სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შ რ ო მ ე ბ ი

IV

მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2008

შრომების IV ტომში (*მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია*) წარმოდგენილია, ძირითადად, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის თანამშრომელთა სამეცნიერო გამოკვლევები მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა აქტუალურ პრობლემებზე.

კრებული განკუთვნილია შესაბამისი დარგების სპეციალისტებისათვის და სტუდენტებისათვის.

SOKHUMI STATE UNIVERSITY

SOKHUMI STATE UNIVERSITY

PROCEEDINGS

IV

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES SERIES

Sokhumi State University Publishing House
Tbilisi - 2008

The IV volume of **"PROCEEDINGS"** *(Mathematics and Computer Sciences Series)* represents the researches Sokhumi State Universities emploee's on the topical issues about actual problems of mathematics and computer sciences.

The edition is intended for the specialists, students, and general readers.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

C O N T E N T S

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

MALKHAZ ASHORDIA, NESTAN KEKELIA

ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR STABILITY OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS OF FIRST ORDER

Consider a linear system of difference equations

$$y(k+1)-y(k)=G(k)y(k)+g(k),\ \ (k=0,1,...), \qquad (1)$$

where $G(k)\in R^{n\times n}$, $g(k)\in R^{n}$.

In this paper we give some effective sufficient conditions guaranteeing stability of the system (1) in the Liapunov sense. The analogues conditions for stability are given in [1] for linear system of ordinary differential equations and in [2] for linear system of generalized ordinary differential equations.

The following notation and definitions will be used in the paper:

$R=\left]-\infty,+\infty\right[$ is the set of all real numbers, $R_{+}=\left[0,+\infty\right[$;

N - is the set of all natural numbers, $\widetilde{N}=\{0,1,...\}$;

$R^{n\times m}$ - is the space of all real $n\times m$ - matrices $X=(x_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ with the norm

$$\|X\|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left|x_{ij}\right|;$$

$R^{n}=R^{n\times 1}$ - is the space of all real n-column vectors $x=(x_i)_{i=1}^{n}$;

det(X) - is the determinant of the matrix $X\in R^{n\times n}$, I_n is the identity $n\times n$ - matrix;

$r(H)$ - is the spectral radius of the matrix $H\in R^{n\times n}$;

$E(\widetilde{N};R^{n\times m})$ - is the set of all matrix-function $Y:\widetilde{N}\to R^{n\times m}$;

Δ - is the first order difference operator, i.e.,

$\Delta y(k-1)=y(k)-y(k-1)$ for $y\in E(\widetilde{N};R^{n\times m}),\ k\in N$;

Throughout this paper we assume that $G=(g_{ij})_{i,j=1}^{n}\in E(\widetilde{N};R^{n\times n})$ and

$$\det(I_n+G(k))\neq 0\ \ (\text{k}=0,1,\dots) \qquad (2)$$

Note that condition (2) guarantee the unique solvability of Couchy Problem for the system (1).

Definition 1. Let $\xi : \tilde{N} \to R_+$ be a nondecreasing function such that

$$\lim_{k \to +\infty} \xi(k) = +\infty . \tag{3}$$

A solution y_0 of the system (1) is called ξ- exponentially asymptotically stable if there exists a positive number η such that for every $\varepsilon > 0$ there exists a positive number $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that an arbitrary solution y of the system (1), satisfying the inequality

$$\| y(k_0) - y_0(k_0) \| < \delta$$

for some $t_0 \in R_+$, admits the estimate

$$\| y(k) - y_0(k) \| < \varepsilon \exp(-\eta(\xi(k) - \xi(k_0))) \text{ for } k \ge k_0 .$$

Note that the exponentially asymptotically stability is a particular case of the ξ- exponentially asymptotically stability if we assume $\xi(t) \equiv t$.

Stability, uniformly stability and asymptotically stability are defined just in the same way as for systems of ordinary differential equations (see, e.g., [1], [3]).

Definition 2. The system (1) is called stable in one or other sense if every solution of this system is stable in the same sense.

As in the case of differential equations, the system (1) is stable in one or other sense if and only if its corresponding homogeneous system

$$y(k) - y(k-1) = G(k)y(k) \ (k = 0,1,...) \tag{1_0}$$

is stable in the same sense.

Definition 3. The matrix-function $G \in E(\tilde{N}; R^{n \times n})$ is called stable in one or other sense if the system (1_0) is stable in the same sense.

Theorem 1. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions

$$1 + g_{ii}(k) \ne 0 \text{ for } k > k^* \ (i = 1,...,n), \tag{4}$$

$$\sum_{l=k^*}^{k} |g_{ij}(l-1)| \prod_{m=l+2}^{k} |1 + g_{ii}(m-1)| \le h_{ij} \text{ for } k > k^* \ (i \ne j; i, j = 1,...,n) \tag{5}$$

and

$$\sup\left\{ \sum_{m=0}^{k-1} \ln|1 + g_{ii}(m)| : k \in \tilde{N} \right\} < +\infty \ (i = 1,...,n),$$

where $k^* \in \tilde{N}$ and $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$. Let, moreover, the constant matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, be such that

$$r(H) < 1. \tag{6}$$

Then the matrix-function G is stable.

Theorem 2. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (4), (5) and

$$\sup\left\{\sum_{m=l}^{k-1} \ln\left|1 + g_{ii}(m)\right| : k > l\right\} < +\infty \quad (i = 1,...,n)$$

where $k^* \in \tilde{N}$, $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$. Let, moreover, the constant matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, satisfy the condition (6). Then the matrix-function G is uniformly stable.

Corollary 1. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions

$$1 + g_{ii}(k) > 0 \text{ for } k \geq k^* \quad (i = 1,...,n) \tag{7}$$

and

$$\left|g_{ij}(k)\right| \leq -h_{ij} g_{ii}(k), \ k \geq k^* \quad (i \neq j; i.j = 1,...,n),$$

for some $k^* \in \tilde{N}$, where g_{ii} $(i = 1,...,n)$ are nonincreasing functions, and $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$. Let, moreover, the constant matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, satisfy the condition (6). Then the matrix-function G is uniformly stable.

Theorem 3. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (4),

$$\sum_{m=k^*+1}^{k} \ln\left|1 + g_{ii}(m-1)\right| \leq -\xi(k) + \xi(k^*) \text{ for } k > k^* \ (i = 1,...,n)$$

and

$$\sum_{m=k^*+1}^{k} \exp(\xi(k) - \xi(m))\left|g_{ij}(m-1)\right| \prod_{l=m+2}^{k}\left|1 + g_{ii}(l-1)\right| \leq h_{ij} \text{ for } k \geq k^*$$
$$(i \neq j; i.j = 1,...,n),$$

where $k^* \in \tilde{N}$, $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$. Let, moreover, the constant matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, satisfy the condition (6) and $\xi \in E(\tilde{N}; R_+)$ be the nondecreasing function satisfying the condition (3). Then the matrix-function G is asymptotically stable.

Corollary 2. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (7) and

$$\left|g_{ij}(k)\right| \leq -h_{ij} g_{ij}(k)(1 + g_{ij}(k)), \; k \geq k^* \;\; (i \neq j; i.j = 1,...,n) \qquad (8)$$

for some $k^* \in \widetilde{N}$, where g_{ii} $(i = 1,...,n)$ are nonincreasing functions, and $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$ are such that the matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, satisfying the condition (6). Let, moreover, there exist a function $a_0 \in E(\widetilde{N}; R_+)$ such that

$$a_0(k) - a_0(l) \leq \min\left\{ \sum_{m=l+1}^{k} \ln\left|1 + g_{ii}(m-1)\right| : k > l > k^* \right\}$$

and

$$\lim_{k \to +\infty} a_0(k) = +\infty .$$

Then the matrix-function G is both asymptotically and uniformly stable.

Corollary 3. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (7), (8), where $k^* \in \widetilde{N}$, g_{ii} $(i = 1,...,n)$ are nonincreasing functions, and $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,...,n)$ are such that the matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,...,n)$, satisfying the condition (6). Let, moreover,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \ln\left|1 + \eta(k)\right| = -\infty ,$$

where $\eta(k) \equiv \max\{g_{ii}(k) : i = 1,...,n\}$. Then the conclusion of Corollary 2 is true.

Theorem 4. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,...,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (4),

$$\sup\left\{ (\xi(k) - \xi(l))^{-1} \sum_{m=l+1}^{k} \ln\left|1 + g_{ii}(m-1)\right| : k > l \geq k^*, \xi(k) \neq \xi(l) \right\} < \gamma$$
$$(i = 1,...,n) \qquad (9)$$

and

$$\sum_{m=k^*+1}^{k} \exp(\gamma(\xi(k) - \xi(m)))\left|g_{ij}(m-1)\right| \prod_{l=m+2}^{k} \left|1 + g_{ii}(l-1)\right| \leq h_{ij} \text{ for }$$
$$k > k^* \;\; (i \neq j; i.j = 1,...,n),$$

where $\gamma > 0$, $k^* \in \widetilde{N}$, $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,\dots,n)$, the constant matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,\dots,n)$, satisfies the condition (6) and $\xi \in E(\widetilde{N}; R_+)$ is the nondecreasing function satisfying the condition (3). Then the matrix-function G is ξ-asymptotically stable.

Corollary 4. Let the components g_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$ of the matrix-function G satisfy the conditions (7)-(9), where g_{ii} $(i = 1,\dots,n)$ are non-increasing functions, $\gamma > 0$, $k^* \in \widetilde{N}$, $h_{ij} \in R_+$ $(i \neq j; i, j = 1,\dots,n)$ are such that the matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$, where $h_{ii} = 0$ $(i = 1,\dots,n)$, satisfying the condition (6) and $\xi : \widetilde{N} \to R_+$ be the nondecreasing function satisfying the condition (3). Then the matrix-function G is ξ-asymptotically stable.

These results immediately follow from the analogous results given in [2] for the system of so called generalized linear ordinary differential equations

$$dx(t) = dA(t)x(t) + df(t), \quad \text{for } t \in R^+, \tag{10}$$

where $A : R_+ \to R^{n\times n}$ and $f : R_+ \to R^n$ are, respectively , matrix and vector-functions with bounded variation components on every closed interval from R_+ (see [4]).

Under a solution of the system (10) we understand a vector-function $x : R_+ \to R^n$ with bounded variation components on every closed interval from R_+, such that

$$x(t) = x(s) + \int_s^t dA(\tau)x(\tau) + f(t) - f(s), \text{ for } 0 \le t \le s,$$

where the integral is understood is Lebesgue-Stiltjes sense.

The system (1) a particular case the system (10) if we assume

$$A(0) = 0_{n\times n}, \; A(t) = \sum_{l=0}^{k-1} G(l) \text{ for } k-1 \le t \le k \;\; (k = 1,2,\dots);$$

$$f(0) = 0_n, \; f(t) = \sum_{l=0}^{k-1} g(l) \text{ for } k-1 \le t \le k \;\; (k = 1,2,\dots).$$

REFERENCES

1. **T. Kiguradze**. Initial and boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Vol. I. Linear Theory. (Russian) *Metsniereba*. Tbilisi, 1997.
2. **M. Ashordia and N. Kekelia.** On the question of stability of linear systems of generalized ordinary differential equations. – *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 23 (2001), 147-151.
3. **B. P. Demidovich**. Lectures on mathematical theory of stability. (Russian) Nauka. M., 1967.
4. **ST. Schwabik, M. Tvrdy and O. Vejvoda.** Differential and integral equations: boundary value problems end adjonts. Academia. Praha, 1979.

მალხაზ აშორდია, ნესტან კეკელია

პირველი რიგის წრფივი სხვაობიანი განტოლებათა სისტემების მდგრადობის საკმარისი პირობების შესახებ

მოყვანილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ პირველი რიგის წრფივი სხვაობიანი განტოლებათა სისტემების

$$y(k+1) - y(k) = G(k)y(k) + g(k), \quad (k = 0,1,\ldots)$$

მდგრადობას, სადაც $G(k) \in R^{n\times n}$, $g(k) \in R^{n}$.

МАЛХАЗ АШОРДИЯ, НЕСТАН КЕКЕЛИЯ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Приведены достаточные условия, которые обеспечивают устойчивость систем разностных уравнений первого порядка

$$y(k+1) - y(k) = G(k)y(k) + g(k), \ (k = 0,1,\ldots),$$

где $G(k) \in R^{n\times n}$, $g(k) \in R^{n}$.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

НОДАР ЧИКОБАВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ, СОДЕРЖАЩИМ ОБОБЩЁННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В данной работе решены некоторые интегральные уравнения со специальными ядрами. В работе [1] рассматриваются вопросы обращения интегральных уравнений, ядро которых содержит полиномы Лежандра. Статья [2] посвящена решению интегральных уравнений с ядром, содержащим полиномы Якоби. Аналогичная задача рассматривалась нами в статье [3], когда ядро интеграла содержало обобщенные сферические функции. В данной статье рассматриваются вопросы обращения интегральных уравнений, ядро которых содержит в качестве сомножителя обобщённые сферические функции.

Статья посвящяется решению некоторых интегральных уравнений со специальными ядрами. В работе [1] рассматрываются вопросы обращения интегральных уравнений, ядро которых содержит полиномы Лежандра. Статья [2] посвящена решению интегральных уравнений с ядром, содержащих полиномы Якоби. Аналогичная задача рассматривалась нами в статье [3], когда ядро интеграла содержало обобщенные сферические функции. В данной статье мы рассматрываем вопросы обращения интегральных уравнений, ядро которых содержит в качестве сомножителя обобщённые сферические функции.

Обобщенные сферические функции, введеные И.М.Гельфандом и З. Я. Шапиро в 1952 году в работе [4] , имеют вид :

$$T^l_{mn}(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)=e^{-im\varphi_1}p^l_{mn}(x)e^{-in\varphi_2} \tag{1}$$

где $x=\cos\vartheta$, $\varphi_1,\vartheta,\varphi_2$ - углы Эйлера,

$$p^l_{mn}(x)=A^l_{mn}(1-x)^{-\frac{m-n}{2}}(1+x)^{-\frac{m+n}{2}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left[(1-x)^{l-n}(1+x)^{l+n}\right], \tag{2}$$

$$A_{mn}^{l}=\frac{(-1)^{l-n}\,i^{n-m}}{2^{l}(l-m)!}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+n)!\,\,(l-n)!}}\,, \tag{3}$$

причём l,m,n все целые или полуцелые и $-l\le m\le l,\quad -l\le n\le l$.

В [4] определение функции (1) распространяется на комплексные значения аргументов. При этом основные свойства функции (2) сохраняются. При вещественных значениях $x\ge 1$ функция (2) определим следующим образом

$$P_{mn}^{l}(x)=P_{mn}^{l}(x+io)\,, \tag{4}$$

Для функции (4) при $x\ge 1$ формула (2) примет следующий вид

$$p_{mn}^{l}(x)=B_{mn}^{l}(x-1)^{-\frac{m-n}{2}}(x+1)^{-\frac{m+n}{2}}\frac{d^{\,l-m}}{dx^{l-m}}\left[(x-1)^{l-n}(x+1)^{l+n}\right], \tag{5}$$

где

$$B_{mn}^{l}=(-1)^{l-n}\,i^{\,n-m}A_{n}^{l}$$

Исследуя поведение функции (5) при $x\to\infty$, получаем.

$$P_{mn}^{l}(x)=O\left(x^{l}\right),\ \text{при}\ x\to\infty$$

Расширение области определения обобщенных сферических функций на значения аргумента $x\le -1$ следует из вишепроведенных рассуждений и формулы

$$P_{mn}^{l}(-x)=(-1)^{l-m-n}P_{m_1-n}^{l}(x)\,. \qquad \text{([5], стр. 132)}$$

Рассмотрим следующие функции

$$K_{mn}^{l}(x)=(-1)^{m-n}i^{n-m}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l+n)!\,(l-n)!}}(1-x)^{\frac{m-n}{2}}P_{mn}^{l}(2x-1), \quad (6)$$

$$H_{mn}^{\,l}(x)=i^{-3m-n+1}\sqrt{\frac{(l-3m)!(l-4m-n)!}{(l+n-1)!(l-m-1)!}}(1-x)\frac{3m+n-1}{2}P_{m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-2m-n}^{\,l-2m-\frac{1}{2}}(2x-1)\,, \quad (7)$$

Здесь $P_{mn}^{l}(x)$ определяются формулой (2) или (5). Поэтому (6) и (7) можно переписать в развернутом виде так:

$$K_{mn}^{l}(x)=\frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!}x^{-\frac{m+n}{2}}\frac{d^{\,l-m}}{dx^{l-m}}\left[(1-x)^{l-n}x^{l+n}\right],$$

(6′)

$$H_{mn}^{l}(x)=\frac{(-1)^{l-n}}{(l+n-1)!}x^{-\frac{m+n}{2}}\frac{d^{\,l-3m}}{dx^{l-3m}}\left[(1-x)^{l+n-1}x^{l-4m-n}\right],$$

(7′)

Пусть нам дано интегральное уравнение.

$$\int_{x}^{1}K_{mn}^{l}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)dt=\varphi(x)\,, \quad (8)$$

При этом будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) $\varphi^{(r)}(1)=0$ для $0\le r\le 4m$

2) $\varphi^{(r+1)}(x)$ - кусочно-непрерывная для $0<x\le 1$;

Решением этого интегрального уравнения является функция

$$f(t)=\int_{1}^{t}H_{mn}^{\,l}\left(\frac{t}{y}\right)y^{-\frac{2l-n-7m+2}{2}}\frac{d^{\,4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{\,l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)dy\,; \quad (9)$$

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, подставим (9) в (8) и обозначим

$$g(x)=\int_x^1 K_{mn}^l\left(\frac{t}{x}\right)\left(\int_1^t H_{mn}^l\left(\frac{t}{y}\right)y^{-\frac{2l-n-7m+2}{2}}\frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)dy\right)dt$$

Поменяв порядок интегрирования, получаем

$$g(x)=\int_x^1 y^{-\frac{2l-n-7m+2}{2}}\frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)\left(\int_y^x K_{mn}^l\left(\frac{t}{x}\right)H_{mn}^l\left(\frac{t}{y}\right)dt\right)dy; \quad (10)$$

Найдем внутренний интеграл правой части (10).
Обозначим

$$-\ \Phi=\frac{1}{y}\int_y^x K_{mn}^l\left(\frac{t}{x}\right)H_{mn}^l\left(\frac{t}{y}\right)dt\ ; \qquad (11)$$

Введем новые переменные

$\xi=\dfrac{y}{x}$, $\eta=\dfrac{t}{y}$. Тогда $\dfrac{t}{x}=\xi\cdot\eta$

В этих обозначениях (11) примет вид:

$$\Phi(\xi)=\int_{\frac{1}{\xi}}^1 K_{mn}^l(\xi\cdot\eta)H_{mn}^l(\eta)d\eta$$

Заметим, что $\xi>1$ и перепишем интеграл в следующем виде

$$\Phi(\xi)=\int_0^\infty K_{mn}^l(\xi\cdot\eta)U(\xi\cdot\eta-1)H_{mn}^l(\eta)(1-U(\eta-1))d\eta\ ,$$

Где $U(x)=0$ при $x<0$ и $U(x)=1$ при $x>0$,

Умножим правую и левую часть последнего равенства на $\xi^{\frac{m+n}{2}}$.

Тогда имеем:

$$\xi^{\frac{m+n}{2}}\overline{\Phi}(\xi)=$$
$$\int_0^\infty (\xi\cdot\eta)^{\frac{m+n}{2}} K_{mn}^{l}(\xi\cdot\eta)U(\xi\cdot\eta-1)H_{mn}^{l}(\eta)\eta^{-\frac{m+n}{2}}(1-U(\eta-1))d\eta, \quad (12)$$

Обозначим через $M[g(x);\tau]$ преобразование Меллина функции $g(x)$ и применим это преобразование к (12). По известной формуле (см. [6]) имеем после упрощения

$$M\left[\xi^{\frac{m+n}{2}}\overline{\Phi}(\xi);\tau\right]=\frac{1}{(4m)!}B(-\tau-l-m;4m+1),$$

где в правой части стоит бета-функция.

Применив обратное преобразование Меллина к правой и левой части последнего равенства и вспомнив, что $\xi=\frac{y}{x}$, переходя к старым переменным, получаем:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{(4m)!}(y-x)^{4m}y^{\frac{l-7m+n}{2}}x^{-l+\frac{m-n}{2}}$$

Из последнего соотношения и равенства (11) находим выражение для внутреннего интеграла (10):

$$\int_y^x K_{mn}^{l}\left(\frac{t}{x}\right)H_{mn}^{l}\left(\frac{t}{y}\right)dt=\frac{-1}{(4m)!}(y-x)^{4m}y^{l-\frac{7m+n}{2}+1}x^{-l+\frac{m-n}{2}}$$

Подставляя найденный интеграл в правую часть (10), получим

$$g(x)=\int_x^1 y^{-\frac{2l-n-7m+2}{2}}\frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)\left(\frac{-1}{(4m)!}(y-x)^{4m}y^{l-\frac{7m+n}{2}+1}x^{-l+\frac{m-n}{2}}\right)dy$$

Упростив правую часть, имеем:

$$g(x) = -\frac{x^{-l+\frac{m-n}{2}}}{(4m)!}\int_x^1 (y-x)^{4m}\frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)dy$$

В правой части последнего равенства произведем $4m$ раз интегрирование по частям. При этом воспользуемся тем, что $\varphi^{(r)}(1) = 0$,при $0 \le r \le 4m$. После интегрирования по частям получаем:

$$g(x) = -x^{-l+\frac{m-n}{2}}\int_x^1 \frac{d}{dy}\left(y^{l-\frac{m-n}{2}}\varphi(y)\right)dy$$

Из последнего следует, что $g(x) = \varphi(x)$.

Этим и завершается доказательство нашего утверждения о том, что решением интегрального уравнения (8) является функция (9).

Рассмотрим теперь функции

$$\tilde{K}^l_{mn}(x) = \sqrt{\frac{(l-n+1)!(l+m+1)!}{(l+3m)!(l+4m+n)!}}(x-1)^{\frac{3m+n-1}{2}} P^{l+2m+\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2};-2m-n+\frac{1}{2}}(2x-1)\ ,$$

$$\tilde{K}^l_{mn}(x) = i^{n-m}\sqrt{\frac{(l+n)!(l-m)!}{(l+m)!(l-n)!}}(1-x)^{\frac{m-n}{2}} P^l_{mn}(2x-1)$$

Пусть теперь нам дано интегральное уравнение

$$\int_x^1 \tilde{K}^l_{mn}\left(\frac{t}{x}\right) f_1(t)dt = \varphi_1(t)$$

Причем 1) $\varphi_1^{(r)}(1) = 0$, для $0 \le r \le 4m$,

2) $\varphi_1^{(r+1)}(x)$ - кусочно-непрерывная функция для $0 < x \le 1$.

Аналогично тому, как эта делалось выше, можно показать, что решением данного уравнения является функция

$$f_1(t) = \int_1^t \widetilde{H}_{mn}^{\,l}\left(\frac{t}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^{l+\frac{n-m}{2}+1}} \cdot \frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l+\frac{n+7m}{2}} \varphi_1(y)\right) dy\,.$$

Нужные формулы преобразования Меллина, и формулы обратного преоброзования Меллина, которые используются при выше приведенном доказательстве, можно найти [6].

Наконец, приведем формулы из таблицы преобразования Меллина [6]:

При $x \geq 1$:

$$(x-1)^{l-n} \equiv (-1)^{l-n}(1-x)^{l-n} \sim\ B(-\tau + l + n; l - n + 1),$$

$$(x-1)^{l-n}\, x^{l+n} \sim\ B(-\tau - 2l; l - n + 1);$$

$$\frac{d^{\,l-m}}{dx^{l-m}}\left[(x-1)^{l-n}\, x^{l+n}\right] \sim\ \frac{\Gamma(1-\tau+l-m)}{\Gamma(1-\tau)}\, B(-\tau - l - m; l - n + 1);$$

$$x^{-\frac{m+n}{2}} \frac{d^{\,l-m}}{dx^{l-m}}\left[(x-1)^{l-n}\, x^{l+n}\right] \sim \frac{\Gamma\left(1-\tau+l+\dfrac{n-m}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\tau+\dfrac{n+m}{2}\right)}$$

$$B\left(-\tau - l + \frac{n-m}{2}; l - n + 1\right);$$

Итак:

$$M\left[x^{\frac{m+n}{2}} k_{mn}^{l}(x); \tau\right] = \frac{\Gamma(1-\tau+l-m)\cdot\Gamma(-\tau-l-m)\cdot\Gamma(l-m+1)}{(l-n)!\,\Gamma(1-\tau)\,\Gamma(1-\tau-m-n)},$$

для $0 \leq x \leq 1$

$$(1-x)^{l+n-1} \sim B(l+n;\tau),$$

$$(1-x)^{l+n-1} x^{l-4m-n} \sim B(l+n;\tau+l-4m-n)$$

$$\frac{d^{l-3m}}{dx^{l-3m}}\left[(1-x)^{l+n-1} x^{l-4m-n}\right] \sim (-1)^{l-3m} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau-l+3m)} B(l+n;\tau-m-n),$$

$$x^{\frac{m+n}{2}} \frac{d^{l-3m}}{dx^{l-3m}}\left[(1-x)^{l+n-1} x^{l-4m-n}\right] \sim (-1)^{l-3m} \frac{\Gamma\left(\tau+\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\tau-l+\frac{7m+n}{2}\right)} B\left(l+n;\tau-\frac{m+n}{2}\right)$$

Итак:

$$M\left[x^{-\frac{m+n}{2}} H^{l}_{mn}(x);\tau\right] = \frac{\Gamma(\tau)\cdot\Gamma(\tau-m-n)\Gamma(l+n)}{(l+n-1)!\,\Gamma(\tau-l+3m)\Gamma(\tau+l-m)}\ ;$$

Вот и формулы обратного преобразования:

$$B(-\tau-4m;4m+1) \sim (x-1)^{4m},$$

$$B(-\tau-l-m;4m+1) \sim (x+1)^{4m} x^{l-3m};\ x \geq 1$$

Таким образом:

$$\xi^{\frac{m+n}{2}} \Phi(\xi) = M^{-1}\left[\frac{1}{(4m)!} B(-\tau-l-m;4m+1);\tau\right] = \frac{(\xi-1)^{4m} \xi^{l-3m}}{(4m)!}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **H. G. Buschman.** An inversion integral. *Proc. Amer. Soc.*, 13, 1962.
2. **K. N. Srivastava.** Inversion integral involving Jacob’s polynomials. *Proc. Amer. Soc.*, 15, 1964.

3. **Н. Г. Чикобава.** О некоторых интегралах, содержащих обобшонные сферические функции. Депонирована в ВИНИТИ за №5299-85, Деп. От 22. Уп-85 г.
4. **И. М. Гельфанд, З.Я. Шапиро.** Предтавления группы вращений трехмерного пространства и их применения. УМН. Т. 7. вип. 1. 1952 с. 3-117.
5. **Н. Я Виленкин**. специальные функции и теория представления групп. *М.: Наука*, 1965
6. **В. А. Диткин, А. П. Прудников**. интегральные преобразования и операционое исчисление. *Физматгиз*, 1961.

