ელ. ჭელიძე

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს
უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების
სახელმწიფო კომიტეტის მიერ მოწონებულია სა-
ხელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლებისათვის

სახელმწიფო გამომცემლობა „ცოდნა"
თბილისი — 1964

517 . 2
517 . 24+[016 . 3]
ჭ 345.

პროფ. ვლ. ჭელიძის „ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის“ სახელმძღვანელო შედგენილია უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტთათვის. იგი გამოდგება აგრეთვე, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტთათვის.

წიგნში წარმოდგენილია სიმრავლეთა ზოგადი თეორია, ნამდვილ რიცხვთა თეორიები დედეკინდისა და კანტორისა, კარდინალურ რიცხვთა თეორიის ელემენტები, მეტრიკული სივრცე, ნამდვილი ფუნქციები, ფუნქციები სასრული ვარიაციით, ზომადი სიმრავლეები და ზომადი ფუნქციები, წარმოებული რიცხვები და ინტეგრალის თეორია (რიმანის, ლებეგის, სტილტიესისა და დანჟუასი).

წინასიტყვაობა

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთ შტოს, რომელშიაც შეგვიძლია განვასხვავოთ სამი მიმართულება:

ა) ფუნქციათა მეტრიკული თეორია, სადაც ფუნქციების თვისებები იმ სიმრავლეთა ზომის საშუალებით შეისწავლება, რომლებზედაც ამ თვისებებს ადგილი აქვს;

ბ) ფუნქციათა დესკრიპტიული თეორია, რომელშიაც შესწავლის ძირითად ობიექტს ზღვარზე გადასვლის ოპერაცია წარმოადგენს;

გ) ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორია, რომელიც შეისწავლის, როგორც ფუნქციათა მიახლოებით წარმოდგენებს, ისე თვით ფუნქციებსაც მათი მიახლოებითი წარმოდგენების თვისებათა საშუალებით.

კლასიკურ მათემატიკურ ანალიზში შესწავლის ძირითადი ობიექტია შუალედზე უწყვეტი ფუნქციები, რომლებსაც გარკვეული სიგლუვე აქვთ. მაგრამ მე-19 საუკუნის მეორე ნახევრიდან მათემატიკის განვითარება მოითხოვდა უფრო ზოგადი სახის ფუნქციების სისტემატურ შესწავლას. ამის ძირითადი მიზეზი იყო ის, რომ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება წყვეტილი ფუნქცია იყოს, ე. ი. უწყვეტ ფუნქციათა კლასი არ აღმოჩნდა ჩაკეტილი მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანესი ოპერაციის — ზღვარზე გადასვლის ოპერაციის მიმართ. ამასთან დაკავშირებით ფუნქციები, რომლებიც განისაზღვრება ისეთი კლასიკური საშუალებებით, როგორიცაა ტრიგონომეტრიული მწკრივები, ხშირად წყვეტილ ან არაწარმოებად ფუნქციებს წარმოადგენენ. ამავე მიზეზით უწყვეტი ფუნქციების წარმოებულებები შეიძლება წყვეტილი იყოს და სხვ.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომლებიც ფიზიკური ამოცანების განხილვისას წარმოიშობა, ზოგჯერ ამონახსნები არა აქვთ გარკვეული სიგლუვის ფუნქციათა კლასში, მაგრამ მათ ამონახსნები აქვთ ფუნქციათა უფრო ფართო კლასში, თუ თვით ამონახსნის ცნებას სათანადოდ განვაზოგადებთ. ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ სწორედ ეს განზოგადებული ამონახსნები გამოსავალი ფიზიკური ამოცანის პასუხს იძლევა. ამ და ანალოგიურმა გარემოებებმა სტიმული მისცა ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის თანამედროვე განვითარებას.

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ცალკეული ფაქტები აღმოჩენილი იყო მე-19 საუკუნეში, მაგალითად, უწყვეტ ფუნქციათა ისეთი

მწკრივის არსებობა, რომლის ჯამი წყვეტილი ფუნქციაა, ისეთი უწყვეტი ფუნქციის არსებობა, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს და სხვ. მაგრამ ამ ფაქტებს, ჩვეულებრივ, უყურებდნენ როგორც „წესიდან გამონაკლისს“ და არავითარი ზოგადი სქემებით არ აერთიანებდნენ. მხოლოდ მე-20 საუკუნის პირველი წლებიდან, როდესაც ფუნქციათა შესწავლას საფუძვლად დაედო სიმრავლეთა თეორიის მეთოდები (უმთავრესად ფრანგი მათემატიკოსების რ. ბერის, ე. ბორელისა და ა. ლებეგის შრომებში), ფუნქციათა თანამედროვე თეორიამ სისტემატური განვითარება დაიწყო.

ფუნქციათა მეტრიკულ თეორიაში ზოგადი თვალსაზრისით შეისწავლება ფუნქციათა ინტეგრება და გაწარმოება, სხვადასხვა წესით ხდება ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის ცნების განზოგადება, ძალიან ფართო კლასის წყვეტილი ფუნქციების აგებულების გამოკვლევა და სხვა.

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში დიდი წვლილი შეიტანა მოსკოვის მათემატიკურმა სკოლამ (დ. ეგოროვი, ნ. ლუზინი, ა. ხინჩინი, დ. მენშოვი, პ. ალექსანდროვი, ნ. ბარი, ა. კოლმოგოროვი და სხვები).

წინამდებარე სახელმძღვანელოს საფუძვლად უდევს ლექციები, რომელთაც 26 წლის განმავლობაში ვკითხულობდი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე. წიგნში ძირითადად თავმოყრილია ის მასალა, რაც გათვალისწინებულია უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტთათვის. ყოველი თავის ბოლოს მოყვანილია სავარჯიშო მაგალითები, რომელთა ამოხსნა ხელს შეუწყობს საგნის ღრმად შესწავლას.

წიგნში გადმოცემულია აგრეთვე ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის სპეციალური საკითხები, რომელთაც ავტორი კითხულობდა რიგი წლების განმავლობაში თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მეოთხე და მეხუთე კურსის სტუდენტთათვის.

ეს სახელმძღვანელო არსებითად განსხვავდება 1956 წელს ჩვენ მიერ ქართულ ენაზე გამოცემული ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის სახელმძღვანელოსაგან, რომელიც შედგენილი იყო პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტთათვის.

დასასრულ, ავტორი მადლობას უძღვნის წიგნის რედაქტორს დოც. ა. ბენდუქიძეს, რომელმაც ტექსტი დაწვრილებით წაიკითხა და მოგვცა ზოგიერთი სასარგებლო შენიშვნა.

ვლ. ჭელიძე

თბილისი
1963 წლის 5 სექტემბერი.

თავი I

სიმრავლეთა ზოგადი თვისებები

§ 1. სიმრავლის ცნება

სიმრავლის ცნება იმდენად პირველადია, რომ ძნელია მისი განსაზღვრა უფრო მარტივი ცნების საშუალებით. ამ მდგომარეობამ გაკვირვება არ უნდა გამოიწვიოს. მართლაც, თუ რაიმე A ცნება განსაზღვრულია უფრო მარტივი B ცნების საშუალებით, მაშინ თვით B ცნებაც საჭიროებს განსაზღვრას უფრო მარტივი C ცნების საშუალებით, ეს უკანასკნელი კი თავის მხრივ საჭიროებს განსაზღვრას კიდევ უფრო მარტივი D ცნების საშუალებით და ასე შემდეგ. ამრიგად, ბოლოს და ბოლოს მივალთ იმდენად პირველად M ცნებამდე, რომლის განსაზღვრა უფრო მარტივი ცნებების საშუალებით ვერ ხერხდება; ასეთი M ცნების აზრი უნდა გავაშუქოთ მაგალითებზე.

ამიტომ ჩვენ არ შევეცდებით სიმრავლის ცნების განსაზღვრას. სიმრავლის ცნებას კონკრეტულ მაგალითებზე გავეცნოთ. მაგალითად, შეიძლება ლაპარაკი ქართული ანბანის ყველა ასოს სიმრავლეზე, იმ წიგნების სიმრავლეზე, რომლებიც რაიმე ბიბლიოთეკას შეადგენს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის იმ სტუდენტთა სიმრავლეზე, რომლებიც 1960 წლის პირველ სექტემბრამდე სწავლობდნენ; იმ თევზების სიმრავლეზე, რომლებიც აღებულ მომენტში შავ ზღვაში დაცურავენ; ყველა წრეწირის სიმრავლეზე; იმ სამკუთხედების სიმრავლეზე, რომლებიც შეგვიძლია ჩავხაზოთ მოცემულ წრეწირში; საბჭოთა კავშირში საშუალო და უმაღლეს სასწავლებელთა სიმრავლეზე, მოცემული წრის წერტილთა სიმრავლეზე და სხვა. სიტყვა სიმრავლის ნაცვლად შეიძლება ვიხმაროთ სიტყვები: ერთობლიობა, კლასი, კოლექცია, სისტემა და სხვა.

იმ ობიექტებს, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, **სიმრავლის ელემენტები** ჰქვია. ზემოთ მოყვანილ პირველ მაგალითში სიმრავლის ელემენტებს წარმოადგენენ ქართული ანბანის ასოები, მეორეში — წიგნები, რომლებიც ბიბლიოთეკაშია, მესამეში — სტუდენტები, რომლებიც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში სწავლობდნენ 1960 წლის პირველ სექტემბრამდე, მეოთხეში — თევზები, რომლებიც აღებულ მომენტში შავ ზღვაში დაცურავენ, მეხუთეში — წრეწირები, მეექვსეში —

სამკუთხედები, რომლებიც შეგვიძლია ჩავხაზოთ მოცემულ წრეწირში, მეშვიდეში კი საშუალო ან უმაღლესი სასწავლებლები საბჭოთა კავშირში, ხოლო მერვეში — მოცემული წრის წერტილები.

შევნიშნოთ, რომ სიმრავლის ელემენტები შეიძლება სხვადასხვა ბუნების იყოს. მაგალითად, სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს მაგიდის, ცხვრის, მტრედის, სახლის და მთვარისაგან.

სიმრავლე რომ განვსაზღვროთ, საკმარისია დავასახელოთ ამ სიმრავლის ყველა ელემენტისათვის დამახასიათებელი საერთო თვისება, ე. ი. ისეთი თვისება, რომელიც აქვს ამ სიმრავლის ყველა ელემენტს და მხოლოდ მათ.

როდესაც სიმრავლის ცალკეული ელემენტის მიმართ ცნობილი არ არის თუ რა კონკრეტული თვისებებისაა ეს ელემენტი, მაშინ სიმრავლეს აბსტრაქტული სიმრავლე ეწოდება.

მათემატიკურ დისციპლინას, რომელიც შეისწავლის სიმრავლეთა თვისებებს იმ საგნების ბუნებაზე დამოუკიდებლად, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, სიმრავლეთა თეორია ეწოდება. ამ თეორიის განვითარება დაიწყო XIX საუკუნის ბოლოსა და XX საუკუნის დასაწყისში.

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელია გერმანელი მათემატიკოსი გეორგ კანტორი (Cantor, 1845 — 1918). კანტორის ნაშრომები სიმრავლეთა თეორიაში წარმოიშვა ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა კრებადობის საკითხის განხილვასთან დაკავშირებით. უნდა აღინიშნოს, რომ კონკრეტული მათემატიკური ამოცანების განხილვას ხშირად მივყავართ ძალიან აბსტრაქტული და ზოგადი თეორიების აგებამდე.

კანტორის წინამორბედი სიმრავლეთა თეორიის შექმნის საქმეში იყო ჩეხი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი ბოლცანო (Bolzano, 1781 — 1848), რომელმაც თავისი ნაშრომი „უსასრულობის პარადოქსები" მიუძღვნა უსასრულო სიმრავლეთა შესწავლას.

თანამედროვე მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორია ძირითადი მნიშვნელობისაა. ამ თეორიის იდეები და ცნებები შესულია მათემატიკის ყველა დარგში, ამიტომ შეუძლებელია სწორი წარმოდგენა ვიქონიოთ თანამედროვე მათემატიკაზე, თუ არ გავეცნობით სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს. სიმრავლეთა თეორიული თვალსაზრისის განსაკუთრებული ნაყოფიერება გამოჩნდა ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, რომლის დიდი მათემატიკური დისციპლინის სახით გაშლა შესაძლებელი გახდა სიმრავლეთა თეორიის ნიადაგზე, მისი რთული მეთოდებისა და შედეგების ფართო გამოყენებით. სიმრავლეთა თეორიის გამოყენება ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში საშუალებას გვაძლევს ფუნქციის ცნება შევისწავლოთ ზოგადი და ფართო თვალსაზრისით.

სიმრავლეები, ჩვეულებრივ, ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღინიშნება, სიმრავლის ელემენტები კი პატარა ასოებით. თუ A რაიმე სიმრავლეა, ხოლო a წარმოადგენს რომელიმე ობიექტს, მაშინ ჩაწერა $a \in A$ ნიშნავს, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი და იკითხება „a შედის A სიმრავლეში" ან „a ეკუთვნის A სიმრავლეს"; თუკი a ელემენტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ წერენ $a \overline{\in} A$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც x წარმოადგენს A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის ზოგად აღნიშვნას, მაშინ წერენ

$$A=\{x\}$$

და x ელემენტს ეწოდება მოცემული სიმრავლის ც ვ ლ ა დ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი, ანუ ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი. ასე, მაგალითად, თუ r ასოთი აღნიშნულია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი, ხოლო Γ_0 ასოთი კი ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Gamma_0=\{r\}.$$

თუ შესაძლებელია სიმრავლის ყველა ელემენტის ჩამოთვლა, მაშინ ფიგურულ ფრჩხილებში ერთიმეორის მიყოლებით ჩაწერენ სიმრავლის ყველა ელემენტს. მაგალითად, თუ E წარმოადგენს ოთხკუთხედის გვერდთა სიმრავლეს და ეს გვერდები აღნიშნულია a, b, c, d ასოებით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E=\{a, b, c, d\}.$$

§ 2. ცარიელი სიმრავლე. სიმრავლის ნაწილი

სიმრავლეთა თეორიაში განიხილება აგრეთვე ეგრეთ წოდებული ცარიელი სიმრავლე, ე. ი. ისეთი სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს. ცარიელი სიმრავლის შემოღება სასარგებლოა ფორმულირებათა ზოგადობისა და სიმარტივის მიზნით. როდესაც ვლაპარაკობთ სიმრავლეზე, ზოგჯერ ცნობილი არაა ეს სიმრავლე შეიცავს თუ არა რაიმე ელემენტს.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, A არის $x^2+x+1=0$ განტოლების კომპლექსურ ფესვთა სიმრავლე, B კი ნამდვილ ფესვთა სიმრავლე. მოცემული განტოლების ფესვებია

$$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{და} \quad -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

მაშასადამე, A სიმრავლე შედგება ორი ელემენტისაგან, B სიმრავლე კი

არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, ვინაიდან მოცემულ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვები. ამიტომ B წარმოადგენს ცარიელ სიმრავლეს. ცარიელ სიმრავლეს აღვნიშნავთ Λ ასოთი.

ცარიელ სიმრავლესთან ერთად გვხვდება ერთელემენტიანი სიმრავლეც. საჭიროა განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან a ელემენტი და ერთელემენტიანი $\{a\}$ სიმრავლე, რათა ავიცდინოთ წინააღმდეგობანი. მაგალითად, ვთქვათ, N ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეა. განვიხილოთ $E=\{N\}$ სიმრავლე. ეს სიმრავლე ერთელემენტიანია: მისი ერთადერთი ელემენტია თვით N სიმრავლე. თუ ერთმანეთისაგან არ განვასხვავებთ E სიმრავლეს მისი ერთადერთი N ელემენტისაგან, მაშინ წავაწყდებით წინააღმდეგობას, ვინაიდან, ერთი მხრით, E-ს, როგორც ერთელემენტიან სიმრავლეს, აქვს მხოლოდ ერთი ელემენტი, მეორე მხრით, N სიმრავლეს აქვს უამრავი ელემენტი.

განსაზღვრა 1. A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეს ეკუთვნის. თვით A სიმრავლე თავის ნაწილია.

ეს განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრისა: A სიმრავლეს B სიმრავლის ნაწილი ეწოდება, თუ არ არსებობს ისეთი ობიექტი, რომელიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნოდეს და ეკუთვნოდეს A სიმრავლეს.

ამ განსაზღვრის საფუძველზე ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ცარიელი სიმრავლე ყოველი სიმრავლის ნაწილია. მართლაც, განვიხილოთ რაიმე A სიმრავლე. ცხადია, არ არსებობს ისეთი საგანი, რომელიც A სიმრავლეს არ ეკუთვნოდეს და ეკუთვნოდეს ცარიელ სიმრავლეს. ეს იმის გამო, რომ ცარიელი სიმრავლე არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს.

განსაზღვრა 2. თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ნაწილია და ამასთანავე B სიმრავლე ისეთ ელემენტს შეიცავს, რომელიც A სიმრავლეს არ ეკუთვნის, მაშინ A სიმრავლეს B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი ეწოდება.

იმ შემთხვევაში, როდესაც A სიმრავლე B სიმრავლის ნაწილია, წერენ

$$A \subset B \quad \text{ან} \quad B \supset A$$

და იკითხება: A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში, ან B სიმრავლე შეიცავს A სიმრავლეს. $\subset$ და $\supset$ სიმბოლოებს ეწოდება ჩართვის სიმბოლოები.

თუ E რაიმე სიმრავლეა, მაშინ E და Λ სიმრავლეებს ჰქვია E სიმრავლის არასაკუთრივი ნაწილები, ხოლო E სიმრავლის დანარჩენ ნაწილებს კი E სიმრავლის საკუთრივი ნაწილები.

განსაზღვრა 3. თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეში შედის და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი A სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ A და B *ტოლი* სიმრავლეებია და წერენ

$$A=B.$$

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: *ორი სიმრავლის ტოლობის დასადგენად აუცილებელია აღმოვაჩინოთ, რომ ერთი სიმრავლე მეორე სიმრავლის ნაწილია და პირიქით, მეორე სიმრავლე პირველი სიმრავლის ნაწილია.*

განვიხილოთ მაგალითები.

1. ვთქვათ, A ლუწ რიცხვთა სიმრავლეა, B კი ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე. ცხადია, A წარმოადგენს B სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს.

2. ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე წარმოადგენს ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს.

3. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლე საკუთრივი ნაწილია ამავე უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლისა.

4. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ყველა ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე ამავე უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლის არასაკუთრივი ნაწილია.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ჩართვის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი თვისებები: ნებისმიერი სამი A, B და C სიმრალისათვის მართებულია დამოკიდებულებანი:

1°. $\Lambda\subset A$,

2°. $A\subset A$ (ჩართვის რეფლექსურობა),

3°. *თუ* $A\subset B$ *და* $B\subset A$, *მაშინ* $A=B$,

4°. *თუ* $A\subset B$ *და* $B\subset C$, *მაშინ* $A\subset C$ (ჩართვის ტრანზიტულობა).

თუ სიმრავლის ელემენტებს სიმრავლეები წარმოადგენენ, მაშინ ვიხმართ ტერმინს „*სიმრავლეთა სისტემა*“. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ მოცემულია რაიმე ფიქსირებული სიმრავლე X, რომელსაც ვუწოდებთ სივრცეს; სიმრავლეებს განვიხილავთ ამ სივრციდან. X სიმრავლის ელემენტებს ვუწოდებთ წერტილებს.

§ 3. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრული სიმრავლეები

განვიხილოთ რაიმე ორი A და B სიმრავლე. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 4. თუ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება რაიმე წესით B სიმრავლის გარკვეული ელემენტი და B სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება A სიმრავლის გარკვეული ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ამ შემთხვევაში A სიმრავლეს B სიმრავლის ეკვივალენტური ეწოდებოდა და წერენ $A \sim B$.

მოვიყვანოთ ეკვივალენტურ სიმრავლეთა მაგალითები.

1. ავიღოთ შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{\alpha, \beta \ \gamma, \delta\}.$$

თუ a ელემენტს შევუსაბამებთ α ელემენტს, b ელემენტს — β ელემენტს, c ელემენტს კი — γ ელემენტს, ხოლო d-ს შევუსაბამებთ δ ელემენტს, ამით A და B სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და, მაშასადამე, $A \sim B$.

2. განვიხილოთ ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ და ყველა დადებითი ლუწი რიცხვის სიმრავლე $M = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$. ამ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეგვიძლია ასე დავამყაროთ: N სიმრავლის ყოველ ელემენტს n შევუსაბამოთ M სიმრავლის ელემენტი $2n$; მაშინ ამ შესაბამისობაში მონაწილეობას მიიღებს როგორც პირველი სიმრავლის, ისე მეორე სიმრავლის ყოველი ელემენტი. ცხადია, რომ $N \sim M$. ამრიგად, N სიმრავლე თავისი საკუთრივი M ნაწილის ეკვივალენტურია.

3. ვთქვათ, G ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეა, N კი — ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე. G სიმრავლისა და N სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობა შეგვიძლია დავამყაროთ შემდეგი ფორმულით:

$$y = (-1)^x \left[\frac{x}{2}\right], \tag{3.1}$$

სადაც x არის N სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, y კი G სიმრავლის ელემენტია; აქ $\left[\frac{x}{2}\right]$ წარმოადგენს $\frac{x}{2}$ რიცხვის მთელ ნაწილს. (3.1) ფორმულიდან ჩანს, რომ ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე ეკვივალენტურია ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლისა.

განსაზღვრა 5. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი თავისი რაიმე საკუთრივი ნაწილის ეკვივალენტურია.

ამ განსაზღვრის თანახმად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. უსასრულო სიმრავლის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრა რ. დედეკინდს (Dedekind) ეკუთვნის[1].

სასრული სიმრავლის ცნება უარყოფის გზით განისაზღვრება: *სიმრავლე სასრულია*, თუ იგი უსასრულო არაა, ე. ი. *სიმრავლე სასრულია, თუ არ არსებობს მისი საკუთრივი ნაწილი, რომელიც მთელი სიმრავლის ეკვივალენტურია.*

ზოგიერთი მეცნიერის აზრით უსასრულო სიმრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა მიუღებელია, ვინაიდან როგორც პირველადი, განსაზღვრულია უსასრულო სიმრავლის ცნება, ხოლო სასრული სიმრავლის ცნებას კი მოცემული აქვს მეორადი ხასიათი, იმ დროს, როდესაც ჯერ სასრული გვაქვს და შემდეგ უსასრულო. ასეთი მთსაზრება სწორი არაა, რადგანაც უსასრულო გვაქვს სასრულოსთან ერთად, მისგან განუყრელად და არა სასრულის შემდეგ.

§ 4. მიმართება. სიმრავლის დალაგება

ორ სიმრავლეს შორის ეკვივალენტობის დამოკიდებულება მათემატიკური მიმართების ერთ-ერთი მაგალითია. იმ ობიექტებს, რომელთა შორის არსებობს მიმართება *მიმართების კომპონენტები* ეწოდება.

თუ a ობიექტს აქვს გარკვეული მიმართება b ობიექტისადმი, მაშინ წერენ $R\{a, b\}$. აქ R სიმბოლო აღნიშნავს მიმართებას, რომელსაც განიხილავენ კომპონენტებს შორის. მაგალითად, როდესაც ვამბობთ, რომ a რიცხვი b რიცხვზე ნაკლებია, მიმართება ამ შემთხვევაში მეტნაკლებობის მიმართებაა.

თუ მოცემულია რაიმე a ობიექტის მიმართება b ობიექტისადმი, ამით b ობიექტიც a ობიექტისადმი იქნება გარკვეულ მიმართებაში. მაგალითად, თუ a რიცხვი b რიცხვზე მეტია, მაშინ b ნაკლებია a რიცხვზე.

განსაზღვრა 6. თუ მოცემულია $R\{a, b\}$ მიმართება, მაშინ b ობიექტის მიმართებას a ობიექტისადმი ეწოდება R მიმართების *შექცეული*

[1] რ. დედეკინდი (1831—1916) — გერმანელი მათემატიკოსი, რიცხვთა თეორიის სპეციალისტი. მან დიდი გავლენა მოახდინა თანამედროვე ალგებრის განვითარებაზე. გარდა ამისა, იგი ცნობილია თავისი ნაშრომებით მათემატიკური ანალიზის დაფუძნებაში. დედეკინდი ერთ-ერთი პირველი ავტორთაგანია ნამდვილ რიცხვთა თეორიის მკაცრი დაფუძნებისა. იგი ბერლინის, პარიზისა და რომის აკადემიების წევრი იყო.

მ ი მ ა რ თ ე ბ ა, თვით R მიმართებას კი პ ი რ დ ა პ ი რ ი მ ი მ ა რ თ ე ბ ა.

პირდაპირი და შექცეული მიმართება შეიძლება სხვადასხვა იყოს. მაგალითად, $a>b$ მიმართების შექცეული მიმართება განსხვავებულია მოცემული მიმართებისაგან. მაგრამ, თუ განვიხილავთ მიმართებას a წრფე b წრფის პარალელურია, მაშინ შექცეული მიმართება იგივე იქნება: b წრფე a წრფის პარალელურია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 7. მიმართებას, რომლის შექცეული მიმართება იგივეა, რაც აღებული მიმართება, ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ ი მ ა რ თ ე ბ ა ეწოდება.

მაშასადამე, $R\{a, b\}$ მიმართება სიმეტრიულია, თუ მართებულია $R\{b, a\}$ მიმართებაც. მაგალითად, მიმართება a სამკუთხედი b სამკუთხედის მსგავსია სიმეტრიული მიმართებაა, ვინაიდან მაშინ b სამკუთხედიც a სამკუთხედის მსგავსი იქნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 8. მიმართებას ა რ ა ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი ეწოდება, თუ შექცეული მიმართება იგივე არაა, რაც აღებული მიმართება.

არასიმეტრიულ მიმართებას წარმოადგენს, მაგალითად, a ნაკლებია b-ზე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 9. თუ $R\{a, b\}$ მიმართება ყოველთვის გამორიცხავს $R\{b, a\}$ მიმართებას, მაშინ აღებულ მიმართებას ა ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი ეწოდება.

მაგალითად, მიმართება a მეტია b-ზე ასიმეტრიულია. ასიმეტრიული მიმართება არასიმეტრიულიც იქნება, მაგრამ არასიმეტრიული მიმართება შეიძლება არ იყოს ასიმეტრიული. მაგალითად, მიმართება a რიცხვი b რიცხვის გამყოფია არასიმეტრიულია, მაგრამ იგი ასიმეტრიული არ იქნება, ვინაიდან გამორიცხული არ არის, რომ a იყოს b რიცხვის გამყოფი და b რიცხვიც იყოს a რიცხვის გამყოფი; ამას ადგილი ექნება, როდესაც a და b ერთი და იგივეა.

ორკომპონენტიან მიმართებისათვის, სიმეტრიულობის ცნებასთან ერთად, მნიშვნელოვანია ტრანზიტულობის ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 10. R მიმართებას ტ რ ა ნ ზ ი ტ უ ლ ი ეწოდება, თუ $R\{a, b\}$ და $R\{b, c\}$ მიმართებებს მოსდევს $R\{a, c\}$ მიმართება.

მაგალითად, მიმართება a მეტია b-ზე ტრანზიტულია, ვინაიდან უტოლობებს $a>b$ და $b>c$ მოსდევს უტოლობა $a>c$. მაგრამ მიმართება a მეგობარია b-სი, ტრანზიტული არაა, ვინაიდან, თუ a მეგობარია b-სი, და b მეგობარია c-სი, აქედან საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს, რომ a მეგობარია c-სი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 11. თუ $R\{a, b\}$ და $R\{b, c\}$ მიმართებებიდან არასდროს ადგილი არ აქვს $R\{a, c\}$ მიმართებას, მაშინ R მიმართებას ი ნ ტ რ ა ნ ზ ი ტ უ ლ ი მიმართება ეწოდება.

ყოველი ინტრანზიტული მიმართება არატრანზიტულია, მაგრამ არატრანზიტული მიმართება შეიძლება არ იყოს ინტრანზიტული მიმართება.

განსაზღვრა 12. $R\{a, b\}$ მიმართებას რეფლექსური ეწოდება, თუ ყოველ ობიექტს, რომელიც ამ მიმართებაში მონაწილეობს, აქვს ეს მიმართება თავისთავისადმი, ე. ი. ადგილი აქვს $R\{a, a\}$ მიმართებას.

მაგალითად, რეფლექსურ მიმართებას წარმოადგენს წრფეთა პარალელობა; ყოველი წრფე თავისთავის პარალელურია. მაგრამ მეტნაკლებობის დამოკიდებულება რეფლექსური არ არის, ვინაიდან ნებისმიერი რიცხვი თავისთავზე მეტი ან ნაკლები ვერ იქნება.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ისეთ მიმართებებს, რომლებიც ერთდროულად ასიმეტრიულია და ტრანზიტული, აგრეთვე ისეთ მიმართებებს, რომლებიც სიმეტრიულია, ტრანზიტულია და რეფლექსური.

პირველი სახის მიმართებების მაგალითებია: a მეტია b-ზე, a უმცროსია b-ზე და სხვა.

$R\{a, b\}$ მიმართებაში ვასხვავებთ ტერმინს წინა და შემდგომს. თუ მიმართება სიმეტრიულია, მაშინ ამ მიმართების მიმართ მისი კომპონენტები ერთნაირ პირობებში არიან. მაგალითად, თუ განვიხილავთ პარალელობის მიმართებას და წინა ადგილი იმ წრფეს მივაკუთვნეთ, რომელიც მეორე წრფის პარალელურია, მაშინ წინა ადგილი შეგვიძლია მივაკუთვნოთ მეორე წრფესაც, ვინაიდან ისიც პირველი წრფის პარალელურია.

თუ გვაქვს ასიმეტრიული მიმართება, მაშინ ამ მიმართების მიმართ მისი კომპონენტები სხვადასხვა პირობებში არიან. მაგალითად, ვთქვათ, a თბილისის „დინამოს" ფეხბურთელთა გუნდია, b კი მოსკოვის „დინამოსი". თუ განვიხილავთ ასეთ მიმართებას: a გუნდმა მოუგო b გუნდს და წინა ადგილს იმას მივაკუთვნებთ, რომელიც იგებს, მაშინ ეს წინა ადგილი მიეკუთვნება a გუნდს, ვინაიდან b-ს მიმართება a-სადმი იქნება არა მოგების არამედ წაგებისა.

ამრიგად, ასიმეტრიული მიმართების მიხედვით სათანადო წყვილის ფარგლებში შეიძლება იმგვარი რიგის დამყარება, რომელიც მიმართების მიმართულებას ეთანხმება.

ისმის კითხვა: დამყარდა თუ არა ამით საერთო რიგი იმ ობიექტთა სიმრავლეში, რომლებიც მონაწილეობას იღებენ $R\{a, b\}$ მიმართებაში? ამის გასარკვევად განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, ფეხბურთის თამაშში მონაწილეობდა სამი გუნდი a, b, c და თამაშის შედეგი ასეთია: a გუნდმა მოუგო b გუნდს, b გუნდმა c გუნდს, ხოლო c გუნდმა a გუნდს. თუ წინა ადგილას დავაყენებთ იმ გუნდს, რომელმაც მოიგო,

მაშინ a და b კომპონენტების ფარგლებში წინ იქნება a; b და c-ს ფარგლებში კი b, ხოლო a და c-ს შორის წინ იქნება c. აქ არ გვექნება ყველა გუნდისათვის რიგი, ვინაიდან a გუნდი გამოდის b გუნდის წინ, b კი c-ს წინ, ხოლო c იქნება a გუნდის წინ. ამ გარემოებასთან დაკავშირებულია ის, რომ ჩვენი მიმართება ტრანზიტული არ არის.

მიმართება ტრანზიტული იქნება თამაშის ასეთ შედეგთან დაკავშირებით: a გუნდმა მოუგო b გუნდს, b გუნდმა c-ს და a-მ მოუგო c გუნდს; მაშინ ფეხბურთელთა ყველა გუნდი დალაგდებოდა a, b, c რიგით.

საზოგადოდ, თუ მიმართება ასიმეტრიულია და ტრანზიტული, ამ მიმართების მიხედვით შეიძლება მასში მონაწილე ობიექტები დალაგდეს გარკვეული რიგით, რომელიც თვით მიმართების მიმართულებას შეესაბამება. ასიმეტრიულობა იწვევს დალაგებას თითოეული წყვილის ფარგლებში, ხოლო ტრანზიტულობა ამ დალაგებებს ერთიან დალაგებად გადააქცევს. ასიმეტრიული და ტრანზიტული მიმართება მჭიდროდ დაკავშირებულია რიგის ცნებასთან.

განსაზღვრა **13.** თუ არსებობს რაიმე ასიმეტრიული და ტრანზიტული R მიმართება, რომლითაც დაკავშირებულია ერთმანეთთან მოცემული E სიმრავლის ელემენტები, მაშინ სიმრავლეს ეწოდება *დალაგებული* ამ მიმართების მიხედვით.

ამრიგად, როცა E სიმრავლე დალაგებულია R მიმართების მიხედვით და E სიმრავლის a, b, c ელემენტებისათვის გვაქვს $R\{a, b\}$ და $R\{b, c\}$, მაშინ გვექნება $R\{a, c\}$. ამ გარემოებას ასე ჩავწერთ: *თუ*

$$a<b \text{ და } b<c, \text{ მაშინ } a<c. \tag{4.1}$$

როცა გვაქვს $a<b$, მაშინ a-ს ეწოდება *წინა ელემენტი*, b-ს კი *მომდევნო ელემენტი*. b ელემენტზე ვიტყვით აგრეთვე, რომ მას აქვს a ელემენტზე უფრო *მაღალი რიგი*.

(4.1) თანაფარდობა ასე იკითხება: *თუ* a-ს *მომდევნო ელემენტია* b *და* b-ს *მომდევნო ელემენტია* c, *მაშინ* c *ელემენტიც იქნება* a *ელემენტის მომდევნო ელემენტი*.

განსაზღვრა **14.** თუ E სიმრავლე დალაგებულია რაიმე R მიმართების მიხედვით და a წარმოადგენს ამ სიმრავლის ისეთ ელემენტს, რომ E სიმრავლეში არ არსებობს ელემენტი, რომელსაც R მიმართება ჰქონდეს a-სთან, მაშინ a ელემენტს მოცემული სიმრავლის *საწყისი ელემენტი* ეწოდება. თუკი b არის E სიმრავლის ისეთი ელემენტი, რომ არ არსებობს E სიმრავლის ელემენტი, რომელთანაც b ელემენტს ჰქონდეს R მიმართება, მაშინ b-ს აღებული სიმრავლის *ბოლო ელემენტი* ჰქვია.

სიმრავლეს შეიძლება არ ჰქონდეს საწყისი ან ბოლო ელემენტი. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, E არის 0 და 1 შორის მოთავსებული ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე და დავალაგოთ ეს სიმრავლე მასში შემავალი რიცხვების სიდიდეთა მიხედვით. მაშინ E სიმრავლეს არ ექნება არც საწყისი და არც ბოლო ელემენტი. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, r არის E სიმრავლის საწყისი ელემენტი, მაშინ იგი იქნება E სიმრავლის ელემენტთა შორის უმცირესი და რადგანაც E შეიცავს 0 და 1 შორის მოთავსებულ ყველა რაციონალურ რიცხვს, ამიტომ r იქნება დადებითი რიცხვი. მაგრამ რიცხვი $\frac{r}{2}$ აგრეთვე დადებითი რაციონალური რიცხვია და, მაშასადამე, იგი მიეკუთვნება E სიმრავლეს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, E სიმრავლეში არ არსებობს საწყისი ელემენტი. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ E სიმრავლე არ შეიცავს ბოლო ელემენტს.

ეკვივალენტობის ცნება რიგობრივი შინაარსის ცნებას არ წარმოადგენს, მაგრამ შეიძლება შემოვიღოთ ეკვივალენტობის ცნების მონათესავე ცნება, რომელსაც რიგობრივი ხასიათი აქვს და რომელშიაც გათვალისწინებული იქნება სიმრავლის დალაგება. ეს არის სიმრავლეთა მსგავსების ცნება.

განსაზღვრა 15. დალაგებულ ორ A და B სიმრავლეს **მსგავსი სიმრავლეები** ეწოდება, თუ მათ შორის შეიძლება ურთიერთცალსახა შესაბამისობის დამყარება ისე, რომ, თუ A სიმრავლის ორი ნებისმიერი a_1 და a_2 ელემენტიდან a_1 წინა ელემენტია, მაშინ B სიმრავლის b_1 და b_2 ელემენტებიდან, რომლებიც შეესაბამებიან a_1 და a_2 ელემენტებს, წინა ელემენტს წარმოადგენს b_1. სხვანაირად რომ ვთქვათ, A და B მსგავსი სიმრავლეებია, თუ ისინი ეკვივალენტური და ერთნაირად დალაგებული სიმრავლეებია. ამ გარემოებას ასე აღნიშნავენ $A \simeq B$.

შესაბამისობას, რომელიც ამყარებს A და B სიმრავლეთა მსგავსებას, ეწოდება A და B სიმრავლეების **ურთიერთდაფარება**.

მაგალითად, თუ A მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეა და იგი დალაგებულია მეტნაკლებობის დამოკიდებულების მიხედვით, ხოლო B წარმოადგენს ასევე დალაგებულ დადებით ლუწ რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ მათ შორის მსგავსების დამოკიდებულებას დავამყარებთ, თუ A სიმრავლის ყოველ რიცხვს მის გაორკეცებულ მნიშვნელობას შევუსაბამებთ B სიმრავლეში.

ზემოთ მოყვანილი ცნებების საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ სასრული და უსასრულო სიმრავლის ცნება.

დალაგებული სასრული სიმრავლის განსაზღვრისათვის ბუნებრივია მოვითხოვოთ სიმრავლეში საწყისი და ბოლო ელემენტის არსებობა. მაგ-

რამ ეს პირობა საკმარისი არაა. ავიღოთ, მაგალითად, რიცხვები 0 და 1 და მათ შორის მოთავსებული ყველა რაციონალური რიცხვი. მიღებული რიცხვთა M სიმრავლე დავალაგოთ რიცხვთა სიდიდის მიხედვით. ამ სიმრავლეს აქვს საწყისი და ბოლო ელემენტი; ესენია 0 და 1, მაგრამ M სიმრავლეს სასრულ სიმრავლედ ვერ მივიჩნევთ, ვინაიდან, თუ ავიღებთ 0 და 1 შორის რაიმე რაციონალურ r რიცხვს, მაშინ 0 და r რიცხვს შორის მოთავსდება სხვა რაციონალური რიცხვი, მაგალითად $\frac{r}{2}$; ასევე 0 და $\frac{r}{2}$ რიცხვებს შორის მოთავსდება კიდევ სხვა რაციონალური რიცხვი და ა. შ. მაშასადამე, დადებით რაციონალურ რიცხვთა შორის არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. თუკი განვიხილავთ 0 და 1 შორის მოთავსებულ ყველა რაციონალური რიცხვის M^* სიმრავლეს, მაშინ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მას არ აქვს არც საწყისი და არც ბოლო ელემენტი. M^* სიმრავლე წარმოადგენს M სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს. ამრიგად, M სიმრავლეს აქვს საწყისი და ბოლო ელემენტი, მაგრამ მის საკუთრივ M^* ნაწილს არ აქვს საწყისი და ბოლო ელემენტი. ახლა მოვიყვანოთ სასრული და უსასრულო სიმრავლის

განსაზღვრა 10. თანახმად ცერმელოს (Zermelo)[1] განსაზღვრისა, დალაგებულ E სიმრავლეს სასრული სიმრავლე ეწოდება, თუ როგორც E სიმრავლეს, ისე მის ყოველ ნაწილს საწყისი და ბოლო ელემენტი აქვს, ხოლო E სიმრავლე უსასრულოა, თუ იგი სასრული არაა, ე. ი. სიმრავლე უსასრულოა, თუ სიმრავლის ნაწილთა შორის, თვით სიმრავლის ჩათვლით, არსებობს ისეთი, რომელსაც არ აქვს საწყისი ან ბოლო ელემენტი.

ამ განსაზღვრისათვის მოთხოვნილია სიმრავლის დალაგებულობა. ამავე დროს დადებითი გზით განსაზღვრა მოცემულია სასრული სიმრავლისათვის, ხოლო უსასრულო სიმრავლის ცნება უარყოფის გზითაა განსაზღვრული.

დედეკინდის მიერ მოცემული განსაზღვრა სასრული და უსასრულო სიმრავლეებისა ტოლფასია ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრისა. ამ განსაზღვრათა ტოლფასობის დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

---

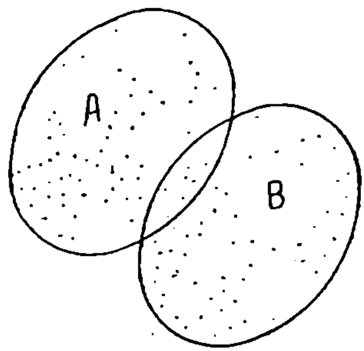
[1] ერნსტ ცერმელო (1871—1953) — გერმანელი მათემატიკოსი. მისი ძირითადი გამოკვლევები სიმრავლეთა თეორიას ეხება. ცერმელოს ნაშრომებმა დიდი გავლენა მოახდინა სიმრავლეთა თეორიის განვითარებაზე და გამოიწვია გაცხოველებული დისკუსია. იგი მუშაობდა აგრეთვე სტატისტიკურ ფიზიკაში ალბათობის თეორიის გამოყენების საკითხებში.

§ 5. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

სიმრავლეებზე შეიძლება ვაწარმოოთ სხვადასხვა მოქმედება. თუ გვაქვს ორი A და B სიმრავლე, შეგვიძლია ყველა ისეთ საგნის სიმრავლე შევადგინოთ, რომლებიც შედის ან A ან B სიმრავლეში. ეს ის სიმრავლეა, რომელშიაც გაერთიანდება A და B სიმრავლის ელემენტები. ასეთ სიმრავლეს ეწოდება A და B სიმრავლის ჯ ა მ ი, ანუ გ ა ე რ თ ი ა ნ ე ბ ა და აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 17. ორი A და B სიმრავლის ჯამი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის (ნახ. 1).

სიმრავლეთა ჯამის ცნება განვსაზღვრეთ ორი შესაკრებისათვის. ახლა ვთქვათ, გვაქვს რაიმე M სიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ M სიმრავლის ყოველ m ელემენტს შეესაბამება გარკვეული A_m სიმრავლე. მაშასადამე, ჩვენ გვექნება სიმრავლეთა სისტემა $\{A_m\}$. ამ სისტემის ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა ჯ ა მ ი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის სისტემის ერთ-ერთ სიმრავლეს მაინც. აღებული სისტემის სიმრავლეთა ჯამი აღინიშნება $\bigcup\limits_{m \in M} A_m$ სიმბოლოთი. კერძოდ, თუ $M=\{1, 2, \ldots, n\}$, მაშინ აღებული სისტემის სიმრავლეთა ჯამი აღინიშნება



ნახ. 1.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{ან} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

სიმბოლოთი; თუკი M არის ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე, მაშინ მოცემული სისტემის სიმრავლეთა ჯამს აღნიშნავენ

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \quad \text{ან} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

სიმბოლოთი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც M სიმრავლის ელემენტების შემადგენლობაზე არაფერი არ არის ნათქვამი, მაშინ $\{A_m\}$ სისტემის სიმრავლეთა ჯამს აღვნიშნავთ $\bigcup\limits_{m} A_m$ სიმბოლოთი.

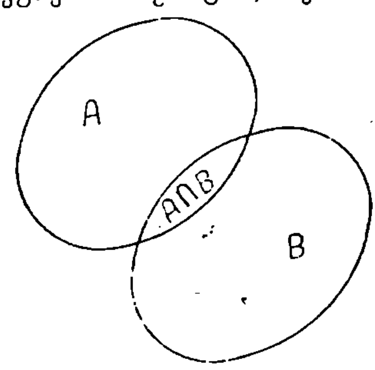
განვიხილოთ სიმრავლეთა ჯამის მაგალითები.

1. ვთქვათ, A არის თბილისის მათემატიკოსთა სიმრავლე, B კი ამავე ქალაქის ალპინისტთა სიმრავლე, მაშინ $A \cup B$ იქნება თბილისის იმ პირთა სიმრავლე, რომლებიც მათემატიკოსია ან ალპინისტი. კერძოდ, ამ სიმრავლეში ისეთი ადამიანებიც მიიღებენ მონაწილეობას, რომლებიც ერთდროულად მათემატიკოსებია და ალპინისტები.

2. ვთქვათ, A ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლეა, B— ყველა კენტი რიცხვისა, C კი ყველა მარტივი რიცხვის სიმრავლე. მაშინ $A \cup B \cup C$ წარმოადგენს ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეს.

3. ვთქვათ, A ყველა იმ კენტი რიცხვის სიმრავლეა, რომლებიც სამზე არ იყოფა, B კი ყველა ლუწი რიცხვის, ხოლო C ყველა იმ მთელი რიცხვის სიმრავლეა, რომლებიც სამზე იყოფა. ცხადია, $A \cup B \cup C$ წარმოადგენს ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეს.

განსაზღვრა **18.** ორი A და B *სიმრავლის გადაკვეთა* ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის როგორც A, ისე B სიმრავლეს (ნახ. 2). A და B სიმრავლეთა გადაკვეთა აღინიშნება $A \cap B$ სიმბოლოთი.



ნახ. 2.

თუ A ყველა მართკუთხედის სიმრავლეა, B კი ყველა რომბის სიმრავლე, მაშინ ამ ორი სიმრავლის გადაკვეთა $A \cap B$ იქნება ყველა კვადრატის სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ რაიმე M სიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ M სიმრავლის ყოველ m ელემენტს შეესაბამება გარკვეული A_m სიმრავლე. მაშასადამე, გვექნება სიმრავლეთა $\{A_m\}$ სისტემა. აღებული სისტემის *სიმრავლეთა გადაკვეთა* ჰქვია ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის აღებული სისტემის ყველა სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა გადაკვეთა აღინიშნება $\bigcap\limits_{m \in M} A_m$ სიმბოლოთი.

კერძოდ, თუ $M=\{1, 2, \ldots, n\}$, მაშინ აღებული სისტემის სიმრავლეთა გადაკვეთას აღნიშნავენ

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{ან} \quad \bigcap_{m=1}^{n} A_m$$

სიმბოლოთი; თუკი M შედგება ყველა ნატურალური რიცხვისაგან, მაშინ მოცემული სისტემის სიმრავლეთა გადაკვეთა აღინიშნება $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც M სიმრავლის ელემენტების შემადგენლობაზე არაფერი არ არის ნათქვამი, მაშინ $\{A_m\}$ სისტემის სიმრავლეთა გადაკვეთას აღვნიშნავთ $\bigcap\limits_{m} A_m$ სიმბოლოთი.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ აღებული სიმრავლეთა გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. მაგალითად, თუ A არის 10-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლე, ხოლო B წარმოადგენს 12-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლეს, მაშინ $A \cap B$ გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ვინაიდან შეუძლებელია რომელიმე მოსწავლე ერთდროულად იყოს 10 და 12 წლისა.

მაგალითები

1. ვთქვათ, A არის ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლე, B კი ყველა კენტი რიცხვისა. მათი გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

2. ვთქვათ, A_n ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლეა, რომელთა აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{1}{n}$-ზე (n მთელი დადებითი რიცხვია). ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ გადაკვეთა შედგება ერთად-ერთი ელემენტისაგან, სახელდობრ 0 რიცხვისაგან.

3. აღვნიშნოთ E_n სიმბოლოთი ყველა იმ დადებითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია $\frac{1}{n}$-ზე (n მთელი დადებითი რიცხვია). ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \Lambda.$$

სიმრავლეთა შეკრებისა და გადაკვეთის ოპერაციების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

1) $A \cup \Lambda = A, \quad A \cap \Lambda = \Lambda;$

2) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

დავამტკიცოთ, მაგალითად, მე-4 თვისება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$E = (A \cup B) \cap C, \quad H = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

ავიღოთ E სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი x. ცხადია, $x\in A\cup B$, $x\in C$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x\in A$ ან $x\in B$. მაშასადამე, $x\in H$.

ახლა განვიხილოთ H სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი y. რადგანაც $y\in H$, ამიტომ $y\in A\cap C$ ან $y\in B\cap C$. თუ $y\in A\cap C$, მაშინ $y\in E$. თუკი $y\in B\cap C$, მაშინ $y\in E$.

ამრიგად, E სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის H სიმრავლეს და H სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი E სიმრავლის ელემენტია. მაშასადამე, $H=E$. სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

საზოგადოდ, მართებულია ტოლობა

$$(\bigcup_m A_m)\cap C=\bigcup_m (A_m\cap C).$$

მიღებული 1), 2), 3) და 4) ფორმულები მსგავსია არითმეტიკაში ცნობილი ფორმულებისა

$$a+0=a,\quad a\cdot 0=0;$$

$$a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (ab)c=a(bc);$$

$$(a+b)c=ac+bc.$$

მაგრამ არის განსხვავებაც სიმრავლეთა თეორიის წესებსა და არითმეტიკის წესებს შორის. მაგალითად, სიმრავლეთა თეორიაში გვაქვს ფორმულები:

5) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$, რომელთა მსგავსი ფორმულები არითმეტიკაში არ გვაქვს; არითმეტიკაში გვაქვს $a+a=2a$, $a\cdot a=a^2$.

სიმრავლეთა თეორიაში ძალაშია მე-4) ფორმულის სიმეტრიული ფორმულა, რომელსაც მივიღებთ თუ გადაკვეთის ოპერაციას შეკრების ოპერაციით შევცვლით, ხოლო შეკრების ოპერაციას — გადაკვეთის ოპერაციით.

6) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

ეს ტოლობა მტკიცდება 4) ტოლობის დამტკიცების მსგავსად.

სიმრავლეთა თეორიაში მართებულია შემდეგი ზოგადი გარემოება. თუ გვაქვს ტოლობით გამოსახული რაიმე ჭეშმარიტი ფორმულა, რომლის ორივე ნაწილში მონაწილე სიმრავლეებზე ნაწარმოებია შეკრებისა და გადაკვეთის ოპერაციები, ამ ფორმულის საშუალებით ისევ ჭეშმარიტ ფორმულას მივიღებთ, თუ მოცემულ ფორმულაში შეკრების ოპერაციას

გადაკვეთის ოპერაციით შევცვლით და გადაკვეთის ოპერაციას — შეკრების ოპერაციით.

ამგვარად, ზემოაღნიშნული სახის ყოველ ფორმულას აქვს თავისი სიმეტრიული ფორმულა. გამოთქმულ პრინციპს ო რ ა დ ო ბ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი ჰქვია.

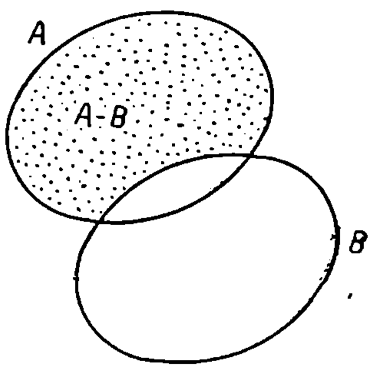
არითმეტიკაში ორადობის პრინციპი საზოგადოდ ძალაში არაა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 19. ორ A და B სიმრავლეს ურთიერთარაგადამკვეთი სიმრავლეები ეწოდება, თუ მათი გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

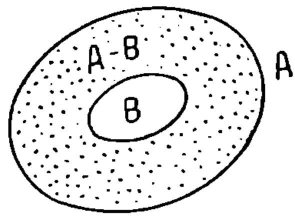
დასასრულ განვსაზღვროთ სიმრავლეთა გამოკლების ოპერაცია:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 20. A და B სიმრავლის სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 3, 4).

A და B სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A—B$ სიმბოლოთი.



ნახ. 3.



ნახ. 4.

სიმრავლეთა გამოკლების ოპერაცია არ წარმოადგენს საზოგადოდ, სიმრავლეთა შეკრების ოპერაციის მიმართ შებრუნებულ ოპერაციას, ე. ი. საზოგადოდ

$$(A-B) \cup B \neq A.$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B=\{1, 2, 7, 8, 9\}.$$

ცხადია, რომ

$$A-B=\{3, 4, 5, 6\}.$$

მაგრამ

$$(A-B) \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \neq A.$$

გამოკლება წარმოადგენს შეკრების შებრუნებულ ოპერაციას მხოლოდ

იმ შემთხვევაში, როდესაც მაკლები სიმრავლე საკლები სიმრავლის ნაწილია, ე. ი. მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. ორი A და B სიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$(A-B)\cup B=A \tag{5.1}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც B წარმოადგენს A სიმრავლის ნაწილს.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მართებულია (5.1) ტოლობა. მაშინ ცხადია, რომ $B\subset A$.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $B\subset A$. მაშინ ცხადია, რომ

$$(A-B)\cup B\subset A. \tag{5.2}$$

ახლა ავიღოთ A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი x. აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა: ან $x\in B$ ან $x\overline{\in} B$. პირველ შემთხვევაში $x\in(A-B)\cup B$; მეორე შემთხვევაში $x\in A-B$ და, მაშასადამე, $x\in(A-B)\cup B$. ამრიგად,

$$A\subset(A-B)\cup B. \tag{5.3}$$

(5.2) და (5.3) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (5.1) ტოლობის მართებულობა. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 2. სამი A, B და C სიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$(A-B)\cup C=(A\cup C)-B \tag{5.4}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც B და C სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვთ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მართებულია (5.4) ტოლობა და დავუშვათ, რომ B და C სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტი x. მაშინ ცხადია, რომ

$$x\in(A-B)\cup C,\quad x\overline{\in}(A\cup C)-B.$$

ამიტომ (5.4) ტოლობა მართებული არ იქნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, B და C სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვთ.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, B და C სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტები და ვაჩვენოთ, რომ მართებულია (5.4) ტოლობა. განვიხილოთ ნებისმიერი ელემენტი $x\in(A-B)\cup C$. აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა: ან $x\in A-B$ ან $x\in C$. თუ $x\in A-B$, მაშინ

$x\in A$, $x\overline{\in} B$ და ამიტომ $x\in(A\cup C)-B$. თუკი $x\in C$, მაშინ $x\overline{\in} B$, ვინაიდან B და C სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიაც $x\in(A\cup C)-B$. ამრიგად, $(A-B)\cup C$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის $(A\cup C)-B$ სიმრავლეს, ე. ი.

$$(A-B)\cup C\subset(A\cup C)-B. \qquad (5.5$$

ახლა განვიხილოთ $(A\cup C)-B$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი y. მაშინ $y\in A\cup C$ და $y\overline{\in} B$. მაშასადამე, $y\in A$ ან $y\in C$. პირველ შემთხვევაში $y\in A-B$ და, ამიტომ $y\in(A-B)\cup C$. მეორე შემთხვევაშიაც $y\in(A-B)\cup C$.

ამრიგად, $(A\cup C)-B$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის $(A-B)\cup C$ სიმრავლეს და ამიტომ

$$(A-B)\cup C\supset(A\cup C)-B. \qquad (5.6)$$

(5.5) და (5.6) თანაფარდობათა ძალით მართებულია (5.4) ტოლობა.

შენიშვნა. (5.6) დამოკიდებულება მართებულია ნებისმიერი სამი A, B და C სიმრავლისათვის.

§ 6. დამატებითი სიმრავლე

ამ პარაგრაფში სიტყვა სიმრავლე აღნიშნავს რაიმე მოცემული X სიმრავლის ქვესიმრავლეს. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 21. თუ B სიმრავლე A სიმრავლის ნაწილია, მაშინ $A-B$ სხვაობას ეწოდება B სიმრავლის **დამატებითი სიმრავლე** A სიმრავლის მიმართ და აღინიშნება $C_A B$ სიმბოლოთი. თუ $A\subset X$, მაშინ $X-A$ სიმრავლეს ჰქვია A სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე და აღინიშნება CA სიმბოლოთი.

ჩაწერის სიმოკლისათვის A სიმრავლის დამატებით სიმრავლეს აღვნიშნავთ A' სიმბოლოთი:

$$X-A=A'.$$

ცხადია, მართებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$A\cap A'=\Lambda,\quad (A')'=A,\quad A'\cup A=X.$$

თეორემა 8. ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის მართებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$A-B=(A'\cup B)',\quad A\cap B=(A'\cup B')',$$

$$(A-B)'=A'\cup B,\quad A-B=A\cap B'=A-A\cap B.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ, მაგალითად, პირველი ტოლობის მართებულობა. ვთქვათ, x არის $A-B$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $x \in A$ და $x \overline{\in} B$ და ამიტომ

$$x \overline{\in} A' \cup B.$$

მაშასადამე, $x \in (A' \cup B)'$. ამრიგად,

$$A - B \subset (A' \cup B)'. \tag{6.1}$$

ახლა ვთქვათ, y არის $(A' \cup B)'$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ $y \overline{\in} A' \cup B$ და, მაშასადამე $y \overline{\in} A'$ და $y \overline{\in} B$. პირობიდან $y \overline{\in} A'$ გამომდინარეობს, რომ $y \in A$ და ამიტომაც $y \in A - B$. ამრიგად,

$$(A' \cup B)' \subset A - B. \tag{6.2}$$

(6.1) და (6.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს ზემოაღნიშნული ტოლობის მართებულობა.

დანარჩენი ტოლობებიც ანალოგიურად მტკიცდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $A \subset B$ და $B \subset X$, მაშინ $A' \supset B'$.

თეორემა 4. თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა ს ი ს ტ ე მ ა $\{A_\alpha\}$ დ ა ყ ო ვ ე ლ ი A_α ს ი მ რ ა ვ ლ ე X ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ნ ა წ ი ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს ტ ო ლ ო ბ ე ბ ს

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = X - \bigcap_\alpha A'_\alpha, \tag{6.3}$$

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = X - \bigcup_\alpha A'_\alpha. \tag{6.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, x წარმოადგენს $\bigcup_\alpha A_\alpha$ სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს, მაშინ მოიძებნება აღებული სისტემის ერთი მაინც ისეთი A_α სიმრავლე, რომელიც x ელემენტს შეიცავს. ამ შემთხვევაში $x \overline{\in} A'_\alpha$ და, მაშასადამე, $x \overline{\in} \bigcap_\alpha A'_\alpha$. ამიტომ $x \in X - \bigcap_\alpha A'_\alpha$.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $X - \bigcap_\alpha A'_\alpha$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი $\bigcup_\alpha A_\alpha$ სიმრავლეს ეკუთვნის. მაშასადამე, მართებულია (6.3) ტოლობა.

ამგვარადვე მტკიცდება (6.4) ტოლობის მართებულობა. (6.3) და (6.4) ფორმულებს ზოგჯერ ო რ ა დ ო ბ ი ს კ ა ნ ო ნ ე ბ ი ეწოდება.

§ 7. სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი

განვიხილოთ სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{7.1}$$

განსაზღვრა 22. ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც აღებული მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრ წევრს ეკუთვნის, ამ მიმდევრობის ზედა ზღვარი ეწოდება, ხოლო ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც აღებული მიმდევრობის ყველა სიმრავლეში შედის, გარდა, შესაძლებელია, სასრული რიცხვისა, ამ მიმდევრობის ქვედა ზღვარი ჰქვია.

მოცემული მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი აღინიშნება შესაბამისად $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ და $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ სიმბოლოებით. ცხადია,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

მაშინ სიმრავლეთა (7.1) მიმდევრობას კრებადი მიმდევრობა ეწოდება და ამ შემთხვევაში ზედა ან ქვედა ზღვარს აღნიშნავენ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ სიმბოლოთი. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ სიმრავლეს ჰქვია სიმრავლეთა (7.1) მიმდევრობის ზღვარი.

თუ სიმრავლეთა მიმდევრობა კრებადი არაა, მაშინ მას განშლადი მიმდევრობა ეწოდება.

მაგალითი. ვთქვათ,

$$A_1=\{1, 2, 3\}, \quad A_2=\{2, 3, 4\}, \quad A_3=\{1, 2, 3\}, \quad A_4=\{2, 3, 4\}, \ldots$$

ცხადია, რომ

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{1, 2, 3, 4\}, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n=\{2, 3\}.$$

მაშასადამე,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \neq \liminf_{n\to\infty} A_n$$

და ამიტომ სიმრავლეთა აღებული მიმდევრობა განშლადია.

თეორემა 5. სიმრავლეთა (7.1) მიმდევრობისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k, \tag{7.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k. \tag{7.3}$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ (7.2) ტოლობის მართებულობა. ვთქვათ, $x\in\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, მაშინ არსებობს უსასრულო სიმრავლე (7.1) მიმდევრობის ელემენტებისა $A_{n_1}, A_{n_2},\ldots, A_{n_k},\ldots$, რომლებსაც x ელემენტი მიეკუთვნება. ამიტომ

$$x\in\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \quad (m=1,\ 2,\ldots)$$

და, მაშასადამე,

$$x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k.$$

ახლა ვთქვათ, y წარმოადგენს $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k$ სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშინ, ცხადია, არსებობს უსასრულო სიმრავლე (7.1) მიმდევრობის ელემენტებისა $A_{m_1}, A_{m_2}, \ldots, A_{m_k},\ldots$, რომლებსაც მიეკუთვნება y ელემენტი და ამიტომ $y\in\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. მაშასადამე, მართებულია (7.2) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (7.3) ტოლობის მართებულობა.

განსაზღვრა 11. სიმრავლეთა (7.1) მიმდევრობას ზრდადი მიმდევრობა ეწოდება, თუ $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, ხოლო მას კლებადი ჰქვია, როცა $A_1\supset A_2\supset\cdots A_n\supset\cdots$

სიმრავლეთა ზრდად ან კლებად მიმდევრობას მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება.

თეორემა 6. თუ (7.1) მიმდევრობა მონოტონურია, მაშინ იგი კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \tag{7.4}$$

როდესაც მიმდევრობა ზრდადია,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \tag{7.5}$$

როდესაც მიმდევრობა კლებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (7.1) მიმდევრობა ზრდადია. (7.2) ფორმულის თანახმად,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k.$$

მაგრამ ყოველი m-სათვის გვაქვს ტოლობა

$$\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

ამიტომ

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{7.6}$$

(7.3) ფორმულის ძალით

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k.$$

მაგრამ

$$\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m \quad (m=1,2,\ldots).$$

მაშასადამე,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{7.7}$$

(7.6) და (7.7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (7.4) ტოლობის მართებულობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (7.5) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 7. სიმრავლეთა ნებისმიერი ორი მიმდევრობისათვის

$$A_1,\ A_2, \ldots, A_n, \ldots, \tag{7.8}$$

$$B_1,\ B_2, \ldots, B_n, \ldots, \tag{7.9}$$

ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\limsup_{n\to\infty} (A_n - B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n - \liminf_{n\to\infty} B_n. \tag{7.10}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x წარმოადგენს $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n-B_n)$ სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს, მაშინ მოიძებნება ინდექსთა ისეთი მიმდევრობა $\{n_k\}$, რომ

$$x\in A_{n_k}-B_{n_k}\quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

აქედან ცხადია,

$$x\in A_{n_k},\quad x\overline{\in}B_{n_k}\quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

მაშასადამე,

$$x\in\limsup_{n\to\infty}A_n,\quad x\overline{\in}\liminf_{n\to\infty}B_n.$$

ამიტომ

$$x\in\limsup_{n\to\infty}A_n-\liminf_{n\to\infty}B_n.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (7.10) თანაფარდობას.

თეორემა 8. სიმრავლეთა (7.8) და (7.9) მიმდევრობებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\liminf_{n\to\infty}(A_n-B_n)=\liminf_{n\to\infty}A_n-\limsup_{n\to\infty}B_n. \tag{7.11}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის $\liminf\limits_{n\to\infty}(A_n-B_n)$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $x\in A_n-B_n$, როცა $n>N$. აქედან ცხადია, რომ

$$x\in A_n,\quad x\overline{\in}B_n,\quad \text{როცა}\quad n>N.$$

მაშასადამე,

$$x\in\liminf_{n\to\infty}A_n,\quad x\overline{\in}\limsup B_n.$$

ამიტომ

$$x\in\liminf_{n\to\infty}A_n-\limsup_{n\to\infty}B_n.$$

ამრიგად,

$$\liminf_{n\to\infty}(A_n-B_n)\subset\liminf_{n\to\infty}A_n-\limsup_{n\to\infty}B_n. \tag{7.12}$$

ახლა ვთქვათ, y წარმოადგენს $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n-\limsup\limits_{n\to\infty}B_n$ სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშინ

$$y\in\liminf_{n\to\infty}A_n,\quad y\overline{\in}\limsup_{n\to\infty}B_n$$

და, მაშასადამე, იარსებებს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$y \in A_n, \quad y \overline{\in} B_n, \quad \text{როცა } n > \nu.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$x \in A_n - B_n, \quad \text{როცა} \quad n > \nu,$$

ე. ი.

$$x \in \liminf_{n \to \infty} (A_n - B_n).$$

ამრიგად,

$$\liminf_{n \to \infty} A_n - \limsup_{n \to \infty} B_n \subset \liminf_{n \to \infty} (A_n - B_n). \tag{7.13}$$

(7.12) და (7.13) თანაფარდობები გვაძლევს (7.11) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 9. სიმრავლეთა (7.8) და (7.9) მიმდევრობებისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

1. $\limsup_{n \to \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \to \infty} A_n \cup \limsup_{n \to \infty} B_n,$

2. $\liminf_{n \to \infty} (A_n \cup B_n) \supset \liminf_{n \to \infty} A_n \cup \liminf_{n \to \infty} B_n,$

3. $\limsup_{n \to \infty} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n \to \infty} A_n \cap \limsup_{n \to \infty} B_n,$

4. $\liminf_{n \to \infty} (A_n \cap B_n) = \liminf_{n \to \infty} A_n \cap \liminf_{n \to \infty} B_n.$

§ 8. სიმრავლეთა კლასებად დაყოფა

სხვადასხვა საკითხში ვხვდებით ამა თუ იმ სიმრავლის დაყოფას წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად. მაგალითად, სიბრტყე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სხვადასხვა რადიუსიანი კონცენტრულ წრეწირთა ჯამი, თბილისის მცხოვრებლები შეგვიძლია დავყოთ ჯგუფებად მათი წლოვანების მიხედვით და სხვ.

განსაზღვრა 23. თუ რაიმე წესით M სიმრავლე წარმოიდგინება წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეთა ჯამად, მაშინ ამბობენ, რომ M სიმრავლე დაყოფილია კლასებად.

ჩვეულებრივ, M სიმრავლის ისეთ დაყოფებს ვხვდებით, რომლებიც მიიღება ამა თუ იმ მიმართების დასახელებით და რომლის მიხედვით M სიმრავლის ელემენტები ერთიანდებიან კლასებში. მაგალითად, ერთ და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ყველა სამკუთხედის სიმრავლე შეგვიძლია დავყოთ ერთმანეთის მსგავს სამკუთხედთა კლასებად.

მიმართებანი, რომელთა მიხედვით სიმრავლე იყოფა კლასებად, შეიძლება სხვადასხვა ბუნების იყოს. მაგრამ ეს მიმართებანი სავსებით ნებისმიერი არ შეიძლება იყოს. მაგალითად, ვთქვათ გვინდა დავყოთ ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე კლასებად შემდეგნაირად: b რიცხვი მივაკუთვნოთ იმავე კლასს, რომელსაც a რიცხვი ეკუთვნის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b>a$. ცხადია, ამ შემთხვევაში არ გვექნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის არავითარი დაყოფა, ვინაიდან, თუ $b>a$, ე. ი. თუ b რიცხვს მივაკუთვნებთ იმავე კლასს, რომელსაც a ეკუთვნის, მაშინ $a<b$, ე. ი. a რიცხვი არ უნდა მიეკუთვნოს იმავე კლასს, რომელსაც b ეკუთვნის. ამას გარდა, რაკი a არ აღემატება a რიცხვს, ამიტომ a არ უნდა მიეკუთვნოს იმ კლასს, რომელსაც a ეკუთვნის.

მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, M თბილისის მცხოვრებთა სიმრავლეა. დავსვათ ასეთი კითხვა: შეიძლება თუ არა M სიმრავლე დავყოთ კლასებად, თუ ორ პირს მივაკუთვნებთ ერთ და იმავე კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ნაცნობებია. ცხადია, ასეთი დაყოფის განხორციელება შეუძლებელია, ვინაიდან თუ a ნაცნობია b-სი და b ნაცნობია c-სი, აქედან კიდევ არ გამომდინარეობს, რომ a ნაცნობია c-სი. ამრიგად, თუ a და b ობიექტებს მივაკუთვნებთ ერთ და იმავე კლასს, b და c ობიექტებს კი ერთ დი იმავე კლასს, ჩვენ მივიღებთ, რომ ერთი და იმავე კლასში შეიძლება მოხვდეს ერთმანეთთან უცნობი პირები a და c.

ზემოთ განხილული მაგალითები გვიკარნახებს იმ პირობებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მიმართება, რომ განვახორციელოთ რაიმე სიმრავლის ელემენტების კლასებად დაყოფა ამ მიმართების მიხედვით.

განსაზღვრა 24. ავიღოთ რაიმე M სიმრავლე და ვთქვათ მოცემულია რაიმე $R\{a, b\}$ მიმართება, $a\in M$, $b\in M$. ამ მიმართებას ვუწოდოთ ეკვივალენტობის მიმართება, თუ იგი არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

ცხადია, მოცემული M სიმრავლის ყოველი დაყოფა კლასებად განსაზღვრავს ამ სიმრავლის ელემენტებს შორის გარკვეულ ეკვივალენტობის მიმართებას. მართლაც, თუ $R\{a, b\}$ აღნიშნავს, რომ a იმყოფება იმავე კლასში, რომელსაც b ეკუთვნის, მაშინ ეს მიმართება იქნება რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

პირიქით, ვთქვათ, $R\{a, b\}$ არის რაიმე ეკვივალენტობის მიმართება M სიმრავლის ელემენტებს შორის. M სიმრავლის რომელიმე a ელემენტისათვის განვიხილოთ იმავე სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლე, რომლებსაც a ელემენტთან აქვთ R მიმართება. ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ K_a სიმბოლოთი. ამ გზით მივიღებთ M სიმრავლის კლასებად დაყოფას. მართლაც, R მიმართების რეფლექსურობის გამო $a\in K_a$. ახლა

ვაჩვენოთ, რომ ორი K_a და K_b კლასი ან ემთხვევა ერთმანეთს, ან საერთო ელემენტი არ აქვთ. ვთქვათ, რაიმე c ელემენტი ერთდროულად ეკუთვნის K_a და K_b კლასებს. დავამტკიცოთ, რომ $K_a=K_b$. ამ შემთხვევაში გვაქვს $R\{c, a\}$ და $R\{c, b\}$. R მიმართების სიმეტრიულობის გამო გვექნება $R\{a, c\}$ და, მაშასადამე, R მიმართების ტრანზიტულობის გამო, $R\{a, c\}$ და $R\{c, b\}$ მიმართებებიდან გამომდინარეობს $R\{a, b\}$.

ახლა ვთქვათ, x არის K_a სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, ე. ი. ადგილი აქვს მიმართებას $R\{x, a\}$, მაშინ $R\{a, b\}$ მიმართების ტრანზიტულობის თვისების თანახმად გვექნება $R\{x, b\}$, ე. ი. $x\in K_b$. ამრიგად, $K_a\subset K_b$.

პირიქით, თუ y არის K_b სიმრავლის ნებიმიერი ელემენტი, ე. ი. გვაქვს $R\{y, b\}$, მაშინ $R\{a, b\}$ და მიმართების სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თანახმად გვექნება $R\{a, y\}$, ე. ი. $y\in K_a$. ამიტომ $K_b\subset K_a$ და, მაშასადამე, $K_a=K_b$.

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ M სიმრავლის დაყოფა კლასებად მოცემული ეკვივალენტური მიმართების მიხედვით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, M არის ერთ და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფის სიმრავლე და განვიხილოთ წრფეთა პარალელობის მიმართება. ავიღოთ რაიმე a წრფე და აღვნიშნოთ K_a სიმბოლოთი a წრფის პარალელური ყველა წრფის სიმრავლე. თუ განვიხილავთ სხვა b წრფეს, რომელიც a წრფის პარალელური არაა, მაშინ K_a და K_b სიმრავლეებს არ ექნებათ საერთო ელემენტი. მაშასადამე, M სიმრავლე შეგვიძლია დავყოთ კლასებად მოცემული მიმართების მიხედვით.

§ 9. ფუნქციის ზოგადი ცნება

ვთქვათ, X ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. თუ X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება რაიმე წესით გარკვეული რიცხვი $f(x)$, მაშინ ამბობენ, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. X სიმრავლეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ი ს ა რ ე, ხოლო $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა Y სიმრავლეს კი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ც ვ ლ ი ლ ე-ბ ი ს ა რ ე.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი ბუნების ორი X და Y სიმრავლე, ამასთანავე X და Y შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდნენ.

ვთქვათ, X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება რაიმე წესით Y სიმრავლის გარკვეული ელემენტი, ამასთან ეს უკანასკნელი შეიძლება შეესაბამებოდეს X სიმრავლის რამდენიმე ელემენტს. ამას გარდა, შესაძლებელია, რომ Y სიმრავლე ისეთ ელემენტს შეიცავდეს, რომელიც

არ შეესაბამება X სიმრავლის არც ერთ ელემენტს. ზემოაღნიშნულ შესაბამისობაზე ვიტყვით, რომ იგი გვაძლევს X სიმრავლის *ელემენტის ფუნქციას*.

ნებისმიერი ბუნების სიმრავლეთა შემთხვევაში ტერმინი „ფუნქცია"-ს ნაცვლად იხმარება ტერმინი „*გადასახვა*".

თუ y არის Y სიმრავლის ელემენტი, რომელიც X სიმრავლის x ელემენტს შეესაბამება, მაშინ დავწერთ

$$y=f(x).$$

y ელემენტს ეწოდება x *ელემენტის სახე*. აღვნიშნოთ Y^* ასოთი ყველა იმ $f(x)$ ელემენტის სიმრავლე, რომლებიც X სიმრავლის x ელემენტებს შეესაბამება. Y^* სიმრავლეს ეწოდება X *სიმრავლის სახე* f გადასახვის მიმართ და აღინიშნება $f(X)$ სიმბოლოთი.

X სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელთა სახეებია Y სიმრავლის მოცემული y ელემენტი, ეწოდება y *ელემენტის პირველსახე* f გადასახვის მიმართ და აღინიშნება $f^{-1}(y)$ სიმბოლოთი.

თუ B არის $f(X)$ სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე, მაშინ X სიმრავლის ყველა იმ x ელემენტის სიმრავლეს, რომელთათვის $f(x)\in B$, ეწოდება B *სიმრავლის პირველსახე* f გადასახვის მიმართ და აღინიშნება $f^{-1}(B)$ სიმბოლოთი.

დასასრულ, ვთქვათ, X სიმრავლის ყოველ ორ სხვადასხვა x_1 და x_2 ელემენტს შეესაბამება $Y^*=f(X)$ სიმრავლის ორი სხვადასხვა ელემენტი $f(x_1)$ და $f(x_2)$; მაშინ Y^* სიმრავლის ერთი y ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის ერთი ელემენტი $f^{-1}(y)$ და ამ შემთხვევაში f^{-1} წარმოადგენს f ფუნქციის *შექცეულ* ფუნქციას.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი ტერმინოლოგია: ჩვენ ვიტყვით, რომ f წარმოადგენს X სიმრავლის გადასახვას Y სიმრავლეზე, თუ $f(X)=Y$, ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა $f(X)\subset Y$, f წარმოადგენს X სიმრავლის გადასახვას Y სიმრავლეში.

თეორემა 10. *თუ f არის X სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, მაშინ X სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლეთა $\{E_\alpha\}$ სისტემისათვის ადგილი აქვს ტოლობას*

$$f\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)=\bigcup_\alpha f(E_\alpha), \tag{9.1}$$

ე. ი. ჯამის სახე სახეთა ჯამის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A=f(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}), \quad B=\bigcup_{\alpha} f(E_{\alpha}).$$

ავიღოთ A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი y. ცხადია, $\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$ სიმრავლეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი x ელემენტი, რომ $y=f(x)$. მაგრამ x მიეკუთვნება ერთ-ერთს მაინც E_{α} სიმრავლეებიდან. მაშასადამე, $y\in B$, ე. ი.

$$A\subset B. \tag{9.2}$$

ახლა ვთქვათ, y' არის B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ y' მიეკუთვნება რომელიმე $f(E_{\alpha})$ სიმრავლეს. ამიტომ E_{α} სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი x' ელემენტი, რომ $y'=f(x')$. მაშასადამე, $y'\in A$. ამრიგად, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს:

$$B\subset A. \tag{9.3}$$

(9.2) და (9.3) დამოკიდებულებანი გვაძლევს (9.1) ტოლობას.

თეორემა 11. *თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია f ფუნქცია, მაშინ X სიმრავლის ნებისმიერი E_1 და E_2 ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას*

$$f(E_1-E_2)\supset f(E_1)-f(E_2). \tag{9.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, y არის $f(E_1)-f(E_2)$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $y\in f(E_1)$ და $y\,\overline{\in}\, f(E_2)$. ამიტომ E_1 სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x ელემენტი, რომელიც E_2 სიმრავლეს არ ეკუთვნის და $y=f(x)$. მაშასადამე, $y\in f(E_1-E_2)$. ამრიგად, $f(E_1)-f(E_2)$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს $f(E_1-E_2)$ სიმრავლის ელემენტს და ამიტომ მართებულია (9.4) თანაფარდობა.

თუ f ფუნქცია გვაძლევს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას X და $f(X)$ სიმრავლეს შორის, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(E_1-E_2)=f(E_1)-f(E_2).$$

თეორემა 12. *თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია f ფუნქცია და $\{E_{\alpha}\}$ არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე სისტემა, მაშინ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას*

$$f(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha})\subset \bigcap_{\alpha} f(E_{\alpha}), \tag{9.5}$$

ე. ი. თანაკვეთის სახე სახეთა თანაკვეთის ნაწილია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A=f(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}), \quad B=\bigcap_{\alpha} f(E_{\alpha}). \tag{9.6}$$

განვიხილოთ A სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტი. რადგანაც $y\in A$, ამიტომ $\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}$ სიმრავლეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი x ელემენტი, რომ $y=f(x)$. მაშასადამე, $y\in B$. ამრიგად, A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეს ეკუთვნის და ამიტომ ადგილი აქვს (9.5) თანაფარდობას.

თეორემა 13. თ უ f ფ უ ნ ქ ც ი ა გ ვ ა ძ ლ ე ვ ს უ რ თ ი ე რ თ ც ა ლ ს ა ხ ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ო ბ ა ს X დ ა $f(X)$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ს შ ო რ ი ს, მ ა შ ი ნ მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$f(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha})=\bigcap_{\alpha} f(E_{\alpha}), \tag{9.7}$$

ს ა დ ა ც $\{E_{\alpha}\}$ ა რ ი ს X ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ქ ვ ე ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ს ი ს ტ ე მ ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-12 თეორემის ძალით,

$$A\subset B, \tag{9.8}$$

სადაც A და B განსაზღვრულია (9.6) ტოლობებით. ახლა ავიღოთ B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი y. მაშინ y იქნება ყველა $f(E_{\alpha})$ სიმრავლის ელემენტი. ამ სიმრავლეებიდან ავიღოთ ორი ნებისმიერი სიმრავლე $f(E_{\alpha_1})$ და $f(E_{\alpha_2})$. რადგანაც $y\in f(E_{\alpha_1})$ და $y\in f(E_{\alpha_2})$, ამიტომ E_{α_1} და E_{α_2} სიმრავლეები შეიცავენ შესაბამისად ისეთ x_1 და x_2 ელემენტებს, რომ $y=f(x_1)$ და $y=f(x_2)$. აქედან $f(x_1)=f(x_2)$ და რადგანაც f ფუნქცია ამყარებს ურთიერცალსახა შესაბამისობას X და $f(X)$ სიმრავლეებს შორის, ამიტომ $x_1=x_2$. მაშასადამე, $x_1\in E_{\alpha_1}\cap E_{\alpha_2}$. შემდეგ, ვინაიდან E_{α_1} და E_{α_2} ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ $y\in A$.

ამრიგად, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი A სიმრავლეს ეკუთვნის და, მაშასადამე, (9.8) თანაფარდობის ძალით ადგილი აქვს (9.7) ტოლობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ორი სიმრავლის გადაკვეთის სახე, საზოგადოდ არ უდრის მათ სახეთა გადაკვეთას. მაგალითად, ვთქვათ, f გადასახვა წარმოადგენს xOy სიბრტყის ორთოგონალურ დაგეგმილებას Ox ღერძზე. აქ X წარმოადგენს xOy სიბრტყის წერტილ-

თა სიმრავლეს. აღვნიშნოთ E_1 ასოთი მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია (0; 1) და (1; 1) წერტილები, E_2 ასოთი კი მონაკვეთი, ბოლოებით (0; 0) და (1; 0) (ნახ. 5). ცხადია, რომ $E_1 \cap E_2 = \Lambda$ და

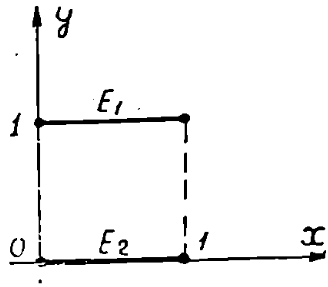
$$f(E_1)=E_2, \quad f(E_2)=E_2.$$

მაგრამ

$$f(E_1 \cap E_2)=\Lambda, \quad f(E_1) \cap f(E_2)=E_2;$$

ასე რომ

$$f(E_1 \cap E_2) \neq f(E_1) \cap f(E_2).$$



ნახ. 5.

სიმრავლეთა გადასახვის ცნება მჭიდროდაა დაკავშირებული სიმრავლის კლასებად დაყოფასთან. ვთქვათ, f არის A სიმრავლის გადასახვა B სიმრავლეში. ერთ კლასში მოვათავსოთ A სიმრავლის ყველა ის ელემენტი, რომელთა სახეები B სიმრავლეში ერთმანეთს ემთხვევა. ამით ჩვენ მივიღებთ A სიმრავლის გარკვეულ დაყოფას. პირიქით, განვიხილოთ ნებისმიერი A სიმრავლე და მისი რაიმე დაყოფა კლასებად. ვთქვათ, B იმ კლასთა სიმრავლეა, რომლებადაც დაყოფილია A სიმრავლე. თუ A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შევუსაბამებთ იმ კლასს, რომელსაც a ეკუთვნის, მივიღებთ A სიმრავლის გადასახვას B სიმრავლეში.

§ 10. ბანახის თეორემა

სიმრავლეთა გადასახვების შესახებ ს. ბანახმა[1] (S. Banach) დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 14. *თუ φ ფუნქცია ურთიერთცალსახად გადასახავს A სიმრავლეს B სიმრავლის რაიმე ნაწილში, ხოლო ψ ფუნქცია ურთიერთცალსახად გადასახავს B სიმრავლეს A სიმრავლის ნაწილში, მაშინ A და B შეგვიძლია დავყოთ შესაბამისად ისეთ ორ-ორ ურთიერთ არაგადამკვეთ A_1, A_2 და B_1, B_2 სიმრავლეებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:*

$$\varphi(A_1)=B_1, \quad \psi(B_2)=A_2. \tag{10.1}$$

[1] სტეფან ბანახი (1892 — 1945) — გამოჩენილი პოლონელი მათემატიკოსი; იგი ერთ-ერთი შემქმნელთაგანია თანამედროვე ფუნქციონალური ანალიზისა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის ძალით

$$\varphi(A) \subset B, \quad \psi(B) \subset A.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$R = A - \psi(B). \tag{10.2}$$

რადგანაც $\varphi(R) \subset \varphi(A) \subset B$, ამიტომ $\psi\varphi(R) \subset A$, სადაც $\psi\varphi(R)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $\psi[\varphi(R)]$.

ამავე წესით ვაჩვენებთ, რომ $\psi\varphi\,\psi\varphi(R), \psi\varphi\,\psi\varphi\,\psi\varphi\,(R), \ldots$ სიმრავლეები A სიმრავლის ნაწილებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$A_1 = R \cup \psi\varphi(R) \cup \psi\varphi\,\psi\varphi(R) \cup \psi\varphi\,\psi\varphi\,\psi\varphi(R) \cup \cdots \tag{10.3}$$

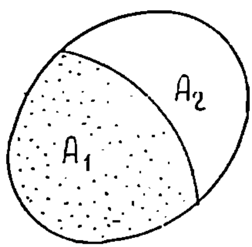
სიმრავლე A სიმრავლის ნაწილია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

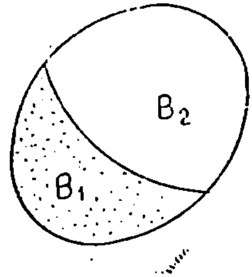
$$A_2 = A - A_1 \quad B_1 = \varphi(A_1), \quad B_2 = B - B_1.$$

ცხადია,

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2, \quad A_1 \cap A_2 = \Lambda, \quad B_1 \cap B_2 = \Lambda.$$



ნახ. 6.



ნახ. 7.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\psi(B_2) = A_2. \tag{10.4}$$

მე-11 თეორემის ძალით, $B_2 = B - B_1$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\psi(B_2) = \psi(B) - \psi(B_1) = \psi(B) - \psi\varphi(A_1).$$

მაგრამ (10.3) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\psi(B) = A - R.$$

მაშასადამე,

$$\psi(B_2) = (A - R) - \psi\varphi(A_1) = A - [R \cup \psi\varphi(A_1)]. \tag{10.5}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (10.3) ტოლობიდან გვექნება:

$$\psi\varphi(A_1)=\psi\varphi(R)\cup\psi\varphi\,\psi\varphi(R)\cup\psi\varphi\,\psi\varphi\,\psi\varphi(R)\cup\cdots$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ უკანასკნელ ტოლობას, (10.3) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$A_1=R\cup\psi\varphi(A_1).$$

მაშასადამე, (10.5) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\psi(B_2)=A-A_1=A_2.$$

ამრიგად,

$$A=A_1\cup A_2,\quad B=B_1\cup B_2,\quad A_1\cap A_2=\Lambda,\quad B_1\cap B_2=\Lambda,$$

$$\varphi(A_1)=B_1,\quad \psi(B_2)=A_2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. მოძებნეთ Ox ღერძზე იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x|<1$.

2. მოძებნეთ Ox ღერძზე იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $|x-1|<2$ უტოლობას.

3. იპოვეთ იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $|x|<0$ პირობას.

4. მოძებნეთ Ox ღერძზე იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x^2+x+1<1$.

5. მოძებნეთ xOy სიბრტყის იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის შესრულებულია პირობა $|x|+|y|<1$.

6. მოცემულია A, B, C სიმრავლეები. დაამტკიცეთ, რომ

$$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C.$$

7. მოცემულია $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ სიმრავლეები. დაამტკიცეთ, რომ

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cup B=\bigcap_{k=1}^{n}(A_k\cup B).$$

8. მოცემულია სიმრავლეთა მიმდევრობა $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, მასთან $A_n=A$, თუ n კენტია და $A_n=B$, თუ n ლუწია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=A\cup B,\qquad \liminf_{n\to\infty}A_n=A\cap B.$$

9. მოცემულია სიმრავლეთა ორი კრებადი მიმდევრობა $\{A_n\}$ და $\{B_n\}$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}(A_n\cup B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n\cup\lim_{n\to\infty}B_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)=\lim_{n\to\infty} A_n \cap \lim_{n\to\infty} B_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n)=\lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} B_n.$$

10. დაამტკიცეთ, რომ ორი სიმრავლის ჯამის პირველსახე უდრის მათ პირველსახეთა ჯამს:

$$f^{-1}(A \cup B)=f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

11. დაამტკიცეთ, რომ ორი სიმრავლის გადაკვეთის პირველსახე პირველსახეთა გადაკვეთის ტოლია:

$$f^{-1}(A \cap B)=f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

12. ზომათა თეორიაში მოხერხებულია განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული სიმეტრიული სხვაობა ორი A და B სიმრავლისა. იგი აღინიშნება $A \Delta B$ სიმბოლოთი და განსაზღვრულია ტოლობით

$$A \Delta B=(A-B) \cup (B-A).$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$A \Delta B=(A \cup B)-(A \cap B).$$

13. მოცემულია სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{E_n\}$. ვთქვათ,

$$A_1=E_1, \quad A_2=A_1 \Delta E_2, \quad A_3=A_2 \Delta E_3, \ldots, \quad A_n=A_{n-1} \Delta E_n, \ldots$$

დაამტკიცეთ, რომ $\{A_n\}$ მიმდევრობა კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\lim\limits_{n\to\infty} E_n=\Lambda$.

თავი II

ჯგუფი, რგოლი და ველი

§ 1. ჯგუფი

განსაზღვრა 1. ჯგუფი ეწოდება არაცარიელ G სიმრავლეს, რომელშიაც მოცემულია კომპოზიციის ოპერაცია, რომლის მიხედვით G სიმრავლის ელემენტთა ყოველ (a, b) წყვილს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც a და b ელემენტების ab ნამრავლი ეწოდება, ამასთანავე შესრულებულია შემდეგი აქსიომები:

I. **ასოციატიურობის კანონი:** G სიმრავლის ყოველი სამი a, b, c ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა

$$(ab)c = a(bc).$$

II. G სიმრავლეში არსებობს მარცხენა ერთეული, ე. ი. ისეთი e ელემენტი, რომ G სიმრავლის ყოველი a ელემენტისათვის $ea=a$.

III. G სიმრავლის ყოველი a ელემენტისათვის არსებობს ამ სიმრავლის მარცხენა შებრუნებული ელემენტი, ე. ი. ისეთი a^{-1} ელემენტი, რომ $a^{-1}a=e$.

G ჯგუფს აბელის[1] ანუ კომუტატიური ჯგუფი ეწოდება, თუ ზემომოყვანილი სამი აქსიომის გარდა შესრულებულია შემდეგი აქსიომა:

IV. G ჯგუფის ყოველი a და b ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $ab=ba$.

მაგალითად, თუ სიმრავლის ელემენტები რიცხვებია, ხოლო კომპოზიციის ოპერაცია არის ჩვეულებრივი გამრავლება, მაშინ ყველა დადებითი და უარყოფითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე იქნება ჯგუფი. ჯგუფს წარმოადგენს აგრეთვე $G=\{1, -1\}$ სიმრავლე.

---

[1] აბელი (*Abel*), ნილს ჰენრიკ (1802—29) — ნორვეგიელი მეცნიერი, ერთ-ერთი გამოჩენილი მათემატიკოსი მე-19 საუკუნისა. 1824 წელს მან გამოაქვეყნა მე-5 ხარისხის ზოგადი განტოლების რადიკალებში ამოუხსნადობის დამტკიცება.

თეორემა 1. ჯგუფის ნებისმიერი a ელემენტის მარცხენა შებრუნებული a^{-1} ელემენტი მარჯვენა შებრუნებული ელემენტიცაა.

დამტკიცება. II და III აქსიომების თანახმად,

$$a^{-1}aa^{-1}=(a^{-1}a)a^{-1}=ea^{-1}=a^{-1}.$$

ახლა $a^{-1}aa^{-1}=a^{-1}$ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ a^{-1} ელემენტის მარცხენა შებრუნებულ x ელემენტზე, გვექნება

$$x(a^{-1}aa^{-1})=xa^{-1}=e.$$

ანუ

$$aa^{-1}=e. \tag{1.1}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(1.1) ტოლობიდან ჩანს, რომ a^{-1} ელემენტის მარცხენა შებრუნებულ ელემენტს წარმოადგენს a ელემენტი.

შედეგი. ჯგუფის მარცხენა e ერთეული მარჯვენა ერთეულიცაა.

მართლაც, (1.1) ტოლობის ძალით, ჯგუფის ყოველი a ელემენტისათვის გვაქვს:

$$ae=aa^{-1}a=(aa^{-1})a=ea.$$

თეორემა 2. G ჯგუფის ნებისმიერი a და b ელემენტისათვის განტოლებები $ax=b$ და $ya=b$ ამოხსნადია G-ში.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოცემული განტოლებების ამონახსნებია $x=a^{-1}b$ და $y=ba^{-1}$ ელემენტები. მართლაც,

$$ax=a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=eb=b,$$

$$ya=(ba^{-1})a=b(a^{-1}a)=be=b.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $ax=b$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ვთქვათ, მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი α და β, მაშინ $a\alpha=a\beta$. თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ მარცხნიდან a^{-1} ელემენტზე, მივიღებთ $\alpha=\beta$.

ასევე ვაჩვენებთ, რომ $xa=b$ განტოლებასაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ჯგუფის მხოლოდ ერთი ერთეული. მართლაც, ვთქვათ e' არის ჯგუფის მეორე ერთეული. მაშინ ყოველი a ელემენტისათვის გვექნება

$$ea=a,\quad e'a=a,$$

ე. ი. $ea=e'a$. აქედან $e'=e$.

დასასრულ დავამტკიცოთ, რომ G ჯგუფის ყოველი a ელემენტისათვის არსებობს ერთადერთი შებრუნებული ელემენტი. ვთქვათ, a ელემენტისათვის გვაქვს ორი შებრუნებული ელემენტი a^{-1} და a'. მაშინ გვექნება

$$a^{-1}a=e, \quad a'a=e.$$

აქედან

$$a'a=a^{-1}a$$

და, მაშასადამე,

$$a'=(a^{-1}a)a^{-1}=a^{-1}(aa^{-1})=a^{-1}e=a^{-1}.$$

ამრიგად, ყოველი a ელემენტისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი შებრუნებული a^{-1} ელემენტი.

აბელის ჯგუფისათვის მიზანშეწონილია ჯგუფური კომპოზიცია ადიტიურად ჩავწეროთ, ე. ი. ab-ს ნაცვლად ვწეროთ $a+b$. მაშინ ჯგუფს ადიტიური ჯგუფი ანუ მოდული ეწოდება. ამ შემთხვევაში ჯგუფის ერთეული აღინიშნება 0 სიმბოლოთი, ვინაიდან, ისე როგორც მთელ რიცხვთა არეში, იგი ხასიათდება თვისებით

$$a+0=a.$$

ადიტიური ჯგუფის a ელემენტის შებრუნებულ ელემენტს აღნიშნავენ $-a$ სიმბოლოთი.

$a+(-b)$ გამოსახულებას აღნიშნავენ $a-b$ სიმბოლოთი, ვინაიდან ეს ელემენტი არის $x+b=a$ განტოლების ამონახსნი:

$$(a-b)+b=a+(-b+b)=a+0=a.$$

ახლა განვსაზღვროთ ჯგუფის რამდენიმე ელემენტის ნამრავლი. ვთქვათ, მოცემულია G ჯგუფის ელემენტები $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. ამ ელემენტთა ნამრავლს განვსაზღვრავთ რეკურენტული ფორმულით

$$a_1a_2\ldots a_na_{n+1}=(a_1a_2\ldots a_n)a_{n+1} \quad (n<\nu).$$

თუ გვაქვს n ერთნაირი თანამამრავლი a, მაშინ მათ ნამრავლს ხარისხი ეწოდება და აღინიშნება a^n სიმბოლოთი. კერძოდ,

$$a^1=a, \ a^2=aa, \ a^3=aaa \text{ და ა. შ.}$$

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი ტოლობათა მართებულობა:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}, \ (a^m)^n=a^{mn}. \tag{1.2}$$

ყოველ ჯგუფში შეგვიძლია განვსაზღვროთ ნებისმიერი a ელემენტის ნულოვანი და უარყოფითი ხარისხები ჩვეულებრივი ფორმულებით

$$a^0=e, \ a^{-n}=(a^{-1})^n,$$

სადაც e ჯგუფის ერთეულია.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (1.2) ტოლობები ძალაში რჩება ნებისმიერი მთელი ხარისხის მაჩვენებლებისათვის. შემდეგ, თუ a და b აბელის ჯგუფის ელემენტებია, მაშინ ნებისმიერი მთელი n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

ადიტიური ჯგუფის $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ელემენტებისათვის ჯამი განისაზღვრება რეკურენტული ფორმულით

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} \quad (n < \nu).$$

თუ გვაქვს n ერთნაირი a შესაკრები, მაშინ მათი ჯამი აღინიშნება $n \cdot a$ ან na სიმბოლოთი. აქ na არ უნდა განვიხილოთ როგორც n რიცხვისა და a ელემენტის ნამრავლი, ვინაიდან მთელი რიცხვი n შეიძლება ჯგუფს არ ეკუთვნოდეს.

$$m(na) = (mn)a \quad (\text{ასოციატიურობის კანონი}),$$

$$ma + na = (m+n)a \quad (\text{დისტრიბუტიულობის კანონი}).$$

ამ ორ კანონს ემატება დისტრიბუტიულობის კიდევ ერთი კანონი:

$$n(a+b) = na + nb. \tag{1.3}$$

დავამტკიცოთ (1.3) ტოლობის მართებულობა. იმ შემთხვევაში, როცა $n=1$, (1.3) ტოლობის მართებულობა ცხადია. ახლა დავუშვათ, რომ (1.3) ტოლობა მართებულია მოცემული n რიცხვისათვის. დავამტკიცოთ, რომ იგი მართებულია $n+1$ რიცხვისათვისაც. გვაქვს:

$$(n+1)(a+b) = n(a+b) + (a+b) = na + nb + a + b =$$
$$= (na + a) + (nb + b) = (n+1)a + (n+1)b.$$

ამრიგად, (1.3) ტოლობა მართებულია ყოველი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის. თუ $n=0$, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ

$$0 \cdot a = 0,$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილში 0 აღნიშნავს ადიტიური ჯგუფის ერთეულს. მაშასადამე, (1.3) ტოლობა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $n=0$. თუკი n უარყოფითია, მაშინ განსაზღვრის თანახმად

$$na = (-n)(-a)$$

და ამიტომ

$$n(a+b) = (-n)(-a-b) = (-n)(-a) + (-n)(-b) = na + nb.$$

ამგვარად, (1.3) ტოლობის მართებულობა დამტკიცებულია ნებისმიერი მთელი n რიცხვისათვის.

განსაზღვრა 2. G ჯგუფის რაიმე g ქვესიმრავლეს ამ ჯგუფის ქვეჯგუფი ეწოდება, თუ თვითონ g წარმოადგენს ჯგუფს იმავე ჯგუფური ოპერაციით, რაც G-ში.

თეორემა 3. იმისათვის რომ G ჯგუფის არაცარიელი g ქვესიმრავლე იყოს G ჯგუფის ქვეჯგუფი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ g სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტის ნამრავლი ისევ g სიმრავლეს ეკუთვნოდეს და g სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტის შებრუნებული a^{-1} ელემენტი წარმოადგენდეს g სიმრავლის ელემენტს.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ავიღოთ g სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტი. პირობის თანახმად, არსებობს a ელემენტის შებრუნებული a^{-1} ელემენტი, რომელიც g-ს ეკუთვნის და, მაშასადამე, $aa^{-1}=e$ წარმოადგენს g სიმრავლის ელემენტს. ამრიგად, g შეიცავს e ერთეულს. შემდეგ, რაკი ასოციატიურობის აქსიომა ავტომატურად გადადის G-დან g-ზე, ამიტომ g წარმოადგენს G ჯგუფის ქვეჯგუფს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითად, G ჯგუფის ქვეჯგუფს წარმოადგენს ერთეულოვანი E ჯგუფი, რომელიც შედგება მხოლოდ e ერთეულისაგან.

§ 2. რგოლი

როგორც ცნობილია, არითმეტიკისა და ალგებრის შესწავლის ობიექტებია მთელი, რაციონალური, ირაციონალური და კომპლექსური რიცხვები, მრავალწევრები და რაციონალური ფუნქციები ერთი ან რამდენიმე ცვლადისა და ა. შ. ამასთანავე პირველ რიგში განიხილება შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციების თვისებები. ზევრ შემთხვევაში ამ ოპერაციების თვისებები სხვადასხვა ობიექტებისათვის ერთი და იგივეა. ამიტომ ბუნებრივია სიდიდეთა ეს არეები გავაერთიანოთ ერთი ზოგადი ცნებით და ამ არეებში გამოვიკვლიოთ ოპერაციათა კანონები ზოგადი სახით. ასეთი აბსტრაქტული სახით ადვილია მოცემულ თვისებათა მნიშვნელობისა და ურთიერთდამოკიდებულების გამორკვევა.

