ნ.ლაზრიევა, მ.მანია, გ.მირზაშვილი, თ. ტორონჯაძე,

ო. ღლონტი, ლ. ჯამბურია

ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები

1999

სარჩევი

წინასიტყვაობა

ფინანსური და სადაზღვევო მათემატიკის და ფინანსური ინჟინერიის ბევრ საკვანძო საკითხს შეიძლება ერთიანი თვალთახედვით შევხედოთ. სახელდობრ, განვიხილოთ ეს დისციპლინები, როგორც ფინანსური რისკის მართვის იარაღების აგების, ევალუაციისა და გამოყენების მეთოდების ერთიანი მწყობრი სისტემა — ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდების ერთობლიობა.

ავტორთა ჯგუფი შეეცადა გადმოეცა ამ დისციპლინების გამოყენებითი ასპექტები უმთავრესად მკითხველთა ორი დიდი ჯგუფის მოთხოვნებისა და ინტერესების გათვალისწინებით.

პირველ ჯგუფში შედიან პრაქტიკოს-ფინანსისტები, რომლებიც მუშაობენ საქართველოს სხვადასხვა ფინანსურ ინსტიტუტში, ბანკებში, სადაზღვევო კომპანიებში, ბირჟებზე. ისინი დაინტერესებულნი არიან ისეთი წიგნის არსებობით, რომელშიც ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მხარე სრულად, კომპაქტურად, „მძიმე" მათემატიკის გამოყენების გარეშე და, ამავე დროს, თანამედროვე პრაქტიკაში ადვილად გამოსაყენებელ ფორმაში იქნება გადმოცემული.

მეორე ჯგუფს შეადგენს უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტები და პედაგოგ-მასწავლებლები, რომლებიც დაინტერესებულნი არიან ისეთი სახელმძღვანელოს არსებობაში, რომლის მიხედვით შესაძლებელი იქნება აღნიშნულ დისციპლინებში რამოდენიმე სემესტრიანი სრულყოფილი კურსის წაკითხვა და შესწავლა.

ძირითადად ამ მოთხოვნებმა განაპირობა წიგნის მასალისა და გადმოცემის სტილის შერჩევა.

ჩვენ ვიმედოვნებთ, რომ წიგნი საინტერესო და სასარგებლო იქნება მკითხველთა ფართო წრისთვისაც.

წიგნი შედგება შესავლის, 10 თავისა და დანართისაგან.

შესავალში მოცემულია ფინანსური მათემატიკის, ფინანსური ინჟინერიის და აქტუარული მათემატიკის საგნის, მიზნების და ამოცანების მოკლე მიმოხილვა, აღწერილია ფინანსური ბაზრები, დასაბუთებულია წიგნში ამა თუ იმ თემის შეტანის მიზანშეწონილობა.

პირველი თავი ეხება საპროცენტო განაკვეთების დროითი სტრუქტუ-

რის აღწერას. მოცემულია სხვადასხვა სახის საპროცენტო განაკვეთის განმარტება. აღწერილია მათი ურთიერთკავშირი და გამოყენების სფერო.

მეორე თავი ეძღვნება მარკოვიცის პორტფელის თეორიის ძირითადი შედეგების გადმოცემას. აქვე მოცემულია ფინანსური აქტივების ფასდადების მოდელის, CAPM-ის აღწერა.

მესამე თავში აღწერილია ფიუჩერსული და ფორვარდული კონტრაქტები. დიდი ადგილი ეთმობა ფინანსურ ფიუჩერსებს.

მეოთხე და მეხუთე თავებში გადმოცემულია ფინანსური მათემატიკის „ოფციონური“ მეთოდოლოგია.

მეექვსე თავი ეთმობა სვოპებს — უმნიშვნელოვანეს ახალ ფინანსურ პროდუქტს.

მეშვიდე თავში მოყვანილია ეგზოტიკური ოფციონების საკმაოდ სრული ანალიზი, მათი ვალუაციისა და გამოყენებების ჩათვლით.

მერვე თავი ეძღვნება ფინანსური დროითი მწკრივების სტატისტიკურ ანალიზსა და პროგნოზირებას.

მეცხრე თავში მოცემულია ფინანსური ინჟინერიის ძირითადი ინსტრუმენტების აღწერა და მოყვანილია მათი გამოყენების მრავალი პრაქტიკული მაგალითი.

მეათე თავში აღწერილია აქტუარული მათემატიკის ამოცანები და მეთოდები.

დანართში მოცემულია ნორმალური განაწილების თვისებები, საბირჟო ინდექსების გამოთვლის ხერხები, უდიდესი ბირჟების და ბანკების ჩამონათვალი და ფიუჩერსული ვაჭრობის მოცულობის დინამიკა აშშ-ში.

ლიტერატურის სია შეიცავს 212 დასახელებას. მოცემულია, აგრეთვე, საგნობრივი საძიებელი ინგლისური და რუსული შესატყვისებით.

ავტორების მიზანი მდგომარეობდა ფინანსური ანალიზის ლოგიკისა და აზროვნების სტილის შენარჩუნებით, ყველა ძირითადი მეთოდის შინაარსის გადმოცემაში.

წიგნი ილუსტრირებულია მრავალი ნახატით, ცხრილით, რიცხვითი მაგალითით. ჩვენი აზრით, ამან მნიშვნელოვნად უნდა გაუადვილოს მკითხველს ფინანსური ანალიზის ჩვენში ჯერ კიდევ უჩვეულო აზროვნების ფორმების ათვისება და უფრო ნათელი და გამჭვირვალე გახადოს ღრმა თეორიული შედეგების შინაარსი.

ქართულად ამ თემაზე დაწერილია 4 წიგნი: ნ. ლაზრიევას, მ. მანიასა და თ. ტორონჯაძის „ფიუჩერსები, ოფციონები და სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტები“, 166 გვერდის მოცულობით, რომელიც როტაპრინტულად, მცირე ტირაჟით გამოვიდა 1997 წელს და შემდეგ გამრავლდა თბილისის ტექნიკური უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის კათედრაზე; გ. მირზაშვილისა და ე. ხმალაძის „სადაზღვევო მათემატიკის შესავალი“, 100 გვერდის მოცულობით, რომელიც აგრეთვე 1997 წელს გამოვიდა როტა-

პრინტული წესით, მცირე ტირაჟით; კავკასიის ბირჟის ეგიდით დაწერილი „საბირჟო საქმის საფუძვლები“ (ავტორები ვ. სვანაძე, გ. სანაძე, თ. ხიზანიშვილი, თ. მძინარიშვილი, მ. ლორთქიფანიძე და ნ. მაისურაძე), რომელიც 1996 წელს გამოვიდა 175 გვერდის მოცულობით, ტირაჟით 1000 ეგზემპლარი და სახელმძღვანელო „საბირჟო საქმე და ფასიანი ქაღალდების ბაზარი“ (ავტორები ვ. სვანაძე, გ. სანაძე, თ. ხიზანიშვილი, თ. მძინარიშვილი, მ. ლორთქიფანიძე, თ. ახობაძე და გ. გოგიშვილი), 420 გვერდის მოცულობით, ტირაჟით 1000 ეგზემპლარი, რომელიც 1998 წელს გამოვიდა და სტამბური წესით გამოცემული პირველი სახელმძღვანელოა ამ თემატიკაში.

წინამდებარე წიგნი შეიცავს პირველი ორი ნაშრომის მასალას და იქ წარმოდგენილი თემატიკის მნიშვნელოვან რაოდენობრივ და თვისობრივ გაფართოებას წარმოადგენს.

რაც შეეხება წიგნებს „საბირჟო საქმის საფუძვლები“ და „საბირჟო საქმე და ფასიანი ქაღალდების ბაზარი“, ისინი ძირითადად საბირჟო ვაჭრობის ორგანიზაციული, იურიდიული და სხვა თვისობრივი მხარეების აღწერას ეძღვნება.

წინამდებარე წიგნი კი, როგორც აღვნიშნეთ, ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივ ასპექტებს ეხება. ამდენად ეს წიგნები გარკვეულად ავსებს ერთმანეთს.

წიგნის ავტორთა ჯგუფი შედგება საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტისა და ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის თანამშრომლებისაგან. ისინი არიან საქართველოს სტატისტიკური ასოციაციის, საერთაშორისო სტატისტიკური ინსტიტუტის, აქტუარებისა და ფინანსურ ანალიტიკოსების ასოციაციის წევრები, კითხულობენ ლექციებს ფინანსურ ანალიზში, ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში, სადაზღვევო საქმეში, ეწევიან აქტიურ სამეცნიერო-კვლევით მუშაობას. 1996-1998 წლებში მათ ევრაზიის ფონდის მხარდაჭერით, განახორციელეს ორი პროექტი აღნიშნულ თემატიკაში (დირექტორები ო. ღლონტი და თ. ტორონჯაძე).

წიგნი გარკვეულად თავს უყრის გაწეულ სამუშაოს.

წიგნის შესავალი, პირველი თავი და დანართი დაწერილია თ. ტორონჯაძის მიერ; მეორე თავი — ნ. ლაზრიევასა და თ. ტორონჯაძის მიერ, მესამე, მეოთხე და მეხუთე თავები — ნ. ლაზრიევას, მ. მანიასა და თ. ტორონჯაძის მიერ, მეექვსე თავი — მ. მანიას მიერ, მეშვიდე თავი — ო. ღლონტის მიერ, მერვე თავი — ნ. ლაზრიევას, თ. ტორონჯაძის, ო. ღლონტისა და ლ. ჯამბურიას მიერ, მეცხრე თავი — თ. ტორონჯაძისა და ლ. ჯამბურიას მიერ, მეათე თავი — გ. მირზაშვილის მიერ.

წიგნის კომპიუტერული მაკეტი შექმნა ლ. ჯამბურიამ.

განუზომელია ევრაზიის ფონდის როლი წიგნის მომზადებასა და გამოცემაში. ავტორები დიდ მადლობას უხდიან ფონდის დირექტორს ბ-ნ ლ. აივა-

ზიანს, გრანტების მენეჯერის მოადგილეს ქ-ნ ა. ალაგარდოვას და, განსაკუ-თრებით, პროგრამების კოორდინატორს, წიგნის მომზადებისა და გამოცემის უშუალო სულისჩამდგმელს, ქ-ნ ქ. ბაქრაძეს.

ავტორები უღრმეს მადლობას მოახსენებენ წიგნის რეცენზენტს, საქართველოს ეკონომიკის მინისტრს, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტს, ეკონომიკურ მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ ვ. პაპავას, რომლის შენიშვნებს, რჩევებს და მითითებებს ავტორები დიდი გულისყურით მოეკიდნენ, შეიტანეს სათანადო ცვლილებები ტექსტში, რამაც უთუოდ აამაღლა წიგნის ხარისხი.

ავტორები სასიამოვნო მოვალეობად მიიჩნევენ მოახსენონ დიდი მადლობა საქართველოს ეკონომიკის მინისტრის მოადგილეს, ეკონომიკურ მეცნიერებათა კანდიდატს ბ-ნ ი. ზაქარიაძეს, რომლის მხარდაჭერა და დახმარება განუზომელია წიგნის გამოცემის დაჩქარების საქმეში.

წიგნის გამოშვება შეუძლებელი იქნებოდა ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექციის მხარდაჭერის გარეშე. ავტორები უღრმეს მადლობას მოახსენებენ ინსტიტუტის დირექტორს, აკადემიკოს ი. კიღურაძეს, დირექტორის მოადგილეს, აკადემიის წევრ-კორესპონდენტს ვ. კოკილაშვილს. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის რექტორის, პროფესორ რ. ხუროძის მხარდაჭერით, ამავე უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის კათედრაზე (კათედრის გამგე პროფესორი ა. ლაშხი) ორი წლის განმავლობაში ხდებოდა წიგნში გადმოცემული მასალის აპრობაცია ლექციასემინარებზე, რამაც გააუმჯობესა წიგნის ხარისხი. ავტორები დიდ მადლობას მოახსენებენ ტექნიკური უნივერსიტეტის ხელმძღვანელობას.

1998 წლის ზაფხულიდან TBC ბანკში მუშაობს სემინარი ფინანსურ ანალიზში. სემინარის მუშაობაში მონაწილეობენ: TBC ბანკის გენერალური დირექტორი ბ-ნი ვ. ბუცხრიკიძე, გენერალური დირექტორის პირველი მოადგილე ბ-ნი პ. ღადაძე, გენერალური დირექტორის მოადგილე ბ-ნი გ. ლემონჯავა, TBC ბანკის თანამშრომლები: გ. კვაჭაძე, დ. ასლანიშვილი, ვ. დოლიძე, ლ. ზუროშვილი, მ. კუნდუხაშვილი, გ. კვირიკაძე და სხვები. სემინარზე განხილულ იქნა წიგნში მოცემული მრავალი თემა. ავტორები უღრმეს მადლობას მოახსენებენ სემინარის ყველა მონაწილეს, რომელთა შენიშვნები და სურვილები გათვალისწინებულ იქნა ტექსტის საბოლოოდ მომზადებისას.

ავტორები უღრმეს მადლობას მოახსენებენ მსოფლიო ბანკის სოფლის მეურნეობის განვითარების პროექტის ფინანსურ მენეჯერს ბ-ნ გ. ლორთქიფანიძეს თანამშრომლობისათვის.

ავტორები

შესავალი

1970 წლამდე კაცობრიობა პირობითად „სტატიკურ" ფინანსურ გარემოში ცხოვრობდა: ვალუტების კურსი და საპროცენტო განაკვეთები სტაბილური იყო, ნავთობისა და სხვა სტრატეგიული პროდუქტების ფასები დროდადრო იცვლებოდა.

ბოლო 30 წლის განმავლობაში მოხდა გიგანტური ცვლილებები, როგორც ფინანსურ, ისე ტექნიკურ გარემოში. ამასთან რევოლუცია ფინანსებში შეუძლებელი იქნებოდა ტექნიკური საშუალებების წარმატებული განვითარების გარეშე.

თანამედროვე ფინანსური ბაზრები დაფუძნებულია ფასწარმოქმნის შესახებ ინფორმაციის გლობალურ გავრცელებაზე, სავაჭრო პარტნიორების უნარზე მყისიერად დაამყარონ კავშირები ერთმანეთთან და დილერების მიერ მძლავრი კომპიუტერებისა და რთული პროგრამული უზრუნველყოფის გამოყენების შესაძლებლობებზე.

რასაკვირველია, გარკვეული ცვლილებები ფინანსურ სამყაროში ამ პირობების შესრულების გარეშეც მოხდებოდა. მაგალითად, მყარი სავალუტო კურსიდან მცურავ კურსზე გადასვლა გამოწვეული იყო მნიშვნელოვანი განსხვავებით მძლავრი ეკონომიკური პოტენციალის მქონე ქვეყნების განვითარების ტემპებს შორის, უპირველეს ყოვლისა ამერიკის შეერთებულ შტატებსა და გერმანიას შორის. მაგრამ ფინანსური ბაზრების ვოლატილობის ზრდის მიზეზად მაინც ინფორმაციის გავრცელების სიჩქარე და ბაზრის მონაწილეთა სწრაფი რეაქცია უნდა ჩაითვალოს.

მიუხედავად ამისა, არ უნდა გვეგონოს, რომ მნიშვნელოვანი ძვრები ფინანსთა სამყაროში მხოლოდ ტექნიკური პროგრესის მიერ იყო გამოწვეული.

ამერიკელი მეცნიერების ბლეკის, შოულსის და მერტონის რევოლუციური ნაშრომები ოფციონის ფასგათვლის შესახებ 1973 წელს გამოქვეყნდა. კიდევ უფრო ადრე, 50-60-იან წლებში შეიქმნა მარკოვიცის პორტფელის თეორია, რასაც მოჰყვა ტობინის, შარპისა და ლინტნერის მიერ ფინანსური აქტივების ფასდადების მოდელის ე.წ. CAPM-ის შექმნა. მოგვიანებით როსმა და როლმა შექმნეს ფინანსური აქტივების ფასდადების არბიტრაჟული მოდელი ე.წ. APM. ეს თეორიები დღესაც დიდ როლს თამაშობს ფინანსურ

ანალიზში (შევნიშნოთ, რომ შოულსი, მერტონი, ტობინი, შარპი და მარკოვიცი ნობელის პრემიის ლაურეატები გახდნენ ეკონომიკაში). ჭეშმარიტად ოქროს ხანა სტოქასტური ფინანსური თეორიის განვითარებაში იყო 70–80 წლების დეკადა. ამ დროს გამოჩნდა, მაგალითად, კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის ნაშრომები ფინანსური ბაზრების დისკრეტული მოდელების შესახებ, ჰარისონისა და პლისკას, ჰარისონისა და კრეპსის ნაშრომები სტოქასტური ანალიზის და კერძოდ მარტინგალთა თეორიის გამოყენების შესახებ წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების ფასების დადგენისათვის. მეცნიერების ამ და სხვა მიღწევებმა ბიძგი მისცა ახალი ინსტრუმენტების შექმნასა და დანერგვას ფინანსურ პრაქტიკაში. მაგალითად, 80-იან წლებში შეიქმნა სვოპები, რომელთა ბაზრები ახლა მრავალ ასეულ მილიარდ დოლარს შეადგენს. დაახლოებით ამავე დროს შეიქმნა კეპები, ფლორები, კორიდორები, კოლარები და მრავალი სხვა, დღეს პოპულარული ფინანსური პროდუქტი.

სხვა ტიპის მნიშვნელოვანი ფინანსური ძვრები 80–90 წლების მიჯნაზე მოხდა, როცა კონსერვატიულ საბანკო სისტემაში, არასაბანკო ფინანსური შუამავლების მძლავრი კონკურენციის გამო, მოხდა რეგულირების ხისტ მექანიზმებზე უარის თქმა და ბანკები, თავისი თითქმის შემოუსაზღვრელი ფინანსური რესურსებით, აქტიურად ჩაებნენ ადრე მათთვის უჩვეულო ფინანსური ოპერაციების წარმოებაში.

როგორც არ უნდა შექმნილიყო არსებული ვითარება შემდეგი ოთხი რამ ეჭვს არ იწვევს.

პირველი. საბირჟო და საბანკო საპროცენტო განაკვეთების ვოლატილობის ზრდამ გამოიწვია ფინანსური რისკების მართვის სულ უფრო ფაქიზ ინსტრუმენტებზე მოთხოვნილების ზრდა.

მეორე. თანამედროვე ტექნიკამ საშუალება მისცა ფინანსურ ინსტიტუტებს შეექმნათ, შეეფასებინათ და გამოეყენებინათ ისეთი პროდუქტები, რომლებიც სპეციალურადაა შექმნილი მრავალმხრივი ფინანსური რისკების გასანეიტრალებლად.

ამ საფუძველზე წარმოიქმნა ფინანსური ინჟინერია.

მესამე. დრომ, დინამიკამ, განუსაზღვრელობამ, სტოქასტიკამ — რეალური ფინანსური გარემოს ამ კომპონენტებმა განსაზღვრეს ის, რომ ალბათურ-სტატისტიკური თეორიების (შემთხვევით პროცესთა თეორიის, სტოქასტური ანალიზის, შემთხვევით პროცესთა სტატისტიკის, სტოქასტური ოპტიმიზაციის) საფუძველზე შეიქმნა ფინანსთა თეორიისა და ფინანსური ინჟინერიის ამოცანების ადეკვატური მათემატიკური აპარატი.

ამ საფუძველზე წარმოიქმნა თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

მეოთხე. სადაზღვევო საქმეში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებას, ე.წ. აქტუარულ მათემატიკას, რომელსაც განვითარების ორსაუკუნოვანი ისტორია აქვს, ზემოაღნიშნულმა ალბათურ-სტატისტიკურმა თეორიებმა ახა-

ლი მძლავრი ბიძგი მისცა. ნელნელა წაიშალა ზღვარი აქტუარულ და ფინანსურ მათემატიკას შორის და ეს ორი მათემატიკური დარგი, ფინანსურ ინჟინერიასთან ერთად, ერთიანი დისციპლინის — ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდების სახით მოგვევლინა.

2. რისკი. ზემოთ ჩვენ არაერთხელ ვახსენეთ სიტყვა რისკი, სახელდობრ ფინანსური რისკი. ინტუიციურად ყველას ესმის რა არის რისკი. მას, ჩვეულებრივ, რაღაც მოულოდნელ და არასასურველ მოვლენას უკავშირებენ.

ფინანსურ ანალიზში შემოდის რისკის უფრო მკაფიო განმარტება:

რისკი არის ხდომილობის გამოსავალის ნებისმიერი ცვლილება.

ამ განმარტების მიხედვით რისკი წარმოიქმნება ხდომილობის როგორც არასასურველი, ისე სასურველი გამოსავალის განხორციელების დროს. ამიტომ არსებობს როგორც სასურველი, ისე არასასურველი რისკი.

ერთი შეხედვით, ასეთი განმარტება უცნაურია — ლატარეაში მოგებას, ჩვეულებრივ, რისკს არ უწოდებენ. მაგრამ ფინანსურ სამყაროში იგი არაჩვეულებრივად მოსახერხებელია. უპირველეს ყოვლისა მივაქციოთ ყურადღება სიტყვას ნებისმიერი. გავიხსენოთ, რომ ფინანსურ გარიგებაში მონაწილეობს ორი მხარე, რომელთა ინტერესები და თვალსაზრისები დიამეტრულად საწინააღმდეგოა. მაგალითისათვის განვიხილოთ ბანკი, რომელიც გასცემს სესხს მცურავი საპროცენტო განაკვეთით. განაკვეთის სიდიდის ზრდა სასურველია კრედიტორისთვის, მაგრამ არასასურველია მსესხებლისათვის. პირიქით, საპროცენტო განაკვეთის შემცირება ქმნის სასურველ სიტუაციას მსესხებლისათვის და არასასურველს ბანკისათვის.

ორივე შემთხვევაში რისკის წყარო ერთი და იგივეა: საპროცენტო განაკვეთის ცვლილება. ასეთ შემთხვევაში ლაპარაკობენ საპროცენტო რისკზე, თუმცა აღნიშნული გარიგების სხვადასხვა მხარისათვის იგი ან სასურველი ან არასასურველია.

რისკის მოცემული განსაზღვრა მოქნილია მეორე მიზეზის გამოც: იგი იძლევა რისკის რაოდენობრივი შეფასების საშუალებას. მართლაც, მივაქციოთ ყურადღება სიტყვას ცვლილება. თუ ცვლილება არ მოხდა რისკი არ წარმოიქმნება. თუ კი გამოსავალი შეიცვალა, მაშინ რისკი არსებობს. თუ ჩვენ მოვახერხეთ აღნიშნული ცვლილების სიდიდის მათემატიკური გაზომვა, მაშინ ჩვენს ხელთ რისკის გაზომვის ინდიკატორი იქნება. საბედნიეროდ, ალბათობის თეორიას გააჩნია ასეთი საშუალება: დისპერსია ან სტანდარტული გადახრა სწორედ ცვლილების სიდიდის შესაფერისი საზომია. ჩვენ შემდგომში დავინახავთ, რომ სტანდარტული გადახრა, ან როგორც მას ფინანსურ ლიტერატურაში უწოდებენ, ვოლატილობა, გადამწყვეტ როლს თამაშობს ფინანსური ინსტრუმენტების ფასის დადგენაში.

3. ფინანსური ანალიზი და რისკი. ფინანსური ინჟინერია შეიძლება განვმარტოთ, როგორც ფინანსური ინსტრუმენტების გამოყენება იმ

მიზნით, რომ არსებული ფინანსური სიტუაცია გარდაიქმნას ახალ, უფრო სასურველი თვისების მქონე სიტუაციად.

ერთი შეხედვით განმარტება წინააღმდეგობრივია, რადგან რაც სურს გარიგების ერთ მხარეს, შეიძლება არასასურველი იყოს მეორე მხარისათვის. მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არ არის. მაგალითად, ბანკის მენეჯერი შეიძლება თვლიდეს, რომ საჭიროა აქტივების პორტფელის სტრუქტურის ისეთი შეცვლა, რომ აქტივებს მცურავი საპროცენტო განაკვეთით ბანკის პორტფელში ნაკლები წონა ჰქონდეს, რადგან მენეჯერი ვარაუდობს საპროცენტო განაკვეთის სიდიდის კლებას. თუ სხვა ბანკის მენეჯერის აზრით მოსალოდნელია საპროცენტო განაკვეთის სიდიდის ზრდა, მაშინ ბუნებრივია, მას პორტფელში ფიქსირებულპროცენტიანი აქტივების მოცულობის შემცირების სურვილი გაუჩნდეს.

აღნიშნული მენეჯერები სიამოვნებით შევლენ საპროცენტო სვოპში, რომელიც არსებულ ფინანსურ სიტუაციას გარდაქმნის თითოეული მხარისათვის სასურველ ახალ ფინანსურ სიტუაციად: ერთი ბანკი მიიღებს ფიქსირებულ საპროცენტო გადასახადს, მეორე კი — მცურავს.

ისმის კითხვა, როგორ გამოვთვალოთ საკმაოდ რთული ფინანსური ინსტრუმენტის — სვოპის — პარამეტრები? ამ საკითხის გადაჭრის გარეშე გარიგება ხომ ვერ შედგება. ამისათვის კი როგორც ქვემოთ დავინახავთ, საჭიროა ობლიგაციების ბაზრის სტატისტიკური ანალიზი და მოდელირება, უკუპონო ობლიგაციების შემოსავლიანობის მრუდის აგება, ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის გაანგარიშება და ა.შ. ეს ფინანსური მათემატიკის პრეროგატივაა.

ამრიგად, ფინანსური მათემატიკის ძირითადი დანიშნულებაა ფინანსური ბაზრების სტატისტიკური ანალიზი, ადეკვატური მათემატიკური მოდელების შექმნა და ამის საფუძველზე ფინანსური ინსტრუმენტების პარამეტრების გაანგარიშება.

რისი შემოთავაზება შეუძლია ფინანსურ ანალიზს რისკთან საბრძოლველად?

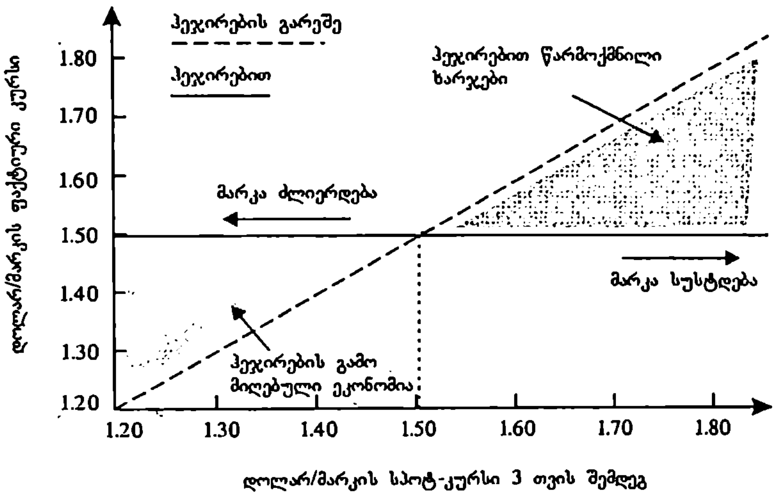
გამოვყოთ ორი ძირითადი მიდგომა: 1) რისკის შეცვლა განსაზღვრულობით, 2) მხოლოდ არასასურველი რისკის შეცვლა სასურველი რისკის შეცვლის გარეშე.

ფორვარდები, ფიუჩერსები, FRA, სვოპები ცვლიან რისკს სრული განსაზღვრულობით. მაგალითად, ფორვარდული გარიგებით შეიძლება რამოდენიმე თვის შემდეგ შევიძინოთ ფინანსური აქტივი მყარ ფასად, მიუხედავად იმისა, თუ როგორ შეიცვლება აქტივის მიმდინარე საბაზრო ფასი ამ ხნის განმავლობაში.

მართლაც, განვიხილოთ ამერიკული კომპანია, რომელიც მოვალეა გადაიხადოს გარკვეული თანხა გერმანულ მარკებში სამი თვის შემდეგ (მაგალითად, შეძენილი „მერსედესების“ საფასურად). ვთქვათ, მიმდინარე კურ-

სია \$1 = DM1.5. იმისათვის, რომ სრულად მოსპოს თვალნათელი სავალუტო რისკი, კომპანია შედის ფორვარდულ გარიგებაში. ფორვარდული გარიგება (კონტრაქტი, ფორვარდი) არის შეთანხმება ორ მხარეს შორის, იმის თაობაზე, რომ ერთი მხარე მოვალეა გაყიდოს, ხოლო მეორე მოვალეა იყიდოს გარკვეული აქტივი მომავლის განსაზღვრულ მომენტში განსაზღვრულ ფასად. ვთქვათ, გარიგებაში დაფიქსირდა კურსი \$1 = DM1.5 (მიწოდების ფასი).

განვიხილოთ შემდეგი ნახატი:



ნახ. 0.1

დიაგონალური ხაზი გვიჩვენებს კომპანიის რისკის პროფილს ფორვარდული გარიგების დადებამდე. იმისდა მიხედვით თუ როგორი იქნება სამი თვის შემდეგ ვალუტის კურსი, კომპანიას მოუხდება მარკების შეძენა ძვირად (თუ კურსი იქნება, მაგალითად, \$1 = DM1.2) ან იაფად (თუ კურსი იქნება, მაგალითად, \$1 = DM1.8). ამრიგად ვალუტის გადაცვლის კურსის აწევა \$1 = DM1.5 კურსის ზემოთ კომპანიისათვის სასურველ რისკს წარმოადგენს, შემცირება არასასურველს.

ჰორიზონტალური ხაზი გვიჩვენებს სიტუაციას ფორვარდული გარიგების დადების შემდეგ: რისკი შეიცვალა სრული განსაზღვრულობით (მიაქციეთ ყურადღება, რომ მოხდა როგორც არასასურველი, ისე სასურველი რისკის ელიმინირება).

ამრიგად, ფორვარდულ გარიგებაში შესვლის, ე.წ. რისკის ჰეჯირების შემდეგ წარმოიქმნა ორი არე (იხ. ნახ. 0.1): არე, რომელიც ასახავს ჰეჯირების ხარჯებს და არე, რომელიც ასახავს ჰეჯირებით მიღებულ ეკონომიას. ამასთან, პარტნიორები მიწოდების ისეთ ფასზე თანხმდებიან, რომ, კონტრაქტის დადების მომენტში, გარიგების ორივე მხარის აზრით აღნიშნული

ორი ფულადი ნაკადი (ხარჯები და ეკონომია) ერთმანეთს გააბათილებს. ამიტომ ჰეჯირების ამ ინსტრუმენტის ფასი გარიგების მომენტში ნულის ტოლია. ფაქტიურად, შესაძლო დანაკარგებისგან თავის დაზღვევა ხდება შესაძლო მოგებაზე უარის თქმის ხარჯზე.

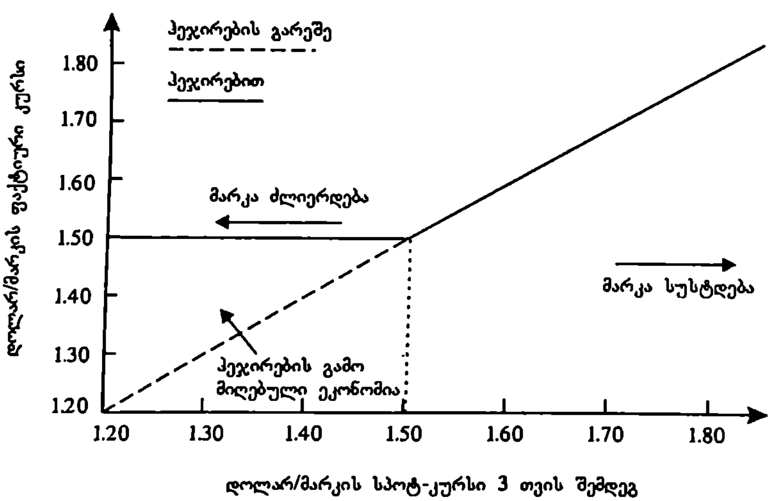
თუ რეალურად სამი თვის შემდეგ ვალუტის გადაცვლის კურსი გახდა, მაგალითად, $1 = DM1.8, მაშინ გასაგები ხდება კომპანიის მენეჯერის სინანული ჩატარებული ჰეჯირების გამო.

იმისათვის, რომ თავი ავარიდოთ ასეთ დაგვიანებულ სინანულს, საჭიროა მკაფიოდ განისაზღვროს რისკის ჰეჯირების მიზნები და დადგინდეს მისი ეფექტურობა. ყველა აღნიშნულ საკითხს ჩვენ დაწვრილებით ქვემოთ, მესამე და მეცხრე თავებში, განვიხილავთ.

დავსვათ კითხვა: ხომ არ შეიძლება არასასურველი რისკის სრული გამორიცხვა, სასურველი რისკის ხელშეხების გარეშე?

მეორე მიდგომა სწორედ ასეთ შესაძლებლობას გვთავაზობს, ოღონდ გარკვეულ პირობებში.

ცხადია, კარგი იქნებოდა, რომ ჰეჯირების შედეგად მიღებულ რისკის პროფილს ნახატ 0.2-ზე მოცემული სახე ჰქონდეს (ტეხილი უწყვეტი ხაზი)



ნახ. 0.2

ასეთი გარიგება საშუალებას მისცემდა მის მფლობელს სრულად დაეცვა თავი არასასურველი რისკისაგან და ამავე დროს შეენარჩუნებინა სასურველი რისკი.

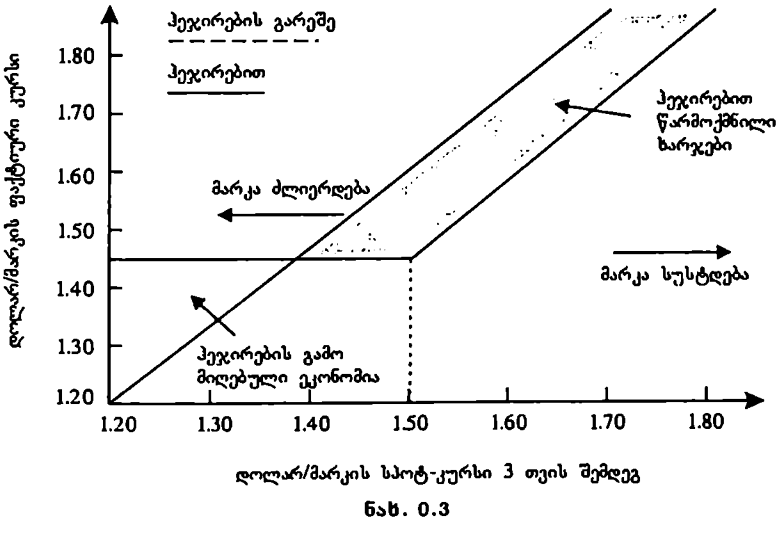
სამწუხაროდ, ასეთი ინსტრუმენტის შექმნა შეუძლებელია, რადგან გარიგების მეორე მხარის მოძებნა პრაქტიკულად ვერ მოხერხდება.

მიუხედავად ამისა, არსებობს ინსტრუმენტი, რომელიც თითქმის სრულად ასახავს დამჰეჯირებლის სურვილს. ესაა ე.წ. ყიდვის სავალუტო ოფციონი. ამ კონტრაქტის მიხედვით ოფციონის მყიდველს აქვს უფლება და არა მოვალეობა შეიძინოს აქტივი მომავალში, განსაზღვრულ დროს, განსაზღვრულ ფასად. ამავე დროს, კონტრაქტის გამყიდველი მოვალეა შეასრულოს კონტრაქტის პირობები ნებისმიერ შემთხვევაში. ზემოთგანხილულ მაგალითში ოფციონის მყიდველს აქვს უფლება და არა მოვალეობა შეიძინოს სამი თვის შემდეგ მარკები \$1 = DM1.5 ფასად. თუ რეალური ფასი გახდა \$1 = DM1.8, იგი თავის უფლებით არ ისარგებლებს (ოფციონი არ აღსრულდება), და კომპანია შეიძენს მარკებს სპოტ-ბაზარზე, ისარგებლებს რა სასურველი რისკით. თუ კი ფასი გახდა, მაგალითად, \$1 = DM1.2, მაშინ ოფციონის მფლობელი აღასრულებს ოფციონს და შეიძენს მარკებს კურსით \$1 = DM1.5, ანუ მოხდება არასასურველი რისკის სრული გამორიცხვა.

ცხადია ასეთი გარიგება უფასო არ იქნება.

ვთქვათ მისი ფასია 5 პფენინგი თითო დოლარზე.

მაშინ მიღებული რისკის პროფილს ექნება სახე:



ნახ. 0.3

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ ზემოთ დასმულ კითხვას დადებითი პასუხი გაეცა: გარკვეულ პირობებში — თითო დოლარზე 5 პფენინგის გადახდის მეშვეობით — შეძენილ იქნა ინსტრუმენტი, რომელიც მაჰეჯირებლის ყველა მოთხოვნას პასუხობს.

ისმის კითხვა: რატომ გადავიხადეთ ოფციონში ზუსტად 5 პფენინგი? საზოგადოდ, როგორ დავადგინოთ ინსტრუმენტის ფასი, როგორც ტრადიციულად ამბობენ-სამართლიანი ფასი?

ამ კითხვაზე ფინანსური მათემატიკა არატრივიალურ პასუხს იძლევა (იხ. წიგნის მეოთხე და მეხუთე თავები).

მეექვსე, მეშვიდე და მეცხრე თავებში ჩვენ დავინახავთ, რომ არსებობს რისკის გადანაწილების შესაძლო კომბინაციების თითქმის შემოუსაზღვრელი რაოდენობა.

არასასურველი რისკისაგან დაცვის დონე, შემოსავლიანობის დონე სასურველი რისკის დროს, დაცვის მოქმედების დიაპაზონი, შემოსავლის მიღების დიაპაზონი, დაცვის ფასი — ყველა ამ პარამეტრის ვარირება სავსებით შესაძლებელია. ეს კი იძლევა ჰეჯირების მიზნებთან ინსტრუმენტის საუკეთესო შეთანხმების საშუალებას.

4. ფინანსური ბაზრები. ფინანსური გარიგებები ხორციელდება ფინანსურ ბაზრებზე, რომლებიც წარმოადგენენ სავალუტო, ფულის, ობლიგაციისა და საფონდო ბაზრების ერთობლიობას. ის ინსტრუმენტები, რომლებითაც ვაჭრობენ ამ ბაზრებზე, შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად — ნაღდი ანგარიშსწორების, ე.წ. ძირითადი ინსტრუმენტები და დერივატივები (მეორადი, წარმოებული) ინსტრუმენტები.

სავალუტო ბაზარი. ეკონომიკის ინტერნაციონალიზაციამ გამოიწვია სხვადასხვა ქვეყნის სავალუტო ბლოკების წარმოქმნა, რის საფუძველზეც ხდებოდა ფულად-საკრედიტო პოლიტიკის შეთანხმება და ვალუტის გაცვლის კურსების დადგენა.

1944 წელს შეიქმნა ბრეტონ-ვუდსის სისტემა, რომელმაც ერთმანეთთან მყარი კურსით დააკავშირა ამერიკული დოლარი, გერმანული მარკა და ინგლისური ფუნტი სტერლინგი. 1973 წელს სავალუტო-ფინანსურმა კრიზისმა დაანგრია ეს სისტემა და მყარი კურსების სანაცვლოდ შემოვიდა მცურავი გაცვლითი კურსი.

1979 წელს შეიქმნა ევროპის მონეტარული სისტემა, რომლის შემადგენლობაში შედიოდნენ საერთო ბაზრის უმეტესი წევრი ქვეყნები. ამ სისტემის მიხედვით დადგენილი იყო ვალუტის კურსის ცენტრალური პარიტეტები და მისგან გადახრები ფიქსირდებოდა $\pm 2.25\%$ დონეზე. ამ დერეფნიდან გამოსვლას აკონტროლებდნენ სახელმწიფოთა ცენტრალური ბანკები, რომლებიც თავიანთი ინტერვენციებით უზრუნველყოფდნენ სავალუტო კურსების სტაბილურობას. შეიქმნა „მცურავი კურსების კორექტირებული სისტემა".

არსებობს სხვა სავალუტო ბლოკებიც, მაგალითად, კარიბის ზღვის აუზის, ცენტრალური და სამხრეთ ამერიკის, აღმოსავლეთი აზიის ქვეყნების ბლოკები. ეს ბლოკები აფიქსირებენ თავიანთი ვალუტის კურსს, რომელიმე ძლიერი „ვალუტა-ლიდერის" მიმართ.

სავალუტო ბაზარი (ფორექსი) ინტერნაციონალურია. იგი არაა ლოკალიზებული, არა აქვს სპეციალურად ვაჭრობისთვის გამოყოფილი ადგილი, არამედ იგი შედგება ბანკებისაგან, გადამცვლელი პუნქტებისაგან და ა.შ., რომლებიც გაფანტულია მთელ მსოფლიოში და აღჭურვილია თანამედროვე

კავშირგაბმულობის საშუალებებით.

ფორექსი მუშაობს უწყვეტად 24 საათის განმავლობაში, ძალიან აქტიურად კვირის სამუშაო დღეების განმავლობაში, ნაკლებად აქტიურად უქმე და სადღესასწაულო დღეებში. შეიძლება გამოიყოს დღე-ღამის განმავლობაში სავალუტო ოპერაციების აქტივობის სამი გეოგრაფიული ზონა: აღმოსავლეთ აზიის ზონა, ცენტრით ტოკიოში და აქტივობის საათებით 21^{00}–7^{00}, და თვით ტოკიოში ვაჭრობის მოცულობით $126 მლრდ.; ევროპული ზონა ცენტრით ლონდონში, აქტივობის საათებით 7^{00}–13^{00} და ლონდონში ვაჭრობის მოცულობით $300 მლრდ.; ამერიკული ზონა ცენტრით ნიუ-იორკი, აქტივობის საათებით 13^{00}–20^{00} და ნიუ-იორკში ვაჭრობის მოცულობით $192 მლრდ. (დრო ყველგან გრინვიჩისაა). დანარჩენი $512 მილიარდით სხვაგან ხდება ვაჭრობა.

თუ საბაზისო ვალუტად მივიჩნევთ ამერიკულ დოლარს, USD, მაშინ მის მიმართ ყველაზე აქტიურები არიან ე.წ. ძირითადი ვალუტები: გერმანული მარკა, DEM, იაპონური იენა, JPY, ინგლისური ფუნტი სტერლინგი, GBP, და შვეიცარული ფრანკი, CHF.

ჩამოთვლილი ვალუტებით ყველგან ვაჭრობენ. დანარჩენი ვალუტით კი ვაჭრობენ მხოლოდ თავ-თავიანთ გეოგრაფიულ ზონებში.

სავალუტო ბაზარი ყველაზე დიდი ბაზარია სხვა ფინანსურ ბაზრებს შორის. სადღეღამისო ბრუნვა მასზე შეადგენს კოლოსალურ ციფრს — 1.000 მილიარდ დოლარს! ამასთან, კომერციული გარიგების წილი შეადგენს მხოლოდ 5–20%-ს. დარჩენილი 80%–95% მოდის ბანკთაშორის გადარიცხვებზე (ერთი კომერციული გარიგება იწვევს, როგორც წესი, ათამდე ბანკთაშორის გადარიცხვას) და სპეკულაციაზე. შევნიშნოთ, რომ სავალუტო ბაზრის გარიგებების $\frac{2}{3}$-ს სპოტ-გარიგებები წარმოადგენს, ანუ ისეთი გარიგებები, რომლებიც ნაღდი ფულის დაუყოვნებლივ მიწოდებასთანაა დაკავშირებული (რათა მოესწროს თანხის ზონიდან ზონაში გადასვლა. ანგარიშსწორებისათვის გამოყოფილია ორი დღე). გარიგებების დარჩენილი $\frac{1}{3}$ არის ფორვარდული გარიგებები ერთ წლამდე დაფარვის ვადით. ფორვარდული გარიგებები ან ჩვეულებრივი გარიგებებია ვალუტის ერთჯერადი გაცვლით რომელიმე მომენტში, ან სვოპ-გარიგებები, როცა ერთ დღეს ხდება ვალუტის ერთი მიმართულებით გაცვლა, ხოლო მეორე დღეს — საწინააღმდეგო მიმართულებით.

ფულის ბაზარი. ასე უწოდებენ ელექტრონულ ქსელს, რომლის მეშვეობითაც მოკლევადიანი სასესხო ვალდებულებებით ვაჭრობენ. ამასთან, დაფარვის ვადები ოვერნაიტიდან (ე.ი. ერთი ღამის განმავლობაში) ერთ წელიწადამდე იცვლება, ხოლო ტიპიური თანხებია $250.000-დან და $5 მლნ-მდე.

ვაჭრობა მიმდინარეობს შემდეგი ფასიანი ქაღალდებით: სახაზინო ვალდებულებებით, სავაჭრო თამასუქებით, აქცეპტებით, საბანკო სადეპოზიტო სერთიფიკატებით, კომერციული ქაღალდებით, ევროკომერციული ქა-

ღალდებით, ევრობანკნოტებით და თამასუქებით. ჩამოთვლილი ინსტრუმენტების უმეტესობისათვის არსებობს მეორადი ბაზარი.

სხვა ტიპის ვალდებულებების რიცხვს, რომლებიც თავისუფალ ბრუნვაში არ არის, მიეკუთვნება: ბანკთაშორისი დეპოზიტები, ფედერალური ფონდები, REPO, ადგილობრივი თვითმმართველობის დეპოზიტები და მსხვილი ფინანსური სახლების დეპოზიტები.

ამ ინსტრუმენტებისთვის არსებობს აქტიური პირველადი ბაზარი, მაგრამ არ არსებობს მეორადი ბაზრები.

ვაჭრობა (საპროცენტო განაკვეთის დადგენა) დისკონტურ ან საპროცენტო შემოსავლიანობის ბაზაზე ხორციელდება.

ობლიგაციების ბაზარი ფულის ბაზრისაგან ძირითადად გადახდების ვადებით განსხვავდება. სახელდობრ, თუ ფულის ბაზარზე გადახდათა ვადა არ აღემატება ერთ წელიწადს, ობლიგაციების დაფარვის ვადები 30 წელიწადამდე შეიძლება გაგრძელდეს. არსებობს უვადო ობლიგაციებიც.

უმეტეს ქვეყნებში ობლიგაციების მთავარ ემიტენტებს მთავრობები და ადგილობრივი თვითმმართველობის ორგანოები წარმოადგენენ, დანარჩენი ობლიგაციები მსხვილ კორპორაციებს ეკუთვნის.

განარჩევენ სამთავრობო და კორპორაციულ ობლიგაციებს, ობლიგაციებს მცურავი განაკვეთებით, ევროობლიგაციებს (უცხო ქვეყნის მიერ გამოშვებულ ობლიგაციებს), საშუალო ვადიან ობლიგაციებს. ობლიგაციების უმეტესობა აღჭურვილია კუპონებით და მათი შემოსავალი წინასწარ ფიქსირდება. ამიტომ მათ ფიქსირებული შემოსავლიანობის ინსტრუმენტებს ან პირდაპირ ობლიგაციებს უწოდებენ.

ობლიგაციები საპროცენტო განაკვეთის „მატერიალიზაციის" საშუალებას გვაძლევენ. მათი კონსტრუქცია დაწვრილებით აღწერილია საპროცენტო განაკვეთებისადმი მიძღვნილ პირველ თავში.

ყველაზე მსხვილია ობლიგაციების ბაზრები, რომელთა ნომინალი დოლარებსა და იენებშია. ისინი მთელი ბაზრის დაახლოებით $\frac{2}{3}$-ს შეადგენენ, რაც აშშ-სა და იაპონიის დიდ ვალზე მეტყველებს. შემდეგ მოდიან ობლიგაციები, რომელთა ნომინალი გამოსახულია გერმანულ მარკებში, იტალიურ ლირებში, ფუნტ სტერლინგებში და ფრანგულ ფრანკებში.

საფონდო ბაზარი — ძირითადად აქციების ბაზარია. აქცია, განსხვავებით ობლიგაციისაგან, წილობრივი დოკუმენტია, რომელიც აძლევს მის მფლობელს უფლებას, მონაწილეობა მიიღოს აქციის გამომშვები კომპანიის მართვასა და მოგების გადანაწილებაში. აქციის სერთიფიკატს შეიძლება გააჩნდეს გამოცხადებული ღირებულება, მაგრამ ეს ღირებულება წმინდად ნომინალურია, რადგან არ არსებობს ამ ღირებულების გადახდის სათანადო ვალდებულება. არ არსებობს განსაზღვრულობა დივიდენდების მიღების თაობაზეც. უფრო მეტიც, კომპანიის გაკოტრების შემთხვევაში აქციის მფლობელებს ყველაზე ბოლოს ისტუმრებენ (კომპანიის აქტივების გაყიდვის შემ-

თხვევაში).

ამიტომ, აქციები რისკიანი ქაღალდებია და ინვესტორთა მიზიდვა და რისკის კომპენსირება ხდება მათი მაღალი შემოსავლიანობით. კავშირს რისკსა და შემოსავლიანობას შორის ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ წიგნის მეორე თავში, სადაც მოყვანილ იქნება პორტფელის თეორია და ე.წ. CAPM-მოდელი — ფინანსური აქტივების ფასდადების მოდელი, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ფინანსური საქმის თეორიაში.

ყველაზე დიდი საფონდო ბაზარი განლაგებულია ნიუ-იორკში — ნიუ-იორკის საფონდო ბირჟა (NYSE). აქ ვაჭრობენ უძველესი და კარგად ცნობილი 2089 კომპანიის აქციებით. მეორე დიდი ორგანიზაციაა NASDAQ, რომელზეც დაფიქსირებულია 4700 დიდი, საშუალო და განვითარებადი კომპანია. ამ ბირჟას არ გააჩნია ცენტრალიზებული სავაჭრო ადგილი.

საკმაოდ მსხვილია OTC (over the counter) ბაზარიც. მასაც არ გააჩნია ცენტრალიზებული სავაჭრო ადგილი. ვაჭრობა სატელეფონო-კომპიუტერული ქსელით მიმდინარეობს. მასზე ვაჭრობენ ჩვეულებრივი და პრივილეგირებული აქციებით, სხვადასხვა ფასიანი ქაღალდებით, ოფციონებით, ვარანტებით და ა.შ. სხვა დიდი ბირჟებიდან აღვნიშნოთ ლონდონის და ტოკიოს საფონდო ბირჟები.

5. ნაღდი ანგარიშსწორების და წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტები. გამოვყოთ ზემოთგანხილული ბაზრების მთავარი თავისებურება — გარიგების რეალიზაცია იწვევს ნაღდი ფულის ნაკადის წარმოქმნას, უფრო ზუსტად, ძირითადი კაპიტალის ნაკადის წარმოშობას. ამიტომ ვალუტის, ფულის, ობლიგაციებისა და საფონდო ბაზრებს ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზრებს უწოდებენ.

ძირითადი კაპიტალის ნაკადთან ბუნებრივად არის დაკავშირებული დიდი რისკი, რომელსაც მოვლენების ნორმალური მსვლელობის დარღვევა იწვევს. საკმარისია წარმოვიდგინოთ, რომ რომელიმე მსხვილი კომპანია, რომელმაც ისესხა $100 მლნ გაკოტრდა ან რომელიმე მთავრობამ, რომელსაც $100 მლრდ აქვს ნასესხები დეფოლტი გამოაცხადა. როგორც ვიცით, ასეთი ფაქტების წინაშე რეალურმა ფინანსურმა ცხოვრებამ დაგვაყენა.

გასაგებია, რომ ხანდახან ძირითადი კაპიტალის ნაკადის გადადინება გარიგების ერთი მხარედან მეორისკენ აუცილებელია, მაგალითად, როცა საჭიროა რაიმე პროექტის ნაღდი ფულით დაფინანსება.

მაგრამ ჰეჯირებისა და სპეკულაციისათვის ნაღდი ფულის ნაკადი არა თუ აუცილებელი, არამედ არასასურველიც კი არის. აქედან სრულებითაც არ გამომდინარეობს, რომ ჰეჯირების და სპეკულაციისათვის ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზრებს არ იყენებენ. პირიქით, ამ ბაზარზე ვაჭრობის მოცულობის დიდ ნაწილს სწორედ ზემოაღნიშნული ფინანსური ქმედებები წარმოადგენს. მაგრამ 70-იანი წლებიდან განვითარდა წარმოებული ინსტრუმენტების ბაზრები, რომლებმაც უზრუნველყვეს რისკის უფრო ეფექტური მართვა.

წარმოებულ ინსტრუმენტებს — დერივატივებს — განეკუთვნება ფიუჩერსები, ოფციონები, სვოპები, კეპები, ფლორები, კოლარები, კორიდორები და ა.შ. ამ ინსტრუმენტების და მათ საფუძველზე ჰეჯირებისა და სპეკულაციის ხერხების დაწვრილებითი აღწერა მოცემულია წიგნის მესამე–მეშვიდე და მეცხრე თავებში.

დერივატივები, ისევე როგორც მათი მსგავსი ინსტრუმენტები ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზრებზე, დამოკიდებულნი არიან სავალუტო კურსის მერყეობაზე, საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებაზე, საფონდო ბაზრის ძვრებზე. მაგრამ მათი გამოყენების დროს არ წარმოიქმნება ძირითადი კაპიტალის დაკარგვის რისკი.

სწორედ ამ მთავარი თვისების გამო, ბანკებს, რომლებიც ამ ინსტრუმენტებით ვაჭრობენ, სჭირდებათ გაცილებით ნაკლები კაპიტალის რეზერვირება და საკრედიტო ხაზების დაკავება, რაც იწვევს დიდი და ძვირი ფინანსური რესურსების გამოთავისუფლებას. ამიტომ დერივატივები ბანკების და მათი კლიენტების რისკის მართვის მოხერხებულ და მიმზიდველ იარაღს წარმოადგენს.

6. საპროცენტო განაკვეთები. როგორც ვიცით, ფულს დროითი ღირებულება გააჩნია, რაც „საპროცენტო განაკვეთის" არსებობით არის გამოწვეული. ამიტომ ვერ შეხვდებით ფინანსურ ინსტრუმენტს, რომლის პარამეტრების გათვლაში „საპროცენტო განაკვეთს" გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ ჰქონდეს.

რა არის „საპროცენტო განაკვეთი"? ეს ცნება იმდენად ფართოდ შემოვიდა ჩვენს ცხოვრებაში, რომ „პროცენტების" შესახებ საუბარს და მსჯელობას საზოგადოების ყველა ფენაში შეხვდებით. ამასთან, საუბრის თემა ფართოდ ვარირებს — ბანკის „პროცენტებიდან" მოყოლებული სახელმწიფო სესხის მომსახურეობის საპროცენტო გადასახადებამდე.

მიუხედავად ასეთი გავრცელებისა, ამ ცნების გამოყენების დროს, ხშირად მნიშვნელოვან შეცდომებს უშვებენ.

საქმე იმაშია, რომ არ არსებობს „საპროცენტო განაკვეთის" ერთიანი ცნება. არსებობს საპროცენტო განაკვეთის სხვადასხვა სახე, რომლებსაც განსხვავებული შინაარსი და გამოყენების სფერო აქვს. ამ საკითხში გარკვეულობის შესატანად, რაც სრულიად აუცილებელია ფინანსურ ანალიზში, წიგნის პირველ თავში განიხილება თემა, რომელსაც ტრადიციულად, საპროცენტო განაკვეთის დროითი სტრუქტურა ჰქვია. აქ მოიცემა მარტივი, რთული, უწყვეტად დარიცხული, ნომინალური, ეფექტური, ფორვარდული, სვოპური და ა.შ. საპროცენტო განაკვეთების ცნებები, მათი ურთიერთკავშირები, მოდელები და ა.შ.

7. ფინანსური დროითი მწკრივები და პროგნოზირება. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ფინანსური ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან

მხარეს მონაცემთა სტატისტიკური ანალიზი წარმოადგენს. მის საფუძველზე დგინდება კავშირები სხვადასხვა ფინანსურ მაჩვენებელს შორის, აიგება შემოსავლიანობის მრუდები, ფასდება ფორვარდული და სხვა საპროცენტო განაკვეთები, აიგება ფასების ცვლილების მოდელები, ფასდება მათი პარამეტრები და ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით კეთდება პროგნოზები, რაც თავის მხრივ, სწორი ფინანსური გადაწყვეტილებების მიღების საწინდარია.

როგორც ბოლო წლების გამოკვლევებით დადგინდა, ფინანსური დროითი მწკრივების ანალიზის დროს, მნიშვნელოვანია ის, თუ დროის რა შუალედები გამოიყენება მონაცემთა დისკრეტიზაციის დროს. თუ შუალედი ერთ წელიწადს, ერთ თვეს ან კვირას წარმოადგენს, მაშინ უმეტეს ფინანსურ დროით მწკრივებს ადეკვატურად წრფივი მოდელები ე.წ. ARIMA მოდელები აღწერს. თუ დისკრეტიზაციის შუალედი 1 დღეს ან მასზე უფრო მცირე დროით შუალედს მოიცავს, მაშინ საჭიროა არაწრფივი მოდელების გამოყენება, მაგალითად, ე.წ. სტოქასტური ვოლატილობის მოდელებისა (ARCH, GARCH, HARCH და სხვ.).

წიგნის მერვე თავში საკმაოდ ვრცლადაა აღწერილი წრფივი და არაწრფივი მოდელები, მათი თვისებები, მოყვანილია პროგნოზირებისა და პარამეტრების შეფასების კლასიკური მეთოდები. ცალკე პარაგრაფი ეძღვნება შედარებით ახალ, 70–80-იან წლებში შემუშავებულ პარამეტრების რობასტული შეფასების თეორიას.

სტოქასტური ვოლატილობის მოდელები ახლოსაა კალმან-ბიუსის ტიპის ნაწილობრივ-დაკვირვებად მოდელებთან. ამიტომ, ამავე თავის ცალკე პარაგრაფში განიხილება კალმან-ბიუსის მიდგომა და ამ ტიპის განზოგადოებული მოდელები, რომლებიც წარმოადგენს პირობითად-გაუსის პროცესებს. მოყვანილია ოპტიმალური ფილტრაციისა და პროგნოზირების ფორმულები დისკრეტული დროის შემთხვევაში.

ფინანსურ მაჩვენებლებს შორის კავშირების აღმოსაჩენად და ერთი მაჩვენებლის დაკვირვებული მნიშვნელობით მეორის პროგნოზირებისათვის გამოიყენება კორელაციური და რეგრესიული ანალიზი.

შემდგომ, ყველა აღნიშნული მოდელი და სტატისტიკური ანალიზის შედეგი გამოიყენება მოკლე ან საშუალო ვადიანი პროგნოზების გასაკეთებლად.

8. ფინანსური რისკი და სადაზღვევო საქმე. დაზღვევა ფინანსურ რისკთან ბრძოლის სოციალურ ინსტრუმენტს წარმოადგენს. ინდივიდები, ორგანიზაციები თავიანთი შენატანების წყალობით გამორიცხავენ ან ამცირებენ შესაძლო დანაკარგების რისკს. იმისათვის, რომ დაზღვევას ადგილი ჰქონდეს, უნდა შესრულდეს დაზღვევის განხორციელების აუცილებელი პირობები. ამის შემდეგ გამომუშავდება დაზღვევის სხვადასხვა ფორმები და სქემები.

განასხვავებენ სხვადასხვა სახის დაზღვევას: სიცოცხლის დაზღვევას,

საკუთრების დაზღვევას, პასუხისმგებლობის დაზღვევას და სხვა. ამასთან შეიძლება გამოვიყენოთ დაზღვევის სხვადასხვა ფორმა, მაგალითად, ნებაყოფლობითი დაზღვევა, აუცილებელი (ანუ სოციალური) დაზღვევა. დამზღვევები იხდიან გადასახადს (პრემიას) სხვადასხვა ხერხით, რომელიც ვარირებს სადაზღვევო პოლისიდან პოლისამდე. დაზღვევას ექვემდებარება, როგორც წესი, მხოლოდ ფიზიკური დანაკარგების რისკი.

შეუძლებელია დაზღვევის თანამედროვე თეორია და პრაქტიკა ინვესტიციებისა და ფინანსების თეორიისა და პრაქტიკისაგან იზოლირებულად განვიხილოთ. წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტები მზარდ როლს თამაშობს სადაზღვევო საქმეშიც. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ფიუჩერსული კონტრაქტი გადაზღვევაზე, რომლითაც 1992 წლიდან ვაჭრობენ ჩიკაგოს ბირჟაზე.

ამასვე მოწმობს სადაზღვევო საქმის განვითარების პერიოდების კლასიფიკაცია, რომელიც შემოთავაზებულია ცნობილი შვეიცარელი აქტუარის ბიულმანის მიერ.

პირველი პერიოდი ხასიათდება, ძირითადად, სიკვდილიანობის ტაბულების შედგენით, მეორე პერიოდში ხდება ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების დანერგვა აქტუარულ გათვლებში, მესამე პერიოდი ხასიათდება ფინანსური ინსტრუმენტისა და ფინანსური ინჟინერიის მეთოდების გამოყენებით. შესაბამისად იცვლება აქტუარის მათემატიკური აღჭურვილობაც. დიდ რიცხვთა კანონებს და ცენტრალურ ზღვარით თეორემას ემატება სტოქასტური ანალიზი, სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებები, მარტინგალები და სხვა. მაგალითისათვის შეიძლება მოვიყვანოთ ფინანსური „ოფციონური" მეთოდების ეფექტური გამოყენება კატასტროფულ მოვლენათა დაზღვევის ამოცანებში.

სადაზღვევო საქმის რაოდენობრივი მეთოდების განხილვას ეძღვნება წიგნის ბოლო, მეათე თავი.

ბოლოს მოვიყვანოთ იმ ორიგინალური სტატიებისა და მონოგრაფიების სია, რომლებმაც დიდი როლი ითამაშეს რაოდენობრივი ფინანსური ანალიზის ჩამოყალიბებაში: [4], [9], [28], [45], [55], [65], [66], [111], [112], [116], [129], [130], [140], [142], [158].

1

საპროცენტო განაკვეთის დროითი სტრუქტურა

1.1 საბანკო ანგარიში

საბანკო ანგარიში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფასიანი ქაღალდი, რომელიც ობლიგაციების კლასს ეკუთვნის და რომლის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ბანკი იღებს ვალდებულებას, ანგარიშზე მყოფ თანხას გარკვეული პროცენტული შემოსავალი დაარიცხოს.

თუ ანაბრის ვადა 1 წელზე ნაკლებია, როგორც წესი, ბანკები იყენებენ მარტივი პროცენტის ფორმულას, რაც იმას ნიშნავს, რომ t დროის შემდეგ (დრო იზომება წლებში) საწყისი B_0 თანხა

$$B_t = B_0(1 + tr_0), \quad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

თანხის ტოლი გახდება. r_0-ს წელიწადში ერთხელ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი ჰქვია, ხოლო

$$\nu_t = \frac{1}{1 + tr_0}$$

სიდიდეს დისკონტ-ფაქტორს უწოდებენ. იგი თანხის დისკონტირების საშუალებას გვაძლევს. მართლაც,

$$B_0 = B_t \nu_t = \frac{B_t}{1 + tr_0}.$$

თუ ანაბრის ვადა 1 წელზე მეტია, მაშინ იყენებენ რთული პროცენტის ფორმულას

$$B_t = B_0(1 + \widehat{r})^t, \tag{1.2}$$

სადაც გამოყენებულია იგივე აღნიშვნები, ოღონდ $\widehat{r}$ არის წელიწადში ერთხელ რთულად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი. დისკონტ-ფაქტორი ამ შემთხვევაში ტოლია

$$\nu_t = \frac{1}{(1 + \widehat{r})^t}$$

და

$$B_0 = B_t \nu_t = \frac{B_t}{(1+\widehat{r})^t}.$$

განვაზოგადოთ (1.2) ფორმულა და შემოვიღოთ წელიწადში m-ჯერ რთულად დარიცხული $r(m)$ საპროცენტო განაკვეთის ცნება. იგი განისაზღვრება ფორმულიდან

$$B_t^m = B_0 \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{tm} \tag{1.3}$$

რომლის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ, თუ $t = 0$ მომენტში გვქონდა B_0 თანხა, მაშინ t დროის გასვლის შემდეგ გვექნება B_t^m თანხა. ამასთან, B_0-ს m-ჯერ წელიწადში დაერიცხა თანხა $r(m)$ წლიური განაკვეთით.

უწყვეტად დარიცხული წლიური საპროცენტო განაკვეთი $r(\infty) := r$ წინა ცნების განზოგადებაა და უფრო ხშირად ფინანსური ანალიზის მოდელებში (მაგალითად, ბლეკ-შოულსის მოდელში, კოქს-როს-რუბინშტეინის მოდელში და ა.შ.) გამოიყენება. იგი განისაზღვრება ფორმულიდან

$$B_t^\infty = B_0 e^{r(\infty)t} = B_0 e^{rt}. \tag{1.4}$$

ამ შემთხვევაში, B_0 თანხას t დროის განმავლობაში უწყვეტად, $r(\infty)$ წლიური საპროცენტო განაკვეთით, დაერიცხა პროცენტი და t მომენტში B_t^∞ თანხას მივიღებთ. დისკონტ-ფაქტორი, ამ შემთხვევაში, უდრის

$$\nu_t = e^{-rt}$$

და

$$B_0 = B_t^\infty \nu_t = B_t^\infty e^{-rt}.$$

ცხადია, რომ $B_t^m \to B_t^\infty$, როცა $r(m) \to r(\infty)$, $m \to \infty$.

პრაქტიკაში პროცენტის უწყვეტად დარიცხვა ყოველდღიური დარიცხვის ეკვივალენტურია.

ადვილი დასანახია, რომ ყოველი ნატურალური m-თვის

$$r(m) = m\left(e^{\frac{r}{m}} - 1\right) \tag{1.5}$$

და

$$r = m \ln\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right). \tag{1.6}$$

კერძოდ, თუ $m = 1$, მაშინ $\widehat{r} = r(1)$ და

$$\widehat{r} = e^r - 1, \tag{1.7}$$

$$r = \ln(1 + \widehat{r}). \tag{1.8}$$

1.2 ფინანსური აქტივებისა და პორტფელების შემოსავალი (შემოსავლიანობა)

ძირითადი განმარტებები. ვთქვათ, რომელიმე ფინანსური აქტივი შეძენილ იქნა $t = 0$ მომენტში B_0 ფასად, და გარკვეული დროის შემდეგ, t მომენტში, გაყიდულ იქნა B_t ფასად.

ვთქვათ, აქტივის ფლობის პერიოდში, ანუ t დროის განმავლობაში, ინვესტორმა მიიღო შემოსავალი D_t (მაგალითად, დივიდენდები ან პროცენტული შემოსავალი). ამ სიდიდეს მიმდინარე შემოსავალი ქვია. ამას გარდა, აქტივის მფლობელი t მომენტში მიიღებს შემოსავალს

$$\Delta B_t = B_t - B_0.$$

სიდიდეს

$$r_t = \frac{D_t + B_t - B_0}{B_0} = \frac{D_t + \Delta B_t}{B_0} \tag{1.9}$$

უწოდებენ შემოსავლიანობას t პერიოდის განმავლობაში, ან ფაქტიურ შემოსავლიანობას.

შევნიშნოთ, რომ შემოსავლიანობის ცნება „მიბმულია" დროის $[0, t]$ ინტერვალთან, რომელსაც საინვესტიციო ჰორიზონტს უწოდებენ.

შემოსავლიანობის ცნება, რომელიც ზემოთ შემოვიღეთ, ეფუძნება მთელ რიგ არაცხად პირობებს.

მთავარი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ მიმდინარე შემოსავალი, რომელიც აქტივისაგან მიიღება, $[0, t]$ პერიოდის განმავლობაში აღარ რეინვესტირდება. გარდა ამისა, იგულისხმება, რომ მიმდინარე შემოსავალი ფულადი თანხის სახით აღირიცხება, რომელიც პერიოდის ბოლოს, ანუ t მომენტს მიეკუთვნება. ამასთან, ითვლება, რომ აქტივი t მომენტში გაიყიდა და მთელი თანხა (1.9) ფორმულაში ნაღდ ფულს წარმოადგენს.

ასე მიღებულ შემოსავლიანობას რეალიზებულ შემოსავლიანობას უწოდებენ, რადგან ინვესტორმა რეალურად მიიღო დივიდენდი და მოახდინა აქტივის რეალიზაცია.

პრაქტიკაში, ხშირად, არ იგულისხმება, რომ არსებული აქტივი რეალიზებული უნდა იყოს. ასეთ შემთხვევაში, მის ღირებულებას საბაზრო ფასით აფასებენ და ასე მიღებულ შემოსავალს წიგნის ან საბუღალტრო შემოსავალს უწოდებენ.

(1.9) ფორმულას განსაკუთრებით მარტივი სახე და გამჭვირვალე შინაარსი მაშინ აქვს, როცა $D_t = 0$:

$$r_t = \frac{B_t - B_0}{B_0} = \frac{B_t}{B_0} - 1. \tag{1.10}$$

ამ შემთხვევაში, აქტივისაგან შემოსული ფულადი ნაკადი დაიყვანება ერთადერთ თანხაზე, B_t-ზე, რომელიც პერიოდის ბოლოს ეკუთვნის. სწორედ ასე დაითვლება ე.წ. უკუპონო ობლიგაციის შემოსავლიანობა, რომელსაც ჩვენ უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ.

იმ შემთხვევაში, თუ თანხის ინვესტირება რამოდენიმე სხვადასხვა აქტივში ხდება, საქმე გვაქვს აქტივების პორტფელთან.

როგორ გამოითვლება პორტფელის შემოსავლიანობა?

აღვნიშნოთ W_0-ით პორტფელის საწყისი ღირებულება, ანუ ღირებულება $t = 0$ მომენტში. ამასთან, ვიგულისხმოთ, რომ პორტფელის ნაწილი შედგება ნაღდი ფულადი თანხისაგან. ვთქვათ W_t არის პორტფელის ღირებულება t მომენტში, ანუ, სხვა სიტყვებით,

$$W_i = V_i + D_i, \quad i = 0 \quad \text{ან} \quad t,$$

სადაც V_i არის პორტფელის არაფულადი ნაწილის ღირებულება, ხოლო D_i — მისი ფულადი ნაწილის ღირებულება.

ვიგულისხმოთ, რომ მთელი საწყისი კაპიტალი ინვესტირდება (ანუ $D_0 = 0$). ამ შემთხვევაში, შემოსავლიანობა შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით

$$r_t = \frac{D_t + V_t - V_0}{V_0}, \tag{1.11}$$

რომელიც გარეგნულად (1.9) გამოსახულებას ემთხვევა.

ამასთან, იგულისხმება, რომ მიმდინარე შემოსავალი ან რეინვესტირდება და ამიტომ V_t-შია გათვალისწინებული, ან ნაღდი ფულის სახით ინახება და მაშინ D_t-ში გაითვალისწინება.

ყველა ამ ფორმულაში იგულისხმებოდა, რომ განხილული პერიოდის განმავლობაში არ ხდება დამატებითი ინვესტირება. თუ ეს მაინც ხდება, მაშინ დამატებით ინვესტიციას პერიოდის დასაწყისს მიაკუთვნებენ.

საბოლოოდ, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი: შემოსავლიანობის გამოთვლის დროს ხარჯებს მიაკუთვნებენ პერიოდის დასაწყისს, შემოსავლებს კი — პერიოდის ბოლოს.

ცხადია, რომ ეს წესი შემოსავლიანობის შემცირებულ შეფასებას გვაძლევს, თუმცა გამოთვლების თვალსაზრისით იგი მარტივი და მოხერხებულია და პრაქტიკაში მაინც გამოიყენება.

მაგალითი 1.1. ვთქვათ, საინვესტიციო პერიოდი 1 წელიწადია. დავუშვათ, რომ ამ პერიოდის დასაწყისში, $t = 0$ მომენტში, მოხდა \$100 ინვესტირება რაიმე ფინანსურ აქტივში, რომელმაც 6 თვის შემდეგ მოიტანა დივიდენდი \$50. ვთქვათ, 9 თვის შემდეგ ინვესტორს დასჭირდა დამატებითი თანხის შეტანა \$25-ის ოდენობით, და საბოლოოდ, 1 წლის თავზე, აქტივის გაყიდვამ მოიტანა თანხა \$200. რას უდრის ინვესტიციის შემოსავლიანობა?

აღწერილი წესის თანახმად,

$$r_1 = \frac{\$50 + \$200 - (\$100 + \$25)}{\$100 + \$25} = \frac{\$125}{\$125} = 100\%,$$

ანუ თანხა $50, რომელიც შემოვიდა დივიდენდის სახით, მიეკუთვნება პერიოდის ბოლოს, ხოლო დამატებით ინვესტირებული $25 მიეკუთვნება პერიოდის დასაწყისს.

ცხადია, აქ მხედველობაში არ არის მიღებული ფულადი თანხის დროითი ღირებულება, რაც შემდეგ ორ პრობლემას ქმნის:

— თუ საინვესტიციო პერიოდი საკმაოდ დიდია, (1.11) შემოსავლიანობის ძალზედ შემცირებულ შეფასებას იძლევა;

— (1.11) სხვადასხვა ჰორიზონტის მქონე ინვესტიციების შემოსავლიანობის შედარების საშუალებას არ იძლევა.

სხვადასხვა სიგრძის პერიოდის შემოსავლიანობების შესადარებლად, საჭიროა მათი ერთ საბაზისო პერიოდზე (მაგალითად, 1 წელიწადი, 1 თვე და ა.შ.) დაყვანა. ამის უმარტივესი მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: შემოსავლიანობას პერიოდის სიგრძეზე ყოფენ, რის შედეგადაც ე.წ. ნომინალური წლიური შემოსავლიანობა მიიღება:

$$r_t^0 = \frac{r_t}{t}.$$

მეორე მეთოდი გულისხმობს საინვესტიციო ჰორიზონტის t ნაწილად დაყოფას, თითოეულ შუალედში შემოსავლიანობის დათვლას (რის შედეგადაც მიიღება $r(1), r(2), \ldots, r(t)$ მიმდევრობა) და ამის შემდეგ ე.წ. ნორმირებული შემოსავლიანობის შემდეგი ფორმულით განსაზღვრას

$$\bar{r}_t = \frac{r(1) + r(2) + \cdots + r(t)}{t}.$$

მიღებული გასაშუალებული შემოსავლიანობა სწორ ინტერპრეტაციას საჭიროებს. იგი გამოსადეგია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყოველ საბაზისო პერიოდში ხორციელდება ერთი და იგივე გარიგება ერთი და იგივე საინვესტიციო კაპიტალით. მაგალითად, ფიქსირებული თანხა დაიდება საბანკო ანგარიშზე, პერიოდის ბოლოს ის თავის პროცენტებიანად ანგარიშიდან მოიხსნება, მეორე საბაზისო პერიოდის დასაწყისში ისევ საწყისი თანხა დაიდება ანგარიშზე და ა.შ., ანუ, საპროცენტო შემოსავლის რეინვესტირება არ ხდება.

იმ შემთხვევაში, თუ მოხდა მიმდინარე შემოსავლის რეინვესტირება, ან შეიცვალა აქტივის ღირებულება, ნორმირებულმა შემოსავლიანობამ შეიძლება შეცდომამდე მიგვიყვანოს.

მაგალითი 1.2. ვთქვათ, ინვესტორმა პირველი წლის დასაწყისში A კომპანიის აქცია \$50-ად შეიძინა. წლის ბოლოს მისი ფასი \$100 გახდა. მაშინ პირველი წლის შემოსავლიანობა იქნება

$$r(1) = \frac{100 - 50}{50} = 1 = 100\%.$$

თუ მეორე წლის ბოლოს აქციის ფასი \$50-მდე შემცირდა, მაშინ მეორე წლის შემოსავლიანობა

$$r(2) = \frac{50 - 100}{100} = -0.5 = -50\%$$

იქნება, ანუ, ორწლიანი საინვესტიციო ჰორიზონტისათვის, ნორმირებული შემოსავლიანობა იქნება

$$\overline{r}_2 = \frac{r(1) + r(2)}{2} = \frac{100\% + (-50\%)}{2} = 25\%.$$

მეორეს მხრივ, ფაქტიური შემოსავლიანობა ორი წლის განმავლობაში არის

$$r_2 = \frac{50 - 50}{50} = 0\% \quad (!).$$

ამ სირთულის დასაძლევად შემოყავთ ე.წ. ეფექტური შემოსავლიანობის ცნება, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\widehat{r}_t = [(1 + r(1))(1 + r(2)) \cdots (1 + r(t))]^{1/t} - 1.$$

ამ, ერთი შეხედვით, რთულ ფორმულას (რომელიც, როგორც ვხედავთ, საშუალო გეომეტრიულის ცნებას ეფუძნება) აქვს მარტივი და გამჭვირვალე შინაარსი. მართლაც, აღვნიშნოთ

$$r(k) = \frac{W_k}{W_{k-1}} - 1,$$

შემოსავლიანობა k-ურ საბაზისო პერიოდში, სადაც W_{k-1} და W_k არის აქტივის ან პორტფელის ღირებულება, შესაბამისად, k-ური პერიოდის დასაწყისსა და ბოლოში.

მაშინ ცხადია, რომ $W_k = W_{k-1}(1 + r(k))$, ანუ $1 + r(k)$ სიდიდე არის თანხის ზრდის მამრავლი k-ურ საბაზისო პერიოდში. ამიტომ, სიდიდე

$$(1 + r(1))(1 + r(2)) \cdots (1 + r(t)) = \frac{W_1}{W_0} \cdot \frac{W_2}{W_1} \cdots \frac{W_t}{W_{t-1}} = \frac{W_t}{W_0},$$

იქნება თანხის ზრდის მამრავლი t დროის განმავლობაში. მართლაც,

$$W_t = W_0((1 + r(1))(1 + r(2)) \cdots (1 + r(t))).$$

მეორეს მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ

$$W_t = W_0(1 + r_t),$$

სადაც r_t ფაქტიური შემოსავლიანობაა. ამიტომ

$$1 + r_t = (1 + r(1))(1 + r(2)) \cdots (1 + r(t)) = (1 + \widehat{r}_t)^t,$$

საიდანაც

$$\widehat{r}_t = \sqrt[t]{1 + r_t} - 1.$$

საბოლოოდ,

$$1 + r_t = (1 + \widehat{r}_t)^t,$$

$$\widehat{r}_t = \sqrt[t]{1 + r_t} - 1.$$

ამრიგად, ჩვენ შემოვიღეთ შემოსავლიანობის შემდეგი ცნებები

1. ფაქტიური შემოსავლიანობა

$$r_t = \frac{W_t - W_0}{W_0}.$$

2. ნომინალური შემოსავლიანობა

$$r_t^0 = \frac{r_t}{t}.$$

ამასთან,

$$1 + r_t = 1 + r_t^0 t.$$

3. ეფექტური შემოსავლიანობა

$$\widehat{r}_t = \sqrt[t]{(1 + r(1))(1 + r(2)) \cdots (1 + r(t))} - 1.$$

ამასთან,

$$1 + r_t = (1 + \widehat{r}_t)^t.$$

4. ნორმირებული შემოსავლიანობა

$$\overline{r}_t = \frac{r(1) + \cdots + r(t)}{t}.$$

შევნიშნოთ, რომ შემოსავლიანობის პირველი ცნება განეკუთვნება მთელ $[0, t]$ ჰორიზონტს, ხოლო ბოლო სამი — განმსაზღვრელ საბაზისო პერიოდს.

შემოვიღოთ შემოსავლიანობის კიდევ ერთი ცნება.

5. t დროის განმავლობაში უწყვეტად გადათვლილი შემოსავლიანობა

$$r_t^c = \ln \frac{W_t}{W_0},$$

სადაც W_0 და W_t აქტივის (ან პორტფელის) ღირებულებაა, შესაბამისად, საინვესტიციო პერიოდის დასაწყისსა და ბოლოში. შემოსავლიანობის უკანასკნელი ცნება ხშირად გამოიყენება აქტივების ფასების მოდელირების დროს.

კომენტარი.

1) უპირველეს ყოვლისა, გავატაროთ პარალელი შემოღებულ ცნებებს შორის:

a) გავიხსენოთ ფორმულა (1.8)

$$r = \ln(1 + \widehat{r}),$$

რომელიც აკავშირებს უწყვეტად გადათვლილ განაკვეთს რთულად გადათვლილ განაკვეთთან.

თუ $\widehat{r}$-ის როლში ფაქტიურ $r_t = \frac{W_t}{W_0} - 1$ შემოსავლიანობას განვიხილავთ, ადვილად აღმოვაჩენთ, რომ

$$r_t^c = \ln \frac{W_t}{W_0} = \ln\left(1 + \frac{W_t}{W_0} - 1\right) = \ln(1 + r_t),$$

ე.ი. r_t^c r_t-ს „უწყვეტი" ანალოგი ყოფილა.

b) ადვილი დასანახია, რომ ნომინალური შემოსავლიანობა პროცენტის მარტივად დარიცხვას შეესაბამება

$$W_t = W_0(1 + r_t^0 t),$$

ხოლო ეფექტური შემოსავლიანობა — პროცენტის რთულ დარიცხვას

$$W_t = W_0(1 + \widehat{r}_t)^t.$$

2) ნორმირებული შემოსავლიანობა, რომელიც საშუალო არითმეტიკულის ცნებაზე არის დაფუძნებული, ხარვეზებს შეიცავს. საშუალო გეომეტრიულზე დაფუძნებული ეფექტური შემოსავლიანობა ასეთი ხარვეზისგან თავისუფალია. ადვილი დასანახია შემდეგი კავშირი

$$\ln(1 + \widehat{r}_t) = \frac{1}{t}\ln(1 + r_t) = \frac{1}{t}\ln\left(1 + \frac{W_t}{W_0} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{t}\ln\frac{W_t}{W_0} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\ln\frac{W_i}{W_{i-1}} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} r_i^c.$$

3) ვთქვათ, ინვესტორმა გადაწყვიტა შეიძინოს გარკვეული ფინანსური აქტივი, რომელსაც რაღაც დროის განმავლობაში შემოსავალი მოაქვს.

ფინანსურ ბაზარზე ამ აქტივს საბაზრო ფასი გააჩნია.

აქვს თუ არა ინვესტორისათვის აზრი, ეს აქტივი საბაზრო ფასად შეიძინოს?

პასუხი ამ კითხვაზე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა შემოსავლიანობაა სასურველი ინვესტორისთვის. თუ, ვთქვათ, აქტივი არის სახაზინო ვალდებულება ნომინალით 1000 ლარი და ინვესტორისათვის სასურველი შემოსავლიანობა არანაკლებ 150%-ია, მაშინ ვალდებულების ფასი არ უნდა აღემატებოდეს $\frac{1000}{1.5} = 400$ ლარს.

საზოგადოდ, ვთქვათ, t მომენტში აქტივი გვაძლევს W_t შემოსავალს და სასურველი შემოსავლიანობა კი უდრის r_t-ს. მაშინ, თუ $[0, t]$ პერიოდის დასაწყისში აქტივის ფასი

$$W_0 = \frac{W_t}{1 + r_t}, \tag{1.12}$$

სიდიდეზე ნაკლებია, მაშინ ინვესტორი შეიძენს ასეთ აქტივს (რისკიანობის სათანადო დონის უზრუნველყოფის შემთხვევაში). W_0-ს დასაშვები, ანუ ზღვრული ფასი ეწოდება. სასურველი შემოსავლიანობის დაფიქსირება აფიქსირებს ზღვრულ ფასს. გადავწეროთ შემოსავლიანობის (1.12) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$r_t = \frac{W_t}{W_0} - 1.$$

თუ W_0-ს შევხედავთ როგორც აქტივის ფასს $t = 0$ მომენტში, რომელიც ცნობილი სიდიდეა, ხოლო W_t-ს როგორც უცნობ სამომავლო ფასს, რომელსაც ბაზარი დაადგენს, მაშინ r_t შემოსავლიანობა შემთხვევითი სიდიდე იქნება (რადგან მისი სიდიდის დადგენა მოხდება შემთხვევითი საბაზრო მექანიზმის მოქმედების შედეგად). ამრიგად $r_t = r_t(\omega)$, სადაც ω აღნიშნავს შემთხვევითობას. საპროცენტო განაკვეთის დროითი სტრუქტურის შესასწავლად სწორედ ამ შემთხვევითი პროცესის მოდელირება ხდება ხოლმე. საპროცენტო განაკვეთის დროითი სტრუქტურის აღმწერ ზოგიერთ პოპულარულ მოდელს მოგვიანებით მოვიყვანთ ამ თავში.

დავუბრუნდეთ სასურველი შემოსავლიანობის ცნებას. როგორ განვსაზღვროთ მისი სიდიდე?

თუ ინვესტორის შესაძლებლობები დაიყვანება მხოლოდ ერთი აქტივის შეძენაზე, მაშინ სასურველი შემოსავლიანობა დგინდება იმ მოთხოვნით, რომ მისი სიდიდე დადებითი იყოს. თუ არსებობს აქტივების შეძენის ალტერნატიული ვარიანტები, მაშინ საჭიროა ამ ალტერნატივების შედარება. თუ შევადარებთ ყველა ალტერნატივის შემოსავლიანობას, მაშინ სასურველ შემოსავლიანობად გამოვაცხადებთ მათ შორის მაქსიმალურს. ამ შემოსავლიანობაზე დაყრდნობით გამოვთვლით ზღვრულ ფასს და თუ აქტივის საბაზრო ფასი ნაკლებია ამ ფასზე, მაშინ ასეთ აქტივს შევიძენთ.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ, ინვესტორს გააჩნია შემდეგი ალტერნატივა: 1) შეიძინოს სახაზინო ვალდებულება ერთწლიანი ვადით და ნომინალური ღირებულებით 100 ლარი ან 2) შეიტანოს თანხა დეპოზიტზე 25% წლიური საპროცენტო განაკვეთით.

დავუშვათ, ინვესტორი თვლის, რომ ეს ორივე აქტივი ერთნაირად რისკიანია.

საბანკო ანგარიში გვაძლევს ზღვრულ ფასს

$$\frac{1000}{1+0.25} = 800 \text{ ლარს}$$

თუ სახაზინო ვალდებულების ფასი ნაკლები ან ტოლია 800 ლარზე, ინვესტორი მას შეიძენს, თუ არა — ფულს ბანკში შეიტანს.

სასურველი შემოსავლიანობის ცნებას ისეთივე ადგილი უკავია ინვესტიციების თეორიაში, როგორც საპროცენტო განაკვეთის ცნებას ფინანსების კლასიკურ თეორიაში.

სასურველი შემოსავლიანობის საშუალებით დგინდება აქტივების შინაგანი ღირებულება. თუ ეს ღირებულება მეტია საბაზრო ფასზე, მაშინ აქტივს გაყიდიან, თუ ნაკლებია — იყიდიან. თუ კი ღირებულება ემთხვევა საბაზრო ფასს, მაშინ ბაზარი აქტივს სწორად აფასებს.

აღწერილი სავაჭრო სტრატეგია არის არაპორტფელური სავაჭრო ქმედების საფუძველი.

იმ შემთხვევაში, როცა რისკიანობის დონე სხვადასხვაა და გვაქვს შესაძლებლობა შევქმნათ პორტფელი, წარმოიქმნება პრობლემები, რომლებსაც ე.წ. პორტფელის თეორია იხილავს. ამ თეორიის საფუძვლებს შემდეგ თავში გავეცნობით.

4) მივაქციოთ ყურადღება ისეთ ცნებას, როგორიცაა ე.წ. საინვესტიციო პირობები.

მაგალითი 1.4. ვთქვათ, ინვესტორი აპირებს სახაზინო ვალდებულებების შეძენას 100-ის ტოლი ნომინალური თანხით, რომელთა ხანგრძლივობა იზომება დღეებში. მაშინ

$$t = \frac{d}{365},$$

სადაც d ვალდებულების ხანგრძლივობაა დღეებში.

ვთქვათ, პირველ ვალდებულებას აქვს დაფარვის ვადა 158 დღე და კურსი 59.5, ხოლო მეორის დაფარვის ვადაა 95 დღე და კურსი 72.65.

მაშინ პირველი ვალდებულების ფაქტიური შემოსავლიანობა იქნება

$$r_1 = \frac{100 - 59.50}{59.50} = 0.6807,$$

ხოლო მეორის

$$r_2 = \frac{100 - 72.65}{72.65} = 0.3764.$$

აქედან, ნომინალური წლიური შემოსავლიანობა პირველი ვალდებულებისათვის იქნება ტოლი

$$r_{1,\text{ნომ}} = 0.6807 \cdot \frac{365}{158} = 1.5724,$$

ანუ 157.24%, ხოლო მეორისთვის

$$r_{2,\text{ნომ}} = 0.3764 \cdot \frac{365}{95} = 1.4464,$$

ანუ 144.64%.

როგორც ვხედავთ,

$$r_{1,\text{ნომ}} > r_{2,\text{ნომ}}.$$

გამოვთვალოთ ეფექტური წლიური შემოსავლიანობა. გვექნება

$$r_{1,\text{ეფექტ.}} = (1 + 0.6807)^{\frac{365}{158}} - 1 = 2.3182,$$

ანუ 231.82%-ს, ხოლო

$$r_{2,\text{ეფექტ.}} = (1 + 0.3764)^{\frac{365}{95}} - 1 = 2.4125,$$

ანუ 241.25%-ს.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$r_{2,\text{ეფექტ.}} > r_{1,\text{ეფექტ.}}.$$

თუ შემოსავლიანობას შევადარებთ ნომინალური შემოსავლიანობის საფუძველზე, მაშინ უმჯობესია შევიძინოთ პირველი სახაზინო ვალდებულება, თუ კი შედარება მოხდება ეფექტური შემოსავლიანობის საფუძველზე, მაშინ მეორე ვალდებულება უფრო ხელსაყრელია.

ერთი შეხედვით მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამ „წინააღმდეგობის" მიზეზი შემდეგში მდგომარეობს.

ჩვენ ვიცით, რომ ნომინალური და ეფექტური შემოსავლიანობის ცნება შემოღებულია სხვადასხვა საინვესტიციო ჰორიზონტის მქონე აქტივების შემოსავლიანობის შესადარებლად. იმ შემთხვევაში, როცა საბაზისო პერიოდი (მაგალითში — 1 წელიწადი) მეტია საინვესტიციო ჰორიზონტზე (მაგალითში 158 და 95 დღე), გვიხდება შემოსავლიანობის ფუნქციის ექსტრაპოლირება, რასაც „მოულოდნელ" შედეგამდე მივყავართ.

„წინააღმდეგობა" წარმოიქმნება საინვესტიციო პირობების განსხვავების გამო. ეს პირობები განსაზღვრავენ შემოსავლიანობის გამოთვლის წესს.

ეფექტური შემოსავლიანობის გამოთვლის დროს იგულისხმება, რომ საინვესტიციო პერიოდის განმავლობაში მიღებული შემოსავალი რეინვესტირდება მომავალი პერიოდის განმავლობაში, მაშინ როცა ნომინალური შემოსავლიანობის გამოთვლის წესი ამას არ გულისხმობს.

შემოსავლიანობა საინვესტიციო ჰორიზონტთან არის დაკავშირებული. ამიტომ მისი დაყვანა სხვა, მისგან განსხვავებულ პერიოდამდე, მოითხოვს ე.წ. საინვესტიციო პირობების შესრულებას, რომლებზეც დაყვანის კონკრეტული წესი არის დამოკიდებული.

საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ საინვესტიციო პერიოდის განმავლობაში მიღებული შემოსავალი რეინვესტირდება, მაშინ მეორე ვალდებულების შემოსავლიანობა უფრო დიდია და პირიქით წინააღმდეგ შემთხვევაში.

1.3 ობლიგაციები

განმარტება, რიცხვითი პარამეტრები. ობლიგაცია (ბონი) არის ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები და სააქციო საზოგადოებები კაპიტალის მოზიდვის მიზნით. ამით ემიტენტები იღებენ ვალს, რომლის გასტუმრება, როგორც წესი, კუპონების გაცემით და ობლიგაციის დაფარვის მომენტში სრული თანხის დაბრუნებით ხდება.

ობლიგაციებს ხშირად ფიქსირებული შემოსავლიანობის მქონე ფასიან ქაღალდებსაც უწოდებენ. ობლიგაციების საშუალებით ხდება საპროცენტო განაკვეთის ცნების „მატერიალიზაცია“ და ამიტომ მათი თვისებების დაწვრილებით შესწავლა ფრიად მნიშვნელოვანია.

ვთქვათ, ობლიგაცია გამოშვებულია $t = 0$ მომენტში. მას ახასიათებს შემდეგი რიცხვითი პარამეტრები:

1) ნომინალური ღირებულება $B(T,T)$, ე.ი. ის თანხა, რომელსაც გადაუხდიან მფლობელს.

2) დაფარვის მომენტი T, სადაც T ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობაა. ამასთან, მოკლევადიანი ობლიგაციებისათვის $T \leq 1$ წელიწადზე, საშუალო ვადიანი ობლიგაციებისათვის სიცოცხლის ხანგრძლივობა 1-დან 10 წლამდეა, გრძელვადიანებისთვის — $T \geq 10$ წელიწადზე.

3) ობლიგაციის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი r_c, რომელიც განსაზღვრავს დივიდენდებს — წლიურ საკუპონო გადასახადებს, რომლებსაც ემიტენტი უხდის მფლობელს და რომელიც უდრის

$$r_c \times (\text{ნომინალური ღირებულება}) = r_c \times B(T,T).$$

4) ობლიგაციის საწყისი ფასი $B(0,T)$. გავიხსენოთ, რომ ობლიგაცია გამოშვებულია $t = 0$ მომენტში და მისი სიცოცხლის ხანგრძლივობაა T

წელიწადი.

მაგალითი 1.5. ვთქვათ, ობლიგაცია გამოშვებულია $t = 0$ მომენტში და საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი $r_c = 6\%$.

თუ ობლიგაციის საწყისი ფასი \$1000 იყო, მაშინ 10 წლის განმავლობაში მფლობელი მიიღებს შემდეგ შემოსავალს: ნომინალური ღირებულება (\$1000) + საკუპონო გადასახადები 10 წლის განმავლობაში ($1000 \cdot 6\% \cdot 1010 = \$600$) – შესყიდვის ფასი (\$1000) = \$600. ამ მაგალითში $B(0,T) = B(T,T) = \$1000$.

5) ობლიგაციის მიმდინარე საბაზრო ფასი $B(t,T)$, $0 \le t \le T$. ვთქვათ, ობლიგაცია $t = 0$ მომენტშია შეძენილი და მისი სიცოცხლის ხანგრძლივობა T წელიწადია. თუ ობლიგაციის მფლობელი მას მთელი ამ ხნის განმავლობაში შეინარჩუნებს, იგი მიიღებს როგორც დივიდენდებს, ასევე, ბოლო T მომენტში, ნომინალს. თუ მფლობელი ჩათვლის, რომ ობლიგაციის ფლობა არახელსაყრელია (მაგალითად, $r_{inf} > r_c$, ე.ი. ინფლაციის საპროცენტო განაკვეთი საკუპონო განაკვეთზე მეტია), მას შეუძლია ნებისმიერ t მომენტში, $0 \le t \le T$, გაყიდოს ის $B(t,T)$ ფასად. გასაგებია, რომ $B(0,T)$ ობლიგაციის საწყისი ფასი არის საბაზრო ფასი $t = 0$ მომენტში, ხოლო ნომინალი $B(T,T)$ — მისი ფასი T მომენტში.

საზოგადოდ, შესაძლებელია, რომ $B(t,T) > B(T,T)$, მაგრამ ტიპიურია სიტუაცია, როცა $B(t,T) < B(T,T)$.

გავაკეთოთ ყურადსაღები შენიშვნა: საკუპონო საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე, r_c, მუდმივია ობლიგაციის სიცოცხლის პერიოდის განმავლობაში, ობლიგაციის საბაზრო ფასი $B(t,T)$ კი დროში ფლუქტუირებს, რადგან მისი სიდიდე განისაზღვრება მრავალი ეკონომიკური ფაქტორის მოქმედებით: მიწოდება-მოთხოვნით, სხვა აქტივების შემოსავლიანობით და ა.შ. სხვა სიტყვებით, ობლიგაციის ფასი $B(t,T)$, $0 \le t \le T$, შემთხვევითი პროცესია (ე.ი., ფაქტიურად $B(t,T) = B(t,T,\omega)$) თანაც ისეთი, რომ $B(T,T)$ ფიქსირებული დეტერმინისტული სიდიდეა.

6) მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთი $r_c(t,T)$, $0 \le t \le T$, რომელიც განმარტებით არის „წლიური საკუპონო გადასახადების“ და მიმდინარე საბაზრო ფასის შეფარდება

$$r_c(t,T) = \frac{r_c B(T,T)}{B(t,T)}.$$

ეს მახასიათებელი გვაძლევს ობლიგაციების შედარების საშუალებას.

არსებობს კიდევ ერთი, უფრო მნიშვნელოვანი მახასიათებელი, რომელიც გვაძლევს საშუალებას ვიმსჯელოთ ობლიგაციის შემოსავლიანობაზე მისი სიცოცხლის დარჩენილი დროის განმავლობაში. ეს მახასიათებელი ყალიბდება როგორც საკუპონე გადასახადზე, ისე ნომინალზე დაყრდნობით.

7) შემოსავალი დაფარვის მომენტამდე (YTM — yield to maturity)

$\rho = \rho(T-t, T)$, სადაც $T-t$ არის ობლიგაციის დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა. შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე განისაზღვრება როგორც შემდეგი განტოლების ფესვი (ρ ცვლადის მიმართ)

$$B(t,T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c B(T,T)}{(1+\rho)^k} + \frac{B(T,T)}{(1+\rho)^{T-t}},$$

სადაც $t = 1, 2, \dots, T$ (დრო იზომება წლებში).

ამ ფორმულის „უწყვეტ“ ანალოგს აქვს სახე

$$B(t,T) = \sum_{T_j > t} c_j e^{-\rho_c(T_j - t)},$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_m$ საკუპონო გადასახადები შემოდის $T_1, T_2, \dots, T_m$ მომენტებში.

თუ ობლიგაციის საბაზრო ფასი $B(t,T)$ უდრის ნომინალს, მას პარ ობლიგაციას უწოდებენ. ასეთ შემთხვევაში $\rho = r_c$.

მართლაც, თუ $B(t,T) = B(T,T)$, მაშინ r_c და ρ ისეთი უნდა იყოს, რომ სრულდებოდეს ტოლობა

$$1 = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c}{(1+\rho)^k} + \frac{1}{(1+\rho)^{T-t}}.$$

გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{T-t} \frac{1}{(1+\rho)^k} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{T-t}} - 1\right).$$

ამიტომ

$$-\frac{r_c}{\rho}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{T-t}} - 1\right) + \frac{1}{(1+\rho)^{T-t}} = 1,$$

ანუ

$$\frac{r_c}{\rho}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{T-t}} - 1\right) = \frac{1}{(1+\rho)^{T-t}} - 1,$$

საიდანაც

$$\frac{r_c}{\rho} = 1,$$

ანუ

$$r_c = \rho.$$

ρ-ს ცნებაზე დაყრდნობით შემოდის პირველი ტიპის შემოსავლიანობის მრუდის ცნება. ეს არის $\rho(T-t,T)$-ს გრაფიკი, სადაც $\rho(T-t,T)$ განხილულია, როგორც $s=T-t$-ს ფუნქცია

$$\rho(T-t,T)=\rho(s,T).$$

ფინანსურ ანალიზში გაცილებით უფრო მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის შემოსავლიანობის მრუდი ე.წ. უკუპონო ობლიგაციის შემოსავლიანობის მრუდი.

იმისათვის, რომ განვმარტოთ ეს ობიექტი, საჭიროა შემოვიღოთ საპროცენტო განაკვეთების სისტემა.

უკუპონო ობლიგაციები. ისეთ ობლიგაციებს, რომლებიც არ იხდიან კუპონებს, ანუ $r_c=0$, უკუპონო ან მადისკონტირებელი ობლიგაციები ეწოდებათ.

განსაზღვრულობისთვის დავუშვათ, რომ მათი ნომინალი ტოლია ერთის, $B(T,T)=1$.

ამავე დროს, ფინანსურ ბაზრებზე ხდება უკუპონო ობლიგაციებით ვაჭრობა, რომლებსაც სხვადასხვა სიცოცხლის ხანგრძლივობა აქვთ. ამასთან მათი ფასები ისეა შეთანხმებული, რომ გამოირიცხოს არბიტრაჟის, ანუ ურისკო მოგების, შესაძლებლობა. ბაზრის ადეკვატურად აღწერისათვის უნდა განვიხილოთ T-ობლიგაციების სიმრავლე, ოჯახი. ცხადია, სხვადასხვა T-ს სხვადასხვა სიცოცხლის ხანგრძლივობის მქონე ობლიგაცია (სხვადასხვა T-ობლიგაცია) შეესაბამება.

ამრიგად, ვიხილავთ T-ობლიგაციების ბაზარს:

$$\{B(t,T),0\le t\le T,T\in R_+,B(T,T)=1,r_c=0\}.$$

დავაფიქსიროთ დროის მომენტები t, S და T, $t<S<T$. განვიხილოთ შემდეგი სავაჭრო სტრატეგია:

t მომენტში გავყიდოთ S-ობლიგაცია და შემოსული თანხით შევიძინოთ T-ობლიგაციები $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ რაოდენობით. მაშინ t მომენტში ჩვენი წმინდა ინვესტიცია ნულის ტოლი იქნება. ამასთან, რადგან ჩვენ გაყიდული გვაქვს S-ობლიგაცია, ამიტომ ვალდებულნი ვართ S მომენტში გადავიხადოთ თანხა \$1 (გავიხსენოთ, რომ ჩვენი დაშვებით ობლიგაციების ნომინალი ერთის ტოლია, $B(S,S)=1$).

T მომენტში მივიღებთ $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ დოლარს, რადგან ამ მომენტისთვის ვადა გაუვათ T-ობლიგაციებს. საბოლოოდ გვექნება: S მომენტში გადასახდელია თანხა \$1, ხოლო T მომენტში მისაღებია თანხა $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ დოლარი.

ვთქვათ, არსებობს მუდმივი საპროცენტო განაკვეთი R (უწყვეტად გადათვლილი), რომელიც მოქმედებს $[S,T]$ ინტერვალში ისეთი, რომ $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ თანხის T მომენტიდან დისკონტირება S მომენტში ზუსტად \$1-ს გვაძლევს

(ე.ი. გამორიცხულია არბიტრაჟის შესაძლებლობა). სხვა სიტყვებით,

$$1 = \frac{B(t,S)}{B(t,T)} e^{-R(T-S)}.$$

აქედან

$$R = -\frac{\ln B(t,T) - \ln B(t,S)}{T-S}.$$

მიღებულ საპროცენტო განაკვეთს ფორვარდული ჰქვია.

ეს მსჯელობა შემდეგი ფორმალური განმარტებების მიზანშეწონილობას და ფორმას გვკარნახობს.

1) ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი t მომენტში, რომელიც მოქმედებს $[S,T]$ დროით ინტერვალზე განისაზღვრება ფორმულით

$$R(t;S,T) = -\frac{\ln B(t,T) - \ln B(t,S)}{T-S}.$$

2) მიმდინარე სპოტ-განაკვეთი, $R(S,T)$, $[S,T]$ პერიოდისთვის მოიცემა ტოლობით

$$R(S,T) = R(S;S,T).$$

3) მყისიერი ფორვარდული განაკვეთი t მომენტისათვის განიმარტება შემდეგნაირად

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}.$$

შინაარსობრივად ეს არის ფორვარდული განაკვეთი t მომენტში, რომელიც მოქმედებს $[T, T+dT]$ ინტერვალზე.

4) მიმდინარე მოკლევადიანი საპროცენტო განაკვეთი უდრის

$$r(t) = f(t,t).$$

5) საბანკო ანგარიში განიმარტება შემდეგნაირად ,

$$B_t = B_0 e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ საბანკო ანგარიში შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$\begin{cases} dB_t = r(t)B_t dt, \\ B_t|_{t=0} = B_0. \end{cases}$$

6) შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე (YTM_c)

$$r(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t}.$$

ადვილი აღმოსაჩენია შემდეგი, ხშირად გამოყენებადი, ფორმულების სამართლიანობა

$$f(t,T) = r(t,T) + (T-t)\frac{\partial r(t,T)}{\partial T},$$

$$B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)},$$

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

7) შევნიშნოთ, რომ უკუპონო ობლიგაციებისათვის ($r_c = 0$) ერთეულის ტოლი ნომინალით, $B(T,T) = 1$, დაფარვის მომენტამდე შემოსავლიანობის გამოსათვლელი ორი ფორმულა გვაქვს:

$$B(t,T) = \frac{1}{1 + \rho(T-t,T)}$$

და

$$B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)}.$$

აქედან

$$r(t,T) = \ln(1 + \rho(T-t,T)), \tag{1.13}$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $r(t,T)$ არის უწყვეტად გადათვლილი შემოსავლიანობა, YTM_c, ხოლო $\rho(T-t,T)$ — წელიწადში ერთხელ დარიცხვის წესით მიღებული შემოსავლიანობა, YTM.

8) ა) ფუნქციის $t \to r(t,T)$ (ან ფუნქციის $s \to \rho(s,T)$) გრაფიკს ეწოდება პირველი ტიპის შემოსავლიანობის მრუდი ერთი T-ობლიგაციისათვის;

ბ) ფუნქციის $T \to r(t,T)$ (ან ფუნქციის $T \to \rho(s,T)$) გრაფიკს ეწოდება მეორე ტიპის შემოსავლიანობის მრუდი T-ობლიგაციების ოჯახისათვის, რომელიც აგებულია t მომენტში. ამ მრუდს უკუპონო ობლიგაციების საპროცენტო განაკვეთების მრუდი ეწოდება.

9) გავიხსენოთ, რომ ახლახანს შემოღებული სიდიდეები ან შემთხვევითი პროცესებია, ან კიდევ უფრო რთული ობიექტები — შემთხვევითი პროცესების ოჯახები.

კერძო შემთხვევები ობიექტებთან.

a) დავიწყოთ საბანკო ანგარიშიდან.

ვთქვათ, მყისიერი საპროცენტო განაკვეთი მუდმივია,

$$r(t) = r(t,\omega) \equiv r.$$

მაშინ 5) პუნქტიდან მივიღებთ,

$$B_t = B_0 e^{rt},$$

ან

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \\ B_t|_{t=0} = B_0. \end{cases}$$

ამრიგად, მყისიერი საპროცენტო განაკვეთი ამ შემთხვევაში ემთხვევა უწყვეტად გადათვლილ მუდმივ საპროცენტო განაკვეთს.

b) ვთქვათ, $r(t,T) = r(t,T;\omega) \equiv r^*$ და $r(t,S) = r(t,S,\omega) \equiv r$ — მუდმივებია. მაშინ 6) პუნქტის განმარტებებიდან მივიღებთ, რომ

$$B(t,T) = e^{-r^*(T-t)},$$

$$B(t,S) = e^{-r(S-t)}.$$

ამიტომ ფორვარდული $R(t,S,T)$ განაკვეთისათვის გვექნება

$$R(t,S,T) = R(t,S,T,\omega) = -\frac{\ln e^{-r^*(T-t)} - \ln e^{-r(S-t)}}{T-S} =$$

$$= \frac{r^*T - rS}{T-S} \equiv R \text{ — მუდმივია.}$$

ანუ საბოლოოდ

$$R = \frac{r^*T - rS}{T-S}.$$

მყისიერი ფორვარდული განაკვეთისათვის ადვილად მივიღებთ ფორმულას

$$f = r + (T-t)\frac{\partial r}{\partial T}.$$

c) თუ $r(t,T) \equiv r$ და $\rho(T-t,T) \equiv \widehat{r}$, ანუ ორივე განაკვეთი მუდმივია, მაშინ 7) პუნქტის შედეგები გვაძლევს

$$r = \ln(1+\widehat{r})$$

ჩვენთვის კარგად ცნობილ (1.8) ფორმულას.

რადგან პრაქტიკაში, უფრო ხშირად, ისეთ ფორმულებთან გვაქვს საქმე, რომლებიც მუდმივ საპროცენტო განაკვეთებს ეყრდნობიან (მიუხედავად იმისა, რომ, როგორც დავინახეთ, ეს სინამდვილის საკმაოდ ძლიერი გაუხეშებაა), ჩვენ ქვემოთ საკმაოდ დიდ დროს დავუთმობთ მუდმივი საპროცენტო განაკვეთების შესწავლას.

1.4 შემოსავლიანობის მრუდის აგება ბუტსტრაპის მეთოდით

უკუპონო ობლიგაციები მხოლოდ უმნიშვნელო ნაწილია იმ ობლიგაციებისა, რომლებითაც ფინანსურ ბაზრებზე ხდება ვაჭრობა. ამიტომ ისმის ამოცანა, კუპონიანი ობლიგაციების ფასებზე დაკვირვების საფუძველზე აიგოს უკუპონო ობლიგაციების ოჯახის შემოსავლიანობის მრუდი.

რატომ არის ეს ამოცანა მნიშვნელოვანი? საქმე იმაშია, რომ სწორი ფინანსური გადაწყვეტილების მიღება შეუძლებელია მომავალი ფულადი ნაკადების დღევანდელი მნიშვნელობების გათვალისწინების გარეშე. ამისათვის კი, როგორც ვიცით, საჭიროა ფულადი ნაკადის დისკონტირება. შემოსავლიანობის მრუდის წერტილის კოორდინატებია $(t, r(0,t))$. სწორედ $r(0,t)$ საპროცენტო განაკვეთი განსაზღვრავს იმ დისკონტ-ფაქტორს, რომელიც საჭიროა t მომენტში წარმოქმნილი ფულადი თანხის დისკონტირებისათვის. სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ $r(0,t) = r_t$.

მოვიყვანოთ შემოსავლიანობის მრუდის აგების რიცხვითი მაგალითი, რომელიც ზოგადი ბუტსტრაპ მეთოდის კარგ ილუსტრაციას წარმოადგენს.

მაგალითი 1.6. ვთქვათ, ობლიგაციების ბაზრის ფასებზე დაკვირვების შედეგად მივიღეთ მონაცემები:

ობლიგაციები

ნომინალი ($)	დრო დაფარვამდე (წლები)	წლიური კუპონი ($)	ფასი ($)
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6
100	2.75	10	99.8

ცხრილი 1.1

შევნიშნოთ, რომ კუპონის ნახევარი გადაიხდება ყოველ 6 თვეში ერთხელ.

რადგან პირველი სამი ობლიგაცია უკუპონოა, ამიტომ 3-თვიანი (0.25 წელიწადი), 6-თვიანი (0.5 წელიწადი) და 1-წლიანი განაკვეთების გამოთვლა მარტივია.

მართლაც, გავიხსენოთ ფორმულა

$$r = m \ln\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ პირველი ობლიგაცია იძლევა \$2.5 ამონაგებს \$97.5-ის 3-თვიან ინვესტიციაზე. ე.ი. $m = 4$ და $\frac{r(m)}{m} = \frac{100-97.5}{97.5} = \frac{2.5}{97.5}$. ამიტომ

$$r = 4\ln\left(1 + \frac{2.5}{97.5}\right) = 0.1013,$$

ანუ 10.13%.

მეორე ობლიგაციისთვის $m = 2$ და $\frac{r(m)}{m} = \frac{100-94.9}{94.9} = \frac{5.1}{94.9}$. ამიტომ

$$r = 2\ln\left(1 + \frac{5.1}{94.9}\right) = 0.1047,$$

ანუ 10.47%.

მესამისთვის გვექნება

$$r = \ln\left(1 + \frac{10}{90}\right) = 0.1054,$$

ანუ 10.54% წლიურს.

მეოთხე ობლიგაციის დაფარვამდე რჩება 1.5 წელიწადი. ფულადი ნაკადი, რომელიც შემოვა ამ ობლიგაციიდან იქნება:

6 თვეში — \$4 (რადგან კუპონის ნახევარი შემოდის ყოველ 6 თვეში);

1 წელიწადში — \$4;

1.5 წელიწადში — \$104 (ბოლოს ბრუნდება ნომინალიც 104=4+100).

წინა ობლიგაციებმა განსაზღვრა 6 თვიანი და 1 წლიანი შემოსავლიანობის დისკონტ-ფაქტორები, სახელდობრ, $e^{-0.1047\times0.5}$ და $e^{-0.1054\times1.0}$ (გავიხსენოთ რომ დისკონტ-ფაქტორი $\nu_t = e^{-rt}$). ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ x-ით უცნობ 1.5-წლიან შემოსავლიანობას, გვექნება

$$4e^{-0.1047\times0.5} + 4e^{-0.1054\times1.0} + 104e^{-x\times1.5} = 96,$$

საიდანაც

$$x = 0.1068,$$

ანუ 10.68%-ს. ზუსტად ასევე გამოითვლება 2-წლიანი განაკვეთიც:

$$6e^{-0.1047\times0.5} + 6e^{-0.1054\times1.0} + 6e^{-0.1068\times1.5} + 106e^{-x\times2.0} = 101.6.$$

აქედან

$$x = 0.1081$$

ანუ 10.81%-ს.

ამრიგად, ჩვენ უკვე გვაქვს შემოსავლიანობის მრუდის 5 წერტილი, რომელიც დაფარვის 5 სხვადასხვა თარიღს შეესაბამება.

ამ მრუდის სხვა წერტილების მისაღებად იყენებენ ინტერპოლაციის მეთოდს. ამასთან, ინტერპოლაცია შეიძლება იყოს წრფივი (ყველაზე მარტივი და მოსახერხებელი), პოლინომიალური, ექსპონენციალური და ა.შ.

მეექვსე ობლიგაციის მიერ განსაზღვრული შემოსავლიანობის გამოთვლის დროს ჩვენ გამოვიყენებთ სწორედ წრფივ ინტერპოლაციას. სხვა წერტილებისათვის განხილვა ანალოგიური იქნება.

იმისათვის, რომ სწორად წარმოვიდგინოთ ფულადი ნაკადი, რომელიც ამ ობლიგაციიდან შემოვა, დავიწყოთ ბოლოდან, 6-6 თვის გამოკლებით:

		დროში სწორად განლაგებული ნაკადი	
2.75 წელიწადში	\$105	3 თვეში	\$5
2.25 წელიწადში	\$5	9 თვეში	\$5
1.75 წელიწადში	\$5	1.25 წელიწადში	\$5
1.25 წელიწადში	\$5	1.75 წელიწადში	\$5
9 თვეში	\$5	2.25 წელიწადში	\$5
3 თვეში	\$5	2.75 წელიწადში	\$105

ცხრილი 1.2

3-თვიანი განაკვეთი ჩვენთვის ცნობილია, იგი უდრის 10.13%-ს. შემდეგი განაკვეთის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ წრფივი ინტერპოლაცია. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ თუ სამი წერტილი $a < x < b$ განლაგებულია წრფეზე, მაშინ

$$x = \alpha a + (1 - \alpha)b, \tag{1.14}$$

სადაც

$$\alpha = \frac{b - x}{b - a}, \quad 1 - \alpha = \frac{x - a}{b - a}$$

(x მიღებულია a და b წერტილებიდან წრფივი ინტერპოლაციით). ამიტომ

$$r_{9\ \text{თვე}} = \alpha r_{6\ \text{თვე}} + (1 - \alpha) r_{12\ \text{თვე}},$$

ამასთან,

$$\alpha = \frac{12 - 9}{12 - 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \alpha = \frac{9 - 6}{12 - 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

ე.ი.

$$r_{9\ \text{თვე}} = \frac{1}{2}(r_{6\ \text{თვე}} + r_{12\ \text{თვე}}) = \frac{1}{2}(0.1047 + 0.1054) = 0.10505,$$

ანუ 10.505%.

ანალოგიურად,

$$r_{1.25\ \text{წელიწადი}} = 10.61\%, \quad r_{1.75\ \text{წელიწადი}} = 10.745\%.$$

გამოვთვალოთ პირველი 4 ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა. გვექნება:

$$5e^{-0.1013\cdot 0.25}+5e^{-0.10505\cdot 0.75}+5e^{-0.1061\cdot 1.25}+5e^{-0.10745\cdot 1.75}=18.018.$$

ბოლო ორი ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა იქნება ობლიგაციის ფასს გამოკლებული პირველი 4 ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა, ანუ

$$\$99.8-\$18.018=\$81.782.$$

ვთქვათ, $r_{2.75\text{ წელიწადი}}=x$, მაშინ $r_{2.25\text{ წელიწადი}}$-სთვის (1.14) ფორმულა გვაძლევს

$$r_{2.25\text{ წელიწადი}}=\alpha r_{2\text{ წელიწადი}}+(1-\alpha)r_{2.75\text{ წელიწადი}},$$

სადაც

$$\alpha=\frac{2.75-2.25}{2.75-2}=\frac{0.5}{0.75}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3},\quad 1-\alpha=\frac{1}{3}.$$

ამიტომ

$$r_{2.25\text{ წელიწადი}}=\frac{2}{3}\cdot 0.1081+\frac{1}{3}x=0.0721+\frac{x}{3}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ინტერპოლაციის გასაკეთებლად ჩვენ არ გამოვიყენეთ $r_{1.75\text{ წელიწადი}}$, რადგან მისი მნიშვნელობაც ინტერპოლაციით გვაქვს მიღებული და ამიტომ უკვე შეიცავს შეცდომას.

ორი ბოლო განაკვეთი გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ ბოლო ორი ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა, რომლის სიდიდეც, სხვა გზით, ჩვენ უკვე გამოთვლილი გვაქვს. სახელდობრ, იგი უდრის 18.782.

ამიტომ მივიღებთ განტოლებას·

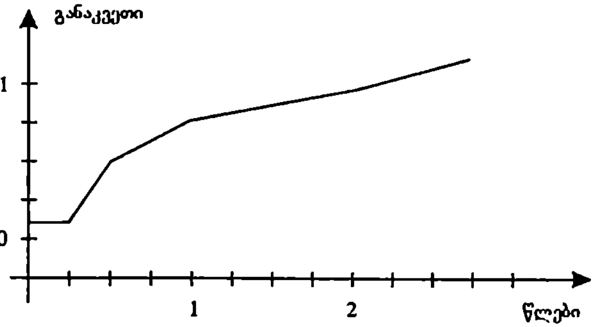
$$5e^{-2.25\left(0.0721+\frac{x}{3}\right)}+105e^{-2.75x}=18.782,$$

რაც საბოლოოდ გვაძლევს

$$x=r_{2.75\text{ წელიწადი}}=0.1087,$$

ანუ 10.87%.

ყველა ამ გამოთვლის შედეგად ვიღებთ საჭირო შემოსავლიანობის მრუდს (წრფივად ინტერპოლირებულს)



ნახ. 1.1

1.5 დისკონტ-ფაქტორები და დისკონტ-ფუნქციები

დისკონტ-ფუნქცია. უპირველეს ყოვლისა გავიხსენოთ, რომ პრაქტიკაში იყენებენ არა უწყვეტად გადათვლილ საპროცენტო განაკვეთს, არამედ მარტივად ან რთულად გადათვლილს. განაკვეთები, რომლებიც ერთ წელიწადზე ნაკლებ დროს ეხებიან, კოტირდებიან მარტივი პროცენტების საფუძველზე, ხოლო თუ დროის შუალედი ერთ წელიწადზე მეტია, მაშინ რთული პროცენტის ფორმულა გამოიყენება. ამასთან, რადგან ფულადი ნაკადები, როგორც წესი, დისკრეტულად შემოდიან, მოსახერხებელია შემდეგი აღნიშვნები: t_k, $k = 1, 2, \dots$ იყოს დროის ის მომენტები, რომლებშიც შემოვა ფულადი ნაკადი, მაგალითად, 3 თვის შემდეგ ($t_1 = 0.25$), 6 თვის შემდეგ ($t_2 = 0.5$). დრო იზომება წლებში ან წელიწადის ნაწილებში.

მაშინ

$$PV_k = \nu_k FV_k,$$

სადაც

$$\nu_k = \frac{1}{1 + r_k t_k} \quad \text{ან} \quad \nu_k = \frac{1}{(1 + r_k)^{t_k}} \tag{1.15}$$

დისკონტ-ფაქტორებია, PV_k — t_k მომენტში წარმოქმნილი FV_k ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობაა.

წინა პუნქტში ჩვენ აღვწერეთ მეთოდი, რომელიც ეფუძნებოდა თვით საპროცენტო განაკვეთების ინტერპოლაციას. კერძოდ, გამოვიყენეთ წრფივი ინტერპოლაცია, ანუ, სხვა სიტყვებით, დავუშვით, რომ შემოსავლიანობის მრუდი წრფივად იცვლება ცნობილ განაკვეთებს შორის. მაგრამ შემოსავლიანობების მრუდს შეიძლება სხვა სახე ჰქონდეს — იყოს ზრდადი, კლებადი,

მუდმივი, ამოზნექილი, ჩაზნექილი და ა.შ. ამიტომ წრფივობის დაშვება საკმაოდ შემზღუდველი მოთხოვნაა.

მეორეს მხრივ, შეიძლება თვით დისკონტ-ფაქტორების ინტერპოლაცია და ე.წ. მადისკონტირებელი ან დისკონტ-ფუნქციის მიღება.

ამ მეთოდის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ყველა შემთხვევაში, როგორი წესითაც არ უნდა იყოს გადათვლილი თვით განაკვეთი (მარტივად, რთულად, უწყვეტად) და როგორი სახეც არ უნდა ჰქონდეს შემოსავლიანობის მრუდს, მადისკონტირებელ მრუდს ყოველთვის(საკმაოდ დიდი სიზუსტით) ექსპონენციალური სახე აქვს, კერძოდ, ის $e^{-\mathrm{const}\cdot t}$ სახისაა.

მართლაც, უწყვეტად გადათვლილი განაკვეთისათვის ეს მტკიცება ტრივიალურია. რთული პროცენტისთვის მივიღებთ,

$$\frac{1}{(1+r)^t} = e^{-t\ln(1+r)}.$$

მარტივი პროცენტისთვის ადვილი აღმოსაჩენია ფორმულა

$$e^{-t\ln(1+r)}\left(1-\frac{r^2}{8}\right) \leq \frac{1}{1+rt} \leq e^{-t\ln(1+r)}.$$

ამიტომ, თუ $0 \leq t \leq 1$ და r მცირეა, ექსპონენციალური მიახლოება აქაც საკმაოდ ზუსტია.

ამრიგად, დისკონტ-ფუნქცია ყოველთვის ექსპონენციალური სახისაა, ამიტომ, თუ ვიცით ამ ფუნქციის ორი მნიშვნელობა ν_1 და ν_2, წერტილებში t_1 და t_2, მაშინ ν_k-ს სიდიდე წერტილში t_k, $t_1 < t_k < t_2$, გამოითვლება ექსპონენციალური მიახლოების მეთოდით. შედეგად მივიღებთ

$$\nu_k = \nu_1^{\frac{t_k}{t_1}\cdot\frac{t_2-t_k}{t_2-t_1}}\,\nu_2^{\frac{t_k}{t_2}\cdot\frac{t_k-t_1}{t_2-t_1}}.$$

ეს ფორმულა არ მოიცავს შემთხვევას, როცა ინტერპოლირება საჭიროა ისეთ არეებში, რომლებიც პირველი ცნობილი დისკონტ-ფაქტორის წინ ან ბოლო ცნობილი ფაქტორის შემდეგ არიან განლაგებულნი. ამ არეებისათვის იყენებენ ფორმულას

$$\nu_k = \nu_n^{\frac{t_k}{t_n}},$$

სადაც ν_n პირველი ან ბოლო დისკონტ-ფაქტორია.

ფორმულები იძლევიან საშუალებას ავაგოთ დისკონტ-ფუნქცია უკუპონო ობლიგაციის საპროცენტო განაკვეთების ნებისმიერი ოჯახისთვის.

კავშირები სხვადასხვა ტიპის საპროცენტო განაკვეთებს შორის. ფინანსური მათემატიკისა და ინჟინერიის სხვადასხვა ინსტრუმენტის ევალუაციისთვის მნიშვნელოვანია გაირკვეს კავშირი სხვადასხვა ტიპის საპროცენტო განაკვეთს შორის, კერძოდ,

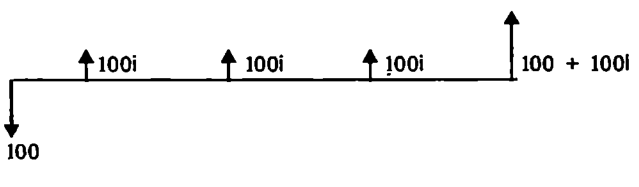
- უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთს,
- ნომინალური ობლიგაციის განაკვეთს,
- ფორვარდულ განაკვეთს,
- სვოპ-განაკვეთს

შორის. ამ ჩამონათვალიდან, ჩვენ მხოლოდ სვოპ-განაკვეთს არ შევხვედრივართ.

სვოპ-განაკვეთი არის ის მუდმივი საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც LIBOR-ის კურსით წარმოქმნილ ცვალებადი ფულის ნაკადის ეკვივალენტურ მუდმივ ფულად ნაკადებს წარმოქმნის (LIBOR-ი არის მცურავი განაკვეთი, რომლითაც ბანკები თანახმანი არიან გასცენ სესხი ევროპის სავალუტო ბაზარზე).

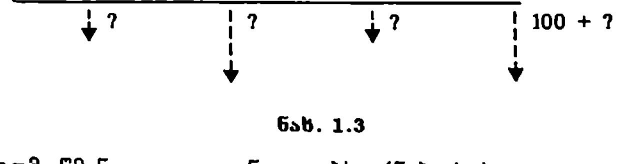
გავიხსენოთ, რომ ნომინალური ობლიგაცია არის ისეთი ობლიგაცია, რომლის ფასი ემთხვევა ნომინალს. ასეთი ობლიგაციის საკუპონე განაკვეთი $r_c = \rho$, სადაც ρ ობლიგაციის შემოსავლიანობაა დაფარვამდე.

აღვნიშნოთ კუპონის განაკვეთის და შემოსავლიანობის საერთო მნიშვნელობა i-თი, ე.ი. $r_c = \rho = i$. ვთქვათ, შევიძინეთ ასეთი ობლიგაციის 100 ნომინალი. მაშინ წარმოიქმნება ფულადი ნაკადები



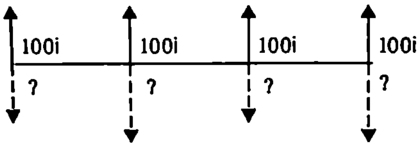
ნახ. 1.2

თუ ეს შენაძენი ფინანსირდებოდა სესხით, რომელიც LIBOR-განაკვეთით ავიღეთ, მაშინ ეს სესხი, თავის მხრივ, წარმოქმნის ნაკადებს



ნახ. 1.3

ამიტომ, წმინდა ფულად ნაკადებს ექნება სახე



ნახ. 1.4

ნაკადები, რომლებიც შეესაბამება ნომინალს ანულირდება და დარჩება მხოლოდ ნომინალური ობლიგაციის ფიქსირებული კუპონები და მცურავი საპროცენტო გადასახადები — LIBOR-განაკვეთებით. აქედან ვასკვნით, რომ ნომინალური კუპონის შემოსავლიანობა ემთხვევა სვოპ-განაკვეთს.

შემდგომი მსჯელობის გამარტივების მიზნით, შევთანხმდეთ, რომ ყველა ფორმულაში, რომელიც ქვემოთ იქნება მოყვანილი, წელიწადის ნაწილები გამოთვლილია ფორმულით (ფაქტიური)/(ფაქტიურზე) და ამიტომ ყველა პერიოდის სიგრძე ერთი და იგივეა.

(ფაქტიური)/(ფაქტიურზე) ნიშნავს შემდეგს: მრიცხველი დღეებში გამოსახული ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობაა. მნიშვნელი უდრის მრიცხველს, თუ კუპონები ყოველწლიურად გაიცემა, გაორმაგებულ მრიცხველს, თუ კუპონები ყოველ ნახევარ წელიწადში გაიცემა, გაოთხმაგებულ მრიცხველს, თუ კუპონები 3 თვეში ერთხელ გაიცემა და ა.შ. ამრიგად, მთელი შეფარდება ტოლია ან 1-ის, ან 0.5-ის, ან 0.25-ის და ა.შ.

თუ ცნობილია დისკონტ-ფაქტორები კუპონის დაფარვის ყოველი თარიღისათვის, მაშინ ობლიგაციის მიმდინარე ღირებულება იქნება

$$B = \frac{100 i_k}{F}\nu_1 + \cdots + \frac{100 i_k}{F}\nu_k + 100\nu_k,$$

სადაც k კუპონების რაოდენობა, i_k — k კუპონის მქონე ობლიგაციის საკუპონო განაკვეთი, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — დისკონტ-ფაქტორები, ხოლო F კუპონური თარიღების რაოდენობაა. რადგან ობლიგაცია ნომინალით იყიდება, ამიტომ $B = 100$. აქედან

$$i_k = \frac{1 - \nu_k}{\sum_{j=1}^{k} \frac{\nu_j}{F}}, \tag{1.16}$$

ანუ ნომინალური ობლიგაციის შემოსავლიანობა და მისი ტოლი სვოპ-განაკვეთი მოიცემა (1.16) ფორმულით.

ამ ფორმულიდან, მარტივი გამოთვლებით, შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$\nu_k = \frac{1 - i_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\nu_j}{F}}{1 + \frac{i_k}{F}}, \tag{1.17}$$

ანუ სვოპ-განაკვეთისა და წინა დისკონტ-ფაქტორების მეშვეობით შეიძლება რეკურენტულად გამოვთვალოთ k-ური დისკონტ-ფაქტორი. მსგავსი ტიპის

პროცედურას — ბუტსტრაპს — ჩვენ უკვე შევხვდით შემოსავლიანობის მრუდის აგების დროს.

თუ შევაბრუნებთ დისკონტ-ფაქტორის გამოსათვლელ (1.15) ფორმულას, მივიღებთ

$$r_k = \sqrt[t_k]{\frac{1}{\nu_k}} - 1. \tag{1.18}$$

ამრიგად, მოყვანილი ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ მათემატიკურად დავუკავშიროთ ერთმანეთს უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი, დისკონტ-ფაქტორი, ნომინალური ობლიგაციის განაკვეთი და სვოპ-განაკვეთი.

ახლა ამ განაკვეთებს ფორვარდული განაკვეთიც დავუკავშიროთ. ამისათვის ამოვწეროთ (1.17) ფორმულა $k = 1$-თვის

$$\nu_1 = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{F}}, \tag{1.19}$$

სადაც ჩვენ დავუშვით, რომ წელიწადში ზუსტად F ცალი ტოლი პერიოდია, თითოეული სიგრძით t_k, ე.ი.

$$\frac{1}{F} = t_k.$$

ფორმულა (1.19) გვიჩვენებს, რომ 1-ის დღევანდელი მნიშვნელობა გამოითვლება დისკონტირებით პირველი პერიოდის გასვლის მომენტიდან. ამასთან, დისკონტ-ფაქტორი აიგება უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთის მეშვეობით.

იმისათვის, რომ მივიღოთ მეორე დისკონტ-ფაქტორი, საჭიროა, ანალოგიის გამოყენებით, დავადისკონტიროთ პირველი ფაქტორი ν_1, პირველი ფორვარდული განაკვეთით

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1 + \frac{f_1}{F}}.$$

ზოგადად შეიძლება დავწეროთ

$$\nu_{k+1} = \frac{\nu_k}{1 + \frac{f_k}{F}}.$$

აქედან ფორვარდული განაკვეთებისთვის გვექნება

$$f_k = \left(\frac{\nu_k}{\nu_{k+1}} - 1\right). \tag{1.20}$$

გარდავქმნათ (1.20) ფორმულა. ამისათვის ჩავსვათ მასში

$$\nu_k = \frac{\nu_{k-1}}{1 + \frac{f_{k-1}}{F}}.$$

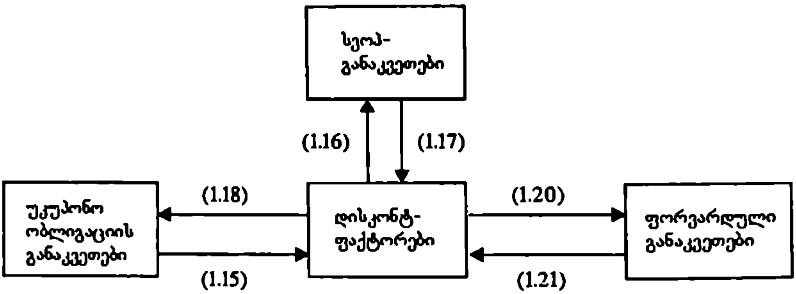
მივიღებთ

$$\nu_{k+1} = \frac{\nu_{k-1}}{\left(1+\frac{f_k}{F}\right)\left(1+\frac{f_{k-1}}{F}\right)}.$$

ახლა ამ ფორმულაში ჩავსვათ ν_{k-1}-ის გამოსახულება და ა.შ. საბოლოოდ გვექნება

$$v_k = \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{1+\frac{f_j}{F}}. \qquad (1.21)$$

განვიხილოთ დიაგრამა



ნახ. 1.5

იგი გარკვეულად აწესრიგებს ზემოთ მიღებულ შედეგებს. დიაგრამიდან ცხადია, რომ დისკონტ-ფაქტორების ცოდნა საკმარისია სხვა განაკვეთების მოსაძებნად და მათი მეშვეობით, ბევრი საინტერესო ინსტრუმენტის ფასის გასათვლელად.

დავასრულოთ ეს პუნქტი შემდეგი შენიშვნით.

მარტივი გარდაქმნები გვიჩვენებს, რომ სვოპის განაკვეთი

$$i_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{f_{j-1}\nu_j}{F}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{\nu_j}{F}},$$

ანუ სვოპ-განაკვეთი არის ფორვარდული განაკვეთების შეწონილი საშუალო არითმეტიკული, ხოლო ერთიანით გადიდებული უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი გამოითვლება ფორმულით

$$1 + r_k = \sqrt[k]{\prod_{j=0}^{k-1}\left(1+\frac{f_j}{F}\right)}.$$

ამიტომ ერთიანით გადიდებული უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი არის ერთიანით გადიდებული ფორვარდული განაკვეთების საშუალო გეომეტრიული.

თუ გადავალთ მათ უწყვეტ ანალოგებზე, $r'_k = \ln(1+r_k)$ და $f'_k = \ln(1+f_k)$, გვექნება

$$r'_k = \frac{1}{t_k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f'_j}{F},$$

ანუ უკუპონო ობლიგაციის უწყვეტად გადათვლილი განაკვეთი უდრის უწყვეტად გადათვლილი ფორვარდული განაკვეთების საშუალო არითმეტიკულს.

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ აღნიშნული განაკვეთები (სვოპ-განაკვეთი და უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი) ახლოსაა ერთმანეთთან. შეიძლება მკაცრად დამტკიცდეს, რომ თუ შემოსავლიანობის მრუდი იზრდება, მაშინ უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი, მცირედ, მაგრამ მეტია სვოპ-განაკვეთზე, ე.ი. $r_k > i_k$. თუ, პირიქით, შემოსავლიანობის მრუდი კლებადია, მაშინ $i_k > r_k$.

1.6 დურაცია

დურაციის ცნება და მისი შინაარსობრივი ინტერპრეტაცია. ამ პუნქტში ჩვენ განვიხილავთ ე.წ. დურაციულ ანალიზს, რომელიც ეფუძნება შემოსავლიანობის, შემოსავლიანობის მრუდის, კუპონიანი და უკუპონო ობლიგაციებს და მათთან დაკავშირებულ სხვა ცნებებს და, ამდენად, ამ თავის ძირითადი თემის სხვა კუთხით გაშუქებას უწყობს ხელს.

ობლიგაციის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე, მაგრამ ამ სიდიდეს გააჩნია ერთი მეტად არასასურველი თვისება: შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე (მოკლედ შემოსავლიანობა) არ არის ადიციური, რაც იმას ნიშნავს, რომ ობლიგაციების პორტფელის შემოსავლიანობა არ უდრის პორტფელში შემავალი ობლიგაციების შემოსავლიანობების შეწონილ ჯამს.

ამ თვისებას აქვს რამოდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი. სახელდობრ, თუ შევცვლით ობლიგაციას სხვა ობლიგაციით, რომლის შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე უფრო დიდია, ხოლო ფასი კი ისეთივეა, როგორიც თავიდან აღებულ ობლიგაციას ჰქონდა, მაშინ შესაძლოა, მთელი პორტფელის შემოსავლიანობა შემცირდეს. უფრო მეტიც, თუ ობლიგაციას გავყიდით დაფარვის მომენტის დადგომამდე, მაშინ ობლიგაციის შემოსავლიანობა, ჩვეულებრივ, განსხვავდება მის შემოსავლიანობისაგან დაფარვის მომენტამდე.

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ შემოსავლიანობას დაფარვის მომენტამდე აქვს შეზღუდული გამოყენების სფერო ობლიგაციების პორტფელის მართვის ამოცანების განხილვის დროს. ამიტომ საჭიროა შემოსავლიანობის ისეთი საზომის შემოღება, რომელიც უფრო ადეკვატურად აღწერს ობლიგაციების პოტრფელს.

შემოსავლიანობის ზემოაღნიშნული არასასურველი თვისებების გამო, ობლიგაციების პორტფელის მართვის ამოცანა უფრო რთულია, ვიდრე აქციების პორტფელის მართვის ამოცანა, რადგან აქციების პორტფელის შემოსავლიანობა, ობლიგაციების პორტფელისაგან განსხვავებით, უდრის პორტფელში შემავალი აქციების შემოსავლიანობების შეწონილ ჯამს (იხ., მაგალითად, ამ წიგნის მეორე თავი).

მიუხედავად იმისა, რომ პორტფელის ზოგადი თეორიის ტექნიკის გამოყენება შესაძლებელია ამ შემთხვევაშიც, ობლიგაციების პორტფელის მართვის დროს საჭიროა განვითარდეს სპეციალური მეთოდები, რომლებიც ზუსტად იქნება მისადაგებული ობლიგაციების პორტფელის მართვის ამოცანებთან. ასეთი საკითხები ხშირად წარმოიქმნება და მნიშვნელოვან როლს ასრულებს საბანკო საქმეში, პროცენტული რისკის მართვის დროს.

შევნიშნოთ, რომ არ არსებობს ზოგადი წესი ობლიგაციების პორტფელის სიდიდის ზუსტი აღწერის მისაღებად. მართლაც, ობლიგაციების პორტფელის ევოლუცია არსებითად დამოკიდებულია ინვესტორის სპეციფიკურ სურვილებზე. მაგალითად, ზოგ მენეჯერს სურს გაამახვილოს ყურადღება იმ მომავალ ვალდებულებებზე, რომლებიც დაკავშირებულია ობლიგაციებთან, ზოგი დიდ ყურადღებას აქცევს პორტფელის ყოველწლიურ შემოსავლიანობას და ა.შ.

აქვე აღვნიშნოთ ის დიდი როლი, რომელსაც ასრულებენ ობლიგაციების პორტფელის მართვაში საპროცენტო დერივატივები (ამ საკითხებისადმი მიძღვნილი იქნება რამოდენიმე პარაგრაფი ჩვენს წიგნში). მაგალითად, თუ ინვესტორს სურს თავისი აქტივების პორტფელის სტრუქტურირება ისე, რომ მუდმივპროცენტიანი გრძელვადიანი აქტივები შეიცვალოს მოკლევადიანი მცურავ პროცენტიანი აქტივებით, მას შეუძლია მიმართოს საპროცენტო სვოპს, რომელიც სწორედ ასეთ ტრანსფორმაციას ახდენს. ამასთან დანახარჯები, რომლებიც სვოპის შეძენასთანაა დაკავშირებული, როგორც წესი, გაცილებით უფრო მცირეა, ვიდრე დანახარჯები, რომლებიც ობლიგაციების ფიზიკურ გაყიდვასა და სხვა ობლიგაციების ყიდვასთან არის დაკავშირებული. ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ შესაბამისად შერჩეულ საპროცენტო ფიუჩერსულ კონტრაქტს, შეიძლება შევამციროთ ობლიგაციების პორტფელის დურაცია — მოქმედების ხანგრძლივობა.

ამ პუნქტში ჩვენ მოვიყვანთ ობლიგაციების პორტფელის მენეჯმენტის კლასიკურ მიდგომას, რომელიც დაფუძნებულია არა ობლიგაციის ფასის დროში ცვლილების შესწავლაზე, არამედ — ობლიგაციების პორტფელის ფასის რეაქციაზე შემოსავლიანობის მრუდის მყისიერი ცვლილების დროს.

ობლიგაციის ფასის მგრძნობიარობას შემოსავლიანობის მრუდის ჩანაცვლებაზე აღწერს სპეციალური ობიექტი, რომელსაც ობლიგაციის დურაცია ჰქვია.

დავუშვათ, რომ მიმდინარე დროის მომენტი არის საწყისი მომენტი

$t = 0$. მაშინ, როგორც ვიცით, ნულოვან კუპონიანი T-ობლიგაციის ფასი მოიცემა ფორმულით $B(0,T) = e^{-r(0,T)T}$, სადაც $r(0,T)$ არის უწყვეტად გადათვლილი შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე, ანუ ობლიგაციების მენეჯმენტის ტრადიციულ აღნიშვნებში,

$$r(0,T) = Y(0,T).$$

დავუშვათ, რომ ფუნქცია $T \to Y(0,T)$ მუდმივია, ე.ი. დავუშვათ, რომ $Y(0,T) = Y$ ნებისმიერი T-სთვის. სხვა სიტყვებით, ე.წ. საწყისი შემოსავლიანობის მრუდი (საწყისი, რადგან ვიხილავთ მიმდინარე მომენტს $t = 0$-ს) არის დროითი ღერძის პარალელური წრფე.

განვიხილოთ ობლიგაცია, რომელიც აღჭურვილია კუპონებით. დავუშვათ, რომ $T_1 < T_2 < \cdots < T_m$ მომენტებში ის იხდის $c_1, c_2, \ldots, c_m$ სიდიდის საკუპონო თანხებს.

მაშინ, თუ ასეთი ობლიგაციის ფასს $t = 0$ მომენტში აღვნიშნავთ $B_c(0)$-ით, გვექნება

$$B_c(0) = B_c(0,Y) = B_c(0|c_1,\ldots,c_m,T_1,\ldots,T_m) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{-YT_j},$$

სადაც $Y = Y(0,T_j)$ ნებისმიერი j-სთვის. ინდექსი c აღნიშნავს იმას, რომ ვიხილავთ კუპონიან ობლიგაციას. ზემოთმოყვანილ ტოლობათა ჯაჭვში პირველი და მეორე ტოლობები, უბრალოდ, $B_c(0)$-ის განმარტების დაზუსტებაა, ბოლო კი იქიდან გამომდინარეობს, რომ კუპონიანი ობლიგაცია ყოველთვის შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უკუპონო ობლიგაციების პორტფელი და დაშვებიდან, რომ $Y = Y(0,T)$ ნებისმიერი T-სთვის.

ბოლო ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ობლიგაციის ფასის წარმოებული Y-ის მიმართ ტოლია

$$\frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} c_j T_j e^{-YT_j} = -D(Y)B_c(0,Y), \qquad (1.22)$$

სადაც $D(Y)$ განმარტებით არის ობლიგაციის დურაცია.

განმარტება. კუპონებით აღჭურვილი ობლიგაციის მაკოლეის (Macaulay) დურაცია $D(Y) = D(Y|c_1,\ldots,c_m,T_1,\ldots,T_m)$ მოიცემა ფორმულით

$$D(Y) = -\frac{1}{B_c(0,Y)} \cdot \frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y} = \frac{1}{B_c(0,Y)} \sum_{j=1}^{m} c_j T_j e^{-YT_j}, \qquad (1.23)$$

ან ეკვივალენტურად

$$D(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j T_j e^{-YT_j}}{\sum_{j=1}^{m} c_j e^{-YT_j}}.$$

ფასის რისკი (ან დოლარ-დურაცია) მოიცემა ფორმულით

$$D_p(Y) = B_c(0,Y)D(Y) = -\frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y}.$$

იმისათვის, რომ შემოღებული ცნება შინაარსობრივად აღვწეროთ, გადავწეროთ დურაცია შემდეგნაირად

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{m} T_j \left[\frac{c_j e^{-YT_j}}{B_c(0,Y)}\right].$$

შევნიშნოთ, რომ კვადრატულ ფრჩხილში მყოფი გამოსახულება არის T_j მომენტში გადახდილი კუპონის დღევანდელი მნიშვნელობის შეფარდება ობლიგაციის ფასთან. მაგრამ ობლიგაციის ფასი თავად არის ყველა კუპონის დღევანდელი მნიშვნელობების ჯამი. ამრიგად, დურაცია არის შეწონილი საშუალო იმ დროითი მომენტებისა, როდესაც ხდება კუპონების გადახდა. ამასთან, T_j-ურ მომენტს მიეწერება წონა, რომელიც j-ური კუპონის დღევანდელი მნიშვნელობისა და ობლიგაციის ფასის შეფარდების ტოლია. შევნიშნოთ, რომ წონების ჯამი უდრის 1-ს.

განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ ΔY-ით აღვნიშნავთ შემოსავლიანობის მრუდის მცირე პარალელურ ჩანაცვლებას (შემოსავლიანობის მრუდი, ჩვენი დაშვებით, მუდმივია, ე.ი. არის დროითი ღერძის პარალელური წრფე), მაშინ ობლიგაციის ფასის პროცენტული ცვლილება

$$\frac{\Delta B_c(0,Y)}{B_c(0,Y)} \approx -D(Y)\Delta Y, \tag{1.24}$$

ხოლო თვით ფასის ცვლილება

$$\Delta B_c(0,Y) \approx -D_p(Y)\Delta Y.$$

მაკოლეის დურაციის პირდაპირი ინტერპრეტაცია არის ობლიგაციის ფასის მგრძნობიარობა შემოსავლიანობის ცვლილების მიმართ.

მაკოლეის დურაციის ცნების განზოგადოება შეიძლება ნებისმიერ აქტივზე, რომლის ფასი დამოკიდებულია საპროცენტო განაკვეთზე. მართლაც, ვთქვათ, $V_0(Y)$ არის რაიმე აქტივის ფასი $t = 0$ მომენტში. ვთქვათ, ამ აქტივის შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე მუდმივია და უდრის Y-ს. მაშინ ამ აქტივის ეფექტური დურაცია $t = 0$ მომენტში განისაზღვრება ტოლობით

$$\frac{\Delta V(Y)}{V_0(Y)} \approx -D_e(Y)\Delta Y,$$

სადაც $\Delta V(Y) = V_0(Y + \Delta Y) - V_0(Y)$.

ფორმალურად გვაქვს შემდეგი განმარტება. V აქტივის ეფექტური დურაცია t მომენტში მოიცემა ტოლობით

$$D_e(Y) = -\frac{1}{V_t(Y)} \cdot \frac{dV_t(Y)}{dY}.$$

დავუშვათ, კვლავ, რომ $t = 0$. განვიხილოთ უკუპონო T-ობლიგაცია ნომინალით N. მაშინ

$$B(0,T) = Ne^{-YT} \tag{1.25}$$

აქედან

$$\frac{\partial B(0,T)}{\partial Y} = -NTe^{-YT}. \tag{1.26}$$

ამიტომ უკუპონო ობლიგაციის დურაცია

$$D(Y) = T,$$

ანუ წმინდა მადისკონტირებელ ობლიგაციის დურაცია უდრის მის დაფარვის ვადას.

ობლიგაციების პორტფელის ჰეჯირება. მოვიყვანოთ პორტფელის დაცვის (ჰეჯირების) მეთოდი, რომელიც ეფუძნება დურაციას, და, რომელსაც წარმატებით იყენებენ საბანკო საქმეში.

განვიხილოთ პორტფელი, რომელიც შედგება ნაყიდი კუპონიანი ობლიგაციისა და გაყიდული უკუპონო ობლიგაციისაგან. ამასთან, ეს ობლიგაციები ისე უნდა შეირჩეს, რომ მთელი პორტფელის ფასი ნულის ტოლი იყოს. ვთქვათ, ინვესტორს დამატებით სურს, რომ პორტფელის ფასი იყოს არამგრძნობიარე მუდმივი შემოსავლიანობის მრუდის მცირე პარალელური ჩანაცვლების მიმართ.

იმისათვის, რომ მიზანს მივაღწიოთ, უნდა შეირჩეს უკუპონო ობლიგაციის ნომინალი და დაფარვის ვადა.

წინა ფორმულებიდან (იხ. (1.22), (1.25) და (1.26)) და პორტფელის შედგენის პირობებიდან მივიღებთ:

$$1) \qquad B_c(0) = B(0,T)\left(= Ne^{-YT}\right),$$

რადგან პორტფელის ფასი ნულის ტოლი უნდა იყოს;

$$2) \qquad D(Y)B_c(0) = NTe^{-YT},$$

რადგან პორტფელი $\Pi = (B_c(0,Y) - B(0,T))$ არ უნდა იყოს მგრძნობიარე შემოსავლიანობის მრუდის ჩანაცვლების მიმართ, ე.ი.

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial Y} = \frac{\partial(B_c(0,Y) - B(0,T))}{\partial Y} = \frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y} - \frac{\partial B(0,T)}{\partial Y},$$

ანუ

$$\frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y} = \frac{\partial B(0,T)}{\partial Y}.$$

ამიტომ უნდა შევარჩიოთ უკუპონო ობლიგაცია ისე, რომ მისი დაფარვის ვადა $T = D(Y)$, ხოლო ნომინალი $N = e^{YD(Y)}B_c(0)$. ბოლო ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ობლიგაციის (უკუპონოსა და კუპონიანის) მიმდინარე ფასები ტოლია.

აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ თუ გვინდა, რომ ზუსტად ავსახოთ ფულადი ნაკადის ნებისმიერი მიმდევრობის მგრძნობიარობა შემოსავლიანობის მრუდის მცირე პარალელური ჩანაცვლების მიმართ, საჭიროა გვქონდეს ისეთი უკუპონო ობლიგაცია, რომლის დაფარვის ვადა უდრის ფულადი ნაკადის დურაციას, ხოლო ორივე აქტივის მიმდინარე ფასი ერთმანეთის ტოლია.

უკუპონო ობლიგაციის ფასი დაფარვისას მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ ნებისმიერი კუპონიანი ობლიგაციის ფასი იმ t მომენტში, რომელიც უდრის დურაციას, აგრეთვე მუდმივია, ე.ი. $B_c(t) = B_c(D(Y)) = \text{const}$.

გამოვიყენოთ დურაციით მიღებული თვისება მომავალი ვალდებულების ჰეჯირებისათვის — მომავალი ფასების ცვლილებისაგან დაცვისათვის.

ვთქვათ, გვსურს N მოცულობის ვალდებულების დაცვა, რომელიც მომავალ T მომენტში უნდა დაიფაროს. ამისათვის გამოვიყენოთ სტრატეგია: შევიძინოთ კუპონიანი ობლიგაცია, რომლის დურაცია $D(Y) = T$ და დღევანდელი ფასი კი $Ne^{-YD(Y)}$-ის ტოლია.

ერთი შეხედვით, არ არის საჭირო ასეთი რთული კონსტრუქციების გამოყენება — საკმარისია ვიყიდოთ T დაფარვის ვადიანი უკუპონო ობლიგაცია N ნომინალით. მაგრამ საქმე იმაშია, რომ ეს ბოლო სტრატეგია შეიძლება უფრო ძვირი დაგვიჯდეს, ვიდრე პირველი, დურაციაზე დაყრდნობილი სტრატეგია.

დურაციის თვისებები და მეორე დურაცია. მოვიყვანოთ დამტკიცების გარეშე თეორემა, რომელიც აღწერს დურაციის თვისებებს.

თეორემა. აღვნიშნოთ $D(Y, r_c)$-თი მაკოლეის დურაცია ისეთი ობლიგაციისათვის, რომლის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი არის r_c, ხოლო შემოსავლიანობა დაფარვის მომენტამდე მუდმივია და უდრის Y-ს. მაშინ

$$D(Y, r_c) = \frac{r_c g(Y) + T_m e^{-YT_m}}{r_c h(Y) + e^{-YT_m}},$$

სადაც

$$g(Y) = \sum_{j=1}^{m} T_j e^{-YT_j}, \quad h(Y) = \sum_{j=1}^{m} e^{-YT_j}.$$

დავუშვათ $m > 1$. მაშინ

$$\frac{\partial D}{\partial r_c}(Y, r_c) < 0 \quad \text{და} \quad \frac{\partial D}{\partial Y}(Y, r_c) < 0,$$

სხვა სიტყვებით, კუპონიანი ობლიგაციის მაკოლეის დურაცია, $D(Y, r_c)$, არის ორივე ცვლადის კლებადი ფუნქცია.

რთულად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთებისთვის ზემოთმოყვანილ (1.22), (1.23) და (1.24) ფორმულებს აქვთ სახე:

$$\frac{\partial B_c(0,Y)}{\partial Y} = \frac{1}{1+Y}\sum_{j=1}^{m}\frac{jc_j}{(1+Y)^j} = -\frac{\widetilde{D}(Y)B_c(0)}{1+Y},$$

$$\widetilde{D}(Y) = \frac{1}{B_c(0,Y)}\sum_{j=1}^{m}\frac{jc_j}{(1+Y)^j} = \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{jc_j}{(1+Y)^j}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j}{(1+Y)^j}\right)^{-1}$$

$$\frac{\Delta B_c(0,Y)}{B_c(0,Y)} \approx -\widetilde{D}(Y)\frac{\Delta Y}{1+Y}.$$

თუ შემოვიღებთ ე.წ. მოდიფიცირებული დურაციის ცნებას,

$$\widehat{D}(Y) = \frac{\widetilde{D}(Y)}{1+Y},$$

მაშინ, ისევე, როგორც „უწყვეტ“ შემთხვევაში, მივიღებთ,

$$\frac{\Delta B_c(0,Y)}{B_c(0,Y)} \approx -\widehat{D}(Y)\Delta Y.$$

როგორ გავზომოთ ობლიგაციის მგრძნობიარობა შემოსავლიანობის მრუდის ცვლილების მიმართ, თუ ეს მრუდი არ არის მუდმივი? ერთი ასეთი მიდგომა შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ, უწყვეტად გადათვლილი შემოსავლიანობა დაფარვამდე დამოკიდებულია რაიმე y პარამეტრზე. აღვნიშნოთ იგი ასე $r(0,T,y)$. ვთქვათ, $r(0,T,0) = r(0,T)$.

მაშინ ობლიგაციის ფასი $t = 0$ მომენტში ტოლია

$$B_c(0,y) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{-r(0,T_j,y)T_j}.$$

დავუშვათ, რომ $dr(0,T,y) = dy$ ნებისმიერი T-სთვის. მაშინ

$$dB_c(0,y) = -\sum_{j=1}^{m} c_j T_j e^{-r(0,T,y)T_j} dr(0,T,y) = -D_2(y)B_c(0,y)dy,$$

სადაც

$$D_2(y) = \frac{1}{B_c(0,y)} \sum_{j=1}^{m} c_j T_j e^{-r(0,T,y)T_j}.$$

კერძოდ, მაკოლეის მეორე დურაცია $D_2(0)$ ტოლია

$$D_2(0) = \frac{1}{B_c(0)} \sum_{j=1}^{T} c_j T_j e^{-r(0,T_j)T_j}.$$

ანალოგიურად, რთულად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთისთვის გვექნება

$$\widetilde{D}_2(0) = \frac{1}{B_c(0)} \sum_{j=1}^{m} \frac{jc_j}{(1+r(0,j))^j}.$$

აღწერილი მეთოდიკა შეიძლება გამოვიყენოთ დურაციის ცნების შემოსაყვანად შემოსავლიანობის მრუდის სხვა ტიპის ფლუქტუაციებისთვისაც.

დურაცია და ობლიგაციის ფასის ამოზნექილობა. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მოცემული კუპონიანი ობლიგაციისათვის შეიძლება ვნახოთ ისეთი უკუპონო ობლიგაცია, რომ პორტფელი, რომელიც შედგება ნაყიდი კუპონიანი ობლიგაციისა და გაყიდული უკუპონო ობლიგაციისაგან არამგრძნობიარე იქნება (პირველი მიახლოების დონეზე) მუდმივი შემოსავლიანობის მრუდის პარალელური ჩანაცვლების მიმართ.

ასეთი პორტფელის ასაგებად ჩვენ გამოვიყენეთ დურაციის ცნება და აპროქსიმაციის დროს უკუვაგდეთ $(\Delta Y)^2$ და უფრო მაღალი რიგის წევრები.

პორტფელის უფრო ზუსტად შედგენისათვის განვიხილოთ მისი ამოზნექილობის ცნება.

ცხადია, რომ

$$\frac{\partial^2 B_c(0)}{\partial Y^2} = \sum_{j=1}^{m} c_j T_j^2 e^{-YT_j}$$

და

$$\frac{\partial^2 B(0,T)}{\partial Y^2} = NT^2 e^{-YT},$$

სადაც $B(0,T)$ არის N ნომინალიანი T-უკუპონო ობლიგაცია.

განმარტება. კუპონიანი ობლიგაციისათვის რედინგტონის (Redington) ამოზნექილობა, $R(Y) = R(Y|c_1,\dots,c_m,T_1,\dots,T_m)$, მოიცემა ფორმულით

$$R(Y) = \frac{1}{2B_0(c)} \sum_{j=1}^{m} c_j T_j^2 e^{-YT_j}.$$

შევნიშნოთ, რომ უკუპონო ობლიგაციის $R(Y) = \frac{T^2}{2}$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{\partial^2 B_c(0)}{\partial Y^2} = 2R(Y)B_c(0).$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ ტეილორის გაშლის პირველ ორ წევრს, მაშინ ობლიგაციის ფასის პროცენტული ცვლილებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას .

$$\frac{\Delta B_c(0)}{B_c(0)} \approx -D(Y)\Delta Y + R(Y)(\Delta Y)^2.$$

პროცენტის რთული გადათვლის შემთხვევაში რედინგტონის ამოზნექილობა ტოლია

$$\widetilde{R}(Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{j(j+1)c_j}{(1+Y)^{j+2}}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j}{(1+Y)^j}\right)^{-1}$$

ფიქსირებული შემოსავლის მქონე აქტივების მართვის მაგალითები. დავასრულოთ დურაციისადმი მიძღვნილი ეს პუნქტი ამ ცნების გამოყენების კიდევ რამოდენიმე მაგალითით.

ზუსტი შესაბამისობის მქონე პორტფელი. ვთქვათ, ინვესტორის ვალდებულებები აღიწერება გამავალი ფულადი ნაკადით $d_1, d_2, \ldots, d_m$, რომელიც $T_1, T_2, \ldots, T_m$ მომენტებში უნდა იქნას გადახდილი.

თუ მას შევადარებთ პორტფელს, რომლის შემადგენლობაში მოცემულ ვალდებულებებთან ერთად შევიყვანთ სხვა აქტივებსაც (უკუპონო ან კუპონიან ობლიგაციებს), ისე რომ მათ მიერ წარმოქმნილი ფულადი ნაკადი $c_1, c_2, \ldots, c_m$, რომელიც იგივე $T_1, T_2, \ldots, T_m$ მომენტებში შემოდის, ისეთია, რომ $c_i = -d_i$, $i = 1, \ldots, m$, მაშინ მოცემული ვალდებულებები საპროცენტო რისკის მიმართ სრულად ჰეჯირებული იქნება.

ცხადია, ასეთი სტრატეგია ყველაზე უფრო ეფექტურია, მაგრამ, სამწუხაროდ, ის შეიძლება არ იყოს ყველაზე იაფი. ამიტომ ხშირად იყენებენ დურაციაზე დაყრდნობილ სტრატეგიას, რომელსაც იმუნიზაციის სტრატეგია ჰქვია.

იმუნიზაცია. იმუნიზაციის ძირითადი აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ შედარდეს აქტივებისა და პასივების დღევანდელი მნიშვნელობები და დურაციები.

თუ არსებობს სპრედი აქტივებისა და პასივების დურაციებს შორის ე.წ. დურაციის გეპი (დურაციის წყვეტა) და იგი საგრძნობი ხდება დროის სვლასთან ერთად, მაშინ სწორედ მისი სიდიდე გამოიყენება საბანკო საქმეში, როგორც საპროცენტო რისკის სიდიდის კარგი საზომი.

ამ შემთხვევაში იყენებენ იმუნიზაციის სტრატეგიას, რომელიც მდგომარეობს დურაციის გეპისა და რედინგტონის ამოზნექილობის გეპის შესაძლოდ შემცირებაში.

ობლიგაციის შემოსავლიანობის მოდელი. პორტფელების თანამედროვე თეორია ითხოვს ობლიგაციის შემოსავლიანობის მოდელირებას.

მაგალითად ობლიგაციების შემოსავლიანობის მოდელი შეიძლება მოცემულ იქნას შემდეგი სახით (შეადარეთ მეორე თავში აღწერილ CAPM-ს)

$$r_j = Er_j + \frac{D_j}{D_m}(r_m - Er_m) + \varepsilon_j,$$

სადაც r_j (r_m — შესაბამისად) არის j-ური ობლიგაციის შემოსავლიანობა (შესაბამისად ობლიგაციის ინდექსის შემოსავლიანობა), D_j (D_m შესაბამისად) არის j-ური ობლიგაციის დურაცია (შესაბამისად ობლიგაციის ინდექსის დურაცია) და ε_j არის შემთხვევითი სიდიდე ნულოვანი საშუალოთი, ხოლო E — მათემატიკური ლოდინის ნიშანია. თუ დავუშვებთ, რომ $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, როცა $i \neq j$, მაშინ

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = \frac{D_i D_j}{D_m^2}\sigma_m^2,$$

$$\operatorname{Var}(r_i) = \frac{D_i^2}{D_m^2}\sigma_m^2,$$

სადაც σ_m^2 არის ობლიგაციის ინდექსის დისპერსია.

ინდექსაცია. მენეჯერი, რომელიც დაინტერესებულია ობლიგაციების პორტფელის ყოველწლიური შემოსავლიანობის აღრიცხვით, ხშირად ე.წ. ინდექსაციის იდეას იყენებს. ეს სტრატეგია შემდეგში მდგომარეობს: მენეჯერი ახდენს ობლიგაციის ბაზრის კლასიფიკაციას ობლიგაციების სხვადასხვა თვისებაზე (დაფარვის ვადა, შემოსავალი, დურაცია, რეიტინგი და ა.შ.) დაყრდნობით. შემდეგ იგი ქმნის შედარებით მცირე, მაგრამ კარგად დივერსიფიცირებულ პორტფელს, რომელიც ძირითადი მახასიათებლებით ჰგავს ობლიგაციების ინდექსის პორტფელს. სწორი პროპორციებით შედგენილი მცირე პორტფელის ქცევა ასახავს ინდექსის ქცევას, რომელიც თავის მხრივ სრული ბაზრის ქცევის ინდიკატორია.

1.7 ობლიგაციების ფასების დროითი სტრუქტურის აღმწერი სტოქასტური მოდელები

მოდელები, რომლებიც ობლიგაციების ფასების დინამიკას აღწერენ (ინგლისურენოვან ლიტერატურაში ამ მოდელების აგებისა და შესწავლის მთელ პრობლემატიკას „საპროცენტო განაკვეთის დროითი სტრუქტურა" ჰქვია), საკმაოდ რთულ მათემატიკურ აპარატს ეფუძნება — დიფუზიური პროცესების, სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების და, საერთოდ,

სტოქასტური ანალიზის ღრმა თეორიებს. ამ მოდელების მკაცრი ჩამოყალიბება სცილდება ამ წიგნის მიზნებს და ამოცანებს. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ჩვენ საჭიროდ ჩავთვალეთ, მოგვეყვანა ძირითადი მოდელები აღწერის დონეზე, შევხებოდით იმ პრობლემებს, რომლებიც აქ ჩნდება, და ბოლოს, განგვეხილა მიღებული შედეგების გამოყენების მაგალითი — ობლიგაციებზე ევროპული კოლ და პუტ ოფციონების ფასის გამოსათვლელი ფორმულები.

ობლიგაციის ფასის აღმწერი განპირობებული მოდელები. არსებობს ორი ძირითადი მიდგომა ობლიგაციის ფასის $B(t,T)$ პროცესის აღსაწერად.

პირველი, ე.წ. განპირობებული მიდგომა, მდგომარეობს იმაში, რომ თავდაპირველად აღიწერება არა უშუალოდ ობლიგაციის ფასის $B(t,T)$ პროცესი, არამედ ობლიგაციის რომელიმე მახასიათებელი, მაგალითად შემოსავლიანობა ან საპროცენტო განაკვეთი. დაშვებულია რომ

$$B(t,T) = F(t, r(t), T),$$

სადაც $r(t)$ რაიმე მოდელით აღწერილი საპროცენტო განაკვეთია. ასეთ მოდელებს ერთფაქტორიანი მოდელები ჰქვია, რადგან ობლიგაციის ღირებულების სტრუქტურა განისაზღვრება ერთადერთი ფაქტორით, $r = r(t)$, $0 \le t \le T$, მყისიერი საპროცენტო განაკვეთის პროცესით.

იმისათვის, რომ შემდგომ განხილვას კონკრეტული ხასიათი მივცეთ და ის მოდელები გამოვყოთ, რომლებიც კარგად აღწერენ რეალურ ვითარებას, საჭიროა განისაზღვროს, ერთის მხრივ, F ფუნქციის სახე და, მეორეს მხრივ, r საპროცენტო განაკვეთის სტრუქტურა.

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ქვეკლასი, ე.წ. ექსპონენციალური აფინური მოდელები, აღიწერებიან შემდეგი სახის $F(t, r(t), T)$ ფუნქციით

$$F(t, r(t), T) = e^{\alpha(t,T) - r(t)\beta(t,T)},$$

სადაც $\alpha(t,T)$ და $\beta(t,T)$ გარკვეული ფუნქციები არიან. შევნიშნოთ, რომ ამ მოდელს ექსპონენციალურ-აფინური ჰქვია იმიტომ, რომ ფუნქცია

$$\ln F(t, x, T) = \alpha(t,T) - x\beta(t,T)$$

x ცვლადის წრფივი ფუნქციაა.

მოვიყვანოთ საპროცენტო განაკვეთის პოპულარული მოდელები, რომლებიც აღიწერებიან ვინერის პროცესზე (ბროუნის მოძრაობაზე) დაყრდნობით — ე.წ. დიფუზიური მოდელები აქციის ფასის დიფუზიურ მოდელს ეყრდნობა ბლეკ-შოულსის ანალიზი. ამიტომ ასეთი ტიპის მოდელები ცოტა უფრო დაწვრილებით ქვემოთ, ოფციონებისადმი მიძღვნილ მეოთხე თავში, არის აღწერილი.

ვთქვათ, $W = (W_t)$, $t \geq 0$, ვინერის პროცესია. საპროცენტო განაკვეთის დიფუზიური მოდელებია:

მერტონის (R. C. Merton) მოდელი

$$dr(t) = \alpha dt + \gamma dW_t;$$

ვასიჩეკის (O. Vasiček) მოდელი

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \gamma dW_t; \tag{1.27}$$

კოქსის, ინგერსოლისა და როსის (J. C. Cox, J. E. J. Ingersoll, S. A. Ross) მოდელები

$$dr(t) = \beta(r(t))^{3/2} dW_t,$$

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \gamma(r(t))^{1/2} dW_t;$$

ჰოსა და ლის (T. Ho, S. Lee) მოდელი

$$dr(t) = \alpha(t)dt + \gamma dW_t;$$

ჰალისა და უაიტის (J. Hull, A. White) მოდელები

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)dW_t,$$

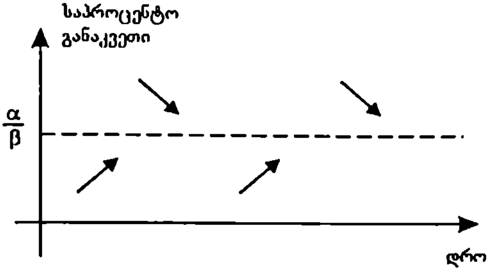
$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)(r(t))^{1/2} dW_t.$$

თითოეულ მოდელს აქვს თავისი ევრისტული დასაბუთება, რომელიც, ერთის მხრივ, რეალური ბაზრების სტატისტიკურ გამოკვლევებს და, მეორეს მხრივ, გარკვეულ ეკონომიკურ თეორიებს ეფუძნება.

ასე, მაგალითად, ვასიჩეკის მოდელიდან ჩანს, რომ თუ $r(t) < \frac{\alpha}{\beta}$, მაშინ (1.27) განტოლების ჩანაცვლების კოეფიციენტი დადებითია, რაც თავის მხრივ იწვევს იმას, რომ $r(t)$ პროცესს დადებითი ტრენდი აქვს და ის საშუალოდ იზრდება. როცა, პირიქით, $r(t) > \frac{\alpha}{\beta}$, $r(t)$-ს უარყოფითი ტრენდი უჩნდება და ის იწყებს საშუალოდ კლებას. თუ $r(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, მაშინ მისი გრაფიკი ტრენდის გარეშე, ქაოტურად იცვლება $\frac{\alpha}{\beta}$ დონის გარშემო.

მოდელში ის ემპირიული ეკონომიკური ფაქტია გათვალისწინებული, რომელსაც საპროცენტო განაკვეთის საშუალოსაკენ შემობრუნებას უწოდებენ. მართლაც, თუ საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე მცირეა, მაშინ სესხი „იაფია", რაც ინვესტიციების ზრდას და ეკონომიკურ აღმავლობას იწვევს. თავის მხრივ, სესხზე მოთხოვნის ზრდის შედეგად საპროცენტო განაკვეთიც იწყებს ზრდას და როცა იგი საკმაოდ დიდ მნიშვნელობას მიაღწევს და ამიტომ სესხი საკმაოდ „გაძვირდება", იწყება ინვესტიციათა რაოდენობის

შემცირება, ეკონომიკური რეცესია და, ამიტომ, საპროცენტო განაკვეთის კლებაც და ა.შ.



ნახ. 1.6

უფრო ზუსტმა ემპირიულმა სტატისტიკურმა გამოკვლევებმა აჩვენეს, რომ განაკვეთის საშუალოსაკენ შემობრუნებას ადგილი მართლაც აქვს, მაგრამ საშუალო დონე არ არის ხოლმე მუდმივი. ეს გარემოება გათვალისწინებულია ჰალის და უაიტის მოდელში, სადაც მუდმივი დონე $\frac{\alpha}{\beta}$ შეცვლილია ცვლადი დონით $\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$, $t \geq 0$. ამ მოდელების შემდგომი განზოგადოებაა ჩენის (L. Chen) მოდელი

$$dr(t) = (\alpha(t) - r(t))dt + (\gamma(t)r(t))^{1/2}dW_t^{(1)},$$

სადაც

$$d\alpha(t) = (\alpha - \alpha(t))dt + (\alpha(t))^{1/2}dW_t^{(2)},$$

$$d\gamma(t) = (\gamma - \gamma(t))dt + (\gamma(t))^{1/2}dW_t^{(3)},$$

α და γ კონსტანტებია, $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ და $W_t^{(3)}$ დამოუკიდებელი ვინერის პროცესებია.

ზოგიერთ მოდელში (მაგალითად, კოქსის, ინგერსოლისა და როსის, ჰალის და უაიტის მეორე მოდელებში) ვოლატილობის კოეფიციენტი, ე.ი. ის კოეფიციენტი, რომელიც ვინერის პროცესის დიფერენციალის წინ დგას და რომელიც ვინერის პროცესით გენერირებული შემთხვევითი ქაოტური რხევების ინტენსივობას განსაზღვრავს, დამოკიდებულია თვით საპროცენტო განაკვეთზე. ასეთი მოდელი აღწერს შემდეგ ემპირიულ ფაქტს: თუ საპროცენტო განაკვეთი იზრდება, მაშინ ისეთი აქტივის ფლობა, რომლის ფასიც ამ განაკვეთზეა დამოკიდებული, უფრო დიდ რისკთანაა დაკავშირებული. რისკის სიდიდე კი განისაზღვრება მოდელის იმ წევრით, რომელიც აღწერს ფლუქტუაციას. მაგალითად, ჰალისა და უაიტის მოდელში ეს წევრია $\gamma(t)(r(t))^{1/2}dW_t$.

განპირობებული მიდგომა ობლიგაციების ფასების აღწერის პრობლემატიკაში ისტორიულად ყველაზე ადრე იყო განვითარებული. როგორც აღმოჩნდა, ამ მიდგომას მივყავართ საინტერესო ანალიზურ პასუხებამდე მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ საპროცენტო განაკვეთი $r = r(t)$ ე.წ. მარკოვის პროცესია, რომელიც შემდეგი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW_t.$$

აღვნიშნოთ, რომ ზემოთჩამოთვლილი ყველა მოდელი სწორედ ასეთი სახისაა.

თუ ჩავთვლით, რომ $B(t,T) = F(t,r(t),T)$ და $F(t,r,T)$ ფუნქცია საკმაოდ გლუვია (აქვს პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები t და r ცვლადებით), მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ იგი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a + \phi b)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF, \quad t \le T, \tag{1.28}$$

სასაზღვრო პირობით $F(T,r,T) = 1$, $T > 0$, $r \ge 0$, სადაც $\phi = \phi(t)$ სპეციალურად შერჩეული ფუნქციაა, მაშინ ბაზარი, რომელზეც საბანკო ანგარიშებითა და ობლიგაციებით ხდება ვაჭრობა, არაარბიტრაჟულია. სხვა სიტყვებით, ამ ბაზარზე ვაჭრებადი აქტივების ფასები ისეა ერთმანეთთან შეთანხმებული, რომ ურისკო მოგების მიღება შეუძლებელია.

შევნიშნოთ, რომ ისეთი სასურველი თვისება, როგორიცაა ბაზრის არბიტრაჟულობა, მიიღწევა $\phi(t)$ ფუნქციის სპეციალური შერჩევით. ასეთი ფუნქცია აირჩევა არა ცალსახად — მისი არჩევა დამოკიდებულია იმ ინვესტორების წარმოდგენებზე, რომლებიც ამ ბაზარზე მოქმედებენ.

ვთქვათ,

$$r(t) = a(t, r(t)) + \phi(t)b(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW_t.$$

განვიხილოთ ზემოთმოყვანილი ექსპონენციალურ-აფინური მოდელი

$$F(t, r(t), T) = e^{\alpha(t,T) - r(t)\beta(T,t)}.$$

დავუშვათ, რომ

$$a(t,r) + \phi(t)b(t,r) = a_1(t) + a_2(t),$$

$$b(t,r) = \sqrt{b_1(t) + b_2(t)}.$$

მაშინ (1.28) განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a_1 + ra_2)\frac{\partial F}{\partial rt} + \frac{1}{2}(b_1 + rb_2)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF.$$

თუ ამ განტოლების ამონახსნს ვეძებთ ექსპონენციალურ-აფინური სახით, მაშინ a_1, a_2, b_1 და b_2-თვის მივიღებთ თანაფარდობებს

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} + a_2\beta - \frac{1}{2}b_2\beta^2 = -1, \quad \beta(T,T) = 0,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = a_1\beta - \frac{1}{2}b_1\beta^2, \quad \alpha(T,T) = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის (ე.წ. რიკატის განტოლებების) ამოხსნა გვაძლევს შესაძლებლობას გამოვსახოთ $\alpha(t,T)$ და $\beta(t,T)$ ფუნქციები ცნობილი a_1, a_2, b_1, და b_2 ფუნქციების საშუალებით, რითაც საბოლოოდ მივიღებთ ობლიგაციების ფასების ანალიზურად ჩაწერილ არაარბიტრაჟულ მოდელს.

მაგალითი 1.7. განვიხილოთ ვასიჩეკის მოდელი

$$dr(t) = (\overline{a} - \overline{b}r(t))dt + \overline{c}dW_t,$$

სადაც $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ მუდმივებია.

მაშინ

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} - \overline{b}\beta = -1, \quad \beta(T,T) = 0,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \overline{a}\beta - \frac{1}{2}c^2\beta^2, \quad \alpha(T,T) = 0.$$

ე.ი.

$$\beta(t,T) = \frac{1}{\overline{b}}\left(1 - e^{-\overline{b}(T-t)}\right),$$

$$\alpha(t,T) = \frac{\overline{c}^2}{r}\int_t^T \beta^2(s,T)ds - \overline{a}\int_t^T \beta(s,T)ds.$$

ობლიგაციის ფასის აღწერა პირდაპირი მიდგომის საფუძველზე. გადავიდეთ ზემოთ ნახსენები პირდაპირი მიდგომის აღწერაზე. ისტორიულად პირველი ამ მიმართულებით იყო ე.წ. HJM (O. Heath, R. Jarrow, A. Morton) მოდელი.

ამ მოდელის მიხედვით $B(t,T)$ ობლიგაციის ფასებს ეძებენ ან როგორც შემდეგი განტოლების ამონახსნებს

$$dB(t,T) = B(t,T)(A(t,T)dt + C(t,T)dW_t),$$

სადაც $A(T,T) = C(T,T) = 0$ და $B(T,T) = 1$, ან იწერება განტოლება ფორვარდული $f(t,T)$ განაკვეთებისათვის

$$df(t,T) = a(t,T)dt + b(t,T)dW_t \tag{1.29}$$

და, შემდეგ, თანაფარდობა

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$$

გვაძლევს ობლიგაციის ფასის მოდელს.

შევნიშნოთ, რომ რადგან ობლიგაციის $B(t,T)$ ფასებს, $f(t,T)$ ფორვარდულ განაკვეთებს და $r(t)$ მყისიერ საპროცენტო განაკვეთს შორის არსებობს ზუსტი კავშირი, ამიტომ HJM მოდელის კორექტულად აღსაწერად საჭიროა, რომ მისი კოეფიციენტები აკმაყოფილებდნენ ურთიერთკავშირის შემდეგ დამოკიდებულებებს

$$a(t,T) = \frac{\partial C(t,T)}{\partial T} C(t,T) - \frac{\partial A(t,T)}{\partial T},$$

$$b(t,T) = -\frac{\partial C(t,T)}{\partial T},$$

$$A(t,T) = r(t) - \int_t^T a(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T b(t,s)ds\right)^2$$

$$C(t,T) = -\int_t^T b(t,s)ds.$$

ცხადია, რომ (1.29)-ის გათვალისწინებით ვიღებთ

$$dr(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial T}(t,t) + a(t,t)\right) dt + b(t,t)dW_t.$$

ამის შემდეგ ხდება $B(t,T)$, $f(t,T)$ და $r(t)$-ს მომცემი მოდელების შემდგომი დეტალიზაცია, რითაც მიიღწევა სათანადო ბაზრის არაარბიტრაჟულობა და სისრულე.

მაგალითი 1.8. დავიწყოთ $f(t,T)$ ფორვარდული განაკვეთის მოდელიდან. ვთქვათ,

$$df(t,T) = a(t,T)dt + b(t,T)dW_t,$$

სადაც

$$b(t,T) \equiv \sigma > 0,$$

$$a(t,T) = \sigma^2(T-t), \quad t < T.$$

მაშინ (1.29) მიიღებს სახეს

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW_t,$$

საიდანაც
$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma W_t.$$
აქ $f(0,T)$ „დღევანდელი“ ფორვარდული განაკვეთის ცნობილი სიდიდეა.

გავიხსენოთ, რომ $r(t) = f(t,t)$. ამიტომ
$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t,$$
ანუ დიფერენციალურ ფორმაში
$$dr(t) = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t\right)dt + \sigma dW_t$$
(ეს მოდელი ჰო-ლის მოდელის კერძო შემთხვევაა).

გამოვთვალოთ $A(t,T)$ და $C(t,T)$ კოეფიციენტები. თუ შევიტანთ ურთიერთკავშირის თანაფარდობებში სიდიდეებს $a(t,T) = \sigma^2(T-t)$ და $b(t,T) \equiv \sigma$-ს, მივიღებთ,
$$A(t,T) = r(t) - \int_t^T a(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T b(t,s)ds\right)^2 = r(t),$$
$$C(t,T) = -\sigma(T-t).$$

ბაზრის არაარბიტრაჟულობის პირობა ზოგად HJM მოდელებში მარტივად ყალიბდება:
$$A(t,T) = r(t).$$

განხილულ მაგალითში, როგორც ვნახეთ, ეს პირობა შესრულებულია, ამიტომ მოდელი არაარბიტრაჟულია. ობლიგაციის ფასის პროცესი მოიცემა განტოლებით
$$dB(t,T) = B(t,T)(r(t)dt + \sigma(T-t)dW_t),$$
$$B(T,T) = 1.$$
შეიძლება ამ პროცესის ფორვარდული განაკვეთით გამოსახვაც. მართლაც, რადგან
$$\int_t^T f(t,s)ds = \int_t^T f(0,s)ds + \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t.$$
ამიტომ
$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(0,s)ds + \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t}.$$

მეორეს მხრივ, $B(t,T)$ ადვილად გამოითვლება $r(t)$-ს საშუალებითაც,

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} e^{(T-t)f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 - (T-t)r(t)}.$$

როგორც ვხედავთ, HJM მიდგომამ, სხვა გზით, მიგვიყვანა ექსპონენციალურ-აფინურ მოდელებამდე.

ევროპული კოლ და პუტ ოფციონები ობლიგაციაზე. მოვიყვანოთ ობლიგაციებზე ევროპული ტიპის კოლ და პუტ ოფციონების სამართლიანი ფასების გამოსათვლელი ფორმულები.

განვიხილოთ ბაზარი, რომელიც შედგება საბანკო ანგარიშისაგან და ობლიგაციისაგან, ე.წ. $(B,\mathcal{P})$ ბაზარი. ვთქვათ, ეს ბაზარი სრულად აღიწერება ერთადერთი ფაქტორით — მყისიერი საპროცენტო განაკვეთით $r = r(t)$, $t \geq 0$, რომელიც მოდელირდება ჰალისა და უაიტის მოდელის მიხედვით, ანუ

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)dW_t,$$

$r(0) = r_0$ — არაშემთხვევითი კონსტანტაა.

ვთქვათ, T^0, $T^0 < T$, არის ევროპული კოლ და პუტ ოფციონების აღსრულების მომენტი.

კოლ ოფციონის გადახდის ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$f_{T^0} = (B(T^0,T) - K)^+ = \max(0, B(T^0,T) - K),$$

ხოლო პუტ ოფციონისა — ტოლობით

$$f_{T^0} = (K - B(T^0,T))^+ = \max(0, K - B(T^0,T)),$$

სადაც K კონსტანტა ოფციონის შეთანხმების ფასია.

კოლ და პუტ ოფციონების განმარტება და მათთან დაკავშირებული ტერმინოლოგია დაწვრილებით მეოთხე თავშია მოცემული.

თეორემა (ჯამშიდიანი, F. Jamshidian). ზემოაღწერილ პირობებში კოლ ოფციონის ფასი მოიცემა ფორმულით

$$C^0(T^0,T) = B(0,T)N(d_+) - KB(0,T^0)N(d_-),$$

სადაც

$$d_\pm = \frac{\ln \frac{B(0,T)}{KB(0,T^0)} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T^0,T)C^2(T^0,T)}{\sigma(T^0,T)C(T^0,T)},$$

$$C(T^0,T) = \int_{T^0}^{T} \frac{g(u)}{g(T^0)} du,$$

$$\sigma(T^0,T) = \left(\int_{T^0}^{T}\left(\int_{s}^{T}\frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)du\right)^2 ds\right)^{1/2}$$

$$g(u) = e^{-\int_0^u \beta(s)ds},$$

$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქ-ციაა. პუტ ოფციონის ფასი ტოლია

$$P^0(T^0,T) = KB(0,T^0)N(-d_-) - B(0,T)N(-d_+).$$

პირველად ჯამშიდიანმა ეს ფორმულები მიიღო ჰალისა და უაიტის მოდე-ლის კერძო შემთხვევისათვის — ვასიჩეკის მოდელისათვის, რომლისთვისაც $\alpha(t) \equiv \alpha$, $\beta(t) \equiv \beta$ და $\gamma(t) \equiv \gamma$ — მუდმივებია.

ქვემომოყვანილი ლიტერატურა საშუალებას მისცემს დაინტერესებულ მკითხველს უფრო ღრმად, დეტალებში გაეცნოს ამ თავში განხილულ თემებს: [6], [7], [12], [27], [46], [52], [68], [69], [75], [80], [84], [89], [117], [138], [142], [173], [201], [206], [207], [208], [209].

2

ფინანსური აქტივების პორტფელის მართვა და ფასდადების თეორია

ფინანსური აქტივების პორტფელის მართვა

პორტფელის თეორიის წარმოშობა დაკავშირებულია ჰ. მარკოვიცის სახელთან. ამ თეორიის ძირითადი იდეები გადმოცემული იყო მის 1952 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში [111], რომელიც ეხება პორტფელის დივერსიფიკაციის პრობლემას და ოპტიმალური პორტფელის არჩევის პრინციპებს.

2.1 პორტფელის აღწერა. ამონაგები, რისკი

ფინანსური აქტივების პორტფელი არის სხვადასხვა აქტივის (ობლიგაციები, აქციები და ა.შ.) ერთობლიობა, რომლებითაც მოცემულ ბაზარზე ვაჭრობენ.

პორტფელის აღწერის უმარტივესი ხერხი მდგომარეობს მისი შემადგენელი აქტივების ჩამოთვლაში. ამისათვის კი საკმარისია დასახელდეს პორტფელში შემავალი სხვადასხვა აქტივის რაოდენობა.

ვთქვათ,

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

მოცემული ბაზრის ყველა აქტივის ჩამონათვალია. მაშინ პორტფელი მოიცემა ვექტორით

$$\pi = (z_1, \ldots, z_n),$$

სადაც z_i აღნიშნავს i-ური ტიპის აქტივის რაოდენობას პორტფელში. ამასთან, ცხადია, კმაყოფილდება საწყისი პირობა

$$W^0 = \sum_{i=1}^{n} z_i V_i^0,$$

სადაც W^0 არის საწყისი საინვესტიციო კაპიტალი, ხოლო V_i^0 — i-ური აქტივის საწყისი ფასი.

აღვწეროთ პორტფელი სხვა სახით.

აღვნიშნოთ

$$x_i = \frac{z_i V_i^0}{W^0},$$

ანუ i-ური აქტივის ფარდობითი წონა მთელ პორტფელში. მაშინ პორტფელი მოიცემა ვექტორით

$$x = (x_1, \ldots, x_n)',$$

სადაც $(\cdot)'$ ნიშნავს ვექტორ-სტრიქონის ტრანსპონირებას. ამასთან

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

ბოლო ტოლობას ძირითად შეზღუდვას უწოდებენ. მას აკმაყოფილებს პორტფელის მომცემი ნებისმიერი ვექტორი x.

შემოვიღოთ ვექტორები

$$e_k = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0 \ldots, 0), \quad k = 1, \ldots, n.$$

სხვა სიტყვებით, e_k არის პორტფელი, რომელიც მხოლოდ k-ური ტიპის ერთი აქტივისაგან შედგება. ცხადია, რომ

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i'.$$

პორტფელის შემოსავლიანობა (ამონაგები) ეწოდება სიდიდეს

$$R_\pi = \frac{W^1 - W^0}{W^0},$$

სადაც W^0 პორტფელის საწყისი, ხოლო W^1 მისი საბოლოო ფასია. გავიხსენოთ, რომ შემოსავლიანობის ცნება მჭიდროდ არის დაკავშირებული საინვესტიციო ჰორიზონტის ცნებასთან. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ საინვესტიციო ჰორიზონტი თავიდანვე ფიქსირებულია.

ვაჩვენოთ, რომ

$$R_\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i, \tag{2.1}$$

სადაც $R_i = \frac{V_i^1 - V_i^0}{V_i^0}$ არის i-ური აქტივის შემოსავლიანობა, ხოლო V_i^1 — i-ური აქტივის ტერმინალური ფასია.

მართლაც,

$$R_\pi = \frac{W^1 - W^0}{W^0} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i V_i^1 - \sum_{i=1}^n z_i V_i^0}{\sum_{i=1}^n z_i V_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i (V_i^1 - V_i^0)}{\sum_{i=1}^n z_i V_i^0} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n z_i V_i^0 \frac{V_i^1 - V_i^0}{V_i^0}}{\sum_{i=1}^n z_i V_i^0} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i V_i^0}{\sum_{i=1}^n z_i V_i^0} R_i = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

(2.1)-დან გვაქვს

$$ER_\pi = \sum_{i=1}^n x_i ER_i,$$

ანუ პორტფელის მოსალოდნელი ამონაგები მასში შემავალი აქტივების მოსალოდნელი ამონაგებების შეწონილი ჯამია.

გამოვთვალოთ პორტფელის რისკი. რისკი, როგორც ვიცით, იზომება დისპერსიით

$$VR_\pi = V\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j),$$

სადაც

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = E(R_i - ER_i)(R_j - ER_j)$$

კოვარიაციაა R_i-სა და R_j-ს შორის.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$m = (m_1, \ldots, m_n), \quad m_i = ER_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ე.წ. საშუალო (ან მოსალოდნელი) შემოსავლიანობის ვექტორი, და

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n,$$

სადაც $c_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j)$ ე.წ. შემოსავლიანობის კოვარიაციული მატრიცაა.

ცხადია, რომ

$$ER_\pi = (m, x) = \sum_{i=1}^n x_i m_i, \tag{2.2}$$

$$VR_\pi = (Cx, x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j. \tag{2.3}$$

ამ ჩანაწერებში $(\cdot, \cdot)$ ნიშნავს სკალარულ ნამრავლს, x-ით კი ვექტორ-სვეტია აღნიშნული.

შენიშვნა. ყველა ვექტორი გარდა x ვექტორისა არის ვექტორ-სტრიქონი.

(2.2) და (2.3) ფორმულებიდან ჩანს, რომ პორტფელის მოსალოდნელი შემოსავლიანობა მისი კომპონენტების წრფივი ფორმაა, ხოლო პორტფელის რისკი კი — კვადრატული ფორმა.

2.2 ოპტიმალური პორტფელის აგების ამოცანა

(2.2) და (2.3) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ პორტფელის შეფასების ორი კრიტერიუმი (ორი მახასიათებელი): წრფივი კრიტერიუმი — საშუალო შემოსავლიანობა, და კვადრატული — რისკი.

პორტფელის ოპტიმალურად აგების ამოცანა, უხეშად რომ ვთქვათ, მდგომარეობს ისეთი პორტფელის არჩევაში, რომლის პირველი მახასიათებელი იქნება „რაც შეიძლება დიდი“, ხოლო მეორე — „რაც შეიძლება მცირე“.

როგორი პორტფელების არჩევის უფლება გვაქვს? როგორია დასაშვებ პორტფელთა კლასი?

ჩვენ ვიცით, რომ x ვექტორი, რომელიც წარმოადგენს პორტფელს, აკმაყოფილებს ძირითად შეზღუდვას

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (e, x) = 1,$$

სადაც $e = (1, \dots, 1)$ ერთეულოვანი ვექტორია. რადგან $x_i = z_i V_i^0 / W^0$, ამიტომ იგი არაუარყოფითია (ვექტორულ ჩანაწერში $x \geq 0$).

მივიღეთ ე.წ. სტანდარტული პორტფელი

$$(e, x) = 1, \quad x \geq 0.$$

ვთქვათ, დასაშვებია ინვესტორის შემდეგი ქმედება (ე.წ. მოკლე გაყიდვა): ინვესტორი სესხულობს აქტივს და შემდეგ ყიდის მას. როცა აქტივის ფასი დაეცემა, ინვესტორი ყიდულობს მას და უბრუნებს მფლობელს. ვთქვათ, ინვესტორის საწყისი კაპიტალი უდრიდა W^0-ს და დამატებით იგი მოკლედ ყიდის b აქტივს W^b ფასად. მაშინ მას ექნება კაპიტალი

$$W^0 + W^b,$$

რომელიც შედგება ინვესტორის საკუთარი და ნასესხები კაპიტალისაგან. ვთქვათ, ინვესტორმა დააბანდა ეს თანხა A ბაზარზე. მაშინ

$$W^0 + W^b = W_1 + \dots + W_n, \quad W_i = z_i V_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც W_i i-ური აქტივის შეძენაზე დახარჯული თანხაა. აქედან ვღებულობთ

$$1 + \frac{W^b}{W^0} = \frac{W_1}{W^0} + \cdots + \frac{W_n}{W^0}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y_b = \frac{W^b}{W^0}$, მაშინ გვექნება

$$1 + y_b = x_1 + \cdots + x_n.$$

საბოლოოდ, თუ აღვნიშნავთ $x_{n+1} = -y_b$, მივიღებთ

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = (e, x) = 1.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც, პორტფელი აკმაყოფილებს ძირითად შეზღუდვას, მაგრამ იმ განსხვავებით, რომ ნაყიდი აქტივების, ანუ გრძელი პოზიციების წონები დადებითია, ხოლო გაყიდული (ნასესხები) აქტივების, ანუ მოკლე პოზიციების წონები უარყოფითია. შევნიშნოთ, რომ მოკლე პოზიციების რაოდენობა შეიძლება ერთზე მეტი იყოს.

პორტფელებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბაზარზე შემოღებულ მოთხოვნებს, დასაშვები პორტფელები ეწოდებათ. ისინი განსაზღვრავენ საინვესტიციო პრობლემის აღმწერ მოდელს.

2.3 საინვესტიციო პორტფელის მოდელები

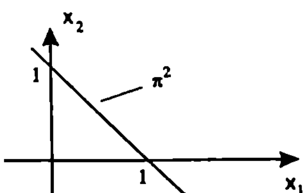
ბლეკის მოდელი. დასაშვებია ნებისმიერი პორტფელი, ანუ პორტფელზე დადებულია მხოლოდ ძირითადი შეზღუდვა

$$(e, x) = 1.$$

ასეთ პორტფელთა კლასი მოიცემა თანაფარდობით

$$\pi^n = \{x \in R^n : (e, x) = 1\}.$$

იმ ბაზრებისთვის, რომლებიც მხოლოდ ორი აქტივისგან შედგება, ეს კლასი აღიწერება წრფით, რომლის განტოლებაა $x_1 + x_2 = 1$.

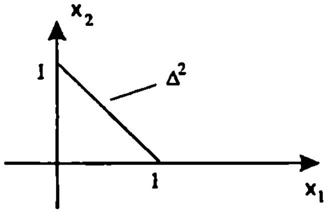


ნახ. 2.1

მარკოვიცის სტანდარტული მოდელი. ამ მოდელში დასაშვებია მხოლოდ სტანდარტული პორტფელები მოკლე პოზიციების გარეშე. ფორმალურად ეს ნიშნავს, რომ პორტფელების კლასი აღიწერება თანაფარდობით

$$\Delta^n = \{x \in R^n : (e,x) = 1,\ x \geq 0\}.$$

ორ აქტივიან ბაზარზე Δ^2 არის მონაკვეთი



ნახ. 2.2

შევნიშნოთ, რომ მარკოვიცის მოდელში საშუალო შემოსავლიანობა შემოსაზღვრულია. მართლაც, ვთქვათ,

$$\overline{m} = \max(m_1 \ldots, m_n).$$

მაშინ $ER_\pi = (m,x) \leq \overline{m}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{m}$, რაც ადვილად გამომდინარეობს იქიდან, რომ $x_i \geq 0$ ნებისმიერი i-თვის და $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

საბოლოოდ, მარკოვიცის მოდელში

$$ER_\pi \leq \max(ER_1 \ldots, ER_n).$$

ბლეკის მოდელში ეს ასე არ არის. მოკლე პოზიციების არსებობა იძლევა ნებისმიერი შემოსავლიანობის რეალიზების საშუალებას.

მართლაც, განვიხილოთ ორი აქტივი, a_1 და a_2, ისეთები, რომ $m_1 = 1$ და $m_2 = -1$. გამოვთვალოთ $x = (1+u, -u)$ პორტფელის შემოსავლიანობა. გვექნება

$$ER_\pi = 1 \cdot (1+u) + (-1) \cdot (-u) = 1 + 2u \to \infty, \quad \text{როცა} \quad u \to \infty.$$

განვიხილოთ ახლა მოდელი, რომელშიც თვით ბაზრის სტრუქტურაა შეცვლილი.

ტობინ-შარპ-ლინტნერის (ტშლ) მოდელი. ამ მოდელით მოითხოვება ე.წ. ურისკო აქტივის არსებობა მოცემულ ბაზარზე.

აქტივს ჰქვია ურისკო, თუ მისი შემოსავლიანობა მუდმივია $R_0 = r_0$. ამიტომ

$$\begin{aligned} &ER_0 = r_0,\\ &VR_0 = 0,\\ &\mathrm{cov}(R_0, R_i) = 0, \quad \text{ნებისმიერი } i\text{-სთვის}. \end{aligned}$$

გშლ-მოდელში დაშვებულია, რომ ბაზარზე მხოლოდ ერთი აქტივია ურისკო, ხოლო ყველა დანარჩენი რისკიანია, ანუ ისეთია, რომ $VR_i > 0$, ნებისმიერი i-სთვის, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ვაჩვენოთ, რომ ამ ბაზარზე ნებისმიერი $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ პორტფელი, სადაც $x_0 \neq 1$, შეიძლება დავშალოთ ურისკო და წმინდა რისკიანი პორტფელების წრფივ კომბინაციად. მართლაც,

$$x = x_0 e_0 + (1 - x_0) y_0.$$

აქ $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ ურისკო პორტფელია, ხოლო $y_0 = \left(0, \frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}\right)$ — წმინდა რისკიანი პორტფელი.

გშლ-მოდელს შევხვდებით ქვემოთ ე.წ. CAPM-ის განხილვის დროს.

2.4 ოპტიმალური პორტფელის არჩევის მეთოდები

ოპტიმალური პორტფელის არჩევის ამოცანას ართულებს ის გარემოება, რომ გვაქვს ორი კრიტერიუმი — საშუალო შემოსავლიანობა და რისკი.

არსებობს ამ პრობლემის გამოკვლევის რამოდენიმე მიდგომა.

პირველი მიდგომის შესაბამისად უარს ამბობენ საუკეთესო პორტფელის არჩევაზე (ე.ი. ისეთი პორტფელისა, რომელიც ორივე მახასიათებლით უკეთესია ნებისმიერ სხვა პორტფელზე), რადგან, შესაძლოა, ასეთი პორტფელი არც არსებობდეს.

ამიტომ ეძებენ ე.წ. ეფექტურ, ანუ გაუუმჯობესებად პორტფელთა სიმრავლეს.

მეორე მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ ერთ-ერთ კრიტერიუმს გამოაცხადებენ მთავარ კრიტერიუმად, ხოლო მეორე გამოიყენება კრიტერიალური შეზღუდვების მოსაცემად. მაგალითად, თუ მთავარ კრიტერიუმად რისკი გამოცხადდა, მაშინ ისმის მისი მინიმიზაციის საკითხი იმ პირობით, რომ საშუალო შემოსავლიანობა არ იქნება გარკვეულ დონეზე ნაკლები. სწორედ ეს პირობაა კრიტერიალური შეზღუდვა. ასეთ დასმაში ამოცანას შეიძლება ჰქონდეს ცალსახა ამოხსნა.

მესამე მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემული ორი კრიტერიუმიდან ადგენენ რაიმე სუპერკრიტერიუმს, მაგალითად, არსებული კრიტერიუმების ცალსახა ფუნქციის სახით. ეს შეიძლება იყოს არსებული კრიტერიუმების წრფივი ფუნქცია გარკვეული წონებით. ასეთ ფუნქციას ეკონომიკურ ლიტერატურაში სარგებლიანობის ფუნქციას უწოდებენ.

სარგებლიანობის ფუნქცია, მაგალითად, შეიძლება განვმარტოთ ტოლობით

$$u(x) = Ex - \frac{\theta}{2} Vx, \tag{2.4}$$

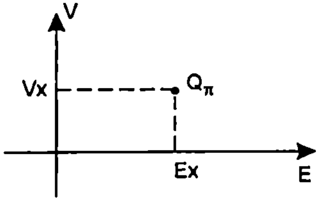
სადაც θ დადებითი რიცხვია, Ex და Vx, შესაბამისად, x პორტფელის საშუალო შემოსავლიანობა და რისკია.

ამ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება. თუ შემოსავლიანობა იზრდება რისკის მუდმივობის პირობაში, ან რისკი მცირდება შემოსავლიანობის მუდმივობის დაცვით, მაშინ ეს ფუნქცია იზრდება (რაც ეთანხმება სიტყვა „სარგებლიანობის" შინაარსს). იმ შემთხვევაში, თუ ორივე კრიტერიუმი იცვლება u-ს ზრდადობა-კლებადობა დამოკიდებულია Ex და Vx სიდიდეებს შორის თანაფარდობაზე. პარამეტრი θ ასახავს სწორედ იმას, თუ რომელ კრიტერიუმს ანიჭებს უპირატესობას ინვესტორი. მაგალითად, რაც უფრო პატარა მნიშვნელობები აქვს θ პარამეტრს, მით უფრო დიდ რისკზეა თანახმა ინვესტორი მოცემული შემოსავლიანობის მისაღწევად, ხოლო რაც უფრო დიდია θ, მით უფრო ძლიერად გაურბის ინვესტორი რისკს.

გადავიდეთ თითოეული მიდგომით შემოთავაზებული გეგმის რეალიზაციაზე.

2.5 ეფექტური პორტფელები

π პორტფელის (ან რაც იგივეა, x პორტფელის) შეუსაბამოთ ვუწოდოთ რიცხვთა წყვილს (Ex, Vx), და გამოვსახოთ ის Q_π წერტილით (E, V) სიბრტყეზე.



ნახ. 2.3

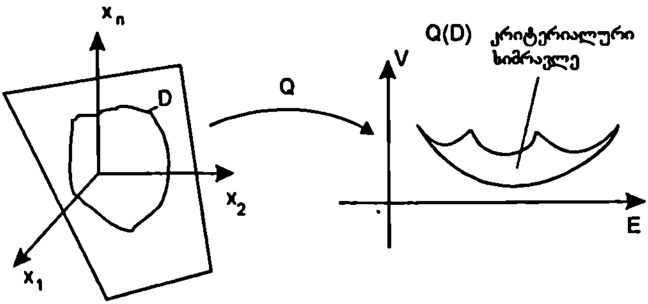
(E, V) სიბრტყეს კრიტერიალური სიბრტყე ჰქვია. განვიხილოთ ასახვა

$$Q : x \to Qx = (Ex, Vx).$$

ამ ასახვის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს დასაშვებ პორტფელთა სიმრავლე D. ამ სიმრავლის სახეს, $Q(D)$-ს, ჰქვია კრიტერიალური სიმრავლე. ამრიგად,

$$Q(D) = \{Qx : x \in D\}.$$

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს შემდეგს



ნახ. 2.4

კრიტერიალური სიმრავლისა და მისი ქვესიმრავლეების აღწერას დიდი მნიშვნელობა აქვს, რადგან, როგორც დავინახავთ, ინვესტორისათვის მნიშვნელოვანია ის პორტფელები, რომელთა შეფასებები კრიტერიალური სიმრავლის საზღვარზე მდებარეობს.

გავაიგივოთ ისეთი პორტფელები, რომელთა შესაბამისი შეფასებები ერთმანეთის ტოლია. პორტფელთა მიღებულ კლასს ისევ პორტფელი ვუწოდოთ და გავაიგივოთ ის თავის შეფასებასთან.

გამოვრიცხოთ ტრივიალური შემთხვევა, როცა კრიტერიალური სიმრავლე ერთი წერტილისგან შედგება.

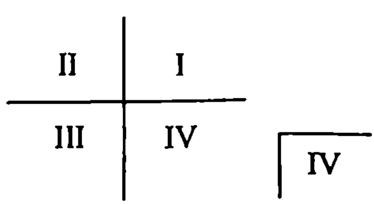
პორტფელების სიმრავლეში შემოვიღოთ დალაგების ცნება. ვიტყვით, რომ π_1 პორტფელი ჯობნის π_2 პორტფელს, $\pi_1 > \pi_2$, თუ $Ex_1 \geq Ex_2$ და ამავე დროს $Vx_1 \leq Vx_2$, თანაც ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია.

სხვა სიტყვებით, $\pi_1 > \pi_2$, თუ π_1 პორტფელს ერთი მახასიათებელი მაინც უკეთესი აქვს, ვიდრე π_2 პორტფელს. ნებისმიერი ორი პორტფელი შეიძლება არ იყოს ერთმანეთთან სადარი.

π_0 პორტფელს ჰქვია ეფექტური, თუ D-ში არ არსებობს ისეთი π პორტფელი, რომელიც ჯობნის π_0-ს.

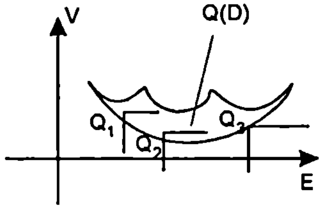
როგორ ვიპოვოთ ეფექტური პორტფელები კრიტერიალური სიმრავლის ცნებაზე დაყრდნობით?

ამისთვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად. განვიხილოთ სიბრტყის IV კვადრანტი



ნახ. 2.5

და კრიტერიალური სიმრავლიდან გამოვყოთ ისეთი წერტილი, რომ, თუ ავიღებთ IV კვადრანტს სათავით ამ წერტილში, მაშინ ამ კვადრანტისა და კრიტერიალური სიმრავლის თანაკვეთაში მხოლოდ ეს წერტილი აღმოჩნდება.



ნახ. 2.6

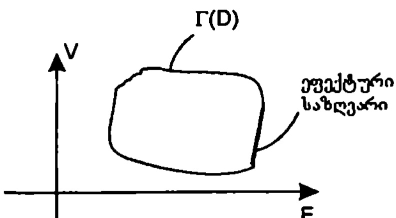
ნახატზე მოცემული წერტილებიდან ასეთი მხოლოდ Q_3 წერტილია.

ასეთი წერტილების ერთობლიობას ეფექტურ პორტფელთა სიმრავლე ეწოდება. ეფექტური პორტფელების შეფასებები შეადგენს კრიტერიალური სიმრავლის საზღვარს. მას ეფექტური საზღვარი ჰქვია.

ნებისმიერ პორტფელს ეფექტური სიმრავლიდან აქვს შემდეგი თვისება: საშუალო შემოსავლიანობის მოცემული დონის დროს გააჩნია მინიმალური რისკი და ამავე დროს, რისკის მოცემული დონისათვის — მაქსიმალური საშუალო შემოსავლიანობა.

შევნიშნოთ, რომ ეფექტური პორტფელების სიმრავლეს გააჩნია შემდეგი თვისება. ნებისმიერი დასაშვები π პორტფელისათვის მოიძებნება ეფექტური პორტფელი π^*, რომელიც მას ჯობნის, $\pi^* > \pi$. მაგრამ აქედან სრულებითაც არ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ეფექტური პორტფელი ჯობნის სხვა ნებისმიერ პორტფელს. პორტფელები შეიძლება არ იყოს სადარი.

ბევრ შემთხვევაში კრიტერიალური სიმრავლის საზღვარი არის წირი სიბრტყეზე, ხოლო ეფექტური საზღვარი არის ამ წირის ნაწილი (პარეტოს წირი).



ნახ. 2.7

ეფექტური საზღვრის მოძებნა საუკეთესო პორტფელის არჩევის პრობლემის გადაჭრის პირველი ეტაპია.

მარკოვიცის მიდგომა ეფექტური საზღვრის ასაგებად მდგომარეობს იმაში, რომ მან ჯერ ააგო ე.წ. მინიმალური საზღვარი, ანუ ისეთი პორტფელები, რომელთაც მინიმალური რისკი აქვთ საშუალო შემოსავლიანობის მოცემული დონის დროს. ეფექტური პორტფელების სიმრავლე მინიმალური საზღვრის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს.

მინიმალური საზღვრის საპოვნელად განიხილავენ Vx-ის მინიმიზაციის ამოცანას იმ შეზღუდვაში, რომ $Ex = E$. მარკოვიცმა აჩვენა, რომ მინიმალური საზღვრის აღწერა შეიძლება უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით.

იმისათვის, რომ თავი ავარიდოთ მათემატიკურ სირთულეებს, განვიხილოთ დაწვრილებით ორი აქტივისგან შედგენილი ბაზრის მოდელი. ზოგადი შემთხვევა პრინციპულად არ განსხვავდება ამ შემთხვევისაგან.

2.6 ორი აქტივისგან შედგენილი ბაზრის მოდელები

განვიხილოთ ბაზარი, რომელიც ორი აქტივისგან შედგება

$$A = \{a_1, a_2\}.$$

ბაზრის პარამეტრები მოიცემა მოსალოდნელი შემოსავლიანობის ვექტორით

$$m = (m_1, m_2)$$

(ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება დავუშვათ, რომ $m_1 < m_2$) და შემოსავლიანობის კოვარიაციული მატრიცით

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

ამასთან, $c_{11} = \sigma_1^2$, $c_{22} = \sigma_2^2$, $c_{12} = c_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$, სადაც σ_1, σ_2 შემოსავლიანობის სტანდარტული გადახრებია (ე.ი. $\sigma_i = \sqrt{VR_i}$), ხოლო ρ კორელაციის კოეფიციენტია

$$\rho \doteq \frac{\operatorname{cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

ბლეკის მოდელი. პორტფელი აღიწერება წყვილით

$$x = (x_1, x_2),$$

სადაც $x_1 + x_2 = 1$. აღვნიშნოთ $x_1 = t$. მაშინ $x_2 = 1 - t$. ამიტომ $x = (t, 1-t)$, სადაც $t \in R_1$. გამოვთვალოთ პორტფელის შემოსავლიანობა და რისკი.

$$E_t = (m, x_t) = m_1 t + m_2(1-t) = m_2 + (m_1 - m_2)t, \qquad (2.5)$$

$$V_t = (Cx_t, x_t) = c_{11}t^2 + 2c_{12}t(1-t) + c_{22}(1-t)^2. \tag{2.6}$$

ამ ტოლობებით მოიცემა (E, V) სიბრტყეზე პარამეტრულად განსაზღვრული წირი

$$\begin{cases} E = E_t \\ V = V_t, \end{cases}$$

რომელიც გადის Q_1 და Q_2 წერტილებზე (a_1 და a_2 აქტივების შესაბამის შეფასებებზე).

გადავწეროთ $V = V_t$ წირი შემდეგნაირად

$$V_t = (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)t^2 + 2(\sigma_1\sigma_2\rho - \sigma_2^2)t + \sigma_2^2$$

(აქ გამოვიყენეთ σ_i-ს, $i = 1, 2$ განმარტება). ჩვენ ვხედავთ, რომ პორტფელის რისკი დამოკიდებულია არა მხოლოდ თითოეული აქტივის რისკზე, არამედ მათ შორის კორელაციაზეც, ურთიერთკავშირზე.

განვიხილოთ თავდაპირველად ის შემთხვევები, როცა $\rho = 1, 0$ ან -1. ამის შემდეგ აღვწეროთ ზოგადი შემთხვევა.

$\rho = 1$. ამ შემთხვევაში

$$V_t = (\sigma_1 t + \sigma_2(1-t))^2 = (\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)t)^2.$$

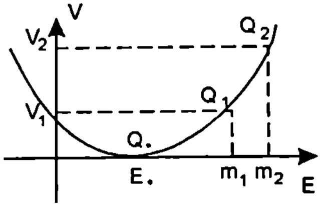
(2.5) ფორმულიდან მივიღებთ,

$$t = \frac{E_t - m_2}{m_1 - m_2}. \tag{2.7}$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება წინა ფორმულაში. გვექნება

$$V_t = V(E_t) = \left(\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{m_1 - m_2}(E_t - m_2)\right)^2 \tag{2.8}$$

ამრიგად, კრიტერიალური სიმრავლე $Q(\pi^2)$ (არაგადაგვარების პირობაში, ე.ი., როცა $m_1 \neq m_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$) არის პარაბოლა (E, V) სიბრტყეზე.



ნახ. 2.8

იმის გამო, რომ დასაშვებია მოკლე პოზიციები, შესაძლებელია რისკის სრული ელიმინირება.

მართლაც, განვიხილოთ პორტფელი

$$x_* = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\right).$$

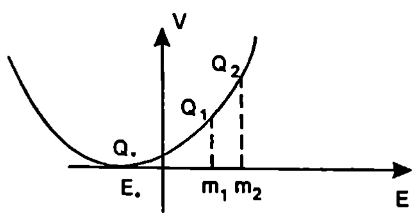
მას შეესაბამება პარაბოლის წვერო $Q_* = (E_*, 0)$, სადაც

$$E_* = \frac{m_1\sigma_2 - m_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმას, რომ რისკის სრული ელიმინირება მიიღწევა მოკლე პოზიციების ხარჯზე. მართლაც, $\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}$ და $\frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2}$ რიცხვებს შორის ერთ-ერთი აუცილებლად უარყოფითია და ე.ი. x_* პორტფელი აუცილებლად შეიცავს მოკლე პოზიციას. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ იმ შემთხვევაში, როცა

$$1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \frac{m_2}{m_1},$$

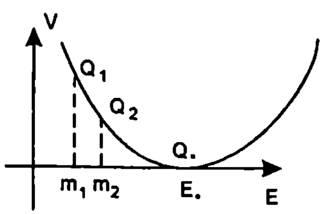
E_* უარყოფითია



ნახ. 2.9

სხვა სიტყვებით, რისკის სრული ელიმინირება მოხერხდა გარანტირებული დანაკარგის (უარყოფითი ამონაგების) მიღების ხარჯზე.

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ასეთი სურათიც შეგვხვდეს



ნახ. 2.10

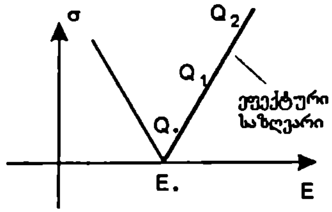
როგორც ვხედავთ, Q_* პორტფელის შემოსავლიანობა მეტია თითოეული აქტივის შემოსავლიანობაზე.

მოსახერხებელია კრიტერიალური სიმრავლის (E, σ) სიბრტყეზე გამოსახვა, სადაც $\sigma = \sqrt{V}$.

(2.7) და (2.8) ფორმულებიდან გვაქვს

$$\sigma_t = \sqrt{V_t} = |\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)t|.$$

ამ შემთხვევაში კრიტერიალურ სიმრავლეს აქვს შემდეგი სახე



ნახ. 2.11

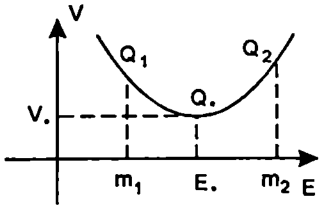
ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში მინიმალური საზღვარი ემთხვევა კრიტერიალურ სიმრავლეს, ეფექტური საზღვარი კი არის პარაბოლას მარჯვენა შტო (E, V) სიბრტყეზე ან მარჯვენა სხივი (E, σ) სიბრტყეზე.

$\rho = 0$. ჩვენ არ შევუდგებით ამ შემთხვევის დაწვრილებით ანალიზს. ეს ანალიზი წინა შემთხვევის ანალოგიურად შეიძლება ჩატარდეს.

შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ, თუ $\rho = 0$, მაშინ

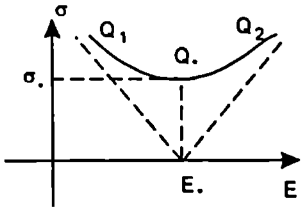
$$V_* < \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2),$$

სადაც V_* π_* პორტფელის შესაბამისი რისკია (π_* არის მინიმალური რისკის მქონე პორტფელი). ამასთან, ადვილი საჩვენებელია, რომ Q_* მდებარეობს Q_1Q_2 რკალის შიგნით.



ნახ. 2.12

(E, σ) სიბრტყეზე კრიტერიალური სიმრავლე ჰიპერბოლაა



ნახ. 2.13

ამ შემთხვევაშიც ეფექტური სიმრავლე არის პარაბოლის ან ჰიპერბოლის მარჯვენა შტო.

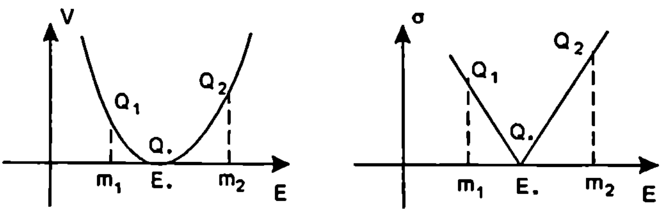
$\rho = -1$. ამ შემთხვევაში

$$E_t = m_2 + (m_1 - m_2)t,$$
$$V_t = \sigma_t^2 = (\sigma_1 t - (1-t)\sigma_2)^2,$$
$$\sigma_t = |\sigma_1 t - (1-t)\sigma_2|.$$

ადვილი აღმოსაჩენია, რომ $t_\bullet$, რომელიც შეესაბამება პორტფელს მინიმალური რისკით, უდრის

$$t_\bullet = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

ამიტომ $0 < t_\bullet < 1$ და $Q_\bullet = (E_\bullet, 0)$ მდებარეობს Q_1Q_2 რკალის შიგნით, ხოლო $E_\bullet \in [m_1, m_2]$. სხვა მხრივ ეს შემთხვევა გავს $\rho = 1$ შემთხვევას.



ნახ. 2.14

ნახატები გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაშიც ხერხდება რისკის სრული ელიმინირება, ამასთან მხოლოდ გრძელი პოზიციების გამოყენებით. ეფექტური სიმრავლე აქაც შესაბამისი წირების მარჯვენა შტოებია.

აღვნიშნოთ მოკლედ ის განსხვავება, რომელიც წარმოიქმნება მარკოვიცის სტანდარტული მოდელის განხილვის დროს.

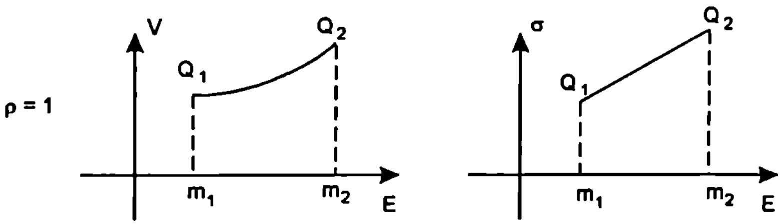
გავიხსენოთ, რომ ამ მოდელში დასაშვებია ისეთი პორტფელები, რომლებისთვისაც

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

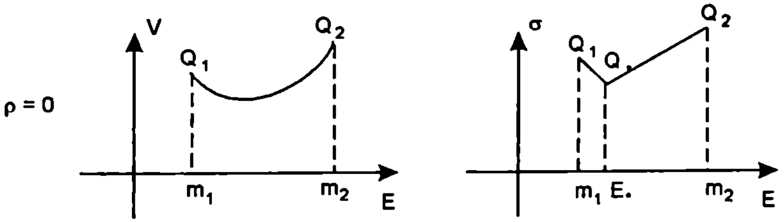
ანუ ისეთი პორტფელები, რომლებიც არ შეიცავს მოკლე პოზიციებს. ანალიზურად ეს მოთხოვნა ასე გამოისახება: დასაშვებია პარამეტრული პორტფელი

$$x = (t, 1 - t)$$

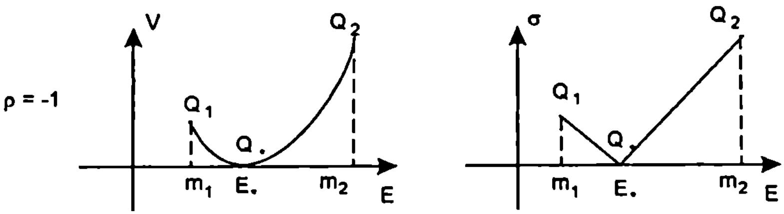
იმ პირობით, რომ $0 \leq t \leq 1$. ზემოთ განხილულ სამ შემთხვევას, $\rho = 1, 0$ ან -1, აქ შეესაბამება შემდეგი ნახატები



ნახ. 2.15

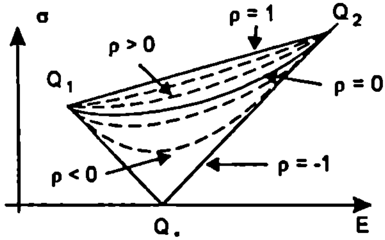


ნახ. 2.16



ნახ. 2.17

(E, σ) სიბრტყის გამოყენება საშუალებას იძლევა გამოესახოთ კრიტერიალურ სიმრავლეთა ოჯახი ჰიპერბოლების ნაწილებით, რომლებიც სრულად ავსებენ $Q_1 Q_* Q_2$ სამკუთხედს.



ნახ. 2.18

იმისათვის, რომ მივიღოთ პორტფელი, რომლის რისკი უფრო მცირე იქნება, ვიდრე პორტფელში შემავალი თითოეული აქტივის რისკია, აუცილებელია შემდეგი პირობის შესრულება

$$\rho < \min\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right).$$

ამ შემთხვევაში პორტფელი აუცილებლად იქნება უკეთესი, ვიდრე ისეთი პორტფელი, რომელიც შედგება მხოლოდ ერთი აქტივისაგან, რომლის შემოსავლიანობაც ნაკლებია, ვიდრე მეორე აქტივის შემოსავლიანობა (მაგალითად, ეს აქტივია a_1, თუ $m_1 < m_2$).

ამრიგად, როგორც ბლეკის, ისე მარკოვიცის მოდელებში შემოსავლიანობების უარყოფითი კორელაციის შემთხვევაში, შეიძლება ისეთი ოპტიმალური π_* პორტფელის შედგენა, რომელიც ჯობნის ერთ-ერთ აქტივს და არ არის უარესი, ვიდრე მეორე აქტივი. π_*-ს ასაგებად t_* უნდა ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$\frac{\partial}{\partial t} V_t = 0$$

და შევადგინოთ პორტფელი $x_* = (t_*, 1 - t_*)$. მარკოვიცის მოდელის შემთხვევაში დამატებით უნდა შევამოწმოთ, რომ $0 \leq t_* \leq 1$. წინააღმდეგ შემთხვევაში π_*-ს როლს ითამაშებს ერთ-ერთი აქტივი.

ტობინ-შარპ-ლინტნერის მოდელი. როგორც ვიცით, ეს მოდელი გულისხმობს ერთი ურისკო აქტივის არსებობას. ასეთ შემთხვევაში, წინა პუნქტში მოყვანილი მსჯელობა არ არის ყოველთვის სამართლიანი, რადგან ორივე აქტივის შემოსავლიანობა არაგადაგვარებული შემთხვევითი სიდიდე იყო. ამიტომ გადაგვარებულ შემთხვევებს ცალკე იხილავენ.

ვთქვათ, a_1 აქტივი რისკიანია, ხოლო a_2 — ურისკო. ეს ნიშნავს, რომ კოვარიაციის მატრიცას აქვს სპეციალური სახე

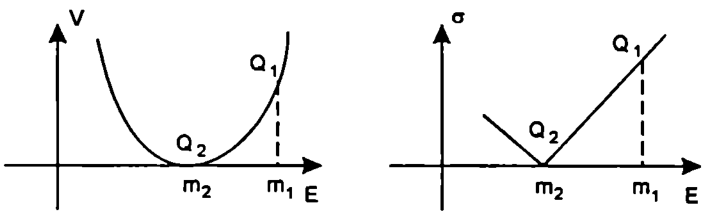
$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

სადაც $\sigma_1^2 > 0$.

ბლეკის მოდელი ურისკო აქტივით. ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში $x = (t, 1-t)$, $t \in R_1$,

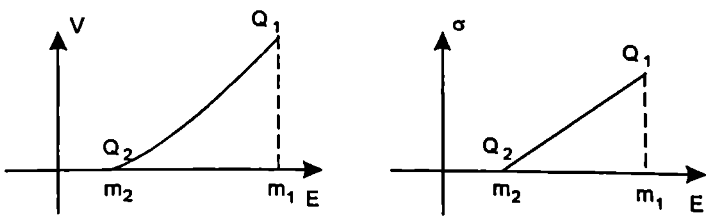
$$\begin{aligned} E_t &= m_2 + (m_1 - m_2)t, \\ V_t &= \sigma_t^2 = \sigma_1^2 t^2, \\ \sigma_t &= |\sigma_1 t|. \end{aligned}$$

$t = 0$ მნიშვნელობას შეესაბამება პორტფელი $(0, 1)$, ანუ ურისკო აქტივი შეფასებით $Q_2 = (m_2, 0)$. ამიტომ პორტფელი π_*, რომელიც მხოლოდ მეორე აქტივისგან შედგება, თამაშობს უმცირესი რისკის მქონე პორტფელის როლს. კრიტერიალური სიმრავლეებია



ნახ. 2.19

მარკოვიცის მოდელი ურისკო აქტივით. განსხვავება წინა შემთხვევისაგან მდგომარეობს, როგორც ვიცით, მოთხოვნაში $0 \leq t \leq 1$. მოვიყვანოთ კრიტერიალური სიმრავლეები.



ნახ. 2.20

2.7 მრავალგანზომილებიანი მოდელები

ეთქვათ, ბაზარი შედგება n აქტივისაგან

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

შემოსავლიანობის ვექტორი

$$m = (m_1, \ldots, m_n)$$

და კოვარიაციის მატრიცა

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$$

გვაძლევს ბაზრის პარამეტრებს.

ჩვენ ვიცით, რომ

$$Ex = (m, x) = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$
$$Vx = (Cx, x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j.$$

ბლეკის მოდელი. დასაშვები პორტფელების კლასს ედება ერთადერთი შეზღუდვა

$$(e, x) = \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

ვიპოვოთ თავდაპირველად მინიმალური რისკის მქონე π_* პორტფელი. ამისათვის უნდა გადავჭრათ ოპტიმიზაციის პრობლემა

$$Vx \to \min$$

პირობაში

$$(e, x) = 1.$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის მამრავლების კლასიკური მეთოდი:

$$\begin{gathered} \operatorname{grad}(Vx - \lambda(e, x)) = 0, \\ (e, x) = 1, \end{gathered} \tag{2.9}$$

სადაც grad (გრადიენტი) კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი ვექტორია (გავიხსენოთ, რომ, თუ $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, მაშინ $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$).

(2.9)-დან მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\begin{gathered} Cx - \lambda e = 0, \\ (e, x) = 1, \end{gathered}$$

და, თუ დავუშვებთ, რომ C მატრიცა არაგადაგვარებულია, და ამიტომ შებრუნებადია, მივიღებთ

$$x_* = \lambda C^{-1} e',$$

სადაც C^{-1} C-ს შებრუნებული მატრიცაა. ჩავსვათ ეს გამოსახულება მეორე ტოლობაში. მივიღებთ

$$\lambda(e, C^{-1}e') = 1,$$

ანუ

$$\lambda_* = (e, C^{-1}e')^{-1}.$$

ამიტომ მინიმალური რისკის მქონე პორტფელი x_* მოიცემა ტოლობით

$$x_* = \lambda_* C^{-1}e' = \frac{C^{-1}e'}{(e, C^{-1}e')}.$$

ამასთან, $V_* = (Cx_*, x_*) = \lambda_*$ (V_* რისკის მინიმალური მნიშვნელობაა). მაგალითად, ორგანზომილებიან შემთხვევაში

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{სადაც} \quad \Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

და ამიტომ

$$V_* = \frac{1}{(e, C^{-1}e')} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} - 2c_{12}} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1-\rho)}.$$

როგორ ვიპოვოთ მინიმალური საზღვარი? ამისთვის უნდა ამოვხსნათ ოპტიმიზაციის პრობლემა

$$Vx \to \min$$

პირობაში

$$(e, x) = 1, \quad (m, x) = E \quad (\text{ფიქსირებულია}).$$

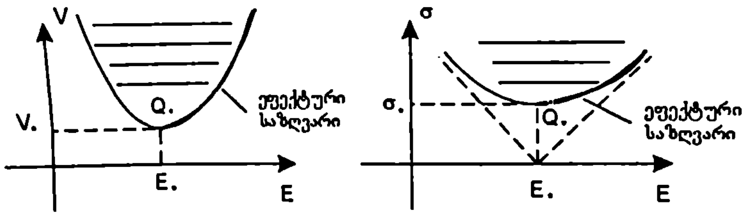
ამ პრობლემის ამოხსნით ავაგებთ პორტფელს, რომელსაც ექნება მინიმალური რისკი იმ პორტფელებს შორის, რომელთა შემოსავლიანობა წინასწარ მოცემულია — სასურველი შემოსავლიანობა ფიქსირებულია.

ლაგრანჟის მეთოდი ამ შემთხვევაში გვაძლევს

$$\begin{aligned} &Cx - \lambda e - \mu m = 0, \\ &(e, x) = 1, \quad (m, x) = E, \end{aligned}$$

სადაც λ და μ ლაგრანჟის მამრავლებია. ჩვენ არ შევუდგებით ამ ამოცანის დაწვრილებით ამოხსნას, იგი სტანდარტულია. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ კრიტერიალური სიმრავლე პარაბოლაა, რომლის წვერო მოთავსებულია წერტილში $Q_* = (E_*, V_*)$, სადაც

$$E_* = (m, x_*) = \frac{(m, C^{-1}e')}{(e, C^{-1}e')}, \quad V_* = \frac{1}{(e, C^{-1}e')}.$$



ნახ. 2.21

კრიტერიალური სიმრავლე სიბრტყის დაშტრიხული ნაწილია, ეფექტური საზღვარი პარაბოლის (ან ჰიპერბოლის) მარჯვენა შტოა (ნახ. 2.21).

შინაარსობრივი დასკვნები ამ ზოგად შემთხვევაშიც ზუსტად იგივეა, როგორიც იყო ორგანზომილებიან შემთხვევაში.

2.8 ბლეკის მოდელი ურისკო აქტივით (ტობინ-შარპლინტნერის მოდელი)

ვთქვათ, a_0 ურისკო აქტივია ($\sigma_0 = 0$), ხოლო დანარჩენი აქტივები $a_1 \ldots, a_n$ რისკიანია, ე.ი. $\sigma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. მაშინ კოვარიაციულ მატრიცას ექნება სახე

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & C & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

სადაც C არაგადაგვარებული მატრიცაა.

ნებისმიერი პორტფელი $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)'$ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$x = x_0 e_0' + (1 - x_0) u',$$

სადაც

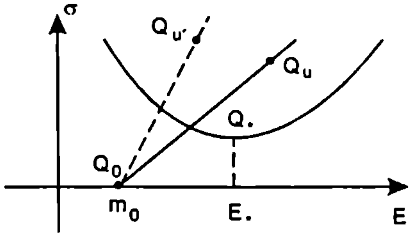
$$e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \quad u = \frac{1}{1 - x_0}(0, x_1, \ldots, x_n).$$

პირველი პორტფელი წმინდა ურისკოა (იგი მხოლოდ ურისკო აქტივისაგან შედგება); ხოლო მეორე პორტფელი წმინდა რისკიანია. თუ განვიხილავთ ცალკე წმინდა რისკიან პორტფელს, მივალთ ბლეკის n-განზომილებიან მოდელამდე.

ავაგოთ (E, σ) სიბრტყეზე კრიტერიალური სიმრავლე, რომელიც რისკიან აქტივებს შეესაბამება. ვთქვათ,

$$Q_0 = (m_0, 0)$$

ურისკო აქტივის შეფასებაა. მივიღებთ ნახატს



ნახ. 2.22

ამ ნახატზე $m_0 < E_*$-ზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეფექტურ ბაზარზე ურისკო აქტივის შემოსავლიანობა შეუძლებელია იყოს უფრო დიდი ვიდრე საუკეთესო რისკიანი პორტფელის შემოსავლიანობა.

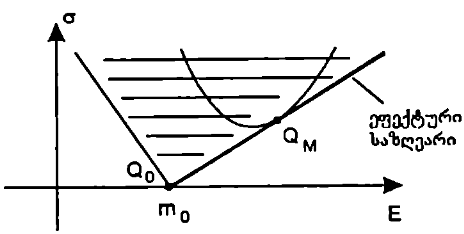
თუ $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ და $u = (0, x_1, \ldots, x_n)$, მაშინ მათ წრფივ კომბინაციას

$$x_t = (1-t)e_0' + tu'$$

აქვს შეფასებები

$$\begin{aligned} Ex_t &= m_0' + (E(u') - m_0')t, \\ Vx_t &= t^2 Vu, \\ \sigma x_t &= \sigma|u||t|. \end{aligned}$$

(E, σ) კრიტერიალურ სიბრტყეზე x_t-ს შეესაბამება სხივი, რომელიც აერთებს ურისკო აქტივის შეფასებას, Q_0-ს, რისკიანი u პორტფელის შეფასებასთან, Q_u-სთან. u პარამეტრის ცვლით მივიღებთ სხივების სიმრავლეს, რომელიც ამ შემთხვევაში სწორედ კრიტერიალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. შეიძლება იმის ჩვენება, რომ კრიტერიალური სიმრავლე გეომეტრიულად მოიცემა დაშტრიხული სიბრტყის ნაწილით (იხ. ნახ. 2.23).



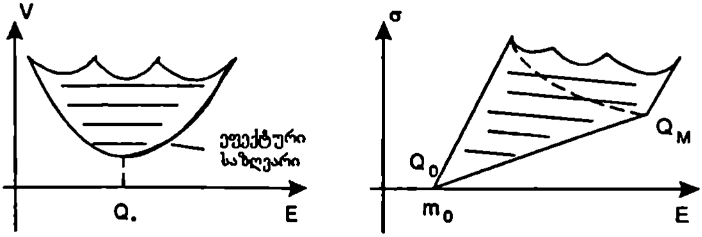
ნახ. 2.23

აქ მარჯვენა სხივი ჰიპერბოლის მხებია, ხოლო მარცხენა მისი ასიმპტოტის პარალელურია.

პორტფელი π_M, რომლის შეფასებაა Q_M, ჰიპერბოლისა და სასაზღვრო სხივის გადაკვეთაზე მდებარეობს. იგი გადამწყვეტ როლს თამაშობს

CAPM-ის აგების დროს. ეფექტური საზღვარი მოიცემა (m_0, Q_M) სხივით. ამიტომ ყოველი ეფექტური პორტფელი არის ურისკო a_0 აქტივისა და წმინდა რისკიანი π_M პორტფელის წრფივი კომბინაცია.

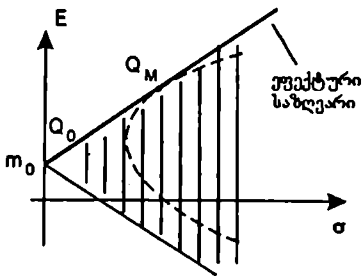
მარკოვიცის მოდელისათვის შესაბამის ნახატებს აქვს შემდეგი სახე.



ნახ. 2.24

ტრადიციულად, ეკონომიკურ ლიტერატურაში კრიტერიალური სიბრტყე მოიცემა როგორც (σ, E) სიბრტყე.

ასეთ შემთხვევაში, მაგალითად, ბლეკის მოდელისათვის ურისკო აქტივით, მივიღებთ შემდეგ სურათს.