ნოდარ ჩიქობავა

ინტეგრალურ განტოლებათა ერთი კლასის შესახებ, რომლის გული შეიცავს განზოგადებულ სფერულ ფუნქციებს

ნაშრომი ეძღვნება სპეციალური გულის მქონე ზოგიერ-თი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნას. [1] ნაშრომში გა-ნიხილება ინტეგრალური განტოლების შებრუნების საკითხი, როცა ინტეგრალის გული შეიცავს ლეჟანდრის პოლინომს. [2] ნაშრომი კი ეძღვნება იმ ინტეგრალური განტოლების ამო-ხსნას, რომლის გული შეიცავს იაკობის პოლინომს. ანალოგი-ური ამოცანა, როცა გული შეიცავს განზოგადებულ სფერულ ფუნქციებს განიხილებოდა ჩვენს მიერ [3] სტატიაში. ამჟამად ჩვენ განვიხილავთ ინტეგრალური განტოლების შებრუნების ამოცანას, როცა ინტეგრალის გული შეიცავს თანამამრავ-ლის სახით განზოგადებულ სფერულ ფუნქციებს.

განზოგადებული სფერული ფუნქციები პირველად შემო-ღებულ იქნა 1952 წელს ი. მ. გელფანდისა და ზ. ი. შაპიროს მიერ [4] და მათ აქვთ ასეთი სახე:

$$T_{mn}^{l}(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)=e^{-im\varphi_1}\,p_{mn}^{l}(x)e^{-in\varphi_2} \tag{1}$$

სადაც $x=\cos\vartheta,\ \ \varphi_1,\vartheta,\varphi_2$ ეილერის კუთხეებია,

$$p_{mn}^{l}(x)=A_{mn}^{l}(1-x)^{-\frac{m-n}{2}}(1+x)^{-\frac{m+n}{2}}\frac{d^{l'-m}}{dx^{l-m}}\left[(1-x)^{l-n}(1+x)^{l+n}\right], \tag{2}$$

$$A_{mn}^{l}=\frac{(-1)^{l-n}i^{n-m}}{2^{l}(l-m)!}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+n)!\,(l-n)!}}\ , \tag{3}$$

აქ l,m,n ყველა მთელია ან ნახევარმთელია და $-l\le m\le l,\quad -l\le n\le l$.

[4] –ში (1) ფუნქციის განსაზღვრება ვრცელდება არგუ-მენტის კომპლექსური მნიშვნელობებისთვისაც. ამ დროს (2) ფუნქციების ძირითადი თვისებები შენარჩუნებულია. ნამდვი-ლი $x\ge 1$ მნიშვნელობებისათვის ფუნქცია (2) განვსაზღვროთ ასე:

$$P_{mn}^{l}(x)=P_{mn}^{l}(x+io)\,, \tag{4}$$

როცა $x \geq 1$, მაშინ (4) ფუნქციისათვის (2) ფორმულას აქვს სახე:

$$p_{mn}^{l}(x) = B_{mn}^{l}(x-1)^{-\frac{m-n}{2}}(x+1)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left[(x-1)^{l-n}(x+1)^{l+n}\right] \qquad (5)$$

სადაც $B_{mn}^{l} = (-1)^{l} i^{n-m} A_{n}^{l}$,

(5) ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა, როცა $x \to \infty$, გვაძლევს შედეგს:

$$P_{mn}^{l}(x) = O\left(x^{l}\right), \text{ როცა } x \to \infty$$

განზოგადებული სფერული ფუნქციის განსაზღვრის არის გაფართოება არგუმენტის $x \leq -1$ მნიშვნელობებისთვის გამომდინარეობს ზემო მსჯელობიდან და ფორმულიდან ([5], გვ. 132):

$$P_{mn}^{l}(-x) = (-1)^{l-m-n} P_{m_1-n}^{l}(x).$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის ფუნქციები

$$K_{mn}^{l}(x) = (-1)^{m-n} i^{n-m} \sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l+n)!\,(l-n)!}}(1-x)^{\frac{m-n}{2}} P_{mn}^{l}(2x-1), \qquad (6)$$

$$H_{mn}^{l}(x) = i^{-3m-n+1} \sqrt{\frac{(l-3m)!(l-4m-n)!}{(l+n-1)!(l-m-1)!}}(1-x)\frac{3m+n-1}{2} P_{m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-2m-n}^{l-2m-\frac{1}{2}}(2x-1), \quad (7)$$

აქ $P_{mn}^{l}(x)$ განისაზღვრებიან (2) ან (5) ფორმულებით.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ინტეგრალური განტოლება

$$\int_{x}^{1} K_{mn}^{l}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = \varphi(x), \qquad (8)$$

თანაც ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\varphi_1^{(r)}(1) = 0$, როცა $0 \leq r \leq 4m$,

2) $\varphi_1^{(r+1)}(x)$ - უბან-უბან უწყვეტია, როცა $0 < x \le 1$.

მტკიცდება, რომ ამ ინტეგრალური განტოლების ამოხსნას წარმოადგენს ფუნქცია

$$f_1(t) = \int_1^t \widetilde{H}_{mn}^{\,l}\left(\frac{t}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^{l+\frac{n-m}{2}+1}} \cdot \frac{d^{4m+1}}{dy^{4m+1}}\left(y^{l+\frac{n+7m}{2}} \varphi_1(y) \right) dy . \qquad (9)$$

დამტკიცებისათვის ვიყენებთ მელინის გარდაქმნებს [6].

NODAR CHIKOBAVA

ON A CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH THE NUCLEUS CONTAINING ABSTRACT SPHERICAL FUNCTIONS

The article deals with the problems of conversion of integral equations. In particular, a class of integral equations is considered, when the nucleus of the integral contains abstract spherical functions. For such an integral equation a function is given which is the solution of this integral equation.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

TEMUR CHILACHAVA, NUGZAR KERESELIDZE

THE INTEGRODIFFERENTIAL INEQUALITIES METHOD FOR THE SOLVING OF MODELING PROBLEMS OF ASTROPHYSICS

Abstract. This work proposes an integrodifferential inequalities method of solution for a system of nonlinear nonhomogeneous equations of one class of initial-boundary problems with an unknown external boundary in the domain. For spherical and symmetrical non-stationary adiabatic flows of the perfect gravitating gas, on the basis of the equations of motion of medium and the equation of energy, deducing of system of integrodifferential inequalities for the law of motion of detonating wave and the moment of inertia of area of perturbating motion of gas.The detonating wave arises as the result of the nonhomogeneous gravitational collapse (parabolic or elliptical) of the gas at zero pressure or during the breakdown of the equilibrium position. A system of integrodifferential inequalities is constructed, determining the law of detonating wave and the moment of inertia of area of perturbating motion of gas with respect to a known initial state of the gas. A number of automodel problems are considered as examples.

Introduction

The mathematical modeling of astrophysics processes is one of the most actual problems of modern applied mathematics [1,2].

Gas dynamics processes, connected with the explosive phenomena and propagation of detonating waves, represents both theoretical and practical interest. These problems are rather actual, including for modeling and calculation of possible catastrophic consequences of explosions and propagation of detonating burning of gas to mines, gas pipelines, gasholders, etc.

Many problems of astrophysics demand for solution the research of dynamics of gas bodies which interacted with a gravitational field. In modern astrophysics special interest rough catastrophic processes of explosion of stars and the neutron stars received at it and collapsing bodies - black holes.

It is obvious, that for research of the heavenly phenomena it is necessary to put in a basis of concepts the statements and decisions of some dynamic problems about motion of gravitating gas.They can be considered as mathematical models which cover essential features of motion and evolution of stars.

As is known, mathematical models of many real gas dynamics processes are described by classical initial-boundary problems for systems of nonlinear differential equations in partial derivatives. It's clearly, that reception of exact solutions of such most complicated problems, generally is impossible.

In this connection, in the modern gas dynamics connected with explosive processes, rather actual development of the approached analytical and numerical methods for solution of such problems is represented [3 - 10].

The basic essential and practically important parameter in these problems is the law of motion of a detonating wave (a spherical surface where the solution undergoes the first kind of discontinuity) which arises owing to explosion or dynamic instability of balance. However, the classical formulation of a problem in language of the differential equations usually assumes preliminary full local definition of properties of gas flow. On the other hand, the description of the phenomenon of explosion by ideal mathematical model demands, naturally, certain accuracy of calculations [7 - 10].

In this connection it is clear, that it is important the direct approached definition of the required integrated characteristic of a problem by an establishment of system of integro-differential inequalities, which allow to receive for it bilateral estimations. In many cases (for example, in automodel) these estimations are also sufficient for its solution.

This work proposes an integrodifferential inequalities method of solution for a system of nonlinear nonhomogeneous equations of one class of initial-boundary problems with an unknown external boundary in the domain. For spherical and symmetrical non-stationary adiabatic flows of the perfect gravitating gas, on the basis of the equations of motion of medium and the equation of energy, deducing of system of integrodifferential inequalities for the law of motion of detonating wave and the moment of inertia of area of perturbating motion of gas.

The detonating wave arises as the result of the nonhomogeneous gravitational collapse (parabolic or elliptical) of the gas at zero pressure or during the breakdown of the equilibrium position. A system of integrodifferential inequalities is constructed, determining the law of detonating wave and the moment of inertia of area of perturbating motion of gas with respect to a known initial state of the gas. A number of automodel problems are considered as examples.

1. The Equations of Motion and Boundary Conditions

Let us discuss the equations of the adiabatic spherical and symmetrical motion of a gas that are written in Lagrange's form [7]:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{km}{r^2} = 0, \quad p = (\gamma - 1) f(m) \rho^{\gamma}, \qquad (1.1)$$

$$\rho = \left[4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right]^{-1},$$

where m is the $r(m,t)$ radius sphere mass, k is the gravitation constant, γ is the adiabatic indicator, $f(m)$ is the function connected with the distribution of entropy by Lagrange's m coordinate. $r = r(m,t)$ is medium motion law, $\frac{\partial r}{\partial t}$ is speed of medium motion, $p(m,t)$ is medium pressure, $\rho(m,t)$ is medium density.

The first equation of system (1.1) is the medium motion equation, the second equation is the adiabation equation, the third equation is the mass continuity equation, $r(m,t)$, $p(m,t)$, $\rho(m,t)$ functions are unknown.

The integral equation of the energy of the gas layer situated between the $m = 0$ and $m = M(t)$ surfaces is as follows:

$$T + U + V = E_0 + \int_0^t \left[\dot{M} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R} + Q \right) - 4\pi R^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right]_1 d\tau \quad (1.2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^M \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm, \; U = \frac{1}{(\gamma_2 - 1)} \int_0^M \frac{p}{\rho} dm, \; V = -k \int_0^M \frac{mdm}{r}, \; \dot{M} \equiv \frac{dM(t)}{dt},$$

where T, U, V are the kinetic, inner and potential (gravitation) energies of the gas, Q is the energy excreted during the burning of a gas mass unit of the $m = M(t)$ surface, E_0 is the explosion energy, $m = M(t)$ is the law of motion shock ($Q = 0$) or detonating ($Q \neq 0$) wave with gas mass, $R(t) = r(M(t), t)$ is the radius of a shock or detonating wave. 1, 2 indices denote correspondingly the gas position in front of and behind the wave (strong discontinuity).

Boundary conditions on the $r = R(t)$ discontinuity of Euler's variables are as follows:

$$\left[\rho\left(\dot{R} - \frac{\partial r}{\partial t}\right)\right]_1^2 = 0, \quad \left[p + \rho\left(\frac{\partial r}{\partial t} - \dot{R}\right)^2\right]_1^2 = 0, \qquad (1.3)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t} - \dot{R}\right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right]_1^2 = Q, \quad [\varphi]_1^2 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$$

Boundary conditions on the $m = M(t)$ discontinuity of Lagrange's variables are as follows

$$[r]_1^2 = 0, \quad \left[\frac{\partial r}{\partial t}\dot{M} - 4\pi r^2 p\right]_1^2 = 0$$

$$\left[\dot{M}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R}\right) - 4\pi r^2 p\frac{\partial r}{\partial t}\right]_1^2 = Q\dot{M} \qquad (1.4)$$

If the boundary conditions (1.3) or (1.4) are solved with respect to parameters of the gas behind the wave we get the following:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}\rho_1\left[1 + \frac{1}{\gamma_2 - 1}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{\left(\dot{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2} + 1 - g\right)\right]^{-1}, a_1^2 \equiv \frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1}$$

$$(1.5)$$

$$p_2 = \frac{1}{\gamma_2 + 1}\left[p_1 + \rho_1\left(\dot{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2 + \rho_1\left(\dot{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2 g\right]$$

$$\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2=\frac{1}{\gamma_2+1}\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)\left[\gamma_2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}-g\right]$$

$$g\equiv\sqrt{\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}\right)^2+\frac{2(\gamma_2+1)(\gamma_1-\gamma_2)a_1^2}{\gamma_1(\gamma_1-1)\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}-\frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}}$$

Besides, the continuity of Euler's and Lagrange's variables ought to be taken into account

$$[r]_1^2=0\,,\ [m]_1^2=0 \qquad (1.6)$$

In fact, we get a initial-boundary problem for the system (1.1) of nonlinear, nonhomogeneous equations, where the $r(m,t),\ p(m,t),\ \rho(m,t)$ functions are unknown.

Initial conditions ($t=t_0$, phone) determine the initial state of a gas sphere and are the exact $r_1(m,t),\ p_1(m,t)\,,\rho_1(m,t)$ solutions of the (1.1) system.

Thus, the initial-boundary problem is considered in the domain Ω:

$\Omega=\{t\in(t_0,t_*)\ ,m\in(0,M(t))\}$,

where t_0 is the moment of explosion, t_* is the moment of time when the wave comes out on the surface of the body (when $t_0\ge 0, t_*>0$) or the moment of gravitating collapse (when $t_0<0, t_*=0$).

Boundary conditions on the external unknown boundary $m=M(t)$ are like (1.4), (1.5) and in centre

$$r=0\,,\qquad m=0 \qquad (1.7)$$

2. The Integral Equations of the Energy and Lagrange-Jacobi

From the medium motion equations (1.1) and the boundary conditions on the strong

discontinuity (1.4), we shall get the integral equation of the energy, which describe one of universal laws of Newtonian mechanics, law of the energy save(the first law of thermodynamics).

The motion equation (1.1) multiply on the $\frac{\partial r}{\partial t}$

$$\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+4\pi r^2\frac{\partial p}{\partial m}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{km}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}=0$$

and integrate with по dm on the $[0,M(t)]$ segment

$$\int_0^{M(t)}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}dm+\int_0^{M(t)}4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial m}dm+\int_0^{M(t)}\frac{km}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}dm=0 \qquad (2.1)$$

$$\int_0^{M(t)}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}dm+4\pi\int_0^{M(t)}r^2\frac{\partial r}{\partial t}dp-\int_0^{M(t)}km\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)dm=0$$

Introduce the designation . The first integral in (2.1) denote $I_{1,}$, second - I_2, third - I_3 .

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm$$

Use the formula

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}f(t,x)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f}{\partial t}dx+\dot{b}(t)f(t,b(t))-\dot{a}(t)f(t,a(t)),$$

then we shall get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm + \frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Big|_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm - \frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Big|_2 \qquad (2.2)$$

I_2 integral may mapping as follows

$$I_2 = 4\pi\int_0^{M(t)} r^2\frac{\partial r}{\partial t}dp = 4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial m}\left[4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right]dm \qquad (2.3)$$

There are thrue simple lemma.

Lemma. If the function $r = r(m,t)$ has the second order continuity derivative, then are place the equality

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right) \qquad (2.4)$$

The prove. Consider the left part of (2.4) and derivatives

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right) = 2r\frac{\partial r}{\partial m}\frac{\partial r}{\partial t} + r^2\frac{\partial^2 r}{\partial m\partial t} \qquad (2.5)$$

Analogical derivatives and right part, then we shall get

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right) = 2r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial m} + r^2\frac{\partial^2 r}{\partial t\partial m} \qquad (2.6)$$

Compare the (2.5), (2.6), according the Shwarz theorem we shall get the lemma proves.

According the lemma , from (2.3) we shall get

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t}\left[4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m}\right] dm = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) dm$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) dm$$

Introduce the designation:

$$I_4 \equiv \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) dm$$

$$p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t};$$

The adiabation equation (1.1) $p = (\gamma_2 - 1) f(m)\rho^{\gamma}$ derivatives at t

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma_2 - 1) f(m)\gamma_2 \rho^{\gamma_2 - 1}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p}{\rho}\gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$-\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{p}{\rho}\right)\gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{p}{\rho^2}(\gamma_2 - 1)\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad I_4 = -\int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} dm = -\frac{1}{\gamma - 1}\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) dm$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1}\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) dm;$$

$$I_3=-\int_0^{M(t)} km\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)dm=-k\int_0^{M(t)} m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)dm=-k\left[\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm-\dot{M}\frac{M}{R}\right]=$$

$$=\frac{kM}{R}\dot{M}-k\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm$$

$$V_1\equiv\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm\,,\qquad I_1+I_2+I_3=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm-\frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Bigg|_2+4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Bigg|_2+\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm+$$

$$+\frac{kM}{R}\dot{M}-k\frac{d}{dt}\int_0^{M}\frac{m}{r}dm=0$$

$$\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm=\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm-\frac{p}{\rho}\dot{M}\Bigg|_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm-\frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Bigg|_2+4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Bigg|_2+\frac{1}{\gamma_2-1}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm-$$

$$-k\frac{d}{dt}\int_0^{M}\frac{m}{r}dm+\frac{kM}{R}\dot{M}\ -\frac{1}{\gamma_2-1}\frac{p}{\rho}\dot{M}\ \Big|_2=0$$

The last equality multiply on the $d\tau$ and integrate on the $[0,t]$ segment

$$T+U-kV-\int_0^t\left\{\dot{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}\right]-4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\right\}_2 d\tau=E_0\ ,$$

where E_0 is the explosion energy.

Finaly, foresee the boundary conditions (1.4), we shall get the integral equation of the energy.

$$E\equiv T+U-kV_1=E_0+\int_0^t\left\{\dot{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}+Q\right]-4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\right\}_1 d\tau \quad (\ 2.7\ )$$

From the motion equations (1.1) we shall take out the Lagrange-Jacobi integral equation, which in skype mechanics are famous as virial equation.

The motion equation (1.1) multiply on the $r(m,t)$ and integrate

$$\int_0^{M(t)} dm$$

$$\int_0^{M(t)} r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}dm+\int_0^{M(t)} 4\pi r^3\frac{\partial p}{\partial m}dm+\int_0^{M(t)}\frac{km}{r}dm=0 \qquad (2.8)$$

The first integral in last equality denote I_5, and second - I_6.

$$I_6=4\pi\int_0^{M(t)} r^3 dp=4\pi r^3 p\Big|_0^{M(t)}-\int_0^{M(t)} p\frac{\partial(4\pi r^3)}{\partial m}dm=4\pi r^3 p\Big|_2-3\int_0^{M(t)} p\left(4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right)dm=$$

$$=4\pi R^3 p\Big|_2-3\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm=4\pi R^3 p\Big|_2-3(\gamma_2-1)\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm$$

Because $U=\dfrac{1}{\gamma_2-1}\displaystyle\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm$, we shall obtain

$$I_6=4\pi R^3 p\Big|_2-3(\gamma_2-1)U \quad , \qquad (2.9)$$

$$I_5=\int_0^{M(t)} r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}dm,\quad r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$I_5=\int_0^{M(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]dm=\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)dm-2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm$$

Because $\frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm = T$, we shall obtain

$$I_5 = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)dm - 2T$$

Consider the integral $\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)dm$.

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)dm = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm\right] - \dot{M}r\frac{\partial r}{\partial t}\bigg|_2 = \frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm - \dot{M}R\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_2$$

$$\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm = \frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\frac{\partial\left(r^2\right)}{\partial t}dm = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r^2 dm - \frac{1}{2}\dot{M}r^2\Big|_2$$

$$I_5 = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r^2 dm - \dot{M}R^2\right] - \dot{M}R\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_2 - 2T \qquad (2.10)$$

Introduce the designation

$$I(t) = \int_0^{M(t)} r^2(m,t)dm, \qquad (2.11)$$

when $I(t)$ is the moment of inertia of perturbating area of motion of gravitating gas.

Including the finding meaning (2.9), (2.10) in (2.8), with account boundary conditions (1.4), we shall obtain the Lagrange-Jacobi integral equation

$$\Psi \equiv 2T + 3(\gamma_2 - 1)U - kV_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{I}(t) - \dot{M}R^2\right) + R\left(4\pi R^2 p - \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)\dot{M}\right)_1 \qquad (2.12)$$

3. The Integrodifferential Inequalities Method for the Gravitating Gas

The integrodifferential inequalities method meaning is as follows. For spherical and symmetrical non-stationary adiabatic flows of the perfect gravitating gas, on the basis of the equations of motion of medium and the equation of energy, deduce of system of integrodifferential inequalities for the law of motion of detonating wave and the moment of inertia of area of perturbating motion of gas.

Estimate the inner energy of the gravitating gas

$$U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm = \int_0^{M(t)} f(m) \rho^{\gamma_2 - 1} dm$$

$$U = \int_0^{M(t)} f(m) \left(4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right)^{1-\gamma_2} dm = \int_0^{M(t)} f(m) \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1-\gamma_2} dm$$

$$I = \int_0^{M(t)} f(m) \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1-\gamma_2} dm = \int_0^{M(t)} \left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \right]^{\gamma_2} dm$$

$$f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} = d, \ \ a = \gamma_2, \ \ \beta = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}, \ \ h = \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}}$$

$$a^{-1} + \beta^{-1} = \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} = 1$$

$$\left(\int_0^{M(t)} \left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \right]^{\gamma_2} dm \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \cdot \left(\int_0^{M(t)} \left[\left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}} \right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} dm \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}} \geq$$

$$\geq \int_0^{M(t)} f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \left(\frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}} dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)}\left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}}\right]^{\gamma_2}dm\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\cdot\left(\int_0^{M(t)}\frac{\partial r^3}{\partial m}dm\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}\geq\int_0^{M(t)}f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)}f(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-\gamma_2}dm\right)^{1/\gamma_2}\cdot R^{\frac{3(y_2-1)}{\gamma_2}}\geq\int_0^{M(t)}f^{1/\gamma_2}(m)dm$$

$$I=\int_0^{M(t)}f(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-y_2}dm\geq R^{3(1-y_2)}\left(\int_0^{M(t)}f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)dm\right)^{\gamma_2}$$

$$U\geq\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{y_2-1}R^{3(1-\gamma_2)}\left(\int_0^{M(t)}f^{1/y_2}(m)dm\right)^{y_2}=U\_ \qquad (3.1)$$

Simply we shall obtain the estimate from above for the kinetic energy of gas

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2dm,\quad T(t)\leq T_+(t)\equiv\frac{1}{2}\dot{R}^2M(t) \qquad (3.2)$$

For the obtaining estimate from below for the kinetic energy $T(t)$ we use the Holder inequality:

If $a^{-1}+\beta^{-1}=1$, then

$$\left(\int_a^b h^a(x)dx\right)^{1/a}\left(\int_a^b g^\beta(x)dx\right)^{1/\beta}\geq\int_a^b h(x)g(x)dx \qquad (3.3)$$

Derivative with time the moment of inertia of perturbating area of motion of gravitating gas (2.11) we shall obtain

$$\dot{I} = \int_0^{M(t)} 2r\frac{\partial r}{\partial t}dm + \dot{M}R^2\ , \quad \frac{1}{2}\left(\dot{I} - \dot{M}R^2\right) = \int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm$$

Then taking in (3.3) $h = \dfrac{\partial r}{\partial t}, \quad g = r, \quad \alpha = \beta = 2, \quad a = 0,$ $b = M(t),$ we shall obtain:

$$\int_0^{M(t)} \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm \cdot \int_0^{M(t)} r^2 dm \ge \left(\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm\right)^2$$

$$T \ge \frac{1}{8I}\left(\dot{I} - \dot{M}R^2\right)^2 \equiv T_-\ , \tag{3.4}$$

from which get the estimate from below for the kinetic energy.

Show then for the function V_1, which enter in the expression for the gravitation energy of the gas ($V = -kV_1$) just the estimate

$$V_1 \ge \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \frac{M^{5/2}}{I^{1/2}} \equiv V_-\ ,$$

In the Holder inequality (3.3) take

$$\alpha = 3/2, \quad \beta = 3, \quad h = \left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}, \quad g = r^{2/3}$$

Then

$$\left(\int_0^{M(t)} \left(\left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}\right)^{3/2} dm\right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^{M(t)} \left(r^{2/3}\right)^3 dm\right)^{1/3} \ge \int_0^{M(t)} m^{2/3} dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)} \frac{m}{r}\,dm\right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^{M(t)} r^2\,dm\right)^{1/3} \geq \int_0^{M(t)} m^{2/3}\,dm$$

$$V_1^{2/3} \cdot I^{1/3} \geq \frac{3}{5} M^{5/3},$$

from which we shall obtain

$$V_1 \cdot I^{1/2} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} M^{5/2},$$

or finally we obtain

$$V_1 \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \frac{M^{5/2}}{I^{1/2}}. \qquad (3.5)$$

From (1.5) we shall obtain

$$f \geq \frac{\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2} - g\right)^{\gamma_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 D^2} + g\right) D^2}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2 + 1} \rho_1^{\gamma_2 - 1}} \qquad (3.6)$$

$$a_1^2 \equiv \gamma_1 p_1 / \rho_1, \quad D \equiv \dot{R} - \dot{r}_1$$

$$g\left(\frac{a_1{}^2}{D^2}, \frac{2(\gamma_2{}^2 - 1)Q}{D^2}\right) \equiv \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_2 a_1{}^2}{\gamma_1 D^2}\right)^2 + \frac{2(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \gamma_2) a_1{}^2}{\gamma_1(\gamma_1 - 1) D^2} - \frac{2(\gamma_2{}^2 - 1)Q}{D^2}}$$

Lemma. For $\gamma_2 > 4/3$ are place the unequality

$$U \geq G V_1^{4(\gamma_2 - 1)} \left(V_1 - \frac{M^2}{2R} \right)^{1-\gamma_2} \tag{3.7}$$

$$G = \frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2 - 1}} \left\{ \int_0^{M(t)} \left[\frac{m^{2(\gamma_2 - 1)}}{f(m)} \right]^{1/(3\gamma_2 - 4)} dm \right\}^{4-3\gamma_2}$$

The prove.

$$V_1 = \int_0^{M(t)} \frac{mdm}{r} = \int_0^{M(t)} \frac{dm^2}{2r} = \frac{m^2}{2r}\Big|_0^M - \int_0^M \frac{m^2}{2} dr^{-1} = \frac{M^2}{2R} + \int_0^M \frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m}}{2r^2} dm$$

$$V_1 - \frac{M^2}{2R} = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m}}{r^2} dm$$

(3.7) are written as follows

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma 2 - 1}} \geq \frac{1}{(8\pi)^{\gamma 2 - 1}} \left\{ \int_0^M \left[\frac{m^{2(\gamma 2 - 1)}}{f(m)} \right]^{\frac{1}{3\gamma 2 - 4}} dm \right\}^{4 - 3\gamma 2} \left(\int_0^M \frac{mdm}{r} \right)^{4(\gamma 2 - 1)} \left(\frac{1}{2} \int_0^M \frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m} dm}{r^2} \right)^{1 - \gamma 2}$$

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma 2 - 1}} \left\{ \int_0^M \left[\frac{m^{2(\gamma 2 - 1)}}{f(m)} \right]^{\frac{1}{3\gamma 2 - 4}} dm \right\}^{3\gamma 2 - 4} \left(\int_0^M \frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m} dm}{r^2} \right)^{\gamma 2 - 1} \geq \left(\int_0^M \frac{mdm}{r} \right)^{4(\gamma 2 - 1)}$$

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma 2 - 1}} \left(\int_0^M \frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m} dm}{r^2} \right)^{\gamma 2 - 1} = \int_0^M \left(\frac{f^{1/\gamma 2}(m)}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\frac{\gamma 2 - 1}{\gamma 2}}} \right)^{\gamma 2} dm \left(\int_0^M \left[\left(\frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m}}{r^2} \right)^{\frac{\gamma 2 - 1}{\gamma 2}} \right]^{\frac{\gamma 2}{\gamma 2 - 1}} dm \right)^{\gamma 2 - 1} \geq$$

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f^{1/\gamma_2}(m)}{(r^2\frac{\partial r}{\partial m})^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}}\right)\left(\frac{m^2\frac{\partial r}{\partial m}}{r^2}\right)^{\gamma_2-1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2} = \left(\int_0^M \left(\frac{f(m)m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}}\right)^{1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2}$$

Thus we are show , what for $\gamma_2 > 4/3$ are place the unequality

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f(m)m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}}\right)^{1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2} \left\{\int_0^M \left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{3\gamma_2-4} \geq \left(\int_0^M \frac{mdm}{r}\right)^{4(\gamma_2-1)},$$

or

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f(m)^{1/4(\gamma_2-1)} m^{1/2}}{r}\right)^{\frac{4(\gamma_2-1)}{\gamma_2}} dm\right)^{\frac{\gamma_2}{4(\gamma_2-1)}}$$

$$\left\{\int_0^M \left[\frac{m^{1/2}}{f^{\frac{1}{4(\gamma_2-1)}}(m)}\right]^{\frac{4(\gamma_2-1)}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{\frac{3\gamma_2-4}{4(\gamma_2-1)}} \geq \int_0^M \frac{mdm}{r} \qquad (3.8)$$

But (3.8) are just because of Holder inequality (3.3), as $\alpha = \frac{4(\gamma_2-1)}{\gamma_2} > 1$, then $\gamma_2 > 4/3$, what are fulfilled because of lemms condition , and a $\beta = \frac{4(\gamma_2-1)}{3\gamma_2-4} > 1$, as $\gamma_2 > 0$.

