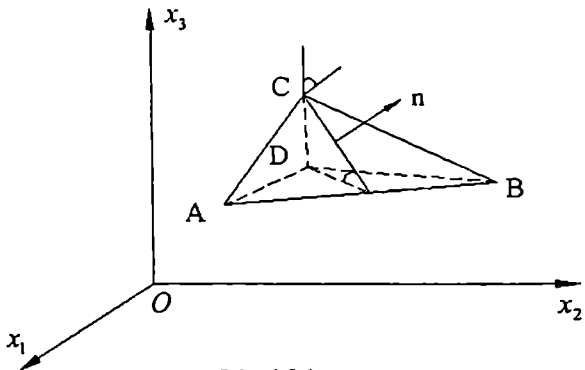
<sup>\*)</sup> თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება აჯამება მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამათავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1, 2, 3, ხოლო ბერძნული კი 1, 2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს ადგილი აქვს, მაგრამ აჯამება არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ ინდექსს

ქვემოდან ან ზემოდან გაუუსვამთ ხაზს. მაგალითად,  $a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ ,

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ, თუ ცნობილია მოცემულ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთმართობ ფართზე მოქმედი ძაბვები აღნიშნულ წერტილში, მაშინ შეიძლება გამოვთვალოთ ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორი ამავე წერტილში:

$$\vec{X}_n = X_{ni} \vec{e}_i = X_{ji} n_j \vec{e}_i \quad (1.2.2)$$

მატრიცს, რომლის ელემენტებია  $X_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , უწოდებენ ძაბვის ტენზორს (იხ. §1.4).



ნახ. 1.2.1

გაავლოთ სხეულის რაიმე  $D$  წერტილში საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები და მისგან  $h$  უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებული  $\vec{n}$  ნორმალის მქონე სიბრტყე. მივიღებთ  $ABCD$  ტეტრაედრს (იხ. ნახ. 1.2.1). ვივულის-

$$a_i^i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}^i, \text{ მაგრამ } a_{ij}^i = a_{ji} \text{ აღნიშნავს სამ ელემენტს: } a_{11}, a_{22},$$

$a_{33}$ -ს იმისდა მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს  $i$ .



ზმოთ, რომ მოცულობითი და ზედაპირული ძალები გარემოს წერტილის მიმართ უწყვეტი ფუნქციებია. თუ დაეუშვებთ, რომ სხეული წონასწორობაშია, მაშინ ტეტრაედრზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თუ ტეტრაედრის მოცულობას აღვნიშნავთ  $\Delta V$ -თი, მასზე მოქმედი მოცულობითი ძალის  $x_i$  ღერძზე გეგმილი იქნება

$$(\Phi_i + \varepsilon)\Delta V,$$

რადგან  $\Phi_i$ -ის მნიშვნელობას ვიღებთ  $D$  წერტილში, ხოლო  $\Phi_i(P) = \Phi_i(D) + \varepsilon$ , სადაც  $P$  ტეტრაედრის რაიმე შიგა წერტილია და  $\vec{\Phi}$ -ის უწყვეტობის გამო  $\varepsilon$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა  $h \rightarrow 0$ .

ანალოგიურად,  $ABC$  ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალის  $x_i$  ღერძზე გეგმილი იქნება

$$(X_{ni} + \varepsilon')\sigma,$$

სადაც  $\sigma$  არის  $ABC$  სამკუთხედის ფართი, ხოლო  $\varepsilon'$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა  $h \rightarrow 0$ .

ცხადია,  $ACD$ ,  $BCD$  და  $ABD$  ზედაპირებზე, რომელთა გარე ნორმალებია შესაბამისად  $-x_2$ ,  $-x_1$  და  $-x_3$ , მოქმედი ზედაპირული ძალების  $x_i$  ღერძზე გეგმილების ჯამი იქნება

$$(-X_{ji} + \varepsilon_j)\sigma_j,$$

სადაც  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  შესაბამისად  $BCD$ ,  $ACD$  და  $ABD$  სამკუთხედების ფართობებს აღნიშნავენ,  $\varepsilon_j$ ,  $j=1,2,3$ , უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, როცა  $h \rightarrow 0$ . მაგრამ

$$\Delta V = \frac{1}{3}h\sigma, \quad \sigma_j = \sigma n_j.$$

უკანასკნელი ცხადია სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად (იხ. ნახ. 1.2.1).

ამრიგად,

$$(\Phi_i + \varepsilon) \frac{h\sigma}{3} + (X_{,iii} + \varepsilon')\sigma + (-X_{,jj} + \varepsilon_j)\sigma n_j = 0.$$

ამ უკანასკნელის  $\sigma$ -ზე გაყოფისა და  $h$ -ის ნულისაკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ (1.2.1)-ს.

### §1.3. წონასწორობის განტოლებები

დავუშვათ, რომ ძაბვის ვექტორს, რომლის უწყვეტობაც ჩვენ წინა პარაგრაფში მოვითხოვეთ, სხეულის ნებისმიერ წერტილში აქვს უწყვეტი წარმოებულები.

ვიგულისხმობთ, რომ განსახილველი სხეული წონასწორობის მდგომარეობაშია და, გამყარების პრინციპის თანახმად, დავწეროთ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი  $V$  მოცულობის, რომლის  $S$  საზღვარი არ ეხება სხეულის საზღვარს, წონასწორობის

$$\iiint_V \bar{\Phi} dV + \iint_S \bar{X}_n dS = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\iiint_V [\bar{x}, \bar{\Phi}] dV + \iint_S [\bar{x}, \bar{X}_n] dS = 0 \quad (1.3.2)$$

პირობები.

თუ ჩავსვამთ (1.3.1)-ის მეორე შესაკრებში (1.2.2)-ს, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად (ვიგულისხმობთ, რომ  $S$  ზედაპირისთვის იგი სამართლიანია. მაგალითად,  $S$  ზედაპირი ლიპშიცისაა (იხ. დამატება 1). განსახილველი სხეულის საზღვარი კი შეიძლება იყოს არალიპშიცურიც, რადგან წონასწორობის განტოლებები გამოგვყავს არეში და არა არის ჩაკეტვაზე, რომელიც სხეულს უკავია, და ამდენად ყოველთვის მოიძებნება სხეულის ნებისმიერი შიგა წერტილის შემცველი ზემოხსენებული  $V$  არე ლიპშიცის საზღვრით), თუ  $\bar{n}$  გარე ნორმალია მივიღებთ,

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{X}_n dS &= \iint_S X_{ji} \bar{e}_i n_j dS \\ &= \iiint_V (X_{ji} \bar{e}_i)_{,j} dV = \iiint_V X_{ji,j} \bar{e}_i dV. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

(1.3.1) და (1.3.3)-დან ცხადია, რომ

$$\iiint_V (\Phi_i + X_{ji,j}) \bar{e}_i dV = 0.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და  $V$  არის ნუბისმიერობის გამო

$$(\Phi_i + X_{ji,j}) \bar{e}_i = 0. \quad (1.3.4)$$

რადგან  $\bar{e}_i$ ,  $i=1,2,3$ , წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ

$$\Phi_i + X_{ji,j} = 0, \quad i=1,2,3. \quad (1.3.5)$$

ამ განტოლებათა სისტემას წონასწორობის განტოლებებს უწოდებენ.

ანალოგიურად გარდაკვმნათ (1.3.2)-ის მეორე შესაკრები

$$\begin{aligned} \iint_S [\bar{x}, \bar{X}_n] dS &= \iint_S [\bar{x}, X_{ji} \bar{e}_i] n_j dS = \iiint_V [\bar{x}, X_{ji} \bar{e}_i]_{,j} dV \\ &= \iiint_V [\bar{x}_{,j}, X_{ji} \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{x}, (X_{ji} \bar{e}_i)_{,j}] dV \\ &= \iiint_V [\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{x}, X_{ji,j} \bar{e}_i] dV. \end{aligned}$$

<sup>\*)</sup>  $i$ -თი აღვნიშნავთ წარმოებულს  $X_i$  ცვლადის მიმართ, ხოლო  $ij$ -თი - მეორე რიგის წარმოებულს  $X_i$  და  $X_j$  ცვლადების მიმართ. მაგალითად,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_{,i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \equiv u_{,ij}.$$

ჩავსვით ეს უკანასკნელი (1.3.2)-ში

$$\iiint_V [\bar{x}, (\Phi_i + X_{ji}) \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV = 0.$$

პირველი შესაკრები (1.3.4)-ის ძალით ნულის ტოლია, ხოლო მეორე შესაკრებიდან ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და  $V$ -ს ნებისმიერობის გამო ვიღებთ, რომ

$$[\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] = X_{ji} [\bar{e}_j, \bar{e}_i] = 0.$$

ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი ჯამის სახით და გავითვალისწინოთ, რომ  $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$ , თუ  $i = j$ , და  $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = -[\bar{e}_j, \bar{e}_i]$ , მაშინ

$$\begin{aligned} & X_{12}[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + X_{13}[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + X_{21}[\bar{e}_2, \bar{e}_1] \\ & + X_{23}[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + X_{31}[\bar{e}_3, \bar{e}_1] + X_{32}[\bar{e}_3, \bar{e}_2] \\ = & (X_{12} - X_{21})[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (X_{23} - X_{32})[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + (X_{31} - X_{13})[\bar{e}_3, \bar{e}_1] \\ = & (X_{12} - X_{21})\bar{e}_3 + (X_{23} - X_{32})\bar{e}_1 + (X_{31} - X_{13})\bar{e}_2 = 0, \end{aligned}$$

ე.ი.

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad i \neq j. \quad (1.3.6)$$

ამრიგად, ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია.

თუ გარემოს რაიმე წერტილში ავიღებთ მასზე გამავალ ორ ფართით ელემენტს შესაბამისად  $\bar{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$  და  $\bar{n}'' = (n''_1, n''_2, n''_3)$  ნორმალეებით, მაშინ ერთ ფართით ელემენტზე მოქმედი  $\bar{X}_n$ -ძაბვის ვექტორის გვემილი მეორის ნორმალზე უდრის მეორეზე მოქმედი  $\bar{X}_n$ -ძაბვის ვექტორის გვემილს პირველზე:

$$\text{გვგ}_n \cdot \bar{X}_n \cdot = \text{გვგ}_n \cdot \bar{X}_n \cdot \cdot \quad (1.3.7)$$

მართლაც, (1.2.1)-ის თანახმად,

$$\text{გვგ}_n \cdot \bar{X}_n \cdot = (\bar{X}_n \cdot, n'') = X_{n'i} n''_i = X_{ij} n'_j n''_i. \quad (1.3.8)$$

ანალოგიურად,

$$\text{გვ } n \cdot \bar{X}_n = X_{ij} n_j n_i'.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში თუ აჯამების ინდექსებს ადგილებს შევუცვლით და გავითვალისწინებთ (1.3.6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\text{გვ } n \cdot \bar{X}_n = X_{ij} n_i n_j'. \quad (1.3.9)$$

(1.3.8) და (1.3.9) ტოლობების შედარებით, რადგან მათი მარჯვენა მხარეები ტოლია, ვრწმუნდებით (1.3.7)-ის სამართლიანობაში.

#### §1.4. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. ინვარიანტული კვადრატული ფორმა

ვთქვათ, ახალი  $x^1 x^2 x^3$  დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართველი კოსინუსები ძველი  $x_1 x_2 x_3$  დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ (და პირიქით), მოცემულია

$$\alpha_j^i = \cos(x^i, x_j)$$

ტოლობებით.

ახალ კოორდინატთა სისტემაში ძაბვები აღვნიშნოთ  $\tilde{X}_{k,l}$ -ით, მაშინ, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$\tilde{X}_k := \text{გვ } x^i \tilde{X}_{x^i} = X_{ij} \alpha_j^k \alpha_i^l. \quad (1.4.1)$$

ეს ტოლობები გვაძლევენ კავშირს ძაბვებს შორის ძველ და ახალ კოორდინატთა სისტემაში.

თუ მოცემულია რაიმე წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კოორდინატთა სისტემას (საზოგადოდ მრუდწირულს) ეთანადება, საზოგადოდ, წერტილზე დამოკიდებული

$$A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

სიდიდე, მაშინ ამ სიდიდეს ეწოდება  $(p, q)$  ტიპის ტენზორი (იხ., მაგ., [1]), თუ ძველი სისტემიდან ახალ სისტემაზე გადასვლის დროს ის გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულებით:

$$\tilde{A}_{i_1, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_p} = A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x_{j_q}}{\partial x^{i'_q}}$$

$(0, q)^*$  ტიპის ტენზორს ეწოდება კოვარიანტული, ხოლო  $(p, 0)$  ტიპის ტენზორს – კონტრავარიანტული. რადგანაც

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_k} dx_k \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x^i},$$

სადაც,  $f$  სკალარული სიდიდეა, ცხადია, რომ ყოველი კონტრავარიანტული ინდექსის მიმართ გარდაქმნა ხდება კოორდინატების დიფერენციალების გარდაქმნის ფორმულების შესაბამისად, ხოლო ყოველი კოვარიანტული ინდექსის მიმართ – სკალარის წარმოებულების გარდაქმნის შესაბამისად.

შენიშნოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების შემთხვევაში, რადგან

$x^k = \alpha_j^k x_j + \beta_k$ ,  $x_j = \alpha_j^k x^k - \beta_j$ ,  $\beta_k = const$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  
ამიტომ

$$\frac{\partial x^k}{\partial x_j} = \alpha_j^k \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = \alpha_j^k \delta_{ij} = \alpha_j^k,$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x^{i'}} = \alpha_j^{i'} \delta_{j k} = \alpha_j^{i'} \quad \text{ე.ი.} \quad \frac{\partial x_j}{\partial x^{i'}} = \alpha_j^{i'}$$

აქ

\*  $p = 0$  და  $q = 0$  ნიშნავს, რომ შესაბამისი ინდექსები არ გვაქვს.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

კრონეკერის<sup>\*)</sup> სიმბოლოა. ამდენად,

$$\alpha_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x^k}. \quad (1.4.2)$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში კოვარიანტული და კონტრაგარიანტული ტენზორები ერთმანეთს ემთხვევა.

(1.4.2)-ის თანახმად ცხადია, (1.4.1) შეიძლება ასე ჩაეწეროს

$$\tilde{X}_{kl} = X_{ij} \frac{\partial x^k}{\partial x_j} \frac{\partial x^l}{\partial x_i} = X_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial x^k} \frac{\partial x_i}{\partial x^l}.$$

ეს კი ტენზორის განმარტების თანახმად იმას ნიშნავს, რომ  $X_{ij}$  მეორე რანგის ტენზორია.

$n$  ნორმალის მქონე ფართზე მოქმედი ძაბვის  $\bar{X}_n$  ვექტორის ნორმალური  $\sigma_n$  მდგენელი, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$\sigma_n := X_{nn} = X_{ij} n_j n_i. \quad (1.4.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := X_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (1.4.4)$$

$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  მეორე რიგის მთელი რაციონალური ფუნქციაა  $\xi_i$ ,  $i=1,2,3$ , ცვლადების მიმართ, ე.ი.  $\xi_i$   $i=1,2,3$ , ცვლადების კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს.

ვთქვათ,

$$\bar{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

განსახილველი ფართის ნორმალის დადებითი მიმართულების მქონე ვექტორია. მაშინ

<sup>\*)</sup> ლ. კრონეკერი (1823-1891).

$$n_i = \frac{\xi_i}{P} \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.4.5)$$

სადაც  $P$  არის  $\bar{P}$  ვექტორის სიგრძე.

(1.4.3)-(1.4.5)-ის თანახმად, ცხადია

$$\sigma_n \cdot P^2 = 2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.4.6)$$

$\sigma_n$  სიდიდე, მისი განმარტებიდან გამომდინარე, ფიზიკური სიდიდეა და ამიტომ არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ასევე ვექტორის სიგრძის კვადრატი  $P^2$  არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ამდენად,  $\sigma_n \cdot P^2$  ნამრავლი არ იქნება დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე და აქედან გამომდინარე  $2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  კვადრატული ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ. საერთოდ, *გამოსახულებას (ფორმას, ინტეგრალს და სხვ.), რომელიც შედგება ისეთი სიდიდეებისგან, რომლებიც დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, მაგრამ არ იცვლის თავის მნიშვნელობას და სტრუქტურას კოორდინატთა ერთი სისტემის მეორეთი შეცვლის დროს, ეწოდება ინვარიანტული (ინვარიანტული ფორმა, ინვარიანტული ინტეგრალი და სხვ.)*

მართლაც, თუ  $\tilde{\xi}_i \quad i = 1, 2, 3$ ,  $\bar{P}$  ვექტორის კომპონენტებია ახალ კოორდინატთა სისტემაში და  $\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)$ -ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში (1.4.4) წესით აგებულ კვადრატულ ფორმას, მაშინ

$$\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3) = \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.4.7)$$

რადგან ერთი მხრივ ადგილი აქვს (1.4.6) ტოლობას, ხოლო მეორე მხრივ

$$\sigma_n \cdot P^2 = 2\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3).$$

თუ (1.4.7)-ს გადმოვწერთ ცხადი სახით:



$$\tilde{X}_{kl} \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l = X_{ij} \xi_i \xi_j$$

და ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილ ახალ და ძველ კოორდინატებში ვექტორის კომპონენტებს შორის კავშირის

$$\xi_i = \alpha'_i \tilde{\xi}_i \quad (1.4.8)$$

ფორმულებს, კვლავ მივიღებთ (1.4.1)-ს.

### §1.5. მთავარი ძაბვები. ძაბვის მთავარი მიმართულებები. ძაბვის ზედაპირი

მიმართულებას, რომლის პერპენდიკულარულ ფართზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვა მოქმედებს, ძაბვის მთავარი მიმართულება ეწოდება, ხოლო შესაბამის ნორმალურ ძაბვას – მთავარი ძაბვა. ე.ი. მთავარი ძაბვის ვექტორი ფართის ნორმალის პარალელურია. ამდენად

$$X_{nj} = X_{jk} n_k = \sigma n_j, \quad (1.5.1)$$

სადაც  $\sigma$  სკალარული სიდიდეა.

(1.5.1) გადმოვწეროთ შემდეგი სახით

$$(X_{jk} - \sigma \delta_{jk}) n_k = 0. \quad (1.5.2)$$

იმისათვის, რომ  $n_k$ -ს,  $k=1,2,3$ , მიმართ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა (1.5.2) სისტემას ჰქონდეს არატრივიალური ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია

$$\det \|X_{jk} - \sigma \delta_{jk}\| = 0. \quad (1.5.3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ უკანასკნელს მხოლოდ ნამდვილი  $\sigma^l$  ფესვები აქვს. დაეუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,

$$\sigma^l = \alpha^l + i\beta^l, \quad \beta^l \neq 0, \quad l=1,2,3, \quad (1.5.4)$$

და შესაბამისად ამისა

$$n'_k = p'_k + iq'_k \quad l = 1, 2, 3. \quad (1.5.5)$$

თუ (1.5.4)-ს და (1.5.5)-ს ჩავსვამთ (1.5.2)-ში და გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ, რომ

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) p'_k + \beta^l \delta_{jk} q'_k = 0, \quad j, l = 1, 2, 3,$$

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) q'_k - \beta^l \delta_{jk} p'_k = 0, \quad j, l = 1, 2, 3.$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ  $q'_j$ -ზე, მეორე -  $p'_j$ -ზე და ავეჯამოთ 1-დან 3-მდე  $j$ -ის მიმართ; პირველს გამოვაკლოთ მეორე და გამოვიყენოთ  $X_{jk}$ -ს და  $\delta_{jk}$ -ს სიმეტრიულობა, მაშინ

$$\beta^l (\delta_{jk} p'_j p'_k + \delta_{jk} q'_j q'_k) = 0,$$

ე.ი.

$$\beta^l (p'_k p'_k + q'_k q'_k) = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (1.5.6)$$

რადგანაც ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არაუარყოფითია და ამასთან  $p'_k$ ,  $q'_k$  ყველა ერთდროულად არ ხდება ნული (რამდენადაც ჩვენ დაუშვით, რომ (1.5.2)-ს აქვს არატრივიალური ამონახსნი), ამიტომ

$$\beta^l = 0.$$

ე.ი.  $\sigma^l$  ნამდვილებია. ამდენად  $n'_k$ , როგორც ნამდვილკოეფიციენტიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, ასევე ნამდვილი იქნება.  $\sigma^l$ -ებს ეწოდებათ ძაბვის ტენზორის მთავარი კომპონენტები, ხოლო  $n'_k$ -ები მათი მიმმართველი კოსინუსებია.

ეთქვათ,  $\sigma^l$  და  $\sigma^p$  (1.5.3) განტოლების ორი ერთმანეთის არატოლი ფესვია, ხოლო  $n'_k$  და  $n''_k$  კი  $n_k$ -ს შესაბამისი მნიშვნელობებია. მაშინ (1.5.2)-ის თანახმად

$$(X_{jk} - \sigma^l \delta_{jk}) n'_k = 0, \quad j, l = 1, 2, 3,$$

$$(X_{jk} - \sigma^p \delta_{jk}) n''_k = 0, \quad j, p = 1, 2, 3.$$

პირველი გავამრავლოთ  $n_j^p$ -ზე, ხოლო მეორე —  $n_j^l$ -ზე, პირველს გამოვაკლოთ მეორე და გამოვიყენოთ  $X_{jk}$ -ს და  $\delta_{jk}$ -ს სიმეტრიულობა:

$$(\sigma^p - \sigma^l) \delta_{jk} n_j^l n_k^p = 0, \quad l, p = 1, 2, 3.$$

აქედან, რადგან  $\sigma^p \neq \sigma^l$ , გამომდინარეობს, რომ

$$n_j^l n_j^p = 0,$$

ე.ი. ძაბვის მთავარი მიმართულებები ორთოგონალურნი არიან. თუ სამივე ფესვი ერთმანეთისგან განსხვავებულია, მაშინ გვექნება სამი ცალსახად განსაზღვრული ურთიერთმართობი მთავარი მიმართულება. თუ ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ , მაშინ  $\sigma_3$ -ის შესაბამისი  $\bar{n}^3$  მთავარი მიმართულება  $\bar{n}^1$ -ის და  $\bar{n}^2$ -ის ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის ორთოგონალური იქნება. ამდენად, ამ სიბრტყეში აღებული ნებისმიერი ორი ურთიერთმართობი მიმართულება შესაბამის მთავარ მიმართულებად შეიძლება იქნეს აღებული. თუ  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარ მიმართულებად.

(1.5.3) კუბური განტოლება შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახით

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (1.5.6)$$

სადაც

$$I_1 = X_{11} + X_{22} + X_{33}, \quad (1.5.7)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} X_{22} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}.$$

როგორც ცნობილია, (1.5.6) კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის კავშირს აქვს შემდეგი სახე:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} \quad (1.5.8)$$

$$= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

კუბური განტოლების ფესვები, როგორც ნორმალური ძაბვები, დამოკიდებული არ არიან კოორდინატთა სისტემის შეცვლაზე, ამიტომ (1.5.8) ტოლობების თანახმად, მათი საშუალებით გამოსახული  $I_1$ ,  $I_2$  და  $I_3$  სიდიდეები არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შეცვლაზე. მათ ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები ეწოდებათ.

§4-ში შემოღებული  $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  კვადრატული ფორმა საშუალებას გვაძლევს, მივიღოთ სხეულის რაიმე გარკვეულ წერტილში გატარებული ფართის ორიენტაციაზე ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულების მეტად მარტივი და თვალსაჩინო გეომეტრიული სურათი.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

სხეულის წერტილი მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათავეში.

შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ, რომ

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv 0,$$

რადგან ამ უკანასკნელ შემთხვევაში (1.4.4)-ის გამო

$$X_{ij}(0,0,0) = 0,$$

და ამდენად განსახილველ  $(0,0,0)$  წერტილში ძაბვები საერთოდ არ გვექნება.

რამდენადაც (1.4.6) ტოლობაში ვექტორის სიგრძე ნებისმიერია, ჩვენ შეგვიძლია, იგი ისე შევარჩიოთ, რომ ნებისმიერი  $\bar{n}$  ნორმალის შემთხვევაში

$$\sigma_n \cdot P^2 = \pm c^2, \quad (1.5.9)$$

სადაც  $c$  ნულისგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული მუდმივია. იმ შემთხვევაში, როცა  $\sigma_n = 0$ , ვიგულისხმებთ, რომ  $P = +\infty$ . მაშასადამე,

$$P = \sqrt{\frac{\pm c^2}{\sigma_n}}, \quad \sigma_n = \frac{\pm c^2}{P^2},$$

ამასთან  $c^2$ -ის წინ ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ  $\pm c^2$  და  $\sigma_n$  ან ორივე დადებითი უნდა იყოს, ან ორივე უარყოფითი.

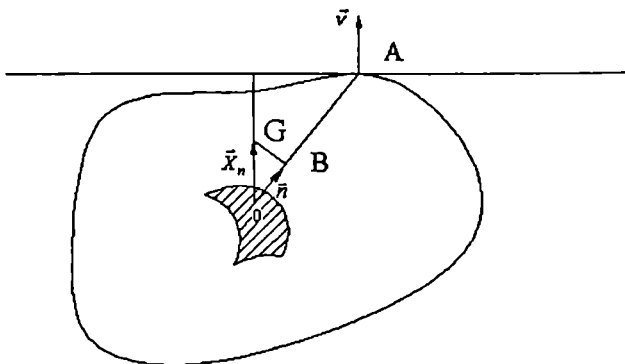
თუ განვიხილავთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში საწყისი წერტილის მქონე  $\bar{P}$  ვექტორების ბოლო წერტილების წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, (1.5.9), (1.4.6) და (1.4.4)-ის თანახმად, მივიღებთ *მეორე რივის ცენტრიან ზედაპირს ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში*, რომლის განტოლებაა

$$X_{ij}\xi_i\xi_j = \pm c^2. \quad (1.5.10)$$

მიღებულ ზედაპირს ეწოდება მოცემული წერტილის (ჩვენს შემთხვევაში სათავის) *ძაბვის ზედაპირი*.

თუ მოცემულია ძაბვის ზედაპირი, ძაბვის ვექტორის აგება დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, კოშის (1.2.1) ფორმულის და (1.4.5), (1.4.4)-ის თანახმად

$$X_{nk} = X_{jk} n_j = \frac{1}{P} X_{jk} \xi_j = \frac{1}{P} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k}, \quad (1.5.11)$$



ნახ. 1.5.1

რადგან

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k} &= \frac{\partial X_{ij} \xi_i \xi_j}{\partial \xi_k} = X_{ij} \delta_{ik} \xi_j + X_{ij} \xi_i \delta_{jk} \\ &= X_{jk} \xi_j + X_{ik} \xi_i = X_{jk} \xi_j + X_{jk} \xi_j = 2X_{jk} \xi_j. \end{aligned}$$

(1.5.11) ნიშნავს, რომ  $\vec{X}_n$  პარალელურია  $grad \Omega$ -სი, ე.ი. (1.5.10) ზედაპირის  $\vec{v}$  ნორმალის (იხ. ნახ. 1.5.1), რომელიც გავლებულია  $\vec{P}$  ვექტორისა და ძაბვის ზედაპირის თანაკვეთის  $A$  წერტილში. რამდენადაც ძაბვის ვექტორის ნორმალური

მდგენელი

$$\sigma_n = OB = \frac{\pm c^2}{OA^2}, \quad (1.5.12)$$

ამიტომ  $\vec{n}$  და  $\vec{v}$  ნორმალეებზე გამავალ სიბრტყეში  $B$  წერტილიდან  $\vec{n}$ -ის პერპენდიკულარულად და  $O$  წერტილიდან  $\vec{v}$ -ის პარალელურად გავლებული წრფეების თანაკვეთა მოგვცემს

$\vec{X}_n = \vec{OG}$  ძაბვის ვექტორის ბოლო წერტილს.

$\vec{X}_n$  ვექტორი ფართის ნორმალის გასწვრივ მიმართული იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა  $\vec{OA}$  ვექტორი  $A$  წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის პერპენდიკულარულია. მაგრამ ასეთ მიმართულებას, როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაცნობილი, ეწოდება *ზედაპირის მთავარი ღერძი*. ამ შემთხვევაში  $\vec{n}$  ნორმალის მქონე ფართზე, ცხადია, მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური ძაბვის ვექტორი და მის შესაბამის მიმართულებას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მეორე მხრივ ეწოდება ძაბვის მთავარი მიმართულება. ასეთი მიმართულება ზოგად შემთხვევაში, როგორც ზემოთ ვნახეთ, აღმოჩნდა სამი ურთიერთმართობი მიმართულება.

თუ კოორდინატთა ღერძებს დავამთხვევთ ძაბვის მთავარ მიმართულებებს, ე. ი. ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ ცხადია,  $X_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , და დაგვრჩება მხოლოდ ნორმალური ძაბვები.

$$\sigma_i = X_{ii}$$

და ძაბვის ზედაპირის (1.5.10) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma_i \xi_i^2 = \pm c^2. \quad (1.5.13)$$

იმისდა მიხედვით, თუ რა ნიშნები აქვს  $\sigma_i$  მთავარ ძაბვებს, გვექნება სხვადასხვა შემთხვევა.

ვთქვათ,

$$\sigma_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ ცხადია, (1.5.13) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma_i \xi_i^2 = c^2,$$

რაც ელიფსოიდის განტოლებაა.

(1.5.12)-დან გვეჩვენება, რომ

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ე.ი. (0,0,0) წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამჭვირვება.

თუ

$$\sigma_i < 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ

$$\sigma_i \xi_i^2 = -c^2, \quad \text{ე. ი. } |\sigma_i| \xi_i^2 = c^2$$

და ძაბვის ზედაპირი კვლავ ელიფსოიდია, ხოლო ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამოითვლება

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}$$

ფორმულით და იგი მკუმშავი იქნება.

თუ

$$\sigma_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad \sigma_3 < 0,$$

მაშინ (1.5.13)-ს ექნება

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = +c^2 \quad (1.5.14)$$

ან

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = -c^2 \quad (1.5.15)$$

სახე.

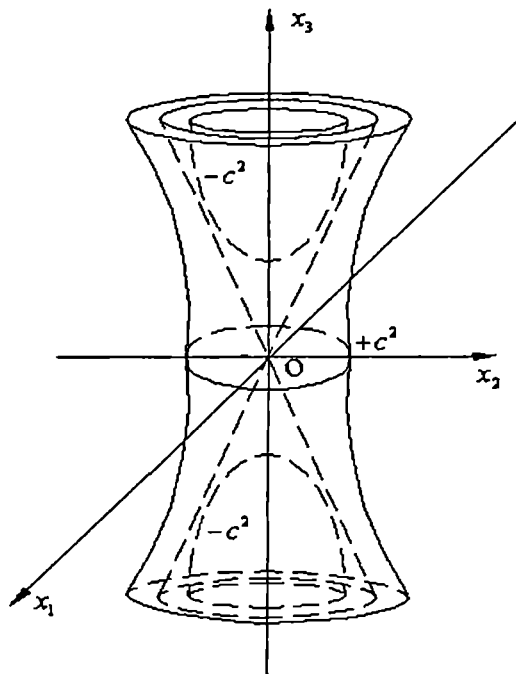
(1.5.14) განტოლებით მოცემული ზედაპირი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდია (იხ. ნახ. 1.5.2), ხოლო (1.5.15) განტოლებით მო-



ცემული ზედაპირი ორკალთა ჰიპერბოლოიდია. აღნიშნული ზედაპირები ერთმანეთისგან გამოყოფილია ასიმპტოტური კონუსით:

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = 0,$$

რომელიც ნახაზზე წყვეტილი ხაზით არის მოცემული.



ნახ. 1.5.2

თუ ფართის ნორმალს ასიმპტოტური კონუსის გარეთაა მიმართული, მაშინ ის კვეთს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს და ნორმალური ძაბვა გამჭიმავია:

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ხოლო თუ ნორმალი ასიმპტოტური კონუსის შიგნითაა მიმართული, მაშინ ის კვეთს ორკალთა ჰიპერბოლოიდს და დაბვა მკუმშავია:

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ ფართის ნორმალი ასიმპტოტურ კონუსზე მდებარეობს, მაშინ იგი დაბვის ზედაპირს არ ჰკვეთს,  $OA = +\infty$  და  $\sigma_n = 0$ , ე.ი. შესაბამისად ორიენტირებულ ფართზე მხოლოდ მხები დაბვები მოქმედებენ.

შემთხვევა

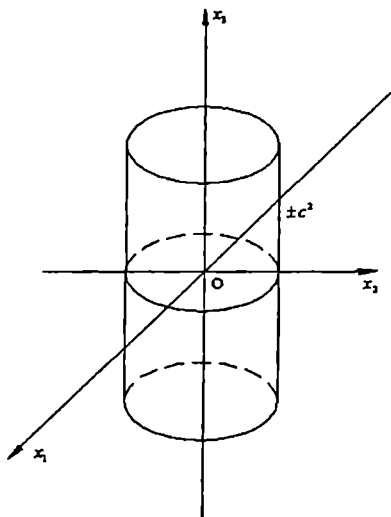
$$\sigma_\alpha < 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \sigma_3 > 0$$

წინა შემთხვევისგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ადგილებს იცვლიან გაჭიმვისა და კუმშვის ზონები.

ნიშნების განაწილების სხვა შემთხვევებში განხილული წინა ორი შემთხვევისგან განსხვავებით მხოლოდ საკოორდინატო ღერძები იცვლიან როლებს.

თუ ერთ-ერთი მთავარი დაბვა ნულის ტოლია, ხოლო დანარჩენი ორი – ნულისგან განსხვავებული, მაგალითად,  $\sigma_3 = 0$  და  $\sigma_\alpha \neq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , მაშინ დაბვის ზედაპირები იქნებიან  $x_3$  ღერძის პარალელური მსახველების მქონე ცილინდრული ზედაპირები. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს *ბრტყელი დაბაძული მდგომარეობა* (იხ. §2.2) მოცემულ წერტილში (იხ. ნახ. 1.5.3 და ნახ. 1.5.4).  $x_3$  ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყით კვეთაში ვიღებთ ან ელიფსს, ან ორ ჰიპერბოლას.

თუ ერთი მთავარი ძაბვა ნულისგან განსხვავებულია, ხოლო დანარჩენი ორი – ნულის ტოლი, მაგალითად,  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ , მაშინ გვაქვს ორი პარალელური სიბრტყე (იხ. ნახ. 1.5.5). ასეთ დაძაბულ მდგომარეობას შეიძლება ვუწოდოთ *წრფივი დაძაბული მდგომარეობა* მოცემულ წერტილში.

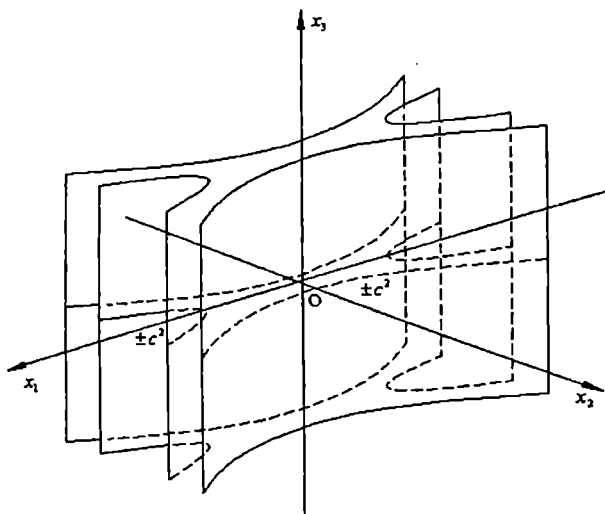


$$\sigma_\alpha > 0, \alpha = 1, 2; \quad \sigma_1 \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_1^2 = c^2$$

ახ

$$\sigma_\alpha < 0, \alpha = 1, 2; \quad -|\sigma_1| \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_1^2 = -c^2$$

ნახ. 1.5.3



$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0; \quad \sigma_1 \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_2^2 = \pm c^2$$

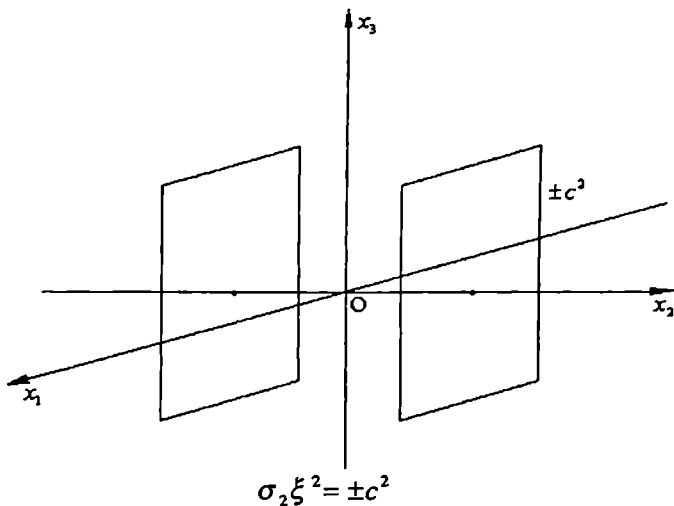
ან

$$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0; \quad -|\sigma_1| \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_2^2 = \pm c^2$$

ნახ. 1.5.4

დავსვათ ამოცანა იმ ფართითი ელემენტის  $n$  ნორმალის მოძებნის თაობაზე, რომელ ფართითი ელემენტზეც მოქმედი ძაბვის ვექტორის  $\sigma_n$  ნორმალური და  $\tau_n$  მხები მდგენელები იღებენ წინასწარ დასახელებულ მნიშვნელობებს (იხ. [50]). თუ საკოორდინატო ღერძებად ავიღებთ ძაბვის მთავარ ღერძებს, მაშინ

$$X_{ij} = 0, \text{ როცა } i \neq j \text{ და } X_{ii} = \sigma_i, \quad (1.5.16)$$



ნახ. 1.5.5

ამიტომ (1.4.3)-ის ძალით

$$\sigma_n = \sigma_i n_i^2. \quad (1.5.17)$$

რადგან

$$\bar{X}_n = \sigma_n \bar{n} + \tau_n \bar{\tau},$$

სადაც  $\bar{\tau}$  არის  $\bar{X}_n$  და  $\bar{n}$  ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეში მდებარე მხების ორტი. ამიტომ, (1.2.1)-ის და (1.5.16)-ის თანახმად,

$$X_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = X_{ni} X_{ni} = \sum_{i=1}^3 X_{ii} n_i X_{ii} n_i = \sigma_i^2 n_i^2. \quad (1.5.18)$$

ცხადია, დასმული ამოცანა დედის სამი  $n_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , უცნობის განსაზღვრაზე (1.5.17) და (1.5.18) განტოლებებიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ, რადგანაც  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1. \quad (1.5.19)$$

(1.5.19), (1.5.17), (1.5.18) განტოლებათა სისტემა  $n_1^2, n_2^2, n_3^2$ -ის მიმართ წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \neq 0, \text{ თუ}$$

$$\sigma_i \neq \sigma_j, \text{ როცა } i \neq j,$$

სისტემის დეტერმინანტით, რომელიც ვანდერმონდის<sup>\*)</sup> დეტერმინანტია, და

$$(1, \sigma_n, \sigma_n^2 + \tau_n^2)^T$$

მარჯვენა მხარით ( $T$  ნიშნაკი აღნიშნავს ტრანსპონირებულს). ამასთან

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

<sup>\*)</sup> შო. ვანდერმონდი (1735-1796).

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_2) + \tau_n^2 (\sigma_3 - \sigma_2) \\
&= (\sigma_3 - \sigma_2) [\tau_n^2 + \sigma_2 \sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n + \sigma_n^2] \\
&= (\sigma_3 - \sigma_2) \left[ \tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)^2}{4} \right] \\
&= (\sigma_3 - \sigma_2) \left[ \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_n & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = -(\sigma_3 - \sigma_1) \\
&\quad \times \left[ \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_n^2 + \tau_n^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_1) \\
&\quad \times \left[ \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

ამიტომ საძიებელ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$n_1^2 = \frac{f_1(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}, n_2^2 = \frac{f_2(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)},$$

$$n_3^2 = \frac{f_3(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}, \quad (1.5.20)$$

სადაც

$$f_1(\sigma_n, \tau_n) := \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2,$$

$$f_2(\sigma_n, \tau_n) := \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2,$$

$$f_3(\sigma_n, \tau_n) := \tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \quad (1.5.21)$$

გარკვეულობისათვის დაეუშვათ, რომ  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . ცხადია, განხორციელებადია, ე.ი. დასაშვებია, მხოლოდ ისეთი  $\sigma_n, \tau_n$ , რომელთათვისაც  $n_i^2 > 0, i = 1, 2, 3$ . წინააღმდეგ შემთხვევაში (1.5.20), (1.5.21)-დან ნათელია, რომ მათი წინასწარ დამოუკიდებლად დასახელება (როცა  $n_i = 0$ -ს,  $i$ -ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის) ან, საერთოდ, დასახელება (როცა  $n_i = 0$ -ს,  $i$ -ს ორი მნიშვნელობისათვის მაინც) შეუძლებელია. ამიტომ (1.5.20)-დან გამოძღინარეობს, რომ

$$f_1 > 0, f_2 < 0, f_3 > 0. \quad (1.5.22)$$

$C_k, k = 1, 2, 3$ , წირები, რომლებზეც  $f_k = 0, k = 1, 2, 3, \tau_n > 0$  სიბრტყეში წარმოადგენენ შემდეგ ნახევარწრეწირებს (იხ. ნახ. 1.5.6):

$$C_1 \text{ არის ნახევარწრეწირი ცენტრით } O_1 \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \text{ წერ-}$$



ტილში და  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით;

$C_2$  არის ნახევარწრეწირი ცენტრით  $O_2\left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0\right)$  წერ-

ტილში და  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით;

$C_3$  არის ნახევარწრეწირი ცენტრით  $O_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$  წერ-

ტილში და  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით.

ნახევარწრეწირების ცენტრებში  $f_k < 0$ ,  $k=1,2,3$ . ამიტომ  $f_k > 0$ ,  $k=1,2,3$ , ნახევარსიბრტყის იმ ნაწილში, რომელიც  $C_k$ -ს,  $k=1,2,3$ , გარეთ მდებარეობენ. (1.5.22)-დან ნათელია, რომ  $(\sigma_n, \tau_n)$ -ის განზორციელებადი მნიშვნელობების შესაბამისი აფიქსები მდებარეობენ ნახ 1.5.6-ზე მითითებულ დაშტრიხულ არეში.  $C_k$ ,  $k=1,2,3$ , წრეწირების შესაბამის წრეებს მორის<sup>\*)</sup> წრეები ეწოდება.

$C_2$  ნახევარწრის  $S_2$  წვერო შეესაბამება მაქსიმალურ მხებ ძაბვას, რომელიც

$$(\tau_n)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{-ის} \quad (1.5.23)$$

ტოლია. მისი რეალიზება ხდება

---

<sup>\*)</sup> კო. მორი (1835-1918).

$$n_1 = \pm \left[ \frac{f_1 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \right]^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

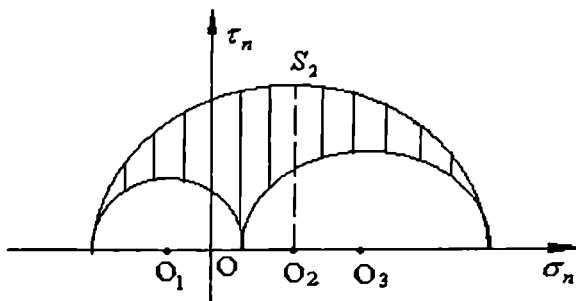
$$n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

კომპონენტებიან ნორმალის მქონე ფართზე. მართლაც, ეს გამოძღინარეობს (1.5.20), (1.5.21)-დან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned} f_1 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) &= \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} + \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{4} \\ &+ \frac{-\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2}{4} = \frac{2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3}{4} \\ &= \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}. \end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} f_2 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) &= 0, \\ f_3 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) &= \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}{2}. \end{aligned}$$



ნახ. 1.5.6

## თავი II. დეფორმაციათა თეორია

### §1.6. დეფორმაციის ცნება

როგორც შესავალში აღნიშნეთ, თუ უწყვეტი გარემოს განხილვის პროცესში მასზე გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას *დეფორმაცია* ეწოდება.

აღნიშნოთ  $(x_1, x_2, x_3)$ -ით სხეულის რაიმე წერტილის კოორდინატები დეფორმაციამდე, ხოლო  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ -ით – მისივე კოორდინატები დეფორმაციის შემდეგ.

ეთქვათ,  $V$  აღნიშნავს იმ არეს, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე. სხეულის ყოველი წერტილი, რომელსაც დეფორმაციამდე ეკავა სივრცის წერტილი კოორდინატებით  $(x_1, x_2, x_3) \in V$  იკავებს სივრცის გარკვეულ წერტილს კოორდინატებით  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , ე.ი.  $x_i^*$ -ები უნდა იყვნენ  $x_i$ -ების გარკვეული ფუნქციები:

$$x_i^* = \varphi_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.6.1)$$

ჩვენ ვუშვებთ, რომ  $\varphi_i$  ფუნქციები უწყვეტია  $V$  არეში (ე. ი. დეფორმაციას თან არ სდევს სხეულის რღვევა).  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან  $(x_1, x_2, x_3) \in V$  წერტილებს, შეავსებენ გარკვეულ  $V^*$  არეს. ეს იქნება ის არე, რომელსაც სხეული დაიკავებს დეფორმაციის შემდეგ. ჩვენ ასევე ვუშვებთ, რომ (1.6.1) სისტემა იხსნება  $x_i$ -ს მიმართ და რომ ისინი  $x_i^*$  ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $x_i^{\circ} := x_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$  (იხ., მაგ., [12]).

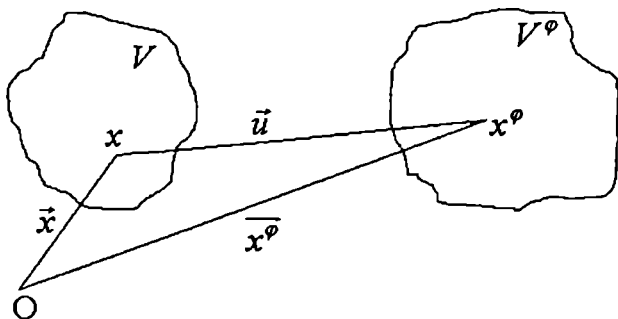
(1.6.1) გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოადგენს  $V$  არის ასახვას  $V^{\circ} = V^*$  არეზე, მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ (1.6.1) სახის ყოველგვარი ასახვა არ გვაძლევს დეფორმაციას. მართლაც, თუ სხეულს გადავიტანთ სივრცეში, მისი წერტილების კოორდინატები შეიცვლება, მაგრამ მის არც ერთ ორ წერტილს შორის მანძილი არ შეიცვლება. *სხეულის წერტილების კოორდინატების ისეთ ცვლილებას, როცა არ ხდება დეფორმაცია, ეწოდება ხისტი გადაადგილება.*

როგორც ეს ნახ. 1.6.1-დან გამომდინარეობს,

$$x_i^{\circ} = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i + u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6.2)$$

$\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$  ვექტორს გადაადგილების ვექტორი, ხოლო  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , კომპონენტებს გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, ან უბრალოდ გადაადგილებები ეწოდება  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ღერძების გასწვრივ. ვთქვათ,  $u \in C^1(V)$ .  $V$  არეში უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ  $dl$ -ით, ხოლო  $V^{\circ}$  არეში მისი შესაბამისი უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ  $dl^{\circ}$ -თი. სხვა სიტყვებით,  $dl$ -ით აღვნიშნულია დეფორმაციამდე უსასრულოდ მცირე მანძილით

ერთმანეთისაგან დაშორებულ ორ წერტილს შორის მანძილი, ხოლო  $dl^\varphi$ -ით აღნიშნულია ამავე წერტილებს შორის მანძილი დეფორმაციის შემდეგ.



ნახ. 1.6.1

ცხადია (იხ. ნახ. 1.6.2),

$$dl^2 = dx_j dx_j$$

და, (1.6.2)-ის გათვალისწინებით,

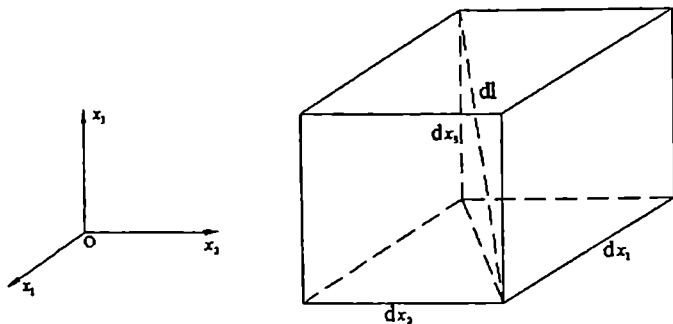
$$\begin{aligned} (dl^\varphi)^2 &= dx_i^\varphi dx_i^\varphi = \frac{\partial x_i^\varphi}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial x_i^\varphi}{\partial x_j} dx_k \\ &= \varphi_{i,j} dx_j \varphi_{i,k} dx_k = (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_j dx_k \\ &= (\delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{ij} u_{i,k} + \delta_{ik} u_{i,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k \\ &= (\delta_{jk} + u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k. \end{aligned}$$

სიგრძის კვადრატის ცვლილების გასაგებად მეორე ტოლობას წვერ-წვერად გამოვაკლოთ პირველი ტოლობა

$$(dl^\varphi)^2 - dl^2 = 2e_{jk} dx_j dx_k,$$

სადაც

$$e_{jk} := \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j}u_{i,k}), \quad j, k = 1, 2, 3.$$



ნახ. 1.6.2

თუ ერთი მაინც  $e_{jk} \neq 0$ , მაშინ სივრცის კვადრეტი და ამდენად თვით სივრცე იცვლება, ე.ი. ადგილი აქვს დეფორმაციას და ამიტომ  $e_{jk}$ -ს ეწოდება დეფორმაციის ტენზორი, რომელიც, ცხადია, სიმეტრიულია. დეფორმაციის ტენზორის ეს გამოსახულება შეესაბამება გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიას. თუ კვადრატებს და ნამრავლებს უგულებელვყოფთ თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით, მაშინ მივიღებთ გეომეტრიულად წრფივი თეორიის შესაბამის შემდეგ გამოსახულებას:

$$e_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.6.3)$$

ორივე შემთხვევაში  $e_{jk} = 0$ ,  $j, k = 1, 2, 3$ , ტოლობები შეესაბამება ხისტი გადაადგილებას.

ადვილი სანახვია, რომ წრფივ შემთხვევაში, თუ  $u_i \in C^2(V)$ , მაშინ

$$e_{ij,k} + e_{ki,j} - e_{jk,i} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik} + u_{k,ij} + u_{i,kj} - u_{j,ki} - u_{k,ji}) = u_{i,jk},$$

$$i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.6.4)$$

ვთქვათ, ახლა

$$e_{ij} = 0, \quad (1.6.5)$$

მაშინ (1.6.4)-დან, ერთი მხრივ,

$$u_{i,jk} = 0,$$

ე.ი.

$$u_i(x) = a_i + b_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad a_i = \text{const}, \quad b_{ij} = \text{const}.$$

მეორე მხრივ, (1.6.5)-დან

$$u_{i,j} = -u_{j,i}. \quad (1.6.6)$$

ამდენად, რადგანაც

$$u_{i,j} = (a_i + b_{ik}x_k)_{,j} = b_{ik}\delta_{kj} = b_{ij},$$

$$u_{j,i} = (a_j + b_{jk}x_k)_{,i} = b_{jk}\delta_{ki} = b_{ji},$$

(1.6.6)-დან მივიღებთ, რომ

$$b_{ij} = -b_{ji},$$

საიდანაც

$$b_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad b_1 := b_{32} = -b_{23},$$

$$b_3 := b_{21} = -b_{12}, \quad b_2 := b_{13} = -b_{31}.$$

ამრიგად, ხისტი გადაადგილების შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$u_1(x) = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3,$$

$$u_2(x) = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3,$$

$$u_3(x) = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2,$$

ან ვექტორული ფორმით

$$u = \bar{a} + [\bar{b}, \bar{x}],$$

სადაც

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.6.7)$$

დეფორმაციის ზოგად (არაწრფივ) შემთხვევაში ხისტი გადაადგილებას, ე.ი. „გამყარებულ“ სხეულის გადატანასა და ბრუნვას შეესაბამება

$$\overline{\varphi(x)} = \bar{a} + Q\bar{x} \quad \forall x \in V \quad (1.6.8)$$

ასახვა, სადაც  $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ,  $\bar{a}$  მუდმივი ვექტორია, რომელიც კოორდინატთა სისტემის, კერძოდ,  $V$  არის გადატანას გამოხატავს, ხოლო  $Q$  მესამე რიგის ორთოგონალური მატრიცაა  $+1$ -ის ტოლი დეტერმინანტით, რომელიც კოორდინატთა სისტემის სათავეს გარშემო შემობრუნებას გამოხატავს (იხ. [12], გვ. 43).

როგორც ცნობილია, (იხ. [36], გვ. 49), ნებისმიერი ორთოგონალური  $Q$  მატრიცა (ე.ი.  $Q^T Q = I$ , სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა) შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს, როგორც შემდეგი ნამრავლი

$$Q = \begin{vmatrix} \cos b_3 & -\sin b_3 & 0 \\ \sin b_3 & \cos b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos b_2 & 0 & \sin b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b_2 & 0 & \cos b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_1 & -\sin b_1 \\ 0 & \sin b_1 & \cos b_1 \end{vmatrix},$$

სადაც მატრიცები შეესაბამებიან „გამყარებულ“ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ  $x_3$ ,  $x_2$  და  $x_1$  ღერძების გარშემო შესაბამისად  $b_3$ ,  $b_2$  და  $b_1$  კუთხით მობრუნებას. მარჯვენა სისტემაში



ბრუნვის დადებით მიმართულებებზე მიღებულია შესაბამისად  $x_1$ -დან  $x_2$ -სკენ,  $x_3$ -დან  $x_1$ -სკენ და  $x_2$ -დან  $x_3$ -სკენ მობრუნება. მოძრაობის ფარდობითობიდან გამომდინარე, თუ სხეულს ჩავთვლით უძრავად, ზოლო კოორდინატთა სისტემას მოძრავად, მაშინ კოორდინატთა სისტემა მობრუნდება საწინააღმდეგო მიმართულებით  $x_1$ ,  $x_2$  და  $x_3$  ღერძების გარშემო შესაბამისად  $\varphi = -b_1$ ,  $\psi = -b_2$  და  $\chi = -b_3$  კუთხით.  $\varphi$ ,  $\psi$  და  $\chi$  კუთხეებს ეილერის კუთხეები ეწოდება (იხ. [14], გვ. 556). ცხადია,

$$Q = \begin{vmatrix} \cos b_3 \cos b_2 & \cos b_3 \sin b_2 \sin b_1 - \sin b_3 \cos b_1 & \cos b_3 \sin b_2 \cos b_1 + \sin b_3 \sin b_1 \\ \sin b_3 \cos b_2 & \sin b_3 \sin b_2 \sin b_1 + \cos b_3 \cos b_1 & \sin b_3 \sin b_2 \cos b_1 - \cos b_3 \sin b_1 \\ -\sin b_2 & \cos b_2 \sin b_1 & \cos b_2 \cos b_1 \end{vmatrix} \quad (1.6.9)$$

გეომეტრიულად წრფივ თეორიაში ბრუნვის  $\vec{b} := (b_1, b_2, b_3)$  ვექტორი უსასრულოდ მცირეა. ამიტომ, თუ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უგულებელვყოფთ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ  $\sin b_i \approx b_i$  და  $\cos b_i \approx 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , (1.6.9)-დან მივიღებთ, რომ გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 1 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.6.10)$$

(1.6.2)-ისა და (1.6.8)-ის თანახმად გვექნება

$$\overline{\varphi(x)} = \vec{x} + \vec{u} = \vec{a} + Q\vec{x}.$$

საიდანაც, ვინაიდან (1.6.10)-ის გამო

$$(Q - I)\vec{x} = \begin{vmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{vmatrix} \vec{x} = [\vec{b}, \vec{x}],$$

მივიღებთ, რომ

$$\bar{u} = \bar{a} + (Q - I)\bar{x} = \bar{a} + [\bar{b}, \bar{x}].$$

ეს კი, როგორც მოსალოდნელი იყო, (1.6.7)-ს ემთხვევა.

### §1.7. აფინური ასახვა

თუ (1.6.1) ასახვაში  $\varphi_i$  ფუნქციები წრფივია, მაშინ მას აფინური ასახვა ეწოდება, ე.ი. აფინური ასახვის დროს

$$x_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})x_j + a_i, \quad (1.7.1)$$

სადაც  $a_{ij}, a_i$  მუდმივებია. რამდენადაც ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ (1.7.1) ამოხსნადი უნდა იყოს  $x_i$ -ს მიმართ, ამიტომ

$$\det \|\delta_{ij} + a_{ij}\| \neq 0.$$

აფინურ ასახვას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) (1.7.1)-ის შებრუნებული ასახვა აფინურია. მართლაც, თუ ამოვხსნით (1.7.1)-ს, მივიღებთ

$$x_i = (\delta_{ij} + b_{ij})x_j^* + a_i^*, \quad (1.7.2)$$

სადაც  $b_{ij}, a_i^!$  გარკვეული მუდმივებია.

2) რაიმე  $\Pi$  სიბრტყეზე ძღებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ  $\Pi^*$  სიბრტყეზე განლაგდებიან. მართლაც, თუ  $A_i x_i + B = 0$  არის  $\Pi$  სიბრტყის განტოლება, მაშინ მასში (1.7.2) გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ  $A_i^* x_i^* + B^* = 0$ , სადაც  $A_i^*$  და  $B^*$  გარკვეული მუდმივებია.

3) რაიმე  $\Delta$  წრფეზე ძღებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ  $\Delta^*$  წრფეზე განლაგდებიან. მართლაც,  $\Delta$  წრფეს თუ წარმოვიდგენთ, როგორც რაიმე ორი  $\Pi_1$  და  $\Pi_2$  სიბრტყეების თანაკვეთას, მაშინ წინა თვისების თანახმად  $\Delta$ -ს

წერტილები, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან  $\Pi_1$  და  $\Pi_2$  სიბრტყეებს, გადავლენ წერტილებში, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან გარკვეულ  $\Pi_1^*$  და  $\Pi_2^*$  სიბრტყეებს, რომელთა თანაკვეთა განსაზღვრავს  $\Delta^*$  წრფეს.

4) ორი აფინური ასახვის კომპოზიცია კვლავ აფინური ასახვაა. მართლაც, თუ (1.7.1) ასახვით მიღებულ  $x_i^*$  წერტილებს ასახავთ

$$x_i^{**} = (\delta_{ij} + a_{ij}^*)x_j^* + a_i^* \quad (1.7.3)$$

ასახვით, ე.ი. (1.7.1)-ს ჩავსვამთ (1.7.3)-ში, მივიღებთ

$$x_i^{**} = (\delta_{ij} + a_{ij}^{**})x_j + a_i^{**} \quad (1.7.4)$$

ასახვას, სადაც  $a_{ij}^{**}$  და  $a_i^{**}$  გარკვეული მუდმივებია.

აფინური ასახვის უწყვეტობიდან და მისი მესამე თვისებიდან ცხადია, რომ წრფივი მონაკვეთი წრფივ მონაკვეთში აისახება, ხოლო ვექტორი - ვექტორში.

ვთქვათ,

$$\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ვექტორი აისახა

$$\vec{P}^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$$

ვექტორში. აღვნიშნოთ  $\vec{P}$  ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატები შესაბამისად  $x_i$ -თ და  $x_i^0$ -თ, მაშინ

$$\xi_i = x_i - x_i^0,$$

ხოლო  $\vec{P}^*$ -ის კომპონენტები

$$\xi_i^* = x_i^* - x_i^{*0},$$

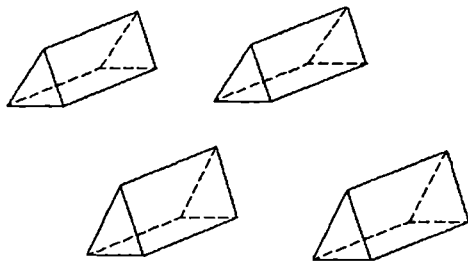
სადაც

$$x_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})x_j + a_i, \quad x_i^{\circ} = (\delta_{ij} + a_{ij})x_j^{\circ} + a_i.$$

თუ განვიხილავთ უკანასკნელი ორი სიდიდის სხვაობას, მივიღებთ

$$\xi_i^* = x_i^* - x_i^{\circ} = (\delta_{ij} + a_{ij})(x_j - x_j^{\circ}) = (\delta_{ij} + a_{ij})\xi_j. \quad (1.7.5)$$

(1.7.5)-დან ცხადია, რომ ორი ტოლი ვექტორი (ე.ი. მათი შესაბამისი კომპონენტები ტოლია) აისახება ორ ტოლ ვექტორში, ხოლო ორი პარალელური ვექტორი — ორ პარალელურ ვექტორში, ამასთან მათი სიგრძეების შეფარდება არ იცვლება. ამიტომ აღვილი მისახვედრია, რომ ორი ერთნაირი და ერთნაირად ორიენტირებული ფიგურა (განლაგებული სივრცის სხვადასხვა ნაწილში) შედგენილი წრფივი მონაკვეთებისაგან აისახება ორ ერთნაირ და ერთნაირად ორიენტირებულ ფიგურაში (იხ. ნახ. 1.7.1). მაგრამ რამდენადაც ყოველი გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ზღვარი წრფივი მონაკვეთებისაგან შედგენილი ფიგურისა, ამიტომ აღნიშნული თვისება ვრცელდება ნებისმიერ ფიგურაზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სხეულის სხვადასხვა ნაწილი მიუხედავად მისი გეომეტრიული მდებარეობისა ერთნაირ დეფორმაციას განიცდის. ამიტომ აფინური ასახვის შესაბამის დეფორმაციას ეწოდება *ერთგვაროვანი დეფორმაცია*.



ნახ. 1.7.1

ცხადია, (1.7.1)-ის და (1.7.5)-ის აფინურობა არ დაირღვევა, თუ კოორდინატთა ერთი წრფივი სისტემიდან გადავალთ მეორეზე. ეს გამოძღინარეობს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულის წრფივობიდან (იხ. (1.4.8)).

თუ (1.7.1) ასახვაში  $a_{ij}$ ,  $a_i$ , სიდიდეები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი კვადრატებისა და ნამრავლების უგულვებელყოფა თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით, მაშინ მას უსასრულოდ მცირე ასახვა ეწოდება. (1.7.1) გადაეწეროს შემდეგი სახით

$$x_i^* - x_j = a_{ij} x_j + a_i,$$

საიდანაც,  $a_{ij}$ -ის და  $a_i$ -ს სიმცირის გამო ნათელია, რომ უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დროს წერტილის კოორდინატების ცვლილება უსასრულოდ მცირეა.

ორი უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის მიმდევრობით მოხდენის დროს (იხ. მეოთხე თვისება)

$$a_{ij}^{**} = a_{ij}^* + a_{ij}, \quad a_i^{**} = a_i^* + a_i,$$

ამასთან შედეგი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მიმდევრობით მოვახდენთ ასახვებს. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ გვაქვს ორი მოცემული ასახვის ზედდება. ცხადია, აღნიშნული შეიძლება განზოგადდეს ზედდებათა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

### §1.8. უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დაშლა საკუთრივ დეფორმაციად და ზისტ გადაადგილებად

რამდენადაც ჩვენ გვინტერესებს სხეულის დეფორმაცია, შემდეგში განვიხილავთ ვექტორის გარდაქმნის (1.7.5) ფორმულებს. მართალია, ამ შემთხვევაში წერტილის კოორდინატებს  $a_i$  მუდმივი შესაკრებების სიზუსტით განვსაზღვრავთ, მაგრამ ეს არსე-

ბითი არ არის, რადგანაც ისინი მხოლოდ სხეულის ხისტ გადატანას ახასიათებენ. (1.7.5) გადაეწეროთ შემდეგი სახით

$$\delta \xi_i = a_{ij} \xi_j, \quad (1.8.1)$$

სადაც

$$\delta \xi_i := \xi_i^* - \xi_i$$

აღნიშნავს  $\vec{\delta P} := \vec{P}^* - \vec{P}$  ვექტორული სხვაობის კომპონენტებს.

დავსვათ შემდეგი საკითხი: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს  $a_{ij}$  მუდმივები, რომ (1.8.1) ასახვას თან არ სდევდეს რაიმე დეფორმაცია, ე.ი. გვაძლევდეს მხოლოდ ხისტ გადაადგილებას?

ხისტი გადაადგილების განსაზღვრის თანახმად ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სხეულის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი ვექტორის სიგრძე არ იცვლება, ე.ი. არ იცვლება მისი კვადრატი

$$P^2 = \xi_i \xi_i. \quad (1.8.2)$$

აღვნიშნოთ  $P$ -ს ნაზრდი  $\delta P$ -თი. თუ უგულვებელყოფთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, დიფერენციალის განმარტების თანახმად,

$$dP = \delta P \quad \text{და} \quad d\xi_i = \delta \xi_i.$$

(1.8.2)-დან ცხადია, რომ

$$2PdP = 2\xi_i d\xi_i.$$

ე.ი.

$$P\delta P = \xi_i \delta \xi_i$$

და (1.8.1)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} P\delta P &= a_{ij} \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} a_{ij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} a_{ji} \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \xi_i \xi_j. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს  $\delta P = 0$  ტოლობა ნებისმიერი  $\xi_i$ -სათვის, აუცილებელი და საკმარისია

$$a_{ij} + a_{ji} = 0. \quad (1.8.4)$$

მაშასადამე, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, (1.8.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\delta \xi_i = -p_{ij} \xi_j, \quad (1.8.5)$$

სადაც

$$p_{ij} := a_{ji} = -a_{ij}. \quad (1.8.6)$$

(1.8.4)-ის გამო, ცხადია,  $p_{ij}$  ცხრა სიდიდე ხასიათდება სამი დამოუკიდებელი  $p_i$  სიდიდით

$$p_{ii} = 0, \quad p_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad (1.8.7)$$

$$p_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad p_3 = p_{21} = -p_{12}.$$

ამდენად, (1.8.5) გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$d\xi_1 = -p_3 \xi_2 + p_2 \xi_3,$$

$$d\xi_2 = p_3 \xi_1 - p_1 \xi_3,$$

$$d\xi_3 = -p_2 \xi_1 + p_1 \xi_2,$$

ხოლო ვექტორულად კი ასე

$$d\vec{\xi} = [\vec{p}, \vec{\xi}],$$

რაც, როგორც ეს თეორიული მექანიკიდანაა ცნობილი, ახასიათებს უსასრულოდ მცირე ხისტ ბრუნვას. კერძოდ,  $p_i$  აღნიშნავს  $x_i$  ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხეს.