ნახ. 2.25

2.9 ოპტიმალური პორტფელის არჩევის პრობლემა

ეფექტური პორტფელების აგება დაიყვანება, როგორც ვნახეთ, ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანების გადაწყვეტაზე:

$$Vx \to \min,$$
$$(e, x) = 1, \quad (m, x) = E$$

ბლეკის მოდელისათვის და

$$
\begin{gathered}
Vx \to \min, \\
(e,x) = 1, \quad (m,x) = E, \quad x \geq 0
\end{gathered}
$$

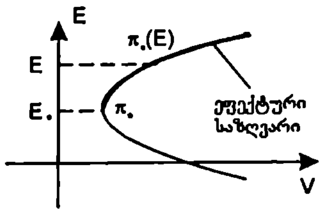
ამოცანის გადაწყვეტაზე მარკოვიცის მოდელისათვის.

ამ პრობლემების ამონახსნს წარმოადგენს პორტფელი $\pi_*(E)$, რომელსაც მოცემული შემოსავლიანობის E დონისთვის მინიმალური რისკი აქვს.

იმისათვის, რომ ეს პორტფელი ეფექტური იყოს აუცილებელია, რომ

$$E \geq E_*,$$

სადაც E_* არის მინიმალური რისკის მქონე π_* პორტფელის შესაბამისი შემოსავლიანობა (ყველგან, რასაკვირველია, საშუალო შემოსავლიანობაზეა ლაპარაკი).



ნახ. 2.26

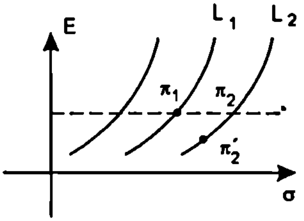
ეფექტური პორტფელების სიმრავლის აგებამ შეავიწროვა ოპტიმალური პორტფელის ამორჩევის არე. მაგრამ ის, ცხადია, არ გვაძლევს ასეთი პორტფელის ცალსახად აგების შესაძლებლობას.

საბოლოო ჯამში ინვესტორმა ხომ ერთადერთი ისეთი პორტფელი უნდა აირჩიოს, რომელიც მისი აზრით საუკეთესოა. ამ ამოცანის გადაჭრა შესაძლებელია მხოლოდ გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში.

არჩევის თეორიაში განიხილავენ ასეთ მიდგომას: თვლიან, რომ ინვესტორს ყოველთვის შეუძლია გააკეთოს თავისი არჩევანი. იგი აცხადებს, რომ პორტფელების ნებისმიერი წყვილი, (π_1, π_2), ან განურჩევადი პორტფელებისაგან შედგება (ჩანაწერი $\pi_1 \approx \pi_2$), ან ერთ-ერთი პორტფელი თავისი საინვესტიციო მახასიათებლებით ჯობნის მეორეს (ჩანაწერი $\pi_1 > \pi_2$). როგორც ვხედავთ, ამ თეორიის ფარგლებში, ნებისმიერი ორი პორტფელი შედარებადია. გავიხსენოთ, რომ როდესაც ჩვენ ვადარებდით პორტფელებს ორი კრიტერიუმით, E-თი და V-თი, მაშინ ერთი პორტფელი ჯობნიდა მეორეს, თუ პირველის ორივე მახასიათებელი უკეთესი იყო, ვიდრე მეორე პორტფელის ორივე მახასიათებელი. ამიტომ პორტფელებს შორის არსებობდა ისეთებიც, რომელთა შედარება შეუძლებელი იყო (ერთს ჰქონდა დიდი შემოსავლიანობა, მაგრამ, ამავე დროს, დიდი რისკიც, მეორეს — მცირე შემოსავლიანობა და მცირე რისკი).

შემდეგი ცნების საშუალებით შესაძლებელია, პორტფელის არჩევანი კონსტრუქციულად ჩავატაროთ.

განურჩევლობის წირი. ფორმალურად, ეს არის წირი კრიტერიალურ სიბრტყეზე, რომელიც ეკვივალენტური (განურჩევადი) პორტფელების შეფასებებისგან შედგება.

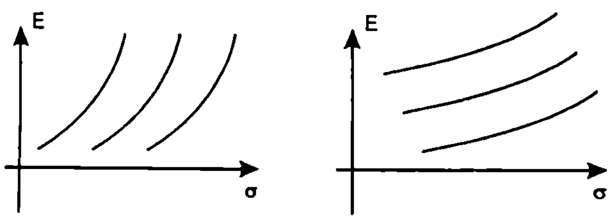


ნახ. 2.27

ყველა პორტფელი, რომელთა შეფასებები ერთი და იგივე წირზე მდებარეობს, ეკვივალენტურია. მაგრამ, ნებისმიერი პორტფელი, რომლის შეფასებები ეკუთვნის, მაგალითად, L_1 წირს, ჯობნის ნებისმიერ პორტფელს შეფასებებით L_2 წირიდან.

რადგან ინვესტორს შეუძლია ნებისმიერი ორი პორტფელის შედარება, ამიტომ განურჩევლობის წირები ავსებს სიბრტყეს.

ამასთან, თუ წირი მკვეთრად იზრდება (იხ. ნახ. 2.28,ა)), ეს ნიშნავს, რომ ინვესტორი ფრთხილია. თუ წირი მდორედ იცვლება (იხ. ნახ. 2.28,ბ)), მაშინ ინვესტორს აქვს რისკისადმი მიდრეკილება.



ა) ფრთხილი ინვესტორის განურჩევლობის წირები

ბ) „რისკიანი" ინვესტორის განურჩევლობის წირები

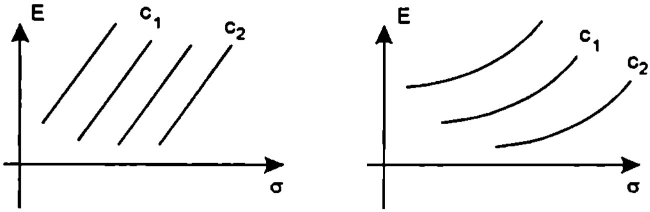
ნახ. 2.28

მოხერხებულია, განურჩევლობის წირები აღვწეროთ, როგორც სარგებლიანობის ფუნქციის დონის წირები. მაგალითად, თუ სარგებლიანობის ფუნქცია მოიცემა ფორმულით

$$u = E - \frac{\theta}{2}V,$$

მაშინ განურჩევლობის წირის განტოლება იქნება

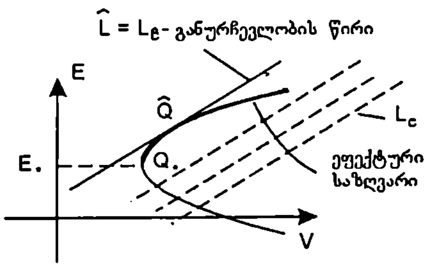
$$E - \frac{\theta}{2}V = c.$$



ნახ. 2.29

ამ წირების დახრილობას განსაზღვრავს θ პარამეტრი. რაც უფრო დიდია θ, მით უფრო მკვეთრად იზრდება წირი და ინვესტორიც უფრო ფრთხილია (ეს დასკვნა შეესაბამება სარგებლიანობის ფუნქციის ანალიზს, რომელიც ჩვენ ჩავატარეთ 2.4 პუნქტში).

სარგებლიანობის ფუნქციის შემოყვანას შემოაქვს განსაზღვრულობა ოპტიმალური პორტფელის არჩევის ამოცანაში. კერძოდ, ოპტიმალურია ის პორტფელი, რომლის სარგებლიანობაც მაქსიმალურია.



ნახ. 2.30

ანალიზურად ეს ამოცანა (მარკოვიცის პორტფელის თეორიის მთავარი ამოცანა) შემდეგნაირად ყალიბდება.

მოცემულია: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — n აქტივის ბაზარი,

$m = (m_1, \ldots, m_n)$ — შემოსავლიანობის ვექტორი,

$C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — შემოსავლიანობის კოვარიაციული მატრიცა,

$D \subset \pi^n$ — დასაშვებ პორტფელთა სიმრავლე,

$u = u(E, V)$ — სარგებლიანობის ფუნქცია.

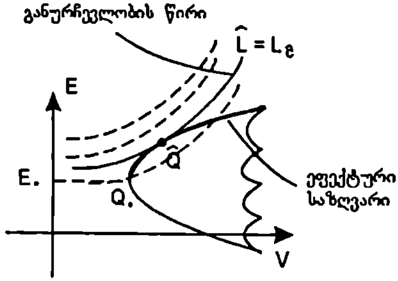
ვეძებთ ისეთ დასაშვებ პორტფელს $\hat{x} \in D$, რომ

$$u(\hat{x}) = \max_{x \in D} u(x),$$

სადაც $u(x) = u(Ex, Vx)$.

ვთქვათ, ვიხილავთ ბლეკის მოდელს წრფივი სარგებლიანობის ფუნქციით. მაშინ, ცხადია, ამოხსნა მოიცემა $\widehat{Q}$ პორტფელით (იხ. ნახ. 2.30).

მარკოვიცის მოდელისათვის, არაწრფივი სარგებლიანობის ფუნქციით, მივიღებთ შემდეგ სურათს



ნახ. 2.31

$\widehat{Q}$ ოპტიმალური პორტფელია.

ფინანსური აქტივების ფასდადების თეორია

60-იანი წლების შუაში დამთავრდა თანამედროვე ინვესტიციების თეორიის პირველი ეტაპის განვითარება იმ სახით, რომელიც მას მისცეს მარკოვიცმა და ტობინმა.

1964 წელს გამოჩნდა 3 ნაშრომი, რომლებმაც დაიწყეს ახალი ეტაპი ინვესტიციების თეორიაში — ე.წ. CAPM-თეორიის ჩამოყალიბება. ესენია შარპის, ლინტნერისა და მოსინის შრომები.

ყველა ეს ნაშრომი, ფაქტიურად, ერთი საკითხისადმი იყო მიძღვნილი: ვთქვათ, ყველა ინვესტორი, რომელთაც ერთი და იგივე ინფორმაცია აქვთ, ერთნაირად აფასებს აქტივის შემოსავლიანობას და რისკს. ვთქვათ, ყველა ინვესტორი, ეყრდნობა რა რისკისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, ქმნის ოპტიმალურ (მარკოვიცის აზრით) პორტფელს. ისმის კითხვა: როგორი ფასები წარმოიქმნება აქტივების ბაზარზე?

ამრიგად, CAPM-ს შეიძლება ვუყუროთ როგორც მარკოვიცის თეორიის მაკროეკონომიკურ განზოგადოებას. მისი ძირითადი შედეგი მდგომარეობს წონასწორობაში მყოფი ბაზრის პირობებში შემოსავლიანობასა და რისკს შორის თანაფარდობის დამყარებაში.

ამასთან, მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ოპტიმალური პორტფელის არჩევის დროს, ინვესტორი მხედველობაში იღებს არა სრულ რისკს (მარკოვიცის რისკს), არამედ მხოლოდ ე.წ. სისტემატურ, ანუ არადივერსიფიცირებად რისკს. რისკის ეს ნაწილი მჭიდრო კავშირშია მთელი ბაზრის რისკთან და გამოისახება ე.წ. β (ბეტა) კოეფიციენტის მეშვეობით, რომელიც შემოყვანილია შარპის მიერ ერთფაქტორიან მოდელში. რისკის დარჩენილი ნაწილი, ე.წ. არასისტემატური რისკი, ელიმინირდება ოპტიმალური პორტფელის არჩევით. კავშირი შემოსავლიანობასა და რისკს შორის წრფივია და ამით ანალიზურად ჩაიწერება ემპირიული წესი „დიდი შემოსავლიანობა — დიდი რისკი“.

შემდგომი ათწლეული, 1976 წლამდე, ფინანსური თეორია ვითარდებოდა CAPM-ის დომინირების ნიშნის ქვეშ.

1977 წელს ეს თეორია მკვეთრად გაკრიტიკდა როლის ნაშრომებში. როლმა გამოთქვა აზრი, რომ CAPM უნდა უკუვაგდოთ, რადგან იგი პრინციპშიც კი არ ექვემდებარება ემპირიულ შემოწმებას. შევნიშნოთ, რომ CAPM-ის ვერიფიკაციის საკითხი ახლაც დიდი კამათის საგანია.

ამავე პერიოდში, როლმა და როსმა შეიმუშავეს ფინანსური აქტივების შეფასების ალტერნატიული მოდელი, რომელსაც „არბიტრაჟული მოდელი“ (APM) ეწოდა.

ამ მოდელის ძირითადი პრინციპი მდგომარეობს იმაში, რომ აქტივის შემოსავლიანობასა და რისკს შორის ისეთი თანაფარდობა უნდა იყოს, რომ

ვერცერთმა ინდივიდუალურმა ინვესტორმა ვერ უნდა მიიღოს შემოუსაზღვრელი არბიტრაჟული მოგება, ანუ, სხვა სიტყვებით, არ არსებობს ფინანსური პერპეტუმ მობილე.

ამ თეორიის ადეპტები, კერძოდ, როლი და როსი, ამტკიცებენ, რომ APM-ის შემოწმება პრინციპში ემპირიულად შესაძლებელია.

მიუხედავად ამისა, CAPM დღესაც რჩება მნიშვნელოვან და გავლენიან ფინანსურ თეორიად. პრაქტიკული მითითებები ფინანსურ მენეჯმენტში გრძელვადიან ინვესტირებასთან მიმართებაში დღესაც CAPM-ზე არის დაფუძნებული.

2.10 ფინანსური აქტივების ფასდადების მოდელი — CAPM

ფინანსური აქტივების ფასდადების მოდელი — CAPM შემუშავებული იყო 60-იან წლებში ჯ. ტრეინორის, უ. შარპის და ჯ. ლინტნერის მიერ. ეს მოდელი იძლევა იმის ახსნას, თუ როგორ ფორმირდება ფინანსური აქტივების ფასები გაწონასწორებულ ბაზარზე. მისი მთავარი დამახასიათებელი ნიშანი ისაა, რომ აქტივის მოსალოდნელი ამონაგები უკავშირდება აქტივის რისკიანობის ხარისხს, რომელიც იზომება ე.წ. ბეტა კოეფიციენტით.

CAPM-ის ძირითადი დაშვებები. როგორც ყოველი მოდელი, CAPM-იც წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას, რომელიც საშუალებას იძლევა უკუგდებულ იქნას მრავალი წვრილმანი იმ რთული სიტუაციისა, რომელშიც ხდება ფასების ჩამოყალიბება რისკიანი აქტივების ბაზარზე და მთელი აქცენტი გადატანილ იქნას უმნიშვნელოვანეს ელემენტებზე.

მიუხედავად იმისა, რომ CAPM ეფუძნება მთელ რიგ დაშვებებს, იგი წარმოადგენს ფასწარმოქმნის საკმაოდ კარგ აპროქსიმაციას. ამით აიხსნება ის ფაქტი, რომ საინვესტიციო პრაქტიკაში გამოყენებული მრავალი მოდელი დაფუძნებულია CAPM-ზე ან მის რაიმე მოდიფიცირებულ ვერსიაზე.

სანამ შევუდგებოდეთ მოდელის აღწერასა და ინტერპრეტაციას, მოვიყვანოთ იმ ძირითად დაშვებათა ჩამონათვალი, რომლებსაც ეფუძნება CAPM.

1. ინვესტორების მიერ საინვესტიციო პორტფელების შეფასება წარმოებს მოსალოდნელი ამონაგებებისა და სტანდარტული გადახრების (რისკიანობის) საფუძველზე.

2. ორ პორტფელს შორის ინვესტორები უპირატესობას ანიჭებენ იმას, რომელიც სხვა თანაბარ პირობებში იძლევა უდიდეს მოსალოდნელ ამონაგებს (ინვესტორები ყოველთვის „გაუმაძღარნი" არიან).

3. ორ პორტფელს შორის ინვესტორი უპირატესობას ანიჭებს იმას, რომელსაც სხვა თანაბარ პირობებში აქვს უმცირესი სტანდარტული გადახრა

(ინვესტორებს არ სურთ რისკის გაწევა).

4. კერძო აქტივები უსასრულოდ დაყოფადია; სურვილის შემთხვევაში ინვესტორს შეუძლია იყიდოს აქციის ნაწილი.

5. არსებობს ურისკო საპროცენტო განაკვეთი (ურისკო აქტივი), რომლითაც ინვესტორს შეუძლია ფულადი სახსრების გასესხება ან სესხება. იგი საერთოა ყველა ინვესტორისათვის.

6. გადასახადები და საოპერაციო ხარჯები უმნიშვნელოა (შეიძლება მათი უგულებელყოფა).

7. ყველა ინვესტორისათვის საინვესტიციო პერიოდი ერთნაირია, ინფორმაცია თავისუფლად და დაუყოვნებლივ მიეწოდება ყველა ინვესტორს.

8. ინვესტორებს გააჩნიათ ერთნაირი მოლოდინები, ანუ ისინი ერთგვაროვნად აფასებენ აქტივების მოსალოდნელ (საშუალო) ამონაგებს, სტანდარტულ გადახრასა და კოვარიაციას.

ამ დაშვებებიდან გამომდინარეობს, რომ ფინანსური აქტივების (ფასიანი ქაღალდების) ბაზრები წარმოადგენს სრულყოფილ ბაზრებს იმ აზრით, რომ ამ ბაზრებზე არ არსებობს ინვესტიციების ხელშემშლელი ფაქტორები, ყველა ინვესტორის ქმედება ერთგვაროვანია.

გამოსაყოფია დაშვება ურისკო აქტივის (ურისკო r_f საპროცენტო განაკვეთის) არსებობის შესახებ, რომელიც საკვანძო როლს ასრულებს ფინანსური აქტივების ფასდადების თეორიაში და მონაწილეობს როგორც „საბაზისო" ცვლადი ყველა ფორმულაში.

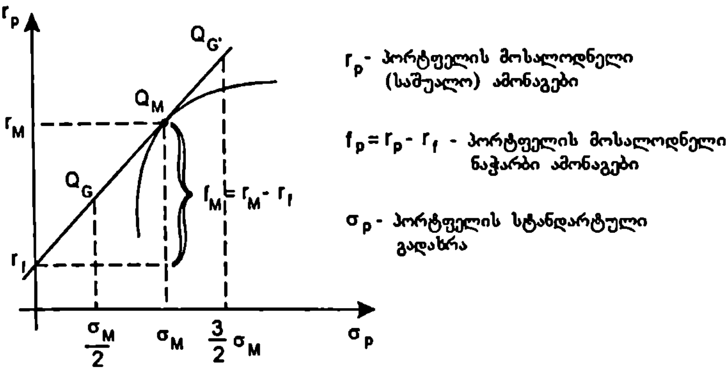
საბაზრო პორტფელი და ბაზრის წრფე. როგორც უკვე ვნახეთ, ერთი ურისკო აქტივის დამატება მარკოვიცის მოდელში განაპირობებს ახალი წრფივი ეფექტური საზღვრის გაჩენას, რომელიც წარმოადგენს $(0, r_f)$ წერტილიდან მარკოვიცის ეფექტური საზღვრის მიმართ გავლებულ მხებს და შეიცავს მხოლოდ შეხების Q_M წერტილს (π_M პორტფელის შეფასებას) ამ სიმრავლიდან. შეხების წერტილის შესაბამის პორტფელს (π_M პორტფელს) მხები პორტფელი ეწოდება (იხ. ნახ. 2.32). იგი ცენტრალურ როლს ასრულებს CAPM-ის თეორიაში. აღვნიშნოთ ეს პორტფელი M-ით (ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გასაგები გახდება ამ აღნიშვნის ბუნებრიობა).

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი პორტფელი წრფივი ეფექტური სიმრავლიდან წარმოადგენს ურისკო აქტივისა და M პორტფელის შეწონილ კომბინაციას, ამასთან, პორტფელები, რომელთა შეფასებები მოთავსებულია Q_M-ის მარცხნივ, ურისკო აქტივს შეიცავენ დადებითი წონით (გასესხება), ხოლო პორტფელები შეფასებებით Q_M-ის მარჯვნივ — უარყოფითი წონით (სესხება). მაგალითად,

$$G = \frac{1}{2}(\text{ურისკო აქტივი}) + \frac{1}{2}(M\,\text{პორტფელი}),$$

$$G' = -\frac{1}{2}(\text{ურისკო აქტივი}) + 1\frac{1}{2}(M\,\text{პორტფელი}).$$

როგორც ვხედავთ, სესხის გაცემის შესაძლებლობა მარკოვიცის ეფექტურ საზღვარს ჩამოჭრის Q_M-ის მარცხნივ მოთავსებულ ნაწილს, ხოლო სესხის აღების შესაძლებლობა — Q_M-ის მარჯვენივ მოთავსებულ ნაწილს.



ნახ. 2.32

M პორტფელი ხასიათდება იმ თვისებით, რომ არ არსებობს სხვა პორტფელი ეფექტური სიმრავლიდან (მარკოვიცის მოდელში), რომლის რაიმე კომბინაცია ურისკო აქტივთან (რისკის ფიქსირებული დონის დროს) მოგვცემდა უფრო მეტ ამონაგებს, ვიდრე M პორტფელისა და ურისკო აქტივის იგივე კომბინაცია, ანუ მხებ წრფეს (წრფივ ეფექტურ სიმრავლეს) გააჩნია მაქსიმალური დახრილობა ყველა სხვა წრფესთან შედარებით, რომელიც გადის ურისკო აქტივის შესაბამის წერტილსა და რაიმე რისკიანი პორტფელის შესაბამის წერტილზე. ეს თვისება ეკვივალენტურია შემდეგისა:

M პორტფელს გააჩნია მაქსიმალური შარპის ფარდობა. შარპის ფარდობა განიმარტება შემდეგნაირად

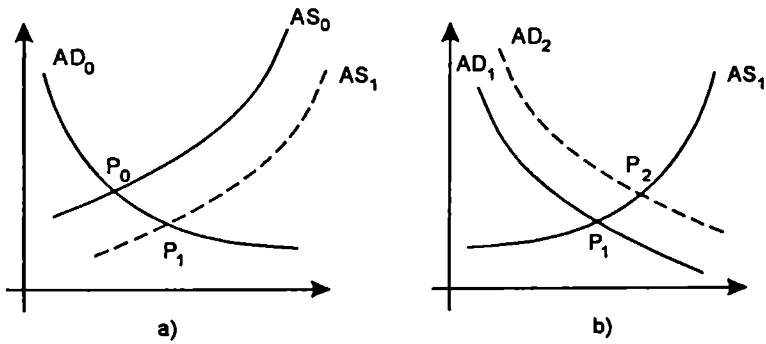
$$SR_p = \frac{f_p}{\sigma_p},$$

სადაც $f_p = r_p - r_f$ — პორტფელის მოსალოდნელი ნაჭარბი ამონაგებია, ხოლო σ_p — პორტფელის სტანდარტული გადახრა.

რადგანაც ყველა ინვესტორს გააჩნია ერთი და იგივე წრფივი ეფექტური სიმრავლე, ერთადერთი მიზეზი, რის გამოც ისინი აირჩევენ განსხვავებულ პორტფელებს ისაა, რომ მათ აქვთ განსხვავებული სარგებლიანობის ფუნქციები და, მაშასადამე, განსხვავებული განურჩევლობის წირებიც. თუმცა, არჩეული პორტფელები განსხვავებული იქნება, ყოველი ინვესტორი აირჩევს რისკიანი აქტივების ერთადერთ კომბინაციას ანუ M პორტფელს (ურისკო აქტივთან რაიმე კომბინაციაში).

CAPM-ის ამ თვისებას უწოდებენ განცალკევების თეორემას.

CAPM-ის მეორე თვისება ისაა, რომ ბაზრის წონასწორობის პირობაში, ყოველ რისკიან აქტივს M პორტფელში გააჩნია დადებითი წონა. ეს თვისება გამომდინარეობს განცალკევების თეორემიდან, რომლის ძალითაც ყოველი ინვესტორის საინვესტიციო პორტფელში რისკიან აქტივებში ინვესტიცია ნიშნავს M პორტფელში ინვესტირებას. თუ ყოველი ინვესტორი შეიძენს M პორტფელს და, ამავე დროს, რომელიმე რისკიანი აქტივი არაა ჩართული ამ პორტფელში, გამოვა, რომ არავის არ ჩაუდია ინვესტიცია ამ აქტივში. მაშინ არავინ არ მოინდომებს ამ აქტივის ხელთ ქონას და ბაზარს მიეწოდება დავალებათა მნიშვნელოვანი რაოდენობა მის გაყიდვაზე. ამიტომ მიწოდების მრუდი წაინაცვლებს მარჯვნივ (იხ. ნახ. 2.33,a)).



ნახ. 2.33

ეს გამოიწვევს აქტივის საბაზრო ფასის კლებას და, ამის გამო, მისი ამონაგების ზრდას მანამდე, სანამ ინვესტორები არ შეიცვლიან აზრს ამ აქტივის შესახებ. ამონაგების ზრდის გამო ეს აქტივი კვლავ მიმზიდველი გახდება ინვესტორთათვის და დაიწყება მისი შესყიდვა. მოთხოვნის მრუდი გადაადგილდება მარჯვნივ (იხ. ნახ. 2.33,b)). ეს პროცესი გაგრძელდება მანამდე, სანამ აქტივის წონა M პორტფელში დადებითი არ გახდება და არ მიაღწევს ისეთ დონეს, როდესაც მოთხოვნა გაუტოლდება მიწოდებას (ბრუნვაში მყოფი აქტივის რაოდენობას).

შეიძლება წარმოიქმნას სხვა საინტერესო სიტუაციაც: აქტივის წონა M პორტფელში ისეა შერჩეული, რომ მოთხოვნა ჭარბობს მიწოდებას. ანალოგიურად, ამ შემთხვევაშიც, აქტივის საბაზრო ფასი გაიზრდება, მოსალოდნელი ამონაგები შემცირდება მანამდე, სანამ აქტივის წონა M პორტფელში არ შემცირდება ისე, რომ მოთხოვნა და მიწოდება გათანაბრდეს.

შედეგად, ყველაფერი დაბალანსდება. როდესაც კურსების ცვლილება შეწყდება, ბაზარი მოვა წონასწორობის მდგომარეობაში. ამასთან, ყოველი რისკიანი აქტივი დადებითი წონით შევა M პორტფელში. მეორეს მხრივ, ყოველი რისკიანი აქტივის საბაზრო კურსი იმ დონეზე დადგება, რომ მოთხოვნა

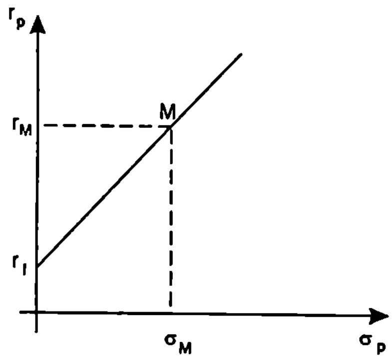
გაუტოლდება მიწოდებას, და ბოლოს, ურისკო საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე ისეთი იქნება, რომ გასესხებული თანხების რაოდენობა გაუტოლდება ნასესხები თანხების რაოდენობას. საბოლოო ჯამში, წონასწორობის მდგომარეობაში ყოველი რისკიანი აქტივის წონა M პორტფელში გაუტოლდება აქტივის წონას ე.წ. საბაზრო პორტფელში.

საბაზრო პორტფელი — ის პორტფელია, რომელიც შედგება ყველა ფასიანი ქაღალდისაგან და რომელშიც ყოველი აქტივის წონა შეადგენს მისი ერთობლივი საბაზრო ღირებულების წილს ყველა ფასიანი ქაღალდის ერთობლივ ღირებულებათა ჯამში.

რაიმე კომპანიის მიერ გამოშვებული ფასიანი ქაღალდის (აქციის) ღირებულება უდრის მის მიმდინარე საბაზრო ღირებულებას, გამრავლებულს ბრუნვაში მყოფ აქციათა რიცხვზე.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, სავსებით კანონზომიერია ჩაითვალოს, რომ „მხები“ პორტფელი წარმოადგენს საბაზრო პორტფელს და აღინიშნოს M სიმბოლოთი.

ამრიგად, CAPM-ის ფარგლებში წრფივი ეფექტური საზღვარი ემთხვევა წრფეს, რომელიც გადის $(0, r_f)$ და (σ_M, r_M) წერტილებზე. მას უწოდებენ ბაზრის წრფეს (იხ. ნახ.2.34).



ნახ. 2.34

მისი განტოლებაა

$$r_p = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_p,$$

სადაც r_M — ბაზრის საშუალო ამონაგებია, ხოლო σ_M — სტანდარტული გადახრა.

ეს განტოლება აღწერს წონასწორულ კავშირს ეფექტური პორტფელების რისკსა და მოსალოდნელ ამონაგებს შორის. რაც უფრო დიდია ამ წრფის დახრილობა, მით უფრო მეტ ამონაგებს მოითხოვენ ინვესტორები გაწეული რისკისათვის (ერიდებიან რისკს) და პირიქით, ბაზრის წრფის მცირე

დახრილობა მიუთითებს იმას, რომ ინვესტორები გულგრილნი არიან რისკის მიმართ; ეს არის CAPM-ის ერთ-ერთი ასპექტი.

ფასიანი ქაღალდის ბაზრის წრფე. ბეტა. ცალკეული რისკიანი აქტივი ბაზრის წრფის ქვევითაა მოთავსებული, რადგანაც იგი თავისთავად არ წარმოადგენს ეფექტურ პორტფელს.

საფონდო ბაზარზე რისკიანი აქტივების კურსების ფორმირების მოდელში აღარ იგულისხმება განსაზღვრული კავშირი აქტივის მოსალოდნელ ამონაგებსა და საშუალო კვადრატულ გადახრას (ე.ი. საერთო რისკს) შორის. იმისათვის, რომ შეფასდეს ცალკეული აქტივის მოსალოდნელი ამონაგები საჭირო ხდება უფრო ღრმა ანალიზის ჩატარება.

გავიხსენოთ თუ როგორ ხდება პორტფელის საერთო რისკის შეფასება. ვთქვათ, პორტფელი შედგება N აქტივისაგან და i-ური აქტივის წონაა x_i, მაშინ პორტფელის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j c_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j c_{ij},$$

სადაც $c_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j)$, ρ_i არის i-ური აქტივის ამონაგები, $\sum_{j=1}^{N} x_j c_{ij}$ წარმოადგენს i-ური აქტივის კოვარიაციას პორტფელთან.

საბაზრო პორტფელის შემთხვევაში, თუ x_{iM} აღნიშნავს i-ური აქტივის წონას M პორტფელში და σ_{iM} კი მის კოვარიაციას M პორტფელთან,

$$\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{N} x_{jM} c_{ij},$$

გვექნება, რომ M პორტფელის რისკი მოიცემა ფორმულით

$$\sigma_M = \left(\sum_{i=1}^{N} x_{iM} \sigma_{iM} \right)^{1/2}$$

ამრიგად, საბაზრო პორტფელის საერთო რისკი წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს პორტფელში შემავალი აქტივების საბაზრო პორტფელთან კოვარიაციების შეწონილი ჯამიდან და მაშასადამე, ცალკეული (i-ური) აქტივის წილი პორტფელის რისკში განისაზღვრება არა მისი დისპერსიით, არამედ მისი კოვარიაციით საბაზრო პორტფელთან (σ_{iM}-ით).

შემოვიღოთ სიდიდე

$$\beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{VR_M},$$

სადაც R_M წარმოადგენს ბაზრის ამონაგებს, ხოლო VR_M მის დისპერსიას.

β_{iM} სიდიდეს ეწოდება i-ური აქტივის ბეტა კოეფიციენტი (ანდა, უბრალოდ „ბეტა“). შევნიშნოთ, რომ $x_{iM}\beta_{iM}$ არის i-ური აქტივის მიერ პორტფელის საერთო დისპერსიაში შეტანილი წილი

$$\sum_{i=1}^{N} x_{iM}\beta_{iM} = 1.$$

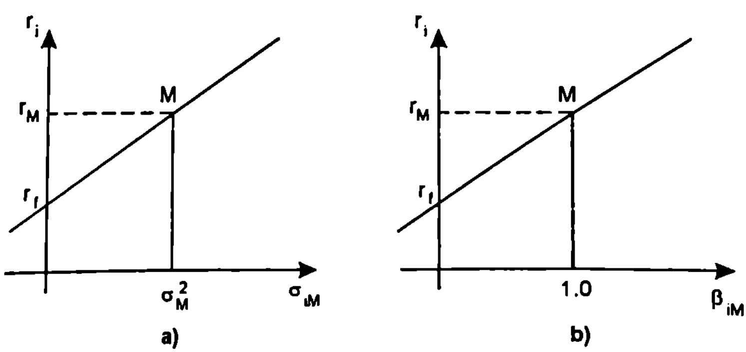
აქედან უკვე ცხადად ჩანს, რომ i-ურ აქტივს შეიძლება ჰქონდეს დიდი დისპერსია $\sigma_i^2 = VR_i$, მაგრამ თუ მისი კოვარიაცია პორტფელთან მცირეა, მან შეიძლება ნაკლებად გაზარდოს პორტფელის რისკი, ვიდრე მცირე დისპერსიის, მაგრამ ბაზართან მაღალი კოვარიაციის მქონე აქტივმა.

ამრიგად, ყოველი აქტივისათვის დასაშვები რისკის სიდიდე განისაზღვრება მისი კოვარიაციით საბაზრო პორტფელთან და შეიძლება დავასკვნათ, რომ ფასიანი ქაღალდი σ_{iM}-ის დიდი მნიშვნელობით უნდა უზრუნველყოფდეს პროპორციულად დიდ მოსალოდნელ ამონაგებს, რათა ინვესტორი დაინტერესდეს მისი შეძენით. (გავიხსენოთ, რომ პორტფელი ოპტიმალურადაა შერჩეული). იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს, თუ რატომ უნდა იყოს ასე, წარმოვიდგინოთ რომ აქტივი σ_{iM}-ის დიდი მნიშვნელობით არ უზრუნველყოფს მოსალოდნელი ამონაგების შესაბამის დონეს. მაშინ ასეთი აქტივის პორტფელიდან ამოღება გამოიწვევს პორტფელის მოსალოდნელი ნაჭარბი ამონაგების სტანდარტულ გადახრასთან ფარდობის (შარპის ფარდობის) ზრდას. ე.ი. პორტფელი არ ყოფილა ოპტიმალურად შერჩეული, ხოლო აქტივების ფასები კი — წონასწორულ მდგომარეობაში.

რისკსა და მოსალოდნელ ამონაგებს შორის წონასწორული ურთიერთკავშირის ზუსტი ფორმა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}, \tag{2.10}$$

რომლის გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია ნახაზ 2.35,a)-ზე.



ნახ. 2.35

რადგანაც $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2} > 0$, განტოლება (2.10) მიუთითებს იმას, რომ რაც უფრო დიდია აქტივის კოვარიაცია საბაზრო პორტფელთან, მით უფრო დიდია მისი საშუალო (მოსალოდნელი) ამონაგები.

(2.10) განტოლებით აღწერილი კავშირი კოვარიაციას და მოსალოდნელ ამონაგებს შორის ცნობილია **ფასიანი ქაღალდის (აქტივის) ბაზრის წრფის** სახელწოდებით.

თუ $\sigma_{iM} = 0$, მაშინ $r_i = r_f$ და i-ური აქტივის მოსალოდნელი ამონაგები ($r_i = ER_i$) უდრის ურისკო აქტივის ამონაგებს. ეს აიხსნება იმით, რომ ისევე როგორც ურისკო აქტივი, ეს აქტივიც არ ზრდის პორტფელის რისკს, თუმცა ურისკო აქტივისაგან განსხვავებით, მისი სტანდარტული გადახრა დადებითია. თუ $\sigma_{iM} < 0$, მაშინ $r_i - r_f < 0$, ხოლო, თუ $\sigma_{iM} = \sigma_M^2$, მაშინ $r_i = r_M$.

განტოლება (2.10) ბეტა კოეფიციენტის საშუალებით შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმითაც (იხ. ნახ.2.35,b)

$$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_{iM}. \tag{2.11}$$

თუ $\beta_{iM} > 1$, მაშინ $r_i - r_f > r_M - r_f$ და აქტივს უწოდებენ „აგრესიულს“. ის უფრო რისკიანია, ვიდრე ბაზარი და მისგან ინვესტორი ითხოვს უფრო დიდ ამონაგებს ბაზრის ამონაგებთან შედარებით. თუ $\beta_{iM} < 1$, მაშინ $r_i - r_f < r_M - r_f$ და აქტივს უწოდებენ „დამცავ“ აქტივს. ბაზრის „ბეტა“ 1-ის ტოლია. ურისკო აქტივისათვის $\beta = 0$.

ბეტა კოეფიციენტის ერთ-ერთი თვისება ისაა, რომ ნებისმიერი პორტფელის „ბეტა“ უდრის მასში შემავალი რისკიანი აქტივების ბეტა კოეფიციენტების შეწონილ ჯამს

$$\beta_{pM} = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_{iM}.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტსაც, რომ პორტფელის მოსალოდნელი ამონაგები წარმოადგენს მასში შემავალი აქტივების მოსალოდნელი ამონაგებების შეწონილ ჯამს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$r_p = r_f + (r_M - r_f)\beta_{pM}$$

და ამრიგად, როგორც ყოველი აქტივი, ასევე ნებისმიერი პორტფელი მდებარეობს ფასიანი ქაღალდის ბაზრის წრფეზე, მაგრამ ბაზრის წრფეზე მდებარეობს მხოლოდ ეფექტური პორტფელები, დანარჩენი პორტფელები კი მოთავსებულია მის ქვემოთ.

CAPM-ის ძირითადი თანაფარდობანი. ყოველივე ზემოთქმული შეიძლება შეჯამდეს შემდეგი ფორმით CAPM-ის თეორია, ეყრდნობა რა საბაზრო წონასწორობის კონცეფციას, ადგენს, რომ ყოველი ფინანსური

აქტივისათვის (აღვნიშნოთ ეს აქტივი A-თი) არსებობს სიდიდე $\beta(A)$, რომელსაც უწოდებენ აქტივის „ბეტას", ისეთი, რომ

$$r(A) - r_f = \beta(A)(r(M) - r_f), \tag{2.12}$$

სადაც $r(A) = ER(A)$, $R(A)$ — აქტივის ამონაგებია, $r(M) = ER(M)$, $R(M)$ — ბაზრის ამონაგებია, $r(A)$ და $r(M)$ — მოსალოდნელი (საშუალო) ამონაგებებია. ამასთან

$$\beta(A) = \frac{\operatorname{cov}(R(A), R(M))}{\sigma_M^2}.$$

$(R(A)-r_f)$ სიდიდეს უწოდებენ აქტივის ნაჭარბ ამონაგებს ანუ „პრემიას", შესაბამისად $(R(M) - r_f)$ ბაზრის „პრემიაა".

მაშასადამე, აქტივის საშუალო „პრემია" პროპორციულია ბაზრის საშუალო „პრემიისა" პროპორციულობის კოეფიციენტით $\beta(A)$. $\beta(A)$-ს შეიძლება მიეცეს შემდეგი ინტერპრეტაცია: იგი წარმოადგენს აქტივის „მგრძნობიარობის ზომას" („რეაქციის" ზომას) საბაზრო ცვლილებების მიმართ.

ახლა განვსაზღვროთ A აქტივისათვის შემდეგი შემთხვევითი სიდიდე

$$\eta(A) = (R(A) - r(A)) - \frac{\operatorname{cov}(R(A), R(M))}{\sigma_M^2}(R(M) - r(M)).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $E\eta(A) = 0$ და

$$\operatorname{cov}(\eta(A), R(M)) = E\left(\eta(A)(R(M) - r(M))\right) = 0.$$

მივიღებთ, რომ

$$R(A) - ER(A) = \beta(A)(R(M) - ER(M)) + \eta(A), \tag{2.13}$$

რაც (2.12)-თან ერთად გვაძლევს

$$R(A) - r_f = \beta(A)(R(M) - r_f) + \eta(A). \tag{2.14}$$

ბოლო თანაფარდობა აღწერს იმ ფაქტს, რომ აქტივის პრემია შედგება ორი ნაწილისაგან: ბაზრის პრემია, გამრავლებული $\beta(A)$-ზე პლიუს $\eta(A)$, რომელიც არაა კორელირებული ბაზრის პრემიასთან.

არასისტემატური რისკის დივერსიფიკაცია. (2.12)-დან გამომდინარეობს, რომ A აქტივის რისკი $\sigma_A^2 = E(R(A) - r(A))^2$ იშლება ორ ნაწილად:

$$\sigma_A^2 = \beta^2(A)\sigma_M^2 + E\eta^2(A).$$

ე.ი. აქტივის რისკი შედგება ორი ნაწილისაგან

$$\beta^2(A)\sigma_M^2 \text{ — სისტემატური რისკი (საბაზრო რისკი),}$$
$$E\eta^2(A) \text{ — არასისტემატური რისკი (საკუთარი რისკი).}$$

შეიძლება დაისვას კითხვა: რა საჭიროა აქტივის რისკის ორ ნაწილად დაშლა? ინვესტორისათვის რისკი რისკია, დამოუკიდებლად მისი წარმოშობის წყაროსაგან. ამ კითხვაზე პასუხი უნდა ვეძიოთ მოსალოდნელი ამონაგებების სფეროში.

სისტემატური (საბაზრო) რისკი დაკავშირებულია $\beta(A)$ კოეფიციენტთან. თუ აქტივის $\beta(A)$ დიდია, დიდია მისი საბაზრო რისკიც და CAPM-ის ფარგლებში აქტივის მოსალოდნელი ამონაგებიც შესაბამისად დიდია.

არასისტემატური (საკუთარი) რისკი არაა დაკავშირებული $\beta(A)$-სთან და CAPM-დან გამომდინარე საკუთარი რისკის ზრდა არ იწვევს მოსალოდნელი ამონაგების ზრდას. ამრიგად, CAPM-ის ფარგლებში ინვესტორები კომპენსაციას იღებენ საბაზრო რისკისათვის, მაგრამ არა საკუთარი რისკისათვის.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ CAPM-ის ფარგლებში შესაძლებელია არასისტემატური რისკის რედუცირება დივერსიფიკაციის საშუალებით.

ვთქვათ, P პორტფელი შეიცავს N აქტივს — $A_1, A_2, \ldots, A_N$ და $\eta(A_1), \eta(A_2), \ldots, \eta(A_N)$ არაკორელირებულებია, $\operatorname{cov}(\eta(A_i), \eta(A_j)) = 0$, $i \neq j$. ვთქვათ, x_i წარმოადგენს A_i აქტივის წონას. მაშინ

$$R(P) = \sum_{i=1}^{N} x_i R(A_i)$$

და, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$R(A_i) - r_f = \beta(A_i)(R(M) - r_f) + \eta(A_i),$$

მივიღებთ, რომ

$$R(P) - r_f = \sum_{i=1}^{N} \beta(A_i) x_i (R(M) - r_f) + \sum_{i=1}^{N} x_i \eta(A_i).$$

თუ შემოვიღებთ სიდიდეებს $\beta(P) = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta(A_i)$, $\eta(P) = \sum_{i=1}^{N} x_i \eta(A_i)$, გვექნება

$$R(P) - r_f = \beta(P)(R(M) - r_f) + \eta(P).$$

ამრიგად,

$$\sigma_P^2 = VR(P) = \beta^2(P)\sigma_M^2 + V\eta(P).$$

აქ $V\eta(P) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 V\eta(A_i) \leq \frac{c}{N} \to 0$, როცა $N \to \infty$, თუ $V\eta(A_i) \leq c$, $x_i = \frac{1}{N}$.

შევეხოთ საკითხს, თუ როგორ ხდება აქტივის „ბეტას" შეფასება. თანაფარდობა (2.14)-დან გამომდინარე აქტივის ნაჭარბ ამონაგებსა და ბაზრის ნაჭარბ ამონაგებს შორის არსებობს წრფივი რეგრესიული კავშირი. (გავიხსენოთ, რომ $E\eta(A) = 0$, $V\eta(A) < \infty$). ამიტომ ბეტა კოეფიციენტის შეფასება, მის შესახებ სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება შეიძლება ჩატარდეს რეგრესიული ანალიზის მეთოდებით. სახელდობრ, თუ გვაქვს „ისტორიული" მონაცემები ან დაკვირვებები როგორც აქტივის, ისევე ბაზრის ნაჭარბ ამონაგებებზე $R_t(A)$, $R_t(M)$, $t = 1, 2, \ldots, T$, მაშინ „ბეტას" შეფასება, მიღებული უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მოიცემა შემდეგი გამოსახულებით

$$\widehat{\beta}_T = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t(A) - \overline{R}(A))(R_t(M) - \overline{R}(M))}{\sum_{t=1}^{T}(R_t(M) - \overline{R}(M))^2},$$

სადაც $\overline{R}(A) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t(A)$, $\overline{R}(M) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t(M)$. აღვნიშნოთ $\widehat{\operatorname{corr}}(R(A), R(M))$-ით შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი, $\widehat{\sigma}_A^2$ და $\widehat{\sigma}_M^2$-ით — შერჩევითი დისპერსიები. მაშინ

$$\widehat{\beta}_T = \widehat{\operatorname{corr}}(R(A), R(M))\frac{\widehat{\sigma}_A}{\widehat{\sigma}_M}.$$

შერჩევითი დეტერმინაციის $\widehat{R}^2 = (\widehat{\operatorname{corr}}(R(A), R(M)))^2$ კოეფიციენტი განსაზღვრავს თუ აქტივის ნაჭარბი ამონაგების თავისი შერჩევითი საშუალოს მიმართ გაფანტულობის რა წილი აიხსნება ბაზრის ნაჭარბი ამონაგების მეშვეობით. თუ დავუშვებთ, რომ $\eta(A)$ ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ შესაძლებელია სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება $\beta(A)$-ს შესახებ: ნდობის ინტერვალების აგება, ჰიპოთეზების შემოწმება და სხვა. (იხ. მარტივი რეგრესია, თავი 8).

უნდა ითქვას, რომ ბეტა კოეფიციენტის შეფასება ისტორიული მონაცემებით არ არის მთლად სანდო, რადგან ეკონომიკური სიტუაციის ცვლილებამ (მაგალითად, თუ მოსალოდნელია ინფლაციის ტემპის ზრდა მომავალში), შეიძლება მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნამდე. ისტორიული მონაცემებით აგებული შეფასებები გამოდგება მხოლოდ ეკონომიკური სტაბილურობის პირობებში.

ბეტა კოეფიციენტის სტაბილურობის საკითხი შესწავლილი იყო შარპისა და კუპერის მიერ. მათ ნიუ-იორკის საფონდო ბირჟაზე რეგისტრირებული აქციები დაყვეს 10 კლასად იმ პერიოდში შეფასებული „ბეტას" სიდიდეების მიხედვით, ამასთან მე-10 კლასი შეიცავდა აქციათა $\frac{1}{10}$-ს β-ს ყველაზე მაღალი მნიშვნელობებით, შემდეგი კლასი β-ს მომდევნო მნიშვნელობების მქონე აქციათა $\frac{1}{10}$-ს და ა.შ. 5 წლის შემდეგ მათ ხელმეორედ შეაფასეს

აქციათა β კოეფიციენტები და აკვირდებოდნენ თუ აქციათა რამდენი პროცენტი დარჩა იგივე რისკ-კლასში. მათ აღმოაჩინეს, რომ აქციათა 40–70% დარჩა რისკის იგივე კლასში. ამასთან, β-ს დიდი და მცირე მნიშვნელობების კლასებში შეიმჩნეოდა მეტი სტაბილურობა, $\approx 70\%$, ვიდრე საშუალო მნიშვნელობებისათვის, $\approx 40\%$.

CAPM-თან დაკავშირებით წარმოიქმნა ერთი პრობლემაც: მართლა არის თუ არა წრფივი რეგრესიული კავშირი ცალკეული აქტივისა და ბაზრის ნაჭარბ ამონაგებებს შორის? ეს საკითხი შეისწავლეს ე. ფამამ (E. F. Fama) და ჯ. მაკბეტმა (J. MacBeth) კვლავ ნიუ-იორკის საფონდო ბირჟაზე რეგისტრირებული აქტივებისაგან შედგენილი 20 პორტფელის მაგალითზე და აღმოაჩინეს, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ეს კავშირი დარღვეულია. ეს ფაქტი ნაწილობრივ შეიძლება აიხსნას იმით, რომ CAPM სამართლიანია საბაზრო პორტფელისათვის, მაშინ, როცა შეისწავლებოდა აქციათა მხოლოდ გარკვეული რაოდენობისაგან შედგენილი პორტფელები. საკითხი იმის შესახებ, თუ რამ განაპირობა CAPM-ით პოსტულირებული თანაფარდობების რღვევა ღიად რჩება. შესაძლოა იმან, რომ: 1) CAPM სინამდვილის მხოლოდ უხეში მიახლოებაა, 2) β-ს შეფასებები ცუდადაა ჩატარებული, 3) CAPM-ის პოსტულირება ეხება მხოლოდ გასაშუალოებულ (მოსალოდნელ) მონაცემებს, ჩვენ კი ვეყრდნობით რეალურ მონაცემებს და სხვა.

შენიშვნა. არსებობს დიდი განუსაზღვრელობა დაკავშირებული საბაზრო პორტფელის განმარტებასთან. თეორიულად საბაზრო პორტფელის შედგენილობა მარტივად გამოიყურება: მასში შედის ყველა რისკიანი აქტივი სათანადოდ შერჩეული წონებით. რეალურად კი „ჭეშმარიტი" საბაზრო პორტფელის განსაზღვრა შეუძლებელია არა მარტო კერძო პირთათვის, არამედ ორგანიზაციებისათვისაც კი, იმ თვალსაზრისით, რომ სავსებით გაუგებარია რა აქტივები უნდა იყოს მასში ჩართული. მხოლოდ შეერთებული შტატების საფონდო ბაზრებზე კოტირებული აქციები თუ სხვა ქვეყნების საფონდო ბაზრების აქტივებიც? სახელმწიფო სასესხო ვალდებულებები მთლიანად, თუ მათი მხოლოდ რეალური აქტივებით უზრუნველყოფილი ნაწილი? და ა.შ.

„ჭეშმარიტი" საბაზრო პორტფელის განსაზღვრასთან დაკავშირებულმა სიძნელეებმა აუცილებელი გახადა მისი „მსგავსი" პორტფელებით შეცვლა, მაგალითად, ისეთი წარმომადგენლობითი ინდექსებით, როგორებიცაა S&P500 (პორტფელი, შედგენილი 500 ყველაზე მსხვილი კომპანიის აქციისაგან), NYSE Composite Index (პორტფელი, რომელშიაც ჩართულია ნიუ-იორკის საფონდო ბირჟაზე რეგისტრირებული ყველა აქცია, სათანადოდ შერჩეული წონებით), Wilshire 5000, ბირჟის გარე NASDARQ-ის სისტემაში კოტირებულ აქციათა ინდექსები და სხვა.

აშკარაა, რომ CAPM-ის ძირითადი თანაფარდობა სრულდება მაშინაც, როცა საბაზრო პორტფელი შეცვლილია რომელიმე ზემოჩამოთვლილი

ინდექსით. ამ შემთხვევაში მოდელს ეწოდება საბაზრო მოდელი. ამ მოდელსა და CAPM-ს შორის არსებობს ორი ძირითადი განსხვავება. პირველი განსხვავება ისაა, რომ საბაზრო მოდელი წარმოადგენს ფაქტორულ მოდელს (უფრო ზუსტად, ერთ ფაქტორიან მოდელს), სადაც ფაქტორის როლში გამოდის საბაზრო ინდექსი (მაგალითად, S&P500) და CAPM-სგან განსხვავებით იგი არ წარმოადგენს წონასწორულ მოდელს, რომელიც აღწერს ფასიანი ქაღალდების კურსების ფორმირების პროცესს. მეორე განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ CAPM იყენებს საბაზრო პორტფელს, მაშინ როცა საბაზრო მოდელი საფონდო ინდექსს (რომელიც შეიცავს აქციათა შემოსაზღვრულ რაოდენობას). ამიტომ კონცეპტუალურად β_{iI} კოეფიციენტი საბაზრო მოდელში განსხვავდება β_{iM}-სგან CAPM-ში. მიუხედავად ამისა, საბაზრო პორტფელის სტრუქტურის ზუსტი განსაზღვრის შესაძლებლობის უქონლობის გამო, საბაზრო ინდექსის მეშვეობით განსაზღვრულ „ბეტას" თვლიან CAPM-ში „ბეტას" შეფასებად.

2.11 ფინანსური აქტივების არბიტრაჟული ფასდადების თეორია — APT

CAPM წარმოადგენს მოდელს, რომელიც ხსნის, თუ რატომ გააჩნია სხვადასხვა ტიპის ფასიან ქაღალდებს განსხვავებული მოსალოდნელი ამონაგებები. ფინანსური აქტივების ფასწარმოქმნის ეს მოდელი, კერძოდ, ამტკიცებს, რომ ფასიან ქაღალდებს გააჩნია განსხვავებული ამონაგებები იმის გამო, რომ მათ აქეთ გასხვავებული ბეტა კოეფიციენტი, რომელიც წარმოადგენს აქტივის რისკიანობის საზომს გაწონასწორებულ საბაზრო პორტფელთან მიმართებაში.

არსებობს ფასწარმოქმნის ალტერნატიული მოდელი, შემუშავებული ს. როსის მიერ, რომელიც ცნობილია არბიტრაჟული ფასდადების თეორიის სახელწოდებით (Arbitrage Pricing Theory — APT). CAPM მოითხოვს დაშვებათა დიდი რაოდენობის შესრულებას, კერძოდ, მარკოვიცის დაშვებებსაც იმის შესახებ, რომ ყოველი ინვესტორი ირჩევს თავის ოპტიმალურ პორტფელს განურჩევლობის წირების მეშვეობით, რომლებიც ითვალისწინებს მოსალოდნელ ამონაგებსა და სტანდარტულ გადახრას. CAPM-სგან განსხვავებით, APT ეყრდნობა დაშვებათა უფრო მცირე რაოდენობას, რომელთა შორის მთავარია ის დაშვება, რომ ყოველი ინვესტორი ცდილობს გამოიყენოს თავისი პორტფელის შემოსავლიანობის გაზრდის შესაძლებლობა რისკიანობის გაზრდის გარეშე. ამ შესაძლებლობის რეალიზაციის მექანიზმს წარმოადგენს ე.წ. არბიტრაჟული პორტფელი.

APT თეორია ეფუძნება მრავალფაქტორიან მოდელს, მიიჩნევს რა, რომ A აქტივის ამონაგების სიდიდე $R(A)$ დამოუკიდებელია გარკვეული q

რაოდენობის შემთხვევით $f_1, f_2, \dots, f_q$ ფაქტორებზე, რომელთა მნიშვნელობები, შესაძლოა, სრულიად განსხვავებული იყოს. მაგალითად, ეს შეიძლება იყოს ინფლაციის სიდიდე, საპროცენტო განაკვეთი, ერთობლივი ეროვნული პროდუქტის ზრდის ტემპი, ნავთობის ფასი და სხვა. გარდა ამისა, იგულისხმება, რომ ამონაგები დამოკიდებულია, აგრეთვე, „ხმაურის" წევრზე (შემთხვევით სიდიდეზე), $\zeta(A)$-ზე:

$$R(A) = a_0(A) + a_1(A)f_1 + a_2(A)f_2 + \cdots + a_q(A)f_q + \zeta(A).$$

ამასთან, ითვლება, რომ $Ef_i = 0$, $Vf_i = 0$, $\operatorname{cov}(\zeta(A), f_i) = 0$, $i = 1, 2 \dots, q$ (ხმაური არაკორელირებულია ფაქტორებთან).

ფაქტორული მოდელი გულისხმობს, რომ A და B აქტივები ერთნაირი $a_i(A)$ და $a_i(B)$, $i = 1, 2, \dots, q$, კოეფიციენტებით, იქცევა ერთნაირად ფაქტორგარეშე რისკის გამოკლებით. ამიტომ, ასეთ აქტივებს უნდა გააჩნდეს ერთნაირი საშუალო ამონაგები, წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება „თითქმის არბიტრაჟულ" შესაძლებლობებს. სახელდობრ, შესაძლებელი გახდება „თითქმის არბიტრაჟული" პორტფელის შექმნა, ანუ აქტივების ბაზარზე ქმედების შედეგად ნულოვანი კაპიტალით ისეთი პორტფელის შექმნა, რომელიც იძლევა ასიმპტოტურად დადებით ამონაგებს.

ჩამოვაყალიბოთ ეს იდეები ფორმალურად. ვთქვათ, ბაზარი შედგება N აქტივისაგან, $A_1, A_2, \dots, A_N$, რომელთა ამონაგებები დამოკიდებულია q ფაქტორზე, $f_1, f_2, \dots, f_q$,

$$R(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i)f_1 + a_2(A_i)f_2 + \cdots + a_q(A_i)f_q + \zeta(A_i).$$

ამასთან, $Ef_k = 0$, $E\zeta(A_i) = 0$, $\operatorname{cov}(f_k, f_l) = 0$, $k \neq l$, $Vf_k = 1$, $\operatorname{cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$, $\operatorname{cov}(\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \sigma_{ij}$, $k, l = 1, 2, \dots, q$,
$i, j = 1, 2, \dots, N$.

განვიხილოთ რაიმე პორტფელი $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, სადაც x_i — i-ური აქტივის წონაა პორტფელში. მაშინ მისი ამონაგები მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$R(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i R(A_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i a_{i0} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i a_{i1}\right) f_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i a_{iq}\right) f_q + \sum_{i=1}^{N} x_i \zeta(A_i),$$

სადაც $a_{ik} = a_k(A_i)$ — i-ური აქტივის მგრძნობელობაა (ხშირად ატრიბუტსაც უწოდებენ) k-ურ ფაქტორზე.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ არსებობს პორტფელი $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 0$.

2. $\sum_{i=1}^{N} x_i a_{ik} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

ეს უკანასკნელი თვისება ნიშნავს, რომ პორტფელი არ რეაგირებს ფაქტორებზე, ანუ მისი მგრძნობელობა ფაქტორების მიმართ ნულოვანია: $a_{pk} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

3. $\sum_{i=1}^{N} x_i a_{i0} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

4. $x_i = a_{i0} - \lambda_0 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_{ik}$,

სადაც ვექტორ-სვეტი $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)'$ განისაზღვრება ტოლობით

$$\lambda = (A^* A)^{-1} A^* a_0.$$

აქ $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{N0})$, „*" ნიშნავს ტრანსპონირებას, ხოლო A მატრიცა ასეა მოცემული:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & & a_{1q} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & & a_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{N1} & a_{N2} & & a_{Nq} \end{pmatrix}$$

ახლა განვიხილოთ პორტფელი $\theta x = (\theta x_1, \theta x_2, \ldots, \theta x_N)$, სადაც θ რაიმე დადებითი მუდმივია. მაშინ 1–3 თვისებების გამოყენებით გვექნება, რომ ამ პორტფელის ამონაგები $R(\theta x)$ გამოითვლება ფორმულით

$$R(\theta x) = \theta \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \theta \sum_{i=1}^{N} x_i \zeta(A_i).$$

ამიტომ,

$$\mu(\theta x) = ER(\theta x) = \theta \sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$

$$\sigma^2(\theta x) = VR(\theta x) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{i,j}.$$

ავიღოთ $\theta = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{-2/3}$. მაშინ მივიღებთ,

$$\mu(\theta x) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/3} \tag{2.15}$$

$$\sigma^2(\theta x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{i,j}}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{4/3}}.$$

სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{ii} = 1$. მაშინ, აშკარაა, რომ

$$\sigma^2(\theta x) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{-1/3} \tag{2.16}$$

(2.15) და (2.16) ფორმულებზე დაყრდნობით ჩავატაროთ შემდეგი ასიმპტოტური ანალიზი. ვთქვათ, $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \to \infty$, როცა $N \to \infty$. მაშინ $\mu(\theta x) \to \infty$, ხოლო $\sigma^2(\theta x) \to 0$.

ჩავთვალოთ, რომ ყოველი აქტივის საწყისი ფასი 1-ის ტოლია, ე.ი. $S_0(A_1) = S_0(A_2) = \cdots = S_0(A_N) = 1$. მაშინ, რადგან $\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$, θx პორტფელს ექნება ნულოვანი საწყისი ღირებულება:

$$X_0(\theta x) = 0,$$

ხოლო ტერმინალური ღირებულება $X_1(\theta x)$ კი იქნება

$$X_1(\theta x) = \theta \sum_{i=1}^{N} x_i S_1(A_i) = \theta \sum_{i=1}^{N} x_i (S_1(A_i) - 1) = \theta R(x) = R(\theta x).$$

რადგან

$$EX_1(\theta x) = ER(\theta x) = \mu(\theta x) \to \infty,$$

და

$$VX_1(\theta x) = \sigma^2(\theta x) \to 0,$$

როცა $N \to \infty$, ამიტომ საკმაოდ დიდი N-სთვის $X_1(\theta x) \geq 0$ დიდი ალბათობით. ამავე დროს, $P(X_1(\theta x) > 0) > 0$.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ $X_0(\theta x) = 0$, ხოლო $P(X_1(\theta x) > 0) > 0$.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნულოვანი კაპიტალით მივიღეთ დადებითი მოგება (ასიმპტოტურად დადებითი მოგება). APT-ში ეს ფაქტი მოიხსენიება როგორც ასიმპტოტური არბიტრაჟის არსებობა.

ამრიგად, დაშვებამ

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \to \infty, \quad \text{როცა} \quad N \to \infty,$$

მოგვცა „თითქმის არბიტრაჟული" პორტფელის შექმნის შესაძლებლობა.

APT-ს ფარგლებში არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია, ე.ი. მოითხოვება, რომ

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 < \infty.$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ θx პორტფელის მე-4 თვისებას, არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვა გამოითქმება შემდეგი ფორმით

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(a_{i0}-\lambda_0-\sum_{k=1}^{q}\lambda_k a_{ik}\right)^2<\infty. \tag{2.17}$$

შევნიშნოთ შემდეგი ფაქტი: ყველა $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{iq}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ კოეფიციენტი, რა თქმა უნდა, დამოკიდებულია იმ აქტივების რაოდენობაზე, რომლებიც მოზიდული არიან პორტფელში. ამიტომ x_i წარმოადგენს N-ის ფუნქციას, $x_i = x_i(N)$ (იხ. თვისება 4.).

(2.17)-დან გამომდინარე, საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ: პორტფელში მოზიდული აქტივების საკმაოდ დიდი რაოდენობის დროს მათი „უმეტესობა" ისეთი უნდა იყოს, რომ $a_0(A_i), a_1(A_i), \ldots, a_q(A_i)$ კოეფიციენტებს შორის დამყარდეს „თითქმის წრფივი" კავშირი

$$a_0(A_i)\approx\lambda_0+\sum_{k=1}^{q}\lambda_k a_k(A_i).$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ შემოღებული დაშვებების თანახმად,

$$ER(A_i)=a_0(A_i),$$

მივიღებთ,

$$ER(A_i)\approx\lambda_0+\sum_{k=1}^{q}\lambda_k a_k(A_i). \tag{2.18}$$

(2.18) წარმოადგენს APT-ის ძირითად თანაფარდობას, რომელიც მეტყველებს იმაზე, რომ „დიდი" ბაზრების შემთხვევაში, A აქტივის მოსალოდნელი ამონაგები წარმოადგენს მისი $a_k(A)$ ატრიბუტების (მგრძნობელობები ფაქტორების მიმართ) წრფივ ფუნქციას იმ დაშვებაში, რომ აქტივის ამონაგები ემორჩილება მრავალფაქტორიან მოდელს და არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია.

ცხადია, რომ APT წარმოადგენს CAPM-ის განზოგადოებას იმ აზრით, რომ CAPM არის ერთფაქტორიანი მოდელი, რომელშიც ფაქტორს წარმოადგენს საბაზრო პორტფელის ნაჭარბი ამონაგები. მიუხედავად ამისა, CAPM მაინც რჩება ერთ-ერთ ყველაზე პოპულარულ მოდელად ინვესტიციების თეორიაში.

შესაძლებელია $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ კოეფიციენტების შემდეგი ინტერპრეტაცია. პირველ რიგში, წარმოვიდგინოთ, რომ არსებობს აქტივი (ვთქვათ, B),

რომლისთვისაც $a_k(B) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$, ანუ ეს აქტივი არ არის მგრძნობიარე ფაქტორების მიმართ. ასეთი აქტივია ურისკო აქტივი. მაშინ გვექნება, რომ

$$ER(B) = r_f = \lambda_0.$$

ამრიგად, თუ $r(A_i) = ER(A_i)$,

$$r(A_i) = r_f + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k(A_i).$$

შეიძლება დავადგინოთ, რომ $\lambda_k = \delta_k - r_f$, სადაც δ_k წარმოადგენს იმ P^k პორტფელის მოსალოდნელ ამონაგებს, რომელსაც აქვს 1 -ის ტოლი მგრძნობელობა k-ური ფაქტორის მიმართ, $a_{P^k k} = 1$, და ნულოვანი — დანარჩენების მიმართ $a_{P^k i} = 0$, $i \neq k$, $i = 1, 2, \ldots, q$. საბოლოოდ გვექნება,

$$r(A_i) = r_f + (\delta_1 - r_f)a_1(A_i) + (\delta_2 - r_f)a_2(A_i) + \cdots + (\delta_q - r_f)a_q(A_i).$$

არსებობს CAPM-ისა და APT-ს სინთეზის მრავალი ვარიანტი, რომლებსაც ჩვენ აღარ შევეხებით.

მოვიყვანოთ იმ ძირითადი ნაშრომების სია, რომლებშიც გადმოცემულია პორტფელების მართვის თეორია, CAPM და APT და რომლებითაც ვსარგებლობდით ამ თავის მასალის გადმოცემისას: [12], [17], [37], [42], [57], [62], [85], [90], [108], [111], [112], [114], [125], [130], [132], [140], [141], [142], [146], [206], [207].

3

ფიუჩერსები

3.1 ფიუჩერსული და ფორვარდული კონტრაქტები

ძირითადი ცნებები. ზოგადი დახასიათება. ფორვარდული კონტრაქტი არის შეთანხმება ორ მხარეს შორის, რომლის ძალითაც ერთი ვალდებულია იყიდოს, ხოლო მეორე — გაყიდოს ესა თუ ის აქტივი მომავალში, დროის გარკვეულ მომენტში გარკვეულ ფასად.

კონტრაქტით გათვალისწინებულ აქტივს ეწოდება საბაზისო ან ძირითადი აქტივი, კონტრაქტში მითითებულ დროის გარკვეულ მომენტს — მიწოდების დრო ან კონტრაქტის აღსრულების ვადა, ხოლო ფიქსირებულ ფასს — მიწოდების ფასი.

მიწოდების ფასი ისე შეირჩევა, რომ კონტრაქტის დადების მომენტში ორივე მხარისათვის კონტრაქტის ღირებულება ნულის ტოლია, ანუ კონტრაქტის დადებისას არც ერთი მხარე არაფერს არ იხდის.

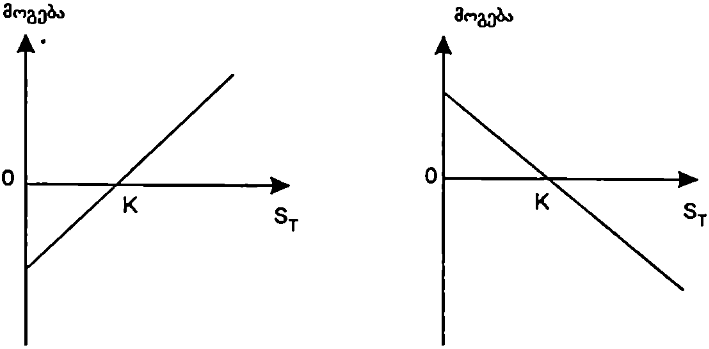
ფორვარდული კონტრაქტი არის კერძო შეთანხმება მხარეებს შორის, რომლებიც თვითონვე განსაზღვრავენ კონტრაქტის პირობებს: მისაწოდებელი აქტივის ხარისხსა და რაოდენობას, მიწოდების დროსა და ადგილს, მიწოდების ფასს.

მხარეს, რომელიც იღებს ყიდვის ვალდებულებას, უწოდებენ გრძელ პოზიციაში მყოფს, საწინააღმდეგო მხარეს კი მოკლე პოზიციაში მყოფს.

T იყოს კონტრაქტის აღსრულების ვადა, გადათვლილი კონტრაქტის დადების მომენტიდან, S_T აღნიშნავდეს საბაზისო აქტივის ნაღდ (სპოტ) ფასს T მომენტში, K იყოს მიწოდების ფასი.

მაშინ გრძელ პოზიციაში მყოფი ინვესტორის ტერმინალური შემოსავალი (ანდა გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის ტერმინალური ღირებულება) იქნება $S_T - K$, ხოლო მოკლე პოზიციაში მყოფის ტერმინალური შემოსავალი (მოკლე ფორვარდული კონტრაქტის ტერმინალური ღირებულება) კი იქნება $K - S_T$. შევნიშნოთ, რომ თუ $S_T > K$, მაშინ გრძელ პოზიციაში მყოფი იღებს მოგებას, ხოლო მოკლეში მყოფი კი დანაკარგებს. თუ $S_T < K$, მაშინ გრძელ პოზიციაში მყოფს ელოდება დანაკარგები, მოკლე პოზიციაში მყოფს

კი მოგება. ნახ. 3.1 ამ ფაქტის ილუსტრაციაა.



(a) გრძელი პოზიცია (b) მოკლე პოზიცია

ნახ. 3.1

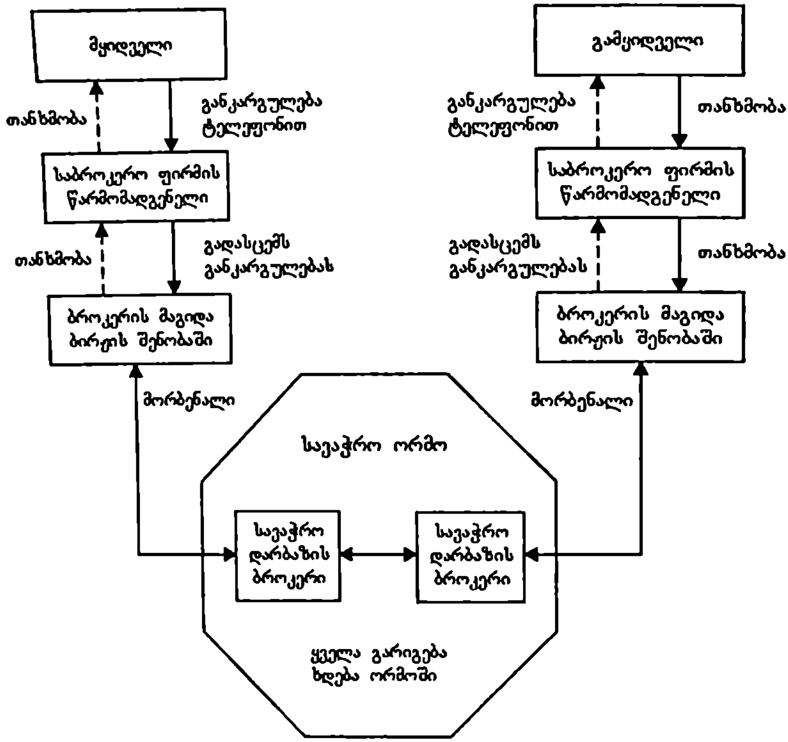
ისევე, როგორც ფორვარდული, ფიუჩერსული კონტრაქტიც წარმოადგენს შეთანხმება-ვალდებულებას რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ მომავალში გარკვეულ ფასად.

ამრიგად, ფიუჩერსული კონტრაქტი (ისევე, როგორც ფორვარდული) აფიქსირებს მოცემულ მომენტში იმ გარიგების პირობებსა და ფასს, რომელიც შედგება მომავალში. ფორვარდული კონტრაქტისაგან განსხვავებით ფიუჩერსული კონტრაქტებით ვაჭრობა ხდება ბირჟაზე ბირჟის მიერ დადგენილი წესების მიხედვით.

მიწოდების ფასს, რომელზედაც თანხმდებიან კონტრაქტის დადების მომენტში ეწოდება ფიუჩერსული ფასი. ეს ფასი ფორმირდება მოცემულ ფიუჩერსულ ბაზარზე ჩვეულებრივი წესით — მოთხოვნა-მიწოდების კანონით, როგორც ყველა სხვა ფასი. ფიუჩერსული ფასების დადგენა ბირჟაზე ხდება ყოველდღიურად და რეგულარულად ქვეყნდება საფინანსო პრესაში.

ფიუჩერსებით ვაჭრობის წესები. სქემატურად ფიუჩერსული ვაჭრობა ბირჟაზე ნაჩვენებია ნახ. 3.2-ზე.

კონტრაქტის დადებისას ფიუჩერსული კონტრაქტის ღირებულება ორივე მხარისათვის ნულის ტოლია, მაგრამ ყოველ ინვესტორს მოეთხოვება სამარჟო (საგარანტიო) ანგარიშზე შეიტანოს გარკვეული თანხა — საწყისი მარჟა. ყოველი სავაჭრო დღის ბოლოს ინვესტორის სამარჟო ანგარიში გადაითვლება ისეთი წესით, რომელიც ასახავს ინვესტორის დღიურ მოგება-წაგებას, გამოწვეულს ფიუჩერსული ფასების მოძრაობით. მაგალითად, თუ ინვესტორი გრძელ პოზიციაშია და მოცემულ დღეს ფიუჩერსული ფასი იზრდება, მაშინ ინვესტორის სამარჟო ანგარიშიც იზრდება, მოკლე პოზიციაში მყოფი ინვესტორის ანგარიში კი მცირდება იმ რაოდენობით, რომელიც წინა და მომდევნო დღის ფიუჩერსული ფასების სხვაობის ტოლია.



ნახ. 3.2

საბირჟო ვაჭრობის ძირითადი განსხვავება ბირჟისგარე ვაჭრობისაგან შეიძლება ასე დახასიათდეს:

კონტრაქტების პირობები სტანდარტიზებულია საბაზისო აქტივის რაოდენობისა და ხარისხის, მიწოდების დროისა და ადგილის მიხედვით, ხოლო მიწოდების ფასი განისაზღვრება ბირჟაზე საჯარო ვაჭრობის პროცესში.

ბირჟაზე ვაჭრობა არაპერსონიფიცირებულია. კერძოდ, კონტრაქტის მფლობელისათვის აღარაა აუცილებელი კონტრაგენტის მიერ ნაკისრი ვალდებულებების შეუსრულებლობასთან დაკავშირებული რისკის შეფასება. ამ ფუნქციას თავის თავზე იღებს საკლირინგო პალატა, რომელიც წარმოადგენს ბირჟის ქვედანაყოფს (ანდა დამოუკიდებელ ორგანიზაციას). მის მოვალეობაში შედის ბირჟაზე მიღწეული ყველა გარიგების აღრიცხვა, ფულადი ანგარიშსწორებანი და კონტრაქტების შესრულების უზრუნველყოფა. გარიგების რეგისტრირების შემდეგ მყიდველი და გამყიდველი თავისუფლდებიან ურთიერთვალდებულებებისაგან და ყოველ მათგანს უჩნდება ვალდებულება საკლირინგო პალატის მიმართ, რომელიც ასრულებს მყიდველის როლს გამ-

ყიდველთათვის და გამყიდველის როლს მყიდველთათვის.

სწორედ ამითაა განპირობებული ფიუჩერსული ბაზრის ისეთი თვისებები, როგორებიცაა სავაჭრო აქტივობის კონცენტრაცია კონტრაქტების შემოსაზღვრულ რაოდენობაზე, ვაჭრობის დიდი მოცულობა, მაღალი ლიკვიდურობა ანუ კონტრაქტების ყიდვისა და გაყიდვის შესაძლებლობა სავაჭრო სესიის ნებისმიერ მომენტში.

საბირჟო ვაჭრობის არაპერსონიფიცირება საშუალებას აძლევს ვაჭრობის ყოველ მონაწილეს ნებისმიერ მომენტში იცოდეს მოცემულ ფიუჩერსულ კონტრაქტში მხოლოდ საკუთარი ღია პოზიციების საერთო რაოდენობა და არ აწარმოოს კონტრაგენტების აღრიცხვა. მაგალითად, თუ ვაჭრობის რომელიმე მონაწილეს გახსნილი აქვს 10 გრძელი პოზიცია და შეისყიდა კიდევ 15 კონტრაქტი, მისი ღია პოზიციების რაოდენობაა 25, თუ შემდგომში იგი გაყიდის 5 კონტრაქტს, მისი ღია პოზიციების რაოდენობა გახდება 20. ამასთანავე, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ ვისთანაა დადებული ეს კონტრაქტები. თუ ღია პოზიციათა რაოდენობა გაუტოლდა ნულს, მაშინ მონაწილეზე ითქმის, რომ მან დახურა პოზიციები. ამ შემთხვევაში ის გათავისუფლებულია კონტრაქტით გათვალისწინებული ვალდებულებებისაგან. უნდა აღინიშნოს, რომ ფიუჩერსული პოზიციების უმრავლესობა კონტრაქტის აღსრულების ვადამდე იხურება (დაახლოებით 98%).

როგორც უკვე აღნიშნული იყო, კონტრაქტები სტანდარტიზებულია მიწოდების დროის მიხედვით. ფიუჩერსული კონტრაქტები მონიშნულია მიწოდების თვით და მათი სახელწოდება ემთხვევა თვის სახელს. მაგალითად, თებერვლის კონტრაქტი, ივლისის კონტრაქტი.

ბირჟაზე ერთდროულად აღსრულების რამოდენიმე ვადის მქონე კონტრაქტებით ხდება ვაჭრობა. მაგალითად, იანვრიდან თებერვლამდე დროის პერიოდში შეიძლება ხდებოდეს კონტრაქტებით ვაჭრობა, რომელთა აღსრულების ვადაა თებერვალი, მარტი, . . . , ოქტომბერი. თებერვლის კონტრაქტის ვადის ამოწურვის შემდეგ იწყება ახალი აღსრულების ვადის მქონე კონტრაქტებით ვაჭრობა (ამ შემთხვევაში ნოემბრის კონტრაქტებით).

ის პერიოდი თვის განმავლობაში, როდესაც შესაძლებელია მიწოდება, ანუ მიწოდების პერიოდი, ბირჟის მიერ ზუსტადაა განსაზღვრული. ბირჟა ზუსტად ადგენს დღეს, როდესაც იწყება თვის კონტრაქტებით ვაჭრობა (პირველი სავაჭრო დღე), ისევე როგორც ამ კონტრაქტებით ვაჭრობის ბოლო დღეს (ბოლო სავაჭრო დღე). ეს დღე, როგორც წესი, რამდენიმე დღით წინ უსწრებს მიწოდების პერიოდის ბოლო დღეს.

მოვიყვანოთ საბაზრო აქტივების მიხედვით ფიუჩერსული კონტრაქტების სახეობებისა და ფიუჩერსებით მოვაჭრე მსხვილი ბირჟების ჩამონათვალი.

ფიუჩერსების სახეობები.

1. სასაქონლო ფიუჩერსები. ამ ფიუჩერსებში საბაზისო აქტივს წარ-

მოადგენს: მარცვლეული და სოიის კულტურები, ხორბალი, მსხვილფეხა რქოსანი საქონელი, ხორცი, ბამბა, მაგყლი, ყავა, შაქარი, ხე-ტყე და სხვა.

2. ენერგეტიკული ფიუჩერსები: ნავთობი, ღუმელის საწვავი, პროპანი, ბენზინი და ა.შ.

3. ფიუჩერსები მეტალებზე: ოქრო, ვერცხლი, სპილენძი, პლატინა, პალადიუმი და სხვა.

4. ფინანსური ფიუჩერსები. აქ საბაზისო აქტივს წარმოადგენს ფინანსური ინსტრუმენტები (აქციები, ობლიგაციები, სახაზინო ბილეთები და თამასუქები) და ვალუტა.

5. ფიუჩერსები საფონდო ინდექსებზე: საბაზისო აქტივს ამ შემთხვევაში წარმოადგენს აქციათა ის პორტფელი, რომლებითაც ითვლება საფონდო ბაზრის ინდექსი. ეს ინდექსებია: The Standard and Poor's 500 (S&P500), The New York Stock Exchange (NYSE) Composite Index, Nikkei Stock Average, FTSE100 და სხვა.

ამ წიგნში დაწვრილებით მხოლოდ ფინანსურ ფიუჩერსებს შევეხებით.

უმსხვილეს ბირჟებს, რომლებზედაც ტარდება ფიუჩერსებით ვაჭრობა წარმოადგენს Chicago Board of Trade (CBOT) და London International Financial Futures Exchange (LIFFE).

ფიუჩერსული ბაზრები იზიდავს სხვადასხვა ტიპის მრავალ მონაწილეს, რომელთაგანაც შეიძლება გამოიყოს სამი ძირითადი კატეგორია: მაჰეჯირებლები, სპეკულანტები და არბიტრაჟორები.

მოკლედ რომ ვთქვათ, ჰეჯირება ნიშნავს თავდაცვას ან დაზღვევას მოსალოდნელი დანაკარგებისაგან. სპეკულანტი ცდილობს მოგების მიღებას სათანადო პოზიციების დაკავებით ბაზარზე, აქვს რა თავისი ვარაუდი ფასების ცვლილებაზე მომავალში. არბიტრაჟი ნიშნავს დანახარჯების გარეშე მოგების მიღების შესაძლებლობას. არბიტრაჟული სიტუაცია წარმოიქმნება მაშინ, როდესაც ორ ან რამოდენიმე ბაზარზე ჩნდება ერთსა და იმავე საქონელზე ფასთა სხვაობა. არბიტრაჟორები წარმოადგენენ ბაზრის მონაწილეთა მნიშვნელოვან ჯგუფს, რომლებიც სარგებლობენ რა არბიტრაჟის შესაძლებლობით ახერხებენ ურისკო მოგების მიღებას ამ ბაზრებზე ერთდროული მოქმედების გზით. ამასთან, მათი ქმედება იწვევს ფასთა სხვაობის განულებას, ე.ი. არბიტრაჟის ჩაქრობას.

შემდგომ მსჯელობებში იგულისხმება, რომ არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია.

მოვიყვანოთ ერთი ასეთი მსჯელობის მაგალითი.

ფიუჩერსული ფასების დაახლოება ნაღდ (სპოტ) ფასთან. როდესაც ფიუჩერსული კონტრაქტის მიწოდების თვე ახლოვდება, ფიუჩერსული ფასები უახლოვდება მიმდინარე ნაღდ ფასს (ნაღდი ფასი ის ფასია, რომელსაც დღეს გადაიხდიან ფასეულობაში, თუ მას დღესვე გამოვიტან ღია ბაზარზე). როდესაც მიწოდების თვე მიღწეულია, ფიუჩერსული ფასი უდრის

ან ძალიან ახლოსაა სპოტ ფასთან.

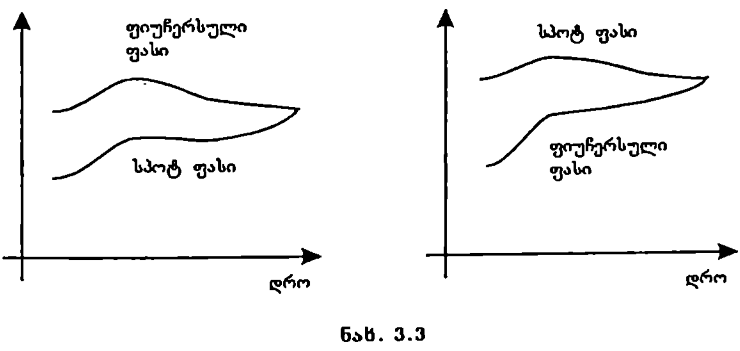
იმის საჩვენებლად, რომ ეს მართლაც ასეა, დავუშვათ რომ მიწოდების პერიოდის განმავლობაში ფიუჩერსული ფასი აღემატება ნაღდ ფასს. ეს ქმნის არბიტრაჟის შესაძლებლობას ბირჟის ვაჭრებისათვის, რომლებსაც ერთდროული მოქმედებით ფიუჩერსულ და ღია (სპოტ) ბაზარზე შეუძლიათ ურისკო მოგების მიღება შემდეგი სტრატეგიის არჩევით:

1. ფიუჩერსული კონტრაქტის გაყიდვა,
2. ფასეულობის ყიდვა,
3. ფასეულობის მიწოდება.

იმ დაშვებიდან, რომ არბიტრაჟის შესაძლებლობა არ არსებობს, გამომდინარეობს, რომ ფიუჩერსული ფასი არ უნდა აღემატებოდეს სპოტ ფასს.

ახლა დავუშვათ, რომ მიწოდების პერიოდის განმავლობაში ფიუჩერსული ფასი უფრო დაბალია, ვიდრე ნაღდი ფასი. იმ კომპანიებისათვის, რომლებიც დაინტერესებულნი არიან ფასეულობის შეძენით, მიმზიდველი აღმოჩნდება დაიკავონ გრძელი ფიუჩერსული პოზიციები, დაელოდონ მოიწოდებას და მიიღონ ურისკო მოგება, ე.ი. ისევ არბიტრაჟია, რომლის არსებობაც ჩვენი დაშვებით გამორიცხულია. ამრიგად, მიწოდების პერიოდის განმავლობაში, ფიუჩერსული ფასი უნდა ტოლი იყოს სპოტ ფასისა.

გრაფიკულად ეს ფაქტი შეიძლება ასე გამოისახოს:



ნახ. 3.3

3.2 ანგარიშსწორების ხერხები ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტების მიხედვით

სამარჯო სისტემა ფიუჩესრულ ვაჭრობაში. ყოველდღიური ანგარიშსწორება. ფორვარდული კონტრაქტით ანგარიშსწორება ხდება კონტრაქტის ბოლოს. ამიტომ კონტრაქტის სიცოცხლის ყოველ კონკრეტულ

მომენტში ხდება პოტენციური მოგება-ზარალის შეფასება, მაგრამ არ ხდება მისი რეალიზაცია. რეალიზაცია გადატანილია აღსრულების მომენტისათვის.

ფიუჩერსული კონტრაქტის შემთხვევაში წინასწარ შეაქვთ მარჟა; ამის შემდეგ ხდება პოზიციის ყოველდღიური მიყვანა ბაზართან.

ყოველი სავაჭრო დღის ბოლოს ხდება სამარჟო ანგარიშის გადათვლა, რათა აისახოს ინვესტორის მოგება ან წაგება, გამოწვეული ფიუჩერსული ფასების ცვლილებით. ამ ყოველდღიური ანგარიშსწორების პროცედურას ეწოდება ანგარიშის დაყვანა ბაზრამდე.

აღვნიშნოთ β_0-ით საწყისი მარჟა ერთ კონტრაქტზე, რომელიც საერთოა გრძელ და მოკლე პოზიციაში მყოფი ინვესტორებისათვის. β_t და $\widetilde{\beta}_t$ იყოს სამარჟო ანგარიშის სიდიდე t-ური სავაჭრო დღის ბოლოს გრძელ და მოკლე პოზიციებში მყოფი ინვესტორებისათვის, შესაბამისად, F_0 — კონტრაქტის მიწოდების ფასი, ანუ რაც იგივეა, მიმდინარე ფიუჩერსული ფასი კონტრაქტის დადების მომენტში, ხოლო F_t — t-ური დღის დახურვის ფასი. T აღნიშნავდეს კონტრაქტის აღსრულების ვადას, ხოლო $\widetilde{T} \leq T$ ინვესტორის მიერ პოზიციის დახურვის დღეს.

ამ აღნიშვნებში სამარჟო ანგარიშის ცვლილება აღიწერება შემდეგი თანაფარდობებით:

1. პირველი დღის ბოლოს

$$\beta_1 = \beta_0 + (F_1 - F_0),$$

$$\widetilde{\beta}_1 = \beta_0 - (F_1 - F_0).$$

ამრიგად, პირველი სავაჭრო დღის ბოლოს, თუ მოხდა ფიუჩერსული ფასების ზრდა (ე.ი. $F_1 > F_0$), გრძელ პოზიციაში მყოფის სამარჟო ანგარიში იზრდება, ხოლო მოკლეში მყოფისა კი $(F_1 - F_0)$ რაოდენობის თანხით მცირდება. იმ შემთხვევაში, თუ დღის ბოლოს ფიუჩერსული ფასი დაეცა (ე.ი. $F_1 < F_0$) გრძელ პოზიციაში მყოფის სამარჟო ანგარიში მცირდება, ხოლო მოკლეში მყოფისა კი იზრდება $(F_0 - F_1)$-ით.

ამავე დროს, პირველი დღის ბოლოს ჩაითვლება რომ ინვესტორს დაკავებული აქვს იგივე პოზიცია იმავე სახელწოდების კონტრაქტში, ოღონდ ახალი ფიუჩერსული ფასით F_1.

ვაჭრობის t-ური დღის ბოლოს სამარჟო ანგარიშის ცვლილება აღიწერება თანაფარდობით

$$\beta_t = \beta_{t-1} + (F_t - F_{t-1}),$$

$$\widetilde{\beta}_t = \widetilde{\beta}_{t-1} - (F_t - F_{t-1}).$$

წინა ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ t-ური დღის ბოლოსათვის

$$\beta_t = \beta_0 + (F_t - F_0),$$

$$\widetilde{\beta}_t = \beta_0 - (F_t - F_0).$$

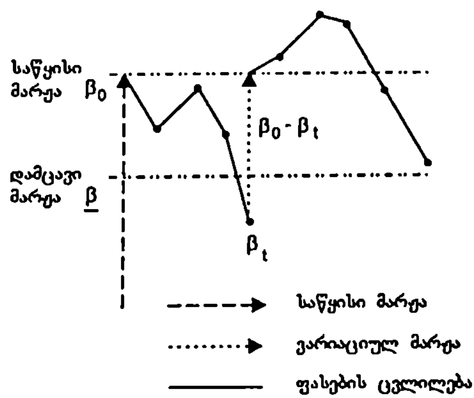
და ამ მომენტისათვის გრძელში მყოფი ინვესტორის დაგროვილი მოგებაა $(F_t - F_0)$, თუ $F_t - F_0 > 0$, და დანაკარგია $(F_0 - F_t)$, თუ $F_t - F_0 < 0$.

ამავე დროს t-ური დღის ბოლოს ჩაითვლება, რომ ინვესტორს უკავია იგივე პოზიცია იმავე სახელწოდების კონტრაქტში, ოღონდ ახალი აღსრულების ფასით F_t. ვთქვათ, რომელიმე სავაჭრო დღეს $(\widetilde{T})$ გრძელ პოზიციაში მყოფმა ინვესტორმა დახურა პოზიცია საწინააღმდეგო პოზიციის დაკავებით იმავე სახელწოდების კონტრაქტში აღსრულების ფასით $F_{\widetilde{T}}$. მაშინ მისი საბოლოო მოგება იქნება $(F_{\widetilde{T}} - F_0)$, თუ $F_{\widetilde{T}} - F_0 > 0$ და წაგება კი $(F_0 - F_{\widetilde{T}})$, თუ $F_{\widetilde{T}} - F_0 < 0$.

ზემოთ აღწერილი ყოველდღიური ანგარიშსწორების პროცედურის ჩატარებისას სამარჟო ანგარიში შეიძლება უარყოფითი გახდეს. ამის თავიდან ასაცილებლად შემოღებულია ე.წ. დამცავი მარჟა, რომლის სიდიდე უფრო მცირეა, ვიდრე საწყისი მარჟის (დაახლოებით, 75%-ია საწყისი მარჟის). მისი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $\underline{\beta}$-ით. თუ რომელიმე t-ურ დღეს ინვესტორის სამარჟო ანგარიში ჩამოვიდა დამცავ მარჟაზე დაბლა, ე.ი. $\beta_t \le \underline{\beta}$, მაშინ ბროკერი უგზავნის ინვესტორს ე.წ. სამარჟო მოთხოვნას და ინვესტორი ვალდებულია შეავსოს სამარჟო ანგარიში საწყისი მარჟის დონემდე.

თუ ინვესტორს არ გააჩნია სათანადო სახსრები ამისათვის, ბროკერი იძულებით უხურავს მას პოზიციას.

თანხის იმ რაოდენობას, რომელიც სამარჟო მოთხოვნის მიღების შემთხვევაში ესაჭიროება ინვესტორს სამარჟო ანგარიშის შესავსებად საწყის მარჟამდე, ეწოდება ვარიაციული მარჟა. ის წარმოიქმნება მაშინ, როცა $\beta_t \le \underline{\beta}$ და ტოლია $(\beta_0 - \beta_t)$ სიდიდის (იხ. ნახ. 3.4).



ნახ. 3.4

დავრწმუნდეთ, რომ სამარჟო სისტემა მართლაც იძლევა იმის გარანტიას, რომ თუ ინვესტორმა არ დახურა თავისი პოზიცია კონტრაქტის აღსრუ-

ლების ვადამდე, მისთვის კონტრაქტის პირობები შესრულებული იქნება.

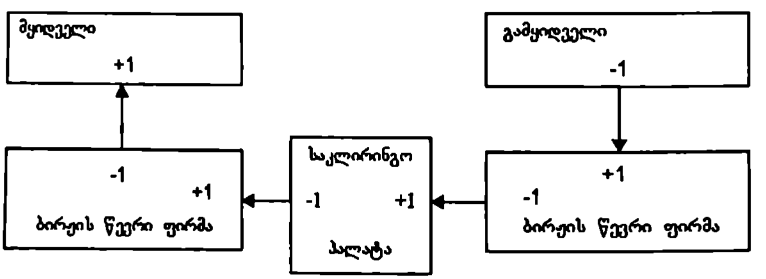
მართლაც, ვთქვათ ინვესტორი გრძელ პოზიციაშია, კონტრაქტის მიწოდების ფასია F_0, ხოლო აღსრულების ვადა T (ეს შეიძლება იყოს რომელიმე დღე მიწოდების პერიოდის განმავლობაში). T-ური დღის ბოლოს, ყოველდღიური ანგარიშსწორების პროცედურის გამო, ინვესტორის სრული მოგება ან წაგება შეადგენს $(F_T - F_0)$-ს და მას შეუძლია შეიძინოს ფასეულობა ღია ბაზარზე S_T ფასად. ამიტომ, თუ გავიხსენებთ, რომ კონტრაქტის აღსრულების მომენტში ფიუჩერსული და სპოტ-ფასები ტოლია, ე.ი. $F_T = S_T$, მისი სრული დანახარჯი ფასეულობის შეძენაზე იქნება

$$S_T - (F_T - F_0) = S_T - (S_T - F_0) = F_0,$$

როგორც იყო გათვალისწინებული კონტრაქტის პირობით.

შეგვიძლია ვიმსჯელოთ უფრო მარტივადაც. კონტრაქტის მიხედვით ინვესტორის ტერმინალური მოგება ან წაგება უნდა ყოფილიყო $S_T - F_0$, რაც მას უკვე მიღებული აქვს ყოველდღიური ანგარიშსწორების პროცედურით.

ზემოაღწერილ კლირინგის პროცედურას ახორციელებს ბირჟასთან არსებული სპეციალური ორგანიზაცია — საკლირინგო პალატა. იგი ასრულებს შუამავლის როლს ფიუჩერსულ გარიგებებში და ქმნის გარანტიებს გარიგებაში მონაწილე მხარეთათვის კონტრაგენტის მიერ კონტრაქტის პირობების შესრულებისა. საკლირინგო პალატას ჰყავს თავისი წევრები. ის ბროკერები, რომლებიც არ არიან პალატის წევრები თავის საქმიანობას ეწევიან საკლირინგო პალატის წევრების მეშვეობით (იხ. ნახ. 3.5).



ნახ. 3.5

ნახაზზე „+1“ და „−1“ სიმბოლოებით აღინიშნება კონტრაქტის ყიდვა და გაყიდვა, შესაბამისად.

ძირითადი განსხვავებანი ფიუჩერსულ და ფორვარდულ კონტრაქტებს შორის. როგორც უკვე ითქვა, ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტები ერთმანეთის მსგავსია, რადგანაც ორივე წარმოადგენს შეთანხმებას რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვაზე მომავალში გარკვეულ ფასად. მაგრამ არსებობს რამოდენიმე ძირეული განსხვავება მათ შორის.

თუ ფიუჩერსებით ვაჭრობა ხდება ბირჟაზე, ფორვარდული კონტრაქ-ტები არის კერძო შეთანხმება ორ ფინანსურ ინსტიტუტს ან ფინანსურ ინსტი-ტუტსა და მის კლიენტს შორის. ფორვარდული კონტრაქტებით არ ვაჭრობენ ბირჟაზე და ამიტომ მათ არც მოეთხოვება, რომ აკმაყოფილებდეს რომელიმე გარკვეული ბირჟის სტანდარტებს.

მოვიყვანოთ ცხრილი, რომელშიც მოკლედაა მოცემული ფორვარდულ და ფიუჩერსულ კონტრაქტებს შორის ძირითადი განსხვავებანი.

ფორვარდები	ფიუჩერსები
კერძო კონტრაქტი ორ მხარეს შორის	ივაჭრება ბირჟაზე
არასტანდარტიზებულია	სტანდარტიზებული კონტრაქტია
როგორც წესი, ერთი გარკვეული მიწოდების დღე	მიწოდების მთელი პერიოდი მიწოდების თვის განმავლობაში
ანგარიშსწორება ხდება კონტრაქტის ვადის ამოწურვისას	ყოველდღიური ანგარიშსწორება
როგორც წესი, ადგილი აქვს მიწოდებას ან ნაღდ ანგარიშწორებას (95%)	როგორც წესი, კონტრაქტი იხურება აღსრულების ვადამდე

ცხრილი 3.1

ახლა განვმარტოთ თუ რას წარმოადგენს ფორვარდული ფასი და რა პოტენციური დანაკარგები ელოდება ინვესტორს მის ცვლილებასთან დაკავ-შირებით.

მიმდინარე ფორვარდული ფასი მოცემული კონტრაქტისათვის არის მიწოდების ის ფასი, რომელიც დაფიქსირებულია კონტრაქტში, თუ ის დადე-ბულია დღეს. მაგალითად, თუ რომელიმე დღეს (ჩავთვალოთ ის ნულოვან მომენტად) დაიდო კონტრაქტი რაიმე საბაზისო აქტივზე მიწოდების ფასით K და მიწოდების დროით T, მაშინ t-ური მომენტისათვის მიმდინარე ფორ-ვარდული ფასი (აღვნიშნოთ იგი $F_t = F(t, T)$) იქნება მიწოდების ის ფასი, რომლითაც კონტრაქტი დაიდება t მომენტში იგივე მიწოდების დროით T. უფრო ფორმალურად შეიძლება ითქვას, რომ ფორვარდული ფასი არის მი-წოდების ის ფასი, რომელიც კონტრაქტის ღირებულებას ნულოვანს ხდის.

კონტრაქტის დადების მომენტში მიწოდებისა და ფორვარდული ფა-სები ერთმანეთს ემთხვევა $F_0 = K$. მაგრამ დროის მსვლელობასთან ერ-თად ფორვარდული ფასი იცვლება, მაშინ როცა მიწოდების ფასი უცვლელი რჩება. ეს მოვლენა ბუნებრივიცაა, რადგან დროის ყოველ t-ურ მომენტში ფორვარდული ფასი წარმოადგენს საბაზისო ინსტრუმენტის მომავალი ფასის ბაზრის მიერ პროგნოზირებულ მნიშვნელობას.

როგორც ფიუჩერსული ფასები, ასევე ფორვარდული ფასებიც იკრი-ბება სპოტ ფასისაკენ, როდესაც კონტრაქტის აღსრულების მომენტი ახლოვ-დება

$$F_t \to S_T, \text{ როცა } t \to T \text{ ანუ } T - t \to 0,$$

სადაც S_T სპოტ ფასია T-ურ მომენტში. ამრიგად, ყოველ t მომენტში სიდიდე $F_t - K = F_t - F_0$ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის პოტენციური მოგების ან წაგების შესაფასებლად.

ძირითადი განსხვავებანი ფიუჩერსულსა და ნაღდ ანგარიშსწორების ხერხებს შორის. მოვიყვანოთ ცხრილი, რომელშიც ჩამოთვლილია ძირითადი განსხვავებანი ფიუჩერსულსა და ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზრებს შორის.

ფიუჩერსული ბაზარი	ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზარი
კონტრაქტის პირობები სტანდარტიზებულია	გარიგების ყოველი ასპექტი შეიძლება გახდეს მოლაპარაკების საგანი
საკლირინგო პალატა იცავს გარიგების მონაწილეებს არასაიმედო პარტნიორისგან	არსებობს პარტნიორის არასაიმედოობიდან გამომდინარე რისკი
პოზიციის დახურვა შეიძლება ნებისმიერ მომენტში ნებისმიერ პარტნიორთან	პოზიციის დახურვა შეიძლება მხოლოდ პარტნიორთან შეთანხმების შემდეგ
საჭიროა ყოველდღიური სამარჯო მოთხოვნის შესრულება	სამარჯო მოთხოვნა აუცილებელი არ არის
მოგება-ზარალი რეალიზდება ყოველდღიური ნაღდი ანგარიშსწორებით	მოგება-ზარალი მხოლოდ ქაღალდზე ფიქსირდება
კონტრაქტების უმეტესობა რევერსირდება ან იხურება ნაღდი ფულით. ძირითადი აქტივის მიწოდება იშვიათი მოვლენაა	ფიზიკურ მიწოდებას, ჩვეულებრივ, აქვს ადგილი

ცხრილი 3.2

შევადაროთ, მაგალითად, ფიუჩერსული კონტრაქტი და აქცია. აქციის შეძენის დროს, მყიდველი დაუყოვნებლივ იხდის მის ფასს. ფიუჩერსული პოზიციის გახსნისას, ფასი მხოლოდ ფიქსირდება და არ ხდება ფულის გადახდა.

აქციის ფასის საკურსო ცვლილების დროს, მის მფლობელს გააჩნია არარეალიზებული მოგება (ან ზარალი), რომელიც არ გამოიხატება არანაირი გადახდის ოპერაციით აქციის გაყიდვის მომენტამდე. ღია ფიუჩერსული პოზიცია გულისხმობს ანგარიშიდან ყოველდღიურ დარიცხვა-ჩამოწერას, ანუ ხდება მოგება-ზარალის რეალიზაცია.

საბოლოო შედეგი, როგორც აქციის გაყიდვის დროს, ისე ფიუჩერსული პოზიციის დახურვისას, უდრის სხვაობას ყიდვისა და გაყიდვის ფასებს შორის.

შევნიშნოთ, რომ აქ ჩვენ არ ვეხებით საპროცენტო განაკვეთთან დაკავშირებულ საკითხებს.

შევაჯამოთ ის უპირატესობები და ნაკლოვანებები, რომლებიც ახასიათებს ფიუჩერსულ ბაზარს.

უპირატესობები:

ლიკვიდურობა. კონტრაქტების პირობების სტანდარტიზაცია და მაღალი ეფექტურობა იწვევს უაღრესად მაღალ ლიკვიდურობას. რიგ შემთხვევებში ფიუჩერსული ბაზრის ლიკვიდურობა აღემატება ნაღდი ანგარიშსწორების შესაბამისი ბაზრის ლიკვიდურობას.

კლირინგი. კლირინგის მექანიზმი ხსნის გარიგების მეორე მხარის დეფოლტის რისკს და იძლევა პოზიციის ადვილად დახურვის საშუალებას.

მარჟა. მარჟის სისტემა ფიუჩერსული კონტრაქტების მფლობელებს საშუალებას აძლევს გააკონტროლონ ძირითადი აქტივის დიდი მოცულობები მინიმალური კაპიტალით. მაჰეჯირებლებს შეუძლიათ ხელმისაწვდომ ფასებში შეამცირონ რისკი ძირითადი აქტივების ფიზიკური მიწოდების გარეშე. სპეკულანტებს შეუძლიათ გამოიყენონ ბაზრის ძრაობის ტენდენციები დიდი მასის ნაღდი თანხის სესხებისა და საკრედიტო ხაზების გახსნის გარეშე.

საოპერაციო ხარჯები. ფიუჩერსული ბირჟები ცდილობენ გახადონ ვაჭრობა შესაძლოდ იაფი. როგორც წესი, ფიუჩერსული გარიგების ხარჯები რამდენჯერმე უფრო ნაკლებია, ვიდრე ანალოგიური გარიგების ხარჯები ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზრებზე.

ნაკლოვანებები:

მოუქნელობა. ფიუჩერსული ბაზარი ითხოვს, რომ ყოველი კონტრაქტი მკაცრად სტანდარტიზირებული იყოს. არასაბირჟო ბაზარზე, OTC-ზე, შესაძლებელია გარიგების ყოველი ასპექტის შეთანხმება.

ლიკვიდურობა. ფიუჩერსული კონტრაქტები ახლო მიწოდების ვადებით მაღალლიკვიდურნი არიან. მაშინ როცა გრძელვადიანი ფიუჩერსების ლიკვიდურობა შეზღუდულია.

მარჟა. არსებობს აზრი, რომ მარჟის ყოველდღიური გადათვლა და ამასთან დაკავშირებული ფულადი ნაკადების მართვა დაკავშირებულია დიდ ადმინისტრაციულ ხარჯებთან.

3.3 ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასების ვალუაცია

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვიყვანთ თეორიულ გამოსახულებებს ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასებისათვის, რომლებიც გვიჩვენებს, თუ როგორაა დაკავშირებული ეს სიდიდეები მიმდინარე ნაღდ ფასთან და კონტრაქტის აღსრულების ვადასთან. ამასთან, ფორმულების გამოყვანის დროს, ჩვენ გამოვიყენებთ უწყვეტად გადათვლილ საპროცენტო განაკვეთებს. ამ თავის მეორე ნაწილში კი, რომელიც ფინანსურ ფიუჩერსებს ეხება, პრაქტიკაში ადვილად გამოყენების მიზნით, მარტივად ან რთულად გადათვლილ საპროცენტო განაკვეთებზე გადავალთ.

როგორც უკვე ითქვა, გარკვეული კონტრაქტისათვის მიმდინარე ფორ-

ვარდული ფასი მოცემულ დღეს არის მიწოდების ის ფასი, რომლითაც დაიდო კონტრაქტი ამ დღეს, ან უფრო ფორმალურად, ეს არის მიწოდების ის ფასი, რომელიც კონტრაქტის ღირებულებას ანულებს. პრაქტიკულად ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფასების დადგენა ხდება ვაჭრობის პროცესში ჩვეულებრივი წესით, მოთხოვნა-მიწოდების კანონით, როგორც ყველა სხვა ფასისა.

მიუხედავად ამისა, შესაძლებელია გამოითვალოს მიწოდების ფასის „სწორი" თეორიული მნიშვნელობა, რომლითაც უნდა დაიდოს კონტრაქტი, რათა გამოირიცხოს არბიტრაჟული მოგების მიღების შესაძლებლობა გარიგებაში მონაწილე მხარეთათვის. სახელდობრ, არბიტრაჟული მიდგომის გამოყენებით შეიძლება თეორიულად გამოისახოს ფორვარდული ფასის დამოკიდებულება სპოტ ფასზე, აღსრულების ვადაზე და სხვა დაკვირვებად სიდიდეებზე.

ჩვენ გამოვიყვანთ ფორვარდული ფასის გამოსათვლელ გამოსახულებებს კონტრაქტებისათვის, რომელთა საბაზისო ფასეულობებია:

1. ფასიანი ქაღალდები შემოსავლის გარეშე;

2. ფასიანი ქაღალდები განსაზღვრული ფულადი შემოსავლით;

3. ფასიანი ქაღალდები განსაზღვრული დივიდენდური შემოსავლით.

ფიუჩერსული კონტრაქტები აქციათა ინდექსებზე და უცხოურ ვალუტაზე შეიძლება მივაკუთვნოთ იმ კონტრაქტების კატეგორიას, რომელთა საბაზისო აქტივს წარმოადგენს ფასიანი ქაღალდები განსაზღვრული დივიდენდური შემოსავლით. ამიტომ ამ კონტრაქტებისათვისაც შესაძლებელია ფიუჩერსული ფასებისათვის თეორიული გამოსახულებების მიღება.

შემდგომ ნაჩვენები იქნება, რომ უმეტეს შემთხვევებში ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასები ახლოსაა ერთმანეთთან და ამრიგად, შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ფორვარდული ფასებისათვის მიღებული ფორმულები გამოსადეგია ფიუჩერსული ფასებისთვისაც.

მოკლე გაყიდვა. ზოგიერთი არბიტრაჟული სტრატეგია, რომელიც გამოიყენება ფორვარდული ფასის გამოთვლისას, შეიცავს ე.წ. მოკლე გაყიდვის პროცედურას. მოკლე გაყიდვა ნიშნავს ფასიანი ქაღალდის სესხებას და მის დაუყოვნებლივ გაყიდვას ღია ბაზარზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინვესტორს უკავია მოკლე პოზიცია ფასიან ქაღალდში.

მოკლე პოზიციაში მყოფმა ინვესტორმა ნებისმიერი შემოსავალი, რომელიც შეიძლება მიღებული იქნას ფასიანი ქაღალდიდან (მაგალითად, დივიდენდები, საპროცენტო განაკვეთი და სხვა), უნდა გადაუხადოს თავის ბროკერს, ამ უკანასკნელმა კი გადაგზავნოს ეს თანხა იმ კლიენტის ანგარიშზე, რომლისგანაც ნასესხები იყო ფასიანი ქაღალდი. მოკლე გაყიდვა თითქმის

ყველა ქვემოთ გამოყენებული არბიტრაჟული სტრატეგიის ორგანული ნაწილია.

ფასების თეორიული მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება გარკვეულ დაშვებებში, რომლებსაც ჩვენ ახლა ჩამოვთვლით.

1. არ არსებობს გარიგების ხარჯები;

2. ყველა სავაჭრო მოგება (ან წმინდა წაგება) იბეგრება ერთი და იგივე საგადასახადო განაკვეთით;

3. ბაზრის ყველა მონაწილეს შეუძლია როგორც ფულის სესხება, ისე გასესხება ერთი და იგივე ურისკო საპროცენტო განაკვეთით;

4. არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია.

შემდგომში ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:
T — კონტრაქტის აღსრულების ვადა (მიწოდების დრო);
t — მიმდინარე დრო;
S_t — საბაზისო ინსტრუმენტის ფასი t მომენტში;
S_T — საბაზისო ინსტრუმენტის ფასი T მომენტში;
K — ფორვარდული კონტრაქტის მიწოდების ფასი;
F_t — მიმდინარე ფორვარდული ფასი t მომენტში;
f_t — გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის ღირებულება t მომენტში;
r — უწყვეტად დარიცხული ურისკო წლიური საპროცენტო განაკვეთი t მომენტში $T-t$ ხანგრძლივობის ინვესტიციისათვის.

ცვლადები t და T გამოსახულია წლებში და გადათვლილია რომელიმე მომენტიდან (მნიშვნელობა არა აქვს, კონკრეტულად რომელი), რომელიც წინ უსწრებს კონტრაქტის დადების მომენტს. ცხადია, რომ სიდიდე $T-t$ არის დრო, დარჩენილი კონტრაქტის აღსრულების ვადამდე და როგორც შემდეგ ვნახავთ, მიღებულ გამოსახულებებში ფიგურირებს მხოლოდ ეს სიდიდე.

მნიშვნელოვანია გვესმოდეს, რომ ფორვარდული ფასი F და ფორვარდული კონტრაქტის ღირებულება f სრულიად განსხვავებული სიდიდეებია.

ადრე ჩვენ უკვე განვმარტეთ, თუ რას წარმოადგენს მიმდინარე ფორვარდული ფასი. ახლა განვმარტოთ, თუ რას ნიშნავს გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის ფასი t მომენტში.

განვიხილოთ ფორვარდული კონტრაქტი მიწოდების ფასით K და აღსრულების ვადით T, რომელიც დადებულია რომელიმე, ვთქვათ t_0 მომენტში. იმ თანხას, რომელიც უნდა გადაიხადოს ინვესტორმა $t \geq t_0$ მომენტში გრძელი პოზიციის დასაკავებლად ამ კონტრაქტში, ეწოდება გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის ღირებულება t მომენტში. ცხადია, რომ კონტრაქტის დადების მომენტში მიწოდებისა და ფორვარდული ფასები ტოლია, ხოლო კონტრაქტის ღირებულება ნულოვანია. დროთა განმავლობაში ფორვარდული

ფასი და კონტრაქტის ღირებულება იცვლება, მიწოდების ფასი კი უცვლელი რჩება.

ფორვარდული ფასები ფასიანი ქაღალდისათვის შემოსავლის გარეშე. ფორვარდულ კონტრაქტებს შორის უმარტივესია ის კონტრაქტები, რომელთა საბაზისო აქტივს წარმოადგენს ფასიანი ქაღალდი, რომელიც არ აძლევს დამატებით შემოსავალს მის მფლობელს. ასეთი ფასიანი ქაღალდის მაგალითებია: უდივიდენდო აქციები, უკუპონო ობლიგაციები და სხვა. ამ ტიპის კონტრაქტები პრაქტიკაში იშვიათია, მაგრამ მათი განხილვა მოსახერხებელია ჩვენი მიზნებისათვის. სახელდობრ, იმის საილუსტრაციოდ, თუ როგორ ხდება ფორვარდული ფასებისა და ფორვარდული კონტრაქტების ღირებულების თეორიული გამოსახულებების გამოყვანა არბიტრაჟული მიდგომის გამოყენებით.

იმისათვის, რომ გამოირიცხოს არბიტრაჟის შესაძლებლობა, ფორვარდული ფასის კავშირი სპოტ ფასთან უნდა გამოისახოს შემდეგი თანაფარდობით

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}. \tag{3.1}$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$F_t > S_t e^{r(T-t)}.$$

მაშინ ბაზრის მონაწილეს t მომენტში შეუძლია შემდეგი სტრატეგიის არჩევა.

1. S_t თანხის სესხება და აქტივის 1 ერთეულის შეძენა;

2. მოკლე პოზიციის დაკავება 1 ფორვარდულ კონტრაქტში.

მაშინ T მომენტში ინვესტორს დასაბრუნებელი ექნება $S_t e^{r(T-t)}$ თანხა. ამავე დროს, ფორვარდული კონტრაქტის თანახმად, ის გაყიდის აქტივის ერთ ერთეულს F_t ფასად და, საბოლოოდ, მიიღებს მოგებას

$$F_t - S_t e^{r(T-t)} > 0.$$

მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ასეთი სტრატეგიის განხორციელება ინვესტორისაგან არ მოითხოვს არავითარ დანახარჯებს, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არბიტრაჟია. ამრიგად, რჩება მხოლოდ იმის შესაძლებლობა, რომ

$$F_t \leq S_t e^{r(T-t)}.$$

ვთქვათ, ახლა

$$F_t < S_t e^{r(T-t)}.$$

მაშინ ინვესტორმა შეიძლება განახორციელოს შემდეგი, კვლავ ნულოვანი ღირებულების სტრატეგია.

1. მოკლე პოზიცია ფასიანი ქაღალდის ერთ ერთეულში და მიღებული S_t თანხის დეპოზიტზე დადება;

2. გრძელი პოზიციის დაკავება 1 ფორვარდულ კონტრაქტში.

ამ სტრატეგიის გამოყენებით ინვესტორი მიიღებს მოგებას

$$S_t e^{r(T-t)} - F_t > 0$$

და კვლავ არბიტრაჟია. ამრიგად, $F_t = S_t e^{r(T-t)}$.

ახლა გამოვიყვანოთ გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის ფასის, f_t-ს, ფორმულა. განვიხილოთ ორი პორტფელი.

პორტფელი A: ერთი გრძელი ფორვარდული კონტრაქტი ფასიან ქაღალდზე მიწოდების ფასით K და $Ke^{-r(T-t)}$ რაოდენობის თანხა.

პორტფელი B: ფასიანი ქაღალდის ერთეული.

T მომენტისათვის ეს ორივე პორტფელი შედგება ფასიანი ქაღალდის 1 ერთეულისაგან. მართლაც, T მომენტისათვის $Ke^{-r(T-t)}$ თანხის ინვესტირება დააგროვებს K რაოდენობის თანხას, რომლითაც გრძელი ფორვარდული კონტრაქტის თანახმად უნდა შეძენილ იქნას აქტივის 1 ერთეული. ამრიგად, T მომენტში ორივე პორტფელი ეკვივალენტურია.

მაგრამ t მომენტში A პორტფელის ღირებულებაა $f_t + Ke^{-r(T-t)}$, ხოლო B პორტფელისა კი S_t. არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვის გამო უნდა სრულდებოდეს ტოლობა $f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f_t = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $K = S_t e^{r(T-t)} = F_t$ (იხ. ფორმულა (3.1)).

ფორვარდული ფასები ფასიანი ქაღალდისათვის განსაზღვრული ნაღდი ფულადი შემოსავლით. განვიხილოთ ფორვარდული კონტრაქტი ფასიან ქაღალდზე, რომელიც აძლევს მის მფლობელს მიმდინარე t მომენტისათვის ზუსტად განსაზღვრული ნაღდ ფულად შემოსავალს, I_t-ს. ასეთი ფასიანი ქაღალდის მაგალითია დივიდენდიანი აქცია, რომლის მფლობელიც წინასწარ ცნობილ მომენტებში $t \le T_1 < T_2 < \cdots < T_m \le T$ მიიღებს, შესაბამისად, $d_1, d_2, \ldots, d_m$ დივიდენდებს. ამ შემთხვევაში

$$I_t = d_1 e^{-r(T_1-t)} + d_2 e^{-r(T_2-t)} + \cdots + d_m e^{-r(T_m-t)}.$$

ასეთი ფასიანი ქაღალდისათვის ფორვარდული ფასის დამოკიდებულება მიმდინარე ნაღდ ფასზე გამოისახება ფორმულით

$$F_t = (S_t - I_t)e^{r(T-t)}, \tag{3.2}$$

ხოლო ფორვარდული კონტრაქტის მიმდინარე ფასი, როდესაც მიწოდების ფასია K, მოიცემა ფორმულით

$$f_t = S_t - I_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.3}$$

ეს გამოსახულებები მიიღება არბიტრაჟული მიდგომის გამოყენებით ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში.

მაგალითად, კონტრაქტის ღირებულების დასადგენად კვლავ შევადგინოთ ორი პორტფელი. პორტფელი A ისეთივე დავტოვოთ, როგორიც იყო წინა შემთხვევაში.

პორტფელი B: ფასეულობის 1 ერთეული პლუს I_t თანხის სესხება.

T მომენტისათვის ორივე პორტფელი შედგება აქტივის 1 ერთეულისაგან. A პორტფელისათვის ეს უკვე ნაჩვენები იყო. პორტფელი B კი მოგვცემს ფასეულობის 1 ერთეულს, რადგან დასაბრუნებელი $I_t e^{r(T-t)}$ ოდენობის თანხა დაგროვდება T მომენტისათვის მიღებული შემოსავლებით. ამრიგად, T მომენტისათვის ორივე პორტფელი ერთნაირი ღირებულებისაა. ამიტომ, არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვის გამო, მათ უნდა ჰქონდეთ ერთნაირი ღირებულება t მომენტშიც.

თუ გავიხსენებთ, რომ t მომენტში A-ს ღირებულებაა

$$f_t + Ke^{-r(T-t)},$$

ხოლო B-სი კი — $(S_t - I_t)$, გვექნება

$$f_t = S_t - I_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

ცხადია, რომ $f_t = 0$, თუ $K = (S_t - I_t)e^{r(T-t)}$ და ფორვარდული ფასის განმარტების თანახმად, მივიღებთ (3.2)-ს.

მაგალითი 3.1. განვიხილოთ გრძელი ფორვარდული კონტრაქტი კუპონებით აღჭურვილ ობლიგაციაზე. ვთქვათ, კონტრაქტის აღსრულების ვადაა ერთი წელი, ხოლო ობლიგაციის ვადაა — 5 წელი. ვთქვათ, ობლიგაციის მიმდინარე ფასია \$900, ხოლო კუპონიდან შემოსავალია \$40, რომლის გადახდაც მოხდება პირველად ექვსი თვის შემდეგ, ხოლო მეორედ — თორმეტი თვის შემდეგ, უშუალოდ მიწოდების მომენტის წინ. დავუშვათ, რომ ექვსთვიანი ინვესტიციისათვის უწყვეტად დარიცხული წლიური საპროცენტო განაკვეთი 9%-ია, ხოლო თორმეტთვიანისთვის კი — 10%.

ამ მაგალითში $S_t = \$900$,

$$I_t = 40\left[e^{-0.09\times 0.5} + e^{-0.1}\right] = 74.43,$$

ისე რომ

$$F_t = (900 - 74,43)e^{0.1} = 912.40.$$

ამრიგად, „კორექტული“ მიწოდების ფასი იქნება \$912.40.

ფორვარდული ფასები ფასიანი ქაღალდებისათვის უწყვეტად დარიცხული დივიდენდური შემოსავლის განსაზღვრული საპროცენტო განაკვეთით. დივიდენდური შემოსავალი განსაზღვრული საპროცენტო განაკვეთით ნიშნავს, რომ შემოსავალი ფასიანი ქაღალდიდან გამოიხატება მისი ღირებულების განსაზღვრულ პროცენტებში. ვიგულისხმებთ, რომ დივიდენდური შემოსავალი დაირიცხება უწყვეტად წლიური საპროცენტო განაკვეთით q, რაც ნიშნავს შემდეგს: თუ t მომენტში ფასიანი ქაღალდის მიმდინარე ფასია S_t, მაშინ შემოსავალი დროის $[t, t+\Delta)$ მონაკვეთში, სადაც Δ საკმაოდ მცირე სიდიდეა, იქნება $S_t(q\Delta)$. თუ Δ იმდენად მცირე სიდიდეა, რომ Δ სიგრძის დროის მონაკვეთში $[t, t+\Delta)$ S სიდიდე პრაქტიკულად უცვლელად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, ე.ი. $S_u \approx S_t$, თუ $t \leq u < t+\Delta$, მაშინ ამ თანხის რეინვესტირებით ისევ ფასიან ქაღალდში $(t+\Delta)$ მომენტისათვის გვექნება $(1+q\Delta)$ რაოდენობის ფასეულობა (აქ დაშვებულია, რომ ფასიანი ქაღალდი დაყოფადია). ვთქვათ, $n = \frac{T-t}{\Delta}$, ანუ $T - t = n\Delta$. თუ ზემოთ აღწერილ პროცედურას გავიმეორებთ მიმდევრობით $t+2\Delta, t+3\Delta, \ldots, t+n\Delta$ მომენტებისათვის, მაშინ T მომენტისათვის დაგროვდება ფასიანი ქაღალდების შემდეგი რაოდენობა

$$(1+q\Delta)^n = (1+q\Delta)^{\frac{T-t}{\Delta}}.$$

თუ ამ გამოსახულებაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta \to 0}(1+q\Delta)^{\frac{T-t}{\Delta}} = e^{q(T-t)}.$$

ამრიგად, წლიური საპროცენტო q განაკვეთით უწყვეტად დარიცხული დივიდენდური შემოსავლის რეინვესტირება ისევ ფასიან ქაღალდში 1 ერთეულიდან დააგროვებს $e^{q(T-t)}$ რაოდენობის ფასიან ქაღალდს T მომენტისათვის, ანუ ფასიანი ქაღალდის რაოდენობის დაგროვება ხდება უწყვეტად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთით q.

ფორვარდული ფასის დასადგენად დავუშვათ, რომ ინვესტორმა აირჩია შემდეგი სტრატეგია:

1. $e^{-q(T-t)}$ რაოდენობის ფასიანი ქაღალდის შესყიდვა მისგან მიღებული დივიდენდური შემოსავლის ისევ ფასიან ქაღალდში რეინვესტირებით.

2. მოკლე პოზიცია ერთ ფორვარდულ კონტრაქტში.

როგორც ზემოთ იყო ახსნილი, $e^{-q(T-t)}$ რაოდენობიდან ინვესტორს დაუგროვდება $e^{-q(T-t)} \times e^{q(T-t)} = 1$ ერთეული ფასეულობა, რომელსაც კონტრაქტის ძალით გაყიდის F_t ფასად. ამრიგად, არჩეული სტრატეგიიდან T მომენტში მიღებული შემოსავალია F_t. სტრატეგიის ღირებულება t მომენტში კი უდრის $S_t e^{-q(T-t)}$.

რათა გამოირიცხოს არბიტრაჟული მოგების მიღების შესაძლებლობა, უნდა შესრულდეს შემდეგი ტოლობა:

$$S_t e^{-q(T-t)} \times e^{r(T-t)} = F_t,$$

რაც მოგვცემს შემდეგ გამოსახულებას ფორვარდული ფასისთვის:

$$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}.$$

არბიტრაჟული მოსაზრებების გამოყენებით ასევე ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ფორვარდული კონტრაქტის ღირებულება t მომენტში, როდესაც მიწოდების ფასია K, მოიცემა ფორმულით

$$f_t = S_t e^{-q(T-t)} - K e^{-r(T-t)}.$$

ფორვარდული ფასები აქციათა ინდექსებსა და უცხოურ ვალუტაზე. ფორვარდულ კონტრაქტებში აქციათა ინდექსებზე საბაზისო აქტივს წარმოადგენს აქციათა ის პორტფელი, რომლითაც ხდება ამ ინდექსის გამოთვლა. მაგალითად, S&P500 ინდექსის შემთხვევაში ეს არის 500 აქციისაგან შედგენილი პორტფელი. ამიტომ აქციათა ინდექსი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც დივიდენდიანი ფასიანი ქაღალდი. ამავე დროს, მისგან მიღებული დივიდენდები იგივეა, რაც აქციათა პორტფელის მფლობელის მიერ მიღებული დივიდენდები. თუ პორტფელში შემავალ აქციებს ჩავთვლით ფასიან ქაღალდებად უწყვეტად დარიცხული დივიდენდური შემოსავლებით, ასეთივე ფასიან ქაღალდად შეგვიძლია ჩავთვალოთ აქციათა ინდექსიც. თუ q არის უწყვეტად დარიცხული წლიური საპროცენტო განაკვეთი, მაშინ ფორვარდული ფასი მოიცემა ფორმულით

$$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}.$$

ვალუტაზე ფორვარდულ და ფიუჩერსულ კონტრაქტებში საბაზისო აქტივს წარმოადგენს უცხოური ვალუტა. S ცვლადი ამ შემთხვევაში აღნიშნავს უცხოური ვალუტის ერთი ერთეულის მიმდინარე ფასს, გამოხატულს დოლარებში, ან ქვეყნის შიდა ვალუტაში. რომელიმე უცხო ქვეყნის ვალუტა შეიძლება ინვესტირებული იქნას უწყვეტად დარიცხული წლიური საპროცენტო განაკვეთით r_f, რომელიც გავრცელებულია ამ ქვეყანაში და განსხვავებულია შიდა საპროცენტო r_d განაკვეთისაგან.

ასეთი კონტრაქტებისათვის ფორვარდული ფასი გამოითვლება ფორმულით

$$F_t = S_t e^{(r_d-r_f)(T-t)},$$

რომლის მიღებაც, არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვით, ისევე მარტივია, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევებში.

3.4 კავშირი ფორვარდულ და ფიუჩერსულ ფასებს შორის

ცოტა მოგვიანებით ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი მუდმივია კონტრაქტის სიცოცხლის პერიოდში და

ერთი და იგივეა ნებისმიერი ხანგრძლივობის ინვესტირებისათვის, ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასები ერთი და იგივე აღსრულების ვადის მქონე კონტრაქტებისათვის ერთმანეთს ემთხვევა. ეს ფაქტი ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც საპროცენტო განაკვეთი დროის ცნობილი ფუნქციაა.

როდესაც საპროცენტო განაკვეთის ცვალებადობა დროში შემთხვევითია (ანუ საპროცენტო განაკვეთი წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, როგორც ეს ხდება რეალურ სამყაროში), ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასები აღარ ემთხვევა ერთმანეთს. მათ შორის ურთიერთკავშირის დადგენა საკმაოდ რთული საკითხია და ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით. გავაკეთოთ მხოლოდ მცირე კომენტარი. თუ საბაზისო ფასეულობის ფასი მკაცრად დადებითადაა კორელირებული საპროცენტო განაკვეთთან, მაშინ ყოველდღიური გადათვლის პროცედურის გამო ფიუჩერსული კონტრაქტები უფრო მიმზიდველი აღმოჩნდება, ვიდრე ფორვარდული, რასაც შედეგად მოყვება ის, რომ ფიუჩერსული ფასები უფრო მაღალი იქნება, ვიდრე ფორვარდული.

მართლაც, თუ საბაზისო ფასეულობის ფასი, S იზრდება, მაშინ გრძელ ფიუჩერსულ პოზიციაში მყოფი ინვესტორი ყოველდღიური ანგარიშსწორების პროცედურის გამო დაუყოვნებლივ იღებს მოგებას, რომელიც მას დაუგროვდება საშუალოზე უფრო მაღალი საპროცენტო განაკვეთით. თუ S მცირდება, ინვესტორი იღებს დანაკარგებს, რომელთა დაფინანსება მას შეუძლია საშუალოზე უფრო დაბალი საპროცენტო განაკვეთით. ფორვარდული კონტრაქტის შემთხვევაში ანგარიშსწორება ხდება კონტრაქტის აღსრულების მომენტში, ამიტომ ამ კონტრაქტის მფლობელის შემოსავალი არ რეაგირებს საპროცენტო განაკვეთის ასეთ ცვლილებაზე. აქედან ცხადად ჩანს ფიუჩერსული კონტრაქტის უპირატესობა ფორვარდულთან შედარებით.

მსგავსი ანალიზის ჩატარება შეიძლება მაშინაც, როცა S მკაცრად უარყოფითადაა კორელირებული საპროცენტო განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში ფორვარდული ფასები უფრო მაღალია, ვიდრე ფიუჩერსული.

თუმცა არსებობს მრავალი ფაქტორი, რომელიც განაპირობებს განსხვავებას ფორვარდულ და ფიუჩერსულ ფასებს შორის და რომლებსაც არ ვითვალისწინებთ თეორიული გამოთვლებისას, უმეტეს შემთხვევაში განსხვავება საკმაოდ მცირეა და შეიძლება მისი უგულებელყოფა. შემდგომში ჩვენ ყველგან ჩავთვლით, რომ ფიუჩერსული და ფორვარდული ფასები ტოლია.

ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასების ურთიერთდამოკიდებულებების შესასწავლად ჩატარებულია მრავალი ემპირიული კვლევა. მაგალითად, დადგენილია, რომ გერმანული მარკის, შვეიცარიული ფრანკის, იაპონური იენისა და ინგლისური ფუნტი სტერლინგისათვის (დოლარის მიმართ) ფიუჩერსულ და ფორვარდულ ფასებს შორის განსხვავება მცირე სტატისტიკური მნიშვნელობისაა, ვერცხლისა და სპილენძის შემთხვევაში კი პირიქით.

ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასების ტოლობა, როდესაც ურისკო საპროცენტო განაკვეთი მუდმივი სიდიდეა. დავუშვათ,

რომ ფიუჩერსული კონტრაქტის სიცოცხლის ხანგრძლივობაა n დღე, F_i არის ფიუჩერსული ფასი i-ური დღის ბოლოს $(0 < i < n)$. დავუშვათ, რომ δ არის დღიური საპროცენტო განაკვეთი (იგულისხმება, რომ ის მუდმივია). განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგია, რომელიც შემოთავაზებული იყო კოქსის, ინგერსოლისა და როსის ([26]) მიერ:

1. დაიკავე e^{δ} რაოდენობის გრძელი პოზიცია ფიუჩერსულ კონტრაქტში 0 დღის ბოლოს (ე.ი. კონტრაქტის ამოქმედების დღის ბოლოს).
2. გაზარდე გრძელ პოზიციათა რაოდენობა $e^{2\delta}$-მდე პირველი დღის ბოლოს.
3. გაზარდე გრძელ პოზიციათა რაოდენობა $e^{3\delta}$-მდე მეორე დღის ბოლოს და ა.შ.

ეს სტრატეგია მოყვანილია შემდეგ ცხრილში.

დღე	0	1	2	$\ldots\ n-1$	n
ფიუჩერსული ფასი	F_0	F_1	F_2	$\ldots\ F_{n-1}$	F_n
ფიუჩერსული პოზიციები	e^{δ}	$e^{2\delta}$	$e^{3\delta}$	$e^{n\delta}$	0
მოგება-ზარალი	0	$(F_1-F_0)e^{\delta}$	$(F_2-F_1)e^{2\delta}$		$(F_n-F_{n-1})e^{n\delta}$
მოგება-ზარალი დაგროვილი n-ური დღისათვის	0	$(F_1-F_0)e^{n\delta}$	$(F_2-F_1)e^{n\delta}$		$(F_n-F_{n-1})e^{n\delta}$

ცხრილი 3.3

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ შემოთავაზებული სტრატეგიის განხორციელებით მიღებული საბოლოო შემოსავალი (რომელიც შეიძლება უარყოფითიც იყოს) n-ური დღისათვის იქნება

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i-F_{i-1})e^{n\delta}=(F_n-F_0)e^{n\delta}.$$

რადგანაც კონტრაქტის აღსრულების ვადისათვის $F_n = S_T$, სტრატეგიიდან მიღებული საბოლოო შემოსავალი იქნება

$$(S_T-F_0)e^{n\delta}.$$

თუ შემოთავაზებული სტრატეგიის განხორციელებასთან ერთად 0 მომენტში მოვახდენთ F_0 თანხის ინვესტირებას დღიური ურისკო საპროცენტო განაკვეთით δ, მაშინ n-ური დღისათვის სრული შემოსავალი იქნება

$$F_0e^{n\delta} + (S_T - F_0)e^{n\delta} = S_Te^{n\delta}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ 0 დღის ბოლოს ფორვარდული ფასია G_0. G_0-ის ინვესტირებით დღიური საპროცენტო განაკვეთით δ და $e^{n\delta}$ გრძელი პოზიციის დაკავებით ფორვარდულ კონტრაქტში n-ური დღისათვის, ანუ T მომენტისათვის მიღებული იქნება თანხა $S_Te^{n\delta}$.

ამრიგად, ინვესტირების ორმა სტრატეგიამ, რომელთაგან ერთი მოითხოვს საწყის ინვესტირებას F_0, მეორე კი — G_0, მოგვცა ერთნაირი შემოსავალი T მომენტში, რომელიც უდრის $S_Te^{n\delta}$-ს.

არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვის გამო გვექნება $G_0 = F_0$.

3.5 ფორვარდული კურსი (განაკვეთი)

ფინანსური ინჟინერიის ისეთი მნიშვნელოვანი პროდუქტების განხილვამდე, როგორებიცაა FRA (ორარდ ატე გრეემენტ) და ფინანსური ფიუჩერსები, შემოვიღოთ ფორვარდული კურსის ან განაკვეთის ცნება.

ფორვარდული კურსი არის იმ ინსტრუმენტის საბაზრო ფასი, რომელიც შემოთავაზებულია სავაჭროდ დღეს, მაგრამ საბოლოო ანგარიშსწორება ამ ინსტრუმენტის მიხედვით მოხდება მომავლის (ხშირად საკმაოდ შორეული მომავლის) რომელიმე მომენტში.

ტიპიური მაგალითებია ვალუტის გაცვლის ფორვარდული კურსი და ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი.

ფორვარდული სავალუტო კურსი. ვთქვათ, ფინანსური ინსტიტუტი, მაგალითად ბანკი, აცხადებს სამომავლო სავალუტო ოპერაციების კურსს. ერთი შეხედვით ეს ძალიან რისკიანი საქმეა, რადგან ვალუტის კურსის შეფასება მომდევნო რამოდენიმე საათის განმავლობაშიც კი რთულ ამოცანას წარმოადგენს.

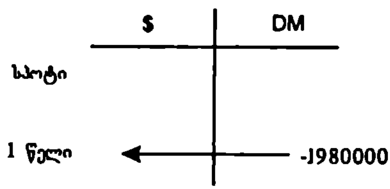
როგორ შევაფასოთ ასეთ შემთხვევაში მომავალი კურსი?

ამისათვის იყენებენ ურისკო არბიტრაჟის პრინციპს, რომელიც არის ძირითადი პრინციპი ბევრი წარმოებული ინსტრუმენტის ღირებულების დასადგენად. მის საფუძველს შეადგენს საბოლოო პოზიციის ჰეჯირების შესაძლებლობა ისეთი ინსტრუმენტების საშუალებით, რომელთა ფასიც ცნობილია.

მაგალითი 3.2. ბანკს მიმართა ამერიკელმა კლიენტმა: მას სურს ბანკისგან შეიძინოს DM1980000 კონტრაქტის დადებიდან ერთი წლის შემდეგ. კლიენტის თხოვნის შესასრულებლად ბანკმა ერთი წლის შემდეგ უნდა გაყიდოს DM1980000 და სანაცვლოდ მიიღოს კლიენტისგან დოლარი. ისმის

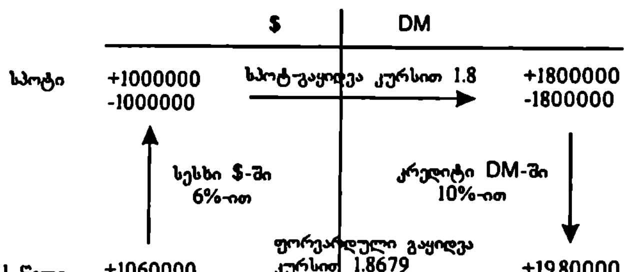
კითხვა: რამდენი დოლარი უნდა მიიღოს ბანკმა ერთი წლის შემდეგ მარკების დოლარებზე გაცვლისას? ანუ რა არის ფორვარდული კურსი $/DM მიწოდებით ერთი წლის შემდეგ? ცნობილია მიმდინარე სპოტ-კურსი $1 = DM1.8. ცნობილია აგრეთვე, რომ ერთწლიანი საპროცენტო განაკვეთი დოლარზე არის 6%, ხოლო მარკაზე 10%.

განვიხილოთ დროის ორი მომენტი: დღევანდელი დღე (სპოტი) და სამომავლო დროის მომენტი (1 წლის შემდეგ). აღვნიშნოთ „—"-ით ბანკიდან გასული, ხოლო „+"-ით ბანკში შემოსული თანხები. მაშინ, საწყისი შეთანხმება, დიაგრამაზე ასე შეიძლება გამოვსახოთ



ნახ. 3.6

ბანკის მოქმედება (ჰეჯირება) შეიძლება ასეთი სქემით გამოვსახოთ



ნახ. 3.7

ეს სქემა აღწერს ქმედებების შემდეგ მიმდევრობას: ბანკი გასცემს კრედიტს DM1800000, 10%-ით 1 წლის ვადით. მაშინ 1 წლის შემდეგ მას ექნება DM1980000 (მართლაც, 1800000 + 1800000 · 10% = 1980000). როგორ მოხდება კრედიტის დაფინანსება? ბანკი ყიდულობს DM1800000 სპოტ-ფასად, რისთვისაც იხდის $1000000. საიდან ხდება ამ ბოლო ოპერაციის დაფინანსება? ბანკი იღებს სესხს $1000000, 6%-ით 1 წლის ვადით. მაშინ მას ერთი წლის შემდეგ დასაბრუნებელი ექნება $1060000. ე.ი. ერთი წლის შემდეგ ბანკმა უნდა გაყიდოს (საწყისი შეთანხმების თანახმად) DM1980000

და დააბრუნოს \$1060000. აქედან ცხადია, რომ თუ ბანკი დაადგენს ფორვარდულ კურსს ასე:

$$1980000 : 1060000 = 1.8679,$$

ანუ, სხვა სიტყვებით, მოთხოვს კლიენტს \$1060000-ს DM1980000-ის სანაცვლოდ, იგი სრულად დააჰეჯირებს თავის ვალდებულებას.

დასკვნა: მაჰეჯირებელი კონტრაქტების სპოტ-ფასების ცოდნამ საშუალება მისცა ბანკს დაედგინა ფორვარდული სავალუტო კურსი.

ზოგადად ფორმულას აქვს სახე:

$$F = S \cdot \frac{1 + r_f \cdot \frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}_f}}{1 + r_d \cdot \frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}_d}}. \tag{3.4}$$

ამ ფორმულაში F ფორვარდული კურსია, S — სპოტ-კურსი, r_f — კოტირებადი ვალუტის საპროცენტო განაკვეთი ($r_f = 0.1$ DM-თვის), r_d — ძირითადი ვალუტის საპროცენტო განაკვეთი ($r_d = 0.06$ \$-თვის), დღე — დრო სპოტ თარიღიდან ფორვარდულ თარიღამდე, ბაზისი — დღეების რაოდენობა წელიწადში (ამ მაგალითში — 360, დოლარისთვისაც და მარკისთვისაც). უწყვეტად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთებისთვის ზემომოყვანილი ფორმულა იღებს მარტივ სახეს

$$F = Se^{(r_f - r_d)(T-t)}.$$

პრაქტიკაში კოტირება ხდება ფორვარდულ და სპოტ ფასებს შორის სხვაობაზე დაყრდნობით ე.წ. ფორვარდული მარჟით, ანუ სვოპ-პუნქტებით. ამას იმიტომ აკეთებენ, რომ ფორვარდული კურსი ძალიან მგრძნობიარეა სპოტ-კურსის ცვლილების მიმართ და თითქმის ზუსტად იმეორებს მის ცვლილებას. სვოპ-პუნქტები უფრო მდგრადია და ამიტომ დილერებს არ უხდებათ კოტირების წამდაუწუმ ცვლა. სვოპ-პუნქტების ტერმინებში (3.4) ფორმულას ექნება სახე

$$W = S \cdot \left[\frac{1 + r_f \cdot \frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}_f}}{1 + r_d \cdot \frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}_d}} - 1 \right].$$

ამ ფორმულის „უწყვეტი“ ვარიანტია

$$W = S \left(e^{(r_f - r_d)(T-t)} - 1 \right).$$

ადვილი დასანახია, რომ $\frac{\partial F}{\partial S} \approx 1$, ხოლო $\frac{\partial W}{\partial S} \approx 0$.

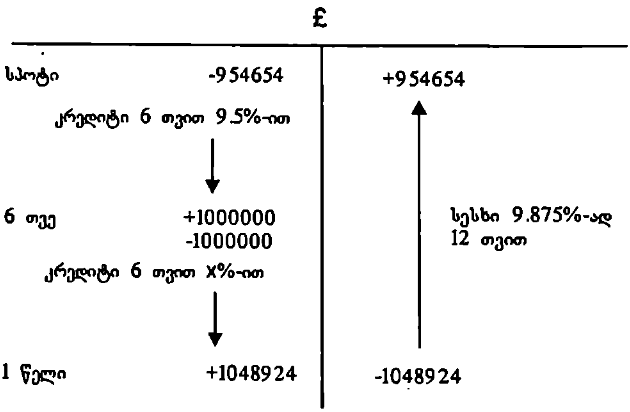
ფორვარდული სესხი და ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი. ბანკების ტრადიციული როლია დაფარვის ვადების ტრანსფორმაცია

— ისინი გასცემენ გრძელვადიან კრედიტებს, აფინანსებენ რა მათ მოკლევადიანი საცალო დეპოზიტებით ან ფულის ბაზრის დეპოზიტებით.

70-იან წლებში მცურავი განაკვეთებით მიღებული სახსრების გადასახადების სიმძიმე ბანკებს გადაჰქონდათ თავიანთ კლიენტებზე. ამიტომ კლიენტებისთვის ძალზე მოხერხებული საშუალო ვადიანი დაკრედიტება გარანტირებდა დაფინანსებას, მაგრამ არ გარანტირებდა იმ საპროცენტო განაკვეთს, რომლითაც ეს დაფინანსება ხდებოდა. ფინანსური ბაზრის ვოლატილობის ზრდამ გამოიწვია კორპორაციების მენეჯერების მოთხოვნა, დაეცვათ ისინი კრედიტის ღირებულების ზრდის რისკისაგან. ამან გამოიწვია ე.წ. ფორვარდ-ფორვარდული სესხების წარმოქმნა. ამ კონტრაქტის სახელწოდება უკავშირდება იმას, რომ როგორც კრედიტის მიღების თარიღი, ისე მისი დაფარვის თარიღიც, მომავალს მიეკუთვნება.

ვთქვათ, ბანკს სთხოვეს დააფიქსიროს განაკვეთი 1 მილიონი ფუნტი სტერლინგის 6-თვიანი სესხისათვის, რომელიც იწყება 6 თვის შემდეგ. ბანკმა, რისკის თავიდან ასაცილებლად, უნდა დაიფიქსიროს საკუთარი დაფინანსება 6 თვით, 6 თვის შემდეგ. მან გამოარკვია, რომ სესხზე 6-თვიანი განაკვეთი უდრის $9\frac{1}{2}$%-ს, ხოლო 12-თვიანი — $9\frac{7}{8}$%-ს, მაგრამ იმ პირობით, რომ ბანკი სესხს აიღებს მოცემულ მომენტში და არა 6 თვის შემდეგ.

ბანკის ქმედებები შემდეგია



ნახ. 3.8

ეს სქემა აღწერს ქმედებების შემდეგ მიმდევრობას: 1) ბანკი სესხულობს 954654-ს 12 თვით 9.875%-ით. მას ერთი წლის შემდეგ ექნება დავალიანება 1048924. 2) ბანკი გაასესხებს 6 თვით 9.5%-ით 954654-ს. იგი 6 თვის შემდეგ მიიღებს 1000000-ს. 3) გაასესხებს 6 თვით 1000000-ს ისეთი x განაკვეთით, რომ დაფაროს თავისი ვალდებულება 1048924-ის ოდენობით (ყველა თანხა ფუნტ სტერლინგებშია მოცემული).

აქედან ცხადია, რომ

$$1000000 + 1000000 \cdot \frac{x\%}{2} = 1048924$$

(2-ზე გაყოფა საჭიროა, რადგან კრედიტი 6-თვიანია).

ზოგადი ფორმულა მიიღება ტოლობიდან

$$\left(1 + r \cdot \frac{T}{360}\right)\left(1 + \widehat{r} \cdot \frac{T^* - T}{360}\right) = \left(1 + r^* \cdot \frac{T^*}{360}\right),$$

სადაც $T < T^*$, r წარმოადგენს საპროცენტო განაკვეთს T ხანგრძლივობის სესხისთვის, r^* — T^* ხანგრძლივობის სესხისთვის, $\widehat{r}$ არის (T, T^*) ინტერვალში ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი. ზედა ტოლობიდან ვღებულობთ,

$$\widehat{r} = \frac{r^*T^* - rT}{(T^* - T)\left(1 + r\frac{T}{360}\right)}$$

(უწყვეტად გადათვლილი პროცენტის შემთხვევაში გვექნება

$$\widehat{r} = \frac{r^*T^* - rT}{T^* - T}$$

ფორმულა). გამოვთვალოთ $\widehat{r}$ წინა მაგალითიდან ამ ფორმულის მეშვეობით: $T = 6$ თვეს, $r = 0.095$, $T^* = 1$ წელს, $r^* = 0.09875$. გვექნება

$$\widehat{r} = \frac{0.09875 - 0.095 \cdot 0.5}{0.52375} = 0.09785 = x.$$

მივიღებთ $x = 9.785\%$.

ამრიგად, გამოვთვალეთ ფორვარდულ-ფორვარდული სესხის არბიტრაჟული ფასი.

რა უარყოფითი თვისებები აქვს ბანკის მიერ ჩატარებულ ქმედებას? მთავარი უარყოფითი თვისება ის არის, რომ ბანკმა აიღო 12-თვიანი სესხი, მაშინ როცა კლიენტს სჭირდებოდა 6-თვიანი კრედიტი. ამით ბანკმა დაიკავა როგორც საკრედიტო ხაზი, ისე სარეზერვო კაპიტალი, რომლებიც ძვირ რესურსებს წარმოადგენს.

ავხსნათ ეს მომენტი უფრო დაწვრილებით. ვთქვათ, ბანკთაშორისო ბაზარზე ბანკს შეუძლია აიღოს სესხი და გასცეს კრედიტი 10%-იანი განაკვეთით, ხოლო დააკრედიტოს კლიენტი 11%-იანი განაკვეთით და გადაიხადოს 15% საკუთარი კაპიტალიდან. კაპიტალის საკმარისობის მოთხოვნიდან ბანკმა უნდა დაარეზერვოს 8% გაცემული კრედიტის ოდენობიდან.

შევადგინოთ ბალანსი და შემოსავალ-გასავლის ანგარიში, რომელიც დაკავშირებულია კლიენტის დაკრედიტებასთან 6 თვით 1000000 ფუნტ სტერლინგზე და დაფინანსებულია ბანკთაშორისო დეპოზიტით.

ბალანსი

აქტივი		პასივი	
კრედიტი კლიენტს (6 თვით)	1000000	ბანკთაშორისი დეპოზიტი (6 თვით)	920000
		კაპიტალი	80000
სულ აქტივი	1000000	სულ ფონდები	1000000

შემოსავალ-გასავლის ანგარიში (6 თვე)

შემოსავალი		გასავალი	
კრედიტი კლიენტს	55000	ბანკთაშორისი დეპოზიტი	46000
		კაპიტალი	6000
სულ	55000	სულ	52000

ამ ანგარიშიდან ჩანს, რომ ბანკმა მიიღო 3000 ფუნტი სტერლინგი სუფთა მოგება რაც შეადგენს 7.5% წლიურ შემოსავალს კაპიტალზე. რა მოხდება 6-თვიანი ფორვარდ-ფორვარდული სესხის გაცემის შემთხვევაში?

ბალანსი (პირველი 6 თვე)

აქტივი		პასივი	
ბანკთაშორისი კრედიტი (6 თვით)	1000000	ბანკთაშორისი დეპოზიტი (12 თვით)	920000
		კაპიტალი	80000
სულ	1000000	სულ	1000000

ბალანსი (ბოლო 6 თვე)

აქტივი		პასივი	
კრედიტი კლიენტს (6 თვით)	1000000	ბანკთაშორისი დეპოზიტი (12 თვით)	920000
		კაპიტალი	80000
სულ	1000000	სულ	1000000

შემოსავალ-გასავლის ანგარიში (12 თვე)

შემოსავალი		გასავალი	
ბანკთაშორისი კრედიტი	50000	ბანკთაშორისი დეპოზიტი	92000
კრედიტი კლიენტს	55000	კაპიტალი	12000
სულ	105000	სულ	104000

ამ ანგარიშებიდან ჩანს, რომ ბანკმა ერთ წელიწადში მიიღო 1000

ფუნტი სტერლინგი მოგება, რომელიც წარმოადგენს 1.25% სუფთა შემოსავალს კაპიტალზე, ანუ წინა ვარიანტის მხოლოდ $\frac{1}{6}$-ს.

ამ მაგალითში ყველაზე დიდი დანაკარგი შემოსავალში წარმოიქმნა იმის გამო, რომ საჭიროა კაპიტალის რეზერვირება დიდი ხნის განმავლობაში.

ცხადია, რომ თუ შესაძლებელია საბალანსო ანგარიშიდან ფორვარდ-ფორვარდული კონტრაქტის ამოღება, მაშინ კაპიტალის რეზერვირების საკითხი არ დაისმება და შემოსავლიანობის დონე აღდგება.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად შექმნილია სპეციალური ინსტრუმენტი — FRA, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

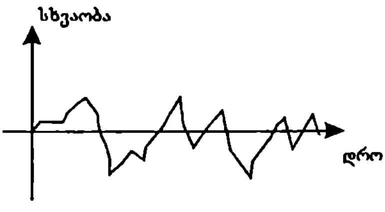
ფორვარდული და სპოტ-კურსების ურთიერთდამოკიდებულება. დავსვათ კითხვა: ემთხვევა თუ არა ფორვარდული კურსები და მომავალი სპოტ-კურსები?

შევნიშნოთ, უპირველეს ყოვლისა, რომ პროგნოზი იმის სუბიექტური შეფასებაა, თუ როგორ მნიშვნელობას მიიღებს მომავალში კურსი.

ფორვარდული კურსი ჩვენ მიმდინარე ფასებიდან გამოვიანგარიშეთ ურისკო არბიტრაჟის პრინციპზე დაყრდნობით და, ამიტომ, ეს ობიექტური კურსი არ ეყრდნობა სუბიექტურ პროგნოზს.

მაგრამ მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ობიექტური ფორვარდული კურსი უნდა შეესაბამებოდეს სუბიექტურ პროგნოზს. წინააღმდეგ შემთხვევაში საბაზრო ძალები შეცვლიან სპოტ-ფასებს. ამიტომ, ბაზარზე რეალურად დაკვირვებული ობიექტური ფორვარდული კურსები ემთხვევა სპოტ-კურსების საბაზრო პროგნოზებს.

შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ რეალური სპოტ-კურსები ემთხვევა წანაცვლებულ საბაზრო ფორვარდულ კურსებს, მაგრამ ეს ასე არ არის. როგორც წესი, ისინი საკმაოდ განსხვავდება.



სხვაობა რეალურ სპოტ-კურსსა და ჩანაცვლებულ ფორვარდულ კურსს შორის

ნახ. 3.9

ამის მიზეზი ის არის, რომ ეს კურსები დგინდება სხვადასხვა ინფორმაციაზე დაყრდნობით: ფორვარდული კურსი დგინდება იმ ინფორმაციაზე დაყრდნობით, რომელიც არსებობდა გარკვეული დროის წინ, დღევანდელი სპოტ-კურსები კი — დღევანდელ ინფორმაციაზე დაყრდნობით დგინდება.

ეს არ ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ ფორვარდული კურსი ემთხვევა მომავალი სპოტ-კურსის პროგნოზს.

3.6 FRA — შეთანხმება ფორვარდულ კურსზე

FRA-ს სპეციფიკაცია. ეს კონტრაქტი წარმოადგენს ფორვარდ-ფორვარდულ შეთანხმებას ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით ფაქტიური საკრედიტო მოვალეობის გარეშე. ამიტომ ის არ აღირიცხება (უფრო სწორად, ძალიან უმნიშვნელოდ აღირიცხება) ბალანსში. FRA წარმოადგენს საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებისაგან თავდაცვის, ან ამ ცვლილებით სპეკულაციის საშუალებას.

FRA არასაბირჟო პროდუქტია, შექმნილი ბანკების მიერ. ვაჭრობა წარმოებს სადილერო ოთახიდან. პარტნიორები არიან კლიენტი და ბანკი, ან ორი ბანკი, ან ბანკი შუამავლობს კლიენტებს.

FRA-თი ვაჭრობა გაძლიერდა 1984 წლიდან. მაგალითად, ლონდონში ყოველდღიურად $5 მილიარდი თანხის ბრუნვა ფიქსირდება.

შემოვიღოთ ზუსტი განმარტებები.

FRA-ს ერთ მხარეს ეწოდება მყიდველი, მეორეს — გამყიდველი. გამყიდველი თანახმაა ასესხოს (პირობითად) გარკვეული თანხა მყიდველს. ამ ტერმინებით აღინიშნება პირობითი მსესხებელი და პირობითი კრედიტორი. ორივე მხარე, როგორც ბანკი, ისე მისი კლიენტი, შეიძლება იყოს მყიდველიც და გამყიდველიც.

ამრიგად, მყიდველი სესხულობს, გამყიდველი ასესხებს.

პირობითი სესხი, რომლის სიდიდე და ვალუტა ზუსტად განისაზღვრება, გაიცემა ზუსტად დადგენილ დღეს მომავალში ზუსტად განსაზღვრული ვადით. მთავარია, რომ სესხი გაიცემა ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით, რომლის სიდიდე ფიქსირდება FRA-ში.

მყიდველი დაცულია საპროცენტო განაკვეთის ზრდისგან და უნდა გადაიხადოს გარკვეული თანხა საპროცენტო განაკვეთის კლების დროს. პირიქით, გამყიდველი დაცულია განაკვეთის კლებისაგან და უნდა გადაიხადოს თანხა მისი ზრდის დროს.

გავუსვათ ხაზი იმ გარემოებას, რომ FRA არ გულისხმობს რეალური სესხის ან კრედიტის აღებას. იგი იცავს საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებისაგან.

მაგალითი 3.3. განვიხილოთ კომპანია, რომელსაც სურს, 1 თვის შემდეგ ისესხოს $1000000 3 თვით. მას შეუძლია გაისტუმროს კრედიტი LIBOR-ით. ვთქვათ, მოცემულ მომენტში ეს განაკვეთი 6%-ია. კომპანია შიშობს, რომ განაკვეთი გაიზრდება და თუ მან არაფერი მოიმოქმედა, შესაძლოა, 1 თვის შემდეგ მას დასჭირდეს კრედიტის აღება უფრო მაღალი

განაკვეთით. ამიტომ კომპანიას შეუძლია იყიდოს FRA, რომელიც იწყება 1 თვის შემდეგ, 3 თვით. ეს ასე აღინიშნება — 1 × 4 FRA. ასეთი FRA-ს განაკვეთი, რომელსაც იძლევა ბანკი, უდრის 6.25%-ს. ამასთან, საკომისიო გადასახადი ან არ არსებობს, ან ძალიან მცირეა.

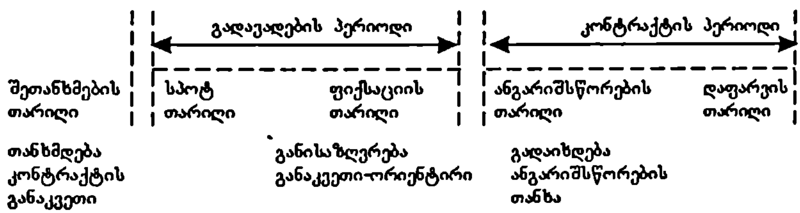
ვთქვათ, საპროცენტო განაკვეთი გაიზარდა და 1 თვის შემდეგ გახდა 7%. კომპანია იღებს სესხს ბაზარზე 7%-ით. ანუ 3 თვის გასვლის შემდეგ კომპანია იხდის დაგეგმილს ზემოთ $1958.33-ს.

FRA-ს პირობებით კომპანია მიიღებს სწორედ $1958.33-ს კომპენსაციის სახით, იმის გამო, რომ საპროცენტო განაკვეთი გაიზარდა 0.75%-ით (ამას ჩვენ დავინახავთ ქვემოთ, მაგალითის გაგრძელებაში).

ყველა FRA აკმაყოფილებს სტანდარტულ პირობებს — FRA BBA-ს, რომელიც გამოიმუშავა BBA-მ (ბრიტანელ ბროკერთა ასოციაციამ).

მოვიყვანოთ ეს პირობები და ტერმინები.

ამისათვის მოვიყვანოთ FRA-ს დროითი დიაგრამა:



ნახ. 3.10

- კონტრაქტის თანხა — თანხა, რომელიც პირობითად აიღება სესხად ან გაიცემა კრედიტად;
- კონტრაქტის ვალუტა — ვალუტა, რომელშიც გამოსახულია თანხა;
- შეთანხმების თარიღი — FRA-ს დადების დღე;
- ანგარიშსწორების თარიღი — პირობითი კრედიტის ან დეპოზიტის ათვლის დღე;
- ფიქსაციის თარიღი — განაკვეთი-ორიენტირის განსაზღვრის დღე;
- დაფარვის თარიღი — პირობითი დეპოზიტის ან კრედიტის დაფარვის თარიღი;
- კონტრაქტის ვადა (პერიოდი) — დღეთა რაოდენობა ანგარიშსწორების თარიღიდან დაფარვის თარიღამდე;

- კონტრაქტის განაკვეთი — FRA-ს პირობებში დაფიქსირებული განაკვეთი;
- განაკვეთი-ორიენტირი — საბაზრო საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც გამოიყენება ფიქსაციის დღეს ანგარიშსწორების თანხის დასადგენად;
- ანგარიშსწორების თანხა — თანხა, რომელიც გამოითვლება საკონტრაქტო განაკვეთისა და განაკვეთ-ორიენტირს შორის სხვაობაზე დაყრდნობით და რომელიც ანგარიშსწორების დღეს გადაიხდება FRA-ს ერთი მხარის მიერ.

ავხსნათ მაგალითზე ამ ტერმინების შინაარსი.

ვთქვათ, შეთანხმების თარიღია 1993 წლის 12 აპრილი. ამ დღეს თანხმდება ყველა დეტალი. ვთქვათ, მხარეები შეთანხმდნენ, რომ დადონ 1 × 4 FRA $1000000-ზე განაკვეთით 6.25%. ამრიგად, კონტრაქტის ვალუტაა დოლარი, კონტრაქტის თანხა უდრის $1000000-ს, საკონტრაქტო განაკვეთია 6.25%.

აღნიშვნა 1 × 4 ნიშნავს, რომ სპოტ-თარიღსა და ანგარიშსწორების თარიღს შორის 1 თვეა, ხოლო კონტრაქტის ვადაა 3 თვე. სპოტ-თარიღი შეთანხმების თარიღიდან 2 დღის შემდეგ, ე.ი. 14 აპრილს, დადგება. ამრიგად, პირობითი დეპოზიტი უნდა დაიწყოს ერთი თვის შემდეგ — 14 მაისს და უნდა დაიფაროს კიდევ 3 თვის შემდეგ — 16 აგვისტოს (რადგან 14 აგვისტო შაბათია, ამიტომ დაფარვის თარიღი გადატანილია უახლოეს სამუშაო დღეზე). ანგარიშსწორების თარიღია 14 მაისი, აღსრულების თარიღი — 16 აგვისტო, კონტრაქტის პერიოდი — 94 დღე.

ჩვეულებრივ, ევროვალუტის დეპოზიტების და კრედიტების განაკვეთი ფიქსირდება შეთანხმების დღეს, ხოლო ძირითადი კაპიტალი იცვლება ორი დღის განმავლობაში.

FRA-შიც ასეა. პირობითი კრედიტის ან დეპოზიტის დაწყების დღედ ითვლება ანგარიშსწორების თარიღი (ჩვენ შემთხვევაში 14 მაისი), ხოლო განაკვეთი-ორიენტირი განისაზღვრება ორი დღით ადრე, ფიქსაციის დღეს (12 მაისს).

განაკვეთ-ორიენტირი, როგორც წესი, არის LIBOR-ის სიდიდე ფიქსაციის დღეს.

თავის მხრივ, LIBOR-ი განისაზღვრება რამოდენიმე გამოყოფილი ბანკის კოტირების საშუალებით, სამუშაო დღის გარკვეულ მომენტში, შემდეგი წესით: კოტირებები განლაგდება ზრდის მიხედვით, უდიდესი და უმცირესი კოტირებები „გადაიყრება", ხოლო დანარჩენები გასაშუალოვდება. შემდეგ დამრგვალდება მეტობით 1 პროცენტის $\frac{1}{16}$-ის სიზუსტით.

ვთქვათ, ფიქსაციის დღეს, 12 მაისს, განაკვეთ-ორიენტირი უდრის 7%-ს.

FRA-ს დასადებად დარჩა ბოლო ნაბიჯის გადადგმა — ანგარიშსწორების თანხის გამოთვლა.

ანგარიშსწორების თანხის გამოთვლა. განვაგრძოთ მაგალითი 3.3-ის განხილვა. მყიდველმა FRA-ს პირობებით მიიღო სესხი 6.25%-ად, მაშინ როცა ფიქსაციის დღეს საბაზრო საპროცენტო განაკვეთი, ე.ი. განაკვეთ-ორიენტირი იყო 7%. ამრიგად, დამატებითი თანხა ტოლია:

$$\frac{7.00-6.25}{100}\cdot\$1000000\cdot\frac{94}{360}=\$1958.33.$$

ეს თანხა გადახდილი უნდა იქნას აღსრულების (დაფარვის) დღეს, მაგრამ მას იხდიან ანგარიშსწორებისას. ამიტომ უნდა მოხდეს მისი დისკონტირება. გვექნება

$$\frac{1958.33}{1+\frac{7}{100}\cdot\frac{94}{360}}=\$1923.18.$$

სწორედ ეს თანხაა ანგარიშსწორების თანხა.

ზოგადად ფორმულას აქვს სახე:

$$\text{ანგარიშსწორების თანხა}=\frac{(i_r-i_c)\cdot A\cdot\frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}}}{1+i_r\cdot\frac{\text{დღე}}{\text{ბაზისი}}}=\frac{(i_r-i_c)A}{\frac{\text{ბაზისი}}{\text{დღე}}+i_r},\qquad(3.5)$$

სადაც i_r — განაკვეთი-ორიენტირია; i_c — კონტრაქტის განაკვთია; A — საკონტრაქტო თანხაა; დღე — კონტრაქტის პერიოდია; ბაზისი — დღეთა რაოდენობაა წელიწადში (360 დოლარისთვის, 365 ფუნტისთვის).

ცხადია, რომ FRA შემთხვევითობას ცვლის განსაზღვრულობით.

მოყვანილ მაგალითში მყიდველი იღებს ანგარიშსწორების თანხას გამყიდველისაგან. საწინააღმდეგო შემთხვევაში, თუ თანხის წინ „—“ ნიშანი იქნება, იგი გადაიხდის ამ თანხას.

საბოლოოდ მყიდველი მიიღებს სესხს 6.25%-ად ნებისმიერ შემთხვევაში.

ანგარიშსწორების თანხას შეიძლება მივცეთ ასეთი ინტერპრეტაციაც — ის არის FRA-ს ღირებულება მყიდველისთვის. თუ $i_r > i_c$, ღირებულება დადებითია, თუ $i_r < i_c$ — უარყოფითი.

ჰეჯირება FRA-ს საშუალებით. დავუბრუნდეთ მაგალით 3.3-ს. მყიდველმა მიიღო \$1923.18 და გადაიხადა 3 თვის შემდეგ უფრო დიდი საპროცენტო გადასახადი. არის თუ არა FRA-ს არითმეტიკა სწორი?

- ფიქსაციის დღეს, 12 მაისს, ცნობილი გახდება ანგარიშსწორების თანხა, \$1923.18. ორი დღის შემდეგ, 14 მაისს მოხდება ამ თანხის ინვესტირება LIBOR-ით, რომელიც უდრის 7%-ს. 94 დღეში საპროცენტო შემოსავალი იქნება \$35.15, რაც ანგარიშსწორების თანხას გაზრდის \$1958.33-მდე.

ამავე დროს, 12 მაისს დაფიქსირდება LIBOR-ის სიდიდე — 7%, და 14 მაისიდან, როცა უნდა შემოვიდეს კაპიტალი, 16 აგვისტომდე კაპიტალზე დაირიცხება \$18277.78. მაგრამ ინვესტირებული ანგარიშსწორების თანხა შეამცირებს მას \$16319.45-მდე, ე.ი. ფაქტობრივი საპროცენტო განაკვეთი ტოლი იქნება

$$\text{ფაქტობრივი საპროცენტო განაკვეთი} = \frac{16319.45}{1000000}\cdot\frac{360}{94} = 6.25\%,$$

ანუ FRA-მ მართლაც შეამცირა სესხის ფაქტობრივი ღირებულება საკონტრაქტო ფასამდე.

პრაქტიკაში წარმოიქმნება და გათვალისწინებული უნდა იყოს ორი დამატებითი გარემოება. პირველი — მსესხებელი იხდის მარჟას LIBOR-ის ზევით, მაგალითად, 1%-ს; მეორე — ინვესტირება შესაძლებელია მხოლოდ LIBOR — 1%-ით (გამონაკლისს მხოლოდ დიდი ბანკები წარმოადგენს).

ვიცით, რომ FRA-ს განაკვეთია 6.25%, განაკვეთ-ორიენტირი კი 7%. ამიტომ:

ანგარიშსწორების თანხაა \$1923.18;

საპროცენტო დარიცხვა ამ თანხაზე 94 დღის განმავლობაში 6%-ით უდრის \$30.13-ს;

FRA-ს საერთო შემოსავალია \$1953.31;

საპროცენტო დარიცხვა \$1000000-ზე 94 დღის განმავლობაში 8%-ით არის \$20888.89;

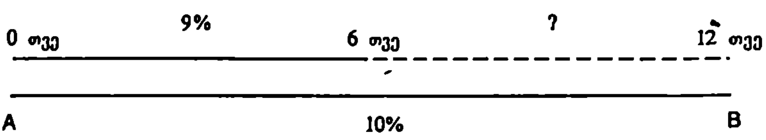
სესხის სუფთა ფასი FRA-ს შემოსავლის ჩათვლით არის \$18935.58.

ე.ი. ფაქტობრივი საპროცენტო განაკვეთი უდრის 7.25%-ს, რაც 1%-ით მეტია FRA-ს საკონტრაქტო განაკვეთზე. უფრო მცირე განთავსების პროცენტის გამო მსესხებელმა დაკარგა \$5.02, რაც მხოლოდ 0.002%-ია 94-დღიანი \$1000000 სესხისა. პრაქტიკულად შედეგი არ შეცვლილა.

FRA-ს ფასის გამოთვლა. ვთქვათ, ინვესტორს გააჩნია კაპიტალი 1-წლიანი ინვესტიციის განსახორციელებლად. დავუშვათ, 6-თვიანი განაკვეთია 9%, ხოლო 12-თვიანი — 10%. განვიხილოთ ორი ალტერნატივა:

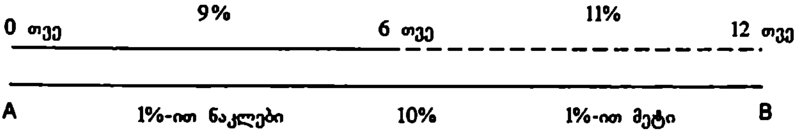
1) დავაინვესტიროთ 12 თვით და მივიღოთ 10%;

2) დავაინვესტიროთ 6 თვით და მივიღოთ 9%. გავყიდოთ 6 × 12 FRA, რათა დავაფიქსიროთ გარანტირებული შემოსავალი შემდეგ 6 თვეზე.



ნახ. 3.11

რა პროცენტი უნდა დაფიქსირდეს 6-დან 12 თვემდე ინვესტიციებისათვის? პირველი მიახლოებით, ეფექტურ ბაზარზე, სიტუაცია ასეთი უნდა იყოს

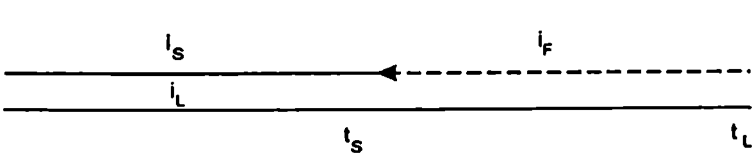


ნახ. 3.12

ანალოგიურად შეიძლება დაითვალოს FRA-ს მიახლოებითი ფასი სხვა სიტუაციებში. მაგალითად, 6 × 9 FRA-სთვის, 9 × 12 FRA-სთვის და ა.შ.

რატომ არის ამ სქემით გამოთვლილი FRA-ს ფასი მხოლოდ მიახლოებითი? იმიტომ, რომ თუ ავირჩევთ ერთი გრძელვადიანი ინვესტიციის მაგივრად ორ მოკლევადიანს, მაშინ საშუალება გვექნება მივიღოთ პროცენტის პროცენტი, რადგან მეორე ვადით შეგვიძლია დავაინვესტიროთ არა მხოლოდ ძირითადი კაპიტალი, არამედ მასზე მიღებული პროცენტული შემოსავალი. ამიტომ FRA-ს რეალური განაკვეთი უფრო ნაკლები უნდა იყოს, ვიდრე ზემოთ გამოთვლილი მიახლოებითი სიდიდე.

მაგალითად, 6 × 12 FRA-ში დაფიქსირებული განაკვეთი 10.53% გამოვა და არა 11%. მართლაც, განვიხილოთ დიაგრამა



ნახ. 3.13

ცხადია, რომ

$$(1 + i_S t_S)(1 + i_F t_F) = (1 + i_L t_L),$$

სადაც i_S არის საბაზრო განაკვეთი ინვესტიციისათვის ანგარიშსწორების დღემდე; i_L არის საბაზრო განაკვეთი ინვესტიციისათვის განაღდების დღემდე; i_F — FRA-ს განაკვეთია; t_S არის დრო სპოტ-დღიდან ანგარიშსწორების დღემდე; t_L არის დრო სპოტ-დღიდან განაღდებამდე და t_F კონტრაქტის პერიოდია.

ზემომოყვანილი ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$i_F = \frac{i_L D_L - i_S D_S}{D_F \left(1 + i_S \frac{D_S}{B}\right)}, \tag{3.6}$$

სადაც B — ბაზისია, $t_L = \frac{D_L}{B}$, $t_s = \frac{D_s}{B}$, $t_F = \frac{D_F}{B}$, ე.ი. D_L, D_S და D_F დღეების რაოდენობაა განაღდების დღემდე, ანგარიშსწორების დღემდე და კონტრაქტის პერიოდში, შესაბამისად.

წინა მაგალითში გვექნება

$$i_F = \frac{0.1 - 0.09 \cdot 0.5}{0.5(1 + 0.09 \cdot 0.5)} = \frac{0.055}{0.5225} \approx 0.1053.$$

განვიხილოთ 1 × 4 FRAმაგალითი 3.3-დან. მივიღებთ: $D_S = 30$, $D_L = 124$, $D_F = 94$. თუ $i_S = 6\frac{1}{8}\%$ და $i_L = 6\frac{1}{4}\%$, მაშინ

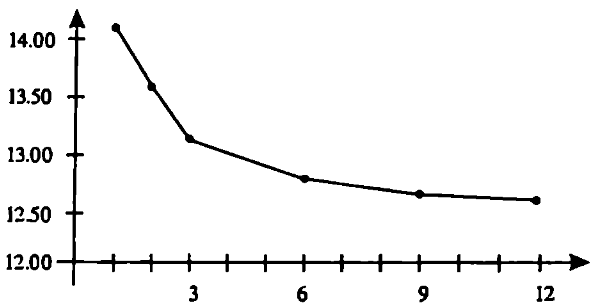
$$i_F = \frac{0.0625 \cdot 124 - 0.06125 \times 30}{94 \cdot (1 + 0.06125 \cdot \frac{30}{360})} = 0.062580 \approx 6.26\%.$$

მაგალითი 3.4. მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი. 1991 წლის 18 თებერვალს LIBOR-ის კურსი იყო

დაფარვის ვადა	£ LIBOR	$ LIBOR
1 თვე	13.6875 %	6.5000 %
2 თვე	13.4375	6.5625
3 თვე	13.1250	6.6250
6 თვე	12.6250	6.6250
9 თვე	12.2500	6.6875
12 თვე	12.0625	6.8125

ცხრილი 3.4

ამ მონაცემების მიხედვით აგებულ ფუნტი სტერლინგის შემოსავლიანობის მრუდს ექნება სახე:



£ -ის შემოსავლიანობის მრუდი

ნახ. 3.14

ამ მრუდზე დაყრდნობით გამოითვლება FRA-ს ფასები.

FRA-ს სახე	გამოთვლილი განაკვეთი	საბაზრო განაკვეთი	განსხვავება (ბ.პ.)
1 × 4	12.60	12.68/73	−10
3 × 6	11.76	11.79/84	−5
6 × 9	10.83	10.83/88	−2
9 × 12	10.54	10.50/55	+2
6 × 12	10.83	10.79/84	+2

ცხრილი 3.5

ანალოგიურად შეიძლება გაკეთდეს დოლარებზეც. ორივე შემთხვევაში ჩანს მჭიდრო კავშირი გამოთვლილ FRA-ს განაკვეთსა და FRA-ს საბაზრო განაკვეთებს შორის.

მაგრამ უფრო ხშირად FRA ფასდება და ჰეჯირდება საპროცენტო ფიუჩერსებზე დაყრდნობით, რაც აღრმავებს კავშირებს FRA-სა და ფიუჩერსებს შორის.

როგორ იცვლება FRA-ს განაკვეთები სხვა განაკვეთების ცვლილების დროს? (3.6) ფორმულიდან გვაქვს (მიახლოებით)

$$\frac{\partial i_F}{\partial i_S} = -\frac{D_S}{D_F}, \quad \frac{\partial i_F}{\partial i_L} = \frac{D_L}{D_F},$$

$$\frac{\partial i_F}{\partial i_{\text{ორივე}}} = \frac{\partial i_F}{\partial i_S} + \frac{\partial i_F}{\partial i_L} \approx 1, \quad \text{რადგან} \quad D_F = D_L - D_S.$$

აქედან ვღებულობთ FRA-ს ცვლილების პროფილს

FRA	$i_S \uparrow$ 1 ბ.პ.	$i_L \uparrow$ 1 ბ.პ.	i_S და $i_L \uparrow$ 1 ბ.პ.
3 × 6	−1	+2	+1
6 × 9	−2	+3	+1
9 × 12	−3	+4	+1
6 × 12	−1	+2	+1

შენიშვნა: ბ.პ. — ბაზის პუნქტი, უდრის 1%-ის $\frac{1}{100}$-ს.

ცხრილი 3.6

კაპიტალის საკმარისობის პირობები FRA-სთვის. ბაზელის საერთაშორისო ანგარიშსწორების ბანკის მიერ დაწესებული კაპიტალის საკმარისობის პირობების მიხედვით FRA ითვლება საპროცენტო პროდუქტად. დერივატივებისთვის და, კერძოდ, საპროცენტო დერივატივებისთვის ეს პირობები გულისხმობს გაცილებით ნაკლები კაპიტალის რეზერვირებას, ვიდრე ფულის ბაზრის სხვა პროდუქტებისათვის.

პირობები გულისხმობს, კერძოდ, რომ ბანკის საკუთარი სახსრები უნდა იყოს შეწონილი რისკიანი აქტივების (WRA — weighted risky assets)

8%-ის ტოლი. შეწონილი რისკიანი აქტივები შეიცავენ ყველა აქტივს ბანკის ბალანსიდან. ამასთან, თითოეულ ჯგუფს მიეწერება წონა, რომელიც შეესაბამება მის რისკიანობას. მაგალითად, სახაზინო ვალდებულებებს მიეწერება წონა 10%, კომერციულ კრედიტებს —100%.

დერივატივებს, რომლებიც არ შედის ბალანსში, მიეწერება საკრედიტო ეკვივალენტის ტოლი თანხა, რომელიც შემდეგ შედის ბალანსში და ამ ეკვივალენტს მიეწერება წონა 20% ან 50% პარტნიორის მიხედვით.

ფორმულების სახით ეს პირობები შემდეგნაირად მოიცემა:

$$\begin{aligned}
&\text{CAPREQ} = 8\%\ \text{WRA},\\
&\text{WRA} = 20\% \times \text{CREDEQ}\ (\text{ბანკებისთვის}),\\
&\text{WRA} = 50\% \times \text{CREDEQ}\ (\text{სხვა პარტნიორებისთვის}),
\end{aligned}$$

სადაც CAPREQ (Capital Required) ის კაპიტალია, რომელიც საჭიროა FRA-ს პოზიციის შესანარჩუნებლად, ხოლო CREDEQ (Credit Equivalent) არის დერივატივის პოზიციის საკრედიტო ეკვივალენტი. საკრედიტო ეკვივალენტები აიგება, რათა გაიზომოს შესაძლო არასასურველი შედეგები დერივატივებში პოზიციების შეწყვეტის შემთხვევაში. ამასთან, რადგან დერივატივები არ ეხება ძირითად კაპიტალს, ამიტომ ძირითადი რისკი ეხება ანგარიშსწორების თანხას.

ვიპოვოთ სათანადო საკრედიტო ეკვივალენტი.

თუ დეფოლტი მოხდა ანგარიშსწორების დღეს, მაშინ დანაკარგი ზუსტად ანგარიშსწორების თანხის ტოლია.

ამ თარიღამდე პოტენციური დანაკარგი ფასდება პროცედურით, რომელსაც ეწოდება გადაფასება ბაზრის მიხედვით, და რომელიც მდგომარეობს გარიგების შეფასებაში მიმდინარე საბაზრო ფასების მიხედვით. FRA-ს შემთხვევაში უნდა დაითვალოს ანგარიშსწორების თანხა, სადაც განაკვეთორიენტირის მაგივრად უნდა ჩაისვას ფორვარდული განაკვეთი ანგარიშსწორების დღისთვის. ამის შემდეგ, მიღებული თანხა დისკონტირდება ანგარიშსწორების დღიდან მოცემულ დღემდე. დისკონტის თანამამრავლი გამოითვლება შესაბამისი შემოსავლიანობის მრუდის მიხედვით.

ასეთი გამოთვლის შემდეგ მიღებული თანხა ან დადებითია, ან უარყოფითი. თუ თანხა დადებითია, მაშინ დეფოლტის შედეგად ბანკი განიცდის დანაკარგს. სწორედ ეს არის საკრედიტო რისკის საზომი. ამიტომ სწორედ ეს არის საკრედიტო ეკვივალენტი.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ბანკისთვის დეფოლტი ხელსაყრელია. ამ შემთხვევაში შეთანხმება შეიძლება გაუქმდეს და დანაკლისი ანაზღაურდეს, მაგრამ ასეთი ქმედება უაზროა ბანკისთვის, რადგან პარტნიორის სამართალმემკვიდრეებმა შეიძლება მოითხოვონ შეთანხმების შესრულება. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, ე.ი., როცა თანხა უარყოფითია, უნდა გადაფასდეს პოზიცია ბაზრის მიხედვით და გათვალისწინებულ იქნას შესაძლო დანაკარგები შემდგომი შესაძლო დანაკარგების თავიდან ასაცილებლად.

აქედან გამომდინარეობს საკრედიტო ეკვივალენტის ერთი კომპონენტის, „ჩანაცვლების ღირებულება“

$$\text{REPCOST} = \max(0, \text{MARKMKT}),$$

სადაც REPCOST (replacement cost) ჩანაცვლების ღირებულებაა, ხოლო MARKMKT (mark-to-market) — დერივატივის საბაზრო გადაფასების სიდიდე.

ცხადია, რომ ჩანაცვლების ღირებულება ზომავს „დღევანდელი დღის“ პოტენციურ დანახარჯებს. მაგრამ რა მოხდება ხვალ?

ბაზელის საერთაშორისო ანგარიშსწორების ბანკმა დაუმატა მეორე კომპონენტი, რომელიც ასახავს გრძელვადიანი საპროცენტო დერივატივების გაზრდილ რისკიანობას. იმ FRA-სთვის, რომლის დაფარვის ვადა 1 წელზე მეტია, REPCOST-ს ემატება ADDON შესაკრები.

$$\text{ADDON} = 0.5\% \cdot A,$$

სადაც A გარიგებაში მონაწილე პირობითი კაპიტალია.

ამრიგად, საკრედიტო ეკვივალენტი არის

$$\text{CREDEQ} = \text{REPCOST} + \text{ADDON}.$$

მოვიყვანოთ რეალური ციფრები იმ შემთხვევაში, როცა პარტნიორი არ არის ბანკი.

ტიპი	ვადა	პირობითი ძირითადი კაპიტალი	ჩანაცვლების ღირებულება	დამატება	საკრედიტო ეკვივალენტი	მოთხოვნა კაპიტალზე
FRA	1×4	\$1 m	\$500	0	\$500	\$20
FRA	12×18	\$5 m	\$1000	\$25000	\$26000	\$1400

ცხრილი 3.7

მოკლევადიანი FRA-თვის მოთხოვნა მინიმალურია (\$20). გრძელვადიანი FRA-თვის მოთხოვნა უდრის $\$1400 = \frac{1}{400}$ იმ რეზერვისა, რომელიც საჭირო იქნებოდა \$5000000 დეპოზიტისათვის.

FRA-ს გააჩნია მრავალი დადებითი მხარე. ის იცავს მომხმარებელს საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებისაგან, ამცირებს საკრედიტო რისკს, ე.ი. მოთხოვნებს საკუთარ დასარეზერვირებელ კაპიტალზე. საკრედიტო რისკის შემცირება მომგებიანია ბანკისთვის და, ამდენად, ბანკის კლიენტისთვისაც, რადგან მცირდება ბანკის ხარჯები FRA-ს პოზიციის შესანარჩუნებლად, არ ხდება ძირითადი კაპიტალის გაცვლა, ანუ საკრედიტო რისკი ეხება მხოლოდ

ანგარიშსწორების თანხას და ამიტომ უმნიშვნელოა. გადახდა წარმოებს ანგარიშსწორების დღეს და არა კონტრაქტის ბოლოს და ამიტომ მცირდება რისკის პერიოდი. მცირდება, აგრეთვე, ადმინისტრაციული ხარჯები, რადგან ანგარიშსწორება მთავრდება ერთადერთი გადარიცხვით. FRA OTC-პროდუქტია და ამიტომ მისი სპეციფიცირება შეიძლება კლიენტის სურვილის მიხედვით. იგი მოქნილია, შეიძლება შევათანხმოთ არასტანდარტული ვადები, თარიღები, თანხა და არალიკვიდური ვალუტა.

ამით FRA განსხვავდება ფიუჩერსებისგან, რომლებიც მკაცრად სტანდარტიზებულია. მიუხედავად ამისა, ფიუჩერსები ფინანსური ინჟინერიის მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს წარმოადგენს.

FRA-ს ფასის და ანგარიშსწორების თანხის გამოთვლა უწყვეტად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში. განვიხილოთ FRA, რომელიც ინიცირებულია $t = 0$ მომენტში და რომელშიც კონტრაქტის განაკვეთია R_k. კონტრაქტის პერიოდია T-დან T^*-მდე, ხოლო პირობითი თანხა არის 100. ვთქვათ, სპოტ-განაკვეთი T მომენტისთვის არის r, ხოლო T^* მომენტისთვის — r^*.

კონტრაქტის პირობით გვაქვს შემდეგი ფულადი ნაკადები:

T მომენტში -100,

T^* მომენტში $+100e^{R_k(T^*-T)}$.

ე.ი., ამ კონტრაქტის მნიშვნელობა $t = 0$ მომენტში იქნება

$$V(0) = 100e^{R_k(T^*-T)}e^{-r^*T^*} - 100e^{-rT}.$$

ყველა საპროცენტო განაკვეთი უწყვეტადაა გადათვლილი.

ცხადია, რომ $V(0) = 0$, თუ $R_k(T^* - T) - r^*T^* = -rT$, ანუ თუ

$$R_k = \frac{r^*T^* - rT}{T^* - T},$$

ე.ი., თუ R_k უდრის $\widehat{r}$ ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთს.

თუ R არის განაკვეთი T მომენტში, პერიოდისთვის T-დან T^*-მდე, მაშინ ფულადი თანხა, რომელიც უნდა მივიღოთ T მომენტში, ანუ ანგარიშსწორების თანხა, ტოლი უნდა იყოს

$$\begin{aligned} &-100 + 100e^{R_k(T^*-T)}e^{-R(T^*-T)} = \\ &= 100e^{-R(T^*-T)}\left(e^{R_k(T^*-T)} - e^{R(T^*-T)}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

გავიხსენოთ, რომ უწყვეტად გადათვლილი საპროცენტო განაკვეთი უკავშირდება ჩვეულებრივ, მარტივად გადათვლილ საპროცენტო განაკვეთს, ფორმულით $e^{rT} = 1 + \widehat{r}T$. ამიტომ

$$e^{R_k(T^*-T)} - e^{R(T^*-T)} = (\widehat{R}_k - \widehat{R})(T^* - T),$$

ხოლო

$$e^{-R(T^*-T)} = \frac{1}{1+\widehat{R}(T^*-T)}.$$

ამრიგად, გვაქვს, რომ ანგარიშსწორების თანხა (გამყიდველისთვის) უდრის

$$\frac{100(\widehat{R}_k - \widehat{R})(T^* - T)}{1+\widehat{R}(T^*-T)},$$

რაც აღნიშვნების სიზუსტით ემთხვევა ადრე მიღებულ ფორმულას.

თუ $0 \leq t \leq T$, მაშინ შემოვიღოთ r, r^*, $\widetilde{r}$ სპოტ და ფორვარდული განაკვეთები t მომენტში T, T^* მომენტებისთვის და (T, T^*) პერიოდისთვის, შესაბამისად, გვექნება

$$V(t) = 100e^{R_k(T^*-T)}e^{-r^*(T^*-t)} - 100e^{-r(T-t)}.$$

მაგრამ $\widetilde{r}(T^* - T) + r(T-t) = r^*(T^*-t)$, ე.ი.

$$V(t) = \left[-100 + 100e^{R_k(T^*-T)}e^{-\widetilde{r}(T^*-T)}\right]e^{-r(T-t)}.$$

ბოლო გამოსახულება არის (3.7)-ის დღევანდელი მნიშვნელობა იმ პირობით, რომ $R_k = \widetilde{r}$. ე.ი., ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ FRA, თუ გამოვთვლით ფულადი ნაკადების დღევანდელ მნიშვნელობას იმ პირობით, რომ გამოვიყენებთ მიმდინარე ფორვარდულ განაკვეთს.

3.7 ფინანსური ფიუჩერსები

მოკლევადიანი საპროცენტო ფიუჩერსები. როგორც ვიცით, ფიუჩერსული კონტრაქტის არსი შემდეგში მდგომარეობს: ფიუჩერსი აფიქსირებს ახლა გარიგების ფასს და პირობებს, ხოლო თვით გარიგება მომავალში შედგება.

მოკლევადიან საპროცენტო ფიუჩერსებში გარიგების საგანი არის დეპოზიტი ფიქსირებული ვადით რაიმე პირობით თანხაზე. ფასი ის საპროცენტო განაკვეთია, რომელიც დაერიცხება დეპოზიტზე მისი მოქმედების პერიოდში.

ასეთი ფიუჩერსის ყიდვა ნიშნავს დეპოზიტის შეტანას, გაყიდვა — დეპოზიტის მოზიდვას, ანუ სესხს.

მოვიყვანოთ ტიპიური კონტრაქტის სპეციფიკაცია.

3-თვიანი კონტრაქტი £-ზე, LIFFE-ზე

ვაჭრობის ერთეული	£500000
მიწოდების თვე	მარტი, ივნისი, სექტემბერი, დეკემბერი
მიწოდების თარიღი	პირველი სამუშაო დღე ბოლო სავაჭრო დღის შემდეგ
ვაჭრობის ბოლო დღე	დილის 11^{00}, მიწოდების თვის პირველი პარასკევი
კოტირება	100.00 მინუს საპროცენტო განაკვეთი
ფასის მინიმალური ცვლილება	0.01%
ტიკის ღირებულება	£12.50
ვაჭრობის დრო	8^{05}–16^{02} (ბირჟის სავაჭრო დარბაზი, 16^{27}–17^{57} (APT ტერმინალების ქსელი).

ცხრილი 3.8

ყოველ კონტრაქტს ფუნტ სტერლინგზე აქვს ფიქსირებული ძირითადი თანხა £500000, რომელსაც ვაჭრობის ერთეული ქვია. კონტრაქტები გაუყოფადია. ამიტომ თანხა ყოველთვის £500000-ის ჯერადია (ფიუჩერსისგან განსხვავებით, FRA შეიძლება დაიდოს ნებისმიერ თანხაზე £50 მლნ-ის ფარგლებში). თვე, მიწოდების თარიღი და ვაჭრობის ბოლო დღე ზუსტად განისაზღვრება.

ვაჭრობის ბოლო დღე ანალოგიურია FRA-ს ფიქსაციის თარიღისა, მიწოდების თარიღი — ანგარიშსწორების თარიღისა.

ფიუჩერსული კონტრაქტის საგანია დეპოზიტი ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით. თუ ფიუჩერსი გამოიყენება სპეკულაციისათვის, მაშინ ბროკერი მოიზიდავს სახსრებს (გაყიდის ფიუჩერსს) დაბალი საპროცენტო განაკვეთით და განათავსებს დეპოზიტს (იყიდის ფიუჩერსს) მაღალი პროცენტით.

თუ ფასს ვუწოდებთ იმ საპროცენტო განაკვეთს, რომელიც დაირიცხება დეპოზიტზე, შეიქმნება არაბუნებრივი სიტუაცია, რადგან გამოვა, რომ ყიდულობ მაღალ ფასად და ყიდი დაბალ ფასად. ამან შეიძლება გამოიწვიოს დიდი შეცდომები, რადგან ბროკერები, რომლებიც პიტზე ვაჭრობენ, ინსტინქტურად მოქმედებენ. ამიტომ ფიუჩერსის ფასი მოიცემა ხოლმე ფორმულით

$$P = 100 - i,$$

სადაც i ფიუჩერსის საპროცენტო განაკვეთია (პროცენტებში გამოსახული).

ასეთი კოტირება ბუნებრივია. ვაჭრობა მიმდინარეობს კოტირებაზე და ამიტომ მოსახერხებელია, ვაჭრობა ბუნებრივ ტერმინებში წარმოებდეს: იყიდო იაფად და გაყიდო ძვირად.

ყველა კონტრაქტში მითითებულია ფასის მინიმალური შესაძლო ცვლილება, ანუ ტიკი — ორ მეზობელ კოტირებას შორის მინიმალური განსხვავება. აქედან გამოითვლება ტიკის ღირებულება. თუ მინიმალური დასაშვები ცვლილებაა 0.01%, ხოლო ერთეულია £500000, მაშინ ტიკის ღირებულება იქნება

$$\$500000 \cdot 0.01\% \cdot \frac{3}{12} = \$12.50.$$

მივაქციოთ ყურადღება შემდეგ გარემოებას. პირველი: 3-თვიანი კონტრაქტი აღიწერება წილადის $\frac{3}{12}$-ით და არა დღეების რაოდენობით. მეორე: კონტრაქტის ანგარიშწორება ხდება ძირითადი დეპოზიტის დაწყების მომენტში. კრედიტების ბაზარზე ანგარიშსწორება ხდება დეპოზიტის დახურვისას. ამის გამო, FRA-ში ხდება ანგარიშსწორების თანხის დისკონტირება, აქ კი არა.

ეს ამარტივებს ვაჭრობას ფიუჩერსებით, მაგრამ ართულებს საპროცენტო რისკის ჰეჯირებას, თუ ძირითადი ფასიანი ქაღალდი ითხოვს პროცენტის დარიცხვას დღეების მიხედვით.

ფასის არბიტრაჟული დადგენა. საპროცენტო ფიუჩერსების დაფარვა ხდება ნაღდი ანგარიშსწორებით. შეთანხმება, რომელიც დაიდება მიწოდების დღეს, წარმოადგენს შეთანხმებას პირობით თანხაზე და არა ჭეშმარიტ დეპოზიტს ან კრედიტს. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ფიუჩერსული ფასები პირდაპირ კავშირშია რეალური ფინანსური ინსტრუმენტების საბაზრო ფასებთან.

ეს კავშირი ხორციელდება კონტრაქტის აღსრულების პროცედურით მიწოდების დღეს, რადგან საბოლოო ანგარიშსწორება ხდება არა პიტზე დაფიქსირებული ფასით, არამედ სპოტ-ბაზრის რეალური ფასით.

მაგალითად, საბირჟო ანგარიშსწორების ფასი LIFFE-ის ფუნტ სტერლინგების მოკლევადიან კონტრაქტზე, მიიღება შემდეგნაირად: 100-ს უნდა გამოაკლდეს „ანგარიშსწორების საპროცენტო განაკვეთი ბრიტანეთის ბანკების ასოციაციის ფუნტ სტერლინგების სამთვიან კრედიტებზე ამ დღის 11^{00}-ზე".

ამრიგად, მოკლევადიანი კონტრაქტის დახურვისას, მისი ფასი განმარტებით უდრის: 100−(საპროცენტო განაკვეთი სპოტის ბაზარზე):

$$P_{\mathrm{EDSP}} = 100 - i_{\mathrm{REF}},$$

სადაც P_{EDSP} საბირჟო ანგარიშსწორების ფასია, ხოლო i_{REF} საბაზრო განაკვეთ-ორიენტირია (პროცენტებში გამოსახული).

ფიუჩერსის საბოლოო ფასი, ამის გამო, გამოითვლება მიმდინარე საბაზრო ფასებიდან სპოტ-ბაზარზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ხდებოდა კონტრაქტის მოქმედების დროის განმავლობაში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ კონტრაქტის მოქმედების ვადის განმავლობაში სამთვიანი კრედიტის საბაზრო ფასი იზიდავს ფიუჩერსის ფასს. მაგრამ აღსრულების წინ ფიუჩერსის ფასი დამოკიდებული იქნება არა იმდენად მიმდინარე ფასზე სპოტ-ბაზარზე, არამედ მოსალოდნელ ფასზე კონტრაქტის აღსრულების დღეს, ანუ ფორვარდულ განაკვეთზე.

ჩვენთვის ცნობილია ფორვარდული განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულა, რომელიც გამოვიყენეთ FRA-ს ფასის გამოთვლისას. გამოვიყენოთ იგი აქაც.

შემოვიღოთ სიდიდეები:

T_0 — შეთანხმების თარიღი (ფიუჩერსის საწყისი ყიდვა-გაყიდვის თარიღი);

T_D — ფიუჩერსის აღსრულების თარიღი;

T_{spot} — ფულის გადარიცხვის თარიღი იმ დეპოზიტებისთვის, რომლებიც გაფორმდა T_0 მომენტში;

T_S — ფულის გადარიცხვის თარიღი იმ დეპოზიტებისთვის, რომლებიც გაფორმდა T_D მომენტში;

T_L — სამთვიანი დეპოზიტების დაფარვის თარიღი. ეს დეპოზიტები გაფორმდა T_D მომენტში.

მაშინ ფიუჩერსის ფასი მოიცემა ფორმულით

$$P = 100 - \frac{i_L D_L - i_S D_S}{D_F\left(1 + i_S \frac{D_S}{B}\right)}, \tag{3.8}$$

სადაც გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

P — ფიუჩერსის ფასი;

i_S — საპროცენტო განაკვეთი ფულის ბაზარზე T_S მომენტში;

i_L — საპროცენტო განაკვეთი ფულის ბაზარზე T_L მომენტში;

D_S — დღეების რაოდენობა T_{spot}-დან T_S-მდე;

D_L — დღეების რაოდენობა T_{spot}-დან T_L-მდე;

D_F — დღეების რაოდენობა T_S-დან T_L-მდე;

B — დღეების პირობითი რაოდენობა წელიწადში (360 — ვალუტების უმეტესობისთვის, 365 — ფუნტი სტერლინგისთვის).

მაგალითი 3.5. ვთქვათ, დღეს სამშაბათია, 10 თებერვალი. ასე რომ, T_{spot} არის ხუთშაბათი, 1 თებერვალი. მარტის კონტრაქტის აღსრულების თარიღია 16 მარტი. ამიტომ T არის 18 მარტი, T_L არის ორშაბათი, 20 ივნისი (რადგან 18 ივნისი შაბათია). მაშინ $D_S = 36$ დღეს, $D_L = 130$ დღეს.

ვთქვათ, სპოტ-ბაზარზე ერთ-, ორ-, სამ- და ექვსთვიანი LIBOR-ის განაკვეთებია, შესაბამისად, $7\frac{1}{2}\%$, $7\frac{11}{16}\%$, $7\frac{3}{4}\%$ და $7\frac{7}{8}\%$. ავაგოთ შემოსავლიანობის მრუდი (რაიმე ინტერპოლაციით, მაგალითად, წრფივით). მაშინ 36 დღიანი განაკვეთი იქნება 7.55% და 130 დღიანი — 7.81%. ჩავსვათ ეს

რიცხვები (3.8)-ში. მივიღებთ, რომ სამთვიანი ფორვარდული განაკვეთი 16 მარტს იყო 7.85% და ამიტომ ფიუჩერსის სამართლიანი ფასი იქნება 92.15.

ადვილი აღმოსაჩენია, რომ ასეთი ფიუჩერსების ფასები ძალიან მჭიდროდაა დაკავშირებული შესაბამის FRA-ს ფასებთან, უფრო მჭიდროდ, ვიდრე სპოტ-ფასებთან. ამიტომ ასეთი ფიუჩერსები ხშირად გამოიყენება FRA-ს პორტფელის ჰეჯირებისათვის.

ბაზისი. აღსრულების ვადამდე ნებისმიერ მომენტში ფიუჩერსის ფასი შეესაბამება მომავალ ფორვარდულ განაკვეთს, მაგრამ ეს განაკვეთი განსხვავებულია მიმდინარე სპოტ-ფასისაგან.

განმარტებით

$$\text{ბაზისი} = (\text{სპოტ-ფასი}) - (\text{ფიუჩერსის ფასი}).$$

ზოგადი კანონი ასეთია: თუ შემოსავლიანობის მრუდი იზრდება, ბაზისი დადებითია; თუ შემოსავლიანობის მრუდი კლებულობს, ბაზისი უარყოფითია.

გავრცელებულია ფიუჩერსული კონტრაქტის მოქმედების შემდეგი ინტერპრეტაცია: ფიუჩერსული კონტრაქტი იძლევა შესაძლებლობას, დაფიქსირდეს მომავალი გარიგებისთვის დღევანდელი სპოტ-ფასი.

ეს შეხედულება მცდარია. ფიუჩერსის მოქმედება შემდეგშია: ფიუჩერსი საშუალებას აძლევს მის მფლობელს დააფიქსიროს მომავალი გარიგების ფასი (განაკვეთი), მაგრამ ეს განაკვეთი დღევანდელი ფორვარდული განაკვეთია.

ბაზისი არის სწორედ განსხვავება მიმდინარე სპოტ-ფასსა და ფორვარდულ ფასს შორის.

მიწოდების დღის მოახლოვება აახლოვებს ფორვარდულ და სპოტ-ფასებს: ბაზისი მიისწრაფის ნულისაკენ.

ნახ. 3.15

ფასის ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial P}{\partial i_j} \approx \frac{D_S}{D_F}, \quad \frac{\partial P}{\partial i_L} \approx -\frac{D_L}{D_F},$$

$$\frac{\partial P}{\partial i_{\text{ორივე}}} = \frac{\partial P}{\partial i_j} + \frac{\partial P}{\partial i_L} \approx -1.$$

აქედან მიიღება საპროცენტო ფიუჩერსების ქცევის პროფილი

კონტრაქტის ვადა	$i_S \uparrow$ ბ.პ.	$i_L \uparrow$ ბ.პ.	i_S და $i_L \uparrow$ ბ.პ.
1თვე	+0.33	−1.33	−1
3თვე	+1	−2	−1
6თვე	+2	−3	−1
9თვე	+3	−4	−1

ცხრილი 3.9

პეჯირების მაგალითი. ვთქვათ, ინვესტიციების მენეჯერს, რომელიც განათავსებს ევროპის საფინანსო ბაზრებზე მოკლე ვადით ფუნტ სტერლინგებს და დოლარებს, სურს შეარჩიოს ხელსაყრელი შესაძლებლობები გრძელვადიანი ინვესტიციის გასაკეთებლად.

ოთხშაბათს, 18 თებერვალს, მენეჯერი თვლის, რომ საპროცენტო განაკვეთები წლის ბოლოს ორივე ქვეყანაში დაეცემა. იგი ფიქრობს, რომ წლის ბოლოს შეძლებს £25 მლნ-ის და \$50 მლნ-ის ინვესტირებას და მას სურს შექმნას პეჯი, რომელიც დაიცავს საპროცენტო განაკვეთების შემცირებისაგან.

სპოტ და ფიუჩესრული ბაზრების კოტირებები შემდეგია

£		\$	
LIBOR 3 თვე	13.125%	LIBOR 3 თვე	6.625%
დეკემბრის ფიუჩერსი	89.58	დეკემბრის ფიუჩერსი	92.95
ბაზისი	-2.70	ბაზისი	+0.43

ცხრილი 3.10

განვიხილოთ ჯერ დოლარის ოპერაციები. დეკემბრის ფიუჩერსის ფასია 92.95, რაც ნიშნავს, რომ სამთვიანი კრედიტის განაკვეთი დეკემბერში იქნება 7.05%. სპოტ-განაკვეთი ტოლია $6\frac{5}{8}$%-ის, ამიტომ შემოსავლიანობის მრუდი მცირედ იზრდება. თუმცა ბაზარი წინასწარმეტყველებს განაკვეთების მცირე ზრდას, მენეჯერი მაინც ფიქრობს, რომ განაკვეთები შემცირდება. იგი ყიდულობს დეკემბრის 50 კონტრაქტს (თითოეულს 1 მლნ ნომინალით) და აფიქსირებს დეპოზიტის განთავსების განაკვეთს, 7.05%, პირობით თანხაზე \$50 მლნ.

ფუნტ სტერლინგებზე შემდეგი სიტუაციაა. დეკემბრის კონტრაქტების ფასია 89.58, ანუ სამთვიანი დეპოზიტის განაკვეთი 10.42%-ია, რაც გაცილებით უფრო მცირეა, ვიდრე სპოტ-განაკვეთი, $13\frac{1}{8}$%. ამიტომ ბაზისი მკვეთრად უარყოფითია, სახელდობრ, უდრის −270 ბ.პ.-ს.

ამჯერად ბაზარი იზიარებს მენეჯერის აზრს განაკვეთების შემცირების შესახებ. მენეჯერი მაინც ყიდულობს სტერლინგის 50 კონტრაქტს (თითოეულს £500000 ნომინალით) იმ შემთხვევისათვის, თუ ფასები კიდევ უფრო დაეცემა.

იგი აფიქსირებს ფასს — 10.42% £25 მლნ პირობით თანხაზე. ოთხშაბათს, 23 ოქტომბერს, მენეჯერი აფორმებს ხელშეკრულებას $50 მლნ კრედიტზე 3 თვის ვადით და ამიტომ იგი ხსნის ჰეჯს (ხურავს თავის პოზიციებს დოლარზე ფიუჩერსულ კონტრაქტებში).

ამ მომენტისთვის სიტუაცია სპოტ-ბაზარზე ასეთია

£		$	
LIBOR 3 თვე	10.25%	LIBOR 3 თვე	5.625%
LIBID 3 თვე	10.125%	LIBID 3 თვე	5.5%
დეკემბრის ფიუჩერსი	89.83	დეკემბრის ფიუჩერსი	94.45
ბაზისი	-0.08	ბაზისი	-0.07

ცხრილი 3.11

სამთვიანი კრედიტის ფასია 5.5%, LIBOR-ის ფასი მართლაც დაეცა. მაგრამ დეკემბრის ფიუჩერსის ფასი გახდა 94.45, რაც ნიშნავს, რომ ფორვარდული განაკვეთი უდრის 5.55%-ს, ანუ საკმაოდ ახლოსაა მიმდინარე სპოტ-ფასთან.

ამ კონტრაქტების დახურვით მენეჯერმა მიიღო 150 ბ.პ. მოგება. ეს არის განსხვავება 92.95-სა და 94.45-ს შორის. ამას კი მივყავართ ეფექტური შემოსავლის ზრდისკენ $5\frac{1}{2}$%-დან 7%-მდე, რომელიც განსხვავდება თავიდან დაფიქსირებული განაკვეთისაგან, 7.05%, მხოლოდ 5 ბ.პ.

დოლარის ნაწილში ჰეჯმა კარგად „იმუშავა“: მენეჯერმა მიიღო შემოსავალი 7%, რაც მნიშვნელოვნად მეტია სპოტ-განაკვეთზე, 5.5%.

მენეჯერს დარჩა კიდევ განსათავსებელი £25 მლნ. საპროცენტო განაკვეთი ამ ხნის განმავლობაში დაეცა 13.125%-დან 10.25%-მდე. ამან გამოიწვია სხვა განაკვეთების შემცირება. ამიტომ ახლა მას შეუძლია განათავსოს ეს თანხა მხოლოდ $10\frac{1}{8}$%-ით. ფიუჩერსების ფასმა მცირედ მოიმატა — 89.83-მდე და მენეჯერმა ამ კონტრაქტების დახურვით მიიღო მხოლოდ 25 ბ.პ. მოგება. ეს იწვევს ეფექტური შემოსავლის გაზრდას $10\frac{1}{8}$-დან $10\frac{3}{8}$-მდე, რაც 4–5 ბ.პ.-ის სიზუსტით ემთხვევა ფიქსირებულ განაკვეთს, 10.42%, რომელიც შეესაბამებოდა ფიუჩერსის ფასს, 89.58.

კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ ფიუჩერსი აფიქსირებს ფორვარდულ განაკვეთს და არა მიმდინარე სპოტ-განაკვეთს (რომელიც ამ შემთხვევაში

ტოლია $13\frac{1}{8}$%-ის).

რატომ არ იყო ჰეჯი აბსოლუტურად ზუსტი? ამის პირველი მიზეზი ისაა, რომ ფიუჩერსის ფასი დგინდება LIBOR-ით, ხოლო კრედიტი გაიცემა LIBID-ით, იგი კი $\frac{1}{8}$%-ით უფრო მცირეა, ვიდრე LIBOR-ი. მეორე მიზეზი იმაშია, რომ სპოტ-ფასი და ფიუჩერსული ფასი ემთხვევა ერთმანეთს მხოლოდ მიწოდების მომენტში. მანამდე არსებობს არანულოვანი ბაზისი. ამიტომ არსებობს რისკი იმისა, რომ ბაზისის ხასიათი შეიცვლება, ე.წ. საბაზისო რისკი. ის მცირეა თვით საპროცენტო რისკთან შედარებით. საბაზისო რისკის მართვის მეთოდებს ქვემოთ, მეცხრე თავში განვიხილავთ.

3.8 ფიუჩერსები ობლიგაციაზე

შევნიშნოთ, რომ მოკლევადიანი საპროცენტო ფიუჩერსები არის ფულის ბაზრის ინსტრუმენტები და ამიტომ ყველაზე „დიდი" კონტრაქტებია, თუ ვიმსჯელებთ იმ აქტივების მოცულობის მიხედვით, რომლებიც მათ უდევს საფუძვლად.

მეორეს მხრივ, ფიუჩერსები ობლიგაციებსა და ინდექსებზე კაპიტალის ბაზრის ინსტრუმენტებია. და თუმცა მათ საფუძვლად ნაკლები მოცულობების თანხები უდევს, თვითონ ძალიან გავრცელებულ საქონელს წარმოადგენს.

კონტრაქტის სპეციფიკაცია. ამ კონტრაქტით იგულისხმება რეალური საქონლის, ობლიგაციის, მიწოდება მომავლის გარკვეულ მომენტში.

განვიხილოთ ყველაზე პოპულარული ფიუჩერსი — კონტრაქტი აშშ-ს სახაზინო ობლიგაციაზე, რომლითაც ვაჭრობენ CBOT-ზე. მისი სპეციფიკაცია მოცემულია ცხრ. 3.12-ში.

ამ კონტრაქტებით ვაჭრობისას წარმოიქმნება შემდეგი სირთულეები: თუ მოვითხოვთ კონტრაქტში აღწერილი ობლიგაციის მიწოდებას, მაშინ გასაგებია, რომ ინვესტორთა ჯგუფს შეუძლია შეისყიდოს ასეთი ობლიგაციები და ჩააყენოს მოკლე პოზიციაში მყოფი ინვესტორები ე.წ. მოკლე სკვიზში, ანუ აიძულოს ისინი, იყიდონ ობლიგაციები მაღალ ფასად. იმისათვის, რომ გამოირიცხოს ეს შესაძლებლობა, დასაშვებია ნებისმიერი ობლიგაციის მიწოდება შესაბამისი დაფარვის ვადით. მაგრამ აქ წარმოიქმნება კონფლიქტი — გრძელ პოზიციას ურჩევნია მიიღოს ობლიგაცია მაღალი საკუპონო შემოსავლით და დიდი დაგროვილი საპროცენტო გადასახადით, მაშინ როცა მოკლე მხარეს ურჩევნია იაფი ობლიგაციის მიწოდება მცირე კუპონით და იმ მომენტის შემდეგ, როცა კუპონი გადახდილია.

გამოსავალი ანგარიშის თანხის კორექტირებაში მდგომარეობს. კორექტირებამ უნდა გაითვალისწინოს კუპონის სიდიდე და ობლიგაციის მოქმედების ვადა. ანგარიშის თანხა განიმარტება ტოლობით

$$\mathrm{INVAMT} = \mathrm{FP} \times \mathrm{CF} + \mathrm{ACC},$$

სადაც INVAMT ანგარიშის თანხაა, FP ფიუჩერსის ღირებულებაა, CF გადამყვანი მამრავლია, ხოლო ACC დაგროვილი საპროცენტო გადასახადია.

ვაჭრობის ერთეული	აშშ სახაზინო ობლიგაცია ნომინალით \$100000 და 8% კუპონით
მიწოდების საქონელი	ობლიგაცია მინიმალური განაღდების ვადით 15 წელი, თუ გადავთვლით მიწოდების თვის პირველი დღიდან
მიწოდების თვე	მარტი, ივნისი, სექტემბერი, დეკემბერი
ბოლო საბირჟო დღე	მიწოდების თვის ბოლო საბირჟო დღის წინ მყოფი მეშვიდე საბირჟო დღის შუადღე
კოტირება	პროცენტები ნომინალიდან, რომლებიც გამოსახულია პუნქტებით და პუნქტების $\frac{1}{32}$-ით. ე.ი. 80–16 ნიშნავს 80-სა და $\frac{16}{32}$-ს, ანუ 80.50%-ს
ფასის მინიმალური ცვლილება	პროცენტის $\frac{1}{32}$
ტიკის ღირებულება	\$31.25
დღიური ფასის ცვლილების საზღვარი	3 სრული პუნქტი (ანუ 96 ტიკი)
ვაჭრობის საათები	$7^{20} - 14^{00}$ (ბირჟის პიტზე) $17^{20} - 20^{05}$ $22^{30} - 06^{00}$ (Globex-ის მონიტორზე)

ცხრილი 3.12

ანგარიშის თანხა არის ის თანხა, რომელსაც მიიღებს ფიუჩერსული კონტრაქტის მოკლე პოზიციის მფლობელი, როცა იგი განახორციელებს ობლიგაციის მიწოდებას. ყოველ კონკრეტულ ობლიგაციას, რომელიც ფიუჩერსული კონტრაქტით მიეწოდება, აქვს საკუთარი გადამყვანი მამრავლი, რომელიც აკომპენსირებს კუპონებსა და დაფარვის ვადებს შორის განსხვავებას. იმ ობლიგაციებს, რომელთა კუპონი ნაკლებია 8%-ზე, აქვს 1-ზე ნაკლები გადამყვანი მამრავლი, ხოლო იმ ობლიგაციებს, რომელთა კუპონი მეტია 8%-ზე, აქვს 1-ზე მეტი მამრავლი. ბირჟები ამ მამრავლებს წინასწარ ანგარიშობენ.

კონკრეტულ ობლიგაციას, რომლის მიწოდება სხვადასხვა ვადაში ხდება, აქვს მსგავსი, მაგრამ არა ერთი და იგივე გადამყვანი მამრავლი. მაგალითად, ობლიგაციას რომლის კუპონი ტოლია $11\frac{1}{4}$%-ის და დაფარვის ვადაა 2015 წლის 15 თებერვალი, აქვს შემდეგი გადამყვანი მამრავლები: 1.3310, 1.3293 და 1.3280, იმ კონტრაქტებისათვის, რომელთა აღსრულება ხდება 1993 წ. ივნისში, სექტემბერში და დეკემბერში. ცხადია, რომ ბაზარზე ობლიგაცია უფრო დიდი კუპონით უფრო ძვირია. თუ გვინდა გავაკეთოთ არჩევანი

ორ ობლიგაციას შორის, რომელთაც დაახლოებით ერთი და იგივე დაფარვის ვადები და სხვადასხვა კუპონი აქვს, მაშინ უნდა შევადაროთ ერთმანეთს ამ ობლიგაციების ფასები და კუპონის სიდიდეები. ეფექტურ ბაზარზე, არბიტრაჟული მოსაზრებიდან გამომდინარე, ეს სიდიდეები შეთანხმებული უნდა იყოს, რადგან ეფექტური შემოსავალი ორივე შემთხვევაში ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს.

ვთქვათ, გვაქვს ორი ობლიგაცია ნომინალით 100 დაფარვით ერთი წლის შემდეგ. პირველის კუპონი 5%-ია, მეორისა კი 15%. მაშინ, თუ პირველი ღირს 95.45, ხოლო მეორე 104.54, ისინი განურჩეველნი არიან, რადგან ორივე იძლევა ეფექტურ შემოსავალს 10%. მართლაც, პირველის შემოსავალია

$$\frac{105 - 95.45}{95.45} = 10\%.$$

ასეთივეა მეორის შემოსავალი.

$$\frac{115 - 104.54}{104.54} = 10\%.$$

სხვა სიტყვებით, ფასის კორექტირება საშუალებას იძლევა, სხვადასხვა კუპონის მქონე ობლიგაციის საშუალებით უზრუნველვყოთ ერთნაირი შემოსავლიანობა.

ასეთივე პრინციპით დგინდება გადამყვანი მამრავლის სიდიდე სხვადასხვა ობლიგაციისათვის: გადამყვანი მამრავლი უბრალოდ ისეთი ფასის ტოლია ყოველ დოლარზე, რომ შეძენილი ობლიგაციები იძლეოდეს ერთი და იგივე შემოსავალს. შემოსავლიანობის დონე, რომელიც გამოიყენება გამოთვლებში, უდრის ფიუჩერსულ კონტრაქტში დაფიქსირებულ საკუპონე პროცენტს. მაგალითად, ფიუჩერსებისათვის აშშ-ს სახაზინო ობლიგაციებზე ფიქსირდება შემოსავლიანობა 8%-ის დონეზე.

თუ ობლიგაციების კუპონები ტოლია, მაშინ უფრო შესამჩნევია დაფარვის ვადის გავლენა, თუმცა ეს გავლენა აღარ არის ასე ცხადი და პირდაპირი. აქ სიტუაცია ასეთია: თუ ობლიგაციის კუპონი ნაკლებია კონტრაქტში დაფიქსირებულ ნომინალის კუპონზე, მაშინ უფრო გრძელვადიანი ობლიგაციის გადამყვანი მამრავლი უფრო მცირეა. პირიქით, თუ ობლიგაციის კუპონი მეტია კონტრაქტის კუპონზე, მაშინ უფრო გრძელვადიან ობლიგაციას უფრო დიდი გადამყვანი მამრავლი აქვს.

ეს არის მარტივი შედეგი მყარი შემოსავლის მქონე ქაღალდების მათემატიკისა. მართლაც, თუ კუპონი ნაკლებია მიმდინარე საბაზრო შემოსავლიანობაზე, მაშინ ობლიგაცია იყიდება ფასდაკლებით და შეღავათი მით უფრო დიდია, რაც უფრო მეტია დაფარვის ვადა. თუ კი კუპონის სიდიდე მეტია საბაზრო შემოსავლიანობაზე, მაშინ ობლიგაცია იყიდება ფასდამატებით და ფასის ნამატი უფრო დიდია გრძელვადიანი ობლიგაციისათვის.

მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაცია. გადამყვანი მამრავლები შემოღებულია იმიტომ, რომ ყველა ობლიგაციის შემოსავლიანობა მივიყვანოთ სტანდარტამდე — იმ შემოსავლიანობამდე, რომელიც ნაჩვენებია კონტრაქტში და ამით უზრუნველვყოთ ერთი ობლიგაციის შეცვლა ეკვივალენტური ობლიგაციით.

მაგრამ, ჩვენ ვიცით, რომ სინამდვილეში იყიდება სხვადასხვა შემოსავლიანობის მქონე ობლიგაციები: ეს ფაქტი აისახება შემოსავლიანობის მრუდის ცნებაში.

იმ შემთხვევაშიც კი, თუ ყველა ობლიგაციას ერთნაირი შემოსავლიანობა აქვს, რატომ უნდა დაემთხვეს ეს რიცხვი ფიუჩერსულ კონტრაქტში დაფიქსირებულ რიცხვს?

ეს ნიშნავს, რომ მიუხედავად გადამყვანი მამრავლის გამოყენებისა, ყველა ობლიგაცია არ არის ერთნაირი — ზოგი ძვირია, ზოგი კი იაფი. მათ შორის არსებობს ისეთი, რომელიც ყველაზე იაფია მიწოდებისათვის.

რას წარმოადგენს ეს ობლიგაცია? ვთქვათ, რომელიმე პიროვნება მიწოდების თვის განმავლობაში აწარმოებს შემდეგ ოპერაციებს:

1) ყიდულობს მისაწოდებელ ობლიგაციას ნომინალით \$100000;
2) ყიდის ფიუჩერსს;
3) მყისიერად იწყებს მიწოდებას.

ობლიგაციის შეძენის გადასახადი ტოლია

$$\mathrm{BNDAMT} = \mathrm{P} + \mathrm{ACC},$$

სადაც BNDAMT ობლიგაციის შეძენის გადასახადია, P მიმდინარე საბაზრო ფასია, ხოლო ACC — დაგროვილი პროცენტი.

მაშინ ჯამური შემოსავალი მთელი სტრატეგიიდან ტოლია

$$\begin{aligned}\mathrm{PROFIT} &= \mathrm{INVAMT} - \mathrm{BNDAMT} = \\ &= (\mathrm{FP} \times \mathrm{CF} + \mathrm{ACC}) - (\mathrm{P} + \mathrm{ACC}) = \mathrm{FP} \times \mathrm{CF} - \mathrm{P}.\end{aligned}$$

ის ობლიგაცია, რომლისთვისაც მიღებული სიდიდე მაქსიმალურია, იქნება სწორედ მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაცია მიწოდების თვის განმავლობაში.

სტრატეგია „გადაიხადე და წაიღე" (ფიუჩერსები ობლიგაციებზე). განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგია, რომელიც ხორციელდება რომელიმე მომენტში მიწოდების თვის დადგომამდე:

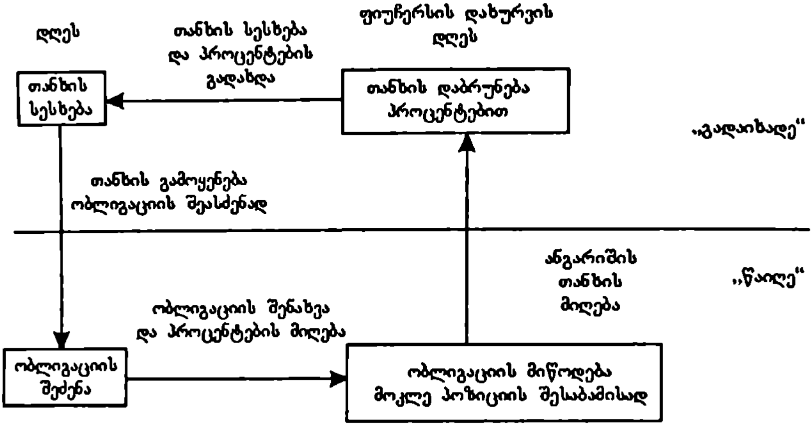
1) ვიყიდოთ მისაწოდებელი ობლიგაცია ნომინალით \$100000;
2) დავაფინანსოთ ეს ოპერაცია REPO-ს საშუალებით (შეთანხმება ობლიგაციის გაყიდვაზე და შემდეგ მის უკან შეძენაზე განსაზღვრულ ფასში. REPO არის უზრუნველყოფილი კრედიტის ფორმა);

3) გავყიდოთ ფიუჩერსი;

4) შევინახოთ ობლიგაცია მიწოდების თვის ბოლომდე;

5) მივაწოდოთ ობლიგაცია მოკლე ფიუჩერსული პოზიციის შესაბამისად.

გრაფიკულად ეს სტრატეგია ასე გამოიყურება:



ნახ. 3.16

გამოვიყენოთ ზემოთაღწერილი სტრატეგია ფიუჩერსის არბიტრაჟული ფასის დასადგენად. ამისათვის აღვრიცხოთ ამ ოპერაციის მოგება-ზარალი. ის შედგება სამი შემადგენლისაგან. პირველი შემადგენელი გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{INVAMT} = \mathrm{FP} \times \mathrm{CF} + \mathrm{ACC}_D,$$

სადაც INVAMT ანგარიშის თანხაა, FP ფიუჩერსის ღირებულებაა, CF გადამყვანი მამრავლია, ხოლო ACC_D მიწოდების მომენტისათვის დაგროვილი პროცენტია.

მეორე შემადგენელია REPO შეთანხმებით დადგენილი ფასი ობლიგაციის ხელმეორედ ყიდვისას

$$\mathrm{REPAMT} = (\mathrm{P} + \mathrm{ACC}_D)(1 + rt),$$

სადაც REPAMT ობლიგაციის ფასია მეორედ ყიდვისას, ACC_D ობლიგაციის შეძენის მომენტისათვის დაგროვილი პროცენტია, r REPO-ს განაკვეთია, ხოლო t — წელიწადის ნაწილი, რომელსაც ფარავს REPO.

ბოლოს, მესამე შესაკრებში უნდა გავითვალისწინოთ ის კუპონები, რომლებიც დაიფარა ობლიგაციის შენახვის განმავლობაში, რადგან კუპონები ეკუთვნის ობლიგაციის მფლობელს, თუმცა ობლიგაცია სხვას გადაეცა

REPO-შეთანხმების ძალით. ჩავთვალოთ, რომ კუპონებს შემოაქვთ შემოსავალი REPO-ს განაკვეთის მიხედვით. ამიტომ, ყველა კუპონიდან მიღებული შემოსავალი იქნება

$$\mathrm{CPNINT} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{CPN}_i \times (1 + rt_{i,D}),$$

სადაც CPNINT დაფარული კუპონების ღირებულებაა დაგროვილი პროცენტული შემოსავლით, N შენახვის ვადის განმავლობაში დაფარული კუპონების რაოდენობაა, CPN_i i-ური კუპონის ღირებულებაა, r REPO-ს განაკვეთია (ათწილადებში გამოსახული), $t_{i,D}$ არის წელიწადის ნაწილი i-ური კუპონის დაფარვიდან ობლიგაციის მიწოდებამდე.

ამრიგად, „გადაიხადე და წაიღე" სტრატეგიის სუფთა შემოსავალი იქნება

$$\begin{aligned}\mathrm{PROFIT} &= \mathrm{INVAMT} + \mathrm{CPNINT} - \mathrm{REPAMT} = \\ &= \mathrm{FP} \times \mathrm{CF} + \mathrm{ACC}_D + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{CPN}_i(1 + rt_{i,D}) - (\mathrm{P} + \mathrm{ACC}_D)(1 + rt).\end{aligned}$$

თუ დავუშვებთ, რომ PROFIT $= 0$ (არბიტრაჟის არარსებობა), ზემოთმოყვანილი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\mathrm{FP} = \frac{(\mathrm{P} + \mathrm{ACC}_D)(1 + rt) - \sum_{i=1}^{N} \mathrm{CPN}_i(1 + rt_{i,D}) - \mathrm{ACC}_D}{\mathrm{CF}}.$$

შევნიშნოთ, რომ: 1) ფიუჩერსის ფასის გამოთვლისათვის არ არის საჭირო ობლიგაციის მომავალი ფასის პროგნოზირება, 2) აღწერილი სტრატეგია „გადაიხადე და წაიღე" გულისხმობს პროცენტის გადახდას REPO-ს განაკვეთით და მის მიღებას ყველაზე იაფი ობლიგაციის საკუპონო განაკვეთით. თუ REPO-ს განაკვეთი მეტია საკუპონო განაკვეთზე, მაშინ შენახვის ფასი უარყოფითია და ფიუჩერსის ფასი მით უფრო მეტია, რაც უფრო დიდ ხანს შევინახავთ ობლიგაციას. პირიქით, თუ REPO-ს განაკვეთი ნაკლებია საკუპონო განაკვეთზე, მაშინ შენახვის ფასი დადებითია და ფიუჩერსის ფასი ნაკლები იქნება უფრო გვიანი მიწოდების შემთხვევაში. ეს დამატებითი თანხა აკომპენსირებს გრძელი პოზიციის მფლობელის ლოდინს.

შემდეგ მსჯელობას მივყავართ REPO-ს განაკვეთის დადგენამდე.

ადვილი დასანახია, რომ მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაცია t მომენტში განისაზღვრება მოთხოვნით — მიანიჭოს მაქსიმუმი შემდეგ გა-

მოსახულებას:

$$\text{PROFIT} \to \max \Longleftrightarrow \Big(\text{FP} \times \text{CF} + \\ + \text{ACC}_D + \sum_{i=1}^{N} \text{CPN}_i(1 + rt_{i,D}) - \\ -(\text{P} + \text{ACC}_D)(1 + rt)\Big) \to \max .$$

ამ ამოცანის გადაჭრის ერთ-ერთი ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ დავუშვათ, $\text{PROFIT} = 0$ და ვიპოვოთ ის ობლიგაცია, რომელიც გვაძლევს REPO-ს განაკვეთის მაქსიმუმს. ასეთი ქმედება მოსახერხებელია, რადგან ფიუჩერსის ფასი უფრო ადვილად დაკვირვებადი სიდიდეა.

თუ ამოვხსნით $\text{PROFIT} = 0$ განტოლებას r-ის მიმართ, მივიღებთ განპირობებულ REPO-განაკვეთს

$$r = \frac{(\text{FP} \times \text{CF} + \text{ACC}_D) - (\text{P} + \text{ACC}_D) + \sum_{i=1}^{N} \text{CPN}_i}{t(\text{P} + \text{ACC}_D) - \sum_{i=1}^{N} \text{CPN}_i t_{i,D}}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ ამ ფორმულაში ჩავსვამთ მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის მონაცემებს, მივიღებთ მაქსიმალურ REPO-განაკვეთს.

საბაზისო ჰეჯირება ფიუჩერსებით ობლიგაციებზე. ობლიგაციების პორტფელის ჰეჯირება ობლიგაციებზე ფიუჩერსების ერთ-ერთ მთავარ გამოყენებას წარმოადგენს. ქვემოთ, ფინანსური ინჟინერიისადმი მიძღვნილ მეცხრე თავში, ჩვენ ვნახავთ, რომ ასეთი ჰეჯირების ერთ-ერთ ეტაპს წარმოადგენს ისეთი პორტფელის ჰეჯირება, რომელიც შედგება მხოლოდ მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციებისაგან.

ერთი შეხედვით, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ საკმარისია შევიძინოთ იმდენი კონტრაქტი, რომ მათი პირობითი თანხა დაემთხვეს პორტფელში მყოფი ობლიგაციების საერთო ღირებულებას. მაგალითად, თუ გვაქვს $10 მლნ-იანი პორტფელი, მაშინ თითქოს უნდა შევიძინოთ 100 კონტრაქტი, თითოეული $100000 პირობით თანხაზე. ცხადია, ეს ასე არ არის. ფიუჩერსის სამართლიანი ფასის ფორმულიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ, რომ

$$\frac{\partial \text{FP}}{\partial \text{P}} = \frac{1}{\text{CF}}$$

(ცხადია, მსჯელობის გასამარტივებლად აქ უგულებელყოფილია მამრავლი $1 + rt$, რადგან $t \leq 1$ და REPO-ს განაკვეთი კი მცირეა) ანუ

$$\Delta \text{FP} \approx \frac{\Delta \text{P}}{\text{CF}},$$

სადაც FP ფიუჩერსის ფასია, P — ობლიგაციის ფასი, ხოლო CF — გადამყვანი მამრავლია. ამრიგად, ფიუჩერსების ფასების ცვლილებამ ზუსტად

რომ ასახოს ობლიგაციების ფასების ცვლილება, ფიუჩერსების რაოდენობა უნდა გავზარდოთ CF-ჯერ.

3.9 საბირჟო ინდექსები და ფიუჩერსები საბირჟო ინდექსებზე

ფიუჩერსულ კონტრაქტებს შორის ყველაზე პოპულარულია მოკლევადიანი საპროცენტო ფიუჩერსები და ობლიგაციაზე ფიუჩერსები. ამ კონტრაქტების საერთო გაყიდვების რაოდენობამ წელიწადში 130000000 შეადგინა.

მიუხედავად ამისა, არსებობს საკმაოდ განვითარებული ბაზარი ფიუჩერსებისა საბირჟო ინდექსებზე. საერთო გაყიდვათა რაოდენობამ ამ ბაზარზე შეადგინა წელიწადში 24000000 ცალი კონტრაქტი.

საბირჟო ინდექსი. საბირჟო ინდექსი არის დროის ნებისმიერი მომენტისათვის მათემატიკურად გამოანგარიშებული აქციების ბაზრის საერთო მახასიათებელი.

ცნობილია დოუ-ჯონსის (Dow-Jones Industrial Average, DJIA), NIKKEI, S&P500, FTSE100 და ა.შ. საბირჟო ინდექსები.

ყველა იმ კომპანიებიდან, რომელთა აქციები კოტირდება მოცემულ ბირჟაზე, არჩევენ კომპანიათა ჯგუფს ისე, რომ მან ასახოს მთელი ბაზრის მდგომარეობა. ჩვეულებრივ, ეს არის მსხვილი კომპანიები და ის კომპანიები, რომლებიც ყველაზე უფრო რეპრეზენტატულია წარმოების მოცემული დარგისთვის.

· უმარტივეს შემთხვევაში ინდექსი შეიძლება გამოვთვალოთ როგორც ამორჩეული კომპანიების აქციათა ღირებულებების საშუალო არითმეტიკული.

ასე მაგალითად, დოუ-ჯონსის ინდექსი გამოითვლება როგორც შეწონილი ფასების ინდექსი. ასეთი ინდექსის გამოთვლა მარტივია, მაგრამ იგი დიდ წონას ანიჭებს იმ კომპანიებს რომელთაც გააჩნია ძვირი აქციების მცირე რაოდენობა და ამცირებს იმ კომპანიების წონას, რომელთაც გააჩნია იაფი აქციების დიდი რაოდენობა.

მაგალითად, მცირე კომპანია Micro Focus-ის, რომლის აქციის ფასია £22.55 და რომლის კაპიტალიზაცია (ე.ი. კომპანიის აქციების საბაზრო ღირებულება) £313 მლნ-ს შეადგენს, აქციის კურსის 10 პუნქტით გაზრდა იგივე ეფექტს გამოიწვევს, როგორსაც British Telecom-ის აქციის კურსის ზრდა ამდენივე პუნქტით. BT-ს თითოეული აქცია კოტირდება £4.11-ად, ხოლო კაპიტალიზაცია უდრის £25416 მლნ-ს, ანუ სხვა სიტყვებით, ეს კომპანია 80-ჯერ უფრო მსხვილია, ვიდრე კომპანია Micro Focus-ი.

ეს მიდგომა არალოგიკურია, აგრეთვე, სხვა მოსაზრების გამოც. ფასის 10 პუნქტით ზრდა იწვევს MF-ის ღირებულების 0.4%-ით ზრდას, მაშინ

როცა BT-ს ღირებულება იზრდება 2.4%-ით.

ინდექსის ფორმირების სხვანაირი მეთოდიკა მდგომარეობს იმაში, რომ შეიკრიბოს არა აქციების ფასები, არამედ კომპანიათა კაპიტალიზაციები. ასე შედგენილი ინდექსი რეაგირებს არა მარტო აქციის ფასის ზრდაზე, არამედ კომპანიების სიდიდეზეც. მას ბაზრის შეწონილი ინდექსი ჰქვია.

მართალია DJIA ყველაზე ცნობილი ინდექსია აშშ-ში, მაგრამ ფიუჩერსები ინდექსებზე ეყრდნობა S&P500-ს. მას აქვს ორი უპირატესობა: ერთი, რომ ის ბაზრის შეწონილი ინდექსია, მეორე — ეყრდნობა კომპანიების ფართო წრეს, რომელიც აერთიანებს 500 წარმომადგენელს საერთო კაპიტალიზაციით, რომელიც ტოლია მთელი NYSE-ს კაპიტალიზაციის 80%-სა. DJIA ეყრდნობა 30 კომპანიას; FTSE 100 — 100 კომპანიას, რომელთა კაპიტალიზაცია ლონდონის საფონდო ბირჟის კაპიტალიზაციის 70%-ს შეადგენს. ამ ინდექსმა შეცვალა FT, რომელიც მხოლოდ 30 კომპანიას ეყრდნობოდა.