Thus lemma is proved.

The inequalities (3.5), (3.7) give the algebraic inequality, which bring bilateral estimations for V_1

$$\max\left(V_-, \frac{M^2}{2R}\right) < V_1 < V_+ \qquad (3.9)$$

When $\gamma_2 = 4/3$ in the estimation (3.7)

$$G = \left[ess \max_{[0,M]} \frac{(8\pi)^{1/3} m^{2/3}}{f(m)} \right]^{-1} \qquad (3.10)$$

If we apply the integral equations (2.7), (2.12) and estimations (3.1) – (3.10), we shall obtain:

In the case $4/3 \le \gamma_2 \le 5/3$,

$$\Psi \ge 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2 - 4)kV_-, \qquad (3.11)$$

$$\Psi \le 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- + kV_+ \ ,$$

when $\gamma_2 > 5/3$

$$\Psi \ge 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- + kV_- \qquad (3.12)$$

$$\Psi \le 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2 - 4)kV_+ \, ,$$

where U_- is maximum of low estimations upon U, and a V_-, V_+ - are low and upper estimations for V_1.

When $\gamma_2 = 5/3$ the finding estimations V_-, V_+ are possible solving the quadratic inequality

$$V_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4GE}}{2G} \ , \quad 1 + 4GE \ge 0 \ .$$

In practical important case the detonating wave motion in motionless gas $\left(\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_1 = 0 \right)$ the obtaining inequalities with simplife purpose give the estimation F, which shall representative in finaly.

Introduce the designation

$$\Phi(x,y)\equiv\left[\gamma_2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^{\gamma_2}-g(x^{\gamma_2},y^{\gamma_2})\right]\left[1+\frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_1}+g\left(x^{\gamma_2},y^{\gamma_2}\right)\right]^{1/\gamma_2} \qquad (3.13)$$

$$x\equiv\left(\frac{a_1}{D}\right)^{2/\gamma_2}, \quad y=\left[\frac{2(\gamma_2{}^2-1)Q}{D^2}\right]^{1/\gamma_2}$$

Lemma. At $\gamma_1\geq\gamma_2$ the $\Phi(x,y)$ function is convex.

Prove. We shall show , that at $\gamma_1\geq\gamma_2$ are just the system

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}>0\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}>0\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2>0\end{cases}$$

Because the $\Phi(x,y)$ function at $\gamma_1\geq\gamma_2$ are convex.

Apply (3.6), and the convex $\Phi(x,y)$, from Iensen inequality

$$\int_a^b\varphi(d,h)\mu dx\geq\int_a^b\mu dx\varphi\left(\frac{\int_a^b d\mu dx}{\int_a^b\mu dx},\frac{\int_a^b h\mu dx}{\int_a^b\mu dx}\right),$$

when are make

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d \partial h}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

We shall obtain as follows estimation

$$F \geq \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma_2 - 1} \frac{Z^{\gamma_2}\left[\gamma_2 + \dfrac{\gamma_2 X^{\gamma_2}}{\gamma_1} - g(X^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2})\right]^{\gamma_2}\left[1 + \dfrac{X^{\gamma_2}}{\gamma_1} + g\left(X^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2}\right)\right]}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2 + 1}} \tag{3.14}$$

$$Z = 4\pi \int_0^R \dot{R}^{2/\gamma_2} \rho_1^{1/\gamma_2} r^2 dr \geq \frac{W^{(\gamma_2+2)/\gamma_2}}{t^{2/\gamma_2}},$$

$$W = (4\pi)^{\gamma_2/(\gamma_2+2)} \int_0^R \rho_1^{1/(\gamma_2+2)} r^{2\gamma_2/(\gamma_2+2)} dr$$

$$X = \frac{4\pi}{Z}\int_0^R a_1^{2/\gamma_2} \rho_1^{1/\gamma_2} r^2 dr, \quad Y = \frac{4\pi}{Z}\int_0^R [2(\gamma_2{}^2 - 1)Q]^{\frac{1}{\gamma_2}} \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2}} r^2 dr$$

The Z estimation shall apply monotonicity the right part of (3.14).

4. The Detonating Wave Motion Law Estimation in Gravitating Gas

Using the up developed integral inequalities method for the analysis of series of automodel problems of gravitating gas danymics.

1. Consider the problem about propagation of detonating wave on equilibrium condition in the gravitating nonhomogeneous gas, same time in the centre of symmetry energy not put (in (1.2) $E_0 = 0$). In gas equilibrium case the (1.1) equations exact solutions in front of detonating wave are as

$$r = \frac{m}{4\pi A}, p = \frac{2\pi A^2 k}{r^2}, \rho = \frac{A}{r^2}, \qquad (4.1)$$

where A - is proper dimensional constant.

Remark. The detonating waves (with Chapmen-Jounguet condition) in automodel motion of selfgravitating gas shall introduce in exact solution (1.1) accoding dimension theory only $\omega = 2$ **case**

$$r = \left[\frac{(3-\omega)m}{4\pi A}\right]^{1/(3-\omega)}, \quad p = \frac{k(3-\omega)}{8\pi(\omega-1)}\left(\frac{4\pi A}{3-\omega}\right)^2 r^{2-2\omega}, \quad \rho = \frac{A}{r^{\omega}},$$

while $\omega \neq 2$, A, k, Q largeness have independent dimensions and problem shall de nonautomodel.

In automodel case we shall obtain ($\omega = 2$) (A, k are the dimensional constants with independent dimensions)

$$R(t) = \sqrt{Ak} R_1 t, I(t) = A^2 \sqrt{A} k \sqrt{k} I_1 t^3, \quad Q = Q_1 A k \quad (4.2)$$

Consider the case $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 5/3$. Then we shall obtain

$$E = 4\pi(Q_1 - \pi)R_1, \qquad \psi = 3I_1 - 4\pi R_1^3 + 8\pi^2 R_1 \qquad (4.3)$$

$$G \cong \frac{0,00108}{\pi^3} H R_1, \qquad (4.4)$$

$$H\left(R_1^2, Q_1\right) = \left[\frac{5}{3} + \frac{10\pi}{3R_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}}\right]^{5/3} \cdot \left[1 + \frac{2\pi}{R_1^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}}\right]$$

and the system for R_1 and I_1, which consist the nondimensional parameter Q_1

$$\Lambda + \mathrm{B} \leq 2R_1(3Q_1 - 4\pi) + 4R_1^3 + \frac{5}{4}K \qquad (4.5)$$

$$\frac{4\pi}{15}\left[R_1^{\ 3}+4(Q_1-3\pi)R_1+\Lambda+\mathrm{B}\right]\le I_1\le\frac{\pi}{3}[4R_1^{\ 3}+8R_1(Q_1-2\pi)+K]$$

$$\mathrm{B}\equiv\sqrt{(R_1^{\ 3}+4(Q_1-3\pi)R_1+\Lambda)^2+15R_1^{\ 6}}\ ,\ \mathrm{K}\equiv\frac{\left[1+\sqrt{1+4GE}\,\right]\pi^2}{0{,}00216R_1H},$$

$$\Lambda\equiv 0{,}343R_1^{\ 3}H$$

In $\gamma = 4/3$ case we shall obtain

$$4R_1^{\ 2}+6Q_1+31{,}16\pi\ge 1{,}745H_1R_1^{\ 2}+N \qquad (4.6)$$

$$\frac{4\pi R_1}{15}(R_1^{\ 2}+4Q_1+N)\le I_1\le\frac{\pi R_1}{3}(4R_1^{\ 2}+8Q_1+24{,}93\pi-1{,}396H_1R_1^{\ 2})$$

$$N\equiv\sqrt{(R_1^{\ 2}+4Q_1)^2+15R_1^{\ 4}}$$

$$\mathrm{H}_1(R_1^{\ 2},Q_1)=\left[\frac{4}{3}+\frac{8\pi}{3R_1^{\ 2}}-\sqrt{\left(1-\frac{8\pi}{3R_1^{\ 2}}\right)^2-\frac{14Q_1}{9R_1^{\ 2}}}\right]^{4/3}\times$$
$$\left[1+\frac{2\pi}{R_1^{\ 2}}+\sqrt{\left(1-\frac{8\pi}{3R_1^{\ 2}}\right)^2-\frac{14Q_1}{9R_1^{\ 2}}}\right]$$

Some results are represented in the table 1. $\Delta_{\pm}$ - denote the middle relative , R_{1-}, R_{1+}, I_{1-}, I_{1+} - lower and upper estimations for R_1, I_1.

	Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	$\Delta_{\pm}\%(R_1)$	$\Delta_{\pm}\%(I_1)$
	0	**3,236**	**8,26**	**-**	**-**	**43,7**	**-**
	π	**5,31**	**10,31**	**707.5**	**4996,7**	**32**	**75**

	$4\pi/3$	**5,7**	**9,9**	**-**	**-**	**26,7**	**-**
	2π	**6,37**	**10,5**	**1335**	**5483**	**24,5**	**60,8**
	30π	**18,86**	**23,6**	**42563**	**69518**	**11,16**	**24**
	126	**21,65**	**26,65**	**-**	**-**	**10,17**	**-**
	50π	**29,122**	**29,122**	**-**	**-**	**9,5**	**-**
	100π	**33,73**	**39,484**	**-**	**-**	**7,85**	**-**
	504	**42,58**	**49**	**-**	**-**	**7**	**-**
	0	**2,895**	**6,87**	**-**	**-**	**40,6**	**-**
	π	**4,204**	**6,39**	**370**	**1179**	**20,6**	**52,2**
	2π	**4,853**	**6,63**	**618,3**	**1404**	**15,4**	**38,8**
	30π	**12,76**	**14,53**	**-**	**19431,6**	**6,5**	**14**

Table 1.

The analysis of giving results shows, that at great value of Q_1 the exactness of estimations important better.

2. Consider the nonhomogeneous gravitational parabolic collapse of the gas at zero pressure

$$r = \frac{km}{q}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(\xi_0 - \xi)^{2/3}, \quad \rho = \frac{1}{6\pi k(t_\circ(m) - t)(3t_\circ(m) - t)}, \; p = 0 , \quad (4.7)$$

$$\xi = \frac{q^{3/2} t}{km}, \quad t_\circ(m) = \frac{k\xi_\circ m}{q^{3/2}},$$

In automodel case

$$R(t) = \sqrt{q} R_1 t, \quad I = (q^2 \sqrt{q} / k) I_1 t^3, \quad Q = Q_1 q \tag{4.8}$$

$$\xi_0 = \xi_1 + \sqrt{2}/3, \tag{4.9}$$

We shall obtain the system

$$4R_1^{\ 3} - \sqrt{2} R_1^{\ 2} + (6Q_1 + 5{,}29) R_1 \geq 1{,}745L + R_1 S \tag{4.10}$$

$$\frac{R_1}{15}(4Q_1 + R_1^{\ 2} - 4 \cdot \sqrt{2} R_1 + S) \leq I_1 \leq \frac{1}{3}(R_1^{\ 3} - \sqrt{2} R_1^{\ 2} + 2Q_1 R_1 + 1{,}058 R_1 - 0{,}349L)$$

$$L \equiv \left[\frac{4}{3} - \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1 + \sqrt{2})^2}}\right]^{4/3} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1 + \sqrt{2})^2}}\right]$$

$$\cdot (\sqrt{2} + R_1)^{7/3} R_1^{\ 2/3}$$

$$S \equiv \sqrt{(4Q_1 + R_1^{\ 2} - 4 \cdot \sqrt{2} R_1)^2 + 15 R_1^{\ 4}}$$

The numerical solution of inequalities system (4.10) are giving in the table 2 , where the exact solution correspondence $Q_1 = 0{,}5,\ R_1 \approx 0{,}3536,\ I_1 \approx 0{,}0148$:

Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	$\Delta_+ \%(R_1)$	$\Delta_- \%(R_1)$	$\Delta_\pm \%(R_1)$	$\Delta_+ \%(I_1)$	$\Delta_- \%(I_1)$	$\Delta_\pm \%(I_1)$
0,3	**0,15**	**0,5**	**0,01**	**0,09**	-	-	**54**	-	-	**80**
0,5	**0,2**	**0,48**	**0,0139**	**0,024**	**35,7**	**43,7**	**41**	**62,1**	**5,6**	**26**
10	**2,53**	**3,89**	**12,25**	**20,13**	-	-	**21**	-	-	**24,3**

Table 2.

3. Consider the automodel problem about detonating wave motion at elliptical collapse of the gas at zero pressure.

$$r = \frac{km}{2q}(1 - \cos\eta), \quad p = 0,$$

$$\rho = \frac{2q^3}{\pi k^3 m^2 (1-\cos\eta)[2(1-\cos\eta) + (\pi-\eta)\sin\eta]} \tag{4.11}$$

$$t = \frac{km(\pi - \eta + \sin\eta)}{2q\sqrt{2q}} \;, \qquad \eta \in (0, \pi)$$

From (1.4), (4.8), (4.11) we shall obtain

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}(1-\cos\eta_1)}{\pi - \eta_1 + \sin\eta_1}, \tag{4.12}$$

where η_1 - is η parameter value on the detonating wave.

$$E = \frac{2\sqrt{2}(Q_1 - 1)}{\pi - \eta_1 + \sin\eta_1},$$

$$\Psi = 3I_1 + \frac{4\sqrt{2}[(\pi-\eta_1)\sin\eta_1 + 2\cos\eta_1(1-\cos\eta_1)]}{(\pi - \eta_1 + \sin\eta_1)^3} \tag{4.13}$$

$$G = 0{,}0122\frac{[2(1-\cos\eta_1) + (\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^{8/3}}{(1-\cos\eta_1)^{4/3}(\pi - \eta_1 + \sin\eta_1)} H_3(\eta_1),$$

$$H_3(\eta_1) = \left(\frac{5}{3} - \sqrt{1 - \frac{16Q_1(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^2(1-\cos\eta_1)^2}{9[2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^2}}\right)^{5/3} \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{16Q_1(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^2(1-\cos\eta_1)^2}{9[2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^2}}\right)$$

$$U_- = 0{,}48459\frac{[2(1-\cos\eta_1) + (\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^{8/3}}{(1-\cos\eta_1)^{10/3}(\pi - \eta_1 + \sin\eta_1)^3} H_3(\eta_1), \tag{4.14}$$

$$T_- = \frac{\left[3I_1 - \dfrac{4\sqrt{2}(1-\cos\eta_1)^2}{(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^3}\right]^2}{8I_1}$$

From (4.14) we shall obtain

$$\frac{2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1}{(1-\cos\eta_1)(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)} \geq \frac{4\sqrt{Q_1}}{3} \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} \Psi \leq 2E + \dfrac{1+\sqrt{1+4GE}}{2G} \\ \Psi - E \geq T_- + U_- \\ 1+4GE \geq 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\Psi \geq 2E + \frac{1-\sqrt{1+4GE}}{2G} \tag{4.17}$$

When $Q_1 = 7/12$, what correspondent the statical solution ($\eta_1 = 1{,}77$, $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 = 0$) the (4.16) inequalities system solution give the following estimation for η_1 parameter

$1{,}56 \leq \eta_1 \leq 2{,}13$,

$\Delta_\pm \cong 15{,}4\%$, $\Delta_- \cong 11{,}9\%, \Delta_+ \cong 20{,}3\%$.

When $Q_1 = 0$ we shall obtain

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 = \frac{\sqrt{2}}{\gamma+1}\cdot\frac{4(1-\cos\eta_1)-\sin\eta_1[(\gamma-1)(\pi-\eta_1)+(\gamma+1)\sin\eta_1]}{(1-\cos\eta_1)(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)} \tag{4.18}$$

For $\gamma = 5/3$ from (4.18) we shall obtain

$$1{,}74 \leq \eta_1 \leq \pi, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 > 0, \tag{4.19}$$

what correspondent gas dilation.

From (4.16), (4.17), when $Q_1 = 0$, we shall obtain

$$1{,}74 \leq \eta_1 \leq 2{,}34, \qquad \Delta_\pm \cong 14{,}7\% \tag{4.20}$$

Finally we give $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 > 0$, and the equilibrium position behind the shock wave is not realization.

REFERENCES

1. **G. Bete**. Theory of Supernovae. Neuclear Astrophysics. M. Mir, 1986, p. 418-445.
2. **S. Colgate, R. White.** The hydrodynamic behaviour of supernovae explosiouns. – *Astrophysical Journal*, 1966, v. 143, 3, p. 626-681.
3. **A. Golubyatnikov.** The homogeneous dilation of the gravitating gas with exsistens pressure gradiente. – *Journal of the AS of the Russia*. Fluids and Gas Mechanics, v. 4. M., 1998, p. 176 – 182.
4. **A. Golubyatnikov, S. Chushkin.** *Abaut strong relativistic explosion with variable density.* Aeromechanic and gas dynamics. 2002, № 2.
5. **D. K. Nadyozhin.** *The collapse of iron-oxygen start: physical and mathematical formulation of the problem and computational method Astrophys.* and Space Sci. 1977. v. 49. N 2. p. 39-425.
6. **G. V. Domogatsky, R. A. Eramzhyan, D. K. Nadyozhin.** Production of the light elements due to neutrinos emitted by collapsing stellar cores. – *Astrophysic And Space Sci* . v. 58, №2, 1978, p. 273-299.
7. **T. I. Chilachava**. On the asymptotic method of solution of one class of gravitation theory nonlinear problems. – *Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*. v. 11, №3, 1996, p. 18-26.
8. **T. I. Chilachava**. On the solution of one nonlinear problem of mathematical physics. – *Reports of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematic*, v. 23, 1997, p. 88-94.
9. **T. I Chilachava.** On the asymptotic method of solution of one class of nonlinear mixed problems of mathematical physics. – *Bulletin of Georgian Academy of Sciences*, v. 157, 1998, №3, p. 373-377.
10. **T. I. Chilachava.** On the asymptotic method of solution of one class of astrophysic problems. – *Applied Mathematics and Informatic.* v.4, №2, 1999, p. 54 - 66.

თემურ ჩილაჩავა, ნუგზარ კერესელიძე

ინტეგროდიფერენციალურ უტოლობათა მეთოდი ასტროფიზიკის მოდელური ამოცანების ამოხსნისათვის

გამოყენებითი მათემატიკის მრავალი ამოცანის მახასიათებელი თავისებურებაა მათი კომპლექსური ხასიათი, რომელიც, როგორც წესი, ითხოვს მრავალფეროვანი ფიზიკური პროცესების ყოველმხრივ გათვალისწინებას და საკმაოდ ფაქიზი გამოთვლითი ტექნოლოგიის მოზიდვას. ეს გვაიძულებს დავყოთ პრობლემა შედარებით დამოუკიდებელ სტადიათა რიგად, რომელიც შეიცავს საწყისი ფიზიკური მოდელის შემუშავებას, ამოცანის მათემატიკურ დასმას, ანალიზური მეთოდებისა და გამოთვლითი ალგორითმების დამუშავებას, პროგრამირების სტადიას და გამოთვლების შედეგების ფიზიკური ექსპერიმენტების მონაცემებთან შედარების საფუძველზე ფიზიკური მოდელის შემდგომ სრულყოფას. გაზური დინამიკის პროცესების მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის აქტუალურ პრობლემას.

ფეთქებად მოვლენებთან და დეტონაციური ტალღების გავრცელებასთან დაკავშირებული გაზური დინამიკის პროცესების მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს როგორც თეორიულ ასევე მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ინტერესს.

ეს ამოცანები საკმაოდ აქტუალურია, მათ შორის, შახტებში, გაზსადენებში, გაზგოლდერებში (საკმაოდ დიდი მოცულობის გაზსაცავები) და ა.შ. აფეთქებებისა და დეტონაციური წვის გავრცელების შესაძლო კატასტროფული შედეგების მოდელირებისა და გათვლისათვის.

ასტროფიზიკის მრავალი პრობლემა თავისი გადაჭრისათვის ითხოვს გრავიტაციულ ველთან ურთიერთმოქმედი გაზური სხეულების დინამიკის გამოკვლევას. მრავალრიცხოვანი დაკვირვებების მონაცემების თანახმად ახალი და ზეახალი ვარსკვლავების აფეთქებები წარმოადგენენ გაზის დიდი მასების დაუმყარებელ მოძრაობას, გამოსხივებული ენერგიის თამხლები მკვეთრი ზრდადობით.

როგორც ცნობილია, გაზური დინამიკის მრავალი რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელები აღიწერება კერ-

ძოწარმოებულიანი არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით და მათთვის დასმულ კლასიკურ საწყის-სასაზღვრო ამოცანებით. ცხადია, რომ ასეთი ურთულესი ამოცანების ზუსტი ამონახსნების პოვნა, ზოგად შემთხვევაში, შეუძლებელია.

ამასთან მიმართებაში, თანამედროვე ფეთქებად პროცესებთან დაკავშირებულ გრავიტირებად გაზურ დინამიკაში, საკმაოდ აქტუალურად გვეჩვენება ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნისათვის მიახლოებითი ანალიზური მეთოდების შემუშავება.

ძირითადად არსებით და პრაქტიკულად მნიშვნელოვან პარამეტრს ამ ამოცანებში, წარმოადგენს დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონი, რომელიც წარმოიშვება აფეთქების შედეგად ან წონასწორობის დინამიური არამდგრადობის გამო. მაგრამ ამოცანის კლასიკური ფორმულირება დიფერენციალური განტოლებების ენაზე, ჩვეულებრივად გულისხმობს გაზის დინების თვისების სრულ ლოკალურ წინასწარ განსაზღვრას. მეორე მხრივ აფეთქების მოვლენის აღწერა იდეალური მათემატიკური მოდელით ბუნებრივია მოითხოვს გამოთვლების განსაზღვრულ სიზუსტეს.

ამასთან დაკავშირებით, ცხადია, რომ დიდი მნიშვნელობა აქვს ამოცანის საძებნი ინტეგრალური მახასიათებლის (დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონი) უშუალო მიახლოებითი განსაზღვრას, ინტეგროდიფერენციალური უტოლობათა სისტემების დადგენის გზით, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მივიღოთ მისთვის უბრალო ორმხრივი შეფასებები. ბევრ შემთხვევაში (მაგალითად, ავტომოდელურებში) ეს შეფასებები ხდება საკმარისები მისი ამოხსნისათვის. ამასთან, ხშირად შეფასებების სიზუსტის ცოტა დაკლება საშუალებას იძლევა მთლიანად გამოვხატოთ პასუხი ელემენტარულ ფუნქციებში.

ნაშრომის სიახლე მდგომარეობს ფეთქებადი მოვლენებთან და დეტონაციური წვის გავრცელებასთან დაკავშირებული გრავიტირებადი გაზური დინამიკის პროცესების მათემატიკური მოდელირება, ახალ აქტუალურ ამოცანებთან მიმართებაში მიახლოებითი ანალიზური მეთოდის (ინტეგროდიფერენციალურ უტოლობათა მეთოდი) განვითარება, აგრეთვე კონკრეტული პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ტესტური ამოცანების ამოხსნა.

სტატიაში გრავიტირებადი გაზის ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული ადიაბატური დინებისათვის, გარემოს მოძრაობის განტოლებათა და ენერგიის განტოლების საფუძველზე გამოყვანილია ინტეგროდიფერენციალურ უტოლობათა სისტემა დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონისათვის და გაზის მოძრაობის შეშფოთებული არის ინერციის მომენტისათვის. ამ მეთოდის საფუძველზე განხილულია აქტუალური ავტომოდელური ამოცანა დეტონაციური ტალღის გავრცელების შესახებ გრავიტირებად არაერთგვაროვანი გაზში. პუასონის მაჩვენებლის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის დეტონაციური ტალღის უგანზომილებო რადიუსისათვის ნაპოვნია ორმხრივი შეფასებები. ნაჩვენებია, რომ შეფასებები საგრძნობლად უმჯობესდება ძლიერი წყვეტის ზედაპირზე (დეტონაციური ტალღა) გამოყოფილი ენერგიის ზრდის შემთხვევაში. ცდომილება შეადგენს 5 – 7%, რაც პრაქტიკული თვალსაზრისით კარგი შეფასებაა.

ТЕМУР ЧИЛАЧАВА, НУГЗАР КЕРЕСЕЛИДЗЕ

МЕТОД ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ АСТРОФИЗИКИ

В данной работе развит эффективный метод определения движения детонационной волны в совершенном газе с учетом гравитационного поля, основанный на двусторонней оценке ее радиуса движения и момента инерции области возмущенного движения газа, использующей интегральные неравенства и соотношения. Для одномерных нестационарных сферически-симметричных адиабатических течений гравитирующего совершенного газа, на основании выведенных уравнений движения среды, уравнений энергии и Лагранжа-Якоби (вириала), получена система интегродифференциальных неравенств для радиуса движения детонационной волны и момента инерции области возмущенного движения. В практически важном случае движения детонационной волны в покоящемся гравитирующем совершенном газе на основании неравенств Гёльдера и Иенсена система неравенств упрощена и полностью представлена в конечном виде. В качестве примеров исследованы астрофизические модельные задачи: о движении детонационной волны по равновесному состоянию неоднородного гравитирующего газа; о движении детонационной

волны при параболическом или эллиптическом сжатии гравитирующего газа при нулевом давлении (пыли). Анализ полученных результатов показывает, что при больших значений энерговыделений на поверхности сильного разрыва точность оценок значительно улучшается.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

ДАВИД ГОРДЕЗИАНИ, ТИНАТИН ДАВИТАШВИЛИ, ГАМЛЕТ МЕЛАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной работе рассматривается математическая модель электроэнергетической системы, которая представляет собой краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на графах. Исследуется корректность поставленной задачи. Построена и исследована соответствующая конечно-разностная схема. Предложены формулы прогоночного типа нахождения решения конечно-разностной схемы.