(1.8.6) ფორმულებით მოცემული  $p_{ij}$  სიმრავლე წარმოადგენს ე.წ. ანტისიმეტრიულ ტენზორს.

რომ მივიღოთ სხეულის იმ წერტილის კოორდინატების

<sup>\*)</sup> ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ (1.8.6) აღნიშვნა შეზღუდულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება (1.8.4).

ასახვის ფორმულა, რომელსაც გადაადგილებამდე ეკავა  $M(x_1, x_2, x_3)$  მდგომარეობა, საკმარისია ფორმულა (1.8.5) გა-

მოვიყენოთ  $\overline{M_0 M} = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$  ვექტორის მი-

მართ, სადაც  $M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  რაიმე ფიქსირებული წერტილია:

$$\delta x_i = -p_{ij} (x_j - x_j^0) + a_i,$$

სადაც

$$a_i = \delta x_i^0.$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე საკუთრივ დეფორმაციას ახასიათებენ

$$a_{ii}, a_{32} + a_{23}, a_{13} + a_{31}, a_{21} + a_{12}$$

სიდიდეები. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$e_{ij} = e_{ji} := \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}). \quad (1.8.8)$$

მათ დეფორმაციის კომპონენტები ეწოდება და წარმოადგენენ ე.წ. დეფორმაციის სიმეტრიულ ტენზორს.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი აღნიშვნა

$$p_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ji} - a_{ij}).^*) \quad (1.8.9)$$

ამ აღნიშვნებში

$$a_{ij} = e_{ij} - p_{ij}. \quad (1.8.10)$$

ამრიგად (1.8.1) მიიღებს სახეს

$$\delta \xi_i = e_{ij} \xi_j - p_{ij} \xi_j. \quad (1.8.11)$$

\*) ეს აღნიშვნა, თუ სრულდება (1.8.4), ემთხვევა (1.8.6)-ს.



ეს უკანასკნელი ფორმულები მიგვითითებენ იმაზე, რომ აფინური ასახვა შეიძლება დაიშალოს საკუთრივ დეფორმაციის შესაბამის

$$\delta \xi_i = e_{ij} \xi_j \quad (1.8.12)$$

ასახვად და ხისტ გადაადგილებად, რომელიც მოიცემა (1.8.5) ასახვით, სადაც  $p_{ij}$  განსაზღვრულია (1.8.9)-ით.

დეფორმაციის  $e_{ij}$  კომპონენტებს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვთ.

ვაჩვენოთ, რომ  $e_{ii}$  წარმოადგენს  $x_i$  ღერძის პარალელური ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ  $e_{11}$ .

მართლაც, (1.8.8)-ის თანახმად (1.8.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P \delta P = e_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (1.8.13)$$

თუ განვიხილავთ  $\vec{P} = (\xi_1, 0, 0)$  ვექტორს, მაშინ

$$P \delta P = e_{11} \xi_1^2.$$

მაგრამ  $\xi_1^2 = P^2$ , ე.ი.

$$e_{11} = \frac{\delta P}{P}.$$

ეს სიდიდე უგანზომილებოა, როგორც  $L \cdot L^{-1}$  განზომილების მქონე.

თუ დეფორმაციის ყველა კომპონენტი, გარდა  $e_{11}$ -ისა, ნულის ტოლია და ვიხილავთ საკუთრივ დეფორმაციას, ე.ი.  $p_{ij} = 0$ , მაშინ (1.8.12)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\delta \xi_1 = e_{11} \xi_1, \quad \delta \xi_2 = 0, \quad \delta \xi_3 = 0.$$

ამრიგად,  $x_1$  ღერძის პარალელური ვექტორი ყველა ერთნაირად წაგრძელდება ( $e_{11} > 0$ ) ან შეიკუმშება ( $e_{11} < 0$ ), ხოლო მისი პერპენდიკულარული ვექტორები არ იცვლიან არც მიმართუ-

ლებას და არც სიდიდეს. ე.ი. ჩვენ გვაქვს  $x_1$  ღერძის გასწვრივ მარტივი გაჭიმვა ( $e_{11} > 0$ ) ან კუმშვა ( $e_{11} < 0$ ).

$e_{23}$ -ის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად გამოვთვალოთ  $\vec{P}_1 = (0, \eta_2, 0)$ ,  $\eta_2 > 0$ , და  $\vec{P}_2 = (0, 0, \zeta_3)$ ,  $\zeta_3 > 0$ , ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება. დეფორმაციის შემდეგ ისინი აისახებიან შესაბამისად

$$\vec{P}_1^* = (\delta\eta_1, \eta_2 + \delta\eta_2, \delta\eta_3)$$

და

$$\vec{P}_2^* = (\delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \zeta_3 + \delta\zeta_3)$$

ვექტორებში. აღვნიშნოთ მათ შორის კუთხე  $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right)$ -ით (თუ

$\varepsilon_{23} > 0$ , მაშინ კუთხე დეფორმაციის შემდეგ მცირდება, ხოლო თუ  $\varepsilon_{23} < 0$ , მაშინ კუთხე იზრდება). ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ცნობილი ფორმულიდან ცხადია, რომ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) =$$

$$\frac{\delta\eta_1 \delta\zeta_1 + (\eta_2 + \delta\eta_2) \delta\zeta_2 + \delta\eta_3 (\zeta_3 + \delta\zeta_3)}{\sqrt{(\delta\eta_1)^2 + (\eta_2 + \delta\eta_2)^2 + (\delta\eta_3)^2} \sqrt{(\delta\zeta_1)^2 + (\delta\zeta_2)^2 + (\zeta_3 + \delta\zeta_3)^2}}$$

საიდანაც, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, გვაქვს შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) = \sin \varepsilon_{23} \cong \varepsilon_{23} \cong \frac{\eta_2 \delta\zeta_2 + \zeta_3 \delta\eta_3}{\eta_2 \zeta_3}, \quad (1.8.14)$$

რადგან  $\eta_2^2$ -თან და  $\zeta_3^2$ -თან შედარებით შეიძლება შესაბამისად  $\eta_2 \delta\eta_2$ -ისა და  $\zeta_3 \delta\zeta_3$ -ის უგულვებელყოფა (ან რაც იგივეა  $\eta_2$ -თან და  $\zeta_3$ -თან შედარებით შეიძლება  $\delta\eta_2$ -ისა და  $\delta\zeta_3$ -ის უგულვებელყოფა). (1.8.11)-ის გამო

$$\delta \eta_3 = e_{32} \eta_2 - p_1 \eta_2,$$

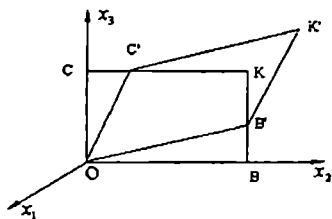
$$\delta \zeta_2 = e_{23} \zeta_3 + p_1 \zeta_3.$$

თუ ამ უკანასკნელთ ჩაესვამთ (1.8.14)-ში, (1.8.8)-ის თანახმად, მივიღებთ, რომ

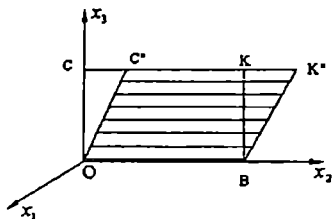
$$\varepsilon_{23} = e_{32} + e_{23} = 2e_{23}.$$

ამრიგად,  $2e_{23}$  არის  $x_2$  და  $x_3$  ღერძების პარალელურ ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება.

განვიხილოთ წმინდა დეფორმაცია, როცა ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ  $e_{23}$ , ხოლო დეფორმაციის დანარჩენი კომპონენტები და ბრუნვის კომპონენტები ნულის ტოლია. ვთქვათ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  ვექტორები გავლებულია კოორდინატთა სისტემის სათაიდან (სიმარტივისათვის) შესაბამისად  $x_2$  და  $x_3$  ღერძების პარალელურად, ხოლო  $OBKC$  მათზე აგებული მართკუთხეა (იხ. ნახ. 1.8.1). დეფორმაციის შემდეგ აღნიშნული მართკუთხედი  $OB'K'C'$  პარალელოგრამად იქცევა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $O$  წერტილი არ გადაადგილებულა, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ხისტი გადატანით ის



ნახ.1.8.1



ნახ.1.8.2

შეიძლება კვლავ პირვანდელ მდგომარეობას დაუბრუნოთ. (1.8.12)-ის თანახმად,  $B$  წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი გადავა  $BK$  წრფეზე მდებარე  $B'$  წერტილში, ხოლო  $C$  წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი კი  $CK$  წრფეზე მდებარე  $C'$  წერტილში, ამასთან

$$BB' = \delta \xi_3 = e_{32} \cdot OB, \quad CC' = \delta \xi_2 = e_{23} \cdot OC. \quad (1.8.15)$$

რადგანაც მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით

$$\frac{BB'}{OB} = \operatorname{tg} \angle BOB' = \angle BOB',$$

$$\frac{CC'}{OC} = \operatorname{tg} \angle COC' = \angle COC',$$

ამიტომ, (1.8.15)-ის თანახმად,

$$\angle BOB' = \angle COC' = e_{23}$$

და კიდევ ერთხელ ვიღებთ, რომ

$$\varepsilon_{23} = \angle BOB' + \angle COC' = 2e_{23}.$$

თუ  $OB'K'C'$  პარალელოგრამს საათის ისრის მიმართულებით  $e_{23}$ -ის ტოლი კუთხით ხისტად შემოვაბრუნებთ  $O$  წერტილის გარშემო, მაშინ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით,  $OB'$  დაემთხვევა  $OB$ -ს, რადგან

$$OB' = \frac{OB}{\cos e_{23}} = \frac{OB}{1 - \frac{e_{23}^2}{2!} + \frac{e_{23}^4}{4!} - \dots} = OB.$$

ამავე მიზეზით, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ  $OC = OC' = OC''$  და  $C''$  მდებარეობს  $CK$  წრფეზე. ამდენად,  $OB'K'C'$  დაიკავებს  $OBK''C''$  მდებარეობას (იხ. ნახ. 1.8.2).

ამრიგად, განხილული დეფორმაცია წარმოადგენს  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების ძვრას  $Ox_2$  მიმართულებით. ამასთან სიბრტყის გადაადგილება  $Ox_1x_2$  სიბრტყემდე მან-

ძილის პროპორციულია.  $CC''$  სიდიდეს ეწოდება „აბსოლუტური ძერა“, ხოლო

$$\frac{CC''}{OC} = \operatorname{tg} \angle COC'' = \operatorname{tg} \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23} = 2e_{23}$$

სიდიდეს – „ფარდობითი ძერა“ ან ძერის კუთხე. განხილულ დეფორმაციას ეწოდება მარტივი, ერთგვაროვანი ძერა.

§1.9. დეფორმაციის ინვარიანტული კვადრატული ფორმა, კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. დეფორმაციის ზედაპირი

(1.8.13) შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახით

$$P\delta P = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.9.1)$$

სადაც

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e_{ij} \xi_i \xi_j \quad (1.9.2)$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ცვლადების კვადრატული ფორმა. რადგანაც (1.9.1)-ის მარცხენა მხარეში მდგომ  $P\delta P$  გამოსახულებას აქვს კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევისაგან დამოუკიდებელი აზრი, ამიტომ (1.9.1)-ის მარჯვენა მხარე, ე.ი., (1.9.2) კვადრატული ფორმა ინვარიანტული უნდა იყოს კოორდინატთა სისტემის შეცვლის მიმართ. ე.ი., თუ  $e'_{ij}$  და  $\xi'_i$ -ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში დეფორმაციის ტენზორის და  $\bar{P}$  ვექტორის კომპონენტებს, მაშინ

$$\begin{aligned} P\delta P &= 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e_{ij} \xi_i \xi_j \\ &= e'_{ij} \xi'_i \xi'_j = 2F(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3). \end{aligned}$$

აქედან, ისევე როგორც ძაბვების თეორიაში, ვიღებთ დეფორმაციის ტენზორის ძველ და ახალ კომპონენტებს შორის იგივე კავშირს, რაც ძაბვების შემთხვევაში გვექონდა:

$$e'_{ij} = e_{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l.$$

$\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$  მიმართულების მქონე მიმართულებას ეწოდება დეფორმაციის მთავარი მიმართულება, თუ

$$e_{ij} n_j = e n_i, \quad (1.9.3)$$

სადაც  $e$  სკალარული სიდიდეა.

კრონეკერის სიმბოლოს გამოყენებით (1.9.3) შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ

$$(e_{ij} - e \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (1.9.4)$$

რადგან ყველა  $n_j$  ერთდროულად ნული არ ხდება, ამიტომ:

$$\det \| e_{ij} - e \delta_{ij} \| = 0. \quad (1.9.5)$$

დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები ეწოდება (1.9.5) განტოლების ფესვებს. მათ აგრეთვე მთავარ ფარდობით წაგრძელებებს უწოდებენ. (1.9.5) განტოლება ჩვენს მიერ განხილული იყო 1.5 პარაგრაფში. ძაბვის თეორიის ანალოგიურად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები: მთავარი ფარდობითი წაგრძელებების შესაბამისი მიმართულებები ურთიერთმართობია; თუ (1.9.5) განტოლების ფესვები მარტივია, მაშინ გვაქვს ურთიერთმართობი მიმართულებების ერთი სამეული; თუ (1.9.5) განტოლების ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი მიმართულებები ძვეს სიბრტყეში, რომელიც მესამე მარტივი ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების პერპენდიკულარულია; ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ორი ურთიერთმართობი მიმართულება ამ სიბრტყიდან შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარი მიმართულებად; თუ სამივე ფესვი ტოლია, მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარ მიმართულებად.

გადავწეროთ (1.9.5) კუბური განტოლება შემდეგი სახით:

$$e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0,$$

სადაც

$$\theta_1 := e_{ii},$$

$$\theta_2 := \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}, \quad (1.9.6)$$

$$\theta_3 := \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.$$

კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულებების თანახმად:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ \theta_2 &= e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_3 e_2, \\ \theta_3 &= e_1 e_2 e_3. \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

როგორც მთავარი ფარდობითი წაგრძელებები,  $e_i$ -ები არ არიან დამოკიდებულნი კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევაზე. ამიტომ  $\theta_i$ -ები ინვარიანტებია კოორდინატთა სისტემის ღერძების შეცვლის მიმართ.

ისევე როგორც 1.5 პარაგრაფში, ძაბვის ზედაპირის მსგავსად შეიძლება შემოვიღოთ დეფორმაციის ზედაპირის ცნებაც.

მართლაც, (1.9.1) გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$P^2 \frac{\delta P}{P} = P^2 e = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

სადაც  $e = \frac{\delta P}{P}$  გამოხატავს  $\bar{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. იგი არ არის დამოკიდებული ვექტორის სიგრძეზე, დამოკიდებულია მხოლოდ ვექტორის მიმართულებაზე. ამიტომ ყოველი მიმართულებისათვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ ვექტორის სიგრძე, რომ

$$P^2 e = \pm c^2,$$

სადაც  $c$  ნებისმიერი, ნულისაგან განსხვავებული ფიქსირებული მუდმივაა. მას სიგრძის განზომილება აქვს.

თუ  $\vec{P}$ -ს საწყის წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში, მაშინ მისი ბოლო  $A$  წერტილი აღმოჩნდება

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2$$

ან, რაც იგივეა,

$$e_{ij} \xi_i \xi_j = \pm c^2 \quad (1.9.8)$$

ზედაპირზე, რომელსაც *დეფორმაციის ზედაპირი* ეწოდება.

თუ დეფორმაციის ზედაპირი აგებულია, მაშინ ადვილად შეიძლება გამოეთვალათ ნებისმიერი ვექტორის მიმართულებით  $e$  ფარდობითი წაგრძელება. ამისათვის საკმარისია, სათავედან გავვლეთ მისი პარალელური  $\vec{OA}$  ზედაპირის  $A$  წერტილში გადაკვეთამდე. ამასთან იმისათვის, რომ ყოველთვის არსებობდეს გადაკვეთის  $A$  წერტილი, საჭიროა, გარკვეულნიერად შევარჩიოთ  $c^2$ -ის წინ ნიშანი. განსახილველი ვექტორის  $e$  ფარდობითი წაგრძელება შემდეგნაირად გამოისახება

$$e = \pm \frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ დეფორმაციის მთავარ მიმართულებებს, ე.ი. (1.9.8) განტოლებით მოცემულ ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ დეფორმაციის ზედაპირის (1.9.8) განტოლება დაიყვანება

$$e_i \xi_i^2 = \pm c^2$$

კანონიკურ სახეზე. ამდენად ახალ კოორდინატთა სისტემაში  $e'_{ij} = 0$ , როცა  $i \neq j$ ,  $e'_{ii} = e_i$ .

ამრიგად, თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ მთავარ მიმართულებებს, მაშინ მათ შორის მართი კუთხეები დეფორმაციის შემდეგაც მართი დარჩება. დეფორმაციის ზედაპირებს ისეთივე



სახე აქვთ, როგორც ძაბვის ზედაპირებს და ამიტომ მათზე არ შეეწერალებით.

$$\theta := e_{ii} = e_1 + e_2 + e_3 \quad (1.9.9)$$

სიდიდეს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს. თუ განვიხილავთ მართკუთხა პარალელებიპედს, რომლის წიბოები დეფორმაციის მთავარი მიმართულებების პარალელურ საკოორდინატო ღერძებზე მდებარეობენ და მათი სიგრძეები  $l_1$ ,  $l_2$  და  $l_3$ -ის ტოლია, მაშინ დეფორმაციის შემდეგ პარალელებიპედის წიბოები კვლავ ღერძების პარალელური იქნებიან, ხოლო მათი სიგრძეები შესაბამისად

$$l_1(1 + e_1), l_2(1 + e_2), l_3(1 + e_3) \text{-ს}$$

გაუტოლდება. ამდენად, განსახილველი პარალელებიპედის მოცულობა დეფორმაციამდე იყო

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3,$$

ხოლო დეფორმაციის შემდეგ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, არის

$$V^* = l_1 l_2 l_3 (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3)$$

$$\cong V(1 + e_1 + e_2 + e_3).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (1.9.9)-ს,

$$\frac{V^* - V}{V} = e_1 + e_2 + e_3 = \theta.$$

ამრიგად,  $\theta$  წარმოადგენს მოცულობის ფარდობით გაფართოებას, ე.ი., დეფორმაციის დროს მოცულობის ერთეულის ცვლილების ტოლია.

## §1.10 ზოგადი სახის დეფორმაცია

ვთქვით, დეფორმაციის შედეგად უწყვეტი ტანის  $M$  წერტილი  $(x_1, x_2, x_3)$  კოორდინატებით იკავებს სივრცის  $M^*$  წერტილს  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  კოორდინატებით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$u_i := x_i^* - x_i.$$

ცხადია,  $u_i$  არის  $\overline{MM^*}$  ვექტორის კომპონენტები, რომლებიც გამოხატავენ დეფორმაციის შედეგად წერტილის გადაადგილებას.  $\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$  ვექტორს ეწოდება გადაადგილების ვექტორი, ხოლო მის კომპონენტებს — გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები. რადგან გარემოს სხვადასხვა წერტილი სხვადასხვაგვარად გადაადგილდება, ამიტომ გადაადგილების ვექტორი საზოგადოდ წერტილის კოორდინატების ფუნქციაა:

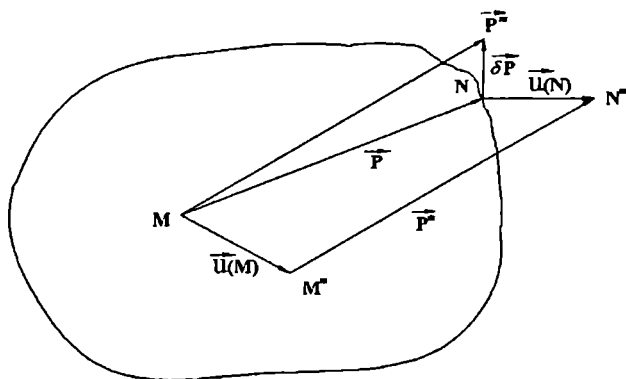
$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3).$$

შემდგომში, თუ სხვა რამ არ იქნება თქმული, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ  $u_i$  ცალსახა, უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებსაც აქვთ მესამე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები.

წერტილის მიდამოში გარემოსგან გამოვეყოთ მისი უსასრულოდ მცირე ნაწილი და დავაკვირდეთ, თუ როგორ იცვლება იგი დეფორმაციის შედეგად. ამისათვის საკმარისია ვნახოთ, თუ როგორ იცვლებიან  $M$  წერტილში საწყისი წერტილის მქონე უსასრულოდ მცირე ვექტორები. ვთქვათ,  $\overline{MN} = \vec{P} = (x_1, x_2, x_3)$  ერთერთი ასეთი ვექტორია (იხ. ნახ. 1.10.1) და დეფორმაციის შემდეგ  $M$  წერტილი გადადის  $M^*$ -ში,  $N$  კი —  $N^*$ -ში, ხოლო

$\bar{P}$  გარდაიქმნება  $\bar{P}^* = \overline{M^* N^*}$  ვექტორად. გამოვთვალოთ

$\overline{\delta P} = \bar{P}^* - \bar{P}$  ვექტორული ნაზრდის კომპონენტები.



ნახ.1.10.1

ცხადია,  $M^*$  წერტილის კოორდინატებია

$$x_i + u_i(x_1, x_2, x_3),$$

ხოლო  $N^*$ -ის, რომლის დეფორმაციამდელი კოორდინატები იყო

$$x_i + \xi_i,$$

კოორდინატებია

$$x_i + \xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3).$$

ამიტომ  $\bar{P}^*$  ვექტორის კომპონენტებია

$$\xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3),$$

ხოლო  $\overline{\delta P}$  ვექტორის კომპონენტებია

$$\delta \xi_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილი ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i,j} \xi_j + \varepsilon,$$

სადაც  $\varepsilon$  არის  $\xi_i$ -ის მიმართ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდე. თუ მათ უგულებელვყოფთ მივიღებთ, რომ

$$\delta \xi_i = u_{i,j} \xi_j. \quad (1.10.1)$$

აქ  $u_{i,j}$  სიდიდეები დამოკიდებულნი არიან  $(x_1, x_2, x_3)$  წერტილზე და არ არიან დამოკიდებულნი  $\xi_i$ -ზე.

(1.10.1)-დან ნათელია, რომ განსახილველი ელემენტის წრფივ განზომილებებთან შედარებით მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით, ელემენტის დეფორმაცია ხასიათდება აფინური გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტებია

$$a_{ij} = u_{i,j}. \quad (1.10.2)$$

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები და მათი წარმოებულები ისეთი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, რომელთა ნამრავლებისა და კვადრატების უგულებელყოფა დასაშვებია თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით. ამ პირობებში (1.10.1) იქნება უსასრულოდ მცირე აფინური გარდაქმნა და მის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ §1.8-სა და §1.9-ში მიღებული შედეგები.

(1.8.11)-ის, (1.8.8)-ის, (1.8.9)-ის და (1.10.2)-ის თანახმად,

$$\delta \xi_i = (e_{ij} - p_{ij}) \xi_j, \quad (1.10.3)$$

სადაც

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (1.10.4)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}). \quad (1.10.5)$$

სხეულის მდგომარეობის შეცვლის სრული სურათის მისაღე-

ბად (1.10.3)-ით გამოხატულ საკუთრივ დეფორმაციასა და უსასრულოდ მცირე ხისტი მობრუნებას უნდა დაემატოს ელემენტის ხისტი გადატანა, რომელიც თვით  $M(x_1, x_2, x_3)$  წერტილის გადაადგილების ტოლია, ე.ი. ამ ხისტი გადატანის კომპონენტებია  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ .

§1.7-ში განხილულ ერთგვაროვან დეფორმაციასა და ამ პარაგრაფში განხილულ დეფორმაციას შორის განსხვავება ისაა, რომ აქ დეფორმაციის კომპონენტები დამოკიდებულია განსახილველი ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში, ე.ი.  $(x_1, x_2, x_3)$  კოორდინატებზე. კერძოდ, წერტილიდან წერტილზე გადასვლის დროს იცვლება დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. იგივე უნდა ითქვას ბრუნვის კომპონენტებზე და მოცულობის ფარლობით გაფართოებაზე.

**§1.11. გადაადგილების განსაზღვრა დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. ჩეზაროს ფორმულები. თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები**

ამ პარაგრაფის ამოცანაა (1.10.4) სისტემის ამოხსნა. ე.ი. სამი უცნობი სიდიდის განსასაზღვრავად გვაქვს ექვსი განტოლება, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ საჭიროა გარკვეული დამატებითი პირობები დაედოს დეფორმაციის კომპონენტებს.

ვთქვათ  $V$  არე, რომელიც გარემოს ეკავა დეფორმაციამდე, ცალადბმულია;  $M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  რაიმე წერტილია  $V$  არეში,  $x_i$

გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო  $P_{ij}^0$  ბრუნვის კომპონენტებია აღნიშნულ წერტილში;  $M_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  რაიმე

სხვა წერტილია არეში. ამ უკანასკნელ წერტილში ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტების გამოსახულება დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით.  $M_0 M_1$ -ით აღვნიშნოთ  $M_0$  და  $M_1$  წერტილების შემაერთებელი რაიმე წირი, რომელიც  $V$  არეში მდებარეობს.

(1.10.4) და (1.10.5)-დან ცხადია, რომ

$$u_{i,j} = e_{ij} - p_{ij}.$$

ე.ი.

$$du_k = u_{k,l} dx_l = (e_{kl} - p_{kl}) dx_l.$$

აქედან

$$u_k = u_k^0 + \int_{M_0 M_1} e_{kl} dx_l - \int_{M_0 M_1} p_{kl} dx_l. \quad (1.11.1)$$

გამოვუთვალოთ მეორე ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} \int_{M_0 M_1} p_{kl} dx_l &= - \int_{M_0 M_1} p_{kl} d(x_l - x_l^0) \\ &= p_{kl}^0 (x_l^1 - x_l^0) + \int_{M_0 M_1} (x_l - x_l^0) dp_{kl}. \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

თუ (1.10.5)-ს გავაწარმოებთ,  $\frac{1}{2} u_{i,k}$ -ის დამატებისა და გამოკლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} p_{kl,j} &= \frac{1}{2} (u_{l,k} - u_{k,l})_{,j} \\ &= \frac{1}{2} (u_{l,j} + u_{l,j})_{,k} - \frac{1}{2} (u_{l,k} + u_{k,l})_{,j} = e_{li,k} - e_{ik,l}. \end{aligned}$$

ე.ი.

$$dp_{kl} = p_{kl,j} dx_j = (e_{li,k} - e_{ik,l}) dx_j.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.11.2)-ში, ხოლო მიღებული გამოსახულება – (1.11.1)-ში:

$$u_k = u_k^0 + p_{kl} \left( x_l^0 - x_l \right) + \int_{M_0 M_1} \left[ e_{kl} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{li,k} - e_{lk,l}) \right] dx_l. \quad (1.11.3)$$

რამდენადაც  $u_k$  დამოკიდებული უნდა იყოს  $x_l^1$ -ზე, მაგრამ არ უნდა იყოს დამოკიდებული წირის შერჩევაზე, წირითი ინტეგრალის ინტეგრების წირისაგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების თანახმად, უნდა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} e_{k1,2} + e_{21,k} - e_{1k,2} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{11,k2} - e_{1k,l2}) \\ = e_{k2,1} + e_{12,k} - e_{2k,1} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{12,k1} - e_{2k,l1}), \\ e_{k1,3} + e_{31,k} - e_{1k,3} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{11,k3} - e_{1k,l3}) \\ = e_{k3,1} + e_{13,k} - e_{3k,1} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{13,k1} - e_{3k,l1}), \\ e_{k2,3} + e_{32,k} - e_{2k,3} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{12,k3} - e_{2k,l3}) \\ = e_{k3,2} + e_{23,k} - e_{3k,2} - \left( x_l^1 - x_l \right) (e_{13,k2} - e_{3k,l2}). \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \binom{1}{x_l - x_l} (e_{1l,k2} - e_{1k,l2}) &= \binom{1}{x_l - x_l} (e_{12,k1} - e_{2k,l1}), \\ \binom{1}{x_l - x_l} (e_{1l,k3} - e_{1k,l3}) &= \binom{1}{x_l - x_l} (e_{13,k1} - e_{3k,l1}), \\ \binom{1}{x_l - x_l} (e_{12,k3} - e_{2k,l3}) &= \binom{1}{x_l - x_l} (e_{13,k2} - e_{3k,l2}). \end{aligned}$$

აქედან, რადგანაც უკანასკნელი ტოლობები  $V$ -დან ნებისმიერი  $x_l$ -ისა და  $x_l$ -სთვის უნდა შესრულდეს, ვიღებთ შემდეგ 6 პირობას:

$$e_{li,kj} - e_{ik,lj} = e_{ljk,i} - e_{jki,l}, \quad (1.11.4)$$

სადაც

$$likj = 1122, 1133, 2233, 1123, 2132, 2133.$$

ამ უკანასკნელ პირობებს ეწოდებათ *თავსებალობის სენ-ვენანის პირობები*.

რადგან (1.11.3) გამოსახულებაში წირითი ინტეგრალი ფიგურირებს, თუ არე მრავლადბმულია, გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები საზოგადოდ მრავალსახა ფუნქციები იქნებიან. თუ გავატარებთ საჭირო რაოდენობის ჭრილებს ისე, რომ არე ცალადბმულად იქცეს, მათი ცალსახობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციების მნიშვნელობები ჭრილების სხვადასხვა მხრიდან ტოლი იყოს. (1.11.3) ფორმულებს ჩეზაროს<sup>\*)</sup> ფორმულები ეწოდებათ.

<sup>\*)</sup> ე. ჩეზარო (1859-1906).



### თავი III. კონსტიტუციური დამოკიდებულებები

#### §1.12. დრეკალობის თეორიის ძირითადი კანონი – ჰუკის განზოგადებული კანონი

1.1-1.11 პარაგრაფებში თქმული მართებულია, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსთვის. იმისათვის, რომ დრეკადი სხეულის დამახასიათებელი განტოლებები მივიღოთ, დამატებით საჭიროა ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების დამაკავშირებელი კანონი, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება.

ვიდრე უშუალოდ ძირითად კანონს შევხებოდეთ, შევნიშნოთ შემდეგი. რადგანაც, საზოგადოდ, ძაბვები და დეფორმაციები სხეულის სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვაა, ამიტომ მათ ვიზილათ მოცემულ წერტილში. აქამდეც ჩვენ ეს ასე გვესმოდა, მაგრამ როცა ვიზილათ გადაადგილების ვექტორის და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებს „მოცემული წერტილის“ ქვეშ, ჩვენ გვესმოდა წერტილი დეფორმაციამდე (ე.ი. წერტილი ლაგრანჟის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)), ხოლო ძაბვების განხილვის დროს კი წერტილი დეფორმაციის შემდეგ (ე.ი. წერტილი ეილერის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)).

მაგრამ მცირე დეფორმაციების განხილვის დროს (დრეკალობის წრფივი თეორია ეყარება მცირე შემფოთებათა ჰიპოთეზას, რაც დეფორმაციების სიმცირეს და ამდენად, ხისტი გადაადგილების სიზუსტით, გადაადგილების სიმცირეს გულისხმობს) ეს სხვაობა არაარსებითია. მაგალითად,  $X_{ij}$ -ის მნიშვნელობა

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  და  $(x_1, x_2, x_3)$  წერტილებში, სადაც

$\left( \overset{\cdot}{x}_1, \overset{\cdot}{x}_2, \overset{\cdot}{x}_3 \right)$  წერტილი არის სხეულის დეფორმაციამდე

$(x_1, x_2, x_3)$  წერტილში მდებარე „სხეულის წერტილის“ მდებარეობა დეფორმაციის შემდეგ, ერთმანეთისგან განსხვავდება  $X_{ij}$ -სთან შედარებით მცირე სიდიდით, რამდენადაც  $X_{ij}$  სივრცითი წერტილის უწყვეტი ფუნქციებია. ამდენად დასაშვებია,  $X_{ij}$ -ის

მნიშვნელობა  $\left( \overset{\cdot}{x}_1, \overset{\cdot}{x}_2, \overset{\cdot}{x}_3 \right)$  წერტილში ამ სიზუსტით შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით  $(x_1, x_2, x_3)$  წერტილში. ეს მსჯელობა

მისაღებია იმ პირობით, თუ  $\left( \overset{\cdot}{x}_1, \overset{\cdot}{x}_2, \overset{\cdot}{x}_3 \right)$  და  $(x_1, x_2, x_3)$

წერტილები ეკუთვნიან არეს, რომლის ჩაკეტვაც უკავია სხეულს დეფორმაციის შემდეგ.

ამის შესაბამისად, შემდეგში, გვექნება რა ლაჰარაკი არეზე, რომელიც სხეულს უკავია, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება არე, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე, ე.ი. ყველა სიდიდეს განვიხილავთ ლაგრანჟის ცვლადებში.

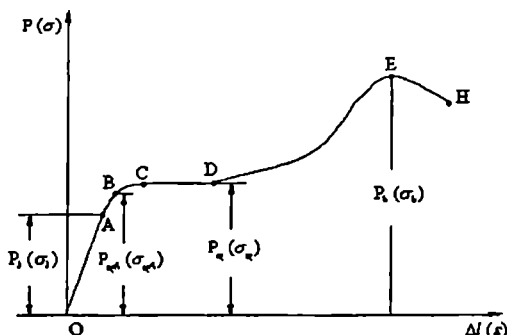
ჰუკის მიერ ჩატარებული, შესავალში ნახსენები ექსპერიმენტის ილუსტრირება მოვახდინოთ ე.წ. რბილი ფოლადის ღეროს (იხ. ქვემოთ § 3.1) გაჭიმვაზე ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგებით.  $P$  ძალის (ე.ი. ღეროს ბოლოზე მოქმედი დატვირთვის ტოლქმედის) ზრდის პარალელურად იზრდება ღეროს  $\Delta l$  წაგრძელება.  $\Delta l = f(P)$  დამოკიდებულების ნახაზზე (იხ. ნახ. 1.12.1) მოცემულ გრაფიკს გაჭიმვის ან ჰუკის დიაგრამა ეწოდება (იხ. [3], გვ 35). დატვირთვის ინტენსიობის გაზრდისას მასალა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადადის, რასაც დიაგრამაზე რამდენიმე უბანი შეესაბამება. წრფივი  $OA$  უბანი ჰუკის კანონს გამოსახავს.  $A$  წერტილის შესაბამის

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{F}$$

ძაბვას, სადაც  $F$  ნიშნის კვეთის საწყისი ფართობია, მასალის პროპორციულობის ზღვარი ეწოდება. პროპორციულობის ზღვარი არის ის მაქსიმალური ძაბვა, რომლის ფარგლებში დეფორმაცია ძალის პროპორციულია. რბილი ფოლადისათვის  $\sigma_3 =$

$$2000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}. B \text{ წერტილის ქვემოთ ზდება სუფთა დრეკადი}$$

წაგრძელება, ზემოთ კი ჩნდება ნარჩენი წაგრძელება.



ნახ. 1.12.1

$$\sigma_{\text{ლ}} = \frac{P_{\text{ლ}}}{F}$$

ძაბვას მასალის დრეკადობის ზღვარი ეწოდება. AC უბანში დიაგრამის დახრა მცირდება, CD უბანში კი ის თითქმის პორი-

ზონტალური ზღება, რაც იმას ნიშნავს, რომ მასალის სიხისტე თანდათანობით კლებულობს და ბოლოს თითქმის ისპობა. დიაგრამის ჰორიზონტალური უბანი მასალის საერთო დენადობის მდგომარეობას გამოსახავს, როცა P ძალა არ იზრდება, მაგრამ დეფორმაცია გრძელდება. სათანადო

$$\sigma_{\varepsilon} = \frac{P_{\varepsilon}}{F}$$

ძაბვას მასალის დენადობის ზღვარი ეწოდება.

მასალის დენადობა აიხსნება ნარჩენი ძვრების მასიური განვითარებით. პირველად ნარჩენი ძვრები ჩნდება აქა-იქ, ცალკეულ კრისტალურ მარცვლებში, რომლებიც არახელსაყრელად არიან ორიენტირებულნი გამჭვიშივი ძალის მიმართ. მათი რიცხვი და განფენილობა P ძალის ზრდასთან ერთად იზრდება და ბოლოს მოვლენა მასობრივ ხასიათს იღებს. დიდი მოცულობის კრისტალური შრეები ერთიმეორეზე დაცოცებას განიცდიან, რის გარეშულ გამოვლინებასაც დიდი პლასტიკური (იხ. თავი VI) წაგრძელება წარმოადგენს. დიდი ნარჩენი წაგრძელების მიღების შემდეგ მასალა კვლავ იძენს წინააღმდეგობის უნარს, რაც იმას ნიშნავს, რომ წაგრძელების ზრდა P ძალის ზრდას მოითხოვს. მასალის განმტკიცების მდგომარეობას დიაგრამაზე აღმავალი DE უბანი ეთანადება. მაქსიმალურ P ძალამდე წაგრძელება ღეროს სიგრძეზე თანაბარია, შემდეგ კი ლოკალურ ხასიათს იღებს, ე.ი. გრძელდება ღეროს მხოლოდ პატარა ადგილი, სადაც ჩნდება ყელი და ზდება საბოლოო რღვევა. ყელის განივი კვეთი იმდენად სწრაფად ვიწროვდება, რომ, თუმცა იქ რეალური ძაბვა ზრდას ბოლომდე განაგრძობს, მთლიანად ძალვა (ძაბვის ინტეგრალი განივი კვეთის ფართზე) მცირდება. დიაგრამა მთავრდება დაღმავალი EH უბნით. ეს უბანი მასალის ადგილობრივ დენადობას ეთანადება. მაქსიმალური P ძალის შესაბამის

$$\sigma_{\varepsilon} = \frac{P_{\varepsilon}}{F}$$

ძაბვას მასალის სიმტკიცის ზღვარი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ  $P$  ძალიდან ძაბვებზე გადასვლას საწყის  $F$  ფართობზე გაყოფით ვახდენთ, თუმცა სინამდვილეში ღეროს გაჭიმვისას განივი კვეთის ფართობი მცირდება. ამდენად ნაანგარიშები ძაბვები რეალურად შედარებით პირობით ხასიათს ატარებენ. რბილი ფოლადისათვის

$$\sigma_{\text{e}} = 2400 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}, \quad \sigma_{\text{c}} = 4000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}.$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ  $\sigma = \frac{P}{F}$  ძაბვასა და  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  ( $l$  ღეროს სიგრძეა) ფართობით წაგრძელებას შორის დამოკიდებულების გრაფიკი ნახ. 1.12.1-ზე მოცემული დიგრამის მსგავსია, ამიტომ იქვე მიუთითეთ შესაბამისი სიდიდეები ფრჩხილებში.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ადგილი აქვს ჰუკის შემდეგ განზოგადებულ კანონს: *სხეულის მოცემულ წერტილში ძაბვის ტენზორის კომპონენტები დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციებია და პირიქით*, ე.ი.

$$X_{ij} = C_{\mu}^{ij} e_{\mu}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.1)$$

და

$$\det \|C_{\mu}^{ij}\| \neq 0.$$

(1.12.1) ტოლობებს ეწოდებათ *კონსტიტუტივეური დამოკიდებულებები*.

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების სიმეტრიულობის გამო

$$X_{ij} = C_{\mu}^{ij} e_{\mu} = C_{\mu}^{ji} e_{\mu} = C_{\mu}^{ij} e_{\mu}, \quad \text{ე.ი.} \quad (C_{\mu}^{ij} - C_{\mu}^{ji}) e_{\mu} = 0,$$

და, (1.12.1)-ის თანახმად,

$$C_{\mu}^{ij} e_{\mu} = X_{ij} = X_{ji} = C_{\mu}^{ji} e_{\mu}, \quad \text{ე.ი.} \quad (C_{\mu}^{ij} - C_{\mu}^{ji}) e_{\mu} = 0.$$

რადგანაც ტოლობებს ადგილი უნდა ჰქონდეთ ნებისმიერი  $e_{kl}$ -ისთვის, ამიტომ

$$C_{lk}^{ij} = C_{kl}^{ij} = C_{kl}^{ji} = C_{lk}^{ji}.$$

ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს წინა ორი ტოლობიდან.

ამ უკანასკნელი ტოლობების თანახმად,  $C_{kl}^{ij}$  უბის რაოდენობა შეადგენს 36-ს (მართლაც,  $\text{card}\{a_{ij}\} = 3^2$ ;

თუ  $a_{ij} = a_{ji}$ , მაშინ

$$\text{card}\{a_{ij}\} = 3^2 - 3 = 6; \text{card}\{a_{ijk}\} = 3^2 \cdot 3^2 = 3^4;$$

თუ  $a_{ijk} = a_{jik} = a_{ikj}$ , მაშინ

$$\text{card}\{a_{ijk}\} = (3^2 - 3) \cdot (3^2 - 3) = 6 \cdot 6 = 36,$$

სადაც  $\text{card}$  აღნიშნავს განსხვავებულ ელემენტთა რიცხვს).  $C_{kl}^{ij}$  კოეფიციენტებს დრეკადი მუდმივები ეწოდებათ იმ თვალსაზრისით, რომ ისინი საზოგადოდ დამოკიდებულნი არიან წერტილის კოორდინატებზე, მაგრამ არ არიან დამოკიდებულნი მოცემულ წერტილში დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებზე. ენერჯის შენახვის კანონზე დაყრდნობით მტკიცდება, რომ დრეკადი მუდმივების რიცხვი ზოგად შემთხვევაში შეიძლება 21-ზე იქნეს დაყვანილი (იხ. [2], [51]).

*სხეულს ეწოდება იზოტროპული რაიმე თვისების მიმართ, თუ აღნიშნული თვისება მოცემულ წერტილში ყველა მიმართულებით ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ იზოტროპული სხეულიდან რაიმე ადგილას ამოვჭრით რაიმე ფორმის მოცულობით ელემენტს, მაგალითად, კუბს, მაშინ ეს ელემენტი არ იქნება რაიმე თვისების თვალსაზრისით განსხვავებული სხეულის იმავე ადგილას ამოჭრილი იმავე ფორმის, მაგრამ სხვაგვარად ორიენტირებული ელემენტიდან. მაგალითად, ხე არ არის იზოტროპული, რადგან ის ე.წ. ბოჭკოებისგან შედგება, ხოლო ლითონი დასაშვები სიზუსტით იზოტროპულია.*

სხეულს ეწოდება ერთგვაროვანი რაიმე თვისების მიმართ, თუ აღნიშნული თვისება სხეულის სხვადასხვა წერტილში ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ თვისების მიმართ ერთნაირია სხეულის სხვადასხვა ადგილას ამოჭრილი ერთნაირად ორიენტირებული ელემენტი.

ცხადია, სხეული შეიძლება იყოს ერთგვაროვანი იზოტროპული, არაერთგვაროვანი იზოტროპული, ერთგვაროვანი ანიზოტროპული (არა იზოტროპული) და არაერთგვაროვანი ანიზოტროპული.

მათემატიკურად ერთგვაროვნება დრეკადობის თვალსაზრისით იმაში გამოიხატება, რომ დრეკადი მუდმივები არ არიან დამოკიდებულნი სივრცით წერტილზე, ხოლო იზოტროპულობა — იმაში, რომ დრეკადი მუდმივები არ არიან დამოკიდებულნი კოორდინატთა სისტემის ორიენტაციაზე სხეულის მიმართ, ე.ი. (1.12.1) ფორმულები არ უნდა შეიცვალონ კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი გარდაქმნის დროს.

ვაჩვენოთ, რომ იზოტროპული სხეულის ნებისმიერ წერტილში დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ემთხვევა ძაბვის მთავარ მიმართულებებს. მართლაც, თუ დეფორმაციის მთავარი მიმართულებებს საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ, მაშინ

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

ე.ი. ჰუკის კანონის თანახმად, კერძოდ,

$$X_{32} = A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33}, \quad (1.12.2)$$

სადაც  $A_i$  დრეკადი მუდმივებია. გადავიდეთ ახალ  $Ox_1'x_2'x_3'$  კოორდინატთა სისტემაზე, რომელიც  $x_3$  ღერძის გარშემო ძველი სისტემის  $180^\circ$ -ით შემობრუნებით მიიღება.  $x_3'$  ღერძი დაემთხვევა  $x_3$ -ს, ხოლო  $x'_\alpha$  ღერძებს  $x_\alpha$ -ს საწინააღმდეგო მიმართულებები ექნებათ. ერთი მხრივ სხეულის იზოტროპულობის გამო

$$X'_{32} = A_1 e'_{11} + A_2 e'_{22} + A_3 e'_{33}. \quad (1.12.3)$$

მეორე მხრივ, ცხადია,

$$X'_{32} = -X_{32}, \quad e'_{ii} = e_{ii}. \quad (1.12.4)$$

(1.12.4)-ის გათვალისწინებით, (1.12.2) და (1.12.3)-დან ვასკენით, რომ

$$A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33} = -(A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33}).$$

აქედან

$$A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33} = 0 \quad (1.12.5)$$

და

$$A_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

რადგანაც (1.12.5)-ს ადგილი აქვს დეფორმაციის ტენზორის ნებისმიერი საკმარისად მცირე კომპონენტებისთვის, ე.ი.  $X_{32} = 0$ . ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ  $X_{31} = X_{12} = 0$ .

რამდენადაც იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ძაბვის და დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა, მათ უბრალოდ მთავარ ღერძებს ვუწოდებთ.

ჰუკის კანონის თანახმად

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{22} + a_3 e_{33}, \quad (1.12.6)$$

სადაც  $a_i$  დრეკადი მუდმივებია.

ვთქვათ,  $Ox_1'x_2'x_3'$  ახალი კოორდინატთა სისტემაა, რომელიც ძველისგან  $x_1$  ღერძის გარშემო  $90^\circ$ -ით შემობრუნებით მიიღება. ახალ კოორდინატთა სისტემაში

$$X'_{11} = a_1 e'_{11} + a_2 e'_{22} + a_3 e'_{33}.$$

მაგრამ

$$X'_{11} = X_{11}, \quad e'_{11} = e_{11}, \quad e'_{22} = e_{33}, \quad e'_{33} = e_{22}.$$

ამიტომ

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{33} + a_3 e_{22}. \quad (1.12.7)$$

(1.12.6) და (1.12.7)-დან ვასკენით, რომ  $a_2 = a_3$ . ამდენად,

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 (e_{22} + e_{33}) = a_2 \theta + (a_1 - a_2) e_{11}.$$



შემოვიღოთ აღნიშვნა  $a_2 = \lambda$ ,  $a_1 - a_2 = 2\mu$ , მაშინ

$$X_{11} = \lambda \theta + 2\mu e_{11}.$$

იზოტროპულობის გამო, ცხადია,

$$N_i := X_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_i. \quad (1.12.8)$$

თუ გადავალთ ახალ კოორდინატა  $Ox_1'x_2'x_3'$  სისტემაზე, შესაბამისი ფორმების ინვარიანტობის გამო მივიღებთ, რომ

$$N_i \xi_i^2 = X'_{ij} \xi_i' \xi_j', \quad e_i \xi_i^2 = e'_{ij} \xi_i' \xi_j',$$

მაგრამ

$$\xi_i \xi_i = \xi_i' \xi_i' = \xi_i' \xi_j' \delta_{ij}$$

და (1.12.8),  $\xi_i^2$ -ზე გამრავლების შემდეგ, ახალ კოორდინატა სისტემაში მიიღებ

$$X'_{ij} \xi_i' \xi_j' = \lambda \theta \xi_i' \xi_j' \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij} \xi_i' \xi_j'$$

სახეს. საიდანაც  $\xi_i'$ -ების ნებისმიერობის გამო ნებისმიერ კოორდინატა სისტემაში

$$X'_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij}. \quad (1.12.9)$$

ამრიგად, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ჰუკის განზოგადებული კანონი იღებს (1.12.9) სახეს და გვაქვს მხოლოდ 2 ღრეკადი პულმვი  $\lambda$  და  $\mu$ . ღრეკადი სიმეტრიის სხვა შემთხვევები მოყვანილია [2]-ში (იხ. გვ. 76-80).

(1.12.9)-ის გამო, იმის გათვალისწინებით, რომ  $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$ ,

$$\Theta := X_{ii} = X_{ij} \delta_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \delta_{ij} = 3\lambda \theta + 2\mu \theta$$

აქედან, თუ  $3\lambda + 2\mu \neq 0$ ,

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Theta. \quad (1.12.10)$$

გ.ი.

$$X_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \Theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.12.11)$$

და თუ  $\mu \neq 0$ ,

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} X_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \Theta \delta_{ij}. \quad (1.12.12)$$

განვიხილოთ ისეთი დრეკადი წონასწორობა, როცა

$$X_{11} \neq 0, \quad X_{22} = X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_{33} = 0^*),$$

მაშინ (1.12.9) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\lambda\theta + 2\mu e_{11} = X_{11}, \quad \lambda\theta + 2\mu e_{22} = 0, \quad (1.12.14)$$

$$\lambda\theta + 2\mu e_{33} = 0, \quad e_{13} = e_{21} = e_{23} = 0,$$

ხოლო (1.12.10) - შემდეგ სახეს:

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_{11}. \quad (1.12.15)$$

შევიტანოთ (1.12.15) (1.12.14)-ის პირველ ტოლობაში და განვსაზღვროთ  $X_{11}$ :

$$X_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}. \quad (1.12.16)$$

(1.12.15) და (1.12.16)-დან ცხადია:

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11}.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.12.14)-ის მეორე და მესამე ტოლობაში:

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}. \quad (1.12.17)$$

\*) თუ ეს პირობები სრულდება სხეულის ყოველ წერტილში (ან მოცემულ წერტილში), მაშინ ამბობენ, რომ სხეულში (ან მოცემულ წერტილში) გვაქვს  $X_1$  ღერძის პარალელური წრფივი დაძაბული მდგომარეობა.

შემოვილოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$E := \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.12.18)$$

$E$ -ს ეწოდება დრეკადობის ან იუნგის მოდული, ხოლო  $\nu$ -ს – ჯუასონის კოეფიციენტი. მაშინ (1.12.16) და (1.12.17) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_{11} = Ee_{11}, \quad (1.12.19)$$

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}. \quad (1.12.20)$$

ვთქვათ, განსახილველი სხეული  $x_1$  ღერძის პარალელური მსახველის მქონე პრიზმა ან ცილინდრია. კოშის ფორმულების თანახმად გვერდით ზედაპირზე

$$X_{ni} = 0,$$

ხოლო  $x_1$  ღერძის დადებითი და უარყოფითი მიმართულებებით მდებარე ფუძეებზე შესაბამისად

$$X_{n2} = X_{12} = 0, \quad X_{n3} = X_{13} = 0, \quad X_{n1} = X_{11} \neq 0,$$

და

$$X_{n2} = -X_{12} = 0, \quad X_{n3} = -X_{13} = 0, \quad X_{n1} = -X_{11} \neq 0.$$

ამდენად ცილინდრზე მოქმედი გარე ძალები წარმოადგენენ მის ფუძეებზე მოდებულ თანაბრადგანაწილებულ გამჭიმავ ( $X_{11} > 0$ ) ან მკუმშავ ( $X_{11} < 0$ ) ძაბვებს. ჩვენ ჩავთვლით ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად, რომ როცა  $X_{11} > 0$ , ცილინდრი გრძივი მიმართულებით წაგრძელდება ( $e_{11} > 0$ ), ხოლო განივი მიმართულებით შეიკუმშება ( $e_{22}, e_{33} < 0$ ). ამ შენიშვნის საფუძველზე (1.12.19) და (1.12.20)-დან ნათელია, რომ

$$E > 0, \quad \nu > 0. \quad (1.12.21)$$

ვთქვათ, ახლა

$$X_{23} \neq 0, \quad X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{13} = X_{21} = 0.$$

მაშინ (1.12.12)-ის თანახმად:

$$e_{23} = \frac{1}{2\mu} X_{23}, \quad e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{21} = 0.$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში გვაქვს მარტივი ძეგრა,  $X_{23} = \mu \varepsilon_{23}$ .  $\mu$ -ს ძეგრის მოდული ეწოდება.

დავუშვათ, რომ იზოტროპული სხეული ყოველმხრივ თანაბრად იკუმშება, მაშინ

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = -p, \quad X_{12} = X_{23} = X_{31} = 0.$$

(1.12.9)-ის თანახმად:

$$\lambda\theta + 2\mu e_{ii} = -p, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.12.22)$$

თუ (1.12.22) ტოლობებს წვერ-წვერად შევკრებთ, მივიღებთ, რომ

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = -3p.$$

აქედან

$$p = -k\theta,$$

სადაც

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (1.12.23)$$

სიდიდეს ეწოდება ყოველმხრივ შეკუმშვის მოდული. ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ როცა  $p > 0$ , სხეული მართლა იკუმშება, ე.ი. მცირდება მისი მოცულობა, ამდენად  $k > 0$ .

(1.12.18)-ის და (1.12.23)-ის თანახმად,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1.12.24)$$

რადგანაც  $k > 0$ , (1.12.21) და (1.12.24)-დან ცხადია, რომ

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \quad (1.12.25)$$

ე.ი.  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ .

(1.12.12) ფორმულები, (1.12.24)-ის გამო, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij}. \quad (1.12.26)$$

შენიშვნა 1.12.1. უწყვეტ გარემოში ძაბვების წარმოქმნის ერთ-ერთ მიზეზს წარმოადგენს არათანაბარი გათბობა. ტემპერატურის ზრდასთან ერთად ფართოვდებიან გარემოს ელემენტებიც. ჩვეულებრივ ასეთი გაფართოება არ შეიძლება თავისუფლად მოხდეს, ამდენად გათბობის შედეგად წარმოიშვებიან ძაბვები, რომელთაც, მათი წარმოშობის ბუნებიდან გამომდინარე, *ტემპერატურული ძაბვები* ეწოდებათ (იხ. [35], გვ. 73). ჩავთვალოთ, რომ ტემპერატურა ისეთ ფარგლებში იცვლება, რომ გავლენას არ ახდენს ე.წ. დრეკად მუდმივებზე. მაშინ, როგორც ეს დაკვირვებებიდანაც ნობილი, წაგრძელებები  $T$  ტემპერატურის პროპორციულია და ერთნაირია ყველა მიმართულებით (ე.ი. ტემპერატურის ცვლილების მიზეზით ძვრის დეფორმაციას აღვილი არ აქვს). ამდენად, ჰუკის (1.12.26) კანონის ნაცვლად გვექნება

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \alpha T \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.27)$$

დამოკიდებულებები, სადაც  $\alpha$  წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტია, რომელიც თითოეული მასალისათვის ექსპერიმენტულად დგინდება, ხოლო  $\alpha T$  ფარდობითი ტემპერატურული გაფართოებაა. (1.12.27) დამოკიდებულებებს დიუჰამელ<sup>\*)</sup>-ნეიმანი<sup>\*\*)</sup> კანონი ეწოდება.

თუ ამოვხსნით (1.12.27) განტოლებებს  $X_{ij}$ -ს მიმართ და გავითვალისწინებთ (1.12.24)-ს, მივიღებთ, რომ

\*) ჟ.კ. დიუჰამელი (1797-1872).

\*\*\*) კ. ნეიმანი (1832-1925).

$$X_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.12.28)$$

§1.13. იდეალური და ბლანტი სითხეები. ჰიდრომექანიკის ძირითადი კანონი – ნიუტონის განზოგადებული კანონი

როგორც ეს უკვე შესავალში იყო აღნიშნული, ჰიდრომექანიკა ეწოდება მექანიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის ბუნებაში არსებული სითხეებისა და გაზების მოძრაობას (იხ., მაგალითად, [43]). შემდგომში საერთო ტერმინის ქვეშ „სითხეები“ ეიგულისხმებთ როგორც საკუთრივ სითხეებს, ასევე გაზებსაც. თუ სითხე ისეთია, რომ არ ეწინააღმდეგება თავისი ერთი ფენის მეორეზე სრიალს, მას *იდეალური სითხე* ეწოდება. ცხადია, იდეალური სითხის ცნება ისეთივე აბსტრაქტულია, როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება. თუმცა გარკვეული აზრით წყალი და ჰაერი შეიძლება განხილულ იქნენ როგორც იდეალური სითხეები. იდეალური სითხის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სითხის ნაწილები ერთმანეთზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვით (*წნევათ*) მოქმედებენ, ე.ი. მხები ძაბვები ნულის ტოლია:

$$\bar{X}_n = \sigma_n \bar{n}, \quad \sigma_n \neq 0, \quad \tau_n = 0. \quad (1.13.1)$$

კერძოდ,

$$X_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.13.2)$$

(1.13.2)-ის გათვალისწინებით კოშის (1.2.1) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი მხრივ,

$$X_{nn} = X_{ii} n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.3)$$

მეორე მხრივ, (1.13.1)-ის  $x_i$ -ზე დაგვეგმილებით მივიღებთ, რომ

$$X_{ni} = \sigma_n n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.4)$$

თუ შევადარებთ (1.13.3)-სა და (1.13.4)-ს, დავასკვნით, რომ

$$X_{ii} = \sigma_n = -p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.5)$$

$p$ -ს იდეალურ სითხეში წნევა ეწოდება და, როგორც ვხედავთ, ის ფართის ორიენტაციაზე, ე.ი. ნორმალზე დამოკიდებული არ არის.  $p$  მხოლოდ წერტილზეა დამოკიდებული. ამრიგად, იდეალურ სითხეში

$$\bar{X}_n = -p\bar{n}.$$

$p\bar{n}$  ვექტორს კიდროდინამიკური წნევის ვექტორს უწოდებენ. მინუსი  $p$ -ს წინ განპირობებულია სურვილით წნევა შემოვიღოთ, როგორც დადებითი სიდიდე, რამდენადაც ისეთ სითხეებზე ჩატარებული ექსპერიმენტი, რომელთათვისაც მისაღებია იდეალური სითხის მოდელი, გვიჩვენებს რომ ტიპურ შემთხვევაში სითხე შეკუმშულ მდგომარეობაშია, ე.ი.  $p > 0$  და  $\bar{X}_n$  მიმართულია მოცულობის შიგნით, ე.ი. მოცულობის გარე ნორმალის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

რეალურ სითხეებში მისი ერთი ფენის მეორე ფენის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისას ფენებს შორის წარმოიშობა ძალები, რომლებიც ამ მოძრაობას ეწინააღმდეგებიან. ასეთ ძალებს ზახუნის ძალებს უწოდებენ და ისინი მხებ ძალებს წარმოადგენენ. თუ ზახუნის ძალების სიდიდე უმნიშვნელოა, მაშინ ისინი შეიძლება უგულებელვყოთ და მივიღებთ იდეალური სითხის შემთხვევას. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ზახუნის ძალების უგულებელყოფა არ შეიძლება. თუ სითხის მოძრაობისას გათვალისწინებულია ზახუნის ძალები, მას ბლანტი სითხე ეწოდება.

ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონის თანახმად, ბლანტი სითხის  $x_1$  ღერძის გასწვრივ მოძრაობის დროს  $x_1$  ნორმალის მქონე ფართით ელემენტზე მოქმედი  $X_{12}$  მხები ძაბვა განისაზღვრება

$$X_{12} = \mu v_{1,2} \quad (1.13.6)$$

ტოლობით, სადაც  $\mu$ -ს ეწოდება სიბლანტის კოეფიციენტი, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება. ის მუდმივი მნიშვნელობის მქონეა გარკვეული სითხისთვის გარკვეული ტემპერატურის დროს.

დავუშვათ, რომ სითხე იზოტროპულია და ზღვრულ შემთხვევაში, როცა სიბლანტე არ გვაქვს, სრულდება იდეალური სითხის დამახასიათებელი (1.13.5) და (1.13.2) პირობები. მაშინ, (1.13.6)-ის თანახმად, სამართლიანია ნიუტონის შემდეგი განზოგადებული კანონი:

$$X_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.13.7)$$

სადაც წერტილი ზემოდან აღნიშნავს დროით წარმოებულს,

$$\lambda = \lambda' - \frac{2}{3}\mu,$$

$\lambda'$ -ს ეწოდება სიბლანტის მეორე კოეფიციენტი. (1.13.7) ტოლობებს ეწოდებათ ჰიდროდინამიკის კონსტიტუტივური დამოკიდებულებები. ცხადია,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  წარმოადგენს დეფორმაციის სინქარის ტენზორს და მისი არგუმენტებია დეფორმაციამდე წერტილის კოორდინატები.

სითხეებს, რომელთათვისაც სამართლიანია (1.13.7), ეწოდებათ ნიუტონისეული ფლუიდები (სითხეები).

კონსტიტუტივურ დამოკიდებულებებს არაკუმშვადი არაწრფივი ბლანტი სითხისთვის აქვს

$$\sigma_{ij}(p, \bar{v}) := -p\delta_{ij} + 2\varphi(I(\bar{v})) \dot{\epsilon}_{ij}(\bar{v}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

სახე, სადაც  $\varphi$  არის სიბლანტის ფუნქცია,

$$I(\bar{v}) := \dot{\epsilon}_{ij}(\bar{v}) \dot{\epsilon}_{ij}(\bar{v}).$$

ასეთ სითხეებს არანიუტონისეული ფლუიდები (სითხეები) ეწოდება.



თავი IV. დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და  
დინამიკის ამოცანები

§1.14. ბეტის<sup>\*)</sup> იგივეობა

ვთქვათ, რაიმე დრეკადი სხეულის ორ სხვადასხვა დაძაბულ მდგომარეობას ახასიათებენ  $X'_{ij}$ ,  $e'_{ij}$  და  $X''_{ij}$ ,  $e''_{ij}$  სიდიდეები. მაშინ ჰუკის განზოგადებული კანონის თანახმად:

$$X'_{ij} = C_{kl}^{ij} e'_{kl}, \quad (1.14.1)$$

$$X''_{ij} = C_{kl}^{ij} e''_{kl}. \quad (1.14.2)$$

ჩავსვათ  $X'_{ij} e''_{ij}$ -ში (1.14.1), გავითვალისწინოთ  $C_{kl}^{ij} = C_{ij}^{kl}$  და (1.14.2), მაშინ

$$X'_{ij} e''_{ij} = C_{kl}^{ij} e'_{kl} e''_{ij} = C_{ij}^{kl} e''_{ij} e'_{kl} = X''_{kl} e'_{kl}. \quad (1.14.3)$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას ბეტის იგივეობა ეწოდება. იგი გამოხატავს იმას, რომ ერთი დაძაბული მდგომარეობის მუშაობა მეორე დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე, მეორე დაძაბული მდგომარეობის პირველი დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე მუშაობის ტოლია.

§1.15. დრეკადი სხეულის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო  
ამოცანები

ამრიგად, დრეკადი წონასწორობის განსასაზღვრავად ჩვენ მივღეთ შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$X_{ij,j} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.15.1)$$

<sup>\*)</sup> ე. ბეტი (1823–1892).

$$X_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.15.2)$$

(1.15.1)-სა და (1.15.2)-ში დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი შეადგენს 9-ს. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობის გამო, ამდენივეა

$$u_i, X_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.15.3)$$

უცნობთა რიცხვიც.

(1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება დრეკადობის თეორიის ძირითადი განტოლებათა სისტემა, რამდენადაც ის იძლევა სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრის საშუალებას. დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა გულისხმობს სხეულის ყოველ წერტილში გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების მნიშვნელობათა პოვნას.

შეგნიშნოთ, რომ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებები წარფივიან  $X_{ij}$  და  $u_i$  უცნობების მიმართ.

აქედან გამოძინარეობს, რომ თუ

$$u'_i, X'_{ij} \text{ და } u''_i, X''_{ij}$$

ფუნქციები (1.15.1), (1.15.2) სისტემის ამონახსნებია შესაბამისად  $\Phi'_i$  და  $\Phi''_i$  მოცულობითი ძალების შემთხვევაში, მაშინ

$$u_i = u'_i + u''_i, \quad X_{ij} = X'_{ij} + X''_{ij} \quad (1.15.4)$$

იქნება აღნიშნული სისტემის ამონახსნი

$$\Phi_i = \Phi'_i + \Phi''_i$$

მოცულობითი ძალის შემთხვევაში.

(1.15.4)-ს ეწოდება ორი ამონახსნის ზედდების შედეგად მიღებული ამონახსნი.

ამ შემთხვევაში, (1.2.1) ფორმულების თანახმად, (1.15.4) ამონახსნის შესაბამისი ზედაპირული ძალები განისაზღვრება მოცემული ამონახსნების შესაბამისი ზედაპირული ძალების ჯამის სახით.