ძირითადი მოთხოვნა ინდექსზე (გარდა ფართო წარმომადგენლობისა) მდგომარეობს იმაში, რომ ის უწყვეტად გამოითვლებოდეს და ხელმისაწვდომი იყოს რეალურ დროში. ინდექსის გამოთვლის სხვადასხვა სქემის აღწერა მოყვანილია დანართში.

ფიუჩერსები ინდექსებზე. შევნიშნოთ, რომ ინდექსები არაფერს გვეუბნება ბაზრის აბსოლუტურ სიდიდეზე. მაგალითად, ინდექსი S&P500 გამოითვლება 1941–1943 წ. აქციათა საშუალო ფასის მიმართ, რომლისთვისაც მიწერილია ინდექსი 10. ეს ნიშნავს, რომ თუ ინდექსის სიდიდეა, მაგალითად, 448.94 (1993 წელს), ამ მომენტში იმ კომპანიების კაპიტალიზაცია, რომლებიც მოცულია ინდექსით, 44.894-ჯერ უფრო მეტია, ვიდრე 1941–1943 წლებში იყო. მაგრამ არ შეიძლება ამ ინდექსის შედარება FTSE 100-თან, რადგან ამავე დღეს იგი ტოლი იყო 2830-ის, ანუ ბრიტანეთის აქციები ექვსჯერ უფრო ძვირი იყო აშშ-ს აქციებზე, რაც აბსურდია. საქმე ისაა, რომ FTSE 100-ის შექმნის მომენტში ამორჩეული კომპანიების საერთო საბაზრო კაპიტალიზაციას მიაწერეს მნიშვნელობა 1000.

იმისათვის, რომ ვაქციოთ საბირჟო ინდექსის აბსოლუტური სიდიდე უფრო მნიშვნელოვან სიდიდედ, მივაწეროთ მის ყოველ დონეს ფულადი გამოსახულება. მაგალითად, თუ FTSE 100-ის ერთეულს მივაწერთ £25-ს, მაშინ ინდექსის დონე 2830 ნიშნავს £70750-ს.

ეს ქმედება, ერთი შეხედვით, შორს არის რეალობიდან, რადგან ინდექსის ერთეულს პირობითი ფულადი სიდიდე მივაწერეთ.

მაგრამ ასეთი ქმედება საშუალებას გვაძლევს გავუტოლოთ საბირჟო ინდექსის „ღირებულება" აქციების წარმომადგენლობითი კალათის ღირებულებას.

კალათას უნდა ჰქონდეს შემდეგი თვისებები:

- აქციების ჯამური ღირებულება კალათაში უნდა უდრიდეს ინდექსის

ფულად ღირებულებას.

- ამორჩეული აქციები უნდა შეესაბამებოდნენ იმ აქციების ნაკრებს, რომლებიც გამოიყენებიან ინდექსის გამოთვლისას.

- აქციების თითოეული პაკეტის მოცულობა უნდა იყოს ყოველი კომპანიის საბაზრო კაპიტალიზაციის პროპორციული.

მაგალითად, თუ FTSE100 უდრის 2830-ს, მაშინ რეპრეზენტატული კალათი მოიცემა აქციათა პორტფელით, რომლის ღირებულებაა £70750. აქციები უნდა ეკუთვნოდეს იმ 100 კომპანიას, რომლებიც მოცულია ინდექსით და ყოველი კომპანიის აქციათა ფარდობითი ღირებულება უნდა შეესაბამებოდეს ამ კომპანიის ფარდობით საბაზრო კაპიტალიზაციას აღებულ 100 კომპანიას შორის. ასეთი კალათის ყოფაქცევა ზუსტად აღწერს ინდექსის ყოფაქცევას, რადგან ინდექსი გამოითვლება როგორც მის განმარტებაში მონაწილე კომპანიების საბაზრო კაპიტალიზაციების შეწონილი საშუალო.

ფიუჩერსი საბირჟო ინდექსებზე არის კონტრაქტი მის საფუძველში მყოფი ინდექსის ნომინალური ღირებულების ყიდვა-გაყიდვაზე. ამასთან, ნომინალური ღირებულება განისაზღვრება, როგორც ინდექსის მნიშვნელობა გამრავლებული გარკვეულ თანხაზე. ცხრილში მოყვანილია რადენიმე მაგალითი.

1993 წ. 19 აპრილი

ინდექსი	ღირებულება	მამრავლი	ნომინალი	დოლარის ეკვივალენტი
S&P	448.94	\$500	\$224470	\$224470
NIKKEI 125	20112.34	1000 იენა	20112.340 იენა	\$180948
FTSE 100	2830.00	£25	£70750	\$108778
CAC 40	1968.91	FRF 200	FRF 393782	\$72267
DAX	1693.30	DEM 100	DEM 169330	\$104855

ცხრილი 3.13

კონტრაქტები ისე კონსტრუირდება, რომ ნომინალები იყოს \$100000-დან \$200000-მდე ეკვივალენტებს შორის.

კოტირება ხდება ინდექსების პუნქტებზე და ნახევარ პუნქტებზე. მაგალითად, FTSE100-ის ინდექსზე კოტირება შეიძლება იყოს 2830.5. ტიკი ამ მაგალითში უდრის 0.5 პუნქტს ან მის ფულად ეკვივალენტს, £12.50.

ფიუჩერსი ინდექსებზე პირველად შეიქმნა 1982 წ. მას გააჩნია მთელი რიგი „კარგი“ თვისებებისა, რაც ფიუჩერსს პოპულარულს ხდის. სახელდობრ:

- შესაძლებელია ინვესტირება აქციების ყიდვა-გაყიდვის გარეშე. აქციების ბაზარზე ოპერირება დაკავშირებულია დიდ ხარჯებთან, ინდექსებით ოპერირება თითქმის უფასოა.
- რადგან მოქმედებს მარჟების სისტემა, ამიტომ შესაძლებელია მცირე კაპიტალით მოქმედება. მარჟის სიდიდე საშუალებას იძლევა ვაწარმოოთ ოპერაციები ისეთი თანხებით, რომელთა სიდიდე 10–40-ჯერ მეტია გამოყენებულ ნაღდ კაპიტალზე.
- გარიგებების ხარჯები მცირეა. მაგალითად, ფიუჩერსის ყიდვა-გაყიდვა ღირს £25 ან $25. მაშინ როცა ეკვივალენტური მოცულობის აქციების ყიდვა-გაყიდვის დროს გაწეული ხარჯები აღწევს რამდენიმე ასეულ ფუნტ სტერლინგს ან დოლარს.
- ადვილად შეიძლება მოკლე პოზიციის შექმნა. არ არის შეზღუდვა „გარიგება პლუსი", როცა მოკლე გაყიდვა დასაშვებია მხოლოდ ფასის ზრდისას.
- პორტფელების მენეჯერებს შეუძლიათ დაიცვან აქციათა პორტფელები „დათვებისაგან" აქციების გაყიდვის გარეშე.

ამ უპირატესობებით სარგებლობენ ინვესტიციების მენეჯერებიც და სპეკულანტებიც.

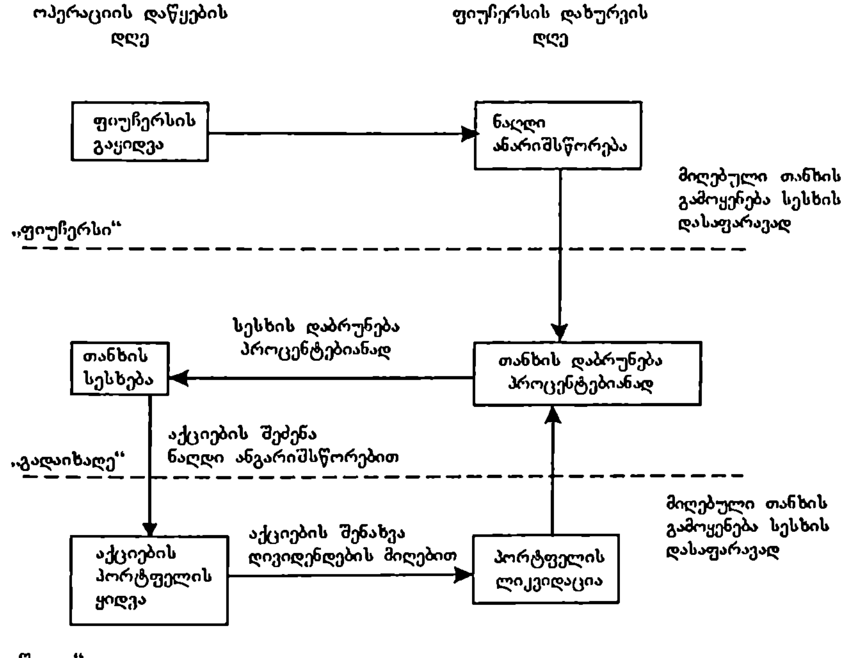
„გადაიხადე და წაიღე" სტრატეგიის გათვლა ფიუჩერსებისათვის საბირჟო ინდექსებზე. გავიხსენოთ, რომ ფიუჩერსები ინდექსებზე დაკავშირებულია სააქციო კაპიტალთან, მაშინ როცა ფიუჩერსები ობლიგაციებზე — სახაზინო ობლიგაციებთან. მიწოდება აქ ხდება ფულით, იქ ობლიგაციით. მიუხედავად ამისა, მათ აქვთ საერთო ფასდადების პრინციპი.

მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგია:

- ვიყიდოთ აქციების პორტფელი, რომელიც კოპირებს ინდექსს.
- დავაფინანსოთ ის REPO-გარიგებით.
- გავყიდოთ ერთი ფიუჩერსი ინდექსზე.
- შევინახოთ პორტფელი ბოლო საბირჟო დღემდე დივიდენდების შეგროვებით და ინვესტირებით.
- ფიუჩერსებით ვაჭრობის შეწყვეტისთანავე მოვახდინოთ პორტფელის ლიკვიდაცია.
- დავასრულოთ ფიუჩერსული კონტრაქტი ნაღდი ანგარიშსწორებით.

- გამოვიყენოთ პორტფელის ლიკვიდაციისა და ფიუჩერსების ანგარიშსწორებისაგან მიღებული სახსრები სესხის დასაფარავად.

სქემატურად ეს სტრატეგია შეიძლება ასე გამოვსახოთ:



ნახ. 3.17

შევკრიბოთ ნაღდი ფულის ნაკადები ოპერაციის დასაწყისში და ბოლოში (უგულებელვყოთ რეინვესტიციით მიღებული შემოსავალი და გადასახადი აქციების ყიდვა-გაყიდვაზე). არბიტრაჟის პრინციპის გამოყენებით მივიღებთ:

1) თუ დივიდენდები დისკრეტულადაა შემოსული,

$$\mathrm{FP} = I_0(1 + rt) - \sum_{i=1}^{N} \mathrm{DIV}_i(1 + rt_{i,D});$$

2) თუ დივიდენდები თანაბრადაა განაწილებული წლის განმავლობაში,

$$\mathrm{FP} = I_0(1 + t(r - d));$$

სადაც FP ფიუჩერსის ფასია, I_0 საბირჟო ინდექსის ფასია ოპერაციის დასაწყისში, r REPO-განაკვეთის სიდიდეა, t წლის ის ნაწილია, რომლის განმავლობაშიც მიმდინარეობდა ოპერაცია, DIV_i არის დივიდენდი, რომელსაც იხდის i-ური აქცია, $t_{i,D}$ არის წლის ნაწილი i-ური დივიდენდის მიღებიდან მიწოდების თარიღამდე, d სადივიდენდო შემოსავლიანობაა. შევნიშნოთ, რომ ამ ფორმულების „უწყვეტ" ანალოგებს ჩვენ ადრე უკვე შევხვდით.

ბოლოს, აღვნიშნოთ ზოგიერთი სირთულე, რომელიც ახლავს ინდექსებზე ფიუჩერსების საშუალებით პრაქტიკული ჰეჯირების ჩატარებას. სირთულეს წარმოადგენს:

- ინდექსის შესაბამისი პორტფელის აგება.
- გარიგების დიდი ხარჯების არსებობა.
- შეცდომები, რომლებიც გამოწვეულია პორტფელსა და ინდექსს შორის განსხვავებით.
- ფასების განსხვავება ინდექსსა და შესაბამის აქციებს შორის.
- ინდექსის შემადგენლობის შეცვლა.
- შეზღუდვა მოკლე გაყიდვაზე.
- დივიდენდების შეფასება და არარეგულარული შემოსვლა.

მიუხედავად ამისა, თუ განვიხილავთ S&P500 ინდექსს, ის გვაძლევს თეორიული და საბაზრო ფასების დამთხვევას დაახლოებით 0.5%-ის სიზუსტით. ამას ხელს უწყობს ვაჭრობის კომპიუტერული სისტემა.

ფიუჩერსებისადმი მიძღვნილი ლიტერატურა იმდენად ფართო და მრავალფეროვანია, რომ მისი რამდენადმე ჩამოთვლა პრაქტიკულად შეუძლებელია.

მოვიყვანოთ ის წყაროები, რომლებსაც ძირითადად მიჰყვება ამ თავში გადმოცემული მასალა და რომლებიც ხელს შეუწყობს მკითხველს უფრო ღრმად გაერკვეს ამ საინტერესო საგანში: [12], [26], [33], [37], [40], [52], [73], [74], [94], [117], [125], [137], [146], [151], [155], [163], [169], [193], [194], [205], [206], [207].

4

ოფციონები. ძირითადი ცნებები და ფასდადების პრინციპები

ფინანსური ინჟინერიის ყველა ინსტრუმენტს შორის მხოლოდ ოფციონებს გააჩნიათ შემდეგი უნიკალური თვისება: ისინი იცავენ მათ მფლობელებს მოვლენების არახელსაყრელი განვითარებით გამოწვეული რისკისაგან, და ამავე დროს, არ უკარგავენ საშუალებას, მიიღონ დადებითი მოგება მოვლენათა ხელსაყრელი განვითარების შემთხვევაში.

ამიტომ, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ოფციონი ყველა თვალსაზრისით ყველაზე მოხერხებულ ფინანსურ ინსტრუმენტს წარმოადგენს. ეს მართლაც ასე იქნებოდა, ოფციონი რომ უფასო იყოს. ოფციონის ფასი დამოკიდებულია მის სადაზღვევო თვისებებზე, მოგების პოტენციალზე და, ბუნებრივია, ოფციონის ზემოაღნიშნული თვისებები მისი ფასით გაწონასწორდეს. და მაინც, მხოლოდ ოფციონების საშუალებით არის შესაძლებელი ისეთი პორტფელის შედგენა, რომელიც კონკრეტული ინვესტორის ბაზარზე წარმოდგენებს და რისკისადმი მიდრეკილებას შეესაბამება. გარდა ამისა, ოფციონური სტრატეგიებით ხერხდება ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება მაშინ, როდესაც საჭიროა არა რისკის სრული ელიმინირება, არამედ მისი მართვა და გამოყენება.

ოფციონური კონტრაქტის საგნად შეიძლება სხვადასხვა ინსტრუმენტი მოგვევლინოს. ასე მაგალითად:

- აქცია
- ობლიგაცია
- სახაზინო თამასუქი
- უცხოურ სახელმწიფოთა ვალუტა
- საქონელი

ოფციონის საფუძვლად, ამათ გარდა, შეიძლება წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტი (დერივატივი) იყოს. ასე წარმოიქმნება ოფციონები

- FRA-ზე
- ფიუჩერსებზე
- აქციათა კურსების ინდექსებზე
- სვოპებზე
- ოფციონებზე

ქვემოთ, განსაზღვრულობისათვის, ოფციონის საფუძვლად ხშირად აქცია მოგვევლინება. იმ შემთხვევაში, თუ ოფციონს სხვა აქტივი ედება საფუძვლად, ჩვენ ამას დამატებით აღვნიშნავთ.

4.1 ძირითადი განმარტებები. ოფციონის ტიპები, კლასები და სერიები

ოფციონი (ანუ ოფციონური კონტრაქტი) არის შეთანხმება ორ პარტნიორს, მის მფლობელსა და გამომშვებს (ან უბრალოდ, მის მყიდველსა და გამყიდველს) შორის წინასწარ შეთანხმებულ პირობებში რაიმე აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის შესახებ.

ოფციონი ანიჭებს მის მფლობელს (მის მყიდველს) მომავალში განსაზღვრულ დროს აქციის (ან რაიმე სხვა აქტივის) ყიდვის ან გაყიდვის უფლებას წინასწარ შეთანხმებულ ფასად. ოფციონის გამყიდველი (მისი დამწერი) ვალდებულია კონტრაქტის პირობები შეასრულოს, თუ მისი მყიდველი თავისი უფლების განხორციელებას გადაწყვეტს.

განასხვავებენ ოფციონის ორ ძირითად ტიპს — ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონს.

ყიდვის ოფციონი (კოლ ოფციონი) აძლევს მის მფლობელს (მყიდველს) უფლებას იყიდოს აქცია (ან რაიმე სხვა აქტივი) მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს წინასწარ შეთანხმებულ ფასად.

გაყიდვის ოფციონი (პუტ ოფციონი) ანიჭებს მის მფლობელს უფლებას გაყიდოს აქცია (ან რაიმე სხვა ფასეულობა) ასევე წინასწარ განსაზღვრულ დროს წინასწარ შეთანხმებულ ფასად.

კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ დროს (დღეს, თარიღს) ანუ იმ ბოლო დღეს, როდესაც ოფციონის მფლობელს შეუძლია თავისი უფლების გამოყენება და ოფციონის წარდგენა აღსასრულებლად, უწოდებენ ოფციონის აღსრულების (დაფარვის) დროს (დღეს, თარიღს) და კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ ფასს კი — შეთანხმების ფასს (აღსრულების ფასს, დაფარვის ფასს, სტრაიკს). ცხადია, რომ ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონის მფლობელი ისარგებლებს თავისი უფლებით მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც აქციის ფასი ოფციონის აღსრულების მომენტში გადააჭარბებს შეთანხმების ფასს (შესაბამისად ნაკლები გახდება შეთანხმების ფასზე) და წინააღმდეგ შემთხვევაში ის უბრალოდ არ გამოიყენებს თავის უფლებას, რადგან არა აქვს აზრი იყიდო (შესაბამისად, გაყიდო) აქცია შეთანხმების ფასად, თუ ეს ფასი აქციის ფასზე მაღალია (შესაბამისად, დაბალია) და თუ ამას არავინ გავალდებულებს (როგორც ეს ხდება ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტების დადების დროს). შევნიშნოთ, რომ ოფციონი კარგავს ძალას მისი სიცოცხლის პერიოდის (აღსრულების დროის) გასვლის შემდეგ.

ოფციონებს, რომელთა მფლობელს (მყიდველს) აქვს შესაძლებლობა გამოიყენოს თავისი უფლება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ნებისმიერ მომენტში (ანუ ნებისმიერ დროს ოფციონის აღსრულების მომენტამდე ამ მომენტის ჩათვლით) უწოდებენ ამერიკულ ოფციონებს. ევროპულს უწოდებენ ოფციონს, თუ მის მფლობელს ამ ოფციონით მინიჭებული უფლების გამოყე-

ნება შეუძლია მხოლოდ ოფციონის აღსრულების მომენტში.

თუმცა ევროპული ოფციონები უფრო ადვილად ექვემდებარებიან ანალიზს, ოფციონების ძირითადი ნაწილი, რომლებითაც ბირჟებზე ვაჭრობენ, მაინც ამერიკული ტიპისაა, რაც განპირობებულია იმით, რომ ადრეული აღსრულების შესაძლებლობა ასეთი ტიპის ოფციონებს დამატებით მოქნილობას ანიჭებს. აღნიშნებს „ევროპული" და „ამერიკული" სინამდვილეში არავითარი კავშირი არა აქვს იმასთან, თუ სად ხდება ამ ოფციონებით ვაჭრობა.

იმ აქტივს, რომელზედაც ოფციონური კონტრაქტი დაიდო, უწოდებენ საბაზისო აქტივს.

როგორც აღნიშნული იყო, ყიდვის ოფციონები წარმოადგენენ ოფციონების ერთ ტიპს, ხოლო გაყიდვის ოფციონები კი — მეორეს. ერთი ტიპის ოფციონები, რომლებსაც საერთო საბაზისო ფასეულობა აქვთ, ქმნიან ოფციონების ერთ კლასს და ერთი კლასის ოფციონები, ერთი და იგივე შეთანხმების ფასით და სიცოცხლის ხანგრძლივობით წარმოადგენენ ოფციონების ერთ სერიას.

ოფციონის შეთანხმების ფასებს ადგენს ბირჟა. ვაჭრობის დაწყების დღეს განსაზღვრავენ ე.წ. ცენტრალურ სტრაიკს — იმ შეთანხმების ფასს, რომელიც ყველაზე ახლოს არის ძირითადი ინსტრუმენტის მიმდინარე სპოტ ფასთან ან ძირითადი ინსტრუმენტის ფიუჩერსულ ფასთან. ამის შემდეგ ირჩევენ სხვა შეთანხმების ფასებს, ცენტრალური სტრაიკიდან ზემოთ და ქვემოთ გარკვეული ბიჯით (ბიჯის სიდიდე დამოკიდებულია საბაზისო აქტივის ფასზე) და მიღებული სერია გამოაქვთ სავაჭროდ.

ძირითადი აქტივის ფასის ცვლილების შედეგად ცენტრალური სტრაიკი გადაინაცვლებს და წარმოიქმნება ოფციონების ახალი სერიები.

4.2 ოფციონები ბირჟაზე და ბირჟის გარეთ

ოფციონების ძირითადი ნაწილი სტანდარტიზებულია და ისინი ბირჟაზე მიმოქცევის საგანს წარმოადგენენ, მაგრამ ოფციონური კონტრაქტების დადება შეიძლება მოხდეს (ორ პირს, ორ ფინანსურ ინსტიტუტს, ან ერთ პირსა და ფინანსურ ინსტიტუტს შორის) ბირჟის გარეშეც. ასეთ კონტრაქტებს OTC ოფციონური კოტრაქტები ჰქვია და მათი ბაზრების პოპულარობა ამ ბოლო დროს მნიშვნელოვნად იზრდება. OTC ოფციონების ძირითადი უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ფინანსურმა ინსტიტუტმა შეიძლება გაითვალისწინოს მისი კორპორაციული კლიენტის მოთხოვნები და დადოს მასთან კლიენტის მიზნების შესაბამისი ოფციონური კონტრაქტი. მაგალითად, შეიძლება ბირჟაზე არ იყოს მიმოქცევაში ოფციონები, ისეთი შეთანხმების ფასით და აღსრულების დროით, რომელიც ამ კლიენტისთვის არის მისაღები, ან შეიძლება ბირჟაზე საერთოდ არ იყოს ისეთი ტიპის „ეგზოტი-

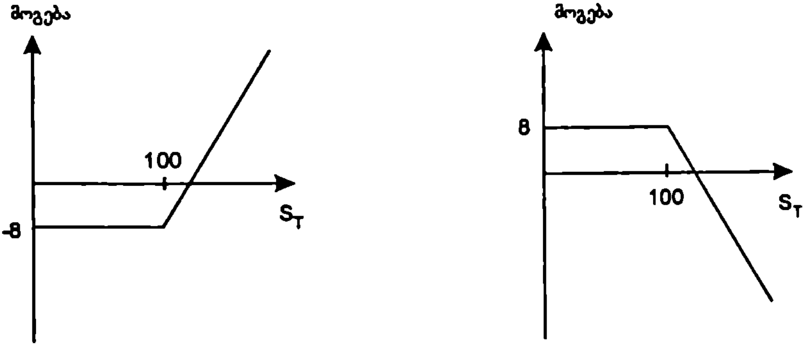
კური“ ოფციონები, რომლებიც კლიენტის ამჟამინდელ მოთხოვნებს შეესაბამება. თავის მხრივ, ოფციონური კონტრაქტის დამწერ (გამყიდველ) ფინანსურ ინსტიტუტს შეიძლება არ სურდეს მარჟის გადახდა (რასაც, როგორც შემდგომში ვნახავთ, მისგან მოითხოვენ ოფციონური კონტრაქტის ბირჟაზე დადებისას) და ურჩევნია კონტრაქტის დასაწყიშივე სრულად მიიღოს ოფციონის მყიდველის მიერ გადახდილი საფასური, რათა გამოიყენოს ეს თანხა მოსალოდნელი რისკის შემცირების მიზნით.

ბირჟაზე დადებული ოფციონური კონტრაქტების ძირითადი უპირატესობა (OTC ოფციონურ კონტრაქტებთან შედარებით) მდგომარეობს ბირჟის ოფციონების ლიკვიდურობასა და ოფციონური კონტრაქტების შესრულების გარანტიაში, რომელსაც საკლირინგო სახლი იძლევა. ბირჟა უზრუნველყოფს, რომ ოფციონური კონტრაქტის მონაწილე ორივე მხარე (ოფციონის მყიდველიც და გამყიდველიც) შეძლებს, სურვილის შემთხვევაში, ამ კონტრაქტიდან გასვლას საპირისპირო პოზიციის ყიდვით, ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ნებისმიერ მომენტში. OTC ოფციონის გაყიდვა კი არ შეიძლება. OTC ოფციონის გამოსყიდვა შეუძლია (თუ ოფციონის მყიდველი მასზე უარს ამბობს) მხოლოდ იმ ფინანსურ ინსტიტუტს, რომელმაც ოფციონი გაყიდა. OTC ოფციონური კონტრაქტის დადებისას ოფციონის მყიდველს არანაირი გარანტია არა აქვს, რომ ოფციონის დამწერი (გამყიდველი) ფინანსური ინსტიტუტი შეასრულებს თავის ვალდებულებას. ამიტომ ყოველი კლიენტი ცდილობს ოფციონები იყიდოს ისეთი ფინანსური ინსტიტუტისაგან, რომელსაც ის იცნობს და ენდობა. ოფციონური კონტრაქტის ბირჟაზე დადების დროს ოფციონის მყიდველსა და გამყიდველს შორის დგება საკლირინგო სახლი (საკლირინგო სახლი არის ოფციონის მყიდველისათვის გამყიდველი და გამყიდველისათვის — მყიდველი) და უზრუნველყოფს კონტრაქტის შესრულებას სამარჯო ოპერაციების შემოღების საფუძველზე.

4.3 მყიდველისა და გამყიდველის მდგომარეობათა ანალიზი

მაგალითი 4.1. წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომელიც ყიდულობს ევროპულ კოლ ოფციონს **A** საწარმოს აქციებზე $K = \$100$ შეთანხმების ფასით და სამი თვის სიცოცხლის ხანგრძლივობით. დავუშვათ, რომ აქციის ფასი კონტრაქტის დადებისას არის \$98, ხოლო თვით ოფციონის ფასი 8 დოლარის ტოლია. თუ ოფციონის აღსრულების მომენტში აქციის ფასი ნაკლები იქნება 100 დოლარზე, მაშინ, ცხადია, ინვესტორი არ გამოიყენებს თავის უფლებას (იყიდოს აქცია 100 დოლარად) და დაკარგავს თანხას, რომელიც მან ოფციონის საფასურად გადაიხადა. თუ აქციის ფასი ოფციონის აღსრულების მომენტისთვის გადააჭარბებს 100 დოლარს და გახდება, მაგალითად,

118 დოლარის ტოლი, მაშინ ოფციონის მფლობელი განახორციელებს თავის უფლებას და 118 დოლარად ღირებულ აქციას იყიდის 100 დოლარად. ამ აქციის მყისიერი გაყიდვის შემდეგ ის მოიგებს 18 დოლარს და მის მიერ უკვე გადახდილი ოფციონის ფასის გათვალისწინებით მას საბოლოოდ დარჩება 10 დოლარის ტოლი მოგება. აღვნიშნოთ, რომ აქციის კურსი ოფციონის აღსრულების მომენტში შეიძლება უმნიშვნელოდ აღემატებოდეს შეთანხმების ფასს და ოფციონის აღსრულების შემდეგ მისი მფლობელი მაინც წაგებული გამოვიდეს ამ კონტრაქტიდან, აქციის და შეთანხმების ფასებს შორის სხვაობის სიმცირის გამო, ოფციონის საფასურთან შედარებით. ქვემოთ მოყვანილი ნახატი გვიჩვენებს ოფციონის მფლობელის მოგება-დანაკარგებს აქციის ფასის ცვლილებისას ოფციონის აღსრულების მომენტში. თუ შევხედავთ ოფციონური კონტრაქტიდან მიღებულ მოგება-დანაკარგებს ოფციონის გამყიდველის პოზიციიდან, მივიღებთ საპირისპირო სურათს, რომელიც გამოსახულია მეორე ნახატზე.



ნახ. 4.1

აქ S_T აღნიშნავს აქციის ფასს ოფციონის აღსრულების მომენტში.

ამ სურათებიდან ჩანს, რომ რასაც იგებს ოფციონის მფლობელი აქციის კურსის განსაზღვრული მნიშვნელობის დროს ოფციონის აღსრულების მომენტში, ზუსტად იმდენივეს აგებს ოფციონის გამყიდველი აღსრულების მომენტში აქციის კურსის იმავე მნიშვნელობის დროს და პირიქით.

ამრიგად, კონტრაქტის ორივე მონაწილე გარკვეულ რისკს ეწევა. ოფციონის მყიდველი რისკავს, წააგოს კონტრაქტში გადახდილი თანხა (ოფციონის საფასური) აქციის კურსის დაცემის შემთხვევაში, მაგრამ მისი რისკი გარკვეულად გამართლებულია, რადგან აქციის კურსის დიდი ზრდის შემთხვევაში მან შეიძლება დიდი მოგება მიიღოს. ერთი შეხედვით გაუმართლებელი ჩანს ოფციონის გამყიდველის რისკი აქციის კურსის დაცემის იმედით, რადგან ამ შემთხვევაში ის მოიგებს მხოლოდ ოფციონის საფასურს (რომელიც, როგორც წესი, გაცილებით მცირეა აქციის ფასთან შედარებით) და

აქციის კურსის ძლიერმა ზრდამ შეიძლება ის დიდი პრობლემების წინაშე დააყენოს. მაგრამ გავითვალისწინოთ, რომ ოფციონის გამყიდველი მისი მყიდველისგან ოფციონის საფასურს იღებს კონტრაქტის დადებისას და ვალდებულია გადაიხადოს აქციის შესაძლო ზრდით გამოწვეული წაგება (სხვაობა აქციის ფასსა და შეთანხმების ფასს შორის) მხოლოდ კონტრაქტის ბოლოს (ოფციონის აღსრულების მომენტში). ამიტომ მას შეუძლია გამოიყენოს ოფციონის საფასური ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის განმავლობაში. რა შეუძლია მოიმოქმედოს მან ამ თანხით?

ოფციონის გამყიდველმა შეიძლება დადოს მიღებული თანხა საბანკო ანგარიშზე, მაგრამ ეს მას ვერ დაიცავს შესაძლო რისკისაგან აქციის კურსის სწრაფი ზრდის შემთხვევაში.

ოფციონის გამყიდველს შეუძლია ისესხოს ფული, დაუმატოს მას ოფციონის საფასური და შეიძინოს ერთი აქცია. ამ შემთხვევაში ოფციონის გამყიდველს უკვე აღარ შეეშინდება აქციის კურსის ძლიერი ზრდის, რადგან შეძენილი აქციით ის მოახერხებს როგორც ოფციონის მფლობელისათვის მოგების გადახდას, ასევე ნასესხები ფულის დაბრუნებას. მაგრამ თუ აქციის კურსი მკვეთრად დაეცა და ოფციონის აღსრულების მომენტისათვის გახდა ოფციონის შეთანხმების ფასზე გაცილებით ნაკლები, მაშინ ოფციონში მიღებულმა საფასურმა შეიძლება ვერ დააზღვიოს აქციის კურსის კლებით მიღებული დანაკარგი. ამ შემთხვევაში, ოფციონის გამყიდველმა შეიძლება ვეღარ მოახერხოს აღებული ვალის გასტუმრება, მიუხედავად იმისა, რომ მას ოფციონის მფლობელისათვის არაფერი არ ექნება გადასახდელი.

დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ მაგალითს. ვთქვათ, ოფციონის გამყიდველმა ისესხა \$90, დაუმატა მას მიღებული ოფციონის საფასური \$8 და \$98-ად იყიდა ერთი აქცია ოფციონური კონტრაქტის დადების მომენტში. დავუშვათ, რომ აქციის კურსი ოფციონის აღსრულების მომენტისათვის გახდა \$120-ის ტოლი. ამ შემთხვევაში, ოფციონის გამყიდველი, შეძენილი აქციის გაყიდვის შემდეგ, მიღებული \$120-ით გადაიხდის ნასესხებ \$90-ს და ოფციონის მფლობელს კი მისცემს $120 - 100 = 20$ დოლარის ტოლ კუთვნილ მოგებას (რომელიც აქციის ფასის და ოფციონის შეთანხმების ფასის სხვაობის ტოლია), რის შედეგადაც მას დარჩება კიდევ \$10. მაგრამ თუ აქციის კურსი დაეცა და ოფციონის აღსრულების მომენტისთვის გახდა, მაგალითად, \$80, მაშინ ოფციონის გამყიდველს ოფციონის მყიდველისათვის არაფერი არ ექნება მისაცემი, მაგრამ ის წაგებული აღმოჩნდება თავისი სტრატეგიის არჩევის გამო, რადგან ოფციონში მიღებული თანხით ის ვერ აინაზღაურებს აქციის კურსის დაცემით მიღებულ დანაკარგს და აღებული ვალის გადასახდელად მას დააკლდება \$10.

ოფციონის გამყიდველს აგრეთვე შეუძლია თავისი საწყისი კაპიტალის (ამ შემთხვევაში ოფციონის ფასის) ნაწილი დადოს საბანკო ანგარიშზე, დანარჩენი ნაწილით კი შეიძინოს აქციები (ან აქციის ნაწილი) და შემდგომში,

დროის ცვლილებასთან ერთად, ცვალოს თავისი სტრატეგია აქციის ფასზე დაკვირვების საფუძველზე. აქციის ფასის ევოლუციის კონკრეტული მოდელის გარეშე შეუძლებელია იმ ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრა, რომელიც ოფციონის გამყიდველს თავისი მომავალი რისკის სრული ელიმინირების (გაქრობის) საშუალებას მისცემს (როგორც შემდეგში ვნახავთ, აქციის ფასის ევოლუციის ზოგიერთ კონკრეტულ მოდელში ასეთი სტრატეგიების აგება შესაძლებელია) და ამ საკითხის განხილვას შემდგომისთვის გადავდებთ. ჯერ-ჯერობით კი მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ ოფციონის ფასად, ბუნებრივია, ოფციონის გამყიდველმა მოითხოვოს ის მინიმალური თანხა, რომელიც მას დასჭირდება ოპტიმალურად მოქმედების შემთხვევაში, მომავალი მოსალოდნელი რისკის მთლიანად თავიდან ასაცილებლად.

4.4 ოფციონების ძირითადი პოზიციები

როგორც აღინიშნა, ოფციონური კონტრაქტის დადებაში მონაწილეობს ორი მხარე, ოფციონის გამყიდველი (ოფციონის დამწერი) და მისი მყიდველი (ან მისი მფლობელი). ამასთან, მყიდველი გაიგება ჩვეულებრივი აზრით, როგორც წარმოებული ფასიანი ინსტრუმენტის მყიდველი. შევნიშნოთ, რომ გაყიდვის ოფციონის მყიდველისა და გამყიდველის ფუნქციები იცვლება ოფციონის აღსრულების შემთხვევაში. ამ ოფციონის მყიდველი ხდება საბაზისო ფასეულობის გამყიდველი და პირიქით, მისი გამყიდველი — საბაზისო ფასეულობის მყიდველი. ამ არეულობის თავიდან აცილების მიზნით შემოდის კონტრაქტის გრძელი და მოკლე პოზიციების ცნება. ამბობენ, რომ ის ვინც ოფციონს ყიდულობს, იჭერს გრძელ პოზიციას და ის, ვინც ოფციონს ყიდის, იჭერს მოკლე პოზიციას. ოფციონის ოთხი ძირითადი პოზიციაა შესაძლებელი:

გრძელი კოლი — გრძელი პოზიცია, რომელიც მდგომარეობს ყიდვის ოფციონის ყიდვაში;

მოკლე კოლი — მოკლე პოზიცია, რომელიც მდგომარეობს ყიდვის ოფციონის გაყიდვაში;

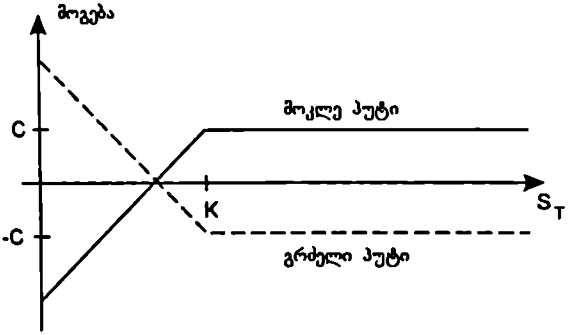
გრძელი პუტი — გრძელი პოზიცია, რომელიც მდგომარეობს გაყიდვის ოფციონის ყიდვაში;

მოკლე პუტი — მოკლე პოზიცია, რაც ნიშნავს გაყიდვის ოფციონის გაყიდვას.

შევნიშნოთ, რომ ყველა შემთხვევაში (გამონაკლისის გარეშე) ითვლება, რომ გრძელი პოზიცია არის კონტრაქტის (ფორვარდული, ფიუჩერსული, ოფციონური) მყიდველის პოზიცია.

გრძელ კოლ პოზიციაში მყოფი ინვესტორის მოგება ან დანაკარგი შებრუნებულია მოკლე კოლ პოზიციაში მყოფი ინვესტორის მოგება-დანაკარგე-

ბის. იგივე სახის კავშირია გრძელ პუტ და მოკლე პუტ პოზიციებს შორის და ეს კავშირი ასახულია ნახ. 4.2-ზე.

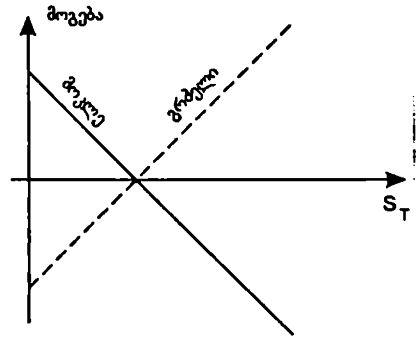


ნახ. 4.2

აქ C არის ყიდვის ოფციონის ფასი და K ამ ოფციონის შეთანხმების ფასია.

ისევე, როგორც ოფციონების შემთხვევაში, გრძელი პოზიცია აქციებში ნიშნავს აქციის ყიდვას, მაგრამ, ოფციონებისაგან განსხვავებით, აქციებში მოკლე პოზიციის ქვეშ გულისხმობენ აქციის სესხებას და არა მის გაყიდვას (აქციის გაყიდვის შემდეგ მისი გამყიდველი, ცხადია, არანაირ მოგებას ან წაგებას არ ელოდება და ამიტომ მას არანაირი პოზიცია არ უკავია).

ცხადია, აქციის გრძელ პოზიციაში მყოფი ინვესტორის მოგება-დანაკარგები (გამოწვეული აქციის კურსის ცვლილებით) საპირისპიროა აქციის მოკლე პოზიციაში მყოფი ინვესტორის მოგება-დანაკარგების (რაც ჩანს ქვემოთ მოყვანილი სურათიდან).



ნახ. 4.3

რთული სავაჭრო სტრატეგიების (პორტფელების) გამოყენების დროს ხმარობენ აგრეთვე შემდეგ ტერმინოლოგიას: განასხვავებენ პოზიციას კონ-

ტრაქტში და მასთან დაკავშირებით წარმოქმნილ საბაზრო პოზიციას. საბაზრო პოზიცია ითვლება გრძელ პოზიციად, თუ მისი ღირებულება იზრდება ძირითადი ფასეულობის ფასის ზრდის დროს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. მაშინ, როდესაც პოზიციის ღირებულება მცირდება ძირითადი აქტივის ფასის ზრდის დროს, საბაზრო პოზიციას ჰქვია მოკლე. მაგალითად, კოლ ოფციონისათვის გრძელი პოზიცია ემთხვევა გრძელ საბაზრო პოზიციას.

პუტ ოფციონისათვის გრძელი პოზიცია არის, ამავე დროს, მოკლე საბაზრო პოზიცია და პირიქით, მოკლე პოზიცია პუტ კონტრაქტში არის გრძელი საბაზრო პოზიცია.

4.5 ტერმინალური გადახდის ფუნქცია და ოფციონის შინაგანი ღირებულება

ხშირად მოსახერხებელია ოფციონების ძირითადი პოზიციების დახასიათება მიმდინარე და ტერმინალური (საბოლოო) მოგების ფუნქციების საშუალებით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

t — დროის მიმდინარე მომენტი;

T — ოფციონის აღსრულების დრო;

S_t — აქციის მიმდინარე ფასი;

S_T — აქციის ფასი ოფციონის აღსრულების მომენტში;

C_t — ყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში;

P_t — გაყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში.

ევროპული ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონის არბიტრაჟული ფასის ქვეშ ვგულისხმობთ ფასების ისეთ C_t, $t \le T$, $(P_t, t \le T)$ სისტემას, როდესაც გაფართოებული ფინანსური ბაზარი, რომელზეც ვაჭრობენ ურისკო ობლიგაციით, აღნიშნული საბაზისო აქციითა და ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონით, თავისუფალია არბიტრაჟული შესაძლებლობისაგან.

გრძელი კოლ პოზიციის (ანუ ყიდვის ოფციონის მყიდველის პოზიციის) მიმდინარე და ტერმინალური მოგებები შესაბამისად ტოლია

$$\max(S_t - K, 0) \qquad \text{და} \qquad \max(S_T - K, 0).$$

ცხადია, ევროპული ყიდვის ოფციონი აღსრულდება, თუ $S_T > K$ და, ამ შემთხვევაში, მისი მფლობელის მოგება ტოლი იქნება $S_T - K$ სხვაობის. როცა $S_T \le K$, მაშინ ოფციონი არ განხორციელდება და მისი მფლობელის მოგება ნულის ტოლი იქნება. თუ დავუშვებთ, რომ ეს ოფციონი მისმა მფლობელმა იყიდა $t = 0$ მომენტში C_0 ფასად, მაშინ მისი საბოლოო მოგება ტოლი იქნება

შემდეგი სიდიდის

$$\max(S_T - K, 0) - C_0 = \begin{cases} S_T - K - C_0, & \text{თუ} \quad S_T > K; \\ -C_0, & \text{თუ} \quad S_T \leq K. \end{cases}$$

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, ყიდვის ოფციონის გამყიდველის (მოკლე კოლ პოზიციაში მყოფის) ტერმინალური მოგება საპირისპიროა ყიდვის ოფციონის მყიდველის (ანუ გრძელ კოლ პოზიციაში მყოფის) მოგების და, მაშასადამე, ტოლია

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

სიდიდის. თუ გავითვალისწინებთ ოფციონში მიღებულ საფასურს, მოგება ტოლი იქნება $C_0 - \max(S_T - K, 0)$-ის.

ანალოგიურად, გაყიდვის ოფციონის მყიდველისა და გამყიდველის ტერმინალური მოგება, ოფციონში გადახდილი საფასურის გათვალისწინებით, შესაბამისად

$$\max(K - S_T, 0) - P_0 \quad \text{და} \quad P_0 - \max(K - S_T, 0)$$

სიდიდეების ტოლია.

როგორც ვიცით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს ოფციონის აღსრულება შეუძლია მისი სიცოცხლის პერიოდის ნებისმიერ მომენტში. მოგებას, რომლის მიღებაც შეუძლია ოფციონის მფლობელს თავისი უფლების მყისიერი განხორციელებით, უწოდებენ ოფციონის შინაგან ღირებულებას (ან ძირითად მნიშვნელობას). ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ძირითადი მნიშვნელობები ყოველ მიმდინარე t მომენტში შესაბამისად

$$\max(S_t - K, 0) \quad \text{და} \quad \max(K - S_t, 0)$$

სიდიდეების ტოლია. თუ გაყიდვის ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის რომელიმე მიმდინარე t მომენტში $S_t \geq K$, მაშინ, ცხადია, ამ მომენტში ოფციონის აღსრულებას აზრი არა აქვს. თუ t მომენტისთვის $S_t < K$, მაშინ ოფციონის მყისიერი განხორციელებით მის მფლობელს შეუძლია მიიღოს $(K - S_t)$-ის ტოლი მოგება. ამიტომ ოფციონის ძირითადი მნიშვნელობა არ აღემატება ოფციონის ფასს ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის არც ერთ მომენტში. მეორეს მხრივ, თუ $(K - S_t)$-ის მნიშვნელობა მკაცრად ნაკლებია ყიდვის ოფციონის ფასზე t მომენტში, ოფციონის მფლობელი არ განახორციელებს თავის ოფციონს, რადგან t მომენტში მისი გაყიდვით უფრო მეტ თანხას მიიღებს. ხშირად, ასეთ შემთხვევაში, ოპტიმალურია ამერიკული ოფციონის მფლობელმა მოიცადოს და მყისიერად არ განახორციელოს თავისი უფლება. ასეთ დროს ამბობენ, რომ ოფციონს აქვს დროითი ღირებულება (ან დროითი მნიშვნელობა). ოფციონის ფასი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ოფციონის შინაგანი და დროითი ღირებულებების ჯამის სახით.

ამბობენ, რომ ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის მოცემულ t მომენტში ყიდვის ოფციონი არის

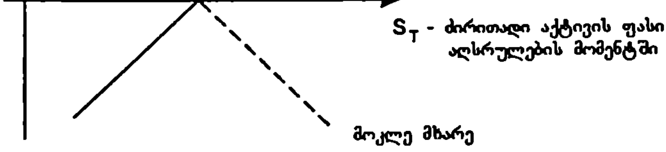
ფულით ანუ ხელსაყრელია	$\longleftrightarrow$	$S_t > K$
ფულთან ანუ სამართლიანია	$\longleftrightarrow$	$S_t = K$
უფულოდ ანუ არახელსაყრელია	$\longleftrightarrow$	$S_t < K$

გაყიდვის ოფციონი არის

ფულით ანუ ხელსაყრელია	$\longleftrightarrow$	$S_t < K$
ფულთან ანუ სამართლიანია	$\longleftrightarrow$	$S_t = K$
უფულოდ ანუ არახელსაყრელია	$\longleftrightarrow$	$S_t > K$

რატომ გააჩნია ოფციონებს, განსხვავებით სხვა ინსტრუმენტებისაგან, ის უნიკალური თვისებები, რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი?

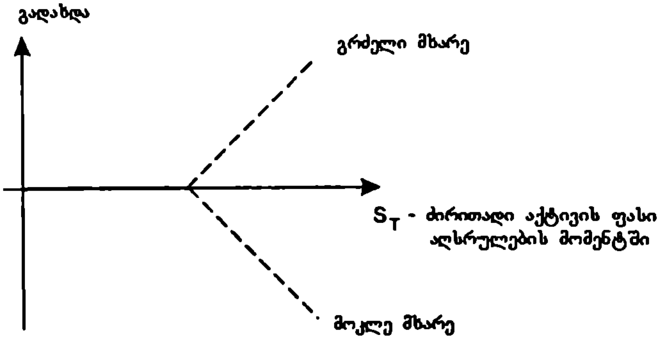
აქამდე განხილულ ინსტრუმენტებს გააჩნდა ერთი საერთო თვისება — მათი მახასიათებლების გრაფიკები წრფეებს წარმოადგენდნენ. მაგალითად, ფიუჩერსული კონტრაქტით განსაზღვრულ გადახდებს აქვთ, როგორც ვიცით, შემდეგი გრაფიკული სახე



ნახ. 4.4

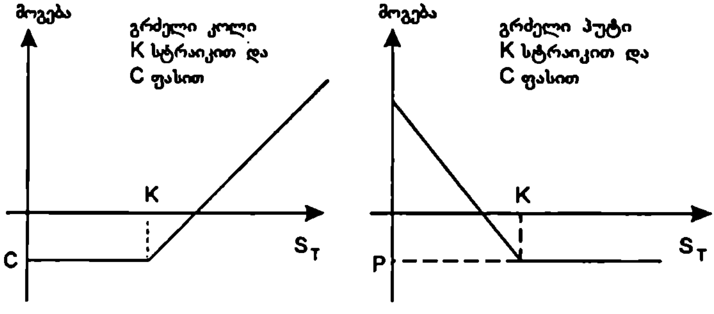
გრაფიკზე ჩანს მახასიათებლის არა მარტო წრფივობა, არამედ სიმეტრიულობა არა მარტო ზემო და ქვემო ნაწილებს შორის (რაც ტრივიალურია, რადგან გამყიდველის დანაკარგი მყიდველის მოგებაა), არამედ, რაც მთავარია, მარჯვენა და მარცხენა მხარეებს შორის, რაც ასახავს გამყიდველისა და მყიდველის გადახდების სიმეტრიას.

ოფციონების შემთხვევაში მახასიათებლის გრაფიკი სხვანაირია.



ნახ. 4.5

ოფციონი მყიდველს საშუალებას აძლევს მიიღოს მოგება ბაზრის ერთი მიმართულებით ძრაობისას ისე, რომ იგი არაფერს კარგაეს, როცა ბაზარი საწინააღმდეგო მიმართულებით გადაინაცვლებს. ამიტომ მყიდველსა და გამყიდველს შორის სიმეტრია აღარ არის, რაც გამოისახა იმაში, რომ, ჯერ ერთი, გრაფიკი ტეხილს წარმოადგენს, და მეორე, გრაფიკის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები არ არის სიმეტრიული.



ნახ. 4.6

4.6 ყიდვის ოფციონის მოგების პოტენციალი და დიდი დანაკარგების საშიშროება

წარმოებული ინსტრუმენტები მაღალრისკიანი, მაგრამ, ამავე დროს, მაღალშემოსავლიანი ინსტრუმენტებია ე.წ. ბერკეტის ეფექტის (მოგების პოტენციალის) გამო.

ერთ-ერთი მიზეზი, რის გამოც ინვესტორები ყიდულობენ ყიდვის ოფციონს, ის არის, რომ საბაზისო აქციის (ანუ აქციის, რომელზედაც ოფციონი დაიწერა) კურსის ზრდის დროს ამ ოფციონებში ინვესტირებული თანხით გაცილებით დიდი მოგებაა შესაძლებელი, ვიდრე იგივე თანხის აქციებში პირდაპირი ინვესტირებისას.

ვთქვათ, აქციაზე, რომლის მიმდინარე ფასი 100 დოლარია, გამოშვებულია ყიდვის ოფციონი 100 დოლარის ტოლი შეთანხმების ფასით და თვით ამ ოფციონის ფასი კი 4 დოლარის ტოლია. ინვესტორს, რომელსაც გააჩნია 100 დოლარის ტოლი კაპიტალი, შეუძლია იყიდოს ერთი აქცია, ან დააბანდოს მისი კაპიტალი ოფციონებში და იყიდოს ამ თანხით 25 ოფციონი. თუ აქციის ფასი გაიზარდა და ოფციონის აღსრულების მომენტში გახდა 106 დოლარი, მაშინ მისი მოგება აქციიდან 6 დოლარის (ანუ აქციის ფასის, ან ინვესტირებული კაპიტალის 6%-ის) ტოლი იქნება. მეორეს მხრიე, 25 ოფციონის ყიდვის შემთხვევაში, ოფციონის აღსრულების დღეს ინვესტორი მიიღებს $25 \cdot (106 - 100) - 25 \cdot 4 = 50$ დოლარის ტოლ მოგებას, ანუ ინვესტირებული თანხის 50%-ს. აქციის კურსის ზრდასთან ერთად ოფციონებში ინვესტირებული თანხის პროცენტული მოგება კიდევ უფრო მკვეთრად იზრდება იმ მოგებასთან შედარებით, რომელიც მიიღება იგივე თანხის აქციებში ინვესტირების შემთხვევაში. მაგალითად, თუ აქციის კურსი გახდა 110 დოლარი, მაშინ აქციიდან მივიღებთ 10 დოლარის ტოლ მოგებას (ანუ ინვესტირებული თანხის 10%-ს), და 100 დოლარით ნაყიდი 25 ოფციონი კი მოგვცემს მოგებას, რომელიც $25 \cdot (110 - 100) - 25 \cdot 4 = 150$ დოლარის ტოლი იქნება, რაც ინვესტირებული თანხის 150%-ს წარმოადგენს.

მეორეს მხრივ, თუ აქციის კურსი ოფციონის აღსრულების მომენტში არ შეიცვალა (ან უმნიშვნელოდ დაეცა), მაშინ აქციის მფლობელი არაფერს არ კარგავს (ან კარგავს უმნიშვნელო თანხას), ხოლო აღნიშნული თანხის ოფციონებში ინვესტირებისას იკარგება მთელი თანხა (კერძოდ, 25-ჯერ ოფციონის ფასი, ანუ ინვესტირებული თანხის 100%).

საერთოდ, შეიძლება ითქვას, რომ, როგორც პოტენციური მოგება, ასევე პოტენციური დანაკარგი (თავდაპირველ ინვესტიციებთან პროცენტული შეფარდებით) ოფციონებიდან გაცილებით მეტია იმ მოგება-დანაკარგთან შედარებით, რომელიც შეიძლება თვით აქციიდან მივიღოთ. ოფციონების მოგების დიდ პოტენციალს ძირითადად განაპირობებს მისი მცირე ფასი აქციის ფასთან შედარებით. ამიტომ ოფციონები (ყოველ შემთხვევაში, მათი უდიდესი ნაწილი და, განსაკუთრებით, სამართლიანი ყიდვის ოფციონები) გაცილებით რისკიანი ფასიანი ინსტრუმენტებია იმ აქციებთან შედარებით, რომლებზედაც ეს ოფციონები დაიწერა, რაც აგრეთვე კარგად ჩანს ქვემოთ განხილულ კონკრეტულ მოდელებში. მაგალითად, ბლეკ-შოულსის მოდელში ოფციონის ვოლატილობა (რომელიც რისკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს) ყოველთვის მეტია შესაბამისი აქციის ვოლატილობაზე.

4.7 ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონთა სადაზღვევო ფუნქციები

წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომელსაც სურს გარკვეული რაოდენობის აქციების ყიდვა და მომავალში განსაზღვრულ დროს ელოდება გარკვეულ თანხას, რომელიც აუცილებელია ამ აქციების შესასყიდად. ამ შემთხვევაში, მას შეიძლება ჰქონდეს აქციის ფასის მკვეთრი ზრდის შიში და, თავის დაზღვევის მიზნით, მას შეუძლია შეიძინოს სამართლიანი ყიდვის ოფციონების შესაბამისი რაოდენობა. ეს შეიძლება მისთვის რეალური იყოს, რადგან, როგორც წესი, ოფციონის ფასი გაცილებით ნაკლებია შესაბამისი აქციის ფასზე. ცხადია, ოფციონით შეძენილი უფლება მას გარანტიას მისცემს, მომავალში აქცია იყიდოს დღევანდელ ფასად აქციის კურსის ზრდის შემთხვევაში. მას შეუძლია იყიდოს სამართლიანი ოფციონის ნაცვლად არახელსაყრელი ყიდვის ოფციონი (ანუ ოფციონი, რომლის შეთანხმების ფასი აქციის მიმდინარე ფასზე მეტია), რაც მას უფრო იაფი დაუჯდება, მაგრამ, ამ შემთხვევაში, ის გარანტირებული იქნება, რომ მომავალში იყიდის აქციას დღევანდელ ფასზე ოდნავ უფრო მაღალი კურსით.

ყიდვის ოფციონი, აგრეთვე, შეიძლება განვიხილოთ როგორც სადაზღვევო საშუალება აქციის სესხების დროს.

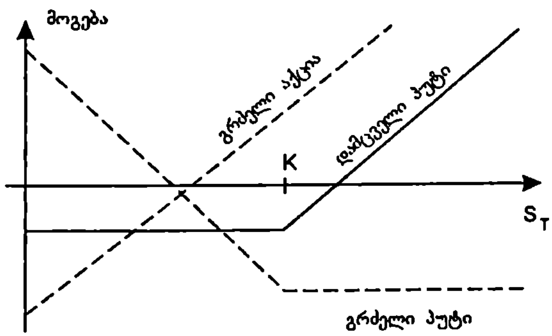
მაგალითი 4.2. ვთქვათ, ინვესტორმა ისესხა აქცია, რომლის ფასი სესხების მომენტში იყო 350 დოლარი და, ამავე დროს, მან 10 დოლარად შეიძინა ყიდვის ოფციონი, რომლის შეთანხმების ფასი 345 დოლარის ტოლია. დავუშვათ, რომ ოფციონის აღსრულების მომენტისათვის აქციის ფასი გახდა 400 დოლარის ტოლი. ოფციონი რომ არ ჰქონოდა ნაყიდი, ინვესტორი იძულებული იქნებოდა, ვალის დაბრუნების მიზნით, ეყიდა აქცია 400 დოლარად და რადგან მისი ფასი სესხების მომენტში იყო 350 დოლარი, ის დაკარგავდა 50 დოლარს. მაგრამ შეძენილი ყიდვის ოფციონი ინვესტორს აძლევს უფლებას 400 დოლარად ღირებული აქცია შეიძინოს 345 დოლარად და, ამ შემთხვევაში, მისი წაგება $350 - 345 + 10 = 15$ დოლარით იქნება შემოსაზღვრული.

აქციის მფლობელს შეუძლია თავი დაიზღვიოს აქციის კურსის დაცემისგან ამავე აქციაზე გაყიდვის ოფციონის შეძენით. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 4.3. ვთქვათ, რომელიმე ინვესტორმა შეიძინა 226 დოლარად ღირებული აქცია და იმავე დროს 3 დოლარად იყიდა გაყიდვის ოფციონი $K = \$200$ შეთანხმების ფასით. დავუშვათ, რომ ოფციონის აღსრულების მომენტისთვის აქციის კურსი დაეცა და გახდა 180 დოლარის ტოლი. მაშინ ინვესტორი გამოიყენებს ოფციონით მინიჭებულ უფლებას, გაყიდის 180 დოლარად ღირებულ აქციას 200 დოლარად და, ამ შემთხვევაში, დაკარგავს მხოლოდ 29 დოლარს (26 დოლარს აქციიდან და 3 დოლარს, გადახდილს

ოფციონის საფასურად), ნაცვლად 46 დოლარისა, რომელსაც ის წააგებდა აქციის კურსის დაცემის გამო, გაყიდვის ოფციონი რომ არ ჰქონოდა შეძენილი. ინვესტორს შეეძლო შეეძინა ნაკლებად არახელსაყრელი ოფციონი (ანუ ნაკლებად უფულოდ მყოფი ოფციონი წინა შემთხვევასთან შედარებით), რაც მას უფრო ძვირი დაუჯდებოდა. დავუშვათ, რომ მან პუტ(200) ოფციონის ნაცვლად 11 დოლარად იყიდა პუტ(220) ოფციონი (ანუ გაყიდვის ოფციონი $K = \$220$ შეთანხმების ფასით). ამ შემთხვევაში, ის უფრო მეტად არის დაზღვეული აქციის კურსის დაცემისაგან და მისი მაქსიმალური დანაკარგი შემოსაზღვრულია 17 დოლარით, მაგრამ, მეორეს მხრივ, აქციის კურსის ზრდის დროს (ან უმნიშვნელო კლებისას) ეს უკანასკნელი სტრატეგია ნაკლებად მომგებიანია ოფციონში გადახდილი უფრო დიდი საფასურის გამო.

კომბინაციას, რომელიც შედგება ერთი აქციისა და ამ აქციის შესაბამისი გაყიდვის ოფციონისაგან (ანუ გრძელი აქტივი + გრძელი პუტი) უწოდებენ დამცველ პუტს. ამ სტრატეგიის ტერმინალური მოგება ოფციონის აღსრულების მომენტში აქციის კურსის სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს ილუსტრირებულია ქვემოთ მოყვანილ ნახატზე.



ნახ. 4.7

როგორც ამ ნახატიდან ჩანს, დამცველი პუტ სტრატეგიის ტერმინალური მოგება მსგავსია ყიდვის ოფციონის მფლობელის საბოლოო მოგების (ანუ გრძელი კოლ პოზიციის მოგების ფუნქციის). მსგავსება ადვილად აიხსნება პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულით, რომელსაც მოგვიანებით განვიხილავთ.

4.8 ოფციონებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგია

ჩვენ დაგვიგროვდა ბევრი ახალი ცნება და ტერმინი. მოვუყაროთ მათ თავი ერთ ცხრილში.

კოლი	ოფციონის საბაზისო აქტივის ყიდვის უფლება.
პუტი	ოფციონის საბაზისო აქტივის გაყიდვის უფლება.
ოფციონის მყიდველი	მხარე, რომელსაც აქვს უფლება აღასრულოს ოფციონი.
ოფციონის გამყიდველი	მხარე, რომელიც მოვალეა შეასრულოს კონტრაქტის პირობები, თუ ოფციონი წარადგინეს აღსასრულებლად.
შეთანხმების, აღსრულების, დახურვის ფასი	ფასი, რომლითაც ოფციონი აღსრულდება. როგორც წესი, ფიქსირდება ოფციონის მოქმედების ვადის დასაწყისში.
აღსრულების დრო, თარიღი, დღე, განაღდების თარიღი, დახურვის თარიღი, ექსპირაციის დღე	ბოლო დღე, როცა შესაძლებელია ოფციონის აღსრულება.
ამერიკული ტიპის ოფციონი	ოფციონი, რომელიც შეიძლება აღსრულდეს ნებისმიერ დღეს ექსპირაციის დღის ჩათვლით.
ევროპული ტიპის ოფციონი	ოფციონი, რომელიც შეიძლება აღსრულდეს მხოლოდ ექსპირაციის დღეს.
პრემია, ფასი, სამართლიანი ფასი	თანხა, რომელსაც მყიდველი უხდის ოფციონის გამყიდველს ოფციონის შეძენისათვის.
შინაგანი ღირებულება	დადებითი შემოსავალი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ ოფციონის დაუყოვნებლივ აღსრულებისას.
დროითი ღირებულება	სიდიდე, რომლითაც ოფციონის პრემია გადააჭარბებს მის შინაგან ღირებულებას.
ხელსაყრელი, ფულით	ოფციონი, რომელსაც გააჩნია შინაგანი ღირებულება.
არახელსაყრელი, უფულო	ოფციონი შინაგანი ღირებულების გარეშე.
სამართლიანი, ფულთან	ოფციონი, რომლისთვისაც აღსრულების ფასი ძირითადი აქტივის ფასის ტოლია.

ცხრილი 4.1

4.9 ოფციონის ფასზე მოქმედი ძირითადი ფაქტორები

არსებობს ექვსი ძირითადი ფაქტორი, რომელიც მოქმედებს ოფციონის ფასზე:

1. აქციის მიმდინარე ფასი;
2. კონტრაქტის შეთანხმების ფასი;
3. კონტრაქტის აღსრულების დრო;
4. აქციის ფასის ვოლატილობა;
5. ურისკო საპროცენტო განაკვეთი;
6. ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში მოსალოდნელი დივიდენდები.

ზოგ შემთხვევაში, აქციის ფასის ევოლუციის კონკრეტული მოდელის გარეშე, ძნელია ზუსტად განსაზღვრა (ან დასაბუთება), თუ როგორ იცვლება ოფციონის ფასი ერთ-ერთი ფაქტორის ცვლილებისას. მიუხედავად ამისა, ზოგად მოსაზრებებზე დაყრდნობით, შესაძლებელია იმის წარმოდგენა, თუ რა მოსდის ოფციონის ფასს, როდესაც ერთ-ერთი ამ ფაქტორთაგანი იცვლება და დანარჩენი კი უცვლელი რჩება.

ოფციონის ფასი და შეთანხმების ფასი. ყიდვის ოფციონის მფლობელი ოფციონის აღსრულების მომენტში იღებს მოგებას, რომელიც ამ მომენტში აქციისა და კონტრაქტის შეთანხმების ფასების სხვაობასა და ნულს შორის მაქსიმუმის ტოლია

$$\max(S_T - K, 0).$$

ცხადია, რაც მეტია შეთანხმების ფასი, მით უფრო მცირე იქნება ყიდვის ოფციონის მფლობელის მოგება ოფციონის აღსრულების მომენტში და ბუნებრივია, რომ ყიდვის ოფციონის მფლობელმა მით უფრო ნაკლები თანხა უნდა გადაიხადოს ოფციონის საფასურად. ამიტომ ყიდვის ოფციონის ფასი მცირდება შეთანხმების ფასის ზრდისას. თუ მსგავს მსჯელობას ჩავატარებთ გაყიდვის ოფციონისთვის, დავრწმუნდებით, რომ მისი ფასი უნდა გაიზარდოს შეთანხმების ფასის ზრდასთან ერთად.

ოფციონის ფასი და აქციის მიმდინარე ფასი. რაც მეტია აქციის მიმდინარე ფასი, მით უფრო მეტი იქნება აქციის მოსალოდნელი ფასი ოფციონის აღსრულების მომენტში და ამიტომ, მით უფრო მეტი იქნება ყიდვის ოფციონის მფლობელის მოსალოდნელი მოგება. ამის გამო ბუნებრივია, რომ ყიდვის ოფციონის მფლობელმა უფრო დიდი თანხა უნდა გადაიხადოს ამ ოფციონში. მსგავსი მოსაზრებებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გაყიდვის ოფციონის ფასი მცირდება აქციის მიმდინარე კურსის ზრდასთან ერთად.

ოფციონის ფასი და ვოლატილობა. აქციის ვოლატილობას უფრო ზუსტად მოგვიანებით განვმარტავთ. შეიძლება ითქვას, რომ აქციის ვოლატილობა არის აქციის ფასის მომავალი ცვალებადობით გამოწვეული გაურკვევლობის ზომა. აქციის ვოლატილობა ასახავს აქციის ფასის ცვალება-

დობის სიხშირესა და ინტენსივობას. რაც უფრო დიდია ვოლატილობა, მით უფრო დიდია აქციის კურსის ცვალებადობა, მით უფრო დიდი იქნება რისკი ოფციონის გამყიდველისა, რომელიც ვალდებულია მის მფლობელს ოფციონის აღსრულების მომენტში გადაუხადოს სხვაობა აქციის ფასსა და შეთანხმების ფასს შორის, და, ბუნებრივია, დიდი რისკის გამო, მან მეტი მოითხოვოს ოფციონის საფასურად.

ურისკო საპროცენტო განაკვეთი და ოფციონის ფასი. როდესაც ქვეყანაში საბანკო საპროცენტო განაკვეთი იზრდება, ეს იწვევს აქციის მოსალოდნელი ფასების ზრდას. მეორეს მხრივ, მაღალი საპროცენტო განაკვეთი ამცირებს მომავალში მოსალოდნელი მოგების დღევანდელ მნიშვნელობას. რადგან გაყიდვის ოფციონის ფასი კლებულობს აქციის ფასის ზრდისას, ზემოთ დასახელებული ორი მიზეზის გამო გაყიდვის ოფციონის ფასი უნდა შემცირდეს საპროცენტო განაკვეთის გაზრდასთან ერთად. ყიდვის ოფციონის შემთხვევაში, თუმცა საპროცენტო განაკვეთის ზრდა იწვევს აქციის ფასის ზრდას (და ეს უკანასკნელი კი დადებითად მოქმედებს აქციის ფასზე) და, მეორეს მხრივ, ამცირებს მომავალი მოსალოდნელი მოგების დღევანდელ მნიშვნელობას, მაინც შეიძლება იმის ჩვენება, რომ პირველი ფაქტორის ეფექტი ყოველთვის დომინირებს და აქედან გამომდინარე, ყიდვის ოფციონის ფასი ყოველთვის იზრდება საპროცენტო განაკვეთის ზრდის დროს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში იგულისხმება, რომ ყველა დანარჩენი ფაქტორი უცვლელი რჩება. პრაქტიკაში ხშირად აქციის ფასი ეცემა (იზრდება) საპროცენტო განაკვეთის ზრდასთან (დაცემასთან) ერთად.

ყოველ შემთხვევაში, აქციის ფასის ევოლუციის ქვემოთ განხილულ ყველა მოდელში ზემოთ გაკეთებული დასკვნები მართებულია, რაც კარგად ჩანს ოფციონის ფასის ფორმულებიდან.

შევნიშნოთ, რომ ოფციონის გამყიდველს, რომელიც მოსალოდნელი რისკის ელიმინირების მიზნით აგებს მაჰეჯირებელ სტრატეგიებს, კოლ ოფციონის გაყიდვისას ყოველთვის უხდება ფულის სესხება. ამიტომ, რაც უფრო დიდი იქნება საპროცენტო განაკვეთი, მით უფრო ძნელი იქნება მისთვის ვალის დაბრუნება და საპროცენტო განაკვეთის ზრდასთან ერთად, ბუნებრივია, მან გაზარდოს ოფციონის საფასური.

ოფციონის ფასი და სიცოცხლის პერიოდი. ცხადია, რომ ამერიკული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონის ფასი იზრდება მისი სიცოცხლის პერიოდის ზრდისას, რადგან რაც უფრო დიდია ოფციონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა, მით უფრო მეტი საშუალება აქვს ოფციონის მფლობელს თავისი უფლების განსახორციელებლად.

იგივე დასკვნის გაკეთება არ შეიძლება ევროპული ტიპის ოფციონებზე, რადგან მათი განხორციელება შესაძლებელია მხოლოდ ოფციონის აღ-

სრულების მომენტში. მაგრამ, თუ გვაქვს ევროპული ტიპის ყიდვის ოფციონი უდივიდენდო აქციაზე, მაშინ მისი ფასი შეიძლება გაიზარდოს ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ზრდასთან ერთად, რადგან (როგორც მოგვიანებით ვნახავთ) ასეთი ოფციონების ფასი შესაბამისი ამერიკული ოფციონის ფასის ტოლია (ყოველთვის ოპტიმალურია ამერიკული ყიდვის ოფციონის განხორციელება ოფციონის აღსრულების მომენტში). თუ ყიდვის ოფციონი დაიწერა აქციაზე, რომელიც იხდის დივიდენედებს, მაშინ შესაძლებელია გრძელვადიანი ოფციონი უფრო იაფი გახდეს მოკლევადიან ოფციონზე. მაგალითად, განვიხილოთ ორი ევროპული ტიპის ყიდვის ოფციონი, შესაბამისად, ერთთვიანი და ორთვიანი სიცოცხლის პერიოდით. თუ მეორე თვის ბოლოს მოსალოდნელია დიდი დივიდენდის გაცემა, მაშინ დივიდენდის გაცემა გამოიწვევს აქციის ფასის კლებას, რამაც შესაძლოა მოკლევადიანი ოფციონი უფრო ძვირი გახადოს.

4.10 ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტი

მიუხედავად იმისა, რომ აქციის ფასების ევოლუციის მოდელის დაზუსტების გარეშე შეუძლებელია ოფციონების ფასების გამოთვლა, არბიტრაჟის მოსაზრებებზე დაყრდნობით მაინც ხერხდება ოფციონის ფასების ზედა და ქვედა საზღვრების განსაზღვრა და ყიდვის და გაყიდვის ოფციონის ფასებს შორის კავშირის დადგენა.

შემდეგი ფორმულა, რომელიც ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის სახელით არის ცნობილი (პუტ-კოლ პარიტეტი), იძლევა ყიდვის ოფციონის ფასის დათვლის საშუალებას გაყიდვის ოფციონის ფასის საშუალებით (და პირიქით)

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t. \tag{4.1}$$

გავიხსენოთ, რომ C_t (შესაბამისად P_t) აღნიშნავს ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონის ფასს t მომეტში.

ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულის დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$P_t + S_t > C_t + Ke^{-r(T-t)}. \tag{4.2}$$

მაშინ ჩვენ მოვახერხებთ ისეთი სტრატეგიის არჩევას, რომელიც ურისკოდ მოგების საშუალებას მოგვცემს (ანუ მოგვცემს მოგებას აქციის კურსის ნებისმიერი ცვლილების შემთხვევაში).

მართლაც, ვისესხოთ ერთი აქცია და მისი S_t ფასად მყისიერი გაყიდვის შემდეგ შევიძინოთ ყიდვის ოფციონი და გავყიდოთ გაყიდვის ოფციონი (ე.ი. ჩვენი სტრატეგიაა მოკლე აქტივი+გრძელი კოლი+მოკლე პუტი). დარჩენილი თანხა (რომელიც $S_t + P_t - C_t$ სიდიდის ტოლია) დავდოთ საბანკო

ანგარიშზე, რომელიც დროის T მომენტში მოგვცემს თ. .ხას, რომელიც K-ზე მეტი იქნება ჩვენი დაშვების თანახმად

$$(S_t + P_t - C_t)e^{r(T-t)} > K. \tag{4.3}$$

ამიტომ ჩვენი სტრატეგია ოფციონების აღსრულების შემდეგ მოგვცემს მოგებას

$$X = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) + (S_t + P_t - C_t)e^{r(T-t)} \tag{4.4}$$

და რადგან T მომენტში აქციის კურსის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K$, (4.2) უტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$X = S_T - K + (S_t + P_t - C_t)e^{r(T-t)} > S_T.$$

ამის გამო, ნასესხები აქციის დაბრუნების შემდეგ დაგვრჩება $X - S_T$-ს ტოლი მოგება.

პირიქით, თუ

$$P_t + S_t < C_t + Ke^{-r(T-t)}, \tag{4.5}$$

მაშინ შემდეგნაირად შეიძლება მოვიქცეთ.

ვყიდით ყიდვის ოფციონს, ვსესხულობთ $S_t + P_t - C_t$ თანხას და მიღებული $S_t + P_t$ თანხით ვყიდულობთ ერთ აქციას და გაყიდვის ოფციონს (მაშასადამე, ჩვენი სტრატეგიაა გრძელი პუტი + გრძელი აქტივი — მოკლე კოლი). რადგან ვსესხულობთ r პროცენტით, T მომენტისთვის დასაბრუნებელი გვექნება თანხა

$$(S_t + P_t - C_t)e^{r(T-t)},$$

რომელიც დაშვების თანახმად K-ზე ნაკლებია.. არჩეული სტრატეგია ოფციონის აღსრულების მომენტში მოგვცემს მოგებას, რომელიც K-ს ტოლია, რადგან

$$S_T + \max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) = K$$

S_T-ს ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს. ამის შემდეგ, ჩვენ ვიხდით ვალს და ისევ გვრჩება ურისკო მოგება

$$K - (S_t + P_t - C_t)e^{r(T-t)},$$

რომელიც მკაცრად დადებითია (4.5) უტოლობის გამო. მაშასადამე, არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც (4.1) ტოლობა სრულდება.

განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე (რომელიც მოგვყავს ჯ. ჰალის წიგნიდან [73]), თუ როგორ ხდება არბიტრაჟული სტრატეგიების აგება, როდესაც ყიდვის, გაყიდვის ოფციონების და საბაზისო აქციის ფასები არ აკმაყოფილებენ პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულას.

მაგალითი 4.4. დავუშვათ, რომ საბაზისო აქციის ფასი 31, შეთანხმების ფასი — 30, სამთვიანი ყიდვის ოფციონის ფასი — 3 და სამთვიანი გაყიდვის ოფციონის ფასი — 2.25 დოლარის ტოლია. ურისკო საპროცენტო განაკვეთი იყოს 10%-ის ტოლი. ამ შემთხვევაში

$$
\begin{aligned}
C_t + Ke^{-r(T-t)} &= 3 + 30e^{-0.1\times 0.25} = 32.26,\\
P_t + S_t &= 2.25 + 31 = 33.25.
\end{aligned}
$$

სწორი არბიტრაჟული სტრატეგიის ასაგებად უნდა ვისესხოთ აქცია, გავყიდოთ კოლ ოცფიონი, ვიყიდოთ პუტ ოფციონი და მიღებული თანხა

$$-3 + 2.25 + 31 = \$30.25$$

დავდოთ ურისკო საპროცენტო განაკვეთზე, რომელიც სამი თვის შემდეგ მოგვცემს $30.25e^{0.1\times 0.25} = 31.02$ დოლარს. თუ აქციის ფასი ოფციონის აღსრულების მომენტში გადააჭარბებს 30 დოლარს, მაშინ აღსრულდება ყიდვის ოფციონი. თუ აქციის კურსი სამი თვის შემდეგ გახდება 30 დოლარზე ნაკლები, მაშინ განხორციელდება გაყიდვის ოფციონი. ორივე შემთხვევაში ვყიდულობთ აქციას 30 დოლარად, ვაბრუნებთ ნასესხებ აქციას და გვრჩება

$$31.02 - 30.00 = 1.2$$

დოლარის ტოლი მოგება.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულა ირღვევა საწინააღმდეგო მხარეს. დავუშვათ, რომ კოლ ოფციონის ფასი 3, ხოლო პუტ ოფციონის ფასი კი 1 დოლარის ტოლია. ამ შემთხვევაში

$$
\begin{aligned}
C_t + Ke^{-r(T-t)} &= 3 + 30e^{-0.1\times 0.25} = 32.25,\\
P_t + S_t &= 1 + 31 = 32.
\end{aligned}
$$

მაშინ ვიქცევით შემდეგნაირად: ვყიდით კოლ ოფციონს 3 დოლარად, ვსესხულობთ 29 დოლარს და მიღებული 32 დოლარით ვყიდულობთ აქციას და პუტ ოფციონს. სამი თვის შემდეგ, ნასესხები 29 დოლარის ნაცვლად, დასაბრუნებელი გვექნება $29e^{0.1\times 0.25} = 29.73$ დოლარი. ოფციონის აღსრულების მომენტში განხორციელდება ერთ-ერთი ყიდვის და გაყიდვის ოფციონთაგან, მაგრამ ორივე შემთხვევაში ვყიდით t მომენტში ნაყიდ აქციას 30 დოლარად და ვღებულობთ

$$30 - 29.73 = 0.27$$

დოლარის ტოლ მოგებას აქციის კურსის ნებისმიერი ცვლილების დროს.

4.11 ოფციონის ფასის ზედა და ქვედა საზღვრები

ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ზედა საზღვრები. ამერიკული (ამიტომ ევროპულიც) ყიდვის კოლ ოფციონის ფასი ყოველთვის ნაკლებია საბაზისო აქციის ფასზე

$$C_t = C_t^A \leq S_t.$$

მართლაც, თუ $S_t < C_t^A$, მაშინ შეგვიძლია გავყიდოთ ოფციონი (C_t^A) ფასად და ვიყიდოთ აქცია (S_t) ფასად. ოფციონის ნებისმიერ $\tau \leq T$ მომენტში აღსრულების შემთხვევაში ჩვენ ვალდებული ვიქნებით ოფციონის მფლობელს გადავუხადოთ თანხა $\max(S_\tau - K, 0)$, რომელიც, ცხადია, ნაკლებია აქციის ფასზე τ მომენტში. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ურისკოდ მოვიგოთ $C_t^A - S_t + S_\tau - \max(S_\tau - K, 0)$-ის ტოლი თანხა და არბიტრაჟის არ არსებობის დაშვების გამო ვიღებთ, რომ $C_t^A \leq S_t$.

როგორც ევროპული, ასევე ამერიკული გაყიდვის (პუტ) ოფციონის ფასი ყოველთვის ნაკლებია კონტრაქტის შეთანხმების ფასზე

$$P_t \leq K, \qquad P_t^A \leq K,$$

რადგან ამ ოფციონების მოსალოდნელი მოგება ყოველთვის შეთანხმების ფასზე ნაკლებია $\max(K - S_t, 0) \leq K$ ყველა t-თვის.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ევროპული გაყიდვის (პუტ) ოფციონის ფასი ყოველთვის ნაკლებია $Ke^{-r(T-t)}$-ზე

$$P_t \leq Ke^{-r(T-t)},$$

რადგან ეს კაპიტალი (ანუ თანხა $Ke^{-r(T-t)}$) რომ დავდოთ საბანკო ანგარიშზე, T მომენტში მივიღებთ K-ს ტოლ თანხას, რომელიც საკმარისი იქნება ოფციონის მფლობელის გასასტუმრებლად ოფციონის T მომენტში განხორციელების შემთხვევაში.

ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ქვედა საზღვრები. ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ფასების ქვედა საზღვრების დადგენა ადვილად შეიძლება ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულის გამოყენებით. ამ ფორმულის თანახმად

$$C_t = P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

და რადგან $P_t > 0$, როცა $t < T$, ვიღებთ, რომ ყველა $t < T$ -სთვის

$$C_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

და ვინაიდან $C_t \geq 0$ ($C_t > 0$, როცა $t < T$), ნებისმიერი $t \leq T$ -სთვის გვექნება

$$C_t \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0). \tag{4.6}$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ შემდეგი უტოლობა

$$P_t \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0),$$

რომელიც ადგენს გაყიდვის ოფციონის ფასის ქვედა საზღვარს.

მაშასადამე, კოლ და პუტ ოფციონების ფასებისთვის სამართლიანია შემდეგი ორმხრივი უტოლობები

$$\max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq C_t \leq S_t, \tag{4.7}$$

$$\max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq P_t \leq Ke^{-r(T-t)}, \tag{4.8}$$

ცხადია, (4.6) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$C_t > S_t - K$$

უტოლობის სამართლიანობა ყველა $t < T$-სთვის, როდესაც $r > 0$.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ (4.8) უტოლობიდან ვიღებთ

$$P_t \geq Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

და ამერიკული პუტ ოფციონის ფასისთვის სამართლიანია უფრო ძლიერი უტოლობა

$$P_t \geq K - S_t,$$

რადგან, როგორც შემდგომში ვნახავთ, ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ადრეული აღსრულება ყოველთვის შესაძლებელია.

4.12 ამერიკული ოფციონები. ფასებს შორის თანაფარდობა და მათი ადრეული აღსრულება

განმარტება. ევროპული ოფციონის მფლობელისგან განსხვავებით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია გამოიყენოს თავისი უფლება (იყიდოს ან გაყიდოს საბაზისო აქტივი) ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ნებისმიერ მომენტში. ამერიკული ოფციონის ადრეული აღსრულების შესაძლებლობის გამო, ასეთ ფინანსურ ვალდებულებათა ფასებს შორის კავშირისა და მათი ფასების საზღვრების დასადგენად აღარ არის საკმარისი დუბლირებული (ან დომინირებული) პორტფელების მხოლოდ ფინალურ მომენტში შედარება, როგორც ევროპული ოფციონების დროს. მიუხედავად ამისა, შესაძლებელია, ამერიკულ ოფციონთა ფასთათვის გარკვეული თანაფარდობების გამოყვანა არბიტრაჟის მოსაზრებებზე დაყრდნობით.

პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულა ამერიკული ტიპის ოფციონებისთვის არ სრულდება, მაგრამ შეიძლება ამერიკული ყიდვის ოფციონის ფასისთვის ორმხრივი უტოლობის დადგენა ამერიკული გაყიდვის ოფციონის საშუალებით და პირიქით.

აღვნიშნოთ C_t^A-თი (შესაბამისად P_t^A-თი) ამერიკული ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონის არბიტრაჟული ფასი t მომენტში, ანუ C_t^A, $t \le T$ (შესაბამისად P_t^A, $t \le T$) არის ფასების ისეთი პროცესი, რომელიც გამორიცხავს ურისკო მოგების შესაძლებლობას ბაზარზე, რომელზეც ვაჭრობენ ურისკო ობლიგაციით, საბაზისო აქციითა და ამერიკული კოლ (პუტ) ოფციონით.

ვაჩვენოთ ჯერ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$C_t^A > P_t^A + S_t - K, \qquad r > 0, \tag{4.9}$$

რომელიც განსაზღვრავს ამერიკული კოლ ოფციონის ქვედა საზღვარს ამერიკული პუტ ოფციონის საშუალებით.

ამ უტოლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,

$$C_t^A \le P_t^A + S_t - K. \tag{4.10}$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში იარსებებს არბიტრაჟის შესაძლებლობა. ავირჩიოთ შემდეგი სტრატეგია. ვისესხოთ ერთი აქცია და მისი S_t ფასად გაყიდვის შემდეგ შევიძინოთ კოლ ოფციონი და გავყიდოთ პუტ ოფციონი. დარჩენილი $S_t + P_t^A - C_t^A$ ფული შევიტანოთ ბანკში r საპროცენტო განაკვეთზე, რაც დროის $\tau > t$ მომენტისთვის მოგვცემს

$$(S_t + P_t^A - C_t^A)e^{r(\tau-t)}$$

თანხას, რომელიც დაშვების თანახმად $Ke^{r(\tau-t)}$-ზე მეტია. თუ ამერიკული პუტ ოფციონის მფლობელმა აღასრულა თავისი ოფციონი T მომენტში, მაშინ ჩვენი მოგება აღნიშნული სტრატეგიის არჩევისას ტოლი იქნება

$$\begin{aligned} X = {} & \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) + (S_t + P_t^A - C_t^A)e^{r(T-t)} > \\ & > \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) + Ke^{r(T-t)} = \\ & = S_T - K + Ke^{r(T-t)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

სიდიდის და აქციის ვალის გასტუმრების შემდეგ დაგვრჩება $K(e^{r(T-t)} - 1)$-ის ტოლი თანხა, რომელიც მკაცრად დადებითია (რადგან $r > 0$ და ამიტომ $e^{r(T-t)} > 1$), T მომენტში აქციის კურსის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

თუ გაყიდვის ოფციონის მფლობელმა აღასრულა თავისი ოფციონი რომელიმე $\tau < T$ მომენტში, მაშინ მას ამ მომენტში უნდა გადავუხადოთ $K - S_\tau$ თანხა (ცხადია, $S_\tau < K$, რადგან სხვა შემთხვევაში არ ექნებოდა აზრი ოფციონის ადრეულ აღსრულებას). მაგრამ ამ თანხის გადახდას და მასთან

ერთად ვალად აღებული აქციის დაბრუნებას ჩვენ მოვახერხებთ ბანკში დადებული თანხით, რადგან

$$(S_t + P_t^A - C_t^A)e^{r(\tau-t)} > Ke^{r(\tau-t)} > K = (K - S_\tau) + S_\tau.$$

ყოველივე ამის შემდეგ დაგვრჩება დადებითი თანხა (ყოველ შემთხვევაში $K(e^{r(T-t)} - 1)$-ზე მეტი) და ერთი ყიდვის ოფციონი, რომელმაც შესაძლოა კიდევ დამატებითი მოგება მოგვიტანოს. ამიტომ ჩვენი დაშვება მართებული არ აღმოჩნდა, რაც ამტკიცებს (4.9) უტოლობის სამართლიანობას.

შენიშვნა. როდესაც ამერიკული კოლ და პუტ ოფციონები არიან ფულთან, მაშინ ამერიკული კოლ ოფციონის ფასი ყოველთვის აღემატება შესაბამისი ამერიკული პუტ ოფციონის ფასს. ცხადია, რომ თუ $S_t = K$, მაშინ (4.9) უტოლობიდან მივიღებთ რომ

$$C_t^A > P_t^A$$

ყველა t-სთვის. პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულიდან ჩანს, რომ ეს უტოლობა სამართლიანია ევროპული ოფციონებისთვისაც.

ამერიკული კოლ ოფციონის ადრეული აღსრულება. მიღებული (4.9) უტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ არასოდეს არ არის ოპტიმალური ამერიკული კოლ ოფციონის ადრეული განხორციელება.

ცხადია, (4.9) უტოლობიდან ვიღებთ, რომ

$$C_t^A > S_t - K. \tag{4.12}$$

მაგრამ $S_t - K$ არის ოფციონის დროითი მნიშვნელობა, ანუ მოგება, რომელიც შეგვიძლია მივიღოთ t მომენტში ამ ოფციონის განხორციელებით. ამ უტოლობიდან ჩანს, რომ არა აქვს აზრი ოფციონის ადრეულ განხორციელებას, რადგან ამ ოფციონის იმავე მომენტში გაყიდვით უფრო მეტი მოგების მიღებაა შესაძლებელი.

მაშასადამე, რადგან ამერიკული კოლ ოფციონის განხორციელება ოპტიმალურია ოფციონის აღსრულების მომენტში, ამერიკული კოლ ოფციონის ფასი უნდა დაემთხვეს შესაბამისი ევროპული კოლ ოფციონის ფასს

$$C_t = C_t^A.$$

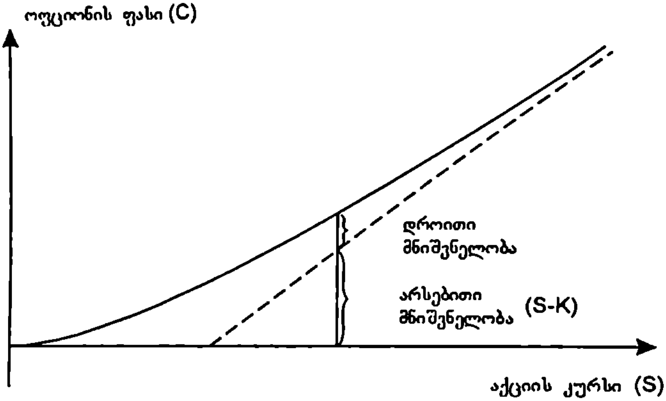
რადგან ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასი ყოველთვის მეტია შესაბამისი (ე.ი. იგივე შეთანხმების ფასისა და აღსრულების დროის მქონე) ევროპული ოფციონის ფასზე, ევროპული ოფციონებისათვის მიღებული პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულიდან გვექნება, რომ

$$C_t^A < P_t^A + S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

ამრიგად, ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ფასებისათვის სამართლიანია შემდეგი ორმხრივი უტოლობა

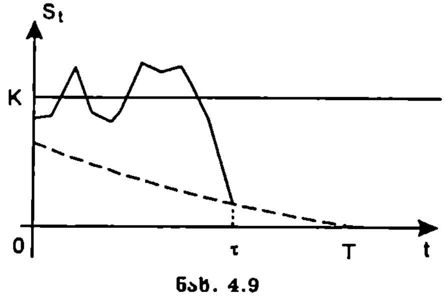
$$P_t^A + S_t - K < C_t^A < P_t^A + S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{4.13}$$

ქვემოთ მოყვანილი სურათი აჩვენებს, თუ როგორ იცვლება კოლ ოფციონის ფასი აქციის ფასის ცვლილებისას და ამავე სურათიდან კარგად ჩანს, რომ ოფციონის ფასი ყოველთვის აღემატება მის არსებით მნიშვნელობას $\max(S-K,0)$ და მის ადრეულ აღსრულებას არა აქვს აზრი.



ნახ. 4.8

გაყიდვის ოფციონის ადრეული აღსრულება. ყიდვის ოფციონისაგან განსხვავებით, ხშირად აზრი აქვს გაყიდვის ოფციონის ადრეულ განხორციელებას. ამის წარმოსადგენად განვიხილოთ შემდეგი უკიდურესი შემთხვევა.



ნახ. 4.9

ვთქვათ, გაყიდვის ოფციონის შეთანხმების ფასია K, აღსრულების დრო — T. თუ აქციის ფასი S_t, რომელიმე t მომენტში $K - Ke^{-r(T-t)}$

სიდიდეზე ნაკლები გახდა (რაც შესაძლებელია, რომ მოხდეს), მაშინ ოფციონის მფლობელი განახორციელებს თავის ოფციონს ამ მომენტში და მიიღებს $K - S_t$ თანხას, რომელიც, ამ შემთხვევაში, $Ke^{-r(T-t)}$ სიდიდეზე მეტი იქნება. ამ თანხის r საპროცენტო განაკვეთზე დადებით ოფციონის მფლობელი T მომენტში მიიღებს K-ზე მეტ მოგებას. ცხადია, თუ ოფციონის მფლობელი ოფციონს განახორციელებს T მომენტში, ის ვერც ერთ შემთხვევაში ვერ მიიღებს K-ზე მეტ მოგებას, რადგან $S_T \geq 0$ და $\max(K - S_T, 0) \leq K$. ამიტომ, თუ დროის რომელიმე t მომენტში ოფციონის ვადის გასვლამდე $S_t < K - Ke^{-r(T-t)}$, მაშინ ოფციონი უნდა აღსრულდეს.

განხილული მაგალითი (რომლის გრაფიკული ილუსტრაცია მოყვანილია ნახ. 4.9-ზე) აღწერს ექსტრემალურ შემთხვევას და აჩვენებს, რომ როდესაც საბაზისო აქტივის ფასი ძლიერ ეცემა, ოპტიმალურია ყიდვის ოფციონის ადრეული აღსრულება.

ნახ. 4.9-ზე წყვეტილი ხაზით აღნიშნულია $K - Ke^{-r(T-t)}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ავხსნათ (ევრისტულად), თუ რატომ აქვს ზოგ შემთხვევაში აზრი პუტ ოფციონის ადრეულ განხორციელებას და კოლ ოფციონის ადრეული აღსრულება კი არასოდეს არ არის რაციონალური. გაყიდვის ოფციონის ადრეული განხორციელების შესაძლებლობა განპირობებულია დადებითი საპროცენტო განაკვეთის მოქმედებით (რაც კარგად ჩანს განხილულ მაგალითში). ამ ოფციონის მფლობელის მოგება მდგომარეობს კონტრაქტის შეთანხმების ფასის გარკვეული ნაწილის, $K - S_t$ თანხის, მიღებაში და დროის სხვადასხვა მომენტში ოფციონის შინაგან ღირებულებათა ტოლობის ან მათ შორის მცირე განსხვავების შემთხვევაში (აღსრულების თვალსაზრისით) უფრო ადრეულ მომენტს ენიჭება უპირატესობა. ამისგან განსხვაებებით, კოლ ოფციონის მფლობელი t მომენტში ადრეული აღსრულებით იღებს $S_t - K$ სიდიდეს, რომლის ბანკში დადებით მიღებულმა თანხამ შეიძლება ვერ გადააჭარბოს აქციის კურსის ზრდით გამოწვეულ $S_T - K$ მოგებას ოფციონის აღსრულების მომენტში.

შენიშვნა. როცა $r = 0$, მაშინ ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასი ემთხვევა შესაბამისი ევროპული გაყიდვის ოფციონის ფასს და ცხადია ამ შემთხვევაში სრულდება პარიტეტის ფორმულა

$$C_t^A = P_t^A + S_t - K,$$

რაც გამომდინარეობს ზემოთ მოყვანილი ორმხრივი უტოლობიდან. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში პუტ ოფციონის ადრეული აღსრულება აზრს კარგავს.

4.13 დივიდენდების ეფექტი

აქამდე, ოფციონთა ფასებს შორის თანაფარდობების გამოყვანისას, ვთვლიდით, რომ ოფციონის საბაზისო ფასეულობას წარმოადგენდა უდივიდენდო აქცია, ან აქცია, რომელიც არ იხდიდა დივიდენდებს ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის განმავლობაში.

არსებობს დივიდენდების გადახდის სხვადასხვა წესი. აქცია შეიძლება იხდიდეს წინასწარ განსაზღვრული სიდიდის დივიდენდებს დროის დეტერმინისტულ მომენტებში, დროის განსაზღვრულ მომენტებში იხდიდეს დივიდენდებს აქციის კურსის პროპორციულად, ან იხდიდეს დივიდენდებს უწყვეტად, დროში ფიქსირებული განაკვეთით, რომელიც აქციის ფასის პროპორციულია (დივიდენდის აქციის ფასთან სხვანაირი დამოკიდებულებაც არის შესაძლებელი). ამ პუნქტში ჩვენ დავუშვებთ, რომ როგორც დივიდენდების გადახდის მომენტები, ასევე მათი მნიშვნელობები, ოფციონის სიცოცხლის განმავლობაში წინასწარ არის განსაზღვრული, რაც გამართლებულია მცირე სიცოცხლის პერიოდის მქონე ოფციონების განხილვისას.

ემპირიული გამოკვლევები ადასტურებს, რომ აქციის კურსის დაცემის სიდიდე დივიდენდის გადახდის შემდეგ, გადახდილი დივიდენდის სიდიდეზე ოდნავ ნაკლებია. ანალიზისთვის მოხერხებულია და ხშირად სიტყვა „დივიდენდი" ჯაიგება როგორც სიდიდე, რომლითაც მოხდა აქციის კურსის დაცემა დივიდენდის გადახდის შემდეგ. მაგალითად, თუ აქციიდან გადახდილია $1-ის ტოლი დივიდენდი, რის შემდეგაც აქციის ფასი დაეცა დივიდენდის 90%-ით, უშვებენ, რომ დივიდენდის სიდიდეა $0.9.

ვთქვათ, დივიდენდების გადახდა ხდება $0 < t_1 < t_2, \cdots < t_n < T$ მომენტებში და გადახდები, შესაბამისად, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ სიდიდეების ტოლია. დავუშვათ, რომ აქციის ფასი t_i მომენტში D_i დივიდენდის გადახდის შემდეგ $S_{t_i} - D_i$ სიდიდის ტოლი ხდება. შევნიშნოთ, რომ აქციების დივიდენდური გადასახადები არ ამცირებენ ამ აქციათა პორტფელის მნიშვნელობას (მაგალითად, აქციის მოკლე გაყიდვის შემთხვევაში, აქციის მსესხებელი ვალდებულია, დააბრუნოს აქცია გადახდილ დივიდენდებთან ერთად), მაგრამ დივიდენდის გაცემა მოქმედებს ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების მნიშვნელობაზე. ამიტომ, ევროპული კოლ ოფციონი აქციაზე, რომელიც იხდის დივიდენდებს ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის განმავლობაში, აღარ არის ამერიკული კოლ ოფციონის ეკვივალენტური, რადგან ამ ოფციონის განხორციელება კონტრაქტის ბოლოს შეიძლება აღარ იყოს ოპტიმალური. როგორც წესი, ასეთი ოფციონების აღსრულება რაციონალურია ბოლო დივიდენდის გადახდის წინა მომენტში. ეს გასაგებია, ვინაიდან დივიდენდის ჯადახდა შეამცირებს აქციის კურსს და კოლ ოფციონის მოსალოდნელ მოგებას T მომენტში. ამიტომ, თუ ბოლო დივიდენდური გადასახადი ახლოს არის აღსრულების მომენტთან და დივიდენდის სიდიდე არ არის ძალიან მცირე,

კოლ ოფციონი ვერ მოასწრებს თავისი დროითი მნიშვნელობის აღდგენას. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ დივიდენდების გადახდა ზრდის პუტ ოფციონის ადრეული განხორციელების ალბათობას.

აღვნიშნოთ D_t-თი ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში გადასახდელი დივიდენდების საერთო დღევანდელი მნიშვნელობა, ანუ t მომენტისთვის დივიდენდების დისკონტირებულ მნიშვნელობათა ჯამი. თუ დავუშვებთ, რომ დივიდენდის გადახდა მოხდა მხოლოდ ერთხელ ოფციონის აღსრულების მომენტის წინ, მაშინ წინა პუნქტებში დამტკიცებული (4.6), (4.1) და (4.13) თანაფარდობები კოლ და პუტ ოფციონთა და ძირითად აქტივთა ფასებს შორის, შესაბამისად, შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} C_t &> S_t - D_t - Ke^{-r(T-t)}, \\ P_t &> D_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$C_t + D_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t, \tag{4.15}$$

$$S_t - D_t - K < C_t^A - P_t^A < S - Ke^{-r(T-t)}. \tag{4.16}$$

ამ თანაფარდობების დამტკიცება შეიძლება უდივიდენდო აქციისათვის შესაბამისი დებულებების მსგავსად, არაარბიტრაჟის მოსაზრებებზე დაყრდნობით, პორტფელების შედარების გზით. ვაჩვენოთ (4.15) ტოლობის სამართლიანობა. შევადაროთ ერთმანეთს ორი პორტფელი:

A პორტფელი შედგება ევროპული პუტ ოფციონისა და ერთი აქციისაგან.

B პორტფელი შედგება ევროპული კოლ ოფციონისა და თანხისგან, რომელიც $D_t + Ke^{-r(T-t)}$-ის ტოლია.

ვნახოთ, რისი ტოლი იქნება ამ პორტფელების მნიშვნელობები ოფციონების აღსრულების T მომენტში.

შევნიშნოთ, რომ დივიდენდის გაცემის შემდეგ აქციის კურსი S_T თუმცა დაეცემა $D_te^{r(T-t)}$ სიდიდით, მაგრამ აქციის მფლობელი თვით მიიღებს ამ დივიდენდს და აქციის მიერ A პორტფელში შეტანილი წვლილი T მომენტში მაინც S_T-ს ტოლი იქნება. დივიდენდის გაცემის გამო, პუტ ოფციონის მოსალოდნელი მოგება T მომენტში მოიმატებს და საბოლოოდ A პორტფელის მნიშვნელობა T მომენტში ტოლი იქნება

$$S_T + \max(K - S_T + De^{r(T-t)}, 0) = \max(K + De^{r(T-t)}, S_T).$$

მეორეს მხრივ, $D_t + Ke^{-r(T-t)}$ თანხის საბანკო ანგარიშზე დადებით T მომენტში ვიღებთ $D_te^{r(T-t)} + K$ თანხას და B პორტფელის მნიშვნელობა T მომენტში იქნება

$$K + D_te^{r(T-t)} + \max(S_T - D_te^{r(T-t)} - K, 0) = \max(S_T, K + De^{r(T-t)}),$$

ანუ იმავე მომენტში A პორტფელის მნიშვნელობას დაემთხვევა. ამიტომ ტოლი უნდა იყოს ამ პორტფელების მნიშვნელობები t მომენტშიც. წინააღმდეგ შემთხვევაში, გაჩნდება არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობა, რაც ამტკიცებს (4.15) ტოლობას.

(4.14) უტოლობები მიიღება (4.15) ტოლობიდან ისევე, როგორც უდივიდენდო აქციის შემთხვევაში. რადგან უდივიდენდო აქციისთვის ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

$$C_t^A < P_t^A + S_t - Ke^{-r(T-t)} \tag{4.17}$$

და დივიდენდის გაცემა ზრდის პუტ;ოფციონის და ამცირებს კოლ ოფციონის მნიშვნელობას, (4.16) უტოლობა აგრეთვე სამართლიანი იქნება აქციისთვის, რომელიც იხდის დივიდენდებს, რაც ამტკიცებს (4.16)-ის მეორე უტოლობას. (4.16)-ის პირველი უტოლობის დამტკიცება შეიძლება (4.9) უტოლობის მსგავსად, (4.15) ტოლობის დამტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობის გათვალისწინებით.

ოფციონების ფასგათვლის მოდელები და პრინციპები

ჩვენ გავეცნობით ოფციონების და სხვა ფინანსურ ვალდებულებათა ფასის გამოთვლის ორ ძირითად მოდელს: დისკრეტულს, რომელიც ცნობილია ბინომური ხეების მოდელის სახელწოდებით და უწყვეტს, რომელსაც ტრადიციულად ბლექ-შოულსის მოდელს უწოდებენ.

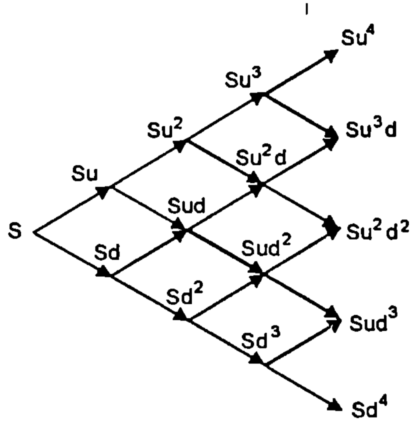
4.14 ბინომური ხეები

აქციის ფასის ცვალებადობის ბინომური მოდელი შემოთავაზებული იყო კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის მიერ 1976 წელს ([28]). ეს არის უმარტივესი მოდელი, რომლის საფუძველზეც შეიძლება დემონსტრირებულ იქნას ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების პრინციპები.

ბინომური მოდელის მიხედვით, აქციის ფასის ცვალებადობა დროში აღიწერება შემდეგნაირად. პირველ რიგში იგულისხმება, რომ აქციის ფასის ცვლილება ხდება დროის მხოლოდ დისკრეტულ $t = 0, 1, 2, \ldots$ მომენტებში. თუ აქციის მიმდინარე ფასს t მომენტში აღვნიშნავთ S_t-თი, მაშინ

$$S_{t+1} = S_t \cdot \xi_t, \quad S_0 = S,$$

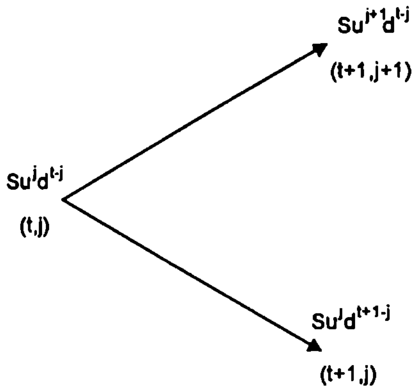
სადაც $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t, \ldots$ — ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, თანაც ξ_t-ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა u ან d, $u > 1$, $0 < d < 1$.



ნახ. 4.10

ამრიგად, ყოველ t მომენტში აქციის ფასის S_t შესაძლო მნიშვნელობებია $Su^j d^{t-j}$, $j = 0, \ldots, t$. ამის საფუძველზე, აქციის ფასის ევოლუცია დროში შეიძლება წარმოვადგინოთ 4.10 ნახაზზე მოყვანილი ბინომური ხის საშუალებით. ბინომური ხის ყოველი შტო შეესაბამება აქციის ფასის რომელიმე შესაძლო ტრაექტორიას.

ხის კვანძები აღვნიშნოთ წყვილით (t, j), $j = 0, \ldots, t$, $t \geq 0$, სადაც t მიუთითებს მიმდინარე დროს. (t, j) კვანძში აქციის ფასის მნიშვნელობაა $Su^j d^{t-j}$. ყოველი (t, j) კვანძი გადადის $(t+1, j+1)$ და $(t+1, j)$ კვანძებში.



ნახ. 4.11

ბინომური მოდელების წარმოდგენა ბინომური ხეებით საშუალებას იძლევა თვალი გავადევნოთ აქციის ფასის ყველა შესაძლო ტრაექტორიას და ყოველი მათგანის გასწვრივ გამოვთვალოთ ოფციონის მიმდინარე ფასები.

ბინომური ხეების გამოყენებით ჩვენ აღვწერთ იმ რეკურსიულ პროცედურებს, რომლებითაც ხდება ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასების გამოთვლა.

თავად აქციის ფასის ცვალებადობის ბინომური მოდელი არ ასახავს რეალობას. მაგრამ კარგადაა ცნობილი, რომ ბლეკ-შოულსის მოდელი, რომლის თანახმადაც აქციის ფასის ცვალებადობა დროში აღიწერება გეომეტრიული ბროუნის ძრაობით, კარგად აპროქსიმირდება ბინომური მოდელით. ეს ფაქტი საფუძვლად უდევს ბინომურ ხეებზე დამყარებულ რიცხვით მეთოდებს, რომლებითაც ხდება ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასების მიახლოებითი გამოთვლა ბლეკ-შოულსის მოდელში.

ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამერიკული ოფციონებისათვის, რომელთათვისაც ხშირად ვერ ხერხდება ფასების გამოსათვლელი ცხადი გამოსახულებების მიღება.

ჩვენ განვიხილავთ ოფციონს, რომლის სიცოცხლის ხანგრძლივობაა N, ე.ი. $t = 0, \ldots, N$, ხოლო t მომენტში ფასის შინაგანი ღირებულება $f(S_t)$,

სადაც f რაიმე მოცემული ფუნქციაა.

მაგალითად, კოლ ოფციონისათვის $f(S_t) = \max(S_t - K, 0)$, ხოლო პუტ ოფციონისათვის $f(S_t) = \max(K - S_t, 0)$.

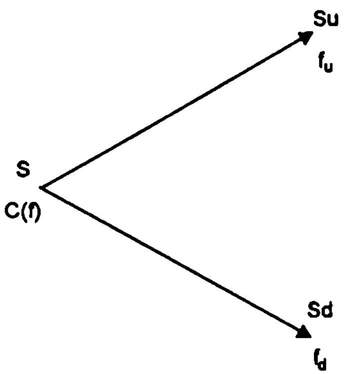
$C_t(f)$ და $C_t^A(f)$ აღნიშნავდეს ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასებს t მომენტში. $f_{t,j}$, $C_{t,j}(f)$ და $C_{t,j}^A(f)$ აღნიშნავდეს შესაბამისად ოფციონების არსებით მნიშვნელობას, ევროპული ოფციონისა და ამერიკული ოფციონის ფასს t მომენტში, როდესაც $S_t = Su^j d^{t-j}$.

რადგანაც f დაფიქსირებულია, შემდგომში, როდესაც ეს არ გამოიწვევს რაიმე გაუგებრობას, ვიხმართ აღნიშვნებს $C_{t,j}$ და $C_{t,j}^A$ ნაცვლად $C_{t,j}(f)$ და $C_{t,j}^A(f)$-ისა.

4.15 ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე

თავდაპირველად განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელი და მის მაგალითზე ვაჩვენოთ, თუ რა პრინციპებით ხდება ოფციონების ფასის გამოთვლა.

დავუშვათ, რომ აქციის ფასი საწყის $t = 0$ მომენტში არის S, ხოლო $t = T$ მომენტში მას შეუძლია მიიღოს ორი მნიშვნელობა Su და Sd, $u > 1$, $0 < d < 1$. განვიხილოთ ევროპული ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციაა $f(S_T)$. აღვნიშნოთ $f_u = f(Su)$, $f_d = f(Sd)$, $C(f)$-ით ოფციონის ფასი და წარმოვადგინოთ ეს მოდელი ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის საშუალებით



ნახ. 4.12

ვთქვათ, ალბათობა იმისა, რომ $S_T = Su$ არის p, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ $S_T = Sd$ არის $(1-p)$. მაშინ T მომენტში ოფციონის საშუალო მოგება იქნება

$$p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d$$

და, ალბათობის თეორიაში მიღებული თვალსაზრისით, სამართლიანი იქნებოდა, რომ ოფციონის ფასად ჩაგვეთვალა ოფციონიდან T მომენტში მიღებული საშუალო მოგების დღევანდელი მნიშვნელობა

$$e^{-rT}(p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d),$$

სადაც r ურისკო წლიური საპროცენტო განაკვეთია.

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ბაზრის ყოველ მონაწილეს თავისი წარმოდგენა აქვს ამ ალბათობის სიდიდეზე, გამოგვივა, რომ ოფციონის ფასის გამოთვლა ამ წარმოდგენაზე უნდა იყოს დამყარებული. უფრო მეტიც, ოფციონურ კონტრაქტში მონაწილე თითოეულ მხარეს შეიძლება ჰქონდეს (და აქვს კიდევაც) ამ ალბათობის განსხვავებული შეფასება.

მაგრამ, გასაგებია, რომ ოფციონი არის სავსებით განსაზღვრული „საქონელი“. მისი ფასი ცალსახად უნდა იყოს განსაზღვრული და არ უნდა იყოს დამოკიდებული სუბიექტურ წარმოდგენებზე.

მაშ რა პრინციპების საფუძველზე უნდა მოხდეს ოფციონების ფასდადება?

სანამ გადავალთ ამ პრინციპების ჩამოყალიბებაზე, შევთანხმდეთ, რომ ბაზრის ყველა მონაწილეს აქვს საშუალება აქციების ყიდვა-გაყიდვისა, ურისკო საპროცენტო განაკვეთით თანხის დეპოზიტზე დადებისა და იგივე განაკვეთით თანხის სესხებისა. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ბოლო პირობიდან გამომდინარე, u და d სიდიდეები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას

$$d < e^{rT} < u. \tag{4.18}$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში წარმოიქმნება არბიტრაჟი. მართლაც, ვთქვათ $u \leq e^{rT}$. მაშინ სტრატეგია — მოკლე გაყიდვა და S-ის დეპოზიტზე დადება — არბიტრაჟულია, რადგან მისი ღირებულება საწყის მომენტში ნულის ტოლია, ხოლო T-ში ის იძლევა მოგებას

$$Se^{rT} - S_T = \begin{cases} S(e^{rT} - u) \geq 0; \\ S(e^{rT} - d) > 0. \end{cases}$$

ახლა ვთქვათ, $d \geq e^{rT}$. მაშინ სტრატეგია: S თანხის სესხება და ერთი აქციის შეძენა, კვლავ არბიტრაჟულია.

მოპასუხე პორტფელის ანუ ზუსტი ჰეჯირების პრინციპი. ოფციონების ფასდადების ერთ-ერთი პრინციპია მოპასუხე პორტფელის შექმნა და ოფციონის ფასად ამ პორტფელის საწყისი ფასის გამოცხადება. მოპასუხე პორტფელი არის აქციებისაგან და დეპოზიტზე დასადები თანხისაგან შედგენილი ისეთი პორტფელი, რომლის ფასი T მომენტში ზუსტად უპასუხებს

ოფციონის ტერმინალურ მოგებას. სხვა სიტყვებით, ეს ისეთი პორტფელია, რომლის ფასიც გაუტოლდება f_u-ს, თუ $S_T = Su$ და f_d-ს, თუ $S_T = Sd$.

განვიხილოთ პორტფელი, რომელიც შედგება Δ აქციისაგან და დეპოზიტზე დასადები β თანხისაგან.

პორტფელის საწყისი ფასია $\Delta \cdot S + \beta$ და T მომენტში მისი ფასი გაუტოლდება სიდიდეს

$$\Delta S_T + \beta e^{rT} = \begin{cases} \Delta Su + \beta e^{rT}, & \text{თუ } S_T = Su; \\ \Delta Sd + \beta e^{rT}, & \text{თუ } S_T = Sd. \end{cases}$$

ცხადია, პორტფელი მოპასუხეა, თუ (Δ, β) წყვილი აკმაყოფილებს შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} \Delta Su + \beta e^{rT} &= f_u, \\ \Delta Sd + \beta e^{rT} &= f_d, \end{aligned} \tag{4.19}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S(u-d)}, \quad \beta_0 = [f_u - \Delta_0 S_u]e^{-rT}. \tag{4.20}$$

გამოცხადებული პრინციპის თანახმად, ოფციონის ფასი მოიცემა ფორმულით

$$C(f) = \frac{f_u - f_d}{S(u-d)} \cdot S + \left[f_u - \frac{f_u - f_d}{S(u-d)} \cdot Su\right] e^{-rT},$$

ანუ

$$C(f) = e^{-rT}(p^* \cdot f_u + (1-p^*) \cdot f_d), \tag{4.21}$$

სადაც

$$p^* = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

ასე გამოთვლილ ფასს უწოდებენ საწარმოო ფასს.

ვაჩვენოთ, რომ თუ ოფციონს დავადებთ სხვა ფასს, ვთქვათ, $\widetilde{C}(f)$-ს, $\widetilde{C}(f) \neq C(f)$, წარმოიქმნება არბიტრაჟის შესაძლებლობა.

ვთქვათ, $\widetilde{C}(f) > C(f)$. ინვესტორი დაიკავებს მოკლე პოზიციას ერთ ოფციონში, მიიღებს $\widetilde{C}(f)$ თანხას, რომლის $C(f)$ ნაწილით შექმნის მოპასუხე პორტფელს (Δ_0, β_0) და T მომენტში გაისტუმრებს ოფციონის მყიდველს (რადგანაც $\Delta_0 S_T + \beta_0 e^{rT} = f(S_T)$). ამრიგად, ყოველგვარი დანახარჯების გარეშე, ის მიიღებს მოგებას $\widetilde{C}(f) - C(f)$, რაც წარმოქმნის არბიტრაჟს.

პირიქით, თუ $\widetilde{C}(f) < C(f)$, მაშინ ინვესტორი ისესხებს $C(f)$ თანხას, $\widetilde{C}(f)$ ფასად შეიძენს ოფციონს, დარჩენილ თანხას $C(f) - \widetilde{C}(f)$ მოათავსებს

დეპოზიტზე. T მომენტში მას დასაბრუნებელი ექნება $C(f)e^{rT} = f(S_T)$ თანხა. ოფციონის პირობით მიიღებს $f(S_T)$ თანხას, ხოლო საპროცენტო განაკვეთზე დადებული თანხა $\widetilde{C}(f)-C(f)$ დაგროვდება $(C(f)-\widetilde{C}(f))e^{rT}$-მდე. ამიტომ ინვესტორის საბოლოო მოგება იქნება

$$f(S_T) + (C(f) - \widetilde{C}(f))e^{rT} - f(S_T) = (C(f) - \widetilde{C}(f))e^{rT} > 0.$$

ამრიგად, ნულოვანი დანახარჯებით ინვესტორი კვლავ იღებს დადებით მოგებას.

ამიტომ $C(f)$-ს შეიძლება ვუწოდოთ არბიტრაჟული ფასი.

როგორც ზემომოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, ოფციონის ფასი არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ალბათობები აქვს მინიჭებული აქციის ფასის ზევით და ქვევით მოძრაობის შესაძლებლობებს. სხვა სიტყვებით, ოფციონის ფასი ინვარიანტულია ამ ალბათობების, ანუ ინდივიდების მიერ ბაზრის ქცევის შეფასების მიმართ. ეს ფაქტი მოულოდნელია და თითქოს ეწინააღმდეგება ინტუიციას. უფრო ბუნებრივად მოგვეჩვენებოდა, თუ აქციის ფასის ზევით მოძრაობის ალბათობის ზრდა გამოიწვევდა კოლ ოფციონის ფასის ზრდასაც და პირიქით.

ხსენებული ფაქტის ახსნა შეიძლება შემდეგი მოსაზრებით. ოფციონის ფასი გამოითვლება არა აბსოლუტურ, არამედ აქციის ფასის ტერმინებში. ინფორმაცია ფასის მომავალი აწევა-დაწევის შესახებ მთლიანად აკუმულირებულია აქციის ფასში და მისი ხელმეორედ მხედველობაში მიღება საჭირო აღარაა.

მიუხედავად ზემოთქმულისა, ოფციონის ფასის გამოსახულებას შეიძლება მიეცეს ალბათური ინტერპრეტაცია. მართლაც, როდესაც u და d სიდიდეები აკმაყოფილებენ (4.18) უტოლობას, მაშინ

$$0 < p^* = \frac{e^{rT} - d}{u - d} < 1$$

და p^*-ს შეიძლება მიენიჭოს ალბათობის აზრი. ხოლო ოფციონის ფასი ამ შემთხვევაში გამოდის ოფციონის საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა (r-ის ტოლი ურისკო წლიური საპროცენტო განაკვეთით; იხ. ფორმულა (4.21)).

4.16 ურისკო პორტფელი და მასზე დამყარებული ფასდადების პრინციპი

ოფციონის ფასდადების ეს პრინციპი ემყარება შემდეგ მოსაზრებას. შევქმნათ პორტფელი: 1 მოკლე პოზიცია ოფციონში და Δ გრძელი პოზიცია

აქციაში, სადაც Δ შევარჩიოთ ისე, რომ პორტფელის ტერმინალური ფასი არ იყოს დამოკიდებული აქციის ფასის მომავალ მნიშვნელობაზე. ეს ნიშნავს, რომ პორტფელი ურისკოა. არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვიდან გამომდინარე, მან უნდა შექმნას ურისკო საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი მოგება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პორტფელის საწყისი ფასი უნდა გაუტოლდეს მისი ტერმინალური ფასის დისკონტირებულ მნიშვნელობას. ოფციონის ფასი კი უნდა გამოითვალოს ამ თანაფარდობიდან.

ფორმალურად ეს პრინციპი ასე გამოიყურება. შევადგინოთ პორტფელი: გრძელი პოზიცია Δ რაოდენობის აქციაში და მოკლე პოზიცია ერთ ოფციონში.

პორტფელი ურისკოა, თუ Δ ისეა შერჩეული, რომ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta Su - f_u = \Delta Sd - f_d,$$

რომლის ამოხსნითაც მივიღებთ

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}.$$

რადგანაც პორტფელი ურისკოა, არბიტრაჟის შესაძლებლობის გამორიცხვიდან გამომდინარე, მისმა საწყისმა ფასმა $\Delta S - C(f)$ უნდა შექმნას ურისკო საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი მოგება

$$(\Delta S - C(f))e^{rT} = \Delta Su - f_u,$$

საიდანაც გამოითვლება ოფციონის ფასი

$$C(f) = e^{-rT}(p^* f_u - (1 - p^*)f_d).$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ იგივე გამოსახულება, რაც ზუსტი ჰეჯირების პრინციპის გამოყენებისას.

4.17 რისკის მიმართ ნეიტრალური სამყარო (რისკ-ნეიტრალური სამყარო) და მასთან დაკავშირებული ოფციონის ფასდადების პრინციპი

თუ აქციის ფასის აწევას მივანიჭებთ p^*-ს ტოლ ალბათობას, მაშინ აქციის საშუალო ამონაგები იქნება

$$E^* \left(\frac{S_T - S}{S} \right) = p^*(u - 1) + (1 - p^*)(d - 1) = (u - d)p^* + d - 1,$$

საიდანაც p^*-ის მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

$$E^*\left(\frac{S_T - S}{S}\right) = e^{rT} - 1 \Longrightarrow E^* S_T = Se^{rT}$$

ბოლო ორი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ p^* ყოფილა აქციის ფასის აწევის ალბათობის ის მნიშვნელობა, რომლითაც გამოთვლილი აქციის საშუალო ამონაგები იგივეა, რაც ურისკო საპროცენტო განაკვეთით ინვესტირებული თანხისა. სხვა სიტყვებით, აქციის ფასი საშუალოდ გროვდება ურისკო საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი სიჩქარით.

რისკის მიმართ ნეიტრალური (რისკ-ნეიტრალური) ვუწოდოთ სამყაროს, რომელშიც ნებისმიერი ფასიანი ქაღალდის საშუალო ამონაგები იგივეა, რაც ურისკო საპროცენტო განაკვეთით ინვესტირებული თანხისა. ცხადია, რომ რისკ-ნეიტრალობა ეკვივალენტურია იმისა, რომ ნებისმიერი ფასიანი ქაღალდის ფასი საშუალოდ გროვდებოდეს ურისკო საპროცენტო განაკვეთის სიჩქარით. თუ $E^*(S_T)$ ნიშნავს გასაშუალების ოპერაციას რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში, მაშინ

$$E^*(S_T) = Se^{rT}.$$

ოფციონების ფასდადების ერთ-ერთი მთავარი პრინციპია რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპი. ამ პრინციპის თანახმად, ფასიანი ქაღალდების სამყარო იგულისხმება რისკ-ნეიტრალურად. ამ ქაღალდებზე ნებისმიერი წარმოებული ინსტრუმენტის (მათ შორის ოფციონებისაც) ფასი განისაზღვრება ისე, რომ ამ ინსტრუმენტის დამატებით სამყარო კვლავ რისკ-ნეიტრალური რჩება.

მაგალითისათვის გამოვთვალოთ აქციაზე ფორვარდული კონტრაქტის ფასი რისკ-ნეიტრალური ვალუაციის პრინციპით. ვთქვათ, კონტრაქტის აღსრულების ვადაა T, მიწოდების ფასია K, ხოლო აქციის საწყისი ფასია S. რადგან ფორვარდული კონტრაქტიდან მოგება T მომენტისათვის არის $S_T - K$, ამ პრინციპიდან გამომდინარე უნდა გვქონდეს

$$fe^{rT} = E^*(S_T - K),$$

საიდანაც ზემო ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$f = S - Ke^{-rT}.$$

შევნიშნოთ, რომ ადრე ეს ფორმულა მიღებული იყო არბიტრაჟული მოსაზრებების გამოყენებით.

როგორც ვხედავთ, ზემომოყვანილი ორი პრინციპით გამოთვლილი ოფციონის ფასი იგივეა, რაც რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპით გამოთვლილი.

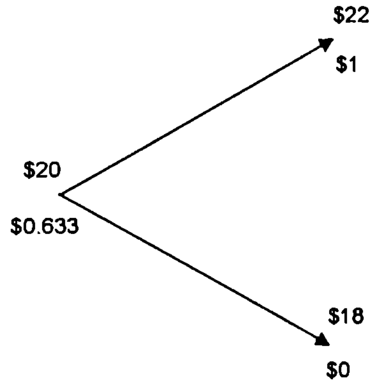
მართლაც, რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში აქციის ფასის ცვლილება უნდა ხდებოდეს კანონით

$$S \longrightarrow S_T = \begin{cases} Su & \text{ალბათობით } p^*; \\ Sd & \text{ალბათობით } (1-p^*); \end{cases}$$

ხოლო ოფციონის ფასი უნდა მოიცემოდეს ფორმულით

$$f = e^{-rT}E^*(f(S_T)) = e^{-rT}[p^* f(Su) + (1-p^*)f(Sd)] =$$
$$= e^{-rT}[p^* f_u - (1-p^*)f_d].$$

მაგალითი 4.5. განვიხილოთ სამთვიანი ევროპული კოლ ოფციონი აქციაზე. ვთქვათ, აქციის ფასი საწყის მომენტში არის \$20-ის ტოლი, ხოლო სამი თვის ($T = 0.25$)) შემდეგ მიიღებს მნიშვნელობებს \$22 ან \$18, ანუ $u = 1.1$, $d = 0.9$. შეთანხმების ფასი იყოს $K = \$21$. მაშინ $f_u = \max(Su - K, 0) = \$1$, $f_d = \$0$. ვთქვათ, $r = 0.12$. შესაბამისი ბინომური ხეა



ნახ. 4.13

ამ შემთხვევაში,

$$p^* = \frac{e^{0.25\times0.12} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523,$$

$$f = e^{-0.25\times0.12}(0.6523 \times 1 - 0.3477 \times 0) = 0.633.$$

საინტერესოა გამოითვალოს ჰეჯის პარამეტრი Δ, რომელიც მიგვითითებს, თუ რამდენი აქცია უნდა ეჭიროს ხელში ემიტენტს ყოველ გაყიდულ ოფციონზე, რათა მოახდინოს ზუსტი ჰეჯირება.

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S(u-d)} = \frac{1}{20 \times 0.2} = 0.25.$$

გამოვთვალოთ β პარამეტრიც, რომელიც გვიჩვენებს, თუ ყოველ ოფციონზე რა სიდიდის თანხა უნდა იყოს ინვესტირებული ურისკო საპროცენტო განაკვეთით $r = 0.12$. $\beta = -4.367$. უარყოფითი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ თანხა ნასესხებია.

ამრიგად, ოფციონის გამყიდველი (ემიტენტი) იღებს ოფციონის ფასს \$0.633. გარდა ამისა, ის სესხად იღებს \$4.367-ს და ყიდულობს 0.25 აქციას (მართლაც, $20 \times 0.25 = 5 = 0.633 + 4.367$). ვთქვათ, აქციის ფასი გახდა \$22. მაშინ ემიტენტს 0.25 აქციის გაყიდვით შეუძლია მიიღოს თანხა \$5.5. ოფციონის მიხედვით მან უნდა გადაიხადოს \$1 და, ამავე დროს, უნდა დააბრუნოს სესხი $\$4.367 \cdot e^{0.25\times 0.12} = \$4.5$, რაც ზუსტად შეადგენს \$5.5.

ვთქვათ, ახლა აქციის ფასი გახდა \$18. მაშინ ემიტენტს აქვს თანხა $18 \cdot 0.25 = \$4.5$, რითაც ის დააბრუნებს სესხს. ოფციონის მიხედვით კი მას გადასახდელი არაფერი აქვს.

4.18 მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეები და ოფციონების ფასის გამოთვლა

გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე.

შევჩერდეთ ჯერ ევროპული ტიპის ოფციონებზე, რომელთა სიცოცხლის ხანგრძლივობაა N, ხოლო გადახდის ფუნქციაა $f(S_N)$. გავიხსენოთ, რომ $f_{N,j} = f(Su^j d^{N-j})$, $j = 0, 1, \ldots, N$. შესაბამის ბინომურ ხეს ფინალურ კვანძებში აქციის ფასის ქვევით მივაწეროთ $f_{N,j}$-ს მნიშვნელობები.

ბიჯებს შორის ინტერვალი ჩავთვალოთ ΔT-ს ტოლად.

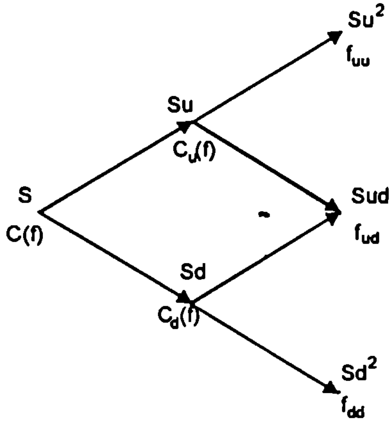
ოფციონების ფასის გათვლა ბინომური ხეების საშუალებით ხდება რეკურენტული პროცედურით, როდესაც ძრაობა ხდება ხის ბოლოდან საწყისი კვანძის მიღწევამდე. მთავარი ამ პროცედურაში ის არის, რომ ამოცანის გადაწყვეტა ხერხდება ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეებისათვის წინა ნაწილში მიღებული ფასების გამოთვლის ფორმულების გამოყენებით.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე, $N = 2$. f_{uu}, f_{ud}, f_{dd} შესაბამისად აღნიშნავდნენ ოფციონიდან მიღებულ გასამრჯელოს, როდესაც $S_2 = Su^2$, $S_2 = Sud$, $S_2 = Sd^2$. $C_u(f)$ იყოს ოფციონის ფასი $t = 1$ მომენტში, თუ $S_1 = Su$ და $C_d(f)$ კი ოფციონის ფასი, როცა $S_1 = Sd$. $C(f)$-ით აღვნიშნოთ ოფციონის ფასი.

შევნიშნოთ, რომ ადრე შემოღებულ აღნიშვნებში

$$f_{uu} = f_{22}, \quad f_{ud} = f_{21}, \quad f_{dd} = f_{20},$$

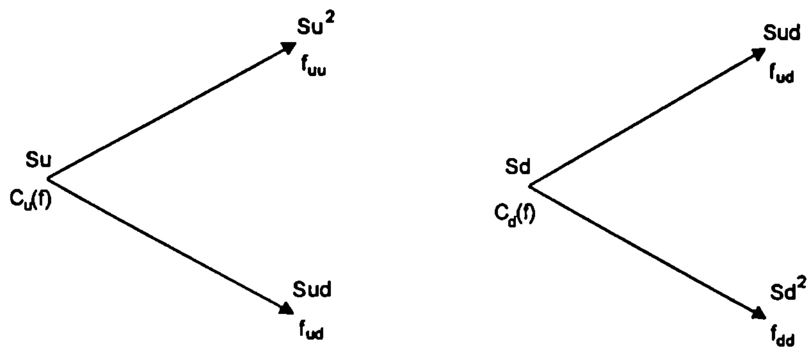
$$C_u(f) = C_{11}(f), \quad C_d(f) = C_{10}(f), \quad C(f) = C_{00}(f).$$



ნახ. 4.14

ზემოხსენებული რეკურენტული პროცედურა ასე გამოიყურება:

I ნაბიჯი. გამოვთვალოთ ოფციონის ფასი ბოლოსწინა ყველა კვანძში. ამისათვის გამოვყოთ ერთნაბიჯიანი ხეები, რომლებიც გამოდიან ამ კვანძებიდან. ესენია



ნახ. 4.15

გამოვიყენოთ ამ ხეებისათვის ადრე მიღებული შედეგები. რისკ-ნეიტრალური ფასდადების ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$C_u(f) = e^{-r\Delta T}[p^* f_{uu} + (1-p^*)f_{ud}],$$
$$C_d(f) = e^{-r\Delta T}[p^* f_{ud} + (1-p^*)f_{dd}], \tag{4.22}$$

სადაც $p^* = \frac{e^{r\Delta T}-d}{u-d}$. ბოლო ორი გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს ერთიანი ფორმით

$$C_1(f) = e^{-r\Delta T}[p^* f(S_1 u) + (1-p^*) f(S_1 d)]. \tag{4.23}$$

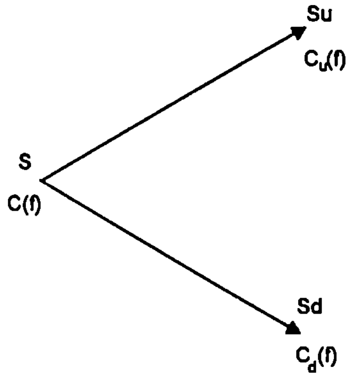
ადვილი სანახავია, რომ

$$C_1(f) = \Delta_1 \cdot S_1 + \beta_1, \tag{4.24}$$

სადაც

$$\Delta_1 = \frac{f(S_1 u) - f(S_1 d)}{S_1(u-d)}, \quad \beta_1 = e^{-r\Delta T}[f(S_1 u) - \Delta_1 S_1 u].$$

II და ამ შემთხვევაში ბოლო ნაბიჯი იქნება ერთპერიოდიანი ოფციონის განხილვა მოგების ფუნქციით $C_1(f)$ და მისი ფასის გათვლა. ეს ეკვივალენტურია შემდეგი ერთნაბიჯიანი ხის განხილვისა



ნახ. 4.16

გვექნება

$$C(f) = e^{-r\Delta T}[p^* C_u(f) + (1-p^*) C_d(f)], \tag{4.25}$$

ან

$$C(f) = \Delta_0 \cdot S + \beta_0,$$

სადაც

$$\Delta_0 = \frac{C_u(f) - C_d(f)}{S(u-d)}, \quad \beta_0 = e^{-r\Delta T}[C_u(f) - \Delta_0 \cdot S_u].$$

ამავე დროს, ცხადია, რომ

$$\Delta_0 S_1 + \beta_0 e^{r\Delta T} = C_1(f), \tag{4.26}$$

ანუ პორტფელი (Δ_0, β_0) ასახავს ერთპერიოდიანი ოფციონის მოგების ფუნქციას $C_1(f)$.

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ამ გამოთვლებში ჩადებულია ე.წ. თვითდაფინანსების პირობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ არ ხდება ფულის დამატებითი ნაკადის შემოდინება ან გადინება. მაგალითად, არა აქვს ადგილი ხარჯვას, არ გადაიხდება გარიგების ხარჯები, არ ხდება დაბეგვრა, არ მოიზიდება დამატებითი ფულადი სახსრები.

თვითდაფინანსების პირობა, განხილულ შემთხვევაში, ასე გამოიყურება

$$\Delta_0 S_1 + \beta_0 e^{r\Delta T} = \Delta_1 S_1 + \beta_1$$

და მას აქვს შემდეგი შინაარსი: თუ საწყის მომენტში გვაქვს პორტფელი (Δ_0, β_0), შემდეგ ნაბიჯზე ახალი პორტფელის (Δ_1, β_1) შექმნა შეგვეძლია მხოლოდ საწყისი პორტფელიდან მიღებული თანხით $\Delta_0 S_1 + \beta_0 e^{r\Delta T}$. ჩვენ გამოთვლებში ეს ტოლობა ტრივიალურად გამომდინარეობს (4.24) და (4.26) ფორმულებიდან.

მიღებული ფასი $C(f)$ არბიტრაჟულია, ანუ $C(f)$ ფასად ოფციონის გაყიდვა გამორიცხავს არბიტრაჟის შესაძლებლობას. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ჩავატარებთ იგივე მსჯელობას, რაც ერთნაბიჯიანი მოდელების დროს ჩავატარეთ. საკმარისია მხოლოდ შევნიშნოთ, რომ აგებული პორტფელების მიმდევრობა (Δ_0, β_0), (Δ_1, β_1) უპასუხებს (ანუ ზუსტად ასახავს) ოფციონის მოგების ფუნქციას. მსჯელობის დარჩენილი ნაწილი მკითხველს მივანდოთ.

გადავიდეთ მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეების გამოყენებით ევროპული ოფციონის ფასის გათვლის რეკურენტული პროცედურის აღწერაზე.

ეს პროცედურა ასე გამოიყურება: პირველ ნაბიჯზე გამოითვლება ოფციონის ფასი, $C_{N-1,j}(f)$, ყველა ბოლოსწინა კვანძში $(N-1, j)$. ამ მიზნით განიხილება ცალკეული ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეები, გამოსული ამ კვანძებიდან და გამოიყენება რისკ-ნეიტრალური გადათვლის ფორმულები. $C_{N-1,j}(f)$-ის გამოთვლილი მნიშვნელობანი მიეწერება შესაბამის კვანძებს $(N-1, j)$ აქციის ფასის ქვემოთ.

შემდეგ განიხილება ოფციონი სიცოცხლის ხანგრძლივობით $(N-1)$ და მოგების ფუნქციით $C_{N-1}(f)$. ეს ნიშნავს, რომ ახლა ბინომური ხის ფინალურ მნიშვნელობად ვთვლით $(N-1, j)$ კვანძებში მიწერილ მნიშვნელობებს, $C_{N-1,j}(f)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. ახლა უკვე, როგორც წინა ნაბიჯზე, ვითვლით ოფციონის ფასს ყველა $(N-2, j)$ კვანძში ამ კვანძებიდან გამომავალი ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეების შესწავლით. ყოველ კვანძს $(N-2, j)$

მიეწერება ოფციონის ფასის სათანადო მნიშვნელობა $C_{N-2,j}$ და ა.შ. ვაგრძელებთ ამ პროცედურას, სანამ არ იქნება მიღწეული ბინომური ხის საწყისი კვანძი, რომლისთვისაც გამოთვლილი ფასი $C_{0,0}(f) = C(f)$ მოგვცემს ოფციონის საწყის ფასს.

ფორმალურად ეს პროცედურა ასე გამოიყურება.

პირველი ნაბიჯი (ფინალურის წინა კვანძები)	$C_{N-1,j} = e^{-r\Delta T}[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}]$, $j = 0,\dots,N-1$
მეორე ნაბიჯი	$C_{N-2,j} = e^{-r\Delta T}[p^* C_{N-1,j+1} + (1-p^*) C_{N-1,j}]$, $j = 0,\dots,N-2$
k-ური ნაბიჯი	$C_{N-k,j} = e^{-r\Delta T}[p^* C_{N-k+1,j+1} + (1-p^*) C_{N-k+1,j}]$, $j = 0,\dots,N-k$
N-ური ანუ ბოლო ნაბიჯი (ხის წვერო მიღწეულია)	$C(f) = C_{0,0} = e^{-r\Delta T}[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}]$

მიმდევრობით გადათვლისას ყოველ k-ურ ნაბიჯზე ყოველ $(N-k, j)$ კვანძს მიეწერება ოფციონის ფასის გამოთვლილი მნიშვნელობა $C_{N-k,j}$, $j = 0,\dots,N-k$. ერთ ოფციონზე მოსული აქციათა წილი $(N-k, j)$ წვეროში, რომელიც საჭიროა ისეთი პორტფელის შესადგენად, რომელიც უპასუხებს მომდევნო კვანძებში გამოთვლილ ოფციონის ფასს, მოიცემა ფორმულით

$$\Delta_{N-k,j} = \frac{C_{N-k+j,j+1} - C_{N-k+j,j}}{S u^j d^{N-k-j}(u-d)}.$$

მაგალითი 4.6. განვიხილოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე, რომლისთვისაც $S = \$20$, $u = 1.1$, $d = 0.9$. თითოეული ბიჯის სიგრძე იყოს 3 თვე. ურისკო საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე იყოს $r = 0.12$. განვიხილოთ ევროპული კოლ ოფციონი შეთანხმების ფასით \$21, რაც ეკვივალენტურია იმისა, რომ $f(S_t) = \max(S_t - 21, 0)$. გამოვთვალოთ ამ ოფციონის ფასი.

აქ

$$f_{uu} = 3.2, \quad f_{ud} = 0, \quad f_{dd} = 0, \quad p^* = 0.6523.$$

ამიტომ გვექნება

$$f_u = e^{-0.12\times 0.25}[0.6523 \times 3.2 + 0.3477 \times 0] = 2.057,$$

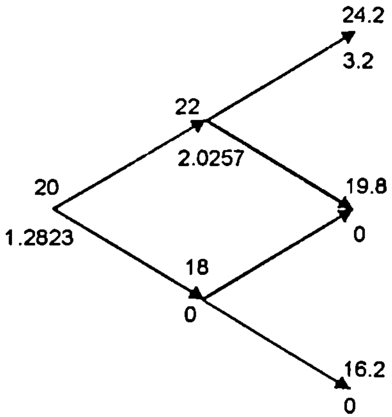
$$f_d = 0, \quad C(f) = e^{-0.12\times 0.25}[0.6523 \times 2.057 + 0.3477 \times 0] = 1.2823,$$

$$\Delta_u = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_u(u-d)} = \frac{3.2}{22 \times 0.2} = 0.73,$$

$$\Delta_d = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_u(u-d)} = 0,$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S(u-d)} = \frac{2.057}{20 \times 0.2} = 0.5.$$

შესაბამისი ბინომური ხე ასე გამოიყურება



ნახ. 4.17

4.19 ამერიკული ოფციონების ფასდადება

აღსრულების მომენტის თავისუფალი არჩევის შესაძლებლობა განასხვავებს ამერიკულ ოფციონს ევროპულისაგან და განსაზღვრავს ძირითად სირთულეებს მის ფასდადებაში. ამერიკული ოფციონის მფლობელი იღებს გადაწყვეტილებას ოფციონის აღსრულების შესახებ, როგორც წესი, დროის შემთხვევით მომენტში, ამ მომენტამდე მის ხელთ არსებული ინფორმაციის საფუძველზე (მაგალითად, საბაზისო აქტივის წარსულ ფასებზე დაკვირვებების შედეგად). ბუნებრივია, ამერიკული ოფციონის მყიდველი შეეცდება ოფციონის ისეთ მომენტში განხორციელებას, რომ მისი მოსალოდნელი მოგება იყოს მაქსიმალური. ცხადია, ოფციონის გამყიდველისათვის არ იქნება საკმარისი ისეთი პორტფელის შექმნა, რომელიც მისი მომავალი ვალდებულების დუბლირებას (რეპლიკაციას) მხოლოდ ოფციონის აღსრულების მო-

მენტში მოახერხებს და მაჰეჯირებელი სტრატეგიის შედგენისას მან უნდა გაითვალისწინოს ოფციონის განხორციელების მისთვის ყველაზე უარესი შემთხვევა, როდესაც ოფციონის მფლობელი აირჩევს აღსრულების ოპტიმალურ მომენტს. ამიტომ ამერიკული ოფციონების ფასდადების პრობლემა უშუალოდ არის დაკავშირებული მოსალოდნელი დისკონტირებული მოგების მაქსიმიზაციის ამოცანასთან (რაც ოპტიმალური გაჩერების სპეციფიურ ამოცანას წარმოადგენს). ამოცანის სპეციფიურობა იმაში მდგომარეობს, რომ მოსალოდნელი მოგება იანგარიშება რისკ-ნეიტრალური ალბათობის და არა რეალური (ან სუბიექტური) ალბათობის მიხედვით, როგორც გაჩერების ტიპიური ამოცანებისათვის. ამ ამოცანის გადაწყვეტა რისკ-ნეიტრალური ზომის მიმართ, ამერიკული ოფციონების არაარბიტრაჟის პრინციპების მიხედვით ფასდადების საშუალებას გვაძლევს.

თავდაპირველად განვიხილოთ 4.15 პუნქტში აღწერილი ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეების მოდელი $(f(S), f(S_T))$ სახის ამერიკულ ფინანსურ ვალდებულებათა წყვილით. $f = (f(x), x \in R_+)$ გარკვეული ნამდვილი ფუნქციაა (მაგალითად, ამერიკული კოლ ოფციონის შემთხვევაში გვექნება გადასახადთა $((S-K)^+, (S_T-K)^+)$ წყვილი). $f(S)$ რიცხვი და $f(S_T)$ შემთხვევითი სიდიდე აღნიშნავს მოგებას, რომელსაც მიიღებს ამერიკული ოფციონის მფლობელი ოფციონის, შესაბამისად, დროის $t = 0$ და $t = T$ მომენტებში აღსრულების დროს.

აღვნიშნოთ $C_t^A(f)$-ით (შესაბამისად $C_t(f)$-ით) ამერიკული (ევროპული) ოფციონის არბიტრაჟული ფასი t მომენტში. რადგან კონტრაქტის ბოლოს, T მომენტში,

$$C_T^A(f) = C_T(f) = f(S_T),$$

დასადგენია მხოლოდ ამერიკული ფინანსური ვალდებულების $C_0^A(f)$ ფასი დროის ნულოვან მომენტში. (4.21) ფორმულის თანახმად ევროპული ოფციონის ფასი ტოლია

$$C_0(f) = \frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(u - e^{rT})}{(u-d)e^{rT}}. \tag{4.27}$$

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ სრულდება (4.18) პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ურისკო ობლიგაციისა და საბაზისო აქციისგან წარმოქმნილი ბაზრის არაარბიტრაჟულობას. $C_0^A(f)$ ის ფასია, რა ფასადაც აღნიშნული ამერიკული ოფციონის არც ყიდვა და არც გაყიდვა არ აჩენს ამ ბაზარზე არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობას. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ამ ბაზარზე ვაჭრობენ ევროპული $f(S_T)$. ოფციონითაც (წინააღმდეგ შემთხვევაში შეგვიძლია ამ ოფციონის მაჰეჯირებელი პორტფელით შეცვლა).

წინადადება. ამერიკული ოფციონის ფასი ემთხვევა ევროპული ოფ-

ციონის ფასს ($C_0^A(f) = C_0(f)$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$C_0(f) = \frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(u - e^{rT})}{(u - d)e^{rT}} \geq f(S). \tag{4.28}$$

ამ შემთხვევაში, ოპტიმალურია ოფციონის აღსრულება T მომენტში. წინააღმდეგ შემთხვევაში (ანუ, როდესაც $C_0(f) < f(S)$), ამერიკული ოფციონის ფასი $f(S)$ სიდიდის ტოლია და მეტია ევროპული ოფციონის ფასზე

$$C_0^A(f) = f(S) > C_0(f). \tag{4.29}$$

ამ დროს ოპტიმალურია ოფციონის ადრეული აღსრულება. აქედან გამომდინარე, ამერიკული ოფციონის ფასი

$$C_0^A(f) = \max(f(S), C_0(f)) \tag{4.30}$$

და ოფციონის აღსრულების ოპტიმალური მომენტი ტოლია

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad C_0(f) < f(S); \\ T, & \text{თუ} \quad C_0(f) \geq f(S). \end{cases} \tag{4.31}$$

შენიშვნა. ერთის მხრივ, ერთნაბიჯიანი მოდელის განხილვა ამერიკული ოფციონების თვალსაზრისით თითქოს არ არის გამართლებული, რადგან, ამ შემთხვევაში, ოფციონის ოპტიმალური აღსრულების მომენტი დეტერმინისტულია და ამ ოფციონის მყიდველმა კონტრაქტის დადებამდე იცის თუ როდის აღასრულებს ოფციონს. გადაწყვეტილების მიღება ოფციონის აღსრულების შესახებ, მანამდე ოფციონის ყიდვის ან არ ყიდვის გადაწყვეტილების ტოლფასია. მაგალითად, თუ $f(S) > C_0(f)$, მაშინ ოფციონის მფლობელი, რომელსაც ნაყიდი აქვს ოფციონი $f(S)$ ფასად, იძულებულია აღასრულოს ოფციონი დროის ნულოვან მომენტში და უკან დაიბრუნოს იგივე თანხა. ცხადია, ამ შემთხვევაში ის არ შეიძენდა ამ ოფციონს. მაგრამ, მეორეს მხრივ, ამ მოდელის მიხედვით მოცემული გადაწყვეტილების მიღების ალგორითმი უნივერსალურია, ამ მარტივ შემთხვევაში ადვილად გასაგები და გამოიყენება მრავალნაბიჯიანი მოდელების მიხედვით ამერიკულ ოფციონთა ფასების გამოთვლისას.

გადავიდეთ მოყვანილი წინადადების დამტკიცებაზე.

დავუშვათ, რომ

$$C_0(f) \geq f(S). \tag{4.32}$$

თუ $C_0^A(f) > C_0(f)$, მაშინ ამერიკული ოფციონის გაყიდვითა და ევროპული ოფციონის ყიდვით მიიღება ურისკო მოგება, რადგან, (4.32) უტოლობის გამო, ოფციონის აღსრულებას $T = 0$ მომენტში აზრი არა აქვს. ამიტომ

$C_0^A(f) > C_0(f)$ უტოლობა არ არის მართებული და რადგან ევროპული ოფციონის ფასი არ აღემატება ამერიკული ოფციონის ფასს ვიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$C_0^A(f) = C_0(f).$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$C_0(f) < f(S)$$

უტოლობის შესრულება იწვევს

$$C_0^A(f) = f(S)$$

ტოლობის სამართლიანობას.

ამერიკული ოფციონის ფასი, $C_0^A(f)$, რომ იყოს $f(S)$-ზე ნაკლები, მაშინ ამერიკული ოფციონის ყიდვით და მისი მყისიერი განხორციელებით $T = 0$ მომენტში მივიღებდით $f(S) - C_0(f)$ სიდიდის ურისკო მოგებას.

თუ $C_0^A > f(S)$, მაშინ ამერიკული ოფციონის გაყიდვით მიიღება ურისკო მოგება, რომელიც $C_0^A(f) - f(S)$-ის ტოლი იქნება ოფციონის ადრეული აღსრულების დროს და უფრო მეტი — წინააღმდეგ შემთხვევაში, რადგან ამ დროს $C_0(f) < f(S)$ ფასად შესაძლებელია ევროპული ოფციონის მაპეჯირებელი სტრატეგიის შექმნა.

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

$$C_0^A(f) = \begin{cases} C_0(f), & \text{როცა} \quad C_0(f) \geq f(S); \\ f(S), & \text{როცა} \quad C_0(f) < f(S), \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს (4.30) ტოლობა, ანუ ამერიკული ოფციონის ფასი ნულოვან მომენტში მის ძირითად ღირებულებასა და ევროპული ოფციონის ფასს შორის მაქსიმალური მნიშვნელობის ტოლია.

ვნახოთ, რას გვაძლევს მოყვანილი წინადადება ამერიკული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების შემთხვევაში. დავუშვათ, რომ $r > 0$ და

$$Sd < K < Su$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში კოლ და პუტ ოფციონების ფასდადება ტრივიალურია). (4.21) ფორმულის თანახმად ევროპული კოლ ოფციონის ფასი ტოლია

$$C_0 = \frac{(Su - K)(e^{rT} - d)}{(u - d)e^{rT}}.$$

რადგან ეს გამოსახულება u-ს მიმართ ზრდადია, მასში u-ს ნაცვლად 1-ის ჩასმით (გავიხსენოთ, რომ $u > 1$, $d < 1$) და $e^{rT} > 1$ უტოლობის გათვალისწინებით ვიღებთ, რომ ყოველთვის სრულდება

$$C_0 > S - K$$

უტოლობა. ეს ნიშნავს, რომ ამერიკული ყიდვის ოფციონის აღსრულება დროის ნულოვან მომენტში არ არის რაციონალური და ამერიკული და ევროპული ყიდვის ოფციონების ფასები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც და ჩვენთვის უკვე ცნობილია 4.12 პუნქტიდან.

ამერიკული პუტ ოფციონების შემთხვევა უფრო საინტერესოა, რადგან მსგავსი უტოლობა მათთვის ყოველთვის არ სრულდება. ევროპული ოფციონების ფასის (4.21) ფორმულიდან და დამტკიცებული წინადადებიდან ვიღებთ, რომ ამერიკული პუტ ოფციონის ადრეული განხორციელება (ანუ $t = 0$ მომენტში აღსრულება) შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$K - S > \frac{(u - e^{rT})(K - Sd)}{(u - d)e^{rT}} = P_0.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, ოპტიმალურია ოფციონის აღსრულება კონტრაქტის ბოლოს და ასეთ დროს $P_0^A = P_0$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $r = 0$, მაშინ ყოველთვის $P_0^A = P_0$, რადგან ამ დროს სამართლიანია უტოლობა

$$K - S \leq \frac{(u - 1)(K - Sd)}{u - d}.$$

ახლა ვნახოთ, თუ როგორია ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტის არჩევის წესი განხილულ ერთნაბიჯიან მოდელში. გავიხსენოთ, რომ ევროპული ოფციონის არბიტრაჟული ფასი წარმოადგენს ოფციონის მფლობელის ფინალური მოსალოდნელი მოგების დისკონტირებულ მნიშვნელობას, სადაც მოგების მოსალოდნელი (ანუ საშუალო) მნიშვნელობა გამოითვლება რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიხედვით (იხ. (4.21)). ამერიკული ოფციონის მფლობელი დროის ნულოვან მომენტში გადაწყვეტილების მიღებისას ერთმანეთს ადარებს, მოგებას, რომელსაც ის მიიღებს ოფციონის მყისიერი განხორციელებით, კონტრაქტის ბოლოს მისაღებ მოსალოდნელ მოგებასთან. თუ ოფციონის $t = 0$ მომენტში აღსრულებით მიღებული მოგება მეტია T მომენტში მოსალოდნელი მოგების დღევანდელ მნიშვნელობაზე, მაშინ ის აღასრულებს თავის ოფციონს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ოფციონის მფლობელი დაელოდება კონტრაქტის ბოლოს მეტი მოგების იმედით. ამასთან, ამერიკული ოფციონის არბიტრაჟული ფასი ერთმანეთთან ზემოთ შედარებულ სიდიდეთა შორის მაქსიმუმის ტოლია ($C_0^A(f) = \max(f(S), C_0(f))$) და ამ საფასურის მიღებით ოფციონის გამყიდველი მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოახერხებს ურისკოდ მოგებას, როდესაც ოფციონის მფლობელი არასწორად აირჩევს ოფციონის აღსრულების მომენტს.

რაციონალური მომენტის არჩევისა და ოფციონის ფასის გათვლის ამ წესის გადატანა შესაძლებელია ფინანსური ბაზრის მრავალნაბიჯიანი მოდელებისთვისაც, რამდენიმე პრინციპული მომენტის გათვალისწინებით, რომელიც ერთნაბიჯიანი მოდელის შემთხვევაში არ ჩანს. ჯერ განვიხილოთ

ამ კონსტრუქციის სქემა ბაზრის ზოგადი დისკრეტული მოდელისათვის და შემდეგ გამოვიყენოთ ეს სქემა ორნაბიჯიანი ბინომური ხის კონკრეტულ მაგალითზე.

ნებისმიერ t მომენტში ოფციონის აღსრულების მომენტამდე, შევადაროთ მოგება, მიღებული t მომენტში ოფციონის მყისიერი განხორციელებით, იმ მაქსიმალურ მოსალოდნელ მოგებას, რომელიც მიიღება t მომენტის შემდეგ ოპტიმალური ქმედებით, ანუ ოფციონის რაციონალურ მომენტში აღსრულებით. თუ ეს უკანასკნელი სიდიდე უფრო მეტია, მაშინ ოფციონი უნდა განხორციელდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადაწყვეტილების მიღება შემდეგი მომენტისთვის გადაიდება, რომელშიც ისევ ანალოგიურად ვიქცევით. ყოველ t მომენტში, აღნიშნულ ორ სიდიდეს შორის მაქსიმუმი წარმოადგენს ამერიკული ოფციონის მიმდინარე ფასს (ანუ ფასს t მომენტში) და ეს ფასი იანგარიშება ბელმანის დინამიური პროგრამირების პრინციპის გამოყენებით, რეკურსიულად (შექცეული დროით) ოფციონის აღსრულების მომენტიდან უკან, კონტრაქტის დასაწყისამდე. ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი იქნება ის პირველი მომენტი, რომელშიც მოხდება ამერიკული ოფციონის ფასის (ანუ ოფციონის გამყიდველის კაპიტალის) პროცესის გატოლება მის შინაგან ღირებულებასთან, ანუ სიდიდესთან, რომელიც მიიღება ოფციონის მყისიერი განხორციელებით. შევნიშნოთ, რომ ამერიკული ოფციონის ფასი ყოველთვის მეტია ან ტოლი მის შინაგან ღირებულებაზე და ყოველთვის უტოლდება მას ოფციონის აღსრულების მომენტში. თუ ოფციონის მფლობელმა აღასრულა ოფციონი ისეთ დროს, როდესაც ოფციონის ფასი მის ძირითად ღირებულებაზე მკაცრად მეტია (ანუ არარაციონალურ მომენტში), მაშინ ოფციონის გამყიდველი გაისტუმრებს ვალდებულებას ოფციონის ფასის შესაბამისი კაპიტალით და მიიღებს ურისკო მოგებას.

განვიხილოთ ორწლიანი ამერიკული პუტ ოფციონი აქციაზე, რომლის მიმდინარე ფასი 50 დოლარის ტოლია. დავუშვათ, რომ აქციის ფასი იცვლება ბინომური მოდელის მიხედვით, ერთწლიანი ბიჯით, სადაც $u = 1.2$ და $d = 0.8$. ვთქვათ, კონტრაქტის შეთანხმების ფასია 52 დოლარი. ამ შემთხვევაში, აქციის ფასის შესაძლო ფინალური მნიშვნელობებია 72, 48 და 32, $f(S_T) = \max(52 - S_T, 0)$ და ამიტომ

$$C^A_{uu} = f_{uu} = 0, \quad C^A_{ud} = f_{ud} = 4, \quad C^A_{dd} = f_{dd} = 20.$$

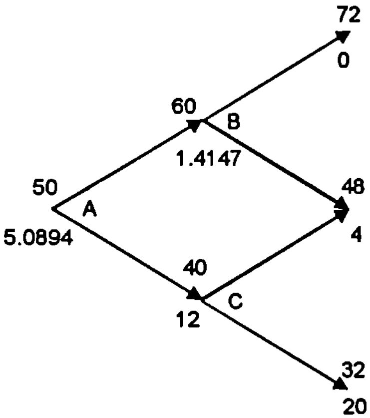
შესაბამისი ბინომური მოყვანილია ნახ. 4.18-ზე.

ყოველი კვანძის ზედა რიცხვი აღნიშნავს აქციის, ხოლო ქვედა — ოფციონის ფასს.

ჯერ გამოვთვალოთ ამერიკული ოფციონის ფასები B და C კვანძებში, ანუ ოფციონის ფასები კონტრაქტის დადებიდან ერთი წლის შემდეგ, აქციის 60 და 40-ის ტოლი კურსის შესაბამისად. რისკ-ნეიტრალური ალბათობის

მნიშვნელობა ტოლია

$$p^* = \frac{e^{0.05\times 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282, \quad 1 - p^* = 0.3718.$$



ნახ. 4.18

B კვანძში ევროპული ოფციონის ფასი (ანუ ამ მომენტისათვის რისკ-ნეიტრალური ალბათობით გამოთვლილი მოსალოდნელი მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, იმ პირობით, რომ აქციის კურსი \$60 გახდა) იქნება

$$C_u^E = 4 \times 0.3718 \times e^{-0.05\times 1} = 1.4147.$$

რადგან ამ დროს ოფციონის განხორციელებით მიღებული მოგება ნულის ტოლია, მის ამ მომენტში აღსრულებას აზრი არა აქვს და ამ კვანძში ამერიკული ოფციონის ფასი ევროპული ოფციონის ფასს ემთხვევა ($C_u^A = 1.4147$).

C კვანძში ევროპული ოფციონის ფასი იქნება

$$C_d^E = e^{-0.05}(4 \times 0.6282 + 32 \times 0.3718) = 9.4636.$$

რადგან ამ დროს ოფციონის აღსრულებით მიიღება 12-ის ტოლი მოგება, რაც მეტია მოსალოდნელ მოგებაზე კონტრაქტის გაგრძელების შემთხვევაში. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, ოფციონის ადრეული აღსრულება ოპტიმალურია და

$$C_d^A = \max(C_d^E, 12) = 12.$$

ოფციონის ფასი საწყის მომენტში გამოითვლება B და C კვანძებში გამოთვლილი ამერიკული ოფციონის ფასების მიხედვით და ტოლია

$$e^{-0.05\times 1}(0.6282 \times 1.4147 + 0.3718 \times 12) = 5.0894$$

სიდიდის, რაც მეტია 2-ზე, ანუ მოგებაზე, რომელიც მიიღება ოფციონის კონტრაქტის დასაწყისშივე აღსრულებით. ამიტომ ამერიკული ოფციონის ფასი არის $5.0894.

როგორც აღვნიშნეთ ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი არის ის პირველი მომენტი, როდესაც ოფციონის შინაგანი ღირებულება მის ფასს უტოლდება

$$\tau = \min\{t : (K - S_t)^+ = C_t^A\}.$$

განხილულ მაგალითში რაციონალური მომენტი შემთხვევითი სიდიდეა (დამოკიდებულია აქციის კურსზე ერთი წლის შემდეგ) და ტოლია 1-ის, როდესაც აქციის კურსი გახდება 40 და არის 2-ის ტოლი, თუ აქციის კურსი ერთი წლის შემდეგ (კონტრაქტის დაწყებიდან) 60-ის ტოლი იქნება.

მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეების მოდელის მიხედვით ამერიკული ოფციონების ფასის დათვლა ხდება ზემოთ აღწერილი სქემის მიხედვით რეკურენტულად, დაწყებული ხის ფინალური კვანძებიდან ხის საწყისი კვანძის მიღწევამდე და ეს პროცედურა ასე გამოიყურება:

პირველი ნაბიჯი (ფინალურის წინა კვანძები)

$$C^A_{N-1,j} = \max\left\{f_{N-1,j}, e^{-r\Delta T}[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}]\right\}, \quad j = 0, \dots, N-1$$

მეორე ნაბიჯი

$$C^A_{N-2,j} = \max\left\{f_{N-2,j}, e^{-r\Delta T}[p^* C^A_{N-1,j+1} + (1-p^*) C^A_{N-1,j}]\right\}, \quad j = 0, \dots, N-2$$

k-ური ნაბიჯი

$$C^A_{N-k,j} = \max\left\{f_{N-k,j}, e^{-r\Delta T}[p^* C^A_{N-k+1,j+1} + (1-p^*) C^A_{N-k+1,j}]\right\}, \quad j = 0, \dots, N-k$$

N-ური ანუ ბოლო ნაბიჯი (ხის წვერო მიღწეულია)

$$C^A(f) = C^A_{0,0} = \max\left\{f(S), e^{-r\Delta T}[p^* C^A_{1,1} + (1-p^*) C^A_{1,0}]\right\}$$

4.20 ბლეკ-შოულსის მოდელში ოფციონების ფასის გამოსათვლელი რიცხვითი მეთოდები, დაფუძნებული ბინომურ ხეებზე

როგორც უკვე ითქვა, ბინომური მოდელები არ ასახავს რეალობას, მაგრამ ეს არ ამცირებს მათ მნიშვნელობას, რადგან სწორედ ამ მოდელებით ხდება ბლეკ-შოულსის მოდელის აპროქსიმირება. სახელდობრ, ეს უკანასკნელი შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც ბინომური მოდელების მიმდევრობის ზღვარი, როდესაც ბიჯის სიგრძე ამ მოდელებში თანდათან მცირდება და დანარჩენი პარამეტრებიც სათანადოდაა შერჩეული.

სწორედ ამას ეფუძნება რიცხვითი მეთოდები, რომელთა საშუალებითაც ხდება ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასების მიახლოებითი გამოთვლა აქციის ფასის ძრაობის ბლეკ-შოულსის მოდელებისათვის. ეს მეთოდები შემუშავებული იყო კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის მიერ.

დავიწყოთ იმის ახსნით, თუ როგორ ხდება უდივიდენდო აქციებზე ოფციონების ფასის მიახლოებითი გამოთვლა.

დავყოთ დროის ინტერვალი $[0,T]$, სადაც T ოფციონის აღსრულების ვადაა, თანაბარი, მცირე სიგრძის Δt ინტერვალებად. განვიხილოთ ბინომური მოდელი, რომელშიც აქციის ფასის ცვლილება ხდება მხოლოდ დროის დისკრეტულ მომენტებში $t = k\Delta t$, $k = 1,\dots,N-1$, სადაც $N = \frac{T}{\Delta}$, კანონით

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t u, & \text{ალბათობით } p^*, \\ S_t d & \text{ალბათობით } (1-p^*), \end{cases}$$

სადაც პარამეტრები u, d, p^* მოიცემა შემდეგი ტოლობებით

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p^* = \frac{a-d}{u-d}, \tag{4.33}$$

ხოლო $a = e^{r\Delta t}$. მაშინ, თუ განვიხილავთ ბინომური მოდელების მიმდევრობას, როდესაც $[0,T]$ ინტერვალის დაყოფათა რიცხვი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ($N \to \infty$), რაც იგივეა, რომ $\Delta t \to 0$, ზღვარში მივიღებთ ბლეკ-შოულსის მოდელს, რომელიც აღწერს უდივიდენდო აქციის ფასის ძრაობას რისკის მიმართ ნეიტრალურ სამყაროში, ვოლატილობის კოეფიციენტით σ და ურისკო საპროცენტო განაკვეთით r:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \ \ S_0 = S. \tag{4.34}$$

აღსანიშნავია, რომ u, d და p^* პარამეტრების შერჩევა ხდება შემდეგი მოსაზრებით. თუ აქციის ფასის ცვლილება აღიწერება (4.33) განტოლებით, მაშინ დროის მცირე Δt მონაკვეთისათვის გვექნება

$$S_{t+\Delta} - S_t = rS_t\Delta t + \sigma S_t(W_{t+\Delta} - W_t),$$

საიდანაც პირობაში, რომ $S_t = s$ მივიღებთ

$$E^* S_{t+\Delta} = (1 + r\Delta t)s \approx e^{r\Delta t} \cdot s,$$

$$E^* (S_{t+\Delta} - E^* S_{t+\Delta})^2 = \sigma^2 s^2 \Delta t.$$

ამიტომ, ადეკვატური ბინომური მოდელის მისაღებად u, d და p^* ისე უნდა შეირჩეს, რომ სრულდებოდეს ტოლობები

$$e^{r\Delta t} s = p^* su + (1 - p^*)sd,$$

$$\sigma^2 s^2 \Delta t = p^* s^2 u^2 + (1 - p^*)s^2 d^2 - [p^* u + (1 - p^*)d]^2 s^2,$$

$$ud = 1.$$

სწორედ (4.32)-ით მოცემული სამეული u, d, p^* აკმაყოფილებს ამ ტოლობებს.

აქედან უკვე უნდა მოველოდეთ, რომ თუ ავიღებთ დაყოფათა საკმაოდ დიდ რაოდენობას N (მაგალითად, $N \approx 30$), შესაბამისი ბინომური ხეებით გამოთვლილი ოფციონების ფასი ახლოს იქნება ბლეკ-შოულსის მოდელში ფასის მნიშვნელობასთან.

თუ განვიხილავთ ბინომური მოდელების მიმდევრობას, რომლებშიც პარამეტრები u და d ისევეა შერჩეული, როგორც წინა შემთხვევაში, ოღონდ $a = e^{(r-q)\Delta t}$, ზღვარში, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ აქციათა ინდექსების, ვალუტისა და ფიუჩერსული ფასების ძრაობის ბლეკ-შოულსის მოდელს რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში. ამრიგად, ასეთი ბინომური ხეების საშუალებით გამოთვლილი ოფციონების ფასები კარგი მიახლოება იქნება ბლეკ-შოულსის ფასებისა.

ზედმეტია იმის ახსნა, რომ რაც უფრო მცირეა Δt, ანუ დიდია დაყოფათა რიცხვი N, მით უფრო მცირეა მიახლოებით გამოთვლილი ფასების განსხვავება თეორიულისაგან.

აღვნიშნოთ კიდევ ერთი მომენტი. ევროპული კოლ და პუტ ოფციონებისათვის, როგორც წინა თავებში იყო გადმოცემული, არსებობს ფასების ცხადი გამოსახულებები ბლეკ-შოულსის მოდელში. ამიტომ გამოთვლების სიზუსტე ამერიკული ოფციონებისათვის შეიძლება გაუმჯობესებულ იქნას ევროპული ოფციონების გამოყენებით. კერძოდ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$C^A(f)$ — ამერიკული ოფციონის ფასი, რომლის მოგების ფუნქციაა f, გამოთვლილი ბინომური ხეების გამოყენებით.

$C^E(f)$ — ევროპული ოფციონის (იგივე მოგების ფუნქციით) ფასი, გამოთვლილი ბინომური ხის მეშვეობით.

$C^E_{BS}(f)$ — ევროპული ოფციონის ბლეკ-შოულსის ფასი.

$C^A_{BS}(f)$ — ამერიკული ოფციონის ბლეკ-შოულსის ფასი.

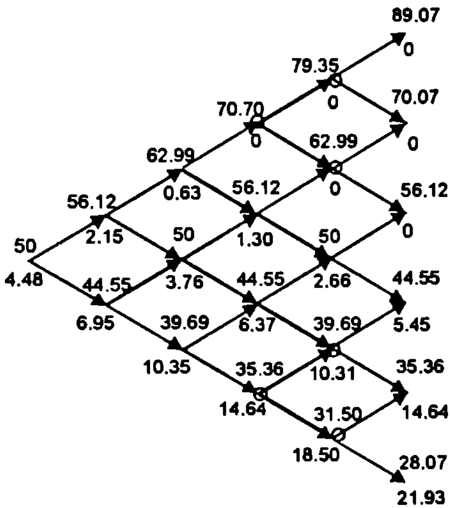
მაშინ ამერიკული ოფციონისათვის ფასის გაუმჯობესებულ შეფასებად შეიძლება ჩაითვალოს გამოსახულება

$$C^A(f) + C_{BS}(f) - C^E(f),$$

რადგანაც თუ ბინომური ხეებით გამოთვლილი ევროპული ოფციონის ფასი კარგ მიახლოებას წარმოადგენს ბლეკ-შოულსის თეორიული ფასისა, მაშინ ამერიკული ოფციონის შემთხვევაშიც ბინომური ხეების მეშვეობით მიახლოებითი გამოთვლების ცდომილებად შეიძლება ჩაითვალოს სიდიდე $C_{BS}(f) - C^E(f)$, ანუ

$$C^A_{BS}(f) - C^A(f) = C_{BS}(f) - C^E(f).$$

განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი ხუთთვიანი ამერიკული პუტ ოფციონისა უდივიდენდო აქციაზე, როდესაც აქციის საწყისი ფასია \$50, შეთანხმების ფასია \$50, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = \frac{5}{12} = 0.4167$. მაშინ, ზემოთმოყვანილი ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ, $u = 1.224$, $d = 0.8909$, $a = 1.0084$, $p^* = 0.5076$, თუ $\Delta t = 0.0833$, რაც შეესაბამება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის 5 ერთთვიან პერიოდად დაყოფას. შესაბამისი ბინომური ხე კვანძებში მიწერილი აქციის ფასებითა და ოფციონის გამოთვლილი ფასებით ასე გამოიყურება:



ნახ. 4.19

აღსანიშნავია, რომ არბიტრაჟული ფასის გამოთვლისას ყოველთვის უნდა ვისარგებლოთ რისკ-ნეიტრალური სამყაროს მომცემი p^* ალბათობით. ხის ის კვანძები, რომლებშიც ოფციონის აღსრულება ოპტიმალურია, აღნიშნულია წრით. ოფციონის ფასის შეფასებაა \$4.48. როდესაც გამოყენებულია ძალიან მცირე ინტერვალები, მაშინ მიახლოებითი მნიშვნელობაა \$4.29.

ოფციონის ფასგათვლის ბლეკ-შოულსის ანალიზი

4.21 აქციის ფასის ევოლუციის მოდელი

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა, რომლის ფარგლებში ხდება ოფციონების და სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების ფასგათვლა და ე.წ. მაჰეჯირებელი სტრატეგიების აგება, სათავეს იღებს ფრანგი მათემატიკოსის ლ. ბაშელიეს მიერ 1900 წ. დაწერილი სადოქტორო დისერტაციიდან "Theorie de la speculation" ([4]).

ამ ნაშრომში ბაშელიემ აღწერა აქციის ფასი $S = S(t)$, $t \geq 0$, როგორც ისეთი შემთხვევითი პროცესი, რომლის ნაზრდი დროის ყოველ მოცემულ მომენტში წარმოდგება შემდეგი სახით

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta} - S_t = \varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

სადაც ε არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(\varepsilon \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = N(x).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ბაშელიემ დაუშვა, რომ აქციის ფასი კარგად აღიწერება ე.წ. ვინერის პროცესით.

შევნიშნოთ, რომ „$\sqrt{\Delta t}$ ეფექტი", ანუ აქციის ფასების სწრაფი ფლუქტუაციების ეფექტი, განპირობებულია ეკონომიკური მიზეზებით და მისი ახსნა ალბათობის თეორიის ცენტრალური ზღვარითი თეორემით შეიძლება. ბაშელიეს ნაშრომი იმდენად უჩვეულო ხასიათს ატარებდა, რომ თანამედროვეებმა ვერ გაიგეს მისი მნიშვნელობა (როგორც ჩანს, ბაშელიეს ეს ნაშრომი არ იყო ცნობილი ვინერისა და ეინშტეინისთვის, რომლებმაც, ოდნავ მოგვიანებით, შექმნეს ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური თეორია). მხოლოდ 1965 წ. ამერიკელმა ეკონომისტმა პ. სამუელსონმა მიაქცია მას ყურადღება, და მეტიც, შესთავაზა ეკონომისტებს აქციის ფასის აღსაწერად ე.წ. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა. ამ მოდელის მიხედვით, ნორმალური განაწილება აქვს არა აქციის ფასს, როგორც ბაშელიეს მოდელის შემთხვევაში, არამედ აქციის ფასის ამონაგებს, რაც უფრო ადეკვატურად აღწერს აქციის ფასის დინამიკას და გამორიცხავს აქციის ფასის უარყოფით მნიშვნელობებს, ბაშელიეს არითმეტიკული ბროუნის მოძრაობისგან განსხვავებით. სამუელსონის მოდელზე დაყრდნობით და ფინანსურ ვალდებულებათა რეპლიკაციის ახალი იდეის გამოყენებით 1973 წელს ფიშერ ბლეკმა და მაირონ შოულსმა

([9]) შეძლეს ოფციონის ფასის გამოთვლა და მაჰეჯირებელი სტრატეგიების აგება (რობერტ მერტონმა ([116]) მათგან დამოუკიდებლად ანალოგიური შედეგები მიიღო). ბლეკ-შოულსის ფორმულები ძალიან სწრაფად გამოიყენეს პრაქტიკოსმა ფინანსისტებმა. ეს მოდელი ახლაც ცენტრალურია წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების ფასგათვლის მთელ თემატიკაში და დღესაც ყველაზე ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში. მისი პოპულარობა გამოწვეულია ოფციონიოს ფასის გამოსათვლელი ფორმულების სიმარტივითა და ნაგულისხმევი ვოლატილობის მიხედვით ჰეჯის შეცდომების შესწორების შესაძლებლობით. 1997 წელს შოულსსა და მერტონს მიენიჭათ ნობელის პრემია ეკონომიკაში (ფ. ბლეკი ამ დროისათვის, სამწუხაროდ, გარდაიცვალა).

მოვიყვანოთ ბლეკ-შოულსის ანალიზის ძირითადი მომენტები.

შემოვიყვანოთ სამუელსონის გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა.

ამისათვის დავუშვათ, რომ აქციის ფასის ამონაგები, ანუ $\frac{\Delta S}{S}$, მოიცემა ფორმულით

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}. \tag{4.35}$$

აქედან ცხადია, რომ აქციის ფასის საშუალო ამონაგებს ახასიათებს ნელა ცვალებადი პირველი წევრი $\mu \Delta t$, ხოლო ფასის შემთხვევითი ფლუქტუაციები აღიწერება სწრაფად ცვალებადი მეორე წევრით, $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$.

μ კოეფიციენტს ჰქვია საშუალო ამონაგები, ხოლო σ-ს — ვოლატილობის კოეფიციენტი.

(4.35)-დან ტრივიალურად გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right).$$

ეს ჩანაწერი ნიშნავს, რომ შემთხვევითი სიდიდე $\frac{\Delta S}{S}$ ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი $\mu \Delta t$ და დისპერსიით $\sigma^2 \Delta t$.

უფრო ზუსტად (4.35) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{4.36}$$

სადაც W_t ვინერის პროცესია, ანუ ისეთი უწყვეტი პროცესი, რომლისთვისაც $EW_t = 0$ (E მათემატიკური ლოდინის ნიშანია), $EW_t^2 = t$; $\Delta W_t = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, $dW_t = \varepsilon \sqrt{dt}$.

იმისათვის, რომ გაგვიადვილდეს შემდგომი ანალიზი, მოვიყვანოთ რთული ფუნქციის დიფერენციალის ე.წ. იტოს ფორმულა (იაპონელი მათემატიკოსი კ. იტო სტოქასტური ანალიზის ერთ-ერთ ფუძემდებლად ითვლება).

ვთქვათ,

$$dX_t = a dt + b dW_t$$

და $G = G(t, x)$ საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა, მაშინ

$$dG(t, X_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdW_t. \tag{4.37}$$

(4.36)-დან, იტოს ფორმულის გამოყენებით, (4.36) წრფივი განტოლების ამოხსნით ვიღებთ, რომ

$$S_t = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \tag{4.38}$$

შევნიშნოთ, რომ $ES_t = S_0 e^{\mu t}$.

ამრიგად, აქციის ფასი წარმოდგენილია ორი მოძრაობის ნამრავლის სახით: ერთს დეტერმინისტული ხასიათი აქვს და აღიწერება პირველი ექსპონენტით, მეორეს — სტოქასტური (შემთხვევითი) და აღიწერება მეორე ექსპონენტით. ამდენად, სიტყვა „გეომეტრიული" საერთო მათემატიკური ტრადიციით შეიძლება აიხსნას.

თუ შემოვიღებთ $G = \ln S$ აღნიშვნას, (4.38) ტოლობიდან მივიღებთ

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW,$$

საიდანაც უშუალოდ ჩანს, რომ

$$\ln S_T - \ln S_t = \Phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t); \sigma\sqrt{T-t}\right). \tag{4.39}$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\Phi(a, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y; a, \sigma)dy;$$

$$\varphi(y; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

(4.39)-დან ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$\ln S_T = \Phi\left(\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t); \sigma\sqrt{T-t}\right),$$

იმ პირობით, რომ $S_t = S$, ანუ $\ln S_T$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ნორმალური განაწილება სტანდარტული გადახრით $\sigma\sqrt{T-t}$, ხოლო თვით აქციის ფასს კი ე.წ. ლოგნორმალური განაწილება. აქციის ფასის სიდიდის განუსაზღვრელობა, რომლის მიზეზი საბაზრო მექანიზმია და რომელიც სტანდარტული გადახრით იზომება, არის პროპორციული კვადრატული ფესვისა დროის მონაკვეთიდან, $\sqrt{T-t}$, პროპორციულობის კოეფიციენტით σ.

4.22 ბლეკ-შოულსის დიფერენციალური განტოლება და ოფციონის ფასის ფორმულა

გადავიდეთ ბლეკ-შოულსის დიფერენციალური განტოლების გამოყვანაზე.

მოვიყვანოთ ის დაშვებები, რომლებიც საფუძვლად უდევს ბლეკ-შოულსის ანალიზს:

1. აქციის ფასი აღიწერება (4.36) ფორმულით, μ და σ მუდმივი კოეფიციენტებით.

2. სავაჭრო ოპერაციები უფასოა და არ იბეგრება. ყოველი ფასეულობა კარგად დაყოფადია, ანუ შესაძლებელია საბაზისო აქტივის ნებისმიერი ნაწილის ყიდვა ან გაყიდვა.

3. წარმოებული ფასიანი ინსტრუმენტის სიცოცხლის მთელი დროის განმავლობაში არ გაიცემა დივიდენდები.

4. გამორიცხულია არბიტრაჟის შესაძლებლობა.

5. ვაჭრობა უწყვეტად მიმდინარეობს.

6. ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r მუდმივია და არ იცვლება აღსრულების ვადამდე.

ვთქვათ, აქციის ფასის ცვლილების მოდელია გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა μ და σ პარამეტრებით:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{4.40}$$

განვიხილოთ ევროპული ოფციონი $g = g(x)$, $x \in R_+$ გადახდის ფუნქციით, რომლის ფასი აღვნიშნოთ f_t-თი. რადგან ყოველი ოფციონის ფასი წარმოადგენს საბაზისო აქტივისა და დროითი პარამეტრის ფუნქციას, ბუნებრივია, f წარმოვიდგინოთ $f(t, S_t)$ სახით, რაიმე განსაზღვრული $f(t, s)$ ფუნქციისთვის. თუ დავუშვებთ, რომ ეს ფუნქცია საკმაოდ გლუვია, მაშინ იტოს ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ დროის მცირე Δt ინტერვალში f-ის ნაზრდი, Δf, გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta W. \tag{4.41}$$

შევადგინოთ შემდეგი პორტფელი:

$$\begin{cases} -1: & \text{წარმოებული ფასეულობა;} \\ +\dfrac{\partial f}{\partial S}: & \text{აქცია;} \end{cases}$$

სხვა სიტყვებით, დავიკავოთ მოკლე პოზიცია ერთ წარმოებულ ინსტრუმენტში და გრძელი პოზიცია $\frac{\partial f}{\partial S}$ რაოდენობის აქციებში. ასეთი პორტფელის ფასი, Π, მოიცემა ფორმულით

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S. \tag{4.42}$$

მაშინ, დროის მცირე Δt ინტერვალში პორტფელის ფასის ცვლილება, $\Delta\Pi$, ტოლია (იხ. (4.41) და (4.42))

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S = \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta W + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial S}\mu S \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta W = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t. \end{aligned} \tag{4.43}$$

ამრიგად, პორტფელის ფასის ნაზრდი, $\Delta\Pi$, არ შეიცავს სტოქასტურ წევრს, ΔW-ს, და ამიტომ, Δt დროის განმავლობაში იგი ურისკოა.

თუ გავიხსენებთ იმ დაშვებებს, რაც საფუძვლად უდევს ამ ანალიზს, ადვილად დავასკვნით, რომ მყისიერი შემოსავალი ასეთ პორტფელს ისეთივე უნდა ჰქონდეს, როგორიც აქვს ურისკო აქტივს, ანუ

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში გაჩნდებოდა არბიტრაჟის შესაძლებლობა).

ბოლო ტოლობიდან (4.42) და (4.43)-ის გამოყენებით ვიღებთ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 f^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t,$$

ანუ საბოლოოდ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \tag{4.44}$$

ეს არის სწორედ ბლეკ-შოულსის განტოლება.

რადგან ჩვენ დავუშვით, რომ f_t ოფციონის ფასია, $f(t,s)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს

$$f(T,S) = g(S) \tag{4.45}$$

სასაზღვრო პირობას, წინააღმდეგ შემთხვევაში, გაჩნდება ურისკო მოგების შესაძლებლობა. ამრიგად, თუ $f(t,S_t)$ წარმოადგენს ოფციონის ფასს ყოველ t მომენტში, მაშინ $f(t,s)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ბლეკ-შოულსის (4.44) განტოლებას (4.45) სასაზღვრო პირობით.

პირიქით, იტოს ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულისა და სტოქასტურ ინტეგრალთა თვისებებზე დაყრდნობით, შეიძლება იმის ჩვენება, რომ, თუ რაიმე $f(t, s)$ ფუნქცია (რომელიც s ცვლადის მიმართ არ იზრდება „ძალიან ჩქარა") აკმაყოფილებს (4.44) განტოლებას (4.45) სასაზღვრო პირობით, მაშინ ის წარმოდგება

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} E^*_{t,s} g(S_T) \tag{4.46}$$

სახით, ანუ ემთხვევა ოფციონის ფასს, გამოთვლილს წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების ფასგათვლის რისკ-ნეიტრალური პრინციპის მიხედვით. (4.46) ფორმულაში $E^*_{t,s}$ აღნიშნავს გასაშუალოების ოპერაციას რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ იმ პირობით, რომ $S_t = s$. შევნიშნოთ, რომ (4.44) განტოლების ამოხსნის წარმოდგენა (4.46) სახით, ნიშნავს ამ განტოლების ამოხსნის ერთადერთობას („ნელა ზრდად" ფუნქციათა კლასში).

გამოვთვალოთ ზუსტად (4.46) გამოსახულების მნიშვნელობა ევროპული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების შემთხვევაში.

განვიხილოთ სტანდარტული ევროპული კოლ და პუტ ოფციონები უდივიდენდო აქციებზე. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, სასაზღვრო პირობებია:

კოლ ოფციონისათვის

$$g(S) = \max(S - K, 0), \tag{4.47}$$

პუტ ოფციონისათვის

$$g(S) = \max(K - S, 0). \tag{4.48}$$

დაწვრილებით ჩავატაროთ ეს გამოთვლები, მაგალითად, ევროპული კოლ ოფციონისთვის. ამ შემთხვევაში, (4.46) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^*_{t,s}[\max(S_T - K, 0)].$$

შევნიშნოთ, რომ რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში $\ln S_T$-ს განაწილება პირობაში, რომ $S_t = S$ მოიცემა (4.39) ფორმულით, სადაც μ უნდა შეიცვალოს r-ით, ანუ

$$\ln S_T \sim \Phi\left(\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right). \tag{4.49}$$

ამრიგად, თუ h-ით აღვნიშნავთ S_T-ს პირობითი განაწილების ფუნქციის სიმკვრივეს რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში, მაშინ

$$C = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (S_T - K) h(S_T) dS_T.$$

ახლა, თუ ცვლადს შევცვლით ფორმულით $S_T = e^W$, მაშინ ლოგნორმალური განაწილებიდან ადვილად გადავალთ ნორმალურ განაწილებაზე და მარტივი გარდაქმნებით საბოლოოდ მივიღებთ ბლეკ-შოულსის ფორმულებს:

$$C = C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, .$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

შევნიშნოთ, რომ უდივიდენდო აქციებზე ევროპული და ამერიკული ოფციონის ფასები ემთხვევიან, $C = C^A$, რაც სამართლიანია ძირითადი აქტივის ფასის ზოგადი არაარბიტრაჟული მოდელებისთვისაც (იხ. პუნქტი 4.12). ამრიგად, ეს უკანასკნელი ფორმულები გვაძლევენ ამერიკული კოლ ოფციონის ფასის გამოთვლის შესაძლებლობასაც.

თუ გამოვიყენებთ პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულას (4.1), პუტ ოფციონის ფასისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

ამერიკული პუტ ოფციონისათვის მსგავსი ფორმულის მიღება ვერ ხერხდება. შევნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ, $P \neq P^A$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ბლეკ-შოულსის ფორმულით მიღებული $C(t, s)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ბლეკ-შოულსის (4.44) განტოლებას სასაზღვრო პირობით (4.45). ამ განტოლების ამონახსნის ერთადერთობის გამო ვიღებთ, რომ $C(t, S)$ წარმოადგენს კოლ ოფციონის ფასს t მომენტში, როდესაც აქციის მიმდინარე S_t ფასი S-ის ტოლია.

განხილული ბლეკ-შოულსის მოდელი გულისხმობს, რომ საბაზისო აქტივის ფასი აღიწერება დიფუზიური პროცესით, რომლის ვოლატილობის კოეფიციენტი მუდმივია. პრაქტიკული გამოკვლევები ადასტურებს, რომ უმეტეს შემთხვევაში ვოლატილობის პარამეტრი დამოკიდებულია როგორც დროით პარამეტრზე, ასევე აქტივის მიმდინარე ფასზე, რის გამოც ხშირად აზრი აქვს უფრო ზოგადი მოდელების განხილვას. ზოგადი დიფუზიური მოდელების განხილვისას იკარგება ოფციონის ფასის ცხადი სახით გამოთვლის შესაძლებლობა, მაგრამ ხერხდება ოფციონის ფასის წარმოდგენა ბლეკ-შოულსის განზოგადოებული განტოლების ამოხსნის სახით, მის საფუძველზე ოფციონის ფასის გამოთვლა რიცხვითი და მონტე-კარლოს მეთოდების გამოყენებით. ბლეკ-შოულსის განტოლება ოფციონის ფასისთვის სხვადასხვა პირობებში გამოყვანილია [37], [65], [88], [108], [116], [208] ნაშრომებში.

გავაკეთოთ რამოდენიმე შენიშვნა:

ა) აქციის ფასის მოდელში შედის ორი პარამეტრი — μ და σ, ხოლო ოფციონის ფასის გამოსათვლელი ფორმულები შეიცავენ მხოლოდ ვოლატილობის პარამეტრს. ბლეკ-შოულსის ფორმულების დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა იმითაა გამოწვეული, რომ ამ მოდელის მიხედვით გამოთვლილი ოფციონის ფასი არ არის დამოკიდებული μ პარამეტრზე (მის ადგილს ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r იკავებს), რომლის ეფექტური შეფასება საკმაოდ ძნელია.

μ პარამეტრი ახასიათებს აქციის ფასის ამონაგების ზრდის (ან კლების) ტენდენციას და მისი ცოდნა მნიშვნელოვანია სპეკულანტებისთვის, ანუ ინვესტორთათვის, რომლებიც რისკავენ და კონკრეტული სიტუაციის მიხედვით იმედი აქვთ აქციის კურსის ზრდის ან კლების. დამპეჯირებლისთვის აქტივის ზრდის ტენდენციას ნაკლები მნიშვნელობა აქვს, რადგან მაპეჯირებელი პორტფელის დინამიური ცვლით ის ცდილობს, თავისი მომავალი რისკის ელიმინირებას, აქციის კურსის ნებისმიერი ტენდენციის შემთხვევაში. რადგან ოფციონის ფასის განსაზღვრაში პეჯირების პრინციპია ჩადებული, თითქოს არ უნდა იყოს გასაკვირი, რომ ამ პრინციპის მიხედვით დადგენილი ოფციონის ფასი არ არის დამოკიდებული μ პარამეტრზე. თუმცა, ამ ფაქტის ზუსტი ახსნა საკმაოდ არატრივიალურია. ჩვენ დავკმაყოფილდებით შემდეგი შენიშვნით.

განვიხილოთ ორი სამყარო — რისკ-ნეიტრალური და რისკის მიუღებელი. ეს ნიშნავს რომ :

1) რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში (ლაპარაკია, ცხადია, ფასიანი ქაღალდების სამყაროზე) ყველა ინვესტორი ერთნაირ პირობებშია. სახელდობრ, ყველა ფასიანი ქაღალდის ფასი საშუალოდ ურისკო საპროცენტო განაკვეთით r-ით იცვლება. მაგალითად,

$$\overline{S}_t = S_0 e^{rt}.$$

2) რისკის მიუღებელ სამყაროში თითოეულ ინვესტორს თავისი აზრი აქვს რისკის დონის შესახებ. სხვა სიტყვებით; აქ საშუალოდ ყოველი ფასიანი ქაღალდის ფასი იცვლება ფორმულით

$$\overline{S}_t = S_0 e^{\mu t},$$

სადაც μ პარამეტრი ახასიათებს ინვესტორის აზრს რისკის დონის შესახებ.

რეალური სამყარო სწორედ რისკის მიუღებელი სამყაროა. ოფციონის ფასი (იხ. ბლეკ-შოულსის ფორმულა) კი არ არის დამოკიდებული μ პარამეტრზე, რაც ძალიან ლოგიკურია (თუმცა მოულოდნელი), რადგან ოფციონის ობიექტური ფასი არ უნდა იყოს დამოკიდებული იმაზე, თუ რა წარმოდგენები აქვს რისკის შესახებ კონკრეტულ ინვესტორს.

ახსნა მდგომარეობს იმაში, რომ რისკ-ნეიტრალური სამყაროდან რეალურ სამყაროზე გადასვლის დროს ხდება ორი რამ. ძირითადი აქტივის ფასის ზრდა ან კლება დროში საშუალოდ r-ისგან განსხვავებული საპროცენტო განაკვეთის მიხედვით ხდება, მაგრამ, ამავე დროს, ამავე სიდიდით იცვლება ის ფულადი ნაკადიც რომელიც ოფციონისაგან მიღებული თანხებისაგან შედგება. ამ ორ ნაკადს საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს და ამიტომ ისინი ერთმანეთს აბათილებენ.

ბ) ერთადერთი პარამეტრი ბლეკ-შოულსის ფორმულებში, რომლის დაკვირვება უშუალოდ არ შეიძლება, არის ვოლატილობის პარამეტრი σ.

გ) ბლეკ-შოულსის ფორმულის თვისებები.

1) თუ აქციის ფასი S ძალიან დიდია, მაშინ ოფციონი თითქმის ყოველთვის აღსრულდება და, ამდენად, ემსგავსება ფორვარდულ კონტრაქტს შეთანხმების ფასით K. ფორვარდის ფასი, როგორც ვიცით, არის

$$S - Ke^{-r(T-t)}.$$

ეს დასკვნა ეთანხმება ბლეკ-შოულსის ფორმულასაც, რადგან, თუ S ძალიან დიდია, მაშინ d_1 და $d_2 \to \infty$ და ამიტომ, $N(d_1)$ და $N(d_2) \to 1$. აქედან

$$C \to S - Ke^{r(T-t)}.$$

პუტ ოფციონის ფასი უნდა უახლოვდებოდეს ნულს, თუ S ძალიან დიდია, რაც აგრეთვე გამომდინარეობს ბლეკ-შოულსის ფორმულებიდან, რადგან ასეთ შემთხვევაში d_1 და $d_2 \to \infty$, ხოლო $N(-d_1)$ და $N(-d_2) \to 0$. ე.ი. $P \to 0$.

2) განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვოლატილობა ძალიან მცირეა, ე.ი. $\sigma \to 0$.

რადგან σ შემთხვევითობის განმსაზღვრელი პროპორციულობის კოეფიციენტია, ამიტომ, თუ ის მიისწრაფის ნულისკენ, აქციის ფასის ცვლილება ხდება ურისკოდ, ე.ი. $T-t$ დროის განმავლობაში მისი სიდიდე დაგროვდება რთული პროცენტის ფორმულის შესაბამისად, $Se^{r(T-t)}$, ხოლო კოლ ოფციონის ფასი მოიცემა ფორმულით

$$\max(Se^{r(T-t)} - K, 0).$$

თუ გადავთვლით ამ ფასს მოცემული t მომენტისათვის, მივიღებთ

$$e^{-r(T-t)}\max(Se^{r(T-t)} - K, 0) = \max(S - Ke^{r(T-t)}, 0). \tag{4.50}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფორმულა ეთანხმება ბლეკ-შოულსის ფორმულას. მართლაც, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $S > Ke^{-r(T-t)}$. ეს უტოლობა იწვევს იმას, რომ

$$\ln\frac{S}{K} - r(T-t) > 0.$$

რადგან $\sigma \to 0$, ამიტომ d_1 და $d_2 \to \infty$, ხოლო $N(d_1)$ და $N(d_2) \to 1$.

ამრიგად, ბლეკ-შოულსის ფორმულები გვაძლევენ

$$C = S - Ke^{-r(T-t)} = \max(S - Ke^{r(T-t)}, 0), \quad \text{თუ } S > Ke^{r(T-t)},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ასევე შეიძლება გავაანალიზოთ შემთხვევა, როცა $S < Ke^{-r(T-t)}$.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით შემთხვევას, როცა საბაზისო ფასეულობა იყო უდივიდენდო აქცია.

გადავიდეთ სხვა, უფრო რთული ინსტრუმენტების განხილვაზე.

4.23 დისკრეტული ჰეჯირება ბლეკ-შოულსის მოდელის მიხედვით

ვთქვათ, ფინანსურმა ინსტიტუტმა გამოუშვა ოფციონები თავისი კლიენტების მოთხოვნების გათვალისწინებით. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ყველა ოფციონი დაწერილია ერთი და იგივე საბაზისო აქციაზე. რა ფასს დაადებს ფინანსური ინსტიტუტი ამ ოფციონებს, თუ მსგავსი ოფციონებით ბირჟაზე არ ვაჭრობენ?

აკვირდებიან ამავე საბაზისო აქციის მქონე ყველაზე ლიკვიდური ბირჟის ოფციონის ფასებს. ვთქვათ, ბირჟაზე მიმოქცევაშია კოლ ოფციონები $K_1, K_2, \ldots, K_n$ შეთანხმების ფასით და ერთი და იგივე სიცოცხლის ხანგრძლივობით, რომელთა მიმდინარე ფასი შესაბამისად $C_1, C_2, \ldots, C_n$-ის ტოლია. ვიანგარიშოთ ბაზრის მიერ ამ ოფციონების ფასების დადგენის დროს „ნაგულისხმევი" ვოლატილობა ბლეკ-შოულსის ფორმულის მიხედვით. გავიხსენოთ, რომ თუ ოფციონის ფასზე მოქმედი ყველა ძირითადი ფაქტორი (საბაზისო აქციის ფასი — S, საპროცენტო განაკვეთი — r, ოფციონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა — $T-t$, შეთანხმების ფასი — K და ვოლატილობა — σ) განსაზღვრულია, ოფციონის ფასი ბლეკ-შოულსის ფორმულის მიხედვით მოიცემა ფორმულით

$$C(S, r, T-t, K, \sigma) = SN(d_1(T-t, S)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(T-t, S)), \quad (4.51)$$

სადაც

$$d_1(t, x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) - (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2(t,x)=\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)-(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

K_i შეთანხმების ფასის მქონე კოლ ოფციონის ფასის შესაბამისი ნაგულისხმევი ვოლატილობა მიიღება σ პარამეტრის მიმართ შემდეგი განტოლების ამოხსნით

$$C(S,r,T-t,K_i,\sigma)=C_i, \tag{4.52}$$

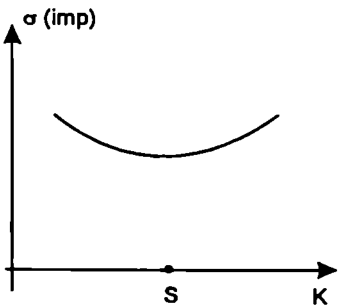
სადაც σ-ს გარდა ყველა პარამეტრი განსაზღვრულია, რადგან ტოლობის მარჯვენა მხარეში აღებულია ოფციონის მიმდინარე საბაზრო ფასი. ამ განტოლების ცხადი სახით ამოსახსნელად იყენებენ რიცხვით მეთოდებს (მაგალითად, შეიძლება გამოყენებულ იქნას ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი). მისი ამოხსნა შეიძლება უბრალო „გადასინჯვის“ მეთოდითაც (რადგან ოფციონის ფასი ვოლატილობის პარამეტრის მიმართ ზრდადი ფუნქციაა, მნიშვნელოვნად მცირდება ამ მეთოდის გამოთვლითი ოპერაციები).

ვთქვათ, K_i შეთანხმების ფასის მქონე კოლ ოფციონის ფასის მიხედვით გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობა σ_i-ს ტოლია. ცხადია, (4.52) განტოლებიდან ამოხსნილი ვოლატილობა დამოკიდებული იქნება S, r, $T-t$ პარამეტრებზე. რადგან ეს პარამეტრები მოცემულ შემთხვევაში არ იცვლება, ნაგულისხმევ ვოლატილობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც შეთანხმების ფასის ფუნქციას $\sigma=\sigma(K)$ (ჩვენს აღნიშვნებში $\sigma(K_i)=\sigma_i$). ნახ. 4.20,ა)-ზე გამოსახულია ამ ფუნქციის (ნაგულისხმევი ვოლატილობის, როგორც K-ს ფუნქციის) გრაფიკის ერთ-ერთი გავრცელებული სახე.

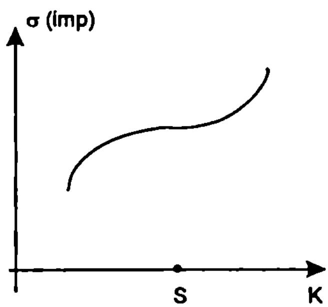
ეს მრუდი თავის მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს $K=S$ წერტილში, ანუ ნაგულისხმევი ვოლატილობა მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს, როდესაც ის გამოთვლილია სამართლიანი ოფციონის ფასის მიხედვით. ასეთი სურათი პრაქტიკაში საკმაოდ ხშირია. მას სპეციალური სახელიც აქვს და ვოლატილობის „ღიმილს“ უწოდებენ. რა დასკვნების გაკეთება შეიძლება ასეთ შემთხვევაში.

როგორც ნახ. 4.20-დან ჩანს, ხელსაყრელი და არახელსაყრელი ოფციონების ფასების მიხედვით დათვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობა აღემატება სამართლიანი ოფციონის საშუალებით გამოთვლილ ნაგულისხმევ ვოლატილობას. ამიტომ ბაზარმა გადააფასა (ანუ უფრო ძვირად გაყიდა) ხელსაყრელი და არახელსაყრელი ოფციონები, რადგან მათი ფასები უფრო დიდი ვოლატილობით იანგარიშა (როგორც ვიცით, კოლ ოფციონის ფასი იზრდება ვოლატილობის ზრდის დროს). აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ თითქოს ბაზარი ოფციონის ფასებს ადგენდა რომელიღაც სხვა, ბლეკ-შოულსის მოდელისგან განსხვავებული, მოდელის მიხედვით, რომელშიც აქციის ფასის

ამონაგების განაწილების ფუნქცია უფრო მძიმე კუდებით ხასიათდება ლოგ-ნორმალური განაწილების ფუნქციასთან შედარებით. ვოლატილობის მრუდის მეორე ტიპიურ სურათს (ნახატი ბ)) წარმოადგენს შემთხვევა, როდესაც ამ მრუდის ერთ-ერთი ბოლო უფრო აწეულია მეორე ბოლოსთან შედარებით. ასეთი სიტუაცია წარმოიქმნება, როდესაც ბაზარი „გრძნობს", რომ მოსალოდნელია საბაზისო აქციის კურსის მნიშვნელოვანი ცვლილება ერთ-ერთი მიმართულებით. ეს ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევებში ბლეკ-შოულსის მოდელი რეალურად ვერ ასახავს საბაზისო აქციის ფასის დინამიკას და საჭიროებს შესწორებას.



ა) ვოლატილობის ღიმილი



ბ) ვოლატილობის გრიმასა

ნახ. 4.20

მიუხედავად ზემოთქმულისა, ხშირად ასეთ შემთხვევებში ერიდებიან უფრო რთული მოდელების გამოყენებას და ხელმძღვანელობენ ისევ ბლეკ-შოულსის მოდელით (ან შეაქვთ ამ მოდელში უმნიშვნელო შესწორებანი), რადგან ითვლება, რომ ხშირ შემთხვევაში ეს მოდელი დაახლოებით მაინც ასახავს აქციის კურსის ევოლუციის პროცესს და აქვს ერთი დიდი უპირატესობა სხვა უფრო რთულ მოდელებთან შედარებით. ამ მოდელში ოფციონის ფასი და მაჰეჯირებელი სტრატეგიები ადვილად და ცხადად ითვლება. ამ თვალსაზრისით ბლეკ-შოულსის მოდელს ჯერ-ჯერობით ალტერნატივა არ აქვს.

მაგალითად, როდესაც ვოლატილობა „იღიმება" (იხ. ნახ. 4.20), იღებენ სხვადასხვა შეთანხმების ფასის ოფციონების შესაბამის ნაგულისხმევ ვოლატილრბების საშუალო არითმეტიკულს ან საშუალო მნიშვნელობების დათვლისას ნაგულისხმევ ვოლატილობებს ანიჭებენ სხვადასხვა წონებს. მაგალითად, უფრო დიდ წონას ანიჭებენ სამართლიანი ოფციონის ფასით გამოთვლილ ნაგულისხმევ ვოლატილობას, რადგან ამ ოფციონის ფასი განსაკუთრებით მგრძნობიარეა ვოლატილობის ცვლილების მიმართ და მისი ფასით გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობა უფრო სანდოდ ითვლება.

თუ სხვადასხვა შეთანხმების ფასის მქონე ოფციონების ბაზრის ფასებით გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობები ერთმანეთს ემთხვევა, ან მათ შორის განსხვავება უმნიშვნელოა, ითვლება, რომ ბლეკ-შოულსის მოდელი ადეკვატურად ასახავს აქციის ფასის ევოლუციის პროცესს. ეს ბუნებრივია, რადგან ნაგულისხმევი ვოლატილობების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი და იგივე აქციაზე სხვადასხვა ოფციონის ბაზრის ფასები ისეთნაირად ჩამოყალიბდა, რომ ამ ოფციონების ფასების მიღება შესაძლებელია ბლეკ-შოულსის ფორმულით ვოლატილობის ერთი ფიქსირებული მნიშვნელობის დროს.

ცხადია, პრაქტიკაში ბაზრის ფასებიდან გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობები ზუსტად ერთმანეთს თითქმის არასდროს არ დაემთხვევა და მნიშვნელოვანია იმის განსაზღვრა, თუ როდის არის ნაგულისხმევ ვოლატილობებს შორის განსხვავებები ანგარიშგასაწევი.

ამ პრობლემის განხილვას აქ ჩვენ არ შევუდგებით და მოვიყვანთ მხოლოდ ერთ თვალსაზრისს, თუ როდის შეიძლება ნაგულისხმევ ვოლატილობებს შორის განსხვავება უმნიშვნელოდ ჩაითვალოს.

ვიანგარიშოთ ნაგულისხმევი ვოლატილობა სამართლიანი ოფციონის ყიდვისა და გაყიდვის ფასების საშუალებით და აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად σ_1 და σ_2-ით (ცხადია, σ_1 ყოველთვის მეტი იქნება σ_2-ზე). თუ არახელსაყრელი ოფციონების საბაზრო ფასებით გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობების მნიშვნელობები (σ_2, σ_1) ინტერვალში აღმოჩნდება (არახელსაყრელი ოფციონების არჩევა საკმარისია პუტ-კოლ პარიტეტის ფორმულის გამო), მაშინ შეიძლება ნაგულისხმევ ვოლატილობებს შორის განსხვავებებს ანგარიში არ გავუწიოთ და ბლეკ-შოულსის მოდელის გამოყენება ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილად ჩავთვალოთ.

ვთქვათ, K_1, K_2, ..., K_n შეთანხმების ფასის მქონე კოლ ოფციონების საშუალებით გამოთვლილი ნაგულისხმევი ვოლატილობები ერთმანეთს დაემთხვა $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$ და σ_{imp}-ით აღვნიშნოთ მათი საერთო მნიშვნელობა.

როგორც აღვნიშნეთ, ამ შემთხვევაში ბლეკ-შოულსის მოდელი კარგად აღწერს აქციის ფასის ევოლუციის პროცესს და σ_{imp} შეიძლება გამოვიყენოთ ამ მოდელის ვოლატილობის პარამეტრის შესაფასებლად.

ამის შემდეგ ფინანსურ ინსტიტუტს ბლეკ-შოულსის ფორმულების გამოყენებით, მათში ვოლატილობის პარამეტრის ნაცვლად σ_{imp} მნიშვნელობის ჩასმით, შეუძლია ამავე აქციაზე მის მიერ გამოშვებული ოფციონების ფასების ანგარიში.

ფინანსური ინსტიტუტი გაყიდის ამ ოფციონებს ზემოთ აღნიშნული წესით გამოთვლილ ფასებზე ოდნავ უფრო ძვირად, რაც ბუნებრივია შემდეგი მიზეზების გამო. ჯერ ერთი, ფინანსური ინსტიტუტი ოფციონებს უშვებს მისი კლიენტების მოთხოვნების გათვალისწინებით და ბუნებრივია, ისინი დათან-

ხმდნენ შეიძინონ ეს ოფციონები ოდნავ უფრო ძვირად, ბირჟის ფასებთან შედარებით. გარდა ამისა, ფინანსურ ინსტიტუტს უხდება პეჯირების რთული პროცესის ჩატარება. ეს პროცესი, თუმცა გულისხმობს ფინანსური ინსტიტუტის დანაკარგების მინიმუმამდე დაყვანას, პრაქტიკულად მაინც რისკთან არის დაკავშირებული და გარკვეულ კომპენსაციას მოითხოვს.

ავხსნათ, თუ როგორ მიმდინარეობს პეჯირების პროცესი კოლ ოფციონის მაგალითზე.

გავიხსენოთ, რომ თუ აქციის ფასის პროცესი აღიწერება (4.36) განტოლებით, სადაც μ და σ პარამეტრები ზუსტად არიან განსაზღვრული და სტრატეგიების ცვლა შეიძლება უწყვეტად დროში ოპერაციული დანაკარგების გარეშე, მაშინ შესაძლებელია პეჯირების პროცესის ზუსტი ჩატარება. აღვწეროთ პეჯირების პროცესი ბლეკ-შოულსის მოდელში.

ვთქვათ, ოფციონის დამწერი დროის ნულოვან მომენტში იღებს ბლეკ-შოულსის ფორმულის მიხედვით გამოთვლილი ოფციონის საფასურს, რომელსაც C_0-ით აღვნიშნავთ. რისკ-ნეიტრალური პორტფელის შესაქმნელად, მან $t=0$ მომენტში უნდა შეიძინოს $\Delta_0 = N(d_1(S_0,0))$ რაოდენობის აქცია, სადაც S_0 აღნიშნავს საბაზისო აქციის ფასს ნულოვან მომენტში. როგორც ბლეკ-შოულსის ფორმულიდან ჩანს, ოფციონის გამყიდველის საწყისი კაპიტალი (ანუ ოფციონის ფასი C_0) არ არის საკმარისი ამ რაოდენობის აქციის საყიდლად. ამიტომ ის სესხულობს $\beta_0 = Ke^{-rT}N(d_2(0,S_0))$-ის ტოლ თანხას (ანუ β_0 რაოდენობის ობლიგაციას) და $C_0+\beta_0$ თანხით ყიდულობს ზუსტად Δ_0 რაოდენობის აქციას (ანუ აქციის Δ_0 ნაწილს, რადგან Δ ყოველთვის ერთზე ნაკლებია).

თუ ამის შემდეგ ყოველ t მომენტში ოფციონის გამყიდველი აირჩევს (Δ_t,β_t) სტრატეგიას, სადაც

$$\Delta_t = N(d_1(T-t,S_t)) \tag{4.53}$$

აღნიშნავს აქციების, ხოლო

$$\beta_t = -\frac{K}{e^{rT}}N(d_2(T-t,S_t)) \tag{4.54}$$

ობლიგაციების რაოდენობას მის მიერ არჩეულ პორტფელში, მაშინ მისი კაპიტალი t მომენტში ტოლი იქნება

$$X_t = S_tN(d_1(T-t,S_t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(T-t,S_t)) \tag{4.55}$$

სიდიდის და ადვილი საჩვენებელია, რომ ოფციონის აღსრულების T მომენტში მისი კაპიტალის პროცესი ოფციონის მფლობელისთვის გადასახდელ მოგებას დაემთხვევა.

მართლაც, როდესაც $S_T > K$ და t მომენტი კი ოფციონის აღსრულების მომენტს უახლოვდება, მაშინ d_1 და d_2 სიდიდეთა მნიშვნელობები უსასრულოდ იზრდება, რის გამოც $N(d_1)$ და $N(d_2)$ სიდიდეები ერთისკენ მიისწრაფიან. ამიტომ (4.51) ფორმულაში ზღვარზე გადასვლით ვიღებთ, რომ

$$X_T = S_T - K.$$

მსგავსი მსჯელობით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ $S_T < K$, მაშინ $d_1 \to -\infty$, $d_2 \to -\infty$ და $N(d_1) \to 0$, $N(d_2) \to 0$. ამიტომ (4.51) ფორმულიდან ვიღებთ, რომ X_T ნულის ტოლია.

მაშასადამე $(\Delta_t, \beta_t, 0 \leq t \leq T)$ სტრატეგიის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი X_t დროის ნულოვან მომენტში ოფციონის ფასის ტოლია, ხოლო ოფციონის აღსრულების მომენტში

$$X_T = \max(S_T - K, 0). \tag{4.56}$$

ადრე მოყვანილი იტოს ცვლადთა გარდაქმნის (4.37) ფორმულის დახმარებით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ აღნიშნულ (Δ_t, β_t) სტრატეგიას აქვს ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება. ეს სტრატეგია არის თვითფინანსირებადი, ანუ დროის ნებისმიერ t მომენტში ოფციონის აღსრულების მომენტამდე სრულდება ტოლობა

$$S_t d\Delta_t + e^{rt} d\beta_t = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ საბანკო ანგარიშზე კაპიტალის ცვლილება შეიძლება მოხდეს მხოლოდ აქციებში დაბანდებული კაპიტალის შესაბამისი ცვლილების ხარჯზე და პირიქით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, აღნიშნული სტრატეგიის არჩევისას ოფციონის გამყიდველი არ იღებს კაპიტალს გარედან და არც გასცემს მას. მისი კაპიტალი იცვლება მხოლოდ აქციის და ობლიგაციის ფასების ცვლილების ხარჯზე. თვითფინანსირებადი სტრატეგიის არჩევა უშვებს როგორც აქციის, ასევე ობლიგაციის სესხებას. მაგრამ არ შეიძლება აქციის და ობლიგაციის სესხება ერთდროულად. მაგალითად, როგორც (4.53), (4.54) ფორმულებიდან ჩანს (β_t ყოველთვის უარყოფითია), კოლ ოფციონის ჰეჯირების პროცესი საჭიროებს ბანკიდან ფულის სესხებას და ამ თანხის დახმარებით აქციის Δ_t ნაწილის შეძენას. Δ_t (ისევე, როგორც β_t) დამოკიდებულია აქციის კურსის მნიშვნელობაზე მხოლოდ დროის t მომენტში და იღებს მნიშვნელობებს ნულსა და ერთს შორის. მისი მნიშვნელობა უახლოვდება ერთს, როდესაც ოფციონი არის ღრმად ფულით, და ნულს, როცა ოფციონი ღრმად უფულოდ იმყოფება.

ვთქვათ, ფინანსურმა ინსტიტუტმა გამოუშვა ერთი კოლ ოფციონი. ამ ოფციონის შეთანხმების ფასი იყოს K-ს ტოლი და მისი აღსრულების დრო

აღვნიშნოთ T-თი. დავუშვათ, რომ აქციის ფასის ევოლუციის პროცესი აღიწერება ბლეკ-შოულსის მოდელის მიხედვით. ბლეკ-შოულსის მოდელის პრაქტიკული გამოყენების დროს წარმოიქმნება ორი პრობლემა. ჯერ ერთი, რეალურად შეუძლებელია ჰეჯირების პროცესის დროში უწყვეტად წარმართვა და სტრატეგიების ცვლა შეიძლება მოხერხდეს მხოლოდ დროის სასრული რაოდენობის მომენტებში. გარდა ამისა, უცნობია ამ მოდელის ვოლატილობის პარამეტრის მნიშვნელობა და მაჰეჯირებელი სტრატეგიები იანგარიშება σ პარამეტრის შეფასების მიხედვით, რომელიც შეიძლება განსხვავებული იყოს ვოლატილობის პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს შეცდომები ჰეჯირების პროცესში.

დავუშვათ, რომ ოფციონის გამყიდველმა მიიღო ოფციონის საფასურად C_0 თანხა, დათვლილი ბლეკ-შოულსის ფორმულის მიხედვით, σ პარამეტრის ნაცვლად მისი შეფასების $\widehat{\sigma}$-ს (მაგალითად, ნაგულისხმევი ვოლატილობის) ჩასმით. ვთქვათ, ოფციონის გამყიდველი თავის სტრატეგიებს ცვლის მხოლოდ

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$$

მომენტებში. ეს შეიძლება, მაგალითად, ნიშნავდეს, რომ ის თავის სტრატეგიას ცვლის ვაჭრობის დღის ყოველ საღამოს.

შევნიშნოთ, რომ ბლეკ-შოულსის მოდელში (Δ_t, β_t) მაჰეჯირებელი სტრატეგია დამოკიდებულია ვოლატილობის პარამეტრის მნიშვნელობაზე და ამ სტრატეგიას აქვს (4.56) რეპლიკაციის თვისება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ის გამოითვლება σ პარამეტრის იმ მნიშვნელობისათვის, რომლის მიხედვითაც მოდელირდება საბაზისო აქციის ფასის პროცესი. მოხერხებულობისთვის შემოვიღოთ ამ დამოკიდებულების ამსახველი აღნიშვნები

$$\Delta_t = \Delta^{\sigma}(t, S_t), \quad \beta_t = \beta^{\sigma}(t, S_t).$$

აღვნიშნოთ σ^*-ით ვოლატილობის პარამეტრის ჭეშმარიტი, ჩვენთვის უცნობი მნიშვნელობა და $\widehat{\sigma}$ იყოს ამ პარამეტრის შეფასება (მაგალითად, ნაგულისხმევი ვოლატილობა). S_t^*-ით აღვნიშნოთ აქციის რეალური კურსი, ანუ $(S_t^*,\ t \geq 0)$ არის აქციის ფასის პროცესი, რომელიც მოდელირდება ბლეკ-შოულსის მოდელის შესაბამისად $\sigma = \sigma^*$ ვოლატილობის პარამეტრით.

ოფციონის გამყიდველი ეცდება დროის ყოველ t_i-ურ მომენტში ხელთ ჰქონდეს აქციათა ის რაოდენობა, რომელიც ზემოთ აღწერილი Δ ჰეჯირების პროცესით არის განსაზღვრული. ოღონდ (რადგან მისთვის σ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უცნობია) ის იძულებულია Δ სტრატეგია იანგარიშოს ვოლატილობის $\widehat{\sigma}$ მნიშვნელობის მიხედვით, ანუ ყოველ t_i მომენტში აირჩიოს სტრატეგია

$$\Delta_{t_i} = \Delta^{\widehat{\sigma}}(t_i, S^*_{t_{i-1}}).$$

შეიძლებოდა გვეფიქრა, რომ ოფციონის გამყიდველი მაჰეჯირებელი სტრატეგიის მეორე კომპონენტის (β-ს) არჩევას იმავე წესით მოახერხებდა, მაგრამ

$$\left(\widehat{\Delta^{\sigma}}(t_i, S^*_{t_{i-1}}), \widehat{\beta^{\sigma}}(t_i, S^*_{t_{i-1}})\right), \quad 0 \le i \le n$$

სტრატეგიას უკვე აღარ ექნება თვითდაფინანსების თვისება (ანუ ეს სტრატეგია ვერ განხორციელდება გარედან კაპიტალის შემოტანის ან არსებული კაპიტალის ხარჯვის გარეშე). ეს თვისება (Δ_t, β_t) სტრატეგიას ჰქონდა პორტფელის უწყვეტად ცვლის შესაძლებლობისა და σ პარამეტრის განსაზღვრულობის დაშვების გამო.

ამიტომ β_{t_i} სტრატეგიები იანგარიშება რეკურსიულად, ყოველ t_i მომენტში რეალურად არსებული კაპიტალიდან გამომდინარე, თვითდაფინანსების პირობის დაცვით. გარდა ამისა, სტრატეგია ყოველ t_i-ურ მომენტში უნდა აირჩეს აქციის ფასზე t_i მომენტამდე დაკვირვებების საფუძველზე, ანუ სანამ გამოცხადდება აქციის ფასი t_i მომენტში.

ამრიგად, თვითფინანსირებადი სტრატეგია $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\beta})$ გამოითვლება შემდეგი რეკურსიული წესით.

დროის $t_0 = 0$ მომენტში ოფციონის გამყიდველის კაპიტალი C_0-ის ტოლია. ის იძენს აქციების $\widetilde{\Delta}_1 = \widehat{\Delta^{\sigma}}(t_1, S^*_{t_0})$ რაოდენობას და დარჩენილი

$$C_0 - \widetilde{\Delta}_1 S^*_{t_0}$$

თანხით სესხულობს (ან ყიდულობს, თუ ეს თანხა დადებითია) r პროცენტიან ობლიგაციებს. თუ დავუშვებთ, რომ ერთი ობლიგაციის ფასი $t_0 = 0$ მომენტში B_0-ის ტოლია, მისი სტრატეგია დროის ნულოვან მომენტში იქნება $(\widetilde{\Delta}_1, \widetilde{\beta}_1)$, სადაც

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{C_0 - \widetilde{\Delta}_1 S^*_{t_0}}{B_0}, \quad \widetilde{\Delta}_1 = \widehat{\Delta^{\sigma}}(t_1, S^*_{t_0}).$$

როგორც აღნიშნული იყო, კოლ ოფციონის ჰეჯირების პროცესი ყოველთვის საჭიროებს ბანკიდან ფულის სესხებას. ამ შემთხვევაში, რადგან სტრატეგიები იანგარიშება ვოლატილობის პარამეტრის $\widehat{\sigma}$ მნიშვნელობისთვის, ეს პირობა შეიძლება დროის რომელიმე მომენტში დაირღვეს.

დროის t_1 მომენტში, აქციის კურსის გამოცხადების შემდეგ, ოფციონის გამყიდველის კაპიტალი ტოლი გახდება

$$X_1 = \widetilde{\Delta}_1 S^*_{t_1} + \widetilde{\beta}_1 B_0 e^{rt_1} \tag{4.57}$$

სიდიდის. ამის შემდეგ ის იწყებს თავისი X_1 კაპიტალის გადანაწილებას. ის იძენს აქციების $\widetilde{\Delta}_2 = \widehat{\Delta^{\sigma}}(t_2, S^*_{t_1})$ რაოდენობას და დარჩენილი

$$X_1 - \widetilde{\Delta}_2 S^*_{t_1}$$

თანხით ისევ ყიდულობს ობლიგაციებს. რადგან t_1 მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასი უკვე $B_0 e^{rt_1}$-ის ტოლია, დარჩენილი თანხით ის მოახერხებს ობლიგაციების

$$\widetilde{\beta}_2 = \frac{X_1 - \widetilde{\Delta}_2 S^*_{t_1}}{B_0 e^{rt_1}}$$

რაოდენობის ყიდვას. ამიტომ (4.57) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\widetilde{\beta}_2 = \widetilde{\beta}_1 - \frac{(\widetilde{\Delta}_2 - \widetilde{\Delta}_1) S^*_{t_1}}{B_0 e^{rt_1}}.$$

მსგავსი მსჯელობით ვიღებთ, რომ ყოველ t_i-ურ მომენტში არჩეული სტრატეგიის $\widetilde{\beta}_i$ კომპონენტი გამოითვლება $\widetilde{\Delta}_i$ სტრატეგიისა და წინა მომენტში არჩეული სტრატეგიების საშუალებით შემდეგი ფორმულით

$$\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_{i-1} - \frac{(\widetilde{\Delta}_i - \widetilde{\Delta}_{i-1}) S^*_{t_{i-1}}}{B_0 e^{rt_{i-1}}}$$

და კაპიტალის პროცესი დროის t_i მომენტში ტოლი იქნება

$$X_{t_i} = \widetilde{\Delta}_i S^*_{t_i} + \widetilde{\beta}_i B_0 e^{rt_i}.$$

ცხადია, ამ სტრატეგიების შესაბამისი კაპიტალი ოფციონის აღსრულების მომენტში $X_T = \widetilde{\Delta}_n S^*_T + \widetilde{\beta}_n B_0 e^{rT}$ შეიძლება არ დაემთხვეს ოფციონის მყიდველისათვის გადასახდელ თანხას, ანუ $\max(S^*_T - K, 0)$ სიდიდეს. ბლეკ-შოულსის მოდელის პრაქტიკული რეალიზაციის დროს ვერ ხერხდება ოფციონის გამყიდველის რისკის სრული გაქრობა და მოსალოდნელია შეცდომები ჰეჯირების პროცესში. ჰეჯის შეცდომები გამოწვეულია უცნობი ვოლატილობის პარამეტრის შესაძლო არაზუსტი შეფასებით და ჰეჯირების პროცესის უწყვეტად წარმართვის შეუძლებლობის გამო (იხ. ნაშრომი [53], რომელიც ეხება ჰეჯის შეცდომის შეფასებას).

ანალოგიურად შეიძლება ჰეჯირების პროცესის ჩატარება უფრო რთული პორტფელებისთვის. შევნიშნოთ, რომ როგორც პარამეტრის არაზუსტი შეფასებით, ასევე სტრატეგიების ცვლილების შესაძლო მომენტების სიმცირით გამოწვეული ჰეჯის შეცდომები მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული ჰეჯის გამა და ვეგა მახასიათებლებზე. მაგალითად, რაც უფრო მცირეა გამა პარამეტრი, მით უფრო მცირე შეცდომაა მოსალოდნელი ჰეჯირების პროცესში. ამიტომ მეტად მნიშვნელოვანია გამა ნეიტრალური პორტფელის

შექმნა. გამა, ვეგა და დელტა ნეიტრალური პორტფელების შექმნის პროცედურა და მათი მნიშვნელობა დაწვრილებით არის აღწერილი შემდეგ თავში.

4.24 ოფციონები აქციებზე ცნობილი დივიდენდური შემოსავლით

ვთქვათ, ვიხილავთ ევროპულ ქოლ და პუტ ოფციონებს აქციებზე, რომელთა უწყვეტად გადათვლილი დივიდენდური შემოსავლის საპროცენტო განაკვეთი უდრის q-ს. თუ ასეთი აქციის ფასი t მომენტში არის S_t, ხოლო $t = T$ მომენტში კი S_T, მაშინ ისეთი აქციისათვის, რომელიც არ იხდის q სიდიდის დივიდენდურ შემოსავალს, ეს თანაფარდობა ასეთი იქნება: t მომენტში მისი ფასი იქნება S_t, ხოლო $t = T$-ში კი $S_T e^{q(T-t)}$. სხვანაირად, თუ $t = T$ მომენტში უდივიდენდო აქციის ფასია S_T, მაშინ t მომენტში მისი ფასი უნდა ყოფილიყო $S_t e^{-q(T-t)}$.

ამრიგად, რომ მივიღოთ ოფციონის ფასის გამოსათვლელი ფორმულები, საჭიროა ბლექ-შოულსის ფორმულებში აქციის მიმდინარე ფასი S_t შეიცვალოს $S_t e^{-q(T-t)}$ სიდიდით, რის შედეგადაც გვექნება

$$C = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{r(T-t)} N(d_2),$$

$$P = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1).$$

გამოსახულებები, რომლებიც გვაძლევენ d_1 და d_2-ს მნიშვნელობებს შეიძლება ასე გარდავქმნათ.

შევნიშნოთ, რომ

$$\ln \frac{Se^{-q(T-t)}}{K} = \ln Se^{-q(T-t)} - \ln K =$$

$$= \ln S - q(T-t) - \ln K = \ln \frac{S}{K} - q(T-t).$$

ამიტომ, ვთქვათ, d_1-სთვის მივიღებთ

$$d_1 = \frac{\ln \frac{Se^{-q(T-t)}}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =$$

$$= \frac{\ln \frac{S}{K} - q(T-t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =$$

$$= \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\sigma - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

ანალოგიურად,

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

4.25 სავალუტო ოფციონები

აღვნიშნოთ S-ით ვალუტის მიმდინარე კურსი, ანუ 1 ერთეული უცხოური ვალუტის შემცველობა ადგილობრივი ვალუტის 1 ერთეულში. დავუშვათ, რომ S-ის ცვლილება დროში აღიწერება ისევე, როგორც აღიწერებოდა უდივიდენდო აქციის ქცევა. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ურისკო საპროცენტო განაკვეთი განსახილველ ქვეყანაში არის r, ხოლო უცხო ქვეყანაში კი r_f.

ჩვენ ვიცით, რომ უცხოურ ვალუტას შეიძლება ვუყუროთ როგორც აქციას, რომელიც იხდის ცნობილ დივიდენდურ შემოსავალს r_f. ამიტომ ბლექ-შოულსის ფორმულების მისაღებად საკმარისია წინა პუნქტში მიღებულ ფორმულებში q შევცვალოთ r_f-ით.

მივიღებთ

$$C = Se^{-r_f(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

$$P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-r_f(T-t)}N(-d_1),$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

4.26 ოფციონი ფიუჩერსულ კონტრაქტზე (ფიუჩერსული ოფციონი)

განმარტება. 80-იანი წლების შუაში ამერიკელმა მეცნიერებმა ლელანდმა და რუბინშტეინმა შექმნეს საინვესტიციო პორტფელების დაზღვევის ახალი ოფციონური სტრატეგია, ე.წ. დინამიური პეჯი.

ამ სტრატეგიის ძირითადი შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ სათანადო პოზიციების დაკავება საბანკო ანგარიშში და ძირითად აქტივებში (ასეთ ქმედებას (B,S) ბაზარზე პოზიციის დაკავებას უწოდებენ) და ამ პოზიციების დინამიური ცვლა სინთეზური დამცავი ოფციონის შექმნის შესაძლებლობას იძლევა.

გასაგებია, რომ ასეთი სტრატეგიის განსახორციელებლად საჭიროა ძირითადი აქტივების მრავალჯერადი ყიდვა-გაყიდვა, რაც, როგორც ვიცით, საკმაოდ დიდ ხარჯებთანაა დაკავშირებული. ამიტომ ასე აგებული სინთეზური დამცავი ოფციონი ძალიან ძვირია.

ლელანდისა და რუბინშტეინის მეორე მნიშვნელოვანი აღმოჩენა (რომელმაც, საბოლოო ჯამში, განსაზღვრა სტრატეგიის წარმატება) მდგომარეობს იმაში, რომ (B,S) ბაზარზე პოზიციის დაკავების ნაცვლად პოზიცია დაკავებულ უნდა იქნას (B,F) ბაზარზე, ანუ არა ძირითად აქტივებში, არამედ ფიუჩერსებში ძირითად აქტივებზე. ჩვენ კარგად ვიცით, რომ ფიუჩერსული გარიგებები ბევრად უფრო იაფია, ვიდრე გარიგებები შესაბამის ძირითად აქტივებში. ამ იდეამ მნიშვნელოვნად გააიაფა სინთეზური ოფციონი და მთელმა სტრატეგიამ დიდი პრაქტიკული გამოყენება ჰპოვა მთელ მსოფლიოში. ამიტომ ჩვენ ცალკე და საკმაოდ დაწვრილებით შევისწავლით ფიუჩერსულ ოფციონებს და ამ ოფციონების მაგალითზე ავხსნით დინამიური პეჯის სტრატეგიას.

დასავლეთის უმეტეს ბირჟებზე, რომლებიც ვაჭრობენ ფიუჩერსებით, ფიუჩერსი აღჭურვილია კიდევ ერთი წარმოებული ქაღალდით — ოფციონით, რომლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფიუჩერსია.

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ მყიდველი აღასრულებს ოფციონს, მაშინ მას გაეხსნება ფიუჩერსული პოზიცია მიწოდების ფასით, რომელიც შეთანხმების ფასის ტოლია. კოლ ოფციონის მფლობელს ეხსნება გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია, პუტის მფლობელს — მოკლე. ოფციონის გამყიდველს, შესაბამისად, ეხსნება საწინააღმდეგო ფიუჩერსული პოზიცია: კოლ ოფციონის გამყიდველს ეხსნება მოკლე პოზიცია, ხოლო პუტის გამყიდველს — გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია.

ოფციონის აღსასრულებლად წარდგენის შემდეგ მისი დამუშავების პროცედურა შემდეგში მდგომარეობს:

1) საკლირინგო პალატა ამოწმებს გრძელი ღია პოზიციების არსებობას ოფციონების მოცემულ სერიაში, რომელიც განცხადების შემტანს გააჩნია.

2) ღია პოზიციები ოფციონებში შეიცვლება სათანადო ფიუჩერსული პოზიციებით.

3) იმ პორტფელებიდან, რომლებიც შეიცავენ მოკლე პოზიციებს ამავე სერიის ოფციონებში, ამოარჩევენ ერთ ან რამოდენიმე კონტრაგენტს, რომლებსაც გაეხსნებათ საწინააღმდეგო ფიუჩერსული პოზიცია იმავე რაოდენობის კონტრაქტებზე.

4) როგორც განცხადების შემტანს, ისე მის კონტრაგენტს, დაერიცხებათ ვარიაციული მარჟა.

მაგალითი 4.7. ვთქვათ, 10 მარტს ვაჭრობის მონაწილემ შეიძინა აპრილის პუტ ოფციონი სტრაიკით 2000 და კონტრაქტის ფასით 155. დავუშვათ, 10 აპრილს ტრეიდერს სურს აღასრულოს ოფციონი და შეაქვს განცხადება საკლირინგო პალატაში. საკლირინგო პალატა მოძებნის კონტრაგენტს ამავე სერიაში, რომელსაც მოკლე პოზიცია უჭირავს. თუ აპრილის ფიუჩერსის მიწოდების ფასი 10 აპრილს იყო 1809, მაშინ ოფციონის მფლობელს გაეხსნება მოკლე ფიუჩერსული პოზიცია მიწოდების ფასით 2000, მას დაერიცხება ვარიაციული მარჟა 191 და ამის შემდეგ ჩაითვლება, რომ პოზიცია მიყვანილია ბაზართან, ანუ ტრეიდერს აქვს მოკლე ფიუჩერსული პოზიცია მიწოდების ფასით 1809. კონტრაგენტს გაეხსნება გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია და მისი ანგარიშიდან ჩამოიწერება 191 (ამ მაგალითში ყველა თანხა მოცემულია პირობით ერთეულებში).

მაგალითი 4.8. ვთქვათ, ერთდროულად ივაჭრება ნაღდი ანგარიშსწორებიანი ფიუჩერსული კონტრაქტი და ამერიკული ოფციონი ფიუჩერსზე. მაშინ, ბუნებრივია, ორივე კონტრაქტის ექსპირაციის თარიღების დამთხვევა. ამასთან, ექსპირაციის დღეს ავტომატურად აღსრულდება ის ოფციონები, რომლებიც ფულით არიან, ანუ მათ სანაცვლოდ გაიხსნება ფიუჩერსული პოზიციები. ამის შემდეგ გასწორდება ანგარიში ფიუჩერსული კონტრაქტების მიხედვით და შემდეგ ეს ფიუჩერსული კონტრაქტებიც იხურება, რადგან ყველა კონტრაქტის სიცოცხლის დრო ამოიწურა.

ოფციონების ანგარიშსწორების ხერხები. არსებობს ანგარიშსწორების ორი ძირითადი ხერხი — ტრადიციული და ფიუჩერსული. გავეცნოთ მათ არსს.

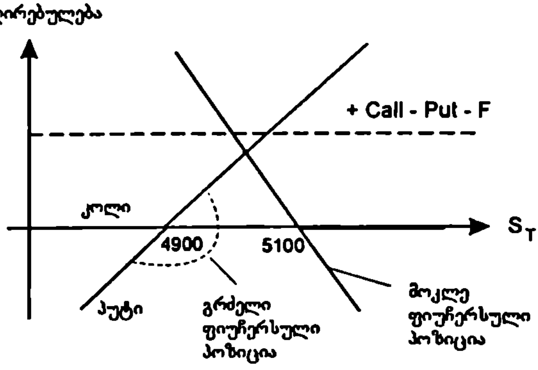
1) ტრადიციული ხერხი — ოფციონის ფასი გადაიხდება მისი შეძენისას. ეს ხერხი მისაღებია თუ ძირითადი ინსტრუმენტი არის, მაგალითად, აქცია, მაგრამ, თუ ძირითადი აქტივი ფიუჩერსია, წარმოიქმნება გარკვეული სირთულეები.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ოფციონების კარგად ცნობილი კომბინაცია — სინთეზური ფიუჩერსი.

სინთეზური ფიუჩერსი წარმოიქმნება, თუ ვიყიდით კოლ ოფციონს და გავყიდით იმავე შეთანხმების ფასის მქონე პუტ ოფციონს.