1. Стационарная математическая модель расчета линий электропередач на разветвленной сети

1°.Общая концепция математического моделирования [1], методология вычислительного эксперимента открывает широкие возможности для решения проблем, связанных с функцонированием объединенных электроэнергетических систем.

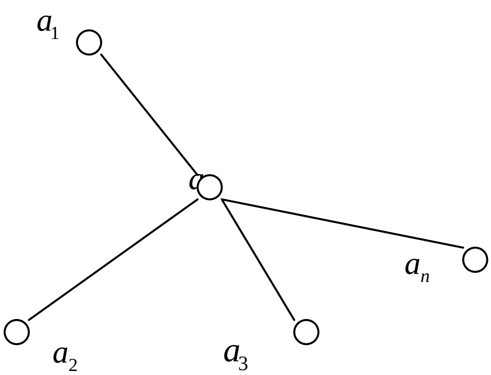
Функционирование объединенных электроэнергетических систем базируется на создании сети электрических линий. Согласно исследованиям в этой области [2 − 4], линии сети можно интерпретировать как длинные линии. Математическая модель, протекающих в этих сетях процессов, представляет собой систему дифференциальных уравнений, заданных на графах.. Для практических расчетов часто используются упрощенные линейные модели, независящие от времени.

Отметим, что аналогичные задачи возникают при моделировании различных процессов в сетях газопроводов, водотоков и т.д.

В предложенной работе рассматривается математическая модель электроэнергетической системы, представляющей собой граф определенного типа. Исследуется краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений на графе. Предлагается численный алгоритм решения полученной задачи.

Краевые задачи на графах не исследованы в полной мере в научной литературе. Укажем несколько работ [5 −10] и упомянутую в них литературу.

2°. Рассмотрим стационарный случай расчета линий электропередач, когда линии однородны и не учитываются нелинейные эффекты.



Вершины графа точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ребра графа $a_0 a_1(\Gamma_1)$, $a_0 a_2(\Gamma_2), \ldots$, $a_0 a_n(\Gamma_n)$. Будем считать, что в вершине a_1 находится генератор, вершина a_0 − распределитель, в вершинах a_2, a_3, …, a_n − потребители энергии.

Поставим задачу о нахождении распределения $v_\alpha(x_\alpha)$ на Γ_α, где x_α − локальная координата вдоль Γ_α. В этом случае получим следующую задачу: найти функции $v_\alpha(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 v_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha^2} - \gamma_\alpha^2 v_\alpha(x_\alpha) = -f_\alpha(x_\alpha), \quad x_\alpha \in (0, \ell_\alpha), \tag{1.1}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

где ℓ_α − длина ребра Γ_α, а $f_\alpha(x_\alpha)$ − заданные источники, распределенные на $(0, \ell_\alpha)$, граничным условиям

$$v_1(x_1)\big|_{a_1} = v^{(1)},\ v_2(x_2)\big|_{a_2} = v^{(2)}, \cdots, v_n(x_n)\big|_{a_n} = v^{(n)}, \tag{1.2}$$

и условиям сопряжения

$$v_1(x_1)_{a_0} = v_2(x_2)\,|_{a_0} = \cdots = v_n(x_n)\,|_{a_0}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}} \frac{dv_1(x_1)}{dx_1}\bigg|_{a_0} + \frac{1}{z_0^{(2)}} \frac{dv_2(x_2)}{dx_2}\bigg|_{a_0} + \frac{1}{z_0^{(3)}} \frac{dv_3(x_3)}{dx_3}\bigg|_{a_0} + \cdots + \frac{1}{z_0^{(n)}} \frac{dv_n(x_n)}{dx_n}\bigg|_{a_0} = 0, \tag{1.4}$$

где $\gamma_\alpha = \sqrt{z_0^{(\alpha)} y_0^{(\alpha)}}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $z_0^{(\alpha)}$ и $y_0^{(\alpha)}$ − соответственно коэффициенты сопротивления и проводимости [2], $v^{(\alpha)} = const$ − заданные величины, $v_\alpha(x_\alpha)|_{a_\beta}$ обозначает значение функций $v_\alpha(x_\alpha)$ в точке a_β.

3°. **<u>Теорема 1.1</u>**. Задача (1.1) − (1.4) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Допустим, что задача (1.1) − (1.4) имеет два решения $v_\alpha^{(1)}(x_\alpha)$ и $v_\alpha^{(2)}(x_\alpha)$, $\alpha=1,2,\dots,n$. Из соотношений (1.1) − (1.4) следует, что разность $w_\alpha(x_\alpha)=$ $v_\alpha^{(1)}(x_\alpha)-v_\alpha^{(2)}(x_\alpha)$, $\alpha=1,2,\dots,n$, является решением следующей задачи:

$$\frac{d^2 w_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha^2}=\gamma_\alpha^2 w_\alpha(x_\alpha),\quad x_\alpha\in(0,\ell_\alpha),\ \alpha=1,2,\dots,n, \tag{1.5}$$

$$w_1(x_1)|_{a_1}=w_2(x_2)|_{a_2}=w_3(x_3)|_{a_3}=\dots=w_n(x_n)|_{a_n}=0, \tag{1.6}$$

$$w_1(x_1)|_{a_0}=w_2(x_2)|_{a_0}=w_3(x_3)|_{a_0}=\dots=w_n(x_n)|_{a_0} \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}}\frac{dw_1(x_1)}{dx_1}\bigg|_{a_0}+\frac{1}{z_0^{(2)}}\frac{dw_2(x_2)}{dx_2}\bigg|_{a_0}+\frac{1}{z_0^{(3)}}\frac{dw_3(x_3)}{dx_3}\bigg|_{a_0}+\dots+\frac{1}{z_0^{(n)}}\frac{dw_n(x_n)}{dx_n}\bigg|_{a_0}=0. \tag{1.8}$$

Умножим равенства (1.5) на $\left(z_0^{(\alpha)}\right)^{-1}w_\alpha(x_\alpha)$, $\alpha=1,2,\dots,n$ и полученные равенства проинтегрируем соответственно на интервале $(0,\ell_\alpha)$, таким образом получаем

$$\frac{1}{z_0^{(\beta)}}\int_0^{\ell_\beta}\frac{d^2 w_\beta(x_\beta)}{dx_\beta^2}w_P(x_\beta)dx_\beta-\frac{\gamma_\beta^2}{z_0^{(\beta)}}\int_0^{\ell_\beta}w_\beta^2(x_\beta)dx_\beta=0,\ \left(\beta=1,2,\dots,n\right). \tag{1.9}$$

Далее воспользуемся формулой частного интегрирования и учтём граничные условия (1.6), получим

$$-\frac{1}{z_0^{(\beta)}}\int_0^{\ell_\beta}\left|\frac{dw_\beta(x_\beta)}{dx_\beta}\right|^2 dx_\beta-\frac{\gamma_\beta^2}{z_0^{(\beta)}}\int_0^{\ell_\beta}\left|w_\beta(x_\beta)\right|^2 dx_\beta+\frac{1}{z_0^{(\beta)}}w_\beta(x_\beta)\bigg|_{a_0}\frac{dw_\beta(x_\beta)}{dx_b}\bigg|_{a_0}=0. \tag{1.10}$$

Складывая равенства (1.10) ($\beta=1,2,\dots,n$) и учитывая соотношения (1.9), далее (1.7), (1.8), окончательно получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{z_0^{(\alpha)}}\int_0^{\ell_\alpha}\left\{\left|\frac{dw_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha}\right|^2+\gamma_\alpha^2\left|w_\alpha(x_\alpha)\right|^2\right\}dx_\alpha=0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $w_\alpha(x_\alpha) \equiv 0,\ \alpha = 1,2,\dots,n$. Итак, мы получим, что $v_\alpha^{(1)}(x_\alpha) \equiv v_\alpha^{(2)}(x_\alpha),\ \alpha = 1,2,\dots,n$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Существует решение задачи (1.1) − (1.4).

Доказательство. Для доказательства существования решения предлагается метод, опирающийся на использовании вариационного принципа. Рассмотрим задачу (1.1) − (1.4) с однородными краевыми условиями и неоднородной правой частью в уравнениях:

$$\frac{d^2 v_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha^2} - \gamma_2^2 v_\alpha(x_\alpha) = -f_\alpha(x_\alpha),\quad x_\alpha \in (0,\ell_\alpha), \tag{1.11}$$

$$\alpha = 1,2,\dots,n$$

$$v_1(x_1)\big|_{a_1} = v_2(x_1)\big|_{a_2} = v_3(x_3)\big|_{a_3} = \cdots = v_n(x_n)\big|_{a_n} = 0, \tag{1.12}$$

$$v_1(x_1)\big|_{a_0} = v_2(x_1)\big|_{a_0} = \cdots = v_n(x_n)\big|_{a_0}, \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}}\frac{dv_1(x_1)}{dx_1}\bigg|_{a_0} - \frac{1}{z_0^{(2)}}\frac{dv_2(x_2)}{dx_2}\bigg|_{a_0} - \frac{1}{z_0^{(3)}}\frac{dv_3(x_3)}{dx_3}\bigg|_{a_0} - \dots - \frac{1}{z_0^{(n)}}\frac{dv_n(x_n)}{dx_n}\bigg|_{a_0} = 0. \tag{1.14}$$

Пусть $H^1(0,\ell_\alpha)$ пространство Соболева, определенных на $(0,\ell_\alpha)$ со скалярным произведением и нормой, соответственно $(u,v)_{H^1(0,\ell_\alpha)}$ и $\|v\|_{H^{(1)}(0,\ell_\alpha)}$ $(\alpha = 1,2,\dots,n)$ (см. напр. [12]).

Предположим, что на $(0,\ell_\alpha)$ задана функция $v_\alpha(x_\alpha)$, $x_\alpha \in (0,\ell_\alpha)$, $(\alpha = 1,2,\dots,n)$. Определим функцию $v(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определенную на ребрах графа $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ следующим образом

$$v[x_1,x_2,\dots,x_n] \equiv v_\alpha(x_\alpha) \text{ ели } x_\alpha \in \Gamma_\alpha,\ \alpha = 1,2,\dots,n.$$

Введем следующее множество функций:

$$H^1(\Gamma) = \{v[x_1,x_2,\dots,x_n] : v_\alpha(x_\alpha) \in H^1(0,\ell_\alpha),\ \alpha = 1,2,\dots,n\}.$$

Определим в $H^1(\Gamma)$ скалярное произведение и норму следующим образом:

$$(v[x_1,x_2,\dots,x_n], u[x_1,x_2,\dots,x_n])_{H^1(\Gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (v_\alpha(x_\alpha))_{H^1(0,\ell_\alpha)},$$

$$\| u[x_1,x_2,\dots,x_n] \|_{H^1(\Gamma)} = (u[x_1,x_2,\dots,x_n], u[x_1,x_2,\dots,x_n])^{1/2}.$$

Очевидно, что $H^1(\Gamma)$ является Гильбертовым пространством.

Рассмотрим подпространство пространства $H_0^1(\Gamma)\subset H^1(\Gamma)$, где

$$H_0^1(\Gamma)=\ \{u[x_1,x_2,\dots,x_n\ \in H^1(\Gamma),\ u_1\big|_{a_1}=u_2\big|_{a_2}=\dots=u_n\big|_{a_n}=0\}.$$

Обобщенным решением задачи (1.11) − (1.14) будем называть функцию $u[x_1,x_2,\dots,x_n]\in\ H_0^1(\Gamma)$, для которой имеет место равенство

$$a\left(u[x_1,x_2,\dots,x_n],v[x_1,x_2,\dots,x_n]\right)=\left(f[x_1,x_2,\dots,x_n],v[x_1,x_2,\dots,x_n]\right)$$

для любой функций $v[x_1,x_2,\dots,x_n]\in H_0^1(\Gamma)$, где

$$a(u[x_1,x_2,\dots,x_n],v[x_1,x_2,\dots,x_n])=\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^{\ell_\varepsilon}\left(\frac{du_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha}\cdot\frac{dv_\alpha(x_\alpha)}{dx_\alpha}+\gamma_2^2u_\alpha(x_\alpha)v_\alpha(x_\alpha)\right)dx_\alpha$$

а $f[x_1,x_2,\dots,x_n]=f_\alpha(x_\alpha),\ x_\alpha\in(0,\ell_\alpha),\ \ \alpha=1,2,\dots,n$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.1, можно легко доказать, что квадратичная формула $a(v[x_1,x_2,\dots,x_n],v[x_1,x_2,\dots,x_n])$ непрерывна и коэрцитивна на $H_0^1(\Gamma)$ (см. напр. [13]). Отсюда, на основании теоремы Лакса-Мильграма, непосредственно вытекает существование единственного обобщенного решения задачи (1.11) − (1.14) : $u[x_1,x_2,\dots,x_n]\in H_0^1(\Gamma)$.

Заметим, если функции $f_\alpha(x_\alpha),\ \alpha=1,2,\dots,p$, достаточно гладкие функции, то это решение будет и регулярным решением исходной задачи.

Теорема доказана.

2. Разностная схема для численного решения задачи (1.11) − (1.14)

На Γ_α $(\alpha=1,2,\dots,n)$ введем равномерную сетку с шагами h_α

$$\bar{\omega}_h^{(\alpha)}=\left\{x_\alpha^{(i)}=ih_\alpha,\ i=1,2,\dots N_\alpha,\ x_\alpha^{(0)}=a_1,\ x_\alpha^{(N_\alpha)}=l_\alpha\right\},\ \alpha=1,2,3,\dots n.$$

Если на сетке $\bar{\omega}_h^{(\alpha)}$ дифференциальный оператор заменить разностным оператором [14], тогда получим следующую разностную схему:

$$\frac{y_\alpha^{(i-1)} - 2y_\alpha^{(i)} + y_\alpha^{(i+1)}}{h_\alpha^2} - \gamma_\alpha^2 y_\alpha^{(i)} = -f_\alpha\left(x_\alpha^{(i)}\right),\ i = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1 \tag{2.1}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_1^{(N_1)} = y_1(l_1) = v^{(1)},\ y_2^{(N_2)} = y_2(l_2) = v^{(2)}, \ldots, y_n^{(N_n)} = y_1(l_n) = v^{(n)}, \tag{2.2}$$

где $y_\alpha^{(i)} = y_\alpha(ih_\alpha),\ \ \alpha = 1, 2, \ldots, n,\ \ i = 0, 1, \ldots, N_\alpha$

$$y_1\big|_{a_0} = y_2\big|_{a_0} = \cdots = y_n\big|_{a_0}, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}} \frac{y_1^{(1)} - y_1^{(0)}}{h_1} + \frac{1}{z_0^{(2)}} \frac{y_2^{(1)} - y_2^{(0)}}{h_2} + \frac{1}{z_0^{(3)}} \frac{y_3^{(1)} - y_3^{(0)}}{h_3} + \cdots + \frac{1}{z_0^{(n)}} \frac{y_n^{(1)} - y_n^{(0)}}{h_n} = 0. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Существует единственное решение задачи (2.1) − (2.4).

Доказательство. Разностная схема (2.1) − (2.4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Чтобы доказать существование и единственность решения разностной схемы (2.1) − (2.4), достаточно доказать, что соответствующая однородная система уравнений имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим задачу, которая соответствует разностной схеме (2.1) − (2.4):

$$w_{\alpha,\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(i)} - \gamma_\alpha^2 w_\alpha^{(i)} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N_\alpha, \tag{2.5}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n$$

где

$$w_{\alpha,\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(i)} = \frac{w_\alpha^{(i-1)} - 2w_\alpha^{(i)} + w_\alpha^{(i+1)}}{h^2},$$

$$w_1\big|_{a_1} = w_2\big|_{a_2} = \cdots = w_n\big|_{a_n} = 0\ , \tag{2.6}$$

$$w_1\big|_{a_0} = w_2\big|_{a_0} = \cdots = w_n\big|_{a_0}\ , \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}} w_{1,x_1}^{(0)} + \frac{1}{z_0^{(2)}} w_{2,x_2}^{(0)} + \frac{1}{z_0^{(3)}} w_{3,x_3}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{z_0^{(n)}} w_{n,x_n}^{(0)} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$w_{\alpha,x_\alpha}^{(0)} = \frac{w_\alpha^{(1)} - w_\alpha^{(0)}}{h_\alpha},\ \alpha = 2, 3, \ldots, n.$$

Введем скалярное произведение [10]:

$$(v_\alpha, z_\alpha) = \sum_{i=1}^{N_\alpha - 1} v_\alpha^{(i)} z_\alpha^{(i)} h_\alpha, \qquad (v_\alpha, z_\alpha] = \sum_{i=1}^{N_\alpha} v_\alpha^{(i)} z_\alpha^{(i)} h_\alpha$$

и соответствующие этим скалярным произведениям нормы:

$$\| v_\alpha \|^2 = (v_\alpha, v_\alpha), \ \| v_\alpha]|^2 = (v_\alpha, v_\alpha].$$

Умножая скалярно равенства (2.5) на $\left(z_0^{(\alpha)}\right)^{-1} w_\alpha$, используя формулы частичного суммирования [15] и учитывая граничные условия (2.6), получим:

$$-\frac{1}{z_0^{(\beta)}} \| w_{x_\beta}, \bar{x}_\beta \|^2 - \frac{\gamma_\beta}{z_0^{(\beta)}} \| w_\beta \|^2 - \frac{1}{z_0^{(\beta)}} w_\beta(a_1) w_{\beta, \bar{x}_\beta}(a_1) = 0 . \quad (2.9)$$

$$\beta = 1, 2, 3, \dots, n$$

Складывая равенства (2.9) и учитывая соотношения (2.7), (2.8), окончательно получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{z_0^{(\alpha)}} \left\{ \left\| w_{\alpha, \bar{x}_\alpha} \right\|^2 + \gamma_\alpha^2 \left\| w_\alpha \right\|^2 \right\} = 0 .$$

Следовательно $w_\alpha(x_\alpha) \equiv 0, \ x_\alpha \in \bar{\omega}_\ell^{(\alpha)}, \ \alpha = 1, 2, \dots, n$.

Это означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений, которая соответствует разностной схеме (2.1) – (2.4) имеет только тривиальное решение. Итак, мы доказали, что существует единственное решение разностной схемы (2.1) – (2.4).

3. Сходимость разностной схемы (2.1) – (2.4)

Докажем сходимость разностной схемы (2.1) – (2.4), при $h_\alpha \to 0, \ \alpha = 1, 2, \dots, n$. Для этой цели введем сеточные функций погрешности

$$z_\alpha(x_\alpha^{(i)}) = y_\alpha(x_\alpha^{(i)}) - v_\alpha(x_\alpha^{(i)}) , \quad (3.1)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha ,$$

где $y_\alpha(x_\alpha^{(i)})$ – является решением разностной схемы (2.1) – (2.4), а функций $v_\alpha(x_\alpha)$ – решением дифференциальной задачи (1.1) – (1.4). Из равенства (3.1) определим $y_\alpha(x_\alpha^{(i)})$ и подставим в разностную схему (2.1) – (2.4). Тогда для функций погрешности получим следующую задачу:

$$z_{\alpha, \bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(i)} - \gamma_\alpha^2 z_\alpha^{(i)} = -\psi_\alpha^{(i)}, \ \ i = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad (3.2)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\psi_\alpha^{(i)} = v_{\alpha,\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x_\alpha^{(i)}) - \gamma_\alpha^2 v(x_\alpha^{(i)}) + f_\alpha(x_\alpha^{(i)}),$$

$$z_1(a_1) = z_2(a_2) = z_3(a_3) = \cdots z_n(a_n) = 0 \ , \qquad (3.3)$$

$$z_1\big|_{a_0} = z_2\big|_{a_0} = z_3\big|_{a_0} = \cdots = w_n\big|_{a_0} \ , \qquad (3.4)$$

$$\frac{1}{z_0^{(1)}} z_{1,x_1}^{(0)} + \frac{1}{z_0^{(2)}} z_{2,x_2}^{(0)} + \frac{1}{z_0^{(3)}} z_{3,x_3}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{z_0^{(n)}} z_{2,x_n}^{(0)} = \theta_0, \qquad (3.5)$$

где

$$\theta_0 = \frac{1}{z_0^{(1)}} v_{1,x_1}\Big|_{a_0} + \frac{1}{z_0^{(2)}} v_{2,x_2}\Big|_{a_0} + \cdots + \frac{1}{z_0^{(n)}} v_{n,x_n}\Big|_{a_0}.$$

Пусть $v_\alpha(x_\alpha) \in C^4(\Gamma_\alpha),\ \alpha = 1, 2, \ldots, n$. Тогда легко можно показать (см. напр. [14]), что

$$|\psi_\alpha^{(i)}| = O(h_\alpha^2),\ i = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n,\ |\theta_0| = O(\sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha).$$

Умножая равенства (3.2) скалярно на $\left(z_0^{(\alpha)}\right)^{-1} z_\alpha$, используя формулы частичного суммирования и учитывая граничные условия (3.3), получим:

$$\frac{1}{z_0^{(\beta)}} \left\| z_{\beta,\bar{x}_\beta} \right\|^2 + \frac{\lambda_\beta^2}{z_0^{(\beta)}} \| z_\beta \|^2 + \frac{1}{z_0^{(\beta)}} z_\beta\Big|_{a_0} z_{\beta,x_\beta}\Big|_{a_0} = (\psi_\alpha, z_\alpha), \quad (3.6)$$

$$\beta = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Складывая равенства (4.6), (4.7) и учитывая соотношения (3.3), (3.4), получим следующее равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{z_0^{(\alpha)}} \left\{ \left\| z_{\alpha,\bar{x}_\alpha} \right\|^2 + \gamma_\alpha^2 \| z_\alpha \|^2 \right\} = z_1(a_0)\theta_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} |(z_\alpha, \psi_\alpha)|$$

Исходя из этого равенства, можно написать

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{z_0^{(\alpha)}} \left\{ \left\| z_{\alpha,\bar{x}_\alpha} \right\|^2 + \gamma_\alpha^2 \| z_\alpha \|^2 \right\} \le z_1(a_0)\,|\theta_0| + \sum_{\alpha=1}^{n} \| z_\alpha \| \| \psi_\alpha \|.$$

Для преобразования правой части этого неравенства воспользуемся ε-неравенством [15]:

$$|ab| \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2,\ a > 0,$$

тогда получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{z_0^{(\alpha)}}\left\{\left\|z_{\alpha,\bar{x}_\alpha}\right\|^2+\gamma_\alpha^2\,\|z_\alpha\|^2\right\}\le\varepsilon_0\,|z_1(a_0)+\frac{1}{4\varepsilon_0}|\theta_0|^2+\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\varepsilon_\alpha{}^2\,\|z_\alpha\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_\alpha}\|\psi_\alpha\|^2\right\}. \quad (3.7)$$

Постоянные ε_i $(i=0,1,\dots,n)$ выберем следующим образом

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1=\frac{\gamma_1^2}{z_0^{(1)}},\ \ \varepsilon_\alpha=\frac{\gamma_\alpha^2}{z_0^{(\alpha)}},\ \ \alpha=1,2,3,\dots n,$$

тогда из равенства (3.7) получим следующую оценку

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{z_0^{(\alpha)}}\left\|z_{\alpha,\bar{x}_\alpha}\right\|^2\le M_1\,|\,\theta_0\,|^2+M_2\sum_{\alpha=1}^{n}\|\,\psi_\alpha\,\|^2, \qquad (3.8)$$

где $M_1>0,\ M_2>0$ – определенные постоянные.

Далее воспользуемся следующим фактором:

Для любой сеточной функций $v(x)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_h$, $\bar{\omega}_h=\left\{x^{(i)}=ih,\,i=1,2,\dots,N;\quad x^{(0)}=0,\,x^{(N)}=l,\,h=l\,/\,N\right\}$, и обращающейся в нуль при $x=0$ или при $x=\ell$, справедливо неравенство

$$\|\,v\,\|_c^2\le\ell\,\|\,v_{\bar{x}}\,]|^2.$$

Используя это неравенство, из (3.8) получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{z_0^{(\alpha)}\ell_\alpha}\|\,z_\alpha\,\|_c^2\le M_1\,|\,\theta_0\,|^2+M_2\sum_{\alpha=1}^{n}\|\,\psi_\alpha\,\|^2, \qquad (3.9)$$

где ℓ_α – длина ребра Γ_α .

Учитывая, что $|\,\theta_0\,|=O(\sum_{\alpha=1}^{n}h_\alpha)$ и $\|\,\psi_\alpha\,\|=O(h_\alpha^2),\ \alpha=1,2,\dots,n$, можно легко получить, что

$$\|\,z_\alpha\,\|_c=O(h),\quad h=\max_{1\le\alpha\le n}h_\alpha\,.$$

Итак, мы доказали справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть решение исходной дифференциальной задачи (1.1) – (1.4) $v(x_\alpha)\in C^4(\Gamma_\alpha),\ \alpha=1,2,\dots,n$. Тогда разностная схема (2.1) – (2.4) сходится равномерно со скоростью $O(h)$.

4. Метод прогонки для решения разностной схемы (2.1) – (2.4)

Рассмотрим алгоритм решения разностной схемы (2.1) – (2.4), который является обобщением метода прогонки [14].

Разностная схема (3.1) – (3.4) представляет собой систему алгебраических уравнений

$$a_\alpha^{(i_\alpha)} y_\alpha^{(i_\alpha-1)} - c_\alpha^{(i_\alpha)} y_\alpha^{(i_\alpha)} + b_\alpha^{(i_\alpha)} y_\alpha^{(i_\alpha+1)} = f_\alpha^{(i_\alpha)}, \qquad (4.1)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n; \ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,$$

где

$$a_\alpha^{(i_\alpha)} = b_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha^{-2}, \quad c_\alpha^{(i_\alpha)} = 2h_\alpha^{-2} + \gamma_\alpha^2, \ .$$

$$y_\alpha^{(N_\alpha)} = v^{(\alpha)}, \qquad (4.2)$$

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_n^{(0)}, \qquad (4.3)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \left(y_\alpha^{(1)} - y_\alpha^{(0)} \right) = 0, \qquad (4.4)$$

$$m_\alpha = \left(z_0^{(\alpha)} h_\alpha \right)^{-1},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n; \ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1.$$

Для решения разностной задачи (4.1)–(4.4) вдоль ребра Γ_α воспользуемся формулами метода прогонки (см. напр.[14]) :

$$y_\alpha^{(i_\alpha+1)} = \xi_\alpha^{(i_\alpha)} y_\alpha^{(i_\alpha)} + \eta_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.5)$$

$$\xi_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(i_\alpha)}}{c_\alpha^{(i_\alpha)} - b_\alpha^{(i_\alpha)} \xi_\alpha^{(i_\alpha+1)}}, \quad \eta_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{b_\alpha^{(i_\alpha)} \eta_\alpha^{(i_\alpha+1)} - f_\alpha^{(i_\alpha)}}{c_\alpha^{(i_\alpha)} - b_\alpha^{(i_\alpha)} \xi_\alpha^{(i_\alpha+1)}}, \qquad (4.6)$$

$$\xi_\alpha^{(N_\alpha)} = 0, \quad \eta_\alpha^{(N_\alpha)} = v^{(\alpha)}, \qquad (4.7)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n; \ i_\alpha = N_\alpha - 1, N_\alpha - 2, \ldots, 2, 1.$$

Очевидно, если определить значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, то после этого можно провести вычисления по формулам (4.5)-(4.7).