ვიგულისხმობთ, რომ მოცულობითი ძალები ცნობილია და განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანები:

I. *დრეკადობის თეორიის პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა*: განესაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მოცემულია სხეულის ზედაპირზე მოქმედი გარე ძაბვები, ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი  $u_i$ ,  $X_{ij}$  ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას  $V$  არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე და

$$X_{ni} |_S = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad S = \partial V^*), \quad (1.15.5)$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც  $n$  გარე ნორმალია, ხოლო  $f_i$  ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

II. *დრეკადობის თეორიის მეორე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა*: განესაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მოცემულია მისი საზღვრის წერტილების გადაადგილებები. ფიზიკურად ზემოთქმული აღნიშნავს იმას, რომ ზედაპირზე მოდებული გარკვეული ძალების მოქმედების შედეგად მისი წერტილები იღებენ მოცემულ გადაადგილებებს, რის შემდეგაც ხდება საზღვრის ჩამაგრება. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი  $u_i$ ,  $X_{ij}$  ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას  $V$  არეში, და

$$u_i |_S = g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.15.6)$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც  $g_i$  ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

III. *დრეკადობის თეორიის მესამე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა*: განესაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი და გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელები.

\*) ვგულისხმობთ, რომ  $\bar{n}$  გლუვი ზედაპირია.

IV. დრეკადობის თეორიის მეოთხე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა: განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელები.

ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანა მდგომარეობს სხეულის დრეკადი წონასწორობის განვსაზღვრაში, როცა მისი საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებია მოცემული.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ (იხ. §1.10), თუ საწინააღმდეგო არ იქნა თქმული, ვიგულისხმებთ, რომ  $\mu_i$  ცალსახა ფუნქციებია, რომლებსაც არის შიგნით აქეთ შესამე რიგაზე უწყვეტი წარმოებულები. ამ პირობებში ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები იქნებიან ცალსახა ფუნქციები, რომელთა წარმოებულები მეორე რიგაზე ჩათვლით არის შიგნით უწყვეტი იქნება.

#### §1.16. ძირითადი განტოლებები გადაადგილებებში

ჩავსვათ (1.15.2) გამოსახულება (1.15.1)-ში, მივიღებთ:

$$\lambda \theta_{,j} \delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu \theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

აქედან

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.16.1)$$

სადაც

$$\Delta(\cdot) \equiv (\cdot)_{,jj}$$

(1.16.1) სისტემას ეწოდება ლამეს განტოლებები. იმ შემთხვევაში, როცა  $\lambda = \mu$ , ის მიღებული იყო ნავიეს მიერ.

ეთქვათ, სხეულზე მოცულობითი ძალები არ მოქმედებენ. მაშინ (1.16.1)-ის  $x_i$ -ის მიმართ გაწარმოების და  $i$ -ს მიმართ აჯამების შედეგ გვექნება, რომ

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0, \text{ ე.ი. } \Delta\theta = 0, \quad (1.16.2)$$

რადგან

$$\lambda + 2\mu > 0.$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებს მეოთხე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები აქვთ და (1.16.1)-ზე ვიმოქმედებთ  $\Delta$  ოპერატორით, (1.16.2)-ის გათვალისწინების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta \Delta u_i + (\lambda + \mu)(\Delta \theta)_i = \mu \Delta \Delta u_i = 0.$$

ამრიგად, თუ სხეულზე მხოლოდ ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, მაშინ მოცულობითი გაფართოება  $\theta$  პარამონიული ფუნქციაა, ხოლო გადაადგილების ვექტორის  $u_i$  კომპონენტები ბიპარამონიული ფუნქციებია.

### §1.17. ძირითადი განტოლებები ძაბვებში

ძაბვებში ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებს დავუმატოთ ძაბვებში ჩაწერილი სენ-ვენანის (1.11.4) პირობები. ამისათვის (1.12.26) უნდა ჩავსვათ (1.11.4)-ში. ვიგულისხმობთ, რომ სხეული იზოტროპული და ერთგვაროვანია. მაშინ  $likj = 2233, 1123$  შემთხვევებში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ შესაბამისად მივიღებთ, რომ

$$X_{22,33} + X_{33,22} - \frac{\nu}{1+\nu} (\Theta_{,22} + \Theta_{,33}) = 2X_{23,23} \quad (1.17.1)$$

$$X_{11,23} - \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_{,23} = (-X_{32,1} + X_{13,2} + X_{21,3})_{,1} \quad (1.17.2)$$

და კიდევ ოთხ მსგავს ტოლობას.

(1.17.1) და (1.17.2) ფორმულები რამდენადმე გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ (1.15.1)-ს. ამ უკანასკნელში მეორე განტოლება

გავაწარმოთ  $x_2$ -ით, ხოლო მესამე -  $x_3$ -ით და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$2X_{32,23} + X_{22,22} + X_{33,33} + (X_{21,2} + X_{31,3})_{,1} = -(\Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}). \quad (1.17.3)$$

მაგრამ (1.15.1)-ის პირველი განტოლების თანახმად, თუ მას  $x_1$ -ით გავაწარმოებთ

$$(X_{21,2} + X_{31,3})_{,1} = -\Phi_{1,1} - X_{11,11}$$

და შევიტანთ (1.17.3)-ში, მივიღებთ:

$$2X_{32,23} = X_{11,11} - X_{22,22} - X_{33,33} - (\Phi_{1,1} + \Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}) + 2\Phi_{1,1}.$$

ამ უკანასკნელის (1.17.1)-ში შეტანა მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მოგვცემს:

$$-\frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,22} + \Theta_{,33}) + (X_{22} + X_{33})_{,33} + (X_{22} + X_{33})_{,22} - X_{11,11} = -\Phi_{1,1} + 2\Phi_{1,1}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$X_{22} + X_{33} = \Theta - X_{11},$$

მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\frac{1}{1+\nu} \Delta \Theta - \Delta X_{11} - \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,11} = -\Phi_{1,1} + 2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.4)$$

თუ მას დავუმატებთ ორი მსგავსი

$$\frac{1}{1+\nu} \Delta \Theta - \Delta X_{jj} - \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,jj} = -\Phi_{j,j} + 2\Phi_{j,j}, \quad j = 2, 3,$$

ტოლობის ჯამს, მივიღებთ, რომ

$$\Delta \Theta = -\Phi_{j,j} \frac{1+\nu}{1-\nu}. \quad (1.17.5)$$

(1.17.5)-ის (1.17.4)-ში შეტანის შემდეგ კი გვექნება:

$$\Delta X_{11} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,11} = -\frac{\nu}{1-\nu} \Phi_{j,j} - 2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.6)$$

ანალოგიურად მივიღებთ კიდევ ორ განტოლებას:

$$\Delta X_{22} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,22} = -\frac{\nu}{1-\nu} \Phi_{,ii} - 2\Phi_{2,2}, \quad (1.17.7)$$

$$\Delta X_{33} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \Phi_{,ii} - 2\Phi_{3,3}. \quad (1.17.8)$$

თუ (1.15.1)-ში მეორე განტოლებას გავაწარმოებთ  $x_3$ -ით, მესამეს -  $x_2$ -ით და შედეგებს შევკრებთ, მივიღებთ, რომ

$$X_{12,13} + X_{22,23} + X_{32,33} + X_{13,12} + X_{23,22} + X_{33,23} \\ = -(\Phi_{3,2} + \Phi_{2,3})$$

ეს უკანასკნელი წვერ-წვერად დავუმატოთ (1.17.2)-ს, მაშინ

$$\Delta X_{32} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,23} = -(\Phi_{3,2} + \Phi_{2,3}). \quad (1.17.9)$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\Delta X_{13} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,31} = -(\Phi_{1,3} + \Phi_{3,1}), \quad (1.17.10)$$

$$\Delta X_{21} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,12} = -(\Phi_{2,1} + \Phi_{1,2}).$$

(1.17.6)-(1.17.10) განტოლებებს ეწოდებათ *ბელტრაში-მიჩელის*<sup>\*)</sup> თავსებადობის პირობები. მოკლედ ისინი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\Delta X_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} \\ = -\frac{\nu}{1+\nu} \Phi_{k,k} \delta_{ij} - (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

<sup>\*)</sup> ე. ბელტრაში (1835-1900), ჯ.პ. მიჩელი (1863-1940).

§1.18. დინამიკის ამოცანები. დინამიკისა და სტატიკის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა

დალაპბერის პრინციპის თანახმად, დინამიკის ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, სტატიკის ძირითად განტოლებებში მოცულობით ძალებს დავამატოთ ინერციის ძალები. ამასთან გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტები უკვე, გარდა სივრცითი წერტილის კოორდინატებისა, დამოკიდებული იქნებიან აგრეთვე დროზე.

დეფორმაციამდე  $(x_1, x_2, x_3)$  სივრცით წერტილში მყოფი მატერიალური წერტილის აჩქარების ვექტორის კომპონენტებია

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$dV$  მოცულობაში მოთავსებულ  $dm$  მასაზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-a_i dm = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dm.$$

მაგრამ, რადგანაც  $dm = \rho(x_1, x_2, x_3)dV$ , მოცულობის ერთეულზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-\rho a_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

თუ მას დავამატებთ მოცულობით ძალას (1.15.1)-ში, მივიღებთ, რომ

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18.1)$$

ცხადია, (1.18.1) სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის.



ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს ჰუკის განზოგადოებული კანონი, რომელიც უცვლელი რჩება, რადგან იგი არ შეიცავს მოცულობით ძალებს.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.18.2)$$

მყარი დეფორმადი გარემოსათვის, ისევე როგორც ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის, მასის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს უწყვეტობის შემდეგ განტოლებას (იხ. ქვემოთ §1.23, ფორმულა (1.23.10)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0.$$

მისი გაწრფივებისა  $(\rho \bar{v} = (\rho_0 + \bar{\rho}) \bar{v} = \rho_0 \bar{v}, \bar{\rho} := \rho - \rho_0,$

$\bar{\rho} \ll \rho_0)$  და  $t_0$ -დან  $t$ -მდე ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\operatorname{div} \bar{u} \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (1.18.3)$$

სადაც  $\rho$  და  $\rho_0$  შესაბამისად აღნიშნავენ სიმკვრივეს დეფორმირებულ და არადეფორმირებულ ( $t = t_0$ ) მდგომარეობაში; ამასთან ვგულისხმობთ, რომ არადეფორმირებულ მდგომარეობაში გადაადგილებები ნულის ტოლია.  $\rho_0$  პრინციპში ცნობილია და უკანასკნელი ტოლობა გამოიყენება მხოლოდ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში სიმკვრივის გამოსათვლელად, როცა გადაადგილების  $\bar{u}$  ვექტორი განსაზღვრულია სხვა დამოკიდებულებებიდან. ფაქტობრივად, მცირე შემოფოთებათა პიპოთეზიდან გამომდინარე,  $\operatorname{div} \bar{u}$  მცირეა ერთეულთან შედარებით, აქედან გამომდინარე შედეგით  $\rho \equiv \rho_0$ . ამ მიზეზით მცირე შემოფოთებათა პიპოთეზის პირობებში (1.18.3) დამოკიდებულება არ არის ჩართული დრეკადობის თეორიის განტოლებათა სრულ სისტემაში.

დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა. ვიპოვოთ  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.2) განტოლებებს (ან  $u_i$  და  $X_{ij}$  ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.1) განტოლებებს და ჰუკის კანონს)  $V$  არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე,

$$X_{ni}|_S = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad S = \partial V, (*) \quad (1.18.4)$$

სასაზღვრო პირობებს დროის ყოველ  $t \geq t_0$  მომენტში და

$$u_i = u_i^0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\prime 0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

საწყის პირობებს  $V$  არეში, დროის  $t = t_0$  მომენტში. აქ  $f_i$  ფუნქციები  $S$  ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც საზოგადოდ  $t$ -ზე არიან დამოკიდებულნი, ხოლო  $u_i^0$ ,  $u_i^{\prime 0}$  ფუნქციები  $(x_1, x_2, x_3)$  სივრცითი წერტილის ფუნქციებია.

დინამიკის სხვა ამოცანები პირველი ამოცანებისაგან იმით განსხვავდებიან, რომ (1.18.4) სასაზღვრო პირობები შეცვლილია სტატიკის შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით, სადაც მოცემული ფუნქციები საზოგადოდ დროზეა დამოკიდებული.

განვიხილოთ დრეკადი სხეულის რაიმე კონკრეტული მოძრაობა და საწყის  $t_0$  მომენტად მივიღოთ ის მომენტი, როცა სხეული „ბუნებრივ“ წონასწორობის მდგომარეობაშია, ე.ი. მასზე არ მოქმედებენ არც მოცულობითი და არც ზედაპირული ძალები და დეფორმაციასაც არ განიცდის.  $R(t)$ -თი აღვნიშნოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებენ გარე ძალები დროის  $(t_0, t)$  შუალედში. გამოვთვალოთ აღნიშნული ძალების  $dR$  მუშაობა დროის  $(t, t + dt)$  შუალედში, როცა  $dt$  უსასრულოდ მცირეა.

\* ვულისხმობთ, რომ  $S$  გლუვი ზედაპირია.

დეფორმაციაზე სივრცით  $(x_1, x_2, x_3)$  წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი  $t$  მომენტში იმყოფება სივრცის წერტილში  $x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  კოორდინატებით.  $(t, t + dt)$  შუალედში ამ წერტილის გადაადგილების კომპონენტებია

$$x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t + dt) - [x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)] \\ \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} dt =: \dot{u}_i dt.$$

$dS$  ელემენტზე მოდებული გარე  $X_{ni} dS$  ზედაპირული ძალების *შუაობა*  $(t, t + dt)$  შუალედში

$$X_{ni} \dot{u}_i dt \cdot dS \text{ -ის}$$

ტოლია, ხოლო  $dV$  მოცულობაზე მოდებული  $\Phi_i dV$  მოცულობითი ძალების *შუაობა* კი

$$\Phi_i \dot{u}_i dt dV \text{ -ს}$$

ტოლია.

ამრიგად,

$$dR = \left( \iint_S X_{ni} \dot{u}_i dS + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \right) dt. \quad (1.18.5)$$

აქედან, (1.2.1)-ის და (1.18.1)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \iint_S X_{ij} n_j \dot{u}_i dS + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \\ &= \iiint_V (X_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \\ &= \iiint_V (X_{ij,j} + \Phi_i) \dot{u}_i dV + \iiint_V X_{ij} \dot{u}_{i,j} dV \\ &= \iiint_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint_V X_{ij} \dot{e}_{ij} dV, \end{aligned} \quad (1.18.6)$$

რადგანაც

$$\begin{aligned} X_{ij} u_{i,j} &= \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} = \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} X_{ji} u_{j,i} \\ &= X_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = X_{ij} e_{ij} =: 2W. \end{aligned} \quad (1.18.7)$$

მაგრამ

$$\iiint_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \dot{u}_i \cdot \dot{u}_i}{\partial t} dV = \frac{dT}{dt},$$

სადაც

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \geq 0, \quad (1.18.8)$$

განსახილველი სხეულის კინეტიკური ენერჯიაა, ე.ი. მისი ცალკეული ელემენტების ცოცხალი ძალების ჯამია. მართლაც,  $dm$  მასის ცოცხალი ძალა განმარტების თანახმად

$$\frac{1}{2} dm \dot{u}_i \dot{u}_i = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV -$$

ტოლია.

თუ სხეული იზოტროპულია ((1.18.6) ფორმულის მისაღებად იზოტროპულობის მოთხოვნა არ იყო საჭირო), მაშინ (1.18.7) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2W = X_{ij} e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} e_{ij} + 2\mu e_{ij} e_{ij} = \lambda \theta^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} \geq 0. \quad (1.18.9)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$e_{ii} = e_{\dot{i}}; \quad e_{ij} = 2e_{ij}, \quad i \neq j. \quad (1.18.10)$$

მაშინ, (1.18.9)-ის თანახმად, ცხადია,

$$X_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$$

და

$$\iiint_V X_{ij} \dot{e}_{ij} dV = \iiint_V \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} dV = \iiint_V \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \frac{\partial \dot{e}_{ii}}{\partial t} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial t} \right] dV = \iiint_V \frac{\partial W}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V W dV, \quad (1.18.11)$$

რადგანაც, (1.18.10)-ის გამო,

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \dot{e}_{ii} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \frac{\partial \dot{e}_{ii}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ji}} \dot{e}_{ji} = 2 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial t}, \quad i \neq j.$$

მაშასადამე, (1.18.8)-ისა და (1.18.11)-ის თანახმად, (1.18.6) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt} \iiint_V W dV. \quad (1.18.12)$$

ვინტეგრით (1.18.12)-ის ორივე მხარე  $t_0$ -დან  $t$ -მდე და გავითვალისწინოთ, რომ საწყის მომენტში  $T = W = 0$ ; მაშინ მივიღებთ გარე ზედაპირული ძალებისა და მოცულობითი ძალების მუშაობას დროის  $(t_0, t)$ , შუალედში:

$$R = T + U, \quad (1.18.13)$$

სადაც

$$U = \iiint_V W dV \geq 0. \quad (1.18.14)$$

(1.18.9) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ  $W$  დამოკიდებულია მხოლოდ მოცემულ მომენტში, მოცემულ წერტილში დეფორმირე-

ბულ მდგომარეობაზე. ამდენად,  $U$  დამოკიდებულია სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობაზე დროის მოცემულ  $t$  მომენტში.  $U$ -ს ეწოდება სხეულის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, იგი იმ მუშაობის ტოლია, რომელიც უნდა შეასრულონ მოცულობითი ძალებმა და გარე ზედაპირულმა ძალებმა, რომ გამოიწვიონ დეფორმირებული (მოცემული) მდგომარეობა. მართლაც, თუ სხეული ამ ძალებით ზემოქმედების შედეგად „ბუნებრივი“ უძრავი (მოსვენებული) მდგომარეობიდან გადავა ახალ დეფორმირებულ უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში, მაშინ, (1.18.13) ფორმულის თანახმად,

$$R = U, \quad (1.18.15)$$

რადგანაც უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში  $T = 0$ .

(1.18.13) ფორმულა გამოხატავს ენერგიის შენახვის კანონს: მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მუშაობა იხარჯება  $T$  კინეტიკური ენერგიისა და  $U$  დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიის შექმნაზე.

(1.18.9) ფორმულით განსაზღვრული სიდიდე მოცულობის ერთეულზე გათვლილი დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიაა. მართლაც, (1.18.14) ფორმულიდან ცხადია, რომ  $dV$  მოცულობაზე გაანგარიშებული პოტენციალური ენერგია  $WdV$ -ს ტოლია და აქედან ზემოთქმული ცხადია. (1.18.9)-დან ნათელია, რომ ის არაგადაგვარებული კვადრატული ფორმაა, რადგან  $\lambda > 0$  და  $\mu > 0$  (იხ. §1.12).

ახლა განვიხილოთ დინამიკის ძირითადი ამოცანების ამოხსნისა და ერთადერთობის საკითხი. ვთქვათ, რომელიმე მათგანი უშვებს ორ ამონახსნს ერთი და იმავე მოცულობითი ძალების, საწყის და სასაზღვრო პირობებში. მაშინ, თუ განვიხილავთ მათ სხვაობას ძირითად განტოლებათა სიწრფივისა და ერთგვაროვნების გამო  $u_i$ ,  $X_{ij}$  ფუნქციების მიმართ, იგი დააკმაყოფილებს იმავე განტოლებებს მოცულობითი ძალების გარე და ერთგვაროვან საწყის და სასაზღვრო პირობებს, ე.ი.

$$u_i|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = 0 \quad (1.18.16)$$

და

$$X_{ni}\dot{u}_i|_S = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0, \quad (1.18.17)$$

რამდენადაც საზღვრის წერტილებში ან

$$u_i = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0$$

ან

$$X_{ni} = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0.$$

აქედან გამომდინარე პირველ შემთხვევაში

$$\dot{u}_i|_S = 0,$$

და ორივე შემთხვევაში

$$X_{ni} \dot{u}_i|_S = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0. \quad (1.18.18)$$

რადგანაც ამონახსნთა სხვაობისათვის მოცულობითი ძალები და (1.18.18) ნამრავლები ნულის ტოლია, ამიტომ მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა

$$R = 0,$$

რადგან (1.18.5)-ის თანახმად,  $\frac{dR}{dt} = 0$  და აქედან

$R = const = 0$ , ვინაიდან  $R|_{t=t_0} = 0$ , რამდენადაც „ბუნებრივი“

წონასწორობის მდგომარეობაში სხეულზე არც მოცულობითი და არც ზედაპირული ძალები არ მოქმედებენ. ამიტომ, (1.18.13) ტოლობის თანახმად,

$$T + U = 0.$$

ეს უკანასკნელი კი, (1.18.8)-ისა და (1.18.14)-ის გამო, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$T = 0, \quad U = 0.$$

ე.ი. (1.18.8)-ის, (1.18.14)-ისა და (1.18.9)-ის ძალით დროის ყოველ  $t \geq t_0$  მომენტში

$$\dot{u}_i = 0, \quad e_{ij} = 0.$$

ტოლობათა პირველი ჯგუფი გვიჩვენებს, რომ გადაადგილების ვექტორი დროზე არ არის დამოკიდებული, ე.ი. უნდა გვექონდეს სტატიკური შემთხვევა. ტოლობათა მეორე ჯგუფი კი გვიჩვენებს, რომ სხეული შეიძლება მხოლოდ ხისტად გადაადგილდეს. რადგან მისი ზოგადი ამონახსნია (იხ. §1.6)

$$u_1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2, \quad u_2 = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3,$$

$$u_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$$

ან მოკლედ, ვექტორულად –

$$\vec{u} = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}], \quad \vec{x} := (x_1, x_2, x_3),$$

სადაც  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ხისტი გადატანის ვექტორია, ხოლო  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  კი უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ვექტორია ( $b_i$  არის  $x_i$  ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხე). მაგრამ რადგანაც საწყის მომენტში გადაადგილება არ გვაქვს, ამიტომ არც ხისტ გადაადგილებას ექნება ადგილი.

ამრიგად, დინამიკის ძირითად ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსნი.

რადგანაც სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში ადგილი აქვს (1.18.15) ტოლობას, გვექნება, რომ მხოლოდ  $e_{ij} = 0$ . ცხადია, თუ სასაზღვრო პირობებში მონაწილეობენ გადაადგილებები, ე.ი. მეორე, მესამე<sup>\*)</sup>, მეოთხე და შერეულ ამოცანებს ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება ხისტი გადაადგილების სიზუსტით.

\*) თუ  $N$  ბრუნვითი ზედაპირი არაა. თუ  $N$  ბრუნვითი ზედაპირია, მესამე ამოცანას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნები (იხ. [48], გვ. 88).



შენიშვნა 1.18.1. ადვილი სანახავია, რომ ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით, შენიშვნა 1.12.1-ის თანახმად, ლამეს (1.18.2) განტოლებები შეიცვლება

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_i - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} T_i + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.18.19)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

განტოლებებით, რომელთაც დიუჰამელ-ნეიმანის თერმოგანტოლებები ეწოდებათ.

(1.18.19) განტოლებებს უნდა დაემატოს სითბოგამტარობის (რომელიც მიიღება სითბოს ნაკადის განტოლებებიდან დეფორმაციის ტენზორის დროით წარმოებულის შემთხვევაში წევრის უკუგდებით, რაც ხშირ შემთხვევაში დასაშვებია, როგორც ამას ექსპერიმენტი გვიჩვენებს (იხ. [53], გვ. 92; [35], გვ. 79))

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T + \frac{\tilde{W}}{c\rho} \quad (1.18.20)$$

განტოლება, სადაც  $\alpha = \frac{k}{c\rho}$  ტემპერატურული გამტარობის

კოეფიციენტი,  $k$  - მაქსველის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი (ე.ი. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც დროის ერთეულში გატარდება ერთეულის ტოლ სისქის ფენაში, როცა ზედაპირებზე ტემპერატურებს შორის სხვაობა  $1^\circ$ -ის, ხოლო ზედაპირის ფართობი ერთეულის ტოლია),  $c$  - ხეგდრითი სითბოტევადობა (ე.ი. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მასის ერთეულის ტემპერატურის  $1^\circ$ -ით გაზრდისათვის),  $\rho$  - სიმკვრივე,  $\tilde{W} = dV$  ელემენტარულ მოცულობაში მოთავსებული სითბური წყაროს მიერ დროის ერთეულში მოცულობის ერთეულში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა.

(1.18.20) განტოლება განიხილება სხეულის საზღვარზე სხვადასხვა დამატებით პირობებში. კერძოდ, სამეცნიერო ლიტერატურაში ძირითადად შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობები გვხვდება:

- დროის ყოველ მომენტში მოცემულია ტემპერატურა,
- დროის ყოველ მომენტში მოცემულია სითბური ნაკადი, კერძოდ, სითბური ნაკადი ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0;$$

- ზედაპირზე გამავალი სითბური ნაკადი სხეულის  $T$  ტემპერატურისა და (გარე) გარემოს  $T_0$  ტემპერატურის სხვაობის პროპორციულია, ე.ი.

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + H(T - T_0) = 0,$$

სადაც  $H$  სითბოს გაცემის კოეფიციენტია (ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ხდება ზედაპირიდან გამოსხივება);

- თუ სხეულის ზედაპირი ორი სხვადასხვა სითბოგამტარობის ( $k_1$  და  $k_2$ ) და ტემპერატურის ( $T_1$  და  $T_2$ ) ფენის საერთო ზედაპირია, მაშინ

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}.$$

გარდა ამისა, თუ სხეულის საზღვარზე მოცემულია ძაბვები, მაშინ (1.18.19) სისტემისათვის, (1.12.28)-ის თანახმად, გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$X_n(u) := \left[ \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T \delta_{ij} \right] n_j = f_i,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

სადაც  $f_i$  სხეულის ზედაპირზე დროის ნებისმიერ მომენტში მოცემული ფუნქციებია.

სასაზღვრო პირობებს უნდა დაემატოს აგრეთვე

$$T(x_1, x_2, x_3, t_0) = \chi(x_1, x_2, x_3), \quad x \in \Omega,$$

და

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t_0) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3, t_0)}{\partial t} = \psi_i(x_1, x_2, x_3), \quad i=1,2,3, \quad x \in \Omega,$$

საწყისი პირობები, სადაც  $\chi$ ,  $\varphi_i$  და  $\psi_i$  მოცემული ფუნქციებია.

როგორც ვხედავთ, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში საწყის-სასაზღვრო ამოცანები  $T$  ტემპერატურისა და  $u_i$  გადაადგილებისათვის იხლიჩება ორ დამოუკიდებელ ამოცანად იმ თვალსაზრისით, რომ ჯერ დამოუკიდებლად ვპოულობთ  $T$ -ს შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, ხოლო შემდეგ ცნობილი  $T$ -ს საშუალებით ვპოულობთ  $u_i$ -ს იმ ტიპის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, რომელსაც იმ შემთხვევაში ვიკვლევთ, როცა ტემპერატურულ ძაბვებს (ან რაც იგივეა, ტემპერატურას) არ ვითვალისწინებთ.

დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის არსებობის თეორემები დამტკიცებულია, მაგალითად, [12], [48], [59]-ში (იხ. აგრეთვე § 1.21).

### §1.19. კლაპეირონის თეორემა

ვთქვათ, დრეკადი სხეული მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში. მაშინ აღნიშნული ძალების  $A$  მუშაობა  $u_i$  გადაადგილებაზე

$$A = \iint_S X_{ni} u_i dS + \iiint_V X_i u_i dV$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S X_{ij} u_i n_j dS + \iiint_V X_i u_i dV \\
&= \iiint_V (X_{ij,j} + X_i) u_i dV + \iiint_V X_{ij} u_{i,j} dV \\
&= \iiint_V X_{ij} e_{ij} dV = 2 \iiint_V W dV = 2U. \quad (1.19.1)
\end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გამოხატავს კლასიკური თეორიის დეფორმირებული სხეულის პოტენციალური ენერჯია სხეულზე სტატიკურად მოდებული მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების გადაადგილებებზე მუშაობის ნახევრის ტოლია, იმ პირობით, რომ მათ თავიდანვე ჰქონოდათ ის მნიშვნელობები, რასაც ისინი ფაქტობრივად იღებენ დრეკადი წონასწორობის დამყარების მომენტისათვის (სინამდვილეში მათი საწყისი მნიშვნელობები ნულის ტოლია).

## §1.20. სენ-ვენანის პრინციპი

დრეკადობის თეორიის ამოცანების პრაქტიკულად ამოხსნას ამარტივებს სენ-ვენანის პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ძალები სტატიკურად ნულის ეკვივალენტურია (სტატიკურად ნულის ეკვივალენტურ სისტემის ქვეშ გვესმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის თვალსაზრისით ნულის ეკვივალენტური სისტემა), მაშინ ეს სისტემა მნიშვნელოვან გავლენას არ ახდენს სხეულის იმ ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.

სენ-ვენანის პრინციპი შეიძლება სხვაგვარადაც ჩამოვყალიბოთ: თუ სხეულის ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ზედაპირული ძალების სისტემას შევცვლით მისი ეკვივალენტური სხვა სისტემით, ეს გარემოება გავლენას არ მოახდენს სხეულის იმ

ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.

ცხადია, ორივე ფორმულირება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

**§1.21. დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები.  
ამონახსნის არსებობის თეორემები**

დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის სამ ძირითად მეთოდს განასხვავებენ:

1. პირდაპირი მეთოდი გულისხმობს სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას უშუალო ინტეგრებით;

2. შებრუნებული მეთოდის შემთხვევაში წინასწარ მოცემულია გადაადგილებები და ძაბვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ძირითად განტოლებებს და მათი საშუალებით ხდება შესაბამისი გარე ძალების განსაზღვრა;

3. სენ-ვენანის ნახევრადშებრუნებული მეთოდით ამოცანების ამოხსნისას წინასწარ უშვებენ, რომ გადაადგილების ვექტორისა და ძაბვის ტენზორის ზოგიერთი კომპონენტის სახე ცნობილია, რაც დანარჩენი კომპონენტების განსაზღვრისას ამარტივებს ძირითად განტოლებათა სისტემას.

სამგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნები მოცემულია, მაგალითად, [50], [48]-ში.

ვთქვათ, დრეკად სხეულს უკავია  $R^3$ -ის რაიმე  $\Omega$  არე, რომლის  $\partial \Omega$  საზღვარი ლიპშიცურია [54] (იხ. აგრეთვე დამატება 1, განსაზღვრა 40). ამასთან დაუშვათ, რომ  $\Gamma \subset \partial \Omega$  არის დადებითი ზომის და  $S := \partial \Omega \setminus \Gamma$ .

განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (იხ. § 1.16):

$$A\bar{u} := \mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = \bar{\Phi} \quad \Omega \text{-ში,} \quad (1.21.1)$$

$$T\bar{u} = \bar{g} \quad S\text{-ზე,} \quad (1.21.2)$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Gamma\text{-ზე,} \quad (1.21.3)$$

სადაც  $\bar{\Phi} := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ ;  $T\bar{u} := ((T\bar{u})_1, (T\bar{u})_2, (T\bar{u})_3)$ ,  
 $(T\bar{u})_k := X_{kj}(\bar{u})n_j$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

ჩვენ ვეძებთ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს სობოლევის  $[H^1(\Omega)]^3$  სივრცეში (იხ. დამატება 1, განსაზღვრუბები 53-55 და შენიშვნა 13). დაეუშვათ, რომ

$$\Phi_k \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \text{ და } g_k \in H^{-\frac{1}{2}}(S), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.21.4)$$

(1.21.1) განტოლება გვესმის განაწილების აზრით. (1.21.3) პი-

რობა გვესმის კვალის აზრით. (1.21.2) პირობა გვესმის  $H^{-\frac{1}{2}}(S)$  აზრით, რადგან თუ  $\bar{u} \in [H^1(\Omega)]^3$  და  $A\bar{u} \in [\tilde{H}^{-1}(\Omega)]^3$ , მაშინ

$T\bar{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$  ფუნქციონალი განიმარტება

$$\langle T\bar{u}, \bar{u}^* \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\Omega} X_{ij}(\bar{u})e_{ij}(\bar{u}^*)dx + \langle \bar{\Phi}, \bar{u}^* \rangle_{\Omega} \quad \forall \bar{u}^* \in H^1(\Omega)$$

გრინის იგივეობით, სადაც  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  აღნიშნავს  $L_2$ -დუალობას

$$\left[ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right]^3\text{-სა და } \left[ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right]^3\text{-ს შორის, ხოლო } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$$

კი -  $L_2$ -დუალობას  $[\tilde{H}^{-1}(\Omega)]^3$ -სა  $[H^1(\Omega)]^3$ -ს შორის (იხ. დამატება 1, თეორემა 23).

შემოვიღოთ

$$H^1(\Omega, \Gamma) := \{ \varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad \Gamma\text{-ზე} \}$$

აღნიშვნა.

(1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ვარიაციული ამოცანის:

ვიპოვოთ  $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$  ისეთი, რომ

$$B(\bar{u}, \bar{u}^*) = F(\bar{u}^*) \quad \forall \bar{u}^* \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3, \quad (1.21.5)$$

სადაც

$$B(\bar{u}, \bar{u}^*) := \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}^*) dx,$$

$$F(\bar{u}^*) := -\langle \bar{\Phi}, \bar{u}^* \rangle_{\Omega} + \langle \bar{g}, \bar{u}^* \rangle_S,$$

აქ  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  არის დუალობა  $[H^r(M)]^3$  და  $[\tilde{H}^{-r}(M)]^3$  სივ-

რცეებს შორის, სადაც  $r = 1$ , თუ  $M \equiv \Omega$  და  $r = \frac{1}{2}$ , თუ

$M \equiv S$ .

ორივე ზემოხსენებული ამოცანა ეკვივალენტურია მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანის:

ვიპოვოთ  $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$  ისეთი, რომ

$$E(\bar{u}^*) \geq E(\bar{u}) \quad \forall \bar{u}^* \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3, \quad (1.21.6)$$

სადაც

$$E(\bar{u}^*) := \frac{1}{2} B(\bar{u}, \bar{u}^*) - F(\bar{u}^*). \quad (1.21.7)$$

სამართლიანია არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი (იხ., მაგალითად, [59], [27])

თეორემა 1.21.1. თუ  $\Omega$  არის არე ლიპშიცის საზღვრით,  $\Gamma \neq \emptyset$  და სრულდება (1.21.4) პირობები, მაშინ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანას და ამდენად (1.21.5) ამოცანასა და (1.21.6), (1.21.7) მინიმიზაციის ამოცანას აქვს ერთადერთი  $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$  ამონახსნი და

$$\|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]^3} \leq C \left( \|\bar{\Phi}\|_{[\tilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma)]^3} + \|\bar{g}\|_{[H^{-1/2}(S)]^3} \right),$$

სადაც  $C$  არის დადებითი მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული  $\bar{u}$ ,  $\bar{\Phi}$  და  $\bar{g}$ -ზე.

თეორემის დამტკიცება ემყარება ლაქს<sup>\*)</sup> – მილგრამის<sup>\*\*)</sup> თეორემას (იხ. დამატება 1 თეორემა 25), რამდენადაც

–  $F$  წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალია;

–  $B(.,.)$  ორადწრფივი ფორმა, კორნის<sup>\*\*\*)</sup> უტოლობის თანახმად, კოერციტიულია

$$B(\bar{u}, \bar{u}) \geq \delta_2 \|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]}^2, \quad \forall \bar{u} \in H^1(\Omega, \Gamma)$$

და შემოსაზღვრული

$$B(\bar{u}, \bar{u}) \leq \delta_1 \|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]}^2 \|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]},$$

სადაც  $\delta_1$  და  $\delta_2$  დადებითი მუდმივებია.

$$\text{შენიშვნა 1.21.1. თუ } \bar{g} \in \left[ H^{r+\frac{1}{2}}(S) \right]^3, \quad \bar{\Phi} \in [H^r(\Omega)]^3,$$

$\Gamma, S \in C^{r+1,1}$ , სადაც  $r \geq 0$  მთელი რიცხვია, მაშინ

$$\bar{u} \in [H^{r+2}(\Omega^*)]^3,$$

სადაც  $\Omega^*$  არის  $\bar{\Omega}$ -ს ისეთი ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომ  $\bar{\Omega}^* \cap (S \cup \bar{\Gamma}) = \emptyset$ . უფრო მეტიც, არსებობს ისეთი  $C = C(\Omega^*) > 0$  მუდმივი, რომ

$$\|\bar{u}\|_{[H^{r+2}(\Omega^*)]} \leq C \left( \|\bar{\Phi}\|_{[H^r(\Omega)]} + \|\bar{g}\|_{[H^{r+\frac{1}{2}}(S)]} \right).$$

\*) პ. ლაქსი (1926).

\*\*\*) ა.ნ. მილგრამი (1911-1961).

\*\*\*) ა. კორნი (1870-1945).



თუ დამატებით,  $\bar{g} \in [C^{1,\alpha}(S)]^3$ ,  $\bar{\Phi} \in [C^{0,\alpha}(S)]^3$ ,  $S \in C^{2,\alpha}$  მაშინ  $\bar{u} \in [C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}^*)]^3$ , სადაც  $0 < \alpha < 1$  არის ჰილდერის<sup>\*)</sup> მაჩვენებელი.

## თავი V. ჰიდროდინამიკის სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანები

### §1.22. ლაგრანჟის და ეილერის ცვლადები

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის შესწავლის დროს არსებობს ორი მიდგომა. თუ უწყვეტი გარემოს ნაწილაკს განვიხილავთ, როგორც მოძრავ მატერიალურ წერტილს, მაშინ მთელი სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად აუცილებელია შემოვიღოთ გარკვეული პარამეტრები, რომლებიც სხეულის ამა თუ იმ წერტილს დაახასიათებენ.

ვთქვათ, ასეთი პარამეტრები იყოს მატერიალური წერტილის  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , კოორდინატები დროის რაღაც (ვთქვათ, საწყის) მომენტში. მაშინ სხეულის მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.22.1)$$

სადაც  $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , არის დროის  $t$  მომენტში იმ მატერიალური წერტილის კოორდინატები, რომლის კოორდინატებიც საწყის მომენტში იყო  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . ცხადია, სიჩქარის და აჩქარების კომპონენტებს ექნებათ

<sup>\*)</sup> ო.ლ. ჰილდერი (1859–1937).

$$v_i = \dot{x}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} \quad (1.22.2)$$

$$= \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3,$$

და

$$a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial^2 x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t^2} \quad (1.22.3)$$

$$= \frac{\partial^2 u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

სახე, თუ გავითვალისწინებთ (1.6.2)-ს, სადაც  $x_i$ -ს და  $x_i^p$ -ს შევცვლით შესაბამისად  $\xi_i$ -თ და  $x_i$ -თ. ასეთ მიდგომას ეწოდება ლაგრანჟის მეთოდი, ხოლო  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  პარამეტრებს — ლაგრანჟის ცვლადები. ამრიგად, სხეულის მოძრაობის ლაგრანჟის ცვლადებში შესწავლა გულისხმობს მისი ცალკეული მატერიული წერტილების მოძრაობის შესწავლას და აქედან გამომდინარე მთელი სხეულის (უწყვეტი გარემოს) მოძრაობის შესწავლას.

არსებობს მეორე მიდგომაც, როცა სხეულის მოძრაობის შესწავლა ხდება საკოორდინატო სისტემის სხვადასხვა წერტილში სხეულის ნაწილაკების მოძრაობის მახასიათებლების (სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვ.) დროის განმავლობაში ცვლილებების განხილვით. სხვა სიტყვებით, დამკვირვებელი სივრცის მოცემულ წერტილში შეისწავლის დროის სხვადასხვა მომენტში მყოფ, საზოგადოდ სხვადასხვა, ნაწილაკის მოძრაობის მახასიათებლებს და ამდენად, ახდენს რა დაკვირვებას უწყვეტი გარემოს მიერ დაკავებულ ყველა წერტილში, შეისწავლის მთელი უწყვეტი გარემოს მოძრაობას. ასეთ მიდგომას ეწოდება ეილერის მეთოდი. ეილერის მეთოდის გამოყენებისას დრო, სიჩქარე, აჩქარება, ძაბ-

ვები და სხვა სიდიდეები განიხილება, როგორც  $x_1, x_2, x_3, t$  ცვლადების, რომელთაც ეილერის ცვლადები ეწოდება, ფუნქციები. შევნიშნოთ, რომ სხეულის ცალკეული ნაწილაკების გადაადგილება შეიძლება შესწავლილ იქნეს მხოლოდ ლაგრანჟის ცვლადებში. ამ შემთხვევაში ეილერის ცვლადების გამოყენება შეუძლებელია და მათზე გადასვლა მხოლოდ ფორმალური სასიათის მქონე ოპერაციაა, რომელიც არ ცვლის მიდგომის თვალსაზრისს. თუ სიჩქარე  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , მოცემულია ეილერის ცვლადებში, მაშინ აჩქარების გამოსათვლელად იმავე წერტილში საჭიროა გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = v_i[x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), t]$$

და გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad (1.22.4)$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3.$$

თუ გადაადგილებები მცირე სიდიდეებია და გამოვრიცხავთ ფლუქტუაციებს, მაშინ სხეულის ცალკეული წერტილების სიჩქარეებიც მცირე სიდიდეები იქნება. თუ დავუშვებთ, რომ მათი

$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  წარმოებულებიც იმავე რიგის მცირე სიდიდეებია, მაშინ

$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  სიდიდეები იქნება მეორე რიგის მცირე სიდიდეები. მა-

თი უგულვებელყოფის შემდეგ (1.22.4)-დან მივიღებთ, რომ

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

ეს უკანასკნელი კი ემთხვევა (1.22.3)-ს. საერთოდ, ეს შემთხვევა მკტად მნიშვნელოვანია, რადგან მცირე გადაადგილებები დამახასიათებელია ღრუკადი სხეულებისათვის. ვიპოვოთ კავშირი

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, l)}{\partial \xi_k} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, l)}{\partial x_k},$$

$$i, k = 1, 2, 3,$$

სიდიდებს შორის. ცხადია,

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, l)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

მაგრამ

$$\xi_i = x_i - u_i, \quad (1.22.5)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} = 1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

და

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

მორე რეგის მცირე სიდიდეების უგულებელყოფით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3}.$$

§1.23. ნავიე-სტოქსის განტოლებები. სტოქსის და ოზენის მოდელები. ეილერის განტოლებები

თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩავთვალოთ, რომ  $\Omega(t)$  არე, რომელიც უკავია სითხეს დროის  $t$  მომენტში, არ არის დროზე დამოკიდებული (მაგალითად, წყალი მიედინება არხში ისე, რომ წყლის დონე არ იცვლება), ე.ი.  $\Omega(t) = \Omega \in R^3$  (იხ. [32]).

როგორც ვიცით, (1.18.1) განტოლებები სამართლიანია ნებისმიერი (გაზი, სითხე, დეფორმადი მყარი სხეული) უწყვეტი გარემოსათვის. მას, (1.22.4)-ის თანახმად, ეილერის ცვლადებში ექნება შემდეგი სახე:

$$X_{j,j} + \Phi_i = \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k v_{i,k} \right). \quad (1.23.1)$$

ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებების მისაღებად (1.23.1)-ში შევიტანოთ ნიუტონის განზოგადებული (1.13.7) კანონით განსაზღვრული  $X_{ij}$ :

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) = \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) v_{k,k} - p_{,i} + \Phi_i, \quad (1.23.2)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

თუ  $\lambda = \mu = 0$ , ე.ი. სითხე არ არის ბლანტი, (1.23.2)-დან მივიღებთ იდეალური სითხის მოძრაობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) + p_{,i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.3)$$

რომელიც ეილერის განტოლებების სახელს ატარებს.

ნავიე-სტოქსის (1.23.2) განტოლებები და, კერძოდ, ეილერის (1.23.3) განტოლებები, როგორც ვხედავთ, არაწრფივი განტოლებებია. უნდა შევნიშნოთ, რომ მათი არაწრფივობა გამომდინარეობს არა ფიზიკური მოდელირებიდან, არამედ მათემატიკური მოსაზრებებიდან (იხ. (1.22.4)-ის გამოყვანა).

თუ, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, (1.23.2) განტოლებებში  $v_k v_{i,k}$  სიდიდეებს უგულებელვყოფთ, მოხდება ნავიე-სტოქსის განტოლებების გაწრფივება და მივიღებთ *სტოქსის* სახელით ცნობილ შემდეგ განტოლებებს:

$$\rho \dot{v}_i - \mu \Delta v_i - (\lambda + \mu) v_{k,ki} + p_{,i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23.4)$$

ოზენის\*) სახით გაწრფივების შემთხვევაში უშვებენ, რომ სითხის ღინება მცირედ განსხვავდება რაიმე მიმართულების მუდმივ  $v_i^0$  სიჩქარიან ღინებისგან, ე.ი.

$$v_i = v_i^0 + v_i^*, \quad i = 1, 2, 3,$$

და შემდეგ (1.23.2) განტოლებებში, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, უკუაგდებენ არაწრფივ წევრებს:

$$\rho (\dot{v}_i^* + v_k^0 v_{i,k}^*) = \mu \Delta v_i^* + (\lambda + \mu) v_{k,ki}^* - p_{,i} + \Phi_i, \quad (1.23.5)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

ჰიდრომექანიკაში მოძრაობას ეწოდება სტაციონარული (დამდგარი), თუ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები (სიჩქარე, წნევა და სხვ.), დამოკიდებულნი არიან ეილერის ცვლადებზე (რომლებიც, საზოგადოდ, დროის ფუნქციებია), ხოლო უშუალოდ დროზე დამოკიდებულნი არ არიან. ამის შესაბამისად (2.23.4) განტოლებები მიიღებენ

$$\mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) v_{k,ki} - p_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.6)$$

სახეს.

ნიუტონის მექანიკის ფუნდამენტურ კანონს წარმოადგენს მასის შენახვის კანონი. ის სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის და მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილ ნებისმიერ დროში ცვალებად  $\Omega(t)$  მოცულობაში, რომელიც გარემოს ერთი და იმავე ნაწილაკებისაგან შედგება, მოთავსებული მასა არ იცვლება დროთა განმავლობაში. ეს

\*) კ.ვ. ოზენი (1879-1944).

კანონი ექსპერიმენტულად დადგენილად უნდა ჩაითვალოს (იხ., მაგალითად, [57]). მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

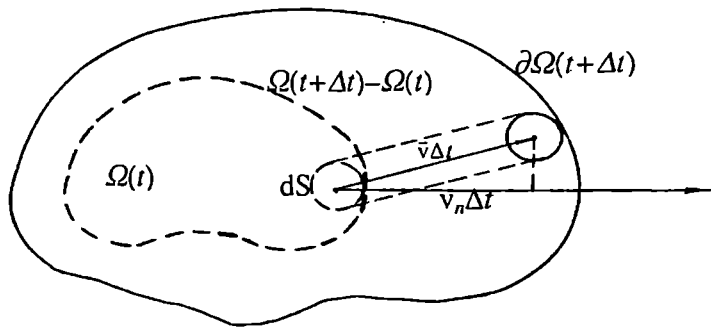
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega = 0. \quad (1.23.7)$$

წარმოებულის განმარტების თანახმად,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t) - \Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) d\Omega}{\Delta t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\int_{\Omega(t)} [\rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - \rho(x_1, x_2, x_3, t)] d\Omega}{\Delta t} \right\} \\ &= \int_{\partial\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_n(x_1, x_2, x_3, t) dS \\ & \quad + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} dV, \end{aligned} \quad (1.23.8)$$

რადგან  $\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)$  მოცულობა შედგება ელემენტარული  $d\Omega = v_n dS \Delta t$

ცილინდრებისაგან (იხ. ნახ. 1.23.1) და, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\partial \Omega(t + \Delta t)$  ზედაპირი მიისწრაფის  $\partial \Omega(t)$  ზედაპირისაკენ, ხოლო  $\rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t)$  სიმკვრივე  $-\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ -სკენ.



ნახ. 1.23.1

მაგრამ, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად,

$$\int_{\partial \Omega(t)} \rho v_n dS = \int_{\partial \Omega(t)} \rho v_i n_i dS = \int_{\Omega(t)} (\rho v_i)_{,i} d\Omega. \quad (1.23.9)$$

(1.23.7)-(1.23.9)-დან, როგორც მთელი მოძრავი გარემოსათვის, ასევე მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილისათვის, გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} \right] d\Omega = 0.$$

ამდენად,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{როცა } t \geq t_0, \quad (1.23.10)$$



სადაც  $div \bar{v} := v_{i,i}$ . (1.23.10) განტოლებას ეწოდება უწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლადებში. ცხადია, რადგან

$$div(\rho v) = (\rho v_i)_{,i} = \rho v_{i,i} + \rho_{,i} v_i = \rho v_{i,i} + \rho_{,i} \dot{x}_i,$$

ამოტომ (1.23.10) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div \bar{v} = 0. \quad (1.23.11)$$

განტოლებათა სრული სისტემის მისაღებად (1.23.2)-ს უნდა დაემატოს უწყვეტობის (1.23.10) და მდგომარეობის (ბაროტროპული სითხის შემთხვევაში)

$$p = f(\rho) \quad (1.23.12)$$

განტოლება, სადაც  $f$  გარკვეული ფუნქციაა.

(1.23.2), (1.23.10) და (1.23.12) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ხუთ  $v_1, v_2, v_3, p$  და  $\rho$  უცნობს, რომლებსაც ვეძებთ

$$\bar{v}(x, t_0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.23.13)$$

საწყის\*) და

$$\bar{v} = \bar{g}(x, t) \quad \partial \Omega \text{-ზე}, \quad t \geq t_0, \quad (1.23.14)$$

სასაზღვრო პირობებში, სადაც  $\bar{v}_0(x)$  და  $\bar{g}(x, t)$  მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია.

როცა  $\bar{g} = 0$ ,  $\partial \Omega$  საზღვარი უძრავი და მყარია და შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სითხე არ სრიალებს და ეკვრის მას; ხოლო როცა  $\bar{g} \neq 0$ , საზღვარი მოძრაობს დასახელებული  $\bar{g}$  სიჩქარით.

(2.23.14) სასაზღვრო პირობა შეიძლება შეიცვალოს

$$v_n := (\bar{v}, n) = v_i n_i = 0, \quad X_{n\tau} = 0 \quad \partial \Omega \text{-ზე} \quad (1.23.15)$$

\*) სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში (1.23.13) პირობები ზედმეტია, რადგან განტოლებებში არ გვექნება დროით კერძო წარმოებულები.

სასაზღვრო პირობებით, სადაც  $X_{nr}$  არის  $\bar{X}_n$ -ის მხები კომპონენტი. (1.23.15) შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სიჩქარის  $v_n$  ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის  $X_{nr}$  მხები მდგენელი ნულია (ე.ი. სითხეს საზღვრის გასწვრივ სრიალი შეუძლია). ცხადია, (1.23.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

სითხეს ეწოდება არაკუმშვადი, თუ მისი ნებისმიერი ნაწილის მოცულობა უცვლელი რჩება (მუდმივია) მოძრაობის დროს, ე.ი., მოცულობითი გაფართოების (იხ. (1.9.9)) დროით წარმოებული

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (1.23.16)$$

ამდენად, თუ სითხე არაკუმშვადია, მასის შენახვის (1.23.11) კანონიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

ე.ი.,  $\rho$  მუდმივია სითხის მოძრაობის ტრაექტორიების გასწვრივ. აქედან გამომდინარე, როცა სითხე ერთგვაროვანია, რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\rho$  არ არის სივრცის წერტილის ფუნქცია, დავასკვნით, რომ  $\rho = \text{const}$ .

ვთქვათ,  $\rho = \text{const}$ , მაშინ (1.23.11)-ის თანახმად, სრულდება (1.23.16).

გავაწარმოთ (1.23.2)  $x_i$ -ის მიმართ, ავეჯამოთ  $i$ -ს მიმართ 1-დან 3-მდე, გამოვიყენოთ შვარცის თეორემა და გავითვალისწინოთ (1.23.16); მაშინ გვექნება, რომ

$$\Delta p = \operatorname{div} \bar{\Phi} - v_{k,j} v_{i,k}. \quad (1.23.17)$$

$\bar{v}$  და  $p$  უცნობი სიდიდეები სხვადასხვა როლს თამაშობენ. დროის ყოველ  $t$  მომენტში, საწყისი მომენტის ჩათვლით,  $p$  წნევა შეიძლება განსაზღვრული იქნეს, როგორც (1.23.17) განტოლებისათვის ნეიმანის ამოცანის ამონახსნი. მართლაც, (1.23.16)-ის ძალით, (1.23.2) მიიღებს

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) = \mu \Delta v_i - p_{,i} + \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.18)$$

სახეს. თუ ახლა (1.23.18)-ს გავამრავლებთ  $n_i$ -ზე, ავჯამავთ  $i$ -ს მიმართ და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან (1.23.14) პირობას (ე.ი.

$$\bar{v} = 0 \quad \partial \Omega \text{-ზე, როცა } t \geq t_0), \quad (1.23.19)$$

მივიღებთ

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \Phi_i n_i + \mu \Delta v_i \cdot n_i \quad \partial \Omega \text{-ზე}$$

ნეიმანის პირობას.

დასმული ამოცანები გამოკვლეულია, მაგალითად, [32]-ში (იხ. აგრეთვე [15]). ნაიე-სტოქსის განტოლებების *სუსტი (ვარიაციული) ფორმულირება* შემოღებული იყო *ჟ. ლერეს*<sup>\*)</sup> მიერ. (1.23.18) განტოლება ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \bar{\Phi}, \quad (1.23.20)$$

სადაც

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \bar{v} \cdot \nabla := v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$H_0^1(\Omega)$ -თი აღვნიშნოთ  $C_0^\infty(\Omega)$ -ს ჩაკეტვა  $H^1(\Omega)$ -ს ნორმით. (1.23.20) განტოლება გავამრავლოთ სატესტო

$$\bar{v}^* \in V := \left\{ \bar{v}^* \in [H_0^1(\Omega)]^3, \operatorname{div} \bar{v}^* = 0 \right\}, \quad (1.23.21)$$

ვექტორზე და მიღებული გამოსახულება  $\Omega$  არეზე ვაინტეგრით. ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

<sup>\*)</sup> ჟ. ლერე (1906-1998).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{v}(t), \bar{v}^*) + \frac{\mu}{\rho}(\bar{v}_{,j}(t), \bar{v}^*_{,j}) + (v_i v_{j,j}, v_j^*) \\ = \frac{1}{\rho}(\bar{\Phi}, \bar{v}^*) \end{aligned} \quad (1.23.22)$$

რადგან  $[L_2(\Omega)]^3$ -ში სკალარული

$$(\bar{v}(t), \bar{v}^*) := \int_{\Omega} v_i(x, t) \bar{v}^*_i(x) d\Omega$$

ნამრავლი სივრცით ცვლადებზე არ არის დამოკიდებული და, (1.23.21)-ის გამო,

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \bar{v}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega} p(v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \bar{v}^* d\Omega = 0.$$

შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება. ვთქვათ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  და  $X$  რაიმე ბანახის სივრცეა. მოცემული  $s$ -სთვის,  $1 \leq s < +\infty$ ,  $L_s([a, b]; X)$  აღნიშნავს  $]a, b[$ -ზე განსაზღვრულ  $L_s$  ინტეგრებულ ფუნქციათა სიმრავლეს მნიშვნელობებით  $X$ -ში, რომელიც ბანახის სივრცეა

$$\left[ \int_a^b \|f(t)\|_X^s dt \right]^{\frac{1}{s}}$$

ნორმით.  $L_\infty([a, b]; X)$  აღნიშნავს  $]a, b[$ -ზე განსაზღვრულ არსებითად შემოსაზღვრულ ფუნქციებს

$$\operatorname{ess\,sup}_{]a, b[} \|f(t)\|_X$$

ნორმით, სადაც  $\operatorname{ess\,sup}$  (არსებითი ზედა ზღვარი) აღნიშნავს ნული ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით  $\operatorname{sup}$ -ს  $]a, b[$ -ზე. სხვა სიტყვებით,  $f(t)$ -ს ეწოდება არსებითად შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი  $c = \operatorname{const}$ , რომ თითქმის ყველგან  $]a, b[$ -ზე

$$\|f(t)\|_x < c.$$

ასეთი  $c$  რიცხვების ქვედა ზღვარს  $\|f(t)\|_x$ -ის არსებითი ზედა ზღვარი ეწოდება.

ჩვენ ვეძებთ ისეთ  $\vec{v}(t) \in V$  ვექტორ-ფუნქციას თითქმის ყველა  $t > 0$ -სთვის, რომლისთვისაც (1.23.22), (1.23.13) სრულდება განაწილების აზრით. შევნიშნოთ, რომ (1.23.19) სასაზღვრო პირობა გათვალისწინებულია  $\vec{v}(t) \in [H_0^1(\Omega)]^3$  მოთხოვნაში.

$L_2$ -თეორიაში (1.23.21), (1.23.13) ვარიაციული ამოცანის (იხ. [32], გვ. 343) სუსტ ამონახსნს ვუწოდებთ ამონახსნს, რომელიც ეკუთვნის  $L_2(]0, T[; V)$ -ს და  $L_\infty(]0, T[; H)$ -ს  $\forall T > 0$ , ხოლო ძლიერ ამონახსნს კი ისეთს, რომელიც ეკუთვნის

$L_2(]0, T[; V \cap [H^2(\Omega)]^3)$  და  $L_\infty(]0, T[; V)$ -ს  $\forall T > 0$ ,  
სადაც

$$H := \left\{ \vec{v} \in [L_2(\Omega)]^3, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

$\Omega \in R^2$ -ისთვის ფორმულირებები ანალოგიურია.

დღევანდლამდე მიღებული შედეგების შეჯამებით შეიძლება დავასკვნათ შემდეგი (იხ. [32], გვ. 344):

უთქვამთ,  $\Omega \in R^2$ , მაშინ ამოცანა კორექტულია ადამარის<sup>\*)</sup> აზრით: სუსტი და ძლიერი ამონახსნები არსებობენ და ერთადერთნი არიან, თუ მონაცემები საკმარისად რეგულარულია, და შესაბამის სივრცეებში უწყვეტად არიან დამოკიდებულნი მონაცემებზე.

უთქვამთ,  $\Omega \in R^3$ , მაშინ ძლიერი ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია რაიმე  $]0, T^*[$  ინტერვალზე, სადაც  $T^*$  დამოკი-

<sup>\*)</sup> ე. ადამარი (1865-1963).

დებულია მონაცემებზე (ფაქტობრივად შედეგი ლოკალურია); სუსტი ამონახსნი არსებობს  $]0, +\infty[$  ინტერვალზე. სუსტი ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი ღია პრობლემაა, ისევე, როგორც ძლიერი ამონახსნის არსებობის საკითხი დროის ნებისმიერი ინტერვალისთვის (ე.ი. გლობალური ამონახსნის). ცხადია, ისევე, როგორც  $R^2$ -ში, როცა ძლიერი ამონახსნი არსებობს, ის იმდენად გლუვია, რამდენადაც ამის საშუალებას მონაცემები და არის გეომეტრია იძლევა,  $C^\infty$  რეგულარობისა და ანალიზურობის ჩათვლით.

## თავი VI. პლასტიკურობის თეორია

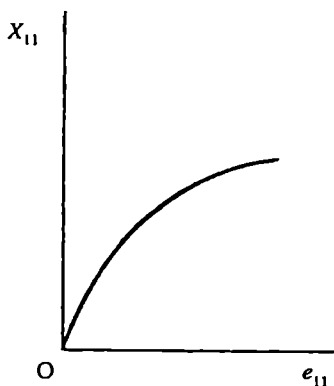
### §1.24. დრეკად-პლასტიკური და პლასტიკური სხეულები

დრეკადობის თეორიისაგან განსხვავებით *პლასტიკურობის თეორია* შეისწავლის ისეთ სხეულებს, რომლებიც თავიანთი ბუნებით არ ექვემდებარებიან დრეკადობის კანონებს. სახელდობრ, თუ სხეულს მთლიანად მოეხსნით გარე დატვირთვას, ის არ დაიბრუნებს თავის საწყის ფორმას, ე.ი. ექნება *ნარჩენი დეფორმაცია* (იხ. §12 და აგრეთვე [55]).

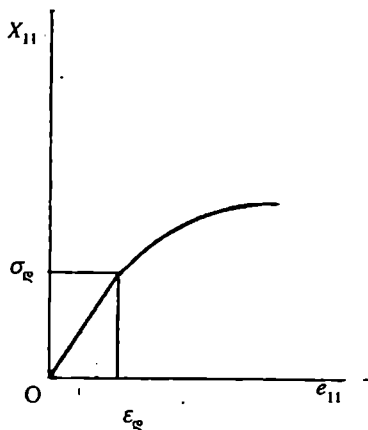
თუ სხეულს თავიდანვე არ აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.1), მაშინ მას *პლასტიკური სხეული* ეწოდება. თუ სხეულს დატვირთვის პირველ სტადიაზე აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.2), ხოლო დატვირთვის შემდეგ სტადიაზე მას უჩნდება ნარჩენი დეფორმაციები, მაშინ სხეულს *დრეკად-პლასტიკური სხეული* ეწოდება.

*პლასტიკურობის მათემატიკური თეორია* შეისწავლის სხეულის დეფორმირების მთელ პროცესს, ხოლო *პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია* შეისწავლის სხეულის მხოლოდ ზღვრულ

მდგომარეობას დეფორმაციის საშუალო ეტაპების გამოკვლევის გარეშე.



ნახ. 1.24.1



ნახ. 1.24.2

### §1.25. ძაბვებისა და დეფორმაციის ინტენსიურობა

ისევე როგორც დრეკადობის თეორიაში, პლასტიკურობის თეორიაშიც  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , მოცულობითი ძალებისა და  $X_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად გამოწვეული დაძაბული მდგომარეობა ხასიათდება ძაბვის  $X_{ij}$  სიმეტრიული ტენზორით. ისინი ერთმანეთთან არიან დაკავშირებულნი წონასწორობის (სტატიკის ამოცანების განხილვის დროს) (1.3.5) განტოლებებით, ხოლო სხეულის ზედაპირზე (1.2.1) დამოკიდებულებებით. დაძაბული მდგომარეობის დასახასიათებ-

ლად (1.5.7) ან (1.5.8) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე

$$\tau_0 := \frac{1}{3} \left\{ (X_{11} - X_{22})^2 + (X_{22} - X_{33})^2 \right. \quad (1.25.1)$$

$$\left. + (X_{33} - X_{11})^2 + 6(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

რომელსაც *ძხები ძაბვების ინტენსიურობა* ეწოდება.

(1.25.1)-ის ნაცვლად ხშირად იყენებენ მის ექვივალენტურ

$$\sigma_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_0 \quad (1.25.2)$$

სიდიდეს, რომელსაც *ძაბვების ინტენსიურობა* ეწოდება. (1.25.1)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს (იხ. § 1.12) ძაბვების ინტენსიურობა დაემთხვეს გამჭიმავ ძაბვას. მართლაც,  $x_i$  მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$X_{11} \geq 0, X_{11} \neq 0, X_{22} = X_{33} = 0; X_{ij} = 0, \text{ თუ } i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩაესვამთ (1.25.1)-ში, ხოლო მიღებულს (1.25.2)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{X_{11}^2 + X_{11}^2} = X_{11}.$$

პლასტიკურობის თეორიაში ძალაშია აგრეთვე დრეკადობის თეორიის გეომეტრიული დამოკიდებულებები. დაძაბული სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობას ახასიათებს დეფორმაციის  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , ტენზორი, რომელიც გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , გადაადგილებებთან დაკავშირებულია (1.6.3) ფორმულებით.  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , უნდა აკმაყოფილებდნენ სენ-ვენანის თავსებადობის (1.11.4) პირობებს.

(1.9.6) ან (1.9.7) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე:



$$\varepsilon_0 := \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + 6(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.25.3)$$

რომელსაც დეფორმაციის ინტენსიურობა ეწოდება. (1.25.3)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს დეფორმაციის ინტენსიურობა დაემთხვეს ფარდობით წაგრძელებას გაჭიმვის მიმართულებით. მართლაც, თუ პუასონის კოეფიციენტი  $\nu = \frac{1}{2}$ , მაშინ  $x_1$  მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$e_{11} \geq 0, \quad e_{11} \neq 0, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2}e_{11}; \quad e_{ij} = 0, \quad \text{თუ } i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვამთ (1.25.3)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left( e_{11} + \frac{1}{2}e_{11} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2}e_{11} - e_{11} \right)^2} = e_{11}.$$

პლასტიკური დეფორმაციის კანონები იმაზეა დამოკიდებული, იზრდება თუ მცირდება დატვირთვა. ამის შესაბამისად არსებობს ორი სახის დეფორმაცია: აქტიური და პასიური.

მარტივი გაჭიმვის ან სუფთა ძერის შემთხვევაში ეს ცნებები ადვილი განსასხვავებელია. აქტიური ეწოდება დეფორმაციას, როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე იზრდება, ხოლო პასიური — როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე მცირდება.

რთული დაძაბული მდგომარეობის დროს პლასტიკური დეფორმაცია შეიძლება მოხდეს ძაბვების სხვადასხვა თანაფარდობის დროს. ასეთ შემთხვევაში სხეულის ელემენტის დეფორმაციას დროის მოცემულ მომენტში ეწოდება აქტიური, თუ ძაბვების  $\sigma_0$  ინტენსიურობის მნიშვნელობა მეტია ყველა მის წინა

მნიშვნელობაზე, ხოლო პასიური – თუ ძაბვების  $\sigma_i$  ინტენსიურობის მნიშვნელობა ნაკლებია ერთზე მაინც მის წინა მნიშვნელობებს შორის. აქტიური დეფორმაციის დროს პლასტიკური (ე.ი. ნარჩენი) დეფორმაცია იზრდება, ხოლო პასიური დეფორმაციის დროს – მცირდება. აქტიურ დეფორმაციას ეწოდება დატვირთვის პროცესი, ხოლო პასიურს – განტვირთვის პროცესი.