დავუშვათ (იხ. ნახ. 4.21), $K = 4900$ (პირობით ერთეულს).

მაშინ გვექნება:



ნახ. 4.21

თუ ოფციონის აღსრულების მომენტისთვის ფიუჩერსული კოტირება 4900-ზე მეტია, მაშინ აღვასრულებთ კოლ ოფციონს და მივიღებთ გრძელ ფიუჩერსულ პოზიციას. პუტ ოფციონი, ამ შემთხვევაში, უფულოდ იქნება და არ აღსრულდება.

თუ ფიუჩერსული ფასი 4900-ზე ნაკლები იქნება, მაშინ კოლ ოფციონი უფულოდ იქნება და არ აღსრულდება, ხოლო პუტ ოფციონით ისევ მივიღებთ გრძელ ფიუჩერსულ პოზიციას.

დავუშვათ, ამ სინთეზური ფიუჩერსის პარალელურად გავყიდეთ ჩვეულებრივი ფიუჩერსი 5100 მიწოდების ფასით.

ამ შემთხვევაში სინთეზური ფიუჩერსის გრძელ პოზიციას დახურავს „ნამდვილი“ ფიუჩერსის მოკლე პოზიცია.

საბოლოოდ, ამ ოპერაციის შედეგად, ექსპირაციის მომენტში მივიღებთ პორტფელს, რომლის ფასი არ იქნება დამოკიდებული ფიუჩერსის კოტირებაზე. გრაფიკზე მივიღებთ აბსცისთა ღერძის პარალელურ წრფეს $F - K = 200$ დონეზე.

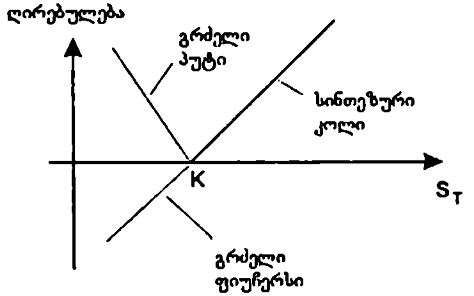
შევნიშნოთ, რომ ჩვენ არ გაგვითვალისწინებია ოფციონების ფასი, პუტის — P და კოლის — C. ამიტომ, საბოლოოდ, ჰორიზონტალური ხაზი უნდა გავატაროთ დონეზე $200 - (C - P)$ (იხ. ნახ. 4.21).

თუ $200 - (C - P) > 0$, ჩვენ მივიღებთ არბიტრაჟულ მოგებას. აღწერილ კომბინაციას რევერსია ჰქვია, საწინააღმდეგოს — კონვერსია.

მართალია, რევერსიის საბოლოო გრაფიკი ექსპირაციის მომენტისათვის ჰორიზონტალურია და საბოლოო შედეგი, ერთი შეხედვით, სავსებით განსაზღვრულია, მაგრამ ფიუჩერსული კოტირების მნიშვნელოვანი ზრდის დროს „ნამდვილი“ ფიუჩერსისთვის საჭიროა ვარიაციული მარჟის გადახდა (გავიხსენოთ, რომ მოკლე პოზიცია კარგავს მარჟას), ხოლო სინთეზური ფიუჩერსით მოგება მხოლოდ პოტენციურია (არ არის რეალიზებული). ამიტომ,

თუ რომელიმე მომენტში არ გვეყოფა ვარიაციული მარჟა, იძულებულნი ვიქნებით დავხუროთ პოზიცია.

ანალოგიურად, განვიხილოთ კომბინაცია — სინთეზური კოლ ოფციონი (იხ. ნახ. 4.22).



ნახ. 4.22

ცხადია, აქ უსიამოვნება წარმოიქმნება ფიუჩერსული კოტირების კლებისას.

არსებობს კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხი სირთულეებს აწყდება: ეს არის ე.წ. დინამიური ჰეჯი. ამ სტრატეგიის გამოყენების დროს ხშირად წარმოიქმნება სიტუაცია, როცა საბაზრო პოზიციები ოფციონებში და ფიუჩერსებში საწინააღმდეგოა. ამასთან, დანაკარგები, რომლებიც წარმოიქმნება ფიუჩერსული პოზიციების ბაზართან მიყვანით, არ ანაზღაურდება დაუყოვნებლივ შენაძენებით ოფციონური პოზიციის ფლობიდან, და პირიქით. ამიტომ ასეთი პოზიციების შენარჩუნება საკმაოდ ძვირი ჯდება და მთელი სტრატეგიის შემოსავლიანობას ამცირებს.

ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ არსებობს შეუსაბამობა ოფციონებისა და ფიუჩერსების ანგარიშსწორების ხერხებს შორის.

ამიტომ LIFFE-ზე (The London International Financial Futures and Options Exchange) შემოიღეს ე.წ. ოფციონების ანგარიშსწორების ფიუჩერსული ხერხი.

მისი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველდღე განისაზღვრება არა მარტო ფიუჩერსის ანგარიშსწორების ფასი, არამედ ანგარიშსწორების ფასებიც ოფციონების ყოველი სერიისთვის(შევნიშნოთ, რომ ტრადიციული ანგარიშსწორების დროსაც საჭიროა ოფციონების ანგარიშსწორების ფასის დადგენა).

ეს საკმაოდ რთული პროცედურაა, რომელიც საჭიროებს როგორც თეორიულ ფორმულებს, ისე ექსპერტთა შეფასებების გამოყენებას.

როცა ეს ფასი დადგენილია, ოფციონის ფასი წინასწარ არ გადაიხდება, არამედ მხოლოდ ფიქსირდება. ამის შემდეგ პოზიცია მიიყვანება ბა-

ზართან ჩვეულებრივი წესით. ამ წესით ანგარიშსწორებისას ოფციონის დამუშავების პროცედურას ემატება ერთი ოპერაცია — ოფციონის მფლობელს ჩამოეწერება თანხა, რომელიც ოფციონის ანგარიშსწორების ფასის ტოლია, რადგან ოფციონის პორტფელიდან ამოღებისას პორტფელი იაფდება ამ თანხით.

ტრადიციული ანგარიშსწორებისას ოფციონის აღსრულების შესაძლო სტიმული შეიძლება იყოს ოფციონის შინაგანი ღირებულების დაუყოვნებლივ მიღება. ფიუჩერსული ტიპის ანგარიშსწორებისას ასეთი სტიმული აღარ არის.

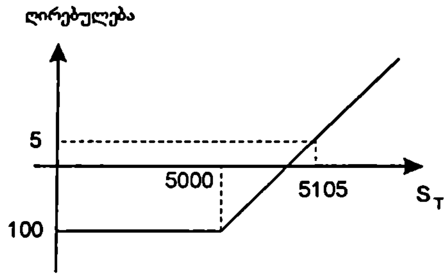
მაგალითი 4.9. ვთქვათ, აღსრულების მომენტამდე ერთი დღით ადრე შეძენილ იქნა კოლ ოფციონი შეთანხმების ფასით 5000 და კონტრაქტის ფასით 100. ვთქვათ, ფიუჩერსული კოტირება იყო 5105 და ამ სერიის ოფციონის ანგარიშსწორების ფასი კი 110.

თუ ოფციონი აღსრულდა ექსპირაციის წინა დღეს, მაშინ:

1. ოფციონზე დაირიცხება ვარიაციული მარჟა: $110 - 100 = 10$.
2. ოფციონური პოზიცია გაუქმდება და ანგარიშიდან ჩამოიწერება 110-ის ტოლი თანხა.
3. იხსნება გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია ფასით 5000.
4. დაირიცხება ვარიაციული მარჟა ფიუჩერსზე $5105 - 5000 = 105$.

საბოლოოდ ვღებულობთ $10 - 110 + 105 = 5$.

ამ მნიშვნელობის შესაბამისი წერტილი აღნიშნულია გრაფიკზე (იხ. ნახ. 4.23).



ნახ. 4.23

ვთქვათ, ექსპირაციის დღეს ფიუჩერსული კოტირება არ იცვლება, ხოლო ოფციონი აღსრულდება არა ყიდვის დღეს, არამედ ექსპირაციის მომენტში.

მაშინ ანგარიშსწორებას აქვს სახე:

1. დაირიცხება ვარიაციული მარჟა ოფციონზე $0 - 110 = -110$.
2. ოფციონური პოზიცია გაუქმდება.
3. იხსნება გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია მიწოდების ფასით 5000.
4. ღია ფიუჩერსულ პოზიციაზე დაირიცხება ვარიაციული მარჟა $5105-5000 = 105$.

ამრიგად, საერთო მარჟა იქნება: $105 - 110 = -5$. პირველი დღის მარჟის გათვალისწინებით ($+10$), საბოლოოდ, ისევ იგივე შედეგს ვღებულობთ: $-5 + 10 = +5$.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა და დავრწმუნდეთ, რომ თუ დეპონირების საპროცენტო განაკვეთს ნულის ტოლად ჩავთვლით, მაშინ ორივე ანგარიშსწორების ხერხი ერთი და იგივე შედეგს გვაძლევს.

ვთქვათ, კოლ ოფციონი სტრაიკით K ვიყიდეთ C ფასად. ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხის მიხედვით მყიდველი დაუყოვნებლივ კარგავს C-ს. თუ ოფციონი არ აღსრულდება ექსპირაციამდე, მაშინ დაიკარგება C თანხა, ხოლო თუ ადრე აღსრულდება, მაშინ ფიუჩერსული პოზიციის ბაზართან მიყვანის შემდეგ მივიღებთ $F - K$-ს და ამიტომ, ამ დღისათვის ჩვენი შემოსავალი იქნება $F - K - C$.

ფიუჩერსული გადახდის წესის მიხედვით დავუშვათ, რომ ოფციონის კოტირებები იყო $C_1, C_2, \ldots, C_T$, სადაც, ცხადია, რომ $C_T = 0$.

თუ ოფციონი არ აღსრულდა, მაშინ ჯამური ვარიაციული მარჟა იქნება

$$(C_1 - C) + (C_2 - C_1) + \cdots + (C_T - C_{T-1}) = C_T - C = -C,$$

თუ ოფციონი აღსრულდა i-ურ დღეს, მაშინ მივიღებთ

$$(C_1 - C) + (C_2 - C_1) + \cdots + (C_i - C_{i-1}) + (F - K - C_i) = F - K - C,$$

ანუ ორივე შემთხვევაში შედეგი ისეთივეა, როგორიც ტრადიციული ანგარიშსწორებისას იყო.

ოფციონთა კლასიფიკაცია. შეიძლება შემოვიღოთ ოფციონთა შემდეგი საკმაოდ ზოგადი და მოხერხებული კლასიფიკაცია:

1. ძირითადი აქტივის მიხედვით — აქცია, ვალუტა, ფიუჩერსი.
2. ოფციონის ტიპის მიხედვით — ევროპული, ამერიკული.
3. ანგარიშსწორების ხერხის მიხედვით — ტრადიციული, ფიუჩერსული.

აქცია, როგორც ვიცით, ორი ტიპისაა — უდივიდენდო და დივიდენდიანი. უდივიდენდო აქცია განაზოგადებს ისეთ აქტივებს, რომელთა შენახვა უფასოა, ამასთან, მათი ფლობა არ იძლევა შემოსავალს. დივიდენდიანი აქცია ისეთი აქტივების კლასის წარმომადგენლად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომელიც იძლევა შემოსავალს დისკრეტულ მომენტებში.

ვალუტა აზოგადებს ისეთ აქტივს, რომლის ფასი იზრდება დროის ინტერვალის ზრდის პროპორციულად ცნობილი ზრდის სიჩქარით (უცხო ქვეყანაში მოქმედი საპროცენტო განაკვეთით). ეს აქტივი ანალოგიურია აქციისა ცნობილი დივიდენდური შემოსავლით. ამრიგად, იმის გამო, რომ ფიუჩერსული ანგარიშსწორება მხოლოდ ფიუჩერსული ოფციონებისთვის იხმარება, გვაქვს 8 შესაძლო კომბინაცია.

ამ კომბინაციებისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნები: C^{AET} — კოლ ოფციონის ფასი აქციაზე, ევროპული ტიპის, ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხით; P^{FAF} — პუტ ოფციონის ფასი ფიუჩერსზე, ამერიკული ტიპის, ფიუჩერსული ანგარიშსწორების ხერხით და ა.შ.

მაგალითად, ბლეკ-შოულსის ფორმულა თავდაპირველად მიღებული იყო C^{AET} და P^{AET}-თვის.

ფასგათვლის ფორმულა. იმისათვის, რომ მივიღოთ ასეთი კონტრაქტის ფასგათვლის ფორმულები, მივმართოთ ბლეკის მოდელს.

უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ფიუჩერსული ფასი, F, დაკავშირებულია მისი საბაზისო აქტივის ფასთან, S, შემდეგი ფორმულით

$$F = Se^{\alpha(T-t)},$$

სადაც α სხვადასხვა შემთხვევაში სხვადასხვაა. მაგალითად, უცხოური ვალუტის შემთხვევაში $\alpha = r - r_f$, სამომხმარებლო საქონლის შემთხვევაში $\alpha = r + u$, სადაც u ასახავს საქონლის შენახვისათვის საჭირო თანხას და ა.შ.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $\alpha = \alpha(t)$ (მაგრამ არ არის S-ის ფუნქცია) და თვით S-ის ვოლატილობა σ მუდმივია, მაშინ F-ის ვოლატილობაც მუდმივია და უდრის σ-ს.

ამ შემთხვევაში შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ფიუჩერსული ფასი F შეიძლება განხილულ იქნას როგორც აქტივი, რომელიც იხდის ცნობილ დივიდენდურ შემოსავალს, r.

ამრიგად, იმისათვის რომ მივიღოთ ფიუჩერსული ოფციონების ფასის გამოსათვლელი ფორმულები, საჭიროა ბლეკ-შოულსის ფორმულებში S შეიცვალოს F-ით, ხოლო q შეიცვალოს r-ით.

მივიღებთ

$$C_t^{FET} = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - KN(d_2)],$$

$$P_t^{FET} = e^{-r(T-t)}[KN(-d_2) - FN(-d_1)],$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{F}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

ფიუჩერსზე ევროპული კოლ ოფციონის ფასი ანგარიშსწორების ფიუჩერსული ხერხით, C_t^{FEF}, მოიცემა ფორმულით

$$C_t^{FEF} = F_tN(d_1) - KN(d_2),$$

სადაც d_1 და d_2 იგივეა, რაც ზემოთ.

ამრიგად,

$$C_t^{FEF} = e^{r(T-t)} C_t^{FET}.$$

შენიშვნა. ზემოთ მოყვანილი პუტ ოფციონის ფასები გამოითვლება პუტ-კოლ პარიტეტზე დაყრდნობით. ოცფიონებისათვის ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხით პუტ-კოლ პარიტეტის ამსახველი ფორმულა ასე გამოიყურება

$$C_t^{AET} - P_t^{AET} = e^{-r(T-t)}[S_t e^{r(T-t)} - K].$$

ოფციონებისათვის ფიუჩერსული ანგარიშსწორების ხერხით ფორმულა მარტივდება

$$C_t^{FEF} - P_t^{FEF} = F_t - K.$$

ამ ფორმულის ინტერპრეტაცია ასეც შეიძლება: შეუძლებელია მივიღოთ არბიტრაჟული მოგება რევერსიით ან კონვერსიით.

ვოლატილობის შეფასება. როგორც ბლექ-შოულსის ფორმულებიდან ჩანს, ძირითადი პარამეტრი, რომლის მნიშვნელობაზეც არის დამოკიდებული ოფციონის ფასი, არის ვოლატილობა, σ.

როგორ შევაფასოთ ეს პარამეტრი? ერთ-ერთი გზა არის ისტორიული ვოლატილობის გამოთვლა.

დავაფიქსიროთ დროითი ბიჯი τ. რადგან იგულისხმება, რომ ვაჭრობა არ წარმოებს დასვენების დღეებში, ამიტომ 1 წელიწადი 253 დღედ არის დაყოფილი. ე.ი. $\tau = \frac{1}{253}$. ვიხილავთ ერთდღიან დროით ინტერვალებს. აღვნიშნოთ $t_k = \tau k$ $k = 0, 1, \ldots$ და $F(t_k) = F_k$, სადაც $F(t_0) = F_0 = F$.

აქ ჩვენ ძირითად ინსტრუმენტად აღებული გვაქვს ფიუჩერსი და ამიტომ მის ფასს აღვნიშნავთ F სიმბოლოთი. ეს გამოწვეულია იმ სურვილითაც, რომ ორივე ძირითადი წარმოებული ინსტრუმენტი — ფიუჩერსი და ოფციონი — მჭიდრო კავშირში განვიხილოთ.

როგორც ვიცით, ფასის ევოლუციის მოდელს აქვს სახე

$$\frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k-1}} = \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

სადაც μ და σ, შესაბამისად, წანაცვლების და ვოლატილობის კოეფიციენტებია, ხოლო ξ_k დამოუკიდებელი სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეებია.

შევნიშნოთ, რომ მიახლოებით

$$F_k = Fe^{\mu t_k}, \quad t_k = \tau k.$$

გამოვთვალოთ სიდიდეები

$$\mu_1 = \frac{F_1 - F_0}{F_0\tau}, \ \mu_2 = \frac{F_2 - F_1}{F_1\tau}, \ \cdots, \ \mu_m = \frac{F_m - F_{m-1}}{F_{m-1}\tau}$$

და მათი საშუალო არითმეტიკული

$$\overline{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m}{m}.$$

მაშინ ვოლატილობის შეფასება იქნება

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\tau \frac{(\mu_1 - \overline{\mu})^2 + \cdots + (\mu_m - \overline{\mu})^2}{m-1}}.$$

ამ მახასიათებლის ტიპიური მნიშვნელობები სასაქონლო ბირჟებზე 15–30%-ია, ხოლო სავალუტო ბირჟებზე — 3–10%.

თუ გავიხსენებთ იმ ფაქტს, რომ ფიუჩერსულ ფასს ლოგნორმალური განაწილება აქვს (იხ. ფასის ევოლუციის მოდელი) საშუალოთი

$$\overline{F}(t) = Fe^{\mu t}, \tag{4.58}$$

მაშინ საშუალო კვადრატული გადახრა მიახლოებით ასე გამოითვლება

$$\sigma_{F(t)} = \overline{F}(t)\sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1} \approx \overline{F}(t)\sigma\sqrt{t}. \tag{4.59}$$

თუ ამ ფორმულაში ავიღებთ $t = 1$, მაშინ გვექნება

$$\sigma_{F(1)} = \overline{F}(1)\sigma,$$

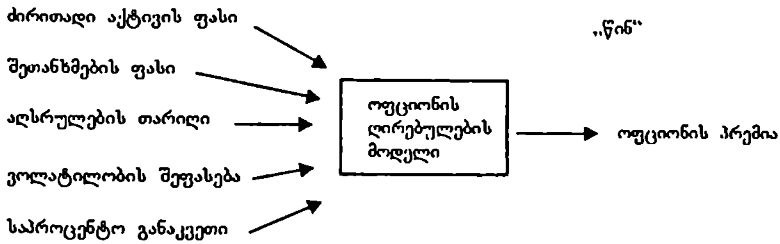
რაც შემდეგი ინტერპრეტაციის საშუალებას გვაძლევს: თუ, მაგალითად, $\sigma = 20\%$, მაშინ ერთწლიანი პროგნოზისაგან ფასის პროცენტული გადახრა ტოლი იქნება 20%-ის.

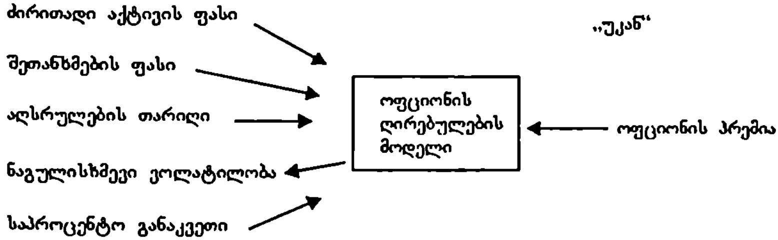
განასხვავებენ ვოლატილობის 4 ტიპს.

ჭეშმარიტი მომავალი ვოლატილობა. ეს სიდიდე ცნობილი გახდება მხოლოდ მოცემული პერიოდის გავლის შემდეგ.

ისტორიული ვოლატილობა. ამ პარამეტრის გამოთვლის მარტივი მეთოდი ახლახანს აღვწერეთ.

ვოლატილობის პროგნოზი. შევჩერდეთ ვოლატილობის პროგნოზის ერთ სტატისტიკურ ხერხზე. დავაფიქსიროთ „ფანჯარა", რომლის სიგრძეა, მაგალითად, 1 თვე (დაახლოებით 20 სავაჭრო დღე). „გავასრიალოთ" ეს ფანჯარა ფასების ცვლილების გრაფიკზე. ამასთან, ყოველ მომენტში გამოვთვალოთ $\overline{\mu}$ და $\overline{\sigma}$ და ეს წერტილები შევუსაბამოთ თარიღს, რომელიც ფანჯრის მარჯვენა ბოლოს წარმოადგენს. მიღებული მონაცემები შემდგომი პროგნოზის კარგი ორიენტირი იქნება.





ნახ. 4.24

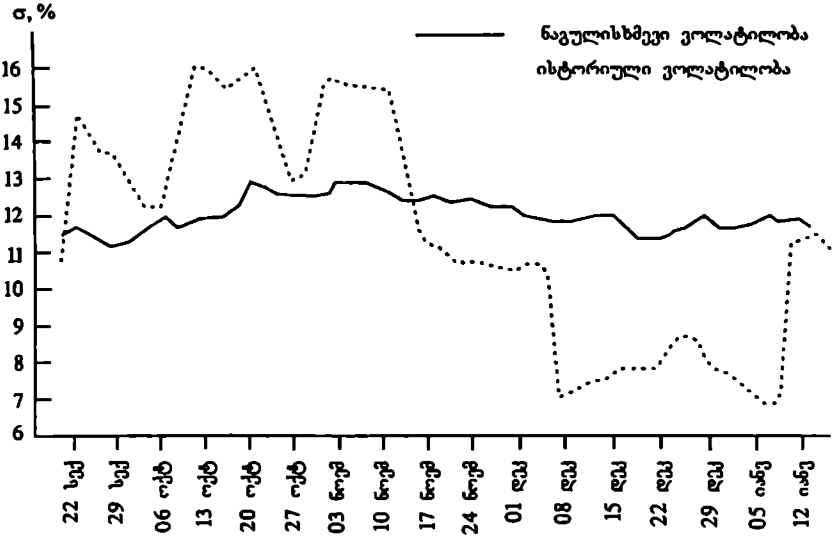
შევნიშნოთ, რომ დასავლეთის ბირჟებზე ემპირიულად აღმოაჩინეს შემდეგი ფაქტი, რომელსაც „საშუალოსკენ შემობრუნება" ჰქვია — საკმაოდ დიდი დროითი შუალედის განხილვის დროს ისტორიული ვოლატილობის გრაფიკი ირხევა თავისი საშუალო სიდიდის გარშემო — ხდება საშუალოსკენ შემობრუნება. მაგალითად, NYMEX-ზე WTT სორტის ნავთობზე ეს საშუალო არის 25%, ლონდონის ბირჟაზე საშუალო არის 20%.

ნაგულისხმევი ვოლატილობა. როგორც ვიცით, ნაგულისხმევი ვოლატილობა შემდეგნაირად გამოითვლება. უნდა დავაფიქსიროთ ოფციონის ბაზრის ფასი. შემდეგ ავიღოთ ბლეკ-შოულსის ფორმულა და გავუტოლოთ ბაზრის ფასს. უცნობი σ ამოვხსნათ მიღებული არაცხადი განტოლებიდან.

სქემატურად სიტუაცია აღწერილია ნახ. 4.24-ზე.

შევნიშნოთ, რომ ისტორიული და ნაგულისხმევი ვოლატილობები ხშირად სხვადასხვა მნიშვნელობებს იღებენ. თუ როგორია მათ შორის თანაფარდობა, ნათლად ჩანს ნახ. 4.25-ზე.

ჩვენ ვიცით, რომ ვოლატილობა ძირითადი აქტივის შემოსავლიანობის ცვლილების დონესთანაა დაკავშირებული. მიუხედავად ამისა, მასზე დაყრდნობით, შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა თვით ძირითადი აქტივის (ჩვენ შემთხვევაში, ფიუჩერსული ფასების) განაწილების შესახებ. თუ წლიურ შემოსავლიანობას აქვს ნორმალური განაწილება μ საშუალოთი და σ ვოლატილობით, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ:



ნახ. 4.25

1) ფასის საშუალო სიდიდე t დროის შემდეგ ტოლია $F_0e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t}$;

2) ფასის განაწილების მედიანა t დროის შემდეგ ტოლია $F_0e^{\mu t}$;

3) ალბათობა იმისა, რომ ფასი აღმოჩნდება

$$F_0e^{\left(\mu t-\sigma\sqrt{t}\right)},\ F_0e^{\left(\mu t+\sigma\sqrt{t}\right)}$$

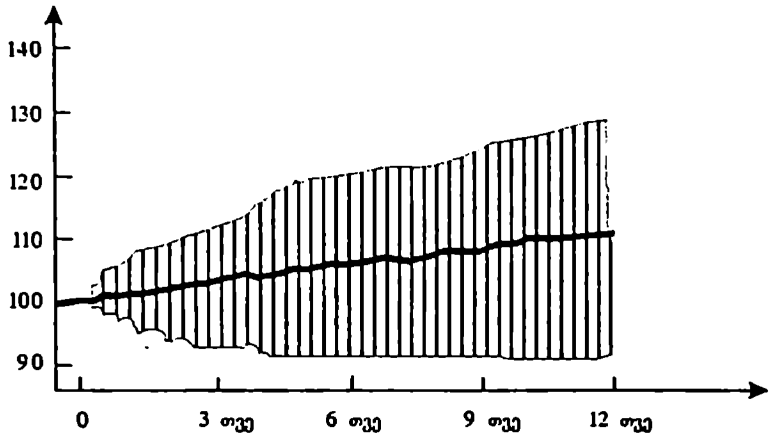
შუალედში, უდრის 68.3%-ს;

4) ალაბათობა იმისა, რომ ფასი აღმოჩნდება

$$F_0e^{\left(\mu t-2\sigma\sqrt{t}\right)},\ F_0e^{\left(\mu t+2\sigma\sqrt{t}\right)}$$

შუალედში, უდრის 95.4%-ს.

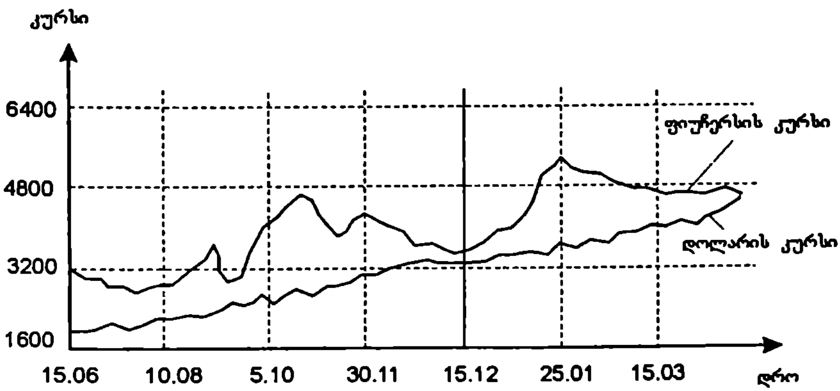
ნახ. 4.26-ზე მოცემულია მონტე-კარლოს მეთოდით მიღებული ე.წ. ვოლატილობის დერეფანი. მასზე ნაჩვენებია ვოლატილობის 68.3%-იანი ნდობის ინტერვალის დინამიკა დროში, ცენტრალური წირი — ფასის მედიანის გრაფიკა.



ნახ. 4.26

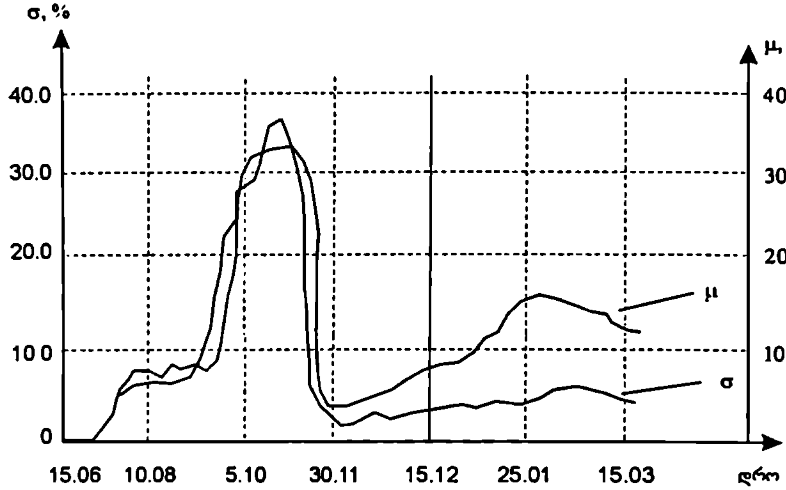
ნაგულისხმევი ვოლატილობის გრაფიკებიც გამოიყენება საპროგნოზოდ. აქაც ადგილი აქვს საშუალოსკენ შემობრუნებას.

მაგალითი 4.10. შევამოწმოთ რიცხვით მაგალითზე შემოთავაზებული ფასის მოდელის შესაბამისობა რეალურ მონაცემებთან (იხ. ნახ. 4.27).



ნახ. 4.27

ამ ნახაზზე მოცემულია დოლარის სპოტ კურსისა და ფიუჩერსული კურსის ცვლილების გრაფიკები, ხოლო ნახ. 4.28-ზე — დოლარის კურსის საშუალო ზრდის ტემპის, μ, და ვოლატილობის, σ, გრაფიკები.



ნახ. 4.28

ნახაზებიდან ჩანს, რომ 5.10-ის მიდამოს გარდა (როცა მოხდა ბაზრის უეცარი შეშფოთება), კურსი ინარჩუნებს მდგრად დინამიკას. ეს ჩანს μ და σ პარამეტრების საკმაოდ მკვეთრად გამოხატულ მუდმივობაში და σ-ს სიმცირეში.

პროგნოზირების უმარტივესი მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ სამომავლო მნიშვნელობებად ავიღოთ μ-ს და σ-ს ბოლო მნიშვნელობები. მაგალითად, ვთქვათ, 15.02-ში ვაპროგნოზებთ 15.03-ში კურსის სიდიდეს. გრაფიკიდან ვპოულობთ, რომ $\mu = 131.5\%$, $\sigma = 4.39\%$. თუ ამ რიცხვებს ჩავსვამთ (4.58), (4.59) ფორმულებში, მივიღებთ:

$$\overline{F} = 4266 e^{1.315 \cdot \frac{21}{253}} = 4758,$$

მისი საშუალო კვადრატული გადახრა არის

$$\sigma_F = 4758 \cdot 0.439 \cdot \sqrt{\frac{21}{253}} \approx 60.$$

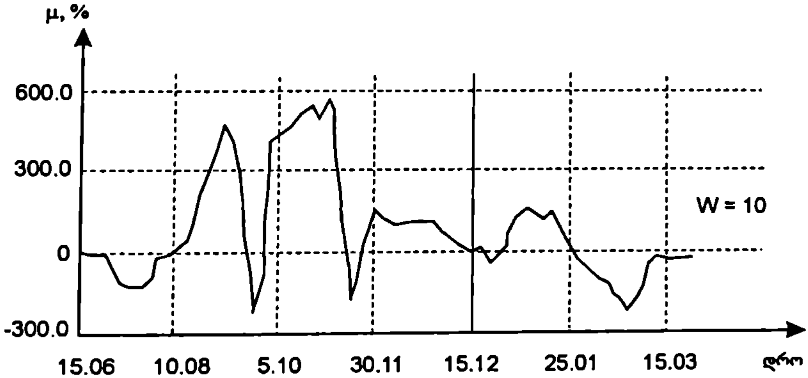
რეალური კურსი 15.03-თვის იყო 4744. შეცდომა 14 ერთეულის ტოლია. თუ ტენდენცია შენარჩუნდა, მაშინ კურსის საშუალო დღიური ცვლილება 15.02–15.03 პერიოდში იქნება

$$4266 \cdot e^{\frac{1.315}{253}} \approx 22.$$

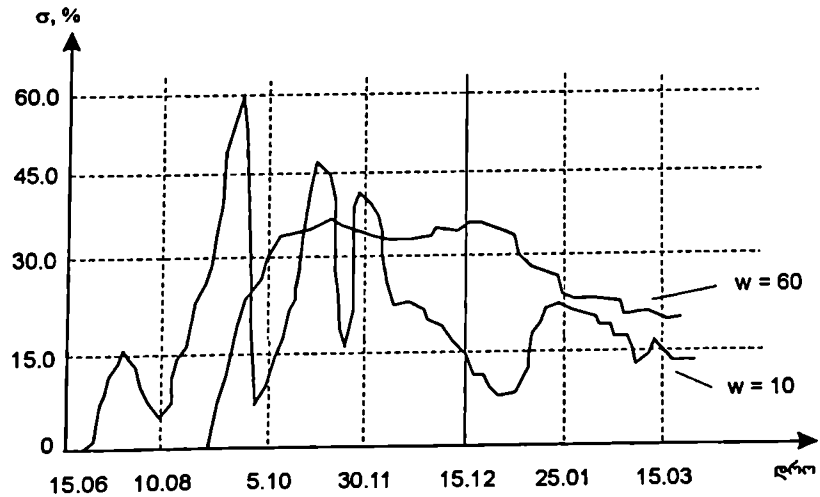
საშუალო კვადრატული გადახრა იქნება

$$4266 \cdot 0.0439 \cdot \sqrt{\frac{1}{253}} \approx 12.$$

3σ-ს კანონის თანახმად, ალბათობა იმისა, რომ კურსის დღიური ცვლილება გავა $[-14, 58]$ შუალედიდან არ აღემატება 0.3%-ს. სინამდვილეში, კურსი ყოველთვის ამ ფარგლებში იყო (მოსკოვის საფონდო ბირჟის მონაცემები).



ნახ. 4.29



ნახ. 4.30

ზემოთ აღწერილმა პროგნოზირების უმარტივესმა მეთოდმა კარგი შედეგი მოგვცა, მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არ არის. მაგალითში ჩვენ განვიხილეთ შედარებით წყნარი პერიოდი, რომელიც მოყვა ბაზრის შეშფოთებას: μ-ს ცვალებადობა იყო 60–150%, σ-სი — 2–5%, ამიტომ მარტივი პროგნოზიც კი მაღალეფექტური აღმოჩნდა.

ფიუჩერსული კოტირებები ნაკლებად მდგრადია (ეს ზოგადი ემპირიული ფაქტია) და, ამდენად, უფრო ძნელად პროგნოზირებადია.

ნახ. 4.29-ზე ნაჩვენებია ფიუჩერსული კოტირების ზრდის ტემპის, μ-ს, ცვლილება (პროცენტებში), როდესაც ფანჯრის სიგანე არის $W = 10$. ნახ. 4. 30-ზე მოცემულია ფიუჩერსული კურსის ვოლატილობის გრაფიკები იმ შემთხვევებში, როცა ფანჯრის სიგანე არის $W = 60$ და $W = 10$.

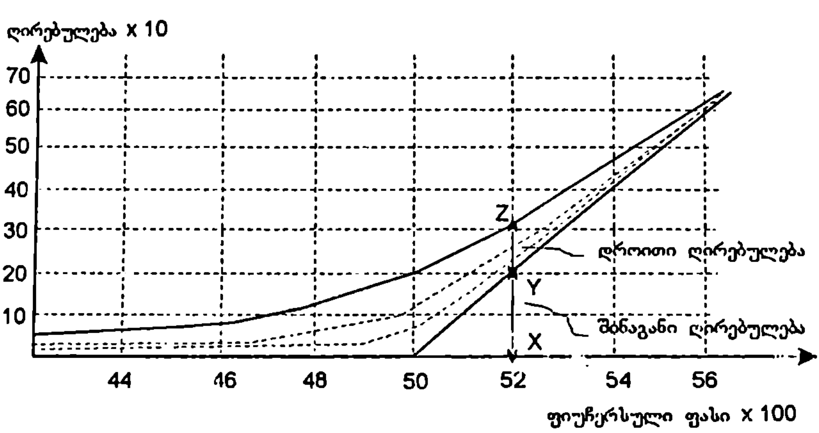
ჩვენ გამოვიყენებთ მოყვანილი გრაფიკების ბოლო სამთვიან პერიოდს დინამიური პეჯის ილუსტრაციისთვის.

ევროპული ოფციონების ღირებულების გრაფიკული ანალიზი. ტერმინებში ფასი და ღირებულება ჩვენ სხვადასხვა შინაარს ვდებთ.

ფასი (რაიმე ვაჭრებადი აქტივისა) არის სიდიდე, რომელიც დგინდება ბაზარზე თავისუფალი ვაჭრობის პირობებში და რომლითაც კონტრაქტი რეალურად შედის ძალაში.

ღირებულება აბსტრაქტული სიდიდეა და გვიჩვენებს ფასს, რომლითაც თეორიულად უნდა შესულიყო ძალაში კონტრაქტი იმისათვის, რომ კონტრაქტის არც ერთ მხარეს არ მიეღო არბიტრაჟული მოგება. ღირებულება გამოითვლება გარკვეული იდეალიზირებული დაშვებების პირობებში და წარმოადგენს ორიენტირს რეალური ფასის დადგენისას.

ევროპული ოფციონი ფიუჩერსზე ფიუჩერსული ანგარიშსწორების ხერხით (იხ. ნახ. 4.31).



ნახ. 4.31

XY მონაკვეთი შინაგანი ღირებულებაა, YZ — დროითი ღირებულება. თუ ოფციონი უფულოდაა ან ფულთანაა, მაშინ მისი შინაგანი ღირებულება ნულის ტოლია და მთელი ღირებულება დროით ღირებულებას წარმოადგენს.

დროის სვლასთან ერთად (ე.ი., როცა $t \to T$) ოფციონის ღირებულება მცირდება და უახლოვდება შინაგან ღირებულებას — მსხვილ ტეხილ ხაზს. წყვეტილი ხაზები გვიჩვენებს სხვადასხვა მომენტში ოფციონის ღირებულებას. ამასთან ჩანს, რომ თუ ოფციონი ფულთანაა, მაშინ მისი დროითი ღირებულება ყველაზე სწრაფად მცირდება.

შევნიშნოთ, რომ ევროპული კოლ და პუტ ოფციონის დროითი ღირებულება (ერთსა და იგივე სტრაიკზე) ტოლია. კერძოდ, ტოლია კოლის და პუტის სრული ღირებულებები, თუ ოფციონები მკაცრად ფულით არიან.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ოფციონის ღირებულების გრაფიკი მით უფრო მაღლაა, რაც უფრო დიდია $\sigma\sqrt{T}$, ანუ რაც უფრო დიდია ვოლატილობა და ექსპირაციამდე დარჩენილი დრო.

ამის ჩვენება შეიძლება ფორმალურად. ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ გამარტივებულ მოსაზრებებს.

ვთქვათ, მიმდინარე ფიუჩერსული კოტირებაა 5000 და გამყიდველი განსაზღვრავს ფასს, რომლითაც მას სურს გაყიდოს კოლ ოფციონი სტრაიკით 6000. რაც უფრო დიდია ალბათობა იმისა, რომ T მომენტში ფიუჩერსული ფასი იქნება 6000-ზე მეტი, მით უფრო დიდი იქნება მოთხოვნა ასეთ საქონელზე. აღნიშნული ალაბათობის სიდიდე დამოკიდებულია ბაზრის ვოლატილობაზე. წყნარი ბაზრის პირობებში (ე.ი., როცა σ პატარაა) მოთხოვნილება ოფციონზე ნაკლები იქნება, დიდი σ-ს დროს კი — მეტი.

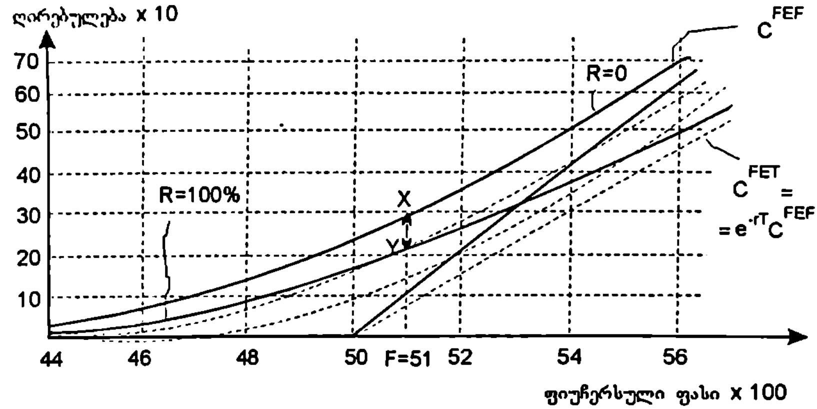
ბოლოს შევნიშნოთ, რომ კოლ ოფციონის ღირებულება ვერ გახდება ფიუჩერსულ კოტირებაზე მეტი, რადგან ასეთ დაზღვევას აზრი არა აქვს. ასევე, პუტ ოფციონის ღირებულება ვერ გახდება სტრაიკზე მეტი.

ევროპული ოფციონი ფიუჩერსზე ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხით. გავიხსენოთ, რომ სამართლიანია ფორმულა

$$C^{FET} = e^{-rT}C^{FEF}.$$

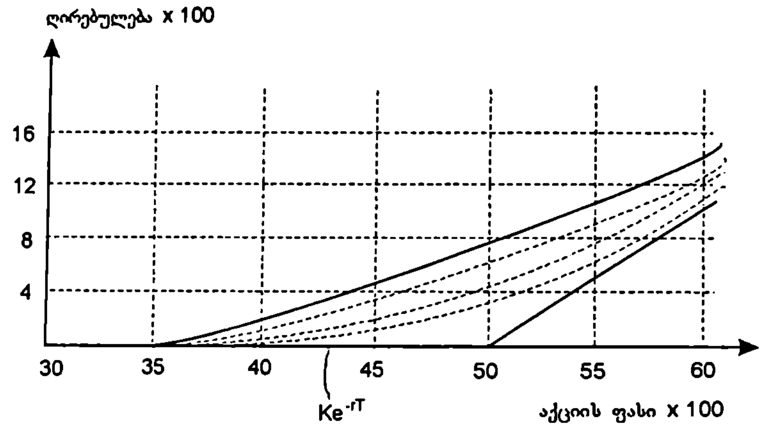
ნახ. 4.32-ზე (R — მარტივად გადათვლილი წლიური საპროცენტო განაკვეთია) XY მონაკვეთს ჰქვია მიტანის ფასი. ის უჩვენებს — მაგალითად, მყიდველის თვალსაზრისით — იმ ხელიდან გაშვებულ შემოსავალს, რომელსაც მოიტანდა ოფციონის ფასი (პრემია), ის რომ r-პროცენტიან დეპოზიტზე დაგვედო. გამყიდველისთვის XY მონაკვეთის სიდიდე ის რეალური შემოსავალია, რომელსაც დეპოზიტი მოიტანს. ამრიგად

$$\text{ოფციონის ღირებულება} = \text{შინაგანი ღირებულება}+$$
$$+\text{დროითი ღირებულება} - \text{მიწოდების ფასი}.$$



ნახ. 4.32

ევროპული ოფციონი უდივიდენდო აქციაზე (იხ. ნახ. 4.33).



ნახ. 4.33

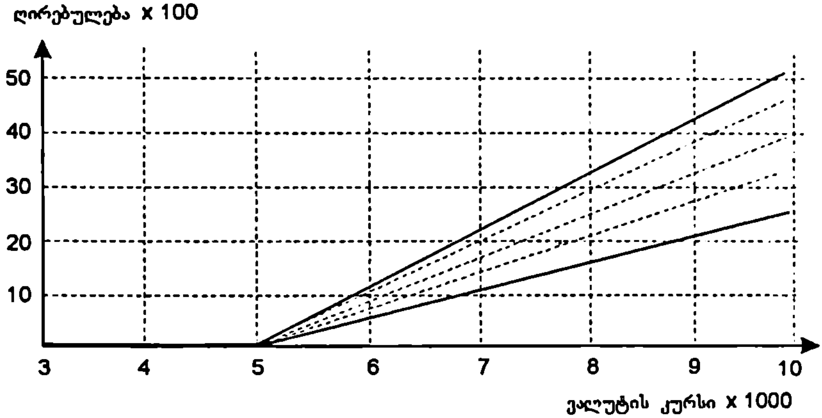
გრაფიკი ჰგავს ნახ. 4.31-ზე მოცემულ გრაფიკს, მაგრამ ჩანაცვლებულია მარცხნივ და ასიმპტოტა გამოდის არა K სტრაიკიდან, არამედ Ke^{-rT}-დან.

აღვნიშნოთ, რომ ღირებულება ყოველთვის მეტია, ვიდრე შინაგანი ღირებულება.

ევროპული ოფციონი დივიდენდიან აქციაზე. ამ შემთხვევაში, წინა შემთხვევისგან განსხვავებით, ფორმულაში S-ის ადგილს იკავებს S^D, ე.ი.

უფრო პატარა სიდიდე და ამიტომ გრაფიკი გადაინაცვლებს მარჯვნივ. ამიტომ კოლ ოფციონი (აქციის მიმდინარე ფასის ტოლობის შემთხვევაში) დივიდენდიან აქციაზე უფრო იაფი ღირს, ვიდრე უდივიდენდოზე. პუტ ოფციონი, პირიქით, დივიდენდიან აქციაზე უფრო ძვირი ღირს.

ევროპული ოფციონები ვალუტაზე. ამ ოფციონის ღირებულების გრაფიკი გარკვეულად აერთიანებს წინა გრაფიკების სხვადასხვა თავისებურებას (იხ. ნახ. 4.34).



ნახ. 4.34

მაგალითი 4.11. ვთქვათ 16 მაისს ევროპული კოლ ოფციონი ვალუტაზე ($US) ექსპირაციის დღით 16 აგვისტო და სტრაიკით $K = 2240$ ღირს $C = 80$.

დოლარის კურსი ამ დღეს იყო 1877. ფორვარდული კურსი 16 აგვისტოსთვის — 2340.

რადგან ფორვარდული კურსი უშუალოდ მოცემულია, ამიტომ შეიძლება შევცვალოთ $Se^{(r_d-r_f)T}$ გამოსახულება F-ით და გამოვიყენოთ ბლექ-შოულსის ფორმულა.

ოფციონის ფასი, $C = 80$, ნაკლებია, ვიდრე ოფციონის შინაგანი ღირებულება $(2340 - 2240 = 100)$, რაც იმით არის გამოწვეული, რომ ბლექ-შოულსის ფორმულაში მონაწილეობს დისკონტირება e^{-rT}. განვსაზღვროთ უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი r სამთვიანი განაკვეთიდან $R = 160\%$. მივიღებთ $r = 135\%$. თუ არ გავითვალისწინებთ მიწოდების ფასს, მაშინ ოფციონი ეღირება $e^{1.35/4} \cdot 80 = 112$. გამოთვლები შეიძლება ვაწარმოოთ უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთის გამოყენების გარეშეც. თუ გამოვიყენებთ ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის ცნებას, გვექნება $(1 + \frac{1.6}{4}) \cdot 80 = 112$.

ამრიგად, ფასის დროითი შემადგენელია $12 = 112 - 100$. მიტანის ფასია $112 - 80 = 32$. ე.ი.

$$80 = 100 + 12 - 32.$$

12-ის ტოლი დროითი ღირებულების მისაღებად, ბლექ-შოულსის ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $\sigma = 10\%$. ე.ი. ნაგულისხმევი ვოლატილობაა 10%.

4.27 არასრული ფინანსური ბაზრები

ოფციონების ფასდადების პრობლემა ეყრდნობა ფინანსურ ვალდებულებათა რეპლიკაციის (ჰეჯირების) იდეას და გასაგებია სრული ფინანსური ბაზრის პირობებში, როდესაც ასეთი რეპლიკაცია ყოველთვის ხერხდება. ბაზარს უწოდებენ სრულს, როდესაც შესაძლებელია მის ძირითად აქტივთა მნიშვნელობაზე დამოკიდებული ნებისმიერი ფინანსური ვალდებულებების ჰეჯირება, საბაზრო აქტივებისგან შემდგარი თვითფინანსირებადი პორტფელის საშუალებით. ადრე განხილული ბინომური ხეებისა და ბლექ-შოულსის მოდელები სრული ფინანსური ბაზრების კერძო მაგალითებს წარმოადგენენ. ამ მოდელების ფარგლებში (ისევე, როგორც ნებისმიერი სრული ბაზრის შემთხვევაში) ოფციონის ფასი განისაზღვრება, როგორც ისეთი მინიმალური საწყისი კაპიტალი, რომელიც საკმარისია მომავალი ფინანსური ვალდებულების სრული ჰეჯირებისთვის (ოფციონის არბიტრაჟული ფასი დროის t მომენტში ამავე მომენტში მაჰეჯირებელი სტრატეგიის შესაბამისი კაპიტალის მნიშვნელობის ტოლია). ასეთნაირად განსაზღვრული ოფციონის (ან სხვა ფინანსური ვალდებულების) ფასი ერთადერთია და მისგან განსხვავებულ ნებისმიერ სხვა ფასად ოფციონის ყიდვა ან გაყიდვა არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობას იძლევა.

არასრული ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში, სრული ბაზრისაგან განსხვავებით, საბაზისო აქტივთა ფასების სისტემა არ არის საკმარისი გაურკვეველი გარემოს სრულად აღსაწერად. ბაზარი რეაგირებს სხვა ფაქტორებზეც (მაგალითად, საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებაზე, სხვა აქტივთა ფასებზე), როგორც ბაზრის შიგნით, ასევე მის გარეთ და ოფციონის ფასი არ არის დამოკიდებული მხოლოდ საბაზისო აქტივთა ფასებზე. ასეთ დროს ყოველთვის ვერ ხერხდება მომავალი გაურკვეველი რისკის სრული ელიმინირება (გაქრობა) საბაზისო აქტივებისგან შემდგარი პორტფელების საშუალებით და შესაძლებელია მხოლოდ რისკის მინიმუმის მიმნიჭებელი (მაგალითად, საშუალო კვადრატული ან რაიმე სხვა აზრით) პორტფელის შექმნა ან მომავალი რისკის ერთი მხრიდან (ზემოდან ან ქვემოდან) რეპლიცირება. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ანგარიშდება ფინანსური ვალდებულების (ზედა

და ქვედა პეჯის შესაბამისი) მაქსიმალური და მინიმალური ფასები, რომლებიც ქმნიან ოფციონის არაარბიტრაჟული ფასების ინტერვალს. ამიტომ არასრული ბაზრის შემთხვევაში საუბარია არა კონტრაქტის სამართლიან ფასზე (როგორც ეს ხდება სრული ბაზრის დროს), არამედ კონტრაქტის ზედა და ქვედა ფასებს შორის ინტერვალიდან არაარბიტრაჟული ფასის არჩევაზე, რომელზეც უნდა მოხდეს შეთანხმება ოფციონის მყიდველსა და მის გამყიდველს შორის.

ჩვენ ვიანგარიშებთ ოფციონის (და სხვა ფინანსურ ვალდებულებათა) მაქსიმალურ და მინიმალურ ფასებს არასრული ფინანსური ბაზრის უმარტივეს მაგალითზე — ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეების მოდელისთვის, როდესაც საბაზისო აქციის კურსი იცვლება მხოლოდ ოფციონის აღსრულების მომენტში და ამ დროს დადებითი ალბათობით იღებს სამ მნიშვნელობას. ჩვენ ვნახავთ, რომ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელი სრულია მხოლოდ მეოთხე თავში განხილულ შემთხვევაში, ანუ როდესაც საბაზისო აქციამ (იგივე პირობებში) შეიძლება მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა.

უწყვეტი დროითი დინამიკის მქონე არასრული ფინანსური ბაზრის ტიპიურ მაგალითებს წარმოადგენენ ე.წ. სტოქასტური ვოლატილობის მოდელები. როგორც ვიცით, ბლეკ-შოულსის მოდელი გულისხმობს, რომ საბაზისო აქტივის ფასი აღიწერება დიფუზიური პროცესით, რომლის ვოლატილობის კოეფიციენტი მუდმივია. სინამდვილეში (და ამას ბევრი ემპირიული გამოკვლევა ადასტურებს) ვოლატილობის კოეფიციენტი, როგორც წესი, დამოკიდებულია დროით პარამეტრზე, საბაზისო აქტივის მიმდინარე ფასზე (ან მის წარსულ რეალიზაციაზე), შეიძლება დამოკიდებული იყოს სხვა აქტივებზე და თვითონ წარმოადგენდეს დიფუზიურ პროცესს. მაგალითად ხშირად იხილავენ მოდელს, როდესაც საბაზისო აქციის ფასი აღიწერება

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

დიფუზიური პროცესით, სადაც ვოლატილობა σ_t წარმოადგენს

$$d\sigma_t = a(t, \sigma_t)dt + b(t, \sigma_t)dW_t$$

სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას. უწყვეტი დროის მოდელებში ბაზრის არასისრულე შეიძლება გამოიწვიოს დროითი პარამეტრისა და აქტივების ფასების გარკვეულ მნიშვნელობებისთვის ვოლატილობის კოეფიციენტის განულებამ (ვოლატილობის მატრიცის გადაგვარებულობამ ბაზრის მრავალგანზომილებიანი დიფუზიური მოდელის შემთხვევაში) ან, მაგალითად, მისმა დამოკიდებულებამ სხვა აქტივებზე (ან სხვა ფაქტორებზე), რომლებიც არ არიან ლიკვიდური (ან ასეთი აქტივებით არ ვაჭრობენ) და მათი გამოყენება ჰეჯირების პროცესში შეუძლებელია.

ასეთი მოდელებისათვის ფინანსური ვალდებულებების ფასდადების პრობლემა ეყრდნობა სტოქასტური ანალიზის რთულ აპარატს და ჩვენ მას

აქ არ განვიხილავთ. ამ საკითხებთან დაკავშირებით იხ., მაგალითად, [1], [2], [41], [95], [126].

განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის მოდელი. დავუშვათ, რომ აქციის ფასი დროის ნულოვან მომენტში მკაცრად დადებითი მუდმივი სიდიდეა ($S_0 > 0$), არ იცვლება T მომენტამდე და T მომენტში კი, დადებითი ალბათობით შეუძლია მიიღოს სამი მნიშვნელობა S_1, S_2 ან S_3.

ვთქვათ, საპროცენტო განაკვეთი r მუდმივია, დისკონტირება ხდება მარტივი პროცენტის დარიცხვის წესით და სრულდება შემდეგი პირობები

$$S_1 < S_0(1+r) < S_2 < S_3. \tag{4.60}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს უკანასკნელი პირობა უზრუნველყოფს არბიტრაჟის არ არსებობას (იმ შემთხვევაში, როდესაც $S_0(1+r) \leq S_1$ ან $S_0(1+r) \geq$ $\geq S_3$, არბიტრაჟული სტრატეგიები მარტივად აიგება 4.15 პუნქტში განხილული ორმნიშვნელობიანი მოდელის მსგავსად).

განვიხილოთ F ფინანსური ვალდებულება T მომენტში აღსრულების ვადით, რომელიც წარმოდგება $F = f(S_T)$ სახით, რომელიმე $f : R \to R$ გადახდის ფუნქციისათვის.

ვთქვათ, $\pi = (\beta, \gamma)$ აღნიშნავს ინვესტორის (რომელსაც უჭირავს მოკლე პოზიცია) სტრატეგიას. განსახილველ ერთნაბიჯიან მოდელში სტრატეგია (ანუ პორტფელი) განისაზღვრება β და γ რიცხვთა წყვილით, რომელთა მნიშვნელობები უნდა შეირჩეს დროის ნულოვან მომენტში. γ და β შესაბამისად აღნიშნავენ აქციებისა და ობლიგაციების რაოდენობას პორტფელში. ამ მოდელში $\pi = (\beta, \gamma)$ პორტფელის თვითფინანსირებადობა ნიშნავს, რომ მისი შესაბამისი საწყისი კაპიტალი $\beta + \gamma S_0$ სიდიდის ტოლია და მისი მნიშვნელობა T მომენტში $\beta(1+r) + \gamma S_T$ სიდიდის ტოლი ხდება (ანუ არ ხდება არც კაპიტალის გაცემა და არც გარედან მისი მიღება, ამ პორტფელის კაპიტალი იცვლება მხოლოდ აქციისა და ობლიგაციის ფასების ცვლილების ხარჯზე).

გადავწეროთ T მომენტში $\pi = (\beta, \gamma)$ პორტფელის შესაბამისი მნიშვნელობა, $V_T(\pi) = \beta(1+r)+\gamma S_T$, ჩვენთვის მოხერხებული შემდეგი ფორმით

$$V_T^\pi = c(1+r) + \gamma(S_T - S_0(1+r)),$$

სადაც $c = \beta + \gamma S_0$ წარმოადგენს $\pi = (\beta, \gamma)$ პორტფელის საწყის კაპიტალს. $f(S_T)$ ფინანსური ვალდებულების შესაბამისი მაჰეჯირებელი სტრატეგია განისაზღვრება შემდეგი სამი წრფივი განტოლებით

$$c(1+r) + \gamma(S_i - S_0(1+r)) = f(S_i); \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.61}$$

ვინაიდან გვაქვს სამი წრფივი განტოლება მხოლოდ ორი უცნობით, (4.61) განტოლებათა სისტემას ყოველთვის არ ექნება ამონახსნი და ამიტომ, არსებობენ ფინანსური ვალდებულებები, რომლებიც არ არიან მიღწევადი, ანუ რომელთათვისაც მაჰეჯირებელი სტრატეგია არ არსებობს (უფრო

ზუსტად, ფინანსური ვალდებულება $f(S_T)$ მიღწევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(f(S_1), f(S_2), f(S_3))$ ვექტორი ეკუთვნის (S_1, S_2, S_3) და $(1,1,1)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებისგან წარმოქმნილ ქვესივრცეს). მაგალითად, როდესაც $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$, (4.61) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი არ არსებობს (თუ გამოვრიცხავთ ტრივიალურ, აზრს მოკლებულ შემთხვევებს, როდესაც $K \leq S_1$ ან $K \geq S_3$).

ამრიგად, ამ მოდელის ფარგლებში, შეუძლებელია ყიდვის (ასევე გაყიდვის) ოფციონის შესაბამისი ფინანსური ვალდებულებების სრული რეპლიცირება. შემოვიღოთ ფინანსურ ვალდებულებათა ზედა და ქვედა ჰეჯის ცნებები, რომელთა საშუალებით განისაზღვრება ფინანსური ვალდებულებების მაქსიმალური და მინიმალური (ანუ მყიდველის და გამყიდველის) ფასები. შევნიშნოთ, რომ ზედა და ქვედა ჰეჯის (ისევე როგორც სრული ჰეჯის) ცნება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ალბათობებით იღებს აქციის კურსი S_1, S_2 და S_3 მნიშვნელობებს T მომენტში, მაგრამ არსებითია და ჩვენ ამას ვუშვებთ, რომ ამ მნიშვნელობებს S_T შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მკაცრად დადებითი ალბათობით.

თვითფინანსირებად π სტრატეგიას უწოდებენ T აღსრულების ვადის მქონე $F = f(S_T)$ ფინანსური ვალდებულების ზედა ჰეჯს (შესაბამისად ქვედა ჰეჯს), თუ

$$V_T(\pi) \geq f(S_T) \quad (\text{შესაბამისად } V_T(\pi) \leq f(S_T))$$

საბაზისო აქტივის კურსის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

F ფინანსური ვალდებულების ზედა (შესაბამისად ქვედა) ფასი $c^*(f)$ (შესაბამისად $c_*(f)$) არის ის უმცირესი (შესაბამისად უდიდესი) საწყისი კაპიტალი, რომლისთვისაც ზედა ჰეჯი (შეს. ქვედა ჰეჯი) არსებობს. მაშასადამე,

$$c^* = \inf\{c \in R : \exists\gamma \in R, c(1+r) + \gamma(S_T - S_0(1+r)) \geq f(S_T)\}, \quad (4.62)$$

$$c_* = \sup\{c \in R : \exists\gamma \in R, c(1+r) + \gamma(S_T - S_0(1+r)) \leq f(S_T)\}. \quad (4.63)$$

სტრატეგიას, რომელზედაც უმცირესი (უდიდესი) მნიშვნელობა მიიღწევა (4.62)-ში ((4.63)-ში), უწოდებენ მინიმალურ ზედა ჰეჯს (მაქსიმალურ ქვედა ჰეჯს). ეს უკანასკნელი განსაზღვრება გულისხმობს, რომ უმცირესი მნიშვნელობა (4.62)-ში მიიღწევა რომელიმე სტრატეგიისთვის. სასრული ფინანსური ბაზრების შემთხვევაში ეს მართლაც ადვილი საჩვენებელია (რასაც ვნახავთ განხილული მოდელის მაგალითზე) და საკმაოდ რთულია უწყვეტი დროითი დინამიკის ფინანსური ბაზრებისთვის.

აღვნიშნოთ, რომ ფინანსური ვალდებულებების ზედა ფასი ყოველთვის მეტია, ან ტოლი იმავე კონტრაქტის ქვედა ფასზე ($c^*(f) \geq c_*(f)$), რაც ზედა და ქვედა ფასების განსაზღვრიდან არც თუ ისე თვალსაჩინოა და

ამას ჩვენ ოდნავ მოგვიანებით ვაჩვენებთ. ეხლა კი შევჩერდეთ ზედა და ქვედა ფასების განსაზღვრის შინაარსობრივ მხარეზე.

ფინანსურ ვალდებულებათა ზედა და ქვედა ფასებს ხშირად კონტრაქტის გამყიდველისა და მყიდველის ფასებს უწოდებენ, რასაც შემდეგი მოსაზრებები უდევს საფუძვლად.

კონტრაქტის ზედა ფასი მისაღებია მისი გამყიდველისთვის, რადგან ამ ფასად კონტრაქტის გაყიდვით ის შეასრულებს თავის ვალდებულებას (ამ კონტრაქტის მყიდველის წინაშე) საბაზისო აქტივის კურსის ნებისმიერი ცვლილებისას (ვინაიდან, ზედა ფასის განსაზღვრის თანახმად, ამ ფასის ტოლი საწყისი კაპიტალით მას შეუძლია ისეთი π პორტფელის არჩევა, რომლის შესაბამისი კაპიტალი კონტრაქტის ბოლოს მის ფინანსურ ვალდებულებას გადააჭარბებს), ხოლო ზედა ფასზე ნაკლები კაპიტალით ის ამას ყოველთვის ვერ მოახერხებს. თუ კონტრაქტი გაიყიდება ზედა ფასზე უფრო ძვირად, მაშინ მის გამყიდველს გაუჩნდება არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობა.

მართლაც, ვთქვათ გამოჩნდა ამ კონტრაქტის x ფასად მყიდველი და $x > c^*(f)$. კონტრაქტის გამყიდველი მიღებული x თანხიდან გამოყოფს $c^*(f)$ თანხას და მოახდენს მის ინვესტირებას ისეთ π პორტფელში, რომლისთვისაც $V_0(\pi) = c^*(f)$ და $V_T(\pi) \geq f(S_T)$. ასეთი პორტფელი არსებობს $c^*(f)$-ის განმარტების თანახმად. ამიტომ, კონტრაქტის გამყიდველი $V_T(\pi)$ კაპიტალით გაისტუმრებს $f(S_T)$ ვალდებულებას და ურისკოდ მიიღებს არანაკლებ $x - c^*(f)$ მკაცრად დადებითი თანხის ტოლ მოგებას.

მაშასადამე, ფინანსური ვალდებულების ზედა ფასი არის მინიმალური დასაშვები ფასი კონტრაქტის გამყიდველისთვის, რადგან ამ ფასით ის ყოველთვის მოახერხებს თავისი მომავალი ვალდებულების გასტუმრებას, ხოლო ამ ფასად კონტრაქტის გაყიდვით მას არ ექნება არბიტრაჟის შესაძლებლობა. ზედა ფასზე უფრო ძვირად კონტრაქტის გაყიდვის შემთხვევაში მის გამყიდველს უჩნდება ურისკო მოგების შესაძლებლობა, რაზეც არაბუნებრივია დათანხმდეს კონტრაქტის მყიდველი.

ფინანსური ვალდებულების ქვედა ფასი მისაღებია კონტრაქტის მყიდველისთვის, რადგან მინიმალური ქვედა ჰეჯის საპირისპირო სტრატეგიის არჩევით და კონტრაქტის ბოლოს თავისი უფლების გამოყენებით (ანუ $f(S_T)$ თანხის მიღებით) მას ექნება დადებითი კაპიტალი აქციის კურსის ყველანაირი ცვლილებისას.

თუ ფინანსური ვალდებულების მყიდველი მოახერხებს კონტრაქტის ყიდვას $c_*(f)$-ზე დაბალ ფასად, მაშინ ის შეძლებს არბიტრაჟული მოგების მიღებას. მართლაც, ვთქვათ მყიდველმა იყიდა კონტრაქტი x ფასად და $x < c_*(f)$. ქვედა ფასის განსაზღვრის თანახმად არსებობს ისეთი π პორტფელი, რომ $V_0(\pi) = c_*(f)$ და $V_T(\pi) \leq f(S_T)$. ამის გათვალისწინებით, კონტრაქტის მყიდველი, რომელმაც კონტრაქტის დასაწყისში გადა-

იხადა $x < c_*(f)$ თანხა და კონტრაქტის ბოლოს ელოდება $f(S_T)$ სიდიდის მიღებას, შემდეგნაირად იქცევა. ის ინვესტირებს $-c_*(f)$ თანხას $-\pi$ პორტფელში, ანუ ირჩევს π პორტფელის საპირისპირო $(-\beta, -\gamma)$ სტრატეგიას, რომლის შესაბამისი კაპიტალი T მომენტში $-V_T(\pi)$-ის ტოლი გახდება. ამიტომ, x ფასად კონტრაქტის ყიდვის და $-c_*(f)$ თანხის ინვესტირების შემდეგ კონტრაქტის მყიდველის მოგება-დანაკარგი ტოლი იქნება მკაცრად დადებითი სიდიდის

$$f(S_T)-x-V_T(\pi)+c_*(f) = (f(S_T)-V_T(\pi))+(c_*(f)-x) \geq (c_*(f)-x) > 0,$$

რაც წარმოადგენს კონტრაქტის მყიდველის ურისკო მოგებას. შევნიშნოთ, რომ ბოლოს მოყვანილი მსჯელობა პირობითია, და გულისხმობს $-c_*(f)$ უარყოფითი თანხის ინვესტირების შესაძლებლობას, რაც განხილულ შემთხვევაში ფაქტიურად $c_*(f)$ ფასად კონტრაქტის მყიდველის მონახვას ნიშნავს.

ახლა თავი მოვუყაროთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობებს.

მაშასადამე, გვაქვს ფინანსური ვალდებულების ფასების სამი ინტერვალი $[0, c_*$, $[c_*, c^*]$ და (c^*, ∞).

ვთქვათ, კონტრაქტი გაიყიდა c ფასად.

თუ $c \in (c^*, \infty)$, მაშინ კონტრაქტის გამყიდველს ექნება არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობა, ასეთი ფასი მიუღებელია კონტრაქტის მყიდველისათვის და ფასების ამ ინტერვალს კონტრაქტის გამყიდველის უპირატესი ფასების ინტერვალს უწოდებენ.

თუ $c \in [0, c_*)$, მაშინ ურისკო მოგების შესაძლებლობა ექნება კონტრაქტის მყიდველს, ეს ფასი მიუღებელია კონტრაქტის გამყიდველისათვის და ამ ინტერვალს კონტრაქტის მყიდველის უპირატესი ფასების ინტერვალს უწოდებენ.

თუ $c \in [c_*, c^*]$, მაშინ არც კონტრაქტის მყიდველს და არც მის გამყიდველს არა აქვს არბიტრაჟული მოგების შესაძლებლობა და ამ ინტერვალს კონტრაქტის შესაძლო ფასების ინტერვალს უწოდებენ.

თუ $c = c^*$, მაშინ კონტრაქტის გამყიდველი ყოველთვის შეასრულებს თავის ფინანსურ ვალდებულებას კონტრაქტის მყიდველის წინაშე, რის გამოც ეს ფასი მისაღებია მისთვის და მას კონტრაქტის გამყიდველის ფასს უწოდებენ.

თუ $c = c_*$, მაშინ კონტრაქტის მყიდველი არასოდეს არ გამოდის წაგებული ამ კონტრაქტიდან, რის გამოც ეს ფასი მისაღებია მისთვის და ამ ფასს კონტრაქტის მყიდველის ფასს უწოდებენ.

ამიტომ, არასრული ბაზრის შემთხვევაში საუბარია არა კონტრაქტის სამართლიან ფასზე, როგორც ეს იყო სრული ფინანსური ბაზრის დროს, არამედ ფინანსური ვალდებულების არაარბიტრაჟული ფასის არჩევაზე ინტერვალიდან კონტრაქტის ზედა და ქვედა ფასებს შორის.

აღვნიშნოთ, რომ $F = f(S_T)$ ფინანსური ვალდებულება მიღწევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $c_*(f) = c^*(f)$ და განხილული ბაზარი

სრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც კონტრაქტის ზედა და ქვედა ფასებს შორის ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი ფინანსური ვალდებულებისთვის, რომელიც დამოკიდებულია ბაზრის ძირითად აქტივთა მნიშვნელობაზე.

ვაჩვენოთ, რომ განხილული მოდელისთვის ფინანსური ვალდებულების ქვედა ფასი არ აღემატება მის ზედა ფასს, რაც (როგორც უკვე აღვნიშნეთ) ზედა და ქვედა ფასების განსაზღვრიდან უშუალოდ არ გამომდინარეობს.

განსაზღვრის თანახმად კონტრაქტის ზედა ფასი არის ისეთი უმცირესი c რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობათა შემდეგი სისტემა

$$c(1+r) + \gamma(S_i - S_0(1+r)) \geq f(S_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.64}$$

ერთი მაინც γ-სთვის.

(4.60) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მოიძებნება ნამდვილ რიცხვთა სამეული (P_1, P_2, P_3), ისეთი, რომ

$$P_1 > 0, \quad P_2 > 0, \quad , P_3 > 0, \quad P_1 + P_2 + P_3 = 1 \tag{4.65}$$

და

$$P_1S_1 + P_2S_2 + P_3S_3 = (1+r)S_0. \tag{4.66}$$

ამიტომ, ყოველი i-სთვის (4.64) უტოლობის ორივე მხარის P_i-ზე გამრავლების და ამ უტოლობების შეკრების შემდეგ (4.65), (4.66)-დან მივიღებთ, რომ

$$c \geq \frac{1}{1+r}(P_1f(S_1) + P_2f(S_2) + P_3f(S_3)). \tag{4.67}$$

რადგან (4.67) სრულდება ყოველი c-სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს (4.64) უტოლობათა სისტემას, (4.67) უტოლობა შესრულდება უმცირესი ასეთი c-სთვისაც, ანუ

$$c^* \geq \frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{3} P_if(S_i). \tag{4.68}$$

მეორეს მხრივ, კონტრაქტის ქვედა ფასი არის ის უდიდესი c რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს (4.64)-ის შებრუნებულ უტოლობათა სისტემას

$$c(1+r) + \gamma(S_i - S_0(1+r)) \leq f(S_i), \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.69}$$

ერთი მაინც γ-სთვის. ანალოგიური მსჯელობით (4.69) უტოლობების იმავე P_i რიცხვებზე გამრავლებით და უტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$c_* \leq \frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{3} P_if(S_i). \tag{4.70}$$

ცხადია, (4.68) და (4.70) უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$c_*(f) \le c^*(f) \tag{4.71}$$

უტოლობის სამართლიანობა ნებისმიერი F ფინანსური ვალდებულებისთვის.

გამოვთვალოთ ყიდვის ოფციონის ზედა და ქვედა ფასები განხილული მოდელის მიხედვით. განვიხილოთ კოლ ოფციონი K შეთანხმების ფასით. განსაზღვრულობისთვის ავიღოთ ხელსაყრელი ყიდვის ოფციონი და დავუშვათ, რომ

$$S_1 < K < S_0. \tag{4.72}$$

ამ შემთხვევაში გადახდის ფუნქციას ექნება სახე

$$f(S_T) = \begin{cases} S_3 - K, & \text{როცა} \quad S_T = S_3, \\ S_2 - K, & \text{როცა} \quad S_T = S_2, \\ 0 & \text{როცა} \quad S_T = S_1. \end{cases}$$

ოფციონის ზედა ფასი (ანუ გამყიდველის ფასი) წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნას: ვიპოვოთ $c \in R$ რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა შემდეგ შეზღუდვებში

$$\begin{aligned} c(1+r) + \gamma(S_3 - S_0(1+r)) &\ge S_3 - K, \\ c(1+r) + \gamma(S_2 - S_0(1+r)) &\ge S_2 - K, \\ c(1+r) + \gamma(S_1 - S_0(1+r)) &\ge 0. \end{aligned} \tag{4.73}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა c^*, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი განტოლებათა სისტემით

$$c(1+r) + \gamma(S_3 - S_0(1+r)) = S_3 - K, \tag{4.74}$$

$$c(1+r) + \gamma(S_1 - S_0(1+r)) = 0. \tag{4.75}$$

ამ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვიღებთ, რომ ოფციონის გამყიდველის ფასი და ზედა ჰეჯი შესაბამისად ტოლია

$$c^* = \frac{S_3 - K}{S_3 - S_1}\left(S_0 - \frac{S_1}{1+r}\right), \quad \gamma^* = \frac{S_3 - K}{S_3 - S_1}. \tag{4.76}$$

ზედა ჰეჯის მეორე კომპონენტი ცალსახად გამოითვლება ზედა ფასისა და γ^*-ის საშუალებით

$$\beta^* = c^* - S_0\gamma^* = -\frac{S_1(S_3 - K)}{(1+r)(S_3 - S_1)}. \tag{4.77}$$

ოფციონის მყიდველის ფასის გამოსათვლელად უნდა ვიპოვოთ ისეთი c რიცხვების მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (4.75) სისტემის შებრუნებულ უტოლობათა სისტემას. ამ ამოცანის ერთადერთი ამოხსნა განისაზღვრება

$$c(1+r)+\gamma(S_3-S_0(1+r))=S_3-K, \tag{4.78}$$

$$c(1+r)+\gamma(S_2-S_0(1+r))=S_2-K \tag{4.79}$$

განტოლებათა სისტემით, რომლის ამოხსნა გვაძლევს ოფციონის ქვედა ფასის და ქვედა პეჯის გამოსათვლელ ფორმულებს

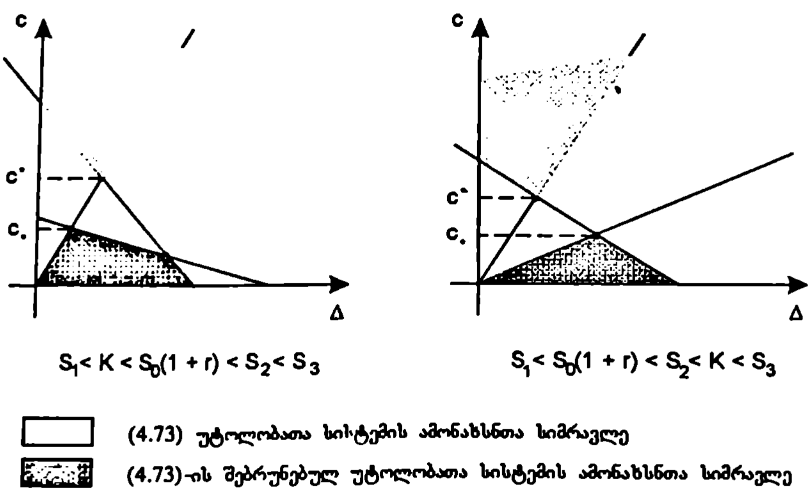
$$c_*=S_0-\frac{K}{1+r},\quad \gamma_*=1,\quad \beta_*=-\frac{K}{1+r}. \tag{4.80}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ განვიხილავთ არახელსაყრელ კოლ ოფციონს და დავუშვებთ, მაგალითად, რომ $S_2<K<S_3$, მაშინ ამ ოფციონის ზედა (შესაბამისად ქვედა) ფასი მოიცემა (4.74) და

$$c(1+r)+\gamma(S_2-S_0(1+r))=0 \tag{4.81}$$

(შესაბამისად (4.78) და (4.75)) განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემის ამოხსნით).

გრაფიკულად უტოლობათა (4.73) სისტემის და ფასის ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ.



ნახ. 4.35

განვიხილოთ სამთვიანი კოლ ოფციონი, რომლის საბაზისო აქტივის ფასი კონტრაქტის დადების მომენტში $S_0 = 100$-ის ტოლია, არ იცვლება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში და მისი აღსრულების მომენტში შეუძლია მიიღოს სამი მნიშვნელობა $S_1 = 80$, $S_2 = 110$ და $S_3 = 120$. ოფციონის შეთანხმების ფასი იყოს $K = 96$ და საპროცენტო განაკვეთი ჩავთვალოთ ნულის ტოლად.

(4.76) და (4.77) ფორმულებიდან ვიღებთ, რომ ამ ოფციონის ზედა და ქვედა ფასებისა და ზედა და ქვედა ჰეჯის მნიშვნელობები შესაბამისად ტოლია

$$c^* = 12, \quad \gamma^* = 0.6 \quad \beta^* = -48,$$

$$c_* = 4, \quad \gamma_* = 1 \quad \beta_* = -96.$$

თუ ოფციონის გამყიდველი მოახერხებს ოფციონის მაქსიმალურ ფასად გაყიდვას და მიიღებს 12 ფულად ერთეულს, მას შეუძლია ზედა ჰეჯის გამოყენებით ყოველთვის შეასრულოს ოფციონის მყიდველის წინაშე არსებული ვალდებულება. ის ისესხებს 48 ფულად ერთეულს და $60 = 48 + 12$ თანხით შეიძენს აქციის 0.6 ნაწილს. ოფციონის აღსრულების მომენტში მისი კაპიტალი ტოლი გახდება $V_T(\pi^*) = 0.6S_T - 48$ სიდიდის და როგორც ქვემოთ მოყვანილი ცხრილიდან ჩანს (სადაც ერთმანეთთან შედარებულია ზედა და ქვედა ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი და ფინანსური ვალდებულებები საბაზისო აქტივის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების დროს), ის ზუსტად ასრულებს თავის ვალდებულებას, როდესაც აქციის კურსი იღებს 80 და 120-ის ტოლ მნიშვნელობებს (გავიხსენოთ, რომ ზედა ფასის და ჰეჯის მნიშვნელობები იანგარიშება (4.74), (4.75) სისტემის მიხედვით) და რჩება ზედმეტი კაპიტალი, თუ აქციის კურსი 110-ს გაუტოლდება.

აქციის კურსი T მომენტში	ფინანსური ვალდებულება	ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი	
		ზედა ჰეჯი	ქვედა ჰეჯი
80	0	0	−12
110	14	18	14
120	24	24	24

ცხრილი 4.2

თუ ოფციონის მყიდველი გაყიდის ოფციონს მინიმალურ ფასად და მიიღებს 4 ფულად ერთეულს, მას შეუძლია დაიცვას თავი ქვედა ჰეჯის დახმარებით. მას შეუძლია ისესხოს 96 ფულადი ერთეული და ოფციონში მიღებულ თანხებთან ერთად შეიძინოს ერთი აქცია. ამ შემთხვევაში, ოფციონის აღსრულების მომენტში მისი კაპიტალი $V_T(\pi^*) = S_T - 96$-ის ტოლი გახდება, რითაც ის ყოველთვის შეასრულებს თავის ფინანსურ ვალდებულებას ოფციონის მყიდველის წინაშე, მაგრამ აქციის კურსის დაცემის შემთხვევაში ოფციონის გამყიდველი ვერ შესძლებს იმ 96 ფულადი ერთეულის სრულად

დაბრუნებას, რომელიც მან ისესხა აქციის ყიდვის მიზნით, თუმცა ამ უკანასკნელ შემთხვევაში მას ოფციონის მყიდველისთვის არაფერი არა აქვს გადასახდელი.

შენიშვნა 1. რიცხვთა (P_1, P_2, P_3) სამეული, რომელიც (4.65), (4.66) პირობებს აკმაყოფილებს, წარმოადგენს რისკ-ნეიტრალურ ალბათურ განაწილებას (ზომას), ანუ ისეთ ალბათობათა სამეულს, რომლის მიხედვით გამოთვლილი (გამოთვლილი იმ დაშვებით, რომ S_T იღებს S_i მნიშვნელობას P_i ალბათობით) აქციის კურსის დისკონტირებული საშუალო მნიშვნელობა T მომენტში, აქციის საწყისი ფასის ტოლია

$$E\frac{S_T}{1+r} = \frac{1}{1+r}(P_1S_1 + P_2S_2 + P_3S_3) = S_0.$$

(4.64) უტოლობის P_i-ზე გამრავლება და ამ უტოლობების შეკრება ფაქტიურად ნიშნავს

$$c(1+r) + \gamma(S_T - S_0(1+r)) \geq f(S_T) \tag{4.82}$$

უტოლობის ორივე მხარის საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლას და მათ შედარებას, საიდანაც (4.65), (4.66) თვისების გამოყენებით მიიღება (4.68) უტოლობა. შევნიშნოთ, რომ (4.68) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი (P_1, P_2, P_3) სამეულისთვის, რომლისთვისაც (4.65), (4.66) პირობები სრულდება. ამიტომ

$$c^* \geq \sup_{(P_1,P_2,P_3)\in\mathcal{P}(S)} \frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{3} P_i f(S_i) = \sup_{P\in\mathcal{P}(S)} F^P \frac{f(S_T)}{1+r},$$

სადაც $\mathcal{P}(S)$-ით აღნიშნულია $P = (P_1, P_2, P_3)$ რისკ-ნეიტრალური სამეულების სიმრავლე. სინამდვილეში (4.83)-ში ადგილი აქვს ტოლობას და მსგავსი ტოლობა სამართლიანია ფინანსური ვალდებულების ქვედა ფასისთვისაც, ანუ

$$c^* = \sup_{P\in\mathcal{P}(S)} F^P \frac{f(S_T)}{1+r}, \quad c_* = \inf_{P\in\mathcal{P}(S)} F^P \frac{f(S_T)}{1+r}. \tag{4.83}$$

მართლაც, $\mathcal{P}(S)$ შემოსაზღვრული, ამოზნექილი სიმრავლეა და მასზე მაქსიმუმი (მინიმუმი) მიიღწევა კიდურა წერტილებში. ამ სიმრაველის კიდურა წერტილებს წარმოადგენენ რიცხვთა სამეულები, რომელთა ერთი კომპონენტი ნულის ტოლია. ასეთი ექსტრემალური წერტილი სულ სამია და ამ სამი კიდურა წერტილის მიხედვით გამოთვლილ $\frac{f(S_T)}{1+r}$ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობებს შორის უდიდესი (უმცირესი) ფინანსური ვალდებულების ზედა (ქვედა) ფასს ემთხვევა.

შენიშვნა 2. განხილულ მოდელში რისკ-ნეიტრალური ზომის (ანუ ალბათობათა რისკ-ნეიტრალური სამეულის) არსებობას უზრუნველყოფს

$$S_1 < S_0(1+r) < S_3 \tag{4.84}$$

დაშვება, რომელიც ასეთი სამეულის არსებობის აუცილებელ პირობასაც წარმოადგენს. მეორეს მხრივ (4.85) ორმხრივი უტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც განხილული ერთნაბიჯიანი მოდელი არაარბიტრაჟულია. მაშასადამე, განხილულ შემთხვევაში მოდელი თავისუფალია არბიტრაჟული შესაძლებლობებისგან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი მაინც რისკ-ნეიტრალური ალბათური განაწილება არსებობს. ეს უკანასკნელი დებულება სამართლიანია ფინანსური ბაზრის საკმაოდ ზოგადი მოდელებისთვის და აქტივთა ფასდადების ფუნდამენტური თეორემის სახელით არის ცნობილი (იხ. მაგალითად [33], [151], [207]).

შენიშვნა 3. არასრული ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში არსებობს რისკ-ნეიტრალური ზომების მთელი სიმრავლე. განსხვავებით სრული ბაზრისაგან, სადაც ასეთი ზომა ერთადერთია. განხილული მოდელისთვის ეს გასაგებია, რადგან

$$x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 = (1+r)S_0$$

განტოლების სამი x_1, x_2, x_2 უცნობით,

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

შეზღუდვებში აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, როდესაც (4.85) პირობა სრულდება და არ გააჩნია არცერთი ამონახსნი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

(4.84) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიხედვით გამოთვლილი დისკონტირებული ფინანსური $f(S_T)$ ვალდებულების საშუალო მნიშვნელობა ექცევა ამ ფინანსური ვალდებულების მყიდველისა და გამყიდველის ფასებს შორის

$$c_* < E^P \frac{S_T}{1+r} < c^*, \quad \text{ყოველი} \quad P \in \mathcal{P}\text{-სთვის},$$

და წარმოადგენს ფინანსური ვალდებულების შესაძლო (არაარბიტრაჟულ) ფასს. აღვნიშნოთ, რომ ეს ფაქტი (ისევე, როგორც (4.84) ტოლობები) სამართლიანია არასრული ფინანსური ბაზრის ზოგადი მოდელებისთვისაც (იხ. მაგალითად [41] ან [207]).

შენიშვნა 4. იმ შემთხვევაში, როდესაც საბაზისო აქტივი იღებს სამზე მეტ მნიშვნელობას, ფინანსურ ვალდებულებათა ფასების გათვლა განხილული მოდელის მსგავსად მიმდინარეობს და მისგან თითქმის არ განსხვავ-

დება (იზრდება მხოლოდ (4.73) სისტემის უტოლობათა რაოდენობა). ფინანსურ ვალდებულებათა ზედა და ქვედა ფასები მრავალნაბიჯიანი არასრული ბაზრის, ბინომური ხეების მოდელისთვის (ამ შემთხვევაშიც ბაზარი სრულია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხის ყოველი კვანძიდან გადასვლა შესაძლებელია მხოლოდ ორი მიმართულებით) ანგარიშდება რეკურენტულად დაწყებული აღსრულების მომენტიდან ხის საწყისი კვანძის მიღწევამდე. ამასთან, ყოველ კვანძში მიმდინარე ზედა და ქვედა ფასები ითვლება განხილული ერთნაბიჯიანი მოდელის მიხედვით. ფინანსურ ვალდებულებათა ფასდადების პრობლემა ბაზრის ერთნაბიჯიან მოდელში, როდესაც საბაზისო აქციის კურსს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა გარკვეული $[a, b]$ ინტერვალიდან განხილულია [31], [207]-ში.

ფინანსურ ვალდებულებათა ფასდადების პრობლემები არასრული ფინანსური ბაზრის ზოგად მოდელებში განხილულია [41], [110] ნაშრომებში.

ოფციონებისადმი მიძღვნილ იმ ლიტერატურის გარდა, რომელიც ტექსტშია მითითებული, გთავაზობთ შემდეგ ნაშრომებს, რომლებშიც ოფციონები სხვადასხვა კუთხითაა გაშუქებული: [12], [42], [52], [124], [125], [169], [193].

5

ოფციონები. საინვესტიციო პორტფელი. მგრძნობიარობის კოეფიციენტები

5.1 დერივატივების საინვესტიციო პორტფელი

განმარტება. ძირითადი მაგალითი. განვიხილოთ მხოლოდ ფიუჩერსული ოფციონები ფიუჩერსული ანგარიშსწორების ხერხით. სხვა ტიპის ოფციონების განხილვა ანალოგიურია.

რა გვესმის საინვესტიციო პორტფელის ქვეშ? პორტფელი არის ღია ფიუჩერსული პოზიციები გარკვეული ექსპირაციის დღით, მათზე ოფციონები და ის თანხა (ფულადი), რომელიც მარჟის ცვლილებითაა მიღებული.

მაგალითი 5.1. განვიხილოთ პორტფელი, რომელიც შედგება სამი მოკლე ფიუჩერსული პოზიციისაგან ერთი დოლარის მიწოდებაზე, აღსრულების ვადით 15 ივლისი, 100 გრძელი პოზიციისაგან კოლ ოფციონებში, სტრაიკით 5100 და 100 გრძელი პოზიციისაგან პუტ ოფციონებში სტრაიკით 5000, ამ ფიუჩერსულ კონტრაქტებზე. ვიგულისხმოთ, რომ ფიუჩერსი ანგარიშსწორებიანია, ოფციონების და ფიუჩერსების ექსპირაციის დღე ერთი და იგივეა.

ყველგან ამ თავში თანხა მოცემულია პირობით ფულად ერთეულებში და ამიტომ ვალუტა არ კონკრეტდება.

ვთქვათ, ფიუჩერსული და ოფციონური კონტრაქტები გახსნილია ერთსადაიმავე დღეს — 1 ივნისს, და ფიუჩერსული ფასია $F = 5050$, ხოლო ოფციონების ფასია 47.

აქედან, ბლეკ-შოულსის ფორმულის გამოყენებით, ადვილად ვიანგარიშებთ, რომ ნაგულისხმევი ვოლატილობა იქნება $\sigma = 10\%$.

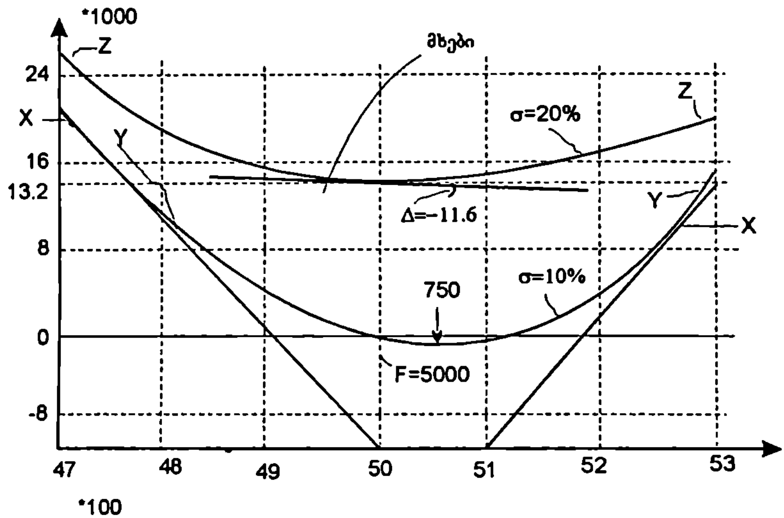
ვთქვათ, ფიუჩერსული ფასის ცვლილების ვოლატილობის პროგნოზი დარჩენილ პერიოდზე უდრის 20%.

ამასთან, კოლ ოფციონის თეორიული ღირებულება უდრის 116, ხოლო პუტის — 115. ამრიგად, ოფციონების ჯამური ღირებულება აღემატება ფასს სიდიდით:

$$100 \cdot (116 + 115) - 100 \cdot (47 + 47) = 13700.$$

ეს რიცხვი გვიჩვენებს იმ პოტენციალურ მოგებას, რომელსაც შეიცავს პოზიცია, თუ σ-ს პროგნოზი სწორია. ამ სიდიდეს პოზიციის მიმდინარე ღირებულება ჰქვია.

ჩავთვალოთ, რომ პორტფელის ღირებულება ტოლია პოზიციის ღირებულებისა და იმ ფულადი თანხის ჯამისა, რომელიც წარმოიქმნა ღია პოზიციების ბაზართან ყოველდღიური მიყვანის შედეგად (შეიძლება გავითვალისწინოთ ის პროცენტული შემოსავალიც, რომელიც დაირიცხა ნარჩენებზე).



ნახ. 5.1

პოზიციის გახსნის მომენტში პოზიციის ღირებულება და პორტფელის ღირებულება ერთმანეთს ემთხვევა.

დავუშვათ, სავაჭრო დღის ბოლოს ანგარიშსწორების ფასები შემდეგი გახდა: ფიუჩერსებზე — 5000, კოლ ოფციონზე — 30 და პუტზე — 70. ნაგულისხმევი ვოლატილობა ამ შემთხვევაშიც ტოლი გამოვა $\sigma = 10\%$-ის. ვარიაციული მარჟა ტოლი იქნება

$$(-3 \cdot 5000 + 100 \cdot 30 + 100 \cdot 70) - (-3 \cdot 5050 + 100 \cdot 47 + 100 \cdot 47) = 750.$$

ამრიგად, პორტფელი ამ დღის ბოლოს შედგება ამ თანხისაგან (ე.ი. 750) და ბაზართან მიყვანილი პოზიციებისაგან ფიუჩერსებსა და ოფციონებში.

თუ ვოლატილობა იქნება $\sigma = 20\%$-ის ტოლი, მაშინ მისი შესაბამისი კოლ ოფციონის ღირებულება იქნება 95 და პუტ ოფციონის — 137.

ამიტომ პოზიციის ღირებულება იქნება

$$100 \cdot (95 + 137) - 100 \cdot (30 + 70) = 13200.$$

საბოლოოდ, პორტფელის ღირებულება ტოლი იქნება

$$13200 + 750 = 13950.$$

ამ რიცხვის მიღება ასეც შეიძლება

$$(-3 \cdot 5000 + 100 \cdot 95 + 100 \cdot 137) - (-3 \cdot 5050 + 100 \cdot 47 + 100 \cdot 47) = 13950.$$

ნახ. 5.1-ზე მოცემულია პოზიციის ღირებულების გრაფიკი დღის ბოლოსთვის.

XX ტეხილი არის ის ჯამური მოგება/ზარალი, რომელსაც მივიღებთ ექსპირაციის დღეს დარიცხული ვარიაციული მარჟისაგან დამოუკიდებლად, თუ პოზიცია უცვლელი დარჩება.

ეს წირი არის ფიუჩერსის, კოლ და პუტ ოფციონების გრაფიკების შეკრების შედეგად მიღებული ტეხილი, ამასთან $F = 5000$, $C = 30$, $P = 70$.

YY წირი აგებულია იმ დაშვებით, რომ $\sigma = 10\%$. თუ $F = 5000$, ეს წირი გადის 0-ზე, რადგან თუ დაუყოვნებლივ დავხურავთ პოზიციას, მაშინ არავითარი დამატებითი მოგება/ზარალი არ გვექნება.

სხვა ფიუჩერსული ფასებისათვის, უცვლელი ვოლატილობისა და დროის შემთხვევაში, ეს წირი გვაძლევს პოზიციის ღირებულებას.

ZZ წირი გამოსახავს პოზიციის ღირებულებას $\sigma = 20\%$ პროგნოზისათვის. კერძოდ, თუ $F = 5000$ — მიმდინარე ფიუჩერსულ ფასს, მაშინ პოზიციის ღირებულება უდრის 13200.

პორტფელის ღირებულების გრაფიკის მისაღებად ყველა წირი უნდა აეწიოთ ზევით 750-ით — ვარიაციული მარჟის სიდიდით.

ამასთან, YY წირი, დათვლილი ფიუჩერსის მიმდინარე კოტირებაზე, გვიჩვენებს ვარიაციული მარჟის სიდიდეს, რომელიც ამ დღისათვის დაგროვდა. შევნიშნოთ, რომ σ უნდა ავიღოთ მიმდინარე ნაგულისხმევი ვოლატილობის ტოლი.

პორტფელის ღირებულების გაყოფა ფულად შემადგენლად და პოზიციის ღირებულებად მნიშვნელოვანია, თუ მხედველობაში მივიღებთ პროცენტულ შემოსავალს ნარჩენებზე, ე.ი., თუ ფულადი შემადგენელი არ მიიღება როგორც ყოველდღიური ვარიაციული მარჟის უბრალო ჯამი.

ავაგოთ ZZ წირის მხები საკუთხო კოეფიციენტით Δ წერტილში 5000. მხები საკმაოდ კარგად აღწერს მიმდინარე კოტირების $F = 5000$-ის მიდამოში ღია პოზიციის ღირებულების ცვლილებას (ე.ი. მთელი პორტფელის ღირებულების ცვლილებასაც), რომელიც გამოწვეულია ფიუჩერსული ფასის ცვლილებით.

წარმოვიდგინოთ მეორე პორტფელი, რომელიც შედგება იმდენი ფიუჩერსული პოზიციისაგან, რომ მოგება/ზარალის გრაფიკს აქვს Δ დახრილობა.

მეორე პორტფელში ფიუჩერსული პოზიციების რაოდენობას ეწოდება Δ კოეფიციენტი. ის არის პირველი პორტფელის უმნიშვნელოვანესი მახასიათებელი. თუ $\Delta > 0$, მაშინ პოზიციას ჰქვია გრძელი საბაზრო, თუ $\Delta < 0$ — მოკლე საბაზრო, თუ $\Delta = 0$ — Δ-ნეიტრალური ან ურისკო.

რასაკვირველია, Δ უდრის მხების დახრის α კუთხის ტანგენსს, $\Delta = \operatorname{tg} \alpha$.

თუ პორტფელი შედგება ერთი გრძელი ფიუჩერსული პოზიციისაგან, მაშინ $\Delta = 1$, ხოლო თუ შედგება ერთი მოკლე პოზიციისაგან, $\Delta = -1$.

თუ გვაქვს კოლ ოფციონში ერთი გრძელი პოზიცია, მაშინ Δ იცვლება 0-დან (თუ ოფციონი ღრმად უფულოდაა) 1-მდე (თუ ოფციონი ღრმადაა ფულით).

თუ ოფციონი ფულთანაა, მაშინ $\Delta \approx -0.5$. გრძელ პუტ ოფციონისათვის Δ უარყოფითია და იცვლება -1-დან 0-მდე.

თუ პოზიციების რაოდენობა იზრდება, მაშინ Δ იზრდება ამ რაოდენობის პროპორციულად.

ამრიგად, მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ რთული პორტფელის ღირებულება ისევე იცვლება (ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის ცვლილების დროს), როგორც იმ პორტფელის ღირებულება, რომელიც შედგება Δ რაოდენობის ღია პოზიციებისგან ძირითადი აქტივის მიმართ. ანუ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta\Pi = \Delta_0 \cdot \Delta F,$$

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \Delta_0(F_1 - F_0),$$

სადაც F_0 საწყისი ფასია, F_1 — ახალი ფასი, Δ_0 არის მგრძნობიარობის ან ე.წ. ჰეჯის კოეფიციენტი.

5.2 მგრძნობიარობის კოეფიციენტების განსაზღვრა

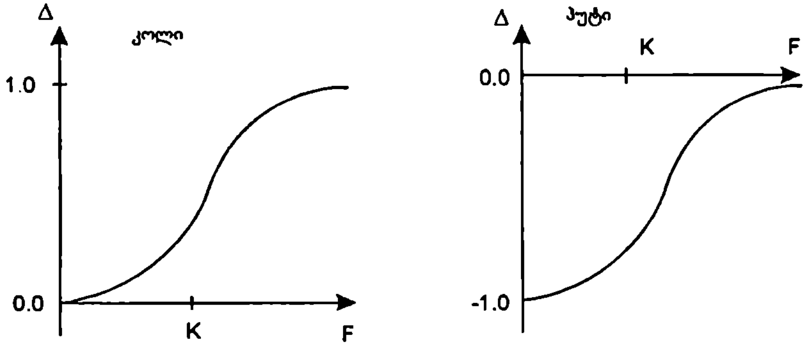
მგრძნობიარობის კოეფიციენტი რამოდენიმეა. მათ ჰეჯის კოეფიციენტებიც ეწოდებათ. ისინი გვიჩვენებენ, თუ რამდენად შეიცვლება პორტფელის ღირებულება ამა თუ იმ პარამეტრის ცვლილების დროს გარკვეული საბაზისო მნიშვნელობის მიმართ (ამ საბაზისო მნიშვნელობის მიმართ გაითვლება პორტფელის ღირებულება).

ჰეჯის კოეფიციენტები გვაძლევენ საშუალებას ავაგოთ პორტფელები, რომლებიც ინვარიანტული იქნებიან ამა თუ იმ პარამეტრის (ან პარამეტრთა ჯგუფის) ლოკალური ცვლილების მიმართ.

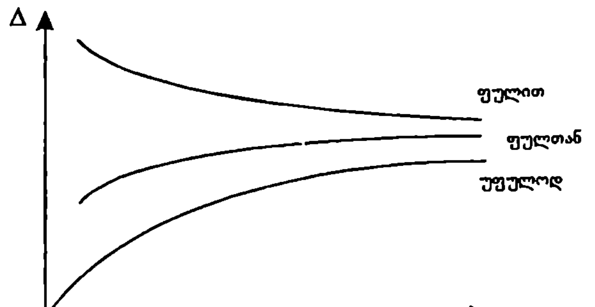
დავაფიქსიროთ ოფციონის შეთანხმების ფასი და აღსრულების მომენტი. მაშინ პორტფელის ღირებულება Π მოიცემა შემდეგი ფუნქციით

$$\Pi = \Pi(F, t, \sigma, r),$$

სადაც t დროის მიმდინარე მომენტია.



ნახ. 5.2



ნახ. 5.3

ცხადია, რომ

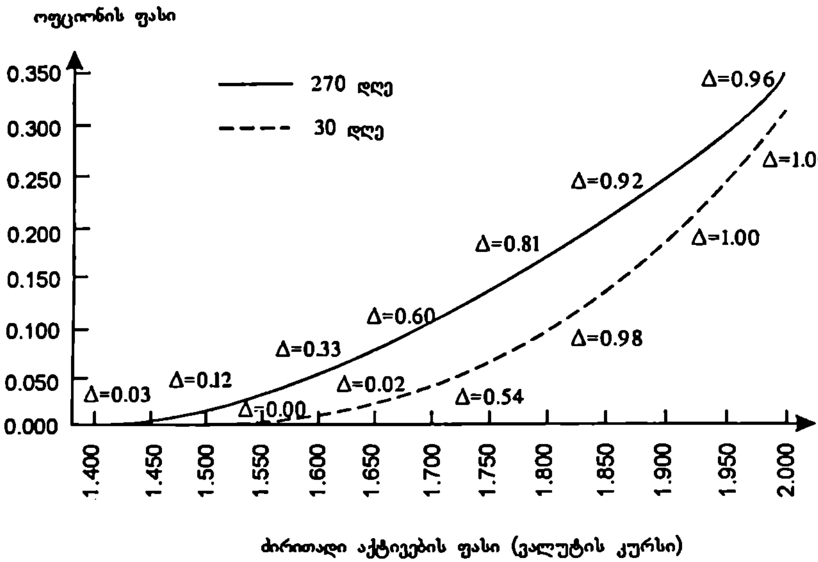
$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial F}.$$

დავაზუსტოთ, რომ თუ მოცემულ მომენტში $F = F_0$, მაშინ

$$\Delta = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial F}\right|_{F=F_0}$$

Δ წარმოადგენს მგრძნობიარობის ყველაზე მნიშვნელოვან მახასიათებელს. იგი განსაზღვრავს, თუ როგორ იცვლება ოფციონის (პორტფელის) ფასი ძირითადი აქტივის ფასის ცვლილების დროს. გრაფიკულად Δ-ს ცვლილება შეიძლება ორნაირად გამოისახოს. პირველი ტიპის გრაფიკები გამოსახავენ Δ-ს როგორც ძირითადი აქტივისა და აღსრულების ვადამდე დარჩენილი დროის ფუნქციას (იხ. ნახ. 5.2 და 5.3).

მეორე ტიპის გრაფიკზე (იხ. ნახ. 5.4) მოცემულია ოფციონის ღირებულების გრაფიკი ძირითადი აქტივების ცვლილებისას. მასზე აღნიშნულია Δ-ს სიდიდეები.



ნახ. 5.4

ეს გრაფიკები კარგ წარმოდგენას იძლევა Δ-ს ბუნებაზე.
შემოვიღოთ მეორე მგრძნობიარობის კოეფიციენტი Γ

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial F} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial F^2},$$

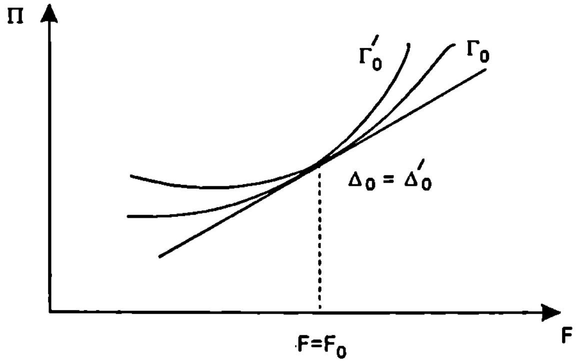
რომელიც Δ-ს ცვლილების სიჩქარის მაჩვენებელია. ცხადია, რომ თუ პორტფელი მარტო ფიუჩერსებისაგან შედგება (ე.ი. Δ მუდმივია როგორც F-ის ფუნქცია), მაშინ $\Gamma = 0$.

ზოგადად, თუ ძირითადი ინსტრუმენტის ფასი იცვლება F_0-დან F_1-მდე, მაშინ

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \Gamma_0(F_1 - F_0),$$

სადაც Δ_0 და Γ_0 დათვლილია წერტილში $F = F_0$.

Γ კოეფიციენტი გეომეტრიულად პორტფელის ღირებულების სიმრუდეს ახასიათებს.

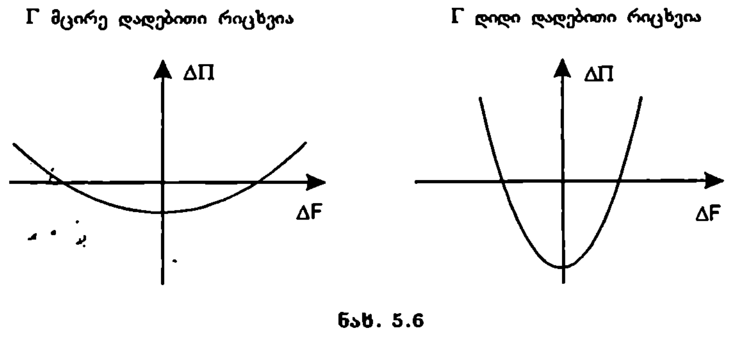


ნახ. 5.5

ნახ. 5.5-ზე $\Delta = \Delta_0'$, ხოლო $\Gamma_0 \neq \Gamma_0'$, რადგან Π და Π' პორტფელებს სხვადასხვა სიმრუდე აქვთ. Δ და Γ კოეფიციენტების გამოყენებით მივიღებთ

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \Delta_0(F_1 - F_0) + \frac{1}{2}\Gamma_0(F_1 - F_0)^2$$

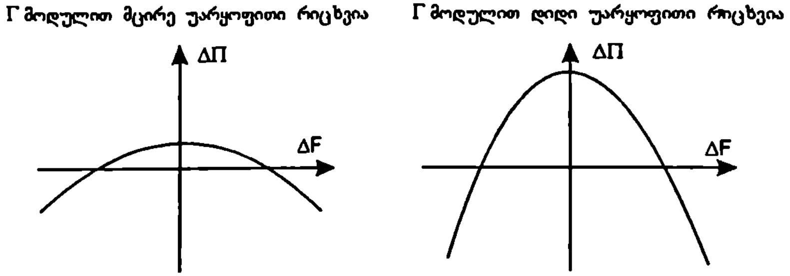
(ტეილორის გაშლის პირველი ორი წევრი). ცხადია, ყველა ფორმულა მიახლოებითია. ამ ფორმულების სიზუსტე მით უფრო დიდია, რაც უფრო მცირეა $F_1 - F_0$ სხვაობა.



ნახ. 5.6

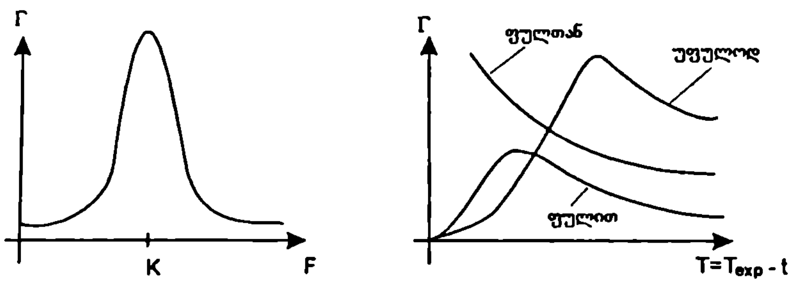
პარამეტრი Γ განსაზღვრავს არა ოფციონის ფასის (პორტფელის ფასის) მგრძნობიარობას, არამედ Δ პარამეტრის ცვლილებას ძირითადი აქტივის ფასის ცვლილებისას. იმის გამო, რომ Δ ყველაზე მნიშვნელოვანი კოეფიციენტია, აზრი აქვს, მისი ყოფაქცევა უფრო ზუსტად შევისწავლოთ,

რასაც Γ კოეფიციენტის გამოყენებით ვაღწევთ. ცხადია, რომ თუ Γ აბსოლუტური სიდიდით დიდ მნიშვნელობებს იღებს, მაშინ Δ ძალიან მგრძნობიარეა ძირითადი აქტივის ფასის ცვლილების მიმართ და ამიტომ Δ-ნეიტრალური პოზიციის (ე.ი., როცა $\Delta = 0$) შენარჩუნება დროის საკმაოდ დიდ მონაკვეთზე ვერ ხერხდება. გრაფიკებზე (იხ. ნახ. 5.6 და 5.7) მოცემულია ურთიერთკავშირი $\Delta\Pi$-სა და ΔF-ს შორის Δ-ნეიტრალური პორტფელებისათვის.



ნახ. 5.7

შემდეგ გრაფიკებზე (იხ. ნახ. 5.8) ასახულია Γ პარამეტრის დამოკიდებულება ძირითადი აქტივის ფასსა და აღსრულების ვადამდე დარჩენილ დროზე.



ნახ. 5.8

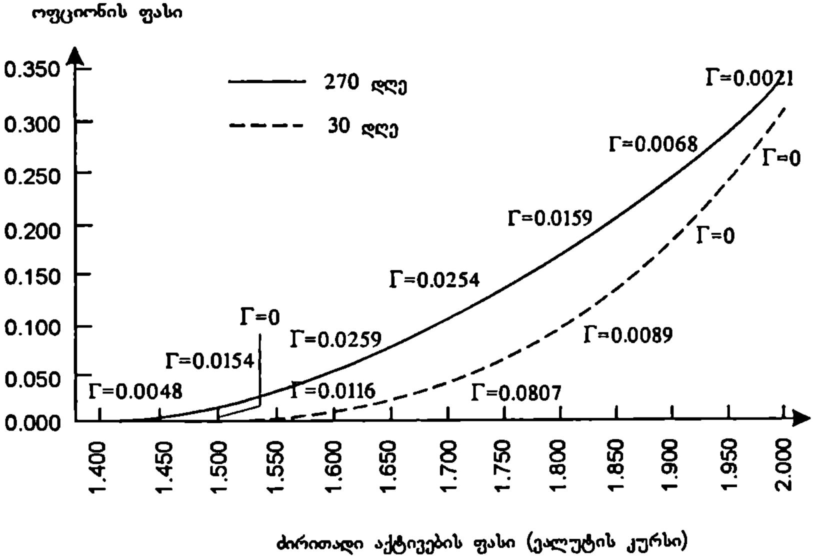
გრაფიკი ნახ. 5.9-ზე ცოტა სხვა კუთხით ახასიათებს Γ პარამეტრს, იძლევა რა მის რიცხვით მნიშვნელობებს ოფციონის გრაფიკის სხვადასხვა წერტილებში.

განვმარტოთ მგრძნობიარობის სხვა კოეფიციენტები.

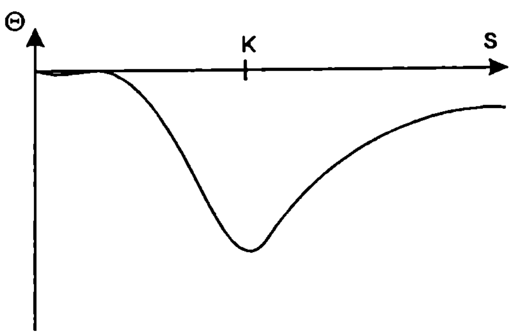
$$\theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

θ კოეფიციენტი ახასიათებს ოფციონის (პორტფელის) დროზე დამოკიდებულებას. რადგან გრძელვადიანი ოფციონის დროითი ღირებულება მეტია, ვიდრე მოკლევადიანის, ამიტომ θ, როგორც, წესი, უარყოფითია.

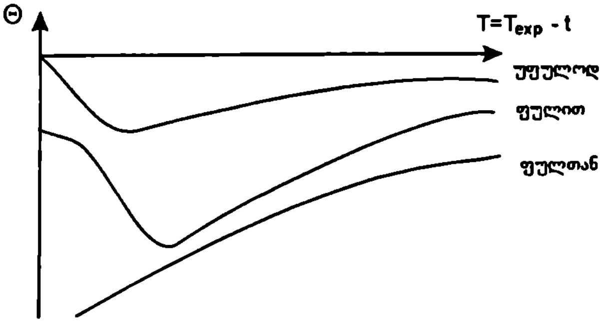
ნახ. 5.10 და 5.11-ზე მოცემულია θ-ს დამოკიდებულება კოლ ოფციონის ფასისა და აღსრულების ვადამდე დარჩენილი დროის ცვლილებაზე, შესაბამისად.



ნახ. 5.9

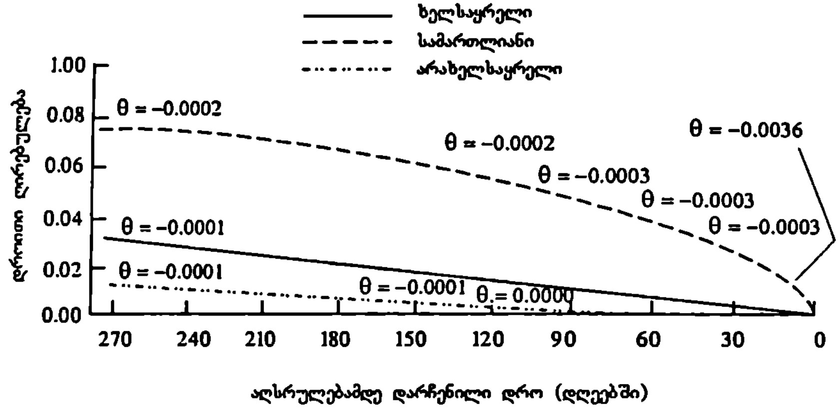


ნახ. 5.10



ნახ. 5.11

საინტერესოა θ-ს ცვლილების ასახვა იმ შემთხვევაში, როდესაც გრაფიკზე მოცემულია დამოკიდებულება ოფციონის დროით ღირებულებასა და ოფციონის აღსრულებამდე დარჩენილ დროს შორის.



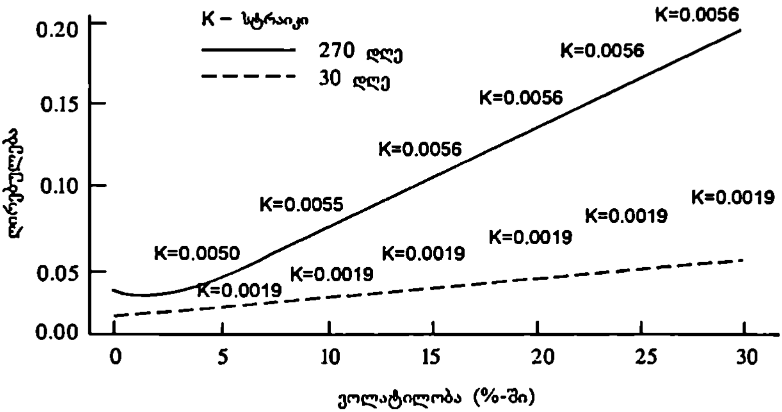
ნახ. 5.12

მგრძნობიარობის კიდევ ერთი კოეფიციენტი Vega განიმარტება ტოლობით

$$\text{Vega} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$

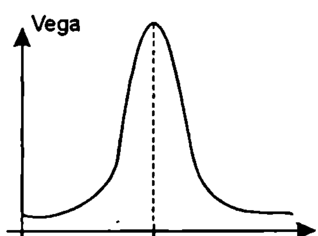
კოეფიციენტი Vega გვიჩვენებს ოფციონის (პორტფელის) მგრძნობიარობას ვოლატილობის მიმართ. რადგან დიდი ვოლატილობა ნიშნავს დიდ განუსაზღვრელობას, რომელიც, თავის მხრივ, დროითი ღირებულების სიდიდეს

ზრდის, ამიტომ, რაც უფრო დიდია Vega, მით უფრო ძვირია ინსტრუმენტი. ეს ფაქტი კარგად ჩანს შემდეგ გრაფიკზე (იხ. ნახ. 5.13).



ნახ. 5.13

მოვიყვანოთ ტიპიური გრაფიკი იმ შემთხვევისა, როცა Vega აღწერილია როგორც უდივიდენდო აქციის ფასის ფუნქცია (იხ. ნახ. 5.14).

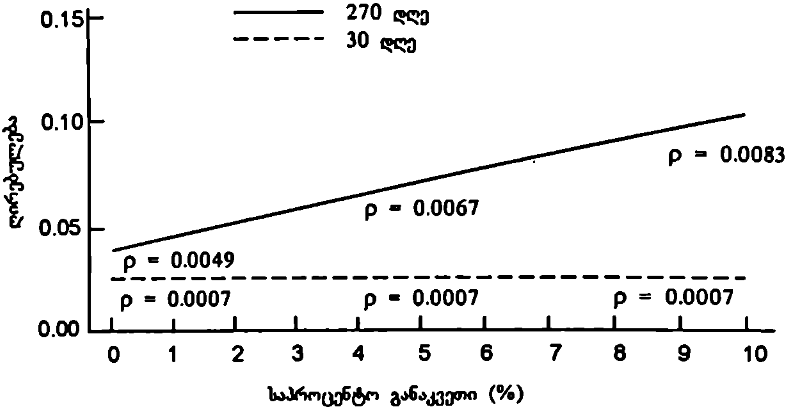


ნახ. 5.14

ბოლოს განვმარტოთ კოეფიციენტი ρ:

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

ეს მახასიათებელი — ინსტრუმენტის ფასის დამოკიდებულება საპროცენტო განაკვეთზე — იშვიათად გამოიყენება, რადგან საპროცენტო განაკვეთი შედარებით სტაბილურია. სისრულისათვის მოვიყვანოთ გრაფიკი (იხ. ნახ. 5.15).



ნახ. 5.15

შენიშვნა. არსებობს კიდევ ერთი კოეფიციენტი, რომელიც ოფციონის (პორტფელის) ლევერიჯს ასახავს, ე.წ. λ-კოეფიციენტი. ფორმალურად

$$\lambda = \frac{\partial \ln \Pi}{\partial \ln F}.$$

მისი სიდიდე გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ უფრო დიდ მოგებას მიიღებს ინვესტორი, თუ ჩადებს თანხას დერივატივში და არა იმავე მოცულობის ძირითად აქტივში. მაგალითად, თუ $\lambda = 5$, მაშინ ოფციონებში ინვესტირებული თანხის 100 ერთეული 5-ჯერ მეტი მოგების შესაძლებლობას იძლევა, ვიდრე 100 ერთეული, ინვესტირებული ძირითად აქტივში. ნახ. 5.16-ზე მოცემულია λ-ს რიცხვითი მნიშვნელობები, რომლებიც აღნიშნულია ოფციონის ღირებულების გრაფიკზე.

მოსახერხებელია მგრძნობიარობის კოეფიციენტების ნორმირება

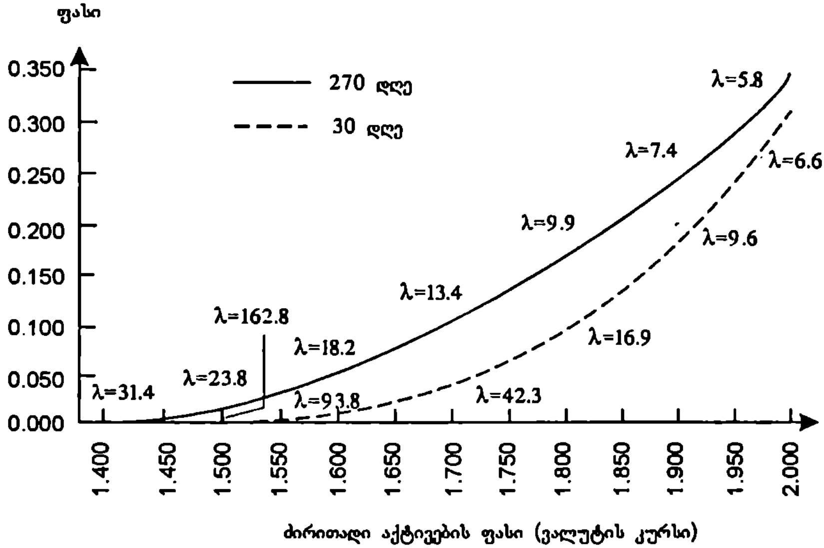
$$\theta = \frac{1}{253} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \text{Vega} = 100 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \quad \rho = 100 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

მათი განზომილება, შესაბამისად, იქნება (თუ თანხა იზომება დოლარებში)

$$\frac{\$}{\text{დღე}}, \quad \frac{\$}{\text{პროცენტი}}, \quad \frac{\$}{\text{პროცენტი}}.$$

ეს კოეფიციენტები გვიჩვენებენ პორტფელის თეორიული ღირებულების ცვლილებას შესაბამისად: მეორე სავაჭრო დღეს; σ-ს ზრდისას 1%-ით; r-ის ზრდისას 1%-ით.

ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელი ცხადი ფორმულები, რომლებიც ბლეკ-შოულსის ფორმულებიდან მიიღება, მოყვანილია ამ თავის ბოლო პუნქტში.



ნახ. 5.16

მოვიყვანოთ ამ კოეფიციენტების სიდიდეები ღია პოზიციის გახსნის მომენტისთვის მაგალით 5.1-ში მოცემულ მონაცემებზე დაყრდნობით.

კოეფიციენტი	Δ	Γ	θ	Vega
3 მოკლე ფიუჩერსი	-3.0	0	0	0
100 გრძელი კოლი სტრაიკით 5100	45.7	0.114	-223	690
100 გრძელი პუტი სტრაიკით 5000	-42.9	0.113	-220	683
პორტფელი	-0.2	0.227	-443	1373

$F_0 = 5050$
$\sigma = 20\%$
$\rho = 0$

ცხრილი 5.1

საწყის მომენტში პოზიცია თითქმის Δ-ნეიტრალური იყო. ამ დროს $\Delta = -0.2$ და რადგან მისი აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია 1-ზე, ამიტომ ამ პოზიციის შეცვლა არ შეიძლება ძირითადი ინსტრუმენტის ყიდვა-გაყიდვით.

პოზიციის მიახლოებითი საწყისი ღირებულება შეიძლება გამოითვალოს შემდეგნაირად

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \text{Vega} \cdot (\sigma_1 - \sigma_0) = 1373 \cdot (20 - 10) = 13730$$

(როგორც გვახსოვს მაგალით 5.1-დან ის 13700-ის ტოლი იყო), გავიხსენოთ, რომ Π_0 დაითვლება პორტფელის საბაზრო ფასიდან, ნაგულისხმევი ვოლატილობა უდრის $\sigma = 10\%$, ვოლატილობის პროგნოზი არის $\sigma = 20\%$, ხოლო პორტფელის თეორიული ფასი დაითვლება ამ ვოლატილობით და საწყისი კოტირებით $F_0 = 5050$. ამიტომ პოზიციის ღირებულებაა $\Pi_1 - \Pi_0$.

როგორც ვიცით მაგალითიდან, ფიუჩერსულმა ფასმა გადაინაცვლა წერტილ $F_1 = 5000$-ში.

ცხრილი 5.1 შეიცვლება შემდეგნაირად.

კოეფიციენტი	Δ	Γ	θ	Vega
3 მოკლე ფიუჩერსი	−3.0	0	0	0
100 გრძელი კოლი სტრაიკით 5100	40.0	0.112	−215	666
100 გრძელი პუტი სტრაიკით 5000	−48.6	0.116	−222	687
პორტფელი	−11.6	0.228	−437	1353

$F_1 = 5000$

ცხრილი 5.2

ამ შემთხვევაში წარმოიქმნება მოკლე საბაზრო პოზიცია. ახალი კოეფიციენტი Δ_1 შეიძლება მივიღოთ ძველიდან შემდეგნაირად

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \Gamma_0(F_1 - F_0) = -0.2 + 0.227 \cdot (5000 - 5050) = -11.55.$$

პორტფელის ღირებულების ნაზრდი (რომელიც იყო $13950 - 13700 = 250$) შეიძლება ასე შევაფასოთ

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \Delta_0(F_1 - F_0) + \frac{1}{2}\Gamma_0(F_1 - F_0)^2 =$$
$$= -0.2 \cdot (5000 - 5050) + \frac{1}{2} \cdot 0.227 \cdot 50^2 = 288.$$

თუ გვსურს პორტფელის ღირებულების დათვლა ყველა ფაქტორის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \Delta_0(F_1 - F_0) + 0.5\Gamma_0(F_1 - F_0)^2 +$$
$$+\theta_0(t_1 - t_0) + \mathrm{Vega}(\sigma_1 - \sigma_0) + \rho(r_1 - r_0),$$

სადაც

$F_1 - F_0$ — ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის ცვლილებაა ($-ში),

$t_1 - t_0$ — დროის ინტერვალი დღეებში,

$\sigma_1 - \sigma_0$ — ვოლატილობის ცვლილება %-ში,

$r_1 - r_0$ — საპროცენტო განაკვეთის ცვლილება %-ში.

ამ კოეფიციენტების პრაქტიკული მნიშვნელობა იმაშია, რომ თუ წინასწარ გამოვთვლით ამ კოეფიციენტებს რომელიმე საყრდენ წერტილში $F = F_0$, მაშინ საბაზრო სიტუაციის მცირე ცვლილების შემთხვევაში პორტფელის ღირებულება და Δ კოეფიციენტი სწრაფად გაითვლება.

რადგან ვაჭრობის დროს, როგორც წესი, საჭიროა ხოლმე ოფციონებში ახალი პოზიციების დაკავება, მიზანშეწონილია წინასწარ მოემზადდეს ცხრილი (იხ. ცხრილი. 5.3). ამ ცხრილში ჰორიზონტალურად მოცემულია ფიუჩერსული ფასები გარკვეული ბიჯით (მოსალოდნელი ფასების გათვალისწინებით ამ სავაჭრო სესიაში), ვერტიკალურად — სტრაიკები. გადაკვეთაზე მოიცემა კოლ და პუტ ოფციონების თეორიული ფასები და Δ კოეფიციენტები:

	F_0	F_1	F_2	$\vdots$	F_i	– – –
K_0	C_{00}, P_{00} Δ_{00}			$\vdots$		
K_1				$\vdots$		
– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –
K_j				$\vdots$	C_{ji}, P_{ji} Δ_{ji}	
– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –

ცხრილი 5.3

5.3 დინამიური ჰეჯის მაგალითი

გავაგრძელოთ მაგალითი 4.10-ის განხილვა. როცა „ფანჯრის“ სიდიდე არის $W = 60$, მაშინ ისტორიული ვოლატილობა σ_{60}-ის მნიშვნელობა გრაფიკის ბოლო წერტილში ნახ. 4.30-ზე, გვაძლევს ფიუჩერსული კოტირების ჭეშმარიტი ვოლატილობის სიდიდეს 15.12–15.03 პერიოდში, რომელიც უდრის 20%-ს, $\sigma_{60} = 20\%$.

ვთქვათ, 16.12-ში ტრეიდერმა ზუსტად იწინასწარმეტყველა ეს სიდიდე და ფიუჩერსული კოტირებით $F_0 = 4279$ იყიდა 100 მარტის ოფციონი სტრაიკით $K = 4300$ (ე.ი. სამართლიანი ოფციონი, თუ სტრაიკის ბიჯი უდრის 100-ს) და გადაიხადა ფასი, რომელიც თეორიული ღირებულების ტოლია, 157.79.

როგორ იცვლება პორტფელი, თუ ტრეიდერი იყენებს დინამიურ ჰეჯს?

i	F	C	Π	Δ	I^{Φ}	Γ	Θ	$Vega$	σ_{10}
0	4279	15779	0	50.0	−50	0.095	−133	839	
1	4280	15696	−134	0.0	−50	0.096	−134	836	
3	4406	22480	351	11.9	−62	0.090	−134	805	
5	4420	23086	89	1.3	−63	0.090	−135	785	
6	4421	23014	−46	0.4	−63	0.091	−136	777	
8	4560	28969	113	8.7	−72	0.082	−128	702	
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
26	5097	79846	23	0.9	−99	0.007	−15	55	14.99
28			276					161	25.97
30			196					129	25.17
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
56	4777	47303	296	−0.1	−100	0.002	−3	2	12.88
60	4741	44100							11.89
61	4747	44700							11.79
63	4744	44400	293	0.0	−100	0.000	0	0	11.53

ცხრილი 5.4

ამ ცხრილში:

1. პირველ სვეტში მოცემულია სავაჭრო დღის ნომერი.

2. მეორე სვეტში მოყვანილია მარტის ფიუჩერსის კოტირება.

3. მესამე სვეტში მოცემულია 100 კოლ ოფციონის თეორიული ღირებულებები, თუ $\sigma = 20\%$. ეს ფასები მიჩნეულია ოფციონის ანგარიშსწორების ფასად.

4. მეოთხე სვეტში მოცემულია პორტფელის ღირებულება.

5. მეექვსე სვეტში მოცემულია ღია ფიუჩერსული პოზიციების რაოდენობა.

6. სხვა სვეტებში მოცემულია მგრძნობიარობის კოეფიციენტები.

7. ბოლო სვეტში მოცემულია ისტორიული ვოლატილობის სიდიდე.

შევნიშნოთ, რომ აქ ჩვენ დავუშვით, რომ ოფციონების ანგარიშსწორების ფასი უდრის თეორიულ ღირებულებას და ამიტომ არ გვაქვს ვოლატილობის მარაგი და პოზიციის ღირებულება არის მუდმივად ნული.

ჩავთვალოთ, რომ ნარჩენებზე პროცენტი არ დაირიცხება. ამიტომ პორტფელის ღირებულება უდრის ფულად სახსრებს, რომლებიც დაგროვდება მარჟაზე.

$\Delta_0 = 50$. ეს კოეფიციენტი დათვლილია 100 ნაყიდი ოფციონისთვის ფიუჩერსული კოტირებისთვის $F_0 = 4279$. ამ კოეფიციენტის მიხედვით, Δ-ნეიტრალური პოზიციის შესანარჩუნებლად, საჭიროა 50 ფიუჩერსის გაყიდვა

ამავე F_0 ფასად. I^F სვეტში გაჩნდა რიცხვი -50, ე.ი. 50 მოკლე ფიუჩერსული პოზიცია.

მეორე სავაჭრო დღეს სიტუაცია თითქმის არ იცვლება და ჯამური ფიუჩერსულ-ოფციონური პოზიცია Δ-ნეიტრალური რჩება.

ამასთან, პორტფელის ფასი კლებულობს $\Theta_0 = -13$-ის შესაბამისად.

მესამე დღეს კოტირება იზრდება. ამიტომ გაჩნდება კოეფიციენტი $\Delta_3 \approx \Gamma_1(F_3 - F_1) = 0.096 \cdot 126 = 12.1$. საჭიროა 12 ფიუჩერსის გაყიდვა $F_3 = 4406$ ფასად და ამიტომ ღია ფიუჩერსული პოზიცია 62-ის ტოლი ხდება.

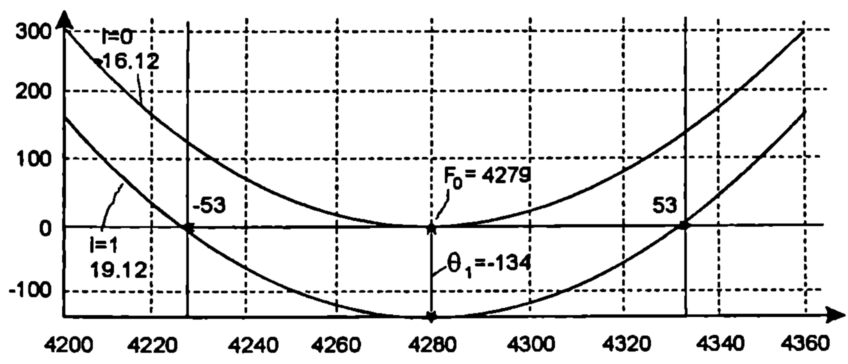
ამასთან, პორტფელის ახალი ღირებულება იქნება

$$\Pi_3 \approx \Pi_1 + 2\theta_1 + 0.5\Gamma_1(F_3 - F_1)^2 =$$

$$= -134 - 2 \cdot 134 + 0.5 \cdot 0.096 \cdot 126^2 = 360.$$

შემდგომი ნაბიჯების გადადგმა ანალოგიურად ხდება. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ფიუჩერსული კოტირების ცვლილების მიუხედავად პორტფელის ღირებულება თითქმის უცვლელია (მართლაც, Π სვეტში განლაგებული რიცხვები შეიძლება თითქმის ნულის ტოლად ჩაითვალოს, თუ მათ F და C სვეტებში მოცემულ რიცხვებს შევადარებთ).

პოზიციის ჯამური გრაფიკი, ფიუჩერსული პოზიციის კორექტირების შემდეგ, ჰორიზონტალურია მიმდინარე ფიუჩერსული კოტირების მიდამოში (ნახ. 5.17).



ნახ. 5.17

ამავე დროს, კოტირების ცვლილება ნებისმიერი მიმართულებით გამოიწვევს პორტფელის ღირებულების ზრდას, რადგან ღირებულების გრაფიკი პარაბოლაა.

თუ ახალი ფიუჩერსული კოტირებისთვის გამოვითვლით Δ-ს, მაშინ გვეცოდინება ფიუჩერსების რაოდენობა, რომელიც უნდა გავყიდოთ ან ვიყიდოთ იმისათვის, რომ ჯამური გრაფიკი ისევ ჰორიზონტალური დარჩეს.

მაგრამ ამ შემთხვევაში მინიმუმის წერტილი იქნება არა 0, არამედ რაიმე დადებითი რიცხვი, ე.ი. დაფიქსირდება დაგროვილი მოგება. თუ ამას არ გავაკეთებთ და კოტირება დაუბრუნდება პირველად ფასს, ეს მოგება დაიკარგება.

ამავე დროს, ხდება ოფციონების ღირებულების მიერ დროითი შემადგენლის დაკარგვა.

მართლაც, $i = 1$ წერტილში, ე.ი. მეორე სამუშაო დღეს, დაიკარგა $\theta = -134$. ეს ორი პროცესი — ფასის ზრდა და დროითი შემადგენლის დაკარგვა, იმ შემთხვევაში, თუ ვოლატილობა სწორადაა პროგნოზირებული, აბათილებს ერთმანეთს და პორტფელის ფასი საშუალოდ ნული რჩება.

რამდენად უნდა იცვლებოდეს ფიუჩერსული კოტირება, რომ მან გააბათილოს დროითი შემადგენლის დანაკარგი? ეს სიდიდე შემდეგნაირად შევაფასოთ. რადგან პოზიცია Δ-ნეიტრალურია, $\Delta_i = 0$, და პორტფელის ღირებულება კი უცვლელი გვინდა იყოს, ე.ი. $\Delta\Pi_i = 0$, ამიტომ თუ $\sigma_{i+1} - \sigma_i \approx 0$ და $r_{i+1} - r_i \approx 0$, გვექნება

$$-\Theta_i = 0.5\Gamma_i(F_{i+1} - F_i)^2.$$

მაგალითად, თუ $i = 0$,

$$|F_1 - F_0| = \sqrt{133 \cdot 0.5 \cdot 0.095} \approx 53.$$

ამ რიცხვის მიღება ასეც შეიძლება. ჩვენ ვიცით, რომ

$$\sigma_{F(t)} = \overline{F}(t)\sigma\sqrt{t}.$$

ჩვენ შემთხვევაში $t = \frac{1}{253}$, $\overline{F}(t) \approx F_0 = 4279$, $\sigma = 20\%$,

$$\sigma_{F(1)} = 4279 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{\frac{1}{253}} \approx 53.$$

მაგალითში, თუ კოტირების დღიური ცვლილება ნაკლებია 53-ზე, მაშინ პორტფელის ფასი კლებულობს (შევადაროთ Π_0 და Π_1). თუ ცვლილება მეტია 53-ზე, მაშინ ფასი იზრდება (შევადაროთ Π_1 და Π_2). თუ ლაპარაკია 2-დღიან ინტერვალზე, მაშინ ასეთი სასაზღვრო მნიშვნელობაა $53\sqrt{2} \approx 75$.

საშუალოდ პორტფელის ღირებულება იზრდება, თუ მოკლევადიანი ისტორიული ვოლატილობა σ_{10} გადაფასებულია საშუალო 20%-თან შედარებით და მცირდება იმ პერიოდებში, როცა σ_{10} ნაკლებია 20%-ზე.

რაც უფრო მცირეა პორტფელის ღირებულების შემთხვევითი რხევები, მით უფრო სრულყოფილია ჰეჯი.

რიცხობრივად ჰეჯის ეფექტურობა ფასდება მაქსიმალური და საშუალო კვადრატული გადახრით საწყისი ღირებულებიდან მთელი ჰეჯირების

პერიოდის განმავლობაში. ჩვენ შემთხვევაში ეს სიდიდეებია 514 და 320, შესაბამისად. ეფექტურობას აფასებს, აგრეთვე, პორტფელის საბოლოო ღირებულებაც — 293.

ერთ ოფციონზე გადათვლის შემთხვევაში, ეს რიცხვები, შესაბამისად, იქნება

$$5.14, \quad 3.20, \quad 2.9.$$

შევნიშნოთ, რომ სრულყოფილი ჰეჯირების დროს ეს რიცხვები ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თვით ეს ფაქტი — პორტფელის ღირებულების შემთხვევითი რხევები — გამოწვეულია იმით, რომ ჰეჯირება ხდება დისკრეტულად როგორც დროში, ისე Δ-თი, და ამასთან, ვოლატილობის ცვლილება დროში არ არის თანაბარი. ზღვარში, როცა ჰეჯირება უწყვეტად წარმოებს, პორტფელის ღირებულება უცვლელი რჩება.

ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $r = 0$. მაგრამ, რადგან ფულის მოძრაობა თითქმის არ არის ($\Delta \approx 0$), ამიტომ, შედეგის შეუცვლელად, r-ის სიდიდე შეიძლება ჩავთვალოთ ნებისმიერად.

ამით აიხსნება ის ფაქტი, რომ ოფციონების ღირებულება ფიუჩერსებზე ფიუჩერსული გადახდის წესით არ არის დამოკიდებული r-ზე.

ცხადია, რომ იმ პირობებში, რომლებშიც მოყვანილია მაგალითი, ჰეჯის ჩატარება უაზროა, რადგან თუ ოფციონის ფასი მისი თეორიული ღირებულების ტოლია, მოგება არ არის მოსალოდნელი.

ამ პროცედურას აზრი მიეცემა, თუ ოფციონის რეალური ფასი ოპერაციის დაწყების მომენტში ნაკლებია თეორიულ ღირებულებაზე. მაგალითად, თუ ჩვენ ვიყიდით ოფციონებს არა 158-ად, არამედ 100-ად, მაშინ ყოველ ოფციონზე მოვიგებთ 58-ს.

ეს მოგება წარმოიქმნება არა მყისიერად, არამედ დროთა განმავლობაში, როცა ოფციონის ფასი და ღირებულება ერთმანეთს დაუახლოვდება, რაც აუცილებლად მოხდება.

ამასთან, მნიშვნელოვანია, რომ ჰეჯისთვის საჭირო ფიუჩერსების რაოდენობა დგინდება არა რეალური ფასიდან და ნაგულისხმევი ვოლატილობიდან, არამედ σ-ს პროგნოზიდან. თუ დავუბრუნდებით ნახ. 5.1-ს, მაშინ ასეთი ოპერაციის განხორციელების ორიენტირი არის წარმოსახვითი წირი ZZ.

პრაქტიკულად არ არის საჭირო მივიყვანოთ ჰეჯი ოფციონების ექსპირაციის მომენტამდე: თუ ოფციონების საბაზრო ფასი რომელიმე სავაჭრო დღეს დაუახლოვდა თეორიულ ღირებულებას, მაშინ ეს სხვაობა შეიძლება უგულებელვყოთ იმ მოგებასთან შედარებით, რასაც გვაძლევს ოფციონების გაყიდვა და ფიუჩერსული პოზიციების დახურვა. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ ფასი მეტი გახდა ღირებულებაზე, პოზიციების დახურვა, ცხადია, სარფიანია.

განხილულ მაგალითში ფიუჩერსული კოტირების გაზრდა იწვევს იმას,

რომ ოფციონები ღრმად ფულით აღმოჩნდებიან. ასეთი ოფციონების ფასი ახლოსაა მათ შინაგან ღირებულებასთან. მაგალითად, $i = 26$ მომენტში თითო ოფციონის შინაგანი ღირებულება 792-ის ტოლია, ხოლო თეორიული ღირებულება უდრის 798.46-ს.

თუ ვერ მოხერხდა ოფციონის გაყიდვა შინაგანი ღირებულების ტოლ ფასადაც კი, მაშინ შეიძლება დღის ბოლოს გავყიდოთ დამატებით 1 ფიუჩერსი (გაყიდული გვექნება 100 ფიუჩერსი) და გავანაღდოთ ოფციონები. ამის შედეგად ყველა პოზიცია დაიხურება. ის მოგება, რომელიც დავკარგეთ — 2 ერთეული თითოეულ ოფციონზე — ნაკლებია, ვიდრე პორტფელის საშუალო რხევა ერთ ოფციონზე გადათვლით.

თუ, პირიქით, ფიუჩერსული კოტირების ცვლილებისას ოფციონი აღმოჩნდება ღრმად უფულოდ და მისი ფასი პორტფელის შემთხვევით რხევებზე მცირე აღმოჩნდა, მაშინ შეიძლება დავხუროთ ფიუჩერსული პოზიციები და გავყიდოთ ან „დავივიწყოთ" ოფციონები, რადგან, ამ მომენტიდან მოყოლებული, მაქსიმალური დანაკარგები ყველა შემთხვევაში არ აღემატება ოფციონების ნარჩენ ფასს (ამასთან, მოვლენები შეიძლება ისე განვითარდეს, რომ ფიუჩერსული კოტირების საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას, ოფციონების ფასი გაიზარდოს და მივიღოთ დამატებითი მოგება).

თუ ოფციონების ფასი უფრო მაღალია, ვიდრე მათი ღირებულება, საჭიროა მათი გაყიდვა და ფიუჩერსების ყიდვა Δ-ნეიტრალური პოზიციის შესანარჩუნებლად.

განხილულ მაგალითში სწორედ ასეთი სტრატეგიაა რეალური, რადგან ამ მომენტისთვის ისტორიული ვოლატილობა $\approx 30\%$ და მეტია ჭეშმარიტ ვოლატილობაზე (20%). თუ გავითვალისწინებთ, რომ იანვარ-თებერვალში, ტრადიციულად, ბაზარი არამდგრადია, ნაგულისხმევი ვოლატილობაც მიახლოებით უდრის $30\% > 20\%$.

ჩვეულებრივ, სპეკულანტური მოგების მიღების მცდელობა დაფუძნებულია საკუთარი პროგნოზის უფრო დიდ სიზუსტეზე ბაზრის პროგნოზთან შედარებით. თუ ფიუჩერსული სპეკულანტისთვის მთავარია ტრენდის პროგნოზი, დინამიური ჰეჯის ჩასატარებლად აუცილებელია ვოლატილობის პროგნოზირება. მნიშვნელოვანია ჰეჯის კორექტირების სიხშირისა და კორექტირების მომენტების შერჩევაც. შესაძლებელია, მაგალითად, ჩავატაროთ კორექცია ყოველ დღე ან ყოველ კვირას. ამ ვარიანტს ყველაზე ხშირად იყენებენ პროფესიონალი ტრეიდერები.

მეორე შესაძლებლობაა, ჩავატაროთ კორექცია იმ შემთხვევაში, თუ Δ მიაღწევს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას.

ორივე შემთხვევაში სასურველია ან დროითი ინტერვალის, ან სასაზღვრო მნიშვნელობის ოპტიმალური სიდიდის პოვნა. რაც უფრო დიდია ეს პარამეტრები, მით უფრო დიდია პორტფელის შემთხვევითი რხევები, მაგრამ რაც უფრო ხშირია კორექცია, მით მეტია საკომისიო ხარჯები.

ოპტიმალური სიდიდეების საპოვნელად მიმართავენ ჰეჯირების პროცესის მრავალჯერად მოდელირებას საკომისიო გადასახადის კონკრეტული მნიშვნელობების, ვაჭრობის მოცულობის და სხვა აუცილებელი პარამეტრების სიდიდეთა გათვალისწინებით, რათა სტატისტიკურად დაადგინონ ოპტიმალური დროის ინტერვალი ან სასაზღვრო მნიშვნელობები.

ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ ერთი მოსაზრება, რომელიც შეეხება პოზიციებს დადებითი Γ-თი. ასეთი პოზიციები ტიპიურია ჰეჯირებისთვის.

ვთქვათ, ხარჯები, რომლებიც დაკავშირებულია n ცალი კონტრაქტის გაყიდვასთან, მოიცემა გამოსახულებით $a + bn$, სადაც a და b მოცემული რიცხვებია. მაშინ, თუ ფიუჩერსული F_i კოტირებისათვის პოზიცია იყო Δ-ნეიტრალური და ფიუჩერსული კოტირება გახდა F_{i+1}, Δ-ნეიტრალობის შესანარჩუნებლად (გავიხსენოთ, რომ $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial F}$) საჭიროა ვიყიდოთ ან გავყიდოთ $\Gamma_i|F_{i+1} - F_i|$ ფიუჩერსი. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ფასის უკუსვლისას წინა დანაზოგი $\frac{1}{2}\Gamma_i(F_{i+1} - F_i)^2$ დაიკარგება.

თუ ხარჯები აღემატება ამ სიდიდეს, კორექცია არ უნდა გაკეთდეს. ამრიგად, მივიღეთ კორექციის აუცილებელი პირობა

$$a + b\Gamma_i|F_{i+1} - F_i| < 0.5\Gamma_i(F_{i+1} - F_i)^2.$$

თუ $a = 0$, გვაქვს

$$2b < |F_{i+1} - F_i|.$$

ვთქვათ, საკომისიო გადასახადი კონტრაქტზე 1000 ბარელ ნავთობზე არის $50. მაშინ, თუ 1 ბარელზე კოტირება 10 ცენტზე მეტით შეიცვლება (აღვნიშნოთ განსაზღვრულობისათვის ეს რიცხვი δ-თი), კორექცია საჭიროა. მართლაც,

$$2 \cdot 50 \cdot 10 \text{ ცენტი} < 1000 \cdot |\delta|.$$

საჭიროა მივიღოთ მხედველობაში შემდეგი გარემოება: საკომისიო გადასახადი აიკრიფება პოზიციის გახსნისას და არა დახურვისას.

განვიხილოთ კორექციის მესამე ვარიანტი, რომელიც შეიცავს სპეკულაციის ელემენტს და ისევ და ისევ ვოლატილობის სწორ პროგნოზზეა დამყარებული. თუ მიღწეულია Δ-ნეიტრალური პოზიცია $\Gamma > 0$-ით, კოტირება კი იცვლება და გვაქვს საფუძველი ვიფიქროთ, რომ ცვლილება იგივე მიმართულებით გაგრძელდება, კორექცია არ უნდა გაკეთდეს, რათა შევინარჩუნოთ პოზიციის ნიშანი.

თუ საწყის პოზიციაში $\Gamma < 0$ (მაგალითად, თუ გაყიდულია გადაფასებული ოფციონები), მაშინ კორექცია არ არის საჭირო, თუ მოსალოდნელია ფიუჩერსული ფასის უკუსვლა.

საერთოდ, ოფციონებით ვაჭრობა ტრეიდერს ერთ თავისუფლების ხარისხს მატებს მხოლოდ ფიუჩერსებით ვაჭრობასთან შედარებით — მას ეძ-

ლეეა შესაძლებლობა მიიღოს მოგება ვოლატილობის სწორი პროგნოზის საშუალებით, და ამავე დროს, არ დაკარგოს ფიუჩერსული ფასის ტრენდის სწორი პროგნოზიდან მიღებული უპირატესობა.

თუ ტრენდი დაახლოებით ნულის ტოლია, ფასი კი მხოლოდ გარკვეულ დიაპაზონში იცვლება (ტექნიკურ ანალიზში ამ შუალედს სავაჭრო დიაპაზონი ჰქვია), მაშინ სპეკულაციური ფიუჩერსული მოგების მიღება ხდება სკალპირებით — პოზიციის ხშირი შეცვლით.

განხილულ მაგალითში, საწყისი ფიუჩერსული კოტირებისათვის 4279, კოლ ოფციონს აქვს სტრაიკი 4300. სტრატეგიებში, რომლებიც დაფუძნებულია ვოლატილობის პროგნოზზე, არჩევენ ოფციონებს, რომლებიც ფულთან ან მცირედ უფულოდ არიან, რადგან მათი Vega მაქსიმალურია.

Δ-ნეიტრალური პოზიციის მიღება შეიძლება არა მარტო ფიუჩერსული პოზიციების შეცვლით, არამედ ოფციონების ყიდვა-გაყიდვითაც.

მაგალითად, გრძელი კოლი შეთანხმების ფასით 5100 და გრძელი პუტი შეთანხმების ფასით 5000, ქმნის Δ-ნეიტრალურ პორტფელს თუ ოფციონებს ავიღებთ პროპორციით $1 : \frac{45.7}{42.9} = 1.065$. ე.ი. ყოველ 100 კოლ ოფციონზე ვიყიდით 107 პუტ ოფციონს. ფასის შემდგომი ცვლილებისას საკმარისია ვცვალოთ ეს პროპორცია ან დავამატოთ ახალი ოფციონები.

თუ ფასი დაეცა, უარყოფითი Δ შეიძლება გავხადოთ ნულის ტოლი, თუ გავზრდით პორტფელში კოლ ოფციონების რაოდენობას ან შევამცირებთ პუტ ოფციონების რაოდენობას. თუ ორივე ოფციონი ფასდაკლებითაა შეფასებული, მაშინ, რასაკვირველია, პირველი ქმედება უნდა ავირჩიოთ.

ამასთანავე, უნდა გვახსოვდეს, რომ თუ ვოლატილობის პროგნოზი მცდარია, მაშინ შესაძლოა გაუთვალისწინებელი დანაკარგების მიღება.

5.4 ოფციონების რეპლიკაცია ფიუჩერსებით

პორტფელის ნულოვან ღირებულებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: ვარიაციული მარჟა, რომელიც დაერიცხა ან ჩამოეწერა ფიუჩერსულ პოზიციებს, საკმაოდ ზუსტად ასახავდა თვით ოფციონების ფასების ცვლილებას. ამრიგად, ფიუჩერსების საშუალებით შეიძლება სინთეზური ოფციონის შექმნა, მისი რეპლიკაცია.

ოფციონების რეპლიკაციის მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ არა მხოლოდ იმისათვის, რომ სპეკულაციური მოგება მივიღოთ ოფციონური პოზიციის იმიტაციით, არამედ უბრალოდ ოფციონების ყიდვა/გაყიდვის იმიტაციისთვისაც.

მაგალითად, თუ I^F (იხ. ცხრილი 5.4) სვეტში ყველა ნიშანს საწინააღმდეგოზე შევცვლით, მაშინ ფიუჩერსული პოზიცია 100 ნაყიდი კოლ ოფციონის (სტრაიკით 4300) შესაბამისი პოზიციის ზუსტ რეპლიკაციას წარმოად-

გენს.

როცა ფიუჩერსული ფასი იზრდება და ოფციონები სულ უფრო და უფრო ხელსაყრელი ხდება, ფიუჩერსული პოზიციების რაოდენობა უახლოვდება 100-ს. თუ ფასი ეცემა, ფიუჩერსულ პოზიციათა რაოდენობა თანდათან 0 ხდება. ამრიგად, ფიუჩერსული ფასის ზრდისას, გრძელი ფიუჩერსული პოზიციები უზრუნველყოფს მოგების მიღებას, ხოლო კოტირების შემცირების შემთხვევაში, ფიუჩერსული პოზიციების რაოდენობის შემცირება შემოსაზღვრავს ზარალს (გავიხსენოთ ნამდვილი კოლ ოფციონის გადახდის ფუნქცია).

ამასთან, თუ ფასი ჯერ იმატებს და შემდეგ მცირდება, მაშინ ფიუჩერსული კონტრაქტების რაოდენობა ჯერ მატულობს, შემდეგ კი ზედმეტი კონტრაქტები გაიყიდება. ე.ი., ფასის ზრდისას, კონტრაქტებს ყიდულობენ, ხოლო კლებისას — ყიდიან და ამრიგად, ძვირად ყიდულობენ და იაფად ყიდიან. ის ხარჯი, რომელიც ამის შედეგად წარმოიქმნება, არის სწორედ ოფციონის ფასი (პრემია).

გასაგებია, რომ რაც უფრო ძლიერია ფლუქტუაციები, ხარჯები მეტი იქნება და, მაშასადამე, მეტი იქნება ოფციონის ფასიც, რაც შეესაბამება იმ ფაქტს, რომ σ-ს ზრდა ზრდის ოფციონის ფასს.

ზემოგანხილულ მაგალითში (იხ. პუნქტი 5.3) ოფციონის საწყისი ფასი იყო 158, ხოლო ოპერაციის ბოლოს კი 444. ე.ი. ვარიაციული მარჟა უდრიდა $444 - 158 = 286$. ეს მარჟა თითქმის დაიფარა უარყოფითი ვარიაციული მარჟით ფიუჩერსებზე. ამიტომ, ოფციონების იმიტაციის დროს, ფიუჩერსების ჯამური ვარიაციული მარჟა უდრის ნაყიდი ოფციონის ღირებულებას ოპერაციის ბოლოს მინუს ოფციონის თეორიული ღირებულება ოპერაციის დასაწყისში. თუ, მაგალითად, 15.03-ში სპოტ-კურსი 4300-ზე ნაკლები გახდება, მაშინ ოფციონი გაუფასურდება და დანაკარგები დაახლოებით 158-ის ტოლი იქნება.

შემდგომ მსჯელობაში გავითვალისწინოთ საპროცენტო განაკვეთის სიდიდეც. ვთქვათ, პირველ დღეს, $t = 0$ მომენტში, ვყიდით კოლ ოფციონს ტრადიციული გადახდის წესით, ღირებულების ტოლ ფასად და, ამავე დროს, ვყიდულობთ Δ რაოდენობის ფიუჩერსულ კონტრაქტს.

პორტფელის ღირებულება $t = 0$ მომენტში იქნება

$$\Pi_0 = C_0 - C_0 = 0,$$

სადაც პირველი C_0 არის ოფციონის პრემია, ხოლო მეორე C_0 არის ფიუჩერსული პოზიციის ფასი.

მეორე დღეს პორტფელის ფასი გახდება ($\tau = \frac{1}{253}$ ანუ 1 დღეს)

$$\Pi_1 = (C_0 e^{r\tau} + V_1) - C_1 = 0,$$

სადაც V_1 ვარიაციული მარჟაა. მესამე დღეს

$$\Pi_2 = (C_0 e^{2r\tau} + V_1 e^{r\tau} + V_2) - C_2 = 0.$$

$T = m\tau$ მომენტში მივიღებთ

$$\Pi_{m-1} = \left(C_0 e^{rm\tau} + V_1 e^{r(m-1)\tau} + \cdots + V_m\right) - C_T = 0,$$

ანუ

$$V_1 e^{r(m-1)\tau} + \cdots + V_m = C_T - C_0 e^{rm\tau} = C_T - C_0 e^{rT}.$$

ამრიგად, ფიუჩერსების შესაბამისი ვარიაციული მარჟა აკომპენსირებს ოფციონის ბოლო ღირებულებისა და საწყისი პრემიის დაგროვილ ფასებს შორის სხვაობას (და არა $C_T - C_0$-ს). ამასთან, Δ დაითვლება ფორმულით, რომელიც ტრადიციულ გადახდის წესს შეესაბამება.

გავიხსენოთ მაგალითი 4.10 და შევნიშნოთ, რომ ფიუჩერსული ფასის და დოლარის კურსის ვოლატილობები სხვადასხვაა, სახელდობრ, ფიუჩერსული კოტირება გაცილებით უფრო „მოძრავია". ასეთია რეალური პროცესების ყოფაქცევა. თუ საპროცენტო განაკვეთი მუდმივია, ან დროის ცნობილი ფუნქციაა, მაშინ ჩვენ ვიცით, რომ თეორიულად

$$F_t = S_t e^{r(t)(T_{exp} - t)}$$

და თუ ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის მოდელირება ხდება გეომეტრიული ბროუნის ძრაობით, ფიუჩერსული კოტირების ფასიც ანალოგიური მოდელით მოიცემა. ამასთან, F_t-ს ვოლატილობა ამ შემთხვევაშიც მუდმივი იქნება და S_t-ს ვოლატილობის ტოლი აღმოჩნდება.

რეალურად კი ფიუჩერსულ ფასზე მოქმედებს არა მხოლოდ ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის შემთხვევითი რხევები, არამედ ისიც, რომ საპროცენტო განაკვეთის მომავალი მოძრაობაც შემთხვევითია, ე.ი., ზოგადად, ამ განაკვეთის დროითი სტრუქტურაა შესასწავლი. ვაჩვენოთ, რომ ყოველ შემთხვევაში, თეორიულად, ეს ფაქტი მომგებიანი ოპერაციების ჩატარების საშუალებას გვაძლევს.

ვთქვათ, ოფციონები მოცემულ ფიუჩერსულ კონტრაქტებზე არ არსებობენ. ამ შემთხვევაში, არბიტრაჟული მოგების მისაღებად, მოვახდინოთ ოფციონის რეპლიკაცია ისეთი პორტფელის საშუალებით, რომელიც ფიუჩერსული კონტრაქტებისა და ვალუტისგან შედგება.

ვთქვათ, ვალუტის კურსის ვოლატილობის პროგნოზი არის 6%, ხოლო ფიუჩერსული ფასის ვოლატილობა კი 20%-ის ტოლია. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ საპროცენტო განაკვეთებია $r_d = 150\%$ და $r_f = 50\%$.

გამოთვლებს მივყავართ ქვემოთმოყვანილ ცხრილამდე.

i	S	C^{BET}	Δ^{BET}	D	F	C^{FET}	Δ^{FET}	I^F	R	Π
0	3383	3757	46.7	47	4279	10986	34.8	−35	−159001	0
1	3410	4440	51.7	52	4280	40991	35.0	−35	−176695	−95
3	3427	3970	48.7	49	4406	15923	43.8	−44	−172183	339
−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−
36	4133	24272	94.9	95	4835	46148	82.9	−83	−405464	157
38	4157	23809	95.3	95	4783	42259	83.2	−83	−404319	52
−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−
61	4695	42614	94.6	100	4747	44189	98.9	−99	−461006	−200
63	4744	4440	100	100	4744	44400	100.0	−100	−464217	−200

ცხრილი 5.5

ცხრილის სვეტებს აქვთ შემდეგი შინაარსი:

S — ვალუტის კურსი.

C^{CET} — 100 ცალი სავალუტო ოფციონის ღირებულება.

Δ^{CET} — Δ ჰეჯის კოეფიციენტი.

D — ვალუტის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა 100 ცალი სავალუტო ოფციონის ყიდვის იმიტაციისთის.

F — ფიუჩერსული კოტირება.

C^{FEF} — 100 ცალი ფიუჩერსული ოფციონის თეორიული ღირებულება.

Δ^{FET} — ამ ოფციონების Δ ჰეჯის კოეფიციენტი.

I^F — ღია ფიუჩერსული პოზიცია, რომელიც იმიტირებს 100 ცალი ფიუჩერსული ოფციონის გაყიდვას.

R — პორტფელის ფულადი შემადგენელი.

Π — პორტფელის ღირებულება $t = \tau i$ მომენტში, რომელიც უდრის

$$\Pi_i = \left(C_i^{FET} - C_0^{FET} e^{r_d i \tau}\right) - \left(C_i^{CET} - C_0^{CET} e^{r_d i \tau}\right) + \left(R_i + D_i S_i\right).$$

პორტფელი Π_i გვიჩვენებს ორი წარმოსახვითი პორტფელის ჯამურ ღირებულებას. თითოეულის ფასი, იდეალური ჰეჯის ჩატარების შემთხვევაში, ნულის ტოლი უნდა იყოს.

პირველი პორტფელია:

100 ნაყიდი ფიუჩერსული ოფციონი;

ფიუჩერსული პოზიციები, რომლებიც ოფციონების გაყიდვის იმიტაციას ახდენენ;

ვარიაციული მარჟა ფიუჩერსებზე პროცენტული დანარიცხის გათვალისწინებით.

მეორე პორტფელია:

100 გაყიდული ოფციონი ვალუტაზე;

ვალუტა, რომელიც ახდენს ამ ოფციონების ყიდვის იმიტაციას;

ფულადი სახსრები, რომლებიც წარმოიშვა ოფციონის გაყიდვით, ვალუტის ყიდვით და ნარჩენებზე პროცენტების დარიცხვით.

რეალურად, Π_i-ს გამოსახულებაში „არსებობს“ მხოლოდ ბოლო შესაკრები, დანარჩენი ორი შესაკრები ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თუ ზემომოყვანილ ფორმულაში საწყის მომენტში თითოეული ფრჩხილი ცალ-ცალკე ნულის ტოლია, მაშინ ოპერაციის ბოლოს $C_m^{FET} = C_m^{CET}$ და

$$R_m + D_m S_m = e^{r_d T}\left(C_0^{FET} - C_0^{CET}\right). \tag{5.1}$$

Π_i პორტფელის სიდიდეზე უწყვეტი კონტროლი საშუალებას იძლევა დროულად შევიტანოთ კორექტივები შეფასებებში.

პროცედურა ასე გამოიყურება. $i = 0$ მომენტისთვის განისაზღვრება C_0^{CET} და Δ_0^{CET}. ამის შემდეგ, S_0 კურსით შეიძინება D_0 რაოდენობის ვალუტა, რისთვისაც სესხულობენ $R_0 = D_0 S_0$ თანხას. ამავე დროს, გამოითვლება C_0^{FET} და Δ_0^{FET} და გაიყიდება I_0^F რაოდენობის ფიუჩერსი.

მეორე დღეს ვალუტის თანხა ხდება $D_0 e^{r_f T}$-ის ტოლი, ფულადი ვალი კი $R_0 e^{r_d T}$-ის ტოლი.

ამ დღისთვის განისაზღვრება ვალუტის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მოცემულ დღეს მოცემული კურსის პირობებში. ზედმეტი (ან ნაკლები) ვალუტა გაიყიდება ან შეიძინება S_1 კურსით. ამავე დროს, დაირიცხება ვარიაციული მარჟა ფიუჩერსებზე და ხდება ფიუჩერსული კოტირების კორექცია.

შემდეგ დღეებში პროცედურა მეორდება. ამის შედეგად, რიცხვები ცხრილის ბოლო გრაფაში ახლოს არიან ნულთან. მართლაც, მივაქციოთ ყურადღება, რომ კოტირების სიდიდეები საკმაოდ დიდი რიცხვებით გამოისახება და, მათთან შედარებით, რიცხვები 157, −200, 52 და ა.შ. შეიძლება მიახლოებით ნულის ტოლად ჩავთვალოთ.

ბოლოს მიიღება ის მოგება, რომლის პროგნოზიც შეიძლებოდა თავიდანვე გაგვეკეთებინა (5.1) ტოლობაზე დაყრდნობით.

$$4744 \cdot 100 + (-464217) - 200 = 474400 - 464417 =$$
$$= 9983 \approx 10000.$$

5.5 ჰეჯის დაზუსტება — Δ-Γ-ნეიტრალური პოზიციები

შევადგინოთ ისეთი სავაჭრო სტრატეგია, რომ შესაბამისი პორტფელი არა მხოლოდ Δ-ნეიტრალური, არამედ Γ-ნეიტრალურიც აღმოჩნდეს.

ვთქვათ, ფიუჩერსული კოტირება 4500-ის ტოლია და ერთთვიან კოლ ოფციონს სტრაიკით 4500 და ერთთვიან პუტ ოფციონს სტრაიკით 4600 აქვთ

შემდეგი ფასები (მახასიათებლები გამოთვლილია ვოლატილობის $\sigma = 10\%$-იანი პროგნოზისათვის):

	ფასი	ღირებულება	Δ	Γ	θ	Vega
4500 კოლი	60.0	53.29	0.506	0.00299	−1.16	5.33
4600 პუტი	102.0	118.1	0.766	0.00230	−0.89	4.10

ცხრილი 5.6

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ პუტ ოფციონი ნაკლებადაა შეფასებული, ხოლო კოლი გადაფასებულია.

ამიტომ ტრეიდერმა გადაწყვიტა გაყიდოს 100 კოლ ოფციონი, იყიდოს 130 პუტ ოფციონი და იყიდოს 150 ფიუჩერსი. მიღებული პორტფელის მახასიათებლები შემდეგ ცხრილშია მოყვანილი

	ფასი	ღირებულება	Δ	Γ	θ	Vega
150 ფიუჩერსი	0	0	150.0	0	0	0
−100 კოლი	−6000	−5330	−50.6	0.299	116	−533
130 პუტი	13260	15340	−99.6	0.299	−116	533
საბოლოოდ	7260	10010	−0.2	0	0	0

ცხრილი 5.7

როგორც ვხედავთ, Δ და Γ დაახლოებით ნულის ტოლია. როგორ მიიღწევა ეს პოზიცია? დავუშვათ თავიდან, რომ გაიყიდა 100 კოლ ოფციონი. შევარჩიოთ პუტ ოფციონების რაოდენობა ისე, რომ პორტფელის Γ იყოს ნულის ტოლი (შევნიშნოთ, რომ ამის მიღწევა მხოლოდ ფიუჩერსებით შეუძლებელია, რადგან მათი $\Gamma = 0$). ამის შემდეგ გამოითვლება მიღებული პორტფელის Δ და ხდება ამ პოზიციის კომპენსაცია ფიუჩერსების საშუალებით.

მიღებული პოზიციის გრაფიკი მოყვანილია ნახ. 5.18-ზე.

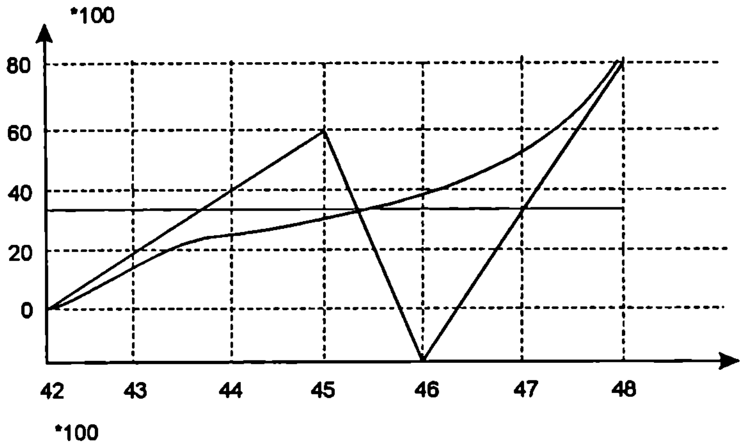
Δ-Γ-ნეიტრალობის გამო პორტფელი სტაბილურია ფიუჩერსული ფასის ცვლილების საკმაოდ დიდ ინტერვალში და, ამდენად, პოზიციის რეგულარული კორექციის მოთხოვნილება მცირდება. გავიხსენოთ, რომ

$$\theta + 0.5\Gamma(F\sigma)^2 = 0.$$

ამიტომ, თუ $\Gamma = 0$, მაშინ $\theta = 0$. ეს პარამეტრი კი, თავის მხრივ, დაკავშირებულია Vega-სთან, რადგან დრო და ვოლატილობა შედის ბლეკ-შოულსის ფორმულაში შემდეგ კომბინაციაში $\sigma\sqrt{T}$.

თუ ოფციონის ფასი დამოკიდებულია r-ზე, მაშინ შეიძლება ისეთი პოზიციების შექმნა, რომ ჰეჯის ყველა პარამეტრი, ρ-ს ჩათვლით, იყოს ნული.

ცხადია, რომ მგრძნობიარობის კოეფიციენტების განულება არ იწვევს პორტფელის სრულ სტაბილურობას.



ნახ. 5.18

გრაფიკიდან ჩანს, რომ თუ ფიუჩერსული კოტირება საკმაოდ შეიცვალა, ან გაეიდა გარკვეული დრო, პორტფელის ღირებულება გადაიხრება საწყისი ღირებულებიდან, წარმოიქმნება გრაფიკის დახრილობა, რაც მოითხოვს კორექციის ჩატარების აუცილებლობას.

კომენტარი. თეორიული მოდელები აღწერენ რეალობის გარკვეულ ძირითად თვისებებს. მაგრამ სრული ადეკვატურობის მიღწევა, რასაკვირველია, შეუძლებელია. ამიტომ, მცირე, მაგრამ მრავალრიცხოვანმა გადახრებმა თეორიული მოდელიდან შეიძლება მიგვიყვანოს საკმაოდ მოულოდნელ შედეგამდე.

განვიხილოთ მაგალითი 4.10 და ცხრილი 5.4, სადაც ფიუჩერსული კოტირება საკმაოდ ანომალურია

ბლეკ-შოულსის ფორმულა გამოყვანილია იმ დაშვებაში, რომ ძირითადი ინსტრუმენტის ვოლატილობა მუდმივია ოფციონის არსებობის მთელი დროის განმავლობაში. რეალურად ეს ასე არ არის. კერძოდ, ასე არ არის ჩვენ მაგალითშიც.

ამის შედეგია ის, რომ სხვა სტრაიკებზე ნაყიდი 100 კოლ ოფციონისაგან შემდგარი პორტფელის ჰეჯირების შედეგად ვღებულობთ პორტფელის საწყისი ფასიდან მნიშვნელოვან გადახრას.

ცხრ. 5.8-ში მოყვანილია Π_{63} პოტრფელის საბოლოო სიდიდე და შესაბამისი კოეფიციენტი Vega.

სტრაიკი	4000	4400	4500	4600	4700	4800	4900	5000	5400	5800
Π_{63}	144	337	-157	-1001	-2107	-2409	-836	1329	1936	5461
Vega	640	816	753	662	556	448	346	258	57	8

ცხრილი 5.8

ცხადია, იმისათვის, რომ გვქონდეს მოგების შესაძლებლობა, აუცილებელია, ვოლატილობის მარაგი იყოს მინიმუმ

$$\frac{|\Pi_{63}|}{\text{Vega}}$$

სიდიდის ტოლი. მაგალითად, თუ სტრაიკი არის 5000, მაშინ ოფციონების გაყიდვა იმ დაშვებაში, რომ ისინი გადაფასებულნი არიან, აზრიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ნაგულისხმევი ვოლატილობა ტოლია

$$20\% + \frac{1329}{258} \cdot 100\% \approx 25\%,$$

ე.ი. გაცილებით უფრო დიდია, ვიდრე ჩვენი პროგნოზის მიხედვით არის მოსალოდნელი.

ცხრილში მიღებული მონაცემები შეიძლება ასე ავხსნათ.

თუ ვოლატილობა არათანაბრად იცვლება დროში, მაშინ მნიშვნელოვანია თუ რამდენად უფრო შორსაა სტრაიკისაგან ძირითადი აქტივის ფასი ვოლატილობის ზრდის ან კლების პერიოდში.

თუ აქტივის ფასი ახლოსაა სტრაიკთან, მაშინ ვოლატილობის ზრდა იწვევს პორტფელის ღირებულების უფრო სწრაფ ზრდას, ვიდრე ეს მოხდებოდა იმ შემთხვევაში, როცა ფასი ახლოს არ არის სტრაიკთან.

პირიქით, თუ ოფციონი სამართლიანია და, ამავე დროს, ვოლატილობა მცირეა, პორტფელის ღირებულება სწრაფად მცირდება, რადგან ასეთ შემთხვევაში (ე.ი., როცა ოფციონი ფულთანაა) Γ და θ კოეფიციენტები ყველაზე დიდ მნიშვნელობებს იღებენ.

გავიხსენოთ თეორიული მოდელის გამოყენების კიდევ ერთი შედეგი — ოფციონის ღირებულება არ არის დამოკიდებული μ-ზე, ტრენდის კოეფიციენტზე.

მოდელირებაც გვიჩვენებს ასეთი დასკვნის სამართლიანობას. ერთჯერადი კორექტიაც კი საკმარისია იმის დასანახად, რომ ღირებულება არ არის μ-ს ფუნქცია.

მაგრამ თუ სპეციალურად დავამოდელირეთ ფასის პროცესი რაიმე მუდმივი ტრენდით μ და შემდეგ დავამოდელირეთ ჰეჯი, მივიღებთ

$\widetilde{F}_{63} - F_{63}$	−800	−600	−400	−200	0	200	400	600	800
Π_{63}	273	157	2603	387	293	684	2068	1271	1645

ცხრილი 5.9

ე.ი., თუ ტრენდიანი კოტირება $\widetilde{F}_{63}$ განსხვავდება F_{63} საწყისი კოტირებისაგან ცხრილში მოცემული სიდიდით, მაშინ Π_{63}-თვის ვღებულობთ აქვე მოყვანილ შედეგებს, ანუ ღირებულება დამოკიდებული გახდა μ-ზე, რისი მიზეზიც ისევ ვოლატილობის არამუდმივობაა. ცხრილიდან აგრეთვე ჩანს, რომ თუ სხვაობა $\widetilde{F}_{63} - F_{63}$ იზრდება აბსოლუტური სიდიდით, პორტფელის ღირებულებაც იზრდება, რადგან იზრდება კოტირების დღიური ცვალებადობა და ამიტომ ჰეჯის დისკრეტულობა დროში უფრო მნიშვნელოვანი ხდება.

აქედან არ გამომდინარეობს, რომ თეორიული მოდელი პრაქტიკის სრულიად არაადეკვატურია და თეორიას არა აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა. ჩვენ მხოლოდ უნდა გვახსოვდეს ის პირობები, რომლებშიც მიღებულია თეორიული შედეგები და შევიტანოთ სათანადო ცვლილებები, რათა მოდელი დავუახლოვოთ რეალურ პირობებს.

5.6 ნაგულისხმევი ვოლატილობა

განმარტებით, როგორც ვიცით, ნაგულისხმევი ვოლატილობა, σ, არის შემდეგი განტოლების ერთადერთი ამონახსნი

$$C(T-t, F, K, r, \sigma) = \text{Price},$$

სადაც მარცხნივ დგას ოფციონის ღირებულების ბლექ-შოულსის ფორმულა, რომელშიც ყველა პარამეტრი, გარდა σ-სი, ფიქსირებულია, ხოლო მარჯვენა მხარეში — ოფციონის საბაზრო ფასი. ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რადგან C, როგორც σ-ს ფუნქცია, მონოტონურად ზრდადია. პრაქტიკულად, თუ ავიღებთ σ-ს მნიშვნელობებს ბიჯით, მაგალითად, 0.01%, ადვილად შეიძლება ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა.

აქედან ჩანს, რომ ფასი და ვოლატილობა ეკვივალენტურია და ოფციონებით ვაჭრობა შეიძლება ვოლატილობის ტერმინებშიც. მაგალითად, ჩვენ გვქონდა განხილული შემთხვევა, როცა ვიყიდეთ ოფციონი $\sigma = 10\%$-ად, მაშინ როცა საპროგნოზო მნიშვნელობა იყო $\sigma = 20\%$, ე.ი. იყო ვოლატილობის მარაგი 10%.

5.7 ვოლატილობის მრუდი

ვოლატილობის მრუდის აგება. როგორ აიგება ვოლატილობის მრუდი? ამისათვის ავირჩიოთ ექსპირაციის რაიმე თარიღი. შეთანხმების ფასები გადავზომოთ ჰორიზონტალურ ღერძზე. ვერტიკალურ ღერძზე გადავზომოთ ნაგულისხმევი ვოლატილობის სიდიდეები. თუ ვაჭრობა რომელიმე სერიაში ხდება, მაშინ ფასის საშუალებით გამოითვლება ნაგულისხმევი ვოლატილობის სიდიდე ამა თუ იმ სტრაიკისათვის. ამასთან, კოლ და პუტ ოფციონებისათვის ეს წერტილები ცალ-ცალკე აღინიშნება. იმისათვის, რომ საბაზრო სიტუაციის „მყისიერი ფოტო" მივიღოთ, კარგია, თუ გარიგებები დროის მცირე მონაკვეთში მოხდება. ამავე გრაფიკზე აღინიშნება მიწოდების და მოთხოვნის ფასებიც, გამოხატული ვოლატილობის ტერმინებში. როგორც წესი, წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან გარიგებებს პუტ და კოლ ოფციონებზე ერთი და იგივე სტრაიკით, ახლოს არიან, ხოლო ღრეჩოებს მიწოდება-მოთხოვნის ფასებს შორის აქვთ საერთო ნაწილი, რაც პუტ-კოლ პარიტეტით აიხსნება: რომ არ წარმოიქმნას არბიტრაჟი, კოლ და პუტ ოფციონების ღირებულებების დროითი შემადგენლები უნდა იყოს ტოლი და ე.ი. ტოლი უნდა იყოს ნაგულისხმევი ვოლატილობებიც.

ამის შემდეგ, მიღებულ წერტილებს ვაერთებთ. თუ არ გვაქვს რომელიმე წერტილი, ვიყენებთ ან ინტერპოლაციას, ან ექსტრაპოლაციას.

თუ ბაზარი მართლა ითვალისწინებს იმ დაშვებებს და მოსაზრებებს, რომლებიც საფუძვლად უდევს ოფციონის ფასის ფორმულას, მაშინ ვოლატილობის მრუდი უნდა იყოს ჰორიზონტალური წრფე.

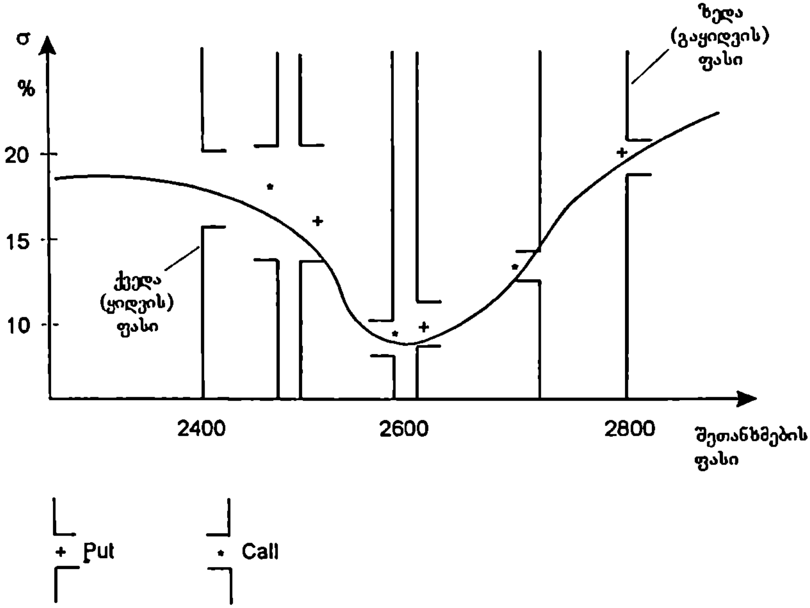
მართლაც, ვაჭრობის თითოეული მონაწილე ადგენს ვოლატილობის პროგნოზს და შემდეგ ყიდულობს მისი აზრით უფრო იაფ და ყიდის უფრო ძვირ ოფციონს. იგი ხელმძღვანელობს ვოლატილობის მარაგით. თუ სხვადასხვა სტრაიკებზე ოფციონებს სხვადასხვა ვოლატილობა აქვთ, მაშინ გამყიდველები ყურადღებას მიაქცევენ ძვირ ოფციონებს, მყიდველები — იაფს და, ამრიგად, ფასი, გამოხატული ვოლატილობის ტერმინებში, გათანაბრდება.

რეალურად ეს დასკვნა არ არის სავსებით მართებული. მართლაც, ახლომდებარე სტრაიკებზე ვოლატილობები ახლოს არიან ერთმანეთთან და ვოლატილობის მრუდი მართლაც გლუვი წირია, რომელსაც არა აქვს დიდი რხევები. მაგრამ, რაც უფრო შორდება სტრაიკი ცენტრალურს, მით უფრო გადაიხრება ვოლატილობის მნიშვნელობა ცენტრალურისაგან (ცენტრალური სტრაიკის შესაბამისი ვოლატილობისაგან). ამის ახსნა იმით შეიძლება, რომ ბაზარი ითვალისწინებს სხვა, დამატებით ფაქტორებს, რომლებსაც მოდელი არ აქცევს ყურადღებას.

ტიპიურად ვოლატილობის მრუდს აქვს სახე (მას ვოლატილობის „ღიმილი" ჰქვია), რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 5.19-ზე.

გადახრები ბლეკ-შოულსის მოდელიდან. რა ახსნა აქვს ამ სუ-

რატომ? საქმე იმაშია, რომ ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის ლოგნორმალურობა იწვევს იმ დაშვებას, რომ ფასის დიდი სიდიდით ცვლილებები მცირე ალბათობის მქონენი არიან, სახელდობრ, 3σ-ს წესიდან გამომდინარე, დიდი გადახრების ალბათობა დაახლოებით 0.1–0.2%-ის ტოლია.

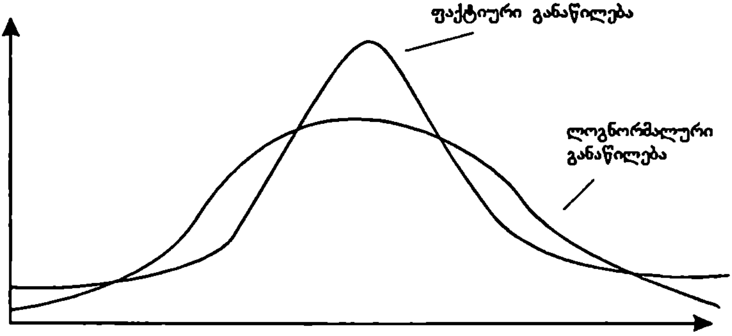


ნახ. 5.19

მეორეს მხრივ, გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ ფასების დიდ ნახტომებს (10% და მეტი) თითქმის ყველა ბირჟაზე აქვს ადგილი (თუმცა იშვიათად). ამას „ბირჟის პანიკა“ ჰქვია. ოფციონების გამყიდველებს ეს ყოველთვის აქვთ მხედველობაში. აქედან გამომდინარე, ყველაზე უფრო რისკიანი არის იაფი ოფციონები, ანუ ისეთები, რომლებიც ღრმად უფულოდ არიან. ამიტომ, ამ რისკის კომპენსაციის მიზნით, ამ ოფციონების ღირებულება დამატებით იზრდება თეორიულ ღირებულებასთან შედარებით, რომელიც ვოლატილობის საბაზისო სიდიდით გამოითვლება. ამასთან, გაზრდა საკმაოდ მნიშვნელოვანია, შეიძლება რამოდენიმეჯერაც კი იყოს (როგორც ვოლატილობის, ისე ფასის ტერმინებში) (იხ. ნახ. 5.20).

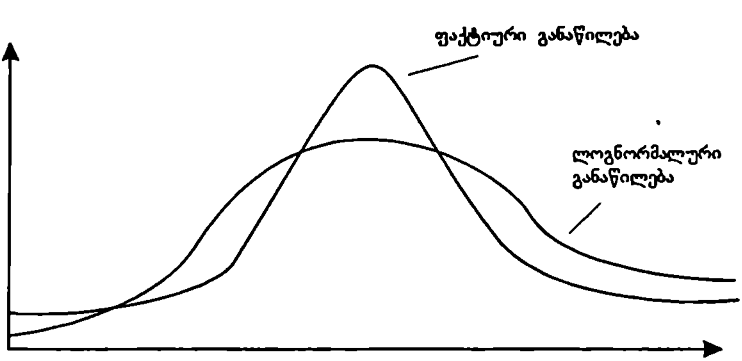
როგორც ვხედავთ, ფაქტიური განაწილება განსხვავდება ლოგნორმალურისაგან — რეალურ პროცესს აქვს ტენდენცია უფრო ხშირად იყოს საშუალო სიდიდის მიდამოში, თუ ბაზარზე წყნარი სიტუაციაა, მაგრამ, სამაგიეროდ, ხანდახან საკმაოდ დიდი ალბათობით ადგილი აქვს დიდ გადახრებს

(უფრო ხშირად, ვიდრე ამას თეორიული ლოგნორმალური განაწილება წინასწარმეტყველებს), ანუ, სხვა სიტყვებით, რეალურ განაწილებას აქვს „მძიმე კუდები". აქედან გამომდინარე, თეორია აკლებს ფასს იმ ოფციონებს, რომლებიც არიან ღრმად უფულოდ, თუ შევადარებთ მათ ფასს ფულთან მყოფი ოფციონების ნაგულისხმევ ვოლატილობასთან.



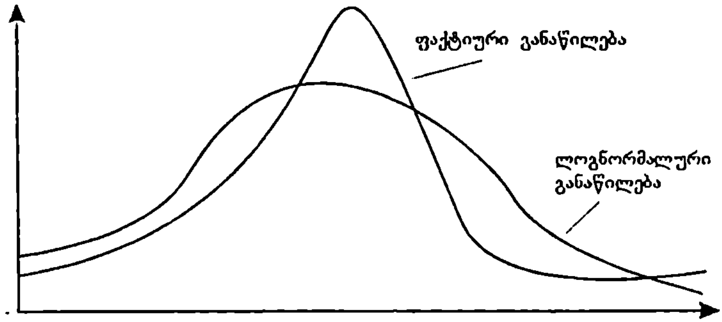
ნახ. 5.20

მეორე ტიპიური გადახრა ლოგნორმალურობის დაშვებიდან მდგომარეობს იმაში, რომ რეალური განაწილება ასიმეტრიულია, რაც იმაში გამოიხატება, რომ განაწილების ერთი კუდი უფრო მაღლაა აწეული, ვიდრე მეორე. ეს ხდება მაშინ, როცა ბაზარი „გრძნობს", რომ რომელიმე მიმართულებით ფასის ცვლილება უფრო მოსალოდნელია, ვიდრე მეორე მიმართულებით. მაგალითად, თუ მოსალოდნელია ფასის სწრაფი დაცემა, მაშინ უფულოდ მყოფი პუტ ოფციონები უფრო ძვირია, ვიდრე უფულოდ მყოფი კოლ ოფციონები, რომელთა სტრაიკები სიმეტრიულად არიან განლაგებული ცენტრალური სტრაიკის მიმართ. საბოლოოდ ეს იწვევს მარცხენა „კუდის" აწევას (იხ. ნახ. 5.21).



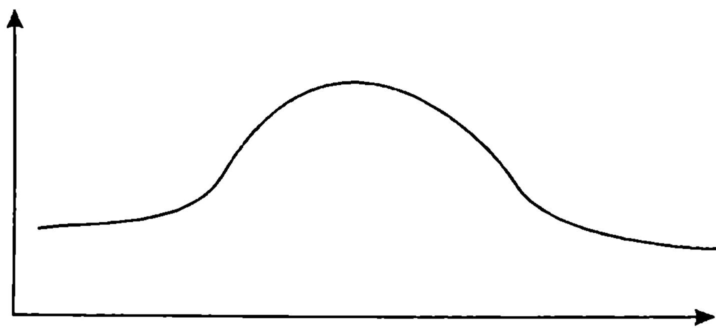
ნახ. 5.21

ზემოთმოყვანილ მაგალითში კოლ ოფციონები უფრო გადაფასებული არიან, ე.ი. გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. ნახ. 5.22).



ნახ. 5.22

წყნარ სიტუაციაში არ არის გამორიცხული, რომ ვოლატილობის მრუდს ჰქონდეს საწინააღმდეგო ჩაზნექილობა (იხ. ნახ. 5.23).



ნახ. 5.23

ამ შემთხვევაში, ფულთან მყოფ ოფციონებს მაქსიმალური ვოლატილობა აქვთ. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ წყნარი ბაზრის შემთხვევაში ყველაზე აქტიურად ივაჭრება ფულთან მყოფი ოფციონები, ოფციონთა სხვა სერიებზე მოთხოვნა ნაკლებია.

ოფციონის ღირებულების დაზუსტება. არსებობს სხვადასხვა მიდგომა, რომლებიც ითვალისწინებს გადახრას ბლეკ-შოულსის მოდელიდან, მაგრამ არც ერთი მათგანი არ არის სრულყოფილი და უნივერსალური. ამიტომ პრაქტიკაში იყენებენ ბლეკ-შოულსის კლასიკურ მოდელს, ოღონდ ანალიზს აღრმავებენ ვოლატილობის მრუდის განხილვით, რომელიც მკაფიოდ

ასახავს ბაზრის აზრს ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის შესაძლო ცვლილებების შესახებ.

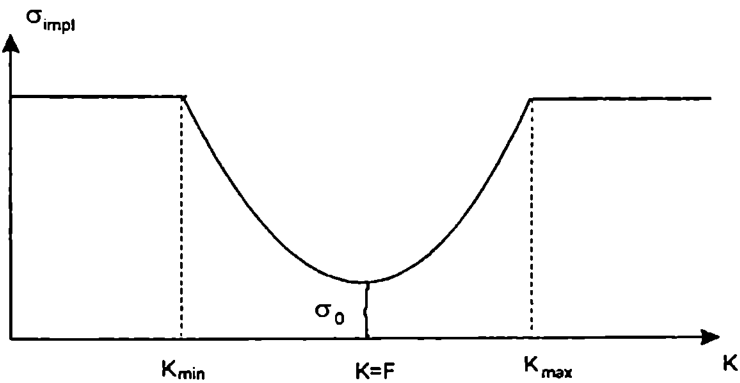
ამიტომ ვოლატილობის მრუდი შეიძლება გამოვიყენოთ ოფციონის ღირებულების დასაზუსტებლად ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის ცვლილების დროს.

ამისათვის ექსპერიმენტალურად მიღებულ ვოლატილობის მრუდს აღწერენ ანალიზურად, მაგალითად, პარაბოლის საშუალებით. პარაბოლის არგუმენტად აღებულია სტრაიკისა და ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის სხვაობა $K - F$:

$$\sigma_{impl} = \sigma_{impl}(K - F) = \sigma_0[1 + \alpha(K - F)^2],$$

სადაც σ_0 არის ფულთან მყოფი ოფციონების ნაგულისხმევი ვოლატილობა, ხოლო α რაიმე კოეფიციენტია.

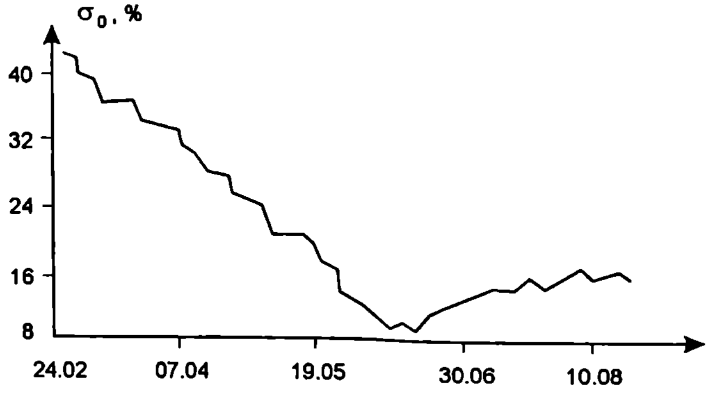
ფორმულაში F ფასი ფიქსირებულია, ხოლო K სტრაიკი იცვლება თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ სიდიდეებს შორის. ამ სიდიდეთა მარჯვნივ და მარცხნივ, ჩვეულებრივ, პარაბოლა „გადაიქრება“ ჰორიზონტალური წრფით (იხ. ნახ. 5.24).



ნახ. 5.24

წარმოვიდგინოთ, რომ ამ ფორმულაში K ფიქსირებულია და F იცვლება. მაშინ σ_{impl} მაინც ამ ფორმულით აღიწერება, ე.ი. ძირითადი ინსტრუმენტის ფასის ცვლილება მრუდის ფორმას ინარჩუნებს.

ამრიგად, იმისათვის, რომ მივიღოთ უფრო ზუსტი შეფასებები, ბლეკ-შოულსის ფორმულებში უნდა ჩავსვათ არა მუდმივი σ, არამედ $K - F$-ის ფუნქცია, მაგალითად, ზემოხსენებული პარაბოლა. მოვიყვანოთ რეალური σ_0-ის გრაფიკი (ნახ. 5.21).



ნახ. 5.25

აქედან ჩანს, რომ ნაგულისხმევ ვოლატილობის სხვადასხვა სიდიდეებს შორის განსხვავება მკვეთრადაა გამოხატული.

5.8 ვოლატილური სტრატეგიის მაგალითი

მოვიყვანოთ სპეკულაციის მაგალითი, რომელიც დაფუძნებულია ნაგულისხმევი ვოლატილობის ცვლილების იღბლიან პროგნოზზე. ამისთვის გამოყენებული იქნება ე.წ. სტრენგლი, ვოლატილური კომბინაცია, რომელიც სპეციალურადაა მისადაგებული ვოლატილობის ცვლილების პროგნოზის გამოყენებისთვის.

დინამიური ჰეჯის ადრე მოყვანილ მაგალითში ოფციონების თეორიული ღირებულებები და ნგრძნობიარობის კოეფიციენტები გამოთვლილი იყო ვოლატილობის პროგნოზზე დაყრდნობით.

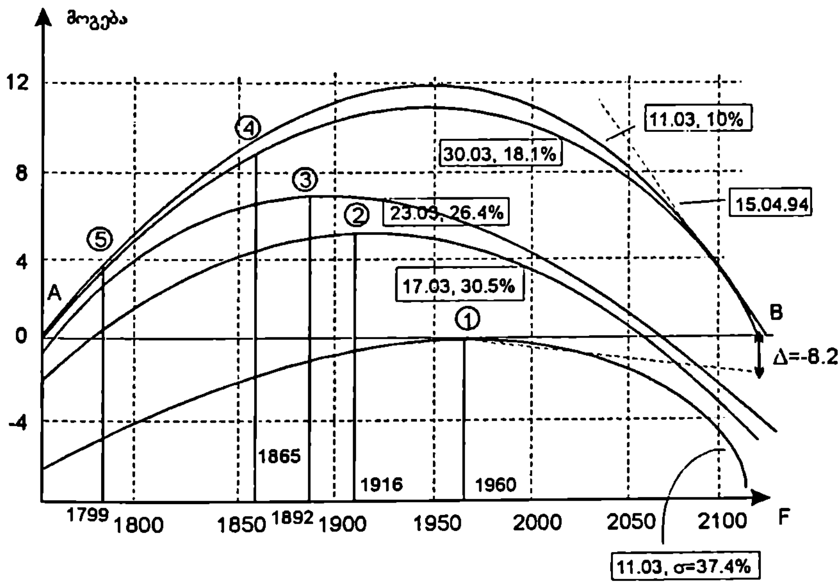
სხვა ტიპის სავაჭრო სტრატეგია შეიძლება შევქმნათ ნაგულისხმევ ვოლატილობაზე დაყრდნობით.

რიცხვითი მაგალითი. მოვიყვანოთ შესაბამისი მონაცემების ცხრილი და გრაფიკი (იხ. ცხრ. 5.10 და ნახ. 5.16).

სტრატეგიის განხორციელება იწყება 11.03-ში, როცა გავყიდეთ 100 კოლი სტრაიკით 1900 და 100 პუტი სტრაიკით 2000 ექსპირაციის თარიღით 15.04 (ამ სავაჭრო სტრატეგიას ჰქვია მოკლე სტრენგლი).

i	F	C	P	$C+P$	σ	Δ	I^F	Γ	Θ	$Vega$	Π
0	1960	12200	11300	23500	37.4	−8.2	8	−0.34	351	−470	0
1	1942	10700	11900	22600	36.4	6.4	2	−0.36	347	−457	756
2	1935	9700	11700	21400	34.5	3.6	−2	−0.39	333	−444	1942
3	1926	8600	11600	20100	32.4	4.2	−6	−0.42	315	−428	3162
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
12	1883	3300	12400	15700	19.1	16.5	−61	−0.58	153	−200	7838
13	1865	1500	13600	15100	18.1	3.0	−64	−0.60	132	−176	9536
14	1847	1300	15400	16700	21.3	5.8	−70	−0.50	143	−154	9088
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
21	1809	100	19100	19200	23.4	−0.7	−95	−0.19	64	−22	9442
22	1796	0	20400	20400		5.0	−100				9442
23	1795	0	20500	20500		0.0	−100				9447
24	1799	0	20700	20700		0.0	−100				9447

ცხრილი 5.10



ნახ. 5.26

ცხრილში მოცემულია შემდეგი პარამეტრები:

F — ფიუჩერსული კოტირება აღსრულების ვადით 15.04.

C, P — კოლ და პუტ ოფციონების რეალური საბაზრო ფასები.

$C+P$ — მათი ჯამი.

σ — ნაგულისხმევი ვოლატილობა.

Δ — პორტფელის Δ-ჰეჯის პარამეტრი, გამოთვლილი ნაგულისხმევ ვოლატილობაზე დაყრდნობით.

I^F — ღია ფიუჩერსული პოზიციების რაოდენობა კორექციების შემდეგ, რომელიც ჩატარებულია ნაგულისხმევი ვოლატილობის მიმართ Δ-ნეიტრალური პოზიციის მისაღებად.

Π — პორტფელის ფულადი შემადგენელი, რომელიც უდრის ვარიაციულ მარჟას.

ნაგულისხმევი ვოლატილობა შეიძლება განვსაზღვროთ არა მარტო ერთი ოფციონისთვის, არამედ ოფციონების კომბინაციისათვის. პირველ სტრიქონში $\sigma_0 = 37.4\%$ ის ვოლატილობაა, რომელიც მიიღება კოლ და პუტ ოფციონების საერთო ღირებულების გატოლებით 23500-ის ტოლ ფასთან.

ამ შემთხვევაში ოფციონებს აქვთ არატიპიურად მაღალი ფასი $\approx 40\%$, რაც გამოწვეულია ფასების ნახტომებით და განუსაზღვრელობის მაღალი დონით სავალუტო ბაზარზე.

კოლ ოფციონის გამყიდველებმა მოითხოვეს მაღალი ფასი იმის გამო, რომ ეშინოდათ კურსის ნახტომების, ხოლო მყიდველები დათანხმდნენ ამ ფასზე სწორედ ამავე მიზეზით. პუტ ოფციონის ფასები კი „მიბმულია“ კოლ ოფციონის ფასებთან პუტ-კოლ პარიტეტის მეშვეობით.

ამის შემდეგ ჩვენ ვხედავთ, რომ მოხდა ბაზრის დაწყნარება (იხ. σ-ს სვეტი ცხრილში 5.10, ან ნახ. 5.25).

ამის პარალელურად ფიუჩერსული კოტირებაც დაეცა.

განვიხილოთ ასეთ შემთხვევაში სამი სპეკულაციური სავაჭრო სტრატეგია.

პირველი: ვაწარმოოთ დაკვირვება სტრენგლის ფასის ცვლილებაზე, რათა განვსაზღვროთ პოზიციის დახურვის ანუ სტრენგლის ყიდვის მომენტი ყველაზე ნაკლებ ფასად.

ნახატი 5.26 გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება კომბინაციის ფასი სხვადასხვა ფასწარმომქმნელი პარამეტრების — დროის, ფიუჩერსული კოტირების, ნაგულისხმევი ვოლატილობის ცვლილებისას (ნახაზზე ეს აღნიშნულია ციფრებით 1–2–3–4–5).

ყველაზე ხელსაყრელია ის მომენტი, როცა სტრენგლის ფასი დაეცა 15100-მდე. მთელი სტრატეგიის შემოსავალი ამ შემთხვევაში იქნება $23500 - 15100 = 8400$ (იხ. სტრიქონი $i = 13$ ცხრილში და 4-ით აღნიშნული წირი ნახაზზე).

განვიხილოთ მეორე — მთავარი სტრატეგია.

ეს სტრატეგია არ მოითხოვს ჭეშმარიტი ვოლატილობის პროგნოზირებას ოფციონის არსებობის მთელი დარჩენილი პერიოდისათვის. საკმარისია, სწორად ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ ჭეშმარიტი ვოლატილობა აღმოჩნდება მიმდინარე ნაგულისხმევ ვოლატილობაზე უფრო მცირე (ან უფრო დიდი, საწინააღმდეგო პოზიციის დაკავების შემთხვევაში).

ოფციონების პოზიციის გახსნის დღეს $\sigma = 37.4\%$-თვის $\Delta_0 = -8.2$. შევიძინოთ 8 ფიუჩერსი და დავიკავოთ Δ-ნეიტრალური პოზიცია ნაგულისხმევი ვოლატილობის მიმართ. მეორე დღეს ნაგულისხმევი ვოლატილობა შემცირდა. სტრენგლის დროითი შემადგენლის შემცირების გამო მისი ფასიც შემცირდა. ამიტომ მთელმა ოფციონურ-ფიუჩერსულმა პოზიციამ მოგვცა დადებითი ვარიაციული მარჟა. შევაფასოთ ვარიაციული მარჟა. მივიღებთ

$$\theta_0 + \Delta^{\text{ნარჩ}}(F_1 - F_0) + 0.5 \cdot \Gamma_0(F_1 - F_0)^2 + \mathrm{Vega}_0(\sigma_1 - \sigma_0) =$$
$$= 351 + (-0.2) \cdot (-18) + 0.5 \cdot (-0.34) \cdot 18 \cdot 18 + (-470) \cdot (-1) = 758.$$

აქ $\Delta^{\text{ნარჩ}} = -8.2 + 8 = -0.2$ არის ნარჩენი Δ-ს სიდიდე, რომელიც კორექციის ჩატარების შემდეგ რჩება.

ცხადია, მეორე წევრის წილი საერთო მარჟაში მცირეა, მითუმეტეს რომ ხდება რამოდენიმე ნაბიჯის განმავლობაში მისი გასაშუალოება, რადგან $\Delta^{\text{ნარჩ}}$ კოეფიციენტი შემთხვევითად მერყეობს -0.5-დან 0.5-მდე.

პირველი და მესამე შესაკრებების ჯამი დადებითია, რადგან, დაშვების თანახმად, რეალური ვოლატილობა ნაგულისხმევზე ნაკლებია, ხოლო ამ შემთხვევაში, როგორც ეს ფორმულებიდან გამომდინარეობს, უარყოფითი მესამე წევრი ვერ აკომპენსირებს დადებით პირველ წევრს.

მესამე წევრიც დადებითია, რადგან σ-ს კლებადობის ტენდენცია აქვს და ამიტომ $\mathrm{Vega} < 0$ და $\sigma_1 - \sigma_0 < 0$. ამიტომ მათი ნამრავლი დადებითია.

ამრიგად, თუ ბაზრის დამშვიდება (σ-ს შემცირების ტენდენცია) შენარჩუნდა, რიცხვები ცხრილის ბოლო სვეტში გაიზრდება, გარდა იმ დღეებისა, როცა ეს ტენდენცია დაირღვევა. ამასთან, საბოლოო შემოსავალი დაახლოებით 9500-ის ტოლი აღმოჩნდება.

მესამე სტრატეგია შემდეგში მდგომარეობს.

აპოსტერიორულად ნაპოვნი ჭეშმარიტი ვოლატილობა უდრის 9%-ს. თუ 11.03-ში საკმაოდ ზუსტად დავაპროგნოზებთ ვოლატილობას, დაახლოებით 10%-ის დონეზე, და აქედან გამომდინარე გამოვთვლით Δ-ს და ჩავატარებთ ყოველდღიურ კორექციას, მივიღებთ

i	F	C	P	$C+P$	$(C+P)_T$	Δ	I^P	Π
0	1960	12200	11900	23500	11440	−10.8	−11	0
1	1942	10700	11900	22600	11397	17.4	6	155
2	1935	9700	11700	21400	11462	6.6	13	178
—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	1865	1500	13600	15100	14000	14.4	78	421
14	1847	1300	15400	16700	15500	11.6	90	517
—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	1795	0	20500	20500	20500	0.0	100	518
24	1793	0	20700	20700	20700	0.0	100	518

ცხრილი 5.11

მეექვსე სვეტში მითითებულია კოლ და პუტ ოფციონების ჯამური თეორიული ღირებულება, ბოლოში — ჯამური ვარიაციული მარჟა იმ პირობით, რომ ოფციონები გაყიდულია 11440-ად და ყოველდღიური ანგარიშსწორების ფასები უდრის თეორიულს (ანუ მონაცემები ისევე ფორმირდება, როგორც ადრე განხილულ მაგალითში, იხ. ცხრილი 5.4).

რადგან რეალურად ოფციონები გაიყიდა 23500-ად, ამიტომ ოპერაციის ბოლოს ჯამური ვარიაციული მარჟა ტოლი იქნება $23500-11440+518 \approx \approx 12600$.

ამრიგად, პირველმა სტრატეგიამ მოგვცა შემოსავალი 8400, მეორემ 9500, ხოლო მესამემ 12600, რაც ეთანხმება ასეთი სტრატეგიების რეალიზაციის სირთულეს.

ვოლატილობით ვაჭრობა. გავაკეთოთ რამოდენიმე დასკვნითი შენიშვნა. საუკეთესო სტრატეგია არის არა ის, რომელიც მაქსიმალურ მოსალოდნელ მოგებას გვაძლევს, არამედ ის, რომლის განხორციელების დროსაც მოსალოდნელი მოგებისა და რისკის შეფარდებაა საუკეთესო. ამ თვალსაზრისით, განხილული სტრატეგიები მაღალრისკიანია.

რისკი რაოდენობრივად ფასდება გარკვეული ლოკალური და გლობალური პარამეტრებით.

მაგალითად, გლობალური მახასიათებელია Δ კოეფიციენტის ზღვრული მნიშვნელობები ძირითადი ინსტრუმენტის ფასების ძალიან პატარა ან ძალიან დიდი მნიშვნელობებისათვის. თუ $\Delta < 0$ და მისი აბსოლუტური სიდიდე დიდია, მაშინ რისკიც ძალიან დიდია (მით უფრო მეტი, რაც მეტია $|\Delta|$).

თუ ზღვრული $\Delta = 0$, მაშინ შეიძლება ვილაპარაკოთ მაქსიმალურ მოგებაზე ფასის ამ მიმართულებით ძრაობისას.

ლოკალური პარამეტრები ახასიათებენ ვოლატილობის, დროისა და ფასების მარაგის იმ დადებით ინტერვალებს, როცა პოზიცია ინარჩუნებს პოტენციალურ მოგებას.

მაგალითად, მესამე სტრატეგიის რეალიზაციის შემთხვევაში, ვოლატილობის მარაგი იყო $37\% - 10\% = 27\%$. ფიუჩერსული კოტირების ინტერვალი ოპერაციის დასაწყისში შემოსაზღვრულია AB წრის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებით (იხ. ნახ. 5.26). ამ მაგალითში θ დადებითია, ამიტომ დროის მარაგზე არ ვლაპარაკობთ.

იმ შემთხვევაში, როცა ოფციონები კლებით არიან შეფასებული, პირიქით, უნდა გაგვეყიდა სტრენგლი და ფიუჩერსული ფასის უცვლელობის პირობებში მოსალოდნელი მოგება „გაქრებოდა“ დაახლოებით

$$\frac{\text{მოსალოდნელი მოგება}}{|\theta|}$$

დღეში.

ამიტომ, თუ მივაღწევთ პოზიციას, რომელსაც პოტენციალური მოგება ახასიათებს, საჭიროა ნაწილი ამ მოგებისა დაიხარჯოს რისკის შემცირებაზე.

მაგალითად, გაყიდულ ოფციონებთან ერთად მიზანშეწონილია შემოვსაზღვროთ შესაძლო დანაკარგები დიდი სტრაიკის მქონე იაფი კოლ ოფციონებისა და პატარა სტრაიკის მქონე პუტ ოფციონების ყიდვით.

აღწერილ მეთოდებს შეიძლება ვუწოდოთ „ვოლატილობით ვაჭრობა“. ის დაფუძნებულია იმ დაშვებაზე, რომ არსებობს საკმაოდ დიდი ვოლატილობის მარაგი. თუ ეს ასე არ არის და ტრეიდერის პროგნოზი საშუალოდ ემთხვევა ვოლატილობის მრუდს, მაშინ საჭიროა გამოყენებულ იქნას უფრო დახვეწილი მეთოდები.

ეს მეთოდები ემყარება ვოლატილობის მრუდის ანალიზს, სხვადასხვა სტრაიკების მქონე ოფციონების ყიდვა-გაყიდვას და ა.შ. მაგალითად, ერთ-ერთი მეთოდი მდგომარეობს ვოლატილობის მრუდების შედარებაში, რომლებიც მიღებულია პრაქტიკულად ერთდროულად, მაგრამ სხვადასხვა ექსპირაციის თარიღისათვის.

5.9 ოფციონური სავაჭრო სტრატეგიები

ძირითადი პოზიციები და კომბინაციები. როგორც ვიცით, არსებობს ზუსტად ექვსი ძირითადი შემთხვევა, რომლებიც ასახავენ სხვადასხვა პოზიციებს კოლ და პუტ ოფციონებსა და ძირითად აქტივებში. მათი გრაფიკები მოყვანილია ნახ. 5.27-ზე.

ნახაზზე სიმბოლოთი „0“ აღნიშნულია ჰორიზონტალური ხაზი, სიმბოლოთი „+1“ — ზემოთ მიმართული დახრილი, სიმბოლოთი „-1“ — ქვემოთ მიმართული დახრილი. შევნიშნოთ, რომ დახრის კუთხე 45 გრადუსია.

იმ კომბინაციები აღსაწერად, რომლებიც ყველაზე ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, დავყოთ ისინი შემდეგ ჯგუფებად:

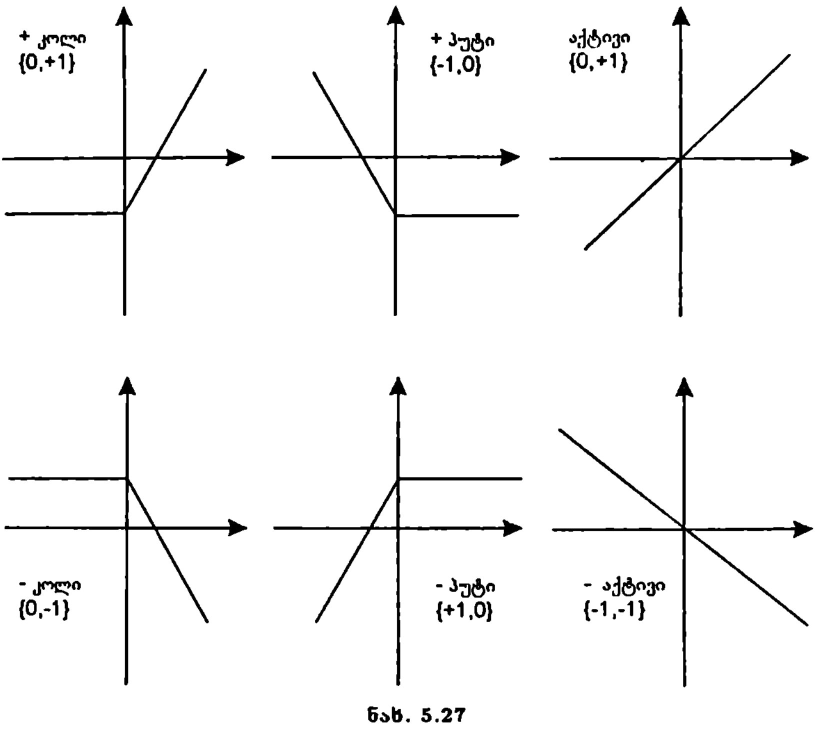
- არბიტრაჟული კომბინაციები. ეს ისეთი კომბინაციებია, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მივიღოთ მოგება ფასების პარიტეტის დროებითი დარღვევისაგან.

- სპრედები. ერთი ოფციონის ყიდვითა და მეორე ოფციონის გაყიდვით მიღებული კომბინაციებია. ამასთან, სტრაიკები და (ან) აღსრულების ვადები სხვადასხვაა.

- ვოლატილური კომბინაციები. ეს ინსტრუმენტები იძლევიან საშუალებას, მივიღოთ მოგება ვოლატილობის მოსალოდნელი ცვლილებისაგან.

- სტრიპები. ისინი ქმნიან ფინანსურ ინსტრუმენტებს, რომლებიც გრძელ დროით ინტერვალზე მოქმედებენ.

ყოველი ზემოჩამოთვლილი ინსტრუმენტების ჯგუფი მიიღება ექვსი ძირითადი ელემენტის (იხ. ნახ. 5.27) ამა თუ იმ კომბინაციაში გაერთიანებისას. ამასთან, ზოგიერთ კომბინაციას საკუთარი სახელი გააჩნია, რითიც ხაზს უსვამენ ასეთი ინსტრუმენტის დამოუკიდებელ ფინანსურ მნიშვნელობას.



ნახ. 5.27

პოპულარული კომბინაციების მაგალითები. ამ პუნქტში ჩვენ აღვწერთ ზოგიერთ პოპულარულ კომბინაციას.

სინთეზური გრძელი ფიუჩერსული პოზიცია — კოლ ოფციონის ყიდვა და პუტ ოფციონის გაყიდვა ერთი და იგივე შეთანხმების ფასით K

$$+1\ \mathrm{K\ Call} - 1\ \mathrm{K\ Put}.$$

ასეთი პოზიციის ფასი იქნება

$$K + C - P.$$

თუ ამ პოზიციას დავუმატებთ მოკლე პოზიციას ჩვეულებრივ ფიუჩერსში, F ფიუჩერსული ფასით, მაშინ მივიღებთ კომბინაციას

$$+1 \text{ K Call } -1 \text{ K Put } -1 \text{ F}.$$

მიღებულ კომბინაციას რევერსია ჰქვია. საწინააღმდეგო პოზიციას ჰქვია კონვერსია. ჩვენ მათ უკვე შევხვდით წინა თავში.

ეს კომბინაციები გვაძლევენ არბიტრაჟულ მოგებას, თუ არ არის დაცული პუტ-კოლ პარიტეტი. კონვერსია მომგებიანია, თუ $C - P > F - K$, რევერსია კი იმ შემთხვევაში, თუ $C - P < F - K$. თუ ანგარიშსწორება ტრადიციული ხერხით ხორციელდება, მაშინ უტოლობის მარჯვენა მხარეში წარმოიქმნება მადისკონტირებელი მამრავლი e^{-rT}, $T = T_{exp} - t$,

$$C - P < e^{-rT}(F - K).$$

ხანდახან, ფიუჩერსული პოზიციის მაგივრად შეიძლება დავიკავოთ შესაბამისი პოზიცია ღრმად ფულით მყოფ ოფციონში. ასეთი პოზიცია მცირედ განსხვავდება ფიუჩერსულისაგან.

სინთეზურ ფიუჩერსს, რომელიც ევროპული ტრადიციული ოფციონებისგანაა შედგენილი, გარკვეულ შემთხვევებში უპირატესობა აქვს ჩვეულებრივი ფიუჩერსის წინაშე.

მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ფიუჩერსული პოზიციის გახსნა დაკავშირებულია მარჟის შეტანასთან (რომელიც, როგორც წესი, ან ნაღდი ფულის, ან მაღალლიკვიდური აქტივების სახით შეიტანება). ამიტომ ეს თანხა გამოდის ბრუნვიდან. ამასთან, შესაძლებელია პოზიციის იძულებითი დახურვაც მოხდეს.

ტრადიციული ოფციონური ვაჭრობის დროს არ არის საჭირო ნაღდი ფულის შეტანა, საკმარისია საგარანტიო დეპოზიტის გახსნა. ვაჭრობის პერიოდში იცვლება მხოლოდ ამ დეპოზიტის სიდიდე. დეპოზიტად მიიღება ფასიანი ქაღალდები და, ამრიგად, არ არის საჭირო მათი დროზე ადრე გაყიდვა.

ამიტომ სინთეზურ ფიუჩერსს შეიძლება ვუწოდოთ სინთეზური ფორვარდი.

აღენიშნოთ განსხვავებაც. თუ ფორვარდული კონტრაქტი გაიყიდა მისი მოქმედების პერიოდში, მაშინ გამყიდველი აფიქსირებს მოგებას ყიდვა-გაყიდვის ფასებს შორის სხვაობის სახით, მაგრამ ეს მოგება მას დაერიცხება მხოლოდ აღსრულების ვადის გასვლის შემდეგ.

სინთეზურ ფორვარდში პოზიციის დახურვა ნიშნავს კოლ და პუტ ოფციონებში საწინააღმდეგო პოზიციების დაკავებას და, ამიტომ, მოგება მყისიერად მიიღება.

თუ სინთეზური ფიუჩერსი შედგენილია ამერიკული ტრადიციული ოფციონებით, მაშინ ზემოხსენებული საგარანტიო-სადეპოზიტო უპირატესობები

ნაკლებია, რადგან ყოველთვის არის ოფციონების ადრეული აღსრულებისა და შესაბამისი მარჟის ნაღდი ანგარიშსწორებით გადახდის საშიშროება.

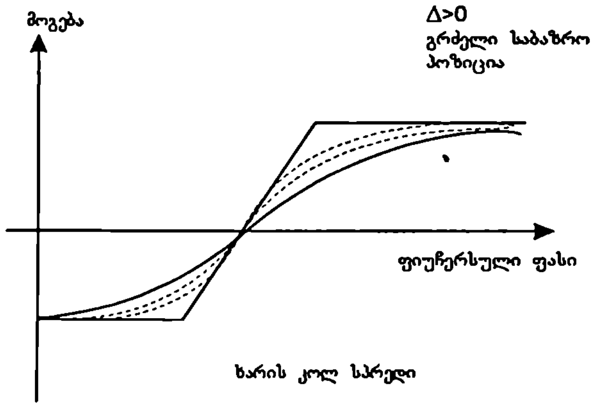
და ბოლოს, თუ სინთეზური ფიუჩერსი ფიუჩერსული გადახდის წესის მქონე ოფციონებითაა წარმოქმნილი, ის თითქმის არ განსხვავდება ჩვეულებრივი ფიუჩერსისაგან.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ვყიდულობთ სინთეზურ ფიუჩერსს ერთნაირ სტრაიკიანი ოფციონებით და ვყიდით სინთეზურ ფიუჩერსს, რომელიც სხვა სტრაიკიანი ოფციონებითაა შექმნილი.

ასეთ პოზიციას საჯინიბო ან ყუთი ჰქვია (ხშირად ამერიკული საბირჟო ტერმინები აღებულია დოღის ტერმინებიდან). თუ ასეთ პოზიციას ფიუჩერსული ტიპის ოფციონებით შევადგენთ, მაშინ მისი ღირებულება სტრაიკებს შორის სხვაობის K_1-K_2 ტოლია, თუ ტრადიციულით, მაშინ $e^{-rT}(K_1-K_2)$-ის.

ამის მსგავსი პოზიციაა ე.წ. jelly roll, რომელიც შედგება გრძელი პოზიციისაგან სინთეზურ ფიუჩერსზე ერთი მიწოდების თვით და მოკლე პოზიციისაგან აგრეთვე სინთეზურ ფიუჩერსზე სხვა მიწოდების თვით. იგი ჩვეულებრივი ფიუჩერსული სპრედის მსგავსია. მისი ღირებულება უდრის ფიუჩერსულ ფასებს შორის სხვაობას ამ მიწოდების თვეებით ან მათ დისკონტირებულ სიდიდეს, თუ გადახდა ტრადიციულია.

თუ განვიხილავთ სიმბოლურ ტოლობას $P = C - F$, მაშინ შეგვიძლია ამ ტოლობაში წევრების გადანაცვლებით შევადგინოთ სინთეზური პუტი, კოლი, ფიუჩერსი.

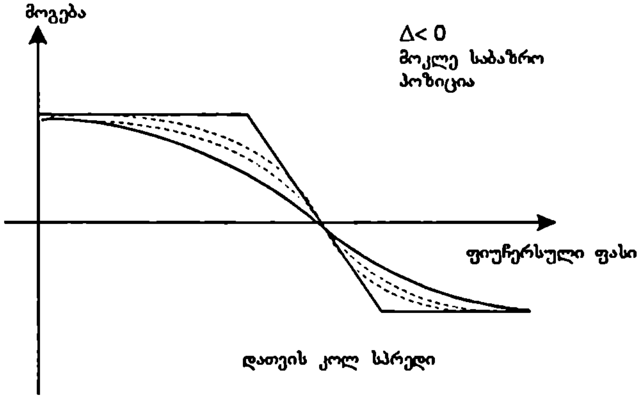


ნახ. 5.28

განვიხილოთ კიდევ ერთი კომბინაცია, ე.წ. ხარის კოლ სპრედი (იხ. ნახ. 5.28). ეს კომბინაციაა $+\,K_1$ Call $-\,K_2$ Call, სადაც $K_1 < K_2$. ასეთივეა ხარის პუტ სპრედი $-\,K_1$ Put $+\,K_2$ Put, $K_1 > K_2$. ამ პოზიციებს

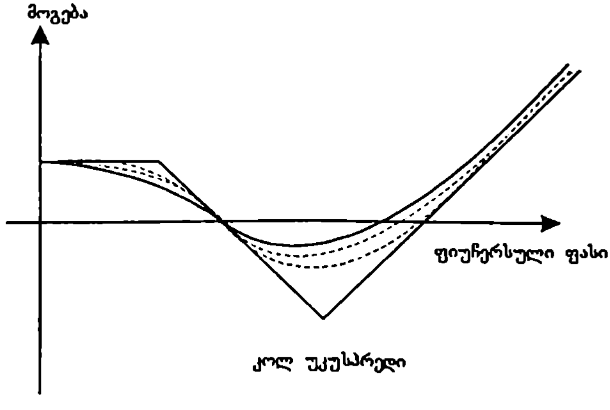
ახასიათებს ის, რომ $\Delta > 0$, ე.ი. ისინი გრძელი საბაზრო პოზიციებია და ამიტომ მომგებიანია ფიუჩერსული კურსების ზრდის დროს.

დათვის სპრედი მიიღება წინა კომბინაციაში სიტყვების „ყიდვა“ და „გაყიდვა“ გადანაცვლებით. შედეგად მიიღება მოკლე საბაზრო პოზიცია, რომელიც ხელსაყრელია ფასების ვარდნის დროს (იხ. ნახ. 5.29).



ნახ. 5.29

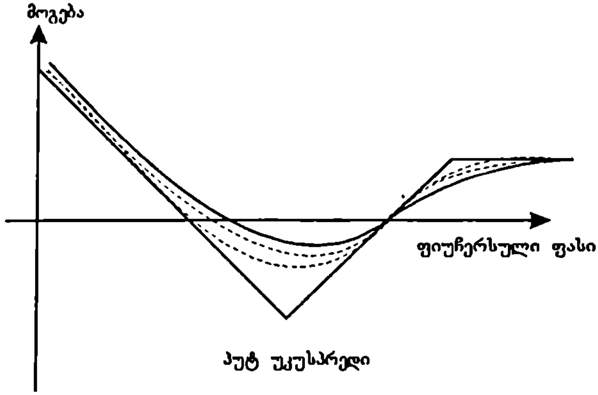
ორივე განხილულ პოზიციას ახასიათებს დანაკარგების შემოსაზღვრულობა, რაც მიიღწევა შესაძლო მოგების შემოსაზღვრით. ამდენად, ეს პოზიციები უფრო ფრთხილი პოზიციებია, ვიდრე პირდაპირი ფიუჩერსული პოზიციები.



ნახ. 5.30

თუ განვიხილავთ დათვის სპრედის ისეთ მოდიფიკაციას, რომ ნაყიდი ოფციონების რაოდენობა მეტი იყოს გაყიდული ოფციონების რაოდენობაზე, მივიღებთ კომბინაციას კოლ უკუსპრედი (იხ. ნახ. 5.30).

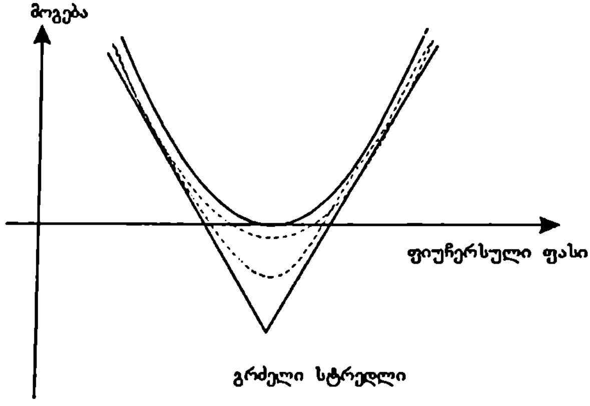
ანალოგიურად, პუტ უკუსპრედს აქვს შემდეგი სახე (იხ. ნახ. 5.31).



ნახ. 5.31

ეს პოზიციები შეიძლება იყოს მოკლე ან გრძელი საბაზრო იმისდა მიხედვით, თუ რა პროპორციით შედის მათში გაყიდული და ნაყიდი ოფციონები და რა არის მათი ფასები.

შესაძლოა ისეთი პროპორციის მონახვა, როცა $\Delta = 0$, ე.ი. პორტფელი Δ-ნეიტრალური იქნება.

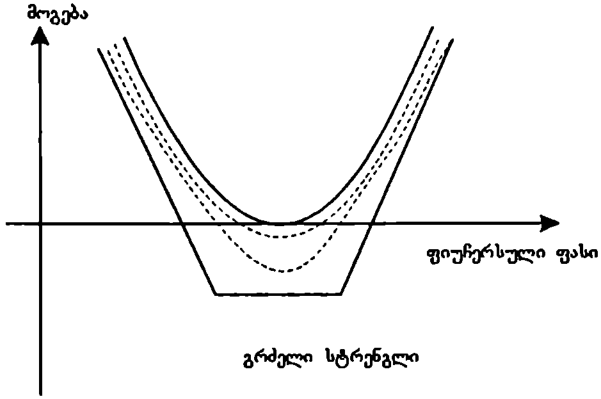


ნახ. 5.32

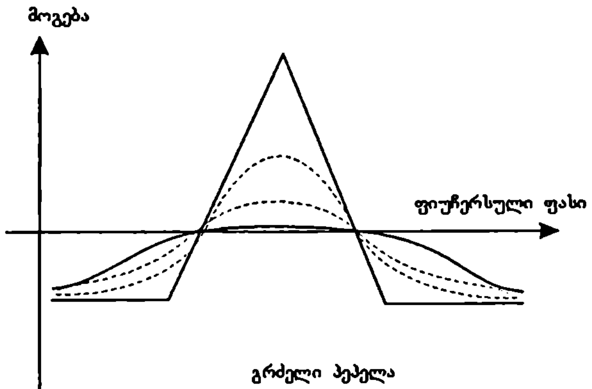
გრძელი სტრედლი (იხ. ნახ. 5.32) შედგება ერთი და იგივე სტრაიკზე

ნაყიდი კოლ და პუტ ოფციონებისაგან (მოკლე სტრედლი გაყიდული ოფციონებისაგან).

თუ ოფციონებს განსხვავებული სტრაიკები აქვთ, მიიღება სტრენგლი (იხ. ნახ. 5.33). პუნქტ 5.8-ში განხილული სტრენგლის შემადგენლობაში მყოფ კოლ ოფციონს ჰქონდა ნაკლები სტრაიკი, ვიდრე პუტს. ასეთ კომბინაციას ჰქვია გატსი.



ნახ. 5.33



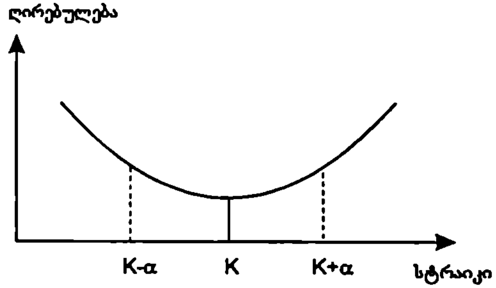
ნახ. 5.34

მოკლე სტრენგლსა და სტრედლს პოტენციურად შემოუსაზღვრელი წაგება ახასიათებთ, გრძელ სტრენგლსა და სტრედლს — შემოუსაზღვრელი მოგება. მაგრამ ეს შესაძლებლობები განხორციელდება ფასების ძალიან

დიდი ზრდის ან კლების დროს, რაც თავის მხრივ დამოკიდებულია ვოლატილობაზე. ვოლატილობის სიდიდე განსაზღვრავს წყნარია ბაზარი, თუ „მშფოთვარე“.

განვიხილოთ ე.წ. გრძელი პეპელა (იხ. ნახ. 5.34) კოლ ოფციონებზე. მართალია, ეს პოზიცია მის შუა ნაწილში ჰგავს მოკლე სტრედლს, იგი გრძელ საბაზრო პოზიციას წარმოადგენს — მის გასახსნელად საჭიროა ფულის გადახდა (ტრადიციული ანგარიშსწორებიანი ოფციონებისთვის). სიმბოლურად გრძელი პეპელა ასე ჩაიწერება: $+(K-\alpha)\mathrm{Call}-2K\mathrm{Put}+(K+$ $+\alpha)\mathrm{Call}$, სადაც α რაიმე დადებითი რიცხვია. ამიტომ, თუ ფიუჩერსული ფასი ფიქსირებულია, მაშინ ოფციონების ფასი სტრაიკის მიხედვით ამოზნექილი ფუნქციაა და ე.ი. ორი ოფციონი რომელიმე სტრაიკზე ნაკლები ღირებულების მქონეა, ვიდრე ორი ოფციონი, რომელთა სტრაიკები სიმეტრიულად მარცხნივ და მარჯვნივ არიან განლაგებული (იხ. ნახ. 5.35).

მეორე ახსნა ასეთია. თუ არ გავითვალისწინებთ ოფციონების ფასებს, მაშინ გრძელი პეპელას გრაფიკი მთლიანად დადებით ნახევარსიბრტყეში იქნება და, ამრიგად, ასეთი პოზიცია ყოველთვის არაწამგებიანი იქნება, ზოგჯერ კი წმინდად მომგებიანი. ამიტომაც მის გასახსნელად საჭიროა ფულის გადახდა.



ნახ. 5.35

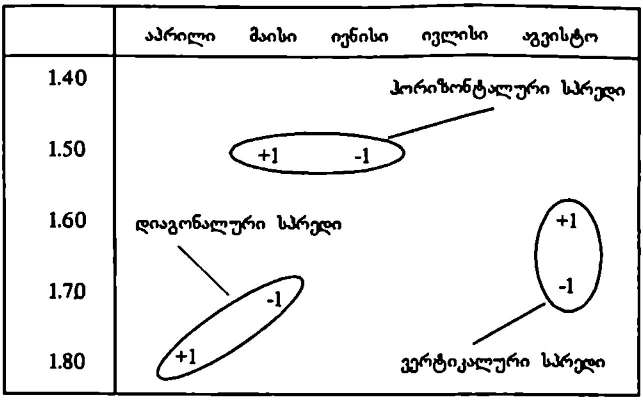
ზემოხსენებული დათვისა და ხარის კოლ და პუტ სპრედები ეკუთვნიან ე.წ. ვერტიკალურ სპრედებს.

ჰორიზონტალური, დროითი ანუ კალენდარული სპრედები მიიღება გაყიდულ (ან ნაყიდ) ერთი კლასის ოფციონებისაგან, ოღონდ სხვადასხვა ექსპირაციის თარიღებით.

ეს ტერმინოლოგია იქიდან მოდის, რომ სტანდარტული საბირჟო ბიულეტენი სტრაიკებს ვერტიკალზე განალაგებს, ხოლო ექსპირაციის თარიღებს ჰორიზონტალზე (იხ. ნახ. 5.36).

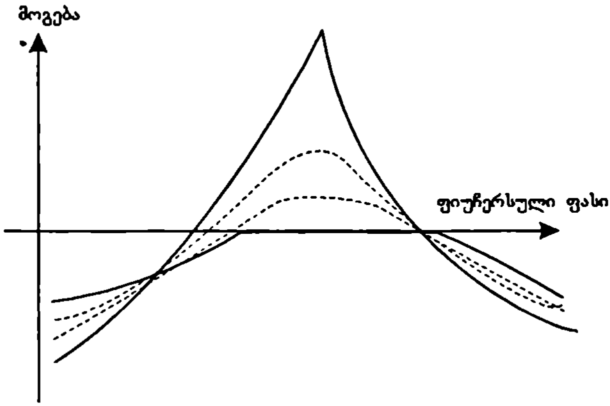
თუ შეიძინება შორეული ექსპირაციის თარიღის მქონე ოფციონი და გაიყიდება ახლო ექსპირაციის თარიღის მქონე ოფციონი, მაშინ ჰორიზონტალური სპრედი გრძელია, რადგან, სხვა პარამეტრების ტოლობის შემთხვე-

ვაში, შორეული ექსპირაციის თარიღიანი ოფციონები უფრო ძვირი ღირს, ვიდრე ახლო ექსპირაციის თარიღის მქონე ოფციონები (იხ. ნახ. 5.37).



ნახ. 5.36

სპრედის ღირებულების ზრდა სტრაიკის მიდამოში იმით აიხსნება, რომ გაყიდული ოფციონი ახლო ექსპირაციით გაცილებით სწრაფად კარგავს დროით ღირებულებას.



ნახ. 5.37

მეორეს მხრივ, ოფციონი დიდი სტრაიკით უფრო ძლიერად რეაგირებს ნაგულისხმევი ვოლატილობის ზრდაზე. ამიტომ ამ პოზიციისთვის Vega > 0 და ემთხვევა θ-ს ნიშანს, $\theta > 0$. ეს ახასიათებს ჰორიზონტალურ სპრედებს. ვერტიკალურ სპრედებში Vega-ს და θ-ს ნიშანი საპირისპიროა.

აქ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ფიუჩერსული კონტრაქტების ფასები სხვადასხვა მიწოდების ვადებისთვის ერთი და იგივეა. ასეთი სიტუაცია გვხვდება აქციებისა და ვალუტის ფიუჩერსების გამოყენების დროს.

თუ განვიხილავთ ოფციონებს ფიუჩერსებზე, სიტუაცია რთულდება და გასათვალისწინებელია ფიუჩერსული ფასების სხვადასხვა დინამიკა სხვადასხვა მიწოდების ვადებისთვის.

გასაგებია, რომ თუ განვიხილავთ ჰორიზონტალურ სპრედს, სადაც სტრაიკებიც სხვადასხვაა, მივიღებთ ე.წ. დიაგონალურ სპრედს.

ზემოხსენებული პოზიციების აგება შეიძლება თანმიმდევრულად საჭირო ოფციონების შეძენით. მაგრამ შესაძლებელია მთელი კომბინაციებით ვაჭრობაც. მაგალითად, შესაძლებელია შევიძინოთ 100 პეპელა სტრაიკებზე 4800, 5000, 5200 ფასად 30.

5.10 ძირითადი ფორმულების ნუსხა

ევროპული ტიპის ოფციონები

აღვნიშნოთ $T = T_{expir} - t$, ე.ი. ოფციონის აღსრულებამდე დარჩენილი დრო. თუ ფორმულები კოლ და პუტ ოფციონებისთვის განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაშინ მათ მიეწერება ქვედა ინდექსი C ან P, შესაბამისად.