Выпишем формулу (4.5)-(4.7) для случая $i_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n.$ Таким образом получим:

$$y_\alpha^{(1)} = \xi_\alpha^{(1)} y_\alpha^{(0)} + \eta_\alpha^{(1)}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, n., \qquad (4.8)$$

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_n^{(0)},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \left(y_\alpha^{(1)} - y_\alpha^{(0)} \right) = 0. \qquad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) определяется $y_\alpha^{(0)}$ следующим образом:

$$y_\alpha^{(0)} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \eta_1^{(i_1)}}{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \left(\xi_\alpha^{(1)} - 1\right)}. \qquad (4.10)$$

Итак, для решения системы (4.1) – (4.4) окончательно получим модифицированный метод прогонки:

$$\xi_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(i_\alpha)}}{c_\alpha^{(i_\alpha)} - b_\alpha^{(i_\alpha)} \xi_\alpha^{(i_\alpha+1)}}, \quad \eta_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{b_\alpha^{(i_\alpha)} \eta_\alpha^{(i_\alpha+1)} - f_\alpha^{(i_\alpha)}}{c_\alpha^{(i_\alpha)} - b_\alpha^{(i_\alpha)} \xi_\alpha^{(i_\alpha+1)}},$$

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_n^{(0)} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \eta_\alpha^{(1)}}{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \left(\xi_\alpha^{(1)} - 1\right)},$$

$$y_\alpha^{(i_\alpha+1)} = \xi_\alpha^{(i_\alpha)} y_\alpha^{(i_\alpha)} + \eta_\alpha^{(i_\alpha)},$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1.$$

Замечание. Вышеизложенная методика остаётся в силе для более общих краевых условий, уравнений и графов.

Литература

1. **А. А. Самарский, А. В. Михайлов.** Математическое моделирование — М.: *Наука*, 1997.
2. **А. К. Лосев**. Теория линейных электрических цепей — М.: *Высшая школа*, 1987.
3. Электрические системы (сб. статьей) — М.: *Высшая школа*, 1970.
4. **И. Н. Мансуров, В. С. Попов**. Теоретическая электротехника– М.- Л.: *Госэнергоиздат*, 1962.
5. **А. И. Вольперт.** Дифференциальные уравнения на графах, Математический сборник, т. 88(130), №4(8), 1972.
6. **P. Kuchment**. Graphs models for waves in thin struktures // *Waves Random Media* – 2002 – 12 – pp.1-24.

7. **E. Akkermans, A. Comtet, J. Desbois, G. Montambaux. C. Texier.** Spectral determinant on quantum graphs *// Ann. Phys*. – 2000 – 284 – pp.10-51.
8. **Yu. V. Pokornyi, V.L. Pryadiev.** On transmission conditions in the Sturm-Liouville problem on a network. (Russian) Sovrem. Mat. Prilozh. No. 12, Differ. Uravn. Chast. Proizvod. (2004), 107-137*; translation in J. Math. Sci.* (N. Y.) 130 (2005), no. 5, 5013-5045.
9. **Y. V. Pokornyi, O. M. Penkin, A. V. Borovskikh, V. L. Pryadiev, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov**. Differential equations on geometric graphs (Russian). M.*: Fizmatlit*, 2004, p.272.
10. **D. Gordeziani, T. Davitashvili, M. Kupreishvili, H. Meladze**. On the Solution of Boundary Value Problem for Differential Equations Given in Graphs // *Applied Mathematics and Informatics – Tbilisi* – 2008 – v.13, №.1 – pp.1-14.
11. **А. А. Самарский.** Теория разностных схем — *М.: Наука*, 1983.
12. **М. Нагумо**. Лекции по современной теории уравнений в частных производных — *М.: Мир*, 1967.
13. **Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес**. Неоднородные граничные задачи и их приложения — *М.: Мир*, 1971.
14. **А. А. Самарский, А.В. Гулин**. Численные методы — *М.*: *Научный мир*, 2000.
15. **А. А. Самарский, В.Б. Андреев**. Разностные методы для эллиптических уравнений — М.*: Наука*, 1976.

დავით გორდეზიანი, თინათინ დავითაშვილი, ჰამლეტ მელაძე

ელექტროენერგეტიკული სისტემების ერთი მათემატიკური მოდელის შესახებ

ნაშრომში განხილულია ელექტროენერგეტიკული სისტემების ერთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანას გრაფზე მოცემული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის.

გაერთიანებული ელექტროენერგეტიკული სისტემების ფუნქციონირების ერთერთ ძირითად ბაზას ელექტრული ქსელები წარმოადგენს. ამ ქსელებში მიმდინარე პროცესების მათემატიკური მოდელი უმარტივეს შემთხვევაში წარმოადგენს

(1.1)-(1.4) სასაზღვრო ამოცანას გრაფზე განსაზღვრული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ნაშრომში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1.1. (1.1)-(1.4) ამოცანას აქვს არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

თეორემა 1.2. არსებობს (1.1)-(1.4) ამოცანის ამონახსნი.

ნაშრომში (1.1)-(1.4) სასაზღვრო ამოცანისათვის განხილულია სხვაობიანი სქემა (2.1)-(2.4). დამტკიცებულია ამ სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. დამტკიცებულია აგრეთვე სხვაობიანი სქემის ამონახსნის თანაბარი კრებადობა *(3)* სიჩქარით საწყისი დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნისაკენ. აგებულია მიღებული (2.1)-(2.4) სხვაობიანი სქემის ამოხსნის ფაქტორიზაციის ტიპის ალგორითმები.

DAVID GORDEZIANI, TINATIN DAVITASHVILI,
HAMLET MELADZE

ABOUT ONE MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROPOWER SYSTEMS

In the given work is considered the mathematical model of electropower system which represents a boundary problem for the ordinary differential equations on graphs. The problem in view correctness is investigated. The corresponding finite-difference scheme is constructed and investigated. Thomas algorithm’s type formulas for finding of solution of finite-difference schemes are offered.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

**РИЧАРД МЕГРЕЛИШВИЛИ, МАЛХАЗ ЧЕЛИДЗЕ,
ТАМАР ГНОЛИДЗЕ, КЕТЕВАН ЧЕЛИДЗЕ**

О СИНТЕЗЕ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ

ВВЕДЕНИЕ

Брюс Шнайер в своей извесной работе [1] замечает, что в результате реализации дополнительных вариантов и обобщений число схемных решений цифровой подписи может составить более, чем тринадцать тысячь (но не все из них будут эффективными).

Большинство из указанных вариантов основаны на проблемах дискретных логарифмов, извлечения корней и факторизации в полях Галуа $GF(p)$ [2,3].

В настоящей работе авторы исследуют возможные варианты цифровой подписи, которые также используют вышеуказанную проблему дискретных логарифмов (т.е. одностороннюю функцию $a^x \equiv y \bmod p$). Узость математических основ, несомненно, осложняет построение альтернативных алгоритмов. В тоже время, следует заметить, что в качестве пропотипа (варианта исследований) как и в ряде известных случаев используется схема Эль-Гамаля [4] с тем, чтобы, в результате определенного функционального применения некоторого параметра, получить варианты алгоритма цифровой подписи.

1. Построение первого алгоритма

Многообразие и особенности функционирования существующих алгоритмов вызывает протокольные ограничения и условности.

В связи с этим, хорошим примером является хотя бы то, что протокол алгоритма Эль-Гамаля запрещает в различных сеансах передавать сообщения, подписанные одной и той же подписью. Рассмотрим этот частный случай при определенном упрощении представления процесса функционирования. Предположим, что в первом и во втором сеансах, вопреки запрету протоколом, $k_1 = k_2$ (т.е. $R_1 = R_2$). Тогда в первом сеансе формула синтеза будет иметь вид:

$$M_1 \equiv (xR_1 + k_1 S_1) \bmod (p-1), \qquad (1.1)$$

где M_1 - хэш-функция M_{01} информации, передаваемой в первом сеансе: $M_1 = H(M_{01})$; x - секретный ключ субъекта, отправляющего информацию; k_1 - одноразовый ключ, случайное секретное число; $R_1 \equiv a^{k_1} \bmod p$ и S_1 - пара параметров подписей; $1 < a < p$; p - простое число высокого порядка (a и p - открытые параметры). Для второго сеанса, соответственно, будем иметь:

$$M_2 \equiv (xR_1 + k_1 S_2) \bmod (p-1). \qquad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) получим:

$$M_1 - M_2 \equiv (k_1 S_1 - k_1 S_2) \bmod (p-1)$$

и определяется величина

$$k_1 = \frac{M_1 - M_2}{S_1 - S_2} \bmod (p-1), \qquad (1.3)$$

если $(S_1 - S_2, p-1) = 1$, что означает вскрытие алгоритма, т.к. зная k_1, из (1.1) возможно определить секретный ключ x.

Рассмотрим отличный от (1.1) упрощенный вариант формулы синтеза:

$$S \equiv (x + kM) \bmod (p-1). \qquad (1.4)$$

Формула проверки, соответсвенно, имеет вид:

$$a^S \equiv yR^M \bmod p, \qquad (1.5)$$

где $y \equiv a^x \bmod p$ - открытый ключ, но для параметра хэширования $M = H(M_0)$ необходимым становится внести ограничение, заключающееся в том, что после хэширования величине M, в случае необходимости, нужно придать четное значение для того, чтобы всегда выполнялось условие: $2|M$ (это- условие четности параметра M, что выполняется без особых затруднений).

Внесение ограничения, - условия четности M, защитит алгоритм от взлома в результате атаки на формулу проверки. Рассмотрим формулу проверки (1.5). Предположим, что для заданного значения информации $M_{\#} = H(M_{0\#})$ численное значение подписи $S_{\#}$ подобрана случайным образом; определим, теперь, значение $R_{\#}$:

$$a^{S_{\#}} \equiv yR_{\#}^{M_{\#}} \bmod p. \tag{1.6}$$

В соотношении (1.6) все параметры известны кроме $R_{\#}$. Если $(M_{\#}, p-1) = 1$, что возможно, то тогда:

$$R_{\#} \equiv (y^{-1}a^{S_{\#}})^{M_{\#}^{-1}} \bmod p, \tag{1.7}$$

где $M_{\#}M_{\#}^{-1} \equiv 1 \bmod (p-1)$; но если $M_{\#}$- четно, тогда $(M_{\#}, p-1) \neq 1$ и невозможно определить $R_{\#}$ из (1.6), т.е. невозможно данным методом произвести взлом алгоритма и, следовательно, передача ложной конкатенации $|M_{0\#}\|R_{\#}\|S_{\#}|$ не осуществится.

Как уже отмечалось, осуществление условия четности для $M = H(M_0)$ не представляет сложности, однако, эта же цель достигается следующим вариантом рассмотренного алгоритма, формулы синтеза и проверки которого имеют следующий вид:

$$S \equiv (x + 2kM) \bmod (p-1), \tag{1.8}$$

$$a^S \equiv yR^{2M} \bmod p. \tag{1.9}$$

Рассмотрим этот вариант. Попытка авторов, взломать формулу синтеза (1.8), оказалось безрезультатной. Рассмотрение формул (1.6) и (1.7) показывает, что настоящий вариант подобно предшествующему устойчив к рассмотренной атаке, т.к. $2M$ всегда четная величина.

2. Построение второго алгоритма

Как и выше, в кратком изложении формулы синтеза и проверки данного алгоритма имеют соответственно, следующый вид:

$$S \equiv (x + kRM) \bmod q \tag{2.1}$$

и

$$a^S \equiv yR^{RM} \bmod p. \tag{2.2}$$

Конкатенация составит следующую информационную запись:

$$\left|M_0\right\|R\left\|S\right| \quad , \tag{2.3}$$

где $M = H(M_0)$, M_0- передаваемая информация, защищенная протоколом; $R \equiv a^k \bmod q$ и S - пара подписей; k - случайное число для одноразового пользования, как обычно, хранимое в секрете.

Если параметры алгоритма рассмотреть как элементы подгруппы циклической группы поля Галуа $GF(p)$, тогда для выбора основных параметров устанавливается следующий порядок выбора:

p - простое число высокого порядка (например, между 509 и 512 битами);

q - простое число, множитель $p-1$, несколько меньшего, но определенного порядка;

a - генератор подгруппы, любое число, меншее $p-1$, для которого $a^q \bmod p \equiv 1$;

x - секретный ключ, $0 < x < q$;

y - открытый ключ, вычисляется по x: $y \equiv a^x \bmod p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Schneier B.** Applied cryptography. John Wiley and Sons. Inc. New York. 1996
2. **Diffie W.** and **Hellman M. E.** New direction in cryptography. IEEE Trans. on Inf. Theory, v. IT-22, n. 6., Nov. pp. 644-654, 1976.
3. **Rivest R. L., Shamir A.** and **Adleman L.M.** A method for obtaining digital signature and public-key cryptosystems. Communications of the ACM, v. 21, n. 2. Feb. pp. 120-126, 1978.
4. **ElGamal T. A**. Public-key cryptosystem and signature scheme based on discrete logarithms. – *IEEE Trans. on Inf. Theory*, v. IT-31, n. 4. pp. 469-472.

რიჩარდ მეგრელიშვილი, მალხაზ ჭელიძე, თამარ გნოლიძე, ქეთევან ჭელიძე

ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების სინთეზის შესახებ

ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების უმრავლესობა ეფუძნება გალუას $GF(p)$ ველში დისკრეტული ლოგარითმების, ფესვის ამოღებისა და ფაქტორიზაციის პრობლემებს [1-3].

წინამდებარე ნაშრომში ავტორები იკვლევენ ციფრული ხელმოწერის შესაძლო ვარიანტებს, რომლებიც, აგრეთვე, იყენებს დისკრეტული ლოგარითმების პრობლემას (ანუ $g^x \equiv y \bmod p$ ცალმხრივ ფუნქციას). მათემატიკური საფუძვლების სივიწროვე, ცხადია, ართულებს ალტერნატიული კრიპტოგრაფიული ალგორითმების აგებას. ამავე დროს აღსანიშნავია, რომ, როგორც სხვა ცნობილ შემთხვევებში, პროტოტიპად (საწყის ვარიანტად) გამოყენებულია ერთ-ერთი, კერძოდ, ელგამალის სქემა [4], რათა გარკვეული ელემენტის შემოტანის შედეგად მივიღოთ ალგორითმის, როგორც ვარიანტის, ახალი სტრუქტურული თვისობრიობა.

არსებული ალგორითმების სახესხვაობები და ფუნქციონირება ითვალისწინებს გარკვეულ პროტოკოლურ შეზღუდვებსა და პირობითობას. ამის მაგალითია თუნდაც ის, რომ ელგამალის ალგორითმი კრძალავს ერთ-ერთი პარამეტრის სიდიდის განმეორებით გამოყენებას ხელმოწერის სხვადასხვა სეანსში.ელგამალის ალგორითმის [4] სინთეზის ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$M_1 \equiv (xR_1 + k_1S_1) \bmod (p-1) \quad (1)$$

სადაც M არის პირველი სეანსის M_0 ინფორმაციის ჰეშირებული სიდიდე $M = H(M_0)$; x-ინფორმაციის გამგზავნი სუბიექტის საიდუმლო გასაღები; k - ერთჯერადი შემთვევითი საიდუმლო სიდიდე; $R \equiv a^k \bmod p$ და S-ხელმოწერის წყვილი, $1 < a < p$; p-მაღალი რიგის მარტივი რიცხვი (a და p ღიაა).

განვიხილოთ სინთეზის (1) ფორმულის განსხვავებული, გამარტივებული ვარიანტი:

$$S \equiv (x + kM) \bmod (p-1). \quad (2)$$

შემოწმების ფორმულა შესაბამისად არის:

$$a^S \equiv yR^M \bmod p, \quad (3)$$

სადაც $y \equiv a^x \bmod p$- ღია გასაღები, ხოლო $M = H(M_0)$ სიდიდისათვის საჭიროა დამატებითი პირობის შემოტანა, რომ ის ჰეშირების შემდეგ საჭიროების შემთხვევაში გარდაიქმნას ისე, რომ დაკმაყოფილდეს პირობა: $2|M$ (M სიდიდის ლუწობის პირობა, რაც მარტივად განხორციელდება). M სიდიდის ლუწობის პირობის შემოტანა დაიცავს ალგორითმს გატეხვისაგან.

ჰეშირების შემდეგ M სიდიდისათვის ლუწობის პირობის შესრულება არ წარმოადგენს რთულ ოპერაციას, მაგრამ შესაძლებელია სინთეზის და შემოწმების ფორმულისათვის განხილული ალგორითმის შემდეგი ვარიანტიც:

$$S \equiv (x + 2km) \bmod (p-1), \quad (4)$$

$$a^S \equiv yR^{2M} \bmod p. \quad (5)$$

გატეხვის მცდელობამ სინთეზის (4) ფორმულის მიმართ შედეგი არ გამოიღო. რაც შეეხება შემოწმების (5) ფორმულას, (2) და (3)-ე ფორმულების განხილვამ აჩვენა, რომ განხილული მეთოდით გატეხვის მცდელობა უშედეგო უნდა იყოს, რადგან $2M$ სიდიდე უპირობოდ ლუწია.

ნაშრომში განხილულია, აგრეთვე, მეორე ალტერნატიული მეთოდი, რომლის სინთეზის და შემოწმების ფორმულებს, შესაბამისად, აქვს შემდეგი სახე:

$$S = (x + kRM) \bmod q \quad (6)$$

და

$$a^s \equiv yR^{RM} \bmod p \,. \tag{7}$$

ინფორმაციული გზავნილისა და ხელმოწერის კონკატენაცია ქმნის შემდეგ ჩანაწერს:

$$|M_0 \| R \| S|, \tag{8}$$

სადაც $M \equiv H(M_0)$, M_0-გადაცემული ინფორმაციაა, რომელიც პროტოკოლით არის დაცული; $R \equiv a^k \bmod q$ და S - ხელმოწერის წყვილი; k-ერთჯერადი გამოყენების შემთხვევითი, საიდუმლო რიცხვია.

RICHARD MEGRELISHVILI, MALKHAZ CHELIDZE, TAMAR GNOLIDZE, KETEVAN CHELIDZE

ABOUT THE SINTHESIS OF DIGITAL SIGNATURES ALGORITHMS

There are discussed the available variants of construction the algorithms of digital signatures. The algorithms, as many ather algorithms, are obtained from the simplification of the algorithm of El-Gamal. The main objective is to change the functionality of some parameters, in a result we obtain the necessary structural alternation.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

ОЛЕГ НАМИЧЕЙШВИЛИ, АРЧИЛ ЭЛИЗБАРАШВИЛИ, ГУРАНДА ЧАРКСЕЛИАНИ

АДАПТАЦИЯ В СИСТЕМЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА

Аннотация: В работе для резервировании бинарных информационных каналов на основе модели формального нейрона излагается теория *непрерывной адаптации без обратной связи* по алгоритму, использующему подходы Роббинса-Монро и Уидроу-Хоффа.

1. Введение

Допустим, что двоичный сигнал x, кодируемый, скажем, как $+1$ и -1, подаётся на n однотипных информационных каналов $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Из-за возможных ошибок каналов значение переменной x оказывается вычисленным как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В результате получают n версий для значения предъявленной к распознаванию переменной x. Разумеется, каждая из величин $x_i (i = \overline{1,n})$ также является двоичной переменной, принимающей значения $+1$ и -1. Эта избыточная информация (в форме n версий для значения переменной x) поступает далее на входы т.н. решающего, или восстанавливающего элемента (органа).

Если вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ошибок двоичных каналов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ различны и, следовательно, каждой информации x_i, поступающей с выхода двоичного канала B_i на $i-$й вход решающего элемента, приходится приписывать свой вес $a_i \left(i = \overline{1,n}\right)$, где a_i - произвольное вещественное число $\left(-\infty < a_i < +\infty\right)$, то в данном случае решение y на выходе этого элемента должно выноситься как результат взвешенного голосования, согласно следующему соотношению:

$$y = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \Theta\right),$$

где Θ - так называемый порог, или кворум элемента. В силу последнего обстоятельства этот элемент (орган) часто именуют также пороговым, или кворумным.

Формально допустим, что $\Theta = a_{n+1}$, а $x_{n+1} \equiv -1$. Последнее означает, что имеется некоторый информационный канал B_{n+1}, всегда выдающий сигнал $x_{n+1} \equiv -1$, какой бы сигнал x на его вход ни поступал. Тогда предыдущему соотношению можно придать и следующий вид:

$$y = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right).$$

Иногда удобно трактовать x, y и $x_i (i = \overline{1,n})$ в качестве дискретных случайных величин X , Y и X_i соответственно. Легко видеть, что дискретная случайная величина $X \cdot X_i$ принимает значение -1 при $X_i = \neg X$ (где $\neg X$ означает инверсию двоичной переменной X) с вероятностью q_i и значение $+1$ при $X_i = X$ с вероятностью $1 - q_i$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Prob}\{X \cdot X_i = -1\} = \mathrm{Prob}\{X_i \neq X\} = q_i \\ \mathrm{Prob}\{X \cdot X_i = +1\} = \mathrm{Prob}\{X_i = X\} = 1 - q_i \\ \quad i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}.$$

В частности

$$\left.\begin{array}{l} q_{n+1} = \mathrm{Prob}\{X \cdot X_{n+1} = -1\} = \mathrm{Prob}\{X = +1\} \\ 1 - q_{n+1} = \mathrm{Prob}\{X \cdot X_{n+1} = +1\} = \mathrm{Prob}\{X = -1\} \end{array}\right\},$$

так как $X_{n+1} = -1$. Из последних формул следует, что q_{n+1} есть априорная вероятность подачи на решающий орган для распознавания сигнала $X = +1$, т.е. q_{n+1} есть априорная вероятность появления $+1$ на выходе порогового элемента в качестве правильного сигнала. Аналогично, $1 - q_{n+1}$ есть априорная вероятность подачи на вход решающего органа сигнала $X = -1$, или, что то же самое, априорная вероятность появления -1 на выходе порогового элемента в качестве правильного решения.

Процесс управления весами входов (т.е. бинарных информационных каналов) системы резервирования по описанной модели формального нейрона условимся трактовать в качестве адаптации [1], или обучения. Целью этого процесса является приведение весов в соответствие с текущими вероятностями ошибок входов и уменьшение вероятности Q неправильного восстановления сигнала X :

$$Q = \mathrm{Prob}\{Y \neq X\}.$$

Задачей такого управления является обеспечение более надёжным входам большего влияния на принимаемое решение по сравнению с менее надёжными входами. Следовательно, в каждый момент времени t вес a_i $\left(-\infty < a_i < +\infty\right)$ $i-$го $\left(i = \overline{1, n+1}\right)$ входа решающего элемента (органа) должен определяться вероятностью ошибки этого входа $q_i(t)$ в указанный момент:

$$a_i = f_a\left(q_i(t)\right) \cdot$$

Процесс управления весами усложнён тем обстоятельством, что мы не располагаем использующими те или иные физические явления датчиками вероятностей $q_i(t)$ ошибок. Могут определяться лишь статистические оценки этих вероятностей по рассогласованию сигнала X_i, выданного информационным каналом B_i, либо с истинным значением X предъявленной к распознаванию двоичной переменной (кодируемой как ± 1), либо с принятым пороговым органом решением Y. В зависимости от этого, дело могут иметь с двумя типами адаптации, когда сравнение происходит либо с правильным ответом, подаваемым извне, либо с решением на выходе.

Независимо от наличия обратной связи, в процессе адаптации можно либо фиксировать число наблюдений в тактовые моменты и веса входов порогового элемента устанавливать в конце определённых циклов, включающих заданное число наблюдений в тактовые моменты, либо для оценки вероятностей ошибок на каждом входе использовать устройства, корректирующие веса после каждого сравнения, происходящего в тактовые моменты времени. Исходя из этого признака, различают адаптации с циклической и непрерывной коррекцией весов. По способу фиксации тактового момента для осуществления коррекции можно указать и третий вид адаптации, когда изменения весов происходят в случайные моменты времени по достижении информационными каналами некоторых состояний. В частности, критическое состояние канала B_i может определяться и соответствующим предельно допустимым значением q_0 вероятности ошибки q_i.

Использование схем адаптации без обратной связи ограничено задачами начальной настройки весов и их периодической (плановой) или случайной установки с помощью тестирующих программ. Ниже для резервировании бинарных информационных каналов на основе модели формального нейрона излагается теория *непрерывной адаптации без обратной связи* по алгоритму, использующему подходы Уидроу-Хоффа [2] и Роббинса-Монро [3].

2. Формулировка проблемы. Достаточно очевидно, что в принципе возможна такая организация адаптации порогового органа, когда при оценке вероятностей ошибок на его входах веса этих входов перестраивают не в конце цикла по итогам M сравнений, а перманентно, после каждого сравнения. Алгоритм такой адаптации может представлять процедуру типа *поощрения и наказания*. В этом случае на $(k+1)-\vee$ шаге алгоритм вносит изменения в вектор весов $\vec{a}(k)$ предыдущего шага по-разному, в зависимости от того, правильно или неправильно был классифицирован с помощью вектора $\vec{a}(k)$ образ на $k-\vee$ шаге адаптации. В частности, если образ классифицирован правильно, то поощрение может заключаться и в том, что в вектор весов просто не вносится никаких изменений, а если образ классифицирован неправильно, то пороговый орган наказывается либо увеличением, либо уменьшением вектора весов. При этом, согласно сказанному, заключение о правильном или неправильном распознавании информационными каналами $B_1, B_2, \cdots, B_n$ сигнала X может делаться как сравнением сигналов X_i $\left(i=\overline{1, n}\right)$ на входах с подаваемым извне правильным ответом, так и их сравнением с решением Y. Иногда, вместо сравнения X или Y с каждым отдельным сигналом X_i, может применяться сравнение X или Y с результатом коллектовного взаимодействия отдельных сигналов, т.е. с сигналом, снятым с сумматора порогового органа (до поступления этого сигнала на вход квантующего нелинейного устройства). Именно такова показанная на рисунке 1 схема исследуемого нами метода адаптации.

Предположим, что сигнал X представляет собой случайную последовательность $+1$ или -1 в соответствии с априорными вероятностями $q_{n+1} = P(\Omega_1)$ и $1 - q_{n+1} = P(\Omega_2)$ появления этих двух классов. При этом на входах порогового органа возникает вектор наблюдений $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\right)'$ в соответствии с вероятностными законами

$$P(\vec{x}/\Omega_1) \equiv f_1(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\frac{1-x_i}{2}} \cdot (1-q_i)^{\frac{x_i+1}{2}}, \tag{1}$$

$$P(\vec{x}/\Omega_2) \equiv f_2(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\frac{x_i+1}{2}} \cdot (1-q_i)^{\frac{1-x_i}{2}}, \tag{2}$$

где $x_{n+1} \equiv -1$.