განსაზღვრა 3. რგოლი ეწოდება არაცარიელ R სიმრავლეს, რომელშიაც ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის ცალსახად განსაზღვრულია $a+b$ ჯამი და ab ნამრავლი, რომლებიც R სიმრავლეს ეკუთვნის, ამასთანავე ეს ოპერაციები შემდეგ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

I. შ ე კ რ ე ბ ი ს კ ო მ უ ტ ა ტ ი უ რ ო ბ ა: $a+b=b+a$.

II. შ ე კ რ ე ბ ი ს ა ს ო ც ი ა ტ ი უ რ ო ბ ა: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

III. R ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი a დ ა b ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა თ ვ ი ს $a+x=b$ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ა ქ ვ ს ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი, ე. ი. ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი $c\in R$, რ ო მ $a+c=b$ (შ ე კ რ ე ბ ი ს შ ე ქ ც ე ვ ა დ ო ბ ა).

IV. გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს ა ს ო ც ი ა ტ ი უ რ ო ბ ა: $a(bc)=(ab)c$.

V. გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს დ ი ს ტ რ ი ბ უ ტ ი უ ლ ო ბ ა შ ე კ რ ე ბ ი ს მ ი მ ა რ თ:

ა) $(a+b)c=ac+bc$, ბ) $c(a+b)=ca+cb$.

თუ გამრავლებისათვის ადგილი აქვს აგრეთვე კომუტატიურობის აქსიომას $ab=ba$, მაშინ რგოლს კ ო მ უ ტ ა ტ ი უ რ ი რ გ ო ლ ი ეწოდება.

ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების შემთხვევაში რგოლებს წარმოადგენს შემდეგი სიმრავლეები:

1) მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

2) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

3) ლუწ რიცხვთა სიმრავლე.

ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე რგოლი არაა, ვინაიდან არ სრულდება III აქსიომა.

I, II და III აქსიომები აღნიშნავენ, რომ რგოლის ელემენტები შეადგენენ შეკრების მიმართ აბელის ჯგუფს. ამ ჯგუფს უწოდებენ რ გ ო ლ ი ს ა დ ი ტ ი უ რ ჯ გ უ ფ ს.

ამრიგად, აბელის ჯგუფისათვის დამტკიცებული თეორემები შეგვიძლია გადავიტანოთ რგოლებზე: არსებობს ერთადერთი ნული, ე. ი. ისეთი 0 ელემენტი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: რგოლის ყოველი a ელემენტისათვის

$$a+0=a.$$

შემდეგ, რგოლის ყოველი a ელემენტისათვის არსებობს მოპირდაპირე ელემენტი $-a$, ე. ი. ელემენტი, რომელსაც აქვს თვისება:

$$-a+a=0.$$

განტოლებას $a+x=b$ აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ეს ამონახსნია $x=-a+b$. ამ ამონახსნს ეწოდება b და a ელემენტების სხვაობა და აღინიშნება $b-a$. რადგანაც $a-b=a+(-b)$, ამიტომ სხვაობებისათვის ადგილი აქვს მოქმედებათა გადანაცვლების იმავე წესებს, რაც ჯამებისათვის. მაგალითად,

$$(a-b)-c=[a+(-b)]+(-c)=a+[(-b)+(-c)]=$$
$$=a+[(-c)+(-b)]=[a+(-c)]+(-b)=(a-c)-b.$$

ასევე,

$$-(-a)=a,\quad a-a=0.$$

დისტრიბუტიულობის კანონს ადგილი აქვს გამოკლებისათვისაც. მაგალითად,

$$a(b-c)=ab-ac. \tag{2.1}$$

მართლაც,

$$a(b-c)+ac=a(b-c+c)=ab.$$

აქედან მიიღება (2.1) ტოლობა.

კერძოდ, ნებისმიერი a ელემენტისათვის

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0.$$

ამას გარდა, (2.1) ტოლობის თანახმად

$$a(-b)=a(0-b)=a\cdot 0-ab=-ab,$$

$$(-a)\cdot(-b)=-[(-a)b]=-(-ab)=ab.$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ, თუ *ერთ-ერთი თანამამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ნამრავლიც ნულის ტოლია.* მაგრამ შებრუნებული დასკვნა საზოგადოდ სწორი არაა. შეიძლება მართებული იყოს $ab=0$ ტოლობა მაშინაც, როდესაც $a\neq 0$ და $b\neq 0$. ამ შემთხვევაში a და b ელემენტებს ეწოდება *ნულის გამყოფები*; a-ს ჰქვია *ნულის მარცხენა გამყოფი*, b ელემენტს კი *მარჯვენა გამყოფი*. კომუტატიურ რგოლებში ორივე ეს ცნება ერთმანეთს ემთხვევა. მიზანშეწონილია, რომ თვითონ ნული ჩავთვალოთ ნულის გამყოფად. ამრიგად, a ელემენტს ჰქვია *ნულის მარცხენა გამყოფი*, თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი b ელემენტი, რომ $ab=0$.

განსაზღვრა 4. თუ რგოლში არ არის ნულის გამყოფები, გარდა თვით ნულისა, ე. ი. $ab=0$ ტოლობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს, რომ ან $a=0$ ან $b=0$, მაშინ ასეთ რგოლს ეწოდება *რგოლი ნულის არაგამყოფებით*. ამას გარდა, თუ რგოლი კომუტატიურია, მაშინ რგოლს *ერთიანობის არე* ჰქვია.

თეორემა 4. *თუ a, b, c კომუტატიური R რგოლის ელემენტებია, მაშინ $ab=ac$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $b=c$ ტოლობა, როცა a არ წარმოადგენს ნულის გამყოფს და $a\neq 0$.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $ab=ac$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $ab-ac=0$. აქედან $a(b-c)=0$. მაგრამ რაკი a არ არის ნულის გამყოფი და $a\neq 0$, ამიტომ $b-c=0$, ე. ი. $b=c$.

თეორემა 5. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი კ ო მ უ ტ ა ტ ი უ რ ი რ გ ო ლ ი ს ა თ ვ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ თ ა ს ხ ვ ა ო ბ ა ს ა ქ ვ ს შ ე მ დ ე გ ი თ ვ ი ს ე ბ ე ბ ი:

1) $a-b=c-d$ ტ ო ლ ო ბ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა მ ა შ ი ნ დ ა მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო დ ე ს ა ც $a+d=b+c$;

2) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

3) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$;

4) $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მართებულია ტოლობა

$$a-b=c-d.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ $b+d$, გვექნება

$$(a-b)+(b+d)=(c-d)+(b+d).$$

აქედან ვღებულობთ $a+d=b+c$. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$a+d=b+c.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ $(-b)+(-d)$, გვექნება

$$(a+d)+[(-b)+(-d)]=(b+c)+[(-b)+(-d)].$$

აქედან $a-b=c-d$. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

დანარჩენი ტოლობების მართებულობა ანალოგიურად მტკიცდება.

თეორემა 6. თ უ რ გ ო ლ ს ა ქ ვ ს ე რ თ დ რ ო უ ლ ა დ მ ა რ ც ხ ე ნ ა დ ა მ ა რ ჯ ვ ე ნ ა ე რ თ ე უ ლ ე ბ ი e დ ა e', მ ა შ ი ნ ე ს ო რ ი ვ ე ე რ თ ე უ ლ ი ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ტ ო ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის ძალით, რგოლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის გვაქვს

$$ex=x, \quad xe'=x.$$

აქედან $ex=xe'$. თუ $x=e$, გვექნება $ee=ee'$, ე. ი. $e=e'$. თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5. ვთქვათ, a არის რგოლის ნებისმიერი ელემენტი, e კი რგოლის მარცხენა ერთეულია. a ელემენტის მარცხენა შებრუნებული ელემენტი ეწოდება ისეთ $a_{(l)}^{-1}$ ელემენტს, რომელიც აკმაყოფი-

ლებს ტოლობას $a_{(l)}^{-1}a=e$, ხოლო a ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი — ისეთ $a_{(r)}^{-1}$ ელემენტს, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა $aa_{(r)}^{-1}=e$.

თეორემა 7. თუ რგოლს აქვს ერთეული e ელემენტი და არსებობს ამ რგოლის a ელემენტის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა შებრუნებული ელემენტები $a_{(l)}^{-1}$ და $a_{(r)}^{-1}$, მაშინ $a_{(l)}^{-1}=a_{(r)}^{-1}$.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$a_{(l)}^{-1}=a_{(l)}^{-1}(aa_{(r)}^{-1})=(a_{(l)}^{-1}a)a_{(r)}^{-1}=ea_{(r)}^{-1}=a_{(r)}^{-1}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ რგოლის a ელემენტს აქვს როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი, მაშინ ისინი ტოლია, ამასთანავე ასეთი ელემენტი იქნება ერთადერთი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a ელემენტს აქვს შებრუნებული ელემენტი და ამ ელემენტს აღნიშნავენ a^{-1} სიმბოლოთი.

გამრავლების ასოციატიურობის აქსიომის თანახმად R რგოლის ყოველი a ელემენტისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ a^n ხარისხი, სადაც n — ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ამასთანავე მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn}. \tag{2.2}$$

კომუტატიური R რგოლის ნებისმიერი a და b ელემენტისათვის გვაქვს:

$$(ab)^n=a^nb^n. \tag{2.3}$$

თუ R რგოლში არსებობს ერთეული და რგოლის a ელემენტს აქვს შებრუნებული ელემენტი, მაშინ შეგვიძლია შემოვიღოთ a ელემენტის ნულოვანი და უარყოფითი ხარისხები, ამასთანავე (2.2) და (2.3) წესები იქნება შენარჩუნებული.

R რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ $n\cdot a$ ჯერადი:

$$n\cdot a=\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n\text{-ჯერ}},$$

ამასთანავე გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} &ma+na=(m+n)a, \quad m\cdot na=mn\cdot a,\\ &n(a+b)=na+nb, \quad n\cdot ab=na\cdot b=a\cdot nb.\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

თუ ვიგულისხმებთ

$$(-n)a=-na,$$

მაშინ (2.4) წესები ძალაში რჩება ნებისმიერი მთელი m და n რიცხვებისათვის.

შევნიშნოთ, რომ $n \cdot a$ არ წარმოადგენს რგოლის ორი ელემენტის ნამრავლს, ვინაიდან, საზოგადოდ, n არ არის რგოლის ელემენტი.

განსაზღვრა 6. R რგოლის M ქვესიმრავლეს ქვერგოლი ეწოდება, თუ თვითონ M წარმოადგენს რგოლს შეკრებისა და გამრავლების იმავე ოპერაციებით, რომლებიც განსაზღვრულია R რგოლში.

მაგალითად, ლუწ რიცხვთა რგოლი წარმოადგენს მთელ რიცხვთა რგოლის ქვერგოლს, ხოლო მთელ რიცხვთა რგოლი რაციონალურ რიცხვთა რგოლის ქვერგოლია.

თეორემა 8. R რგოლის M ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ქვერგოლს, როდესაც M სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი კვლავ M სიმრავლეს ეკუთვნის.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, M არის R რგოლის ქვერგოლი. მაშინ M სიმრავლეში შეკრება ემთხვევა შეკრებას R-ში. მაგრამ შებრუნებული ოპერაციის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ გამოკლებაც M სიმრავლეში ემთხვევა გამოკლებას R-ში. ამიტომ M სიმრავლის ორი ნებისმიერი ელემენტის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი ისევ M სიმრავლეს ეკუთვნის.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, M სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი, განსაზღვრული R-ში, ისევ M სიმრავლეს ეკუთვნის. მაშინ ეს ჯამი და ნამრავლი შეგვიძლია მივიღოთ შეკრებისა და გამრავლების შედეგად M სიმრავლეში. ამით M-ში განსაზღვრულია შეკრება და გამრავლება. I, II, IV და **V** აქსიომები ავტომატურად გადაიტანება R-დან მის ნებისმიერ ქვესიმრავლეზე, და მაშასადამე, ეს აქსიომები შესრულებული იქნება M-ში.

ავიღოთ M სიმრავლეში ნებისმიერი a და b ელემენტი. მაშინ $b-a=c$ ელემენტი აგრეთვე M სიმრავლეს ეკუთვნის, მაგრამ R-ში სხვაობის თვისების თანახმად გვაქვს

$$a+(b-a)=b, \text{ ანუ } a+c=b.$$

ამრიგად, M სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის $a+x=b$ განტოლებას აქვს ამონახსნი M-ში, ე. ი. შესრულებულია III აქსიომაც და, მაშასადამე, M წარმოადგენს რგოლს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ველი

განვიხილოთ მთელ რიცხვთა რგოლი. თუ ავიღებთ ამ რგოლის ნებისმიერ ორ a და b ელემენტს, მაშინ $ax=b$ განტოლება, საზოგადოდ, ამოხსნადი არაა, ე. ი. გამრავლების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაცია (გაყოფის ოპერაცია), საზოგადოდ, ვერ ხორციელდება მთელ რიცხვთა რგოლში, რაციონალურ რიცხვთა რგოლში გაყოფა ყოველთვის შესაძლებელია, გარდა ნულზე გაყოფისა. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ გამრავლების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაციის თვისებები, შემოვიღოთ

განსაზღვრა 7. ველი ეწოდება კომუტატიურ R რგოლს, რომელიც შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ ერთ ელემენტს მაინც და ამ რგოლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის, სადაც $a\neq 0$, ამოხსნადია $ax=b$ განტოლება. ველს უწოდებენ აგრეთვე რაციონალობის არეს.

თეორემა 9. K ველში არსებობს ერთეული.

დამტკიცება. განვიხილოთ განტოლება $xa=a$, სადაც a არის K ველის ნულისაგან განსხვავებული რომელიმე ელემენტი. ამ განტოლების ამონახსნი აღვნიშნოთ e ასოთი. ახლა ავიღოთ K ველის ნებისმიერი b ელემენტი და აღვნიშნოთ q ასოთი $ax=b$ განტოლების ამონახსნი. მაშინ გვექნება

$$eb=e(aq)=aq=b.$$

ამით დამტკიცებულია ერთეულის არსებობა.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ K ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის არსებობს შებრუნებული a^{-1} ელემენტი.

თეორემა 10. ველს არ აქვს ნულის გამყოფი.

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b არის ველის ელემენტები და $ab=0$. დასამტკიცებელია, რომ ან $a=0$, ან $b=0$. თუ $a\neq 0$, მაშინ გავამრავლოთ $ab=0$ ტოლობის ორივე ნაწილი a^{-1} ელემენტზე, გვექნება $a^{-1}ab=0$, ე. ი. $eb=b=0$. ამრიგად, ველი წარმოადგენს რგოლს ნულის არაგამყოფებით.

თეორემა 11. თუ a და b არის K ველის ნებისმიერი ელემენტები, ამასთანავე $a\neq 0$, მაშინ $ax=b$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი x და x', მაშინ $ax=ax'$. თუ მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ a^{-1} ელემენტზე, გვექნება $x=x'$. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ $ax=b$ და $xa=b$ განტოლებას აქვს ერთი და იგივე ამონახსნი $x=a^{-1}b=ba^{-1}$.

$a^{-1}b$ ან ba^{-1} გამოსახულების ნაცვლად წერენ $\frac{b}{a}$ და მას b და a ელემენტების ფარდობა ეწოდება.

ველის ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები შეადგენენ გამრავლების მიმართ ჯგუფს, რომელსაც მ უ ლ ტ ი პ ლ ი კ ა ტ უ რ ი ჯ გ უ ფ ი ეწოდება.

ამრიგად, ველი აერთიანებს ორ ჯგუფს: მულტიპლიკატურსა და ადიტიურს. ეს ჯგუფები დაკავშირებულია ერთმანეთთან დისტრიბუტიულობის აქსიომით.

რაციონალური რიცხვები, ნამდვილი რიცხვები, კომპლექსური რიცხვები ველებს შეადგენენ.

ნებისმიერი ველის ელემენტების ფარდობისათვის ძალაშია ოპერაციათა იგივე წესები, რაც ჩვეულებრივი წილადებისათვის, ე. ი. მართებულია

თეორემა 12. თ უ $b\neq 0$ დ ა $d\neq 0$, მ ა შ ი ნ: 1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ტ ო ლ ო ბ ა ს ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს მ ა შ ი ნ დ ა მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო დ ე ს ა ც $ad=bc$;

2) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$, 3) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, რომ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ და ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ bd-ზე, გვექნება $ad=bc$.

პირიქით, ვთქვათ, მოცემულია $ad=bc$ ტოლობა. შემოვიღოთ აღნიშვნები $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$. აქედან გვაქვს $bx=a$, $dy=c$, ანუ $bdx=ad$, $bdy=bc$. რაკი $ad=bc$, ამიტომ $bdx=bdy$, საიდანაც მე-4 თეორემის თანახმად, გვექნება $x=y$, ე. ი. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

ანალოგიურად მტკიცდება 2) და 3) ტოლობათა მართებულობა.

შედეგი. თუ $b\neq 0$, $c\neq 0$ და $d\neq 0$, მ ა შ ი ნ

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}. \tag{3.1}$$

მართლაც, აღვნიშნოთ x-ით $\frac{ad}{bc}$ ელემენტი. მაშინ გვექნება

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{ad}{bc} = \frac{c}{d}x.$$

ამრიგად, $\frac{c}{d}x = \frac{a}{b}$ განტოლების ამონახსნია $\frac{ad}{bc}$, ე. ი. მართებულია (3.1) ტოლობა.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ R ველის ნებისმიერი ელემენტების $\frac{a}{b}$ ფარდობანი შეადგენს P ველს. ამ ველს R ველის ფარდობათა ველი ეწოდება.

განსაზღვრა 8. თუ a ველის რაიმე ელემენტია, ხოლო m და n ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $\frac{m}{n} \cdot a$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ველის $m\frac{a}{ne}$ ელემენტს, ხოლო $\frac{m}{n}e$ ელემენტს ვუწოდებთ ველის რაციონალურ ელემენტს.

თუ a და b ველის ნებისმიერი ელემენტებია, n კი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ ადვილად დავამტკიცებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულას:

$$(a+b)^n = a^n + nea^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot ea^{n-2}b^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} ea^{n-k}b^k + \cdots + b^n.$$

§ 4. იზომორფიზმი

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ორი M და M' სიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ მათგანში განსაზღვრულია მიმართებანი ელემენტებს შორის. მაგალითად, M და M' შეიძლება იყოს ჯგუფები, ხოლო მიმართებებს წარმოადგენდეს $ab=c$ ტოლობები, ანდა მოცემული სიმრავლეები იყოს დალაგებული და განსახილავ მიმართებებს წარმოადგენდეს უტოლობები $a > b$.

თუ ეს სიმრავლეები შეგვიძლია ურთიერთცალსახად გადავსახოთ ერთმანეთზე ისე, რომ მათში განსაზღვრული მიმართებანი არ ირღვევა გადასახვისას, ე. ი. თუ M სიმრავლის ყოველ a ელემენტს ურთიერთცალსახად შეესაბამება M' სიმრავლის a' ელემენტი ისე, რომ მიმართებებს, რომლებიც არსებობს M სიმრავლის $a, b, \ldots$ ელემენტებს შორის, ადგილი აქვს აგრეთვე შესაბამის $a', b' \cdots$ ელემენტებს შორისაც და პირიქით, მაშინ M და M' სიმრავლეებს ეწოდება იზომორფული განსახილავი მიმართებათა მიმართ და წერენ $M \cong M'$. თვით ამ ურთიერთ-

ცალსახა შესაბამისობას M და M' ელემენტებს შორის, რომელიც ინარჩუნებს ამ სიმრავლეებში განსაზღვრულ მიმართებებს, **იზომორფიზმი** ეწოდება.

მაგალითად, შეიძლება ლაპარაკი იზომორფულ ჯგუფებზე, მსგავსად დალაგებულ სიმრავლეებზე და ა. შ.

თუ M სიმრავლე M' სიმრავლის იზომორფულია, მაშინ M' სიმრავლეს M სიმრავლის **იზომორფული სახე** ეწოდება.

იზომორფიზმის ცნებას შემდეგი სამი ძირითადი თვისება აქვს:

ა) $M \cong M$ (**რეფლექსურობა**),

ბ) თუ $M \cong M'$, მაშინ $M' \cong M$ (**სიმეტრიულობა**),

გ) თუ $M \cong M'$ და $M' \cong M''$, მაშინ $M \cong M''$ (**ტრანზიტულობა**).

განსაზღვრა 9. R ველს R' ველის იზომორფული ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა R სიმრავლისა R' სიმრავლეზე, რომ R-ის ნებისმიერი ელემენტების ჯამსა და ნამრავლს შეესაბამება R' სიმრავლის შესატყვისი ელემენტების ჯამი და ნამრავლი.

დავამტკიცოთ, რომ ეს განსაზღვრა წარმოადგენს იზომორფიზმის ზემოთ მოყვანილი ზოგადი განსაზღვრის კერძო შემთხვევას. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ შექცეული გადასახვა R' სიმრავლისა R სიმრავლეზე ინარჩუნებს ჯამსა და ნამრავლს. ვთქვათ, R'-ში გვაქვს $a'+b'=c'$, $a'b'=$ $=d'$ და შექცეული გადასახვისას a', b', c', d' ელემენტების შესატყვისი ელემენტებია R-დან a, b, c, d. დასამტკიცებელია, რომ $a+b=c$, $ab=d$. თუ $a+b=c^* \neq c$, მაშინ მე-9 განსაზღვრის თანახმად გვექნება $a'+b'=$ $=\bar{c} \neq c'$, რაც ეწინააღმდეგება R'-ში ჯამის ოპერაციის ცალსახობას. მაშასადამე, $a+b=c$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $ab=d$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $ab=d^* \neq d$. მაშინ მე-9 განსაზღვრის თანახმად გვექნება $a'b'=\bar{d} \neq d'$, რაც ეწინააღმდეგება R' ველში გამრავლების ოპერაციის ცალსახობას. ამიტომ $ab=d$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. თუ R და R' სიმრავლეებში განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები და $R \cong R'$, ამასთანავე R წარმოადგენს ველს, მაშინ R' სიმრავლეც იქნება ველი, ე. ი. ველის იზომორფული სახე კვლავ ველია.

დამტკიცება. ავიღოთ R' სიმრავლის ნებისმიერი a', b', c' ელემენტები. დავამტკიცოთ, რომ

$$a'(b'+c')=a'b'+a'c'.$$

ვთქვათ, a, b, c არის შესაბამისად a', b', c' ელემენტების პირველსახეები. რადგანაც R არის რგოლი, ამიტომ

$$a(b+c)=ab+ac.$$

იზომორფულობის გამო, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$a'(b'+c')=a'b'+a'c'.$$

ასევე მტკიცდება ასოციატიურობისა და კომუტატიურობის კანონები.

ახლა დავამტკიცოთ $a'+x'=b'$ განტოლების ამოხსნადობა. ვთქვათ, a და b არის შესაბამისად a' და b' ელემენტების პირველსახეები. განვიხილოთ განტოლება $a+x=b$. ეს განტოლება ამოხსნადია და, მაშასადამე, ამოხსნადი იქნება $a'+x'=b'$ განტოლებაც.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ R ველის ნულ ელემენტს შეესაბამება R' სიმრავლეში ნული ელემენტი და ერთეულ ელემენტს — ერთეული ელემენტი. R ველის a ელემენტის მოპირდაპირე $-a$ ელემენტს შეესაბამება R' სიმრავლის შესატყვისი a' ელემენტის მოპირდაპირე $-a'$ ელემენტი. ამას გარდა, $a'x'=b'$ განტოლება ამოხსნადია, თუ $a'\neq 0$. მაშასადამე, R' წარმოადგენს ველს და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. განლაგებული ველები

მათემატიკაში უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობს რიცხვთა სიმრავლეები, სადაც ერთდროულად არსებობს რიგის და ოპერაციათა მიმართებანი. ჩვენ განვიხილავთ დალაგებულ ველებს, სადაც მიზანშეწონილად შემოვიყვანთ კავშირს რიგსა და ოპერაციებს შორის. ველში რიგის მიმართებასთან დაკავშირებულია ელემენტთა დადებითობის, უარყოფითობისა და ელემენტის აბსოლუტური სიდიდის ცნებები.

ოპერაციათა არსებობა საშუალებას გვაძლევს რამდენადმე გავამარტივოთ რიგის შემოღება ველში. თურმე საკმარისია მოცემულ იქნეს ყველა ელემენტის რიგი ნულის მიმართ. შემდეგ, რიცხვთა ჩვეულებრივი თვისებების შენარჩუნებისათვის საჭიროა დამატებითი პირობების დადება რიგის კავშირზე ოპერაციებთან.

განსაზღვრა **10.** რაიმე K ველს განლაგებული ველი ეწოდება, თუ ველის ელემენტებისათვის განსაზღვრულია თვისება იყოს დადებითი, რომელიც შემდეგ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

1) K სიმრავლის ყოველი a ელემენტისათვის მართებულია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი სამი დამოკიდებულებიდან: $a=0$, a დადებითია, $-a$ დადებითია.

2) თუ a და b დადებითია, მაშინ $a+b$ და ab აგრეთვე დადებითია. თუ $-a$ დადებითია, მაშინ a ელემენტს უარყოფითი ელემენტი ეწოდება.

ახლა ავიღოთ K ველის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტი. თუ $a-b$ დადებითია, მაშინ დავწეროთ $a>b$ (სიტყვიერად: a მეტია b-ზე), თუკი $a-b$ უარყოფითია, მაშინ $a<b$ (სიტყვიერად: a ნაკლებია b-ზე). ამ შემთხვევაში K ველის ორი ნებისმიერი ელემენტის შედარება შეიძლება მათი სიდიდეთა მიხედვით. ცხადია, თუ $a>b$, მაშინ $b<a$.

თეორემა 14. ყოველი განლაგებული K ველი დალაგებულ სიმრავლეს წარმოადგენს, ამასთანავე ნული იქნება ნაკლები ყოველ დადებით და მეტი ყოველ უარყოფით ელემენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b არის K ველის ნებისმიერი ორი ელემენტი. თუ $a-b=0$, მაშინ $a=b$, თუკი $a-b$ დადებითია, მაშინ $a>b$, ხოლო როცა $a-b$ უარყოფითია, მაშინ $a<b$. მაშასადამე, 1) აქსიომის თანახმად ადგილი ექნება მხოლოდ ერთ-ერთს შემდეგი სამი დამოკიდებულებიდან: $a=b$, $a<b$, $a>b$. შემდეგ, თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a-b$ და $b-c$ დადებითი ელემენტებია და 2) აქსიომის თანახმად დადებითი იქნება აგრეთვე $(a-b)+(b-c)$ ელემენტიც. მაგრამ

$$(a-b)+(b-c)=a-c.$$

მაშასადამე, $a>c$. ამრიგად K სიმრავლე დალაგებულია.

თუ a დადებითია, მაშინ $a-0=a$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a>0$. თუკი a უარყოფითია, მაშინ $0-a=-a$ დადებითია და ამიტომ $0>a$ ანუ $a<0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა გვიჩვენებს, რომ 1) და 2) აქსიომები საკმარისია იმისათვის, რომ K ველში შემოვიღოთ რიგის ცნება.

თეორემა 15. განლაგებული K ველის ნებისმიერი a, b, c ელემენტებისათვის მართებულია შემდეგი თვისებები:

1. $a>b$, $a=b$, $a<b$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს შესაბამისად დამოკიდებულებები $a+c>b+c$, $a+c=b+c$, $a+c<b+c$.

2. თუ $c>0$, მაშინ $a>b$, $a=b$, $a<b$ დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ შესაბამისად დამოკიდებულებებს $ac>bc$, $ac=bc$, $ac<bc$, ხოლო, თუ $c<0$, მაშინ გვექნება შესაბამისად $ac<bc$, $ac=bc$, $ac>bc$ დამოკიდებულებანი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როცა $a>b$, გვაქვს:

$$(a+c)-(b+c)=a-b>0.$$

მაშასადამე, $a+c>b+c$. თუ $a=b$, მაშინ $ac=bc$, ვინაიდან

$$ac-bc=(a-b)c=0\cdot c=0.$$

თუ $a<b$, მაშინ $b>a$ და, მაშასადამე, $b+c>a+c$, ე. ი. $a+c<b+c$.

ახლა ვთქვათ, $c>0$, $a>b$. აქედან $a-b>0$ და 2) აქსიომის თანახმად $(a-b)c>0$, ე. ი. $ac-bc>0$. საიდანაც $ac>bc$. თუკი $c<0$, $a>b$, მაშინ $-c>0$. მაშასადამე,

$$bc-ac=(b-a)c=[-(b-a)]\cdot(-c)=(a-b)(-c)>0.$$

აქედან $bc>ac$, ე. ი. $ac<bc$.

თუ $c>0$ და $a<b$, მაშინ $b-a>0$ და 2) აქსიომის თანახმად, $(b-a)c>0$. მაშასადამე,

$$bc-ac=(b-a)c>0.$$

საიდანაც ვღებულობთ $bc>ac$, ე. ი. $ac<bc$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ, თუ $c<0$ და $a<b$, მაშინ $ac>bc$. ამას გარდა, თუ $c<0$ და $a=b$, გვექნება $ac=bc$, თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია აგრეთვე შებრუნებული

თეორემა 16. განლაგებული K ველის ნებისმიერი a, b, c ელემენტებისათვის მართებულია შემდეგი თვისებები:

1.° $a+c>b+c$, $a+c=b+c$, $a+c<b+c$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს შესაბამისად დამოკიდებულებანი

$$a>b,\ a=b,\ a<b.$$

2.° $ac>bc$, $ac=bc$, $ac<bc$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს შესაბამისად დამოკიდებულებანი $a>b$, $a=b$, $a<b$, თუ $c>0$ და დამოკიდებულებანი $a<b$, $a=b$, $a>b$, როდესაც $c<0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $a+c>b+c$. დავამტკიცოთ, რომ $a>b$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $b\geq a$. მაშინ მე-15 თეორემის თანახმად გვექნება $b+c\geq a+c$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $a>b$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ $a+c=b+c$, მაშინ $a=b$. ასევე, $a+c<b+c$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $a<b$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $ac=bc$ ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა $a=b$, როდესაც $c\neq 0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $a\neq b$. მაშინ მე-15 თეორემის თანახმად $ac\neq bc$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება და ამიტომ $a=b$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ, თუ $ac>bc$ და $c>0$, მაშინ $a>b$, ხოლო, თუ $ac>bc$ და $c<0$, გვექნება $a<b$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ a, b, c, d განლაგებული ველის ელემენტებია და $a-b\geq c-d$, ან $a-b<c-d$, მაშინ $a+d\geq b+c$ ან $a+d<b+c$. ასევე, თუ $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$ ან $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ და $bd>0$, მაშინ $ad\geq bc$ ან $ab<bc$ და პირიქით.

თეორემა 17. ვთქვათ, a, b, c, d განლაგებული ველის ელემენტებია. თუ $a>b$ და $c>d$, მაშინ $a+c>b+d$, ხოლო, როდესაც a, b, c, d ელემენტები ყველა დადებითია, მაშინ $ac>bd$; თუკი ყველა ელემენტი უარყოფითია, მაშინ $ac<bd$.

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

განსაზღვრა 11. განლაგებული K ველის რაიმე a ელემენტის აბსოლუტური სიდიდე $|a|$ ეწოდება a და $-a$ ელემენტებს შორის არაუარყოფით ელემენტს. ამრიგად,

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{როცა } a\geq 0,\\ -a, & \text{როცა } a<0.\end{cases}$$

ცხადია, რომ $|-a|=|a|$.

დავამტკიცოთ განლაგებული ველის ელემენტების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა შესახებ რამდენიმე თეორემა.

თეორემა 18. თუ a და ε განლაგებული K ველის ელემენტებია, ამასთან $\varepsilon>0$, მაშინ უტოლობები $|a|\leq\varepsilon$ და $-\varepsilon\leq a\leq\varepsilon$ ერთმანეთის ტოლფასია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$|a|\leq\varepsilon. \tag{5.1}$$

თუ $a\geq 0$, მაშინ $|a|=a$ და ამიტომ $a\leq\varepsilon$, ხოლო როდესაც $a<0$, მაშინ $|a|=-a\leq\varepsilon$. აქედან $-\varepsilon\leq a$. ამრიგად, თუ მართებულია (5.1) უტოლობა, მაშინ

$$-\varepsilon\leq a\leq\varepsilon. \tag{5.2}$$

თუ (5.1) დამოკიდებულებაში ტოლობას აქვს ადგილი, მაშინ ან $a=-\varepsilon$ ან $a=\varepsilon$ და (5.2) თანაფარდობა ასე გადმოიწერება:

$$-\varepsilon=a<\varepsilon \text{ ან } -\varepsilon<a=\varepsilon.$$

ახლა ვთქვათ, რომ მართებულია (5.2) დამოკიდებულება. თუ $a\geq 0$, გვაქვს $|a|=a$ და $a\leq\varepsilon$ უტოლობა გვაძლევს $|a|\leq\varepsilon$. თუ $a<0$, მაშინ $|a|=-a$ და $-\varepsilon\leq a$ უტოლობა გვაძლევს $\varepsilon\geq -a=|a|$. ამრიგად, (5.2) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს (5.1) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 19. განლაგებული ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის გვაქვს

$$-|a|\leq a\leq |a|. \tag{5.3}$$

დამტკიცება. თუ $a=0$, მაშინ $|a|=0$ და $-|a|=0$ და ამიტომ მართებულია (5.3) დამოკიდებულება. თუ $a>0$, მაშინ $|a|=a$ და $-|a|<a$, ამ შემთხვევაშიაც ადგილი აქვს (5.3) დამოკიდებულებას. თუკი $a<0$, მაშინ $|a|=-a>0$ და ამიტომ $-|a|=a<|a|$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20. განლაგებული ველის რამდენიმე ელემენტის ჯამის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ან ტოლი შესაკრებ ელემენტთა აბსოლუტურ სიდიდეთა ჯამისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, განლაგებული ველის ელემენტებია a_1, $a_2, \ldots, a_n$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|. \tag{5.4}$$

მე-19 თეორემის ძალით,

$$-|a_1|\leq a_1\leq|a_2|,\ -|a_2|\leq a_2\leq|a_2|, \ldots,\ -|a_n|\leq a_n\leq|a_n|.$$

ეს უტოლობები წევრ-წევრად შევკრიბოთ, გვექნება

$$-(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)\leq a_1+a_2+\cdots+a_n\leq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

მე-18 თეორემის ძალით, უკანასკნელი უტოლობებიდან მიიღება (5.4) უტოლობა.

(5.4) დამოკიდებულებაში ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც მოცემული ყველა ელემენტი დადებითია, ან ყველა არადადებითია.

თეორემა 21. განლაგებული ველის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის მართებულია დამოკიდებულება

$$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|. \tag{5.5}$$

დამტკიცება. (5.4) დამოკიდებულების ძალით

$$|a|=|b+(a-b)|\leq|b|+|a-b|,$$

საიდანაც

$$|a|-|b|\leq|a-b|. \tag{5.6}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$|b|\leq|b-a|+|a|=|a-b|+|a|.$$

აქედან

$$|b|-|a|\leq|a-b|. \tag{5.7}$$

(5. 6) და (5.7) უტოლობებიდან გვაქვს:

$$||a|-|b||\leq|a-b|. \tag{5.8}$$

ახლა თუ b-ს ნაცვლად ავიღებთ $-b$ ელემენტს და მხედველობაში მივიღებთ $|-b|=|b|$ ტოლობას, (5. 8) დამოკიდებულებიდან გვექნება

$$||a|-|b||\leq|a+b|.$$

ამრიგად,

$$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. განლაგებული ველის რამდენიმე ელემენტის ნამრავლის აბსოლუტური სიდიდე თანამამრავლთა აბსოლუტურ სიდიდეთა ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ ორი a და b თანამამრავლის შემთხვევაში. თუ $a\geq 0$ და $b\geq 0$, მაშინ $|a|=a$, $|b|=b$. ამიტომ

$$|ab|=ab=|a|\cdot|b|.$$

თუ $a\geq 0$ და $b\leq 0$, მაშინ $|a|=a$, $|b|=-b$ და ამიტომაც

$$|ab|=-(ab)=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|.$$

თუკი $a\leq 0$ და $b\leq 0$, მაშინ $|a|=-a$, $|b|=-b$. მაშასადამე,

$$|ab|=|(-a)(-b)|=|-a|\cdot|-b|=|a|\cdot|b|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. განლაგებული ველის ნებისმიერი a ელემენტისა და ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$|a^n|=|a|^n.$$

ცხადია, რომ

$$a^2=(-a)^2=|a|^2\geq 0.$$

ტოლობის ნიშანს მაშინ და მხოლოდ მაში ექნება ადგილი, როდესაც $a=0$. კერძოდ, $e=e^2>0$.

თეორემა 23. თუ a და b განლაგებული ველის ნებისმიერი ელემენტებია და $b \neq 0$, მაშინ

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \tag{5.9}$$

ე. ი. ორი ელემენტის ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე აბსოლუტურ სიდიდეთა ფარდობის ტოლია.

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{a}{b}=c$, გვექნება $a=bc$. 22-ე თეორემის თანახმად, $|a|=|b|\cdot|c|$. აქედან მიიღება (5.9) ტოლობა.

განსაზღვრა 12. განლაგებულ K ველს ეწოდება არქიმედესეულად განლაგებული ველი, თუ ამ ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $ne>a$.

თეორემა 24. თუ K ველი არქიმედესეულად განლაგებულია, მაშინ ამ ველის ყოველი a და b ელემენტისათვის, სადაც $b>0$, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $nb>a$.

დამტკიცება. მე-12 განსაზღვრის თანახმად $\frac{a}{b}$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $ne>\frac{a}{b}$. ამ უტოლობის ორივე ნაწილის გამრავლება b-ზე გვაძლევს $nb>a$. თეორემა დამტკიცებულია.

რაციონალურ რიცხვთა ველი არქიმედესეულად განლაგებული ველია.

§ 6. განლაგებული ველის ქვესიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები

განვიხილოთ რაიმე განლაგებული K ველი. ვთქვათ, E არის K ველის ელემენტთა რაიმე სიმრავლე. E სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს K ველის ისეთი s ელემენტი, რომელსაც არ აღემატება E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი. ასეთ s ელემენტს E სიმრავლის ზედა საზღვარი ეწოდება. თუ არსებობს ზედა საზღვრებს შორის უმცირესი ელემენტი L, მაშინ ამ L ელემენტს ჰქვია E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი და იგი აღინიშნება $\sup E$.

თუკი არსებობს K ველის ისეთი s' ელემენტი, რომ E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი ნაკლები არაა s' ელემენტზე, მაშინ E სიმრავლეს ქვემოდან შემოსაზღვრული ეწოდება, ხოლო s' ელემენტს ჰქვია E სიმ-

რავლის ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ი. თუ არსებობს ქვედა საზღვრებს შორის უდიდესი ელემენტი l, მაშინ ამ l ელემენტს ეწოდება E სიმრავლის ზ უ ს ტ ი ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ი და იგი აღინიშნება $\inf E$.

ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ზემოდან არაა შემოსაზღვრული, ვინაიდან არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომელიც ყოველ დადებით რაციონალურ რიცხვს აღემატებოდეს. ყველა უარყოფითი მთელ რიცხვთა სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ქვემოდან არაა შემოსაზღვრული. ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე შემოსაზღვრული არ არის არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

K ველში მოთავსებულ E სიმრავლეს ეწოდება შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

თუ განლაგებული K ველის ელემენტთა E სიმრავლეს აქვს უდიდესი ელემენტი, მაშინ ეს ელემენტი იქნება აღებული E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. მაგრამ სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს ზუსტი ზედა საზღვარი იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც სიმრავლეს არ აქვს უდიდესი ელემენტი. მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს

$$E=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

ჯრ აქვს უდიდესი ელემენტი, მაგრამ მიუხედავად ამისა, მოცემული სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია რიცხვი 1. მართლაც, მოცემული სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება ერთს. მაშასადამე, ერთი წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ნაკლებია 1-ზე. ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი n შემდეგი პირობით:

$$n>\frac{r}{1-r}.$$

აქედან მივიღებთ

$$r<\frac{n}{n+1}.$$

მაშასადამე, არც ერთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც 1-ზე ნაკლებია არ შეიძლება იყოს E სიმრავლის ზედა საზღვარი და ამიტომ აღებული E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია რიცხვი 1.

თუ E სიმრავლეს აქვს უმცირესი ელემენტი, მაშინ ეს ელემენტი იქნება აღებული სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი. მაგრამ სიმრავლე-

ში შეიძლება არ იყოს უმცირესი ელემენტი, მაგრამ სიმრავლეს მაინც ჰქონდეს ზუსტი ქვედა საზღვარი. მაგალითად, სიმრავლეს

$$M=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots\right\}$$

არ აქვს უმცირესი ელემენტი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარია რიცხვი 0.

თეორემა 25. რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 ველში არსებობს ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლე, რომელსაც არ აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ M ასოთი ისეთი დადებითი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთა კვადრატი ორზე ნაკლებია. ეს სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, ვინაიდან ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ზე მეტია იქნება M სიმრავლის ზედა საზღვარი.

ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $\frac{p}{q}$, რომ $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, სადაც p და q ურთიერთ მარტივი რიცხვებია. აქედან

$$p^2=2q^2 \tag{6.1}$$

და, მაშასადამე, p ლუწი რიცხვია. იგი შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ: $p=2p_1$, სადაც p_1 მთელი რიცხვია. თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (6.1) ტოლობაში, გვექნება

$$4p_1^2=2q^2.$$

საიდანაც $q^2=2p_1^2$. აქედან ჩანს, რომ q ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ p და q ლუწი რიცხვებია, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი იყოს 2-ის ტოლი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ M სიმრავლეს არ აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, M სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი და იგი r ასოთი აღვნიშნოთ, $r>0$. მაშინ $r^2>2$ და, მაშასადამე,

$$\frac{r}{2}-\frac{1}{r}>0. \tag{6.2}$$

განვიხილოთ რაციონალური რიცხვი

$$r^*=\frac{r}{2}+\frac{1}{r}.$$

ცხადია, რომ

$$r^*=\frac{r}{2}+\frac{2}{2r}<\frac{r}{2}+\frac{r^2}{2r}=r.$$

ამას გარდა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (6. 2) უტოლობას, გვექნება

$$r^{*2}=\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{r}\right)^2=\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{r}\right)^2+2>2.$$

ამრიგად, $r^*<r$ და $r^{*2}>2$. მაშასადამე, r^* წარმოადგენს M სიმრავლის ზედა საზღვარს. ამიტომ r არ შეიძლება იყოს M სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ამრიგად, M სიმრავლეს არა აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ არსებობას ქვემოდან შემოსაზღვრული რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისას, რომელსაც არა აქვს ზუსტი ქვედა საზღვარი.

შემდეგ თავში აგებული იქნება ისეთი განლაგებული ველი, რომელშიაც ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს კი ზუსტი ქვედა საზღვარი.

§ 7. განლაგებული ველის ელემენტთა მიმდევრობის ზღვარი

ამ პარაგრაფში შევისწავლით განლაგებული ველის ელემენტთა მიმდევრობის ზღვარის ცნებას.

განვიხილოთ რაიმე K ველის ელემენტთა მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{7.1}$$

შემოვიღოთ

განსაზღვრა 13. K ველის რაიმე a ელემენტს ვუწოდებთ (7.1) მიმდევრობის ზღვარს, თუ ამ ველის ყოველი დადებითი ε ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n-a|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

თუ (7.1) მიმდევრობას ზღვრად a ელემენტი აქვს, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება კრებადი a ელემენტისაკენ. თუ მიმდევრობა კრებადი არაა K ველის არც ერთი ელემენტისაკენ, მაშინ მიმდევრობა განშლადია.

თეორემა 26. ველის ელემენტთა ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

დამტკიცება. ვთქვათ, (7.1) მიმდევრობის ზღვარია a. ავიღოთ ველის ნებისმიერი ელემენტი $b \neq a$. ვაჩვენოთ, რომ b არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. რადგანაც $a \neq b$, ამიტომ $\frac{|a-b|}{2e} > 0$. თუ დავუშვებთ

$$\lim_{n \to \infty} x_n = b,$$

მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2}, \text{ როდესაც } n > N[1]. \tag{7.2}$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, რომელიც აღემატება N რიცხვს. მაშინ (7.2) უტოლობების ძალით გვექნება

$$|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n| +$$
$$+ |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

ე. ი. $|a-b| < |a-b|$, რაც შეუძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა **14.** K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება, თუ არსებობს K ველის ისეთი M ელემენტი, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $x_n < M$, ხოლო მოცემულ მიმდევრობას ქვემოდან შემოსაზღვრული ჰქვია, თუ მოიძებნება K ველში ისეთი m ელემენტი, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $x_n > m$. შემდეგ $\{x_n\}$ მიმდევრობას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, ანუ რაც იგივეა, თუ არსებობს K ველის ისეთი დადებითი M^* ელემენტი, რომ $|x_n| < M^*$ ყველა n-თვის.

თეორემა 27. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a ელემენტისაკენ, მაშინ ყოველი ქვემიმდევრობაც კრებადია იმავე a ელემენტისაკენ.

---

[1] ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის $\frac{a}{me}$ ელემენტს აღვნიშნავთ $\frac{a}{m}$ სიმბოლოთი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\{x_{n_k}\}$ არის მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ავიღოთ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტი. რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a ელემენტისაკენ, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას $n_\nu>N$. მაშინ, ცხადია, რომ

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon, \text{ როდესაც } k>\nu.$$

მაშასადამე, $\{x_{n_k}\}$ მიმდევრობა კრებადია a ელემენტისაკენ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 28. თ უ K ვ ე ლ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ თ ა $\{x_n\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა K ვ ე ლ ი ს a ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა კ ე ნ დ ა $a\neq0$, მ ა შ ი ნ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ყ ო ვ ე ლ წ ე ვ რ ს, დ ა წ ყ ე ბ უ ლ ი გ ა რ კ ვ ე უ ლ ი N ნ ო მ რ ი დ ა ნ, ე ქ ნ ე ბ ა a ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ნ ი შ ა ნ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a>0$. მაშინ $\frac{a}{2}$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\frac{a}{2}, \text{ როდესაც } n>N.$$

ეს უტოლობა შემდეგი უტოლობების ტოლფასია:

$$-\frac{a}{2}<x_n-a<\frac{a}{2}, \text{ როდესაც } n>N.$$

აქედან

$$a-\frac{a}{2}<x_n, \text{ როდესაც } n>N,$$

ანუ

$$x_n>\frac{a}{2}, \text{ როდესაც } n>N.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 29. თ უ K ვ ე ლ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ თ ა $\{x_n\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა ვ ე ლ ი ს a ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ $\{|x_n|\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ი ქ ნ ე ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი $|a|$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა კ ე ნ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 21-ე თეორემის თანახმად.

$$||x_n|-|a||\leq|x_n-a|. \tag{7.3}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტი. პირობის ძალით, ამ ε ელემენტისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

მაშასადამე, (7.3) უტოლობის ძალით გვექნება

$$||x_n|-|a||<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N,$$

ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 80. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები კრებადია შესაბამისად a და b ელემენტებისაკენ, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b. \tag{7.4}$$

დამტკიცება. პირობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \quad \lim_{n\to\infty}y_n=b.$$

ამიტომ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n>N.$$

ამიტომ ყოველი n-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n>N$, გვექნება

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|=|(x_n-a)+(y_n-b)|\leq|x_n-a|+$$
$$+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, მართებულია (7.4) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 81. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a ელემენტისაკენ, მაშინ $\{-x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია $-a$ ელემენტისაკენ.

დამტკიცება. რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a ელემენტისაკენ, ამიტომ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაგრამ

$$|(-x_n) - (-a)| = |a - x_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} (-x_n) = -a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ წარმოადგენენ K ველის ელემენტთა კრებად მიმდევრობებს, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{7.5}$$

მართლაც, რაკი $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$, ამიტომ 30-ე და 31-ე თეორემების ძალით არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)$ და ადგილი აქვს (7.5) ტოლობას.

თეორემა 32. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობებიდან ერთი მათგანი, მაგალითად, $\{x_n\}$, კრებადია რაიმე a ელემენტისაკენ და $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, მაშინ $\{y_n\}$ მიმდევრობაც კრებადია იმავე a ელემენტისაკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z_n = x_n - y_n$. აქედან $y_n = x_n - z_n$. მაგრამ $\{x_n\}$ და $\{z_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} z_n = a - 0 = a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 33. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები კრებადია a და b ელემენტებისაკენ, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n)$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab, \tag{7.6}$$

ე. ი. ნამრავლის ზღვარი უდრის ზღვართა ნამრავლს.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ კრებადი მიმდევრობა $\{x_n\}$ შე-

მოსაზღვრულია. რადგან $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n-a|<e, \text{ როდესაც } n>\nu.$$

ამიტომ ნებისმიერი n-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n>\nu$, გვექნება

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leq|x_n-a|+|a|<e+|a|.$$

ახლა K ველის $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|, e+|a|$ ელემენტებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ s ასოთი. მაშინ ყოველი n-თვის გვექნება $|x_n|\leq s$, ე. ი. $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

შემდეგ, ავიღოთ ელემენტი $c=|b|+e$. ცხადია, რომ $c>0$. რაკი $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, ამიტომ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2c} \text{ და } |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2s}, \text{ როდესაც } n>N.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $n>N$ უტოლობას, გვექნება

$$|x_ny_n-ab|=|(x_ny_n-x_nb)+(x_nb-ab)|\leq|x_ny_n-x_nb|+|x_nb-ab|=$$

$$=|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|<s\cdot\frac{\varepsilon}{2s}+|b|\cdot\frac{\varepsilon}{2c}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად, მართებულია (7.6) ტოლობა. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 34. თუ K ველის ელემენტთა $\{y_n\}$ მიმდევრობა კრებადია b ელემენტისაკენ და $b\neq 0$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{y_n}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e}{y_n}=\frac{e}{b}. \tag{7.7}$$

დამტკიცება. რადგანაც $b\neq 0$, ამიტომ 29-ე თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|y_n|>\frac{|b|}{2}, \text{ როდესაც } n>N.$$

შემდეგ, K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu>N$, რომ

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon b^2}{2}, \text{ როდესაც } n>\nu,$$

ახლა ვთქვათ, რომ $n>\nu$. მაშინ გვექნება

$$\left|\frac{e}{y_n}-\frac{e}{b}\right|=\frac{|b-y_n|}{|b|\cdot|y_n|}<\frac{\frac{\varepsilon b^2}{2}}{|b|\cdot|y_n|}<\frac{\varepsilon b^2}{2}\cdot\frac{e}{|b|\cdot\frac{|b|}{2}}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, მართებულია (7.7) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები კრებადია და ამასთანავე $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

ე. ი. ფარდობის ზღვარი ზღვართა ფარდობის ტოლია, როცა მნიშვნელის ზღვარი ნულისაგან განსხვავებულია.

მართლაც, ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{y_n}$ და, მაშასადამე, 34-ე თეორემის თანახმად, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot\frac{e}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

თეორემა 35. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები კრებადია შესაბამისად a და b ელემენტებისაკენ და $a>b$, მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ყოველი n-თვის, რომელიც აღემატება N რიცხვს გვექნება $x_n>y_n$.

დამტკიცება. რადგანაც $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$, ამიტომ 28-ე თეორემის ძალით არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$x_n-y_n>0, \text{ როდესაც } n>N,$$

ე. ი. $x_n>y_n$, როდესაც $n>N$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 86. თუ K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, შესაბამისად a და b ელემენტებისაკენ და n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული $x_n \leq y_n$, მაშინ $a \leq b$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $a > b$. მაშინ ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ყოველი n-თვის, რომელიც N რიცხვს აღემატება, გვექნება $x_n > y_n$, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $a \leq b$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული $x_n \leq s$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq s$.

თეორემა 87. თუ გვაქვს K ველის ელემენტთა სამი მიმდევრობა $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, რომელთაგან პირველი ორი კრებადია a ელემენტისაკენ და n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული $x_n \leq z_n \leqslant y_n$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

დამტკიცება. თუ $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ უტოლობების ყოველ წევრს გამოვაკლებით y_n ელემენტი, გვექნება

$$x_n - y_n \leqslant z_n - y_n \leqslant 0.$$

აქედან გვაქვს

$$|z_n - y_n| \leqslant |x_n - y_n|$$

n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული. რადგან $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n - y_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე,

$$|z_n - y_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = 0$. მაშინ 32-ე თეორემის თანახმად, არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ და ადგილი აქვს ტოლობას $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. განლაგებული სრული ველი

ვთქვათ, K არის არქიმედესეულად განლაგებული ველი. ამ ველის ელემენტთა რაიმე $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური,

თუ მოცემული ველის ყოველი დადებითი ε ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N.$$

განლაგებულ K ველს **სრული ველი** ეწოდება, თუ ამ ველის ელემენტთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია ამ ველის ელემენტისაკენ, ე. ი. აქვს ზღვარი ამ ველში.

თეორემა 88. *K ველის ელემენტთა ყოველი კრებადი $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. მაშინ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > N$, გვექნება

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ m და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $m > N$, $n > N$. მაშინ

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე,

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_m - a| +$$
$$+ |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ე. ი. $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.

ეს თეორემა გვაძლევს მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელ პირობას. მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ იგი იყოს ფუნდამენტალური მიმდევრობა. მაგრამ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მიმდევრობის კრებადობა. მართლაც, მართებულია შემდეგი

თეორემა 89. *რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 ველი სრულ ველს არ წარმოადგენს.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $\{x_n\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

დავამტკიცოთ, რომ $\{x_n\}$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$x_{n+k}-x_n=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\right\}<\frac{1}{n!n}.$$

რადგანაც $x_{n+k}>x_n$, ამიტომ

$$0<x_n-x_m<\frac{1}{m!m}, \text{ როდესაც } n>m. \tag{8.1}$$

აქედან გამომდინარეობს მოცემული მიმდევრობის ფუნდამენტალურობა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადი არაა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{p}{q},$$

სადაც p და q ურთიერთმარტივი დადებითი რიცხვებია. მივიღებთ რა მხედველობაში (8.1) უტოლობებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$x_q<\frac{p}{q}<\frac{p}{q}+\frac{1}{q!q}+x_q-x_n, \text{ როდესაც } n>q.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $n\to\infty$, გვექნება

$$x_q<\frac{p}{q}\leqslant\frac{1}{q!q}+x_q.$$

მაგრამ ეს უტოლობა შეუძლებელია. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ სწორი არაა. ამრიგად, Γ_0 ველი სრული არაა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 40. K ველის ელემენტთა ყოველი ფუნდამენტალური $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ ერთეული e ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_m-x_n|<e, \text{ როდესაც } m>\nu,\ n>\nu. \tag{8.2}$$

ამ უტოლობაში ვიგულისხმოთ $m=\nu+1$. მაშინ (8.2) უტოლობა ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$|x_n|<e+|x_{\nu+1}|, \text{ როდესაც } n>\nu.$$

ახლა K ველის $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|, e+|x_{\nu+1}|$ ელემენტებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ s-ით, მაშინ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გვექნება $|x_n|\leqslant s$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 15. განლაგებული K ველის ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას ზრდადი ეწოდება, თუ

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \ldots,$$

ხოლო მას კლებადი ჰქვია, თუ

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$$

ზრდად ან კლებად მიმდევრობას მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება.

თეორემა 41. არქიმედესეულად განლაგებული K ველის ელემენტთა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.

დამტკიცება. რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს K ველის ისეთი s ელემენტი, რომ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ადგილი ექნება უტოლობას $x_n < s$. ავიღოთ ელემენტი

$$s_1 = \frac{x_1 + s}{2}.$$

ცხადია, რომ $x_1 < s_1 < s$. თუ s_1 და s ელემენტებს შორის არ არსებობს $\{x_n\}$ მიმდევრობის არც ერთი ელემენტი, მაშინ მივიღოთ $a_1 = x_1$, $b_1 = s_1$. თუკი s_1 და s ელემენტებს შორის არსებობს მოცემული მიმდევრობის ელემენტები, მაშინ ვიგულისხმოთ, რომ $a_1 = s_1$, $b_1 = s$. ორივე შემთხვევაში $a_1 < b_1$ და

$$b_1 - a_1 = \frac{s - x_1}{2}.$$

ამას გარდა, a_1 და b_1 ელემენტებს შორის მოთავსებულია ყველა x_n, დაწყებული n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან.

ახლა განვიხილოთ ელემენტი

$$s_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

აქაც, $a_1 < s_2 < b_1$. თუ s_2 და b_1 ელემენტებს შორის არ არსებობს $\{x_n\}$ მიმდევრობის არც ერთი ელემენტი, მაშინ ვთქვათ $a_2 = a_1$, $b_2 = s_2$, ხოლო, თუ s_2 და b_1 ელემენტებს შორის არსებობს მოცემული მიმდევრობის ელემენტები, მაშინ აღვნიშნოთ $a_2 = s_2$, $b_2 = b_1$. ცხადია, რომ

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{s - x_1}{2^2}.$$

ამას გარდა, a_2 და b_2 ელემენტებს შორის მოთავსებულია ყველა x_n, დაწყებული n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან.

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ K ველის ელემენტთა ორ მონოტონურ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობას:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots < s,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots > x_1,$$

$$b_n - a_n = \frac{s - x_1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

ცხადია, ყოველი n-სათვის a_n და b_n ელემენტებს შორის მოთავსებულია $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან.

ახლა ავიღოთ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტი. რადგანაც K ველი არქიმედესეულად არის განლაგებული, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ $\nu e > \varepsilon^{-1}(s - x_1)$. მაგრამ რაკი $2^\nu e > \nu e$, ამიტომ $2^\nu e > \varepsilon^{-1}(s - x_1)$. აქედან გვაქვს $2^{-\nu} e < \varepsilon (s - x_1)^{-1}$, ე. ი.

$$\frac{s - x_1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$b_n - a_n < \varepsilon, \text{ როდესაც } n \geqslant \nu.$$

შემდეგ, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N \geq \nu$, რომ მართებული იყოს უტოლობები

$$a_\nu \leq x_n \leq b_\nu, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $m > N$, $n > N$, გვექნება

$$|x_m - x_n| \leq b_\nu - a_\nu < \varepsilon.$$

ამრიგად, $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. არქიმედესეულად განლაგებული სრული K ველის ელემენტთა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

თეორემა 42. არქიმედესეულად განლაგებული K ველის ელემენტთა კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.

დამტკიცება. რაკი $\{x_n\}$ მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ $\{-x_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემო-

საზღვრული. ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად $\{-x_n\}$ მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტალური და, მაშასადამე, $\{x_n\}$ მიმდევრობაც ფუნდამენტალურია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2. არქიმედესეულად განლაგებული სრული K ველის ელემენტთა კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

თეორემა 48. არქიმედესეულად განლაგებული სრული K ველის ელემენტთა ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

დამტკიცება. ვთქვათ, b არის E სიმრავლის რაიმე ზედა საზღვარი. რადგანაც K ველი არქიმედესეულად არის განლაგებული, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური p რიცხვი, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას $pe>b$. მაშასადამე, pe წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს. E სიმრავლეში ავიღოთ რაიმე a ელემენტი და q იყოს ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $qe>-a$. მაშინ

$$-qe<a<b<pe.$$

ახლა შევადგინოთ $k2^{-n}e$ სახის ელემენტები, რომლებიც მოთავსებულია $-qe$ და pe ელემენტებს შორის (k — მთელია, n კი — ნატურალური):

$$-qe<k2^{-n}e<pe.$$

ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $k2^{-n}e$ სახის ელემენტების რიცხვი იქნება სასრული. ამ ელემენტებიდან ავიღოთ უმცირესი, რომელიც იქნება E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ყოველ შემთხვევაში იარსებებს ერთი მაინც ასეთი ელემენტი. ეს ზედა საზღვარი აღვნიშნოთ a_n ასოთი. მაშინ $a_n-2^{-n}e$ უკვე არ იქნება E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ამიტომ ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის, $m>n$, გვექნება

$$a_n-2^{-n}e<a_m\leq a_n. \tag{8.3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|a_n-a_m|<2^{-n}e$$

და, მაშასადამე, ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვექნება

$$|a_m-a_n|<2^{-\nu}e, \text{ როდესაც } m>\nu,\ n>\nu. \tag{8.4}$$

ახლა ავიღოთ K ველის ნებისმიერი დადებითი ε ელემენტი. რადგანაც K ველი არქიმედესეულად არის განლაგებული, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ $\nu e>\varepsilon^{-1}$. მაგრამ $2^{\nu}e>\nu e$. მაშასა-

დამე, $2^{\nu}e>\varepsilon^{-1}$. აქედან ვღებულობთ $2^{-\nu}e<\varepsilon$. ამრიგად, (8.4) უტოლობიდან გვაქვს

$$|a_m - a_n|<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>\nu, \ n>\nu.$$

მაშასადამე, $\{a_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და რაკი K ველი სრულია, ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ეს ზღვარი აღვნიშნოთ L ასოთი.

K ველის L ელემენტი წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს. მართლაც, E სიმრავლის რაიმე a ელემენტისათვის ადგილი რომ ჰქონდეს უტოლობას $a>L$, მაშინ მოიძებნებოდა ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $2^n e>(a-L)^{-1}$. საიდანაც $2^{-n}e<a-L$. მეორე მხრივ $a_n-2^{-n}e<L$. თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ $a_n<a$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან a_n არის E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ამრიგად, L წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ L არის E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, L არაა E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. მაშინ იარსებებს E სიმრავლის ზედა საზღვარი L', რომელიც L-ზე ნაკლებია. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ

$$2^{-n}e<L-L'. \tag{8.5}$$

მეორე მხრივ, რადგანაც $a_n-2^{-n}e$ არ არის E სიმრავლის ზედა საზღვარი, ამიტომ E სიმრავლეში არსებობს ისეთი a ელემენტი, რომ $a_n-2^{-n}e<a$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$a_n-2^{-n}e<L'. \tag{8.6}$$

თუ შევკრებთ წევრ-წევრად (8.5) და (8.6) უტოლობებს, გვექნება $a_n<L$, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად, L წარმოადგენს E სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი.

თეორემა 44. *არქიმედესეულად განლაგებული სრული K ველის ელემენტთა ყოველ ქვემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ქვედა საზღვარი.*

შემდეგ თავში ჩვენ ავაგებთ არქიმედესეულად განლაგებულ რიცხვთა სრულ ველს.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ G ჯგუფის განსაზღვრაში II და III აქსიომები შეიძლება შეიცვალოს აქსიომით: G სიმრავლის ყოველი a და b ელემენტისათვის ამოხსნადია $ax=b$ და $ya=b$ განტოლებები.

2. დაამტკიცეთ, რომ $G=\{e, a\}$ სიმრავლე, სადაც კომპოზიციის კანონი განსაზღვრულია ტოლობებით $ee=e$, $ea=a$, $ae=a$, $aa=e$, შეადგენს აბელის ჯგუფს.

3. ააგეთ სამელემენტიანი ველი.

4. დაამტკიცეთ, რომ ერთიანობის არე, რომელიც შედგება ელემენტთა სასრული რიცხვისაგან, წარმოადგენს ველს.

5. ვთქვათ, E არის ისეთ დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთა კვადრატი სამზე ნაკლებია. დაამტკიცეთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 ველში ამ სიმრავლეს არა აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

თავი III

ნამდვილი რიცხვები

მათემატიკური ანალიზის განვითარებასთან დაკავშირებით, XVII და XVIII საუკუნეში ნამდვილი რიცხვები გახდა გამოკვლევის ძირითად ობიექტად. XIX საუკუნის მეორე ნახევარში დედეკინდის, კანტორისა და ვაიერშტრასის[1] მიერ აგებულ იქნა ნამდვილი რიცხვის ფორმალური თეორიები, რომლებიც ერთმანეთის ტოლფასია. ამ თეორიების აგებისას ცნობილად იგულისხმება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და ამ რიცხვების თვისებები. ჯერ განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა თეორია, რომელიც დედეკინდის მიერ იყო შექმნილი.

§ 1. ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრა

ავიღოთ რაიმე დალაგებული E სიმრავლე და ვთქვათ, მოცემულია ნიშანი, რომლის მიხედვით ეს სიმრავლე გაყოფილია ორ A და B კლასად ისე, რომ დაცული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1° არც ერთი კლასი ცარიელი არ არის;

2° E სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც A კლასის რომელიმე ელემენტზე უფრო დაბალი რიგი აქვს, იმავე კლასს ეკუთვნის;

3° A კლასში არაა უმაღლესი რიგის ელემენტი.

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ გვაქვს E სიმრავლის განკვეთა და მას აღვნიშნავთ $A|B$ სიმბოლოთი. A კლასს ვუწოდებთ ქვედა კლასს, B-ს კი ზედა კლასს.

თუ E წარმოადგენს რიცხვთა რაიმე სიმრავლეს, მაშინ ამ სიმრავლეზე წარმოებული განკვეთის პირობები ასეთია:

1° არც ერთი კლასი ცარიელი არაა;

---

[1] კარლ ვაიერშტრასი (Weierstrass) (1815 — 1897) — გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი. ჯერ მასწავლებლობდა პრუსიის პატარა ქალაქების კათოლიკურ საშუალო სკოლებში, 1856 წლიდან — ბერლინის უნივერსიტეტის პროფესორი. ვაიერშტრასის შრომების დიდი ნაწილი დაიბეჭდა მისი გარდაცვალების შემდეგ. ვაიერშტრასი თეორიული მათემატიკის ბრწყინვალე წარმომადგენელი და მისი მკაცრი დაფუძნების ავტორია. შრომების დიდი ნაწილი მიუძღვნა ანალიზურ ფუნქციათა თეორიას. ცნობილი რუსი მათემატიკოსი სოფიო კოვალევსკაია ვაიერშტრასის მოწაფე იყო.

2° E სიმრავლის ყოველი ელემენტი, რომელიც ქვედა კლასის რომელიმე ელემენტზე ნაკლებია, იმავე კლასს ეკუთვნის;

3° ქვედა კლასში არ არის უდიდესი ელემენტი.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი დალაგებული სიმრავლის გაყოფა ორ კლასად რაიმე ნიშნის მიხედვით და დაცული იყოს ზემოაღნიშნული სამი პირობა, საზოგადოდ არ შეიძლება. განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, N ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეა. A კლასს მივაკუთვნოთ ყოველი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს მასზე უფრო დიდი ნატურალური რიცხვი, B კლასს კი დანარჩენი ნატურალური რიცხვები. მაშინ განკვეთის 1° პირობა დარღვეულია, ვინაიდან ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს მასზე უფრო დიდი ნატურალური რიცხვი და, მაშასადამე, ყველა ნატურალური რიცხვი A კლასს მიეკუთვნება; ამიტომ B კლასი ცარიელი იქნება. რაც შეეხება 2° და 3° პირობებს, ისინი შესრულებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. N სიმრავლე გავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი ნიშნის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ ყველა კენტი რიცხვი, B კლასში კი ყველა ლუწი რიცხვი. ამ შემთხვევაში დარღვეულია განკვეთის 2° პირობა, ხოლო 1° და 3° პირობა დაცულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. N სიმრავლე გავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგნაირად: A კლასში მოვათავსოთ 1, 2, 3, 4, 5 რიცხვები, B კლასში კი ყველა დანარჩენი ნატურალური რიცხვი. მაშინ დაცული იქნება 1° და 2° პირობა, მაგრამ 3° პირობას ადგილი არ ექნება, ვინაიდან A კლასში არსებობს უდიდესი ელემენტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. აღვნიშნოთ Γ_0 ასოთი ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე. ავიღოთ რაიმე რაციონალური რიცხვი r და გავყოთ Γ_0 სიმრავლე ორ A და B კლასად შემდეგნაირად: A კლასში მოვათავსოთ ყველა ის რაციონალური რიცხვი, რომლებიც r რიცხვზე ნაკლებია, დანარჩენი რაციონალური რიცხვები კი B კლასს მივაკუთვნოთ. ცხადია, B კლასში მოთავსდება რიცხვი r და მასზე მეტი ყველა რაციონალური რიცხვი. ეს r რიცხვი წარმოადგენს B კლასის უმცირეს რიცხვს და იგი დაახასიათებს განკვეთას; r რიცხვის დასახელებით განკვეთა სავსებით განსაზღვრულია.

ისმის კითხვა: რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლის ყოველი განკვეთა იქნება თუ არა დახასიათებული ერთი რაციონალური რიცხვით? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლე გავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რიცხვები, რო-

მელთა კვადრატი 2-ზე ნაკლებია, ხოლო დანარჩენი რაციონალური რიცხვები B კლასს მივაკუთვნოთ.

დავამტკიცოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლის ასეთ ორ A და B კლასად გაყოფა გვაძლევს $A|B$ განკვეთას.

ცხადია, განკვეთის 1° და 2° პირობები შესრულებულია. ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია 3° პირობაც. განვიხილოთ A კლასის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი $a>1$. ცხადია $(a+1)^2>2$. აქედან ვღებულობთ

$$\frac{2-a^2}{2a+1}<1.$$

ავიღოთ დადებითი რაციონალური რიცხვი h შემდეგი პირობით:

$$h<\frac{2-a^2}{2a+1}.$$

რადგანაც $h<1$, ამიტომ

$$h<\frac{2-a^2}{2a+h}.$$

თუ ჩავატარებთ მარტივ გამოთვლებს, გვექნება

$$(a+h)^2<2.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $a+h\in A$.

ამრიგად, A კლასში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი და, მაშასადამე, გვაქვს $A|B$ განკვეთა.

B კლასში შედიან მხოლოდ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი 2-ზე მეტია. დავამტკიცოთ, რომ B კლასში არ არსებობს უმცირესი ელემენტი. ავიღოთ B კლასის ნებისმიერი რიცხვი $b<1{,}5$ და განვიხილოთ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვი h, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$h<\frac{b^2-2}{2b}.$$

ცხადია, რომ $h<1$ და ამიტომ

$$h<\frac{b^2-2}{2b-h}.$$

აქედან, მარტივი გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ

$$2<(b-h)^2$$

და ამიტომ $b-h \in B$. მაშასადამე, B კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი.

ამრიგად, ისეთი განკვეთებიც არსებობს, რომელთა ზედა კლასში უმცირესი რიცხვი არაა. ასეთი სახის განკვეთის შემთხვევაში არ გვექნება გარკვეული რაციონალური რიცხვი, რომელიც მდებარეობს ქვედა და ზედა კლასების საზღვარზე, ასე რომ ამგვარი განკვეთა ერთი რაციონალური რიცხვით ვერ დახასიათდება. განკვეთის ცნების საფუძველზე შეგვიძლია შემოვიღოთ ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრა.

განსაზღვრა 1. ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლის განკვეთის ქვედა კლასს ნამდვილი რიცხვი ეწოდება.

სხვადასხვა განკვეთის ქვედა კლასები სხვადასხვა ნამდვილ რიცხვებს წარმოადგენს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, არსებობს ორგვარი განკვეთა: პირველი გვარის განკვეთა ვუწოდოთ განკვეთას, რომლის ზედა კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი, ხოლო მეორე გვარისა ისეთ განკვეთას, რომლის ზედა კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი.

პირველი გვარის განკვეთა ხასიათდება იმ რაციონალური რიცხვით, რომელიც წარმოადგენს ზედა კლასის უმცირეს რიცხვს. ამ რიცხვს შეესაბამება ჩვენი განკვეთით წარმოდგენილი ნამდვილი რიცხვი და მას ვუწოდებთ ნამდვილ რაციონალურ რიცხვს. 0 რიცხვის შესაბამის ნამდვილ რიცხვს ვუწოდებთ ნამდვილ რიცხვს ნულსა და მას ისევ 0 სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

მეორე გვარის განკვეთით წარმოდგენილი ნამდვილი რიცხვი ვერ ხასიათდება ერთი რაციონალური რიცხვით, ის არ შეესაბამება რაიმე რაციონალურ რიცხვს. ასეთი სახის ნამდვილ რიცხვს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.

ამრიგად, ირაციონალური რიცხვი არის ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლის ისეთი განკვეთის ქვედა კლასი, რომლის ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი.

მოვიყვანოთ ირაციონალური რიცხვის მაგალითი. ყველა რაციონალური რიცხვის Γ_0 სიმრავლე გავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რიცხვები, რომელთა კვადრატი 2-ზე ნაკლებია, ხოლო ყველა დანარჩენი რაციონალური რიცხვი მივაკუთვნოთ B კლასს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ამ შემთხვევაში გვაქვს მეორე

გვარის $A|B$ განკვეთა და, მაშასადამე, A წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს. ეს ირაციონალური რიცხვი აღინიშნება $\sqrt{2}$ სიმბოლოთი.

ნამდვილი რიცხვის ცნება წარმოადგენს რიცხვის ცნების შემდგომ განზოგადებას რაციონალურ რიცხვებთან შედარებით. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე აღვნიშნოთ Z ასოთი, ყველა ნამდვილი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე კი Γ ასოთი.

§ 2. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის დალაგებულობა

იმის შემდეგ, რაც შემოღებულია ნამდვილი რიცხვის ცნება, დავადგინოთ, თუ როგორ ნამდვილ რიცხვებს ეწოდება ტოლი და რას ნიშნავს, რომ ერთი ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ან მეტია მეორე ნამდვილ რიცხვზე.

განსაზღვრა 2. თუ α და α' ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ტოლობა $\alpha=\alpha'$ იმას ნიშნავს, რომ α იგივე ნამდვილი რიცხვია რაც α', ე. ი. α და α' ერთი და იგივე სიმრავლეა.

ცხადია, თუ α და α' ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha=\alpha'$, მაშინ $\alpha'=\alpha$.

განსაზღვრა 3. ჩვენ ვიტყვით, რომ α ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ნამდვილ α' რიცხვზე, თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც α' სიმრავლეს ეკუთვნის და არ ეკუთვნის α სიმრავლეს.

იმის აღსანიშნავად, რომ α ნაკლებია α'-ზე, ვწერთ $\alpha<\alpha'$.

თუ α და α' ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha<\alpha'$, მაშინ ამბობენ, რომ ნამდვილი α' რიცხვი მეტია ნამდვილ α რიცხვზე და წერენ $\alpha'>\alpha$.

თუ α და α' არატოლი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს ერთ-ერთს შემდეგ უტოლობებიდან: $\alpha<\alpha'$ ან $\alpha'<\alpha$.

თეორემა 1. თუ α, α', α'' ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha<\alpha'$, $\alpha'<\alpha''$, მაშინ $\alpha<\alpha''$.

დამტკიცება. რადგანაც $\alpha<\alpha'$, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ეკუთვნის α' სიმრავლეს და არ ეკუთვნის α სიმრავლეს. ასევე, რაკი $\alpha'<\alpha''$, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r^*, რომელიც ეკუთვნის α'' სიმრავლეს და არ ეკუთვნის α' სიმრავლეს. ცხადია, r^* რიცხვი არ ეკუთვნის α სიმრავლეს, ვინაიდან $r^*>r$ და r არ ეკუთვნის α სიმრავლეს. მაშასადამე, $\alpha<\alpha''$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე დალაგებული სიმრავლეა.

დამტკიცება. თუ ორი ნამდვილი რიცხვი α და α' ტოლი არ არის, მაშინ ერთი მათგანი ნაკლებია მეორეზე: ან $\alpha<\alpha'$ ან $\alpha'<\alpha$, ამასთანავე

ერთი ამ უტოლობებიდან გამორიცხავს მეორეს. მეორე მხრით, თუ $\alpha<\alpha'$ და $\alpha'<\alpha''$, მაშინ $\alpha<\alpha''$. ამრიგად, მეტნაკლებობის დამოკიდებულება არის როგორც ასიმეტრიული, ისე ტრანზიტული ხასიათისა. ამ დამოკიდებულების საშუალებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შეგვიძლია დავალაგოთ ამა თუ იმ რიგით. მაშასადამე, ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე დალაგებული სიმრავლეა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: შენარჩუნებული იქნება თუ არა მეტნაკლებობის დამოკიდებულება და ამ დამოკიდებულების მიმართება, თუ რაციონალურ რიცხვებიდან სათანადო ნამდვილ რაციონალურ რიცხვებზე გადავდივართ? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 3. თუ რაციონალური რიცხვი r_1 ნაკლებია რაციონალურ r_2 რიცხვზე, მაშინ r_1-ის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*_1 ნაკლები იქნება r_2-ის შესაბამის ნამდვილ რაციონალურ r^*_2 რიცხვზე და პირიქით, თუ $r^*_1<r^*_2$, მაშინ $r_1<r_2$.

დამტკიცება. ავიღოთ r_1 და r_2 რიცხვებს შორის რაიმე რაციონალური რიცხვი r. ნამდვილი რიცხვი r^*_1 წარმოადგენს ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც ნაკლებია რაციონალურ r_1 რიცხვზე. ამიტომ r_1 არ ეკუთვნის r^*_1 სიმრავლეს. ასევე, რაკი r^*_2 წარმოადგენს ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც ნაკლებია r_2-ზე და $r<r_2$, ამიტომ r მიეკუთვნება r^*_2 სიმრავლეს. ამრიგად, რაციონალური რიცხვი r ეკუთვნის r^*_2 სიმრავლეს და არ ეკუთვნის r^*_1 სიმრავლეს. მაშასადამე, $r^*_1<r^*_2$. ამრიგად, $r_1<r_2$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $r^*_1<r^*_2$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ, თუ $r^*_1<r^*_2$, მაშინ $r_1<r_2$.

თეორემა 4. თუ α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ხოლო r წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვს, რომელიც α სიმრავლეში შედის, მაშინ r-ის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური r^* რიცხვი ნაკლები იქნება α-ზე.

დამტკიცება. ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრის თანახმად რაციონალური რიცხვი r არ მიეკუთვნება r^* სიმრავლეს და ამავე დროს r რიცხვი ეკუთვნის α სიმრავლეს. მაშასადამე, $r^*<\alpha$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ α რაიმე ნამდვილი რიცხვია, ხოლო r არის რაციონალური რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის α სიმრავლეს, მაშინ r-ის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^* მეტია α-ზე, ან, უკიდურეს

შემთხვევაში, მისი ტოლია: $\alpha \leq r^*$. ტოლობას $\alpha = r^*$ ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მოცემული ნამდვილი რიცხვი α რაციონალურია და r წარმოადგენს α რიცხვის ზედა კლასის უმცირეს რიცხვს.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც α ნამდვილი რაციონალური რიცხვია, ხოლო r წარმოადგენს α რიცხვის ზედა კლასის უმცირეს რიცხვს. მაშინ r-ის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^* იქნება თვითონ α რიცხვი, $r^* = \alpha$.

ახლა ვთქვათ, α არის რაიმე ნამდვილი რიცხვი, რაციონალური ან ირაციონალური, და ვთქვათ, განსახილავი რაციონალური რიცხვი r ეკუთვნის α რიცხვის ზედა B კლასს, მაგრამ ამ კლასის უმცირესი რიცხვი არაა. ავიღოთ B კლასში რაციონალური რიცხვი r_1, რომელიც ნაკლებია r-ზე, მაშინ r_1 რიცხვი მიეკუთვნება r^* სიმრავლეს და არ მიეკუთვნება α სიმრავლეს. მაშასადამე, $\alpha < r^*$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე ნამდვილი რაციონალური რიცხვებისა.

დამტკიცება. ავიღოთ α და α' ნამდვილი რიცხვები. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha < \alpha'$. ამ შემთხვევაში არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ეკუთვნის α' სიმრავლეს და არ ეკუთვნის α სიმრავლეს. მაშინ მე-4 და მე-5 თეორემის ძალით r რიცხვის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^* იქნება არანაკლები α-ზე და ნაკლები α'-ზე: $\alpha \leq r^* < \alpha'$.

ამრიგად, α და α' ნამდვილ რიცხვს შორის მოიძებნება ნამდვილი რაციონალური რიცხვი. თავის მხრივ r^* და α' რიცხვებს შორისაც მოიძებნება ნამდვილი რაციონალური რიცხვი და ა. შ. მაშასადამე, α და α' რიცხვებს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე ნამდვილი რაციონალური რიცხვებისა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა, ვინაიდან იგი გვიჩვენებს, რომ ყველა ნამდვილი რაციონალური რიცხვის Γ სიმრავლე ყველგან მკვრივია Z სიმრავლეში, ე. ი. ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს ნამდვილი რაციონალური რიცხვი.

განსაზღვრა 4. თუ α ნამდვილი რიცხვია და $\alpha > 0$, მაშინ α რიცხვს დადებითი რიცხვი ეწოდება; თუკი $\alpha < 0$, მაშინ α რიცხვს ჰქვია უარყოფითი რიცხვი.

§ 8. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა

განსაზღვრა 5. რაიმე დალაგებულ E სიმრავლეს უწყვეტი სიმრავლე ეწოდება, თუ ამ სიმრავლის ყოველი განკვეთის ზედა კლასში არსებობს უმდაბლესი რიგის ელემენტი.

რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლე არ წარმოადგენს უწყვეტ სიმრავლეს, ვინაიდან არსებობს Γ_0 სიმრავლის ისეთი განკვეთა, როცა ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი ელემენტი.

თეორემა 7. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე წარმოადგენს უწყვეტ სიმრავლეს.

დამტკიცება. განვიხილოთ Z სიმრავლის რაიმე $X|Y$ განკვეთა. ამ განკვეთის საშუალებით რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლე გავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგნაირად: X კლასში შემავალი ყოველი ნამდვილი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი რაციონალური რიცხვი A კლასს მივაკუთვნოთ, დანარჩენი კი B კლასს. ცხადია, B კლასში შევა მხოლოდ ის რაციონალური რიცხვები, რომლებსაც შეესაბამება Y კლასში შემავალი ნამდვილი რაციონალური რიცხვები.

ადვილი საჩვენებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლის ასეთი გაყოფა ორ A და B კლასად წარმოადგენს $A|B$ განკვეთას. ამიტომ გვექნება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი α, რომელიც წარმოადგენს განკვეთის ქვედა A კლასს. დავამტკიცოთ, რომ α არის Y კლასის უმცირესი ელემენტი.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\alpha \in Y$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\alpha \in X$. რადგანაც X კლასში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი, ამიტომ X კლასში მოიძებნება ისეთი x რიცხვი, რომელიც α-ზე მეტია. α და x რიცხვებს შორის ავიღოთ რაიმე ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*, მაშინ მისი შესაბამისი რაციონალური რიცხვი r ერთდროულად უნდა მიეკუთვნოს როგორც A კლასს, ისე B კლასს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\alpha \in Y$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ α არის Y კლასის უმცირესი ელემენტი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, Y კლასში არსებობს ისეთი y ელემენტი, რომელიც α-ზე ნაკლებია. ავიღოთ y და α რიცხვებს შორის რაიმე ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*_1, $y < r^*_1 < \alpha$. აქედან გამომდინარეობს, რომ r^*_1 რიცხვის შესაბამისი რაციონალური რიცხვი r_1 ეკუთვნის ერთდროულად როგორც A, ისე B კლასს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, α არის Y კლასის უმცირესი ელემენტი. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა დედეკინდს ეკუთვნის.

გეომეტრიის საფუძვლებში მტკიცდება, რომ ღერძის ყოველ წერტილს გარკვეული ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება და პირიქით, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ღერძის გარკვეული წერტილი.

§ 4. არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რაციონალურ რიცხვებზე

ავიღოთ რაიმე ორი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*_1 და r^*_2. მათი შესაბამისი რაციონალური რიცხვები აღვნიშნოთ შესაბამისად r_1 და r_2 სიმბოლოებით. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 6. r^*_1 და r^*_2 რიცხვების ჯამი $r^*_1+r^*_2$ და ნამრავლი $r^*_1r^*_2$ ვუწოდოთ შესაბამისად r_1+r_2 და r_1r_2 რაციონალური რიცხვების შესაბამის ნამდვილ რაციონალურ რიცხვებს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

1) Γ სიმრავლის ნებისმიერი r^*_1 და r^*_2 ელემენტებისათვის $r^*_1+r^*_2=r^*_2+r^*_1$ (შეკრების კომუტატიურობა);

2) Γ სიმრავლის ნებისმიერი სამი r^*_1, r^*_2, r^*_3 ელემენტისათვის $r^*_1+(r^*_2+r^*_3)=(r^*_1+r^*_2)+r^*_3$ (შეკრების ასოციატიურობა);

3) Γ სიმრავლის ნებისმიერი r^*_1 და r^*_2 ელემენტებისათვის $r^*_1+x=r^*_2$ განტოლებას აქვს ამონახსნი, ე. ი. არსებობს ისეთი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*, რომ $r^*_1+r^*=r^*_2$ (შეკრების შექცევადობა).

ამ შემთხვევაში r^* რიცხვს ეწოდება r^*_2 და r^*_1 რიცხვების სხვაობა და აღინიშნება $r^*_2-r^*_1$ სიმბოლოთი: $r^*=r^*_2-r^*_1$. ეს r^* რიცხვი წარმოადგენს r_2-r_1 რაციონალური რიცხვის შესაბამის ნამდვილ რაციონალურ რიცხვს.

თუ r^* რაიმე რაციონალური რიცხვია, მაშინ $r^*+x=0$ განტოლების ამონახსნს ეწოდება r^* რიცხვის მოპირდაპირე ანუ სიმეტრიული რიცხვი და აღინიშნება $-r^*$ სიმბოლოთი.

4) Γ სიმრავლის ნებისმიერი r^*_1, r^*_2, r^*_3 ელემენტებისათვის მართებულია ტოლობა $r^*_1(r^*_2r^*_3)=(r^*_1r^*_2)r^*_3$ (გამრავლების ასოციატიურობა);

5) Γ სიმრავლის ნებისმიერი r^*_1 და r^*_2 ელემენტებისათვის $r^*_1r^*_2=r^*_2r^*_1$ (გამრავლების კომუტატიურობა);

6) Γ სიმრავლის ნებისმიერი r^*_1, r^*_2, r^*_3 ელემენტისათვის $(r^*_1+r^*_2)r^*_3=r^*_1r^*_3+r^*_2r^*_3$ (გამრავლების დისტრიბუტიულობა შეკრების მიმართ);

7) Γ სიმრავლის ნებისმიერი ორი r^*_1 და r^*_2 ელემენტისათვის, სადაც $r^*_2\neq 0$, განტოლებას $r^*_2x=r^*_1$ აქვს ამო-

ნახსნი, ე. ი. არსებობს ისეთი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი r^*, რომ ადგილი ექნება ტოლობას $r^*_2 r^* = r^*_1$.

ამ შემთხვევაში r^* რიცხვს ეწოდება r^*_1 და r^*_2 რიცხვების ფარდობა და აღინიშნება $\frac{r^*_1}{r^*_2}$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $\frac{r^*_1}{r^*_2}$ წარმოადგენს r^*_1 და r^*_2 რიცხვების შესაბამისი რაციონალური r_1 და r_2 რიცხვების $\frac{r_1}{r_2}$ ფარდობის შესაბამის რიცხვს.

ჰ) ყოველი ნამდვილი დადებითი რაციონალური r^* რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მთელი ნამდვილი რიცხვი m^*, რომ $m^*>r^*$ (არქიმედეს აქსიომა).

მაშასადამე, Γ სიმრავლე წარმოადგენს არქიმედესეულად განლაგებულ ველს.

რადგანაც Γ_0 და Γ ველები ურთიერთეკვივალენტურია და Γ_0 ველის ნებისმიერ ელემენტების ჯამსა და ნამრავლს შეესაბამება Γ ველის შესაბამისი ელემენტების ჯამი და ნამრავლი, ამიტომ Γ_0 ველი Γ ველის იზომორფულია.

§ 5. ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა

თეორემა 8. თუ ირაციონალური რიცხვი α წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით, მაშინ ყოველი დადებითი რაციონალური ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვები $a \in A$ და $b \in B$, რომ $b-a=\varepsilon$.

დამტკიცება. ავიღოთ A და B კლასებში შესაბამისად a_0 და b_0 რიცხვები და განვიხილოთ შემდეგი უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია

$$a_0,\ a_0+\varepsilon,\ \ a_0+2\varepsilon, \ldots,\ a_0+n\varepsilon, \ldots \tag{5.1}$$

ვთქვათ, n მთელი დადებითი რიცხვი ისეთია, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$n>\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}.$$

მაშინ $a_0+n\varepsilon>b_0$ და რაკი $b_0 \in B$, ამიტომ $a_0+n\varepsilon$ რიცხვიც მიეკუთვნება B კლასს. დავუშვათ, რომ $a_0+k\varepsilon$ არის (5·1) მიმდევრობის პირველი რიცხვი, რომელიც B კლასს ეკუთვნის. ასეთი $a_0+k\varepsilon$ რიცხვი უეჭველად არსებობს, ვინაიდან $a_0+n\varepsilon$ რიცხვი B კლასს ეკუთვნის და რაკი $a_0 \in A$, ამიტომ $k \geq 1$. მაშასადამე, $a_0+(k-1)\varepsilon$ რიცხვი A კლასს მიეკუთვნება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a=a_0+(k-1)\varepsilon,\ b=a_0+k\varepsilon,$$

გვექნება $b-a=\varepsilon$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. *თუ α ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ყოველი დადებითი ნამდვილი რაციონალური ε^* რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნამდვილი რაციონალური რიცხვები r^*_1 და r^*_2, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს*

$$r^*_1<\alpha<r^*_2,\ r^*_2-r^*_1=\varepsilon^*.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ ε ასოთი ε^* ნამდვილი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი რაციონალური რიცხვი. ცხადია, $\varepsilon>0$. მე-8 თეორემის ძალით, ε რიცხვისათვის მოიძებნება α რიცხვის ქვედა და ზედა კლასში ისეთი რაციონალური რიცხვები r_1 და r_2, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$r_2-r_1=\varepsilon.$$

აღვნიშნოთ r^*_1 და r^*_2 სიმბოლოებით r_1 და r_2 რაციონალური რიცხვების შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვები. მაშინ $r^*_2-r^*_1=\varepsilon^*$; ამას გარდა, $r^*_1<\alpha<r^*_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

r^*_1 რიცხვს ეწოდება α რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით ε^*-მდე ნაკლებობით, r^*_2 რიცხვს კი α რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით ε^*-მდე მეტობით.

შენიშვნა. შემდეგში, ნამდვილი რაციონალური რიცხვის ნაცვლად ვიხმართ ტერმინს — რაციონალური რიცხვი. ამას გარდა, r რაციონალური რიცხვის შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი ისევ r სიმბოლოთი გვექნება აღნიშნული.

§ 6. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები

განსაზღვრა 7. ვთქვათ, a და b ნამდვილი რიცხვებია, ამასთანავე $a<b$. ამ რიცხვებს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს a და b რიცხვების ჩათვლით, *სეგმენტი* ეწოდება და იგი $[a, b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

a და b რიცხვებს $[a, b]$ *სეგმენტის ბოლოები* ჰქვია. ღერძზე სეგმენტს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია a და b რიცხვების შესაბამისი წერტილები, ამასთანავე ეს წერტილები ამ მონაკვეთს

ეკუთვნის (ნახ. 8). შემდეგში, რაიმე a რიცხვის შესაბამის წერტილს ღერძზე იმავე ასოთი აღვნიშნავთ.

ნახ. 8.

განსაზღვრა 8. ორ ნამდვილ a და b რიცხვს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს *ინტერვალი* ეწოდება და იგი (a, b) სიმბოლოთი აღინიშნება.

a და b რიცხვებს (a, b) *ინტერვალის ბოლოები* ჰქვია. ღერძზე (a, b) ინტერვალს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია a და b რიცხვების შესატყვისი წერტილები, ამასთანავე ეს წერტილები ამ მონაკვეთს არ ეკუთვნის (ნახ. 9).

თუ (a, b) ინტერვალს დავუმატებთ მის a და b ბოლოებს, მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტს და პირიქით, თუ $[a, b]$ სეგმენტს ჩამოვაცილებთ მის ორივე ბოლოს მივიღებთ (a, b) ინტერვალს.

ნახ. 9.

განსაზღვრა 9. თუ (a, b) ინტერვალს დავუმატებთ მის ერთ-ერთ ბოლო წერტილს, მივიღებთ სიმრავლეს, რომელსაც *ნახევრადინტერვალი* ან *ნახევრადსეგმენტი* ეწოდება.

შეგვიძლია შევადგინოთ ორი ნახევრადსეგმენტი (ორი ნახევრადინტერვალი). მართლაც, თუ (a, b) ინტერვალს დავუმატებთ b ბოლოს, მივიღებთ ნახევრადსეგმენტს მარჯვნიდან (ნახევრადინტერვალს მარცხნიდან) და მას აღვნიშნავთ $(a, b]$ სიმბოლოთი. თუ (a, b) ინტერვალს დავუმა-

ნახ. 10.

ტებთ a ბოლოს, მივიღებთ ნახევრადინტერვალს მარჯვნიდან ან ნახევრადსეგმენტს მარცხნიდან; მას $[a, b)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. მაგალითად, მე-10 ნახაზზე გვაქვს ნახევრადინტერვალი მარჯვნიდან (ნახევრადსეგმენტი მარცხნიდან).

ტერმინები: სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევრადინტერვალი, ნახევრად-სეგმენტი და სათანადო აღნიშვნები დანჟუას[1] (A. Denjoy) მიერ იყო შემოღებული.

თუ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს.

თეორემა 10. *ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.*

დამტკიცება. ვთქვათ, E ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ ამ სიმრავლეს უდიდესი ელემენტი აქვს, მაშინ თეორემა ცხადია.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ E სიმრავლეს არ აქვს უდიდესი ელემენტი. ყველა ნამდვილი რიცხვის Z სიმრავლე გავყოთ ორ X და Y კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: Y კლასში მოვათავსოთ E სიმრავლის ყველა ზედა საზღვარი, X კლასში კი დანარჩენი ნამდვილი რიცხვები. ცხადია, E სიმრავლის ყოველი ელემენტი X კლასს ეკუთვნის.

დავამტკიცოთ, რომ Z სიმრავლის ასეთი გაყოფა ორ X და Y კლასად გვაძლევს განკვეთას.

1) ცხადია, არც X და არც Y კლასი ცარიელი არაა.

2) თუ რომელიმე ნამდვილი x რიცხვი ეკუთვნის X კლასს, მაშინ მასზე ნაკლები ყოველი ნამდვილი x' რიცხვიც იმავე კლასს ეკუთვნის. მართლაც, E სიმრავლე შეიცავს ისეთ p რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $p \geq x$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში x რიცხვი Y კლასს მიეკუთვნებოდა. მაშასადამე, $p > x'$ და ამიტომ $x' \in X$.

3) X კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს. მართლაც, ავიღოთ X კლასის ნებისმიერი ξ ელემენტი. მაშინ E სიმრავლეში არსებობს ისეთი p ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $p \geq \xi$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ξ მიეკუთვნებოდა Y კლასს. მაგრამ, რადგანაც E სიმრავლეში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ელემენტი $p' \in E$, რომელიც p-ზე მეტია და, მაშასადამე, $p' > \xi$. მაგრამ $p' \in X$, ამიტომ X კლასში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი.

ამრიგად, გვაქვს $X|Y$ განკვეთა. მაგრამ Y კლასს აქვს უმცირესი ელემენტი და იგი აღვნიშნოთ L ასოთი. დავამტკიცოთ, რომ L არის E

---

[1] ა. დანჟუა (1884) — ფრანგი მათემატიკოსი. იგი პარიზის აკადემიის წევრია და პარიზის უნივერსიტეტის პროფესორი. მისი ძირითადი ნაშრომები მიძღვნილია ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიისადმი. მან სრული ამოხსნა მოგვცა კლასიკური ამოცანისა ფუნქციის პირველადი ფუნქციის მოძებნის შესახებ. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის ა. დანჟუამ შემოიღო ინტეგრალის ახალი ცნება. ამჟამად ამ ინტეგრალს დანჟუას ინტეგრალს უწოდებენ.

სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი ξ რიცხვი, რომელიც L-ზე ნაკლებია. ცხადია, $\xi \in X$ და ამიტომ E სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი q, რომ $q \geq \xi$. მაშასადამე, ξ არ შეიძლება იყოს E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ამრიგად, ყოველი ნამდვილი რიცხვი ξ, რომელიც L-ზე ნაკლებია არ წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს. შემდეგ, რაკი L არის E სიმრავლის ზედა საზღვარი, ამიტომ იგი იქნება E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ყოველ ქვემოდან შემოსაზღვრულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ზუსტი ქვედა საზღვარი.

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი.

თეორემა 11. თუ E ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა, ხოლო E_1 წარმოადგენს E სიმრავლის ქვესიმრავლეს, მაშინ $\sup E_1 \leq \sup E$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\sup E < \sup E_1$. მაშინ არსებობს E_1 სიმრავლის ისეთი ელემენტი ξ, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\sup E < \xi \leq \sup E_1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ E_1 სიმრავლის ξ ელემენტი მეტია E სიმრავლის ყოველ ელემენტზე, რაც შეუძლებელია. ამიტომ $\sup E_1 \leq \sup E$.

შემდეგში ვისარგებლებთ სეგმენტის სიგრძის ცნებით და ამიტომ მოვიყვანოთ სეგმენტის სიგრძის განსაზღვრა. ავიღოთ რომელიმე $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი. თუ α და β რაციონალური რიცხვებია, მაშინ სეგმენტს რაციონალური სეგმენტი ეწოდება, ხოლო $\beta-\alpha$ სხვაობას კი $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძე და მას $|[\alpha, \beta]|$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ახლა დავუშვათ, რომ α და β რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია. როგორც ვიცით, α და β რიცხვს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა. აღვნიშნოთ E სიმბოლოთი $b-a$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $\alpha < a < b < \beta$. ცხადია, E სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და მას აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი. ამ ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძე ანუ მანძილი α და β წერტილებს შორის. ამ შემთხვევაშიაც $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძეს აღნიშნავენ $|[\alpha, \beta]|$ სიმბოლოთი, ხოლო α და β წერტილებს შორის მანძილს კი $\rho(\alpha, \beta)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$\rho(\alpha, \beta) = |[\alpha, \beta]|.$$

თუ გვაქვს (α, β) ინტერვალი, ან $[\alpha, \beta)$ ან $(\alpha, \beta]$ ნახევრადსეგმენტი, მაშინ განსაზღვრის თანახმად,

$$|(\alpha, \beta)|=|[\alpha, \beta)|=|(\alpha, \beta]|=\rho(\alpha, \beta),$$

სადაც $|(\alpha, \beta)|$ სიმბოლოთი აღნიშნულია (α, β) ინტერვალის სიგრძე.

თეორემა 12. ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა ორი P და Q სიმრავლე შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს: 1) P სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია Q სიმრავლის ყოველ ელემენტზე, 2) ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს P და Q სიმრავლეში ისეთი ორი ელემენტი p და q, რომ $\rho(p, q)<\varepsilon$. მაშინ $\sup P=\inf Q$.

დამტკიცება. ცხადია, P სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, Q სიმრავლე კი ქვემოდან. ამიტომ $\sup P$ და $\inf Q$ სასრულია.

დასამტკიცებელია, რომ $\sup P=\inf Q$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\sup P<\inf Q$. აღვნიშნოთ $\rho(\sup P, \inf Q)=\varepsilon$. თეორემის პირობის თანახმად, P და Q სიმრავლეებში მოიძებნება შესაბამისად ისეთი ორი რიცხვი p და q, რომ $\rho(p, q)<\varepsilon$. მეორე მხრით, რადგანაც $p\leq\sup P$ და $q\geq\inf Q$, ამიტომ $\rho(p, q)\geq\varepsilon$. ამ ორ უტოლობას არ შეიძლება ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს და, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა, ე. ი. შეუძლებელია მართებული იყოს უტოლობა $\sup P<\inf Q$.

აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ადგილი არა აქვს უტოლობას $\sup P>\inf Q$. მაშასადამე, $\sup P=\inf Q$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ α არის $A|B$ განკვეთით წარმოდგენილი ნამდვილი რიცხვი, მაშინ $\alpha=\sup A^*=\inf B^*$, სადაც A^* არის A კლასის რიცხვების შესაბამისი ნამდვილ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, B^* კი B კლასის რიცხვების შესაბამის ნამდვილ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

შედეგი 2. თუ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება რაიმე ξ რიცხვს, მაშინ $\sup E\leq\xi$. ასევე, თუ E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი ნაკლები არაა რაიმე η რიცხვზე, მაშინ $\inf E\geq\eta$.