უდივიდენდო აქცია.

$$C^{SET} = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \quad P^{SET} = C^{SET} + Ke^{-rT} - S,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_C = N(d_1), \quad \Delta_P = N(-d_1),$$

$$\Gamma = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}},$$

$$\theta_C = -\frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2),$$

$$\theta_P = -\frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2),$$

$$\text{Vega} = S\sigma\varphi(d_1),$$

$$\rho_C = TKe^{-rT}N(d_2), \quad \rho_P = -TKe^{-rT}N(-d_2).$$

თუ აქცია იხდის დივიდენდებს $d_1, d_2, \ldots, d_m$, წინასწარ ცნობილ მომენტებში $t < T_1 < T_2 < \cdots < T_m < T$, მაშინ C^{SAT}, P^{SAT}, Δ_C, Δ_P და Γ-ს გამოსახულებები იგივე სახისაა, მხოლოდ S უნდა შევცვალოთ S^D-თი, სადაც

$$S^D = S - d_1 e^{-r(T_1-t)} - d_2 e^{-r(T_2-t)} - \ldots - d_m e^{-r(T_m-t)}.$$

ვალუტა.

$$C^{CET} = Se^{-r_f T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),$$

$$P^{CET} = C^{CET} + Ke^{-rT} - Se^{-r_f T},$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - r_f + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - r_f - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_C = e^{-r_f T} N(d_1), \quad \Delta_P = e^{-r_f T} N(-d_1),$$

$$\Gamma = e^{-r_f T} \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}},$$

$$\theta_C = -e^{-r_f T} \frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + r_f S e^{-r_f T} N(d_1) - rKe^{-rT} N(d_2),$$

$$\theta_P = -e^{-r_f T} \frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} - r_f S e^{-r_f T} N(-d_1) + rKe^{-rT} N(-d_2),$$

$$\text{Vega} = e^{-r_f T} S\sigma\varphi(d_1),$$

$$\rho_C = TKe^{-rT} N(d_2), \quad \rho_P = -TKe^{-rT} N(-d_2),$$

$$\rho_C^C = -TKe^{-r_f T} N(d_1), \quad \rho_P^C = TKe^{-r_f T} N(-d_1)$$

(ბოლო ორ ფორმულაში ρ_C^C და ρ_P^C აღნიშნავს მგრძნობიარობის კოეფიციენტს უცხოური ვალუტის საპროცენტო განაკვეთის მიმართ).

ოფციონი ფიუჩერსზე ტრადიციული ანგარიშსწორების ხერხით.

$$C^{FET} = e^{-rT}[FN(d_1) - KN(d_2)], \quad P^{FET} = C^{FET} + e^{-rT}(K - F),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_C = e^{-rT} N(d_1), \quad \Delta_P = e^{-rT} N(-d_1),$$

$$\Gamma = e^{-rT} \frac{\varphi(d_1)}{F\sigma\sqrt{T}},$$

$$\theta_C = -e^{-rT}\frac{F\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rC^{FET},$$

$$\theta_P = -e^{-rT}\frac{F\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rP^{FET},$$

$$\text{Vega} = e^{-rT}F\sigma\varphi(d_1),$$

$$\rho_C = -TC^{FET}, \quad \rho_P = -TP^{FET}.$$

ოფციონი ფიუჩერსზე ფიუჩერსული ანგარიშსწორების ხერხით. შესაბამისი ფორმულების მისაღებად საკმარისია წინა პუნქტის ფორმულებში ჩავსვათ $r = 0$. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ $\rho_C = \rho_P = 0$.

ამერიკული ტიპის ოფციონები

ამერიკული ოფციონის ღირებულების გამოსათვლელი ცხადი ფორმულები არ არსებობს. გამონაკლისს წარმოადგენს ამერიკული კოლ ოფციონი უდივიდენდო აქციაზე, რომლის ღირებულება ემთხვევა ევროპული კოლ ოფციონის ღირებულებას.

არსებობს მრავალი მეთოდი ამერიკული ოფციონის ღირებულების მიახლოებითი სიდიდის საპოვნელად. მოვიყვანოთ ფორმულები, რომლებიც მიღებულია კვადრატული აპროქსიმაციით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$b = \begin{cases} 0, & \text{ოფციონისთვის უდივიდენდო აქციაზე;} \\ r_f, & \text{ოფციონისთვის ვალუტაზე;} \\ r, & \text{ოფციონისთვის ფიუჩერსზე ტრადიციული} \\ & \text{ანგარიშსწორების ხერხით.} \end{cases}$$

$$L = 1 - e^{-rT}, \quad M = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2(r-b)}{\sigma^2},$$

$$q_1 = 0.5\left(1 - N - \sqrt{(1-N)^2 + 4\frac{M}{L}}\right),$$

$$q_2 = 0.5\left(1 - N + \sqrt{(1-N)^2 + 4\frac{M}{L}}\right),$$

ამერიკული კოლი ფიუჩერსზე. აღვნიშნოთ

$$h = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + (r - b + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

ვთქვათ, u არის

$$x - K = C^{FET}(x) - \frac{1 - e^{bT} N(h(x))}{q_2} x,$$

განტოლების ამონახსნი, ხოლო

$$A_2 = \frac{1 - e^{-bT} N(h(u))}{q_2} u.$$

მაშინ

$$C^{FAT} = F - K, \quad \text{თუ} \quad F \geq u;$$
$$C^{FAT} = C^{FET}(F) + A_2 \left(\frac{F}{u}\right)^{q_2} \quad \text{თუ} \quad F < u.$$

ამერიკული პუტი ფიუჩერსზე. განვიხილოთ განტოლება

$$K - x = P^{FET}(x) - \frac{1 - e^{-bT} N(-h(x))}{q_1} x.$$

მისი ამონახსნი აღვნიშნოთ კვლავ u-თი და შემოვიღოთ

$$A_1 = -\frac{1 - e^{-bT} N(-h(u))}{q_1} u.$$

მაშინ

$$P^{FAT} = F - K, \quad \text{თუ} \quad F < u;$$
$$P^{FAT} = P^{FET}(F) + A_1 \left(\frac{F}{u}\right)^{q_1} \quad \text{თუ} \quad F \geq u.$$

დავასრულოთ თავი ამ თემისადმი მიძღვნილი და გამოყენებული ლიტერატურის ჩამონათვალით: [40], [41], [57], [60], [73], [74], [79], [94], [115], [116], [117], [125], [126], [127], [128], [136], [141], [159], [160], [169], [193], [195], [205], [206], [207], [208], [209].

6

სვოპები, კეპები, ფლორები, სვოპციონები

სვოპი წარმოადგენს საპროცენტო და სავალუტო რისკის ჰეჯირების შედარებით ახალ ფინანსურ ინსტრუმენტს, რომელიც მსოფლიოს ფინანსურ ბაზრებზე პირველად 1981 წელს გამოჩნდა. სვოპის საშუალებით შესაძლებელია მცურავი საპროცენტო განაკვეთით მისაღები (ან გასაცემი) ფულადი ნაკადის შეცვლა მყარი საპროცენტო ნორმის შესაბამისი ნაკადით. მაგალითისათვის წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომელსაც მისაღები აქვს დაფინანსება მცურავი საპროცენტო განაკვეთით ამერიკულ დოლარებში, მაგრამ ელოდება საპროცენტო განაკვეთის კურსის დაცემას და ფინანსირების მიღება ურჩევნია გერმანულ მარკებში. მაშინ მისთვის მოხერხებული იქნება ისეთი სვოპური კონტრაქტის დადება, რომელშიც ის მიიღებს თანხას გერმანულ მარკებში ფიქსირებული საპროცენტო ნორმით და გადაიხდის მცურავი საპროცენტო განაკვეთით ამერიკულ დოლარებში. ცხადია, ამ კონტრაქტის დადება შესაძლებელი იქნება მხოლოდ ისეთი ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით, რომელიც გააწონასწორებს აღნიშნულ ფინანსურ ნაკადებს და სვოპის დადების მომენტში ამ კონტრქტს სამართლიანს გახდის მასში მონაწილე ორივე მხარისთვის. ამ თავში ჩვენ ძირითადად შევეხებით სვოპის (ასევე კეპის, ფლორის და სვოპციონის) ფასდადების პრობლემებს, ხოლო ამ ინსტრუმენტების გამოყენების მაგალითები განხილული იქნება მეცხრე თავში.

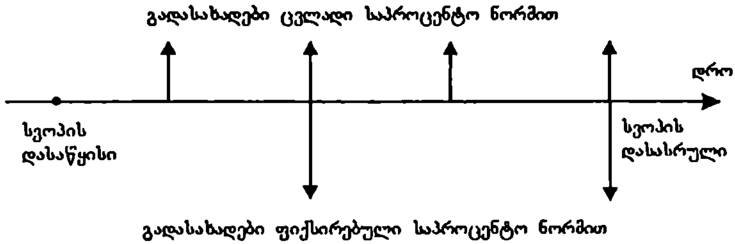
6.1 საპროცენტო სვოპები

სვოპი წარმოადგენს ორ პარტნიორს შორის კერძო შეთანხმებას ფინანსური ნაკადების გაცვლის შესახებ, მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრული წესის მიხედვით. მაგალითად, საპროცენტო სვოპი „მუდმივი ცვლადის წინააღმდეგ" არის შეთანხმება A და B პარტნიორს შორის, როდესაც A უხდის B-ს მუდმივი (წინასწარ ფიქსირებული) საპროცენტო განაკვეთით და იღებს მისგან თანხას, გადახდილს ცვლადი (მაგალითად, 6-თვიანი LIBOR-ით) საპროცენტო ნორმით. გადასახადების საფუძველს წარმოადგენს ნომინალური თანხა, რომელიც საპროცენტო სვოპის დროს არ გადაიცვლება. ჩვენ ჯერ განვიხილავთ ე.წ. სუფთა საპროცენტო

სვოპს, რომლისთვისაც ნომინალური თანხა ერთნაირია ყოველი საპროცენტო პერიოდისათვის და კონტრაქტში მონაწილე ორივე მხარისათვის იდენტური.

ფინანსური ნაკადების სტრუქტურა

საპროცენტო სვოპის (ტიპიური მაგალითის) ფინანსური ნაკადები გრაფიკულად შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ.



ნახ. 6.1

კონტრაქტის დასაწყისი განსაზღვრავს სვოპის პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისს, ხოლო კონტრაქტის დასასრული კი სვოპის ბოლო საპროცენტო პერიოდის დასასრულს. სვოპის დასაწყისი და დასასრული ორივე ფინანსური ნაკადისთვის ერთნაირია, თუმცა მუდმივი და მცურავი ნაკადების გადახდის მომენტები და გადახდათა სიხშირე შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს.

სვოპის ფიქსირებული ფინანსური ნაკადი შემდეგი სიდიდეებით ხასიათდება:

1) ნომინალური თანხა Q, მაგალითად, $Q = \$100$მლნ,
2) სვოპის დასაწყისი, მაგალითად, 7.02.95,
3) გადახდის სიხშირე, მაგალითად, წელიწადში ერთხელ,
4) სვოპის დასასრული, მაგალითად, 7.02.98,
5) ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთი r, მაგალითად, $r = 0.05$.

ამ მაგალითში გადახდები ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით განხორციელდება 7.02.96, 7.02.97 და 7.02.98 მომენტებში და ამ გადახდათა სიდიდე ტოლი იქნება

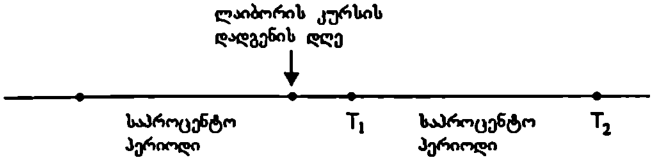
$$Q \times r \times (\text{საპროცენტო ინტერვალის სიგრძე}) = 100\text{მლნ} \times 0.05 \times 1 = 5\text{მლნ}.$$

შევნიშნოთ, რომ საპროცენტო ინტერვალის სიგრძე იზომება წლებში (ანუ, არის ამ ინტერვალში შემავალ დღეთა რაოდენობის შეფარდება წელიწადის დღეების რაოდენობასთან) და ჩვენს შემთხვევაში 1-ის ტოლია.

სვოპის მცურავი ფინანსური ნაკადი ხასიათდება სიდიდეებით

1) ნომინალური თანხა (იგივე, რაც მუდმივი ნაკადის დროს).

2) სვოპის დასაწყისი (იგივე, რაც მუდმივი ნაკადის დროს).
3) გადახდის სიხშირე, მაგალითად, წელიწადში ორჯერ.
4) სვოპის დასასრული (იგივე რაც მუდმივი ნაკადის დროს).
5) მცურავი საპროცენტო განაკვეთი $r(t)$, მაგალითად, LIBOR.
6) მცურავი განაკვეთის სპრედი, მაგალითად, 10 ბ.პ.



ნახ. 6.2

ჩვეულებრივ, წინა საპროცენტო პერიოდის დამთავრებამდე (T_1 მომენტამდე) ორი სავაჭრო დღით ადრე დგინდება მცურავი საპროცენტო განაკვეთის კურსი შემდეგი, (T_1, T_2), საპროცენტო პერიოდისათვის და ამ კურსის მიხედვით ხდება მცურავი მხარის მიერ ფინანსური ვალდებულების გადახდა აღნიშნული პერიოდის ბოლოს (ანუ T_2 მომენტში).

ვთქვათ, აღნიშნულ მაგალითში, 03.08.95-ში დადგინდა 6M-LIBOR (6-თვიანი ლაიბორის) კურსი, რომელმაც შეადგინა 4.5%. მაშინ სვოპური კონტრაქტის მონაწილეს, რომელსაც უჭირავს მცურავი მხარე, ექნება ვალდებულება გადაიხადოს

$$Q \times r^L(T_2) \times (\text{საპროცენტო ინტერვალის სიგრძე}) =$$
$$= 100\text{მლნ} \times 0.045 \times 0.5 = 2250000$$

სიდიდის ტოლი თანხა 1996 წლის 7 თებერვალს.

სვოპების ფინანსურ ბაზარზე ხდება სვოპების „სამართლიანი“ საპროცენტო განაკვეთის (სვოპ-განაკვეთი) კოტირება. „სამართლიანი საპროცენტო“ განაკვეთი ნიშნავს ისეთ ფიქსირებულ საპროცენტო განაკვეთს, რომლისთვისაც სვოპის დადება კონტრაქტის მონაწილე ორივე მხარისთვის უფასოა. სვოპური კონტრაქტის დადების მომენტში არ არის ცნობილი (გაურკვეველია) თუ როგორი იქნება მცურავი ნაკადის შესაბამის გადახდათა სიდიდე და ბაზარი მოთხოვნა-მიწოდების წესით განსაზღვრავს იმ „სამართლიან“ საპროცენტო ნორმას, რის მიხედვითაც უნდა მოხდეს გადახდები მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით. მაგრამ ბაზარი, როგორც წესი, ადგენს მხოლოდ სტანდარტული სვოპების (მაგალითად, 2-წლიანი, 3-წლიანი, ..., 10-წლიანი სიცოცხლის ხანგრძლივობით და 1 ან 0,5-წლიან გადასახადთა სიხშირით) სამართლიან საპროცენტო განაკვეთს და ხშირად საჭიროა განსხვავებული

სიცოცხლის ხანგრძლივობისა და გადახდათა სიხშირის მქონე სვოპური კონტრაქტების დადება. ამიტომ აუცილებელია სვოპების ფასდადების საკითხებში ღრმად გარკვევა, რაც განსაკუთრებულ აქტუალობას იძენს სვოპის ბაზრის არარსებობის პირობებში, თუმცა როგორც შემდგომში ვნახავთ სვოპის ფასის განსაზღვრა საჭიროებს ობლიგაციების ან მათზე ფიუჩერსული კონტრაქტების გარკვეული ბაზრის არსებობას.

6.2 საპროცენტო სვოპის ფასდადება

ვთქვათ, გადახდები მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით ხორციელდება დროის $T_1, T_2, \ldots, T_n$ მომენტებში. აღვნიშნოთ $S_1, S_2, \ldots, S_k$-თი გადახდის მომენტები მცურავი საპროცენტო ნორმით. შევთანხმდეთ, რომ სვოპური კონტრაქტი იდება დროის ნულოვან მომენტში და $S_k = T_n$ არის კონტრაქტის დასასრული. ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთი, რომლის მიხედვითაც ხდება გადახდები $T_1, T_2, \ldots, T_n$ მომენტებში აღვნიშნოთ r-ით.

$r^L(i) = r^L(S_i)$ იყოს LIBOR-ის საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც დგინდება S_i მომენტში (უფრო ზუსტად S_i მომენტამდე რამდენიმე დღით ადრე) და რომლის მიხედვითაც ხდება გადახდა მცურავი საპროცენტო ნორმით (S_i, S_{i+1}) დროითი ინტერვალის ბოლოს. ცხადია $r^L(i)$ სიდიდეების მნიშვნელობები უცნობია დროის ნულოვან მომენტში.

მუდმივი საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი გადასახადი (T_i, T_{i+1}) ინტერვალში ტოლია $Q \times r \times (T_{i+1} - T_i)$ სიდიდის, სადაც $T_{i+1} - T_i$ აღნიშნავს დღეების რაოდენობას (T_i, T_{i+1}) ინტერვალში, გაყოფილს წელიწადში დღეების რაოდენობაზე. საერთოდ, მთელი სვოპის განმავლობაში გადასახადი მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით ტოლი იქნება

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n-1} Q \times r \times (T_{i+1} - T_i) \tag{6.1}$$

სიდიდის. ცხადია, ამ ჯამის გამარტივებით ვიღებთ, რომ $B_1 = Q \times r \times T_n$, მაგრამ ეს ფორმალური შეკრება არ არის მართებული, რადგან ამ ჯამში შემავალი თანხების გადახდა ხდება დროის სხვადასხვა მომენტებში და მათი დღევანდელი მნიშვნელობები (ანუ მათი მნიშვნელობა დროის ნულოვან მომენტში) შეიძლება განსხვავებული იყოს ერთნაირი დროითი ინტერვალების შემთხვევაშიც.

მცურავი საპროცენტო ნორმის შესაბამისი გადასახადი (S_i, S_{i+1}) ინტერვალში (ანუ ამ ინტერვალის ბოლოს S_{i+1} მომენტში) ტოლია $Q \times r^L(i) \times$ $\times (S_{i+1} - S_i)$ სიდიდის და მთელი სვოპის განმავლობაში გადასახდელი იქ-

ნება

$$B_2 = \sum_{i=1}^{k-1} Q \times r^L(i) \times (S_{i+1} - S_i) \tag{6.2}$$

სიდიდის ტოლი თანხა.

სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის დასადგენად საჭიროა გამოვთვალოთ განხილული ფინანსური ნაკადების დღევანდელი მნიშვნელობები. ამ ფინანსური ნაკადების დღევანდელი მნიშვნელობების გასაგებად კი აუცილებელია ვიცოდეთ თუ დროის რომელ მომენტში როგორი საპროცენტო ნორმით მოვახდინოთ დისკონტირება, ანუ საჭიროა დისკონტ-ფაქტორების ცოდნა დროის ნებისმიერ მომენტში (ყოველ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესო T_i და S_i მომენტებში). საერთოდ, დისკონტ-ფაქტორები (და მადისკონტირებელი საპროცენტო განაკვეთი) დაუკვირვებად სიდიდეებს წარმოადგენენ და მათი გამოთვლა შესაძლებელია ობლიგაციის (ან საპროცენტო განაკვეთზე ფიუჩერსული კონტრაქტების) ბაზრის ფასებზე დაკვირვების შედეგად, რაც განხილული იყო პირველ თავში. ამიტომ $DF(t,T)$ დისკონტ-ფაქტორის როლში, რომლის მიხედვითაც ხდება T მომენტში გადასახდელი თანხის მნიშვნელობის დათვლა t მომენტში, შეგვიძლია გამოვიყენოთ T აღსრულების ეადიანი ერთეულოვანი ნომინალური მნიშვნელობის მქონე უკუპონო ობლიგაციის ბაზრის ფასი t მომენტში, რომელსაც $B(t,T)$-თი აღვნიშნავთ. თუ გამოვიყენებთ პროცენტის მარტივი დარიცხვის წესს და $r(t,T)$-თი აღვნიშნავთ ამავე (t,T) ინტერვალში მოქმედ მადისკონტირებელ საპროცენტო განაკვეთს, გვექნება, რომ

$$B(t,T) = \frac{1}{1 + (T - t)r(t,T)} \tag{6.3}$$

და მადისკონტირებელი საპროცენტო განაკვეთი $r(t,T)$ გამოითვლება ობლიგაციის $B(t,T)$ საბაზრო ფასის საშუალებით ფორმულით

$$r(t,T) = \frac{\frac{1}{B(t,T)} - 1}{T - t}. \tag{6.4}$$

მაშასადამე, T მომენტში გადასახდელი c თანხის მნიშვნელობა t მომენტში შეგვიძლია

$$c \times B(t,T) = \frac{c}{1 + (T - t)r(t,T)} \tag{6.5}$$

სიდიდის ტოლად ჩავთვალოთ.

რადგან $Q \times r \times (T_{i+1} - T_i)$ თანხის გადახდა ხდება დროის T_{i+1} მომენტში, მისი დღევანდელი მნიშვნელობა ტოლი იქნება

$$Q \times r \times (T_{i+1} - T_i) \times B(0, T_{i+1}) = \frac{rQ(T_{i+1} - T_i)}{1 + T_{i+1} r(0, T_{i+1})} \tag{6.6}$$

სიდიდის. ამიტომ, მუდმივი საპროცენტო ნაკადის შესაბამისი გადასახადების დღევანდელი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით

$$B_1(\text{დღეს}) = \sum_{i=1}^{n-1} Q \times r \times (T_{i+1} - T_i) \times B(0, T_{i+1}). \tag{6.7}$$

ვიანგარიშოთ მცურავი ნაკადის შესაბამისი გადასახადების დღევანდელი მნიშვნელობა. რისი ტოლი უნდა იყოს

$$Q \times r^L(i) \times (S_{i+1} - S_i) \tag{6.8}$$

უცნობი თანხის დღევანდელი მნიშვნელობა, თუ $r^L(i)$ აღნიშნავს (S_i, S_{i+1}) ინტერვალში მოქმედ საბაზრო, ანუ LIBOR-ის, საპროცენტო განაკვეთს, რომლის კურსიც დგინდება S_i მომენტში (სიმარტივისთვის ვუშვებთ, რომ ლაიბორის კურსი ცხადდება S_i მომენტში და არა ამ მომენტამდე რამდენიმე დღით ადრე, როგორც ეს ჩვეულებრივ ხდება ხოლმე).

ვაჩვენოთ, რომ S_{i+1} მომენტში გადასახდელი (6.8) თანხის დღევანდელი მნიშვნელობის მისაღებად (6.8) გამოსახულებაში ლაიბორის კურსის უცნობი $r^L(i)$ მნიშვნელობის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ (S_i, S_{i+1}) ინტერვალში მოქმედი ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი $r^F(0, S_i, S_{i+1})$ და შემდეგ უნდა მოვახდინოთ მიღებული სიდიდის დისკონტირება. დავასაბუთოთ, რომ (6.8) თანხის მნიშვნელობა დროის ნულოვან მომენტში მართლაც

$$Q \times r^F(0, S_i, S_{i+1}) \times (S_{i+1} - S_i) \times B(0, S_{i+1}) \tag{6.9}$$

სიდიდის ტოლია.

აღვნიშნოთ $r^F(t, S, T)$-თი დროის t მომენტში (S, T) ინტერვალში მოქმედი ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე და ვნახოთ თუ როგორ ითვლება ეს სიდიდე S და T აღსრულების ვადიანი ობლიგაციების ფასების მიხედვით, პროცენტის მარტივად დარიცხვის წესის გამოყენებისას.

დროის t მომენტში c თანხის ინვესტირება T მომენტში გვაძლევს $c(1 + (T - t)r(t, T))$ სიდიდის ტოლ თანხას, სადაც $r(t, T)$ წარმოადგენს მიმდინარე t მომენტის შესაბამის საპროცენტო მრუდის მნიშვნელობას T მომენტში (იგივეა რაც მადისკონტირებელი საპროცენტო განაკვეთი). მეორეს მხრივ, იგივე c თანხა S მომენტში გვაძლევს $c(1 + (S - t)r(t, S))$ სიდიდეს, რომლის ინვესტირება S მომენტში (S, T) ინტერვალში მოქმედი ფორვარდული $r^F(t, S, T)$ საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებით მოგვცემს $c(1 + (S - t)r(t, S))(1 + (T - S)r^F(t, S, T))$ თანხას. ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი განმარტებით წარმოადგენს ისეთ საპროცენტო ნორმას, რომელიც c თანხის აღნიშნული ორი გზით ინვესტირებისას ერთი და იგივე შედეგს გვაძლევს. მაშასადამე, $r^F(t, S, T)$ ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი იანგარიშება

$$(1 + (S - t)r(t, S))(1 + (T - S)r^F(t, S, T)) = (1 + (T - t)r(t, T))$$

ტოლობიდან. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით r^F-ის მიმართ, მივიღებთ

$$r^F(t,S,T) = \frac{1}{T-S} \cdot \frac{1+(T-t)r(t,T)}{1+(S-t)r(t,S)} - 1 \tag{6.10}$$

და (6.4) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$r^F(t,S,T) = \frac{\frac{B(t,S)}{B(t,T)} - 1}{T-S}. \tag{6.11}$$

თუ (6.9) გამოსახულებაში ჩავსვამთ ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის მნიშვნელობას მივიღებთ, რომ

$$B_2(\text{დღეს}) = Q \times r^F(0,S_i,S_{i+1}) \times (S_{i+1}-S_i) \times B(0,S_{i+1}) =$$

$$= Q \times \left(\frac{B(0,S_i)}{B(0,S_{i+1})} - 1\right) \times B(0,S_{i+1}) = Q(B(0,S_i) - B(0,S_{i+1})). \tag{6.12}$$

მაშასადამე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ S_{i+1} მომენტში გადასახდელი $r^L(i)(S_{i+1}-S_i)$ უცნობი სიდიდის დღევანდელი მნიშვნელობა S_{i+1} და S_i აღსრულების ვადიანი უკუპონო ობლიგაციების (ნულოვან მომენტში) ფასებს შორის

$$B(0,S_i) - B(0,S_{i+1}) \tag{6.13}$$

სხვაობის ტოლია.

ლაიბორის კურსი $r^L(i)$ შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს და დროის ნულოვან მომენტში მისი მნიშვნელობა უცნობია. ამ გაურკვეველი გადასახადის შეფასება შესაძლებელია ოფციონების ფასების დადგენის მსგავსად, არბიტრაჟის პრინციპებზე დაყრდნობით, მაჰეჯირებელი პორტფელის არჩევის საშუალებით. მომავალში გაურკვეველი თანხის სამართლიანი დღევანდელი ფასი უნდა იყოს იმ მინიმალური კაპიტალის ტოლი, რომელიც საკმარისი იქნება ჰეჯირების პროცესის ასანაზღაურებლად (ანუ, რომლის საშუალებითაც მოხერხდება მომავლის გაურკვეველი თანხის სრული რეპლიცირება), წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელი იქნება ურისკო მოგების მიღება.

განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგია: დროის ნულოვან მომენტში (დღეს) ვყიდულობთ S_i აღსრულების ვადის მქონე ერთ უკუპონო ობლიგაციას (რომლის ფასი $B(0,S_i)$-ის ტოლია) და ვყიდით იგივე ტიპის ერთ ობლიგაციას S_{i+1} აღსრულების ვადით $B(0,S_{i+1})$ ფასად. ცხადია, რომ (6.13) სიდიდის ტოლი ჩვენი საწყისი კაპიტალი გვაძლევს ასეთი პორტფელის არჩევის საშუალებას.

დროის S_i მომენტში S_i ვადიანი ობლიგაციის ფასი 1-ის, ხოლო S_{i+1} ვადიანი ობლიგაციის ფასი $B(S_i, S_{i+1})$-ის ტოლი გახდება და ამიტომ, S_i-ურ მომენტში ჩვენი კაპიტალი

$$1 - B(S_i, S_{i+1})$$

სიდიდის ტოლი გახდება. ამ კაპიტალით S_i მომენტში ჩვენ შეგვიძლია

$$\frac{1}{B(S_i, S_{i+1})} - 1$$

რაოდენობის S_{i+1} ვადიანი ობლიგაციის ყიდვა, რადგან თითოეული ასეთი ობლიგაციის ფასი $B(S_i, S_{i+1})$-ის ტოლია და

$$B(S_i, S_{i+1}) \left(\frac{1}{B(S_i, S_{i+1})} - 1 \right) = 1 - B(S_i, S_{i+1}).$$

მაგრამ S_{i+1} ვადიანი ობლიგაციის ფასი S_{i+1} მომენტში 1-ის ტოლი გახდება და ამიტომ, ჩვენი კაპიტალი S_{i+1} მომენტში S_{i+1} ვადიანი ობლიგაციების რაოდენობის, ანუ $\frac{1}{B(S_i, S_{i+1})} - 1$ სიდიდის ტოლი იქნება. თუ გავითვალისწინებთ პროცენტის მარტივი დარიცხვის წესს (6.4) ფორმულის თანახმად

$$\frac{1}{B(S_i, S_{i+1})} - 1 = r(S_i, S_{i+1})(S_{i+1} - S_i),$$

სადაც $r(S_i, S_{i+1})$ არის ბაზრის მიერ S_i მომენტში დადგენილი მადისკონტირებელი საპროცენტო განაკვეთი (S_i, S_{i+1}) ინტერვალისთვის, ანუ ლაიბორის კურსი $r^L(i)$, დადგენილი S_i მომენტში.

მაშასადამე, $B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})$ საწყისი თანხით ჩვენ მოვახდინეთ S_{i+1} მომენტში გადასახდელი $r^L(i)(S_{i+1} - S_i)$ უცნობი თანხის სრული რეპლიცირება (ჰეჯირება) და ამ თანხის დღევანდელი მნიშვნელობა რომ განსხვავებული ყოფილიყო $B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})$ სიდიდისგან, გაჩნდებოდა ურისკო მოგების შესაძლებლობა. ამიტომ

$$r^L(i)(S_{i+1} - S_i)(\text{დღეს}) = B(0, S_i) - B(0, S_{i+1}) \tag{6.14}$$

და (6.12) ფორმულიდან ვღებულობთ, რომ მცურავი ნაკადის შესაბამის გადასახადთა დღევანდელი მნიშვნელობა ტოლია

$$\begin{aligned} B_2(\text{დღეს}) &= \sum_{i=1}^{k-1} Q(B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})) = \\ &= QB(0, S_1) - QB(0, S_k) = Q(B(0, S_1) - B(0, T_n)). \end{aligned} \tag{6.15}$$

თუ ფორმალურად ჩავთვლით, რომ ნომინალური თანხა იცვლება სვოპის ბოლოს $S_k = T_n$ მომენტში და მცურავი საპროცენტო განაკვეთით ფაქტიურად გადასახდელია ნომინალური Q თანხა T_n მომენტში, მაშინ მცურავი ნაკადის შესაბამის გადასახადთა საერთო დღევანდელი მნიშვნელობა ტოლი იქნება

$$QB(0, S_1)$$

სიდიდის. იმ შემთხვევაში, როდესაც $S_1 = 0$, ანუ როდესაც პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისი სვოპური კონტრაქტის დასაწყისს ემთხვევა $B(0,0) = 1$ და მცურავი ნაკადის შესაბამის გადასახადთა დღევანდელი მნიშვნელობა უბრალოდ Q ნომინალურ თანხას უტოლდება.

ამრიგად, სვოპის მნიშვნელობა, რომელიც მუდმივ და მცურავ ფინანსურ ნაკადთა შესაბამის გადასახადთა დღევანდელ მნიშვნელობათა სხვაობის ტოლია, შეიძლება დაითვალოს შემდეგი ფორმულით

$$V = B_1(\text{დღეს}) - B_2(\text{დღეს}) =$$
$$= rQ\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i) \times B(0, T_{i+1}) - Q\sum_{i=1}^{k-1}(B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})). \tag{6.16}$$

სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი განისაზღვრება როგორც ისეთი ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც მცურავი და მუდმივი ფინანსური ნაკადების შესაბამის გადასახადებს ერთმანეთს უტოლებს. სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი სწორედ ამ უკანსკნელი ფორმულიდან დგინდება, $V = 0$ განტოლების r-ის მიმართ ამოხსნით, რასაც ხშირად მიმართავენ პრაქტიკაში.

აქედან გამომდინარე სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი იანგარიშება

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(B(0, S_i) - B(0, S_{i+1}))}{\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_{i+1})} = \frac{B(0, S_1) - B(0, S_k)}{\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_{i+1})} \tag{6.17}$$

ფორმულით. (6.16) და (6.17) ფორმულებიდან, ტრივიალური

$$\sum_{i=1}^{k-1}(B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})) = B(0, S_1) - B(0, S_k)$$

ტოლობის გამო (გავიხსენოთ, რომ $S_k = T_n$ სვოპის დასასრულს, ხოლო S_1 მისი პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისს აღნიშნავს) ჩანს, რომ სვოპის მნიშვნელობა და სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი არ არის დამოკიდებული მცურავი ნაკადის გადახდათა სიხშირეზე.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ჩვენ სვოპის მნიშვნელობა და სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი ვიანგარიშეთ მცურავი საპროცენტო განაკვეთისა და დისკონტირებული ობლიგაციების მოდელირების გარეშე, რაც იმას ნიშნავს, რომ სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი არ არის დამოკიდებული საპროცენტო განაკვეთის შემოსავლიანობის მრუდის ვოლატილობაზე. თუ განვიხილავთ ოდნავ სახეშეცვლილ სვოპს და დავუშვებთ, რომ მცურავი საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი გადახდები ხორციელდება არა S_{i+1}-ში, არამედ მისგან განსხვავებულ ნებისმიერ სხვა მომენტში, მაშინ (6.12) ფორმულაში $B(0,S_{i+1})$ სიდიდეები ერთმანეთს აღარ შეკვეცავენ და ასეთი სვოპის მნიშვნელობა უკვე დამოკიდებული იქნება შემოსავლიანობის მრუდის მოდელზე.

თუ მცურავი ნაკადის გადასახადთა დღევანდელი მნიშვნელობის გამოთვლისას ვისარგებლებთ (6.9) ფორმულით მასში ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის მნიშვნელობის ჩასმამდე და ჩავთვლით, რომ მცურავი და მუდმივი ნაკადის შესაბამისი გადახდის მომენტები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ (6.17) გამოსახულება შეიძლება შემდეგი ფორმით გადაიწეროს

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} r^F(0,T_i,T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})},$$

ანუ სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი წარმოადგენს ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთების შეწონილ საშუალოს, რადგან ეს უკანასკნელი გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} c_i r^F(0,T_i,T_{i+1})$$

სახით, სადაც

$$c_i = \frac{(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})}.$$

სვოპის გამაწონასწორებელი საპროცენტო განაკვეთის დადგენის შემდეგ სვოპის მონაწილე ორივე მხარეს კონტრაქტის დადება არაფერი არ უღირს, რადგან ისინი ერთმანეთში ცვლიან იდენტური მნიშვნელობის მქონე ფინანსურ ნაკადებს და სვოპის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. სვოპური კონტრაქტის დაწყების შემდეგ მისი მნიშვნელობა უკვე შეიძლება ნულის ტოლი აღარ იყოს (და შესაძლებელია დიდი გადახრები როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი მიმართულებით), რადგან საბაზრო საპროცენტო განაკვეთი შეიძლება არ წაჰყვეს ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის ნაგულისხმევ მრუდს.

ხშირად მცურავ საპროცენტო განაკვეთს უმატებენ გარკვეულ სპრედს (ნაზრდს) და მას მცურავი საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი გადასახადების დათვლისას ითვალისწინებენ. ვთქვათ აღნიშნული სპრედი მუდმივია

მთელი სვოპის განმავლობაში და Δ სიდიდის ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ მცურავი ნაკადის შესაბამისი გადახდები ხორციელდება $r^L(i)+\Delta$ საპროცენტო ნორმის მიხედვით. ამიტომ მცურავი ნაკადის შესაბამის გადასახადებს, ადრე განხილულ შემთხვევასთან შედარებით, ემატება Δ სპრედით გამოწვეული ნაკადი და სპრედით გამოწვეული გადასახადების დღევანდელი მნიშვნელობების დათვლა ხდება მუდმივი ნაკადის გადასახადთა დღევანდელ მნიშვნელობათა გამოთვლის მსგავსად. ამიტომ ამ შემთხვევაში სვოპის მნიშვნელობა დროის ნულოვან მომენტში ტოლი იქნება

$$V = rQ\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)\times B(0,T_{i+1}) -$$
$$-\Delta Q\sum_{i=1}^{k-1}(S_{i+1}-S_i)\times B(0,S_{i+1}) - Q\sum_{i=1}^{k-1}(B(0,S_i)-B(0,S_{i+1})). \tag{6.18}$$

ხშირად ფიქსირებულ საპროცენტო განაკვეთს წინასწარ აფიქსირებენ და ეძებენ ლაიბორის სამართლიან სპრედს Δ-ს. ამრიგად, თუ r საპროცენტო განაკვეთი წინასწარ განსაზღვრულია და გვინდა ვიპოვოთ სვოპის გამაწონასწორებელი სამართლიანი სპრედი Δ, უნდა ამოვხსნათ $V=0$ განტოლება Δ-ს მიმართ. ადვილი სანახავია, რომ სამართლიანი სპრედი ტოლი იქნება

$$\Delta = \frac{r\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)\times B(0,T_{i+1}) - \sum_{i=1}^{k-1}(B(0,S_i)-B(0,S_{i+1}))}{\sum_{i=1}^{k-1}(S_{i+1}-S_i)\times B(0,S_{i+1})}. \tag{6.19}$$

6.3 დისკონტ-ფაქტორების გამოთვლა სვოპის საპროცენტო განაკვეთის საშუალებით

ჩვენ ვნახეთ, თუ როგორ ხდება სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის (ან, უბრალოდ, სვოპის საპროცენტო განაკვეთის) დადგენა ცნობილი დისკონტ-ფაქტორების საშუალებით. გარდა ამისა, აღნიშნული გვქონდა, რომ სვოპების ბაზარზე ხდება სტანდარტული სვოპების საპროცენტო განაკვეთების კოტირება. ამ პარაგრაფში ვნახავთ, რომ თუ ცნობილია სხვადასხვა სიცოცხლის ხანგრძლივობის სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთები, მათი საშუალებით შესაძლებელია დისკონტ-ფაქტორების გამოთვლა.

ვთქვათ, ცნობილია 2-წლიანი, 3-წლიანი, ..., n-წლიანი სვოპების (წელიწადში ერთხელ გადახდის სიხშირით) სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთები.

R_n-ით აღვნიშნოთ n წლიანი სვოპის საპროცენტო განაკვეთი და სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ყველა ეს სვოპი დადებულია ერთი და იგივე Q ნომინალურ თანხაზე.

თავდაპირველად განვიხილოთ 2-წლიანი სვოპი R_2-ის ტოლი სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთით. ფორმალურად ჩავთვალოთ, რომ კონტრაქტის ბოლოს ნომინალური თანხები იცვლება და დავუშვათ, რომ ორივე მხარე კონტრაქტის ბოლოს ფიქტიურად იხდის Q ნომინალურ თანხას.

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, ამ კონტრაქტის მცურავი ნაკადის შესაბამისი გადასახადების დღევანდელი მნიშვნელობა (ნომინალური თანხის შესაბამისი გადასახადის დღევანდელი მნიშვნელობის ჩათვლით) ნომინალური თანხის ტოლია.

მუდმივი მხარე იხდის R_2Q თანხას ერთი წლის შემდეგ და R_2Q+Q-ს ტოლ თანხას კონტრაქტის ბოლოს. ამ გადასახადთა დღევანდელი მნიშვნელობა ტოლი იქნება

$$QR_2DF(0,1)+Q(R_2+1)DF(0,2)$$

სიდიდის, სადაც $DF(0,1)$ და $DF(0,2)$ წარმოადგენენ შესაბამისად 1 და 2 წლის დისკონტ-ფაქტორებს დროის ნულოვან მომენტში.

რადგან სვოპის R_2 საპროცენტო განაკვეთი სამართლიანია, მუდმივი და მცურავი მხარის გადასახადთა დღევანდელი მნიშვნელობები ერთმანეთს უნდა გაუტოლდეს, ანუ

$$QR_2DF(0,1)+Q(R_2+1)DF(0,2)=Q,$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$DF(0,2)=\frac{1-R_2DF(0,1)}{R_2+1}. \tag{6.20}$$

მაშასადამე, ორწლიანი სვოპის საპროცენტო განაკვეთისა და ერთი წლის დისკონტ-ფაქტორის საშუალებით ჩვენ ვიანგარიშეთ ორი წლის დისკონტ-ფაქტორი. ანალოგიურად ორწლიანი და სამწლიანი სვოპების საპროცენტო განაკვეთების და 1 და 2 წლის დისკონტ-ფაქტორების საშუალებით შესაძლებელია 3 წლის დისკონტ-ფაქტორის ანგარიში და, საზოგადოდ, 2-წლიანი, 3-წლიანი, . . . , n-წლიანი სვოპების საპროცენტო განაკვეთების და 1,2 და $n-1$ წლის დისკონტ-ფაქტორების მიხედვით შეგვიძლია ვიანგარიშოთ n წლის დისკონტ-ფაქტორი შემდეგი ფორმულით

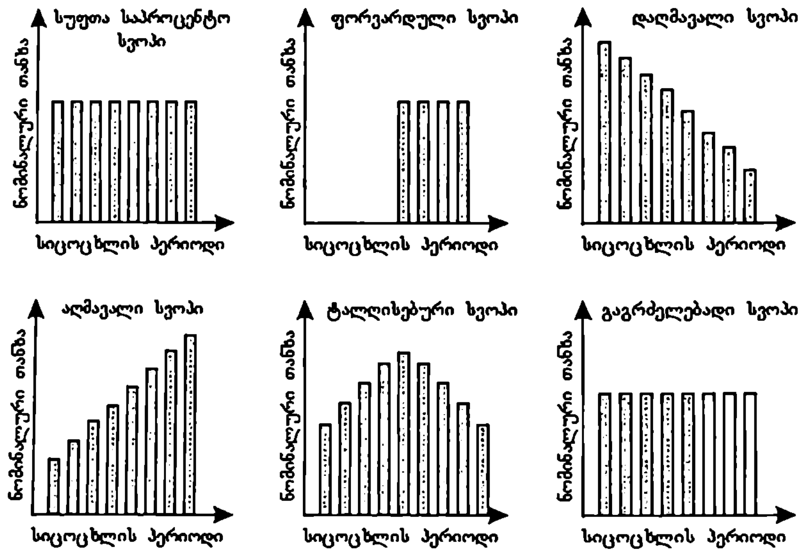
$$DF(0,n)=\frac{1-\sum_{i=1}^{n-1}R_nDF(0,i)}{1+R_n}, \tag{6.21}$$

რომლის გამოყვანა (6.20) ფორმულის მსგავსად შეიძლება. აქედან გამომდინარე, თუ მიმდევრობით გამოვიყენებთ (6.21) ფორმულას $n=2$, $n=3$

მნიშვნელობებისთვის და ა.შ., დავინახავთ, რომ ცნობილი 1 წლის დისკონტ-ფაქტორის და 2-წლიანი, ..., n-წლიანი სვოპების სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთების საშუალებით შესაძლებელია $2, 3, \dots, n$ წლის დისკონტ-ფაქტორების ანგარიში.

6.4 სვოპის სხვა სახეები

ფორვარდული სვოპი. ფორვარდული სვოპის დროს სვოპის პირველი საპროცენტო პერიოდი (და აქედან გამომდინარე მუდმივი და მცურავი ნაკადის შესაბამისი გადასახადები) იწყება მომავალში წინასწარ განსაზღვრული დროის შემდეგ. ფორვარდული სვოპის დადებით თავს იზღვევენ მომავალში მოსალოდნელი დაფინანსების ან კაპიტალდაბანდებებისგან. რადგან სვოპის მნიშვნელობის დათვლისას არსად არ გვისარგებლია იმით, რომ სვოპი უშუალოდ კონტრაქტის დადებისთანავე იწყება, 6.2 პუნქტში გამოყვანილი სვოპის მნიშვნელობისა და სამართლიანი განაკვეთის ფორმულები სამართლიანია ფორვარდული სვოპებისათვისაც.



ნახ. 6.3

სვოპები ცვლადი ნომინალური თანხით. სუფთა საპროცენტო სვოპის დროს, ფინანსური ნაკადების გაცვლა ხდება გარკვეული ნომინალური თანხის მიხედვით, რომელიც ერთი და იგივეა კონტრაქტის მონაწილე ორივე

მხარისთვის და არ იცვლება საპროცენტო პერიოდის ცვლილებისას. ხშირად საჭირო ხდება ისეთი სვოპური კონტრაქტების დადება, რომლის დროსაც ნომინალური თანხა იცვლება საპროცენტო პერიოდის ცვლილებასთან ერთად. ასეთი სვოპის დადება მოხერხებულია, თუ მომავალში დროის განსაზღვრულ მომენტებში მისაღები (ან დასაბრუნებელი) გვაქვს განსხვავებული სიდიდის თანხები მცურავი (ან ფიქსირებული) საპროცენტო განაკვეთით და გვინდა მცურავი საპროცენტო განაკვეთით მისაღები დაფინანსება შევცვალოთ დაფინანსებით მყარი საპროცენტო განაკვეთით, ან პირიქით. სვოპს, რომლის დროსაც ნომინალური თანხა სვოპის სიცოცხლის პერიოდში კლებულობს უწოდებენ დაღმავალ სვოპს. პირიქით, სვოპის შესაბამისი ნომინალური თანხები შეიძლება სვოპის სიცოცხლის განმავლობაში იზრდებოდეს, მაგალითად, როდესაც სვოპი ზრდადი დაფინანსების მოთხოვნასთან არის მიბმული. ასეთ სვოპს აღმავალ სვოპს უწოდებენ. ტალღისებური სვოპის დროს ნომინალური თანხა ჯერ იზრდება, ხოლო შემდეგ მცირდება (იხ. ნახ. 6.3).

სუფთა საპროცენტო სვოპის ფასდადების დროს, ჩვენ სვოპი დავყავით ცალკეულ ფინანსურ ნაკადებად და თითოეული მათგანი სეპარატულად შევაფასეთ. არ არის ძნელი (6.17), (6.18) და (6.19) ფორმულების გადატანა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ნომინალური თანხა იცვლება სვოპის სიცოცხლის პერიოდის განმავლობაში. აღვნიშნოთ $Q(T_i)$-თი (შესაბამისად $Q(S_i)$-თი) ნომინალური თანხა მუდმივი (შესაბამისად მცურავი) ნაკადის (T_i, T_{i+1}) (შესაბამისად (S_i, S_{i+1})) საპროცენტო პერიოდისთვის. მაშინ სვოპის მნიშვნელობისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$V = r\sum_{i=1}^{n-1} Q(T_i)(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1}) - \Delta\sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(S_{i+1}-$$
$$-S_i)B(0,S_{i+1}) - \sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(B(0,S_i)-B(0,S_{i+1})).$$

სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი (წინასწარ მოცემული სპრედის დროს) და სვოპის სამართლიანი სპრედი (მოცემული სვოპის საპროცენტო განაკვეთის დროს) შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება

$$\begin{aligned} r = \; & \left(\Delta\sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(S_{i+1}-S_i)\times B(0,S_{i+1}) - \right.\\ & \left. -\sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(B(0,S_i)-B(0,S_{i+1}))\right)\times \\ & \times\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q(T_i)(T_{i+1}-T_i)\times B(0,T_{i+1})\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n-1} Q(T_i)(T_{i+1} - T_i) \times B(0, T_{i+1}) - \sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(B(0, S_i) - B(0, S_{i+1}))\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k-1} Q(S_i)(S_{i+1} - S_i) \times B(0, S_{i+1})\right)^{-1}$$

დაგვიანებული სვოპები. სვოპის დადებისას, უმეტეს შემთხვევაში, მცურავი საპროცენტო განაკვეთი დგინდება ყოველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისში და ანგარიშსწორება (ამ დადგენილი საპროცენტო განაკვეთის მიხედვით) ხდება საპროცენტო პერიოდის ბოლოს. ამისგან განსხვავებით, ხანდახან იდება სვოპური კონტრაქტები დაგვიანებული ლაიბორის კურსით. დაგვიანებული სვოპის დროს მცურავი საპროცენტო განაკვეთის დადგენაც და მისი კურსის მიხედვით გადახდაც ხდება საპროცენტო პერიოდის ბოლოს. ასეთი კონტრაქტების დადება შემდეგი მოსაზრებით აიხსნება. დავუშვათ, რომ დღევანდელი საპროცენტო განაკვეთის მრუდი იწვევს ძლიერად ზრდად ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთებს. ეს ნიშნავს, რომ სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი დაგვიანებული სვოპისთვის უფრო მაღალია, ვიდრე ჩვეულებრივი საპროცენტო სვოპისთვის. ამიტომ, მოხერხებულია დაგვიანებულ სვოპში თანხების მიღება მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით. დაგვიანებულ სვოპში შესვლას და ამ კონტრაქტში თანხების მცურავი საპროცენტო განაკვეთით გადახდას ეცდება ინვესტორი, რომელსაც სჯერა, რომ მცურავი საპროცენტო განაკვეთი ისე ძლიერად არ გაიზრდება, როგორც ეს პროგნოზირდება ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთით. შევნიშნოთ, რომ დაგვიანებული სვოპის მნიშვნელობის გამოთვლა, სუფთა საპროცენტო სვოპის მსგავსად, ვერ ხერხდება. მისი სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი დამოკიდებულია საპროცენტო განაკვეთის შემოსავლიანობის მრუდის ვოლატილობაზე და მისი გამოთვლა მხოლოდ საპროცენტო განაკვეთის ევოლუციის კონკრეტული მოდელების ფარგლებშია შესაძლებელი. ამ საკითხებთან დაკავშირებით იხ. [117], [124], [138].

სავალუტო სვოპები. სავალუტო სვოპები იმით გამოირჩევიან, რომ ფინანსური ნაკადების (ანუ საპროცენტო გადასახადების) გაცვლა სხვადასხვა ვალუტით მიმდინარეობს. მაგალითად, პარტნიორები A და B დებენ კონტრაქტს, სადაც ერთი (ვთქვათ A) იხდის გადასახადს ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით ამერიკულ დოლარებში და იღებს B-სგან თანხებს მცურავი საპროცენტო ნორმით გერმანულ მარკებში. შემდეგი განსხვავება (საპროცენტო სვოპებისგან) ისაა, რომ სავალუტო სვოპის დროს კონტრაქტის ბოლოს ხდება ორივე ვალუტის შესაბამისი ნომინალური თანხების გადაცვლა.

ხშირად ნომინალური თანხები იცვლება კონტრაქტის დასაწყისშიც.

განასხვავებენ სავალუტო სვოპების სამ ძირითად ტიპს,

1) მყარი პროცენტი A ვალუტით B ვალუტით მცურავი პროცენტის წინააღმდეგ (შერეული სვოპი),

2) A ვალუტით მყარი პროცენტი B ვალუტით მყარი პროცენტის წინააღმდეგ,

3) A ვალუტით მცურავი პროცენტი B ვალუტით მცურავი პროცენტის წინააღმდეგ.

ამ უკანასკნელ კონტრაქტს საბაზისო სვოპს უწოდებენ.

სავალუტო სვოპის ფასდადებისას ვიქცევით ისევე, როგორც საპროცენტო სვოპის მნიშვნელობის გამოთვლის დროს და ვითვლით ცალკეული ფინანსური ნაკადის დღევანდელ მნიშვნელობას. მხოლოდ, სავალუტო სვოპის დროს, ცალკეული მხარის ფინანსური ნაკადის მნიშვნელობის ანგარიში ხდება იმ ვალუტით, რომლითაც მიმდინარეობს გადახდები და ამ ვალუტის შესაბამისი დისკონტ-ფაქტორების მრუდის მიხედვით. ამის შემდეგ უცხოური (ანუ არა ძირითადი) ვალუტით გამოთვლილი მნიშვნელობა საბაზისო ვალუტაში უნდა გადავიყვანოთ დღევანდელი სავალუტო კურსის მიხედვით.

მაგალითისათვის განვიხილოთ 5-წლიანი სავალუტო სვოპი მცურავი საპროცენტო განაკვეთით გერმანულ მარკებში (DM) ამერიკულ დოლარებში (USD) მცურავი საპროცენტო განაკვეთის წინააღმდეგ (საბაზისო სვოპი), სადაც გადახდები მიმდინარეობს 6-თვიანი ლაიბორის (6M-LIBOR) კურსის მიხედვით. ვთქვათ, დღევანდელი გადაცვლის კურსი შეადგენს 1.45-ს (USD/DM= 1.45). DM-ნაკადის შესაბამისი ნომინალური თანხა ტოლი იყოს DM145 მილიონის, ხოლო USD-ნაკადის ნომინალური თანხა USD 100 მილიონის. რა იქნება ამ სვოპის დღევანდელი მნიშვნელობა.

რადგან პირველი საპროცენტო პერიოდი იწყება უშუალოდ კონტრაქტის დადებისას USD-ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა ამ ნაკადის შესაბამისი ნომინალური თანხის USD 100 მილიონის, ხოლო DM-ნაკადის დღევანდელი მნიშვნელობა DM145 მილიონის ტოლია. ვინაიდან გადაცვლის დღევანდელი კურსი 1.45-ია, მთელი სვოპის მნიშვნელობა კონტრაქტის დადების მომენტში ნულის ტოლი უნდა იყოს.

შენიშვნა. ხშირად სვოპის ფინანსურ ბაზარზე ხდება საბაზისო სვოპების სპრედების კოტირება. ამ სპრედის აზრი მდგომარეობს ყოველი ვალუტისთვის (მეორე ვალუტის მიმართ) ლიკვიდურობის პრემიის დაწესებაში. ანუ, რაც უფრო ლიკვიდურია ვალუტა, მით უფრო მცირე სპრედით მოხდება ამ ვალუტით თანხების გადახდა.

6.5 კეპები და ფლორები

კეპები და ფლორები წარმოადგენენ ოფციონებს საპროცენტო განაკვეთზე და აზღვევენ საპროცენტო განაკვეთს ზრდისგან (კეპები) ან კლებისგან (ფლორები).

წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომელმაც მიიღო კრედიტი ბანკისგან და ვალდებულია დააბრუნოს ვალი მცურავი საპროცენტო განაკვეთით (მაგალითად, 6-თვიანი ლაიბორით) $Q = \$100$ ნომინალური თანხის მიხედვით. შესაძლებელია, რომ გარკვეულ პერიოდში ლაიბორის კურსი მკვეთრად გაიზარდოს და ინვესტორს ვალის დაბრუნება მაღალი საპროცენტო ნორმით მოუხდეს. კეპის შეძენით მას შეუძლია თავი დაიზღვიოს საპროცენტო განაკვეთის კურსის ზრდისგან. მაგალითად, $R_x = 5\%$ შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთის მქონე კეპის ყიდვით ინვესტორი, ყოველი (T_i, T_{i+1}) პერიოდის ბოლოს (ანუ ყოველი 6 თვის შემდეგ), იღებს კეპის დამწერისგან (მაგალითად, ბანკისგან).

$$Q \times (T_{i+1} - T_i) \times (R^L(i) - R_x) = 100 \times 0.5 \times (R^L(i) - 0.05) \qquad (6.22)$$

სიდიდის ტოლ თანხებს, როდესაც ლაიბორის კურსი $R_x = 5\%$-ს გადააჭარბებს. აქედან გამომდინარე, ინვესტორი არც ერთ შემთხვევაში არ გადაიხდის ვალს $R_x = 5\%$-ზე დიდი საპროცენტო განაკვეთით. მაგალითად, თუ ლაიბორის კურსი რომელიმე (T_i, T_{i+1}) პერიოდისთვის გახდა $r^L(i) = 8\%$, ინვესტორს გადასახდელი ექნება $Q \times R^L(i) \times (T_{i+1} - T_i) = 100 \times 0.08 \times 0.5$ თანხა კრედიტის ვალის დასაფარავად, მაგრამ ამ თანხის ნაწილს, $Q \times \times (T_{i+1} - T_i) \times (r^L(i) - R_x) = 100 \times 0.03 \times 0.5$-ს, ის მიიღებს კეპის დამწერისგან და საბოლოოდ გადაიხდის ვალს მხოლოდ $R_x = 5\%$-იანი განაკვეთით. ცხადია, ასეთი დაზღვევა უფასო არ იქნება და ინვესტორი ვალდებულია გადაიხადოს გარკვეული თანხა კონტრაქტის დასაწყისში. კეპებს ყიდულობენ ფინანსური ვალდებულებების არქონის შემთხვევაშიც და ამ დროს მის მყიდველს იმედი აქვს საპროცენტო განაკვეთის კურსის ზრდის.

საპროცენტო განაკვეთის კეპის მოქმედების წარმოდგენა შეიძლება ნახ. 6.4-ის მიხედვით.

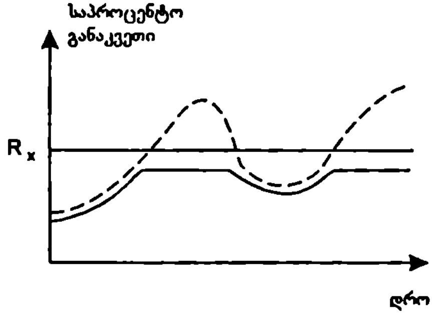
საპროცენტო ფლორით (კეპის საწინააღმდეგოდ) თავს იცავენ საპროცენტო განაკვეთის დაცემისგან. ვთქვათ, დეპოზიტზე შეტანილი გვაქვს $Q = \$100$-ის ტოლი თანხა და პროცენტს გვიხდიან 3-თვიანი ლაიბორის კურსის მიხედვით. თუ შევიძენთ ფლორს $R_x = 5\%$ შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ ყოველი სამი თვის შემდეგ კეპის დამწერისგან მივიღებთ

$$100 \times \frac{1}{4} \times (0.05 - r^L(i))\text{-ის}$$

ტოლ თანხებს, როდესაც ლაიბორის კურსი 5%-ზე ქვევით დაეცემა. ამის

გამო არც ერთ საპროცენტო პერიოდში არ მივიღებთ ნომინალური თანხის 5%-ზე ნაკლებს.

აქ წყვეტილი ხაზით აღნიშნულია LIBOR-ის კურსი, ხოლო უწყვეტი ხაზით საპროცენტო განაკვეთი, რომლის მიხედვითაც ხდება ვალის გადახდა კეპის შეძენის შემდეგ.



ნახ. 6.4

საპროცენტო კეპი და ფლორი განისაზღვრებიან შემდეგი კონდიციებით:

1) ნომინალური თანხა,
2) პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისი,
3) ცვლადი საპროცენტო განაკვეთი,
4) სიცოცხლის ხანგრძლივობა,
5) შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთი.

ერთ წელიწადზე ნაკლები სიცოცხლის ხანგრძლივობის კეპებისთვის გადახდები, როგორც წესი, წარმოებს 3-თვიანი ლაიბორის კურსის მიხედვით. უფრო დიდი ხანგრძლივობის კეპებისთვის ხმარობენ 6-თვიან ლაიბორს.

ფინანსურ ბაზრებზე ხდება სხვადასხვა საპროცენტო განაკვეთის და სიცოცხლის ხანგრძლივობის მქონე კეპებისა და ფლორების ფასების კოტირება. მიუხედავად ამისა, მნიშვნელოვანია საპროცენტო განაკვეთის კურსის ადეკვატური მოდელირება და მის საფუძველზე კეპებისა და ფლორების თეორიული ფასების გამოთვლა, რადგან თეორიული მოდელები ბაზრის ფასებში ნაგულისხმევი ვოლატილობის, მის საფუძველზე არასტანდარტული კეპებისა და ფლორების ფასების დათვლის და ოპტიმალური პორტფელების არჩევის საშუალებას გვაძლევენ.

6.6 კეპების და ფლორების ფასების გამოთვლა

კეპების და ფლორების ფასების გათვლა ექცევა ოფციონების ფასდადების თეორიაში და მათი ფასები ფიუჩერსზე დადებულ ოფციონური კონტრაქტების ფასების მსგავსად ითვლება. .

რადგან ყოველი კეპი (ფლორი) შესაბამის საპროცენტო პერიოდის მცურავ საპროცენტო განაკვეთზე ყიდვის (გაყიდვის) ოფციონების, კეპლეტების (ფლორლეტების), მიმდევრობად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, საკმარისია ვიცოდეთ თუ როგორ ხდება თითოეული კეპლეტის (ფლორლეტის) ფასის დადგენა. კეპის (ფლორის) ფასი წარმოდგება ცალკეული კეპლეტების (ფლორლეტების) ფასების ჯამის სახით.

კეპლეტის ფასს ანგარიშობენ ბლეკ-შოულსის მოდელის გამოყენებით, უფრო ზუსტად, იყენებენ ბლეკ-შოულსის მოდიფიცირებულ ფორმულებს ფიუჩერსული ოფციონებისთვის,რომელიც გამოყვანილ იქნა ბლეკის მიერ 1976 წელს. არსებობს კეპლეტის ფასის გამოთვლის ორი გზა ბლეკის მოდელის მიხედვით.

ფასის ლოგნორმალური მოდელი

განვიხილოთ ერთი კეპლეტი (T_1, T_2) საპროცენტო პერიოდით და K-ს ტოლი შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთით. სიმარტივისათვის შევთანხმდეთ, რომ დღევანდელი დღისთვის (ანუ დროის ნულოვანი მომენტისთვის) უცნობი $r^L(T_1, T_2)$ მცურავი საპროცენტო განაკვეთის კურსი ზუსტად T_1 მომენტში დგინდება. კეპით ანგარიშსწორება ხდება აღნიშნული პერიოდის ბოლოს T_2 მომენტში, როდესაც კეპის მფლობელი მისი დამწერისგან იღებს

$$(T_2 - T_1)\max(r^L(T_1, T_2) - K, 0) \tag{6.23}$$

სიდიდის ტოლ თანხას. აქ სიმარტივისთვის ჩავთვალეთ, რომ ნომინალური თანხა 1-ის ტოლია (წინააღმდეგ შემთხვევაში კეპის ფასი უბრალოდ გამრავლდება ნომინალური თანხის სიდიდეზე).

თუ მოვახდენთ (6.23) ფორმულით მოცემული თანხის დისკონტირებას T_1 მომენტისთვის (T_1, T_2) ინტერვალში მოქმედი $r^L(T_1, T_2)$ საპროცენტო განაკვეთის მიხედვით მივიღებთ

$$(T_2 - T_1)\max(r^L(T_1, T_2) - K, 0)\frac{1}{1 + (T_2 - T_1)r^L(T_1, T_2)}. \tag{6.24}$$

შევნიშნოთ, რომ (6.24) თანხის გადახდა T_2 მომენტში T_1 მომენტში (6.23) თანხის გადახდის ტოლფასია და კეპლეტის ფასის დასადგენად საკმარისია ამ უკანასკნელი სიდიდის სამართლიანი ფასის დათვლა. აღვნიშნოთ

აგრეთვე, რომ

$$\frac{1}{1+(T_2-T_1)r^L(T_1,T_2)} = B(T_1,T_2) \qquad (6.25)$$

სადაც $B(T_1,T_2)$ აღნიშნავს T_2 აღსრულების ვადიანი უკუპონო ობლიგაციის ფასს T_1 მომენტში, ერთეულოვანი ნომინალური თანხით.

მარტივი მათემატიკური გარდაქმნებით (6.24) გამოსახულება შემდეგნაირი ფორმით შეიძლება გადავწეროთ

$$\frac{(T_2-T_1)\max(r^L(T_1,T_2)-K,0)}{1+(T_2-T_1)r^L(T_1,T_2)} =$$

$$= \max\left(\frac{(T_2-T_1)(r^L(T-1,T_2)-K)}{1+(T_2-T_1)r^L(T_1,T_2)},0\right) =$$

$$= \max\left(1-\frac{1+(T_2-T_1)K}{1+(T_2-T_1)r^L(T_1,T_2)},0\right) =$$

$$= \max(1-(1+(T_2-T_1)K)B(T_1,T_2),0) =$$

$$= (1+(T_2-T_1)K)\max\left(\frac{1}{1+(T_2-T_1)K}-B(T_1,T_2),0\right).$$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ (6.25) ფორმულით და $\alpha\max(x,y) = \max(\alpha x,\alpha y)$ ტოლობით, რომელიც მართებულია ნებისმიერი დადებითი α-სთვის.

ეს უკანასკნელი გამოსახულება წარმოადგენს $B(T_1,T_2)$ უკუპონო ობლიგაციაზე გამოშვებული $\frac{1}{1+(T_2-T_1)K}$ შეთანხმებების ფასის მქონე გაყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქციას, $1+(T_2-T_1)K$ სიდიდის ტოლი ნომინალური თანხით.

მაშასადამე, ყოველ კეპლეტს (ანუ კოლ ოფციონს მცურავ საპროცენტო განაკვეთზე) K-ს ტოლი შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთით და (T_1,T_2) რბენის პერიოდით, შეესაბამება პუტ ოფციონი უკუპონო ობლიგაციაზე შეთანხმების ფასით $\frac{1}{1+(T_2-T_1)K}$ და ნომინალური თანხით $1+(T_2-T_1)K$.

პუტ ოფციონის ფასი უკუპონო ობლიგაციაზე ანგარიშდება ბლეკის მოდელის მიხედვით, რაც ნიშნავს დაშვებას, რომ $B(T_1,T_2)$ უკუპონო ობლიგაციის $B(t,T_1,T_2)$ ფორვარდული ფასის დინამიკა აღიწერება

$$B(t,T_1,T_2) = B(0,T_1,T_2)e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t} \qquad (6.26)$$

პროცესით, სადაც W_t სტანდარტული ვინერის პროცესია, ხოლო $B(0,T_1,T_2)$ წარმოადგენს დღევანდელ ფორვარდულ დისკონტ-ფაქტორს (T_1,T_2) პერიოდისთვის.

ბლექის ფორმულა კეპლეტის ფასისთვის იძლევა შემდეგ შედეგს:

$$\text{კეპლეტის ფასი} = B(0,T_1)[N(-d_2) - B(0,T_1,T_2)(1+K(T_2-T_1))N(-d_1)], \tag{6.27}$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln(B(0,T_1,T_2)(1+(T_2-T_1)K) + \frac{\sigma^2 T_1}{2}}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_1} \tag{6.28}$$

და

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა.

ანალოგიურად შეიძლება თითოეული ფლორლეტის ფასის ანგარიში.

$$\text{ფლორლეტის ფასი} = B(0,T_1)[B(0,T_1,T_2)(1+K(T_2-T_1))N(d_1) - N(d_2)]. \tag{6.29}$$

კეპლეტის და ფლორლეტის ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში σ პარამეტრი აღნიშნავს უკუპონო ობლიგაციის ფორვარდული ფასის ვოლატილობას. ამ ვოლატილობას ფასის ვოლატილობას უწოდებენ.

განხილული მოდელი გულისხმობს, რომ უკუპონო ობლიგაციის ფასები ლოგნორმალურად არის განაწილებული. ამიტომ უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი ნორმალურად იქნება განაწილებული. ამის გამო ნორმალურად განაწილებული საპროცენტო განაკვეთი უშვებს დადებითი ალბათობით უარყოფითი საპროცენტო ნორმის არსებობის შესაძლებლობას. მიუხედავად ამისა, ამ მოდელს ხშირად იყენებენ ობლიგაციების ბაზრებზე, რადგან ის უშუალოდ დაკვირვებად ობლიგაციის ფასებზეა დამოკიდებული.

საპროცენტო განაკვეთის ლოგნორმალური მოდელი

ფინანსურ ბაზრებზე არსებითად უფრო პოპულარულია კეპების ფასდადების მოდელი, როდესაც თვით მცურავი საპროცენტო განაკვეთია ლოგნორმალურად განაწილებული.

გავიხსენოთ, რომ კეპლეტის გადასახადი T_2 მომენტში

$$(T_2 - T_1)\max(r^L(T_1,T_2) - K, 0) \tag{6.30}$$

სიდიდის ტოლია და ის წარმოადგენს ოფციონს მცურავ საპროცენტო განაკვეთზე.

$r(t,T_1,T_2)$ იყოს (T_1,T_2) პერიოდში მოქმედი ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის მნიშვნელობა t მომენტში და დავუშვათ, რომ

$$r(t,T_1,T_2) = r(0,T_1,T_2)e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \tag{6.31}$$

სადაც W_t სტანდარტული ვინერის პროცესია და

$$r(0,T_1,T_2)=\frac{\left(\frac{B(0,T_1)}{B(0,T_2)}-1\right)}{T_2-T_1} \tag{6.32}$$

წარმოადგენს (T_1,T_2) პერიოდის დღევანდელ ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთს. ამ მოდელში σ პარამეტრი აღნიშნავს (T_1,T_2) პერიოდის ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის ვოლატილობას, რომელსაც შემოსავლიანობის ვოლატილობას უწოდებენ და რომელიც სრულიად განსხვავებულია წინა პუნქტში განხილული ფასის ვოლატილობისგან. ამ შემთხვევაში ბლეკის ფორმულა გვაძლევს კეპის და ფლორის შემდეგ ფასებს

$$\text{კეპლეტის ფასი}=(T_2-T_1)B(0,T_2)[r(0,T_1,T_2)N(d_1)-KN(d_2)], \tag{6.33}$$

სადაც

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{r(0,T_1,T_2)}{K}\right)+\frac{\sigma^2}{2}T_1}{\sigma\sqrt{T_1}},$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T_1}.$$

$$\text{ფლორლეტის ფასი}=(T_2-T_1)B(0,T_2)[KN(-d_2)-r(0,T_1,T_2)N(-d_1)]. \tag{6.34}$$

ხშირად ფინანსურ ბაზრებზე კეპებისა და ფლორების ფასების კოტირება ხდება ნაგულისხმევი შემოსავლიანობის ვოლატილობის მიხედვით. როგორც ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, საპროცენტო განაკვეთის ლოგნორმალური მოდელით კეპლეტების ფასის დასათვლელად საჭიროა გამოსადეგი შემოსავლიანობის ვოლატილობის მოცემა. ნაგულისხმევი შემოსავლიანობის ვოლატილობა არის ის მუდმივი (ერთი და იგივე ყველა კეპლეტისთვის) ვოლატილობა, რომლისთვისაც კეპლეტების თეორიული ფასების ჯამი ზუსტად კეპის საბაზრო ფასს უტოლდება. ხშირად მოცემული კეპის თითოეული კეპლეტის ფასს ერთი და იგივე ვოლატილობის მიხედვით არ ანგარიშობენ. შესაძლებელია კოტირებული შემოსავლიანობის ვოლატილობების საშუალებით, როგორც დისკონტ-ფაქტორების კონსტრუირებისას, ცალკეული კეპლეტების ნაგულისხმევი ვოლატილობების ანგარიში. ამას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს, რადგან სხვა ოფციონების ფასებიც კეპის ბაზართან უნდა იყოს შეთანხმებული.

6.7 კავშირი ფასის ვოლატილობასა და შემოსავლიანობის ვოლატილობას შორის

წინა პარაგრაფში ჩვენ დავადგინეთ კეპებისა და ფლორების ფასები ორი სხვადასხვა მოდელის მიხედვით. ეს მოდელები ეფუძნებოდნენ შესაბამისად უკუპონო ობლიგაციების ფასებისა და ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის ლოგნორმალურობის დაშვებას. ამ მოდელების მიხედვით კეპებისა და ფლორების ფასების გასათვლელად აუცილებელია შესაბამისად ფასის და შემოსავლიანობის ვოლატილობების ცოდნა.

სასურველია ვიცოდეთ, თუ რომელი „სწორი“ შემოსავლიანობის ვოლატილობა შეესაბამება მოცემული ფასის ვოლატილობას, და პირიქით.

აღვნიშნოთ σ_p და σ_y-ით შესაბამისად ფასისა და შემოსავლიანობის ვოლატილობები. $B(t) = B(t, T_1, T_2)$ იყოს უკუპონო ობლიგაციის ფორვარდული ფასი t მომენტში, ხოლო $r(t) = r(t, T_1, T_2)$ — ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი.

ჩვენი დაშვების თანახმად $B(t)$ და $r(t)$ პროცესები შესაბამისად მოიცემიან (6.26) და (6.31) ფორმულებით, რის გამოც წარმოადგენენ შემდეგი წრფივი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნებს

$$dB(t) = \sigma_p B(t) dW_t, .$$

$$dr(t) = \sigma_y r(t) dW_t.$$

რადგან ობლიგაციის ფასი არის საპროცენტო განაკვეთის ფუნქცია, $B(t) = B(t, r(t))$ გარკვეული $B(t, y)$ ფუნქციისთვის და იტოს ფორმულის თანახმად (იხ. (4.37))

$$dB(t) = dB(t, r(t)) = \frac{\partial B}{\partial y}(t, r(t)) r(t) \sigma_y dW_t +$$
$$+\text{რეგულარული წევრი} = \sigma_p B(t) dW_t.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ვიღებთ, რომ ამ ტოლობის არარეგულარული წევრები (ანუ წევრები, რომლებიც შეიცავენ ბროუნის მოძრაობის დიფერენციალს) ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma_p B(t) = \sigma_y r(t) \frac{\partial B}{\partial y}(t, r(t)),$$

ანუ ფასის და შემოსავლიანობის ვოლატილობებს შორის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა

$$\sigma_y = \frac{\sigma_p B(t)}{r(t) \frac{\partial B}{\partial y}(t, r(t))}. \tag{6.35}$$

ვთქვათ, კავშირი უკუპონო ობლიგაციის ფორვარდულ ფასსა და ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთს შორის მოიცემა

$$B(y) = \frac{1}{1 + (T_2 - T_1)y}$$

ფუნქციით (რაც შეესაბამება პროცენტის მარტივი დარიცხვის წესს).

რადგან

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{T_2 - T_1}{(1 + (T_2 - T_1)y)^2},$$

(6.35) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\sigma_y = \frac{\sigma_p B(t)}{r(t)\frac{T_2 - T_1}{(1+(T_2-T_1)y)^2}} = \frac{\sigma_p}{r(t)(T_2 - T_1)B(t)}.$$

6.8 სვოპციონები, ანუ ოფციონები სვოპზე

სვოპციონი წარმოადგენს ოფციონს სვოპზე. ის აძლევს მის მყიდველს მომავლის განსაზღვრულ დროს წინასწარ შეთანხმებულ სვოპურ კონტრაქტში შესვლის უფლებას. ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ბოლოს, ოფციონის აღსრულების დღეს, ოფციონის მფლობელი წყვეტს სურს თუ არა მას შეთანხმებულ სვოპურ კონტრაქტში შესვლა. ცხადია, ის აღასრულებს თავის ოფციონს (ანუ დადებს სვოპს წინასწარ შეთანხმებულ პირობებში) მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ოფციონის აღსრულების დღისთვის სვოპის მნიშვნელობა დადებითია. ანსხვავებენ გადამხდელის და მიმღების სვოპციონებს. გადამხდელის სვოპციონის დროს ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება შევიდეს სვოპში როგორც მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით გადამხდელი მხარე. მიმღების სვოპციონის დროს ოფციონის მფლობელი იხდის მცურავი საპროცენტო განაკვეთით და იღებს გადასახადებს ფიქსირებული საპროცენტო ნორმით.

სვოპციონი განისაზღვრება შემდეგი კონდიციებით:

ა) ოფციონის აღსრულების დღე;

ბ) იმ სვოპის პირობები, რომლის დადებაც არის შესაძლებელი ოფციონის აღსრულების შემთხვევაში, კერძოდ

1) ნომინალური თანხა;
2) სვოპის პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისი (როგორც წესი, ოფციონის აღსრულების დღიდან ორი სამუშაო დღის შემდეგ);

3) სვოპის სიცოცხლის ხანგრძლივობა;

4) გადასახადთა სიხშირე ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით;

5) მცურავი საპროცენტო განაკვეთი;

6) შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთი;

7) სპრედი (მცურავ საპროცენტო განაკვეთთან).

ფინანსურ ბაზრებზე ძირითადად ვაჭრობენ სვოპციონებით, რომელთა აღსრულების პერიოდი 3 თვიდან 5 წლამდე გრძელდება. საბაზისო სვოპის სიცოცხლის ხანგრძლივობა, როგორც წესი, 2–10 წლის ფარგლებში იცვლება.

მაგალითი 6.1. დღეს (13.09.1996) შეძენილი 1Y-5Y-6M გადამხდელი სვოპციონი $K = 5\%$ შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთით, აძლევს მის მფლობელს 1997 წლის 16 სექტემბრის 5-წლიან სვოპში შესვლის უფლებას, რომელშიც ის გადაიხდის თანხებს ფიქსირებული $K = 5\%$ საპროცენტო ნორმით და მიიღებს 6M-LIBOR-ის საპროცენტო განაკვეთის მიხედვით. თუ 16.09.97 დროს აღნიშნული კონდიციების მქონე სვოპის მნიშვნელობა ნულზე მეტია, მაშინ გადამხდელი — სვოპციონის მფლობელი გამოიყენებს თავის უფლებას.

სვოპციონის აღსრულების დროს ორი სახის ანგარიშსწორება არის შესაძლებელი. ანგარიშსწორება ფულით, როდესაც ოფციონის მფლობელი ოფციონის აღსრულების დღეს იღებს სვოპის მნიშვნელობას (რომელსაც მას უხდიან თუ სვოპის მნიშვნელობა დადებითია) და ანგარიშსწორება სვოპით, რომლის დროსაც ოფციონის მფლობელი შედის შეთანხმებულ სვოპურ კონტრაქტში.

განსაკუთრებულ როლს თამაშობენ სამართლიანი სვოპციონები (ანუ სვოპციონები ფულთან), რომელთათვისაც სვოპის შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთი ზუსტად სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის ტოლია. რადგან სვოპი ძალაში შედის ოფციონის აღსრულების დღის შემდეგ, აქ საუბარი გვაქვს ფორვარდულ სვოპზე და სამართლიან ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთზე.

6.9 სვოპციონების ფასდადება

სვოპციონი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ოფციონი სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის მიმართ. მეორეს მხრივ, თუ სვოპს გავიგებთ როგორც კუპონიანი ობლიგაციის გაცვლას ობლიგაციაზე მცურავი საპროცენტო განაკვეთით (რომლის ფასი ნომინალური თანხის ტოლია), მაშინ სვოპციონს შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც კუპონიან ობლიგაციაზე დადებულ ოფციონს. ამიტომ, არსებობს სვოპციონის ფასის გათვლის ორი გზა.

პირველი ეფუძნება სვოპის ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის ლოგნორმალურ მოდელს და უფრო პოპულარულია სვოპის ბაზრებზე, ხოლო მეორე ეყრდნობა კუპონიანი ობლიგაციის ფორვარდული ფასის ლოგნორმალურობის დაშვებას და გამოიყენება, როგორც წესი, მხოლოდ ობლიგაციების ფინანსურ ბაზრებზე.

სიმარტივისთვის განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც სვოპი უშუალოდ ოფციონის აღსრულების მომენტში იწყება (ასეთ სვოპციონებს პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად ხმარობენ) და ჩავთვალოთ, რომ სპრედი მცურავ საპროცენტო განაკვეთთან ნულის ტოლია.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: $t = 0$ — სვოპციონის ფასდადების მომენტი, $T_0 = S_0$ — ოფციონის აღსრულების დღე და პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისი, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — მუდმივი საპროცენტო განაკვეთით გადახდის მომენტები, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — გადახდის მომენტები მცურავი საპროცენტო განაკვეთით, $T_n = S_k$ — სვოპის დასასრული, c — სვოპის შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთი, Q — ნომინალური თანხა.

ფასის ლოგნორმალური მოდელი

სვოპი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც კუპონიანი ობლიგაციის (მუდმივი კუპონით) გაცვლა ობლიგაციაზე მცურავი საპროცენტო განაკვეთით, რომლის ფასიც პირველი საპროცენტო პერიოდის დასაწყისში (სვოპციონის აღსრულების მომენტში) ნომინალური თანხის ტოლია. თუ $B_c(T_0)$-ით აღვნიშნავთ კუპონიანი ობლიგაციის ფასს (C კუპონით და ერთის ტოლი ნომინალური თანხით) სვოპციონის აღსრულების T_0 მომენტში, მაშინ გადამხდელის სვოპციონის მფლობელი ოფციონის აღსრულების მომენტში იღებს

$$Q \max(1 - B_c(T_0), 0)$$

სიდიდის ტოლ თანხას.

მიმღების სვოპციონის მფლობელი შესაბამისად მიიღებს

$$Q \max(B_c(T_0) - 1, 0)$$

თანხას ოფციონის აღსრულებისას.

ამიტომ, გადამხდელის (შესაბამისად მიმღების) სვოპციონი წარმოადგენს გაყიდვის (შესაბამისად ყიდვის) ოფციონს კუპონიან $B_c(T_0)$ ობლიგაციაზე 1-ის ტოლი შეთანხმების ფასით. დავუშვათ, რომ კუპონიანი ობლიგაციის $B_c(t, T_0)$ ფორვარდული ფასი აღიწერება გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობით ყოველი $t < T_0$-თვის

$$B_c(t, T_0) = B_c(0, T_0) e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \tag{6.36}$$

სადაც W_t ვინერის პროცესია და

$$B_c(0,T_0)=\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)B(0,T_0,T_{i+1})+B(0,T_0,T_{i+1}), \tag{6.37}$$

სადაც $c=\frac{C}{100}$ არის სვოპის მუდმივი ფინანსური ნაკადის დღევანდელი ფორვარდული ფასი, სვოპის ბოლოს 1-ის ტოლი ნომინალური თანხის ფიქტიური გადასახადის ჩათვლით. შევნიშნოთ, რომ $B(0,T_0,T_i)$ წარმოადგენს (T_0,T_i) ინტერვალში მოქმედ დღევანდელ დისკონტ-ფაქტორს.

ამ მოდელის მიხედვით კუპონიანი ობლიგაციის ფორვარდული ფასი ლოგნორმალურად არის განაწილებული, რის გამოც მას ლოგნორმალურ ფასის მოდელს უწოდებენ.

ბლეკის ფორმულის გამოყენებით ვიღებთ, რომ

$$\text{მიმღების სვოპციონის ფასი}=QB(0,T_0)[B_c(0,T_0)N(d_1)-N(d_2)], \tag{6.38}$$

$$\text{გადამხდელის სვოპციონის ფასი}=QB(0,T_0)[N(-d_2)-B_c(0,T_0)N(-d_1)], \tag{6.39}$$

სადაც

$$d_1=\frac{\ln B_c(0,T_0)+\frac{\sigma^2}{2}T_0}{\sigma\sqrt{T_0}},$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T_0}.$$

ლოგნორმალური ფასის მოდელი ნაკლებად პოპულარულია სვოპციონებით მოვაჭრეთა შორის, მაგრამ სვოპციონებსა და ობლიგაციებზე ოფციონებს შორის მჭიდრო კავშირის გამო ეს მოდელი ხშირად გამოიყენება ობლიგაციების ბაზრებზე.

სვოპის საპროცენტო განაკვეთის ლოგნორმალური მოდელი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სვოპციონი წარმოადგენს ოფციონს სვოპზე. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ სვოპციონი აგრეთვე შეიძლება გავიგოთ, როგორც ოფციონი სვოპის ფორვარდულ სამართლიან საპროცენტო განაკვეთზე. ამის გამო სვოპციონის ფასის გათვლა შესაძლებელია სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის მოდელირებით. აღვნიშნოთ $c(T_0)$-ით სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთი ოფციონის აღსრულების T_0 მომენტში (შევნიშნოთ, რომ $c(T_0)$ შემთხვევითი სიდიდეა და მისი მნიშვნელობა $t=0$ მომენტისთვის უცნობია). $V(T_0,c)$ იყოს მუდმივი ნაკადის შესაბამის გადასახადთა მნიშვნელობა დროის T_0 მომენტში, გამოთვლილი c-ს ტოლი ფიქსირებული საპროცენტო ნორმით. რადგან მცურავი ნაკადის შესაბამის გადასახადთა მნიშვნელობა (სვოპის ბოლოს ნომინალური თანხის ფიქტიური

გადასახადის ჩათვლით) ნომინალური თანხის ტოლია, გადამხდელის სვოპციონის შესაბამისი გადასახადი ოფციონის აღსრულების მომენტში, შემდეგი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს

$$\max(V(T_0, c(T_0)) - V(T_0, c), 0).$$

შემდგომი განხილვის გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ დღევანდელი დღისთვის უცნობი, მუდმივი ნაკადის გადახდის მომენტების დისკონტ-ფაქტორები T_0 მომენტში, დღევანდელ ფორვარდულ დისკონტ-ფაქტორებს ემთხვევა. მაშინ სვოპის მუდმივი მხარის გადასახადთა მნიშვნელობა T_0 მომენტში c და $c(T_0)$ საპროცენტო განაკვეთით შესაბამისად ტოლია

$$V(T_0, c) = c\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_0, T_{i+1}),$$

$$V(T_0, c(T_0)) = c(T_0)\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_0, T_{i+1}),$$

სადაც $DF(0, T_0, T_{i+1})$ წარმოადგენს (T_0, T_{i+1}) ინტერვალში მოქმედ დღევანდელ დისკონტ-ფაქტორს.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$V = \sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_0, T_{i+1}),$$

მივიღებთ გადამხდელის სვოპციონის შესაბამისი გადასახადის ეკვივალენტურ გამოსახულებას

$$V\max(c(T_0) - c, 0),$$

რაც ნიშნავს, რომ გადამხდელის სვოპციონი წარმოადგენს კოლ ოფციონს, T_0 აღსრულების მომენტში სვოპის ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთის მიმართ, c-ს ტოლი შეთანხმების საპროცენტო განაკვეთით.

დავუშვათ, რომ $c(t, T_0)$ სვოპის ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი აღიწერება ბლეკის მოდელის მიხედვით

$$c(t, T_0) = c(0, T_0)e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \tag{6.40}$$

სადაც W_t ვინერის პროცესია და $c(0, T_0)$ წარმოადგენს საბაზისო სვოპის დღევანდელ ფორვარდულ საპროცენტო განაკვეთს, რომელიც (6.17)-ის თანახმად

$$c(0, T_0) = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} B(0, S_i) - B(0, S_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)B(0, T_{i+1})}$$

სიდიდის ტოლია. ბლეკის მოდელი გვაძლევს სვოპციონის ფასების შემდეგ გამოსათვლელ ფორმულებს

$$\text{გადამხდელის სვოპციონი} = \sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})[c(0,T_0)N(d_1)-cN(d_2)], \tag{6.41}$$

$$\text{მიმღების სვოპციონი} = \sum_{i=1}^{n-1}(T_{i+1}-T_i)B(0,T_{i+1})[cN(-d_2)-c(0,T_0)N(-d_1)], \tag{6.42}$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln\frac{c(0,T_0)}{c}+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T_0}}, \quad d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T_0}.$$

ამ მოდელის მიხედვით სვოპის უცნობი ფორვარდული საპროცენტო განაკვეთი ლოგნორმალურად არის განაწილებული და σ პარამეტრი ისევ ე.წ. შემოსავლიანობის ვოლატილობის აღმნიშვნელია. ზოგჯერ ფინანსურ ბაზრებზე სამართლიანი სვოპციონების (რომელთათვისაც $c = c(0,T_0)$) ფასების კოტირება ნაგულისხმევი შემოსავლიანობის ვოლატილობის მიხედვით მიმდინარეობს.

აქამდე გამოყვანილი ყველა ფორმულა ეხებოდა სვოპციონებს, რომელთათვისაც ანგარიშსწორება სვოპით ხდება. შემთხვევა, როდესაც ანგარიშსწორება ფულით ხორციელდება, ერთი განსაკუთრებულობით გამოირჩევა და სვოპციონის ფასების მოყვანილი ფორმულები მცირე შესწორებას მოითხოვს. სვოპის მნიშვნელობა ფულით ანგარიშსწორების დროს (ოფციონის აღსრულების T_0 მომენტში) ისეთნაირად უნდა გამოითვალოს, რომ სვოპის მომავალი გადასახადების დისკონტირება სვოპის სამართლიანი საპროცენტო განაკვეთის მიხედვით მოხდეს. ეს ნიშნავს, რომ T_i მომენტში სვოპის გადასახადის დისკონტირება ოფციონის აღსრულების მომენტში

$$\frac{1}{(1+c(T_0))^{T_i-T_0}}$$

სიდიდის მიხედვით უნდა მოხდეს. ამის გამო, ფულით ანგარიშსწორების დროს (6.41) და (6.42) ფორმულებში $B(0,T_{i+1})$ სიდიდე

$$B(0,T_0)\frac{1}{(1+c(T_0))^{T_{i+1}-T_0}}$$

სიდიდით უნდა შეიცვალოს.

7

ეგზოტიკური ოფციონები

1. წარმოებული ფასიანი ქაღალდები უფრო რთული გასამრჯელოთი (გადახდის ფუნქციით), ვიდრე სტანდარტული ევროპული, ან ამერიკული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონის სახელით არიან ცნობილი. უნდა აღინიშნოს, რომ უმეტესი ეგზოტიკური ოფციონებით ვაჭრობა ბაზრის გარეთ ხდება. რუბინშტეინის მიერ 1991–1992 წლებში (იხ. მაგალითად, [133]) შემოთავაზებულია ეგზოტიკური ოფციონების კატეგორიად დაყოფა. გავრცელებულ კატეგორიებს ჩვენ ჯერ მოკლედ შევეხებით (პუნქტი 7.1), შემდეგ კი ზოგიერთ მათგანს დაწვრილებით განვიხილავთ (პუნქტები 7.2–7.7). ყველაზე ვრცლად წარმოდგენილი იქნება კალათის ოფციონი (პუნქტი 7.7). მკითხველს, რომელსაც არ აინტერესებს, თუ როგორ მიიღება ოფციონის ფასდადების ფორმულები, შეუძლია გამოტოვოს საშუალედო გამოთვლები 7.6 და 7.7 პუნქტებში.

2. აქვე გავიხსენებთ ზოგიერთ ცნობილ გამოსახულებას, რომელიც ამ თავში ხშირად შეგვხვდება.

როგორც ცნობილია, ბლეკ-შოულსის (B, S)-ბაზრის მოდელში ურისკო აქტივის ფასის ევოლუცია წარმოდგება ფორმულით

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad B_0 > 0, \tag{7.1}$$

ხოლო რისკიანი აქტივის ფასის ევოლუცია რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში აღიწერება ფორმულით:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \quad S_0 > 0, \tag{7.2}$$

სადაც W_t — ბროუნის მოძრაობაა ამ სამყაროში, r — ურისკო საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო σ — ვოლატილობის კოეფიციენტი. მოგვყავს ბლეკ-შოულსის ფასდადების ფორმულები სტანდარტული ევროპული ყიდვის კოლ ოფციონისათვის T აღსრულების მომენტითა და K სტრაიკით t მომენტისათვის ($t \leq T$).

$$C(S_t, T-t, K) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \tag{7.3}$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{7.4}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{7.5}$$

და სტანდარტული ევროპული გაყიდვის პუტ ოფციონის ფასი t მომენტში იგივე პირობებში

$$P(S_t, T-t, K) = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2). \tag{7.6}$$

აქ

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ყველა განხილული ეგზოტიკური ევროპული ტიპის ოფციონების ფასდადების ფორმულა გამოყვანილია t მომენტში ევროპული ოფციონის ფასის შემდეგი ზოგადი ფორმულის

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_t^*[f_T(S)]$$

მეშვეობით. აქ $f_T(S)$ ოფციონის გასამრჯელოა (გადახდის ფუნქცია), T ოფციონის აღსრულების მომენტია, r — ურისკო საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო $E_t^*[\cdot]$ — პირობითი მათემატიკური ლოდინი რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ პირობაში, რომ t მომენტამდე ცნობილია ძირითადი აქტივის S-ის ევოლუცია.

და ბოლოს, მოგვყავს დაუმტკიცებლად შემდეგი დებულება (იხ. [117], გვ. 224).

თუ ξ გაუსის შემთხვევითი სიდიდეა ნულოვანი საშუალოთი და დისპერსიით $\sigma^2 > 0$, მაშინ ნებისმიერ მკაცრად დადებით a და b რიცხვებისათვის გვექნება

$$E\left(ae^{\xi - \frac{1}{2}\sigma^2} - b\right)^+ = aN(d) - bN(d-\sigma), \tag{7.7}$$

სადაც

$$d = \sigma^{-1} \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sigma.$$

დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიიღოს ინფორმაცია ეგზოტიკურ ოფციონებზე შემდეგი ნაშრომებიდან: [16], [38], [51], [52], [54], [73], [76], [117], [118], [133], [134], [136], [144], [159], [161], [163], [189], [202], [209].

7.1 ეგზოტიკური ოფციონების ნაირსახეობა

ბლოკური ოფციონები. ასეთი ოფციონები წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება სტანდარტული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონის, ფორვარდული კონტრაქტის, ნაღდი ფულისა და თვით საბაზისო აქტივისაგან. ასეთ ოფციონებს მიეკუთვნება ცნობილი კოლარ ოფციონი, ბოსტონის ოფციონი და სხვა.

არასტანდარტული ამერიკული ოფციონები. ესენია ოფციონები, რომლებსაც ამერიკული ოფციონის სტანდარტული თვისებები — განაღდება ნებისმიერ მომენტში ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში, უცვლელი შეთანხმების ფასი (სტრაიკი) — ყოველთვის არ გააჩნია. მაგალითად, ბერმუდის ოფციონის შემთხვევაში ადრინდელი აღსრულება შემოსაზღვრულია გარკვეული დღით ოფციონის სიცოცხლის პერიოდიდან.

მომავალში დამწყები ოფციონები. ესაა ოფციონი, რომელშიც საფასურს დღეს იხდიან, მფლობელი კი მას მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ მომენტში იღებს (ე.ი. იგი იწყება მომავალში). თუ ეს მომენტი T_0-ია და $T_0 < T$, სადაც T ოფციონის აღსრულების მომენტია, მაშინ ყიდვის ოფციონის გასამრჯელო-ტერმინალური გადასახადი

$$FS_T := (S_T - S_{T_0})^+,$$

ე.ი. სტრაიკი $K = S_{T_0}$. ოფციონის ფასდადების ფორმულას საწყის მომენტში შემდეგი სახე აქვს

$$FS_0 = C(S_0, T - T_0, S_0).$$

შედგენილი ოფციონები. ასეთებია ოფციონები ოფციონებზე. გავრცელებულია ოთხი ძირითადი ტიპი: კოლი კოლზე, პუტი კოლზე, კოლი პუტზე და პუტი პუტზე. განვიხილოთ, მაგალითად კოლი კოლზე. პირველ აღსრულების T_1 დღეს შედგენილი ოფციონის მფლობელი იხდის პირველ სტრაიკს K_1 (შეთანხმების ფასს) და იღებს კოლ ოფციონს. ეს ოფციონი კი აძლევს მფლობელს უფლებას, რომ მეორე სტრაიკის K_2-ის ფასად მეორე აღსრულების T_2 დღეს იყიდოს ძირითადი (საბაზისო) აქტივი.

შედგენილ ოფციონს ყიდულობენ, როგორც წესი, ორი გარემოების გამო: პირველი, რომ დაიცვან თავი გაურკვეველი სიტუაციისაგან, როდესაც წინასწარ არაა ცნობილი, საჭირო იქნება თუ არა დაცვა და მეორე, რომ დაიზღვიონ თავი რისკისაგან უფრო იაფი ხერხით, ვიდრე ძირითადი ოფციონის ყიდვაა.

ოფციონები ზღუდით. ესაა ოფციონები, რომელთა გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა გარკვეულ დონეს მიაღწევს საბაზისო აქტივის ფასი სიცოცხლის გარკვეულ პერიოდში.

ბინარული ოფციონები. ესაა ოფციონები წყვეტილი სახის გადახდის ფუნქციით. ბინარული ოფციონების უმარტივესი მაგალითებია ყიდვისა

და გაყიდვის ოფციონები „ნაღდი ფული ან არაფერი“. ყიდვის ოფციონის გასამრჯელოს სახეა $BC_T := QI(S_T > K)$, ხოლო გაყიდვის ოფციონისა $BP_T := QI(S_T < K)$, სადაც $I(\cdot)$ შესაბამისი სიმრავლის ინდიკატორია, მაგალითად

$$I(S_T > K) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } S_T > K; \\ 0, & \text{თუ } S_T \leq K. \end{cases}$$

ასეთი ყიდვის ოფციონის მფლობელი არაფერს არ იღებს, თუ აქტივის ფასი აღსრულების T მომენტში სტრაიკის ფასის ქვემოთაა ან ტოლია ($S_T \leq K$) და იღებს Q რაოდენობის თანხას, თუ აქტივის ფასი მეტია სტრაიკის ფასზე ($S_T > K$). აქტივის ფასის ლოგნორმალურობის პირობებში და სტანდარტულ აღნიშვნებში ყიდვის ოფციონის „ნაღდი ფული ან არაფერი“ ფასის ფორმულა t მომენტში შემდეგია $Qe^{-r(T-t)}N(d_2)$.

გავრცელებულია ასევე ბინარული ოფციონი „აქტივი ან არაფერი“. აქ იგივე პირობებია, როგორც ზემოთმოყვანილ ოფციონის „ნაღდი ფული ან არაფერი“-ს დროს, იმ განსხვავებით, რომ Q თანხის ნაცვლად ყიდვის ოფციონის მფლობელი მიიღებს თვით აქტივის ფასს S_T და ამ ოფციონის ფასის ფორმულა t მომენტში არის $S_t N(d_1)$. სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონი ეკვივალენტურია ოფციონის „აქტივი ან არაფერი“ გრძელი პოზიციისა და ოფციონის „ნაღდი ფული ან არაფერი“ მოკლე პოზიციისა, როდესაც $Q = K$.

უკანმხედი ოფციონები. ასეთი ოფციონების გასამრჯელო დამოკიდებულია აქტივის მაქსიმალურ და მინიმალურ ფასზე, რომელიც ოფციონის სიცოცხლეში მიიღწევა.

აზიური ოფციონები. ასეთი ოფციონის გასამრჯელო დამოკიდებულია აქტივის ფასის საშუალო მნიშვნელობაზე ოფციონის სიცოცხლის გარკვეულ პერიოდში.

ოფციონები გაცვლაზე ერთი აქტივისა მეორეზე. მაგალითად, ოფციონი ყიდვაზე გერმანული მარკისა ამერიკულ დოლარზე წარმოადგენს ოფციონს გაცვლაზე ერთი უცხოური სავალუტო აქტივისა მეორე უცხოურ სავალუტო აქტივზე.

ამომრჩევი ოფციონი. ძირითადი თვისებაა — წინასწარ განსაზღვრულ $T_0 < T$ მომენტში მფლობელი ირჩევს, იყოს ეს ოფციონი ყიდვისა, თუ გაყიდვის, ე.ი. ამ ოფციონის გასამრჯელო T_0 - მომენტში არის

$$CH_{T_0} := \max(C(S_{T_0}, T - T_0, K_1), P(S_{T_0}, T - T_0, K_2)),$$

სადაც C და P შესაბამისად T_0 მომენტში ყიდვის და გაყიდვის ოფციონების ფასია, როდესაც სტრაიკები ერთი და იგივეა $K_1 = K_2 = K$, მაშინ პუტ-კოლ პარიტეტის გამოყენებით ამომრჩევი ოფციონის ფასი t მომენტში არის

$$CH_t = C(S_t, T - t, K) + P(S_t, T_0 - t, Ke^{-r(T-T_0)}), \quad t \in [0, T].$$

ბლექ-შოულსის ფორმულის გამოყენებით საწყის მომენტში $t = 0$ ოფციონის ფასდადების ფორმულის სახეა

$$CH_0 = S_0(N(d_1) - N(-\overline{d}_1)) + Ke^{-rt}(N(-\overline{d}_2) - N(d_2)),$$

სადაც

$$\overline{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T_0}{\sigma\sqrt{T_0}},$$

$$\overline{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T_0}{\sigma\sqrt{T_0}},$$

ხოლო d_1 და d_2 გამოითვლება (7.4) და (7.5)-დან, შესაბამისად.

კალათის ოფციონი. ესაა ოფციონური კონტრაქტი კალათზე, რომელშიაც შედის გარკვეული რაოდენობის სხვადასხვა აქტივი. **რუსული ოფციონი.** ეს ოფციონი წარმოადგენს უკანმხედი გაყიდვის (პუტ) ამერიკული ტიპის დისკონტირებული ოფციონის სპეციალურ სახეს.

კიბისებური ოფციონი. ამ ოფციონის სტრაიკი იცვლება ყოველთვის, როდესაც ძირითადი აქტივის ფასი მიაღწევს წინასწარგანსაზღვრულ დონეებიდან შემდეგ საფეხურს. მაგალითად, თუ საწყისი სტრაიკია K, საფეხურები შეიძლება აირჩეს შემდეგნაირად $K+h, K+2h, \ldots, (0 < h < K)$. როდესაც ფასი აღწევს $(K + h)$-ს, სტრაიკი ხდება $(K + h)$-ის ტოლი და მოგება h ფიქსირდება. თუ როდისმე ამის შემდეგ ფასმა მიაღწია $(K + 2h)$-ს, სტრაიკი გახდება $K + 2h$ და მოგება h კიდევ ფიქსირდება და ასე შემდეგ. ოფციონის აღსრულებისას ამ მოგებებს ოფციონის მფლობელი აუცილებლად მიიღებს ოფციონის შინაგან ღირებულებასთან ერთად ამ მომენტში.

ასეთი ტიპის ოფციონებია აგრეთვე „კლიკე" და ოფციონი „დაძახებით". პირველ ოფციონში სტრაიკის შეცვლა ხდება გარკვეულ დღეებში, ხოლო მეორეში „დაძახებით", როდესაც კი მფლობელი მოისურვებს. მაგალითად, თუ სტრაიკი იყო 100 და მფლობელმა „დაიძახა", როდესაც აქტივის ფასია 120, მაშინ სტრაიკი ხდება 120, ხოლო მოგება 20 ფიქსირდება.

მრავალფაქტორიანი ოფციონები. ამ კლასს მიეკუთვნება განხილული კალათის ოფციონი, ოფციონი „ცისარტყელა", სპრედ ოფციონი და ოფციონი „ქვანტი".

კოლი „ცისარტყელა" ოფციონის გასამრჯელოს სახეა

$$C_T = (\max(S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^n) - K)^+,$$

სადაც $S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^n$ — ძირითადი აქტივების ფასებია.

სპრედ-ოფციონებისათვის გასამრჯელო არის სხვაობა ორი ძირითადი აქტივის ფასებს შორის.

„ქვანტო"-ოფციონის გადახდის ერთეულების რაოდენობა ერთ აქტივზეა დამოკიდებული, ხოლო ერთეულის ფასი მეორე აქტივის ფასითაა განსაზღვრული.

ეგზოტიკური ოფციონების ჰეჯირების პრობლემას ცალკე ჩვენ არ განვიხილავთ. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ამ ოფციონებისათვის დელტა, გამა და ვეგა ჰეჯები აიგება სტანდარტული მეთოდების გამოყენებით (იხილე თავი 5) აქ მოყვანილი ოფციონების ფასდადების ფორმულებზე დაყრდნობით. ზოგიერთ შემთხვევაში ეგზოტიკური ოფციონების ჰეჯირება უფრო იოლია შესაბამის სტანდარტულ ოფციონებთან შედარებით, ზოგ შემთხვევაში კი — უფრო ძნელი. მაგალითად, აზიური ოფციონების ჰეჯირება, როდესაც გასაშუალოების პერიოდი ოფციონის სიცოცხლის პერიოდს ემთხვევა და საბაზისო აქტივი აქციას წარმოადგენს, უფრო იოლია. ეს აიხსნება იმით, რომ როდესაც ოფციონის სიცოცხლე იწურება, მაშინ შესაძლებელია დაკვირვება უფრო მეტ აქციის ფასებზე, რაც ოფციონის გასამრჯელოს გამოსახულების გაურკვევლობას ამცირებს. როგორც შედეგი ოფციონი პროგრესულად უფრო მარტივდება ჰეჯირებისათვის, ბოლო რამდენიმე დღეს ოფციონის დელტა ყოველთვის ნულს უახლოვდება, ვინაიდან ფასის ცვლილება ამ ბოლო რამდენიმე დღეში მცირე გავლენას ახდენს ოფციონის გასამრჯელოზე.

ოფციონები ზღუდით საკმაოდ რთულია ჰეჯირებისათვის, რაც გამოწვეულია იმით, რომ ასეთი ოფციონის დელტა წყვეტილია.

7.2 ბლოკური ოფციონები

ასეთი ოფციონი წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება სტანდარტული ევროპული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების, ფორვარდული კონტრაქტის, ნაღდი ფულისა და თვით საბაზისო აქტივისაგან. ბლოკურ ოფციონებს მიეკუთვნება ადრე განხილული ისეთი ცნობილი ოფციონები, როგორიცაა: ხარის სპრედი, დათვის სპრედი, პეპელას სპრედი, სტრედლი და სტრენგლი, რომლებიც წარმოადგენს სტანდარტული ოფციონების კომბინაციებს.

განვიხილოთ შემდეგი ბლოკური ოფციონები

კოლარ ოფციონი. დავუშვათ, რომ $K_1 > K_2 > 0$ ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვებია. გასამრჯელო აღსრულების T მომენტში კოლარ ოფციონის გრძელი პოზიციიდან ტოლია

$$CL_T := \min(\max(S_T, K_1), K_2).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ CL_T წარმოდგება შემდეგნაირად

$$CL_T = K_1 + (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+.$$

აქედან ჩანს, რომ კოლარი წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება ნაღდი ფულისა და ორი სტანდარტული ყიდვის ოფციონისაგან სხვადასხვა შეთანხმების ფასით (სტრაიკებია K_1 და K_2).

ცხადია, რომ ფასდადების ფორმულა ამ ოფციონისათვის t მომენტში არის

$$CL_t = K_1 e^{-r(T-t)} + C(S_t, T-t, K_1) - C(S_t, T-t, K_2),$$

სადაც $C(S_t, T-t, K) = C(S_t, T-t, K, r, \sigma)$ ყიდვის ოფციონის ბლექ-შოულსის ფასია t მომენტში.

ბოსტონის ოფციონი. ესაა ოფციონი გასამრჯელოთი

$$CB_T := (S_T - K_1)^+ - (K_2 - K_1),$$

სადაც $K_1 < K_2$ დადებითი მუდმივებია.

შეწყვეტილი ფორვარდი. ესაა მოდიფიკაცია ტიპიური ფორვარდული კონტრაქტისა, რომელშიაც პოტენციალური დანაკარგი გრძელი პოზიციიდან შემოსაზღვრულია რაიმე წინასწარ განსაზღვრული რიცხვით. გასამრჯელოს სახეა

$$BF_T := \max(S_T, F) - K,$$

სადაც $F = S_0 e^{rT}$ აქტივის ფორვარდული ფასია და $K > F$ რაიმე მუდმივია. ვინაიდან

$$BF_T = (S_T - F)^+ + F - K,$$

ცხადია, რომ ფასდადების ფორმულას t მომენტში შემდეგი სახე აქვს

$$BF_t = C(S_t, T-t, F) + (F-K)e^{-r(T-t)}.$$

კერძოდ, ვთქვათ K-ს მარჯვენა დონე K_0 გამოიხატება ფორმულით

$$K_0 = e^{rT}\left(S_0 + C(S_0, T, S_0 e^{rT})\right),$$

რომელიც მიიღება $BF_0 = 0$ გამოსახულებიდან.

დიაპაზონური ფორვარდი. ამ ოფციონის გასამრჯელოს სახეა

$$RF_T := \max(\min(S_T, K_2), K_1) - F = \max(\min(S_T - F, K_2 - F), K_1 - F),$$

სადაც $K_1 < F < K_2$ და $F = S_0 e^{rT}$ საბაზისო აქტივის ფორვარდული ფასია.

ვინაიდან

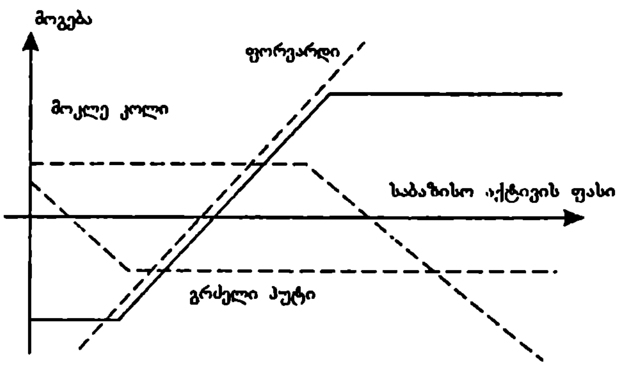
$$RF_T = S_T - F + (K_1 - S_T)^+ - (S_T - K_2)^+,$$

ეს წარმოდგენა გვიჩვენებს, რომ დიაპაზონურ ფორვარდს შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც პორტფელს შემდგარს გრძელი ფორვარდული კონტრაქტისაგან, გრძელი გაყიდვის ოფციონისაგან სტრაიკით K_1 და მოკლე ყიდვის ოფციონისაგან სტრაიკით K_2. ამიტომ ამ ოფციონის ფასი t მომენტში არის

$$RF_t = S_t - S_0 e^{rt} + P(S_t, T-t, K_1) - C(S_t, T-t, K_2),$$

სადაც $P(S_t, T-t, K_1)$ სტანდარტული გაყიდვის ოფციონის ფასია t მომენტში. K_1 და K_2 ისე შეირჩევა, რომ საწყისი ფასი დიაპაზონური ფორვარდისა იყოს ნულის ტოლი.

დიაპაზონური ფორვარდული კონტრაქტის სქემა შემდეგია



ნახ. 7.1

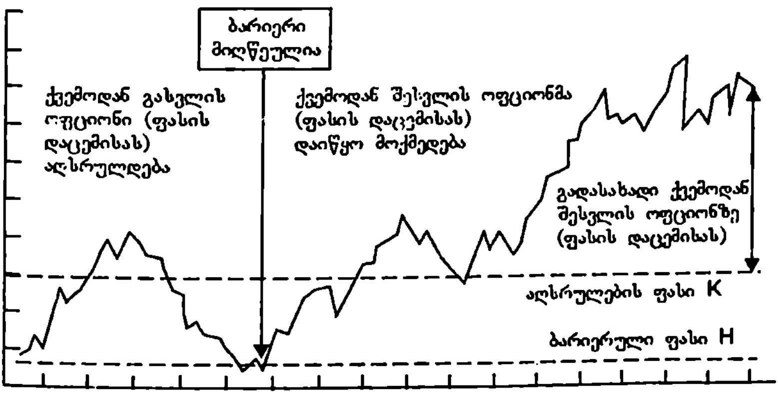
ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ დიაპაზონური ფორვარდული კონტრაქტი ცნობილია შემდეგი სხვა სახელებითაც: უფასო კოლარი, მოქნილი ფორვარდი, ცილინდრული ოფციონი, ოფციონური მესერი, მინი-მაქსი და ფორვარდული ინტერვალი.

7.3 ოფციონები ზღუდით

ესაა ოფციონები, რომელთა გასამრჯელო (გადახდის ფუნქცია) დამოკიდებულია იმაზე, თუ დროის გარკვეულ პერიოდში რა დონეს მიაღწევს ძირითადი აქტივის ფასი.

ამ ოფციონის გავრცელებული ნაირსახეობაა ნოკაუტ-ოფციონი. იგი იგივეა, რაც სტანდარტული ოფციონი, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ როდესაც ძირითადი აქტივის ფასი მიაღწევს გარკვეულ ზღუდეს, H-ს, ოფციონი წყვეტს თავის არსებობას.

ყიდვის ნოკაუტ ოფციონის შემთხვევაში, საზოგადოდ ზღუდე H ნაკლებია შეთანხმების K-ფასზე. ამ შემთხვევაში გვაქვს ყიდვის ქვემოდან გასვლის ოფციონი. ესაა ოფციონი, რომელიც წყვეტს არსებობას (ნოკაუტშივარდება), თუ აქტივის ფასი ჩამოდის H-ის ქვემოთ. გაყიდვის ნოკაუტ-ოფციონის დროს ზღუდე $H > K$ და მას უწოდებენ გაყიდვის ზემოდან გასვლის ოფციონს. ქვემოდან შესვლის ოფციონი არის ყიდვის ოფციონი, რომელიც იწყებს არსებობას მხოლოდ მაშინ, როდესაც მიიღწევა ზღუდე H და $H < K$. ანალოგიურად, ზემოდან შესვლის ოფციონი არის გაყიდვის ოფციონი, რომელიც იწყებს არსებობას მაშინ, როდესაც აქტივის ფასი მიაღწევს H ზღუდეს და $H > K$. საილუსტრაციოდ იხილეთ შემდეგი ნახაზი



ნახ. 7.2

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ოფციონი სავალუტოა ზღუდით და როდესაც აქტივის როლში Q გაცვლითი სავალუტო კურსია რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში შემდეგი ევოლუციით

$$Q_t = Q_0 e^{\lambda t + \sigma W_t}, \quad t \in [0, T],$$

სადაც

$$\lambda = r - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$r = r_d$ ადგილობრივი ურისკო საპროცენტო განაკვეთია, ხოლო r_f უცხოური ურისკო საპროცენტო განაკვეთია. ამ შემთხვევაში ყიდვის ქვემოდან შესვლის ოფციონის ფასი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება

$$C = Q_0 e^{-r_f T} \left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} \left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda - 2} N(y - \sigma\sqrt{T}),$$

ხოლო გაყიდვის ზემოდან შესვლის ოფციონის ფასია

$$\widetilde{C} = Ke^{-rT}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y+\sigma\sqrt{T}) - Q_0e^{-r_f}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda} N(-y),$$

სადაც

$$y = \frac{\ln\left[\frac{H^2}{(Q_0K)}\right]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონი წარმოადგენს შესაბამისი ყიდვის ქვემოდან გასვლისა და ქვემოდან შესვლის ოფციონების ჯამს და ამიტომ ყიდვის ქვემოდან გასვლის ოფციონის ფასი იქნება სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონის ფასს გამოკლებული C. ანალოგიურად ევროპული გაყიდვის ზემოდან გამოსვლის ოფციონის ფასი უდრის სტანდარტული ევროპული გაყიდვის ოფციონის ფასს გამოკლებული $\widetilde{C}$.

ოფციონები ზღუდით იგივე ფუნქციას ასრულებს, რასაც სტანდარტული ოფციონები და მიმზიდველია მათი სიიაფითა და იმით, რომ აძლევს მათ მფლობელს მოქნილად მოქმედების შესაძლებლობას ბაზარზე მათი წარმოდგენის მიხედვით.

განვიხილოთ საილუსტრაციოდ შემდეგი

მაგალითი 7.1. (იხ. [52]) Videotech Ltd ბრიტანული კომპანიაა, რომელიც ტელეგამოსახულების ციფრული დამუშავებისათვის უშვებს ხელსაწყოებს. მას მოგებული აქვს \$5 მილიონიანი შეკვეთა ნიუ-იორკის ტელეკომპანიისათვის სისტემების მიწოდებაზე და ანგარიშის გაფორმება (ამერიკულ დოლარებში) 6 თვის შემდეგ მოხდება. ამჟამად სპოტ-კურსი შემდეგია $\pounds 1 = \$1.5000$, ხოლო 6-თვიანი ფორვარდის კურსი $\pounds 1 = \$1.4782$.

კომპანიისთვის არაა ხელსაყრელი ბრიტანული ფუნტის კურსის ზრდა. Videotech-ის ხაზინადარს მიაჩნია, რომ ბრიტანული ეკონომიკა სწრაფი აღმავლობის დასაწყისშია და ამიტომ საკმაოდ მოსალოდნელია ფუნტის გაძლიერება. კომპანიას შეუძლია მიიღოს მარტივი გადაწყვეტილება, გაყიდოს მისაღები \$5 მილიონი ფორვარდული კურსით და ექვსი თვის შემდეგ შეიძინოს $\pounds 3382492$. ეს დამაკმაყოფილებელ მოგებას მოუტანდა.

მაგრამ ხაზინადარს სურს, ნახოს კომპანიისათვის სარგებელი ამ 6 თვის განმავლობაში რომელიმე მომენტში ფუნტის კურსის დაცემისგანაც. იგი თვლის, რომ ეკონომიკური გაურკვევლობის დროს ამის ალბათობა საკმაოდ დიდია. ცხადია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია კომპანიის მიერ კოლ ოფციონის შეძენით ფუნტ სტერლინგებზე,რომელიც დაიცავს მას ფუნტის ზრდისაგან და მოაგებინებს ფუნტის კურსის ნებისმიერი დაცემის დროს. მაგრამ 6-თვიანი სამართლიანი სპოტ-ოფციონის ფასი, 0.0232 ფუნტი ერთ დოლარში, საკმაოდ მაღალი ჩანს, ვინაიდან მისი აღსრულების დროს სუფთა შემოსავალი იქნებოდა $\pounds 3217333$ (5000000 : 1.5000 −

-5000000×0.0232). ეს კი ნაკლებია £3.25 მილიონზე, რაც კომპანიისათვის დასაშვებ ზღვარს წარმოადგენს. ამიტომ Videotech-ი იღებს გადაწყვეტილებას იყიდოს გასვლის (ნოკაუტ) ოფციონი სტრაიკით \$1.5000 და ზღუდით \$1.4350. მისი ფასია £0.0164 ერთ დოლარში, რაც 29%-ით უფრო იაფია, ვიდრე ჩვეულებრივი ოფციონი. ამასთან ერთად კომპანია ავალებს თავის ბანკს იყიდოს ფორვარდით დოლარი იმ შემთხვევისათვის, თუ სპოტ-კურსის დაცემა მოხდა \$1.4350-მდე. ასეთი სტრატეგია Vidoetech-ს ოფციონის ანულირების შემთხვევაში აძლევს გარანტიას დაფაროს თავისი რისკი. შესაძლებელია ორი სცენარი

1) ფუნტი სტერლინგი არასოდეს არ დაეცემა \$1.4350-მდე და ოფციონი გადარჩება. იგი ამ შემთხვევაში ისეთივეა, როგორც ჩვეულებრივი კოლ ოფციონი. თუ აღსრულების დღეს ფუნტი სტერლინგი სტრაიკზე დაბალია, ოფციონი გაუფასურდება და Videotech-ი შეასრულებს სპოტ-შეთანხმებას დოლარების გაყიდვაზე და ფუნტების ყიდვაზე. თუ ფუნტი \$1.5000-ზე მაღალია, Videotech-ი გაანაღდებს თავის ოფციონს და მიიღებს £3333333. თუ აქედან გამოვაკლებთ პრემიას £82000, მაშინ Videotech-ს დარჩება £3251333. ეს უმცირესი თანხაა, რომელიც შეუძლია მიიღოს კომპანიამ და ის ცოტათი უფრო მეტია, ვიდრე დასაშვები ზღვარი £3.25 მილიონი.

2) ფუნტი სტერლინგი ეცემა \$1.4350-ზე დაბლა, ხდება ოფციონის ანულირება და Videotech-ი აღასრულებს თავის ფორვარდულ შეთანხმებას დოლარების გაყიდვაზე და ფუნტების ყიდვაზე. დავუშვათ, რომ ეს მოხდა 3 თვის შემდეგ და ფორვარდული კურსი უდრის \$1.4244, მაშინ მიღებული თანხა შეადგენს £3510250 და ოფციონური პრემიის გამოკლებით £3428250, რაც თითქმის £50000-ით უფრო კარგია, ვიდრე უბრალო ფორვარდული გარიგება, რომელიც დასაწყისში იყო განხილული.

7.4 უკანმხედი ოფციონები

ესაა ოფციონები, რომელთა გასამრჯელო (გადახდის ფუნქცია) დამოკიდებულია აქტივის მაქსიმალურ, ან მინიმალურ ფასზე, ოფციონის სიცოცხლეში რომ მიიღწევა, ე.ი. ესაა მაგალითი ოფციონებისა, რომლებიც დამოკიდებულებია არა მხოლოდ აქტივის ფასზე აღსრულების T მომენტში, არამედ აქტივის ფასის მთელ წარსულზე.

აღვნიშნოთ $S_T^m = \min_{0 \le t \le T} S_t$ და $S_T^M = \max_{0 \le t \le T} S_t$ აქტივის მინიმალური და მაქსიმალური ფასი შესაბამისად ოფციონის სიცოცხლეში და S_T-თი აქტივის ტერმინალური ფასი.

განვიხილოთ ორი ოფციონი. პირველი — სტანდარტული უკანმხედი

ყიდვის ოფციონი გასამრჯელოთი

$$C_T^L := (S_T - S_T^m)^+ = S_T - S_T^m$$

და მეორე — სტანდარტული უკანმხედი გაყიდვის ოფციონი გასამრჯელოთი

$$P_T^L := (S_T^M - S_T)^+ = S_T^M - S_T.$$

ამ ორივე ოფციონისათვის შესაძლებელია ზუსტი ფასდადების ფორმულის მოძებნა.

დავუშვათ, რომ აქტივის ფასის ევოლუცია ემორჩილება გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას და რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში

$$S_t = S_0 e^{\eta_t},$$

სადაც

$$\eta_t = \sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

და W_t ბროუნის მოძრაობაა ამ სამყაროში. გამოვთვალოთ უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის სამართლიანი ფასი ($E^*(\cdot)$ გასაშუალოებაა რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში)

$$\begin{aligned} P^L &= e^{-rT} E^* P_T^L = e^{-rT} E^*(S_T^M - S_T) = \\ &= S_0 \left(e^{-rT} E^* e^{\eta_T^M} - 1\right), \end{aligned}$$

სადაც η_T^M წარმოადგენს η-ს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ოფციონის სიცოცხლეში. აქედან ჩანს, რომ სამართლიანი ფასის P^L-ის გამოსათვლელად საჭიროა $e^{\eta_T^M}$-ის საშუალოს გამოთვლა, რისთვისაც საჭიროა ვიცოდეთ η_T^M-ის ალბათური განაწილება. კარგად ცნობილია, რომ ამ განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} F_{\eta_T^M}(x) &= N\left(\frac{x - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \\ &- e^{\frac{2(r-\sigma^2/2)x}{\sigma^2}} N\left(\frac{-x - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \tag{7.8}$$

(იხილე, მაგალითად, [209], გვ. 102). ამ ფორმულის გამოყენებით სტანდარტული გამოთვლებით ვღებულობთ, რომ

$$\begin{aligned} P^L = S_0 \Big\{ &- N(-d) + e^{-rT} N(-d + \sigma\sqrt{T}) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2r} e^{-rT} \Big[- N\Big(d - \frac{2r}{\sigma}\sqrt{T}\Big) + e^{-rT} N(d) \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

სადაც $d = (r/\sigma + \sigma/2)\sqrt{T}$.

სტანდარტული უკანმხედი ყიდვის ოფციონის შემთხვევაში ფასდადების ფორმულას შემდეგი სახე აქვს

$$C^L = S_0\Big\{N(d) - e^{-rT}N(d-\sigma\sqrt{T}) + \\ + \frac{\sigma^2}{2r}e^{-rT}\Big[N\Big(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T}\Big) - e^{-rT}N(-d)\Big]\Big\}. \tag{7.10}$$

დამტკიცება ანალოგიურია გაყიდვის ოფციონის შემთხვევისა, ხოლო η-ს მაქსიმუმის განაწილების ნაცვლად საჭიროა გამოვიყენოთ η-ს მინიმუმის განაწილების ფუნქცია, რაც ასევე ცნობილია (იხ. მაგალითად, იქვე გვ. 102).

თუ განვიხილავთ რეგულარული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონებს სტრაიკით $K = S_0$, მაშინ მათი ფასდადების ფორმულები ემთხვევა შესაბამისად (7.10)-სა და (7.9)-ის პირველ წევრებს.

სინამდვილეში, უკანმხედი ყიდვის ოფციონი იძლევა შესაძლებლობას ძირითადი აქტივის ყიდვისა იმ უმცირეს ფასად, რასაც კი იგი აღწევს ოფციონის სიცოცხლეში, გაყიდვის ოფციონი კი — გაყიდვისა აქტივის იმ უდიდეს ფასად, რასაც კი იგი აღწევს ოფციონის სიცოცხლეში.

ევროპული უკანმხედი ყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში შემდეგი ფორმულით გამოითვლება (იხ. [117], გვ. 215)

$$C_t^L = S_tN\left(\frac{\ln(S_t|S_t^m)+r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - S_t^me^{-r\tau}N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^m)+r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \\ -\frac{S_t\sigma^2}{2r}N\left(\frac{\ln(S_t^m|S_t)-r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \\ +e^{-r\tau}\frac{S_t\sigma^2}{2r}\left(\frac{S_t^m}{S_t}\right)^{2r\sigma^{-2}}N\left(\frac{\ln(S_t^m|S_t)+r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{7.11}$$

სადაც S_t^m აქტივის ფასის მინიმალური მნიშვნელობაა $[0,t]$ ინტერვალზე, $r_1 = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, $r_2 = r - \frac{1}{2}\sigma^2$, $\tau = T - t$.

ევროპული უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში მოიცემა გამოსახულებით

$$P_t^L = -S_tN\left(-\frac{\ln(S_t|S_t^M)+r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \\ +S_t^Me^{-r\tau}N\left(-\frac{\ln(S_t|S_t^M)+r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \frac{S_t\sigma^2}{2r}N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^M)+r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) -$$

$$-e^{-r\tau}\frac{S_t\sigma^2}{2r}\left(\frac{S_t^M}{S_t}\right)^{2r\sigma^{-2}} N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^M)-r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

სადაც S_t^M აქტივის ფასის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $[0,t]$ ინტერვალზე.

და ბოლოს, შევნიშნავთ, რომ ვინაიდან $e^{-rT}S_t^m$ არაზრდადი პროცესია, ამერიკული უკანმხედი ყიდვის ოფციონის ფასი, $C_t^{L_a}$, ტოლია შესაბამისი ევროპული ოფციონის ფასისა, $(C_t^{L_a}=C_t^L)$, ხოლო ამერიკული უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის $P_t^{L_a}$ ფასისათვის გვაქვს

$$P_t^L \le P_t^{L_a} \le e^{r\tau}P_t^L + S_t(e^{r\tau}-1).$$

7.5 რუსული ოფციონი

უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის ნაირსახეობას წარმოადგენს რუსული ოფციონი, რომელიც ამერიკული ტიპის ოფციონია შემდეგი გადახდის ფუნქციათა სისტემით $f^R=(f_t^R)$, $t\ge 0$, სადაც

$$f_t^R = e^{-\lambda t}\left(\max_{u\le t} S_u - aS_t\right)^+ \qquad a\ge 0;\ \lambda>0. \tag{7.12}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $a=1$, ეს ოფციონი წარმოადგენს უკანმხედი ამერიკული გაყიდვის ოფციონს დისკონტით სწორედ იმ სახით, რა სახითაცაა ის გავრცელებული.

რუსული ოფციონი ფინანსური ინჟინერიის თვალსაზრისით საკმაოდ საინტერესოა. მისი მფლობელი თვითონ ირჩევს აღსრულების მომენტს τ-ს და ამ მომენტში მას აქვს უფლება გაყიდოს აქციები ამ მომენტამდე აქციის მიერ მიღწეულ მაქსიმალურ ფასად და ამიტომ განიცდის ნაკლებ სინანულს იმის გამო, რომ არ გაყიდა აქციები სწორედ მაშინ, როდესაც აქციის ფასმა მაქსიმუმს მიაღწია.

რუსული ოფციონი შეპისა და შირიაევის მიერაა 1993 წელს შემოღებული (იხ. [144], [202]) შემთხვევაში, როდესაც ფორმულა (7.12)-ში $a=0$. მათ განავითარეს ამ ოფციონის ფასდადების თეორიული ასპექტები (B,S) ბაზრის ბლეკ-შოულსის მოდელში, კოქსის-როსისა და რუბინშტეინის ბინომიალურ სქემაში ფასდადების პრობლემა ისევე $a=0$ შემთხვევისათვის განიხილეს კრამკოვმა და შირიაევმა (იხ. [189]). ორივე შემთხვევაში ფასდადების ფორმულების მიღება ხერხდება მხოლოდ უსასრულო დროითი ჰორიზონტისთვის, ე.ი. შემთხვევაში, როდესაც ოფციონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. ზოგადი შემთხვევა (7.12)-ის სახის გასამრჯელოთი განიხილა შირიაევმა თავის ახალ მონოგრაფიაში „ფინანსური

მათემატიკის საფუძვლები. თეორია". ფაზისი, მოსკოვი 1998 (იხ. [207]). ოპტიმალური ჰეჯური სტრატეგიების აგება ჯერჯერობით ღიად რჩება.

დავუშვათ, რომ ვიხილავთ (B, S) ბაზრის ბლეკ-შოულსის სქემას σ ვოლატილობით და rურისკო საპროცენტო განაკვეთით. განვიხილოთ რუსული ოფციონი ზოგადი გადახდის ფუნქციათა სისტემით (7.12). მაშინ დროითი უსასრულო ჰორიზონტის შემთხვევაში ამ ოფციონის ფასდადების ფორმულას შემდეგი სახე აქვს

$$C_\infty^R = S_0 \begin{cases} (\widetilde{\psi} - a)\dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 \widetilde{\psi}^{\gamma_1} - \gamma_1 \widetilde{\psi}^{\gamma_2}}, & \text{თუ } 1 < \widetilde{\psi}, \\ 1 - a, & \text{თუ } \widetilde{\psi} = 1, \end{cases} \tag{7.13}$$

სადაც

$$\gamma_1 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B},$$

$$\gamma_2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B},$$

$$A = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}, \quad B = \frac{2r}{\sigma^2},$$

ხოლო $\widetilde{\psi}$ შემდეგი ტრანსცედენტური განტოლების

$$\psi^{\gamma_1}\left(1 - \frac{1}{\gamma_2} - \frac{a}{\psi}\right) = \psi^{\gamma_2}\left(1 - \frac{1}{\gamma_2} - \frac{a}{\psi}\right)$$

ამოხსნაა $\psi > a$ არეში. თუ $a = 0$, მაშინ

$$\widetilde{\psi} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \tag{7.14}$$

ამ ოფციონის აღსრულების ოპტიმალური მომენტია ის τ მომენტი, როდესაც შემთხვევითი პროცესი

$$\psi_t = \frac{\max_{u \le t} S_u}{S_t}, \quad t \ge 0$$

მიაღწევს პირველად $\widetilde{\psi}$ დონეს.

ნახ. 7.3

საინტერესოა რუსული ოფციონის განხილვა აქციის δ დივიდენდური განაკვეთის შემთხვევაში. დაფიმ და ჰარისონმა (იხ. [38]) აჩვენეს $a = 0$ შემთხვევაში, რომ ფასდადების ფორმულების მისაღებად (7.13) ფორმულაში ((7.14)-თან ერთად) r უნდა შევცვალოთ $r - \delta$-თი, λ კი $\lambda + \delta$-თი.

7.6 აზიური ოფციონი

აზიური ოფციონი ისეთი ოფციონების კლასის (ევროპული ან ამერიკული ტიპების) საერთო სახელია, რომლის გადახდის ფუნქცია ემყარება აქტივთა ფასების საშუალოს ოფციონის სიცოცხლის გარკვეული პერიოდის განმავლობაში. აზიური ოფციონი უფრო რობასტულია დასრულების ვადასთან სიახლოვეში მანიპულაციების მიმართ, ვიდრე სტანდარტული ოფციონი და, როგორც წესი, უფრო იაფია, ვიდრე სტანდარტული ოფციონი.

ხშირ შემთხვევაში იგი უფრო შეესატყვისება კორპორაციის საჭიროებას. მაგალითად, თუ ამერიკული კომპანია მოელის შემდეგი წლის განმავლობაში თავისი გერმანული ქვეკომპანიიდან გარკვეულ თანხას გერმანულ მარკებში, ცხადია, რომ ის დაინტერესდება ოფციონით, რომელიც იძლევა გარანტიას, რომ შემდეგი წლის განმავლობაში საშუალო გაცვლითი განაკვეთი გერმანული მარკისა დოლარზე გარკვეულ დონეზე მაღლა იყოს. ამის საშუალებას კი აზიური გაყიდვის (პუტ) ოფციონი უფრო კარგად უზრუნველყოფს, ვიდრე სტანდარტული გაყიდვის ევროპული ოფციონი.

დავუშვათ, რომ T ოფციონის ვალდებულებების შესრულების დღეა და T_0, $(0 \leq T_0 \leq T)$, გასაშუალოების პერიოდის დასაწყისი. მაშინ აზიური ყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქცია განმარტებით შემდეგია

$$C_T^A := (A_S(T_0,T) - K)^+,$$

სადაც

$$A_S(T_0,T)=\frac{1}{T-T_0}\int_{T_0}^{T}S_u\,du$$

არის არითმეტიკული საშუალო აქტივების ფასებისა მთელ $[T_0,T]$ დროის ინტერვალზე, K არის სტრაიკი და აქ ვგულისხმობთ, რომ $S=(S_t)$, $0\le t\le T$, აქტივის ფასი ემორჩილება გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას, ე.ი.

$$S_t=.S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t},$$

სადაც $W=(W_t)$, $0\le t\le T$ ბროუნის მოძრაობაა რისკ-ნეიტრალური P^* ალბათობის მიმართ.

ძირითადი სიძნელე აზიური ოფციონის ფასდადებასა და ჰეჯირებაში ისაა, რომ შემთხვევითი სიდიდე $A(T_0,T)$ არ არის ლოგნორმალურად განაწილებული და ამიტომ ამ ოფციონის ფასდადების ცხადი ფორმულის მიღება საკმაოდ რთულია. მიმართავენ მიახლოებით მეთოდებს. შესაძლებელია ფასის საპოვნელად მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება. ძირითადად კი იყენებენ რუთიენსის 1990 წ. (იხ. [136]) და ვორსტის 1992 წ. (იხ. [159]) მიერ დამოუკიდებლად შემოთავაზებულ მიდგომას, რომელიც ემყარება საშუალო არითმეტიკულის აპროქსიმაციას საშუალო გეომეტრიულით, რომელიც უკვე ლოგნორმალურადაა განაწილებული. იქცევიან შემდეგნაირად, ჯერ უწყვეტი დროის საშუალოს, $A(T_0,T)$, უახლოვდებიან მისი დისკრეტული დროის საშუალოთი

$$A^n(T_0,T)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S_{t_i},\tag{7.15}$$

სადაც $t_i=T_0+i(T-T_0)/n$. შემდეგ კი $A^n(T_0,T)$ არითმეტიკულ საშუალოს ცვლიან გეომეტრიული საშუალოთი

$$G^n(T_0,T)=\left(\prod_{i=0}^{n-1}S_{t_i}\right)^{1/n}\tag{7.16}$$

რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში

$$S_{t_i}=S_{T_0}e^{\sigma(W_{t_i}-W_{T_0})+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i-T_0)},\tag{7.17}$$

სადაც W ბროუნის მოძრაობაა ამ სამყაროში. მაშინ

$$G^n(T_0,T)=cS_{T_0}e^{\frac{\sigma}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})}\tag{7.18}$$

მკაცრად დადებითი c მუდმივით. იმის გამო, რომ W ბროუნის მოძრაობა დამოუკიდებელ ნაზრდებიანი პროცესია, ბოლო ფორმულა ნათელყოფს, რომ

რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში გეომეტრიულ საშუალოს, $G^n(T_0, T)$, ლოგნორმალური განაწილება აქვს.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $T_0 = 0$. მაშინ $t_i = i\frac{T}{n}$ და

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა ნულოვანი საშუალოთი და დისპერსიით

$$D^*\eta_n = \frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)^2. \tag{7.19}$$

გამოვთვალოთ აზიური ყიდვის (კოლ) ოფციონის სამართლიანი C^A ფასის მიახლოება

$$\widetilde{C}^A = ce^{-rT}E^*(G^n(0,T) - K)^+ =$$

$$= cS_0e^{-rT}E^*\left(e^{\frac{\sigma}{n}\eta_n} - K\right)^+ =$$

$$= cS_0e^{-rT}E^*\left(e^{\frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2}}e^{\left(\frac{\sigma}{n}\eta_n - \frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2}\right)} - K\right)^+ =$$

$$= cS_0e^{-rT}\left[e^{\frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2}}N(d) - KN(d - \frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n})\right],$$

სადაც $N(\cdot)$ ნორმალური განაწილების ფუნქციაა და

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)^{-1}\ln\left(e^{\frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2}}/K\right) + \frac{\sigma\sqrt{D^*\eta_n}}{2n} = \\ &= \left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)^{-1}\left[\frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2} - \ln K\right] + \frac{\sigma\sqrt{D^*\eta_n}}{2n}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ფორმულა (7.7).

ჩვენ მივიღეთ აზიური ყიდვის ოფციონისათვის შემდეგი მიახლოებითი ფასდადების ფორმულა:

$$\widetilde{C}^A = cS_0e^{-rT}\left[e^{\frac{\sigma^2D^*\eta_n}{2n^2}}N(d) - KN(d - \frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right], \tag{7.21}$$

სადაც $D^*\eta_n$ განისაზღვრება (7.19)-დან, ხოლო d — (7.20)-დან. აქ c ცნობილი მუდმივია, რომლის გამოთვლა მიგვინდვია მკითხველისათვის.

შესაძლებელია ფასდადების სხვა ტიპის მიახლოებული ფორმულის მიღება. ამისათვის, ჯერ ზუსტად ითვლიან არითმეტიკული საშუალოს $A(T_0, T)$ განაწილების პირველ ორი მომენტს, შემდეგ კი უშვებენ, რომ $A(T_0, T)$-ს განაწილება ლოგნორმალურია იგივე პირველი ორი მომენტით.

ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში შესაძლებელია აზიური ოფციონის ფასის ზუსტი ფორმულის მიღება. განვიხილოთ შემდეგი აზიური ყიდვის ოფციონი

$$C_T^A = (A_S(0,T) - K)^+$$

გადახდის ფუნქციით, რომელშიც

$$A_S(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} > \frac{1}{n}S_0 \geq K.$$

ეს პირობა საკმაოდ შემზღუდავია. თუ ფასს ვითვლით არა ნულოვან, არამედ რაიმე l მომენტში იგი გადადის პირობაში,

$$A_S(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{l-1} S_{i\frac{T}{n}} \geq K.$$

მაშინ ასეთი ოფციონის სამართლიანი ფასი ზუსტად დაითვლება. მართლაც,

$$\begin{aligned}
C^A &= e^{-rT}E^*\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} - K\right) = \\
&= e^{-rT}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{ri\frac{T}{n}}E^*\left(\frac{S_{i\frac{T}{n}}}{e^{ri\frac{T}{n}}}\right) - K\right] = \\
&= e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{ri\frac{T}{n}} - K\right] = e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\cdot\frac{e^{rT}-1}{e^{r\frac{T}{n}}-1} - K\right].
\end{aligned}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა (მნიშვნელით $q = e^{r\frac{T}{n}}$).

აზიური ოფციონის ფასის ზუსტი ფორმულაა

$$C^A = e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\left(\frac{e^{rT}-1}{e^{r\frac{T}{n}}-1}\right) - K\right].$$

თუ n დიდია, მაშინ მივიღებთ მიახლოებით ფასდადების ფორმულას

$$C^A \approx e^{-rT}\left[\frac{S_0(e^{rT}-1)}{rT} - K\right]$$

აზიური ოფციონის სხვა ტიპს წარმოადგენს ოფციონი, რომლის სტრაიკი აქტივის საშუალო ფასია. ასეთი ყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქციის სახეა

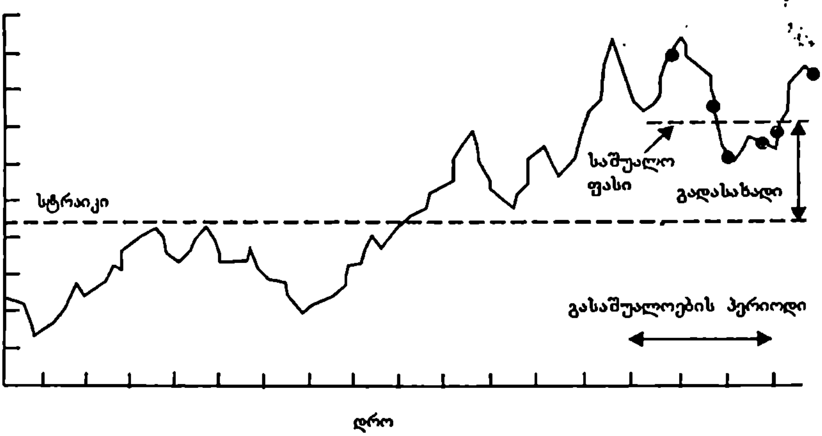
$$C_T^A = (S_T - A(T_0, T))^+,$$

გაყიდვის კი

$$P_T^A = (A(T_0, T) - S_T)^+.$$

ასეთი ოფციონების ფასდადება ისევე წარმოებს, როგორც წინა პუნქტებში განხილულ აზიური ოფციონებისათვის.

გამოვსახოთ გრაფიკულად აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით და აზიური ოფციონი გასაშუალოებული სტრაიკით (იხ. ნახ. 7.4 და 7.5)



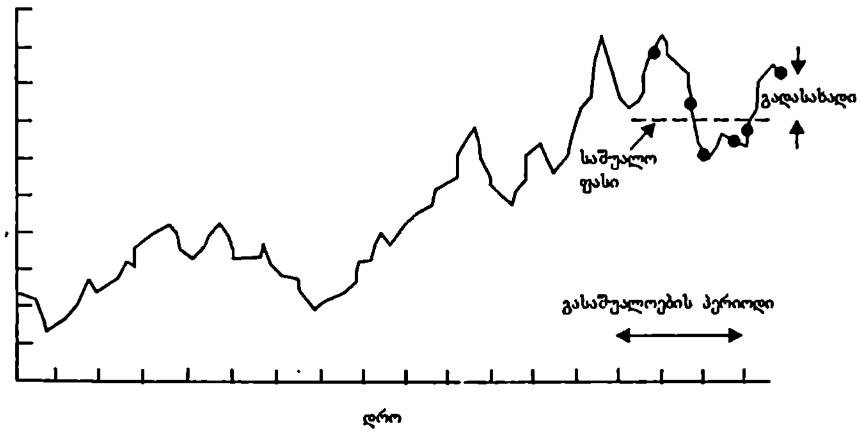
ნახ. 7.4

საინტერესოა შევადაროთ ერთმანეთს სამი ოფციონი: სტანდარტული ოფციონი, აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით და აზიური ოფციონი გასაშუალოებული სტრაიკით.

ძირითადი აქტივის რისკის მაჩვენებლები განსაზღვრავენ,თუ რომელი ოფციონი უფრო შეესატყვისება კონკრეტულ შემთხვევას. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მონაცემები სამი გერმანული კომპანიისა, რომლებიც თავის საქონელს ყიდიან ამერიკის შეერთებულ შტატებში.

ა) A კომპანია არარეგულარულად აწედის საქონელს, რომლის თვითღირებულება 1.4 მილიონი გერმანული მარკაა და კომპანიამ აუცილებლად უნდა მიიღოს 20%-ზე არა ნაკლები მოგება. რეალიზაციის ფასი ამერიკაში ერთი მილიონი დოლარის დონეზეა გაჩერებული. შეკვეთიდან მთლიანი თანხის (დოლარებში) მიღებამდე გადის 6 თვე. ასეთ პირობებში A კომპანიამ

უნდა იყიდოს სტანდარტული პუტ ოფციონი ამერიკულ დოლარებზე (ან კოლი გერმანულ მარკაზე) სტრაიკით $1 = DM1.6800.



ნახ. 7.5

ბ) B კომპანია ახორციელებს რეგულარულ მიწოდებებს და ყოველი თვის ბოლო დღეს მას ამისათვის უხდიან ამერიკულ დოლარებს, რომლის კონვერტაცია გერმანულ მარკებში მაშინვე ხდება. დანახარჯებისა და ფასების სტრუქტურა კომპანიისა იგივეა, რაც A კომპანიის. B კომპანიამ წლის დასაწყისში უნდა იყიდოს 12-თვიანი აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით ამერიკულ დოლარებზე სტრაიკით $1 = DM1.6800, რომლის გასამრჯელო განისაზღვრება გაცვლითი კურსის გასაშუალოებით თითოეული თვის ბოლოს.

გ) C კომპანიას სამრეწველო სიმძლავრეები გააჩნია თვით შეერთებულ შტატებში. ყოველთვიური ხარჯები წარმოებაზე შეადგენენ 833333 დოლარს და ამ თანხებს გადმორიცხავს ძირითადი (დედისეული) კომპანია. ფაბრიკა დაკავებულია მასშტაბურ პროექტში, რომელიც დასრულდება წლის ბოლოს და მოიტანს შემოსავალს 12 მილიონ დოლარს, რაც 20%-იან მოგებას უზრუნველყოფს. მაგრამ მოგების დონე გერმანულ მარკებში დამოკიდებულია გაცვლით კურსზე თითოეული თვის ბოლოს და, განსაკუთრებით წლის ბოლოს. ამ შემთხვევაში C კომპანიამ უნდა განიხილოს ამერიკულ დოლარებზე 12 თვიანი აზიური პუტ ოფციონის გასაშუალოებული სტრაიკით შეძენის შესაძლებლობა.

A და B კომპანიების საწყისი დანახარჯები გერმანულ მარკებში ფიქსირებულია და, აქედან გამომდინარე, სტრაიკი შეირჩევა $1 = DM1.6800. C კომპანიის დანახარჯები გერმანულ მარკებში გაირკვევა მხოლოდ წლის ბოლოს და ამიტომ სტრაიკი უნდა განისაზღვროს გასაშუალოებული გაცვლითი კურსით.

და, ბოლოს, განვიხილოთ აზიური ოფციონის გამოყენების მაგალითი.

მაგალითი 7.2. (იხ. [52]) ამერიკული კომპანია AWI განთავსებულია დიდ ბრიტანეთში და აწარმოებს კალიფორნიული ღვინის იმპორტს. 1992 წლის ივლისიდან 1993 წლის ივნისის ჩათვლით კომპანია დებს კონტრაქტს ყოველთვიური 5000 ღვინით სავსე ყუთის იმპორტზე ფასით \$90 თითოეულ ყუთზე მოწოდების განაღდებით თითოეული თვის ბოლო სამუშაო დღეს.

აზიური ოფციონის მაჩვენებლები

ტიპი	კოლი დოლარებზე (პუტი ფუნტებზე)
სტრაიკი	£1 = \$1.8000
პრემია	£0.012 ერთ \$-ზე
ძირითადი აქტივი	\$5400000
ჯამური პრემია	£114480
აღსრულების ვადა	30 ივნისი, 1993 წ.
გასაშუალოების პერიოდი	1 ივლისი 1992 წ. – 30 ივნისი 1993 წ.
გასაშუალოების მეთოდი	თითოეული თვის ბოლო სამუშაო დღის დახურვის სპოტ-კურსის საშუალო არითმეტიკული (12 დაკვირვება)
საბოლოო განაღდება	2 ივლისი 1993 წ. სხვაობის მეშვეობით სტრაიკისა და საშუალო კურსს შორის გამოხატული ფუნტ სტერლინგებში კურსით £1 = \$1.8000

ცხრილი 7.1

ფუნტი სტერლინგის კურსი მყარად იზრდებოდა წლის დასაწყისიდან და 1992 წლის მაისში, როდესაც კომპანიის ბიუჯეტი დგებოდა, მისმა კურსმა შეადგინა £1 = \$1.8260. კომპანიის ფინანსური დირექტორი თვლის, რომ ეს ზრდა კიდევ ცოტა ხნით გაგრძელდება, მაგრამ შემდეგ იგი დაიწევს თავის საშუალო დონემდე, დაახლოებით £1 = \$1.7000. ამ შემთხვევაში კომპანიას გაუჩნდება პრობლემები, ვინაიდან მიწოდებიდან მინიმალურ დასაშვებ მოგებას უზრუნველყოფს კურსი £1 = \$1.7500. უფრო დაბალი კურსი კი კომპანიისათვის მიუღებელია.

AWI კომპანია იხილავს მოქმედებათა ორ ვარიანტს:

1) ყოველთვიური მიწოდებების ფორვარდული კონტრაქტების დასტა გაცვლითი კურსით £1 = \$1.7560. 2) აზიური (გასაშუალოებული კურსის) ოფციონი სტრაიკით £1 = \$1.8000 და პრემიით (ფასით) £0.012 ერთ დოლარზე (ან \$0.0656 ერთ ფუნტზე). კომპანია ირჩევს მეორე ვარიანტს, ვინაიდან პირველ ვარიანტში ფორვარდის კოტირება ახლოა მინიმალურ მისაღებ კურსთან და მოცემულ მომენტში ფუნტი სტერლინგის სიმძლავრით სარგებლობის საშუალებას არ იძლევა.

რეალურად, ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში, ფუნტი სტერლინგის კურსმა დოლარის მიმართ შემდეგი ცვალებადობა განიცადა (იხ. ცხრ. 7.2).

თარიღი	გაცვლითი კურსი (£/$)	საერთო ჯამი ანგარიშის მიხედვით დოლარებში	საერთო ჯამი ანგარიშის მიხედვით ფუნტებში
მაისი 92	1.8260		
ივნისი	1.9010		
ივლისი	1.9192	450000.00	234472.70
აგვისტო	1.9894	450000.00	226883.13
სექტემბერი	1.7740	450000.00	253664.04
ოქტომბერი	1.5660	450000.00	287356.32
ნოემბერი	1.5042	450000.00	299162.32
დეკემბერი	1.5140	450000.00	297225.89
იანვარი 93	1.4865	450000.00	302724.52
თებერვალი	1.4254	450000.00	315700.86
მარტი	1.5030	450000.00	299401.20
აპრილი	1.5727	450000.00	286132.13
მაისი	1.5585	450000.00	288739.17
ივნისი	1.5103	450000.00	297954.05
სულ	საშუალო 1.6908	5400000.00	3389416.35

ცხრილი 7.2

ამ ცხრილში ასახულია კურსების დინამიკა და ნაღდი ფულის ნაკადები. როგორც ვხედავთ, ძლიერმა ფუნტმა სტერლინგმა მისცა კომპანიას საშუალება მხოლოდ 230000 ფუნტი სტერლინგი გადაეხადა თვეში, როდესაც დასაშვები იყო 255000 ფუნტი სტერლინგი, რაც $£1 = \$1.7500$ კურსს შეესაბამება. სექტემბრის შემდეგ გადახდები გაიზარდა და მიაღწია პიკს 1993 წლის თებერვალში. ფუნტი სტერლინგის საშუალო გაცვლითმა კურსმა შეადგინა ერთ ფუნტზე 1.608 დოლარი, რამაც გამოიწვია ოფციონის აღსრულების დროს 570600 ფუნტი სტერლინგის გადახდა

$$((1.800 - 1.6098) \times 5400000 : 1.8000).$$

ამიტომ კომპანიის ხარჯებმა პრემიის ჩათვლით შეადგინეს

$$£2933296.35 = 3389416.35 + 114480 - 570600,$$

რაც შეესატყვისება ფაქტიურ გაცვლით კურსს $£1 = \$1.8409$ და კომპანიის ხარჯები საგრძნობლად დაბალია 30 მილიონ ფუნტ სტერლინგზე (შეადარეთ დასაშვებ $£3084000$) და ხარჯებზე ჰეჯირებაზე ფორვარდული დასტით ($£3075170.8$).

7.7 კალათის ოფციონი

1. კალათის ოფციონი ემსახურება აქტივების კალათის რისკის ჰეჯირებას. განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთი ოფციონი სავალუტო

რისკის ჰეჯირების მძლავრი ინსტრუმენტია. კალათის ოფციონი ფასის თვალსაზრისით უფრო ეფექტურია, ვიდრე კალათში შემავალი თითოეულ აქტივზე ცალკეული ოფციონების პორტფელი. ინტუიციურად ეს იმით აიხსნება, რომ კალათის ოფციონის დროს გაითვალისწინება კორელაცია სხვადასხვა აქტივების რისკის ფაქტორებს შორის. მაგალითად, როდესაც მკაცრად უარყოფითი კორელაციაა ორ ან მეტ საბაზისო აქტივს შორის, მაშინ შესაძლებელია ტოტალური რისკის თითქმის გაქრობა. მაგრამ გასათვალისწინებელია ისიც, რომ მკაცრი დადებითი კორელაციის შემთხვევაში რისკი შესაძლებელია გაიზარდოს და ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს კალათში შემავალი აქტივების სწორად განსაზღვრას.

ანალიზური თვალსაზრისით არსებობს ანალოგია აზიურ ოფციონსა და კალათის ოფციონს შორის.

დავუშვათ, კალათში შემავალი აქტივების ფასებია $S^i = (S^i_t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $0 \le t \le T$, სადაც

$$S^i_t = S^i_0 e^{\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i W^i_t}.$$

აქ r ურისკო საპროცენტო განაკვეთია, σ_i — i-ური აქტივის ვოლატილობა და W^i, $i = 1, 2, \ldots, k$ — ბროუნის მოძრაობები რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ ისეთები, რომ კოვარიაცია W^i_t და W^j_t შორის უდრის $\rho_{ij}t$-ს, სადაც $\rho_{ij} < 1$, როდესაც $i \neq j$ და $\rho_{ij} = 1$, როდესაც $i = j$. თუ კალათში შემავალი აქტივები აქციებია, მაშინ კალათის ოფციონი წარმოადგენს ოფციონს აქტივთა ინდექსზე. გავრცელებულია სავალუტო კალათის ოფციონი, რომელსაც იყენებენ წამყვანი ბანკები. ამ სავალუტო კალათის ოფციონზე უფრო დაწვრილებით ქვემოთ გვექნება საუბარი.

განვიხილოთ ევროპული ყიდვის კალათის ოფციონი, რომელშიც შედის k აქტივი S^i ფასის პროცესით, შემდეგი გადახდის ფუნქციით

$$C^B_T := \left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i S^i_T - K\right)^+ = (A_T - K)^+, \tag{7.22}$$

სადაც $\omega_i \ge 0$ i-ური აქტივის წონაა, ასე რომ $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$, T ოფციონის აღსრულების დროა, K — სტრაიკი.

შევნიშნოთ, რომ $A_T = \sum_{i=1}^{k} \omega_i S^i_T$ წარმოადგენს შეწონილ არითმეტიკულ საშუალოს. თითოეული აქტივის ფასის პროცესი გეომეტრიულ (ეკონომიკურ) ბროუნის მოძრაობას წარმოადგენს. ესაა ძირითადი დაშვება, ე.ი. საბაზო აქტივების ლოგნორმალურობა. კალათი, რომელიც წარმოადგენს ლოგნორმალური სიდიდეების შეწონილ არითმეტიკულ საშუალოს, უკვე აღარაა ლოგნორმალური და პირდაპირ ბლეკ-შოულსის ფორმულის გამოყენება არ შეიძლება. მეორეს მხრივ, მრავალი შემოწმება ცხადყოფს, რომ ფინანსური ბაზრის პარამეტრები სინამდვილეში არ არიან ლოგნორმალურად განაწილებული, ასე რომ კალათის განაწილებაც შესაძლოა უფრო მეტად არ

იყოს გადახრილი ლოგნორმალურობიდან, ვიდრე მისი კომპონენტების გადახრებია. ამიტომ შესაძლებელია კალათის ლოგნორმალურობის დაშვება. ამ შემთხვევაში პრობლემა, რომელიც წარმოიქმნება, არის კალათის ვოლატილობის შეფასება. არის ორი ძირითადი მეთოდი — პირველი ეფუძნება კალათის ვოლატილობის ისტორიულ შეფასებას, მეორე კი — ნაგულისხმევ ვოლატილობას. ორივე მეთოდს აქვს თავისი უპირატესობა და ნაკლი, მაგალითად, ისტორიული შეფასება არ ეყრდნობა კორელაციებს და უფრო რობასტულია, მაგრამ არ ითვალისწინებს ჩვეულებრივ საბაზრო პირობებს, მაშინ, როდესაც მეორე მეთოდი ამას საწინააღმდეგოდ აკეთებს.

საკითხის ისტორია. კალათის ოფციონის ფასდადების მარტივი ტექნიკა 1991 წელს განავითარა რუბინშტეინმა (იხ. [134]) ბივარიაციული ბინომიალური სტრუქტურებისათვის, რომელიც აზოგადებდა კოქს-როს-რუბინშტეინის ცნობილ მეთოდოლოგიას. სამწუხაროდ, ეს რიცხვითი მეთოდი დროში მეტად არაეკონომიურია, როდესაც კალათში რამოდენიმე საბაზო აქტივია. ამის დასაძლევად 1993 წელს ჯენტლმა (იხ. [54]) კალათის ოფციონის ფასდადებისათვის გამოიყენა აპროქსიმაცია შეწონილ არითმეტიკული საშუალოსი შეწონილი გეომეტრიული საშუალოთი. ადრე ეს მეთოდი გამოყენებული იყო აზიური ოფციონის ფასდადებისათვის რუთიენსის (იხ. [136]) და ვორსტის (იხ. [159]) მიერ. ჯენტლის აპროქსიმაციის მცირედ განსხვავებული მიდგომა 1994 წელს წარმოადგინა ჰუიმა (იხ. [76]). 1995 წელს ფრიშლინგმა და იამომურამ (იხ. [51]) შეისწავლეს საკითხი ავსტრალიის "Commonwealth Bank"-ში ამ ჰეჯირების ინსტრუმენტის დასანერგად. ჩვენ მასალის გაშუქებაში ვეყრდნობით ძირითადად [73]-ს და [117]-ს.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი — ნასესხები [51]-დან. ესაა სავალუტო კალათის ოფციონის მაგალითი.

	\$AUS	DM	კალათი
ნაღდი ფასი	1.35	0.9	2.25
საპროცენტო განაკვეთი	5%	4%	
ფორვარდული ფასი	1.364	0.914	2.278
ვოლატილობა	12%	10%	
რაოდენობა	\$AUS 1	DM 1	

ცხრილი 7.3

დავუშვათ, რომ ავსტრალიური დოლარი \$AUS არის საბაზო ვალუტა. ავსტრალიელ საფონდო მენეჯერს აქვს სურვილი ექვსი თვის შემდეგ იყიდოს აშშ დოლარები \$USD და გერმანული მარკები DM. მან უნდა დაიცვას თავი ავსტრალიური დოლარის პოტენციური ვარდნისაგან, ე.ი. მან უნდა იყიდოს კოლი ორივე ვალუტაზე. უფრო ღრმა ალტერნატივაა, იყიდოს კოლი ამ ვა-

ლუტების კალათზე. დავუშვათ, რომ ავსტრალიური ურისკო საპროცენტო განაკვეთი 7% და სხვა პარამეტრები ცხრ. 7.3-შია მოცემული.

კალათის ვოლატილობა (ამიტომ ოფციონის ფასიც) მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული კორელაციაზე ორ გაცვლით კურსს შორის და მოცემულია ქვემოთ

კორელაცია	ვოლატილობა	კოლის ფასი
-0.5	6.24%	0.0387
0	8.23%	0.0510
0.5	9.83%	0.0609

ცხრილი 7.4

2. კალათის ოფციონის ფასდადების განსახორციელებლად (ჯენტლის მიხედვით) გამოიყენება აპროქსიმაცია შეწონილი არითმეტიკული საშუალოსი გეომეტრიული საშუალოთი და სტრაიკის დარეგულირება ამ ორი საშუალოს ფინალური ზრდის სხვაობის მათემატიკური ლოდინით.

აღვნიშნოთ $\widetilde{\omega}_i$-თი მოდიფიცირებული წონები

$$\widetilde{\omega}_i = \frac{\omega_i S_0^i}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_0^j} = \frac{\omega_i F_{S^i}(0,T)}{\sum_{j=1}^k \omega_j F_{S^i}(0,T)},$$

სადაც $F_{S^i}(0,T)$ არის საწყის მომენტში i-ური აქტივის ფორვარდული ფასი, რომელიც როგორც ცნობილია გამოითვლება ფორმულით

$$F_{S^i}(0,T) = S_0^i e^{rT},$$

სადაც r ურისკო საპროცენტო განაკვეთია. ცხადია, რომ

$$\sum_{i=1}^k \widetilde{\omega}_i = 1.$$

(7.22) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$C_T^B = \left(\sum_{j=1}^k \omega_j F_{Sj}(0,T)\right)\left(\sum_{j=1}^k \widetilde{\omega}_i \widetilde{S}_T^i - \widetilde{K}\right)^+ =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^k \omega_j F_{Sj}(t,T)\right)(\widetilde{A}_T - K)^+,$$

სადაც

$$\widetilde{S}_T^i = \frac{S_T^i}{F_{S^i}(0,T)}, \quad \widetilde{A}_T = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{S}_T^i$$

და

$$\widetilde{K} = \frac{K}{\sum_{j=1}^{k} \omega_j F_{S^j}(0,T)} = \frac{e^{-rT} K}{\sum_{j=1}^{k} \omega_j S_0^j}.$$

კალათის ყიდვის (კოლ) ოფციონის არბიტრაჟული ფასია

$$C^B = e^{-rT} \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j F_{S^j}(0,T) \right) E^*(\widetilde{A}_T - \widetilde{K})^+,$$

ან, რაც იგივეა,

$$C^B = \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j S_0^j \right) E^*(\widetilde{A}_T - \widetilde{K})^+, \tag{7.23}$$

სადაც $E^*(\cdot)$ წარმოადგენს მათემატიკურ ლოდინს რისკ-ნეიტრალურ ალბათობის მიმართ.

შეწონილი არითმეტიკული საშუალო

$$\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{S}_T^i$$

შევცვალოთ მიახლოებით შემდეგი შეწონილი გეომეტრიული საშუალოთი

$$\widetilde{G}_T = \prod_{i=1}^{k} (\widetilde{S}_T^i)^{\omega_i}$$

და სტრაიკი $\widetilde{K}$-ს მაგიერად ავიღოთ

$$\widehat{K} = \widetilde{K} + E^*(\widetilde{G}_T - \widetilde{A}_T). \tag{7.24}$$

შევნიშნოთ, რომ მოხდა შემდეგი:

$$E^*(\widetilde{A}_T - \widetilde{K})^+ = E^*(\widetilde{A}_T - \widetilde{G}_T + \widetilde{G}_T - \widetilde{K})^+ =$$
$$E^*[G_T - (\widetilde{K} + \widetilde{G}_T - \widetilde{A}_T)]^+ \approx E^*[\widetilde{G}_T - (\widetilde{K} + E^*(\widetilde{G}_T - \widetilde{A}_T))]^+.$$

ცხადია, რომ ასეთი აპროქსიმაცია კარგია, თუ დისპერსია $D^*(\widetilde{G}_T - \widetilde{A}_T)$ მცირეა.

მაშასადამე, C^B ფასი შევცვალეთ $\widehat{C}^B$ ფასით, რომლის სახეცაა

$$\widehat{C}^B = \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j S_0^j\right) E^*(\widetilde{G}_T - \widetilde{K})^+.$$

ჩვენი მოდელის შესაბამისად

$$\widetilde{S}_T^i = \frac{S_T^i}{F_{S^i}(0,T)} = e^{-\frac{\sigma_i^2 T}{2} + \sigma_i W_T^i}$$

და

$$\widetilde{G}_T = e^{-\frac{T}{2}\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \sigma_i W_T^i}.$$

აღვნიშნოთ

$$\eta_T = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \sigma_i W_T^i, \quad c = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \sigma_i^2.$$

მაშინ

$$\widetilde{G}_T = e^{-\frac{T}{2}c + \eta_T}.$$

ცხადია, რომ η_T გაუსის შემთხვევითი სიდიდეა ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და დისპერსიით

$$D^* \eta_T = T \sum_{i,j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{\omega}_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = T v^2,$$

სადაც

$$v^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{\omega}_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}.$$

$\widetilde{K}$ სტრაიკის დასათვლელად უნდა ვიპოვოთ $E^* \widetilde{A}_T$ და $E^* \widetilde{G}_T$ (იხ. (7.24)):

$$E^* \widetilde{A}_T = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\omega}_j E^* e^{-\frac{\sigma_i^2 T}{2} + \sigma_i W_T^i}.$$

ვინაიდან W_T^i გაუსისაა პარამეტრებით (0,1), გვექნება

$$E^* e^{-\frac{\sigma_i^2 T}{2} + \sigma_i W_T^i} = 1$$

და

$$E^* \widetilde{A}_T = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\omega}_j = 1.$$

გამოვთვალოთ ახლა $E^*\widetilde{G}_T$:

$$E^*\widetilde{G}_T = E^* e^{-\frac{T}{2}c+\eta_T} =$$

$$= e^{\frac{(v^2-c)T}{2}} E^* e^{-\frac{v^2 T}{2}+\eta_T} = e^{\frac{(v^2-c)T}{2}}.$$

აღვნიშნოთ

$$l = e^{\frac{(v^2-c)T}{2}}.$$

მაშინ $\widehat{K}$ სტრაიკის სახე იქნება

$$\widehat{K} = \widetilde{K} + l - 1 \tag{7.25}$$

და

$$E^*(\widetilde{G}_T - \widehat{K})^+ = E^*\left(le^{\eta_T - \frac{v^2 T}{2}} - (\widetilde{K} + l - 1)\right)^+ \tag{7.26}$$

ასე რომ, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფორმულა (7.7), შემთხვევისათვის

$$\xi = \eta_T, \quad a = l, \quad b = \widetilde{K} + l - 1$$

და მივიღებთ C^B-სთვის შემდეგ მიახლოებით ფორმულას

$$\begin{aligned}\widehat{C}^B = \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_i S_0^j\right) \Bigg(lN\left(\frac{\ln l - \ln(\widetilde{K} + l - 1) + v^2\frac{T}{2}}{v\sqrt{T}}\right) - \\ -(\widetilde{K} + l - 1)N\left(\frac{\ln l - \ln(\widetilde{K} + l - 1) - v^2\frac{T}{2}}{v\sqrt{T}}\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{7.27}$$

სადაც

$$l = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i\widetilde{\omega}_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} - \sum_{j=1}^{k}\widetilde{\omega}_j\sigma_j^2\right)T\right\}$$

და

$$\widetilde{K} = \frac{e^{-rT}K}{\sum_{j=1}^{k}\omega_j S_0^j}.$$

დავუშვათ, რომ $k = 1$. მაშინ $\omega_1 = 1$ და არითმეტიკული საშუალო ემთხვევა გეომეტრიულ საშუალოს. ამ შემთხვევაში $l = 1$ და (7.27) ფორმულა გადადის ბლეკ-შოულსის ფორმულაში.

როგორც ვხედავთ, კალათის ყიდვის ოფციონის ფასდადების ფორმულა (7.27)-ში უცნობია ვოლატილობები σ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ და კოეფიციენტები ρ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, რომლებიც ახასიათებენ კოვარიაციას i-ურ და

j-ურ აქტივებს შორის. ამ უცნობი პარამეტრის შეფასება საკმაოდ ძნელი ამოცანაა. ცხადია, უნდა დავეყრდნოთ ρ_{ij} შეფასების დროს იმ ფაქტს, რომ ჩვენი მოდელისათვის

$$\rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(\ln S_t^i \ln S_t^j)}{\sigma_i \sigma_j}.$$

ეს გამოსახულება მიიღება უშუალოდ აქტივის ფასების ევოლუციის ფორმულიდან.

ვინაიდან l-ის გადაწერა შეიძლება შემდეგნაირად

$$l = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{\omega}_j \operatorname{cov}(\ln S_t^i \ln S_t^j) - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\omega}_j \sigma_j^2\right) T\right\},$$

ოფციონის ფასდადებისათვის საჭიროა შევაფასოთ მხოლოდ ვოლატილობები და კოვარიაციები.

კალათის ყიდვის (კოლ) ოფციონისათვის არბიტრაჟული ფასი t მომენტში შემდეგია

$$\widehat{C}_t^B = \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j S_t^j\right) \left(lN\left(\frac{\ln l - \ln(\widetilde{K} + l - 1) + \frac{v^2(T-t)}{2}}{v\sqrt{T-t}}\right) -\right.$$

$$\left. -(\widetilde{K} + l - 1)N\left(\frac{\ln l - \ln(\widetilde{K} + l - 1) - \frac{v^2(T-t)}{2}}{v\sqrt{T-t}}\right)\right),$$

სადაც

$$l = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \widetilde{\omega}_i \widetilde{\omega}_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\omega}_j \sigma_j^2\right) (T - t)\right\}.$$

8

ფინანსური დროითი მწკრივების ანალიზი და პროგნოზირება

ფინანსური დროითი მწკრივების და, საზოგადოდ, დროითი მწკრივების ანალიზი, პირველ რიგში, უნდა იწყებოდეს მათი ადეკვატურად აღმწერი ალბათურ-სტატისტიკური მოდელების აგებით, რომელთა სწორი არჩევანი გადამწყვეტ როლს ასრულებს მონაცემთა შემდგომ ანალიზში, რომლის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მიზანია პროგნოზირება.

დროითი მწკრივების ზოგად თეორიას გააჩნია სტანდარტული წრფივი მოდელების მთელი არსენალი, რომელთა შორის უპირველესად უნდა დასახელდეს ავტორეგრესიის AR(p), მცოცავი საშუალოს MA(q), შერეული ტიპის ავტორეგრესია–მცოცავი საშუალოს ARMA(p,q) და გაინტეგრებული ARMA ე.წ. ARIMA მოდელები, რომლებისთვისაც არსებობს სტატისტიკური ანალიზისა და პროგნოზირების კარგად განვითარებული ტექნიკა.

ჩამოთვლილი მოდელების პოპულარობა აიხსნება, ერთის მხრივ, მათი სიმარტივით და, მეორეს მხრივ, იმით, რომ პარამეტრების მცირე რაოდენობის შერჩევით ამ მოდელებით კარგად აპროქსიმირდება როგორც სტაციონარული, ასევე არასტაციონარული (სტოქასტური და პოლინომიალური ტრენდის მქონე) მიმდევრობების ფართო კლასი.

ამ მოდელების სტრუქტურა, მათი დამახასიათებელი თავისებურებანი და თვისებები, პარამეტრების შეფასებისა და პროგნოზირების მეთოდები აღწერილია პირველ პუნქტში.

მრავალი ფინანსური დროითი მწკრივის, განსაკუთრებით კი სავალუტო კურსების მონაცემთა ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მარტივი წრფივი გაუსური მოდელებიდან დაწყებული, საჭირო ხდება მათი შემდგომი კორექტირება და გართულება, რათა საბოლოოდ მიღებულ იქნას მოდელი, რომელიც „იჭერს“ ისეთ ეფექტებს, როგორებიცაა გაუსურობიდან გადახრა, კლასტერულობა, „მძიმე კუდები“, „გრძელი მეხსიერება“ და სხვა. აღსანიშნავია, რომ დასახელებული ეფექტების გამოჩენა დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ 80-იანი წლებიდან მოყოლებული შესაძლებელი გახდა ყოველდღიური და უფრო ხშირი მონაცემების მოპოვება და მათი სტატისტიკური ანალიზი.

ყოველივე ამან განაპირობა ისეთი არაწრფივი პირობითად გაუსური მოდელების შემუშავება და კვლევა, რომელთა საკმაოდ ფართო კლასს წარ-

მოადგენს ARCH ტიპის მოდელები (GARCH, EGARCH, HARCH და სხვ.). მათ აღწერას ეძღვნება მეორე პუნქტი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დროითი მწკრივების ანალიზის უმთავრესი მიზანია პროგნოზირება.

პროგნოზის ქვეშ იგულისხმება მომავალზე წარსულის ექსტრაპოლაციის შედეგი. იგი მდგომარეობს დროითი მწკრივის მომავალი მნიშვნელობების განსაზღვრასა და მათი ალბათური საზღვრების დადგენაში დროითი მწკრივის მიმდინარე და წარსულ მნიშვნელობათა საფუძველზე. პროგნოზი აიგება გარკვეული ობიექტური წესების მიხედვით, რომლებიც განსაზღვრავს იმ გამოთვლებისა და მოქმედებების ერთობლიობას, რომლებიც აუცილებელია პროგნოზის (ე.წ. „ობიექტური" პროგნოზის) მისაღებად.

მეორეს მხრივ, განჭვრეტა, წინასწარმეტყველება, რომელიც დაფუძნებულია შესასწავლი პროცესის ბუნების ღრმა ცოდნაზე, ან ისეთ ინფორმაციაზე, რომელიც მომავალ ხდომილობებს ეხება, გვაძლევს „სუბიექტური" შეფასების გაკეთების საშუალებას და ამის საფუძველზე, „ობიექტური" პროგნოზის კორექტირების საშუალებას.

პროგნოზირების პრობლემას ეძღვნება მესამე პუნქტი. აქ მოცემულია როგორც პროგნოზირების მარტივი მეთოდები — მცოცავი საშუალოს, ექსპონენციალური გაგლუვების, ჰოლტის, ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების, ასევე პროგნოზირების უფრო რთული მეთოდები, რომლებიც ეყრდნობა ARMA და ARIMA მოდელებს და მთელი სისრულით იყენებს მათ თვისებებს და მათთვის განვითარებული ანალიზის ტექნიკას.

ამავე თავის მეოთხე პუნქტში განხილულია კალმან-ბიუსის ტიპის ნაწილობრივ-დაკვირვებადი პირობითად გაუსური მოდელები და მათთან დაკავშირებული ფილტრაციისა და ექსტრაპოლაციის მეთოდები. ამ მეთოდების უპირატესობა ისაა, რომ მათი გამოყენება შესაძლებელია პროცესების სტაციონარულობის დაშვების გარეშეც და კიდევ ის, რომ ისინი გვთავაზობენ ადვილად რეალიზებად რეკურენტული სახის ალგორითმებს, იყენებენ რა ჩვენს ხელთ არსებულ აპრიორულ ინფორმაციას.

რამდენად საიმედოა მიღებული პროგნოზები, რა თქმა უნდა, დამოკიდებულია იმაზე, რამდენად მოხერხებულადაა მოდელები შერჩეული და რა ხარისხისაა ექსტრაპოლაციური შეფასება.

პარამეტრების რობასტული შეფასების პრობლემას ARMA პროცესებისათვის მოდელის შეშფოთების პირობებში ანუ, როდესაც ადგილი აქვს მოდელური დაშვებებიდან ამა თუ იმ გადახრას, ეძღვნება მეექვსე პუნქტი. აქვე აღწერილია პარამეტრის რეკურენტული შეფასების პროცედურები ზოგადი დროითი მწკრივებისათვის, განხილულია კერძო მაგალითები.

მოყვანილი მოდელები, პრინციპები და მეთოდები წარმატებით შეიძლება იქნას გამოყენებული მრავალი ეკონომიკური ამოცანის გადასაჭრელად და ამდენად, ზოგად ხასიათს ატარებს. პროგნოზირების აღწერილი

მეთოდები განეკუთვნება ე.წ. ავტოპროექტიულ მეთოდებს, როდესაც პროგნოზირება წარმოებს მხოლოდ ერთი დროითი მწკრივის დაკვირვებული მნიშვნელობებით, სხვა დროითი მწკრივები კი, რომლებიც წარმოადგენენ თანმხლებ პროცესებს, ყურადღების მიღმაა დარჩენილი. ისინი გამოსადეგია მოკლევადიანი პროგნოზირების მიზნებისათვის. საშუალო და გრძელვადიანი პროგნოზირებისათვის მოხერხებულია რეგრესიული ანალიზის ტექნიკით სარგებლობა. რეგრესიული ანალიზი იძლევა საშუალებას გათვალისწინებულ იქნას თანმხლები ფაქტორებიც. მეშვიდე პუნქტში მოკლედაა გადმოცემული რეგრესიული ანალიზის იდეოლოგია და მასზე დაყრდნობილი პროგნოზირების მეთოდები.

ბოლოს მოყვანილია 2 კეისი. კეისი (case) არის ამოცანა, რომელიც ეფუძნება რეალურ მონაცემებს და რომლის გადაჭრა მოითხოვს აღწერილი მეთოდების კომპლექსურ გამოყენებას. კეისები წარმოადგენს მნიშვნელოვან ელემენტს დასავლური ტიპის მონოგრაფიებსა და სახელძღვანელოებში. მათი შედგენა, ხშირ შემთხვევებში, მოითხოვს სახელმწიფო მხარდაჭერას რეალურ მონაცემთა მოპოვების სიძვირის და კონფიდენციალურობის გამო.

პირველი კეისი ეხება ბანკის ლიკვიდურობის პრობლემას, კერძოდ, ბანკში შემავალი და ბანკიდან გამომავალი ფულადი ნაკადების პროგნოზირებას და რა თქმა უნდა, მათი მეშვეობით, ნეტო-ლიკვიდური პოზიციის პროგნოზირებასაც. ეს პირველი ქართული კეისია ფინანსთა რაოდენობრივ თეორიაში.

მეორე კეისში მყიდველუნარიანობის პარიტეტის პრობლემაა განხილული. მონაცემებს წარმოადგენს დიდი ბრიტანეთის საბითუმო ფასების და გარე საერთო ბაზრის ფასების ინდექსების, ასევე საპროცენტო განაკვეთებისა და ინგლისური ფუნტი სტერლინგის ეეროდოლარზე გადაცვლის კურსების დაკვირვებულ მნიშვნელობებს. კოინტეგრაციის ცნების გამოყენებით, ამ მონაცემების საფუძველზე შეისწავლება საკითხი, თუ როგორი ფორმით სრულდება მყიდველუნარიანობის პარიტეტი ბრიტანეთისა და გარე ბაზრებს შორის.

8.1 წრფივი გაუსური პროცესები

ჩვენი განხილვის საგანს წარმოადგენს წრფივი გაუსური მოდელები, როგორც სტაციონარული, ისევე არასტაციონარული.

წრფივი სტაციონარული პროცესები

ასეთი პროცესების ტიპიური წარმომადგენლებია p რიგის ავტორეგრესიული AR(p), q რიგის მცოცავი საშუალოს MA(q) და შერეული ავტორეგ-

რესია-მცოცავი საშუალოს ARMA(p,q) მოდელები.

სანამ შევუდგებოდეთ მათ აღწერას, მოვიყვანთ ზოგიერთ ცნებასა და ფაქტს, რომლებიც შემდგომში დაგვჭირდება.

ჩვენ არ შევუდგებით სტაციონარული დროითი მწკრივის ცნების დაზუსტებას. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ მწკრივის წარმომქმნელი მექანიზმი, თუმცა შემთხვევითია, დროში უცვლელი რჩება. ამ დაშვებებში, თუ z_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ სტაციონარული დროითი მწკრივია,

$$\begin{aligned} &Ez_t = \mu, \quad Dz_t = E(z_t - \mu)^2 = \sigma_z^2 > 0, \\ &\gamma_k := \operatorname{cov}(z_t, z_{t+k}) = E(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu), \;\; \gamma_0 = \sigma_z^2, \\ &\rho_k := \frac{\gamma_k}{\sqrt{Dz_t}\sqrt{Dz_{t+k}}} = \frac{\gamma_k}{\sigma_z^2}, \;\; \rho(0) = 1. \end{aligned} \tag{8.1}$$

ე.ი. სტაციონარული დროითი მწკრივებისათვის საშუალო Ez_t და დისპერსია Dz_t მუდმივია დროში, ხოლო ავტოკოვარიაცია $\gamma_k = \operatorname{cov}(z_t, z_{t+k})$ და ავტოკორელაცია $\rho_k = \operatorname{corr}(z_t, z_{t+k})$ მხოლოდ დაგვიანების k სიგრძეზეა დამოკიდებული, ამასთან $\rho_k = \rho_{-k}$. შემდგომში ყველგან ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვლით, რომ $\mu = 0$.

დროითი მწკრივების ანალიზში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს (გარდა ავტოკორელაციური ფუნქციისა) ე.წ. კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია, რომელიც ასე განიმარტება: ყოველი ფიქსირებული $k \geq 1$-სთვის განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა ($\mathbf{\Phi}_k$ ვექტორის მიმართ)

$$\mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k = \boldsymbol{\rho}_k,$$

სადაც $\mathbf{P}_k$ წარმოადგენს $(z_1, \ldots, z_k)$ ვექტორის კორელაციურ მატრიცას, $\boldsymbol{\rho}_k = (\rho_1, \ldots, \rho_k)'$, $\mathbf{\Phi}_k = (\Phi_{k1}, \ldots, \Phi_{kk})'$ — ვექტორ-სვეტებია, ე.ი.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & & \rho_{k-3} \\ & & & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \\ \vdots \\ \Phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \\ \rho_k \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია ეწოდება მიმდევრობას Φ_{kk}, $k = 1, 2, \ldots$. მაგალითად, თუ $k = 1$, მაშინ (8.2) იღებს სახეს

$$\Phi_{11} = \rho_1. \tag{8.3}$$

$k = 2$-სთვის

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

საიდანაც

$$\Phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

და ა.შ.

$$\Phi_{kk} = \frac{|\mathbf{P}_k|}{|\overline{\mathbf{P}}_k|},$$

სადაც $\overline{\mathbf{P}}_k$ მიიღება $\mathbf{P}_k$ მატრიციდან ბოლო სვეტის $(\rho_1, \ldots, \rho_k)'$ სვეტით შეცვლით. $|\cdot|$ — მატრიცის დეტერმინანტია.

ავტოკორელაციური ფუნქცია $\rho(k)$, $k = 1, 2 \ldots$ და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია Φ_{kk}, $k = 1, 2, \ldots$, (z_k) დროითი მწკრივის თეორიული მახასიათებლებია. პრაქტიკაში ჩვენ საქმე გვაქვს სასრულ დროით მწკრივთან $z_1, z_2, \ldots, z_N$, (N ცალ დაკვირვებულ მნიშვნელობასთან) და მათი საშუალებით ვაგებთ ρ_k და Φ_{kk}-ს ემპირიულ ანალოგებს (შეფასებებს): კერძოდ, შერჩევითი კორელაციაა

$$r_k = \frac{c_k}{c_0},$$

სადაც

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \overline{z})(z_{t+k} - \overline{z}), \quad k = 0, 1, \ldots, K, \quad \overline{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t.$$

კერძო ავტოკორელაციების, Φ_{kk}-ს; შეფასებები $\widehat{\Phi}_{kk}$ მიიღება (8.2) განტოლებიდან, სადაც ρ_k შეცვლილია r_k-თი. არსებობს $\widehat{\Phi}_{kk}$-ს გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულები

$$\widehat{\Phi}_{kk} = \begin{cases} r_1, & k = 1; \\ \dfrac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{\Phi}_{(k-1)j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{\Phi}_{(k-1)j} r_j}, & k = 2, 3, \ldots, K, \end{cases} \tag{8.5}$$

სადაც $\widehat{\Phi}_{lj} = \widehat{\Phi}_{(l-1)j} - \widehat{\Phi}_{ll} \widehat{\Phi}_{(l-1)(l-j)}$.

პრაქტიკაში, სასარგებლო ინფორმაციის მისაღებად საჭიროა სულ ცოტა 50 დაკვირვება ($N \geq 50$), ამასთან დაგვიანებათა რაოდენობა $K \sim \frac{N}{4}$.

შემდგომში, დროითი მწკრივის მოდელის იდენტიფიკაციისათვის (ამ საკითხს ჩვენ ქვევით შევეხებით) საჭიროა ხელთ გვქონდეს მეთოდი, რომლითაც შევამოწმებდით ჰიპოთეზას: $\rho_k = 0$ ყველა $k > q$-სთვის. ეს მეთოდი ეყრდნობა შემდეგ ფაქტებს: a) ანდერსონის მიერ ნაჩვენები იყო, რომ შერჩევითი ავტოკორელაციის კოეფიციენტი r_k დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, თანაც $Er_k = \rho_k$, b) ბარტლეტის მიერ ნაჩვენები იყო, რომ გაუსის სტაციონარული დროითი მწკრივებისათვის თუ $\rho_i = 0$,

ყველა $i > q$-სთვის, მაშინ ნებისმიერი დაგვიანებისათვის $k > q$ ემპირიული ავტოკორელაციის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{Var}[r_k] \approx \frac{1}{N}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{q} \rho_i^2\right). \tag{8.6}$$

ამგვარად,

$$\frac{r_k - \rho_k}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_k]}} \sim N(0,1)$$

ამასთან $\mathrm{Var}[r_k]$-ს გამოსათვლელ (8.6) ფორმულაში თეორიული ავტოკორელაციები ρ_i შეიძლება შეიცვალოს მათი ემპირიული ანალოგებით r_i. რადგან, თუ $\xi \sim N(0,1)$, მაშინ $P(|\xi| > 2) \approx 0.005$, ხოლო $P(|\xi| > 3) \approx 0.003$, საბოლოოდ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ნულოვანი ჰიპოთეზის $H_0 : \rho_k = 0, k > q$ შემოწმების უხეში წესი:

$$\text{უკუაგდე } H_0, \text{ თუ } \frac{|r_k|}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_k]}} > 2 \quad (\text{ან} > 3).$$

იგივე მიზნისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ჰიპოთეზის შემოწმება: $\Phi_{kk} = 0$, რაიმე $k > p + 1$. ამ საკითხს ჩვენ შევეხებით ავტორეგრესიული მოდელების განხილვისას.

ავტორეგრესიული მოდელი AR(p). ამბობენ, რომ პროცესი z_t, $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ემორჩილება p რიგის ავტორეგრესიულ მოდელს (ან არის AR(p) პროცესი), თუ

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + \cdots + \Phi_p z_{t-p} + a_t, \tag{8.7}$$

სადაც $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ მოდელის პარამეტრებია, $(a_t)_{t=0,\pm1,\ldots}$ წარმოადგენს დამოუკიდებელ ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, $Ea_t = 0$, $Ea_t^2 = \sigma_a^2$. (a_t) მიმდევრობას ეწოდება თეთრი ხმაური.

შემოვიღოთ უკუძვრის გარდაქმნა $Bz_t = z_{t-1}$, $B^2 z_t = B(Bz_t) = Bz_{t-1} = B^2 z_{t-2}$, $B^m z_t = z_{t-m}$ და ავტორეგრესიული გარდაქმნა

$$\Phi_p(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p.$$

მაშინ (8.7) მიიღებს სახეს

$$\Phi_p(B) z_t = a_t.$$

AR(1). დაწვრილებით განვიხილოთ შემთხვევა $p = 1$.

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad t \geq 1. \tag{8.8}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $|\Phi_1| < 1$ და $z_0 \sim N\left(0, \frac{\sigma_a^2}{1-\Phi_1^2}\right)$, მაშინ (z_t) პროცესი სტაციონარულია, კერძოდ, z_t ისევეა განაწილებული, როგორც z_0.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემთხვევას $|\Phi_1| < 1$. ამ შემთხვევაში, z_t შეიძლება სხვა ფორმითაც ჩაიწეროს

$$z_t = a_t + \Phi_1 a_{t-1} + \Phi_1^2 a_{t-2} + \cdots + \Phi_1^t a_0 + \Phi_1^{t+1} a_{-1} + \cdots \tag{8.9}$$

(როგორც უსასრულო რიგის მცოცავი საშუალოს მოდელი). z_t პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ρ_k, $k \geq 1$, აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\rho_k = \Phi_1 \rho_{k-1} \Longrightarrow \rho_k = \Phi_1^k. \tag{8.10}$$

კერძოდ, $\rho_1 = \Phi_1$. ამრიგად, ავტოკორელაციურ ფუნქციას ახასიათებს ექსპონენციალური ჩაქრობადობა ნულამდე — მონოტონურად, თუ $\Phi_1 > 0$ და ნიშანცვლადად, თუ $\Phi_1 < 0$. შემდგომში ეს თვისება გამოიყენება მოდელის იდენტიფიკაციისათვის. ტოლობა $\rho_1 = \Phi_1$ გამოიყენება Φ_1-ის პირველადი შეფასების ასაგებად მომენტთა მეთოდით. კერძოდ, $\hat{\Phi}_1 = r_1$.

AR(1) მოდელისათვის $\Phi_{11} = \rho_1$, $\Phi_{kk} = 0$, თუ $k > 1$. მაგალითად, $\Phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = 0$, რადგან $\rho_2 = \rho_1^2$ (იხ. (8.10)).

AR(2). განვიხილოთ შემთხვევა $p = 2$. მაშინ

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + a_t. \tag{8.11}$$

სტაციონარულობის პირობაა

$$\Phi_1 + \Phi_2 < 1, \quad \Phi_2 - \Phi_1 < 1, \quad -1 < \Phi_2 < 1.$$

პარამეტრები Φ_1 და Φ_2 დაკავშირებულია ავტოკორელაციებთან ე.წ. იულ-უოკერის განტოლებით

$$\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \rho_1,$$

$$\rho_2 = \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2,$$

საიდანაც

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_1)}{1-\rho_1^2}, \quad \Phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

ეს თანაფარდობები გამოიყენება პარამეტრების პირველადი შეფასებების მისაღებად, თეორიული ρ_1, ρ_2-ის r_1, r_2-ით შეცვლით.

AR(2) მოდელისათვის $\Phi_{11} = \rho_1$, $\Phi_{22} = (\rho_2 - \rho_1^2)/(1-\rho_1^2)$, $\Phi_{kk} = 0$, $k > 2$.

ზოგადი შემთხვევა. AR(p) პროცესის სტაციონარულობის პირობაა, რომ მახასიათებელი განტოლების $\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p = 0$ ფესვები ერთეულოვანი სფეროს გარეთ იყოს მოთავსებული.

ავტოკორელაციის ფუნქცია ρ_k აკმაყოფილებს სასრულ-სხვაობიან განტოლებას

$$\rho_k = \Phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \Phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0, \quad \rho_0 = 0, \tag{8.12}$$

საიდანაც მიიღება იულ-უოკერის განტოლებათა სისტემა, რომელიც მოიცემა (8.2) ფორმულით. ახლა კი კერძო ავტოკორელაციურ ფუნქციას შეიძლება მიეცეს შემდეგი ინტერპრეტაცია: განიხილება AR(k) $k \geq 1$, მოდელების მიმდევრობა, მათი პარამეტრები აღინიშნება $\Phi_{k1}, \dots, \Phi_{kk}$, ცვლადებით. ამავე დროს განიხილება z_t პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ρ_j, $j \geq 1$, და ყოველი $k \geq 1$-სთვის იძებნება პარამეტრების $\Phi_{k1}, \dots, \Phi_{kk}$ ისეთი მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებს (8.2) ფორმულით მოცემულ განტოლებათა სისტემას. $(\Phi_{kk}, k \geq 1)$ მიმდევრობა წარმოადგენს z პროცესის კერძო ავტოკორელაციურ ფუნქციას. ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ თუ z_t AR(p) პროცესია, მაშინ $\Phi_{kk} = 0$ ყველა $k > p + 1$-სთვის. ეს თვისება გამოიყენება ავტორეგრესიული მოდელების იდენტიფიკაციისათვის (თუ $\Phi_{kk} = 0$ ყველა $k \geq p + 1$-სთვის და $\Phi_{kk} \neq 0$, როცა $k \leq p$, მაშინ საქმე გვაქვს AR(p) მოდელთან).

ამრიგად, საჭიროა შემოწმდეს ჰიპოთეზა $H_0 : \ \Phi_{kk} = 0, k \geq p + 1$. გადაწყვეტილების მიღების წესი ემყარება შემდეგ ფაქტს: კენუეიმ აჩვენა, რომ თუ z_t პროცესი AR(p) პროცესია, მაშინ ნებისმიერი k-სთვის, $k \geq p + 1$, შერჩევითი კერძო ავტოკორელაციები $\widehat{\Phi}_{kk} \sim N(0, \mathrm{Var}[\widehat{\Phi}_{kk}])$. ამასთან, $\mathrm{Var}[\widehat{\Phi}_{kk}] \sim \frac{1}{N}$. ამრიგად, გადაწყვეტილების მიღების წესი შემდეგია:

$$\text{უკუაგდე } H_0, \text{ თუ } \sqrt{N}|\widehat{\Phi}_{kk}| > 2 \quad (\text{ან 3-ზე}).$$

AR(p) მოდელებში $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ პარამეტრების შეფასება წარმოებს დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდით (თუ $(a_t)_{t \geq 1}$ „თეთრი ხმაურია“, ე.ი. გაუსურია) და უმცირეს კვადრატთა მეთოდით (თუ (a_t) მიმდევრობა არაა გაუსური). ორივე შემთხვევაში $\widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_p$ მოიძებნება როგორც პარამეტრების ის მნიშვნელობა, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს შემდეგ გამოსახულებას

$$\sum_{t=p+1}^{N} (z_t - \Phi_1 z_{t-1} - \cdots - \Phi_p z_{t-p})^2.$$

მცოცავი საშუალოს მოდელი MA(q). ამ მოდელში z_t პროცესი აღიწერება შემდეგი თანაფარდობით

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

ანდა, ეკვივალენტურ ფორმაში,

$$z_t = Q_q(B)a_t,$$

სადაც $Q_q(B) = 1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q$ მცოცავი საშუალოს გარდაქმნაა.

პროცესს ეწოდება შექცევადი, თუ ის ჩაიწერება როგორც უსასრულო რიგის ავტორეგრესია

$$\pi(B)z_t = a_t, \tag{8.13}$$

სადაც $\pi(B) = 1-\pi_1 B-\cdots-\pi_j B^j-\cdots$, ხოლო მწკრივი $\pi(B)z_t$ კრებადია. ამიტომ შექცევადი MA(q) პროცესისათვის კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია არ ნულდება (k-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის). შექცევადობის პირობა ასე გამოითქმის: მახასიათებელი განტოლების

$$1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q = 0$$

ფესვები ერთეულოვანი სფეროს გარეთ მდებარეობს.

MA(q) პროცესი სტაციონარულია პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\rho_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{q-k}\theta_j\theta_{j+k}, & k = 1,2,\ldots,q; \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

ამრიგად, $\rho_k = 0$, თუ $k > q$. ეს თვისება გამოიყენება MA(q) მოდელების იდენტიფიკაციისათვის. კერძოდ, ამოწმებენ ჰიპოთეზას $H_0 : \rho_k = 0, k > q$.

MA(1) პროცესი. პირველი რიგის მცოცავი საშუალოს პროცესი ასე განიმარტება

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1-\theta_1 B)a_t.$$

იმისათვის, რომ პროცესი შექცევადი იყოს (რაც იმას ნიშნავს, რომ $a_t = z_t + \theta_1 z_{t-1} + \theta_1^2 z_{t-2} + \cdots$ მწკრივი კრებადი იყოს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რადგან $a_t = (1-\theta_1 B)^{-1}z_t$, მოითხოვება, რომ გარდაქმნა $(1-\theta_1 B)^{-1}$ კორექტულად იყოს განსაზღვრული) აუცილებელია, რომ $|\theta_1| < 1$. ეს პროცესი სტაციონარულია ნებისმიერი θ_1-სთვის.

ავტოკორელაციური ფუნქცია

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

ამიტომ, თუ $|\theta_1| < 1$, მაშინ $-\frac{1}{2} < \rho_1 < \frac{1}{2}$, და პირიქით. ამავე დროს,

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = -\frac{\frac{1}{\theta_1}}{1+\frac{1}{\theta_1^2}}$$

და განსხვავებული მნიშვნელობები θ_1 და $\frac{1}{\theta_1}$ იძლევა ერთი და იგივე ρ_1-ს. ამ ტოლობიდან ისევე, როგორც AR(1) შემთხვევაში, მომენტთა მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ θ_1 პარამეტრის პირველად შეფასებას

$$r_1 = \frac{-\widehat{\theta}_1}{1+\widehat{\theta}_1^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ $\widehat{\theta}_1$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\theta_1^2 + \frac{\theta_1}{r_1} + 1 = 0,$$

რომელსაც გააჩნია ნამდვილი ფესვი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $-\frac{1}{2} < r_1 < \frac{1}{2}$. და თუ $\widehat{\theta}_1$ მისი ფესვია, მაშინ $\frac{1}{\theta_1}$-ც არის მისი ფესვი და ამიტომ, თუ ერთი ფესვი მოდულით ნაკლებია 1-ზე, მაშინ მეორე ფესვი მოდულით მეტია 1-ზე.

კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\Phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}},$$

და, ამრიგად, $|\Phi_{kk}| < \theta_1^k$, ანუ მთავარი ექსპონენციალურად ჩაქრობადი წევრია.

თუ შევადარებთ AR(1) და MA(1) პროცესებს, შევნიშნავთ, რომ მათ შორის არსებობს ურთიერთშესაბამისობა: თუ MA(1) პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ნულდება პირველი დაგვიანების შემდეგ, AR(1)-ისა ექსპონენციალურად ქრება. პირიქით, AR(1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია ქრება პირველი დაგვიანების შემდეგ, ხოლო MA(1)-ისა ექსპონენციალურად ქრება.

რიგი	$(1,d,0)$	$(0,d,1)$
ρ_k — ყოფაქცევა Φ_{kk} — ყოფაქცევა წინასწარი შეფასება	ექსპონენციალური ჩაქრობა მხოლოდ $\Phi_{11} \neq 0$ $\Phi_1 = \rho_1$	მხოლოდ $\rho_1 \neq 0$ ექსპონენციალური ჩაქრობა $\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
დასაშვები დიაპაზონი	$-1 < \Phi_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$

ცხრილი 8.1

ARMA(p,q) მოდელი. როგორც ვნახეთ, ავტორეგრესიული მოდელი, მაგალითად, AR(1) შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც უსასრულო რიგის MA — მცოცავი საშუალოს პროცესი, ხოლო MA(1) პროცესი კი შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც უსასრულო რიგის ავტორეგრესია. ამიტომ, თუ პროცესი z_t MA ტიპისაა (რაც ჩვენთვის თავდაპირველად უცნობია), მისი ავტორეგრესიული ფორმით ჩაწერა არაეკონომიურია, ისევე როგორც AR(1) პროცესისა MA პროცესის სახით. პრაქტიკაში, ეკონომიური პარამეტრიზების მიზნით განიხილავენ შერეული ტიპის ავტორეგრესია-მცოცავი საშუალოს მოდელებს ARMA(p,q), რომლებიც ერთდროულად შეიცავს როგორც ავტორეგრესიულ, ასევე მცოცავი საშუალოს წევრებს.

ARMA(p,q) მოდელი მოიცემა ტოლობით

$$\Phi_p(B)z_t = Q_q(B)a_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

სადაც $\Phi_p(B)$ და $Q_q(B)$ ადრე შემოღებული ავტორეგრესიისა და მცოცავი საშუალოს გარდაქმნებია.

ARMA(1,1) პროცესი

$$z_t - \Phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

რომელიც სხვა ფორმითაც შეიძლება ჩაიწეროს, როცა $|\Phi_1| < 1$ (ამ დროს პროცესი სტაციონარულია)

$$z_t = (\Phi_1 - \theta_1)\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1^{k-1} a_{t-k} + a_t.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\rho_k = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-2\Phi_2\theta_1+\theta_1^2}\Phi_1^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \rho_0 = 1 \tag{8.14}$$

და, ე.ი., ავტოკორელაცია ექსპონენციალურად ჩაქრობადია. ეს ფაქტი გამოიყენება ARMA(1,1)-ის საიდენტიფიკაციოდ.

პროცესი შექცევადია, თუ $|\theta_1| < 1$. პროცესის სტაციონარულობისა და შექცევადობის პირობებიდან, $|\Phi_1| < 1$, $|\theta_1| < 1$, გამომდინარეობს, რომ ρ_1 და ρ_2 უნდა მოქცეული იყოს არეში

$$|\rho_2| < |\rho_1|,$$

$$\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 + 1), \quad \rho_1 < 0,$$

$$\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 - 1), \quad \rho_1 > 0.$$

ARMA(1,1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციის ქცევა მსგავსია MA(1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციის ფუნქციის. ქცევისა. მისი საწყისი მნიშვნელობაა $\Phi_{11} = \rho_1$ და მასში დომინირებს ჩაქრობადი ექსპონენციალური წევრი.

ზოგადი ARMA(p,q) მოდელების ისეთი თვისებები, როგორებიცაა სტაციონარულობა, შექცევადობა, ავტოკორელაციისა და კერძოავტოკორელაციის ფუნქციების ყოფაქცევა, მოდელის პარამეტრის შეფასების და პროგნოზირების მეთოდები კარგადაა შესწავლილი (იხ. მაგ. [11]). პარამეტრების შეფასებისა და პროგნოზირების საკითხებს ჩვენ ქვემოთ შევეხებით.

ARIMA მოდელები. აქამდე ჩვენს მიერ განხილული წრფივი სტოქასტური მოდელები, ARMA(p,q), წარმატებით გამოიყენება, უმეტეს შემთხვევაში სტაციონარული დროითი მწკრივების აღსაწერად, ანუ იმ შემთხვევებში, როდესაც პროცესი იმყოფება წონასწორობაში მუდმივი საშუალო დონის მიმართ.

მაგრამ პრაქტიკაში, განსაკუთრებით ეკონომიკისა და ფინანსების სფეროში, სადაც ადეკვატური მოდელების შერჩევას და აქედან გამომდინარე, პროგნოზირების ფაქიზი მეთოდების გამოყენებას, შეიძლება ითქვას, გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს, ხშირია ისეთი დროითი მწკრივების გამოჩენა, რომლებსაც აქვს არასტაციონარული ხასიათი. სახელდობრ, ისინი არ მერყეობენ ფიქსირებულ საშუალო მნიშვნელობის მიმართ. მიუხედავად ამისა, მათი თვისებები, გარკვეული აზრით ერთგვაროვანია: თუ არ გავითვალისწინებთ ლოკალურ დონეს ან ლოკალურ დონესა და ტრენდს, დროითი მწკრივის ნებისმიერი ნაწილი თავისი ქცევით მსგავსია ნებისმიერი სხვა ნაწილისა.

ფართო კლასს იმ მოდელებისა, რომლებითაც აღიწერება ასეთი არასტაციონარული (მაგრამ გარკვეული აზრით ერთგვაროვანი) ქცევა, წარმოადგენს ARIMA(p,d,q) მოდელები (გაინტეგრებული ავტორეგრესია მცოცავი საშუალო), რომლებიც ეფუძნება იმ დაშვებას, რომ, თუმცა დროითი მწკრივი არასტაციონარულია, მისი რომელიმე d რიგის სხვაობა სტაციონარულ დროით მწკრივს, კერძოდ, სტაციონარულ შექცევად ARMA(p,q) პროცესს წარმოადგენს.

შემოვიღოთ სხვაობის გარდაქმნა

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

$\nabla^m z_t = \nabla(\nabla^{m-1} z)_t$. კერძოდ, $\nabla^2 z_t = \nabla(\nabla z)_t = \nabla(z_t - z_{t-1}) = = z_t - z_{t-1} - (z_{t-1} - z_{t-2}) = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}$ და ა.შ.

პროცესს $z = (z_t)$, $t = 0, \pm1, \pm2, \dots$ ეწოდება ARIMA(p,d,q) პროცესი, თუ მისი d რიგის სხვაობა $\nabla^d z$ წარმოადგენს ARMA(p,q) პროცესს. ამრიგად, ARIMA(p,d,q) პროცესი მოიცემა ტოლობით

$$\Phi_p(B)\nabla^d z_t = Q_q(B)a_t,$$

სადაც $\Phi_p(B)$ და $Q_q(B)$ ადრე შემოღებული ავტორეგრესიისა და მცოცავი საშუალოს გარდაქმნებია. იგულისხმება, რომ $Phi_p(B)$ ავტორეგრესიის სტაციონარული ოპერატორია, ე.ი. $Phi_p(B) = 1 - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p = 0$ განტოლების ფესვები ერთეულოვანი სფეროს გარეთ მდებარეობს, ხოლო $Q_q(B)$ მცოცავი საშუალოს შექცევადი გარდაქმნაა, ე.ი. $Q_q(B) = 1 - Q_1 B - \cdots - Q_q B^q = 0$ განტოლების ფესვები ერთეულოვანი სფეროს გარეთ მდებარეობს.

თუ z_t პროცესი წარმოადგენს ARIMA(p,d,q) პროცესს, მაშინ მისი წარმოდგენა შესაძლებელია სამი ეკვივალენტური ფორმით.

1) მოდელის წარმოდგენა სხვაობიანი განტოლების სახით.

$$\varphi(B)z_t = Q_q(B)a_t,$$

სადაც გარდაქმნის ოპერატორი $\varphi(B)$ განისაზღვრება ტოლობიდან

$$\varphi(B) = \Phi_p(B)(1-B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B - \cdots - \varphi_{p+d} B^{p+d}.$$

2) მოდელის წარმოდგენა შემთხვევითი იმპულსების გამოყენებით.

$$z_t = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \psi(B)a_t,$$

სადაც კოეფიციენტები ψ_j მიიღება შემდეგი განტოლებიდან

$$\varphi(B)\psi(B) = Q_q(B)$$

B-ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით. მაგალითად, ARIMA(1,1,1) მოდელისთვის

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_j = A_0 + A_1 \Phi^j,$$

სადაც

$$A_0 = \frac{1-\theta}{1-\Phi}, \quad A_1 = \frac{\theta - \Phi}{1-\Phi}.$$

3) მოდელის შექცეული წარმოდგენა (a_t-სა და წარსული z-ის მეშვეობით).

$$\pi(B)z_t = a_t,$$

სადაც

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \cdots - \pi_j B^j - \cdots$$

და π_j წონები მოიძებნება განტოლებიდან

$$\varphi(B) = Q_q(B)\pi(B).$$

მაგალითად, ARIMA(1,1,1) მოდელისთვის

$$\pi_1 = \Phi + (1-\theta), \quad \pi_2 = (\theta - \Phi)(1-\theta), \quad \pi_j = (\theta - \Phi)(1-\theta)\theta^j, \quad j \geq 3.$$

ცხადია, რომ რადგან $|\theta| < 1$, π_j წონები სწრაფად ქრება j-ს ზრდასთან ერთად.

შემდგომში ენახავთ, რომ მოდელის სამივე წარმოდგენა გამოიყენება პროგნოზირების მიზნებისათვის. ამასთან, წარმოდგენა 2) ეფექტურად გამოიყენება პროგნოზის საშუალო კვადრატული შეცდომის გამოსათვლელად.

ეკონომიკური ან ფინანსური წარმოშობის დროითი მწკრივების ანალიზი გვარწმუნებს იმაში, რომ იშვიათია სიტუაციები, როდესაც p, d, q პარამეტრები იღებს 2-ზე მეტ მნიშვნელობას. უფრო მეტიც, ხშირად პარამეტრები იღებს მნიშვნელობას 0 ან 1. ამასთან დაკავშირებით გამოვყოთ შემდეგი კერძო შემთხვევები

1. ARIMA(1,0,0) მოდელი, სტაციონარული ავტორეგრესია – AR(1),

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad |\phi_1| < 1.$$

ეს პროცესი ჩვენ უკვე შევისწავლეთ.

2. ARIMA(0,0,1) მოდელი, სტაციონარული შექცევადი მცოცავი საშუალო — MA(1),

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1.$$

ეს პროცესიც შესწავლილი გვაქვს.

3. ARIMA(1,0,1) მოდელი, სტაციონარული შერეული ავტორეგრესია მცოცავი საშუალო — ARMA(1,1),

$$z_t - \Phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\Phi_1| < 1, \quad |\theta_1| < 1.$$

4. ARIMA (1,1,0) მოდელი, გაინტეგრებული ავტორეგრესია, არასტაციონარული მოდელი.

აღვნიშნოთ $W_t = \nabla z_t$. მაშინ W_t აკმაყოფილებს განტოლებას

$$W_t = \Phi_1 W_{t-1} + a_t, \quad |\Phi_1| < 1,$$

ე.ი. W_t სტაციონარული AR(1) პროცესია. საწყისი პროცესისათვის გვაქვს

$$z_t - z_{t-1} = \Phi_1(z_{t-1} - z_{t-2}) + a_t.$$

5. ARIMA(0,1,1) მოდელი, გაინტეგრებული მცოცავი საშუალო, არასტაციონარული მოდელი. აქაც აღვნიშნოთ $W_t = \nabla z_t$. მაშინ

$$W_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1.$$

ამ შემთხვევაშიც W_t წარმოადგენს სტაციონარულ შექცევად MA(1) პროცესს. თავად z_t-სთვის გვექნება

$$z_t - z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

პროგნოზირება ARIMA *მოდელებში*

წრფივი გაუსის პროცესებისათვის, განსაკუთრებით ARIMA(p,d,q) მოდელებისათვის, არსებობს პროგნოზირების კარგად განვითარებული ტექნიკა.

პირველ რიგში, გავარკვიოთ, თუ რას ვგულისხმობთ პროგნოზის ცნებაში. ვთქვათ, დროის რაიმე $t > 0$ მომენტისათვის ცნობილია z პროცესის წარსული დაკვირვებული მნიშვნელობები $z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots$ და მათ საფუძველზე გვსურს განვჭვრიტოთ მომავალი მნიშვნელობები z_{t+l}, $l = 1, 2, \ldots$, ე.ი. ვიპოვოთ პროგნოზი $\widehat{z}_t(l)$. ბუნებრივია, z_{t+l}-ის საპროგნოზო მნიშვნელობად (ფუნქციად) შეგვიძლია მივიჩნიოთ წარსული დაკვირვებების ნებისმიერი ფუნქცია $\varphi_l(z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots)$. თუ პროგნოზის ავკარგიანობის შეფასების კრიტერიუმად მივიჩნევთ საშუალო კვადრატულ შეცდომას,

$$E[z_{t+l} - \varphi_l(z_t, z_{t-1}, \ldots)]^2,$$

მაშინ, როგორც კარგადაა ცნობილი, ამ კრიტერიუმის აზრით საუკეთესო (ე.ი. მინიმალური საშუალო კვადრატული შეცდომის მქონე) შეფასებას წარმოადგენს z_{t+l}-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი პირობაში, რომ t მომენტამდე z-ის მნიშვნელობები დაფიქსირებულია:

$$\widehat{z}_t(l) = E(z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots).$$

ყოველი ფიქსირებული t-სთვის $\widehat{z}_t(l)$-ს, განხილულს როგორც წინსწრების l-ის ფუნქციას, ეწოდება საპროგნოზო ფუნქცია.

ჩვენ მოვიყვანთ საპროგნოზო ფუნქციის მხოლოდ ზოგად გამოსახულებას ARIMA(p,d,q) მოდელებისათვის. ცხადი სახით კი საპროგნოზო ფუნქციას მოვიყვანთ კონკრეტული $(0, 1, 1)$ და $(1, 1, 0)$ პროცესებისათვის.

შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს: $E_t[\xi]$ ან $[\xi]$ შემთხვევითი სიდიდის ξ-ს პირობითი მათემატიკური ლოდინისათვის პირობაში $z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots$.

გავიხსენოთ ARIMA(p,d,q) მოდელის განმარტება

$$\Phi_p(B) \nabla^d z_t = Q_q(B) a_t,$$

სადაც $\Phi_p(B) = 1 - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p$ და $Q_q(B) = 1 - QB - \cdots - QB^q$, შესაბამისად, ავტორეგრესიისა და მცოცავი საშუალოს გარდაქმნებია, ხოლო $\nabla z = z_t - z_{t-1}$ კი სხვაობის გარდაქმნაა.

შემოვიღოთ ახალი გარდაქმნის ოპერატორი

$$\varphi_p(B) = \Phi_p(B)\nabla^d z_t.$$

მაგალითად, თუ $d = 1$ და $p = 1$,

$$\varphi_p(B) = 1 - (1 + \Phi_1)B + \Phi_1 B^2 = 1 - \varphi_1 B + \varphi_2 B^2.$$

მაშინ z_{t+l} შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$z_{t+l} = \varphi_1 z_{t+l-1} + \varphi_2 z_{t+l-2} + \cdots + \varphi_{p+d} z_{t+l-p-d} + a_{t+l} - \\ -\theta_1 a_{t+l-1} - \cdots - \theta_q a_{t+l-q}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხრიდან ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინს, მივიღებთ

$$[z_{t+l}] = \widehat{z}_t(l) = \varphi_1[z_{t+l-1}] + \cdots + \varphi_{p+d}[z_{t+l-p-d}] + [a_{t+l}] - \\ -\theta_1[a_{t+l-1}] - \cdots - \theta_q[a_{t+l-q}].$$

ამასთან, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$[z_{t-j}] = E_t[z_{t-j}] = z_{t-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$[z_{t+j}] = E_t[z_{t+j}] = \widehat{z}_t(j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$[a_{t-j}] = E_t[a_{t-j}] = a_{t-j} = z_{t-j} - \widehat{z}_{t-j-1}(1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$[a_{t+j}] = E_t[a_{t+j}] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

აუცილებლად უნდა აღინიშნოს შემდეგი ფაქტი. ყველა ჩამოთვლილი ტოლობა პირობითი ლოდინებისათვის სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ პირობითი ლოდინი აღებულია მთელი წარსული (უსასრულობამდე) დაკვირვებებით. ჩვენ კი ხელთ გვაქვს მხოლოდ წარსული დაკვირვებების სასრული რაოდენობა $z_0, z_1, \ldots, z_t$.

ამ მდგომარეობიდან გამოსავალს (ანუ აღნიშნული საპროგნოზო ფუნქციებით სარგებლობის უფლებას სასრული რაოდენობა დაკვირვებების შემთხვევაშიც) იძლევა შემდეგი ფაქტი. ცნობილია, რომ ARIMA(p,d,q) პროცესი შეიძლება ჩაიწეროს სხვა, ე.წ. შექცეული ფორმითაც:

$$z_{t+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t+l-j} + a_{t+l},$$

სადაც, როგორც ვნახავთ, წონები, π_j, გამოითვლება Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ და θ_j, $j = 1, 2, \ldots, q$ კოეფიციენტების მეშვეობით და, ამავე დროს, შექცევადობის პირობის შესრულებისას, წარმოქმნის კრებად მწკრივს. მოყვანილი

ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$[z_{t+l}] = \widehat{z}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [z_{t+l-j}] + [a_{t+l}].$$

პრაქტიკაში π_j წონები სწრაფად ქრება. ამიტომ პროგნოზის გამოთვლისას, თუ t საკმაოდ დიდია, როგორც ბოლო, ასევე ყველა სხვა საპროგნოზო ფუნქციაში შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ მხოლოდ არსებული დაკვირვებებით $(z_0, z_1, \ldots, z_t)$.

პროგნოზის კვადრატული შეცდომა ეწოდება სიდიდეს

$$e_t^2(l) = (z_{t+l} - \widehat{z}_t(l))^2,$$

ხოლო მის მათემატიკურ ლოდინს

$$V(l) = Ee_t^2(l)$$

ეწოდება პროგნოზის საშუალო კვადრატული შეცდომა. თუ ვისარგებლებთ z_t პროცესის წარმოდგენით $z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j}$ (წარმოდგენა 2)), მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$V(l) = \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2\right) \sigma_a^2,$$

სადაც $\sigma_a^2 = Ea_t^2$. ამასთან, z_{t+l}-ის პირობითი განაწილება პირობაში, რომ დაფიქსირებულია $(z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots)$, ნორმალურია საშუალოთი $\widehat{z}_t(l)$ და დისპერსიით $V(l)$. ამიტომ z_{t+l}-სთვის $(1-\varepsilon)$-პროცენტული ალბათური საზღვრები მოიცემა ფორმულით

$$\widehat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2\right)^{1/2} \sigma_a,$$

სადაც $u_{\varepsilon/2}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $(1-\varepsilon/2)$ დონის კვანტილი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც დაკვირვებათა რიცხვი დიდია, σ_a შეიძლება შეიცვალოს მისი შეფასებით s_a (σ_a-ს შეფასების შესახებ იხ. პუნქტი „პარამეტრების შეფასება").

მოვიყვანოთ საპროგნოზო ფუნქციის გამოსახულება (0,1,1) პროცესისათვის. (0,1,1) პროცესი მოიცემა ფორმულით

$$\nabla z_t = (1 - \theta_1 B) a_t.$$

აქედან ვღებულობთ

$$z_{t+l} = z_{t+l-1} + a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1}.$$

ე.ი. საბოლოოდ გვექნება

$$\widehat{z}_t(1) = z_t - \theta_1 a_t,$$

$$\widehat{z}_t(l) = \widehat{z}_t(l-1), \quad l \geq 2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a_t = z_t - \widehat{z}_{t-1}(1)$, ეს გამოსახულებები შეიძლება მოკლედ ასე ჩაიწეროს

$$\widehat{z}_t(l) = \lambda z_t + (1-\lambda)\widehat{z}_{t-1}(l),$$

სადაც $\lambda = 1 - \theta$. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ახალი პროგნოზი წარმოადგენს ძველი პროგნოზისა და ახალი დაკვირვების შეწონილ ჯამს.

ალბათური საზღვრები, ანუ $(1-\varepsilon)$ დონის ნდობის ინტერვალი z_{t+l}-სთვის, მოიცემა ფორმულით

$$z_{t+l}(\pm) = \begin{cases} \widehat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}\sigma_a, & l = 1, \\ \widehat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}(1+\theta_1^2)^{1/2}\sigma_a, & l \geq 2, \end{cases}$$

სადაც $u_{\varepsilon/2}$ არის ნორმალური განაწილების $(1-\varepsilon/2)$ დონის კვანტილი. σ_a წარმოადგენს თეთრი ხმაურის a_t-ს დისპერსიას. თუ θ_1 და σ_a პარამეტრები უცნობია, ისინი უნდა შეიცვალოს მათი შეფასებებით, θ_1 და s_a, რომლებიც აგებულია t მომენტამდე დაკვირვებული $(z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0)$ სიდიდეების მეშვეობით.

განვიხილოთ (1,1,0) პროცესის შემთხვევა. ის მოიცემა ფორმულით

$$(1 - \Phi_1 B)\nabla z_t = a_t,$$

ან, ეკვივალენტური ფორმით,

$$z_{t+l} = (1+\Phi_1)z_{t+l-1} - \Phi_1 z_{t+l-2} + a_{t+l}.$$

აქედან მიიღება ასეთი საპროგნოზო ფუნქცია

$$\widehat{z}_t(l) = z_t + (z_t - z_{t-1})\frac{\Phi_1(1-\Phi_1^2)}{1-\Phi_1}, \quad l \geq 1.$$

ალბათური საზღვრებისთვის გვექნება

$$z_{t+l}(\pm) = \begin{cases} \widehat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}\sigma_a, & l = 1, \\ \widehat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}(1+\Phi_1^2)^{1/2}\sigma_a, & l \geq 2, \end{cases}$$

სადაც $u_{\epsilon/2}$-ს იგივე შინაარსი აქვს, რაც ზემო შემთხვევაში.

პარამეტრების შეფასება

ვთქვათ, $N = n + d$ დაკვირვება ქმნის დროით მწკრივს

$$z_{-d+1}, \ldots, z_{-1} z_0, z_1, \ldots, z_n,$$

რომელიც გენერირებულია ARIMA(p,d,q) მოდელით. შევქმნათ $n = N - d$ სხვაობისგან შედგენილი მწკრივი $W_1, W_2, \ldots, W_n$, სადაც $W_t = \nabla^d z_t$.

$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ და $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$ მოდელის პარამეტრებია, რომელთა შეფასებების აგება არსებული დაკვირვებების საფუძველზე შეადგენს ჩვენს ამოცანას. საზოგადოდ, შესაფასებელია σ_a-ც.

z მწკრივიდან W მწკრივზე გადასვლა საშუალებას გვაძლევს, რომ ARIMA(p,d,q) მოდელი შევცვალოთ ARMA(p,q) მოდელით. შევნიშნოთ, რომ წინასწარ ვამოწმებთ ჰიპოთეზას $EW_t = \mu = 0$ და თუ ეს ჰიპოთეზა მცდარი აღმოჩნდა, მაშინ გადავდივართ ახალ დაკვირვებებზე $W_t = W_t - \mu$, ხოლო μ-ს ვაფასებთ სიდიდით $(\sum W_t)/n$.

პარამეტრების წინასწარი შეფასება. პარამეტრების პირველადი უხეში შეფასებების აგების უმარტივეს მეთოდს წარმოადგენს მომენტთა მეთოდი, რომლის თანახმადაც თეორიული მომენტები, რომელთა გამოსახულებებიც შეიცავს უცნობ პარამეტრებს, უტოლდება მათ ემპირიულ ანალოგებს და მიიღება განტოლებათა სისტემა პირველადი შეფასებების ასაგებად.

a) AR(1) პროცესი.

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + a_t.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\rho_1 = \Phi_1$, მომენტთა მეთოდი გვაძლევს წინასწარ შეფასებას

$$\widehat{\Phi}_1 = r_1,$$

სადაც r_1 ამოკრეფითი კორელაციის კოეფიციენტია.

b) MA(1) პროცესი.

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

წინასწარი შეფასება მომენტთა მეთოდით მოიცემა, როგორც შემდეგი განტოლების მოდულით 1-ზე ნაკლები ფესვი

$$\widehat{\theta}_1^2 + \frac{\widehat{\theta}_1}{r_1} + 1 = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვი, თუ $|r_1| < \frac{1}{2}$.

დასაჯერობის მაქსიმუმისა და უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული შეფასებები. z მწკრივიდან W მწკრივზე გადასვლის შედეგად მიღებული ARMA მოდელი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$a_t = W_t - \Phi_1 W_{t-1} - \cdots - \Phi_p W_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \cdots + \theta_q a_{t-q}. \quad (8.15)$$

ამ ტოლობაში W-ს მნიშვნელობების ჩასმა თავიდან შეუძლებელია, რადგან წარმოიქმნება სირთულეები ამ სხვაობიანი განტოლების საწყის მნიშვნელობებთან დაკავშირებით.

თუ დავუშვებთ, რომ p ცალი მნიშვნელობა W_*, W მწკრივისა და q ცალი მნიშვნელობა a_*, a მწკრივისა წინასწარ არის მოცემული, მაშინ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ შეიძლება გამოვთვალოთ ზემო განტოლებიდან.

ამრიგად, პარამეტრების ნებისმიერი მოცემული (Φ, θ) ერთობლიობისთვის და (W_*, a_*) საწყისი პირობებისთვის ჩვენ შეგვიძლია მიმდევრობით გამოვთვალოთ $a_t(\Phi, \theta | W_*, a_*, \mathbf{W})$, $t = 1, 2, \ldots, n$, მნიშვნელობების სიმრავლე. თუ დავუშვებთ, რომ a განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე (კონსტანტის სიზუსტით) უდრის

$$p(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{\sigma_a^n} \exp\left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n a_t^2}{2\sigma_a^2} \right\}.$$

მაშასადამე, პირობითი (პირობაში (W_*, a_*)) დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია ტოლია (კონსტანტის სიზუსტით)

$$l_*(\Phi, \theta, \sigma_a) = -n \ln \sigma_a - \frac{S_*(\Phi, \theta)}{2\sigma_a^2},$$

სადაც

$$S_*(\Phi, \theta) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2(\Phi, \theta | W_*, a_*, \mathbf{W}).$$

როგორ გამოვთვალოთ უპირობო დასაჯერობის ფუნქცია?

თუ n არ არის პატარა, უპირობო დასაჯერობის ფუნქციას იღებენ პირობითის ტოლს, სადაც W_* და a_*-ის მაგივრად ჩასვამენ მათ უპირობო მათემატიკურ ლოდინს. მაგრამ W_* და a_*-ის მათემატიკური ლოდინები ნულის ტოლია (შევნიშნოთ, რომ ჩვენ წინასწარ მოვახდინეთ W მწკრივის ცენტრირება, ე.ი. გამოვაკლეთ თითოეულ წევრს მისი მათემატიკური ლოდინი და გავხადეთ ისეთი, რომ $EW_* = 0$). ეს მიახლოება ცუდად მუშაობს, როდესაც პროცესის ქცევა არასტაციონარულს უახლოვდება. ხშირად სარგებლობენ უფრო საიმედო პროცედურით, რომლის არსი ისაა, რომ (8.15) ფორმულის საშუალებით ითვლიან a-ს მნიშვნელობებს დაწყებულს a_{p+1}-დან, იმ დაშვებაში, რომ წინა a-ების მნიშვნელობები 0-ის ტოლია.

ზემომოყვანილი წესი უპირობო დასაჯერობის ფუნქციის აპროქსიმაციისა პირობითი დასაჯერობის ფუნქციით დამაკმაყოფილებელ შედეგს იძლევა სტაციონარული პროცესებისათვის, თუ ამავე დროს, დაკვირვებული დროითი მწკრივი საკმაოდ გრძელია. არასტაციონარული, განსაკუთრებით კი სეზონური დროითი მწკრივებისთვის, ეს პროცედურა უვარგისი ხდება და უპირობო დასაჯერობის ფუნქციის გამოთვლა განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ უპირობო დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$l(\Phi,\theta,\sigma_a) = f(\Phi,\theta) - n\ln\sigma_a - \frac{S(\Phi,\theta)}{2\sigma_a^2},$$

სადაც $f(\Phi,\theta)$ — Φ და θ პარამეტრების ფუნქციაა, ხოლო $S(\Phi,\theta)$ — კვადრატების უპირობო ჯამია

$$S(\Phi,\theta) = \sum_{t=-\infty}^{n} [a_t|\Phi,\theta,\mathbf{W}]^2, \tag{8.16}$$

სადაც $[a_t|\Phi,\theta,\mathbf{W}] = E(a_t|\Phi,\theta,\mathbf{W})$ ($:= [a_t]$, თუ გაუგებრობა არ იქმნება) აღნიშნავს a_t-ს პირობით მათემატიკურ ლოდინს ფიქსირებული Φ, θ და $\mathbf{W} = (W_1,\ldots,W_n)$-ის დროს.

როგორც წესი, ფუნქცია $f(\Phi,\theta)$ არსებითია მხოლოდ მცირე n-ების შემთხვევაში. n-ის საშუალო და დიდი მნიშვნელობებისთვის დომინირებს $\frac{S(\Phi,\theta)}{2\sigma_a^2}$. ამიტომ, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, ანუ $S(\Phi,\theta)$-ის მინიმიზაციით, აგებული შეფასებები, როგორც წესი, ძალიან ახლოს იქნება დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებებთან.

ამრიგად, გამოსათვლელია $S(\Phi,\theta)$, ანუ ყველა $[a_t]$. გამოთვლის პროცედურა გულისხმობს (8.15)-ის გამოყენებას $[a_t]$-ს პირდაპირი გადათვლებისათვის და, ამასთან, $[W_{-j}]$, $j = 0,1,\ldots$ მნიშვნელობათა (უკუ პროგნოზების) წინასწარ გამოთვლას, რომლებიც აუცილებელია პირდაპირი მიმართულებით რეკურენტული გადათვლებისათვის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პირდაპირი რეკურენტული გადათვლებისათვის იყენებენ (8.15)-ს, ხოლო უკუპროგნოზირებისთვის კი ე.წ. დაბრუნებად მოდელს

$$\Phi_p(F)W_t = Q_q(F)l_t, \tag{8.17}$$

სადაც $F = B^{-1}$, ე.ი. $Fz_t = z_{t+1}$, ხოლო l_t, $t = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, $El_t = 0$, $\sigma_l^2 = \sigma_a^2$.

აღვწეროთ ეს საკმაოდ რთული (ტექნიკური თვალსაზრისით) პროცედურა (0,1,1) პროცესისთვის. ამ შემთხვევაში, პროცესი $W_t = z_t - z_{t-1}$,

არის MA(1) პროცესი ერთადერთი შესაფასებელი პარამეტრით θ_1 ($\theta_1 \equiv \theta$, შემდგომში ქვედა ინდექსი „1“ გამოტოვებული იქნება).

ეს პროცესი შეიძლება ჩაწერილ იქნას ორი ფორმით ((8.15)-სა და (8.17)-ის თანახმად).

$$a_t = W_t + \theta a_{t-1},$$

$$(\text{ეკვივალენტურად } \; a_t = W_t + \theta W_{t-1} + \theta^2 W_{t-2+\cdots}),$$

ან

$$l_t = W_t + \theta l_{t+1},$$

$$(\text{ეკვივალენტურად } \; l_t = W_t + \theta W_{t+1} + \theta^2 W_{t+2} + \cdots).$$

აქედან შეიძლება მივიღოთ

$$[a_t] = [W_t] + \theta[a_{t-1}], \tag{8.18}$$

$$[l_t] = [W_t] + \theta[l_{t+1}], \tag{8.19}$$

სადაც $[\cdots]$ არის აღნიშვნა პირობითი მათემატიკური ლოდინის, პირობაში წარსული $\mathbf{W}$. შევნიშნოთ, რომ $[W_t] = W_t$, $t = 1, 2, \ldots, n$ და წარმოადგენს W_t-ს უკუპროგნოზს $t \leq 0$-სთვის.

შემდგომი რეკურენტული გამოთვლები იწარმოებს (8.18) და (8.19) ფორმულების გამოყენებით. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ვიყენებთ პირველ 10 დაკვირვებას. თავდაპირველად ჩამოვთვალოთ ცნობილი სიდიდეები. მოცემული $z_0, \ldots, z_9$ სიდიდეებიდან გამოვთვალოთ $W_1, \ldots, W_9$. $[l_0], [l_{-1}], \ldots$ სიდიდეები ნულის ტოლია, რადგან $l_0, l_{-1}, \ldots$ დამოუკიდებელია $\mathbf{W}$-სგან. $[a_{-1}], [a_{-2}] \ldots$ აგრეთვე ნულის ტოლია, რადგან MA(q) პროცესისთვის $[a_{-q}], [a_{-q-1}], \ldots$ დამოუკიდებელნი არიან $\mathbf{W}$-სგან.

აპროქსიმაციის პროცედურა იწყება დაშვებით, რომ

$$[l_{10}] = 0.$$

ამის შემდეგ, ვიყენებთ რა θ-ს როლში პარამეტრის წინასწარ შეფასებას θ_0, ვითვლით

$$[l_9] = [W_9] + \theta_0[l_{10}] = W_9 + 0,$$

$$[l_8] = [W_8] + \theta_0[l_9],$$

$$[l_0] = [W_0] + \theta_0[l_1],$$

ანუ

$$0 = [W_0] + \theta_0[l_1].$$

ე.ი. $[W_0] = -\theta_0[l_1]$ და ამიტომ $[W_{-h}] = 0$, $h = 1, 2, \ldots$ გამოვიყენოთ (8.18) ტოლობა $t = 0$-სთვის. გვექნება

$$[a_0] = [W_0] + \theta_0[a_{-1}] = -\theta_0[l_1] + \theta_0 \cdot 0 = -\theta_0[l_1].$$

ამის შემდეგ გამოთვლები მიმდინარეობს პირდაპირი მიმართულებით და გამოითვლება ყველა $[a_t]$. მსგავსი პროცედურა დაწვრილებით შეიძლება აღიწეროს ზოგადი ARMA(p,q) პროცესებისათვის. ჩვენ არ მოვიყვანთ ამ აღწერას.

ახლა შევეხოთ პარამეტრების შეფასების პრობლემას.

როგორც აღვნიშნეთ, უპირობო დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქციის გამოსახულებაში საკმაოდ დიდი n-სთვის მთავარ წევრს წარმოადგენს $S(\Phi, \theta)$ და, ამრიგად, დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებები დიდი სიზუსტით აპროქსიმირდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული შეფასებებით.

უმცირეს კვადრატთა შეფასებები $(\widehat{\Phi}, \widehat{\theta})$ მიიღება უპირობო კვადრატების ჯამის $S(\Phi, \theta)$ მინიმიზაციით.

აღვწეროთ ეს პროცედურა კვლავ MA(1) პროცესისათვის.

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში, $S(\Phi, \theta) = S(\theta)$ მხოლოდ ერთი θ ცვლადის ფუნქციაა. ამავე დროს, მის გამოსახულებაში უსასრულო ჯამის შეცვლა შეიძლება სასრული ჯამით

$$\sum_{t=0}^{n} [a_t]^2,$$

სადაც ყველა a_t გამოთვლილი გვაქვს. ფაქტობრივად, წინა პროცედურით გამოვთვალეთ უცნობი $[a_0]$ პარამეტრის ფიქსირებული θ_0 მნიშვნელობისათვის. აღვნიშნოთ $[a_{t,0}]$-ით $[a_t]$-ს მნიშვნელობა, გამოთვლილი $\theta = \theta_0$-სთვის.

ჩვენი მიზანია $S(\theta)$-ს მინიმიზაცია θ პარამეტრით. მაშინ დასაჯერობის განტოლება უცნობი θ პარამეტრის მოსაძებნად მოიცემა ასე:

$$\sum_{t=0}^{n} [a_t] \frac{\partial [a_t]}{\partial \theta} = 0.$$

$\frac{\partial [a_t]}{\partial \theta}$-ის მოსაძებნად უნდა გავაწარმოოთ θ ცვლადით განტოლება

$$[a_t] = Q_1^{-1}(B)[W_t],$$

რაც გვაძლევს

$$\frac{\partial [a_t]}{\partial \theta} = -Q_1^{-2}(B)[W_{t-1}] + Q_1^{-1}(B) \frac{\partial [W_t]}{\partial \theta}.$$

ეს საკმაოდ რთული არაწრფივი გამოსახულებაა. ამიტომ ვიყენებთ ლინეარიზაციის მეთოდს: $[a_t]$-ს ტეილორის მწკრივად გაშლას $\theta = \theta_0$-ის მიდამოში, რაც გვაძლევს:

$$[a_t] = [a_{t,0}] - (\theta - \theta_0)x_t,$$

სადაც $[a_{t,0}] = [a_t|W, \theta_0]$, $x_t = -\frac{\partial[a_t]}{\partial\theta}|_{\theta=\theta_0}$. ამ გამოსახულების დასაჯერობის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$\sum_{t=0}^{n}([a_{t,0}] - (\theta - \theta_0)x_t)x_t = 0.$$

მაშინ პირველი შესწორება მიიღება განტოლებიდან

$$\theta - \theta_0 = \frac{\sum_{t=0}^{n}[a_{t,0}]x_t}{\sum_{t=0}^{n}x_t^2}.$$

გამოვითვლით რა ახალ მნიშვნელობას $\theta = \theta_1$, ზემომოყვანილი პროცედურის გამოყენებით გამოვთვალოთ $[a_{t,1}] = [a_t|W, \theta_1]$, $x_t^1 = -\frac{\partial[a_t]}{\partial\theta}|_{\theta=\theta_1}$, მაშინ მივიღებთ მეორე შესწორებას

$$\theta - \theta_1 = \frac{\sum_{t=0}^{n}[a_{t,1}]x_t^1}{\sum_{t=0}^{n}(x_t^1)^2}$$

და ა.შ. პროცედურა საკმაოდ სწრაფად იკრიბება და გვაძლევს θ პარამეტრის შეფასებას $\hat{\theta}$.