პლასტიკური დეფორმაციის კანონებზე არსებით გავლენას ახდენს სხეულის დატვირთვის ხასიათიც. ამის შესაბამისად ანსხვავებენ დატვირთვის ორ სახეს: მარტივს და რთულს. მარტივი დატვირთვა ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა გარე ძალები მათი მოდების საწყისი მომენტიდანვე ისე იზრდებიან, რომ ინარჩუნებენ მუდმივ თანაფარდობას ერთმანეთს შორის, ე.ი. იცვლებიან საერთო პარამეტრის პროპორციულად. დატვირთვის ასეთი ცვლილება უზრუნველყოფს ნებისმიერი ფორმის მქონე სხეულის ნებისმიერ წერტილში მთავარი ძაბვებისა და მთავარი დეფორმაციების ღერძების უცვლელობას ნებისმიერი სიდიდისა და მიმართულების დატვირთვების პირობებში. რთული დატვირთვა ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა თუნდაც ერთი გარე ძალის ზრდის დროს დანარჩენი ძალები ამ ძალის პროპორციულად არ იზრდებიან.

## §1.26. ჰუკის გარდაქმნილი კანონი

ჰუკის (1.12.9) კანონში  $X_{ii}$  -ს შემცველი

$$X_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} \quad (1.26.1)$$

ტოლობების ორივე მხარეს გამოვაკლოთ

$$\sigma_{0i} := \frac{X_{ii}}{3} \quad (1.26.2)$$

საშუალო მნიშვნელობა. მაშინ

$$X_{ii} - \sigma_0 = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} - \sigma_0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.26.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varepsilon_0 := \frac{e_{ii}}{3} = \frac{\theta}{3}. \quad (1.26.4)$$

(1.26.1) ავჯამოთ  $i$ -ს მიმართ 1-დან 3-მდე, მიღებული შედეგი გავყოთ 3-ზე და გავითვალისწინოთ (1.26.2), (1.12.23), (1.12.24) და (1.26.4):

$$\sigma_0 = k\theta = \frac{E}{3(1-2\nu)}\theta = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_0 = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0. \quad (1.26.5)$$

(1.12.24)-ის თანახმად

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}. \quad (1.26.6)$$

ჩავსვათ (1.26.3)-ის მარჯვენა მხარეში (1.26.5) და (1.26.6) გამოსახულებები და გავითვალისწინოთ (1.26.4):

$$\begin{aligned} X_{ii} - \sigma_0 &= \frac{6\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 + 2\mu e_{ii} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0 \\ &= 2\mu e_{ii} + \frac{4\mu\nu - 2\mu}{1-2\nu}\varepsilon_0, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$X_{ii} - \sigma_0 = 2\mu(e_{ii} - \varepsilon_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.26.7)$$

ამ სამ დამოკიდებულებას დავამატოთ დარჩენილი სამი დამოკიდებულება ჰუკის (1.12.9) კანონიდან:

$$X_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.26.8)$$

(1.26.7), (1.26.8) ფორმულები ერთმანეთთან აკავშირებენ ძაბვის

$$X'_{ii} := X_{ii} - \sigma_0, \quad X'_{ij} = X_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.26.9)$$

ტენზორსა და დეფორმაციის

$$e'_{ii} := e_{ii} - \varepsilon_0, \quad e'_{ij} = e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.26.10)$$

ტენზორს, რომელიც შეესაბამება (1.26.9) ფორმულებით მოცემულ ძაბვის  $X'_{ij}$  ტენზორის მოქმედებით გამოწვეულ სხეულის ფორმის ცვლილებას. (1.26.10)-ისა და (1.26.4)-ის თანახმად,

$$\theta' := e'_{ii} = e_{ii} - 3\varepsilon_0 = 0.$$

ამდენად, (1.26.7), (1.26.8) დამოკიდებულებებით აღწერილი დეფორმაცია ხდება მოცულობის ცვლილების გარეშე.

თუ (1.26.7) ტოლობებს  $i$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის წვეილ-წვეილად ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} X_{11} - X_{22} &= 2\mu(e_{11} - e_{22}) \\ X_{22} - X_{33} &= 2\mu(e_{22} - e_{33}) \\ X_{33} - X_{11} &= 2\mu(e_{33} - e_{11}) \end{aligned} \quad (1.26.11)$$

(1.26.8) და (1.26.11)-დან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \frac{X_{11} - X_{22}}{e_{11} - e_{22}} &= \frac{X_{22} - X_{33}}{e_{22} - e_{33}} = \frac{X_{33} - X_{11}}{e_{33} - e_{11}} \\ &= \frac{X_{12}}{e_{12}} = \frac{X_{23}}{e_{23}} = \frac{X_{31}}{e_{31}} = 2\mu. \end{aligned} \quad (1.26.12)$$

თუ საკოორდინატო ღერებზედ მთავარ მიმართულებებს ავიღებთ, მაშინ (1.26.12) მიიღებთ

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{e_3 - e_1} = 2\mu \quad (1.26.13)$$

სახეს.

თუ (1.25.3)-ში ჩავსვამთ დეფორმაციების მნიშვნელობებს, განსაზღვრულს (1.26.12)-დან და გავითვალისწინებთ (1.25.1), (1.25.2)-ს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3\mu}, \text{ ე.ი., } \mu = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (1.26.14)$$

(1.26.7), (1.26.8) და (1.26.13) დამოკიდებულებებში (1.26.14)-ის ჩასმის შემდეგ გვექნება, რომ

$$X_{ii} - \sigma_0 = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0} (e_{ii} - \varepsilon_0), \quad X_{ij} = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0} e_{ij}, \quad i \neq j, \quad (1.26.15)$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{e_3 - e_1} = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (1.26.16)$$

### §1.27. პლასტიკურობის პირობები

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს ხშირად აუცილებელია იმის ცოდნა, თუ რა პირობებში გადადის სხეული განსახილველ წერტილში დრეკადი მდგომარეობიდან პლასტიკურ მდგომარეობაში. ამ პირობებს *პლასტიკურობის პირობები* ეწოდებათ.

წრფივი დაძაბული მდგომარეობის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება. ამ შემთხვევაში, მაგალითად,  $\sigma_1$  მთავარი ძაბვა განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო დანარჩენი ორი  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  და პლასტიკური დეფორმაციები მაშინ წარმოიშვება, როცა (იხ. ნახ. 1.24.2)

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{ღ}}, \quad (1.27.1)$$

სადაც  $\sigma_{\text{ღ}}$  არის *დენადობის ზღვარი*, რომელიც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

სუფთა ძვრის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა კვლავ ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება და

$$X_{23} = \tau_{\text{ღ}},$$

სადაც  $\tau_{\text{ღ}}$  დენადობის ზღვარია სუფთა ძვრის დროს. ეს სიდიდეც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

ბრტყელი (იხ. ქვემოთ §2.2) და მოცულობითი (ე.ი., როცა ძაბვის ტენზორის არცერთი კომპონენტი არ არის იგივეურად ნულის ტოლი) დამაბული მდგომარეობის ზოგად შემთხვევაში პლასტიკურობის პირობების დადგენა ექსპერიმენტის საშუალებით შეუძლებელია. ამიტომ ეს პირობები დგინდება ჰიპოთეტურად, შემდგომი ექსპერიმენტული შემოწმებით.

სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობის თანახმად, სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია წარმოიშობა მაშინ, როცა მაქსიმალური მხები ძაბვა მიაღწევს სუფთა ძვრის დროს დენადობის ზღვარს, ე.ი. როცა (იხ. (1.5.23))

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{\text{ღ}}. \quad (1.27.2)$$

თუ (1.27.1)-ს (აქ იმასაც ვითვალისწინებთ, რომ ამ შემთხვევაში  $\sigma_3 = 0$ ) ჩავსვამთ (1.27.2)-ში, მაშინ

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{ღ}}}{2} = \tau_{\text{ღ}}. \quad (1.27.3)$$

(1.27.2) და (1.27.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{ღ}}. \quad (1.27.4)$$

(1.27.4) გახლავთ სწორედ სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობა, რომელსაც მასალათა გამძლეობაში სიმტკიცის მესამე თეორიასაც უწოდებენ.

კუბერ<sup>\*)</sup>-მიზეს<sup>\*\*)</sup>-ჰენკის<sup>\*\*\*)</sup> პლასტიკურობის პირობის თანახმად სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია აღიძვრება მაშინ,

\*) მ. ტ. კუბერი (1872-1950).

\*\*\*) რ. მიზესი (1883-1953).

\*\*\*)) კ. ჰენკი (1885-1951).

როცა მხები ძაბვების ინტენსიურობა მიაღწევს რაღაც მნიშვნელობას, რომელიც სხეულის გვარობაზეა დამოკიდებული და მუდმივია თითოეული მასალისათვის:

$$\tau_0 = C. \quad (1.27.5)$$

განვსაზღვროთ ეს მუდმივი მარტივი გაჭიმვის ექსპერიმენტზე დაყრდნობით. (1.27.1)-ის თანახმად

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{ღ}}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1.25.1)-ში, მივიღებთ მხები დაძაბულობების ინტენსიურობის შემდეგ მნიშვნელობას გაჭიმვისას პლასტიკური დეფორმაციების აღძვრის მომენტში:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{\text{ღ}}^2 + \sigma_{\text{ღ}}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{ღ}}. \quad (1.27.6)$$

(1.27.5)-ისა და (1.27.6)-ის შედარებით ვასკენით, რომ

$$C = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{ღ}}. \quad (1.27.7)$$

(1.25.1)-ისა და (1.27.7)-ის (1.27.5)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის პლასტიკურობის პირობას შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (X_{11} - X_{22})^2 + (X_{22} - X_{33})^2 \right. \quad (1.27.8)$$

$$\left. + (X_{33} - X_{11})^2 + 6(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_{\text{ღ}}.$$

(1.27.8), თუ გავითვალისწინებთ (1.25.2)-ს, შეიძლება ჩავწეროთ

$$\sigma_0 = \sigma_{\text{ღ}}$$

სახითაც.

მასალათა გამძლეობაში (1.27.8) პლასტიკურობის პირობას სიმტკიცის მეოთხე თეორიასაც უწოდებენ.

პლასტიკურობის ორივე ეს პირობა დაახლოებით ერთნაირ შემდეგს გვაძლევს.

## §1.28. მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია

დღეისათვის არსებობს სხვადასხვა ავტორის მიერ სხვადასხვა დროს შემოთავაზებული პლასტიკურობის მრავალი თეორია. ეს თეორიები შეიძლება ორ ჯგუფად დაიყოს.

პირველ ჯგუფს განეკუთვნებიან დრეკად-პლასტიკური თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მეორე ჯგუფს განეკუთვნებიან პლასტიკური დინების თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციის სინქარების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მარტივი დატვირთვისა და მცირე დეფორმაციების პირობებში პლასტიკურობის ყველა ცნობილი თეორია წარმოადგენს პლასტიკურობის ერთი ზოგადი თეორიის – მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორიის კერძო შემთხვევას. აღნიშნული ზოგადი თეორია ემყარება ექსპერიმენტების შედეგების განზოგადებით მიღებულ შემდეგ სამ კანონს.

*პირველი კანონი – მოცულობის ცვლილების კანონი.* მყარი სხეულის, როგორც აქტიური, ისე პასიური დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს მოცულობითი დეფორმაცია ყოველთვის დრეკადია და ექვემდებარება ჰუკის (იხ. (1.26.5))

$$\sigma_0 = k\theta \quad (1.28.1)$$

კანონს.

პლასტიკურობის თეორიაში ამოცანების გამარტივების მიზნით უშეებენ, რომ მასალა არაკუმშვადია, ე.ი.  $\theta = 0$ -ს. რადგან საშუალო ძაბვა  $\sigma_0$  არ არის ნული, ამიტომ (1.28.1)-ში უნდა დავუშვათ, რომ

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \infty.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაკუმშვადი მასალისათვის



$$\nu = \frac{1}{2}. \quad (1.28.2)$$

თუ (1.28.2)-ს ჩავსვამთ (1.12.24)-ის მეორეში, მაშინ

$$\mu = \frac{E}{3}.$$

*მეორე კანონი* – ფორმის ცვლილების კანონი. მარტივი დატვირთვის პირობებში აღძრული დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს ძაბვისა და დეფორმაციის მთავარი ღერძები ერთმანეთს ემთხვევიან და სამართლიანია (1.26.16) თანაფარდობები. ასევე სამართლიანია (1.26.15) დამოკიდებულებები. მართალია, ეს ექვსი ფორმულა სრულად დამოუკიდებელი არ არიან. მართლაც, თუ მათგან პირველ სამს წვერ-წვერად შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (1.26.2)-სა და (1.26.4)-ს, მივიღებთ, რომ  $0 \equiv 0$ -ს. ამდენად, გვაქვს ზუთი განტოლებისგან შემდგარი სისტემა ექვსი უცნობით.

*მესამე კანონი* – აქტიური დეფორმაციის პირობებში ძაბვების  $\sigma_n$  ინტენსიურობა მოცემული მასალისათვის არის დეფორმაციის  $\epsilon_n$  ინტენსიურობის სავსებით გარკვეული

$$\sigma_n = \Phi(\epsilon_n) \quad (1.28.3)$$

ფუნქცია.

მარტივი დატვირთვის პირობებში ჩატარებული მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებამ გვიჩვენა, რომ  $\sigma_n$ -სა და  $\epsilon_n$ -ს შორის დამოკიდებულებების დიაგრამები მსგავსია. (1.28.3)-ის თანახმად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{11} = \Phi(e_{11}). \quad (1.28.4)$$

ამრიგად, (1.28.4) დამოკიდებულება ნებისმიერი (წრფივი, ბრტყელი ან მოცულობითი) დაძაბული მდგომარეობისათვის შეიძლება დადგინდეს მარტივი გაჭიმვისათვის ჩატარებული ცდებით.

## §1.29. ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ

ვთქვათ, რაიმე სხეულისათვის, რომელზეც მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, პლასტიკურობის ამოცანა ამოხსნილია. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეულის ყოველ წერტილში ნაპოვნია ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები. დრეკადობის ზღვარს მიღმა სხეულის დეფორმაციის მნიშვნელოვან თავისებურებას წარმოადგენს განტვირთვის ხასიათი.

*ბოლო სხეულის განტვირთვა* ეწოდება გარე ძალების ცვლილების ისეთ პროცესს, როცა სხეულის ყველა იმ ნაწილში, სადაც პლასტიკური დეფორმაცია მოხდა, ძაბვის  $\sigma_i$  ინტენსიურობა ერთდროულად იწყებს შემცირებას. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეული აქტიური დეფორმაციის სტადიიდან გადადის პასიური დეფორმაციის სტადიაში.

*ილიუშინის<sup>\*)</sup> თეორემა განტვირთვის შესახებ.* სხეულის წერტილის გადაადგილებები განტვირთვის სტადიის რაიმე მომენტში განსხვავდებიან მათი მნიშვნელობებისაგან განტვირთვის დაწყების მომენტში იმ დრეკადი გადაადგილებების სიდიდით, რომლებიც აღიძვრებოდნენ სხეულში, თუ ბუნებრივ მდგომარეობაში მასზე მოდებული იქნებოდა აღნიშნულ მომენტებში სხეულზე მოქმედი გარე ძალების სხვაობის ტოლი გარეშე ძალები. იგივე სამართლიანია ძაბვებისა და დეფორმაციებისათვის.

აქედან როგორც შედეგი გამომდინარეობს *ნარჩენი ძაბვების, დეფორმაციების და გადაადგილებების შესახებ თეორემა*: თუ სხეულისათვის ამოხსნილია პლასტიკურობის ამოცანა და გარე ძალების მოცემულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ჭეშმარიტი წონასწორობის მდგომარეობა და, გარდა ამისა, ამოხსნილია დრეკადობის თეორიის ამოცანა, ე.ი. იმავე გარე ძალებს შეესაბა-

<sup>\*)</sup> ა. ა. ილიუშინი (1911-1998).

მება დრეკადი წონასწორობის ფიქტიური მდგომარეობა, მაშინ სხეულის სრული განტვირთვის შემდეგ მასში დარჩებიან ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები, რომლებიც ჭეშმარიტ და ფიქტიურ მდგომარეობებში მათი მნიშვნელობების სხვაობების ტოლია. ამასთან იგულისხმება, რომ განტვირთვის შემდეგ ნარჩენი ძაბვები არ გადიან დრეკადობის ფარგლებიდან.

ამ თეორეშიდან გამომდინარეობს განტვირთვის დროს ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების განსაზღვრის შემდეგი სქემა:

1. პლასტიკურობის თეორიის განტოლებებიდან ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვის დაწყებამდე უდიდესი დატვირთვით აღიძვრებიან.

2. დრეკადობის თეორიის განტოლებების საშუალებით ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვამდე უდიდეს დატვირთვასა და განტვირთვის შემდეგ დარჩენილ დატვირთვას შორის სხვაობის ტოლი დატვირთვით აღიძვრებიან.

3. უდიდესი დატვირთვის პირობებში მიღებულ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს ვაკლებთ განტვირთვის სიდიდის ტოლ (ე.ი. რა სიდიდითაც შემცირდა დატვირთვა) დატვირთვის შესაბამის ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს. სწორედ ეს სხვაობები იქნებიან ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების მნიშვნელობები განტვირთვის განსახილველ მომენტში.

### §1.30. პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების დასმა

პლასტიკურობის თეორიაში ვეძებთ სამ  $x_1, x_2, x_3$  ცვლადზე დამოკიდებულ შემდეგ 17 უცნობ სიდიდეს:  $X_{11}, X_{22}, X_{33}$ ,

$X_{12}$ ,  $X_{23}$ ,  $X_{31}$  ძაბვებს,  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{23}$ ,  $e_{31}$  დეფორმაციებს,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  გადაადგილებებს და ძაბვის  $\sigma_i$  და დეფორმაციის  $\epsilon_i$  ინტენსიურობებს. ისინი უნდა განისაზღვრონ 17 განტოლებიდან. ესენია წონასწორობის სამი (1.3.5) განტოლება; ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელი ექვსი (1.2.6.15) ფიზიკური განტოლება, რომელთაგან ხუთია დამოუკიდებელი და ამიტომ მეექვსე განტოლებად ვიღებთ (1.2.8.1)-ს; კოშის ექვსი (1.6.3) გეომეტრიული ფორმულა; (1.2.8.3) დამოკიდებულია ძაბვისა და დეფორმაციის ინტენსიურობებს შორის და დეფორმაციის ინტენსიურობის (1.2.5.3) გამოსახულება.

გარდა ამისა, უნდა დაკმაყოფილდეს (1.2.1) პირობები სხეულის ზედაპირზე, სადაც  $X_{ni}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , სიდიდეებია მოცემული.

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენება იგივე ხერხები, რაც დრეკადობის თეორიაში: ამოხსნა ძაბვებში, გადაადგილებებში და შერეული ხერხი.

დრეკადობის თეორიის მსგავსად პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად გამოიყენება პირდაპირი, შებრუნებული და ნახევრადშებრუნებული მეთოდები.

## ნაწილი II. ორბანჯომილებიანი მოდელები

### თავი I. დრეკადობის ორბანჯომილებიანი თეორია

დრეკადობის სამგანჯომილებიანი თეორიის ამოცანების ამოხსნა დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება სასაზღვრო ამოცანების კერძო კლასებისათვის ამოხსნის მეთოდების შემუშავებას.

#### §2.1. ბრტყელი დეფორმაცია

ვიტყვი, რომ სხეული განიცდის  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელურ ბრტყელ დეფორმაციას, თუ  $u_3 = 0$ , ხოლო  $u_1$  და  $u_2$  დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ  $x_1$  და  $x_2$ -ზე, ე.ი., (1.6.3), (1.9.9) და (1.12.9)-დან მივიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad e_{23} = e_{31} = e_{33} = 0; \quad (2.1.1)$$

$$\theta^2 := e_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha}; \quad (2.1.2)$$

$$X_{\alpha\beta} = \lambda\theta^2 \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.1.3)$$

$$X_{\alpha 3} = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad X_{33} = \lambda\theta^2;$$

აქედან, რამდენადაც  $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha} = 2$ ,

$$\begin{aligned} X_{\alpha\alpha} &= X_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \lambda\theta^2 \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} \\ &= 2\lambda\theta^2 + 2\mu e_{\alpha\alpha} = 2(\lambda + \mu)\theta^2 \end{aligned}$$

და

$$\theta^2 = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha} =: \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \Theta_2. \quad (2.1.4)$$

ამ უკანასკნელის (2.1.3) ტოლობებს შორის ბოლო ტოლობაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$X_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha} = \nu X_{\alpha\alpha} = \nu \Theta_2. \quad (2.1.5)$$

წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_{\alpha\beta} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1.6)$$

ხოლო მესამედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi_3 = 0.$$

ე.ი., ბრტყელი დეფორმაციის შემთხვევაში სხეულზე მოქმედი მოცულობითი ძალის გვეგმილი დეფორმაციის სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ნულის ტოლია.

(2.1.1)-(2.1.6)-ის თანახმად დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორების კომპონენტები და მოცულობითი ძალის  $\Phi_\alpha$  კომპონენტები დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ  $x_1$  და  $x_2$ -ზე. ამრიგად, არც ერთი განსახილველი სიდიდე  $x_3$ -ზე არ არის დამოკიდებული.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mu \Delta_2 u_\alpha + (\lambda + \mu) \theta^2_{,\alpha} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც

$$\Delta_2(\cdot) := (\cdot)_{,11} + (\cdot)_{,22}^*).$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, (2.1.3)-ის (2.1.6)-ში ჩასმითაც მიიღება.

\*) რადგან ამ ნაწილში (ნაწილი II) ჩვენ მხოლოდ ლაპლასის ორგანზომილებიან  $\Delta_2$  ოპერატორთან გვექნება საქმე, სიმარტივისათვის მას ინდექსად 2-ს არ მიუწეროთ.

სენ-ვენანის (1.11.4) პირობებიდან ხუთი, (2.1.1)-ის თანახმად, იგივეურად კმაყოფილდება და გერჩება მხოლოდ ერთი

$$e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,12}. \quad (2.1.7)$$

პირობა. იზოტროპული ერთგვაროვანი სხეულისათვის (2.1.7) შეიძლება შემდეგი სახითაც ჩაეწეროს

$$\Delta X_{\alpha\alpha} = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Phi_{\alpha,\alpha}. \quad (2.1.8)$$

მართლაც, (2.1.3)-ის პირველ ტოლობაში (2.1.4)-ის ჩასმისა და  $e_{\alpha\beta}$ -ს მიმართ ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \left[ X_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.1.9)$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (2.1.7)-ში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$X_{11,22} + X_{22,11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta X_{\gamma\gamma} - 2X_{12,12} = 0 \quad (2.1.10)$$

თუ (2.1.6)-დან პირველს გავაწარმოებთ  $x_1$ -ით, ხოლო მეორეს -  $x_2$ -ით და მიღებულ შედეგებს შევკრებთ, გვექნება

$$-2X_{12,12} = X_{11,11} + X_{22,22} + \Phi_{\alpha,\alpha}.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევიტანთ (2.1.10)-ში, საბოლოოდ მოვიღებთ (2.1.8)-ს, რომელსაც *ლავის განტოლება* ეწოდება.

ბრტყელი დეფორმაციის განმარტებიდან ცხადია, რომ ის გვექნება უსასრულოდ გრძელი წრფივი ღერძის მქონე პრიზმული (ცილინდრული) სხეულის შემთხვევაში, როცა მასზე მოქმედი გარე ზედაპირული ძალები და მოცულობითი ძალები დეფორმაციის სიბრტყის (ე.ი., განივი კვეთის) პარალელურია<sup>\*)</sup>. თუ პრიზმული სხეული სასრულია, მაშინ მასში ბრტყელი დე-

<sup>\*)</sup> ე.ი.  $0 = X_{n_3} = X_{3j} n_j$ , რაც, (2.1.3)-ის თანახმად, იგივეურად სრულდება, რადგან  $n$  გვერდითი ზედაპირის ნორმალაა.

ფორმაცია აღიძვრება გარკვეული მიახლოებით. ამასთან, რაც უფრო გრძელია პრიზმა (ცილინდრი), მით უფრო ახლოა სხეულის დეფორმაცია ბრტყელ დეფორმაციასთან.

თუ  $u_\alpha$ ,  $X_{\alpha\beta}$  აკმაყოფილებენ (2.1.1), (2.1.3), (2.1.6) განტოლებებს და

$$X_{\alpha\beta} n_\beta = X_{n\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1.11)$$

სასაზღვრო პირობებს<sup>\*)</sup>, სადაც  $X_{n\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , გარე ძაბვის ვექტორის მოცემული კომპონენტებია, მაშინ (2.1.5)-ის თანახმად პრიზმის (ცილინდრის) ბოლოებზე მოქმედებენ შესაბამისად  $X_{33}$  და  $-X_{33}$ -ის ტოლი ძაბვები (იხ. ნახ. 2.1.1)\*\*). ამ ძაბვების მოდება აუცილებელია იმისათვის, რომ გვექონდეს ბრტყელი დეფორმაცია.

## §2.2. ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა

დაძაბულ მდგომარეობას ეწოდება  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელური ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, თუ სხეულის ყოველ წერტილში

$$X_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.1)$$

ამ შემთხვევაში, საზოგადოდ, ნულისაგან განსხვავებულია ძაბვის ტენზორის შემდეგი სამი კომპონენტი

$$X_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1, 2.$$

თუ (2.2.1) დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მხოლოდ მოცემულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულ წერტილში გვაქვს ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

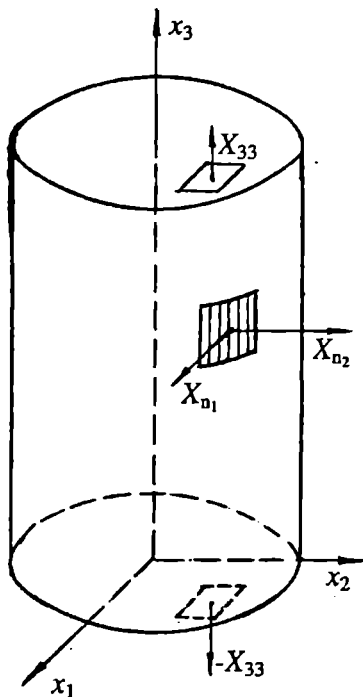
<sup>\*)</sup> აქ გათვალისწინებულია წინა გვერდის <sup>\*)</sup>.

<sup>\*\*)</sup>  $X_{x_3,3} = X_{33} \cos(x_3, x_3) = X_{33}$ ,

$X_{(-x_3),3} = X_{33} \cos(-x_3, x_3) = -X_{33}$ .



ამ შემთხვევაში (1.2.1) ფორმულებიდან გამოძიწარეობს, რომ



ნახ. 2.1.1

$$X_{n\alpha} = X_{\alpha\beta} n_{\beta}, \quad \alpha = 1, 2; \quad X_{n3} = 0. \quad (2.2.2)$$

ეს უკანასკნელი იმაზე მიგვითითებს, რომ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორი  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელურია.

(2.2.1)-ის თანახმად, წონასწორობის განტოლებებს (2.1.6) სახე ექნებათ, მხოლოდ განსახილველ შემთხვევაში ძაბვები, საზოგადოდ,  $\lambda_3$ -ზეც არიან დამოკიდებულნი.

რადგან  $X_{33} = 0$ , იზოტროპული სხეულისათვის

$$X_{33} = \lambda u_{i,i} + 2\mu u_{3,3} = 0.$$

აქედან განსაზღვრულ  $u_{3,3}$ -ს

$$u_{3,3} = e_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\alpha,\alpha} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta^2 \quad (2.2.3)$$

თუ ჩავსვამთ ჰუკის (1.15.2) კანონში, მივიღებთ, რომ

$$X_{\alpha\beta} = \lambda^* \theta^2 \delta_{\alpha\beta} + \mu (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.2.4)$$

სადაც

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

ჰუკის კანონში  $X_{\alpha 3} = 0$ -ის (იხ. 2.2.1) ჩასმა კი გვაძლევს, რომ

$$2e_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0, \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = 0, \quad (2.2.5)$$

როგორც ვხედავთ, (2.2.4) იმით განსხვავდება (2.1.3)-საგან, რომ  $\lambda$  შეცვლილია  $\lambda^*$ -ით.

თუ (2.2.4)-ს ჩავსვამთ წონასწორობის (2.1.6) განტოლებებში, რომლებიც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სამართლიანია ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაშიც, მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta u_\alpha + (\lambda^* + \mu) \theta^2_\alpha + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.2.6)$$

ხოლო წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის შესაბამე განტოლებებიდან, (2.2.1)-ის თანახმად გვექნება, რომ

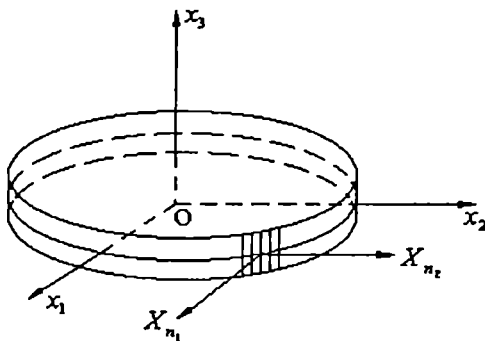
$$\Phi_3 = 0.$$

ე.ი., მოცულობითი ძალაც  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელურია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, მიუხედავად არსებითი გამარტივებისა და იმისა, რომ ჰუკის კანონსა და ლამეს განტოლებებს შესაბამისად (2.2.4) და (2.2.6) სახე აქვთ, რჩება სამგანზომილებიან ამოცანად, რამდენადაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, განსახილველი სიდიდეები, საზოგადოდ,  $x_3$ -ზე არიან დამოკიდებულნი. მართალია, (2.2.4)-სა და (2.2.6)-ში  $x_3$  მხოლოდ პარამეტრის როლს თამაშობს.

### §2.3. განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა

ფუძეების ზომებთან შედარებით მცირე სიმაღლის მქონე პრიზმას (ცილინდრს) ფირფიტა ეწოდება, ხოლო მის  $2h$  სიმაღლეს (იხ. ნახ. 2.3.1) — ფირფიტის სისქე. ვიგულისხმობთ, რომ ფირფიტის შუა სიბრტყე (ე.ი. ფუძეების პარალელური და მათგან თანაბრად დაშორებული სიბრტყე) ემთხვევა  $Ox_1x_2$ -ს.



ნახ. 2.3.1

ვთქვით, ფირფიტის ფუძეები თავისუფალია გარე ძაბვებისაგან, ხოლო გვერდით ზედაპირზე მოქმედებენ ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებული გარე ძაბვები. ასევე ვგულისხმობთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედი მოცულობითი ძალები ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებულნი არიან, ე.ი.,

$$X_{i,j|x_3=\pm h} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3.1)$$

$$X_{n3} = 0 \text{ გვერდით ზედაპირზე და } \Phi_3 = 0. \quad (2.3.2)$$

სენ-ვენანის პრინციპის თანახმად, ორ მსასველს შორის მოთავსებულ მცირე უბანზე მოქმედ ზედაპირულ ძალთა სისტემა შეიძლება შეიცვალოს სტატიკურად მისი ეკვივალენტური ძალით, რომელიც აღნიშნულ უბანზე მოქმედებს და ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარეობს.

მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიული განაწილების გამო, ცხადია, რომ შუა სიბრტყის წერტილები დეფორმაციის შემდეგაც შუა სიბრტყეზე დარჩებიან, ე.ი. გადაადგილების  $u_3$  კომპონენტი შუა სიბრტყეზე ნულია და ფირფიტის სისქის სიმცირის გამო, როცა  $x_3 > 0$ , ის ძალზე მცირეა. ამდენად  $u_3(x_1, x_2, x_3)$  საერთოდ ნულის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ (მაგრამ არა მისი წარმოებული  $u_{3,3}$ ), ხოლო  $u_\alpha$ -ს ცვლილება სისქის გასწვრივ უმნიშვნელოა. აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ ფირფიტის დრეკად წონასწორობაზე წარმოდგენა შეიძლება შევიქმნათ  $u_\alpha$  სიდიდეების სისქის მიმართ გასაშუალებული  $u_{\alpha 0}$  მნიშვნელობებით:

$$u_{\alpha 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.3.3)$$

(2.3.2)-ის თანახმად, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებიდან

$$X_{3j,j} = 0. \quad (2.3.4)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (2.3.1)-ს, ცხადია,

$$X_{33,3} |_{x_3=\pm h} = 0,$$

რადგან

$$X_{31,1} |_{x_3=\pm h} = X_{32,2} |_{x_3=\pm h} = 0.$$

ამრიგად, ფირფიტის ფუძეებზე  $X_{33}$  და მისი წარმოებული სისქის გასწვრივ ნულის ტოლია. სისქის სიმცირის გამო დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ყველგან სხეულში

$$X_{33}(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2.3.5)$$

დაძაბულ მდგომარეობას, როცა სრულდება (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5) პირობები და გარე ძალები ფირფიტის შუა სიბრტყის პარალელური და სიმეტრიულია, ეწოდება განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის პირველი ორი განტოლების  $x_3$ -ის მიმართ  $-h$ -დან  $+h$ -მდე ინტეგრებისა და მისი  $2h$ -ზე გაყოფის შემდეგ, რადგან, (2.3.1)-ის თანახმად,

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3,3} dx_3 = \frac{1}{2h} X_{\alpha 3} \Big|_{x_3=-h}^{x_3=+h} = 0,$$

მივიღებთ, რომ

$$X_{\alpha\beta 0,\beta} + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha = 1,2, \quad (2.3.6)$$

სადაც

$$X_{\alpha\beta 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha, \beta = 1,2;$$

$$\Phi_{\alpha 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha = 1,2.$$

რაც შეეხება წონასწორობის (2.3.4) განტოლებას, იგი გასაშუალოების შემდეგ იგივეურად კმაყოფილდება, რადგან განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე  $u_{\alpha}$ ,  $X_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ , სიდიდეები ლუწი, ხოლო  $X_{3\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , სიდიდეები კენტი ფუნქციებია  $x_3$  ცვლადის მიმართ, ე.ი. ამ უკანასკნელთა საშუალო მნიშვნელობები ნულის ტოლია.

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ანალოგიურად, (2.3.5)-ის თანახმად, ჩვენს შემთხვევაშიც ექნება ადგილი (2.2.4) ტოლობას, რომელიც გასაშუალოების შემდეგ გვაძლევს, რომ

$$X_{\alpha\beta\gamma} = \lambda^* \theta_0^2 \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

თუ (2.3.7)-ს ჩავსვამთ (2.3.6)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\lambda \Delta u_{\alpha 0} + (\lambda^* + \mu) \theta_{0, \alpha}^2 + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

ვთქვათ,  $ds$  წირითი ელემენტია  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე. განვიხილოთ შუა სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული  $2h$  სიმაღლის მქონე მართკუთხა ფართი, რომელიც ფირფიტას ეკუთვნის და რომლის კვეთა შუა სიბრტყესთან გვაძლევს  $ds$  ელემენტს. აღნიშნულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილის საშუალო მნიშვნელობა

$$X_{n\alpha 0} = X_{\alpha\beta 0} n_{\beta} - \text{ს,} \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.3.8)$$

ტოლია, სადაც  $n$  ფართის დადებითი ნორმალია, რომელიც, ცხადია, შუა სიბრტყის პარალელურია (ე.ი.  $n_3 = 0$ ). მთელ ფართზე მოქმედი ზედაპირული ძალაა

$$2h X_{n\alpha 0} ds, \quad \alpha = 1, 2,$$

ხოლო სისქის ერთეულზე გაანგარიშებული  $ds$  ელემენტზე  $n$  ნორმალის მხრიდან მოქმედი ძალა  $X_{n\alpha 0} ds$ -ის,  $\alpha = 1, 2$ , ტოლია.

ბრტყელი დეფორმაციისა და განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ძირითად დამოკიდებულებათა შედარება ადვილად დაგვარწმუნებს იმაში, რომ ყველა ფორმულა ერთნაირია იმ განსხვავებით, რომ იქ, სადაც ბრტყელი დეფორმაციის დროს გვაქვს  $\lambda$ , განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის დროს გვაქვს  $\lambda'$ . ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ბრტყელი დეფორმაციის მდგომარეობისა და განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაში დრეკადობის თეორიის ამოცანები მათემატიკურად იდენტურია.

დრეკადობის თეორიის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანები დაისმება სამგანზომილებიანის ანალოგიურად. კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები შეიძლება ვნახოთ, მაგალითად, [52]-სა და [50]-ში.

## თავი II. ფირფიტების და ბარსების თეორია

### §2.4. თხელი ფირფიტების ღუნვის კლასიკური თეორია. კირხჰოფ-ლიავის მოდელი

ჩვენს მიერ ადრე განხილული განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა (იხ. §2.3) იქმნება ფირფიტების გაჭიმვა-კუმშვაზე მუშაობის დროს. მაშინ როგორც მოცულობითი, ასევე გარე ზედაპირული ძალების გეგმილები შუა სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ჩვენს მიერ ნულის ტოლად იქნა მიღებული. ამდენად იმ შემთხვევის განსახილველად, როცა ფირფიტაზე სწორედ მხოლოდ ზემო აღნიშნული მდგენელები მოქმედებენ, განზოგადებული ბრტყელი დაძაბულობის მდგომარეობის მოდელი არ გამოდგება. ამ მოთხოვნას პასუხობს თხელი ფირფიტების ღუნვის კლასიკური თეორია, რომელიც ეყრდნობა

კირხჰოფ<sup>\*)</sup>-ლიავის<sup>\*\*)</sup> შემდეგ სამ ძირითად ჰიპოთეზას:

1. წრფივი ნორმალუბის ჰიპოთეზა: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი და შუა ზედაპირის მართობული რჩება დეფორმაციის შემდეგაც (იხ. ნახ. 2.4.1).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ  $e_{33} = 0$  და  $e_{\alpha 3} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

2. შუა სიბრტყის გაუჭიმვადობის ჰიპოთეზა: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ იღუნება, ე.ი., შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძვრის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

ამ თვისების გამო აღნიშნულ სიბრტყეს *ნეიტრალურს* უწოდებენ.

3. შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის ჰიპოთეზა: აღნიშნული წნევის სიმცირის გამო ფირფიტის ფენები ერთმანეთზე გავლენას არ ახდენენ.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{33} \ll X_{11}, X_{12}, X_{22}, \quad X_{33} \equiv 0.$$

ეს ჰიპოთეზები მისაღებია ე.წ. თხელი ფირფიტებისათვის. ფირფიტას ეწოდება *თხელი*, თუ მისი ჩაღუნვა

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{2h}{4}$$

და

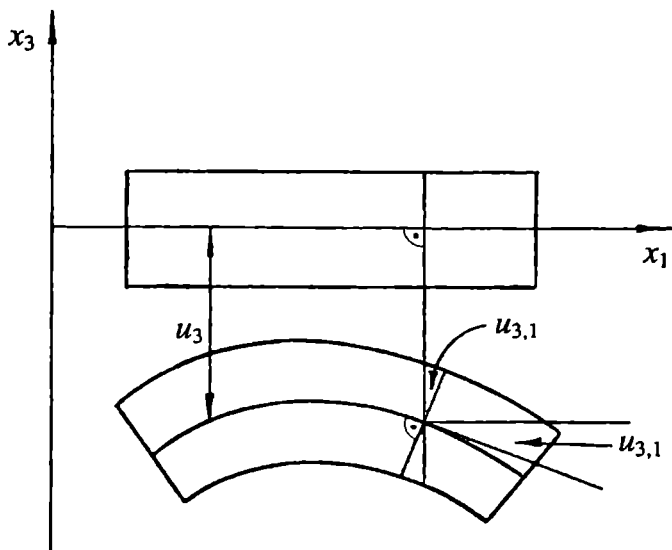
$$\frac{1}{80} < \frac{2h}{b} < \frac{1}{5},$$

<sup>\*)</sup> გ. კირხჰოფი (1824-1887).

<sup>\*\*)</sup> ო. ლიავი (1863-1940).



სადაც  $2h$  ფირფიტის სისქეა, ხოლო  $b$  არის ფირფიტის  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე გეგმილის უმცირესი მახასიათებელი ზომა.



ნახ. 2.4.1

შევნიშნოთ, რომ თხელი ფირფიტების თეორია გამოდგება მაშინაც კი, როცა

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2h}{b} \leq \frac{1}{3}.$$

თუ  $\frac{2h}{b} > \frac{1}{3}$ , მაშინ ფირფიტა გაითვლება *სქელი ფირფიტე-*

*ბის* თეორიის საფუძველზე. თუ ჩაღუნვა  $u_3 > \frac{2h}{4}$ , ფირფიტა გაითვლება *მოქნილი ფირფიტების* თეორიის საფუძველზე. *სქელი* და *მოქნილი* (ან რაც იგივეა, დიდი ჩაღუნვების მქონე) ფირფიტების თეორიებს (იხ. მაგ., [58]) ჩვენ არ შევცხებით.

#### 2.4.1. გადაადგილებები და დეფორმაციები ფირფიტებში

კირხჰოფ-ლავის პირველი ჰიპოთეზის თანახმად, (1.6.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ  $e_{33} = u_{3,3} = 0$ . თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობას, მივიღებთ, რომ  $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ . გარდა ამისა, იმავე ჰიპოთეზის თანახმად:

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) = 0,$$

საიდანაც

$$u_{\alpha,3} = -u_{3,\alpha}. \quad (2.4.1)$$

თუ ვაინტეგრებთ მას  $x_3$ -ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$u_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} + f_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2.$$

მაგრამ მეორე ჰიპოთეზის თანახმად შუა სიბრტყეზე ამ ტოლობების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია. მარჯვენა მხარეში კი პირველი შესაკრები, როცა  $x_3 = 0$ , ცხადია, ნულის ტოლია. ამდენად,

$$f_\alpha(x_1, x_2) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

ამრიგად,

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = -x_3 u_{3,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.4.2)$$

ხოლო

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) = -\frac{x_3}{2}(u_{3,\alpha\beta} + u_{3,\beta\alpha}) = -x_3 u_{3,\alpha\beta}, \quad (2.4.3)$$

$\alpha = 1, 2,$

და ისინი განისაზღვრებიან  $u_3$ -ის საშუალებით.

### 2.4.2. ძაბვები ფირფიტაში

კირხჰოფ-ლიავის მესამე ჰიპოთეზის თანახმად, ჰუკის (1.12.26) კანონიდან ვიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \Theta_2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.4.4)$$

სადაც

$$\Theta_2 := X_{11} + X_{22}.$$

აქედან

$$e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \Theta_2 - \frac{2\nu}{E} \Theta_2,$$

ე.ი., (2.4.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu} x_3 u_{3,\alpha\alpha}.$$

ამ უკანასკნელის (2.4.4)-ში ჩასმა გვაძლევს, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 u_{3,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta},$$

კერძოდ, თუ  $\beta = \alpha$ -ს,

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 u_{3,\gamma\gamma}.$$

საიდანაც, რადგან  $u_{3,\gamma\gamma} = u_{3,\alpha\alpha} + u_{3,\beta\beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ), (2.4.3)-ის თანახმად,

$$X_{\alpha\alpha} = -\frac{E}{1+\nu} x_3 u_{3,\alpha\alpha} - \frac{E\nu}{1-\nu^2} x_3 u_{3,\gamma\gamma} =$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left[ (1-\nu) u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta} \right],$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

და

$$X_{\alpha\alpha} = -\frac{E x_3}{1-\nu^2} (u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta}), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.4.5)$$

(2.4.4) და (2.4.3)-დან ცხადია, რომ

$$X_{12} = -\frac{E x_3}{1+\nu} u_{3,12}. \quad (2.4.6)$$

პირველი ჰიპოთეზის გამო, ჰუკის (1.12.26) კანონიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ

$$X_{\alpha 3} = \frac{E}{1+\nu} e_{\alpha 3} = 0. \quad (2.4.7)$$

მესამე ჰიპოთეზის თანახმად კი ჩვენ დავუშვით, რომ

$$X_{33} = 0. \quad (2.4.8)$$

უგულელებლყოთ მოცულობითი ძალები. მაშინ წონასწორობის (1.15.1) განტოლებები მიიღებენ

$$X_{ij,j} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

სახეს. (2.4.7) და (2.4.8), ერთის მხრივ, ეწინააღმდეგება წონასწორობის ამ განტოლებებს, რამდენადაც თუ თვით წონასწორობის განტოლებებს ამოვხსნით  $X_{i3}$ -ის,  $i=1, 2, 3$  მიმართ, გავითვალისწინებთ (2.4.5)-ს, (2.4.6)-ს და იმას, რომ

$$X_{\alpha 3}|_{x_3=\pm h} = 0, \quad X_{33}|_{x_3=\pm h} = \pm q, \quad (\pm)$$

მივიღებთ, რომ (იხ. [55], გვ. 116-118)

$$X_{\alpha 3} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}(h^2 - x_3^2)(\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.4.9)$$

ხოლო

$$X_{33} = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{2} + \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(h^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3}\right)\Delta^2 u_3, \quad (2.4.10)$$

სადაც  $q^{(+)}$  და  $q^{(-)}$  შესაბამისად ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირებზე მოდებულ ძალებს აღნიშნავს; თუმცა, მეორე მხრივ, (2.4.9) და (2.4.10)-დან გამომდინარეობს, რომ  $X_{\alpha 3}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , მეორე რიგის მცირე სიდიდეა  $h$ -ის მიმართ, ხოლო  $X_{33}$  კი განივი დატვირთვის ინტენსიურობის რიგისაა და შეადგენს  $X_{\alpha\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ძაბვების უმნიშვნელო ნაწილს (იხ. 2.4.3 ქვეპარაგრაფი), თუ შესაბამისად  $u_3$ -ის მესამე და მეოთხე რიგის წარმოებულები  $x_1$  და  $x_2$ -ის მიმართ შემოსაზღვრულია.

### 2.4.3. ძალები ფირფიტებში

განვიხილოთ

$$N_\alpha = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\alpha} dx_3, \quad \alpha = 1, 2.$$

რადგანაც (2.4.5)  $x_3$ -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$N_\alpha = 0.$$

იმავე (2.4.5)-ის თანახმად *ძღუნავი მომენტი*

$$M_\alpha = M_{\alpha\alpha} := \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\alpha} x_3 dx_3 = -D(u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta}), \quad (2.4.11)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

ე.წ. ცილინდრული სიხისტვა.

თუ გავითვალისწინებთ (2.4.9)-ს, მივიღებთ ე.წ. გადამჭრელი  $Q_\alpha$  ძალების შემდეგ გამოსახულებას:

$$Q_\alpha := \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3} dx_3 = -D(\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.12)$$

რადგანაც (2.4.6)  $x_3$ -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$S := \int_{-h}^{+h} X_{12} dx_3 = 0$$

და ე.წ. შერეხვი მომენტი:

$$H := M_{21} = M_{12} = \int_{-h}^{+h} x_3 X_{12} dx_3 = -D(1-\nu)u_{3,12}. \quad (2.4.13)$$

$Q_\alpha$ ,  $M_\alpha$  და  $H$  სიდიდეები გათვლილია შუა სიბრტყისა და მისი პერპენდიკულარული სიბრტყის თანაკვეთის სიგრძის ერთეულზე. ცხადია, მათი საშუალებით ადვილად მივიღებთ ძაბვის ტენზორის კომპონენტების გამოსახულებებს. მართლაც, (2.4.5)-ის და (2.4.11)-ის შედარებით დავასკვნით, რომ

$$X_{\alpha\beta} = \frac{3M_\alpha x_3}{2h^3}, \quad \alpha = 1, 2,$$

ხოლო (2.4.6)-ის (2.4.13)-თან, (2.4.9)-ისა და (2.4.10)-ის (2.4.12)-თან შედარებით კი შესაბამისად დავასკვნით, რომ

$$X_{12} = \frac{3Hx_3}{2h^3}, \quad X_{\alpha 3} = \frac{3Q_\alpha}{4h^3}(h^2 - x_3^2),$$

$$X_{33} = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{2} - \frac{3Q_{\alpha,\alpha}}{4h^3} \left( h^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3} \right)$$

თუ ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარე წირის გარე ნორმალის  $n$ -ია, ხოლო  $t$  მხები, მაშინ, ანალოგიურად, (1.4.3), (1.2.1), (2.4.11)-(2.4.13)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned} M_n &:= \int_{-h}^{+h} X_{nn} x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{ij} n_i n_j x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta x_3 dx_3 \\ &= M_1 n_1^2 + 2H n_1 n_2 + M_2 n_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{nt} &:= \int_{-h}^{+h} X_{nt} x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{ij} n_i t_j x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta x_3 dx_3 \\ &= M_1 n_1 t_1 + H(n_1 t_2 + n_2 t_1) + M_2 n_2 t_2, \end{aligned}$$

$$Q_n := \int_{-h}^{+h} X_{n3} dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{i3} n_i dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3} n_\alpha dx_3 = Q_\alpha n_\alpha,$$

სადაც

$$n_i = \cos(n, x_i), \quad t_i = \cos(t, x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

და, ცხადია,  $n_3 = 0$ ,  $t_3 = 0$ .

#### 2.4.4. გაღუნული შუა ზედაპირის განტოლება

აზრობრივად ამოვჭრათ შუა სიბრტყიდან უსასრულოდ მცირე ელემენტი  $dx_1$  და  $dx_2$  (იხ. ნახ 2.4.2) გვერდებით. მასზე მოქმედი ძალები მოცემულია ნახაზზე. ამასთან იმ წირით ელემენტებთან, რომელთა ნორმალების მიმართულება ემთხვევა სა-

კოორდინატო ღერძების მიმართულებებს, მითითებულია ძალეების (საკუთრივ გადამჭრელი ძალებისა და მომენტების მოქმედებით გამოწვეული მობრუნების კუთხეების) დადებითი მიმართულებები, ე.ი. ის მიმართულებები, რა მიმართულებებითაც შესაბამისი სიდიდეები დადებით მნიშვნელობებს იღებენ. მომენტებისა და მათ მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებითი მიმართულებების გასარკვევად გავიხსენოთ მომენტის განმარტება. მარჯვენა სისტემაში რაიმე  $O_1$  წერტილის მიმართ  $O_2$  წერტილში მოდებული  $\vec{P}$  ძალის მომენტი განმარტება, როგორც  $\overline{O_1 O_2}$  და  $\vec{P}$  ვექტორების ისეთი ვექტორული ნამრავლი, რომ  $\overline{O_1 O_2}$ ,  $\vec{P}$  და  $[\overline{O_1 O_2}, \vec{P}]$  ვექტორებმა შექმნან მარჯვენა სისტემა. ამასთან მომენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებით მიმართულებად (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებით მიმართულებად) მიღებულია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულება. ამრიგად,  $(x_3, X_{11}, M_1)$  სამეულის დადებითი მნიშვნელობების შესაბამისმა მიმართულებებმა უნდა შექმნან მარჯვენა სისტემა. აქედან გამომდინარე  $M_1$  მომენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებითი მიმართულება (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებითი მიმართულება) ემთხვევა ნახ. 2.4.2-ზე მითითებულს. ანალოგიურად,  $(x_3, X_{22}, M_2)$  სამეულიდან ვასკენით, რომ  $M_2$ -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა  $x_1$  ღერძის უარყოფით მიმართულებას;  $(x_3, X_{12}, H)$  სამეულიდან ვასკენით, რომ  $H$ -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა  $x_1$  ღერძის უარყოფით მიმართულებას;  $(x_3, X_{21}, H)$  სამეულიდან ვასკენით, რომ  $H$ -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა  $x_2$  ღერძის დადებით მიმართულებას; ხოლო მათ დადებით მიმართულებათა გარშემო მათ მიერვე გა-



მოწვეულ ბრუნვათა დადებითი მიმართულებები ემთხვევა ნახაზზე მითითებულს. ელემენტი წონასწორობაშია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების  $x_3$  ღერძზე გვეგილების ალგებრული ჯამის ნულთან ტოლობის პირობიდან მივიღებთ, რომ

$$-Q_1 dx_2 - Q_2 dx_1 + \left( Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \left( Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + q dx_1 dx_2 = 0,$$

(+) (-)  
სადაც  $q := q + q$  (იხ. 2.4.2 ქვეპარაგრაფი) შუა სიბრტყეზე ნორმალურად მოქმედი ზედაპირული დატვირთვის ინტენსიურობაა. აქედან მსგავსი წევრების შეერთებისა და  $dx_1 dx_2$ -ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$Q_{\alpha, \alpha} = -q. \quad (2.4.14)$$

თუ ახლა  $x_\beta$ ,  $\beta = 1, 2$ , ღერძების მიმართ მომენტებს ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} & \left( M_\alpha + \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dx_\beta - M_\alpha dx_\beta + \left( H + \frac{\partial H}{\partial x_\beta} dx_\beta \right) dx_\alpha \\ & - H dx_\alpha - \left( Q_\alpha + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dx_\beta dx_\alpha + Q_\beta dx_\alpha \frac{dx_\alpha}{2} \\ & - \left( Q_\beta + \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta} dx_\beta \right) dx_\alpha \frac{dx_\alpha}{2} - q dx_\alpha dx_\beta \cdot \frac{dx_\alpha}{2} = 0, \\ & \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

საიდანაც მესამე რიგის უსასრულო მცირეების (ისინი ზაზგას-მულია) უგულებელყოფით ანალოგიურად გამომდინარეობს, რომ

$$M_{\alpha,\alpha} + H_{,\beta} = Q_{\alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.4.15)$$

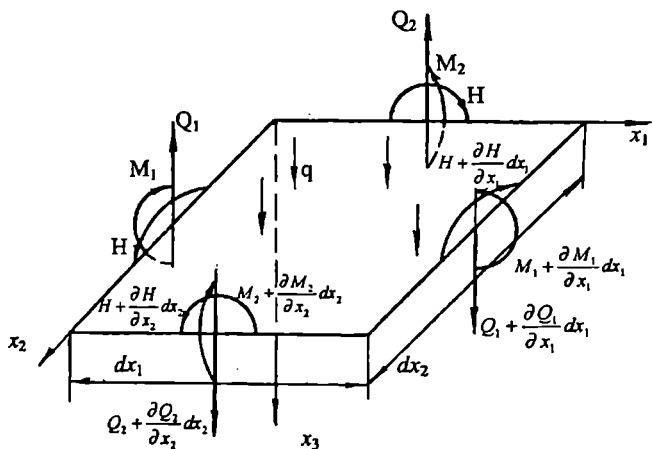
თუ (2.4.15)-ს ჩავსვამთ (2.4.14)-ში, მივიღებთ, რომ

$$(M_{1,1} + H_{,2})_{,1} + (M_{2,2} + H_{,1})_{,2} = -q. \quad (2.4.16)$$

ზოლო ამ უკანასკნელში  $M_{\alpha}$ -სა და  $H$ -ის (2.4.11) და (2.4.13) მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q}{D} \quad (2.4.17)$$

განტოლებას, რომელსაც სოფი ერმენ-ლაგრანჟის განტოლება ეწოდება.



ნახ. 2.4.2

შეგნიშნოთ, რომ (2.4.14) და (2.4.15) ფორმულები შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის (1.15.1) განტოლებების ინტეგრებითაც (იხ. ქვემოთ (2.5.3) და (2.5.4)).

(2.4.16) განტოლება გამოიყენება ცვლადი სისქის ფირფიტის, რომელიც სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს წარმოადგენს (იხ. ქვემოთ §2.6.), შემთხვევაშიც, თუ სისქე  $2h$  მკვეთრად არ იცვლება (იხ. [58], გვ. 199).

თუ (2.4.11)-სა და (2.4.13)-ს, რომლებიც ასევე სამართლიანია არამკვეთრად ცვლადი სისქის ფირფიტებისათვის (ე.ი.  $D(x_1, x_2)$  ფუნქციას) ჩავსვამთ (2.4.16)-ში, მივიღებთ ცვლადი სიხისტის, რომელიც შეიძლება დრეკადი მუდმივების ცვალებადობითაც იყოს გამოწვეული, შემთხვევაში ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{aligned} & (Du_{3,11})_{,11} + (Du_{3,22})_{,22} + \nu(Du_{3,22})_{,11} \\ & + \nu(Du_{3,11})_{,22} + 2[(1-\nu)Du_{3,12}]_{,12} = q. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

ღუნვის დინამიკის განტოლების მისაღებად, დაღამბერის პრინციპის თანახმად,  $q$  დატვირთვას უნდა დაემატოს ინერციის ძალის გეგმილი  $x_3$  ღერძზე. ეს იმით აიხსნება, რომ ერთი მხრივ, მოცულობითი ძალის  $x_3$  ღერძზე გეგმილი რომ არ უგულვებელგვეყო, ის სწორედ  $q$ -ს დაემატებოდა, ხოლო მეორე მხრივ, ინერციის ძალა მოცულობით ძალებს განეკუთვნება (იხ. აგრეთვე ქვემოთ (2.6.4)).

### 2.4.5. ძირითადი ამოცანები ფირფიტისათვის

ფირფიტების თეორიაში ჩვენ ვეძებთ (2.4.18) (კერძოდ 2.4.17) განტოლების ამონახსნს (ე.ი.  $u_3 \in C^4$ ), რომელიც შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობიდან ერთ-ერთს აკმაყოფილებს:

1. საზღვარზე მოცემულია  $u_3$  ჩაღუნვა და შუა სიბრტყის შემობრუნების კუთხე (დირიხლეს ამოცანა). ეს არის გეომეტრიუ-

ლი სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია (ნულოვანია), საზღვარს ჩამკვრებულს უწოდებენ.

2. საზღვარზე მოცემულია ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი. ეს არის ფიზიკური სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ საზღვარი სახსრულადაა დაყრდნობილი.

3. საზღვარზე მოცემულია გადამჭრელი ძალა, მღუნავი და მკრეხავი მომენტები (ნეიმანის ამოცანა). ეს სასაზღვრო პირობაც ფიზიკურია. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ საზღვარი თავისუფალია.

თუ სიცხადისათვის ვიგულისხმებთ, რომ საზღვრის ნორმალი  $x_2$  ღერძს ემთხვევა, ზემოთ ჩამოთვლილი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები მათემატიკურად შესაბამისად ასე ჩაიწერება:

1.  $u_3 = 0, u_{3,2} = 0$  (ამ შემთხვევაში, (2.4.13)-ის ძალით  $H = 0$ );
2.  $u_3 = 0, M_2 = 0$ ;
3.  $Q_2 = 0, M_2 = 0, H = 0$ .

სამგანზომილებიან მოდელში მათ (ერთგვაროვანი პირობების შემთხვევაში) შესაბამისად ეთანადება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

1.  $u_i = 0, i = 1, 2, 3$ ;
2.  $u_1 = 0, u_3 = 0, X_{22} = 0$ ;
3.  $X_{23} = 0, X_{22} = 0, X_{21} = 0$ .

მესამე ამოცანის შემთხვევაში მეოთხე რიგის (2.4.18) (კერძოდ, 2.4.17) ელიფსური განტოლებისათვის გვაქვს სამი სასაზღვრო პირობა, რაც სასაზღვრო ამოცანას არაკორექტულს ხდის. ამიტომ გარკვეულ მოსაზრებებზე დაყრდნობით (იხ. ნახ. 2.4.3),  $Q_2$ -სა და  $H$ -ის ნაცვლად საზღვარზე სახელდება ე.წ. განზოგადებული გადამჭრელი ძალა

$$\tilde{Q}_2 := Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x_1}$$

და ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გვექნება ორი სასაზღვრო პირობა.

დასასრულს შევნიშნავთ, რომ ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ თეორიაში არ სრულდება ჰუკის კანონი  $x_3$  ღერძის გასწვრივ და სასაზღვრო პირობები კმაყოფილდება ინტეგრალურად. მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში პირველი ჰიპოთეზის თანახმად  $e_{33} = 0$  და ამდენად  $x_3$  ღერძის გასწვრივ ჰუკის კანონი იღებს  $u_{1,1} + u_{2,2} = 0$  სახეს. საიდანაც, (2.4.1)-ის თანახმად გამოძვინარეობს, რომ  $\Delta_2 u_3 = 0$ , რაც, საზოგადოდ, არ სრულდება, რადგან  $u_3$  აკმაყოფილებს (2.4.17) განტოლებას და ამდენად, საზოგადოდ, ის ჰარმონიული ფუნქცია არაა.

უფრო დეტალურად ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ თეორიას შეიძლება გავეცნოთ [55]-სა და [58]-ში.

ზოგად შემთხვევაში, როცა საზღვრის ნორმალი  $\bar{n}$ -ია, კირხჰოფ-ლიავის მოდელის ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$1. \quad u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0;$$

$$2. \quad u_3 = 0, \quad M_n = 0;$$

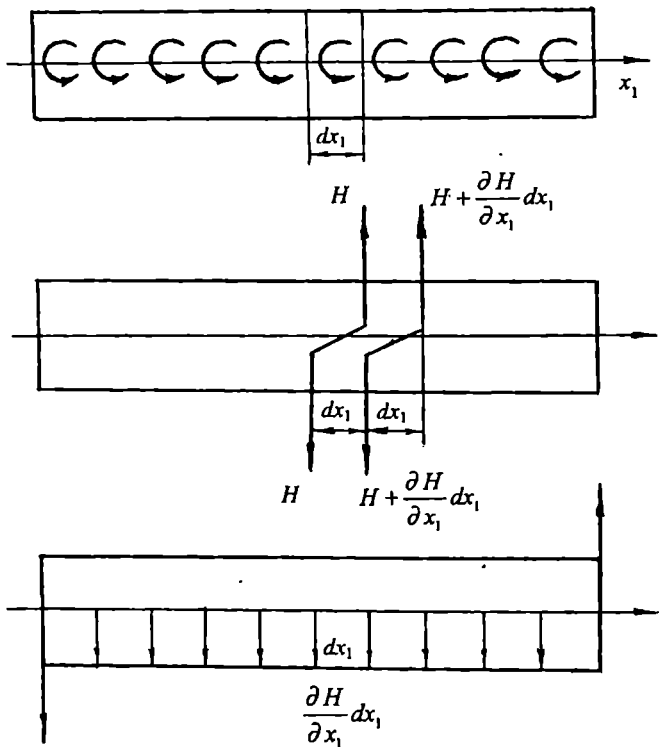
$$3. \quad M_n = 0, \quad \tilde{Q}_n := Q_n + \frac{\partial M_n}{\partial t},$$

რომელთაც სამგანზომილებიანი მოდელის შემდეგი სასაზღვრო პირობები შეესაბამება:

$$1. \quad u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$2. \quad X_m = 0, \quad u_i = 0, \quad u_3 = 0;$$

$$3. \quad X_m = 0, \quad X_n = 0, \quad X_{n3} = 0.$$



ნახ. 2.4.3

კირხჰოფ-ლიავის მოდელში განიხილავენ აგრეთვე ე.წ. სრიალა ჩამაგრების

$$4. \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0, \quad \tilde{Q}_n = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს, რომლებსაც სამგანზომილებიან მოდელში შეესაბამება

$$4. u_n = 0, X_{n1} = 0, X_{n3} = 0$$

სასაზღვრო პირობები.

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო პირობები. ვთქვათ,  $u_i = 0, i = 1, 2, 3, (x_1, x_2) \in \partial\omega, |x_3| < h$ , მაშინ თუ გავიხსენებთ იმას, რომ  $u_n$ -ით და  $u_i$ -თი აღნიშნულია გადაადგილების ვექტორის მდგენელები (კომპონენტები)  $\partial\omega$ -ზე გამავალი ცილინდრული ზედაპირისადმი (საზღვრისადმი)  $\vec{n}$  ნორმალისა და  $Ox_1x_2$  სიბრტყის პარალელური  $\vec{i}$  მხების მიმართულებებით, დავასკვნით, რომ ერთი მხრივ, (2.4.2)-ის თანახმად,

$$u_n = u_\alpha n_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} n_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n},$$

$$u_i = u_\alpha t_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} t_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial t},$$

და, ამდენად,

$$u_n = 0, u_i = 0 \text{ და } x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, x_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0, \text{ როცა}$$

$$(x_1, x_2) \in \partial\omega, |x_3| \leq h.$$

საიდანაც იმის გათვალისწინებით, რომ კირხჰოფ-ლიავის მოდელში  $u_3$  არ არის დამოკიდებული  $x_3$ -ზე, მივიღებთ, რომ

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial n} \right|_{\partial\omega} = 0.$$

მეორე მხრივ კი

$$u_3|_{\partial\omega} = 0.$$

მეორე, მესამე და მეოთხე სასაზღვრო პირობების შემთხვევა ნათელია, რადგან იქიდან, რომ

$$X_{n_1} = 0, X_{n_2} = 0 \text{ და } X_{n_3} = 0, \text{ როცა } (x_1, x_2) \in \partial\omega, \\ |x_3| < h,$$

შესაბამისად გამომდინარეობს, რომ

$$M_n = 0, M_{n_1} = 0 \text{ და } Q_n = 0, \text{ როცა } (x_1, x_2) \in \partial\omega,$$

ხოლო, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ,

$$u_n = 0, \text{ როცა } (x_1, x_2) \in \partial\omega, |x_3| < h,$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \text{ როცა } (x_1, x_2) \in \partial\omega.$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

#### 2.4.6. ფირფიტის ღუნვა დრეკად ფუძეზე

*დრეკადი ფუძე* ეწოდება დრეკად დეფორმირებად სხეულს, რომელსაც მთელი თავისი ქვედა პირითი ზედაპირით ეყრდნობა ფირფიტა ან ღერო (იხ. ქვემოთ ნაწ. III).

*ვინკლერის<sup>\*)</sup>* ექსპერიმენტული ჰიპოთეზის თანახმად დრეკად ფუძეზე ფირფიტის ან ღეროს დაწოლით გამოწვეული *დრეკადი ფუძის რეაქციის R ინტენსიურობა* ქვედა ფუძის ჩაღუნვის (ე.ი. კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში შუა სიბრტყის  $u_3$  ჩაღუნვის, რადგან ის  $x_3$ -ზე არ არის დამოკიდებული) პროპორციულია

$$R = k u_3,$$

სადაც  $k$  *დრეკადი ფუძის მოდულია*, გათვლილი ფართის ერთეულზე, როცა ჩაღუნვა სიგრძის ერთეულის ტოლია.  $k$ , რომ-

<sup>\*)</sup> ე. ვინკლერი (1835-1888).