Для каждого вектора наблюдений $\vec{x}$ введём случайную переменную классификации, или метку Z, такую, что

$$Z = +m_0$$

при $\vec{x}$, соответствующем сигналу $X = +1$ (классу Ω_1), и

$$Z = -m_0$$

при $\vec{x}$, соответствующем сигналу $X = -1$ (классу Ω_2). Здесь $0 < m_0 < \infty$. Для этого достаточно Z формировать по соотношению

$$Z = m_0 \cdot X. \tag{3}$$

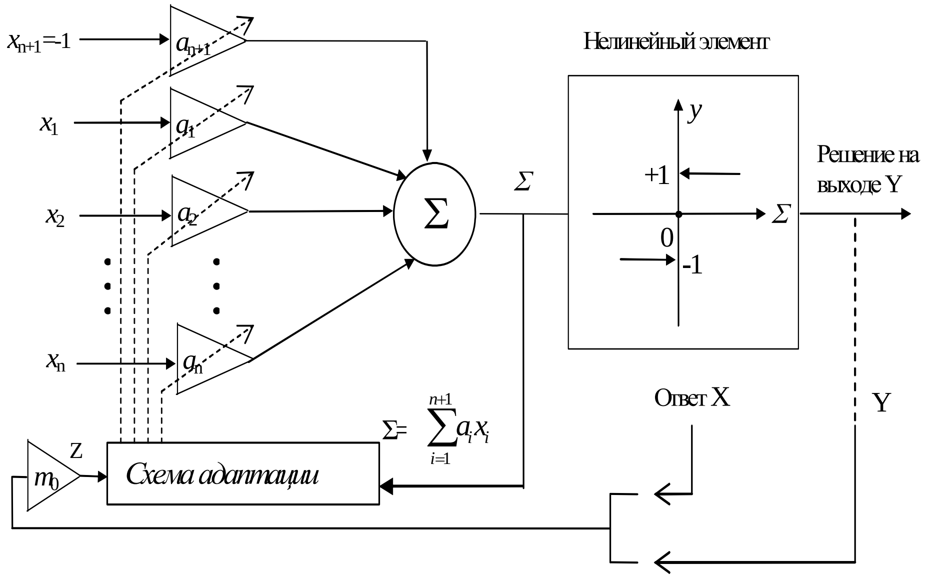


Рис.1 Схема исследуемого метода адаптации

Тогда в процессе адаптации данные будут представляться последовательностью пар

$$\left(\vec{x}(1), Z_1\right), \quad \left(\vec{x}(2), Z_2\right), \quad \cdots, \quad \left(\vec{x}(k), Z_k\right), \quad \cdots .$$

Байесовская разделяющая функция, с учётом формул (1) и (2), имеет вид:

$$\mathrm{Y}_0(\vec{x}) = \ln \frac{P\left(\vec{x} / \Omega_1\right)}{P\left(\vec{x} / \Omega_2\right)} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \ln \frac{1-q_i}{q_i} . \tag{4}$$

Цель адаптации в том и состоит, чтобы, во-первых, аппроксимировать $\mathrm{Y}_0(\vec{x})$ с неизвестными параметрами $q_i \ \left(i = \overline{1, n+1}\right)$ посредством конечного ряда

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot a_i \tag{5}$$

и, во-вторых, определить весовой вектор $\vec{\hat{a}} = \left(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}\right)'$, минимизирующий среднеквадратическую ошибку аппроксимации

$$\varepsilon_0^2 = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - \mathrm{Y}_o(\vec{x})\right)^2\right]. \tag{6}$$

Для минимизации ε_0^2 достаточно знать байесовскую разделяющую функцию $\Upsilon_0(\vec{x})$, определяемую формулой (4) с неизвестными точно значениями вероятностей q_i $\left(i = \overline{1, n+1}\right)$.

Чтобы обойти это затруднение, будем рассматривать Z в качестве зашумленного значения функции $\Upsilon_0(\vec{x})$. Тогда весовой вектор $\vec{\hat{a}} = \left(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}\right)'$, минимизирующий ε_0^2, также будет минимизировать и функцию критерия

$$J(\vec{x},\vec{a}) = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - Z\right)^2\right]. \tag{7}$$

Взяв частные производные функции критерия по весам a_i, получим:

$$\left.\begin{array}{c} G_{0i}(\vec{x},\vec{a}) = \dfrac{\partial J(\vec{x},\vec{a})}{\partial a_i} = M\left[2\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j - Z\right)\cdot x_i\right] \\ i = \overline{1, n=1} \end{array}\right\}.$$

Полагая, что, вместо действительных значений $G_{0i}(\vec{x},\vec{a})$, наблюдают их зашумленные значения

$$\left.\begin{array}{c} h_{0i}(\vec{x},\vec{a}) = 2\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j - Z\right)\cdot x_i \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}, \tag{8}$$

такие, что

$$\left.\begin{array}{c} M\left[h_{0i}(\vec{x},\vec{a})\right] = G_{0i}(\vec{x},\vec{a}) \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}$$

и

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_i^2(\vec{x},\vec{a}) = M\left[\left(G_{0i}(\vec{x},\vec{a}) - h_{0i}(\vec{x},\vec{a})\right)^2\right] < L \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}$$

при всех значениях весов $a_i\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$, где $L<\infty$ - пложительная константа, можно воспользоваться алгоритмом Роббинса-Монро [3] для итеративного определения нуля $\hat{a}_i$ функции $G_{0i}\left(\vec{x},\vec{a}\right),\ i=\overline{1,n+1}.$

Обозначив через $a_i(1)$ произвольную начальную оценку корня уравнения

$$G_{0i}\left(\vec{x},\vec{a}\right)=0\ ,$$

а через $a_i(k)$ - произвольную начальную оценку этого корня, полученную на $k-$м шаге итерации, процедуру коррекции с помощью алгоритма Роббинса-Монро выражают в виде соотношения

$$\left.\begin{array}{c} a_i(k+1)=a_i(k)-\beta_k\cdot h_{0i}\left(\vec{x}(k),\vec{a}(k)\right) \\ i=\overline{1,n+1} \end{array}\right\}, \tag{9}$$

где β_k - элемент последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k=\infty \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2<\infty \end{array}\right\}. \tag{9$'$}$$

Примером такой последовательности может служить гармонический ряд.

Следовательно, коррекции оценок, вводимые алгоритмом Роббинса-Монро, пропорциональны значению $h_{0i}\left(\vec{x}(k),\vec{a}(k)\right)$ в предыдущем наблюдении.

Подставляя (8) в общее выражение (9), будем иметь:

$$\left.\begin{array}{c} a_i(k+1)=a_i(k)+\rho_k\cdot x_i(k)\cdot\left[Z_k-\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_j(k)x_j(k)\right] \\ i=\overline{1,n+1} \end{array}\right\}, \tag{10}$$

где $\rho_k=2\cdot\beta_k$.

Соотношение (10) по существу выражает алгоритм коррекции, которым пользовались в работе [2] Уидроу и Хофф. В нашем же случае для стохастического приращения $i-$го веса

$$\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k),$$

производимого на $(k+1)-$м шаге итерации, оно примет следующий вид

$$\left.\begin{array}{c} \Delta a_i(k) = \rho_k \cdot X_i(k) \cdot \left[m_0 X - \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \right] \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что после каждого вычисления приращения весов отдельных входов одинаковы по величине, но могут различаться по знаку, чтобы уменьшить ошибку между истинным значением сигнала и значением входа на нелинейный элемент.

Дальнейшее исследование ставит целью:

- нахождение математического ожидания для величины приращения (11);
- получение выражений для весов, соответствующих установившемуся состоянию, когда математические ожидания величин (11) равны нулю.

3. Решение задачи. Предположим, что ошибки на входах порогового элемента независимы, и запишем (11) в виде:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta a_i(k) = \rho_k m_0 X X_i(k) - \rho_k X_i(k) \cdot \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}.$$

Здесь

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) + a_i(k) X_i(k),$$

где $j \neq i$ условие при символе суммы означает отсутствие в этой сумме слагаемого с индексом i.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\Delta a_i(k) = m_0\rho_k XX_i(k) - \rho_k\cdot X_i(k)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)X_j(k) - \rho_k a_i(k)X_i^2(k)\\ i=\overline{1,n+1}\end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Для математических ожиданий отдельных слагаемых правой части соотношения (12) имеем:

$$M\left[m_0\rho_k XX_i(k)\right] = m_0\rho_k\left[\left(1-q_i\right)\cdot 1 + q_i\cdot(-1)\right] = m_0\rho_k\left(1-2q_i\right), \quad (13)$$

$$M\left[\rho_k a_i(k)\cdot X_i^2(k)\right] = \rho_k a_i(k). \quad (14)$$

Что касается математического ожидания слагаемого

$$\rho_k\cdot X_i(k)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)X_j(k),$$

его следует вычислить при двух условиях, когда $X=+1$ и $X=-1$.

Имеем:

$$M\left[\rho_k X_i(k)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)X_j(k) \Big/ X=+1\right] = \rho_k\cdot\left(1-2q_i\right)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}M\left[\rho_k X_i(k)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)X_j(k) \Big/ X=-1\right] &= \rho_k\cdot\left(2q_i-1\right)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(2q_j-1\right) =\\ &= \rho_k\cdot\left(1-2q_i\right)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right).\end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, выражения (15) и (16) совпадают, и можно утверждать, что, независимо от предъявленного к распознаванию класса,

$$M\left[\rho_k X_i(k)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)X_j(k)\right] = \rho_k\cdot\left(1-2q_i\right)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right). \quad (17)$$

С учётом соотношений (13), (14) и (17) будем иметь:

$$\left. \begin{array}{c} M\left[\Delta a_i(k)\right] = \rho_k \left\{ \left(1-2q_i\right)\cdot\left[m_0 - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right)\right] - a_i(k)\right\} \\ i=\overline{1, n+1} \end{array} \right\}. \qquad (18)$$

Поскольку здесь

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right) - a_i(k)\left(1-2q_i\right),$$

то, учитывая последнее обстоятельство в формуле (18), придём к выражению

$$\left. \begin{array}{c} M\left[\Delta a_i(k)\right] = \rho_k \left\{ \left(1-2q_i\right)\cdot\left[m_0 - \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right)\right] + a_i(k)\left(1-2q_i\right)^2 - a_i(k)\right\} \\ i=\overline{1, n+1} \end{array} \right\}.$$

Легко видеть, что

$$a_i(k)\cdot\left(1-2q_i\right)^2 - a_i(k) = -4\,a_i(k)\cdot q_i\cdot\left(1-q_i\right).$$

Следовательно

$$\left. \begin{array}{c} M\left[\Delta a_i(k)\right] = \rho_k \left\{ \left(1-2q_i\right)\cdot\left[m_0 - \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j(k)\left(1-2q_j\right)\right] - 4a_i(k)q_i\left(1-2q_i\right)\right\} \\ i=\overline{1, n+1} \end{array} \right\}. \qquad (19)$$

Этим завершена первая часть нашего исследования, а именно: найдено математическое ожидание для величины приращения (11).

Теперь приступим ко второй части проблемы, т.е. к получению выражений для весов, соответствующих установившемуся состоянию, когда математические ожидания величин (11) равны нулю.

Поскольку алгоритм Роббинса-Монро сходится при условии (9'), то для некоторого конечного значения k веса перестанут меняться (в среднем). В этом установившемся состоянии начнут выполняться равенства

$$\left. \begin{array}{c} M\left[\Delta a_i(k)\right] = 0 \\ i=\overline{1, n+1} \end{array} \right\}. \qquad (20)$$

Значения весов, при которых достигается такое состояние, обозначим через $\hat{a}_i$. Тогда для $\hat{a}_i \left(i = \overline{1, n+1}\right)$ будем иметь следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{a}_i = \dfrac{1-2q_i}{2q_i\left(1-q_i\right)} \cdot \dfrac{m_0 - \sum\limits_{j=1}^{n+1} \hat{a}_j\left(1-2q_j\right)}{2} \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}. \tag{21}$$

Легко видеть [4], что величины

$$\left.\begin{array}{c} a_{i\,m} = \dfrac{1-2q_i}{2q_i\left(1-q_i\right)} \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\} \tag{22}$$

представляют собой такие веса, которые доставляют махаланобисову расстоянию [5] между множествами значений случайной суммы

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{n+1} a_j X_j$$

в классах Ω_1 и Ω_2 максимальное значение. С оптимальными же в байесовском смысле (т.е. в смысле максимума апостериорной вероятности) весами

$$\left.\begin{array}{c} a_{i\,e} = \ln\dfrac{1-q_i}{q_i} \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\} \tag{23}$$

они связаны через гиперболический синус по соотношениям [4]

$$\left.\begin{array}{c} a_{im} = \sinh\left(a_{ie}\right) \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}, \tag{24}$$

где $\sinh x$ - принятое во многих странах обозначение для гиперболического синуса с аргументом x (в России чаще используется символика $\mathrm{sh}x$). Следовательно, вводя константу γ, зависящую от величины установившихся весов, получим:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{a}_i = \gamma \cdot a_{i\,m} = \gamma \cdot \sinh\left(a_{i\,e}\right) \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}, \tag{25}$$

где

$$\gamma = \frac{m_0 - \sum_{j=1}^{n+1} \hat{a}_j \left(1 - 2q_j\right)}{2}. \qquad (26)$$

Выражению для γ можно придать и более компактный вид, если учесть то обстоятельство, что максимальное значение $\rho_{\max}$ махаланобисова расстояния ρ определяется соотношением

$$\rho_{\max} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\left(1 - 2q_j\right)^2}{q_j\left(1 - q_j\right)} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_{j\,m}\left(1 - 2q_j\right). \qquad (27)$$

В самом деле, с учётом выражений (25) и (27) формула (26) приобретает следующий вид:

$$\gamma = \frac{m_0 - \gamma \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_{j\,m}\left(1 - 2q_j\right)}{2} = \frac{m_0 - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \rho_{\max}}{2}.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{2m_0}{4 + \rho_{\max}}. \qquad (28)$$

Подставляя выражение (28) в формулу (25), получим:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{a}_i = \dfrac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} \cdot a_{i\,m} = \dfrac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} \sinh\left(a_{i\,e}\right) \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\}. \qquad (29)$$

Этим завершена вторая часть нашего исследования, а именно: получено выражение для весов, соответствующих установившемуся состоянию.

4. Заключение. Таким образом, в процессе непрерывной адаптации без обратной связи математическое ожидание для величины осуществляемого на $\left(k+1\right)$ – м шаге итерации стохастического приращения (11) i – го веса выражается соотношением (19). Кроме того, устанавливаются веса, пропорциональные тем, которые доставляют максимум махаланобисову расстоянию. Согласно результатам работы [4], функционирование с такими весами можно классифицировать как почти оптимальное.

Приведённые выше рассуждения остаются справедливыми и в случае *непрерывной адаптации с обратной связью*, но в этом случае вместо q_i следует подставлять вероятность δ_i рассогласования $i-$го входа X_i с выходом Y восстанавливающего органа. Тогда веса входов в состоянии равновесия $\hat{a}_i$ будут пропорциональны $\sinh\left(\ln\frac{1-\delta_i}{\delta_i}\right)$.

Введение ограничений на допустимые значения весов входов преследует целью:

– исключить случай, когда значение гиперболического синуса существенно превосходит значение своего аргумента;

– избежать занижения оценки вероятности ошибки на входе.

Литература

1. **W. H. Pierce.** Failure-tolerant Computer Design // Department of Electrical Engineering, Carnegie Institute of Technology, *Pittsburgh, Pennsylvania.-New York and London: Academic Press,* 1965.
2. **B. Widrow, M. Hoff**. Adaptive Switching Circuits // *IRE Wescon Convention Record*.-1960.-Pt 4.-P.96-104.
3. **H. Robbins , S. Monro.** A Stochastic Approximation method // *Ann. Math. Stat.*-1951.-V.22.-P.400-407.
4. **J. G. Gogiashvili, O. M. Namicheishvili, G. G. Chonia.** Optimization of Weights for Threshold Redundancy of Binary Channels by the Method of (Mahalanobis') Generalised Distance // *MMR'2000 - «Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability: Methodology, Practice and Interference»* - Abstracts' Book: Université Victor Segalen Bordeaux 2.-Bordeaux, France.-2000.-V.1.- P.463-466.
5. **P. C. Mahalanobis**. On the Generalized Distance in Statistics // Proceedings of the National Institute of Sciences of India.- 1936.-V.12.-P.49-55.

არჩილ ელიზბარაშვილი, ოლეგ ნამიჩეიშვილი,
გურანდა ჩარქსელიანი

ფორმალური ნეირონის მოდელზე აგებული დარეზერვების სისტემის ადაპტაცია

განხილულია უწყვეტი ადაპტაცია უკუკავშირის გარეშე ისეთი ალგორითმის საფუძველზე, რომელიც რობინს-მონროსა და უიდროუ-ჰოფის მიდგომებს იყენებს. ამ შემთხვევაში მყარდება მაჰალანობისის მანძილისათვის მაქსიმუმის მიმნიჭებელი წონების პროპორციული სიდიდეები.

უწყვეტი ადაპტაციის დროს უკუკავშირის გარეშე რობინს-მონროსა და უიდროუ-ჰოფის ალგორითმის საფუძველზე $i-$ური წონის

$$\Delta a_i\left(k\right)=a_i\left(k+1\right)-a_i\left(k\right)$$

შემთხვევითი ნაზრდი, რომელიც იტერაციის $\left(k+1\right)$ ბიჯზე ხორციელდება, განისაზღვრება მხოლოდ სხვაობით ზღურბლური ელემენტის შესასვლელებზე სიგნალების აწონილ ჯამსა და ამ ჯამზე დადებულ m_0 შეზღუდვას შორის. ამიტომ ყოველ ბიჯზე წონათა ნაზრდის აბსოლუტური სიდიდე ერთნაირი რჩება ყველა შესასვლელისათვის. დამყარებულ მდგომარეობაში ამ ნაზრდების მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია:

$$\left.\begin{array}{c} M\left[\Delta a_i\left(k\right)\right]=0 \\ i=\overline{1,n+1} \end{array}\right\}.$$

$\hat{a}_i$ წონები, რომელზეც ასეთი მდგომარეობა იქნება მიღწეული, განსაზღვრულია შემდეგი თანაფარდობით:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{a}_i=\dfrac{2m_0}{4+\rho_{\max}}\cdot a_{im} \\ i=\overline{1,n+1} \end{array}\right\},$$

სადაც

$$\left.\begin{array}{c} a_{im}=\dfrac{1-2q_i}{2q_i\left(1-q_i\right)} \\ i=\overline{1,n+1} \end{array}\right\}$$

მაჰალანობისის მანძილისათვის მაქსიმუმის მიმნიჭებელი წონებია, ხოლო $\rho_{\max}$ წარმოადგენს მაჰალანობისის მანძილის ხსენებულ მაქსიმალურ მნიშვნელობას. სახელდობრ,

$$\rho_{\max} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\left(1-2q_j\right)^2}{q_j\left(1-q_j\right)}.$$

OLEG NAMICHEISHVILI,ARCHIL ELIZBARASHVILI, GURANDA CHARKSELIANI

ADAPTATION IN REDUNDANT SYSTEM BASED ON FORMAL NEURON MODEL

According to the Robbins – Monro and Widrow – Hoff algorithm, during continuous adaptation without feedback, stochastic increment of weight *i* at the $(k+1)$ iteration step

$$\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k) ,$$

is determined by the difference of the weighted average of signals at the entries of the threshold element, taking into consideration constraint m_0, as applied to this sum. Therefore, at each step the absolute value of weight increments is the same for all entries. At the established state mathematical expectation of these increments is equal zero:

$$\left.\begin{array}{c} M\left[\Delta a_i(k)\right] = 0 \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\} .$$

Weights $\hat{a}_i$, at which such state is achieved satisfy equations

$$\left.\begin{array}{c} \hat{a}_i = \dfrac{2m_0}{4+\rho_{\max}} \cdot a_{i\,m} \\ i = \overline{1, n+1} \end{array}\right\} ,$$

where

$$\left.\begin{aligned} a_{i\,m} &= \frac{1-2q_i}{2q_i\left(1-q_i\right)} \\ i &= \overline{1,\, n+1} \end{aligned}\right\}$$

are weights that maximize the Mahalanobis' generalized distance and $\rho_{\max}$ is the maximum value of that distance. Particularly,

$$\rho_{\max} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\left(1-2q_j\right)^2}{q_j\left(1-q_j\right)} .$$

Operating with such weights can reliably be considered to be very close to optimal.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

GOGI PANTSULAIA

ON A CERTAIN EXAMPLE OF A NON-LOCALLY COMPACT NON-ABELIAN POLISH GROUP WHICH DOES NOT SATISFY CCC

Abstract. Let R^{∞} be a group of all real-valued sequences defined on the set of all natural numbers N with usual addition operation ”+ ” and O_n be a group of all rotations of the n- dimensional Euclidean vector space R^n about its origin for $n \geq 3$. We prove that, for an arbitrary cardinal number $1 \leq \alpha \leq \omega$, a group $R^{\infty} \times (O_n)^{\alpha}$ is such a non-locally compact non abelian Polish group which does not satisfy a countable chain condition.

Introduction

In this paper we discuss a property called the countable chain condition of the σ- ideal of shy sets in some spaces.

Definition 1.1 Let G be a Polish group. An ideal $\Im$ of subsets of G is said to sat isfy the countable chain condition if each disjoint family of universally measurable sets in G that does not belong to $\Im$ is at most countable.

We also say that the group G does not satisfy the countable chain condition if the ideal $\Im$ does not satisfy the countable chain condition(CCC).

In 1973 Christensen [2] asked whether any family of disjoint universally measur able non shy sets in a Polish group must be countable. This is obviously true in finite dimensional spaces. Dougherty [4] answered this problem affirmatively in the abelian Polish group R^{∞}.Dougherty [4] conjectured that a Polish group G satisfies the countable chain condition only if G is locally compact. Later Solecki [9] showed that the σ-ideal of shy sets in a Polish group admitting an invariant metric satisfies the countable chain condition iff this group is locally compact. The following problem is still open.

Problem 1.1. [6, Problem 14,p.150] Is it true that the σ-ideal of shy sets in a non-abelian Polish group satisfies the countable chain condition iff the group is locally compact?

Hongjian Shi showed that, the σ-ideal of shy sets in non-locally compact non abelian completely metrizable group $\chi[0,1]$ does not satisfy the countable chaincondition, where $\chi[0,1]$ denotes the space of homeomorphisms on $[0,1]$ that leave 0 and 1 fixed(cf.[6], Chapter 5, p. 99).

The main goal of the present paper is to give another example of a non-locally compact non-abelian completely metrizable group which does not satisfy the count-able chain condition.

1. An example of a Non-locally Compact Non-abelian Polish Group which does not Satisfy CCC

We begin our discussion with some notions of ”small” sets in abelian Polish groups introduced by J.R.Christensen in [2].

Let $(G,\otimes,\rho)$ be a Polish group and let L be the class of all Borel probability measures on G. Let $\overline{\mu}$ denotes a completion of $\mu \in L$.

Definition 2.1 A class $U(G)$ of subsets of G, defined by

$$U(G) = \bigcap_{\mu \in L} dom(\overline{\mu}),$$

where $dom(\overline{\mu})$ denotes a domain of $\overline{\mu}$, is called the class of all universally measurable subsets of the abelian Polish group (G,Θ,ρ).

Definition 2.2 A universally measurable set S is called a shy set if there exists a probability measure μ on $U(G)$ such that $\mu(h \otimes S \otimes g) = 0$ for $h, g \in G$. The measure μ is called ”testing” measure for S.

Remark 2.1 Note the notion of shy set in Polish group extends a notion of Since in locally compact abelian Polish group G the notion of ”Haar zero sets” coincides with the notion of ”Haar measure zero sets”(cf.[2]), and the Haar measure on G is σ-finite, we easily get the following.

Lemma 2.1. Let O_n be a group of all rotations of the n-dimensional Euclidean vector space R^n about its origin for $n \geq 3$. Then a locally compact non-abelian Polish group $(O_n)^\alpha (1 \leq \alpha \leq \omega)$ satisfies CCC.

Lemma 2.2. Let N denotes the set of all natural numbers. Let R^{∞} be a group of all real-valued sequences defined on N with usual addition operation "+ ". Let a metric ρ on R^{∞} be defined by

$$\left(\forall (x_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N} \in R^{\infty} \to \rho((x_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1+|x_i - y_i|)}\right).$$

Then $(R^{\infty}, +, \rho)$ is an infinite-dimensional non-locally compact abelian Polish group. The following lemma shows that the infinite-dimensional non-locally compact abelian Polish group $(R^{\infty}, +, \rho)$ does not satisfy the countable chain condition.

Lemma 2.3. (R.Dougherty[4]) for $J \subseteq N$ we set

$$A_J = \{(x_i)_{i\in N} : x_i \geq 0 \;\; for \;\; i \in J \;\&\; x_i < 0 \;\; for \;\; i \in N \setminus J\}.$$

Then $(A_J)_{j\subseteq N}$ is a family of pairwise disjoint universally measurable (moreover,Borel)
non-shy sets in $(R^{\infty}, +, \rho)$.

Lemma 2.4. Let G_1 and G_2 be two Polish groups. Let X be a universally mea-surable non-shy set in G_1. Then a set $X \times G_2$ is a universally measurable non-shy set in the Polish group $G_1 \times G_2$.

Proof. Since X is the universally measurable non-shy set in G_1, it means that for an arbitrary Borel probability measure μ_1 on G_1 there exists an element $g_1 \in G_1$ such that $\overline{\mu_1}(g_1(X)) > 0$. Assume the contrary and let $X \times G_2$ be a shy set in

$G_1 \times G_2$. It means that there exists a Borel probability measure on $G_1 \times G_2$ such that for an arbitrary $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ we have $\overline{\mu}((g_1, g_2)(X \times G_2)) = 0$. We set where $U(G_1)$ denotes a σ-algebra of universally measurable subsets in G_1.

Since $\overline{\mu}((g_1, g_2)(X \times G_2)) = 0$ for every $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, moreover we get $\overline{\mu}((g_1, e_2)(X \times G_2)) = 0$, where e_2 denotes a unit element of the group G_2. Corre-spondingly, for every $g_1 \in G_1$, we get

$\mu_1(g_1(X)) = \overline{\mu}((g_1, e_2)(X \times G_2)) = 0$, which means that the probability measure μ_1 is the "testing" measure for the universally measurable set X.

Thus X is not non-shy and we get a contradiction.

This ends the proof of Lemma 2.4. We have the following proposition.

Theorem 2.1 For every α which $1 \le \alpha \le \omega$, $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ is such a non-locally compact non-abelian Polish group which does not satisfy a countable chain condition.

Proof. Note that for every α which $1 \le \alpha \le \omega$, $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ is a non-abelian group, because $(O_n)^\alpha$ is non-abelian. The same group is non-locally compact so $(R^\infty, +, \rho)$ is a non-locally compact group. It is clear also that $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ is a Polish group as a product of two Polish groups.

Let $\phi_1 = \{A_J : J \subseteq N\}$ is the family pairwise disjoint universally measurable non-shy sets in R^∞.