მოვიყვანოთ x_t წარმოებულის გამოთვლის მარტივი რიცხვითი მეთოდი.

$$x_t \doteq ([a_t|W, \theta_0] - [a_t|W, \theta_0 + \delta])/\delta,$$

სადაც δ-ს იღებენ $\frac{1}{100}$-ის ტოლს.

შენიშვნა. MA(1) მოდელისათვის უცნობი θ პარამეტრის შეფასების პრობლემის სხვაგვარი, უფრო მარტივი გადაწყვეტა შემოთავაზებული იყო ჯ. დარბინის მიერ [39]. მისი მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: ჩავწეროთ MA(1) პროცესი უსასრულო ავტორეგრესიის სახით

$$z_t = -\sum_{j=1}^{\infty}\theta^j z_{t-j} + a_t.$$

შევწყვიტოთ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში მყოფი უსასრულო მწკრივი რაიმე წერტილში $t = k$. მაშინ დაშვებული შეცდომა ტოლი იქნება შემდეგი

სიდიდის

$$-\sum_{j=k+1}^{\infty} \theta^j z_{t-j} = -\theta^{k+1} a_{t-k-1},$$

რომელსაც გააჩნია ნულოვანი საშუალო და $(\theta^{2(k+1)}\sigma_a^2)$-ის ტოლი დისპერსია. რადგან $|\theta| < 1$ k-ს საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის შეცდომის დისპერსია მცირე იქნება და იგი შეგვიძლია უგულებელვყოთ.

ამრიგად, MA(1) პროცესი ჩაწერილი იქნება AR(k) პროცესის ფორმით

$$z_t = -\sum_{j=1}^{k} \theta^j z_{t-j} + a_k \text{ (+მცირე შეცდომა)}.$$

აღვნიშნოთ $\Phi_j = -\theta^j$ და არსებული დაკვირვებების მეშვეობით ავაგოთ Φ_j, $j = 0, 1, \ldots, k$ პარამეტრების დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებები $\widehat{\Phi}_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, რომლებიც, ცხადია, $(-\theta^j)$ სიდიდეების შეფასებებს წარმოადგენს.

დარბინმა აჩვენა, რომ θ-ს დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება მიიღება ფორმულით

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\Phi}_j \widehat{\Phi}_{j+1}}{\sum_{j=0}^{k} (\widehat{\Phi}_j)^2}$$

და, ამავე დროს, მას აქვს მინიმალური დისპერსია $(1 - \theta^2)/n$.

ჯ. დარბინის მეთოდი შეიძლება განზოგადოებული იქნას MA(q) მოდელებისთვისაც. ამ შემთხვევაში ის საკმაოდ რთულად გამოიყურება და ზემოთ აღწერილი იტერაციული პროცედურა მაინც საუკეთესო რჩება.

AR(1) პროცესისათვის შეფასება (უმცირეს კვადრატთა ან დასაჯერობის მაქსიმუმის) მოიცემა ფორმულით

$$\widehat{\Phi} = \frac{\sum W_t W_{t-1}}{\sum W_{t-1}^2} = \frac{c_1}{c_0} = r_1,$$

ანუ ამ შემთხვევაში ემთხვევა მომენტთა მეთოდით მიღებულ შეფასებას.

σ_a^2-ის შეფასება. როგორც ვნახეთ, უპირობო დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია მიიღება ტოლობით

$$l(\Phi, \theta, \sigma_a) = f(\Phi, \theta) - n \ln \sigma_a - \frac{S(\Phi, \theta)}{2\sigma_a^2},$$

სადაც $S(\Phi, \theta)$ მოიცემა ფორმულით. ვთქვათ, $\widehat{\Phi}$ და $\widehat{\theta}$ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული შეფასებებია (ე.ი. დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებე-

ბიც). მაშინ σ_a-ს შეფასება მიიღება განტოლებით

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_a} l(\widehat{\Phi}, \widehat{\theta}, \sigma_a) = 0,$$

საიდანაც უშუალო გამოთვლებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$s_a^2 := \widehat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n} S(\widehat{\Phi}, \widehat{\theta}).$$

მაგალითად, (პ) მოდელის შემთხვევაში

$$s_a^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=p+1}^{n} \left(W_t - \widehat{\Phi}_1 W_{t-1} - \cdots - \widehat{\Phi}_p W_{t-p} \right)^2$$

8.2 ზოგიერთი არაწრფივი პირობითად გაუსური მოდელი

არაწრფივი პირობითად გაუსური მოდელების შესწავლას, საჭიროების დასაბუთებასა და იმ ეფექტების აღწერას, რომელთა ახსნა ვერ მოხერხდა წრფივი გაუსური მოდელების ფარგლებში და რომელთა ახსნას შევეცდებით არაწრფივი მოდელებით, ჩვენ ჩავატარებთ ფინანსური აქტივების ფასების (აქციათა ფასები, სავალუტო კურსები) მაგალითზე.

აღვნიშნოთ S_n-ით ფინანსური აქტივის საბაზრო ფასის მნიშვნელობა დროის n მომენტში, $n = 1, 2, \ldots$. დრო შეიძლება იზომებოდეს წლებში, თვეებში, წუთებში, წამებში და ა.შ.

ემპირიული ანალიზი მიუთითებს იმაზე, რომ ფასები $(S_n)_{n\geq 1}$ მეტად არარეგულარულად იქცევა. ლ. ბაშელიე (1900 წ.) პირველი იყო მათ შორის, ვინც ფასების ევოლუციის აღსაწერად გამოიყენა ალბათური მიდგომა ანუ ჩათვალა, რომ ფასების პროცესი (S_n) წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, სახელდობრ, ე.წ. „შემთხვევით ხეტიალს" (დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების ჯამს). თუმცა, უნდა ითქვას, რომ მისი ნაშრომი ყურადღების მიღმა დარჩა.

30-იან წლებში გამოჩნდა რამოდენიმე შრომა, რომლებშიც ჩატარებული იყო ფასების ემპირიული ანალიზი იმ მიზნით, რათა გაცემულიყო პასუხი კითხვაზე: შესაძლებელია თუ არა ფასების მომავალი ცვლილების განჭვრეტა? ეს შრომები შეიცავდა მდიდარ სტატისტიკურ მასალას და მოულოდნელ (იმ დროისათვის) დასკვნებს, რომ ფასების ლოგარითმების ნაზრდები $h_k = \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}$, $k \geq 1$ (და არა თვით ფასების ნაზრდები) წარმოადგენს დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს. მიუხედავად ამისა, არც ეკონომისტებმა და არც პრაქტიკოსებმა არ მიაქციეს

სათანადო ყურადღება ამ ფაქტებს. ეს გამოწვეული იყო იმით, რომ ისინი არ ეთანხმებოდნენ პრაქტიკოსებს შორის გავრცელებულ აზრს, რომ ფასები ხასიათდება გარკვეული რიტმებით, ციკლებით, ტრენდით და ა.შ. და რომ ფასების მომავალი ძრაობის განსაჭვრეტად მხოლოდ ამ კომპონენტების გამოყოფაა საჭირო.

1953 წელს გამოჩნდა მ. კენდალის ნაშრომი, რომლითაც დაიწყო ფინანსური აქტივების ფასების დინამიკის კვლევის თანამედროვე პერიოდი. მ. კენდალმა, რომლის მიზანი იყო ციკლურობის აღმოჩენა ფასების ქცევაში, თავისდა გასაკვირად ვერ აღმოაჩინა ვერც ციკლურობა, ვერც ტრენდისა და რიტმების არსებობა და მივიდა დასკვნამდე, რომ ახალი ფასი ფორმირდება ძველი ფასისა და რაიმე შემთხვევითი სიდიდის საშუალებით, რომელიც შეიცავს ახალ ინფორმაციას.

ამ პერიოდიდან დაიწყო ფინანსური აქტივების ფასების (ფინანსური ინდექსების) დინამიკის უფრო ღრმა ანალიზი და ამის საფუძველზე ადეკვატური მოდელების შემუშავება.

შემდგომში, ფინანსური აქტივების ფასების დინამიკის აღსაწერად ჩვენ ვისარგებლებთ წარმოდგენით, რომელიც „რთული პროცენტის“ ფორმულის ანალოგიურია

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{8.20}$$

სადაც $H_n = h_1 + \cdots + h_n$, $n \geq 0$, $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ შემთხვევითი სიდიდეებია, დამოკიდებული მხოლოდ n მომენტისათვის არსებულ ინფორმაციაზე, რომელსაც პირობითად აღნიშნავენ $\mathcal{F}_n$-ით. ცხადია, რომ

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right) \approx \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$$

(როცა ΔS_n მცირეა).

სტატისტიკური კვლევის თვალსაზრისით ყველაზე მიმზიდველი იქნებოდა დაგვეშვა, რომ $H = (H_n)_{n\geq 0}$ მიმდევრობა გაუსურია (ასეც იქცეოდნენ 70-იან წლებში), რადგანაც გაუსის (ნორმალური) პროცესების სტატისტიკა შემთხვევით პროცესთა სტატისტიკის ერთ-ერთი ყველაზე განვითარებული მიმართულებაა. ამავე დროს, თუ მოხერხდებოდა ფასების ქცევის თავისებურებათა ახსნა ასეთი მოდელების ფარგლებში (მოვლენებს წინ გავუსწრებთ და შევნიშნავთ, რომ ეს ყოველთვის არ ხერხდება), მაშინ ადვილად გადაწყდებოდა პროგნოზირების პრობლემაც.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $(H_n)_{n\geq 0}$ პროცესი გაუსურია, მისი თვისებები სრულად აღიწერება $h = (h_n)_{n\geq 0}$ მიმდევრობის ლოდინებისა Eh_n და კოვარიაციების $\operatorname{cov}(h_n, h_m)$, $m, n \geq 0$ ტერმინებში. ამ შემთხვევაში h_{n+1}-ის საშუალო კვადრატული აზრით საუკეთესო შეფასებას (პროგნოზს) წარმოადგენს მისი პირობითი ლოდინი $\widehat{h}_{n+1} = E(h_{n+1}|h_1, \ldots, h_n)$,

პირობაში რომ დაფიქსირებულია $(h_1, \ldots, h_n)$ ვექტორის მნიშვნელობა, რომელიც ნორმალური კორელაციის თეორემის თანახმად, მოიცემა ფორმულით:

$$\widehat{h}_{n+1} = Eh_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i(h_i - Eh_i), \tag{8.21}$$

სადაც $(a_i)_{i \leq n}$ კოეფიციენტები გამოითვლება $(h_1, \ldots, h_{n+1})$ ვექტორის კოვარიაციული მატრიცით. ცხადად გამოითვლება პროგნოზის საშუალო კვადრატული შეცდომაც $\Delta_{n+1} = E(\widehat{h}_{n+1} - h_{n+1})^2$ (ზოგადი ფორმულა არ მოგვყავს).

$(h_1, \ldots, h_{n+1})$ ვექტორის გაუსურობის გამო, შემთხვევითი სიდიდე $l_n = \widehat{h}_{n+1} - h_{n+1}$ განაწილებულია ნორმალურად, $El_n = 0$, $El_n^2 = \Delta_{n+1}$. ამიტომ

$$P\left\{|\widehat{h}_{n+1} - h_{n+1}| \leq 2\sqrt{\Delta_{n+1}}\right\} \approx 0.95,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ შემთხვევათა 95%-ში ფასის მომავალი მნიშვნელობა S_{n+1} დაფარულია ინტერვალით:

$$\left[S_n e^{\widehat{h}_{n+1} - 2\sqrt{\Delta_{n+1}}}, S_n e^{\widehat{h}_{n+1} + 2\sqrt{\Delta_{n+1}}}\right]. \tag{8.22}$$

აღვნიშნოთ, რომ „ნორმალურობის“ მიმზიდველ ჰიპოთეზას ფრთხილად უნდა მივუდგეთ. მთელი რიგი ფინანსური აქტივის ფასების (განსაკუთრებით, სავალუტო კურსების) მონაცემთა ანალიზმა გამოავლინა „ნორმალურობიდან“ გადახრის მრავალი შემთხვევა: კერძოდ, შერჩევითი მნიშვნელობების ის პროცენტი, რომელიც არ მოხვდა საპროგნოზო ინტერვალში (იხ. ფორმულა (8.22)) გაცილებით მეტი აღმოჩნდა, ვიდრე უნდა ყოფილიყო „ნორმალურობის“ ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში („მძიმე“ კუდების ეფექტი; გარდა ამისა, h_n-ის ემპირიული სიმკვრივეების (ჰისტოგრამების) ანალიზმა დაადასტურა ექსცესის კოეფიციენტის დადებითობა, რაც მიუთითებს h_n-ის სიმკვრივის ლოდინის მიდამოში ნორმალურ სიმკვრივესთან შედარებით უფრო მეტ „გაწელილობას“ სიგრძეში (ნორმალური განაწილებისათვის ექსცესის კოეფიციენტი ნულის ტოლია).

70-იან წლებში ძირითად ემპირიულ მასალას წარმოადგენდა მონაცემები, რომლებიც დაფიქსირებული იყო ერთმანეთისაგან დროის დიდი ინტერვალებით (წელიწადით, კვარტალით, თვეით, კვირით) დაშორებულ მომენტებში. ტიპიურ ალბათურ-სტატისტიკურ მოდელებს $(h_n)_{n \geq 0}$ მიმდევრობისათვის, რომლებიც კარგადაა მორგებული ასეთ მონაცემებზე წარმოადგენს წრფივი გაუსური მოდელები, რომელთა ტიპიური წარმომადგენლებია: ავტორეგრესიული (AR), მცოცავი საშუალო (MA), შერეული (ARMA) და გაინტეგრებული (ARIMA) მოდელები.

80-იან წლებში ყოველდღიური მონაცემების, ხოლო 90-იან წლებში უფრო ხშირი მონაცემების (პრაქტიკულად უწყვეტად) მოპოვებისა და სტატისტიკური ანალიზის შესაძლებლობამ ფინანსური ინდექსების დინამიკაში გამოავლინა მანამდე უცნობი სპეციფიური თავისებურებანი, რომელთა ახსნაც უკვე აღარ ხერხდებოდა წრფივი გაუსური მოდელების ფარგლებში. მათ შორის აღსანიშნავია ფასების მნიშვნელობათა ფორმირების არაწრფივი ბუნება, კლასტერულობა (h_n-ის დაჯგუფება დიდი და პატარა მნიშვნელობების წყებებად), „გრძელი მეხსიერება“ (ფასებს „ახსოვს“ წასრული), ასიმეტრიული რეაქცია წინა პერიოდის ფასების ზრდასა და კლებადობაზე, „ნორმალურობიდან“ გადახრა და სხვა.

სწორედ, ფასების ყოველდღიური მონაცემების ანალიზთან დაკავშირებით იქნა შემუშავებული არაწრფივი პირობითად-გაუსური მოდელები, რომელთა მეშვეობითაც შესაძლებელი გახდა ბევრი ზემოჩამოთვლილი ფენომენის ახსნა. ამ მოდელებს შორის განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს ე.წ. ვოლატილობის მოდელები.

ARCH *ტიპის მოდელები*

ეს მოდელები განეკუთვნება ვოლატილობის მოდელების კლასს, რომლებიც იმართება დაკვირვებებით. იგულისხმება, რომ h_n-ის პირობითი განაწილება, პირობაში, რომ დაფიქსირებულია წინა დაკვირვებათა ვექტორი $(h_{n-1}, \dots, h_1)$, ნორმალურია პარამეტრებით μ_n და σ_n^2, ე.ი.,

$$\operatorname{Law}\{h_n | h_{n-1}, \dots, h_1\} = N(\mu_n, \sigma_n^2),$$

სადაც პირობითი დისპერსია σ_n^2 წარმოადგენს $(h_{n-1}, \dots, h_1)$ ვექტორის რაიმე არაწრფივ ფუნქციას. შემდგომში ჩავთვლით, რომ $\mu_n \equiv 0$, ხოლო ლოგარითმული ამონაგები $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ წარმოდგენილია შემდეგი ფორმით

$$h_n = \sigma_n a_n, \quad n \geq 0, \tag{8.23}$$

სადაც $a = (a_n)$ მიმდევრობა დამოუკიდებელი სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა.

ARCH(p) მოდელი — პირობითი არაერთგვაროვნების ავტორეგრესიული მოდელი. ის მოიცემა ვოლატილობის შემდეგი მოდელით

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2, \tag{8.24}$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, რაიმე მუდმივებია, ხოლო h_0 — (a_n) მიმდევრობისაგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე.

(8.24) თანაფარდობიდან ცხადია, რომ $(h^2_{n-i}, i = 1, 2, \ldots, p)$-ის დიდი მნიშვნელობები განაპირობებს σ^2_n-ის დიდ მნიშვნელობებს და პირიქით, მცირე მნიშვნელობები — მცირეს. მცირე $(h^2_{n-1}, \ldots, h^2_{n-p})$-ის შემდეგ h_n-ის დიდი მნიშვნელობის გამოჩენა კი შეიძლება გამოიწვიოს a_n-ის დიდმა მნიშვნელობებმა. აქედან უკვე გასაგებია, თუ რატომ აიხსნება ARCH(p) მოდელით ისეთი ეფექტი, როგორიცაა „კლასტერულობა“ ანუ (h_n) მნიშვნელობების დაჯგუფება „პატარა“ და „დიდი“ მნიშვნელობების დასტებად — დიდი ყოველდღიური ნახტომების პერიოდები ენაცვლება სტაბილურობის პერიოდებს.

მოვიყვანოთ ამ მოდელის ზოგიერთი თვისება. შემოვიფარგლოთ $p = 1$ შემთხვევის განხილვით, ე.ი.

$$h_n = \sigma_n a_n, \quad \sigma^2_n = \alpha_0 + \alpha_1 h^2_{n-1}, \tag{8.25}$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 1$. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ

$$Eh_n = 0,$$

$$E(h^2_n | h_{n-1}, \ldots, h_0) = \sigma^2_n = \alpha_0 + \alpha_1 h^2_{n-1},$$

$$\mathrm{cov}(h_n, h_m) = 0, \quad n \neq m,$$

$$Eh^2_n = \alpha_0 + \alpha_1 E h^2_{n-1}.$$

ამასთან, თუ $0 < \alpha_1 < 1$, ბოლო რეკურენტულ თანაფარდობას გააჩნია ერთადერთი სტაციონარული ამოხსნა

$$Eh^2_n \to \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad n \to \infty. \tag{8.26}$$

ამრიგად, თუ ჩავთვლით, რომ $h_0 \sim N\left(0, \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)$, მაშინ (h_n) მიმდევრობა წარმოადგენს თეთრ ხმაურს ფართო აზრით: $Eh_n \equiv 0$, $Eh^2_n = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$.

ადვილად მტკიცდება, რომ ექსცესის კოეფიციენტის „სტაციონარული“ მნიშვნელობა დამატებით შეზღუდვაში, $3\alpha^2_1 < 1$, მოიცემა ფორმულით:

$$K_n = \frac{Eh^4_n}{(Eh^2_n)^2} - 3 \to K = \frac{6\alpha^2_1}{1 - 3\alpha^2_1} > 0, \quad \text{როცა} \quad n \to \infty. \tag{8.27}$$

$K > 0$ მეტყველებს იმაზე, რომ (h_n) მიმდევრობის სტაციონარული განაწილების სიმკვრივე საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში უფრო მეტადაა ზევით „გაწელილი“ ვიდრე ნორმალური განაწილების სიმკვრივე (ნორმალური განაწილების შემთხვევაში $K = 0$).

მრავალრიცხოვანი მონაცემების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ფინანსური ინდექსებისათვის ექსცესის კოეფიციენტის დადებითობა უფრო წესია, ვიდრე გამონაკლისი. მაგალითად, General Motors-ის აქციათა ფასების მონაცემების მიხედვით ემპირიული ექსცესის კოეფიციენტი $\widehat{K} = 4.2$, ინგლისური ფუნტი სტერლინგის დოლარზე გაცვლის კურსის მონაცემების მიხედვით კი $\widehat{K} = 5.4$ და ა.შ.

თუმცა $\operatorname{cov}(h_n, h_m) = 0$, ეს არ ნიშნავს, რომ h_n და h_m, $n \neq m$, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. მართლაც, ძნელი არაა იმაში დარწმუნება, რომ თუ $\rho(k) = \operatorname{corr}(h_n^2, h_{n+k}^2)$, „სტაციონარულ რეჟიმში“ გვექნება

$$\begin{aligned} &\rho(1) = \alpha_1, \\ &\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) \Longrightarrow \rho(k) = \alpha_1^k. \end{aligned} \tag{8.28}$$

ამრიგად, $(h_n^2)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ავტოკორელაციური ფუნქცია ექსპონენციალურად ჩაქრობადია, როცა $0 < \alpha_1 < 1$. ეს ფაქტი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ARCH მოდელის საიდენტიფიკაციოდ.

ARCH(p) მოდელები მჭიდროდაა დაკავშირებული AR(p) მოდელებთან. კერძოდ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x_n = h_n^2$, $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$, მივიღებთ

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \cdots + \alpha_p x_{n-p} + \nu_n.$$

ე.ი. (x_n) მიმდევრობა ექვემდებარება AR(p) მოდელს ხმაურით (ν_n), ოღონდ (ν_n) მიმდევრობა აღარ წარმოადგენს დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, არამედ არის ე.წ. მარტინგალ-სხვაობა $E(\nu_n | h_{n-1}, \ldots, h_1, h_0) = 0$.

განვიხილოთ „ფასების მომავალი ძრაობის“ პროგნოზირების საკითხი, როდესაც $(h_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ექვემდებარება ARCH(1) მოდელს. კარგადაა ცნობილი, რომ h_{n+m}-ის საშუალო კვადრატული აზრით საუკეთესო პროგნოზს (შეფასებას) წარსული $(h_1, \ldots, h_n)$ დაკვირვებების მეშვეობით წარმოადგენს $\widehat{h}_{n+m} = E(h_{n+m} | h_n, \ldots, h_1) = 0$. თანაც ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს h_n-ის განსაზღვრიდან. ამრიგად, $\widehat{h}_{n+m} = 0$ და პროგნოზი ტრივიალურია. ამიტომ მიზანშეწონილია (h_{n+m})-ის არაწრფივი ფუნქციების, ვთქვათ, h_{n+m}^2-ის პროგნოზირების საკითხის შესწავლა.

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\widehat{h}_{n+m}^2 = \widehat{\sigma}_{n+m}^2 = \alpha_0 \frac{1-\alpha_1^m}{1-\alpha_1} + \alpha_1^m h_n^2. \tag{8.29}$$

რაც შეეხება S_{n+m} მნიშვნელობების პროგნოზირებას, მათთვის „პირველ მიახლოებაში“ საპროგნოზო ინტერვალად (ნდობის ინტერვალად) 95%-იანი

დონით შეიძლება მივიჩნიოთ შემდეგი ინტერვალი:

$$\left[S_n e^{-2\sqrt{\widehat{\sigma}^2_{n+1}+\cdots+\widehat{\sigma}^2_{n+m}}};\, S_n e^{2\sqrt{\widehat{\sigma}^2_{n+1}+\cdots+\widehat{\sigma}^2_{n+m}}}\right]. \tag{8.30}$$

გამოთქმა „პირველ მიახლოებაში" იმიტომ ვიხმარეთ, რომ სინამდვილეში h_n არაა ნორმალურად განაწილებული. (8.30)-ით მოცემული ინტერვალი კი აგებულია ნორმალურობის დაშვებით.

პროგნოზის გამოსათვლელად (8.29) ფორმულაში იგულისხმება, რომ α_0, α_1 პარამეტრების მნიშვნელობა ცნობილია. პრაქტიკაში, როდესაც ხდება მოდელის მორგება მონაცემებზე, ვარაუდი გამოითქმის მოდელის ფორმაზე, მისი პარამეტრები კი (α_0 და α_1 განსახილავ შემთხვევაში) უცნობებადაა მიჩნეული. ამიტომ წარმოიქმნება მათი შეფასების პრობლემა.

α_0 და α_1 პარამეტრების პირველადი შეფასების აგება შესაძლებელია მოენტთა მეთოდის გამოყენებით. მაგალითად, თუ გამოვიყენებთ თანაფარდობებს

$$Eh_n^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, \quad \rho(1) = \operatorname{corr}(h_n^2, h_{n+1}^2) = \alpha_1,$$

და თეორიულ დისპერსიასა და კორელაციას შევცვლით მათი ემპირიული ანალოგებით.

უფრო დაზუსტებული (გარკვეული აზრით ოპტიმალური) შეფასებების აგების მეთოდია დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდი, რომელიც ადვილად გამოყენებადია პირობითად-გაუსურ სქემებში.

პირველ რიგში, უნდა ამოიწეროს $(h_1, \ldots, h_n)$ ვექტორის ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე პარამეტრების ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის (α_0, α_1). იგი მოიცემა ფორმულით

$$\rho_{\alpha_0,\alpha_1}(h_n, \ldots, h_1, h_0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{h_k^2}{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2}}.$$

მას დასაჯერობის ფარდობასაც უწოდებენ. დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება აიგება შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0} \ln \rho_{\alpha_0,\alpha_1}(h_n, \ldots, h_1, h_0) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} \ln \rho_{\alpha_0,\alpha_1}(h_n, \ldots, h_1, h_0) = 0. \end{cases}$$

GARCH(p,q) მოდელები. ARCH(p) მოდელების წარმატებამ ისეთი ეფექტების ახსნაში, როგორებიცაა „კლასტერულობა", „მძიმე კუდები", დადებითი ექსცესი, გამოიწვია მათი მრავალრიცხოვანი განზოგადოებების გამოჩენა. ასეთ განზოგადოებულ ARCH ტიპის მოდელთა კლასს შეადგენს ე.წ. GARCH(p,q) მოდელები (1986, ტ. ბოლერსლევი). ამ მოდელებში

კვლავ იგულისხმება, რომ $h_n = \sigma_n a_n$, ოღონდ განსხვავებით ARCH-ისაგან, ვოლატილობის მოდელი შემდეგია:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2, \tag{8.31}$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ რაიმე მუდმივებია, h_0 და σ_0 $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისაგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. თუ ყველა $\beta_j \equiv 0$, მაშინ საქმე გვაქვს ARCH(p) მოდელთან.

GARCH მოდელების უპირატესობა ARCH მოდელებთან შედარებით მათი ეკონომიურობაა. ემპირიულ მონაცემებზე ARCH(p) მოდელების მორგებისას საჭირო ხდება p-ს დიდი მნიშვნელობების აღება, GARCH(p,q) მოდელების შემთხვევაში კი საკმარისია p და q-ს მცირე მნიშვნელობებით სარგებლობა (ეს ფაქტი ექსპერიმენტითაც მტკიცდება!). ამავე დროს GARCH მოდელების თვისებები ARCH-ების თვისებების მსგავსია.

ისევე, როგორც ARCH მოდელების შემთხვევაში, $\widehat{h}_{n+m} = 0$. ამიტომ სარგებლობენ h_{n+m}^2-ის პროგნოზებით. მაგალითად, GARCH(1,1) მოდელში პროგნოზის ფორმულა შემდეგია

$$\widehat{h}_{n+m}^2 = E(h_{n+m}^2 | h_n, \ldots, h_1) = \alpha_0 \frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} + \gamma^{m-1}(\alpha_1 h_n^2 + \beta_1 \sigma_n^2),$$

სადაც $\gamma = (\alpha_1, \beta_1)$. როგორც ვხედავთ, აქ პროგნოზის გამოსახულებაში h_n^2-ის გარდა, მონაწილეობს σ_n^2, რომელიც (8.31) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება გამოისახოს როგორც $(h_{n-1}, \ldots, h_0)$ და σ_0^2-ის ფუნქცია. ამრიგად, $\widehat{h}_{n+m}^2$-ის გამოსათვლელად საჭიროა σ_0^2-ის ცოდნაც. სტანდარტული გამოსავალი აქ შემდეგია: პირველი რამოდენიმე მონაცემით (ვთქვათ, 20 მონაცემით) ვაფასებთ გლობალურ დისპერსიას

$$\widehat{\sigma}_{20}^2 = \frac{1}{19} \sum_{n=1}^{20} (h_n - \overline{h})^2,$$

სადაც $\overline{h} = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20} h_i$, რომელიც გამოიყენება საწყისი შეფასების როლში დანარჩენი მწკრივისათვის $h_{21}, \ldots, h_n$. დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის დროს ეს მეთოდი კარგად მუშაობს.

EGARCH მოდელი. 1976 წელს ფ. ბლეკმა შეამჩნია შემდეგი ფენომენი ფინანსური ინდექსების დინამიკაში: შემთხვევითი სიდიდეების h_{n-1}-ისა და σ_n-ის უარყოფითად კორელირებულობა — $\widehat{\text{cov}}(h_{n-1}, \sigma_n) < 0$.

ამ ეფექტს „ლევერიჯის" ეფექტს (ბერკეტის ან ამწევი ძალის ეფექტს) უწოდებენ. საბოლოო ჯამში, ამ ეფექტის შედეგი ისაა, რომ ვოლატილობა

ასიმეტრიულად რეაგირებს ფასების ზრდასა და კლებაზე, ანუ h_n-ის ნიშანზე; მისი რეაქცია ფასების დაცემაზე უფრო ძლიერია. ეს ეფექტი არ აიხსნება ARCH, GARCH მოდელებით, რადგან ამ მოდელებში ვოლატილობა σ_n^2 დამოკიდებულია $(h_{n-1}^2, \dots, h_1^2)$-ზე და არ ითვალისწინებს (h_i)-ების ნიშნებს.

აღნიშნული ეფექტის ასახსნელად დ. ნელსონის მიერ შემოთავაზებული იყო ე.წ. EGARCH(p,q) (ექსპონენციალური GARCH(p,q)) მოდელი, სადაც კვლავ

$$h_n = \sigma_n a_n$$

„ასიმეტრიის" გათვალისწინება ხდება ვოლატილობის, σ_n^2-ის, გამოსახულებაში $h_{n-i}^2 (= \sigma_{n-i}^2 a_{n-i}^2)$-ის ნაცვლად a_{n-i}-სა და $|a_{n-i}|$-ს წრფივი კომბინაციის ჩაწერით:

$$\ln \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[\theta a_{n-i} + \gamma \left(|a_{n-i}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \ln \sigma_{n-j}^2. \quad (8.32)$$

განვიხილოთ EGARCH(1,1) მოდელი. გვექნება

$$\ln \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left[\theta a_{n-1} + \gamma \left(|a_{n-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \beta_1 \ln \sigma_{n-1}^2.$$

შევნიშნოთ, რომ $E|a_{n-1}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

რადგანაც $h_{n-1} = \sigma_{n-1} a_{n-1}$, $\sigma_{n-1} > 0$, ამიტომ h_{n-1}-სა და a_{n-1}-ს ერთნაირი ნიშნები აქვს. ვთქვათ, $h_{n-1} > 0$, მაშინ $a_{n-1} > 0$ და თუ $a_{n-1} = \Delta > 0$, მაშინ მისი შენატანი σ_n^2-ის მნიშვნელობაში განისაზღვრება სიდიდით $\Delta(\theta + \gamma)$, ხოლო, თუ $a_{n-1} = -\Delta < 0$, მაშინ შენატანი განისაზღვრება სიდიდით $\Delta(\theta - \gamma)$, რაც მიუთითებს ვოლატილობის ასიმეტრიულ რეაქციას h_{n-1}-ის ნიშანზე.

TGARCH(p,q) მოდელი. იგი მიეკუთვნება იმ მოდელების კლასს, რომელიც ინარჩუნებს GARCH მოდელების ძირითად თვისებებს, მაგრამ საშუალებას იძლევა აიხსნას ზოგიერთი ეფექტი, რომლის ახსნაც არ მოხერხდა GARCH მოდელებით. TGARCH(p,q) მოიცემა ვოლატილობის შემდეგი მოდელით:

$$\sigma_n = a_0 + \sum_{i=1}^{p} [a_i h_{n-i}^+ + b_i h_{n-i}^-] + \sum_{j=1}^{q} [c_j \sigma_{n-i}^+ + d_j \sigma_{n-i}^-],$$

სადაც $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0)$. ამ მოდელებში არ იგულისხმება კოეფიციენტების და აქედან გამომდინარე σ_n-ის დადებითობაც, მაგრამ σ_n^2 ინარჩუნებს პირობითი დისპერსიის აზრს.

HARCH მოდელი. მრავალრიცხოვანი სტატისტიკური კვლევები მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ ფინანსურ დროით მწკრივებს ახასიათებს უფრო ძლიერი კორელაციური დამოკიდებულება $h^2 = (h_n^2)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრებს შორის, ვიდრე ARCH, GARCH და მით უმეტეს, AR, MA და ARMA მოდელებში. გავიხსენოთ, რომ ARCH და GARCH მოდელებში კორელაციურ ფუნქციას, $\rho_{h^2}(k)$, ახასიათებს ექსპონენციალური ჩაქრობადობა („მეხსიერება სწრაფად ივიწყებს წარსულს").

„გრძელი მეხსიერების" მქონე ფინანსური დროითი მწკრივების აღწერის მიზნით შემოღებული და შესწავლილ იქნა მთელი რიგი მოდელების, რომელთა წარმომადგენელია HARCH(p), რომელშიც ვოლატილობის მოდელი შემდეგია

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{j} h_{n-j} \right)^2$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_p > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$, რაიმე მუდმივებია. ცხადია, რომ HARCH(1) = ARCH(1). განვიხილოთ შემთხვევა $p = 2$, ე.ი.

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2.$$

შევნიშნოთ, რომ დამატებითი წევრი $\alpha_2(h_{n-1} + h_{n-2})^2$ გარდა გრძელი მეხსიერებისა, იჭერს ასიმეტრიულობის ეფექტს ფასების დინამიკაში. მართლაც, რადგან $\alpha_2 > 0$, თუ $h_{n-1}h_{n-2} > 0$, მაშინ ვოლატილობა უფრო მეტად იზრდება, ვიდრე განსხვავებული ნიშნისა და იგივე აბსოლუტური სიდიდეების მქონე h_{n-1}, h_{n-2}-ის შემთხვევაში.

ჩვენ არ მოვიყვანთ HARCH მოდელის თვისებებს, აღვნიშნავთ მხოლოდ იმას, რომ $(h_n^2)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კორელაციური ფუნქცია მოიცემა რეკურსიით

$$\rho_{h^2}(k) = A + B\rho_{h^2}(k-1) + C\rho_{h^2}(k-2), \quad k \geq 2,$$

რაც მიუთითებს „ხანგრძლივ მეხსიერებაზე".

სტოქასტური ვოლატილობის მოდელები. ამ მოდელებში საქმე გვაქვს შემთხვევითობის ორ წყაროსთან: $(a_n)_{n\geq 1}$ და $(\delta_n)_{n\geq 1}$,

$$h_n = \sigma_n a_n,$$

$$\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta n},$$

სადაც $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ექვემდებარება AR(p) მოდელს:

$$\Delta_n = \alpha_0 + \sum_{i=1} \alpha_i \Delta_{n-i} + c\delta_n, \quad c > 0.$$

ამასთან უმარტივეს შემთხვევებში იგულისხმება, რომ (a_n) და (δ_n) დამოუკიდებელი სტანდარტული გაუსური მიმდევრობებია.

აქ $(h_n)_{n\geq 1}$ დაკვირვებადი მიმდევრობა, ხოლო $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ — დაუკვირვებადი. ამ თვალსაზრისით ეს მოდელები ახლოსაა კალმან-ბიუსის ტიპის ნაწილობრივ-დაკვირვებად მოდელებთან და მათი შესწავლა წარმოებს კალმან-ბიუსის ფილტრაციის თეორიის ფარგლებში.

პროგნოზირება

ჩვენ შევეხებით უმთავრესად მოკლევადიანი პროგნოზირების (კვირა, თვე ან წელიწადი) მეთოდებს, თუმცა მოკლედ მოვიყვანთ რეგრესიული ანალიზის მეთოდებს, რაც არის საშუალო ვადიანი პროგნოზირების (წელიწადი ან მეტი) საფუძველი. ჩვენი აზრით, გრძელვადიანი პროგნოზები საქართველოს ეკონომიკის განვითარების მოცემულ ეტაპზე, სათანადო მონაცემების არსებობის პირობებშიც კი, საკმაოდ არაზუსტი იქნება.

8.3 პროგნოზირების მარტივი ალგორითმები

ექსპონენციალური გაგლუვება. დავუშვათ, რომ დაკვირვების შედეგად მიღებული პროცესი ან სტაციონარულია (გავიხსენოთ, რომ თუ პროცესი $z_1, z_2, \ldots$ სტაციონარულია, $Ez_t = \text{const}$, $Dz_t = \text{const}$, $\text{cov}(z_t, z_s) = f(t-s)$), ანუ თუ პროცესი „საშუალოდ არ იცვლება"), ან მას გააჩნია დეტერმინისტული ან სტოქასტური ტრენდი.

დაკვირვებები წარმოებს $t = 1, 2, \ldots$ მომენტებში და პროგნოზის ბაზაზე დაყრდნობით (პროგნოზის ბაზა — ის მონაცემებია, რომლებსაც ვაკვირდებით პროგნოზირების მოდელის შესამუშავებლად) ვაკეთებთ პროგნოზს გარკვეულ ჰორიზონტზე, ანუ დროის იმ მომავალი მომენტებისათვის, რომლებისთვისაც გვიცდა უცნობი z_i სიდიდეების მნიშვნელობების „გამოცნობა".

პროგნოზირების უმარტივეს და ტრადიციულ მეთოდს ე.წ. მცოცავი საშუალოს მეთოდი წარმოადგენს.

განვიხილოთ სიდიდე

$$m_t = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{t-n+1} z_i, \tag{8.33}$$

ანუ

$$m_t = m_{t-1} + \frac{1}{n}(z_t - z_{t-n}). \tag{8.34}$$

როგორც ვხედავთ, ხდება n წარსული დაკვირვების გასაშუალოება. პროგნოზად t მომენტიდან l ნაბიჯის ჰორიზონტით მიღებულია

$$f_t(l) = m_t. \tag{8.35}$$

ამ მეთოდის განვითარებაა ე.წ. ექსპონენციალური გაგლუვება — მარტივი ექსპონენციალურად შეწონილი საშუალო

$$m_t = \alpha z_t + (1 - \alpha)m_{t-1}, \tag{8.36}$$

სადაც $0 < \alpha < 1$, $m_1 = z_1$ (ან სხვა რაიმე სიდიდეს, რომელიც ჩვენს მიერ არის შესარჩევი). α-ს გაგლუვების პარამეტრი ჰქვია. თუ α დიდია (ე.ი. ახლოსაა 1-თან), მაშინ (8.36)-ით განსაზღვრული სიდიდე m_t მგრძნობიარეა ახალი დაკვირვების გამოჩენის მიმართ. თუ α მცირეა (ახლოსაა 0-თან), მაშინ m_t გაცილებით უფრო მდგრადია. ასე რომ, გაგლუვების პარამეტრის შერჩევაზე დიდადაა დამოკიდებული მთელი პროცედურა (8.36).

(8.34) ფორმულის მსგავსად (8.36) შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$m_t = m_{t-1} + \alpha(z_t - m_{t-1}). \tag{8.37}$$

პროგნოზისთვის გვაქვს

$$f_t(l) = m_t, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{8.38}$$

შემოვიღოთ ერთნაბიჯიანი პროგნოზის მიმდინარე შეცდომის ცნება, e_t,

$$e_t = z_t - f_{t-1}(1) = z_t - m_{t-1}. \tag{8.39}$$

მაშინ (8.37) ასე გადაიწერება

$$m_t = m_{t-1} + \alpha e_t. \tag{8.40}$$

ზემოთ მოყვანილი უმარტივესი მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნას სტაციონარული მიმდევრობების პროგნოზირების დროს. იმ შემთხვევაში, როდესაც დაკვირვებად პროცესს z_t, $t = 1, 2, \ldots$ გააჩნია წრფივი ტრენდი, მაშინ ექსპონენციალური გაგლუვების შესაბამისი მოდიფიკაციით მიიღება პროგნოზირების მარტივი, მაგრამ საკმაოდ ეფექტური პროცედურები.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

ჰოლტის მეთოდი. ჰოლტის მეთოდი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, თუ დაკვირვებების (z_t-ების) გენერირება ჰიპოთეტურად ხდება შემდეგი მოდელის მიხედვით

$$z_t = \mu + \lambda_t t + a_t, \tag{8.41}$$

სადაც λ_t წრფის დახრილობის კოეფიციენტია. შევნიშნოთ, რომ დახრილობის კოეფიციენტი იცვლება $(t, t+1)$ ინტერვალში, რაც განასხვავებს ამ მოდელს ჩვეულებრივი წრფივი რეგრესიის მოდელისაგან. a_t შემთხვევითი შეცდომებია ნულოვანი საშუალოთი.

მეთოდი ეფუძნება λ_t პარამეტრის შეფასებას b_t კოეფიციენტის საშუალებით, რომელიც თავის მხრივ $(m_t - m_{t-1})$-სა და b_{t-1}-ის შეწონილი საშუალოა, რაც აძლევს პროცედურას წრფივი ტრენდის წინა მნიშვნელობასთან ადაპტაციის საშუალებას.

პროცედურა ორპარამეტრიანია და მოიცემა შემდეგი სისტემით

$$\begin{aligned} m_t &= Az_t + (1-A)(m_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= B(m_t - m_{t-1}) + (1-B)b_{t-1}, \end{aligned} \tag{8.42}$$

სადაც $0 < A, B < 1$; m_1 და b_1 შესარჩევია. მაგალითად, $m_1 = z_1$, $b_1 = 0$.

პარამეტრები A და B აირჩევიან გარკვეული კრიტერიუმის მიხედვით, რაზეც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

პროგნოზს აქვს სახე

$$f_t(l) = m_t + b_t l. \tag{8.43}$$

ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების მეთოდი. ეს მეთოდი საკმაოდ ცნობილი მეთოდია და რიგ შემთხვევებში კარგ პროგნოზებს იძლევა. ის პროცედურა, რომელიც შემოგვთავაზა ბრაუნმა, ეფუძნება მის ორიგინალურ გამოკვლევას. ამ მეთოდის დასაბუთება სცილდება ჩვენს მიზნებს. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ მეთოდს საფუძვლად უდევს ორმაგი ექსპონენციალური გასაშუალოება:

პირველი

$$m_t = \alpha z_t + (1-\alpha)m_{t-1},$$

მეორე

$$\overline{m}_t = \alpha m_t + (1-\alpha)\overline{m}_{t-1}.$$

პროგნოზი მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$f_t(l) = 2m_t - \overline{m}_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(m_t - \overline{m}_t)l.$$

როცა $l = 1$, პროგნოზს აქვს მარტივი სახე

$$f_t(1) = \frac{(2-\alpha)m_t - \overline{m}_t}{1-\alpha}.$$

როგორც ვხედავთ, მეთოდი ერთპარამეტრიანია. პარამეტრის მნიშვნელობის შერჩევა ხდება პროგნოზის სიზუსტის სხვადასხვა საზომის მინიმიზაციის პირობიდან.

8.4 პროგნოზის სიზუსტის საზომები

განვიხილოთ პროგნოზის სიზუსტის გაზომვის სხვადასხვა ფართოდ გავრცელებული მახასიათებლები.

გავიხსენოთ, რომ t-ურ მომენტში ერთწაბიჯიანი პროგნოზის შეცდომა ჰქვია სიდიდეს

$$e_t = z_t - f_{t-1}(1), \quad t = 1, 2, \ldots.$$

აღვნიშნოთ $\overline{e}$ და σ^2-ით შეცდომების საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა

$$\overline{e} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(e_t - \overline{e}_t)^2.$$

მაშინ სიდიდეს

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

ჰქვია შეცდომის სტანდარტული გადახრა.

გამოსახულებას

$$\mathrm{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|e_t|$$

ეწოდება საშუალო აბსოლუტური შეცდომა.

მოხერხებულია შემდეგი მახასიათებლის შემოღება (MAPE — Mean Absolute Percentage Error)

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|e_t|}{z_t}\cdot 100.$$

MAPE-ს ტიპიური მნიშვნელობების ინტერპრეტაცია მოიცემა ცხრილით

MAPE, %	ინტერპრეტაცია
10	მაღალი სიზუსტე
10–20	კარგი სიზუსტე
20–50	დამაკმაყოფილებელი სიზუსტე
50	არადამაკმაყოფილებელი სიზუსტე

შემდეგი მახასიათებელი მეტყველებს პროგნოზის ჩანაცვლებაზე

$$\mathrm{MPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t}{z_t}\cdot 100.$$

მისი სიდიდე არ უნდა აღემატებოდეს 5%-ს.

ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ საზომს წარმოადგენს შეცდომის საშუალო კვადრატი

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2,$$

და კვადრატების ჯამი

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} e_t^2.$$

ისინი გამოიყენებიან ყველაზე ხშირად ოპტიმალური მოდელის არჩევისათვის.

დამსწავლელი შერჩევის მეთოდი. პროგნოზის მახასიათებლების (პარამეტრების) შერჩევის ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული მეთოდია დამსწავლელი შერჩევის მეთოდი. აღვწეროთ იგი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ამოკრეფა (დაკვირვებები) $z_1, z_2, \ldots, z_n$. გავყოთ ეს ამოკრეფა ორ ნაწილად: $z_1, z_2, \ldots, z_k$ და $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n$, სადაც $k < n$ რაიმე მთელი რიცხვია.

ამოკრეფის პირველ ნაწილს ვუწოდოთ დამსწავლელი, ხოლო მეორეს გამომცდელი.

დაკვირვებათა პირველ ჯგუფზე დაყრდნობით ვაფასებთ ყველა საჭირო პარამეტრს, ხოლო მეორეზე ვამოწმებთ პროგნოზის სიზუსტეს.

მაგალითად, ბრაუნის მოდელში შესაფასებელი პარამეტრია α. საწყის m_0 მნიშვნელობად ავიღოთ, მაგალითად, პირველი წევრი z_1, ან $m_0 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ და ა.შ. ავირჩიოთ გაგლუვების ბაზა k და დავაფიქსიროთ α პარამეტრის მნიშვნელობების ბადე

$$\alpha = 0; 0.1; 0.2; \ldots; 0.9.$$

კომპიუტერის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს კიდევ უფრო ხშირი ბადეც განვიხილოთ.

გავაკეთოთ ერთნაბიჯიანი პროგნოზი k-ურ მომენტში $z_1, \ldots, z_k$ დაკვირვებებზე დაყრდნობით, ანუ გამოვთვალოთ $f_k(1)$. გამოვთვალოთ პროგნოზის შეცდომა

$$e_1 = z_{k+1} - f_k(1).$$

ამის შემდეგ გადავწიოთ ბაზა მარჯვნივ ერთ ნაბიჯზე, ანუ განვიხილოთ დაკვირვებები $z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}$ და გამოვთვალოთ პროგნოზი $f_{k+1}(1)$ და პროგნოზის შეცდომა

$$e_2 = z_{k+2} - f_{k+1}(1)$$

და ა.შ.

მივიღებთ $n-k$ პროგნოზის შეცდომას e_t, $t = 1, 2, \ldots, n-k$. გამოვთვალოთ, მაგალითად

$$MSE = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} e_t^2,$$

ან

$$\mathrm{MAD} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} |e_t|,$$

ან

$$\mathrm{MPE} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} \frac{e_t}{z_t} \cdot 100.$$

ამ მაჩვენებლების შედარებით ოპტიმალურად შევარჩიოთ α პარამეტრის სიდიდე. ოპტიმალურია ის α, რომლის შესაბამისი მაჩვენებელი მინიმალურია.

ანალოგიურად შეიძლება ოპტიმალური m_0-სა და გაგლუვების ბაზის შერჩევა.

8.5 პროგნოზირება ARIMA პროცესებზე დაყრდნობით

პროგნოზირება ARIMA მოდელებზე დაყრდნობით, პირველ რიგში, გულისხმობს ARIMA ტიპის მოდელების პოსტულირებას, როგორც იმ მოდელების ზოგადი კლასისა, რომლებიც აღწერს შესასწავლ დროით მწკრივს.

ზოგადი ARIMA(p,d,q)-მოდელი მოიცავს ე.წ. სტოქასტური ტრენდის შემთხვევას, ანუ ისეთი ტრენდისას, რომლის ცვლილება სხვადასხვა შემთხვევით მომენტებში ხდება. ხშირად სწორედ ასეთი ტრენდი ახასიათებს ეკონომიკურ დროით მწკრივებს.

მიუხედავად ამისა, შეიძლება არსებობდეს მიზეზები, რომლებიც მიუთითებენ, რომ პროცესს აქვს დეტერმინისტული მდგენელი. ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია დეტერმინისტული ფუნქცია f_t, რომელიც იღებს მონაწილეობას მონაცემების ფორმირებაში $z'_t = f_t + z_t$. მაშინ ჯერ გადავდივართ

პროცესზე $z_t = z_t' - f_t$ და შემდეგ განვაგრძობთ ამ მონაცემების კვლევას. ასეთ ქმედებას ჩვენ რეგულარიზაციას ვუწოდებთ. არსებობს დეტერმინისტული ტრენდის გამოყოფის სტანდარტული მეთოდები, რომლებზეც ჩვენ არ შევჩერდებით.

ადვილია დეტერმინისტული პოლინომიალური ტრენდის გათვალისწინება ზოგად მოდელში.

ამისათვის იხილავენ ARIMA(p,d,q) მოდელის განზოგადოებას

$$\Phi_p(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + Q_q(B)a_t, \tag{8.44}$$

სადაც $\theta_0 \neq 0$.

მართლაც ვთქვათ, $d = 1$. მაშინ $\theta_0 \neq 0$ ითვალისწინებს წრფივ დეტერმინისტულ ტრენდს. ამის დასანახად, გამოვთვალოთ საშუალო

$$EW_t = E\nabla z_t := \mu_W = \frac{\theta_0}{1 - \Phi_1 - \cdots - \Phi_p} \neq 0.$$

მაშინ $z_t = \widetilde{z}_t + \mu_W t$, სადაც $\widetilde{z}_t$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Phi_p(B)\widetilde{z}_t = Q_q(B)a_t.$$

მართლაც, თუ აღვნიშნავთ $\widetilde{W}_t = \widetilde{z}_t - \widetilde{z}_{t-1}$, მაშინ $\widetilde{W}_t = W_t - \mu_W$ და კვლავ ძველ შემთხვევას დავუბრუნდებით, ე.ი.

$$\Phi_p(B)\widetilde{W}_t = Q_q(B)a_t.$$

გავუსწროთ მოვლენებს ცოტათი წინ და შევნიშნოთ, რომ თუ $\overline{W}$ არის $W_t = \nabla^d z_t$-ს შერჩევითი საშუალო

$$\overline{W} = \frac{\sum W}{n},$$

მაშინ მისი სტანდარტული გადახრა $\sigma(\overline{W})$ ტოლია $(1, d, 0)$-პროცესებისთვის $\left(\frac{c_0(1+r_1)}{n(1-r_1)}\right)^{1/2}$ გამოსახულების და $(0, d, 1)$-პროცესებისთვის $\left(\frac{c_0(1+2r_1)}{n}\right)^{1/2}$ გამოსახულების, სადაც c_0 z_t პროცესის შერჩევითი დისპერსია, ხოლო r_1 ერთნაბიჯიანი ავტოკორელაციაა.

მაშინ, $\theta_0 = 0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად, შეიძლება შემოვიღოთ შემდეგი მარტივი კრიტერიუმი.

ვიცით, რომ

$$\frac{\theta_0 - \overline{W}}{\sigma(\overline{W})} \sim N(0,1).$$

ამიტომ, თუ $\theta_0 = 0$, $P\{|\overline{W}| > 2\sigma(\overline{W})\} < \frac{1}{20}$ (2σ-ს კანონი). ამრიგად, თუ გამოვთვლით $\overline{W}$-ს და $2\sigma(\overline{W})$-ს ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით და

აღმოჩნდება, რომ $|\overline{W}| < 2\sigma(\overline{W})$, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\theta_0 = 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\theta_0 \neq 0$ და მაშინ ამ წერტილის შეფასებად მივიღებთ სიდიდეს

$$\widehat{\theta}_0 = \overline{W}(1 - \Phi_1).$$

დავუბრუნდეთ ზოგად ARIMA(p,d,q) პროცესს. ჩავთვალოთ, რომ $\theta_0 = 0$. მაშინ ასეთ პროცესებზე დაყრდნობილი პროგნოზირების მთელი ტექნოლოგია შეიძლება გავყოთ შემდეგ ეტაპებად:

1. ARIMA(p,d,q) ტიპის პროცესების ზოგადი თვისებების აღწერა.

2. 1.-ზე დაყრდნობით იდენტიფიკაციის ჩატარება. აქ მთავარ იარაღს ე.წ. ავტოკორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების კვლევა წარმოადგენს.

3. უცნობი პარამეტრების პირველადი შეფასება და საპროგნოზო ფუნქციების და მათი ალბათური საზღვრების დადგენა.

4. პარამეტრების შეფასება.

5. მიღებული მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება.

გადავიდეთ ზემომოყვანილი სქემის რეალიზაციაზე.

რადგან ARIMA ტიპის პროცესების ზოგადი აღწერა, მათი ავტოკორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების დახასიათება, პარამეტრების შეფასების პრობლემები და საპროგნოზო ფუნქციის გამოსახულებები ჩვენ უკვე აღწერილი გვაქვს წინა პუნქტებში, დარჩენილ ნაწილში ჩვენ შევეხებით მხოლოდ იდენტიფიკაციისა და მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმების საკითხებს.

იდენტიფიკაცია

სხვაობების აღების რიგის იდენტიფიკაცია (როგორ დავადგინოთ, რას უდრის d?). თეორიულ ავტოკორელაციურ ფუნქციას ρ_k-ს სტაციონარული პროცესებისათვის ახასიათებს ჩაქრობადობის თვისება.

ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქცია r_k ჰგავს თეორიულს. ამიტომ, თუ ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქცია არ ქრება, ეს მიგვითითებს, რომ z_t პროცესი არასტაციონარულია, თუმცა შესაძლოა, რომ ∇z_t ან რომელიმე უფრო მაღალი რიგის სხვაობა სტაციონარული პროცესი იყოს. ამასთან, არ არის აუცილებელი, რომ მცირე დაგვიანებებისთვის ამოკრეფითი კორელაციები იყოს დიდი.

ამრიგად, $W_t = \nabla^d z_t$ პროცესის ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქციის სწრაფი ჩაქრობა მიუთითებს, რომ სხვაობების საჭირო რიგი d მიღწეულია. პრაქტიკაში $d = 0, 1$ ან 2 და საკმარისია განვიხილოთ ავტოკორელაციების 20 პირველი მნიშვნელობა.

საბოლოო სტაციონარული პროცესის სახის იდენტიფიკაცია (როგორ ავირჩიოთ p და q?) იმის შემდეგ, რაც დადგინდება d-ს სიდიდე, ვსწავლობთ სათანადო სხვაობების $W_t = \nabla^d z_t$-ის ემპირიული ავტო-

კორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების ყოფაქცევას. აქ ვიყენებთ პუნქტ 8.1-ში მოყვანილ შესაბამისი თეორიული ფუნქციების თვისებებს (იხ. ცხრილი 8.1).

აქაც, ეკონომიკურ-ფინანსური დროითი მწკრივების ანალიზისათვის ყველაზე მნიშვნელოვანია პირველი და მეორე რიგის ARIMA პროცესები, ე.ი., როცა p და q იღებს მნიშვნელობებს 0,1 ან 2.

მივაქციოთ ყურადღება შემდეგ ფაქტს: შერჩევით ავტოკორელაციებს შეიძლება ჰქონდეთ საკმაოდ დიდი დისპერსიები და იყვნენ ერთმანეთთან ძლიერად კორელირებულნი. ამიტომ, როგორც აღნიშნავდა კენდალი, არ არის მოსალოდნელი დეტალური მსგავსება თეორიული და ემპირიული ფუნქციებისა. კერძოდ, ემპირიული ავტოკორელაციის ზომიერად დიდი მნიშვნელობები შეიძლება გამოჩნდნენ მაშინაც კი, როცა თეორიული ფუნქციები ჩაქრნენ; შეიძლება გამოჩნდნენ შეშფოთებები, ტრენდები და ა.შ.

თეორიული და ემპირიული ფუნქციები გვანან ერთმანეთს ძირითადში. ამიტომ ზუსტი იდენტიფიკაცია ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. შესაძლოა, შესასწავლი პროცესისთვის მოგვიხდეს სხვადასხვა მოდელის არჩევა. ეს მოდელები ზუსტდება შესწავლის შემდგომ ეტაპზე.

მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება. ვთქვათ, საჭიროა შემდეგი მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება

$$\Phi_p(B)W_t = Q_q(B)a_t .$$

გამოვთვალოთ სიდიდეები

$$\widehat{a}_t = \widehat{Q}_q^{-1}(B)\widehat{\Phi}_p(B)W_t ,$$

სადაც $\widehat{\Phi}_p(B)$ და $\widehat{Q}_q(B)$ მცოცავი საშუალოსა და ავტორეგრესიის გარდაქმნებია, რომლებშიც (Φ,θ) პარამეტრები შეცვლილია $(\widehat{\Phi},\widehat{\theta})$-ით, აგებული მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებებით. — აგებული მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებებია. ამ სიდიდეებს ნარჩენი შეცდომა ჰქვია. ადვილი საჩვენებლია, რომ თუ მოდელი ადეკვატურია, მაშინ

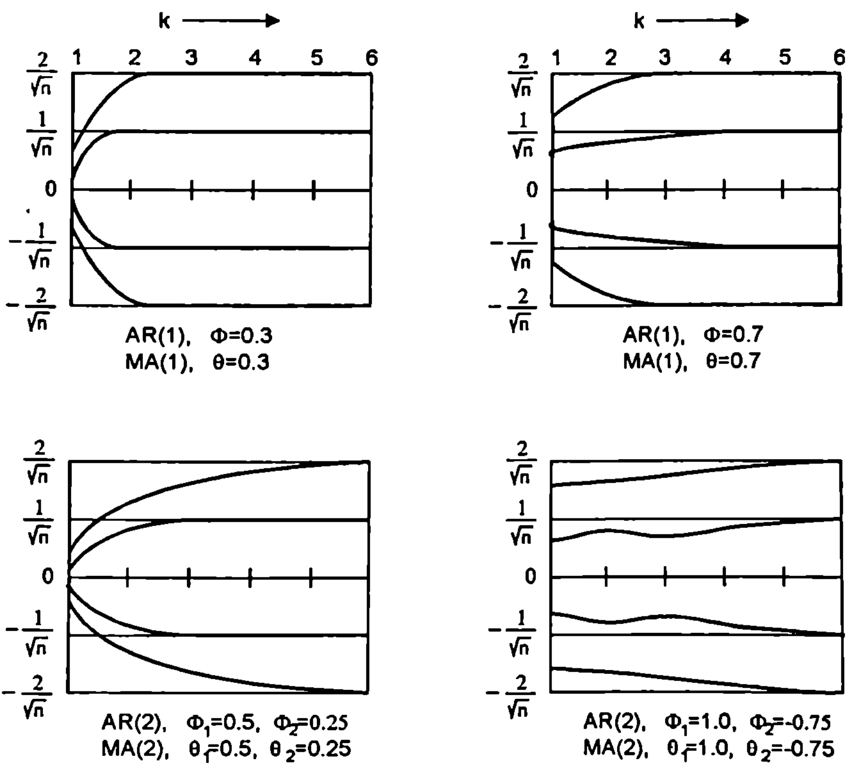
$$\widehat{a}_t = a_t + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ,$$

და ე.ი. დაკვირვებათა მწკრივის ზრდის პირობებში $\widehat{a}_t$ უახლოვდება თეთრ ხმაურს. ამიტომ ამ პროცესის ანალიზს მივყავართ მოდელის ადეკვატურობა-არაადეკვატურობის შემოწმებამდე.

ცნობილია ანდერსონის შედეგი, რომ თუ მოდელი ჭეშმარიტია, Φ და θ-ს ზუსტი მნიშვნელობები ცნობილია, მაშინ შერჩევითი ავტოკორელაციები $r_k(a)$, სადაც დაკვირვებების როლში უკვე a მწკრივი გამოდის, უნდა იყვნენ

არაკორელირებულნი და დაახლოებით ნორმალურად განაწილებულნი საშუალოთი 0 და დისპერსიით $\frac{1}{n}$, ანუ სტანდარტული გადახრით $\frac{1}{\sqrt{n}}$. აქედან, როგორც ყოველთვის, სტანდარტულ კრიტერიუმს მივყავართ $H_0 : r_k(a) = 0$ ჰიპოთეზის შემოწმებამდე.

რადგან ჩვენ შემთხვევაში პარამეტრების (Φ, θ) ზუსტი მნიშვნელობები შეცვლილი გვაქვს მათი შეფასებებით, ეს კრიტერიუმი მცირე დაგვიანებების შემთხვევაში უნდა შეიცვალოს და სტანდარტული გადახრა უნდა ავიღოთ ტოლი არა $\frac{1}{\sqrt{n}}$-ის, არამედ $\frac{\Phi^2}{\sqrt{n}}$ ან $\frac{\theta^2}{\sqrt{n}}$-ის, შესაბამისად, AR(1)-ის ან MA(1)-ის შემთხვევაში. დიდი დაგვიანებისთვის საზღვარი $\frac{1}{\sqrt{n}}$ საკმაოდ კარგია. ამრიგად, ვღებულობთ შემდეგ ზოლებს ჰიპოთეზის შესამოწმებლად (იხ. ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1

მეორე, უფრო სრულყოფილი მეთოდი მოდელის ადეკვატურობის შე-

სამოწმებლად, ეფუძნება χ^2 კრიტერიუმის გამოყენებას.

ვაფიქსირებთ რაღაც K რიცხვს. იგი, როგორც წესი, აიღება 20–25-ის ფარგლებში. შემდეგ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ თუ მოდელი ადეკვატურია, მაშინ გამოსახულება

$$Q = n\sum_{k=1}^{K} r_k^2(\widehat{a})$$

განაწილებულია მიახლოებით როგორც $\chi^2(K-p-q)$, სადაც $n = N - d$ — იმ მონაცემთა რაოდენობაა (ეს ეხება, რასაკვირველია, W-ს), რომელიც გამოვიყენეთ მოდელის მოსარგებად.

ამ სტატისტიკის გამოთვლის შემდეგ, მისი მნიშვნელობა უნდა შედარდეს χ^2 განაწილების 90% ან 95% (ან სხვა მისაღებ) კვანტილს.

χ^2-სთვის 23-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით 90% და 95% კვანტილები ტოლია 32.0 და 35.2-ის. თუ მიღებული რიცხვები ცხრილიდან ნაპოვნ რიცხვებზე საკმაოდ პატარაა, მოდელის ადეკვატურობაში ეჭვი არ შეგვაქვს.

მესამე მეთოდი დამყარებულია კუმულატიური პერიოდოგრამის გამოყენებაზე. ეს მეთოდი გვაძლევს საშუალებას, გავარკვიოთ სწორად არის თუ არა გათვალისწინებული დაკვირვებულ მწკრივში მონაცემების პერიოდული ხასიათი. ამ კუთხით, ავტოკორელაციური ფუნქცია ცუდი ინდიკატორია.

განვმარტოთ საჭირო სტატისტიკა. ამისთვის გამოვთვალოთ სიდიდე

$$I(f_i) = \frac{2}{n}\left[\left(\sum_{t=1}^{n} a_t \cos 2\pi f_i t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} a_t \sin 2\pi f_i t\right)^2\right],$$

სადაც $f_i = \frac{i}{n}$ — სიხშირეა. $I(f_i)$ წარმოადგენს (a_t) მწკრივის პერიოდოგრამას.

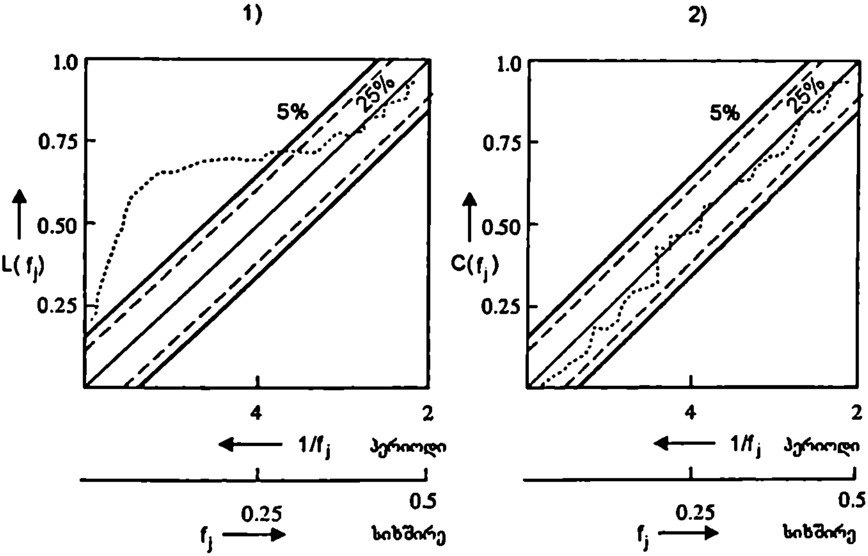
განვიხილოთ ბარტლეტის ნორმირებული კუმულატიური პერიოდოგრამა

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} I(f_i)}{ns^2},$$

სადაც s^2 σ_a^2-ის შეფასებაა.

თუ მოდელი ადეკვატურია და მისი პარამეტრები ზუსტადაა ცნობილი, მაშინ a პროცესს, გამოთვლილს დაკვირვებებიდან, ექნებოდა თეთრი ხმაურის თვისებები, ანუ $C(f_i)$ მცირედ გაიფანტებოდა წრფის მიმართ, რომელიც გადის $(0,0)$ და $(\frac{1}{2}, 1)$ წერტილებზე და წარმოადგენს თეთრი ხმაურის ნორმირებულ კუმულატიურ სპექტრს (თეთრი ხმაურისთვის ეს თვისება ცნობილია). მართალია, ჩვენ a-ს მაგივრად შეგვიძლია გამოვთვალოთ მხოლოდ $\widehat{a}$, მაგრამ ზემოაღნიშნული თვისება საკმაოდ დიდი n-სთვის და ადეკვატური

მოდელისთვის $\hat{a}$-ის საშუალებით აგებულ პერიოდულ კუმულატიურ პერიოდოგრამასაც უნდა ჰქონდეს.



ნახ. 8.2

ალბათური ურთიერთდამოკიდებულება კუმულატიურ პერიოდოგრამასა და კუმულატიურ სპექტრს შორის იგივეა, რაც ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის. ამიტომ სათანადო ადეკვატურობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად იყენებენ კოლმოგოროვის კრიტერიუმს. სარგებლობენ რა ამ კრიტერიუმით, თეორიული წრფის მახლობლად ატარებენ სასაზღვრო ზოლებს შემდეგი წესით: პრაქტიკულად იღებენ $q = \frac{n-2}{2}$ ან $\frac{n-1}{2}$ იმისდა მიხედვით, n ლუწია თუ კენტი. შემდეგ, დააფიქსირებენ რა ε-ს , პოულობენ K_ε-ს შემდეგი ცხრილიდან

ε	0.01	0.05	0.10	0.25
K_ε	1.63	1.36	1.22	1.02

ცხრილი 8.2

ამის შემდეგ აგებენ ზოლს, რომლის შუაში მდებარეობს $(0,0)$ და $(\frac{1}{2},1)$ წერტილებზე გამავალი წრფე, ხოლო ზოლის ზედა და ქვედა საზღვრები არის ამ წრფის პარალელური წრფეები, რომლებიც დაშორებულია მისგან $\frac{K_\varepsilon}{\sqrt{q}}$ მანძილით (მანძილი იზომება ორდინატთა ღერძზე). მიღებულ საზღვრებს ის თვისება გააჩნია, რომ ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კუმულატიური პერიოდოგრამა ამ საზღვრებიდან გავიდოდა მხოლოდ

შემთხვევათა $100\varepsilon\%$-ში. ამიტომ ამ საზღვრებს უწოდებენ $100\varepsilon\%$-ულ წრფეებს. მოეიყვანოთ საილუსტრაციო ნახატები.

თუ სურათი ისეთია, როგორც ნახ. 8.2-ის 1) შემთხვევაში, ადეკვატურობის ჰიპოთეზა უკუიგდება, ხოლო 2) შემთხვევაში — მიიღება.

8.6 კალმან-ბიუსის ტიპის ნაწილობრივ-დაკვირვებადი პირობითად გაუსური მოდელი და პროგნოზირება

კალმან-ბიუსის მიდგომა და მისი განზოგადოებები მძლავრი საშუალებაა ფართო კლასის შემთხვევითი პროცესების პროგნოზისა და ფილტრაციის პრობლემის ეფექტურად გადასაჭრელად (იხ. [178]–[181], [192]). ამ მეთოდების ძირთადი უპირატესობა ისაა, რომ ისინი გვთავაზობენ მეტად მოხერხებულ რეკურენტული სახის ალგორითმებს, რომლებიც თანამედროვე კომპიუტერებზე ადვილად რეალიზებადია. ამ ალგორითმების რეკურენტულობა ბუნებრივი ხასიათისაა. იგი გამოწვეულია თვითონ განხილული პროცესების რეკურენტული ბუნებით, მაგალითად, მარკოვისეულობით, დიფუზიურობით და ა.შ. ასეთ მეთოდებს კიდევ ის უპირატესობა აქვს, რომ მათი გამოყენება შესაძლებელია პროცესების სტაციონარულობის დაშვების გარეშეც.

ცნობილია, რომ კალმან-ბიუსის ტიპის ალგორითმები პირველად გამოყენებული იყო საინჟინრო პრობლემების შესწავლის დროს. მათ განსაკუთრებული წარმატება ჰქონდა კოსმოსურ ნავიგაციაში მფრინავი აპარატების შესაძლო ტრაექტორიების გამოთვლებში. კარგა ხანია, ამ მეთოდებს წარმატებით იყენებენ ეკონომეტრიკაშიც (იხ., მაგალითად, [135] და იქ მითითებული ლიტერატურა).

კალმან-ბიუსის ტიპის მოდელები ე.წ. ნაწილობრივ-დაკვირვებად სქემებს წარმოადგენენ. ეს სქემები აღწერენ ორკომპონენტიან (θ, ξ) შემთხვევით პროცესებს, რომელთა სრული დაკვირვების შესაძლებლობა გამორიცხულია. დაკვირვება წარმოებს მხოლოდ ξ-ზე. მეორე კომპონენტა θ თავის თავს ამჟღავნებს ξ-ს დაკვირვებებში. ასეთი სიტუაცია პრაქტიკაში ხშირია. მაგალითად, ფინანსურ ბაზარზე ვერ ხერხდება უშუალო დაკვირვება ვოლატილობის პროცესზე, მაგრამ მოიპოვება დაკვირვებები აქციის ფასების ევოლუციაზე, რომლებიც გვაწვდიან ინფორმაციას ვოლატილობის შესახებ და ამ ინფორმაციის საფუძველზე უნდა ვეცადოთ, „აღვადგინოთ" ვოლატილობის პროცესი.

საერთოდ, ნაწილობრივ-დაკვირვებადი პროცესების კვლევის დროს მნიშვნელოვანია, რომ ξ-ზე მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე გავაკეთოთ დასკვნები დაუკვირვებად θ კომპონენტზე, კერძოდ, ავაგოთ მისი გარკვეული აზრით საუკეთესო სტატისტიკური შეფასებები. შემდეგ ჩვენ დავაზუსტებთ, თუ რა ტიპის და რა აზრით ოპტიმალური შეფასებები გვაინტე-

რესებს. აქ მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ თუ ξ-ზე დაკვირვებებით t მომენტამდე ვაფასებთ θ-ს t მომენტში, მაშინ ასეთი შეფასებები ფილტრაციის შეფასებებია და მათი აგების გარეშე შეუძლებელია პროგნოზის პრობლემის გადაწყვეტა.

დასაწყისში ჩვენ განვიხილავთ ზოგად კალმან-ბიუსის ტიპის ე.წ. პირობითად-გაუსის დისკრეტულ სქემას და მოვიყვანთ საშუალო კვადრატული აზრით ოპტიმალური ფილტრაციისა და პროგნოზირების ზოგად ფორმულებს, შემდეგ კი განვიხილავთ ორ მაგალითს.

პირველი მაგალითი ეხება გარკვეული დისკრეტული სქემით აღწერილ რისკიანი აქტივის ფასის პროგნოზს, მეორე კი — ერთ სტაციონარულ ARMA პროცესის პროგნოზს. ეს სტაციონარული პროცესი ხელოვნურად წარმოდგება ნაწილობრივ-დაკვირვებად პროცესად, რომელიც ექცევა კალმან-ბიუსის სქემაში.

ფილტრაციის ზოგადი ფორმულები. განვიხილოთ შემდეგი ნაწილობრივ-დაკვირვებადი მიმდევრობა $(\theta,\xi)=(\theta_t,\xi_t)$, $t=0,1,2,\ldots$, დაუკვირვებადი $\theta_t=(\theta_1(t),\ldots,\theta_k(t))$ და დაკვირვებადი $\xi_t=(\xi_1(t),\ldots,\xi_l(t))$ კომპონენტებით, რომლებიც შემდეგი რეკურენტული განტოლებებით აღიწერებიან

$$
\begin{aligned}
\theta_{t+1}&=a_0(t,\xi)+a_1(t,\xi)\theta_t+b_1(t,\xi)\varepsilon_1(t+1)+b_2(t,\xi)\varepsilon_2(t+1),\\
\xi_{t+1}&=A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)\theta_t+B(t,\xi)\varepsilon_2(t+1).
\end{aligned}
\tag{8.45}
$$

აქ $\varepsilon_1(t)=(\varepsilon_{11}(t),\varepsilon_{12}(t),\ldots,\varepsilon_{1k}(t))$ და $\varepsilon_2(t)=(\varepsilon_{21}(t),\varepsilon_{22}(t),\ldots,\varepsilon_{2l}(t))$ დამოუკიდებელი ვექტორებია დამოუკიდებელი კომპონენტებით და სტანდარტული ნორმალური განაწილებით, ხოლო

$$
\begin{aligned}
a_0(t,\xi)&=(a_{01}(t,\xi),a_{02}(t,\xi),\ldots,a_{0k}(t,\xi)),\\
A_0(t,\xi)&=(A_{01}(t,\xi),A_{02}(t,\xi),\ldots,A_{0l}(t,\xi))
\end{aligned}
$$

ვექტორ-ფუნქციებია. მათი კომპონენტები დამოკიდებულია დაკვირვებად $\xi=(\xi_0,\xi_1,\ldots)$ პროცესზე არაწინმსწრებად, ე.ი., ფიქსირებული t მომენტისათვის დამოკიდებულია მხოლოდ $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t$-ზე. ასევე არაწინმსწრებადაა დამოკიდებული ξ-ზე ყველა კოეფიციენტი (8.45) განტოლებაში. მატრიცული ფუნქციები $a_1(t,\xi)=\|a_{ij}^{(1)}(t,\xi)\|$, $b_1(t,\xi)=\|b_{ij}^{(1)}(t,\xi)\|$, $b_2(t,\xi)==\|b_{ij}^{(2)}(t,\xi)\|$, $A_1(t,\xi)=\|A_{ij}^{(1)}(t,\xi)\|$, $B(t,\xi)=\|Bij(t,\xi)\|$, შესაბამისად, $k\times k$, $k\times k$, $k\times l$, $l\times k$, $l\times l$ რიგისაა. (θ_0,ξ_0) დამოკიდებული არ არის $\varepsilon_1=(\varepsilon_1(t))$ და $\varepsilon_2=(\varepsilon_2(t))$ მიმდევრობებზე.

მოყვანილი ნაწილობრივ-დაკვირვებადი პროცესისათვის შესაძლებელია განვიხილოთ ფილტრაციისა და პროგნოზირების შემდეგი ამოცანები. ჩვენ t მომენტისთვის გვიგროვდება დაკვირვებები $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t$. ამ ინფორმაციის გამოყენებით უნდა შევაფასოთ დაუკვირვებადი კომპონენტი θ. თუ

ვაფასებთ იმავე t მომენტში, მაშინ ჩვენ ფილტრაციის პრობლემას ვიხილავთ, ხოლო თუ ვაფასებთ s მომენტში და $s < t$, მაშინ ინტერპოლაციის ამოცანას. იმ შემთხვევაში, როცა ვაფასებთ s მომენტში და $s > t$, ვიხილავთ θ კომპონენტის პროგნოზის (ექსტრაპოლაციის) ამოცანას. ცხადია, პროგნოზის ამოცანის განხილვა შესაძლებელია დაკვირვებადი ξ კომპონენტისთვისაც (ე.ი. ვაფასებთ ξ-ს s მომენტში ξ-ს დაკვირვებებით t, $t < s$, მომენტამდე). კარგადაა ცნობილი, რომ საშუალო კვადრატული აზრით ოპტიმალური შეფასებები წარმოადგენს პირობით მათემატიკურ ლოდინებს პირობაში, რომ t მომენტამდე ξ-ს მნიშვნელობები დაფიქსირებულია, ე.ი., შესაბამისად

$$\widehat{\theta}_t = E(\theta_t|\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t), \quad \widehat{\theta}_{s,t} = E(\theta_s|\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t),$$
$$\widehat{\xi}_t = E(\xi_s|\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t), \quad s > t.$$

თუ θ_0-ის განაწილება გაუსისაა პარამეტრებით (m,γ), მაშინ სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული გამოსახულებები ოპტიმალური ფილტრაციის შეფასებისათვის ნაწილობრივ-დაკვირვებადი (θ,ξ) პროცესისათვის, რომელიც (8.45) განტოლებით აღიწერება:

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_{t+1} &= [a_0 + a_1\widehat{\theta}_t] + [b_2B^* + a_1\gamma_tA_1^*]\times\\ &\times[BB^* + A_1\gamma_tA_1^*]^{-1}[\xi_{t+1} - A_0 - A_1\widehat{\theta}_t], \quad \widehat{\theta}_0 = m,\end{aligned} \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{t+1} &= [a_1\gamma_ta_1^* + b_1b_1^* + b_2b_2^*] - [b_2B^* + a_1\gamma_tA_1^*]\times\\ &\times[BB^* + A_1\gamma_tA_1^*]^{-1}[b_2B^* + a_1\gamma_tA_1^*]^*, \quad \gamma_0 = \gamma.\end{aligned} \tag{8.47}$$

ამ გამოსახულებაში $\gamma_t = E[(\theta_t - \widehat{\theta}_t)(\theta_t - \widehat{\theta}_t)^*|\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t] = \|\gamma_{ij}(t)\|$, $i,j = 1,2,\ldots,k$, — შეფასებების შეცდომის პირობითი კოვარიაციული მატრიცაა. ფორმულებში, სიმარტივისათვის, კოეფიციენტები არგუმენტების გარეშეა მოცემული, C^* აღნიშნავს C მატრიცის შეუღლებულს, ხოლო C^{-1} — შებრუნებულს.

შევნიშნოთ, რომ თუ არც ერთი კოეფიციენტი (8.45)-ში არ არის დამოკიდებული ξ-ზე, მაშინ გვექნება კალმან-ბიუსის სქემა ([86], [87]). ეს სქემა გაუსისაა და $\widehat{\theta}_t$-ს ეწოდება კალმან-ბიუსის ფილტრი.

პარამეტრის შეფასება. დავუშვათ, რომ $\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ გაუსის ვექტორია საშუალოთი $m = (m_1,m_2,\ldots,m_k)$ და კოვარიაციის მატრიცით $\gamma = \|\gamma_{ij}\|$, $i,j = 1,2,\ldots,k$. დავუშვათ, რომ ვაკვირდებით l-განზომილებიან მიმდევრობას $\xi = (\xi_t)$, $t = 0,1,2,\ldots$ შემდეგი წარმოდგენით

$$\xi_{t+1} = A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)\theta + B(t,\xi)\varepsilon_2(t+1), \quad \xi_0 = 0. \tag{8.48}$$

ეს სქემა (8.45)-ის კერძო შემთხვევაა და (8.46), (8.47)-დან მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_{t+1} = \ & \widehat{\theta}_t + \gamma_t A_1^*(t,\xi)[BB^*(t,\xi) + A_1(t,\xi)\gamma_t A_1^*(t,\xi)]^{-1}\times \\ & \times[\xi_{t+1} - A_0(t,\xi) - A_1(t,\xi)\widehat{\theta}_t], \quad \widehat{\theta}_0 = m,\end{aligned} \tag{8.49}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{t+1} = \ & \gamma_t - \gamma_t A_1^*(t,\xi)[BB^*(t,\xi) + A_1(t,\xi)\gamma_t A_1^*(t,\xi)]^{-1}\times \\ & \times A(t,\xi)\gamma_t, \quad \gamma_0 = \gamma.\end{aligned} \tag{8.50}$$

როდესაც BB^* მატრიცა არ არის გადაგვარებული, ამ რეკურენტულ განტოლებათა სისტემას შემდეგი ამოხსნა აქვს

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_t = \ & [E + \textstyle\sum_{k=0}^t A_1^*(k,\xi)(BB^*)^{-1}(k,\xi)A_1(k,\xi)]^{-1}\times \\ & \times[m + \gamma\sum_{k=0}^t A_1^*(k,\xi)(BB^*)^{-1}(k,\xi)(\xi_{k+1} - A_0(k,\xi))],\end{aligned}$$

$$\gamma_t = [E + \gamma\sum_{k=0}^t A_1^*(k,\xi)(BB^*)^{-1}(k,\xi)A_1(k,\xi)]^{-1}\gamma,$$

სადაც E — ერთეულოვანი მატრიცაა. უნდა შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ეიხილავთ (8.48) სქემას უცნობი ვექტორული პარამეტრით, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ბაიესის მიდგომა და ეს პარამეტრი ჩავთვალოთ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით ვექტორად.

ექსტრაპოლაციის (პროგნოზის) ზოგადი ფორმულები. დავუშვათ, რომ პირობითად გაუსის პროცესში, რომელიც აღიწერება (8.45) განტოლებით,

$$\begin{aligned}& a_0(t,\xi) = a_0(t) + a_2(t)\xi_t, \quad a_1(t,\xi) = a_1(t), \\ & A_0(t,\xi) = A_0(t) + A_2(t)\xi_t, \quad A_1(t,\xi) = A_1(t),\end{aligned} \tag{8.51}$$

ე.ი. ვექტორები $a_0(t)$, $A_0(t)$ და მატრიცული ფუნქციები $a_1(t)$, $a_2(t)$ და $A_1(t)$ დამოკიდებულია მხოლოდ დროზე. მაშინ შესაძლებელია ოპტიმალური ექსტრაპოლაციის (პროგნოზის) შეფასებების $\widehat{\theta}_{s,t}$ და $\widehat{\xi}_{s,t}$, $s > t$, მოძებნა. სამართლიანია შემდეგი ფორმულები

$$\widehat{\theta}_{s+1,t} = a_0(s) + a_1(s)\widehat{\theta}_{s,t} + a_2(s)\widehat{\xi}_{s,t}, \tag{8.52}$$

$$\widehat{\xi}_{s+1,t} = A_0(s) + A_1(s)\widehat{\theta}_{s,t} + A_2(s)\widehat{\xi}_{s,t}, \tag{8.53}$$

$$\widehat{\theta}_{t,t} = \widehat{\theta}_t, \quad \widehat{\xi}_{t,t} = \xi_t, \quad s+1 > t,$$

სადაც $\widehat{\theta}_t$ (8.46), (8.47) ფილტრაციის ფორმულებიდან გამოითვლება. თუ გვაინტერესებს მხოლოდ $\widehat{\theta}_{s,t}$-ს გამოთვლა, ეს შესაძლებელია, თუ (8.45) სქემაში

$$a_0(t,\xi) = a_0(t), \quad a_1(t,\xi) = a_1(t)$$

და

$$\widehat{\theta}_{s+1,t} = a_0(s) + a_1(s)\widehat{\theta}_{s,t}, \quad \widehat{\theta}_{t,t} = \widehat{\theta}_t, \quad s+1 > t. \tag{8.54}$$

განვიხილოთ ორი მაგალითი.

მაგალითი 8.1. დავუშვათ, რომ რისკიანი აქტივის ფასის ევოლუცია შემდეგი გამოსახულებით მოიცემა

$$S_t = S_0 \exp\left(\sum_{s=1}^{t}(\mu + \sigma(s-1,S)\varepsilon_s)\right), \tag{8.55}$$

სადაც $\varepsilon = (\varepsilon_t)$, $t = 0,1,2,\ldots$, ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, μ — უცნობი პარამეტრია, ხოლო $\sigma(s,S)$ — ცნობილი არაწინმსწრები ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ ასეთ სქემას მივიღებთ, თუ, მაგალითად, შემდეგ ლოგნორმალურ მოდელში

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma \varepsilon_t}$$

σ ვოლატილობას შევცვლით მისი ისტორიული შეფასებით.

დავუშვათ, რომ $\xi_t = \ln S_t$. მაშინ (8.55)-დან მივიღებთ,

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \mu + \sigma(t-1,\xi)\varepsilon_t, \tag{8.56}$$

რომელიც (8.45), (8.51) სქემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში $\widetilde{\sigma}(t,\xi) = \sigma(t,s)|_{s=e^{\xi}}$. ზოგადი ექსტრაპოლაციის (8.52), (8.53) ფორმულებიდან, ბაიესის მიდგომის გამოყენებით, ე.ი. დაშვებით, რომ μ არის ნორმალურად განაწილებული (m,γ) პარამეტრებით, მივიღებთ შემდეგ ექსტრაპოლაციის (პროგნოზის) ფორმულას

$$\widehat{\xi}_{s+1,t} = \widehat{\xi}_{s,t} + \widehat{\mu}_t, \quad s+1 > t, \tag{8.57}$$

სადაც $\widehat{\mu}_t = E(\mu|\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_t)$ გამოითვლება ფორმულებიდან

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{t+1} &= \widehat{\mu}_t + \gamma_t[\widetilde{\sigma}^2(t,\xi) + \gamma_t]^{-1}[\xi_{t+1} - \widehat{\mu}_t], \quad \widehat{\mu}_0 = m, \\ \gamma_{t+1} &= \gamma_t - \gamma_t^2[\widetilde{\sigma}^2(t,\xi) + \gamma_t]^{-1}, \quad \gamma_0 = \gamma. \end{aligned} \tag{8.58}$$

(8.57) და (8.58) ფორმულები წარმოადგენენ $\xi_t \doteq \ln S_t$-ს საუკეთესო პროგნოზს საშუალო კვადრატული აზრით.

მაგალითი 8.2. განვიხილოთ შემთხვევითი სტაციონარული მიმდევრობა $\xi = (\xi_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, რომელიც შემდეგი რეკურენტული განტოლებით აღიწერება

$$\xi_{t+2} + \theta\xi_{t+1} = \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+1}, \quad \xi_0 = \xi, \tag{8.59}$$

და $E\xi = 0$, სადაც θ — უცნობი პარამეტრია, ხოლო $\varepsilon = (\varepsilon_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, სტანდარტულ ნორმალურ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა.

როგორც ვხედავთ, (8.59) წარმოადგენს უმარტივეს ARMA მოდელს. პირდაპირ ეს სქემა არ არის (8.45)-ის კერძო შემთხვევა, მაგრამ მისი გადაწერა, დაუკვირვებადი θ_t კომპონენტის შემოტანით, შესაძლებელია შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= -\theta\theta_t + (1-\theta)\varepsilon_{t+1}, \\ \xi_{t+1} &= \theta_t + \varepsilon_{t+1}. \end{aligned} \tag{8.60}$$

აღვნიშნოთ D_1-ით და D_2-ით, შესაბამისად, $\theta = (\theta_t)$ და $\xi = (\xi_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, პროცესების დისპერსიები. სტაციონარულობის გამო, ისინი დროზე არ იქნება დამოკიდებული და (8.60)-დან გვექნება

$$\begin{aligned} D_1 &= \theta^2 D_1 + (1-\theta)^2, \\ D_2 &= D_1 + 1. \end{aligned} \tag{8.61}$$

აქედან შეგვიძლია უცნობი θ პარამეტრი გამოვსახოთ D_2-ის ტერმინებში. კვადრატული განტოლების ორი ფესვიდან ერთ-ერთი უდრის 1-ს და ის უნდა უარვყოთ ξ პროცესის სტაციონარულობის გამო, ვინაიდან $|\theta| < 1$. ვირჩევთ მეორე ფესვს $\theta = \frac{2-D_2}{D_2}$ და (8.60) შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= -\frac{2-D_2}{D_2}\theta_t + \left(1 - \frac{2-D_2}{D_2}\right)\varepsilon_{t+1}, \\ \xi_{t+1} &= \theta_t + \varepsilon_{t+1}. \end{aligned} \tag{8.62}$$

ოპტიმალური ექსტრაპოლაციის (8.52), (8.53) ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{s+1,t} &= \widehat{\theta}_{s,t}, \\ \widehat{\theta}_{s+1,t} &= -\frac{2-D_2}{D_2}\widehat{\theta}_{s,t}, \quad \widehat{\xi}_{t,t} = \xi_t, \quad \widehat{\theta}_{t,t} = \widehat{\theta}_t. \end{aligned} \tag{8.63}$$

$\widehat{\theta}_t$ აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ განტოლებათა სისტემას

$$\widehat{\theta}_{t+1} = -\frac{2-D_2}{D_2}\widehat{\theta}_t + \frac{2(D_2-1)-\gamma_t(2-D_2)}{D_2(1+\gamma_t)}(\xi_{t+1}-\widehat{\theta}_t), \quad \widehat{\theta}_0 = 0,$$

$$\gamma_{t+1} = \left(\frac{2-D_2}{D_2}\right)^2 \gamma_t + 4\left(\frac{D_2-1}{D_2}\right)^2 -$$

$$-\frac{[2(D_2-1)-\gamma_t(2-D_2)]^2}{D_2^2(1+\gamma_t)}, \quad \gamma_0 = D_1 = 1 + D_2. \tag{8.64}$$

(8.63), (8.64) ფორმულები ξ სტაციონარული მიმდევრობის საშუალო კვადრატული აზრით საუკეთესო პროგნოზის პოვნის საშუალებას იძლევა.

8.7 რეგრესიული ანალიზი და პროგნოზირება

რეგრესიული ანალიზი წარმოადგენს სტატისტიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის ალბათურ-სტატისტიკურ კავშირს ორ ან რამდენიმე ცვლადს შორის. მისი მთავარი დანიშნულებაა არსებულ მონაცემთა საფუძველზე ისეთი მოდელის შემუშავება, რომელიც ადეკვატურად აღწერს ერთი (დამოკიდებული) ცვლადის დამოკიდებულებას სხვა (დამოუკიდებელ) ცვლადებზე, და შემდგომ, ამ მოდელის გამოყენებით დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობათა პროგნოზირება სხვა ცვლადების ცნობილი მნიშვნელობებით.

რეგრესიული ანალიზი გამოიყენება არა მარტო პროგნოზირების მიზნებისათვის. მაგალითად, კაპიტალური აქტივების ფასდადების მოდელი CAPM, რომელშიც პოსტულირდება წრფივი რეგრესიული კავშირის არსებობა ცალკეული აქტივის ამონაგებსა და ბაზრის ამონაგებს შორის, გამოიყენება იმის შესაფასებლად, თუ რა მიმართებაშია აქტივის რისკი საბაზრო რისკთან და არა აქტივის ამონაგების პროგნოზირებისათვის.

რეგრესიული ანალიზის ტექნიკა შეიცავს შემდეგ ეტაპებს: 1. დამოკიდებულ ცვლადსა (აღვნიშნოთ Y-ით) და დამოუკიდებელ ცვლადს (აღვნიშნოთ X-ით) შორის კავშირის აღმწერი მოდელის პოსტულირება; 2. მოდელის პარამეტრების შეფასება რეალური მონაცემებით; 3. მოდელის ადეკვატურობის შემოწმება; 4. პროგნოზირება.

მარტივი რეგრესია. რეგრესიული ანალიზის უმარტივესი მოდელია წრფივი რეგრესია (რომელსაც მარტივ რეგრესიასაც უწოდებენ)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \tag{8.65}$$

სადაც β_0, β_1 რაიმე მუდმივებია, ε შემთხვევითი სიდიდეა $E\varepsilon = 0$, $D\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2$. ε ცვლადს უწოდებენ შემთხვევით გადახრას ანდა შემთხვევით შეც-

დომას, ხოლო წრფეს $y = \beta_0 + \beta_1 x$, რეგრესიის წრფეს. იგულისხმება, რომ ε დამოუკიდებელია X-სგან.

მიღებული დაშვებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E(Y|X = x^*) = \beta_0 + \beta_1 x^*,$$

$$D(Y|X = x^*) = \sigma_\varepsilon^2,$$

სადაც $E(Y|X = x^*)$ და $D(Y|X = x^*)$ აღნიშნავს პირობით საშუალოსა და პირობით დისპერსიას პირობაში, რომ $X = x^*$.

საზოგადოდ, სიდიდეს $E(Y|X)$ ეწოდება Y-ის რეგრესია X-ის მიმართ. ამრიგად, (8.65) მოდელი გულისხმობს, რომ რეგრესია წრფივია: $E(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$. ამავე დროს β_1 კოეფიციენტს ეძლევა შემდეგი შინაარსი: ეს არის Y-ის საშუალო (გასაშუალოებული, მოსალოდნელი) ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება X-ის ერთეულოვან ნაზრდს.

ვთქვათ, (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ დამოუკიდებელი დაკვირვებებია შემთხვევით სიდიდეთა წყვილზე, რომელთა შორის კავშირი აღიწერება მარტივი რეგრესიით. ცხადია, რომ წყვილები (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ არ განლაგდება ზუსტად რეგრესიის წრფეზე. ისინი გაბნეული იქნება ამ წრფის მიმართ.

რეგრესიული ანალიზის შემდგომი ამოცანაა მოდელის პარამეტრების β_0, β_1 და σ_ε^2-ის შეფასება (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ მონაცემებით. შეფასების ყველაზე გავრცელებული მეთოდია ე.წ. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, რომლის თანახმადაც β_0 და β_1 პარამეტრების შეფასებათა აგება წარმოებს შემდეგი გამოსახულების მინიმიზაციით:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2)^2 \xrightarrow{min} \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \tag{8.66}$$

ე.ი., ვეძებთ ისეთ წრფეს $\widehat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X$, რომლიდანაც Y_i-ების ვერტიკალური გადახრების $e_i = Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i$ კვადრატების ჯამი $\sum_{i=1}^n e_i^2$ უმცირესია (ყველა წრფესთან შედარებით). როგორც ცნობილია, მინიმუმის მიმნიჭებელი მნიშვნელობების $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$-ს მოძებნა ხდება (8.66)-ის მარცხენა მხარის β_0-ითა და β_1-ით კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით; ამრიგად, მიიღება ე.წ. ნორმალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Y_i &= n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i &= \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \end{aligned} \tag{8.67}$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\overline{X})^2}, \quad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}, \tag{8.68}$$

სადაც $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i$. $\widehat{\beta}_1$ სხვა ფორმითაც შეიძლება ჩაიწეროს, თუ განვსაზღვრავთ სიდიდეებს $SS_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$ და $SS_X = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$. მაშინ

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X}. \tag{8.69}$$

წრფეს $\widehat{Y}(X) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X$ ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული რეგრესიის წრფე. მას გააჩნია ორი თვისება: 1. გადის $(\overline{X}, \overline{Y})$ წერტილზე, 2. $\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{Y}(X_i)) = 0$.

სიდიდეს $e_i = Y_i - \widehat{Y}(X_i) = Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i$ ეწოდება ნარჩენი (residual). სიდიდეს

$$SSE = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

ეწოდება შეცდომათა კვადრატების ჯამი, ხოლო სიდიდეს

$$S_\varepsilon = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}}$$

შეფასების სტანდარტული შეცდომა. ინტუიციურად გასაგებია, რომ S_ε^2 წარმოადგენს σ_ε^2-ის შეფასებას. ხშირად იყენებენ აღნიშვნებს $\mu_{Y \cdot X} := \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X$ და $S_{Y \cdot X}^2 := S_\varepsilon^2$ იმ ფაქტის აღსანიშნავად, რომ ეს სიდიდეები წარმოადგენს პირობით ლოდინსა და პირობითი დისპერსიის შეფასებებს.

იმ შემთხვევაში, თუ ყველა დაკვირვება განლაგებულია წრფეზე, $S_\varepsilon = 0$, საიდანაც ვასკვნით, რომ თუ S_ε ახლოსაა ნულთან, მოდელის თანხმობა მონაცემებთან დამაკმაყოფილებელია და მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას პროგნოზირებისათვის, თუ S_ε-ის მნიშვნელობა დიდია, მაშინ თანხმობა მონაცემებთან არადამაკმაყოფილებელია და უნდა მოხდეს უკეთესი მოდელის შერჩევა. საზოგადოდ ძნელია იმ საზღვრის დადგენა, რომლის გადაჭარბების შემდეგ S_ε დიდად ჩაითვლება. ხშირად S_ε-ს ადარებენ Y-ის საშუალო მნიშვნელობას, $\overline{Y}$-ს, და ამის საფუძველზე აკეთებენ დასკვნებს მისი სიდიდის შესახებ. ცხადია, რომ ორ მოდელს შორის საუკეთესოა ის, რომელსაც უფრო მცირე S_ε გააჩნია, ვიდრე მეორეს.

მიღებული სიდიდეები $\widehat{\beta}_0$ და $\widehat{\beta}_1$ უცნობი β_0 და β_1 პარამეტრების წერტილოვანი შეფასებებია, ხოლო სიდიდე $\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x^*$ წარმოადგენს როგორც უცნობი რეგრესიის წრფის, $E(Y|x^*) = \beta_0 + \beta_1 x^*$, ასევე $X = x^*$-ის შესაბამისი

$Y^* = \beta_0 + \beta_1 x^* + \varepsilon$ ინდივიდუალური მნიშვნელობის წერტილოვან შეფასებას. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ აგებული შეფასებები გადაუადგილებელია, ანუ მათი ლოდინები თეორიული მნიშვნელობების $(\beta_0, \beta_1, \beta_0+\beta_1 X)$ ტოლია, შესაძლებელია გამოითვალოს შეფასებათა დისპერსიებიც.

შემდგომი სტატისტიკური დასკვნების გასაკეთებლად ჩვენ დაგვჭირდება დამატებითი პირობების დადება შემთხვევით ცდომილებაზე, ε. კერძოდ, გარდა იმ მოთხოვნისა, რომ

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,$$

სადაც $E\varepsilon_i = 0$, $E\varepsilon_i^2 = \sigma_\varepsilon^2$ (ჰომოსკედასტურობა), დამატებით უნდა მოვითხოვოთ, რომ ε_i ნორმალურადაა განაწილებული, $E\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, $i \neq j$, და მიმდევრობა (ε_i) დამოუკიდებელია (X_i) მიმდევრობებისაგან.

ამ დაშვებებში მტკიცდება, რომ თითოეული შემთხვევითი სიდიდე

$$t_1 = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\widehat{\beta}_1}} \quad \text{და} \quad t_0 = \frac{\widehat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\widehat{\beta}_0}} \tag{8.70}$$

განაწილებულია $(n-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით. აქედან გამომდინარე, $(1-\alpha)$ დონის ნდობის ინტერვალები β_0-სა და β_1-სათვის მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$[\widehat{\beta}_0 - t_{\alpha/2,n-2} S_{\widehat{\beta}_0}, \widehat{\beta}_0 + t_{\alpha/2,n-2} S_{\widehat{\beta}_0}], \tag{8.71}$$

$$[\widehat{\beta}_1 - t_{\alpha/2,n-2} S_{\widehat{\beta}_1}, \widehat{\beta}_1 + t_{\alpha/2,n-2} S_{\widehat{\beta}_1}], \tag{8.72}$$

სადაც $t_{\alpha/2,n-2}$ წარმოადგენს $(n-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების $\alpha/2$ დონის კრიტიკულ წერტილს, ხოლო $S_{\widehat{\beta}_1}$ და $S_{\widehat{\beta}_0}$ განისაზღვრება ფორმულებით:

$$S^2_{\widehat{\beta}_0} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} S_\varepsilon^2, \quad S^2_{\widehat{\beta}_1} = \frac{S_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}.$$

თუ $\beta_1 = 0$, მაშინ რეგრესიის წრფე x ღერძის პარალელურია და ე.ი. Y-სა და X-ს შორის არ არსებობს წრფივი კავშირი და შესარჩევია სხვა მოდელი. ამიტომ მნიშვნელოვანია ნულოვანი ჰიპოთეზის $H_0 : \beta_1 = 0$ შემოწმება ალტერნატივის $H_A : \beta_1 \neq 0$ საწინააღმდეგოდ. ამ შემთხვევაში, კრიტერიუმის სტატისტიკაა

$$t_1 = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\widehat{\beta}_1}}$$

და, თუ დაფიქსირებულია მნიშვნელოვნების α დონე, გადაწყვეტილების მიღების წესი ასე ყალიბდება:

$$\text{უკუაგდე } H_0, \text{ თუ } \quad |t_1| > t_{\alpha/2,n-2}.$$

თავისთავად ცხადია, რომ t_1-ის გამოსახულებაში უნდა ჩაისვას მნიშვნელობა $\beta_1 = 0$.

პროგნოზირება რეგრესიის წრფის გამოყენებით. რეგრესიული ანალიზის პოპულარობა აიხსნება იმით, რომ ის გამოიყენება დამოკიდებული Y ცვლადის პროგნოზირებისათვის, როდესაც ცნობილია დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობა $X = x^*$. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სიდიდე $\beta_0 + \beta_1 x^*$ წარმოადგენს როგორც უცნობი პირობითი ლოდინის $E(Y|x^*) = \beta_0+\beta_1 x^*$, ასევე Y-ის ინდივიდუალური მნიშვნელობის, $Y = \beta_0+\beta_1 x^*+\varepsilon$, პროგნოზს (შეფასებას). რა თქმა უნდა, საინტერესოა საპროგნოზო ინტერვალის საზღვრების დადგენა, ანუ ნდობის ინტერვალების აგება.

უცნობი პირობითი საშუალოსათვის $E(Y|x^*)$ $(1-\alpha)$ დონის ნდობის ინტერვალს, რომელსაც საპროგნოზო ინტერვალსაც ვუწოდებთ, აქვს სახე

$$\widehat{Y}(x^*) \pm t_{\alpha/2,n-2} S_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\overline{X})^2}}, \tag{8.73}$$

ხოლო Y-ის ინდივიდუალური მნიშვნელობისათვის კი შემდეგი სახე

$$\widehat{Y}(x^*) \pm t_{\alpha/2,n-2} S_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\overline{X})^2}}. \tag{8.74}$$

კორელაციური ანალიზი. კორელაციური ანალიზი დამხმარე იარაღია რეგრესიულ ანალიზში. ის საშუალებას იძლევა შევაფასოთ თუ რამდენად „კარგად" ხსნის რეგრესიის წრფე Y ცვლადის ვარიაციას თავისი საშუალოს მიმართ. კორელაციური ანალიზი გამოიყენება მაშინაც, როდესაც უბრალოდ ინტერესდებიან ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის კავშირის სიძლიერით (და არ ცდილობენ ერთი ცვლადის ახსნას მეორეთი). კორელაციური ანალიზის მთავარ ინსტრუმენტებს წარმოადგენს კორელაციისა და დეტერმინაციის კოეფიციენტები.

ჩვენ დავიწყებთ დეტერმინაციის კოეფიციენტით, რადგან სწორედ ეს სიდიდე მიგვითითებს იმაზე, თუ რამდენად „კარგად" ხსნის რეგრესია Y-ის ვარირებას თავისი საშუალოს მიმართ.

შემოვიღოთ სიდიდეები: $(Y - \overline{Y})$ — სრული გადახრა, $(\widehat{Y}(X) - \overline{Y})$ — სრული გადახრის რეგრესიით ახსნილი ნაწილი, $(Y - \widehat{Y}(X))$ — აუხსნელი

გადახრა. მოწმდება, რომ სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(Y-\overline{Y})^2 = &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}(X_i)-\overline{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y}(X_i))^2.\\ \text{სრული ვარიაცია} = &\quad \text{ახსნილი ვარიაცია} + \text{აუხსნელი ვარიაცია}\\ (SSTO) = &\quad (SSR)+(SSE).\end{aligned} \tag{8.75}$$

ადვილი სანახავია, რომ $\widehat{Y}(X_i)-\overline{Y}=\widehat{\beta}_1(X_i-\overline{X})$ და ამიტომ

$$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}(X_i)-\overline{Y})^2=(\widehat{\beta}_1)^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ SSR არის სრული ვარიაციის ის ნაწილი, რომელიც აიხსნება X ცვლადის ვარირებით $\overline{X}$-ის მიმართ.

დეტერმინაციის კოეფიციენტი (აღინიშნება r^2-ით) შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$r^2=1-\frac{SSE}{SST}\quad\left[=\frac{SSR}{SST}\right]. \tag{8.76}$$

როგორც ვხედავთ, დეტერმინაციის კოეფიციენტი არის რეგრესიით ახსნილი ვარიაციის წილი სრულ ვარიაციაში $r^2=(SSR/SST)$. თუ r^2 პატარაა, ე.ი. რეგრესიით აიხსნება სრული ვარიაციის მხოლოდ მცირე წილი, მოსაძებნია სხვა ალტერნატიული მოდელი (ვთქვათ, არაწრფივი ან მრავლობითი წრფივი რეგრესიული მოდელი), რომელიც უფრო ეფექტურად ახსნიდა Y-ის ვარიაციას.

ხშირია სიტუაციები, როცა ორი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი ყოფაქცევის შესწავლისას გამოსარკვევია მხოლოდ, თუ რამდენად ძლიერია მათ შორის კავშირი. სწორედ ორ X და Y შემთხვევით სიდიდეს შორის კავშირის (სტოქასტური კავშირის) საზომია კორელაციის კოეფიციენტი, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}, \tag{8.77}$$

სადაც $\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$ წარმოადგენს კოვარიაციის კოეფიციენტს. მოვიყვანოთ კორელაციის კოეფიციენტის თვისებების ჩამონათვალი:

1. ρ სიმეტრიულია X და Y ცვლადების მიმართ (რადგან $\operatorname{cov}(X,Y)=$ $=\operatorname{cov}(Y,X)$);

2. ρ-ს მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ერთეულებშია გაზომილი X და Y;

3. $-1 \le \rho \le 1$;

4. $|\rho| = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც X-სა და Y-ს შორის წრფივი კავშირია, $Y = aX + b$. ამასთან თუ $a > 0$, მაშინ $\rho = 1$, ხოლო, თუ $a < 0$, მაშინ $\rho = -1$;

5. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\rho = 0$. თუმცა კორელაციის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა (X და Y-ის არაკორელირებულობა) არ ნიშნავს მათ დამოუკიდებლობას.

უნდა აღინიშნოს შემდეგი ფაქტიც: როცა $|\rho| = 1$ და ე.ი. X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი, ყველა დაკვირვებული წყვილი, $(X_i, Y_i)_{i\geq 1}$, განლაგდება რეგრესიის წრფეზე. ρ-ს მნიშვნელობა მიუთითებს ძლიერი წრფივი კავშირის არსებობას, მაგრამ არ შეიცავს ინფორმაციას შესაბამისი რეგრესიის წრფის დახრილობის კოეფიციენტზე.

თეორიული კორელაციის კოეფიციენტი ρ წარმოადგენს პოპულაციის მახასიათებელს. მის შერჩევით (ემპირიულ) ანალოგს წარმოადგენს შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}, \tag{8.78}$$

რომელიც გამოითვლება შერჩევითი მონაცემების $(X_i, Y_i)_{i\geq 1}$ საშუალებით. თუ გავიხსენებთ, რომ

$$SSR = \widehat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$

მაშინ (8.76) და (8.78) ფორმულების შედარებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტი უდრის შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს (ეს ამართლებს აღნიშვნას r^2 დეტერმინაციის კოეფიციენტისათვის).

თუ $\rho = 0$, მაშინ X და Y არაკორელირებულებია და წრფივი მოდელით სარგებლობა აზრს მოკლებულია, ამიტომ მნიშვნელოვანია ρ-ს ნულთან ტოლობის ჰიპოთეზის შემოწმება. ამრიგად, უნდა შემოწმდეს ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0 : \rho = 0$ ორმხრივი ალტერნატივის $H_A : \rho \neq 0$ წინააღმდეგ.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას სტატისტიკა

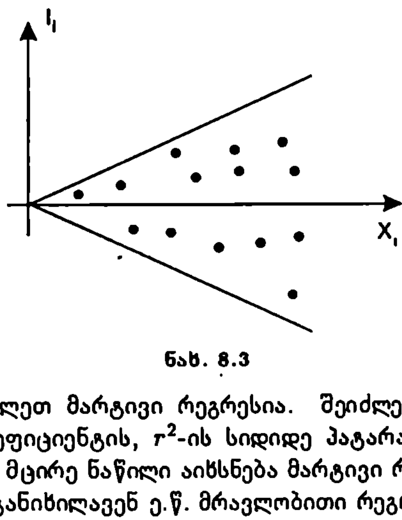
$$t = \frac{r - \rho}{S_r},$$

სადაც $S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$, განაწილებულია $(n-2)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით. აქედან გამომდინარე გადაწყვეტილების მიღების წესი შემდეგია:

უკუაგდე H_0, თუ $|t| > t_{\alpha/2,n-2}$.

ყველა სტატისტიკური დასკვნა რეგრესიული ანალიზის ფარგლებში მიღებული იყო გარკვეულ დაშვებებში. იგულისხმებოდა, რომ სამართლიანია (8.65), სადაც $\varepsilon \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$, σ_ε^2 არ არის დამოკიდებული X-ზე, არ იცვლება დაკვირვებიდან დაკვირვებამდე და ა.შ.

ამ დაშვებებიდან გადახრების უმეტესობა შეიძლება გამოვლენილ იქნეს ნარჩენების (ნაშთების) $e_i = Y_i - \widehat{Y}(X_i) = Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i$, $i = 1,\ldots,n$, ანალიზით. მაგალითად, ε_i-ების ნორმალურობის ჰიპოთეზა, ისევე როგორც მათი დამოუკიდებლობა მოწმდება მათემატიკური სტატისტიკის სტანდარტული მეთოდებით, რომლებსაც ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ. ზოგიერთი გადახრა კი შეიძლება აღმოჩენილ იქნას ვიზუალურად, თუ შევადგენთ ნარჩენი გადახრების გაფანტვის დიაგრამას: აბსცისთა ღერძზე იზომება დაკვირვებული X_i, ხოლო ორდინატთა ღერძზე კი შესაბამისი ნარჩენი შეცდომა $e_i = Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i$. მაგალითად, შემდეგი ტიპის დიაგრამა მიუთითებს σ_ε^2-ის X-ის მიხედვით ცვალებადობაზე



ნახ. 8.3

ჩვენ განვიხილეთ მარტივი რეგრესია. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტის, r^2-ის სიდიდე პატარაა, ანუ Y-ის სრული ვარიაციის მხოლოდ მცირე ნაწილი აიხსნება მარტივი რეგრესიით (X-ის ვარიაციით), ამიტომ განიხილავენ ე.წ. მრავლობითი რეგრესიის მოდელებს

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon,$$

ანდა არაწრფივ, მაგალითად, პოლინომიალურ რეგრესიულ მოდელებს

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \cdots + \beta_r X^r + \varepsilon.$$

პარამეტრების შეფასება, ნდობის ინტერვალების აგება და ყველა სხვა სტატისტიკური დასკვნის მიღება ასეთი ტიპის მოდელებისათვის ეფუძნება იგივე მეთოდებს, რომლებიც გამოყენებული იყო წრფივ რეგრესიულ ანალიზში.

8.8 პარამეტრის რობასტული და რეკურენტული შეფასებები ARIMA მოდელებში

რობასტული შეფასებები. მრავალი დროითი მწკრივის, განსაკუთრებით კი ფინანსური დროითი მწკრივების, ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ხშირია ისეთი სიტუაციები, როდესაც პროცესის „ბუნებრივ" მიმდინარეობას არღვევს ე.წ. მკვეთრად გამოყოფილი ანუ „ამოვარდნილი" დაკვირვებები — დაკვირვებულ დროით მწკრივში რამოდენიმე წერტილი მკვეთრად განცალკევებულია წერტილთა დანარჩენი სიმრავლისაგან (რომელთა დაჯგუფებაში შეიმჩნევა გარკვეული კანონზომიერება), გვხვდება სხვა ტიპის არარეგულარულობებიც, რომელთა ბუნებაც, საერთო ჯამში, მიუთითებს იმას, რომ ადგილი აქვს ძირითადი მოდელიდან, ანუ როგორც უწოდებენ, ნომინალური მოდელიდან, ამა თუ იმ ფორმის გადახრას — მოდელის შეშფოთებას.

მეორეს მხრივ, კარგადაა ცნობილი, რომ შეფასების თეორიის ამოსავალ წერტილს წარმოადგენს მოდელის პოსტულირება და შემდგომ, არსებული დაკვირვებების საფუძველზე მოდელის უცნობი პარამეტრების შეფასება. კლასიკური შეფასების თეორია იძლევა „საუკეთესო" შეფასებების აგების რეცეპტებს იმ შემთხვევაში, როდესაც მოდელის სისწორეში ეჭვი არ გვეპარება, ე.ი. დარწმუნებული ვართ იმაში, რომ დაკვირვებული მონაცემები გენერირებულია პოსტულირებული მოდელით.

წარმოიქმნება შემდეგი პრობლემა: შეიძლება აღმოჩნდეს, და ხშირად ასეცაა, რომ შეფასების აგების კლასიკური ოპტიმალური პროცედურები სრულიად უვარგისი ხდება მკაცრი მოდელური დაშვებების სულ მცირე დარღვევების დროსაც კი. ისმის კითხვა: როგორ ავაგოთ შეფასებების ისეთი პროცედურები, რომლებსაც გააჩნია მდგრადობა (რობასტულობა) მოდელის შეშფოთების შემთხვევაში? სწორედ ასეთი პრობლემის გადაჭრის აუცილებლობამ წარმოშვა რობასტული შეფასების თეორია, რომელიც პ. ჰიუბერის სახელთანაა დაკავშირებული (70-იანი წლები).

იმ მოსაზრებების საილუსტრაციოდ, რომლებიც რობასტულობის თეორიას უდევს საფუძვლად, განვიხილოთ მაგალითი დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული დაკვირვებებისა $X_1, X_2, \dots, X_n$, $X_i \sim N(0,1)$, θ უცნობი შესაფასებელი პარამეტრია. ცხადია, რომ X_i-ს განაწილების სიმკვრივე $f(x,\theta) = \varphi(x-\theta)$, სადაც $\varphi(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივეა. ამიტომ $l(x,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta) = x-\theta$ და დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\widehat{\theta}_n$, რომელიც წარმოადგენს $\sum_{i=1}^n (X_i - \theta) = 0$ განტოლების ამონახსნს, ემთხვევა საშუალო არითმეტიკულს $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

$l(x,\theta) = x-\theta$ ფუნქციას დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასების გავლენის ფუნქცია ეწოდება, რადგანაც $\overline{X} - \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ და ამიტომ $l(X_i,\theta) = X_i - \theta$ გვიჩვენებს, თუ რა გავლენას ახდენს შეფასებაზე ცალკეული დაკვირვება X_i.

დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$ წარმოადგენს კერძო შემთხვევას ე.წ. ჰიუბერის შეფასებებისა T_n^m, რომლებიც მიიღება შემდეგი განტოლების ამოხსნით

$$\sum_{i=1}^{n}[X_i - \theta]_{-m}^{m} = 0.$$

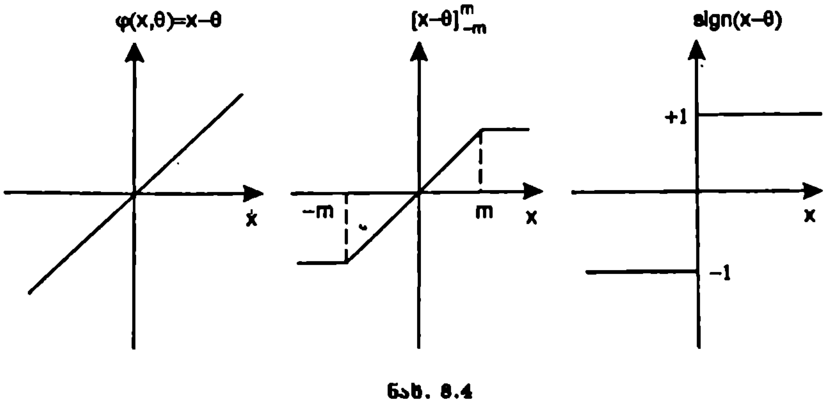
ფუნქციას $\psi^m(x,\theta) = [x-\theta]_{-m}^{m}$ ჰიუბერის ფუნქცია ეწოდება. აქ $[x]_{-m}^{m} = \max(-m, \min(m, x))$. ადვილი საჩვენებელია, რომ T_n^m შეფასება წარმოდგება ფორმით

$$T_n^m - \theta = \mathrm{const}(m)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i - \theta]_{-m}^{m}$$

და ამიტომ $\psi^m(x,\theta) = [x-\theta]_{-m}^{m}$-ს T_n^m შეფასების გავლენის ფუნქციას ვუწოდებთ. აშკარაა, რომ თუ $m = \infty$, $\psi^m(x,\theta) = x - \theta$. მეორე ზღვრული შემთხვევაა $\psi(x,\theta) = \mathrm{sign}(x-\theta) = \lim_{m\to 0}\frac{1}{m}[x-\theta]_{-m}^{m}$, რომელიც წარმოადგენს შერჩევითი მედიანის $\mathrm{med}_n(X_1,\ldots,X_n)$ გავლენის ფუნქციას, რადგან შერჩევითი მედიანა მიიღება შემდეგი განტოლებიდან

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sign}(x-\theta) = 0, \quad \mathrm{sign}x = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

გამოვსახოთ გრაფიკულად მოყვანილი გავლენის ფუნქციები.



ნახ. 8.4

როგორც ვხედავთ, $\overline{X}_n$-ის გავლენის ფუნქცია შემოუსაზღვრელია და ამიტომ $\overline{X}_n$ ძლიერად რეაგირებს „ამოვარდნილ“ დაკვირვებებზე, მაშინ

როცა ჰიუბერის ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ამიტომ შესაბამისი შეფასებაც ნაკლებად რეაგირებს „ამოვარდნილ" დაკვირვებებზე (უფრო მდგრადია, რობასტულია). ჰიუბერის ფუნქცია ფიქსირებული მოჭრის სიდიდით m-ით ზღუდავს იმ დაკვირვებების გავლენას, რომლებისთვისაც $|X_i - \theta| \geq m$; სახელდობრ, ანიჭებს წონას $(-m)$-ს (m-ს), თუ $X_i - \theta \leq -m$ ($X_i - \theta \geq m$).

მართლაც, ვთქვათ, $X_1 = 2$, $X_2 = -2.5$, $X_3 = -1$, $X_4 = 0.3$, $X_5 = 1.6$. მაშინ $\overline{X} = 0.08$, $\widehat{\text{med}} = 0.3$ და თუ $m > 3$, $T^m = \overline{X} = 0.08$. შევცვალოთ ბოლო დაკვირვება ახალი მნიშვნელობით $X_5' = 100$. მაშინ $\overline{X} = 0.08 \to \overline{X}' = 20$ (!), $\widehat{\text{med}}$ უცვლელი დარჩება, ხოლო

$$T^m = \overline{X} = 0.08 \to \begin{array}{ll} 0.76, & \text{თუ} \;\; m = 5; \\ 1.77, & \text{თუ} \;\; m = 10 \end{array}$$

მეორეს მხრივ, დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\overline{X}_n$ ეფექტურია, ე.ი. მას გააჩნია მინიმალური დისპერსია, $E_\theta(\overline{X}_n - \theta)^2 \leq E_\theta(T_n^m - \theta)^2$ ნებისმიერი T_n^m-სთვის ($\overline{X}_n$-ის დისპერსია უდრის $\frac{1}{n}$-ს განხილულ მაგალითში, შერჩევითი მედიანის დისპერსია კი უდრის $\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$).

საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ ჰიუბერის შეფასებები უკეთესია $\overline{X}_n$ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებებზე „დიდ ამოვარდნებზე" რეაგირების თვალსაზრისით, ეს უკანასკნელი უკეთესია ჰიუბერის შეფასებებზე დისპერსიის თვალსაზრისით. ამიტომ ასარჩევია რაიმე კომპრომისული ვარიანტი. როგორ აირჩეს მოჭრის სიდიდე m? ხომ არ უნდა გამოვიყენოთ სხვა ტიპის შეფასებებიც? როგორი ტიპის „ამოვარდნებისთვისაა" საკმარისი ჰიუბერის შეფასებათა კლასი? სწორედ ამ და სხვა მრავალ კითხვაზე იძლევა პასუხს რობასტული შეფასების თეორია.

ამ თეორიის ფარგლებში, პირველ რიგში, უნდა დაზუსტდეს, თუ როგორ გავიგოთ ფორმალურად მოდელის შეშფოთება. ხშირად გადახრას ნომინალური მოდელიდან აღწერენ ჰიუბერის დიდი შეცდომების მოდელის ტერმინებში — ნომინალური პირობითი სიმკვრივეების „გაჭუჭყიანების" (კონტამინაციის) ტერმინებში. ზოგჯერ განიხილავენ ჩანაცვლების მოდელებს, როდესაც ხდება ნომინალურ პროცესში სხვა პროცესის ჩანაცვლება. შედეგად ე.წ. „გაჭუჭყიანებული" პროცესი მიიღება. ამასთან, ასეთი დაკვირვებების წილი მთელ ამოკრეფაში მცირეა, ისინი „ამოვარდნილ" დაკვირვებებს წარმოადგენენ.

ამის შემდეგ რობასტული შეფასების თეორიაში ისმის კითხვები: შეფასებათა რა ბუნებრივი კლასი შეიცავს „შეშფოთების" მიმართ მდგრად შეფასებებს? რა გვესმის მდგრადობის ცნების ქვეშ? როგორ ავაგოთ რობასტული შეფასებები?

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული დაკვირვებებისა (independent identically distributed (i.i.d.)

შემთხვევა) $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ერთობლივი განაწილების სიმკვრივით $f(x,\theta)$, სადაც θ უცნობი შესაფასებელი პარამეტრია, და შევეცადოთ მის მაგალითზე ვუპასუხოთ ყველა დასმულ კითხვას.

ამ შემთხვევაში ნომინალური სიმკვრივის $f(x,\theta)$ კონტამინაცია ნიშნავს, რომ დაკვირვებები მოსულია გენერალური ერთობლიობიდან სიმკვრივით $f^{n,R,h}(x,\theta)$ (ნაცვლად $f(x,\theta)$-სი), სადაც

$$f^{n,R,h}(x,\theta) = \left(1 - \frac{R}{\sqrt{n}}\right) f(x,\theta) + \frac{R}{\sqrt{n}} h(x,\theta), \tag{8.79}$$

სადაც $R > 0$ რაიმე კონსტანტაა (გაჭუჭყიანების ინტენსივობა), ხოლო $h(x,\theta)$ — რაიმე განაწილების სიმკვრივეა.

ჩანაცვლების მოდელი კი მოიცემა თანაფარდობით

$$Z_i^n = (1-\zeta_i^n)X_i + \zeta_i^n W_i,$$

სადაც (X_i, ζ_i^n, W_i) — დამოუკიდებელ კომპონენტებიანი ერთნაირად განაწილებული ვექტორების დამოუკიდებელი მიმდევრობაა, $X_i \sim f(x,\theta)$, $P(\zeta_i^n = 1) = \frac{R}{\sqrt{n}}$, W_i-ს განაწილების სიმკვრივეა $h(x,\theta)$. ადვილი სანახავია, რომ Z_i^n-ის განაწილების სიმკვრივე $f^{n,R,h}(x,\theta)$-ს ტოლია. ასე რომ, i.i.d. შემთხვევაში კონტამინაციის ორივე მოდელი ეკვივალენტურია.

კარგადაა ცნობილი, რომ თუ მოდელი ზუსტია (ე.ი. $X_i \sim f(x,\theta)$), მაშინ ოპტიმალურ შეფასებას წარმოადგენს დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\widehat{\theta}_n$, რომელიც მიიღება დასაჯერობის განტოლების ამოხსნით (θ ცვლადის მიმართ)

$$\sum_{i=1}^{n} l(x,\theta) = 0,$$

სადაც $l(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)$ ($l(x,\theta)$-ს დასაჯერობის „ნიშნულს" უწოდებენ) და გარკვეულ პირობებში $\widehat{\theta}_n$-ს აქვს შემდეგი ასიმპტოტური განაწილება, როცა $n \to \infty$

$$\mathrm{Law}\,\{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) | f(x,\theta)\} \Longrightarrow N(0, I_n^{-1}(\theta)),$$

სადაც $\mathrm{Law}\,\{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) | f(x,\theta)\}$ ნიშნავს $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას, გამოთვლილს იმ შემთხვევაში, როდესაც X_i-ს განაწილების სიმკვრივეა $f(x,\theta)$, სიმბოლო „$\Longrightarrow$" აღნიშნავს განაწილებით კრებადობას, $N(0,\sigma^2)$ — ნორმალური განაწილებაა ნულოვანი საშუალოთი და დისპერსიით σ^2, $I(\theta) = E_\theta l^2(X_1,\theta)$ — ფიშერის ინფორმაციაა. $\widehat{\theta}_n$ ოპტიმალურია იმ აზრით, რომ მას გააჩნია მინიმალური ასიმპტოტური დისპერსია $I^{-1}(\theta)$ შეფასებათა საკმაოდ ფართო კლასში.

მაგრამ მოდელის შეშფოთებისას $\widehat{\theta}_n$-ს უჩნდება ასიმპტოტური ჩანაცვლება, თუმცა ასიმპტოტური დისპერსია არ ეცვლება, კერძოდ,

$$\text{Law}\,\{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)|f^{n,R,h}(x,\theta)\} \Longrightarrow N(\beta^{l,h,\lambda}(\theta), I^{-1}(\theta)),$$

სადაც $\beta^{l,R,h}(\theta)$ ასიმპტოტური ჩანაცვლებაა და

$$\beta^{l,R,h}(\theta) = \frac{E_\theta(l(X_1,\theta)\widetilde{h}(X_1,\theta))}{I_\theta}, \quad \widetilde{h} = \frac{h}{f}.$$

ამავე დროს, შეიძლება არსებობდეს სხვა შეფასება, რომელსაც ჩანაცვლება შესაძლოა უფრო მცირე აღმოაჩნდეს, ვიდრე θ_n-ს და მდგრადობის თვალსაზრისით იგი უკეთესი აღმოჩნდეს $\widehat{\theta}_n$-ზე.

ამ მიზეზის გამო, პ. ჰიუბერმა გააფართოვა შეფასებათა კლასი, შემოიღო რა ე.წ. M-შეფასებათა კლასი, რომელიც ბუნებრივად მოიცავს დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას. M-შეფასება ეწოდება შეფასებას, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს

$$\sum_{i=1}^{N} \psi(x_i,\theta) = 0, \tag{8.80}$$

რაიმე ψ ფუნქციით, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები: $E_\theta\psi(X_1,\theta) = 0$, $\sigma^2_{\psi(\theta)} = E_\theta\psi^2(X_1,\theta) < \infty$, $\forall\theta$-სთვის. ცხადია, რომ თუ $\psi(x,\theta) = l(x,\theta)$, მიიღება დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება. (8.80) განტოლებით აგებული შეფასება აღვნიშნოთ T_n^ψ-ით. ψ ფუნქციას ეწოდება გავლენის ფუნქცია. ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას

$$\text{Law}\,\{\sqrt{n}(T_n^\psi - \theta)|f^{n,R,h}(x,\theta\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N\left(\beta^{\psi,R,h}(\theta), \frac{\sigma^2_\psi(\theta)}{[E_\theta(\psi(X_1,\theta)l(X_1,\theta))]^2}\right),$$

სადაც

$$\beta^{\psi,R,h}(\theta) = \frac{RE'_\theta(\psi(X_1,\theta)\widetilde{h}(X_1,\theta))}{E_\theta(\psi(X_1,\theta)l(X_1,\theta))}.$$

სიმკვრივეს h^* ვუწოდოთ ყველაზე უარესი ალტერნატივა T^ψ შეფასებისათვის, თუ

$$\left|\beta^{\psi,R,h^*}(\theta)\right| \geq \left|\beta^{\psi,R,h}(\theta)\right|.$$

ნებისმიერი სხვა სიმკვრივისათვის h და სიდიდეს $\left|\beta^{\psi,R,h^*}(\theta)\right|$ ვუწოდოთ T^ψ შეფასების მაქსიმალური (ასიმპტოტური) ჩანაცვლება.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი M-შეფასების T^{ψ}-ის ასიმპტოტური დისპერსია $\sigma^2_{T^{\psi}} = \sigma^2_{\psi}[E_\theta(\psi(X_1,\theta)l(X_1,\theta))]^2$ მეტია დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასების $\widehat{\theta}$-ის ასიმპტოტურ დისპერსიაზე, I_θ^{-1}. ამავე დროს, შესაძლებელია, რომ T^{ψ}-ს მაქსიმალური ჩანაცვლება ნაკლები აღმოჩნდეს $\widehat{\theta}$-ს მაქსიმალურ ჩანაცვლებაზე.

მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როდესაც $X_i \sim N(0,1)$, დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასების $\widehat{\theta}$-ს გავლენის ფუნქცია $l(x,\theta) = x-\theta$ და $\widehat{\theta}$-ის მაქსიმალური ჩანაცვლება უსასრულოა, ე.ი.

$$\left|\beta^{l,R,h^*}(\theta)\right| = \infty,$$

მაშინ როცა შერჩევითი მედიანისთვის $\widehat{\mathrm{med}}_n = \widehat{\mathrm{med}}(X_1,\ldots,X_n)$ გავლენის ფუნქცია უდრის $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x-\theta)$ და ამიტომ მისთვის მაქსიმალური ჩანაცვლება $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლია, თუმცა $\widehat{\theta}$-ს ასიმპტოტური დისპერსია 1-ის ტოლია, ხოლო $\widehat{\mathrm{med}}_n$-ს კი უდრის $\frac{\pi}{2} > 1$.

საზოგადოდ, თუ T^{ψ} შეფასების გავლენის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, $|\psi(x,\theta)| \le C$, მაშინ მისი მაქსიმალური ჩანაცვლება სასრულია, ასიმპტოტური დისპერსიის თვალსაზრისით კი T^{ψ} უარესია დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებაზე.

იბადება კითხვები: რა თვალსაზრისით შევადაროთ T_n^{ψ}, $\psi \in \Psi$ შეფასებები? რომელია მათ შორის ყველაზე რობასტული? შემოვიღოთ შეფასებათა შედარების შემდეგი კრიტერიუმი: ასიმპტოტური საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$D(\psi,R,h,\theta) := \lim_{n\to\infty} E_\theta^{n,R,h}(\sqrt{n}(T_n^{\psi}-\theta))^2,$$

სადაც $E_\theta^{n,R,h}$ ნიშნავს $f^{n,R,h}(x,\theta)$ სიმკვრივით გასაშუალოებას. შეფასებას $T_n^* = T_n^{\psi^*}$ ვუწოდოთ ოპტიმალური მინიმაქსური აზრით, თუ

$$\sup_h D(\psi^*,R,h,\theta) \le \sup_h D(\psi,R,h,\theta)$$

ნებისმიერი $\psi \in \Psi$-სთვის.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$D(\psi,R,h,\theta) = \frac{R[E_\theta(\psi(X_1,\theta)\widetilde{h}(X_1,\theta))]^2 + \sigma^2_{\psi}(\theta)}{[E_\theta(\psi(X_1,\theta)l(X_1,\theta))]^2}.$$

მტკიცდება, რომ ოპტიმალურ გავლენის ფუნქციას ψ^*-ს აქვს სახე (მუდმივის სიზუსტით)

$$\psi^*(x,\theta) = [l(x,\theta) - \beta^*(\theta,m^*)]_{-m^*(\theta)}^{m^*(\theta)}, \tag{8.81}$$

სადაც წყვილი (β^*, m^*) აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$E_\theta[l(X_1,\theta) - \beta^*]_{-m^*}^{m^*} = 0, \tag{8.82}$$

$$R^2(m^*)^2 = E_\theta\left\{[l(X_1,\theta) - \beta^*]_{-m^*}^{m^*} - \left([l(X_1,\theta) - \beta^*]_{-m^*}^{m^*}\right)^2\right\} f(x,\theta)dx. \tag{8.83}$$

აქ აღნიშვნა $[x]_{-m}^{m}$ ნიშნავს შემდეგს:

$$[x]_{-m}^{m} = \begin{cases} m, & x \geq m; \\ x, & -m \leq x \leq m; \\ -m, & x \leq -m. \end{cases}$$

ამრიგად, ოპტიმალური ψ^* ფუნქცია წარმოადგენს დასაჯერობის „ნიშნულის" $l(x,\theta)$-ის ცენტრირებულ და მოჭრილ ვარიანტს. მას ჰიუბერის ფუნქცია ეწოდება.

როდესაც $R \to 0$, ე.ი. „გაჭუჭყიანების" ინტენსივობა ნულდება, მაშინ $m^* \to \infty$ და ამიტომ

$$\psi^* \to l(x,\theta).$$

აქედან ვასკვნით, რომ ნომინალური მოდელის სისწორის შემთხვევაში ($R = 0$ — გაჭუჭყიანებას ადგილი არა აქვს) ოპტიმალურია $\psi^* = l$.

ვთქვათ, $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$, ე.ი. X_i-ები განაწილებულია ნორმალურად უცნობი θ საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით. ამ შემთხვევაში, $l(x,\theta) = (x-\theta)$, ამიტომ $\beta^*(\theta) \equiv 0$ და

$$\psi^*(x,\theta) = [x-\theta]_{-m^*(\theta)}^{m^*(\theta)},$$

სადაც $m^*(\theta)$ აკმაყოფილებს (8.83) განტოლებას, სადაც $\beta^*(\theta) \equiv 0$.

როგორც აღვნიშნეთ, თუ $R \to 0$, მაშინ $\psi^*(x,\theta) = (x-\theta)$ და ამიტომ, ოპტიმალურია დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta) = 0 \Longrightarrow \theta = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

როცა $R \to \infty$, მაშინ $m^* \to 0$ და $\psi^* \to \operatorname{sign}(x-\theta)$, სადაც

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში ოპტიმალურ შეფასებას წარმოადგენს შერჩევითი მედიანა, რომელიც მიიღება შემდეგი განტოლების ამოხსნით:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(x_i - \theta) = 0, \Longrightarrow \widehat{\theta} = \widehat{\text{med}}\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

გავიხსენოთ, რომ თუ n კენტი რიცხვია, შერჩევითი მედიანა წარმოადგენს ზრდის მიხედვით დალაგებული დაკვირვებების ანუ ვარიაციული მწკრივის შუა წევრს.

ზოგადი დროითი მწკრივებისათვის (ე.ი. ნებისმიერად დამოკიდებული დაკვირვებებისათვის) რობასტული შეფასების თეორია გაცილებით უფრო რთულ ფორმას იძენს იმის გამო, რომ ზოგად დროით მწკრივებს არ გააჩნია ის შესანიშნავი თვისებები, რაც დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ მიმდევრობებს: 1) i.i.d. შემთხვევაში ერთობლივი ალბათური განაწილებების მოსაცემად საკმარისია ერთადერთი სიმკვრივის $f(x,\theta)$-ის ცოდნა, მაშინ როცა ზოგადი დროითი მწკრივებისათვის საჭირო ხდება პირობითი განაწილების სიმკვრივეების მთელი $f_i(z,\theta|x_{i-1},\dots,x_1)$, $i=1,2,\dots,n$, სისტემის მოცემა, სადაც $f_i(z,\theta|x_{i-1},\dots,x_1)$ წარმოადგენს X_{i+1} პირობითი განაწილების სიმკვრივეს პირობაში, რომ $X_j=x_j$, $j=1,2,\dots,i-1$. 2) i.i.d. შემთხვევაში სასრული დისპერსიის დროს ავტომატურად სრულდება დიდ რიცხვთა კანონი და ცენტრალური ზღვარითი თეორემა (მაშინ როცა ზოგადი დროითი მწკრივების შემთხვევაში საჭიროა ერგოდულობის მოთხოვნების შემოყვანა). მიუხედავად ამ სირთულეებისა, შესაძლებელია რობასტული შეფასების ამოცანების ჩამოყალიბება და გადაჭრა ზოგადი დროითი მწკრივებისათვის, მათ შორის ARIMA პროცესებისათვისაც (იხ. [64], [72], [100]–[102]). ჩვენ არ შევჩერდებით ზოგადი შემთხვევის აღწერაზე, განვიხილავთ მხოლოდ ორ უმარტივეს კერძო მაგალითს AR(1) და MA(1) მოდელებისა.

დავიწყოთ AR(1) მოდელით. ვთქვათ, $X=(X_i)_{i\le n}$ AR(1) პროცესია, ე.ი.

$$X_i=\Phi X_{i-1}+a_i,\quad |\Phi|<1, \tag{8.84}$$

სადაც $(a_i)_{i\le n}$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივით $g(x)$, $Ea_i=0$, $Ea_i^2=\sigma_a^2<\infty$, Φ — უცნობი შესაფასებელი პარამეტრია. $(a_i)_{i\le n}$ შემთხვევით სიდიდეებს ხშირად ინოვაციებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ X_{i+1}-ის პირობითი განაწილების სიმკვრივე პირობაში, რომ დაფიქსირებულია წარსული $X_j=x_j$, $j\le i-1$, მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$f_i(x,\Phi|x_{i-1},\dots,x_1)=f(x,\Phi|x_{i-1})=g(x-\Phi x_{i-1})$$
$$\left(=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\Phi x_{i-1})^2}{2}},\ \text{თუ } a_i\sim N(0,1)\right).$$

მაშინ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\widehat{\Phi}_n$ წარმოადგენს დასაჯერობის

განტოლების ამონახსნს

$$\sum_{i=1}^{n} l(X_i, \Phi | X_{i-1}) = 0,$$

სადაც

$$l(x, \Phi | x_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \Phi | x_{i-1}) = -\frac{\dot{g}(x - \Phi x_{i-1})}{g(x - \Phi x_{i-1})} x_{i-1},$$

$$\dot{g}(x) = \frac{\partial}{\partial x} g(x).$$

ნორმალური ინოვაციების, $a_i \sim N(0,1)$, შემთხვევაში

$$\widehat{\Phi}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2}.$$

განვიხილოთ ნომინალური მოდელის შემდეგი ტიპის შეშფოთება. დავუშვათ, რომ დაკვირვებები $X_1, X_2, \ldots, X_n$, გენერირებულია არა (8.84) მოდელით, არამედ AR(1) მოდელით, ინოვაციებით a_i^n, ე.ი.

$$X_i^n = \Phi X_{i-1}^n + a_i^n,$$

სადაც ინოვაციები a_i^n მოიცემა ჩანაცვლების მოდელით

$$a_i^n = (1 - \zeta_i^n) a_i + \zeta_i^n W_i. \tag{8.85}$$

a_i, W_i და ζ_i^n პირობითად დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია (სხვა სიტყვებით, ისინი დამოუკიდებელნი არიან იმ პირობაში, რომ დაფიქსირებულია წარსული $X_j = x_j$, $j \le i-1$), ამასთან W_i-ს პირობითი განაწილების სიმკვრივეა $h(x|x_{i-1})$, $P(\zeta_i^n = 1 | X_j = x_j, j \le i-1) = \frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}}$, ხოლო a_i-ს განაწილების სიმკვრივეა კვლავ $g(x)$. მაშინ, თუ $g^n(x|x_{i-1})$-ით აღვნიშნავთ a_i^n-ის პირობითი განაწილების სიმკვრივეს, გვექნება

$$g^n(x|x_{i-1}) = \left(1 - \frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}}\right) g(x) + \frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}} h(x|x_{i-1}),$$

საიდანაც X_i^n-ის პირობითი განაწილების სიმკვრივისათვის მივიღებთ

$$f^{n,\lambda,h}(x, \Phi | x_{i-1}) = \left(1 - \frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}}\right) f(x, \Phi | x_{i-1}) +$$

$$+ \frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}} h(x - \Phi x_{i-1} | x_{i-1}).$$

ამრიგად, ინოვაციებისათვის ჩანაცვლების მოდელმა (8.85) მოგვცა პირობითი სიმკვრივეებისათვის ჰიუბერის დიდი შეცდომების მოდელი დავიწროვებადი მიდამოებით. ზემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ $\sup_x \lambda(x) < \infty$, ამიტომ $\frac{\lambda(x_{i-1})}{\sqrt{n}} \to 0$, როცა $n \to \infty$. $\lambda(x)$-ს ეწოდება შეწონვის (კონტამინაციის) ინტენსივობა. ზოგადად, შეწონვის ინტენსივობაზე შეიძლება დადებულ იქნას სხვადასხვა ტიპის შეზღუდვები (განსხვავებით i.i.d. მოდელისაგან, სადაც შეწონვის ინტენსივობა ფიქსირებულია — არაა დამოკიდებული x_{i-1}-ზე, $\lambda = R$). ჩვენ აქ შევჩერდებით შემთხვევაზე, როდესაც $\lambda(x)$-ზე დადებულია შემდეგი ტიპის შეზღუდვა

$$E_\theta \lambda(X_1) \le R, \tag{8.86}$$

$R > 0$ რაიმე კონსტანტაა, $f_0(y)$ ნომინალური AR(1) პროცესის ერთგანზომილებიანი სტაციონარული განაწილებაა, R-ს კონტამინაციის რადიუსი ეწოდება.

აქაც, მსგავსად i.i.d. შემთხვევისა განიხილება M-შეფასებათა კლასი, რომელიც ბუნებრივად მოიცავს დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას. სახელდობრ, M-შეფასება განიმარტება როგორც შემდეგი განტოლების ამონახსნი (Φ ცვლადის მიმართ)

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \Phi X_{i-1}, X_{i-1}) = 0 \Longrightarrow T_n^\psi,$$

სადაც $\psi(x, y)$ ორი ცვლადის რაიმე ფუნქციაა თვისებით $\int \psi(x, y) g(x) dx = 0$, $\int \psi^2(x, y) g(x) dx < \infty$ ნებისმიერი y-სთვის. თუ $\psi(x, y) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$, მივიღებთ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას.

აქაც ოპტიმალობის კრიტერიუმად აღებულია M-შეფასების ასიმპტოტური საშუალო კვადრატული შეცდომა

$$D(\psi, \lambda, h, \Phi) := \lim_{n \to \infty} E_\Phi^{n,\lambda,h} (\sqrt{n}(T_n^\psi - \Phi))^2,$$

ოპტიმალური კი ეწოდება შეფასებას $T_n^* = T_n^{\psi^*}$, რომლისთვისაც

$$\sup_{\lambda, h} D(\psi^*, \lambda, h, \Phi) \le \sup_{\lambda, h} D(\psi, \lambda, h, \Phi)$$

ნებისმიერი გავლენის ψ ფუნქციისათვის, ხოლო sup აიღება ისეთი $\lambda(x)$-ით, რომლებიც აკმაყოფილებს (8.86) შეზღუდვას, და ნებისმიერი პირობითი h სიმკვრივეებით.

ამ შემთხვევაშიც მტკიცდება, რომ ზემოღებული კრიტერიუმის აზრით ოპტიმალურ (რობასტულ) შეფასებას წარმოადგენს შეფასება $T_n^{\psi^*}$, რომლის გავლენის ფუნქცია ψ^* წარმოადგენს ჰიუბერის ფუნქციას:

$$\psi^*(x, \Phi | x_{i-1}) = [l(x, \Phi | x_{i-1}) - \beta^*(x_{i-1}, \Phi)]_{-m^*(\Phi)}^{m^*(\Phi)},$$

სადაც წყვილი $\beta^*(x_{i-1},\Phi)$ და $m^*(\Phi)$ აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$E_\theta[l(X_2,\Phi|X_1)-\beta^*(X_1,\Phi)]_{-m}^{m}=0,$$

$$R^2m^2=E_\theta\left\{[l(X_2,\Phi|X_1)-\beta^*(X_1,\theta)]_{-m}^{m}l(X_2,\Phi|X_1)\right.$$

$$\left.-\left([l(X_2,\Phi|X_1)-\beta^*(X_1,\theta)]_{-m}^{m}\right)^2\right\}$$

(იხ. მაგალითად, [102]).

აქაც შეიძლება i.i.d. შემთხვევის მსგავსი დასკვნების გაკეთება, როდესაც $R\to 0$ და $R\to\infty$. ნორმალური ინოვაციების შემთხვევაში, $a_i\sim$ $\sim N(0,1)$, $\beta(y,\Phi)\equiv 0$ და ზემოთ მოყვანილი განტოლებები იღებს მარტივ სახეს

$$R^2m^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left([z]_{-m}^{m}z-\left([z]_{-m}^{m}\right)^2\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

განვიხილოთ MA(1) მოდელის შემთხვევა. ვთქვათ, მოცემულია სტაციონარული ერგოდული MA(1) პროცესი $\ldots,Y_{-1},Y_0,Y_1,\ldots,Y_n,\ldots$, ე.ი.

$$Y_i=a_i-\theta a_{i-1},\quad |\theta|<1,$$

სადაც (a_i) იგივე მიმდევრობაა, რაც ზემოგანხილულ AR(1) მოდელში.

აღვნიშნოთ $X_0=(a_0,a_{-1},\ldots)$, $X_i=Y_i$, $i\geq 1$. მაშინ, X_i-ს პირობითი განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f_i(z,\theta|x)=g\left(z+\sum_{j=1}^{i-1}\theta^j x_{i-j}+\theta^i a_0\right),$$

ხოლო დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება კი განტოლებით

$$\sum_{i=1}^{n}l_i(X_i,\theta|X_{i-1},\ldots,X_0)=0,$$

სადაც

$$l_i(X_i,\theta|X_{i-1},\ldots,X_0)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_i(X_i,\theta|X_{i-1},\ldots,X_0)=\Lambda(a_i)\overline{c}_i,$$

სადაც $\Lambda(x)=\frac{\dot g(x)}{g(x)}$,

$$\overline{c}_i=\sum_{j=1}^{i-1}j\theta^{j-1}X_{i-j}+i\theta^{i-1}a_0.$$

მსგავსად ზემოგანხილული შემთხვევებისა, თუ განვიხილავთ კონტამინირებულ პირობით სიმკვრივეებს, შემოვიღებთ M-შეფასებათა კლასს, ოპტიმალობის კრიტერიუმს, როგორც ასიმპტოტურ საშუალო კვადრატულ შეცდომას, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ოპტიმალური შეფასება მოიცემა გავლენის ψ^* ფუნქციით, რომელიც წარმოადგენს ჰიუბერის ფუნქციას

$$\psi_i^* = [l_i - \beta_i^*]_{m^*}^{m^*},$$

სადაც წყვილი (β_i^*, m^*) წარმოადგენს გარკვეულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

რეკურენტული შეფასებები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებების აგება ნიშნავს დასაჯერობის განტოლების ამონახსნის მოძებნას. მაგალითად, დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული დაკვირვებების შემთხვევაში ერთობლივი განაწილების სიმკვრივით $f(x, \theta)$ ამ განტოლებას აქვს სახე

$$\sum_{i=1}^{n} l(X_i, \theta) = 0,$$

სადაც $l(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta)$. ხშირ შემთხვევაში ეს განტოლებები რთული ფორმისაა და მათი ამოხსნა დიდ სიძნელეებთან შეიძლება იყოს დაკავშირებული. სასურველი იქნებოდა ისეთი პროცედურების შემუშავება, რომლებიც საშუალებას მოგვცემდა რეკურენტული გზით აგვეგო ისეთი შეფასებები, რომლებიც ასიმპტოტურად ეკვივალენტური იქნებოდა დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებისა. i.i.d. შემთხვევაში ეს პროცედურები მოიცემა შემდეგი განტოლებით

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{l(X_n, \theta_{n-1})}{n I(\theta_{n-1})}, \quad \theta_0.$$

როგორც ვხედავთ, ეს პროცედურა მოსახერხებელია იმით, რომ ყოველ ნაბიჯზე შეფასების აგება წარმოებს წინა ნაბიჯზე აგებული შეფასებისა და ახალი დაკვირვების მეშვეობით.

საკმაოდ ფართო პირობებში $f(x, \theta)$ ფუნქციაზე მტკიცდება, რომ (θ_n) მიმდევრობა ეკვივალენტურია დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებისა $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_n)$ იმ აზრით, რომ მას გააჩნია იგივე ასიმპტოტური თვისებები, რაც $(\widehat{\theta})_n$ მიმდევრობას, როდესაც $n \to \infty$ (იხ. მაგალითად, ფუნდამენტური მონოგრაფია М.Б. Невельсон, Р.З. Хасьминский „Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание“, М. „Наука“, 1972).

მსგავსი რეკურენტული პროცედურების აგება და მათი ასიმპტოტური თვისებების კვლევა შესაძლებელია ზოგადი დროითი მწკრივებისთვისაც. ეს პროცედურები შემოთავაზებული და შესწავლილი იყო ნაშრომებში [99], [103], [139].

ვთქვათ, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ რაიმე დროითი მწკრივია პირობით სიმკვრივეთა სისტემით $(f_i(z, \theta|x_{i-1}, \ldots, x_1))_{i\geq 1}$, სადაც $f_i(z, \theta|x_{i-1}, \ldots, x_1)$ წარმოადგენს X_i-ს პირობით სიმკვრივეს პირობაში, რომ დაფიქსირებულია წარსული $X_j = x_j$, $j \leq i-1$. θ შესაფასებელი უცნობი პარამეტრია. მაშინ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_n)_{n\geq 1}$ მოიცემა განტოლებით

$$\sum_{i=1} l(X_i, \theta|X_{i-1}, \ldots, X_1) = 0,$$

სადაც $l(z, \theta|x_{i-1}, \ldots, x_1) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(z, \theta|x_{i-1}, \ldots, x_1)$. აღვნიშნოთ $l_i(\theta) :=$ $:= l(X_i, \theta|X_{i-1}, \ldots, X_1)$. მაშინ რეკურენტული შეფასების პროცედურა მოიცემა განტოლებით

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{l(X_n, \theta_{n-1})}{I_n(\theta_{n-1})}, \quad \theta_0,$$

სადაც $I_n(\theta)$ ფიშერის ემპირიული ინფორმაციაა

$$I_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} E_\theta^n(l_i^2|X_{i-1}, \ldots, X_1).$$

საკმაოდ ფართო პირობებში მტკიცდება, რომ პროცედურა კრებადია ნებისმიერი საწყისი წერტილიდან θ_0; ე.ი. $\theta_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$, როცა $n \to \infty$, (θ_n) შეფასებათა მიმდევრობა ეფექტურია და ეკვივალენტურია დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებისა $\widehat{\theta} = (\theta_n)$, როცა $n \to \infty$.

ზემოთ განხილული AR(1) მოდელისათვის, როცა ინოვაციების, a_i-ს განაწილების სიმკვრივეა $g(x)$, რეკურენტული პროცედურა გამოიყურება ასე

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \frac{\Lambda(X_n - \theta_{n-1}X_{n-1})X_{n-1}}{\left(\int \lambda^2(x)g(x)dx\right)\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2},$$

სადაც $\Lambda(x) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$. იმ შემთხვევაში, როდესაც $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, ე.ი. $a_i \sim N(0, 1)$, ეს პროცედურა იღებს ფორმას

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{(X_n - \theta_{n-1}X_{n-1})X_{n-1}}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2}$$

და ცხადია, მისი ამოხსნა ემთხვევა დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას

$$\widehat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2}.$$

შეიძლება განხილულ იქნას ისეთი რეკურენტული შეფასებებიც, რომლებიც ასიმპტოტურად M-შეფასებების ეკვივალენტურია. მათზე ჩვენ აღარ შევჩერდებით.

8.9 კეისი 1. ბანკის ლიკვიდურობის პრობლემა

ბანკი ითვლება ლიკვიდურად, თუ მას აქვს საშუალება მოიზიდოს საჭირო სახსრები მისაღებ ფასად და სწორედ იმ მომენტში, როცა ეს აუცილებელია. სხვა სიტყვებით, ეს ნიშნავს, რომ ან ბანკს გააჩნია საჭირო ლიკვიდური სახსრები, ან შეუძლია სწრაფად მიიღოს ისინი სესხების ან აქტივების გაყიდვის გზით.

გასაგებია, რომ ლიკვიდურობის სათანადო დონის შენარჩუნება მეტყველებს, ერთის მხრივ, ბანკის საიმედოობაზე და, მეორეს მხრივ, მაღალი მომგებიანობის საწინდარია.

ლიკვიდურ სახსრებზე ბანკის მოთხოვნილების საკითხის განხილვა შესაძლებელია (და ჩვენ ასეც მოვიქცევით) მოთხოვნა-მიწოდების მექანიზმის თვალსაზრისით. ცნობილია, რომ უმეტესი ბანკებისათვის ლიკვიდურ საშუალებებზე მოთხოვნა წარმოიქმნება შემდეგი მიზეზებით:

a) კლიენტების მიერ ფულის მოხსნა ანგარიშებიდან.

b) კლიენტების მიერ კრედიტების მიღების შესახებ განაცხადის შემოტანა (ცხადია, ლაპარაკია იმ განაცხადებზე, რომელთა დაკმაყოფილებაც გადაწყვიტა ბანკმა). აქ შეიძლება გამოვყოთ: 1) განაცხადები ახალი კრედიტის მიღების შესახებ; 2) ძველი კრედიტების მოქმედების ვადის გაგრძელება; 3) სახსრების გამოყოფა არსებული საკრედიტო ხაზებით.

c) ბანკის მიერ სხვა ბანკებიდან მიღებული სესხების დაფარვა (ან ეროვნული ბანკის წინაშე ვალდებულების დაფარვა). აქვე შეიძლება ჩავრთოთ ბანკის დანახარჯები სხვა არადეპოზიტური სახსრების მოზიდვაზე.

d) სახელმწიფო გადასახადების გადახდა და საოპერაციო ხარჯები.

e) აქციონერებისთვის დივიდენდების გადახდა.

ლიკვიდური საშუალებების მიწოდებას განაპირობებს შემდეგი მიზეზები:

a′) კლიენტების დეპოზიტებზე შემოსული სახსრები. ამასთან, უნდა გავითვალისწინოთ როგორც ახალ ანგარიშებზე შემოსული სახსრები, ისე ძველ, უკვე არსებულ ანგარიშებზე შემოსული თანხები.

b′) ადრე გაცემული კრედიტების დაფარვა.

c′) შემოსავლები არასადეპოზიტო საბანკო მომსახურეობიდან.

d′) ბანკის აქტივების გაყიდვა.

e′) ფულის შეძენა ფულის ბაზარზე.

ზემოხსენებული მოთხოვნა-მიწოდების სხვადასხვა წყაროები განსაზღვრავენ დროის ნებისმიერ მომენტში ბანკის ნეტო-ლიკვიდურ პოზიციას:

$$L_t = \overbrace{(a' + b' + c' + d' + e')_t}^{\text{მიწოდება}} - \overbrace{(a + b + c + d + e)_t}^{\text{მოთხოვნა}} . \qquad (8.87)$$

იმ შემთხვევაში, თუ $L_t < 0$, ბანკი დგას ლიკვიდური სახსრების დეფიციტის წინაშე და გადასაჭრელია პრობლემა, თუ როგორ და რა ვადებში იქნას მიღებული დამატებითი ლიკვიდური სახსრები. თუ $L_t > 0$, მაშინ ბანკს გააჩნია ლიკვიდური სახსრების ნამატი და გადასაჭრელია პრობლემა, თუ როგორ და რა ვადებით იქნას ინვესტირებული ზედმეტი თანხები ბანკის მომგებიანობის გასაზრდელად.

გასაგებია, რომ ბანკის ლიკვიდურობის მართვის პრობლემაში გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება დროით მახასიათებლებს და, თუ გამოვრიცხავთ იმ მოთხოვნილებებს ლიკვიდურ საშუალებებზე, რომლებიც გადაუდებელნი (ან თითქმის გადაუდებელნი) არიან, ძირითადი ყურადღება უნდა იქნას მიქცეული გრძელვადიან მოთხოვნილებათა ანალიზზე. სწორედ ამ მოთხოვნილების დონის დადგენა სამომავლო მომენტისთვის არის ის პრობლემა, რომლის გადაჭრაში გვეხმარება პროგნოზირების მეთოდების გამოყენება.

ამრიგად, ლიკვიდურობის პრობლემა ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

1. ლიკვიდურ საშუალებებზე მოთხოვნა იშვიათად უდრის მათ მიწოდებას დროის რომელიმე მომენტში. ბანკს მუდმივად აქვს საქმე ლიკვიდური სახსრების დეფიციტთან ან სიჭარბესთან.

2. არსებობს დილემა ბანკის ლიკვიდურობასა და მომგებიანობას შორის.

ბანკის სახსრების დიდი წილი ხმარდება ლიკვიდურ სახსრებზე მოთხოვნილების დაკმაყოფილებას, მცირე — მომგებიანობის გაზრდას.

ამრიგად, ლიკვიდურობის დონის ოპტიმალური სიდიდის შენარჩუნება არის ბანკის მუდმივი პრობლემა და ყოველთვის მიმართულია ბანკის მომგებიანობის გაზრდისაკენ. ამ პრობლემის გადაჭრა ბანკისათვის დაკავშირებულია ხარჯებთან, რომლებიც შეიცავენ: 1) საპროცენტო გადასახადებს აღებული სესხების გამო; 2) ლიკვიდური სახსრების მოზიდვაზე დახარჯულ დროისა და ფულის ხარჯებს; 3) გაყიდული აქტივების ალტერნატიული ღირებულების ხარჯებს, რომლებიც აქტივების მომავალი პერიოდის შესაძლო შემოსავლების ტოლია.

თუ ბანკს გააჩნია ზედმეტი სახსრები, მაშინ ისინი დაუყოვნებლივ უნდა იქნან ინვესტირებული, რათა თავი ავარიდოთ ალტერნატიული ღირებულების დაკარგვას.

დავსვათ კითხვა: რატომ წარმოიქმნება ლიკვიდურობის სერიოზული პრობლემა? არსებობს ორი ძირითადი მიზეზი: 1) შეუსაბამობა აქტივებისა და ვალდებულებების დაფარვის დროში; 2) ბანკის მგრძნობიარობა საპროცენტო განაკვეთის ცვლილების მიმართ.

გამოვყოთ ის საკითხები, რომლებსაც უნდა მიაქციოს ყურადღება ბანკის მენეჯერმა ლიკვიდურობის მართვის დროს: 1) კონტროლი ბანკის ყველა განყოფილებაზე, რომლებიც პასუხს აგებენ სახსრების მოზიდვაზე და გამოყენებაზე; 2) მენეჯერმა უნდა განჭვრიტოს ის მომენტები, როცა ბანკის უდიდესი მეანაბრეები ან კრედიტის ამღებნი გეგმავენ თანხის მოხსნას ანგარიშიდან, ან თანხის გადიდებას. ამის მიღწევა შესაძლებელია კლიენტებთან პირადი მუშაობისა და კონტაქტების საშუალებით. მიღებული ინფორმაცია მეტად მნიშვნელოვანია მთელი პრობლემის ოპტიმალურად გადაწყვეტისათვის; 3) ბანკის პრიორიტეტებისა და მიზნების ნათლად გამოკვეთა, რის საფუძველზეც ხდება ლიკვიდურობის მართვის პოლიტიკის შემუშავება; 4) ლიკვიდურობის დონის მუდმივი ანალიზი, რის საფუძველზეც ხდება კონკრეტული გადაწყვეტილებების შემუშავება, რათა ოპტიმალურად იქნას მიღწეული ბანკის სტრატეგიული მიზნები.

ზემოთქმულიდან ნათლად გამომდინარეობს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს ლიკვიდურობის მართვის მეთოდი, ბანკში შემავალი და ბანკიდან გამავალი ფულადი ნაკადების პროგნოზირება არის ის საფუძველი, რომელზეც უნდა დამყარდეს ოპტიმალური მართვის პოლიტიკა.

ფულადი ნაკადების კონსტრუირება. დავუბრუნდეთ ფორმულა (8.87)-ს. ნეტო-ლიკვიდური პოზიციის აღმწერი პროცესი შეიძლება მოკლედ ასე გადავწეროთ

$$L_t = Liability_t - Asset_t, \tag{8.88}$$

სადაც $Liability_t$ აღნიშნავს ბანკში ფულის შემავალ ნაკადს, ხოლო $Asset_t$ — ბანკიდან გამავალ ნაკადს. ინდექსი t აღნიშნავს დროის განსახილველ მომენტს.

ის ინფორმაცია, რომელიც გააჩნია მენეჯერს ამ ნაკადების შესახებ, მატერიალიზებულია ყოველდღიურ ბალანსებში, კერძოდ, აქვს საბალანსო ანგარიშებზე დარიცხული თანხების ფორმა.

ამიტომ უპირველესი ამოცანაა გამოვყოთ საბალანსო ანგარიშების ის ნომრები, რომლებიც აღრიცხავენ სწორედ იმ თანხებს, რომელთაგანაც ფორმირდება, ერთის მხრივ, a′), b′), c′), d′), e′) პუნქტებში მოცემული თანხები (ჩვენ აღნიშვნებში $Liability_t$ პროცესი) და, მეორეს მხრივ, a), b), c), d), e) პუნქტებში მოცემული თანხები (ჩვენს აღნიშვნებში $Asset_t$ პროცესი). ამასთან, დასაზუსტებელია დროის ის მომენტები, რომლებშიც ხდება ამ პროცესებზე დაკვირვება.

პროცესები $Liability_t$ და $Asset_t$ ფორმირდება შემდეგი პირობითი

ანგარიშებიდან:

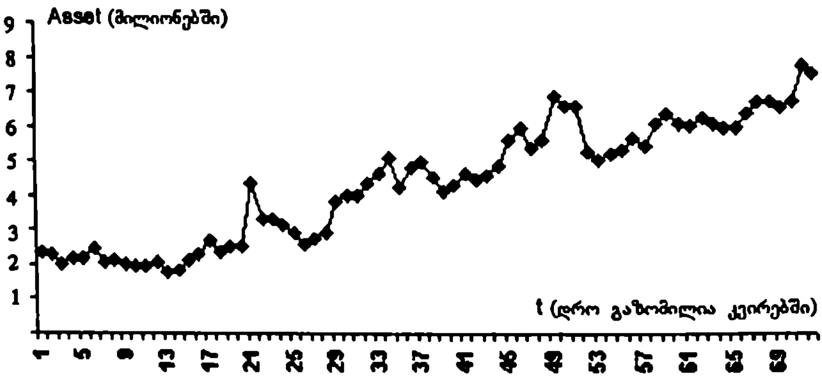
$$Liability_t = \sum_{i=1}^{L} p_i,$$

(სულ L ანგარიში), სადაც p_i — i-ურ ანგარიშზე მყოფი თანხაა.

$$Asset_t = \sum_{i=1}^{A} a_i,$$

(სულ A ანგარიში), სადაც a_i — i-ურ ანგარიშზე მყოფი თანხაა.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული პროცესების ფორმირება კონკრეტული ბანკისათვის ინდივიდუალურად უნდა გადაწყდეს.



ნახ. 8.5

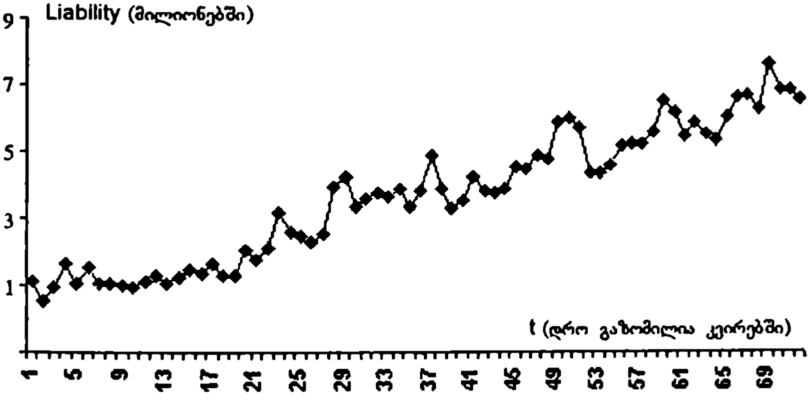
ჩვენ ხელთ გვქონდა რეალური მონაცემები, რომელთა ანალიზი და პროგნოზირება ჩატარდა ყველა ზემოაღნიშნული მეთოდის გამოყენებით: სახელდობრ, მონაცემთა გასწორება და ადეკვატური მოდელების შემუშავება, მათი პარამეტრების შეფასება, იდენტიფიკაცია, დიაგნოსტიკა და ბოლოს, ყოველივე ამის საფუძველზე, პროგნოზირება. პროგნოზირების მარტივი ალგორითმების გამოყენების გარდა, ჩატარებული იყო პროგნოზირება ARIMA მოდელების, კალმან-ბიუსის სქემის გამოყენებით.

აგებულ იქნა წერტილოვანი მოკლევადიანი პროგნოზები (ერთკვირიანი, ორკვირიანი და ა.შ.) და პროგნოზების ალბათური საზღვრები. შექმნილია კომპიუტერული პროგრამები, რომლებიც საშუალებას იძლევა, შემუშავებული მეთოდიკა დაინერგოს ბანკების საქმიანობაში. ამ პროგრამების საფუძველზე შეიძლება გამოითვალოს პროგნოზებისა და მათი ალბათური საზღვრების რიცხვითი მნიშვნელობები.

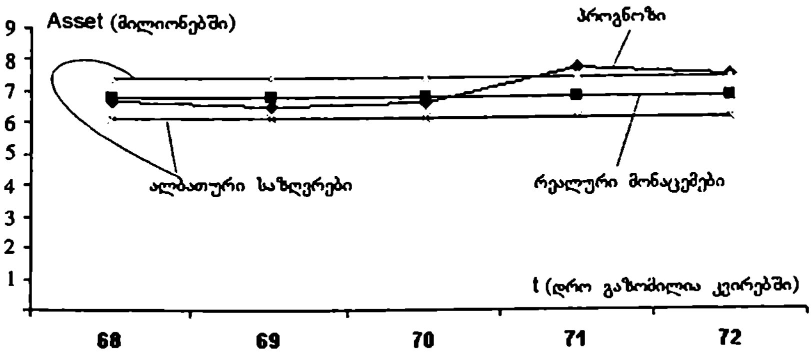
პროგნოზის შეცდომები სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებისას იცვლებოდა 5–15%-ის ფარგლებში.

შემდეგ გრაფიკებზე მოყვანილია ხელოვნურად მოდელირებული ტიპიური პროცესები, გამომდინარე იქიდან, რომ რეალური მონაცემები კონფიდენციალურ ინფორმაციას წარმოადგენს.

ნახ. 8.5-ზე მოყვანილია $Asset_t$ პროცესის გრაფიკი, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია დრო კვირებში, ხოლო ვერტიკალურზე — $Asset_t$ ფუნქციის მნიშვნელობები მილიონ ლარებში. ნახ. 8.6-ზე მოყვანილია $Liability_t$ ფუნქციის გრაფიკი.



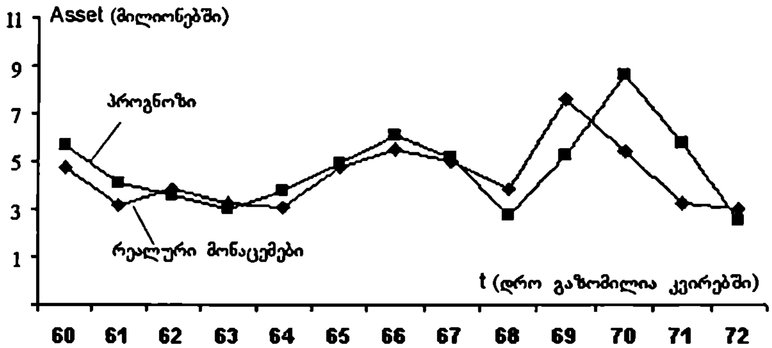
ნახ. 8.6



ნახ. 8.7

ნახ. 8.7-ზე მოყვანილია $Asset_t$ პროცესის მნიშვნელობები 68-დან 72-ე კვირამდე, ამ მნიშვნელობების ერთკვირიანი, ორკვირიანი, სამკვირიანი, ოთხკვირიანი და ხუთკვირიანი პროგნოზები და პროგნოზების ალბათური საზღვრები. ნახატიდან კარგად ჩანს, რომ მოკლევადიანი პროგნოზები (1, 2 და 3 კვირიანი) საკმაოდ ზუსტია, ხოლო შედარებით გრძელვადიანი (4 და 5 კვირიანი) პროგნოზების ეფექტურობა მცირდება — შესაბამისი წერტილები გავიდნენ 95%-იანი ალბათური საზღვრების გარეთ. პროგნოზირება ხდებოდა ინტეგრირებული ერთნაბიჯიანი მცოცავი საშუალოს მოდელზე (ARIMA(0,1,1)) დაყრდნობით.

ნახ. 8.8-ზე მოყვანილია $Asset_t$ პროცესის მნიშვნელობები და მათი პროგნოზები თორმეტი კვირის განმავლობაში. საპროგნოზოდ გამოყენებულია ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების მეთოდი.



ნახ. 8.8

შემუშავებული მეთოდიკის უფრო დეტალური გადმოცემისაგან თავს ვიკავებთ იმის გამო, რომ მოდელირებული მონაცემები არ შეიცავენ იმ ნიუანსებს, რომლებიც ახასიათებს რეალურ მონაცემებს და პროგნოზირების პროცესი შედარებით მარტივი და უინტერესოა.

8.10 კეისი 2. მყიდველუნარიანობის პარიტეტი

ერთიანი ფასდადების კანონი ამტკიცებს, რომ თუ ერთი და იგივე საქონლის ერთნაირი რაოდენობა ორ სხვადასხვა ქვეყანაში იყიდება, შესაბამისად, P_1 და P_2 ფასად, მაშინ

$$P_1 = P_2 E_{12}, \tag{8.89}$$

სადაც E_{12} წარმოადგენს ორი შესაბამისი ვალუტის გაცვლის კურსს. ან, თუ გაზომვები წარმოებს ლოგარითმულ სკალაზე, მაშინ

$$p_1 - p_2 - e_{12} = 0, \tag{8.90}$$

სადაც $p_1 = \ln P_1$, $p_2 = \ln P_2$ და $e_{12} = \ln E_{12}$. თუ p_1 და p_2 წარმოადგენს ფასების ინდექსებს, შესაბამისად, ამ ორ ქვეყანაში, მაშინ სულაც არ არის ცხადი, რომ ადგილი ექნება იგივე (8.90) კანონზომიერებას. ამის მიზეზი ისაა, რომ სხვადასხვა ქვეყანაში ფასების ინდექსი სხვადასხვანაირად გამოითვლება და სამომხმარებლო კალათებიც სხვადასხვაა. მაგრამ, თუ (8.90) თანაფარდობა მიახლოებით მაინც არ სრულდება, ეკონომიკა განიცდის ზეწოლას, რომელიც მიმართულია ფასების დონის ან გაცვლითი კურსის ცვლილებაზე. ამიტომ აქ უნდა მოველოდეთ სისტემის ისეთ ყოფაქცევას, რომელიც მას საშუალებას აძლევს შეეგუოს ეკონომიკურ გარემოს.

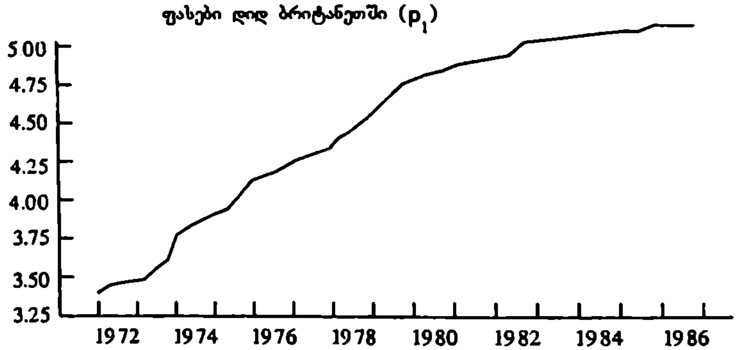
ამ თვალსაზრისით, საინტერესოა გამოვარკვიოთ, რა ფორმით სრულდება (8.90) კანონზომიერება, ე.ი. გამოვიყვანოთ ე.წ. მყიდველუნარიანობის პარიტეტი.

ჩვენ მოგვყავს ს. იოჰანსენისა და კ. ჟუზელიუსის მიერ კომპლექსური მეთოდებით შესწავლილი რეალური მონაცემები, რომლით სარგებლობის საშუალება მათ მისცა კ. უოლისმა (იხ. [82], [211]). ისინი წარმოადგენენ დიდი ბრიტანეთის საბითუმო ფასების ინდექსის p_1, გარე ბაზრის სავაჭროშეწონილი ინდექსისა p_2 და მოქმედი გაცვლითი კურსის e_{12} (ფუნტი სტერლინგი/ეეროდოლარი) კვარტალურ (I კვარტალი, 1963 წ. — III კვარტალი, 1972 წ.) მონაცემებს. გარდა ამისა, ანალიზში ჩართულია დიდი ბრიტანეთის მთავრობის სამთვიანი სახაზინო ვალდებულებების განაკვეთი i_1 და სამთვიანი ევროდოლარის საპროცენტო განაკვეთი i_2 (i_1-სა და i_2-ის გაზომვები ისევ ლოგარითმულ სკალაზე წარმოებს). მათი გათვალისწინება აიხსნება იმით, რომ ბაზრის მოლოდინი გაცვლითი კურსის ცვლილებებზე განსაზღვრავს საპროცენტო განაკვეთის მიმდინარე ცვლილებებს

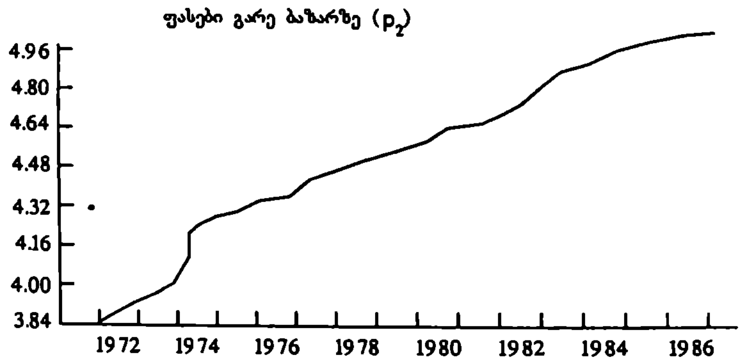
$$i_{1t} - i_{2t} = E_t(e_{12,t+1}),$$

თუ ორ ქვეყანას შორის კაპიტალი შეზღუდვების გარეშე მოძრაობს. აქ $E_t(\cdot)$ პირობითი მათემატიკური ლოდინია პირობაში, რომ ცნობილია t მომენტამდე წინა მონაცემები.

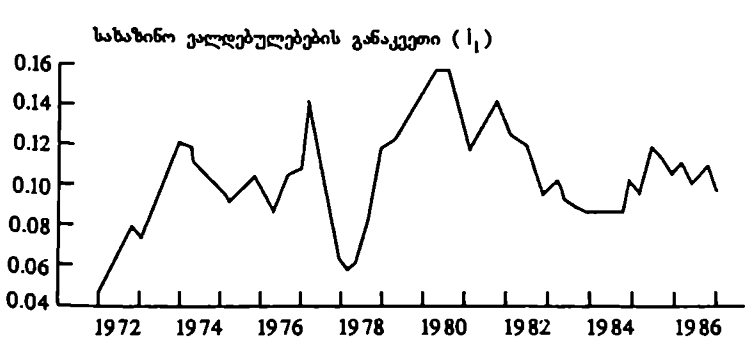
მოგვყავს ხუთივე ფაქტორის მონაცემების წარმოდგენები აბსოლუტური დონეებისათვის.



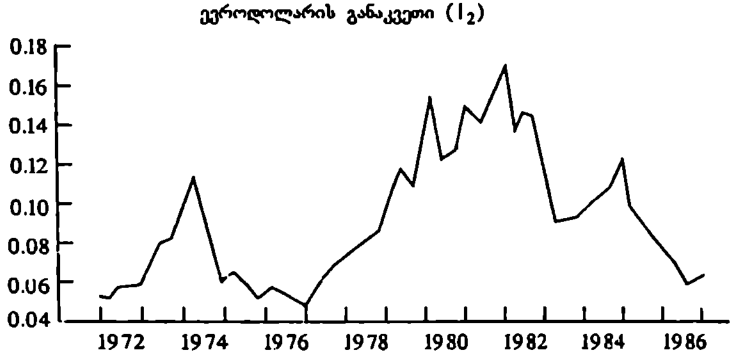
ნახ. 8.9



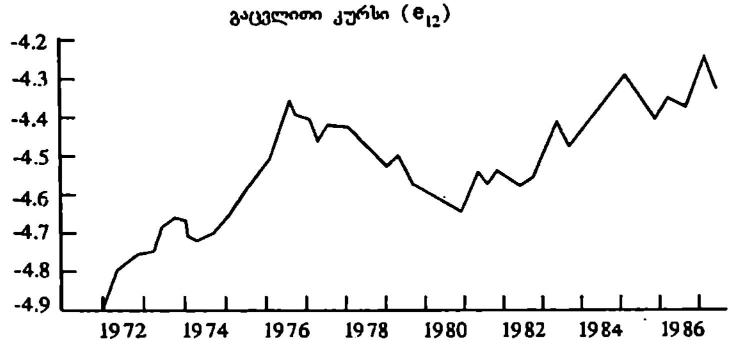
ნახ. 8.10



ნახ. 8.11



ნახ. 8.12



ნახ. 8.13

ამ მონაცემების „გასწორება" შესაძლებელი აღმოჩნდა მეორე რიგის ავტორეგრესიის მოდელით. ამისათვის გამოყენებული იყო ყველა შესაბამისი რეკომენდაცია, რომელსაც დროითი მწკრივების ანალიზის ზემოთ მოყვანილი მეთოდები იძლევა. გათვალისწინებული იყო როგორც სეზონური კომპონენტა, ასევე მუდმივი შემადგენელი წევრი.

ჩანს, რომ მოყვანილი მონაცემები არ აკმაყოფილებენ (8.90) თანაფარდობას. ამიტომ გასარკვევია, თუ რა ფორმით არსებობს (ან არსებობს კი?) „მდგრადი" გრძელვადიანი წრფივი კავშირები p_1, p_2 და e_{12} სიდიდეებს შორის. უნდა შემოწმდეს, მაგალითად, არის თუ არა წრფივი კომბინაცია $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$ სტაციონარული. თუ აღმოჩნდა, რომ ის მართლაც სტაციონარულია, მაშინ მყიდველუნარიანობის პარიტეტი ნიშნავს სწორედ $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$ შემთხვევითი მიმდევრობის სტაციონარულობას.

სტატისტიკურმა ანალიზმა აჩვენა, რომ განხილული ხუთგანზომილებიანი პროცესი $x_t = (p_{1t}, p_{2t}, e_{12,t}, i_{1t}, i_{2t})$ არასტაციონარულია, ხოლო მისი პირველი სხვაობა Δx_t უკვე სტაციონარულია. დადასტურდა სტატისტიკური ჰიპოთეზა, რომ ერთი და იგივე მომენტში ამ პროცესის კომპონენტთა შორის ორი წრფივი კომბინაცია სტაციონარულია და ორივეს სახე აღიწერება გამოსახულებით

$$ap_{1t} - ap_{2t} - ae_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t},$$

სადაც a, c და d მუდმივებია, რომლებიც საჭიროებენ იდენტიფიცირებას. დამატებითმა სტატისტიკურმა ანალიზმა ცხადყო, რომ $i_{1t} - i_{2t}$ (ე.ი. $a = 0$, $c = 1$, $d = -1$) სტაციონარულია, ხოლო

$$p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$$

(ე.ი. $a = 1$ და $c = d = 0$) არაა სტაციონარული და პარიტეტს ამ წრფივი კომბინაციის სტაციონარულობის ფორმით ადგილი არა აქვს. გაირკვა, რომ

$$\text{სტაციონარულია წრფივი კომბინაცია } p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t}, \quad (8.91)$$

რომელშიც c და d არ არის იდენტიფიცირებული. გამოვლენილია მხოლოდ, რომ ან c, ან d უნდა იყოს ნული. სწორედ (8.91) გამოსახულებით მოიცემა მყიდველუნარიანობის პარიტეტის მოდიფიცირებული სახე. ცხადია, რომ ეკონომიკური ანალიზი აქ არაა დასრულებული და ავტორები გვთავაზობენ სტატისტიკურ მეთოდებს c და d კოეფიციენტების იდენტიფიკაციისათვის.

მოვიყვანოთ დასკვნები:

1) მყიდველუნარიანობის პარიტეტი (8.90) ფორმით, ე.ი. $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} = 0$, არ სრულდება.

2) მყიდველუნარიანობის პარიტეტის მოდიფიცირებული სახეა: შემთხვევითი პროცესი $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t}$ სტაციონარულია. ეს კი იმაზე მიუთითებს, რომ მდგრად გრძელვადიან კავშირს აღწერს დიდი ბრიტანეთის ფასების p_{1t}, მის გარე ბაზარზე ფასების p_{2t}, გაცვლითი კურსის $e_{12,t}$, დიდი ბრიტანეთის მთავრობის სამთვიანი სახაზინო ვალდებულებების განაკვეთის i_{1t} და სამთვიანი ევროდოლარების საპროცენტო განაკვეთის i_{2t} მოყვანილი წრფივი კომბინაცია.

იმის გამო, რომ სტაციონარულობის დროს პროცესის საშუალო არ არის დამოკიდებული დროზე და მუდმივია, მყიდველუნარიანობის მოდიფიცირებულ პარიტეტს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია:

$$\text{საშუალოდ } p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t} = \text{const}$$

(ე.ი. ამ წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი მუდმივია), ან (8.90)-თან შედარებისათვის უფრო მოხერხებული სახით წარმოვადგინოთ:

$$\text{საშუალოდ } \bar{p}_{1t} - \bar{p}_{2t} - \bar{e}_{12,t} + c\bar{i}_{1t} + d\bar{i}_{2t} = 0,$$

სადაც ხაზიანი სიდიდეები წარმოადგენენ შესაბამის სიდიდეთა ცენტრირებულ მნიშვნელობებს, ე.ი. მათ აკლდებათ მათი საშუალოები. აქედან ჩანს, რომ დამატებით (8.90)-თან პარიტეტის გამოსახულებაში შემოვიდა i_{1t} და i_{2t} განაკვეთები და ნულთან ტოლობა შეიცვალა საშუალოდ ნულთან ტოლობით, სიდიდეები კი ცენტრირებული სიდიდეებით.

3) განხილულ მოდელურ 5-განზომილებიან მეორე რიგის ავტორეგრესიის არასტაციონარულ პროცესს $x_t = (p_{1t}, p_{2t}, e_{12,t}, i_{1t}, i_{2t})$ აქვს სტაციონარული პირველი სხვაობები Δx_t და ერთი და იგივე მომენტში მისი კომპონენტების ორი წრფივი კომბინაცია $i_{1t} - i_{2t}$ და $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t}$ სტაციონარულია.

ასეთი ტიპის ავტორეგრესიის პროცესებს უწოდებენ კოინტეგრირებულს. საზოგადოდ, ავტორეგრესიის l-განზომილებიანი პროცესი $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{lt})$ კოინტეგრირებულია, თუ მისი პირველი ნაზრდები Δx_t სტაციონარულია და მოიძებნება მისი კომპონენტების ერთი ან რამდენიმე წრფივი კომბინაცია, რომელიც სტაციონარულია.

კოინტეგრაციის ცნება ემყარება მოსაზრებას, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში მრავალგანზომილებიანი პროცესის არასტაციონარულობა გამოწვეულია იმით, რომ ზოგიერთ მის კომპონენტს საერთო სტოქასტური ტრენდი გააჩნია, რომლის გამორიცხვა შესაძლებელია კომპონენტთა გარკვეული წრფივი კომბინაციის აღებით, რის შედეგად ეს წრფივი კომბინაცია სტაციონარული ხდება. კოინტეგრირებული პროცესები დიდ ყურადღებას იმსახურებენ დროითი მწკრივების ეკონომეტრიკაში და მათ წარმატებით იყენებენ ხანგრძლივი ეკონომიკური კანონზომიერებების დასადგენად.

მოვიყვანოთ იმ ძირითადი ლიტერატურის სია, რომელსაც ვეყრდნობოდით ამ თავში მოყვანილი მასალის გადმოცემისას: [11], [22], [35], [39], [44], [64], [72], [83], [86], [87], [91], [92], [97], [99], [101]–[103], [119], [120], [139], [143], [178]–[181], [205]–[207], [211].

შემდეგი ლიტერატურა საშუალებას მისცემს დაინტერესებულ მკითხველს უფრო ღრმად გაეცნოს ამ თავში განხილულ თემატიკას: [4], [14], [15], [18], [19], [29], [61], [96], [100], [107], [113], [123], [145], [147], [152], [153], [164], [165], [174], [185], [188], [198], [200], [203], [210].

9

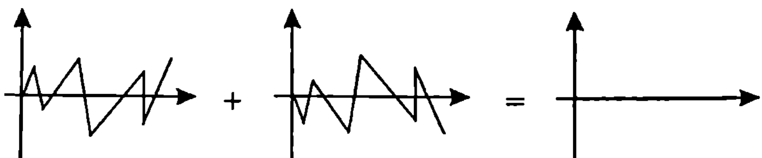
ფინანსური რისკის მართვა

9.1 ფინანსური რისკის მართვის მეთოდების მიმოხილვა

ამ თავში ჩვენ აღვწერთ ფინანსური ინჟინერიის ძირითად ინსტრუმენტებსა და მეთოდებს, რომლებიც გამოიყენება ფინანსური რისკის შემოსაზღვრის, მართვის, სპეკულაციის ან ურისკო მოგების მიღების მიზნით. ამასთან, უფრო დაწვრილებით გამოკვლეული იქნება ჰეჯირება, მისი მიზნების ფორმულირებით, ეფექტურობის შეფასებით და ჰეჯირების სხვადასხვა ინსტრუმენტების აღწერით.

ჰეჯირება. სუბიექტი, რომელიც რისკის ზემოქმედებას განიცდის, ცდილობს გამორიცხოს ის ერთ ან რამოდენიმე ჰეჯირების ფინანსურ ინსტრუმენტში საწინააღმდეგო პოზიციის დაკავებით.

სრულყოფილია ჰეჯი, რომელშიც ჰეჯირების ინსტრუმენტი ზუსტად შეესაბამება დანაკარგების საწყის რისკს და ამდენად სრულად გამორიცხავს მას.



ნახ. 9.1

პრაქტიკულად ასეთი ჰეჯი ყოველთვის არ არის მიღწევადი. არსებობს სხვა ტიპის ჰეჯი, მაგალითად ისეთი, რომელიც გარკვეული დონით შემოსაზღვრავს არახელსაყრელ რისკს, და უცვლელად ტოვებს ხელსაყრელს და ა.შ.

სპეკულაცია წარმოიქმნება მაშინ, როცა პიროვნება ღებულობს მოგებას ბაზრის კონკრეტული მიმართულებით ძრაობის დროს, სპეკულირებს პროგნოზირებულ ცვლილებებზე და ქმნის რისკს იქ, სადაც ის არ იყო. შემდეგი ქმედება სპეკულაციაა: ვიყიდოთ საქონელი იმ მოლოდინით, რომ მისი

ფასი გაიზრდება. შეიძლება პარადოქსალურად მოგვეჩვენოს, მაგრამ სავალუტო ბაზრის ყოველდღიური გაყიდვების (რაც 1000 მილიარდ დოლარს შეადგენს) ლომის წილი სწორედ სპეკულანტთა ასეთ ქმედებაზე მოდის. მიუხედავად ამისა, დერივატივები — ფინანსური ინჟინერიის ძირითადი იარაღები — ხშირ შემთხვევაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ, რადგან იძლევიან საშუალებას: შემცირდეს ხარჯები (ჩვენ ვიცით, რომ დერივატივებს კოლოსალური მოგების პოტენციალი ახასიათებს), შეიქმნას რთული სტრატეგიები (მაგალითად, შეიძლება შეიქმნას ისეთი ინსტრუმენტი, რომელიც მოიტანს მოგებას, თუ პროგნოზირდება გერმანული მარკისა და ამერიკული დოლარის შემოსავლიანობის შემცირება), წარმოიქმნას ახალი რისკი და შეიქმნას შესაძლებლობა ამ სიტუაციით სარგებლობისა (მაგალითად, თუ სპეკულანტი თვლის, რომ ბაზრის ვოლატილობა შემცირდება, მაშინ მან შეიძლება ამით ისარგებლოს, თუ მიმართავს ოფციონებს).

არბიტრაჟი. არსებობს მრავალი ფინანსური პროდუქტი, რომელთა ღირებულება ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზუსტი მათემატიკური ფორმულებით (მაგალითად, FRA და საპროცენტო ფიუჩერსები, საპროცენტო სვოპები და FRA-ს ერთობლიობა, კოლის, პუტის და აქციის ფასი და ა.შ.). რეალური საბაზრო ფასები, როგორც წესი, „მიყვებიან" ამ ფორმულებს. მაგრამ შესაძლოა, რომ შეთანხმებულ ფასებს შორის საკმარისად დიდი განსხვავება წარმოიქმნას (მაგალითად, თუ ბაზრები „აღგზნებული" არიან, ან ფიზიკურად ერთმანეთისგან შორს მდებარეობენ და ა.შ.). ასეთ პირობებში არბიტრაჟორები იღებენ ურისკო მოგებას. არბიტრაჟორთა ჩარევა სპობს სპრედს და არბიტრაჟული სიტუაცია მალე ქრება.

სტრუქტურირება. ფინანსური ინჟინერიის მეთოდები შეიძლება გამოვიყენოთ ცალკეული გარიგების მახასიათებლების ან რისკის რესტრუქტურიზაციისათვის. მაგალითად, ობლიგაციის ემიტენტს შეუძლია, სვოპის მეშვეობით, მცურავი პროცენტით გადასახდელი ვალდებულებები შეცვალოს ფიქსირებული პროცენტით გადასახდელი ვალდებულებებით. უფრო გამოცდილ ინვესტორს, რომელიც ფიქრობს, რომ ექვსთვიანი საპროცენტო განაკვეთები დოლარზე იქნება $3\frac{1}{2}$%-დან 4%-მდე შუალედში, შეუძლია, მაგალითად, ჩვეულებრივი ობლიგაციები მცურავი პროცენტით გადაიყვანოს „გადაბრუნებულ" ობლიგაციებში მცურავი პროცენტით, რათა მიიღოს შემოსავლიანობის დაუყოვნებლივი ზრდა 3%-ით მაინც.

ფინანსური რისკის სახეები. განვიხილოთ ფინანსური რისკების ძირითადი სახეები.

სავალუტო რისკი წარმოიქმნება ვალუტის კურსის ცვლილების დროს და შეიძლება გაიყოს ყოველდღიური გარიგებებისა და გადათვლის რისკად.

საპროცენტო რისკი წარმოიქმნება საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებასთან დაკავშირებით და მის გავლენას განიცდის ყველა, ვინც აბანდებს ან სესხულობს კაპიტალს.

აქციონერული კაპიტალის რისკი ემუქრება აქციების პორტფელის ყველა მფლობელს. ის დაკავშირებულია აქციების ფასების ცვლილებასთან ან ბირჟის საერთო აქტივობასთან.

სასაქონლო რისკი წარმოიქმნება საქონლის ფასების ცვლილების შედეგად.

ლიკვიდურობის რისკი ერთ-ერთი ძირითადი რისკია საბანკო საქმეში. იგი განხილულია ამ წიგნის მერვე თავში.

პარტნიორობის რისკი, რომელიც შეიძლება წარმოიშვას რომელიმე მხარის მიერ კონტრაქტის პირობების დარღვევის დროს. სხვანაირად მას საკრედიტო რისკსაც უწოდებენ.

საოპერაციო რისკი უკავშირდება ყოველდღიურ ოპერაციებსა და ქმედებებს ფინანსურ სფეროში.

ნარჩენი საბაზრო რისკი. აღვნიშნოთ ვოლატილობის რისკი, რომელიც წარმოიქმნება ოფციონებით ვაჭრობის დროს და საბაზისო რისკი, რომელიც წარმოიქმნება, როცა რომელიმე რისკი ჰეჯირდება არაადეკვატური ინსტრუმენტით.

საბუღალტრო და სამეურნეო რისკი. საბუღალტრო რისკი შეიძლება შეფასდეს ფინანსური ანგარიშების მეშვეობით. იგი მიმართულია წარსულისკენ და ასახავს იმას, თუ რა რისკი ემუქრებოდა პასივებსა და აქტივებს და როგორ იმოქმედებს მათზე მიმდინარე ცვლილებები. უფრო რთული შესაფასებელია სამეურნეო რისკი. მაგალითად, ის წარმოება, რომელიც განლაგებულია მოცემულ ქვეყანაში, აწარმოებს და ყიდის პროდუქციას მოცემული ქვეყნის რესურსებით და მის ბაზრებზე, ფინანსირდება მოცემული ქვეყნის ბანკებით, ხელფასებს არიგებს მოცემული ქვეყნის ფულით, ერთი შეხედვით, თავისუფალია სავალუტო რისკისაგან. მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ კონკურენციას, რომელსაც საერთაშორისო ხასიათი აქვს, მაშინ შინაგანი ვალუტის გამყარების პირობებში, იზრდება რა იმპორტი, შესაძლებელია წარმოების პროდუქცია გახდეს არაკონკურენტუნარიანი. ამრიგად, სასეზეა სამეურნეო სავალუტო რისკი.

9.2 ჰეჯირების მიზნები და ჰეჯის ეფექტურობის გაზომვა

ჰეჯირების პროცედურის აგებამდე და, მით უმეტეს, მის რეალიზაციამდე, მნიშვნელოვანია პასუხი გაეცეს შემდეგ ძირითად კითხვებს:

— სურს თუ არა კლიენტს დაიცვას თავი ფასების ნებისმიერი ცვლილებისაგან?

ვთქვათ, დასაშვებია რისკის გარკვეული დონე. რა თანაფარდობით არის დაკავშირებული ერთმანეთთან მისწრაფება — მივიღოთ შემოსავალი რისკის ხელსაყრელი ცვლილებისაგან, და სურვილი, თავი ავარიდოთ რისკს

მისი არახელსაყრელი მიმართულებით ცვლილების შემთხვევაში?

— რამდენად არის მზად კლიენტი გადაიხადოს რისკისაგან დაცვის საფასური?

— როგორი წარმოდგენები აქვს კლიენტს ბაზრის მოძრაობის შესაძლო მიმართულებებზე, სიდიდეზე და ვადებზე?

ჰეჯირების ინსტრუმენეტებისა და ფორმების არჩევა სწორედ ამ კითხვების პასუხებზეა დამოკიდებული.

ჰეჯის ეფექტურობის გაზომვა და მისი ხელსაყრელობის გაზომვა არ არის ერთი და იგივე, თუმცა ბევრი მომხმარებელი ამ ორ ცნებას ერთმანეთთან აიგივებს.

ფორვარდული კონტრაქტებით ჰეჯირების მარტივი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ რადგან ფორვარდული კონტრაქტი აფიქსირებს მომავალი გარიგების ფასს, ამიტომ, თუ დროთა განმავლობაში, ძირითადი აქტივის ფასი, მაგალითად, ნაკლები აღმოჩნდა ფორვარდულ კონტრაქტში დაფიქსირებულ თანხაზე, მაშინ ეს კონტრაქტი ხელსაყრელი იქნება გამყიდველისათვის და არახელსაყრელი მყიდველისათვის.

თუ ამ კუთხით შევხედავთ სიტუაციას, მაშინ ჰეჯი გარიგების ერთი მხარისათვის მომგებიანი, ხოლო მეორისთვის წამგებიანი იქნება. სინამდვილეში კი, თუ მაჰეჯირებელმა წინასწარ დაისახა ამოცანა, დაეფიქსირებინა მომავალი ყიდვა-გაყიდვის თანხა, მაშინ ჰეჯის ეფექტურობა 100%-ს შეადგენს. ამდენად, ჰეჯირების ეფექტურობის დასადგენად წინასწარ უნდა განისაზღვროს მისი მიზნები.

შევნიშნოთ, რომ ადამიანურად გასაგებია სინანულის გრძნობა, რომელიც ეუფლება მაჰეჯირებელს, როცა ფასები მოძრაობს სასურველი მიმართულებით და ჰეჯის გარეშე მაჰეჯირებელი მიიღებდა მოგებას. ასეთი შემთხვევებისათვის მოგონილია ე.წ. ფორვარდული კონტრაქტები შეწყვეტით, რომლებშიც სწორედ ამ სინანულის გრძნობას ეწევა ანგარიში.

ჰეჯის ეფექტურობის საზომები. შემოვიღოთ ჰეჯის ეფექტურობის ხუთი საზომი. ის, თუ რომელი მათგანი უნდა გამოვიყენოთ ამა თუ იმ შემთხვევაში, დამოკიდებულია ჰეჯირების მიზნებზე.

1. მიზანი: მიღწეულ იქნას დაგეგმილი ფინანსური შედეგი. ამასთან, მეტი უკეთესია, ნაკლები — უარესი.

ასეთ მიზანს ისახავენ ინვესტირების დროს, როცა სასურველია ინვესტირების მაღალი საპროცენტო განაკვეთის მიღება. ამ შემთხვევაში

$$\text{ჰეჯის ეფექტურობა} = \frac{T_{\text{ჭფშ}}}{T_{\text{დფშ}}}, \tag{9.1}$$

სადაც $T_{\text{ჭფშ}}$ — ჭეშმარიტი ფინანსური შედეგია, ხოლო $T_{\text{დფშ}}$ — დაგეგმილი ფინანსური შედეგი.

თუ, მაგალითად, ინვესტიციის განაკვეთი დაგეგმილი იყო 8%-ის ოდენობით და სინამდვილეში მივიღეთ 7.82%, მაშინ ეფექტურობა 97.75%-ის ტოლია.

2. მიზანი: მიღებულ იქნას დაგეგმილი ფინანსური შედეგი. ამასთან, მეტი უარესია, ნაკლები — უკეთესი.

ეს შემთხვევა გავს წინა შემთხვევას, მაგრამ აქ რისკს აქვს საწინააღმდეგო მიმართულება. აქ შეიძლება ვილაპარაკოთ სესხებზე, პროდუქტის დაგეგმილ ღირებულებაზე და სხვ.

$$\text{ჰეჯის ეფექტურობა} = \frac{T_{\text{დფშ}}}{T_{\text{ჭფშ}}}. \tag{9.2}$$

მაგალითად, თუ გეგმით გათვალისწინებული პროექტის ღირებულება იყო 6.8 მილიონი დოლარი და ხარჯებმა, ჰეჯირების ჩათვლით, შეადგინა 7.1 მილიონი დოლარი, მაშინ ჰეჯის ეფექტურობა იქნება 95.77%.

3. მიზანი: მიღებულ იქნას დაგეგმილი ფინანსური შედეგი. ამასთან, მინიმალური დასაშვები შედეგი შემოსაზღვრულია.

ეს შემთხვევაც გავს პირველს, მაგრამ არსებობს დასაშვები შედეგის ქვედა საზღვარი. ამიტომ

$$\text{ჰეჯის ეფექტურობა} = \frac{T_{\text{ჭფშ}} - T_{\min}}{T_{\text{დფშ}} - T_{\min}}, \tag{9.3}$$

სადაც $T_{\min}$ — მინიმალური დასაშვები შედეგია.

ვთქვათ, დაგეგმილი შემოსავალი უდრის 5 მილიონ დოლარს, მაგრამ, თუ შემოსავალი 4 მილიონი იქნება, ფინანსური გარიგება ჯერ კიდევ არ იქნება წამგებიანი. მაშინ, თუ ჭეშმარიტი შემოსავალი 5.2 მილიონია, ჰეჯის ეფექტურობა 120%-ს ($= \frac{5.2-4}{5-4} \cdot 100\%$) შეადგენს.

4. მიზანი: მიღებულ იქნას დაგეგმილი ფინანსური შედეგი შეზღუდვით მაქსიმალურ დასაშვებ შედეგზე.

მაშინ

$$\text{ჰეჯის ეფექტურობა} = \frac{T_{\max} - T_{\text{ჭფშ}}}{T_{\max} - T_{\text{დფშ}}}, \tag{9.4}$$

სადაც $T_{\max}$ — მაქსიმალური დასაშვები შედეგია.

მაგალითად, საჭიროა სესხის აღება. მისი აღება იგეგმება 8%-ით, მაგრამ მაქსიმალური დასაშვები განაკვეთია 9%. ჰეჯირების ჩატარების შემდეგ კომპანიამ მიიღო სესხი 8.1%-ად. მაშინ ჰეჯის ეფექტურობა 90%-ის ტოლი იქნება.

5. მიზანი: შენარჩუნდეს სტატუს-კვო.

ეს მიზანი განსხვავდება ზემოხსენებული მიზნებისაგან. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი გადახრა არსებული სიტუაციიდან არასასურველია. წინა

შემთხვევებში ნათლად ჩანდა მიმართულება, რომელიც ხელსაყრელი იყო და ამიტომ ჰეჯირების ეფექტურობა შეიძლება ყოფილიყო 100%-ზე მეტი.

სტატუს-კვოს შენარჩუნებაში დაინტერესებულნი არიან, პირველ რიგში, ბანკები, რომლებიც მუშაობენ ფინანსური ინსტრუმენტების პორტფელებთან. პორტფელის ღირებულების შენარჩუნება მნიშვნელოვანი ამოცანაა, რადგან, თუ, შემთხვევით, მოხდა მისი ღირებულების ზრდა, არ არის გამორიცხული, რომ შემთხვევით მოხდება მისი ღირებულების კლებაც. რადგან ბანკის უმთავრესი მიზანია იყოს სტაბილური, იგი დაინტერესებულია სტატუს-კვოს შენარჩუნებაში.

$$\text{ჰეჯის ეფექტურობა} = \min\left(1 - \frac{\Delta T}{\Delta u}, 1 + \frac{\Delta T}{\Delta u}\right), \qquad (9.5)$$

სადაც ΔT დაჰეჯირებული, ხოლო Δu — დაუჰეჯირებელი პორტფელის ღირებულების ნაზრდია. ცხადია, რომ ეს მაჩვენებელი არ აღემატება 100%-ს. თუ $\Delta T = \Delta u$, მაშინ ეფექტურობა „0"-ია. ის უარყოფითიც შეიძლება იყოს, თუ ჰეჯმა გაზარდა ვოლატილობა.

ამრიგად, მნიშვნელოვანია ავირჩიოთ ჰეჯირების მიზნები და შემდეგ სწორად შევაფასოთ მისი ეფექტურობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება მივიდეთ მცდარ გადაწყვეტილებამდე.

მაგალითი 9.1. გერმანულმა „ლუფტჰანზამ" შეუკვეთა ამერიკულ „ბოინგს" რეაქტიული თვითმფრინავები. მიწოდება უნდა მომხდარიყო 1 წლის განმავლობაში, ანაზღაურება — დოლარებში. ამ პერიოდში, 80-იანი წლების შუაში, დოლარი ძალიან ძლიერი იყო. „ლუფტჰანზა" თვლიდა, რომ დოლარი წლის განმავლობაში შესუსტდებოდა. და მაინც, თუ დოლარი, რატომღაც, მაინც გაძლიერდებოდა, მაშინ რეალური გადახდის დროს ზედმეტად დიდი თანხა დაიხარჯებოდა. „ლუფტჰანზას" ჰქონდა შემდეგი არჩევანი:

1) წინასწარ ეყიდა დოლარი;

2) ეყიდა სავალუტო ოფციონი (კოლი დოლარზე ან პუტი მარკაზე);

3) არაფერი არ მოემოქმედა და ეყიდა დოლარი მაშინ, როცა თვითმფრინავები მზად იქნებოდა.

რადგან კომპანია თვლიდა, რომ დოლარის ფასი ხელოვნურად იყო აწეული, მას არ აწყობდა 1) არჩევანი და ის უარყვეს. სავალუტო ოფციონიც ძალიან ძვირი იყო (რადგან ოფციონების ბაზარი არ იყო მაშინ ლიკვიდური). ამიტომ ჰეჯი ძვირი ჯდებოდა. ამის გამო უარყვეს 2) არჩევანი. სოლიდური კომპანიისათვის 3) სტრატეგია მიუღებელი იყო იმიტომ, რომ აშკარა სავალუტო რისკისაგან თავის დაცვის უუნარობა სპეკულაციის ტოლფ ია.

ამიტომ „ლუფტჰანზამ" გადაწყვიტა ეყიდა დოლარების საჭირო რაოდენობის ნახევარი.

იგი ასე მსჯელობდა: თუ დოლარის კურსი დაეცემა, მაშინ იგი მოიგებს 50%-ს, თუ მოიმატებს, ამავე მიზეზის გამო, ხარჯები ორჯერ შემცირდება.

რა მოხდა სინამდვილეში? დოლარი, როგორც ელოდა კომპანია, მნიშვნელოვნად გაიაფდა. რადგან ნახევარი თანხა კოპანიამ შეიძინა მიმდინარე ფასით, მან მოიგო მნიშვნელოვანი თანხა თვითმფრინავების შეთანხმებულ საფასურთან შედარებით.

რა მოუვიდათ ამ სტრატეგიის ავტორებს? ისინი სკანდალურად (სკანდალს ნაციონალური მასშტაბი ჰქონდა) გააძევეს სამსახურიდან. რატომ? საქმე იმაში იყო, რომ ანგარიშებში ცალკე ფიგურირებდნენ: (1) გარიგება ლაინერებზე, (2) დოლარის წინასწარი შეძენა. ამიტომ ყურადღება არ მიაქციეს იმ ფაქტს, რომ ლაინერების შეძენის დროს მოხდა თანხის 25%-იანი ეკონომია, ხოლო ის ფაქტი, რომ დოლარი წინასწარ იყო შეძენილი, ჩაითვალა მსხვილ სავალუტო ზარალად. მიუხედავად იმისა, რომ ჰეჯისა და საწყისი პოზიციის შეერთება გვაძლევს მნიშვნელოვან ეკონომიას, ანგარიშები არ აერთიანებდნენ ორ შედეგს და ამიტომ ჰეჯირების არსი დაიკარგა.

9.3 სავალუტო რისკის მართვა

ვთქვათ, კლიენტის მიზანია, გამორიცხოს სავალუტო კურსის ნებისმიერი ცვლილების გავლენა მომავალი გარიგების ფასზე. მაშინ მან უნდა გამოიყენოს ფორვარდული სავალუტო კონტრაქტები. განვიხილოთ ასეთი კონტრაქტების ორი ძირითადი ფორმა: ინსტრუმენტები ნაღდი ანგარიშსწორებით და სავალუტო ფიუჩერსები.

ინსტრუმენტები ნაღდი ანგარიშსწორებით. ამ სახის უმარტივესი ინსტრუმენტია ფორვარდული გარიგება. იგი ადგენს გაცვლის კურსს ვალუტის შეთანხმებულ რაოდენობაზე განსაზღვრული თარიღისათვის მომავალში. მისინაირსახეობაა ფორვარდული გარიგება განუსაზღვრელი ვადით, რომელიც იძლევა საშუალებას დროის განსაზღვრული ინტერვალის ნებისმიერ მომენტში გაიცვალოს ვალუტა. გრძელვადიანი გარიგებები წარმოადგენს ერთი ან რამოდენიმე ფორვარდული კონტრაქტის ერთობლიობას, რომლებიც იწყებენ მოქმედებას ერთი წლის შემდეგ. და ბოლოს, სავალუტო სვოპი არის გარიგება ვალუტის შეთანხმებული რაოდენობის გაცვლაზე დროის ერთ მომენტში და უკუგაცვლაზე დროის მეორე მომენტში.

ამ ინსტრუმენტების უპირატესობა ის არის, რომ ისინი OTC პროდუქტებია და ამიტომ ზუსტად მიესადაგებიან კლიენტის მოთხოვნებს: დასაშვებია ნებისმიერი მოცულობის გარიგება, თითქმის ნებისმიერი თარიღი და ვალუტას ნებისმიერი წყვილი.

სავალუტო ფიუჩერსები. სავალუტო ფიუჩერსები ისტორიულად პირველი ფინანსური ფიუჩერსები იყო. დღესდღეობით ისინი არც თუ ისე

პოპულარულია OTC ბაზრის სიღრმისა და მოქნილობის გამო. ფიუჩერსების ძირითადი უპირატესობა — ფასების გამჭვირვალობა — გაწონასწორებულია OTC ბაზრის სხვა უპირატესობებით. სახელდობრ, ბირჟაზე საჭიროა მარჟის ყოველდღიური გადათვლა, რასაც მომხმარებელი დიდ ადმინისტრაციულ ტვირთად თვლის.

დღესდღეობით შექმნილია სხვადასხვა ინოვაცია, მაგალითად, მცურავი სპოტ-კონტრაქტი, რომლის აღსრულების ვადა მხოლოდ 2 დღეა, და ამიტომ ის იყიდება როგორც სპოტ-გარიგება. კლიენტმა შეიძლება დადოს კონტრაქტი ნებისმიერ დროს და შეინარჩუნოს პოზიცია ნებისმიერი ვადით. რადგან მარჟის გადათვლის სისტემა ყოველ დღე „მიიყვანს მას ბაზართან", შესაძლებელია ნებისმიერ მომენტში კონტრაქტის ნაღდ ფულზე გაცვლა. ეს კონტრაქტი აქრობს ფიუჩერსის ერთ-ერთ „სიხისტეს" — ფიქსირებული კვარტალური განაღდების ვადებს.

ოფციონები. გავიხსენოთ ოფციონის ძირითადი თვისება: ოფციონი, რომელიც ღრმად ფულითაა, იქცევა ზუსტად ისევე, როგორც ძირითადი აქტივი — თუ აქტივი იცვლება ერთი პუნქტით, ერთი პუნქტით იცვლება ოფციონიც. თუ ოფციონი ღრმად უფულოდაა, მაშინ იგი ფაქტიურად არ არსებობს. თუ ოფციონის აღსრულების ფასი იცვლება ისე, რომ ოფციონი არახელსაყრელიდან ძალიან ხელსაყრელი ხდება, მაშინ ოფციონის ყოფაქცევა იცვლება სრული ინერტულობიდან ძირითადი აქტივის ყოფაქცევის სრულ კოპირებამდე. სწორედ ოფციონის Δ არის ამ მსგავსების ზუსტი საზომი.

ჩვენ გამოვიყენებთ ოფციონის ამ თვისებას ჰეჯირებასთან მიმართებაში: თუ ოფციონი ღრმად უფულოდაა, მაშინ ის თითქმის არ ახორციელებს ჰეჯს, „გაატარებს" რა რისკს თითქმის მთლიანად. თუ ოფციონი ღრმად ფულითაა, მაშინ ის მოქმედებს როგორც ფორვარდი და, ამდენად, აფიქსირებს რა მომავალს, არ იძლევა საშუალებას, ბაზრის სასურველი მიმართულებით ძრაობის შემთხვევაში მივიღოთ მოგება. ამიტომ, საშუალედო, სამართლიანი ოფციონი იძლევა კომპრომისის მიღწევის საუკეთესო საშუალებას.

ჰეჯირებისადმი სხვადასხვა მიდგომის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 9.2. განვიხილოთ გერმანული ფირმა, რომელმაც უნდა გადაიხადოს \$1 მლნ 270 დღის შემდეგ. ფირმამ ჩამოაყალიბა ჰეჯირების შემდეგი მიზნები:

- არ დაუშვას დიდი დანაკარგი დოლარის გაძლიერების შემთხვევაში.
- მიიღოს შემოსავალი, თუ დოლარის კურსი დაეცემა.
- მიიღოს სათანადო დაცვის ხარისხი (კურსის არახელსაყრელი მიმართულებით ძრაობისას) მინიმალურ ფასად.

ვთქვათ, დოლარის მიმდინარე კურსია $\$1 = DM1.6634$, 9-თვიანი ფორვარდული კურსი კი — $\$1 = DM1.700$. ვთქვათ, 9-თვიანი საპროცენტო განაკვეთები მარკაზე და დოლარზე ტოლია 6%-ის და 3%-ის, შესაბამისად, და ვოლატილობა ბოლო 20 დღეში შეადგენს 12% წლიურს.

ფირმას არა აქვს ზუსტი წარმოდგენა, თუ როგორ შეიცვლება ბაზარი, მაგრამ თვლის, რომ დოლარის (DM1.400, DM2.100) სავალუტო კორიდორიდან გამოსვლის ალბათობა უკიდურესად მცირეა.

დავაზუსტოთ, თუ რას ნიშნავს „მცირე" ალბათობა და საიდან მიიღება კორიდორის განმსაზღვრელი რიცხვები. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ ძირითადი აქტივის ფასის ცვლილების მოდელირება, ბლეკ-შოულსის მიდგომის თანახმად, ხდება გეომეტრიული ბროუნის ძრაობით. ამიტომ შემოსავლიანობას ნორმალური განაწილება აქვს. თუ „მცირე" ალბათობის მქონე ხდომილობა ნიშნავს ისეთ ხდომილობას, რომლის ალბათობა ნაკლებია 5%-ზე, მაშინ ნორმალური განაწილებისთვის 2σ-ს კანონის გამოყენებით ადვილად მივალთ შემდეგ 95%-იან კორიდორამდე (DM1.3732, DM2.0810). სწორედ ამ რიცხვების დამრგვალებით მიიღება ზემოაღნიშნული კორიდორი.

ვთქვათ, ოფციონების კოტირება მოიცემა შემდეგი ცხრილით

სტრაიკი	კოლი \$ პუტი DM	პუტი \$ კოლი DM	ნაგულისხმევი ვოლატილობა
1.400	2925	57	15%
1.500	2056	145	14%
1.600	1285	332	13%
1.700	672	676	12%
1.800	367	1328	13%
1.900	202	2120	14%
2.000	115	2991	15%
2.100	69	3902	16%

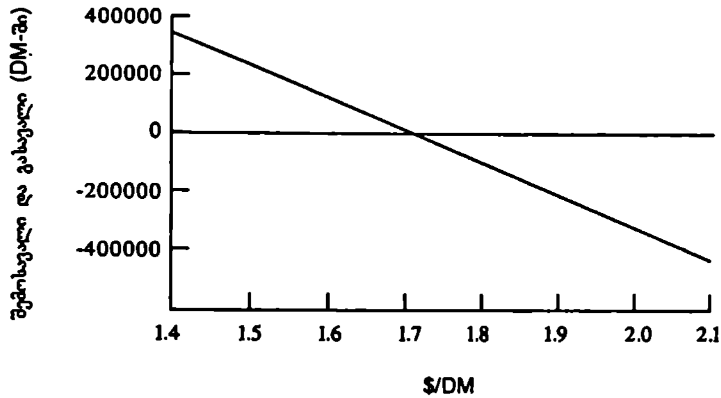
ცხრილი 9.1

ფასები მოცემულია მარკების პუნქტებში ერთ დოლარად.

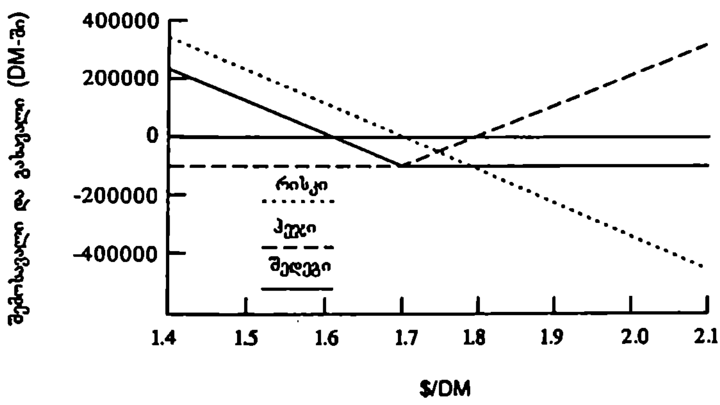
შევნიშნოთ, რომ უფულო და ფულიანი ოფციონების ვოლატილობა უფრო დიდია, ვიდრე ფულთან მყოფი ოფციონებისა, რადგან, როგორც ცნობილია (სტატისტიკური ფაქტია), საბაზრო ფასების განაწილებას აქვს უფრო „მძიმე კუდები", ვიდრე ლოგნორმალურ განაწილებას და ამიტომ ფასის დიდი და მცირე მნიშვნელობა უფრო ხშირად გვხვდება, ვიდრე ამას ბლეკ-შოულსის მოდელი წინასწარმეტყველებს. ამიტომ ბლეკ-შოულსის მოდელი ქვემოდან აფასებს უფულო და ფულიან ოფციონებს. არასასურველი შედეგების თავიდან ასაცილებლად, ტრეიდერები ხელოვნურად ზრდიან ვოლატილობის სიდიდეს.

დავუშვათ, რომ ჰეჯი შენარჩუნებული იქნება აღსრულების ვადამდე, სხვა სიტყვებით, განვიხილოთ სტატიკური ჰეჯირება. ამიტომ გრაფიკებზე

ავსახოთ სიტუაცია აღსრულების მომენტისათვის.



ნახ. 9.2



ნახ. 9.3

შევადაროთ ჰეჯირების სხვადასხვა სტრატეგია. ამის საუკეთესო საშუალებას იძლევა შედეგების გრაფიკული წარმოდგენა, რაც რამოდენიმე გზით შეიძლება განხორციელდეს.

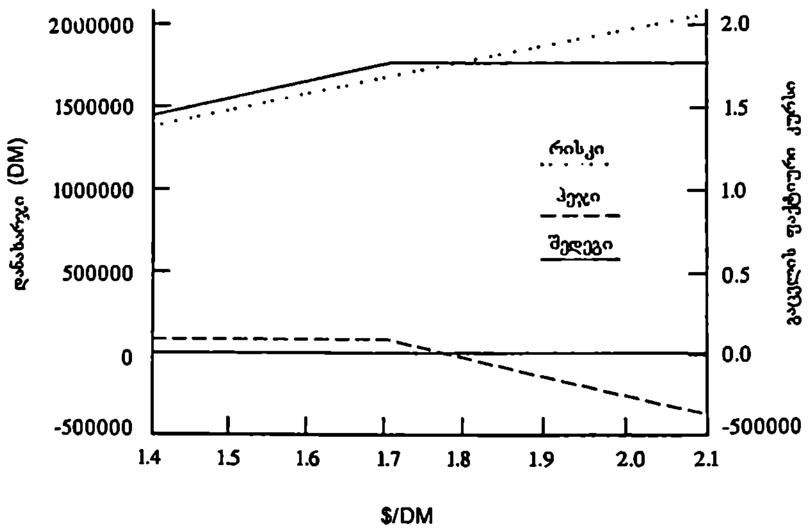
თავდაპირველად შევაფასოთ სიტუაცია დილერის პოზიციიდან. რადგან გერმანულმა ფირმამ 9 თვის შემდეგ უნდა გადაიხადოს $1 მლნ, ამიტომ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ მას უჭირავს მოკლე პოზიცია ფორვარდულ გარიგებაში. მისი შემოსავლების გრაფიკი მოყვანილია ნახ. 9.2-ზე.

სავალუტო რისკის თავიდან ასაცილებლად, ფირმამ შეიძლება შეიძინოს სამართლიანი კოლი სტრაიკით DM1.700 და ფასით DM67200 (რადგან

პრემიის სიდიდე თითოეულ დოლარზე ტოლია DM0.0672). ნახ. 9.3-ზე შედეგი წარმოდგენილია უწყვეტი ტეხილი ხაზით.

მეორეს მხრივ, შევხედოთ საქმეს გერმანული ფირმის მიერ გაწეული ხარჯების თვალსაზრისით: რამდენი ეღირება დოლარის შეძენა? რა ღირს თვით ოფციონი?

ეს შემთხვევები ნაჩვენებია ქვემოთ ნახ. 9.4-ზე.



ნახ. 9.4

ბოლო ორი გრაფიკი წარმოადგენს სიტუაციის ეკვივალენტურ აღწერას: პირველი ასახავს დილერის აზრს, მეორე — ფირმისას. პირველში შედარებულია მოგება-წაგება საწყის ფორვარდულ კურსთან, მეორეში — ხარჯები, რომლებიც მოცემულია აბსოლუტურ სიდიდეებში.

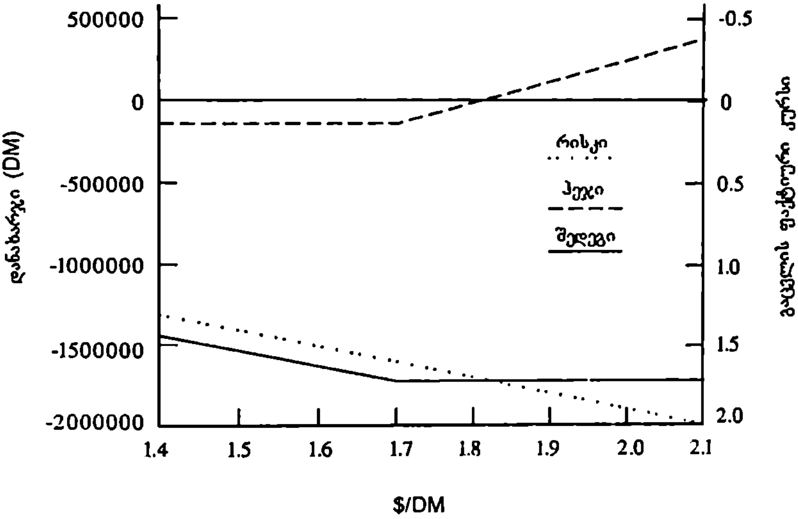
პირველი მიდგომა მოსახერხებელია ანალიზისთვის, რადგან ოფციონის მოგება-წაგების ამსახველ გრაფიკს ჩვეული სახე აქვს და ყველა სიდიდეს ერთი და იგივე რიგი აქვს.

მაგრამ მეორე შემთხვევაში გამოვლენილია რეალური ხარჯები. ეს კი მთავარია კლიენტისთვის, რომელიც არ ფიქრობს „რისკზე“ და „ჰეჯზე“, არამედ ფიქრობს შემოსავალსა და გასავალზე.

ამიტომ სასურველია, რომ ორივე მიდგომის დადებითი მხარეები გაერთიანდეს.

ამ მიზნით, განვიხილოთ ხარჯები როგორც უარყოფითი ფულადი ნაკადები. მაშინ კოლ ოფციონის მოგება-წაგების ამსახველ გრაფიკს ექნება

ჩვეული სახე და საბოლოო შედეგიც „ნორმალურად“ გამოიყურება, მეტი — უკეთესია, ნაკლები — უარესი (იხ. ნახ. 9.5).



ნახ. 9.5

სწორედ ასეთი გრაფიკებით ვისარგებლებთ ქვემოთ.

ჰეჯირება ძირითადი ოფციონებით. ვნახოთ როგორ ჰეჯირდება მოცემული სავალუტო რისკი ძირითადი ოფციონებით. უმარტივესი გამოსავალია 9-თვიანი ოფციონის შეძენა დოლარზე. ამოცანა მდგომარეობს აღსრულების ფასის შერჩევაში.

ერთ უკიდურესობას წარმოადგენს ღრმად ფულით მყოფი ოფციონის ყიდვა სტრაიკით DM1.400 და პრემიით DM0.2925 1 დოლარზე. ეს ოფციონი უზრუნველყოფს, რომ საბოლოოდ დოლარს ვიძენთ კურსით DM1.6925 (= 1.400 + 0.2925), რაც ნაკლებია, ვიდრე DM1.700. მაგრამ აქ არ არის გათვალისწინებული ფულის დროითი ღირებულება: პრემია გადაიხდება კონტრაქტის დადების მომენტში, ხოლო სტრაიკი — 9 თვის შემდეგ. ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ დეპოზიტის 6%-იან განაკვეთს, ჰეჯირების ხარჯებს დაემატება კიდევ DM0.0132 1 დოლარზე და საბოლოო ხარჯი იქნება DM1.7057 1 დოლარზე.

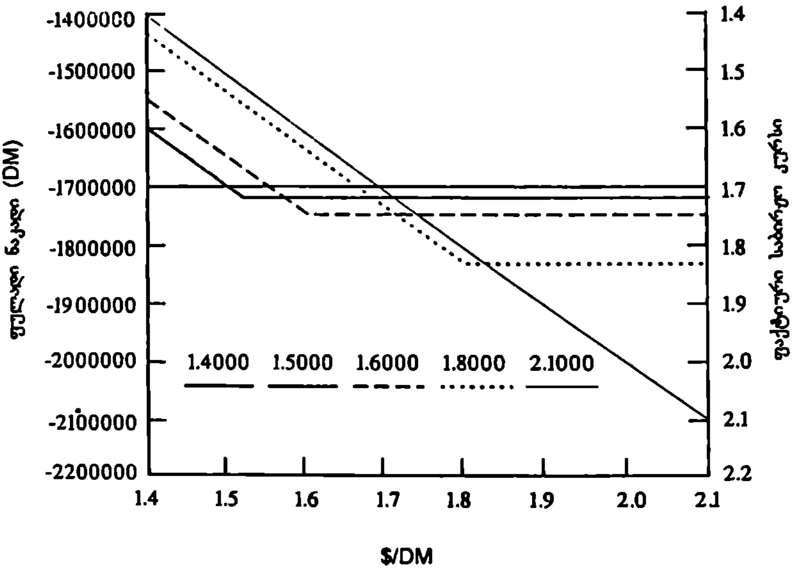
რას გვეუბნება რიცხვი DM0.0057, რომელიც ემატება ფორვარდულ კურსს DM1.700-ს?

ეს არის ფირმის გადასახადი იმ უფლების მოსაპოვებლად, რომ მას შეეძლოს არ იყიდოს დოლარი ოფციონური კონტრაქტით, თუ განხორციელდება ისეთი მცირეალბათური ხდომილობა, რომ კურსი დაეცემა DM1.400-ზე

ქვემოთ, რისი უფლებაც მას არა აქვს ფორვარდული კონტრაქტის დადების დროს.

მეორე უკიდურესობაა — შევიძინოთ ოფციონი სტრაიკით DM2.100, რომელიც ღრმად უფულოდაა და ამიტომ იაფია: DM0.0069 1 დოლარზე. მაგრამ ასეთი ოფციონი თითქმის არ იცავს რისკისაგან.

ალტერნატივების მთელი სპექტრი მოცემულია ნახ. 9.6-ზე. ყველა სიდიდე კორექტირებულია პრემიის ხარჯების 9-თვიანი დაფინანსების გათვალისწინებით.



ნახ. 9.6

ამ გრაფიკების ანალიზიდან ადვილად ვასკვნით, რომ რაც უფრო მცირდება ოფციონის სტრაიკი, მით უფრო ძლიერი დაცვის გარანტია გვაქვს, უფრო ფართოა რისკის შემოსაზღვრის არე და, რაც მთავარია, მცირდება რისკის შემოსაზღვრის დონე. ამიტომ, ერთი შეხედვით, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ შეძენილ უნდა იქნას მაქსიმალურად მცირე სტრაიკიანი, ანუ ღრმად ფულით მყოფი ოფციონები. ეს ასე იქნებოდა, რომ არა ოფციონის ფასი.

ოფციონი მით უფრო ძვირია, რაც უფრო ღრმადაა ის ფულით. მაგალითად, ოფციონი სტრაიკით DM1600 ღირს DM0.1285, მაშინ როცა ოფციონი სტრაიკით DM1800 ღირს DM0.0367, ანუ პირველი ოფციონი 3.5-ჯერ უფრო ძვირია.

მაგალითისათვის, ვნახოთ რა მოხდება, თუ 9 თვის შემდეგ დოლარი

გაიყიდა DM1.500-ად. ამ შემთხვევაში, ორივე ოფციონი აღსრულებისას გაუფასურდება. მაგრამ, იმ შემთხვევაში, თუ ფირმა შეიძენს ოფციონს სტრაიკით DM1.600 და არა DM1.800, მაშინ ის, პრემიისა და მისი დაფინანსების სახით, დამატებით გადაიხდის DM95900-ს.

ამრიგად, არც ერთი ოფციონი არ ჯობნის ყველა დანარჩენს. დამატებითი დაცვა, რასაც უზრუნველყოფენ ფულიანი ოფციონები, ძვირი ჯდება, ხოლო იაფი უფულო ოფციონები ვერ უზრუნველყოფენ დაცვის სათანადო დონეს. თუ დოლარი გამყარდა, საუკეთესოა ფულიანი ოფციონები, თუ დოლარის კურსი დაეცა, მაშინ საუკეთესო იაფი უფულო ოფციონებია.

ზუსტად შუაში არიან განლაგებულნი ფულთან მყოფი ოფციონები, რომლებიც გვთავაზობენ საუკეთესო კომპრომისს დაცვასა და მის ფასს შორის. თუ დოლარის კურსი აიწევს, რაც გამოიწვევს ფირმის დაზარალებას, მაშინ ეს ზარალი განეიტრალდება ოფციონის შემოსავლით. თუ, პირიქით, დოლარის კურსი დაეცემა და ოფციონი გაუფასურდება, მაშინ ფირმა იაფად შეიძენს დოლარს სპოტ-ბაზარზე. ამავე დროს, ასეთი ოფციონები შემოსაზღვრავენ ხარჯებს არსებული ფორვარდული კურსის სიდიდით.

სამწუხაროდ, ასეთ ოფციონებს აქვთ ყველაზე მაღალი დროითი ღირებულება. მთელი პრემია, DM67200, რომელსაც დასაწყისში ვიხდით, დროით ღირებულებას წარმოადგენს და ამიტომ მთელ ამ თანხას დავკარგავთ აღსრულებისას. ასეთი ოფციონის ეფექტური ღირებულება, პრემიის დაფინანსების გათვალისწინებით არის DM70200. ამიტომ, თუ ოფციონი გაუფასურდა განაღდებისას, ფირმა დაკარგავს DM70200-ს, რაც იქნება, ამ შემთხვევაში, ჰეჯირების ფასი. იმ შემთხვევაშიც კი, თუ ოფციონი აღმოჩნდა ფულით აღსრულების მომენტში, ფირმა მაინც დაკარგავს DM70200-ით მეტს, ვიდრე ფორვარდული ჰეჯირებისას. ასეთია კომპრომისის ფასი.

ამიტომ არ არსებობს საუკეთესო, იდეალური ვარიანტი ძირითადი ოფციონებით ჰეჯირების დროს. აქ არ არსებობს სწორი და არასწორი გადაწყვეტილება. თითოეულმა კლიენტმა უნდა აწარმოოს ჰეჯირება თავისი მიზნების და ბაზარზე მისი წარმოდგენების გათვალისწინებით.

ოფციონებზე დამყარებული მაჰეჯირებელი სტრატეგიების შექმნისას, ბანკების წინაშე წარმოიქმნება პრობლემა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ კლიენტებს, მეტადრე ფირმებს დაძაბული ბიუჯეტით, არ სურთ წინასწარ გადაიხადონ საკმაოდ დიდი თანხა დაცვის უზრუნველსაყოფად.

ცხადია, რომ სტანდარტული ოფციონი, ერთის მხრივ, უზრუნველყოფს რისკისაგან სრულ დაცვას, თუ ძირითადი აქტივის ფასი (ჩვენს შემთხვევაში სავალუტო კურსი) გაცდა სტრაიკს, ხოლო მეორეს მხრივ, საშუალებას იძლევა მიღებულ იქნას შემოუსაზღვრელი მოგება. განხილულ მაგალითში, თუ კურსი DM1.700-ზე მეტია, მოქმედებს შემოუსაზღვრელი დაცვა, თუ კურსი ნაკლებია, ვიდრე DM1.700, ფირმის შემოსავალი შემოუსაზღვრელად იზრდება კურსის კლებასთან ერთად.

მაგრამ, შესაძლოა, ფირმას არ სჭირდება ასეთი შემოუსაზღვრელი დაცვა და შემოუსაზღვრელი მოგება. ფირმამ, როგორც ვიცით, განაცხადა თავისი მიზნების ჩამოყალიბების დროს, რომ მისი აზრით კურსი არ გავა ($DM1.400, DM2.100$) კორიდორიდან.

ამიტომ ფირმას სჭირდება ნორმალური ოფციონური დაცვა შუალედში DM1.400-დან DM2.100-მდე, ხოლო ამ შუალედის გარეთ არც პოტენციალურ მოგებაზე და არც პოტენციალურ წაგებაზე მას პრეტენზია არ გააჩნია. აქედან გამომდინარე, ზუსტი საჭირო ჰეჯი მოიცემა ნახ. 9.7-ზე მოყვანილი გრაფიკით.

გრაფიკი შეიძლება ავაგოთ შემდეგი მოქმედებების ჩატარების მეშვეობით (გამოვიყენოთ სიმბოლური ჩანაწერები):

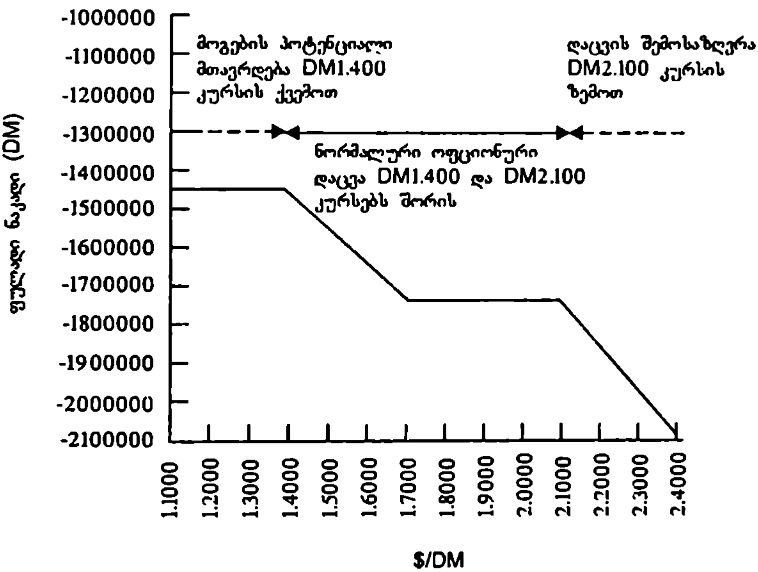
ძირითადი რისკი	{ -1, -1, -1, -1 }
კოლ ოფციონის ყიდვა შუალედური სტრაიკით	{ 0, 0, +1, +1 }
ჰეჯირება ძირითადი ოფციონებით	{ -1, -1, 0, 0 }
პუტ ოფციონის გაყიდვა დაბალი სტრაიკით	{ +1, 0, 0, 0 }
კოლ ოფციონის გაყიდვა მაღალი სტრაიკით	{ 0, 0, 0, -1 }
შედეგი	{ 0, -1, 0, -1 }

ცხადია, ასეთი ჰეჯი ზუსტად ასახავს კლიენტის მოთხოვნებს. ამასთან, გაყიდული კოლ და პუტ ოფციონების ხარჯზე ხდება შეძენილი კოლ ოფციონის ფასის ნაწილობრივი ანაზღაურება, რაც საგრძნობლად აიაფებს მთელ სტრატეგიას.