§ 7. არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე

1. შეკრება. ვთქვათ, α და α' რაიმე ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ $a+a'$ სახის რიცხვთა P სიმრავლე, სადაც a არის α-ზე ნაკლები ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი, a' კი — ნებისმიერი რაციონალური

რიცხვი, რომელიც α' რიცხვზე ნაკლებია, Q სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $b+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც ნაკლები არ არის α-ზე, b' კი — ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც α' რიცხვზე ნაკლები არაა.

რადგანაც $a<b$ და $a'<b'$, ამიტომ P სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტზე. ამას გარდა, ყოველი დადებითი ნამდვილი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ორი ელემენტი $p\in P$ და $q\in Q$, რომ $\rho(p, q)<\varepsilon$.

მართლაც, მე-9 თეორემის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი რაციონალური რიცხვები a_0, b_0, a'_0, b'_0, რომლებიც აკმაყოფილებენ თანაფარდობებს

$$a_0<\alpha\leq b_0,\ b_0-a_0=\frac{\varepsilon'}{2},$$

$$a'_0<\alpha'\leq b'_0,\ b_0'-a_0'=\frac{\varepsilon'}{2},$$

სადაც ε' არის ε-ზე ნაკლები დადებითი რაციონალური რიცხვი. ამ ორი ტოლობის შეკრება გვაძლევს

$$(b_0+b_0')-(a_0+a_0')=\varepsilon'<\varepsilon.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $p=a_0+a_0'$, $q=b_0+b_0'$, გვექნება

$$\rho(p,\ q)<\varepsilon,$$

სადაც $p\in P$, $q\in Q$. მაშასადამე, მე-12 თეორემის ძალით,

$$\sup P=\inf Q=\xi.$$

ამ ξ რიცხვს ეწოდება α და α' რიცხვების ჯამი და იგი აღინიშნება $\alpha+\alpha'$ სიმბოლოთი:

$$\xi=\alpha+\alpha'.$$

ცხადია, თუ α და α' რაციონალური რიცხვებია, მაშინ $\alpha+\alpha'$ ჯამის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა რაციონალურ რიცხვთა ჯამის განსაზღვრას, რომელიც ადრე გვქონდა შემოღებული. მართლაც, თანახმად Q სიმრავლის აგებისა, ამ შემთხვევაში $\alpha+\alpha'$ რიცხვი Q სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი Q სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია. მაშასადამე, $\alpha+\alpha'=\inf Q$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ, თუ α რაციონალური რიცხვია, მაშინ $\alpha+\alpha'$ წარმოადგენს ყველა $\alpha+b'$ სახის რიცხვთა Q_0 სიმრავლის ზუსტ ქვედა

საზღვარს. მართლაც, ადვილი მისახვედრია, რომ P და Q_0 სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P = \inf Q_0 = \alpha + \alpha'.$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$0 + \alpha = \alpha.$$

ცხადია, რომ მართებულია კომუტატიურობის კანონი, ე. ი.

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha.$$

კერძოდ,

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

თეორემა 13. თუ α, β, α', β' ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha<\beta$, $\alpha'<\beta'$, მაშინ $\alpha+\alpha'<\beta+\beta'$.

დამტკიცება. ავიღოთ რაციონალური რიცხვები r, r_1, r', r_1', რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$\alpha < r < r_1 < \beta, \ \alpha' < r' < r_1' < \beta'.$$

განვიხილოთ $a+a'$ სახის რიცხვთა P სიმრავლე, სადაც a არის α-ზე ნაკლები ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი, ხოლო a' წარმოადგენს α' რიცხვზე ნაკლებ ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვს. ასევე Q ასოთი აღვნიშნოთ $b+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც β-ზე ნაკლები არ არის, b' კი ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც β'-ზე ნაკლები არ არის. მაშინ

$$\sup P = \alpha + \alpha', \quad \inf Q = \beta + \beta'. \tag{7.1}$$

ცხადია, რომ

$$a + a' < r + r' < r_1 + r_1' < b + b'.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (7.1) ტოლობებს, მე-12 თეორემის მე-2 შედეგის ძალით გვექნება

$$\alpha + \alpha' \leq r + r' < r_1 + r_1' \leq \beta + \beta',$$

ე. ი.

$$\alpha + \alpha' < \beta + \beta'$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. ნებისმიერი სამი ნამდვილი α_1, α_2, α_3 რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3). \tag{7.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღვნიშნოთ A_i სიმბოლოთი ($i=1, 2, 3$) ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α_i რიცხვზე ნაკლებია, B_i სიმბოლოთი კი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α_i რიცხვზე ნაკლები არ არიან. ვთქვათ,

$$P=\{(x+y)+z\}, \quad Q=\{(x'+y')+z'\},$$

სადაც $x\in A_1$, $y\in A_2$, $z\in A_3$, $x'\in B_1$, $y'\in B_2$, $z'\in B_3$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P=\inf Q=(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3. \tag{7.3}$$

ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. ვთქვათ, ε' არის დადებითი რაციონალური რიცხვი, რომელიც ε-ზე ნაკლებია. მე-8 თეორემის ძალით არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვები

$$x_0\in A_1,\ y_0\in A_2,\ z_0\in A_3,\quad x_0'\in B_1,\ y'_0\in B_2,\ z'_0\in B_3,$$

რომ ადგილი ექნება ტოლობებს

$$x_0'-x_0=\frac{\varepsilon'}{3}, \quad y_0'-y_0=\frac{\varepsilon'}{3}, \quad z_0'-z_0=\frac{\varepsilon'}{3}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$(x_0'+y_0')+z_0'-[(x_0+y_0)+z_0]=\varepsilon'.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$p=(x_0+y_0)+z_0,\ q=(x_0'+y_0')+z_0',$$

გვექნება

$$\rho(p,\ q)=\varepsilon'<\varepsilon,\ p\in P,\ q\in Q.$$

მაშასადამე, მე12 თეორემის თანახმად,

$$\sup P=\inf Q. \tag{7.4}$$

შემდეგ რაკი

$$x+y<\alpha_1+\alpha_2\leq x'+y',\ z<\alpha_3\leq z',$$

ამიტომ მე-13 თეორემის თანახმად

$$(x+y)+z<(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3\leq(x'+y')+z'.$$

საიდანაც გვექნება

$$\sup P\leq(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3\leq\inf Q.$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.4) ტოლობას, უკანასკნელი დამოკიდებულებებიდან მიიღება (7.3) ტოლობები.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\sup P'=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3),$$

სადაც

$$P'=\{x+(y+z)\},\ x\in A_1,\ y\in A_2,\ z\in A_3.$$

მაგრამ $P'=P$ და ამიტომ მართებულია (7·2) ტოლობა. ამით შეკრების ასოციატიურობის კანონი დამტკიცებულია.

2. გამოკლება. გამოკლების ოპერაცია წარმოადგენს შეკრების ოპერაციის შებრუნებულ ოპერაციას. ამიტომ α რიცხვიდან α' რიცხვის გამოკლება ისეთი მესამე α'' რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც α' რიცხვთან მიმატებული მოგვცემს α რიცხვს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ზემოაღნიშნული თვისების რიცხვი? სანამ ვუპასუხებდეთ ამ კითხვაზე დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 15. ნებისმიერი ირაციონალური α რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ξ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\alpha+\xi=0. \tag{7.5}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A ასოთი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α-ზე ნაკლებია, B-თი კი ყველა ისეთი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α-ზე მეტია. ვთქვათ, A' არის B სიმრავლის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე, B' კი A სიმრავლის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე. ცხადია, ყოველი რაციონალური რიცხვი შევა ან A' ან B' სიმრავლეში და, ამას გარდა, A' სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია B' სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup A'=\inf B'. \tag{7.6}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მე-9 თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვები a და b, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$b-a<\varepsilon,\ a<\alpha<b. \tag{7.7}$$

ახლა ვთქვათ, $a'=-b$, $b'=-a$. რადგანაც $a\in A$, $b\in B$, ამიტომ $a'\in A'$, $b'\in B'$ და, თუ მხედველობაში მივიღებთ (7.7) უტოლობებიდან პირველს, გვექნება

$$b'-a'=b-a<\varepsilon.$$

ამრიგად, $\rho(a',\ b')<\varepsilon$ და ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად მართებულია (7·6) ტოლობა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\xi=\sup A'.$$

ξ რიცხვი ირაციონალურია, ვინაიდან A' სიმრავლეში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი, B' სიმრავლეში კი უმცირესი.

დავამტკიცოთ, რომ ξ აკმაყოფილებს (7.5) ტოლობას. ამისათვის აღვნიშნოთ $a+a'$ და $b+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად P და Q სიმბოლოებით, სადაც $a\in A$, $b\in B$, $a'\in A'$, $b'\in B$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ P სიმრავლის ყოველი ელემენტი უარყოფითი რიცხვია. მართლაც, ავიღოთ P სიმრავლის რაიმე ელემენტი p. მას აქვს $a+a'$ სახე, ე. ი. $p=a+a'$, სადაც $a\in A$, $a'\in A'$. მაგრამ $a'=-b$, სადაც $b\in B$. მაშასადამე, $p=a-b$ და რაკი $a<b$, ამიტომ $p<0$. ამრიგად, P სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი უარყოფით რიცხვს წარმოადგენს და, მაშასადამე,

$$\sup P\leq 0. \tag{7.8}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\inf Q\geq 0. \tag{7.9}$$

მაგრამ

$$\sup P=\inf Q=\alpha+\xi. \tag{7.10}$$

მაშასადამე, (7.8), (7.9) და (7.10) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (7.5) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 9. ნამდვილი α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი ეწოდება ისეთ ξ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $\alpha+\xi=0$.

α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი აღინიშნება $-\alpha$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $-(-\alpha)=\alpha$. თუ $\alpha>0$, მაშინ $-\alpha<0$. ამას გარდა, თუ α და α' ნამდვილი რიცხვები ისეთია, რომ $\alpha<\alpha'$, მაშინ $-\alpha>-\alpha'$.

განსაზღვრა 10. თუ ξ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ ξ და $-\xi$ რიცხვებიდან ერთი მათგანი იქნება დადებითი, მეორე კი უარყოფითი. ამ ორი რიცხვიდან იმას, რომელიც დადებითია, ეწოდება ξ რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე და აღინიშნება $|\xi|$ სიმბოლოთი. ამას გარდა, $|0|=0$.

ცხადია, რომ $|-\xi|=|\xi|$.

თეორემა 10. ნებისმიერი ორი α და β ნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ξ ნამდვილი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\alpha+\xi=\beta.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\xi=\beta+(-\alpha)$. გვაქვს:

$$\alpha+\xi=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0+\beta=\beta.$$

მაშასადამე, $\beta+(-\alpha)$ არის საძიებელი რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულია.

$\beta+(-\alpha)$ რიცხვს ეწოდება β და α რიცხვების სხვაობა და იგი აღინიშნება $\beta-\alpha$ სიმბოლოთი:

$$\xi=\beta-\alpha.$$

ამრიგად, $\beta+\alpha$ სხვაობის მისაღებად საჭიროა β რიცხვს მივუმატოთ α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი. რადგანაც შეკრების ოპერაციის შედეგად მხოლოდ ერთ რიცხვს ვღებულობთ, ამიტომ გამოკლების ოპერაციის შედეგად გვექნება აგრეთვე მხოლოდ ერთი რიცხვი.

თეორემა 17. თ უ x დ ა y ნ ა მ დ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\rho(x, y)=|x-y|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x<y$ და დავამტკიცოთ $\rho(x, y)=y-x$ ტოლობის მართებულობა.

აღვნიშნოთ A ასოთი ყველა იმ რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც x-ზე ნაკლებია, B-თი კი ყველა იმ რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც x-ზე მეტია. შემდეგ, ვთქვათ, A' არის ისეთი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც y-ზე ნაკლებია, B' კი ისეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც y-ზე მეტია. აღვნიშნოთ E სიმბოლოთი $a'-b$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, H-ით კი $b'-a$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $x<b<a'<y$, $a\in A$, $b\in B$, $a'\in A'$, $b'\in B'$. ცხადია, რომ

$$\inf H=y-x. \tag{7.11}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\inf H=\sup E. \tag{7.12}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ε-ზე ნაკლები დადებითი რაციონალური ε' რიცხვისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი რიცხვები $a_0\in A$, $b_0\in B$, $a_0'\in A'$, $b_0'\in B'$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$b_0-a_0<\frac{\varepsilon'}{2}, \quad b_0'-a_0'<\frac{\varepsilon'}{2}, \quad a_0<x<b_0<a_0'<b_0'. \tag{7.13}$$

რადგანაც

$$b_0'-a_0=(b_0-a_0)+(a'_0-b_0)+(b'_0-a'_0),$$

ამიტომ (7·13) უტოლობის ძალით გვექნება

$$(b'-a_0)-(a_0'-b_0)=(b_0'-a_0')+(b_0-a_0)<\frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2}=\varepsilon'<\varepsilon.$$

ვინაიდან $b'-a_0$ და $a_0'-b_0$ რაციონალური რიცხვებია, ამიტომ $(b_0'-a)-(a_0'-b_0)$ სხვაობა წარმოადგენს მანძილს იმ $(b'-a_0)$ და $(a_0'-b_0)$ წერტილებს შორის, რომლებიც ეკუთვნიან შესაბამისად H და E სიმრავლეებს.

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს H და E სიმრავლეებში ისეთი ორი წერტილი $b_0'-a_0$ და $a_0'-b_0$, რომ მათ შორის მანძილი ε-ზე ნაკლებია. ამას გარდა, E სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია H სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად მართებულია (7.12) ტოლობა. მაშასადამე, (7.11) და (7.12) ტოლობებიდან გვაქვს $\rho(x, y)=y-x$ ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

8. გამრავლება. ვთქვათ, მოცემულია ორი ნამდვილი რიცხვი α და α'. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ α და α' რიცხვების ნამრავლი.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\alpha>0$, $\alpha'>0$. აღვნიშნოთ P ასოთი ყველა aa' სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a არის α-ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი, a' კი α'-ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი. ასევე, Q-თი აღვნიშნოთ ყველა bb' სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც α რიცხვზე ნაკლები არაა, ხოლო b' წარმოადგენს ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვს, რომელიც ნაკლები არ არის α' რიცხვზე. ცხადია, რომ P სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტზე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P=\inf Q. \tag{7.14}$$

ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $\varepsilon>0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ε რაციონალური რიცხვია.

ავიღოთ რაიმე ორი რაციონალური რიცხვი b_0 და b_0', რომლებიც მეტია შესაბამისად α და α' რიცხვებზე. ცხადია, რომ $b_0>0$, $b_0'>0$. მე-9 თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი ოთხი რაციონალური რიცხვი a, b, a', b', რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

$$a<\alpha<b\leq b_0,\quad a'<\alpha'<b'\leq b_0',$$

$$b-a<\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'},\quad b'-a'<\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $p=aa'$, $q=bb'$. ცხადია, რომ p და q ეკუთვნის შესაბამისად P და Q სიმრავლეებს. გვაქვს:

$$\rho(p, q)=bb'-aa'=(bb'-ab')+(ab'-aa')=b'(b-a)+$$
$$+a(b'-a')<b_0'\frac{\varepsilon}{b_0+b'_0}+b_0\frac{\varepsilon}{b_0+b'_0}=\varepsilon.$$

ამრიგად, P და Q სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ მართებულია (7.14) ტოლობა.

$\xi=\sup P=\inf Q$ რიცხვს ეწოდება α და α' რიცხვების ნამრავლი და იგი აღინიშნება $\alpha\alpha'$ სიმბოლოთი:

$$\xi=\alpha\alpha'.$$

ცხადია, თუ α და α' რიცხვები ორივე რაციონალურია, მაშინ $\alpha\alpha'$ ნამრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა რაციონალურ რიცხვთა ნამრავლის განსაზღვრას, რომელიც ადრე გვქონდა შემოღებული. მართლაც, თანახმად Q სიმრავლის აგებისა, ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'$ რიცხვი Q სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი ამ სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია; მაშასადამე,

$$\alpha\alpha'=\inf Q.$$

თუ α რიცხვი რაციონალურია, α'კი ირაციონალური, მაშინ $\alpha\alpha'$ არის ყველა $\alpha b'$ სახის რიცხვთა Q_0 სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი, სადაც $b'\in B$. მართლაც, ადვილი საჩვენებელია, რომ P და Q_0 სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P=\inf Q_0=\alpha\alpha'.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა α და α' რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია. აქ წარმოგვიდგება სამი შემთხვევა:

1) $\alpha>0$ და $\alpha'<0$. ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'$ ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით $\alpha\alpha'=-[\alpha(-\alpha')]$.

2) $\alpha<0$, $\alpha'>0$. ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'=-[(-\alpha)\alpha']$.

3) $\alpha<0$, $\alpha'<0$. ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'=(-\alpha)(-\alpha')$.

თუ $\alpha=0$ (ან $\alpha'=0$), მაშინ განსაზღვრის თანახმად $\alpha\alpha'=0$.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

1) $\alpha\cdot 1=\alpha$,

2) $\alpha\alpha'=\alpha'\alpha$ (გამრავლების კომუტატიურობის კანონი),

3) $(\alpha\alpha')\alpha''=\alpha(\alpha'\alpha'')$ (გამრავლების ასოციატიურობის კანონი),

4) $\alpha(\alpha'+\alpha'')=\alpha\alpha'+\alpha\alpha''$ (დისტრიბუტიულობის კანონი).

4. გაყოფა. გაყოფის ოპერაცია წარმოადგენს გამრავლების ოპერაციის შებრუნებულ ოპერაციას. ამიტომ α რიცხვის α' რიცხვზე გაყოფა ($\alpha' \neq 0$) ისეთი მესამე α'' რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც α'-ზე გამრავლებული მოგვცემს α რიცხვს. ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ასეთი α'' რიცხვი? პასუხი რომ გავცეთ ამ კითხვაზე დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 18. თუ α რაიმე ირაციონალური რიცხვია, მაშინ არსებობს ისეთი ξ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\alpha\xi = 1. \tag{7.15}$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha > 0$. აღვნიშნოთ A ასოთი ყველა ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α-ზე ნაკლებია, B-თი კი ყველა ისეთ რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α-ზე მეტია. ვთქვათ, A' არის B სიმრავლის რიცხვთა შებრუნებული რიცხვების სიმრავლე, B' კი A სიმრავლის რიცხვების შებრუნებულ რიცხვთა სიმრავლე.

ცხადია, რომ A' სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია B' სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\sup A' = \inf B'. \tag{7.16}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და A სიმრავლის რაიმე a_1 რიცხვი. მე-9 თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვები a და b, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$b - a < a_1^2\varepsilon, \quad a_1 < a < \alpha < b \quad (a \in A,\ b \in B). \tag{7.17}$$

ვთქვათ, $a' = \dfrac{1}{b}$, $b' = \dfrac{1}{a}$. პირობის ძალით $a' \in A'$, $b' \in B$. თუ გავითვალისწინებთ (7.17) უტოლობებს, გვექნება

$$b' - a' = \frac{b-a}{ab} < \frac{b-a}{a_1^2} < \varepsilon.$$

ამრიგად, $\rho(a', b') < \varepsilon$ და ამიტომ მე-12 თეორემის ძალით მართებულია (7.16) ტოლობა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\xi = \sup A'.$$

ξ რიცხვი ირაციონალურია, ვინაიდან A' სიმრავლეში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი, B' სიმრავლეში კი უმცირესი.

დავამტკიცოთ, რომ ξ აკმაყოფილებს (7.15) ტოლობას. აღვნიშნოთ aa' და bb' სახის რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად P და Q ასოებით,

სადაც $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$, $b' \in B'$.

ცხადია, P სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი ნაკლებია ერთზე. მართლაც, ავიღოთ P სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი $p = a_0 a_0'$, სადაც $a_0 \in A, a_0' \in A'$. მაგრამ $a_0' = \frac{1}{b_0}$ და $b_0 \in B$. რადგანაც $a_0 < b_0$, ამიტომ $p < 1$. ამრიგად, P სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი ნაკლებია ერთზე და ამიტომაც $\sup P \leqslant 1$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ Q სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი მეტია ერთზე და, მაშასადამე, $\inf Q \geq 1$. მაგრამ

$$\sup P = \inf Q.$$

მაშასადამე, $\alpha\xi = 1$.

თუ $\alpha < 0$, მაშინ $-\alpha > 0$ და ზემოთ დამტკიცებულის ძალით არსებობს ისეთი დადებითი ξ' რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(-\alpha)\,\xi' = 1.$$

თუ განვიხილავთ $\xi = -\xi'$ რიცხვს, გვექნება

$$(-\alpha)(-\xi) = \alpha\xi = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 11. α რიცხვის ($\alpha \neq 0$) შებრუნებული რიცხვი ეწოდება ისეთი ξ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $\alpha\xi = 1$.

α რიცხვის შებრუნებული რიცხვი აღინიშნება $\frac{1}{\alpha}$ სიმბოლოთი:

$$\xi = \frac{1}{\alpha}.$$

თეორემა 19. ნებისმიერი ორი α და β ნამდვილი რიცხვისათვის, სადაც $\beta \neq 0$, არსებობს ისეთი ნამდვილი x რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\beta x = \alpha.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

გვაქვს

$$\beta x = \beta\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \beta\left(\frac{1}{\beta} \cdot \alpha\right) = \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta}\right)\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

მაშასადამე, $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ არის საძიებელი რიცხვი. ამ რიცხვს ეწოდება α და β რიცხვების განაყოფი და აღინიშნება $\frac{\alpha}{\beta}$ სიმბოლოთი.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე წარმოადგენს განლაგებულ ველს.

§ 8. n-ური ხარისხის ფესვი ნამდვილი რიცხვიდან

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 20. ყოველი დადებითი α და მთელი დადებითი n რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნამდვილი ξ რიცხვი რომ

$$\xi^n = \alpha. \tag{8.1}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A ასოთი სიმრავლე ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვისა, ნულისა და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა n-ური ხარისხი α-ზე ნაკლებია, ხოლო β-თი დანარჩენი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\sup A = \inf B$. აღვნიშნოთ $\sup A$ რიცხვი ξ ასოთი. ვაჩვენოთ, რომ

$$\xi^n = \alpha. \tag{8.2}$$

ამისათვის განვიხილოთ ორი P და Q სიმრავლე: P შედგება a^n სახის რიცხვებისაგან, სადაც $a > 0$ და $a \in A$, ხოლო Q შედგება b^n სახის რიცხვებისაგან, სადაც $b \in B$.

ცხადია, რომ P სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტზე. ამას გარდა, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ორი რიცხვი $a^n \in P$ და $b^n \in Q$, რომ

$$b^n - a^n < \varepsilon.$$

მართლაც, B სიმრავლეში ავიღოთ რაიმე b_0 რიცხვი. A და B სიმრავლეებში მოიძებნება ისეთი ორი რიცხვი a და b, რომ

$$b - a < \frac{\varepsilon}{n b_0^{n-1}}, \quad b \leq b_0. \tag{8.3}$$

ბეზუს თეორემისა და (8.3) უტოლობების ძალით გვაქვს

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) < \frac{\varepsilon}{n b_0^{n-1}} \cdot n b_0^{n-1} = \varepsilon.$$

მაშასადამე, მე-12 თეორემის ძალით

$$\sup P = \inf Q$$

და რადგანაც $a^n < \alpha \leq b^n$, ამიტომ

$$\alpha = \sup P = \inf Q. \tag{8.4}$$

მეორე მხრით, $a^n < \xi^n \leq b^n$ და, მაშასადამე,

$$\xi^n = \sup P = \inf Q. \tag{8.5}$$

(8.4) და (8.5) ტოლობებიდან მიიღება (8.2) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ ξ რიცხვს ეწოდება n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი α რიცხვიდან და აღინიშნება $\sqrt[n]{\alpha}$ სიმბოლოთი.

§ 9. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისადმი $+\infty$ და $-\infty$ ელემენტების დამატება

ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციების შესწავლისას საჭირო ხდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს დავუმატოთ ორი არასაკუთრივი ელემენტი $+\infty$ და $-\infty$, რომლებიც აკმაყოფილებენ, განსაზღვრის ძალით, შემდეგ პირობებს:

1°. ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $-\infty < a < +\infty$; ამის საფუძველზე ვწერთ $-\infty < +\infty$.

2°. ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის,

$$(+\infty)+a=a+(+\infty)=+\infty,\ (-\infty)+a=a+(-\infty)=-\infty;$$

$$(\pm\infty)\cdot a=a\cdot(\pm\infty)=\pm\infty, \text{ თუ } a>0;$$

$$(\pm\infty)\cdot a=a\cdot(\pm\infty)=\mp\infty, \text{ თუ } a<0;$$

$$\frac{a}{\pm\infty}=0;\ \frac{a}{0}=+\infty, \text{ თუ } a>0;\ \frac{a}{0}=-\infty, \text{ თუ } a<0;$$

$$0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0.$$

3°. $+\infty$ და $-\infty$ სიმბოლოებისათვის გვაქვს აგრეთვე

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty;$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty;$$

$$(+\infty)+(-\infty)=(-\infty)+(+\infty)=(\pm\infty)-(\pm\infty)=0;$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty.$$

რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც შევსებულია $+\infty$ და $-\infty$ ელემენტებით გაფართოებული რიცხვთა ღერძი ვუწოდოთ და იგი აღვნიშნოთ $\overline{Z}_1$ სიმბოლოთი.

თუ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრული არაა მაშინ ვწერთ

$$\sup E = +\infty,$$

ხოლო, თუ E ქვემოდან შემოუსაზღვრულია, მაშინ დავწერთ

$$\inf E = -\infty.$$

§ 10. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სისრულე

თეორემა 21. ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი $\{x_n\}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ ამ მიმდევრობას აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი და იგი აღვნიშნოთ s ასოთი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარის განსაზღვრის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი x_ν რიცხვი, რომ $x_\nu > s-\varepsilon$. რაკი მოცემული მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$x_n > s-\varepsilon, \text{ როდესაც } n > \nu,$$

ანუ

$$|x_n - s| = s - x_n < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ აღებული ზრდადი მიმდევრობა ზემოდან შემოუსაზღვრელია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 22. ნამდვილ რიცხვთა კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია, ხოლო თუ მიმდევრობა ქვემოდან შემოუსაზღვრელია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

განსაზღვრა 12. სეგმენტთა მიმდევრობას $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, $\Delta_2 = [a_2, b_2], \ldots, \Delta_n = [a_n, b_n], \ldots$ ეწოდება კლებადი, თუ $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$

თეორემა 23. თუ სეგმენტთა მიმდევრობა $\{\Delta_n\}$ კლებადია და ამასთანავე ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი k, რომ $|\Delta_k|<\varepsilon$, მაშინ არსებობს ერთადერთი რიცხვი ξ, რომელიც ყველა Δ_n სეგმენტს ეკუთვნის.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P=\{a_1,\ a_2, \dots, a_n, \dots\},\ Q=\{b_1,\ b_2, \dots,\ b_n, \dots\}.$$

ცხადია, P და Q სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ორივე პირობას და ამიტომ

$$\sup P=\inf Q=\xi.$$

რადგანაც ξ არის როგორც P სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი, ისე Q სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარიც, ამიტომ

$$a_n\leq\xi\leq b_n$$

ყოველი n-თვის. მაშასადამე, $\xi\in\Delta_n$ $(n=1,\ 2, \dots)$.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ ξ ერთადერთი რიცხვია, რომელიც ეკუთვნის ყველა Δ_n სეგმენტს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ ξ რიცხვის გარდა არსებობს სხვა რიცხვი ξ^*, რომელიც ყველა Δ_n სეგმენტს ეკუთვნის. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\xi<\xi^*$. მაშინ ყოველი n-თვის $|\Delta_n|\geq\xi^*-\xi$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან Δ_n სეგმენტის სიგრძე რაგინდ მცირე შეგვიძლია გავხადოთ, თუ n საკმაოდ დიდი ავიღეთ. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა და ამიტომ $\xi^*=\xi$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას ეწოდება კანტორის თეორემა სეგმენტთა კლებადი მიმდევრობის შესახებ.

თეორემა 24. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი შემოსაზღვრული $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. რადგან $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი $[a,\ b]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა ელემენტს. გავყოთ $[a,\ b]$ სეგმენტი ორ კონგრუენტულ სეგმენტად, მაშინ ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $\Delta_1=[a_1,\ b_1]$. აღვნიშნოთ x_{n_1} სიმბოლოთი მოცემული $\{x_n\}$ მიმდევრობის რომელიმე ელემენტი, რომელიც მოთავსებულია Δ_1 სეგმენტზე.

ანალოგიურად, $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ ორ კონგრუენტულ სეგმენტად და ამ სეგმენტებიდან ის, რომელიც შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს აღვნიშნოთ $\Delta_2=[a_2, b_2]$ სიმბოლოთი. აღვნიშნოთ x_{n_2} სიმბოლოთი $\{x_n\}$ მიმდევრობის ნებისმიერი ელემენტი, რომელიც მოსდევს x_{n_1} ელემენტს და ეკუთვნის Δ_2 სეგმენტს. ასეთი პროცესის k-ურ საფეხურზე გამოვყოფთ $\Delta_k=[a_k, b_k]$ სეგმენტს, რომელიც შეიცავს აგრეთვე $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს. აღვნიშნოთ x_{n_k}-თი $\{x_n\}$ მიმდევრობის ნებისმიერი ელემენტი, რომელიც მოსდევს $x_{n_{k-1}}$ ელემენტს და ეკუთვნის Δ_k სეგმენტს. ეს პროცესი უსაზღვროდ განვაგრძოთ. მივიღებთ სეგმენტთა კლებად მიმდევრობას

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_k \supset \cdots,$$

ამასთანავე

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

აქედან ჩანს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_k - a_k)=0$ და ამიტომ 23-ე თეორემის ძალით არსებობს ერთადერთი რიცხვი ξ, რომელიც ყველა Δ_k სეგმენტს ეკუთვნის, ე. ი.

$$a_k \leq \xi \leq b_k.$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi.$$

შემდეგ, რაკი $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, ამიტომ გვექნება

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26. ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე წარმოადგენს სრულ ველს.

დამტკიცება. ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$. ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია რომელიღაც ξ რიცხვისაკენ: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$.

დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რი-

ცხვი. მაშინ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის ძალით არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N. \qquad (10.1)$$

შევარჩიოთ k ისე, რომ ერთდროულად დაცული იყოს პირობები

$$|x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ და } n_k > N.$$

მაშინ, თუ (10.1) გამოსახულებაში ვიგულისხმებთ $m = n_k$, გვექნება

$$|x_{n_k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, როდესაც $n > N$, გვექნება

$$|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ე. ი.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია და, მაშასადამე, Z სიმრავლე წარმოადგენს სრულ ველს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. რაკი ყოველი კრებადი მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა 26. ნამდვილ რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური.

ამ თეორემას უწოდებენ კოშის თეორემას მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ.

§ 11. ნამდვილ რიცხვთა თეორია კანტორ-მერეს მიხედვით

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა თეორიას, რომელიც კანტორისა და მერეს (Méray) მიერ იყო აგებული. დედეკინდის თეორიის აგებისას ცნობილად იგულისხმებოდა ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე და მისი თვისებები, ხოლო ნამდვილი რიცხვის ცნება დაკავშირებული იყო რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლესთან. ასევე,

კანტორისა და მერეს თეორიის აგებისას ცნობილად იგულისხმება ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე და მისი თვისებები, ხოლო ნამდვილი რიცხვის ცნება დაკავშირებულია რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობასთან.

1. რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობები. განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

და იგი აღვნიშნოთ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ან x სიმბოლოთი:

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

განსაზღვრა 13. თუ გვაქვს რაციონალურ რიცხვთა ორი მიმდევრობა $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ და $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, მაშინ მიმდევრობას $(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots)$ ვუწოდებთ x და y მიმდევრობების ჯამს და აღვნიშნავთ $x+y$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ $x+y=y+x$.

განსაზღვრა 14. $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ მიმდევრობის მოპირდაპირე მიმდევრობა ვუწოდოთ $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n, \ldots)$ მიმდევრობას და იგი აღვნიშნოთ $-x$ სიმბოლოთი.

x და y მიმდევრობების $x-y$ სხვაობა ეწოდება $x+(-y)$ მიმდევრობას:

$$x-y=x+(-y).$$

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულებები:

1) ორი ფუნდამენტალური x და y მიმდევრობის $x+y$ ჯამი კვლავ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა.

2) თუ x მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, მაშინ $-x$ მიმდევრობაც ფუნდამენტალურია.

განსაზღვრა 15. რაციონალურ რიცხვთა $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ მიმდევრობას ნულ-მიმდევრობა ეწოდება, თუ ყოველი რაციონალური $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

თეორემა 27. თუ რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტალური x მიმდევრობა არ წარმოადგენს ნულ-მიმდევრობას, მაშინ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$, რომ მოცემული მიმდევრობის ყველა ელემენ-

ტი, დაწყებული გარკვეულ ადგილიდან, აბსოლუტური სიდიდით r-ზე მეტი იქნება.

დამტკიცება. რადგანაც x მიმდევრობა არ არის ნულ-მიმდევრობა, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მოიძებნება ნატურალური რიცხვი $m>n$, რომლისთვის ადგილი ექნება უტოლობას $|x_m|>2r$. შემდეგ, რაკი x მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_m-x_n|<r, \text{ როდესაც } m>N, \ n>N.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი $n>N$ და ამ რიცხვისათვის მოვძებნოთ ისეთი $m>n$, რომლისთვისაც ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $|x_m|>2r$. მაშინ უტოლობიდან $|x_m-x_n|<r$ გვაქვს

$$|x_n|>|x_m|-r>2r-r=r.$$

ამრიგად,

$$|x_n|>r, \text{ როდესაც } n>N.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 16. რაციონალურ რიცხვთა x მიმდევრობას ეწოდება დადებითი, თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$, რომ x მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, r-ზე მეტია.

განსაზღვრა 17. რაციონალურ რიცხვთა x მიმდევრობას უარყოფითი ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$, რომ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, $-r$ რიცხვზე ნაკლებია.

განსაზღვრა 18. რაციონალურ რიცხვთა ორ ფუნდამენტალურ x და y მიმდევრობას ეკვივალენტური ვუწოდოთ, თუ $x-y$ მიმდევრობა ნულ-მიმდევრობაა; ამ შემთხვევაში დავწერთ $x\sim y$.

თეორემა 28. რაციონალურ რიცხვთა ყოველი ფუნდამენტალური x მიმდევრობისათვის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა ზრდადი და კლებადი მიმდევრობები, რომლებიც x მიმდევრობის ეკვივალენტური არიან.

დამტკიცება. რადგანაც x მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი ორი რაციონალური რიცხვი a^* და b^*, $a^*<b^*$, რომ ამ რიცხვებს შორის მოთავსდება x მიმდევრობის ყველა წევრი.

ავიღოთ a^* და b^* რიცხვების საშუალო არითმეტიკული

$$c_1 = \frac{a^*+b^*}{2}.$$

ცხადია, რომ $a^* < c_1 < b^*$. თუ a^* და c_1 რიცხვებს შორის მოთავსდება x მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, მაშინ აღვნიშნოთ $a_1 = a^*$, $b_1 = c_1$; თუკი c_1 და b^* რიცხვებს შორის მოთავსდება x მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, მაშინ c_1 და b^* რიცხვები აღვნიშნოთ შესაბამისად a_1 და b_1 სიმბოლოებით. ორივე შემთხვევაში $a_1 < b_1$ და

$$b_1 - a_1 = \frac{b^*-a^*}{2}.$$

ცხადია, a_1 და b_1 რიცხვებს შორის მოთავსებულია x მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან. ამ წევრებიდან ავიღოთ რომელიმე x_{n_1} წევრი.

ახლა განვიხილოთ რიცხვი

$$c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}.$$

აქედან გვაქვს $a_1 < c_2 < b_1$. თუ a_1 და c_2 რიცხვებს შორის არსებობს x მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, მაშინ a_1 და c_2 რიცხვები აღვნიშნოთ შესაბამისად a_2 და b_2 ასოებით, თუკი c_2 და b_1-ს შორის არსებობს x მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნები $a_2 = c_2$, $b_2 = b_1$. ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{b^* - a^*}{2^2}.$$

ამას გარდა, a_2 და b_2 რიცხვებს შორის მოთავსებულია x მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან. ამ წევრებიდან ავიღოთ რაიმე წევრი x_{n_2}, სადაც $n_2 > n_1$.

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა ორ მიმდევრობას $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ და $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, ამასთანავე

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots < b^*,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq \cdots > a^*,$$

$$b_k - a_k = \frac{b^* - a^*}{2^k} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

გარდა ამისა, ყოველი k-სათვის a_k და b_k რიცხვებს შორის მოთავსებულია x მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან. ამ წევრებიდან ავიღოთ რომელიმე x_{n_k} წევრი, სადაც $n_k > n_{k-1}$ და ა. შ. ჩვენ მივიღეთ x მიმდევრობის ქვემიმდევრობა $y=(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$, სადაც $y_k = x_{n_k}$ $(k=1, 2, \ldots)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $y \sim x$ და a და b მიმდევრობები ფუნდამენტალურია.

დავამტკიცოთ, რომ $a \sim y$, $b \sim y$. ავიღოთ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი $\varepsilon > 0$. შევარჩიოთ ნატურალური რიცხვი ν ისე, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას

$$\frac{b^* - a^*}{2^\nu} < \varepsilon.$$

მაშინ ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > \nu$, გვექნება

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი

$$a_n \leq y_n \leq b_n,$$

ამიტომ

$$0 \leq y_n - a_n < \varepsilon, \quad 0 \leq b_n - y_n < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

მაშასადამე, $y - a$ და $b - y$ მიმდევრობები წარმოადგენენ ნულ მიმდევრობებს. ასე რომ $a \sim y$, $b \sim y$. მაგრამ, რაკი $y \sim x$, ამიტომ $a \sim x$, $b \sim x$. თეორემა დამტკიცებულია.

შემდეგში a და b მიმდევრობებს ვუწოდოთ შესაბამისად x მიმდევრობის ქ ვ ე დ ა მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა და ზ ე დ ა მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა.

თეორემა 20. თ უ ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი x მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა დ ა დ ე ბ ი თ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ი ს ი ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი ყ ო ვ ე ლ ი y მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ც დ ა დ ე ბ ი თ ი ი ქ ნ ე ბ ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ მიმდევრობა დადებითია, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r > 0$ და ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$x_n > r, \text{ როდესაც } n > N.$$

პირობის ძალით $y \sim x$ და ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N^* \geq N$, რომ

$$|x_n - y_n| < \frac{r}{2}, \text{ როდესაც } n > N^*. \tag{11.1}$$

შემდეგ, (11·1) უტოლობის თანახმად, $y_n = x_n + (y_n - x_n)$ ტოლობიდან გვაქვს:

$$y_n > x_n - |y_n - x_n| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}, \text{ როდესაც } n > N^*$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ, თუ ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი x მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ი ს ი ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ-რ ი ყ ო ვ ე ლ ი y მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ი ქ ნ ე ბ ა უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი.

2. ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრა კანტორისა და მერეს მიხედვით. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, რაციონალურ რიცხვთა ორი ფუნდამენტალური x და y მიმდევრობა ეკვივალენტურია, თუ $x - y$ არის ნულ-მიმდევრობა და ამ შემთხვევაში ვწერთ $x \sim y$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეკვივალენტურობის მიმართებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) თ უ x ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ა, მ ა შ ი ნ $x \sim x$ (რ ე ფ ლ ე ქ ს უ რ ო ბ ა);

2) თ უ $x \sim y$, მ ა შ ი ნ $y \sim x$ (ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ო ბ ა);

3) თ უ $x \sim y$ დ ა $y \sim z$, მ ა შ ი ნ $x \sim z$ (ტ რ ა ნ ზ ი ტ უ ლ ო ბ ა).

პირველი ორი თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს ეკვივალენტური მიმდევრობის განსაზღვრიდან, მესამე თვისება კი შემდეგი ტოლობის საფუძველზე:

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

მართლაც, პირობის ძალით $x - y$ და $y - z$ წარმოადგენენ ნულ-მიმდევრობებს, მაგრამ ორი ნულ-მიმდევრობის ჯამი ისევ ნულ-მიმდევრობაა. ასე რომ $x \sim z$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა **10.** ნამდვილი რიცხვი ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა ყველა ურთიერთეკვივალენტურ მიმდევრობის კლასს.

აღვნიშნოთ $[x]$ სიმბოლოთი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტალური x მიმდევრობის ყველა ეკვივალენტურ მიმდევრობის კლასს. x მიმდევრობას ვუწოდოთ ნამდვილი $[x]$ რიცხვის წ ა რ მ ო მ ა დ გ ე ნ ე ლ ი.

1), 2) და 3) თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

ა) თ უ x ა რ ი ს რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა-ლ უ რ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა, მ ა შ ი ნ $x \in [x]$.

ბ) თ უ $x \sim y$, მ ა შ ი ნ ნ ა მ დ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი $[x]$ დ ა $[y]$ ტ ო-

ლია, ე. ი. $[x]$ და $[y]$ კლასები ერთს და იმავე ელემენტებს შეიცავენ. ამ შემთხვევაში ვწერთ $[x]=[y]$.

გ) თუ არ სრულდება $x\sim y$ დამოკიდებულება, მაშინ $[x]$ და $[y]$ კლასებს არა აქვთ არც ერთი საერთო ელემენტი.

ა) თვისება გამომდინარეობს 1) თვისებიდან.

დავამტკიცოთ ბ) თვისება. ავიღოთ $[x]$ კლასის ნებისმიერი x' ელემენტი. მაშინ $x'\sim x$ და, მაშასადამე, 2) თვისების ძალით $x'\sim y$, ე. ი. $x'\in[y]$. ამრიგად,

$$[x]\subset[y].$$

ანალოგიურად ვაჩვენოთ, რომ

$$[y]\subset[x].$$

მაშასადამე, $[x]=[y]$.

ახლა დავამტკიცოთ გ) თვისება. ვთქვათ, $x\sim y$ დამოკიდებულება არ სრულდება, მაგრამ $[x]$ და $[y]$ კლასებს აქვს რაიმე საერთო ელემენტი x^*. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x^*\sim x$ და $x^*\sim y$. მაშინ 2) და 3) თვისებათა ძალით $x\sim y$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ა), ბ) და გ) თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ რაციონალურ რიცხვთა ყველა ფუნდამენტალური მიმდევრობის სიმრავლე დაყოფილია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ კლასებად ისე, რომ ორი ელემენტი ეკუთვნის ერთსა და იმავე კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ეკვივალენტურია.

განსაზღვრა **20.** თუ r რაციონალური რიცხვია, მაშინ $(r, r, \ldots, r, \ldots)$ მიმდევრობის ეკვივალენტური ყველა მიმდევრობის კლასს ნამდვილი რაციონალური რიცხვი ვუწოდოთ და იგი აღვნიშნოთ $[r]$ სიმბოლოთი. ნამდვილ რაციონალურ $[0]$ რიცხვს ეწოდება ნამდვილი რიცხვი ნული.

ნამდვილ რიცხვს, რომელიც ნამდვილი რაციონალური რიცხვი არაა, ირაციონალური რიცხვი ეწოდება. მაშასადამე, თუ ნამდვილი რიცხვი $[x]$ ირაციონალურია, მაშინ რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტალური x მიმდევრობა კრებადი არ იქნება.

განსაზღვრა **21.** ნამდვილ $[x]$ რიცხვს დადებითი ეწოდება, თუ x მიმდევრობა დადებითია, ხოლო $[y]$ რიცხვი უარყოფითია, თუ y მიმდევრობა უარყოფითია.

3. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის დალაგებულობა. ახლა დავადგინოთ თუ რას ნიშნავს, რომ ერთი ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ან მეტია მეორე ნამდვილ რიცხვზე.

განსაზღვრა 22. ჩვენ ვიტყვით, რომ ნამდვილი რიცხვი $[x]$ მეტია ნამდვილ $[y]$ რიცხვზე, თუ $x-y$ მიმდევრობა დადებითია და ამ შემთხვევაში დავწერთ $[x]>[y]$. თუკი $x-y$ მიმდევრობა უარყოფითია, მაშინ $[x]$ რიცხვი ნაკლებია $[y]$ რიცხვზე: $[x]<[y]$.

ცხადია, თუ $[x]>[y]$, მაშინ $[y]<[x]$. ამას გარდა, თუ $[x]$ რიცხვი დადებითია, მაშინ $[x]>[0]$, ხოლო, თუ $[x]$ უარყოფითია, მაშინ $[x]<[0]$.

თეორემა 30. ყოველი ნამდვილი რიცხვი $[x]$ არის ან დადებითი, ან უარყოფითი, ან ნული.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ მიმდევრობა არ არის ნულმიმდევრობა. მაშინ 27-ე თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$, რომ x მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, აბსოლუტური მნიშვნელობით მეტი იქნება r-ზე. ამრიგად, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n|>r, \text{ როდესაც } n>N.$$

რადგანაც x მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N^* \geq N$, რომ

$$|x_n|>r, \ |x_{n+p}-x_n|<r, \text{ როდესაც } n>N^* \tag{11.2}$$

ნატურალური p რიცხვის ყველა მნიშვნელობისათვის.

ახლა ვთქვათ, n რაიმე ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომელიც N^*-ზე მეტია და განვიხილოთ მიმდევრობა

$$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, \ldots \tag{11.3}$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა ან დადებითია ან უარყოფითი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, (11·3) მიმდევრობა არც დადებითია, არც უარყოფითი და არც ნული. მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვები $i>n$ და $j>n$, რომ

$$x_i>0, \ x_j<0$$

და, მაშასადამე, თანახმად (11·2) უტოლობებისა, გვექნება

$$x_i>r, \ |x_i-x_j|=x_i+|-x_j|<r.$$

მაგრამ უკანასკნელი უტოლობა შეუძლებელია, ვინაიდან $x_i-x_j>2r$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამრიგად, (11.3) მიმდევრობის წევრები, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან ყველა დადებითია, ან ყველა უარყოფითი. ამიტომ ნამდვილი რიცხვი $[x]$ დადებითია ან უარყოფითია.

თუ x მიმდევრობა წარმოადგენს ნულმიმდევრობას, მაშინ $[x]=[0]$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 31. ორი ნამდვილი $[x]$ და $[y]$ რიცხვისათვის მართებულია ერთ-ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან: ან $[x]=[y]$, ან $[x]>[y]$, ან $[x]<[y]$.

ეს თეორემა უშუალო შედეგია 30-ე თეორემისა.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი თვისება:

თუ $[x]<[y]$ და $[y]<[z]$, მაშინ $[x]<[z]$ (ტრანზიტულობა).

4. ნამდვილი რიცხვების შეკრება და გამოკლება. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 23. ორი ნამდვილი $[x]$ და $[y]$ რიცხვის ჯამი $[x]+$ $+[y]$ ეწოდება $[x+y]$ ნამდვილ რიცხვს:

$$[x]+[y]=[x+y],$$

ხოლო $[x]$ და $[y]$ რიცხვების სხვაობა $[x]-[y]$ ჰქვია $[x-y]$ რიცხვს.

თუ გვაქვს ნამდვილი რიცხვი $[x]$, მაშინ $[-x]$ რიცხვს ეწოდება $[x]$ რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი და იგი აღინიშნება $-[x]$ სიმბოლოთი:

$$[-x]=-[x].$$

მარტივად მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. ნებისმიერი ორი ნამდვილი $[x]$ და $[y]$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$[x]+[y]=[y]+[x] \quad \text{(შეკრების კომუტატიურობა).}$$

2. ნებისმიერი სამი ნამდვილი $[x]$, $[y]$ და $[z]$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$([x]+[y])+[z]=[x]+([y]+[z]) \quad \text{(შეკრების ასოციატიურობა).}$$

3. ნებისმიერი ნამდვილი $[x]$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობები:

$$[x]+[0]=[x],\ [x]+(-[x])=[0],\ [x]-[x]=[0].$$

4. ნებისმიერი $[x]$ და $[y]$ ნამდვილი რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$[x]+([y]-[x])=[y].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ გამოკლების ოპერაცია წარმოადგენს შეკრების შებრუნებულ ოპერაციას.

5. ნამდვილი რიცხვების გამრავლება. განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა ორი მიმდევრობა $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ და $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$.

მიმდევრობას $(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, \dots)$ ვუწოდოთ x და y მიმდევრობების ნამრავლი და იგი xy სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

ცხადია, რომ $xy=yx$.

თეორემა 32. თუ რაციონალურ რიცხვთა x და y მიმდევრობები ფუნდამენტალურია, მაშინ xy მიმდევრობაც ფუნდამენტალურია.

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარად, როგორც II თავის 33-ე თეორემა.

განსაზღვრა 24. ორი $[x]$ და $[y]$ ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი $[x]\cdot[y]$ ეწოდება $[xy]$ ნამდვილ რიცხვს.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. $[x]\cdot[y]=[y]\cdot[x]$ (გამრავლების კომუტატიურობა).

2. $([x]\cdot[y])\cdot[z]=[x]\cdot([y]\cdot[z])$ (გამრავლების ასოციატიურობა).

3. $([x]+[y])\cdot[z]=[x]\cdot[z]+[y]\cdot[z]$ (გამრავლების დისტრიბუტიულობა შეკრების მიმართ).

4. $[x]\cdot[1]=[x]$ ყოველი ნამდვილი $[x]$ რიცხვისათვის.

5. $[x]\cdot[0]=[0]$ ყოველი ნამდვილი $[x]$ რიცხვისათვის.

6. თუ $[x]$ და $[y]$ ნამდვილი რიცხვები ორივე დადებითია ან უარყოფითია, მაშინ $[x]\cdot[y]>[0]$.

თეორემა 33. თუ $[x]$ და $[y]$ ნამდვილი რიცხვები დადებითია, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი მთელი ნამდვილი რიცხვი $[m]$, რომ ადგილი ექნება უტოლობას $[m]\cdot[x]>[y]$.

დამტკიცება. რადგანაც რაციონალურ რიცხვთა $x=(x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n, \dots)$ და $y=(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ მიმდევრობები დადებითია, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $r>0$ და ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$x_n>r, \ y_n>r, \text{ როდესაც } n>N.$$

მეორე მხრივ, რაკი y მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვი $K>0$, რომ ყველა n-ისათვის ადგილი ექნება უტოლობას $y_n<K$. ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი m იმდენად დიდი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $mr>K$.

განვიხილოთ $(mx_1, mx_2, \dots, mx_n, \dots)$ მიმდევრობა. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ვთქვათ, $n>N$, მაშინ $x_n>r$ და $y_n<K$. მაშასადამე,

$$mx_n>mr>K>y_n.$$

აქედან ვღებულობთ

$$mx_n - y_n > 0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $[mx] > [y]$. მაგრამ $[mx] = [m] \cdot [x]$. მაშასადამე, $[m] \cdot [x] > [y]$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია. ამრიგად, ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაშიაც ადგილი აქვს არქიმედეს აქსიომას.

6. ორი ნამდვილი რიცხვის] ფარდობა. ავიღოთ რაციონალურ რიცხვთა ორი მიმდევრობა $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$. ვიგულისხმოთ, რომ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული $y_n \neq 0$. თუ რომელიმე $y_k = 0$, მაშინ $\frac{x_k}{y_k}$ ფარდობის ნაცვლად ავიღოთ რაციონალური რიცხვი 0. მიმდევრობას $\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots\right)$ ეწოდება x და y მიმდევრობების ფარდობა და აღინიშნება $\frac{x}{y}$ სიმბოლოთი.

თეორემა 34. ორი ფუნდამენტალური x და y მიმდევრობის $\frac{x}{y}$ ფარდობა კვლავ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, თუ y არაა ნულმიმდევრობა.

ეს თეორემა მტკიცდება იმ გვარადვე, როგორც II თავის 34-ე თეორემა.

განსაზღვრა 26. თუ გვაქვს ორი ნამდვილი რიცხვი $[x]$ და $[y]$, ამასთანევე $[y] \neq [0]$, მაშინ $\left[\frac{x}{y}\right]$ რიცხვს ეწოდება $[x]$ და $[y]$ რიცხვების ფარდობა და აღინიშნება $\frac{[x]}{[y]}$ სიმბოლოთი.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი

თეორემა 35. თუ $[a]$ და $[b]$ ნამდვილი რიცხვებია, ამასთანავე $[a] \neq [0]$, მაშინ განტოლებას $[a] \cdot [x] = [b]$ აქვს ამონახსნი და ეს ამონახსნია $\frac{[b]}{[a]}$ ნამდვილი რიცხვი.

საბოლოოდ ასეთი დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ: კანტორ-მერეს აზრით ყველა ნამდვილი რიცხვის Z^* სიმრავლე წარმოადგენს არქიმედესეულად განლაგებულ ველს.

თეორემა 36. Z და Z^* სიმრავლეები ურთიერთმსგავსია, სადაც Z დედეკინდის აზრით ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეა.

დამტკიცება. ავიღოთ Z სიმრავლის რაიმე α ელემენტი. თუ α ნამდვილი რაციონალური r^* რიცხვია, მაშინ ამ რიცხვს შევუსაბამოთ Z^*

სიმრავლის $[x]$ ელემენტი, სადაც $x=(r, r, \dots, r, \dots)$. აქ r წარმოადგენს r^* რიცხვის შესაბამის რაციონალურ რიცხვს. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ α ირაციონალური რიცხვია. მაშინ მე-8 თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია მოვძებნოთ რაციონალურ რიცხვთა ისეთი ორი მიმდევრობა $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ და $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, რომ

$$a_1<a_2<\dots<a_n<\dots<b_1,$$

$$b_1>b_2>\dots>b_n>\dots>a_1,$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

ამასთანავე $a_n \in \alpha$ $(n=1, 2, \dots)$, ხოლო ყოველი b_n ეკუთვნის α რიცხვის ზედა კლასს.

$a=(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ და $b=(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ მიმდევრობებს ვუწოდოთ α რიცხვის ქვედა და ზედა მიმდევრობები. ეს მიმდევრობები ფუნდამენტალურია და, ამას გარდა, $a \sim b$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ a და b მიმდევრობები კრებადი არაა და ამიტომ კანტორის ნამდვილი $[a]$ რიცხვი ირაციონალურია. ეს რიცხვი შევუსაბამოთ α რიცხვს.

ამრიგად, დედეკინდის ნამდვილი α რიცხვს შევუსაბამეთ კანტორის გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, ამასთანავე დედეკინდის რაციონალურ რიცხვს კანტორის რაციონალური რიცხვი შეესაბამება, დედეკინდის ირაციონალურ რიცხვს კი კანტორის ირაციონალური რიცხვი.

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ α და β დედეკინდის ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha<\beta$, მაშინ მათი შესაბამისი კანტორის ნამდვილი $[a]$ და $[b]$ რიცხვებისათვის გვექნება $[a]<[b]$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ Z^* სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Z სიმრავლის გარკვეული ელემენტი. ავიღოთ Z^* სიმრავლის რაიმე $[x]$ ელემენტი. რაკი x მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ 28-ე თეორემის თანახმად არსებობს მისი ქვედა და ზედა მიმდევრობები $a=(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ და $b=(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$.

გავყოთ რაციონალურ რიცხვთა Γ_0 სიმრავლე ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ a მიმდევრობის ყველა წევრი და ყველა ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია a მიმდევრობის რომელიმე ელემენტზე, ხოლო B კლასს მივაკუთვნოთ დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. დავამტკიცოთ, რომ გვაქვს $A|B$ განკვეთა. ცხადია, არც A და არც B კლასი ცარიელი არაა, ვინაიდან A კლასში შედის a მიმდევრობის ელემენტები, B-ში კი b მიმ-

დევრობისა. Γ_0 სიმრავლის ყოველი ელემენტი, რომელიც A კლასის რომელიმე ელემენტზე ნაკლებია, იმავე კლასს ეკუთვნის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ A კლასში არაა უდიდესი ელემენტი. დავუშვათ; რომ A კლასში არსებობს უდიდესი ელემენტი r. მაშინ A კლასის აგების თანახმად, მოიძებნება a მიმდევრობის ისეთი a_n ელემენტი, რომელიც მეტი იქნება r-ზე და რაკი $a_n \in A$, მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, A კლასში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი. ამრიგად, განკვეთის სამივე პირობა შესრულებულია და ამიტომ გვაქვს $A|B$ განკვეთა. კანტორის ნამდვილ $[x]$ რიცხვს შევუსაბამოთ დედეკინდის ნამდვილი რიცხვი $\alpha=A$. თუ $[x]$ რიცხვი ირაციონალურია, მაშინ α რიცხვიც იქნება ირაციონალური რიცხვი დედეკინდის აზრით. ამას გარდა, თუ $[a]$ და $[b]$ კანტორის ნამდვილი რიცხვებია და $[a]<[b]$, მაშინ მათი შესაბამისი დედეკინდის ნამდვილი რიცხვები α და β აკმაყოფილებენ უტოლობას $\alpha<\beta$.

ამრიგად, Z სიმრავლის ყოველ α ელემენტს შეესაბამება Z^* სიმრავლის გარკვეული $[a]$ ელემენტი და, პირიქით, Z^* სიმრავლის ყოველ $[a]$ ელემენტს შეესაბამება Z სიმრავლის გარკვეული α ელემენტი. მაშასადამე, Z და Z^* სიმრავლეები ურთიერთეკვივალენტურია. ამას გარდა, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თუ α და β არის Z სიმრავლის ორი ნებისმიერი ელემენტი და $\alpha<\beta$, მაშინ Z^* სიმრავლის შესაბამისი $[a]$ და $[b]$ ელემენტებისათვის გვექნება $[a]<[b]$. მაშასადამე, Z და Z^* სიმრავლეები ურთიერთმსგავსია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 87. თუ Z სიმრავლის α და β ელემენტების შესაბამისი ელემენტები Z^* სიმრავლისა არის $[x]$ და $[y]$, მაშინ $\alpha+\beta$ ჯამის შესატყვისი ელემენტი იქნება $[x]+[y]$, ხოლო $\alpha\beta$ ელემენტისა კი $[x]\cdot[y]$.

დამტკიცება. ავიღოთ α და β რიცხვების რაიმე ქვედა მიმდევრობები $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ და $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P=\{a_1^*+b_1^*,\ a_2^*+b_2^*, \ldots,\ a_n^*+b_n^*, \ldots\},$$

სადაც a_n^* და b_n^* არიან a_n და b_n რაციონალური რიცხვების შესაბამისი ნამდვილი რაციონალური რიცხვები. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\alpha+\beta=\sup P.$$

მიმდევრობა $a+b=(a_1+b_1,\ a_2+b_2, \ldots,\ a_n+b_n, \ldots)$ წარმოადგენს $\alpha+\beta$ რიცხვის ქვედა მიმდევრობას. ამას გარდა, $[x]=[a]$, $[y]=[b]$ და ამიტომ $[x]+[y]=[a]+[b]$. ამრიგად, $\alpha+\beta$ რიცხვის შესაბამისი რიცხვია $[x]+[y]$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\alpha\beta$ ნამრავლის შესაბამისი რიცხვია $[x]\cdot[y]$. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha>0$, $\beta>0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ a და b მიმდევრობების ყველა ელემენტი დადებითია. ვთქვათ,

$$Q=\{ a_1^*b_1^*,\ a_2^*b_2^*, \dots ,a_n^*b_n^*, \dots \}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\alpha\beta=\sup Q.$$

ცხადია, $ab=(a_1b_1,\ a_2b_2, \dots ,\ a_nb_n, \dots)$ მიმდევრობა წარმოადგენს $\alpha\beta$ რიცხვის ქვედა მიმდევრობას და ამიტომ $[ab]=[x]\cdot[y]$. მაშასადამე, $\alpha\beta$ რიცხვის შესაბამისი რიცხვია $[x]\cdot[y]$.

თუ $\alpha<0$ და $\beta>0$, მაშინ ზემოთ დამტკიცებულის ძალით, $(-\alpha)\beta$ რიცხვს შეესაბამება $(-[x])\cdot[y]$ რიცხვი და, მაშასადამე, $\alpha\beta=-[(-\alpha)\beta]$ რიცხვის შესაბამისი რიცხვია $-(-[x])\cdot[y]=[x]\cdot[y]$.

თუ $\alpha<0$ და $\beta<0$, მაშინ $\alpha\beta=(-\alpha)(-\beta)$ და ზემოდამტკიცებულის ძალით $\alpha\beta$ რიცხვს შეესაბამება $(-[x])\cdot(-[y])=[x]\cdot[y]$ რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ $\alpha-\beta$ რიცხვს შეესაბამება $[x]-y$ რიცხვი, ხოლო $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta\neq0)$ რიცხვის შესაბამისი რიცხვია $\frac{[x]}{[y]}$.

ამრიგად, არქიმედესეულად განლაგებული Z და Z^* ველები ურთიერთიზომორფულ სიმრავლეებს წარმოადგენენ.

თეორემა 38. ნამდვილ რიცხვთა Z^* სიმრავლე სრულ ველს წარმოადგენს.

დამტკიცება. ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა

$$[x_1],\ [x_2], \dots ,\ [x_n], \dots \tag{11.4}$$

განვიხილოთ დადებით რაციონალურ რიცხვთა ნულმიმდევრობა $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ $\dots, \varepsilon_n, \dots)$. ყოველი $[x_n]$ ნამდვილი რიცხვისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ნამდვილი რაციონალური რიცხვი $[a_n]$, რომ

$$|[x_n]-[a_n]|<[\varepsilon_n].$$

$[a_n]$ რიცხვის წარმომადგენელია $(a_n,\ a_n, \dots ,\ a_n, \dots)$ მიმდევრობა. რაკი $(11\cdot4)$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი $[\varepsilon]$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|[x_n]-[x_m]|<\frac{[\varepsilon]}{3},\ \text{როდესაც}\ n>N,\ m>N.$$

შემდეგ, ავიღოთ ნატურალური რიცხვი $N^*>N$ იმდენად დიდი, რომ მართებული იყოს უტოლობა[1]

$$[\varepsilon_n]<\frac{[\varepsilon]}{3}, \text{ როდესაც } n>N^*.$$

მაშინ ყოველი m და n რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $m>N^*$, $n>N^*$, გვექნება

$$|[a_n]-[a_m]|\leq|[a_n]-[x_n]|+|[x_n]-[x_m]|+|[x_m]-[a_m]<$$
$$<\frac{[\varepsilon]}{3}+\frac{[\varepsilon]}{3}+\frac{[\varepsilon]}{3}=[\varepsilon].$$

მაშასადამე, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ფუნდამენტალურია.

დავამტკიცოთ, რომ (11.4) მიმდევრობა კრებადია ნამდვილ $[a]$ რიცხვისაკენ. რაკი

$$\lim_{n\to\infty}[a_n]=[a],$$

ამიტომ ნებისმიერი დადებითი $[\varepsilon]$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu>N^*$, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|[a_n]-[a]|<\frac{2}{3}[\varepsilon], \text{ როდესაც } n>\nu.$$

ახლა თუ ვიგულისხმებთ, რომ $n>\nu$, გვექნება

$$|[x_n]-[a]|\leq|[x_n]-[a_n]|+|[a_n]-[a]|<\frac{1}{3}[\varepsilon]+\frac{2}{3}[\varepsilon]=[\varepsilon].$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}[x_n]=[a].$$

თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც დავინახეთ, კანტორ-მერეს და დედეკინდის ნამდვილ რიცხვთა თეორიები არსებითად ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ამიტომ ისინი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მათემატიკისა და გამოყენებით საკითხებში ერთნაირი წარმატებით.

შემდეგში ნამდვილ $[x]$ რიცხვს აღვნიშნავთ x ასოთი.

---

[1] $\frac{[\varepsilon]}{3}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ნამდვილი რიცხვი $\frac{[\varepsilon]}{[3]}$.

§ 12. ნამდვილი რიცხვის დაშლა უსასრულო ორწილადად

განვიხილოთ რაიმე ნამდვილი რიცხვი x. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ იგი დადებითია. თუ x მთელი m რიცხვია, მაშინ დავწერთ $x=(m,000\ldots)_2$, ხოლო თუ x მთელი რიცხვი არაა, მაშინ მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვი m, რომ ადგილი ექნეს უტოლობებს

$$m<x<m+1.$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ x რიცხვს არა აქვს სახე $m+\frac{p}{2^n}$, სადაც p და n მთელი დადებითი რიცხვებია. გავყოთ $[m, m+1]$ სეგმენტი შუაზე, მივიღებთ ორ სეგმენტს

$$\Delta_0=\left[m,\ m+\frac{1}{2}\right],\quad \Delta_1=\left[m+\frac{1}{2},\ m+1\right].$$

მიღებული სეგმენტებიდან თითოეულის სიგრძეა $\frac{1}{2}$. ცხადია, x რიცხვი მოთავსდება აღნიშნული სეგმენტებიდან ერთ-ერთის შიგნით, ვინაიდან მას არა აქვს სახე $m+\frac{p}{2^n}$. ის სეგმენტი, რომლის შიგნით მოთავსდება x რიცხვი, აღვნიშნოთ Δ_{i_1} სიმბოლოთი. აქ i_1 ინდექსი არის ან 0 ან 1. გავყოთ $\Delta_{i_1}=\left[m+\frac{i_1}{2},\ m+\frac{i_1+1}{2}\right]$ სეგმენტი შუაზე, მივიღებთ

$$\Delta_{i_10}=\left[m+\frac{i_1}{2},\ m+\frac{i_1}{2}+\frac{1}{2^2}\right],\ \Delta_{i_11}=\left[m+\frac{i_1}{2}+\frac{1}{2^2},\ m+\frac{i_1+1}{2}\right].$$

ამ სეგმენტებიდან თითოეულის სიგრძეა $\frac{1}{2^2}$. რიცხვი x მოთავსდება ან Δ_{i_10} ან Δ_{i_11} სეგმენტის შიგნით, ვინაიდან მას არა აქვს სახე $m+\frac{p}{2^n}$. ამ სეგმენტებიდან ის, რომელიც შეიცავს x წერტილს აღვნიშნოთ $\Delta_{i_1i_2}$ სიმბოლოთი, სადაც i_2 არის ან 0 ან 1. აქ

$$\Delta_{i_1i_2}=\left[m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2},\ m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2+1}{2^2}\right].$$

მიღებული $\Delta_{i_1i_2}$ სეგმენტი კვლავ გავყოთ ორ სეგმენტად

$$\Delta_{i_1i_20}=\left[m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2},\ m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_3}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right],$$

$$\Delta_{i_1i_21}=\left[m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\frac{1}{2^3},\ m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2+1}{2^2}\right].$$

მოცემული x რიცხვი მოთავსდება ამ სეგმენტებიდან ერთ-ერთის შიგნით. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ სიმბოლოთი, სადაც i_3 არის ან 0 ან 1.

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას

$$i_1,\ i_2, \ldots,\ i_k, \ldots, \tag{12.1}$$

სადაც ყოველი i_k ღებულობს მნიშვნელობას ან 0-ს ან 1-ს.

m რიცხვს ეწოდება x რიცხვის მთელი ნაწილი, ხოლო $i_1,\ i_2,\ i_3, \ldots, i_k, \ldots$ რიცხვებს კი შესაბამისად x რიცხვის პირველი, მეორე, მესამე, ..., k-ური, ... ორწილადი ნიშანი. მაშასადამე, x რიცხვს შეესაბამება (12.1) მიმდევრობა და ჩვენ დავწერთ:

$$x=(m,\ i_1 i_2 \ldots i_k \ldots)_2.$$

სიმბოლოს $(m,\ i_1 i_2 \ldots i_k \ldots)_2$ ეწოდება უ ს ა ს რ უ ლ ო ო რ წ ი ლ ა დ ი.

ახლა ვთქვათ, რომ x რიცხვს აქვს სახე $m+\frac{p}{2^n}$, მასთან $\frac{p}{2^n}<1$. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$x=m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},$$

სადაც $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_{n-1}$ ღებულობენ მნიშვნელობებს ან 0-ს ან 1-ს. ამ შემთხვევაში x რიცხვი მოთავსებულია შემდეგი სეგმენტების შიგნით:

$$[m,\ m+1],\ \left[m+\frac{p_1}{2},\ m+\frac{p_1+1}{2}\right],\ \left[m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2},\ m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2+1}{2^2}\right], \ldots,$$

$$\left[m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{2^{n-1}},\ m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}+1}{2^{n-1}}\right].$$

თუ ამ უკანასკნელ სეგმენტს შუაზე გავყოფთ, მაშინ x წერტილი იქნება გაყოფის წერტილი, სახელდობრ იგი წარმოადგენს

$$\Delta_{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} 0}=$$

$$=\left[m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{2^{n-1}},\ m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right]$$

სეგმენტის მარჯვენა ბოლოს, ხოლო

$$\Delta_{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} 1}=$$

$$=\left[m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},\ m+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_{n-1}+1}{2^{n-1}}\right]$$

სეგმენტისათვის x მარცხენა ბოლო წერტილია.

ამრიგად, x რიცხვის n-ური ორწილადი ნიშნისათვის ვღებულობთ ორ მნიშვნელობას 0-სა და 1-ს. თუ $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}0}$ სეგმენტს გავყოფთ შუაზე, მაშინ x იქნება მარჯვენა ბოლო მეორე ნახევრისათვის, ე. ი. $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}01}$ სეგმენტისათვის, ხოლო, თუ $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}1}$ სეგმენტს გავყოფთ შუაზე, მაშინ x წარმოადგენს მარცხენა ბოლო წერტილს პირველი ნახევრისათვის, ე. ი. $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}10}$ სეგმენტისათვის. $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}01}$ და $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}10}$ სეგმენტების შემდგომი დანაწილებისათვის x წარმოადგენს მარჯვენა ბოლოს $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}011}$ სეგმენტისათვის და ამავე დროს იგი $\Delta_{p_1p_2\ldots p_{n-1}100}$ სეგმენტის მარცხენა ბოლოა.

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ x რიცხვისათვის ორ დაშლას უსასრულო ორწილადებად:

$$x=(m,\ p_1p_2\ldots p_{n-1}0111\ldots)_2,\ x=(m,\ p_1p_2\ldots p_{n-1}1000\ldots)_2.$$

პირველი შედგება, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, მხოლოდ ერთებისაგან, მეორე კი მხოლოდ ნულებისაგან.

ამგვარად, ყოველ ნამდვილ x რიცხვს შეესაბამება უსასრულო ორწილადი

$$x=(m,\ i_1i_2\ldots i_n\ldots)_2,$$

ე. ი.

$$x=m+\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\cdots+\frac{i_n}{2^n}+\cdots$$

იმ შემთხვევაში, როცა x რიცხვს არა აქვს სახე $m+\frac{p}{2^n}$; თუკი $x=m+\frac{p}{2^n}$, მაშინ მას შეესაბამება ორი დაშლა, რომლებიდან ერთი შეიცავს, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, მხოლოდ ერთებს, მეორე კი მხოლოდ ნულებს.

პირიქით, ყოველ უსასრულო ორწილადს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია რაიმე უსასრულო ორწილადი

$$(m,\ q_1q_2\cdots q_n\cdots)_2, \tag{12.2}$$

სადაც $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n,\ldots$ რიცხვებიდან ყოველი მათგანი ღებულობს მნიშვნელობას ან 0 ან 1-ს. განვიხილოთ სეგმენტები

$$[m,\ m+1],\ \left[m+\frac{q_1}{2},\ m+\frac{q_1+1}{2}\right],\quad \left[m+\frac{q_1}{2}+\frac{q_2}{2^2},\ m+\frac{q_1}{2}+\frac{q_2+1}{2^2}\right],\ldots,$$

$$\left[m+\frac{q_1}{2}+\frac{q_2}{2^2}+\cdots+\frac{q_n}{2^n},\ m+\frac{q_1}{2}+\frac{q_2}{2^2}+\cdots+\frac{q_n+1}{2^n}\right],\ \ldots$$

n-ური სეგმენტის სიგრძეა $\frac{1}{2^n}$ და, ამის გარდა, ეს სეგმენტები შეადგენენ სეგმენტთა კლებად მიმდევრობას. 23-ე თეორემის თანახმად, სეგმენტთა ეს მიმდევრობა განსაზღვრავს ერთადერთ x რიცხვს, რომელიც ეკუთვნის მოცემული მიმდევრობის ყველა სეგმენტს. x რიცხვის დაშლაა (12.2) და ამასთანავე ეს დაშლა ერთადერთია, თუ არ არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომლიდან დაწყებული ყველა q_k ტოლია ან 0-ის ან 1-ის. თუკი $q_k=$ $=q_{k+1}=\cdots=0$ ან $q_k=q_{k+1}=\cdots=1$, მაშინ x რიცხვს აქვს სახე $m+\frac{p}{2^k}$, ე. ი. ამ შემთხვევაში გვექნება სასრული ორწილადი, რომელსაც აქვს ორი წარმოდგენა უსასრულო ორწილადად. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში x რიცხვისათვის ავიღებთ იმ დაშლას, რომელიც შეიცავს ნულების უსასრულო სიმრავლეს და ამით ჩვენ მივაღწევთ ცალსახობას.

ამრიგად, **ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი დაშლა უსასრულო ორწილადად და, პირიქით, ყოველ უსასრულო ორწილადს შეესაბამება ერთი ნამდვილი რიცხვი.**

სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი შეგვიძლია დავშალოთ უსასრულო სამწილადად, უსასრულო ათწილადად და ა. შ.

§ 13. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{13.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{x}_n=\sup\{x_n,\ x_{n+1},\ldots\},\quad \underline{x}_n=\inf\{x_n,\ x_{n+1},\ldots\}\quad (n=1,2,\ldots).$$

თუ (13.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ ყოველი n რიცხვისათვის $\overline{x}_n=+\infty$, ხოლო თუ მოცემული მიმდევრობა ქვემოდან არაა შემოსაზღვრული, მაშინ ყოველი n-თვის $\underline{x}_n=-\infty$.

ვიგულისხმოთ, რომ (13.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ

$$\overline{x}_1\geq\overline{x}_2\geq\cdots\geq\overline{x}_n\geq\cdots$$

22-ე თეორემის ძალით ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n=\xi.$$

ξ სასრულია, ან $\xi=-\infty$. ამ ξ რიცხვს ეწოდება (13.1) მიმდევრობის ზედა ზღვარი და იგი აღინიშნება $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ან $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ სიმბოლოთი.

თუ (13.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\limsup_{n\to\infty} x_n=+\infty.$$

შემდეგ, თუ (13.1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$\underline{x}_1\leqslant\underline{x}_2\leqslant\cdots\leqslant\underline{x}_n\leqslant\cdots$$

და 21-ე თეორემის ძალით ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n=\eta.$$

η სასრულია, ან $\eta=+\infty$. ამ η რიცხვს ეწოდება (13.1) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი და იგი აღინიშნება $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ან $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

რადგანაც ყოველი n-თვის $\underline{x}_n\leqslant\bar{x}_n$, ამიტომ

$$\liminf_{n\to\infty} x_n\leqslant\limsup_{n\to\infty} x_n.$$

თუ (13.1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\liminf_{n\to\infty} x_n=-\infty.$$

ცხადია, თუ (13.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ სასრულია.

თეორემა 89. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n=-\liminf_{n\to\infty}(-x_n), \tag{13.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n). \tag{13.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\xi_n=\sup P_n, \ \eta_n=\inf Q_n,$$

სადაც

$$P_n=\{x_n, \ x_{n+1}, \ldots\}, \ Q_n=\{-x_n, \ -x_{n+1}, \ldots\}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi_n=-\eta_n \ (n=1, \ 2, \ldots). \tag{13.4}$$

რადგანაც

$$\xi_n \geqslant x_k, \ \eta_n \leqslant -x_k \quad (k=n, \ n+1, \ldots),$$

ამიტომ

$$-\xi_n \leqslant -x_k, \ -\eta_n \geqslant x_k \quad (k=n, \ n+1, \ldots).$$

შემდეგ, რაკი ξ_n არის P_n სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი და $-\eta_n$ ნაკლები არ არის P_n სიმრავლის არც ერთ ელემენტზე, ამიტომ

$$\xi_n \leqslant -\eta_n. \tag{13.5}$$

ასევე, ვინაიდან η_n წარმოადგენს Q_n სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს და $-\xi_n$ არ აღემატება Q_n სიმრავლის არც ერთ ელემენტს, ამიტომ $-\xi_n \leqslant \eta_n$. აქედან გვაქვს

$$\xi_n \geqslant -\eta_n. \tag{13.6}$$

(13.5) და (13.6) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (13.4) ტოლობის მართებულობა. მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = -\lim_{n\to\infty} \eta_n,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (13.2) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება (13.3) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 40. ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა ყ ო ვ ე ლ ი ო რ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს $\{x_n\}$ დ ა $\{y_n\}$ ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს შ ე მ დ ე გ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ე ბ ს

$$\liminf_{n\to\infty} (x_n+y_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n, \tag{13.7}$$

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n. \tag{13.8}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\underline{x}_n=\inf\{x_n, \ x_{n+1}, \ldots\}, \ \overline{x}_n=\sup\{x_n, \ x_{n+1}, \ldots\},$$

$$\underline{y}_n=\inf\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}, \quad \overline{y}_n=\sup\{y_n, y_{n+1}, \ldots\},$$

$$\underline{z}_n=\inf\{x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}, \ldots\}, \quad \overline{z}_n=\sup\{x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}, \ldots\}.$$

ცხადია, რომ

$$\underline{x}_n\leqslant x_p\leqslant\overline{x}_n, \quad \underline{y}_n\leqslant y_p\leqslant\overline{y}_n, \text{ თუ } p\geqslant n.$$

ამ უტოლობების წევრ-წევრა შეკრებით მივიღებთ

$$\underline{x}_n+\underline{y}_n\leqslant x_p+y_p\leqslant\overline{x}_n+\overline{y}_n, \text{ როდესაც } p\geqslant n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\underline{x}_n+\underline{y}_n\leq\underline{z}_n\leq\overline{z}_n\leq\overline{x}_n+\overline{y}_n.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ (13.7) და (13.8) თანაფარდობებს.

თეორემა 41. ნამდვილ რიცხვთა ორი ნებისმიერი $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობისათვის მართებულია შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n-y_n)\geq\liminf_{n\to\infty}x_n-\limsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n-y_n)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n-\liminf_{n\to\infty}y_n.$$

დამტკიცება. 39-ე და მე-40 თეორემების ძალით,

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n-y_n)\geq\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}(-y_n)=\liminf_{n\to\infty}x_n-\limsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n-y_n)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}(-y_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n-\liminf_{n\to\infty}y_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 42. თუ $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=a$, მაშინ არსებობს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია a-კენ.

დამტკიცება. თუ $a=-\infty$, მაშინ მოცემული მიმდევრობა კრებადია $-\infty$-კენ, რადგან ყოველი n-თვის $x_n\leqslant\overline{x}_n$. ამ შემთხვევისათვის თეორემა ტრივიალურია. თუკი $a=+\infty$, თეორემა აგრეთვე ტრივიალურია. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ a სასრულია. ამ შემთხვევა-

შიყოველი $\overline{x}_n$ სასრულია. რიცხვი 1-თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ინდექსი n_1, რომ

$$\overline{x}_1 - 1 < x_{n_1} \leq \overline{x}_1.$$

შემდეგ, რიცხვი 2-თვის მოიძებნება ისეთი ინდექსი $n_2 > n_1$, რომ

$$\overline{x}_2 - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq \overline{x}_2.$$

საზოგადოდ, k რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ინდექსი $n_k > n_{k-1}$, რომ

$$\overline{x}_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq \overline{x}_k. \tag{13.9}$$

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

რომელიც $\{x_n\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა. (13.9) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 43. თუ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = b$, მაშინ არსებობს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია b-კენ.

42-ე და 43-ე თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი. $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები წარმოადგენენ შესაბამისად ამავე მიმდევრობის ყველა კრებადი ქვემიმდევრობის ზღვართა შორის უდიდესსა და უმცირესს.

თეორემა 44. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a-საკენ, რომელიც სასრულია ან უსასრულო, მაშინ

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

დამტკიცება. რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a-კენ, ამიტომ აღნიშნული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია a-კენ და, მაშასადამე, 42-ე და 43-ე თეორემების ძალით

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a.$$

თეორემა 45. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები ტოლია, მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია ამ ზღვრების საერთო მნიშვნელობისაკენ.

დამტკიცება. მართლაც, რადგანაც ყოველი n-თვის ადგილი აქვს უტოლობებს $\underline{x}_n \leqslant x_n \leqslant \bar{x}_n$, ამიტომ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

სავარჯიშო

1. იპოვეთ $E=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები.

2. იპოვეთ $E=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები.

3. იპოვეთ $M=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots,\right\}$ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები.

4. შეკრებისა და გამოკლების განსაზღვრის საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ

$$(\sqrt{2}+1)+(2-\sqrt{2})=3.$$

5. მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა $\{x_n\}$, სადაც $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, $n=1, 2, \ldots$ იპოვეთ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა $\{x_n\}$, სადაც $x_n=\cos n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ იპოვეთ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. იპოვეთ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$, $n=1, 2, \ldots$

8. იპოვეთ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n=\frac{2^n-1}{2^n}[1+(-1)^n]$, $n=1, 2, \ldots$

9. მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ორი მიმდევრობა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$, რომელთაგან მეორე კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\liminf_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\limsup_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

10. მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ორი მიმდევრობა $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$, რომელთაგან მეორე არაუარყოფითი კრებადი მიმდევრობაა. დაამტკიცეთ, რომ

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n)=\limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

თავი IV

კარდინალური რიცხვები

§ 1. სიმრავლის სიმძლავრე

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B სიმრავლე. როგორც პირველ თავში იყო აღნიშნული, თუ რაიმე წესით A და B სიმრავლეს შორის შეიძლება ურთიერთცალსახა შესაბამისობის დამყარება, მაშინ A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი და წერენ $A \sim B$.

ეკვივალენტობის მიმართებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $A \sim A$ (რ ე ფ ლ ე ქ ს უ რ ო ბ ა),

2) თ უ $A \sim B$, მ ა შ ი ნ $B \sim A$ (ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ო ბ ა),

3) თ უ $A \sim B$ დ ა $B \sim C$, მ ა შ ი ნ $A \sim C$ (ტ რ ა ნ ზ ი ტ უ ლ ო ბ ა).

ამრიგად, ეკვივალენტობის მიმართება რეფლექსურია, სიმეტრიული და ტრანზიტული. თუ A და B სასრული სიმრავლეებია, ისინი ეკვივალენტური არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი B სიმრავლის ელემენტთა რიცხვის ტოლია.

ჩვენ ვიტყვით, რომ A და B სიმრავლეებს აქვს ერთი და იგივე ს ი მ ძ ლ ა ვ რ ე ანუ ერთი და იგივე კ ა რ დ ი ნ ა ლ უ რ ი რიცხვი შეესაბამებათ, თუ ისინი ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

სიმრავლეთა ეკვივალენტობის დამოკიდებულების რეფლექსურობა, სიმეტრიულობა და ტრანზიტულობა შესაძლებლობას იძლევა ამ დამოკიდებულების მიმართ გამოყენებულ იქნას შედეგი, რომელიც ყოველგვარ რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ დამოკიდებულებას ეხება და იმაში მდგომარეობს, რომ დამოკიდებულება ჰყოფს იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომელშიაც თვით ამ დამოკიდებულებას ადგილი აქვს, გარკვეულ ქვესიმრავლეებად. მაგალითად, პარალელობის დამოკიდებულების მიხედვით წრფეთა სიმრავლე კლასებად ნაწილდება. თითოეულ კლასში შევა ურთიერთპარალელური წრფეები. ამ გზით შეიძლება შემოვიღოთ ახალი ცნება — მიმართულებისა, რომელიც განსაზღვრული იქნება როგორც საერთო თვისება პარალელური წრფეებისა. ასევე, ფიგურების მსგავსების დამოკიდებულება ფიგურებს კლასებად ჰყოფს: თითოეულ კლასს შეადგენს ურთიერთ მსგავსი ფიგურები. ამგვარად, შეიძლება შემოვიღოთ

ახალი ცნება გეომეტრიული ფორმისა, როგორც ურთიერთ მსგავსი ფიგურების საერთო თვისება. მთელი რიგი მათემატიკური ცნებისა სწორედ განსაზღვრულია აღნიშნული გზით, როგორც საერთო თვისება იმ საგნებისა, რომელნიც გარკვეულ რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ დამოკიდებულებაშია. ამ ცნებათა რიცხვს სიმძლავრის ცნებაც ეკუთვნის. ის განსაზღვრულია როგორც ურთიერთეკვივალენტურ სიმრავლეთა საერთო თვისება. სასრული სიმრავლის შემთხვევაში სიმძლავრის ცნება რაოდენობითი რიცხვის ცნებაზე დაიყვანება.

ამრიგად, თუ A რაიმე სიმრავლეა, მაშინ მას შევუსაბამებთ a ობიექტს იმგვარად, რომ იგივე a ობიექტი მხოლოდ ამ სიმრავლის ეკვივალენტურ სიმრავლეებს შეესაბამებოდეს. ამ ახალ ობიექტს კარდინალური რიცხვი ეწოდება; თუკი A სიმრავლე შედგება n ელემენტისაგან, მაშინ ამ სიმრავლის კარდინალური რიცხვია n. ასე, რომ სასრული სიმრავლის შემთხვევაში კარდინალური რიცხვი წარმოადგენს ამ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვს. ნებისმიერი სიმრავლის სიმძლავრის ცნება წარმოადგენს სასრული სიმრავლის ელემენტთა რიცხვის ცნების განზოგადებას.

§ 2. თვლადი სიმრავლე. თეორემები სიმრავლეთა თვლადობის შესახებ

რაიმე E სიმრავლეს თვლადი სიმრავლე ეწოდება, თუ იგი ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლის ეკვივალენტურია. რადგანაც ეკვივალენტობის დამოკიდებულება რეფლექსურია, ამიტომ ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე თვლადია.

თვლადი სიმრავლის განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრისა: E სიმრავლეს თვლადი ეწოდება, თუ შესაძლებელია ამ სიმრავლის ელემენტთა დანომვრა.

სიმრავლის ელემენტთა დანომვრა იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის შეიძლება რაიმე ნატურალური რიცხვის დასახება, როგორც მისი ნომრისა, იმგვარად, რომ ყოველ ელემენტს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ნომერი და ყოველი ნატურალური რიცხვი იყოს ნომერი სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტისა.

ამრიგად, თუ E თვლადი სიმრავლეა, მაშინ იგი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}.$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_0$ (ალეფ — — ნული) სიმბოლოთი. $\aleph$ სიმბოლო ძველებრაული ანბანის პირველ ასოს

წარმოადგენს. მაშასადამე, ყოველი თვლადი სიმრავლის სიმძლავრეა $\aleph_0$. ცხადია, ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვის სიმრავლეც თვლადია.

თეორემა 1. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწილი აგრეთვე თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A რაიმე თვლადი სიმრავლეა. რადგანაც A თვლადია, ამიტომ მისი ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ B არის A სიმრავლის რაიმე უსასრულო ნაწილი. მაშინ B სიმრავლის ელემენტები დაიკავებენ გარკვეულ ადგილებს (2.1) მიმდევრობაში. დავუშვათ, რომ a_{n_1} არის (2.1) მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი b_1-ით აღვნიშნოთ. a_{n_2} იყოს (2.1) მიმდევრობის მეორე ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი b_2-თი აღვნიშნოთ. ასე შემდეგ, a_{n_k} იყოს (2.1) მიმდევრობის k-ური ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის B სიმრავლეს; იგი აღვნიშნოთ b_k-თი. ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსაზღვროდ; ასე რომ B სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$$

ეს კი ამტკიცებს იმას, რომ B თვლადი სიმრავლეა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ თვლად A სიმრავლეს გამოვაკლებთ სასრულ M ქვესიმრავლეს, დარჩენილი $A-M$ სიმრავლე თვლადი იქნება.

თეორემა 2. ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად ნაწილს.

დამტკიცება. ვთქვათ, E უსასრულო სიმრავლეა. E-დან ავიღოთ ელემენტები a_1 და b_1. რადგან E უსასრულო სიმრავლეა, ამიტომ E-დან შეგვიძლია ავიღოთ კიდევ ორი ელემენტი a_2 და b_2. დავუშვათ, რომ E-დან აღებული ელემენტებია $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$. ამ ელემენტებით ვერ ამოიწურება E სიმრავლე და ამიტომ E-დან შეგვიძლია ავიღოთ კიდევ ორი ელემენტი a_{n+1} და b_{n+1}. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, E სიმრავლიდან გამოვყოფთ ორ თვლად სიმრავლეს

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \quad B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

რადგან E სიმრავლიდან გამოვყავით ორი თვლადი A და B სიმრავლე,

რომელთაც საერთო ელემენტები არ აქვთ, ამიტომ უფრო ზოგადი თეორემა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

ყოველი უსასრულო E სიმრავლე შეიცავს ისეთ თვლად A სიმრავლეს, რომ $E-A$ სიმრავლე კვლავ უსასრულო სიმრავლეა.

შენიშვნა 1. ზემოაღნიშნული თეორემის დამტკიცებაში გამოყენებულია ცერმელოს აქსიომა ნებსითი არჩევის შესახებ, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი სისტემისათვის არსებობს სიმრავლე, რომელსაც აღებული სისტემის ყოველ სიმრავლესთან ერთი საერთო ელემენტი ექნება.

ნებსითი არჩევის პრინციპმა, იმის შემდეგ, რაც ის ცხადად ჩამოაყალიბა ცერმელომ 1904 წელს, დიდი დავა გამოიწვია მათემატიკოსებში. ამ პრინციპში სიმრავლეთა აღებული სისტემისათვის პოსტულირებულია ისეთი სიმრავლის არსებობა, რომელსაც სისტემის ყოველ სიმრავლესთან ერთი საერთო ელემენტი აქვს. სხვადასხვა ფილოსოფიური შეხედულების მიხედვით მათემატიკური არსებობის საკითხის შესახებ მათემატიკოსებს სხვადასხვა პოზიცია უკავიათ ნებსითი არჩევის პრინციპის მიმართ.

ნებსითი არჩევის პრინციპის უკუგდება გამოიწვევდა იმას, რომ საჭირო გახდებოდა თანამედროვე მათემატიკის ზოგიერთ საყურადღებო შედეგზე უარის თქმა. მაგალითად, ამ წიგნში მოყვანილი ზოგიერთი დებულება, რომელთა დამტკიცებისას გამოყენებულია ნებსითი არჩევის პრინციპი, შეიძლება სხვა გზით იყოს დამტკიცებული, ამ პრინციპის გამოყენების გარეშე, მაგრამ ზოგიერთი დებულება არსებითად საჭიროებს ამ პრინციპს და მათი დატოვება შეუძლებელი გახდებოდა ნებსითი არჩევის პრინციპის უკუგდების პირობებში. ამ პრინციპის შესახებ ერთ-ერთი საინტერესო შედეგი კურტ გოდელს (Kurt Gödel) ეკუთვნის. მან, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკური აგების მიმართ, აჩვენა 1938 წელს, რომ ნებსითი არჩევის პრინციპი თავსებადი იქნება დანარჩენ აქსიომებთან, თუ ეს უკანასკნელნი ერთმანეთთან თავსებადი აღმოჩნდებიან. ამრიგად, თეორემა, დამტკიცებული ცერმელოს აქსიომის საშუალებით, არასოდეს არ შეიძლება უარყოფილ იქნას, თუკი მათემატიკა არ შეიცავს წინააღმდეგობებს, რომელიც დაკავშირებული არაა ცერმელოს აქსიომასთან.

ცერმელოს აქსიომას გამოვიყენებთ შემდეგშიაც ზოგიერთი თეორემის დამტკიცების დროს.

თეორემა 8. *სასრული სიმრავლისა და თვლადი სიმრავლის ჯამი თვლადი სიმრავლეა.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ და } B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

სიმრავლეები, სადაც A სასრული სიმრავლეა, B კი — თვლადი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=A \cup B.$$

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტები. ამ შემთხვევაში E სიმრავლე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$E=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}.$$

აქედან ჩანს, რომ E სიმრავლის ელემენტთა დანომვრა შესაძლებელია და, მაშასადამე, ამ შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ A და B სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტები; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E=A \cup (B-A),$$

მასთან A და $B-A$ სიმრავლეებს არ აქვთ საერთო ელემენტები და, ამას გარდა, $B-A$ თვლადი სიმრავლეა. მაშასადამე, ახლახან დამტკიცებულის ძალით E სიმრავლე თვლადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. თ უ თ ვ ლ ა დ ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა რ ი ც ხ ვ ი ს ა ს რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ა თ ი ჯ ა მ ი ც თ ვ ლ ა დ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, გვაქვს თვლადი სიმრავლეები

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m=\{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m.$$

დასამტკიცებელია, რომ A თვლადი სიმრავლეა.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა აღებულ სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არა აქვთ. ამ შემთხვევაში A სიმრავლე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$A=\{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}, \ldots\}.$$

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ A თვლადი სიმრავლეა.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მოცემულ სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტები. შემოვიღებთ რა აღნიშვნებს

$$E_1=A_1,\ E_2=A_2-E_1,\ E_3=A_3-(E_1 \cup E_2), \ldots$$
$$\ldots,\ E_m=A_m-(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{m-1}),$$

გვექნება

$$A=E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m,$$

ამასთან $E_k (k=1, 2, \ldots, m)$ სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არა აქვთ. ყოველი E_k სიმრავლე სასრულია ან თვლადი, ვინაიდან იგი წარმოადგენს თვლადი სიმრავლის ნაწილს, ხოლო E_1 თვლადი სიმრავლეა. ამიტომ მე-3 თეორემისა და ახლახან დამტკიცებულის ძალით A წარმოადგენს თვლად სიმრავლეს და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ სასრულ სიმრავლეთა თვლადი სისტემის ჯამი თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სასრული სიმრავლეები

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12}, \ldots, a_{1n_1}\},$$
$$A_2=\{a_{21},\ a_{22}, \ldots, a_{2n_2}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_k=\{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn_k}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ამ სიმრავლეთა ჯამი აღვნიშნოთ A-თი. ცხადია, A სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ შემდეგნაირად:

$$A=\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}, \ldots, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn_k}, \ldots\}.$$

აქედან ჩანს, რომ A სიმრავლის ელემენტების დანომვრა შესაძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. თუ მოცემულია თვლადი სისტემა სასრული სიმრავლეებისა, რომლებსაც აქვთ საერთო ელემენტები, მაშინ აღებულ სიმრავლეთა ჯამი შეიძლება აღმოჩნდეს კვლავ სასრული სიმრავლე.

მართლაც, ვთქვათ, $A_1=E, A_2=E, \ldots, A_n=E \ldots$, სადაც E სასრული სიმრავლეა. ცხადია,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = E.$$

ეს კი ადასტურებს ჩვენს წინადადებას.

თუ სასრული სიმრავლეთა თვლადი სისტემის ჯამი უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ იგი თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს.

თეორემა 6. თვლად სიმრავლეთა თვლადი სისტემის ჯამი თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული სიმრავლეებია A_1, $A_2, \ldots$ $\ldots, A_m, \ldots$ რადგან თითოეული სიმრავლე თვლადია, ამიტომ შეგვიძლია მათი ელემენტების დანომვრა:

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$

$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},$$

$$A_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m=\{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn}, \ldots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

აღებულ სიმრავლეთა ელემენტების პირველი ინდექსი გვიჩვენებს თუ რომელ სიმრავლეს ეკუთვნის აღნიშნული ელემენტი, მეორე ინდექსი კი ელემენტის ნომერს ამ სიმრავლეში. მოცემულ სიმრავლეთა ჯამი აღვნიშნოთ A-თი.

ჯერ, განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა აღებული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეებია. ამ შემთხვევაში A სიმრავლე ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$A=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots\}.$$

აქედან ჩანს, რომ შესაძლოა A სიმრავლის ელემენტების დანომვრა და, მაშასადამე, A თვლადი სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა აღებულ სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტები. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E_1=A_1,\ E_2=A_2-E_1,\ E_3=A_3-(E_1 \cup E_2), \ldots$$

$$\ldots, E_m=A_m-\bigcup_{k=1}^{m-1} E_k, \ldots$$

ცხადია, რომ

$$A=E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m \cup \ldots,$$

ამასთან E_m სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეებია. ყოველი E_m $(m=1, 2, \ldots)$ სიმრავლეთაგანი არის სასრული ან თვლადი, ვინაიდან იგი წარმოადგენს თვლადი სიმრავლის ნაწილს, ხოლო E_1 სიმრავლე თვლადია; ამიტომ მე-5 თეორემისა და ახლახან დამტკიცებულის

ძალით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ A სიმრავლე თვლადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. თუ A **სიმრავლის ყოველი ელემენტი განისაზღვრება** n **ნიშნაკით** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, **რომლებიც ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მნიშვნელობათა თვლად სიმრავლეს გაირბენს, მაშინ** A **თვლადი სიმრავლეა.**

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ვთქვათ,

$$A=\{a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\},$$

სადაც

$$\alpha_k=\alpha_1^{(k)},\ \alpha_2^{(k)},\ \ldots,\ \alpha_l^{(k)},\ldots\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

ცხადია, თეორემა მართებულია, როცა $n=1$.

ახლა დავუშვათ, რომ თეორემა მართებულია, როცა $n=m$ და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია. როცა $n=m+1$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$B=\{a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}\},\quad B^*=\{a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\alpha_{m+1}}\}.$$

დაშვების ძალით B თვლადი სიმრავლეა. შემდეგ, აღვნიშნოთ B_k-თი B^* სიმრავლის იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\alpha_{m+1}=\alpha_k^{(m+1)}$. ცხადია, რომ $B_k\sim B$ და, რადგანაც

$$B^*=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k\cup\cdots,$$

ამიტომ B^* თვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. **ყველა რაციონალური რიცხვის** Γ **სიმრავლე თვლადი სიმრავლეა.**

დამტკიცება. ყოველ რაციონალურ რიცხვს აქვს სახე $\frac{p}{q}$, სადაც p და q მთელი რიცხვებია, მასთან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ისინი ურთიერთმარტივია. ვთქვათ, $a_{pq}=\frac{p}{q}$. აქ p და q გაირბენენ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეს. რადგანაც $\Gamma=\{a_{pq}\}$, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით Γ თვლადი სიმრავლეა.

თეორემა 9. **მთელ კოეფიციენტებიანი ყველა პოლინომის** P **სიმრავლე თვლადია.**

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A_n-ით n-ური ხარისხის ყველა მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომის სიმრავლე:

$$A_n = \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}\},$$

სადაც

$$a_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n} = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n.$$

ცხადია,

$$P = A_0 \mathrm{U} A_1 \mathrm{U} \cdots \mathrm{U} A_n \mathrm{U} \cdots$$

მაგრამ, მე-7 თეორემის ძალით, ყოველი A_n სიმრავლე თვლადია. მაშასადამე, P სიმრავლეც თვლადია.

განსაზღვრა 1. ნამდვილ ან კომპლექსურ რიცხვს ალგებრული რიცხვი ეწოდება, თუ იგი წარმოადგენს რაიმე მთელი კოეფიციენტებიანი პოლინომის ფესვს. არაალგებრულ რიცხვს ტრანსცენდენტური რიცხვი ეწოდება.

თეორემა 10. ყველა ალგებრული რიცხვის სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. რადგანაც ყოველ პოლინომს აქვს ფესვთა სასრული რიცხვი, ხოლო მთელ კოეფიციენტებიან პოლინომთა სიმრავლე თვლადია, ამიტომ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

§ 3. არათვლად სიმრავლეთა არსებობა. კონტინუუმის სიმძლავრე

უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც თვლადი არაა, არათვლადი სიმრავლე ეწოდება.

თვლადი სიმრავლის ცნებას აზრი და მნიშვნელობა მხოლოდ მაშინ ექნება, თუ არსებობს არათვლადი სიმრავლეებიც, თუ თვლადი სიმრავლე უსასრულო სიმრავლის გარკვეული სახეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში თვლადი სიმრავლის ცნება იქნება მხოლოდ უსასრულო სიმრავლის ცნების მოდიფიკაცია.