ლის ერთეულია  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^3}$ , დრეკადი ფუძის მასალაზე და მოკიდებული და დგინდება ექსპერიმენტით (იხ. [58], გვ. 290).

თუ  $q$  ფირფიტის დატვირთვის ინტენსიურობაა, მაშინ, ცხადია, დრეკადი ფუძის რეაქციის გათვალისწინებით ფირფიტაზე მოქმედი მთლიანი დატვირთვის ინტენსიურობა

$$(q - ku_3) \text{-ის} \quad (2.4.19)$$

ტოლია. ამდენად დრეკად ფუძეზე მდებარე ფირფიტის ღუნვის განტოლების მისაღებად (2.4.17) და (2.4.18) განტოლებებში  $q$  უნდა შევცვალოთ (2.4.19)-ით:

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q - ku_3}{D}$$

და

$$\begin{aligned} (Du_{3,11})_{,11} + (Du_{3,22})_{,22} + \nu(Du_{3,11})_{,22} + \nu(Du_{3,22})_{,11} \\ + 2[(1-\nu)Du_{3,12}]_{,12} = q - ku_3. \end{aligned}$$

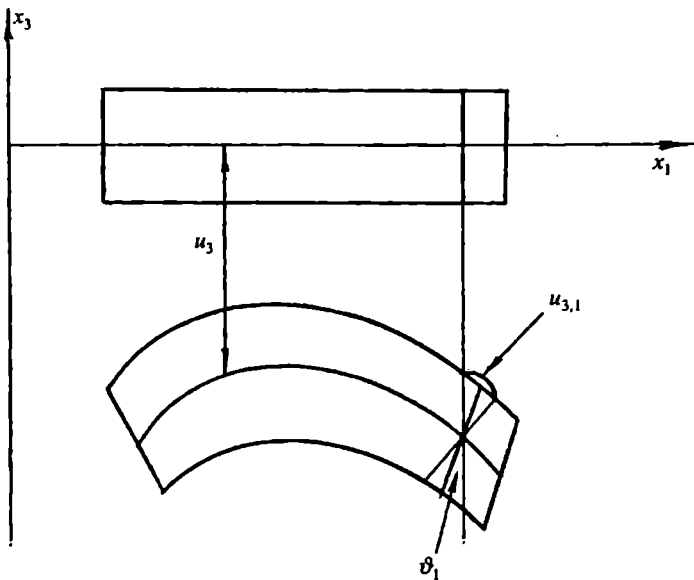
## §2.5. რაისნერ-მინდლინის მოდელი

მოკლედ შევხვით რაისნერ<sup>\*)</sup>-მინდლინის მოდელს [11], [29], [31]. კირხჰოფ-ლიავის მოდელისგან განსხვავებით ეს მოდელი საშუალებას იძლევა, ფირფიტის საზღვარზე დასახელებს სამივე ფიზიკური სიდიდე:  $Q_n$  გადამჭრელი ძალა,  $M_n$  მღუნავი მომენტი და  $M_{nn}$  მგრუნავი მომენტი. რაისნერ-მინდლინის მოდელი ემყარება შემდეგ სამ ძირითად პიპოთეზას:

1. წრფივი ნორმალუბის პიპოთეზა: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი რჩება (იხ. ნახ. 2.5.1).

<sup>\*)</sup> ე. რაისნერი (1913-1996).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ  $e_{33} = 0$ .



ნახ. 2.5.1

2. შუა სიბრტყის გაუჭიმეადობის პიპოთეზა: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ იღუნება, ე.ი. შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძერის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_\alpha(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

3. შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის ჰიპოთეზა: აღნიშნული წნევის სიმციარის გამო ფირფიტის ფენებს შორის წნევა უგულებელყოფილია.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ  $X_{33} \equiv 0$ .

როგორც ვხედავთ, განსხვავება რაისნერ-მინდლინისა და კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზებს შორის მხოლოდ პირველ ჰიპოთეზებშია და იმაში გამოიხატება, რომ თუ კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში დეფორმაციამდე შუა სიბრტყისადმი ნორმალური ელემენტი დეფორმაციის შემდეგ შუა ზედაპირისადმი ნორმალური რჩება, რაისნერ-მინდლინის მოდელში ეს საზოგადოდ ასე არაა, ე.ი. ეს უკანასკნელი მოდელი უშვებს განივი ძვრის დეფორმაციას. ამიტომ ზოგჯერ რაისნერ-მინდლინის მოდელს უწოდებენ *ფირფიტას განივი ძვრის დეფორმაციით*.

ახლა ისე მოვიქცეთ, როგორც (2.4.2) ფორმულის გამოყვანის დროს, იმის გათვალისწინებით, რომ ახლა

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(u_{\alpha, 3} + u_{3, \alpha}) = \frac{1}{2}\varphi_{\alpha}(x_1, x_2) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც  $\varphi_{\alpha}$  უცნობი ფუნქციებია, რომლებიც ძვრის კუთხეების ტოლია (იხ. §1.8-ის ბოლო ნაწილი). მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u_{\alpha} = -x_3\theta_{\alpha}(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.1)$$

სადაც

$$\theta_{\alpha}(x_1, x_2) = u_{3, \alpha} - \varphi_{\alpha}(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

წარმოადგენს  $Ox_{\alpha}x_3$ ,  $\alpha = 1, 2$ , სიბრტყეში შემობრუნების კუთხეს (როტაციას), რომელიც ფირფიტის ღუნვითაა გამოწვეული (იხ. ნახ. 2.5.1). რაისნერ-მინდლინის მოდელში  $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$  როტაცია, საზოგადოდ, არ არის დამოკიდებული  $u_3$  ჩაღუნვაზე. კირხჰოფ-ლიავის მოდელში კი (შეადარე (2.4.2)-ს)  $\varphi_{\alpha} = 0$  და, ამდენად,

$$\theta_\alpha = u_{3,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

(1.6.3) კინემატიკური ფორმულები, (2.5.1)-ის ძალით, მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$e_{\alpha\alpha} = -x_3 \theta_{\alpha,\alpha}, \quad e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(-\theta_\alpha + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.2)$$

$$e_{12} = -\frac{x_3}{2}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}), \quad e_{33} = 0.$$

(2.5.2) ფორმულებს რაისნერ-შინდლინის კინემატიკური ფორმულები ეწოდებათ.

(1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი გავამრავლოთ  $x_3$ -ზე, ვაინტეგრროთ სამივე განტოლება  $-h$ -დან  $+h$ -მდე  $x_3$ -ის მიმართ, გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ (2.4.11)-(2.4.13) აღნიშვნები, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$M_{\alpha\beta} - Q_\alpha + q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.3)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0, \quad (2.5.4)$$

სადაც

$$q_\alpha := \int_{-h}^{+h} x_3 \Phi_\alpha dx_3 + h[X_{\alpha 3}(x_1, x_2, h) - X_{\alpha 3}(x_1, x_2, -h)], \quad \alpha = 1, 2,$$

$$q_3 := \int_{-h}^{+h} \Phi_3 dx_3 + X_{33}(x_1, x_2, h) - X_{33}(x_1, x_2, -h).$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ადვილი მისახვედრია, რომ ამავე გზით შეიძლებოდა მიგველო (2.4.15) და (2.4.14). მართლაც, თუ  $\Phi_\alpha = 0$  და  $q_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ისინი გამოძლინარეობენ შესაბამისად (2.5.3) და (2.5.4)-დან. პირიქით, ზემოაღნიშნულ პირობებში (2.5.3) და (2.5.4) შეიძლება მივიღოთ ისე როგორც (2.4.15) და (2.4.14) მივიღეთ §2.4-ში.

თუ (2.5.3)-დან განვსაზღვრავთ  $Q_\alpha$ -ს და ჩავსვამთ (2.5.4)-ში, მივიღებთ, რომ

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0.$$

თუ  $2h$  სისქე მკვეთრად არ იცვლება, უკანასკნელი განტოლება და (2.5.1)-(2.5.4) დამოკიდებულებები, როცა  $\Phi_\alpha = 0$  და  $q_\alpha = 0$ , გამოყვანილი §2.4-ში გამოყენებული მეთოდით, გამოდგება ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვისაც. შევნიშნოთ, რომ ცვლადი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში (1.15.1) წონასწორობის განტოლებებიდან ინტეგრების მეთოდით (2.5.3), (2.5.4) არ მიიღება, რაც ცხადია ივეკუას მეთოდით ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვის აგებული იერარქიული მოდელიდან (იხ. ქვემოთ §2.6), რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერად ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტებისთვის.

რამდენადაც კირხჰოფ-ლიაეისა და რაისნერ-მინდლინის შესამე ჰიპოთეზები ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ რაისნერ-მინდლინის მოდელის შემთხვევაშიც სამართლიანია (2.4.4). თუ (2.4.4)-ში შევიტანთ (2.5.1)-ს, მივიღებთ, რომ

$$-x_3 \theta_{\alpha,\alpha} = e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{E} \Theta_2,$$

ე.ი.

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu} x_3 \theta_{\alpha,\alpha}$$

და

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \theta_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta},$$

საიდანაც

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \theta_{\gamma,\gamma}.$$

აქედან, რადგანაც  $\theta_{\gamma,\gamma} = \theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \theta_{\beta,\underline{\beta}}$  ( $\alpha \neq \beta$ ), (2.5.1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} -X_{\alpha\underline{\alpha}} &= \frac{E}{1+\nu} x_3 \theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} x_3 \theta_{\gamma,\gamma} \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left[ (1-\nu)\theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \nu\theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \nu\theta_{\beta,\underline{\beta}} \right], \end{aligned}$$

ე.ი.

$$X_{\alpha\underline{\alpha}} = -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left( \theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \nu\theta_{\beta,\underline{\beta}} \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.5.5)$$

(2.4.4) და (2.5.2)-დან ცხადია, რომ

$$X_{12} = -\frac{E}{2(1+\nu)} x_3 (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}). \quad (2.5.6)$$

ჰუკის (1.12.26) კანონიდან და (2.5.2)-დან კი გამოძღინარებობს, რომ

$$X_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1+\nu)} (-\theta_{\alpha} + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.5.7)$$

თუ (2.4.11)-(2.4.13)-ის უკანასკნელის წინა ტოლობებში შესაბამისად ჩავსვამთ (2.5.5), (2.5.7), (2.5.6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$M_{\alpha} = M_{\alpha\underline{\alpha}} = -D \left( \theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \nu\theta_{\beta,\underline{\beta}} \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.8)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{Eh}{1+\nu} (-\theta_{\alpha} + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.9)$$

$$H = M_{12} = M_{21} = -\frac{1}{2} D(1-\nu) (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}). \quad (2.5.10)$$

ზოგჯერ (2.5.9)-ის მარჯვენა მხარე გამრავლებულია ე.წ. ძვრის კორექტურის  $\tilde{k}$  მამრავლზე.  $\tilde{k}$ -ს ძვრის კოეფიციენტსაც

უწოდებენ. ამ შემთხვევაში ძირითადად თვლიან, რომ  $\tilde{k} = \frac{5}{6}$  ან

$$\tilde{k} = \frac{\pi^2}{12}.$$

ამოცხსნათ (2.5.9)  $\theta_\alpha$ -ს მიმართ

$$\theta_\alpha = u_{3,\alpha} - \frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha.$$

მიღებული სიდიდე ჩავსვათ (2.5.8)-ში და (2.5.10)-ში, მაშინ  $\omega$  არეში

$$M_\alpha = -D(u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta}) + D \left[ \left( \frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha \right)_{,\alpha} + \nu \left( \frac{1+\nu}{Eh} Q_\beta \right)_{,\beta} \right], \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.11)$$

$$H = -D(1-\nu)u_{3,12} + \frac{1}{2}D(1-\nu) \left[ \left( \frac{1+\nu}{Eh} Q_1 \right)_{,2} + \left( \frac{1+\nu}{Eh} Q_2 \right)_{,1} \right]. \quad (2.5.12)$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $D$ ,  $E$ ,  $\nu$  და  $h$  მუდმივებია. (2.5.3)-ში ჩავსვათ (2.5.11), (2.5.12) და მიღებული გამოსახულებიდან,

(2.5.4)-ისა და  $\frac{1}{1-\nu} - 1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ -ს გათვალისწინებით, განვსაზ-

ღვროთ  $Q_1$   $\omega$  არეში:

$$Q_1 = - \left[ D(u_{3,11} + \nu u_{3,22}) \right]_{,1} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} (Q_{1,1} + \nu Q_{2,2})_{,1}$$

$$\begin{aligned}
& -D(1-\nu)u_{3,122} + \frac{h^2}{3}(Q_{1,2} + Q_{2,1})_{,2} + q_1 = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1 \\
& + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\nu Q_{1,11} + \frac{h^2}{3(1-\nu)}Q_{1,11} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\nu Q_{2,21} + \frac{h^2}{3}Q_{2,12} + q_1 \\
& = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1 + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}Q_{1,11} + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}Q_{2,21} + q_1 \\
& = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}q_{3,1} + q_1. \quad (2.5.13)
\end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$Q_2 = -D(\Delta u_3)_{,2} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_2 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}q_{3,2} + q_2. \quad (2.5.14)$$

(2.5.13)-ის და (2.5.14)-ის (2.5.4)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$q_3 - D\Delta\Delta u_3 - \frac{h^2}{3}\Delta q_3 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} = 0.$$

საიდანაც, (1.12.18)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned}
D\Delta\Delta u_3 &= q_3 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} \\
&= q_3 - \frac{4h^2(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha}.
\end{aligned}$$

აქედან, თუ დავუშვებთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური, ამასთან ჰარმონიული დატვირთვა, ე.ი.  $q_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , და  $\Delta q_3 = 0$ , მივიღებთ ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.4.17) განტოლებას.

(2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.10) დამოკიდებულებები შეიცავენ შემდეგ რვა უცნობ სიდიდეს:  $u_3$ ,  $\theta_\alpha$ ,  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $M_{\alpha\beta}$ ,



$\alpha, \beta = 1, 2$ . ჩავსვათ (2.5.8)-(2.5.10) გამოსახულებები (2.5.3), (2.5.4)-ში:

$$[D(\theta_{1,1} + v\theta_{2,2})]_{,1} + \frac{1}{2}[D(1-v)(\theta_{1,2} + \theta_{2,1})]_{,2} - \frac{Eh}{1+v}(\theta_1 - u_{3,1}) - q_1 = 0, \quad (2.5.15)$$

$$[D(\theta_{2,2} + v\theta_{1,1})]_{,2} + \frac{1}{2}[D(1-v)(\theta_{1,2} + \theta_{2,1})]_{,1} - \frac{Eh}{1+v}(\theta_2 - u_{3,2}) - q_2 = 0,$$

$$\left[ \frac{Eh}{1+v}(\theta_\alpha - u_{3,\alpha}) \right]_{,\alpha} - q_3 = 0. \quad (2.5.16)$$

(2.5.15), (2.5.16) წარმოადგენენ  $\omega$  არეში შეეკესე რიგის\*) ელიფსურ სიტემას  $\theta_1, \theta_2$  და  $u_3$  უცნობების მიმართ.

შენიშნოთ, რომ (2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.10) და (2.5.15), (2.5.16) დამოკიდებულებები გამოყვანილია, საზოგადოდ, ცვლადი, ე.ი.  $(x_1, x_2)$ -ზე დამოკიდებული  $D, E, v$  და  $h$ -სთვის.

(1.12.9) ჰუკის კანონის ორივე მხარე, როცა  $i = \alpha, j = \beta$ , გავამრავლოთ  $x_3$ -ზე, მიღებული ტოლობები და (1.12.9), როცა  $i = \alpha, j = 3$ , ვაინტეგრროთ  $-h$ -დან  $+h$ -მდე  $x_3$ -ის მიმართ და გავითვალისწინოთ (2.5.2), მივიღებთ შემდეგ კონსტიტუტიურ დამოკიდებულებებს:

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}h^3[\lambda\theta_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \mu(\theta_{\beta,\alpha} + \theta_{\alpha,\beta})], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.5.17)$$

$$Q_\alpha = 2\mu h(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha), \quad \alpha = 1, 2.$$

\*) ე.ი. მორე რიგის სამი განტოლებისაგან შემდგარ ელიფსურ სისტემას.

(2.5.17)-ის (2.5.3)-სა და (2.5.4)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\frac{2}{3} \{h^3 [\lambda \theta_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu(\theta_{\beta, \alpha} + \theta_{\alpha, \beta})]\}_{, \beta} + 2\mu h(u_{3, \alpha} - \theta_{\alpha}) - q_{\alpha} = 0, \\ \alpha = 1, 2,$$

$$[2\mu h(u_{3, \alpha} - \theta_{\alpha})]_{, \alpha} + q_3 = 0.$$

(1.12.18)-ის ძალით, ეს სისტემა ემთხვევა (2.5.15), (2.5.16) სისტემას. თუ  $\lambda$ ,  $\mu$  და  $h$  მუდმივებია, მაშინ ეს სისტემა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს (იხ. [11], გვ. 3):

$$(Av)(x_1, x_2) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad (2.5.18)$$

სადაც  $\omega$  ფორფიტის პროექციაა  $x_3 = 0$  სიბრტყეზე,  $A$  მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორია შემდეგი ელემენტებით

$$A_{\alpha\alpha} := -\frac{2}{3} h^3 \mu \Delta - \frac{2}{3} h^3 (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} - 2\mu h, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$A_{33} := -2\mu h \Delta, \quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$A_{12} = A_{21} := -\frac{2}{3} h^3 (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$A_{\alpha 3} = -A_{3\alpha} := 2\mu h \theta_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$v := (\theta_1, \theta_2, u_3)^T, \quad q := (q_1, q_2, q_3)^T.$$

კირხჰოფ-ლიავის მოდელისაგან განსხვავებით უკვე არ არის საჭირო განზოგადებული გადამჭრელი ძალის ხელოვნური ცნების შემოღება და საზღვარზე შეიძლება სამი ბუნებრივი პირობის დასმა, რამდენადაც (2.5.18) ელიფსური სისტემა მე-ნ რიგისაა.

1. ხისტად ჩამავრებული ნაპირი ანუ ღირიხლეს ამოცანა. ამ ნაპირს არც გადაადგილება და არც მობრუნება არ შეუძლია:

$$u_3 = 0, \quad \theta_n = 0, \quad \theta_l = 0. \quad (2.5.19)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.19) შეესაბამება ერთგვაროვან (1.15.6) პირობებს.

2. რბილად ჩამავრებული ნაპირი. ხისტად ჩამავრებული ნაპირისაგან განსხვავებით ნაპირს შეუძლია ტანგენციალური (მხები) მიმართულებით (ე.ი. ნორმალის გარშემო) მობრუნება. ამდენად, მგრეხავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad \theta_n = 0, \quad M_{nn} = 0. \quad (2.5.20)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.20) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad u_n = 0, \quad X_{nn} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

3. ხისტად დაყრდნობილი ნაპირი. ამ ნაპირს შეუძლია ნორმალური მიმართულებით (ე.ი. მხების გარშემო) მობრუნება. მაღენად მღუნავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad \theta_l = 0. \quad (2.5.21)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.21) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad u_l = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

4. რბილად დაყრდნობილი ნაპირი. ამ ნაპირს შეუძლია ნებისმიერად მობრუნება, მაგრამ არ შეუძლია გადაადგილება (რადგან ამ მოდელში  $u_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ყოველთვის):

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{nn} = 0. \quad (2.5.22)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.22) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

5. თავისუფალი ნაპირი ანუ ნეიმანის ამოცანა:

$$M_n = 0, \quad M_{nn} = 0, \quad Q_n = 0. \quad (2.5.23)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.23) პირობები შეესაბამება

$$X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad X_{n3} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

იხე, როგორც ეს ვარგუნეთ ქვეპარაგრაფი 2.4.5-ში, ცხადია მე-4 და მე-5 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან.

იქიდან, რომ  $u_1 = 0$  და  $u_3 = 0$  ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე, გამომდინარეობს, რომ ცილინდრული ზედაპირის მხებ სიბრტყეში შემობრუნებას ადგილი არ ექნება, რადგან ცილინდრულ ზედაპირზე არც ვერტიკალურად ( $x_3$ -ის პარალელურად) და არც მხები მიმართულებით ცილინდრული ზედაპირის წერტილები არ გადაადგილდება, ე.ი.  $\theta_1 = 0$ . აქედან გამომდინარეობს მე-3 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან. ანალოგიურად, მე-2 სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში  $u_n = 0$  და  $u_3 = 0$  პირობების ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე შესრულებიდან გამომდინარეობს, რომ  $n$  ნორმალზე და  $x_3$  ღერძზე გამავალი სიბრტყით ცილინდრული ზედაპირის კვეთაზე მდებარე წერტილები არ გადაადგილდებიან აღნიშნულ სიბრტყეში. ამიტომ ამ სიბრტყეში საზღვარი ვერ მობრუნდება, ე.ი.  $\theta_n = 0$ .

პირველი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში (1.15.6) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს (იხ. ქვეპარაგრაფი 2.4.5), რომ  $u_n = 0$  და  $u_1 = 0$  სრულდება ფირფიტის ცილინდრულ საზღვარზე. ეს კი, იმის გათვალისწინებით, რომ  $u_3 = 0$  ცილინდრულ საზღვარზე, გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ მე-2 და მე-3 სასაზღვრო პირობების შემთხვევის მსგავსად დავასკვნათ, რომ  $\theta_n = 0$  და  $\theta_1 = 0$ .

ცხადია, შეიძლება განხილულ იქნეს არაერთგვაროვანი (2.5.19)-(2.5.23) სასაზღვრო პირობებიც (ე.ი. სასაზღვრო პირობებში შემავალი სიდიდეები წინასწარ დასახელებულ, საზოგა-

ლოდ, არაიგივეურად ნულოვანი ფუნქციების მნიშვნელობებს ემთხვევიან).

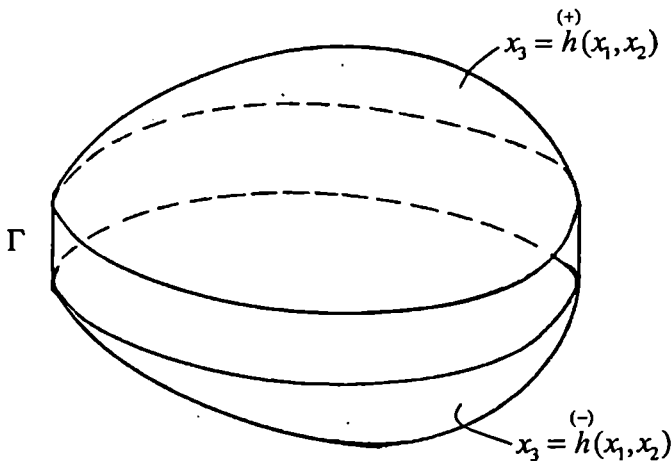
დინამიკის განტოლებების მისაღებად, სტატიკის განტოლებებში  $q_i$ -ის,  $i = 1, 2, 3$ , უნდა დაემატოს ინერციის ძალის შესაბამისი კომპონენტები, ხოლო დინამიკის ამოცანების განხილვისას სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

## §2.6. პრიზმული გარსების ივეკუას იერარქიული მოდელები

კირხჰოფ-ლიავის პიპოთეზებზე დაფუძნებულ ფირფიტების თეორიას, როგორც ეს §2.4-ში ვნახეთ, აქვს ის შინაგანი წინააღმდეგობა, რომ ძირითად განტოლებათა სისტემა არ არის თავსებადი ფიზიკურ სასაზღვრო პირობებთან. ამ წინააღმდეგობის თავიდან აცილების ერთი ვარიანტი წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. ახლა გავეცნობით კიდევ ერთ ვარიანტს, რომელიც შემოგვთავაზა ივეკუამ [34], [38-40]. ამასთან განვიხილავთ პრიზმულ გარსებს, რომლებიც ცვლადი სისქის ფირფიტებს, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავენ.

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია  $z = h^{(+)}(x_1, x_2)$  და  $z = h^{(-)}(x_1, x_2)$  ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან -  $\Gamma$  ცილინდრული ზედაპირით (იხ. ნახ. 2.6.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური  $Ox_3$  ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი*. სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე.ი. როცა

$$h^{(-)}(x_1, x_2) = -h^{(+)}(x_1, x_2)$$
 პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას.  $2h(x_1, x_2) = h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2) \geq 0$  სიდიდეს ეწოდება *პრიზმული გარსის სისქე*.



ნახ. 2.6.1

პრიზმული გარსის გეგმილი  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე აღნიშნოთ  $\omega$ -თი, მის საზღვარს გარსის საზღვარი ეწოდება.

ჯერ კიდევ კოშიმ გამოიყენა ფირფიტების შესწავლის დროს გადაადგილების, დეფორმაციების და ძაბვების ხარისხოვან მწკრივად გაშლის მეთოდი. ეს მიდგომა აქვთ სხვა ავტორებსაც. ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ მწკრივად გაშლას ეყრდნობა და რომელზეც ჩვენ შევჩერდებით, ი. ვეკუას ეკუთვნის.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი  $f(x) \in C^2([-1, +1])$  ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ (იხ. დამატება 2):

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left( r + \frac{1}{2} \right) f_r P_r(x),$$

სადაც

$$P_r(x) := \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r (x^2 - 1)^r}{dx^r}$$

ლეჟანდრის პოლინომია, ხოლო

$$f_r := \int_{-1}^{+1} f(x) P_r(x) dx$$

და მას ეწოდება  $f$ -ის  $r$ -ური მომენტი ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ.

როცა  $[-1, +1]$ -ის ნაცვლად გვაქვს  $\left[ \overset{(-)}{h}, \overset{(+)}{h} \right]$  და  $f(x_1, x_2, x_3)$ -ს ფიქსირებული  $(x_1, x_2)$ -სთვის  $x_3$ -ის მიმართ აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ე.ი.  $f \in C_{x_3}^2 \left( \left[ \overset{(-)}{h}, \overset{(+)}{h} \right] \right)$ , ცხადია

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left( r + \frac{1}{2} \right) f_r(x_1, x_2) P_r(ax_3 - b),$$

სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია  $\left[ \overset{(-)}{h}, \overset{(+)}{h} \right]$  სეგმენტზე და

$$a := \frac{1}{h}, \quad b := \frac{\overset{(-)}{h} + \overset{(+)}{h}}{2h},$$

(2.6.1)

$$f_r(x_1, x_2) := \int_{\overset{(-)}{h}}^{\overset{(+)}{h}} f(x_1, x_2, x_3) P_r(ax_3 - b) dx_3.$$

თუ ვექტორი  $(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \in C_{x_3}^2 \left( \left[ \begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h & h \end{smallmatrix} \right] \right)$ , მაშინ ის შეიძ-

ლება  $\left[ \begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h & h \end{smallmatrix} \right]$  სეგმენტზე თანაბრად კრებად შემდეგ მწკრივად გაეშალოთ

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left( r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b).$$

ვაიერშტრასის<sup>\*)</sup> თეორემის თანახმად  $x_3$ -ის ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ  $x_3$ -ის მიმართ პოლინომებით. ამიტომ  $N$ -ის შერჩევით  $(u_i, X_{ij}, e_{ij})$ -ს შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ  $x_3$ -ის მიმართ ლეჟანდრის პოლინომების შემდეგი ჯამით:

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \cong \sum_{r=0}^N a \left( r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b). \quad (2.6.2)$$

თუ (1.12.9) დამოკიდებულებების ორივე მხარეს გავამრავლებთ  $P_r(ax_3 - b)$ -ზე და ვაინტეგრებთ  $\begin{smallmatrix} (-) \\ h \end{smallmatrix}$ -დან  $\begin{smallmatrix} (+) \\ h \end{smallmatrix}$ -მდე  $x_3$ -ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$X_{ijr}(x_1, x_2) = \lambda \theta_r(x_1, x_2) \delta_{ij} + 2\mu e_{ijr}(x_1, x_2), \quad r = 0, 1, \dots, \quad (2.6.3)$$

რაც წარმოადგენს პუკის კანონს, გადაწერილს მომენტებისათვის.

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის შემდეგი განტოლებები მომენტებისათვის (იხ. [38])

<sup>\*)</sup> კ.ვ. ვაიერშტრასი (1815-1897).



$$X_{\alpha r, \alpha} + \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}^r X_{\eta s} + X_j^r = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad (2.6.4)$$

$$r = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$a_{\alpha s}^r := (2s+1) \frac{h_{\alpha}^{(+)} - (-1)^{r+s} h_{\alpha}^{(-)}}{2h}, \quad s \neq r;$$

$$a_{\alpha r}^r := r \frac{h_{\alpha}^{(+)} - h_{\alpha}^{(-)}}{2h}, \quad a_{3s}^r := -(2s+1) \frac{1 - (-1)^{r+s}}{2h},$$

$$X_j^r = X_{3j}^{(+)} - X_{\alpha j}^{(-)} h_{\alpha}^{(+)} + (-1)^r \left[ -X_{3j}^{(-)} + X_{\alpha j}^{(+)} h_{\alpha}^{(-)} \right] + \Phi_{jr}$$

$$= Q_{n,j}^{(+)} \sqrt{1 + \binom{(+)}{h,1}^2 + \binom{(+)}{h,2}^2} + (-1)^r Q_{n,j}^{(-)} \sqrt{1 + \binom{(-)}{h,1}^2 + \binom{(-)}{h,2}^2} + \Phi_{jr},$$

$Q_{n,j}^{(+)}$ ,  $Q_{n,j}^{(-)}$  შესაბამისად ზედა და ქვედა პირით ზედაპირებზე

მოქმედი ზედაპირული ძალებია.  $n$  და  $n$  შესაბამისად ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირების გარე (გარსის მიმართ) ნორმალურებია.  $\Phi_{jr}$  მოცულობითი ძალის კომპონენტების  $r$ -ური მომენტებია.

დეფორმაციის ტენზორის  $r$ -ური მომენტები ასე ჩაიწერება:

$$e_{\eta r} = \frac{1}{2} \sum_{i=r}^{\infty} b_{is}^r u_{i\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{is}^r u_{is} + E_{\eta}^r, \quad (2.6.5)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$E_s^{(r)} = \frac{1}{2}(u_{s,r} + u_{r,s}), \quad b_{sr} = -(r+1) \frac{h_{s,\alpha}^{(+)} - h_{s,\alpha}^{(-)}}{2h},$$

$$b_{sr} = 0, \quad b_{rs} = \begin{cases} 0, & s < r, \\ r, & s = r, \\ -a_{rs}, & s > r. \end{cases}$$

(2.6.5) ჩავსვით (2.6.3)-ში, ხოლო მიღებული — (2.6.4)-ში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta u_{jr} + (\lambda + \mu) \frac{\partial E_j^r}{\partial x_j} + M_j^r(u_{rr}) + X_j^r = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad \text{სადაც}$$

$$r = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6.6)$$

$$E_j^r = E_{ji}^r.$$

$M_j^r$  წრფივი ოპერატორები დამოკიდებულია ფირფიტის სისქეზე და შეიცავენ მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

(2.6.6) ფაქტობრივად წარმოადგენს ლამეს განტოლებებს, ჩაწერილს მომენტებისათვის.

ვიგულისხმობთ, რომ

$$u_{ir} = 0, \quad \text{როცა } r > N \quad (2.6.7)$$

და (2.6.6) სისტემაში დავტოვოთ მხოლოდ პირველი  $N+1$  განტოლება. მიღებულ განტოლებათა სისტემაში  $u_{jr}$ , საზოგადოდ, უკვე არ წარმოადგენს  $u_j$ -ს  $r$ -ურ მომენტს, განსაზღვრულს (2.6.1) ტოლობით. მიღებული სისტემა შეესაბამება  $N$ -ურ მიახლოებას.

თუ გარსის გვერდით ზედაპირზე მოცემულია ან  $X_{ni} = f_i$  ძაბვები ან  $u_{ni} = f_i$  გადაადგილებები, ცხადია, მათი

$P_r(ax_3 - b)$ -ზე გამრავლებითა და  $h^{(-)}$ -დან  $h^{(+)}$ -მდე ინტეგრებით ადვილად ვიპოვით შესაბამის მომენტებს:

$$X_{nr} = f_r, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N}, \quad (2.6.8)$$

$$u_{ir} = f_r, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N}, \quad (2.6.9)$$

სადაც  $n$  გვერდითი ზედაპირის გარე ნორმალია.

დინამიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად დაისმის: ვიპოვოთ  $u_{jr} \in C^2(\omega)$ ,  $r = 0, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, 3$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.6.6) განტოლებას  $\omega$ -ში, დროის ნებისმიერ  $t \geq t_0$  მომენტში (2.6.8) ან (2.6.9) პირობებს გარსის საზღვარზე და

$$u_{rj}|_{t=t_0} = \varphi_{rj}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{rj}}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_{rj}(x_1, x_2),$$

$$(x_1, x_2) \in \omega, \quad r = \overline{0, N}, \quad j = 1, 2, 3,$$

საწყის პირობებს.

ამ გზით მიღებული სისტემის ღირსშესანიშნავი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ იგი განტოლებათა ორ ჯგუფად იყოფა. ერთი ჯგუფის მთავარი წევრები ემთხვევა ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითად განტოლებათა სისტემის ოპერატორს, ხოლო მეორე ჯგუფის მთავარი წევრები — ლაპლასის ოპერატორს. ეს იმის საშუალებას იძლევა, რომ პრიზმული გარსების გათვლისათვის გამოვიყენოთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიისათვის და ლაპლასის ოპერატორისათვის არსებული მათემატიკური აპარატი. ცხადია, ამონახსნის სიზუსტე იზრდება  $N$ -ის ზრდასთან ერთად. თუმცა ამასთან ერთად იზრდება სისტემაში შემაველ განტოლებათა რიცხვიც, რაც ართულებს მის ამოხსნას, მაგრამ პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე შეიძლება დავკმაყოფილოდეთ ნულოვანი ( $N = 0$ ) და პირველი ( $N = 1$ ) მიახლოებით.

დამტკიცებულია ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა და გარკვეულ პირობებში არსებობაც [34], [38-40], [16], [17], [33], [28], [5], [6], როცა  $2h > 0$ . შემთხვევა, როცა  $2h$  გარსის საზღვარზე ან მის ნაწილზე შეიძლება ნული გახდეს, ასეთ გარსებს წამახვილებული გარსები ეწოდება, განხილულია [44], [19-25]-ში. ი.ვეკუას ზემოაღწერილი რედუქციის მეთოდი განზოგადებულია ანიზოტროპული ფირფიტებისა [33] და გეომეტრიულად და ფიზიკურად არაწრფივი არადამრეცი გარსებისათვის [28].

შენიშვნა 2.6.1.  $N$ -ური მიახლოების სასაზღვრო პირობებში მოცემული გეაქვს ძაბვის ვექტორის ან გადაადგილების ვექტორის მომენტები. საძიებელი სიდიდეების აღსანიშნავად ვიყენებთ გადაადგილების ვექტორის მომენტების აღნიშვნებს, თუმცა ეს საძიებელი სიდიდეები, საზოგადოდ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არიან გადაადგილების ვექტორის მომენტები, მაგრამ მათკენ მიისწრაფვიან, როცა  $N \rightarrow +\infty$ . ამას იმასაც თუ დავუმატებთ, რომ რეგულარულ (არაწამახვილებულ) შემთხვევაში  $N$ -ურ მიახლოებაში დასმული ამოცანების ამონახსნები მიისწრაფვიან შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების ზუსტი ამონახსნებისაკენ [16], [17], [5], [6], ნათელი გახდება, რომ  $N$ -ურ მიახლოებაში ასეთი დასმა სავსებით მისაღებია. წამახვილებული გარსების შემთხვევაში საძიებელი ფუნქციების ვიწრო კლასებისათვის იგივე ფაქტს აქვს ადგილი [25], ხოლო ამოცანების ბუნებრივ წონიან სივრცეებში განხილვისას  $N \rightarrow +\infty$  დროს შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების დასმა სცილდება კლასიკურის ფარგლებს, რადგან ან არე არ არის ლიპშიცის, ან წერტილებში და ან წირების გასწვრივ შეყურსული ძალები იჩენს თავს [22], [24].

ნულოვან მიახლოებაში (2.6.6) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს [38]

$$\mu \Delta (h^{-1} u_{\beta 0}) + (\lambda + \mu) (h^{-1} u_{\gamma 0})_{,\gamma \beta} + \lambda (\ln h)_{,\beta} (h^{-1} u_{\alpha 0})_{,\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu(\ln h)_{,\alpha} (h^{-1}u_{\alpha 0})_{,\beta} + \mu(\ln h)_{,\alpha} (h^{-1}u_{\beta 0})_{,\alpha} + \frac{X_{\beta}^0}{h} \\
 & = \rho \frac{\partial h^{-1}u_{\beta 0}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2,
 \end{aligned}$$

$$\Delta(h^{-1}u_{30})_{,\alpha} + (\ln h)_{,\alpha} (h^{-1}u_{30})_{,\alpha} + \frac{X_3^0}{\mu h} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial h^{-1}u_{30}}{\partial t^2},$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 X_j^0 = Q_{n,j}^{(+)} \sqrt{1 + \left(\frac{(+)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(+)}{h_{,2}}\right)^2} + Q_{n,j}^{(-)} \sqrt{1 + \left(\frac{(-)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(-)}{h_{,2}}\right)^2} \\
 + \Phi_{j,0},
 \end{aligned}$$

$$Q_{n,j}^{(+)} = X_j \left( x_1, x_2, h, t \right) \cos \left( n, x_j \right),$$

$$Q_{n,j}^{(-)} = X_j \left( x_1, x_2, h, t \right) \cos \left( n, x_j \right).$$

შეენიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორი (იხ. [39])

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{2h} \bar{u}_0(x_1, x_2, t).$$

პირველ მიახლოებაში, თუ  $h = -h = -h$ , გადაადგილების ვექტორი [39]

$$\bar{U}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{2} \bar{u}(x_1, x_2, t) + \frac{3}{2} x_3 \bar{v}(x_1, x_2, t),$$

სადაც

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, t) = h^{-1}u_{\alpha 0}(x_1, x_2, t), \quad v_{\alpha}(x_1, x_2, t) = h^{-2}u_{\alpha 1}(x_1, x_2, t)$$

$$u_3 = h^{-1}u_{30}(x_1, x_2, t) =: u, \quad v_3 = h^{-2}u_{31}(x_1, x_2, t) =: v.$$

ამ მახლობლობაში (2.6.6) სისტემა სტატიკის შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს [39]

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( h \frac{\partial u_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h\theta) + 6\lambda \frac{\partial h v}{\partial \bar{z}} + X_+ = 0, \quad (2.6.10)$$

$$2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + 3\mu \left( \frac{\partial h v_+}{\partial z} + \frac{\partial h \bar{v}_+}{\partial \bar{z}} \right) + X = 0, \quad (2.6.11)$$

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial v_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h^3 \rho) - 2\mu h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 3\mu h v_+ + Y_+ = 0, \quad (2.6.12)$$

$$2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] - \lambda h \theta - 3(\lambda + 2\mu) h v + Y = 0, \quad (2.6.13)$$

სადაც

$$u_+ = u_1 + i u_2, \quad v_+ = v_1 + i v_2,$$

$$\theta = \frac{\partial u_+}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$X_+$  და  $X$  დამოკიდებულია მოცულობითი ძალების ნულოვან მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირულ ძალებზე, ხოლო  $Y_+$  და  $Y$  – მოცულობითი ძალების პირველ მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირული ძალებზე.

(2.6.10)-(2.6.13) განტოლებათა სისტემა ორ ჯგუფად იყოფა: (2.6.10) და (2.6.13) დამოკიდებულია მხოლოდ  $u_+$ -ზე და  $v$ -ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.11) და (2.6.12) დამოკიდებულია მხოლოდ  $u$ -ზე და  $v_+$ -ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის ღუნვას.

$$\text{შენიშვნა 2.6.2. სიმეტრიული } \left( \begin{matrix} (+) \\ h(x_1, x_2) = -h(x_1, x_2) \geq 0 \end{matrix} \right)$$

პრიზმული გარსის ფორმის მქონე სამგანზომილებიანი სხეულის  $u_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3,$

გადაადგილებები შეიძლება დავშალოთ ორ-ორ შესაკრებად  $u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i^c(x_1, x_2, x_3, t) + u_i^b(x_1, x_2, x_3, t), i = 1, 2, 3,$  რომელთაგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) + u_\alpha(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$\alpha = 1, 2,$$

რომელიც  $x_3$ -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა და

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) - u_3(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

რომელიც  $x_3$ -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას (მართლაც, შუა სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, 0, t) = u_\alpha(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, (x_1, x_2) \in \omega,$$

და არ ილუნება, რადგან

$$u_3(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

ხოლო

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2, -x_3, t)],$$
$$\alpha = 1, 2,$$

რომელიც  $x_3$ -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა და

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) + u_3(x_1, x_2, -x_3, t)],$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

რომელიც  $x_3$ -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა, შეესაბამება ლუნვას (მართლაც, შუა სიბრტყე არც იჭიმება და არც იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

მაგრამ ილუნება, რადგან

$$u_3^b(x_1, x_2, 0, t) = u_3(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega).$$

ზემოაღნიშნულის შესაბამისად, თუ

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_{ir}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ  $x_3$ -ის მიმართ  $P_r$  კენტი ფუნქციაა კენტი  $r$ -სათვის და ლუწი ფუნქციაა ლუწი  $r \geq 0$ -სათვის, დავასკვნით, რომ

$$u_\alpha, r \text{ ლუწია; } u_{3r}, r \text{ კენტია,} \quad (2.6.14)$$

შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას. მართლაც,



$$u_{\alpha}^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_{\alpha r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

( $r$  ლუწია)

ლუწია  $x_3$ -ის მიმართ,

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=1}^{\infty} u_{3r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

( $r$  კენტია)

კი კენტია. ხოლო

$$u_{\alpha r}, \quad r \text{ კენტია}; \quad u_{3r}, \quad r \text{ ლუწია}, \quad (2.6.15)$$

შეესაბამება ლუნვას. მართლაც,

$$u_{\alpha}^b = \sum_{r=1}^{\infty} u_{\alpha r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

( $r$  კენტია)

კენტია  $x_3$ -ის მიმართ,

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_{3r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

( $r$  ლუწია)

კი ლუწია.

(2.6.6) სისტემა შეიძლება გადავწეროთ დივერგენტული ფორმით ცხადი სახით ამოწერილი უმცროსი კოეფიციენტებით [20].  $N$ -ურ მიახლოებაში მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned} & \mu \left[ \left( h^{2r+1} \underset{\alpha}{V}_{\alpha r, j}^N \right) + \left( h^{2r+1} \underset{\alpha}{V}_{j r, \alpha}^N \right) \right] + \lambda \delta_{\alpha j} \left( h^{2r+1} \underset{\alpha}{V}_{r r, r}^N \right) \\ & + \sum_{s=r+1}^N \left( \underset{\alpha}{B}_{\alpha j k s}^r h^{r+s+1} \underset{\alpha}{V}_{k s}^N \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{r-1} a_{is} \left[ \lambda \delta_{ij} h^{r+s+1} v_{rs,\gamma}^N + \mu h^{r+s+1} \left( v_{is,j}^N + v_{js,i}^N \right) + \sum_{l=s+1}^N B_{ijkl} h^{r+s+1} v_{kl}^N \right] \\
& + h^r X_j^r = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{jr}^N}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3, \quad r = \overline{0, N}, \quad (2.6.16)
\end{aligned}$$

სადაც

$$v_{ir}^N := \frac{u_{ir}}{h^{r+1}},$$

$N$  ნიშნაკი აღნიშნავს  $N$ -ურ მიახლოებას.  $v_{ir}^N$ -ს ეწოდება წონითი მომენტი  $N$ -ურ მიახლოებაში. შევნიშნოთ, რომ (2.6.6) სისტემის შესაბამის უსასრულო სისტემას იგივე (2.6.16) სახე აქვს, მხოლოდ ჯამებში  $N$  უსასრულობით უნდა შევცვალოთ და უცნობ სიდიდეებს  $N$  ნიშნაკი მოვაშოროთ; ე.ი. მივიღებთ სისტემას  $v_{ir}$ -ების, ან, რაც იგივეა,  $u_{ir}$ -ების,  $i = 1, 2, 3$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , მიმართ, რომლებიც  $u_i$ -ს ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტებია.

რადგან სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს ვიხილავთ, ამიტომ

$$h^{(+)}(x_1, x_2) + h^{(-)}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega. \quad (2.6.17)$$

(2.6.17)-ის თანახმად, ადვილი სანახავია, რომ



$$\overset{r}{B}_{\alpha\beta 3s} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} > r+s & \text{ლუწია, } s \geq r; \\ \lambda(2s+1)h^{-1}\delta_{\alpha\beta}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.21)$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma s} = \mu \delta_{\alpha\gamma} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} > r+s & \text{ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\alpha\gamma}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.22)$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 33s} = \mu \overset{r}{b}_{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} > r+s & \text{კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{\alpha}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{\alpha}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.23)$$

$$\overset{r}{B}_{3\beta\gamma s} = \mu \delta_{\gamma\beta} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} > r+s & \text{ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\gamma\beta}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.24)$$

$$\dot{B}_{3\beta 3s} = \mu \dot{b}_{\beta r} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \ s < r; \\ \underline{\text{ან}} \ r+s & \text{კენტი, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{\beta}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{\beta}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.25)$$

$$\dot{B}_{33\gamma s} = \lambda \dot{b}_{\gamma s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \ s < r; \\ \underline{\text{ან}} \ r+s & \text{კენტი, } s > r; \\ -(r+1)\lambda h^{-1}h_{\gamma}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\lambda h^{-1}h_{\gamma}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_{333s} &= \lambda \dot{b}_{3s} + \mu \dot{b}_{3s} + \mu \dot{b}_{3s} = (\lambda + 2\mu) \dot{b}_{3s} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \ s < r; \ \underline{\text{ან}} \ r+s \ \text{ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)(\lambda + 2\mu)h^{-1}, & \text{თუ } r+s \ \text{კენტი, } s > r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.6.18)-(2.6.27)-ს, ადვილი მისახვედრია, რომ (2.6.16) სისტემა დაიშლება ორ დამოუკიდებელ სისტემად (2.6.14) და (2.6.15) უცნობი ფუნქციების მიმართ. მართლაც, თუ  $r = 0, 2, 4, \dots$ ,  $r \leq N$ ,  $j = \beta$ ,  $\beta = 1, 2$ , მაშინ

$$\mu \left[ \left( h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left( h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \delta_{\alpha\beta} \left( h^{2r+1} v_{r, \gamma}^N \right)_{,\alpha}$$

$$+ \sum_{s=r+2}^N \left( B_{\alpha\beta\gamma}^r h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left( B_{\alpha\beta 3s}^r h^{r+s+1} v_{3s}^N \right)_{,\alpha}$$

(s ლუწია)

(s კენტია)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} a_{\alpha s} \left[ \lambda \delta_{\alpha\beta} h^{r+s+1} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu h^{r+s+1} \left( v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right]$$

(s ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+2}^N B_{\alpha\beta\gamma}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{\alpha\beta 3l}^s h^{r+l+1} v_{3l}^N \left] + \sum_{s=1}^{r-1} a_{3s} \left[ \mu h^{r+s+1} v_{3s, \beta}^N \right]$$

(l ლუწია)

(l კენტია)

(s კენტია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N B_{3\beta\gamma}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{3\beta 3l}^s h^{r+l+1} v_{3l}^N \left] + h^r X_{\beta}$$

(l ლუწია)

(l კენტია)

$$= \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.28)$$

თუ  $r = 0, 2, 4, \dots, r \leq N, j = 3$ , მაშინ

$$\mu \left( h^{2r+1} v_{3r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left( B_{\alpha 3\gamma}^r h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+2}^N \left( B_{\alpha 33s}^r h^{r+s+1} v_{3s}^N \right)_{,\alpha}$$

(s კენტია)

(s ლუწია)



$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=s+1}^N \overset{s}{B}_{3\beta\gamma} h^{r+l+1} v_{\gamma}^N + \sum_{l=s+2}^N \overset{s}{B}_{3\beta\beta} h^{r+l+1} v_{\beta}^N \Big] + h^r \overset{r}{X}_{\beta} \\
& (l \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \\
& = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.30)
\end{aligned}$$

თუ  $r = 1, 3, \dots, r \leq N, j = 3$ , მაშინ

$$\begin{aligned}
& \mu \left( h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left( \overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma} h^{r+s+1} v_{\gamma}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+2}^N \left( \overset{r}{B}_{\alpha 3\beta} h^{r+s+1} v_{\beta}^N \right)_{,\alpha} \\
& (s \text{ ლუწია}) \quad (s \text{ კენტია})
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} \overset{r}{a}_{\alpha} \left[ \mu h^{r+s+1} v_{3s,\alpha}^N + \sum_{l=s+1}^N \overset{s}{B}_{\alpha 3\gamma} h^{r+l+1} v_{\gamma}^N + \sum_{l=s+2}^N \overset{s}{B}_{\alpha 3\beta} h^{r+l+1} v_{\beta}^N \right]$$

(s კენტია)                      (l ლუწია)                      (l კენტია)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{3\beta} \left[ \lambda h^{r+s+1} v_{\gamma\beta}^N + \sum_{l=s+2}^N \overset{s}{B}_{33\gamma} h^{r+l+1} v_{\gamma}^N + \sum_{l=s+1}^N \overset{s}{B}_{33\beta} h^{r+l+1} v_{\beta}^N \right]$$

(s ლუწია)                      (l ლუწია)                      (l კენტია)

$$+ h^r \overset{r}{X}_{\beta} = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.31)$$

ამრიგად, (2.6.28), (2.6.31) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.14) უცნობებს შეიცავს, გაჭიმვა-კუმშვას შეესაბამება, ხოლო (2.6.30), (2.6.29) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.15) უცნობებს შეიცავს, ლუნვას შეესაბამება.

ძირითადი სისტემის ასეთ გახლეჩას ადგილი არ აქვს არასიმეტრიული პრიზმული გარსების შემთხვევაში, ისევე როგორც



ზოგადი გარსების შემთხვევაში, თუნდაც ეს უკანასკნელნი სიმეტრიულები იყვნენ.

(2.6.19)-(2.6.21), (2.6.24), (2.6.25)-ის გათვალისწინებით, (2.6.28) და (2.6.30) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად

$$\left[ \mu \left( h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left( h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left( h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma}^N \right)_{,\beta} + \sum_{s=r+2}^N \left\{ [-(2s+1)h^{r+s} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta})] v_{\gamma s}^N \right\}_{,\alpha}$$

(*s* ლუწია)

$$+ \sum_{s=r+1}^N \lambda (2s+1) \left( h^{r+s} v_{3s} \right)_{,\beta}$$

(*s* კენტია)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left\{ h^{r+s} \left[ \lambda \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu \left( v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right] \right\}$$

(*s* ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+2}^N [-(2l+1)h^{r+l-1} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta})] v_{\gamma l}^N$$

(*l* ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N \lambda (2l+1) h^{r+l-1} \delta_{\alpha\beta} v_{3l}^N \left. \right\}$$

(*l* კენტია)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} \left\{ -(2s+1) \left[ \mu h^{r+s} v_{3s,\beta}^N \right. \right.$$

(*s* კენტი)

$$\left. + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\beta}^N - \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h_{,\beta} h^{r+l-1} v_{3l}^N \right\}$$

(*l* ლუწი)

(*l* კენტი)

$$+ h^r X_{\beta} = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+l} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.32)$$

$$r = 0, 2, \dots, r \leq N, \beta = 1, 2,$$

ღა

$$\left[ \mu \left( h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left( h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left( h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma}^N \right)_{,\beta}$$

$$+ \sum_{s=r+2}^N \left\{ [-(2s+1) h^{r+s} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta})] v_{\gamma s}^N \right\}_{,\alpha}$$

(*s* კენტი)

$$+ \sum_{s=r+1}^N \lambda (2s+1) \left( h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\beta}$$

(*s* ლუწი)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left\{ h^{r+s} \left[ \lambda \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu \left( v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right] \right\}$$

(*s* კენტი)

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=s+2}^N \left[ -(2l+1)h^{r+l-1} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta}) \right] v_{\gamma l} \\
& (l \text{ კენტია}) \\
& + \left. \sum_{l=s+1}^N \lambda (2l+1) h^{r+l-1} \delta_{\alpha\beta} v_{3l}^N \right\} \\
& (l \text{ ლუწია}) \\
& + \sum_{s=0}^{r-1} \left\{ -(2s+1) \left[ \mu h^{r+s} v_{3s,\beta}^N \right. \right. \\
& (s \text{ ლუწია}) \\
& \left. \left. + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\beta l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{,\beta} h^{r+l-1} v_{3l}^N \right] \right\} \\
& (l \text{ კენტია}) \qquad \qquad \qquad (l \text{ ლუწია}) \\
& + h^r X_{\beta}^r = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \tag{2.6.33}
\end{aligned}$$

$$r = 1, 3 \dots, \quad r \leq N, \quad \beta = 1, 2,$$

სახით.

(2.6.19), (2.6.22), (2.6.23), (2.6.26), (2.6.27)-ის გათვალისწინებით, (2.6.29) და (2.6.31) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად

$$\begin{aligned}
& \mu \left( h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha} \\
& + \sum_{s=r+1}^N (2s+1) \mu \left( h^{r+s} v_{\alpha}^N \right)_{,\alpha} - \sum_{s=r+2}^N (2s+1) \mu \left( h_{,\alpha} h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\alpha} \\
& (s \text{ კენტია}) \qquad \qquad \qquad (s \text{ ლუწია})
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left[ \mu h^{r+s} v_{3r,\alpha}^N \right]$$

( $s$  კენტია)

$$+ \left. \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\alpha l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{,\alpha} h^{r+l-1} v_{3l}^N \right]$$

( $l$  კენტია)

( $l$  ლუწია)

$$- \sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) \left[ \lambda h^{r+s} v_{\gamma,\gamma}^N \right]$$

( $s$  კენტია)

$$- \left. \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \lambda h_{,\gamma} h^{r+l-1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) (\lambda + 2\mu) h^{r+l-1} v_{3l}^N \right]$$

( $l$  კენტია)

( $l$  ლუწია)

$$+ h^r X_3^r = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial t^2}, \quad r = 0, 2, 4, \dots, \quad r \leq N, \quad (2.6.34)$$

და

$$\mu \left( h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha}$$

$$+ \sum_{s=r+1}^N (2s+1) \mu \left( h^{r+s} v_{\alpha s}^N \right)_{,\alpha} - \sum_{s=r+2}^N (2s+1) \mu \left( h_{,\alpha} h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\alpha}$$

( $s$  ლუწია)

( $s$  კენტია)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left[ \mu h^{r+s} v_{3s,\alpha}^N \right]$$

( $s$  კენტია)

$$\begin{aligned}
& + \left. \left[ \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\alpha l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{,\alpha} h^{r+l-1} v_{\beta l}^N \right] \right. \\
& \quad (l \text{ ლუწია}) \qquad \qquad \qquad (l \text{ კენტია}) \\
& - \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) \left[ \lambda h^{r+s} v_{\gamma s, \gamma} \right. \\
& \quad (s \text{ ლუწია}) \\
& \left. - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \lambda h_{,\gamma} h^{r+l-1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) (\lambda + 2\mu) h^{r+l-1} v_{\beta l}^N \right] \\
& \quad (l \text{ ლუწია}) \qquad \qquad \qquad (l \text{ კენტია}) \\
& + h^r \dot{X}_3 = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta 3, r}^N}{\partial t^2}, \quad r = 1, 3, \dots, \quad r \leq N, \quad (2.6.35)
\end{aligned}$$

სახით.

ვთქვათ,  $N = 1$ .

თუ  $r = 0$ , მაშინ (2.6.32) და (2.6.34)-დან ცხადია, რომ შესაბამისად

$$\begin{aligned}
& \mu \left[ \left( h^1 v_{\alpha 0, \beta} \right)_{,\alpha} + \left( h^1 v_{\beta 0, \alpha} \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left( h^1 v_{\gamma 0, \gamma} \right)_{,\beta} \\
& + 3\lambda \left( h^1 v_{\beta 1} \right)_{,\beta} + \dot{X}_\beta = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{\beta 0}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2, \quad (2.6.36)
\end{aligned}$$

და

$$\mu \left( h^1 v_{\beta 0, \alpha} \right)_{,\alpha} + 3\mu \left( h^1 v_{\alpha 1} \right)_{,\alpha} + \dot{X}_3 = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{\beta 3 0}}{\partial t^2}. \quad (2.6.37)$$

თუ  $r = 1$ , მაშინ (2.6.33) და (2.6.35)-დან გამოძღინარეობს, რომ შესაბამისად

$$\mu \left[ \left( h^3 v_{\alpha 1, \beta} \right)_{, \alpha} + \left( h^3 v_{\beta 1, \alpha} \right)_{, \alpha} \right] + \lambda \left( h^3 v_{\gamma 1, \gamma} \right)_{, \beta} \quad (2.6.38)$$

$$- \left( \mu h v_{30, \beta} + 3\mu h v_{\beta 1} \right) + h X_{\beta} = \rho h \frac{\partial^2 h^2 v_{\beta 1}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2,$$

და

$$\begin{aligned} \mu \left( h^3 v_{31, \alpha} \right)_{, \alpha} - \lambda h v_{\gamma 0, \gamma} - 3(\lambda + 2\mu) h v_{31} \\ + h X_3 = \rho h \frac{\partial^2 h^2 v_{31}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

მარტივი გარდაქმნებით დავრწმუნდებით, რომ (2.6.10)-(2.6.13) ემთხვევა შესაბამისად (2.6.36)-(2.6.39)-ს სტატიკურ შემთხვევაში, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ (2.6.10)-(2.6.13)-ში

$$u_{\alpha} \equiv v_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha} \equiv v_{\alpha 1}, \quad \alpha = 1, 2; \quad u \equiv v_{30}, \quad v \equiv v_{31}.$$

კიდევ ერთხელ ხაზი გავუსვით იმას, რომ (2.6.36), (2.6.39) სისტემა შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.37), (2.6.38) სისტემა - ღუნვას.

ვთქვათ, ახლა ფირფიტა მუდმივი სისქისაა, ე.ი.

$$h^{(+)}(x_1, x_2) = -h^{(-)}(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) = \text{const}.$$

მაშინ (2.6.37), (2.6.38) სისტემა, რომელიც ღუნვას ახასიათებს, სტატიკის შემთხვევაში შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\mu \Delta v_{30} + 3\mu \left( v_{11,1} + v_{21,2} \right) + h^{-1} X_3 = 0, \quad (2.6.40)$$

$$\mu \Delta v_{11} + (\lambda + \mu) \left( v_{11,1} + v_{21,2} \right)_{,1} \quad (2.6.41)$$

$$- \mu h^{-2} v_{30,1} - 3\mu h^{-2} v_{11} + h^{-2} X_1 = 0.$$

$$\mu \Delta v_{21} + (\lambda + \mu) \left( v_{11,1} + v_{21,2} \right)_{,12} \quad (2.6.42)$$

$$- \mu h^{-2} v_{30,2} - 3\mu h^{-2} v_{21} + h^{-2} X_2 = 0.$$

(2.6.41) და (2.6.42) გავაწარმოთ შესაბამისად  $x_1$ -ით და  $x_2$ -ით და შევკრიბოთ:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \Delta \left( v_{11,1} + v_{21,2} \right) - \mu h^{-2} \Delta v_{30} \\ & - 3\mu h^{-2} \left( v_{11,1} + v_{21,2} \right) + h^{-2} \left( X_{1,1} + X_{2,1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

(2.6.40)-დან განვსაზღვროთ

$$v_{11,1} + v_{21,2} = -\frac{1}{3} \Delta v_{30} - \frac{1}{3\mu} h^{-1} X_3$$

და ჩავსვათ (2.6.43)-ში, სადაც ჩავთვალოთ, რომ  $\Phi_j \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $Q_{n\alpha}^{(+)} \equiv 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ; და, აქედნად (იხ. 2.6.4),

$$X_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad X_3 = Q_{n3}^{(+)} + Q_{n3}^{(-)} = q + q = q,$$

მაშინ

$$-\frac{\lambda + 2\mu}{3} \Delta \Delta v_{30} - \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu} h^{-1} \Delta q + h^{-3} q = 0.$$

აქედან, თუ  $q$  დატვირთვა პარმონიულია, ე.ი.  $\Delta q = 0$ , მივიღებთ, რომ

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q}{D'}, \quad (2.6.44)$$

სადაც

$$u_3 := \frac{1}{2} v_{30}$$

ჩაღუნვაა, ხოლო

$$D' = \frac{2}{3} (\lambda + 2\mu) h^3 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} D. \quad (2.6.45)$$

როგორც ვხედავთ, (2.6.44) დაემთხვა ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებას, თუ  $D'$ -ს შევცვლით  $D$  ცილინდრული სიხისტით.  $D'$  და  $D$ , (2.6.45)-ის თანახმად ერთმანეთისგან

$$\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}$$

მამრავლით განსხვავდებიან. ამრიგად, მუდმივი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში  $N=1$  მიახლოებაში ღუნვის (2.6.44) განტოლება და მისი შესაბამისი მათემატიკური მოდელი თვისობრივად არ განსხვავდება ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებისა და შესაბამისად ღუნვის კლასიკური თეორიისაგან. მათ შორის განსხვავება მხოლოდ რაოდენობრივია, ამასთან, გარკვეული აზრით, ეს სხვაობა მცირეა. მართლაც, თუ  $\sigma = 0,3$ , მაშინ  $D' \cong 1,2D$ , რაც მეორეს მხრივ იმას ნიშნავს, რომ  $N=1$  მოდელით გათვლილი ფირფიტები უფრო ხისტია, ვიდრე კირხჰოფ-ლიავის მოდელით, ე.ი. კლასიკური ღუნვის თეორიით გათვლილი ფირფიტები. ცხადია, იგივე მიმართებაშია  $N=1$  მიახლოების ღუნვის მოდელი რაისნერ-მინდლინის მოდელთან, რადგან ეს უკანასკნელი კერძო შემთხვევაში ზუსტად ემთხვევა კირხჰოფ-ლიავის მოდელს (იხ. §2.5).



## ნაწილი III. ერთგანზომილებიანი მოდელები

### §3.1. ღეროს ელერ-ბერნულის მოდელი

ძელი ეწოდება სხეულს, რომლის ერთი ზომა, სიგრძე, ორ დანარჩენთან შედარებით ძალიან დიდია, დაახლოებით ხუთჯერ მაინც აღემატება მათ. შედარებით გრძელ ძელს ღერო ეწოდება. ძელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ბრტყელი ფიგურის წრფის ან წირის გასწვრივ მოძრაობით მიღებული სხეული ისე, რომ ფიგურის ცენტრი (გეომეტრიული ან სიმბიძის) ყოველთვის ამ წრფეზე ან შესაბამისად წირზე რჩებოდეს, ხოლო ფიგურის სიბრტყე მისი პერპენდიკულარული იყოს. ამ ფიგურას ძელის განივი კვეთი ეწოდება, ხოლო წირს, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა ხდება – ძელის ღერძი. ღერძის ფორმის მიხედვით ძელი შეიძლება იყოს სწორი, მრუდი, ბრტყელი, სივრცითი და სხვა. განივი კვეთის მიხედვით კი ძელი არის მუდმივ ან ცვლადკვეთიანი. ძელის ღერძის პარალელური წირის ნაწილს, მოკვეთილს ორი განივი კვეთით, ბოჭკო ეწოდება (იხ. [3], გვ. 16).

ძელის ღუნვას იწვევენ განივი ძალები და წყვილძალები, რომლებიც ძელის ღერძზე გამავალ სიბრტყეში არიან მოთავსებული. ძელებს, რომლებიც ღუნვას განიცდიან, კოჭები ეწოდებათ (იხ. [3], გვ. 160).

თუ კოჭს აზრობრივად გაკვეთთ მისი ღერძის რაიმე წერტილში გამავალი განივიკვეთით, მაშინ კვეთაში მოქმედებენ  $M$  მღუნავი მომენტი და  $Q$  განივი (გადამჭრელი) ძალა. ამასთან მღუნავი მომენტი რიცხობრივად უდრის კვეთის ცალ მხარეს მოდებულ რეაქციის, შეყურსული და უწყვეტად განაწილებული ძალების კვეთის ცენტრის მიმართ აღებული მომენტების ალგებრულ ჯამს, ხოლო განივი ძალა – კვეთის ცალ მხარეს მოდე-

ბული ძალების კვეთის სიბრტყეზე გეგმილების ალგებრულ ჯამს.

იმისათვის, რომ კვეთის მიმართ მარცხენა და მარჯვენა ძალებით შედგენილი მღუნავი მომენტი ერთი და იგივე აღმოჩნდეს არა მარტო სიდიდით, არამედ ნიშნითაც, შემოვიღოთ ასეთი წესი: მარცხენა ძალის მომენტი მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი კვეთს უკლის საათის ისრის მიმართულებით, მარჯვენა ძალისა კი – საწინააღმდეგოდ. ანალოგიური წესი გვექნება განივი ძალისათვის: მარცხენა განივი ძალა მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი მიმართულია ზემოთ, მარჯვენა კი – თუ იგი მიმართულია ქვემოთ (იხ. ნახ 3.1.1, სადაც დადებითი მიმართულებებია ნაჩვენები).

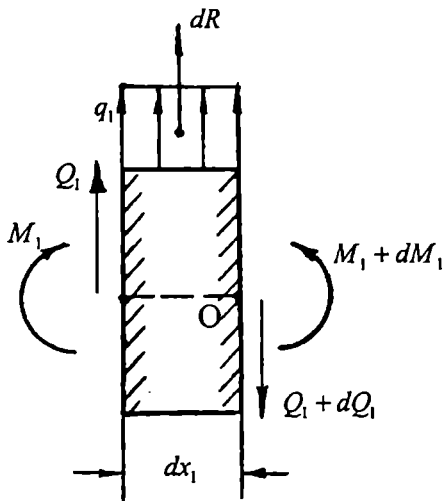


ნახ. 3.1.1

ღუნვის ზოგად შემთხვევას, როცა ძელში არსებობენ მღუნავი მომენტი და განივი ძალა, განივი ღუნვა ეწოდება, ხოლო კერძო შემთხვევას, როცა განივი ძალა ნულია, – სუფთა ღუნვა.