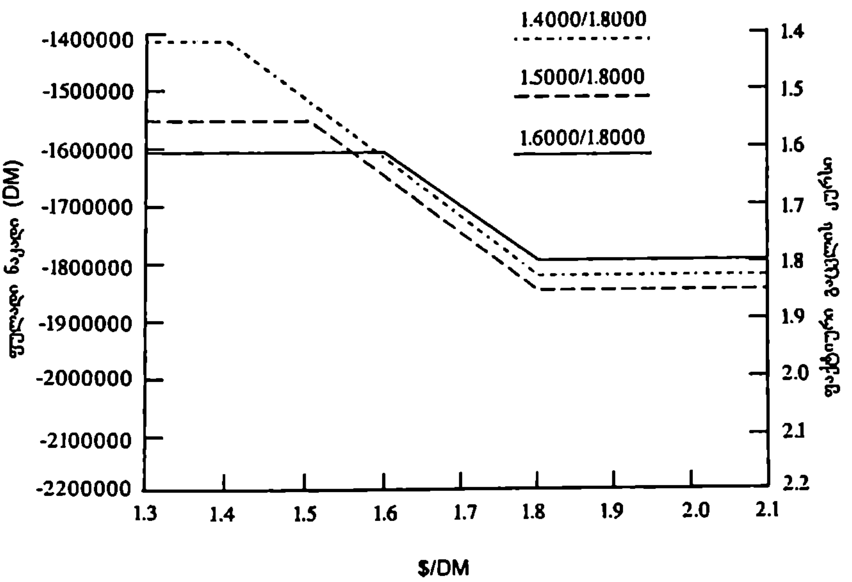
ამრიგად, ამ მაგალითში, ჩვენ შევქმენით გარკვეული პაკეტი კლიენტის რისკ-ს დასაჰეჯირებლად.

იმისათვის, რომ გაუადვილონ კლიენტებს ოფციონური სტრატეგიების შექმნის დროს წარმოქმნილი სირთულეები და დაძლიონ კომპანიების გარკვეული სკეპსისი ოფციონების მიმართ, ბანკები წინასწარ ადგენენ ოფციონების პაკეტებს და არქმევენ მათ პატენტირებულ სახელებს. ამასთან, ეს პაკეტები ზედმიწევნით ზუსტადაა შედგენილი. გაყიდული ოფციონების პრემიები ფარავენ ოფციონების ყიდვაზე გაწეულ ხარჯებს და ამიტომ მთელ პაკეტს ნულოვანი ფასი აქვს.

განვიხილოთ რამოდენიმე ასეთი სტრატეგია.


-1000000
-1100000
-1200000
-1300000
-1400000
-1500000
-1600000
-1700000
-1800000
-1900000
-2000000
-2100000
ფულადი ნაკადი (DM)
მოგების პოტენციალი მთავრდება DM1.400 კურსის ქვემოთ
დაცვის შემოსაზღვრა DM2.100 კურსის ზემოთ
ნორმალური ოფციონური დაცვა DM1.400 და DM2.100 კურსებს შორის
1.1000
1.2000
1.3000
1.4000
1.5000
1.6000
1.7000
1.8000
1.9000
2.0000
2.1000
2.2000
2.3000
2.4000
$/DM

ნახ. 9.7


1.4000/1.8000
1.5000/1.8000
1.6000/1.8000
-1400000
-1500000
-1600000
-1700000
-1800000
-1900000
-2000000
-2100000
-2200000
ფულადი ნაკადი (DM)
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2.0
2.1
2.2
ფაქტიური გაცვლის კურსი
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2.0
2.1
$/DM

ნახ. 9.8

კოლარები. შემოსაზღვრული ფორვარდული გარიგებები, ფორვარდ-ბაფთები, ცილინდრები. ესენი ერთი და იგივე პროდუქტის სხვადასხვა სახელებია. ინსტრუმენტი მოცემულ დიაპაზონში მოქმედებს როგორც ჩვეულებრივი ფორვარდი, ხოლო მის გარეთ შემოსაზღვრავს რისკს.

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია კოლარების სუფთა პრემიები.

	გადახდილი (+) / აღებული (-) პრემიები DM-ში			
კოლარის დიაპაზონი	კოლი	პუტი	სუფთა პრემია	სუფთა პრემია პროცენტებით*
1.4000/1.8000	+36700	-5700	+31000	+32400
1.5000/1.8000	+36700	-14500	+22200	+23200
1.6000/1.8000	+36700	-33200	+3500	+3700

*დამრგვალება უახლოეს DM100-მდე

ცხრილი 9.2

კოლარები იქმნება ერთი ტიპის ოფციონების ყიდვით, რისკის ქვემოდან შემოსაზღვრისათვის, და საწინააღმდეგო ტიპის ოფციონების გაყიდვით, პოტენციალური მოგების ზემოდან შემოსაზღვრის მიზნით. ჩვეულებრივ, ორივე ტიპის ოფციონები არახელსაყრელნი არიან, რაც ქმნის შუალედს, სადაც პეჯი არ მოქმედებს. კოლარის კოტირების დასადგენად კლიენტი უთითებს სამ ფაქტორს:

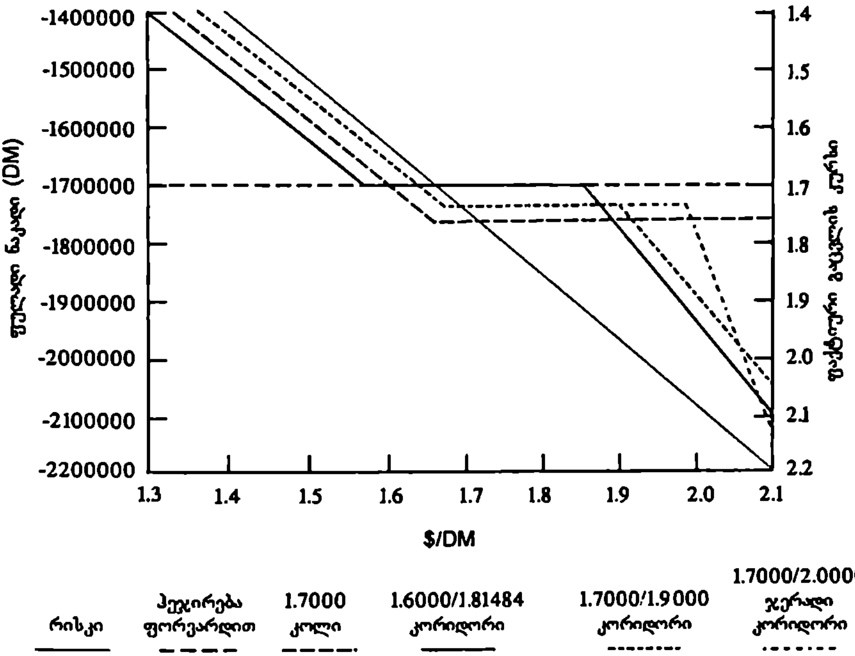
- კეპის აღსრულების ფასს,
- ფლორის აღსრულების ფასს,
- გადასახდელ სუფთა პრემიას.

ამასთან, ორი ფაქტორის მოცემა, ცხადია, განსაზღვრავს მესამეს. ამიტომ, როგორც წესი, კომპანია უთითებს კეპის სიდიდეს, რაც განსაზღვრავს კომპანიისათვის მისაღები რისკის დონეს, და შემდეგ ბანკი ადგენს ფლორის სიდიდეს, იმ მოთხოვნიდან გამომდინარე, რომ სუფთა პრემია ნულის ტოლი იყოს (იხ. ცხრ. 9.3).

კეპის დონე	ფლორის დონე
1.8000	1.6133
1.9000	1.5382
2.0000	1.4738
2.1000	1.4193

ცხრილი 9.3

კორიდორები. როგორც დავინახეთ, კოლარის გრაფიკი შედგებოდა დახრილი მონაკვეთისაგან ცენტრში და ორი ჰორიზონტალური მონაკვეთისაგან ამ ინტერვალის გარეთ. კორიდორი დიამეტრულად საწინააღმდეგო გრაფიკის მქონე პროდუქტია — ცენტრშია ჰორიზონტალური მონაკვეთი, ხოლო მის ორივე მხარეს — დახრილები.



ნახ. 9.9

თუ კოლარის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ დაუშვას რისკი მოცემულ შუალედში და გამორიცხოს იგი მის გარეთ, კორიდორი ქმნის სრულ განსაზღვრულობას მოცემულ შუალედში და უშვებს რისკს მის გარეთ. კოლარი იქმნებოდა არასასურველი შესაძლებლობების გაყიდვით, ხოლო კორიდორი იქმნება იმ დაცვის გაყიდვით, რომელიც არ არის საჭირო: კორიდორის შესაქმნელად უნდა ვიყიდოთ ოფციონები დაცვის უზრუნველსაყოფად და გავყიდოთ იმავე ტიპის უფრო ღრმად უფულოდ მყოფი ოფციონები, რათა გავყიდოთ ის დაცვა, რომელიც საჭიროდ არ მიგვაჩნია.

როგორც წესი, შეუძლებელია შევქმნათ კორიდორი ნულოვანი ფასით, რადგან გაყიდული ოფციონი უფრო არახელსაყრელია, ვიდრე ნაყიდი.

მიუხედავად ამისა, არსებობს ორი მეთოდი ნულოვანი ფასის კორიდორების შესაქმნელად:

1) გასაყიდი უფულო ოფციონის სტრაიკი ავიღოთ ისე, რომ პრემია დაემთხვეს შესასყიდი ფულიანი ოფციონის დროით ღირებულებას. მაშინ გადასახდელი სუფთა პრემია დაემთხვევა ხელსაყრელი ოფციონის შინაგან ღირებულებას. თუ ეს ოფციონი საბოლოოდ აღსრულდა, საერთოდ გადასახდელი თანხა დაემთხვევა თავდაპირველ ფორვარდულ ფასს, რასაც ნულამდე დაჰყავს მთელი ოფციონური სტრატეგიის ფასი (ასეა შერჩეული მაგალითში პირველი კორიდორის ფასები);

2) გავზარდოთ გასაყიდი ოფციონის ძირითადი აქტივის მოცულობა (ასეთია ჯერადი კორიდორი). შევნიშნოთ, რომ საბოლოო რისკი ამ შემთხვევაში მეტია საწყისზე. ამიტომ ასეთი სტრატეგიის გამოყენებისას სიფრთხილეა საჭირო.

მოვიყვანოთ მაგალითი.

	ნაყიდი კოლი	გაყიდული კოლი	სუფთა პრემია	სუთა პრემია პროცენტებით
კორიდორი	1.6000	1.8184	95700	100000
კორიდორი	1.7000	1.9000	47000	49100
ჯერადი კორიდორი	1.7000	2.0000*	47000	49100
კოლ ოფციონი	1.7000		67200	70300*

*ძირითადი აქტივის 1.75-ზე გაყიდული კოლი

ცხრილი 9.4

წილობრივი ფორვარდული გარიგებები. ადრე განხილულ შემთხვევაში ერთი ოფციონის ყიდვა ფინანსირდებოდა მეორის გაყიდვით. ძირითადი აქტივის სიდიდე როგორც გაყიდული, ისე ნაყიდი ოფციონისათვის ტოლი იყო საწყისი რისკის სიდიდისა, იცვლებოდა აღსრულების ფასი და, ამიტომ, სუფთა პრემიაც.

წილობრივ ფორვარდულ გარიგებაში გაყიდული და ნაყიდი ოფციონების აღსრულების ფასები ტოლი და ფიქსირებულია. აქ იცვლება ძირითადი აქტივის მოცულობა. იგი ისე შეირჩევა, რომ პროდუქტის ფასი ნულის ტოლი გახდეს. გაყიდული და ნაყიდი ოფციონები, ცხადია, სხვადასხვა ტიპის არიან. წილობრივი ფორვარდი „მუშაობს" მაშინ, როცა ნაყიდი ოფციონი უფულოდაა, ხოლო გაყიდული — ფულით და ამიტომ უფრო ძვირია. აქედან გამომდინარე, საჭიროა ძირითადი აქტივის მოცულობა პროპორციულად შემცირდეს, რომ მივიღოთ ნულოვანი სუფთა პრემია.

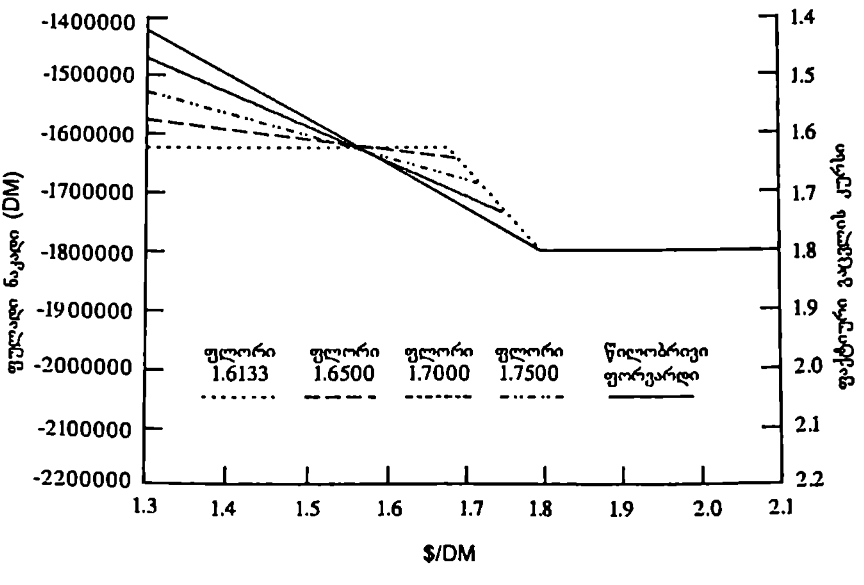
განვიხილოთ კოლარი, შესაბამისად, კეპის და ფლორის აღსრულების ფასით DM1.800 და DM1.613. სუფთა პრემია, როგორც ვიცით, ნულის ტოლია. დავაფიქსიროთ კეპი და პრემია და ვზარდოთ ფლორის აღსრულების ფასი. ფლორის ფასის ზრდა ზრდის გაყიდული ოფციონის ფასს და საშუალებას იძლევა შევამციროთ ძირითადი აქტივის სიდიდე ისე, რომ პროდუქტის

ფასი ნულის ტოლი გახდეს.

კეპის აღსრუ-ლების ფასი	კეპის ფასი DM 1$-ში	კეპის ძირითადი აქტივების მოცულობა	ფლორის აღსრუ-ლების ფასი	ფლორის ფასი DM 1$-ში	კეპი-ფლორი ფასების შეფარდება	ფლორის ძირითადი აქტივების მოცულობა
1.800	0.0367	1 მლნ	1.6133	0.0367	1.00	1000000
1.800	0.0367	1 მლნ	1.6500	0.0480	0.76	763900
1.800	0.0367	1 მლნ	1.7000	0.0676	0.54	542600
1.800	0.0367	1 მლნ	1.7500	0.0980	0.37	374500
1.800	0.0367	1 მლნ	1.8000	0.1328	0.28	276300

ცხრილი 9.5

ცხრილიდან ნათელია, რომ კეპი/ფლორი შეფარდება უდრის ძირითადი აქტივების შეფარდებას. აქტივების სიდიდის შემცირება ამცირებს მოგების მიღების შესაძლებლობის წილს. ისეთი კოლარისთვის, რომლისთვისაც კეპი/ფლორი = 1, ეს წილი „სრულია" და კომპანია უარს ამბობს მოგებაზე. ფლორის ფასის გაზრდით იგი მცირდება და, თუ, მაგალითად, ეს შეფარდება არის 0.28, მაშინ იყიდება მხოლოდ 28% მოგებისა და კომპანია იღებს მონაწილეობას მოგების დარჩენილ 72%-ში. ასე მიიღება 72%-იანი წილობრივი ფორვარდული გარიგება. აღწერილი თანმიმდევრული გადასვლა ნაჩვენებია ნახ. 9.10-ზე.



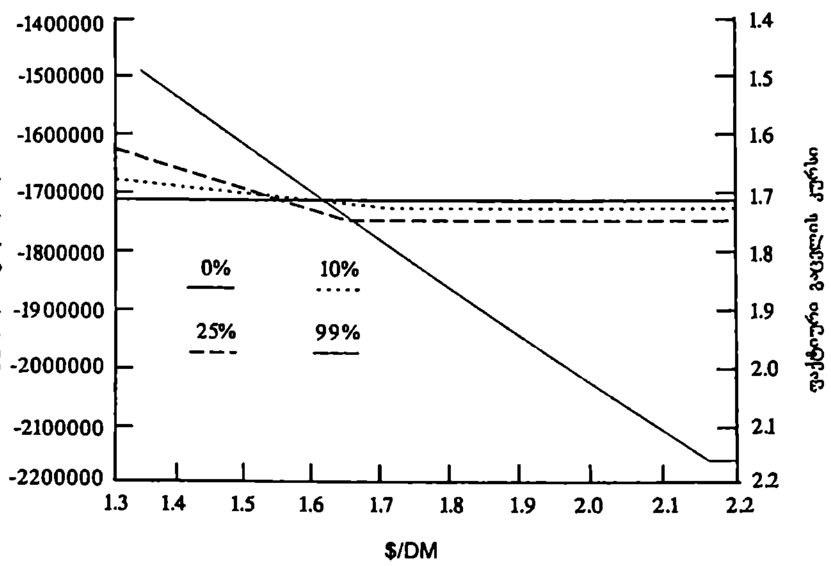
ნახ. 9.10

არსებობს ასეთი პროდუქტის შექმნის სხვა ვარიანტიც. მაგალითად, კომპანიას შეუძლია აირჩიოს ის აღსრულების ფასი, რომლის შემდეგ მას სურს მონაწილეობის მიღება მოგებაში:

მონაწილეობის კოეფიციენტი	აღსრულების ფასი
0%	1.7000
10%	1.7071
25%	1.7203
50%	1.7512
75%	1.8087
90%	1.8950
99%	2,1839

ცხრილი 9.6

ნახ. 9.11-ზე მოცემულია სხვადასხვა წილობრივი ფორვარდული გარიგების გრაფიკი.



ნახ. 9.11

ჯერადი ფორვარდული გარიგებები. ეს პროდუქტი მიიღება წინასგან შემდეგი სახეცვლილებით: გადავიტანოთ წილობრივ ფორვარდულ გარიგებაში აღსრულების ფასი ფორვარდული ფასის მეორე მხარეს. ამ შემთხვევაში, ნაყიდი ოფციონი იქნება ფულით, გაყიდული — უფულოდ და ამიტომ, უფრო იაფი. იმისათვის, რომ მივიღოთ ნულოვანი ფასის მქონე პრო-

დუქტი, ძირითადი აქტივების ფასი უნდა იყოს ჯერადი საწყისი რისკის სიდიდისა. მიიღება ჯერადი ფორვარდული გარიგება.

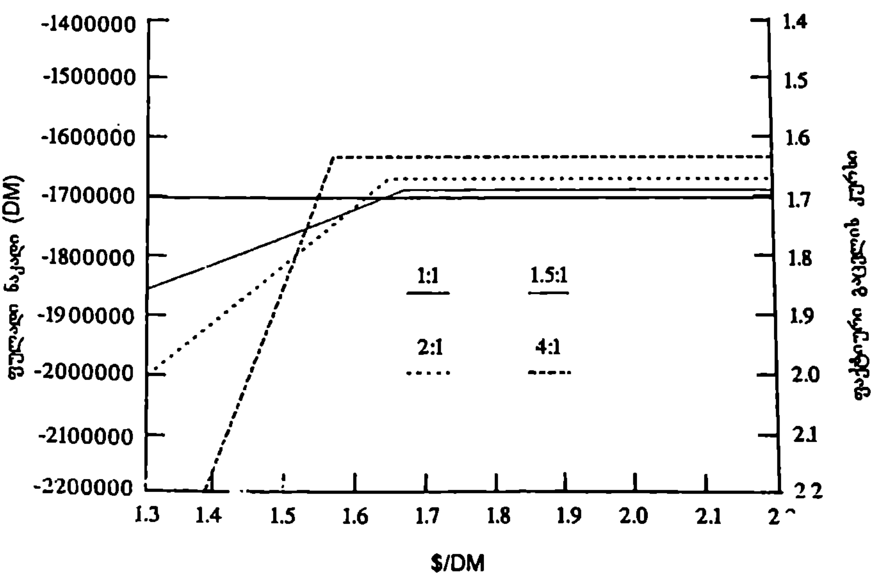
ასეთი გარიგების მიმზიდველობა იმაში მდგომარეობს, რომ კლიენტი უფასოდ იძენს ფულიან ოფციონს, რაც საშუალებას აძლევს ნაკლებ ფასად (საბაზრო ფასთან შედარებით) შეიძინოს ძირითადი აქტივი. მეორეს მხრივ, მას უხდება დიდი რაოდენობით უფულო ოფციონების გაყიდვა. ამიტომ ძირითადი აქტივის ფასის არასასურველი მიმართულებით ცვლილების დროს შესაძლოა მოუხდეს დიდი თანხის გადახდა.

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემულია რისკის ჯერადობასა და აღსრულების ფასებს შორის დამოკიდებულება.

რისკის ჯერადობა	აღსრულების ფასი
1 : 1	1.7000
1.5 : 1	1.6706
2 : 1	1.6496
3 : 1	1.6194
4 : 1	1.5976
5 : 1	1.5805

ცხრილი 9.7

ნახ. 9.12-ზე ნაჩვენებია სხვადასხვა ჯერადი ფორვარდული გარიგებების გრაფიკი.



ნახ. 9.12

ფორვარდები შეწყვეტით (ფოქსები, ოფციონები შებრუნებადი ფორვარდებით). ასეთი კონტრაქტის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ კლიენტს მიეცეს შესაძლებლობა, შეწყვიტოს ფორვარდული გარიგება საბაზრო ფასების არასასურველი მიმართულებით მოძრაობის შემთხვევაში.

ასეთი კონტრაქტების წარმოქმნის მიზეზი იყო ის ფაქტი, რომ მრავალმა კლიენტმა გული აიყარა თვით ჰეჯირების იდეაზე, როცა საბაზრო ფასები შეიცვალა მის სასარგებლოდ და ჰეჯის საწინააღმდეგოდ. გასაგებია, რომ ჰეჯირების მიზნებისა და ეფექტურობის სწორი გააზრება აგვარიდებდა ასეთ დაგვიანებულ გულისწყრომას, მაგრამ, მეორეს მხრივ, ასეთი რეაქცია სავსებით გასაგებია.

ამის საპასუხოდ შეიქმნა ფორვარდი შეწყვეტით: ბანკი მიყიდის კლიენტს ოფციონს ფორვარდის შეწყვეტის შესახებ ისე, რომ პრემიის გადახდას არ ითხოვს: ოფციონის ღირებულება და პრემიის დაფინანსება შედის არასაბირჟო ფორვარდულ კურსში.

ვნახოთ მაგალითზე, თუ როგორ მუშაობს ეს კონტრაქტი.

მაგალითი 9.2-ის გაგრძელება. ვთქვათ, გერმანულ ფირმას შეუძლია იყიდოს ფორვარდით დოლარები საბაზრო კურსით DM1.7000. მაგრამ ახლა დავუშვათ, რომ მას სჭირდება დამატებით ოფციონი დოლარის გაყიდვაზე ფასის დაცემისგან დაზღვევის მიზნით. ვთქვათ, დაზღვევის არჩეული დონეა DM1.6000. ასეთი ფასის მქონე პუტ ოფციონის ფასია DM0.0332 და პრემიის დაფინანსების ხარჯების გათვალისწინებით მისი ფასი DM0.0347 გახდება. ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ ამ პრემიას ფორვარდულ კურსში, მივიღებთ:

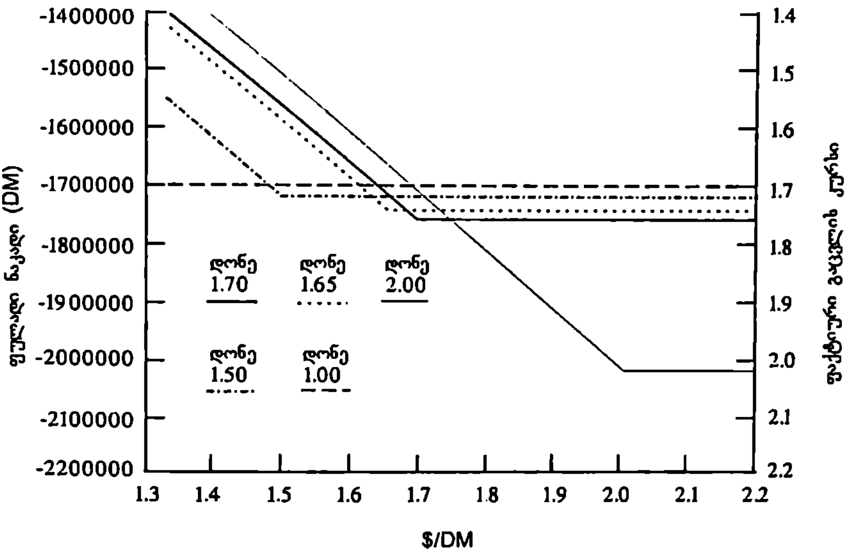
- ფირმა ყიდულობს $1 მლნ-ს კურსით DM1.7347;
- თუ კურსი დაეცა DM1.6000-ზე ქვემოთ, ფირმას აქვს უფლება შეწყვიტოს ფორვარდი და იყიდოს დოლარი სპოტ-ბაზარზე.

ფირმამ ამ დროს დაკარგა შესაძლებლობა, მიეღო მოგება, თუ კურსი იქნებოდა ინტერვალში DM1.600-დან DM1.7347-მდე. ეს არის სწორედ შეწყვეტის შესაძლებლობის ფასი.

მოვიყვანოთ შესაბამისი ცხრილი და გრაფიკი (ცხრ. 9.8 და ნახ. 9.13).

ზღვრული ფასი	ფორვარდული კურსი
1.7000	1.7707
1.6500	1.7502
1.6000	1.7347
1.5500	1.7233
1.5000	1.7152
2.0000	2.0125
1.0000	1.7000

ცხრილი 9.8



ნახ. 9.13

როგორც ვხედავთ, ნახატზე მოყვანილი გრაფიკები ემთხვევა იმ შემთხვევას, როდესაც ჰეჯირება წარმოებდა ნამდვილი კოლით. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან აქტივების შეძენა და პუტის ყიდვა იძლევა სინთეზურ კოლს. განსხვავება არის მხოლოდ პრემიის გადახდის ვადებში.

მაგალითად, გარიგება შეწყვეტით და ფასებით DM1.700/1.7707 იმის ეკვივალენტურია, რომ ფირმა ყიდულობს კოლ ოფციონს DM1.700 შეთანხმების ფასით და იღებს ვალს DM0.067 9 თვით.

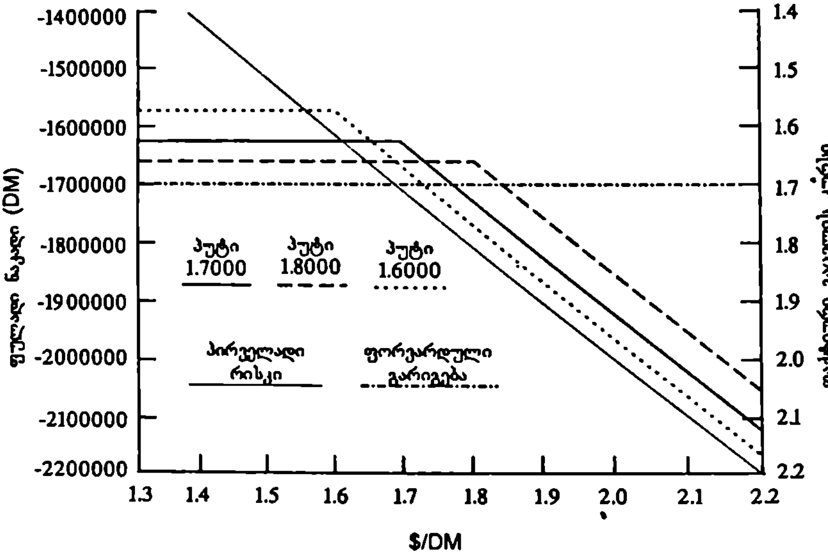
ეგზოტიკური ოფციონები. სავალუტო რისკის ჰეჯირებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ეგზოტიკური ოფციონებიც. სათანადო მაგალითები განხილულია მეშეიდე თავში.

ზემოთგანხილულ შემთხვევებში, ოფციონის გაყიდვით ხდებოდა ოფციონის ყიდვის დაფინანსება. თუ კომპანიას არ გააჩნია პოზიცია ძირითად აქტივებში, ოფციონის გაყიდვა სარისკოა პოტენციურად შემოუსაზღვრელი დანაკარგების გამო. ვთქვათ, კომპანიას უკვე გააჩნია საბაზისო პოზიცია ძირითად აქტივებში. რა მოხდება, თუ იგი გაყიდის ოფციონს ამ რისკის საწინააღმდეგოდ?

მაგალითი 9.3. გერმანულ ფირმას გააჩნია მოკლე პოზიცია $1 მლნ. თუ იგი გაყიდის პუტ ოფციონს $1 მლნ-ზე, მაშინ კონტრაქტის ვადის გასვლის მომენტში შეიძლება მოხდეს, რომ:

1) თუ დოლარის ფასი აღმოჩნდა აღსრულების ფასზე ნაკლები, პუტ ოფციონი აღსრულდება კომპანიის წინააღმდეგ და კომპანია შეიძენს დოლარს აღსრულების ფასად. საერთოდ, ოფციონის გამყიდველი აგებს, თუ ოფციონი მის წინააღმდეგ აღსრულდა. მაგრამ, ამ შემთხვევაში, კომპანიას მაინც სჭირდებოდა დოლარი. ამიტომ, ჯერ ერთი, იგი შეიძენს დოლარს ფიქსირებული ფასით, მეორეც, ფასი შემცირდება ოფციონის პრემიის სიდიდით. კომპანიამ მიიღო ორმაგი მოგება.

2) თუ დოლარის ფასი აღემატება აღსრულების ფასს, პუტ ოფციონი გაუფასურდება, ფირმას დარჩება ოფციონის პრემია როგორც გარკვეული კომპენსაცია, მაგრამ არ ექნება დაცვა დოლარის კურსის ზრდისაგან



ნახ. 9.14

ამრიგად, ჰეჯირების პროგრამის გარეთ ოფციონის გაყიდვა ასუსტებს რისკს, მაგრამ არ იძლევა დაცვას.

თუ ბაზარი სტატიკურია, გერმანულ ფირმას შეუძლია მიმართოს აღწერილ სტრატეგიას. მაგრამ, გასაგებია, რომ ფირმამ უთუოდ უნდა შეიძინოს უფულო იაფი კოლ ოფციონი „კატასტროფის" თავიდან ასაცილებლად. კოლ ოფციონი დაიცავს მას ფასის მკვეთრი ზრდისგან.

მაგრამ, ამ შემთხვევაში, საბოლოოდ გამოვა, რომ ფირმამ შექმნა კოლარი, რაც კრავს წრეს ჩვენს მსჯელობაში.

დინამიური ჰეჯი. კომპანიები, რომლებიც ხმარობენ ოფციონებს ჰეჯირებისათვის, იყენებენ, როგორც წესი, სტატიკურ ჰეჯებს, როცა ოფციო-

ნების აღსრულების ვადები შეთანხმებულია რისკის ხანგრძლივობასთან, და გამოყენებული ჰეჯური სტრატეგია ამ თარიღამდე უცვლელად შენარჩუნდება ხოლმე.

t = 0-ში	9-თვიანი კოლის ყიდვა, სტრაიკით DM1.700 და პრემიით DM0.0672	-67200
t = 3 თვეს	6-თვიანი კოლის გაყიდვა, სტრაიკით DM1.700 და პრემიით DM0.0188	+18800
	6-თვიანი კოლის ყიდვა, სტრაიკით DM1.600 და პრემიით DM0.0523	-52300
	სულ	-33500
t = 6 თვეს	3-თვიანი კოლის გაყიდვა, სტრაიკით DM1.600 და პრემიით DM0.0065	+6500
	3-თვიანი კოლის ყიდვა, სტრაიკით DM1.500 და პრემიით DM0.0523	-35200
	სულ	-28700

ნახ. 9.15

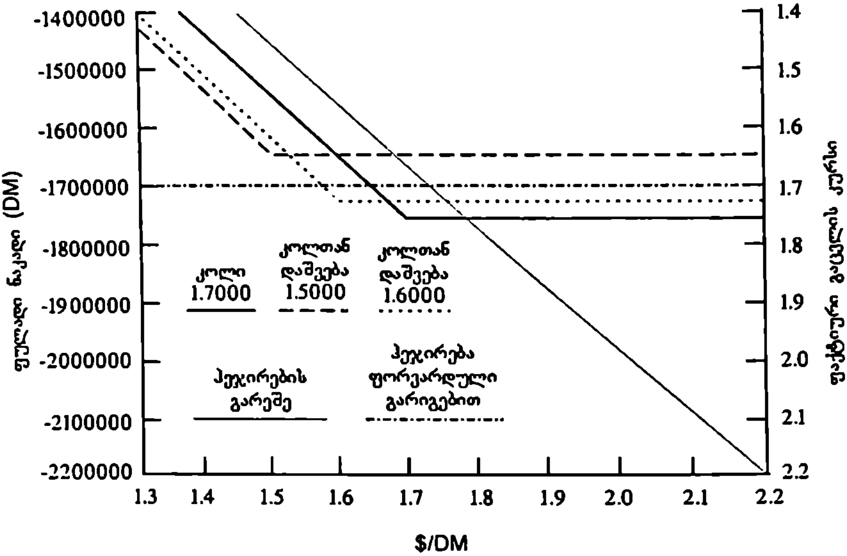
მაგრამ, მრავალ შემთხვევაში, უფრო ხელსაყრელია დინამიური ჰეჯის ჩატარება. მაგალითად:

- თუ არ არსებობს ოფციონები გრძელი ვადით, ან ისინი ძალიან ძვირია. ამ შემთხვევაში იყენებენ სრიალა ჰეჯს, როცა მოკლევადიან ოფციონებს აღსრულების ვადის წინა დღეს გადააფორმებენ ახალი ვადით და ა.შ.
- თუ ძირითადი რისკები მუდმივად იცვლება.
- თუ კომპანიას სურს თავისი ჰეჯის მუდმივი ოპტიმიზაცია.

ასეთ პირობებში, როგორც წესი, იმყოფებიან ბანკები. მათ უწყვეტად უნდა შეადგინონ ბალანსები საბირჟო კურსების ცვლილების დროს, ახალი გარიგებების დადებისას და ა.შ. ამიტომ ისინი იყენებენ დინამიურ Δ-Γ ჰეჯს (იხ. თავი 5).

დინამიური ჰეჯის ჩატარება კორპორაციებს ნაკლებად სჭირდებათ. მაგრამ, თუ კომპანიას სურს ისარგებლოს კურსების ცვლილებით ჰეჯირების

დროის განმავლობაში, მას შეუძლია გამოიყენოს ე.წ. ჰეჯის დაშვების მეთოდი.



ნახ. 9.16

მოვიყვანოთ ჰეჯის დაშვების მაგალითი.

მაგალითი 9.2-ის გაგრძელება. განვიხილოთ ისევ გერმანული კომპანია, რომელსაც სურს იყიდოს $1 მლნ 9 თვის შემდეგ. ვთქვათ, ის იწყებს ჰეჯირებას ძირითადი ოფციონებით და ყიდულობს კოლ ოფციონს დოლარზე სტარიკით DM1.700 და საწყისი პრემიით DM0.0672 1 დოლარზე.

ვთქვათ, სამი თვის შემდეგ დოლარის კურსი დაეცა და იგი შეადგენს DM1.5767, ხოლო ფორვარდული კურსია DM1.6000. მართალია კოლ ოფციონის ღირებულება შემცირდა და შეადგენს DM0.0188-ს, რაც ეკვივალენტურია DM0.0484-ის დაკარგვისა, მაგრამ ძირითადმა პოზიციამ მოუტანა კომპანიას 10 პფენინგი მოგება დოლარზე. ამ მომენტში კომპანიას შეუძლია ჰეჯი დაუშვას ქვემოთ DM1.6000-მდე კოლ ოფციონის (სტრაიკით DM1.700) ლიკვიდაციით და ახალი კოლ ოფციონის შეძენით, სტრაიკით DM1.600. ახალი პრემია შეადგენს DM0.0523-ს, რაც იძლევა სუფთა გადასახადს DM0.0335-ს დოლარზე.

ვთქვათ, დოლარი კიდევ უფრო დაეცა 3 თვის შემდეგ და სპოტ-კურსი გახდა DM1.4889, ფორვარდული — DM1.500. ფირმას შეუძლია გაიმეოროს პროცედურა და დაუშვას ჰეჯი DM1.600-დან DM1.500-მდე. ამ შემთხვევაში, არსებული ოფციონის ფასი შემცირდება DM0.0065-ით, ხოლო ახალი,

ნაყიდი ოფციონის ღირებულება იქნება DM0.0352 და სუფთა გადასახადი ტოლი გახდება DM0.0287-სა დოლარზე (იხ. ნახ. 9.15).

ფირმამ პორტფელის შექმნა დაიწყო ფულთან მყოფი ოფციონის ყიდვით, სტრაიკით DM1.700 და პრემიით DM0.0572. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ საწყისი სტრატეგიის პრემიის დაფინანსების ხარჯებს, დოლარის ყიდვის მაქსიმალური ფასი იყო DM1.7672.

ჰეჯის დაშვება ფირმამ დაამთავრა ოფციონით, რომლის სტრაიკი ტოლია DM1.500-ის და საერთო ღირებულებაა DM0.1294, ასე რომ, ახლა ფირმა გადაიხდის დოლარში არაუმეტეს DM1.6294 (იხ. ნახ. 9.16).

სტრატეგია	უპირატესობა	ნაკლი
ფორვარდული გარიგება	პრემია არ გადაიხდება, შედეგი გარანტირებულია	არ არის ზრდისგან მოგების შესაძლებლობა
ძირითადი ოფციონები	უზრუნველყოფს შემოსაზღვრულ დაცვას. მოგება ზრდისას შემოუსაზღვრელია	პრემია შეიძლება იყოს ძალიან მაღალი
კოლარი	უზრუნველყოფს დაცვას, თუ ბაზრის არასასურველი ცვლილებები აჭარბებენ გარკვეულ დონეს	შესაძლებელია დანაკარგები
კორიდორი	ფასები ცენტრალურ ინტერვალში ფიქსირებულია. მოგების შესაძლებლობა ფასის სასურველი მიმართულებით ძრაობისას შემოუსაზღვრელია. პრემია დაბალია ან ნულის ტოლია	დაცვა წყდება გარკვეული დონის მიღწევისას
წილობრივი ფორვარდული გარიგება	მოგების შესაძლებლობა ზრდისას შემოუსაზღვრელია	ფორვარდული შემადგენლის ფასი განსხვავდება საბაზროსგან
ჯერადი ფორვარდული გარიგება	ფორვარდული გარიგება შეიძლება აღსრულდეს საბაზრო კურსზე უფრო კარგი კურსით	თუ პოზიციის ჯერადობა დიდია, შესაძლოა დიდი დანაკარგები
ფორვარდული გარიგება შეწყვეტით	შესაძლოა მოგება ბაზრის მნიშვნელოვანი ძვრების დროს	ფორვარდული გარიგება არასაბაზრო კურსით ხდება

ცხრილი 9.9

პირველი დაშვებისას ოფციონური სტრატეგიის მაქსიმალური ფასი ახლოსაა ფორვარდული ჰეჯირების ფასთან. მეორე დაშვებისას ფირმა არ გადაიხდის უფრო მეტს, ვიდრე DM1633900, თუ გავითვალისწინებთ პრემიის

დაფინანსებასაც, რაც 4%-ით ნაკლებია ფორვარდულ კურსზე. ამავე დროს, ფირმა მოიგებს დოლარის კურსის DM1.500-ზე ქვემოთ დაცემისას.

აღწერილი პრინციპების გამოყენება მოხერხებულია არა მარტო ძირითადი ოფციონებით ჰეჯირების დროს, არამედ მაშინაც, როდესაც საქმე გვაქვს კოლარებთან, კორიდორებთან, წილობრივ ფორვარდებთან და სხვა. თუ ძირითადი აქტივის ფასი იცვლება საწყისი რისკის სასარგებლოდ, მაშინ ფულით მყოფი ოფციონები შეიძლება დაფინანსდეს მიღებული მოგების მეშვეობით, მოგების ფიქსაციით და მაქსიმალური ხარჯების ახალი საზღვრის დადგენით.

ეს სტრატეგია დაკავშირებულია დამატებით ხარჯებთან, მაგრამ ხარჯები ანაზღაურდება აღსრულების მომენტში ნაღდი ფულადი შემოსავლით.

პუნქტ 9.3-ში მოყვანილი შედეგების რეზიუმე მოცემულია ცხრ. 9.9-ში.

9.4 საპროცენტო რისკის მართვა ფიუჩერსებით და სხვა მონათესავე ინსტრუმენტებით

საპროცენტო რისკი, კერძოდ, საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებაზე დამოკიდებულება, ეხება საპროცენტო განაკვეთის სვადასხვა სახეს: სვოპ-განაკვეთს, უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთს, ფორვარდულ განაკვეთს, ნომინალური ობლიგაციის განაკვეთს. იმ შემთხვევაშიც კი, თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ერთი ტიპის განაკვეთის განხილვით, დარჩება კიდევ დაფარვის ვადების უსასრულო რაოდენობა. ამიტომ საპროცენტო რისკი შეიძლება შეეხებოდეს ნებისმიერი ტიპის განაკვეთს და ნებისმიერ დაფარვის ვადას. მიუხედავად ამისა, შეიძლება გამოიყოს სამი ძირითადი კატეგორია.

პირველ კატეგორიას მიეკუთვნება რისკი, რომელიც ეხება მოკლევადიან განაკვეთს მოცემულ ვადაზე, რომელიც ფარავს მომავლის ერთ გარკვეულ პერიოდს. ეს არის მოკლევადიანი ფორვარდული განაკვეთის რისკი.

მეორე რისკი ეხება მოკლევადიან განაკვეთს მოცემულ ვადაზე, მაგრამ ის მიეკუთვნება რამოდენიმე სამომავლო პერიოდს. ესაა რისკი მოკლევადიანი ფორვარდული განაკვეთების ერთობლიობისა.

და ბოლოს, არსებობს საპროცენტო რისკი, რომელიც ეხება ერთადერთ აღსრულების ვადას. მაგალითად, თუ საპენსიო ფონდმა შეიძინა 20-წლიანი ობლიგაცია, საქმე გვექნება 20-წლიანი შემოსავლიანობის ძრაობასთან. თუ ბანკმა შეიძინა 5-წლიანი სვოპი, საქმე გვექნება 5-წლიან სვოპ-განაკვეთთან. ორივე შემთხვევაში საუბარია სპოტ-შემოსავლიანობაზე, ე.ი., შემოსავლიანობაზე მოცემული მომენტიდან განსაზღვრულ თარიღამდე მომავალში.

ცხადია, რომ ფორვარდული და სპოტ-კურსები ერთმანეთთან მჭიდროდაა დაკავშირებული. არსებობს ფორმულები (იხ. (1.20), (1.21)), რომლებიც

მათ კავშირს გამოსახავს.

მაგრამ რისკების განხილვის დროს უნდა გამოიყოს ის რისკი, რომელიც მთავარია მოცემულ შემთხვევაში. ვთქვათ, ინვესტორს სურს მის მფლობელობაში მყოფი მცურავი განაკვეთის მქონე 5-წლიანი ობლიგაციის მცურავი შემოსავალი სვოპ-გარიგებით გადაიყვანოს მუდმივ შემოსავალზე. თავიდან იგი დააკვირდება 6-თვიან ფორვარდულ განაკვეთებს. ხოლო თუ ინვესტორი დადებს სვოპ-გარიგებას ბანკთან, მაშინ ბანკი, თავის მხრივ, საპროცენტო რისკის სამართავად დააკვირდება 5-წლიან სვოპ-განაკვეთს და მიუხედავად იმისა, რომ ორივე რისკი ერთი და იგივეა, თვალსაზრისები განსხვავდება.

გავეცნოთ თავდაპირველად იმ მეთოდებს, რომლებიც დამყარებულია FRA-ზე, ფიუჩერსებზე და სვოპებზე, ე.ი. მეთოდებს, რომლებიც გამორიცხავენ განუსაზღვრელობას.

შემდეგ გავეცნოთ ოფციონებზე დამყარებულ მეთოდებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ რა დაცვას არასასურველი რისკისაგან, ტოვებენ მოგების შესაძლებლობას სიტუაციის სასურველი მიმართულებით განვითარების შემთხვევაში.

FRA-ს გამოყენება. ჩვენ უკვე შევხედით ამ ინსტრუმენტს. იგი ფარავს მხოლოდ ერთ პერიოდს მომავალში და ამიტომ მისადაგებულია მოკლევადიანი ფორვარდული რისკის ჰეჯირებისათვის. თუ რისკის მოქმედების ვადა სტანდარტულია და მიბმულია LIBOR-თან, მაშინ სტანდარტული FRA შექმნის სრულყოფილ, ან თითქმის სრულყოფილ ჰეჯს. საპროცენტო განაკვეთი დაფიქსირდება FRA-ს განაკვეთის დონეზე.

თუ რისკის ვადები არ ემთხვევა სტანდარტული FRA-ს ვადებს, ან მიბმულია რომელიმე სხვა ბაზისთან (LIBOR-ისგან განსხვავებით), მაშინ არსებობს შემდეგი გამოსავალი:

- მივიღოთ ბანკისაგან არასტანდარტულ FRA-ზე ინდივიდუალური კოტირება. ეს გადაწყვეტილება მიგვიყვანს სრულყოფილ ჰეჯამდე, მაგრამ FRA-ს განაკვეთი, როგორც წესი, განსხვავებული იქნება სამართლიანი საბაზრო განაკვეთისაგან.

- დავაჰეჯიროთ რისკი უახლოესი სტანდარტული FRA-ს გამოყენებით და შევურიგდეთ ნარჩენ საბაზისო რისკს ანუ იმას, რომ ჰეჯისა და ძირითადი რისკის ქცევა ერთმანეთისგან განსხვავებული იქნება. ნარჩენი რისკი შედარებით პატარა იქნება.

- დავაჰეჯიროთ რისკი სტანდარტული FRA-ს გამოყენებით და ვმართოთ საბაზისო რისკი. ფიუჩერსების ბაზარზე, სადაც ხშირად გვიხდება ასეთი რისკის მართვა, განვითარებულია მეთოდები, რომლებიც FRA-ს შემთხვევაშიც გამოდგება.

მოკლევადიანი საპროცენტო ფიუჩერსების გამოყენება. ჩამოვაყალიბოთ პრობლემა: FRA-სგან განსხვავებით ფიუჩერსული კონტრაქტები მკაცრად სტანდარტიზებულია. ამიტომ წარმოიქმნება რიგი მიმართულებისა, რომლებშიც რისკის მახასიათებლები შეიძლება განსხვავდებოდეს ფიუჩერსის მახასიათებლებისგან, რაც იწვევს სხვადასხვა ტიპის საბაზისო რისკის წარმოქმნას. ძირითადი განსხვავებები თავმოყრილია ცხრ. 9.10-ში.

ძირითადი კაპიტალის რისკი	ფიუჩერსული კონტრაქტის მოცულობა ფიქსირებულია, მაგალითად 1 მლნ.
კონტრაქტის მოქმედების ვადა	ფიუჩერსის ვადა ფიქსირებულია, მაგალითად 3 თვე
რისკის თარიღი	კონტრაქტები აღსრულდება ფიქსირებულ შუალედებში, მაგალითად, მარტის, ივნისის, სექტემბრის და დეკემბრის მესამე ოთხშაბათს
რისკის ბაზისი	ანგარიშსწორების საკონტრაქტო თანხა მიბმულია ერთ საბაზისო განაკვეთზე, მაგალითად, LIBOR-ზე
ანგარიშსწორების თანხა	ფიუჩერსის ერთი ტიკი ფიქსირებულია, მაგალითად \$25-ზე
მარჟა	მარჟინალურ ანგარიშგებას მივყავართ არაჭერეტადი ფულადი ნაკადების წარმოქმნამდე კონტრაქტის მოქმედების პერიოდში.

ცხრილი 9.10

ყველა ამ სიძნელეს აქვს თავისი გადაჭრის გზა. ყველაზე რთული პრობლემაა ის, რომელიც ეხება რისკის თარიღისა და ფიუჩერსის აღსრულების ვადებს შორის განსხვავებას. ყველა სხვა პრობლემა წყდება ფიუჩერსული ჰეჯის კოეფიციენტის სწორი არჩევით. თუმცა, არსებობს ზემოაღნიშნული რთული პრობლემის გადაჭრის ხერხებიც. შევნიშნოთ აქვე, რომ ნებისმიერი რისკის 80% ჰეჯირდება მხოლოდ საბაზისო ჰეჯის კოეფიციენტის სწორი გათვლით. ყველა სხვა, უფრო დახვეწილი მეთოდი მიმართულია სრულყოფილი ჰეჯირების მისაღებად. გასაგებია, რომ ბევრ მომხმარებელს არ ძალუძს ასეთი ჰეჯირების ჩატარება. მაგრამ, თუ საუბარია მსხვილ რისკზე, ან თუ მარჟები, რომლებითაც მუშაობენ ბანკები მცირეა (კონკურენციის გამო), მაშინ დახვეწილი ჰეჯის ჩატარება აუცილებელ პირობას წარმოადგენს.

ჰეჯის კოეფიციენტის გამოთვლა. ჩვენ ზემოთ ცხრილში ჩამოვთვალეთ რისკის სხვადასხვა სახეები, რომლებიც წარმოიქმნება ძირითადი რისკის ჰეჯირების დროს სტანდარტული ფიუჩერსებით. ამასთან, ცხრილში მითითებულ პირველ ორ რისკს აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა. თუ კონტრაქტის მოცულობა დიდია ან მისი მომგებიანობა ძლიერადაა დამოკიდებული ჰეჯზე, მაშინ სხვა რისკებსაც უნდა მიექცეს ყურადღება. იმ შემთხვევაში, თუ ჩავთვლით, რომ რომელიმე რისკი არაა მნიშვნელოვანი, მაშინ შესაბა-

მის კოეფიციენტს ვუტოლებთ 1-ს. ამიტომ ჰეჯის კოეფიციენტი დავშალოთ შემდეგნაირად

$$HR = HR_{basis} \cdot HR_{advanced} =$$

$$= \underbrace{HR_{principal} \times HR_{period}}_{HR_{basis}} \cdot \underbrace{HR_{exbasis} \times HR_{settlement} \times HR_{margin}}_{HR_{advanced}}$$

სადაც HR ჰეჯის საერთო კოეფიციენტია, ხოლო დანარჩენი კოეფიციენტები შეესაბამება ზემოთ ჩამოთვლილ რისკებს. დავიწყოთ თითოეული კოეფიციენტის გამოთვლა:

1.

$$HR_{principal} = \frac{\text{ძირითადი კაპიტალი, რომელიც რისკის ქვეშაა}}{\text{ფიუჩერსის პირობითი კაპიტალი}}.$$

2.

$$HR_{period} = \frac{\text{ძირითადი რისკის ვადა}}{\text{დეპოზიტის ვადა, რომელიც უდევს საფუძვლად ფიუჩერსს}}.$$

მაგალითად, თუ 1 წლიანი სესხი ჰეჯირდება 3 თვიანი ფიუჩერსით, მაშინ კოეფიციენტი 4-ის ტოლია.

3. $HR_{exbasis}$-ის გამოსათვლელად შევნიშნოთ შემდეგი. როგორც წესი ფიუჩერსული კონტრაქტი ეფუძნება LIBOR-ს და იდება ევროდოლარებზე, ევრომარკებზე და ევროსტერლინგებზე, ანუ ძირითად ვალუტაზე. ამიტომ შეიძლება წარმოიქმნას შემდეგი სიტუაცია:

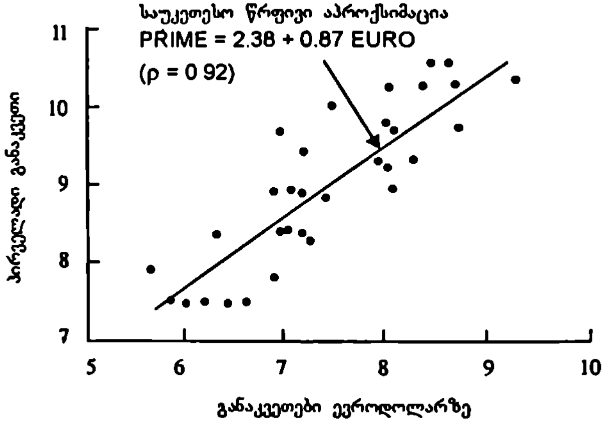
- სესხი დაფუძნებულია საბაზო საბანკო განაკვეთზე ან პრაიმ-განაკვეთზე.
- სესხი ან ინვესტიცია ეფუძნება მოკლევადიანი ვექსელების განაკვეთს.
- სესხი ან ინვესტიცია ემყარება ვალუტას, რომელზეც არ არის საპროცენტო ფიუჩერსი.

ასეთ შემთხვევებში სახეზეა საბაზისო რისკი და უნდა შეირჩეს შესაბამისი ფიუჩერსი.

მაგალითი 9.4. განვიხილოთ ამერიკული კომპანია, რომელმაც აიღო პრაიმ-განაკვეთზე დაფუძნებული სესხი. პრაიმ-განაკვეთი და ევროდოლარის განაკვეთი, ცხადია, ერთმანეთთან არის დაკავშირებული, მაგრამ სრულყოფილი ჰეჯის ჩასატარებლად ეს კავშირი უნდა დაზუსტდეს. ამისათვის ვიყენებთ რეგრესიული ანალიზის მეთოდს

$$\text{prime} = \alpha + \beta \cdot \text{EURO}.$$

კოეფიციენტი β და აგრეთვე, კორელაციის კოეფიციენტი ρ, განმსაზღვრელია ამ ანალიზში. გავიხსენოთ, რომ ρ ზომავს მოცემული წრფით დადგენილი თანადობის საიმედოობას:



ნახ. 9.17

ვთქვათ, რეგრესიულმა ანალიზმა მოგვცა

$$\text{prime} = 2.38 + 0.87 \cdot \text{EURO}.$$

ამასთან, $\rho = 0.92$ და, ე.ი., კავშირი ძალიან მჭიდროა. ამიტომ შეიძლება დიდი დასაჯერობით ვენდოთ მოცემულ განტოლებას. აქედან კი ცხადია, რომ

$$HR_{exbasis} = \beta = 0.87.$$

4. შევნიშნოთ, რომ ფიუჩერსულ კონტრაქტში ტიკის სიდიდე ყოველთვის ფიქსირებულია და, მაგალითად, უდრის 12.50 ევროსტერლინგზე (მიუხედავად იმისა, თუ რამდენი დღეა დარჩენილი კონტრაქტის ბოლომდე და გადაიხდება თუ არა იგი კონტრაქტის საწყის ან ბოლო მომენტში). ამ ანომალიის გამო ჰეჯის კოეფიციენტი ან ზედმეტად მაღალია ან ზედმეტად დაბალი. მისი კორექტირება ხდება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$HR_{settlement} = \frac{1}{t\left[\frac{\text{basis}}{\text{days}} + \left(1 - \frac{FP}{100}\right)\left(1 + \frac{T}{\text{days}}\right)\right]},$$

სადაც

t — ფიუჩერსის ნომინალური ვადაა (წლებში); basis — დღეების რაოდენობაა წელიწადში (360 — დოლარებზე, 365 — სტერლინგებზე); days — ფიუჩერსის მოქმედების პერიოდის დღეების რაოდენობაა (როგორც წესი

91 დღე); FP — მიმდინარე ფიუჩერსული ფასია; T — დღეების რაოდენობაა ფიუჩერსული პოზიციის დახურვიდან კონტრაქტის დახურვამდე. ეს პარამეტრი საჭიროა, თუ ხდება ჰეჯის შეწყვეტა დროზე ადრე. წინააღმდეგ შემთხვევაში $T = 0$.

5. ვთქვათ, გამოვთვალეთ ყველა ზემოთ აღნიშნული კოეფიციენტი და მივიღეთ, რომ ჰეჯისათვის საჭიროა N კონტრაქტი. თუ არ გავითვალისწინებთ მარჟის დეპოზიტზე დადებით მიღებულ საპროცენტო შემოსავალს, მაშინ ის თანხა, რომელსაც მივიღებთ კონტრაქტის ლიკვიდაციის დროს, ტოლი იქნება

$$VM^{-}_{total} = N(F_T - F_0) \cdot TV,$$

სადაც VM^{-}_{total} არის მისაღები ჯამური ვარიაციული მარჟა საპროცენტო შემოსავლის გათვალისწინების გარეშე, N — ფიუჩერსული კონტრაქტების რაოდენობაა, F_T და F_0 — საბოლოო და საწყისი ფიუჩერსული ფასები, TV — ტიკის სიდიდე.

თუ ჩავთვლით, რომ ფიუჩერსული ფასი წრფივად იცვლება F_0-დან F_T-მდე (ეს აპროქსიმაციაა), მაშინ t-ურ მომენტში გვექნება

$$VM^{-}_{t} = \frac{N(F_T - F_0) \cdot TV}{D_H},$$

სადაც D_H — დღეების რაოდენობაა ჰეჯში. თუ პროცენტული დარიცხვები მარჟაზე i-განაკვეთით წარმოებს, მაშინ ჰეჯის დასრულებამდე დარჩენილ დროში მივიღებთ $VM^{-}_{t} i[(D_H - t)/\text{basis}]$ თანხას. ამრიგად,

$$\begin{aligned} VM_{total} &= \sum_{t=1}^{D_H} [VM^{-}_{t} \cdot i[(D_H - t)/\text{basis}] = \\ &= VM^{-}_{total} \cdot \left[1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{(D_H - 1)}{\text{basis}}\right]. \end{aligned}$$

აქედან კი ცხადია, რომ

$$HR_{margin} = \frac{1}{1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{(D_H - 1)}{\text{basis}}}.$$

ჰეჯის კოეფიციენტის ასეთ კორექციას ჰქვია ჰეჯის მოჭრა. საგულისხმოა, რომ ფორმულა არ შეიცავს F_0-სა და F_T-ს (პრაქტიკაში სესხის და კრედიტის საპროცენტო განაკვეთები განსხვავდებიან, მაგრამ HR_{margin}-ის სიდიდეზე ეს თითქმის არ მოქმედებს).

მაგალითი 9.5. ვთქვათ, კომპანია Fund Management Company, Ltd (FMC) მართავს საინვესტიციო ფონდებს და თითოეული მათგანი დენომინირებულია ერთ-ერთ ძირითად ვალუტაში. 5 ოქტომბერს FMC იხილავს

თავისი სტერლინგის ფონდის სტრატეგიას. შემოსავალი ინვესტიციებისაგან უნდა შემოვიდეს 15 მარტს, £25 მლნ-ის ოდენობით და FMC-ს სურს შეიტანოს იგი მოკლევადიან დეპოზიტზე 6 თვით. ამის შესახებ მას აქვს შეთანხმება ბანკთან და იგი მიიღებს განაკვეთს, რომელიც 25 ბაზის პუნქტით ნაკლებია ბანკის საბაზისო განაკვეთზე, რომელიც დაფიქსირდება ორი სამუშაო დღით ადრე დეპოზიტის დადებამდე. მაგრამ კომპანია შეშფოთებულია, რადგან ორი კვირით ადრე ფუნტი სტერლინგი გამოიყვანეს ევროპის სავალუტო სისტემიდან და საბაზისო საბანკო განაკვეთები შემცირდა 10%-დან 9%-მდე. ფიუჩერსულმა ბაზარმაც უკვე დააკლო ნახევარი პუნქტი დეკემბრის და კიდევ ნახევარი პუნქტი მარტის კონტრაქტების კოტირებას. FMC-ს აზრით, რადგან არ მოქმედებს ევროსისტემის შეზღუდვები, განაკვეთები შემცირდება კიდევ უფრო ჩქარა, ვიდრე ამას ფიუჩერსული ბაზარი წინასწარმეტყველებს.

ამიტომ FMC-მ გადაწყვიტა ააგოს ჰეჯი LIFFE-ს ევროსტერლინგურ ფიუჩერსულ კონტრაქტებზე დაყრდნობით და დაიწყო ჰეჯის კოეფიციენტის დათვლა. მონაცემები შემდგია:

მიმდინარე თარიღი — ორშაბათი, 5 ოქტომბერი
მიმდინარე საბაზისო განაკვეთი — 9%
დეპოზიტის ფიქსაციის თარიღი — ოთხშაბათი, 11 მარტი
ფიუჩერსის მიმდინარე ფასი (მარტის) — 92.05
დეპოზიტის ჩარიცხვა — ორშაბათი, 15 მარტი
ჰეჯირების ვადა — 157 დღე
დეპოზიტის დახურვა — ოთხშაბათი, 15 სექტემბერი
დეპონირების ვადა — 184 დღე
დეპოზიტის სიდიდე — £25 მლნ
ფიუჩერსის დახურვის დღე — ოთხშაბათი, 17 მარტი
კონტრაქტის მოცულობა — £5000000
ფიუჩერსის ვადა — მარტი, 91 დღე.
რეგრესიის განტოლება: BASE = −0.05 + 0.9889 × EURO.

ცხრილი 9.11

ჰეჯის კოეფიციენტები ტოლია:

$HR_{principal} = 50.00$	$HR_{basis} = 101.100$
$HR_{period} = 2.0220$	$HR_{advanced} = 0.9509$
$HR_{exbasis} = 0.9889$	$HR_{margin} = 0.9832$
$HR_{settlement} = 0.9779$	$HR = 96.1360$

ამიტომ FMC ყიდულობს 96 ევროსტერლინგის მარტის კონტრაქტს, რისთვისაც მარჟის სახით შეაქვს £120.000 თანხის ფასიანი ქაღალდი. ფიუჩერსის ღირებულება — 7.695%, განსაზღვრავს საბაზისო განაკვეთს — 7.81%, და ამიტომ FMC-ს ინვესტიციის საპროცენტო განაკვეთია 7.56%.

რამოდენიმე კვირის შემდეგ საბაზისო საბანკო განაკვეთი შემცირდა 8%-მდე და მარტის ფიუჩერსის ფასი გახდა 94, რაც ნიშნავს მარტის საბაზისო განაკვეთის შემცირებას 6%-მდე. ამიტომ FMC-მ მიიღო £200000 ვარიაციული მარჟის სახით და ამ თანხის ინვესტირებით მიიღო დამატებით £4463.02, როგორც პროცენტული დარიცხვები მარჟაზე ფიუჩერსული კონტრაქტების ლიკვიდაციამდე. 11 მარტს FMC-მ გაყიდა თავისი ფიუჩერსები 94.10-ად, რამაც მოიტანა კიდევ £246000 (205 ტიკი, თითო £12.50-ად). საერთო ფიუჩერსული ჰეჯის შემოსავალი გახდა £250463.01. ეს თანხა £25 მლნ ძირითად კაპიტალთან ერთად ინვესტირებულ იქნა 15 მარტს 6 თვით 5.75%-ად, რაც 25 ბაზის პუნქტით უფრო ნაკლებია 6%-ზე. 6 თვის პროცენტულმა დანარიცხმა შეადგინა £731917.53, რამაც 15 სექტემბერს საბოლოოდ მოგვცა £25982380.55. საწყისი კაპიტალის ასეთი ზრდა 7.79% განაკვეთის ეკვივალენტურია. ჰეჯის ეფექტურობა ტოლია 103% -ის, ანუ 3%-ით მეტია სრულყოფილი ჰეჯის ეფექტურობაზე.

სტეკური და სტრიპული ჰეჯები. წინა პუნქტში ჩვენ განვიხილეთ საკითხი, თუ რამდენი კონტრაქტი უნდა შევიძინოთ ჰეჯის შესაქმნელად. ახლა დავსვათ კითხვა: რა კონტრაქტები გამოვიყენოთ ამ მიზნისათვის? ეს დამოკიდებულია ორ გარემოებაზე:

- რამდენად ლიკვიდურია კონკრეტული ფიუჩერსების ბაზარი.
- რა ხანგრძლივობისაა ძირითადი რისკი.

თუ ლიკვიდურია მხოლოდ მოკლევადიანი ფიუჩერსები, მაშინ ვიყენებთ მათ იმისდა მიუხედავად, თუ რამხელაა რისკის ვადა. თუ ლიკვიდურია სხვადასხვა ვადიანი ფიუჩერსი, მათ შორის ისეთებიც, რომელთა დახურვის ვადა რისკის ვადიანობაზე მეტია, მაშინ ვიყენებთ ან სტეკს ან სტრიპს.

სტეკ-ჰეჯირება იყენებს ფიუჩერსების პაკეტს ერთი და იგივე დაფარვის ვადით. უნდა გამოვიყენოთ ის კონტრაქტები, რომლებიც იფარება ძირითადი რისკის საპროცენტო განაკვეთის ფიქსაციის შემდეგ.

სტრიპ-ჰეჯირება იყენებს ფიუჩერსების მიმდევრობას, რომლებიც ფარავს ძირითად რისკს რაც შეიძლება მკვრივად. აქაც სტრიპის პირველი კონტრაქტი უნდა დაიხუროს ძირითადი რისკის საპროცენტო განაკვეთის ფიქსირების შემდეგ. შევნიშნოთ, რომ სტეკ-ჰეჯირება უფრო მარტივეია, მაგრამ რჩება საბაზისო რისკი. სტრიპ-ჰეჯირების დროს წარმოიქმნება სტრიპ-განაკვეთი, რომელიც მოიცემა ტოლობით

$$1 + ntf_{strip} = (1 + tf_1) \cdot \ldots \cdot (1 + tf_n)$$

ან

$$(1 + f_{strip})^{nt} = (1 + tf_1) \cdot \ldots \cdot (1 + tf_n),$$

სადაც f_i, $i = 1, \ldots, n$ i-ური ფიუჩერსული კონტრაქტით ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთია, n — კონტრაქტების რაოდენობა, t — ფიუჩერსის ნომინალური ვადა წლებში, f_{strip} — ფიუჩერსული სტრიპის განაკვეთი. იგი მჭიდროდაა დაკავშირებული სტრიპის მოქმედების ვადის განმავლობაში არსებულ ფორვარდულ განაკვეთთან.

საბაზისო რისკის სახეები და დაახლოების ბაზისის მართვა. საბაზისო რისკი წარმოიქმნება, როცა არის განსხვავება ძირითად რისკის ქცევასა და ჰეჯირების ინსტრუმენტის ქცევას შორის. ამ საკითხის უფრო დაწვრილებით შესასწავლად მოვახდინოთ საბაზისო რისკის კლასიფიკაცია მისი გამომწვევი მიზეზების მიხედვით:

რისკის ბაზისი. ის წარმოიქმნება მაშინ, როცა რისკს და ჰეჯს აქვთ სხვადასხვა ბაზისი, რომელიც განსაზღვრავს საპროცენტო განაკვეთს. მაგალითად, ინვესტორი, რომელიც აჰეჯირებს სახაზინო ვალდებულებების პორტფელს ფიუჩერსებით, შეხვდება რისკის ბაზისს იმის გამო, რომ მიუხედავად ვადების თანხვედრისა, სახაზინო ვალდებულებების შემოსავლიანობასა და ევროვალუტის განაკვეთის ფლუქტუაციები სხვადასხვაა. ჩვენ ვნახეთ როგორ უნდა გაითვალოს ჰეჯის სათანადო კოეფიციენტი ($HR_{cxbasisi} = \beta$), მაგრამ ამ რისკის სრულებით გაქრობა შეუძლებელია.

ვადის ბაზისი. ის წარმოიქმნება, როცა რისკისა და ჰეჯის ვადები სხვადასხვაა. თუ რისკის ვადა ჯერადია ჰეჯის ინსტრუმენტის ვადისა, იყენებენ სტრიპ-ჰეჯს. თუ რისკის ვადა ნაკლებია ჰეჯის ინსტრუმენტის ვადაზე მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ HR_{period} კოეფიციენტი, თუმცა ეს რისკი მაინც სრულად არ ელიმინირდება.

დაახლოების ბაზისი. მოკლევადიანი საპროცენტო დერივატივის ფასი, ისევე როგორც ფიუჩერსისა და FRA-ს ფასები, ჩვეულებრივ, განსხვავდება მიმდინარე განაკვეთისაგან ნაღდი ანგარიშსწორების ბაზარზე, რადგან დერივატივი ასახავს ფორვარდულ განაკვეთს, ხოლო ნაღდი ფულის ბაზარი სპოტ-განაკვეთს. თუ დერივატივი ფიუჩერსია, ამ განსხვავებას ჰქვია ბაზისი.

ბაზისი დამოკიდებულია შემოსავლიანობის მრუდზე. დროთა განმაელობაში ბაზისი მცირდება, და სრულად ქრება ფიუჩერსის აღსრულების მომენტში. თუ ჰეჯის გეგმით გათვალისწინებულია დერივატივის ბოლომდე შენარჩუნება, მაშინ, იმის გამო, რომ ბაზისი ქრება, სათანადო რისკი არ წარმოიქმნება. თუ ჰეჯი შეწყდება დერივატივის აღსრულებამდე, მაშინ არსებობს რისკი, რომ ბაზისი არ დაახლოვდება. ეს მოხდება მაშინ, თუ შემოსავლიანობის მრუდი შეიცვლის სახეს ჰეჯის დაწყების შემდეგ.

ამრიგად, სამი ტიპის საბაზისო რისკი დამოკიდებულია შემოსავლიანობის მრუდის სხვადასხვა გამოვლინებაზე. რისკის ბაზისი ჩნდება, თუ გვაქვს ორი სხვადასხვა შემოსავლიანობის მრუდი: ერთი ძირითადი რისკისათვის, მეორე — მაჰეჯირებელი ინსტრუმენტისთვის. დანარჩენი ორი

საბაზისო რისკი ეხება ერთი შემოსავლიანობის მრუდის ცვლილებებს, მაგრამ სხვადასხვა ვადებისათვის. ვადის ბაზისი წარმოიქმნება, როცა მრუდი იცვლის სახეს ფიუჩერსის ვადასა და რისკის ვადას შორის და ამიტომ მასზე გავლენა აქვს გრძელვადიან განაკვეთებს. ამ რისკის შესამცირებლად იყენებენ სტრიპ-ჰეჯს. დაახლოების ბაზისი წარმოიქმნება, როცა მოკლევადიანი შემოსავლიანობის მრუდი ფორმას იცვლის.

ვნახოთ, როგორ შევამციროთ დაახლოების ბაზისის რისკი სპრედების გამოყენებით.

მაგალითი 9.6. ვთქვათ, $t = 0$ მომენტი მოდის დეკემბრის შუა რიცხვებზე და მოკლევადიანი შემოსავლიანობის მრუდი განისაზღვრება მონაცემით (იხ. ცხრ. 9.11)

ვადა (თვეებში)	უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი
1	8.53%
2	8.76%
3	8.95%
4	9.16%
5	9.30%
6	9.41%
7	9.49%
8	9.57%
9	9.64%
10	9.70%
11	9.76%
12	9.81%

ცხრილი 9.12

ჩვენ ვიცით, თუ როგორ უნდა განვსაზღვროთ დისკონტირების მამრავლები და ფორვარდული განაკვეთები ნებისმიერი ვადისთვის მომავალში შემოსავლიანობის მრუდზე დაყრდნობით.

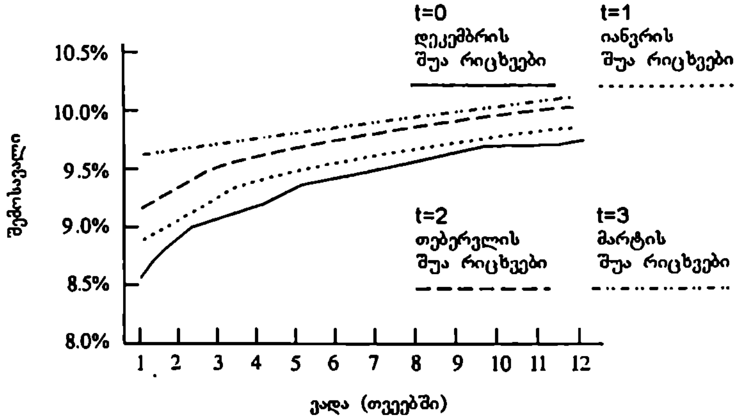
აქედან გამომდინარე, შეიძლება ავაგოთ როგორც საწყისი შემოსავლიანობის მრუდი, ასევე მისი პროგნოზი შემდეგი სამი თვის განმავლობაში (იხ. ნახ. 9.18).

მარტის ($t = 3$) პროგნოზს აქვს უკვე მდგრადი სახე, რის გამოც შემდგომი პროგნოზის გაკეთება არ არის საჭირო. კერძოდ, სამთვიანი განაკვეთი არის 9.65%. ამიტომ ყველა ფიუჩერსი, რომელიც დაიფარება მარტის შუაში ან უფრო გვიან, კოტირდება 90.35%-ად.

რადგან სამთვიანი განაკვეთები იწყებენ რა 8.55%-დან იზრდებიან 9.52% და 9.65%-მდე, ბაზისი +70 ბ.პ.-დან $t = 0$-სთვის გახდება +35 ბ.პ. $t = 1$-სთვის, +13 ბ.პ. $t = 2$-სთვის და ნული $t = 3$-სთვის.

ვთქვათ, კომპანიას სურს ისესხოს $30 მლნ 3 თვით, თებერვლის შუიდან, როცა $t = 2$-ს. საბაზისო ჰეჯის ასაგებად საჭიროა 30 მარტის ფიუჩერსის გაყიდვა 90.35-ად, იმ მიზნით, რომ ორი თვის შემდეგ, სესხის

დაწყების მომენტისათვის, ისინი ისევ შევიძინოთ. ამ ჰეჯის გამოყენებით სესხის მიღება შესაძლებელი იქნება საპროცენტო განაკვეთით, რომელიც ტოლი იქნება +13 ბ.პ.-თი შემცირებული ფიუჩერსული განაკვეთისა, ე.ი. 9.65%−0.13% = 9.52%. ეს კი არის 3-თვიანი განაკვეთი ორი თვის შემდეგ.



ნახ. 9.18

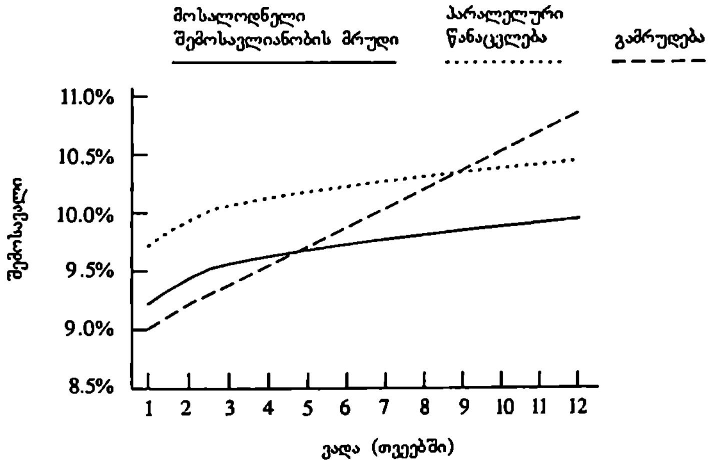
თუ განაკვეთები ისეთი იქნება, როგორსაც ველით, მაშინ კომპანია ისესხებს 9.52%-ად. ფიუჩერსებს იყიდის 9.35%-ად, ე.ი. საწყის ფასად, და, ამდენად, ისინი არ მოიტანენ არც მოგებას და არც წაგებას. მივიღებთ სრულყოფილ ჰეჯს, რადგან ჭეშმარიტი სესხის განაკვეთი დაემთხვა მოსალოდნელს.

ვნახოთ რა მოხდება, თუ შემოსავლიანობის მრუდი პარალელურად გადაადგილდა ან შეიცვალა ფორმა (იხ. ნახ. 9.19):

თუ ყველა განაკვეთი გაიზარდა ერთი და იგივე სიდიდით, მაგალითად, 50 ბაზის პუნქტით, მაშინ ყველა ფორვარდული განაკვეთიც აიწევს დაახლოებით 50 ბაზის პუნქტით და ყველა ფიუჩერსის ფასი შემცირდება ამავე სიდიდით. მაშინ კომპანია ისესხებდა 10.02%-ად, 9.52%-ის ნაცვლად. მაგრამ ფიუჩერსის ფასის შემცირება 89.86-მდე მოგვცემს შემოსავალს 49 ბაზის პუნქტს და სუფთა სესხის განაკვეთი იქნება 9.53%, რაც 1 ბაზის პუნქტით განსხვავდება დაგეგმილისაგან. ჰეჯის ეფექტურობა, იმისდა მიხედვით, თუ ეფექტურობის რომელ კოეფიციენტს გამოვიყენებთ, (9.2)-ს თუ (9.5)-ს, შეადგენს 99.50%-ს ან 98%-ს. ანუ ჰეჯი თითქმის სრულყოფილია.

თუ შემოსავლიანობის მრუდის პარალელური ჩანაცვლებისას საბაზისო ჰეჯი კარგად მუშაობს, მრუდის ფორმის შეცვლა ამის ეფექტურობას ამცირებს. ვთქვათ, მრუდი შეიცვალა ისე, როგორც ნახატზეა ნაჩვენები. სამთვიანი განაკვეთი დარჩა 9.52%, მაგრამ ყველა სხვა განაკვეთი შეიცვალა.

ამიტომ ფორვარდული განაკვეთები გაიზრდება და ფიუჩერსების ფასები შემცირდება. მაშინ გაყიდულ ფიუჩერსებს ხელმეორედ შევიძენთ 90 ბაზის პუნქტად და შემოსავლის სიდიდე მხოლოდ 20 ბაზის პუნქტი იქნება. შევნიშნოთ, რომ მოგების მაგივრად წავაგებთ, თუ მრუდი საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნდა.



ნახ. 9.19

ამრიგად, თუ მრუდი გაუთვალისწინებლად და არაპარალელურად შეიცვალა, მაშინ ჰეჯის ადრეული შეწყვეტა გამოიწვევს დაახლოების საბაზისო რისკის წარმოქმნას.

ამ პრობლემის გადაჭრას ემსახურება სპრედის სტრატეგია, რომელიც წარმოადგენს საბაზისო ჰეჯირების დამატებას. ამ სტრატეგიით ხდება შემოსავლიანობის მრუდის დახრის კომპენსირება სპრედის დახრის საშუალებით. ამისათვის საჭირო კონტრაქტების რაოდენობა მოიცემა ფორმულით

$$N_{spread} = N_{basis} \cdot \frac{t_{prior}}{t_{contract}},$$

სადაც N_{spread} — კონტრაქტების რაოდენობაა სპრედ-ჰეჯში; N_{basis} — კონტრაქტების რაოდენობაა საბაზისო ჰეჯში; t_{prior} — დროა ჰეჯის ლიკვიდირებიდან ფიუჩერსის დაფარვამდე; $t_{contract}$ — დროა, რომელსაც ფარავს ფიუჩერსული კონტრაქტი ($= 91$ დღე).

შევნიშნოთ, რომ N_{spread} და N_{basis} ერთი და იგივე ნიშნისანი არიან, ე.ი. თუ ფიუჩერსებს გავყიდით, მაშინ უნდა გავყიდოთ სპრედებიც და პირიქით.

მაგალითში, რადგან საბაზისო ჰეჯი წყდება $t = 2$ მომენტში, ფიუჩერსის აღსრულებამდე ერთი თვით ადრე, $N_{spread} = -30 \cdot \frac{1}{3} = -10$ კონტრაქტს. მაშინ სრულ ჰეჯს აქვს სახე:

- გაიყიდოს 30 მარტის ფიუჩერსი 90.35-ად.
- გაიყიდოს 10 მარტ-ივნისის სპრედი (ანუ გაიყიდოს 10 მარტის და შეძენილ იქნას 10 ივნისის კონტრაქტი) ნომინალად.

შემოსავლიანობის მრუდის გადაღუნვის შემდეგ მარტის კონტრაქტის ფასი შემცირდება 90.15-მდე, ივნისის 89.58-მდე. ამიტომ სტრატეგია მოგვცემს

- 20 ბაზის პუნქტის შემოსავალს საბაზისო ჰეჯიდან (90.35–90.15).
- 19 ბაზის პუნქტის გასავალს სპრედ-პოზიციიდან $\frac{1}{3}[(89.58 - 90.15) - -(0)]$.

ე.ი., საბოლოოდ, 1 ბ.პ. სუფთა შემოსავალს, ანუ სესხის მიღების საპროცენტო განაკვეთი იქნება 9.51%, რაც 1 ბ.პ.-ით განსხვავდება 9.52%-სგან.

ამრიგად, სპრედ-ჰეჯით უზრუნველყოფილია თითქმის 100%-იანი ჰეჯირება, მიუხედავად შემოსავლიანობის მრუდის გაუთვალისწინებელი გადაღუნვისა.

რასაკვირველია, სპრედ-ჰეჯი არ იძლევა ყოველთვის ასეთ კარგ შედეგს. მაგრამ, თუ მრუდი ხისტად ბრუნავს სამთვიანი განაკვეთის წერტილის ირგვლივ, მაშინ სპრედ-ჰეჯი თითქმის სრულყოფილია.

საბოლოოდ, როდესაც გვაქვს შემოსავლიანობის მრუდის პარალელური გადატანა ან ბრუნვა, ან მათი კომბინაცია, სპრედ-ჰეჯი თითქმის სრულყოფილ შედეგს იძლევა. სხვა შემთხვევაში შეიძლება არ მივიღოთ 100%-იანი ეფექტურობა.

ინტერპოლირებული ჰეჯი. გავიხსენოთ კიდევ ერთხელ ბოლო მაგალითი. ჰეჯირდებოდა სამთვიანი რისკი, რომელიც იწყებოდა თებერვლის შუა რიცხვებში. ჰეჯის კონსტრუქცია შემდეგი იყო:

- საბაზისო ჰეჯი, რომელიც მდგომარეობდა 30 მარტის ფიუჩერსის გაყიდვაში.
- სპრედ-ჰეჯი, რომელიც მდგომარეობდა 10 მარტ-ივნისის სპრედის გაყიდვაში.

ჰეჯი რომ დეკემბრის ბოლოს დაწყებულიყო, როცა კონტრაქტები იხურება, მაშინ სხვა შესაძლებლობა არც იქნებოდა. მაგრამ, ჰეჯის უფრო ადრე დაწყებისას, შეგვეძლია ე.წ. ინტერპოლირებული ჰეჯის გამოყენება.

სამთვიანი რისკი, რომელიც იწყება თებერვლის შუა რიცხვებში ერთი მესამედით დაიფარება დეკემბრის ფიუჩერსებით და ორი მესამედით მარტის ფიუჩერსებით. ამიტომ შეიძლება ავაგოთ ინტერპოლირებული ჰეჯი დეკემბრისა და მარტის 10-10 კონტრაქტის გაყიდვით.

მოკლევადიანი ფორვარდული განაკვეთების ჰეჯირების განხილული მეთოდები შეიძლება ასე შევაჯამოთ: გამოვიყენოთ ბაზისური ჰეჯირება პერიოდის სიგრძისა და რისკის მოცულობის შესაბამისად.

იმ დროს, როცა ვიყენებთ ფიუჩერსებს და სტანდარტულ FRA-ს, შევიტანოთ დამატებითი კორექტივები:

- შევარჩიოთ ჰეჯის კოეფიციენტი, რათა გავითვალისწინოთ რისკის ბაზისი, ანგარიშსწორების თანხა და მარჟის ნაკადი.

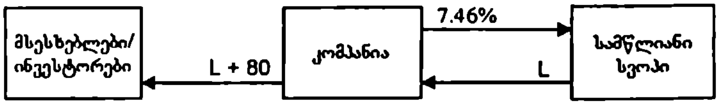
- გამოვიყენოთ სტრიპ-ჰეჯირება რისკის დიდი პერიოდებისთვის.

- გამოვიყენოთ სტრიპ-ჰეჯირება და ინტერპოლირებული ჰეჯი, თუ რისკის ვადა და ფიუჩერსების ვადები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

რაც უფრო დაზუსტდება ჰეჯი მით უფრო ახლოსაა იგი სრულყოფასთან. თუ როდის უნდა შეწყდეს სრულყოფის პროცესი, კლიენტმა თვითონ უნდა გადაწყვიტოს, ჰეჯის დაგეგმვისა და რეალიზაციის ხარჯებიდან გამომდინარე.

სვოპების გამოყენება. ჩვენ განვიხილეთ მოკლევადიან ფორვარდულ განაკვეთთან დაკავშირებული რისკების ჰეჯირება. თუ საქმე გვაქვს მრავალპერიოდიან რისკთან, მაშინ ჰეჯირების საუკეთესო საშუალებას იძლევა სვოპი. სვოპი OTC პროდუქტია, ამიტომ შესაძლებელია მისი ზუსტად მორგება კლიენტის მოთხოვნებზე. სვოპი ეხება მრავალ პერიოდს და ამიტომ უფრო მომგებიანია ვიდრე FRA. ბევრ შემთხვევაში გამოიყენება სტანდარტული საპროცენტო სვოპები, რომელთა შეძენა ადვილად შეიძლება სვოპების მაღალლიკვიდურ ბაზარზე. გავყოთ სვოპები ორ ნაწილად: აქტივ-სვოპები — ე.ი. სვოპები, რომელიც ინიცირებულია ინვესტორის მიერ და პასივ-სვოპები — სვოპები, ინიცირებული მსესხებლის მიერ.

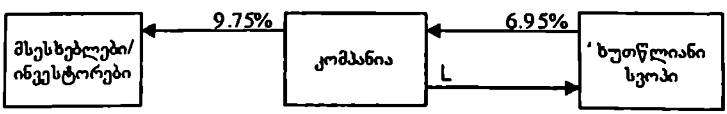
პასივ-სვოპები: მცურავიდან ფიქსირებულისკენ. ვთქვათ, კომპანიამ აიღო 3-წლიანი სესხი მცურავი პროცენტით, რომელიც 80 ბაზის პუნქტით აღემატება 6-თვიან LIBOR-ს. კომპანიის მენეჯერს ეშინია მცურავი პროცენტის ზრდისა და ამიტომ მას სურს დააფიქსიროს განაკვეთი მოცემულ დონეზე. ვთქვათ, 3-წლიანი 6-თვიანი სვოპის კოტირებაა 7.40-7.46% LIBOR-ის წინააღმდეგ. მაშინ სვოპში შესვლისას, როგორც ფიქსირებული განაკვეთის გადამხდელი, კომპანია აფიქსირებს მუდმივ განაკვეთს 8.26%-ის დონეზე.



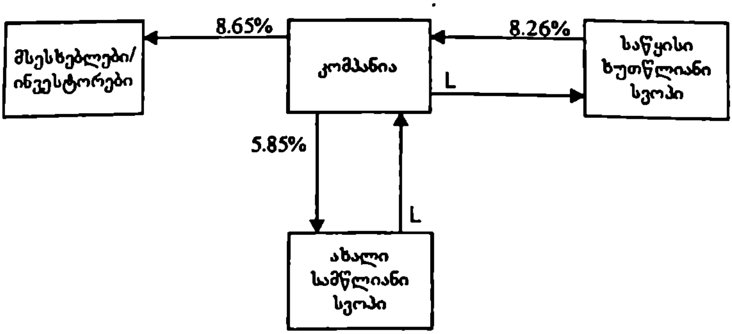
ნახ. 9.20

ფიქსირებულიდან მცურავისკენ. ეს შემთხვევა გაცილებით უფრო იშვიათია, მაგრამ სვოპით ამის მიღწევაც შეიძლება.

მაგალითი 9.7. განვიხილოთ კომპანია, რომელმაც 2 წლის წინ გამოუშვა 7-წლიანი ობლიგაციები 9.75%-იანი ფიქსირებული საკუპონო განაკვეთით. კომპანია არ ელოდა განაკვეთის შემცირებას, მაგრამ მოხდა ისე, რომ განაკვეთი შემცირდა. ამასთან, შემოსავლიანობის მრუდი ახლა მკვეთრად ზრდადია: 6-თვიანი LIBOR-ი 4.5%-ია, 12-თვიანი — 5%-ია, ორწლიანი სვოპ-განაკვეთი 6%-ია, ხუთწლიანი — 7%. კომპანიის მენეჯერს არ სჯერა, რომ ეს პროგნოზი გამართლდება და მოხდება განაკვეთის ასეთი სწრაფი ზრდა. ამასთან ერთად მას სურს, რომ ისარგებლოს განაკვეთის რეალურად არსებული დაბალი კურსით. ამას უზრუნველყოფს 5 წლიანი/ერთწლიანი სვოპი ფიქსირებული განაკვეთით 6.55%, რაც მისცემს კომპანიას პასივების ფიქსირებული განაკვეთის გადაყვანის საშუალებას მცურავი LIBOR+ 280 ბ.პ. განაკვეთად (იხ. ნახ. 9.21). თუ 12-თვიანი LIBOR უდრის 5%-ს, მაშინ სესხის ფასი 9.75%-დან დაიწევს 7.80%-მდე, რაც საგრძნობ ეკონომიას წარმოადგენს.



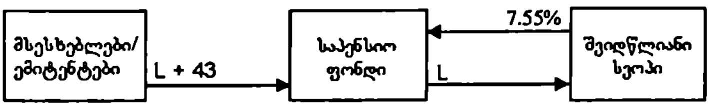
ნახ. 9.21



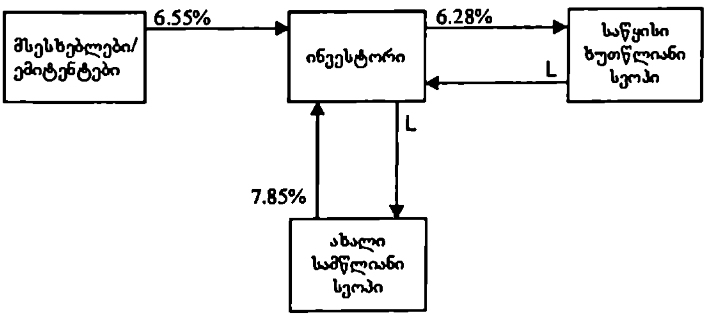
ნახ. 9.22

ანალოგიურად შეიძლება აგებულ იქნას სვოპების მიმდევრობა, რომელიც გვაგონებს დინამიურ ჰეჯს: სიტუაციის შეცვლის შემდეგ კომპანია უმატებს რა ახალ სვოპს, ცვლის თავის ვალდებულებებს. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ შემდეგი დიაგრამა: ფიქსირებული ↔ მცურავი ↔ ფიქსირებული (იხ. ნახ. 9.22).

აქტივ-სვოპები. პასივ-სვოპების ანალოგიურად შესაძლოა აქტივ-სვოპების აგება, რომლებიც გადაიყვანენ ვალდებულებებს: მცურავს — ფიქსირებულში, ფიქსირებულს — მცურავში. მოვიყვანოთ მხოლოდ ბლოკ-სქემები. ნახ. 9.23-ზე ნაჩვენებია სიტუაცია, როდესაც ინვესტორი (საპენსიო ფონდი) ცვლის შემოსავლებს მცურავი საპროცენტო განაკვეთით ფიქსირებულ შემოსავალზე. ნახ. 9.24-ზე ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება ფიქსირებული განაკვეთიდან გადახვიდე მცურავზე და შემდეგ ისევ ფიქსირებულზე.



ნახ. 9.23



ნახ. 9.24

სვოპის შეწყვეტა. სვოპი არის გრძელვადიანი საპროცენტო განაკვეთის ჰეჯირების ინსტრუმენტი. მაგრამ, ხშირად, არ არის აუცილებელი ასეთი გრძელვადიანი დაცვა, რადგან კომპანიამ შეიძლება შეიცვალოს აზრი განაკვეთების ძრაობის შესახებ. ამიტომ დგება სვოპის შეწყვეტის საკითხი.

არსებობს ამის გაკეთების სულ ცოტა სამი გზა.

პირველი, ყველაზე მარტივი გზაა შევიდეთ მეორე სვოპში, რომელიც უარყოფს პირველს. ამით პირველ სვოპს საერთოდ ხელს არ ვახლებთ, მაგრამ რჩება ხოლმე ფულის ნარჩენი ნაკადები, რადგან ძნელია ისეთი სვოპის მოძებნა, რომელიც ზუსტად უარყოფს პირველს. ვთქვათ კომპანია შევიდა 7-წლიან სვოპში, ყოველწლიური ფიქსირებული გადასახადით 7.46%,

LIBOR-ის წინააღმდეგ. ორი წლის შემდეგ მან მოინდომა სვოპის შეწყვეტა. ამიტომ კომპანია შევიდა ახალ 5-წლიან სვოპში, რომლის თანახმადაც LIBOR-ს ცვლის ფიქსირებულ გადასახადზე. თუ ახალი სვოპი დაიწყო პირველი სვოპის ფიქსაციიდან ზუსტად ორი წლის შემდეგ, მაშინ მცურავი ნაკადები გააბათილებს ერთმანეთს. ფიქსირებული ნაკადები კი გააბათილებს ერთმანეთს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ორივე სვოპის განაკვეთი ერთი და იგივეა, რისი ალბათობაც მცირეა. თუ ახალი სვოპის განაკვეთია 6.75%, მაშინ კომპანია იძულებული იქნება გადაიხადოს 71 ბაზის პუნქტი 5 წლის განმავლობაში.

თუ განსხვავდება ფიქსაციის თარიღებიც, მაშინ სვოპების განბალანსება კიდევ უფრო დიდი იქნება და საჭირო გახდება არასტანდარტული სვოპის აგება, რომლის კოტირება, როგორც წესი, სტანდარტული საბაზრო სვოპის კოტირებაზე მეტია.

მეორე ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ მივმართოთ ბანკს, რომელიც არის კომპანიის პარტნიორი სვოპში და მოვთხოვოთ კოტირება სვოპის შეწყვეტაზე. კოტირების დადგენის მექანიზმი ადვილად ჩანს ცხრ. 9.13-დან.

წელი	სვოპის განაკვეთი	მადისკონტირებელი ფუნქცია	ფიქსირებული საწყისი გადასახადი	ფიქსირებული მიმდინარე გადასახადი	სხვაობა	სხვაობის მიმდინარე ფასი
1	5.00%	0.952381	746000	675000	71000	67619.05
2	5.50%	0.898217	746000	675000	71000	63773.41
3	6.00%	0.838645	746000	675000	71000	59543.82
4	6.38%	0.778906	746000	675000	71000	55302.29
5	6.75%	0.717471	746000	675000	71000	50940.42
სუფთა მიმდინარე ფასი						297178.99

ცხრილი 9.13

სწორედ სუფთა მიმდინარე ღირებულებაა შეწყვეტის საფასური.

მესამე ხერხი მდგომარეობს სვოპის სხვაზე გადაფორმებაში. თუ სვოპის ფასი ამ მომენტში ნულია, მაშინ გადაფორმება ავტომატურად ხდება, თუ არა — უნდა გადახდილ იქნას საკომისიო თანხა. შევნიშნოთ, რომ აქ წარმოიქმნება საკრედიტო რისკი.

ობლიგაციებისა და სვოპების პორტფელის ჰეჯირება. გადავიდეთ საპროცენტო რისკის მესამე ფორმის — გრძელვადიანი სპოტ-შემოსავლიანობის ჰეჯირების საკითხის განხილვაზე.

ასეთი რისკი წარმოიქმნება, როცა ფინანსურ ინსტიტუტს, მაგალითად, ბანკს გააჩნია ობლიგაციების და სვოპების პორტფელი.

ჰეჯირება ასეთ შემთხვევაში ხდება ინტეგრალურად, ე.ი. ყველა რისკი გაერთიანდება და შემდეგ ერთობლივად ჰეჯირდება, რაც გაცილებით უფრო იაფი და ეფექტურია. ამის განხორციელება ხდება ეტაპობრივად. პორტფელში გაერთიანებული ყოველი ინსტრუმენტისათვის:

- დგინდება შემოსავლიანობის მრუდის ის მახასიათებლები, რომლებიც წარმოქმნიან რისკს.
- აფასებენ თითოეული ამ მახასიათებლის შესაბამის საბაზისო მახასიათებლის მიმდინარე ღირებულებას (ს.მ.მ.ღ.).

ს.მ.მ.ღ. გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება მოცემული ინსტრუმენტის ფასი, როცა შემოსავლიანობის მრუდის მახასიათებელი იცვლება 1 ბაზის პუნქტით.

თუ ყველა ს.მ.მ.ღ. ცნობილია, მათ აერთიანებენ და მიღებული რისკი ერთობლივად ჰეჯირდება. ის მახასიათებლები, რომლებიც შეესაბამებიან ვადას 2 წლამდე, ჰეჯირდება FRA-თი და ფიუჩერსებით, 10 წლამდე — სვოპებით, 10 წლის შემდეგ — ობლიგაციებით და მათზე ფიუჩერსებით.

განვიხილოთ დაწვრილებით ასეთი რისკის ჰეჯირების კერძო შემთხვევა — ობლიგაციების პორტფელის ჰეჯირება ფიუჩერსებით ობლიგაციებზე.

ჩვენ ვიცით, რომ ასეთი ფიუჩერსების ფასები „მიყვება" იმ ობლიგაციების ფასებს, რომლებიც ყველაზე იაფი არიან მიწოდებისათვის. უფრო მეტიც, ასეთი ფიუჩერსები იყიდება ღირებულებით, რომელიც ტოლია დასაჰეჯირებელი ობლიგაციების ღირებულების ნამრავლისა გადამყვან მამრავლზე. ამიტომ $10 მლნ ღირებულების ობლიგაციები, გადამყვანი მამრავლით 1.1298 წარმატებით ჰეჯირდება 113 ფიუჩერსული კონტრაქტით.

მაგრამ ინვესტორებს გააჩნიათ გაცილებით უფრო დივერსიფიცირებული პორტფელები და ამიტომ მათი ჰეჯირება ფიუჩერსებით იყოფა ორ ეტაპად:

- განისაზღვრება დასაჰეჯირებელი ობლიგაციების ვოლატილობა მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის ვოლატილობის მიმართ.
- განისაზღვრება მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის ვოლატილობა ობლიგაციაზე ფიუჩერსის ვოლატილობის მიმართ.

იმ ფიუჩერსების რაოდენობა, რომელიც საჭიროა სამიზნე ობლიგაციის დასაჰეჯირებლად ტოლია

$$N = \frac{NOH_{\text{ს.ო.}}}{NOM_F} \times RV_{\text{ს.ო.}\to\text{ი.ო.}} \times RV_{\text{ი.ო.}\to F}, \qquad (9.6)$$

სადაც

$NOH_{\text{ს.ო.}}$ — სამიზნე ობლიგაციის ნომინალური ღირებულებაა,

NOM_F — ფიუჩერსის ნომინალური ღირებულებაა;

$RV_{\text{ს.ო.}\to\text{ი.ო.}}$ — სამიზნე ობლიგაციის ვოლატილობა მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის მიმართ;

$RV_{\text{ი.ო.}\to F}$ — მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის ვოლატილობაა ფიუჩერსის მიმართ.

ეს ფორმულა საკმაოდ მარტივ ლოგიკაზეა აგებული. სამიზნე ობლიგაციის ვოლატილობის შეფასება მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის მიმართ, დამოკიდებულია მათ მსგავსებაზე. თუ ორივე სახელმწიფოა, მაშინ მათი შემოსავლიანობა ერთნაირად იცვლება. ასეთ შემთხვევაში, მათი ვოლატილობების ფარდობა შეიძლება გამოითვალონ დურაციებზე დაყრდნობით.თუ ისინი სხვადასხვა ტიპის არიან, მაშინ საჭირო ფარდობა გამოითვლება რეგრესიული ანალიზის გამოყენებით.

ვთქვათ, სამიზნე და მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაცია ფასდება ერთი და იგივე შემოსავლიანობის მრუდის მიხედვით და ვთქვათ, ეს მრუდი განიცდის პარალელურ (და არა მბრუნავ) ჩანაცვლებებს. გამოვთვალოთ ამ ობლიგაციების მაკოლეის დურაცია. როგორც კარგადაა ცნობილი (იხ. თავი 1), ის მოიცემა ფორმულით

$$\Delta P = -MD \times P \times \Delta i, \tag{9.7}$$

სადაც

ΔP — ობლიგაციის ფასის ნაზრდია;

MD — მაკოლეის დურაციაა;

P — ობლიგაციის ღირებულებაა;

Δi — საპროცენტო განაკვეთის ნაზრდია.

მაშინ ფარდობითი ვოლატილობა მოიცემა ფორმულით

$$RV_{\text{ს.ო.}\to\text{ი.ო.}} = \frac{\Delta P_{\text{ს.ო.}} \cdot MD_{\text{ს.ო.}} P_{\text{ს.ო.}}}{\Delta P_{\text{ი.ო.}} \cdot MD_{\text{ი.ო.}} P_{\text{ი.ო.}}}, \tag{9.8}$$

სადაც აღნიშვნები გასაგებ შინაარსს ატარებენ, მაგალითად, ი.ო. — იაფი ობლიგაციაა, ს.ო. — სამიზნე ობლიგაცია.

თუ სამიზნე ობლიგაცია და მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაცია ფასდება სხვადასხვა შემოსავლიანობის მრუდის მიხედვით, მაშინ სჯობს დავეყრდნოთ უახლესი მონაცემების რეგრესიულ ანალიზს.

ამით პირველი ეტაპი დასრულდება. მეორე ეტაპი შედარებით იოლი განსახორციელებელია. ჩვენ ვიცით, რომ (იხ. თავი 3)

$$\Delta FP \approx \frac{1}{CF} \Delta P.$$

ამიტომ გასაგებია, რომ

$$RV_{\text{ი.ო.}\to F} = \frac{\Delta P_{\text{ი.ო.}}}{\Delta FP} \approx CF_{\text{ი.ო.}}. \tag{9.9}$$

ამ ფორმულაში $CF_{\text{ი.ო.}}$ არის მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციის გადამყვანი მამრავლი.

ახლა ჩვენ მზად ვართ ჰეჯის ჩასატარებლად. ვაჩვენოთ ეს მაგალითზე.

მაგალითი 9.8. განვიხილოთ ცხრ. 9.14-ში მოყვანილი მონაცემები

	5 ოქტომბერი, 1992 წელი			22 თებერვალი, 1993 წელი				
ობლიგაცია	ნომინალური თანხა ($ მლნ)	ფასი	შემოსავალი %	ფასი	შემოსავალი %	დურაცია	ფარდობითი ვოლატილობა	კონტრაქტების რაოდენობა
$6\frac{3}{8}$ ივლ. 99	12	103-12	5.76	103-29	5.63	5.40	0.4382	59.4
$13\frac{1}{8}$ მაისი 01	16	146-03	6.13	145-16	6.01	5.61	0.6435	116.3
$6\frac{3}{8}$ აგვ. 02	22	101-02	6.22	101-21	6.13	7.20	0.5709	141.9
$9\frac{3}{8}$ თებერვ. 06	8	122-26	6.74	125-08	6.46	8.08	0.7789	70.4
$11\frac{1}{4}$ თებერვ. 15	24	143-07	7.30	147-26	6.96	10.03	1.1274	305.7
$7\frac{1}{4}$ აგვ. 22	18	98-28	7.34	102-25	7.02	11.94	0.9271	188.5
სულ	100							882

ცხრილი 9.14

მოყვანილი სახაზინო ობლიგაციების ნომინალური ღირებულებაა $100 მლნ, ხოლო საბაზრო ფასი ოქტომბერში იყო $120 მლნ.

ამ ობლიგაციებს შორის არცერთი არ იყო ყველაზე იაფი მიწოდებისათვის. მიწოდებისათვის ყველაზე იაფი ობლიგაციის მონაცემები შემდეგია: 9.25%-იანი ვალდებულება 2016 წლის თებერვლამდე; 5 ოქტომბერს ის ღირდა 121–00, შემოსავლიანობა იყო 7.35%, გადამყვანი მამრავლი 1.1298 და $MD = 10.52$ წელიწადი.

ვთქვათ, მენეჯერს სურს შეინარჩუნოს პორტფელის არსებული შემოსავლიანობა.

ცხრ. 9.14-ში მოყვანილია (9.6), (9.8) და (9.9) ფორმულებით დათვლილი კოეფიციენტები. მაგალითად, ფიუჩერსული კონტრაქტების რაოდენობისათვის გვაქვს

$$\frac{12000000}{100000} \times \frac{5.40 \times 103.375}{10.52 \times 121.00} \times 1.1298 = 59.4.$$

შევნიშნოთ, რომ ყველა შემთხვევაში გამოიყენება არა სამიზნე ობლიგაციის გადამყვანი მამრავლი, არამედ მისაწოდებლად ყველაზე იაფი ობლიგაციისა. ფიუჩერსების საერთო რაოდენობა ტოლი გამოვიდა 882-ის, რაც გაცილებით ნაკლებია საჭირო რაოდენობის მიამიტურ შეფასებაზე — 1000 ცალი.

ამიტომ პორტფელის მენეჯერმა გაყიდა 882 ფიუჩერსული კონტრაქტი და ამისთვის ამოირჩია 1993 წლის მარტის ფიუჩერსი, რომლის ფასი იყო 104–13.

თებერვლის ბოლოს, სანამ დაიწყებოდა მარტის კონტრაქტების ლიკვიდურობის შემცირება, მენეჯერმა მოხსნა ჰეჯი. ფიუჩერსები 110–10-ად გაიყიდა, რამაც გამოიწვია ზარალი

$$882 \text{ კონტრაქტი} \times 189 \text{ ტიკი} \times \$31.25 = \$5209312.50.$$

შემოსავლიანობის საერთო დაცემამ პორტფელის ფასი $120008750.00-დან $122108750.00-მდე გაზარდა, რამაც მოიტანა $2100000 შემოსავალი. ამასთან, საკუპონო შემოსავალი დღის განმავლობაში იყო $3445087.19. თუ უგულებელვყოფთ პროცენტებს კუპონებზე, (რაც დასაშვებია, რადგან შემოსავლის 70% შემოვიდა ჰეჯის მოხსნამდე ერთი კვირით ადრე), მაშინ სუფთა მოგება იქნება $335774.69. ჰეჯის ეფექტურობამ (9.5)-ის თანახმად შეადგინა 94%.

კიდევ უფრო დავაზუსტოთ აღწერილი ჰეჯის ეფექტურობა. ამისათვის მიღებული შედეგი უნდა შევადაროთ შემდეგ სტრატეგიას: მოვახდინოთ პორტფელის ლიკვიდაცია და შემდეგ დავაინვესტიროთ მიღებული თანხა საპროცენტო შემოსავლის მიღების მიზნით. მაშინ, თუ მოკლევადიანი საპროცენტო განაკვეთი 2.75%-ის ტოლია, პორტფელის ფასი $120008750.00-დან $121292176.91-მდე გაიზრდება. ამის გათვალისწინებით ჰეჯის ეფექტურობა შემცირდება 78%-მდე.

ჰეჯის არასრულყოფილება გამოწვეული იყო შემდეგი მიზეზებით:

- ფიუჩერსის ფასები არ მისდევდა მიწოდებისათვის ყველაზე იაფი ობლიგაციის ფასებს.

- შემოსავლიანობის მრუდის წანაცვლება არ იყო პარალელური: ხუთწლიანი ობლიგაციის შემოსავლიანობა შემცირდა ≈ 12 ბაზის პუნქტით, ხოლო 30 წლიანის ≈ 33 ბაზის პუნქტით.

- ფიუჩერსის ბაზისად არჩეული ობლიგაცია არ იყო ოპტიმალური პორტფელის ყველა ობლიგაციისათვის. ერთ-ერთი მოკლევადიანი ობლიგაციის ფასი, რომელსაც მაღალი კუპონი ჰქონდა, დაეცა, მიუხედავად ობლიგაციების შემოსავლიანობის შემცირებისა.

ამრიგად, წარმოიშვა საბაზისო რისკი. მის ჩასაქრობად საჭირო იქნებოდა უფრო რთული ჰეჯის აგება: უნდა გამოგვეყენებინა, მაგალითად, მოკლევადიანი ფიუჩერსები, სვოპებისა და ფიუჩერსების კომბინაციები და ა.შ.

9.5 საპროცენტო რისკის მართვა ოფციონებით და მათზე დაფუძნებული ინსტრუმენტებით

როგორი ტიპის საპროცენტო რისკიც არ უნდა განვიხილოთ, ინსტრუმენტები, რომლებიც წინა პარაგრაფში იყო აღწერილი — FRA, ფიუჩერსი, სვოპი — ისე იყო აგებული, რომ სრულად ან თითქმის სრულად გამორიცხავდნენ რისკს.

მაგრამ, როგორც ჩვენ ვიცით, რისკი არსებობს როგორც არასასურველი, ისე სასურველიც. ამიტომ თუ ჩვენ გვინდა, რომ გამოვრიცხოთ არასასურველი რისკი, ხოლო სასურველი რისკიდან მივიღოთ მოგება, საჭიროა ოფციონური სტრატეგიების გამოყენება. ამასთან შევნიშნოთ, რომ მრავალი ინსტრუმენტი თავდაპირველად აგებული იყო სავალუტო ბაზრის მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად და შემდეგ, გარკვეული მოდიფიკაციით, გადმოტანილ იქნა საკრედიტო ბაზარზე.

საპროცენტო განაკვეთის გარანტია ჰქვია ოფციონს FRA-ზე. ის საშუალებას იძლევა გავაკეთოთ არჩევანი:

- ფიქსირებულ კონკრეტულ საპროცენტო განაკვეთსა

და

- მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთს შორის.

მსესხებელი, რომელსაც ნაყიდი აქვს კოლ ოფციონი FRA-ზე, გარკვეული აღსრულების ფასით — ფიქსირებული კონკრეტული საპროცენტო განაკვეთით, გამოიყენებს FRA-ს სესხის განაკვეთის სიდიდის შემოსასაზღვრავად ოფციონის აღსრულების შემთხვევაში. თუ ოფციონი გაუფასურდა, მაშინ მას შეუძლია მიიღოს სესხი საბაზრო ფასით, რომელიც ასეთ შემთხვევაში ოფციონით გარანტირებულ განაკვეთზე უფრო დაბალი იქნება. ანალოგიურად, ინვესტორს შეუძლია მიიღოს გარანტირებული შემოსავალი FRA-ზე პუტ ოფციონის ყიდვით.

კეპებისა და ფლორების გამოყენება. კეპებს და ფლორებს ჩვენ შევხვდით წინა თავებში. მათი ფასის დათვლის მეთოდებიც იქვე იყო აღწერილი.

ცხრ. 9.15-ში მოყვანილ მონაცემებზე დაყრდნობით ცხრ. 9.16-ში გამოთვლილია ამ ინსტრუმენტების ფასები. კერძოდ, მოცემულია კეპებისა და ფლორების ფასები, დაფუძნებული 6-თვიან LIBOR-ზე, ვადებით 2-დან 7 წლამდე. ყოველი ფასი შეიძლება გადავიხადოთ ავანსად ან განვადებით.

მაგალითად, თუ 5-წლიანი კეპის, 5%-იანი შეთანხმების განაკვეთით, ფასი გადავიხადეთ ავანსად, პრემია ტოლი იქნება 1.91%-ის სესხის მოცულობიდან. განვადებით შეიძლება გადავიხადოთ 0.43% წელიწადში, 0.215%-ის გადახდით ყოველ ნახევარ წელიწადში.

ვადა (წლებში)	სვოპის განაკვეთი (%)	უკუპონო ობლიგაციის განაკვეთი (%)	ფორვარდული განაკვეთი (%)	ვოლატილობა (%)
0.5	3.25	3.25		
1.0	3.50	3.53	3.75	15
1.5	3.69	3.73	4.07	14
2.0	3.88	3.92	4.46	14
2.5	4.02	4.08	4.64	13
3.0	4.17	4.23	4.95	13
3.5	4.31	4.39	5.26	12
4.0	4.46	4.55	5.59	12
4.5	4.60	4.71	5.91	12
5.0	4.75	4.87	6.25	12

ცხრილი 9.15

		კეპის აღსრულების განაკვეთები				ფლორის აღსრულების განაკვეთები		
		4%	5%	6%	7%	4%	4.5%	5%
პრემიის გადახდა ავანსად	2 წელი	43	7	–	–	66	137	222
	3 წელი	121	33	7	–	74	158	266
	5 წელი	413	191	80	31	79	174	303
	7 წელი	892	535	310	175	80	178	314
პრემიის გადახდა განვადებით	2 წელი	22	3	–	–	35	72	116
	3 წელი	43	12	2	–	26	56	95
	5 წელი	93	43	18	7	18	39	68
	7 წელი	151	91	53	30	14	30	53

ყველა მონაცემი მოყვანილია ბ.პ.-ებში

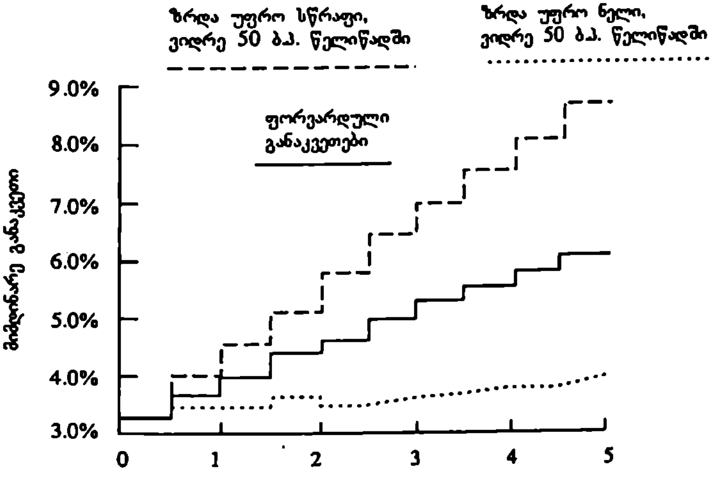
ცხრილი 9.16

კეპის პრემიის შეფასებისას უნდა შევადაროთ საპროცენტო განაკვეთები არა მოკლევადიან მიმდინარე განაკვეთებს, არამედ სათანადო სვოპ-განაკვეთებს. ასე მაგალითად, მოკლევადიანი განაკვეთი უდრის 3.25%-ს. ამიტომ 5-წლიანი კეპი, 5%-იანი აღსრულების ფასით, შეიძლება მოგვეჩვენოს ძალიან ძვირი. მაგრამ, თუ შევნიშნავთ, რომ 5-წლიანი სვოპის განაკვეთია 4.75%, მაშინ კეპის ფასი სამართლიანი აღმოჩნდება. შემოსავლიანობის მრუდის სწრაფი ზრდისას, მოკლევადიანი განაკვეთი თავიდან საკმაოდ მცირეა, მაგრამ 5 წლის ბოლოს მოსალოდნელია, რომ ის დაახლოებით 6%-ის ტოლი გახდება. ამიტომ რამოდენიმე საწყისი საპროცენტო პერიოდები

წამგებიანი იქნება, მაშინ როცა მომდევნო პერიოდებში კეპი ძალიან მომგებიანი გახდება.

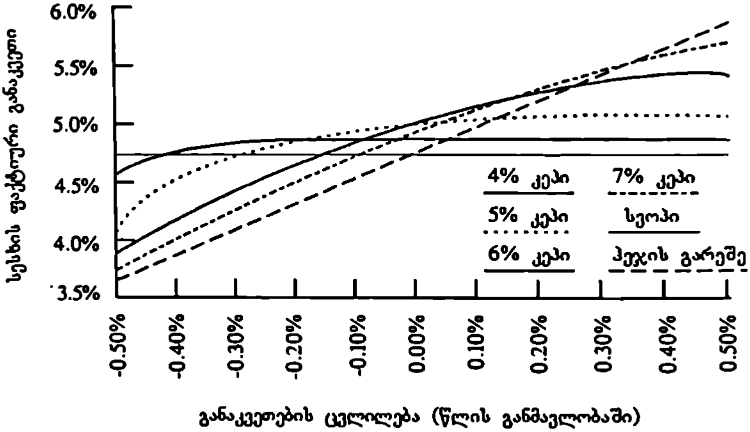
როგორც ნებისმიერი ოფციონის პრემია, კეპისა და ფლორის პრემიაც შეიძლება გაიყოს ორ ნაწილად — შინაგან ღირებულებად და დროით ღირებულებად. მაგალითად, 5-წლიანი კეპი აღსრულების განაკვეთით 4% ღირს 93 ბ.პ., რადგან 5-წლიანი სვოპ-განაკვეთი უდრის 4.75%-ს, ამიტომ კეპის პრემია შეიძლება ასე გაიყოს 93 = 75 + 18, სადაც 75 ბ.პ. შინაგანი ღირებულებაა, 18 ბ.პ. — დროითი. ცხადია, რომ სამართლიანი კეპების დროითი ღირებულება მაღალია და ამიტომ ისინი ყველაზე ძვირად ფასობენ.

იმისათვის, რომ შევაფასოთ კეპების ეფექტურობა (ფლორების ეფექტურობა ასევე ფასდება), უნდა შემოვისაზღვროთ საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებების გარკვეული სცენარით. ნახაზზე მოცემულია სამი შესაძლო შემთხვევა. ამასთან, იგულისხმება, რომ საპროცენტო განაკვეთის ცვლილების სხვა ტრაექტორია მოთავსდება მინიმალურ და მაქსიმალურ ტრაექტორიებს შორის (იხ. ნახ. 9.25).



ნახ. 9.25

ნახ. 9.26-ზე მოცემულია ჰეჯირების სხვადასხვა სტრატეგიის გამოყენების შედეგად მიღებული პოტენციალური რისკის გამომსახველი მრუდები იმ კომპანიისათვის, რომელიც აპირებს აიღოს 5-წლიანი სესხი. განაკვეთის გადახდა ხდება ყოველ 6 თვეში ერთხელ მიმდინარე LIBOR-ის განაკვეთის შესაბამისად.



ნახ. 9.26

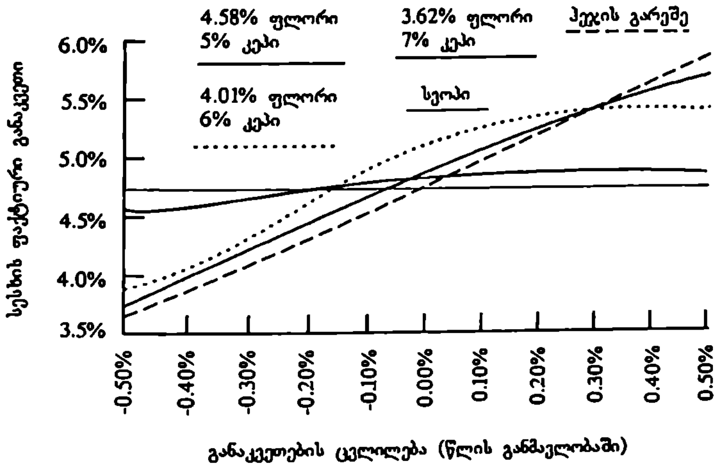
ამ ნახატის მიხედვით სიტუაციის ანალიზი ხდება ისევე, როგორც ეს ხდებოდა სხვა ოფციონებით ჰეჯირების შემთხვევაში. აქაც რისკის სრული ჰეჯირებიდან თანდათან გადავდივართ სრული დაუცველობის მდგომარეობამდე. ამასთან, ხელსაყრელი რისკის გამოყენების ხარისხი მატულობს. კომპორმისს, როგორც ყოველთვის, იძლევა სამართლიანი კეპი. შევნიშნოთ, რომ სტანდარტული ოფციონისაგან განსხვავებით, სადაც გადასვლა მკვეთრია და ჰორიზონტალური წრფე იცვლება 45°-ით დახრილი წრფით, აქ ასეთი მკვეთრი გადასვლის მომენტი არ არსებობს და მიიღება გლუვი წირები. ეს იმის გამო ხდება, რომ ზოგიერთი კეპლეტი უფულოდაა, ზოგიერთი კი ფულით.

კოლარები, წილობრივი კეპები, კორიდორები და სხვა ინსტრუმენტები. შევნიშნოთ, რომ ოფციონური კონსტრუქციები, რომლებიც შექმნილია თავდაპირველად ერთი ტიპის რისკის სამართავად, წარმატებით გამოიყენება სხვა ტიპის რისკის ჰეჯირებისთვისაც. მაგალითად, სავალუტო რისკის სამართავი ინსტრუმენტები ადვილი გამოსაყენებელია (პრინციპული ცვლილებების გარეშე) საპროცენტო რისკის სამართავადაც. ამიტომ მოკლედ გავიხსენოთ კიდევ ერთხელ ეს ინსტრუმენტები.

კოლარები. კოლარი მიიღება ერთი ტიპის არახელსაყრელი ოფციონის ყიდვითა და მეორე ტიპის არახელსაყრელი ოფციონის გაყიდვით. კოლარი შემოსაზღვრავს რისკს როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან. მიმდინარე ფასის ორივე მხარეს ჩნდება შუალედი, სადაც ჰეჯი არ მოქმედებს. კოლარის შექმნა ისე შეიძლება, რომ მას ჰქონდეს როგორც დადებითი, ისე ნულოვანი და უარყოფითი პრემია. გასაგებია, რომ ეს პრემია (და მისი ნიშნები) დამოკიდებულია კეპისა და ფლორის სიდიდეზე, ანუ იმ დაცვაზე, რომელიც შემო-

საზღვრავს რისკს ზემოდან ან ქვემოდან. მაგალითად, თუ პრემია უარყოფითია, მაშინ კოლარის მყიდველი იღებს საფასურს იმ ბანკისგან, რომელმაც გაყიდა კოლარი, მაგრამ ეს სიტუაცია იქმნება მაშინ, როცა შეძენილი დაცვა, რომელსაც უზრუნველყოფს კეპი, მინიმალურია, ხოლო ეკონომიის შესაძლებლობები, რომლებიც გაყიდულია ფლორის საშუალებით, მნიშვნელოვანია.

მაგალითისთვის მოვიყვანოთ ნულოვანი ფასის მქონე კოლარით დადგენილი სესხის ფაქტიური განაკვეთის გრაფიკები სხვადასხვა კოლარისთვის (იხ. ნახ.9.27).



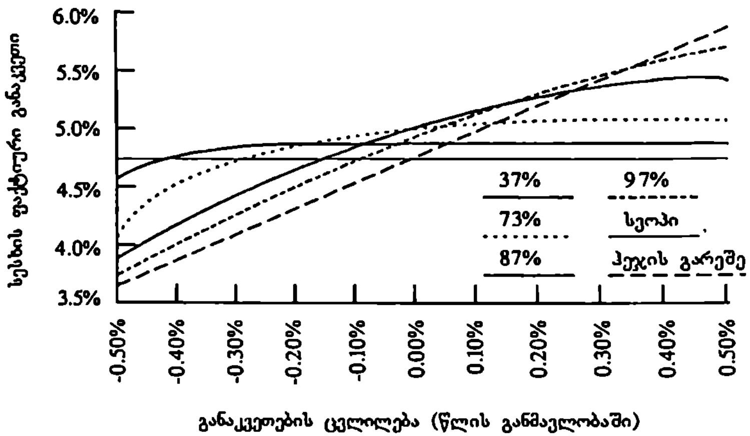
ნახ. 9.27

წილობრივი კეპის გამოყენება. ამ ინსტრუმენტის იდეაც სავალუტო ბაზრიდანაა მოსული. ნახ. 9.28-ზე ნაჩვენებია წილობრივი კეპის ეფექტურობა.

ჩამოვთვალოთ და მოკლედ დავახასიათოთ საპროცენტო რისკის მართვის ოფციონებზე დაფუძნებული სხვა ინსტრუმენტებიც. კორიდორი — ვერტიკალური ოფციონური სპრედი. ამ ინსტრუმენტს ადრეც შევხვედრივართ და ამიტომ მასზე აქ აღარ შევჩერდებით.

ჰორიზონტალური სპრედი — კეპის ყიდვა ერთი აღსრულების ვადით და იგივე განაკვეთის მქონე კეპის გაყიდვა სხვა აღსრულების ვადით. მაგალითად, თუ მსესხებელი ვარაუდობს, რომ საპროცენტო განაკვეთის ცვლილება ისეთივე იქნება, როგორსაც წინასწარმეტყველებენ ფორვარდული განაკვეთები (იხ. ცხრ. 9.15), მაშინ 6-თვიანი განაკვეთები გახდება 5%-ზე მეტი, მაგრამ მხოლოდ 3 წლის შემდეგ. თუ შევიძენთ 5-წლიან კეპს 5%-იანი განაკვეთით, იგი დაჯდება 191 ბ.პ. ავანსად. 3-წლიანი კეპის გაყიდვის შედეგად იმავე განაკვეთით, შემოგვივა 33 ბ.პ., ანუ სულ 158 ბ.პ. (17% ეკონო-

მია). ამასთან, თუ მოვლენები ისე განვითარდა, როგორც ვარაუდობს მსესხებელი, მაშინ 3 წლის განმავლობაში არც ერთი კეპის მიხედვით არაფერი არ იქნება გადასახდელი, ხოლო ეკონომია საწყის პრემიაზე შენარჩუნდება. ამავე ინსტრუმენტს შეიძლება შევხედოთ როგორც გადავადებულ კეპს, რადგან პირველი სამი წლის განმავლობაში ორი საწინააღმდეგო ოფციონური პოზიცია ერთმანეთს გააბათილებს და დარჩება 2-წლიანი კეპი გადავადებული სამი წლით.



ნახ. 9.28

„ჰეჯის ზუსტი მორგების" მაგალითს იძლევა ე.წ. აღმავალი კეპი და აღმავალი ფლორი, რომლებშიც აღსრულების განაკვეთი იზრდება დროის სვლასთან ერთად. მაგალითად, სტანდარტული 5-წლიანი 5%-იანი კეპის ფასი ცხრ. 9.15-ში მოცემულ მონაცემებზე დაყრდნობით, ტოლი იქნება 191 ბ.პ., მაგრამ, თუ აღსრულების განაკვეთი გაიზრდება ყოველ წელს 50 ბ.პ.-ით კეპის მოქმედების მთელი ვადის განმავლობაში და მივა 7%-მდე ბოლო წელს, მაშინ კეპის პრემია შემცირდება 44 ბ.პ.-მდე (77% ეკონომია). განაკვეთის ზრდის შედეგად, არც ერთი კეპლეტი არ იქნება ფულით აღსრულებისას და დაცვაც მინიმალური იქნება. ეს სიტუაცია მისაღებია ისეთი მსესხებელისათვის, რომელიც თანახმაა მომავალში ვალი გადაიხადოს გაზრდილი საპროცენტო განაკვეთით, მაგრამ სურს განაკვეთის დაცვა ძალიან დიდი ზრდისგან.

ანალოგიურ შესაძლებლობებს, მხოლოდ კლებადი შემოსავლიანობის მრუდისთვის, იძლევა დაღმავალი კეპი და ფლორი.

ჯერადი ფორვარდი, როგორც ვიცით, იმით განსხვავდება წილობრივი ფორვარდისაგან, რომ აღსრულების ფასი მდებარეობს მიმდინარე საბაზრო

ფასის საწინააღმდეგო მხარეს (ჯერადი ფორვარდის ფასთან შედარებით). იგივე ხერხი შეიძლება გამოვიყენოთ კეპისა და ფლორის მიმართ. ასეთი ინსტრუმენტები, მართალია, საკმაოდ იაფია, მაგრამ, თუ ჯერადობა დიდია, მათ შეიძლება მიგვიყვანონ კატასტროფულ შედეგამდე.

თუ გადავალთ იმ ეგზოტიკურ ინსტრუმენტებზე, რომლებიც გამოიყენება სავალუტო ბაზარზე და შევეცდებით მათ გამოყენებას საპროცენტო რისკის მართვისათვის, მივიღებთ, მაგალითად, საშუალო განაკვეთის კეპს, რომელიც საშუალებას აძლევს მცურავი განაკვეთით მსესხებელს, ცვალოს განაკვეთი ნებისმიერ დღეს და არა მარტო გადათვლის დაფიქსირებულ თარიღებში. მაგალითად, თუ კლიენტი იღებს სესხს პრაიმ-რეიტით, მაშინ ზემოხსენებული კეპი, რომელსაც აქ საბაზისო განაკვეთის კეპი ჰქვია, საავანსო პრემიის საფასურად იძლევა კომპენსაციას ყოველ პერიოდში, როცა საბაზისო განაკვეთი გადააჭარბებს კეპის განაკვეთს. არსებობენ ბარიერული კეპებიც, სადაც ფიქსირდება სასაზღვრო განაკვეთი და ა.შ.

9.6 კეპციონებისა და სვოპციონების გამოყენება საპროცენტო რისკის მართვისათვის

სვოპი და კეპი საპროცენტო განაკვეთის დაცვის ორ განსხვავებულ გზას გვთავაზობს. თუ მათ დავუმატებთ ოფციონს — მიღებულ პროდუქტებს კეპციონი და სვოპციონი ჰქვიათ — დაცვა კიდევ უფრო მოქნილი გახდება.

კეპციონები და სვოპციონები გამოიყენება შემდეგ გარემოებებში:

1) თუ გარეშე ფაქტორებს გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვთ;

2) საპროცენტო განაკვეთის იაფი დაცვისთვის;

3) ჩადგმული სავალო ოფციონების მართვისათვის;

4) სვოპების გაგრძელებისა და შეწყვეტისათვის;

5) სპეკულაციისათვის.

განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე.

1) ვთქვათ, კომპანია მონაწილეობს ტენდერში რომელიმე პროექტზე. გამარჯვების შეთხვევაში მას დასჭირდება დაფინანსება და, მაშასადამე, შესაძლო სესხის განაკვეთის დაცვა.

ასეთ პირობებში გადავადებული სვოპის ან გადავადებული კეპის ყიდვა შეიძლება არ იყოს სწორი. სვოპის ყიდვის შემთხვევაში კომპანიას მოუხდება საკონტრაქტო გადასახადების შეტანა, ხოლო კეპის შეძენისას — პრემიის წინასწარ გადახდა, რომელიც შეიძლება საერთოდ დაიკარგოს, თუ ტენდერი წაგებულ იქნა.

ამიტომ საჭირო პირობით დაცვას (საკმაოდ იაფადაც) უზრუნველყოფს ოფციონი სვოპზე ან კეპზე.

მოვიყვანოთ ერთმანეთის სადარი პროდუქტების ფასები.

	აღსრულების განაკვეთი 4.79%	აღსრულების განაკვეთი 5.50%
სვოპციონი	82 ბ.პ.	14 ბ.პ.
გადავადებული კეპი	165 ბ.პ.	84 ბ.პ.
კეპციონი	38 ბ.პ.	23 ბ.პ.

ცხრილი 9.17

ცხრ. 9.17-ში მოყვანილია შემდეგი ინსტრუმენტების ფასები: 6-თვიანი სვოპციონის 4-წლიან სვოპზე, 4-წლიანი კეპის 6 თვით გადავადებით, 6-თვიანი კეპციონის 4-წლიან კეპზე. ეს კონტრაქტები გამოადგება კომპანიას, რომელსაც შეიძლება დასჭირდეს სესხი 6 თვის შემდეგ. პირველი განაკვეთი (4.79%) ემთხვევა 4-წლიანი სვოპის განაკვეთს 6 თვის გადავადებით და ამიტომ ყველა კონტრაქტისათვის სამართლიანია. მეორე განაკვეთი ოდნავ არახელსაყრელია.

2) სვოპციონი და კეპციონი შეიძლება განვიხილოთ როგორც იაფი დაცვა საპროცენტო განაკვეთის ზრდისაგან.

პარადოქსალურია, მაგრამ ასეთი თვალსაზრისი სამართლიანია, თუ მსესხებელი ფიქრობს, რომ სინამდვილეში დაცვა არ იქნება საჭირო.

მართლაც, ინსტრუმენტის პირდაპირი შეძენა ყოველთვის უფრო იაფი ჯდება, ვიდრე მისი შეძენა ოფციონის საშუალებით. საქმე იმაშია, რომ, როგორც ვიცით, ოფციონის პრემია შედგება არა მხოლოდ შინაგანი ღირებულებისაგან, არამედ დროითი ღირებულებისაგანაც და ეს უკანასკნელი არასდროს არ უბრუნდება ოფციონის მფლობელს. ამიტომ, თუ მსესხებელს ჰგონია, რომ დაცვა მართლაც დასჭირდება, სჯობს თავიდანვე შეიძინოს ძირითადი ინსტრუმენტი. ცხრ. 9.17-ის პირველ მაგალითში მსესხებელი იხდის 82 ბ.პ.-ს იმისათვის, რომ შევიდეს სვოპში, რომელში შესვლაც მას უფასოდ შეუძლია.

თუ მსესხებელი ფიქრობს, რომ განაკვეთი გაიზრდება, მაგრამ არა ისე სწრაფად, როგორც ამას ფორვარდული განაკვეთები წინასწარმეტყველებს, მაშინ სვოპში უშუალოდ შესვლა მას შეიძლება ძალიან ძვირი მოეჩვენოს, რადგან სვოპ-განაკვეთი არის ფორვარდული განაკვეთის შეწონილი საშუალო, ხოლო ეს განაკვეთები მსესხებლის აზრით ზედმეტად მაღალია. ამიტომ უმჯობესია სვოპციონის ან კეპციონის შეძენა. თუ მსესხებლის ეჭვი გამართლდა, იგი ისარგებლებს დაბალი სპოტ-განაკვეთით, თუ არა — აღასრულებს ოფციონს.

3) კორპორაციული ობლიგაციის პირობებში ხშირად ფიგურირებს უფლება საპროცენტო განაკვეთის ვარდნისას ფასიანი ქაღალდის გამოსყიდვის შესახებ. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ოფციონი „ჩადგმულია" ობლიგაციაში.

სვოპციონის საშუალებით ემიტენტს შეუძლია გადააქციოს ეს ოფციონი ფულად და მიიღოს მისი ღირებულება ნაღდი სახით.

მაგალითი 9.9. ვთქვათ, მსხვილმა კომპანიამ გამოუშვა 7-წლიანი ობლიგაცია 2 წლის შემდეგ გამოსყიდვის უფლებით. მაშინ მას შეუძლია გაყიდოს გადამხდელის სვოპციონი 2 წლის ვადით (რომელიც განაღდებისას გადაიქცევა 5-წლიან სვოპად) სტრაიკით, რომელიც საკუპონე განაკვეთს ემთხვევა. თუ 2 წლის განმავლობაში საპროცენტო განაკვეთი დაეცა საკუპონე განაკვეთზე დაბლა, მაშინ კომპანია გამოისყიდის ობლიგაციას და რეფინანსირდება მოკლევადიანი მცურავი განაკვეთის მქონე ობლიგაციების გამოშვებით. ამასთან ერთად, სვოპციონი აღსრულდება მის წინააღმდეგ და კომპანია გახდება, სვოპის პირობებით, ფიქსირებული განაკვეთის გადამხდელი. ამის შედეგად კომპანია იხდის თავდაპირველად ფიქსირებულ პროცენტს, მაგრამ ინარჩუნებს ოფციონის საავანსო თანხას. თუ განაკვეთები მაღალი იქნება, მაშინ კომპანია კვლავ გადაიხდის ფიქსირებულ განაკვეთს, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც მიიღებს პრემიას, რომელიც „ჩადგმული" ოფციონის ღირებულების ტოლია.

4) ოფციონი შეიძლება გამოვიყენოთ სვოპის მოქმედების ვადის გასაგრძელებლად ან შესაკვეცად. ვთქვათ, მსესხებელი იხდის ფიქსირებულ განაკვეთს სვოპით, რომელიც დასრულდება 3 წლის შემდეგ, და საჭიროებს სვოპის გაგრძელებას 2 წლით. ამ პრობლემის გადაჭრა შეიძლება, თუ ვიყიდით 3-წლიან გადამხდელის სვოპციონს 2-წლიან სვოპზე აღსრულების ფასით, რომელიც მოქმედი სვოპის ფიქსირებულ განაკვეთის ტოლია.

ასეთივე პროდუქტის მაგალითს წარმოადგენს ე.წ. „კოლაპსირებადი სვოპი".

5) სპეკულაციის მიზნით დერივატივების და, კერძოდ, ოფციონების გამოყენება, მათი დიდი მოგების პოტენციალის გამო, ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი.

ამავე მიზნებისთვის კარგადაა მისადაგებული სვოპციონიც.

სპეკულანტს, რომელიც ელის განაკვეთის ზრდას, შეუძლია შეიძინოს გადამხდელის სვოპციონი. მაგალითად, ერთწლიანი გადამხდელის სვოპციონის ფასი 4-წლიან სვოპზე, სტრაიკით 5.1%, შეიძლება ღირდეს 85 ბ.პ. საავანსო პრემია. თუ ერთი წლის შემდეგ 4-წლიანი სვოპის განაკვეთი გაიზრდება 6%-მდე, მაშინ მისი დაფარვა ნაღდი ფულით მოიტანს 324 ბ.პ.-ს ანუ 280% შემოსავალს. წინააღმდეგ შემთხვევაში სპეკულანტი დაკარგავს მხოლოდ სვოპციონის პრემიას.

9.7 საპროცენტო რისკის მართვის სტანდარტული ინსტრუმენტების შედარება

საპროცენტო რისკის მართვის სტანდარტული ხელმისაწვდომი ინსტრუმენტებია FRA, ფიუჩერსი, სვოპი, საპროცენტო განაკვეთის გარანტია, კეპი, კოლარი, ფლორი, კეპციონი და სვოპციონი.

ამ კონტრაქტების კლასიფიკაციის და შედარების გასაადვილებლად მოვიყვანოთ შემდეგი ცხრილი

	პერიოდების რაოდენობა	აღსრულების შესაძლებლობათა რაოდენობა	დასაშვები ვადები	დაცვის სახე
FRA	1	—	2 წ.-მდე	ფიქსირებული
ფიუჩერსი	1	—	4 წ.-მდე	ფიქსირებული
სვოპი	რამოდენიმე	—	10 წ.-მდე	ფიქსირებული
IRG	1	1	2 წ.-მდე	ფიქსირებული
კეპი, ფლორი და კოლარი	რამოდენიმე	რამოდენიმე	10 წ.-მდე	ამორჩევით
სვოპციონი		1/რამოდენიმე	1 10 წ.-მდე	ამორჩევით
კეპციონი	1/რამოდენიმე	1/რამოდენიმე	10 წ.-მდე	ამორჩევით

ცხრილი 9.18

თუ რომელი მათგანია ყველაზე შესაფერისი, დამოკიდებულია ჰეჯირების ამოცანებზე, რომლებიც ჩვენ დავყავით შემდეგ 4 ნაწილად

- სრული დაცვის სურვილი ბაზრის ყოველგვარი ცვლილების დროს.
- მოგების მიღების უპირატესი სურვილი, არასასურველი რისკისგან თავდაცვის შესაძლებლობასთან შედარებით.
- დაცვის საფასურის არგადახდის სურვილი.
- საბაზრო სიტუაციის განვითარების შესახებ საკუთარი აზრის გათვალისწინების სურვილი.

სრული დაცვა. ინსტრუმენტის არჩევანი ცხადია: მოკლევადიანი რისკებისათვის FRA და ფიუჩერსი, გრძელვადიანისთვის — სვოპი.

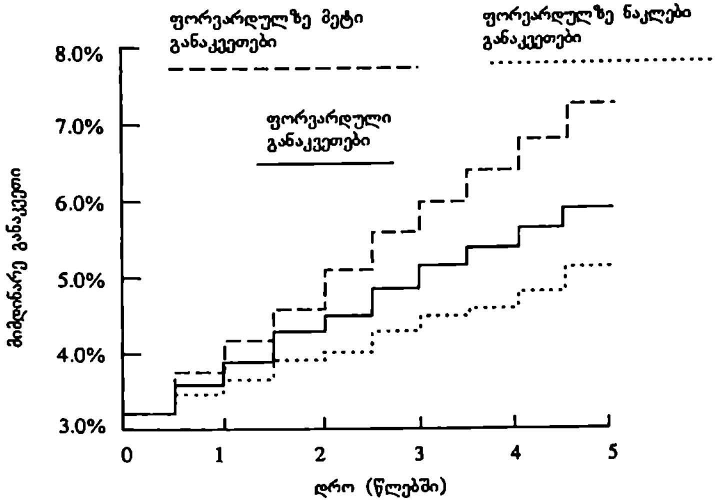
არჩევანი შესაძლებლობებს შორის მოვლენების სასურველი ან არასასურველი განვითარების დროს. ინსტრუმენტი, ცხადია, ოფციონია. თუ რისკი მოკლევადიანია, მისაღებია საპროცენტო განაკვეთის გარანტია ისეთი განაკვეთით, რომელიც აწონასწორებს დაცვის ხარისხს, შემოსავალს და პრემიას. მეორე შესაძლებლობაა, შევქმნათ რამოდენიმე საპროცენტო განაკვეთის გარანტიისგან კორიდორი, კოლარი, წილობრივი

კონტრაქტი ან სხვა კომბინაცია. გრძელვადიანი რისკისთვის უნდა გამოვიყენოთ ამ პროდუქტების მრავალპერიოდიანი ანალოგები — კეპები, კოლარები, კორიდორები და წილობრივი კეპები. ისინი მოგვცემენ კომპრომისის საჭირო სტრუქტურას.

დაცვის საფასური. თუ სასურველი დაცვის შექმნა ძალიან ძვირია, მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ პროდუქტი, რომელსაც დაბალი ფასი აქვს, მაგალითად, კოლარი ან წილობრივი კეპი (თუ გავყიდით მოგების გარკვეულ ნაწილს). თუ სასურველ დაცვას უზრუნველყოფს კეპი, მაშინ ანალოგიურ უფრო იაფ დაცვას მივიღებთ შესაბამისი კეპციონის გამოყენებით. ამის მსგავსად, სვოპის უფრო იაფი ვარიანტია სვოპციონი.

კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმ გარემოებას, რომ თუ საბოლოოდ სვოპციონი ან კეპციონი აღსრულდა, მაშინ ეს კონტრაქტები უფრო ძვირ დაცვას იძლევა, ვიდრე სვოპის ან კეპის პირდაპირი ყიდვა.

საკუთარი აზრი ბაზრის ცვლილებაზე. თუ საპროცენტო რისკის პეჯირებამ რამოდენიმე წელი გასტანა, მაშინ კლიენტის აზრს ბაზრის ცვლილებაზე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება. ასეთ შემთხვევაში უნდა შედარდეს მისი აზრი საბაზისო ფორვარდული განაკვეთების მრუდს, რადგან სწორედ უკანასკნელის საფუძველზე დგინდება კონტრაქტებში დაფიქსირებული მცურავი საპროცენტო განაკვეთი.



ნახ. 9.29

ვთქვათ, კლიენტი თვლის რომ

- განაკვეთები გაიზრდება უფრო სწრაფად, ვიდრე ამას ფორვარდული განაკვეთების მრუდი გვიჩვენებს;

- განაკვეთები გაიზრდება უფრო ნელა, ფორვარდულ პროგნოზთან შედარებით;
- განაკვეთები, ძირითადად, წაყვება ფორვარდულ განაკვეთებს (იხ. ნახ. 9.29).

თუ გავაანალიზებთ შექმნილ ვითარებას სამივე შემთხვევაში, ადვილი მისაღებია დასკვნები, რომლებიც თავმოყრილია ცხრ 9.19-ში. შევნიშნოთ, რომ ცხრილში თავმოყრილია რეკომენდაციები არა მარტო მსესხებლისთვის, არამედ ინვესტორისა და კრედიტორისთვისაც, რადგან სტრატეგიები სიმეტრიულია: თუ მსესხებელი იყიდის კეპს, ინვესტორმა უნდა იყიდოს ფლორი და ა.შ.

თვალსაზრისი	მსესხებლის სტარტეგია	ინვესტორის სტარტეგია
განაკვეთები იქნება ფორვარდულ განაკვეთებზე დაბლა	იყიდე კეპი იყიდე კოლარი იყიდე გადამხდელის სვოპციონი იყიდე კეპციონი	სვოპი (ფიქსირებული განაკვეთის მიმღები) სვოპი და გაყიდე კეპი იყიდე წილობრივი ფლორი
განაკვეთები გაყვებიან ფორვარდულ განაკვეთებს	სვოპი (მცურავი განაკვეთის მიმღები) იყიდე კოლარი ნულოვანი ფასით იყიდე წილობრივი კეპი	სვოპი (ფიქსირებული განაკვეთის მიმღები) გაყიდე კოლარი ნულოვანი ფასით იყიდე წილობრივი ფლორი
განაკვეთები იქნება ფორვარდულ განაკვეთზე მაღლა	სვოპი (ფიქსირებული განაკვეთის გადამხდელი) სვოპი და გაყიდე ფლორი იყიდე წილობრივი კეპი .	იყიდე ფლორი გაყიდე კოლარი იყიდე ფლორ-კორიდორი იყიდე მიმღების სვოპციონი იყიდე ფლორციონი

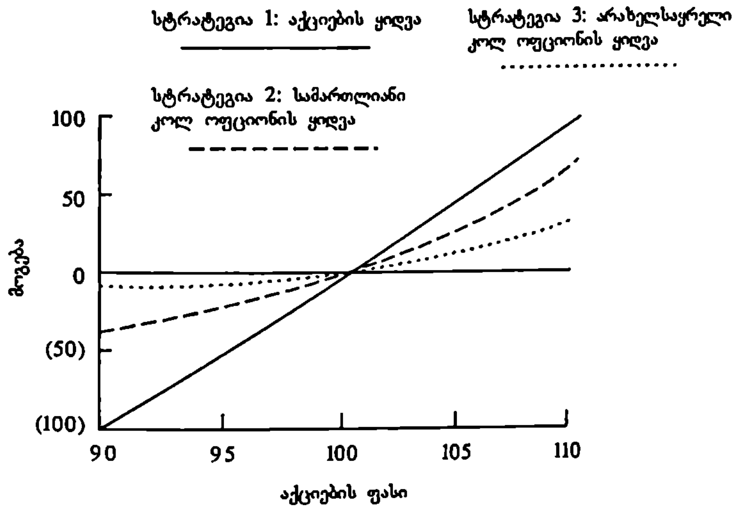
ცხრილი 9.19

9.8 აქციების რისკის მართვა

აქციების რისკი ვლინდება მათი ღირებულების (ან აქციათა პორტფელის ღირებულების) სიდიდის რხევაში და ამდენად ისევე, როგორც სავალუტო რისკი, ის ფასის ცვლილების რისკია. ამიტომ აქციათა რისკის მართვას აქვს ბევრი საერთო სავალუტო რისკის მართვასთან და ინსტრუმენტები, რომლებიც გამოიყენება ამ შემთხვევაში, ბევრი მაჩვენებლით მსგავსია სავალუტო რისკის მართვის დროს გამოყენებული ინსტრუმენტებისა.

ხარისა და დათვის სავაჭრო სტრატეგიები. უმარტივესი სტრატეგია ხარისათვის არის აქციის ყიდვა. მაგრამ, თუ აქციებთან ერთად არსებობს ოფციონები, მაშინ ამ მარტივ სტრატეგიას შეიძლება დაემატოს:

- კოლ ოფციონის ყიდვა;
- ხარის სპრედის ყიდვა;
- სტრატეგიის 90 : 10-ზე გამოყენება



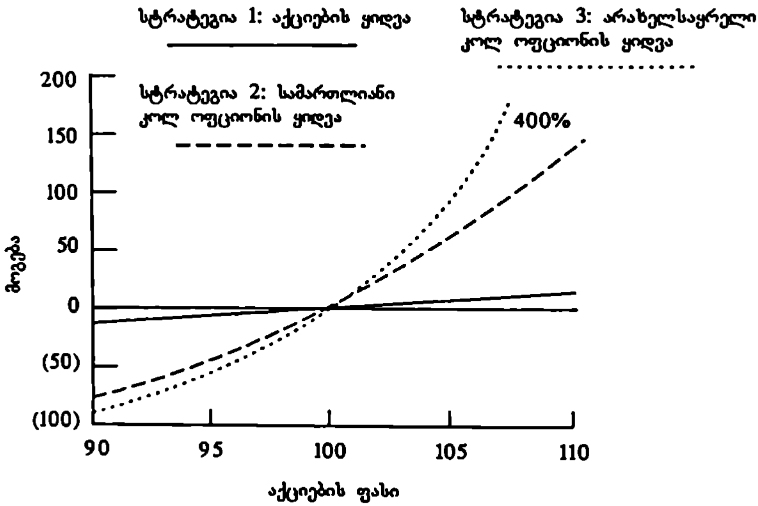
ნახ. 9.30

ანალოგიურად, ინვესტორს დათვის თვალსაზრისით, შეუძლია იყიდოს ოფციონი ან დათვის სპრედი.

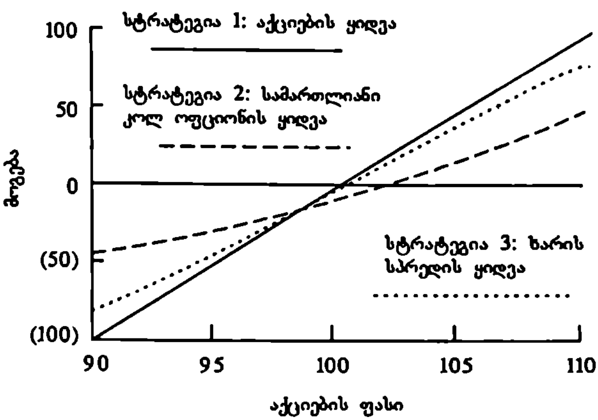
განვიხილოთ ხარის სტრატეგიები. დათვის სტრატეგიები მათი სარკისებური ანარეკლია.

კოლ ოფციონის ყიდვა იძლევა მოგებას აქციის ფასის ზრდისას და გვიცავს ფასის ვარდნისაგან — ეს ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი. შევხედოთ ამ სტრატეგიას სხვა კუთხით. განვიხილოთ 1000 აქციისგან შემდგარი ლოტი. ვთქვათ, თითოეული აქციის მიმდინარე ფასია 100 ბ.პ. ვთქვათ, 2-თვიანი სამართლიანი კოლი ღირს $4\frac{1}{2}$ ბ.პ., უფულო კოლი, სტრაიკით 110, იმავე ვადაზე — 1 ბ.პ. შევადაროთ შემდეგი 3 სტრატეგიის ფინანსური ეფექტურობა: 1000 აქციის ყიდვა, სამართლიანი ოფციონის ყიდვა ამავე რაოდენობის აქციებზე (და არა იმ პაკეტის ყიდვა, რომელსაც იგივე ფასი აქვს) და უფულო ოფციონების ყიდვა. შედეგები გამოვსახოთ გრაფიკულად

(იხ. ნახ. 9.30 და 9.31). ამასთან, ნახ. 9.30-ზე მოგება/წაგების სიდიდე მოცემულია აბსოლუტურ გამოსახულებებში, ხოლო ნახ. 9.31-ზე — პროცენტულ გამოსახულებებში.



ნახ. 9.31



ნახ. 9.32

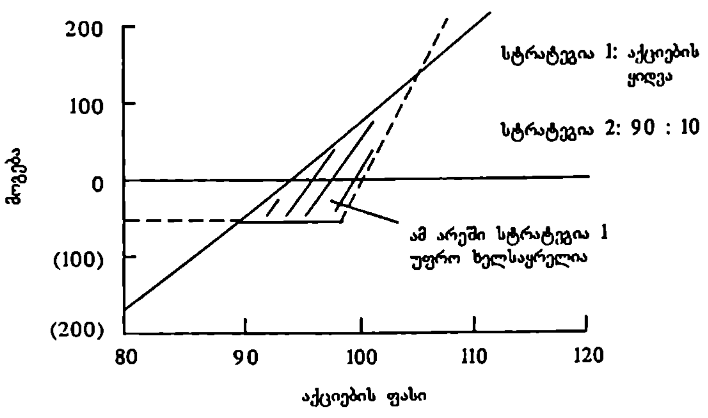
ადვილი დასანახია, რომ თუ აქციის ფასი შეიცვლება −10%-ით ან +10%-ით, სამართლიანი ოფციონი მოგვცემს ან 78% ზარალს, ან 167% მოგებას, ხოლო უფულო ოფციონი ან 100% ზარალს ან 400% მოგებას. რაც

შეეხება ბოლო შესაძლებლობას, შევნიშნოთ, რომ უფულო ოფციონის ყიდვისას მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ მისი გაუფასურების დიდი ალბათობა. ამიტომ შედეგი — 100%-იანი ზარალი ამ შემთხვევაში უფრო მოსალოდნელია.

ხარის სპრედის ყიდვა. ამ სტრატეგიის უპირატესობა ის არის, რომ სპრედი უფრო იაფია, ვიდრე ოფციონი და მისი ღირებულების დროითი შემადგენელი უფრო ნელა მცირდება. ქვემოთ შედარებულია შემდეგი 3 სტრატეგიის ეფექტურობა ყიდვიდან 1 თვის შემდეგ: 90–110 სპრედის ყიდვა, აქციის ყიდვა და კოლ ოფციონის ყიდვა (იხ. ნახ. 9.32).

თუ ამ ერთი თვის განმავლობაში აქციის ფასი არ შეიცვლება, სპრედი არ მოგვიტანს დანაკარგს, მაშინ როცა კოლ ოფციონი დაკარგავს თავისი ღირებულების მესამედს.

სტრატეგია „90 : 10“. ეს კონკრეტული სტრატეგია მდგომარეობს საინვესტიციო თანხის 90 : 10 პროპორციით გაყოფაში, მისი დიდი ნაწილის დეპოზიტზე დადებასა და მცირე ნაწილით ოფციონების ყიდვაში. თუ აქციის ფასი დაეცა, მაშინ ძირითადი კაპიტალი შენარჩუნდება, თუ აქციის ფასმა ძლიერ აიწია, მაშინ ოფციონის ლევერიჯის ეფექტზე დაყრდნობით მიიღება დიდი მოგება (იხ. ნახ. 9.33).



ნახ. 9.33

ჩამოვთვალოთ აღწერილი სტრატეგიების უპირატესობა აქციების პირდაპირი ყიდვით მიღებულ სტრატეგიასთან შედარებით:

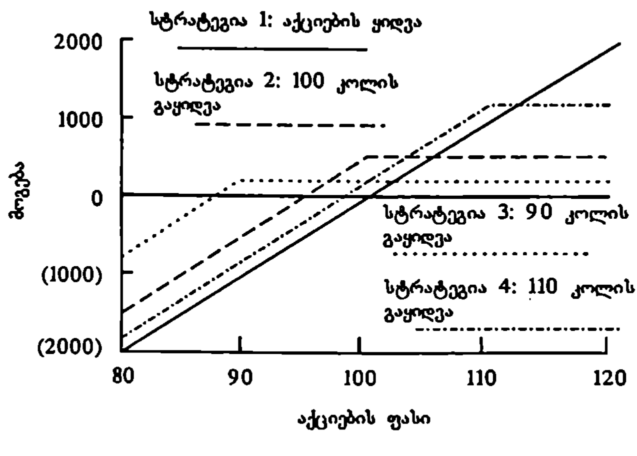
- ოფციონი შემოსაზღვრავს რისკს ქვემოდან;
- ოფციონს აქვს დიდი ლევერიჯი;

- ოფციონის ღირებულების წირის დადებით სიმრუდეს (ანუ Γ პარამეტრის დადებითობას) მივყავართ მოგების მიღების აჩქარებისაკენ, ანუ მოგების ზრდის სიჩქარე იზრდება, რაც უფრო ღრმად მომგებიანი ხდება ოფციონი;
- ოფციონი საშუალებას იძლევა ჩატარდეს ფორვარდული ოპერაციები აქციებზე.

შემოსავლის გაზრდა. განვიხილოთ ისეთი სტრატეგიები, რომლებიც ზრდის უკვე ნაყიდი (ან შესაძენად გამიზნული) აქციების შემოსავლიანობას:

- დაფარული კოლ ოფციონების გაყიდვა;
- დაფარული კოლ ოფციონების პროპორციული გაყიდვა;
- იმ პუტ ოფციონების გაყიდვა, რომლებიც არ არიან დაფარული;
- პუტ ოფციონების პროპორციული გაყიდვა.

დაფარული კოლ ოფციონების გაყიდვა ეწოდება სტრატეგიას, როცა ინვესტორს უკვე აქვს ხელზე აქცია, რომელიც უნდა მიეწოდოს მყიდველს კოლ ოფციონის აღსრულებისას (იხ. ნახ. 9.34).

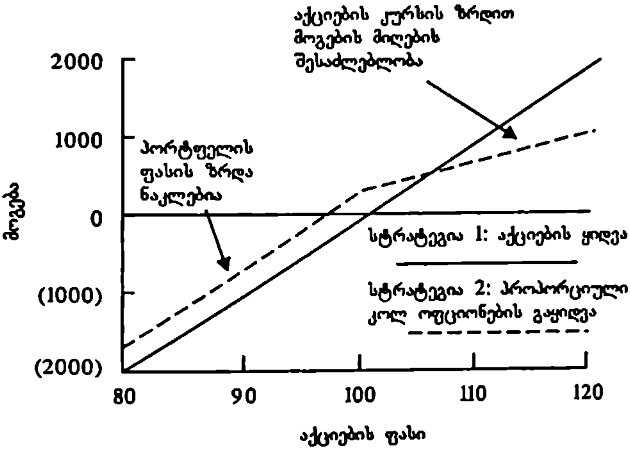


ნახ. 9.34

კოლების გაყიდვა იძლევა გარანტირებულ შემოსავალს აქციის ფასის ზრდისას და ფასის სტატიკურობის ან კლების შემთხვევაში ზრდის პორტფელის ფასს პრემიის სიდიდით.

შევნიშნოთ, რომ ასეთი სტრატეგია არ აძლევს ინვესტორს არავითარ დაცვას. პირიქით, ის აფიქსირებს ფასის ზედა საზღვარს. თუ კი ფასი სტატიკურია ან კლებულობს, ასეთი ოპერაცია ზრდის პორტფელის ფასს.

დაფარული კოლ ოფციონების პროპორციული გაყიდვა. ეს სტრატეგია გულისხმობს შემდეგს: გაიყიდოს ოფციონები არსებული აქციების ნაწილზე. ეს სტრატეგია გვაძლევს ნაკლებ შემოსავალს, მაგრამ იძლევა შესაძლებლობას, დაუფარავი ნაწილისაგან მივიღოთ მოგება აქციის ფასის ზრდის დროს (იხ. ნახ. 9.35).



ნახ. 9.35

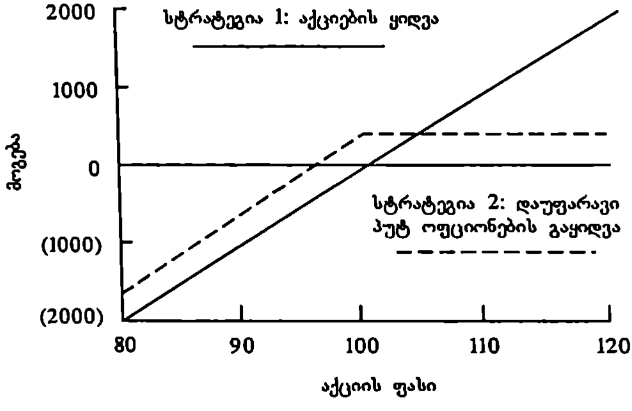
დაუფარავი პუტ ოფციონების გაყიდვა. ეს სტრატეგია განსხვავდება ზემოაღწერილი სტრატეგიებისაგან, რადგან საწყის მომენტში ინვესტორს, არ გააჩნია აქციები ხელზე, მაგრამ მას აქვს ნეიტრალური ან ხარის პროგნოზი კონკრეტული აქციების მიმართ. თუ იგი პირდაპირ შეიძენს აქციებს, მაშინ იმ შემთხვევაში, თუ პროგნოზი არ გამართლდა ამ ოპერაციის დაფინანსება მიგვიყვანს დანაკარგებამდე. ამიტომ შეიძლება გავყიდოთ პუტ ოფციონი დაუფარავად. რადგან საბოლოოდ ინვესტორს სურს აქციების ყიდვა, ეს სტრატეგია არ არის რისკიანი (იხ. ნახ. 9.36).

შევნიშნოთ, რომ ამ ნახატზე მოცემული გრაფიკი ემთხვევა ნახ. 9.34-ზე მოცემულ გრაფიკს, რადგან გრძელი პოზიცია ძირითად აქტივში და მოკლე კოლ ოფციონში წარმოქმნის სინთეზურ პუტ ოფციონს.

პუტ ოფციონების პროპორციული გაყიდვა. ეს სტრატეგია თითქმის ეკვივალენტურია (იხ. ნახ. 9.35) კოლ ოფციონების პროპორციული გაყიდვის.

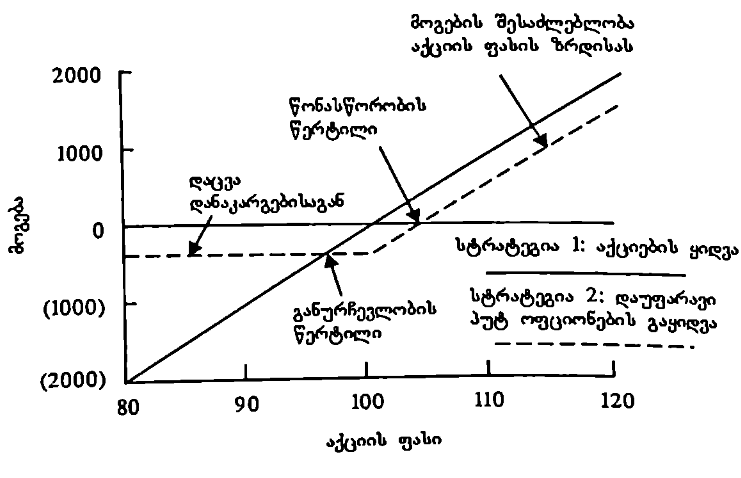
პორტფელის ღირებულების დაცვა. ზემოთაღნიშნულ სტრატეგიებს ახასიათებდა ის, რომ თუ აქციების ფასები არ შეიცვლებოდა, პორტ-

ფელის შემოსავლიანობა უნდა გაზრდილიყო. ცხადია, ასეთი სტრატეგიები გულისხმობს ოფციონების გაყიდვას და პრემიის მიღებას. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში ხდება პორტფელის ღირებულების შემოსაზღვრა.



ნახ. 9.36

თუ ამოცანა მდგომარეობს პორტფელის დაცვაში, მაშინ პირიქით, საჭიროა მისი ღირებულების ქვემოდან შემოსაზღვრა, ამასთან არ უნდა მოვსპოთ მოგების მიღების შესაძლებლობა აქციების ფასის ზრდისას. ამიტომ ეს სტრატეგიები გულისხმობენ ოფციონების ყიდვას.

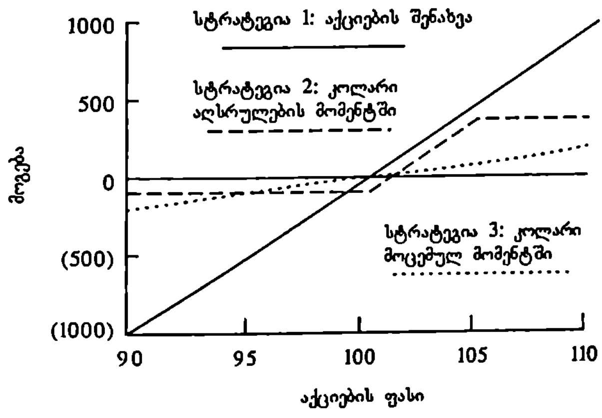


ნახ. 9.37

პუტ ოფციონების ყიდვა პორტფელის დაცვის ყველაზე მარტივი და კლასიკური სტრატეგიაა (იხ. ნახ. 9.37). ამ სტრატეგიის ერთადერთი ნაკლი ის არის, რომ პრემია ამცირებს პორტფელის შემოსავალს.

პორტფელის ლიკვიდაცია და კოლ ოფციონის ყიდვა. რადგან აქციის ფლობა და პუტის ყიდვა წარმოქმნის სინთეზურ კოლ ოფციონს, ამიტომ წინა სტრატეგიის ალტერნატივაა პორტფელის ლიკვიდაცია, მიღებული თანხის ინვესტირება (პროცენტული შემოსავლის მისაღებად) და კოლ ოფციონის ყიდვა.

კოლარის ყიდვა. ეს სტრატეგია, თავისი აგების პრინციპებით, სრულიად ანალოგიურია სავალუტო რისკის მართვის დროს გამოუყენებელი სტრატეგიისა. კოლარის შექმნის დროს დგინდება ზედა საზღვარი უფულო კოლ ოფციონის გაყიდვით და ქვედა საზღვარი უფულო პუტ ოფციონის ყიდვით. შემდეგ ხდება ამ სტრატეგიის სხვადასხვა პარამეტრის ვარირება არსებულ რისკთან საუკეთესო შეთანხმების მისაღწევად (იხ. ნახ. 9.38).



. ნახ. 9.38

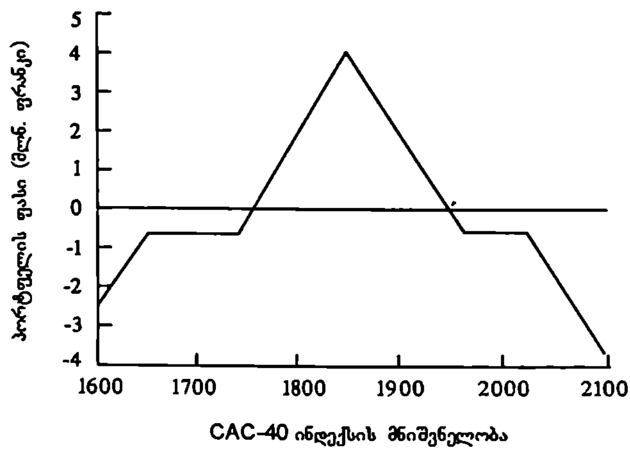
ანალოგიური შენიშვნა შეიძლება გაკეთდეს ვერტიკალური, ჰორიზონტალური ან დიაგონალური სპრედების მიმართაც.

აქციების ბაზარზე აქტიურად გამოიყენება სხვა ოფციონური სტრატეგიებიც (სტრედლები, სტრენგლები, ბატერფლაები, კორიდორები, პროპორციული და უკუპროპორციული სპრედები). როგორც ვიცით, ეს ვოლატილური სტრუქტურებია, რომლებიც გამოიყენება ნაგულისხმევი ვოლატილობის ცვლილებიდან მოგების მისაღებად.

ვოლატილური სტრატეგიის გამოყენება. მაგალითი 9.10. ნიუიორკის საინვესტიციო ჯგუფმა BEA-მ, გადაწყვიტა ესარგებლა ვოლატილობის ნახტომით, საფრანგეთში მაასტრიხტის შეთანხმებების გამო გამართული

რეფერენდუმის წინა პერიოდში. პარასკევს, 1992 წლის 18 სექტემბერს, რეფერენდუმამდე ორი დღით ადრე, CAC-40-ის ინდექსზე სამართლიანი ოფციონების (აღსრულების ვადით თვის ბოლოს, ე.ი. 12 დღის შემდეგ) ნაგულისხმევი ვოლატილობა გაიზარდა 47%-მდე. უფულო ოფციონების ვოლატილობაც გაიზარდა, თუმცა არა ასე ძლიერად.

როცა CAC-40-ის ინდექსის მნიშვნელობა იყო 1850, BEA-ს ჯგუფმა გაყიდა სამართლიანი სტრედლები და მიიღო პრემია 7.35% ინდექსის პირობითი ფასისაგან (CAC-40-ის ინდექსის ერთ პუნქტზე ვაჭრობის ერთეული 200 ფრანკს შეადგენს). დამატებით, BEA-მ იყიდა 1650–1725 დათვის პუტ სპრედები და 1975–2025 ხარის კოლ სპრედები, იმისათვის, რომ მიეღო დაცვა, თუ ვოლატილობის შემცირებას (რასაც BEA-ს ჯგუფი მოელოდა) დაერთვოდა ბაზრის მნიშვნელოვანი ცვლილება. ფირმამ შეიძინა, აგრეთვე, გარკვეული რაოდენობა ფიუჩერსული კონტრაქტებისა, რათა გაეხადა მთელი სტრატეგია Δ-ნეიტრალური ვაჭრობის დახურვის მომენტისათვის. ორი სპრედის ღირებულების გათვალისწინებით (1.47%) სუფთა პრემიამ შეადგინა 5.88%. საბოლოოდ, მოგების გრაფიკმა (აღსრულების დღისთვის) მიიღო შემდეგი ფორმა (იხ. ნახ. 9.39) (იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველი სტრაიკისათვის მონაწილეობდა 200-200 ოფციონური კონტრაქტი).



ნახ. 9.39

რეფერენდუმის მეორე დღეს, ოთხშაბათს, ბაზრის საერთო დონე ძლიერად არ შეცვლილა, ხოლო ვოლატილობა შემცირდა 25%-მდე. ყველა პოზიცია დაიხურა (ამის ხარჯებმა შეადგინა 4.36%) და საბოლოოდ სუფთა მოგებამ შეადგინა 1.52% რისკიანი პირობითი კაპიტალისა, რომელიც ფულად გამოხატვაში უდრიდა FFR74 მლნ-ს. ამიტომ მთელმა სტრატეგიამ, საბოლოოდ, მოიტანა მოგება ≈ FFR1.1 მლნ.

ვოლატილური სტრუქტურების გარდა იხილავენ არბიტრაჟულ სტრუქტურებსაც — კონვერსიებს, რევერსიებს, ბოქსებს. ეს სტრატეგიები გამოიყენება, ძირითადად, იმისათვის, რომ დაიხუროს პოზიციები და პორტფელი დაცული იყოს ფასების შემდგომი ცვლილებებისაგან.

9.9 საინვესტიციო პორტფელის რესტრუქტურიზაცია

განვიხილოთ საკითხი, თუ როგორ გამოიყენება აქციების ინდექსზე დადებული ფიუჩერსული და ოფციონური კონტრაქტები საინვესტიციო პორტფელის რესტრუქტურიზაციის მიზნებისათვის.

ნაღდი ფულის გადაყვანა აქციებში და პირიქით. გრძელი პოზიციების შეთავსებას ნაღდ ფულსა და საბირჟო ინდექსებზე ფიუჩერსულ კონტრაქტებში, ეფექტურად გადაჰყავს ნაღდი ფული აქციებში. გრძელი პოზიციის დაკავებას აქციებში და მოკლე პოზიციის დაკავებას ფიუჩერსებში, აქციების პორტფელი გადაჰყავს ნაღდ ფულში.

მაგალითი 9.11. ვთქვათ, ინგლისური ფუნტი სტერლინგის ევროპის სავალუტო მექანიზმიდან გამოსვლის შემდეგ საინვესტიციო ფონდის მენეჯერმა გადაწყვიტა დაედო £1 მლნ დეპოზიტზე 6%-ად. გადაწყვეტილება მიღებულ იქნა ბირჟის ციებ-ცხელების დროს, 16 სექტემბერს, 1992 წ. თანხა განთავსებული იყო 18 სექტემბერს 6 თვით და უნდა დაბრუნებულიყო 18 მარტს, 1993 წ. ამ ვადამდე თანხის გამოთხოვნა არ იყო ნაგულისხმევი.

ოქტომბრის ბოლოს მენეჯერმა იგრძნო, რომ ფასები ბრიტანულ აქციებზე გაიზრდებოდა და მოინდომა ამით ესარგებლა. მაგრამ თანხა უკვე დადებული იყო დეპოზიტზე და მისი გამოყენება დროებით არ შეიძლებოდა.

ამიტომ მენეჯერმა გადაწყვიტა ეყიდა ფიუჩერსები ინდექსზე FTSE 100 იმ მიზნით, რომ მიეღო შემოსავალი ბაზრის ზრდისაგან. 27 ოქტომბერს FTSE 100 ინდექსი 2664.8-ის ტოლი იყო, ხოლო მარტის კონტრაქტის კოტირება იყო 2696.0 ამიტომ FTSE 100-ის ნომინალი £25 × 2669.8 = $66745-ის ტოლი იყო და მენეჯერმა შეიძინა £1 მლნ/ 66745 = 15 კონტრაქტი. 18 მარტს, დახურვის წინ, FTSE 100 ინდექსმა აიწია 2.862%-ით და გახდა 2879.7, მაშინ როცა მარტის კონტრაქტები დაიხურა 2880.0-ზე.

შევადაროთ ორი სტრატეგია: „ნაღდი ფული + ფიუჩერსი" და „27 ოქტომბერს აქციებზე გადართვა" (ასეთი შესაძლებლობა რომ ყოფილიყო).

„ნაღდი ფული + ფიუჩერსი"	
£1 მლნ და 6%-ის დარიცხვა 142 დღის განმავლობაში	1023347.47
მოგება ფიუჩერსებით: 368 ტიკი × $12.50 × ×15 კონტრაქტი	69000
სულ	1092342.47

„27 ოქტომბერს აქციებზე გადართვა"	
საინდექსო პორტფელი £1 მლნ-ზე და კაპიტალის ღირებულების ზრდა 7.86%-ით	1078620.00
მიღებული დივიდენდები წლიური განაკვეთით 3%	13616.44
სულ	1092236.44

განსხვავება — 0.01%!

მაგალითი 9.12. ვთქვათ, 27 ოქტომბერს მეორე მენეჯერმა გადაწყვიტა „გაეყინა" აქციების პორტფელის ღირებულება მიმდინარე ფასების დონეზე. შესაძლოა, მენეჯერმა ეს გადაწყვეტილება მიიღო იმის გამო, რომ ამ მომენტში პორტფელის ღირებულებამ მიაღწია კრიტიკულ დონეს და უფრო მნიშვნელოვანია ამ დონის შენარჩუნება ვიდრე მოგების მიღება ბაზრის შემდგომი ზრდისაგან.

	აქციების რაოდენობა	აქციის ღირებულება £	ჯამური ღირებულება
BTR	25202	496	125001.92
Cadbury Schweppers	27174	460	125000.40
Forte	72674	172	124999.28
GEC	51229	244	124998.76
Hanson	53648	233	124999.84
Marks & Spencer	36443	343	124999.49
J Sainsbury	25303	494	124996.82
Thorn EMI	15263	819	125003.97
სულ			1000000.48

ცხრილი 9.20

ცხრ. 9.20-ში მოყვანილია პორტფელის ღირებულება და შემადგენლობა 27 ოქტომბრისათვის.

FTSE 100-ის ინდექსის ღირებულება ამ დღეს იყო 2669.8, ასე რომ, ინდექსის ნომინალი £66745 და £1 მლნ ღირებულების პორტფელის ჰეჯირებისათვის საჭიროა £1 მლნ/ 66745 = 15 კონტრაქტი. მაგრამ, ამჯერად, მენეჯერმა უნდა გაყიდოს ფიუჩერსები, რათა დაიცვას აქციების გრძელი პოზიცია, ამიტომ იგი ყიდის 15 კონტრაქტს საბირჟო ფასად 2696.

18 მარტს, როცა ფიუჩერსული კონტრაქტების დრო ამოიწურა, მენეჯერმა გადაწყვიტა შეწყვიტოს ჰეჯი. ქვემოთ მოყვანილია 143-დღიანი ოპერაციის შედეგი (იხ. ცხრ. 9.21).

აქციების პროტფელის ღირებულება 12.65%-ით გაიზარდა, აქციების ფასის 10.86%-ით საშუალო ზრდის გამო და დივიდენდების მიღების ხარჯზე (1.79%) (აქ, სიმარტივისათვის, არ ხდება დივიდენდების რეინვესტირება). მათ შორის ყველაზე ძლიერ გაიზარდა BTR, Forte და GEC-ის აქციები,

რომლებმაც მოიტანეს 20%-ზე მეტი მოგება თითოეულმა.

	აქციების რაოდენობა	გადახდილი დივიდენდები (£)	აქციის ღირებულება (£)	ჯამური ღირებულება	პროცენტული ცვლილება	ღირებულების ზრდა	შემოსავლიანობა დივიდენდებზე
BTR	25202	9.00	599	153228.16	22.58%	20.77%	1.81%
Cadbury Schweppers	27174	6.60	479	131956.94	5.57%	4.13%	1.43%
Forte	72674	4.96	202	150402.48	20.32%	17.44%	2.89%
GEC	51229	4.80	305	158707.44	26.97%	25.00%	1.97%
Hanson	53648	5.70	238	130740.18	4.59%	2.15%	2.45%
Marks & Spencer	36443	3.55	359	132124.10	5.70%	4.66%	1.03%
J Sainsbury	25303	4.38	525	133947.76	7.16%	6.28%	0.89%
Thorn EMI	15263	15.05	872	135390.44	8.31%	6.47%	1.84%
სულ				1126497.49	12.65%	10.86%	1.79%

ცხრილი 9.21

ფიუჩერსებმა მოიტანეს დანაკარგები. მარტის ფიუჩერსის ანგარიშსწორების ფასი დახურვისას 2900 იყო, რამაც მოგვცა დანაკარგი

$$408 \text{ ტიკი} \times £12.50 \times 15 \text{ კონტრაქტი} = \$76500.$$

ამიტომ ჯამური შედეგი იქნება: £1126497.49 მოგება და £76500 დანაკარგი, ანუ სუფთა მოგება £1049997.49, რაც შეესაბამება 5%-იან მოგებას.

ამ სტრატეგიის განხორციელების ნაცვლად, მენეჯერს რომ მოეხდინა პორტფელის ლიკვიდაცია და შემოსული თანხა დაედო 143 დღით 6%-იან დეპოზიტზე, მაშინ კაპიტალი პროცენტებითურთ მოგვცემდა £1023507.34, რაც 2.35% მოგებას ნიშნავს.

ამ შემთხვევაში, ორი სტრატეგიის შედეგი არ თანხვდება. ეს აიხსნება იმით, რომ 8 აქცია დომინირებს ბაზარზე როგორც ღირებულებით, ისე დივიდენდების სახით მიღებული შემოსავლით. ბაზარი 8.62%-ით გაიზარდა, მაშინ როცა ზოგიერთი აქცია გაიზარდა 10,86%-ით, რაც იძლევა დამატებით 2.24% შემოსავალს. წლიური 3.5%-იანი შემოსავლიანობა რომ უზრუნველყოთ, დივიდენდებს საშუალოდ 1.37% უნდა მოეტანათ, მაშინ როცა მოიტანეს 1.79%, რაც 0.41%-ის დანამატს ნიშნავს. ამ ორი დანამატის ერთიანობა 2.66%-ის ტოლ პრემიას იძლევა. ეს ხსნის იმ ფაქტს, რომ დაჰეჯირებულმა აქციებმა მოიტანეს 5% შემოსავალი, რაც 2.65%-ით მეტია, მოსალოდნელ შემოსავალზე, 2.35%, რომელიც მიიღება თანხის დეპოზიტზე დადებით. საგულისხმოა, რომ ამ შენიშვნების გათვალისწინებით სხვაობა ისევ 0.01%-ია $(2.66 - 2.65 = 0.01)$.

მენეჯერს რომ საინდექსო პორტფელთან ჰქონოდა საქმე, ჰეჯი უფრო ზუსტი გამოუვიდოდა.

ოფციონები ინდექსებზე და საინდექსო ფიუჩერსებზე. აქციების ინდექსებზე და საინდექსო ფიუჩერსებზე ოფციონების გამოყენება ისევე ხდება, როგორც ოფციონებისა აქციებზე.

მაგალითი 9.13. განვიხილოთ სპეკულანტი, რომელსაც ხარის პროგნოზი აქვს აქციების ბაზრის ძრაობაზე. დავუშვათ, რომ დღეს, 22 თებერვალს, S&P500 ინდექსის მნიშვნელობაა 435.25. სპეკულანტი ფიქრობს, რომ მომავალი ორი თვის განმავლობაში ბაზარი აიწევს 5.10%-ით და შემდეგ ისევ დაიწევს. სპეკულანტს არ სურს შეიძინოს ცალკეული აქცია, რადგან არ სურს, დახარჯოს ფული ისეთი პორტფელის შექმნაზე, რომელიც მას ხელთ ძალიან მცირე ხნის განმავლობაში უნდა ჰქონდეს. ამავე დროს მას არ სურს განიცადოს დანაკარგი, თუ მისი პროგნოზი არ გამართლდა. ამიტომ მან გამორიცხა საინდექსო ფიუჩერსების შეძენაც.

სპეკულანტმა გადაწყვიტა შეიძინოს ხარის კოლ სპრედი, რომელიც შედგება S&P500-ის აპრილის ოფციონებისგან (ე.წ. SPX-კონტრაქტი). ამიტომ მან:

$$\left.\begin{array}{l}\text{იყიდა 50 აპრილის 440–SPX კოლ ოფციონი } 5\frac{1}{2}\text{-ად}\\[6pt] \text{გაყიდა 50 აპრილის 455–SPX კოლ ოფციონი } 1\frac{1}{4}\text{-ად}\end{array}\right\}\ \text{სუფთა პრემია } 4\frac{1}{4},$$

რადგან ინდექსის 1 პუნქტი ღირს $\$100$, ამიტომ სუფთა პრემია ტოლია $4\frac{1}{4} \times 50 \times \$100 = \$21250$.

სამი კვირის შემდეგ, 16 მარტს, ინდექსი გაიზარდა 451.37-მდე. სპეკულანტმა გადაწყვიტა დაეხურა პოზიცია და მიეღო მოგება უფრო ადრე, ვიდრე იყო ნავარაუდევი. პოზიციის ლიკვიდაცია მოხდა შემდეგ პირობებში:

$$\left.\begin{array}{l}\text{გაყიდვა 50 აპრილის 440–SPX კოლ ოფციონებისა 15-ად}\\[6pt] \text{ყიდვა 50 აპრილის 455–SPX კოლ ოფციონებისა } 4\frac{3}{4}\text{-ად}\end{array}\right\}\ \text{სუფთა პრემია } 10\frac{1}{4},$$

რომელმაც მისცა სპეკულანტს $10\frac{1}{4} \times 50 \times \$100 = \$51250$ და, ამიტომ, სპეკულანტმა მიიღო $\$30000$ წმინდა მოგება, რაც $\$25250$ სიდიდის საწყისი ინვესტიციის გათვალისწინებით, იძლევა 141% შემოსავლიანობას 3 კვირაში. შესაძლო მაქსიმალური მოგება შეადგენს $\$53750$ (ანუ 253%). ამ მოგებას სპეკულანტი მიიღებდა, თუ იგი შეინარჩუნებდა პოზიციას ბოლომდე და ბაზისი გაიზრდებოდა 455-მდე, (ან უფრო მაღლა აიწევდა). ყველაზე ცუდ შემთხვევაში, თუ ბაზარი ოფციონების აღსრულების წინ არ იქნებოდა 440 დონეზე უფრო მაღლა, მაშინ მთელი პრემია, $\$21250$, დაიკარგებოდა. ეს კიდურა შემთხვევები ხსნის სწორედ ოფციონის დიდ ლევერიჯს.

იმის მაგივრად, რომ დაეხურა პოზიციები მარტის შუა რიცხვებში, სპეკულანტს შეეძლო „გაეხვია“ უფრო მაღალი სპრედისკენ. კერძოდ, მას

შემდეგის გაკეთება შეეძლო:

$$\left.\begin{array}{l}\text{გაეყიდა 50 აპრილის 440–SPX კოლ ოფციონები 15-ად}\\[6pt] \text{ეყიდა 100 აპრილის 455–SPX კოლ ოფციონები } 4\frac{3}{4}\text{-ად}\\[6pt] \text{გაეყიდა 50 აპრილის 460–SPX კოლ ოფციონები } 3\frac{1}{8}\text{-ად}\end{array}\right\}\ \text{სუფთა პრემია } 8\frac{5}{8}.$$

მართალია, ეს სტრატეგია ამცირებს მიღებულ თანხას \$43125-მდე და მოგებას \$21875-მდე, მაგრამ, სამაგიეროდ, სპეკულანტი არის ხარის „თავისუფალი" 455–460 სპრედის მფლობელი და მას შეუძლია მონაწილეობა მიიღოს მოგებაში, თუ ბაზარი აიწევს 460-მდე.

ოფციონები ინდექსებზე გამოიყენება მაშინაც, როდესაც აქციების დიდი პორტფელია სამართავი.

თუ პორტფელი კარგად დივერსიფიცირებულია და კარგად ასახავს ინდექსის ქცევას, მაშინ დიდი პრობლემები არ იქმნება და ოფციონების საჭირო რაოდენობა შეიძლება გაითვალოს ისევე, როგორც ეს ფიუჩერსებისათვის ხდებოდა. ვთქვათ, პორტფელის ღირებულებაა £26 მლნ და ის უნდა დაპეჯირდეს ინდექს FTSE 100-ის ოფციონებით, რომელთა 1 პუნქტი £10 ღირს. თუ მოცემულ მომენტში ინდექსი 3045-ის ტოლია, მაშინ კონტრაქტების საერთო რაოდენობა იქნება

$$£26\ \text{მლნ}/(£10 \times 3045) = 854\ \text{კონტრაქტი}.$$

თუ პორტფელს სხვა სტრუქტურა აქვს, მაშინ რჩება საბაზისო რისკი, რომლის ნაწილის მართვა ოფციონების რაოდენობის შეცვლით შეიძლება.

თავდაპირველად რეგრესიული ანალიზის ჩატარებაა საჭირო. ამ შემთხვევაში მოდელს აქვს სახე

$$P_t = \alpha + \beta I_t + \varepsilon,$$

სადაც P_t პორტფელის ღირებულებაა t-ურ მომენტში, I_t — ინდექსის ღირებულება, α — ჩანაცვლების პარამეტრი, β — დახრილობის პარამეტრი, ε — I_t-სთან არაკორელირებული შემთხვევითი ცდომილებაა.

თუ კორელაციური ანალიზის ჩატარებისას გამოირკვა ინდექსისა და პორტფელის დიდი კორელაცია, მაშინ β პარამეტრს აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ $\beta = 2$, მაშინ ინდექსის ერთი ერთეულით შეცვლა გამოიწვევს პორტფელის 2 ერთეულით ცვლილებას.

თუ β პარამეტრი შეფასებულია და, მაგალითად, β=1.24-ს, მაშინ ჰეჯისთვის საჭიროა არა 854 კონტრაქტი, არამედ

$$854 \cdot 1.24 = 1059\ \text{კონტრაქტი}.$$

კონტრაქტების რაოდენობა არის ყოველგვარი სტრატეგიის აგების საფუძველი. მაგალითად, კოლარის შესაქმნელად მენეჯერმა უნდა შეიძინოს 1059

პუტ ოფციონი მცირე ფასად და გაყიდოს 1059 კოლ ოფციონი უფრო დიდი სტრაიკით.

ε განსაზღვრავს ნარჩენ ცდომილებას და არ არის დამოკიდებული ინდექსზე. თუ კორელაციის კოეფიციენტი დიდია, მაშინ ε-ის გავლენა მცირე იქნება და აგებული ჰეჯი მაღალეფექტური გამოვა.

თუ პორტფელი სუსტად კორელირებს ინდექსთან, მაშინ ან უნდა შევურიგდეთ დიდ საბაზისო რისკს, ან უნდა გამოვიყენოთ კალათის ოფციონი.

9.10 აქციების რისკის მართვის სხვა ოფციონური სტრატეგიები

პორტფელის დაზღვევა. ეს სტრატეგია, რომელიც შემოღებული იყო 80-იან წლებში და დიდი პოპულარობით სარგებლობდა, უფრო ფრთხილად გამოიყენება 1987 წლის საფონდო კრახის შემდეგ. ასეთ სტრატეგიას ხშირად ურევენ პროგრამულ ვაჭრობასთან და აქტივების განაწილებასთან, რადგან მათ ბევრი საერთო აქვთ.

პროგრამული ვაჭრობა წარმოადგენს კომპიუტერულ სისტემას, რომელიც გვთავაზობს და აფორმებს გარიგებებს მიმართულს ბაზარზე წარმოქმნილი არბიტრაჟული სიტუაციების გამოყენებისაკენ. აქციების ბირჟაზე მომუშავე ასეთი სისტემა ადგენს საინდექსო ფიუჩერსების ფასებსა და მათ საფუძვლად მყოფ აქციის ფასებს შორის შეუთანხმებლობას და შემდეგ ამით სარგებლობს.

აქტივების გადანაწილებას უწოდებენ ისეთ ქმედებას, როცა ფიუჩერსებით აქციათა ინდექსებზე და ობლიგაციებზე ხდება პორტფელში შემავალ ქაღალდების პროპორციების შეცვლა. თუ პორტფელში შემავალი აქციები, ობლიგაციები და ნაღდი ფული გარკვეული პროპორციით არის წარმოდგენილი, მაშინ ეს პორტფელი ინდექსზე ფიუჩერსის მეშვეობით შეიძლება გადავიყვანოთ სხვა პროპორციების მქონე პორტფელში.

ასეთი სტრატეგიის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ის გაცილებით უფრო იაფია თვით აქტივების ყიდვა-გაყიდვაზე.

პორტფელის დაზღვევა სხვა არაფერია, თუ არა სინთეზური ოფციონის შექმნა. თავდაპირველად ეს სტრატეგია ამერიკელი მეცნიერების ლელანდისა და რუბინშტეინის მიერ იყო აგებული საპენსიო ფონდებისათვის.

ადვილი მისახვედრია, რომ კოლ ოფციონის მსგავსი სტრუქტურა შეიძლება, მაგალითად, შემდეგი სამი გზით შეიქმნას:

- ვიყიდოთ აქციები და დამცველი პუტ ოფციონი ფასის ქვემოდან დაცვისათვის.

- დავდოთ თანხა დეპოზიტზე და ვიყიდოთ კოლ ოფციონი ინდექსზე, რათა გვქონდეს მოგების პოტენციალი.

- გამოვიყენოთ აქტივების გადანაწილების დინამიური სტრატეგია.

პირველი ორი სტრატეგია ტრივიალურად ეკვივალენტურია კოლ ოფციონისა. პრაქტიკაში სირთულეს ვადები წარმოქმნის — ოფციონები ინდექსებზე მოკლევადიანია.

ამის გამო, პოპულარობა მოიხვეჭა მესამე მეთოდმა, რომელსაც ჩვენ უკვე ვიცნობთ დინამიური ჰეჯის სახელით. ამიტომ აქ ჩვენ გამოვტოვებთ დეტალებს და მივაქცევთ ყურადღებას მხოლოდ შემდეგ მნიშვნელოვან გარემოებას: აქტივების დინამიური გადანაწილების დროს, საჭიროა აქციების ყიდვა-გაყიდვა. ამასთან, თუ გვინდა კოლ ოფციონის ზუსტი სინთეზი, ყიდვა-გაყიდვათა რაოდენობა საკმაოდ დიდი უნდა იყოს.

სტრატეგიის ავტორების მთავარი აღმოჩენა ის გახლდათ, რომ აქციების ყიდვა-გაყიდვის მაგივრად, მათ გამოიყენეს ფიუჩერსები ინდექსებზე. ფიუჩერსების ყიდვა-გაყიდვა კი, როგორც ვიცით, გაცილებით უფრო იაფია, ვიდრე უშუალოდ სპოტ-ბაზარზე მოქმედება. სინთეზური ოფციონის ფასი ამიტომ მკვეთრად შემცირდა.

ეს სტრატეგია, იაფი და, ერთი შეხედვით, უნაკლო, შეიცავს ერთ ხარვეზს, რომელიც 1987 წლის კრახმა გამოავლინა.

საქმე იმაშია, რომ უმრავლესობა პორტფელებისა ამ პერიოდში — ეს პერიოდი კი იყო ბაზრის ხანგრძლივი ზრდის პერიოდი — იმართებოდა ამ სტრატეგიაზე დაყრდნობით. ამიტომ პორტფელების უმეტესი ნაწილი სრულად იყო ინვესტირებული აქციებში, ან უშუალოდ, ან საინდექსო ფიუჩერსებში გრძელი პოზიციების დაკავების მეშვეობით.

აქციების ბაზრის თავდაპირველმა დაწევამ (დაახლოებით 10%-ით) გამოიწვია ფიუჩერსული კონტრაქტების დიდი რაოდენობის გაყიდვის ბრძანებები, რადგან არსებული სქემის მიხედვით ამ ხერხით ხდებოდა პორტფელებში აქციების წილის შემცირება. ეს ნაკადი იმდენად ინტენსიური და მოულოდნელი აღმოჩნდა, რომ საინდექსო ფიუჩერსების გაყიდვა ხდებოდა მნიშვნელოვანი დისკონტით ძირითადი აქტივების ფასებთან შედარებით.

ამან, თავის მხრივ, გამოიწვია საპროგრამო ვაჭრობის სისტემის აქტივიზაცია, რადგან შეიქმნა არბიტრაჟი.

ამ პროგრამების მიხედვით მოხდა აქციების დიდი რაოდენობის გაყიდვა, რამაც, თავის მხრივ, კიდევ უფრო დასწია ქვემოთ ინდექსი.

დაიწყო ჯაჭვური რეაქცია, რომელიც კრახით დამთავრდა. დოუ-ჯონსის ინდექსი შემცირდა 500 პუნქტით, გაყიდვისათვის შემოთავაზებული იყო $12 მილიარდის ღირებულების აქციები და ფიუჩერსები. ამასთან, მხოლოდ მესამედის გაყიდვა მოხერხდა.

შევნიშნოთ, რომ კრახს გადაურჩნენ „მიამიტი“ მენეჯერები, რომლებსაც პორტფელი დაცული ჰქონდათ მარტივად — დამცავი პუტ ოფციონის ყიდვით.

მიუხედავად ასეთი კრახისა, სტრატეგიას სრულად არ დაუკარგავს თავისი მნიშვნელობა, მეტადრე იმ იდეას, რომ უნდა გამოვიყენოთ ფიუჩერსები ძირითადი აქტივების ნაცვლად. 1987 წლის კრახმა გვიჩვენა, აგრეთვე, რომ საჭიროა სიფრთხილის გამოჩენა და თავის დაცვა კომპიუტერული პროგრამების არამართვადი ქცევისგან იმ შემთხვევაში, როცა ბაზარი არასტანდარტულად და უეცრად იცვლება.

ეგზოტიკური ოფციონების გამოყენება. ცხადია, აქ გასაქანი ფინანსური ინჟინერიისათვის შემოუსაზღვრელია. ეგზოტიკურ ოფციონებს და მათ გამოყენებებს ამ წიგნის მე-7 თავი ეძღვნება. მოვიყვანოთ ზოგიერთი ეგზოტიკური ოფციონის გამოყენების მაგალითი.

კალათის ოფციონები. ჰეჯირების დროს შეიძლება წარმოიქმნას სიტუაცია, როდესაც რისკი დაკავშირებულია არა მხოლოდ ერთი ტიპის აქციებთან, მაგრამ არც აქციების მთელ ბაზართან. ასეთი სიტუაცია შეიქმნება, თუ ფონდის მენეჯერს სურს დააჰეჯიროს პორტფელი, რომელიც შედგება იმ კომპანიების აქციებისაგან, რომლებიც წარმოადგენენ ეკონომიკის რომელიმე სექტორს, მაგალითად, ქიმიურ წარმოებებს ან მანქანათმშენებლობას.

ამ შემთხვევაში ოფციონები ინდექსებზე შეიძლება უსარგებლო იყოს, მითუმეტეს თუ ისინი სუსტად კორელირებენ მოცემულ პორტფელთან. რასაკვირველია, შეიძლება შევქმნათ ჰეჯი, თუ შევიძენთ ოფციონებს პორტფელში შემავალ ყოველი კომპანიის აქციაზე. მაგრამ, როგორც წესი, ეს სტრატეგია ძალიან ძვირია, რადგან ინვესტორს ამ შემთხვევაში არ შეუძლია შეამციროს პორტფელის რისკი, რომელიც წარმოიქმნება აქციათა გაერთიანებით.

სწორედ ასეთი სიტუაციებისათვისაა შექმნილი კალათის ოფციონები — ოფციონები ფასიან ქაღალდების კალათზე.

კალათის ოფციონების აღსრულებისას, გადახდა განისაზღვრება კალათში შემავალი ქაღალდების საშუალო შეწონილ ფასებზე დაყრდნობით. მენეჯერმა უნდა წარადგინოს კალათის ზუსტი აღწერა და სწორედ ამ აღწერაზე დაყრდნობით დამუშავდება შესაბამისი ოფციონის სპეციფიკაცია. მიუხედავად იმისა, რომ ოფციონს ექნება სპეციალური კოტირება, მისი ფასი ნაკლები იქნება ოფციონების კალათის ფასზე. კლიენტს შეუძლია, მაგალითად, იყიდოს კალათის პუტ-ოფციონი, რათა შემოსაზღვროს კალათის ფასი ქვემოდან და ა.შ.

ცისარტყელას ანუ მაქსიმალურად ეფექტური ოფციონები. ასეთი ოფციონის გადახდის ფუნქცია განისაზღვრება ძირითად ფასებს შორის მაქსიმალური ან მინიმალური ფასით. მაგალითად, ცისარტყელას ოფციონი შეიძლება შევქმნათ გერმანულ DAX-ზე, ინგლისურ FTSE 100-ზე და ფრანგულ CAC

40-ზე. კოლ ოფციონის მყიდველი აღსრულებისას მიიღებს თანხას, რომელიც შეესაბამება იმ ინდექსს, რომელიც ოფციონის სიცოცხლის განმავლობაში ყველაზე მეტად გაიზარდა. ასეთი ოფციონის საშუალებით შეიძლება პასუხი გაეცეს შემდეგ კითხვებს: რომელ ბაზარზე განვათავსოთ სახსრები? როგორ გადავანაწილოთ თანხები სხვადასხვა ბაზრებს შორის?

კვანტო-ოფციონები შექმნილია იმისთვის, რომ ინვესტორებმა იმუშაონ უცხოური აქციების ბაზრებზე სავალუტო რისკის გარეშე.

ვთქვათ, ამერიკელი ინვესტორი თვლის, რომ ბრიტანული აქციების ბაზრის ფასები გაიზრდება უახლოეს მომავალში 15%-ით, ხოლო ამერიკული აქციების ბაზრისა კი მხოლოდ 10%-ით. თუ მან შეიძინა კოლ ოფციონი რომელიმე ინგლისურ აქციაზე ან ინდექსებზე FTSE 100, მაშინ იგი მოგებაში დარჩება, თუ ამ კომპანიის ან მთლიანად ბაზრის აწევა მოხდა. მაგრამ, რადგან ორივე შემთხვევაში გადახდა ფუნტ სტერლინგებში წარმოებს, ამიტომ საჭირო იქნება ფუნტი სტერლინგის გადაცვლა დოლარზე. თუ ოფციონის მოქმედების ვადის განმავლობაში ფუნტი სტერლინგი დაეცა დოლარის მიმართ 10%-ით, მაშინ ბრიტანულ ბაზარზე ინვესტირება აზრს დაკარგავს.

კვანტო-ოფციონი ამ პრობლემას ხსნის, რადგან ამ ოფციონის პირობებით გადახდა წარმოებს საწყის ვალუტაში, წინასწარ შეთანხმებული კურსით. მაგალითად, კვანტო კოლ ოფციონის მიხედვით, რომელიც დადებულია ინდექსზე FTSE 100-ზე 3000-ის ტოლი შეთანხმების ფასით, გადახდა \$10 შეიძლება იყოს ინდექსის ზრდის ყოველი პუნქტისათვის და თუ ინდექსმა აიწია 3100-მდე, ინვესტორი მიიღებს \$1000-ს იმისდა მიუხედავად, თუ ვალუტის როგორი გადაცვლის კურსი იქნება ამ დღეს.

კვანტო-ოფციონის ფასდადება საკმაოდ რთული საქმეა, რადგან უნდა გავითვალისწინოთ ბევრი დამატებითი ფაქტორი. სახელდობრ საპროცენტო განაკვეთებს შორის განსხვავება ორი ვალუტისთვის, გადაცვლის კურსის ვოლატილობა, აქციებსა და გადაცვლის კურსს შორის კორელაცია და ა.შ.

მაგალითი 9.14. ვთქვათ, საპროცენტო განაკვეთი იცვლება შემდეგი სცენარით (იხ. ცხრ. 9.22):

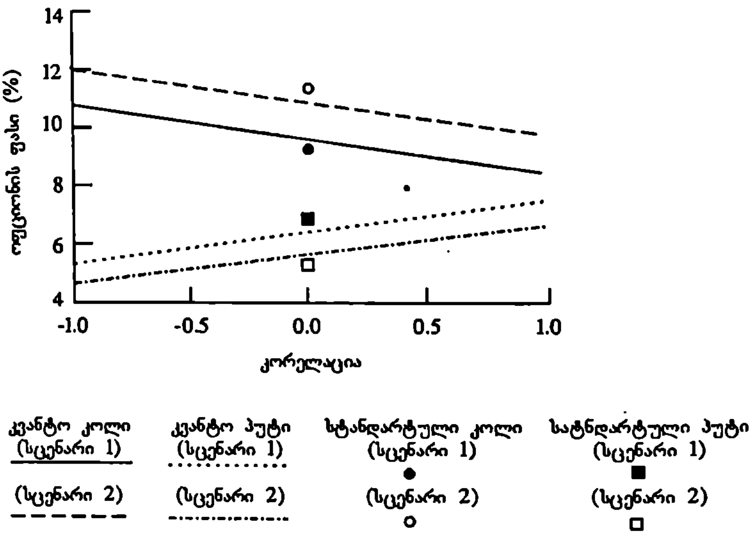
საპროცენტო განაკვეთი	1-ლი სცენარი	2-ე სცენარი
ფუნტებში	4.0%	6.0%
დოლარებში	7.0%	3.5%

ცხრილი 9.22

სამართლიანი კვანტო ოფციონების ფასები აღსრულების ვადით 1 წელი, რომლებიც დადებულია FTSE 100 ინდექსზე და დენომინირებულია დოლარებში, ნაჩვენებია ნახ. 9.40-ზე.

როგორც მოსალოდნელი იყო, მეორე სცენარის განხორციელებისას, კვანტო კოლ ოფციონებიც და სტანდარტული კოლ ოფციონებიც უფრო ძვირია. პუტ ოფციონები კი მეორე სცენარის განხორციელების დროს არის

უფრო ძვირი.



ნახ. 9.40

აღვნიშნოთ, რომ ეს თანაფარდობები კვანტო ოფციონებისათვის შენარჩუნდება, თუ განაკვეთები ფუნტ სტერლინგებში ორივე შემთხვევაში ტოლი იქნება. საქმე იმაშია, რომ კვანტო ოფციონის უცხოურ ვალუტასთან დაკავშირებული შემადგენელი დამოკიდებულია ფორვარდული გაცვლის კურსზე, რომელზეც, თავის მხრივ, გავლენას ახდენს ორი ვალუტის შესაბამის საპროცენტო განაკვეთებს შორის სხვაობა. სტანდარტული ოფციონი უცხოური ვალუტის განაკვეთზე დამოკიდებული არ არის.

ამიტომ, კვანტო კოლ ოფციონი, რომელიც იძლევა უფლებას გაყიდო ფუნტები და იყიდო დოლარები ფიქსირებული კურსით, იქნება მით უფრო ძვირი, რაც უფრო სუსტია ფორვარდული ფუნტი.

შევნიშნოთ, რომ კორელაციის გავლენაც საკმაოდ ძლიერია, კორელაციის კოეფიციენტის ზრდა ამცირებს კოლ ოფციონების ფასს და ზრდის პუტ ოფციონების ფასს.

ამით დავასრულოთ საუბარი ამ საინტერესო, მაგრამ დასავლეთის ბაზრებისთვისაც კი ჯერ კიდევ უცხო და შეუსწავლელ ოფციონებზე.

9.11 სტრუქტურირებული ფინანსები

ფინანსური ინჟინერიის ინსტრუმენტები და მეთოდები, რომლებიც აღწერილი იყო წინა პუნქტებში, გამოიყენებოდა ცალკეული საკითხების შესასწავლად, მაგალითად, იმისათვის, რომ გაგვერკვია, თუ როგორ უნდა გვემართა სავალუტო ან საპროცენტო რისკი.

დავასრულოთ თავი იმ შესაძლებლობების მოკლე აღწერით, რომლებსაც გვიხსნის ფინანსური ინჟინერიის ინსტრუმენტებისა და მეთოდების კომბინირება ახალი ფინანსური სტრუქტურების მისაღებად.

პასივებთან დაკავშირებული სტრუქტურები. კაპიტალის ბაზრებზე მოქმედი ემიტენტებისა და ინვესტორების ინტერესები შეიძლება წინააღმდეგობაში მოვიდეს ერთმანეთთან მოთხოვნილებათა სხვადასხვაობის, ბაზრის ძრაობაზე სხვადასხვა შეხედულებებისა და სხვა მიზეზების გამო. ამიტომ ემიტენტს შეიძლება აწყობდეს და, უფრო მეტიც, მისთვის აუცილებელიც კი იყოს, ვალდებულებების ერთი ტიპი, მაშინ როცა ინვესტორს სჭირდება სხვა ტიპის ვალდებულებები.

ასეთ შემთხვევებში, ფინანსური ინჟინერიის ძირითადი ინსტრუმენტები — დერივატივები — იდეალურად არის მორგებული ვალდებულებების სტრუქტურის გარდასაქმნელად.

გარდაქმნის ერთ-ერთი მთავარი სახეა ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთის გადაყვანა მცურავ განაკვეთში. საპროცენტო სვოპი ამ შემთხვევაში იძლევა საკითხის სტანდარტულ გადაჭრას. უფრო რთული გარდაქმნის ჩასატარებლად შეიძლება გამოვიყენოთ ოფციონების შესაძლებლობები.

ასეთი სტრუქტურული ცვლილების აუცილებლობის მაგალითები მრავლად იყო მოყვანილი, როცა ვიხილავდით ცალკეული ინსტრუმენტის თვისებებს და შესაძლებლობებს. ერთ-ერთი ყველაზე რთული საკითხი, რომელიც აქ წარმოიშვება, მდგომარეობს შესაძლებლობებისა და მეთოდების სისტემატიზაციაში, რათა არ „დავიხრჩოთ" შესაძლო კომბინაციების მასაში. შემდეგ ცხრილში მოყვანილია სხვადასხვა სახის ვალდებულებებს შორის გადასვლის ხერხების მოკლე ნუსხა (იხ. ცხრ. 9.23).

აქტივებთან დაკავშირებული სტრუქტურები. აქტივის ორი ძირითადი მახასიათებელია სანდოობა და რენტაბელობა. სტრუქტურირების მიზანს, ხშირად, აქტივების შემოსავლიანობის ზრდის ამოცანის გადაწყვეტა წარმოადგენს. ამ ამოცანის გადაწყვეტის ერთ-ერთი გზაა შემოსავლიანობის რაიმე ინდექსთან დაკავშირება. ამ კონკრეტული რისკით აღჭურვის საფასურად ინვესტორი საბაზრო შემოსავლიანობაზე უფრო მაღალ შემოსავლიანობას იღებს. ქვემოთ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა ობლიგაციის კუპონი და დაფარვის ფასი „მიბმულია" ამა თუ იმ საპროცენტო ინდექსთან.

სპრედ-ობლიგაციები. ეს ინსტრუმენტი ისე არის სპეციფიცირებული, რომ შემოსავალი LIBOR-ის ორ განაკვეთებს შორის სპრედთანაა მიბმული.

მაგალითისთვის შეიძლება დავასახელოთ ობლიგაცია, რომელიც გამოუშვა Credit Suisse First Boston (CSFB)-მ იმ ინვესტორებისათვის, რომლებიც თვლიდნენ, რომ სპრედი LIBOR-ის ორ განაკვეთს შორის, გერმანულ მარკასა და ფრანგულ ფრანკზე, გახდება უფრო ნაკლები არა მხოლოდ მიმდინარე სიდიდეზე, 225 ბაზის პუნქტზე, არამედ ორი შემოსავლიანობის მრუდით პროგნოზირებულ 100 ბაზის პუნქტზეც.

		სასურველი სასესხო ვალდებულება			
		ფიქსირებული განაკვეთით	მცურავი განაკვეთით	უკუგამოხმობადი, ფიქსირებული განაკვეთით	დაბრუნებადი, ფიქსირებული განაკვეთით
ფიქსირებული სასესხო ვალდებულება	ფიქსირებული განაკვეთით		მივიღოთ ფიქსირებული განაკვეთი სტანდარტული სვოპით	ვიყიდოთ მიმღების სვოპციონი	გავყიდოთ გადამხდელის სვოპციონი
	მცურავი განაკვეთით	გადავიხადოთ ფიქსირებული განაკვეთი სტანდარტული სვოპით		გადავიხადოთ ფიქსირებული განაკვეთი სვოპით და ვიყიდოთ მიმღების სვოპციონი	გადავიხადოთ ფიქსირებული განაკვეთი სვოპით და გავყიდოთ გადამხდელის სვოპციონი
	უკუგამოხმობადი, ფიქსირებული განაკვეთით	გავყიდოთ მიმღების სვოპციონი	მივიღოთ ფიქსირებული განაკვეთი სვოპით და გავყიდოთ მიმღების სვოპციონი		გავყიდოთ გადამხდელის სვოპციონი და მიმღების სვოპციონი
	დაბრუნებადი, ფიქსირებული განაკვეთით	ვიყიდოთ გადამხდელის სვოპციონი	მივიღოთ ფიქსირებული განაკვეთი სვოპით და ვიყიდოთ გადამხდელის სვოპციონი		

ცხრილი 9.23

ამ ერთწლიან უკუპონო ობლიგაციას ჰქონდა ფასი, რომელიც შემდეგნაირად დაითვლებოდა

$$100\% + (10 \times (1.72\% - \rho)),$$

სადაც ρ ზემოაღნიშნული სპრედია დაფარვის მომენტისთვის. იმ შემთხვევაში თუ სპრედი შემცირდებოდა 100 ბაზის პუნქტამდე, მაშინ ობლიგაციის

შემოსავალი გახდებოდა 7,2%, თუ კი სპრედი შემცირდებოდა 72 ბაზის პუნქტამდე შემოსავლიანობა გაიზრდებოდა 10%-მდე.

აღწერილი ტიპის ინსტრუმენტების გარდა არსებობენ ობლიგაციები, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან სვოპებთან, მცურავი კურსის მქონე არაპროპორციული ობლიგაციები, საინდექსო ამორტიზირებული სვოპები და სხვ.

კვანტო-სტრუქტურები. ერთ-ერთ საინტერესო და მნიშვნელოვან ფინანსურ ინოვაციას წარმოადგენს ე.წ. სხვაობიანი სვოპი, რომელიც ცნობილია აგრეთვე, როგორც ვალუტა-დაცული სვოპი.

ის საბაზისო სვოპის გარკვეული ნაირსახეობაა. საბაზისო სვოპში ერთი მცურავი საპროცენტო განაკვეთი გაიცვლება მეორე მცურავ განაკვეთზე, მაგალითად, LIBOR-ი, დენომინირებული ამერიკულ დოლარში, გაიცვლება 30-დღიანი ამერიკული ფასიანი ქაღალდის შემოსავალზე. მართალია, ამ შემთხვევაში ბაზისი სხვადასხვაა, მაგრამ ვალუტა ერთი და იგივეა.

სხვაობიან სვოპში ერთ-ერთი მცურავი განაკვეთი ინდექსირდება LIBOR-ით უცხოურ ვალუტაზე, ყველა გადახდა კი ერთი და იგივე ვალუტით ხდება.

მაგალითად, შეიძლება წარმოვადგინოთ ინვესტორი, რომელიც იხდის დოლარის LIBOR-ს და იღებს 6 თვიან მარკის LIBOR-ს მოცემული მარჟის გამოკლებით, ამასთან ყველა გადახდა ინდექსირდება და ხორციელდება დოლარში. ასეთი სვოპი სრულად ქრის სავალუტო რისკის პრობლემას.

სხვაობიანი სვოპის გარდა წარმოიქმნა რიგი მონათესავე პროდუქტებისა.

სხვაობიანი კეპები და ფლორები. ამ ინსტრუმენტებს სავალუტაშორისო კეპებსა და ფლორებსაც უწოდებენ. ისინი აფიქსირებენ ორ ვალუტაში დენომინირებული LIBOR-ის განაკვეთებს შორის სხვაობის ზედა და ქვედა საზღვრებს. მაგალითად, საპროცენტო განაკვეთების სპრედის კეპი შემოსაზღვრავს LIBOR-ის ორ განაკვეთს შორის სხვაობას, მაგრამ გადახდები მესამე ვალუტაში წარმოებს. არსებობენ განაკვეთების სპრედის ფლორებიც. ვალუტა-დაცული კეპები და ფლორები ჰგავანან ჩვეულებრივ კეპებს და ფლორებს, მაგრამ გადახდა წარმოებს მესამე ვალუტაში. მაგალითად, თუ ამერიკელი ინვესტორი იღებს კუპონებით LIBOR-ს გერმანული მარკით 220 ბაზის პუნქტის გამოკლებით, მაშინ მას შესაძლოა მოუნდეს, შემოსაზღვროს ქვემოდან თავისი სუფთა შემოსავალი 3,50%-ით, რისთვისაც საჭიროა ფლორი გერმანული მარკების LIBOR-ზე განაკვეთით 5,70%. ჩვეულებრივი ფლორის გამოყენებით გადახდები მარკებში იქნება განსახორციელებელი, რაც წარმოქმნის სავალუტო რისკს. შესაბამისი ვალუტა-დაცული ფლორი სრულყოფილად გადაჭრის ამ პრობლემას.

სტრუქტურირების ახალი ინსტრუმენტები. აღვნიშნოთ ვალდებულებები მცურავი განაკვეთით: ანგარიშსწორების გადავადებით, რევერსული, კეპირებული, კოლარირებული, ჯერადი ინსტრუმენტები. ისინი წარმო-

ადგენენ მცურავი საპროცენტო განაკვეთის მართვის ახალ იარაღებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ინვესტორთა სულ უფრო და უფრო რაფინირებულ მოთხოვნებს.

ორვალუტიანი და ვალუტათაშორისო სტრუქტურები ისეთი ინსტრუმენტებია, რომლებიც სავალუტო კურსების ცვლილებით სარგებლობისა და სპეკულაციის საშუალებას იძლევიან. ასეთი ინსტრუმენტები უნდა შეიცავდნენ არსებულ სავალუტო რისკს. სავალუტო გაცვლის ჩვეულებრივი ინსტრუმენტების გამოყენება სპეკულაციების ჩასატარებლად შეიძლება წააწყდეს გარკვეულ შეზღუდვებს ან პროცედურულ სირთულეებს.

ორვალუტიანი ობლიგაციები. თუ ინვესტორი ფიქრობს, რომ რომელიმე ვალუტის კურსი ან არ შეიცვლება ან გაიზრდება, და სურს აქედან მიიღოს მოგება, ოღონდ არ სურს გარისკოს ძირითადი კაპიტალით იმ შემთხვევაში, როცა მისი პროგნოზი მცდარი აღმოჩნდება, იგი მიმართავს ორვალუტიან ობლიგაციას. ეს ობლიგაციები უბრუნებენ ინვესტორს ძირითად კაპიტალს ინვესტორის ვალუტაში, მაგრამ კუპონს იხდიან უცხოური ვალუტით. მაგალითად, ობლიგაციას ნომინალით იენებში შეიძლება მოჰქონდეს საკუპონო შემოსავალი ლირებში საბაზრო ფასებზე უფრო მაღალი ფასით. ეს სტრუქტურა უფრო მარტივია, ვიდრე კვანტო სტრუქტურა, რადგან არა მხოლოდ ინდექსირება, არამედ გადახდაც წარმოებს ერთი და იმავე უცხოური ვალუტით. ინვესტორი სარგებლობს უფრო მაღალი შემოსავლით, ვიდრე საბაზრო, მაგრამ იგი არ იღებს სავალუტო დაზღვევას.

სავალუტაშორისო კონვერტაციები. ეს ინსტრუმენტი იძლევა საშუალებას ობლიგაციიდან ნომინალით ერთ ვალუტაში, გადავიდეთ ობლიგაციაზე ნომინალით მეორე ვალუტაში. მაგალითად, ფრანგმა ემიტენტმა შეიძლება გამოუშვას 7-წლიანი ობლიგაცია, 9.45%-ად, ნომინალით FFR 500 მლნ, რომელიც კონვერტირდება ორი წლის შემდეგ $100 მლნ, 8.145%-იან ობლიგაციად იგივე დაფარვის ვადით. თუ დოლარი ამ ხნის განმავლობაში გაძლიერდა, ან ფრანკისა და დოლარის შემოსავლიანობებს შორის სხვაობა გაიზარდა, მაშინ კონვერტაცია მოგებას მოგვცემს. ასეთი ობლიგაცია უთუოდ ძალიან მიმზიდველი იქნებოდა იმ ინვესტორისათვის, რომელსაც სჯერა, რომ ასეთი ცვლილებები მოხდება, მაგრამ უნდა, რომ ჰქონდეს დაცვა, რომელიც, საჭიროების შემთხვევაში, უზრუნველყოფდა ფრანგული ნომინალის შენარჩუნების შესაძლებლობას. კონვერტაციის რისკის დასაჰეჯირებლად ემიტენტს შეუძლია შეიძინოს ვალუტათაშორისო სვოპციონიც.

წიგნის წინა თავებში გადმოცემული მასალა მთელი სიგრძე-სიგანით გამოიყენება ფინანსური რისკის მართვის დროს. ამიტომ ამ თავის ტექსტის სრული ათვისებისათვის საჭიროა ფიუჩერსების, ოფციონებისა და სხვა წარმოებული ინსტრუმენტების თეორიის კარგი ცოდნა. გამოიყენება, აგრეთვე, სვოპები, ეგზოტიკური ოფციონები, რეგრესიული ანალიზი. საჭიროა პორტფელების თეორიის, აქტივების ფასდადების პრინციპების, საპროცენტო

განაკვეთის დროითი სტრუქტურის ცოდნაც. ჩვენი გადმოცემა ძირითადად ეყრდნობა ლ. გალიცის ცნობილ მონოგრაფიას [52]. იმის გამო, რომ თემა ძალიან ფართოა, ბევრი საინტერესო საკითხი მხოლოდ ფრაგმენტულადაა გადმოცემული. ჩვენს ძირითად მიზანს და სურვილს წარმოადგენდა ფინანსური ინჟინერიის მეთოდების პოპულარიზაცია და ის, რომ ფინანსური ანალიზის ეს მეტად მნიშვნელოვანი დარგი გაეცნო ქართველ მკითხველს. გადმოცემული მასალის სხვადასხვა ასპექტის გაღრმავებულ შესწავლაში მკითხველს ხელს შეუწყობს შემდეგი ლიტერატურა: [5], [7], [12], [13], [16], [25], [28], [40], [41], [57], [60], [62], [63], [74], [90], [94], [117], [118], [124], [125], [127], [128], [138], [141], [142], [144], [146], [155], [157], [159], [160], [161], [163], [169], [173], [183], [193], [195], [204]–[209], [210].

10

სადაზღვევო მათემატიკის მეთოდები

ამ თავში ჩვენ ვგულისხმობთ სადაზღვევო ბაზრის შემდეგ სქემატურ წარმოდგენას. თავისუფალი კონკურენციის პირობებში ბაზარზე მოქმედებენ სადაზღვევო კომპანიები — მზღვეველები. მზღვეველებსა და მათ კლიენტებს, დამზღვევებს, შორის (აქ და მომავალში ტერმინოლოგია ძირითადად [162]-ს შეესაბამება) იდება სადაზღვევო ხელშეკრულებები (კონტრაქტები). ყოველი ხელშეკრულება ითვალისწინებს, რომ დამზღვევი გადასცემს მზღვეველს ფინანსურ პასუხისმგებლობას გარკვეულ რისკებზე. სადაზღვევო ხელშეკრულების მოქმედების პერიოდში ყოველი რისკი შეიძლება გამოვლინდეს სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელების სახით. ეს შეიძლება იყოს პიროვნების გარდაცვალება, ჯანმრთელობის შელახვა და შრომისუნარიანობის დაკარგვა, პირადი ქონების ნაწილობრივი ან მთლიანი განადგურება, გაგზავნილი ტვირთის დაზიანება, საგზაო-სატრანსპორტო შემთხვევა და სხვა. სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელების შემდეგ სადაზღვევო კომპანია ვალდებულია დადგენილ ვადაში მთლიანად ან ნაწილობრივ აუნაზღაუროს დაზღვეულს (პირს, რომლის სასარგებლოდაც დაიდო სადაზღვევო კონტრაქტი) მიყენებული ზარალი — გადაუხადოს სადაზღვევო თანხა. დაზღვევის ზოგიერთ სახეობაში (სიცოცხლის დაზღვევა, საპენსიო სქემები) ეს თანხა ხშირად წინასწარ არის ფიქსირებული, სხვა სახეობებში მისი სიდიდე დამოკიდებულია მიყენებული ზარალის სიდიდეზე. მეორე მხრივ, დამზღვევი ვალდებულია ერთბაშად ან განვადებით გადაუხადოს მზღვეველს ამ უკანასკნელის მიერ დანიშნული გადასახადი — სადაზღვევო პრემია, რომლის სიდიდე, როგორც წესი, წინასწარ არის ფიქსირებული და მოსალოდნელ ზარალთან შედარებით მცირეა. ამგვარად, დაზღვევის შედეგად დამზღვევი თავიდან იცილებს მომავალში შესაძლო დიდ (გაურკვეველი სიდიდის) დანაკარგებს წინასწარ გადახდილი, შედარებით მცირე, ფიქსირებული თანხის საფასურად. გასაგებია, რომ მზღვეველისათვის ამგვარი საქმიანობა შესაძლებელია მხოლოდ დაზღვევის მასიურობის პირობებში, როდესაც პასუხისმგებლობა აღებულ რისკებზე ფაქტიურად გადანაწილდება დამზღვევებზე. ამის მიუხედავად, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ რომელიმე რისკი ან რისკების ერთობლიობა (პორტფელი) მიუღებელია ცალკეული კომპანიისათვის. ამ შემთხვევაში, მას შეუძლია გადამზღვეველს მიმართოს და გარკვეული გადასახადის (გადაზღვევის პრემიის) საფასურად გადასცეს მას მიუღებლად

დიდი რისკის ნაწილი. გადაზღვევისას რისკის გადამცემ კომპანიას გადამზღვევი ეწოდება და იგი გადამზღვეველ კომპანიასთან მიმართებით ჩვეულებრივი დამზღვევის როლს ასრულებს.

სადაზღვევო ხელშეკრულების საფუძველზე კომპანია ან მისი ბროკერი გასცემს სადაზღვევო პოლისს, რომელშიც ზუსტად არის მითითებული ხელშეკრულების პირობები: მოქმედების ვადა, პრემიის სიდიდე და გადახდის წესი, სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელების შემდეგ დამზღვევის ან დაზღვეულის მიერ სადაზღვევო განაცხადის (პრეტენზიის, მოთხოვნის) შემოტანის წესი და ვადა, სადაზღვევო გადასახადის სიდიდის დადგენის მექანიზმი და გადახდის ვადა.

სადაზღვევო ბაზრის ფუნქციონირების ამ მოკლე და სქემატური აღწერიდანაც კი ცხადია, რომ სადაზღვევო საქმე ყოველდღიურად მოითხოვს განუსაზღვრელობის პირობებში რაოდენობრივი გადაწყვეტილებების მიღებას. ეს გარემოება სრულიად აუცილებელს ხდის სადაზღვევო საქმეში მათემატიკური, კერძოდ, ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებას.

სადაზღვევო საქმიანობასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული აქტუარის პროფესია. მოკლედ რომ ითქვას, აქტუარი არის ის ადამიანი, რომელსაც სადაზღვევო საქმეში ყოველგვარი მათემატიკური ხასიათის პრობლემის მოგვარება ევალება. ლიტერატურაში ხშირად ვხვდებით შემდეგ გამონათქვამებს: „აქტუარული მათემატიკა“, „აქტუარული პრობლემები“, „აქტუარული მეცნიერება“ და სხვა.

სადაზღვევო საქმის აქტუარული პრობლემატიკა და მეთოდები ტრადიციულად ორ ნაწილად არის დაყოფილი. პირველი ნაწილი (ისტორიულად ასევე პირველად ჩამოყალიბებული) აერთიანებს სიცოცხლის დაზღვევასთან დაკავშირებულ პრობლემებსა და მეთოდებს, ხოლო დაზღვევის ყველა სხვა სახეობის აქტუარული პრობლემატიკა მეორე ნაწილს შეადგენს. ეს ტრადიცია ჩვენც გავითვალისწინეთ — ამ თავში ჯერ სიცოცხლის დაზღვევა განიხილება და შემდგომ — დაზღვევის სხვა სახეობები. ამავე დროს, არის იმის მცდელობაც, რომ აქტუარული მოდელები და მეთოდები გარკვეული ერთიანი ლოგიკური თანმიმდევრობით იყოს გადმოცემული.

ბუნებრივია, რომ ერთ თავში შეუძლებელია სადაზღვევო მათემატიკის რამდენადმე სრულად გადმოცემა. განხილული და სხვა საკითხების უფრო საფუძვლიანი შესწავლა ბიბლიოგრაფიაში მოყვანილი ლიტერატურის მიხედვით შეიძლება.

10.1 სიცოცხლის დაზღვევა

წინასწარი შენიშვნები. როგორც წესი, სიცოცხლის დაზღვევის კონტრაქტები გრძელვადიან ხასიათს ატარებს, რაც კომპანიაში პრემიების

სახით შემოსული თანხების ინვესტირების კარგ შესაძლებლობას ქმნის. ამ გარემოების მათემატიკურ მოდელებში გასათვალისწინებლად გავიხსენოთ, რომ (იხ. თავი 1) გარკვეული საწყისი C კაპიტალის საბანკო ანგარიშზე მუდმივი წლიური r საპროცენტო განაკვეთით დადების შედეგად მისი დაგროვილი ღირებულება n წლის შემდეგ შეადგენს

$$C_n = C(1+r)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

თანხას, სადაც r ფაქტიური წლიური საპროცენტო განაკვეთია. შესაბამისად, n წლის შემდეგ გადასახადი K თანხის მიმდინარე ღირებულება უდრის

$$\frac{K}{(1+r)^n} = Kv^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

სადაც $v = \frac{1}{1+r}$ ფაქტიური წლიური საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი დისკონტირების კოეფიციენტია. ფაქტიურ წლიურ საპროცენტო განაკვეთს შეესაბამება საპროცენტო შემოსავლის ნორმა δ:

$$\delta = \ln(1+r),$$

ანუ

$$r = e^{\delta} - 1.$$

ცხადია, რომ

$$v = e^{-\delta}.$$

გარდა ამისა, r ფაქტიურ წლიურ საპროცენტო განაკვეთს შეესაბამება ფაქტიური წლიური დისკონტის განაკვეთი

$$d = \frac{r}{1+r} = rv,$$

საიდანაც

$$r = \frac{d}{1-d}.$$

ცხადია, რომ სინამდვილეში, მომავალი წლების საპროცენტო განაკვეთები წინასწარ არ არის ცნობილი. პრაქტიკაში, შესაბამისი ანალიზის ჩატარების დროს, საჭიროა r-ს მომავალი ცვალებადობის სხვადასხვა სცენარის განხილვა. დეტერმინისტული ცვალებადობის განხილვა (j-ურ წელიწადს გამოიყენება r_j განაკვეთი) არ იწვევს მათემატიკურ გართულებებს, თუმცა საკმარისად ართულებს აღნიშვნებს, ხოლო სტოქასტური ცვალებადობის დაშვება მნიშვნელოვნად ართულებს მათემატიკურ მოდელს. ამ თავში ეს შემთხვევები არ განიხილება.

სიცოცხლის დაზღვევაში, როგორც წესი, სადაზღვევო გადასახადის სიდიდე კონტრაქტის დადების დროს განისაზღვრება. ეს იმას ნიშნავს, რომ კომპანიის მიერ აღებულ რისკში შემთხვევითობის ელემენტი მხოლოდ დაზღვეული პიროვნების დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობის განუსაზღვრელობას შეაქვს. ამასთან დაკავშირებით, საჭიროა ნებისმიერ x ასაკში მყოფი პიროვნების დარჩენილი T_x სიცოცხლის ხანგრძლივობის ალბათურ-სტატისტიკური დახასიათება.

T_x უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა და მას (ისევე როგორც საწყის x ასაკს) ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია ადამიანისათვის ბუნებრივი ასაკობრივი ინტერვალიდან. იგი საფუძვლიანად შეისწავლება მათემატიკურ დემოგრაფიასა და აქტუარულ მათემატიკაში (იხ. მაგალითად [10], [93], [166]), სადაც მისთვის, როგორც სხვადასხვა თეორიული ალბათური მოდელი, ასევე სტატისტიკური მონაცემების მიხედვით ალბათური განაწილების ფუნქციის შეფასების მეთოდები განიხილება. ამგვარად, არავითარ პრინციპულ სირთულეს არ წარმოადგენს სიცოცხლის დაზღვევის ისეთი აქტუარული მოდელების განხილვა, რომლებშიც სადაზღვევო თანხა სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელებისთანავე გაიცემა, როდესაც დაზღვეული პიროვნების ასაკი ნებისმიერი (არამთელი) რიცხვით შეიძლება გამოისახებოდეს (იხ. [56]). გამოთვლებისა და ფორმულების გასამარტივებლად, ამ თავში მხოლოდ ისეთ მოდელებს განვიხილავთ, რომლებშიც სადაზღვევო თანხა სადაზღვევო შემთხვევის მოხდენის წლის ბოლოს გაიცემა (წლის დასაწყისად კონტრაქტის დადების თარიღი მიიღება). ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ დაგვჭირდება $K_x = [T_x]$ სიდიდე — x ასაკში მყოფი პიროვნების დარჩენილი სრული წლების რაოდენობა. K_x შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია და $k = 0, 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობებს ღებულობს. მისი ალბათური განაწილება ადვილად მიიღება T_x-ის ალბათური განაწილებიდან:

$$P(K_x = k) = P(k \le T_x < k + 1).$$

დემოგრაფიულ და აქტუარულ ლიტერატურაში გამოიყენება შემდეგი ტრადიციული აღნიშვნები:

$$P(T_x \ge k) \equiv {}_k p_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$P(T_x < k) \equiv {}_k q_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

თუ $k = 1$, მაშინ

$${}_1 p_x \equiv p_x,$$

$${}_1 q_x \equiv q_x.$$

სიცოცხლის დაზღვევაში შემდეგი სამი ტიპის პრემია განიხილება:

ა) ერთჯერადი;

ბ) ერთი და იგივე სიდიდის პერიოდული პრემიები;

გ) სხვადასხვა სიდიდის პერიოდული პრემიები.

პერიოდული პრემიებისათვის, გარდა მათი სიდიდისა, დამატებით განისაზღვრება მათი გადახდის სიხშირე და ხანგრძლივობა. როგორც წესი, პრემიების გადახდა ავანსად ხდება.

მოცემული სადაზღვევო კონტრაქტისათვის განვიხილოთ მზღვეველის საერთო დანაკარგი R, რომელიც წარმოადგენს სხვაობას მომავალი სადაზღვევო გადასახადებისა და პრემიების მიმდინარე ღირებულებებს შორის. R შემთხვევითი სიდიდეა და ფიქსირებული პრემიისათვის მას შეუძლია როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი მნიშვნელობების მიღება.

პრემიას ნეტო-პრემია ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს ეკვივალენტობის შემდეგ პრინციპს:

$$ER = 0, \tag{10.1}$$

სადაც ER საშუალო მოსალოდნელი დანაკარგია (საერთო დანაკარგის მათემატიკური ლოდინი). ნეტო-პრემია მზღვეველის მიერ აღებულ რისკს საშუალოდ ნულოვანს ხდის, მაგრამ საშუალოდ ნულოვანი რისკი სრულიადაც არ არის სინამდვილეში ნულოვანი, ვინაიდან სავსებით შესაძლებელია შემთხვევითი სიდიდის გადახრა საშუალო მნიშვნელობისაგან.

მოცემული კონტრაქტისათვის მთლიანი Π პრემია (ბრუტო-პრემია) სამი ნაწილისაგან შედგება:

$$\Pi = N + L + M,$$

სადაც N ნეტო პრემიაა, L არის ე.წ. რისკის თავისი საშუალოს გარშემო ფლუქტუაციისაგან დამცავი დატვირთვა, ხოლო M — საქმის წარმოებისათვის კომპანიის დანახარჯების დასაფარავი დატვირთვა.

უახლოეს პუნქტებში ჩვენ განვიხილავთ ნეტო-პრემიის გამოთვლის პრობლემას სხვადასხვა ტიპის კონტრაქტებისათვის. L დატვირთვის სიდიდის დადგენის პრობლემა განიხილება 10.2 პუნქტში ზოგადი მოდელის განხილვისას. M დატვირთვის სიდიდის დადგენის ამოცანა ამ თავში არ განიხილება, ვინაიდან, როგორც წესი, ეს სიდიდე კომპანიისათვის სავსებით განსაზღვრული და შედარებით სტაბილურია. ამგვარად, ჩვენთვის ბრუტო-პრემია ორი ნაწილისაგან შედგება

$$\Pi = N + L.$$

ტარიფიკაცია (სატარიფო ბადის შედგენა) ერთ-ერთ მნიშვნელოვან აქტუარულ ამოცანას წარმოადგენს. ტარიფების დადგენის ძირითადი მეთოდი გულისხმობს პოლისების აპრიორულად შერჩეული სატარიფო ფაქტორების მიხედვით კლასიფიკაციას და იმის დადგენას, თუ როგორ უნდა იყოს დამოკიდებული პრემიის სიდიდე შერჩეულ ფაქტორებზე. ამა თუ იმ სატარიფო კლასში მოხვედრილი პოლისის მფლობელისათვის პრემიის (კერძოდ,

დამცავი დატვირთვის) სიდიდე რომ მისაღები იყოს, საჭიროა, რომ ეს კლასი საკმარისად მრავალრიცხოვანი აღმოჩნდეს. სხვა სიტყვებით, შესაძლებელი უნდა იყოს შერჩეული ფაქტორების თვალსაზრისით ერთგვაროვანი რისკების დიდი მოცულობის პორტფელების შედგენა. საქმე იმაშია, რომ როგორც ჩვენ ამას მომავალში დავინახავთ, ყოველი ინდივიდუალური დატვირთვა მით უფრო მცირეა, რაც უფრო დიდია პორტფელის მოცულობა. სატარიფო ფაქტორების შერჩევისას ჩვენ გარკვეულ წინააღმდეგობას ვაწყდებით — რაც უფრო მეტ ფაქტორს ავირჩევთ, მით უფრო ზუსტად დაახასიათებენ ისინი რისკებს, მაგრამ, სამაგიეროდ, მით უფრო მცირერიცხოვანნი აღმოჩნდებიან სატარიფო კლასები და მით უფრო დიდი პრემია ექნებათ გადასახდელი პოლისების მფლობელებს.