ამრიგად, თვლადი სიმრავლის ცნების ღირებულება იმაზეა დამოკიდებული, არსებობს თუ არა არათვლადი სიმრავლეები. დავამტკიცოთ არათვლადი სიმრავლის არსებობა.

თეორემა 11. ინტერვალი $\delta = (0,1)$ არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ $(0,1)$ ინტერვალის ნებისმიერი თვლადი ქვესიმრავლე A. მაშინ მისი ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

როგორც ვიცით, ყოველი ნამდვილი რიცხვი a_n წარმოიდგინება უსასრულო ათწილადით

$$a_n = 0, x_1^{(n)} x_2^{(n)} \cdots x_m^{(n} \cdots,$$

რომელიც არ არის პერიოდული წილადი პერიოდით 9, მასთან ასეთი დაშლა ერთად-ერთია. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს:

$$a_1=0, x_1^{(1)} x_2^{(1)} \cdots x_m^{(1)} \cdots,$$

$$a_2=0, x_1^{(2)} x_2^{(2)} \cdots x_m^{(2)} \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=0, x_1^{(n)} x_2^{(n)} \cdots x_m^{(n)} \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

განვიხილოთ ახლა ნამდვილი რიცხვი

$$a=0, \xi_1\xi_2 \cdots \xi_n \cdots,$$

სადაც

$$\xi_m=\begin{cases}1, \text{ თუ } x_m^{(m)}\neq 1,\\ 2, \text{ თუ } x_m^{(m)}=1.\end{cases}$$

ცხადია, $a\in\delta$. რადგანაც $\xi_k\neq x_k^{(k)}$, ამიტომ $a\neq a_k$ $(k=1, 2, \cdots)$ და, მაშასადამე $a\overline{\in}A$.

ამრიგად, δ-დან აღებული ყოველი თვლადი A სიმრავლისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ δ-ში შემავალი ისეთი რიცხვი, რომელიც A-ს არ ეკუთვნის.

აქედან გამომდინარეობს, რომ δ ინტერვალი არ შეიძლება თვლადი სიმრავლე იყოს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში δ-ში შეგვიძლია ისეთი ელემენტი ვიპოვოთ, რომელიც მას არ ეკუთვნის, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, δ არათვლადი სიმრავლეა.

განსაზღვრა 2. δ ინტერვალის სიმძლავრეს კონტინუუმის სიმძლავრე ეწოდება.

კონტინუუმის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph$ სიმბოლოთი.

ზემოთ მოყვანილ დამტკიცებაში გამოყენებული იყო უსასრულო ათწილადები, მაგრამ ამას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს. შეიძლება ვისარგებლოთ უსასრულო სამწილადებით, ხუთწილადებით და სხვ.

თეორემა 12. არათვლადი A სიმრავლის სიმძლავრე არ შეიცვლება, თუ ამ სიმრავლეს გამოვაკლებით მისი სასრული ან თვლადი ნაწილი B.

დამტკიცება. $A-B$ სიმრავლე არათვლადია, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი იქნებოდა ცარიელი, სასრული ან თვლადი და, მაშასადამე,

$$A=(A-B)\cup B$$

სიმრავლე სასრული ან თვლადი იქნებოდა, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. შემდეგ მე-2 თეორემის თანახმად, $A-B$ სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ თვლადი D სიმრავლე. დარჩენილი ნაწილი E-თი აღვნიშნოთ. გვაქვს:

$$A-B=D\cup E.$$

აქედან

$$A=(B\cup D)\cup E,$$

სადაც B, E და D სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არ აქვთ. მე-3 ან მე-4 თეორემების ძალით $B\cup D$ სიმრავლე თვლადია და, მაშასადამე, იგი D სიმრავლის ეკვივალენტურია. თვლად D და $B\cup D$ სიმრავლეთა შორის დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

ვთქვათ, x არის A სიმრავლის რაიმე ელემენტი. თუ $x\in B\cup D$, მაშინ მას შეესაბამება D სიმრავლის გარკვეული ელემენტი. თუკი x არის A სიმრავლის ისეთი ელემენტი, რომელიც E-ს ეკუთვნის, მაშინ მას შევუსაბამებთ $A-B$ სიმრავლის იგივე x ელემენტს. პირიქით, ამ შესაბამისობის ძალით $A-B$ სიმრავლის ყოველ y ელემენტს შეესაბამება $B\cup D$ სიმრავლის გარკვეული ელემენტი, როცა $y\in D$, ანდა შეესაბამება E სიმრავლის იგივე y ელემენტი, როცა $y\in E$.

მიღებული შესაბამისობა არის ურთიერთცალსახა, რადგან E და $B\cup D$ სიმრავლეებს არ აქვთ საერთო ელემენტები. მაშასადამე, $A-B\sim A$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. თუ უსასრულო A სიმრავლეს მივუმატებთ სასრულ ან თვლად B სიმრავლეს, მაშინ $A\cup B$ სიმრავლე A სიმრავლის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. თუ A სიმრავლე თვლადია, მაშინ $A\cup B$ სიმრავლეც თვლადია და, მაშასადამე, იგი A სიმრავლის ეკვივალენტურია. თუ A არათვლადი სიმრავლეა, მაშინ $A\cup B$ სიმრავლეც არათვლადია, ვინაიდან A სიმრავლე შეგვიძლია მივიღოთ $A\cup B$ სიმრავლიდან, სასრული ან თვლადი B სიმრავლის გამოკლებით; ამიტომ, წინა თეორემის ძალით $A\cup B\sim B$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. ყოველი უსასრულო A სიმრავლე შეიცავს მის ეკვივალენტურ ისეთ საკუთრივ B ნაწილს, რომ $A-B$ სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება. თუ A თვლადი სიმრავლეა, მაშინ მე-2 თეორემის ძალით, A სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ისეთი თვლადი B სიმრავლე, რომ $A-B$ სიმრავლე უსასრულოა და, მაშასადამე, ამ შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია. თუ A არათვლადი სიმრავლეა, მაშინ მე-2

თეორემის თანახმად, A სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ თვლადი D სიმრავლე და, მაშასადამე, მე-12 თეორემის ძალით, $A-D$ სიმრავლეს ექნება იგივე სიმძლავრე, რაც A სიმრავლეს და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15. ნებისმიერ (a, b) ინტერვალს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

დამტკიცება. განვიხილოთ განტოლება

$$x=a+(b-a)t.$$

ცხადია, რომ 0-სა და 1-ს შორის მოთავსებულ t-ს ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება a და b-ს შორის მოთავსებული x-ის ერთი მნიშვნელობა და პირიქით, a და b-ს შორის მოთავსებული x-ის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება 0-სა და 1-ს შორის მოთავსებული t-ს ერთი მნიშვნელობა. მაშასადამე, $(a, b)\sim(0,1)$. თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც ყოველი სეგმენტი განსხვავდება ინტერვალისაგან ორი წერტილით, ხოლო ყოველი ნახევრადსეგმენტი — ერთი წერტილით, ამიტომ მე-13 თეორემის ძალით, ყოველ სეგმენტს და ნახევრადსეგმენტს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

თეორემა 16. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$x=\frac{t}{1-|t|}.$$

ცხადია, რომ $(-1,1)$ ინტერვალიდან t-ს ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალიდან x-ის ერთი მნიშვნელობა და პირიქით $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალიდან x-ის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება t-ს ერთი მნიშვნელობა $(-1,1)$ ინტერვალიდან. მაშასადამე, ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ეკვივალენტურია $(-1,1)$ ინტერვალისა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. ყველა ირაციონალური რიცხვის სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

დამტკიცება. ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვთა I სიმრავლისა და რაციონალურ რიცხვთა Γ სიმრავლის ჯამს:

$$Z=I\cup\Gamma.$$

მე-12 თეორემის თანახმად, $I=Z-\Gamma$ სიმრავლეს აქვს Z სიმრავლის სიმძლავრე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18. ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენი-

ლი ყველა მიმდევრობის S სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ავიღოთ [0,1) ნახევრადინტერვალის ნებისმიერი რიცხვი x. ეს x რიცხვი შეგვიძლია დავშალოთ უსასრულო ორწილადად

$$x=(0,\ i_1\,i_2\cdots i_n\cdots)_2,$$

ამასთანავე ეს დაშლა ერთადერთია. რადგანაც $x\neq 1$, ამიტომ ამ დაშლაში მოიძებნება ისეთი $i_{n_1}, i_{n_2}, \ldots, i_{n_k}, \ldots$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$i_{n_1}=i_{n_2}=\cdots=i_{n_k}=\cdots=0.$$

აღებულ x რიცხვს შევუსაბამოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots \tag{3.1}$$

ცხადია, რომ (3.1) სახის ყოველ მიმდევრობას შეესაბამება [0,1) ნახევრადინტერვალის ერთადერთი რიცხვი. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ნატურალურ რიცხვთა რაიმე ზრდადი მიმდევრობა

$$m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$$

ამ მიმდევრობას შევუსაბამოთ [0,1) ნახევრადინტერვალის ელემენტი $y=(0,\ p_1p_2\cdots p_m\cdots)_2$, სადაც

$$p_{m_1}=p_{m_2}=\cdots=p_{m_k}=\cdots=0.$$

მაშასადამე, [0,1) სიმრავლე ეკვივალენტურია ნატურალურ რიცხვთა ყველა ზრდადი მიმდევრობის S_0 სიმრავლისა.

დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა S და S_0 სიმრავლეებს შორის. ავიღოთ S_0-ის რაიმე ელემენტი $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$. აქ

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

ამ ელემენტს შევუსაბამოთ S სიმრავლის $(m_1, m_2, \ldots, m_k \ldots)$ ელემენტი, სადაც

$$m_1=n_1,\ m_2=n_2-n_1, \ldots, m_k=n_k-n_{k-1}, \ldots$$

ამრიგად, S_0 სიმრავლის ერთ ელემენტს შეესაბამება S სიმრავლის ერთი ელემენტი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ S სიმრავლის ერთს ელემენტს შეესაბამება S_0

სიმრავლის ერთი ელემენტი. ვთქვათ, $(m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ არის S სიმრავლის რაიმე ელემენტი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$n_1=m_1,\ n_2=n_1+m_2, \ldots, n_k=n_{k-1}+m_k, \ldots$$

ცხადია, რომ

$$n_1<n_2<\cdots<n_k\cdots$$

მაშასადამე, $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ წარმოადგენს S_0 სიმრავლის ელემენტს.

ამრიგად $S\sim S_0$ და რადგანაც $S_0\sim[0,1)$, ამიტომ S სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

თეორემა 19. *თუ U არის სიმრავლე $u(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \ldots)$ ელემენტებისა, რომლებიც განისაზღვრებიან პარამეტრთა თვლადი სისტემით $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ და ყოველი ამ პარამეტრთაგანი ღებულობს ორ მნიშვნელობას 0-სა ან 1-ს, მაშინ U კონტინუუმის სიმძლავრისაა.*

დამტკიცება. ავიღოთ U სიმრავლის რაიმე ელემენტი $u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ და მას შევუსაბამოთ ნამდვილი რიცხვი $x=(0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \cdots)_2$. ცხადია, რომ $x\in[0,1]$. ამრიგად, U სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება $[0,1]$ სეგმენტის ერთი ელემენტი. პირიქით, ვთქვათ, ξ ამ სეგმენტის რაიმე ელემენტია. მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უსასრულო ორწილადად:

$$\xi=(0, i_1\, i_2 \cdots i_n \cdots)_2.$$

ξ ელემენტს შევუსაბამოთ U სიმრავლის ელემენტი $u(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$.

ამრიგად, $[0,1]$ სეგმენტის ერთ ელემენტს შევუსაბამეთ U სიმრავლის ერთი ელემენტი. მაშასადამე, $U\sim[0,1]$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20. *თუ U^* არის სიმრავლე $x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ელემენტებისა, რომლებიც განისაზღვრებიან პარამეტრთა სასრული ან თვლადი სისტემით $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ და ყოველი ამ პარამეტრთაგანის მნიშვნელობათა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, მაშინ U^* სიმრავლეც იქნება კონტინუუმის სიმძლავრისა.*

დამტკიცება. ყოველი x_i $(i=1, 2, \cdots)$ მნიშვნელობა, როგორც რიცხვი, შეიძლება ცალსახად იქნეს განსაზღვრული იმ პარამეტრთა თვლადი სისტემით $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik}, \ldots$, რომელთაგან თითოეული მათგანი ღებულობს მნიშვნელობას 0-სა ან 1-ს, თანახმად ნამდვილი რიცხვის ორწილადად დაშლისა. მაშინ ელემენტი $x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ განისაზღვრება თვლადი სისტემით პარამეტრებისა, რომელთაგან თითოეული მათგანი ღებულობს მნიშვნელობას 0-სა ან 1-ს. ამიტომ, წინა თეორემის ძალით, U^* სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

განსაზღვრა 8. ყველა დალაგებული n ნამდვილი რიცხვის $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ სისტემათა სიმრავლეს n-განზომილებიანი *არითმეტიკული სივრცე* ეწოდება.

შედეგი 1. *არითმეტიკულ n-განზომილებიან სივრცეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.*

შედეგი 2. *ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.*

თეორემა 21. *ყველა ტრანსცენდენტური რიცხვის სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.*

დამტკიცება. ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლისა და ყველა ალგებრული რიცხვის სიმრავლის სხვაობას. მაგრამ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე კი თვლადია. მაშასადამე, მე-12 თეორემის თანახმად ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ მოყვანილი თეორემა დამტკიცებული იყო კანტორის მიერ 1874 წელს. ტრანსცენდენტურ რიცხვთა არსებობა პირველად დაადგინა ჟოზეფ ლიუვილმა (Liouville) 1844 წელს[1].

პარიზის საერთაშორისო მათემატიკურ კონგრესზე 1900 წელს დავით ჰილბერტმა (Hilbert)[2] დასვა ოცდასამი მათემატიკური პრობლემა, რომლებსაც მარტივი ფორმულირება აქვთ, ზოგიერთს კი ძალიან ელემენტარული და პოპულარული, რომელთაგან არამც თუ არც ერთი არ იყო ამოხსნილი, არამედ მოსალოდნელიც კი არ იყო მათი ამოხსნა იმ ეპოქის მათემატიკის საშუალებებით. ჰილბერტის ამ პრობლემებმა დიდი გავლენა მოახდინა მათემატიკის განვითარებაზე. ეს პრობლემები თანდათანობით თითქმის ყველა იქნა ამოხსნილი, და ბევრ შემთხვევაში მათი ამოხსნა დაკავშირებული იყო უფრო ზოგად და უფრო ღრმა მეთოდე-

[1] ჟოზეფ ლიუვილი (1809 — 1882) — ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის აკადემიის წევრი 1839 წლიდან. ლიუვილს ეკუთვნის ელიფსურ ფუნქციათა თეორიის აგება. მან დაადგინა სტატისტიკური მექანიკის ფუნდამენტალური თეორემა, თეორემა დინამიკის კანონიკურ განტოლებათა ინტეგრების შესახებ.

[2] დავით ჰილბერტი (1862 — 1943) — გერმანელი მათემატიკოსი, ჩვენი საუკუნის ერთ-ერთი უდიდესი მეცნიერი. მისმა გამოკვლევებმა დიდი გავლენა მოახდინა XX საუკუნის მათემატიკის განვითარებაზე. ჰილბერტის ნაშრომების ძირითადი მიმართულებანი შემდეგია: 1) ინვარიანტთა თეორია, 2) ალგებრულ რიცხვთა თეორია, 3) გეომეტრიის საფუძვლები, 4) დირიხლეს პრინციპი და მასთან დაკავშირებული პრობლემები: ვარიაციათა აღრიცხვისა და დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიისა, 5) ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია, 6) ვარინგის ამოცანის ამოხსნა, 7) მათემატიკური ფიზიკის საფუძვლები, 8) მათემატიკის ლოგიკური საფუძვლები.

ბის გამომუშავებაში. ერთ-ერთი პრობლემა, რომელიც უიმედოდ ჩანდა, იმის დამტკიცებაში მდგომარეობდა, რომ რიცხვი $2^{\sqrt{2}}$ არის ტრანსცენდენტური ან ყოველ შემთხვევაში ირაციონალური. ოცდაათი წლის მანძილზე ეს პრობლემა ამოუხსნელი იყო. 1935 წელს საბჭოთა მათემატიკოსმა ა. გელფონდმა[1] და, მასზე დამოუკიდებლად, ზიგელმა აღმოაჩინეს ახალი მეთოდი, რომელთა საშუალებით მტკიცდება უამრავი რიცხვის ტრანსცენდენტობა. კერძოდ, დამტკიცებული იყო არამც თუ ჰილბერტის $2^{\sqrt{2}}$ რიცხვის ტრანსცენდენტობა, არამედ α^{β} სახის რიცხვთა ტრანსცენდენტობა, სადაც α ნულისა და ერთისაგან განსხვავებული ალგებრული რიცხვია, β კი ირაციონალური ალგებრული რიცხვია.

§ 4. სიმძლავრეთა შედარება

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, სიმრავლის სიმძლავრის ცნება წარმოადგენს სასრული სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობის ცნების განზოგადებას. მაგრამ რაოდენობათა ერთ-ერთი ძირითადი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ერთმანეთთან სადარი არიან, ე. ი, თუ მოცემულია რაიმე ორი რაოდენობა, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლია, ან ერთი მათგანი მეორეზე მეტია. ამიტომ ბუნებრივია დაისვას საკითხი სიმძლავრეთა შედარების შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ორი სიმრავლე A და B, რომელთა კარდინალური რიცხვებია a და b. აქ შეიძლება წარმოგვიდგენ შემდეგი შემთხვევები:

1) არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა A სიმრავლესა და B სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის და ამასთანავე არ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა B სიმრავლესა და A სიმრავლის არც ერთ ნაწილს შორის;

2) არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა B სიმრავლესა და A სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის და ამავე დროს არ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა A სიმრავლესა და B სიმრავლის არც ერთ ნაწილს შორის;

3) არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა A სიმრავლესა და B სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის და ამავე დროს არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა B სიმრავლესა და A სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის;

4) არ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა როგორც A სიმ-

---

[1] ა. გელფონდი (დ. 1906) — საბჭოთა მათემატიკოსი. სპეციალისტია რიცხვთა თეორიასა და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში. 1931 წლიდან მოსკოვის უნივერსიტეტის პროფესორია, 1939 წლიდან კი სსრკ აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი.

რავლესა და B სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის, ისე B სიმრავლესა და A სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს შორის.

თუ A და B სიმრავლეები სასრულია, მაშინ შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს მესამე შემთხვევას. მართლაც, თუ ამ სიმრავლეთა ელემენტების რიცხვი ერთი და იგივეა, მაშინ განხორციელდება მხოლოდ 4) შემთხვევა, ხოლო, თუ ისინი შეიცავენ ელემენტთა სხვადასხვა რიცხვს, მაშინ ადგილი ექნება მხოლოდ პირველ ან მეორე შემთხვევას.

სიმრავლეთა თეორიის სპეციალურ კურსებში მტკიცდება, რომ მეოთხე შემთხვევას ადგილი არ აქვს უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაში (იხ. მაგალითად, Хаусдорф, Теория множеств).

რაც შეეხება მესამე შემთხვევას, იგი შეიძლება განხორციელდეს უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაში. ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ, თუ შესრულებულია 3) პირობა, მაშინ $A \sim B$.

თეორემა 21. (ფ. ბერნშტეინი). თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია და, პირიქით, B სიმრავლე A სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია, მაშინ A ეკვივალენტურია B სიმრავლისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, φ ფუნქცია ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას A სიმრავლესა და B სიმრავლის ნაწილს შორის, ψ ფუნქცია კი ურთიერთცალსახა შესაბამისობას B სიმრავლესა და A სიმრავლის ნაწილს შორის. მაშინ ბანახის თეორემის ძალით (თავი I, თეორემა 14), A და B სიმრავლეები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2, \quad A_1 \cap A_2 = \Lambda, \quad B_1 \cap B_2 = \Lambda,$$

ამასთანავე $\varphi(A_1) = B_1$, $\psi(B_2) = A_2$,

ახლა A სიმრავლეზე განვსაზღვროთ f ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{თუ } x \in A_1, \\ \psi^{-1}(x), & \text{თუ } x \in A_2, \end{cases}$$

სადაც ψ^{-1} აღნიშნავს ψ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას. აქედან ცხადია, რომ f ფუნქცია ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას A და B სიმრავლეებს შორის. მაშასადამე, $A \sim B$. ამით ფ. ბერნშტეინის (F. Bernstein) თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $A \supset E \supset B$ და $A \sim B$, მაშინ $A \sim E$.

მართლაც, რადგანაც A სიმრავლე E სიმრავლის B ნაწილის ეკვივალენტურია და E სიმრავლე A სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია (E თვითონ A სიმრავლის ნაწილია), ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით $A \sim E$.

ახლა, თუ 4) შემთხვევას მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ დაგვრჩება მხოლოდ პირველი სამი შემთხვევა. მესამე შემთხვევაში A და B სიმრავლეებს ერთი და იგივე სიმძლავრე აქვთ და დავწერთ $a=b$. პირველ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე B სიმრავლის სიმძლავრეზე ნაკლებია და წერენ $a<b$; მეორე შემთხვევაში კი A სიმრავლის სიმძლავრე B სიმრავლის სიმძლავრეზე მეტია და წერენ $a>b$.

ფ. ბერნშტეინის თეორემის საშუალებით შეიძლება დავამტკიცოთ რიგი თეორემებისა. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

თეორემა 22. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამი კვლავ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E=E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \dots,$$

$$A_1=E_1,\ A_2=E_2-A_1,\ A_3=E_3-(A_1 \cup A_2), \dots, A_n=E_n-\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \dots$$

ცხადია, რომ

$$E=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

ამასთანავე A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. A_1 სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე, ხოლო ყოველი A_n სიმრავლე ($n>1$) კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ამიტომ A_1 სიმრავლეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ ურთიერთცალსახად ნახევრადსეგმენტი $[0,1)$, ხოლო ყოველ A_n ($n>1$) სიმრავლეს შევუსაბამოთ ურთიერთცალსახად $[n-1, n)$ ნახევრადსეგმენტის რაიმე ქვესიმრავლე. ამგვარად, E სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია, ხოლო თვით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე კი, როგორც კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე, ეკვივალენტურია $[0,1)$ ნახევრადსეგმენტისა, რომელიც E სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია. მაშასადამე, ფ. ბერნშტეინის თეორემის ძალით E სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 23. $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა C სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $[0,1]$ სეგმენტის რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე არის

$$D=\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ [0,1] სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი ფუნქცია სავსებით განისაზღვრება მისი იმ მნიშვნელობებით, რომლებიც მოცემულია D სიმრავლეზე. მაშასადამე, ყოველი უწყვეტი ფუნქცია განსაზღვრულია პარამეტრთა თვლადი სისტემით.

ადვილი მისახვედრია, რომ C სიმრავლე U^* სიმრავლის ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია (იხ. თეორემა 20). მეორე მხრით, რაკი U^* კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ამიტომ იგი ეკვივალენტურია C სიმრავლის ქვესიმრავლისა. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ C^*-ით ყველა $f(x)=x+a$ ფუნქციის სიმრავლეს, სადაც a გაირბენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრივლეს, მაშინ $U^* \sim C^*$.

ამრიგად, C სიმრავლე U^* სიმრავლის ნაწილის ეკვივალენტურია და, პირიქით, U^* სიმრავლე ეკვივალენტურია C სიმრავლის ნაწილისა. მაშასადამე ფ. ბერნშტეინის თეორემის თანახმად $C \sim U^*$, ე. ი. C სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

§ 6. სიმრავლეთა ნამრავლი და ხარისხი

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B სიმრავლე. განვიხილოთ ყველა დალაგებულ (a, b) წყვილის სიმრავლე, სადაც $a \in A$, $b \in B$. ასეთ წყვილთა სიმრავლეს A და B **სიმრავლეთა ნამრავლი** ეწოდება. A და B სიმრავლეთა ნამრავლს აღვნიშნავთ $A \times B$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა. ვიგულისხმოთ, რომ A და B წარმოადგენენ შესაბამისად Ox და Oy ღერძების წერტილთა სიმრავლეებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ $A \times B$ ნამრავლი მოცემული xOy სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეა.

თუ გვაქვს სამი სიმრავლე A, B და C, მაშინ ამ სიმრავლეთა ნამრავლი არის ყველა დალაგებულ (a, b, c) სამეულთა სიმრავლე, სადაც $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. მოცემულ A, B და C სიმრავლეთა ნამრავლი აღინიშნება $A \times B \times C$ სიმბოლოთი,

შევნიშნოთ, რომ $A \times B$ და $B \times A$ სიმრავლეები, საზოგადოდ, ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5\}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$A \times B=\{(1, 4), (1, 5), (2,4), (2,5), (3, 4), (3,5)\},$$

$$B \times A=\{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

აქედან ცხადია, რომ $A \times B \neq B \times A$.

განვსაზღვროთ ახლა ნამრავლი იმ შემთხვევისათვის, როცა მოცემულია სიმრავლეთა ნებისმიერი სისტემა. ვთქვათ,

$$M=\{m, n, p, \ldots\}$$

უსასრულო სიმრავლეა (თვლადი ან არათვლადი). დავუშვათ, რომ M სიმრავლის ყოველ m ელემენტს შეესაბამება რაიმე A_m სიმრავლე. მაშინ ჩვენ მივიღებთ კომპლექსს

$$K=(A_m, A_n, A_p, \ldots). \tag{5.1}$$

ახლა M სიმრავლეზე განვსაზღვროთ რაიმე $f(m)$ ფუნქცია იმ პირობით, რომ $f(m)=a_m \in A_m$. მაშასადამე, $f(m)$ ფუნქციას შეესაბამება ელემენტთა კომპლექსი $(a_m, a_n, a_p, \ldots)$. თუ განვიხილავთ ყველა $f(m)$ ფუნქციის სიმრავლეს, მაშინ მათი შესაბამისი ელემენტთა კომპლექსების სიმრავლეს ეწოდება (5.1) კომპლექსის სიმრავლეთა ნამრავლი და იგი აღინიშნება $\prod\limits_m^M A_m$ სიმბოლოთი.

თუ $A_m=A_n=A_p=\cdots=A$, მაშინ, განსაზღვრის თანახმად,

$$\prod_m^M A_m=A^M.$$

A^M სიმრავლეს ეწოდება **ხარისხი** A ფუძით და ხარისხის M მაჩვენებლით. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა A სიმრავლე შედგება ორი a და b ელემენტისაგან

$$A=\{a, b\},$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 24. *M სიმრავლის ყველა ნაწილის სიმრავლე A^M სიმრავლის ეკვივალენტურია.*

დამტკიცება. M სიმრავლეზე განვსაზღვროთ $f(m)$ ფუნქცია, რომელიც ღებულობს ან a ან b მნიშვნელობას; მაშინ

$$M=M_a \cup M_b,$$

სადაც M_a იმ m ელემენტთა სიმრავლეა, რომელთათვის $f(m)=a$, ხოლო M_b წარმოადგენს იმ m ელემენტთა სიმრავლეს, რომელთათვის $f(m)=b$. ცხადია, M_a და M_b სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არა აქვთ. მაშასადამე, ყოველ $f(m)$ ფუნქციას შევუსაბამებთ გარკვეულ M_a სიმრავლეს, რომელიც M სიმრავლის ნაწილია. პირიქით, M სიმრავლის ყოველ M_a ნაწილს შევუსაბამებთ გარკვეულ $f(m)$ ფუნქციას, რომელიც შემდეგნაირად არის განსაზღვრული:

$$f(m)=\begin{cases} a, & \text{როდესაც } m \in M_a, \\ b, & \text{როდესაც } m \in M-M_a. \end{cases}$$

ამრიგად, ყოველ $f(m)$ ფუნქციას შეესაბამება M სიმრავლის გარკვეული ქვესიმრავლე M_a და, პირიქით, M სიმრავლის ყოველ M_a ქვესიმრავლეს შეესაბამება გარკვეული $f(m)$ ფუნქცია. რადგანაც ყველა $f(m)$ ფუნქციის სიმრავლე A^M სიმრავლის ეკვივალენტურია, ამიტომ M სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე A^M სიმრავლის ეკვივალენტურია.

§ 6. მოქმედებანი კარდინალურ რიცხვებზე

განვიხილოთ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეები $A_1, A_2, \ldots, A_n$. მათი სიმძლავრეები აღვნიშნოთ შესაბამისად $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სიმბოლოებით. ვთქვათ,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

A სიმრავლის a სიმძლავრე დამოკიდებულია $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სიმძლავრეებზე და იგი არაა დამოკიდებული $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სიმრავლეთა შემადგენლობაზე. ამიტომ a სიმძლავრეს ბუნებრივია ვუწოდოთ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სიმძლავრეთა ჯამი და დავწეროთ

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ თვლადი სიმრავლეებია, მაშინ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \aleph_0$. რაც შეეხება A სიმრავლეს, ისიც თვლადია და ამიტომ $a = \aleph_0$. მაშასადამე,

$$\overbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}^{n\text{-ჯერ}} = \aleph_0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\aleph_0 + n = \aleph_0,$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია. ცხადია აგრეთვე, რომ თუ მოცემულია თვლადი სიმრავლე $\aleph_0$ რიცხვებისა, მაშინ

$$\aleph_0 + {}_0\aleph + \cdots + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0.$$

საზოგადოდ, თუ $M = \{m, n, p, \ldots\}$ სიმრავლის ელემენტებს შეესაბამება სიმძლავრეები $a_m, a_n, a_p, \ldots$, მაშინ ამ სიმძლავრეთა ჯამი ეწოდება $\bigcup\limits_m^M A_m$ სიმრავლის სიმძლავრეს, სადაც A_m წარმოადგენს a_m სიმძლავრის რაიმე სიმრავლეს, ამასთანავე A_m სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არა აქვთ. ამ შემთხვევაში, მოცემულ კარდინალურ რიცხვთა ჯამს აღნიშნავენ $\sum\limits_m^M a_m$ სიმბოლოთი.

თეორემა 25. თუ მოცემულია $\aleph$ რიცხვების სასრული ან თვლადი სისტემა, მაშინ ამ რიცხვთა ჯამი ისევ $\aleph$ რიცხვია:

$$\aleph+\aleph+\cdots+\aleph=\aleph,$$

$$\aleph+\aleph+\cdots+\aleph+\cdots=\aleph.$$

ეს თეორემა გამომდინარეობს 22-ე თეორემიდან.

ავიღოთ ახლა რაიმე ორი A და B სიმრავლე (ამ შემთხვევაში A და B სიმრავლეებს შეიძლება ჰქონდეთ საერთო ელემენტებიც). მათი სიმძლავრეები აღვნიშნოთ შესაბამისად a და b სიმბოლოებით. $A\times B$ ნამრავლის სიმძლავრეს ეწოდება a და b კარდინალური რიცხვების ნამრავლი და ab სიმბოლოთი აღინიშნება.

საზოგადოდ, თუ $M=\{m, n, p, \dots\}$ სიმრავლის ელემენტებს შეესაბამებათ სიმძლავრეები $a_m, a_n, a_p, \dots$, მაშინ ამ სიმძლავრეთა ნამრავლი ეწოდება $\prod\limits_m^M A_m$ ნამრავლთა სიმძლავრეს, სადაც A_m წარმოადგენს a_m სიმძლავრის რაიმე სიმრავლეს; მოცემულ სიმძლავრეთა ნამრავლი აღინიშნება $\prod\limits_m^M a_m$ სიმბოლოთი.

თუ მოცემულია რაიმე ორი კარდინალური რიცხვი a და $\mathfrak{m}$, მაშინ $a^{\mathfrak{m}}$ ხარისხი არის A^M სიმრავლის სიმძლავრე, სადაც A და M რაიმე სიმრავლეებია, რომელთა კარდინალური რიცხვებია შესაბამისად a და $\mathfrak{m}$.

თეორემა 26. თუ $a_m=a_n=a_p=\cdots=a$, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\sum_m^M a_m=a\mathfrak{m}, \quad \prod_m^M a_m=a^{\mathfrak{m}}.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირველი ტოლობა. ამისათვის $A\times M$ სიმრავლიდან გამოვყოთ ყველა (x, m) ელემენტი, სადაც m ფიქსირებულია, ხოლო x გაირბენს A სიმრავლის ყველა ელემენტს. ასეთი ელემენტები შეადგენენ A_m სიმრავლეს, რომელიც A სიმრავლის ეკვივალენტურია. რადგანაც

$$A\times M=\bigcup_m^M A_m,$$

ამიტომ

$$\sum_{m}^{\mathfrak{M}} a_m = a\mathfrak{m}.$$

. ახლა დავამტკიცოთ მეორე ტოლობის მართებულობა. ვთქვათ, $\prod\limits_{m}^{\mathfrak{M}} A_m$ ნამრავლში $A_m = A$. მაშინ

$$\prod_{m}^{\mathfrak{M}} A_m = A^{\mathfrak{M}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\prod_{m}^{\mathfrak{M}} a_m = a^{\mathfrak{m}}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\aleph_0 n = \overbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}^{n\text{-ჯერ}} = \aleph_0,$$

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0,$$

$$\aleph_0^3 = \aleph_0 \aleph_0^2 = \aleph_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\aleph_0^n = \aleph_0 \aleph_0^{n-1} = \aleph_0,$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია. ამას გარდა,

$$\aleph n = \overbrace{\aleph + \aleph + \cdots + \aleph}^{n\text{-ჯერ}} = \aleph,$$

$$\aleph \aleph_0 = \aleph + \aleph + \cdots + \aleph + \cdots = \aleph.$$

§ 7. სხვადასხვა სიმძლავრის უსასრულო სიმრავლეთა არსებობა

თეორემა 27 (კანტორი). არაცარიელი M სიმრავლის ყველა ნაწილის სისტემის სიმძლავრე მეტია M სიმრავლის სიმძლავრეზე.

დამტკიცება. M სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის სისტემა S-ით აღვნიშნოთ. ცხადია, S სიმრავლე ისეთ S_1 ქვესიმრავლეს შეიცავს, რომელიც M სიმრავლის ეკვივალენტურია. მართლაც, ამისათვის საკმარისია

აღვნიშნოთ S_1-ით M სიმრავლის თითო ელემენტისაგან შედგენილ ყველა სიმრავლის სისტემა. მაშასადამე, S სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლები არ არის M სიმრავლის სიმძლავრეზე. დავამტკიცოთ, რომ S სიმრავლის სიმძლავრე მეტია M სიმრავლის სიმძლავრეზე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, მათი სიმძლავრეები ტოლია, ე. ი. $S \sim M$. მაშინ M სიმრავლის ყოველ M^* ქვესიმრავლეს შეესაბამება ამ სიმრავლის გარკვეული a_{M^*} ელემენტი. ცხადია,

$$a_{M^*} \in M^* \text{ ან } a_{M^*} \overline{\in} M^*.$$

აღვნიშნოთ N-ით ისეთი a_{M^*} ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $a_{M^*} \overline{\in} M^*$.

ცხადია, N სიმრავლე არ უდრის არცერთ M^* სიმრავლეს. მართლაც, ადგილი რომ ჰქონდეს ტოლობას $N = M^*$, მაშინ გვექნება $a_{M^*} \in N$ და $a_{M^*} \overline{\in} N$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა და S სიმრავლე M სიმრავლის ეკვივალენტური არ არის, ე. ი. S სიმრავლის სიმძლავრე მეტია M სიმრავლის სიმძლავრეზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

24-ე თეორემის თანახმად, S სიმრავლის სიმძლავრე არის $2^{\mathfrak{m}}$, სადაც $\mathfrak{m}$ წარმოადგენს M სიმრავლის სიმძლავრეს. მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ძალით,

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

თუ აღვნიშნავთ $\mathfrak{m}_1 = 2^{\mathfrak{m}}$, მაშინ $2^{\mathfrak{m}_1} > \mathfrak{m}_1$.

ამრიგად, თუ დავიწყებთ რაიმე კარდინალური $\mathfrak{m}$ რიცხვით, შეგვიძლია ავაგოთ უსასრულო სიმრავლე უფრო და უფრო დიდი კარდინალური რიცხვებისა.

ზემოხსენებულის საფუძველზე ნატურალური რიცხვები, $\aleph_0$ და $\aleph$ კარდინალურ რიცხვებს წარმოადგენენ. სასრული კარდინალური რიცხვისათვის სასრული კარდინალური რიცხვის მიმატება ახალ კარდინალურ რიცხვს გვაძლევს, ხოლო უსასრულო კარდინალური რიცხვისათვის სასრული კარდინალური რიცხვის მიმატება ახალ კარდინალურ რიცხვს არ გვაძლევს: $\aleph_0 + k = \aleph_0$.

კანტორის დროიდან დგას შემდეგი ამოცანა: არსებობს თუ არა კარდინალური რიცხვი, რომელიც $\aleph_0$ და $\aleph$ რიცხვებს შორისაა მოთავსებული? ესაა კ ო ნ ტ ი ნ უ უ მ პ რ ო ბ ლ ე მ ა, რომელზედაც პასუხი შემდეგი ეგრეთ წოდებული კ ო ნ ტ ი ნ უ უ მ - ჰ ი პ ო თ ე ზ ი ს სახით ყალიბდება: $\aleph_0$ რიცხვის უახლოესი უსასრულო კარდინალური რიცხვია $\aleph$. ეს ჰიპოთეზა ჯერ-ჯერობით მხოლოდ ჰიპოთეზაა.

სიმძლავრეები, დაწყებული $\aleph_0$-დან ასე აღვნიშნოთ:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

განზოგადებული კონტინუუმ-ჰიპოთეზა ეწოდება შემდეგ დებულებას: $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ ყოველი α-თვის.

1938 წელს კურტ გოდელმა (Gödel) საინტერესო შედეგი მიიღო: ნებსითი არჩევის აქსიომა და განზოგადებული კონტინუუმ-ჰიპოთეზა თავსებადია სიმრავლეთა თეორიის დანარჩენ აქსიომებთან, თუ ეს უკანასკნელნი თავსებადი არიან.

თეორემა 28. [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ნამდვილი ფუნქციის H სიმრავლეს აქვს $\aleph$-ზე მეტი სიმძლავრე.

დამტკიცება. ცხადია, H სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლები არაა [0,1] სიმრავლის სიმძლავრეზე. ახლა დავამტკიცოთ, რომ H სიმრავლე არ არის [0,1] სიმრავლის ეკვივალენტური. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $H\sim[0,1]$, მაშინ [0,1] სეგმენტიდან აღებულ ყოველ u რიცხვს შეესაბამება H სიმრავლის გარკვეული ელემენტი, რომელიც აღვნიშნოთ $F(u, x)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, $F(u, x)$ არის $[0\leqslant u\leqslant 1;\ 0\leqslant x\leqslant 1]$ მართკუთხედზე განსაზღვრული ორი ცვლადის ფუნქცია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi(x)=F(x, x)+1.$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $0\leqslant x\leqslant 1$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, $\psi(x)\in H$. ამიტომ $\psi(x)$ ფუნქციას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი $a\in[0,1]$, ე. ი. $\psi(x)=F(a, x)$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, [0,1] სეგმენტის ყოველი x-თვის გვაქვს

$$F(x, x)+1=F(a, x).$$

ეს კი შეუძლებელია, მაგალითად, როცა $x=a$.

მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არ არის და ამიტომ H სიმრავლის სიმძლავრე მეტია [0,1] სეგმენტის სიმძლავრეზე. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა წერტილის სიმრავლე ეკვივალენტურია წრეწირის ყველა წერტილის სიმრავლისა.

2. დაამტკიცეთ, რომ ყველა იმ წრეწირის სიმრავლე, რომელთა რადიუსები და ცენტრების კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია, წარმოადგენს თვლად სიმრავლეს.

3. ვთქვათ, გვაქვს ორი A და B სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cup B$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა, მაშინ A და B სიმრავლეებიდან ერთი მაინც იქნება კონტინუუმის სიმძლავრისა.

4. უშუალოდ დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა (a, b) ინტერვალისა და $[a, b]$ სეგმენტის წერტილებს შორის.

5. დაამტკიცეთ, რომ რაციონალური კოეფიციენტებიანი ყველა პოლინომის სიმრავლე თვლადია.

6. დაამტკიცეთ, რომ კომპლექსური სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე სფეროს ზედაპირის ეკვივალენტურია.

7. $[0, 1]$ სეგმენტზე ყველა წყვეტილი ფუნქციის სიმრავლის სიმძლავრე იქნება თუ არა კონტინუუმის სიმძლავრისა?

8. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ხარისხოვანი მწკრივის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

თავი V

მეტრიკული სივრცე

§ 1. მეტრიკული სივრცის ცნება

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ოპერაციათაგანს წარმოადგენს ზღვარზე გადასვლის ოპერაცია, რომელსაც საფუძვლად უდევს რიცხვთა ღერძის ორ წერტილს შორის მანძილის ცნება. ამ გარემოებას ბუნებრივად მივყავართ მეტრიკული სივრცის ცნებამდე, რომელსაც თანამედროვე მათემატიკაში ფუნდამენტალური მნიშვნელობა აქვს.

განვიხილოთ $x, y, z, \ldots$ ელემენტებისაგან შედგენილი R სიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ ამ სიმრავლის ყოველ ორ x და y ელემენტს გარკვეული წესით შეესაბამება არაუარყოფითი $\rho(x, y)$ რიცხვი, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

1) $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x=y$,

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (სიმეტრიის აქსიომა),

3) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$ (სამკუთხედის აქსიომა).

$\rho(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება **მეტრიკული ფუნქცია** მოცემული R სიმრავლისათვის ან უბრალოდ მანძილი x და y წერტილებს შორის.

R სიმრავლეს სათანადო მეტრიკული $\rho(x, y)$ ფუნქციით **მეტრიკული სივრცე** ეწოდება. აგრეთვე ამბობენ, რომ $\rho(x, y)$ განსაზღვრავს მეტრიკას R სიმრავლეში.

მეტრიკული სივრცის ცნება შემოღებული იყო მეცნიერებაში XX საუკუნის დასაწყისში ფრანგი მათემატიკოსის მ. ფრეშეს (Fréchet)[1] მიერ.

მეტრიკული სივრცის მარტივ მაგალითს წარმოადგენს ყველა ნამდ-

---

[1]. რენე მორის ფრეშე (დ. 1878) — ფრანგი მათემატიკოსი, სტრასბურგისა (1920 — — 27) და პარიზის (1927 — 49) უნივერსიტეტის პროფესორი. ფრეშეს ძირითადი ნაშრომები ეხება აბსტრაქტულ ტოპოლოგიას, სადაც მან შემოიღო ისეთი ძირითადი ცნებები, როგორიცაა მეტრიკული სივრცის, კომპაქტურობის, სისრულისა და სხვ. ცნებები. სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეთა განხილვით ფრეშემ ხელი შეუწყო ფუნქციონალური ანალიზის განვითარებას, სადაც მან შემოიღო დიფერენციალის ცნება (დიფერენციალი ფრეშეს აზრით). ფრეშე მუშაობდა აგრეთვე ალბათობათა თეორიაში და სხვ.

ვილი რიცხვის სიმრავლე, რომელშიც მეტრიკული ფუნქცია განსაზღვრულია ფორმულით

$$\rho(x, y)=|x-y|.$$

ამ სივრცეს ევკლიდეს ერთგანზომილებიანი სივრცე ეწოდება და აღინიშნება R^1 სიმბოლოთი.

მეტრიკული R სივრცის წერტილთა E სიმრავლე წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს, თუ E სიმრავლისათვის მეტრიკულ ფუნქციად მივიჩნევთ R სიმრავლეში განსაზღვრულ მეტრიკულ ფუნქციას. ამ შემთხვევაში E სიმრავლეს R სივრცის ქვესივრცე ეწოდება.

§ 2. ჰელდერისა და მინკოვსკის[1] უტოლობები

ლემა. ნებისმიერი დადებითი a და b რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}, \tag{2.1}$$

სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ და $p>1$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{t}{p},\ 0\leqslant t<+\infty.$$

მოვძებნოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. გვაქვს

$$\varphi'(t)=\frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{p}-\frac{1}{p}=\frac{t^{-\frac{1}{q}}}{p}-\frac{1}{p}.$$

ცხადია, რომ $\varphi'(t)>0$, როდესაც $0<t<1$, ხოლო $\varphi'(t)<0$, როდესაც $t>1$. ამიტომ $\varphi(t)$ ფუნქცია ზრდადია $(0,1)$ ინტერვალში, ხოლო იგი კლება-

---

[1] ჰერმან მინკოვსკი (1864 — 1909) — გერმანელი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი. იგი გეტინგენის მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთი წარმომადგენელია. მინკოვსკი დაიბადა რუსეთში. მან დაამუშავა ეგრეთ წოდებული რიცხვთა გეომეტრია, რომელშიაც გამოყენებულია გეომეტრიული მეთოდები რიცხვთა თეორიის ძნელი საკითხების ამოსახსნელად. რიცხვთა გეომეტრიიდან მინკოვსკი გადავიდა მრავალწახნაგა და ამოზნექილ სხეულთა გეომეტრიის საკითხებზე, სადაც მან მიიღო მნიშვნელოვანი ზოგადი შედეგები.

დია $(1, +\infty)$ ინტერვალში. მაშასადამე, მას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, როცა $t=1$. ამის გამო

$$t^{\frac{1}{p}} - \frac{t}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}, \quad 0 \leqslant t < +\infty.$$

აქედან

$$t^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{t}{p} + \frac{1}{q}. \tag{2.2}$$

კერძოდ, თუ $t=a^p b^{-q}$, (2.2) თანაფარდობა გვაძლევს

$$ab^{-\frac{q}{p}} \leqslant \frac{1}{p} a^p b^{-q} + \frac{1}{q}.$$

აქედან

$$ab^{q-\frac{q}{p}} \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

მაგრამ

$$q - \frac{q}{p} = q\left(1 - \frac{1}{p}\right) = q \cdot \frac{1}{q} = 1.$$

მაშასადამე, მართებულია (2.1) უტოლობა.

(2.1) თანაფარდობაში ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა $a=b^{q/p}$.

თეორემა 1. თუ მოცემულია დადებითი რიცხვები $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.3}$$

სადაც $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ და $p > 1$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.4}$$

თუ ზემოდამტკიცებულ ლემაში ვიგულისხმებთ $a=\frac{a_i}{A}$, $b=\frac{b_i}{B}$, გვექნება:

$$\frac{a_i b_i}{AB} \leqslant \frac{a_i^p}{pA^p} + \frac{b_i^q}{qB^q} \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{2.5}$$

გავითვალისწინებთ რა (2.4) ტოლობებს, (2.5) უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

აქედან მიიღება (2.3) უტოლობა. ამ უტოლობას ეწოდება ჰელდერის (Hölder) უტოლობა.

კერძოდ, თუ $p=2$, (2.3) უტოლობა ღებულობს სახეს

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}, \tag{2.6}$$

რომელსაც კოში-ბუნიაკოვსკის[1] უტოლობა ეწოდება.

თეორემა 2. თუ მოცემულია დადებითი რიცხვები $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$, მაშინ ყოველი $p \geqslant 1$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} (a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.7}$$

დამტკიცება. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $p>1$, ვინაიდან $p=1$ შემთხვევისათვის (2.7) უტოლობა ტრივიალურია. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$(a_i+b_i)^p = a_i(a_i+b_i)^{p-1} + b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

---

[1] ოგუსტენ კოში (Cauchy, 1789 — 1857) — გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი. იგი ავტორია მრავალრიცხოვანი შრომებისა მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, რომელთაგან ერთი — კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია — თვით კოშის მიერაა შექმნილი. კოშისვე ეკუთვნის მათემატიკური ანალიზის კლასიკური კურსი.

ვიქტორ ბუნიაკოვსკი (1804 — 1889) — გამოჩენილი რუსი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტი თავისი სიცოცხლის უკანასკნელ 25 წლის განმავლობაში. გამოქვეყნებული აქვს 128 მათემატიკური ნაშრომი, რომელთა თითქმის ნახევარი რიცხვთა თეორიას და ალბათობათა თეორიას ეკუთვნის.

ამ ტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{m}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{m}b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

ჰელდერის უტოლობის თანახმად,

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(a_i+b_i)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^{m}b_i(a_i+b_i)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}},$$

სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. აქედან $(p-1)q=p$. მაშასადამე,

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p\leqslant\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

თუ მიღებული უტოლობის ყველა წევრს გავყოფთ $\left\{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{q}}$ რიცხვზე და გავითვალისწინებთ $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ ტოლობას, მივიღებთ (2.7) უტოლობას. ამ უტოლობას უწოდებენ მინკოვსკის (Minkovski) უტოლობას.

მე-3

§ 3. მეტრიკული სივრცის მაგალითები

1 ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცე. განვიხილოთ n-განზომილებიანი არითმეტიკული სივრცე და ავიღოთ ამ სივრცის ორი წერტილი $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. ჩვენ ვიტყვით, რომ $x=y$, თუ $\xi_i=\eta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

ახლა $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ წერტილებს შორის მანძილი ასე განვსაზღვროთ

$$\rho(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2}. \tag{3.1}$$

n-განზომილებიან არითმეტიკულ სივრცეს, სადაც ორ წერტილს შორის მანძილი განსაზღვრულია (3.1) ფორმულით, ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცე ეწოდება და მას R^n სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

თეორემა 3. R^n სივრცის ორ x და y წერტილს შორის მანძილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ნულის ტოლი, როცა $x=y$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $x=y$; მაშინ $\xi_i=\eta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ და, მაშასადამე, (3.1) ფორმულის თანახმად,

$$\rho(x, y)=0.$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\rho(x, y)=0$. მაშინ (3.1) ფორმულის ძალით $\xi_i=$ $=\eta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, ე. ი. $x=y$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. თუ $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ არის R^n სივრცის წერტილები, მაშინ

$$\rho(x, y)=\rho(y, x).$$

ეს თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს (3.1) ფორმულიდან.

თეორემა 5. R^n სივრცის ნებისმიერი სამი წერტილისათვის $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ მართებულია უტოლობა

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\rho(x, z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)]^2}=$$

$$=\sqrt{\rho^2(x, y)+2\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)(\eta_i-\zeta_i)+\rho^2(y, z)}\,.$$

მაგრამ, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის ძალით,

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)(\eta_i-\zeta_i)\leqslant\rho(x, y)\rho(y, z).$$

მაშასადამე,

$$\rho(x, y) \leqslant \sqrt{\rho^2(x, y)+2\rho(x, y)\rho(y, z)+\rho^2(y, z)} = \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ევკლიდეს R^n სივრცე წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს.

განსაზღვრა 1. $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წერტილს ეწოდება რაციონალური, თუ მისი კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია; წინააღმდეგ შემთხვევაში x წერტილს ირაციონალური წერტილი ჰქვია.

თეორემა 6. R^n სივრცის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. R^n სივრცის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის სიმძლავრეა $\aleph^n_0$. მაგრამ ეს უკანასკნელი $\aleph_0$-ის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები

$$a_1, b_1;\ a_2, b_2; \cdots ; a_n, b_n,$$

სადაც

$$a_i < b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

n-განზომილებიანი $I=[a_1, b_1;\ a_2, b_2; \cdots ; a_n, b_n]$ სეგმენტი ეწოდება R^n სივრცის ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ხოლო n-განზომილებიანი $I^\circ=(a_1, b_1;\ a_2, b_2; \cdots ; a_n, b_n)$ ინტერვალი ჰქვია R^n სივრცის ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a_i < x_i < b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a_i \leqslant x_i < b_i \ (i=1, 2, \ldots, n)$$

ეწოდება მარჯვნიდან ღია სეგმენტი და იგი აღინიშნება $[a_1, b_1;\ a_2, b_2; \cdots ; a_n, b_n)$ სიმბოლოთი, ხოლო იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატებისათვის სრულდება უტოლობები

$$a_i < x_i \leqslant b_i \ (i=1, 2, \ldots, n)$$

ჰქვია მარცხნიდან ღია სეგმენტი და აღინიშნება $(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots ; a_n, b_n]$ სიმბოლოთი.

თუ რომელიმე k რიცხვისათვის $a_k=b_k$, მაშინ I სეგმენტს გ ა დ ა გ ვ ა რ ე ბ უ ლ ი ს ე გ მ ე ნ ტ ი ეწოდება. შემდეგში ჩვენ არ განვიხილავთ გადაგვარებულ სეგმენტს. ამას გარდა, ვიგულისხმებთ, რომ ცარიელი სიმრავლე სეგმენტია.

თუ $n=2$, მაშინ $I=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ხოლო $I^0=(a_1, b_1; a_2, b_2)$ ინტერვალი კი მართკუთხედს, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ამასთანავე მართკუთხედის გვერდებზე მდებარე წერტილები მას არ ეკუთვნის.

$C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ წერტილს, სადაც

$$c_i=\frac{a_i+b_i}{2} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ჰქვია I სეგმენტის (I^0 ინტერვალის) ც ე ნ ტ რ ი.

გამოსახულებას $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$ ვუწოდებთ I სეგმენტის (I^0 ინტერვალის) ფ ა რ თ ო ბ ს და მას აღვნიშნავთ $|I|$ ან $|I^0|$ სიმბოლოთი.

b_i-a_i რიცხვებს შორის უდიდეს მათგანს I სეგმენტის (I^0 ინტერვალის) ნ ო რ მ ა ს ვუწოდებთ და მას აღვნიშნავთ $\nu(I)$ ან $\nu(I^0)$ სიმბოლოთი.

იმ შემთხვევაში, როცა $b_1-a_1=b_2-a_2=\cdots=b_n-a_n$, I სეგმენტს (I^0 ინტერვალს) ვუწოდოთ რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი ს ე გ მ ე ნ ტ ი (ინტერვალი).

ორ სეგმენტს $[a'_1, b'_1; a'_2, b'_2; \cdots; a'_n, b'_n]$ და $[a''_1, b''_1; a''_2, b''_2; \cdots; a''_n, b''_n]$ კ ო ნ გ რ უ ე ნ ტ უ ლ ი ვუწოდოთ, თუ $b''_i-a''_i=b'_i-a'_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

R^n სივრცის იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებას

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია, ეწოდება ჰ ი პ ე რ ს ი ბ რ ტ ყ ე $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$.

ჰიპერსიბრტყეს $x_k=b_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ ეწოდება ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი x_k ღ ე რ ძ ი ს ა დ მ ი.

2. l_n^p სივრცე. არითმეტიკული E_n სივრცის ორ $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ წერტილს შორის მანძილი განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.2}$$

სადაც $p\geqslant 1$.

ასეთნაირად განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მეტრიკის სამივე აქსიომას. მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)\geqslant 0$ და $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$. ამავე დროს

$$\rho(x, y)=\rho(y, x).$$

მაშასადამე, პირველი და მეორე აქსიომა შესრულებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია მესამე აქსიომა. ამისათვის ავიღოთ მესამე წერტილი $z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$. მინკოვსკის უტოლობის თანახმად,

$$\rho(x, z)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i-\eta_i|+|\eta_i-\zeta_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i-\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

ამგვარად, ადგილი აქვს მესამე აქსიომასაც.

E_n სიმრავლეს მეტრიკული $\rho(x, y)$ ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია (3.2) ფორმულით ეწოდება l_n^p სივრცე.

იმ შემთხვევაში, როცა $p=2$ გვექნება ევკლიდეს R^n სივრცე.

8. l^p სივრცე. ვთქვათ, X სიმრავლე შედგება ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ მიმდევრობებისაგან, რომელთათვის

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty,$$

სადაც $p\geqslant 1$. განვიხილოთ X სიმრავლის ორი ელემენტი

$$x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \quad \text{და} \quad y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots),$$

რომლებსაც ვუწოდოთ წერტილები. ჩვენ ვიტყვით, რომ $x=y$, თუ

$$x_i=y_i \quad (i=1, 2, \ldots).$$

მანძილი x და y წერტილებს შორის განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)$ სასრულია. მართლაც, მინკოვსკის უტოლობის ძალით, ყოველი n-თვის გვექნება

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$\rho(x, y)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

ცხადია, რომ $\rho(x, y)\geqslant 0$ და $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$. ამას გარდა,

$$\rho(x, y)=\rho(y, x).$$

ახლა ავიღოთ რაიმე მესამე წერტილი $z=(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n, \cdots)$. თანახმად (3.4) უტოლობისა, გვაქვს:

$$\rho(x, z)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i-\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

ამრიგად, შესრულებულია მეტრიკის სამივე აქსიომა.

X სიმრავლეს მეტრიკული $\rho(x, y)$ ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია (3.3) ტოლობით ეწოდება l^p სივრცე. l^2 სივრცეს უწოდებენ ჰილბერტის კოორდინატულ სივრცეს.

4. უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე. ვთქვათ, X წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტ ფუნქციის სიმრავლეს. ამ სიმრავლის ორ $x(t)$ და $y(t)$ წერტილს შორის $\rho(x, y)$ მანძილი განვსაზღვროთ ასე

$$\rho(x, y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|. \tag{3.5}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მეტრიკის სამივე აქსიომას. მართლაც, X სიმრავლის ნებისმიერი

ორი $x(t)$ და $y(t)$ ელემენტისათვის $\rho(x, y) \geqslant 0$, ხოლო $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x(t)y \equiv (t)$. შემდეგ, ნებისმიერი t-თვის $[a, b]$ სეგმენტიდან გვაქვს

$$|x(t)-z(t)| \leqslant |x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)| \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

ამრიგად, X სიმრავლე, სადაც მის ორ x და y ელემენტს შორის მანძილი განსაზღვრულია (3.5) ტოლობით, მეტრიკული სივრცეა. მას ეწოდება უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე და იგი აღინიშნება $C_{[a, b]}$.

5. რიცხვთა შემოსაზღვრული მიმდევრობის სივრცე. ვთქვათ, X არის რიცხვთა ყველა შემოსაზღვრული მიმდევრობის სიმრავლე. ამ სიმრავლის $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ წერტილებს შორის $\rho(x, y)$ მანძილი ასე განვსაზღვროთ

$$\rho(x, y)=\sup\{|\xi_1-\eta_1|, |\xi_2-\eta_2|, \ldots, |\xi_n-\eta_n|, \ldots\}. \tag{3.6}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის ყველა აქსიომას. X სიმრავლეს, სადაც მის x და y წერტილებს შორის მანძილი განსაზღვრულია (3.6) ტოლობით, ეწოდება რიცხვთა შემოსაზღვრული მიმდევრობის m სივრცე.

6. რიცხვთა კრებადი მიმდევრობის სივრცე. ვთქვათ, X წარმოადგენს რიცხვთა ყველა კრებადი მიმდევრობის სიმრავლეს. ამ სიმრავლის $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ წერტილებს შორის $\rho(x, y)$ მანძილი განვსაზღვროთ (3.6) ფორმულით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის ყველა აქსიომას. მაშასადამე, X წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს. ამ სივრცეს ეწოდება c სივრცე.

7. რიცხვთა ყველა მიმდევრობის სივრცე. ვთქვათ, X ნამდვილ რიცხვთა ყველა მიმდევრობის სიმრავლეა. ამ სიმრავლის $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ წერტილებს შორის მანძილი ასე განვსაზღვროთ

$$\rho(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}. \tag{3.7}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)$ სასრულია.

დავამტკიცოთ, რომ $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს მეტრიკის სამივე აქსიომას. ცხადია, $\rho(x, y) \geqslant 0$, ხოლო $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა $x=y$, ე. ი. როცა $\xi_i=\eta_i$ $(i=1, 2, \ldots)$. ამას გარდა, $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება სამკუთხედის აქსიომა. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}, \tag{3.8}$$

სადაც a და b ნებისმიერი რიცხვებია. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t)=\frac{t}{1+t}.$$

რაკი ეს ფუნქცია ზრდადია $[0,+\infty)$ შუალედში, ამიტომ

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.$$

აქედან მიიღება (3.8) უტოლობა.

ახლა ავიღოთ მესამე წერტილი $z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \ldots,)$. მაშინ (3.8) უტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$\rho(x, z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n-\zeta_n|}{1+|\xi_n-\zeta_n|}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(\xi_n-\eta_n)+(\eta_n-\zeta_n)|}{1+|(\xi_n-\eta_n)+(\eta_n-\zeta_n)|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\eta_n-\zeta_n|}{1+|\eta_n-\zeta_n|}=\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

მაშასადამე, X სიმრავლე, სადაც მის x და y წერტილებს შორის $\rho(x, y)$ მანძილი განსაზღვრულია (3.7) ტოლობით, წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს. ამ სივრცეს ეწოდება s სივრცე.

8. R_0^n სივრცე. ვთქვათ, X არის n-განზომილებიანი არითმეტიკული სივრცე. X სივრცის ორ $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ წერტილს შორის მანძილი ასე განვსაზღვროთ

$$\rho(x, y)=\max\{|\xi_1-\eta_1|, |\xi_2-\eta_2|, \ldots, |\xi_n-\eta_n|\}. \tag{3.9}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის სამივე აქსიომას. X სიმრავლეს, სადაც მის ორ ნებისმიერ x და y წერტილს შორის მანძილი განსაზღვრულია (3.9) ტოლობით, ეწოდება R_0^n სივრცე.

შემდეგში განხილული იქნება მეტრიკული სივრცის სხვა მაგალითებიც.

§ 4. წერტილის მიდამო

მეტრიკულ R სივრცეში ავიღოთ რაიმე x_0 წერტილი. r რადიუსიანი $S(x_0; r)$ *სფერო* ცენტრით x_0 წერტილში ეწოდება R სივრცის ყველა იმ x წერტილის სიმრავლეს, რომელთათვისაც $\rho(x_0, x)<r$.

დახურული $\bar{S}(x_0; r)$ *სფერო* ცენტრით x_0 და რადიუსით r ეწოდება R სივრცის ყველა იმ x წერტილის სიმრავლეს, რომელთათვის $\rho(x_0, x)\leqslant r$.

სფერული ზედაპირი ცენტრით x_0 და რადიუსით r ჰქვია R სივრცის ყველა იმ x წერტილის სიმრავლეს, რომელთათვის $\rho(x_0, x)=r$.

განსაზღვრა 2. ε რადიუსიან სფეროს ცენტრით x_0 ეწოდება x_0 წერტილის ε-მიდამო.

შევნიშნოთ, რომ *თუ* $x\in S(x_0; r)$ *და* $y\in S(x_0; r)$, *მაშინ* $\rho(x, y)<2r$. მართლაც, სამკუთხედის აქსიომის საფუძველზე გვაქვს:

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, x_0)+\rho(x_0, y)<r+r=2r.$$

ასევე, თუ $y\in S(x_0; r)$, *მაშინ მოიძებნება* y *წერტილის* ε-*მიდამო, რომელიც მთლიანად* $S(x_0; r)$ *სფეროში მოთავსდება*. მართლაც, ვთქვათ,

$$\varepsilon=r-\rho(x_0, y).$$

განვიხილოთ სფერო $S(y; \varepsilon)$ და ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $x\in S(y; \varepsilon)$. სამკუთხედის აქსიომის თანახმად

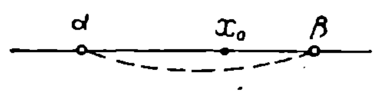
$$\rho(x_0, x)\leqslant\rho(x_0, y)+\rho(y, x)<\rho(x_0, y)+\varepsilon=r.$$

მაშასადამე, $x\in S(x_0; r)$ და ამიტომაც $S(y; \varepsilon)\subseteq S(x_0; r)$.

განსაზღვრა 3. ევკლიდეს R^n სივრცის რაიმე x_0 წერტილის *მართკუთხოვანი მიდამო* ვუწოდოთ x_0 წერტილის შემცველ ყოველ n-განზომილებიან ინტერვალს.

განსაზღვრა 4. მეტრიკული სივრცის რაიმე x_0 წერტილის *სფერული მიდამო* ვუწოდოთ ამ წერტილის შემცველ ყოველ სფეროს.

თუ x_0 არის R^1 სივრცის წერტილი, მაშინ სფერული და მართკუთხოვანი მიდამო ერთი და იგივეა — ესაა x_0 წერტილის შემცველი ჩვეულებრივი $\alpha\beta$ მონაკვეთი ბოლო წერტილების ჩაუთვლელად (ნახ. 11).



ნახ. 11.

თეორემა 7. *თუ* S^* *წარმოადგენს* R^n *სივრცის* x_0 *წერტილის* r *რადიუსიან სფერულ მიდამოს, მაშინ არსებობს*

ამ წერტილის მართკუთხოვანი მიდამოც, რომლის ყველა წერტილი S^* მიდამოს ეკუთვნის.

დამტკიცება. ვთქვათ, S^* სფეროს ცენტრია y_0 წერტილი. რადგანაც $x_0 \in S(y_0; r)$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი სფერო $S(x_0; \varepsilon)$, რომელიც მთლიანად მოთავსდება $S(y_0; r)$ სფეროში.

ახლა ვთქვათ, x_0 წერტილის კოორდინატებია $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. განვიხილოთ n-განზომილებიანი ინტერვალი

$$I^\circ = \left(x_1^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ x_1^{(0)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}; \cdots; x_n^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ x_n^{(0)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right).$$

ცხადია, ამ ინტერვალის ცენტრს წარმოადგენს x_0 წერტილი და, მაშასადამე, I° არის x_0 წერტილის მართკუთხოვანი მიდამო.

დავამტკიცოთ, რომ $I^\circ \subset S(x_0; \varepsilon)$. ამისათვის ავიღოთ I° ინტერვალის ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი. გვაქვს:

$$x_i^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < x_i < x_i^{(0)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ანუ

$$\left| x_i - x_i^{(0)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ამ უკანასკნელი უტოლობების ძალით

$$\rho(x_0, x) < \varepsilon.$$

მაშასადამე, $x \in S(x_0; \varepsilon)$. ამრიგად, $I^\circ \subset S(x_0; \varepsilon) \subset S^*$. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ x_0 წერტილის ყოველი მართკუთხოვანი I° მიდამოსათვის არსებობს ამავე წერტილის სფერული S მიდამო, რომელიც I° მიდამოში იქნება მოთავსებული.

ამრიგად, აღებული x_0 წერტილის ყოველი მართკუთხოვანი I° მიდამოსათვის მოიძებნება ამავე წერტილის სფერული S მიდამო, რომელიც I° მიდამოში მოთავსდება და, პირიქით x_0 წერტილის ყოველი სფერული S მიდამოსათვის არსებობს ამავე წერტილის მართკუთხოვანი I° მიდამო, რომელიც მოთავსებულია S მიდამოში.

მაშასადამე, წერტილის ყოველი მართკუთხოვანი მიდამო შეგვიძლია შევცვალოთ ამავე წერტილის რაიმე სფერული მიდამოთი და პირიქით. ამის გამო წერტილის მართკუთხოვან ან სფერულ მიდამოს უბრალოდ წერტილის მიდამოს ვუწოდებთ.

შემდეგში განვიხილავთ, როგორც წერტილის სფერულ მიდამოს, ისე მართკუთხოვან მიდამოსაც.

განსაზღვრა 6. თუ გვაქვს რაიმე n-განზომილებიანი ინტერვალი $I^\circ=(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$, მაშინ $p=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ წერტილს ვუწოდებთ I° ინტერვალის პირველ მთავარ წვეროს, $q=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ წერტილს კი — მეორე მთავარ წვეროს.

თუ p და q წერტილები რაციონალურია, მაშინ I° ინტერვალს (I სეგმენტს) ვუწოდოთ რაციონალური ინტერვალი (სეგმენტი).

თეორემა 8. ირაციონალური $I^\circ_* =(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots; \alpha_n, \beta_n)$ ინტერვალის ყოველ $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის შემცველი რაციონალური ინტერვალი, რომელიც მთლიანად I°_* ინტერვალშია მოთავსებული.

დამტკიცება. პირობის ძალით,

$$\alpha_i<c_i<\beta_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

ავიღოთ (α_i, c_i) და (c_i, β_i) ინტერვალებში შესაბამისად რაიმე რაციონალური რიცხვები a_i და b_i:

$$\alpha_i<a_i<c_i<b_i<\beta_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

აქედან ცხადია, რომ რაციონალური ინტერვალი

$$I^\circ=(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$$

შეიცავს c წერტილს და, ამას გარდა, $I^\circ \subset I^\circ_*$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. n-განზომილებიანი ყველა რაციონალური ინტერვალის სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, M ყველა რაციონალური ინტერვალის სიმრავლეა, ხოლო D იყოს ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლე. რადგანაც D თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ შეგვიძლია ამ სიმრავლის ელემენტთა დანომვრა:

$$D=\{p_1, p_2, \ldots, p_m \ldots,\}.$$

აღვნიშნოთ M_m-ით $(m=1, 2, \ldots)$ ყველა იმ რაციონალურ ინტერვალის სიმრავლე, რომელთა პირველი მთავარი წვეროა p_m წერტილი. M_m სიმრავლე თვლადია. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს M სიმრავლის თვლადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. სიმრავლის დაგროვების წერტილი. წარმოებული სიმრავლე

მეტრიკულ R სივრცეში ავიღოთ რაიმე უსასრულო E სიმრავლე. ამ სივრცის რაიმე x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს.

E სიმრავლის დაგროვების წერტილთა სიმრავლეს ჰქვია E სიმრავლის წარმოებული სიმრავლე და იგი E' სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ E სიმრავლის რომელიმე წერტილი არ წარმოადგენს ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილს, მაშინ მას E სიმრავლის იზოლირებული წერტილი ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელიც შედგება მხოლოდ იზოლირებულ წერტილებისაგან იზოლირებული სიმრავლე ჰქვია. მაგალითად, R^1 სივრცის ელემენტთა სიმრავლე

$$E=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$$

იზოლირებული სიმრავლეა, რადგან ამ სიმრავლის ყოველი წერტილი წარმოადგენს E სიმრავლის იზოლირებულ წერტილს. ცხადია, ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილია 0. თუ განვიხილავთ სიმრავლეს

$$M=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\},$$

იგი იზოლირებულ სიმრავლეს არ წარმოადგენს, ვინაიდან 0 არ არის M სიმრავლის იზოლირებული წერტილი.

მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ რაიმე E სიმრავლეს შემოსაზღვრული სიმრავლე ჰქვია, თუ არსებობს ამ სიმრავლის შემცველი სფერო.

თუ E სიმრავლე მოთავსებულია ევკლიდეს R^n სივრცეში და იგი შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს E სიმრავლის შემცველი n-განზომილებიანი სეგმენტი.

თეორემა 10 (ბოლცანო-ვაიერშტრასი). ევკლიდეს R^n სივრცეში მოთავსებულ ყოველ შემოსაზღვრულ უსასრულო სიმრავლეს ერთი დაგროვების წერტილი მაინც აქვს.

დამტკიცება. ვთქვათ, E არის R^n სივრცეში მოთავსებული შემოსაზღვრული უსასრულო სიმრავლე. E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს n-განზომილებიანი სეგმენტი

$$I_0=[a_1,\ b_1;a_2,\ b_2;\cdots;\ a_n,\ b_n],$$

რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს. თუ გავავლებთ ჰიპერსიბრტყეებს

$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, მაშინ I_0 გაიყოფა 2^n სეგმენტად, რომლებიც ერთმანეთის კონგრუენტული არიან. ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ეს სეგმენტი ასე აღვნიშნოთ

$$I_1=[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}; a_2^{(1)}, b_2^{(1)}; \cdots; a_n^{(1)}, b_n^{(1)}].$$

ახლა განვიხილოთ ჰიპერსიბრტყეები

$$x_k=\frac{a_k^{(1)}+b_k^{(1)}}{2} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

ეს სიბრტყეები I_1 სეგმენტს გაყოფს 2^n კონგრუენტულ სეგმენტად, რომლებიდან ერთი მაინც შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ვთქვათ, ეს სეგმენტია

$$I_2=[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}; a_2^{(2)}, b_2^{(2)}; \cdots; a_n^{(2)}, b_n^{(2)}].$$

ამავე წესით შეგვიძლია გავყოთ I_2 სეგმენტი და ამ პროცესს თუ უსაზღვროთ განვაგრძობთ, მივიღებთ n-განზომილებიან სეგმენტთა მიმდევრობას

$$I_0\supset I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_m\supset\cdots, \tag{5.1}$$

სადაც

$$I_m=[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}; a_2^{(m)}, b_2^{(m)}; \cdots; a_n^{(m)}, b_n^{(m)}].$$

(5.1) მიმდევრობის ყოველი სეგმენტი შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ამას გარდა,

$$b_k^{(m)}-a_k^{(m)}=\frac{b_k-a_k}{2^m} \quad (k=1, 2, \ldots, n;\ m=1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

ცხადია,

$$a_k\leqslant a_k^{(1)}\leqslant a_k^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant a_k^{(m)}\leqslant\cdots<b_k, \tag{5.3}$$

$$b_k\geqslant b_k^{(1)}\geqslant b_k^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant b_k^{(m)}\geqslant\cdots>a_k \tag{5.4}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

რადგანაც რიცხვთა (5.3) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო (5.4) მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{m\to\infty} a_k^{(m)}$ და $\lim\limits_{m\to\infty} b_k^{(m)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

მაშასადამე, (5.2) ტოლობის ძალით

$$\lim_{m\to\infty} a_k^{(m)} = \lim_{m\to\infty} b_k^{(m)} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

ეს საერთო ზღვარი ξ_k-თი აღვნიშნოთ.

დავამტკიცოთ, რომ $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს. ამისათვის განვიხილოთ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო $I^\circ=(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots; \alpha_n, \beta_n)$, მაშინ

$$\alpha_k<\xi_k<\beta_k \ (k=1, 2, \ldots, n).$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\alpha_k<a_k^{(\nu)}\leqslant\xi_k\leqslant b_k^{(\nu)}<\beta_k \ (k=1, 2, \ldots, n).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$I_\nu\subset I^\circ.$$

მაგრამ I_ν სეგმენტი შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ამრიგად, x წერტილის ნებისმიერი I° მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს და ამიტომ x არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ მეტრიკული სივრცის x წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს x-გან განსხვავებულ უსასრულო E სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც, მაშინ x იქნება E სიმრავლის დაგროვების წერტილი.

დამტკიცება. განვიხილოთ x წერტილის რაიმე მიდამო $S(x; \varepsilon_0)$. დავამტკიცოთ, რომ ეს მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, აღებული მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს, რომელთა რიცხვი სასრულია. ეს წერტილები იყოს $x_1, x_2, \ldots, x_m$. ვთქვათ,

$$\varepsilon=\min\{\rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \ldots, \rho(x, x_m)\}.$$

ცხადია, რომ სფერო $S(x; \varepsilon)$ არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, გარდა x წერტილისა (შეიძლება, რომ x წერტილიც არ ეკუთვნოდეს E-ს). ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა და ამიტომ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს, ე. ი. x არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი.

§ 6. სიმრავლის ჩაკეტვა

განსაზღვრა 6. მეტრიკული სივრცის რაიმე x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის შეხების წერტილი, თუ მისი ყოველი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც. E სიმრავლის ყველა შეხების წერტილის სიმრავლეს ჰქვია E სიმრავლის ჩაკეტვა და აღინიშნება $\overline{E}$ სიმბოლოთი.

რადგანაც E სიმრავლის ყოველი წერტილი E სიმრავლის შეხების წერტილია, ამიტომ $E\subset\overline{E}$.

ცხადია, თუ $A\subset B$, მაშინ $\overline{A}\subset\overline{B}$.

თეორემა 12. E სიმრავლის ჩაკეტვის ჩაკეტვა E სიმრავლის ჩაკეტვის ტოლია, ე. ი.

$$\overline{\overline{E}}=\overline{E}\,. \tag{6.1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $x\in\overline{\overline{E}}$. მაშინ x წერტილის ნებისმიერ $U(x;\varepsilon)$ მიდამოში[1] მოიძებნება წერტილი $x_1\in\overline{E}$ და, მაშასადამე, x_1 წერტილისათვის ვიპოვით ისეთი $U(x_1;\varepsilon_1)$ მიდამოს, რომ

$$U(x_1;\varepsilon_1)\subset U(x;\varepsilon).$$

რაკი $x_1\in\overline{E}$, ამიტომ $U(x_1;\varepsilon_1)$ სფეროში მოიძებნება x_2 წერტილი, რომელიც E სიმრავლეს ეკუთვნის. მაგრამ მაშინ

$$x_2\in U(x;\varepsilon).$$

ამრიგად, x წერტილის მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილს, ამიტომ $x\in\overline{E}$. მაშასადამე,

$$\overline{\overline{E}}\subset\overline{E}\,.$$

მეორე მხრივ, $\overline{E}\subset\overline{\overline{E}}$. აქედან გამომდინარეობს (6.1) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. თუ გვაქვს სიმრავლეთა სასრული რიცხვი მაშინ ამ სიმრავლეთა ჯამის ჩაკეტვა შესაკრებ სიმრავლეების ჩაკეტვათა ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემა ორი შესაკრები სიმრავლისათვის. ვთქვათ, A და B სიმრავლეები მოთავსებულია მეტრიკულ R სივრცეში. დასამტკიცებელია, რომ

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{6.2}$$

[1] $U(x;\varepsilon)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ε რადიუსიანი სფერო ცენტრით x.

ავიღოთ $\overline{A \cup B}$ სიმრავლის რაიმე x წერტილი. მაშინ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო $U(x; \varepsilon)$ შეიცავს y წერტილს, რომელიც $A \cup B$ სიმრავლეს ეკუთვნის. x წერტილი რომ არ ეკუთვნოდეს არც $\bar{A}$ და არც $\bar{B}$ სიმრავლეს, მაშინ მოიძებნება $U(x; \varepsilon_1)$ მიდამო, რომელიც არ შეიცავს A სიმრავლის წერტილებს და $U(x; \varepsilon_2)$ მიდამო, რომელიც არ შეიცავს B სიმრავლის წერტილებს. მაშინ $U(x; \varepsilon)$ მიდამო, სადაც ε უმცირესია ε_1 და ε_2 რიცხვებს შორის, არ შეიცავს $A \cup B$ სიმრავლის წერტილებს. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარეობს, რომ x წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც $\bar{A}$ და $\bar{B}$ სიმრავლეებიდან. მაშასადამე,

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{6.3}$$

შემდეგ, რაკი $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, ამიტომ

$$\bar{A} \subset \overline{A \cup B}, \quad \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$$

და, მაშასადამე,

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{6.4}$$

(6.3) და (6.4) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (6.2) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. E სიმრავლის ყოველი შეხების წერტილი ამ სიმრავლის დაგროვების ან იზოლირებული წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის E სიმრავლის შეხების წერტილი. მაშინ ამ წერტილის ყოველი $U(x; \varepsilon)$ მიდამო შეიცავს E სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც. აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა:

ა) x წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში x წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს.

ბ) x არ არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ამ შემთხვევაში მოიძებნება x წერტილის ისეთი მიდამო $U(x; \varepsilon_0)$, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა სასრულ რაოდენობას. ეს წერტილები იყოს $x_1, x_2, \ldots, x_n$. აღვნიშნოთ ε ასოთი $\rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \ldots, \rho(x, x_n)$ რიცხვებს შორის უმცირესი. ცხადია, რომ $\varepsilon = 0$. მართლაც, თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ x წერტილის მიდამო $U(x; \varepsilon)$ არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან x წარმოადგენს E სიმრავლის შეხების წერტილს. მაშასადამე, $\varepsilon = 0$ და x წერტილი ემთხვევა რომელიმე x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ წერტილს. ამიტომ x წარმოადგენს E სიმრავლის იზოლირებულ წერტილს. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$\bar{E}=E\cup E',$$

ე. ი. E სიმრავლის ჩაკეტვა ამ სიმრავლისა და მისი წარმოებული სიმრავლის ჯამის ტოლია.

§ 7. ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები

განსაზღვრა 7. მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეს ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება, თუ იგი შეიცავს თავის ყველა დაგროვების წერტილს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, E სიმრავლეს ჩაკეტილი ეწოდება, თუ იგი თავის ჩაკეტვას ემთხვევა: $E=\bar{E}$.

სიმრავლე $E=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ ჩაკეტილი არაა. ამ სიმრავლეს აქვს ერთადერთი დაგროვების წერტილი 1, რომელიც E სიმრავლეს არ ეკუთვნის. სიმრავლეს

$$M=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

აქვს ორი დაგროვების წერტილი 0 და 1 და ეს წერტილები M სიმრავლეს ეკუთვნის. მაშასადამე, M ჩაკეტილი სიმრავლეა.

მე-12 თეორემის თანახმად, ნებისმიერი E სიმრავლის ჩაკეტვა ჩაკეტილი სიმრავლეა.

ყოველი მეტრიკული R სივრცე და ცარიელი Λ სიმრავლე ჩაკეტილ სიმრავლეებს წარმოადგენენ. ჩაკეტილია აგრეთვე ყოველი სასრული სიმრავლე.

მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლის რაიმე x წერტილს ეწოდება ამ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეში შედის.

მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ სიმრავლეს ეწოდება ღია სიმრავლე, თუ იგი შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან. მაგალითად, (a, b) ინტერვალი წარმოადგენს ღია სიმრავლეს, $[a, b]$ სეგმენტი კი ჩაკეტილ სიმრავლეს, ხოლო $[a, b)$ ნახევრადსეგმენტი არც ღია და არც ჩაკეტილი სიმრავლეა.

მეტრიკულ R სივრცის რაიმე x წერტილს E სიმრავლის გარე წერტილი ეწოდება, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, ხოლო R სივრცის რაიმე y წერტილს ჰქვია E სიმრავლის საზღვრითი წერტილი, თუ იგი არ წარმოადგენს E სიმრავლის არც შიგა და არც გარე წერტილს. მა-

გალითად, თუ E არის წრე, მაშინ E სიმრავლის საზღვრითი წერტილე-ბია წრის კონტურის წერტილები.

E სიმრავლის საზღვრითი წერტილების სიმრავლეს E სიმრავლის საზღვარი ეწოდება.

§ 8. წერტილთა მიმდევრობა

მეტრიკულ სივრცეში შემოვიღოთ წერტილთა მიმდევრობის ზღვარის ცნება.

ვთქვათ, R რაიმე მეტრიკული სივრცეა. განვიხილოთ ამ სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{8.1}$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ (8.1) მიმდევრობა კრებადია R სივრცის რაიმე x წერტილისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n)=0.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x.$$

x წერტილს ეწოდება (8.1) მიმდევრობის ზღვარი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ კრებად მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი სხვადასხვა ზღვარი. მართლაც, მართებული რომ იყოს ტოლობები

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n)=0, \ \lim_{n\to\infty} \rho(y, x_n)=0,$$

მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\rho(x, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(y, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n>N$$

და, მაშასადამე, სამკუთხედის აქსიომის ძალით

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, x_n)+\rho(x_n, y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

როცა $n>N$. რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$\rho(x, y)=0.$$

აქედან $x=y$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა განვიხილოთ ევკლიდეს R^n სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \ldots, \tag{8.2}$$

x_m წერტილის კოორდინატები იყოს $\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}$ $(m=1,2,\ldots)$. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 15. R^n სივრცის წერტილთა (8.2) მიმდევრობის კრებადობისათვის $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წერტილისაკენ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\lim_{m\to\infty} \xi_k^{(m)} = \xi_k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{8.3}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, (8.2) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k^{(m)} - \xi_k)^2} < \varepsilon, \text{ როცა } m > N.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left| \xi_k^{(m)} - \xi_k \right| < \varepsilon, \text{ როცა } m > N \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს (8.3) ტოლობებს. ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, მართებულია (8.3) ტოლობები. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$\left| \xi_k^{(m)} - \xi_k \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ როცა } m > \nu \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{8.4}$$

მაგრამ

$$\rho(x_m, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k^{(m)} - \xi_k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \xi_k^{(m)} - \xi_k \right|.$$

აქედან, (8.4) უტოლობების ძალით,

$$\rho(x_m, x) < \varepsilon, \text{ როცა } m > \nu,$$

ე. ი.

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x.$$

ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 16. თუ მეტრიკული სივრცის წერტილთა (8.1) მიმდევრობა კრებადია ამავე სივრცის რაიმე x წერტილისაკენ, მაშინ აღებული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობაც კრებადი იქნება იმავე x წერტილისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{8.5}$$

არის (8.1) მიმდევრობის რაიმე ქვემიმდევრობა. რადგანაც (8.1) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\rho(x_\nu, x) < \varepsilon, \text{ როცა } \nu > N.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი ნატურალური N^* რიცხვი, რომ $n_k > N$, როცა $k > N^*$. მაშინ

$$\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon, \text{ როდესაც } k > N^*. \tag{8.6}$$

ამრიგად, მოცემული ε რიცხვისათვის ვიპოვეთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N^*, რომ ადგილი აქვს (8.6) უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ (8.5) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ წარმოადგენენ მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობებს, რომლებიც კრებადია შესაბამისად x და y წერტილებისაკენ, მაშინ

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y). \tag{8.7}$$

დამტკიცება. სამკუთხედის აქსიომის თანახმად,

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n).$$

აქედან

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n). \tag{8.8}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(y_n, y). \tag{8.9}$$

(8.8) და (8.9) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y).$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| = 0.$$

მაშასადამე, მართებულია (8.7) ტოლობა.

შედეგი. თუ $\{x_n\}$ წარმოადგენს მეტრიკული R სივრცის წერტილთა მიმდევრობას, რომელიც კრებადია R სივრცის x წერტილისაკენ, მაშინ R სივრცის ნებისმიერი y წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y, x_n) = \rho(y, x).$$

თეორემა 18. თუ მეტრიკული სივრცის x_0 წერტილი უსასრულო E სიმრავლის დაგროვების წერტილია, მაშინ E სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ წერტილთა ისეთი მიმდევრობა $\{x_n\}$, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0.$$

დამტკიცება. რადგანაც x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლეში x_0 წერტილისაგან განსხვავებული ისეთი x' წერტილი, რომ

$$\rho(x_0, x') < \varepsilon.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, E-დან ავიღოთ x_0 წერტილისაგან განსხვავებული ისეთი x_1 წერტილი, რომ შესრულდეს უტოლობა $\rho(x_0, x_1) < 1$.

ასევე, E სიმრავლიდან ავიღოთ x_0-გან განსხვავებული ისეთი x_2 წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}$ და ეს პროცესი წერტილთა აღებისა განვაგრძოთ უსასრულოდ. მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{8.10}$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\rho(x_0, x_m) < \frac{1}{m}$. ამ უტოლობის გამო, რომელიც ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის სრულდება, ვღებულობთ $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_0, x_m) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 8. მეტრიკული სივრცის წერტილთა $\{x_n\}$ მიმდევ-

რობას ეწოდება ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_p, x_q)<\varepsilon, \text{ როცა } p>N, q>N.$$

თეორემა 19. ყ ო ვ ე ლ ი კ რ ე ბ ა დ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}$ კრებადია x წერტილისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n>N.$$

მაშასადამე, ყოველი i და k-თვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $i>N$ და $k>N$, გვაქვს

$$\rho(x_i, x)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_k, x)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობებისა და სამკუთხედის აქსიომის თანახმად გვექნება

$$\rho(x_i, x_k)\leqslant\rho(x_i, x)+\rho(x, x_k)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20. მ ე ტ რ ი კ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ი ს წ ე რ ტ ი ლ თ ა ყ ო ვ ე ლ ი ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}$ ფუნდამენტალურია, მაშინ რიცხვი 1-თვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\rho(x_m, x_n)<1, \text{ როცა } m\geqslant\nu, n\geqslant\nu.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A=\sup\{\rho(x_\nu, x_{\nu+1}), \rho(x_\nu, x_{\nu+2}), \ldots, \rho(x_\nu, x_{\nu+k}), \ldots\},$$

$$B=\max\{\rho(x_\nu, x_1), \rho(x_\nu, x_2), \ldots, \rho(x_\nu, x_{\nu-1})\}.$$

თუ $r=\max\{A, B\}$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\rho(x_\nu, x_n)\leqslant r \quad (n=1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, მოცემული მიმდევრობის ყველა ელემენტი მოთავსდება $S(x_\nu, 2r)$ სფეროში და ამიტომ წერტილთა აღებული მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

შედეგი. მეტრიკული სივრცის წერტილთა ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, მოცემულია ევკლიდეს R^n სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1=\left(\xi_1^{(1)},\ \xi_2^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)}\right), x_2=\left(\xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)},\ldots,\xi_n^{(2)}\right),\ldots, x_m=$$
$$=\left(\xi_1^{(m)},\ \xi_2^{(m)},\ldots,\xi_n^{(m)}\right),\ldots$$

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 21. ევკლიდეს R^n სივრცის წერტილთა $\{x_m\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ისეთი დადებითი A რიცხვის არსებობა, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\left|\xi_i^{(m)}\right|<A\quad (i=1, 2,\ldots, n;\ m=1, 2,\ldots). \tag{8.10}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{x_m\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მაშინ არსებობს n-განზომილებიანი ისეთი სეგმენტი $[-A, A; -A, A;\cdots; -A, A]$, რომელიც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის ყველა წერტილს. მაშინ ცხადია,

$$-A<\xi_i^{(m)}<A\quad (i=1, 2,\ldots, n;\ m=1, 2,\ldots). \tag{8.11}$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (8.10) უტოლობებს. მაშინ ადგილი ექნება (8.11) უტოლობებსაც. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი x_m წერტილი ეკუთვნის n-განზომილებიან $[-A, A; -A, A;\cdots; -A, A]$ სეგმენტს, ე. ი. $\{x_m\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. ევკლიდეს R^n სივრცის წერტილთა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევისათვის, როცა წერტილთა მიმდევრობა აღებულია ორგანზომილებიან R^2 სივრცეში. ვთქვათ, მოცემულია წერტილთა შემოსაზღვრული მიმდევრობა

$$x_1=(\xi_1, \eta_1),\ x_2=(\xi_2, \eta_2),\ldots, x_m=(\xi_m, \eta_m),\ldots \tag{8.12}$$

ამ მიმდევრობასთან ერთად განვიხილოთ რიცხვთა შემდეგი ორი მიმდევრობა

$$\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m,\ldots, \tag{8.13}$$

$$\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_m,\ldots \tag{8.14}$$

რადგანაც (8.12) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ (8.13) და (8.14) მიმდევრობებიც შემოსაზღვრულია.

III თავის 23-ე თეორემის თანახმად, (8.13) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$\xi_{m_1},\ \xi_{m_2}, \ldots, \xi_{m_k}, \ldots \tag{8.15}$$

ვთქვათ,

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{m_k} = \xi.$$

რიცხვთა (8.15) მიმდევრობას შეესაბამება (8.14) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$\eta_{m_1},\ \eta_{m_2}, \ldots, \eta_{m_k}, \ldots \tag{8.16}$$

ჩვენთვის ცნობილი არაა (8.16) მიმდევრობა კრებადია თუ განშლადი. მაგრამ, რაკი იგი შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$\eta_{m_{k_1}},\ \eta_{m_{k_2}}, \ldots, \eta_{m_{k_i}}, \ldots \tag{8.17}$$

ვთქვათ,

$$\lim_{i\to\infty} \eta_{m_{k_i}} = \eta. \tag{8.18}$$

რიცხვთა (8.17) მიმდევრობას შეესაბამება (8.15) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$\xi_{m_{k_1}},\ \xi_{m_{k_2}}, \ldots, \xi_{m_{k_i}}, \ldots$$

ეს მიმდევრობა კრებადია ξ წერტილისაკენ, ე. ი.

$$\lim_{i\to\infty} \xi_{m_{k_i}} = \xi. \tag{8.19}$$

განვიხილოთ ახლა წერტილთა მიმდევრობა

$$x_{m_{k_1}},\ x_{m_{k_2}}, \ldots, x_{m_{k_i}}, \ldots \tag{8.20}$$

ეს მიმდევრობა წარმოადგენს (8.12) მიმდევრობის ქვემიმდევრობას. თანახმად (8.18) და (8.19) ტოლობებისა (8.20) მიმდევრობა კრებადია $x = (\xi, \eta)$ წერტილისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. მანძილი სიმრავლეთა შორის. სიმრავლის დიამეტრი

ავიღოთ მეტრიკულ R სივრცეში რაიმე E სიმრავლე და x_0 წერტილი. აღვნიშნოთ H სიმბოლოთი $\rho(x_0, x)$ რიცხვთა სიმრავლე, სადაც x გაირბენს E სიმრავლის ყველა წერტილს. H სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება **მანძილი** x_0 წერტილიდან E სიმრავლემდე და იგი აღინიშნება $\rho(x_0, E)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ

$$\rho(x_0, E) \geqslant 0.$$

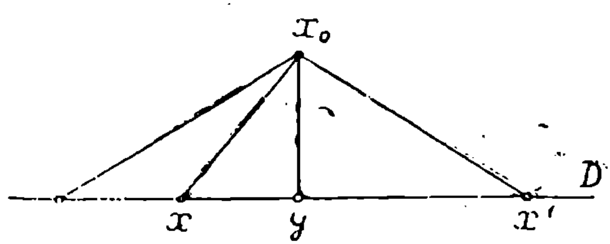
თუ $x_0 \in E$ ან იგი E სიმრავლის დაგროვების წერტილს წარმოადგენს, მაშინ $\rho(x_0, E)=0$.

მაგალითები

1. ვთქვათ, E არის რაიმე D წრფის წერტილთა სიმრავლე, ხოლო x_0 იყოს რომელიმე წერტილი (ნახ. 12). მაშინ $\rho(x_0, E)=\rho(x_0, y)$, სადაც x_0y წარმოადგენს იმ მართობის სიგრძეს, რომელიც დაშვებულია x_0 წერტილიდან D წრფეზე.

2. ვთქვათ, ევკლიდეს R^2 სივრცეში მოცემულია წრეწირი და x_0 წერტილი. ამ წრეწირის წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ E-თი. მაშინ $\rho(x_0, E)=x_0y$, სადაც y წერტილი Ox_0 მონაკვეთისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილია.

კერძოდ, თუ x_0 წარმოადგენს მოცემული წრეწირის ცენტრს, მაშინ



ნახ. 12.

მანძილი x_0 წერტილიდან მოცემულ წრეწირამდე ამ წრეწირის რადიუსის ტოლია.

ახლა ვთქვათ, მეტრიკულ R სივრცეში აღებულია ორი A და B სიმრავლე. აღვნიშნოთ H სიმბოლოთი $\rho(a, b)$ რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a გაირბენს A სიმრავლის წერტილებს, b კი B სიმრავლის წერტილებს.

H სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება მანძილი A და B სიმრავლეებს შორის და იგი აღინიშნება $\rho(A, B)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, თუ A და B სიმრავლეებს აქვთ საერთო წერტილი, მაშინ

$\rho(A, B)=0$. მაგრამ შეიძლება მოხდეს, რომ A და B სიმრავლეებს არ ჰქონდეთ საერთო წერტილები, მაგრამ $\rho(A, B)=0$. მართლაც, ვთქვათ,

$$A=[0, 1; 0, 1], \quad B=(-1, 0; -1, 0).$$

აქ A წარმოადგენს დახურულ კვადრატს, რომლის მთავარი წვეროებია (0, 0) და (1, 1), ხოლო B არის ღია კვადრატი, რომლის მთავარი წვეროებია $(-1, -1)$ და (0, 0).

ადვილი შესამჩნევია, რომ A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი, მაგრამ $\rho(A, B)=0$. ეს იმის გამო მოხდა, რომ A და B სიმრავლეებისათვის (0, 0) წერტილი შეხების საერთო წერტილს წარმოადგენს.

თეორემა 23. თუ R^n სივრცეში მოთავსებული ორი ჩაკეტილი F_1 და F_2 სიმრავლეებიდან ერთი მაინც შემოსაზღვრულია, მაშინ F_1 და F_2 სიმრავლეებში არსებობს შესაბამისად ისეთი x და y წერტილები, რომ

$$\rho(x, y)=\rho(F_1, F_2).$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ F_1 სიმრავლე შემოსაზღვრულია. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \cdots \tag{9.1}$$

თანახმად ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვრის განსაზღვრისა, ყოველ ε_m რიცხვისათვის F_1 და F_2 სიმრავლეებში მოიძებნება შესაბამისად ისეთი x_m და y_m წერტილები, რომ

$$\rho(x_m, y_m)<\rho(F_1, F_2)+\varepsilon_m \quad (m=1, 2, \cdots). \tag{9.2}$$

მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ წერტილთა ორი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots \tag{9.3}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots \tag{9.4}$$

F_1 სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო (9.3) მიმდევრობაც შემოსაზღვრულია და ამიტომ აღნიშნულ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots \tag{9.5}$$

ვთქვათ,

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k}=x.$$

ვინაიდან F_1 სიმრავლე ჩაკეტილია ამიტომ x წერტილი F_1 სიმრავლის წერტილია.

(9.5) მიმდევრობას შეესაბამება (9.4) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_k}, \ldots \tag{9.6}$$

დავამტკიცოთ, რომ (9.6) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მეხუთე თეორემისა და (9.2) უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\rho(y_{m_k}, x) \leqslant \rho(y_{m_k}, x_{m_k}) + \rho(x_{m_k}, x) < \rho(F_1, F_2) + \varepsilon_{m_k} + \rho(x_{m_k}, x). \tag{9.7}$$

რადგანაც (9.1) და (9.5) მიმდევრობები კრებადია, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი K რიცხვი, რომ

$$\varepsilon_{m_k} + \rho(x_{m_k}, x) < K \quad (k=1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, (9.7) თანაფარდობიდან მივიღებთ

$$\rho(y_{m_k}, x) < \rho(F_1, F_2) + K \quad (k=1, 2, \ldots).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (9.6) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

22-ე თეორემის თანახმად, ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$y_{m_{k_1}}, y_{m_{k_2}}, \ldots, y_{m_{k_i}}, \ldots \tag{9.8}$$

ვთქვათ,

$$\lim_{i \to \infty} y_{m_{k_i}} = y.$$

F_2 სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო y წერტილი F_2 სიმრავლეს ეკუთვნის.

(9.8) მიმდევრობას შეესაბამება (9.5) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა

$$x_{m_{k_1}}, x_{m_{k_2}}, \ldots, x_{m_{k_i}}, \ldots,$$

რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ:

$$\lim_{i \to \infty} x_{m_{k_i}} = x.$$

(9.2) უტოლობის თანახმად,

$$\rho\left(x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}\right) < \rho(F_1, F_2) + \varepsilon_{m_{k_i}}. \tag{9.9}$$

მაგრამ

$$\lim_{i \to \infty} \varepsilon_{m_{k_i}} = 0, \quad \lim_{i \to \infty} \rho\left(x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}\right) = \rho(x, y).$$

მაშასადამე, თუ (9.9) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to \infty$, მივიღებთ

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(F_1, F_2). \tag{9.10}$$

მეორე მხრით, რაკი x და y შესაბამისად F_1 და F_2 სიმრავლეების წერტილებია, ამიტომ

$$\rho(x, y) \geqslant \rho(F_1, F_2). \tag{9.11}$$

(9.10) და (9.11) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ

$$\rho(x, y) = \rho(F_1, F_2).$$

შენიშვნა. თუ F_1 და F_2 სიმრავლეებიდან არც ერთი შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ თეორემა შეიძლება არ იყოს მართებული, ე. ი. F_1 და F_2 სიმრავლეებში შეიძლება არ არსებობდეს შესაბამისად x და y წერტილები, რომელთა შორის მანძილი იყოს F_1 და F_2 სიმრავლეთა შორის მანძილის ტოლი.

მართლაც, ვთქვათ F_1 არის $y=e^x$ წირის წერტილთა სიმრავლე, ხოლო F_2 იყოს აბსცისთა ღერძის წერტილთა სიმრავლე. F_1 და F_2 ჩაკეტილი არაშემოსაზღვრული სიმრავლეებია და $F_1 \cap F_2 = \Lambda$; მაგრამ

$$\rho(F_1, F_2) = 0.$$

შედეგი 1. თუ R^n სივრცეში მოთავსებული ურთიერთარაგადამკვეთ ჩაკეტილ F_1 და F_2 სიმრავლეებიდან ერთი მაინც შემოსაზღვრულია, მაშინ $\rho(F_1, F_2) > 0$.

შედეგი 2. თუ გვაქვს R^n სივრცეში მოთავსებული ჩაკეტილი F სიმრავლე და რაიმე x წერტილი, მაშინ F სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი y წერტილი, რომ $\rho(x, F) = \rho(x, y)$.