განვიხილოთ კოჭი, რომლის ღერძი  $x_1$  ღერძზე მდებარეობს, დატვირთული უწყვეტად განაწილებული და შეყურსული ძალებით. დატვირთვის ინტენსიურობა  $q_1$  მივიჩნიოთ დადებითად, როცა ის ზემოთაა მიმართული ( $x_3$  ღერძის დადებითი მიმართულებით). შეყურსულ ძალებს შორის დატვირთვის უწყვეტი ცვლილების გამო  $M_1(x_1)$  და  $Q_1(x_1)$  აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციებია. ერთ-ერთ ასეთ უბანში გამოვყოთ კოჭის უსასრულოდ მც-

რე  $dx_1$  ელემენტი (იხ. ნახ 3.1.2) და შევადგინოთ მისი წონასწორობის განტოლებები.



ნახ. 3.1.2

ელემენტზე მოქმედებს განაწილებული ტვირთი და კოჭის უკუგდებული ნაწილების რეაქციები, ე.ი. შიგა ძალები, რომლებიც მლუნავი მომენტითა და განივი ძალით წარმოადგება. რადგანაც  $dx_1$  უსასრულოდ მცირეა, მასზე მოსული დატვირთვა შეიძლება თანაბრად განაწილებულად ჩავთვალოთ:  $dR = q_1 dx_1$ . თუ  $x_1$  წერტილში გამავალ განივ კვეთში მლუნავი მომენტი და განივი ძალა  $M_1$  და  $Q_1$ -ია, მაშინ  $x_1 + dx_1$  წერტილში გამავალ განივ კვეთში მათი მნიშვნელობები იქნებიან  $M_1 + dM_1$  და

$Q_1 + dQ_1$ . ძალების ვერტიკალური გეგმილების ჯამი (იხ. [3], გვ. 166)

$$Q_1 - (Q_1 + dQ_1) + q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = q_1. \quad (3.1.1)$$

ამდენად, განივი ძალის წარმოებული  $x_1$ -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის დატვირთვის ინტენსიურობას.

0 წერტილის მიმართ (იხ. ნახ. 3.1.2) მომენტების ჯამი

$$M_1 - (M_1 + dM_1) + q_1 dx_1 \frac{dx_1}{2} + Q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების უკუგაძღვრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$M_{1,1} = Q_1. \quad (3.1.2)$$

ამდენად, მღუნავი მომენტის წარმოებული  $x_1$ -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის განივ ძალას.

ჩავსვათ (3.1.2)-ით განსაზღვრული  $Q_1$ -ის გამოსახულება (3.1.1)-ში, მაშინ

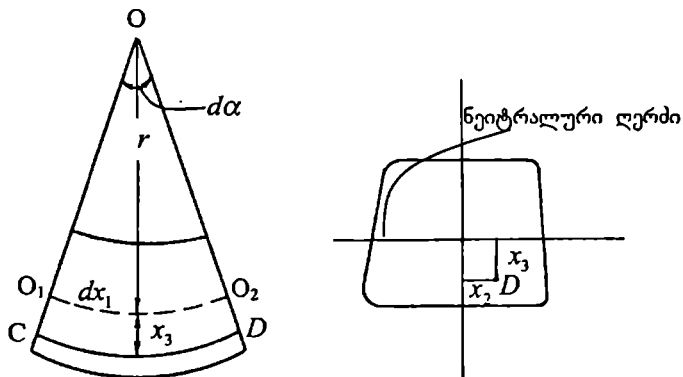
$$M_{1,11} = q_1. \quad (3.1.3)$$

შევნიშნოთ, რომ შეყურსული ძალების და მომენტების მოდების წერტილებში  $M_1(x_1)$  და  $Q_1(x_1)$  ფუნქციების წყვეტის გამო მათი წარმოებულები აზრს კარგავენ და ამ წერტილებში მირეზული დიფერენციალური დამოკიდებულებების გამოყენება არ შეიძლება.

ლუნვის კლასიკურ თეორიას საფუძვლად უდევს ბერნულის<sup>\*)</sup> (ანუ ბრტყელი კვეთის) ჰიპოთეზა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ლუნვის დროს ძელში ჩნდება ორი ზონა: გაჭიმული და

<sup>\*)</sup> დ. ბერნული (1700-1782).

შეკუმშული, რომელთა საზღვარზე მოთავსებულია ნეიტრალური შრე, შემდგარი ისეთი ბოჭკოებისაგან, რომლებიც სიგრძეს არ იცვლიან; განივი კვეთები ღუნვის პროცესში ბრტყელი და ძელის გაღუნული ღერძის პერპენდიკულარულნი რჩებიან; ისინი, როგორც ხისტი ფირფიტები, შემობრუნდებიან ნეიტრალური ღერძის (იხ. ნახ. 3.1.3) გარშემო, რომელიც ნეიტ-რალური შრისა და განივი კვეთის სიბრტყის გადაკვეთას წარმოადგენს (იხ. [3], გვ. 171).



ნახ. 3.1.3

ორი განივი კვეთით გამოვყოთ უსასრულოდ მცირე  $dx_1$  სიგრძის ელემენტი (იხ. ნახ. 3.1.3).  $O$  არის ბოჭკოების სიმრუდის ცენტრი,  $O_1O_2$  ნეიტრალური შრეა,  $r$  მისი სიმრუდის რადიუსია. გაჭიმულ ზონაში აღებული ნებისმიერი  $CD$  ბოჭკოს სრული წაგრძელება

$$\Delta = |CD| - dx_1 = (r + x_3)d\alpha - rd\alpha = x_3d\alpha,$$

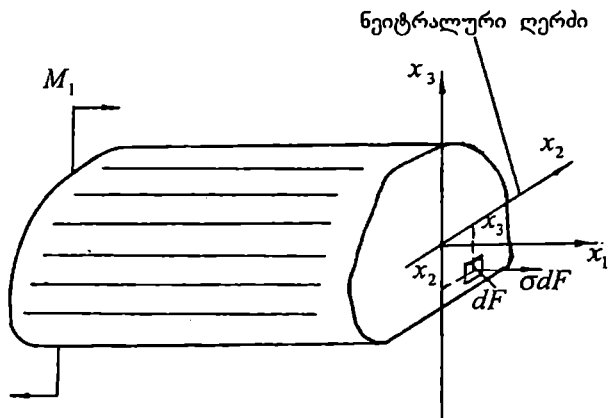
სადაც  $d\alpha$  არის ელემენტის ბოლოების ურთიერთობების კუთხე. ცხადია,  $CD$  ბოჭკოს ფარდობით დეფორმაციას აქვს

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{dx_1} = x_3 \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{x_3}{r} \quad (3.1.4)$$

სახე, სადაც

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{w_{,11}}{\left[1 + (w_{,1})^2\right]^{3/2}} \quad (3.1.5)$$

ნეიტრალური შრის სიმრუდეა, ხოლო  $w$  მისი ჩაღუნვაა.



ნახ. 3.1.4

ჰუკის

$$\sigma = E\varepsilon$$

კანონში ჩავსვათ (3.1.5), მაშინ

$$\sigma = E \frac{x_3}{r}. \quad (3.1.6)$$

წონასწორობის მოთხოვნიდან გამომდინარე, თუ ნულს გაეუტოლებთ ყველა ძალის მომენტს ნეიტრალური ღერძის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$M_1 - \int_F x_3 \sigma dF = 0. \quad (3.1.7)$$

თუ (3.1.6)-ს ჩავსვამთ (3.1.7)-ში, მაშინ

$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{EI_2}, \quad (3.1.8)$$

სადაც

$$I_2 = \int_F x_3^2 dF$$

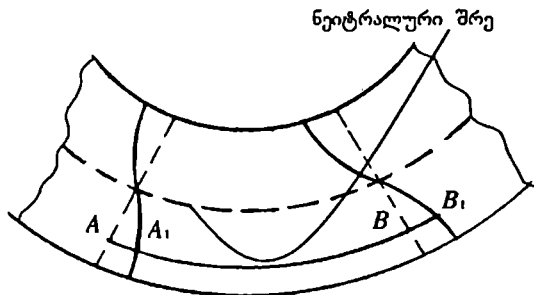
წარმოადგენს ე.წ. ინერციის მომენტს  $x_2$  ღერძის მიმართ.

(3.1.7) ტოლობის დაწერისას ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ღუნვა გამოწვეულია მხოლოდ წყვილძალით. თუ განივი ძალაც არსებობს, მაშინ კვეთში აღიძვრება მხები ძაბვები, რომლებიც კოჭის გრძივ სიბრტყეში ძვრას იწვევენ. მაქსიმალურ ძვრას ადგილი აქვს ნეიტრალურ შრესთან, შემდეგ მცირდება და განაპირა ბოჭკოებთან ისპობა. ძვრის შედეგად კოჭის ღერძი განივი კვეთის მართობი არ რჩება, თვითონ განივი კვეთი კი ცილინდრული ზედაპირის ფორმას მიიღებს, რომლის მსახველი ნეიტრალური ღერძის პარალელური იქნება (იხ. ნახ. 3.1.5). როცა აღებულ უბანში  $Q_1 = const$ , ყველა კვეთის გამრუდება ერთნაირია, რის გამოც  $AB$  ბოჭკო მხოლოდ “ზისტ გადაადგილებას” მიიღებს და დაიკავებს  $A_1B_1$  მდგომარეობას, ამასთან ძვრის შედეგად ის არ დაგრძელდება. ცვლადი განივი ძალის შემთხვევაში თუმცა დამატებითი წაგრძელება ჩნდება, მაგრამ მეტად უმნიშ-

ვნელო, რაც იმის უფლებას გვაძლევს, რომ ის უგულებელვყოთ და ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ

$$\sigma = \frac{M_1 x_3}{I_2}$$

ფორმულა, რომელიც (3.1.8)-ის (3.1.6)-ში ჩასმით მიიღება.



ნახ. 3.1.5

თუ ვიგულისხმებთ, რომ  $w$  ჩაღუნვა და მისი  $w_{,1}$  წარმოებული, რომელიც დეფორმაციის შედეგად გაღუნული ღეროს ღერძის მიერ  $x_1$  ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსია, მცირე სიდიდეებია, მაშინ  $w_{,1}$  აღნიშნული კუთხის ტოლად, ხოლო  $1 + (w_{,1})^2$  ერთის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ. ამის გათვალისწინებით, (3.1.5)-ის (3.1.8)-ში ჩასმის შემდეგ დაეასკვნით, რომ

$$EI_2 w_{,11} = M_1. \quad (3.1.9)$$

(3.1.9)-ის (3.1.3)-ში ჩასმა გვაძლევს ცვლადი განივი კვეთის მქონე ღეროს (ძელის, კოჭის) ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$(EI_2 w_{,11})_{,11} = q_1. \quad (3.1.10)$$



თუ ღეროს განივი კვეთა ერთეულის ტოლი სიგანისა და  $2h(x_1)$  სიმაღლის (ე.ი. ღეროს სისქის) მქონე მართკუთხედია, მაშინ

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} x_3^2 dx_3 = \frac{2h^3}{3}.$$

(3.1.10) განტოლებას უნდა დაემატოს სასაზღვრო პირობები ღეროს ბოლოებში. ასეთია შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობა:

1) *ხისტად ჩამაგრებული ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალურად მოძრაობა და მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad w_{,1} = 0; \quad (3.1.11)$$

2) *სახსრულად დაყრდნობილი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალური მოძრაობა, მაგრამ შეუძლია მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad M_1 = 0; \quad (3.1.12)$$

3) *თაეისუფალი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს შეუძლია როგორც ვერტიკალური მოძრაობა, ასევე შემობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$Q_1 = 0, \quad M_1 = 0. \quad (3.1.13)$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, დალაშქრის პრინციპის თანახმად, დატვირთვას უნდა დაემატოს  $x_3$  ღერძის პარალელური ინერციის

$$-\rho(x_1)S(x_1) \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2}$$

ძალა, სადაც  $\rho(x_1)$  ღეროს სიმკვრივეა, ხოლო  $S(x_1)$  ღეროს განივი კვეთის ფართობი. ამდენად, ღეროს დინამიკის განტოლებას, (3.1.10)-ის ძალით, აქვს

$$[E(x_1)I_2(x_1)w_{,11}]_{,11} = q_1(x_1, t) - \rho(x_1)S(x_1) \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.1.14)$$

სახე.

ღეროს დინამიკის ამოცანების განხილვისას (3.1.11)-(3.1.13) ტიპის სასაზღვრო პირობებს უნდა დაემატოს

$$w(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.1.15)$$

საწყისი პირობები.

(3.1.11)-(3.1.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

თუ  $S(x_1) = 0$  ღეროს რაიმე წერტილებში, კერძოდ, ბოლოებში, მაშინ მას წამახვილებული ღერო ეწოდება.

წამახვილებული ღეროს სტატიკისა და დინამიკის ძირითადი ამოცანების დასმის თავისებურებები და თვით სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, არაწამახვილებული ღეროების შემთხვევაშიც, გამოკვლეულია [23]-ში.

### §3.2. ღეროების იერარქიული მოდელები

ვთქვათ, ღეროს უკავია  $R^3$  სივრცის  $\bar{V}$  ნაწილი,

$$V := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < L, \quad h_i^{(-)}(x_1) \leq x_i \leq h_i^{(+)}(x_1), \right. \\ \left. i = 2, 3, L = \text{const} \right\},$$

$$2h_i^{(+)}(x_1) - h_i^{(-)}(x_1) \geq 0, \quad h_i \in C([0, L]) \cap C^1(]0, L[), \quad i = 2, 3,$$

სადაც  $2h_3$  და  $2h_2$  მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროს, შესაბამისად, სისქე და სიგანეა, რომელთა მაქსიმუმები არსებითად ნაკლებია ღეროს  $L$  სიგრძეზე.

დავუშვათ, რომ

$$f(x_1, x_2, x_3) \in C^1(V),$$

და  $x_1$  წერტილში, სადაც არც სისქე და არც სიგანე ნული არ ხდება, შემდეგნაირად განვსაზღვროთ ფუნქციისა და მისი  $f_{,j}$  წარმოებულის ორმაგი მომენტი:

$$f_{n_1 n_2}(x_1) := \int_{h_2^{(-)} h_3^{(-)}}^{h_2^{(+)} h_3^{(+)}} f(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.1)$$

$${}_j f_{n_1 n_2}(x_1) := \int_{h_2^{(-)} h_3^{(-)}}^{h_2^{(+)} h_3^{(+)}} f_{,j}(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.2)$$

$$n_i = 0, 1, \dots, \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$a_i := \frac{1}{h_i}, \quad b_i := \frac{\tilde{h}_i}{h_i}, \quad 2\tilde{h}_i := h_i^{(+)} + h_i^{(-)}, \quad i = 2, 3,$$

$P_{n_i}$ ,  $i = 2, 3$ , ლეჟანდრის პოლინომებია. ცნობილია, რომ (იხ. დამატება 2 ან მაგალითად, [4]):

$$\int_{-1}^{+1} P_k(t) P_l(t) dt = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl},$$

ე.ი. თუ  $t = a_i x_i - b_i$ ,  $i = 2, 3$ ,

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{h_i}^{h_i^{(+)}} P_k(a_i x_i - b_i) P_l(a_i x_i - b_i) a_i dx_i = \delta_{kl}, \quad (3.2.3)$$

$$i = 2, 3.$$

თუ ერთი მაინც, ღეროს ან სისქე, ან სიგანე ნული ხდება რაიმე  $x_i \in [0, L]$  წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ორმაგი მომენტი განისაზღვრება, როგორც ზღვარი იმ წერტილებიდან, სადაც  $h_i > 0$ ,  $i = 2, 3$ .

ამ პარაგრაფის მიზანია აგებული იქნეს ი. ვეკუას მიერ პრიზმული გარსების შემთხვევაში აგებული იერარქიული მოდელების ანალოგიური იერარქიული მოდელები მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის (ეს საკითხი დაწვრილებითაა განხილული [21]-ში).

ამისათვის (1.6.3), (1.12.9) და (1.18.1) დამოკიდებულებების ორივე მხარე გავაძრავლოთ  $P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3)$ -ზე და შემდეგ ვაინტეგრირებთ  $x_i$ -ის მიმართ  $h_i^{(-)}$ ,  $h_i^{(+)}$ ,  $i = 2, 3$ , საზღვრებში. (1.12.9)-დან უშუალოდ მივიღებთ, რომ

$$X_{ij, n_2} = \lambda \delta_{ij} \theta_{n_2, n_2} + \mu e_{ij, n_2}, \quad \theta_{n_2, n_2} := e_{kkt, n_2}, \quad (3.2.4)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots$$

ხოლო (3.2.2)-ისა და (3.2.3)-ის გამოყენებით, გარკვეული გამოთვლების შემდეგ, თუ  $u \in C^2(V)$ , დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების ორმაგი მომენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$e_{11n_3n_2} = u_{1n_3n_2,1} + \sum_{i=2}^3 \left( a_{n_i}^i u_{1n_3n_2} - \sum_{s=n_i}^{n_i} b_{n_i}^i a_i u_{\delta_{i2n_3+\delta_{i3s}} \delta_{i2s+\delta_{i3n_2}}} \right) \quad (3.2.5)$$

$$e_{\bar{u}in_3n_2} = - \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^{n_i} a_i u_{\delta_{i2n_3+\delta_{i3s}} \delta_{i2s+\delta_{i3n_2}}}, \quad i = 2, 3, \quad (3.2.6)$$

$$2e_{23n_3n_2} = - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^{n_i} a_i u_{s-i} \delta_{i2n_3+\delta_{i3s}} \delta_{i2s+\delta_{i3n_2}} \quad (3.2.7)$$

$$2e_{jin_3n_2} = u_{in_3n_2,l} + \sum_{k=2}^3 \left( a_{n_k}^k u_{in_3n_2} - \sum_{s=n_k}^{n_k} b_s^k a_k u_{\delta_{k2n_3+\delta_{k3s}} \delta_{k2s+\delta_{k3n_2}}} \right) \quad (3.2.8)$$

$$- \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^{n_i} a_i u_{\delta_{i2n_3+\delta_{i3s}} \delta_{i2s+\delta_{i3n_2}}},$$

$$i = 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$b_s^i := \left( s + \frac{1}{2} \right) \left[ h_{i,l}^{(+)} - (-1)^{s+n_i} h_{i,l}^{(-)} \right], \quad (3.2.9)$$

$$\bar{b}_{is}^{n_i} := - \left( s + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - (-1)^{n_i+s} \right],$$

$$a_s^i = \begin{cases} n_i h_{i,l} \frac{1}{h_i}, & s = n_i, \\ b_s^i a_i, & s \neq n_i, \end{cases} \quad a_{is}^{n_i} = \begin{cases} 0 = \bar{b}_{is}^{n_i}, & s = n_i, \\ b_{is}^{n_i} a_i, & s \neq n_i, \end{cases}$$

ამასთან

$$u_j(x_1, x_2, x_3) =$$

$$\sum_{m_2, m_3=0}^{\infty} a_2 a_3 \left( m_2 + \frac{1}{2} \right) \left( m_3 + \frac{1}{2} \right) u_{j, m_2, m_3}(x_1) P_{m_3}(a_3 x_3 - b_3) \quad (3.2.10)$$

$$\times P_{m_2}(a_2 x_2 - b_2), \quad j = 1, 2, 3,$$

და მწკრივები (3.2.5)-(3.2.8), (3.2.10)-ში თანაბრად კრებადია

$$\begin{bmatrix} (-) & (+) \\ h_2, h_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (-) & (+) \\ h_3, h_3 \end{bmatrix} \text{-ზე.}$$

მოძრაობის (1.18.1) განტოლებები კი ორმაგ მომენტებში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$X_{1j n_3 n_2, 1} + \sum_{s=0}^{n_2} \left( a_s^2 X_{1j n_3 s} + a_{2s} X_{2j n_3 s} \right)$$

$$+ \sum_{s=0}^{n_3} \left( a_s^3 X_{1j s n_2} + a_{3s} X_{3j s n_2} \right) \quad (3.2.11)$$

$$+ X_j^0 = \rho \frac{\partial^2 u_{j n_3 n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$X_j^0 :=$$

$$\sum_{i=2}^3 \int_{\substack{(+), \\ h_i}}^{(-), \\ h_i} \left[ \sqrt{1 + \left( h_{s-i, 1}^{(+)} \right)^2} \right] X_{\nu_{s-i, j}^{(+)}} \left( x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} h_2^{(+)} h_3^{(+)} + \delta_{i3} x_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n_3-1} \sqrt{1 + \left( h_{5-1,1}^{(-)} \right)^2} \\
& \times X_{\nu_{3-1}, j}^{(-)} \left( x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} h_2^{(-)}, \delta_{i2} h_3^{(-)} + \delta_{i3} x_3 \right) \\
& \times P_{n_i} (a_i x_i - b_i) dx_i + X_{j, n_3, n_2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots, \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

$$X_{\nu_i, j}^{(\pm)} \left( x_1, \delta_{i2} h_2^{(\pm)} + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3} h_3^{(\pm)} \right) = X_{kj} \nu_{ik}^{(\pm)},$$

$$i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$X_{\nu_i, j}^{(\pm)} \left( x_1, \delta_{i2} h_2^{(\pm)} + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3} h_3^{(\pm)} \right),$$

$$i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

წარმოადგენენ  $x_i = h_i^{(\pm)}(x_1)$ ,  $i = 2, 3$ , ზედაპირზე ღეროს გარედან მოქმედ ზედაპირულ ძალთა კომპონენტებს.  $\nu_i^{(\pm)}$ ,  $i = 2, 3$ , შესაბამისი გარე ნორმალეებია.

(3.2.11) შეიძლება გადმოვწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$\begin{aligned}
& \left( h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1, j, n_3, n_2} \right)_{,1} + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left( b_{is}' X_{1, j, \delta_{i2} n_2 + \delta_{i3} s, \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \right. \\
& \quad \left. + b_{is} X_{y, \delta_{i2} n_2 + \delta_{i3} s, \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \right) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{0, n_3, n_2} \\
& = \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial^2 u_{j, n_3, n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots, \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$u_{j, n_3, n_2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.14)$$

თუ სრულდება ერთი მაინც შემდეგი ორი პირობიდან  
 $n_i > N_i, \quad i = 2, 3.$

ამ შემთხვევას ვუწოდებთ  $(N_3, N_2)$  მიახლოებას.

$(N_3, N_2)$  მიახლოებაში (3.2.9)-დან მივიღებთ, რომ  
 $u_j(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} &\equiv \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} a_2 a_3 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( n_3 + \frac{1}{2} \right) u_{j, n_2, n_3} P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) \\ &\times P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) = \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( n_3 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2^{n_2+n_3} n_2! n_3!} \\ &\times \frac{d^{n_2} \left[ (x_2 - \tilde{h}_2)^2 - h_2^2 \right]^{n_2}}{dx_2^{n_2}} \\ &\times \frac{d^{n_3} \left[ (x_3 - \tilde{h}_3)^2 - h_3^2 \right]^{n_3}}{dx_3^{n_3}} v_{j, n_2, n_3}(x_1), \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

სადაც

$$v_{j, n_2, n_3}(x_1) := \frac{u_{j, n_2, n_3}(x_1)}{h_2^{n_2+1}(x_1) h_3^{n_3+1}(x_1)},$$

რადგან

$$P_{n_i}(a_i x_i - b_i) = P_{n_i} \left( \frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right) = \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{d^{n_i} \left[ \left( \frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^2 - 1 \right]^{n_i}}{d \left( \frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^{n_i}}$$



$$\begin{aligned}
 & d^{n_i} \left\{ \frac{\left[ (x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}}{h_i^{2n_i}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} h_i^{n_i} \frac{\left[ (x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}}{dx_i^{n_i}} \\
 &= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{1}{h_i^{n_i}} d^{n_i} \left[ (x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}.
 \end{aligned}$$

(3.2.14), (3.2.15), (3.2.9)-ის გათვალისწინებით (3.2.5)-(3.2.8) და (3.2.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$e_{11n_3n_2} = h_2^{n_2+1} h_3^{n_2+1} v_{1n_3n_2,1}$$

$$- \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}+1} h_3^{\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}+1} n_i}{h_i} b_s^i v_{i \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}},$$

$$\sum_{s=N_i+1}^{N_i} (\dots) = 0,$$

$$e_{i1n_3n_2} = - \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2s}+\delta_{i3n_3}+1} h_3^{\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}+1} n_i}{h_i} b_{is}^i v_{i \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}},$$

$$i = 2, 3,$$

$$2e_{23n_3n_2} = - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2s}+\delta_{i3n_3}+1} h_3^{\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}+1} n_i}{h_i} b_{is}^i v_{5-i \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}},$$

$$2e_{1in_3n_2} = h_2^{n_2+1} h_3^{n_2+1} v_{in_3n_2,1}$$

$$- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} \frac{h_2^{\delta_{k2s}+\delta_{k3n_3}+1} h_3^{\delta_{k2n_3}+\delta_{k3s}+1} n_k}{h_k} b_s^k v_{i \delta_{k2n_3}+\delta_{k3s} \delta_{k2s}+\delta_{k3n_2}}$$

$$- \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i,2^s} + \delta_{i,2^{s+1}}} h_3^{\delta_{i,2^{s+1}} + \delta_{i,3^{s+1}}} n_i}{h_i} b_{is} v_i \delta_{i,2^{s+1}} \delta_{i,3^s} \delta_{i,2^s} \delta_{i,3^{s+1}}, \quad i = 2, 3,$$

$$X_{11n_3n_2} = (\lambda + 2\mu) e_{11n_3n_2} + \lambda \sum_{i=2}^3 e_{i1n_3n_2}$$

$$= (\lambda + 2\mu) (h_2^{n_2-1} h_3^{n_3+1} v_{1n_3n_2,1})$$

$$- \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2^s} + \delta_{i,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{i,3^{s+1}} + \delta_{i,1^{s+1}}} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_i \delta_{i,2^{s+1}} \delta_{i,3^s} \delta_{i,2^s} \delta_{i,3^{s+1}} \quad \left. \right) \quad (3.2.16)$$

$$- \lambda \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2^s} + \delta_{i,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{i,2^{s+1}} + \delta_{i,3^s} + 1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_i \delta_{i,2^{s+1}} \delta_{i,3^s} \delta_{i,2^s} \delta_{i,3^{s+1}}$$

$$X_{i1n_3n_2} = \lambda (e_{11n_3n_2} + e_{5-i,5-i,n_3n_2}) + (\lambda + 2\mu) e_{ii n_3n_2}$$

$$= \lambda (h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{1n_3n_2,1})$$

$$- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k,2^s} + \delta_{k,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{k,3^{s+1}} + \delta_{k,1^s} + 1} h_k^{-1} b_{is}^{n_k} v_i \delta_{k,2^{s+1}} \delta_{k,3^s} \delta_{k,2^s} \delta_{k,3^{s+1}}$$

$$- \sum_{s=n_{5-i}+1}^{N_{5-i}} h_2^{\delta_{5-i,2^s} + \delta_{5-i,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{5-i,3^{s+1}} + \delta_{5-i,1^s} + 1} h_{5-i}^{-1} b_{5-i}^{n_{5-i}}$$

$$\times v_{5-i} \delta_{5-i,2^{s+1}} \delta_{5-i,3^s} \delta_{5-i,2^s} \delta_{5-i,3^{s+1}} \quad \left. \right)$$

$$- (\lambda + 2\mu) \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2^s} + \delta_{i,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{i,3^{s+1}} + \delta_{i,1^s} + 1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_i \delta_{i,2^{s+1}} \delta_{i,3^s} \delta_{i,2^s} \delta_{i,3^{s+1}},$$

$$i = 2, 3, \quad (3.2.17)$$

$$X_{23n_3n_2} = 2\mu e_{23n_3n_2} \quad (3.2.18)$$

$$= -\mu \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2^s} + \delta_{i,3^{s+1}}} h_3^{\delta_{i,3^{s+1}} + \delta_{i,1^s} + 1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{5-i} \delta_{i,2^{s+1}} \delta_{i,3^s} \delta_{i,2^s} \delta_{i,3^{s+1}},$$

$$\begin{aligned}
X_{1in_3n_2} &= 2\mu e_{1in_3n_2} = \mu(h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{1in_3n_2,1} \\
&- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2} s + \delta_{k1} n_2 + 1} h_3^{\delta_{k2} n_3 + \delta_{k1} s + 1} h_k^{-1} b_s^{n_k} v_{i, \delta_{k2} n_3 + \delta_{k1} s, \delta_{k2} s + \delta_{k1} n_2} \\
&- \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2} s + \delta_{i1} n_3 + 1} h_3^{\delta_{i2} n_3 + \delta_{i1} s + 1} h_i^{-1} b_s^{n_i} v_{1, \delta_{i2} n_3 + \delta_{i1} s, \delta_{i2} s + \delta_{i1} n_2} \Big), \quad (3.2.19) \\
& \qquad \qquad \qquad i = 2, 3,
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3.$$

(3.2.16)-(3.2.19)-ის ჩანსმა (3.2.13) სისტემის პირველ  $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$  განტოლებაში ფიქსირებული  $j = 1, 2, 3$ -სათვის გვაძლევს შემდეგ  $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$  განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას  $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$

$$v_{jrs}(x, t), \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

უცნობის მიმართ:

$$\begin{aligned}
\Lambda_j \left( h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3n_2,1} \right) &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{r=0}^{N_i} \sum_{s=0}^{N_i} (R_{rs}'' v_{irs,1} + S_{rs}'' v_{irs}) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{n_2, n_3} \\
&= \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{jn_3n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.2.20) \\
& \qquad \qquad \qquad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,
\end{aligned}$$

სადაც

$$\Lambda_j := \begin{cases} \lambda + 2\mu, & j = 1, \\ \mu, & j = 2, 3, \end{cases}$$

$R''_{rs}(x_1)$ ,  $S''_{rs}(x_1)$  გამოსახულია  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $h_i(x_1)$ ,  $\tilde{h}_i(x_1)$ ,  $i = 2, 3$  სიდიდეებით, ამასთან ზოგიერთი მათგანი ნულია, ზოგიერთი კი, საზოგადოდ, შემოუსაზღვრავია  $]0, L[-$ ზე. მართლაც, თუ  $j = 1$ :

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \left( h_2^{2n_2-1} h_3^{2n_3+1} v_{1n_3n_2,1} \right)_1 \\
 & - \left( \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}+n_2+1} h_3^{\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}+n_3+1} h_i^{-1} \right. \\
 & \times \left[ (\lambda + 2\mu) b_s^i v_{1 \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}} + \lambda b_{is}^i v_{1 \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}} \right] \Bigg)_1 \\
 & + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left\{ h_2^{\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}+1} h_3^{\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}+1} \right. \\
 & \times \left[ (\lambda + 2\mu) b_s^i v_{1 \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2,1}} + \mu b_{is}^i v_{1 \delta_{i2n_3}+\delta_{i3s} \delta_{i2s}+\delta_{i3n_2,1}} \right] \\
 & - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})+\delta_{k3}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2r}+\delta_{k3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})+1} h_3^{\delta_{k2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} \\
 & \times \left[ (\lambda + 2\mu) b_s^i \frac{b_r^k}{b_{kr}^k} \right. \\
 & \times v_{1 \delta_{k2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{k3}r \delta_{k2r}+\delta_{k3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})} \\
 & \left. + \left( \lambda b_s^i \frac{b_{kr}^k}{b_{kr}^k} + \mu b_{is}^i \frac{b_r^k}{b_r^k} \right) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=\delta_{j,2}(\delta_{1,2^s+\delta_{1,2n_1})+\delta_{j,1}(\delta_{1,2n_1+\delta_{1,3^s})+1}^{N_j}} h_2^{\delta_{j,2}r+\delta_{j,3}(\delta_{1,2^s+\delta_{1,3n_1})+1} h_3^{\delta_{j,2}(\delta_{1,2n_1+\delta_{1,3^s})+\delta_{j,3}r+1} h_j^{-1} \\
& \times \frac{\delta_{j,2}(\delta_{1,2^s+\delta_{1,3n_1})+\delta_{j,3}(\delta_{1,2n_1+\delta_{1,3^s})}}{b_{j^r}} \\
& \times v_1 \left[ \delta_{j,2}(\delta_{1,2n_1+\delta_{1,3^s})+\delta_{j,3}r \quad \delta_{j,2}r+\delta_{j,3}(\delta_{1,2^s+\delta_{1,3n_1})} \right] + H_j \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^0 = \rho h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \frac{\partial v_{j n_2 n_3}}{\partial t^2}; \tag{3.2.22}
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,$$

ᄡᄢᄣ

$$H_j := \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2-\delta_{i,2}} h_3^{n_3-\delta_{i,3}} \sum_{s=0}^{n_i-1} b_{is} X_{ij\delta_{1,2}n_1+\delta_{1,3^s}} \delta_{i,2^s+\delta_{1,3n_2}}, \quad j = 2, 3,$$

ᄣᄣ.

$$\begin{aligned}
H_2 &= h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} X_{22n_3^s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} X_{32sn_2} \\
&= h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} \left[ \lambda (h_2^{s+1} h_3^{n_3+1} v_{1n_3s,1} \right. \\
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k,2}^s+\delta_{k,3}n_3+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k,2}r+\delta_{k,3}^s+1} h_3^{\delta_{k,2}n_1+\delta_{k,3}r+1} h_k^{-1} b_r^k \cdot v_1 \delta_{k,2}n_1+\delta_{k,3}r \delta_{k,2}r+\delta_{k,3}^s \\
& \left. - \sum_{r=n_3+1}^{N_3} h_2^{s+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r} v_{3rs} \right] - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_2} h_2^{r+1} h_3^{n_3+1} h_2^{-1} b_{2r}^s v_{2n_3r} \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \sum_{l=2}^3 \sum_{r=\delta_{12}n_2+\delta_{13}s+1}^{N_1} h_2^{\delta_{12}r+\delta_{13}n_2+1} h_3^{\delta_{12}s+\delta_{13}r+1} h_1^{-1} \\
& \times b_{lr} v_{5-l}^{\delta_{12}n_2+\delta_{13}s} \delta_{12}s+\delta_{13}r \delta_{12}r+\delta_{13}n_2, \\
H_3 & = h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} X_{23n_3s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_1-1} b_{3s} X_{33s n_2} \\
& = -\mu h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_1-1} b_{2s} \sum_{l=2}^3 \sum_{r=\delta_{12}s+\delta_{13}n_3+1}^{N_1} h_2^{\delta_{12}r+\delta_{13}s+1} h_3^{\delta_{12}n_3+\delta_{13}r+1} h_1^{-1} \\
& \times b_{lr} v_{5-l}^{\delta_{12}s+\delta_{13}n_3} \delta_{12}n_3+\delta_{13}r \delta_{12}r+\delta_{13}s \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \left[ \lambda (h_2^{n_2+1} h_3^{s+1} v_{1s n_2, 1} \right. \\
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}n_2+\delta_{k3}s+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}n_2+1} h_3^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} b_r^k v_{1 \delta_{k2}s+\delta_{k3}r \delta_{k2}r+\delta_{k3}n_2} \\
& \left. - \sum_{r=n_2+1}^{N_1} h_2^{r+1} h_3^{s+1} h_2^{-1} b_{2r}^{n_2} v_{2sr} \right] - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_1} h_2^{n_2+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r}^{n_3} v_{3sr} \Big].
\end{aligned}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ იქ, სადაც ღეროს სისქესა და სიგანიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, სისტემას აქვს რივის გადაკვარება  $x_1$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის.

### 3.2.1. საწყის-სასაზღვრო ამოცანები

განვიხილოთ  $(N_3, N_2)$  მიახლოება. დაეუშვათ, რომ ღეროს  $x_3 = h_i^\pm(x_1)$ ,  $i = 2, 3$ , ზედაპირებზე მოქმედებენ ზედაპირული ძა-

ლები (იხ. (3.2.12)), ხოლო ბოლოებზე, რომლებიც  $x_1 = 0$  და  $x_1 = L$  სიბრტყეების მართკუთხა ნაწილებს წარმოადგენენ, მოცემულია გადაადგილების ან ზედაპირული ძალების კომპონენტები. თუ  $2h_i(0) > 0$  და  $2h_i(L) > 0$ ,  $i = 2, 3$ , მაშინ ღეროს ბოლოებზე ორმაგი მომენტებისათვის სასაზღვრო პირობები შეიძლება შემდეგნაირად დაისვას.

1. სასაზღვრო პირობები გადაადგილებებში:

$$v_{jrs} = f_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = 0, \dots, N_3, \quad s = 0, \dots, N_2, \quad (3.2.23)$$

აქ  $f_{jrs}$  ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია. დინამიკურ შემთხვევაში მათ ემატება

$$v_{jrs}|_{l=0} = \varphi_{jrs}(x_1), \quad \partial v_{jrs} / \partial l|_{l=0} = \psi_{jrs}(x_1), \quad (3.2.24)$$

$$x_1 \in ]0, L[, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2},$$

საწყისი პირობები, სადაც  $\varphi_{irs}$ ,  $\psi_{irs}$  მოცემული ფუნქციებია, ხოლო  $f_{jrs}$ , საზოგადოდ,  $l$ -ზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

2. სასაზღვრო პირობები ძალებში:

$$X_{1jrs} = g_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2} \quad (3.2.25)$$

აქ  $g_{jrs}$  ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია.

3. შერეული სასაზღვრო პირობები: ამ შემთხვევაში ღეროს ერთ-ერთ ბოლოში (3.2.23) პირობებია მოცემული, ხოლო მეორე ბოლოში – (3.2.25); ან  $j$ -ს რაიმე მნიშვნელობებისათვის მოცემულია (3.2.23) პირობები, ხოლო დანარჩენისათვის – (3.2.25).

თუ ღეროს ბოლოში  $2h_i$ ,  $i = 2, 3$ , სიდიდეებიდან ერთი მაინც ხდება ნული, მაშინ მარცხენა მხარეები (3.2.23)-სა და (3.2.25)-ში უნდა გავიგოთ, როგორც ზღვრები  $]0, L[$  ინტერვალიდან. ზოგ შემთხვევაში (3.2.23) პირობები იცვლება შესაბამისი  $v_{jrs}$  უბის შემოსაზღვრულობით.



დასმული ამოცანების გამოსაკვლევად შეიძლება წარმატებით იქნეს გამოყენებული ცნობილი სამეცნიერო ლიტერატურა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა (იხ., მაგალითად, [46]) და ჰიპერბოლურ განტოლებათა (იხ. მაგალითად, [49]) თეორიაში. თუმცა მათი გამოყენება მოითხოვს გარკვეულ დამატებით გამოკვლევებს, განსაკუთრებით წამახვილებულ, ე.ი., როცა  $2h_i(x_1) \geq 0$ ,  $i = 2, 3$ ,  $x_1 \in [0, L]$ , ლეროს შემთხვევაში.

როცა  $2h_i(x_1) > 0$ ,  $i = 2, 3$ ,  $x_1 \in [0, L]$ , იმის გათვალისწინებით, რომ (3.2.21), (3.2.22) სისტემა სტატიკურ შემთხვევაში შეიძლება დაყვანილ იქნეს პირველი რიგის წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, დასმული ამოცანების ამოხსნადობა რეგულარულ  $(C^2)$  ფუნქციათა კლასში, ცნობილი თეორემის (იხ. [46], გვ. 146) თანახმად, გამომდინარეობს მათი ამონახსნების ერთადერთობიდან. ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი შესწავლილია [21]-ში.

როცა  $2h_i(x_1) \geq 0$ ,  $i = 2, 3$ ,  $x_1 \in [0, L]$ , შეიძლება დაისვას შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$v_{jn, n_2}(0) = \varphi_{jn, n_2}^0, \text{ თუ}$$

$$I_0^{n_1, n_2} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N}_i, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.26)$$

$$v_{jn, n_2}(L) = \varphi_{jn, n_2}^L, \text{ თუ}$$

$$I_L^{n_1, n_2} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N}_i, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.27)$$

$$v_{jn, n_2}(x_1) = O(1) \text{ თუ}$$

$$x_1 \rightarrow 0+, \quad I_0^{n_1, n_2} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N}_i, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.28)$$

$$v_{jn, n_2}(x_1) = O(1) \text{ თუ}$$

$$x_1 \rightarrow L^-, I_L^{n_1, n_2} = +\infty, j = 1, 2, 3, n_i = \overline{0, N_i}, i = 2, 3; \quad (3.2.29)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1, j, n_1, n_2}(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \left\{ \Lambda_j h_2^{2n_1+1} h_3^{2n_3+1} v_{j, n_1, n_2, 1} \right. \\ \left. - \Lambda_j \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_1+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2} s + (\delta_{k3} + 1) n_2 + 1} h_3^{\delta_{k3} s + (\delta_{k2} + 1) n_3 + 1} h_k^{-n_k} b_r^k v_{j, \delta_{k2} n_3 + \delta_{k3} s, \delta_{k2} s + \delta_{k3} n_1} \right.$$

$$\left. - \left[ \delta_{j1} \lambda \sum_{i=2}^3 + \delta_{ij} (\delta_{j2} + \delta_{j3}) \mu \right] \sum_{s=n_1+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2} s + (\delta_{i3} + 1) n_2 + 1} h_3^{(\delta_{i2} + 1) n_3 + \delta_{i3} s + 1} h_i^{-1} \right. \\ \left. \times b_{is}^{n_i} v_{\delta_{i1} s + \delta_{i2} + \delta_{i3}, \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s, \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \right\} = \psi_{j, n_1, n_2}^0,$$

$$\text{თუ } I_0^{n_1, n_2} \leq +\infty, j = 1, 2, 3, n_i = \overline{0, N_i}, i = 2, 3; \quad (3.2.30)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow L^-} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1, j, n_1, n_2}(x_1) = \psi_{j, n_1, n_2}^L,$$

$$\text{თუ } I_L^{n_1, n_2} \leq +\infty, j = 1, 2, 3, n_i = \overline{0, N_i}, i = 2, 3. \quad (3.2.31)$$

აქ  $\varphi_{j, n_1, n_2}^0, \varphi_{j, n_1, n_2}^L, \psi_{j, n_1, n_2}^0, \psi_{j, n_1, n_2}^L$  მოცემული მუდმივებია,

$$I_0^{n_1, n_2} := \int_0^\varepsilon h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

$$I_L^{n_1, n_2} := \int_{L-\varepsilon}^L h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

(3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.27); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.31); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.30); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.29); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.28) სასაზღვრო ამოცანები ცალსახად ამოხსნაღია,

ზოლო (3.2.21), (3.2.22), (3.2.28), (3.2.29) სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია ხისტი გადაადგილების სიზუსტით (იხ. [21]). ანალოგიური დასკვნების გამოტანა შეიძლება უცნობი სიდიდეების ინდექსების მიმართ შერეული სასაზღვრო ამოცანების მიმართაც.

დინამიკურ შემთხვევაში ზემოხსენებულ სასაზღვრო პირობებს ემატება (3.2.24) საწყისი პირობები. საწყისი პირობების დასმა, სასაზღვრო პირობებისაგან განსხვავებით, ღეროს წამახვილებაზე არ არის დამოკიდებული, რადგან (3.2.21), (3.2.22) სისტემა არ არის გადაგვარებული  $t$ -ს მიმართ საერთოდ და, კერძოდ, როცა  $t = 0$ .

$N_3, N_2$ -ის თითოეული კონკრეტული მნიშვნელობის შემთხვევაში ვიღებთ კონკრეტულ იერარქიულ მოდელს – მიახლოებას. თითოეული მათგანი წარმოადგენს დამოუკიდებელ მათემატიკურ მოდელს, რომელსაც დამოუკიდებელი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია. მაგალითად,  $(0,0)$  მიახლოება შეესაბამება ღეროს გაჭიმვა-კუმშვის კლასიკურ მოდელს, ხოლო  $(1,0)$  მიახლოება – ღეროს კლასიკური ღუნვის მოდელს კოეფიციენტების სიზუსტით.

წამახვილებული ღეროებისა და ფირფიტების კორექტულად დასმული სასაზღვრო ამოცანების მიმართების საკითხი სამგანზომილებიანი მოდელის სასაზღვრო ამოცანებთან განხილულია [22]-სა და [24]-ში.

### 3.2.2. $(0,0)$ მიახლოება

$(0,0)$  მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(h_2 h_3 v_{j,l}(x_1, t)\right)_{,l} + Y_j^{0,0} = \Lambda_j^{-1} \rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 v_j(x_1, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.32)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

$$v_j(x_1, t) := \frac{u_j^{0,0}(x_1, t)}{h_2(x_1)h_3(x_1)}, \quad Y_1^{0,0} := \frac{X_1^{0,0}}{\lambda + 2\mu}, \quad Y_i^{0,0} := \frac{X_i^{0,0}}{\mu}, \quad i = 2, 3.$$

როგორც ვხედავთ, სისტემა დაიშალა სამ დამოუკიდებელ ერთი და იმავე ტიპის განტოლებად. ადვილი სანახავია, რომ სტატიკურ შემთხვევაში (ე.ი., (3.2.32)-ის მარჯვენა მხარეში ნულია)

$$\left(h_2 h_3 v_{j,l}(x_1, t)\right)_{,l} + Y_j^{0,0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.33)$$

და მათ ზოგად ამონახსნს  $C^2([0, L[)$  კლასში აქვს

$$v_j(x_1) = - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} \int_{x_1^0}^{\tau} Y_j^{0,0}(t) dt + c_1^j \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} + c_2^j, \quad (3.2.34)$$

$$x_1^0 = \text{const} \in ]0, 1[, \quad c_\alpha^j = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3,$$

სახე.

(3.2.26)-(3.2.31) სასაზღვრო პირობები იღებენ

$$v_j(0) = \varphi_j^{0,0} \quad (\text{ღირიხლეს პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.35)$$

$$v_j(L) = \varphi_j^L \quad (\text{ღირიხლეს პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.36)$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow 0+, \quad \text{თუ } I_0^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.37)$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow L-, \quad \text{თუ } I_L^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.38)$$

$$X_{j,00}(0) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1} \Big|_{x_1=0} = \psi_j^0 \quad (\text{ნეიმანის წონიანი პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.39)$$

$$X_{j,00}(L) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1} \Big|_{x_1=L} = \psi_j^L \quad (\text{ნეიმანის წონიანი პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.40)$$

სახეს, სადაც  $\varphi_j^0, \psi_j^0, \varphi_j^L, \psi_j^L$  მოცემული მუდმივებია.

ეთქვათ,  $Y_{j,00} \in L([0, L])$ , ე.ი. ინტეგრებადია (ჯამებადია) და

$$\text{თუ } I_0^{0,0} = +\infty \quad \left( I_L^{0,0} = +\infty \right), \quad \text{მაშინ ის ისეთია, რომ (3.2.34)-ში}$$

იტერირებული ინტეგრალი იყოს შემოსაზღვრული, როცა  $x_1 \rightarrow 0+ (L-)$ .

თუ  $h_2^{-1} h_3^{-1}$  ლოკალურად ჯამებადია  $]0, L[$ -ში, მაშინ (3.2.34)-დან გამომდინარეობს, რომ რეგულარული ამონახსნისათვის (ე.ი.  $v_j \in C^2([0, L])$ ) მხოლოდ შემდეგი ამოცანებია კორექტული (3.2.33), (3.2.35), (3.2.36) ( $v_j \in C([0, L])$ ); (3.2.33), (3.2.37), (3.2.36) ( $v_j \in C([0, L])$ ); (3.2.33), (3.2.35), (3.2.38) ( $v_j \in C([0, L])$ ); (3.2.33), (3.2.37), (3.2.38); (3.2.33), (3.2.35), (3.2.40) ( $v_j \in C([0, L[$ ,  $h_2 h_3 v_{j,1} \in C([0, L])$ ); (3.2.33), (3.2.39), (3.2.36) ( $v_j \in C([0, L])$ ,  $h_2 h_3 v_{j,1} \in C([0, L])$ ); შერეული ამოცანები, როცა ერთ ბოლოში  $j$ -ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირიხლეს პირობა,

ხოლო  $j$ -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ნეიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო მეორე ბოლოში  $j$ -ის პირველი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ღირიხლეს, ან ნეიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო  $j$ -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირიხლეს (ნეიმანის და (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა დასაშვები არ არის) პირობა, როცა მეორე ბოლოში ნეიმანის პირობაა მოცემული და ღირიხლეს ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა (ნეიმანის პირობა დასაშვები არაა), როცა მეორე ბოლოში (3.2.38), (3.2.37) ტიპის პირობაა მოცემული.

(3.2.33), (3.2.37), (3.2.38) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განსაზღვრულია ხისტი გადატანის ( $c_1^j = 0$ ;  $c_2^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , ნებისმიერი მუდმივებია) სიზუსტით. ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში ღეროზე, როგორც სამგანზომილებიან სხეულზე, მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები, რომლებიც შეტანილია  $Y_{j00}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , გამოსახულებებში. შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური (მექანიკური) მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, რომ ჩვენ იმ სასაზღვრო ამოცანებს, რომელთა ამონახსნები ხისტი გადაადგილების სიზუსტით განისაზღვრება, კორექტულად — “კარგად” დასმული ვუწოდოთ.

ადვილი სანახავია, რომ ორივე ბოლოში ნეიმანის პირობის დასახელება დასაშვები (შესაძლებელი) არ არის. ის შეიძლება მხოლოდ ერთ ბოლოში დასახელდეს და ამასთან ამონახსნი ხისტი გადატანის სიზუსტით იქნება განსაზღვრული, რაც ბუნებრივია, რადგან ღეროზე მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები ერთი ბოლოს ჩათვლით, ხოლო მეორე ბოლო საერთოდ განთავისუფლებულია სასაზღვრო პირობებისაგან. ზაზგასასმელია, რომ ეს თავისებურება ღეროს წამახვილებით არ არის გამოწვეული. ეს  $(0, 0)$  მოდელის სიუხეშიდან გამომდინარეობს, ასევე არ არიან ამოხსნადი (3.2.33), (3.2.37), (3.2.40) და (3.2.33), (3.2.38), (3.2.39) სასაზღვრო ამოცანები (რომლებიც მხოლოდ

წამახვილებული ღეროსათვის წარმოიშვებიან), რადგან ამ შემთხვევებში  $c_1^j = 0$  და შეუძლებელია  $c_2^j$  მუდმივით (3.2.40) და (3.2.39) პირობების დაკმაყოფილება.

(0,0) მიახლოებაში დინამიკის ამოცანა დირიხლეს პირობების (იმ შემთხვევის ჩათვლით, როცა წამახვილებული ბოლო თავისუფლდება სასაზღვრო პირობისაგან) შემთხვევაში, როცა ღეროს მხოლოდ ერთ ბოლოში აქვს ხარისხოვანი წამახვილება, გამოკველეულია [26]-ში. დინამიკის ამოცანები დანარჩენი ზემოთ მითითებული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შემდგომი კვლევის საგანს წარმოადგენს.

### 3.2.3. (1,0) მიახლოება

სიმეტრიული ღეროების შემთხვევაში, ე.ი. როცა  $\tilde{h}_i \equiv 0$ ,  $i = 2, 3$ , (1,0) მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$(\lambda + 2\mu)(h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} + 3\lambda(h_2 h_3 v_{310})_{,1} + X_1^{0,0} = 0, \quad (3.2.41)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{310,1})_{,1} - 3(\lambda + 2\mu)h_2 h_3 v_{310} - \lambda h_2 h_3 v_{100,1} + h_3 X_3^{1,0} = 0, \quad (3.2.42)$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{200,1})_{,1} + X_2^{0,0} = 0, \quad (3.2.43)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{210,1})_{,1} - 3\mu h_2 h_3 v_{210} + h_3 X_2^{1,0} = 0, \quad (3.2.44)$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{300,1})_{,1} + 3\mu(h_2 h_3 v_{110})_{,1} + X_3^{0,0} = 0, \quad (3.2.45)$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu)(h_2 h_3^3 v_{110,1})_1 - \mu h_2 h_3 v_{300,1} \\
 & - 3\mu h_2 h_3 v_{110} + h_3 X_1^{0,0} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.46}$$

სასაზღვრო ამოცანები (3.2.43) განტოლებებისათვის გამოკვლეული იყო 3.2.2 ქვეპარაგრაფში. აქედან გამომდინარე, მგავალითად, დირიხლეს პირობები  $v_{200}$ -სათვის შეიძლება დასმული იქნეს მხოლოდ მაშინ, როცა  $I_0^{0,0} < +\infty$ ,  $I_L^{0,0} < +\infty$ . ანლოგიურად შეიძლება გამოკვლეულ იქნეს (3.2.44) განტოლებაც, რაც იმ დასკვნამდე მიგვიყვანს, რომ ამ განტოლებებისათვის და ე.ი.  $v_{210}$ -სათვის დირიხლეს პირობები შეიძლება დასმულ იქნეს მხოლოდ მაშინ, როცა  $I_0^{1,0} < \infty$ ,  $I_L^{1,0} < \infty$ . ამ შემთხვევაში

$$u_2(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200}(x_1) + \frac{3x_3}{4} v_{210}(x_1),$$

საიდანაც

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+(L-)} u(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200} \Big|_{x_1=0(L)},$$

როცა  $I_0^{1,0} < +\infty$  ( $I_L^{1,0} < +\infty$ ), ან როცა  $I_0^{0,0} < +\infty$  ( $I_L^{0,0} < +\infty$ ),

მაგრამ  $v_{210}$  შემოსაზღვრულია, თუ  $I_0^{1,0} = +\infty$  ( $I_L^{1,0} = +\infty$ ).

(3.2.45), (3.2.46) და (3.2.41), (3.2.42) სისტემები შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$3\mu v_{110} = -\mu v_{300,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left( \int_{x_1^0}^{x_1} X_3^{0,0}(x_1) dx_1 - C_1 \right),$$

$$C_1 = \text{const}, \quad x_1^0 \in ]0, L[,$$



$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)(h_2 h_3^3 v_{300,11})_{,11} &= 3 X_3^{0,0} + 3 \left( h_3 X_1^{1,0} \right)_{,1} \\
 - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left[ h_2 h_3^3 \left( h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_3^0(x_1) dx_1 - h_2^{-1} h_3^{-1} C_1 \right) \right]_{,1} &
 \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned}
 3\lambda v_{310} &= -(\lambda + 2\mu)v_{100,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left( \int_{x_1^0}^{x_1} X_3^0(x_1) dx_1 - C_2 \right) \\
 C_2 &= const,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + 2\mu)\mu(h_2 h_3^3 v_{100,11})_{,11} - 12(\lambda + \mu)\mu(h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} \\
 &= -\mu \left\{ h_2 h_3^3 \left[ \left( h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_1^0(x_1) dx_1 \right)_{,1} - C_2 (h_2^{-1} h_3^{-1})_{,1} \right] \right\}_{,11} \\
 &+ 12 \frac{(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + \frac{3\lambda^2}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + 3\lambda \left( h_3 X_3^0 \right)_{,1}.
 \end{aligned}$$

ამ სისტემების უპირატესობა ისაა, რომ მათ შორის მეორე განტოლებები მხოლოდ ერთ უცნობს შეიცავენ და მათი ამოხსნის შემდეგ პირველი განტოლებებიდან ადვილად დაითვლება  $v_{110}$  და  $v_{310}$ .

ერთი ბოლოთი ხარისხობრივად წამახვილებული ღეროს შემთხვევაში დინამიკის ამოცანები, როცა სასაზღვრო პირობები დირიხლეს ტიპისაა, გამოკვლეულია [26]-ში. სხვა ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისა და შესაბამისი დინამიკის ამოცანების შესწავლა შემდგომი კვლევის საგანია.

## ნაწილი IV. დრეკად და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები

### §4.1. ტრანსპიზიის (საკონტაქტო) პირობები

სითხისა და დრეკადი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანები თანამედროვე აქტუალურ სამეცნიერო თემატიკას განეკუთვნებიან. მათი მნიშვნელობა განპირობებულია, მაგალითად, ნავთობის ნავთობსადენებში, სისხლის სისხლძარღვებში მოძრაობის, სანაპირო გამაგრების ამოცანების აქტუალობით. დღეისათვის მიმდინარეობს ამოცანების ინტენსიური კვლევა *ინტერფეისზე* (სხეულის თხევადი და მყარი ნაწილების გამყოფ საკონტაქტო ზედაპირზე) სხვადასხვა ტრანსპიზიის ანუ საკონტაქტო პირობების შემთხვევაში. ამასთან კვლავ გრძელდება ფიზიკური თვალსაზრისით გამართლებული საკონტაქტო პირობების დადგენის პროცესი [42], [56], [18], [7-10].

სამგანზომილებიან მოდელებში ჩვეულებრივ იყენებენ

$$[u]_i := u^f - u^s = 0, \tag{4.1.1}$$

$$[\sigma_{ij} n_j]_i := \sigma_{ij}^s n_j^s - \sigma_{ij}^f n_j^f = \sigma_{ij}^s n_j^s + \sigma_{ij}^f n_j^f = 0,$$

საკონტაქტო პირობებს, სადაც  $u^s$ ,  $\sigma_{ij}^s$  და  $u^f$ ,  $\sigma_{ij}^f$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , არის გადაადგილების ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები შესაბამისად სხეულის მყარ და თხევად ნაწილებში;  $n^s$  და  $n^f$  შესაბამისად  $\partial \Omega^s$ -ის და  $\partial \Omega^f$ -ის გარე ნორმალებია, ხოლო  $l$  არის ინტერფეისი მყარ და თხევად ნაწილებს შორის.

გამოკვლეულია აგრეთვე ზოგიერთი ამოცანა შემდეგი უნილათერალური (ცალმხრივი) საკონტაქტო პირობებით [7]:

$$[u, N]_i \geq 0, \tag{4.1.2}$$

$$\sigma_{ij}^s n_j^s = \sigma_{NN}^s N_i, \quad \sigma_{ij}^f n_j^f = -\sigma_{NN}^f N_i, \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_{NN}^s \leq 0, \quad (4.1.4)$$

$$\text{და } \sigma_{NN}^f = 0, \text{ თუ } [u_i N_i]_i > 0. \quad (4.1.5)$$

(4.1.3) იმას ნიშნავს, რომ  $I$  ინტერფეისზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვები მოქმედებენ (მხები კომპონენტები ნულის ტოლია,  $\sigma_{NN}$  ნორმალური კომპონენტი,  $N$  ინტერფეისის გარე ნორმალია  $\Omega^s$ -ის მიმართ), რომლებიც ერთმანეთს აწონასწორებენ; (4.1.4) ნიშნავს იმას, რომ გვაქვს კუმშვა; (4.1.5) კი იმას ნიშნავს, რომ თუ მყარი და თხევადი ნაწილები ინტერფეისის რაიმე წერტილში ერთმანეთს არ ეჯახება, მაშინ ამ წერტილში ნორმალური ძალები ნულის ტოლია.

განიხილავენ აგრეთვე საკონტაქტო პირობებს სამგანზომილებიან სითხესა და ღრუკად გარსს ან ფირფიტას შორის. ვთქვათ, სითხე იწვევს ფირფიტის ღუნვას. თუ განვიხილავთ ღუნვას კირხჰოფ-ლიავის მოდელის საფუძველზე, მაშინ, რამდენადაც ყველა გეომეტრიული და ფიზიკური სიდიდე გამოისახება ჩალუნვით, საკონტაქტო პირობებად შეიძლება გამოვიყენოთ (4.1.1) ან (4.1.2)-(4.1.5) პირობები. საკონტაქტო პირობების მოდელირება შემდეგნაირადაც შეიძლება. ვთქვათ, ფირფიტის შუა სიბრტყე მდებარეობს  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე და სითხის ნაკადი იწვევს ფირფიტის ღუნვას. მაშინ ფირფიტის დატვირთვის ინტენსიობისათვის გვექნება

$$q \equiv q_3(x_1, x_2, t) = \sigma_{N3}^f \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) + \sigma_{N3}^f \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \quad (4.1.6)$$

$$q_{\beta}(x_1, x_2, t) = \sigma_{N\beta}^f \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \\ = \sigma_{N\beta}^f \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) = 0, \quad \beta = 1, 2,$$

გამოსახულებები, ხოლო სითხის  $(v_1, v_2, v_3)$  სიჩქარის მნიშვნელობა ფირფიტის პირით ზედაპირებზე და ფირფიტის  $w$  ჩაღუნვა შემდეგი ტოლობებით იქნებიან დაკავშირებულნი:

$$\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} = v_3 \left( x_1 - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right) \\ = v_3 \left( x_1 - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \dot{w}_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha}(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t) = - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_{\alpha} \partial t} \\ = v_{\alpha} \left( x_1 - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha}(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t) = - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_{\alpha} \partial t} \\ = v_{\alpha} \left( x_1 - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right.$$

$$\left. - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t) t \right\} \quad (4.1.9)$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

((4.1.7)-ში მეორე ტოლობა სამართლიანია იმის გამო, რომ  $w \equiv u_3$  ჩაღუნვა არ არის დამოკიდებული  $x_3$ -ზე), სადაც  $\omega$

არის ფირფიტის გეგმილი  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე,  $x_3 = \overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2)$  არის ფირფიტის ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირები. როგორც ვხედავთ (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობებში ყველა ფუნქცია დროის ყველა მომენტში დამოკიდებულია  $(x_1, x_2) \in \omega$  წერტილებზე და ამდენად საკონტაქტო პირობები ფაქტობრივად ჩაწერილი გვაქვს  $\omega$  არეში.

თუ ფირფიტა საკმარისად თხელია, (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შეიძლება კიდევ უფრო გავამარტივოთ შემდეგ დაშვებებზე დაყრდნობით:

1) ჩავთვალოთ, რომ სითხეს უკავია  $\overline{(\Omega^I \cup \Omega^I)} \setminus \omega$  არე;

2) ჩავთვალოთ, რომ დრეკად ნაწილს უკავია  $\omega$  არე (მისი გეომეტრია სისქის გასწვრივ გათვალისწინებულია ღუნვის განტოლების კოეფიციენტებში);

3) მცირე სიდიდეების უკუგდების შემდეგ (4.1.7)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} = v_3(x_1, x_2, 0, t), \quad v_\alpha(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega;$$

4)  $\overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2)$ -ის უგულვებლყოფისა და იმის გათვალისწინებით, რომ სიბრტყის  $\omega$  ნაწილის ნორმალურია  $x_3$  და  $-x_3$ , (4.1.6) მიიღებს

$$q(x_1, x_2, 0, t) = \sigma'_{33}(x_1, x_2, 0+, t) - \sigma'_{33}(x_1, x_2, 0-, t) \quad (4.1.11)$$

სახეს.

იდეალური სითხის შემთხვევაში

$$\sigma'_N = -p(x_1, x_2, x_3, t) \bar{N},$$

სადაც  $p(x_1, x_2, x_3, t)$  წნევაა. ამიტომ

$$\sigma'_{N_3} = -p \cos(\bar{N}, x_3)$$

და (4.1.6) საკონტაქტო პირობა მიიღებს

$$q(x_1, x_2, t) = -p \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \cos \left( \bar{N} \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \right), x_3 \right) - p \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \cos \left( \bar{N} \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \right), x_3 \right) \quad (4.1.12)$$

$(x_1, x_2) \in \omega,$

სახეს.

თუ კუთხე  $\bar{N}$ -სა და  $x_3$  ღერძს შორის მცირეა, მაშინ (4.1.11) შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$q(x_1, x_2, t) = -p \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) + p \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad (4.1.13)$$

ზოგიერთი საკონტაქტო ამოცანა (4.1.10), (4.1.11) და (4.1.10), (4.1.12) საკონტაქტო პირობებში გამოკველულია [8-10]-ში.

თუ სითხეში ჩადებულია დრეკადი ფირფიტა ან ღერო, მაშინ შესაბამისად  $N$ -ური (იხ. §2.6) და  $(N_3, N_2)$  (იხ. §3.2) იერარ-

ქიული მოდელის გამოყენების დროს (4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობებში  $u^s$  და  $\sigma_{ij}^s$  სიდიდეების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი  $N$ -ური და  $(N_3, N_2)$  მიახლოებითი მნიშვნელობები.

$N = 0$  და  $(0,0)$  მიახლოებაში (4.1.1) პირობებს შეიძლება სხვა სახეც მიეცეს.