Let consider a family

$$\phi_1 = \left\{A_J \times (O_n)^\omega : J \subseteq N\right\}.$$

Following Lemmas 2.1 and 2.4, a set $A_J \times (O_n)^\omega$ is a universally measurable non-shy set in $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ for every $J \subseteq N$ and $\alpha \le \omega$. Obviously, ϕ_1 is a continual family of universally measurable pairwise disjoint subsets in $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ and Theorem 3.1 is proved.

In context to Theorem 2.1, we introduce the following

Definition 2.1. Let G be a Polish group and X be a universally measurable non-shy set in G and let α be a cardinal number which $1 \le \alpha \le 2^\omega$. The set X is said to be α-divisible if there exists a partition of X into universally measurable non-shy subsets

$$X = \bigcup_{i \in \Theta} X_i$$

such that $\mathrm{card}(\Theta) = \alpha$.

Now Christensen's, Dougherty's, Hongjian Shi's and our results can be formulate as follows:

Theorem 2.1 (J.Christensen[2]). An arbitrary locally compact Polish group is ω-divisible.

Theorem 2.2 (R.Dougherty[4]). An abelian Polish group $(R^\infty, +, \rho)$ is 2^ω-divisible.

Theorem 2.3 (H.Shi[6]) A non-locally compact non-abelian Polish group $\chi[0,1]$ is 2^ω-divisible.

Theorem2.4 A non-locally compact non-commutative Polish group $R^\infty \times (O_n)^\alpha$ is 2^ω-divisible for every _α which $1 \le \alpha \le \omega$.

Here naturally arise the following problems.

Problem 2.1 Is every universally measurable non-shy set in a non-locally com-pact Polish group 2^{ω}-divisible?

Problem 2.2 Let $\eta < 2^{\omega}$. Does there exists a universally measurable non-shy set in a non-locally compact Polish group G which is η-divisible and is not ξ-divisible for $\xi > \eta$?

Problem 2.3 Let a universally measurable non-shy set in a non-locally compact Polish group G is η-divisible. Does it follows that the same set is ξ-divisible for every $\xi < \eta$?

REFERENCES

1. **R. Brian Hunt, T. Sauer and J. A. Yorke.** Prevalence: a translation invariant ”almost every” on infinite dimensional spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 27 (1992), 217-238.
2. **J. P. R.Christensen**. On sets of Haar measure zero in Abeiian Polish groups. *Israel J.Math.* 13(1972), 255-260.
3. **Cichon, A. Kharazishvili. B. Weglorz.** Subsets of the real line. *Wy-daw-nictwo Uniwer-sytetu Lodzkiego, Lodz* (1995).
4. **R. Dougherty**. Examples of non-shy sets. *Fund. Math.* 144 (1994), p.73-88.
5. **P. R. Halmos**. Measure theory. Princeton, Van Nostrand (1950).
6. **Shi. Hongjia.** Measure-Theoretic Notions of Prevalence. Ph.D.Dissertation (under Brian S.Thomson), *Simon Fraser Universi-ty, October* 1997, ix+165 pages
7. **G. R. Pantsulaia.** Relations between Shy sets and Sets of ν_p-Measure Zero in Solovay’s Model. Bull. *Polish Acad.Sci.*, vol.52, No.1, (2004).
8. **G. R. Pantsulaia**. Invariant and Quasiinvariant Measures in Infinite-Dimensional Topo-logical Vector Spaces. *Nova Science Publishers, Copyright* 2004-2007(ISBN.1-60021-719-2),2007 xii+231 pp.
9. **S. Solecki.** On Haar null sets. *Fund. Math.* 149 (1996) no 3, 205-210.

გოგი ფანცულაია

მაგალითი არალოკალურად-კომპაქტური არაკომუტატიური პოლონური ჯგუფისა, რომელიც არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების თვისებას

ვთქვათ, R^{∞} არის ნამდვილ-მნიშვნელობიანი მიმდევრობების სივრცე აღჭურვილი ტიხონოვის ტოპოლოგიით და შეკრების ბუნებრივი "+ " ოპერაციით. ყოველი $n \geq 3$, O_n-ით აღვნიშნოთ ევკლიდეს n–განზომილებიანი ვექტორული სივრცის მისი კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნებათა ჯგუფი. ნაჩვენებია, რომ ყოველი α $(1 \leq \alpha \leq \omega)$ კარდინალური რიცხვისათვის, ჯგუფი $R^{\infty} \times (O_n)^{\alpha}$ წარმოადგენს მაგალითს ისეთი არალოკალურად-კომპაქტური არაკომუტატიური პოლონური ჯგუფისა, რომელიც არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების თვისებას.

ГОГИ ПАНЦУЛАЯ

ОДИН ПРИМЕР НЕЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ НЕАБЕЛЕВСКОЙ ПОЛЬСКОЙ ГРУППЫ НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЙ ССЦ

Пусть R^{∞} есть пространство всех вещественнозначных последовательностей снабженное Тихоновской топологией и обычной операцией сложения "+ ". Для $n \geq 3$, пусть O_n есть группа всех вращений n-мерного Эвклидового пространства R^n вокруг его начала координат. Показано, что для произвольного кардинального числа α $(1 \leq \alpha \leq \omega)$, группа $R^{\infty} \times (O_n)^{\alpha}$ является примером такой нелокально –компактной неабелевской польской группы, которая не удовлетворяет свойству счётных цепей.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

ALEXSANDER SHANGUA, VAZHA TARIELADZE

SOMEVARIANTSOFTHEBANACH-SAKSPROPERTY

Abstract. The Banach spaces having the Banach-Saks-Kronecker property and the weak Banach-Saks-Kronecker property are introduced. It is shown that:

(1) a super-reflexive Banach space has the Banach-Saks-Kronecker property and hence, it has the Banach-Saks property as well.

(2) a Banach space with the weak Banach-Saks property may fail to have the weak Banach-Saks-Kronecker property.

1. Introduction

1.1 Convergence in Cesaro's sense and the Banach-Saks properties

We say that a sequence (y_n) extracted from a topological vector space *Y* in Cesaro's sense or (*C*,1)-converges in *Y* to $y \in Y$ if the sequence $\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$ of its Cesaro means conveges to *y* in the topology of *Y*.

We say that a sequence (y_n) extractde from a topological vector space *Y* in Cesaro's sense or (*C*,1)-converges in *Y* if there is $y \in Y$ such that (y_n) in Cesaro's sense converges in *Y* to *y*.

The following observation in case of *Y*=R was known for Cauchy.

Proposition 1.1. *Let Y be a locally convex toplogical vector space,* (y_n) *a sequence extracted from it and* $y \in Y$ *an element.*

If (y_n) *converges in Y to y, then* (y_n) *in Cesaro's sense converges in Y to y.*

It was known surely already in the beginning of 20$^{\text{th}}$ century for H. Lebesgue, that the Bolzano-Weierstrass's principle is not true for

$Y = L_p([0,1])$, $1 \le p \le \infty$; i.e., a bounded sequence extracted from $Y = L_p([0,1])$, $1 \le p \le \infty$ may not have a subsequence convergent in *Y*. In 1930 S. Banach and S. Saks have shown that the Bolzano-Weierstrass's principle can be saved by replacing the usual convergence to Cesaro convergence provided $1 < p < \infty$:

Theorem 1.2. (Banach-Saks) *If* $1 < p < \infty$*, then every bounded sequence* (x_n) *extracted from* $L_p([0,1])$ *contains a subsequence* (y_n) *which* $(C,1)$*-converges in* $L_p([0,1])$.

This theorem [3] is derived from the following statements:

Theorem 1.3. (F. Riesz, 1910) *If* $1 < p < \infty$*, then every bounded sequence* (x_n) *extracted from* $L_p([0,1])$ *contains a* ***weakly convergent*** *subsequence.*

Theorem 1.4. (Banach-Saks) *If* $1 < p < \infty$*, then every weakly convergent to zero sequence* (x_n) *extractde from* $L_p([0,1])$ *contains a subsequence* (y_n) *which* $(C,1)$*-converges in* $L_p([0,1])$ *to zero.*

It is interesting to note that in [12] it is formulated Thoerem 1.4., however an elegant proof of it is given only when *p*=2.

In [2] one can find the following stronger versions of Theorem 1.4:

Theorem 1.5. (Banach-Saks) [2, p. 179, p.182] *If* $1 < p < \infty$*, then the following statements are valid.*

(a) *Every weakly convergent to zero sequence* (x_n) *extracted from* $L_p([0,1])$ *contains a subsequence* (y_n) *such that*

$$\sup_{n\ge 1} \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\|}{n^{\frac{1}{\min(p,2)}}} < \infty .$$

(b) *Every weakly convergent to zero sequence* (x_n) *extracted from* l_p *contains a subsequence* (y_n) *such that*

$$\sup_{n\ge 1} \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\|}{n^{\frac{1}{p}}} < \infty .$$

The following statement is known too.

Theorem 1.6. *Let X be a uniformy convex Banach space.*

(a) (Kakutani, 1938) *Every weakly convergent to zero sequence* (x_n) *extracted from X contains a subsequence* (y_n) *which* (C,1)-*converges in X to zero.*

(b) [7] *There exist a constant* $1 < r < \infty$ *such that every weakly convergent to zero sequence* (x_n) *extracted from X contains a subsequence* (y_n) *with property*

$$\sup_{n\geq 1} \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\|}{n^{\frac{1}{r}}} < \infty .$$

Theorem 1.2 and Theorem 1.4 motivate the following definitions.

Definition 1.7. A (real or complex) toplogical vector space E is said to have *the Banach-Saks property* (for short $E \in (BS)$) if every bounded sequence (x_n) extracted from E contains a subsequence (y_n) which (C,1)-converges in E.

Definition 1.8. A (real or complex) locally convex topological vector space E is said to have *the weak banach-Saks property* (for short $E \in (WBS)$) if every weakly convergent to zero sequence (x_n) extracted from E contains a subsequence (y_n) which (C,1)-converges in E to zero.

It is easy to see that $E \in (BS) \Rightarrow E \in (WBS)$. The converse implication is not true: $l_1 \in (WBS)$, but $l_1 \notin (BS)$. This of course implies that also $L_1([0,1]) \notin (BS)$. In [3] it is contained a stronger statement that $L_1([0,1]) \notin (WBS)$ as well, however later in [14] it was shown that in fact $L_1([0,1]) \in (WBS)$.

The (BS) and (WBS) properties are well studied. It is known for example that for a banach space E we have: $E \in (BS)$ iff E is reflexive and $E \in (WBS)$ [10] and that a reflexive Banach space may not have the (WBS)-property [1].

A toplogical vector space E is said to have the *alternating signs Banach-Saks property* (for short $E \in (ABS)$) if every bounded sequence (x_n) extracted from E possesses a subsequence (y_n) such that the sequence $((-1)^n y_n)$ in Cesaro's sense converges in E to zero.

For a Banach space E one has:

- $E \in (BS) \Rightarrow E \in (ABS) \Rightarrow E \in (WBS)$ [5, p.50].
- $E \in (ABS) \Leftrightarrow E \in (WBS)$ and E does not contain a closed vector subspace isomorphic to l_1 [4].

In [13] were introduced the following permutational variants of the considered properties:

- a (real or complex) toplogical vector space E is said to have the permutational banach-Saks property (for short $E \in (PBS)$) if for every bounded sequence (x_n) extracted from E there exists a permutation $\pi : N \to N$ such that the sequence $(x_{\pi(n)})$ $(C,1)$-converges in E.
- A locally convex space E is said to have the permutational weak banach-Saks property (for short $E \in (PWBS)$) if for every weakly convergent to zero sequence (x_n) extractde from E there exists a permutation $\pi : N \to N$ such that the sequence $(x_{\pi(n)})$ in Cesaro's sense converges in E to zero.

Theorem 1.9. [13] *For a Banach space E we have:*

(a) $E \in (BS)$ *iff* $E \in (PBS)$

and

(b) $E \in (WBS)$ *iff* $E \in (PWBS)$.

1.2 Convergence in Kronecker's sense and the banach-Saks-Kronecker properties

We say that a sequence (y_n) extracted from a tolplogical vector space Y in Kronecker's sense converges in Y to $y \in Y$ if the series $\sum_n \frac{y_n - y}{n}$ converges in Y.

We say that a sequence (y_n) extracted from a toplogical vector space Y in Kronecker's sense converges in Y if there is $y \in Y$ such that (y_n) Kronecker's sense converges in Y to y.

An analogue of Proposition 1.1 fails for the case of convergence in Kronecker's sense: a sequence of real numbers may converge to zero, but it may not converge to zero in kronecker's sense. If Y is *metrizable* and (y_n) converges to $y \in Y$, then it can be shown that some *subsequence* of (y_n) converges to y in Kronecker's sense. It will be very important for the given paper that the following assertion is true and its validity in case of Y=R was known for Kronecker.

Proposition 1.10. *Let Y be a locally convex toplogical vector space,* (y_n) *a sequence extracted from it and* $y \in Y$ *an element.*

If (y_n) in Kronecker's sense converges in Y to y, then (y_n) in Cesaro's sense converges in Y to y.

In connection with this statement let us note that a bounded sequence (y_n) in a Banach space may converge to zero in Cesaro sense, but (y_n) may not have any subsequence convergent to zero in Kronecker's sense (cf. Proposition 2.6 (*a*,*d*)).

Now we can make our new definitions.

Definition 1.11. A (real or complex) topological vector space *E* is said to have *the Banach-Saks-Kronecker property* (for short $E \in (BSK)$) if every bounded sequence (x_n) extracted from *E* has a subsequence (y_n) which in Kronecker's sense converges in *E*.

Definition 1.12. A locally convex space *E* is said to have the weak Banach-Saks-Kronecker property (for short $E \in (WBSK)$) if for every weakly convergent to zero sequence (x_n) extracted from *E* has a subsequence (y_n) which in Kronecker's sense converges in *E* to zero.

Definition 1.13. A topological vector space *E* is said to have the permutati-onal Banach-Saks-Kronecker property (for short $E \in (PBSK)$) if for every bo-unded sequence (x_n) extracted from *E* there exists a permutation $\pi : N \to N$ such that the sequence $(x_{\pi(n)})$ in Kronecker's sense converges in *E*.

Definition 1.14. A locally convex space *E* is said to have the permutational weak Banach-Saks-Kronecker property (for short $E \in (PWBSK)$) if for every weakly convergent to zero sequence (x_n) extracted from *E* there exists a permutation $\pi : N \to N$ such that the sequence $(x_{\pi(n)})$ in Kronecker's sense converges in *E* to zero.

2. Results

Our first observation is an immediate consequence of Proposition 1.10.

Proposition 2.1. *Let E be a locally convex space. We have:*

(a) $E \in (BSK) \Rightarrow E \in (BS)$.

(a′) $E \in (WBSK) \Rightarrow E \in (WBS)$.

(b) $E \in (PBSK) \Rightarrow E \in (PBS)$.

(b′) $E \in (PWBSK) \Rightarrow E \in (PWBS)$.

In view of Proposition 2.1(a), the following statement contains an improvement of Banach-Saks and Kakutani's theorems.

Theorem 2.2. *Let E be a super-reflexive Banach space. Then E has the Banach-Saks-Kronecker property.*

Proof. Since E is reflexive, it is sufficient to show that $E \in (WBSK)$. Consider a weakly convergent to zero sequence (x_n) extracted from E. We need to find a subsequence (y_n) of (x_n) such that the series $\sum_n \frac{y_n}{n}$ converges in E. The existence of such (y_n) is evident if $\liminf_n \|x_n\|=0$. Therefore we can assume that $\liminf_n \|x_n\|>0$. Now from $(x_n) \to 0$ weakly and $\liminf_n \|x_n\|>0$ by Bessaga-Pelczynski selection Principle it follows that (x_n) has a subsequence (y_n) which a basic sequence. The super-reflexivity of E by Enflo's theorem implies that E has an equivalent uniformly convex norm. So, we can suppose that E is a uniformly convex space. Since (y_n) is a basic sequence and E is uniformly convex, by N. and V. Gurarii's theorem [6, p.125] the series $\sum_n \frac{y_n}{n}$ converges in E.

Remark 2.3. The idea of the given proof is taken from [6, Exersise 3 (p.137)]. Let us note in connection with Theorem 2.2 that we do not know whether for a Banach space E the implication

$E \in (BSK) \Rightarrow$ E is super-reflexive

is true.

It is known that the implication

$E \in (BS) \Rightarrow$ E is super-reflexive

is not true [11].

Theorem 2.4. *Let E be a banach space with an unconditional basis.*

(a) *If either $E = c_0$ or E is B-convex, then $E \in (WBSK)$.*

(b) $L_1([0,1]) \in (WBS)$, *but* $L_1([0,1]) \notin (WBSK)$ *and* $L_1([0,1]) \notin (PWBSK)$.

Proof. (a) Fix a normalized unconditional basis (e_n) of E. Consider a weakly convergent to zero sequence (x_n) extracted from E. We need to find a subsequence (y_n) of (x_n) such that the series $\sum_n \frac{y_n}{n}$ converges in E. The existence of such (y_n) is evident if $\liminf_n \|x_n\|=0$. Therefore we can assume that $\liminf_n \|x_n\|>0$. From this it follows that (x_n) has a subsequence (y_n) which is equivalent to a block sequence (b_n) of (e_n) (cf. [8, Proposition 1.a.12]).

Case 1. $E = c_0$. We can suppose that (e_n) is the natural basis of c_0. Then above mentioned (b_n) is equivalent to (e_n) (cf. [8, proposition 2.a.1]). Hence (y_n) is equivalent to (e_n) too and the series $\sum_n \frac{y_n}{n}$ unconditionally converges in E.

Case 2. E is B-convex. Since (e_n) is a normalized unconditional basis of E, its block sequence (b_n) is an unconditional basic sequence in E (cf. [LT, p.19]). Since (y_n) is equivalent to (b_n), the sequence (y_n) is an unconditional basic sequence in E as well. Since E is B-convex, here exists $r \in]1,2]$ such that E has Rademacher type r. From this since the series $\sum_n \left\|\frac{y_n}{n}\right\|^r$ converges in R, we get that for some sequence (ϑ_n) with $(\vartheta_n) \in \{-1,1\}$, n=1,2,... the series $\sum_n \frac{\vartheta_n y_n}{n}$ converges in E. From this since (y_n) is an unconditional basic sequence in E, we get that the series $\sum_n \frac{y_n}{n}$ converges in E too.

(b) As we have already noted, the fact that $L_1([0,1]) \in (WBS)$ is known. The facts that $L_1([0,1]) \notin (WBSK)$ and $L_1([0,1]) \notin (PWBSK)$ are consequences of proposition 2.6 (b,d) below, which is of independent interest.

Remark 2.5. We do not know whether the conclusion of Theorem 2.4 (a) remains true for a B-convex Banach space without an unconditional basis.

Proposition 2.6. *Let* (Ω, A, P) *be a probability space,* $\xi_n : \Omega \to R$, *n=1,2,... be P-independent, identically distributed, P-integrable, symmetric random variables. Then:*

(a) (*Kolmogorov*) (ξ_n) *in Cesaro's sense converges in* $L_1(\Omega, A, P)$ *to zero (and* $(\xi_n(\omega))$ *Cesaro's sense converges in* R *to zero for P-almost every* $\omega \in \Omega$*).*

(*b*) (ξ_n) *itself converges to zero in the weak topology of* $L_1(\Omega, A, P)$.

(*c*) *The series* $\sum_n \frac{\xi_n}{n}$ *converges in* $L_1(\Omega, A, P)$ *iff*

$$\int_\Omega |\xi_1(\omega)| \ln^+ |\xi_1(\omega)| dP(\omega) < \infty . \tag{2.1}$$

(*d*) *If* (2.1) *is not satisfied, then* (ξ_n) *has not a Kronecker's sense convergent in* $L_1(\Omega, A, P)$ *subsequence.*

Proof. Observe that since every subsequence (η_n) of (ξ_n) is again a sequence of *P*-independent, identically distributed, *P*-integrable, symmetric random variables, from (*a*) follows the next stronger assertion:

(*a*) *Every subsequence* (η_n) *of* (ξ_n) *in Cesaro's sense converges in* $L_1(\Omega, A, P)$ *to zero.*

(*b*) follows from (*a'*) thanks to the following easy observation:

(hece) *Let* (x_n) *be a sequence of scalars such that every subsequence* (y_n) *of* (x_n) *in Cesaro sense converges (to zero). Then* (x_n) *itself converges (to zero).*

(*c*) From [15, Corollary 1 to Theorem 5.3.2] it follows that:

(*c'*) *The series* $\sum_n \frac{\xi_n}{n}$ *converges in* $L_1(\Omega, A, P)$ *iff*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega |\xi_1| 1_{[|\xi_1|>n]} dP < \infty . \tag{2.2}$$

Write:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[|\xi_1|>n]} .$$

By using the known estimation

$$\ln x < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[1,x[}(n) < 1 + \ln x, \quad x > 1,$$

we get an estimation:

$$\ln^+ |\xi_1(\omega)| \le f(\omega) \le 1 + \ln^+ |\xi_1(\omega)|, \quad \omega \in \Omega .$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_1| 1_{[|\xi_1|>n]} = |\xi_1| f$, finally we obtain:

$$\int_{\Omega}|\xi_1(\omega)|\ln^+|\xi_1(\omega)|dP(\omega)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\Omega}|\xi_1|1_{[|\xi_1|>n]}dP\le 1+\int_{\Omega}|\xi_1(\omega)|\ln^+|\xi_1(\omega)|dP(\omega). \qquad (2.3)$$

From (2.3) and (c') we conclude that (c) is true.

(d) follows from (c).

Acknowledgement. The authors were partially supported by grant GNSF/ST08/3-384.

REFERENCES

1. **S. V. Astashkin, E.M. Semenov, F. A. Sukochev.** The Banach-Saksproperty. *Math. Ann.* 332(2005), no.4, 879-900.
2. **A. Baernstein II**. On reflexivity and summability. *Studia Math.* 42 (1972), 91-94.
3. **S. Banach**. Theorie des operations lineaires. *Warsawa,* 1932.
4. **S. Banach, S. Saks.** Sur la convergence forte dans les champs L . *Studia Math.* 2 (1930), 51-57.
5. **B. Beauzamy**. BanachSaks properties and spreading models. *Math. Scand. 44* (1979), 357-384.
6. **B. Beauzamy, J. Lapreste**. Modeles etales des espaces de Banach. *Herman, Paris*, 1984, 207 p.
7. **J. M. F. Castillo**. Extraction of Subsequences in Banach Spaces. *Extracta Math*. 7(1992), n. 2-3, 77-88.
8. **J. Diestel**. Sequences and Series in Banach Spaces. Springer Verlag. *Berlin,* 1984, 261 p.
9. **B.D. Kotlyar** . On the convergence speed with Banach Saks property. Izvestia VUZ-ov, Mathematics 12*(1991*), 13-15 (in Russian). English translation: Sov. Math. 35(1991), No.12, 12-14.
10. **J. Lindenstrauss, L. Tzafrir**. Classical Banach Spaces I. Springer Varlag. *Berlin Heidelberg New York*, 1977, 188 p.
11. **B. Mamporia, A. Shangua and V. Tarieladze**. Permutations and convergence in probability. Bull. *Georgian Acad. Sci.,* 172, no. 1, 2005, 23-25.
12. **T. Nishiura, D. Waterman** . On reflexivity and summability. Stud ia Math. 23 (1963), 53-57.
13. **E.I. Ostrovskii.** The Banach-Saks and Mazur properties in Banach spaces. *Mat. Zametki* 42(1987), no.6, 786-789.
14. **J. R. Partington.** On the BanachSaks property. Math. *Proc. Camb. PhilSoc.* 82 (1977), 369–409.

15. **S.A. Rakov**. Banach-Saks property of a Banach space. *Mat. Zametki* 26(1979), no.6, 823-834.
16. **F. Riesz, B. Sz.Nagy .** Lecons d'analyse fonctionnelle. *Deuxieme edition, Budapest*,1953.
17. **A. Shangua and V. Tarieladze**. Two permutational versions of th e BanachSaks property . *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 173, No.2, 2006, 229-232.
18. **W. Szlenk**.Sur les suites faiblement convergents dans l'espace L. *Stud ia Math. 26* (1965), 337–341.
19. **N. N. Vakhania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanyan.** Probability Distributions on Banach Spaces. D. *Reidel, Dordrecht*, 1987.

ალექსანდრე შანგუა, ვაჟა ტარიელაძე

ბანახ-საქსის თვისების ზოგიერთი ვარიანტი

შემოღებულია ბანახ-საქს-კრონეკერის თვისებიანი და ბანახ-საქს-კრონეკერის სუსტ თვისებიანი ბანახის სივრცეების ცნება.

ნაჩვენებია, რომ:

1. ბანახის სუპერ-რეფლექსურ სივრცეს გააჩნია ბანახ-საქს-კრონეკერის თვისება, გამომდინარე აქედან, გააჩნია ბანახ-საქსის თვისებაც.
2. ბანახ-საქსის სუსტ თვისებიან სივრცეს შეიძლება არ გააჩნდეს ბანახ-საქს-კრონეკერის სუსტი თვისება.

АЛЕКСАНДР ШАНГУА, ВАЖА ТАРИЕЛАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАНТЫ СВОЙСТВА БАНАХА-САКСА

Определены банаховы пространства со свойством Банаха-Сакса-Кронекера и со слабым свойством Банаха-Сакса-Кронекера.

Показано, что:

1. Супер-рефлексивные банаховы пространства обладают свойством Банаха-Сакса-Кронекера.
2. Пространства со слабым свойством Банаха-Сакса могут не обладать слабым свойством Банаха-Сакса-Кронекера.

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
ტ. IV, 2008
მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია

GURAM TSERTSVADZE

ON ASYMPTOTIC OF STATIONARY DISTRIBUTION IN A SIMPLEST MODEL OF COLLECTIVE BEHAVIOR OF AUTOMATA

Abstract. A simplest case of game of many identical Automata having two actions is considered. The game is determined by the number of participating automata and payoof function depending only on the number of automata with the selected given action. There is studied the asymptotic behavior of the automata in the case of the infinite increase of the number of playing automata and their capacity of memory.

Introduction

Problems related With collective behavior of automata constitute an interesting and perspective direction in the theory of complex systems. these systems consists of large number of compound parts - subsystems possessing a comparatively high degree of autonomy. A convenient way to describe simple forms of such an interaction is the language of the Game Theory [1].Although the use of this language reduces the class of behavior forms under study, it leads to the construction of a series of meaningful models that allow to get vivid and well interpreted characteristics of the system, which turned our to be very useful in the design the control of the system.

The theory of collective behavior of automata, as an independent scientific trend, takes its origin in the basic works by M. Tsetlin and his collaborators. The theory assumes that the complex forms of behavior can be realized by a collection of finite automata appropriately behaving in random environment. As an elementary behavior problem, the problem on the behavior of automaton in a stationary random environment has been chosen. This is a problem of choosing one or several actions under a random reward. A well-known construction of automata suggested by M. Tsetlin possesses the property of asymptotic optimality: by choosing sufficiently many states (or the capacity of memory) per action, one can guarantee a limiting value of the average gain which is close, as much as desired, to the maximum value of the gain. A detailed account of results in this direction is given in monographs [2,3].