ახლა განვსაზღვროთ სიმრავლის დიამეტრი. ავიღოთ მეტრიკულ R სივრცეში რაიმე E სიმრავლე და განვიხილოთ $\rho(x, y)$ რიცხვთა სიმრავლე, სადაც x და y არის E სიმრავლის ნებისმიერი წერტილები. $\{\rho(x, y)\}$ სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის დიამეტრი და აღინიშნება $d(E)$ სიმბოლოთი. ცხადია, თუ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ $d(E) < +\infty$ და პირიქით, თუ $d(E) < +\infty$, მაშინ E წარმოადგენს შემოსაზღვრულ სიმრავლეს.

მაგალითები. ელიფსის დიამეტრს წარმოადგენს მისი დიდი ღერძის სიგრძე; მართკუთხედის დიამეტრია დიაგონალის სიგრძე; რიცხვითი R^1 წრფე შემოუსაზღვრელია და ამიტომ $d(R^1) = +\infty$.

თეორემა 24. R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლისათვის არსებობს ამ სიმრავლეში ისეთი ორი x და y წერტილი, რომ $\rho(x, y) = d(F)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$

ყოველი ε_m რიცხვისათვის F სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი ორი წერტილი x_m და y_m, რომ

$$\rho(x_m, y_m) > d(F) - \varepsilon_m.$$

ამრიგად, მივიღებთ წერტილთა ორ მიმდევრობას

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, \tag{9.12}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots \tag{9.13}$$

(9.12) მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის გამო მისგან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots$$

ვთქვათ,

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x.$$

ახლა განვიხილოთ (9.13) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_k}, \ldots$$

ეს მიმდევრობა შეიძლება კრებადი არ იყოს, მაგრამ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა

$$y_{m_{k_1}}, y_{m_{k_2}}, \ldots, y_{m_{k_i}}, \ldots,$$

რომელიც კრებადია რაიმე y წერტილისაკენ.

ცხადია, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{m_{k_i}} = x$ და რაკი E სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $x \in F$, $y \in F$. შემდეგ, თუ

$$\rho\left(x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}\right) > d(F) - \varepsilon_{m_{k_i}}$$

უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to \infty$, მივიღებთ:

$$\rho(x, y) \geqslant d(F).$$

მეორე მხრით,

$$\rho(x, y) \leqslant d(F).$$

მაშასადამე,

$$\rho(x, y) = d(F).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. ზოგიერთი თეორემა ჩაკეტილ და ღია სიმრავლეთა შესახებ

თეორემა 25. მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი E სიმრავლის წარმოებული E' სიმრავლე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. თუ E' სიმრავლე ცარიელია ან სასრული, მაშინ თეორემა ტრივიალურია. ახლა ვთქვათ, E' უსასრულო სიმრავლეა და x იყოს ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ავიღოთ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო $S(x; \varepsilon)$. რადგანაც x არის E' სიმრავლის დაგროვების წერტილი, ამიტომ $S(x; \varepsilon)$ მიდამო შეიცავს x-გან განსხვავებულ E' სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც. ეს წერტილი y-ით აღვნიშნოთ. ცხადია, რომ $S(x; \varepsilon)$ წარმოადგენს აგრეთვე y წერტილის მიდამოსაც და რაკი y არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, ამიტომ $S(x; \varepsilon)$ მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. მაშასადამე, x წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს და ამიტომ $x \in E'$. ამრიგად, E' შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26. თუ გვაქვს ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სისტემა, მაშინ ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, F_α ჩაკეტილი სიმრავლეებია, სადაც α გაირბენს რაიმე სიმრავლის ელემენტებს. ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა აღვნიშნოთ F ასოთი:

$$F = \bigcap_\alpha F_\alpha.$$

განვიხილოთ F სიმრავლის რაიმე დაგროვების x წერტილი. ცხადია, x წარმოადგენს ყოველი F_α სიმრავლის დაგროვების წერტილს და რაკი ყოველი F_α ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $x \in F_\alpha$. მაშასადამე, $x \in F$. ამრიგად, F შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს და ამიტომ იგი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

თეორემა 27. თუ გვაქვს სასრული სისტემა ჩაკეტილი სიმრავლეებისა, მაშინ მათი ჯამიც ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება ვთქვათ, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ჩაკეტილი სიმრავლეებია. მე-13 თეორემის თანახმად,

$$\overline{F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_m} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 \cup \cdots \cup \overline{F}_m.$$

მაგრამ $\overline{F}_k = F_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, ამიტომ

$$\overline{F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_m} = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_m.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ ჩაკეტილ სიმრავლეთა სისტემა უსასრულოა, მაშინ მათი ჯამი შეიძლება არ იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე. მართლაც, ვთქვათ,

$$F_1=\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right],\quad F_2=\left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right],\ldots, F_m=\left[\frac{1}{m+2},\ \frac{m+1}{m+2}\right],\ldots$$

ეს სიმრავლეები ჩაკეტილია და

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m=(0,1).$$

მაგრამ (0,1) ინტერვალი ჩაკეტილი სიმრავლე არაა.

თეორემა 28. ჩაკეტილი სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა, G კი მისი დამატებითი სიმრავლე. ავიღოთ G სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. რადგანაც F ჩაკეტილი სიმრავლეა და $x\overline{\in}F$, ამიტომ არსებობს ისეთი $S(x;\, r)$ სფერო, რომელიც არ შეიცავს F სიმრავლის არც ერთ წერტილს. მაშასადამე, $S(x;\, r)\subset G$, ე. ი. x წარმოადგენს G სიმრავლის შიგა წერტილს. ამრიგად, G სიმრავლე შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ G ღია სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 29. ღია სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, G ღია სიმრავლეა, F კი მისი დამატებითი სიმრავლე. ავიღოთ F სიმრავლის ნებისმიერი დაგროვების x წერტილი. ეს წერტილი ამ სიმრავლეს ეკუთვნის, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში x წერტილი მიეკუთვნება G სიმრავლეს და, მაშასადამე, იგი არ იქნებოდა F სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ამრიგად, F შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს და ამიტომ იგი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

თეორემა 30. თუ გვაქვს ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი სისტემა, მაშინ ამ სიმრავლეთა ჯამი ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ღია სიმრავლეთა სისტემა $\{G_\alpha\}$. ამ სიმრავლეთა ჯამი აღვნიშნოთ G ასოთი:

$$G=\bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

განვიხილოთ G სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. ცხადია, ეს წერტილი მიეკუთვნება რომელიმე G_{α_0} სიმრავლეს და რაკი G_{α_0} ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ისეთი სფერო $S(x;\, r)$, რომელიც მოთავსდება G_{α_0} სიმრავლეში. მაშასადამე,

$$S(x;\, r)\subset G.$$

ამრიგად, G სიმრავლე შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ G ღია სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 31. თუ გვაქვს სასრული სისტემა ღია სიმრავლეებისა, მაშინ მათი გადაკვეთაც ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $G_1, G_2, \ldots, G_m$ ღია სიმრავლეებია. ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა აღვნიშნოთ G ასოთი:

$$G=\bigcap_{k=1}^{m} G_k.$$

დავამტკიცოთ, რომ G ღია სიმრავლეა. ამისათვის განვიხილოთ G სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. ეს წერტილი მიეკუთვნება ყველა $G_k(k=1, 2, \ldots, m)$ სიმრავლეს და რაკი ეს სიმრავლეები არიან ღია, ამიტომ ყოველი G_k-თვის არსებობს $S(x; r_k)$ სფერო, რომელიც G_k სიმრავლეში მოთავსდება. აღვნიშნოთ r ასოთი უმცირესი $r_1, r_2, \ldots, r_m$ რიცხვებს შორის. ცხადია, $S(x; r)\subset G$ და, მაშასადამე, x წარმოადგენს G სიმრავლის შიგა წერტილს. ამრიგად, G შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ G ღია სიმრავლეა.

თუ ღია სიმრავლეთა სისტემა უსასრულოა, მაშინ ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა შეიძლება არ იყოს ღია სიმრავლე.

თეორემა 32. მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი E სიმრავლის საზღვარი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. E სიმრავლის საზღვარი აღვნიშნოთ E_g სიმბოლოთი, ხოლო E სიმრავლეში შემავალი ყველა ღია სიმრავლის ჯამი კი E^0 ასოთი. E^0 სიმრავლეს ეწოდება E სიმრავლის ღია გული. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ E სიმრავლის E_g საზღვრისათვის გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$E_g=(E-E^0)\cup[(R-E)-(R-E)^0]=R-[E^0\cup(R-E)^0]. \quad (10.1)$$

აქედან ჩანს, რომ E და $R-E$ სიმრავლეებს აქვთ ერთი და იგივე საზღვარი. შემდეგ, რაკი E^0 და $(R-E)^0$ ღია სიმრავლეებია, ამიტომ (10.1) ტოლობის თანახმად E_g ჩაკეტილი სიმრავლეა.

თეორემა 33. თუ ღია G სიმრავლე შეიცავს ჩაკეტილ F სიმრავლეს, მაშინ $G-F$ სხვაობა ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის $G-F$ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ $x\in G$, $x\overline{\in}F$ და ამიტომ მოიძებნება x წერტილის მიდამო $S(x; \varepsilon)$, რომელიც $G-F$ სიმრავლეში მოთავსდება. მაშასადამე, x არის $G-F$ სიმრავლის შიგა წერტილი. ამრიგად, $G-F$ სიმრავლე შედ-

გება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ $G-F$ ღია სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 34. ევკლიდეს R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი ღია G სიმრავლე წარმოიდგინება როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი[1] n-განზომილებიანი სეგმენტებისა, რომელთა სისტემა თვლადია.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის თეორემა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $n=2$. გავყოთ მთელი xOy სიბრტყე კვადრატებით $[i, i+1; k, k+1]$ $(i, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, რომლებსაც ვუწოდოთ პირველი რანგის კვადრატები. ამ კვადრატებიდან გამოვყოთ ის კვადრატები, რომლებიც G სიმრავლეშია მოთავსებული. დარჩენილი კვადრატებიდან ყოველი მათგანი გავყოთ ოთხ კონგრუენტულ კვადრატად და თითოეულ მათგანს ვუწოდოთ მეორე რანგის კვადრატები. ამ კვადრატებიდან გამოვყოთ ის კვადრატები, რომლებიც მოთავსდებიან G სიმრავლეში. დარჩენილი კვადრატებიდან ყოველი მათგანი გავყოთ კვლავ ოთხ კონგრუენტულ კვადრატად; მივიღებთ მესამე რანგის კვადრატებს და აქედან გამოვყოთ ის კვადრატები, რომლებიც G-ში მოთავსდებიან. ეს პროცესი უსაზღვროდ განვაგრძოთ. მივიღებთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ გამოყოფილ კვადრატთა თვლად სისტემას

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots \tag{10.2}$$

ცხადია, რომ k-ური რანგის კვადრატის დიამეტრია $\frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}$.

დავამტკიცოთ, რომ

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty} q_n. \tag{10.3}$$

ავიღოთ G სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. რაკი G ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ამ წერტილის მიდამო $S(x; \varepsilon)\subset G$. ავიღოთ k რიცხვი ისე, რომ

$$\frac{\sqrt{2}}{2^k}<\varepsilon$$

და დავუშვათ, რომ x არ ეკუთვნის არც ერთ q_n კვადრატს. მაშინ არსებობს k რანგის ისეთი q კვადრატი, რომელიც შეიცავს x წერტილს

---

[1] ორ სეგმენტს ვუწოდებთ არაგადამფარავს, თუ მათ არა აქვთ საერთო შიგა წერტილი.

და არ მონაწილეობს (10.2) მიმდევრობაში. ადვილი შესამჩნევია, რომ $q \subset S(x; \varepsilon)$. მაშასადამე, q უნდა იყოს რომელიმე q_n კვადრატი და ამიტომ $x \in q_n$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამრიგად, G სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი ეკუთვნის $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ სიმრავლეს და, მაშასადამე, მართებულია (10.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 9. ავიღოთ მეტრიკულ R სივრცეში რაიმე E სიმრავლე და, ვთქვათ, ε რაიმე დადებითი რიცხვია. R სივრცის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\rho(x, E) < \varepsilon$$

ეწოდება E სიმრავლის ε-მიდამო და აღინიშნება $\mathrm{U}(E; \varepsilon)$ სიმბოლოთი.

თეორემა 35. მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი E სიმრავლის ε-მიდამო $\mathrm{U}(E; \varepsilon)$ წარმოადგენს $S(x; \varepsilon)$ მიდამოების ჯამს, სადაც x გაირბენს E სიმრავლის ყველა წერტილს.

დამტკიცება. ვთქვათ, y არის $\mathrm{U}(E; \varepsilon)$ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ E სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი x წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია უტოლობა:

$$\rho(y, x) < \varepsilon.$$

მაშასადამე, $y \in S(x; \varepsilon)$.

ახლა ვთქვათ, $y \in S(x; \varepsilon)$, სადაც $x \in E$. მაშინ $\rho(y, x) < \varepsilon$ და, მაშასადამე,

$$\rho(E, y) < \varepsilon;$$

ასე რომ $y \in \mathrm{U}(E; \varepsilon)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 36. ყოველი ჩაკეტილი F სიმრავლე წარმოადგენს ღია სიმრავლეთა თვლადი სისტემის გადაკვეთას.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G_m = \mathrm{U}\left(F; \frac{1}{m}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

რადგანაც ყოველი m-თვის $F \subset G_m$, ამიტომ

$$F \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m. \tag{10.4}$$

ახლა განვიხილოთ $\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. მაშინ ყოველი m-თვის გვექნება $x \in G_m$ და, მაშასადამე,

$$\rho(x, F) < \frac{1}{m} \quad (m=1, 2, \ldots).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\rho(x, F)=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ x არის F სიმრავლის შეხების წერტილი. F სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო $x \in F$. ამრიგად,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \subset F. \tag{10.5}$$

(10.4) და (10.5) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$F = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

35-ე თეორემის ძალით ყოველი G_m სიმრავლე არის ღია. ამრიგად, მოცემული F სიმრავლე წარმოვადგინოთ როგორც გადაკვეთა ღია სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 37. ყოველი ღია G სიმრავლე წარმოიდგინება როგორც ჯამი ჩაკეტილ სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ F-ით მოცემული ღია G სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე. F სიმრავლე ჩაკეტილია და ამიტომ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც გადაკვეთა ღია სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა:

$$F = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

I თავის მე-4 თეორემის თანახმად,

$$G = R - F = R - \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m = R - \left[R - \bigcup_{m=1}^{\infty} (R - G_m)\right] = \bigcap_{m=1}^{\infty} (R - G_m).$$

ყოველი $R - G_m$ სიმრავლე ჩაკეტილია. ამრიგად, G სიმრავლე წარმოვადგინეთ როგორც ჯამი ჩაკეტილ სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა. თეორემა დამტკიცებულია.

§11. F_σ და G_δ ტიპის სიმრავლეები

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თუ მეტრიკულ სივრცეში მოცემულია თვლადი სისტემა ჩაკეტილი სიმრავლეებისა, მათი ჯამი შეიძლება არ იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე. აგრეთვე, თუ გვაქვს თვლადი სისტემა ღია სიმრავლეებისა, მათი გადაკვეთა შეიძლება არ იყოს ღია სიმრავლე.

ჰაუსდორფის განსაზღვრის თანახმად, რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება F_σ ტიპის სიმრავლე, თუ იგი წარმოიდგინება როგორც ჯამი ჩაკეტილ სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა, ხოლო E-ს ეწოდება G_δ ტიპის სიმრავლე, თუ იგი წარმოიდგინება როგორც გადაკვეთა ღია სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა.

თეორემა 38. ყოველი F_σ ტიპის სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე G_δ ტიპის სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, E არის F_σ ტიპის სიმრავლე. მაშინ

$$E=\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m,$$

სადაც F_m $(m=1, 2, \ldots)$ ჩაკეტილი სიმრავლეებია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G_m=R-F_m \quad (m=1, 2, \ldots).$$

ყოველი G_m სიმრავლე არის ღია. I თავის მე-4 თეორემის ძალით

$$R-E=\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

მაშასადამე, E სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე G_δ ტიპის სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ყოველი G_δ ტიპის სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე F_σ ტიპის სიმრავლეა.

36-ე და 37-ე თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ღია სიმრავლე არის F_σ ტიპის სიმრავლე, ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე კი G_δ ტიპისა.

ცხადია, თუ გვაქვს F_σ ტიპის სიმრავლეთა თვლადი სისტემა, ამ სიმრავლეთა ჯამი ისევ F_σ ტიპის სიმრავლეა. ასევე, თუ მოცემულია G_δ ტიპის სიმრავლეთა თვლადი სისტემა, მაშინ ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა კვლავ G_δ ტიპის სიმრავლეა.

რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება $G_{\delta\sigma}$ ტიპის სიმრავლე, თუ იგი

წარმოიდგინდება როგორც ჯამი G_δ ტიპის სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა, ხოლო რაიმე M სიმრავლეს ჰქვია $F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლე, თუ იგი წარმოიდგინება როგორც გადაკვეთა F_σ ტიპის სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე $G_{\delta\sigma}$ ტიპის სიმრავლეა და პირიქით.

§ 12. კანტორის თეორემა ჩაკეტილ სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობის შესახებ

თეორემა 39. თუ R^n სივრციდან აღებულია შემოსაზღვრული ჩაკეტილი არაცარიელ სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა $\{F_k\}_1^\infty$, მაშინ ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე.

დამტკიცება. ყოველი F_m სიმრავლიდან ავიღოთ ნებისმიერი x_m წერტილი და შევადგინოთ წერტილთა შემოსაზღვრული მიმდევრობა $\{x_m\}$. ამ მიმდევრობიდან გამოვყოთ რაიმე x წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{m_k}\}$. ვაჩვენოთ, რომ

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m. \tag{12.1}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი F_ν სიმრავლე. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ $m_k > \nu$, როცა $k > N$. მაშასადამე,

$$x_{m_k}, x_{m_{k+1}}, \ldots, x_{m_{k+l}}, \ldots \tag{12.2}$$

მიმდევრობის ყოველი ელემენტი F_ν სიმრავლეს მიეკუთვნება, როცა $k > N$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (12.2) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ და, რაკი F_ν სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $x \in F_\nu$. მაშასადამე, ადგილი აქვს (12.1) თანაფარდობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ მოცემულია n-განზომილებიან სეგმენტთა ისეთი კლებადი მიმდევრობა $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$, რომ ამ სეგმენტების დიამეტრებისაგან შედგენილი მიმდევრობა ნულისაკენ კრებადია, მაშინ არსებობს ერთადერთი წერტილი x, რომელიც მოცემულ ყველა სეგმენტს ეკუთვნის.

მართლაც, ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით, გადაკვეთა $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$

ცარიელი სიმრავლე არაა. ვაჩვენოთ, რომ ეს სიმრავლე მხოლოდ ერთი წერტილისაგან შედგება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, აღნიშნული გადაკვეთა შეიცავს ორ x და y წერტილს. მაშინ ყოველი m-თვის $x \in I_m$, $y \in I_m$ და, მაშასადამე,

$$d(I_m) \geqslant \rho(x, y) > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{m \to \infty} d(I_m) \geqslant \rho(x, y) > 0,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $x = y$. ამრიგად, მოცემული სეგმენტთა გადაკვეთა შედგება მხოლოდ ერთი წერტილისაგან.

§ 13. ბორელ[1]-ლებეგის[2] თეორემა

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიან ინტერვალთა სასრული ან უსასრულო S სისტემა. ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს სისტემა ფარავს R^n სივრციდან აღებულ რაიმე E სიმრავლეს, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის არსებობს S სისტემის ერთი მაინც ისეთი ინტერვალი, რომელიც x წერტილს შეიცავს.

თეორემა 40. თ უ n-გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ თ ა უ ს ა ს რ უ ლ ო S ს ი ს ტ ე მ ა ფ ა რ ა ვ ს შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ჩ ა კ ე ტ ი ლ F ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს, მ ა შ ი ნ ა მ ს ი ს ტ ე მ ი დ ა ნ შ ე გ ვ ი ძ ლ ი ა გ ა მ ო ვ ყ ო თ ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ თ ა ს ა ს რ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა, რ ო მ ე ლ ი ც ა გ რ ე თ ვ ე F ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს ფ ა რ ა ვ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. F სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს n-განზომილებიანი სეგმენტი I_0, რომელიც F სიმრავლეს შეიცავს.

ახლა დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, შეუძლებელია ინტერვალთა S სისტემიდან გამოიყოს ინტერვალთა სასრული სისტემა, რომელიც F

---

[1] ემილ ბორელი (Borel, 1871 — 1956) — ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი. მისი თაოსნობით შეიქმნა თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის რამდენიმე დარგი (განშლადი მწკრივების თეორია, სიმრავლეთა ზომის თეორია და სხვა).

[2] ანრი ლებეგი (Lebesgue, 1875 — 1941) — ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი. ლებეგი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თანამედროვე თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელია. მისი დამსახურებაა ზომათა თეორიის შექმნა, ზომადი ფუნქციის ცნებისა და ინტეგრალის ახალი განსაზღვრის ჩამოყალიბება. მას ეკუთვნის აგრეთვე გეომეტრიული და ტოპოლოგიური ხასიათის მნიშვნელოვანი შედეგები.

სიმრავლეს დაფარავს. გავყოთ I_0 სეგმენტი 2^n კონგრუენტულ სეგმენტად $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(2^n)}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F^{(k)}=F\cap I^{(k)} \quad (k=1, 2, \ldots, 2^n).$$

ამ სიმრავლეებიდან ერთი მაინც იქნება ისეთი, რომლისთვისაც შეუძლებელია ინტერვალთა S სისტემიდან გამოიყოს ინტერვალთა სასრული სისტემა, რომელიც დაფარავს ამ სიმრავლეს. ვთქვათ, F_1 არის ის სიმრავლე ზემოაღნიშნული სიმრავლეებიდან, რომლის დაფარვა ინტერვალთა სასრული სისტემით S-დან შეუძლებელია. აქ

$$F_1=F\cap I_1,$$

სადაც I_1 არის $I^{(k)}$ სეგმენტებიდან ერთ-ერთი მათგანი.

დავუშვათ, რომ ჩვენ უკვე ავაგეთ

$$I_1, I_2, \ldots, I_m$$

სეგმენტები და

$$F_1, F_2, \ldots, F_m$$

სიმრავლეები ისეთნაირად, რომ ყოველი I_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ სეგმენტი იყოს I_{k-1} სეგმენტის მე-2^n ნაწილი და

$$F_k=F\cap I_k.$$

ამას გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ არც ერთი F_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ სიმრავლე არ შეიძლება დაფარული იყოს S სისტემიდან აღებული ინტერვალთა სასრული სისტემით. ახლა გავყოთ I_m სეგმენტი 2^n კონგრუენტულ სეგმენტებად $I_m^{(1)}, I_m^{(2)}, \ldots, I_m^{(2^n)}$. ვთქვათ,

$$F_m^{(k)} = F\cap I_m^{(k)} \quad (k=1, 2, \ldots, 2^n).$$

რადგანაც, დაშვების ძალით, F_m სიმრავლის დაფარვა S სისტემიდან აღებულ ინტერვალთა რაიმე სასრული სისტემით შეუძლებელია, ამიტომ $F_m^{(k)}$ სიმრავლეებიდან ერთი მაინც ისეთი სიმრავლე აღმოჩნდება, რომლის დაფარვა S სისტემიდან აღებული ინტერვალთა რაიმე სასრული სისტემით შეუძლებელია. ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ F_{m+1}-ით:

$$F_{m+1}=F\cap I_{m+1},$$

სადაც I_{m+1} არის სათანადო სეგმენტი $I_m^{(k)} (k=1, 2, \ldots, 2^n)$ სეგმენტებიდან. ეს პროცესი გავაგრძელოთ უსაზღვროდ.

ამრიგად, ერთის მხრივ მივიღეთ სეგმენტთა კლებადი მიმდევრობა

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$$

და მეორე მხრით ჩაკეტილი სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა

$$F \supset F_1 \supset \cdots \supset F_m \supset \cdots$$

აქ არც ერთი F_m სიმრავლის დაფარვა S სისტემიდან აღებული ინტერვალთა რაიმე სასრული სისტემით შეუძლებელია. ამის გარდა,

$$d(I_m) = \frac{d(I_0)}{2^n}$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{m \to \infty} d(I_m) = 0. \qquad (13.1)$$

ამიტომ, 39-ე თეორემის შედეგის თანახმად, არსებობს ერთადერთი x წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $I_m (m=1, 2, \cdots)$ სეგმენტს, ხოლო 39-ე თეორემის ძალით, გადაკვეთა $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ ცარიელი არაა. რაკი $F_m \subset I_m$, ამიტომ

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m.$$

მაშასადამე, $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ შედგება მხოლოდ ერთი x წერტილისაგან. შემდეგ, ვინაიდან $x \in F$, ამიტომ S სისტემაში არსებობს ისეთი ინტერვალი I^0, რომელიც შეიცავს x წერტილს. (13.1) პირობის ძალით, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ $I_m \subset I^0$ და, მაშასადამე, $F_m \subset I^0$. ამრიგად, გამოდის, რომ F_m სიმრავლე შეიძლება დაიფაროს S სისტემის ერთი I^0 ინტერვალით. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ დაშვებას, რომ არც ერთი F_k სიმრავლის დაფარვა არ შეიძლება S სისტემიდან აღებული ინტერვალთა სასრული სისტემით. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

§ 14. ყველგან მკვრივი და არსად მკვრივი სიმრავლეები

განსაზღვრა 10. მეტრიკული R სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება *მკვრივი* R სივრცის ღია G სიმრავლეში, თუ G სიმრავლის ყოველი წერტილი E სიმრავლის შეხების წერტილს წარმოადგენს, ე. ი., თუ $G \subset \overline{E}$.

განსაზღვრა 11. მეტრიკული R სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება ყველგან მკვრივი R სივრცეში, თუ $\overline{E}=R$, ე. ი., თუ R სივრცის ყოველი წერტილი E სიმრავლის შეხების წერტილია.

განსაზღვრა 12. მეტრიკული R სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი R სივრცეში, თუ R-ში არ არსებობს ღია სიმრავლე, რომელშიაც E იყოს მკვრივი სიმრავლე, ე. ი. ყოველ ღია სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი სფერო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს.

განსაზღვრა 13. მეტრიკული R სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ჰქვია მკვრივი თავის თავში, თუ E სიმრავლის ყოველი წერტილი ამავე სიმრავლის დაგროვების წერტილია, ე. ი., თუ $E\subset E'$.

განსაზღვრა 14. მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება სრულყოფილი სიმრავლე, თუ იგი ჩაკეტილია და თავის თავში მკვრივია, ე. ი. თუ $E=E'$.

თეორემა 41. ჩაკეტილი F სიმრავლე არსად მკვრივია მეტრიკულ R სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დამატებითი ღია $G=R-F$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია R სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არსად მკვრივი სიმრავლეა R სივრცეში. დავამტკიცოთ, რომ G ყველგან მკვრივია ამავე R სივრცეში, ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ R სივრცის ყოველი წერტილი G სიმრავლის შეხების წერტილია. ავიღოთ R სივრცის ნებისმიერი x წერტილი. ეს წერტილი მიეკუთვნება ან G ან F სიმრავლეს. თუ $x\in G$, მაშინ x წარმოადგენს G სიმრავლის შეხების წერტილს, თუკი $x\in F$, მაშინ x იქნება G სიმრავლის დაგროვების წერტილი. მართლაც, ავიღოთ x წერტილის ნებისმიერი ε-მიდამო $S(x;\varepsilon)$. რადგანაც F არსად მკვრივი სიმრავლეა R სივრცეში, ამიტომ $S(x;\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს G სიმრავლის წერტილებს. ამრიგად, R სივრცის ნებისმიერი წერტილი წარმოადგენს G სიმრავლის შეხების წერტილს და ამიტომ G მკვრივია R სივრცეში.

ახლა ვთქვათ, ღია $R-F$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია R სივრცეში. ავიღოთ ამ სივრცეში ნებისმიერი არაცარიელი ღია G_0 სიმრავლე. ცხადია, ეს სიმრავლე შეიცავს $R-F$ სიმრავლის წერტილებს. ამ წერტილებიდან ავიღოთ რომელიმე y წერტილი: $y\in G_0$. მაშინ $y\overline{\in}F$ და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი სფერო $S(y;\varepsilon)\subset G_0$, რომელიც არ შეიცავს F სიმრავლის არც ერთ წერტილს.

ამრიგად, F წარმოადგენს არსად მკვრივ სიმრავლეს R სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 15. სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი

განსაზღვრა 15. მეტრიკული სივრცის რაიმე x წერტილს ეწოდება ამ სივრცეში მოთავსებული არათვლადი E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი, თუ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ კონდენსაციის წერტილი ამავე დროს E სიმრავლის დაგროვების წერტილიცაა, მაგრამ E სიმრავლის დაგროვების წერტილი შეიძლება არ იყოს კონდენსაციის წერტილი.

თეორემა 42 (ლინდელოფი). R^n სივრცეში მოთავსებული არათვლადი E სიმრავლის ყოველი წერტილი კონდენსაციის წერტილია. გარდა, შესაძლებელია, წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x \in E$ და იგი არაა E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი. მაშინ არსებობს x წერტილის მართკუთხოვანი მიდამო I°, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა სასრულ ან თვლად სიმრავლეს. I° მიდამო ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რაციონალურ ინტერვალად. როგორც ვიცით, ყველა რაციონალური ინტერვალის სიმრავლე თვლადია. ეს ინტერვალები იყოს

$$I^{\circ}_1, I^{\circ}_2, \ldots, I^{\circ}_m, \ldots \qquad (15.1)$$

ცხადია, რომ I° არის რომელიმე I°_m ინტერვალი. ამრიგად, თუ x არაა E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი, მაშინ (15.1) მიმდევრობაში მოიძებნება x წერტილის შემცველი ისეთი I°_k ინტერვალი, რომელიც შეიცავს სასრულ ან თვლად სიმრავლეს E სიმრავლის წერტილებისას. აქედან გამომდინარეობს, რომ E სიმრავლის ის წერტილები, რომლებიც კონდენსაციის წერტილები არ არიან, შეადგენს სასრულ ან თვლად სიმრავლეს. ლინდელოფის (Lindelöf) თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 43. R^n სივრცეში მოთავსებული არათვლადი სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე სრულყოფილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, E არათვლადი სიმრავლეა. აღვნიშნოთ P-თი E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე. დავამტკიცოთ, რომ P სრულყოფილი სიმრავლეა. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ

1) P არ შეიცავს არც ერთ იზოლირებულ წერტილს; 2) P ჩაკეტილი სიმრავლეა.

ვთქვათ, x არის P სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი. რადგანაც x წერტილი E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილია, ამიტომ ამ წერტილის

ნებისმიერი მართკუთხოვანი მიდამო I° შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს. აღვნიშნოთ E^* სიმბოლოთი E სიმრავლის ნაწილი, რომელიც I° ინტერვალშია მოთავსებული. ვინაიდან E^* არათვლადი სიმრავლეა, ამიტომ ლინდელოფის თეორემის ძალით, E^* სიმრავლის ყოველი წერტილი, გარდა, შესაძლებელია, წერტილების სასრული ან თვლადი სიმრავლისა, არის კონდენსაციის წერტილი და, მაშასადამე, E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილიც. ასეთ წერტილთა სიმრავლე არათვლადია და ამიტომ I° შეიცავს P სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. მაშასადამე, x წარმოადგენს P სიმრავლის დაგროვების წერტილს. ამრიგად, P სიმრავლეს არა აქვს არც ერთი იზოლირებული წერტილი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ P ჩაკეტილი სიმრავლეა. ავიღოთ P სიმრავლის რაიმე დაგროვების წერტილი x^*. მაშინ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო $S(x^*; \varepsilon)$ შეიცავს P სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ვთქვათ, y არის P სიმრავლის რაიმე წერტილი, რომელიც $S(x^*; \varepsilon)$ სფეროშია მოთავსებული. $S(x^*; \varepsilon)$ სფერო წარმოადგენს აგრეთვე y წერტილის მიდამოსაც და რაკი y არის E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი, ამიტომ $S(x^*; \varepsilon)$ შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს. ამრიგად, x^* წერტილის ნებისმიერი მიდამო $S(x^*; \varepsilon)$ შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს. მაშასადამე, x^* არის E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი და ამიტომ $x^* \in P$.

ამრიგად, P ჩაკეტილი სიმრავლეა და იგი არ შეიცავს არც ერთ იზოლირებულ წერტილს. მაშასადამე, P სრულყოფილი სიმრავლეა.

თეორემა 44 (კანტორ-ბენდიქსონი). R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლე წარმოიდგინება სრულყოფილი სიმრავლისა და სასრული ან თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლეა. აღვნიშნოთ P-თი F სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე. რადგანაც კონდენსაციის წერტილი დაგროვების წერტილიცაა, ამიტომ F სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო, $P \subset F$. თანახმად 43-ე თეორემისა, P სრულყოფილი სიმრავლეა. აღვნიშნოთ $F-P$ სხვაობა D ასოთი:

$$F-P=D. \tag{15.2}$$

ლინდელოფის თეორემის ძალით D სასრული ან თვლადი სიმრავლეა. (15.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$F=P \cup D.$$

კანტორისა და ბენდიქსონის (Bendixson) თეორემა დამტკიცებულია.

§ 16. წრფივ ჩაკეტილ სიმრავლეთა აგებულება

სიმრავლეს წრფივი ეწოდება, თუ ამ სიმრავლის ყოველი ელემენტი R^1 სივრცეს ეკუთვნის.

თეორემა 45. ყოველ წრფივ ზემოდან შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ F სიმრავლეს უდიდესი ელემენტი აქვს.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ L ასოთი F სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. დავამტკიცოთ, რომ L არის F სიმრავლის უდიდესი ელემენტი. განვიხილოთ L წერტილის ნებისმიერი მიდამო $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს F სიმრავლის წერტილს. მაშასადამე, L წარმოადგენს F სიმრავლის შეხების წერტილს და რაკი F ჩაკეტილია, ამიტომ L ეკუთვნის F სიმრავლეს. L იქნება F სიმრავლის ელემენტებს შორის უდიდესი. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ F ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ მას აქვს უმცირესი ელემენტი.

სიმრავლის უდიდეს ელემენტს ეწოდება ამ სიმრავლის მარჯვენა ბოლო, უმცირესს კი მარცხენა.

ყოველ შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ სიმრავლეს აქვს როგორც მარცხენა ბოლო ისე მარჯვენა.

განსაზღვრა 16. (α, β) ინტერვალს საკუთრივ ინტერვალი ვუწოდოთ, თუ α და β სასრულია, ხოლო არასაკუთრივი, როდესაც $\alpha=-\infty$, ან $\beta=+\infty$, ან როდესაც $\alpha=-\infty$ და $\beta=+\infty$.

არასაკუთრივ ინტერვალებს $(-\infty, \alpha)$ და $(\beta, +\infty)$ ვუწოდოთ შესაბამისად მარცხენა და მარჯვენა არასაკუთრივი ინტერვალები.

განსაზღვრა 17. საკუთრივ δ ინტერვალს ჩაკეტილი F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი ეწოდება, თუ იგი F სიმრავლის არც ერთ წერტილს არ შეიცავს და მისი ბოლოები F სიმრავლეს ეკუთვნის; მარცხენა (მარჯვენა) არასაკუთრივ δ ინტერვალს F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი ეწოდება, თუ δ არ შეიცავს F სიმრავლის არც ერთ წერტილს და δ-ს მარჯვენა (მარცხენა) ბოლო F სიმრავლეს ეკუთვნის.

შემდეგში საკუთრივ ინტერვალს ვუწოდებთ უბრალოდ — ინტერვალს. ტერმინი მოსაზღვრე ინტერვალი ბერის[1] მიერ იყო შემოღებული.

თეორემა 46. თუ რაიმე x წერტილი ჩაკეტილ F სიმრავ-

---

[1] რენე ბერი (Baire, 1874 — 1932) — ფრანგი მათემატიკოსი, ფუნქციათა ცნობილი კლასიფიკაციის ავტორი. მისი მნიშვნელოვანი აღმოჩენები შეეხება პირველი კლასის ფუნქციათა გეომეტრიულ თვისებებს.

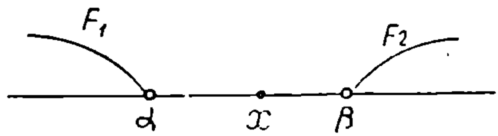
ლეს არ ეკუთვნის, მაშინ იგი F სიმრავლის რომელიმე მოსაზღვრე ინტერვალს მიეკუთვნება.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$F_1=(-\infty, x]\cap F,\quad F_2=[x, +\infty)\cap F.$$

ცხადია, F_1 და F_2 ჩაკეტილი სიმრავლეებია. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) F_1 და F_2 ცარიელი სიმრავლეები არაა. ამ შემთხვევაში F_1 სიმრავლეს ექნება მარჯვენა ბოლო, F_2-ს კი მარცხენა ბოლო. ისინი აღვნიშნოთ შესაბამისად α და β-თი (ნახ. 13). x წერტილი ეკუთვნის (α, β) ინტერვალს და ეს ინტერვალი არ შეიცავს F სიმრავლის არც ერთ წერტილს. მართლაც, F სიმრავლის რაიმე წერტილი (α, β) ინტერვალს რომ ეკუთვნოდეს, მაშინ იგი მიეკუთვნება (α, β) ინტერვალის ან $(\alpha, x]$ ან $[x, \alpha)$ ნაწილს და ამიტომ ან α არ იქნებოდა F_1 სიმრავლის მარჯვენა ბოლო ან β არ იქნებოდა F_2 სიმრავლის მარცხენა ბოლო. ახლა რაკი



ნახ. 13.

$\alpha\in F$, $\beta\in F$, ვღებულობთ, რომ (α, β) არის F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი, რომელიც x წერტილს შეიცავს.

2) F_1 ცარიელი სიმრავლეა: ამ შემთხვევაში F სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია და x ნაკლებია F_2 სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. აღვნიშნოთ F_2-ის მარცხენა ბოლო β-თი. ცხადია, $(-\infty, \beta)$ არის F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი და $x\in(-\infty, \beta)$.

3) F_2 ცარიელი სიმრავლეა. ამ შემთხვევაში F სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და x აღემატება F_1 სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. F_1 სიმრავლის მარჯვენა ბოლო აღვნიშნოთ α-თი. არასაკუთრივი ინტერვალი $(\alpha, +\infty)$ შეიცავს x წერტილს და იგი წარმოადგენს F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალს.

ამრიგად, თუ $x\overline{\in}F$, მაშინ იგი მიეკუთვნება F სიმრავლის რომელიმე მოსაზღვრე ინტერვალს.

თეორემა 47. ყოველი წრფივი ჩაკეტილი სიმრავლე მიიღება R^1 წრფიდან წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი სისტემის ამოგდებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა და განვიხილოთ ნებისმიერი x წერტილი, რომელიც F სიმრავლეს არ ეკუთვნის. მაშინ, 46-ე თეორემის ძალით, იგი მიეკუთვნება F-ის რომელიმე მოსაზღვრე δ ინტერვალს. მაშასადამე, თუ R^1 წრფიდან ამოვაგდებთ F სიმრავლის ყველა მოსაზღვრე ინტერვალს, დაგვრჩება F სიმრავლე.

F სიმრავლის ნებისმიერ ორ სხვადასხვა მოსაზღვრე ინტერვალს არ შეიძლება ჰქონდეთ საერთო წერტილი. მართლაც, F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალებს $\delta_1=(\alpha_1, \beta_1)$ და $\delta_2=(\alpha_2, \beta_2)$ რომ ჰქონდეს საერთო ξ წერტილი, მაშინ δ_2 ინტერვალის ბოლოები არ შეიძლება δ_1 ინტერვალს მიეკუთვნოს, ვინაიდან ისინი F სიმრავლეს ეკუთვნიან. ამიტომ $\delta_2\supset\delta_1$. მეორე მხრით, δ_1 ინტერვალის ბოლოები არ შეიძლება δ_2 ინტერვალს მიეკუთვნოს, ვინაიდან ისინი F სიმრავლეს ეკუთვნიან. ამიტომ $\delta_1=\delta_2$. მაშასადამე, თუ მოსაზღვრე ინტერვალებს საერთო წერტილი აქვთ, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა. ასე რომ ორ სხვადასხვა მოსაზღვრე ინტერვალს არა აქვს საერთო წერტილი.

დასასრულ ვაჩვენოთ, რომ მოსაზღვრე ინტერვალთა სისტემა სასრულია ან თვლადი. ამისათვის ყოველ მოსაზღვრე ინტერვალში ავიღოთ რაიმე რაციონალური წერტილი. ასეთ რაციონალურ წერტილთა E სიმრავლე ნაწილია ყველა რაციონალურ წერტილის Γ სიმრავლისა და რაკი Γ თვლადია, ამიტომ E სიმრავლე იქნება სასრული ან თვლადი. მაგრამ F სიმრავლის ყველა მოსაზღვრე ინტერვალის სიმრავლე E სიმრავლის ეკვივალენტურია. ამრიგად, თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

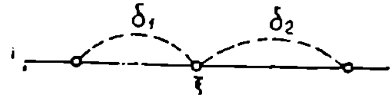
თეორემა 48. ყ ო ვ ე ლ ი შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი F ს ი მ რ ა ვ ლ ე, რ ო მ ლ ი ს ბ ო ლ ო ე ბ ი ა a დ ა b, $a<b$, მ ი ი ღ ე ბ ა $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ი დ ა ნ წ ყ ვ ი ლ-წ ყ ვ ი ლ ა დ ა რ ა გ ა დ ა მ კ ვ ე თ ი ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ ე ბ ი ს ს ა ს რ უ ლ ი ა ნ თ ვ ლ ა დ ი ს ი ს ტ ე მ ი ს ა მ ო გ დ ე ბ ი თ.

თეორემა 49. ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი F ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს რ უ ლ ყ ო ფ ი ლ ი ა მ ა შ ი ნ დ ა მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო დ ე ს ა ც მ ი ს მ ო ს ა ზ ღ ვ რ ე ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ ე ბ ს წ ყ ვ ი ლ-წ ყ ვ ი ლ ა დ ს ა ე რ თ ო ს ა ზ ღ ვ რ ი თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ა რ ა ა ქ ვ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, F სრულყოფილი სიმრავლეა და მის ორ მოსაზღვრე δ_1 და δ_2 ინტერვალს აქვთ საერთო საზღვრითი წერტილი ξ. ამ წერტილის მიმართ ისინი განლაგებულია სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 14). ცხადია, ξ წარმოადგენს F სიმრავლის იზოლირებულ წერტილს და ამიტომ F არ შეიძლება სრულყოფილი სიმრავლე იყოს. მაშასადამე, F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალებს წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო

საზღვრითი წერტილები. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალებს წყვილ-წყვილად საერთო საზღვრითი წერტილები არა აქვთ. ამ შემთხვევაში, თუ F სრულყოფილი სიმრავლე არაა, მაშინ მას ექნება რაიმე იზოლირებული წერტილი ξ და, მაშასადამე, არსებობს F სიმრავლის ორი მოსაზღვრე ინტერვალი δ_1 და δ_2, რომელთათვის ξ საერთო საზღვრითი წერტილი იქნება და მის მიმართ განლაგებულია სხვადასხვა მხარეს, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.



ნახ. 14.

§ 17. კანტორის სრულყოფილი სიმრავლე

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ წრფივ არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლის მაგალითს, რომელიც კანტორს ეკუთვნის.

ავიღოთ $\Delta=[0,1]$ სეგმენტი და იგი გავყოთ სამ კონგრუენტულ სეგმენტად $\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{3}$ წერტილების საშუალებით. Δ სეგმენტს გამოვაკლოთ შუა ინტერვალი $\delta=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, მივიღებთ ორ სეგმენტს $\Delta_0=\left[0, \frac{1}{3}\right]$ და $\Delta_2=\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილი. ზოგადად ეს სეგმენტები ასე შეგვიძლია აღვნიშნოთ:

$$\Delta_{i_1}=\left[\frac{i_1}{3}, \frac{i_1+1}{3}\right],$$

სადაც i_1 ღებულობს მნიშვნელობებს 0-სა და 2-ს.

შემდეგ, ყოველი Δ_{i_1} სეგმენტთაგანი გავყოთ სამ კონგრუენტულ სეგმენტად და გამოვაკლოთ შუა ინტერვალები

$$\delta_0=\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right), \quad \delta_2=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}\right).$$

ეს ინტერვალები ასე შეგვიძლია აღვნიშნოთ:

$$\delta_{i_1}=\left(\frac{i_1}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{i_1}{3}+\frac{2}{3^2}\right),$$

სადაც i_1 ღებულობს მნიშვნელობებს 0-სა და 2-ს. ცხადია, δ, δ_0, δ_2 ინ-

ტერვალებს არა აქვთ არც საერთო წერტილები და არც საერთო ბოლოები. Δ_0 და Δ_2 სეგმენტებიდან ზემოაღნიშნული ინტერვალების გამოკლების შედეგად მივიღებთ ოთხ სეგმენტს

$$\Delta_{00}=\left[0,\ \frac{1}{3^2}\right],\quad \Delta_{02}=\left[\frac{2}{3^2},\ \frac{1}{3}\right],\quad \Delta_{20}=\left[\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\right],$$

$$\Delta_{22}=\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2},\ 1\right].$$

ეს სეგმენტები (ნახ. 15) მოკლედ ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Delta_{i_1i_2}=\left[\frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2},\ \frac{i_1}{3}+\frac{i_2+1}{3^2}\right],$$

სადაც i_1 და i_2 ღებულობენ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მნიშვნელობებს 0-სა და 2-ს.

თითოეული $\Delta_{i_1i_2}$ სეგმენტთაგანი გავყოთ სამ კონგრუენტულ სეგმენტად და შუა ინტერვალები $\delta_{i_1i_2}$ გამოვაკლოთ. აქ i_1 და i_2 ღებულობენ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მნიშვნელობებს 0-სა და 2-ს. ცხადია,

$$\delta_{i_1i_2}=\left(\frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\frac{1}{3^3},\ \frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\right).$$

$\Delta_{i_1i_2}$ სეგმენტებიდან $\delta_{i_1i_2}$ ინტერვალების გამოკლების შედეგად მივიღებთ $\Delta_{i_1i_2i_3}$ სეგმენტებს, სადაც i_1, i_2, i_3 ღებულობენ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მნიშვნელობებს 0-სა და 2-ს. ასეთ სეგმენტთა რიცხვი იქნება 8.

ნახ. 15.

ცხადია, რომ δ, δ_{i_1}, $\delta_{i_1i_2}$ ინტერვალებს არა აქვთ საერთო წერტილები და არც საერთო ბოლოები.

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ, ერთი მხრით, სეგმენტთა მიმდევრობას

$$\Delta,\ \Delta_{i_1},\ \Delta_{i_1i_2},\ \ldots,\ \Delta_{i_1i_2\ldots i_k},\ \ldots,$$

ხოლო მეორე მხრით ინტერვალთა მიმდევრობას

$$\delta,\ \delta_{i_1},\ \delta_{i_1i_2},\ \ldots,\ \delta_{i_1i_2\ldots i_k},\ \ldots, \tag{17.1}$$

სადაც

$$\Delta_{i_1i_2\ldots i_k}=\left[\frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\cdots+\frac{i_k}{3^k},\ \frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\cdots+\frac{i_k+1}{3^k}\right],$$

$$\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \left(\frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \cdots + \frac{i_k}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}},\ \frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \cdots + \frac{i_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}}\right).$$

)17.1) ინტერვალებს წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ და არც საერთო ბოლოები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P^* = \Delta - \{\delta \cup (\delta_0 \cup \delta_2) \cup (\delta_{00} \cup \delta_{02} \cup \delta_{20} \cup \delta_{22}) \cup \cdots\}.$$

ცხადია, P^* ჩაკეტილი სიმრავლეა და რადგანაც (17.1) მიმდევრობის წევრებს წყვილ-წყვილად საერთო ბოლოები არა აქვთ, ამიტომ, 49-ე თეორემის ძალით P^* — სრულყოფილი სიმრავლეა.

დავამტკიცოთ, რომ P^* არსად მკვრივი სიმრავლეა R^1 სივრცეში. 41-ე თეორემის თანახმად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $R^1 - P^*$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა R^1-ში. განვიხილოთ P^* სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი x და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ავიღოთ მთელი დადებითი n რიცხვი იმდენად დიდი, რომ $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ და აღვნიშნოთ P_n ასოთი ყველა $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ სეგმენტის ჯამი. რადგანაც ყოველი $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ სეგმენტის სიგრძე უდრის $\frac{1}{3^n}$ და, ამას გარდა, ამ სეგმენტებს წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ, ამიტომ მანძილი P_n სიმრავლის ნებისმიერ წერტილიდან $R^1 - P_n$ სიმრავლემდე ε-ზე ნაკლებია. მაშასადამე, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ინტერვალი შეიცავს $R^1 - P_n$ სიმრავლის წერტილებს და რაკი $R^1 - P^* \supset R^1 - P_n$, ამიტომ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ინტერვალი შეიცავს $R^1 - P^*$ სიმრავლის წერტილებს, რის გამო x წარმოადგენს $R^1 - P^*$ სიმრავლის შეხების წერტილს. ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ $x \in P^*$, მაშინაც x იქნება $R^1 - P^*$ სიმრავლის შეხების წერტილი. ამრიგად, R^1 სივრცის ყოველი წერტილი იქნება $R^1 - P^*$ სიმრავლის შეხების წერტილი და ამიტომ $R^1 - P^*$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა R^1-ში, ე. ი. P^* არსად მკვრივი სიმრავლეა R^1-ში.

P^* სიმრავლეს ეწოდება **კანტორის სრულყოფილი სიმრავლე** ანუ **კანტორის დისკონტინუუმი**.

§ 18. წრფივი სრულყოფილი სიმრავლის სიმძლავრე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებული სიმრავლეა. ვთქვათ, α და β ორი ნამდვილი რიცხვია, ამასთანავე $\alpha < \beta$. თუ ნამდვილ რიცხვებს წრფის წერტილებით გამოვსახავთ, მაშინ α წერტილი წინაა β წერტილზე. მაშასადამე, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და წრფის წერტილთა სიმრავლე ურთიერთმსგავსი სიმრავლეებია.

თეორემა 50. თუ თვლად D სიმრავლეს ბოლოები არ აქვს და მის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის არსებობს ამ სიმრავლის წერტილები, მაშინ D სიმრავლე $(0,1)$ ინტერვალის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის მსგავსია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E ასოთი $(0,1)$ ინტერვალის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლე. რადგანაც D და E თვლადი სიმრავლეებია, ამიტომ მათი ყველა წერტილი შეგვიძლია დავნომროთ:

$$D=\{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}, \tag{18.1}$$

$$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}. \tag{18.2}$$

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ მსგავსება D და E სიმრავლეთა შორის. ეს მსგავსება შემდეგნაირად შეიძლება დავადგინოთ, $d'=d_1$ წერტილს შევუსაბამოთ $e'=e_1$ წერტილი და D და E სიმრავლეებიდან ამოვშალოთ ეს წერტილები. ავიღოთ $d''=d_2$ წერტილი და E სიმრავლეში ვიპოვოთ პირველი ამოუშლელი ისეთი e'' წერტილი, რომ e' და e'' წერტილების გეომეტრიული რიგი ისეთივე იყოს, როგორც აქვთ d' და d'' წერტილებს. d'' წერტილს შევუსაბამოთ e'' წერტილი და ეს წერტილებიც ამოვშალოთ D და E სიმრავლეებიდან.

ამის შემდეგ E სიმრავლიდან ავიღოთ პირველი ამოუშლელი e''' წერტილი და D სიმრავლეში ვეძებოთ პირველი ამოუშლელი ისეთი d''' წერტილი, რომ d', d'', d''' წერტილების გეომეტრიული რიგი ეთანხმებოდეს e', e'', e''' წერტილების გეომეტრიულ რიგს. d''' წერტილს შევუსაბამოთ e''' წერტილი და ეს წერტილები ამოვშალოთ D და E სიმრავლეებიდან. ახლა ავიღოთ D სიმრავლიდან პირველი ამოუშლელი $d^{(4)}$ წერტილი და E სიმრავლეში ვეძებოთ პირველი ამოუშლელი ისეთი $e^{(4)}$ წერტილი, რომ $e', e'', e''', e^{(4)}$ წერტილების გეომეტრიული რიგი ეთანხმებოდეს $d', d'', d''', d^{(4)}$ წერტილების გეომეტრიულ რიგს. $d^{(4)}$ წერტილს შევუსაბამოთ $e^{(4)}$ წერტილი და ეს წერტილებიც ამოვშალოთ D და E სიმრავლეებიდან. ეს პროცესი განვაგრძოთ.

შევნიშნოთ, რომ პროცესს ვერ გავაგრძელებთ, თუ D და E სიმრავლეებიდან ერთ-ერთში ამოუშლელი წერტილის აღების შემთხვევაში მეორეში ვერ შევძლებთ შევარჩიოთ ამოუშლელი წერტილი, რომლის გეომეტრიული რიგი მეორე მიმდევრობის ამოშლილი წერტილებთან ეთანხმებოდეს პირველი მიმდევრობის ამოშლილ წერტილთა და ახლად ამოშლილ წერტილის გეომეტრიულ რიგს. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან D ისეთი სიმრავლეა, რომლის ნებისმიერი წერტილისათვის არსებობს ამ სიმრავლის უამრავი როგორც წინა, ისე მომდევნო წერტილი და D

სიმრავლის ყოველ ორ წერტილს შორის არსებობს ამავე სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე.

ასეთივე თვისებისაა E სიმრავლეც. მაშასადამე, ზემოაღნიშნული პროცესი უსაზღვროდ შეგვიძლია გავაგრძელოთ. ამრიგად, D და E სიმრავლეებს შორის დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ისე, რომ D სიმრავლის ყოველი ორი წერტილიდან წინა წერტილს შეესაბამება E სიმრავლეში წინა წერტილი. მაშასადამე, D სიმრავლე E სიმრავლის მსგავსია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 51. არსად მკვრივი სრულყოფილი P სიმრავლის მოსაზღვრე საკუთრივ ინტერვალთა სიმრავლე (0,1) ინტერვალის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის მსგავსია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\delta^*_1, \delta^*_2, \ldots, \delta^*_n, \ldots$ არიან P სიმრავლის მოსაზღვრე საკუთრივი ინტერვალები, ხოლო $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n \ldots\}$ ამ ინტერვალების ცენტრთა სიმრავლეა.

C სიმრავლის ორ ნებისმიერ c_i და c_k წერტილს შორის არსებობს ამავე სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე: მართლაც, რადგანაც P სრულყოფილი არსად მკვრივი სიმრავლეა, ხოლო c_i და c_k წერტილების შემცველ δ^*_i და δ^*_k ინტერვალებს შორის არსებობს P სიმრავლის მოსაზღვრე საკუთრივ ინტერვალთა უსასრულო სიმრავლე, ამიტომ c_i და c_k წერტილებს შორის არსებობს C სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე. მაშასადამე, 48-ე თეორემის ძალით, C მსგავსია (0,1) ინტერვალის ყველა რაციონალური რიცხვის Γ სიმრავლისა:

$$\Gamma=\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}.$$

ამიტომ C და Γ სიმრავლეთა მსგავსების შესაბამისობა ისე შეგვიძლია დავამყაროთ, რომ, როცა $c_i<c_k$, მაშინ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $r_i<r_k$. თუ ყოველ δ^*_n ინტერვალს შევუსაბამებთ მის c_n ცენტრს, მაშინ ყოველ δ^*_n ინტერვალს შეესაბამება რაციონალური რიცხვი r_n. ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა და მასთან უტოლობა ტოლფასია იმისა, რომ δ^*_i ინტერვალი ძევს δ^*_k ინტერვალის მარცხნივ. ეს კი იმას გვიჩვენებს, რომ P სიმრავლის საკუთრივი მოსაზღვრე ინტერვალების სიმრავლე Γ სიმრავლის მსგავსია. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 18. სრულყოფილი P სიმრავლის რაიმე ξ წერტილს პირველი გვარის წერტილი ეწოდება, თუ იგი P სიმრავლის ცალმხრივ დაგროვების წერტილს წარმოადგენს, ე. ი., თუ ξ არის P სიმრავლის რაიმე მოსაზღვრე ინტერვალის საზღვრითი წერტილი.

ცხადია, სრულყოფილი P სიმრავლის პირველი გვარის ყველა წერ-

ტილი, გარდა P-ს ბოლოებისა, წარმოადგენს P სიმრავლის საკუთრივი მოსაზღვრე ინტერვალების საზღვრით წერტილებს.

განსაზღვრა 10. სრულყოფილი P სიმრავლის რაიმე x წერტილს მეორე გვარის წერტილი ეწოდება, თუ იგი P სიმრავლის ორმხრივ დაგროვების წერტილს წარმოადგენს.

თეორემა 52. არსად მკვრივი სრულყოფილი P სიმრავლის მეორე გვარის ყველა წერტილის სიმრავლე (0,1) ინტერვალის ყველა ირაციონალურ წერტილის სიმრავლის მსგავსია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D=\{\delta^*_1, \delta^*_2, \ldots, \delta^*_n, \ldots\}$ არის P სიმრავლის საკუთრივი ყველა მოსაზღვრე ინტერვალის სიმრავლე. 51-ე თეორემის ძალით, D სიმრავლე (0,1) ინტერვალის ყველა რაციონალური რიცხვის $\Gamma=\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ სიმრავლის მსგავსია, მასთან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ δ^*_k და r_k ურთიერთშესაბამისი ელემენტებია.

ავიღოთ (0,1) ინტერვალის რაიმე ირაციონალური ξ წერტილი და განვიხილოთ ξ წერტილის შემცველ თავმოყრილ რაციონალურ ინტერვალთა სისტემა $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots\}$. რადგანაც δ_k ინტერვალის საზღვრითი წერტილები რაციონალური წერტილებია, ამიტომ მათ შეესაბამება P სიმრავლის რაიმე ორი საკუთრივი მოსაზღვრე ინტერვალი, მასთან D და Γ სიმრავლეთა მსგავსების ძალით δ_k ინტერვალის მარცხენა საზღვრით წერტილს შეესაბამება ამ ორი მოსაზღვრე ინტერვალიდან მარცხენა ინტერვალი, ხოლო δ_k-ს მარჯვენა საზღვრით წერტილს კი ამ მოსაზღვრე ინტერვალებიდან მარჯვენა ინტერვალი. მაგრამ ამ ორ მოსაზღვრე ინტერვალს შორის მოთავსებული ყველა წერტილის სიმრავლე რომელიღაც Δ_k სეგმენტს წარმოადგენს. ამგვარად განსაზღვრული სეგმენტები $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ ერთმანეთში ჩალაგებული არიან, ვინაიდან δ_{k+1} ინტერვალის საზღვრითი წერტილები მდებარეობენ δ_k ინტერვალის შიგნით და, მაშასადამე, ორი მოსაზღვრე ინტერვალი, რომლებიც შეესაბამება δ_{k+1} ინტერვალის საზღვრით წერტილებს, მდებარეობენ δ_k ინტერვალის საზღვრით წერტილების შესაბამის მოსაზღვრე ინტერვალებს შორის.

განვიხილოთ რიცხვთა ორი მიმდევრობა

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots, \quad b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots,$$

სადაც a_k და b_k არიან Δ_k სეგმენტის მარცხენა და მარჯვენა ბოლოები. რადგანაც P ჩაკეტილი სიმრავლეა და $a_k \in P$, $b_k \in P$ $(k=1, 2, \ldots)$, ამიტომ $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ და $\beta=\lim\limits_{k\to\infty} b_k$ წერტილები P სიმრავლის ელემენტებია.

დავამტკიცოთ, რომ $\alpha=\beta$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\alpha<\beta$. ამ შემთხვევაში $\Delta=[\alpha, \beta]$ სეგმენტი მიეკუთვნება ყოველ Δ_k სეგმენტს. რადგანაც P არსად მკვრივი სიმრავლეა და Δ სეგმენტის α და β ბოლოები P-ს ეკუთვნის, ამიტომ არსებობს P სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი δ^*_n, რომელიც მთლიანად Δ სეგმენტის შიგნით მდებარეობს. ამ δ^*_n ინტერვალს ეკუთვნის გარკვეული რაციონალური წერტილი r_n და რადგანაც δ^*_n მდებარეობს იმ მოსაზღვრე ინტერვალებს შორის, რომლებიც Δ_k სეგმენტს განსაზღვრავენ, ამიტომ მსგავსების ძალით, რაციონალური წერტილი r_n უნდა მდებარეობდეს ნებისმიერი δ_k ინტერვალის საზღვრით წერტილებს შორის. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k = \{\xi\}$ და, მაშასადამე, $\xi=r_n$ ტოლობა შეუძლებელია. ამრიგად, გადაკვეთა $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ შედგება მხოლოდ ერთი α წერტილისაგან, რომელიც შეესაბამება (0,1) ინტერვალის ირაციონალურ ξ წერტილს.

ცხადია, რომ α წერტილი P სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი P სიმრავლის მეორე გვარის წერტილია. მართლაც, $\alpha\in\Delta_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, მასთან Δ_{k+1} სეგმენტი Δ_k სეგმენტის შიგნით მდებარეობს. მაშასადამე, α წარმოადგენს ორივე მხრიდან დაგროვების წერტილს Δ_k სეგმენტების ბოლო წერტილთა სიმრავლისათვის და რაკი ეს ბოლოები P-ს ეკუთვნის, ამიტომ α არის P სიმრავლის მეორე გვარის წერტილი.

ამრიგად, (0,1) ინტერვალის ყოველ ირაციონალურ ξ წერტილს შეესაბამება P სიმრავლის მეორე გვარის α წერტილი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს შესაბამისობა არის მსგავსების შესაბამისობა. ამისათვის ავიღოთ (0,1) ინტერვალის ორი ნებისმიერი ირაციონალური წერტილი ξ და ξ'. თუ $\xi<\xi'$, მაშინ მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვი r_n, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\xi<r_n<\xi'$. მაგრამ ξ წერტილი განისაზღვრება თავმოყრილ ინტერვალთა $\{\delta_k\}$ სისტემით, ხოლო ξ' კი თავმოყრილ ინტერვალთა ანალოგიური სისტემით $\{\delta'_k\}$, მასთან δ_k და δ'_k ინტერვალების საზღვრითი წერტილები რაციონალური წერტილებია. თუ ნატურალური k რიცხვი საკმაოდ დიდია, მაშინ δ_k ინტერვალის საზღვრითი წერტილები მოთავსდებიან r_n წერტილის მარცხნით, ხოლო δ'_k ინტერვალების საზღვრითი წერტილები მოთავსდებიან r_n-ის მარჯვნით.

რადგანაც $\Gamma\simeq D$, ამიტომ Δ_k სეგმენტი მოთავსებულია δ^*_n ინტერვალის მარცხნით, ხოლო Δ'_k სეგმენტი კი δ^*_n სეგმენტის მარჯვნით.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ირაციონალური ξ წერტილის შესატყ-

ვისი მეორე გვარის α წერტილი P სიმრავლისა მდებარეობს ξ' წერტილის შესატყვისი მეორე გვარის α' წერტილის მარცხნით, ე. ი. $\alpha<\alpha'$. ამრიგად, $\xi<\xi'$ უტოლობას მოსდევს $\alpha<\alpha'$ უტოლობა. მაშასადამე, (0,1) ინტერვალის ყველა ირაციონალური წერტილის სიმრავლე P სიმრავლის მეორე გვარის ყველა წერტილის სიმრავლის მსგავსია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 53. **შემოსაზღვრული არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლეები ურთიერთმსგავსია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, P_1 და P_2 შემოსაზღვრული არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლეებია, ხოლო $D_1=\{\delta_k\}$ და $D_2=\{\delta'_k\}$ არიან შესაბამისად P_1 და P_2 სიმრავლეების საკუთრივი მოსაზღვრე ინტერვალთა სისტემები. 51-ე თეორემის თანახმად D_1 და D_2 სიმრავლეები (0,1) ინტერვალის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის მსგავსია, ხოლო 52-ე თეორემის ძალით P_1 და P_2 სიმრავლეების მეორე გვარის წერტილთა H_1 და H_2 სიმრავლეები (0,1) ინტერვალის ყველა ირაციონალური წერტილის I სიმრავლის მსგავსი არიან.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $H_1\simeq H_2$. მართლაც, აღვნიშნოთ ξ_1 და ξ_2 ასოებით შესაბამისად P_1 და P_2 სიმრავლეთა მეორე გვარის წერტილები, რომლებიც I სიმრავლის ერთსა და იმავე α წერტილს შეესაბამებათ. დავუშვათ, რომ ξ_1 და ξ'_1 არიან P_1 სიმრავლის ერთმანეთისაგან განსხვავებული მეორე გვარის წერტილები და ვიგულისხმოთ, რომ $\xi_1<\xi'_1$. ვთქვათ, ξ_1 წერტილი I სიმრავლის α წერტილს შეესაბამება, ხოლო ξ'_1 კი I სიმრავლის α_1 წერტილს. რადგანაც $H_1\simeq I$, ამიტომ $\alpha<\alpha_1$. შემდეგ, რაკი $H_2\simeq I$, ამიტომ $\xi_2<\xi'_2$, სადაც ξ_2 და ξ'_2 არიან H_2 სიმრავლის ელემენტები, რომელთა შესატყვისი წერტილებია შესაბამისად α და α_1. მაშასადამე, H_1 და H_2 სიმრავლეები მსგავსნი არიან.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ x_1 არის P სიმრავლის რაიმე საკუთრივი მოსაზღვრე δ^*_n ინტერვალის მარჯვენა საზღვრითი წერტილი. მაშინ ცხადია, x_1 იქნება აგრეთვე მარცხენა საზღვრითი წერტილი P სიმრავლის მეორე გვარის იმ წერტილთა სიმრავლისა, რომლებიც δ^*_n ინტერვალის მარჯვნით მდებარეობენ. მაგრამ P სიმრავლის ამ მეორე გვარის წერტილებს შეესაბამება რაციონალური r_n წერტილის მარჯვნით მდებარე I სიმრავლის წერტილები, ხოლო I სიმრავლის ამ წერტილებს, თავის მხრივ შეესაბამება P_1 სიმრავლის მოსაზღვრე δ'_n ინტერვალის მარჯვნით მდებარე P_1 სიმრავლის მეორე გვარის წერტილები.

ამრიგად, თუ δ_n ინტერვალის მარჯვენა საზღვრით x_1 წერტილს შევუსაბამებთ δ'_n მოსაზღვრე ინტერვალის მარჯვენა x'_1 საზღვრით წერტილს, მაშინ x_1 წერტილებისა და H_1 სიმრავლის წერტილების დალაგება

ისეთივე იქნება, როგორიც სათანადო x'_1 წერტილებისა და H_2 სიმრავლის წერტილებისა. ცხადია, იგივეს ექნება ადგილი, თუ x_1 არის P_1 სიმრავლის რაიმე საკუთრივი მოსაზღვრე ინტერვალის მარცხენა საზღვრითი წერტილი.

დასასრულ, თუ P_1 და P_2 სიმრავლეების მარცხენა ბოლოებს ერთმანეთს შევუსაბამებთ და, ანალოგიურად, მარჯვენა ბოლოებსაც ერთიმეორეს შევუსაბამებთ, ამით მივიღებთ P_1 და P_2 სიმრავლეების მსგავსებას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 54. ყოველ არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

დამტკიცება. ვთქვათ, P არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლეა განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) P მკვრივია რაიმე Δ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში $\Delta\subset P$ და, მაშასადამე, ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე P სიმრავლის Δ ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია; პირიქით, P სიმრავლე ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლის ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია (ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლის ქვესიმრავლედ შეგვიძლია ავიღოთ თვით P სიმრავლე). ამიტომ ბერნშტეინის თეორემის ძალით, P სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

2) P არსად მკვრივი სიმრავლეა. 52-ე თეორემის ძალით, P შეიცავს კონტინუუმის სიმძლავრის ქვესიმრავლეს. ასეთ ქვესიმრავლეს წარმოადგენს P სიმრავლის მეორე გვარის ყველა წერტილის სიმრავლე. ამრიგად, ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ეკვივალენტურია P სიმრავლის ქვესიმრავლისა. პირიქით, P სიმრავლე ეკვივალენტურია ყველა ნამდვილი რიცხვის ქვესიმრავლისა. ბერნშტეინის თეორემის ძალით P სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 55. ყოველი არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლეა. კანტორ-ბენდიქსონის თეორემის ძალით

$$F=P\cup D,$$

სადაც P არის F სიმრავლის ყველა კონდენსაციის წერტილის სიმრავლე, D კი სასრული ან თვლადი სიმრავლეა. 43-ე თეორემის ძალით P სრულყოფილი სიმრავლეა. მაშასადამე, F სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე, ვინაიდან P კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

§ 19. ბმული სიმრავლეები

მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს **ბმული სიმრავლე** ეწოდება, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერ დაშლაში ორ არაგადამკვეთ E_1 და E_2 სიმრავლედ, ერთ-ერთი მათგანი მეორის დაგროვების წერტილს შეიცავს.

თეორემა 56. *მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებული ჩაკეტილი სიმრავლის ბმულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი არ წარმოადგენდეს ორ არაგადამკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლის ჯამს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, F ჩაკეტილი ბმული სიმრავლეა და დავუშვათ, რომ

$$F=F_1 \cup F_2,$$

სადაც F_1 და F_2 ურთიერთარაგადამკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეებია. F სიმრავლის ბმულობის გამო F_1 და F_2 სიმრავლეებიდან ერთ-ერთის დაგროვების წერტილი მეორე სიმრავლეს ეკუთვნის. ავიღოთ, მაგალითად, F_1 სიმრავლის დაგროვების წერტილი x, რომელიც F_2 სიმრავლეს ეკუთვნის. რადგანაც F_1 ჩაკეტილია, ამიტომ $x \in F_1$. მაშასადამე $F_1 \cup F_2 \neq \Lambda$, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ჩაკეტილი F სიმრავლე არ წარმოიდგინება როგორც გაერთიანება ორი ურთიერთგადამკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლისა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ F ბმული სიმრავლეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, F ბმული არაა. მაშინ არსებობს F-ის ისეთი დაშლა ორ არაგადამკვეთ სიმრავლედ E_1 და E_2, რომლებიდან თითოეული მათგანი არ შეიცავს მეორის არც ერთ დაგროვების წერტილს. ამიტომ $\overline{E}_1$ და $\overline{E}_2$ ჩაკეტვებს არ ექნებათ საერთო წერტილი. ამის გარდა, რაკი F ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$F=\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2.$$

ამრიგად, F სიმრავლე წარმოვადგინეთ როგორც ორი არაგადამკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლის გაერთიანება. ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, F ბმული სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 20. ყოველ ჩაკეტილ ბმულ სიმრავლეს **კონტინუუმი** ეწოდება.

თეორემა 57. *ყოველი n-განზომილებიანი სეგმენტი არის კონტინუუმი.*

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე n-განზომილებიანი სეგმენტი $I=[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n]$. იგი ჩაკეტილი სიმრავლეა. დასამტკიცებელია, რომ I წარმოადგენს კონტინუუმს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, I კონტინუუმი არაა. მაშინ I შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ჯამი ორი ურთიერთარაგადამკვეთი ჩაკეტილი F_1 და F_2 სიმრავლისა.

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ წერტილი ეკუთვნის F_1 სიმრავლეს. აღვნიშნოთ მანძილი x წერტილიდან F_2 სიმრავლემდე δ სიმბოლოთი:

$$\delta=\rho(x, F_2).$$

რადგანაც $x\overline{\in}F_2$ და F_2 ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $\delta>0$. ამას გარდა, F_2 სიმრავლეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი წერტილი y, რომ $\delta=\rho(x, y)$.

განვიხილოთ სფერო $S(x; \delta)$. ცხადია, რომ სფეროს შიგნით არ მოთავსდება F_2 სიმრავლის არც ერთი წერტილი. ახლა ავიღოთ y წერტილის ნებისმიერი ε-მიდამო $S(y; \varepsilon)$. ეს მიდამო შეიცავს F_1 სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს და ამიტომ y იქნება F_1 სიმრავლის დგროვების წერტილი. F_1 სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო, $y\in F_1$. ამრიგად, გამოდის, რომ F_1 და F_2 სიმრავლეებს აქვთ საერთო წერტილი, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 58. თუ მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ F_1 და F_2 კონტინუუმებს საერთო x წერტილი აქვთ, მაშინ $F=F_1\cup F_2$ ჯამიც კონტინუუმია.

დამტკიცება. F_1 და F_2 სიმრავლეების ჩაკეტილობის გამო F სიმრავლეც ჩაკეტილია. დავუშვათ, რომ F კონტინუუმი არაა. მაშინ იგი წარმოიდგინება როგორც ჯამი ურთიერთარაგადამკვეთი ორი ჩაკეტილი H_1 და H_2 სიმრავლისა:

$$F=H_1\cup H_2.$$

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x\in H_1$. ავიღოთ H_2 სიმრავლიდან რაიმე წერტილი y. მაშინ y მიეკუთვნება ერთ-ერთს მაინც F_1 და F_2 სიმრავლეებიდან. ვთქვათ, ჯერ, რომ $y\in F_1$. გვაქვს:

$$F_1=(F_1\cap H_1)\cup(F_1\cap H_2).$$

$F_1\cap H_1$ სიმრავლე ცარიელი არაა, რადგან $x\in F_1\cap H_1$. აგრეთვე $y\in F_1\cap H_2$. შემდეგ, რაკი $F_1\cup H_1$ და $F_1\cup H_2$ ურთიერთარაგადამკვეთი ჩაკეტილი

სიმრავლეებია, ამიტომ F_1 ბმული სიმრავლე იქნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ახლა ვთქვათ, $y \in F_2$. გვაქვს:

$$F_2 = (F_2 \cap H_1) \cup (F_2 \cap H_2).$$

აქ $x \in F_2 \cap H_1$ და $y \in F_2 \cap H_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $F_2 \cap H_1$ და $F_2 \cap H_2$ ჩაკეტილი სიმრავლეები ცარიელი არ არიან. მაშასადამე, F_2 ბმულ სიმრავლეს არ წარმოადგენს. მივიღოთ წინააღმდეგობა. რაც თეორემას ამტკიცებს.

თეორემა 59. მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული ყოველი Γ კონტინუუმი, რომელიც მოცემული E სიმრავლის რაიმე x წერტილთან ერთად შეიცავს E სიმრავლის დამატებითი CE სიმრავლის რაიმე y წერტილსაც, შეიცავს E სიმრავლის ერთ საზღვრით წერტილს მაინც.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ γ-თი E სიმრავლის საზღვარი. ცხადია, რომ $\gamma = \bar{E} \cap \overline{CE}$ და რადგანაც R სივრცის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც შემდეგი ორი ჩაკეტილი სიმრავლიდან $\bar{E}$ და $\overline{CE}$, ამიტომ

$$\Gamma = (\Gamma \cap \bar{E}) \cup (\Gamma \cap \overline{CE}). \tag{19.1}$$

$\Gamma \cap \bar{E}$ და $\Gamma \cap \overline{CE}$ სიმრავლეები ცარიელი არ არიან, ვინაიდან

$$x \in \Gamma \cap \bar{E}, \quad y \in \Gamma \cap \overline{CE}.$$

ამას გარდა, ისინი ჩაკეტილი სიმრავლეებია და რაკი Γ კონტინუუმია, ამიტომ, (19.1) ტოლობის თანახმად $\Gamma \cap \bar{E}$ და $\Gamma \cap \overline{CE}$ სიმრავლეთა გადაკვეთა ცარიელი არაა. მაგრამ

$$(\Gamma \cap \bar{E}) \cap (\Gamma \cap \overline{CE}) = \Gamma \cap \gamma.$$

ამრიგად, $\Gamma \cap \gamma$ ცარიელი სიმრავლე არ არის და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 20. მრავალი განზომილების ჩაკეტილ და ღია სიმრავლეთა აგებულება

განსაზღვრა 21. მეტრიკული R სივრცის ორ x და y წერტილს ეწოდება შეერთებადი რაიმე Γ კონტინუუმით, თუ Γ შეიცავს ორივე წერტილს.

თეორემა 60. თუ R^n სივრცეში მოთავსებული ღია E სიმრავლე შეიცავს p_0 წერტილს და G წარმოადგენს E სიმ-

რავლის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც შეგვიძლია შევაერთოთ p_0 წერტილთან E სიმრავლეში შემავალი კონტინუუმებით, მაშინ G არაცარიელი ღია სიმრავლეა, ხოლო $H=E-G$ იქნება ცარიელი ან ღია სიმრავლე.

დამტკიცება. რადგანაც E ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს p_0 წერტილის შემცველი n-განზომილებიანი ისეთი სეგმენტი I_0, რომ $I_0 \subset E$. თანახმად G სიმრავლის განსაზღვრისა, იგი შეიცავს როგორც p_0 წერტილს, ისე I_0 სეგმენტის ყველა წერტილს, ვინაიდან I_0 კონტინუუმია. მაშასადამე, G ცარიელი არაა.

ამის შემდეგ, ავიღოთ G სიმრავლის ნებისმიერი p წერტილი. მაშინ ეს p წერტილი შეგვიძლია შევაერთოთ p_0 წერტილთან რაიმე C კონტინუუმით, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეშია მოთავსებული. აღვნიშნოთ I სიმბოლოთი p წერტილის შემცველი n-განზომილებიანი სეგმენტი, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეშია მოთავსებული. მაშინ 58-ე თეორემის თანახმად $C \cup I$ სიმრავლე კონტინუუმია. ამიტომ I სეგმენტის ყოველი წერტილი შეგვიძლია შევაერთოთ p_0 წერტილთან $C \cup I$ კონტინუუმით. აქედან გამომდინარეობს, რომ $I \subset G$. მაშასადამე, p არის G სიმრავლის შიგა წერტილი. ამრიგად, G შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ იგი ღია სიმრავლეა.

ახლა ვთქვათ, $H=E-F$. თუ H ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია.

ვიგულისხმოთ, რომ H ცარიელი სიმრავლე არაა. განვიხილოთ H სიმრავლის ნებისმიერი q წერტილი და დავამტკიცოთ, რომ q არის H სიმრავლის შიგა წერტილი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, q არაა H სიმრავლის შიგა წერტილი; მაშინ q წერტილის შემცველი ნებისმიერი n-განზომილებიანი სეგმენტი $I^* \subset E$ შეიცავს G სიმრავლის წერტილებს. ავიღოთ $G \cap I^*$ გადაკვეთის რაიმე p' წერტილი და p_0 წერტილი შევაერთოთ p' წერტილთან რაიმე C' კონტინუუმით. მაშინ $C' \cup I^*$ იქნება კონტინუუმი და ამიტომ $q \in G$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, q არის H სიმრავლის შიგა წერტილი. ამრიგად, H შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან და ამიტომ იგი ღია სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 61. R^n სივრცეში მოთავსებული ღია E სიმრავლის ბმულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილის შეერთება შეიძლებოდეს რაიმე Γ კონტინუუმით, რომელიც E სიმრავლეშია მოთავსებული.

დამტკიცება. ჯერ პირობის აუცილებლობა დავამტკიცოთ. ვთქვათ, E ბმული სიმრავლეა. E სიმრავლეში ავიღოთ რაიმე p_0 წერტილი და

G-თი აღვნიშნოთ E სიმრავლის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც შეგვიძლია შევაერთოთ p_0 წერტილთან E სიმრავლეში მოთავსებულ კონტინუუმებით. მაშინ 61-ე თეორემის თანახმად, G იქნება ღია სიმრავლე და

$$E = G \cup H,$$

სადაც H ცარიელი ან ღია სიმრავლეა, მასთან $G \cap H = \Lambda$. რაკი E ბმული სიმრავლეა, ამიტომ $H = \Lambda$, ვინაიდან ბმული ღია სიმრავლე არ წარმოიდგინება როგორც ჯამი ორი არაგადამკვეთი არაცარიელი ღია სიმრავლისა. მაშასადამე, $E = G$. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, E სიმრავლის ორი ნებისმიერი წერტილის შეერთება შეიძლება რაიმე კონტინუუმით, რომელიც E სიმრავლეშია მოთავსებული. უნდა ვაჩვენოთ, რომ E ბმული სიმრავლეა.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, E ბმული სიმრავლე არაა. მაშინ E შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც გაერთიანება ორი არაგადამკვეთი G_1 და G_2 ღია სიმრავლისა. ავიღოთ G_1 და G_2 სიმრავლეებში რაიმე p_1 და p_2 წერტილები შესაბამისად. შევაერთოთ ეს წერტილები E სიმრავლეში მოთავსებული რომელიმე Γ კონტინუუმით. მაშინ მე-60 თეორემის თანახმად, Γ კონტინუუმი შეიცავს G_1 სიმრავლის γ_1 საზღვრის ერთ q წერტილს მაინც და რადგანაც G_1 ღია სიმრავლეა, ამიტომ $q \overline{\in} G_1$. ამას გარდა, $q \overline{\in} G_2$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში q არ იქნებოდა G_1 სიმრავლის საზღვრითი წერტილი. მაშასადამე, გამოდის, რომ $q \overline{\in} E$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან $\Gamma \subset E$. ამრიგად, ჩვენი დაშვება არ არის სწორი და ამიტომ E ბმული სიმრავლეა. ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 62. თუ E არის R^n სივრცეში მოთავსებული ღია სიმრავლე, ხოლო p წარმოადგენს E სიმრავლის რაიმე წერტილს, მაშინ E ცალსახად იშლება როგორც ჯამი ორი არაგადამკვეთი G და H სიმრავლისა, სადაც G არის p წერტილის შემცველი ბმული ღია სიმრავლე, H კი ცარიელი ან ღია სიმრავლე.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ G-თი E სიმრავლის ისეთ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც შეგვიძლია შევაერთოთ p-სთან კონტინუუმებით. მაშინ 61-ე თეორემის ძალით, G იქნება ბმული ღია სიმრავლე და

$$E = G \cup H, \tag{20.1}$$

სადაც H ცარიელი ან ღია სიმრავლეა, ამასთანავე

$$G \cap H = \Lambda.$$

დავამტკიცოთ, რომ (20.1) წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, გვაქვს E სიმრავლის მეორე წარმოდგენაც

$$E=G^*\cup H^*,$$

სადაც G^* არის p წერტილის შემცველი ბმული ღია სიმრავლე, H^* კი — ცარიელი ან ღია სიმრავლე, ამასთან $G\neq G^*$, $H\neq H^*$. გვაქვს:

$$G=G\cap E=G\cap(G^*\cup H^*)=(G\cap G^*)\cup(G\cup H^*).$$

$G\cap G^*$ და $G\cap H^*$ ღია სიმრავლეებიდან $G\cap G^*$ სიმრავლე ცარიელი არაა, ვინაიდან $p\in G\cap G^*$.

ცხადია, რომ G და H^* არაგადამკვეთი სიმრავლეებია. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში G იქნებოდა ორი არაგადამკვეთი ღია სიმრავლის გაერთიანება და ამიტომ G არ იქნებოდა ბმული ღია სიმრავლე. მაშასადამე, $G\subset G^*$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $G^*\subset G$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $G=G^*$ და, მაშასადამე, $H=H^*$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 63. R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი ღია E სიმრავლე ცალსახად იშლება წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ბმული ღია სიმრავლეების სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამად.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D=\{p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots\}$ არის R^n სივრცის ყველა იმ რაციონალური წერტილის სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის მოცემულ ღია E სიმრავლეს. 62-ე თეორემის ძალით, E შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც გაერთიანება ორი G_1 და H_1 სიმრავლისა:

$$E=G_1\cup H_1,$$

სადაც G_1 არის p_1 წერტილის შემცველი ბმული ღია სიმრავლე, ხოლო H_1 ცარიელი ან ღია სიმრავლეა, მასთან $G\cap H_1=\Lambda$. თუ $H_1=\Lambda$, მაშინ $E=G_1$ და ამ შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

თუკი $H_1\neq\Lambda$, მაშინ H_1 იქნება ღია სიმრავლე და, მაშასადამე, იგი შეიცავს D სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. აღვნიშნოთ p_{m_2}-ით D სიმრავლის პირველი წერტილი, რომელიც H_1 სიმრავლეს მიეკუთვნება. მაშინ 62-ე თეორემის ძალით H_1 წარმოიდგინება როგორც გაერთიანება ორი არაგადამკვეთი G_2 და H_2 სიმრავლისა:

$$H_1=G_2\cup H_2,$$

სადაც G_2 არის p_{m_2} წერტილის შემცველი ბმული ღია სიმრავლე, ხოლო H_2 ცარიელი ან ღია სიმრავლეა. თუ $H_2=\Lambda$, მაშინ $E=G_1\cup G_2$ და ამ

შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია. ამ პროცესს თუ განვაგრძობთ, ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1) არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი k, რომ

$$H_{k-1}=G_k\cup H_k,$$

სადაც H_k ცარიელი სიმრავლეა, ხოლო G_k წარმოადგენს p_{m_k} წერტილის შემცველ ბმულ ღია სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში

$$E=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$$

და, მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებულია.

2) ჩვენი პროცესი უსაზღვროდ გრძელდება. ამ შემთხვევაში ავაგებთ წყვილ-წყვილ არაგადამკვეთ ბმულ ღია სიმრავლეთა ისეთ უსასრულო მიმდევრობას

$$G_1,\ G_2, \ldots, G_m, \ldots,$$

რომ

$$D\subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m\subset E.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$E-\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m=H,$$

გვექნება

$$E=H\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m\right).$$

დავამტკიცოთ რომ H ცარიელი სიმრავლეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $H\neq\Lambda$. ავიღოთ H სიმრავლის p წერტილი. რადგანაც $p\in E$, ამიტომ 62-ე თეორემის თანახმად, შეგვიძლია ვიპოვოთ p წერტილის შემცველი ისეთი ბმული ღია სიმრავლე G, რომ

$$E=G\cup H^*,$$

სადაც H^* ცარიელი ან ღია სიმრავლეა. G-ში მოთავსდება D სიმრავლის წერტილები. ვთქვათ, $p_k\in G$. ეს p_k წერტილი მოთავსდება რაიმე G_i სიმრავლეში. 62-ე თეორემის თანახმად, $G=G_i$ და, მაშასადამე, $p\in \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$, რაც შეუძლებელია, რადგან $p\in H$. ამრიგად, H ცარიელი სიმრავლეა და ამიტომ

$$E=\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m. \tag{20.2}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (20.2) დაშლა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, E-თვის გვაქვს მეორე დაშლა:

$$E=\bigcup_{m=1}^{\infty} G^*_m, \tag{20.3}$$

სადაც $G^*_1, G^*_2, \ldots, G^*_m, \ldots$ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ბმული ღია სიმრავლეებია. ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი k, რომ

$$G_m \cap G^*_k \neq \Lambda$$

და რაკი G_m და G^*_k ბმული ღია სიმრავლეებია, ამიტომ $E-G_m$ და $E-G^*_k$ წარმოადგენენ ცარიელ ან ღია სიმრავლეებს. 62-ე თეორემის თანახმად, $G_m=G^*_k$, ე. ი. (20.2) და (20.3) დაშლები ერთი და იგივეა. თეორემა დამტკიცებულია.

(20.2) დაშლაში, მოცემულ $G_1, G_2, \ldots$ სიმრავლეებს ეწოდება ღია E სიმრავლის კომპონენტები.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს კანტორის შემდეგი

თეორემა 64. R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე მიიღება R^n სივრციდან წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ბმული ღია სიმრავლეების სასრული ან თვლადი სისტემის ამოგდებით.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ ბრტყელი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლის გეგმილი წრფეზე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

2. მეტრიკულ სივრცეში მოცემულია ორი არაგადამკვეთი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლე F_1 და F_2. ააგეთ არაგადამკვეთი ღია სიმრავლეები G_1 და G_2 ისე, რომ $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

თ ა ვ ი VI

სრული და კომპაქტური სივრცეები

§ 1. სრული სივრცის განსაზღვრა. სისრულის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განსაზღვრა 1. მეტრიკულ R სივრცეს სრული სივრცე ეწოდება, თუ ამ სივრცის წერტილთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია.

მაგალითად, ევკლიდეს R^n სივრცე სრულია.

განსაზღვრა 2. მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებულ დახურულ სფეროთა მიმდევრობას $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_n, \ldots$ თავმოყრილ სფეროთა სისტემა ვუწოდოთ, თუ $\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \cdots \supset \bar{S}_n \supset \cdots$ და $\lim\limits_{r \to \infty} r_n = 0$, სადაც r_n არის S_n სფეროს რადიუსი.

თეორემა 1. *მეტრიკულ R სივრცის სისრულისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერ თავმოყრილ სფეროთა სისტემის გადაკვეთა არ იყოს ცარიელი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, R სრული სივრცეა და განვიხილოთ თავმოყრილ სფეროთა ნებისმიერი $\{\bar{S}_n\}$ სისტემა. აღვნიშნოთ x_n-ით $\bar{S}_n$ სფეროს ცენტრი. ადვილი შესამჩნევია, რომ წერტილთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. მართლაც, თუ $m > n$, მაშინ $\rho(x_m, x_n) < r_n$. პირობის ძალით $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$ და ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ როცა } m > N, \ n > N.$$

მაშასადამე, $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია და R სივრცის სისრულის გამო ეს მიმდევრობა კრებადია R სივრცის გარკვეულ x წერტილისაკენ.

დავამტკიცოთ, რომ

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n. \tag{1.1}$$

ამისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი $\bar{S}_k$ სფერო. ცხადია, რომ იგი შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წერტილს, გარდა, შესაძლებელია, $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ წერტილებისა. ცხადია, რომ

$$\rho(x_k, x_n) < r_k, \text{ როდესაც } n > k.$$

თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ $\rho(x_k, x) \leqslant r_k$. მაშასადამე, $x \in \bar{S}_k$, და ამიტომ ადგილი აქვს (1.1) თანაფარდობას. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერ თავმოყრილ სფეროთა სისტემის გადაკვეთა ცარიელი არაა. დასამტკიცებელია, რომ R სრული სივრცეა. ავიღოთ R სივრცის წერტილთა რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$. ამ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის გამო მოიძებნება ისეთი ნატურალური k_1 რიცხვი, რომ

$$\rho(x_{k_1}, x_n) < \frac{1}{2}, \text{ როცა } n > k_1.$$

აღვნიშნოთ $\bar{S}_1$-ით დახურული სფერო ცენტრით x_{k_1} წერტილში და რადიუსით 1. შემდეგ, k_2 იყოს k_1-ზე მეტი ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ

$$\rho(x_{k_2}, x_n) < \frac{1}{2^2}, \text{ როცა } n > k_2.$$

აღვნიშნოთ $\bar{S}_2$-ით დახურული სფერო ცენტრით x_{k_2} წერტილში და რადიუსით $\frac{1}{2}$. რადგანაც $\rho(x_{k_1}, x_{k_2}) < \frac{1}{2}$, ამიტომ $\bar{S}_2 \subset \bar{S}_1$.

ახლა ვთქვათ, k_3 არის k_2-ზე მეტი ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ

$$\rho(x_{k_3}, x_n) < \frac{1}{2^3}, \text{ როცა } n > k_3,$$

ხოლო $\bar{S}_3$ იყოს დახურული სფერო ცენტრით x_{k_3} წერტილში და რადიუსით $\frac{1}{2^2}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\bar{S}_3 \subset \bar{S}_2$. აგების ამ პროცესს თუ უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ თავმოყრილ სფეროთა $\{\bar{S}_n\}$ სისტემას. პირობის თანახმად $\prod\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ ცარიელი სიმრავლე არაა და ამიტომ არსებობს R სივრცის ისეთი x წერტილი, რომელიც მიეკუთვნება ყველა $\bar{S}_n$ სფეროს $(n=1, 2, \ldots)$. რადგანაც $\bar{S}_i$ სფერო შეიცავს ყველა x_n წერტილს, დაწყებულს x_{k_i} წერტილიდან, ამიტომ

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{2^{i-1}}, \text{ როცა } n > k_{i-1}.$$

მაშასადამე, $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. ამრიგად, R სივრცის წერტილთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია და ამიტომ R სრული სივრცეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. სრული მეტრიკული R სივრცის ყოველი ჩაკეტილი F ქვესიმრავლე თვითონ სრულ სივრცეს წარმოადგენს.

დამტკიცება. განვიხილოთ წერტილთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$, სადაც $x_n \in F (n=1, 2, \ldots)$. რადგანაც R სრული სივრცეა, ამიტომ აღებული მიმდევრობა კრებადია R სივრცის რაიმე x წერტილისაკენ. მაგრამ, F სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო, $x \in F$. ამრიგად, F სიმრავლის წერტილთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია F სიმრავლის გარკვეულ წერტილისაკენ. მაშასადამე, F წარმოადგენს სრულ სივრცეს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. სრული სივრცის მაგალითები

თეორემა 3. უწყვეტ ფუნქციათა $C_{[a, b]}$ სივრცე სრული სივრცეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{x_n(t)\}$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N,$$

ე. ი t ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N. \tag{2.1}$$

მაშასადამე, კოშის თეორემის ძალით, t ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან არსებობს $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t)$. ეს ზღვარი აღვნიშნოთ $x(t)$ სიმბოლოთი. თუ (2.1) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n \to \infty$, მივიღებთ

$$|x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon, \text{ როცა } m > N \tag{2.2}$$

$[a, b]$ სეგმენტის ყოველი t წერტილისათვის. ამრიგად, უწყვეტ ფუნქციათა $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $x(t)$ ფუნქციისაკენ და, მაშასადამე, $x(t)$ იქნება უწყვეტი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე; ამიტომ $x(t) \in C_{[a, b]}$. შემდეგ (2.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(x_m, x) \leqslant \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N,$$

ე. ი.

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x)=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. l^p სრული სივრცეა, თუ $p\geqslant 1$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$, $x_n=\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\right)\in l^p$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\rho(x_m, x_n)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon, \text{ როცა } m>N, \ n>N. \qquad (2.3)$$

აქედან, ყოველი k-სათვის გვექნება

$$\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|<\varepsilon, \text{ როცა } m>N, \ n>N.$$

კოშის თეორემის ძალით რიცხვთა $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots$ მიმდევრობა კრებადია გარკვეულ ξ_k რიცხვისაკენ. განვიხილოთ წერტილი

$$x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots).$$

დავამტკიცოთ, რომ $x\in l^p$. მივიღებთ რა მხედველობაში (2.3) უტოლობას, ნებისმიერი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|^p<\varepsilon^p, \text{ როცა } m>N, \ n>N.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k\right|^p\leqslant\varepsilon^p, \text{ როცა } m>N.$$

ახლა ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\nu\to\infty$, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k\right|^p\leqslant\varepsilon^p, \text{ როცა } m>N. \qquad (2.4)$$

შემდეგ, მინკოვსკის უტოლობის ძალით, როდესაც $m>N$, ვღებულობთ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\xi_k-\xi_k^{(m)}\right)+\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k-\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

და ამიტომ $x\in l^p$. მაშასადამე, (2.4) უტოლობის თანახმად,

$$\rho(x_m,\ x)\leqslant\varepsilon,\ \text{როცა}\ m>N,$$

ე. ი. $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x$ და ამით l^p სივრცის სისრულე დამტკიცებულია.

თეორემა 5. შემოსაზღვრულ მიმდევრობათა m სივრცე სრული სივრცეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ m სივრცის წერტილთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$, სადაც

$$x_n=\left(\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \ldots,\ \xi_k^{(n)},\ldots\right).$$

პირობის ძალით, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_m,\ x_n)<\varepsilon,\ \text{როცა}\ m\geqslant N,\quad n\geqslant N. \tag{2.5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|<\varepsilon,\ \text{როდესაც}\ m\geqslant N,\quad n\geqslant N,\quad k=1,\ 2,\ldots \tag{2.6}$$

კოშის თეორემის ძალით, რიცხვთა მიმდევრობა $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}$, $(k=1,2,\ldots)$, კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k\quad(k=1,\ 2,\ldots).$$

დავამტკიცოთ, რომ $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. თუ (2.6) უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ:

$$\left|\xi_k-\xi_k^{(n)}\right|\leqslant\varepsilon,\ \text{როცა}\ n\geqslant N,\quad k=1,\ 2,\ldots \tag{2.7}$$

აქედან,

$$|\xi_k| \leqslant \varepsilon + \left|\xi_k^{(n)}\right|, \text{ როცა } n \geqslant N, \quad k=1, 2, \ldots$$

$\left\{\xi_k^{(n)}\right\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის გამო ყოველი ფიქსირებული n-თვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M_n, რომ $\left|\xi_k^{(n)}\right| < M_n$. მაშასადამე,

$$|\xi_k| < \varepsilon + M_n, \text{ როცა } n \geqslant N \quad (k=1, 2, \ldots).$$

ამრიგად $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ არის m სივრცის ელემენტი.

დასასრულ, დავამტკიცოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. (2.7) უტოლობიდან გვაქვს:

$$\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon, \text{ როცა } n \geqslant N,$$

ე. ი.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

ამით m სივრცის სისრულე დამტკიცებულია.

თეორემა 6. c სივრცე სრული სივრცე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{x_n\}$ არის c სივრცის წერტილთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა, სადაც

$$x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\right).$$

პირობის ძალით, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > n, \ n > N.$$

მაშასადამე,

$$\left|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}\right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N, \ k=1,2, \ldots \tag{2.8}$$

კოშის თეორემის თანახმად, რიცხვთა მიმდევრობა $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{n \to \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k, \quad (k=1, 2, \ldots).$$

თუ (2.8) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $m \to \infty$, მივიღებთ

$$\left|\xi_k - \xi_k^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N, \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

ეს უტოლობა ასე გადავწეროთ

$$\xi_k^{(n)} - \varepsilon \leqslant \xi_k \leqslant \xi_k^{(n)} + \varepsilon. \tag{2.10}$$

შემდეგ, რაკი $x_n \in c$, ამიტომ $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია რაიმე $\xi^{(n)}$ რიცხვისაკენ. თუ (2.10) უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k \to \infty$, გვექნება

$$\xi^{(n)} - \varepsilon \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \xi_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \xi_k \leqslant \xi^{(n)} + \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

აქედან ვღებულობთ

$$0 \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \xi_k - \varliminf_{k\to\infty} \xi_k \leqslant 2\varepsilon.$$

საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობის გამო,

$$\varliminf_{k\to\infty} \xi_k = \varlimsup_{k\to\infty} \xi_k,$$

ე. ი. $\{\xi_k\}$ მიმდევრობა კრებადია და ამიტომ $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ წარმოადგენს c სივრცის წერტილს. მაშინ (2.10) უტოლობის საფუძველზე გვექნება:

$$\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ და ამით c სივრცის სისრულე დამტკიცებულია.

თეორემა 7. $R_n^{(0}$ სივრცე სრული სივრცეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ $R_n^{(0)}$ სივრცის წერტილთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_m\}$, სადაც

$$x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}\right), \quad m = 1, 2, \ldots$$

პირობის ძალით, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_p, x_q) < \varepsilon, \text{ როცა } p > N, \quad q > N.$$

აქედან

$$\left|\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}\right| < \varepsilon, \text{ როცა } p > N, \; q > N, \; k = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

კოშის თეორემის ძალით $\left\{\xi_k^{(q)}\right\}_{q=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია ყოველი k-სათვის. ვთქვათ,

$$\lim_{q\to\infty}\xi_k^{(q)}=\xi_k \quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

ცხადია, რომ $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n)$ არის $R_n^{(0)}$ სივრცის წერტილი. დავამტკიცოთ, რომ წერტილთა $\{x_m\}$ მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. (2.11) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $q\to\infty$, მივიღებთ:

$$\left|\xi_k^{(p)}-\xi_k\right|\leqslant\varepsilon,\ \text{როცა}\ p>N \quad (k=1,\ 2,\ldots,n).$$

მაშასადამე,

$$\rho(x_p,\ x)\leqslant\varepsilon,\ \text{როცა}\ p>N.$$

ამიტომ $\lim\limits_{p\to\infty}x_p=x$. ამრიგად, $R_n^{(0)}$ სივრცე სრულია.