მაგალითად,  $N = 0$  მიახლოებაში (4.1.1) პირობები შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$(2h)^{-1} u_{i,0}^s = u_i^f(x_1, x_2, 0+, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0-, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0, t),$$

$$i = 1, 2, 3,$$

და, მულტივი სისქის შემთხვევაში,

$$q_\beta := \sigma_{3\beta}^f \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - \sigma_{3\beta}^f \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right)$$

$$= 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2}$$

$$- \left[ \Phi_{\beta 0}^s + 2h \left[ \mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) u_{\gamma, \gamma\beta}^f(x_1, x_2, 0, t) \right] \right]_f$$

$$\beta = 1, 2;$$

$$q_3 := \sigma_{33}^f \left( x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - \sigma_{33}^f \left( x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right)$$

$$= 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2}$$

$$- \left[ \Phi_{30}^s + 2\mu h \Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) \right], \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

ხოლო ცვლადი სისქის შემთხვევაში

$$\begin{aligned} & \sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{(+)}{h_{.1}}\right)^2 + \left(\frac{(+)}{h_{.2}}\right)^2} \\ & + \sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{(-)}{h_{.1}}\right)^2 + \left(\frac{(-)}{h_{.2}}\right)^2} \\ & = 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \Phi_{\beta 0}^s + 2h [\mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) (u_\gamma^f(x_1, x_2, 0, t))_{h, \gamma} \right. \\ & \quad \left. + \lambda (\ln h)_{,\beta} (u_\alpha^f)_\alpha \right. \\ & \quad \left. + \mu (\ln h)_{,\alpha} (u_\alpha^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\beta} + \mu (\ln h)_{,\alpha} (u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{(+)}{h_{.1}}\right)^2 + \left(\frac{(+)}{h_{.2}}\right)^2} \\ & + \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{(-)}{h_{.1}}\right)^2 + \left(\frac{(-)}{h_{.2}}\right)^2} \\ & = 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \Phi_{30}^s + 2\mu h [\Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) + (\ln h)_{,\alpha} (u_3^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\alpha}] \right\}, \\ & \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(0,0) მახლობლობაში (4.1.1) პირობები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$(4h_2 h_3)^{-1} u_{i00}^s = u_i^f(x_1, 0, 0, t), \quad i = 1, 2, 3;$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^3 \left[ \sqrt{1 + \left( h_{s-i,1}^{(+)} \right)^2} \right. \\
& \times \int_{h_i^{(-)}(x_1)}^{h_i^{(+)}(x_1)} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{s-i,2}^{(+)} h_2 + \delta_{s-i,3} x_2, \delta_{s-i,2} x_3 + \delta_{s-i,3} h_3) \\
& \times \cos(v_{s-i}, x_k) dx_i - (-1)^{n_s-i} \sqrt{1 + \left( h_{s-i,1}^{(-)} \right)^2} \\
& \times \int_{h_i^{(-)}(x_1)}^{h_i^{(+)}(x_1)} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{s-i,2}^{(-)} h_2 + \delta_{s-i,3} x_2, \delta_{s-i,2} x_3 + \delta_{s-i,3} h_3) \\
& \times \cos(v_{s-i}, x_k) dx_i \left. \right] = 4\rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 u_j^f(x_1, 0, 0, t)}{\partial t^2} \\
& - \left\{ \Phi_{j00}^s + 4A_j [h_2 h_3 u_{j,1}^f(x_1, 0, 0, t)]_{,1} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad x_1 \in ]0, L[.
\end{aligned}$$

სტატიკურ შემთხვევაში უკანასკნელი სამი დიფერენციალური ტოლობის  $x_1$ -ის მიმართ ინტეგრებით თითოეულისათვის ორი უცნობი მუდმივის შემცველ ინტეგრალურ დამოკიდებულებას მივიღებთ  $]0, L[$ -ზე.

ამოცანები ასეთი საკონტაქტო პირობებით ჯერ-ჯერობით გამოკვლეული არ არის.

(4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობები გამოიყენება აგრეთვე დრეკადი სხეულების ურთიერთქმედების ინტერფეისზე (იხ. [56], თავი 6).

#### §4.2. დრეკადი და თხევადი ნაწილებისაგან შემდგარი სხეულის რხევა

განვიხილოთ მყარი დრეკადი ნაწილისა და თხევადი ნაწილისაგან შემდგარი სხეულის (კომპოზიციური გარემოს) წერტილების მცირე გადაადგილებები დრეკადობის წრფივი და სითხეების მოსვენებული მდგომარეობის მიმართ გაწრფივებული თეორიის საფუძველზე. ვთვლით, რომ მყარი და თხევადი ნაწილები სივრცეში პერიოდულადაა განაწილებული (მცირე პერიოდით). მყარი ნაწილი (ფაზა) შეიძლება იყოს ბმული, რომელიც შედგება ერთი მყარი სხეულისაგან არხებით, სადაც სითხე მოძრაობს, ან არაბმული, ე.ი. სითხეში ჩადებულია მყარი ნაწილაკები. დაეუშვათ, რომ სითხე ბაროტროპულია [56].

მყარ ნაწილში გვექნება დრეკადობის წრფივი თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. თავი IV):

$$\rho^s \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^s + \Phi_i^s, \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{ij}^s = a_{ijk}^s e_{kl}(\bar{u}^s), \quad e_{kl}(\bar{u}^s) = \frac{1}{2}(u_{k,l}^s + u_{l,k}^s), \quad (4.2.2)$$

სადაც ნიშნაკი  $s$  მიუთითებს მყარ ნაწილზე,  $a_{ijk}^s$  კოეფიციენტებს სიმარტივისათვის ჩავთვლით მუდმივებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ სიმეტრიის

$$a_{ijk}^s = a_{jik}^s = a_{kij}^s = a_{jki}^s \quad (4.2.3)$$

(ცხადია, პირველი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს მესამე) და დადებითად განსაზღვრულობის

$$a_{ijk}^s e_{ij} e_{kl} \geq \delta e_{ij} e_{ij}, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad e_{ij} = e_{ji} \quad (4.2.4)$$

პირობებს,  $\bar{u}^s := (u_1^s, u_2^s, u_3^s)$ .

თხევად ნაწილში გვექნება სითხეების გაწრფივებული თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. თავი V)

$$\rho^f \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \sigma_{ij}^f + \Phi_i^f, \quad (4.2.5)$$

$$\sigma_{ij}^f = -\delta_{ij} p + (\lambda \delta_{ij} \delta_{kk} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{kj}) e_{kl} \left( \frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \right), \quad (4.2.6)$$

სადაც ნიშნაკი  $f$  მიუთითებს თხევად ნაწილზე,  $\lambda$  და  $\mu$  სიბლანტის კოეფიციენტებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$\mu > 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}\alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2.7)$$

პირობებს,  $\bar{u}^f := (u_1^f, u_2^f, u_3^f)$ .

შეენიშნოთ, რომ სითხის მოძრაობის განტოლებები ჩვეულებრივ ჩაწერილია სიჩქარის

$$\bar{v}^f = \frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \quad (4.2.8)$$

ვექტორის მიმართ, მაგრამ აქ ჩვენ, (4.2.1) განტოლებებთან შეთანხმების მიზნით, ისინი ჩაწერეთ  $u^f$ -ის მიმართ.

სითხისა და მყარი სხეულის  $\rho^f$  და  $\rho^s$  სიმკვრივეები წონასწორობის მდგომარეობაში სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ მუდმივებად.

სითხის ბაროტროპულობის კანონს განვიხილავთ

$$p = c^2 \bar{\rho}^f \quad (4.2.9)$$

სახით, სადაც  $c > 0$  ბგერის გავრცელების სიჩქარეა, ხოლო  $\bar{\rho}^f$  სითხის სიმკვრივის შეშფოთებაა. გარდა ამისა, რადგანაც

$$\frac{\partial \bar{\rho}^f + \rho^f}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho}^f}{\partial t}$$

და  $\bar{\rho}^f \operatorname{div} \bar{v}$  შეიძლება უგულებელვყოთ წრფივ მიახლოებაში, მასის შენახვის (ე.ი. უწყვეტობის) განტოლება მიიღებს

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^f}{\partial t} + \rho^f \operatorname{div} \bar{v} = 0$$

სახეს, საიდანაც ინტეგრების შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ  $\tilde{\rho}^f = 0$ , თუ  $\bar{u} = 0$ , მივიღებთ, რომ

$$\tilde{\rho}^f + \rho^f \operatorname{div} \bar{u} = 0. \quad (4.2.10)$$

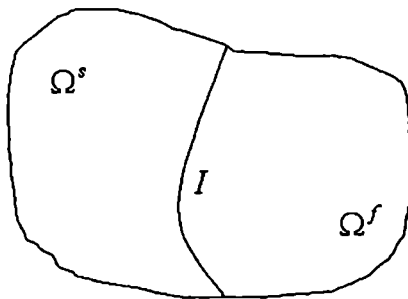
ამდენად (4.2.9) მიიღებს

$$p = -c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{u} \quad (4.2.11)$$

სახეს.

(4.2.11)-ის (4.2.6)-ში ჩასმის შემდეგ მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ  $\sigma'_{ij}$  დამოკიდებულია როგორც გადაადგილების  $\bar{u}^f$

ვექტორზე, ასევე სიჩქარის  $\frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t}$  ვექტორზე.



ნახ. 4.2.1

$I$  ინტერფეისზე (იხ. ნახ. 4.2.1) ვიხილავთ გადაადგილებებისა და ძაბვების უწყვეტობის

$$[u_i] = 0, \quad [\sigma_{ij} n_j] = 0 \quad (4.2.12)$$

პირობას, სადაც კვადრატული ფორმები, ჩვეულებისამებრ, შესაბამისი სიდიდეების ნახტომს აღნიშნავს.

ჩვენ განვიხილავთ ერთგვაროვან (თუმცა არაერთგვაროვანი პირობების განხილვაც შეიძლება)

$$\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.2.13)$$

სასაზღვრო და

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.2.14)$$

$$x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

საწყის პირობებს, სადაც  $\Omega := \Omega^s \cup \Omega^f \cup I$ .

(4.2.1), (4.2.5), (4.2.12)-(4.2.14) ამოცანის ვარიაციულ ფორმულირებას აქვს შემდეგი სახე:

ვეძებთ  $\bar{u}$  ვექტორს, როგორც  $t$ -ს ფუნქციას მნიშვნელობებით  $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ში, ისეთს, რომ

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} w_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = \int_{\Omega} \Phi_i w_i dx \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2.15)$$

$$\bar{u}(0) = \frac{d\bar{u}(0)}{dt} = 0, \quad (4.2.16)$$

სადაც

$$u_i := \begin{cases} u_i^s, & x \in \Omega^s; \\ u_i^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \rho := \begin{cases} \rho^s, & x \in \Omega^s; \\ \rho^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \sigma_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}^s, & x \in \Omega^s; \\ \sigma_{ij}^f, & x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$\Phi_i := \begin{cases} \Phi_i^s, & x \in \Omega^s; \\ \Phi_i^f, & x \in \Omega^f. \end{cases} \quad (4.2.17)$$

სობოლევის<sup>\*)</sup>  $[H_0^1(\Omega)]^3$  სივრცე არის ისეთი  $\Omega$ -ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები  $u_i \in H_0^1(\Omega)$ , ე.ი. კვადრატში ჯამებადია, მათი განზოგადებული ან განაწილების აზრით წარმოებულებიც ასევე კვადრატში ჯამებადია და მათი კვადრატები  $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია (იხ. დამატება 1 და §1.21).

(4.2.15)-ის მისაღებად (4.2.1) და (4.2.5) უნდა ჩაეწეროს, (4.2.17)-ის გამოყენებით, ერთიანი სახით  $\Omega$ -ზე; ამ უკანასკნელის ორივე მხარე გავამრავლოთ  $w_i \in H_0^1(\Omega)$ -ზე; მიღებული ვინტეგრით  $\Omega$ -ზე და  $\sigma_{ij}$ -ის შემცველ წევრში მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება, იმის გათვალისწინებით, რომ  $w_i$  ფუნქციების კვალი  $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია.  $e_{ij}$ -ის სიმეტრიულობის გამო ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\bar{u})e_{ij}(\bar{w}) &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})(w_{i,j} + w_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ji}(\bar{u})w_{i,j} = \sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

და, ამდენად, (4.2.15)-ში  $w_{i,j}$ -ის ნაცვლად შეიძლება  $e_{ij}(\bar{w})$  ჩავსვათ.

თუ (4.2.11)-ს ჩავსვამთ (4.2.6)-ში, მაშინ  $\sigma_{ij}$  ცალსახად განისაზღვრება  $\bar{u}$ -სა და მისი წარმოებულების საშუალებით. თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.2.18)-ს, ადვილი სანახავია, რომ

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx \equiv a(\bar{u}, \bar{w}) + b\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}\right), \quad (4.2.19)$$

სადაც

<sup>\*</sup> ს.ლ. სობოლევი (1908-1988).

$$a(\bar{u}, \bar{w}) := \int_{\Omega} a_{ijk}(x) e_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$b(\bar{v}, \bar{w}) := \int_{\Omega} b_{ijk}(x) e_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$a_{ijk}(x) := \begin{cases} a_{ijk}^s, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ a_{ijk}^f = \rho^f c^2 \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$b_{ijk}(x) := \begin{cases} b_{ijk}^s \equiv 0, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ b_{ijk}^f = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

რადგანაც

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \rho c^2 \rho^f \operatorname{div} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \delta_{ij} \rho c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{v} = \delta_{ij} \rho c^2 \rho^f v_{k,k} \\ &= \delta_{ij} \rho c^2 \rho^f e_{kk}(\bar{v}) = \delta_{ij} \delta_{kl} \rho c^2 \rho^f e_{kl}(\bar{v}). \end{aligned}$$

შენიშვნა 4.2.1. ცხადია,  $a$  და  $b$  არ არიან  $H_0^1(\Omega)$ -ზე კოერციტიულები. თუმცა მათი ჯამი კოერციტიულია, ე.ი.  $\exists \gamma = \text{const} > 0$  ისეთი, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \gamma \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (4.2.20)$$

მართლაც, (4.2.7) და (4.2.4)-დან გამოვძინარეობს, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \delta \int_{\Omega} e_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx$$

და ამის შემდეგ (4.2.20) შეიძლება ისე დამტკიცდეს როგორც ლემა 1.2 [56]-ის VI თავში.

შენიშვნა 4.2.2. (4.2.3), (4.2.4) და (4.2.7) პირობებში (4.2.15) საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ისეთი, რომ

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in L_2(0, T; [H_0^1(\Omega)]^3).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორც  $t$ -ს ფუნქციები

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in [L_2(0, T)]^3$$

და ყოველი მათგანი ფიქსირებული  $t \in [0, T]$ -სთვის იღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც  $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ს ეკუთვნიან.



## დამატება 1. დამხმარე მასალა ფუნქციონალური ანალიზიდან

განსაზღვრა 1.  $M$  სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე ლინეალური (ან წრფივი, ან ვექტორული სივრცე, ან წრფივი სისტემა, ან წრფივი გარსი) ეწოდება, თუ

ა)  $\forall u, v \in M$  -სთვის განსაზღვრულია  $u + v \in M$  და  $\forall a \in R$  -სთვის ( $R$  ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა) განსაზღვრულია  $au \in M$ ;

ბ) სრულდება ვექტორული ალგებრის შემდეგი აქსიომები:

$$u + v = v + u; \quad u + (v + z) = (u + v) + z, \quad z \in M;$$

$$a(u + v) = au + av; \quad (a + b)u = au + bu, \quad b \in R;$$

$$a(bu) = (ab)u; \quad 1 \cdot u = u;$$

გ)  $\exists \Theta \in M$  ისეთი, რომ  $u + \Theta = u \quad \forall u \in M$  -სთვის, მას ლინეალის ნულოვანი ელემენტი ეწოდება;

დ)  $\forall u \in M$  -სთვის,  $\exists v \in M$  ისეთი, რომ  $u + v = \Theta$ . ასეთ  $v$  ელემენტს  $u$ -ს შებრუნებული ეწოდება. (ის აღინიშნება  $(-u)$ -თი, ხოლო  $u + (-v)$  აღინიშნება  $(u - v)$ -თი).

$$\text{ცხადია, } 0 \cdot u = (1 - 1)u = u - u = \Theta.$$

განსაზღვრა 2.  $M$  სიმრავლეს (არა აუცილებლად ლინეალს) მეტრიკული სივრცე ეწოდება, თუ  $\forall u, v \in M$  -სთვის განსაზღვრულია  $\rho(u, v)$  რიცხვი, რომელსაც ეწოდება მანძილი (მეტრიკა)  $u$  და  $v$ -ს შორის, ისე, რომ შესრულდეს მეტრიკის შემდეგი აქსიომები:

$$\rho(u, v) \geq 0,$$

$$\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv v(x),$$

$$\rho(u, v) = \rho(v, u),$$

$\rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z)$  (სამკუთხედის აქსიომა),  
 $z \in M$ .

განსაზღვრა 3.  $M$  ლინეალს ეწოდება ნორმირებული, თუ  $\forall u \in M$  -სთვის განსაზღვრულია  $\|u\|$  რიცხვი, რომელსაც  $u$  ელემენტის ნორმა ეწოდება, ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი თვისებები:

$$\|u\| \geq 0,$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv \Theta,$$

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|, \quad a \in R,$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{სამკუთხედის უტოლობა}), \quad v \in M.$$

შენიშვნა 1. ყოველი ნორმირებული ლინეალი მეტრიკული სივრცეა მეტრიკით  $\rho(u, v) = \|u - v\|$ . მართლაც,  $\|u - z\| = \|u - v + v - z\| \leq \|u - v\| + \|v - z\|$ . მეტრიკის დანარჩენი თვისებები ცხადია.

შენიშვნა 2. მეტრიკული სივრცე შეიძლება გავხადოთ ნორმირებული, თუ ის ლინეალია და მეტრიკა ისეა შემოღებული, რომ

$$\rho(u + z, v + z) = \rho(u, v), \quad \rho(au, av) = |a| \rho(u, v).$$

ასეთ შემთხვევაში ნორმა შეიძლება განვსაზღვროთ  $\|u\| = \rho(u, \Theta)$  ტოლობით. მართლაც, პირველი თვისება ცხადია;

$$\text{მორე თვისების დამტკიცება: } 0 = \|x\| = \rho(x, \Theta) \Leftrightarrow x = \Theta;$$

მესამე თვისების დამტკიცება:

$$\|ax\| = \rho(ax, \Theta) = \rho(ax, a\Theta) = |a| \rho(x, \Theta) = |a| \cdot \|x\|;$$

მეოთხე თვისების დამტკიცება:

$$\|x + y\| = \rho(x + y, \Theta) \leq \rho(x + y, y) + \rho(y, \Theta)$$

$$= \rho(x + y, \Theta + y) + \rho(y, \Theta) = \rho(x, \Theta) + \rho(y, \Theta) = \|x\| + \|y\|.$$

განსაზღვრა 4.  $M$  ლინეალზე განსაზღვრულია სკალარული ნამრაველი, თუ ნებისმიერ წყვილს  $u, v \in M$  რაიმე წესით ეთანადება ნამდვილი რიცხვი

$$(u, v) \in R,$$

ისე, რომ მას ჰქონდეს შემდეგი თვისებები:

1.  $(u, u) \geq 0$ ,
2.  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$   $M$ -ზე;
3.  $(u, v) = (v, u)$ ;
4.  $(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v)$ ,  $a_1, a_2 \in R$ ;

შენიშვნა 3. ვთქვათ,  $M$  ლინეალზე განსაზღვრულია სკალარული ნამრაველი, მაშინ

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

ტოლობით შეიძლება შემოვიღოთ  $u \in M$  ელემენტის ნორმა, ხოლო

$$\rho(u, v) := \|u - v\|$$

ტოლობით შეიძლება განვსაზღვროთ  $u, v \in M$  ელემენტებს შორის მანძილი (მეტრიკა).

**ჰილდერის უტოლობა<sup>1)</sup>**:  $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$ .

**დამტკიცება.** სკალარული ნამრავლის პირველი თვისების თანახმად,  $\forall \lambda \in R$ -სათვის

$$(u + \lambda v, u + \lambda v) \geq 0.$$

საიდანაც, სკალარული ნამრავლის მეოთხე და მესამე თვისებების თანახმად

$$\begin{aligned} & (u, u) + \lambda(u, v) + \lambda(v, u) + \lambda^2(v, v) \\ & = (u, u) + 2(u, v)\lambda + (v, v)\lambda^2 \geq 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> მას უწოდებენ აგრეთვე კოშის უტოლობას.

ეს უკანასკნელი სამართლიანია ნებისმიერი ნამდვილი  $\lambda$ -სათვის, რაც მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა  $\lambda$ -ს მიმართ კვადრატული სამწვერის დისკრიმინანტი

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (v, v) \leq 0.$$

ე.ი.

$$(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot (v, v) = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

შენიშვნა 4. ნორმირებულ ლინეალზე შეიძლება შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი. ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნორმა ისე იყოს განმარტებული, რომ სრულდებოდეს ე.წ. პარალელოგრამის პირობა (თვისება)

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (1)$$

ამ შემთხვევაში სკალარული ნამრავლი შეიძლება შემოვიღოთ

$$(u, v) := -\frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u + v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \quad (2)$$

ტოლობით. მართლაც, (იხ. [47], გვ. 152), თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Phi(u, v, w) := 4[(u + v, w) - (u, w) - (v, w)], \quad (3)$$

მაშინ (2) და (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, w) &= \|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 \\ &\quad - \|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

(1)-დან ცხადია, რომ

$$\|u \pm w + v\|^2 = -\|u \pm w - v\|^2 + 2\|u \pm w\|^2 + 2\|v\|^2. \quad (5)$$

(5)-ის გათვალისწინებით, (4)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, w) &= -\|u + w - v\|^2 + 2\|u + w\|^2 + 2\|v\|^2 + \|u - w - v\|^2 \\ &\quad - 2\|u - w\|^2 - 2\|v\|^2 - \|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\|u + w - v\|^2 + \|u - w - v\|^2 + \|u + w\|^2 \\
 &- \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

(4) და (6) ტოლობების წვერ-წვერა ნახეარჯამი გვაძლევს, რომ

$$\begin{aligned}
 \Phi(u, v, w) &= \frac{1}{2} (\|v + w + u\|^2 + \|v + w - u\|^2) \\
 &- \frac{1}{2} (\|v - w + u\|^2 + \|v - w - u\|^2) \\
 &- \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

(7) გამოსახულებიდან (1)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$\begin{aligned}
 \Phi(u, v, w) &= \|v + w\|^2 + \|u\|^2 - \|v - w\|^2 \\
 - \|u\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

(3) და (8)-ის შედარების შემდეგ ვასკენით, რომ

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w). \tag{9}$$

ახლა განვიხილოთ

$$\varphi(c) := (cu, v) - c(u, v). \tag{10}$$

(9) და (2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(0) = (0, v) = \frac{1}{4} (\|v\|^2 - \|v\|^2) = 0 \tag{11}$$

და

$$\begin{aligned}
 \varphi(-1) &= (-u, v) + (u, v) = \frac{1}{4} (\|-u + v\|^2 - \|-u - v\|^2) \\
 &+ \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = 0,
 \end{aligned}$$

ე.ი.

$$(-u, v) = -(u, v). \tag{12}$$

$\forall n \in Z$ , სადაც  $Z$  მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, (12) და (9)-ის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ

$$\begin{aligned} (nu, v) &= (\operatorname{sign} n |n| u, v) = \operatorname{sign} n (|n| u, v) = \operatorname{sign} n \underbrace{(u + \dots + u, v)}_{|n|-ჯერ} \\ &= \operatorname{sign} n \cdot \left[ \underbrace{(u, v) + \dots + (u, v)}_{|n|-ჯერ} \right] = \operatorname{sign} n |n| (u, v) = n(u, v). \end{aligned}$$

ამდენად, ნებისმიერი რაციონალური  $\frac{p}{q}$  რიცხვისათვის გვექნება,

რომ

$$\left( \frac{p}{q} u, v \right) = p \left( \frac{1}{q} u, v \right) = p \frac{q}{q} \left( \frac{1}{q} u, v \right) = \frac{p}{q} \left( \frac{q}{q} u, v \right) = \frac{p}{q} (u, v).$$

ე.ი.  $\varphi(c) = 0$  ნებისმიერი რაციონალური  $c$  რიცხვისთვის.

რამდენადაც  $\varphi$  ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ თუ  $\frac{p_k}{q_k} \rightarrow c$ ,

$$\text{მაშინ } \varphi(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = 0 \quad \text{და} \quad \varphi(c) = 0 \quad \forall c \in R.$$

ამრიგად, (10)-დან ვასკვნით, რომ

$$(cu, v) = c(u, v). \quad (13)$$

(9), (13)-დან გამომდინარეობს, რომ სკალარული ნამრავლის მე-4 თვისება სრულდება. სხვა თვისებების სამართლიანობა ცხადია.

**განსაზღვრა 5.** ლინეალს (აღვნიშნოთ ის  $S_2$ -ით), რომელზეც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი და ამდენად — შენიშვნა 3-ში მითითებული მეტრიკა და ნორმა, ეწოდება *წინარეკილობერტის ან უნიტარული სივრცე*, ან *სივრცე სკალარული ნამრავ-*

ლით, ან სივრცე კვადრატული მეტრიკით, ან ევკლიდეს<sup>\*)</sup> სივრცე.

განსაზღვრა 6. თუ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$ , სადაც  $u, u_n \in S_2$ , მაშინ ამბობენ, რომ  $u_n$  კრებადია  $u$ -საკენ  $S_2$ -ში

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad S_2\text{-ში } (u_n \xrightarrow{S_2} u).$$

თეორემა 1. თუ  $u, v, u_n, v_n \in S_2$  და  $u_n \xrightarrow{S_2} u$ ,  $v_n \xrightarrow{S_2} v$ , მაშინ

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u, v).$$

დამტკიცება გამომდინარეობს ჰილდერის უტოლობის გათვალისწინებით მიღებული შემდეგი უტოლობიდან

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n - v) + (u, v_n - v) + (v, u_n - u)| \\ &\leq |(u_n - u, v_n - v)| + |(u, v_n - v)| + |(v, u_n - u)| \\ &\leq \|u_n - u\| \cdot \|v_n - v\| + \|u\| \cdot \|v_n - v\| + \|v\| \cdot \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

შედეგი 1. თუ  $u, v, u_n \in S_2$  და  $u_n \xrightarrow{S_2} u$ , მაშინ  $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$ .

შედეგი 2. თუ  $u, u_n \in S_2$  და  $u_n \xrightarrow{S_2} u$ , მაშინ  $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ , ე.ი.  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ .

განსაზღვრა 7.  $u_n \in S_2$ -ს ეწოდება ფუნდამენტური მიმდევრობა  $S_2$ -ში, თუ

$$\lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty}} \rho(u_m, u_n) = 0.$$

<sup>\*)</sup> ევკლიდე (დაახ. 340-დაახ. 287 წ. ად.-მდე).

განსაზღვრა 8.  $S_2$  სივრცეს ეწოდება *სრული*, თუ მისი ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა მასში კრებალია.

განსაზღვრა 9. სრულ წინარეჰილბერტის სივრცეს *ჰილბერტის\**) ( $H$ ) *სივრცე* ეწოდება, ხოლო სრულ ნორმირებულ სივრცეს – *ბანახის\*\*)* *სივრცე*.

განსაზღვრა 10.  $M$  სიმრავლეს ეწოდება *მკვრივი*  $S_2$ -ში, თუ  $\forall u \in S_2$ -სათვის  $M$ -ში მოიძებნება მისკენ  $S_2$ -ში კრებალი მიმდევრობა.

განსაზღვრა 11.  $u, v \in H$ -ს ეწოდება *ორთოგონალური*, თუ  $(u, v) = 0$ .

თეორემა 2. თუ  $u \in H$  *ორთოგონალურია*  $H$ -ში მკვრივი  $M$ -ის ყველა ელემენტისადმი, მაშინ ის  $H$ -ის ნულოვანი ელემენტია.

*დამტკიცება* ცხადია, რადგან  $(u, u_n) = 0$  და  $u_n \xrightarrow{H} u$  დამოკიდებულებებიდან, შედეგი 1-ის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ  $(u, u) = 0$ , ე.ი.  $u = \Theta$ .

განსაზღვრა 12. თუ მოცემულია  $X$  და  $Y$  რაიმე სიმრავლეები და წესი, რომელიც ყოველ  $x \in X$  ელემენტს უთანადებს ცალსახად განსაზღვრულ გარკვეულ  $y \in Y$  ელემენტს, მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემულია *ოპერატორი* ( $y = Ax$ )  $X$  განსაზღვრისა და  $Y$ -ში მნიშვნელობათა სიმრავლეებით.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა *ოპერატორი* იღებს რიცხვით მნიშვნელობებს, მას *ფუნქციონალი* ეწოდება.

განსაზღვრა 13. *ოპერატორს* ეწოდება *წრფივი*, თუ მისი განსაზღვრის  $D_A$  არე ლინეალურია და

---

\* დ. ჰილბერტი (1862-1943).

\*\* ს. ბანახი (1892-1945).



ა)  $A(au) = aAu \quad \forall u \in D_A$  და  $\forall a \in R$ ;

ბ)  $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 \quad \forall u_1, u_2 \in D_A$ .

**განსაზღვრა 14.**  $Fu := (Au, u) - 2(f, u)$  ფუნქციონალს, სადაც  $A$  დადებითი ოპერატორია  $D_A$  ლინეალზე, რომელიც მკვრივია  $H$  ჰილბერტის სივრცეში და  $f \in H$ , ეწოდება *კვადრატული ფუნქციონალი*, რამდენადაც  $\forall a \in R$  ადგილი აქვს

$$(A(au), au) = a^2 (Au, u)$$

ტოლობას და ამდენად  $(Au, u)$  წარმოადგენს  $F$  ფუნქციონალის კვადრატულ წევრს.

**თეორემა 3.** თუ სივრცეში  $\rho(u, v) := \|u - v\|$  მეტრიკით  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_0$ , ე.ი.  $\|u_n - u_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , მაშინ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u_0\|$ .

**თეორემა 4.** თუ  $\{u_n\}$  ფუნდამენტური მიმდევრობაა სივრცეში  $\rho(u, v) := \|u - v\|$  მეტრიკით, მაშინ ის შემოსაზღვრულია, ე.ი.  $\exists k = \text{const} > 0$  ისეთი, რომ

$$\|u_n\| \leq k \quad \forall n.$$

**განსაზღვრა 15.**  $P$  მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება *სეპარაბელური*, თუ არსებობს მის ელემენტთა ქვესიმრავლე არაუმეტეს თვლადისა, რომელიც მკვრივია ამ სივრცეში.

**თეორემა 5.** თუ  $A$  დადებითი ოპერატორია (იხ. განსაზღვრა 29),  $H_A$  ენერგეტიკული სივრცის (იხ. [54], გვ. 117) სეპარაბელურობისთვის საკმარისია  $H$  სივრცის სეპარაბელურობა.

**განსაზღვრა 16.**  $H$  სივრცის  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  ელემენტთა მიმდევრობას ეწოდება *სრული*, თუ მისი წრფივი კომბინაციების

სიმრავლე მკვრივია ამ სივრცეში, ე.ი.  $\forall \varepsilon = \text{const} > 0$  და  $u \in H$ -სთვის  $\exists n$  და ისეთი  $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$  რიცხვები, რომ

$$\rho \left( u, \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k \right) < \varepsilon.$$

განსაზღვრა 17.  $u_1, \dots, u_k \in S_2$  ელემენტებს ეწოდებათ წრფივად დამოკიდებული, თუ ერთი მათთაგანი მაინც არის დანარჩენების წრფივი კომბინაცია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდებათ.

თეორემა 6.  $u_1, \dots, u_k \in S_2$  ელემენტების სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი გრამის<sup>\*)</sup> დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1), \dots, (u_1, u_k) \\ \dots \\ (u_k, u_1), \dots, (u_k, u_k) \end{vmatrix} \neq 0.$$

განსაზღვრა 18. თუ  $\varphi_i \in S_2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , სისტემის ნებისმიერი ორი ელემენტი ორთოგონალურია  $((\varphi_i, \varphi_j) = 0, i \neq j)$ , მაშინ მას  $S_2$ -ში ორთოგონალური სისტემა ეწოდება, ხოლო თუ ამის გარდა ის ნორმირებულიცაა  $(\|\varphi_i\| = 1, i = 1, 2, \dots)$ , მაშინ — ორთონორმირებული.

განსაზღვრა 19.  $\varphi_i \in S_2, i = 1, 2, \dots$  სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი  $S_2$ -ში, თუ მისი ელემენტების ნებისმიერი

<sup>\*)</sup> ი.პ. გრამი (1850-1916).

სასრული რაოდენობისგან შემდგარი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 7. ყოველი ორთონორმირებული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

განსაზღვრა 20.  $H$  სივრცეში სრულ და წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას მისი ბაზისი ეწოდება.

განსაზღვრა 21.  $\varphi_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , მიმდევრობას ეწოდება  $H$ -ის ბაზისი შაუდერის\*) აზრით, თუ  $\forall u \in H$  შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ცალსახად

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

სახით.

შენიშვნა 5. თუ  $\varphi_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , სისტემა ორთონორმირებულია, მაშინ ბაზისის განსაზღვრა 20 და განსაზღვრა 21 ერთმანეთს ემთხვევიან.

განსაზღვრა 22. ბაზისის ელემენტთა  $n$  რიცხვს ეწოდება  $H$  სივრცის განზომილება და აღინიშნება  $n := \dim H$  სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 23. თუ  $\varphi_k \in S_2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ორთონორმირებული სისტემა  $S_2$ -ში,  $u \in S_2$  და  $\alpha_k := (u, \varphi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

მაშინ  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$  მწკრივს ეწოდება  $u$ -ს შესაბამისი ფურიეს

მწკრივი, ხოლო  $\alpha_k$ -ს — ფურიეს კოეფიციენტები.

თეორემა 8. თუ  $\varphi_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , მასში ორთონორმირებული სისტემა, მაშინ  $u \in H$  ელემენტის შესაბამისი ფურიეს

---

\*) ი.ა. შაუდერი (1896-1943).

მწკრივი  $H$ -ში კრებადია და სამართლიანია ბესელის<sup>\*)</sup>

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|u\|^2$  უტოლობა. ამასთან აუცილებელი და საკმარისი

პირობა მისი  $u$ -სკენ კრებადობისათვის მდგომარეობს პარსევალის<sup>\*\*)</sup>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2$$

ტოლობის შესრულებაში.

განსაზღვრა 24. ორთონორმირებულ სისტემას ეწოდება  $H$ -ში ჩაკეტილი, თუ სისტემის ყველა ელემენტისადმი ორთოგონალური ელემენტი მხოლოდ ნულოვანი ელემენტია.

განსაზღვრა 25. ორთონორმირებულ სისტემას ეწოდება სრული  $H$ -ში, თუ ყოველი  $u \in H$ -სთვის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი  $H$ -ში კრებადია  $u$ -სკენ, ე.ი. თუ სრულდება პარსევალის ტოლობა.

შენიშვნა 6. ორთონორმირებული სისტემის შემთხვევაში სისრულის განსაზღვრა 16 და განსაზღვრა 25 ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 9. ორთონორმირებული სისტემა სრულია  $H$ -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაკეტილია მასში.

თეორემა 10. ყოველ სეპარაბელურ  $H$  სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი, რომლის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი  $u \in H$  ელემენტისთვის  $u$ -სკენ კრებადია  $H$ -ში (ცხადია, თუ  $H$  სეპარაბელურია, მასში ბაზისი არსებობს და პირიქით, თუ ბაზისი არსებობს, ის სეპარაბელურია, რადგან ბაზისი  $H$ -ში მკვრივი სისტემაა, რომელიც თვლადზე მეტი არაა). თუ

<sup>\*)</sup> ფ. ბესელი (1784-1846).

<sup>\*\*)</sup> მ. პარსევალი (1755-1836).

$M$  მკვრივია სეპარაბელურ  $H$ -ში, მაშინ ბანახის შეიძლება აიგოს  $M$ -ის ელემენტებისგან.

განსაზღვრა 26.  $B$  ბანახის სივრცეში განსაზღვრულ ფუნქციონალს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ

$$|Lu| \leq C\|u\|, \quad C = \text{const} > 0, \quad \forall u \in B.$$

უმცირეს  $C$  მუდმივებს შორის ეწოდება  $L$  ფუნქციონალის ნორმა და აღინიშნება  $\|L\|$  სიმბოლოთი.

თეორემა 11 (რისის<sup>\*)</sup> თეორემა).  $H$  ჰილბერტის სივრცეში ყოველი შემოსაზღვრული წრფივი  $l$  ფუნქციონალი შეიძლება წარმოკადგინოთ

$$lu = (u, v) \quad \forall u \in H,$$

სკალარული ნამრავლის სახით, სადაც  $v \in H$  ფიქსირებული ელემენტი ცალსახადაა განსაზღვრული, ამასთან  $\|l\| = \|v\|$ .

თეორემა 12 (ჰან<sup>\*\*</sup>)-ბანახის თეორემა).  $B$  ბანახის სივრცის რაიმე  $M$  წრფივ მრავალსახეობაზე (მაგალითად, ლინეალზე) განსაზღვრული ყოველი წრფივი შემოსაზღვრული  $l$  ფუნქციონალი შეიძლება ნორმის შენარჩუნებით განეაწიროთ მთელ  $B$  სივრცეზე, ე.ი. შეიძლება ავაგოთ ისეთი  $L$  ფუნქციონალი, რომ

$$1) L(x) = l(x) \quad \forall x \in M; \quad 2) \|L\|_B = \|l\|_M.$$

განსაზღვრა 27. წრფივ ნორმირებულ  $E$  სივრცეზე განსაზღვრული  $f(x) = \langle f, x \rangle$  ფუნქციონალები ქმნიან ბანახის  $E^*$  სივრცეს, რომელსაც ეწოდება  $E$  სივრცის შეუღლებული (დუალური) სივრცე.

<sup>\*</sup>) ფ. რისი (1880-1956).

<sup>\*\*</sup>) ჯ. ჰანი (1879-1954).

განსაზღვრა 28. ვთქვათ,  $y = Ax$  ოპერატორი ასახავს  $E_x$  წრფივ ნორმირებულ სივრცეს  $E_y$  წრფივ ნორმირებულ სივრცეში, ხოლო  $\varphi(y) = \langle \varphi, y \rangle$   $E_y$ -ზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალია, მაშინ  $\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$ , სადაც  $f(x)$  წრფივი ფუნქციონალი  $E_x$ -ზეა განსაზღვრული. ამრიგად, ამ ტოლობით ავაგეთ რაღაც  $A^*$  ოპერატორი

$$f = A^* \varphi,$$

რომელიც განსაზღვრულია  $E_y$ -ის შეუღლებულ  $E_y^*$  სივრცეზე და ამ უკანასკნელი სივრცის  $\varphi$  ელემენტებს უთანადებს  $E_x$ -ის შეუღლებული  $E_x^*$  სივრცის ელემენტებს.  $A^*$  ოპერატორს  $A$  ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი ეწოდება.

თუ  $E_x \equiv E_y \equiv H$  ჰილბერტის სივრცეა, მაშინ რისის თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი  $x^*, y^* \in H$  ელემენტები, რომ

$$f(x) = (x^*, x), \quad \varphi(y) = (y^*, y),$$

ე.ი.

$$(y^*, y) = (x^*, x) \text{ და } (y^*, Ax) = (x^*, x)$$

ტოლობა ყოველ  $y^*$ -ს უთანადებს ერთადერთ  $x^*$  ელემენტს, ე.ი.

$$x^* = A^* y^*.$$

ამდენად,  $H$  ჰილბერტის სივრცეში შეუღლებული ოპერატორი შეიძლება განიმარტოს უკანასკნელის წინა ტოლობით.

კერძოდ, თუ  $A$  ოპერატორი განსაზღვრულია  $H$ -ში მკვრივ  $D_A$  ლინეალზე და  $\exists x^*, y^* \in H$  ისეთი, რომ

$$(y^*, Ax) = (x^*, x), \quad x \in D_A,$$

მაშინ ვამბობთ, რომ  $y^*$ -ის სიმრავლე  $x^*$ -ის შუილღებუღი  $A^*$  ოპერატორის  $D_{A^*}$  განსაზღვრის არეს დღ თვით ოპერატორი განისაზღვრებღ ტოლობით

$$A^* y^* = x^*.$$

$D_{A^*}$  ლინეღლიღ, ხოლო  $A^*$  – წრფივი ოპერატორი.  $D_{A^*} \neq \emptyset$ , რღდღღნ მღს ყოველთვის ეკუთვნის ნულოვანი ეღღემენტი.

განსაზღვრღ 29.  $H$  სივრცეში მკვრივ  $D_A$  ლინეღლზე განსაზღვრულ  $A$  ოპერატორს ეწოღებღ სიმეტრიული  $D_A$ -ზე, თუ ის წრფივიღ დღ  $\forall u, v \in D_A$  სრულღებღ

$$(Au, v) = (u, Av)$$

ტოლობღ. სიმეტრიულ ოპერატორს ეწოღებღ დღდებთი ოპერატორი, თუ

$$(Au, u) \geq 0,$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = \Theta \quad D_A \text{ - ში,}$$

ხოლო თუ  $\exists C = \text{const} > 0$ , რომ

$$(Au, u) \geq C \|u\|^2,$$

მღშინ მღს  $D_A$ -ში დღდებთიღღ განსაზღვრული ოპერატორი ეწოღებღ.

განსაზღვრღ 30. თუ  $A$  სიმეტრიული ოპერატორიღ, ცხღდიღ,  $D_A \subset D_{A^*}$  დღ ამღენღდ  $A^*$  ოპერატორი  $A$  ოპერატორის გღფართოებღღ. თუ  $D_A = D_{A^*}$ , მღშინ  $A^* = A$  დღ მღს თვითშუიღღღ ოპერატორი ეწოღებღ.

შენიშენღ 7. შემოსაზღვრული ოპერატორებისთვის სიმეტრიუღღობისღ დღ თვითშუიღღღღღღობის განმარტებები ერთმანეთს ემთხვევღღ.

თეორემა 13. ყოველი დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი შეიძლება გაეფართოვოს თვითშეუღლებულ ოპერატორობამდე (ე.წ. ფრიდრიხსის<sup>\*)</sup> გაფართოება).

განსაზღვრა 31. ორ  $A$  და  $B$  დადებითად განსაზღვრულ ოპერატორს ეწოდება კონგრუენტული, თუ  $D_A = D_B$ .

განსაზღვრა 32. ორ კონგრუენტულ ოპერატორს ეწოდება მონათესავე, თუ  $\exists c, k = \text{const} > 0$  ისეთები, რომ

$$\left| (Au, (B + kI)u) \right| \geq c \|Au\|^2 \quad \forall u \in D_A = D_B,$$

სადაც  $I$  ერთეულოვანი ოპერატორია.

განსაზღვრა 33.  $A$  ოპერატორს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ

$$\|Ax\|_{E_x} \leq M \|x\|_{E_x} \quad \forall x \in E_x. \quad (14)$$

განსაზღვრა 34.  $A$  ოპერატორს ეწოდება უწყვეტი, თუ

$$\|x_n - x\|_{E_x} \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_{E_x} \rightarrow 0.$$

თეორემა 14. იმისთვის, რომ წრფივი ოპერატორი იყოს უწყვეტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს შემოსაზღვრული.

განსაზღვრა 35. უმცირეს  $M$ -ებს შორის (14)-ში ეწოდება  $A$  ოპერატორის ნორმა:  $\|A\|$ .

განსაზღვრა 36.  $W_2^k(\Omega)$ -თი აღინიშნება ისეთი ჰილბერტის სივრცე, რომლის ელემენტები ეკუთვნის  $L_2(\Omega)$ -ს და აქვთ  $k$  რიგამდე ჩათვლით განზოგადებული წარმოებულები  $\Omega$  არეში,

<sup>\*)</sup> კო. ფრიდრიხსი (1901-1982).



რომლებიც აგრეთვე ეკუთვნის  $L_2(\Omega)$ -ს, და სადაც სკალარული ნამრავლი მოცემულია

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

ტოლობით.

**განსაზღვრა 37.**  $C_0^\infty(\Omega)$ -ში აღინიშნება ისეთ ფინიტურ ფუნქციათა (ე.ი.  $\Omega$ -ში კომპაქტური საყრდენის მქონე) სიმრავლე, რომელთაც აქვთ  $\Omega$  არეზე უწყვეტი ყველა რიგის წარმოებული. ფუნქციის საყრდენი ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის წერტილთა იმ სიმრავლის ჩაკეტვას, სადაც ფუნქცია ნულის ტოლი არაა.

**თეორემა 15.** ვთქვათ, წრფივი ოპერატორი  $A: D_A \rightarrow R_A$ , სადაც  $R_A$  მისი მნიშვნელობათა არეა. მაშინ შებრუნებული ოპერატორი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იქიდან, რომ  $Au = \Theta$ , სადაც  $Au \in R_A$ ,  $\Rightarrow u = \Theta$ , სადაც  $u \in D_A$ .

**თეორემა 16.** წრფივი ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი წრფივია.

**განსაზღვრა 38.** ვთქვათ,  $N \in H$  ლინეალა. მასში შემოვიღოთ  $H$ -ის მეტრიკა, თუ  $N$  ამასთან სრულია, მაშინ მას ეწოდება  $H$  სივრცის წრფივი ქვესივრცე.

**განსაზღვრა 39.** ამბობენ, რომ  $u \in H$  ელემენტი  $H$  პილბერტის სივრცის  $N$  ქვესივრცის ორთოგონალურია  $u \perp N$ , თუ  $u \perp N$ -ის ყველა ელემენტის ორთოგონალურია.

**თეორემა 17.** ვთქვათ,  $N$  სივრცე  $H$ -ის წრფივი ქვესივრცეა. მაშინ ნებისმიერი  $u \in H$  ცალსახად შეიძლება წარმოვადგინოთ  $u = v + w$  სახით, სადაც  $v \in N$  და  $w \perp N$ .  $v$ -ს ეწოდება  $u$ -ს ორთოგონალური პროექცია  $N$ -ზე.

შენიშვნა 8. ცხადია, თუ  $N \neq H$ , არსებობს ერთი მაინც  $w \perp N$  ისეთი, რომ  $w \neq \Theta$ . წინააღმდეგ შემთხვევაში  $u = v + \Theta = v \Rightarrow N \equiv H$ .

განსაზღვრა 40. ამბობენ, რომ  $\Omega \subset R^N$  არეს აქვს ლიპშიციის<sup>\*)</sup> საზღვარი, თუ:

1.)  $\Omega$  შემოსაზღვრულია (დასაშვებია მრავლადბმულობა);

2.)  $\exists \alpha, \beta = \text{const} > 0$ ,  $m$  ცალი  $x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, m}$ , კოორდინატთა სისტემა და  $(N-1)$ -განზომილებიან  $K^{(r)}$  კუბებზე

$$|x_i^{(r)}| < \alpha, \quad i = \overline{1, N-1},$$

უწყვეტი  $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ ,  $r = \overline{1, m}$ , ისეთი ფუნქციები, რომ

ა.) ყოველ  $x \in \partial \Omega$  წერტილი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ერთ-ერთი ზემოხსენებულ კოორდინატთა სისტემაში მაინც

$$x = (x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}) = (x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}))$$

სახით;

ბ.)  $x$  წერტილები, რომელთათვისაც სრულდება

$$|x_i^{(r)}| < \alpha, \quad i = \overline{1, N-1},$$

და

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) + \beta$$

ან

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$$

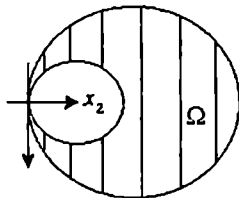
პირობები, შესაბამისად მდებარეობენ  $\Omega$ -ში ან  $\overline{\Omega}$ -ს გარეთ;

<sup>\*)</sup> რ.ო.ს. ლიპშიცი (1832-1903).

გ.) ყოველი  $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ ,  $r = \overline{1, m}$ , ფუნქცია  $K^{(r)}$  კუბზე აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, ე.ი.  $\exists k = const > 0$ , რომ

$$|a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})| \leq K[(x_1^{(r)} - y_1^{(r)})^2 + \dots + (x_{N-1}^{(r)} - y_{N-1}^{(r)})^2]^{1/2}.$$

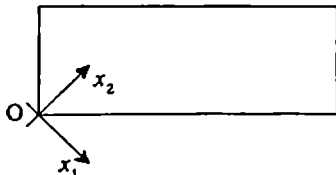
განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. ნახ. 1-ზე მოცემულ შემთხვევაში



ნახ. 1

$x_2$  ღერძის ყველა შესაძლო მიმართულებისათვის დარღვეულია ბ.) პირობა, ე.ი. საზღვარი არ არის ლიპშიცის.

ნახ. 2-ზე მოცემულ შემთხვევაში, O-ს მიდამოში  $x_2 = |x_1|$ , ამიტომ  $\|x_1^{**} - x_1^*\| = |x_1^{**} - x_1^*|$  და სრულდება ყველა პირობა, ე.ი. ლიპშიცის საზღვარია.

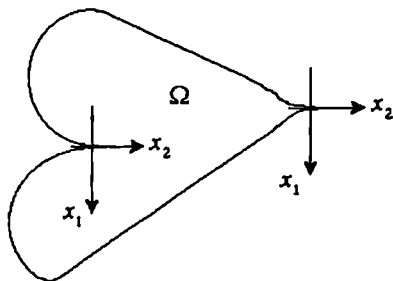


ნახ. 2

ნახ. 3-ზე მოცემულ კუთხოვანი წერტილის ორივე შემთხვევაში დასაშვებია მხოლოდ მითითებული კოორდინატთა სისტემა. წინააღმდეგ შემთხვევაში დაირღვევა ბ.). მაგრამ ასეთი სისტემის

შემთხვევაში აღნიშნულ წერტილებში  $\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1=0\pm} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ ,

ე.ი. დაირღვევა გ.), რადგან არ იარსებებს  $K \neq \infty$ . ამრიგად საზღვარი ლიპშიცის არაა.



ნახ. 3

განსაზღვრა 41.  $u(x) \in C(\overline{\Omega})$  (მით უფრო, თუ  $u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ) ფუნქციის  $u(y)$ ,  $y \in \partial\Omega$  მნიშვნელობები  $\partial\Omega$ -ზე ცალსახადა განსაზღვრული.  $u(y)$  ფუნქციას ეწოდება  $u(x)$  ფუნქციის კვალი  $\partial\Omega$ -ზე.

თეორემა 18. თუ  $\Omega$  ლიპშიცის საზღვრის მქონე არეა, მაშინ არსებობს ერთადერთი შემოსაზღვრული წრფივი  $T$  ოპერატორი, რომელიც  $W_2^1(\Omega)$  სივრცეს ასახავს  $L_2(\partial\Omega)$  სივრცეზე:

$$\|Tu\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \|T\| \|u\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

თუ  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , მაშინ  $Tu(x) = u(y)$ .

განსაზღვრა 42. წინა თეორემიდან  $Tu$ -ს ეწოდება  $u(x)$  ფუნქციის კვალი  $\partial\Omega$ -ზე,  $T$ -ს კი კვალის ოპერატორი.

შენიშვნა 9. რამდენადაც  $C^\infty(\bar{\Omega})$  მკვრივია  $W_2^1(\Omega)$ -ში, თუ  $u$  ეკუთვნის  $W_2^1(\Omega)$ -ს, მაგრამ არ ეკუთვნის  $C^\infty(\bar{\Omega})$ -ს,  $Tu$ -ს კვალი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ისეთ  $u_n(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  ფუნქციათა  $u_n(y)$ ,  $y \in \partial\Omega$ , კვლების ზღვარი  $L_2(\partial\Omega)$ -ში, რომელთათვისაც

$$\|u_n(x) - u\|_{W_2^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

შენიშვნა 10. თუ  $u \in W_2^1(\Omega)$  ფუნქცია უწყვეტია  $\bar{\Omega}$ -ში, მაშინ მისი კვალი  $\partial\Omega$ -ზე ემთხვევა მის შეზღუდვას  $\partial\Omega$ -ზე.

შენიშვნა 11. თუ  $\|u_n(x) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , მაგრამ არ არის კრებადი  $W_2^1(\Omega)$ -ში, მაშინ  $\{u_n(S)\}$  მიმდევრობა შეიძლება არ იყოს კრებადი  $L_2(\partial\Omega)$ -ში (აგებულია მაგალითები (იხ. [54], გვ. 341)).

ფრიდრიხსის უტოლობა. თუ  $\Omega \in R^m$  არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობენ ისეთი  $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ , დამოკიდებულნი მხოლოდ არეზე, რომ

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_1 \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_{,k})^2 dx + c_2 \int_S u^2 dS \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

პუნკარეს უტოლობა. თუ  $\Omega \in R^n$  არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობენ ისეთი  $c_3, c_4 = \text{const} > 0$ , დამოკიდებულინი მხოლოდ არეზე, რომ

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_3 \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_{,k})^2 dx + c_4 \left[ \int_{\Omega} u(x) dx \right]^2 \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

ფრიდრიხსის უტოლობა. თუ  $\Omega \in R^n$  არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობენ ისეთი  $K_1, K_2 = \text{const} > 0$  დამოკიდებულინი მხოლოდ არეზე, რომ

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \left[ \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} (u_{,j})^2 dx + \int_S u^2 dS \right] \quad \forall u \in W_2^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \left[ \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^\alpha u)^2 dx + \int_S u^2 dS \right] \quad \forall u \in W_2^2(\Omega).$$

პირველი უტოლობა ძალაში რჩება, თუ  $S$ -ს შევცვლით  $S_1$ -ით, რომელიც  $S$ -ს ღია ნაწილია *ლუბევის\** დადებითი ზომით (ამ შემთხვევაში  $K_1$  მუდმივი  $S_1$ -ზეცაა დამოკიდებული).

კერძოდ,

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} (u_{,j})^2 dx \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

და

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^\alpha u)^2 dx \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega),$$

სადაც

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_j \in Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad j = \overline{1, m},$$

\* ალ. ლუბევი (1875-1941).

მულტიინდექსია,

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m,$$

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m};$$

$\sum_{|\alpha| \leq k}$  და  $\sum_{|\alpha|=k}$  სიმბოლოები აღნიშნავენ აჯამებას ყველა ისეთი

$\alpha$ -სათვის, რომლებიც შესაბამისად აკმაყოფილებენ  $|\alpha| \leq k$  და  $|\alpha| = k$  პირობებს.

პუანკარეს უტოლობა. თუ  $\Omega$  არეა ლიპშიცის საზღვრით (ამ პირობის შესუსტება შესაძლებელია, იხ. [30]), მაშინ არსებობს ისეთი  $K_3 = \text{const} > 0$  დამოკიდებული მხოლოდ არეზე, რომ

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)}^2 \leq K_3 \left[ \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha u)^2 dx + \sum_{|\alpha| < k} \left( \int_{\Omega} D^\alpha u dx \right)^2 \right]$$

$$\forall u \in W_2^k(\Omega).$$

განსაზღვრა 43.  $\varphi \in C^\infty(R^m)$  კომპლექსური მნიშვნელობის მქონე ფუნქციათა სიმრავლეს ეწოდება შვარცის<sup>\*)</sup>  $S(R^m)$  სივრცე, თუ ნებისმიერი მთელი არაუარყოფითი  $k$  რიცხვისათვის

$$\sup_{x \in R^m} \left[ (1 + |x|)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)| \right] < +\infty,$$

სადაც

$$x := (x_1, \dots, x_m) \in R^m, \quad |x| := (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}},$$

<sup>\*)</sup> ლ. შვარცი (1915-2002).

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  მულტიინდექსია.

განსაზღვრა 44.  $f$  ფუნქციონალს (ფორმას) ეწოდება ანტიწრფივი (სემიწრფივი) რაიმე ლინეალზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი  $\varphi$  და  $\psi$  ელემენტებისათვის

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) + f(\psi) \text{ და } f(\lambda\varphi) = \bar{\lambda}f(\varphi),$$

სადაც  $\lambda$  ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

განსაზღვრა 45.  $B(\varphi, \psi)$  ფუნქციონალს (ფორმას) ეწოდება სესქვიწრფივი რაიმე ლინეალზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2$  ელემენტებისათვის და ნებისმიერი  $\lambda$  კომპლექსური რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$B(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = B(\varphi_1, \psi) + B(\varphi_2, \psi),$$

$$B(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = B(\varphi, \psi_1) + B(\varphi, \psi_2),$$

$$B(\lambda\varphi, \psi) = \lambda B(\varphi, \psi),$$

$$B(\varphi, \lambda\psi) = \bar{\lambda} B(\varphi, \psi).$$

ამდენად,  $\varphi \rightarrow B(\varphi, \psi)$  ასახვა ფიქსირებული  $\psi$ -სათვის არის წრფივი ფუნქციონალი (ფორმა), ხოლო  $\psi \rightarrow B(\varphi, \psi)$  ასახვა ფიქსირებული  $\varphi$ -სათვის არის ანტიწრფივი. თუ  $B(\varphi, \psi)$  სესქვიწრფივი ფორმა ნამდვილმნიშველობიანი ფორმაა, მაშინ მას *ორადწრფივი ფორმა* ეწოდება.

განსაზღვრა 46. თუ  $\Omega \subset R^m$  რაიმე არეა, მაშინ  $S(\Omega)$  არის ყველა ისეთი  $\varphi \in S(R^m)$  ელემენტების ქვესივრცე, რომელთათვისაც  $\text{supp } \varphi \subset \bar{\Omega}$ ,  $\text{supp } \varphi$  აღნიშნავს ელემენტის *საყრდენს*, ე.ი.  $R^m$ -ის იმ ქვესიმრავლის ჩაკეტვას, სადაც  $\varphi$  განსხვავებულია ნულისაგან (იხ. აგრეთვე განსაზღვრა 37).

თეორემა 19.  $C_0^\infty(\Omega)$  სივრცე მკვრივია  $S(\Omega)$ -ში.



განსაზღვრა 47.  $S(\Omega)$ -ზე განსაზღვრულ შემოსაზღვრულ ანტიწრფივ  $f$  ფუნქციონალს ეწოდება განაწილება  $\Omega$ -ზე.  $f$  განაწილების მნიშვნელობას  $\varphi \in S(\Omega)$  ელემენტზე  $(f, \varphi)$  სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ხოლო განაწილებათა სიმრავლეს  $S'(\Omega)$ -თი. ვიტყვი, რომ  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობა  $S'(\Omega)$ -ში კრებადია  $f \in S'(\Omega)$  ელემენტებისაკენ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in S(\Omega).$$

განსაზღვრა 48. ვთქვათ,  $f \in S'(\Omega)$  და  $\alpha$  რაიმე მულტიინდექსია.  $\partial^\alpha f$  განისაზღვრება

$$(\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in S(\Omega)$$

ტოლობით.

შენიშვნა 12. განსაზღვრა 48-ში  $S(\Omega)$  შეიძლება შეიცვალოს  $C_0^\infty(\Omega)$ -თი.

განსაზღვრა 49.  $\varphi \in S(R^m)$ -ის ფურიეს გარდაქმნა შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$\tilde{\varphi}(\xi) := (F\varphi)(\xi) := \int_{R^m} e^{i(x \cdot \xi)} \varphi(x) dx,$$

სადაც

$$(x, \xi) := x_1 \xi_1 + \dots + x_m \xi_m.$$

განსაზღვრა 50.  $\varphi \in S(R^m)$ -ისა და  $\psi \in S(R^m)$ -ის ნახევრი განიმარტება

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{R^m} \varphi(x-y) \psi(y) dy$$

ტოლობით.

თეორემა 20.  $F$  ჰომეომორფიზმია  $S(R^m)$ -დან  $S(R^m)$ -ში; მისი შებრუნებული  $F^{-1}$  გარდაქმნა განისაზღვრება

$$(F^{-1}\psi)(x) := (2\pi)^{-m} \int_{R^m} e^{-i(x,\xi)} \psi(\xi) d\xi$$

ტოლობით.

თეორემა 21. ყოველი  $\varphi, \psi \in S(R^m)$  აკმაყოფილებს

$$\int_{R^m} \overline{\varphi}(\xi) \overline{\psi}(\xi) d\xi = (2\pi)^m \int_{R^m} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx$$

პარსევალის ტოლობას.

თეორემა 22. ყოველი  $\varphi, \psi \in S(R^m)$ -სათვის

$$F(\varphi * \psi)(\xi) = \overline{\varphi}(\xi) \overline{\psi}(\xi).$$

თეორემა 23. ყოველი  $\varphi \in S(R^m)$ -ის და  $\alpha$  მულტიინდექსისათვის

$$F(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \overline{\varphi}(\xi),$$

$$F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \overline{\varphi}(\xi).$$

განსაზღვრა 51.  $f \in S'(R^m)$  განაწილებას ეწოდება რეგულარული, თუ არსებობს ისეთი ლოკალურად კამპაქტი (ე.ი.  $L^1_{loc}(R^m)$ -დან) ფუნქცია, რომელსაც სიმარტივისათვის აღვნიშნავთ  $f(x)$  -ით, რომ

$$(f, \varphi) = \int_{R^m} f(x) \overline{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in S(R^m).$$

რეგულარულ განაწილებათა სიმრავლეს აღვნიშნავთ  $S'_{reg}(R^m)$ -ით. განაწილებას ეწოდება *სინგულარული*, თუ ის რეგულარული არ არის.

განსაზღვრა 52.  $u \in S'(R^m)$  განაწილებათა სიმრავლეს, რომელთა ფურიეს გარდაქმნა  $\tilde{u} \in S'_{reg}(R^m)$  და

$$\|u\|_{H^s(R^m)} := \int_{R^m} (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

სადაც  $s \in R$  ( $R$  ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა), ეწოდება *ბესე-ლის პოტენციალთა სივრცე*, როცა  $s \in R$ . თუ ამასთან  $s > 0$  მას *სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცე*, ხოლო თუ  $s$  ნატურალურია *სობოლევის სივრცე* ეწოდება და აღვნიშნება  $H^s(R^m)$  სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 53.  $\tilde{H}^s(\Omega)$  არის  $H^s(R^m)$ -ის ქვესივრცე, რომელიც შედგება ყველა ისეთი  $u \in H^s(R^m)$ -საგან, რომ  $\text{supp } u \subset \overline{\Omega}$ .

განსაზღვრა 54.  $H^s(\Omega)$  არის ყველა ისეთ  $u \in S'(\Omega)$  ელემენტთა სივრცე, რომლებიც შეიძლება  $\Omega$ -დან გაფართოვდნენ  $\hat{u} \in H^s(R^m)$ -მდე, ან პირიქით  $H^s(R^m)$ -ის ელემენტების  $\Omega$ -ზე შეზღუდვების სივრცე.  $u \in H^s(\Omega)$ -ს ნორმა განისაზღვრება

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{\tilde{u} \in H^s(R^m): \tilde{u}|_{\Omega} = u} \|\tilde{u}\|_{H^s(R^m)}$$

ტოლობით, სადაც  $\hat{u}|_{\Omega}$  აღნიშნავს  $\hat{u}$ -ს მნიშვნელობებს  $\Omega$ -ზე. თუ  $\hat{u}|_{\Omega} = u$ , მაშინ  $u$ -ს ეწოდება  $\hat{u}$ -ს შეზღუდვა  $\Omega$ -ზე, ხოლო  $\hat{u}$ -ს –  $u$ -ს გაფართოება  $\Omega$ -დან  $R^m$ -ზე.

შენიშვნა 13. თუ  $s = k$ , სადაც  $k$  არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ  $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$  (იხ. განსაზღვრა 36).

თეორემა 24.  $H^s(R^m)$  და  $H^{-s}(R^m)$  დუალური (შეუღლებული) სივრცეებია.  $H^s(\Omega)$  სივრცის შეუღლებული სივრცეა  $H^{-s}(\Omega)$ .

განსაზღვრა 55. ვთქვათ,  $\Gamma$  არის  $C^\infty$  კლასის ჩაკეტილი ზედაპირი, რომელიც  $R^m$ -ს ყოფს შიგა და გარე  $\Omega^+$  და  $\Omega^-$  არეებად;  $n(x)$  ერთეულოვანი გარე ნორმალია  $\Gamma$ -ს მიმართ  $x \in \Gamma$  წერტილში. მაშინ (იხ. [13], გვ. 143 და [11], გვ. 212):

1. არსებობს  $R^m$ -ის ისეთი ღია არეების  $\{O_i\}_{i=1}^N$  სიმრავლე, რომ

- $\{O_i\}_{i=1}^N$  ფარავს  $\Gamma$ -ს, ე.ი.  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^N O_i$ ;
- $n(x)$  ნორმალეები არ იკვეთებიან  $\bigcup_{i=1}^N O_i$  გაერთიანებაში;
- ყოველი  $i \in \{1, \dots, N\}$ -სათვის არსებობს  $\bar{x} = \varphi_i(y')$   $C^\infty$  – დიფეომორფიზმი  $B'_i = \{y' \in R^{m-1} : |y'| < 1\}$ -დან  $O_i \cap \Gamma$ -ში; მის შებრუნებულს აღვნიშნავთ  $y' = \psi_i(\bar{x})$ -ით;
- თუ  $O_i \cap O_j \cap \Gamma \neq \emptyset$ , მაშინ არსებობს

$$\{\psi_i(\tilde{x}): \tilde{x} \in O_i \cap O_j \cap \Gamma\} \subset B'_j$$

სიმრავლიდან

$$\{\psi_j(\tilde{x}): \tilde{x} \in O_i \cap O_j \cap \Gamma\} \subset B'_i$$

სიმრავლეში  $h_{ij} \in C^\infty$  - დიფეომორფიზმი დადებითი იაკობიანით, ამასთან ისეთი, რომ  $\psi_i(\tilde{x}) = h_{ij} \psi_j(\tilde{x})$ .

(დიფეომორფიზმი არის დიფერენცირებადი ჰომეომორფიზმი, ხოლო ჰომეომორფიზმი არის უწყვეტი ბიექციური, ე.ი. ურთიერთცალსახა ასახვა).

2. არსებობს ერთეულის ისეთი რეგულარული  $\{e_i(x)\}_{i=1}^N$  დაყოფა  $\Gamma$ -ზე, რომ

$$- e_i(x) \in C_0^\infty(O_i \cap \Gamma), \quad i = 1, \dots, N;$$

$$- 0 \leq e_i(x) \leq 1, \quad x \in R^m, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$- \sum_{i=1}^N e_i(x) = 1, \quad x \in \Gamma.$$

$\Gamma$ -ზე განსაზღვრული ყოველი, მაგალითად,  $u \in L_2(\Gamma)$  ფუნქციისათვის სამართლიანია

$$u(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^N e_i(\tilde{x}) u(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Gamma.$$

გაშლა. ყოველი  $i \in \{1, \dots, N\}$ -სათვის მოვანდინოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა

$$u_i(y') := (e_i u)(\varphi_i(y')) = e_i(\varphi_i(y')) u(\varphi_i(y')) = e_i(\tilde{x}) u(\tilde{x})$$

და განუვარცოთ (გავაფართოვოთ)  $u_i(y')$  ნულით  $B'_i$ -ის გარეთ მთელ  $R_y^{m-1}$  სივრცეზე. ახლა განვსაზღვროთ  $H^s(\Gamma)$ ,  $s \in R$ ,

შემდეგნაირად

$$H^s(\Gamma) := \{u \in L_2(\Gamma) : u_i \in H^s(R_y^{m-1}), \quad i = 1, \dots, N\}.$$

ამ სივრცეში ნორმა შეიძლება შემოვიღოთ

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)} := \left[ \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^1(R_{r_i}^{n-1})}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ტოლობით. ერთეულის სხვადასხვა დაყოფას შეესაბამება ეკვივალენტური ნორმები.  $H^1(\Gamma)$  ჰილბერტის სივრცეა.