On the next stage of investigation there were considered games and models of collective behavior of such automata. One of the features of the models under consideration is the absence of an a priori information. Each automaton while choosing an action on a current step possesses only the information on its own gains and losses, having no information neither on gains of other automata, nor on the number of playing automata, and in general on the very game it plays. Therefore, the interaction in the game is generated only by the reaction of the environment on the joint behavior of automata. In the models of such types, of considerable interest are ways of organization of controlling actions maximizing the expectation of the gain. A controlling action can be realized on the one hand by sending control signals to automata, and on the other hand by inserting an additional structure to the collective of automata.

However, speaking of an effective solution to the problem of improvement of behavior characteristics, the most important is the estimation of the rate of convergence of collective of automata to the stationary distribution. The point is that under a large capacity of memory of playing automata, due to the negligibly small probabilities of changes of action, the average time an automaton stays even in the most unfavorable state, becomes very large. Moreover, the asymptotic optimality of be ha vi or of automata does not guarantee a sufficiently good behavior on a comparatively small time interval.

The first example where an additional structure has been introduced into the collective automata, is Tsetlin's procedure of "joint cashbox" which turns any homogeneous automata game into the so called the Gur Game, where the probability of reward for all automata are equal and depend only on distribution of automata in actions. This simplest model of collective behavior - the Gur Game [4] has been studied repeatedly. Its analytical solution in different modification entails great mathematical difficulties caused by the fact that the number of states of the corresponding Markov chain grows rapidly as the capacity of memory increases. To avoid these difficulties several attempts were made to get an approximate but simpler description of the game (see e.g. [5]); however, the suggested approaches did not have a rigorous grounds. In [6] for the first time a rigorous method had been suggested or investigation of asymptotic behavior of automata in games, when $n \to \infty$. In [7] the basic theory had been developed which became a main part of the robust method for the distributed coordination based on the Gm Game and also was given a general method for the analysis of these systems which were studied only in a restricted number of cases.

In the present paper a version of the model of collective behavior - the Gur Game [4] IS investigated. In this model the automata (the players) have two actions each. At each moment of time a randomly chosen automaton is being either penalized or awarded with the probability dependent on the fraction of automata executed the first action. Under these conditions the behavior of the collective of N identical automata with the capacity of memory capacity n , is described by a homogeneous Markov chain with $(2n)^N$ states. The problem is to study the stationary distribution and to obtain an asymptotic estimate of the establishment time under the infinitely growing number of automata in dependence of the grow of the memory capacity.

2.Automata Games Definitions

Let it be assumed that N finite automata $A^1 A^2$, ••• ,A^n participate in the game. They are defined by their canonical equations

$$\varphi^j(t+1) = \Phi^j(\varphi^j(t), s^j(t+1)),$$
$$f^j(t) = F^j(\varphi^j(t)),$$

$$t = 1,2,...$$
$$j = 1,2,... \qquad (1)$$

Let the input variable $s^j(t)$ of the automaton A^j take only two values + 1 and -1. Let value $s^j(t)$ = + 1 be called its gain, and the value $s^j(t)$ = -1 its loss. Output variable $f^j(t)$ of the automaton is supposed to have k_i values $f_1^j,..., f_k^j$, which will be called its strategies (actions). Likewise, let it be said that, if $f^j(t) = f_i^j$, automaton A^j uses its i-th strategy at a moment in time t. Values $\varphi_1^j,...,\varphi_n^j$, of variable $\varphi^j(t)$ are called states of A^j and n_j the number of the memory capacity. Obviously $n_j \geq k_j$. *A* description of what is understood by automata games follow.

The input variable s takes only two values. So that the function Φ in (1) gives a pair of maps of the sets of states of automaton in to itself (one of these maps is given for s=+ 1, and another for s=-l).

Let us now describe what we understand by automata games.

Definition 1. Let the game *f(t)* drawn at a time t be denoted as the collection $f(t) = (f^1(t),..., f^n(t))$ of strategies used by automata $A^1, ... , A^N$.

Let the outcome s(t + 1)=(s^I *(t + l), ...* ,s^N *(t* + 1)) of the values on input variables of automata at a moment t + 1.

Definition 2. Let it be said that the automata $A_1, ..., A_N$ participate in a game Γ if for each game *f(t)* the probability *p(f(t), s(t* + 1)) of its *s(t* + 1) outcome is given. Then the following equality holds for each *f:*

$$\sum_S p(f;s) = 1 \tag{2}$$

So, automata games consist of an unbounded sequence of games and their outcomes. It is easy to see that the outcome probabilities *p(f;s)*, defining a game Γ, also define a N-person game Γ^* understood in the usual sense of the Theory of Games. Inde, the payoff functions, $a^j(f), j = l, ... ,N$ defining Γ^* have the meaning of expectations of the gain of j , s player in the collection of the game strategies f and could be reconstructed by the probabilities of the draw *p(f;s)*, according to the following formula:

$$a^j(f) = \sum_{\substack{S^1,...,S^{j-1} \\ S^{j+1},...,S^n}} \lfloor p(f;s^1,...,s^{j-1},+1,s^{j+1}...,s^N)\rfloor - \lfloor p(f;s^1,...,s^{j-1},-1,s^{j+1}...,s^N\rfloor \tag{3}$$

Game Γ^* is said to be equivalent to automata games Γ, and game Γ is said to have independent draws if

$$\text{p(f;s)= p(f;s}^1, ... ,\text{S}^N\text{)=} \prod_{j=1}^{N} p^j(f,s^j),$$

$$0 \le p^j(f;-1) \le 1, 0 \le p^j(f;+1) \le 1, \tag{4}$$

$$p^j(f;+1) + p^j(f;-1) = 1 \quad \text{and} \quad a^j(f) = p^j(f;+1) - p^j(f;-1)$$

It should be taken into account that $|a^j(f)| \le 1$.

M.L. Tsetlin has proved that automata game can be described by a finite Markov chain; in the case of ergo city there exists the state probabilities, together with the automata gain expectations that do not depend on the initial state (let those automata games that have corresponding ergodic Markov chains be called ergodic). Nevertheless, one should bear in mind that the computation and even the estimation of the final probabilities of such games is quite a difficult problem to solve because the dimension of corresponding. Markov chains is large.

The algebraic difficulties that arise could be overcome if it were possible to construct simpler chains with equivalent asymptotic properties. A possibility of such a simplification will be discussed in the next section.

3 Deriving a Formula for Stationary Probability Distribution

Among the different classes of automata games ([2],[3]) special attention is given to the game involving common cash, which is the first example of introducing a structure in an automata collection by the procedure of "common cash".

Definition 3. A game with common-cash is said to be a game in which all payoff functions of all participants are the same, that is

$$a^j(f) = a(f) \tag{5}$$

In such game, all participants obtain the same average gain at the end of each game. They will tend to play a game in which all payoff functions obtain their maximum (solution-game). An important example of a game with common cash is the Gur Game defined in [4]. The participants are N similar automata which can only accomplish two actions, f_1 *and* f_2. Let us denote the number of participants who choose the first action by m. The payoff function, which is the same for all participants, has the form *a (mIN),* i.e. it depends on the ratio Θ_m *=mIN*. This game has game has a maximin* number of games solutions which are those games in which the action where f_1 is accomplished by $m_o = \Theta_o N$ automata where Θ_o is defined by the following equality:

$$a(\Theta_0) = \max_m a(\Theta_m). \tag{6}$$

The important points in the Gur Game are presented by function w(Θ_m), which is the stationary (limit) probability of the event at which

---

* *A* send $\tilde{f}$ is said to be rnaximin if $\min_j a^j(\tilde{f}) = \max_j \min_j (f)$.

the action f_1; is accomplished by m = Θ_m N automata, and asymptotics of w(Θ_m), when the number N of automata increases infinitely depending on the growth of memory capacity n of each automaton.

In this paper, the following version of the Gur Game is studied. In some discrete moment of time from the collection of N playing automata with two actions and memory capacity n, with equal probability, one is chosen randomly, and penalized or stimulated and therefore changes or not the part of the automata which is engaged in the first action at a given moment in time.

Now, let it be assumed that the participants of a game are Robbins automata [8] with the hysteresis change of action tactics [9], whose behavior in a stationary random medium is described by a homogeneous Markov chain, if the actions are only considered in moments t of time multiple to integer n (the memory capacity). Moreover, the action changes if, and only if, the signal "penalty" has arrived on the automaton input during the last n times. Therefore, the action change probability for such an automaton is equal to $p = \pi^n$ (the action does not change with the probability $q = 1-\pi^n$, respectively), where π is the penalty probability in a stationary random medium.

Only games in which different numbers of automata accomplish the first action will be distinguished. Let W(m, t) be the probability that m automata accomplish the fist action exactly at time t. The equation for W(m, t + 1) will then have the following form:

$$w(m,t+1) = \frac{m+1}{N} p_{m+1,N} W(m+1,t) + \frac{N-m+1}{N} p_{m-1,N} W(m-1,t) + q_{m,n} W(m,t)$$
$$m = 1,2,\ldots N-1, \tag{7}$$
$$W(0,t+1) = \frac{1}{N} p_{1,N} W(1,t) + q_{0,N} W(0,t),$$
$$W(N,t+1) = \frac{1}{N} p_{N-1,N} W(N-1,t) + q_{N,N} W(N,t)$$

Here $P_{m,N}$ is the action change probability for each automaton if *m* from the collection of N automata accomplish the first action.

$$p_{m,N} = \pi^n \left(\frac{m}{N}\right), \quad q_{m,N} = 1 - \pi^n \left(\frac{m}{N}\right)$$

where the penalty (punishment) probability π *(m/ N)* is expressed as in (4) by the payoff function *a (m/ N)* in the following way

$$\pi\left(\frac{m}{N}\right)=\frac{1-a\left(\frac{m}{N}\right)}{2}$$

The ergocity of the corresponding Markov chain, when 0 < *P m,N* <1, could easily be established. So, taking limits when $t \to \infty$, we get a liner system with *N* + 1 equations and *N* + 1 independent quantities *W(m),m = 0,1, ... N,* where *W(m)* denotes the stationary probability of a game in which *m* automata accomplish the f_1 action:

$$w(m,t+1)=\frac{m+1}{N}p_{m+1,N}W(m+1,t)+\frac{N-m+1}{N}p_{m-1,N}W(m-1,t)$$

$$m = 1,2, \dots , N-1, \tag{8}$$

$$p_{0,N}W(0)=\frac{1}{N}p_{1,N}W(1),$$

$$p_{N,N}W(N)=\frac{1}{N}P_{N-1,N}W(N-1).$$

The following set of probabilities

$$W(m)=a\frac{C_N^m}{\pi^n(\frac{m}{N})}, \tag{9}$$

is a solution of the above system of equations, where *a* is a constant defined from the normalization condition $\sum_{m=0}^{N}W(m)=1$.

A close examination of the behavior of the function *W(m)* show that, when *n* is fixed and $N \to \infty$, *W(m),* together with the binomial coefficient C_N^m, is concentrated in the neighborhood of the special form of the function $P_{m,N}=\pi^n(m/N)$ and parameter values *N,n,* the function *W(m)* may either have two maxima in the neighborhood of *mo* = $\Theta_0 N$ (because of mutual influence, the maxima are displaced towards each other or one is displaced towards each other or one is displaced towards the other).

Indeed, from (9) up to a constant for a sufficiently large *n* and *N,it* is easy to obtain the following

$$\ln W(m) \sim N\left[H\left(\frac{m}{N}\right) + \frac{n}{N}\ln\frac{1}{\pi\left(\frac{m}{N}\right)}\right] \tag{10}$$

Where *H(x)* = -*x* ln *x* - (1- *x)* ln (1- *x)* is the entropy.

From (10) one can see that if Θ_0 is an absolute maximum of the function

$$F(\Theta_m) = H(\Theta_m) + \frac{n}{N}\ln\frac{1}{\pi(\Theta_m)}, \qquad \Theta_m = \frac{m}{N} \tag{11}$$

then, given that

$$\frac{W(m_0)}{W(m)} = \exp N\left[F(\Theta_0)\right],$$
$$F(\Theta_0) - F(\Theta_m) > 0, \tag{12}$$

$$\Theta_0 \neq \Theta_m$$

the probability is mainly concentrated around the point $m_0 = \Theta_0 N$ when $N \to \infty$. It is also clear that the localization of Θ_0 is defined by two alternative terms: $\frac{n}{N}\ln\frac{1}{\pi(\Theta_m)},$ defined by the character of the game and a entropic term $H(\Theta_m)$.

Hence, it follows that the automata possess a certain optimal behavior, i.e that *W(m / N)* attains a maximum at the point where *a(m / N)* does, if $N \to \infty, n \to \infty$ one gets $n = 0(N)$.

4 Stationary Distribution Time Estimate

One of the most important problems in automata games is obtaining the estimate of the stationary probability distribution. For the above case of modification of the Gur Game, (in which one randomly chosen automaton is fined or stimulated at each step) using the ergodicity and a known relation between the matrix trace of the corresponding Markov chain and its Eigen values $\lambda_S^{(N)}$, the following theorem holds:

Theorem. *If* $n = 0(N)$ *as* $N \to \infty$ *then*

$$\lim_{N\to\infty} a \max_S |1 - \lambda_S^{(N)}| = 0, \tag{13}$$

where $\lambda_S^{(N)}$ *denotes the Eigen values of the Markov chain matrix* $R^S = (\gamma_{mk}), 0, < \gamma_{mk} < 1, \sum_{k=0}^{N} \gamma_{mk} = 1, (m = 0,1,\ldots,N)$ *of the game.*

Proof. Let the well-known expression for the trace

$$SpR \equiv \sum_{m=0}^{N} \gamma_{mm} = \sum_{S=0}^{N} \lambda_S^{(N)}. \tag{14}$$

be used. Obviously, one obtains

$$\Upsilon_{mm} = q\left(\frac{m}{N}\right) \geq \left[q\left(\frac{m}{N}\right)\right]^N \tag{15}$$

As the considered game is ergodic, there always exists the sole Eigen value of the matrix R, which is equal to 1. Therefore, take $\lambda_0^{(N)} = 1$ and taking into account (14) and (15), one obtains

$$1 + \sum_{S=1}^{N} \lambda_S^{(N)} \geq \sum_{m=0}^{N} \left[1 - \pi^n\left(\frac{m}{N}\right)\right]^N \tag{16}$$

If one introduces

$$\pi_0 = \max_m \pi\left(\frac{m}{N}\right)$$

the above inequality (16) could be strengthened in such a way:

$$1+\sum_{S=1}^{N}\lambda_S^{(N)} \geq (N+1)(1-\pi_0^n)^N . \tag{17}$$

Let $\lambda_S^{(N)}$ be expressed in the following way:

$$\lambda_S^{(N)} = 1-\eta_S^{(N)}, \tag{18}$$

s=1,2, ... ,N.

Where $\Re\eta_S^N > 0$. Because of $|\lambda_S^{(N)}|<1$ one obtains (19)

$|\eta_S^{(N)}|^2 < 2\Re\eta_S^{(N)}$, s=1,2, ... ,N.

Using (17) and (18) , the following estimate is obtained

$$\sum_{S=1}^{N}\eta_S^{(N)} \leq \xi_n^{(N)} \tag{20}$$

Where

$$\xi_n^{(N)} = (N+1)\left[1-(1-\pi_0^n)^N\right].$$

Together with (19), this gives

$$|\eta_S^{(N)}|^2 < 2\xi_n^{(N)}, \tag{21}$$

s=1,2, ... ,N.

The above estimate (21) allows for the analysis of the asymptotic behavior of Eigen values $\lambda_S^{(N)}$ *(s = 1,2, ... N)* in the presence of a unlimited increase of the number of automata which in turn depends on the increase of the *N* memory capacity *n* of each automaton. In effect, if n=0(N) maximum of $a(\Theta_m)$ then $N(N+1)\pi_0^n \to 0$ as $N \to \infty$ and $\xi_n^{(N)} \to 0$. Therefore the theorem is proved.

The result obtained means that the stationary distribution establishment time of establishing the final distribution of automata in the Gur Game tends to infinity as the number *N* of participating automata increases.

For other well-known constructions of automata, the result of the paper can be used applying same statistical hypothesis of the Volkonski type [6], and computing by means of it the stationary probabilities of action changes[3].

REFERENCES

1. **R. D. Luce**. Raiffa H. Games and Decisions. Introduction and Critical Survey. *Wiley ed.* New York, 1957.
2. **M. L. Tsetlin**. Finite Automata and Modeling of biological Systems. M., "Nauka", 1969.
3. **V. I. Varshavsky.** Collective Behavior of Automata. M. *"Nauka"*, 1973.
4. **V. A. Borovikov, V. I. Bryzgalov**. "the Simplest Symmetric Game of Many Automata", *Automat. i Telemekh.*, voI.26; no 4, pp. 683-687, 1965.
5. **V. A. Volkonsky**. Asymptotic Properties of the Behavior of Simple Automata in a ~ Game", Probl. *peredachi Inform*. vol. I. I, no.2, pp.36-53, 1965.
6. **Y. T. Gurvich.** "A Method of Asymptotical Studies of Games of Automata", Avtomat. i Telemekh. no.2, pp. 80-94, 1975.
7. **B. Tung, L. Kleinrock**. "Using Finite State Automata to Produce Self-Optimization and Self-Control", IEEE Trans. on Parall, and Distrib. *Systems, vo1*.7,no.4.pp.439448,1996.
8. **H. Robbins**. ,,A sequential Decision Problem With a Finite Memory". *Proc.Nat.Acad. Science USA*, 42, no 12, pp. 920-923, 1956.
9. **G. N. Tsertsvadze.** "On Rate of Establishing final Distribution in Certain Game of Many Identical Automata ". *Avtomat. i Telemekh.*, no 4, pp.81-83, 1970.

გურამ ცერცვაძე

სტაციონარული განაწილების ასიმპტოტიკის შესახებ ავტომატების კოლექტიური ქცევის უმარტივეს მოდელში

შესწავლილია სასრული ავტომატების კოლექტიური ქცევის უმარტივეს მოდელში სტაციონარული განაწილების გამოსახულებები და მიღებულია ამ განაწილების ასიმპტოტური შეფასებები.

ГУРАМ ЦЕРЦВАДЗЕ

ОБ АСИМПТОТИКЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ

В статье исследуется один вариант модели коллективного поведения автоматов – игры Гура. В этой модели автоматы – участники игры имеют по два действия и в каждый момент времени штрафуется или поощряется один случайно выбранный автомат с вероятностью, зависящей от доли автоматов, совершающих первое действие.

В указанных условиях поведение коллектива из N одинаковых автоматов с емкостью памяти n описывается однородной цепью Маркова с $(2n)^N$ состояниями. В моделях такого типа существенный интерес представляет оценка времени стационарного распределения автоматов. При большой емкости памяти играющих автоматов, в силу пренебрежимо малых вероятностей смены действия, средние времена пребывания автоматов даже на неблагоприятных действиях становятся весьма большими. При этом асимптотическая оптимальность поведения автоматов не гарантирует достаточно хорошего поведения на сравнительно небольшом отрезке времени.

В статье изучены асимптотические выражения стационарного распределения автоматов и получены асимптотические оценки времени его установления при неограниченно возрастающем числе автоматов в зависимости от роста емкости памяти.

ავტორები

- **მალხაზ აშორდია** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სრული პროფესორი
- **ნესტან კეკელია** – დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივე-რსიტეტის ასოცირებული პროფესორი
- **ნოდარ ჩიქობავა** – დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივე-რსიტეტი
- **თემურ ჩილაჩავა** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქ-ტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სრული პროფესორი, გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი
- **ნუგზარ კერესელიძე** – სოხუმის სახელმწიფო უნივერ-სიტეტი
- **დავით გორდეზიანი** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სრული პროფესორი
- **თინათინ დავითაშვილი** – დოქტორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასისტენტ-პროფესორი
- **ჰამლეტ მელაძე** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქ-ტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი
- **რიჩარდ მეგრელიშვლი** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი
- **მალხაზ ჭელიძე** – დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივე-რსიტეტს ასისტენტ-პროფესორი
- **თამარ გნოლიძე** – აკაკი წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
- **ქეთევან ჭელიძე** – აკაკი წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
- **არჩილ ელიზბარაშვილი** – ინფორმატიკის ფრანგულ-ქართული ინსტიტუტი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
- **ოლეგ ნამიჩეიშვილი** – ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ინფორმატიკის ფრანგულ-ქართული ინსტიტუტი
- **გურანდა ჩარქსელიანი** – სოხუმის სახელმწიფო უნივერ-სიტეტი

- **გოგი ფანცულაია** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სრული პროფესორი
- **ალექსანდრე შანგუა** – დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სრული პროფესორი
- **ვაჟა ტარიელაძე** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქ-ტორი, ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი
- **გურამ ცერცვაძე** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქ-ტორი, ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი

AUTHORS

- **Malkhaz Ashordia –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor of Sokhumi State University
- **Nestan Kekelia** – Doctor, Associate Professor of Sokhumi State University
- **Nodar Chikobava –** Doctor, Sokhumi State University
- **Temur Chilachava –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor of Sokhumi State University, Director of Institute of Applied Mathematics
- **Nugzar Kereselidze –** Sokhumi State University
- **David Gordeziani –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor of Tbilisi State University
- **Tinatin Davitashvili –** Doctor, Assistant-Professor of Tbilisi State University
- **Hamlet Meladze –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Sokhumi State University, Institute of Applied Mathematics
- **Richard Megrelishvili –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor of Tbilisi State University
- **Malkhaz Chelidze** – Doctor, Assistant-Professor of Sokhumi State University
- **Tamar Gnolidze –** Akaki Tsereteli Kutaisi State University
- **Ketevan Chelidze –** Akaki Tsereteli Kutaisi State University
- **Oleg Namicheishvili –** Doctor of Technics Sciences, French-Georgian Institute of Informatics
- **Archil Elizbarashvili –** French-Georgian Institute of Informatics, Tbilisi State University
- **Guranda Charkseliani –** Sokhumi State University
- **Gogi Pantsulaia –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor of Georgian Technical University
- **Aleksandr Shangua –** Doctor, Professor of Sokhumi State University
- **Vazha Tarieladze –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Niko Muskhelishvili Computational Mathematics Institute
- **Guram Tsertsvadze –** Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Niko Muskhelishvili Computational Mathematics Institute

ჟურნალის თემატიკა

ჟურნალი აქვეყნებს მასალებს, რომლებიც შეიცავს მეცნიერული კვლევის ახალ შედეგებს შემდეგ თეორიულ და გამოყენებით დარგებში;

მათემატიკური ანალიზი
ალგებრა, ლოგიკა და რიცხვთა თეორია
გეომეტრია, ტოპოლოგია
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები, მართვის თეორია და დინამიკური სისტემები
კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები
მათემატიკური ფიზიკა
ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა
უწყვეტ გარემოთა მექანიკა
მათემატიკური მოდელირება
რიცხვითი მეთოდები
მათემატიკური განათლება და მათემატიკის ისტორია
დაპროგრამება
მონაცემთა და ცოდნის ბაზების მართვის სისტემები
ინფორმაციული უსაფრთხოება და კრიპტოგრაფია
ინფორმაციული ტექნოლოგიები ტექნიკურ და სოციალურ-ეკონომიკურ სისტემებში
ხელოვნური ინტელექტი

მასალები მიიღება ქართულ და ინგლისურ ენებზე. მასალები ქვეყნდება ორიგინალის ენაზე.

გამოსაქვეყნებლად მიღებული ყველა მასალა რეცენზირდება და დადებითი რეცენზიის შემთხვევაში გამოქვეყნდება ბეჭვდითი სახით ჟურნალში და განთავსდება ინტერნეტში – ელექტრონულ ჟურნალში.

THEMES:

The journal publishes articles containing new scientific results in the field of theoretical and applied problems on the following sections:

Mathematical Analysis
Algebra, Logic and Number Theory
Geometry and Topology
Ordinary Differential Equations, Control Theory, Optimization and
Dynamical Systems
Partial Differential Equations
Mathematical Physics
Probability Theory and Mathematical Statistics
Mechanics of Continuity Medium
Mathematical Modeling
Numerical Analysis and Scientific computing
Mathematics education and History of Mathematics
Programming
Control in data bases and knowledge bases
Informational security and cryptology
Informational technologies in technical and social-economic systems
Artificial intellect theory

The journal accepts for the publication materials in Georgian and English languages.
The materials are published in language of the original.
All incoming materials are placed in special area, reviewed and in case of positive review, published at journal.

სოხუმის უნივერსიტეტის შრომები

სერია: *მათემატიკა, კომპიუტერული მეცნიერებები*

სამახსოვრო ავტორებისათვის:

- გამოსაქვეყნებლად მიღებული ყველა მასალა რეცენზირდება და დადებითი რეცენზიის შემთხვევაში გამოქვეყნდება ჟურნალში.
- მასალები მიიღება ქართულ ან ინგლისურ ენაზე.
- სტატიას თან უნდა ახლდეს ანოტაცია (რეზიუმე) სტატიის ენაზე, აგრეთვე გაფართოებული (არაუმეტეს ორი გვერდისა) ანოტაცია მეორე ენაზე.
- ავტორს შეუძლია პუბლიკაციისათვის მოგვაწოდოს ერთი ან რამდენიმე სტატია.
- ავტორისათვის მასალების დაბრუნება შემდგომი დამუშავებისათვის არ ნიშნავს, რომ მასალები მიღებულია გამოსაქვეყნებლად.
- გადამუშავებული ტექსტის მიღების შემდეგ მასალებს ხელახლა განიხილავს სარედაქციო კოლეგია.
- სტატიას მითითებული ექნება რედაქციაში მიღების თარიღი.
- სტატია მოგვაწოდეთ DOC(MS-Word) ფაილის სახით, ფურცლის ზომა – A4, შრიფტი AcadNusx, 12 ზომა, სტრიქონებს შორის მანძილი – 1,5; ინგლისური ტექსტის შრიფტი – TimesNewRoman, ზომა 12 დაშორება ფურცლის ყველა კიდიდან – 2,5სმ. გრაფიკული მასალა jpg, gif ან bmp ფაილები.
- სტატიის შინაარსის სტრუქტურა:
    - "UDC" კლასიფიკატორი, სათაური (ცენტრირებული, Bold, ზომა14); მონაცემები ავტორის (თითოეული თანაავტორის) შესახებ: გვარი და სახელი (ცენტრირებული, ზომა 12), ორგანიზაციის დასახელება და მისამართი (ცენტრირებული, ზომა 10);
    - ანოტაცია (რეზიუმე) სტატიის ენაზე (ზომა 12). ანოტაცია არ უნდა შეიცავდეს ციტატებს გამოყენებული ლიტერატურიდან და რთულ ფორმულებს. საკვანძო სიტყვები სტატიის ენაზე (ზომა 12);

- სტატიის შინაარსი; გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა. ლიტერატურის ნუსხა შეადგინეთ ტექსტში მისი გამოყენების თანმიმდევრობის მიხედვით;
- დასასრულ, მოიყვანეთ რეზიუმეები.
- სტატიის მოცულობა არ უნდა აღემატებოდეს 15 გვერდს (რეზიუმეების ჩათვლით).
- სტატია წარმოდგენილი უნდა იყოს : 1 ეგზემპლიარი ამობეჭდილი + ელექტრონული ვერსია. სტატიის გადმოგზავნა შეიძლება ელ-ფოსტით: **@ingagabi@mail.ru, guka3chank@ yahoo.com**