§ 3. მეტრიკული სივრცის შევსება

III თავში ნაჩვენები იყო, რომ კანტორ-მერეს თეორიაში ნამდვილი რიცხვები განისაზღვრება რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტალური მიმდევრობებით. რაციონალური რიცხვები შეადგენენ ჩვეულებრივ მეტრიკაში არასრულ მეტრიკულ Γ სივრცეს, და ნამდვილ რიცხვთა აგების პროცესი კანტორ-მერეს მიხედვით შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სრული $\overline{\Gamma}$ სივრცის აგების პროცესი. კანტორ-მერეს მეთოდის სათანადო განზოგადება საშუალებას გვაძლევს არასრული R სივრცე მოვათავსოთ გარკვეულ სრულ $\bar{R}$ სივრცეში.

განსაზღვრა 3. მეტრიკული R სივრცის მეტრიკულ R^* სივრცეზე f გადასახვას იზომეტრიული ეწოდება, თუ R სივრცის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\rho(x',\ x'')=\rho^*[f(x'),\ f(x'')].$$

თვით R და R^* სივრცეებს, რომელთა შორის შეიძლება იზომეტრიული შესაბამისობის დამყარება, ეწოდება ურთიერთიზომეტრიული.

ლემა. მეტრიკული R სივრცის ნებისმიერი ორი ფუნდამენტალური $(x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ და $(y_1,\ y_2,\ldots,y_n,\ldots)$ მიმდევრობისათვის არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის გვაქვს:

$$\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n)+\rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, y_m);$$

აქედან

$$\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_m, x_n)+\rho(y_n, y_m).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n)+\rho(y_n, y_m).$$

მაშასადამე,

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n)+\rho(y_n, y_m).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ რიცხვთა მიმდევრობა $\{\rho(x_n, y_n)\}$ ფუნდამენტალურია და ამიტომ კოშის თეორემის თანახმად არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი მ ე ტ რ ი კ უ ლ ი R ს ი ვ რ ც ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს ს რ უ ლ ი მ ე ტ რ ი კ უ ლ ი $\bar{R}$ ს ი ვ რ ც ე, რ ო მ ე ლ ს ა ც ა ქ ვ ს შ ე მ დ ე გ ი თ ვ ი ს ე ბ ე ბ ი:

ა) R ს ი ვ რ ც ე $\bar{R}$ ს ი ვ რ ც ი ს გ ა რ კ ვ ე უ ლ R^* ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ი ს ი ზ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ა;

ბ) R^* ს ი ვ რ ც ე მ კ ვ რ ი ვ ი ა $\bar{R}$ ს ი ვ რ ც ე შ ი.

ყ ო ვ ე ლ ი ო რ ი ს ი ვ რ ც ე $\bar{R}$, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ა) დ ა ბ) პ ი რ ო ბ ე ბ ს ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ე ნ უ რ თ ი ე რ თ ი ზ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $\bar{R}$ სივრცის წერტილთა ორი ფუნდამენტალური მიმდევრობა

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots).$$

x მიმდევრობას ვუწოდებთ y მიმდევრობის ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ს და დავწერთ $x \sim y$, თუ

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0.$$

ცხადია, R სივრცის წერტილთა ორი მიმდევრობა, კრებადი R სივრცის ერთსა და იმავე ელემენტისაკენ, ურთიერთეკვივალენტურია, ხოლო ეკვივალენტური არ არიან, როცა ისინი კრებადია R სივრცის სხვადასხვა ელემენტისაკენ. ამიტომ R სივრცის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა ფუნდამენტალური მიმდევრობა შეგვიძლია დავყოთ კლასებად ისე, რომ ერთ და იმავე კლასში მოთავსდეს მხოლოდ ერთმანეთის ეკვივალენტური მიმდევრობები.

ავიღოთ R სივრცის წერტილთა რაიმე $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ მიმდევრობა და აღვნიშნოთ ამ მიმდევრობის ყველა ეკვივალენტური მიმდევ-

რობის კლასი $[x]$ სიმბოლოთი. ყველა ასეთი კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\bar{R}$ სიმბოლოთი. $[x]$ კლასის ნებისმიერ x ელემენტს ვუწოდოთ ამ კლასის წარმომადგენელი.

ახლა მანძილი $[x]$ და $[y]$ კლასებს შორის განვსაზღვროთ ასე

$$\rho([x],\ [y])=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n),$$

სადაც $(x_1,\ x_2,\dots,x_n,\dots)$ და $(y_1,\ y_2,\dots,y_n,\dots)$ არიან შესაბამისად $[x]$ და $[y]$ კლასების ნებისმიერი ელემენტები. ლემის ძალით $\rho([x],\ [y])$ სასრულია.

თუ $(x'_1,\ x'_2,\dots,x'_n,\dots)$ და $(y'_1,\ y'_2,\dots,y'_n,\dots)$ არიან შესაბამისად $[x]$ და $[y]$ კლასების სხვა ელემენტები, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,\ y'_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n). \tag{3.1}$$

მართლაც,

$$|\rho(x'_n,\ y'_n)-\rho(x_n,\ y_n)|\leqslant\rho(x'_n,\ x_n)+\rho(y_n,\ y'_n).$$

მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,\ x_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\rho(y_n,\ y'_n)=0.$$

ამიტომ მართებულია (3.1) ტოლობა.

ამრიგად, $[x]$ და $[y]$ კლასებს შორის მანძილის განსაზღვრა დამოკიდებული არაა $[x]$ და $[y]$ კლასებში ელემენტების შერჩევაზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\rho([x],\ [y])$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის სამივე აქსიომას.

1) ცხადია, $\rho([x],\ [y])$ არაუარყოფითია და ამასთანავე, $\rho([x],\ [y])=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $[x]=[y]$.

მართლაც, ვთქვათ, $\rho([x],\ [y])=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $[x]$ და $[y]$ კლასების ნებისმიერი ელემენტებისათვის $x=(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\dots)$ და $y=(y_1,\ y_2,\dots,y_n,\dots)$ მართებულია ტოლობა $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)=0$. მაშინ $x\sim y$ და ამიტომ $[x]=[y]$. ამრიგად, თუ $\rho([x],\ [y])=0$, მაშინ $[x]=[y]$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $[x]\neq[y]$, მაშინ $\rho([x],\ [y])>0$.

2) $\rho([x],\ [y])=\rho([y],\ [x])$ (სიმეტრიის აქსიომა).

მართლაც,

$$\rho([x],\ [y])=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,\ x_n)=\rho([y],\ [x]).$$

3) $\bar{R}$ სივრცის ნებისმიერი სამი ელემენტისათვის $[x]$, $[y]$, $[z]$ მართებულია დამოკიდებულება

$$\rho([x],\ [z])\leqslant\rho([x],\ [y])+\rho([y],\ [z]). \tag{3.2}$$

მართლაც, ავიღოთ $[x]$, $[y]$, $[z]$ კლასების ელემენტები $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$. რადგანაც x_n, y_n და z_n მეტრიკული R სივრცის ელემენტებია, ამიტომ სამკუთხედის აქსიომის თანახმად,

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ (3.2) უტოლობას.

ამრიგად, $\bar{R}$ წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს.

ახლა დავამტკიცოთ $\bar{R}$ სივრცის შემდეგი თვისებები:

1. $\bar{R}$ სივრცე შეიცავს R^* ქვესიმრავლეს, რომელიც R სივრცის იზომეტრიულია. მართლაც, R სივრცის ყოველ x ელემენტს შევუსაბამოთ $[x]$ კლასი, რომელიც შეიცავს სტაციონარულ $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ მიმდევრობას. თუ ამ წესით R სივრცის x და y ელემენტებს შევუსაბამებთ $\bar{R}$ სივრცის $[x]$ და $[y]$ ელემენტებს, მაშინ

$$\rho([x], [y]) = \rho(x, y).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ R სივრცის x ელემენტების შესაბამის $[x]$ კლასთა R^* სიმრავლე $\bar{R}$ სივრცის ქვესივრცეა, რომელიც R სივრცის იზომეტრიულია.

2. R^* სიმრავლე მკვრივია $\bar{R}$ სივრცეში. მართლაც, ვთქვათ, $X = [x]$ არის $\bar{R}$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ წარმოადგენს X კლასის რაიმე ელემენტს. განვიხილოთ $\bar{R}$ სივრცის ელემენტთა მიმდევრობა

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, \tag{3.3}$$

სადაც X_k კლასის ერთ-ერთი წარმომადგენელია $(x_k, x_k, \ldots, x_k, \ldots)$. ასე რომ X_k კლასი შეესაბამება R სივრცის x_k ელემენტს.

დავამტკიცოთ, რომ (3.3) მიმდევრობა კრებადია X ელემენტისაკენ. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. ამ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(X_m, X_n) = \rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N. \tag{3.4}$$

რადგანაც

$$\rho(X, X_p) = \lim_{k \to \infty} \rho(x_k, x_p),$$

ამიტომ თუ (3.4) დამოკიდებულებაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $m \to \infty$, გვექნება

$$\rho(X, X_n) \leqslant \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, X წარმოადგენს R^* სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარს და ამით დამტკიცებულია, რომ R^* მკვრივია $\bar{R}$ სივრცეში.

გ. $\bar{R}$ სივრცე სრულია. განვიხილოთ $\bar{R}$ სივრცის ელემენტთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{3.5}$$

ყოველი X_n ელემენტისათვის არსებობს R^* სიმრავლის ისეთი Y_n ელემენტი, რომ

$$\rho(X_n, Y_n) < \frac{1}{n}, \tag{3.6}$$

ვინაიდან R^* სიმრავლე მკვრივია $\bar{R}$ სივრცეში. რაკი ყოველი $Y_n \in R^*$, ამიტომ R სიმრავლეში არსებობს Y_n ელემენტის შესატყვისი y_n ელემენტი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. მართლაც,

$$\rho(y_m, y_n) = \rho(Y_m, Y_n) \leqslant \rho(Y_m, X_m) + \rho(X_m, X_n) +$$
$$+ \rho(X_n, Y_n) \leqslant \rho(X_m, X_n) + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

აქედან

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_m, y_n) = 0,$$

ე. ი. $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა და იგი განსაზღვრავს გარკვეულ Y კლასს, რომელიც $\bar{R}$ სივრცის ელემენტია.

დავამტკიცოთ, რომ (3.5) მიმდევრობა კრებადია $\bar{R}$ სივრცის Y ელემენტისაკენ. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N > \frac{2}{\varepsilon}$, რომ

$$\rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m > N, \ n > N.$$

მაშასადამე, თუ $n > N$, მაშინ (3.6) უტოლობის თანახმად გვექნება

$$\rho(Y, X_n) \leqslant \rho(Y, Y_n) + \rho(Y_n, X_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_m, y_n) +$$
$$+ \rho(Y_n, X_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = Y.$$

ამრიგად, $\bar{R}$ სივრცის ელემენტთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია $\bar{R}$ სივრცეში, ე. ი. $\bar{R}$ სივრცე სრულია.

4. ნებისმიერი მეტრიკული $\bar{R}_1$ სივრცე, რომელსაც აქვს 1, 2 და 3 თვისებები, $\bar{R}$ სივრცის იზომეტრიულია.

მართლაც, ვთქვათ, R^* და R^*_1 წარმოადგენს $\bar{R}$ და $\bar{R}_1$ სივრცეების ქვესიმრავლეებს, რომლებიც R სივრცის იზომეტრიული არიან. მაშინ ცხადია, რომ R^* და R^*_1 სიმრავლეებიც ურთიერთიზომეტრიული არიან. ეს იზომეტრია R^* და R^*_1 სიმრავლეებიდან $\bar{R}$ და $\bar{R}_1$ სივრცეში გავაგრძელოთ. ავიღოთ $\bar{R}$ სივრცის ნებისმიერი X ელემენტი და განვიხილოთ R^* სიმრავლის ელემენტთა მიმდევრობა $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$, რომელიც კრებადია X ელემენტისაკენ. ამ მიმდევრობის შესაბამისი მიმდევრობა $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots)$, $Y_n \in R^*_1$, ყოველ შემთხვევაში იქნება ფუნდამენტალური მიმდევრობა, ვინაიდან ყოველი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის

$$\rho(X_m, X_n) = \rho(Y_m, Y_n).$$

შემდეგ, რადგანაც $\bar{R}_1$ სრული სივრცეა, ამიტომ ამ სივრცეში არსებობს გარკვეული Y ელემენტი, რომლისკენაც კრებადია $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots)$ მიმდევრობა. ეს Y ელემენტი შევუსაბამოთ $\bar{R}$ სივრცის X ელემენტს. ადვილი საჩვენებელია, რომ Y ელემენტი ცალსახად არის განსაზღვრული. მაშასადამე, $\bar{R}$ და $\bar{R}_1$ სიმრავლეებს შორის შეგვიძლია დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\bar{R}$ სივრცის გადასახვა $\bar{R}_1$ სივრცეში იზომეტრიულია. ვთქვათ, $\bar{R}$ სივრცის X და X' ელემენტებს შეესაბამება $\bar{R}_1$ სივრცის Y და Y' ელემენტები, ამასთანავე

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n, \quad X' = \lim_{n\to\infty} X'_n, \quad X_n \in R^*, \quad X'_n \in R^*.$$

შემდეგ, ვთქვათ, Y_n და Y'_n წარმოადგენენ R^*_1 სიმრავლის ელემენტებს, რომლებიც შეესაბამებიან X_n და X'_n ელემენტებს. მაშინ

$$\rho(X_n, X'_n) = \rho(Y_n, Y'_n). \tag{3.6}$$

მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(X_n, X'_n) = \rho(X, X'), \quad \lim_{n\to\infty} (Y_n, Y'_n) = \rho(Y, Y').$$

მაშასადამე, თუ (3.6) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n\to\infty$, გვექნება

$$\rho(X, X') = \rho(Y, Y').$$

ამრიგად, $\bar{R}$ და $\bar{R}_1$ სივრცეები ურთიერთიზომეტრიულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ მოყვანილი თეორემა ეკუთვნის გერმანელ მათემატიკოსს ფ. ჰაუსდორფს (F. Hausdorff).

§ 4. შეკუმშვის ასახვათა პრინციპი

ვთქვათ, გვაქვს ორი მეტრიკული სივრცე X და Y. თუ X სივრცის ყოველ x წერტილს რაიმე წესით შეესაბამება Y სივრცის გარკვეული $U(x)$ წერტილი, მაშინ ვიტყვით, რომ X სივრცეში განსაზღვრულია $U(x)$ ოპერატორი და დავწერთ

$$y=U(x),$$

სადაც y წარმოადგენს Y სივრცის წერტილს, რომელიც x წერტილს შეესაბამება.

განსაზღვრა 4. ვთქვათ, U ოპერატორს გადაყავს მეტრიკული X სივრცე თვით ამ სივრცეში. თუ არსებობს ერთზე ნაკლები ისეთი დადებითი α რიცხვი, რომ X სივრცის ყოველი ორი x და x' წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\rho[U(x),\ U(x')]\leqslant\alpha\,\rho(x,\ x'),$$

მაშინ U ოპერატორს ეწოდება შეკუმშვის ოპერატორი ანუ შეკუმშვის ასახვა.

თეორემა 9. სრულ მეტრიკულ R სივრცეში განსაზღვრული შეკუმშვის $U(x)$ ოპერატორისათვის არსებობს ერთადერთი წერტილი $y\in R$, რომლისთვისაც $U(y)=y$.

დამტკიცება. ვთქვათ, y_0 არის R სივრცის ნებისმიერი წერტილი და ავაგოთ წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$y_1=U(y_0),\quad y_2=U(y_1),\ \ldots,\ y_n=U(y_{n-1}),\ \ldots$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წერტილთა მიმდევრობა $\{y_n\}$ ფუნდამენტალურია. მართლაც, თუ $n\geqslant1$, გვაქვს:

$$\rho(y_{n+1},\ y_n)=\rho[U(y_n),\ U(y_{n-1})]\leqslant\alpha\rho(y_n,\ y_{n-1}).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(y_{n+1},\ y_n)\leqslant\alpha^n\,\rho(y_1,y_0). \tag{4.1}$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვები m და n და აზრის

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $m>n$. მაშინ სამკუთხედის აქსიომის რამდენჯერმე გამოყენების შედეგად მივიღებთ

$$\rho(y_n, y_m)\leqslant\rho(y_n, y_{n+1})+\rho(y_{n+1}, y_{n+2})+\cdots+\rho(y_{m-1}, y_m).$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.1) უტოლობას, გვექნება

$$\rho(y_n, y_m)\leqslant\alpha^n\rho(y_1, y_0)+\alpha^{n+1}\rho(y_1, y_0)+\cdots+$$

$$+\cdots+\alpha^{m-1}\rho(y_1, y_0)<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0) \tag{4.2}$$

და რაკი $\alpha<1$, ამიტომ

$$\lim_{m,n\to\infty}\rho(y_n, y_m)=0,$$

ე. ი. $\{y_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. R სივრცის სისრულის გამო ეს მიმდევრობა კრებადია R სივრცის რომელიღაც y წერტილისაკენ.

დავამტკიცოთ, რომ

$$U(y)=y. \tag{4.3}$$

გვაქვს:

$$\rho[U(y), y_n]=\rho[U(y), U(y_{n-1})]\leqslant\alpha\rho(y, y_{n-1}).$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\rho[U(y), y_n]=0,$$

ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}y_n=U(y).$$

მაშასადამე, ზღვრის ერთადერთობის ძალით მართებულია (4.3) ტოლობა. y წერტილს ეწოდება $U(x)$ ოპერატორის უძრავი წერტილი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $U(x)$ ოპერატორისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი უძრავი წერტილი. დავუშვათ, რომ არსებობს R სივრცის ისეთი ორი წერტილი y და z, რომ

$$U(y)=y, \quad U(z)=z.$$

მაშინ

$$\rho(y, z)=\rho[U(y), U(z)]\leqslant\alpha\rho(y, z).$$

რადგანაც $\alpha<1$, ამატომ $\rho(y,z)=0$; ე. ი. $z=y$.

ამრიგად, $U(x)$ ოპერატორს აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ეკუთვნის ბანახსა და კაჩიოპოლს (Cacciopoli).

ახლა (4.2) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $m\to\infty$, მივიღებთ

$$\rho(y_n, y)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(y_0, y_1)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.4}$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია შევაფასოთ მანძილი y_n წერტილიდან უძრავ y წერტილამდე.

§ 5. შეკუმშვის ასახვათა პრინციპის გამოყენებანი

1. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციის მეთოდით. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 10. თუ რიცხვთა $\|a_{ik}\|^n_1$ მატრიცი ისეთია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\leqslant\alpha<1\quad (i=1,\ 2,\ldots,n), \tag{5.1}$$

მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\xi_i-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,\xi_k=b_i\quad (i=1,\ 2,\ldots,n) \tag{5.2}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\bar x=(\bar\xi_1,\ \bar\xi_2,\ldots,\ \bar\xi_n)$ როგორიც გინდა იყოს $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ რიცხვები.

დამტკიცება. განვიხილოთ $R^{(0)}_n$ სივრცე. ამ სივრცეში განვსაზღვროთ $y=\mathrm{U}(x)$ ოპერატორი შემდეგი ტოლობათა საშუალებით:

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,\xi_k+b_i\quad (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\mathrm{U}(x)$ შეკუმშვის ოპერატორია. მართლაც,

$$\rho(y',\ y'')=\rho[\mathrm{U}(x'),\ \mathrm{U}(x'')]=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\eta'_i-\eta''_i|=$$

$$=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,(\xi'_k-\xi''_k)\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\,|\xi'_k-\xi''_k|\leqslant$$

$$\leqslant\rho(x',\ x'')\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\leqslant\alpha\rho(x',\ x'').$$

მაშასადამე, $U(x)$ ოპერატორი წარმოადგენს შეკუმშვის ოპერატორს და ამიტომ (5.2) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი $\bar{x}$ ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

$\bar{x}=(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n)$ ამონახსნი შეგვიძლია მივიღოთ იტერაციის მეთოდით, თუ გამოვალთ $R_n^{(0)}$ სივრცის ნებისმიერი $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წერტილიდან.

ვთქვათ,

$$x_1=U(x), \quad x_2=U(x_1), \ldots, x_k=U(x_{k-1}), \ldots,$$

სადაც

$$x_k=\left(\xi_1^{(k)}, \ \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right),$$

მაშინ

$$\bar{x}=\lim_{n\to\infty} x_n$$

და, მაშასადამე,

$$\bar{\xi}_i=\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)} \quad (i=1, \ 2, \ldots, \ n).$$

(4.4) ფორმულის თანახმად

$$\max_{1<i<n}\left|\xi_i^{(k)}-\bar{\xi}_i\right|<\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho[x, \ U(x)].$$

(5. 1) პირობა საკმარისი პირობაა იტერაციის მეთოდის კრებადობისა განსახილავი სისტემისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. მე-10 თეორემაში (5.1) პირობა შეგვიძლია შევცვალოთ პირობით:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\leqslant\alpha<1 \quad (k=1, \ 2, \ldots, \ n). \tag{5.3}$$

რომ გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა საჭიროა არითმეტიკულ E_n სივრცეში შემოვიღოთ მეტრიკა შემდეგნაირად:

$$\rho(x, \ y)=\sum_{k=1}^{n}| \ x_k-y_k|.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ E_n სივრცე ამ მეტრიკით სრული მეტრიკული სივრცეა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მე-10თ ეორემაში (5.1) პირობა შეგვიძლია შევცვალოთ პირობით:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^2_{ik} \leqslant \alpha < 1. \tag{5.4}$$

რომ გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა, საჭიროა არითმეტიკული E_n სივრცის ნაცვლად განვიხილოთ ევკლიდეს R^n სივრცე.

ამრიგად, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი პირობა (5.1), (5.3) და (5.4) პირობებიდან, მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი $\bar{x}=(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n)$, რომლისათვისაც

$$\bar{\xi}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\xi}_k + b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

მასთან ამ ამონახსნის მიმდევრობითი მიახლოებებს აქვთ სახე:

$$x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\right),$$
$$x_1 = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_s = \left(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_n^{(s)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

სადაც

$$\xi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(s-1)} + b_i.$$

2. წრფივ განტოლებათა უსასრულო სისტემები. წრფივ განტოლებათა უ ს ა ს რ უ ლ ო ს ი ს ტ ე მ ა უ ს ა ს რ უ ლ ო უ ც ნ ო ბ ი თ ეწოდება განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \cdots = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \cdots = b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array} \tag{5.5}$$

სადაც a_{mn} ცნობილი კოეფიციენტებია, b_m — თავისუფალი წევრები, x_n კი უცნობებია.

წრფივ განტოლებათა სისტემის თეორია წარმოიშვა და განვითარდა იმ გამოყენებებთან დაკავშირებით, რომლებიც მას აქვს ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებათა თეორიის საკითხებში, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში და მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ თეორიას ჯერ კიდევ არა აქვს დასრულებული სახე. აქ განვიხილავთ ამ თეორიის ზოგიერთ საკითხს.

$x_1, x_2, \ldots$ სიდიდეთა რიცხვითი მნიშვნელობების სისტემას ეწოდება (5.5) განტოლებათა **სისტემის ამონახსნი**, თუ (5.5) ტოლობათა მარცხენა ნაწილში ამ მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ კრებად მწკრივებს და ყველა აღნიშნული ტოლობა იქნება დაკმაყოფილებული.

(5.5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას და გამოკვლევასთან დაკავშირებით წარმოიშობა შემდეგი ამოცანები:

ა) აქვს თუ არა ამონახსნი განტოლებათა სისტემას;

ბ) ერთადერთია თუ არა ამონახსნი.

ამ საკითხებს შევისწავლით განტოლებათა სისტემის ერთი მნიშვნელოვანი კლასისათვის,—ეგრეთ წოდებული **სავსებით რეგულარული** სისტემისათვის.

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ (5.5) განტოლებათა სისტემას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$x_i=\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k+b_i \quad (i=1, 2, \ldots), \tag{5.6}$$

სადაც $c_{ik}=-a_{ik}$, თუ $k\neq i$ და $c_{ii}=1-a_{ii}$.

განსაზღვრა 4. განტოლებათა (5.6) სისტემას ეწოდება **სავსებით რეგულარული**, თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|\leqslant\alpha<1, \quad |b_i|\leqslant B \quad (i=1, 2, \ldots),$$

სადაც დადებითი α და B რიცხვები დამოუკიდებელია i-ზე.

განსაზღვრა 5. (5.6) განტოლებათა სისტემის $\{x_k\}$ ამონახსნს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ $|x_k|\leqslant M$ ყველა k-თვის.

თეორემა 11. *სავსებით რეგულარულ სისტემას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი.*

დამტკიცება. განვიხილოთ ყველა შემოსაზღვრული რიცხვთა მიმდევრობის m სივრცე და განვსაზღვროთ ამ სივრცეში U ოპერატორი შემდეგნაირად: თუ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in m$, მაშინ $y=\mathrm{U}(x)$, სადაც

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots),$$

ხოლო

$$y_i=\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k+b_i \quad (i=1, 2, \ldots).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ რიცხვთა $\{y_i\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მართლაც, გვაქვს:

$$|y_i| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}||x_k|+|b_i| \leqslant \alpha\|x\|+B,$$

სადაც

$$\|x\|=\max_{1 \leqslant k<\infty}\{|x_k|\}.$$

მაშასადამე, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in m$. ამრიგად, m სივრცის ყოველ x წერტილს შეესაბამება m სივრცის გარკვეული $\mathrm{U}(x)$ წერტილი. ასე, რომ $\mathrm{U}(x)$ წარმოადგენს ოპერატორს, რომელიც m სივრცეშია განსაზღვრული და m სივრცეს ასახავს თავის თავში.

დავამტკიცოთ, რომ $\mathrm{U}(x)$ არის შეკუმშვის ოპერატორი. განვიხილოთ m სივრცის ორი ნებისმიერი წერტილი $x'=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots)$, $x''=(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n, \ldots)$ და ვთქვათ,

$$\mathrm{U}(x')=y'=(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots), \quad \mathrm{U}(x'')=y''=(y''_1, y''_2, \ldots, y''_n, \ldots).$$

y' და y'' წარმოადგენს m სივრცის წერტილებს. რადგანაც

$$|y'_i-y''_i|=\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}(x'_k-x''_k)\right| \leqslant \alpha \rho(x', x''),$$

ამიტომ

$$\rho[\mathrm{U}(x'), \mathrm{U}(x'')]=\max_{1 \leqslant i<\infty}|y'_i-y''_i| \leqslant \alpha \rho(x', x''),$$

ე. ი. $\mathrm{U}(x)$ არის შეკუმშვის ოპერატორი და, მაშასადამე, მე-9 თეორემის ძალით (5.6) სისტემას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ სავსებით რეგულარულ სისტემას შეიძლება ჰქონდეს აგრეთვე შემოუსაზღვრელი ამონახსნიც. მართლაც, განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი უსასრულო სისტემა

$$x_1=ax_2, \quad x_2=ax_3, \ldots, x_{n-1}=ax_n, \ldots,$$

სადაც a არის 1-ზე ნაკლები რაიმე დადებითი რიცხვი. ცხადია, რომ ეს განტოლებათა სისტემა სავსებით რეგულარული სისტემაა. ამ განტოლებათა სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. ეს ამონახსნებია

$$\left(c, \ \frac{c}{a}, \ \frac{c}{a^2}, \ldots, \frac{c}{a^n}, \ldots\right),$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. თუ $c=0$, მაშინ მივიღებთ $(0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ ამონახსნს. ეს არის სწორედ ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი; სხვა ამონახსნები ყველა შემოუსაზღვრელია.

თეორემა 12. *თუ $p>1$ და ადგილი აქვს უტოლობებს*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_{ik}|^q\right)^{p-1}=\alpha^p<1, \quad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p<+\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{5.7}$$

მაშინ განტოლებათა (5.6) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი l^p სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\in l^p$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_k \tag{5.8}$$

კრებადია ყოველი i-სათვის. მართლაც, რადგანაც ყოველი ფიქსირებული i-სათვის $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_{ik}|^q<+\infty$, ამიტომ ჰელდერის უტოლობის თანახმად აბსოლუტურად კრებადია (5.8) მწკრივი და, მაშასადამე, იგი იქნება კრებადი. თუ აღვნიშნავთ (5.8) მწკრივის ჯამს a_i სიმბოლოთი, მაშინ ჰელდერის უტოლობის ძალით,

$$|a_i|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|x\|.$$

მიღებული უტოლობის ორივე ნაწილი ავამაღლოთ p ხარისხში და გავითვალისწინოთ (5.7) დამოკიდებულებათა პირველი ტოლობა, გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \|x\|^p = \alpha^p \cdot \|x\|^p. \tag{5.9}$$

მაშასადამე, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ წარმოადგენს l^p სივრცის წერტილს და (5.9) დამოკიდებულებიდან მივიღებთ

$$\|a\| \leqslant \alpha \|x\|.$$

მინკოვსკის უტოლობის საფუძველზე ადვილად დავამტკიცებთ, რომ $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ წერტილი ეკუთვნის l^p სივრცეს, სადაც

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i = a_i + b_i \quad (i=1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, U ოპერატორი, რომელსაც გადაყავს x წერტილი y წერტილში, განსაზღვრულია l^p სივრცეში და ეს სივრცე გადაყავს თავის თავში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $U(x)$ შეკუმშვის ოპერატორია. ავიღოთ l^p სივრცეში ნებისმიერი ორი წერტილი

$$x'=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots), \quad x''=(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n, \ldots).$$

ვთქვათ,

$$y'=U(x'), \quad y''=U(x''),$$

სადაც

$$y'=(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots), \quad y''=(y''_1, y''_2, \ldots, y''_n, \ldots),$$

ხოლო

$$y'_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x'_k, \quad y''_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x''_k.$$

რადგანაც

$$y'_i - y''_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} (x'_k - x''_k),$$

ამიტომ ჰელდერის უტოლობის ძალით,

$$|y'_i - y''_i| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \rho(x', x'') \quad (i=1, 2, \ldots).$$

თუ მიღებულ უტოლობათა ორივე ნაწილს ავამაღლებთ p ხარისხში და შემდეგ შევკრებთ, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{\infty}|y'_i-y''_i|^p\leqslant\alpha^p[\rho(x',\ x'')]^p.$$

აქედან

$$\rho(y',\ y'')\leqslant\alpha\rho(x',\ x''),$$

ე. ი.

$$\rho[\mathrm{U}(x'),\ \mathrm{U}(x'')]\leqslant\alpha\rho(x',\ x'').$$

ამრიგად, $\mathrm{U}(x)$ წარმოადგენს შეკუმშვის ოპერატორს და ამიტომ მე-9 თეორემის ძალით (5.6) სისტემას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი l^p სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

8. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობის თეორემა. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{5.10}$$

საწყისი პირობით

$$y=y_0,\ \text{როდესაც}\ x=x_0, \tag{5.11}$$

სადაც $f(x,\ y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით $(x_0,\ y_0)$ წერტილს. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x,\ y)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას y-ის მიმართ, ე. ი. არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი მუდმივი $K>0$, რომ D არის ორი ნებისმიერი $(x,\ y')$ და $(x,\ y'')$ წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(x,\ y'')-f(x,\ y')|\leqslant\mathrm{K}\,|y''-y'|.$$

თეორემა 18. x_0 წერტილის გარკვეულ $[x_0-a,\ x_0+a]$ მიდამოში არსებობს (5.10) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს (5.11) საწყის პირობას.

დამტკიცება. (5.10) დიფერენციალური განტოლება (5.11) საწყისი პირობით ეკვივალენტურია შემდეგი ინტეგრალური განტოლებისა

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[t,\ \varphi(t)]dt. \tag{5.12}$$

რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ შემოსაზღვრულ D არე-ში, ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $M>0$, რომ D არის ყოველი (x, y) წერტილისათვის

$$|f(x, y)|\leqslant M.$$

შევარჩიოთ დადებითი a რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს პირობები:

ა) $Ka<1$;

ბ) თუ $|x-x_0|\leqslant a$ და $|y-y_0|\leqslant Ma$, მაშინ $(x, y)\in D$.

ავღნიშნოთ C^* სიმბოლოთი $[x_0-a, x_0+a]$ სეგმენტზე უწყვეტი ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქციათა სივრცე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|\varphi(x)-y_0|\leqslant Ma$, მეტრიკით

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2)=\max_{|x-x_0|\leqslant a}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|, \quad \varphi_1\in C^*, \ \varphi_2\in C^*.$$

დავამტკიცოთ, რომ C^* სრული სივრცეა. ავიღოთ C^* სიმრავლის ნებისმიერი დაგროვების წერტილი $\varphi_0(x)$. მაშინ C^* სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ $\varphi_0(x)$ წერტილისაკენ კრებადი C^* სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობა $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ პირობის ძალით

$$|\varphi_k(x)-y_0|\leqslant Ma, \quad x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a, \quad k=1, 2, \ldots$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k\to\infty$, მივიღებთ

$$|\varphi_0(x)-y_0|\leqslant Ma, \quad x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a.$$

მაშასადამე, $\varphi_0\in C^*$. ამრიგად, C^* ჩაკეტილი სიმრავლეა და, ამას გარდა, იგი $C_{[x_0-a, x_0+a]}$ სივრცის ქვესივრცეა. ამიტომ, მე-2 თეორემის ძალით, C^* წარმოადგენს სრულ სივრცეს.

ახლა განვიხილოთ ასახვა

$$\psi=U(\varphi), \tag{5.13}$$

სადაც

$$U(\varphi)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]dt, \ |x-x_0|\leqslant a, \ \varphi\in C^*.$$

(5.13) ასახვა წარმოადგენს შეკუმშვის ასახვას სრული C^* სივრცისა თავის თავში. მართლაც, ვთქვათ, $\varphi\in C^*$, მაშინ

$$|\psi(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f[t, \varphi(t)]|dt\right|\leqslant Ma, \ |x-x_0|\leqslant a.$$

მაშასადამე, $\psi \in C^*$. ამის გარდა, თუ $\varphi_1 \in C^*$, $\varphi_2 \in C^*$, გვექნება

$$|\psi_1(x)-\psi_2(x)|=|U(\varphi_1)-U(\varphi_2)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f[t,\varphi_1(t)]-f[t,\varphi_2(t)]|dt\right|\leqslant Ka\,\rho(\varphi_1,\varphi_2).$$

რადგანაც $Ka<1$, ამიტომ $U(\varphi)$ შეკუმშვის ოპერატორია და, მაშასადამე, მე-9 თეორემის თანახმად, $y=U(y)$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(x_0)=y_0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა პიკარს (Picard) ეკუთვნის[1].

4. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. განვიხილოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)\quad(i=1,\ 2,\ldots,n)\tag{5.14}$$

საწყისი პირობებით

$$y_i=y_{i0},\ \text{როდესაც}\ x=x_0\quad(i=1,\ 2,\ldots,\ n),\tag{5.15}$$

სადაც $f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)$ ფუნქციები უწყვეტია R^{n+1} სივრცეში მოთავსებულ შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს $(x_0,\ y_{10},\ y_{20},\ldots,\ y_{n0})$ წერტილს. ვიგულისხმოთ, რომ $f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ ცვლადების მიმართ:

$$|f_i(x,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)-f_i(x,y''_1,y''_2,\ldots,y''_n)|\leqslant K\sum_{k=1}^{n}|y'_k-y''_k|$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,n),$$

სადაც K დადებითი რიცხვია. მართებულია შემდეგი

თეორემა 14. *არსებობს x_0 წერტილის შემცველ გარკვეულ $[x_0-a,\ x_0+a]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ერთადერთი სისტემა ფუნქციებისა $y_i=\varphi_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$, რომლებიც*

---

[1] ემილ პიკარი (1856 — 1941) — ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის აკადემიის წევრი 1889 წლიდან. მას ეკუთვნის ფუნდამენტალური გამოკვლევანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში და მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

დააკმაყოფილებენ განტოლებათა (5.14) სისტემას საწყისი პირობებით (5.15).

დამტკიცება. დიფერენციალურ განტოლებათა (5.14) სისტემა საწყისი (5.15) პირობებით ეკვივალენტურია ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემისა:

$$y_i(x)=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i[t,\ y_1(t),\ y_2(t),\ldots,y_n(t)]dt \quad (i=1,\ 2,\ldots,n). \tag{5.16}$$

D არეში f_i ფუნქციების უწყვეტობის გამო არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ D არის ყოველი $(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)$ წერტილისათვის ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$|f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)|\leqslant M \quad (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

ახლა დადებითი a რიცხვი ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს პირობები:

ა) $Kan<1$,

ბ) თუ $|x-x_0|\leqslant a$ და $|y_i-y_{i0}|\leqslant Ma$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$, მაშინ $(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,y_n)\in D$.

განვიხილოთ ახლა C^n სივრცე, რომლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს $[x_0-a,\ x_0+a]$ სეგმენტზე ისეთი n უწყვეტი ფუნქციის დალაგებულ $\bar{\varphi}(x)=(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))$ სისტემას, რომ $|\varphi_i(x)-y_{i0}|\leqslant Ma$ $(i=1,\ldots,n)$, ამასთანავე მანძილი C^n სივრცის ორ $\bar{\varphi}(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))$ და $\bar{\psi}(x)=(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots,\psi_n(x))$ ელემენტს შორის ასე განვსაზღვროთ:

$$\rho(\bar{\varphi},\ \bar{\psi})=\sum_{i=1}^{n}\max_{|x-x_0|\leqslant a}|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ C^n წარმოადგენს სრულ სივრცეს.

ახლა $U(\bar{\varphi})$ ოპერატორი ასე განვსაზღვროთ:

$$U(\bar{\varphi})=(\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ldots,\Phi_n(x)),$$

სადაც

$$\Phi_i(x)=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i[t,\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)]dt,\ |x-x_0|\leqslant a,$$
$$(i=1,\ 2,\ldots,n).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $|x-x_0|\leqslant Ma$, გვექნება

$$|\Phi_i(x)-y_{i0}|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_i[t,\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)]|\,dt\right|\leqslant Ma$$

$$(i=1,\ 2,\ldots n).$$

მაშასადამე, $U(\bar{\varphi})\in C^n$. შემდეგ,

$$\rho[U(\bar{\varphi}),\ U(\bar{\psi})]=\sum_{i=1}^{n}\max_{|x-x_0|<a}\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i[t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)]-f_i[t,\psi_1(t),\ldots,\right.$$

$$\left.\psi_n(t)]dt\right|\leqslant K\sum_{i=1}^{n}\max_{|x-x_0|<a}\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(t)-\psi_k(t)|\,dt\right|\leqslant Kna\rho(\bar{\varphi},\bar{\psi}).$$

მაშასადამე, $U(\bar{\varphi})$ წარმოადგენს შეკუმშვის ოპერატორს და ამიტომ ოპერატორულ განტოლებას

$$U(\bar{\varphi})=\bar{\varphi}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$\bar{\varphi}^*=(\varphi^*{}_1(x),\ \varphi^*{}_2(x),\ldots,\ \varphi^*{}_n(x)).$$

ცხადია, რომ

$$\varphi^*{}_i(x_0)=y_{i0}\quad(i=1,\ 2,\ldots,n).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

6. ოპერატორების ε-სიახლოვე. ვთქვათ, მეტრიკულ R სივრცეში მოცემულია ორი ოპერატორი $U(x)$ და $V(x)$. ჩვენ ვიტყვით, რომ U და V ოპერატორები არიან ε-სიახლოვისა, თუ მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის და R სივრცის ნებისმიერი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$\rho[U(x),\ V(x)]<\varepsilon.$$

თეორემა 16. ვთქვათ, სრულ მეტრიკულ R სივრცეში მოცემულია შეკუმშვის ორი ოპერატორი U და V:

$$\rho[U(x),\ U(y)]\leqslant\alpha_1\rho(x,\ y),\ \rho[V(x),\ V(y)]\leqslant\alpha_2\rho(x,\ y),\ \alpha_1<1,\ \alpha_2<1.$$

თუ ეს ოპერატორები ε-სიახლოვისაა, მაშინ მათ უძრავ წერტილებს შორის მანძილი ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$ რიცხვზე, სადაც $\alpha=\min\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha=\alpha_1$. ვთქვათ, V ოპერატორის უძრავი წერტილია y_0. მაშინ U ოპერატორის უძრავი x_0 წერტილი წარმოადგენს ზღვარს წერტილთა შემდეგი მიმდევრობისა

$$y_0,\ y_1=U(y_0),\quad y_2=U(y_1),\ldots,y_n=U(y_{n-1}),\ldots,$$

ამასთანავე, (5.4) ფორმულის თანახმად,

$$\rho(y_n,\ x_0)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_0,\ y_1).$$

თუ $n=0$, გვექნება

$$\rho(y_0,\ x_0)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\rho(y_0,\ y_1).$$

მაგრამ რაკი U და V ოპერატორები ε-სიახლოვისაა, ამიტომ

$$\rho(y_0,\ y_1)=\rho[V(y_0),\ U(y_0)]<\varepsilon.$$

მამასადამე,

$$\rho(y_0,\ x_0)<\frac{\varepsilon}{1-\alpha}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

6. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის დამოკიდებულება პარამეტრებსა და საწყის მნიშვნელობებზე.

თეორემა 16. თ უ მ ა რ ჯ ვ ე ნ ა ნ ა წ ი ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ა

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ \alpha) \tag{5.17}$$

წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს α პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს $[\alpha_0,\ \alpha_1]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე დ ა, ა მ ი ს გ ა რ დ ა, ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს ა რ ს ე ბ ო ბ ი ს დ ა ე რ თ ა დ ე რ თ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ს, ა მ ა ს თ ა ნ ლ ი ფ შ ი ც ი ს K მ უ დ მ ი ვ ი α-ზ ე დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ო ც ე მ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს $y=\varphi(x,\ \alpha)$ ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი, რ ო მ ე ლ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს $\varphi(x_0\ \alpha)=y_0$ პ ი რ ო ბ ა ს, ი ქ ნ ე ბ ა α პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევარჩიოთ დადებითი a რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს პირობები ა) $Ka<1$; ბ) თუ $|x-x_0|\leqslant a$ და $|y-y_0|\leqslant Ma$, მაშინ $(x,\ y)\in D$.

(5.17) დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობით $y(x_0)=y_0$, ტოლფასია ინტეგრალური განტოლებისა

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t),\ \alpha]dt. \tag{5.18}$$

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც $f(x, y, \alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია α პარამეტრის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ y,\ \alpha)|<\frac{\varepsilon}{Ma},\ \text{როდესაც}\ |\Delta\alpha|<\delta.$$

განვიხილოთ ორი ოპერატორი

$$U(\varphi)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ \varphi(t),\ \alpha]dt$$

$$V(\varphi)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ \varphi(t),\ \alpha+\Delta\alpha]dt,$$

სადაც $|\Delta\alpha|<\delta$. გვაქვს:

$$\rho(U,\ V)=\max_{|x-x_0|<a}\Big|\int_{x_0}^{x}\{f[t,\ \varphi(t),\ \alpha]-$$

$$-f[t,\ \varphi(t),\ \alpha+\Delta\alpha]\}\,dt\Big|<\frac{\varepsilon}{Ma}\cdot Ma=\varepsilon.$$

მაშასადამე, U და V ოპერატორები ε-სიახლოვისაა. ამის გარდა, ეს ოპერატორები შეკუმშვის ოპერატორებია და ამიტომ მე-15 თეორემის ძალით

$$\rho(\varphi_0,\ \varphi^*)<\frac{\varepsilon}{1-\lambda},$$

სადაც $\varphi_0(x)$ და $\varphi^*(x)$ წარმოადგენენ U და V ოპერატორების უძრავ წერტილებს, ხოლო $\lambda=Ka$.

ამრიგად, (5.17) განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს α პარამეტრის უწყვეტ ფუნქციას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. თუ მარჯვენა ნაწილი დიფერენციალური განტოლებისა

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{5.19}$$

აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის პირო-

ბებს, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი $y=y(x, x_0, y_0)$ წარმოადგენს x_0-ისა და y_0-ის უწყვეტ ფუნქციას.

დამტკიცება. შევარჩიოთ დადებითი a რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს პირობები: ა) $Ka<1$; ბ) თუ $|x-x_0|\leqslant a$ და $|y-y_0|\leqslant Ma$, მაშინ $(x, y)\in D$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი ისე, რომ იყოს

$$\varepsilon<\frac{Ma}{2}.$$

(5.19) დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობით $y(x_0)=y_0$ ტოლფასია ინტეგრალური განტოლებისა

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t)]dt.$$

ახლა (5.19) განტოლებისათვის საწყისი პირობა იყოს $y(x_0)=y_1$, სადაც $|y_1-y_0|<\varepsilon$ და განვიხილოთ ოპერატორები

$$\mathrm{U}(\varphi)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ \varphi(t)]dt,\quad \mathrm{V}(\varphi)=y_1+\int_{x_0}^{x} f[t,\ \varphi(t)]dt\cdot$$

ეს ოპერატორები წარმოადგენენ შეკუმშვის ოპერატორებს. აქედან

$$\rho(\mathrm{U},\ \mathrm{V})=|y_1-y_0|<\varepsilon.$$

მაშასადამე, მე-15 თეორემის ძალით, $\mathrm{U}(\varphi)$ და $\mathrm{V}(\varphi)$ ოპერატორების უძრავი $\varphi_0(x)$ და $\varphi^*(x)$ წერტილებისათვის გვაქვს:

$$\rho(\varphi_0,\ \varphi^*)<\frac{\varepsilon}{1-\lambda},\quad \lambda=Ka.$$

ასე, რომ (5.19) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს y_0-ის უწყვეტ ფუნქციას.

ამგვარადვე ვაჩვენებთ, რომ (5.19) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს x_0-ის უწყვეტ ფუნქციას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. კომპაქტური სიმრავლეები მეტრიკულ სივრცეებში

განსაზღვრა 6. მეტრიკული R სივრცის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური სიმრავლე R-ში, თუ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ყოველ უსასრულო მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ R სივრცის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევ-

რობა, ხოლო E სიმრავლეს ჰქვია კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი თ ა ვ ი ს თ ა ვ შ ი, თუ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყოველი მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ E სიმრავლის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა.

მეტრიკულ R სივრცეს კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი ს ი ვ რ ც ე ეწოდება, თუ ამ სივრცის წერტილთა ყოველ უსასრულო მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ ამ სივრცის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა.

მეტრიკულ კომპაქტურ სივრცეს კ ო მ პ ა ქ ტ ი ჰ ქ ვ ი ა. არსებობს არამეტრიკული კომპაქტური სივრცეებიც, მაგრამ ამ საკითხს ჩვენ არ შევეხებით.

ბოლცანო-ვაირშტრასის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ევკლიდეს R^n სივრცეში მოთავსებული ყოველი შემოსაზღვრული უსასრულო სიმრავლე წარმოადგენს ამ სივრცეში კომპაქტურ სიმრავლეს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 7. ვთქვათ, მეტრიკულ R სივრცეში აღებულია E სიმრავლე და ε რაიმე დადებითი რიცხვია. R სივრცეში მოთავსებულ A სიმრავლეს ეწოდება ε-ბ ა დ ე E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ, თუ E სიმრავლის ყოველ x წერტილისათვის მოიძებნება A სიმრავლის ერთი მაინც ისეთი y წერტილი, რომლისათვისაც $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$.

მაგალითად, სიბრტყის მთელრიცხვა[1] წერტილების სიმრავლე შეადგენს $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - ბადეს ამ სიბრტყეში.

ε-ბადეს ს ა ს რ უ ლ ი ბადე ეწოდება, თუ იგი სასრული სიმრავლეა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 8. მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეს ს ა ვ ს ე ბ ი თ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ეწოდება, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის E შეიცავს რაიმე სასრულ ε-ბადეს.

თეორემა 18. მ ე ტ რ ი კ უ ლ ს ი ვ რ ც ე შ ი მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი ყ ო ვ ე ლ ი ს ა ვ ს ე ბ ი თ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი E ს ი მ რ ა ვ ლ ე შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, ε რაიმე დადებითი რიცხვია. E სიმრავლის სავსებით შემოსაზღვრულობის გამო E-ში არსებობს სასრული ε-ბადე $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. აღვნიშნოთ d-თი A სიმრავლის დიამეტრი.

---

[1] სიბრტყის რაიმე (x, y) წერტილს მთელრიცხვა წერტილი ეწოდება, თუ x და y მთელი რიცხვებია.

E სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისათვის მოიძებნება A სიმრავლის ისეთი ორი წერტილი a_i და a_k, რომ

$$\rho(x, a_i)\leqslant\varepsilon, \quad \rho(y, a_k)\leqslant\varepsilon.$$

სამკუთხედის აქსიომის ძალით

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, a_i)+\rho(a_i, a_k)+\rho(a_k, y)\leqslant d+2\varepsilon.$$

აქედან ჩანს, რომ E სიმრავლის დიამეტრი არ აღემატება $d+2\varepsilon$ რიცხვს. მაშასადამე, E შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

ადვილი მისახვედრია, რომ ევკლიდეს R^n სივრცეში აღებული შემოსაზღვრული E სიმრავლე სავსებით შემოსაზღვრულია.

მართლაც, E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს E სიმრავლის შემცველი n განზომილებიანი რეგულარული სეგმენტი Q. გავყოთ ეს სეგმენტი რეგულარულ სეგმენტებად, რომელთა ნორმებია (წიბოებია) $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$. ასეთი სეგმენტების რიცხვი სასრულია. ყოველ ასეთ სეგმენტში ავიღოთ E სიმრავლის წერტილი (თუ ასეთი წერტილი არსებობს) და ამ წერტილებისაგან შევადგინოთ A სიმრავლე. ცხადია, რომ A წარმოადგენს ε-ბადეს E სიმრავლის მიმართ.

შემოსაზღვრული სიმრავლე საზოგადოდ არ იქნება სავსებით შემოსაზღვრული. განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, l^2 სივრცეში აღებულია E სიმრავლე, რომელიც შედგება შემდეგი წერტილებისაგან: $e_1=(1, 0, 0, \ldots)$, $e_2=(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, $e_3=(0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$ რადგანაც E სიმრავლის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილია $\sqrt{2}$, ამიტომ E შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაგრამ იგი სავსებით შემოსაზღვრული სიმრავლე არაა. მართლაც, თუ ავიღებთ დადებით ε რიცხვს, რომელიც ნაკლებია ვიდრე $\sqrt{2}$, მაშინ ε რიცხვისათვის არ არსებობს E სიმრავლეში ε-ბადე.

თეორემა 19 (ჰაუსდორფი). *სრულ მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული E სიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ E იყოს სავსებით შემოსაზღვრული.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E კომპაქტური სიმრავლეა. დასამტკიცებელია, რომ E სავსებით შემოსაზღვრულია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, E არაა სავსებით შემოსაზღვრული. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი, რომ E სიმრავლეში არ გვექნება სასრული ε-ბადე. ავიღოთ E-ში ნებისმიერი x_1 წერტილი. რადგანაც E სიმრავლეში არაა სასრული ε-ბადე, ამიტომ E-ში მო-

იძებნება ისეთი x_2 წერტილი, რომლისათვისაც $\rho(x_1, x_2)>\varepsilon$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში x_1 თვითონ იქნებოდა ε-ბადე. შემდეგ, E სიმრავლეში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი x_3 წერტილი, რომ $\rho(x_1, x_3)>\varepsilon$ და $\rho(x_2, x_3)>\varepsilon$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში x_1 და x_2 წერტილები თვითონ შეადგენდნენ ε-ბადეს E-ში). გავაგრძელებთ რა ამ პროცესს, ჩვენ ავაგებთ E სიმრავლის წერტილთა ისეთ მიმდევრობას $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\rho(x_m, x_n)>\varepsilon, \text{ როცა } m\neq n.$$

ცხადია, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან არ გამოიყოფა არცერთი კრებადი ქვემიმდევრობა. მაგრამ, მეორე მხრით, E სიმრავლის კომპაქტურობის გამო $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან უნდა გამოიყოფოდეს კრებადი ქვემიმდევრობა. მივიღეთ წინააღმდეგობა და, მაშასადამე, E სავსებით შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, E სავსებით შემოსაზღვრულია და დავამტკიცოთ, რომ E კომპაქტური სიმრავლეა. განვიხილოთ E სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა $\{x_n\}$. ავიღოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა $\{\varepsilon_n\}$. ყოველი ε_k რიცხვისათვის ავაგოთ ε_k-ბადე E სიმრავლეში. ეს ბადე იყოს

$$A_k=\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{\nu_k k}\}, \quad (k=1, 2, \ldots).$$

A_1 სიმრავლის ყოველი წერტილის გარშემო შემოვხაზოთ ε_1 რადიუსიანი სფერო. რადგანაც ეს სფეროები მთლიანად E სიმრავლეს ფარავენ, ხოლო ამ სფეროთა რიცხვი სასრულია, ამიტომ ამ სფეროებიდან ერთი მაინც შეიცავს აღებული $\{x_n\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას $\{x_{1n}\}$. ეს სფერო აღვნიშნოთ S_1-ით.

შემდეგ, A_2 სიმრავლის ყოველი წერტილის გარშემო შემოვხაზოთ ε_2 რადიუსიანი სფერო. რაკი ამ სფეროთა რიცხვი სასრულია, ამიტომ ამ სფეროებიდან ერთი მაინც შეიცავს $\{x_{1n}\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას $\{x_{2n}\}$. ეს სფერო S_2-ით აღვნიშნოთ. შემდეგ ვიპოვით ε_3 რადიუსიან სფეროს, რომელიც შეიცავს $\{x_{2n}\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას $\{x_{3n}\}$ და ასე შემდეგ. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი მიმდევრობები:

$$\begin{array}{l}
x_{11}, \; x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots \\
x_{21}, \; x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}, \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

ამ მიმდევრობებიდან ყოველი წარმოადგენს წინა მიმდევრობის ქვემიმდევრობას. განვიხილოთ ახლა დიაგონალური მიმდევრობა

$$x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}, \ldots$$

ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ვინაიდან მისი წევრები, დაწყებული x_{nn}-დან, ყველა მოთავსებულია S_n სფეროში, რომლის რადიუსია ε_n. R სივრცის სისრულის გამო $\{x_{nn}\}$ მიმდევრობა კრებადია.

ამრიგად, E სიმრავლის წერტილთა ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა და, მაშასადამე, E კომპაქტური სიმრავლეა. თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 20 (ფრეშე). *სრულ მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული E სიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ როგორიც გინდა იყოს ε რიცხვი E სიმრავლისათვის არსებობდეს R-ში კომპაქტური ε-ბადე.*

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და A კომპაქტური $\frac{\varepsilon}{2}$-ბადეა E სიმრავლისათვის. რადგანაც A კომპაქტური სიმრავლეა, ამიტომ მე-19 თეორემის თანახმად იგი სავსებით შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, A სიმრავლეში შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$-ბადე A_1. ცხადია, A_1 წარმოადგენს E სიმრავლისათვის ε-ბადეს. შემდეგ, რაკი R სრული სივრცეა, ამიტომ, მე-19 თეორემის ძალით E კომპაქტური სიმრავლეა. თეორემის პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. *მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული E სიმრავლე კომპაქტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი ჩაკეტილია და კომპაქტურია R-ში.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E კომპაქტია, ე. ი. E თავის თავში კომპაქტურია. მაშინ E იქნება კომპაქტური სიმრავლე R-ში. დავამტკიცოთ, რომ E ჩაკეტილი სიმრავლეა. განვიხილოთ E სიმრავლის ნებისმიერი დაგროვების წერტილი x. ავიღოთ E სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}$, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ. რადგანაც E სიმრავლე თავის თავში კომპაქტურია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ამიტომ $x \in E$.

ამრიგად, თუ E წარმოადგენს კომპაქტს, მაშინ იგი იქნება ჩაკეტი-

ლი და კომპაქტური R-ში და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, E არის ჩაკეტილი და R-ში კომპაქტური სიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ E წარმოადგენს კომპაქტს. ავიღოთ E სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა $\{y_n\}$. რადგანაც E სიმრავლე კომპაქტურია R-ში, ამიტომ აღებული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{y_{n_k}\}$. ვთქვათ,

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k}=y.$$

E სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო $y\in E$. ამრიგად, E სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ E სიმრავლის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა. მაშასადამე, E წარმოადგენს კომპაქტს. თეორემა დამტკიცებულია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერ R კომპაქტში მოთავსებული ჩაკეტილი F სიმრავლე წარმოადგენს კომპაქტს.

თეორემა 22. მეტრიკული სივრცე წარმოადგენს კომპაქტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი სრულია და სავსებით შემოსაზღვრული.

ეს თეორემა მტკიცდება მე-19 თეორემის ანალოგიურად.

თეორემა 23. ყოველ კომპაქტში, რომელიც შეიცავს წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს, არსებობს ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ, R არის კომპაქტი. მე-19 თეორემის თანახმად, R სავსებით შემოსაზღვრულია და ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის R-ში არსებობს სასრული ε-ბადე B_ε. თუ ε-ს მივცემთ მნიშვნელობებს $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, მივიღებთ თვლად სიმრავლეს

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n},$$

რომელიც ყველგან მკვრივია R-ში, ვინაიდან R სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის გვაქვს $\rho(x, B)=0$.

თეორემა 24 (კანტორი). თუ გვაქვს კომპაქტური R სივრცის წერტილთა არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეების კლებადი მიმდევრობა $\{F_n\}$, მაშინ გადაკვეთა $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ ცარიელი არაა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ ყოველი F_m სიმრავლიდან ავიღებთ ნებისმიერ x_m წერტილს, მაშინ შეგვიძლია შევადგინოთ R სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m, \ldots \tag{6.1}$$

რადგანაც R კომპაქტური სივრცეა, ამიტომ (6.1) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{x_{m_k}\}$, რომელიც კრებადია R სივრცის გარკვეული x წერტილისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m. \tag{6.2}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი F_ν სიმრავლე და ავიღოთ ნატურალური რიცხვი $m_k > \nu$. მაშინ

$$x_{m_k},\ x_{m_{k+1}}, \ldots, x_{m_{k+j}}, \ldots \tag{6.3}$$

მიმდევრობის ყოველი ელემენტი F_ν სიმრავლეს მიეკუთვნება. ცხადია, რომ (6.3) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ და, რაკი F_ν სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $x \in F_\nu$. მაშასადამე, მართებულია (6.2) თანაფარდობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თ უ გ ვ ა ქ ვ ს კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი ს ი ვ რ ც ი ს ა რ ა ც ა რ ი ე ლ ჩ ა კ ე ტ ი ლ ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა კ ლ ე ბ ა დ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა $\{F_n\}$ და $\lim\limits_{n \to \infty} d(F_n) = 0$, მ ა შ ი ნ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ შ ე დ გ ე ბ ა მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა გ ა ნ.

თეორემა 26. რ ო გ ო რ ი ც გ ი ნ დ ა ი ყ ო ს დ ა დ ე ბ ი თ ი ε რ ი ც ხ ვ ი ყ ო ვ ე ლ ი K კ ო მ პ ა ქ ტ ი შ ე გ ვ ი ძ ლ ი ა წ ა რ მ ო ვ ა დ გ ი ნ ო თ რ ო გ ო რ ც ჯ ა მ ი ი ს ე თ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ი ს ს ა ს რ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ა, რ ო მ ე ლ თ ა დ ი ა მ ე ტ რ ე ბ ი ε-ზ ე ნ ა კ ლ ე ბ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ვიცით, ყოველი კომპაქტი სავსებით შემოსაზღვრულია. ამიტომ K კომპაქტისათვის არსებობს $\frac{\varepsilon}{3}$-ბადე $B = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}$. თვით ბადის განსაზღვრის თანახმად,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} S\left(x_k;\ \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

მაშასადამე,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} S\left(x_k;\ \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$K_i=K\cap\bar{S}\left(x_i;\ \frac{\varepsilon}{3}\right)\ \ (i=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

რადგანაც K სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ K_i სიმრავლეც ჩაკეტილია და, ამასთანავე, დიამეტრი $d(K_i)\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$. შემდეგ, ცხადია, რომ

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}K_i$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26 (ბორელ-ლებეგი). თუ მეტრიკულ R სივრცეში მოთავსებული K კომპაქტი დაფარულია R სივრცის ღია სიმრავლეთა უსასრულო S სისტემით, მაშინ ამ სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ქვესისტემა, რომელიც აგრეთვე K სიმრავლეს ფარავს, ანუ შემოკლებით, კომპაქტური ჩაკეტილი სიმრავლის ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს სასრულ დაფარვას.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, S სისტემის არც ერთი სასრული ქვესისტემა არ ფარავს K სიმრავლეს.

ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად, $\varepsilon=1$ რიცხვისათვის K კომპაქტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი სასრული რიცხვი ჩაკეტილი სიმრავლეებისა $K_1, K_2, \ldots, K_n$, რომელთა დიამეტრები ნაკლებია 1-ზე. ცხადია, რომ რომელიმე K_{i_1} სიმრავლე არ იქნება დაფარული S სისტემის არც ერთი სასრული ქვესისტემით. რადგანაც K_{i_1} სიმრავლე ჩაკეტილია და იგი წარმოადგენს K კომპაქტის ქვესიმრავლეს, ამიტომ K_{i_1} სიმრავლე იქნება კომპაქტი. ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით K_{i_1} სიმრავლე წარმოგვიდგება როგორც ჯამი ჩაკეტილი სიმრავლეებისა $K_{i_1 1},\ K_{i_1 2}, \ldots,\ K_{i_1 n_1}$, რომელთა დიამეტრები ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{2}$. ამ სიმრავლეებიდან ერთი მაინც არ იქნება დაფარული S სისტემის არც ერთი ქვესისტემით. ვთქვათ ესაა $K_{i_1 i_2}$ სიმრავლე. ეს უკანასკნელი წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი ჩაკეტილი სიმრავლეებისა $K_{i_1 i_2 1},\ K_{i_1 i_2 2}, \ldots,\ K_{i_1 i_2 n_2}$, რომელთა დიამეტრები $\frac{1}{3}$-ზე ნაკლებია. ამ სიმრავლეებიდან ავიღოთ ერთი რომელიმე $K_{i_1 i_2 i_3}$, რომელიც არ არის დაფარული S სისტემის არც ერთი ქვესის-

ტემით და ეს პროცესი უსაზღვროდ განვაგრძოთ. მივიღებთ კომპაქტთა კლებად მიმდევრობას

$$K, K_{i_1}, K_{i_1 i_2}, K_{i_1 i_2 i_3}, \ldots, K_{i_1 i_2 \ldots i_p}, \ldots, \tag{6.4}$$

ამასთანავე არც ერთი ამ კომპაქტებიდან დაფარული არ იქნება S სისტემის არც ერთი ქვესისტემით და

$$d(K_{i_1 i_2 \ldots i_p}) < \frac{1}{p} \quad (p=1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, 23 თეორემის შედეგის თანახმად (6.4) მიმდევრობაში მონაწილე ყველა სიმრავლის გადაკვეთა შედგება მხოლოდ ერთი x წერტილისაგან, რომელიც მოთავსდება S სისტემის რაიმე G ელემენტში. რაკი G ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს x წერტილის $U(x;\ \varepsilon)$ მიდამო, რომელიც G-ში მოთავსდება.

ახლა ავიღოთ ისეთი p, რომ $\frac{1}{p} < \varepsilon$. რადგანაც

$$x \in K_{i_1 i_2 \ldots i_p} \text{ და } d(K_{i_1 i_2 \ldots i_p}) < \frac{1}{p},$$

ამიტომ

$$K_{i_1 i_2 \ldots i_p} \subset U(x;\ \varepsilon) \subset G.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $K_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ კომპაქტი დაფარულია S სისტემის ერთი G ელემენტით. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ K კომპაქტის დაფარვა არ შეიძლება S სისტემის არც ერთი სასრული ქვესისტემით, სწორი არაა. ამრიგად, ბორელ-ლებეგის თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. კომპაქტურობის ნიშნები უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში

კერძო შემთხვევებში ჰაუსდორფისა და ფრეშეს იმ თეორემების გამოყენება, რომლებიც მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ სიმრავლეთა კომპაქტურობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს გვაძლევენ, გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამა თუ იმ სპეციალურ მეტრიკულ სივრცეში შეიძლება მოცემულ იქნეს კომპაქტურობის სპეციალური კრიტერიუმები, რომლებიც უფრო მოხერხებულია გამოყენების თვალსაზრისით. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ $C_{[a, b]}$ სივრცის წერტილთა სიმრავლის კომპაქტურობის აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომელიც არცელას (Arzelà) თეორემის სახელწოდებითაა ცნობილი. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 9. R^n სივრცის წერტილთა E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა $\{f(x)\}$ სისტემას ვუწოდოთ ერთობლივ თანაბრად უწყვეტი E-ზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, რომ აღებული ოჯახის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

E სიმრავლის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომელთა შორის მანძილი η-ზე ნაკლებია.

თეორემა 27 (არცელა). $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა $S=\{\varphi(x)\}$ სისტემის კომპაქტურობისათვის $C_{[a, b]}$ სივრცეში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ეს სისტემა იყოს $[a, b]$-ზე ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ თანაბრად უწყვეტი.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, S სისტემა კომპაქტურია $C_{[a, b]}$ სივრცეში. მაშინ, ჰაუსდორფის თეორემის ძალით, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს S-ში სასრული $\frac{\varepsilon}{3}$-ბადე, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$. ყოველი $\varphi_i(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$-ზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი M_i რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის $|\varphi_i(x)|\leqslant M_i$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$M=\frac{\varepsilon}{3}+\max\{M_1, M_2, \ldots, M_\nu\}.$$

$\frac{\varepsilon}{3}$-ბადის განსაზღვრის თანახმად, S სისტემის ყოველი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის

$$\rho(\varphi, \varphi_i)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\varphi_i(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშასადამე,

$$|\varphi(x)|\leqslant|\varphi_i(x)|+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant M_i+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant M.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ S სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე.

შემდეგ, რაკი ყოველი $\varphi_i(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$-ზე, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{3}$ რიცხვისათვის არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η_i რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათ-

ვის, რომელთა შორის მანძილი η_i-ზე ნაკლებია, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|\varphi_i(x'')-\varphi_i(x')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

აღვნიშნოთ η-თი უმცირესი $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ რიცხვებს შორის და განვიხილოთ S სისტემის ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქცია. $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots$, $\varphi_\nu(x)$ ფუნქციებიდან შეგვიძლია ავიღოთ ერთი მაინც ისეთი $\varphi_k(x)$ ფუნქცია, რომ

$$\rho(\varphi, \varphi_k)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ორი ნებისმიერი x', x'' წერტილი, რომელთა შორის მანძილი η-ზე ნაკლებია. გვაქვს:

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|\leqslant|\varphi(x'')-\varphi_k(x'')|+|\varphi_k(x'')-\varphi_k(x')|+$$

$$+|\varphi_k(x')-\varphi(x')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, S სისტემა ერთობლივ თანაბრად უწყვეტიც არის $[a, b]$ სეგმენტზე. ამრიგად, თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. პირობის ძალით, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, რომ S სისტემის ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის და $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომელთა შორის მანძილი η-ზე ნაკლებია, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|<\varepsilon.$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომლისათვისაც $\frac{b-a}{n}<\varepsilon$. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n კონგრუენტულ სეგმენტად:

$$[x_k, x_{k+1}], \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

სადაც

$$x_k=a+\frac{(b-a)k}{n}.$$

S სისტემის ყოველ $\varphi(x)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1) $\Phi(x_k)=\varphi(x_k), \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1,$
2) $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე $\Phi(x)$ ფუნქცია წრფივია.

ცხადია, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(x)-\Phi(x)|<\varepsilon,$$

ე. ი.

$$\rho(\varphi, \Phi)<\varepsilon.$$

მაშასადამე, $\Phi(x)$ ფუნქციათა S^* სისტემა წარმოადგენს S სისტემის ε-ბადეს.

დავამტკიცოთ, რომ S არის კომპაქტური სიმრავლე $C_{[a, b]}$ სივრცეში. რადგანაც S სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ სისტემის ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის და $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $|\varphi(x)|<M$. მაშასადამე, S^* სისტემის ყოველი $\Phi(x)$ ფუნქციისათვის და $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$|\Phi(x)|\leqslant|\Phi(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)|<\varepsilon+M=M_1,$$

ე. ი. S^* სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია. შემდეგ, S^* სისტემის ყოველი Φ ელემენტი განვიხილოთ როგორც $R_{n+1}^{(0)}$ სივრცის $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ წერტილი, სადაც

$$y_k=\varphi(x_k) \quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

ამასთანავე, თუ $\Phi_1(x)\in S^*$, $\Phi_2(x)\in S^*$ და

$$\Phi_1=\left(y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right), \quad \Phi_2=\left(y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}\right),$$

მაშინ, როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით,

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2)=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|y_k^{(1)}-y_k^{(2)}\right|.$$

მაშასადამე, S^* სიმრავლე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შემოსაზღვრული სიმრავლე $R_{n+1}^{(0)}$ სივრცეში. ამიტომ S^* კომპაქტურია $C_{[a,b]}$ სივრცეში.

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ავაგოთ ε-ბადე S სიმრავლისათვის და, მაშასადამე, $C_{[a, b]}$ სივრცის სისრულის გამო, ფრეშეს თეორემიდან გამომდინარეობს S სიმრავლის კომპაქტურობა. არცელას თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. სეპარაბელური სივრცეები

მეტრიკულ R სივრცეს სეპარაბელური სივრცე ეწოდება, თუ ამ სივრცეში არსებობს თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე.

თეორემა 28 (ვაიერშტრასი). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $P(x)$ მრავალწევრი, რომ

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $a=0$, $b=1$. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C^k{}_n\, x^k(1-x)^{n-k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

სადაც $C^k{}_n$ ბინომური კოეფიციენტია, ამასთან $C^0{}_n=1$. ამ მრავალწევრს ბერნშტეინის მრავალწევრი ეწოდება.

ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად,

$$1=[x+(1-x)]^n=\sum_{k=0}^{n} C^k{}_n x^k(1-x)^{n-k}. \tag{8.1}$$

ამ ტოლობაში n შევცვალოთ $(n-1)$-ით და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x-ზე, გვექნება

$$x=\sum_{k=0}^{n-1} C^k_{n-1} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} C^{k+1}_n x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\, C^k{}_n\, x^k(1-x)^{n-k}.$$

აქედან

$$nx=\sum_{k=0}^{n} k\, C^k{}_n x^k(1-x)^{n-k}. \tag{8.2}$$

ახლა (8.2) ტოლობაში n შევცვალოთ $(n-1)$-ით და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x-ზე, გვექნება

$$(n-1)x^2=\sum_{k=0}^{n-1} k\,C^k_{n-1}\,x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{n}C^{k+1}_n\,x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C^k_n\,x^k(1-x)^{n-k}.$$

საიდანაც

$$n(n-1)x^2=\sum_{k=0}^{n} k^2C^k_n\,x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n} k\,C^k_n\,x^k(1-x)^{n-k}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (8.2) ტოლობას, მივიღებთ

$$nx+n(n-1)x^2=\sum_{k=0}^{n} k^2\,C^k_n x^k(1-x)^{n-k}. \tag{8.3}$$

გავამრავლოთ (8.1), (8.2) და (8.3) ტოლობათა ორივე ნაწილები შესაბამისად n^2x^2, $-2nx$ და 1-ზე და შემდეგ წევრ-წევრად შევკრიბოთ, გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\,C^k_nx^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x).$$

მაგრამ

$$nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4},\ \ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2C^k_n\,x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $[0,\ 1]$ სეგმენტზე, არსებობს ისეთი დადებითი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ $[0,1]$ სეგმენტის ყოველი ორი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x''-x'|<\delta$, გვექნება

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამის გარდა, არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ

$$f|(x)|\leqslant M,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

გვაქვს:

$$|f(x)-B_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C^k_n x^k(1-x)^{n-k}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C^k_n x^k(1-x)^{n-k}.$$

თუ

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta,$$

მაშინ

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

ხოლო, როდესაც

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta,$$

მაშინ

$$\frac{(nx-k)^2}{\delta^2 n^2}\geqslant 1.$$

ამიტომ

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant 2M\leqslant\frac{2M(nx-k)^2}{\delta^2 n^2}.$$

ამრიგად, ნებისმიერი x-სათვის, $0\leqslant x\leqslant 1$, გვექნება

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M(nx-k)^2}{\delta^2 n^2}.$$

მაშასადამე,

$$|f(x)-B_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}C^k_n x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+\frac{2M}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 C^k_n x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2 n^2}\cdot\frac{n}{4}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2\delta^2 n}.$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური N რიცხვი რომ $N>\frac{M}{\delta^2\varepsilon}$, მაშინ $\frac{M}{2\delta^2 n}<\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n>N$. ამიტომ

$$|f(x)-B_n(x)|<\varepsilon,\ \text{როცა}\ n>N.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 29. $C_{[a,b]}$ სივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. $C_{[a,b]}$ სივრცეში განვიხილოთ W_0 სიმრავლე, რომელიც შედგება რაციონალურ კოეფიციენტებიანი ყველა პოლინომისაგან. W_0 წარმოადგენს თვლად სიმრავლეს. დავამტკიცოთ, რომ W_0 ყველგან

მკვრივია $C_{[a,b]}$ სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი ფუნქცია $f(x)\in C_{[a,b]}$. ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი პოლინომი

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

რომ

$$\rho(f,P)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი რაციონალური რიცხვები $b_0,\ b_1,\ldots,b_n$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$|a_i-b_i|<\frac{\varepsilon}{2M}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n),$$

სადაც

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\sum_{k=0}^{n}|x|^k.$$

განვიხილოთ პოლინომი

$$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

ცხადია, რომ

$$\rho(P,Q)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-Q(x)|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i||x|^i<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\rho(f,\ Q)\leqslant\rho(f,\ P)+\rho(P,\ Q)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად $C_{[a,b]}$ სივრცეში აღებული ყოველი $S(f;\ \varepsilon)$ სფერო შეიცავს W_0 სიმრავლის ელემენტს. მაშასადამე, W_0 ყველგან მკვრივია $C_{[a,b]}$ სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 80. *l^p სივრცე სეპარაბელურია, თუ $p\geqslant 1$.*

დამტკიცება. აღვნიშნოთ M_0 სიმბოლოთი $(r_1,\ r_2,\ldots,r_n,0,0,\ldots)$ სახის ყველა ელემენტის სიმრავლე, სადაც r_i ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია, ხოლო n წარმოადგენს ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვს. M_0 თვლადი სიმრავლეა. დავამტკიცოთ, რომ M_0 ყველგან მკვრივია l^p-ში. ავიღოთ l^p სივრცის ნებისმიერი ელემენტი $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_n,\ldots)$. შევარჩიოთ ნატურალური n რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

შემდეგ ავიღოთ M_0 სიმრავლის ისეთი ელემენტი $x^*=(r_1, r_2, \cdots, r_n; 0, 0, \cdots)$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

მაშინ

$$[\rho(x, x^*)]^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\rho(x, x^*) < \varepsilon.$$

ამრიგად, l^p სივრცეში მოთავსებული ყოველი $S(x; \varepsilon)$ სფერო შეიცავს M_0 სიმრავლის ელემენტს და ამიტომ M_0 სიმრავლე ყველგან მკვრივია l^p სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 31. m სივრცე არასეპარაბელური სივრცეა.

დამტკიცება. ალვნიშნოთ E-თი m სივრცის ყველა $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ ელემენტის სიმრავლე, სადაც $\xi_i=0$ ან $1 (i=1, 2, \ldots)$. E სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე. ავიღოთ E სიმრავლის ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტი $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$. ცხადია, რომ

$$\rho(x, y) = \sup\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|, \ldots, |\xi_n - \eta_n|, \cdots\} = 1.$$

ამრიგად, E სიმრავლის ორ ნებისმიერ ელემენტს შორის მანძილი უდრის ერთს.

დავამტკიცოთ, რომ m არ არის სეპარაბელური სივრცე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, m-ში არსებობს თვლადი ყველგან მკვრივი E_0 სიმრავლე და E_0 სიმრავლის ყოველი წერტილის გარშემო შემოვხაზოთ $\varepsilon=\frac{1}{3}$ რადიუსიანი სფერო. რადგანაც ასეთ სფეროთა სიმრავლე თვლადია, ამიტომ მოიძებნება ერთი $S\left(x_0; \frac{1}{3}\right)$ სფერო მაინც, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ x და y ელემენტს. მაშინ ერთდროულად უნდა შესრულდეს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\rho(x, y) \leqslant \frac{2}{3} \text{ და } \rho(x, y) = 1,$$

რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, m არ არის სეპარაბელური სივრცე. თეორემა დამტკიცებულია.

ნამდვილი ფუნქციები

§ 1. ფუნქციის ზღვარი

განვიხილოთ რაიმე აბსტრაქტული E სიმრავლე. თუ ამ სიმრავლის ყოველ x წერტილს გარკვეული წესით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი $f(x)$, მაშინ ამბობენ, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ნამდვილი ფუნქცია $f(x)$. თვით E სიმრავლეს $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.

ზოგიერთ წერტილში ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს $+\infty$ ან $-\infty$ მნიშვნელობა. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ ფუნქციებს.

ვთქვათ, მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია და x_0 იყოს E სიმრავლის დაგროვების წერტილი. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 1. რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-A|<\varepsilon$ ყოველი x-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $0<\rho(x, x_0)<\eta$, $x\in E$. ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩაწერენ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A. \tag{1.1}$$

თეორემა 1. $f(x)$ ფუნქციას ზღვრად აქვს A რიცხვი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x_0 წერტილისაკენ კრებადი E სიმრავლის წერტილთა ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, $x_n\neq x_0$ ($n=1, 2, \ldots$), $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მართებულია (1.1) ტოლობა. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

როდესაც $0<\rho(x, x_0)<\eta$, $x\in E$.

განვიხილოთ ახლა x_0 წერტილისაკენ კრებადი E სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, ამასთან $x_n \neq x_0$ $(n=1, 2, \ldots)$. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(x_n, x_0) < \eta, \text{ როდესაც } n > N.$$

ცხადია, რომ

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, E-დან აღებული წერტილთა ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, $x_n \neq x_0$, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ, რიცხვთა მიმდევრობა $\{f(x_n)\}$ კრებადია A რიცხვისაკენ. დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ ზღვრად A რიცხვი აქვს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ზღვრად A რიცხვი, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი წერტილი x', რომლისათვისაც

$$\rho(x_0, x') < \eta, \text{ ხოლო } |f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\eta_n\}$ მიმდევრობა. η_n რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი x_n წერტილი, რომ $\rho(x_n, x_0) < \eta_n$, ხოლო

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.2}$$

თუ n-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს 1, 2, ..., მივიღებთ E სიმრავლის წერტილთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას. ადვილი შესამჩნევია, რომ წერტილთა ეს მიმდევრობა კრებადია x_0 წერტილისაკენ. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{1.3}$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.3) ტოლობას და (1.2) თანაფარდობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $n \to \infty$ მივიღებთ $0 \geqslant \varepsilon_0$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას E სიმრავლის მიმართ x_0 წერტილში ზღვრად A რიცხვი აქვს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ Გ. ᲜᲐᲛᲓᲕᲘᲚᲘ ᲪᲕᲚᲐᲓᲘᲡ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲖᲦᲕᲐᲠᲘ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲨᲘ ᲛᲐᲠᲯᲕᲔᲜᲘᲓᲐᲜ ᲓᲐ ᲛᲐᲠᲪᲮᲔᲜᲘᲓᲐᲜ

ვთქვათ, წრფივ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ E სიმრავლის დაგროვების რაიმე x_0 წერტილი, რომელიც შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს E-ს. რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap(x_0;\ x_0+\eta).$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A.$$

ასევე, რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap(x_0-\eta,\ x_0).$$

სიმბოლურად ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=A.$$

შემდეგ, ჩვენ ვიტყვით, რომ $+\infty$ არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)>M, \text{ როცა } x\in E\cap(x_0,\ x_0+\eta).$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=+\infty.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებები:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0-} f(x)=-\infty.$$

$f(x)$ ფუნქციის ზღვარს მარჯვნიდან და მარცხნიდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ აღნიშნავენ შესაბამისად $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ სიმბოლოებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი

x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, მაშინ არსებობს $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0+) = f(x_0-). \tag{2.1}$$

პირიქით, თუ არსებობს $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ და ისინი ტოლია, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ და ადგილი აქვს (2.1) ტოლობებს.

§ 3. უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციები

ავიღოთ მეტრიკულ R სივრცეში რაიმე E სიმრავლე, რომელზედაც განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. ვთქვათ, x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც E-ს ეკუთვნის. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, თუ $f(x_0)$ სასრულია და

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

თუ x^* წარმოადგენს E სიმრავლის იზოლირებულ წერტილს და $f(x^*)$ სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ჩავთვლით უწყვეტად x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი E სიმრავლეზე ამავე სიმრავლის მიმართ, თუ იგი უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში ამავე სიმრავლის მიმართ.

თუ x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი და იგი E-ს არ ეკუთვნის, ნაშინ $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ წყვეტილს x_0 წერტილში. ამას გარდა, თუ $x_0 \in E$ და $f(x)$ უწყვეტი არაა x_0 წერტილში, მაშინაც $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ წყვეტილს x_0 წერტილში.

პირველი თეორემის საფუძველზე ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგ ორ თეორემას:

თეორემა 2. უწყვეტ ფუნქციათა ჯამი და ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციებია.

თეორემა 3. ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობა უწყვეტი ფუნქციაა, თუ მნიშვნელი ნულად არ იქცევა განსახილავ წერტილში.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში და $f(x_0) \neq 0$, მაშინ მოიძებნება ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში მოთავსე-

ბული E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $f(x)$ ფუნქციას ექნება იგივე ნიშანი რაც $f(x_0)$-ს.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x_0)>0$. ვთქვათ,

$$\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } \rho(x, x_0)<\eta, \ x\in E. \tag{3.1}$$

განვიხილოთ x_0 წერტილის $S(x_0; \eta)$ მიდამო. (3.1) უტოლობის თანახმად,

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x), \text{ როდესაც } x\in E\cap S(x_0; \eta).$$

ამ უკანასკნელ უტოლობაში ჩავსვათ ε-ის ნაცვლად მისი მნიშვნელობა, გვექნება

$$\frac{f(x_0)}{2}<f(x), \text{ როდესაც } x\in E\cap S(x_0; \eta).$$

ამრიგად $f(x)>0$, როდესაც $x\in E\cap S(x_0; \eta)$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 2. რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული ამ სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x)|<M.$$

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F კომპაქტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ კომპაქტზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული F-ზე. მაშინ ყოველი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის შეგვიძლია დავასახელოთ F სიმრავლის ისეთი x_n წერტილი, რომ

$$|f(x_n)|\geqslant n. \tag{3.2}$$

თუ n-ს მივცემთ მნიშვნელობებს 1, 2, 3, . . ., მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას:

$$x_1, \ x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{3.3}$$

პირობის ძალით F სიმრავლე კომპაქტია და ამიტომ (3.3) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია F სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილისაკენ.

შემდეგ, რაკი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F-ზე, იგი უწყვეტია კერძოდ x_0 წერტილში და ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0). \tag{3.4}$$

მეორე მხრით, (3.2) უტოლობის თანახმად

$$|f(x_{n_k})|\geqslant n_k$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty.$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ (3.4) ტოლობას, მივიღებთ

$$|f(x_0)|=+\infty.$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან ფუნქციის უწყვეტობის გამო $f(x_0)$ სასრულია. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ არ შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი F სიმრავლეზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ F სიმრავლე კომპაქტს არ წარმოადგენს, მაშინ ზემოდამტკიცებული თეორემა საზოგადოდ მართებული არაა. მართლაც, ვთქვათ, (0,1) ინტერვალზე მოცემულია ფუნქცია $f(x)=\frac{1}{x}$. ეს ფუნქცია უწყვეტია მოცემული ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაგრამ ფუნქცია შემოსაზღვრული არაა. ამის მიზეზი ისაა, რომ ინტერვალი არ წარმოადგენს კომპაქტს.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე E სიმრავლეზე. თუ $f(E)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია იქნება შემოსაზღვრული E სიმრავლეზე და პირიქით, თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე, მაშინ $f(E)$ სიმრავლეც შემოსაზღვრულია.

$f(E)$ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად M და m ასოებით. M და m რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ უ ს ტ ი ზ ე დ ა დ ა ზ უ ს ტ ი ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი E სიმრავლეზე.

თუ არსებობს E სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)=M$, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს E სიმრავლეზე თავის ზუსტ ზედა საზღვარს. ასევე, თუ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი x_1 წერტი-

ლი, რომ $f(x_1)=m$, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს E სიმრავლეზე.

შეიძლება, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს E სიმრავლეზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვარებს. მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=x, \text{ თუ } 0<x<1 \text{ და } f(0)=f(1)=\frac{1}{2}.$$

$f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე იგი შემოსაზღვრულია: $0<f(x)<1$. ეს ფუნქცია ვერ აღწევს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს (ეს საზღვრებია 0 და 1). მიზეზი ისაა, რომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=0$ და $x=1$ წერტილებში.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F კომპაქტზე, მაშინ იგი მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F კომპაქტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად $f(x)$ შემოსაზღვრულია. ამ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად M და m ასოებით.

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\{\varepsilon_n\}$. თანახმად ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრისა, აღებული ε_n $(n=1, 2, \cdots)$ რიცხვისათვის არსებობს F სიმრავლის ისეთი x_n წერტილი, რომ

$$f(x_n)>M-\varepsilon_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

ჩვენ მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{3.6}$$

რადგანაც F წარმოადგენს კომპაქტს, ამიტომ (3.6) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია F სიმრავლის გარკვეული x_0 წერტილისაკენ.

პირობის ძალით, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე და ამიტომ იგი იქნება უწყვეტი x_0 წერტილში. ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0). \tag{3.7}$$

მეორე მხრით, (3.5) უტოლობის ძალით,

$$f(x_{n_k})>M-\varepsilon_{n_k}.$$

აქედან, თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $k \to \infty$, თანახმად (3.7) ტოლობისა, მივიღებთ

$$f(x_0) \geqslant M. \tag{3.8}$$

მაგრამ

$$f(x_0) \leqslant M. \tag{3.9}$$

ამიტომ (3.8) და (3.9) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ

$$f(x_0) = M.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზუსტ ზედა საზღვარს x_0 წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება F სიმრავლის ისეთი x^* წერტილის არსებობა, რომ

$$f(x^*) = m.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 8. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის x წერტილისაგან დამოუკიდებლად ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი ორი x' და x'' წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\rho(x', x'') < \eta$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არაა E სიმრავლეზე, მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის იარსებებს E-ში ისეთი ორი წერტილი x' და x'', რომ $\rho(x', x'') < \eta$, ხოლო $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0$.

თეორემა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F კომპაქტზე, მაშინ იგი თანაბრად უწყვეტია ამ კომპაქტზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ არაა თანაბრად უწყვეტი F-ზე. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს F სიმრავლეში ისეთი ორი წერტილი x' და x'', რომ $\rho(x', x'') < \eta$, ხოლო

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

ახლა განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\eta_n\}$ მიმდევრობა.

აღებული η_n $(n=1, 2, \ldots)$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ F სიმრავლის ისეთი წყვილი წერტილებისა x'_n და x''_n, რომ

$$\rho(x'_n, x''_n) < \eta_n, \tag{3.10}$$

ხოლო

$$|f(x''_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon_0\ \ (n=1,\ 2,\ldots). \tag{3.11}$$

ჩვენ მივიღეთ წერტილთა ორი მიმდევრობა

$$x_1',\ x'_2,\ldots,\ x'_n,\ldots, \tag{3.12}$$

$$x_1'',\ x_2'',\ldots,x''_n,\ldots, \tag{3.13}$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.10) და (3.11) პირობებს.

შემდეგ რაკი F წარმოადგენს კომპაქტს, ამიტომ (3.12) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა

$$x'_{n_1},\ x'_{n_2},\ldots,x'_{n_k},\ldots, \tag{3.14}$$

რომელიც კრებადია F სიმრავლის გარკვეულ x_0 წერტილისაკენ.

(3.14) მიმდევრობას შეესაბამება (3.13) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა:

$$x''_{n_1},\ x''_{n_2},\ldots,x''_{n_k},\ldots \tag{3.15}$$

დავამტკიცოთ, რომ (3.15) მიმდევრობა კრებადია x_0 წერტილისაკენ. სამკუთხედის აქსიომის თანახმად,

$$\rho(x''_{n_k},\ x_0)\leq\rho(x''_{n_k},\ x'_{n_k})+\rho(x'_{n_k},\ x_0)<\eta_{n_k}+\rho(x'_{n_k},\ x_0). \tag{3.16}$$

მაგრამ

$$\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\rho(x'_{n_k},\ x_0)=0.$$

მაშასადამე, (3.16) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x''_{n_k},\ x_0)=0.$$

ამრიგად,

$$\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}=\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$$

და

$$|f(x''_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0\ \ (k=1,\ 2,\ldots). \tag{3.17}$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე, ამიტომ იგი იქნება უწყვეტი x_0 წერტილში, რის გამო

$$\lim_{k\to\infty}f(x'_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(x''_{n_k})=f(x_0).$$

მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty}|f(x''_{n_k})-f(x'_{n_k})|=|f(x_0)-f(x_0)|=0. \tag{3.18}$$

მეორე მხრით, (3.17) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{k\to\infty} |f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (3.19)$$

(3.18) და (3.19) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ $0 \geqslant \varepsilon_0$, რაც შეუძლებელია.

მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არათანაბრად უწყვეტია F სიმრავლეზე, სწორი არ არის. ამიტომ $f(x)$ თანაბრად უწყვეტია F-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. ფუნქციის რხევა

ვთქვათ, მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ M და m-ით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი E სიმრავლეზე. სხვაობას $M-m$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის რხევა E სიმრავლეზე და იგი, ჩვეულებრივ, O სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, $O \geqslant 0$. თუ $f(x)$ შემოსაზღვრული არაა E ზე, მაშინ $O = +\infty$.

ახლა ვთქვათ x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის რაიმე დაგროვების წერტილს და განვიხილოთ ამ წერტილის $S(x_0; \varepsilon)$ მიდამო. აღვნიშნოთ $M(f; x_0, \varepsilon)$ და $m(f; x_0, \varepsilon)$ სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები $S(x_0; \varepsilon) \cap E$ სიმრავლეზე. ცხადია, რომ თუ ε რიცხვს ვამცირებთ, მაშინ $M(f; x_0, \varepsilon)$ არ იზრდება, ხოლო $m(f; x_0, \varepsilon)$, არ მცირდება. ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M(f; x_0, \varepsilon)$ და $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} m(f; x_0, \varepsilon)$, რომლებიც სასრულია ან უსასრულო.

ამ ზღვრებს ვუწოდოთ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის მ ა ქ ს ი მ უ მ ი და მ ი ნ ი მ უ მ ი E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ x_0 წერტილში და ისინი აღვნიშნოთ $M(f; x_0)$ და $m(f; x_0)$ სიმბოლოებით.

შევნიშნოთ, რომ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული. თუ $x_0 \in E$, მაშინ

$$m(f;x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(f;x_0).$$

ამ შემთხვევაში სხვაობას $O(f;x_0) = M(f;x_0) - m(f;x_0)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის რხევა x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

თეორემა 8. თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე დ ა ა მ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი ი გ ი ს ა ს რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი E

სიმრავლის მიმართ აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $O(f;x_0)=0$.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ $O(f;\ x_0)=0$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

როცა $x\in E\cap S(x_0;\ \eta)$.

აქედან გამომდინარეობს:

$$f(x_0)-\varepsilon\leq m(f;x_0)\leqslant M(f;x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

აქედან

$$O(f;\ x_0)=M(f;x_0)-m(f;\ x_0)\leqslant 2\varepsilon.$$

ვინაიდან ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$O(f;x_0)=0. \tag{4.1}$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას. დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ. პირობის ძალით

$$M(f;x_0)=m(f;x_0)=f(x_0).$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$M(f;x_0,\eta)-f(x_0)<\varepsilon,\ f(x_0)-m(f;x_0,\eta)<\varepsilon.$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობები:

$$f(x)-f(x_0)<\varepsilon,\quad f(x_0)-f(x)<\varepsilon,$$

როცა $x\in E\cap S(x_0;\eta)$, ანუ

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ \text{როდესაც}\ x\in E\cap S(x_0;\ \eta).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

§ 5. ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვარი

ვთქვათ, მეტრიკული სივრცის რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ E სიმრავლის დაგროვების x_0 წერტილი და განვიხილოთ x_0-ის $S(x_0;\varepsilon)$ მიდამო. აღვნიშნოთ $M^*(f;x_0,\varepsilon)$ და $m^*(f;x,\varepsilon)$

სიმბოლოებით შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები $H(x_0;\ \varepsilon)=E\cap S(x_0;\ \varepsilon)-\{x_0\}$ სიმრავლეზე. ცხადია, თუ ε კლებულობს, მაშინ $M^*(f;\ x_0,\ \varepsilon)$ არ იზრდება, ხოლო $m^*(f;x_0,\varepsilon)$ არ მცირდება. ამიტომ არსებობს ზღვრები

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M^*(f;x_0,\varepsilon) \quad \text{და} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} m^*(f;x_0,\varepsilon)$$

სასრული ან უსასრულო. ამ ზღვრებს ვუწოდებთ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზ ე დ ა და ქ ვ ე დ ა ზღვრებს x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ და მათ აღვნიშნავთ შესაბამისად ასე:

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \ \text{და} \ \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

ცხადია, რომ

$$\liminf_{x\to x_0} f(x)\leqslant \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

თეორემა 9. თუ $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მ ა შ ი ნ E ს ი მ რ ა ვ ლ ი დ ა ნ შ ე გ ვ ი ძ ლ ი ა გ ა მ ო ვ ყ ო თ x_0 წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა კ ე ნ კ რ ე ბ ა დ წ ე რ ტ ი ლ თ ა ი ს ე თ ი $\{x_k\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა, რ ო მ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=A.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა A სასრულია. ავილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა $\{\varepsilon_n\}$. ცხადია,

$$\lim_{n\to\infty} M^*(f;x_0,\varepsilon_n)=A.$$

რიცხვი 1-თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი წერტილი $x_1\in H(x_0;\varepsilon_1)$, რომ შესრულდეს უტოლობები

$$M^*(f;x_0,\ \varepsilon_1)-1<f(x_1)\leqslant M^*(f;x_0,\varepsilon_1),$$

სადაც

$$H(x_0;\ \varepsilon_1)=E\cap S(x_0;\ \varepsilon_1)-\{x_0\}.$$

შემდეგ, რიცხვი $\frac{1}{2}$-თვის არსებობს ისეთი წერტილი $x_2\in H(x_0;\varepsilon_2)$, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$M^*(f;x_0,\varepsilon_2)-\frac{1}{2}<f(x_2)\leqslant M^*(f;x_0;\varepsilon_2).$$

საზოგადოდ, რიცხვი $\frac{1}{k}$-თვის მოიძებნება ისეთი წერტილი $x_k\in H(x_0;\varepsilon_k)$, რომ მართებული იყოს უტოლობები

$$M^*(f;x_0,\varepsilon_k)-\frac{1}{k}<f(x_k)\leqslant M^*(f;x_0,\varepsilon_k). \tag{5.1}$$

ამ პროცესს თუ უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ E სიმრავლის წერტილთა $\{x_k\}$ მიმდევრობას, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ. (5.1) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=A.$$

ამრიგად, თუ A სასრულია, თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ $A=-\infty$. რადგანაც

$$\lim_{k\to\infty} M^*(f;x_0,\varepsilon_k)=-\infty$$

და $H(x_0;\ \varepsilon_k)$ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის

$$f(x)\leqslant M^*(f;x_0,\varepsilon_k),$$

ამიტომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$. ამ შემთხვევაშიაც თეორემა მართებულია.

დასასრულ, ვთქვათ $A=+\infty$. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ ნულისაკენ კრებადი დადებითი რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა $\{\varepsilon_n\}$, რომ

$$M^*(f;x_0,\varepsilon_k)>k\ \ (k=1,\ 2,\ldots).$$

ამიტომ ყოველ $H(x_0;\ \varepsilon_k)$ სიმრავლეში არსებობს ისეთი წერტილი x_k, რომ $f(x_k)>k$. აქედან

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=+\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 10. თუ $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)=B$, მაშინ E სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ x_0 წერტილისაკენ კრებადი წერტილთა ისეთი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

თეორემა 11. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x)=\limsup_{x\to x_0} f(x). \tag{5.2}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ არის A. მაშინ E-დან აღებული წერტილთა ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = A.$$

მე-9 და მე-10 თეორემების თანახმად E-დან შეგვიძლია გამოვყოთ x_0-საკენ კრებადი წერტილთა ისეთი ორი მიმდევრობა $\{x_n\}$ და $\{x'_n\}$, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = A,$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = A.$$

აქედან გამომდინარეობს (5.2) ტოლობის მართებულობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (5.2) ტოლობას. რადგანაც ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$m^*(f;\ x_0, \varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M^*(f;\ x_0,\ \varepsilon),$$

როცა $x \in E \cap S(x_0;\ \varepsilon) - \{x_0\}$, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და a იყოს რაიმე ნამდვილი რიცხვი. აღვნიშნოთ $\{x : f(x) > a\}$, $\{x : f(x) < a\}$, $\{x : f(x) \geqslant a\}$ სიმბოლოებით E სიმრავლის იმ x წერტილთა სიმრავლეები, რომელთათვის ადგილი აქვს შესაბამისად უტოლობებს

$$f(x) > a,\ \ f(x) < a,\ f(x) \geqslant a.$$

ამ სიმრავლეებს **ლებეგის სიმრავლეები** ეწოდება.

თეორემა 12. *თუ $f(x)$ ფუნქციის ზედა ზღვარი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ A რიცხვია და $H^* = \{y\}$ იმ y რიცხვთა სიმრავლეა, რომელთათვის x_0 არ არის $\{x : f(x) > y\}$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაშინ*

$$A = \inf H^*. \tag{5.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც A არის $f(x)$ ფუნქციის ზედა ზღვარი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)<A+\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\ \eta)-\{x_0\}.$$

მაშასადამე, $\{x:f(x)>A+\varepsilon\}$ სიმრავლისათვის x_0 არ იქნება დაგროვების წერტილი და ამიტომ

$$\inf H^*\leqslant A+\varepsilon.$$

ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო გვექნება

$$\inf H^*\leqslant A. \tag{5.4}$$

განვიხილოთ ახლა $\{x:f(x)>\inf H^*+\varepsilon\}$ სიმრავლე. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ სიმრავლისათვის x_0 არ იქნება დაგროვების წერტილი. ამიტომ მოიძებნება ისეთი სფერო $S(x_0;\ \eta)$, რომელიც არ შეიცავს აღნიშნული სიმრავლის არც ერთ წერტილს, რის გამო გვაქვს

$$M^*(f;x_0,\eta)\leqslant\inf H^*+\varepsilon.$$

აქედან

$$A\leqslant\inf H^*+\varepsilon.$$

ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო გვაქვს:

$$A\leqslant\inf H^*. \tag{5.5}$$

(5.4) და (5.5) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (5.3) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 13. თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ქ ვ ე დ ა ზ ღ ვ ა რ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ B რ ი ც ხ ვ ი ა დ ა $H_*=\{y\}$ ი მ y რ ი ც ხ ვ თ ა ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა, რ ო მ ე ლ თ ა თ ვ ი ს x_0 ა რ ა რ ი ს $\{x:f(x)<y\}$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს დ ა გ რ ო ვ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, მ ა შ ი ნ

$$B=\sup H_*.$$

თეორემა 14. თ უ მ ე ტ რ ი კ უ ლ ს ი ვ რ ც ე შ ი მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა $f(x)$ დ ა $g(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი, $F(x)=f(x)+g(x)$, დ ა x_0 ა რ ი ს E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს დ ა გ რ ო ვ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, მ ა შ ი ნ მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა შ ე მ დ ე გ ი უ ტ ო ლ ო ბ ე ბ ი:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x)+\liminf_{x\to x_0} g(x)\leqslant\liminf_{x\to x_0} F(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0} f(x)+$$
$$+\liminf_{x\to x_0} g(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0} F(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0} f(x)+\limsup_{x\to x_0} g(x). \tag{5.6}$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობები:

$$m^*(f;\ \varepsilon)+m^*(g;\ \varepsilon)\leqslant m^*(F;\ \varepsilon)\leqslant M^*(f;\ \varepsilon)+$$

$$+m^*(g;\ \varepsilon)\leqslant M^*(F;\ \varepsilon)\leqslant M^*(f;\ \varepsilon)+M^*(g;\ \varepsilon).$$

თუ ამ უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\varepsilon\to 0$, მივიღებთ (5.6) დამოკიდებულებებს[1].