თეორემა 25. თუ  $L(v)$  არის შემოსაზღვრული ანტიწრფივი ფუნქციონალი, განსაზღვრული  $H$  ჰილბერტის სივრცეზე, ხოლო  $a(u, v)$  – შესქიწრფივი ფორმა, რომელიც აკმაყოფილებს შემოსაზღვრულობის

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

და კოერციტიულობის

$$\operatorname{Re} a(u, v) \geq \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

პირობებს, სადაც  $M$  და  $\gamma$  დადებითი მუდმივებია და  $\|\cdot\|$  არის ნორმა  $H$  სივრცეში, მაშინ

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H$$

ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი  $u \in H$  ისეთი, რომ

$$\|u\| \leq c \|L\|_*$$

სადაც  $\|\cdot\|_*$  არის ნორმა  $H$ -ის დუალურ  $H'$  სივრცეში, ხოლო  $c$

დადებითი მუდმივია. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ  $c = \frac{M}{\gamma}$ .

შევნიშნოთ, რომ ამ დამატებაში გადმოცემული მასალის შედგენისას ძირითადად გამოყენებული იყო [54], [13] და [11].

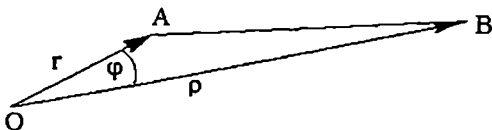
## დამატება 2. ლეჟანდრის პოლინომები

### 1. ლეჟანდრის პოლინომების წარმოქმნელი ფუნქცია

კლასიკურ ორთოგონალურ პოლინომთა შორის ყველაზე ადრინდელია ლეჟანდრის პოლინომები, რომელთა წარმოშობა დაკავშირებულია მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებთან, კერძოდ, პოტენციალის თეორიასთან. სივრცის ორი  $A$  და  $B$  წერტილის მიზიდულობის ველის პოტენციალი გამოისახება მათ შორის მანძილის შებრუნებული (იხ. ნახ. 1)

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos\varphi + \rho^2}}$$

სიდიდით.



ნახ. 1

თუ აქ  $\cos\varphi =: x$ , მაშინ გვექნება, რომ

$$\frac{1}{r\sqrt{1 - 2tx + t^2}},$$

სადაც  $t = \frac{\rho}{r}$ . როგორც ქვემოთ დავინახავთ, თუ

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

წილადს გავშლით ხარისხოვან მწკრივად  $t$ -ს მიმართ სათავის მიდამოში, მაშინ მწკრივის კოეფიციენტები  $x$ -ის პოლინომებია, რომელთაც ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდებათ (იხ. ქვემოთ (1) და (2)).

გავიხსენოთ ბინომიალური მწკრივი

$$(1-u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}u^2 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{n!2^n}u^n + \dots, \quad (|u| < 1)$$

სადაც  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$  და  $(-1)!! = 1$ .

თუ  $u = 2tx - t^2$ , მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} (1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} &= [1 - (2tx - t^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2tx - t^2) + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}(2tx - t^2)^2 + \dots \end{aligned}$$

ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება, თუ  $2|tx| + t^2 < 1$ . ამ გარემოების გამო უფლება გვაქვს, ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მწკრივი დავალაგოთ  $t$ -ს ხარისხებად:

$$1 + \left(\frac{1}{2}2x\right)t + \left(\frac{1 \cdot 3}{2!2^2}4x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots$$

როგორც ვხედავთ, პირველი სამი კოეფიციენტი წარმოადგენს შესაბამისად ნულოვანი, პირველი და მეორე ხარისხის პოლინომს. დანარჩენიც რომ პოლინომებია, ამაში დავრწმუნდებით, როდესაც დავადგენთ რეკურენტულ ფორმულას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ყოველ ურთიერთმომდევნო სამ პოლინომს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომების წარმოადგენა ბევრნაირად შეიძლება, რაზედაც საუბარი ქვემოთ გვექნება. ახლა კი დაუბრუნდეთ



$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots + P_n(x)t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (1)$$

ტოლობას, სადაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ,  $P_n(x)$  წარმოადგენს ლეჟანდრის  $n$ -ური რივის პოლინომს. ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომ გამოსახულებას ეწოდება *ლეჟანდრის პოლინომთა წარმომქმნელი ფუნქცია*, რამდენადაც იგი წარმოშობს ზემოხსენებული ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტთა  $\{P_n(x)\}$  მიმდევრობას. როგორც ვხედავთ,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

(1) მწკრივიდან ადვილი დასადგენია, რომ

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

მართლაც, თუ ჩავსვამთ  $x = 1$ , მაშინ, რადგანაც როცა  $|t| < 1$ , მარცხენა მხარეში გვექნება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი და მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n.$$

აქედან უშუალოდ ჩანს, რომ  $P_n(1) = 1$ . ანალოგიურად, თუ  $x = -1$ , მაშინ

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n,$$

რაც ნიშნავს, რომ  $P_n(-1) = (-1)^n$ . წარმომქმნელი ფუნქციის (1) წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $x = 0$ , მაშინ ენტი ხარისხის ლეჟანდრის პოლინომი ნულის ტოლია, ე.ი.,

$P_{2k+1}(0) = 0$ . მართლაც, თუ  $x = 0$ , წარმოიქმნელი ფუნქცია ბინომიალური მწკრივის სახით ასე წარმოიდგინება

$$\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} t^{2k},$$

საიდანაც (1) წარმოდგენასთან შედარების შემდეგ დავასკვნით, რომ  $P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$ ,  $P_{2k+1}(0) = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

## 2. რეკურენტული ფორმულები

პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომებისათვის სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული ფორმულა

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (3)$$

ამისათვის გავაწარმოთ (1) ტოლობა  $t$ -ს მიმართ:

$$\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n.$$

თუ ორივე მხარეს გავამრავლებთ  $(1-2tx+t^2)$ -ზე, მივიღებთ, რომ

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (1-2tx+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n,$$

ან, (1)-ის თანახმად,

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2tx+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n.$$

თუ ორივე მხარეში გამრავლებას შევასრულებთ და  $t^n$  ხარისხთან მდგომ კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x),$$

$$n \geq 1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს საძიებელი (3) ტოლობა. მისი არსი ისაა, რომ შეგვიძლია თანმიმდევრობით ავაგოთ განსახილავი პოლინომები. რადგან უკვე დადგენილია, რომ  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , ამის შემდეგ (3) ტოლობის გამოყენებით ავაგებთ დანარჩენებსაც. ასე, მაგალითად,

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}.$$

(2)-ის გათვალისწინებით, (3) რეკურენტული ფორმულიდან, ცხადია, რომ ლუწი რიგის პოლინომი ლუწი ფუნქციაა, ხოლო კენტი რიგის კი კენტი ფუნქციაა. გარდა (3) ფორმულია, არსებობს კიდევ რამდენიმე რეკურენტული თანაფარდობა, რომლებიც პოლინომების წარმოებულებსაც შეიცავენ. ადვილი გამოსაყვანია შემდეგი ფორმულა

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (4)$$

მართლაც, გავაწარმოთ (1) ტოლობა  $x$ -ით:

$$t(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n, \quad (5)$$

საიდანაც

$$\frac{t}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n.$$

თუ მარცხენა მხარეში ჩავსვამთ (1) მწკრივს, ხოლო მარჯვენა მხარეზე შევასრულებთ გამრავლებას და ამის შემდეგ  $t^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ (4)-ს.

დავუბრუნდეთ ისევ

$$(x-t)(1-2tx-t^2)^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1}$$

ტოლობას. გავამრავლოთ ორივე მხარე  $t$ -ზე და შევადაროთ (5)-ს, მივიღებთ, რომ

$$(x-t) \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n,$$

ან სხვანაირად

$$x \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n.$$

გავუტოლოთ ორივე მხარეში  $t^n$  ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტები

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n \geq 1. \quad (6)$$

ახლა ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ  $xP'_n(x)$  და შევიტანოთ (4) ტოლობაში, ე.ი. (4) და (6) ტოლობიდან გამოვრიცხოთ  $xP'_n(x)$ . ეს მოგვცემს კიდევ ერთ რეკურენტულ ფორმულას

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (7)$$

თუ (7) ტოლობას გამოვაკლებთ (6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x). \quad (8)$$

მართალია (8) დავამტკიცეთ, როცა  $n \geq 1$ , მაგრამ ის სამართლიანია მაშინაც, როცა  $n \geq 0$ , რადგან თუ  $n=0$ -ს, ცხადია, ის სრულდება, რაც უშუალოდ მოწმდება. და ბოლოს, დავამტკიცოთ

$$(x^2-1)P'_n(x) - nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

ფორმულა. ჩავსვათ (8)-ში  $n$ -ის ნაცვლად  $n-1$ , მაშინ

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

ამ უკანასკნელიდან და (6)-დან გამოვრიცხოთ  $P'_{n-1}(x)$ , რის შედეგად სწორედ (9)-ს მივიღებთ.

(5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$t(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} = (1-2tx+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n.$$

მარცხენა მხარეში ჩავსვათ (1), მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xP'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+2}.$$

გავეტოლოთ  $t^n$ ,  $n \geq 2$ , ხარისხების კოეფიციენტები

$$P_{n-1}(x) = P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (10)$$

(10) და (6)-დან გამოვიციხოთ  $xP'_{n-1}(x)$  (ამისათვის (6)-ში  $n$  შევცვალოთ  $(n-1)$ -ით, გავამრავლოთ 2-ზე და მიღებულ გამოხატულებას წვერ-წვერად დავამატოთ (10))

$$P'_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (11)$$

თუ (11) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ჩავსვათ (11) ფორმულიდან  $n$ -ის  $(n-2)$ -ით შეცვლით მიღებულ  $P'_{n-2}(x)$ -ის გამოხატულებას და ასეთ ოპერაციებს გავაგრძელებთ ვიდრე მარჯვენა მხარეში გვექნება ლეჟანდრის პოლინომის წარმოებულის შემცველი წვერი, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + P'_{n-4}(x) \\ &= (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3}(x) + (2n-9)P_{n-5}(x) \cdots \quad (12) \end{aligned}$$

$$= \sum_{q=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q+1)P_{n-q}(x)$$

( $q'$  კენტია)

$$= \sum_{q'=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q'+1) \frac{1-(-1)^{q'}}{2} P_{n-q'}(x), \quad n \geq 2.$$

ინდუქციით დავამტკიცოთ (12) ფორმულის სამართლიანობა. როცა  $n = 2, 3$ , (12) ფორმულა სამართლიანია. დავუშვათ, რომ

იგი სამართლიანია  $(n-2)$ -სთვის და დავამტკიცოთ  $n$ -სთვის.  
 (11)-ისა და ჩვენი დაშვების თანახმად,

$$\begin{aligned}
 P'_n(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x) + \sum_{q=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} [2(n-2) - 2q+1]P_{n-2-q}(x) \\
 &\quad (q' \text{ კენტია}) \\
 &= (2n-1)P_{n-1}(x) + \sum_{q=3}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q+1)P_{n-q}(x) \\
 &\quad (q \text{ კენტია}) \\
 &= \sum_{q=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q+1)P_{n-q}(x), \\
 &\quad (q \text{ კენტი})
 \end{aligned}$$

სადაც უკანასკნელის წინა ჯამში  $q := q'+2$ .

(6)-ში შევატანოთ (12), მივიღებთ, რომ  
 $xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{q=2}^{2\left[\frac{n-2}{2}\right]+1} [2n-2(q+1)+1]P_{n-(q+1)}(x) \\
 &\quad (q' \text{ ჯენტია}) \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= nP_n(x) + \sum_{q=2}^{2\left[\frac{n-2}{2}\right]+2} (2n-2q+1)P_{n-q}(x), \\
 &\quad (q \text{ ლუწია})
 \end{aligned}$$

სადაც  $q := q'+1$ .

თუ (12)-ში ჩავსვათ  $q := n - q'$  და გავითვალისწინებთ, რომ

$$2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1 = \begin{cases} n, & \text{როცა } n \text{ კენტია,} \\ n-1, & \text{როცა } n \text{ ლუწია,} \end{cases}$$

მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{1-(-1)^{n+q}}{2} P_q(x) \\ &= \sum_{q=0}^n (2q+1) \frac{1-(-1)^{n+q}}{2} P_q(x), \end{aligned} \quad (14)$$

რადგან  $q = n$ -ის შესაბამისი წვერი ყოველთვის ნულია, ხოლო როცა  $q = 0$  და  $n$  ლუწია, მაშინ  $q = 0$ -ის შესაბამისი წვერიც ნულია.

(14)-ის გამოყენებით (13) შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\begin{aligned} xP'_n(x) &= nP_n(x) + \sum_{q=0}^{n-2} (2q+1) \frac{1+(-1)^{n+q}}{2} P_q(x) \\ &= nP_n(x) + \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{1+(-1)^{n+q}}{2} P_q(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

შენიშვნა. ცხადია (იხ. §2.6 და §3.2),

$$\begin{aligned} &P'_n(ax_3 - b)(a_{,\alpha}x_3 - b_{,\alpha}) \\ &= \frac{1}{a} a_{,\alpha} (ax_3 - b) P'_n(ax_3 - b) \\ &+ \left( \frac{b}{a} a_{,\alpha} - b_{,\alpha} \right) P'_n(ax_3 - b_3) \\ &= -h_{,\alpha} h^{-1} (ax_3 - b) P'_n(ax_3 - b) - \tilde{h}_{,\alpha} h^{-1} P'_n(ax_3 - b) \end{aligned} \quad (16)$$

შევეცვალოთ  $x$  (15)-სა და (14)-ში  $(ax_3 - b)$ -თი და მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ (16)-ში, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} P'_n(ax_3 - b)(a_{,\alpha}x_3 - b_{,\alpha}) &= -nh_{,\alpha}h^{-1}P_n(ax_3 - b) \\ &- \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{n+q} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h} P_q(ax_3 - b) \\ &= -nh_{,\alpha}h^{-1}P_n(ax_3 - b) \\ &- \sum_{q'=1}^n (2n-2q'+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{q'} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h} P_{n-q'}(ax_3 - b), \end{aligned}$$

სადაც  $q' := n - q$ .

### 3. დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $P_n(x)$ პოლინომი

წინა პარაგრაფში მიღებული რეკურენტული ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავადგენთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ლეჟანდრის განტოლების სახელს ატარებს

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (17)$$

ამისათვის გადავწეროთ (9) ფორმულა

$$(1-x^2)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0$$

სახით. ამ უკანასკნელის გაწარმოება მოგვცემს, რომ

$$\begin{aligned} (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + nP_n(x) \\ + nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$



(6) ტოლობის  $n$ -ზე გამრავლების შემდეგ ყველა წევრი ტოლობის მარცხენა მხარეში გადავიტანოთ

$$nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) - n^2P_n(x) = 0.$$

თუ (18) ტოლობას ამ უკანასკნელს გამოვაკლებთ, მივიღებთ, რომ

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

ეს კი სწორედ იმას ნიშნავს, რომ  $P_n(x)$  პოლინომი აკმაყოფილებს (17) განტოლებას.

#### 4. როდრიგის<sup>1)</sup> ფორმულა

დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის  $P_n(x)$  პოლინომი წარმოიღვინება შემდეგი სახით

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (19)$$

რომელსაც როდრიგის ფორმულა ეწოდება. სხვათა შორის, აქედან ჩანს, რომ თუ  $n$  ლუწია,  $P_n(x)$  შეიცავს  $x$ -ის მხოლოდ ლუწ ხარისხებს, ხოლო თუ  $n$  კენტია, — კენტ ხარისხებს. (19) ტოლობის სამართლიანობა დავამტკიცოთ (17) განტოლების გათვალისწინებით. სახელდობრ, პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$K \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (20)$$

ფუნქცია, სადაც  $K$  მუდმივია, აკმაყოფილებს (17) განტოლებას. მართლაც, თუ

$$u = (x^2 - 1)^n,$$

მაშინ გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ, რომ

<sup>1)</sup> ბ. როდრიგი (1794-1851).

$$(x^2 - 1)u' = 2nxu.$$

ეს ტოლობა თავის მხრივ  $n+1$ -ჯერ გავაწარმოთ. ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გვექნება, რომ

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+2-k)} (x^2 - 1)^{(k)} = 2n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} (x)^{(k)}.$$

როგორც ვხედავთ, მარცხენა მხარეში მხოლოდ სამი წევრის ჯამი დაგვრჩება, რადგან  $x^2 - 1$ -ის 2-ზე მაღალი რიგის ყველა წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა მხარეში ორი წევრის ჯამი გვექნება, ვინაიდან  $x$ -ის ერთზე მაღალი რიგის ყველა წარმოებული ნულია. ამდენად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} u^{(n+2)}(x^2 - 1) + (n+1)u^{(n+1)} \cdot 2x + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \cdot u^{(n)} \\ = 2n[u^{(n+1)} \cdot x + (n+1)u^{(n)}]. \end{aligned}$$

თუ შემოვიღებთ

$$y := u^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

აღნიშვნას, მაშინ წინა ტოლობა მიიღებს

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

სახეს. რადგან ეს განტოლება ერთგვაროვანია, ამიტომ მასვე აკმაყოფილებს (20) გამოსახულება, როგორც არ უნდა იყოს  $K$  მუდმივი. ვინაიდან (20) გამოსახულება წარმოადგენს  $n$  ხარისხის პოლინომს, რომელიც იმავე (17) განტოლებას აკმაყოფილებს, რომელსაც აკმაყოფილებს ლეჟანდრის  $P_n(x)$  პოლინომი, ამიტომ (20) ფუნქცია  $P_n(x)$ -სგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივი<sup>\*</sup> მამრავლით. მაშასადამე, ჩვენ დაგვრჩა  $K$ -ს

<sup>\*</sup> რადგან ლეჟანდრის (17) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს (იხ [45], გვ. 472)

ისე შერჩევა, რომ (19) ტოლობა სამართლიანი იყოს. ამისათვის ჯერ გავარკვიოთ, როგორია  $P_n(x)$  პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. როგორც ეს ძირითადი რეკურენტული (3) ფორმულიდან ჩანს, თუ  $A_n$  აღნიშნავს  $P_n(x)$  პოლინომის უფროსი კოეფიციენტს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ (3) ტოლობაში შემავალი მხოლოდ შემდეგი ორი წევრი  $(n+1)P_{n+1}(x)$  და  $(2n+1)xP_n(x)$  შეიცავს  $x^{n+1}$ -ს, მაშინ ამ წევრების უფროსი კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყოს. ამგვარად, გვექნება

$$(n+1)A_{n+1} = (2n+1)A_n,$$

საიდანაც

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} A_n, \text{ ე.ი., } A_n = \frac{2n-1}{n} A_{n-1}. \quad (21)$$

(2)-დან, ცხადია, რომ  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$ . მაშასადამე, (21) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$A_n = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdots \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!!}{n!}. \quad (22)$$

თუ დაუბრუნდებით (20) გამოსახულებას, დავინახავთ, რომ  $x^n$ -ის კოეფიციენტი იქნება  $\kappa \cdot 2n(2n-1) \cdots (n+1)$ . ამგვარად, როდრიგის (19) ფორმულის დასადგენად საჭიროა, რომ

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = \kappa \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1),$$

საიდანაც

$$(2n-1)!! = \kappa \cdot (2n)!,$$

აქედან კი

$$C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

სახე, სადაც  $Q_n$  არის ლეჟანდრის მიკავშირებული ფუნქცია, რომელიც არ არის პოლინომი.

$$K = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

ამით (19) ტოლობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

### 5. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემის ორთოგონალობა $[-1,1]$ სეგმენტზე

როგორც (17) დიფერენციალური განტოლებიდან ჩანს, მას შეიძლება შემდეგი სახე მიეცეს

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)y' \right] + n(n+1)y = 0. \quad (23)$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (24)$$

მართლაც, ერთის მხრივ, (23)-დან გვაქვს, რომ

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)P'_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელს გავამრავლებთ  $P_m(x)$ -ზე, მივიღებთ, რომ

$$P_m(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)P'_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x)P_m(x) = 0.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)P'_n(x) \right] dx \\ & + \int_{-1}^1 n(n+1)P_n(x)P_m(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

მეორეს მხრივ, თუ  $m$ -ისა და  $n$ -ის ურთიერთშენაცვლებას მოვახდენთ, მივიღებთ, რომ

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_m(x)] dx + \int_{-1}^1 m(m+1) P_m(x) P_n(x) dx = 0. \quad (26)$$

ნაწილობითი ინტეგრება მოგვცემს, რომ

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_n(x)] dx \\ &= [P_m(x)(1-x^2) P'_n(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_m(x) P'_n(x) dx. \end{aligned}$$

ანალოგიურად (ან  $m$ -ისა და  $n$ -ის ურთიერთშენაცვლებით) დავადგენთ, რომ

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_m(x)] dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx.$$

თუ ამ ინტეგრალების მნიშვნელობებს შევიტანთ (25)-სა და (26)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_m(x) P'_n(x) dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \\ & - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx + m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0. \end{aligned}$$

მათი სხვაობა კი მოგვცემს, რომ

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

და რადგან  $n \neq m$ , ამიტომ ინტეგრალი იქნება ნულის ტოლი, რითაც დამტკიცდა (24).

ახლა დავადგინოთ, რომ  $n$  ხარისხის  $P_n(x)$  პოლინომი ერთოგონალურია ნებისმიერი პოლინომის, რომლის ხარისხი  $n$ -ზე ნაკლებია. ამისთვის გავითვალისწინოთ, რომ  $x^k$  წარმოიდგინება როგორც შემდეგი წრფივი კომბინაცია

$$x^k = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x)$$

და, მაშასადამე, ყოველი  $n$ -ზე დაბალი ხარისხის  $P(x)$  პოლინომი, ცხადია, წარმოადგენს  $P_0, P_1, \dots, P_k, k \leq n-1$ , პოლინომების წრფივ კომბინაციას მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ, (24)-ის თანახმად, ვასკენით, რომ

$$\int_{-1}^1 P(x) P_n(x) dx = 0.$$

იმისათვის, რომ ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ნორმირებული გაეხადოთ, საჭიროა გამოეთვალოთ

$$h_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

ზემოთ  $A_n$ -ით გექონდა აღნიშნული  $P_n(x)$  პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. ამის შესაბამისად  $A_{n-1}$  აღნიშნავს  $P_{n-1}(x)$ -ის სათანადო კოეფიციენტს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$q(x) := P_n(x) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x)$$

გამოსახლება წარმოადგენს  $n$ -ზე ნაკლები ხარისხის პოლინომს.

მართლაც, იგი არ შეიცავს  $x^n$  ხარისხს, რადგან  $\frac{x P_{n-1}(x)}{A_{n-1}}$  იწყე-

ბა  $x^n$  წევრით და  $A_n$ -ზე მისი გამრავლება მოგვცემს სწორედ

$P_n(x)$  პოლინომის უფროს წევრს  $A_n x^n$ -ს განსახილავ სხვაობაში  $A_n x^n$  წევრი გაქრება და ამგვარად  $q(x)$  იქნება არაუმეტეს  $n-1$  ხარისხის პოლინომი.

როგორც უკვე ნაჩვენები იყო,  $P_n(x)$  ორთოგონალურია  $q(x)$ -ის და ამგვარად

$$\int_{-1}^1 q(x) P_n(x) dx = 0.$$

ამ უკანასკნელის და შემდეგი ტოლობის

$$P_n(x) = \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) + q(x),$$

გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} h_n &= \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) \left[ \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) + q(x) \right] dx \\ &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 x P_{n-1}(x) P_n(x) dx. \end{aligned}$$

მაგრამ, რეკურენტული (3) ფორმულის თანახმად,

$$x P_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x).$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ წინა ინტეგრალის ქვეშ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ  $P_{n+1}(x)$  არის  $P_{n-1}(x)$ -ის ორთოგონალური, მივიღებთ, რომ

$$h_n = \frac{n}{2n+1} \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx = \frac{n}{2n+1} \frac{A_n}{A_{n-1}} h_{n-1}.$$

თუ აქ გამოვიყენებთ (21) ტოლობას, რომელიც  $A_n$  და  $A_{n-1}$  კოეფიციენტებს აკავშირებს, მივიღებთ, რომ

$$h_n = \frac{2n-1}{2n+1} h_{n-1}. \quad (27)$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ  $n=1$ , გამოვთვლით  $h_1$ -ს, ამის შემდეგ გამოვთვლით  $h_2$ -ს,  $h_3$ -ს და, საზოგადოდ,  $h_n$  მანორმირებულ მამრავლს, თანმიმდევრობით გვექნება, რომ თუ  $n=1$ ,

$$h_1 = \frac{1}{3} h_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0^2(x) dx = \frac{2}{3}.$$

თუ  $n=2$ ,

$$h_2 = \frac{3}{5} h_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

და ა.შ., ზოგად შემთხვევაში

$$h_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{2n+1}.$$

ამრიგად,  $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ სისტემას.



## 6. შპიდტის ორთოგონალიზაციის მეთოდი

განვიხილოთ  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობა,  $\psi_n \in L^2(\Omega)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ , სადაც  $\Omega$  ნებისმიერი შემოსაზღვრული სიბრავლეა  $R^n$ -დან. ავავოთ შემდეგი სისტემა:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 := \psi_0, \\ \varphi_1 := \psi_1 + C_{10}\varphi_0, \\ \varphi_2 := \psi_2 + C_{21}\varphi_1 + C_{20}\varphi_0, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_n := \psi_n + C_{n,n-1}\varphi_{n-1} + \dots + C_{n0}\varphi_0, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (28)$$

შევარჩიოთ  $C_{kj}$  მუდმივები ისე, რომ  $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$  სისტემა ორთოგონალური იყოს. ამისათვის (28)-ის მეორე ტოლობა სკალარულად გავამრავლოთ  $\varphi_0$ -ზე და, ორთოგონალობის პირობის თანახმად, გავუტოლოთ 0-ს:

$$(\varphi_1, \varphi_0) = (\psi_1, \varphi_0) + C_{10}(\varphi_0, \varphi_0) = 0.$$

აქედან

$$C_{10} = -\frac{(\psi_1, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}.$$

ანალოგიურად (28)-ის მესამე ტოლობა გავამრავლოთ  $\varphi_0$ -ზე და, ორთოგონალობის პირობის თანახმად, გავუტოლოთ ნულს:

$$\begin{aligned}(\varphi_2, \varphi_0) &= (\psi_2, \varphi_0) + C_{21}(\varphi_1, \varphi_0) + C_{20}(\varphi_0, \varphi_0) \\ &= (\psi_2, \varphi_0) + C_{20}(\varphi_0, \varphi_0) = 0.\end{aligned}$$

აქედან  $C_{20} = -\frac{(\psi_2, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}$  და ა.შ. დავადგინეთ, რომ

$$C_{k0} = -\frac{(\psi_k, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}.$$

ახლა (28)-ის მესამე ტოლობა გავამრავლოთ  $\varphi_1$ -ზე, გამოვიყენოთ ორთოგონალობის პირობა და ა.შ. ჩავატაროთ ანალოგიური ოპერაციები, შემდეგ იგივე პროცესი ჩავატაროთ  $\varphi_2$ -ზე გამრავლებით და ა.შ.  $\varphi_j$ -ზე გამრავლებით, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$C_{kj} = -\frac{(\psi_k, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j \geq 0, \quad k \geq 1. \quad (29)$$

ე.ი. თუ (28)-ში  $C_{kj}$  კოეფიციენტები განსაზღვრულია (29) ტოლობით, მაშინ  $\{\varphi_n\}_0^\infty$  სისტემა ორთოგონალურია.

ცხადია, ორთონორმირებისათვის საკმარისია, თითოეული მათგანი გავყოთ თავის ნორმაზე. მაშასადამე, მივიღებთ შემდეგ ორთონორმირებულ სისტემას:

$$\omega_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (30)$$

თეორემა 1. პოლინომთა

$$\psi_i = x^i, \quad i = 0, 1, \dots. \quad (31)$$

სისტემის შმიდტის მეთოდით ორთონორმირება გვაძლევს  $\omega_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  სისტემას, სადაც  $P_n$  ლეჟანდრის პოლინომებია.

დამტკიცება. საკმარისია, ვაჩვენოთ, რომ (31) სისტემისთვის (28) სისტემას აქვს

$$\varphi_n = \alpha_n P_n \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (32)$$

სახე, სადაც  $\alpha_n > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots$ . მართლაც, მაშინ მივიღებდით, რომ

$$\omega_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{\alpha_n P_n}{\|\alpha_n P_n\|} = \frac{\alpha_n P_n}{\alpha_n \|P_n\|} = \frac{P_n}{\|P_n\|}.$$

ცხადია,  $n = 0$ -სთვის (32) სამართლიანია, რადგან

$$\varphi_0 = \psi_0 = P_0 = 1.$$

დაეუშვათ, რომ (32) სამართლიანია  $\forall k = \overline{0, n}$  და ვაჩვენოთ, რომ იგი სამართლიანია  $k = \overline{n+1}$ -სთვის. ე.ი. უეუშვებთ, რომ  $\varphi_k = \alpha_k P_k$ ,  $\alpha_k > 0$ ,  $\forall k = \overline{0, n}$  და უნდა დავამტკიცოთ, რომ  $\varphi_{n+1} = \alpha_{n+1} P_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1} > 0$ .

განვიხილოთ (იხ. (28))

$$\varphi_{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=0}^n C_{n+1k} \varphi_k, \quad (33)$$

სადაც

$$\begin{aligned} C_{n+1k} &= -\frac{(\psi_{n+1}, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = -\frac{(x^{n+1}, \alpha_k P_k)}{(\alpha_k P_k, \alpha_k P_k)} \\ &= -\frac{\alpha_k (x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k^2 (P_k, P_k)} = -\frac{(x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k (P_k, P_k)}, \end{aligned}$$

ე.ი.

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k (P_k, P_k)} \alpha_k P_k \\ &= x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{(P_k, P_k)} P_k.\end{aligned}\quad (34)$$

$x^{n+1}$  წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k, \quad (35)$$

სადაც  $a_k$  კოეფიციენტები შესაბამისადაა შერჩეული.

$a_m$ ,  $m = \overline{0, n+1}$  კოეფიციენტების საპოვნელად (35) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ  $P_m$ -ზე, მივიღებთ, რომ

$$(x^{n+1}, P_m) = a_m (P_m, P_m), \quad m = \overline{0, n+1}, \quad (36)$$

რადგან  $\{P_m\}$  პოლინომთა სისტემა ორთოგონალურია.

(36)-დან გამოვძინარეობს, რომ

$$a_m = \frac{(x^{n+1}, P_m)}{(P_m, P_m)}, \quad m = \overline{0, n+1}. \quad (37)$$

(35)-დან გამოვთვალოთ  $a_{n+1} P_{n+1}$ :

$$a_{n+1} P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k P_k,$$

ანუ, (37)-ის გათვალისწინებით,

$$a_{n+1} P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{(P_k, P_k)} P_k.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევადარებთ (34)-ს, დავასკვნით, რომ

$$\varphi_{n+1} = a_{n+1} P_{n+1}. \quad (38)$$

რადგან, როგორც უკვე ვაჩვენეთ,  $P_{n+1}$  არის  $x^k$ -ს,  $k = \overline{0, n}$ ,  
 ორთოგონალური, (37)-ის თანახმად, ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(x^{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} = \frac{1}{A_{n+1}} \frac{(A_{n+1} x^{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} \\ &= \frac{1}{A_{n+1}} \frac{(P_{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} = \frac{1}{A_{n+1}}, \end{aligned}$$

სადაც  $A_{n+1}$  ლეჟანდრის  $P_{n+1}$  პოლინომის უფროსი კოეფი-  
 ციენტია, რომელიც (22)-ის თანახმად დადებითია, ე.ი.  $a_{n+1} > 0$ .  
 ამით თეორემა დამტკიცებულია.

### 7. ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივები

განსაზღვრა 1.  $a_k = \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) dt$

რიცხვებს ეწოდებათ  $f(t)$  ფუნქციის ფურიე-ლეჟანდრის კოეფი-  
 ციენტები, ხოლო

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( k + \frac{1}{2} \right) P_k(t)$$

მწკრივს ეწოდება  $f(t)$  ფუნქციის შესაბამისი ფურიე-ლეჟან-  
 დრის მწკრივი, რაც ასე ჩაიწერება

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( k + \frac{1}{2} \right) P_k(t).$$

თეორემა 2. თუ  $[-1, +1]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(t)$  ფუნქცია  
 აკმაყოფილებს ჰილდერის პირობას  $\alpha > \frac{1}{2}$  მაჩვენებლით (ე.ი.

$|f(t') - f(t'')| \leq \text{const} |t' - t''|^\alpha$ ), მაშინ ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი  $f(x)$ -სკენ კრებადია თანაბრად მთელ  $[-1, +1]$  სეგმენტზე (ეს კრებადობის ერთ-ერთი საკმარისი პირობაა).

თეორემა 3<sup>1)</sup>. ვთქვათ,  $f(x)$  უწყვეტია  $[-1, +1]$  სეგმენტზე გარდა, შესაძლებელია, წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობისა, სადაც ფუნქციას სასრული ნახტომი გააჩნია, და  $f(x)$  ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა წარმოებული (ცხადია, სადაც ისინი ტოლია,  $f(x)$  წარმოებადია). მაშინ შესაბამისი

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots$$

ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი კრებადია  $f(x)$ -სკენ უწყვეტობის ყოველ შიგა წერტილზე, ხოლო წყვეტის ყოველ შიგა წერტილზე კრებადია  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ -სკენ.

ჯეკსონის თეორემა. ვთქვათ,  $F$  არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით  $[-1, +1]$  სეგმენტზე, რომლის შესაბამის ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივს აქვს

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

სახე, სადაც

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) dx.$$

<sup>1)</sup> საშუალოდ კრებადობისთვის (ე.ი.  $L_2$ -ში) წარმოებულზე პირობა საჭირო არ არის (იხ. თეორემა 4 და [37], გვ. 502). უფრო მეტიც, თუ  $f \in L_2(-1, 1)$ , შესაბამისი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი კრებადია  $f$ -სკენ,  $L_2(-1, 1)$ -ის ნორმით.

თუ  $|F(x)| \leq M$  და  $V$  აღნიშნავს  $F(x)$ -ის სრულ ვარიაციას, როცა  $|x| \leq 1$ , მაშინ

$$|a_n P_n(x)| < \frac{4\sqrt{2}(M+V)}{\sqrt{1-\delta^2 n}}, \text{ როცა } |x| < \delta < 1,$$

$$|a_n P_n(x)| < \frac{8(M+V)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}, \text{ როცა } |x| \leq 1.$$

თეორემა 4. ლეჟანდრის  $P_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , პოლინომების სისტემა სრულია  $L_2(-1, 1)$ -ში.

ლემა. ვთქვათ,  $G \subset R^n$  და  $D \subset R^m$  არეები შემოსაზღვრულია;  $\psi_j(y)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , ფუნქციების სისტემა ორთონორმირებული და სრულია  $L_2(D)$ -ში და ყოველი  $j$ -სთვის,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , სისტემა ორთონორმირებული და სრულია  $L_2(G)$ -ში. მაშინ

$$\chi_{kj}(x, y) = \varphi_k(x)\psi_j(y), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots,$$

ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული და სრულია  $G \times D$ -ში.

ამ ლემიდან და თეორემა 4-დან გამომდინარეობს

თეორემა 5.  $P_k(x)P_j(y)$ ,  $k, j = 0, 1, 2, \dots$ , ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული და სრულია  $L_2([-1, 1] \times [-1, 1])$ -ში.

ამ დამატებასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე [4] და [41].

## ციტირებული ლიტერატურა

1. ვეკუა ი., ტენზორული ანალიზისა და კოვარიანტთა თეორიის საფუძვლები, გამომცემლობა „მეცნიერება“, თბილისი, 1982.
2. ობოლაშვილი ე., დრეკადობის მათემატიკური თეორიის საფუძვლები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1993.
3. შანშიაშვილი ა., მასალათა გამძლეობა, „ცოდნა“, თბილისი, 1964.
4. ხარაძე ა., ორთოგონალურ პოლინომთა თეორიის ელემენტები (ზოგადი თეორია და კლასიკური პოლინომები), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1996.
5. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of a hierarchical model of prismatic shells, Bull. Georgian Acad. Sci., 165, 3 (2001), 485-488.
6. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shells, Georgian Mathematical Journal, 10,1 (2003), 17-36.
7. Chichua G., A solid-fluid model with unilateral conditions, Bull. TICMI, 3 (1999), 22-26.
8. Chinchaladze N., Jaiani G., On a cusped elastic solid-fluid interaction problem, Appl. Math. Inform., 6, 2 (2001), 25-64.
9. Chinchaladze N., On a vibration of an isotropic cusped elastic plate under action of an incompressible fluid, Reports of Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 28 (2002), 31-39.
10. Chinchaladze N., A cusped elastic plate-ideal incompressible fluid interaction problem, Reports of Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 28 (2002), 52-60.



11. Chudinovich I., Constanda Ch., Variational and Potential Methods in the Theory of Bending of Plates with Transverse Shear Deformation, Chapman & Hall/CRC, 2000.
12. Ciarlet Ph.G., Mathematical Elasticity, Vol.I: Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, Tokyo, 1988.
13. Dautray R., Lions J.-L., Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 2, Functional and Variational Methods, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.
14. Enzyklopädie, Kleine, Mathematik, Leipzig, 1969.
15. Evans L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
16. Gordeziani D., To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 215, 4 (1974), 751-754.
17. Gordeziani D., On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR 215, 6 (1974), 1289-1292.
18. Jäger W., Mikelic A., On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe Fisiche e Matematiche-Serie IV, 23, Facs. 3 (1996), 403-465.
19. Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl.2 (1996), 117-120.
20. Jaiani G., Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars, Bull. TICMI, 5 (2001), 27-34.
21. Jaiani G., On a mathematical model of bars with variable rectangular Cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81, 3 (2001), 147-173.
22. Jaiani G., Relation of hierarchical models of cusped elastic plates and shells to the three-dimensional models, Reports of Seminar of I.Vekua Inst. of Appl. Math., 28 (2002), 40-51.

23. Jaiani G., Theory of Cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchhoff-Love plates, Lecture Notes of TICMI, 3, 2002.
24. Jaiani G., Some remarks concerning cusped plates and beams, Transactions of the Georgian Technical University, 1 (447) (2003), 44-48.
25. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L., Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, Lecture Notes of TICMI, 4, 2003.
26. Kharibegashvili S., Jaiani G., Dynamical problems in the (0,0) and (1,0) approximations of mathematical model of bars. In "Functional-Analytic and Complex Methods, Interactions, and Applications to PDEs". Proceedings of the International Graz Workshop, Graz, Austria, 12-16 February 2001, World Scientific, (2001) 188-248.
27. McLean W., Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge University press, 2000.
28. Meunargia T., On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119 (1999), 133-154.
29. Mindlin R.D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., 18 (1951), 31-38.
30. Nečas I., Les méthodes directes en théorie équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.
31. Reissner E., On bending of elastic plates, Quart. appl. Math., 5 (1947), 55-68.
32. Temam R., Navier-Stokes Equations, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
33. Vashakmadze T., The Theory of Anisotropic Plates, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht--London--Boston, 1999.

34. Vekua I., Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melburne, 1985.
35. Амен-заде Ю.А., Теория упругости, „Высшая школа“, Москва, 1971.
36. Беллман Р., Введение в теорию матриц, „Наука“, Москва, 1969.
37. Будак Б.М., Фомин С.В., Кратные интегралы и ряды, „Наука“, Москва, 1967.
38. Векуа И.Н., Об одном методе расчета призматических оболочек, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 21, (1955), 191-259.
39. Векуа И.Н., Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 30 (1965), 5-103.
40. Векуа И.Н., Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек, „Наука“, Москва, 1982.
41. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, „Наука“, Москва, 1981.
42. Вольмир А., Проблемы гидроупругости, Москва, 1981.
43. Голубева О.В., Курс механики сплошной среды, „Высшая школа“, Москва, 1972.
44. Джаиани Г.В., Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их применения к призматическим оболочкам, Изд-во ТГУ, Тб., 1982.
45. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, „Наука“, Москва, 1965.

46. Кигурадзе И.Т., Начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, 1, Линейная теория, „Мецниереба“, Тбилиси, 1997.
47. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, „Наука“, Москва, 1972.
48. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В., Трехмерные задачи математической теории упругости, „Наука“, Москва, 1976.
49. Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики, „Наука“, Москва, 1973.
50. Лурье А.Н., Теория упругости, „Наука“, Москва, 1970.
51. Ляв А., Математическая теория упругости, М.-Л., 1935.
52. Мухелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, „Наука“, Москва, 1966.
53. Новацкий В., Теория упругости, „Мир“, Москва, 1975.
54. Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике, „Мир“, М., 1985.
55. Самуль В.И., Основы теории упругости и пластичности, „Высшая школа“, Москва, 1970.
56. Санчес-Паленсия Э., Неоднородные среды и теория колебаний, „Мир“, Москва, 1984.
57. Седов Л.И., Механика сплошной среды, т.1, „Наука“, Москва, 1973.
58. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластинки и оболочки, „Наука“, Москва, 1966.
59. Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, „Мир“, Москва, 1974.

## პირთა საძიებელი

- ადამარი ჟ.ს. (Jacques Hadamard) 129
- ბანახი ს. (Stefan Banach) 268
- ბელტრამი ე. (Eugenio Beltrami) 99
- ბერნული დ. (Daniel Bernoulli) 216
- ბესელი ფ.ვ. (Friedrich Wilhelm Bessel) 272
- ბეტი ე. (Enrico Betti) 93
- გალილეი გ. (Galileo Galilei) 12
- გრამი ი.პ. (Jorgen Pedersen Gram) 270
- დალამბერი ჟ.ლ. (Jean Le Rond d'Alembert) 10
- დიუჰამელი ჟ.მ.კ (Jean Marie Constant Duhamel) 89
- დოლიძე დ. 14
- ევკლიდე (Εὐκλείδης) 267
- ეილერი ლ. (Leonhard Euler) 13
- ვაიერშტრასი კ.თ.ვ. (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) 188
- ვანდერმონდი შ.ო. (Charles Auguste Vandermonde) 42
- ვეკუა ი. 13
- ვინკლერი ე. (Emil Winkler) 172
- ილიუშინი ა.ა. (Алексей Антонович Ильюшин) 142
- იუნგი თ. (Thomas Young)
- კარმანი თ. (Theodore von Kármán) 13
- კირხჰოფი გ.რ. (Gustav Robert Kirchhoff) 156
- კლაპეირონი ბ. (Benoit Paul Emile Clapeyron) 13
- კორნი ა. (A. Korn) 116
- კოში ო. (Augustin Louis Cauchy) 13
- კრონეკერი ლ. (Leopold Kronecker) 27
- კუპრაძე ვ. 13

ლაგრანჟი ჟ. (Joseph Louis Lagrange) 13  
ლაშე გ. (Gabriel Lamé) 13  
ლაქსი პ. (Peter Lax) 116  
ლესეჟი ა.ლ. (Henri Léon Lebesgue) 282  
ლერე ჟ. (Jean Leray) 127  
ლოვი ო.ე.ჰ. (Augustus Edward Hugh Love) 156  
ლიპშიცი რ.ო.ს. (Rudolf Otte Sigismund Lipschitz) 278  
  
მიზესი რ. (Richard von Mises) 138  
მილგრამი ა.ნ. (Arthur N. Milgram) 116  
მინდლინი რ.დ. (R.D. Mindlin) 173  
მიჩელი ჯ.ჰ. (John Henry Michell) 99  
მორი ქ.ო. (Christian Otto Mohr) 45  
მუსხელიშვილი ნ. 13  
  
ნავიე ლ.მ. (Louis Marie Henri Navier) 13  
ნეიმანი კ.გ. (Karl Gottfried Neumann) 89  
ნიკურაძე ი. 13  
ნიუტონი ი. (Isaac Newton) 8  
  
ოზენი კ.ვ. (Carl Wilhelm Oseen) 122  
  
პარსევალი მ.ა. (Marc Antoin Parseval) 272  
პრანდტლი ლ. (Ludwig Prandtl) 13  
პუასონი ს. (Simeon Denis Poisson) 13  
  
ჟერმენი ს. (Sophie Germain) 13  
ჟუკოვსკი ნ.ე. (Николай Егорович Жуковский) 13  
  
რაისნერი ე. (Reissner Eric) 173  
რეინოლდსი ო. (Osborne Reynolds) 14  
რისი ფ. (Frigyes Riesz) 273  
როდრიგო ბ.ო. (Benjamin Olinde Rodrigues) 301

- სენ-ვენანი ბ. (Barré de Saint-Venant) 13  
სობოლევი ს.ლ. (Сергей Львович Соболев) 258  
სტოქსი ჯ.გ. (George Gabriel Stokes) 13  
ფრიდრიხსი კ.ო. (Kurt Otto Friedrichs) 276  
შაუდერი ი.პ. (Julius Pawel Schauder) 271  
შვარცი ლ. (Laurent Schwartz) 283  
ჩაპლიგინი ს.ა. (Сергей Алексеевич Чаплыгин) 13  
ჩეზარო ე. (Ernesto Cesaro) 76  
ჰანი ჰ. (Hans Hahn) 273  
ჰენკი ჰ. (H. Hencky) 138  
ჰილბერტი დ. (David Hilbert) 268  
ჰოლდერი ო.ლ. (Otto Ludwig Hölder) 117  
ჰუბერი მ.ტ. (M.T. Huber) 138  
ჰუკი რ. (Robert Hooke) 12

## საგნობრივი საძიებელი

ა

- აბსოლუტურად მყარი სხეული, 10
- აბსოლუტური ძერა, 65
- ადგილობრივი დენადობა, 80
- აფინური ასახვა, 54
- ანიზოტროპული სხეული, 83
- ანტიწრფივი (სემიწრფივი) ფუნქციონალი, 284
- არაერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეული, 83
- არაკუმშვადი სითხე, 126
- არანიუტონისეული ფლუიდები (სითხეები), 92
- არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქცია, 128
- არსებითი ზედა ზღვარი, 129
- აქტიური დეფორმაცია, 133

ბ

- ბანახის სივრცე, 268
- ბაზისი შაუდერის აზრით, 271
- ბაზისი, 271
- ბაროტროპული სითხე, 125
- ბელტრამი-მიჩელის თავსებადობის პირობები, 99
- ბერნულის (ანუ ბრტყელი კვეთის) პიპოთეზა, 216
- ბესელის პოტენციალთა სივრცე, 287
- ბესელის უტოლობა, 272
- ბეტის იგივეობა, 93
- ბლანტი სითხე, 91
- ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, 38, 148
- ბრტყელი დეფორმაცია, 145

გ

- გადაადგილების ვექტორი, 48, 70
- გადამჭვრელი ძალვა (ძალა), 162



გამყარების პრინციპი, 11  
განაწილება, 285  
განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, 153  
განზოგადებული გადამჭრელი ძალა, 168  
განივი (გადამჭრელი) ძალა, 213  
განივი კვეთი, 213  
განივი ლუნვა, 214  
განმტკიცების მდგომარეობა, 80  
განტვირთვის პროცესი, 134  
გარსის საზღვარი, 186  
გაფართოება ფუნქციის, 288  
გრამის დეტერმინანტი, 270

## დ

დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი, 275  
დადებითი ოპერატორი, 275  
დალაშქრის პრინციპი, 10  
დატვირთვის პროცესი, 134  
დენადობის ზღვარი, 80, 137  
დეფორმადი მყარი სხეული, 10  
დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკა, 11  
დეფორმაცია, 10, 47  
დეფორმაციის ზედაპირი, 68  
დეფორმაციის ინტენსიურობა, 133  
დეფორმაციის კომპონენტები, 60  
დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, 106  
დეფორმაციის ტენზორი, 60  
დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები, 66  
დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა, 102  
დიუჰამელ-ნეიმანის თერმოგანტოლოგები, 109  
დიუჰამელ-ნეიმანის კანონი, 89  
დიფერენციალური, 289  
დრეკადი მუდმივები, 82  
დრეკადი ფუნქცია, 172

დრეკალი ფუძის მოდული, 172  
დრეკალი ფუძის რეაქციის ინტენსიურობა, 172  
დრეკადობა, 11  
დრეკადობის ზღვარი, 79  
დრეკადობის თეორია, 11  
დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები, 113  
დრეკადობის თეორიის მეოთხე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა, 96  
დრეკადობის თეორიის მეორე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა, 95  
დრეკადობის თეორიის მესამე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა, 95  
დრეკადობის თეორიის პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა, 95  
დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, 95, 96  
დრეკადობის მოდული, 87  
დრეკად-პლასტიკური სხეული, 130

## 2

ეკლიდეს სივრცე, 267  
ეილერის განტოლებები, 121  
ეილერის კუთხეები, 53  
ეილერის მეთოდი, 118  
ეილერის ცეკადები, 119  
ეილერის საყრდენი, 284  
ენერჯის შენახვის კანონი, 106  
ერთგვაროვანი დეფორმაცია, 56  
ერთგვაროვანი სხეული, 83  
ერთგვაროვანი ძერა, 65

## 3

ვაიერშტრასის თეორემა, 188  
ვანდერმონდის დეტერმინანტი, 42  
ვექტორული სივრცე, 261  
ვინკლერის ექსპერიმენტული ჰიპოთეზა, 172

ზ

ზედაპირის მთავარი ღერძი, 35  
ზედაპირული ძალა, 15, 16

თ

თაეისუფალი ბოლო, 221  
თაეისუფალი ნაპირი, 183  
თაეისუფალი საზღვარი, 168  
თაესებადობის სენ-ვენანის პირობები, 76  
თვითშეუღლებული ოპერატორი, 275  
თეორიული მექანიკა, 8

ი

იდეალური სითხე, 90  
იზოტროპული სხეული, 82  
ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ, 142  
ინვარიანტული ინტეგრალი, 28  
ინვარიანტული ფორმა, 28  
ინერციის კანონი, 9  
ინერციის მომენტი, 219  
ინერციის ძალა, 10  
იუნგის მოდული, 87

კ

კვეთის მეთოდი, 17  
კვადრატული ფუნქციონალი, 269  
კვალის ოპერატორი, 281  
კინეტიკური ენერჯია, 104  
კირხჰოფ-ლავის კიპოთეზა, 156  
კლაპეირონის თეორემა, 112  
კოვარიანტული ტენზორი, 26

კომპოზიციური გარემო, 254  
კონგრუენტული ოპერატორი, 276  
კონსტიტუციური დამოკიდებულებები, 81  
კონტრავარიანტული ტენზორი, 26  
კოჭი, 213  
კრონეკერის სიმბოლო, 27

## ლ

ლაგრანჟის ცვლადები, 78, 118  
ლაგრანჟის მეთოდი, 118  
ლაშეს განტოლებები, 96  
ლაქს - მილგრამის თეორემა, 116  
ლებევის დადებითი ზომა, 282  
ლევის განტოლება, 147  
ლექანდრის განტოლება, 300  
ლექანდრის პოლინომთა წარმომქმნელი ფუნქცია, 293  
ლექანდრის პოლინომი, 187, 292  
ლინეალი, 261  
ლიაშიცის საზღვარი, 278  
ლოკალურად ჯამებადი ფუნქცია, 286

## მ

მანძილი, 261  
მარტივი დატვირთვა, 134  
მარტივი ძვრა, 65  
მასალათა გამძლეობა, 12  
მასობრივი ძალა, 15  
მატერიალურ ობიექტი, 8  
მაქსველის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი, 109  
მგრეხაეი მომენტი, 162  
მეტრიკა, 261  
მეტრიკული სივრცე, 261  
მექანიკა, 8  
მექანიკური მოძრაობა, 8  
328

მთავარი მომენტი, 16  
მთავარი ფარდობითი წავრძელება, 66  
მთავარი ღერძები, 84  
მთავარი ძაბვა, 29  
მთელი სხეულის განტვირთვა, 142  
მკვრივი სიმრავლე, 268  
მონათესავე ოპერატორები, 276  
მოქნილი ფირფიტების თეორია, 158  
მოცულობის ცვლილების კანონი, 140  
მოცულობის ფარდობითი გაფართოება, 69  
მოცულობითი ძალა, 15  
მორის წრეები, 45  
მულტიკუთიანი ძელი, 213  
მულტიინდექსი, 283  
მუშაობა, 103  
მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია, 140  
მღუნავი მომენტი, 161, 213  
მზები მდგენელი, 19  
მზები ძაბვების ინტენსიურობა, 132

## 6

ნაკრები ვექტორი, 10  
ნაკრები მომენტი, 10  
ნარჩენი დეფორმაცია, 130  
ნარჩენი ძაბვები, 142  
ნარჩენი ძაბვების, დეფორმაციების და გადაადგილებების შესახებ  
თეორემა, 142  
ნაეიე-სტოქსის განტოლებები, 121  
ნაეიე-სტოქსის განტოლებების სუსტი (ვარაუდობილი)  
ფორმულირება, 127  
ნახვევი, 285  
ნეიტრალური სიბრტყე, 156  
ნეიტრალური შრე, 217  
ნეიტრალური ღერძი, 217

ნიუტონის კანონები, 8  
ნიუტონისეული ფლუიდები (სითხეები), 92  
ნორმა, 262  
ნორმალური მდგენელი, 19  
ნორმირებული, 262  
ნულოვანი ელემენტი, 261

ო

ოზენის განტოლებები, 122  
ოპერატორი, 268  
ოპერატორის ფრიდრიხსის გაფართოება, 276  
ორადწრფივი ფორმა, 284  
ორთავონალური პროექცია, 277  
ორთავონალური სისტემა, 270  
ორთაონორმირებული სისტემა, 270

პ

პარსევალის ტოლობა, 272, 286  
პასიური დეფორმაცია, 133  
პლასტიკური დეფორმაცია, 11  
პლასტიკური სხეული, 130  
პლასტიკურობა, 11  
პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია, 130  
პლასტიკურობის თეორია, 11, 130  
პლასტიკურობის პირობები, 137  
პრიზმული გარსი, 185  
პროპორციულობის ზღვარი, 79  
პუასონის კოეფიციენტი, 87

რ

რაისნერ-შინდლინის კინემატიკური ფორმულები, 176  
რაისნერ-შინდლინის მოდელი, 173

რბილად დაყრდნობილი ნაპირი, 183  
რბილად ჩამაგრებული ნაპირი, 183  
რეველარული განაწილება, 286  
რთული დატვირთვა, 134  
რისის თეორემა, 273  
როლრივის ფორმულა, 301

## ს

საკონტაქტო პირობები, 246  
სამშენებლო მექანიკა, 12  
სახსრულად დაყრდნობილი ბოლო, 221  
სახსრულად დაყრდნობილი საზღვარი, 168  
სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობის, 138  
სენ-ვენანის პრინციპი, 112  
სეპარაბელური სივრცე, 269  
სესქვიწრფივი ფუნქციონალი, 284  
სიბლანტის კოეფიციენტი, 92  
სიბლანტის ფუნქცია, 92  
სივრცე კვადრატული მეტრიკით, 267  
სივრცე სკალარული ნამრავლით, 266  
სითბოგამტარობის განტოლება, 109  
სიმეტრიული ოპერატორი, 275  
სიმკვრივე, 15  
სიმტკიცის მეოთხე თეორემა, 139  
სიმტკიცის ზღვარი, 81  
სინგულარული განაწილება, 287  
სკალარული ნამრავლი, 263  
სობოლევის სივრცე, 114, 258, 287  
სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცე, 287  
სოფი ჟერმენ-ლაგრანჟის განტოლება, 166  
სრული მიმდევრობა, 269  
სრული სისტემა, 272  
სრული სივრცე, 268  
სტოქსის განტოლებები, 122

სუფთა ღუნვა, 214  
სუსტი ამონახსნი, 129  
სქელი ფორფიტების თეორია, 158  
სხეულის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, 106  
სხეულის დრეკადი წონასწორობა, 95

## ტ

ტემპერატურული გამტარობის კოეფიციენტი, 109  
ტემპერატურული დაბეჭედი, 89  
ტრანსმისიის პირობები, 246

## უ

უნიტარული სივრცე, 266  
უსასრულოდ მცირე ასახვა, 57  
უნწყვეტი გარემო, 8  
უნწყვეტ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა, 11  
უნწყვეტი ოპერატორი, 276  
უნწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლადებში, 125

## ფ

ფაზა, 254  
ფარდობითი ტემპერატურული გაფართოება, 89  
ფარდობითი ძერა, 65  
ფირფიტა, 151  
ფირფიტა ვანივი ძერის დეფორმაციით, 175  
ფირფიტა თხელი, 156  
ფირფიტების ღუნვის კლასიკური თეორია, 155  
ფირფიტის სისქე, 151  
ფრიდრიხსის გაფართოება, 276  
ფუნდამენტური მიმდევრობა, 267  
ფუნქციის კვალი, 281  
ფუნქციის საყრდენი, 277



ფუნქციონალი, 268  
ფუნქციონალის ნორმა, 273  
ფურიეს კოეფიციენტები, 271  
ფურიეს მწკრივი, 271  
ფორმის ცვლილების კანონი, 141

## ქ

ქმელებისა და უკუქმელების კანონი, 9

## ღ

ღერო, 213

## ყ

ყოველმხრივ შეკუმშვის მოდული, 88

## შ

შებრუნებული ელემენტი, 261  
შეზღუდა ფუნქციის, 288  
შემოსაზღვრული ოპერატორი, 276  
შემოსაზღვრული ფუნქციონალი, 273  
შეუღლებული (დუალური) სივრცე, 273  
შეუღლებული ოპერატორი, 274  
შვარცის სივრცე, 283  
შუა სიბრტყის გაუჭიმვადობის პიპოთეზა, 156, 174  
შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის  
პიპოთეზა, 156, 175

## ჩ

ჩაკეტილი სისტემა, 272  
ჩამავრებული საზღვარი, 168  
ჩეზაროს ფორმულები, 76

ც

ცვლადი სისქის ფირფიტა, 167  
 ცვლადკვეთიანი ძელი, 213  
 ცილინდრული სიხისტე, 162

ძ

ძაბვის ზედაპირი, 33  
 ძაბვის მთავარი მიმართულება, 29  
 ძაბვის ტენზორი, 20  
 ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები, 32  
 ძაბვის ტენზორის მთავარი კომპონენტები, 30  
 ძაღის მომენტი, 9  
 ძაღისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი, 9  
 ძვრის კოეფიციენტი, 178  
 ძვრის კუთხე, 65  
 ძვრის მოდული, 88  
 ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანა, 96  
 ძელის ღერძი, 213  
 ძელის ღუნვა, 213  
 ძლიერი ამონახსნი, 129

წ

წერტილში ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, 148  
 წინარეპილობერტის სივრცე, 266  
 წნევა, 90, 91  
 წონასწორობის განტოლებები, 23  
 წონასწორობის მდგომარეობა, 10  
 წრფივად დამოკიდებული, 270  
 წრფივად დამოუკიდებელი, 270  
 წრფივი გარსი, 261  
 წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტი, 89  
 წრფივი დაძაბული მდგომარეობა, 39

წრფივი ნორმალუბის კიპოთეზა, 156, 173  
წრფივი ოპერატორი, 268  
წრფივი სივრცე, 261  
წრფივი სისტემა, 261  
წრფივი ქვესივრცე, 277

## ბ

ბახუნის ძალა, 91  
ბეჯღრიითი სითბოტკეაღომა, 109  
ბისტი გადაადვიღემა, 48, 52  
ბისტად დაყრდნობიღი ნაპირი, 183  
ბისტად ჩამავრებუღი ბოღო, 221  
ბისტად ჩამავრებუღი ნაპირი, 182

## ჰ

ჰან-ბანახის თეორემა, 273  
ჰიდროაერომექანიკა, 11  
ჰიდროდინამიკური წნევის ვექტორი, 91  
ჰიღბერტის სივრცე, 268  
ჰიღღღერის მანვენებუღი., 117  
ჰომეომორფიზმი, 289  
ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის პღასტიკურობის პირობა, 138  
ჰუკის ღიავრამა, 78

# სარჩევი

წინასიტყვაობა .....	3
მეთოდური მითითებები .....	5
შესავალი. ძირითადი პიპოთეზები .....	8
ნაწილი I. სამგანზომილებიანი მოდელები .....	15
თავი I. ძაბვების თეორია .....	15
§1.1. მოცულობითი და ზედაპირული ძალები .....	15
§1.2. ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულება ფართის ორიენტაციაზე .....	19
§1.3. წონასწორობის განტოლებები .....	22
§1.4. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. ინვარიანტული კვადრატული ფორმა .....	25
§1.5. მთავარი ძაბვები. ძაბვის მთავარი მიმართულებები ძაბვის ზედაპირი .....	29
თავი II. დეფორმაციათა თეორია .....	47
§1.6. დეფორმაციის ცნება .....	47
§1.7. აფინური ასახვა .....	54
§1.8. უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დაშლა საკუთრივ დეფორმაციად და ზისტ გადაადგილებად .....	57
§1.9. დეფორმაციის ინვარიანტული კვადრატული ფორმა. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. დეფორმაციის ზედაპირი .....	65
§1.10. ზოგადი სახის დეფორმაცია .....	70
§1.11. გადაადგილების განსაზღვრა დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. ჩეზაროს ფორმულები. თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები .....	73
თავი III. კონსტიტუტიური დამოკიდებულებები .....	77
§1.12. დრეკადობის თეორიის ძირითადი კანონი – ჰუკის განზოგადებული კანონი .....	77
§1.13. იდეალური და ბლანტი სითხეები. ჰიდრომექანიკის ძირითადი კანონი – ნიუტონის განზოგადებული კანონი. ....	90
თავი IV. დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და დინამიკის ამოცანები .....	93

§1.14.	ბეტის იგივეობა.....	93
§1.15.	დრეკადი სხეულის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები .....	93
§1.16.	ძირითადი განტოლებები გადაადგილებებში.....	96
§1.17.	ძირითადი განტოლებები ძაბვებში .....	97
§1.18.	დინამიკის ამოცანები. დინამიკისა და სტატიკის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა .....	100
§1.19.	კლაპეირონის თეორემა .....	111
§1.20.	სენ-ვენანის პრინციპი.....	112
§1.21.	დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. ამონახსნის არსებობის თეორემები .....	113
<b>თავი V.</b>	<b>ჰიდროდინამიკის სტაციონალური და არასტაციონალური ამოცანები .....</b>	<b>117</b>
§1.22.	ლაგრანჟის და ეილერის ცვლადები.....	117
§1.23.	ნავიე-სტოქსის განტოლებები. სტოქსის და ოზეენის მოდელები. ეილერის განტოლებები.....	121
<b>თავი VI.</b>	<b>პლასტიკურობის თეორია.....</b>	<b>130</b>
§1.24.	დრეკად-პლასტიკური და პლასტიკური სხეულები .....	130
§1.25.	ძაბვებისა და დეფორმაციების ინტენსიურობა.....	131
§1.26.	ჰუკის გარდაქმნილი კანონი.....	134
§1.27.	პლასტიკურობის პირობები.....	137
§1.28.	მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია.....	140
§1.29.	ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ.....	142
§1.30.	პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების დასმა.....	143
<b>ნაწილი II.</b>	<b>ორგანზომილებიანი მოდელები.....</b>	<b>145</b>
<b>თავი I.</b>	<b>დრეკადობის ორგანზომილებიანი თეორია.....</b>	<b>145</b>
§2.1.	ბრტყელი დეფორმაცია.....	145
§2.2.	ბრტყელი დამაბული მდგომარეობა .....	148
§2.3.	განზოგადებული ბრტყელი დამაბული მდგომარეობა .....	151
<b>თავი II.</b>	<b>ფირფიტების და გარსების თეორია .....</b>	<b>155</b>
§2.4.	თხელი ფირფიტების ლუნვის კლასიკური თეორია კირხჰოფ-ლიავის მოდელი .....	155
§2.5.	რაისნერ-მინდლინის მოდელი.....	173
§2.6.	პრიზმული გარსების იკეკუას იერარქიული მოდელები.....	185

ნაწილი III. ერთგანზომილებიანი მოდელები .....	213
§3.1. ლეროს ეილერ-ბერნულის მოდელი .....	213
§3.2. ლეროების იერარქიული მოდელები .....	222
ნაწილი IV. დრეკად და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები .....	246
§4.1. ტრანსმისიის (საკონტაქტო) პირობები .....	246
§4.2. დრეკადი და თხევადი ნაწილებისაგან შემდგარი სხეულის რხევა .....	254
დამატება 1. დამხმარე მასალა ფუნქციონალური ანალიზიდან .....	261
დამატება 2. ლეჟანდრის პოლინომები .....	291
1. ლეჟანდრის პოლინომების წარმომქმნელი ფუნქცია .....	291
2. რეკურენტული ფორმულები .....	294
3. დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $P_n(x)$ პოლინომი .....	300
4. როდრიგის ფორმულა .....	301
5. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემის ორთოგონალობა $[-1,1]$ სეგმენტზე .....	304
6. შმიდტის ორთოგონალიზაციის მეთოდი .....	309
7. ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივები .....	313
ციტირებული ლიტერატურა .....	316
პირთა საძიებელი .....	321
საგნობრივი საძიებელი .....	324
სარჩევი .....	336

გამომცემლობის რედაქტორი ქ. აღმაშენებელი  
ტექნორედაქტორი ფ. ბუღალაშვილი  
კორექტორი ნ. ჩახაია

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27.09.04

საბეჭდი ქაღალდი 60x84

პირ. ნაბეჭდი თაბახი 21,25

საალრ.-საგამომცემლო თაბახი 11,86

შეკვეთა 23 ტირაჟი 200

ფასი სახელშეკრულებო