ამ თვალსაზრისით სიცოცხლის დაზღვევაში საქმე კარგად არის (განსხვავებით დაზღვევის ზოგიერთი სხვა სახეობისაგან). დაზღვეული პიროვნების რისკის ერთადერთ შემთხვევით კომპონენტს მისი დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა წარმოადგენს, რომლის შემთხვევითობის ბუნებას საკმარისად კარგად განსაზღვრავს რამდენიმე სატარიფო ფაქტორი, მაგალითად: ასაკი, სქესი, პროფესია, სოციალური მდგომარეობა. როგორც წესი, ამ ფაქტორების მიხედვით შესაძლებელია საკმარისი მოცულობის ერთგვაროვანი პორტფელების შედგენა.

სიცოცხლის დაზღვევის ელემენტარული ფორმები. სიცოცხლის დაზღვევის ელემენტარულ ფორმებს წარმოადგენენ:

ა) პიროვნების უვადო (სიცოცხლის ბოლომდე) დაზღვევა გარდაცვალებისაგან;

ბ) პიროვნების დროებითი (გარკვეული ვადით) დაზღვევა გარდაცვალებისაგან;

გ) პიროვნების გარკვეულ ასაკამდე მიღწევის დაზღვევის წმინდა ფორმა;

დ) პიროვნების გარკვეულ ასაკამდე მიღწევის ან ამ ასაკამდე გარდაცვალებისაგან დაზღვევის შერეული ფორმა.

სიცოცხლის დაზღვევის ა) და ბ) ფორმებში სადაზღვევო შემთხვევას პიროვნების გარდაცვალება წარმოადგენს, გ) ფორმაში — გარკვეულ ასაკამდე მიღწევა, ხოლო დ) ფორმაში — ან გარდაცვალება, ან ასაკამდე მიღწევა. დ) ფორმა ბ) და გ) ფორმების უმარტივეს კომბინაციას წარმოადგენს.

x ასაკში მყოფი პიროვნების უვადო დაზღვევა გარდაცვალებისაგან გულისხმობს მზღვეველის მიერ კონტრაქტის დადების მომენტიდან K_x+1 წლის შემდეგ გარკვეული (პირობითად ერთეულოვანი) თანხის გადახდას. ამგვარად, გადასახადი თანხის მიმდინარე ღირებულებაა

$$Z = v^{K_x+1},$$

სადაც v დისკონტირების კოეფიციენტია. პირობითი ალბათობის ფორმულის

გამოყენებით ვღებულობთ:

$$P(Z = v^{k+1}) = P(K_x = k) = {}_kp_x q_{x+k}.$$

დაზღვევის ამ ფორმის შესაბამისი ერთჯერადი ნეტო-პრემია A_x სიმბოლოთი აღინიშნება. (10.1) ექვივალენტობის პრინციპის თანახმად

$$A_x = EZ = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{10.2}$$

დამცავი დატვირთვის დასადგენად (რომელიც მომავალში განიხილება) საჭიროა Z სიდიდის $\mathrm{Var}Z$ დისპერსიის გამოთვლა. გვაქვს

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - A_x^2.$$

თავის მხრივ,

$$E(Z^2) = E\left(v^{2(K_x+1)}\right) = E\left(e^{-2\delta(K_x+1)}\right),$$

სადაც δ წარმოადგენს საპროცენტო შემოსავლის ნორმას. δ-ს გაორმაგება ნიშნავს საწყისი r ფაქტიური წლიური საპროცენტო განაკვეთის შეცვლას ახალი

$$r_1 = r(2 + r)$$

საპროცენტო განაკვეთით და ამგვარად, $\mathrm{Var}Z$ დისპერსიის გამოთვლა A_x-ის გამოთვლაზე რთული არ არის .

პიროვნების დროებითი (n წლის ვადით) დაზღვევა გარდაცვალებისაგან ნიშნავს, რომ მზღვეველის მომავალი (ერთეულოვანი) გადასახადის მიმდინარე ღირებულება არის

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ 0, & \text{თუ} \quad K_x = n, n+1, \ldots, \end{cases} \tag{10.3}$$

სადაც x დაზღვეული პიროვნების ასაკია კონტრაქტის დადების მომენტში. შესაბამისი ერთჯერადი ნეტო-პრემია $A^1_{x:\overline{n}|}$ აქტუარული სიმბოლოთი აღინიშნება და

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

კერძოდ,

$$A_x = A^1_{x:\overline{\infty}|}.$$

დისპერსიის გამოსათვლელად საჭირო Z-ის მეორე მომენტისათვის გვაქვს

$$E(Z^2) = \begin{cases} Ee^{-2\delta(K_x+1)}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ 0, & \text{თუ} \quad K_x = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

x ასაკში მყოფი პიროვნების $x+n$ ასაკამდე მიღწევის დაზღვევის შემთხვევაში გვაქვს

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ v^n, & \text{თუ} \quad K_x = n, n+1, \ldots. \end{cases} \tag{10.4}$$

შესაბამისი ერთჯერადი ნეტო-პრემია $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ სიმბოლოთი აღინიშნება და

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x. \tag{10.5}$$

ამ შემთხვევაში Z ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს და

$$\mathrm{Var}(Z) = v^{2n} {}_np_x \, {}_nq_x.$$

ზემოთ მოყვანილი სიცოცხლის დაზღვევის შერეული დ) ფორმა ითვალისწინებს, რომ მზღვეველი იხდის (ერთეულოვან) სადაზღვევო თანხას პიროვნების გარდაცვალების წლის ბოლოს, თუ იგი პირველი n წლის განმავლობაში გარდაიცვალა, და n-ური წლის ბოლოს, საწინააღმდეგო შემთხვევაში. მომავალი გადასახადის მიმდინარე Z ღირებულება უდრის:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ v^n, & \text{თუ} \quad K_x = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

თუ აღვნიშნავთ Z_1-ით და Z_2-ით შესაბამისად (10.3) და (10.4) ფორმულებით მოცემულ სიდიდეებს, ცხადია, რომ

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

აქედან, შესაბამისი ერთჯერადი $A_{x:\overline{n}|}$ ნეტო-პრემიისათვის გვაქვს

$$A_{x:\overline{n}|} = EZ = EZ_1 + EZ_2 = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

$\mathrm{Var}(Z)$ დისპერსია გამოითვლება სტანდარტული ფორმულის მეშვეობით:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + 2\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) + \mathrm{Var}(Z_2).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $Z_1 Z_2$ ნამრავლი ყოველთვის ნულის ტოლია, მივიღებთ:

$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - EZ_1 EZ_2 = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

და
$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) - 2A^{1}_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}.$$

თუ მზღვეველის მიერ აღებულ რისკს დისპერსიით გავზომავთ, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ დ) ტიპის ერთი კონტრაქტის დადებისას მზღვეველის რისკი ნაკლებია, ვიდრე ერთ დამზღვევთან ბ) ტიპისა და მეორესთან გ) ტიპის კონტრაქტების ერთდროულად დადების დროს.

განვიხილოთ ე.წ. m წლით გადავადებული დაზღვევის მაგალითი. x ასაკში მყოფი პიროვნება სიცოცხლის ბოლომდე ეზღვევა გარდაცვალებისაგან და კონტრაქტი შედის ძალაში მისი ხელმოწერიდან m წლის შემდეგ. ამ შემთხვევაში

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \;\; K_x = 0, 1, \ldots, m-1; \\ v^{K_x+1}, & \text{თუ} \;\; K_x = m, m+1, \ldots. \end{cases}$$

შესაბამისი ${}_{m|}A_x$ ერთჯერადი ნეტო-პრემიისათვის გვაქვს

$${}_{m|}A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m},$$

ან

$${}_{m|}A_x = A_x - A^{1}_{x:\overline{m}|}.$$

შენიშვნა. თუ სადაზღვევო თანხა არ არის ერთეულოვანი და რაიმე C სიდიდეს უდრის, მაშინ შესაბამისი ნეტო-პრემიის მისაღებად საკმარისია გამოთვლილი ნეტო-პრემიების C-ზე გამრავლება. C სიდიდის შესაბამისი დისპერსიები კი C^2-ჯერ აღემატება ჩვენს მიერ გამოთვლილ დისპერსიებს.

ელემენტარული სადაზღვევო ანუიტეტები. უვადო სადაზღვევო ანუიტეტი წარმოადგენს ყოველწლიური გადასახადების მიმდევრობას, რომლებიც გარკვეულ საწყის x ასაკში მყოფ ანუიტეტის მფლობელის გარდაცვალებამდე გრძელდება. ამგვარად, ანუიტეტით გათვალისწინებული მთლიანი გადასახადის მიმდინარე Y ღირებულება T_x დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობაზეა დამოკიდებული და შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს. უვადო სადაზღვევო ანუიტეტის ერთჯერადი ნეტო-პრემია EY მათემატიკური ლოდინის ტოლია.

სადაზღვევო ანუიტეტები სხვადასხვა ტიპის საპენსიო სქემების საფუძველს წარმოადგენს. ამავე დროს, საინტერესოა, რომ უვადო სადაზღვევო ანუიტეტი გარკვეულ ასაკამდე მიღწევის სიცოცხლის დაზღვევის წმინდა ფორმების კომბინაციის სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ, ხოლო პერიოდული პრემიები, პირიქით, შეიძლება როგორც სადაზღვევო ანუიტეტი განვიხილოთ.

პირდაპირი უვადო სადაზღვევო ანუიტეტი გულისხმობს ყოველწლიურ ერთეულოვან გადასახადებს ანუიტეტის მფლობელის გარდაცვა-

ლებამდე. გადასახადების გადახდა ხდება $0, 1, \ldots, K_x$ მომენტებში. ამგვარი გადასახადების ნაკადის მიმდინარე ღირებულება $\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}$ სიმბოლოთი აღინიშნება და

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = \sum_{k=0}^{K_x} v^k. \tag{10.6}$$

ამ დისკრეტული შემთხვევით სიდიდის ალბათური განაწილება არის

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = P(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

სადაც

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = \sum_{n=0}^{k} v^n, \quad \ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \sum_{n=0}^{\infty} v^n.$$

ამგვარად, ერთჯერადი ნეტო-პრემიისათვის, რომელიც $\ddot{a}_x$ სიმბოლოთი აღინიშნება გვაქვს:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\, {}_k p_x q_{x+k}.$$

მეორეს მხრივ,

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{(K_x \geq k)}, \tag{10.7}$$

სადაც I_A A ხდომილობის ინდიკატორია:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{თუ } A \text{ განხორციელდა;} \\ 0, & \text{თუ } A \text{ არ განხორციელდა.} \end{cases}$$

(10.7)-დან ვღებულობთ $\ddot{a}_x$ ნეტო-პრემიის მეორე გამოსახულებას:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_k p_x, \tag{10.8}$$

რომელიც, სწორედ, $\ddot{a}_x$-ს წარმოადგენს $A_{\substack{1\\x:\overline{k|}}}$ ნეტო-პრემიების ჯამის სახით (იხ. (10.5) ფორმულა). ასევე სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d},$$

რომელიც პირდაპირ უვადო სადაზღვევო ანუიტეტს გარდაცვალებისგან უვადო დაზღვევის კონტრაქტთან აკავშირებს.

n-წლიანი პირდაპირი სადაზღვევო ანუიტეტის მიმდინარე Y ღირებულებისათვის გვაქვს:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{თუ} \quad K_x = n, n+1, \ldots . \end{cases}$$

შესაბამისი $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ერთჯერადი ნეტო-პრემიისთვის, $\ddot{a}_x$-სთვის მიღებული ფორმულების მსგავსად, ვღებულობთ:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x,$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x,$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

თუ პირდაპირი უვადო სადაზღვევო ანუიტეტი ხელშეკრულების დადებიდან m წლის შემდეგ შედის ძალაში, მაშინ მისი შესაბამისი გადასახადების მიმდინარე Y ღირებულება არის:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, m-1; \\ v^m + v^{m+1} + \cdots + v^{K_x}, & \text{თუ} \quad K_x = m, m+1, \ldots . \end{cases}$$

ერთჯერადი ნეტო-პრემია ${}_{m|}\ddot{a}_x$ სიმბოლოთი აღინიშნება და

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mp_x v^m \ddot{a}_{x+m},$$

ან

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

პერიოდული ნეტო-პრემიები. როგორც წესი, სიცოცხლის დაზღვევის კონტრაქტები ითვალისწინებენ არა ერთჯერად, არამედ პერიოდულ, მაგალითად ყოველწლიურ, პრემიებს. პერიოდული ნეტო-პრემიების გამოსათვლელად ვისარგებლებთ (10.1) ეკვივალენტობის პრინციპით.

განვიხილოთ x ასაკში მყოფი პიროვნების დაზღვევა სიცოცხლის ბოლომდე. ამჯერად ვიგულისხმოთ, რომ ნეტო-პრემია წარმოადგენს დაზღვევის მომენტიდან პიროვნების სიცოცხლის ბოლომდე ყოველი სადაზღვევო წლის დასაწყისში ერთი და იგივე P_x გადასახადების ერთობლიობას. ამ შემთხვევაში მზღვეველის საერთო R დანაკარგი უდრის:

$$R = v^{K_x+1} - P_x \sum_{k=0}^{K_x} v^k.$$

(10.6)-ის თანახმად,

$$R = v^{K_x+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$$

და (10.1) პრინციპის გამოყენებით,

$$A_x - P_x \ddot{a}_x = 0,$$

ანუ

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

n წლით სიცოცხლის დაზღვევის შემთხვევაში ყოველწლიური საპრემიო გადასახადი $P^1_{x:\overline{n}|}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მზღვეველის საერთო R დანაკარგისათვის გვაქვს:

$$R = \begin{cases} v^{K_x+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ -P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{თუ} \quad K_x \geq n. \end{cases}$$

(10.1) პრინციპის თანახმად

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

x ასაკში მყოფი პიროვნების $x+n$ ასაკამდე მიღწევის დაზღვევაში პერიოდული ნეტო-პრემიის ყოველწლიური გადასახადი $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამ შემთხვევაში,

$$R = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{თუ} \quad K_x = 0, 1, \ldots, n-1; \\ v^n - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{თუ} \quad K_x \geq n. \end{cases}$$

აქედან, (10.1)-ის თანახმად,

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

სიცოცხლის შერეული დაზღვევის შესაბამისი პერიოდული ნეტო-პრემიის ყოველწლიური $P_{x:\overline{n}|}$ გადასახადისათვის ცხადია, რომ

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

და

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

გამოთვლითი ასპექტები. ზემოთ განხილული სხვადასხვა ტიპის ნეტო-პრემიებისათვის მოყვანილი ფორმულების პრაქტიკაში გამოსაყენებლად საჭიროა ${}_kp_x$ და ${}_kq_x$ ალბათობების ცოდნა და (10.2), (10.8) ტიპის ჯამების გამოთვლა.

პირველ რიგში გავიხსენოთ, რომ

$$ {}_kp_x = 1 - {}_kq_x $$

და, ამგვარად, საკმარისია ყოველი k-სა და x-სთვის ამ ალბათობებიდან ერთ-ერთის ცოდნა. ცხადია, რომ მათი ზუსტი მნიშვნელობების დადგენა შეუძლებელია და ასეთ შემთხვევებში იყენებენ ამ ალბათობების სტატისტიკურ შეფასებებს. ამგვარი შეფასებების მიღების მეთოდები დაწვრილებით არის აღწერილი როგორც აქტუარულ, ასევე დემოგრაფიულ ლიტერატურაში (იხ. [56], [186]) და ეს საკითხი ცალკე დიდ თემას წარმოადგენს. მათემატიკურ დემოგრაფიაში მიღებულია ${}_kp_x$ და ${}_kq_x$ ალბათობების შეფასებების ე.წ. სიკვდილიანობის ტაბულის სახით წარმოდგენა და, ტრადიციულად, სწორედ ეს ტაბულები გამოიყენება აქტუარულ პრაქტიკაში სიცოცხლის დაზღვევასთან დაკავშირებული ნეტო-პრემიების გამოსათვლელად.

ტიპიური სიკვდილიანობის ტაბულის ფრაგმენტი შემდეგნაირად გამოიყურება:

x	l_x	d_x	$\widetilde{q}_x$	$\overset{\circ}{e}_x$
0	100000	984	0.009840	76.51
1	99016	71	0.000717	76.27
2	98945	45	0.000455	75.32
3	98900	31	0.000313	74.35
4	98869	25	0.000253	73.38
5	98844	22	0.000223	72.40
...	...	...	...	...
10	98746	18	0.000182	67.47
...	...	...	...	...
15	98653	25	0.000253	62.53
...	...	...	...	...
20	98497	35	0.000355	57.62
...	...	...	...	...
40	97346	123	0.001264	38.17

ცხრილი 10.1

ტაბულის პირველ სვეტში ჩამოთვლილია სრული ასაკები. მეორე სვეტის პირველ სტრიქონში მოყვანილია ე.წ. პირობითი თაობის (იხ. [122], [186]) ასევე პირობითი საწყისი რაოდენობა l_0 (ტაბულის ფუძე), ხოლო ამ სვეტის შემდგომი l_x რიცხვები გამოსახავენ საწყისი l_0 რაოდენობიდან x ასაკს მიღწეულ ადამიანთა საშუალო რაოდენობის შეფასებას. მესამე სვეტში $d_x = l_x - l_{x+1}$. ჩვენთვის საინტერესო ალბათობების შეფასებების მიღება

ტაბულის მიხედვით შემდეგი წესით ხდება:

$$ {}_{n}p_x \approx \frac{l_{x+n}}{l_x}, $$

$$ {}_{n}q_x \approx \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}, $$

$$ {}_{k}p_x q_{x+k} \approx \frac{d_{x+k}}{l_x}. $$

ძველად (10.2) ან (10.8) ტიპის ჯამების გამოთვლის გასაადვილებლად იყენებდნენ ე.წ. კომუტაციურ ფუნქციებს. ეს ფუნქციები წინასწარ გამოითვლებოდა ყოველი კონკრეტული სიკვდილიანობის ტაბულისათვის და მოცემული v დისკონტირების კოეფიციენტისათვის. კომუტაციური ფუნქციების მაგალითებია:

$$ D_x = l_x v^x, $$

$$ N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_\omega, $$

$$ C_x = v^{x+1} d_x, $$

$$ M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega, $$

სადაც ω მოცემული სიკვდილიანობის ტაბულის ზღვრულ ასაკს აღნიშნავს. ადვილი საჩვენებელია, რომ ჩვენს მიერ განხილული ნეტო-პრემიების შეფასება კომუტაციური ფუნქციების საშუალებით შემდეგნაირად გამოიყურება:

$$ A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \approx \frac{D_{x+n}}{D_x}, $$

$$ \ddot{a}_x \approx \frac{N_x}{D_x}, $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x \approx \frac{N_{x+m}}{D_x}, $$

$$ A_x \approx \frac{M_x}{D_x}, $$

$$ P_x \approx \frac{M_x}{N_x}, $$

$$ A^1_{x:\overline{n}|} \approx \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, $$

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \approx \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

კომუტაციურმა ფუნქციებმა დაკარგეს თავისი მნიშვნელობა კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. კომპიუტერისათვის საჭირო გამოთვლითი ალგორითმების შესადგენად სასარგებლოა ნეტო-პრემიების რეკურენტული ფორმულების ცოდნა. დავიწყოთ A_x ნეტო-პრემიით. (10.2) ფორმულაში, ყველგან, გარდა პირველი შესაკრებისა, ${}_kp_x$-ის ნაცვლად შევიტანოთ მისი შემდეგი გამოსახულება (ეს ტოლობა თავისთავად ცხადია):

$${}_kp_x = p_x \; {}_{k-1}p_{x+1}, \quad k > 1.$$

მცირეოდენი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x. \tag{10.9}$$

ამ რეკურენტული ფორმულით შესაძლებელია A_x-ის თანმიმდევრობით (x საწყისი ასაკის მიხედვით) გამოთვლა, დაწყებული შესაძლო უდიდესი ასაკიდან. თუ (10.9)-ში p_x-ს შევცვლით $(1 - q_x)$-ით, მივიღებთ,

$$A_x = vA_{x+1} + v(1 - A_{x+1})q_x. \tag{10.10}$$

უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება ნებისმიერი $x + k$ საწყისი ასაკისათვის ჩაიწეროს:

$$A_{x+k} - vA_{x+k+1} = v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{10.11}$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს v^k-ზე გავამრავლებთ და ავჯამავთ, მივიღებთ:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}. \tag{10.12}$$

(10.9),(10.10) და (10.12) ფორმულებს საინტერესო ინტერპრეტაცია გააჩნიათ. (10.9)-ს მიხედვით, x ასაკისათვის ერთჯერადი A_x ნეტო-პრემია ემთხვევა იმ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს, რომელიც ღებულობს დისკონტირებული საგადასახადო თანხის მნიშვნელობას ერთ წელიწადში გარდაცვალების შემთხვევაში და დისკონტირებული $x + 1$ ასაკში ერთჯერადი ნეტო-პრემიის მნიშვნელობას ამ ასაკამდე მიღწევის შემთხვევაში. (10.10)-ის თანახმად A_x ნეტო-პრემია შედგება დისკონტირებული A_{x+1} პრემიისა და x ასაკში, დარჩენილ $(1 - A_{x+1})$ სადაზღვევო თანხაზე, ერთწლიანი სიცოცხლის დაზღვევის ერთჯერადი $v(1 - A_{x+1})q_x$ ნეტო-პრემიისაგან. (10.12) კი საბოლოოდ შლის A_x ნეტო-პრემიას ერთწლიანი სადაზღვევო კონტრაქტების შესაბამისი ერთჯერადი ნეტო-პრემიების ჯამად.

თუ (10.8) ფორმულას (10.2)-ის მსგავსად გარდავქმნით, მივიღებთ:

$$\ddot{a}_x = 1 + v\ddot{a}_{x+1}p_x,$$

რაც, (10.9)-ის მსგავსად, საშუალებას გვაძლევს $\ddot{a}_x$ ნეტო-პრემიები თანმიმდევრობით გამოვთვალოთ. ბოლო ფორმულის ეკვივალენტურია შემდეგი ფორმულა:

$$\ddot{a}_x = 1 + v\ddot{a}_{x+1} - v\ddot{a}_{x+1}q_x. \tag{10.13}$$

ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს, რომ $\ddot{a}_x$ ნეტო-პრემია ფარავს x ასაკში აუცილებლად გადასახდელ ერთეულოვან თანხას და $x+1$ ასაკში ნაყიდი ანუიტეტის ერთჯერადი ნეტო-პრემიის მიმდინარე ღირებულებას ერთი წლის განმავლობაში სიკვდილიანობის გამო მიღებული მოსალოდნელი შემოსავლის გარეშე. თუ ამ ფორმულას ყოველ $x+k$ ასაკისათვის ჩავწერთ და ავჯამავთ, მივიღებთ,

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty|}} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ddot{a}_{x+k+1}q_{x+k}.$$

ამგვარად, $\ddot{a}_x$ ნეტო-პრემია წარმოადგენს ჩვეულებრივი (არასადაზღვევო) უვადო ანუიტეტის მიმდინარე ღირებულებას, რომელიც მცირდება ყოველწლიურად სიკვდილიანობით გამოწვეული მოსალოდნელი შემოსავლით.

ნეტო-პრემიების რეზერვები. დაზღვევის კონვერსია. განვიხილოთ x ასაკში მყოფი პიროვნების დაზღვევა სიცოცხლის ბოლომდე, რომლის შესაბამისი პოლისი დაფინანსებულია პერიოდული ნეტო-პრემიით P_x მუდმივი ყოველწლიური გადასახადებით. P_x თანხის სიდიდე (10.1) ეკვივალენტობის პრინციპის გათვალისწინებით იყო მიღებული, ანუ კონტრაქტის დადების მომენტში სრულდებოდა ტოლობა

$$A_x - P_x\ddot{a}_x = 0.$$

დაზღვევის მომენტიდან k წელიწადის გასვლის შემდეგ (თუ დაზღვეულმა პიროვნებამ მიაღწია $x+k$ ასაკს) ეს ბალანსი აღარ სრულდება:

$$A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} \neq 0.$$

უფრო ზუსტად, $x+k$ ასაკს მიღწეულ პიროვნებას რომ ახალი კონტრაქტი დაედო, მას დაუნიშნავდნენ

$$P_{x+k} = \frac{A_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k}}$$

ყოველწლიურ გადასახადს, რომელიც უზრუნველყოფდა მზღვეველის მომავალი მოსალოდნელი დანაკარგების მიმდინარე ღირებულების (ამ მომენტისათვის!) გაბათილებას. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$P_{x+k} > P_x$$

და, ამგვარად,

$$A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} > 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x+k$ ასაკს მიღწეული პიროვნებისათვის მისი მომავალი P_x გადასახადების მიმდინარე ღირებულება საშუალოდ ვეღარ ფარავს სადაზღვევო თანხის მიმდინარე ღირებულებას (რაც თავისთავად ნორმალურია, რადგან დამზღვევს დაზღვევის მთელი პერიოდის განმავლობაში უნდა ჰქონდეს კონტრაქტის გაგრძელების სტიმული). წარმოქმნილი დეფიციტის შესავსებად, პირველი k წლის განმავლობაში შემოტანილი P_x საპრემიო გადასახადებიდან, მღზღვეველი ქმნის ე.წ. ნეტო-პრემიის რეზერვს. რომელმაც x ასაკში დაზღვეული პიროვნების $x+k$ ასაკის მიღწევის მომენტში ${}_kV_x$ სიდიდე უნდა შეადგინოს, სადაც

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}. \qquad (10.14)$$

ცხადია, რომ

$$ {}_0V_x = 0, \quad {}_{k+1}V_x > {}_kV_x.$$

${}_kV_x$ რეზერვი სწორედ ის თანხაა, რომელიც, $P_x\ddot{a}_{x+k}$ მომავალი საპრემიო გადასახადების $x+k$ ასაკის მიღწევის მომენტში გამოთვლილ მიმდინარე ღირებულებასთან ერთად, საშუალოდ აბათილებს მომავალი სადაზღვევო გადასახადის მიმდინარე (ამავე მომენტისათვის გამოთვლილ) ღირებულებას. სხვა სიტყვებით:

$$A_{x+k} = P_{x+k}\ddot{a}_{x+k} = {}_kV_x + P_x\ddot{a}_{x+k},$$

საიდანაც

$$ {}_kV_x = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k}.$$

ასევე სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x},$$

$$ {}_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x},$$

$$ {}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k}.$$

ანალოგიური ფორმულები სამართლიანია სიცოცხლის დაზღვევის სხვა ფორმების შესაბამისი ნეტო-პრემიის რეზერვებისათვისაც. თუ ამ უკანასკნელებს ბუნებრივად აღვნიშნავთ (შესაბამისი ნეტო-პრემიების ინდექსაციის შენარჩუნებით), მივიღებთ:

$$ {}_kV^1_{x:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|},$$

$$ {}_kV_{x}{}^{\ \ 1}_{\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|}^{\ \ 1} - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, $$

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = {}_kV^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_kV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}, $$

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}. $$

(10.14) ფორმულიდან, (10.11) და (10.13) ფორმულების გამოყენებით, ადვილად მიიღება ${}_kV_x$ რეზერვის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა:

$$ ({}_kV_x + P_x)(1+r) = q_{x+k} + p_{x+k}\ {}_{k+1}V_x. $$

ამ ტიპის ფორმულების მიღება შესაძლებელია სიცოცხლის დაზღვევის სხვა ფორმებისთვისაც.

ნეტო-პრემიის რეზერვის სიდიდეს, მისი შეფასების მომენტში, აგრეთვე პოლისის ღირებულებას უწოდებენ. ამის მიზეზი ის არის, რომ თუ დაზღვეული პიროვნება ამა თუ იმ მიზეზით გადაწყვეტს ამ მომენტში კონტრაქტის შეწყვეტას, მას შეუძლია პრეტენზია ჰქონდეს სწორედ რეზერვის მოცულობის ტოლ თანხაზე.

დამზღვევის სურვილის თანახმად, ნეტო-პრემიის რეზერვი შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერ მომენტში პოლისის სახეობის შეცვლის ფინანსური მხარდაჭერისათვის. ამის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს სადაზღვევო პოლისის კონვერსია წინასწარ გადახდილ დაზღვევის სახეობაში, ანუ ისეთ სახეობაში, რომელიც დამზღვევისაგან აღარ მოითხოვს არავითარი პრემიების გადახდას.

განვიხილოთ x ასაკში მყოფი პიროვნების ერთეულოვან თანხაზე დაზღვევა სიცოცხლის ბოლომდე, რომელიც დაფინანსებულია პერიოდული ნეტო-პრემიით P_x ყოველწლიური გადასახადებით. წარმოვიდგინოთ, რომ დაზღვეულმა პიროვნებამ $x+k$ ასაკს მიაღწია, მაგრამ, ამა თუ იმ მიზეზით, შემდგომ საპრემიო გადასახადებს ვეღარ იხდის. ამ შემთხვევაში, ნეტო-პრემიის ${}_kV_x$ რეზერვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ მომენტიდან სიცოცხლის ბოლომდე დაზღვევის ერთჯერადი ნეტო-პრემია, რომლის შესაბამისი სადაზღვევო გადასახადი უდრის

$$ \frac{{}_kV_x}{A_{x+k}} = 1 - \frac{P_x}{P_{x+k}} $$

სიდიდეს. ამგვარი კონვერსია წინასწარ გადახდილ დაზღვევაში, რომელშიც შესაბამისად შემცირებული სადაზღვევო გადასახადია გათვალისწინებული, საკმარისად ხშირია ასაკის მიღწევამდე სიცოცხლის დაზღვევის ფორმაში, რომელშიც რეზერვის მოცულობა საკმაოდ მნიშვნელოვანია.

ჯგუფური სადაზღვევო კონტრაქტები. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ცალკეული პიროვნების სიცოცხლის დაზღვევის სხვადასხვა ფორმას. ახლა განვიხილოთ დაზღვევის ისეთი ფორმები, რომლებშიც სადაზღვევო

შემთხვევები (გარდაცვალება, ასაკის მიღწევა) და, აქედან გამომდინარე, სადაზღვევო გადასახადების გადახდა დაკავშირებულია გარკვეულ ადამიანთა ჯგუფებთან.

განვიხილოთ m ადამიანისაგან შემდგარი G ჯგუფი, რომლის ასაკობრივი სტრუქტურა მოიცემა ჯგუფის წევრთა ასაკების ვექტორით:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

i-რი წევრის დემოგრაფიული სტატუსი აღიწერება δ_i ინდიკატორით:

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i\text{-ური წევრი ცოცხალია;} \\ 0, & \text{თუ } i\text{-ური წევრი გარდაცვლილია.} \end{cases}$$

G ჯგუფის დემოგრაფიული მდგომარეობა (სტატუსი) აღიწერება ინდიკატორების ვექტორით:

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m).$$

ცხადია, რომ საწყისი მდგომარეობა წარმოადგენს

$$\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{m \text{ ცალი}}$$

ვექტორს. ჩვენ დაგვჭირდება ჯგუფის სხვადასხვა დემოგრაფიული მდგომარეობის ალბათობა. ვიგულისხმოთ, რომ ჯგუფის წევრები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იცვლიან დემოგრაფიულ სტატუსს. ამ დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ ${}_np_{x_1x_2\ldots x_m}$ ალბათობა იმისა, რომ ჯგუფის ყველა წევრი იცოცხლებს n წელიწადს, ცალკეული წევრების $x_i + n$ ასაკამდე მიღწევის ალბათობების ნამრავლს წარმოადგენს:

$${}_np_{x_1x_2\ldots x_m} = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2} \cdots {}_np_{x_m}.$$

თავის მხრივ, n წლის განმავლობაში ჯგუფის ერთი მაინც წევრის გარდაცვალების ${}_nq_{x_1x_2\ldots x_m}$ ალბათობისათვის გვაქვს:

$${}_nq_{x_1x_2\ldots x_m} = 1 - {}_np_{x_1x_2\ldots x_m}.$$

„გადამრავლების“ ფორმულა ${}_nq_{x_1x_2\ldots x_m}$ ალბათობისათვის სამართლიანი არ არის. მაგალითად, ორწევრიანი (x_1, x_2) ჯგუფისათვის

$${}_nq_{x_1x_2} = {}_nq_{x_1} + {}_nq_{x_2} - {}_nq_{x_1}\,{}_nq_{x_2}.$$

განვიხილოთ ჯგუფის დაზღვევის ისეთი ფორმები, რომლებშიც სადაზღვევო შემთხვევას ჯგუფში პირველი გარდაცვალება წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში, სიცოცხლის დაზღვევის და პირდაპირი სადაზღვევო ანუიტეტის

ერთჯერადი ნეტო-პრემიები, შესაბამისად, $A_{x_1x_2\ldots x_m}$ და $\ddot{a}_{x_1x_2\ldots x_m}$ სიმბოლოებით აღინიშნება. (10.2) და (10.8) ფორმულების მსგავსად გვექნება:

$$A_{x_1x_2\ldots x_m}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_{x_1x_2\ldots x_m}q_{x_1+kx_2+k\ldots x_m+k},$$

$$\ddot{a}_{x_1x_2\ldots x_m}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k}{}_kp_{x_1x_2\ldots x_m}.$$

ხშირად განიხილება ისეთი ჯგუფური დაზღვევა, როდესაც სადაზღვევო შემთხვევას ჯგუფის ყველა წევრის გარდაცვალება ან n წლის განმავლობაში ერთი მაინც წევრის გადარჩენა წარმოადგენს. აღნიშვნების გასამარტივებლად შემდგომში ორწევრიანი (x,y) ჯგუფები განვიხილოთ. n წლის განმავლობაში ორივე წევრის გარდაცვალების ალბათობა ${}_nq_{\overline{xy}}$ სიმბოლოთი აღინიშნება და

$${}_nq_{\overline{xy}}={}_nq_x\,{}_nq_y.$$

ამავე დროის განმავლობაში ერთი მაინც წევრის გადარჩენის ${}_np_{\overline{xy}}$ ალბათობისთვის გვაქვს:

$${}_np_{\overline{xy}}={}_np_x+{}_np_y-{}_np_x\cdot{}_np_y. \tag{10.15}$$

ბუნებრივია, აღვნიშნოთ $\ddot{a}_{\overline{xy}}$ სიმბოლოთი ისეთი პირდაპირი სადაზღვევო ანუიტეტის ერთჯერადი ნეტო-პრემია, რომლის თანახმად (x,y) ჯგუფს გადაუხდიან ერთეულოვან სადაზღვევო გადასახადს მანამ, სანამ ჯგუფის ერთი წევრი მაინც ცოცხალი იქნება. (10.8)-ის მსგავსად:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k}{}_kp_{\overline{xy}}.$$

(10.15) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy}. \tag{10.16}$$

$A_{\overline{xy}}$ სიმბოლო აღნიშნავს (x,y) ჯგუფის ისეთი დაზღვევის ერთჯერად ნეტო-პრემიას, რომლის თანახმად ერთეულოვანი სადაზღვევო თანხა გაიცემა ჯგუფის უკანასკნელი წევრის გარდაცვალების წლის ბოლოს. გვაქვს

$$A_{\overline{xy}}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_{\overline{xy}}\cdot q_{\overline{x+k\,y+k}}.$$

ბოლოს, განვიხილოთ ჯგუფური დაზღვევის უაღრესად მნიშვნელოვანი და გავრცელებული ფორმა — ე.წ. მემკვიდრეობითი სადაზღვევო ანუიტეტი.

როგორც წესი, დაზღვევის ეს ფორმა გამოიყენება ცოლ-ქმრის დასაზღვევად და, მისი პირობის თანახმად, ერთ-ერთი მეუღლე, დაწყებული მეორის გარდაცვალების წლიდან, სიცოცხლის ბოლომდე ღებულობს პენსიას.

(x, y) ჯგუფისათვის $\ddot{a}_{x|y}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ y-სთვის მემკვიდრეობითი პირდაპირი სადაზღვევო ანუიტეტის ერთჯერადი ნეტო-პრემია, რომელიც ამოქმედდება x-ის გარდაცვალების შემდეგ. სხვა სიტყვებით, დაწყებული x-ის გარდაცვალების წლის დასაწყისიდან, ყოველი შემდგომი წლის დასაწყისში, თავის გარდაცვალებამდე, y მიიღებს ერთეულოვან სადაზღვევო თანხას. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\ddot{a}_{x|y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_k p_{y\,k} q_x .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$${}_k p_{y\,k} q_x = {}_k p_y (1 - {}_k p_x) = {}_k p_y - {}_k p_{y\,k} p_x = {}_k p_y - {}_k p_{xy} ,$$

მივიღებთ,

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy} . \qquad (10.17)$$

განხილული შემთხვევა ასიმეტრიულია მეუღლეების მიმართ. შესაბამისი სიმეტრიული კონტრაქტი გულისხმობს სადაზღვევო თანხების გადახდას ნებისმიერი ცოცხალი მეუღლისათვის, მეორე მეუღლის გარდაცვალების შემთხვევაში. შესაბამისი ერთჯერადი $\ddot{a}_{(x|y)}$ ნეტო-პრემიისათვის გვაქვს:

$$\ddot{a}_{(x|y)} = \ddot{a}_{x|y} + \ddot{a}_{y|x} .$$

(10.17)-დან

$$\ddot{a}_{(x|y)} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{xy} ,$$

ხოლო (10.16)-დან

$$\ddot{a}_{(x|y)} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{xy} .$$

10.2 დამცავი დატვირთვის დანიშვნა. ინდივიდუალური რისკის მოდელი

კონკურენციის პირობებში სადაზღვევო კომპანიისათვის უაღრესად მნიშვნელოვანია სწორი სატარიფო განაკვეთების დადგენა — უსაფუძვლოდ დაბალი ტარიფი კომპანიის ზარალს (ან გაკოტრებასაც კი!) გამოიწვევს, ხოლო ზედმეტად მაღალი — ბაზრის ნაწილის დაკარგვას და საკონკურენციო ბრძოლის წაგებას.

დაზღვევის ზოგიერთ სახეობაში, კერძოდ, სიცოცხლის დაზღვევის მრავალ ფორმაში, ყოველი ინდივიდუალური რისკისათვის (პოლისისათვის) შესაძლებელია სატარიფო განაკვეთის აპრიორული ფაქტორების მიხედვით განსაზღვრა (აპრიორული ტარიფიკაცია ინდივიდუალურ საფუძველზე). ამისათვის საჭიროა:

1) დაზღვევის მოცემულ სახეობაში არსებული რისკების დამახასიათებელი აპრიორული სატარიფო ფაქტორების შერჩევა და მათი სკალირება, მაგალითად: ასაკი, სქესი, ჯანმრთელობის მდგომარეობა, პროფესია, სოციალურ-ეკონომიკური მდგომარეობა — სიცოცხლის დაზღვევაში, ტვირთის სახეობა, გადაზიდვის სვლაგეზი, მანძილი, დრო, ტრანსპორტის სახეობა — ტვირთების დაზღვევაში;

2) შერჩეული ფაქტორების მიხედვით რისკების კლასიფიცირება — წარმოქმნილი სატარიფო ბადის „უჯრედებში" მათი განთავსება;

3) ყოველი „უჯრედისათვის" მასში მოთავსებული რისკების ალბათური დახასიათება (ალბათური განაწილებების დადგენა);

4) დადგენილი ალბათური განაწილებებისა და „უჯრედში" მოთავსებული რისკების მიერ შექმნილი პორტფელის მოცულობის გათვალისწინებით ინდივიდუალური პრემიების (ტარიფების) გამოთვლა (სინამდვილეში ტარიფის სიდიდეში გასათვალისწინებელია საქმის წარმოებისათვის და მოგებისათვის აუცილებელი თანხებიც, მაგრამ ჩვენ აქ ამ საკითხს არ შევეხებით).

უკანასკნელი წინადადება შემდგომ განმარტებას მოითხოვს. როგორც 10.1 პუნქტში იყო აღნიშნული, ტარიფიკაციისადმი ამგვარი მიდგომა ინდივიდუალური π ბრუტო-პრემიის ორ ნაწილად დაყოფას გულისხმობს

$$\pi = N + L.$$

N ნეტო-პრემია ინდივიდუალური რისკით გამოწვეულ პრეტენზიას საშუალოდ აბათილებს, ხოლო L დამცავი დატვირთვა პრეტენზიის საშუალო დონისაგან მარჯვნივ (მეტობით) გადახრებს აკომპენსირებს. ნეტო-პრემია მთლიანად განისაზღვრება პრეტენზიის ალბათური განაწილებით, L დატვირთვის სიდიდე კი არსებითად დამოკიდებულია პორტფელის თვისებებზე. სახელდობრ, ინდივიდუალური დატვირთვის დანიშვნა შემდეგი სქემის მიხედვით ხდება:

4ა) დგინდება მთლიანი პორტფელით გამოწვეული ერთიანი პრეტენზიის ალბათური განაწილება;

4ბ) ამ განაწილების საფუძველზე გამოითვლება ის უმცირესი u_α სიდიდე, რომელსაც ერთიანი პრეტენზია საკმარისად დიდი α ალბათობით ($\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.99$) ვერ გადააჭარბებს;

4გ) u_α თანხა ითვლება საკმარისად ერთიანი პრეტენზიის დასაკმაყოფილებლად;

4დ) u_α სიდიდეს აკლდება ინდივიდუალური ნეტო-პრემიების ჯამი (პორტფელის ერთიანი ნეტო-პრემია) და დარჩენილი თანხა, ინდივიდუალური დატვირთვის სახით, „სამართლიანად“ (ინდივიდუალური რისკების სიდიდეების შესაბამისად) ნაწილდება პორტფელში შემავალ პოლისებზე.

მოყვანილი (ინდივიდუალურ საფუძველზე) აპრიორული ტარიფიკაციის მთლიანი პროცედურა პრაქტიკაში მით უფრო ეფექტური და სამართლიანია, რაც უფრო:

— მარტივია სატარიფო ბადე;

— ერთგვაროვანი (ალბათური განაწილებების თვალსაზრისით) და მრავალრიცხოვანია სატარიფო ბადის „უჯრედებში“ წარმოქმნილი პორტფელები;

— დამოუკიდებელია პორტფელში შემავალი რისკები.

ასეთ შემთხვევაში პროცედურის (4ა)-(4ბ) პუნქტების განსახორციელებლად ასევე ეფექტურად გამოიყენება ინდივიდუალური რისკის მოდელი.

წარმოვიდგინოთ, რომ პორტფელი N ცალი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი რისკისაგან შედგება და მისი მოქმედების პერიოდში, ყოველ რისკს შეუძლია არა უმეტეს ერთი პრეტენზიის გამოწვევა. i-ური რისკის შესაბამისი პრეტენზია X_i-ით აღვნიშნოთ. ის ფაქტი, რომ i-ურმა რისკმა შეიძლება საერთოდ არ გამოიწვიოს პრეტენზია, მათემატიკურად იმაში გამოიხატება, რომ X_i-ის ალბათურ განაწილებას 0-ში ატომი გააჩნია, ანუ

$$P(X_i = 0) \neq 0.$$

პორტფელი ერთგვაროვანია, თუ X_i პრეტენზიები ერთნაირადაა განაწილებული.

ინდივიდუალური რისკის მოდელში იგულისხმება, რომ X_i პრეტენზიების ალბათური განაწილებები ცნობილია და პორტფელის ერთიანი X პრეტენზია X_i-ების ჯამით გამოისახება:

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{10.18}$$

X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ შემთხვევითი სიდიდეები, როგორც დისკრეტულად, ასევე უწყვეტად შეიძლება იყოს განაწილებული. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მათ დისკრეტული განაწილება აქვთ

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n \\ p_0^i & p_1^i & p_2^i & & p_n^i \end{pmatrix}.$$

ის, რომ ყველა X_i ღებულობს მაინც და მაინც $0, 1, 2 \ldots, n$, მნიშვნელობებს, ზოგადობას არ ზღუდავს, რადგან ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება მოხერხებული ფულადი ერთეულის არჩევით და იმის დაშვებით, რომ ზოგიერთი

p^i_k შეიძლება 0 იყოს. აღვნიშნოთ

$$m_i = EX_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

მაშინ

$$EX = \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2.$$

ერთიანი X პრეტენზია დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამს წარმოადგენს და მისი ალბათური განაწილება X_i, $i = 1, 2, \dots, N$ სიდიდეების ალბათური განაწილებების ნახვევია. ორი შემთხვევითი სიდიდისათვის ნახვევის ოპერაცია შემდეგნაირად გამოიყურება. ვთქვათ,

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix},$$

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n \\ q_0 & q_1 & q_2 & & q_n \end{pmatrix}.$$

მაშინ $\xi + \eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება ξ და η-ს განაწილებების ნახვევს წარმოადგენს და

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{i=0}^{k} p_{k-i} q_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n,$$

სადაც

$$p_{n+1} = p_{n+2} \cdots = p_{2n} = q_{n+1} = q_{n+2} \cdots = q_{2n} = 0.$$

(10.18) მოდელში, დიდი N-სთვის ნახვევის ოპერაციის ჩატარება არ არის ადვილი, თუმცა თანამედროვე მძლავრი კომპიუტერების მეშვეობით ეს სავსებით შესაძლებელია. ამის შემდეგ ერთიანი X პრეტენზიის ალბათური განაწილება შემდეგი ცხრილის სახით ამოიბეჭდება:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & Nn \\ p_0 & p_1 & p_2 & & p_{Nn} \end{pmatrix},$$

საიდანაც უკვე ადვილია ზემოხსენებული u_α სიდიდის დადგენა:

$$u_\alpha = k,$$

სადაც

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k} p_i \geq \alpha, \\ \sum_{i=0}^{k-1} p_i < \alpha. \end{cases}$$

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება X ერთიანი პრეტენზიის ალბათური განაწილების დადგენის მიახლოებითი მეთოდები, რომლებიც ალბათობის თეორიის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს — ე.წ. ცენტრალურ ზღვარით თეორემას ემყარება. ამ თეორემის თანახმად, გარკვეულ ზოგად პირობებში,

$$\frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

ნორმირებული ერთიანი პრეტენზიის განაწილების ფუნქცია პორტფელის N მოცულობის ზრდასთან ერთად სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის $\Phi(x)$ განაწილების ფუნქციას უახლოვდება

$$P\left(\frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} < x\right) \approx \Phi(x),$$

სადაც

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

ნორმალური აპროქსიმაცია, ისევე როგორც ნახვევების ტექნიკა, u_α სიდიდის დადგენის საშუალებას იძლევა. მართლაც:

$$P(X < u_\alpha) \approx \Phi\left(\frac{u_\alpha - EX}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right). \tag{10.19}$$

$\Phi(x)$ ფუნქცია დაწვრილებით არის ტაბულირებული. კერძოდ, ყოველი α-სთვის შესაძლებელია ისეთი x_α რიცხვის (კვანტილის) მოძებნა, რომლისთვისაც

$$\Phi(x_\alpha) = \alpha. \tag{10.20}$$

α	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95
x_α	2.33	2.05	1.88	1.75	1.645

ცხრილი 10.2

ცხრილში მოყვანილია x_α-ს მნიშვნელობები ზოგიერთი α-სთვის.

(10.19) და (10.20)-დან

$$\frac{u_\alpha - EX}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} = x_\alpha,$$

საიდანაც

$$u_\alpha = x_\alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + EX.$$

მაგალითად, თუ $\alpha = 0.99$, მაშინ X ერთიანი პრეტენზია 0.99 ალბათობით ვერ გადააჭარბებს

$$2.33\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + EX$$

თანხას. ერთგვაროვანი პორტფელისათვის

$$u_\alpha = x_\alpha\sigma_1\sqrt{N} + Nm_1.$$

ამ შემთხვევაში, ყოველი ინდივიდუალური l დატვირთვა შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$l = \frac{x_\alpha\sigma_1}{\sqrt{N}}, \tag{10.21}$$

ვინაიდან მთელ პორტფელზე გაანგარიშებული

$$u_\alpha - Nm_1 = x_\alpha\sigma_1\sqrt{N}$$

დატვირთვა, ამ შემთხვევაში, N ტოლ ნაწილად უნდა გაიყოს. (10.21) ნათლად გვიჩვენებს, რომ ინდივიდუალური დატვირთვა მცირდება N-ის ზრდასთან ერთად.

სამწუხაროდ, ნორმალური აპროქსიმაცია არ არის ყველა x-სთვის ერთნაირად დამაკმაყოფილებელი ერთგვაროვანი პორტფელის შემთხვევაშიც კი. როგორც წესი, აპროქსიმაციის ხარისხი უარესდება EX საშუალოსაგან მოშორებისთანავე, ანუ, როგორც ამბობენ, განაწილების „კუდებში". სადაზღვევო საქმისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მარჯვენა „კუდები" — აპროქსიმაციის შეცდომამ ამ ზონაში შეიძლება არასწორი წარმოდგენა შეგვიქმნას ერთიანი X პრეტენზიის შესაძლო დიდი მნიშვნელობების ალბათობებზე. როგორც სტატისტიკური მონაცემები გვიჩვენებს, X-ის განაწილება არ არის სიმეტრიული თავისი საშუალოს მიმართ (განსხვავებით ნორმალური განაწილებისაგან), რაზეც ე.წ. ასიმეტრიის γ კოეფიციენტი მიგვითითებს:

$$\gamma = \frac{E(X - EX)^3}{(\mathrm{Var}(X))^{\frac{3}{2}}}.$$

ნორმალური განაწილებისათვის $\gamma = 0$, ხოლო X-ის განაწილებისათვის $\gamma > 0$ (მარჯვენა ასიმეტრია). ნორმალური აპროქსიმაციის ეს ნაკლოვანება

ნაწილობრივ შეიძლება გამოსწორდეს ე.წ. ესშერის გარდაქმნით, ან ე.წ. ლოგნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებით (იხ. [32], [212]). ამ თემას ჩვენ შემდგომში კვლავ დავუბრუნდებით (იხ. პუნქტი 10.3).

აღსანიშნავია, რომ პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევები, როდესაც, ამა თუ იმ მიზეზით, შეუძლებელია X ერთიანი პრეტენზიის განაწილების ფუნქციის დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით დადგენა. თანამედროვე კომპიუტერების გამოყენებით საკმარისად ადვილია კონკრეტული α-სთვის u_α სიდიდის მიღება იმიტაციის (სიმულაციის) საშუალებით. თუ პორტფელი ერთგვაროვანია, ან რამდენიმე ერთგვაროვანი ჯგუფისაგან შედგება, შეიძლება თავიდან ავიცილოთ ერთიანი X პრეტენზიის ალბათური განაწილების როგორც ნახვევებით, ასევე მიახლოებითი მეთოდებით გამოთვლის პრობლემა. თუ კომპიუტერში შევიტანთ ყოველი ინდივიდუალური რისკის ალბათურ განაწილებას, შესაბამისი პროგრამის გამოყენებით მას შეუძლია ყოველი X_i-ის საკმაოდ ბევრჯერ „გათამაშება". „გათამაშების" ყოველი ვარიანტი მოგვცემს X_i პრეტენზიის რაიმე მნიშვნელობას. თუ პორტფელში შემავალი რისკების გათამაშების ერთ ვარიანტში მიღებულ მნიშვნელობებს შევკრიბავთ (ისევ კომპიუტერის მეშვეობით), მივიღებთ ერთიანი X პრეტენზიის მნიშვნელობის ასევე ერთ ვარიანტს. ამგვარად, კომპიუტერს შეუძლია ერთიანი X პრეტენზიის მნიშვნელობათა მრავალი M რეალიზაციის გამოთვლა. ამის შემდეგ, ნებისმიერი u-სთვის კომპიუტერი დათვლის იმ რეალიზაციების m რაოდენობას, რომლებშიც X-ის მნიშვნელობამ გადააჭარბა u-ს. შეფარდება $\frac{m}{M}$ იქნება X-ის მიერ u სიდიდის გადაჭარბების ალბათობის კარგი შეფასება. ამ გზით, „მოსინჯვის მეთოდით", საკმაოდ ადვილად მივაგნებთ ისეთ u_α-ს, რომელიც უზრუნველყოფს კომპანიისათვის მისაღები α ალბათობის მნიშვნელობას.

თუ პორტფელი არაერთგვაროვანია, მაშინ ინდივიდუალური დატვირთვის დანიშვნა

$$l_i = \frac{u_\alpha - EX}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

წესით არასამართლიანია, ვინაიდან ორ სხვადასხვა რისკს შორის, მეტი დისპერსიის (ან, რაც იგივეა, მეტი საშუალო კვადრატული გადახრის) მქონე რისკი უფრო გაბნეულია თავისი საშუალოს გარშემო და, ამგვარად, მზღვეველისათვის უფრო სახიფათოა. ბუნებრივია $u_\alpha - EX$ თანხის σ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, საშუალო კვადრატული გადახრების პროპორციულად განაწილება. სხვა სიტყვებით, ბუნებრივია, რომ i-ური რისკის შესაბამისი l_i დატვირთვა შემდეგი ფორმულით გამოითვლებოდეს:

$$l_i = \frac{\sigma_i}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}(u_\alpha - EX). \tag{10.22}$$

ასეთი გადანაწილების დროს, პორტფელში შემავალი i-ური პოლისისათვის

ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვა

$$\theta_i = \frac{l_i}{EX_i} = \frac{u_\alpha - EX}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i} \cdot \frac{\sigma_i}{EX_i} \tag{10.23}$$

აღმოჩნდება X_i პრეტენზიის

$$K_i = \frac{\sigma_i}{EX_i}$$

ვარიაციის კოეფიციენტის პროპორციული, რომელიც რისკის გაბნევის კიდევ ერთ მახასიათებელს წარმოადგენს. საბოლოოდ, (10.22) წესის მიხედვით, i-ური პოლისის შესაბამისი ბრუტო-პრემია π_i მიიღებს სახეს:

$$\pi_i = EX_i + \frac{\sigma_i}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}(u_\alpha - EX),$$

ან

$$\pi_i = EX_i(1 + \theta_i),$$

სადაც θ_i (10.23) ფორმულით მოიცემა.

შედგენილი პუასონის მოდელი. განვიხილოთ სიცოცხლის დაზღვევის ერთ-ერთი ელემენტარული ფორმა, მაგალითად, n წლის ვადით გარდაცვალებისაგან დაზღვევა. წარმოვიდგინოთ, რომ აპრიორული სატარიფო ფაქტორები შერჩეულია და ბადის ერთ-ერთ უჯრედში შეიქმნა ერთგვაროვანი პორტფელი, რომელიც დამოუკიდებელი რისკებისაგან შედგება. ინდივიდუალური რისკის მოდელის თანახმად, პორტფელის ერთიანი პრეტენზია შემდეგი სახით წარმოდგება:

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

სადაც

$$X_i \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

p არის დაზღვეული პიროვნების უახლოესი n წლის განმავლობაში გარდაცვალების ალბათობა, ხოლო C — სადაზღვევო თანხაა. ინდივიდუალური რისკის მოდელის გამოსაყენებლად ამ მაგალითში იდეალური პირობებია შექმნილი, მაგრამ გარკვეული სიფრთხილე მაინც საჭიროა. X_i — ე.წ. ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა (ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ $C = 1$) და

$$EX_i = Cp, \quad \mathrm{Var}(X_i) = C^2 p(1-p).$$

პორტფელის ერთიან X პრეტენზიას ამ შემთხვევაში ე.წ. ბინომური განაწილება აქვს:

$$P(X = Ck) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},$$

$$EX = CNp, \quad \mathrm{Var}(X) = C^2 Np(1-p).$$

ამ მაგალითისათვის (და საერთოდ სადაზღვევო საქმისთვის) ტიპიურია p-ს ძალზედ მცირე მნიშვნელობა (მაგალითად, $p = 0.002$) და X_i-ების საკმაოდ დიდი N რაოდენობა (მაგალითად, $N = 1000$) ისე, რომ

$$\lambda = Np$$

არის „ზომიერი" რიცხვი ($\lambda = 1000 \cdot 0.002 = 2$). ამ შემთხვევაში, ბინომური განაწილების უშუალო გამოყენება (გამოთვლითი პრობლემის გამო) პრაქტიკულად შეუძლებელია და, რაც მთავარია, ნორმალური აპროქსიმაციაც აბსოლუტურად მიუღებელია. საბედნიეროდ, სწორედ ასეთ შემთხვევებში, ბინომური განაწილებისათვის, საკმაოდ კარგი სიზუსტით, სამართლიანია ე.წ. პუასონის მიახლოება.

$$P(X = Ck) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

რომელიც, გამოთვლითი თვალსაზრისით; უაღრესად მარტივია.

შემოვიღოთ ახალი შემთხვევითი სიდიდე ν — პორტფელის მოქმედების პერიოდში მის მიერ გამოწვეული პრეტენზიების რაოდენობა. ცხადია, რომ ν შემთხვევითი სიდიდეა. იგი არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს ღებულობს და, ჩვენ შემთხვევაში,

$$P(\nu = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{10.24}$$

ამგვარად, ჩვენ მაგალითში, X ერთიანი პრეტენზიისათვის სამართლიანია ახალი წარმოდგენა

$$X = C\nu = \sum_{k=1}^{\nu} C, \quad \sum_{1}^{0} = 0. \tag{10.25}$$

(10.25)-ში C მუდმივი სიდიდეა და, ბუნებრივია, დამოუკიდებელია ν-ზე. პუასონის განაწილებას შემდეგი თვისებები გააჩნია.

1. თუ Z პუასონის შემთხვევითი სიდიდეა λ პარამეტრით, მაშინ

$$EZ = \mathrm{Var}(Z) = \lambda,$$

ხოლო ასიმეტრიის კოეფიციენტი

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

2. თუ Z_1 და Z_2 დამოუკიდებელი პუასონის შემთხვევითი სიდიდეებია შესაბამისად λ_1 და λ_2 პარამეტრებით, მაშინ $Z_1 + Z_2$ სიდიდე კვლავ პუასონისაა პარამეტრით $\lambda_1 + \lambda_2$.

3. (10.24) ალბათობის გამოსათვლელად (კომპიუტერისთვის პროგრამის შესადგენად) მოხერხებულია შემდეგი რეკურენტული ფორმულის გამოყენება:

$$P(\nu = 0) = e^{-\lambda}, \quad P(\nu = k) = P(\nu = k-1) \cdot \frac{\lambda}{k}.$$

პორტფელის ძალზედ დიდი მოცულობის დროს λ პარამეტრიც იზრდება და

$$F(k) = P(\nu \le k) = \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

განაწილების ფუნქციისათვის თითქოს ბუნებრივია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის გამოყენება:

$$F(k) \approx \Phi\left(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

მაგრამ, როგორც გამოთვლები გვიჩვენებს, ნორმალური მიახლოება მხოლოდ ძალზედ დიდი (1000-ის რიგის) λ-სთვის არის დამაკმაყოფილებელი. გაცილებით უკეთესია ანსკომბის აპროქსიმაცია (იხ. [32]):

$$F(k) \approx \Phi\left(\frac{3}{2}\left(k + \frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \lambda^{-\frac{1}{6}} - \frac{3}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{1}{24\sqrt{\lambda}}\right).$$

კიდევ უფრო უკეთესია (საკმაოდ მცირე λ-სთვისაც) პიზერისა და პრატის აპროქსიმაცია ([32]):

$$F(k) \approx \Phi\left(\left[\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{2}{3} + \frac{0.022}{k+1}\right)\right]\sqrt{1+T(r)}\right),$$

სადაც

$$r = \frac{k+0.5}{\lambda}, \quad T(r) = \frac{1 - r^2 + 2r\ln r}{1-r^2}, \quad T(1) = 0.$$

ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის მეშვეობით შესაძლებელია ამ სამი აპროქსიმაციის ხარისხის შედარება ($k \leq \lambda$-სთვის მოყვანილია $F(k)$·განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები, ხოლო $k > \lambda$-სთვის — $(1 - F(k))$ ფუნქციის).

λ	k	ზუსტი	ნორმალური	ანსკომბის	პიზერის და პრატის
10	0	0.000045	0.000783	0.000034	0.000044
	2	0.002769	0.005706	0.002672	0.002763
	8	0.332820	0.263545	0.332775	0.332833
	10	0.583040	0.500000	0.582704	0.583059
	12	0.208444	0.263545	0.208786	0.208432
	18	0.007187	0.000252	0.007137	0.007187
	23	0.000120	0.000020	0.000115	0.000120
100	80	0.022649	0.022750	0.022643	0.022649
	90	0.171385	0.158655	0.171405	0.171386
	100	0.526562	0.500000	0.526551	0.526563
	110	0.147137	0.158655	0.147161	0.147137
	120	0.022669	0.022750	0.022665	0.022669
	130	0.001707	0.001350	0.001703	0.001707
	140	0.000064	0.000032	0.000064	0.000064
	145	0.000010	0.000003	0.000010	0.000010
1000	905	0.001215	0.001332	0.001214	0.001215
	937	0.023172	0.023173	0.023172	0.023172
	968	0.159596	0.155786	0.159599	0.159596
	1032	0.152095	0.155786	0.152097	0.152095
	1063	0.023155	0.023173	0.023155	0.023155
	1095	0.001446	0.001332	0.001446	0.001446

ცხრილი 10.3

თუ ჩვენ მაგალითს ოდნავ გავართულებთ და დავუშვებთ, რომ

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=0}^{n} p_i = 1,$$

მაშინ კვლავ ბუნებრივია ვივარაუდოთ, რომ p_0 საკმაოდ დიდი ალბათობაა (ანუ სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელების $1-p_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i$ ალბათობა საკმაოდ მცირეა). მაგალითისათვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ შენობების ხანძრისაგან დაზღვევა, მაშინ p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ იქნება შენობისათვის ხანძრის მიერ i თანხის ტოლი ზარალის მიყენების ალბათობა. ისევე, როგორც წინა მაგალითში, აქაც შეიძლება X ერთიანი პრეტენზიისათვის (10.25)-ის მსგავსი წარმოდგენის მიღება:

$$X = \sum_{k=1}^{\nu} Y_i, \quad \sum_{1}^{0} = 0, \tag{10.26}$$

სადაც ν მიახლოებით პუასონის შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრით $\lambda = N(1-p_0)$, ხოლო

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ p_1' & p_2' & p_3' & & p_n' \end{pmatrix}, \quad p_i' = \frac{p_i}{1-p_0}.$$

როგორც ვხედავთ, (10.25)-თან შედარებით, (10.26)-ში პორტფელის მიერ გამოწვეული პრეტენზიების C მუდმივი სიდიდეების ნაცვლად, გაჩნდა დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული Y_i შემთხვევითი სიდიდეები. შევნიშნოთ, რომ X_i-გან განსხვავებით, Y_i სიდიდეები აღარ ღებულობენ 0-ის ტოლ მნიშვნელობებს, ვინაიდან ისინი წარმოადგენენ ნამდვილად მომხდარი სადაზღვევო შემთხვევებით გამოწვეული ზარალის სიდიდეებს. ისიც აღვნიშნოთ, რომ Y_i სიდიდეები შეიძლება ν-ზე დამოკიდებულნი აღმოჩნდნენ (დიდი რაოდენობით ჩნდება პატარა ხანძრები და იშვიათად — დიდი).

გარკვეული აზრით, წარმოდგენა (10.26) უფრო რთულ მათემატიკურ კონსტრუქციას წარმოადგენს, ვიდრე (10.18), რადგან მასში შესაკრებთა შემთხვევითი რაოდენობა მონაწილეობს. პრაქტიკაში ხშირად უშვებენ, რომ Y_i-ები დამოუკიდებელია ν-ზე და მაშინ (10.26) ჯამი საკმაოდ მოხერხებული ობიექტი ხდება. მაგალითად, X-ის საშუალოსა და დისპერსიის გამოსახულებები ბევრად არ რთულდება,

$$\begin{aligned} EX &= E\nu \cdot EY_1, \\ \operatorname{Var}(X) &= E\nu \cdot \operatorname{Var}(Y_1) + \operatorname{Var}(\nu)(EY_1)^2. \end{aligned} \tag{10.27}$$

სატარიფო განაკვეთის დასადგენად საჭირო u_α სიდიდე კვლავ

$$P(X \le u_\alpha) = \alpha$$

განტოლებიდან მოიძებნება. ამ განტოლების ამოსახსნელად დაგვჭირდება (10.26) წარმოდგენის მიხედვით X-ის განაწილების ფუნქციის დადგენა.

თუ დავუშვებთ, რომ ν ზუსტად λ პარამეტრის მქონე პუასონის კანონის მიხედვით არის განაწილებული, მაშინ (10.26) ჯამს ე.წ. შედგენილი პუასონის განაწილება აქვს. ამ შემთხვევაში, (10.27)-დან

$$EX = \lambda EY_1,$$

$$\operatorname{Var}(X) = \lambda EY_1^2.$$

შედგენილი პუასონის განაწილება ν და Y_i-ის განაწილებათა კომბინაციას წარმოადგენს. თუ ამ უკანასკნელის განაწილების ფუნქციას (დისკრეტულს თუ უწყვეტს) F-ით აღვნიშნავთ, მაშინ შედგენილი განაწილების აღნიშვნა (λ, F) წყვილით შეიძლება. (λ, F) განაწილებას შემდეგი თვისებები გააჩნია.

1. თუ Y_i დისკრეტულია (როგორც წინა მაგალითში)

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & & m \\ p_1 & p_2 & & p_m \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$P(X=n) = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,m)} i p_i P(X=n-i), \quad P(X=0) = e^{-\lambda}. \tag{10.28}$$

ამ რეკურენტული ფორმულის კომპიუტერზე რეალიზაცია არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს.

2. დამოუკიდებელი (λ_i, F_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, შემთხვევითი სიდიდეების ჯამი ასევე შედგენილი (λ, F) პუასონის კანონის მიხედვით არის განაწილებული, სადაც

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x).$$

3. თუ (λ, F) სიდიდისათვის

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i F_i(x), \quad q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = 1,$$

მაშინ იგი დამოუკიდებელი $(\lambda q_i, F_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ.

დისკრეტული Y_i-ების შემთხვევაში (10.28) რეკურენტული ფორმულა ფაქტიურად წყვეტს X-ის განაწილების პოვნის პრობლემას. უწყვეტად განაწილებული Y_i-ებისთვის X-ის განაწილების ფუნქციის გამოთვლის რამდენიმე ცნობილი მეთოდი არსებობს. ამ მეთოდებს ჩვენ შემდგომში, კოლექტიური რისკის მოდელის განხილვისას, გავეცნობით, აქ კი ერთ კლასიკურ კერძო შემთხვევას, ე.წ. ერლანგის მოდელს შევეხებით.

(10.26) სახით წარმოდგენილ X ერთიან პრეტენზიას აქვს ერლანგის განაწილება, თუ

ა) ν — რაიმე λ პარამეტრიანი პუასონის კანონით არის განაწილებული;

ბ) Y_i-ები ერთმანეთისგან და ν-სგან დამოუკიდებლებია, და ყოველ მათგანს აქვს ექსპონენციალური განაწილება:

$$F(x) = P(Y_i \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0.$$

ექსპონენციალურ განაწილებას $f(x)$ სიმკვრივე გააჩნია:

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0,$$

და

$$EY_i = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \mu^2.$$

გარკვეული აზრით, პრეტენზიის სიდიდის ექსპონენციალური განაწილებით დახასიათება ბუნებრივია, ვინაიდან მის მიხედვით დიდი ალბათობით პრეტენზია მცირე იქნება და მცირე ალბათობით — დიდი. სამწუხაროდ, დაზღვევის მრავალ სახეობაში, როგორც ამას დაკვირვებები გვიჩვენებს, ამ მოდელის შესაბამისი დიდი პრეტენზიების ალბათობა არარეალურად მცირეა. ამის მიუხედავად, ანალიზური მოხერხებულობის გამო, ერლანგის მოდელი პრაქტიკაში გამოიყენება. ერლანგის განაწილების გამოყვანის გზა, საზოგადოდ, შედგენილი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის გამოიყენება. გვაქვს

$$P(X \leq x) = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu = k) \cdot P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \leq x) =$$
$$= e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} G^k(x), \quad x \geq 0,$$

სადაც $G^k(x)$ ექსპონენციალური განაწილების k-ჯერ ნახვევს წარმოადგენს. როგორც ცნობილია, $G^k(x)$ ე.წ. გამა განაწილებაა პარამეტრებით (k, μ^{-1}). მას გააჩნია სიმკვრივე:

$$g_k(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu^k \Gamma(k)}, \quad x \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

სადაც, მთელი k რიცხვებისათვის

$$\Gamma(k) = (k-1)!,$$

და, საზოგადოდ,

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

თუ Z შემთხვევით სიდიდეს აქვს (k, μ^{-1}) გამა განაწილება, მაშინ

$$EZ = \mu k, \quad \mathrm{Var}(Z) = \mu^2 k, \quad \gamma_Z = \frac{2}{\sqrt{k}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$G^k(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{\mu^i i!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0,$$

საბოლოოდ მივიღებთ ერლანგის განაწილების სახეს:

$$P(X \leq x) = e^{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{\mu^i i!}\right), \quad x \geq 0.$$

10.3 კოლექტიური რისკის მოდელი. მოკლევადიანი დაზღვევა

დაზღვევის მრავალ სახეობას ისეთ რთულ მოვლენებთან აქვს საქმე, რომ ინდივიდუალური რისკების რამდენადმე მკაფიო, აპრიორული დახასიათება შეუძლებელი ხდება. მაგალითისათვის შეიძლება საავტომობილო დაზღვევა მოვიყვანოთ. დაზღვევის ამ სახეობისათვის ტიპიურია ინდივიდუალური რისკის „მრავალჯერადობა" — ერთი წლის განმავლობაში, ერთ სატრანსპორტო ერთეულს (ან მძღოლს) შეიძლება სხვადასხვა სიმძიმის რამდენიმე საგზაო შემთხვევა მოუვიდეს. როგორ დავახასიათოთ (შევაფასოთ) ამგვარი რისკი აპრიორულად? თავის მონოგრაფიაში [104] ცნობილი აქტუარი, ჟან ლემიერი, ვრცელ სტატისტიკურ მასალაზე შეისწავლის ინდივიდუალური საავტომობილო რისკით გამოწვეული პრეტენზიების რაოდენობისა და სიდიდის დამოკიდებულებას სხვადასხვა აპრიორულ ფაქტორზე. სტატისტიკური ანალიზის საფუძველზე გამოვლენილია 14 ყველაზე მნიშვნელოვანი ფაქტორი, რომელიც საგზაო შემთხვევათა რაოდენობაზე მოქმედებს: მძღოლის ასაკი, ავტომობილის სიმძლავრე, ერთი წლის განმავლობაში გავლილი მანძილი, მძღოლის ოჯახური მდგომარეობა და სხვა. როგორც თავად ავტორი აღნიშნავს, შერჩეული აპრიორული ფაქტორების სიმრავლის მიუხედავად, სატარიფო ბადის ერთ უჯრედში მოხვედრილ რისკებს, ალბათური თვალსაზრისით, მნიშვნელოვანი არაერთგვაროვნება ახასიათებთ. ლემიერის აზრით, ისეთი ფაქტორები არსებობს, რომელთა გაზომვა და აპრიორული გათვალისწინება პრინციპულად შეუძლებელია, მაგრამ, ეს რომ ასეც არ იყოს და 20–30 ფაქტორი განსაზღვრავდეს რისკის ალბათურ განაწილებას, მიღებული სატარიფო ბადე პრაქტიკულად გამოუსადეგი იქნებოდა. ამგვარად, ჩვენ იძულებული ვხდებით უარი ვთქვათ:

ა) რისკების აპრიორულ კლასიფიკაციაზე;

ბ) პორტფელების ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ერთგვაროვანი რისკებისაგან შედგენაზე;

გ) პორტფელის ერთიანი რისკის ალბათურ დახასიათებაზე მასში შემავალი ინდივიდუალური რისკების საფუძველზე, ანუ ინდივიდუალური რისკის მოდელის გამოყენებაზე.

აქტუარული ანალიზის ახალ საკვლევ ერთეულად, ასეთ ვითარებაში,

მთლიანი პორტფელი მოგვევლინება, რომელიც გარკვეული (არასატარიფო) პრინციპების მიხედვით არის შედგენილი. შესაძლებელია, რომ პორტფელი რაიმე უხეში, მიახლოებითი აპრიორული კლასიფიკაციის შედეგად იყოს მიღებული, მაგრამ ჩვენ ვეღარ ვიგულისხმებთ, რომ მასში შემავალი ინდივიდუალური რისკების ალბათური განაწილებები ჩვენთვის ცნობილია.

აქტუარულ მათემატიკაში, ამგვარი პორტფელებისთვის ერთიანი პრეტენზიის ალბათური განაწილების დადგენა მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების გამოყენებით ხდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოცდილების საფუძველზე გამოითქმება გარკვეული ჰიპოთეზები პორტფელის მათემატიკურ სტრუქტურაზე და ამ სტრუქტურის ელემენტების ალბათურ ხასიათზე. გამოთქმული ჰიპოთეზების გათვალისწინებით შეიმუშავება პორტფელის ერთიანი პრეტენზიის ალბათური მოდელი, რომლის საფუძველზეც შესაძლებელია გამოთვლების ჩატარება. თუ გამოთვლების შედეგები დაკვირვებებს (სტატისტიკურ მონაცემებს) ეთანხმება (რაც ასევე მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით მოწმდება), ითვლება, რომ მოდელი მისაღებია, თუ არა და — საჭიროა სხვა მოდელის შემუშავება.

წინა პუნქტში ჩვენ ვნახეთ, რომ პორტფელში შემავალი ინდივიდუალური რისკების ალბათური განაწილებების ცოდნის პირობებში, შესაძლებელია პორტფელის ერთიანი პრეტენზიის (10.26) სახით წარმოდგენა. აღმოჩნდა, რომ ერთიანი პრეტენზიის ასეთი სტრუქტურა ნაყოფიერია ახალ, „სტატისტიკურ" ვითარებაშიც.

ვიგულისხმოთ, რომ პორტფელის ერთიანი პრეტენზია (რომელსაც ამიერიდან Y-ით აღვნიშნავთ) შემდეგი ჯამის სახით წარმოდგება:

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i, \quad \sum_{1}^{0} = 0. \tag{10.29}$$

გარეგნულად (10.29) ჰგავს (10.26)-ს, მაგრამ მათ შორის პრინციპული განსხვავებაა. (10.26)-ში Y_i-ის და ν-ს ალბათური თვისებები ინდივიდუალური რისკების ცნობილი თვისებებიდან გამომდინარეობდა, აქ კი (10.29) წარმოდგენა უბრალოდ მოხერხებული ჰიპოთეზაა და ჯერჯერობით Y_i-სა და ν-ს შესახებ არაფერია ცნობილი. შემდგომი დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ Y_i-ები დადებითი, დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. მათი ინტერპრეტაცია ინდივიდუალურ რისკებთან კვლავ არავითარ კავშირში არ არის — იგულისხმება, რომ $Y_1, Y_2, \ldots$ უბრალოდ რიგით პირველი, მეორე და ა.შ. შემოსული პრეტენზიების სიდიდეებია. ν შემთხვევით სიდიდეს, ისევე როგორც (10.26)-ში, შემოსული პრეტენზიების რაოდენობის შინაარსი აქვს. მნიშვნელოვანი დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ ν დამოუკიდებელია Y_i-ებისგან. როგორც 10.2 პუნქტში იყო აღნიშნული, ეს დაშვება ყოველთვის არ არის ბუნებრივი, მაგრამ მის გარეშე მოდელი ძალიან რთულდება.

თუ Y ერთიანი პრეტენზია (10.29) სახით არის წარმოდგენილი და ყველა ჩამოთვლილი დაშვება სრულდება, ვიტყვით, რომ იგი კოლექტიური რისკის მოდელის მიხედვით არის სტრუქტურირებული. მოდელის დასაკონკრეტებლად საჭიროა, სტატისტიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ν და Y_i შემთხვევითი სიდიდეების ალბათური განაწილებების განსაზღვრა. სხვათა შორის, (10.29) წარმოდგენა იმიტომაც არის გავრცელებული, რომ Y-ის განაწილების დასადგენად მხოლოდ ამ ორი ალბათური განაწილების ცოდნაა საჭირო. აქტუარები ცალკე ν-ს განაწილებას ირჩევენ, ცალკე — Y_i-ების, და შემდეგ ამ ორი განაწილებისაგან Y-ის განაწილებას „შეადგენენ“. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ (10.27) აქაც სამართლიანია:

$$EY = E\nu \cdot EY_1,$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E\nu \cdot \mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(\nu) \cdot (EY_1)^2.$$

პრეტენზიათა რაოდენობის ალბათური განაწილება. წინა პუნქტში, ინდივიდუალური რისკის მოდელისთვის, სპეციფიკური პორტფელით გამოწვეული პრეტენზიების რაოდენობის აღსაწერად ბუნებრივი აღმოჩნდა პუასონის (10.24) განაწილება. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ამ განაწილებას უფრო ფართო გამოყენება აქვს და ν-ს პუასონის კანონით განაწილების ჰიპოთეზა (10.29) კოლექტიური რისკის მოდელშიც, საზოგადოდ, მისაღებია. (10.24) განაწილების სიმარტივისა და მოხერხებულობის გამო ხშირად ასეც იქცევიან და, შესაბამისად, (10.29)-ში Y ერთიან პრეტენზიას შედგენილი პუასონის განაწილებით აღწერენ. სინამდვილეში, პუასონის კანონის მიხედვით ν-ს განაწილების ჰიპოთეზა დაზღვევის მრავალ სახეობაში მიუღებელია. ამის დასასაბუთებლად მოვიყვანოთ შემდეგი მსჯელობა, რომელიც როგორც მთლიან პორტფელს, ასევე ცალკეულ ინდივიდუალურ „მრავალჯერად“ რისკებს ეხება.

ყოველი რისკი გარკვეული დროის განმავლობაში არსებობს და შემთხვევით მომენტებში პრეტენზიებს წარმოქმნის. ერთ-ერთი მთავარი პირობა იმისათვის, რომ დროის რაიმე (პირობითად ერთეულოვან) შუალედში, მაგალითად ერთ თვეში ან წელიწადში, პრეტენზიათა რაოდენობა პუასონის კანონის მიხედვით იყოს განაწილებული, იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული დროითი შუალედის ნებისმიერ ორ თანაუკვეთ ქვეშუალედში წარმოქმნილ პრეტენზიათა რაოდენობები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელნი იყვნენ. ამავე დროს, საყოველთაოდ ცნობილია, რომ გარეშე (ან გაუთვალისწინებელი შინაგანი) შემთხვევითი ფაქტორების ზეგავლენის გამო, აღნიშნული დამოუკიდებლობის პირობა ხშირად არ სრულდება. მოვიყვანოთ მაგალითები ([32]).

თუ ივლისის პირველი კვირის განმავლობაში უჩვეულოდ ბევრი ტყის ხანძარი აღინიშნა, შესაძლოა ეს განსაკუთრებით ცხელი ზაფხულის შედეგი

აღმოჩნდეს. ასეთ შემთხვევაში მოსალოდნელია, რომ შემდეგ კვირაშიც ბევრი ხანძარი იყოს. პირიქით, იგივე მიზეზის გამო, პირველ კვირაში ხანძართა რაოდენობის სიმცირეს შემდეგ კვირაშიც ცოტა ხანძარი შეიძლება მოჰყვეს. ამგვარად, გარეშე შემთხვევითმა ფაქტორმა, ამინდმა, სხვადასხვა კვირაში მომხდარ ხანძართა რაოდენობები ერთმანეთთან დააკავშირა, რის გამოც, მაგალითად, მომავალი წლის იელისში მოსალოდნელი ტყის ხანძართა რაოდენობისათვის პუასონის განაწილების ჰიპოთეზის დაშვება არასწორი იქნება.

იგივე პრობლემასთან გვაქვს საქმე ინდივიდუალური რისკის შეფასების დროსაც. მძღოლის ყოფაქცევა პირველი საგზაო შემთხვევის შემდეგ ბევრად არის დამოკიდებული მის ფსიქოლოგიურ თვისებებზე, რომელთა წინასწარ გათვალისწინება პრაქტიკულად შეუძლებელია. საგზაო შემთხვევის შემდეგ, ზოგი მძღოლი განსაკუთრებით ყურადღებიანი და ფრთხილი ხდება და შემდგომში მას ამგვარი შემთხვევა აღარ მოსდის. სხვა მძღოლს — შეიძლება თვითდაუჯერებლობა და შიში დაეუფლოს, რის გამოც პირველ საგზაო შემთხვევას შეიძლება მეორე მოჰყვეს. ამ მაგალითში „დამაკავშირებელი" შემთხვევითი ფაქტორის როლში გაუთვალისწინებელი ფსიქოლოგიური ფაქტორი გამოდის. ისევე როგორც წინა მაგალითში, შემთხვევით შერჩეული მძღოლის მიერ ერთი წლის განმავლობაში მოხდენილი საგზაო შემთხვევების რაოდენობისათვის პუასონის განაწილების ჰიპოთეზის დაშვება გაუმართლებელია. სხვათა შორის, ამაზე [32]-სა და [105]-ში მოყვანილი სტატისტიკური მონაცემებიც მეტყველებს:

k	დაკვირვებული	პუასონის განაწილება
0	370412	369246
1	46545	48644
2	3935	3204
3	317	141
4	28	5
5	3	—

ცხრილი 10.4

შესწავლილია 1968 წელს გაცემული 421240 საავტომობილო დაზღვევის პოლისი. პოლისები კლასიფიცირებულია მომხდარი საგზაო შემთხვევების რაოდენობების მიხედვით (მაგალითად, 370412 მძღოლს საერთოდ არ მოსვლია საგზაო შემთხვევა). ერთი პოლისისათვის საგზაო შემთხვევათა რაოდენობის ემპირიული საშუალო არის 0.13174, ხოლო დისპერსია — 0.13852. როგორც ვხედავთ, ემპირიული დისპერსია აღემატება ემპირიულ საშუალოს, რაც იმის პირველი ნიშანია, რომ ცალკეული პოლისისათვის შემთხვევათა რაოდენობის პუასონის განაწილებით აღწერა უვარგისია. მართლაც, მეორე სვეტში მოყვანილია პოლისების მომხდარი საგზაო შემთხვევების რაოდენობათა მიხედვით მოსალოდნელი განაწილება პირობაში,

რომ ყოველი პოლისისათვის სამართლიანია პუასონის კანონი პარამეტრით $\lambda = 0.13174$. როგორც ვხედავთ, მიღებული ჰიპოთეტური განაწილება ცუდად ეთანხმება დაკვირვებას. ეს ფაქტი χ^2 ტესტითაც დასტურდება.

რისკით გამოწვეულ პრეტენზიათა რაოდენობაზე შემთხვევითი ფაქტორების ზეგავლენა ხშირად შერეული პუასონის განაწილებით აღიწერება. უფრო ზუსტად, იგულისხმება, რომ (10.24) განაწილებაში საშუალო λ თავად შემთხვევითი სიდიდეა, რომელსაც რაიმე $H(\lambda)$ ალბათური განაწილება აქვს. ეს უკანასკნელი სწორედ იმ შემთხვევითი ფაქტორის ცვალებადობას აღწერს, რომლის გამოც პუასონის განაწილების ჰიპოთეზა რისკისათვის მიუღებელი აღმოჩნდა. იმ შემთხვევაში, როდესაც საქმე ეხება პორტფელში გაერთიანებულ ინდივიდუალურ რისკებს (როგორც ჩვენს მეორე მაგალითში), $H(\lambda)$-ს სტრუქტურულ ფუნქციას უწოდებენ. $H(\lambda)$ განაწილება შეიძლება დისკრეტულიც იყოს და უწყვეტიც. პირველ შემთხვევაში, თუ

$$\lambda \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$P(\nu = k) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!} p_i.$$

უწყვეტი $H(\lambda)$ განაწილებისათვის

$$P(\nu = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dH(\lambda).$$

ორივე შემთხვევაში

$$E\nu = E\lambda.$$

დისკრეტულ შემთხვევაში $H(\lambda)$ განაწილება შეიძლება დაკვირვებების საფუძველზე დავადგინოთ. ტყის ხანძრებთან დაკავშირებულ მაგალითში დაკვირვებებმა შეიძლება გვიჩვენოს, რომ

$$\lambda \sim \begin{pmatrix} 300 & 175 & 80 & 60 & 30 \\ 0.05 & 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad E\lambda = 100.$$

ეს ნიშნავს, რომ მრავალი წლის დაკვირვების შედეგად ძალზე მშრალი ივლისის თვეების ხვედრითი წილი 0.05 აღმოჩნდა და ასეთ წლებში საშუალოდ 300 ხანძარი ხდებოდა. დანარჩენი ალბათობები და ხანძართა საშუალო რაოდენობები შეესაბამება მშრალ, ნორმალურ, წვიმიან და ძალზედ წვიმიან ივლისის თვეებს. ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს შევადაროთ

$$F(k) = P(\nu \leq k)$$

განაწილების ფუნქციები, რომლებიც შერეული პუასონისა და $\lambda = 100$ პარამეტრიანი ჩვეულებრივი პუასონის კანონების მიხედვით არის გამოთვლილი:

k	შერეული პუასონის განაწილება	პუასონის განაწილება ($\lambda = 100$)
50	0.13	0.00
70	0.47	0.01
100	0.74	0.53
150	0.76	1.00
200	0.94	1.00
300	0.98	1.00

ცხრილი 10.5

როგორც ვხედავთ, განსხვავება ფრიად მნიშვნელოვანია — ჩვეულებრივი პუასონის კანონის მიხედვით 150 ხანძარზე მეტის მოხდენა ყოელად შეუძლებელია, მაშინ როდესაც, შერეული პუასონის განაწილების მიხედვით, ამის ალბათობა 0.24-ის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ შერეული პუასონის განაწილებას უფრო „მძიმე" (ან „გრძელი") მარჯვენა კუდი აქვს.

უწყვეტ $H(\lambda)$ განაწილებებს შორის განსაკუთრებით აღსანიშნავია გამა-განაწილება პარამეტრებით (a, τ), რომლის სიმკვრივეს აქვს სახე (წინა პუნქტში პარამეტრები (k, μ^{-1}) იყო):

$$g(\lambda) = \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda}\lambda^{a-1}}{\Gamma(a)}, \quad a > 0, \quad \tau > 0. \tag{10.30}$$

$$E\lambda = \frac{a}{\tau}, \quad \mathrm{Var}(\lambda) = \frac{a}{\tau^2}, \quad \gamma_\lambda = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

გამა-განაწილების „შემრევის" როლში გამოყენება გვაძლევს შერეული პუასონის განაწილების კერძო შემთხვევას, რომელიც ცნობილი უნგრელი მათემატიკოსის დ. პოიას სახელს ატარებს და ალბათობის თეორიაში ცნობილ ე.წ. უარყოფით ბინომურ განაწილებას წარმოადგენს:

$$\begin{aligned} P(\nu = k) &= \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}g(\lambda)d\lambda = \\ &= \binom{k+a-1}{k}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^a\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k, \end{aligned} \tag{10.31}$$

სადაც

$$\binom{k+a-1}{k} = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(a)}$$

განზოგადოებული კომბინატორული კოეფიციენტია. პოიას შემთხვევაში

$$E\nu = \frac{a}{\tau}, \quad \mathrm{Var}(\nu) = \frac{a}{\tau}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right).$$

a და τ პარამეტრების სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე დადგენა (შეფასება) მომენტთა ან მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდებით შეიძლება. თუ აღვნიშნავთ ემპირიულ საშუალოსა და დისპერსიას, შესაბამისად, $\overline{x}$ და s^2 სიმბოლოებით, მაშინ მომენტთა მეთოდი გვაძლევს შემდეგ $\widehat{a}$ და $\widehat{\tau}$ შეფასებებს:

$$\widehat{\tau} = \frac{\overline{x}}{s^2 - \overline{x}}, \quad \widehat{a} = \frac{\overline{x}^2}{s^2 - \overline{x}}.$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით

$$\widehat{\tau} = \frac{\widehat{a}}{\overline{x}},$$

ხოლო $\widehat{a}$ წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამოხსნას:

$$\sum_{k=0}^{m} n_k \left(\frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a + k - 1}\right) = \sum_{k=0}^{m} n_k \log\left(1 + \frac{\overline{x}}{a}\right),$$

სადაც n_k — k შემთხვევის გამომწვევი პოლისების რაოდენობაა, ხოლო m — დაკვირვებულ საგზაო შემთხვევათა მაქსიმალური რაოდენობა. ზემოთ მოყვანილი საავტომობილო მაგალითში:

$$\overline{x} = 0.13174, \quad s^2 = 0.13852.$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით

$$\widehat{\tau} = 19.394, \quad \widehat{a} = 2.555$$

და (10.31) ფორმულა საგზაო შემთხვევათა რაოდენობის მიხედვით პოლისების შემდეგ მოსალოდნელ განაწილებას გვაძლევს (ცხრილის მე-3 სვეტი).

k	დაკვირვებული	პუასონის განაწილება	უარყოფითი ბინომური განაწილება
0	370412	369246	370460
1	46545	48644	46411
2	3935	3204	4045
3	317	141	301
4	28	5	21
5	3	—	1

ცხრილი 10.6

ამ ცხრილის პირველი ორი სვეტი იმეორებს 10.4 ცხრილს, ხოლო მე-3 სვეტი მიღებულია (10.31) განაწილების დაშვებით. როგორც ვხედავთ, ცალკეული მძღოლისათვის უარყოფითი ბინომური განაწილების ჰიპოთეზა გაცილებით უკეთ ეთანხმება დაკვირვების შედეგს, ვიდრე პუასონის. ამ ფაქტს χ^2 სტატისტიკური ტესტიც ადასტურებს.

უარყოფითი ბინომური განაწილების შესაბამისი $P(\nu = k)$ ალბათობების გამოთვლა უაღრესად მარტივია შემდეგი რეკურენტული ფორმულის მეშვეობით:

$$P(\nu = k) = \left(u + \frac{v}{k}\right) P(\nu = k-1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10.32}$$

$$P(\nu = 0) = \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^a,$$

სადაც

$$u = \frac{1}{1+\tau}, \quad v = \frac{a-1}{1+\tau}.$$

გავიხსენოთ, რომ (10.32) სამართლიანია პუასონის განაწილებისათვისაც, სადაც

$$u = 0, \quad v = \lambda.$$

პრეტენზიათა სიდიდის ალბათური განაწილება. კოლექტიური რისკის მოდელში პრეტენზიების სიდიდის განაწილების ფუნქცია აგრეთვე სტატისტიკურ დაკვირვებებზე დაყრდნობით შეირჩევა. გამოიყენება როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი განაწილებები. დაკვირვებების საფუძველზე შერჩეული დისკრეტული განაწილება, როგორც ყოველთვის ტაბულის სახით მოიცემა:

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

თუ, მაგალითად, დაზღვევის გარკვეულ სახეობაში გვაქვს წარსულში გაცემული N ცალი პოლისი და ცნობილია მათი შესაბამისი პრეტენზიების სიდიდეები, მაშინ ამ სიდიდეთა ერთმანეთთან სიახლოვის მიხედვით სტანდარტული დაჯგუფების შედეგად მიიღება n ჯგუფი ($n < N$). ყოველი ჯგუფიდან ამოირჩევა „წარმომადგენელი“, მაგალითად, ჯგუფში შემავალ სიდიდეთა საშუალო. ასე მიიღება $y_1, y_2, \ldots, y_n$ სიდიდეები. რაც შეეხება p_i ალბათობებს, მათ როლში $\frac{N_i}{N}$ სიხშირეები გვექნება, სადაც N_i i-ურ ჯგუფში მოხვედრილ პრეტენზიათა სიდიდეების რაოდენობაა. შევნიშნოთ, რომ ამის შედეგად მიღებული დისკრეტული განაწილება ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & & m \\ p_1 & p_2 & & p_m \end{pmatrix}, \quad m \geq n.$$

ამისათვის უნდა შევარჩიოთ მოხერხებული პირობითი ფულადი ერთეული და ზოგიერთი p_i ნულად ჩავთვალოთ.

Y_i-ს დისკრეტული განაწილება მოსახერხებელია იმ თვალსაზრისით, რომ როგორც ჩვენ ამას მომავალში დავინახავთ, ამ შემთხვევაში, ერთიანი Y პრეტენზიის ალბათური განაწილებისათვის შესაძლებელია (10.28) ტიპის რეკურენტული ფორმულის გამოყენება, რაც მნიშვნელოვნად აადვილებს გამოთვლებს. ამის მიუხედავად, Y_i განაწილების როლში უფრო ხშირად უწყვეტ განაწილებებს განიხილავენ.

ამ განაწილებების კლასიფიცირება მათი „კუდების სიმძიმის" მიხედვით შეიძლება. თუ დაზღვევის სახეობა ისეთია, რომ დიდი პრეტენზიები იშვიათად არის მოსალოდნელი, მაშინ „მსუბუქი კუდის" მქონე განაწილება გამოიყენება, ხოლო თუ დიდი პრეტენზიები არც ისე იშვიათია — შედარებით უფრო „მძიმე კუდის" მქონე. ჩამოვთვალოთ რამდენიმე, პრაქტიკაში გავრცელებული, განაწილება.

1. გავრცელებულ განაწილებებს შორის ალბათ ყველაზე „მსუბუქი კუდი" ექსპონენციალურ განაწილებას აქვს, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ და დავახასიათეთ ერლანგის მოდელის აღწერის დროს. გავიხსენოთ მისი სიმკვრივე, საშუალო და დისპერსია

$$f(y) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}, \quad \mu > 0 \quad y > 0,$$

$$EY_i = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \mu^2.$$

2. შემდეგი განაწილებაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია. ეს არის გამა-განაწილება პარამეტრებით (a, τ). სხვათა შორის, ექსპონენციალური განაწილება გამა-განაწილების კერძო შემთხვევაა $a = 1$ დროს. ხშირად გამოიყენება ე.წ. d ჩანაცვლების მქონე გამა-განაწილება:

$$P(Y_i \le y) = G(y - d), \quad y > d,$$

$$EY_i = d + \frac{a}{\tau}, \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \frac{a}{\tau^2} \quad \gamma_{Y_i} = \frac{2}{\sqrt{a}},$$

სადაც $G(x)$ — ჩვეულებრივი ორპარამეტრიანი გამა-განაწილების ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე გამოთვლილი ემპირიული m საშუალოს, s^2 დისპერსიისა და $\widehat{\gamma}$ ასიმეტრიის კოეფიციენტის მეშვეობით, შეიძლება d, a და τ პარამეტრების შეფასება:

$$\widehat{a} = \frac{4}{\widehat{\gamma}^2}, \quad \widehat{\tau} = \frac{2}{s\widehat{\gamma}} \quad \widehat{d} = m - 2\frac{s}{\widehat{\gamma}}.$$

3. პრაქტიკაში ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებულია ე.წ. ლოგნორმალური განაწილება. ვიტყვით, რომ პრეტენზიის Y_i სიდიდე (ჩანაცვლებული) ლოგნორმალური კანონის მიხედვით არის განაწილებული, თუ

$$Y_i = d + e^Z,$$

სადაც Z — (μ, σ) ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეა. ვინაიდან

$$Z = \ln(Y_i - d),$$

Y_i-ს განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$P(Y_i \le y) = F(y) = \Phi\left(\frac{\ln(y-d) - \mu}{\sigma}\right), \quad y > d,$$

სადაც $\Phi(x)$ — სტანდარტული (0,1) ნორმალური განაწილების ფუნქციაა. შესაბამისად, Y_i-ს განაწილების სიმკვრივეა

$$f(y) = \frac{1}{(y-d)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y-d) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > d,$$

ხოლო საშუალო და დისპერსია

$$EY_i = d + e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)},$$

$$\mathrm{Var}(Y_i) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე გამოთვლილი ემპირიული მახასიათებლების — m საშუალოს, s^2 დისპერსიისა და γ ასიმეტრიის კოეფიციენტების მეშვეობით შეიძლება d, μ და σ^2 პარამეტრების შეფასება:

$$\widehat{d} = m - \frac{s}{\eta}, \quad \widehat{\sigma}^2 = \ln(1+\eta^2), \quad \widehat{\mu} = \ln(m - \widehat{d}) - \frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2,$$

სადაც η

$$\eta^3 + 3\eta - \gamma = 0$$

განტოლების ნამდვილ ფესვს წარმოადგენს. ლოგნორმალური განაწილების მიხედვით, ძალზედ მცირე პრეტენზიებს აქვთ პატარა ალბათობა, საშუალო პრეტენზიები ყველაზე ხშირია, ხოლო დიდი პრეტენზიების ალბათობა მათი სიდიდის ზრდასთან ერთად, თანდათან მცირდება. ამავე დროს, ძალზე დიდ პრეტენზიებს მაინც დადებითი ალბათობა გააჩნიათ, რაც განაწილების შედარებით „მძიმე კუდზე" მეტყველებს. როგორც ვხედავთ, ლოგნორმალური განაწილება საკმაოდ რეალისტურად ახასიათებს სინამდვილეში არსებულ

პრეტენზიათა სიდიდეს და პრაქტიკაში მისი ფართოდ გამოყენება სავსებით გამართლებულია.

4. დაზღვევის ისეთ სახეობაში, სადაც განსაკუთრებულად დიდი პრეტენზიებია მოსალოდნელი, მიზანშეწონილია ე.წ. პარეტოს განაწილების გამოყენება. .ეს განაწილება, უარყოფითი ბინომური განაწილების მსგავსად, ორი ალბათური განაწილების ნარევს წარმოადგენს. სახელდობრ, თუ დავუშვებთ, რომ პრეტენზიის სიდიდე ექსპონენციალურად არის განაწილებული

$$P(Y_i \leq y) = 1 - e^{-\theta y}$$

ისე, რომ θ პარამეტრი თავად შემთხვევითია და მას (a, τ) გამა-განაწილება გააჩნია, Y_i-სთვის მივიღებთ პარეტოს განაწილებას:

$$P(Y_i \leq y) = 1 - \left(\frac{\tau}{\tau + y}\right)^a \quad y > 0.$$

ამ განაწილების სიმკვრივეს შემდეგი სახე აქვს:

$$f(y) = \frac{a\tau^a}{(\tau + y)^{a+1}}, \quad y > 0.$$

პარეტოს განაწილება იმითაა საინტერესო, რომ მისი „კუდის სიმძიმე“ a პარამეტრის სიდიდით განისაზღვრება: რაც უფრო მცირეა (დადებითი) a, მით უფრო „მძიმეა კუდი“. მათემატიკურად ეს იმაში გამოიხატება, რომ პარეტოს განაწილებას მხოლოდ a-ზე მცირე რიგის მომენტები გააჩნია. სახელდობრ

$$EY_i = \frac{\tau}{a-1}, \quad \text{თუ} \quad a > 1,$$

$$\operatorname{Var}(Y_i) = \frac{a\tau^2}{(a-1)^2(a-2)}, \quad \text{თუ} \quad a > 2,$$

$$\gamma = 2\frac{a+1}{a-3}\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \quad \text{თუ} \quad a > 3.$$

5. ბოლოს, ე.წ. ვეიბულის განაწილება აღვნიშნოთ, რომელიც პრეტენზიების უკიდურესად დიდი მოსალოდნელი სიდიდეების დროს გამოიყენება:

$$P(Y_i \leq y) = 1 - e^{-\mu y^\alpha}, \quad \mu > 0 \ \ \alpha > 0 \ \ y > 0.$$

ამ განაწილების სიმკვრივეა

$$f(y) = \mu\alpha y^{\alpha-1} e^{-\mu y^\alpha}, \quad y > 0.$$

მას უკიდურესად „მძიმე კუდი“ გააჩნია.

პორტფელის ერთიანი პრეტენზიის ალბათური განაწილება. კოლექტიური რისკის მოდელის თანახმად, პორტფელის ერთიანი Y პრეტენზია დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული Y_i სიდიდეების ν შემთხვევითი რაოდენობის ჯამს წარმოადგენს. სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე ν და Y_i შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებები ცალ-ცალკე შეირჩევა, რის შედეგადაც, მათი დამოუკიდებლობის გათვალისწინებით, Y შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება გამოითვლება. ასეთი წესით მიღებული Y-ის ალბათურ განაწილებას შედგენილი ეწოდება.

ინდივიდუალური რისკის მოდელის განხილვისას, ჩვენ უკვე გავეცანით შედგენილ პუასონის განაწილებას და მის კერძო შემთხვევას — ერლანგის განაწილებას. სიმარტივისა და ანალიზური მოხერხებულობის გამო, ეს განაწილებები კოლექტიური რისკის მოდელშიც გამოიყენება, თუმცა მათი გამოყენება სტატისტიკური მონაცემებით ხშირად არ მართლდება.

ზემოთ ჩვენ დავასაბუთეთ, რომ ν შემთხვევითი რაოდენობისათვის უარყოფითი ბინომური განაწილების ჰიპოთეზა სავსებით მისაღებია. თუ ჩავთვლით, რომ ν სწორედ ამ კანონის მიხედვით არის განაწილებული, Y_i-ის სხვადასხვა განაწილებისათვის Y-ის სხვადასხვა შედგენილ უარყოფით ბინომურ განაწილებას მივიღებთ.

პირველ რიგში ის შემთხვევა განვიხილოთ, როდესაც Y_i დისკრეტულია:

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & & m \\ p_1 & p_2 & & p_m \end{pmatrix}$$

შედგენილი პუასონის განაწილებისათვის, ამ შემთხვევაში, მოხერხებული (10.28) რეკურენტული ფორმულა იყო მოყვანილი. ამგვარი ფორმულა შედგენილი უარყოფითი ბინომური განაწილებისათვისაც არსებობს:

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{\min(k,m)} \left(u + \frac{iv}{k}\right) p_i P(Y=k-i), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (10.33)$$

$$P(Y=0) = \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^a$$

სადაც u და v (10.32) რეკურენტული წარმოდგენიდანაა, ხოლო a და τ უარყოფითი ბინომური განაწილების პარამეტრებია. შევნიშნოთ, რომ (10.33) ფორმულა ზოგადია. იგი სამართლიანია ν-ს ნებისმიერი განაწილებისათვის, რომლისთვისაც სამართლიანია (10.32). კერძოდ, შედგენილი პუასონის განაწილებისათვის (10.28) ფორმულა მიიღება (10.33)-დან, თუ $u=0$, $v=\lambda$. ცხადია, რომ Y-ს განაწილების ფუნქციას შემდეგი სახე ექნება

$$F(j) = P(Y \le j) = \sum_{k=0}^{j} P(Y=k).$$

ამ შემთხვევაში ეს „საფეხურიანი" ფუნქცია იქნება.

დისკრეტული Y_i-ებისთვის (10.33) ფორმულა წყვეტს Y-ის ალბათური განაწილების დადგენის საკითხს. უწყვეტად განაწილებული Y_i-ებისთვის შესაძლებელია მათი განაწილების წინასწარი დისკრეტიზაცია და, შემდგომ, კვლავ (10.33)-ის გამოყენება. დისკრეტიზაციის მოხერხებული მეთოდები აღწერილია [32]-ში. Y-ის ალბათური განაწილების დადგენის სხვა შესაძლებლობა დაკავშირებულია მისი განაწილების ფუნქციის ნორმალურ აპროქსიმაციასთან.

როგორც არაერთხელ იყო აღნიშნული, $m = EY$ და $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$ გამოთვლა ადვილია Y-ის განაწილების ცოდნის გარეშეც. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად

$$F(y) = P(Y \leq y) \approx \Phi(\varphi(y)),$$

სადაც

$$\varphi(y) = \frac{y - m}{\sigma}.$$

სამწუხაროდ, როგორც წესი, ეს აპროქსიმაცია არადამაკმაყოფილებელია განსაკუთრებით მარჯვენა „კუდის" არეში. ამის მიზეზი, ცხადია, ის არის, რომ ნორმალური განაწილება სიმეტრიულია, ხოლო $F(y)$-ს აშკარად გამოკვეთილი ასიმეტრია ახასიათებს. ნორმალური აპროქსიმაციის ხარისხის გასაუმჯობესებლად სტანდარტული მეთოდები არსებობს. მათი შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ Y შემთხვევითი სიდიდე, მოხერხებული φ ფუნქციის მეშვეობით წინასწარ ისე გარდაიქმნას, რომ

$$\overline{Y} = \varphi(Y)$$

სიდიდეს უფრო სიმეტრიული განაწილება ჰქონდეს. $\overline{Y}$-სთვის ნორმალური აპროქსიმაცია უფრო მისაღები იქნება, რის შემდეგაც უკუგარდაქმნით დადგინდება Y-სთვის მისაღები აპროქსიმაცია. შესაბამისი სიმეტრიზაციის მეთოდები აღწერილია [8]-ში.

Y-ის განაწილების დადგენის შემდეგ კვლავ გამოითვლება u_α სიდიდე (კვანტილი), ისეთი, რომ

$$P(Y \leq u_\alpha) = \alpha,$$

რაც იმას უზრუნველყოფს, რომ Y α ალბათობით u_α-ს ვერ გადააჭარბებს.

სხვათა შორის, კონკრეტული α-სთვის, u_α-ს დასადგენად პირდაპირი კომპიუტერული მეთოდებიც არსებობს. თანამედროვე კომპიუტერებს არ უჭირთ ν და Y_i სიდიდეების მნიშვნელობათა მრავალჯერადი „გათამაშება" (სიმულაცია), რის შედეგადაც შესაძლებელია Y-ის მრავალი შესაძლო მნიშვნელობის გამოთვლა. მოცემული u-სთვის კომპიუტერი სწრაფად დაადგენს,

თუ Y-ის N მნიშვნელობათა შორის რა n რაოდენობა გადააჭარბებს u-ს. $\frac{n}{N}$ შეფარდება საკმაოდ კარგ წარმოდგენას შეგვიქმნის Y პრეტენზიის მიერ u ზღვარის გადაჭარბების ალბათობაზე. ამ პროცედურის რამდენჯერმე გამეორებით სწრაფად მივაგნებთ იმ u_α ზღვარს, რომელსაც Y ჩვენთვის სასურველი α ალბათობით ვერ გადააჭარბებს. დაწვრილებით სიმულაციის მეთოდები აღწერილია [32]-სა და [71]-ში.

u_α თანხა საკმარისი იქნება მთლიანი პორტფელის ერთიანი რისკის გასაბათილებლად. რაც შეეხება u_α-ს საფუძველზე სამართლიანი ინდივიდუალური პრემიების დანიშვნას, აქ ეს საკითხი ღიად რჩება, ვინაიდან კოლექტიური რისკის მოდელის თანახმად, ჩვენ ვერ ვფლობთ ინდივიდუალურ რისკებზე საჭირო აპრიორულ ინფორმაციას. უმარტივესი გამოსავალი u_α-ს თანაბრად გადანაწილებაში მდგომარეობს. უფრო საინტერესო გამოსავალი შემდეგ პუნქტშია აღწერილი.

10.4 აპოსტერიორული ტარიფიკაცია. ბონუს-მალუს სისტემები

ამ პუნქტში ვისაუბრებთ საავტომობილო, კერძოდ კი, ავტომოტოტრანსპორტის მფლობელთა სამოქალაქო პასუხისმგებლობის დაზღვევაზე. ჩვენი გადმოცემა ძირითადად [104]-ს, [105]-სა და [106]-ს ეყრდნობა.

როგორც წინა პუნქტში იყო აღნიშნული, დაზღვევის ამ სახეობაში შეუძლებელია რისკების აპრიორული კლასიფიკაციისა, და, შესაბამისად, ტარიფიკაციის განხორციელება. ამის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ მძღოლის ყოფაქცევაზე (მაგალითად, ერთი წლის განმავლობაში) სხვადასხვა შინაგანი (მაგალითად, ფსიქოლოგიური) ფაქტორი მოქმედებს, რომელთა წინასწარ (აპრიორულად) გაზომვა და ტარიფში გათვალისწინება შეუძლებელია. 60-იანი წლების დასაწყისში ევროპაში (ბელგიაში) გაჩნდა იდეა, რომ მძღოლის ინდივიდუალობა (რისკის თვალსაზრისით) ყველაზე უკეთ მის შემდგომ (საგზაო შემთხვევების მოხდენის თვალსაზრისით) ყოფაქცევაში ვლინდება. ამგვარად, შეიძლება უარი ვთქვათ მძიმე და არაეფექტურ აპრიორულ კლასიფიკაციაზე, რომელიც ზოგ ქვეყანაში ათობით ფაქტორის გათვალისწინებას გულისხმობდა და გადავიდეთ აპოსტერიორულ კლასიფიკაციაზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი მძღოლის რისკი შევაფასოდ (და გარკვეული სატარიფო კლასი მივუჩინოთ) არა წინასწარ, არამედ ნაბიჯ-ნაბიჯ, მოვლენათა განვითარებისას, მაგალითად: ყოველი სადაზღვევო წლის ბოლოს დავითვალოთ მისი მონაწილეობით მომხდარი საგზაო შემთხვევათა რაოდენობა და ამის მიხედვით მივუჩინოთ მას, წინასთან შედარებით, უფრო შეღავათიანი ან, პირიქით, ძვირი სატარიფო კლასი.

ახალი იდეის საფუძველზე, თანდათანობით დაზღვევის ახალი, ე.წ.

ბონუს-მალუს (წახალისება-ჯარიმის) სისტემა ჩამოყალიბდა. დროთა განმავლობაში იგი ძალზედ პოპულარული გახდა და დღესდღეობით მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში გამოიყენება. ბონუს-მალუს სისტემის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ კოლექტიური რისკის მოდელის პირობებში იგი მაინც იძლევა მძღოლთა კლასიფიკაციის და მათთვის, საკუთარი რისკის შესაბამისი, პრემიის დანიშვნის საშუალებას. მართალია, ეს კლასიფიკაცია აპოსტერიორული და ცვალებადია, მაგრამ დროთა განმავლობაში იგი სულ უფრო და უფრო მდგრადი და სამართლიანი ხდება.

ბონუს-მალუს სისტემის აღწერა. სადაზღვევო პრაქტიკაში ბონუს-მალუს სისტემების (BMS) მრავალი ნაირსახეობა გამოიყენება. [105]-ში, მაგალითად, 30-მდე სხვადასხვა სისტემაა აღწერილი. განსხვავება მათ შორის სხვადასხვა ქვეყანაში არსებული კანონმდებლობით, ტრადიციებით და გამოცდილებითაა განპირობებული. ამავე დროს ყველა BMS ერთი და იგივე პრინციპზეა აგებული.

ნებისმიერი BMS ობიექტთა შემდეგი ერთობლიობით განისაზღვრება:

ა) C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ სატარიფო კლასების სიმრავლით, რომელთა შორის ე.წ. საწყისი (საშუალო) C_{i_0} კლასი გამოიყოფა და შესაბამისი პრემიების $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ სკალით, ისე, რომ C_i კლასში მოხვედრილი მძღოლი b_i პრემიას იხდის;

ბ) მძღოლის ნებისმიერი კლასიდან სხვა ნებისმიერ კლასში გადასვლის წესით, რომელიც 1 წლის განმავლობაში მისი მონაწილეობით მომხდარი საგზაო შემთხვევების რაოდენობაზეა დამოკიდებული.

სადაზღვევო პროცესის დასაწყისში, ყოველი მძღოლი საწყის კლასს მიეკუთვნება და 100%-იან პრემიას იხდის (ხანდახან, ზოგიერთი კატეგორიის მძღოლებისათვის ნაკლები საწყისი პრემიაა გათვალისწინებული). შემდეგი სადაზღვევო წლის დასაწყისში კომპანია ითვალისწინებს გასული წლის განმავლობაში მძღოლის მონაწილეობით მომხდარ საგზაო შემთხვევათა რაოდენობას და, BMS-ში არსებული კლასიდან კლასში გადასვლის წესის თანახმად, აჯარიმებს მას ან წაახალისებს. დაჯარიმება ნიშნავს მძღოლის, საწყის კლასთან შედარებით, ნომრით უფრო მაღალ კლასში გადაყვანას და, შესაბამისად, მისთვის უფრო მაღალი (120%-იანი, 150%-იანი ან 200%-იანიც კი) სადაზღვევო პრემიის დანიშვნას. წახალისებული მძღოლები (რომლებსაც გასული წლის განმავლობაში საგზაო შემთხვევა არ მოსვლიათ), საწყისთან შედარებით, უფრო დაბალ კლასში აღმოჩნდებიან და 100%-იანზე ნაკლებ პრემიას გადაიხდიან. შემდეგ წელსაც იგივე მეორდება და მძღოლები, თავის წინა კლასთან შედარებით, ან უფრო მაღალ, ან უფრო დაბალ ახალ კლასებში აღმოჩნდებიან (გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც წინა კლასზე მაღალი ან დაბალი კლასი სისტემაში აღარ არსებობს). მომავალ წლებშიც ასე გრძელდება და ყოველი მძღოლი, თავისი საგზაო შემთხვევათა „ისტორიის“ შესაბამისად, კლასიდან კლასში იმოგზაურებს: უდისციპლინო

მძღოლები ძირითად დროს მაღალ კლასებში გაატარებენ, დისციპლინირებულები — დაბალში, ხოლო საშუალო მძღოლები საწყისი (საშუალო) კლასის გარშემო იტრიალებენ.

BMS-ის შემუშავებისას საჭიროა შემდეგი პრობლემების გადაწყვეტა.

1. საწყისი (საშუალო) C_{i_0} კლასის შესაბამისი 100%-იანი პრემიის ფულადი სიდიდის დადგენა;

2. საჯარიმო და წამახალისებელი კლასების რაოდენობების დადგენა და შესაბამისი პრემიების სკალის შემუშავება;

3. კლასიდან კლასში გადასვლის წესის შერჩევა.

სასურველია, რომ მიღებული BMS იყოს:

— სამართლიანი, ანუ მძღოლმა, ყოველ წელს, საგზაო შემთხვევათა თავისი საკუთარი „ისტორიის“ შესაბამისი პრემია გადაიხადოს;

— დაბალანსებული, ანუ პრემიების საერთო ჯამი (მთლიანი პორტფელის შესაბამისი პრემია) წლიდან წლამდე არ იცვლებოდეს (თუ ინფლაციას არ გავითვალისწინებთ).

მოგვიანებით ჩვენ შემოგთავაზებთ ამგვარი, ოპტიმალური სისტემის ერთ-ერთ კონსტრუქციას, მაგრამ აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ჯერ-ჯერობით, ალბათ, რაიმე განსაკუთრებული, ერთადერთი, საუკეთესო BMS არ არსებობს. ამას სხვადასხვა ქვეყნის გამოცდილებაც ადასტურებს ([105]): ტიპიურია, რომ ქვეყანაში გარკვეული ევრისტული მოსაზრებებით, შემოიღებენ BMS-ს, გარკვეული დროის შემდეგ ამ სისტემაში მნიშვნელოვანი დისბალანსი ჩნდება (მძღოლთა ძირითადი რაოდენობა წამახალისებელ კლასებში აღმოჩნდება) და, ამ მიზეზით, იგი იძულებით ახალი, უფრო მკაცრი, სისტემით შეიცვლება.

BMS-ის ცხრილის სახით წარმოდგენა შეიძლება. მოვიყვანოთ სამი განსხვავებული სისტემის მაგალითი:

ბრაზილიური სისტემა

კლასი	პრემია	კლასები საგზაო შემთხვევების შემდეგ						
		0	1	2	3	4	5	≥ 6
7	100	6	7	7	7	7	7	7
6	90	5	7	7	7	7	7	7
5	85	4	6	7	7	7	7	7
4	80	3	5	6	7	7	7	7
3	75	2	4	5	6	7	7	7
2	70	1	3	4	5	6	7	7
1	65	1	2	3	4	5	6	7

საწყისი კლასი: 7.

ცხრილი 10.7

ძველი ნორვეგიული სისტემა

კლასი	პრემია	კლასები საგზაო შემთხვევების შემდეგ						
		0	1	2	3	4	5	≥ 6
...	...	.						
22	240	10						
21	230	10	.					
20	220	10	22					
19	210	10	21	.				
18	200	10	20	22				
17	190	10	19	21	.			
16	180	10	18	20	22	.		
15	170	10	17	19	21	..		
14	160	10	16	18	20	22		
13	150	10	15	17	19	21	.	
12	140	10	14	16	18	20	22	
11	130	10	13	15	17	19	21	.
10	120	9	12	14	16	18	20	22
9	110	8	11	13	15	17	19	21
8	100	7	10	12	14	16	18	20
7	90	6	9	11	13	15	17	19
6	80	5	8	10	12	14	16	18
5	70	4	7	9	11	13	15	17
4	60	3	6	8	10	12	14	16
3	50	2	6	8	10	12	14	16
2	40	1	5	7	9	11	13	15
1	30	1	4	6	8	10	12	14

საწყისი კლასი: 8.

ცხრილი 10.8

ტაივანური სისტემა

კლასი	პრემია	კლასები საგზაო შემთხვევების შემდეგ					
		0	1	2	3	4	≥ 5
9	150	3	5	6	7	8	9
8	140	3	5	6	7	8	9
7	130	3	5	6	7	8	9
6	120	3	5	6	7	8	9
5	110	3	5	6	7	8	9
4	100	3	5	6	7	8	9
3	80	2	5	6	7	8	9
2	65	1	5	6	7	8	9
1	50	1	5	6	7	8	9

საწყისი კლასი: 4.

ცხრილი 10.9

ეს სამი მაგალითიც კი გვიჩვენებს, თუ სხვადასხვა სისტემაში როგორ შეიძლება განსხვავდებოდეს კლასების რაოდენობები, პრემიათა სკალები და კლასიდან კლასში გადასვლის წესები.

არსებული ბონუს-მალუს სისტემების დახასიათება. განსაკუთრებული ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ დღეს-დღეობით არსებულ BMS-ში (როგორც ეს მაგალითებიდანაც ჩანს) კლასიდან კლასში გადასვლის წესი არ არის დამოკიდებული მძღოლის სისტემაში ჩართვის მომენტიდან გასულ დროზე. მაგალითად, ბრაზილიის სისტემის მიხედვით, თუ მძღოლი მე-2 კლასში იმყოფებოდა და წლის განმავლობაში მას ერთი შემთხვევა მოუვიდა, იგი მე-3 კლასში გადადის, იმის მიუხედავად, 6 წელი იმყოფება სისტემაში, თუ 26. მოგვიანებით ჩვენ დავუბრუნდებით არსებული სისტემების ამ თვისებას, ახლა კი აღვნიშნოთ, რომ კონკრეტული მძღოლის კლასიდან კლასში მოძრაობის პროცესი ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვით აღიწერება. მართლაც, გადასვლის წესი

$$T_k = (t_{ij}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

მატრიცათა ერთობლიობის სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ, სადაც

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1; & \text{თუ, წესის მიხედვით, } k \text{ შემთხვევის დროს,} \\ & i\text{-ური კლასიდან } j\text{-ში გადავდივართ.} \\ 0; & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ჩავთვალოთ, რომ კონკრეტულ მძღოლისათვის, ერთი წლის განმავლობაში საგზაო შემთხვევათა რაოდენობა მისთვის დამახასიათებელი λ პარამეტრიანი პუასონის განაწილებით აღიწერება, ანუ k შემთხვევის მოხდენის $p_k(\lambda)$ ალბათობისათვის გვაქვს:

$$p_k(\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

მაშინ, $P_{ij}(\lambda)$ ალბათობა იმისა, რომ ეს მძღოლი C_i-დან C_j კლასში გადავა, იქნება:

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)}.$$

მატრიცა

$$M(\lambda) = (p_{ij}(\lambda)), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

სწორედ ზემოხსენებული ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის მატრიცას წარმოადგენს. სხვა სიტყვებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ახალი

სადაზღვევო წლის დასაწყისში მძღოლის რომელიმე კლასში გადასვლის ალბათობა არ არის დამოკიდებული მის წარსულ „ისტორიაზე“, არამედ, დამოკიდებულია მხოლოდ მისი იმდროინდელი კლასის ნომერზე. მიღებული მარკოვის ჯაჭვი რეგულარულია და მისთვის ე.წ. სტაციონარული

$$\overline{p}(\lambda) = (\overline{p}_1(\lambda), \overline{p}_2(\lambda), \dots, \overline{p}_n(\lambda))$$

ალბათური განაწილება არსებობს და იგი $M(\lambda)$ მატრიცის ერთიანის ტოლი საკუთარი რიცხვის შესაბამის მარცხენა საკუთარ ვექტორს წარმოადგენს:

$$\overline{p}(\lambda) = \overline{p}(\lambda)M(\lambda).$$

$\overline{p}_i(\lambda)$-ს შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ დროთა განმავლობაში BMS ე.წ. სტაციონარულ რეჟიმში ჩავარდება და λ პარამეტრის მქონე მძღოლი, ამ რეჟიმის მიღწევისთანავე, $\overline{p}_i(\lambda)$ ალბათობით i-ურ კლასში აღმოჩნდება. მაგალითად, ბრაზილიურ სისტემაში მძღოლს, რომლის $\lambda = 0,1$ (საერთოდ, სტატისტიკურად, λ-ს ეს მნიშვნელობა საშუალო მძღოლებს ახასიათებს), შემდეგი სტაციონარული განაწილება ექნება:

$$\overline{p}_1(\lambda) = 0.88948, \ \overline{p}_2(\lambda) = 0.09355, \ \overline{p}_3(\lambda) = 0.01444, \ \overline{p}_4(\lambda) = 0.00215$$
$$\overline{p}_5(\lambda) = 0.00032, \ \overline{p}_6(\lambda) = 0.00005, \ \overline{p}_7(\lambda) = 0.00001.$$

როგორც ვხედავთ, ბრაზილიის სისტემა ისეთია, რომ დროთა განმავლობაში საშუალო მძღოლი თითქმის 0.9 ალბათობით ყველაზე შეღავათიან კლასში აღმოჩნდება და იქ დარჩება. სხვა სიტყვებით, საშუალო მძღოლების თითქმის 90% საშუალო პრემიის მხოლოდ 65%-ს გადაიხდის. ეს სურათი ტიპიურია მრავალი სისტემისათვის, და სწორედ ეს წარმოადგენს მათი დროთა განმავლობაში დისბალანსირების მიზეზს.

ამა თუ იმ სისტემისათვის, საშუალო მძღოლის ფარდობითი სტაციონარული პოზიციის აღსაწერად ე.წ. პრემიის ფარდობითი სტაციონარული საშუალო დონის (RSAL) მაჩვენებელს იყენებენ:

$$\mathrm{RSAL} = \frac{\text{საშუალო სტაციონარული დონე} - \text{მინიმალური დონე}}{\text{მაქსიმალური დონე} - \text{მინიმალური დონე}} \cdot 100\%.$$

ბრაზილიის სისტემისთვის

$$\text{საშუალო სტაციონარული დონე} = \overline{p}_1(0.1) \cdot 65\% + \overline{p}_2(0.1) \cdot 70\% +$$
$$+ \overline{p}_3(0.1) \cdot 75\% + \overline{p}_4(0.1) \cdot 80\% + \overline{p}_5(0.1) \cdot 85\% +$$
$$+ \overline{p}_6(0.1) \cdot 90\% + \overline{p}_7(0.1) \cdot 100\% = 65.6475\%,$$

$$\text{მაქსიმალური დონე} = 100\%, \quad \text{მინიმალური დონე} = 65\%.$$

ასე, რომ

$$\text{RSAL} = \frac{0.6475}{35} \cdot 100\% = 1.85\%$$

ფ.ს.ს.დ.-ის ასეთი მცირე მნიშვნელობა სწორედ იმაზე მიგვითითებს, რომ მძღოლთა დიდი უმრავლესობა დროთა განმავლობაში შედავათიან კლასებში განთავსდება. იდეალურად დაბალანსებული სისტემისათვის ეს მაჩვენებელი დაახლოებით 50%-ს უნდა უდრიდეს, მაგრამ არსებულ სისტემებს შორის, არც ერთისათვის იგი 30%-ს არ აღემატება ([105]).

BMS-ის შემდეგ მახასიათებელს მძღოლის პრემიის ვარიაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს. [105]-ში, ჩინეთის სტატისტიკურ მონაცემებზე დაყრდნობით და კოლექტიური რისკის მოდელის გამოყენებით, ნაჩვენებია, რომ საშუალო მძღოლის რისკის ვარიაციის კოეფიციენტი, დაზღვევის გარეშე, დაახლოებით 6.4-ს უდრის. როგორც ვიცით, BMS-ები ცვალებადი პრემიების გადახდას გულისხმობენ (და ეს მათი კრიტიკის ერთ-ერთ მთავარ საბაბს წარმოადგენს). საინტერესოა, რას უდრის საშუალო მძღოლის ცვალებადი პრემიის (ანუ დაზღვევის შედეგად მისი ნარჩენი რისკის) ვარიაციის კოეფიციენტი. როგორც აღმოჩნდა ([105]), სტაციონარული რეჟიმის დამყარების შემდეგ საშუალო ($\lambda = 0.1$) მძღოლის ნარჩენი რისკის ვარიაციის კოეფიციენტი უმნიშვნელო ხდება. ყველაზე მკაცრი, ახალი შვეიცარული სისტემისათვის, იგი 0.4595-ს შეადგენს, ანუ 6.4-ის 7.18%-ს. ბრაზილიის სისტემა ძალზედ „რბილია" და მისთვის ვარიაციის კოეფიციენტი 0.03304-ს უდრის, რაც 6.4-ის მხოლოდ 0.48%-ია. ასე, რომ, BMS-ის კრიტიკა მძღოლის ნარჩენი რისკის ცვალებადობის გამო საფუძველს მოკლებულია, თუმცა ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ სისტემაში სტაციონარული რეჟიმის დამყარებას საკმაოდ დიდი (ათწლეულები) დრო სჭირდება.

შემდეგი მახასიათებელი, სისტემის ელასტიურობის $\eta(\lambda)$ კოეფიციენტი, გვიჩვენებს, თუ რაოდენ ადეკვატურად რეაგირებს სისტემა მძღოლის დამახასიათებელი λ პარამეტრის ცვლილებაზე. იგი შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$\eta(\lambda) = \frac{dB(\lambda)/B(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d\ln B(\lambda)}{d\ln\lambda},$$

სადაც $B(\lambda)$ — λ პარამეტრის მქონე მძღოლის შესაბამისი პრემიის საშუალო სტაციონარული დონეა. იდეალში, λ-ს გავრცელებული მნიშვნელობებისათვის, ($\lambda \leq 0.015$), $\eta(\lambda)$ ახლოს უნდა იყოს ერთიანთან, მაგრამ სინამდვილეში არსებული სისტემების ელასტიურობა შორსაა იდეალურისგან. საუკეთესო მაჩვენებელი $\lambda = 0.1$-სთვის კვლავ ახალ შვეიცარიულ სისტემას აქვს — $\eta(0.1) = 0.449$. ბრაზილიური სისტემისათვის $\eta(0.1) = 0.011$, ტაივანური სისტემისთვის — $\eta(0.1) = 0.136$, ნორვეგიული სისტემისთვის — $\eta(0.1) = 0.263$. რაც უფრო მკაცრია სისტემა, მით უფრო ელასტიურია.

განხილული მახასიათებლების საფუძველზე შეიძლება სისტემის სიმკაცრის ერთიანი ინდექსის შემოღება, რომელიც ცალკეული მახასიათებლების კომბინაციას წარმოადგენს. სიმკაცრის ინდექსის შესადგენად ფაქტორული ანალიზი გამოიყენება. პროცედურა [105]-ში არის აღწერილი და ჩვენ მას არ გავიმეორებთ. წინა მახასიათებლების განხილვის შემდეგ, ალბათ მკითხველს არ გაუკვირდება, რომ ახალი ინდექსის მიხედვით, ყველაზე მკაცრი ახალი შვეიცარული სისტემაა, ხოლო ბრაზილიური სისტემა ბოლოსწინა 29-ე ადგილზეა.

ოპტიმალური ბონუს-მალუს სისტემის აგება. ოპტიმალური ბონუს-მალუს სისტემის ასაგებად შემდეგი მათემატიკური მოდელი გამოვიყენოთ. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი მძღოლისათვის წლის განმავლობაში საგზაო შემთხვევათა რაოდენობა მისთვის დამახასიათებელი λ პარამეტრის მქონე პუასონის განაწილებით აღიწერება. წინა პუნქტში (იხ. „პრეტენზიათა რაოდენობის ალბათური განაწილება“) აღნიშნული იყო, რომ სადაზღვევო კომპანიის თვალსაზრისით, შემთხვევით არჩეული მძღოლის საგზაო შემთხვევათა რაოდენობა (a, τ) პარამეტრების მქონე უარყოფითი ბინომური განაწილებით აღიწერება, სადაც (a, τ) — შესაბამისი გამა-განაწილების პარამეტრებიცაა. იქვე მოყვანილი იყო ამ პარამეტრების სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე შეფასების მეთოდები. კერძოდ, განხილული იყო რეალური მაგალითი, რომელშიც აღმოჩნდა, რომ

$$\widehat{a} = 2.555, \quad \widehat{\tau} = 19.394, \quad \widehat{\lambda} = \frac{\widehat{a}}{\widehat{\tau}} = 0.13.$$

კომპანიის თვალსაზრისით, $\frac{a}{\tau}$ შეფარდება წარმოადგენს ერთი წლის განმავლობაში საშუალო მძღოლის საგზაო შემთხვევათა სიხშირეს და ამიტომ, ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ საწყისი კლასის შესაბამისი 100%-ნი პრემია

$$\pi_0 = \frac{a}{\tau}(1 + \theta)$$

სიდიდეს უდრის, სადაც θ — ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვაა. ამგვარად, სისტემაში ჩართული ყოველი ახალი მძღოლი ჩართვისთანავე π_0 პრემიას გადაიხდის — ამ მომენტში ყველა მძღოლი კომპანიისათვის ერთნაირია (აპრიორული კლასიფიკაციის არ არსებობა!). ჩავთვალოთ, რომ პორტფელი ჩაკეტილია და სისტემაში მძღოლების ჩართვის მომენტიდან t წელიწადმა განვლო. ყოველ მძღოლს საგზაო შემთხვევათა საკუთარი $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ „ისტორია“ დაუგროვდა, სადაც k_i — i-ურ წელს მომხდარ საგზაო შემთხვევათა რაოდენობაა. ტიპიური 10 წლის „ისტორია“ შეიძლება ასე გამოიყურებოდეს:

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

უდისციპლინო მძღოლის „ისტორიაში“ მეტი ერთიანები, ან ორიანები და სამიანებიც კი შეიძლება შეგვხვდეს. ამ მომენტში, კომპანიისათვის, ყველა

მძღოლი ერთნაირი აღარ არის — იგი მათ დაგროვილი „ისტორიების“ მიხედვით განასხვავებს. ამავე დროს, ერთნაირი $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ „ისტორიის“ მქონე მძღოლები კომპანიისათვის კვლავ ერთნაირ რისკს წარმოადგენენ და მათ ერთი და იგივე პრემია უნდა დაენიშნოთ. ამ შემთხვევაში, აქტუარის ამოცანას სწორედ ამ პრემიის „ოპტიმალური“ სიდიდის დადგენა წარმოადგენს.

ჩვეულებრივ ენაზე „ოპტიმალურობა“ იმას ნიშნავს, რომ ახალი პრემიის სიდიდის განსაზღვრისას მაქსიმალურად გამოვიყენოთ მძღოლის მიერ დაგროვილ „ისტორიაში“ მასზე, როგორც რისკის მატარებელზე, არსებული ინფორმაცია. მათემატიკურად ეს ე.წ. მიმდევრობითი სტატისტიკური ანალიზის კლასიკურ ამოცანას წარმოადგენს. მტკიცდება, რომ თუ დასაწყისში (აპრიორულად) მძღოლთა ყოფაქცევა შედგენილი პუასონის განაწილებით აღიწერება, რომლის λ პარამეტრი (a, τ) გამა განაწილების მიხედვით არის განაწილებული, მაშინ რაიმე $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ „ისტორიის“ მქონე მძღოლთა ყოფაქცევა კვლავ შედგენილი პუასონის განაწილებით აღიწერება, რომლის λ პარამეტრი $\left(a + \sum_{i=1}^{t} k_i, \tau + t\right)$ გამა განაწილების მიხედვით არის განაწილებული. მძღოლთა ამ ჯგუფისათვის ოპტიმალურ (საშუალო კვადრატული აზრით) პრემიას წარმოადგენს

$$\pi_{t+1} = (1+\theta)\frac{a + \sum_{i=1}^{t} k_i}{\tau + t}. \tag{10.34}$$

(10.34) ფორმულა ოპტიმალური BMS-ის შემდეგ კონსტრუქციას გვკარნახობს.

1. არსებული სტატისტიკური მონაცემების მიხედვით გამოვთვალოთ $\widehat{a}$ და $\widehat{\tau}$ შეფასებები და დავადგინოთ საწყისი კლასის 100%-ნი π_0 პრემია

$$\pi_0 = (1+\theta)\frac{\widehat{a}}{\widehat{\tau}},$$

რომელსაც პირველი სადაზღვევო წლის დასაწყისში ყოველი მძღოლი ერთნაირად გადაიხდის. ჩვენ მაგალითში 100%-ანი პრემია იქნებოდა

$$0.13(1+\theta).$$

π_0 ისევე, როგორც ყველა მომდევნო პრემიები, შეიძლება პირობით ფულად ერთეულებში იყოს გამოსახული, რაც პრეტენზიის სიდიდის გათვალისწინების საშუალებას იძლევა. π_0 პრემიის შესაბამის კლასს C_0 ვუწოდოთ.

2. შემოვიღოთ საკმაოდ დაწვრილებითი პრემიების სკალა, მაგალითად, 2%-იანი ბიჯით. საჯარიმო კლასები აღვნიშნოთ

$$C_1, C_2, \ldots,$$

ხოლო წამახალისებელი —

$$C_{-1}, C_{-2}, \ldots$$

C_1-ს შეესაბამება 102%-იანი პრემია, C_2-ს — 104%-იანი და ა.შ., C_{-1} კლასში 98%-იან პრემიას იხდიან, C_{-2}-ში — 96%-ს და ა.შ. კლასების რაოდენობა არ არის შეზღუდული და პრემიათა სკალა არ არის (ზემოდან) შემოსაზღვრული. სხვათა შორის, ეს თვისება რეალურად არსებულ ნორვეგიულ BMS-ს გააჩნია (იხ. ცხრილი 10.8).

3. დავადგინოთ მეორე სადაზღვევო წლის დასაწყისში კლასიდან კლასში გადასვლის წესი. ყოველი მძღოლის ისტორია ამ მომენტისათვის ერთი რიცხვისაგან შედგება: $k_1 = 0, k_1 = 1, k_1 = 2, \ldots$ და ყველა მძღოლი C_0-ში იმყოფება. გადასვლის წესი საწყის $\widehat{a}$ და $\widehat{\tau}$ სიდიდეებზეა დამოკიდებული, ამიტომ, კონკრეტულობისათვის ჩვენი მაგალითის მონაცემები გამოვიყენოთ:

$k_1 = 0$. მაშინ, (10.34)-ის თანახმად,

$$\pi_1 = \frac{2.555(1+\theta)}{19.394+1} = 0.1253(1+\theta), \quad \frac{\pi_1}{\pi_0} \cdot 100\% = 96\%.$$

ამგვარად, მძღოლი, რომელმაც წელიწადი საგზაო შემთხვევების გარეშე გაზვლო, C_{-2} კლასში აღმოჩნდება. ამ ფაქტს ჩვენ ასე აღვნიშნავთ:

$$T_0^1(C_0) = C_{-2}.$$

$k_1 = 1$. მაშინ

$$\pi_1 = \frac{2.555+1}{19.394+1}(1+\theta) = 0.1743(1+\theta), \quad \frac{\pi_1}{\pi_0} \cdot 100\% = 134\%.$$

$$T_1^1(C_0) = C_{17}.$$

$k_1 = 2$. მაშინ

$$\pi_1 = \frac{2.555+2}{19.394+1}(1+\theta) = 0.2234(1+\theta), \quad \frac{\pi_1}{\pi_0} \cdot 100\% = 172\%.$$

$$T_2^1(C_0) = C_{36}.$$

ანალოგიურად, $T_3^1(C_0) = C_{55}$, $T_4^1(C_0) = C_{74}$. ასე შეიძლება ნებისმიერი $T_n^1(C_0)$-ის განსაზღვრა, მაგრამ წელიწადში ოთხზე მეტი შემთხვევა მძღოლებს, როგორც წესი, არ მოსდით.

4. მესამე სადაზღვევო წლის დასაწყისში გადასვლის წესები იგივე პრინციპით დადგინდება:

$$(k_1, k_2) = (0, 0), \quad \pi_2 = \frac{2.555}{19.394+2}(1+\theta) = 0.1194(1+\theta),$$

$$\frac{\pi_2}{\pi_0} \cdot 100\% = 92\%, \quad T^2_{(0,0)}(C_{-2}) = C_{-4}.$$

ანალოგიურად,

$$T^2_{(0,1)}(C_{-2}) = T^2_{(1,0)}(C_{17}) = C_{14},$$

$$T^2_{(0,2)}(C_{-2}) = T^2_{(1,1)}(C_{17}) = T^2_{(2,0)}(C_{36}) = C_{32},$$

$$T^2_{(0,3)}(C_{-2}) = T^2_{(1,2)}(C_{17}) = T^2_{(2,1)}(C_{36}) = T^2_{(3,0)}(C_{55}) = C_{50},$$

$$T^2_{(0,4)}(C_{-2}) = T^2_{(1,3)}(C_{17}) = T^2_{(2,2)}(C_{36}) =$$

$$= T^2_{(3,1)}(C_{55}) = T^2_{(4,0)}(C_{74}) = C_{68}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ n სადაზღვევო წლის შემდეგ მძღოლის სატარიფო კლასის ნომერი დამოკიდებულია მხოლოდ ამ წლების განმავლობაში მისი მონაწილეობით მომხდარ საგზაო შემთხვევათა საერთო რაოდენობაზე და არ არის დამოკიდებული ამ შემთხვევათა განაწილებაზე წლების მიხედვით. ამის გამო, შემდგომი წლებისათვის გადასვლის წესის აღნიშვნა შეიძლება არ გავართულოთ. მაგალითად,

$$T^9_{(1,0)}(C_0) = C_{-2}$$

ნიშნავს, რომ პირველი 8 წლის განმავლობაში მძღოლს 1 შემთხვევა მოუვიდა, რის გამოც მან მე-9 წელიწადი C_0-ში გაატარა და, ამ ბოლო წლის განმავლობაში, მას საგზაო შემთხვევა არ მოსვლია. მე-10 წლის დასაწყისში იგი C_{-2} კლასში გადაიყვანეს.

საკმაოდ ადვილია კომპიუტერისათვის მარტივი ალგორითმის დაწერა და ნებისმიერი $T^n_{(m,k)}(C_i)$ გადასვლის წესის წინასწარ გამოთვლა. ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული სისტემა ოპტიმალური, ანუ სამართლიანი და დაბალანსებული იქნება. ის არსებითად განსხვავდება რეალურად არსებული სისტემებისაგან შემდეგი ორი ნიშნის მიხედვით:

ა) რეალურად (ნორვეგიული სისტემის გარდა) 200%-ზე მეტი და 50%-ზე ნაკლები პრემია არ ინიშნება, ხოლო ოპტიმალურ სისტემაში — ზედა ზღვარი არ არსებობს, ქვედა ზღვარი კი 0%-ია. პრაქტიკაში გარკვეული ბუნებრივი ზედა და ქვედა ზღვრები ალბათ მაინც აღმოჩნდება. მაგალითად, 50%-იანი ქვედა ზღვარი სავსებით ბუნებრივი ჩანს, ვინაიდან ოპტიმალურ სისტემაში მის მისაღწევად პირველი 20 წლის განმავლობაში მძღოლს არც ერთი საგზაო შემთხვევა არ უნდა მოუვიდეს;

ბ) რეალურ სისტემებში, გადასვლის წესი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელი სადაზღვევო წლის დასაწყისში ხდება მისი გამოყენება.

ოპტიმალურ სისტემაში, ეს წესი არსებითად არის დამოკიდებული სადაზღვევო წლის ნომერზე. მაგალითად:

$$T_1^1(C_0) = C_{17}, \quad T_{(1,1)}^9(C_0) = C_{12}.$$

მე-9 წლის განმავლობაში მომხდარი საგზაო შემთხვევა ნაკლებად აჯარიმებს C_0 კლასში მყოფ მძღოლს, ვიდრე პირველი წლის განმავლობაში მომხდარი. ეს ბუნებრივიც არის: რვა წლის განმავლობაში მძღოლმა გარკვეული ნდობა დაიმსახურა და მომხდარი შემთხვევა მის რეპუტაციას ნაკლებად ავნებს, ვიდრე ახალბედა, უცნობი მძღოლისას. დროთა განმავლობაში მძღოლები თავთავის კლასებში განლაგდებიან და ახალი საგზაო შემთხვევები სულ უფრო და უფრო ნაკლებად შეცვლის მათ პოზიციებს.

გასაგებია, რომ სხვადასხვა მიზეზის გამო, ოპტიმალური სისტემის პრაქტიკაში დანერგვა ალბათ შეუძლებელია. ამის მიუხედავად, ქვეყანაში რეალური სისტემის შემუშავებისას, სასარგებლოა ოპტიმალური სისტემის წინასწარ გაანალიზება. კერძოდ, ეს ანალიზი ცხადყოფს, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული და დროში ერთგვაროვანი რეალური BMS განწირულია — გარკვეული დროის შემდეგ იგი მნიშვნელოვნად დისბალანსირებული გახდება და შესაცვლელი გახდება.

10.5 სადაზღვევო კომპანიის ფინანსური მდგომარეობის დინამიკა

დროის მიმდინარე t მომენტში სადაზღვევო კომპანიის ფინანსური მდგომარეობა

$$U(t) = A(t) - L(t)$$

სიდიდით აღიწერება, სადაც $A(t)$ არის დროის t მომენტისათვის კომპანიის მიერ დაგროვილი აქტივების ფულადი ღირებულება, $L(t)$ კი — ამავე მომენტისთვის არსებული, კომპანიის მთლიანი პასუხისმგებლობა, მაგალითად, გამოუმუშავებელი პრემია და აუნაზღაურებელი მოთხოვნების ფულადი სიდიდე (იხ. პუნქტი 10.7), პასუხისმგებლობა გადამზღვეველის წინაშე (იხ. პუნქტი 10.6) და სხვა.

პრაქტიკაში, კომპანიის მიერ $U(t)$-ს შეფასება ყოველი საანგარიშო (კალენდარული) წლის ბოლოს (დისკრეტულად) ხდება და წლიურ ბალანსში (საბალანსო ფურცელში) აისახება, მაგრამ მათემატიკური ანალიზისათვის უფრო მოხერხებულია ჩავთვალოთ, რომ დრო უწყვეტად იცვლება (პრაქტიკულად, ბალანსი, მაგალითად, ყოველდღიურად დგება).

$U(t)$ სიდიდის დროში ცვალებადობის (დინამიკის) შესასწავლად, აქტუარულ მათემატიკაში სხვადასხვა მოდელი გამოიყენება (იხ. [32], [212]).

ეს მოდელები ერთმანეთისაგან მათში გათვალისწინებული შემოსავლისა და ზარალის წყაროებით და ამ წყაროების მათემატიკური აღწერით განსხვავდება. ყველაზე ფართო მოდელები ითვალისწინებს შემდეგ ფაქტორებს: კომპანიის საწყის კაპიტალს, კომპანიაში შემოსულ პრემიებსა და პრეტენზიებს, დაგროვილი კაპიტალის ინვესტირებას, გადამზღვეველთან ურთიერთობას, ინფლაციას, ეკონომიკურ ციკლებსა და სხვას. ჩამოთვლილი ფაქტორებიდან ზოგიერთი (სადაზღვევო პრეტენზიები, ინვესტირება) რისკთანაა დაკავშირებული და შესაბამისი სიდიდეები (გაცემული სადაზღვევო თანხა, ინვესტირების შედეგად მიღებული შემოსავალი ან ზარალი) შემთხვევით ფლუქტუაციას განიცდიან, რის გამოც ყველა მოდელში იგულისხმება, რომ $(U(t))_{t\geq 0}$ შემთხვევითი პროცესია. ლიტერატურაში მას, სხვანაირად, რისკის პროცესს უწოდებენ.

ამ პუნქტში ჩვენ განვიხილავთ სადაზღვევო კომპანიის რისკის პროცესის შედარებით გამარტივებულ მოდელს:

$$U(t) = u + c(t) - S(t), \quad U(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

სადაც u — კომპანიის საწყისი კაპიტალია, $c(t)$ — დროის t მომენტისათვის შემოსული მთლიანი პრემიის გამომუშავებული ნაწილი (მთლიან პრემიას დაკლებული გამოუმუშავებული ნაწილი), ხოლო $S(t)$ — ასევე დროის t მომენტისათვის ყველა წარმოქმნილი (მაგრამ ზოგიერთი ჯერ აუნაზღაურებელი) პრეტენზიის სიდიდეთა ჯამი. T შეიძლება როგორც სასრული, ასევე უსასრულო იყოს.

ეს მოდელი ზემოხსენებული ფართო მოდელის ნაწილს წარმოადგენს, მაგრამ მისი შესწავლა მაინც უაღრესად ნაყოფიერია, რადგან ის შეიცავს $S(t)$ წევრს, რომელიც, სინამდვილეში, სადაზღვევო კომპანიის რისკის პროცესს სხვა ფინანსური ინსტიტუტების რისკის პროცესებისაგან განასხვავებს. რაც შეეხება ფართო მოდელის სხვა კომპონენტებს, რომლებიც ჩვენ მოდელში წარმოდგენილი არ არის, მათი შესწავლა სადაზღვევო კომპანიისათვის ისევე ხდება, როგორც საერთოდ, მაგალითად, სადაზღვევო კომპანია, როგორც ინვესტორი, არაფრით არ განსხვავდება სხვა ინვესტორებისაგან — იგი ისევე მოქმედებს ფინანსურ ბაზარზე და იყენებს ამ წიგნის წინა თავებში აღწერილ ფინანსურ ინსტრუმენტებს.

რისკის პროცესის გრძელვადიანი მდგრადობის რაოდენობრივი მახასიათებლის როლში ხშირად ე.წ. გაკოტრების ალბათობას განიხილავენ:

დროის უსასრულო ინტერვალისათვის

$$\Psi(u) = P(U(t) < 0 \quad \text{რომელიღაც} \quad t > 0\text{-სთვის}),$$

დროის სასრული $[0, T]$ ინტერვალისათვის

$$\Psi(u, T) = P(U(t) < 0 \quad \text{რომელიღაც} \quad 0 < t \leq T\text{-სთვის}).$$

მოცემული T-სთვის, მდგრადობა პრაქტიკულად უზრუნველყოფილი იქნება, თუ u საწყისი კაპიტალი და $c(t)$ ნაკადი ისე შეირჩევა, რომ $\Psi(u,T)$ გარკვეულ დონეზე დაბლა არ აღმოჩნდეს. ჩვენ, ძირითადად, $T=\infty$ შემთხვევით დავინტერესდებით.

კრამერ-ლუნდბერგის კლასიკური შედეგი. რისკის პროცესის კლასიკურ მოდელში იგულისხმება, რომ

ა) $c(t)=ct$, სადაც c რაიმე დადებითი მუდმივი სიდიდეა (პრემიების ნაკადის სიჩქარე);

ბ) $S(t)$ — პრეტენზიათა ნაკადი კოლექტიური რისკის დინამიური მოდელით აღიწერება, ანუ

$$S(t)=\sum_{i=1}^{\nu(t)} Y_i, \tag{10.35}$$

სადაც $(\nu(t))_{t\geq 0}$, $\nu(0)=0$, რაიმე λ ინტენსიობის მქონე ერთგვაროვანი პუასონის პროცესია, ხოლო $Y_1, Y_2, \ldots$ — ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული რიგით პირველი, მეორე და ა.შ. პრეტენზიათა სიდიდეებია. გარდა ამისა, იგულისხმება, რომ $Y_1, Y_2, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეები და $(\nu(t))_{t\geq 0}$ პროცესი ასევე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

გ) შესრულებულია ე.წ. წმინდა მოგების პირობა

$$c>\lambda m,$$

სადაც $m=EY_i$. ეს პირობა იმას ნიშნავს, რომ დროის ერთეულოვანი შუალედის განმავლობაში პრემიების სახით შემოსული თანხა აღემატება დროის იგივე შუალედში სადაზღვევო გადასახადების სახით გაცემული თანხის საშუალო სიდიდეს. გარდა ამისა, ეს პირობა

$$\theta=\frac{c-\lambda m}{\lambda m}=\frac{c}{\lambda m}-1$$

ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვის დადებითობას ნიშნავს ($\theta>0$).

$\nu(t)$ პუასონის პროცესი აღრიცხავს (ითვლის) $[0,t]$ შუალედში პრეტენზიათა შემთხვევით რაოდენობას. სხვანაირად მას მთვლელ პროცესს უწოდებენ. იგი შემდეგი თვისებებით ხასიათდება:

1. დროის ნებისმიერი თანაუკვეთი

$$(t_1,t_2],(t_3,t_4],\ldots,(t_{n-1},t_n]$$

ინტერვალებისათვის

$$\nu(t_2)-\nu(t_1),\nu(t_4)-\nu(t_3),\ldots,\nu(t_n)-\nu(t_{n-1})$$

ნაზრდები ერთობლივად დამოუკიდებელია. სხვა სიტყვებით, დროის თანაუკვეთ ინტერვალებში პრეტენზიათა რაოდენობები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია;

2. რაიმე τ სიგრძის დროით შუალედში პრეტენზიათა რაოდენობის ალბათური განაწილება დამოკიდებულია მხოლოდ τ-ზე, და არ არის დამოკიდებული შუალედის ბოლოებზე, ანუ $\nu(\tau)$ და $\nu(t+\tau)-\nu(t)$ სიდიდეებს ნებისმიერი t და τ-სთვის ერთნაირი განაწილება აქვთ, $t>0$, $\tau>0$.

3. თუ აღვნიშნავთ $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ პრეტენზიების წარმოქმნის შემთხვევით მომენტებს, მაშინ

$$T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$$

დროითი ინტერვალები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი და λ პარამეტრით ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია:

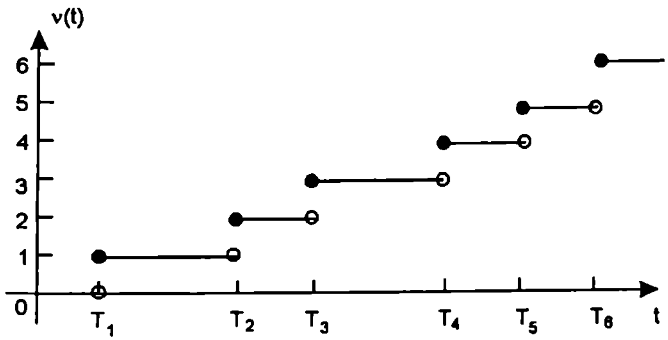
$$P(T_k - T_{k-1} < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

კერძოდ,

$$E(T_k - T_{k-1}) = \frac{1}{\lambda}.$$

4. $P(\nu(t)=n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

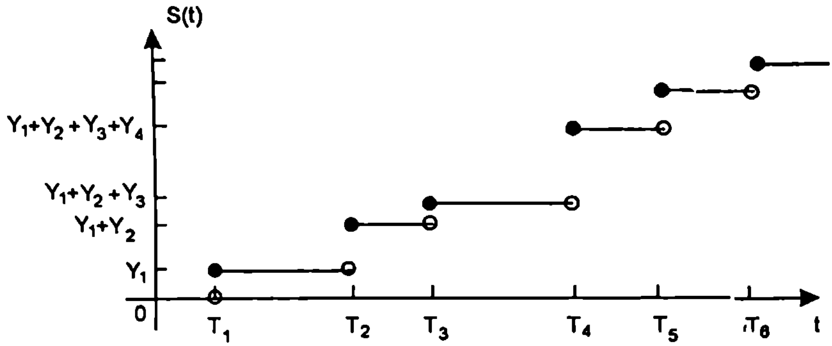
პუასონის პროცესის ტიპიური ტრაექტორია გამოსახულია შემდეგ ნახაზზე:



ნახ. 10.1

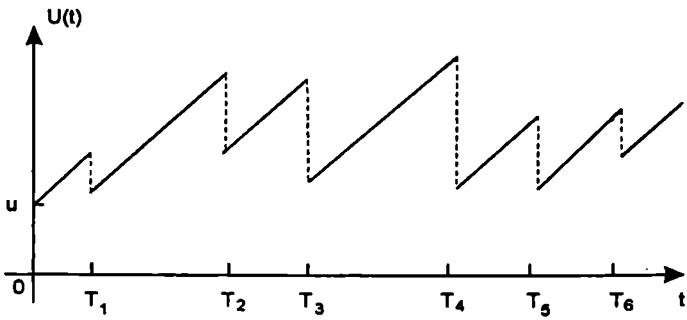
$T_1, T_2, \dots$ შემთხვევით მომენტებში მთვლელი პროცესი ერთეულოვან „ნახტომებს“ აკეთებს.

(10.35) პრეტენზიათა ნაკადის ტიპიური ტრაექტორიაც ამის მსგავსი იქნება იმ განსხვავებით, რომ ერთეულოვანი ნახტომების ნაცვლად, მას $Y_1, Y_2, \dots$ გაცემული თანხების სიდიდეების ტოლი ნახტომები ექნება

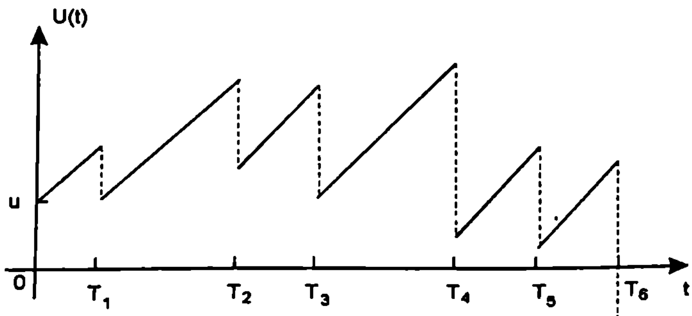


ნახ. 10.2

$U(t)$ რისკის პროცესის ტრაექტორია შემდეგი ორი ძირითადი სახის შეიძლება იყოს:



ნახ. 10.3



ნახ. 10.4

საწყის მომენტში კომპანიის კაპიტალი u-ს უდრის. თანხის გაცემის შენმთხვევით $T_1, T_2, \ldots$ მომენტებში იგი ნახტომისებურად მცირდება გაცემული თანხის ტოლი სიდიდით, ხოლო დანარჩენ დროს — იზრდება $c > 0$ კუთხური კოეფიციენტის შესაბამისი წრფივი კანონის მიხედვით. 10.3 ნახაზზე გამოსახული ტრაექტორია მოვლენათა განვითარების ისეთ ვარიანტს გამოსახავს, როდესაც გაკოტრება არ მოხდა — $U(t)$ პროცესმა $y = 0$ საზღვარს არ მიაღწია. 10.4 ნახაზზე გაკოტრება მოხდა და იგი რიგით მე-6 პრეტენზიამ გამოიწვია. სხვათა შორის, შესაძლებელია $U(t)$ პროცესის კომპიუტერზე მოდელირება, რის შედეგადაც მრავალი ამგვარი ტრაექტორია „გათამაშდება". კომპიუტერს არ გაუჭირდება 10.4 ნახაზზე გამოსახული ტრაექტორიების ხვედრითი წილის გამოთვლა, რაც გაკოტრების ალბათობის საკმაოდ კარგი შეფასება იქნება. ამ პროცედურის ჩატარება სხვადასხვა c-სთვის და Y_i-ის განაწილებისათვის შეიძლება, რაც იმას ნიშნავს, რომ კომპანიის ფინანსური მდგომარეობის დინამიკის შესწავლა წმინდა კომპიუტერული მეთოდით მოხერხდება.

კოლექტიური რისკის სტატიკური მოდელის განხილვისას (იხ. პუნქტი 10.3) მოყვანილი იყო Y_i პრეტენზიათა სიდიდისათვის შესაძლო ალბათური განაწილებები. (10.35) დინამიურ მოდელშიც, Y_i-სთვის იგივე განაწილებებია შესაძლებელი. კერძოდ, თუ Y_i ექსპონენციალურად არის განაწილებული პარამეტრით $\frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$, მივიღებთ პრეტენზიათა ნაკადის ერლანგის მოდელს. ისევე, როგორც სტატიკურ შემთხვევაში, ერლანგის მოდელი აქაც არ არის ძალიან რეალისტური, მაგრამ მათემატიკურად ძალზედ მოხერხებულია, რადგან ამ მოდელისათვის შესაძლებელია u საწყისი კაპიტალის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გაკოტრების ალბათობის ცხადი სახით პოვნა:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u\right), \tag{10.36}$$

სადაც θ ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვაა.

სამწუხაროდ, (10.36)-ის მსგავსი ზუსტი ფორმულის დაწერა Y_i-ის სხვა ალბათური განაწილებებისათვის შეუძლებელია, თუმცა „მსუბუქი კუდის" მქონე განაწილებებისათვის სამართლიანია კლასიკური კრამერ-ლუნდბერგის თეორემა, რომელიც $\Psi(u)$ გაკოტრების ალბათობის ასიმპტოტურ დახასიათებას გვაძლევს, როდესაც $u \to \infty$.

შემოვიღოთ ე.წ. მახასიათებელი (ან ლუნდბერგის) R კოეფიციენტი. იგი განიმარტება როგორც z-ის მიმართ

$$\lambda E\left(e^{zY_i}\right) = \lambda + cz$$

განტოლების დადებითი ამოხსნა. ამავე განტოლების დახმარებით შეიძლება R-ის სტატისტიკური შეფასება [212]. „მძიმე კუდის" მქონე განაწილებებისათვის R კოეფიციენტი არ არსებობს. ექსპონენციალური ($\frac{1}{\mu}$ პარამეტრიანი)

განაწილებისათვის

$$R = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu}.$$

R მახასიათებელი კოეფიციენტი მოიცავს ინფორმაციას მოდელის ყველა ძირითად პარამეტრზე: λ ინტენსიობაზე, Y_i-ის განაწილებაზე, პრემიების ნაკადის c სიჩქარეზე. ამგვარად, იგი სადაზღვევო კომპანიის ფინანსური მდგომარეობის ინტეგრალურ მახასიათებელს წარმოადგენს.

თუ Y_i-ის ალბათური განაწილება ისეთია, რომ R არსებობს, მაშინ კრამერ-ლუნდბერგის თეორემის თანახმად

$$\Psi(u) \sim \frac{\theta}{(1+\theta)Rm^*} e^{-Ru}, \quad u \to \infty,$$

თუ

$$m^* = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} z e^{Rz} (1 - F(z)) dz < \infty,$$

სადაც $F(t)$ Y_i-ს განაწილების ფუნქციაა.

იმ შემთხვევაში, თუ $m^* = \infty$,

$$\Psi(u) = o\left(e^{-Ru}\right), \quad u \to \infty,$$

ანუ

$$\frac{\Psi(u)}{e^{-Ru}} \to 0, \quad u \to \infty.$$

გაკოტრების ალბათობის ზედა საზღვარი ლუნდბერგის უტოლობით მოიცემა: ნებისმიერი არაუარყოფითი u-სთვის

$$\Psi(u) \le e^{-Ru}.$$

გარკვეული მიახლოებით, ამ კლასიკურ შედეგს შეიძლება შემდეგი ინტერპრეტაცია მიეცეს: თუ საწყისი u კაპიტალი საკმაოდ დიდია, და ამავე დროს, დიდი პრეტენზიების ალბათობა ძალზედ მცირეა, მაშინ გაკოტრების $\Psi(u)$ ალბათობა საკმაოდ მცირეა. ფიქსირებული საწყისი u კაპიტალის დროს, მახასიათებელი კოეფიციენტის გაზრდა ამცირებს გაკოტრების ალბათობას.

კლასიკური მოდელის განზოგადოება. დაშვება იმის შესახებ, რომ (10.35)-ში $\nu(t)$ პუასონის პროცესია, პრაქტიკის თვალსაზრისით საკმაოდ შემზღუდველია. კერძოდ, $\nu(t)$-ს სტაციონარულობა კომპანიის მთლიანი პორტფელის მოცულობის უცვლელობას ნიშნავს. სადაზღვევო კომპანიისათვის ალბათ მიუღებელია ისეთი მოდელი, რომელიც მისი ბიზნესის ზრდას გამორიცხავს. გარდა ამისა (როგორც ეს სტატიკური მოდელის განხილვისას

იყო აღნიშნული), პუასონის პროცესი გამორიცხავს პრეტენზიების გაჩენაზე გარეშე შემთხვევითი ფაქტორების მოქმედებას.

მოდელში რისკის ხანმოკლე ფლუქტუაციების გასათვალისწინებლად შერეულ პუასონის მოდელს იყენებენ. იგულისხმება, რომ დროის ყოველი t მომენტისათვის პრეტენზიების $N(t)$ რაოდენობა Λt პარამეტრის მქონე პუასონის კანონის მიხედვით არის განაწილებული, სადაც Λ რაიმე დადებითი შემთხვევითი სიდიდეა. მას სტრუქტურულ ცვლადს უწოდებენ, ხოლო მის $H(\lambda)$ განაწილებას — სტრუქტურულ განაწილებას. ეს ტერმინოლოგია და მეთოდი ჩვენთვის უკვე ცნობილია. ცხადია, რომ

$$P(N(t)=k)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dH(\lambda).$$

ბუნებრივია, რომ $(N(t))_{t\geq 0}$ პროცესს შერეული პუასონის პროცესი ეწოდება.

ისევე, როგორც სტატიკურ შემთხვევაში, პრაქტიკული თვალსაზრისით ყველაზე საინტერესო ის შემთხვევაა, როდესაც $H(\lambda)$ გამა განაწილებაა:

$$H=\Gamma(q,kq),\quad q>0\quad k>0.$$

როგორც ვიცით (იხ. პუნქტი 10.3), ამ შემთხვევაში, $N(t)$-ს უარყოფითი ბინომური განაწილება აქვს პარამეტრებით kq და $\frac{q}{q+t}$. თავად $(N(t))_{t\geq 0}$ პროცესს, ამ შემთხვევაში, პოიას პროცესი ეწოდება.

შერეულ პუასონის მოდელთან დაკავშირებულია შემდეგი, პრაქტიკული თვალსაზრისით, საინტერესო ფაქტი. თურმე, რისკის ფლუქტუაციის პირობებში, ამ ფლუქტუაციის ჩასაქრობად, საჭიროა პრემიების ასევე შემთხვევითი ნაკადი. მართლაც, ვთქვათ, Λ-ს განაწილებას უსასრულო მატარებელი გააჩნია, მაგრამ ისეთი, რომ $E\Lambda<\infty$. მაშინ, სრული ალბათობის ფორმულით

$$\Psi(u)=\int_0^\infty \Psi(u|\Lambda=\lambda)dH(\lambda).$$

ვთქვათ, პრემიების ნაკადის c სიჩქარე მუდმივია. მაშინ, თუ $\lambda\geq\frac{c}{m}$ (წმინდა მოგების პირობა ირღვევა),

$$\Psi(u|\Lambda=\lambda)=1$$

და

$$\Psi(u)\geq P\left(\Lambda\geq\frac{c}{m}\right)>0\quad \text{ყველა}\quad u\text{-სთვის}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ მზღვეველი რისკის ფლუქტუაციის მიხედვით არ ცვლის პრემიების სიდიდეს, მას გაკოტრება ემუქრება.

კლასიკური მოდელის შემდგომი განზოგადოება მდგომარეობს $\nu(t)$-ს როლში არაერთგვაროვანი პუასონის და ე.წ. კოქსის პროცესების განხილვაში. ასევე, ცალკე დიდ თემას წარმოადგენს რისკის პროცესის ისეთი

მოდელები, რომლებშიც Y_i-სთვის დაშვებულია „მძიმე კუდის“ მქონე განაწილებები, ანუ დაშვებულია ძალზედ დიდი სადაზღვევო გადასახადები. დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია ყველა ამ საკითხთან [212] ნაშრომისა და მასში მითითებული ლიტერატურის მიხედვით გაცნობა.

10.6 გადაზღვევა

პრაქტიკაში ხშირია ისეთი შემთხვევა, როდესაც ზოგიერთი ცალკეული რისკი ან რომელიმე პორტფელის (მათ შორის კომპანიის მთლიანი სადაზღვევო პორტფელის) ერთიანი რისკი არსებული კომპენსაციის მიუხედავად მიუღებელია სადაზღვევო კომპანიისათვის და შექმნილ ვითარებაში იგი იძულებულია მიმართოს ერთადერთ შესაძლო საშუალებას — გადააზღვიოს ეს რისკი სხვა სადაზღვევო კომპანიაში. ცხადია, რომ ასეთ შემთხვევაში მიუღებელი რისკის მქონე კომპანია ჩვეულებრივი დამზღვევის როლში გამოდის (მას გადამცემი კომპანია ეწოდება), ხოლო კომპანია, რომელშიც ამ რისკის დაზღვევა ხდება (გადამზღვეველი კომპანია) — ჩვეულებრივი მზღვეველის როლში.

ჩვენ გავეცნობით გადაზღვევის ორ ძირითად ფორმას: პროპორციულ გადაზღვევასა და ზარალის შემომსაზღვრელ გადაზღვევას. გადაზღვევის კონტრაქტის მიზანშეწონილობა განიხილება გადამცემი კომპანიის თვალსაზრისით.

გადაზღვევის ძირითადი სახეობები. გადაზღვევის პირველი ძირითადი სახეობა — პროპორციული გადაზღვევა გულისხმობს, რომ გადაზღვეული რისკით გამოწვეული ყოველი პრეტენზიის X სიდიდის რაიმე α წილს, $0 \leq \alpha \leq 1$, გადამცემი კომპანია იხდის, ხოლო დანარჩენ $(1-\alpha)X$ თანხას — გადამზღვეველი. α სიდიდეს დაკავების ზღვარი ან დაკავების წილი ეწოდება. ამგვარად, ამ პირობებში გადამცემი კომპანია X თანხის მაგივრად

$$X_{(\alpha)} = \alpha X$$

თანხას იხდის.

გადაზღვევის მეორე ძირითადი სახეობა ითვალისწინებს პრეტენზიით გათვალისწინებული X თანხის მთლიანად გადამცემი კომპანიის მიერ გადახდას, თუ ამ თანხამ რაიმე r ზღვარს არ გადააჭარბა, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში გულისხმობს, რომ r თანხას გადამცემი კომპანია გადაიხდის, ხოლო დანარჩენ $X-r$ თანხას — გადამზღვეველი. თუ ეს წესი ყოველი ინდივიდუალური პრეტენზიისათვის გამოიყენება, მაშინ გადაზღვევის ასეთ სახეობას ექსცედენტური ანუ ზარალის გადაჭარბების გადაზღვევა ეწოდება, ხოლო r პარამეტრს — დაკავების ზღვარი. ხშირად ამ წესს რაიმე

დროის განმავლობაში შემოსული პრეტენზიებით გათვალისწინებულ ერთიან (ჯამურ) თანხისთვის იყენებენ. გადაზღვევის ამ სახეობას ჯამური ზარალის შემომსაზღვრელი გადაზღვევა ეწოდება და r პარამეტრს კი — ფრანშიზა. გასაგებია, რომ ექსცედენტური გადაზღვევის შემთხვევაში გადამცემი კომპანია X თანხის მაგივრად

$$X_{(r)} = \min(X, r)$$

თანხას იხდის.

გადაზღვევის სხვადასხვა სახეობები შეიძლება ერთიანი თვალსაზრისით აღიწეროს. ამისათვის შემოვიღოთ $h(x)$ ფუნქცია, რომელიც იმ თანხას გამოხატავს, რომელიც გადამზღვეველმა უნდა გადაიხადოს, თუ გადამცემ კომპანიაში შემოვიდა პრეტენზია, რომელიც x თანხის გადახდას ითვალისწინებს. პროპორციული გადაზღვევისათვის

$$h(x) = (1 - \alpha)x,$$

ხოლო ექსცედენტური გადაზღვევის შემთხვევაში

$$h(x) = (x - r)^+ = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le r; \\ x - r, & \text{თუ } x > r. \end{cases}$$

ცხადია, რომ გადაზღვევის დროს გადამზღვეველი ისე იქცევა, როგორც ჩვეულებრივი სადაზღვევო კომპანია, ანუ გადამცემი კომპანიისათვის $h(X)$ რისკის შესაბამის პრემიას აწესებს

$$(1 + \theta^*)Eh(X),$$

სადაც θ^* — გადამზღვეველის მიერ დადგენილი ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვაა. თუ გადაზღვევის ხელშეკრულებებს განვიხილავთ გადამცემი კომპანიის თვალსაზრისით, უნდა ჩავთვალოთ, რომ θ^* ფარდობითი დატვირთვა ფიქსირებულია და ჩვენი ამოცანაა ოპტიმალურად შევარჩიოთ α ან r პარამეტრები.

გადაზღვევა კონკრეტული მოდელების პირობებში. ვთქვათ, პორტფელის ერთიანი X რისკისთვის გამოყენებულია ინდივიდუალური რისკის მოდელი

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

თუ კომპანიამ მოახდინა პორტფელის პროპორციული გადაზღვევა რაიმე α, $0 \le \alpha \le 1$, დაკავების ზღვარით, მაშინ მისთვის X რისკი შემცირდება და αX-ს ტოლი გახდება. ამავე დროს, სამწუხაროდ, შემცირდება მისი კაპიტალიც. თუ გადაზღვევამდე ეს კაპიტალი

$$u + (1 + \theta)EX$$

სიდიდეს შეადგენდა, სადაც u — კომპანიის საწყისი კაპიტალია, ხოლო θ — მის მიერ დადგენილი ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვა, გადაზღვევის შემდეგ იგი

$$(1+\theta^*)(1-\alpha)EX$$

სიდიდით შემცირდება და

$$u+(1+\theta)EX-(1+\theta^*)(1-\alpha)EX=u+[\theta-\theta^*+(1+\theta^*)\alpha]EX$$

სიდიდის ტოლი გახდება. შესაბამისად შეიცვლება გაკოტრების ალბათობაც, რომელიც ახალ პირობებში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$P(\alpha X>u+[\theta-\theta^*+(1+\theta^*)\alpha]EX)=$$

$$=P\left(X>\left[1+\theta^*+\left(\frac{u}{EX}+\theta-\theta^*\right)/\alpha\right]EX\right).$$

განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

1. თუ $\theta^*<\theta+\frac{u}{EX}$, მაშინ α პარამეტრის შემცირება 1-დან (გადაზღვევაზე უარის თქმა) 0-მდე (სრული გადაზღვევა) იწვევს გაკოტრების ალბათობის შემცირებას

$$P\left(X>\left[1+\theta+\frac{u}{EX}\right]EX\right)$$

საწყისი მნიშვნელობიდან ნულამდე. შესაბამისად მცირდება კომპანიის მოსალოდნელი შემოსავალიც

$$(\theta-\theta^*+\alpha\theta^*)EX.$$

თუ, მაგალითად, $\theta^*>\theta$ (რაც ბუნებრივია), მაშინ სრული გადაზღვევა ($\alpha=$ $=0$) გამოიწვევს

$$(\theta-\theta^*)EX$$

ზარალს, ასე რომ, ამ შემთხვევაში α არ შეიძლება

$$\frac{\theta^*-\theta}{\theta^*}$$

სიდიდეზე ნაკლები იყოს.

2. თუ $\theta^*>\theta+\frac{u}{EX}$, მაშინ α ზღვრის შემცირება იწვევს გაკოტრების ალბათობის ზრდას, და ამიტომ, ამ შემთხვევაში გადაზღვევაზე უარი უნდა ვთქვათ.

3. თუ $\theta^*=\theta+\frac{u}{EX}$, მაშინ გაკოტრების ალბათობა საერთოდ არ არის დამოკიდებული α-ზე, მაგრამ ვინაიდან α-ს შემცირება იწვევს მოსალოდნელი შემოსავლის შემცირებას, ამ შემთხვევაშიც გადაზღვევა უაზრო ხდება.

ახლა განვიხილოთ ექსცედენტური გადაზღვევის შემთხვევა. დამატებით ვიგულისხმოთ, რომ პორტფელი ერთგვაროვანია. თუ გადაზღვევა მოხდა რაიმე დაკავების r ზღვარით, მაშინ პორტფელის ერთიანი X რისკი შემცირდება და $X^{(r)}$ სიდიდის ტოლი გახდება:

$$X^{(r)} = \sum_{i=1}^{N} X_i^{(r)},$$

სადაც

$$X_i^{(r)} = \min(X_i, r).$$

ერთდროულად შემცირდება კომპანიის შემოსავალიც. თუ გადაზღვევამდე ეს შემოსავალი $N(1+\theta)EX_1$-ის ტოლი იყო, გადაზღვევის შემდეგ იგი

$$N(1+\theta^*)(EX_1 - EX_1^{(r)})$$

სიდიდით შემცირდება და

$$N(1+\theta)EX_1 - N(1+\theta^*)(EX_1 - EX_1^{(r)}) = N(\theta-\theta^*)EX_1 + N(1+\theta^*)EX_1^{(r)}$$

სიდიდის ტოლი გახდება. შესაბამისად გვექნება ახალი გაკოტრების ალბათობა:

$$P\left(X^{(r)} > N(\theta-\theta^*)EX_1 + N(1+\theta^*)EX_1^{(r)}\right).$$

თუ გამოვიყენებთ ნორმალურ მიახლოებას, მივიღებთ:

$$P\left(\frac{X^{(r)} - NEX_1^{(r)}}{\sqrt{N\cdot \mathrm{Var}(X_1^{(r)})}} > \frac{N(\theta-\theta^*)EX_1 + N\theta^* EX_1^{(r)}}{\sqrt{N\cdot \mathrm{Var}(X_1^{(r)})}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\sqrt{N}\frac{(\theta-\theta^*)EX_1 + \theta^* EX_1^{(r)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1^{(r)})}}\right).$$

ცხადია, რომ ეს ალბათობა მიიღებს თავის უმცირეს მნიშვნელობას მაშინ, როდესაც Φ ფუნქციის არგუმენტი მიაღწევს თავის უდიდეს მნიშვნელობას. ამგვარად, გადაზღვევის მიზანშეწონილობის და r დაკავების ზღვრის ოპტიმალური შერჩევის პრობლემების გადასაჭრელად უნდა შევისწავლოთ

$$\phi(r) = \frac{[(\theta-\theta^*)EX_1 + \theta^* E\min(X_1, r)]^2}{\mathrm{Var}(\min(X_1, r))}$$

ფუნქცია და განვსაზღვროთ მისი გლობალური მაქსიმუმი. თუ, მაგალითად, ეს მაქსიმუმი $r = +\infty$ დროს მიიღწევა, მაშინ გადაზღვევა მიზანშეწონილი

არ არის, ხოლო თუ $r = 0$ დროს — მაშინ პორტფელი მთლიანად უნდა გადავაზღვიოთ.

გადაზღვევის ანალიზი კოლექტიური რისკის მოდელში შეიძლება ანალოგიურად ჩატარდეს. გადავიდეთ დინამიურ მოდელზე. ჩვენ გამოვიყენებთ წინა პუნქტში მოყვანილ ცნებებს და აღნიშვნებს. თუ გავითვალისწინებთ კრამერ-ლუნდბერგის ფორმულას და ლუნდბერგის უტოლობას, ბუნებრივია, რომ გადაზღვევის დროს მიზნად დავისახოთ R მახასიათებელი კოეფიციენტის მაქსიმიზირება.

ვთქვათ, გადაზღვევის გარკვეული სახეობა აღიწერება $h(x)$ ფუნქციით, ასე რომ, ყოველი პრეტენზიით გათვალისწინებული Y თანხის $h(Y)$ წილს იხდის გადამზღვეველი, ხოლო დანარჩენ

$$Y' = Y - h(Y)$$

ნაწილს — გადამცემი კომპანია. ვინაიდან დროის ერთეულში საშუალოდ λ განაცხადი შემოდის, გამოდის, რომ გადამზღვეველი იგივე დროის ერთეულში საშუალოდ

$$\lambda Eh(Y)$$

თანხას იხდის და ამის სანაცვლოდ იგი უნიშნავს გადამცემ კომპანიას

$$(1+\theta^*)\lambda Eh(Y)$$

პრემიას. თუ დავუშვებთ, რომ გადამცემმა კომპანიამ ეს პრემია უწყვეტად უნდა იხადოს, მივიღებთ, რომ მისთვის პრემიების შემოსვლის სიჩქარე

$$c = (1+\theta)\lambda EY$$

შემცირდება და

$$c' = (1+\theta)\lambda EY - (1+\theta^*)\lambda Eh(Y)$$

სიდიდის ტოლი გახდება. გადაზღვევის შემდეგ გადამცემი კომპანიის ახალი ფარდობითი სადაზღვევო დატვირთვა

$$\theta' = \frac{\theta EY - \theta^* Eh(Y)}{EY - Eh(Y)}$$

სიდიდეს გაუტოლდება. რადგან θ' დადებითი უნდა იყოს, აუცილებელია

$$\theta^* Eh(Y) < \theta EY$$

პირობის შესრულება. გადაზღვევის შემდეგ R მახასიათებელი კოეფიციენტის განმსაზღვრელი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$Ee^{z(Y-h(Y))} = 1 + ((1+\theta)EY - (1+\theta^*)Eh(Y))z.$$

კონკრეტული $h(x)$ ფუნქციისათვის, ანუ გადაზღვევის კონკრეტული სახეობისათვის და Y სიდიდის მოცემული $F(y)$ განაწილების ფუნქციისათვის შესაძლებელია ამ განტოლების ანალიზური ან რიცხვითი მეთოდებით ამოხსნა. ამით დადგინდება გადაზღვევის შედეგად მიღებული ახალი მახასიათებელი კოეფიციენტი და, ამგვარად, გამოირკვევა, თუ რამდენად მიზანშეწონილი ყოფილა ეს გადაზღვევა.

10.7 რეზერვირების შესახებ

შეუძლებელია, ერთ თავში, გაკვრითაც კი, შევეხოთ სადაზღვევო მათემატიკის ყველა საკითხს. ჩვენი განხილვის მიღმა დარჩა ისეთი საკითხები, როგორც რისკის პროცესში ინფლაციის გათვალისწინება, ინვესტიციები სადაზღვევო ბიზნესში, გადამზღვეველი კომპანიის აქტუარული პრობლემები, სადაზღვევო პრემიაში ხარჯების, საბიუჯეტო გადასახადებისა და დივიდენდების გაცემის გათვალისწინება, სიცოცხლის დაზღვევისა და საპენსიო სქემების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი საკითხი, კომპანიის მთლიანი პასუხისმგებლობის დადგენა და მისი დინამიკა, რეზერვირება და სხვა. ჩამოთვლილ და ამ თავში ნაწილობრივ განხილულ საკითხებზე ვრცელი ლიტერატურა არსებობს. იმედი გვაქვს, რომ ამ ლიტერატურის ჩვენს მიერ მითითებული ნაწილის მიხედვით დაინტერესებული მკითხველი შესძლებს სადაზღვევო მათემატიკის უფრო ღრმად შესწავლას.

დასასრულს, რამდენიმე სიტყვით გვინდა შევეხოთ სადაზღვევო საქმის ისეთ მნიშვნელოვან პრობლემას, როგორიც რეზერვირებაა. ჩვენ ვისარგებლებთ ლონდონის აქტუარების ინსტიტუტის მიერ გამოცემულ სახელმძღვანელოში ([20]) მოყვანილი ტერმინოლოგიით და განმარტებებით (იხ. ასევე [67], [156]).

სადაზღვევო კომპანია ქმნის რამდენიმე ტიპის ე.წ. ტექნიკურ რეზერვს:

1. გამოუმუშავებელი პრემიების რეზერვი შედგება იმ უკვე გადახდილი პრემიების ნაწილებისაგან, რომელთა შესაბამისი კონტრაქტების ვადა არ ამოიწურა საანგარიშო მომენტისათვის და რომლებმაც პრეტენზია ჯერ არ გამოიწვიეს. თუ, მაგალითად, პრემია გადახდილია 1 ოქტომბერს და საანგარიშო მომენტისათვის, რომელიც 31 დეკემბერს არის, კონტრაქტმა პრეტენზია არ გამოიწვია, პრემიის 75% უნდა გადავიტანოთ შემდეგი საანგარიშო წლის რეზერვში.

2. თუ საანგარიშო მომენტში ცნობილია, რომ კონტრაქტმა პრეტენზია გამოიწვია, მაგრამ იგი სრულიად ან ნაწილობრივ არ არის დაკმაყოფილებული, ვიტყვით, რომ საქმე ღია პრეტენზიასთან გვაქვს. ამავე დროს, სავსებით შესაძლებელია, რომ მომავალ წელს კომპანიაში შემოვიდეს ისეთი

პრეტენზია, რომლის გამომწვევი სადაზღვევო შემთხვევა უკვე მოხდა, მაგრამ სხვადასხვა მიზეზის გამო, ამის შესახებ კომპანიას ჯერ არ (ან ვერ) შეატყობინეს. ეს უკვე არსებული, მაგრამ არა შეტყობინებული (IBNR) პრეტენზიაა. ღია და IBNR პრეტენზიების მომავალში დასაკმაყოფილებლად აუნაზღაურებელი ზარალების რეზერვი იქმნება.

3. კომპანიაში იქმნება კატასტროფების რეზერვი, რისკის ფლუქტუაციის ჩასაქრობი რეზერვი.

აუნაზღაურებელი ზარალის რეზერვის აუცილებელი მოცულობის დადგენა წინა წლების სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე ხდება. როგორც წესი, ეს მონაცემები სამკუთხედის სახით მოიცემა, მაგალითად:

		განვითარების წლები						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	960	744	501	442	286	127	23
დასაწყისის	2	1001	854	568	565	347	148	
წლები	3	1113	990	671	648	422		
	4	1265	1168	800	744			
	5	1490	1383	1007				
	6	1725	1536					
	7	1889						

ცხრილი 10.10

ამ ცხრილში წარმოდგენილია კომპანიის მიერ სადაზღვევო თანხების გაცემის დინამიკა. პირველ სტრიქონში წარმოდგენილია 6 წლის წინ დადებული კონტრაქტებით გამოწვეული გადახდილი თანხების მიმდევრობა. თუ, მაგალითად, რეზერვი 1998 წლის დეკემბერში განისაზღვრება, მაშინ პირველ სტრიქონში ის გადახდილი თანხებია, რომლებიც 1992 წელს დადებულმა ხელშეკრულებებმა გამოიწვია. კერძოდ, იმავე წელს ამ კონტრაქტებმა 960 ფულადი ერთეულის გადახდა გამოიწვია, შემდეგ, 1993 წელს — 744 ერთეულის და ა.შ. დანარჩენი სტრიქონების შინაარსიც ანალოგიურია. მე-7 სტრიქონში აღნიშნულია ის თანხა, რომელიც წელს გაიცა ამავე 1998 წელსვე დადებული კონტრაქტების გამო. პირველი სვეტი გვიჩვენებს, თუ სხვადასხვა „თაობის“ (კოჰორტის) კონტრაქტებმა თავისი განვითარების პირველივე წელს რა თანხების გადახდა გამოიწვია. მსგავსი შინაარსი აქვს დანარჩენ სვეტებსაც. მთავარ დიაგონალზე ის თანხებია, რომელთა გადახდა წელს მოხდა სხვადასხვა კოჰორტების კონტრაქტების გამო. ასეთი სამკუთხედები დგება არა მარტო გადახდილი თანხებისათვის, არამედ სხვა საინტერესო მაჩვენებლებისათვისაც, მაგალითად, პრეტენზიათა რაოდენობისათვის. დასაწყისის წლებსაც სხვადასხვა მიზნებისათვის სხვადასხვა შინაარსი ენიჭება. ამის მიუხედავად, აქტუარის ამოცანა ყოველთვის ამ სამკუთხედის მართკუთხედამდე შევსებას წარმოადგენს.

ამ ამოცანის გადასაჭრელად, პრაქტიკაში საკმაოდ მარტივ „არითმეტიკულ“ ხერხებს მიმართავენ. მაგალითად, პირველი სტრიქონის ელემენტებს შორის სხვაობებს ან შეფარდებებს მეორე სტრიქონის ბოლო წევრის დასადგენად იყენებენ. შემდეგ, ორი პირველი სტრიქონიდან მოპოვებულ მსგავს ინფორმაციას — მესამე სტრიქონისათვის და ა.შ.

ამ გზით მიღებული სტრიქონების უცნობი სიდიდეები სავარაუდოდ სწორედ ის თანხებია, რომლებიც მომავალი ექვსი წლის განმავლობაში დაიხარჯება ცხრილში განხილულ კონტრაქტთა კოჰორტების მიერ გამოწვეული პრეტენზიების დასაკმაყოფილებლად. მიღებული სიდიდეების ჯამი შესაბამისი რეზერვის მოცულობის შეფასება იქნება. მითითებულ ლიტერატურაში მრავალი ასეთი პრაქტიკული ხერხია აღწერილი. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი მიდგომებიც, რომლებიც მათემატიკის, კერძოდ მათემატიკური სტატისტიკის, უფრო დახვეწილ და შინაარსიან მეთოდებს იყენებენ (იხ. [21], [149]).

დანართი

I. ნორმალური განაწილება

X შემთხვევით სიდიდეს ჰქვია ნორმალურად განაწილებული პარამეტრებით μ და σ, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, თუ მისი განაწილების ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

ნორმალური განაწილების ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია ლებეგის ზომის მიმართ და მისი სიმკვრივე $\frac{d}{dx}P(X \le x)$ არის

$$\varphi(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

μ და σ პარამეტრებს შემდეგი შინაარსი აქვს: $EX = \mu$ და $DX = \sigma^2$. სხვა სიტყვებით, μ არის X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (ან საშუალო), ხოლო σ^2 არის მისი დისპერსია. $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ — X შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტული გადახრაა.

თუ X არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე პარამეტრებით μ და σ, მაშინ შემთხვევითი სიდიდე

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

არის ნორმალურად განაწილებული პარამეტრებით 0 და 1, ანუ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეა. მისი განაწილების ფუნქციაა

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

ხოლო სიმკვრივე

$$\varphi(x) = \varphi(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

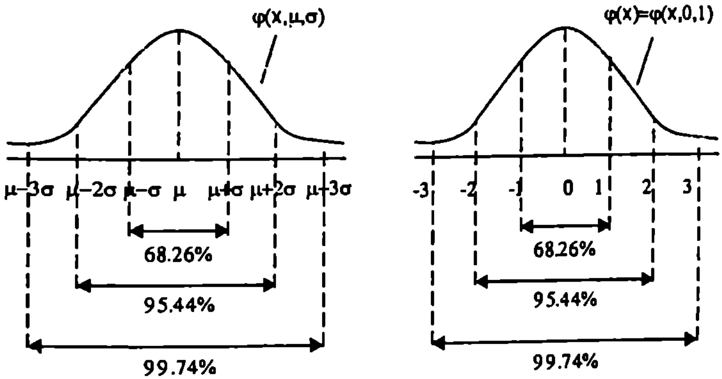
სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P(-1 \le z \le 1) = 0.6826,$$

$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = P(-2 \le z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = P(-3 \le z \le 3) = 0.9974.$$

ბოლო ტოლობას 3σ-ს წესი ჰქვია (იხ. ნახ. დ.1).



ნორმალური სიმკვრივე პარამეტრებით μ და σ

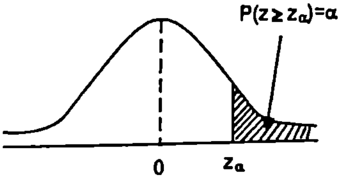
სტანდარტული ნორმალური სიმკვრივე

ნახ. დ.1

განვმარტოთ z_α შემდეგი ტოლობით

$$P(z \ge z_\alpha) = \alpha,$$

სადაც $0 < \alpha < 1$ (იხ. ნახ. დ.2).



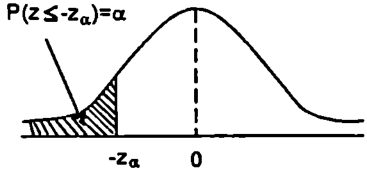
სტანდარტული ნორმალური სიმკვრივე

ნახ. დ.2

ადვილი დასანახია, რომ

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \quad \text{და} \quad N(-x) = 1 - N(x).$$

ამიტომ $P(z \le -z_\alpha) = \alpha$ (იხ. ნახ. დ.3).



სტანდარტული ნორმალური სიმკვრივე

ნახ. დ.3

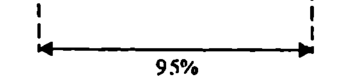
მოვიყვანოთ α-ს და z_α-ს რამდენიმე ტიპიური მნიშვნელობა:

α	0:1	0.05	0.025
z_α	1.26	1.645	1.96

მაგალითად, $\alpha = 0.025$ და $z_\alpha = 1.96$ ნიშნავს, რომ

$$\begin{aligned} &P(-1.96 \le z \le 1.96) = 1 - \big(P(z \ge z_\alpha) + P(z \le -z_\alpha)\big) = \\ &= 1 - (\alpha + \alpha) = 1 - 2\alpha = 1 - 2 \cdot 0.025 = 1 - 0.05 = 0.95 \end{aligned}$$

(იხ. ნახ. დ.4).



სტანდარტული ნორმალური სიმკვრივე

ნახ. დ.4

ნორმალური განაწილება ტაბულირებულია, მაგრამ კომპიუტერის საშუალებით შეიძლება განაწილების საკმაოდ ზუსტი გამოთვლა შემდეგ პოლინომიალურ აპროქსიმაციებზე დაყრდნობით:

1)

$$N(x) = \begin{cases} 1 - \varphi(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3), & \text{თუ} \quad x \ge 0, \\ 1 - N(-x), & \text{თუ} \quad x < 0, \end{cases}$$

სადაც

$$k = \frac{1}{1+\gamma x},$$
$$\gamma = 0.33267,$$
$$a_1 = 0.4361836,$$
$$a_2 = -0.1201676,$$
$$a_3 = 0.9372980.$$

ეს აპროქსიმაცია იძლევა მეოთხე ნიშნამდე სიზუსტეს წერტილის შემდეგ.

ექვს ნიშნამდე სიზუსტეს წერტილის შემდეგ იძლევა შემდეგი აპროქსიმაცია

2)

$$N(x) = \begin{cases} 1 - \varphi(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5), & \text{თუ } x \geq 0, \\ 1 - N(-x), & \text{თუ } x < 0, \end{cases}$$

სადაც

$$k = \frac{1}{1+\gamma x},$$
$$\gamma = 0.2316419,$$
$$a_1 = 0.31938153,$$
$$a_2 = -0.356563782,$$
$$a_3 = 1.781477937,$$
$$a_4 = -1.821255978,$$
$$a_5 = 1.330274429.$$

II. აქტივების საბირჟო ინდექსების გამოთვლის ხერხები

საბირჟო ინდექსების გამოთვლის სამი პრინციპული სქემა არსებობს:

1) ფასების შეწონვა;

2) საბაზრო კაპიტალიზაციების შეწონვა;

3) თანაბარი შეწონვა.

განვიხილოთ ცალ-ცალკე სამივე სქემა.

1) ფასების შეწონვა. ამ სქემით გამოთვლილი უძველესი და ყველაზე პოპულარული ინდექსია დოუ-ჯონსის ინდექსი (Dow-Jones Industrial Average, DJIA).

ეს ინდექსი გამოითვლება შემდეგნაირად. აირჩევა ნიუ-იორკის ბირჟის ლისტინგში შემავალი 30 უდიდესი კომპანია, საზოგადოდ, თავთავიანთი

ინდუსტრიის ლიდერები. ამის შემდეგ DJIA გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathrm{DJIA}_t = \sum_{i=1}^{30} \frac{p_{it}}{D_{adj}},$$

სადაც DJIA_t ინდექსის სიდიდეა t-ურ დღეს, p_{it} — i-ური კომპანიის აქციის დახურვის ფასია t-ურ დღეს, D_{adj} — შემათანხმებელი გამყოფია.

იმისათვის, რომ გავიგოთ, თუ როგორ გამოითვლება D_{adj} გამყოფი, განვიხილოთ

მაგალითი. ცნობილია, რომ რომ მზარდი კომპანიები, რომელთა რიცხვს ეკუთვნიან DJIA-ში შემავალი კომპანიებიც, დროდადრო ახდენენ ე.წ. აქციების გახლეჩას გარკვეული პროპორციით. მაგალითად, გახლეჩა პროპორციით 1 : 3. ნიშნავს, რომ 1 ძველ აქციაში იძლევიან 3 ახალ აქციას. გასაგებია, რომ ასეთმა ადმინისტრაციულმა გადაწყვეტილებამ არ უნდა მოახდინოს გავლენა ინდექსის სიდიდეზე. სწორედ ამას უზრუნველყოფს D_{adj} გამყოფი.

მართლაც, ვთქვათ, ინდექსი ეფუძნება 3 კომპანიის აქციას. აქციის გახლეჩამდე, ინდექსი ასე გამოითვლება: თუ A კომპანიის აქციის ფასი რომელიმე t მომენტში \$30-ია, B კომპანიის — \$20, ხოლო C კომპანიის — \$10, მაშინ

$$\mathrm{DJIA}_t = \frac{30+20+10}{3} = 20.$$

ვთქვათ, ამავე t მომენტში მოხდა A კომპანიის აქციის გახლეჩა 1 : 3 პროპორციით. მაშინ A კომპანიის ახალი აქციის ფასი გახდება \$10, ხოლო B და C კომპანიების აქციების ფასი უცვლელი დარჩება. რადგან DJIA_t-ს სიდიდე არ უნდა შეიცვალოს, ამიტომ D_{adj} გამოითვლება მოთხოვნიდან

$$20 = \frac{10+20+10}{D_{adj}},$$

საიდანაც $D_{adj} = 2$. ამრიგად, მოხდა გამყოფის შემცირება 3-დან 2-მდე.

თავდაპირველად, ინდექსის ჩამოყალიბების მომენტში, D_{adj} 30-ის ტოლი იყო. მაგრამ უკვე 1996 წლის ივნისში D_{adj} 0.33-ის ტოლი გახდა. ამიტომ თავდაპირველად დოუ-ჯონსის ინდექსი იყო

$$\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} p_{it},$$

ხოლო 1996 წელს კი

$$3\sum_{i=1}^{30} p_{it}.$$

2) **საბაზრო კაპიტალიზაციის შეწონვა.** ამ სქემის მიხედვით ინდექსი გამოითვლება შემდეგნაირად. აფიქსირებენ ე.წ. საბაზისო დღეს და ინდექსის საწყის მნიშვნელობას, Index_b-ს, ხელოვნურად მიაწერენ გარკვეულ სიდიდეს, მაგალითად, რიცხვ 100-ს ან 1000-ს და ა.შ. ამის შემდეგ, ინდექსის მიმდინარე სიდიდე რომელიმე t-ურ დღეს გამოითვლება ფორმულით

$$\text{Index}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{ib} Q_{ib}} \cdot \text{Index}_b,$$

სადაც Index_t — ინდექსის სიდიდეა t-ურ დღეს, p_{it} — i-ური კომპანიის აქციის დახურვის ფასია t-ურ დღეს, Q_{it} — i-ური კომპანიის აქციების რაოდენობაა t-ურ დღეს, p_{ib} — i-ური კომპანიის აქციის ფასია საბაზისო დღეს, Q_{ib} — i-ური კომპანიის აქციების რაოდენობაა საბაზისო დღეს, N — ინდექსის ფორმირებაში მონაწილე კომპანიების რაოდენობაა.

3) **თანაბარი შეწონვა.** არსებობს თანაბარი შეწონვის ორი ფორმა: ფორმა, რომელიც დაფუძნებულია საშუალო არითმეტიკულის ცნებაზე და ფორმა, რომელიც დაფუძნებულია საშუალო გეომეტრიულის ცნებაზე.

ა) საშუალო არითმეტიკულზე დაფუძნებული ინდექსი. თავდაპირველად გამოითვლება i-ური აქციის ამონაგები $[t, t+1]$ პერიოდის განმავლობაში

$$HPY_{i,[t,t+1]} = \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1,$$

სადაც $p_{i,t}$ — i-ური აქციის ფასია t-ური დღის ბოლოს, ხოლო $p_{i,t+1}$ — i-ური აქციის ფასია $(t+1)$-ე დღის ბოლოს. შემდეგ გამოითვლება ამ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული

$$AM_{[t,t+1]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} HPY_{i,[t,t+1]},$$

სადაც N კომპანიების რაოდენობაა.

თვით ინდექსი გამოივლება რეკურენტულად შემდეგი განტოლებიდან

$$AIndex_{t+1} = AIndex_t(1 + AM_{[t,t+1]}),$$

$$AIndex_1 = AIndex_b,$$

სადაც $AIndex_b$ არის ინდექსის სიდიდე საბაზისო დღეს. მას პირობითად გარკვეული რიცხვი აქვს მიწერილი, მაგალითად, 100, 1000 ან 50 და ა.შ.

ბ) საშუალო გეომეტრიულზე დაფუძნებული ინდექსი. თავდაპირველად გამოითვლება i-ური აქციის ამონაგები $[t, t+1]$ პერიოდში შემდეგი ფორმულით

$$HPR_{i,[t,t+1]} = \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}}.$$

შემდეგ გამოითვლება ამ სიდიდეების საშუალო გეომეტრიული

$$GM_{[t,t+1]} = \left(\prod_{i=1}^{N} HPR_{i,[t,t+1]}\right)^{1/N}$$

ბოლოს, ინდექსი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული განტოლებიდან

$$GIndex_{t+1} = GIndex_t \cdot GM_{[t,t+1]},$$

$$GIndex_1 = GIndex_b$$

(აღნიშვნების შინაარსი ისეთივეა, როგორც ა) პუნქტში).

შენიშვნები.

1) ინდექსის შინაარსიდან გამომდინარე, t პარამეტრი ყველგან ღებულობს დისკრეტულ მნიშვნელობებს, კერძოდ, $t = 1, 2, \ldots$ დღეს.

2) გავარკვიოთ ინდექსის ბოლო ორი ფორმის შინაარსი.

ა) გადავწეროთ შესაბამისი რეკურენტული განტოლება შემდეგნაირად

$$\frac{AIndex_{t+1}}{AIndex_t} = 1 + AM_{[t,t+1]}.$$

მაშინ, თუ $r_{AIndex_{[t,t+1]}}$-ით აღვნიშნავთ ინდექსის ამონაგებს $[t, t+1]$ პერიოდის განმავლობაში, გვექნება

$$r_{AIndex_{[t,t+1]}} = \frac{AIndex_{t+1}}{AIndex_t} - 1 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} HPY_{i,[t,t+1]} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_{i,[t,t+1]},$$

სადაც $r_{i,[t,t+1]}$ — i-ური აქციის ამონაგებია $[t, t+1]$ პერიოდში.

ამრიგად, საშუალო არითმეტიკულზე დაფუძნებული ინდექსის ამონაგები არის მასში შემავალი აქციების ამონაგებების საშუალო არითმეტიკული.

ბ) გამოვთვალოთ $GIndex_t$-ს ამონაგების უწყვეტი ანალოგი. გვექნება

$$r^c_{GIndex_{[t,t+1]}} = \ln \frac{GIndex_{t+1}}{GIndex_t} =$$

$$= \ln \left(\prod_{i=1}^{N} HPR_{i,[t,t+1]} \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln HPR_{i,[t,t+1]} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r^c_{i,[t,t+1]}.$$

ამრიგად, საშუალო გეომეტრიულზე დაფუძნებული ინდექსის ამონაგებების უწყვეტი ანალოგი არის მასში შემავალი აქციების ამონაგებების უწყვეტი ანალოგების საშუალო არითმეტიკული.

ორივე შემთხვევაში, შინაარსობრივად, ინდექსი არის სიდიდე, რომლის ამონაგები (ჩვეულებრივი თუ უწყვეტი ანალოგი) არის მასში შემავალი აქციების საშუალო ამონაგების ტოლი.

3) ამონაგების (საპროცენტო განაკვეთის) ჩვეულებრივი და უწყვეტი ანალოგები და მათი თვისებები შესწავლილია პირველ თავში. ინდექსებს და ფიუჩერსებს ინდექსებზე ეძღვნება პუნქტი 3.9.

III. ოფციონებითა და ფიუჩერსებით მოვაჭრე მსოფლიოს უდიდესი ბირჟები

Agrarische Termijnmarkt Amsterdam	ATA
American Stock Exchange	AMEX
Australian Options Market	AOM
Belgian Futures & Options Exchange	BELFOX
Bolsa de Mercadorias y Futuros, Brazil	MB&F
Chicago Board of Trade	CBOT
Chicago Board Options Exchange	CBOE
Chicago Mercantile Exchange	CME
Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York	CSCE
Commodity Exchange, New York	COMEX
Copenhagen Stock Exchange	FUTOP
Deutsche Termin Börse, Germany	DTB
European Options Exchange	EOE
Financiële Termijnmarkt Amsterdam	FTA
Finnish Options Market	FOM
Hong Kong Futures Exchange	HKFE
International Petroleum Exchange, London	IPE
Irish Futures & Options Exchange	IFOX
Kansas City Board of Trade	KCBT
Kobe Rubber Exchange	KPE
Kuala Lumpur Commodity Exchange	KLCE
London Commodity Exchange	LCE
London International Financial Futures & Options Exchange	LIFFE
London Metal Exchange	LME
London Securities and Derivatives Exchange	OMLX
Manila International Futures Exchange	MIFE
Marché à Terme International de France	MATIF
Marché de Options Négociables de Paris	MONEP
MEFF Renta Fija and Variable, Spain	MEFF
Mercado de Futuros y Opciones S.A., Argentina	MERFOX
MidAmerica Commodity Exchange	MidAm
Minneapolis Grain Exchange	MGE
Montreal Exchange	ME
New York Cotton Exchange	NYCE
New York Futures Exchange	NYFE
New York Mercantile Exchange	NYMEX
New York Stock Exchange	NYSE

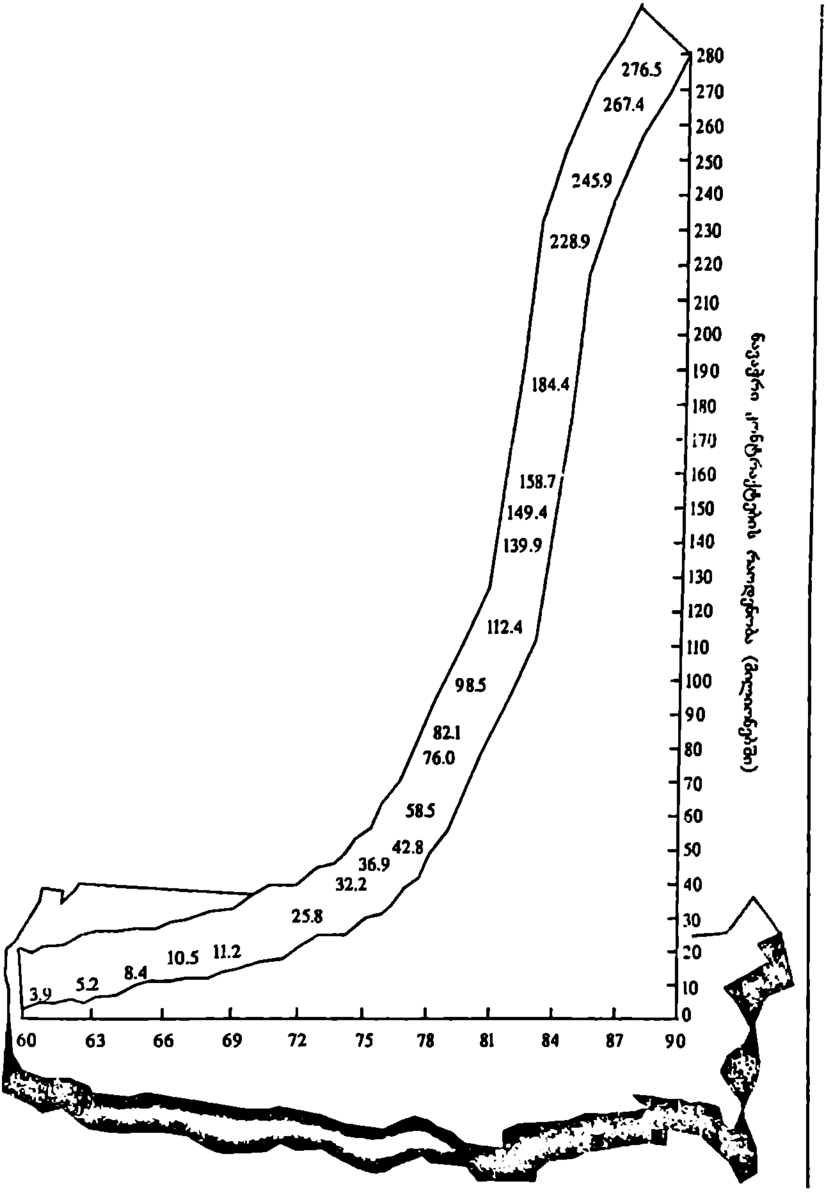
New Zeland Futures & Options Exchange	NZFOE
Osaka Grain Exchange	OGE
Osaka Securities Exchange	OSA
ÖTOB Aktiengesellschaft	ÖTOB
Pacific Stock Exchange	PSE
Philadelphia Stock Exchange	PHLX
Singapore International Financial Futures Exchange	SIMEX
Stockholm Options Market	OM
Swiss Options and Financial Futures Exchange	SOFFEX
Sydney Futures Exchange	SFE
Tokyo Grain Exchange	TGE
Tokyo International Financial Futures Exchange	TIFFE
Toronto Stock Exchange	TSE
Vancouver Stock Exchange	VSE
Winnipeg Commodity Exchange	WCE

IV. მსოფლიოს უდიდესი ბანკები (აქტივების ჯამის მიხედვით, 1989 წ.)

ბანკის დასახელება და ქვეყანა, სადაც იმყოფება ბანკის მმართველობა	აქტივების ჯამი მლრდ აშშ დოლარი
„დაი-ისი კენიო ბენკ“, იაპონია	358.1
„მიცუი-ტაიო კოდ ბენკ“, იაპონია	350.3
„სუმიტომო ბენკ“, იაპონია	347.0
„ფუჯი ბენკ“, იაპონია	335.8
„მიცუბისი ბენკ“, იაპონია	325.0
„სანვა ბენკ“, იაპონია	320.9
„ინდასტრიალ ბენკ“, იაპონია	246.4
„კრედი აგრიკოლ“, საფრანგეთი	240.5
„ბენკ ნასიონალ დე პარი“, საფრანგეთი	230.9
„სიტიკორპ“, აშშ	228.0
„ნურინჩუკინ ბენკ“, იაპონია	224.0
„კრედი ლიონ“, საფრანგეთი	211.7
„ტოკაი ბენკ“, იაპონია	208.5

„ბარკლაიზ“, დიდი ბრიტანეთი	206.6
„დოიჩ ბანკ“, გერმანია	202.7
„მიცუბისი ტრასტ ენდ ბენკინგ“, იაპონია	197.4
„მიცუი ტრასტ ენდ ბენკინგ“, იაპონია	190.0
„ნეშნლ ვესტმინსტერ ბენკ“, დიდი ბრიტანეთი	189.5
„ბენკ ოვ ტოკიო“, იაპონია	182.8
„სუმიტომო ტრასტ ენდ ბენკინგ“, იაპონია	182.0
„სოსიეტე ჟენერალ“, საფრანგეთი	176.9
„ლონგ-ტერმ კრედიტ ბენკ“, იაპონია	168.8
„იასუდა ტრასტ ენდ ბენკინგ“, იაპონია	159.8
„სენსეპ“, საფრანგეთი	155.0
„დრეზდნერ ბენკ“, იაპონია	147.9
„დაივა ბენკ“, იაპონია	145.0
„პარიბა“, საფრანგეთი	139.0
„ჰონკონგ ენდ შანხაი ბენკინგ კორპორეიშნ“, ჰონკონგი — ჩინეთი	135.0
„გრუპ სუეკ“, საფრანგეთი	126.4
„ტოიო ტრასტ ენდ ბენკინგ“, იაპონია	125.0
„ბენკ ოვ ჩაინა“, ჩინეთი	115.3
„იუნიონ ბენკ ოვ სვიტზელენდ“, შვეიცარია	112.9
„კომერსბანკ“, გერმანია	112.6
„ნიპონ კრედიტ ბენკ“, იაპონია	109.6
„დოიჩ გენოსეშაფტ“, გერმანია	109.4
„ინსტიტუტო ბანკარიო სან-პაოლო“, იტალია	107.8
„ჩეიზ მანჰეტენ“, აშშ	106.1
„სუის ბენკ“, შვეიცარია	105.3
„ვესტდოიჩ ლანდსბანკ“, გერმანია	104.2
„ბაუერიშ ვერანსბანკ“, გერმანია	102.2

V. ფიუჩერსული ვაჭრობის მოცულობა აშშ-ში (1960-1990 წ.)



ნახ. დ.5

ლიტერატურა

[1] Ansel J.P., Stricker C. Couverture de actifs contingents et prix maximum. Ann. Inst. Poincare, 30, 303–315, 1994.

[2] Avellanada M., Levy A., Paras A. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. Applied Mathematical Finance, 2, 73–88, 1995.

[3] Bühlmann H. Mathematical methods in risk theory. New York, Springer-Verlag, 1970, second printing 1996.

[4] Bachelier L. Théorie de la speculation. Ann. Ecole Norm. Sup., vol.17, 21–86, 1900.

[5] Berstein L.A., Wild J.J. Financial statement analysis. 6th edition, IRWIN/McGraw-Hill, 1998.

[6] Björk T. Interest rate theory. Lecture Notes in Mathematics, Financial Mathematics, editor: W.J. Runsgalalier, Bressonone, 1996.

[7] Björk T., Di Masi G., Kabanov Yu., Runggaldier W. Towards a general theory of bond markets. Mathematical Fiance, vol.7, No.2, 211–239, 1997.

[8] Black F. The holes in Black-Scholes. RISK-magazin, March, 1988.

[9] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy 81, 637–659, 1973.

[10] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial mathematics. Itasca, Illinois, Society of Actuaries, 1986.

[11] Box G.E.P., Jenkins G.M. Time series analysis, forecasting and control. Holden-day, 1970.

[12] Brealey R.A., Myers S.C. Principles of corporate finance. McGraw-Hill, 4th edition, 1988.

[13] Brigham E.F., Houston Y.F. Fundamental of financial management. 8th edition, Dryden, 1998.

[14] Brillinger D.R. Time series: data analysis and theory. Holden day, San Fransisco, 1981.

[15] Brockwell P.J., Davis R.A. Time series: Theory and methods. 2nd edition, New York: Springer-Verlag, 1991.

[16] Carr P., Chou A. Hedging complex barrier options. Preprint, April, 1997.

[17] Chen N.F., Roll R., Ross S.A. Economic forces and the stock market testing the APT and alter native pricing theories. Journal of Business, 59, 383–403, 1986.

[18] Chitashvili R.J., Lazrieva N.L., Toronjadze T.A. Asymptotic theory of M-estimators in general statistical models. Part I. On asymptotic behaviour of estimators under model disturbance. Centrum voor Wislamde in Informatica, Report BS-R9019, 31 p., June, 1990.

[19] Chitashvili R.J., Lazrieva N.L., Toronjadze T.A. Asymptotic theory of M-estimators in general statistical models. Part II. On asymptotic behaviour of estimators in the presence of nuisance parameters. Centrum voor Wislamde in Informatica, Report BS-R9020, 45 p., June, 1990.

[20] Claims reserving manual. Vol.1, London, Inst. of Actuaries, 1989.

[21] Claims reserving manual. Vol.2, London, Inst. of Actuaries, 1990.

[22] Colin D. Lewis. Industrial and business forecasting methods. Butterworth & Co Publishers Ltd., 1982.

[23] Colwell D.B., Elliot R.J. Discontinuous asset prices and non-attainable contingent claims and corporate policy. Math. Finance, vol.3, No.3, 295–368, 1993.

[24] Costa M. Dynamic component detection in a multifactor model for stock returns. J. Ital. Stat. Soc., vol.3, No.1, 25–36, 1994.

[25] Cox J.C., Ingersoll J.E.,Jr., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts. Journal of Finance, vol.35, 389–403, 1980.

[26] Cox J.C., Ingersoll J.E.,Jr., Ross S.A. The relation between forward prices and futures prices. J. Finan. Econ. 9, 321–346, 1981.

[27] Cox J.C., Ingersoll J.E.,Jr., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, vol.53, No.2, 385–407, 1985.

[28] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach. J. Finan. Econ. 7, 229–263, 1979.

[29] Cubadda G. Testing for cointegration at any frequency using spectral methods. J. Stat. Soc., vol.3, No.1, 37–50, 1994.

[30] Dalang R.C., Morton A., Willinger W. Equivalent martingale measures and non-arbitrage in stochastic securities market models. Stochastics and Stochastics Reports, vol.29, No.2, 185–209, 1990.

[31] Dana R.A., Jeanblanc-Pisque M. Marches financiers en temps continu (Valorisation et equilibre). Paris, Economica, 1994.

[32] Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. Practical risk theory for actuaries. London, Chapman & Hall, 1994.

[33] Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Annalen, 300, 463–520, 1994.

[34] Dellacherie C., Meyer P.A. Probabilités et potentiel II. Hermann, Paris, (1980).

[35] Devore J.L. Probability and statistics for engineering and sciences. Fourth edition, Duxbury Press, Belmont, Bonn, 1995.

[36] Drost F.C., Nijman T.E. Temporal aggregation of GARCH processes. Ecoometrica, vol.61, 909–927, 1993.

[37] Duffie D. Dynamic asset pricing theory. Princeton University Press, 1992.

[38] Duffie J.D., Harrison J.M. Arbitrage pricing of a Russian option and perpetual lookback options. The Annals of Applied Probability, vol.3, No.3, 641–651, 1993.

[39] Durbin J. Efficient estimation of parameters in moving-average models. Biometrica, 46, 306, 1959.

[40] Edwards F.R., Ma C.W. Futures and options. McGraw-Hill, New York, 1992.

[41] El Karoui N., Quenez M.C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. SIAM J. Control and Optimization, vol.33, No.1, 29-66, 1995.

[42] Elton E.J., Gruber M.J. Modern portfolio theory and invetment analysis. 2nd edition, John Welley & Sons, New York, 1984.

[43] Engel L., Boyd B. How to buy stocks. Little, Brown & Co., Boston Toronto, 7th edition, 1982.

[44] Engle R.F., Granger C.W.J. Cointegration and error correction: representation, estimation and testing. Econometrica, 55, 251-276, 1987.

[45] Fama E.F., MacBeth J.D. Risk, return and equilibrium: empirical tests. Journal of Political Economy, 81, 607-636, 1973.

[46] Faruqee H. Pricing to market and the real exchange rate. IMF staff papers, vol.42, No.4, 855-881, 1995.

[47] Fölmer H. Probabilistic aspects of options. Discussion paper, Bonn: Universität Bonn, No.B-202, 34 p., 1991.

[48] Föllmer H., Kabanov Ju.M. Optional decomposition and Lagrange multipliers. Finance and Stochastics, v.2, No.1, 69-81, 1998.

[49] Fölmer H., Sonderman D. Hedging of non-redundant contingent claims. In: Contributions to Mathematical Economics, ed. by W. Hildebrand and A. Mas-Colell, 205-223, 1986.

[50] Friedlos J., Schmitter H., Straub E. Setting rettentions. Theoretical considerations. Zurich, copyright by Swiss Reinsurance Company, 1997.

[51] Frishling V., Yamamura J. Pricing and hedging basket options. Commonwealth Bank, Quantitative analysis group, 1995.

[52] Galitz L. Financial Engineering. Pitman Publishing, London, 1994.

[53] Gallus C. Robustness of hedging strategies for European options. Stochastic Processes and Related Topics, vol.10, 23-33, 1996.

[54] Gentle D. Basket weaving. Risk 6 (6), 51-52, 1993.

[55] Gerber H.U. An introduction to mathematical risk theory Philadelphia, S.S. Huebner foundation, University of Pennsylvania, 1979.

[56] Gerber H.U. Life insurance mathematics. Second edition, Berlin, Springer-Verlag, 1995.

[57] Gitman L.J., Joehuk M.D. Fundamentals of investing. Fourth edition, Harper Collins Publishers, 1997.

[58] Glonti O., Khechinasvili Z., Financial (B, S)-market with Gaussian martingale. Mean square optimal hedging strategies. Proceed. of A. Razmadze Math. Inst., vol.115, 33–43, 1997.

[59] Gouriéroux Ch. Modéles ARCH et applications financiéres. Paris: Economica, 1992.

[60] Gouriéroux C., Laurent J.-P. Dynamic hedging in discrete time. Preprint, Paris: CREST, 1995.

[61] Granger C.W.J. Some properties of time series data and their use in econometric model specification. J. Econometrics, 16, 121–130, 1981.

[62] Grinold R.G., Kahn R.N. Active portfolio management. McGraw-Hill, New York, 1995.

[63] Gwartney J.D, Stroup R.L Economics: private and public choice. 8th edition, Dryden, 1997.

[64] Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. Robust statistics. The approach based on influence functions. John Willey & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1986.

[65] Harrison J.M., Kreps D.M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. J. Econom. Theor.,vol.20, 381–408, 1979.

[66] Harison J.M., Pliska S.R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stoch. Processes Appl. v.11, 215–260, 1981.

[67] Hart D.G., Buchanan R.A., Howe B.A. Actuarial practice of general insurance. Sydney, Institute of Actuaries of Australia, 1996.

[68] Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates. Econometrica, vol.60, No.1, 77–106, 1992.

[69] Ho T.S., Lee Sang-bin. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. J. Finance, vol.41, 1011–1029, 1986.

[70] Hofmann N., Platen E., Schweizer M. Option pricing under incompleteness and stochastic volatility. Mathematical Finance, vol.2, No.3, 153–187, 1992.

[71] Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B. Introductory statistics with applications in general insurance. Cambridge, Cambridge University Press, 1995.

[72] Huber P.J. Robust statistics. New York, Willey, 1981.

[73] Hull J.C. Options, futures and other derivative securities. Prentice Hall, New Jersey (2nd ed.), 1993.

[74] Hull J.C. Options, futures and other derivative securities. Prentice Hall, New Jersey (3nd ed.), 1997.

[75] Hull J.C., White A. Pricing interest rate derivative securities. Review of Financial Studies, vol.3, No.5, 573–592, 1990.

[76] Huynh C.B. Back to baskets. Risk 7 (5), 59–61, 1994.

[77] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. 2nd edition, Amsterdam: North Holland, 1989.

[78] Jacod J. Calcule Stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Math., 714, Springer, Berlin etc., 1979.

[79] Jacod J., Shiryaev A.N. Local martingales and and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. Finance and Stochastics, vol.2, 1998.

[80] Jamshidian F. An exact bond option formula. Journal of Finance, vol.44, No.1, 205–209, 1989.

[81] Jarrow R.A., Madan D.P. A characterization of complete security markets on a Brownian filtration. Mathematical Finance, vol.1, No.3, 31–43, 1991.

[82] Johansen S., Juselius K. Structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of PPP and UIP for UK. J. Econometrics, vol.53, 211–244, 1992.

[83] Jonston J. Econometric methods. 2nd edition, Mc GRAW-HILL, Tokyo.

[84] Jörk B. Interest rate theory. Lect. Notes in Math., Financial Mathematics, editor: W.J. Ruusgalalier, Bressonone, 1996.

[85] Kabanov Yu.M., Kramkov D.O. Asymptotic arbitrage in large financial markets. Finance and Stochastics, vol.2, 1998.

[86] Kalman R.E. A new a approach to linear filtering and prediction problem. J. Basic Eng. ASME, 35–40, 1960.

[87] Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. J. Basic Eng. ASME, 83, 95–108, 1961.

[88] Karatzas I., Lechoczky J.P., Shreve S.E., Xu G.L. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. SIAM J. Control Optim., vol.29, 702–730, 1991.

[89] Karatzas I., Shreve S. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, 1991.

[90] Kariya T. Quantitative methods for portfolio analysis. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

[91] Kendall M. Time-series. 2nd edition, Hafner Press, New York, 1976.

[92] Kendall M., Stuart A. Design and analysis and time-series. Vol.3, 2nd edition, CHARLES GRIFFIN & Co. Ltd., London, 1968.

[93] Keyfitz N. Applied mathematical demography. New York, Jhon Willey and Sons, 1977.

[94] Kolb R.W. Futures, options and swaps. 2nd edition, Blackwell Publishers, 1997.

[95] Kramkov D.O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. Probab. Theor. and Related Fields, v.105, 459–479, 1996.

[96] Lai T.L., Siegmund D. Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter. The Annals of Statistics, vol.11, No.2, 478–485, 1983.

[97] Lapin L. Statistics for modern business desicion. HBJ and AP, 1990.

[98] Late claims reserves in reisurance. Zurich, Swiss Reinsurance Company, 1989.

[99] Lazrieva N., Sharia T., Toronjadze T. The Robbins-Monro type stochastic differential equations. I. Convergence of solutions. Stochastics and Stochastics Reports, vol.61, 67–87, 1997.

[100] Lazrieva N.L., Toronjadze T.A. Robust estimators in statistical models with filtration. Shrinking neighbourhoods. Seminarberichte aus dem fachbereich mathematik, Fernuniversität, Hagen, 50–68, 1994.

[101] Lazrieva N., Toronjadze T. Influence functionals for discrete time statistical models. Weakly contiguous alternatives. Proceed. of A. Razmadze Math. Inst., vol 115, 97–120, 1997.

[102] Lazrieva N., Toronjadze T. Robust estimators in discrete time statistical models. Contiguous alternatives. Proceed. of A. Razmadze Math. Inst., vol.115, 59–96, 1997.

[103] Lazrieva N., Toronjadze T. The Robbins-Monro type SDE and recursive estimation. Proceed. of 7th Vilnius Conf. on Probab. Theory and math. Stat., 1998.

[104] Lemaire J. Automobile insurance: actuarial models. Boston, Kluwer, 1985.

[105] Lemaire J. Bonus-malus systems in automobile insurance. Boston, Kluwer, 1995.

[106] Lemaire J. Bonus-malus systems: the European and Asian approach to merit-rating. North American Actuarial Journal, vol.2, No.1, 26–47, 1998.

[107] Lin S.J. Stochastic analysis of fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastics Reports, vol.55, 121–140, 1995.

[108] Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. Review of Economics and Statistics, 47, 13–37, 1965.

[109] Mania M. A derivation of a generalized Black-Sholes equation. Proc. of A. Razmadze Math. Inst., vol.115, 121–148, 1997.

[110] Mania M. A general problem of an optimal equivalent change of measure and contingent claim pricing in an incomplete market. Research Report 98–3, The University of Newcastle, Australia, September 1998, 1–29, 1998.

[111] Markowitz H.M. Potfolio selection. Journal of Finance, 7, 77-91, 1952.

[112] Markowitz H. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. Cambridge, Ma: Blackwell, 1990.

[113] Mason R.D., Lind D.A. Statistical techniques in business and economics. Ninth edition, IRWIN McGraw-Hill, Boston, 1996.

[114] Melnikov A.V., Shiryaev A.N. Criteria for the absence of arbitrage in the financial market. В кн.: Успехи теории вероятностей и ее применений II, под редакцией А.Н. Ширяева и др., Москва, ТВП, 121–134, 1996.

[115] Merton R. Continuous-time finance. Cambridge, Ma: Blackwell, 1993.

[116] Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. J. Financ. Econom., vol.3, 125–144, 1976.

[117] Musiela M., Rutkowski M. Martingale methods in financial modeling. Applications of mathematics. Stochastic modeling and applied probability, 36, Springer-Verlag, Berlin, Hidelberg, New York, 1997.

[118] Nelken I. Handbook of exotic options. Probus, Chicago, IL, 1995.

[119] Nelson D.B. ARCH models as diffusion approximations. Journal of Econometrics, vol.45, 7–38, 1990.

[120] Nelson D.B. Filtering and forecasting with misspecified ARCH model. Journal of Econometrics, vol.52, 61–90, 1992.

[121] Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance risk models. Schaumburg, Society of Actuaries, 1992.

[122] Pressat R. Demographic analysis. Chicago, Aldine Atherton Inc., 1972.

[123] Priestley M. Non-linear and nonstationary time series. New York: Academic Press, 1988.

[124] Rebonato R. Interest-rate option models. John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Singapure, 1996.

[125] Reilly F.K., Brown K.C. Investment analysis and portfolio management. Fifth edition, the Dryden Press, Marcourt Bracc College Publishers, London, Philadelphia, 1997.

[126] Renault E., Touzi N. Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model. Mathematical Finance, vol.6, No.3, 279–302, 1996.

[127] Rice T., Coyle B. Financial risk management, BPP, 1992-1993.

[128] Ridley M. The mathematics of markets. The Economist, October, 1993.

[129] Roll R. A critique of the asset pricing theory's tests. P.I.: On past and potential testability of the theory. Journal of Financial Economics, 4, 129–176, 1977.

[130] Roll R., Ross S.A. An empirical investigation of the arbitrage pricing theory. Journal of Finance, vol.35, 1073–1103, 1980.

[131] Rose P.S. Commercial bank management. Second edition, IRWIN, Boston, 1993.

[132] Ross S.A. The arbitrage theory of capital asset pricing. Journal of Economic Theory, 13, 1976.

[133] Rubinstein M. Exotic options. Finance working paper. December, Inst. of Business and Economic Research, University of California, Berkley, No.220, 1991.

[134] Rubinstein M. Somewhere over the rainbow. Risk 4 (11), 61–63, 1991.

[135] Ruskeepää H. Kalman filtering and prediction for discrete time models with stochastic regressors. University of Turku, Finland, 1986.

[136] Ruttiens A. Currency options on average exchange rates pricing and exposure management. 20th annual meeting of the decision science institute, New Orleans, 1990.

[137] Sandmann K., Sondermann D. A term structure model and the pricing of interest rate derivatives. Review of Futures Markets, vol.12, No.2, 391–423, 1993.

[138] Schmidt W. Finanzmatematik für Derivate Instrumente und Märkte. Deutsche Bank, AG OTC-Derivate, 1996.

[139] Sharia T. On the recursive parameter estimation in the general discrete time statistical model. Stochastic Processes and their Applications, 73, 151–172, 1998.

[140] Sharpe W.F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 19, 425–442, 1964.

[141] Sharpe W.F., Alexander G.J, Bailey J.V. Investments. Prentice Hall, 1997.

[142] Sharpe W.F., Cooper G.M. Risk-return classes of New York stock exchange common stocks. Financial Analysts Journal, 28, 46-54, 1972.

[143] Shepard N. Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility. In: Time Series Models, Publisher: Chapman & Hall, 1–55, 1996.

[144] Shepp L.A., Shiryaev A.N. The russian option: reduced regret. Ann. Appl. Probab., vol.3, No.3, 631–640, 1993.

[145] Shiryaev A.N., Spokoinyi V.G. Sequential estimation for autoregressive systems. Preprint, Paris: Universitaté Paris-Sud, 1993.

[146] Solnik B. International investment. 3rd edition, Addison-Wesley, 1995.

[147] Solventhan A., Soiventhan S., Wazzack B., Bartel H. Australian business statistics. Nelson, Australia, 1994.

[148] Stein E.M., Stein C.J. Stock prices distributions with stochastic volatility: an analytic approach. Review of Financial Studies, vol.4, No.4, 727–752, 1991.

[149] Straub E. Non-life insurance mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[150] Strook D.W., Varadhan S.R. Multidimensional diffusion processes. Berlin, Springer-Verlag, 1979.

[151] Taqqu M.S., Willinger W. The analysis of finite secutity markets using martingales. Adv. Appl. Probab., vol.19, 1–25, 1987.

[152] Taylor S. Modeling financial time series. New York: Wiley, 1986.

[153] Tong H. Nonlinear time series. Oxford: Oxford Univ. Press, 1990.

[154] Toronjadze T. See [18], [19], [99]-[103], [163].

[155] Uszczapowski I. Optionen und Futures verstehen — Grundlagen und neuere Entwicklungen. Beck-Wirstschaftsberater im dtv, München (2. Auflage), 1993.

[156] Van Eegen J. Loss reserving methods. Preprint, Research Department nationale-Nederlanden, N.V. series "Surveys of actuarial studies", 1981.

[157] Varian H.R. (Ed.). Economic and financial modeling with mathematica (TELOS — The electronic library of science). Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[158] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, vol.5, 177–188, 1977.

[159] Vorst T. Prices and hedge ratios of average exchange rate options. Internat. Rev. Finan. Anal., 1, 179–193, 1992.

[160] Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option pricing: mathematical models and computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.

[161] Zhang P. Exotic options: a guide to the second generation options. World Scientific, New York, 1996.

[162] კალანდაძე ლ., ცერცვაძე ა., დავითაშვილი ლ. სადაზღვევო ტერმინების განმარტებითი ლექსიკონი. პირველი გამოცემა, თბილისი, 1998.

[163] ლაზრიევა ნ., მანია მ., ტორონჯაძე თ. ფიუჩერსები, ოფციონები და სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტები. თბილისი, საქართველოს სტატისტიკური ასოციაცია, 1997.

[164] მანია გ. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1976.

[165] მანია გ. მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი მეთოდი. საქ. სსრ მეცნ. აკად. გამომცემლობა, თბილისი, 1963.

[166] მირზაშვილი გ., ხმალაძე ე. სადაზღვევო მათემატიკის შესავალი. თბილისი, საქართველოს სტატისტიკური ასოციაცია, 1997.

[167] სვანაძე ვ., სანაძე გ., ხიზანიშვილი თ., მძინარიშვილი თ., ლორთქიფანიძე მ., მაისურაძე მ. საბირჟო საქმის საფუძვლები. თბილისი, „მეცნიერება“, 1996.

[168] სვანაძე ვ., სანაძე გ., ხიზანიშვილი თ., მძინარიშვილი თ., ლორთქიფანიძე მ., ახობაძე თ., გოგიშვილი გ. საბირჟო საქმე და ფასიანი ქაღალდების ბაზარი. თბილისი, 1998.

[169] Балабушкин А.Н. Опционы и фьючерсы. Москва, 1996.

[170] Банки и банковские операции. Учебник для вузов. Под редакцией Е.Ф. Жукова. Москва, „Банки и биржи“, изд. „ЮНИТН“, 1997.

[171] Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. Москва, Наука, 1969.

[172] Бернстайн Л.А. Анализ финансовой отчетности. Москва, „Финансы и статистика“, 1996.

[173] Бизнес: Оксфордский толковый словарь. Москва: Прогресс-Академия, 1995 (Перевод с английского: A concise dictionary of business. Market house books, Ltd., 1991.)

[174] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. Москва, „Наука“, 1983.

[175] Введение в банковское дело (авторский коллектив под руководством Г. Ашауера). Москва, 1997.

[176] Вормут Д.В., Рыбалко Л.В. Страховая компания: стратегия и платежеспособность. Учебно методическое пособие. Baltic Insurance Consulting, the Swedish Insurance Training Company, 1998.

[177] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е, доп., Москва, Наука, 1967.

[178] Глонти О.А. Последовательная фильтрация компонент марковской цепи. Литовский матем. сб., IX, 2, 263–279, 1969.

[179] Глонти О.А. Экстраполяция компонент марковской цепи. Литовский матем. сб., IX, 4, 741–754, 1969.

[180] Глонти О.А. Последовательная фильтрация компонент марковской цепи при вырожденности матрицы диффузии. Теория вероятн. и ее примен., XV, 4, 736–740, 1970.

[181] Глонти О.А. Исследования по теории условно-гауссовских процессов. Тбилиси, Мецниереба, 1985.

[182] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Изд. 2, Москва, ГИТТЛ, 1954; Изд. 6-е, перераб. и доп., Москва, Наука, 1988.

[183] Долан Э.Дж., Кэмпбелл К.Д., Кэмпбелл Р.Дж. Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика. СПБ.: Санкт-Петербург Оркестр, 1994 (Перевод с английского: Campbell C.D., Campbell R.G., Dolan E.G. Money, banking and monetary policy. London: the Dryden Press, 1988.).

[184] Дубинс Л.Е., Шепп Л.А., Ширяев А.Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. Теория вероятн. и ее примен., т38, Но.4, 288-330, 1993.

[185] Ивченко Г.Н., Медведев Ю.И. Математическая статистика. Москва, „Высшая школа", 1984.

[186] Касымов Ю.Ф. Начала актуарной математики. Зеленоград, НТФНИТ, 1994.

[187] Козлова Е., Галанина Е. Бухгалтерский учет в коммерческих банках. Москва, „Финансы и статистика", 1996.

[188] Крамер Г. Математические методы статистики. Москва, „Мир", 1975.

[189] Крамков Д.О., Ширяев А.Н. О расчетах рациональной стоимости „русского опциона" в симметричной биномиальной модели (B, S)-рынка. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 191–200, 1994.

[190] Курно О. Основы теории шансов и вероятностей. Москва, Наука, 1970.

[191] Кэйн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Вын.2, „Статистика", Москва, 1977.

[192] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Москва, Наука, 1974.

[193] Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. Москва, Изд. ТВП, 1997.

[194] Миркин Я. Ценные бумаги и фондовый рынок. Москва, „Перспектива“, 1995.

[195] Рачев С.Т., Рушендорф Л. Модели и расчеты котрактов с опционами. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 150–190, 1994.

[196] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. Москва, Наука, 1977.

[197] Ротарь В.И., Бенинг В.Е. Введение в математическую теорию страхования. Москва, Научное издательство „ТВП“, 1994.

[198] Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Москва, 1980.

[199] Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. Москва, Российский юридический издательский дом, Москва, 1994.

[200] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1,2. Москва, Мир, 1967.

[201] Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. Второе изд., Москва, Дело Лтд., 1995.

[202] Шепп Л.А., Ширяев А.Н. Новый взгляд на расчет „русского опциона“. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 130–149, 1994.

[203] Ширяев А.Н. Вероятность. Изд. 2-е, перераб. и доп., Москва, Наука, 1989.

[204] Ширяев А.Н. Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития. Обозрение прикладной и промышленной математики, Москва, ТВП, т.1, No.5, 684–697, 1994.

[205] Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 5–22, 1994.

[206] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. Москва, Фазис, 1998.

[207] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Теория. Москва, Фазис, 1998.

[208] Ширяёв А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 23–79, 1994.

[209] Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время. Теория вероятн. и ее примен., т.39, в.1, 80–129, 1994.

[210] Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. Москва: Мир, 1998 (Перевод с английского: Schuster H.G. Deterministic chaos. An Introduction. einheim: Physik Verlag, 1984.).

[211] Йохансен С. Основанные на правдоподобии статистические выводы для коинтеграции некоторых нестационарных временных рядов. Обозрение прикладной и промышленной математики, т.3, в.6, 827–858, 1996 (თარგმნილია ინგლისურიდან. ნაშრომი შესულია წიგნში: Time series in econometrics, finance and other fields, Chapman & Hall, 1996.).

[212] Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. Теория вероятн. и ее примен., т.38, в.2, 374–416, 1993.

საგნობრივი საძიებელი

დ

ე.

მ

ნ

რ

ს

ტ

უ

ფ

ც

წ

ხ

ჯ

ჰ

სააქციო საზოგადოება
"პირველი სტამბა"
თბილისი, ჩუბინაშვილის ქ. №50