§ 6. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის წყვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია

ვთქვათ, წრფივ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია და x_0 იყოს ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $x_0\in E$, მაშინ $f(x)$ *ფუნქციის უწყვეტობისათვის* x_0 *წერტილში* E *სიმრავლის მიმართ აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს სასრული ზღვრები* $f(x_0+)$ *და* $f(x_0-)$ *და ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს*

$$f(x_0+)=f(x_0-)=f(x_0).$$

თუ $x_0\in E$ და $f(x_0+)=f(x_0)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *მარჯვნიდან უწყვეტი* x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, ხოლო თუ $f(x_0-)=f(x_0)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ჰქვია *მარცხნიდან უწყვეტი* x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *პირველი გვარის წყვეტის წერტილი* E სიმრავლის მიმართ, თუ $f(x)$ წყვეტილია x_0-ზე და არსებობს $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ ზღვრები, სასრული ან უსასრულო.

თუ $x_0\in E$ და $f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0)$, მაშინ x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ასაცილებელი წყვეტის წერტილი*. ამ შემთხვევაში ფუნქცია უწყვეტი ხდება, თუ შევცვალეთ მისი მნიშვნელობა თვით x_0 წერტილში ამისათვის საკმარისია მივიჩნიოთ, $f(x_0)=f(x_0+)$.

გამოსახულებას $|f(x_0+)-f(x_0-)|$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ნახტომი* x_0 წერტილში. ნახტომი ნულია უწყვეტობისა და ასაცილებელი წყვეტის წერტილებში.

---

[1] აქ იგულისხმება, რომ $F(x)$ განსაზღვრულია E სიმრავლის ყოველ x წერტილში, ე. ი. იგულისხმება, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ერთ და იმავე წერტილში არაა სხვადასხვა ნიშნის უსასრულო.

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს წ ყ ვ ე ტ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, თუ არ არსებობს ერთ-ერთი მაინც $f(x_0-)$ და $f(x_0+)$ ზღვრებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

ცხადია, $f(0+)=1$, $f(0-)=1$. აქედან ჩანს, რომ $x=0$ არის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ასეა განსაზღვრული:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{თუ } x<0,\\ 0, & \text{თუ } x=0,\\ 1, & \text{თუ } x>0.\end{cases}$$

ცხადია, რომ $x=0$ არის ამ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი; $f(0-)=-1$, $f(0+)=1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როდესაც } x\neq 0,\\ 0, & \text{როდესაც } x=0.\end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ $x=0$ არის $f(x)$-ის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. ამისათვის განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა $\{x_n\}$, სადაც

$$x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

ცხადია, $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ და, ამას გარდა,

$$f(x_n)=(-1)^n\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

მაშასადამე, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ არ არსებობს და ამიტომ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ზღვარი $x=0$ წერტილში. მაშასადამე, 0 არის $f(x)$ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{1-x}}, & \text{როცა } x\neq 1,\\ 0, & \text{როცა } x=1.\end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(1-)=+\infty,\ f(1+)=0.$$

მაშასადამე, $x=1$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

§ 7. ერთი ცვლადის მონოტონური ფუნქციები

ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია.

განსაზღვრა 4. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი E სიმრავლეზე, თუ E სიმრავლის ყოველი ორი x_1 და x_2 წერტილისათვის $f(x_1)\leq f(x_2)$, როცა $x_1<x_2$, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ვიწრო აზრით E-ზე, თუ E სიმრავლის ყოველი ორი x_1 და x_2 წერტილისათვის $f(x_1)<f(x_2)$, როდესაც $x_1<x_2$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი E-ზე, თუ E სიმრავლის ყოველი ორი x_1 და x_2 წერტილისათვის $f(x_1)\geq f(x_2)$, როცა $x_1<x_2$, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია კლებადია ვიწრო აზრით E-ზე, თუ E-ს ყოველი ორი x_1 და x_2 წერტილისათვის $f(x_1)>f(x_2)$, როცა $x_1<x_2$.

განსაზღვრა 5. E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას მონოტონური ეწოდება, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი E-ზე, და მონოტონური ვიწრო აზრით, თუ იგი ვიწრო აზრით ზრდადია ან ვიწრო აზრით კლებადია E-ზე.

თეორემა 15. რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე მონოტონურ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ამ სეგმენტში ავიღოთ რაიმე x_0 წერტილი. რადგანაც $f(x)$ ზრდადია $[a, b]$-ზე, ამიტომ

$$f(x)\leq f(x_0),\ \text{როცა}\ x<x_0$$

და

$$f(x)\geq f(x_0),\ \text{როცა}\ x>x_0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ და ადგილი აქვს უტოლობებს

$$f(x_0-)\leq f(x_0),\ f(x_0+)\geq f(x_0),$$

ე. ი.

$$f(x_0-)\leq f(x_0)\leq f(x_0+). \tag{7.1}$$

თუ $x_0=a$, მაშინ არსებობს $f(a+)$, ხოლო თუ $x_0=b$, მაშინ არსებობს $f(b-)$.

(7.1) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ იგი იქნება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, ამასთან $f(x_0-)<f(x_0+)$.

თეორემა 16. $[a, b]$ *სეგმენტზე მონოტონურ* $f(x)$ *ფუნქციას აქვს სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვეტის წერტილებისა.*

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე. აღვნიშნოთ E-თი ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე. E სიმრავლის ნებისმიერი ξ წერტილისათვის გვაქვს

$$f(\xi-)<f(\xi+).$$

$f(\xi-)$ და $f(\xi+)$ რიცხვებს შორის ავიღოთ რაიმე რაციონალური რიცხვი r:

$$f(\xi-)<r<f(\xi+).$$

თუ ამ r რიცხვს შევუსაბამებთ ξ რიცხვს, მაშინ E სიმრავლის ორ სხვადასხვა რიცხვს შეესაბამება ორი სხვადასხვა რაციონალური რიცხვი. მართლაც, ავიღოთ E სიმრავლის ორი ელემენტი ξ_1 და ξ_2 და მათი შესაბამისი რაციონალური რიცხვები იყოს r_1 და r_2. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $\xi_1<\xi_2$, მაშინ $r_1<r_2$. მართლაც, თანაფარდობებიდან

$$f(\xi_1-)<r_1<f(\xi_1+)\leqslant f(\xi_2-)<r_2<f(\xi_2+)$$

გვაქვს $r_1<r_2$. ამრიგად, E სიმრავლე ეკვივალენტურია ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლის ნაწილისა და ამიტომ E სასრული ან თვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ფუნქციათა მიმდევრობა

ვთქვათ, აბსტრაქტულ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქციები

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{8.1}$$

ფუნქციათა (8.1) მიმდევრობას ეწოდება *კრებადი* E *სიმრავლეზე* $f(x)$ *ფუნქციისაკენ*, თუ E სიმრავლის ყოველი x_0 წერტილისათვის რიცხვთა მიმდევრობა

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$$

კრებადია $f(x_0)$-კენ, ე. ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|f(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } m>N.$$

რიცხვი N დამოკიდებულია საზოგადოდ არა მარტო ε-ზე, არამედ x_0 წერტილზედაც.

განსაზღვრა 6. ფუნქციათა (8.1) მიმდევრობას ეწოდება თანაბრად კრებადი აბსტრაქტულ E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-საგან დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \text{ როცა } n>N$$

E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის.

ფუნქციათა (8.1) მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი და E სიმრავლის წერტილთა ისეთი მიმდევრობა $x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots$, რომ ყოველი k-თვის ($k=1, 2, \ldots$) და სათანადო $n_k>k$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geqslant\varepsilon.$$

თეორემა 17. მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებული რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომლისკენაც უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა E სიმრავლეზე თანაბრად იკრიბება, უწყვეტია E-ზე.

დამტკიცება. ასეთ ფუნქციათა მიმდევრობა იყოს (8.1), ხოლო მისი ზღვრული ფუნქცია კი $f(x)$. ვთქვათ, x_0 არის E სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი და ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. რადგანაც (8.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ x-ზე დამოუკიდებლად შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ E-დან აღებული ყოველი x წერტილისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ როცა } n>N.$$

ახლა ვთქვათ, n რაიმე ნატურალური რიცხვია, რომელიც მეტია N-ზე. რადგანაც $f_n(x)$ უწყვეტია E-ზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

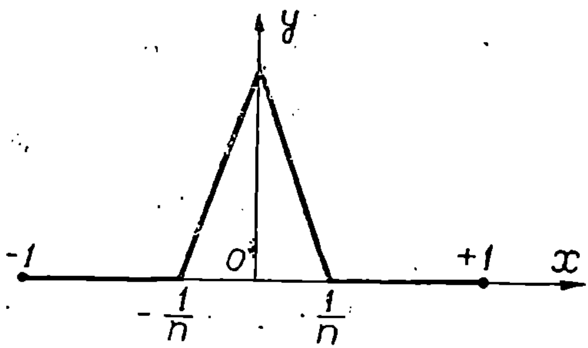
$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+$$
$$+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

როცა $x\in E\cap S(x_0;\eta)$. მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში და რაკი x_0 ნებისმიერად იყო აღებული E-დან, ამიტომ $f(x)$ უწყვეტია E-ზე.

შენიშვნა 1. თუ უწყვეტ ფუნქციათა (8.1) მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ E სიმრავლეზე, მაშინ $f(x)$ შეიძლება არ იყოს უწყვეტი ფუნქცია E-ზე. განვიხილოთ

მაგალითი 1. ვთქვათ, $f_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, \text{ თუ } -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx+1, \text{ თუ } -\frac{1}{n}<x\leqslant 0, \\ -nx+1; \text{ თუ } 0<x\leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, \text{ თუ } \frac{1}{n}<x\leqslant 1. \end{cases}$$



ნახ. 16.

ცხადია, რომ $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-1, 1]$ სეგმენტზე. ამ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-16 ნახაზზე. ვთქვათ,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ თუ } x\neq 0, \\ 1, \text{ თუ } x=0. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტი არ არის $x=0$ წერტილში.

შენიშვნა 2. უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა შეიძლება არათანაბრად იკრიბებოდეს უწყვეტ ფუნქციისაკენ. განვიხილოთ

მაგალითი 2. ვთქვათ, $f_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია [0, 2] სეგმენტზე შემდეგნაირად:

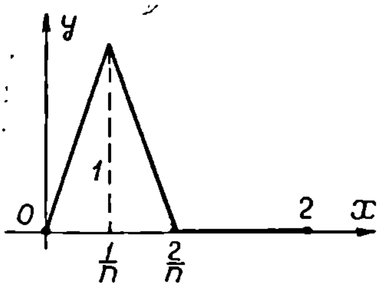
$$f_n(x)=\begin{cases} nx, \text{ როცა } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}, \\ -nx+2, \text{ როცა } \frac{1}{n}<x\leqslant \frac{2}{n}, \\ 0, \text{ როცა } \frac{2}{n}<x\leqslant 2, \end{cases}$$

$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე. $f_n(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-17 ნახაზზე. ვთქვათ,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

ცხადია, რომ $f(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 2$ და, მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა $\{f_n(x)\}$ თანაბრად კრებადი არაა [0,2] სეგმენტზე.



ნახ. 17.

თეორემა 18 (დინი). თუ F კომპაქტზე უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა ზრდადია და კრებადია F-ზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ აღებული მიმდევრობა იქნება თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x)-f_n(x)=r_n(x).$$

პირობის ძალით $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა ზრდადია და ამიტომ $\{r_n(x)\}$ მიმდევრობა იქნება კლებადი; ამას გარდა,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \tag{8.2}$$

F სიმრავლის ყოველ x წერტილში.

დავუშვათ, რომ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ F-ზე. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon > 0$ და F სიმრავლის წერტილთა ისეთი $\{x_k\}$ მიმდევრობა, რომ ყოველი k-თვის და სათანადო $n_k > k$ რიცხვისათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$r_{n_k}(x_k) > \varepsilon.$$

ცხადია, რომ ყოველი ფიქსირებული n რიცხვისათვის ძალაშია უტოლობა

$$r_n(x_k) > \varepsilon, \text{ როცა } k > n.$$

რადგანაც F წარმოადგენს კომპაქტს, ამიტომ $\{x_k\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ F სიმრავლის რაიმე ξ წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{k_i}\}$. მაშასადამე, $r_n(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება

$$\lim_{i\to\infty} r_n(x_{k_i}) = r_n(\xi) \geqslant \varepsilon. \tag{8.3}$$

მაგრამ (8.2) ტოლობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\xi) = 0. \tag{8.4}$$

მეორე მხრით, (8.3) უტოლობის ძალით უნდა გვქონდეს

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\xi) \geqslant \varepsilon. \tag{8.5}$$

(8.4) და (8.5) დამოკიდებულებები ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია F სიმრავლეზე და ამით დინის (Dini) თეორემა დამტკიცებულია.

თუ გავითვალისწინებთ მე-17 თეორემას, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა 19. იმისათვის, რომ F კომპაქტზე უწყვეტ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა კრებადი იყოს უწყვეტი ფუნქციისაკენ აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა თანაბრად კრებადი იყოს F-ზე.

§ 9. სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია

ვთქვათ, აბსტრაქტულ R სიმრავლეზე განსაზღვრულია $\chi_E(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in E, \\ x, & \text{თუ } x \in R - E, \end{cases}$$

სადაც E არის R სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე.

$\chi_E(x)$ ფუნქციას ეწოდება E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

მახასიათებელი ფუნქციის ცნება შემოღებული იყო ვალე-პუსენის (Vallè Poussin) მიერ[1].

თეორემა 20. თუ მოცემულია აბსტრაქტული R სიმრავლიდან აღებული სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{E_n\}$, მაშინ $\limsup\limits_{n\to\infty}\chi_{E_n}(x)$ და $\liminf\limits_{n\to\infty}\chi_{E_n}(x)$ წარმოადგენენ შესაბამისად $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ და $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n$ სიმრავლეთა მახასიათებელ ფუნქციებს.

დამტკიცება. როგორც I თავში იყო ნაჩვენები,

$$E^*=\limsup_{n\to\infty} E_n=\bigcap_{p=1}^{\infty}\bigcup_{k=p}^{\infty} E_k,\quad E_*=\liminf_{n\to\infty} E_n=\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{k=p}^{\infty} E_k.$$

ვთქვათ,

$$\varphi_n(x)=\sup\{\chi_{E_n}(x),\ \chi_{E_{n+1}}(x),\ldots\},\quad \psi_n(x)=\inf\{\chi_{E_n}(x),\ \chi_{E_{n+1}}(x),\ldots\}\ (n=1,\ 2,\ldots).$$

განსაზღვრის თანახმად,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\limsup_{n\to\infty}\chi_{E_n}(x),\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\liminf_{n\to\infty}\chi_{E_n}(x).$$

ეს ზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\chi^*(x)$ და $\chi_*(x)$ სიმბოლოებით.

დავამტკიცოთ, რომ $\chi^*(x)$ არის E^* სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\varphi_n(x)$ წარმოადგენს $H_n=\bigcup\limits_{p=n}^{\infty} E_p$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. ვთქვათ, $x_0\in H_n$. მაშინ მოიძებნება ისეთი E_ν სიმრავლე ($\nu\geqslant n$), რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს. ამიტომ $\chi_{E_\nu}(x_0)=1$ და, მაშასადამე, $\varphi_n(x_0)=1$.

ახლა ვთქვათ, ξ არის R სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც H_n სიმრავლეს არ ეკუთვნის. მაშინ

$$\xi\overline{\in} E_k\ (k=n,\ n+1,\ldots)$$

და, მაშასადამე,

$$\chi_{E_k}(\xi)=0\ (k=n,\ n+1,\ldots).$$

ამიტომ $\varphi_n(\xi)=0$.

[1] შარლ ჟან დელა ვალე-პუსენი (1866 — 1962) — ცნობილი ბელგიელი მათემატიკოსი. მას ეკუთვნის მნიშვნელოვანი შედეგები ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორიაში, ფუნქციათა აპროქსიმაციის თეორიაში და მათემატიკურ ფიზიკაში.

ამრიგად, $\varphi_n(x)$ წარმოადგენს H_n სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ y არის E^* სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ $y \ni H_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ და, მაშასადამე, $\varphi_n(y)=1$ $(n=1, 2, \ldots)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\chi^*(y)=1$. თუ y' არის R სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც E^*-ს არ ეკუთვნის, მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $y' \overline{\in} H_n$ $(n=N+1, N+2, \ldots)$. ამიტომ

$$\varphi_n(y')=0 \ (n=N+1, \ N+2, \ldots)$$

და, მაშასადამე, $\chi^*(y')=0$. ამგვარად, $\chi^*(x)$ წარმოადგენს E^* სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\chi_*(x)$ არის E_* სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

ავიღოთ ახლა ორი მიმდევრობა:

$$E_1, \ E_2, \ldots, \ E_n, \ \ldots, \tag{9.1}$$

$$\chi_{E_1}(x), \ \chi_{E_2}(x), \ldots, \ \chi_{E_n}(x), \ \ldots \tag{9.2}$$

პირველი ამათგანი R-ში მოთავსებული სიმრავლეთა მიმდევრობაა, მეორე კი ამ სიმრავლეთა შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქციების მიმდევრობა. მართებულია შემდეგი

თეორემა 21. სიმრავლეთა მახასიათებელი ფუნქციების მიმდევრობა კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც კრებადია თვით სიმრავლეთა მიმდევრობა, ე. ი. (9.1) და (9.2) მიმდევრობები ან ორივე კრებადია ან ორივე განშლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (9.1) მიმდევრობა კრებადია. მაშინ $E_*=E^*$ და, მაშასადამე, მე-20 თეორემის ძალით, ყოველი x-თვის

$$\chi_*(x)=\chi^*(x),$$

ე. ი. (9.2) მიმდევრობა კრებადია $\chi^*(x)$ ფუნქციისაკენ.

ახლა დავუშვათ, რომ (9.1) მიმდევრობა განშლადია. მაშინ E_* არის E^* სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ამიტომ E^* სიმრავლე შეიცავს ისეთ x_0 წერტილს, რომელიც E_* სიმრავლეს არ ეკუთვნის. მაშასადამე, $\chi^*(x_0)=1$, $\chi_*(x_0)=0$, ე. ი. (9.2) მიმდევრობა კრებადი არაა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. ნახევრადუწყვეტი ფუნქციები

ვთქვათ, მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ E სიმრავლის რომელიმე დაგროვების x_0 წერტილი, რომელიც E სიმრავლეს ეკუთვნის. როგორც ვი-

ცით, $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში უწყვეტია E სიმრავლის მიმართ, თუ $f(x_0)$ სასრულია და ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta).$$

თუკი ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)-f(x_0)<\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ნახევრადუწყვეტი ზემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, ხოლო თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ

$$f(x)-f(x_0)>-\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ[1].

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, E არის მეტრიკულ სივრცეში აღებული სიმრავლე და x_0 იყოს ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც მას ეკუთვნის. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x=x_0, \\ 0, & E \text{ სიმრავლის დანარჩენ წერტილებში.}\end{cases}$$

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ზემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და ამ სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში $f(x_0)=+\infty$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია იქნება ნახევრადუწყვეტი ზემოდან. თუკი $f(x_0)=-\infty$, მაშინ $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში.

თეორემა 22. *ვთქვათ, მეტრიკული სივრცის რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია და x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც E-ს ეკუთვნის. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ნახევრადუწყვეტი ზემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას*

$$M(f;x_0)=f(x_0). \tag{10.1}$$

[1] ამ განსაზღვრაში სავალდებულო არაა, რომ $f(x_0)$ იყოს სასრული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ზემოდან x_0 წერტილზე E სიმრავლის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta).$$

აქედან ცხადია, რომ

$$M(f;x_0,\eta)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$$

და, მაშასადამე,

$$M(f;\ x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო გვექნება

$$M(f;\ x_0)\leqslant f(x_0). \tag{10.2}$$

მეორე მხრით,

$$M(f;\ x_0)\geqslant f(x_0). \tag{10.3}$$

(10.2) და (10.3) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ (10.1) ტოლობას. ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, მართებულია (10.1) ტოლობა. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta>0$, რომ

$$M(f;x_0,\eta)<f(x_0)+\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ზემოდან x_0 წერტილში. ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 28. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ნახევრადუწყვეტი ქვემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $m(f;x_0)=f(x_0)$.

თუ $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ზემოდან E სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ნ ა ხ ე ვ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ზ ე მ ო დ ა ნ E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე. ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ნ ა ხ ე ვ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ქ ვ ე მ ო დ ა ნ E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, თუ იგი ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

თეორემა 24. *F კომპაქტზე ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი ფუნქცია $f(x)$ აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა საზღვარი F სიმრავლეზე არის l. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) $l=-\infty$. მაშინ არსებობს F სიმრავლის ელემენტთა ისეთი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$f(x_n)<-n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{10.4}$$

რაკი F კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია F სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილისაკენ. მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$f(x_{n_k})>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } k>N.$$

თუ გავითვალისწინებთ (10.4) უტოლობას შეგვიძლია დავწეროთ

$$-n_k>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } k>N.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x_0)=-\infty$. ამრიგად, როდესაც $l=-\infty$, თეორემა დამტკიცებულია.

2) l სასრულია. ამ შემთხვევაში მოიძებნება F სიმრავლის ელემენტთა ისეთი $\{y_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$f(y_n)<l+\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{10.5}$$

ახლა $\{y_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{y_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია F სიმრავლის გარკვეულ y_0 ელემენტისაკენ. ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$f(y_{n_k})>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } k>N.$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (10.5) უტოლობას, გვექნება

$$l+\frac{1}{n_k}>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესიც } k>N$$

და, მაშასადამე,

$$l\geqslant f(x_0)-\varepsilon.$$

მაგრამ, რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$l\geqslant f(x_0).$$

მეორე მხრივ, $l \leqslant f(x_0)$. მაშასადამე $l=f(x_0)$ და ამით თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 25. *F კომპაქტზე ზემოდან ნახევრადუწყვეტი ფუნქცია აღწევს თავის ზუსტ ზედა საზღვარს.*

შედეგი. *თუ F კომპაქტზე ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ F კომპაქტის არც ერთ x წერტილში $f(x) \neq -\infty$, მაშინ მოცემული ფუნქცია F სიმრავლეზე იქნება ქვემოდან შემოსაზღვრული.*

შენიშვნა. კომპაქტზე ქვემოდან ნახევრადუწყვეტ ფუნქციას შეიძლება არ ჰქონდეს უდიდესი მნიშვნელობა.

მართლაც, ვთქვათ, $F=[0,1]$, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{როდესაც } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{როდესაც } x=1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან F სიმრავლეზე, მაგრამ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს უდიდესი მნიშვნელობა.

თეორემა 26. *თუ მეტრიკულ სივრცეში მოთავსებულ E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციები $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ არიან ნახევრადუწყვეტი ქვემოდან E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ ფუნქცია*

$$F(x)=\min\{f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x)\}$$

იქნება აგრეთვე ნახევარადუწყვეტი ქვემოდან x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f_k(x) > f_k(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } x \in E \cap S(x_0;\eta)\ (k=1,2,\ldots,n).$$

მაშასადამე,

$$F(x) > \min\{f_1(x_0)-\varepsilon,\ f_2(x_0)-\varepsilon, \ldots, f_n(x_0)-\varepsilon\}=F(x_0)-\varepsilon,$$

როდესაც $x \in ES \cap (x_0;\ \eta)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $F(x)$ ფუნქცია ნახევრად უწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27. *თუ მეტრიკული სივრცის E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქციები $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$,*

ამასთანავე ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია, სადაც

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

აგრეთვე ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ცხადია, რომ

$$m(f;x_0,\varepsilon)\geqslant m(f_n;x_0,\varepsilon),\ (n=1,2,\ldots).$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\varepsilon\to 0$ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0} m(f_n;x_n,\varepsilon)=f_n(x_0),$$

გვექნება

$$m(f;x_0)\geqslant f_n(x_0),\ (n=1,2,\ldots)$$

და, მაშასადამე,

$$m(f;x_0)\geqslant f(x_0). \tag{10.6}$$

მეორე მხრით

$$m(f;x_0)\leqslant f(x_0). \tag{10.7}$$

(10.6) და (10.7) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ

$$m(f;x_0)=f(x_0).$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში.

შედეგი. თუ მეტრიკული სივრცის E სიმრავლეზე მოცემულია არაუარყოფით ფუნქციათა მიმდევრობა $\{u_n(x)\}$, ამასთანავე ყოველი $u_n(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ $s(x)$ ფუნქცია, სადაც

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

აგრეთვე ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში.

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)\ (n=1,2,\ldots).$$

ყოველი $s_n(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია x_0 წერტილში და, ამის გარდა,

$$s_1(x)\leqslant s_2(x)\leqslant\cdots\leqslant s_n(x)\leqslant\cdots$$

შემდეგ, რაკი

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x),$$

ამიტომ 27-ე თეორემის ძალით $s(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში.

თეორემა 28. თუ მეტრიკული სივრცის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციები $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან (ზემოდან) E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ მოცემულ ფუნქციათა ჯამიც ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან (ზემოდან) x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x).$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან x_0 წერტილში, ამიტომ აღებული f_k რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta>0$, რომ

$$f_k(x)>f_k(x_0)-\frac{\varepsilon}{n}, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta), \ (k=1, 2, \ldots, n).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როცა } x\in E\cap S(x_0;\eta).$$

მაშასადამე, $f(x)$ არის ნახევრადუწყვეტი ქვემოდან x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი ერთდროულად იყოს ნახევრადუწყვეტი ზემოდან და ქვემოდან x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

ეს დებულება 22-ე და 23-ე თეორემების შედეგია.

თეორემა 29. მეტრიკული სივრცის რაიმე E სიმრავლეზე სასრული $f(x)$ ფუნქციის ნახევრადუწყვეტობისათვის ზემოდან E სიმრავლეზე იმავე E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $E(a)=\{x:f(x)\geqslant a\}$ სიმრავლე იყოს ჩაკეტილი E-ში.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ზემოდან E სიმრავლეზე ამავე სიმრავლის მიმართ, ხოლო a იყოს რაიმე ნამდვილი რიცხვი. განვიხილოთ $E(a)$ სიმრავლის რაიმე დაგროვების წერტილი x_0, რომელიც E-ს ეკუთვნის. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $S(x_0;\varepsilon)$ სფერო შეიცავს $E(a)$ სიმრავლის წერტილებს და ამიტომ $M(f;x_0,\varepsilon)\geqslant a$. აქედან $M(f;x_0)\geqslant a$.

შემდეგ, რადგანაც $M(f;x_0)=f(x_0)$, ამიტომ $f(x_0)\geqslant a$ და, მაშასადამე, $x_0 \in E(a)$. ამრიგად, $E(a)$ სიმრავლე ჩაკეტილია E-ში.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $E(a)$ სიმრავლე ჩაკეტილია E-ში. დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია E სიმრავლეზე ამავე სიმრავლის მიმართ. განვიხილოთ E სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი x_0. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $a > f(x_0)$. პირობის ძალით $E(a)$ სიმრავლე ჩაკეტილია E-ში და იგი არ შეიცავს x_0 წერტილს. ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ $S(x_0;\eta)$ სფერო არ შეიცავს $E(a)$ სიმრავლის არც ერთ წერტილს. მაშასადამე, $M(f;x_0)\leqslant M(f;x_0,\eta)\leqslant a$ ყოველი a-თვის, რომელიც მეტია $f(x_0)$-ზე. ამიტომ

$$M(f;x_0)\leqslant f(x_0).$$

მეორე მხრით

$$M(f;x_0)\geqslant f(x_0).$$

ამ ორი თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$M(f;x_0)=f(x_0)$$

და ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 30. მეტრიკულ სივრცის რაიმე E სიმრავლეზე სასრული $f(x)$ ფუნქცია რომ იყოს ნახევრადუწყვეტი ქვემოდან E სიმრავლის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისია, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $\{x:f(x)\leqslant a\}$ სიმრავლე იყოს ჩაკეტილი E-ში.

სავარჯიშო

1. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) ინტერვალზე. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის $\{x:f(x)>A\}$ და $\{x:f(x)<A\}$ სიმრავლეები არიან ღია.

2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ $\{x:f(x)>A\}$ და $\{x:f(x)\leq A\}$ სიმრავლეები ჩაკეტილია ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის, მაშინ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე (დაამტკიცეთ).

3. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

4. ვთქვათ, $f(x)=0$, თუ x ირაციონალური რიცხვია, ხოლო $f(x)=\dfrac{1}{q}$, თუ x

უკვეცი წილადია მნიშვნელით q. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია ყოველ ირაციონალურ წერტილში, ხოლო იგი წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილში.

5. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]$ სეგმენტზე, სადაც $a<b$ და ε რაიმე დადებითი რიცხვია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad 0<|h|\leq\varepsilon,\quad a\leq x\leq b.$$

აღვნიშნოთ E-თი $[a,\ b]$ სეგმენტის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის შესრულებულია შემდეგი პირობა: $0<|h|\leq\varepsilon$ და $0<|k|\leq\varepsilon$ უტოლობებიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$|F_h(x)-F_k(x)|<\delta,$$

სადაც δ მოცემული დადებითი რიცხვია. დაამტკიცეთ, რომ E ჩაკეტილი სიმრავლეა.

6. ვთქვათ, $[0,1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლეა $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x-r_n|$$

უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე.

თავი VIII

ფუნქციები სასრული ვარიაციით. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები

§ 1. ერთი ცვლადის ფუნქცია სასრული ვარიაციით

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

და შევადგინოთ ჯამი

$$S=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

$[a, b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას ქვესეგმენტებად შეესაბამება არაუარყოფითი რიცხვი S. აღვნიშნოთ H-ით ყველა S რიცხვის სიმრავლე. H სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *სრული ვარიაცია*; იგი აღვნიშნოთ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ სიმბოლოთი. თუ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)<+\infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ფუნქცია სასრული ვარიაციით*.

თეორემა 1. $[a, b]$ *სეგმენტზე მონოტონური* $f(x)$ *ფუნქცია არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით.*

დამტკიცება. თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=f(b)-f(a),$$

ვინაიდან $f(x_k)-f(x_{k-1})\geqslant 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. მაშასადამე,

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)=f(b)-f(a).$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ, თუ $f(x)$ კლებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)=f(a)-f(b).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის a და b-ს შორის მოთავსებული რაიმე რიცხვი. გვაქვს:

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

აქედან

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

ეს უტოლობა მართებულია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით, მაშინ იგი იქნება სასრული ვარიაციით ყოველ $[c, d]$ სეგმენტზე, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტის ნაწილია.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[c, d]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება

$$c=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=d.$$

თუ c და d წერტილებს განვიხილავთ როგორც $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილებს, მაშინ $[c, d]$ სეგმენტის დაყოფის მიხედვით

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant|f(c)-f(a)|+\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+$$

$$+|f(b)-f(d)|\leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

აქედან ცხადია, რომ $\overset{d}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \tag{1.1}$$

c-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია a და b-ს შორის.

დამტკიცება. გავყოთ $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტები შემდეგი წერტილებით:

$$a=y_0<y_1<\cdots<y_p=c, \quad c=z_0<z_1<\cdots<z_q=b.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_{ac}=\sum_{k=1}^{p}|f(y_k)-f(y_{k-1})|, \quad S_{cb}=\sum_{k=1}^{q}|f(z_k)-f(z_{k-1})|.$$

ცხადია, $y_0, y_1, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$ წერტილები ყოფენ $[a, b]$ სეგმენტს ნაწილებად. ამ დანაწილების შესაბამისი ჯამი აღვნიშნოთ S_{ab}-თი. გვაქვს:

$$S_{ac}+S_{cb}=S_{ab}\leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

აქედან

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f). \tag{1.2}$$

განვიხილოთ ახლა $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]. \qquad [1.3]$$

$[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ წერტილებს შევუერთოთ c წერტილი $(x_{k-1}<c\leqslant x_k)$. მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტის ახალ დანაწილებას

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, c], [c, x_{k-1}], \ldots, [x_{n-1}, b]. \tag{1.4}$$

ცხადია, რომ S_{ab} ჯამი, რომელიც შეესაბამება (1.3) დანაწილებას, არ აღემატება (1.4) დანაწილების შესაბამის S'_{ab} ჯამს:

$$S_{ab}\leqslant S'_{ab}=S'_{ac}+S'_{cb}\leqslant\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f), \tag{1.5}$$

სადაც S'_{ac} და S'_{cb} არიან შესაბამისად

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1} c] \text{ და } [c, x_{k+1}], [x_{k+1}, x_{k+2}], \ldots, [x_{n-1}, b]$$

დანაწილების შესატყვისი ჯამები. (1.5) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f). \tag{1.6}$$

(1.2) და (1.6) თანაფარდობებიდან მიიღება (1.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $Af(x)$, სადაც A მუდმივი სიდიდეა, არის აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b] \tag{1.7}$$

და ვთქვათ, $F(x) = Af(x)$. გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = |A| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) = |A| \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არიან ფუნქციები სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)+g(x)$ არის აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x) = f(x) + g(x)$ და განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება (1.7). გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{n} | F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |[f(x_k) - f(x_{k-1})] + [g(x_k) - g(x_{k-1})]| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) < +\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მე-5 და მე-6 თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი. თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ არიან ფუნქციები სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_m f_m(x)$ არის აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

თეორემა 7. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოადგენენ ფუნქციებს სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ნამრავლი $f(x)\, g(x)$ იქნება აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. რადგან $f(x)$ და $g(x)$ არიან ფუნქციები სასრული ვარიაციით, ამიტომ ისინი შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $[a, b]$-დან

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant M.$$

ვთქვათ, $F(x) = f(x)\, g(x)$. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება (1.7). გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] +$$

$$+ g(x_{k-1})\,[f(x_k) - f(x_{k-1}]| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|\,|g(x_k) - g(x_{k-1})| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} |g(x_{k-1})|\,|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant M \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + M \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

საიდანაც

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) \leqslant M\,[\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)] < +\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის $|f(x)| \geqslant m$, სადაც m დადებითი რიცხვია, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ არის აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)=\frac{1}{f(x)}$ და განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება (1.7). გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_k)}-\frac{1}{f(x_{k-1})}\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{|f(x_k)\ f(x_{k-1})|}\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant\frac{1}{m^2}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

საიდანაც

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F)\leqslant\frac{1}{m^2}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

მაშასადამე, $F(x)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არის ფუნქციები სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მასთან x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $|g(x)| \geqslant m$, სადაც m დადებითი რიცხვია, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ იქნება აგრეთვე ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

მაგრამ $\frac{1}{g(x)}$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, მე-7 თეორემის ძალით $\frac{f(x)}{g(x)}$ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით.

თეორემა 10 (ჟორდანი[1]). *თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ეს ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი ფუნქციისა.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

სადაც $a \leqslant x \leqslant b$. ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$\psi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x) \tag{1.8}$$

ზრდადია $[a, b]$-ზე. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტიდან x-ის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობა x_1 და x_2, $x_1 < x_2$. გვაქვს:

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \left[\overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x_2)\right] - \left[\overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x_1)\right].$$

რადგანაც

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}(f),$$

ამიტომ

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geqslant 0.$$

მაშასადამე, $\psi(x)$ ზრდადია $[a, b]$-ზე. (1.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

ჟორდანის თეორემა დამტკიცებულია.

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები არამარტო ზრდადია, არამედ დადებითიც არის. ამისათვის საკმარისია თითოეულ მათგანს დავუმატოთ საკმაოდ დიდი დადებითი რიცხვი, ამით $f(x)$ იგივე

---

[1]) კამილ ჟორდანი (1838—1922)—ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი და შემდეგ მისი პრეზიდენტი (1916 წ.). იყო რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი. ჟორდანის შრომები მიეკუთვნება ალგებრას, ფუნქციათა თეორიას და აგრეთვე ტოპოლოგიას და კრისტალოგრაფიას. მის მიერ შემოღებულია ცნება ფუნქციისა სასრული ვარიაციით. ჟორდანმა დაწერა პირველი სისტემატური კურსი ჯგუფთა თეორიისა (1870) და ანალიზის სამტომიანი კურსი (1882—87).

დარჩება, ხოლო $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ კი დადებითი ზრდადი ფუნქციებით შეიცვლება.

ზემოდამტკიცებული თეორემისა და VII თავის 22-ე და 23-ე თეორემების ძალით, *ფუნქციას სასრული ვარიაციით შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები და ასეთ წერტილთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.*

შენიშვნა. ჩვენ ვნახეთ, რომ წყვეტილი ფუნქცია შეიძლება იყოს ფუნქცია სასრული ვარიაციით. ისმის კითხვა: $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია აუცილებლად უნდა იყოს თუ არა ფუნქცია სასრული ვარიაციით? საზოგადოდ არა. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{2x}, & \text{როცა } 0<x\leq 1,\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე. დავამტკიცოთ, რომ იგი არაა ფუნქცია სასრული ვარიაციით. გავყოთ $[0,1]$ სეგმენტი შემდეგი წერტილებით:

$$0<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

სადაც n ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. ცხადია, რომ

$$f\left(\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad f\left(\frac{1}{2k}\right)=0 \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

ამას გარდა, $f(0)=0$, $f(1)=1$. მაშასადამე,

$$S=\left|f\left(\frac{1}{2n+1}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right|+\cdots+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|+$$

$$+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n-1}+\cdots+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+1>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$

ვინაიდან

$$\frac{2}{2k-1}>\frac{1}{k} \quad (k=1,2,\ldots n+1).$$

მაგრამ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ არის ჰარმონიული მწკრივის კერძო ჯამი, რომელიც უსაზღვროდ იზრდება n-თან ერთად. მაშასადამე, $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=+\infty$, ე. ი. $f(x)$ არაა ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[0,1]$ სეგმენტზე.

§ 2. უწყვეტი ფუნქციები სასრული ვარიაციით

თეორემა 11. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე და იგი უწყვეტია ამ სეგმენტის რაიმე ξ წერტილში, მაშინ ამავე წერტილში უწყვეტია $\varphi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ ფუნქციაც.

დამტკიცება. ვთქვათ, $a<\xi<b$ და დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(x)$ უწყვეტია მარცხნიდან ξ წერტილში. ამ მიზნით განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და $[a, \xi]$ სეგმენტი გავყოთ $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=\xi$ წერტილებით ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|>\overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon, \quad |f(\xi)-f(x_{n-1})|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

აქედან

$$\overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f)<\varepsilon+|f(\xi)-f(x_{n-1})|+\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|. \tag{2.2}$$

მაშასადამე, ამ უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f)<2\varepsilon+\overset{x_{n-1}}{\underset{a}{V}}(f).$$

აქიდან

$$\overset{\xi}{\underset{x_{n-1}}{V}}(f)<2\varepsilon,$$

ე. ი.

$$0\leqslant\varphi(\xi)-\varphi(x_{n-1})<2\varepsilon$$

და, მაშასადამე,

$$0\leqslant\varphi(\xi)-\varphi(\xi-)<2\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო გვაქვს ტოლობა:

$$\varphi(\xi)=\varphi(\xi-).$$

ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან ξ წერტილში.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას მარჯვნიდან ξ წერტილში. მაშასადამე, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტის ξ წერტილში.

თუ $\xi=a$, მაშინ $\varphi(x)$ უწყვეტია მარჯვნიდან ξ წერტილში, ხოლო

თუ $\xi=b$, $\varphi(x)$ უწყვეტია მარცხნიდან ξ წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია *უწყვეტია და სასრული ვარიაციით* $[a,b]$ *სეგმენტზე, მაშინ იგი წარმოიდგინება როგორც სხვაობა ორი ზრდადი უწყვეტი ფუნქციისა.*

მართლაც, რადგანაც $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით $\varphi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ ფუნქციაც იქნება უწყვეტი იმავე სეგმენტზე და, მაშასადამე, $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე. ცხადია,

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x).$$

როგორც ვიცით, $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ზრდადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინეთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი უწყვეტი ფუნქციისა, ამასთან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები დადებითია მთელს $[a,b]$ სეგმენტზე.

§ 3. ნახტომთა ფუნქცია

ვთქვათ, ξ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს $f(\xi-)$ და $f(\xi+)$ ზღვრები, მასთან ξ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილს.

$f(\xi)-f(\xi-)$ რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ნახტომი მარცხნიდან* ξ წერტილში, ხოლო $f(\xi+)-f(\xi)$ რიცხვს კი $f(x)$-ის *ნახტომი მარჯვნიდან* ξ წერტილში. $f(\xi+)-f(\xi-)$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ნახტომი* ξ წერტილში.

ცხადია, $f(x)$ ფუნქციის რხევა ξ წერტილში უდრის უდიდეს რიცხვს შემდეგი სამი რიცხვიდან:

$$|f(\xi+)-f(\xi)|,\ |f(\xi)-f(\xi-)|,\ |f(\xi+)-f(\xi-)|.$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a,b]$ სეგმენტზე. ამ სეგმენტში ავიღოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ წერტილები $a<x_n<b$ და განვსაზღვროთ $s(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$s(a)=0,$$

ხოლო თუ $a<x\leqslant b$, მაშინ

$$s(x)=[f(a+)-f(a)]+\sum_{x_n<x}[f(x_n+)-f(x_n-)]+[f(x)-f(x-)],$$

სადაც $\sum\limits_{x_n<x}$ შეჯამება ხდება ყოველი ისეთი n-თვის, რომელთათვის $a<x_n<x$.

$s(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნ ა ხ ტ ო მ თ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა წ ე რ ტ ი ლ თ ა $\{x_n\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს მ ი მ ა რ თ.

თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის ყველა წერტილი, მაშინ $s(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნ ა ხ ტ ო მ თ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა.

თეორემა 12. თუ $f(x)$ წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს ზ რ დ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე, მ ა შ ი ნ $f(x)-s(x)$ ს ხ ვ ა ო ბ ა ზ რ დ ა დ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე, ს ა დ ა ც $s(x)$ ა რ ი ს $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ნ ა ხ ტ ო მ თ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega(x)=f(x)-s(x)$$

და განვიხილოთ რაიმე სეგმენტი $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. ვთქვათ, (α, β) ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\alpha<x_1<x_2<\cdots<x_n<\beta.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\alpha=x_0$, $\beta=x_{n+1}$ და განვიხილოთ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ წერტილები, სადაც

$$x_k<\xi_k<x_{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ გვექნება

$$f(x_k+)-f(x_k-) \leqslant f(\xi_k)-f(\xi_{k-1}) \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$$f(\alpha+)-f(\alpha) \leqslant f(\xi_0)-f(\alpha), \; f(\beta)-f(\beta-) \leqslant f(\beta)-f(\xi_n).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება

$$[f(\alpha+)-f(\alpha)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\beta)-f(\beta-)] \leqslant f(\beta)-f(\alpha).$$

ახლა განვიხილოთ ყველა k, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $\alpha<x_k<\beta$. მაშინ

$$[f(\alpha+)-f(\alpha)]+\sum_{\alpha<x_k<\beta}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\beta)-f(\beta-)] \leqslant$$

$$\leqslant f(\beta)-f(\alpha). \tag{3.1}$$

ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს $s(\beta)-s(\alpha)$ სხვაობას. მართლაც,

$$s(\beta)=[f(a+)-f(a)]+\sum_{a<x_k<\beta}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\beta)-f(\beta-)]=$$

$$=[f(a+)-f(a)]+\sum_{a<x_k<\alpha}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\alpha+)-f(\alpha-)]+$$

$$+\sum_{\alpha<x_k<\beta}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\beta)-f(\beta-)]=s(\alpha)+$$

$$+[f(\alpha+)-f(\alpha)]+\sum_{\alpha<x_k<\beta}[f(x_k+)-f(x_k-)]+[f(\beta)-f(\beta-)]. \tag{3.2}$$

ამრიგად, (3.1) უტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს $s(\beta)-s(\alpha)$ სხვაობას, რის გამო გვექნება

$$s(\beta)-s(\alpha)\leqslant f(\beta)-f(\alpha). \tag{3.3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\omega(\alpha)\leqslant\omega(\beta).$$

მაშასადამე, $\omega(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\omega(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$-ზე. ამ მიზნით (3.3) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\beta\to\alpha+$, მივიღებთ:

$$s(\alpha+)-s(\alpha)\leqslant f(\alpha+)-f(\alpha). \tag{3.4}$$

მეორე მხრით, (3.2) ტოლობიდან გვაქვს:

$$f(\alpha+)-f(\alpha)\leqslant s(\beta)-s(\alpha).$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\beta\to\alpha+$, მივიღებთ:

$$f(\alpha+)-f(\alpha)\leqslant s(\alpha+)-s(\alpha). \tag{3.5}$$

(3.4) და (3.5) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$f(\alpha+)-f(\alpha)=s(\alpha+)-s(\alpha)$$

და, მაშასადამე,

$$\omega(\alpha+)=\omega(\alpha).$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\omega(\alpha-)=\omega(\alpha).$$

ამრიგად, $\omega(\alpha)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. ყოველი ფუნქცია სასრული ვარიაციით წარმოიდგინება როგორც ჯამი ნახტომთა ფუნქციისა და ისეთი უწყვეტი ფუნქციის, რომლის ვარიაცია სასრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე. ჟორდანის თეორემის ძალით $f(x)$ წარმოიდგინება როგორც სხვაობა ორი ზრდადი $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციისა:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$s(x) = s_1(x) - s_2(x),$$

სადაც $s(x)$, $s_1(x)$ და $s_2(x)$-ით აღნიშნულია შესაბამისად $f(x)$, $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციების ნახტომთა ფუნქციები.

მე-12 თეორემის ძალით $\varphi_1(x)-s_1(x)$ და $\varphi_2(x)-s_2(x)$ ფუნქციები ზრდადი და უწყვეტი არიან $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ

$$\omega(x)=f(x)-s(x) \tag{3.6}$$

ფუნქცია ზრდადია და უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ვინაიდან

$$f(x) - s(x)=[\varphi_1(x) - s_1(x)] - [\varphi_2(x) - s_2(x)].$$

(3.6) ტოლობიდან გვაქვს

$$f(x) = s(x) + \omega(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. ჰელის თეორემა

ჰელის (E. Helly) თეორემა, რომელსაც ზოგჯერ გამოყოფის პრინციპსაც უწოდებენ, ორი თავისთავად საგულისხმო ლემის საფუძველზე მტკიცდება.

ლემა 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{4.1}$$

ერთობლივ შემოსაზღვრულია ამავე სეგმენტზე, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის წერტილთა ყოველი თვლადი E სიმრავლისათვის (4.1) მიმდევრობიდან შეიძლება ისეთი ქვემიმდევრობის გამოყოფა, რომელიც კრებადია E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

დამტკიცება. რადგან E თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ შეგვიძლია იგი ასე წარმოვიდგინოთ:

$$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}.$$

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა

$$f_1(x_1),\ f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1), \ldots \tag{4.2}$$

რაკი (4.1) მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ (4.2) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), f_{13}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$$

განვიხილოთ ახლა რიცხვთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), f_{13}(x_2), \ldots, f_{1n}(x_2), \ldots$$

ესეც შემოსაზღვრული მიმდევრობაა და ამიტომ მისგანაც შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), f_{23}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots$$

თუ ზემოაღნიშნულ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ კრებად მიმდევრობათა თვლად სისტემას:

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x_1), f_{12}(x), f_{13}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots \\
f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), f_{23}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots \\
f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), f_{33}(x_3), \ldots, f_{3n}(x_3), \ldots \\
f_{k1}(x_k), f_{k2}(x_k), f_{k3}(x_k), \ldots, f_{kn}(x_k), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

ამ მატრიცის დიაგონალური ელემენტებისაგან შევადგინოთ მიმდევრობა

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots$$

სწორედ ეს არის ლემაში ნახსენები მიმდევრობა — იგი კრებადია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. მართლაც, ყოველი ფიქსირებული k-თვის

$$f_{k\ k}(x_k),\ f_{k+1,\ k+1}(x_k), \ldots, f_{n\ n}(x_k), \ldots$$

მიმდევრობა წარმოადგენს კრებადი

$$f_{k\ 1}(x_k),\ f_{k\ 2}(x_k), \ldots, f_{k\ n}(x_k), \ldots$$

მიმდევრობის ქვემიმდევრობას და ამიტომ თვითონაც კრებადია. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. თუ (4.1) მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვ-

რულია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამავე სეგმენტზე ყოველი $f_n(x)$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ (4.1) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში გარკვეული ზრდადი ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E-თი $[a, b]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლისა და $\{a\}$ სიმრავლის გაერთიანება. E თვლადი სიმრავლეა. 1-ლი ლემის ძალით, ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{4.3}$$

რომელიც კრებადია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. შემდეგ, რაკი E თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ შეგვიძლია მისი ელემენტების გადანომვრა:

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}.$$

E სიმრავლეზე განვსაზღვროთ $\Phi(x)$ ფუნქცია ასე:

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ იგი ზრდადია E-ზე.

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ირაციონალური x წერტილისათვის მივიღოთ:

$$\Phi(x) = \sup_{x_k < x} \{\Phi(x_k)\}.$$

ასე $\Phi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში.

ადვილი მისახვედრია, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე; ამიტომ მას შეიძლება ჰქონდეს სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვეტის წერტილებისა. ეს სიმრავლე D-თი აღვნიშნოთ.

დავამტკიცოთ, რომ, თუ ξ არის $\Phi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\xi) = \Phi(\xi). \tag{4.4}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. E სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი ორი x_i და x_k წერტილი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$x_i < \xi < x_k, \quad 0 \leqslant \Phi(x_k) - \Phi(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5}$$

შემდეგ, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|\varphi_n(x_i) - \Phi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |\varphi_n(x_k) - \Phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n \geqslant N.$$

თუ $n \geq N$, მაშინ ამ უტოლობებიდან გვაქვს:

$$\Phi(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi_n(x_i) \leqslant \varphi_n(x_k) < \Phi(x_k) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

(4.5) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\Phi(x_i) > \Phi(x_k) - \frac{\varepsilon}{2} > \Phi(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, (4.6) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi(\xi) - \varepsilon < \varphi_n(x_i) \leqslant \varphi_n(x_k) < \Phi(\xi) + \varepsilon, \text{ როდესაც } n \geqslant N$$

და რაკი

$$\varphi_n(x_i) \leqslant \varphi_n(\xi) \leqslant \varphi_n(x_k),$$

ამიტომ გვექნება

$$\Phi(\xi) - \varepsilon < \varphi_n(\xi) < \Phi(\xi) + \varepsilon, \text{ როდესაც } n \geqslant N.$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4.4) ტოლობას.

ამრიგად, (4.4) ტოლობას შეიძლება ადგილი არ ჰქონდეს D სიმრავლის წერტილებში და ვინაიდან D თვლადი ან სასრული სიმრავლეა, ამიტომ 1-ლი ლემის ძალით (4.3) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, რომელიც კრებადია D სიმრავლის ყოველ წერტილში. მაშასადამე, $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ვთქვათ,

$$F(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{n_k}(x).$$

ცხადია, $F(x)$ წარმოადგენს ზრდად ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. თუ ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე და, ამას გარდა, ამ მიმდევრობის წევრების ვარიაციებისაგან შედგენილი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ (4.1) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ იმავე სეგმენტზე კრებადი ქვემიმდევრობა $\{f_{n_k}(x)\}$, რომლის ზღვრული ფუნქცია თვითონაც წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi_n(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f_n), \quad \psi_n(x) = \varphi_n(x) - f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

ცხადია, რომ $\varphi_n(x)$ და $\psi_n(x)$ ზრდადი ფუნქციებია და, ამას გარდა,

$\{\varphi_n(x)\}$ და $\{\psi_n(x)\}$ მიმდევრობები ერთობლივ შემოსაზღვრული არიან $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ, მე-2 ლემის ძალით, $\{\varphi_n(x)\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტზე კრებადია გარკვეული ზრდადი $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ.

იმავე ლემის ძალით, $\{\psi_{n_k}(x)\}$ მიმდევრობიდანაც შეგვიძლია გამოვყოთ $\left\{\psi_{n_{k_i}}(x)\right\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე გარკვეული ზრდადი $\psi(x)$ ფუნქციისაკენ.

რადგანაც $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_{n_{k_i}}(x)=\varphi(x), \qquad \lim_{i\to\infty} \psi_{n_{k_i}}(x)=\psi(x),$$

ხოლო

$$f_{n_{k_i}}(x)=\varphi_{n_{k_i}}(x)-\psi_{n_{k_i}}(x),$$

ამიტომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში არსებობს $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_{k_i}}(x)$. ამ ზღვარს თუ ავღნიშნავთ $f(x)$-ით, გვექნება:

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x).$$

$\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების ზრდადობის გამო $[a, b]$ სეგმენტზე, $f(x)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.

ამრიგად, ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობიდან გამოვყავით ქვემიმდევრობა, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტზე კრებადია და რომლის ზღვრული ფუნქცია წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით და ამით ჰელის თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები

ვიტალის (G. Vitali) მიერ განხილული იყო გარკვეული კლასი ფუნქციებისა, რომლებსაც მან უწოდა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები.

განსაზღვრა 1. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია სასრული $f(x)$ ფუნქცია. თუ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[a, b]$-დან აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ნებისმიერი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$ სისტემისა-

თვის, რომლისთვისაც $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\varepsilon,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი** ფუნქცია.

ცხადია, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია, რადგან კერძოდ შეგვიძლია მივიჩნიოთ $n=1$.

თეორემა 15. *$[a, b]$ სეგმენტზე სასრული $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ $[a, b]$-დან აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც*

$$\sum_{k}(\beta_k-\alpha_k)<\eta, \tag{5.1}$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\sum_{k}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]\right|<\varepsilon. \tag{5.2}$$

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და η იყოს ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ (5.1) უტოლობიდან გამომდინარეობდეს (5.2) უტოლობა. სეგმენტთა $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემა გავყოთ ორ ჯგუფად: პირველ ჯგუფში მოვათავსოთ ის სეგმენტები, რომელთათვის $f(\beta_k)-f(\alpha_k)\geq 0$, ხოლო მეორე ჯგუფში—დანარჩენი სეგმენტები. გვაქვს

$$\sum_{k}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|=\sum_{k}^{(1)}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]-\sum_{k}^{(2)}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]=$$

$$=\left|\sum_{k}^{(1)}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]\right|+\left|\sum_{k}^{(2)}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

აქ $\sum\limits_k^{(1)}$ და $\sum\limits_k^{(2)}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან პირველი და მეორე ჯგუფის სეგმენტებს. მიღებული უტოლობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 16. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\sum\limits_k (\beta_k-\alpha_k)<\eta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_k |g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$F(x)=f(x)+g(x),$$

გვექნება

$$\sum_k |F(\beta_k)-F(\alpha_k)|=\sum_k |[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]+[g(\beta_k)-g(\alpha_k)]|\leq$$

$$\leqslant\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|+\sum_k |g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, $F(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ნამრავლიც აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ M_f და M_g-თი შესაბამისად $|f(x)|$ და $|g(x)|$ ფუნქციების ზუსტი ზედა საზღვრები $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც $f(x)$ და $g(x)$ აბსო-

ლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$-ზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[a, b]$-დან აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\sum\limits_k(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\sum_k|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2M_g}, \qquad \sum_k|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2M_f}.$$

შემდეგ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $F(x)=f(x)\,g(x)$, გვექნება

$$\sum_k|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|\leqslant\sum_k|f(\beta_k)[g(\beta_k)-g(\alpha_k)]|+$$

$$+\sum_k|g(\alpha_k)[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]|\leqslant M_f\sum_k|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|+$$

$$+M_g\sum_k|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად, $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

შედეგი 1. თუ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $Af(x)$, სადაც A მუდმივია, აბსოლუტურად უწყვეტია იმავე სეგმენტზე.

თეორემა 18. თუ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(x)\neq 0$, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\min\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|=m$. ცხადია რომ $m>0$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\sum\limits_k(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\varepsilon m^2.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $F(x)=\frac{1}{f(x)}$, გვექნება

$$\sum_k |F(\beta_k)-F(\alpha_k)|=\sum_k\left|\frac{1}{f(\beta_k)}-\frac{1}{f(\alpha_k)}\right|=\sum_k\left|\frac{f(\alpha_k)-f(\beta_k)}{f(\alpha_k)\,f(\beta_k)}\right|<$$

$$<\frac{1}{m^2}\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\frac{1}{m^2}\cdot\varepsilon\, m^2=\varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მე-17 და მე-18 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი 2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და $g(x)$ ამ სეგმენტზე არ ისპობა, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია იმავე სეგმენტზე.

განსაზღვრა 2. ამბობენ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამ სეგმენტზე ლიფშიცის (R. Lipschitz)[1] პირობას, თუ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი K, რომ $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებული x-ის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის x' და x'' ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant K\,|x''-x'|.$$

თეორემა 19. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $F(y)$ ფუნქცია ლიფშიცის პირობას აკმაყოფილებს, ხოლო $f(x)$ არის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები მოთავსებულია $[a,b]$ სეგმენტში, მაშინ $F[f(x)]$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $F(y)$ ფუნქცია ლიფშიცის პირობას აკმაყოფილებს $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი

[1] რუდოლფ ლიფშიცი (1832—1903)—გერმანელი მათემატიკოსი. ლიფშიცის ძირითადი ნაშრომები მიეკუთვნება რიცხვთა თეორიას, მწკრივთა თეორიას, დიფერენციალურ განტოლებებს და მრავალგანზომილებიან გეომეტრიას.

K, რომ $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებული y-ის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის y' და y'' გვაქვს უტოლობა

$$|F(y'')-F(y')| \leqslant K|y''-y'|.$$

თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობიდან:

$$|F[f(x'')]-F[f(x')]| \leqslant K|f(x'')-f(x')|,$$

სადაც x' და x'' არიან $[\alpha, \beta]$ სეგმენტიდან აღებული ორი ნებისმიერი წერტილი.

თეორემა 20. თუ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ რიცხვი 1-თვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\sum\limits_k (\beta_k-\alpha_k)<\eta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<1.$$

ახლა გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ისეთ ქვესეგმენტებად $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{\nu-1}, b]$, რომ

$$x_k-x_{k-1}<\eta \quad (k=1,2,\ldots,\nu).$$

აქ $x_0=a$, $x_\nu=b$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\mathop{\mathrm{V}}_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leqslant 1$$

და, მაშასადამე,

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)=\sum_{k=1}^{\nu} \mathop{\mathrm{V}}_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leqslant \nu.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი ვარიაცია $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\left\{[\alpha_k, \beta_k]\right\}_{k=1}^{n}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\varepsilon.$$

აქედან, $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}\overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{\mathrm{V}}}(f)<\varepsilon.$$

მაშასადამე, ვარიაცია $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ წარმოადგენს აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ზრდად აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებისაგან შედგენილი მწკრივი $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ კრებადია $[a, b]$-ზე, მაშინ ამ მწკრივის $f(x)$ ჯამი წარმოადგენს აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მოცემული მწკრივის კრებადობის გამო მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$\sum_{j=\nu+1}^{\infty}[f_j(b)-f_j(a)]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, რაკი $f_k(x)$ $(k=1, 2,\ldots)$ ფუნქციები აბსოლუტურად უწყვეტი არიან, ამიტომ მოცემული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული წყვილ-წყვილად არა-გადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, მართებული იყოს უტოლობები

$$\sum_{k=1}^{n}[f_j(\beta_k)-f_j(\alpha_k)]<\frac{\varepsilon}{2\nu}\quad (j=1,\ 2,\ldots,\nu).$$

ახლა ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}[f_j(\beta_k)-f_j(\alpha_k)]=$$

$$=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{n}[f_j(\beta_k)-f_j(\alpha_k)]+\sum_{j=\nu+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}[f_j(\beta_k)-f_j(\alpha_k)]<$$

$$<\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\varepsilon}{2\nu}+\sum_{j=\nu+1}^{\infty}[f_j(b)-f_j(a)]<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. წრფევადი წირები

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ბრტყელი C წირი, რომლის განტოლებებია

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t), \tag{6.1}$$

სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $I=[a, b]$ სეგმენტზე. ვიგუ-

ლისხმოთ, რომ როცა t იცვლება a-დან b-მდე, მაშინ სათანადო წერტილი $M[\varphi(t), \psi(t)]$ აღწერს C წირს გარკვეული მიმართულებით. a და b-ს შესატყვისი წერტილები C წირზე აღვნიშნოთ შესაბამისად A და B ასოთი. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი წერტილებით

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=b \tag{6.2}$$

და C წირში ჩავხაზოთ ტეხილი რომლის წვეროები შეესაბამებიან t პარამეტრის $t_0, t_1, \ldots, t_m$ მნიშვნელობებს. ამ ტეხილი წირის სიგრძე აღვნიშნოთ L-ით. ამრიგად, $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება სათანადო დადებითი რიცხვი L. ასეთ L რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება C წირის სიგრძე. ამ წირის სიგრძე აღვნიშნოთ $S(C; I)$ სიმბოლოთი. თუ $S(C; I)<+\infty$, მაშინ C წირს ეწოდება **წ რ ფ ე ვ ა დ ი** I-ზე.

თეორემა 23 (ჟორდანი). (6.1) წირის წრფევადობისათვის I-ზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ იყვნენ ფუნქციები სასრული ვარიაციით I-ზე.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, C წრფევადი წირია I-ზე და გავყოთ I სეგმენტი (6.2) წერტილებით. ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{m}\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2}\leqslant S(C; I).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{m}|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|\leqslant S(C; I), \qquad \sum_{k=1}^{m}|\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|\leqslant S(C; I).$$

მაშასადამე,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi)\leqslant S(C; I), \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(\psi)\leqslant S(C; I).$$

რადგანაც $S(C; I)<+\infty$, ამიტომ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ არიან ფუნქციები სასრული ვარიაციით I-ზე. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ არიან ფუნქციები სასრული ვარიაციით I-ზე. გავყოთ I სეგმენტი (6.2) წერტილებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} |\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m} |\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|,$$

საიდანაც

$$S(C; I) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\varphi) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\psi).$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოთვალეთ $\overset{\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(\sin x)$. პას. 2.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით იმავე სეგმენტზე.

3. ააგეთ მაგალითი ისეთი $f(x)$ ფუნქციისა, რომელიც არ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით, ხოლო მისი აბსოლუტური სიდიდე $|f(x)|$ იყოს ფუნქცია სასრული ვარიაციით.

თ ა ვ ი IX

ზომადი სიმრავლეები

ევკლიდეს R^n სივრცეში მოთავსებული სიმრავლის ზომის ცნება ანზოგადოებს მონაკვეთის სიგრძის, მართკუთხედის ფართობისა და პარალელეპიპედის მოცულობის ცნებას. სიმრავლის ზომის ცნებას დიდი მნიშვნელობა აქვს ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში. ამ თავში ჩვენ შევისწავლით ზომის თეორიას, რომელიც ჟორდანისა და ლებეგის მიერ იყო დამუშავებული.

§ 1. ფართობადი სიმრავლეები

ვთქვათ, R^n სივრცეში აღებულია რაიმე შემოსაზღვრული E სიმრავლე. განვიხილოთ n-განზომილებიან სეგმენტთა სასრული S სისტემა[1], რომელიც E სიმრავლეს ფარავს. აღვნიშნოთ $\sigma^*(S)$ სიმბოლოთი S სისტემის სეგმენტების ფართობთა ჯამი, $\sigma_*(S)$ სიმბოლოთი კი S-ში შემავალი იმ სეგმენტების ფართობთა ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია E სიმრავლეში. ცხადია, რომ $\sigma^*(S) \geq \sigma_*(S) \geq 0$.

ამრიგად, n-განზომილებიან სეგმენტთა ყოველ სასრულ S სისტემას, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, შევუსაბამოთ ორი $\sigma^*(S)$ და $\sigma_*(S)$ რიცხვი. განვიხილოთ n განზომილებიან სეგმენტთა ყოველგვარი სასრული S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს. აღვნიშნოთ H^*-ით $\sigma^*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, H_*-ით კი $\sigma_*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე. ადვილი შესამჩნევია, რომ H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშასადამე, H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო H^* ქვემოდანაა შემოსაზღვრული.

H^* სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის **გ ა რ ე ზ ო მ ა** ჟორდანის აზრით, H_* სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს კი E სიმრავლის **შ ი გ ა ზ ო მ ა** ჟორდანის აზრით.

E სიმრავლის გარე და შიგა ზომა ჟორდანის აზრით აღვნიშნოთ შესა-

---

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ S სისტემის სეგმენტებს წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო შიგა წერტილები.

ბამისად m^*E და m_*E სიმბოლოებით. თუ $m^*E=m_*E$, მაშინ E-ს ეწოდება **ფართობადი სიმრავლე**. თუ E ფართობადი სიმრავლეა, მაშინ E სიმრავლის გარე ზომას ვუწოდებთ E-ს ფართობს და მას აღვნიშნავთ $|E|$ სიმბოლოთი.

მოვიყვანოთ მაგალითი არაფართობადი სიმრავლისა. ვთქვათ, E ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლეა n-განზომილებიან $[0,1;\ 0,1;\ \dots;\ 0,1]$ სეგმენტიდან. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$m^*E=1,\quad m_*E=0.$$

მაშასადამე, აღებული E სიმრავლე ფართობადი არაა.

თეორემა 1. **შემოსაზღვრული სიმრავლის ფართობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი საზღვრის ფართობი იყოს ნულის ტოლი.**

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E შემოსაზღვრული ფართობადი სიმრავლეა. მაშინ

$$m^*E=m_*E=|E|.$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის დამფარავი n-განზომილებიან სეგმენტთა ისეთი სასრული S სისტემა[1], რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\sigma^*(S)-|E|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |E|-\sigma_*(S)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1}$$

ახლა ვთქვათ, $I_1, I_2, \dots, I_\nu$ წარმოადგენენ S სისტემაში შემავალ იმ სეგმენტებს, რომლებიც მთლიანად არ არიან მოთავსებული E სიმრავლეში. ცხადია, რომ $\bigcup\limits_{k=1}^{\nu} I_k$ შეიცავს K სიმრავლეს, სადაც K-თი აღნიშნულია E სიმრავლის საზღვარი. ამის გარდა,

$$m^*K\leqslant|I_1|+|I_2|+\dots+|I_\nu|=\sigma^*(S)-\sigma_*(S). \tag{1.2}$$

მაგრამ, თუ (1.1) უტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\sigma^*(S)-\sigma_*(S)<\varepsilon.$$

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ S სისტემის ყოველი სეგმენტი შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს.

მაშასადამე, (1.2) თანაფარდობის თანახმად $m^*K<\varepsilon$ და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $m^*K=0$, ე, ი.

$$|K|=0. \tag{1.3}$$

თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, მართებულია (1.3) ტოლობა. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ E სიმრავლის დამფარავი n-განზომილებიან სეგმენტთა ისეთი სასრული S სისტემა, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\sigma_*^*(S)-\sigma_*(S)<\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$m^*E-m_*E<\varepsilon$$

და, რადგანაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$m^*E=m_*E.$$

ამრიგად, პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ნაწილია, მაშინ

$$m^*A\leqslant m^*B,\ \ m_*A\leqslant m_*B. \tag{1.4}$$

დამტკიცება. ავიღოთ B სიმრავლის დამფარავი n-განზომილებიან სეგმენტთა ნებისმიერი სასრული S სისტემა და S_0-ით აღვნიშნოთ S სისტემის ქვესისტემა, რომელიც A სიმრავლეს ფარავს. ცხადია, რომ

$$\sigma^*(S_0)\leqslant\sigma^*(S).$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (1.4)-ის პირველ თანაფარდობას. ანალოგიურად მტკიცდება (1.4)-ის მეორე თანაფარდობა.

თეორემა 3. თუ A და B შემოსაზღვრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B. \tag{1.5}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ სეგმენტთა ნებისმიერი ორი სასრული სისტემა S_1 და S_2, რომლებიც შესაბამისად ფარავენ A და B სიმრავლეებს. აღვნიშნოთ S-ით S_1 და S_2 სიმრავლეთა ჯამი. თუ S სისტემის რაიმე სეგმენტს აქვს ამავე სისტემის რამდენიმე სეგმენტთან საერთო შიგა წერტილი, მაშინ ეს სეგმენტები შეგვიძლია ისე დავყოთ სეგმენტებად, რომ მათ არ ჰქონდეს საერთო შიგა წერტილები. ამგვარად, შეგვიძლია

ვიგულისხმოთ, რომ S სისტემის სეგმენტებს წყვილ-წყვილად არა აქვს საერთო შიგა წერტილები. შემდეგ, ცხადია, რომ S ფარავს $A \cup B$ სიმრავლეს და

$$\sigma^*(S) \leqslant \sigma^*(S_1) + \sigma_*(S_2).$$

აქედან

$$m^*(A \cup B) \leqslant \sigma^*(S_1) + \sigma^*(S_2). \tag{1.6}$$

რადგანაც S_1 და S_2 სისტემები ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ (1.6) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს (1.5) უტოლობა.

თეორემა 4. თუ E_1 და E_2 ფართობადი სიმრავლეებია, მაშინ მათი გადაკვეთაც ფართობადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E_1 და E_2 სიმრავლეების გადაკვეთა E-თი. K_1, K_2, K იყოს შესაბამისად E_1, E_2, E სიმრავლეების საზღვრები. რადგანაც E_1 და E_2 ფართობადი სიმრავლეებია, ამიტომ, 1-ლი თეორემის ძალით,

$$|K_1| = 0, \quad |K_2| = 0. \tag{1.7}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $K \subset K_1 \cup K_2$. მე-2 და მე-3 თეორემების თანახმად,

$$m^*K \leqslant m^*(K_1 \cup K_2) \leqslant m^*K_1 + m^*K_2.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.7) ტოლობებს, გვექნება $m^*K = 0$, ე. ი. $|K| = 0$. მაშასადამე, 1-ლი თეორემის ძალით, E ფართობადი სიმრავლეა.

თეორემა 5. თუ A და B ფართობადი სიმრავლეებია, ამასთანავე $B \subset A$, მაშინ $A - B$ სიმრავლეც ფართობადია.

დამტკიცება. A, B და $A - B$ სიმრავლეთა საზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად K_1, K_2 და K-თი. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$K \subset K_1 \cup K_2.$$

მე-2 და მე-3 თეორემის თანახმად,

$$m^*K \leqslant m^*(K_1 \cup K_2) \leqslant m^*K_1 + m^*K_2.$$

მაგრამ A და B სიმრავლეების ფართობადობის გამო,

$$m^*K_1 = 0, \quad m^*K_2 = 0.$$

მაშასადამე, $m^*K = 0$. ეს კი ამტკიცებს $A - B$ სიმრავლის ფართობადობას.

თეორემა 6. თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე დაყოფილია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ფართობად $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ სიმრავლეებად, ანდა მათ წყვილ-წყვილად საერთო

წერტილებად აქვთ მხოლოდ საზღვრის წერტილები, მაშინ E ფართობადი სიმრავლეა და ადგილი აქვს ტოლობას

$$|E|=|E_1|+|E_2|+\cdots+|E_\nu|. \tag{1.8}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ E სიმრავლის დამფარავი n-განზომილებიან სეგმენტთა ნებისმიერი სასრული S სისტემა და აღვნიშნოთ S_k-თი S სისტემის ქვესისტემა, რომელიც ფარავს E_k სიმრავლეს ($k=1,2,\ldots,\nu$). ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sigma_*(S_1)+\sigma_*(S_2)+\cdots+\sigma_*(S_\nu)\leqslant\sigma_*(S)\leqslant m_*E.$$

აქედან გამომდინარეობს,

$$m_*E_1+m_*E_2+\cdots+m_*E_\nu\leqslant m_*E. \tag{1.9}$$

შემდეგ, მე-3 თეორემის ძალით,

$$m^*E_1+m^*E_2+\cdots+m^*E_\nu\geqslant m^*E. \tag{1.10}$$

მაგრამ ყოველი E_k სიმრავლე ფართობადია, ამიტომ

$$m_*E_k=m^*E_k=|E_k| \quad (k=1,\ 2,\ldots,\nu).$$

მაშასადამე, (1.9) და (1.10) თანაფარდობები ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$|E_1|+|E_2|+\cdots+|E_\nu|\leqslant m_*E,\ |E_1|+|E_2|+\cdots+|E_\nu|\geqslant m^*E. \tag{1.11}$$

რადგანაც $m_*E\leqslant m^*E$, ამიტომ (1.11) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს

$$m_*E=m^*E=|E_1|+|E_2|+\cdots+|E_\nu|,$$

ე. ი. E ფართობადი სიმრავლეა და ადგილი აქვს (1.8) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. სიმრავლის გარე ზომა ლებეგის აზრით

განვიხილოთ n-განზომილებიან ინტერვალთა რაიმე სასრული ან თვლადი S სისტემა. აღვნიშნოთ $\sigma(S)$-ით S სისტემაში შემავალი ყველა ინტერვალის ფართობთა ჯამი. ცხადია, რომ $\sigma(S)$ დადებითი რიცხვია ან $+\infty$.

ახლა ავიღოთ R^n სივრცეში წერტილთა რაიმე E სიმრავლე. ეს სიმრავლე შეგვიძლია დავფაროთ ინტერვალთა სხვადასხვა S სისტემით.

$\sigma(S)$ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის გარე ზომა ლებეგის აზრით და მას μ^*E სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი

თეორემა 7. *თუ R^n სივრციდან აღებულია ორი A და B სიმრავლე და $A\subset B$, მაშინ $\mu^*A\leqslant\mu^*B$.*

თეორემა 8. *თუ მოცემულია სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემა $\{E_m\}$, მაშინ*

$$\mu^*(\bigcup_m E_m)\leqslant\sum_m\mu^*E_m. \tag{2.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. სიმრავლის გარე ზომის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი E_m სიმრავლე შეგვიძლია დავფაროთ ინტერვალთა ისეთი S_m სისტემით, რომ

$$\sigma(S_m)\leqslant\mu^*E_m+\frac{\varepsilon}{2^m}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S=\bigcup_m S_m.$$

ცხადია, S სისტემა ფარავს $\bigcup_m E_m$ სიმრავლეს და, მაშასადამე,

$$\mu^*(\bigcup_m E_m)\leqslant\sigma(S)\leqslant\sum_m\sigma(S_m)\leqslant\sum_m\mu^*E_m+\sum_m\frac{\varepsilon}{2^m}\leqslant\varepsilon+\sum_m\mu^*E_m.$$

აქედან, ε-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ (2.1) თანაფარდობას.

თეორემა 9. *ნებისმიერი E სიმრავლისათვის და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს E სიმრავლის შემცველი ისეთი ღია G სიმრავლე, რომ $\mu^*G\leqslant\mu^*E+\varepsilon$.*

დამტკიცება. სიმრავლის გარე ზომის განსაზღვრის თანახმად, აღებული ε რიცხვისათვის ინტერვალთა ისეთი $S=\{I^\circ_m\}$ სისტემა შეგვიძლია ვიპოვოთ, რომ $\bigcup_m I^\circ_m\supset E$ და

$$\sum_m|I^\circ_m|\leqslant\mu^*E+\varepsilon.$$

ვთქვათ, $G=\bigcup_m I^\circ_m$. ცხადია, რომ G ღია სიმრავლეა და

$$\mu^*G\leqslant\mu^*E+\varepsilon,$$

რითაც თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. *ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომ $H \supset E$ და $\mu^* H = \mu^* E$.*

დამტკიცება. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_k\}$ მიმდევრობა. მე-9 თეორემის ძალით, ყოველი ε_k რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის შემცველი ისეთი G_m სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\mu^* G_m \leqslant \mu^* E + \varepsilon_m.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$H = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m,$$

გვექნება

$$E \subset H \subset G_m \quad (m=1, 2, \ldots)$$

და, მაშასადამე,

$$\mu^* E \leqslant \mu^* H \leqslant \mu^* G_m \leqslant \mu^* E + \varepsilon_m.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ

$$\mu^* H = \mu^* E.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. *თუ A და B სიმრავლეებს შორის მანძილი დადებითი რიცხვია, მაშინ მართებულია ტოლობა*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ინტერვალთა რაიმე S სისტემა, რომელიც ფარავს $A \cup B$ სიმრავლეს. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ S სისტემის ყოველი ინტერვალის დიამეტრი ნაკლებია A და B სიმრავლეს შორის $\rho(A, B)$ მანძილზე. მაშასადამე, აღნიშნული სისტემის არც ერთ ინტერვალს არ ექნება ერთდროულად საერთო წერტილები A და B სიმრავლეებთან. აღვნიშნოთ S_1 და S_2-ით S სისტემის ქვესისტემები, რომელთა ელემენტებს აქვთ საერთო წერტილები შესაბამისად A და B სიმრავლეებთან. ცხადია, რომ S_1 და S_2 სისტემები ფარავენ შესაბამისად A და B სიმრავლეებს. გვაქვს

$$\sigma(S) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2) \geqslant \mu^* A + \mu^* B.$$

აქედან

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^* A + \mu^* B. \tag{2.3}$$

მეორე მხრით, თანახმად მე-8 თეორემისა,

$$\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^* A + \mu^* B. \tag{2.4}$$

(2.3) და (2.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (2.2) ტოლობა.

შედეგი. თუ F_1 და F_2 ურთიერთ არაგადამკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეებია, რომლებიდან ერთი მაინც შემოსაზღვრულია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu^*(F_1\cup F_2)=\mu^*F_1+\mu^*F_2. \tag{2.5}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში $\rho(F_1, F_2)>0$ და, მაშასადამე, მე-11 თეორემის ძალით, ადგილი აქვს (2.5) ტოლობას.

§ 3. ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეები

ჩვენ ვიტყვით, რომ რაიმე E სიმრავლე ზომადია, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G\supset E$, რომ

$$\mu^*(G-E)<\varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში E სიმრავლის გარე ზომას ეწოდება E სიმრავლის ზომა ლებეგის აზრით და აღინიშნება μE სიმბოლოთი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი სიმრავლე, რომლის გარე ზომა ნულია, ზომადია.

თეორემა 12. თუ მოცემულია ზომად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემა $\{E_m\}$, მაშინ ამ სიმრავლეთა ჯამიც ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $E=\bigcup_m E_m$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ყოველი E_m სიმრავლე ზომადია, ამიტომ არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G_m\supset E$, რომ

$$\mu^*(G_m-E_m)<\frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{3.1}$$

შემოვიღებთ რა აღნიშვნას $G=\bigcup_m G_m$, გვექნება $E\subseteq G$ (G ღია სიმრავლეა). ადვილი მისახვედრია, რომ

$$G-E\subset\bigcup_m(G_m-E_m).$$

მე-8 თეორემისა და (3.1) უტოლობის ძალით,

$$\mu^*(G-E)\leqslant\sum_m\mu^*(G_m-E_m)<\sum_m\frac{\varepsilon}{2^m}\leqslant\varepsilon.$$

მაშასადამე, E ზომადი სიმრავლეა.

თეორემა 13. ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა F შემოსაზღვრულია. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. მე-9 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G\supset F$, რომ

$$\mu^*G<\mu^*F+\varepsilon. \tag{3.2}$$

$G-F$ ღია სიმრავლეა და, მაშასადამე, იგი წარმოიდგინება როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა თვლადი $\{I_m\}$ სისტემისა:

$$G-F=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

აქედან

$$G=F\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)$$

და რაკი ყოველი m-თვის $(\bigcup_{k=1}^{m} I_k)\cap F$ ცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ მე-11 თეორემის შედეგისა და (3.2) უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{m}\mu^*(I_k)+\mu^*F=\mu^*[(\bigcup_{k=1}^{m} I_k)\cup F]<\mu^*G<\mu^*F+\varepsilon.$$

საიდანაც

$$\sum_{k=1}^{m}\mu^*(I_k)<\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k)\leqslant\varepsilon.$$

ამრიგად,

$$\mu^*(G-F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k)\leqslant\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს F სიმრავლის ზომადობა.

თუ F შემოსაზღვრული არაა, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა

და, მაშასადამე, ზემოდამტკიცებულისა და მე-12 თეორემის ძალით F ზომადი სიმრავლეა.

თეორემა 14. ზომადი სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_k\}$ მიმდევრობა. ყოველი ε_k რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G_k \supset E$, რომ

$$\mu^*(G_k - E) < \varepsilon_k.$$

შემოვიღოთ აღნიშნვა $F_k = G'_k$, სადაც G'_k წარმოადგენს G_k სიმრავლის დამატებით სიმრავლეს. ცხადია, რომ $F_k \subset E'$ და, ამას გარდა, F_k ჩაკეტილი სიმრავლეა. რადგანაც

$$E' - F_k = G_k - E,$$

ამიტომ

$$\mu^*(E' - F_k) = \mu^*(G_k - E) < \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

და რაკი $E' - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset E' - F_k$, გვექნება

$$\mu^*(E' - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) < \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე,

$$\mu^*(E' - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$E' - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = H,$$

გვექნება

$$E' = H \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i).$$

რადგანაც H სიმრავლის გარე ზომა ნულია, ამიტომ იგი ზომადია. ზომადია აგრეთვე $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ სიმრავლე და, მაშასადამე, ზომადია E სიმრავლის დამატებითი E' სიმრავლეც. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15 (ვალე-პუსენი). E სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$, რომ

$$\mu^*(E-F)<\varepsilon. \tag{3.3}$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მე-14 თეორემის ძალით E' სიმრავლე ზომადია და ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G \supset E'$, რომ

$$\mu^*(G-E')<\varepsilon.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $F=G'$, გვექნება

$$F \subset E, \ E-F=G-E'.$$

აქ F ჩაკეტილი სიმრავლეა. მაშასადამე,

$$\mu^*(E-F)=\mu^*(G-E')<\varepsilon.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$, რომ ადგილი აქვს (3.3) უტოლობას. აღვნიშნოთ G ასოთი F სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე. G ღია სიმრავლეა. ცხადია,

$$G \supset E' \text{ და } G-E'=E-F.$$

მაშასადამე,

$$\mu^*(G-E')=\mu^*(E-F)<\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს E' სიმრავლის ზომადობა და ამიტომ E ზომადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16. თუ მოცემულია ზომად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემა $\{E_k\}$, მაშინ ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა ზომადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. გვაქვს

$$\bigcap_k E_k = R^n - \bigcup_k E'_k = (\bigcup_k E'_k)'.$$

ყოველი E_k' სიმრავლე ზომადია და ამიტომ ზომადია $\bigcup\limits_k E_k'$ სიმრავლეც.

მაშასადამე, $(\bigcup_k E_k')'$ სიმრავლე ზომადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. *თუ A და B ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ მათი სხვაობაც ზომადი სიმრავლეა.*

მართლაც, გვაქვს

$$A-B=A\cap B'.$$

მაგრამ B' ზომადი სიმრავლეა და, მაშასადამე, $A\cap B'$ გადაკვეთა ზომადია, ე. ი. $A-B$ სიმრავლე ზომადია.

თეორემა 17. *თუ მოცემულია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემა $\{E_k\}$, მაშინ მართებულია ტოლობა*

$$\mu\Big(\bigcup_k E_k\Big)=\sum_k \mu(E_k). \tag{3.4}$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი E_k სიმრავლე შემოსაზღვრულია. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ყოველი E_k სიმრავლე ზომადია, ამიტომ მე-15 თეორემის ძალით არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F_k\subset E_k$, რომ

$$\mu(E_k-F_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}\quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

საიდანაც

$$\mu(F_k)>\mu(E_k)-\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

მე-11 თეორემის შედეგის ძალით, ყოველი m-თვის გვაქვს

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^m E_k\Big)\geqslant\mu\Big(\bigcup_{k=1}^m F_k\Big)=\sum_{k=1}^m\mu(F_k)>\sum_{k=1}^m\mu(E_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^m\frac{\varepsilon}{2^k}>\sum_{k=1}^m\mu(E_k)-\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu\Big(\bigcup_k E_k\Big)\geqslant\sum_k\mu(E_k)-\varepsilon$$

და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$\mu(\bigcup_k E_k) \geqslant \sum_k \mu(E_k). \tag{3.5}$$

მეორე მხრით, თანახმად მე-8 თეორემისა,

$$\mu(\bigcup_k E_k) \leqslant \sum_k \mu(E_k). \tag{3.6}$$

(3.5) და (3.6) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (3.4) ტოლობა.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ E_k სიმრავლეებიდან ზოგიერთი მაინც არაა შემოსაზღვრული. მაშინ ყოველი E_k სიმრავლე, რომელიც შემოსაზღვრული არაა, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეებისა $E_k^{(1)}$, $E_k^{(2)}, \ldots$, $E_k^{(i)}, \ldots$, რომელთა რიცხვი თვლადია:

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_k^{(i)}.$$

მაშასადამე,

$$\bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_{i=1}^{\infty} E_k^{(i)}.$$

ახლახან დამტკიცებულის ძალით,

$$\mu(\bigcup_k E_k) = \sum_k \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E_k^{(i)}\right) = \sum_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_k^{(i)}\right) = \sum_k \mu(E_k).$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 18. თუ მოცემულია სასრული ზომის სიმრავლეთა მონოტონური მიმდევრობა $\{E_k\}$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k). \tag{3.7}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E = \lim_{k\to\infty} E_k.$$

ზრდადი მიმდევრობის შემთხვევაში გვაქვს

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k=E_1 \cup [\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{k+1}-E_k)],$$

ამასთანავე E_1, $E_2-E_1, \ldots, E_{k+1}-E_k, \ldots$ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. ამიტომ, მე-17 თეორემის ძალით

$$\mu(E)=\mu(E_1)+\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{k+1}-E_k)=\mu(E_1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} [\mu(E_{k+1})-\mu(E_k)]=\lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

ამრიგად, მართებულია (3.7) ტოლობა.

თუ სიმრავლეთა მოცემული მიმდევრობა კლებადია, მაშინ

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

და ამიტომ

$$E_1=E \cup [\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k-E_{k+1})].$$

E, E_1-E_2, $E_2-E_3, \ldots$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. მე-17 თეორემის თანახმად,

$$\mu(E_1)=\mu(E)+\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k-E_{k+1})=\mu(E)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} [\mu(E_k)-\mu(E_{k+1})]=\mu(E)+\mu(E_1)-\lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

აქედან გამომდინარეობს (3.7) ტოლობის მართებულობა. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 19. თუ მოცემულია ზომად სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{E_k\}$, მაშინ ზედა და ქვედა ზღვრები $\limsup\limits_{k\to\infty} E_k$ და $\liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ ზომადი სიმრავლეებია.

დამტკიცება. I თავის მე-5 თეორემის თანახმად მართებულია ტოლობები

$$\limsup_{k\to\infty} E_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i,\quad \liminf_{k\to\infty} E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} E_i.$$

მე-12 და მე-16 თეორემების ძალით $\limsup\limits_{k\to\infty} E_k$ და $\liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ ზომადი სიმრავლეებია.

თეორემა 20. თუ მოცემულია სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა $\{E_k\}$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu^*(\lim_{k\to\infty} E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=\lim_{k\to\infty} E_k.$$

რადგანაც $E\supset E_k$ $(k=1, 2,\cdots)$, ამიტომ

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(E_k)\quad(k=1, 2,\ldots)$$

და, მაშასადამე,

$$\mu^*(E)\geqslant\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k). \tag{3.8}$$

ახლა განვიხილოთ ისეთი ღია სიმრავლეთა $\{G_k\}$ მიმდევრობა, რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ:

$$G_k\supset E_k,\ \ \mu(G_k)<\mu^*(E_k)+\frac{1}{k}\ \ (k=1, 2,\ldots). \tag{3.9}$$

ვთქვათ,

$$H_k=\bigcap_{i=k}^{\infty} G_i.$$

H_k სიმრავლეები G_δ ტიპის სიმრავლეებია და, მაშასადამე, ისინი ზომადია. ამას გარდა, ცხადია, რომ

$$H_1\subset H_2\subset\cdots\subset H_k\subset\cdots$$

მე-18 თეორემის თანახმად,

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(H_k)$$

და რაკი

$$E_k \subset H_k \subset G_k, \quad E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

ამიტომ (3.9) თანაფარდობების ძალით

$$\mu(H_k) \geqslant \mu^*(E_k) > \mu^*(H_k) - \frac{1}{k}.$$

მაშასადამე,

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(H_k) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(E_k). \tag{3.10}$$

(3.8) და (3.10) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს

$$\mu^*(E) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(E_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. E სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს E სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომელიც განსხვავდება E სიმრავლისაგან ნულზომიანი სიმრავლით.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა. მე-10 თეორემის თანახმად არსებობს E სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომ

$$\mu(H) = \mu(E).$$

ვთქვათ,

$$M = H - E.$$

H სიმრავლის ზომადობის გამო, M სიმრავლეც ზომადია. შემდეგ, რაკი

$$\mu(H) = \mu(E), \text{ ამიტომ } \mu(H - E) = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu(M) = 0$ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, E სიმრავლისათვის არსებობს G_δ ტიპის ისეთი სიმრავლე $H \supset E$, რომ

$$\mu(H - E) = 0.$$

დასამტკიცებელია E სიმრავლის ზომადობა. ვთქვათ,

$$M = H - E.$$

მაშინ $\mu^* M=0$. მაშასადამე, M სიმრავლე ზომადია. შემდეგ, რაკი H სიმრავლე ზომადია, ამიტომ $E=H-M$ სიმრავლეც ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. E სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს E სიმრავლეში მოთავსებული F_σ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომელიც განსხვავდება E სიმრავლისაგან ნულზომიანი სიმრავლით.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა. მაშინ E' სიმრავლეც ზომადია და, მაშასადამე, 21-ე თეორემის თანახმად არსებობს E' სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი A სიმრავლე, რომ

$$\mu(A-E')=0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $H=A'$, გვექნება

$$H\subset E,\ E-H=A-E',$$

ამასთანავე H არის F_σ ტიპის სიმრავლე. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია. პირობის საკმარისობა უშუალოდ ცხადია.

თეორემა 23. E სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი A სიმრავლისათვის მართებული იყოს ტოლობა

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A-E). \tag{3.11}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა, ხოლო A ნებისმიერი სიმრავლეა. განვიხილოთ A სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\mu(H)=\mu^*(A).$$

ცხადია, რომ

$$H=(H\cap E)\cup(H-E),\quad (H\cap E)\cap(H-E)=\Lambda.$$

$H\cap E$ და $H-E$ ზომადი სიმრავლეებია, ამიტომ მე-17 თეორემის თანახმად,

$$\mu^*(A)=\mu(H)=\mu(H\cap E)+\mu(H-E)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A-E). \tag{3.12}$$

მეორე მხრით,

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A-E), \tag{3.13}$$

რადგან

$$A=(A\cap E)\cup(A-E).$$

(3.12) (3.13) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (3.11) ტოლობა. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი A სიმრავლისათვის ადგილი აქვს (3.11) ტოლობას. დასამტკიცებელია E სიმრავლის ზომადობა. აღვნიშნოთ I_m-ით n-განზომილებიანი სეგმენტი

$$I_m=[-m,\ m;\ -m,\ m;\cdots;\ -m,\ m]\quad (m=1,\ 2,\ldots).$$

მე-10 თეორემის თანახმად, არსებობს G_δ ტიპის ისეთი სიმრავლე

$$H_m\supset I_m\cap E,$$

რომ

$$\mu^*(I_m\cap E)=\mu^*(H_m).$$

მეორე მხრით, თეორემის პირობის თანახმად,

$$\mu^*(H_m)=\mu^*(H_m\cap E)+\mu^*(H_m-E)\geqslant\mu^*(I_m\cap E)+\mu^*(H_m-E)=$$
$$=\mu^*(H_m)+\mu^*(H_m-E).$$

რადგანაც $\mu^*(H_m)<+\infty$, ამიტომ ამ უკანასკნელ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu^*(H_m-E)=0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $H=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}H_m$, გვექნება

$$\mu^*(H-E)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu^*(H_m-E)=0,$$

ამასთანავე $E\subset H$.

ამრიგად, ზომადი H სიმრავლე შეიცავს E სიმრავლეს და განსხვავდება E-საგან ნულზომიანი სიმრავლით. მაშასადამე, E ზომადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია. ეს თეორემა კარათეოდორის (Carathéodory) ეკუთვნის[1].

[1] კონსტანტინ კარათეოდორი (1873 — 1954)— გერმანელი მათემატიკოსი, წარმოშობით ბერძენი. მნიშვნელოვანი შედეგები აქვს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, სიმრავლეთა ზომის ზოგად თეორიაში, ვარიაციათა აღრიცხვაში.

თეორემა 24. თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე ფართობადია, მაშინ იგი ზომადია ლებეგის აზრითაც და ადგილი აქვს ტოლობას $\mu(E)=|E|$.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ $m_*E\leqslant\mu^*E\leqslant m^*E$ და რადგანაც E ფართობადი სიმრავლეა, ამიტომ $\mu^*E=|E|$. ამას გარდა, 1-ლი თეორემის ძალით, $|K|=0$, სადაც K არის E სიმრავლის საზღვრის წერტილთა სიმრავლე. თუ აღვნიშნავთ K_1-ით E სიმრავლის საზღვრის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც E-ს ეკუთვნის, მაშინ $K_1\subset K$ და ამიტომ $\mu^*K_1=0$, ე. ი. K_1 წარმოადგენს ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეს.

შემდეგ, $E-K_1$ ღია სიმრავლეა და იგი ზომადია ლებეგის აზრით. მაშასადამე, E ზომადი სიმრავლეა ლებეგის აზრით, ვინაიდან

$$E=(E-K_1)\cup K_1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. შეიძლება E სიმრავლე ზომადი იყოს ლებეგის აზრით, მაგრამ იგი არ იყოს ფართობადი. მართლაც, ვთქვათ, E არის n-განზომილებიანი $[0,1;\ 0,1;\cdots;\ 0,1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლე. როგორც ცნობილია, E თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს და ამიტომ იგი ლებეგის აზრით ზომადია და $\mu(E)=0$. მაგრამ იგი ფართობადი არაა, ვინაიდან $m^*(E)=1$ და $m_*E=0$.

თეორემა 25. თუ ზომად სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{E_k\}$ ისეთია, რომ ყოველი k-თვის $\mu(E_k)\geqslant\delta$, სადაც δ რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k)\geqslant\delta. \tag{3.14}$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით,

$$\limsup_{k\to\infty} E_k=\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k,$$

სადაც

$$H_k=\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i.$$

რადგანაც

$$H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_k\supset\cdots,$$

ამიტომ მე-18 თეორემის ძალით,

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(H_k).$$

შემდეგ, რაკი $\mu(E_k) \geqslant \delta$ ყოველი k-თვის, ამიტომ $\mu(H_k) \geqslant \delta$ და, მაშასადამე, ადგილი აქვს (3.14) დამოკიდებულებას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 26. თუ ზომად სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{E_k\}$ ისეთია, რომ ყოველი k-თვის $\mu(E_k) \leqslant \delta$, სადაც δ რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\mu(\liminf_{k \to \infty} E_k) \leqslant \delta.$$

თეორემა 27. თუ E დადებითი ზომის სიმრავლეა და E_1, $E_2, \ldots, E_k, \ldots$ წარმოადგენენ E სიმრავლის ისეთ ზომად ქვესიმრავლეებს, რომ ყოველი k-თვის $\mu(E_k) \geqslant \delta$, სადაც δ რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ არსებობს E სიმრავლის ერთი მაინც წერტილი, რომელიც მიეკუთვნება აღებული მიმდევრობის სიმრავლეთა უსასრულო სისტემას.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$H = \limsup_{k \to \infty} E_k.$$

რადგანაც ყოველი k-თვის $\mu(E_k) \geqslant \delta$, ამიტომ 25-ე თეორემის ძალით $\mu(H) \geqslant \delta$. მაშასადამე, H ცარიელი სიმრავლე არაა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. მაგალითი არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლისა, რომლის ზომა დადებითია.

თუ F არის R^n სივრცეში მოთავსებული რაიმე ჩაკეტილი სიმრავლე და იგი არ წარმოადგენს არსად მკვრივ სიმრავლეს R^n სივრცის რაიმე I_0 სეგმენტში, მაშინ არსებობს n-განზომილებიანი ისეთი სეგმენტი $I \subset I_0$, რომელიც მთლიანად F სიმრავლეს ეკუთვნის. ამიტომ

$$\mu(F) \geqslant |I|.$$

ამრიგად, თუ ჩაკეტილი სიმრავლე მკვრივია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ ამ სიმრავლის ზომა დადებითი რიცხვია.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი არსად მკვრივი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომლის ზომა დადებითი რიცხვია? პასუხი ამ კითხვაზე დადებითია.

მოვიყვანოთ მაგალითი. განვიხილოთ n-განზომილებიანი სეგმენტი $I=[0,1;\ 0,1;\cdots;\ 0,1]$ და I° ინტერვალში მოთავსებული რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე იყოს $\{p_1,\ p_2,\cdots,\ p_k,\cdots\}$. ავიღოთ ნებისმიერი რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი ε და p_k წერტილი მოვათავსოთ ისეთ I°_k ინტერვალის შიგნით, რომელიც მოთავსებულია I° ინტერვალში და $|I^\circ_k|<\frac{\varepsilon}{2^k}$ $(k=1,\ 2,\cdots)$. ვთქვათ,

$$P=I-\bigcup_{k=1}^{\infty} I^\circ_k.$$

P წარმოადგენს არსად მკვრივ სრულყოფილ სიმრავლეს. ცხადია, რომ

$$\mu(P)\geqslant|I|-\sum_{k=1}^{\infty}|I^\circ_k|>1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=1-\varepsilon.$$

ამრიგად, I სეგმენტი შეიცავს არსადმკვრივ სრულყოფილ P სიმრავლეს, რომლის ზომა რაგინდ ახლოსაა I სეგმენტის ფართობთან.

§ 6. ვიტალის თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში განსაკუთრებულ როლს თამაშობს თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ. ასეთია, მაგალითად, ლებეგ-ბორელის თეორემა. აქ ჩვენ მოვიყვანთ სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ სხვა თეორემებს, რომლებიც ფუნდამენტალური მნიშვნელობისაა ლებეგის თეორიაში.

ვთქვათ, R^n სივრცეში აღებულია რაიმე E სიმრავლე. ჩვენ ვიტყვით, რომ n-განზომილებიანი რეგულარულ სეგმენტთა რაიმე S სისტემა ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით, თუ E სიმრავლის ყოველი x წერტილი დაფარულია S ოჯახის რაგინდ მცირე დიამეტრის რეგულარული სეგმენტით, ე. ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის და E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის შემცველი ისეთი რეგულარული სეგმენტი $I\in S$, რომ $d(I)<\varepsilon$, სადაც $d(I)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია I სეგმენტის დიამეტრი. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, თუ E მოთავსებულია ღია G სიმრავლეში, მაშინ S სისტემის ქვესისტემა, რომელიც შედგება ამ სისტემის G-ში შემავალი ყველა სეგმენტიდან, ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით.

თეორემა 28. თუ რეგულარულ სეგმენტთა რაიმე S სისტემა ფარავს მოცემულ E სიმრავლეს ვიტალის აზრით,

მაშინ S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სეგმენტებისა $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$, რომლებიც E სიმრავლეს თითქმის ფარავენ, ე. ი.

$$\mu^*(E-\bigcup_k I_k)=0.$$

დამტკიცება. სიმარტივისათვის ეს თეორემა დავამტკიცოთ ორგანზომილებიან სივრცის შემთხვევისათვის. თეორემა დავამტკიცოთ ჯერ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც E სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, I_0 არის E სიმრავლის შემცველი რაიმე სეგმენტი. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ I_0 შეიცავს S სისტემის ყველა სეგმენტს.

S სისტემიდან ავიღოთ რაიმე სეგმენტი და იგი ავღნიშნოთ I_1-ით. შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს: 1) I_1 სეგმენტი E სიმრავლეს მთლიანად ფარავს. ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. 2) I_1 სეგმენტი E სიმრავლეს მთლიანად ვერ ფარავს. ამ შემთხვევაში S_1-ით აღვნიშნოთ S-ში შემავალი ყველა იმ სეგმენტის სიმრავლე, რომლებსაც I_1 სეგმენტთან საერთო წერტილები არა აქვთ. აღვნიშნოთ L_1-ით S_1 სისტემის სეგმენტების დიამეტრთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ცხადია, $L_1<d(I_0)$.

S_1 სისტემაში მოიძებნება ისეთი I_2 სეგმენტი, რომ $d(I_2)>\frac{L_1}{2}$. აქაც შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს: 1) I_1 და I_2 სეგმენტები ფარავენ E სიმრავლეს. ამ შემთხვევისათვის თეორემის მართებულობა ცხადია. 2) I_1 და I_2 სეგმენტები E სიმრავლეს მთლიანად ვერ ფარავენ. ამ შემთხვევაში S_2-ით აღვნიშნოთ S_1 სისტემაში შემავალი ყველა იმ სეგმენტთა სიმრავლე, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილები I_2-თან. ვთქვათ, L_2 არის S_2 სისტემის სეგმენტების დიამეტრთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. S_2-ში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი სეგმენტი I_3, რომ $d(I_3)>\frac{L_2}{2}$.

დავუშვათ, რომ ამ წესით გამოვყავით S სისტემიდან სეგმენტები

$$I_1,\ I_2, \ldots,\ I_k, \tag{5.1}$$

რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ. შესაძლოა ორ შემთხვევას ჰქონდეს ადგილი: 1) (5.1) სეგმენტები E სიმრავლეს მთლიანად ფარავს. ამ შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია. 2) (5.1) სეგმენტები E სიმრავლეს მთლიანად ვერ ფარავს. ამ შემთხვევაში, S_k-თი

აღვნიშნოთ S_{k-1} სისტემაში შემავალ ყველა იმ სეგმენტთა სიმრავლე, რომლებსაც I_k-სთან საერთო წერტილები არა აქვთ. L_k იყოს S_k სისტემის სეგმენტების დიამეტრთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. S_k-ში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი სეგმენტი I_{k+1}, რომ

$$d(I_{k+1}) > \frac{L_k}{2}.$$

ცხადია, I_{k+1} სეგმენტს არა აქვს საერთო წერტილი (5.1) სეგმენტებთან. აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა: 1) ეს პროცესი შეწყდება სასრული სვლის შემდეგ, ე. ი. ვიპოვით სასრულ რიცხვს სეგმენტებისას

$$I_1, I_2, \ldots, I_p,$$

რომლებიც E სიმრავლეს ფარავენ. ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. 2) ეს პროცესი უსაზღვროდ გაგრძელდება, ე. ი. S-დან შეგვიძლია გამოვყოთ ისეთ სეგმენტთა უსასრულო მიმდევრობა

$$I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots, \tag{5.2}$$

რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ, ამასთანავე,

$$d(I_{k+1}) > \frac{L_k}{2}.$$

დავამტკიცოთ, რომ (5.2) მიმდევრობის ყველა სეგმენტი თითქმის ფარავს E სიმრავლეს, ე. ი.

$$\mu^* H = 0,$$

სადაც

$$H = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k. \tag{5.3}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ

$$\mu^* H > 0.$$

აღვნიშნოთ I^*_k სიმბოლოთი რეგულარული სეგმენტი, რომლის ცენტრი ემთხვევა I_k სეგმენტის ცენტრს და $d(I^*_k) = 5d(I_k)$. რადგანაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant |I_0|,$$

ამიტომ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}|I^*_k|$ კრებადია და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|I_k^*|=25\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|I_k|<\mu^*(H).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu^*(H-\bigcup_{k=\nu+1}^{\infty}I_k^*)>0.$$

ამიტომ H სიმრავლეში არსებობს ისეთი x წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის არც ერთ I_k^* სეგმენტს, როცა $k>\nu$. ამას გარდა, (5.3) ტოლობის თანახმად,

$$x\overline{\in}\bigcup_{k=1}^{\nu}I_k.$$

რის გამო x წერტილი შეგვიძლია მოვათავსოთ S სისტემის ისეთი I სეგმენტის შიგნით, რომ

$$I\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu}I_k)=\Lambda.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$I\cap(\bigcup_{k=\nu+1}^{\infty}I_k)\neq\Lambda.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, I სეგმენტს არა აქვს საერთო წერტილი (5.2) მიმდევრობის არც ერთ სეგმენტთან. მაშინ ყოველი k-თვის გვექნება

$$d(I)\leqslant L_k<2d(I_{k+1}).$$

აქედან

$$d(I)\leqslant 2\lim_{k\to\infty}d(I_{k+1})=0.$$

მაშასადამე, $d(I)=0$, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად I_k სეგმენტებს შორის, სადაც $k>\nu$, არსებობს ერთი მაინც ისეთი სეგმენტი, რომელსაც I სეგმენტთან საერთო წერტილი აქვს.

ვთქვათ, k_0 არის k-ს უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $I\cap I_{k_0}\neq\Lambda$. მაშინ

$I\cap I_k=\Lambda$, როცა $k=1, 2, \ldots, k_0-1$, ამასთანავე $k_0>\nu$.

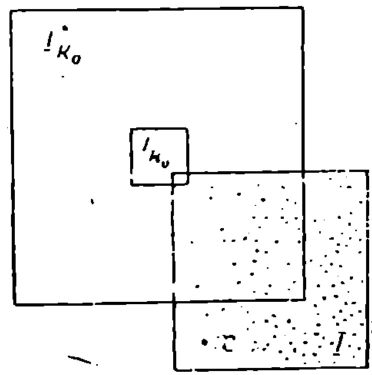
რადგანაც $I\in S_{k_0-1}$, ამიტომ

$$d(I)\leqslant L_{k_0-1}. \qquad (5.4)$$

შემდეგ, რაკი $x\in I^*_{k_0}$ და $x\in I$, ხოლო $I\cap I_{k_0}\neq\Lambda$, ამიტომ

$$d(I)>2d(I_{k_0})>L_{k_0-1},$$

რაც (5.4) უტოლობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, შეუძლებელია μ^*H იყოს დადებითი რიცხვი და ამიტომ $\mu^*H=0$. ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც E შემოსაზღვრული სიმრავლეა.



ნახ. 18.

ახლა ვთქვათ, რომ E სიმრავლე შემოსაზღვრული არ არის. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ინტერვალები

$$R^\circ_{p,q}=(p,\ p+1;\ q,\ q+1)\quad (p,\ q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_{p,q}=E\cap R^\circ_{p,q}\quad (p, q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

ყოველი $E_{p,q}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია. ზემოდამტკიცებულის ძალით, S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ისეთი სეგმენტებისა

$$I^{(1)}_{p,q},\ I^{(2)}_{p,q}, \ldots,\ I^{(k)}_{p,q}, \ldots,$$

რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\mu^*\Big(E_{p,q}-\bigcup_k I^{(k)}_{p,q}\Big)=0\quad (p, q=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \qquad (5.5)$$

ამას გარდა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $I^{(k)}_{p,q}\subset R^\circ_{p,q}$ $(k=1,\ 2, \ldots)$. ამიტომ $I^{(k)}_{p,q}$ $(p, q=0, \pm 1, \pm 2, \cdots;\ k=1, 2, \cdots)$ სეგმენტები წყვილ-წყვილად არ კვეთენ ერთმანეთს.

თუ (5.5) ტოლობებს შევაჯამებთ p და q-თი, გვექნება

$$\mu^*\Big(\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\bigcup_{q=-\infty}^{\infty}E_{p,q}-\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\bigcup_{q=-\infty}^{\infty}\bigcup_k I^{(k)}_{p,q}\Big)=0.$$

E სიმრავლე შეიძლება განსხვავდებოდეს $\bigcup\limits_{p=-\infty}^{\infty}\bigcup\limits_{q=-\infty}^{\infty}E_{p,q}$ სიმრავლისაგან ისეთ წერტილთა სიმრავლით, რომლებიც მდებარეობენ $R^{\circ}_{p,q}$ ინტერვალების საზღვრებზე. მაგრამ ასეთი წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულია, ამიტომ

$$\mu^*\Big(E-\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\bigcup_{q=-\infty}^{\infty}\bigcup_k I^{(k)}_{p,q}\Big)=0.$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 29. თუ რეგულარულ სეგმენტთა რაიმე S სისტემა ფარავს შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს ვიტალის აზრით, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული რიცხვი წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სეგმენტებისა $I_1, I_2, \cdots, I_\nu$, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$\sum_{k=1}^{\nu}|I_k|-\varepsilon<\mu^*E<\mu^*(E\cap\bigcup_{k=1}^{\nu}I_k)+\varepsilon.$$

დამტკიცება: აღებული დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს E სიმრავლის შემცველი ისეთი ღია G სიმრავლე, რომ

$$\mu^*G<\mu^*E+\varepsilon.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ G შეიცავს S სისტემის ყველა სეგმენტს. თანახმად 28-ე თეორემისა, S-დან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სეგმენტებისა $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$\mu^*(E-\bigcup_k I_k)=0,$$

S სისტემის ყოველი სეგმენტი G სიმრავლეშია მოთავსებული, ამიტომ

$$\sum_k|I_k|\leq\mu^*G<\mu^*E+\varepsilon<+\infty. \tag{5.6}$$

მაშასადამე, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$|I_{\nu+1}|+|I_{\nu+2}|+\cdots<\varepsilon.$$

შემდეგ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\mu^*E=\mu^*(E\cap\bigcup_k I_k)\leqslant\mu^*(E\cap\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k)+\mu^*(E\cap\bigcup_{k=\nu+1}^{\infty} I_k)<$$

$$<\mu^*(E\cap\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k)+\varepsilon. \tag{5.7}$$

(5.6) და (5.7) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{\nu}|I_k|-\varepsilon<\mu^*E<\mu^*(E\cap\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k)+\varepsilon.$$

მაშასადამე, $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ სეგმენტები საძიებელი სეგმენტებია. თეორემა დამტკიცებულია.

28-ე და 29-ე თეორემებს ეწოდება ვიტალის თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ.

შენიშვნა. თუ ვიტალის თეორემაში განხილულ რეგულარულ სეგმენტთა S სისტემას შევცვლით ნებისმიერ სეგმენტთა სისტემით, მაშინ, როგორც ეს ბანახმა დაამტკიცა, ვიტალის თეორემა, საზოგადოდ, მართებული არაა.

§ 6. ზომის ინვარიანტობა მოძრაობის მიმართ. არაზომადი სიმრავლე

ვთქვათ, მოცემულია წრფივი E სიმრავლე და რაიმე ნამდვილი a რიცხვი. აღვნიშნოთ E_a სიმბოლოთი $a+x$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც x გაირბენს E სიმრავლის ყველა ელემენტს. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ E_a სიმრავლე მიიღება E სიმრავლიდან პარალელური გადატანით. ცხადია, რომ $E_0=E$.

ლემა 1. თუ G წრფივი ღია სიმრავლეა, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის G_a წარმოადგენს ღია სიმრავლეს და $\mu(G_a)=\mu(G)$.

დამტკიცება. რადგანაც G ღია სიმრავლეა, ამიტომ იგი წარმოიდგინება როგორც ჯამი სასრული ან თვლადი სისტემის წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ინტერვალებისა:

$$G=\bigcup_k \delta^{(k)}.$$

ცხადია, რომ

$$G_a=\bigcup_k \delta_a^{(k)}$$

და ყოველი $\delta_a^{(k)}$ წარმოადგენს ინტერვალს, ამასთანავე $|\delta_a^{(k)}|=|\delta^{(k)}|$. მაშასადამე, G_a ღია სიმრავლეა და $\mu(G_a)=\mu(G)$, ვინაიდან $\delta_a^{(k)}$ ინტერვალები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული E სიმრავლისათვის და ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\mu^*(E)=\mu^*(E_a). \tag{6.1}$$

დამტკიცება. მე-9 თეორემის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ღია G სიმრავლე, რომ $E\subset G$ და

$$\mu(G)<\mu^*(E)+\varepsilon.$$

რადგანაც $G_a\supset E_a$ და $\mu(G_a)=\mu(G)$, ამიტომ

$$\mu^*(E_a)<\mu^*(E)+\varepsilon.$$

აქედან, ε-ის ნებისმიერობის გამო, გვაქვს

$$\mu^*(E_a)\leqslant\mu^*(E). \tag{6.2}$$

შემდეგ, რაკი E სიმრავლე შეგვიძლია მივიღოთ E_a სიმრავლიდან პარალელური გადატანით, ამიტომ

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(E_a). \tag{6.3}$$

(6.2) და (6.3) დამოკიდებულებებიდან მიიღება (6.1) ტოლობა.

თეორემა 30. თუ E შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეა, მაშინ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის ზომადია E_a სიმრავლეც და $\mu(E_a)=\mu(E)$.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. E სიმრავლის ზომადობის გამო არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G\supset E$, რომ

$$\mu^*(G-E)<\varepsilon.$$

რადგანაც $(G-E)_a=G_a-E_a$, ამიტომ მე-2 ლემის თანახმად

$$\mu^*(G_a-E_a)<\varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი ღია G_a სიმრავლე შეიცავს E_a სიმრავლეს, ამიტომ E_a სიმრავლე ზომადია. $\mu(E_a)=\mu(E)$ ტოლობის მართებულობა გამომდინარეობს მე-2 ლემიდან.

ახლა მოვიყვანოთ ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის მაგალითი. ვთქვათ, ξ ირაციონალური რიცხვია ან 0, ხოლო E_ξ იყოს $\xi+r$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც r ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია. E_ξ თვლადი სიმრავლეა. ცხადია, რომ $E_{\xi_1}=E_{\xi_2}$ ტოლობა მართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\xi_1-\xi_2$ წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვს. თუ $\xi_1-\xi_2$ ირაციონალური რიცხვია, მაშინ E_{ξ_1} და E_{ξ_2} სიმრავლეები არ იკვეთებიან.

აღვნიშნოთ S ასოთი ყველა იმ M_ξ სიმრავლის სისტემა, რომლებსაც წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო წერტილი. S სისტემის ყოველ M_ξ სიმრავლეში ავიღოთ ელემენტი $x=x(\xi)$, რომელიც მოთავსებულია $[0,1]$ სეგმენტში. ყველა ასეთი x ელემენტის სიმრავლე აღვნიშნოთ $H(x)$ სიმბოლოთი. დავამტკიცოთ $H(x)$ სიმრავლის არაზომადობა.

ვთქვათ, s_1 და s_2 რაციონალური რიცხვებია. თუ $H(x+s_1)$ და $H(x+s_2)$ სიმრავლეებს, რომლებიც მიიღება $H(x)$ სიმრავლიდან პარალელური გადატანით, აქვთ საერთო წერტილი $x_1+s_1=x_2+s_2$, მაშინ x_1 და x_2 მიეკუთვნება ერთსა და იმავე M_ξ სიმრავლეს. მაგრამ რაკი ყოველ ასეთ სიმრავლიდან აღებულია თითო ელემენტი x, ამიტომ $x_1=x_2$ და, მაშასადამე, $s_1=s_2$. ამრიგად, თუ $s_1\neq s_2$, მაშინ $H(x+s_1)$ და $H(x+s_2)$ სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი.

ახლა დავუშვათ, რომ $H(x)$ სიმრავლე ზომადია. მაშინ ზომადია ყოველი $H(x+s)$ სიმრავლე და, მაშასადამე, ზომადი იქნება აგრეთვე

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty} H\left(x+\frac{1}{k}\right)$$

სიმრავლეც. ეს სიმრავლე მოთავსებულია $[0,2]$ სეგმენტში. ამიტომ $\mu(M)\leqslant 2$.

შემდეგ, რაკი $H\left(x+\frac{1}{k}\right)$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან, ამიტომ

$$\mu(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left[H\left(x+\frac{1}{k}\right)\right].$$

მაგრამ

$$\mu\left[H\left(x+\frac{1}{k}\right)\right]=\mu\left[H(x)\right]\quad(k=1,\ 2,\ldots).$$

ამიტომ $\mu[H(x)]=0$. მაშასადამე, ყოველი ნამდვილი s რიცხვისათვის

$$\mu[H(x+s)]=0. \tag{6.4}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.4) ტოლობას, გვექნება

$$\mu(M^*)=0,$$

სადაც

$$M^*=\bigcup_s H(x+s).$$

აქ s გაირბენს ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლის ელემენტებს. მეორე მხრით, M^* შეიცავს ყველა ნამდვილ რიცხვს. ამიტომ

$$\mu(M^*)=+\infty.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა და, მაშასადამე, $H(x)$ სიმრავლე არაზომადია.

ამ მაგალითის აგებისას არსებითად გამოყენებულია ცერმელოს აქსიომა. ჯერ-ჯერობით აგებული არ არის არაზომადი სიმრავლე ცერმელოს აქსიომის გამოუყენებლად.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სრულყოფილი სიმრავლის ზომა ნულია.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ E დადებითი ზომის სიმრავლეა, მაშინ ამ სიმრავლეში არსებობს ისეთი p და q წერტილები, რომელთა შორის მანძილი რაციონალურია.

3. მოცემულია ნატურალური რიცხვი n და დადებითი რიცხვი $\sigma<1$. გავყოთ Δ სეგმენტი n კონგრუენტულ სეგმენტად $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. აღვნიშნოთ ν-თი იმ Δ_{m_k} სეგმენტთა რიცხვი $(1<k<\nu)$, რომელთათვის

$$\mu(E\cap\Delta_{m_k})>(1-\sqrt{\sigma})\,\frac{|\Delta|}{n},$$

სადაც E არის Δ სეგმენტში მოთავსებული ისეთი ზომადი სიმრავლე, რომლისთვისაც

$$\mu(E)>(1-\sigma)\,|\Delta|.$$

დაამტკიცეთ, რომ $\nu>(1-\sqrt{\sigma})\,n$ (ვლ. ჭელიძე).

თავი I

ზომადი ფუნქციები

§ 1. ზომადი ფუნქციის განსაზღვრა. ზომად ფუნქციათა უმარტივესი თვისებები

ლებეგის თანახმად, ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ზომადი ფუნქცია*, თუ ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის ზომადია $\{x:f(x)>A\}$ სიმრავლე.

თეორემა 1. *თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ზომად E სიმრავლეზე და $\{x:f(x)>r\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი რაციონალური r რიცხვისათვის, მაშინ $f(x)$ ზომადია E-ზე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, A რაიმე ირაციონალური რიცხვია. ამ რიცხვისათვის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა ისეთი კლებადი მიმდევრობა $\{r_k\}$, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} r_k=A$.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\{x:f(x)>A\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}.$$

რაკი ყოველი $\{x:f(x)>r_k\}$ სიმრავლე ზომადია, ამიტომ $\{x:f(x)>A\}$ სიმრავლეც ზომადია. ამრიგად, ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის $\{x:f(x)>A\}$ სიმრავლე ზომადია და ამიტომ $f(x)$ ფუნქციაც ზომადია.

თეორემა 2. *ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\{x:f(x)\geq A\}$ სიმრავლე იყოს ზომადი ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ზომადი ფუნქციაა. ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\{x:f(x)\geq A\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)>A-\frac{1}{k}\right\}.$$

რადგანაც $\left\{x : f(x)>A-\frac{1}{k}\right\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი k-თვის, ამიტომ $\{x : f(x)\geq A\}$ სიმრავლეც ზომადია და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\{x : f(x)\geq A\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია. ადვილად შეიძლება შემოწმდეს შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\{x : f(x)>A\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x : f(x)\geq A+\frac{1}{k}\right\}.$$

რაკი $\left\{x : f(x)\geq A+\frac{1}{k}\right\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი k-თვის, ამიტომ $\{x : f(x)>A\}$ სიმრავლეც ზომადია ყოველი A რიცხვისათვის. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. *თუ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ზომადია, მაშინ ყოველი ნამდვილი A და B რიცხვებისათვის, სადაც $A<B$, ზომადია შემდეგი სიმრავლეები:*

$$\{x : f(x)\leq A\},\ \{x : f(x)<A\},\ \{x : A<f(x)<B\},\ \{x : A\leq f(x)<B\},$$
$$\{x : A<f(x)\leq B\},\ \{x : A\leq f(x)\leq B\},\ \{x : f(x)>-\infty\},\ \{x : f(x)<+\infty\}.$$

დამტკიცება. მართლაც, შემდეგი ტოლობებიდან

$$\{x : f(x)\leq A\}=C\{x : f(x)>A\},\quad \{x : f(x)<A\}=C\{x : f(x)\geq A\},$$
$$\{x : A<f(x)<B\}=\{x : f(x)>A\}\cap\{x : f(x)<B\},$$
$$\{x : A\leq f(x)<B\}=\{x : f(x)\geq A\}\cap\{x : f(x)<B\},$$

C A

$$\{x : A<f(x)\leq B\}=\{x : f(x)>A\}\cap\{x : f(x)\leq B\},$$
$$\{x : A\leq f(x)\leq B\}=\{x : f(x)\geq A\}\cap\{x : f(x)\leq B\},$$

$$\{x : f(x)>-\infty\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x : f(x)>-k\},\ \{x : f(x)<+\infty\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x : f(x)<k\}$$

ადვილად დავასკვნით მოცემული სიმრავლეების ზომადობას.

განსაზღვრა 1. ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს ეწოდება *ეკვივალენტური*, თუ მათი მნიშვნელობები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნულზომიან სიმრავლის წერტილებზე, ე. ი.

$$\mu\{x : f(x)\neq\varphi(x)\}=0.$$

თეორემა 4. თუ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ეკვივალენტური არიან, ამასთანავე $f(x)$ ზომადია, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციაც ზომადია.

დამტკიცება. რადგანაც $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები განსხვავდება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებისაგან მხოლოდ ნულზომიან სიმრავლეზე, ამიტომ ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის $\{x: f(x)>A\}$ და $\{x: \varphi(x)>A\}$ სიმრავლეები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ნულზომიან სიმრავლით და, მაშასადამე, პირველი სიმრავლის ზომადობიდან გამომდინარეობს მეორე სიმრავლის ზომადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ზომადია შემდეგი სიმრავლეები:

$$\{x: f(x)\geq\varphi(x)\},\ \{x: f(x)=\varphi(x)\},\ \{x: f(x)>\varphi(x)\}.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$H=\{x: f(x)>\varphi(x)\},\ H_{ik}=\left\{x: f(x)>\frac{i}{k}>\varphi(x)\right\},$$

სადაც i და k მთელი რიცხვებია, მასთან $k>0$. დავამტკიცოთ, რომ

$$H=\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\ \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{ik}. \tag{1.1}$$

ვთქვათ, $x_1\in H$, მაშინ $f(x_1)>\varphi(x_1)$. ავიღოთ $f(x_1)$ და $\varphi(x_1)$ რიცხვებს შორის რაიმე რაციონალური რიცხვი $\frac{i_0}{k_0}$, სადაც i_0 და k_0 მთელი რიცხვებია, მასთან $k_0>0$:

$$f(x_1)>\frac{i_0}{k_0}>\varphi(x_1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1\in H_{i_0k_0}$. მაშასადამე,

$$H\subset\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\ \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{ik}. \tag{1.2}$$

ახლა ვთქვათ, $x_2\in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_{ik}$, მაშინ მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვები p და q, $q>0$, რომ $x_2\in H_{pq}$. ამიტომ

$$f(x_2)>\frac{p}{q}>\varphi(x_2)$$

და, მაშასადამე, $x_0 \in H$. ამრიგად

$$\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{ik} \subset H. \tag{1.3}$$

(1.2) და (1.3) დამოკიდებულებანი გვაძლევს (1.1) ტოლობას.

შემდეგ, რაკი

$$H_{ik} = \left\{x : f(x) > \frac{i}{k}\right\} \cap \left\{x : \varphi(x) < \frac{i}{k}\right\},$$

ამიტომ H_{ik} სიმრავლე ზომადია და, მაშასადამე, ზომადი იქნება H სიმრავლეც.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\{x : f(x) \geq \varphi(x)\} = C\{x : \varphi(x) > f(x)\}.$$

მაგრამ ზემოდამტკიცებულის ძალით $\{x : \varphi(x) > f(x)\}$ სიმრავლე ზომადია და, მაშასადამე, $\{x : f(x) > \varphi(x)\}$ სიმრავლე, როგორც დამატება ზომადი სიმრავლისა, ზომადია.

დასასრულს, რაკი

$$\{x : f(x) = \varphi(x)\} = \{x : f(x) \geq \varphi(x)\} \cap \{x : \varphi(x) \geq f(x)\},$$

ხოლო $\{x : f(x) \geq \varphi(x)\}$ და $\{x : \varphi(x) \geq f(x)\}$ სიმრავლეები ზომადია, ამიტომ $\{x : f(x) = \varphi(x)\}$ სიმრავლეც ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ არის ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, მაშინ ზომადია $|f(x)|^\alpha$ ფუნქციაც, სადაც α ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი A. თუ $A > 0$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\{x : |f(x)|^\alpha \geq A\} = \{x : f(x) \geq A^{\frac{1}{\alpha}}\} \cup \{x : f(x) \leqslant -A^{\frac{1}{\alpha}}\}$$

და რაკი $f(x)$ ფუნქცია ზომადია, ამიტომ

$$\{x : f(x) \geq A^{\frac{1}{\alpha}}\}$$

და

$$\{x : f(x) \leqslant -A^{\frac{1}{\alpha}}\}$$

სიმრავლეები იქნება ზომადი. მაშასადამე, ზომადია $\{x : |f(x)|^\alpha \geq A\}$ სიმრავლეც.

თუ $A \leq 0$, მაშინ $[x : |f(x)|^\alpha \geq A] = E$. ამრიგად, $\{x : |f(x)|^\alpha \geq A\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი ნამდვილი A რიცხვისათვის და ამიტომ $|f(x)|^\alpha$ ფუნქცია ზომადია.

თეორემა 7. თუ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ზომადია, მაშინ $Af(x)+B$, სადაც A და B რაიმე მუდმივებია, ზომადი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\{x : A\,f(x)+B > a\} = \left\{x : f(x) > \frac{a-B}{A}\right\}, \text{ თუ } A>0,$$

$$\{x : A\,f(x)+B > a\} = \left\{x : f(x) < \frac{a-B}{A}\right\}, \text{ თუ } A<0.$$

აქედან გამომდინარეობს $\{x : A\,f(x)+B > a\}$ სიმრავლის ზომადობა ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის. მაშასადამე, $A\,f(x)+B$ ფუნქცია ზომადია.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციებია, მაშინ $A\,f(x)+B\,\varphi(x)$ ფუნქციაც, სადაც A და B ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, იქნება ზომადი.

დამტკიცება. ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\{x : A\,f(x)+B\,\varphi(x) > a\} = \{x : A\,f(x) > -B\,\varphi(x)+a\}.$$

მე-7 თეორემის ძალით $A\,f(x)$ და $-B\,\varphi(x)+a$ ფუნქციები ზომადია და ამიტომ მე-5 თეორემის თანახმად, $\{x : A\,f(x)+B\,\varphi(x) > a\}$ სიმრავლე ზომადია. ეს კი ამტკიცებს ჩვენს თეორემას.

საზოგადოდ, თუ მოცემულია ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციები $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\cdots+A_mf_m(x)$ წარმოადგენს აგრეთვე ზომად ფუნქციას.

თეორემა 9. ორი ზომადი ფუნქციის ნამრავლი ზომადი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციებია. გვაქვს შემდეგი იგივეობა:

$$f\varphi = \frac{1}{2}\left[(f+\varphi)^2 - (f^2+\varphi^2)\right].$$

მე-8 და მე-6 თეორემების თანახმად, $(f+\varphi)^2$ და $f^2+\varphi^2$ ზომადი ფუნქციებია და, მაშასადამე, $f\varphi$ ნამრავლიც ზომადი ფუნქციაა.

თეორემა 10. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციებია, ამასთანავე E სიმრავლეზე $\varphi(x)\neq 0$, მაშინ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფუნქციაც ზომადია.

დამტკიცება. ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\left\{x:\frac{1}{\varphi(x)}>a\right\}=\begin{cases}\left\{x:0<\varphi(x)<\frac{1}{a}\right\}, & \text{თუ } a>0,\\ \{x:\varphi(x)>0\}, & \text{თუ } a=0,\\ \left\{x:\varphi(x)<\frac{1}{a}\right\}\cup\{x:\varphi(x)>0\}, & \text{თუ } a<0.\end{cases}$$

ამ ტოლობებიდან ვასკვნით, რომ $\frac{1}{\varphi(x)}$ ფუნქცია ზომადია. შემდეგ, რადგანაც

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)},$$

ამიტომ მე-9 თეორემის ძალით $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფუნქცია ზომადია.

თეორემა 11. თუ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია, მაშინ იგი ზომად ფუნქციას წარმოადგენს.

დამტკიცება. ვთქვათ, მაგალითად, $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ზემოდან. VII თავის 31-ე თეორემის თანახმად, ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $H=\{x:f(x)\geq a\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია E-ში. ამიტომ H იქნება ზომადი სიმრავლე და, მაშასადამე, $f(x)$ ზომადი ფუნქციაა.

§ 2. ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა

თეორემა 12. თუ მოცემულია ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომად ფუნქციათა კლებადი (ზრდადი) მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$, მაშინ $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა:

$$\{x:f(x)\geq a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)\geq a\}.$$

მაგრამ, რაკი $\{x:f_k(x)\geq a\}$ $(k=1,2,\cdots)$ სიმრავლეები ზომადია, ამიტომ $\{x:f(x)\geq a\}$ სიმრავლეც ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. თუ გვაქვს ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$, მაშინ $f(x)=\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ და $F(x)=\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ ზომადი ფუნქციებია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$h_k(x)=\sup\{f_{k+1}(x),\ f_{k+2}(x),\dots\}.$$

ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის გვაქვს ტოლობა

$$\{x: h_k(x)>a\}=\bigcup_{p=1}^{\infty}\{x: f_{k+p}(x)>a\}.$$

რაკი ყოველი $f_{k+p}(x)$ ფუნქცია ზომადია, ამიტომ $\{x: h_k(x)>a\}$ სიმრავლე ზომადია და, მაშასადამე, $h_k(x)$ ფუნქციაც ზომადია ($k=1, 2,\dots$).
შემდეგ, განსაზღვრის თანახმად,

$$\limsup_{k\to\infty} f_k(x)=\lim_{k\to\infty} h_k(x)=F(x).$$

მაგრამ, რადგანაც $h_1(x)\ge h_2(x)\ge\cdots\ge h_k(x)\ge\cdots$, ამიტომ მე-12 თეორემის ძალით, $F(x)$ ფუნქცია ზომადია. დაბოლოს, რაკი

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x)=-\limsup_{k\to\infty}[-f_k(x)],$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.
კერძოდ, თუ $\{f_k(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია რაიმე $\omega(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $\omega(x)=f(x)=F(x)$ და ამიტომ $\omega(x)$ ფუნქცია ზომადია.

განსაზღვრა 2. რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარტივი ფუნქცია, თუ მისი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია.

თეორემა 14. თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია მარტივი ფუნქციები $f_1(x)$ და $f_2(x)$, მაშინ მათი ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი კვლავ მარტივი ფუნქციებია.

დამტკიცება. რადგანაც $f_1(x)$ და $f_2(x)$ მარტივი ფუნქციებია, ამიტომ E შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად.

$$E=\bigcup_{k=1}^{p} E_k^{(1)},\qquad E=\bigcup_{k=1}^{q} E_k^{(2)},$$

ამასთანავე ყოველ $E_k^{(1)}$ სიმრავლეზე $f_1(x)$ ფუნქცია ღებულობს რაიმე

მუდმივ მნიშვნელობას $y_k^{(1)}$, ხოლო $f_2(x)$ — რაიმე მუდმივ $y_k^{(2)}$, მნიშვნელობას $E_k^{(2)}$ სიმრავლეზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H_{ik}=E_i^{(1)} \cap E_k^{(2)} \quad (i=1,\ 2, \ldots, p;\ k=1,\ 2, \ldots, q).$$

ცხადია, რომ H_{ik} წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეებია და, ამას გარდა,

$$E=\bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{k=1}^{q} H_{ik}.$$

ყოველი H_{ik} სიმრავლეზე მართებულია ტოლობები

$$f_1(x) \pm f_2(x)=y_i^{(1)} \pm y_k^{(2)}, \qquad f_1(x)\, f_2(x)=y_i^{(1)}\, y_k^{(2)}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f_1(x) \pm f_2(x)$ და $f_1(x)\, f_2(x)$ ფუნქციები მარტივია.

თეორემა 16. ყოველი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ზღვარი არაუარყოფით ზომად მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. $f_m(x)$ ფუნქცია განვსაზღვროთ ასე:

$$f_m(x)=\begin{cases} \dfrac{i-1}{2^m}, \text{ როცა } \dfrac{i-1}{2^m} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^m}, \ 1 \leqslant i \leqslant m \cdot 2^m, \\ m, \text{ როცა } f(x) \geqslant m, \end{cases}$$
$$(m=1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

ცხადია, $f_m(x)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $f_m(x) \geqslant 0, \quad m=1,\ 2,\ 3, \ldots,$

2) $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_m(x) \leqslant \cdots,$

3) $f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$ ზომადი მარტივი ფუნქციებია.

დავამტკიცოთ, რომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილში მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x)=f(x).$$

თუ $f(x)<+\infty$, მაშინ ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $m>f(x)$, გვექნება

$$0<f(x)-f_m(x)\leq\frac{1}{2^m},$$

ხოლო, თუ $f(x)=+\infty$, მაშინ ყოველი ნატურალური m-თვის გვაქვს $f_m(x)=m$ და ამიტომ $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)=+\infty$.

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16. ყოველი ზომადი ფუნქცია წარმოიდგინება როგორც მარტივ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი.

დამტკიცება. ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ზომადი $f(x)$ ფუნქცია. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overset{\bullet}{f}(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad \underset{\bullet}{f}(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

ცხადია, რომ $\overset{\bullet}{f}(x)$ და $\underset{\bullet}{f}(x)$ ზომადი არაუარყოფითი ფუნქციებია E სიმრავლეზე და, ამას გარდა, $f(x)=\overset{\bullet}{f}(x)-\underset{\bullet}{f}(x)$.

მე-15 თეორემის ძალით, არსებობს ზომად მარტივ ფუნქციათა ისეთი ორი მიმდევრობა $\{\varphi_k(x)\}$ და $\{\psi_k(x)\}$, რომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\overset{\bullet}{f}(x),\ \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=\underset{\bullet}{f}(x).$$

მე-14 თეორემის ძალით,

$$f_k(x)=\varphi_k(x)-\psi_k(x)\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

ზომადი მარტივი ფუნქციებია. ამას გარდა,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 8. ჩვენ ვიტყვით, რომ რაიმე A თვისებას ადგილი აქვს თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე, თუ E სიმრავლის იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც არ ხორციელდება A თვისება, ნულის ზომისაა.

თეორემა 17 (ეგოროვი[1]). თუ სასრული ზომის რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_m(x), \ldots, \tag{2.1}$$

რომელიც კრებადია თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე რაიმე სასრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$, რომ $\mu(E - F) \leqslant \varepsilon$ და F სიმრავლეზე (2.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი $f_m(x)$ ფუნქცია სასრულია E-ზე და, ამას გარდა, (2.1) მიმდევრობა კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

ავიღოთ რაიმე დადებითი ε რიცხვი და რაიმე ნატურალური რიცხვი ν. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_{p,\nu} = \bigcap_{m=p+1}^{\infty} \left\{ x : |f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2^{\nu+1}} \right\}.$$

მე-13 თეორემის თანახმად $f(x)$ ფუნქცია ზომადია და ამიტომ $E_{p\nu}$ $(p=0,\ 1,\ 2, \ldots)$ სიმრავლეები ზომადია. ამას გარდა, $E_{p\nu} \subset E_{p+1,\nu}$. შემდეგ, რაკი (2.1) მიმდევრობა კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ E სიმრავლის ყოველ წერტილში, ამიტომ

$$E = \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{p\nu}.$$

აქედან

$$\mu(E) = \lim_{p \to \infty} \mu(E_{p\nu}),$$

---

[1] ეგოროვი დ. თ. (1869 — 1931) — რუსი მათემატიკოსი, მოსკოვის უნივერსიტეტის პროფესორი, მოსკოვის მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდენტი (1922 — 1931). ეგოროვის ნაშრომები მიეკუთვნება დიფერენციალურ გეომეტრიას, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას, ვარიაციათა აღრიცხვას და ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიას. ამ წიგნში მოყვანილი ეგოროვის თეორემა გამოსავალ წერტილად გახდა მოსკოვის სკოლის მათემატიკოსების შრომებისათვის ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში. ეგოროვის მოწაფეებია გამოჩენილი საბჭოთა მეცნიერები: ნ. ნ. ლუზინი, ი. ი. პრივალოვი, ა. მ. რაზმაძე, ვ. ვ. გოლუბევი, ვ. ე. სტეპანოვი, ი. გ. პეტროვსკი, ლ. ნ. სრეტენსკი, ხ. პ. ფინიკოვი და სხვა.

ანუ

$$\lim_{p\to\infty} \mu(E-E_{p,\nu})=0.$$

მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი p_ν, რომ

$$\mu(E-E_{p_\nu,\nu})<\frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}.$$

ცხადია, რომ $E_{p_\nu,\nu}$ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x)-f_m(x)|<\frac{1}{2^{\nu+1}}, \text{ როცა } m>p_\nu. \tag{2.2}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$E^*=E-\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(E-E_{p_\nu,\nu}),$$

გვექნება

$$\mu(E-E^*)\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(E-E_{p_\nu,\nu})<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $E^*\subset E_{p_\nu,\nu}$ ნებისმიერი ν რიცხვისათვის.

(2.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია E^* სიმრავლეზე. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვი და ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი ν_0, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $2^{-\nu_0}<\delta$. განვიხილოთ E^* სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი x. ცხადია, $x\in E_{p_{\nu_0},\nu_0}$ და ამიტომ

$$|f_m(x)-f(x)|<2^{-\nu_0}<\delta, \text{ როდესაც } m>p_{\nu_0}.$$

ამრიგად, აღებული δ რიცხვისათვის ვიპოვეთ ისეთი ნატურალური რიცხვი p_{ν_0}, რომ E^* სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f_m(x)-f(x)|<\delta, \quad \text{როცა } m>p_{\nu_0}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (2.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია E^* სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შემდეგ, რაკი E^* სიმრავლე ზომადია, ამიტომ არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F\subset E^*$, რომ

$$\mu(E^*-F)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

(2.3) და (2.4) უტოლობათა ძალით,

$$E-F=(E-E^*)\cup(E^*-F)$$

ტოლობიდან გვაქვს

$$\mu(E-F)=\mu(E-E^*)+\mu(E^*-F)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

რადგანაც (2.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია E^* სიმრავლეზე, ამიტომ იგი თანაბრად კრებადი იქნება F სიმრავლეზედაც. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ზომად ფუნქციათა აგებულება

ზომადი ფუნქციის განსაზღვრიდან არ ჩანს, თუ რა აგებულებისაა ზომადი ფუნქციები. როგორც ლუზინმა[1] გამოარკვია, ზომადი ფუნქციების ცნება მჭიდროდ არის დაკავშირებული უწყვეტი ფუნქციის ცნებასთან. მოვიყვანოთ ჯერ შემდეგი

განსაზღვრა 1. ამბობენ, რომ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს C-*თვისება*, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F\subset E$, რომ $\mu(E-F)<\varepsilon$ და E-ზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლის მიმართ.

ლემა. *სასრული ზომის სიმრავლეზე განსაზღვრულ ყოველ ზომად მარტივ ფუნქციას აქვს C-თვისება.*

დამტკიცება. ვთქვათ, E სასრული ზომის სიმრავლეა, რომელზედაც განსაზღვრულია ზომადი მარტივი ფუნქცია $f(x)$. მისი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მნიშვნელობები იყოს $y_1, y_2, \ldots, y_m$. ვთქვათ,

$$E_k=\{x : f(x)=y_k\}\quad(k=1,\ 2,\ldots,\ m).$$

ეს სიმრავლეები ზომადია და წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. ცხადია, რომ

$$E=\bigcup_{k=1}^{m}E_k.$$

[1] ნ. ლუზინი (1883 — 1950) ერთ-ერთი ძირითადი წარმომადგენელია მოსკოვის მათემატიკური სკოლისა. მან ფართო გაქანება მისცა მოსკოვში ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის საკითხების დამუშავებას. ამ დარგში, ისევე როგორც თანამედროვე მათემატიკის სხვა დარგებში, საბჭოთა მათემატიკას მოწინავე ადგილი უკავია. პირველხარისხოვანი მნიშვნელობის გამოკვლევები ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში ლუზინს გარდა, ეკუთვნის დ. მენშოვს (დ. 1892) ა. ხინჩინს (1894 — 1959), ნ. ბარის (1900 — 1961), ა. კოლმოგოროვს (დ. 1903), პ. ალექსანდროვს (დ. 1896) და მრავალ სხვას.

ყოველი E_k სიმრავლის ზომადობის გამო ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F_k \subset E_k$, რომ

$$\mu(E_k - F_k) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} F_k.$$

F სიმრავლე ჩაკეტილია და $F \subset E$ და რადგანაც

$$E - F = \bigcup_{k=1}^{m} (E_k - F_k).$$

ამიტომ

$$\mu(E - F) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_k - F_k) < \varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია ყოველ ჩაკეტილ F_k სიმრავლეზე და F_k სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F-ზე F სიმრავლის მიმართ. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18 (ლუზინი). *სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრულ თითქმის ყველგან სასრულ $f(x)$ ფუნქციის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს C-თვისება.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ თითქმის ყველგან სასრული ზომადი ფუნქციაა E სიმრავლეზე. მე-16 თეორემის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ მარტივ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_m(x), \ldots, \tag{3.1}$$

რომელიც კრებადია E-ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ზემოდამტკიცებული ლემის თანახმად, ყოველ $f_m(x)$ ფუნქციას აქვთ C-თვისება. ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის და ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F_m \subset E$, რომ

$$\mu(E - F_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \tag{3.2}$$

და F_m-ზე $f_m(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F_m სიმრავლის მიმართ. ეგოროვის

თეორემის ძალით, $\frac{\varepsilon}{2}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F_0 \subset E$, რომ

$$\mu(E - F_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.3}$$

და (3.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია F_0 სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ვთქვათ,

$$F = \bigcap_{m=0}^{\infty} F_m.$$

ცხადია, რომ ჩაკეტილ F სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარს და, ამიტომ $f(x)$ იქნება უწყვეტი F სიმრავლეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$E - F = \bigcup_{m=0}^{\infty} (E - F_m).$$

აქედან, (3.2) და (3.3) უტოლობათა ძალით, გვექნება

$$\mu(E - F) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \mu(E - F_m) < \varepsilon.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას აქვს C-თვისება და ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $f(x)$ თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციაა და E სიმრავლეზე აქვს C-თვისება. მაშინ ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F_m \subset E$, რომ

$$\mu(E - F_m) < \frac{1}{m}$$

და F_m სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ამავე სიმრავლის მიმართ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$H = E - \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m,$$

გვექნება

$$E = H \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right). \tag{3.4}$$

ცხადია, რომ $\mu(H) = 0$.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სიმრავლეები:

$$H(a)=\{x:f(x)\geqslant a,\ x\in H\},$$
$$E(a)=\{x:f(x)\geqslant a,\ x\in E\},$$
$$F_m(a)=\{x:f(x)\geqslant a,\ x\in F_m\},$$

სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. (3.4) ტოლობის ძალით,

$$E(a)=H(a)\cup[\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(a)].$$

რაკი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F_m სიმრავლეზე ($m=1, 2,\cdots$), ამიტომ $F_m(a)$ სიმრავლე ჩაკეტილია და, მაშასადამე, იგი ზომადია. ამას გარდა, $H(a)$ სიმრავლის ზომა ნულია. ამრიგად, ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის $E(a)$ სიმრავლე ზომადია და ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 19. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული $f(x)$ ფუნქცია ზომადია, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $\varphi(x)$, რომ $\mu\{x:f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$.

დამტკიცება. ლუზინის თეორემის თანახმად, მოცემული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F\subset[a, b]$, რომ

$$\mu(F)>(b-a)-\varepsilon$$

და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე ამავე სიმრავლის მიმართ.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a\in F$. განვსაზღვროთ $\varphi(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{როდესაც } x\in F,\\ \dfrac{x-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}f(\beta_m)+\dfrac{\beta_m-x}{\beta_m-\alpha_m}f(\alpha_m), & \text{როდესაც } x\in\delta_m,\end{cases}$$

სადაც δ_m არის F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალი, რომლის ბოლოებია α_m და β_m. აქედან ჩანს, რომ $\varphi(x)$ არის წრფივი ფუნქცია ყოველ δ_m ინტერვალზე.

დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ იგი უწყვეტია მარჯვნიდან $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში. თუ x ეკუთვნის F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალს ან წარმოადგენს ამ ინტერვალის მარცხენა ბოლოს, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან x წერტილში ცხადია.

ვიგულისხმოთ, რომ $x \in F$ და იგი არ წარმოადგენს F სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალის მარცხენა ბოლოს. რადგანაც F სიმრავლეზე $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტი F-ის მიმართ, ამიტომ, თუ ავიღებთ x წერტილისაკენ კრებად ისეთ მიმდევრობას $\{x_m\}$, რომ $x_m \in F$ და $x_m \geqslant x$ $(m=1, 2, \ldots)$, მაშინ

$$\lim_{m \to \infty} f(x_m) = f(x).$$

ახლა ავიღოთ x წერტილისაკენ კრებადი ისეთი მიმდევრობა $\{x'_m\}$, რომ $x'_m > x$ და ყოველი x'_m ეკუთვნოდეს F სიმრავლისადმი მოსაზღვრე ინტერვალებს. ვთქვათ, $x'_m \in (\alpha_m, \beta_m)$. მაშინ

$$|\varphi(\alpha_m) - \varphi(\alpha'_m)| \leqslant |f(\alpha_m) - f(\beta_m)|.$$

მაგრამ $\lim_{m \to \infty} \alpha_m = \lim_{m \to \infty} \beta_m = x$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(\alpha_m) = \lim_{m \to \infty} \varphi(\beta_m) = f(x).$$

ვინაიდან $\alpha_m \in F$, $\beta_m \in F$, ამიტომ

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(x'_m) = \lim_{m \to \infty} \varphi(\alpha_m) = \varphi(x).$$

ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა მარცხნიდან $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში. მაშასადამე, $\varphi(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. ფუნქციათა მიმდევრობის ზომითი კრებადობა

ვთქვათ, R^n სივრცეში აღებული ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots \tag{4.1}$$

თანახმად ფ. რისის განსაზღვრისა, (4.1) მიმდევრობას ეწოდება ზ ო მ ი თ კ რ ე ბ ა დ ი თითქმის ყველგან სასრულ ზომადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ ყოველი დადებითი δ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m \to \infty} \mu\{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \delta\} = 0.$$

ზომით კრებადობას უწოდებენ აგრეთვე ასიმპტოტურ კრებადობას. თუ ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობა ზომით კრებადია ზომადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ დავწერთ:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{as} f_m(x) = f(x).$$

თეორემა 20. თუ ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებისაკენ E სიმრავლეზე, მაშინ ეს ზღვრული ფუნქციები ურთიერთ ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი დამოკიდებულება

$$\{x : |f(x) - \varphi(x)| \geqslant \delta\} \subset \left\{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{x : |f_m(x) - \varphi(x)| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\}. \tag{4.2}$$

მართლაც, ავიღოთ E სიმრავლის ნებისმიერი x_0 წერტილი, რომელიც (4.2) დამოკიდებულების მარჯვენა ნაწილს არ ეკუთვნის. მაშინ ყოველი m-თვის გვექნება

$$|f_m(x_0) - f(x_0)| < \frac{\delta}{2}, \quad |f_m(x_0) - \varphi(x_0)| < \frac{\delta}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$|f(x_0) - \varphi(x_0)| < \delta.$$

ე. ი. x_0 არ ეკუთვნის (4.2) დამოკიდებულების მარცხენა ნაწილსაც. ამრიგად, (4.2) დამოკიდებულების მარცხენა ნაწილის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის იმავე დამოკიდებულების მარჯვენა ნაწილს.

რადგანაც (4.1) მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებისაკენ, ამიტომ (4.2) თანაფარდობის მარჯვენა ნაწილის ზომა ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $m\to\infty$. ამიტომ

$$\mu\{x : |f(x) - \varphi(x)| \geqslant \delta\} = 0. \tag{4.3}$$

ცხადია, რომ

$$\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x : |f(x) - \varphi(x)| \geqslant \frac{1}{m}\right\} \cup H, \tag{4.4}$$

სადაც H იმ x წერტილთა სიმრავლეა, სადაც $f(x)$ და $\varphi(x)$ ერთსა და იმავე ნიშნის უსასრულოა. რადგანაც $f(x)$ და $\varphi(x)$ თითქმის ყველგან

სასრული ფუნქციებია, ამიტომ $\mu(H)=0$ და, მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (4.3) ტოლობას (4.4) დამოკიდებულებიდან მივიღებთ

$$\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}=0,$$

ე. ი. $f(x) \sim \varphi(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21 (ლებეგი). *თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობა კრებადია E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.*

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვები ε და δ. ეგოროვის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$ და ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon, \delta)$, რომ $\mu(E-F)<\varepsilon$ და F სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის

$$|f_m(x)-f(x)|<\delta, \text{ როცა } m>N(\varepsilon, \delta).$$

ცხადია, რომ

$$\mu\{x : |f_m(x)-f(x)| \geqslant \delta\}<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>N(\varepsilon, \delta).$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m \to \infty} \mu\{x : |f_m(x)-f(x)| \geqslant \delta\}=0$$

და ამით ლებეგის თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ზომად ფუნქციათა (4.1) მიმდევრობა შეიძლება ზომით კრებადი იყოს $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაგრამ იგი კრებადი არ იყოს E სიმრავლის არც ერთ წერტილში.

მართლაც, ვთქვათ, $R_0=[0 \leq x<1;\ 0 \leq y<1)$ კვადრატზე განსაზღვრულია ფუნქციები:

$$\varphi_{ij}^{(k)}(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } (x,y) \in R_{ij}^{(k)}, \\ 0, & \text{თუ } (x,y) \in R_0-R_{ij}^{(k)}, \end{cases}$$

სადაც

$$R_{ij}^{(k)}=\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k};\ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right] \quad (i, j=1, 2, \ldots, k),$$

ხოლო k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ამგვარად, ყოველ k-ს შეესაბამება ჯგუფი ფუნქციებისა. თუ k-ს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს და ზემოაღნიშნულ

ფუნქციებს მიმდევრობით გადავნომრავთ ერთი ნიშნაკით, მივიღებთ ფუნქციათა მიმდევრობას

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y), \dots \tag{4.5}$$

ვაჩვენოთ, რომ (4.5) მიმდევრობა ზომით კრებადია ნულისაკენ. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი $\delta \leq 1$. თუ $f_m(x, y)=\varphi_{ij}^{(k)}(x, y)$, მაშინ

$$\{(x, y) : |f_m(x, y)| \geq \delta\} = R_{ij}^{(k)}$$

და, მაშასადამე,

$$\mu\{(x, y) : |f_m(x, y)| \geq \delta\} = \frac{1}{k^2}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (4.5) მიმდევრობა ზომით კრებადია ნულისაკენ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (4.5) მიმდევრობა კრებადი არაა ნულისაკენ R_0-ის არც ერთ წერტილში. განვიხილოთ R_0-ის ნებისმიერი წერტილი (x_0, y_0). ცხადია, ყოველი k-თვის მოიძებნება ისეთი i და j, რომ $(x_0, y_0) \in R_{ij}^{(k)}$ და, მაშასადამე, $\varphi_{ij}^{(k)}(x_0, y_0)=1$. ამრიგად,

$$f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), \dots, f_m(x_0, y_0), \dots \tag{4.6}$$

მიმდევრობაში ყოველთვის შეხვდებით ერთის ტოლ რიცხვებს და ამიტომ (4.6) მიმდევრობა კრებადი არაა.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ ზომითი კრებადობის ცნება უფრო ზოგადია, ვიდრე თითქმის ყველგან კრებადობის ცნება.

თეორემა 22 (ფ. რისი). თუ ზომად E სიმრავლეზე ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_m(x)\}$ ზომით კრებადია ზომად $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია თითქმის ყველგან E-ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ m_1-ით ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც

$$\mu\left\{x : |f_{m_1}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\right\} < \frac{1}{2}.$$

შემდეგ, ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი $m_2 > m_1$, რომ

$$\mu\left\{x : |f_{m_2}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^2}\right\} < \frac{1}{2^2}.$$

საზოგადოდ, m_k იყოს ისეთი ნატურალური რიცხვი მეტი m_{k-1}-ზე, რომ

$$\mu\left\{x : |f_{m_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}.$$

ამგვარად, მოცემულ მიმდევრობიდან გამოვყავით ფუნქციათა ქვემიმდევრობა

$$f_{m_1}(x),\ f_{m_2}(x), \ldots, f_{m_k}(x), \ldots$$

დავამტკიცოთ, რომ თითქმის ყველგან E-ზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x). \tag{4.7}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E_i = \bigcup_{k=i}^{\infty}\left\{x : |f_{m_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}, \quad H = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i.$$

ცხადია, $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_i \supset \cdots$ და, მაშასადამე, IX თავის მე-18 თეორემის თანახმად

$$\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(H).$$

შემდეგ, რაკი

$$\mu(E_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}},$$

ამიტომ $\mu(H) = 0$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (4.7) ტოლობას ადგილი აქვს $E - H$ სიმრავლის ყოველ წერტილში. $E - H$ სიმრავლის ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი i_0, რომ $x_0 \overline{\in} E_{i_0}$ და ამიტომ

$$x_0 \overline{\in} \left\{x : |f_{m_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}, \text{ როცა } k \geqslant i_0.$$

მაშასადამე,

$$|f_{m_k}(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{2^k}, \text{ როცა } k \geqslant i_0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x_0) = f(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 23. $[a, b]$ სეგმენტზე ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი σ რიცხვი. მე-19 თეორემის ძალით, ყოველი ნატურალური k რიცხვისათვის არსებობს $[a, b]$-ზე უწყვეტი ისეთი $\varphi_k(x)$ ფუნქცია, რომ

$$\mu\left([x : |f(x) - \varphi_k(x)| \geqslant \sigma]\right) < \frac{1}{k}.$$

თუ k-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს $1, 2, \ldots,$ მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა $\{\varphi_k(x)\}$ მიმდევრობას, რომელიც ზომით კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 24 (მ. ფრეში). $[a, b]$ სეგმენტზე ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს $[a, b]$-ზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ეს თეორემა 23-ე და რისის თეორემის შედეგია.

სავარჯიშო

1. ვთქვათ, $f(x)=1$, როდესაც x რაციონალურია და $f(x)=2$, როცა x ირაციონალურია. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია ყოველ $[a, b]$ სეგმენტზე.

2. თუ E ზომადი სიმრავლეა, მაშინ მისი მახასიათებელი $\chi_E(x)$ ფუნქცია ზომადია. არის თუ არა მართებული შებრუნებული დებულება?

3. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\operatorname*{lim\,as}\limits_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)$ და $\operatorname*{lim\,as}\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x)=\varphi(x)$, მაშინ

$$\operatorname*{lim\,as}_{m\to\infty}[f_m(x)+\varphi_m(x)]=\operatorname*{lim\,as}_{m\to\infty} f_m(x)+\operatorname*{lim\,as}_{m\to\infty}\varphi_m(x).$$

4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\varphi(x)$ არის ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული, ხოლო $\operatorname*{lim\,as}\limits_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)$, მაშინ

$$\operatorname*{lim\,as}_{m\to\infty}[f_m(x)\varphi(x)]=f(x)\varphi(x).$$

თ ა ვ ი XI

ელემენტარული ფიგურის ფუნქციები

§ 1. ელემენტარული ფიგურის ფუნქციის ცნება

განსაზღვრა 1. R^n სივრცის წერტილთა რაიმე r სიმრავლეს ეწოდება ელემენტარული ფიგურა, თუ იგი წარმოიდგინება როგორც ჯამი ურთიერთ არაგადამფარავი n-განზომილებიანი სეგმენტებისა, რომელთა რიცხვი სასრულია.

ამ სეგმენტების ფართობთა ჯამს ეწოდება ელემენტარული r ფიგურის ფართობი და აღინიშნება იგი $|r|$ სიმბოლოთი.

ცარიელ სიმრავლესაც ელემენტარულ ფიგურად მივიჩნევთ.

ახლა ვთქვათ, r_0 რაიმე ელემენტარული ფიგურაა. თუ r_0-დან აღებულ ყოველ ელემენტარულ r ფიგურას შეესაბამება რაიმე წესით ნამდვილი რიცხვი $F(r)$, მაშინ ვიტყვით, რომ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია ელემენტარული ფიგურის $F(r)$ ფუნქცია.

განსაზღვრა 2. ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულ $F(r)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი r_0-ზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული ყოველი I სეგმენტისათვის, რომლის ფართობი δ-ზე ნაკლებია, მართებულია უტოლობა $|F(I)|<\varepsilon$.

განსაზღვრა 3. ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული $F(r)$ ფუნქციას ადიტიური ფუნქცია ეწოდება, თუ r_0-დან აღებული ურთიერთ არაგადამფარავი r_1 და r_2 ელემენტარული ფიგურებისათვის მართებულია ტოლობა

$$F(r_1 \cup r_2)=F(r_1)+F(r_2).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $F(r)$ ადიტიური ფუნქციაა r_0-ზე, მაშინ $F(\Lambda)=0$. მართლაც,

$$F(\Lambda)=F(\Lambda \cup \Lambda)=F(\Lambda)+F(\Lambda)=2F(\Lambda).$$

აქედან $F(\Lambda)=0$.

ღია G სიმრავლეზე განსაზღვრულ $F(r)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვე-

ტი G-ში, თუ იგი უწყვეტია G-ში მოთავსებულ ყოველ ელემენტარულ R ფიგურაზე.

განსაზღვრა 4. ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულ $F(r)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული r_0-ზე, თუ არსებობს ისეთი დადებითი K რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული ყოველი I სეგმენტისათვის მართებულია უტოლობა $|F(I)|\leqslant K$.

§ 2. ელემენტარული ფიგურის ფუნქცია სასრული ვარიაციით

ვთქვათ, ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია $F(r)$ ფუნქცია. გავყოთ r_0 ფიგურა სეგმენტებად $I_1, I_2, \ldots, I_m$, სადაც $r_0=\bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$ და განვიხილოთ ჯამი

$$S=\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|.$$

r_0 ფიგურის ყოველ დაყოფას სეგმენტებად შეესაბამება გარკვეული არაუარყოფითი რიცხვი S. ასეთ S რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ვუწოდებთ $F(r)$ ფუნქციის სრულ ანუ აბსოლუტურ ვარიაციას r_0-ზე და მას აღვნიშნავთ $\mathrm{V}(F;\ r_0)$ სიმბოლოთი. $F(r)$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია სასრული ვარიაციით, თუ $\mathrm{V}(F;\ r_0)<+\infty$.

ახლა გავყოთ r_0 ფიგურა სეგმენტებად $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ისე, რომ გვქონდეს $r_0=\bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$. აღვნიშნოთ P-თი ყველა დადებითი $F(I_k)$ რიცხვთა ჯამი, N-ით კი ყველა უარყოფითი $F(I_k)$ რიცხვთა ჯამი. ცხადია, რომ

$$P-N=\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|. \tag{2.1}$$

აღვნიშნოთ $\mathrm{V}^{+}(F;\ r_0)$ სიმბოლოთი P რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ამ ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $F(r)$ ფუნქციის დადებითი ვარიაცია r_0 ფიგურაზე.

$\mathrm{V}^{-}(F;\ r_0)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ N რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი. ამ ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება $F(r)$ ფუნქციის უარყოფითი ვარიაცია r_0 ფიგურაზე.

თეორემა 1. r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული ნებისმიერი $F(r)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$V^+(F;\ r_0)-V^-(F;\ r_0)=V(F;\ r_0). \tag{2.2}$$

დამტკიცება. (2.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$P-N\leqslant V(F;\ r_0).$$

აქედან ვღებულობთ

$$V^+(F;\ r_0)-V^-(F;\ r_0)\leqslant V(F;\ r_0). \tag{2.3}$$

იგივე (2.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|\leqslant V^+(F;\ r_0)-V^-(F;\ r_0).$$

საიდანაც

$$V(F;\ r_0)\leqslant V^+(F;\ r_0)-V^-(F,\ r_0). \tag{2.4}$$

(2.3) და (2.4) დამოკიდებულებებიდან მიიღება (2.2) ტოლობა.

თუ $F(r)$ არის ადიტიური ფუნქცია r_0 ფიგურაზე, მაშინ

$$V^+(F;\ r_0)=\sup_{r\subset r_0}F(r),\ \ V^-(F;\ r_0)=\inf_{r\subset r_0}F(r).$$

ამას გარდა,

$$P+N=F(r_0). \tag{2.5}$$

1-ლი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

შედეგი. თუ $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე, მაშინ $V^+(F;\ r_0)$ და $V^-(F;\ r_0)$ სასრულია და პირიქით, თუ $V^+(F;\ r_0)$ და $V^-(F;\ r_0)$ სასრულია, მაშინ $F(r)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე.

ცხადია, თუ $F(r)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით r_0-ფიგურაზე, მაშინ იგი იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0-დან აღებულ ყოველ ელემენტარულ r^* ფიგურაზე.

აგრეთვე ცხადია, რომ, თუ $F_1(r),\ F_2(r),\ldots,\ F_k(r)$ ფუნქციები სასრული ვარიაციისაა r_0 ფიგურაზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $C_1F_1(r)+C_2F_2(r)+\cdots+C_kF_k(r)$ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0-ზე.

თეორემა 2. თუ $F(r)$ არის ადიტიური ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(r_0)=V^+(F;\ r_0)+V^-(F;\ r_0). \tag{2.6}$$

დამტკიცება. (2.5) ტოლობიდან გვაქვს

$$P=F(r_0)-N\leqslant F(r_0)-V^-(F;\ r_0),$$

$$N=F(r_0)-P\geqslant F(r_0)-V^+(F;\ r_0).$$

მაშასადამე,

$$V^+(F;\ r_0)\leqslant F(r_0)-V^-(F;\ r_0),\ \ V^-(F;\ r_0)\geqslant F(r_0)-V^+(F;\ r_0).$$

ამ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (2.6) ტოლობა, რომელსაც $F(r)$ ფუნქციის ჟორდანის კანონიკური დაშლა ეწოდება.

თეორემა 3. თუ $F(r)$ არის ადიტიური ფუნქცია სასრული ვარიაციით ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე, მაშინ ვარიაციები $V^+(F;\ r)$, $V^-(F;\ r)$ და $V(F;\ r)$ აგრეთვე ადიტიური ფუნქციებია r_0 ფიგურაზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, r_1 და r_2 არიან r_0-დან აღებული არაგადამფარავი ელემენტარული ფიგურები. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად არსებობს შესაბამისად r_1 და r_2 ფიგურებზე ისეთი ელემენტარული ფიგურები $r_1^{(0)}$ და $r_2^{(0)}$, რომ

$$F\left(r_1^{(0)}\right)>V^+(F;\ r_1)-\frac{\varepsilon}{2},\ \ F\left(r_2^{(0)}\right)>V^+(F;\ r_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან

$$F\left(r_1^{(0)}\cup r_2^{(0)}\right)>V^+(F;\ r_1)+V^+(F;\ r_2)-\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$V^+(F;\ r_1\cup r_2)>V^+(F;\ r_1)+V^+(F;\ r_2)-\varepsilon.$$

რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$V^+(F;\ r_1\cup r_2)\geqslant V^+(F;\ r_1)+V^+(F;\ r_2). \tag{2.7}$$

შემდეგ, $r_1\cup r_2$ ფიგურიდან ავიღოთ ნებისმიერი ელემენტარული ფიგურა r. ეს ფიგურა შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ: $r=r_1^*\cup r_2^*$, სადაც $r_1^*\subset r_1$ და $r_2^*\subset r_2$. გვაქვს:

$$F(r)=F(r_1^*)+F(r_2^*)\leqslant V^+(F;\ r_1)+V^+(F;\ r_2).$$

აქედან

$$V^+(F;\ r_1 \cup r_2) \leqslant V^+(F;\ r_1) + V^+(F;\ r_2). \qquad (2.8)$$

(2.7) და (2.8) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$V^+(F;\ r_1 \cup r_2) = V^+(F;\ r_1) + V^+(F;\ r_2).$$

მაშასადამე, $V^+(F;\ r)$ არის ადიტიური ფუნქცია.

ანალოგიურად მტკიცდება $V^-(F;\ r)$ ფუნქციის ადიტიურობა r_0 ფიგურაზე.

დასასრულ, რადგანაც

$$V(F;\ r) = V^+(F;\ r) - V^-(F;\ r),$$

ამიტომ $V(F;\ r)$ ფუნქციაც ადიტიურია r_0 ფიგურაზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. თუ ადიტიური $F(r)$ ფუნქციის $V^+(F;\ r_0)$ და $V^-(F;\ r_0)$ ვარიაციებიდან ერთ-ერთი სასრულია, მაშინ $F(r)$ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $V^+(F;\ r_0)$ სასრულია. $F(r)$ ფუნქციის ადიტიურობის გამო, r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის გვაქვს

$$F(r) = F(r_0) - F(\overline{r_0 - r}) \geqslant F(r_0) - V^+(F;\ r_0).$$

მაშასადამე,

$$V^-(F;\ r_0) \geqslant F(r_0) - V^+(F;\ r_0).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $V^-(F;\ r_0)$ სასრულია და, მაშასადამე, $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია რაიმე ადიტიური $F(r)$ ფუნქცია. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{E}_\varepsilon(F;\ r_0) = \sup_{r \subset r_0} F(r), \quad \underline{E}_\varepsilon(F;\ r_0) = \inf_{r \subset r_0} F(r), \ |r| < \varepsilon.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, $\overline{E}_\varepsilon(F; r_0)$ და $\underline{E}_\varepsilon(F;\ r_0)$ არიან შესაბამისად ε-ის კლებადი და ზრდადი ფუნქციები. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{E}(F;\ r_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{E}_\varepsilon(F;\ r_0), \ \underline{E}(F;\ r_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{E}_\varepsilon(F;\ r_0).$$

ცხადია, რომ

$$\overline{E}(F;\ r_0) \geqslant 0,\ \ \underline{E}(F;\ r_0) \leqslant 0.$$

თეორემა 5. თუ ადიტიური $F(r)$ ფუნქციისათვის $\overline{E}(F;\ r_0)$ და $\underline{E}(F;\ r_0)$ სიდიდეებიდან ერთ-ერთი სასრულია, მაშინ $F(r)$ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, მაგალითად, $\overline{E}(F;\ r_0)<+\infty$. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი ε, რომ $\overline{E}_\varepsilon(F;\ r_0)<+\infty$. გავყოთ r_0 ფიგურა ისეთ სეგმენტებად $I_1, I_2, \ldots, I_m$, რომ ყოველი მათგანის ფართობი ნაკლები იყოს ε-ზე. ცხადია, რომ

$$\mathrm{V}^+(F;\ I_k) \leqslant \overline{E}_\varepsilon(F;\ r_0)\quad (k=1,\ 2, \ldots, m).$$

აქედან

$$\mathrm{V}^+(F;\ r_0)=\sum_{k=1}^{m} \mathrm{V}^+(F;\ I_k)\leqslant m\,\overline{E}_\varepsilon(F;\ r_0)<+\infty.$$

მე-4 თეორემის თანახმად, $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით.

§ 8. ელემენტარული ფიგურის მონოტონური ფუნქციები

ვთქვათ, r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია ადიტიური ფუნქცია $F(r)$. ჩვენ ვიტყვით, რომ $F(r)$ ზრდადია r_0-ზე, თუ r_0 ფიგურაში მოთავსებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის $F(r)\geqslant 0$, ხოლო იგი კლებადია r_0-ზე, თუ $F(r)\leqslant 0$ ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის, რომელიც მოთავსებულია r_0 ფიგურაში.

ადიტიურ $F(r)$ ფუნქციას მონოტონური ეწოდება r_0 ფიგურაზე, თუ იგი ზრდადი ან კლებადია r_0-ზე.

ცხადია, თუ $F(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე, მაშინ $F(r_1)\leqslant F(r_2)$, როცა $r_1\subset r_2$, ხოლო, თუ $F(r)$ კლებადია, მაშინ $F(r_1)\geqslant F(r_2)$, როცა $r_1\subset r_2$.

თეორემა 6. თუ ადიტიური $F(r)$ ფუნქცია მონოტონურია r_0 ფიგურაზე, მაშინ იგი არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0-ზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $F(r)$ ზრდადია r_0-ზე. მაშინ $\mathrm{V}^-(F;\ r_0)=0$ და, მაშასადამე, მე-4 თეორემის თანახმად $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე.

თეორემა 7 (ჟორდანი). ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული ელემენტარული ფიგურის ყოველი ადიტიური

ფუნქცია სასრული ვარიაციით შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(r)$ არის ადიტიური ფუნქცია სასრულო ვარიაციით r_0-ზე. მე-2 თეორემის თანახმად

$$F(r_0)=V^+(F;\ r_0)+V^-(F;\ r_0).$$

საზოგადოდ, r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის გვაქვს

$$F(r)=V^+(F;\ r)+V^-(F;\ r).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\Phi(r)=V^+(F;\ r),\quad \Psi(r)=-V^-(F;\ r),$$

გვექნება

$$F(r)=\Phi(r)-\Psi(r).$$

ცხადია, $\Phi(r)$ და $\Psi(r)$ ზრდადი ფუნქციებია r_0 ფიგურაზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები

განსაზღვრა 5. r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულ $F(r)$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი r_0-ზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ნებისმიერი $I_1, I_2, \ldots, I_m$ სეგმენტებისათვის, რომელთა ფართობების ჯამი δ-ზე ნაკლებია, მართებულია უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|<\varepsilon.$$

თეორემა 8. r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული ადიტიური $F(r)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობისათვის r_0-ზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $|F(r)|<\varepsilon$ ყოველი ელემენტარული $r\subset r_0$ ფიგურისათვის, რომლის ფართობი δ-ზე ნაკლებია.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსე-

ბობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის, რომლისთვისაც $|r|<\delta$, გვაქვს უტოლობა $|F(r)|<\varepsilon$.

ავიღოთ r_0-დან ნებისმიერი რიცხვი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტებისა $I_1, I_2, \ldots, I_m$, რომელთათვისაც

$$\sum_{k=1}^{m}|I_k|<\delta.$$

ვთქვათ, $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, \ldots, I_1^{(p)}$ ის სეგმენტებია აღებულ სეგმენტებიდან, რომელთათვის

$$F\left(I_1^{(k)}\right)<0 \quad (k=1, 2, \ldots, p),$$

ხოლო $I_2^{(1)}, I_2^{(2)}, \ldots, I_2^{(q)}$ იყოს დანარჩენი სეგმენტები მოცემულ სეგმენტებიდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$r_1=\bigcup_{k=1}^{p} I_1^{(k)}, \qquad r_2=\bigcup_{k=1}^{p} I_2^{(k)}.$$

ცხადია, რომ r_1 და r_2 ელემენტარული ფიგურებია და $|r_1|<\delta$, $|r_2|<\delta$. მაშასადამე,

$$F(r_1)=\sum_{k=1}^{p}F\left(I_1^{(k)}\right)<\varepsilon, \quad |F(r_2)|=\sum_{k=1}^{q}\left|F\left(I_2^{(k)}\right)\right|<\varepsilon.$$

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|=F(r_1)+|F(r_2)|<2\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს $F(r)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობა r_0 ფიგურაზე.

თეორემა 9. r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული ადიტიური $F(r)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობისათვის r_0-ზე, აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი ტოლობების შესრულება:

$$\overline{E}(F;\, r_0)=0, \quad \underline{E}(F;\, r_0)=0. \tag{4.1}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $F(r)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე. $F(r)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის, რომლის ფართობი δ-ზე ნაკლებია, ადგილი ექნება უტოლობას $|F(r)|<\varepsilon$. მაშასადამე,

$$\overline{E}_{\text{ გ}}(F;\ r_0)\leqslant\varepsilon,\quad |\underline{E}_{\text{ გ}}(F;\ r_0)|\leqslant\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{E}(F;\ r_0)\leqslant\varepsilon,\ |\underline{E}(F;\ r_0)|\leqslant\varepsilon.$$

რადგანაც ε ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ მართებულია (4.1) ტოლობები. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (4.1) ტოლობებს. ვაჩვენოთ, რომ $F(r)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ვიპოვოთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$-\varepsilon<\underline{E}_{\text{ გ}}(F;\ r_0)\leqslant 0,\quad 0\leqslant\overline{E}_{\text{ გ}}(F;\ r_0)<\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის, რომლის ფართობი δ-ზე ნაკლებია, მართებულია უტოლობა $|F(r)|<\varepsilon$. მაშასადამე, $F(r)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე. თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 10. *თუ $F(r)$ არის ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია r_0 ფიგურაზე, მაშინ იგი იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0-ზე.*

დამტკიცება. რადგანაც $F(r)$ აბსოლუტურად უწყვეტია r_0 ფიგურაზე, ამიტომ $\overline{E}(F;\ r_0)=0$ და, მაშასადამე, მე-5 თეორემის თანახმად $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი

თეორემა 11. *თუ $F_1(r),\ F_2(r),\ldots,\ F_m(r)$ ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია r_0 ფიგურაზე, მათი წრფივი კომბინაცია $C_1F_1(r)+C_2F_2(r)+\cdots+C_mF_m(r)$ იქნება აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია r_0-ზე.*

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი ადიტიური უწყვეტი ფუნქციისა სასრული ვარიაციით, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტი არ არის. ამისათვის განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სეგმენტი $r_0=[0,1;\ 0,1]$. აღვნიშნოთ

E-თი (0,0) და (1,1) წერტილების შემაერთებელი დიაგონალი. $F(r)$ ფუნქცია ასე განვსაზღვროთ:

$$F(r)=l(r \cap E),$$

სადაც r არის r_0-დან აღებული ნებისმიერი ორგანზომილებიანი სეგმენტი, ხოლო $l(r \cap E)$ წარმოადგენს აღებული დიაგონალის იმ ნაწილის სიგრძეს, რომელიც მოთავსებულია r სეგმენტის შიგნით. ცხადია, რომ $F(r)$ ადიტიური უწყვეტი ფუნქციაა. ამას გარდა, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$V(F;\ r_0)=\sqrt{2}.$$

მაშასადამე, $F(r)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით, მაგრამ იგი არაა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია r_0-ზე, ვინაიდან ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის, რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს გვაქვს $F(r)=\sqrt{2}$.

თეორემა 12. თუ $F(r)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქცია r_0 ფიგურაზე, მაშინ $F(r)$ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0-ზე.

დამტკიცება. რადგანაც $F(r)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი r_0 ფიგურაზე, ამიტომ რიცხვი 1-თვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ r_0-დან აღებული ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტებისათვის $I_1, I_2, \ldots, I_m$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_m|<\delta$, გვაქვს უტოლობა

$$|F(I_1)|+|F(I_2)|+\cdots+|F(I_m)|<1.$$

ვთქვათ,

$$K=\sup_{I\subset r_0}|F(I)|.$$

რადგანაც $F(r)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ K სასრულია.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტები

$$I_1,\ I_2, \ldots, I_m, \tag{4.2}$$

რომლებიც მოთავსებულია r_0-ში. აღვნიშნოთ ν ასოთი იმ I_k სეგმენტების რიცხვი, რომელთათვის

$$|I_k|\geqslant\frac{\delta}{2}.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\nu<\dfrac{2|r_0|}{\delta}$.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს სეგმენტებია შემდეგი:

$$I_1, I_2, \ldots, I_\nu.$$

მაშინ (4.2) მიმდევრობის დანარჩენი სეგმენტები იქნება

$$I_{\nu+1}, I_{\nu+2}, \ldots, I_m. \tag{4.3}$$

აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა:

1°. $|I_{\nu+1}|+|I_{\nu+2}|+\cdots+|I_m|<\delta$. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|=\sum_{k=1}^{\nu}|F(I_k)|+\sum_{k=\nu+1}^{m}|F(I_k)|<K\nu+1<K\cdot\frac{2|r_0|}{\delta}+1.$$

2°. $|I_{\nu+1}|+|I_{\nu+2}|+\cdots+|I_m|\geqslant\delta$. ამ შემთხვევაში (4.2) სეგმენტებისაგან შევადგინოთ სიმრავლეები

$$R_1=\bigcup_{i=1}^{k_1} I_{\nu+i},\ R_2=\bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} I_{\nu+i}, \ldots, R_\mu=\bigcup_{i=k_{\mu-1}+1}^{k_\mu} I_{\nu+i}$$

ისე, რომ მართებული იყოს უტოლობები

$$\frac{\delta}{2}\leqslant|R_i|<\delta\quad(i=1, 2, \ldots, \mu).$$

შემდეგ,

$$|r_0|\geqslant\sum_{i=1}^{\mu}|R_i|\geqslant\frac{\delta}{2}\mu.$$

აქედან

$$\mu\leqslant\frac{2|r_0|}{\delta}.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{m}|F(I_k)|=\sum_{k=1}^{\nu}|F(I_k)|+\sum_{i=1}^{k_1}|F(I_{\nu+i})|+\sum_{i=k_1+1}^{k_2}|F(I_{\nu+i})|+\cdots+$$

$$+\sum_{i=k_{\mu-1}+1}^{k_\mu}|F(I_{\nu+i})|<K\cdot\nu+\mu<K\cdot\frac{2|r_0|}{\delta}+\frac{2|r_0|}{\delta}.$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{m} |F(I_k)| < K \cdot \omega + \omega,$$

სადაც $\omega = \max\left\{1, \frac{|2| r_0}{\delta}\right\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$V(F; r_0) \leqslant K \cdot \omega + \omega < +\infty,$$

ე. ი. $F(r)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით r_0 ფიგურაზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თავი XII

წარმოებული რიცხვები

§ 1. დინის წარმოებული რიცხვები

ვთქვათ, R^1 სივრცის x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. გამოსახულებებს

$$\limsup_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{და} \quad \liminf_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ეწოდება შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზედა და მარჯვენა ქვედა წარმოებული რიცხვები x_0 წერტილში და მათ აღნიშნავენ $\overline{D}^+f(x_0)$ და $\underline{D}^+f(x_0)$ სიმბოლოებით.

ანალოგიურად განისაზღვრება $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზედა და მარცხენა ქვედა წარმოებული რიცხვები x_0 წერტილში. ამრიგად,

$$\limsup_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\overline{D}^+f(x),\quad \liminf_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underline{D}^+f(x_0),$$

$$\limsup_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\overline{D}^-f(x_0),\quad \liminf_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underline{D}^-f(x_0).$$

ეს წარმოებული რიცხვები დინის (Dini) მიერ იყო შემოღებული და ამიტომ მათ დინის წარმოებული რიცხვები ეწოდება. დინის წარმოებულ რიცხვებს შორის უდიდესსა და უმცირეს უწოდებენ შესაბამისად ზედა და ქვედა წარმოებულებს x_0 წერტილში და მათ აღნიშნავენ $\overline{D}f(x_0)$ და $\underline{D}f(x_0)$ სიმბოლოებით.

თუ $\overline{D}f(x_0)=\underline{D}f(x_0)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი x_0 წერტილში. ამ შემთხვევაში ზედა და ქვედა წარმოებულების საერთო

მნიშვნელობას ჰქვია $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში და იგი აღინიშნება $f'(x_0)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ

$$\overline{D} f(x_0) = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\underline{D} f(x_0) = \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

§ 2. მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს

XIX საუკუნის მეორე ნახევრამდე მათემატიკოსებს ეგონათ, რომ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს წარმოებული ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლებელია, ზოგიერთი განსაკუთრებული წერტილებისა, რომელთა რიცხვი სასრულია, მაგრამ ეს შეხედულება მცდარი აღმოჩნდა. რიმანმა ააგო უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არა აქვს წარმოებული მთელ სეგმენტში მკვრივ თვლად სიმრავლეზე. ამის შემდეგ ვაიერშტრასმა[1] ააგო უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არც ერთ წერტილში არ აქვს წარმოებული.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ ვანდერ-ვარდენის (Van der Waerden[2]) მაგალითს უწყვეტ ფუნქციისას, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს.

ავიღოთ $f_0(x)$ ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს მანძილს x წერტილიდან უახლეს მთელრიცხვა წერტილამდე. ცხადია, ეს ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით 1 და იგი წრფივია ყოველ $\left[\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2}\right]$ სეგმენტზე, სადაც i რაიმე მთელი რიცხვია. ყოველ ასეთ სეგმენტზე $y=f_0(x)$ წირის კუთხური კოეფიციენტია $+1$ ან -1.

---

[1] მაგალითი ისეთი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს, ვაიერშტრასზე 30 წლით ადრე ააგო ბოლცანომ, თუმცა თვითონ ბოლცანოს მიერ წარმოებულის არარსებობა დამტკიცებული იყო წერტილთა ყველგან მკვრივი სიმრავლისათვის.

[2] ვანდერ-ვარდენი (დ. 1903 წ.) — გერმანელი მათემატიკოსი; წარმოშობით ჰოლანდიელი. მისი ძირითადი ნაშრომები მიეკუთვნება ალგებრულ გეომეტრიას და ჯგუფთა თეორიის მეთოდების გამოყენებას კვანტური ფიზიკის საკითხებზე. აგრეთვე მუშაობს ძველი ეგვიპტისა და ძველი ბაბილონური მათემატიკისა და ასტრონომიის საკითხებზე.

განვიხილოთ ფუნქციები:

$$f_n(x)=\frac{1}{4^n}f_0(4^nx) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f_n(x)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{1}{4^n}$. მართლაც, გვაქვს

$$f_n\left(x+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{4^n}f_0\left[4^n\left(x+\frac{1}{4^n}\right)\right]=\frac{1}{4^n}f_0(4^nx+1)=\frac{1}{4^n}f_0(4^nx)=f_n(x).$$

ამას გარდა, $f_n(x)$ ფუნქცია წრფივია ყოველ $\left[\frac{i-1}{2\cdot 4^n}, \frac{i}{2\cdot 4^n}\right]$ სახის სეგმენტზე და ყოველ ასეთ სეგმენტზე $y=f_n(x)$ წირის კუთხური კოეფიციენტია $+1$ ან -1.

ვთქვათ,

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \tag{2.1}$$

ცხადია, რომ

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\cdot 4^n}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

ამიტომ (2.1) მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე და, მაშასადამე, $f_n(x)$ ფუნქციების უწყვეტობის გამო, $f(x)$ ფუნქციაც უწყვეტია ყოველ სეგმენტზე.

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული არც ერთ წერტილში. ნებისმიერი x წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის შემცველი სეგმენტები

$$\Delta_0\supset\Delta_1\supset\cdots\supset\Delta_n\supset\cdots,$$

სადაც $\Delta_n=\left[\frac{i_n-1}{2\cdot 4^n}, \frac{i_n}{2\cdot 4^n}\right]$, ხოლო i_n მთელი რიცხვია. ცხადია, $|\Delta_n|=$ $=\frac{1}{2\cdot 4^n}$ და ამიტომ Δ_n-ზე შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი წერტილი x_n, რომელიც დაშორებულია x წერტილიდან $\frac{1}{4^{n+1}}$ მანძილით. განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x}. \tag{2.2}$$

შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს:

1) $k>n$. ამ შემთხვევაში, რადგანაც $\frac{1}{4^{n+1}}$ წარმოადგენს $f_{n+1}(x)$,

$f_{n+2}(x), \dots$ ფუნქციების პერიოდთა მთელ ჯერადს, ამიტომ $f_k(x_n) - f_k(x) = 0$ და, მაშასადამე,

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = 0.$$

2) $k \leqslant n$. რაკი $f_k(x)$ ფუნქცია წრფივია Δ_k სეგმენტზე, ამიტომ იგი წრფივია Δ_n სეგმენტზედაც, რომელიც Δ_k სეგმენტის ნაწილს წარმოადგენს. მაშასადამე,

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \pm 1.$$

ამიტომ

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1).$$

მაგრამ $\sum\limits_{k=0}^{n} (\pm 1)$ ლუწი რიცხვია, თუ n კენტია და კენტი რიცხვია, როცა n ლუწია. მაშასადამე, $\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$ ფარდობა არ მიისწრაფვის რაიმე ზღვრისაკენ, როცა $n \to \infty$. შემდეგ, რაკი $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია არ იქნება წარმოებადი x წერტილში. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი არ არის არც ერთ წერტილში.

§ 3. წარმოებულის თვისება

ცნობილია, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის. დარბუს (Darboux)[1] მიერ აღმოჩენილი იყო, რომ ანა-

---

[1] გასტონ დარბუ (1842 — 1917) — ფრანგი მათემატიკოსი, 1884 წლიდან პარიზის აკადემიის წევრი, 1895 წლიდან პეტერბურგის აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი. ორიგინალური მეთოდებით დიფერენციალური გეომეტრიაში მიიღო მნიშვნელოვანი შედეგები. მას მნიშვნელოვანი შედეგები აქვს აგრეთვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

ლოგიური თვისება აქვს ფუნქციის წარმოებულსაც. სახელდობრ, მის მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

თეორემა 1. თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ი ს ყ ო ვ ე ლ წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა ქ ვ ს ს ა ს რ უ ლ ი ა ნ უ ს ა ს რ უ ლ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი, ა მ ა ს თ ა ნ ა ვ ე $f'(a)$ დ ა $f'(b)$ ს ა ს რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ $f'(x)$ მ ი ი ღ ე ბ ს ყ ო ვ ე ლ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი ა $f'(a)$ დ ა $f'(b)$ რ ი ც ხ ვ ე ბ ს შ ო რ ი ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f'(a)<f'(b)$. ავიღოთ $f'(a)$ და $f'(b)$ რიცხვებს შორის რაიმე λ რიცხვი:

$$f'(a)<\lambda<f'(b).$$

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $h>0$, რომ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<\lambda<\frac{f(b-h)-f(b)}{-h}. \tag{3.1}$$

განვიხილოთ ახლა ფუნქცია

$$F_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

ცხადია, $F_h(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b-h]$ სეგმენტზე და ამიტომ (3.1) უტოლობათა ძალით $[a, b-h]$ სეგმენტში არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$F_h(x_0)=\lambda,$$

ე. ი.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lambda.$$

მაგრამ, ლაგრანჟის თეორემის ძალით, $[x_0, x_0+h]$ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(\xi).$$

მაშასადამე,

$$f'(\xi)=\lambda,$$

სადაც $a<\xi<b$. თეორემა დამტკიცებულია.

საფრანგეთში ჩვეულება ჰქონდათ უწყვეტი ფუნქცია განესაზღვრათ ასე: ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში, თუ იგი ვერ გადავა ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე ისე, რომ არ გაიაროს საშუალედო მნიშვნე-

ლობები. ამ განსაზღვრას განიხილავდნენ, როგორც კოშის მიერ მოცემული უწყვეტობის განსაზღვრის ეკვივალენტურს. მაგრამ ეს მართებული არაა. მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, \text{ როცა } -\frac{1}{2\pi}\leqslant x<0, \quad 0<x\leqslant\frac{1}{2\pi}, \\ 0, \text{ როცა } x=0. \end{cases}$$

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$ სეგმენტზე. თუ $x\neq 0$, გვაქვს

$$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}.$$

ცხადია, რომ

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

ამრიგად, $f'(x)$ არსებობს x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$ სეგმენტიდან.

$f'(x)$ წყვეტილია $x=0$ წერტილში. მართლაც, რაკი $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ არ არსებობს, ამიტომ აგრეთვე არ არსებობს $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ და, მაშასადამე, $f'(x)$ წყვეტილია $x=0$ წერტილში. დარბუს თეორემის თანახმად $f'(x)$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, მოთავსებულს $f'\left(-\frac{1}{2\pi}\right)=-\frac{1}{\pi}$ და $f'\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$ რიცხვებს შორის. ამავე დროს 0 წერტილში $f'(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას.

§ 4. ფიგურის ფუნქციის წარმოებული რიცხვები

განსაზღვრა 1. R^n სივრცეში მოთავსებულ სიმრავლეთა $\{E_k\}$ მიმდევრობას ვუწოდოთ x წერტილისაკენ კუმშვადი მიმდევრობა, თუ x ეკუთვნის აღებული მიმდევრობის ყველა ელემენტს და $\lim\limits_{k\to\infty}d(E_k)=0$.

ვთქვათ, ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია სეგმენტის ნამდვილი $\varphi(q)$ ფუნქცია. ავიღოთ წერტილი $x\in r_0$ და ამ წერტილისაკენ კუმშვად რეგულარულ სეგმენტთა ისეთი მიმდევრობა $\{q_m\}$, რომლისთვისაც არსებობს $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(q_m)$. ეს ზღვარი აღვნიშნოთ λ-თი. ცხადია, λ დამო-

კიდებულია $\{q_m\}$ მიმდევრობაზე. ამრიგად, მივიღებთ რიცხვთა $\{\lambda\}$ სიმრავლეს. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 2. $\varphi(q)$ ფუნქციის ზედა ზღვარი r_0 ფიგურის x წერტილში ვუწოდოთ $L=\sup\{\lambda\}$ რიცხვს, ქვედა ზღვარი კი $l=\inf\{\lambda\}$ რიცხვს და ეს ზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად სიმბოლოებით $\limsup\limits_{|q|\to 0,\, x\in q}\varphi(q)$ და $\liminf\limits_{|q|\to 0,\, x\in q}\varphi(q)$.

ახლა ვთქვათ, R^n სივრცეში მოთავსებულ ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულია სეგმენტის რაიმე ნამდვილი $\Phi(r)$ ფუნქცია. ავიღოთ r_0 ფიგურის შიგა x წერტილი. გამოსახულებებს

$$\limsup_{|q|\to 0,\, x\in q}\frac{\Phi(q)}{|q|} \quad \text{და} \quad \liminf_{|q|\to 0,\, x\in q}\frac{\Phi(q)}{|q|},$$

სადაც q არის x წერტილის შემცველი რეგულარული n-განზომილებიანი სეგმენტი r_0-დან, ეწოდება შესაბამისად ზედა და ქვედა წარმოებულები $\Phi(r)$ ფუნქციისა x წერტილში და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად $\overline{\Phi}(x)$ და $\underline{\Phi}(x)$ სიმბოლოებით.

თუ $\overline{\Phi}(x)=\underline{\Phi}(x)$, მაშინ $\Phi(r)$ ფუნქციას ეწოდება x წერტილში წარმოებადი ფუნქცია. ამ შემთხვევაში, ზედა და ქვედა წარმოებულების საერთო მნიშვნელობას ეწოდება $\Phi(r)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში და იგი $\Phi'(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ ამ სეგმენტის ნებისმიერი ქვესეგმენტი $I=[\alpha, \beta]$ და განვიხილოთ სეგმენტის ფუნქცია

$$\Phi(I)=f(\beta)-f(\alpha).$$

$\Phi(I)$ ფუნქციას ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ფუნქცია.

თეორემა 2. თუ x_0 არის $[a, b]$ სეგმენტის შიგა წერტილი და არსებობს $f'(x_0)$, მაშინ იარსებებს $\Phi'(x_0)$ და ადგილი აქვს ტოლობას $f'(x_0)=\Phi'(x_0)$. პირიქით, თუ არსებობს $\Phi'(x_0)$, მაშინ არსებობს აგრეთვე $f'(x_0)$ და $f'(x_0)=\Phi'(x_0)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, არსებობს $f'(x_0)$. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე ქვესეგმენტი $I=[\alpha, \beta]$, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით x_0 წერტილს. გვაქვს:

$$\frac{\Phi(I)}{|I|}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}\cdot\frac{\beta-x_0}{\beta-\alpha}+\frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0}\cdot\frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რაკი არსებობს $f'(x_0)$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}<f'(x_0)+\varepsilon,$$

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0}<f'(x_0)+\varepsilon,$$

როდესაც $|I|=\beta-\alpha<\delta$. რადგანაც

$$\frac{\beta-x_0}{\beta-\alpha}>0,\ \frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha}>0,\ \frac{\beta-x_0}{\beta-\alpha}+\frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha}=1,$$

ამიტომ

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{\Phi(I)}{|I|}<f'(x_0)+\varepsilon,$$

როდესაც $|I|<\delta$. მაშასადამე, არსებობს $\Phi'(x_0)$ და იგი ტოლია $f'(x_0)$.

ახლა ვთქვათ, არსებობს $\Phi'(x_0)$. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ქვესეგმენტი $I=[x_0, x_0+h]$, $h>0$. რადგანაც არსებობს $\Phi'(x_0)$, ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ და იგი ტოლია $\Phi'(x_0)$, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული x_0 წერტილში ემთხვევა $\Phi'(x_0)$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა წარმოებული უდრის $\Phi'(x_0)$. მაშასადამე, $f'(x_0)$ არსებობს და იგი უდრის $\Phi'(x_0)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული სეგმენტის $F(I)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები $\overline{F}(x)$ და $\underline{F}(x)$ ზომადი ფუნქციებია r_0-ზე.

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ ჯერ ზედა წარმოებულისათვის. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$E=\{x:\overline{F}(x)\geqslant a\},\quad E_\nu=\left\{x:\overline{F}(x)>a-\frac{1}{\nu}\right\},$$

$$H_\nu=\left\{x:\overline{F}(x)\geqslant a-\frac{1}{\nu}\right\}, \tag{4.1}$$

სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ν კი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. $\Phi_{k,\nu}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ისეთი რეგულარული I სეგმენტთა სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ თანაფარდობებს

$$F(I)>\left(a-\frac{1}{\nu}\right)|I|,\ |I|<\frac{1}{k}.$$

ცხადია, ასეთი სეგმენტები არსებობს და ყოველი k-თვის $\Phi_{k,\nu}$ სისტემა ფარავს E_ν სიმრავლეს ვიტალის აზრით. მაშასადამე, ვიტალის თეორემის ძალით $\Phi_{k,\nu}$ ოჯახიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი სისტემა სეგმენტებისა, რომლებიც თითქმის ფარავენ E_ν სიმრავლეს. თუ ასეთ სეგმენტთა ჯამს $S_{k,\nu}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ ყოველი k-თვის გვექნება

$$E_\nu \subset S_{k,\nu} \cup A_{k,\nu}, \tag{4.2}$$

სადაც $A_{k,\nu}$ ნულზომიანი სიმრავლეა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_\nu = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{k,\nu}, \quad S = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu, \quad A_\nu = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,\nu}, \quad A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu. \tag{4.3}$$

ცხადია, რომ

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_{k,\nu}) = 0. \tag{4.4}$$

მეორე მხრით, რაკი ყოველი $S_{k,\nu}$ სიმრავლე F_σ ტიპის სიმრავლეა, ამიტომ იგი ზომადია და, მაშასადამე, ზომადია S სიმრავლეც. შემდეგ, (4.2) და (4.3) თანაფარდობათა ძალით, ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვაქვს

$$E_\nu \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} (S_{k,\nu} \cup A_{k,\nu}) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{k,\nu} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,\nu}\right) = S_\nu \cup A_\nu. \tag{4.5}$$

თუ $x \in S_\nu$, მაშინ ყოველი ნატურალური k რიცხვისათვის $\Phi_{k,\nu}$ სისტემაში არსებობს x წერტილის შემცველი ისეთი I სეგმენტი, რომ

$$F(I) > \left(a - \frac{1}{\nu}\right)|I|$$

და ამიტომ

$$\overline{F}(x) \geqslant a - \frac{1}{\nu}.$$

მაშასადამე (4.1)-ის უკანასკნელი ტოლობის თანახმად, $x \in H_\nu$.

ამრიგად, ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის $S_\nu \subset H_\nu$. მაშასადამე, (4.5) თანაფარდობათა ძალით

$$S = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu \subset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \subset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) = S \cup A.$$

(4.4) უტოლობის თანახმად, ამ უკანასკნელი თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu^*(E-S)\leqslant\mu^*A=0.$$

რადგანაც E განსხვავდება ზომადი S სიმრავლისაგან ნულზომიანი სიმრავლით, ამიტომ იგი ზომადი სიმრავლეა. მაშასადამე, $\overline{F}(x)$ წარმოებული ზომადია.

ახლა დავამტკიცოთ $\underline{F}(x)$ წარმოებულის ზომადობა. განვიხილოთ ფუნქცია $\Phi(I)=-F(I)$. ცხადია, რომ

$$\overline{\Phi}(x)=-\underline{F}(x).$$

ზემოდამტკიცებულის ძალით $\overline{\Phi}(x)$ ზომადი ფუნქციაა და, მაშასადამე, $\underline{F}(x)$ ფუნქციაც ზომადია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის დამტკიცება ბანახს ეკუთვნის. იმ შემთხვევაში, როცა $F(I)$ ფუნქცია ადიტიურია, თეორემა ლებეგის მიერ იყო დამტკიცებული.

შედეგი. თუ $F(I)$ ფუნქციას აქვს თითქმის ყველგან r_0-ში წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული ზომადი ფუნქციაა.

§ 6. ლებეგის თეორემები

ლემა 1. თუ $F(r)$ არის ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული ადიტიური ზრდადი ფუნქცია და r_0-დან აღებული E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $\bar{F}(x)>\lambda$, მაშინ $F(r_0)\geqslant\lambda\mu^*(E)$.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E სიმრავლე მოთავსებულია r_0 ფიგურის შიგნით. ვთქვათ, S არის r_0 ფიგურიდან აღებული ისეთი რეგულარული I სეგმენტების სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$F(I)>\lambda\,|\,I\,|. \tag{5.1}$$

ცხადია, S სისტემა ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\{\varepsilon_m\}$. ვიტალის თეორემის თანახმად ε_m რიცხვისათვის S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ისეთი $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ სეგმენტებისა, რომ

$$\sum_{k=1}^{\nu}|I_k|\geqslant\mu^*[E\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k)]>\mu^*(E)-\varepsilon_m. \tag{5.2}$$

რადგანაც $F(r)$ ზრდადი ფუნქციაა, ამიტომ (5.1) და (5.2) უტოლობათა ძალით გვაქვს:

$$F(r_0)\geqslant F(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k)=\sum_{k=1}^{\nu} F(I_k)>\lambda\sum_{k=1}^{\nu}|I_k|>\lambda[\mu^*(E)-\varepsilon_m].$$

ეს უტოლობა მართებულია ყოველი m-თვის. ამიტომ, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ

$$F(r_0)\geqslant\lambda\mu^*(E).$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. თუ r_0 ფიგურაზე $F(r)$ არის ადიტიური ზრდადი ფუნქცია, მაშინ თითქმის ყველგან r_0-ზე $\overline{F}(x)<+\infty$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=\{x:F(x)=+\infty\}.$$

წინა ლემის ძალით, ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის

$$F(r_0)\geqslant m\mu^*(E) \tag{5.3}$$

და რადგანაც $F(r_0)$ სასრული რიცხვია, ამიტომ (5.3) უტოლობა მართებულია ყველა m-თვის მაშინ, როცა $\mu^*(E)=0$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ყოველ ადიტიურ ფუნქციას სასრული ვარიაციით თითქმის ყველგან აქვს სასრული წარმოებული.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(r)$ ადიტიური ფუნქციაა სასრული ვარიაციით n განზომილებიან r_0 ფიგურაზე. ჟორდანის თეორემის თანახმად, ყოველი ადიტიური ფუნქცია სასრული ვარიაციით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი ფუნქციისა. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $F(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E=\{x:\overline{F}(x)>\underline{F}(x)\},\quad E_{i,k}=\left\{x:\overline{F}(x)>\frac{i+1}{k}>\frac{i}{k}>\underline{F}(x)\right\}, \tag{5.4}$$

სადაც i და k მთელი დადებითი რიცხვებია. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{i,k}. \tag{5.5}$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული i და k-თვის

$$\mu(E_{i,k})=0. \tag{5.6}$$

აღვნიშნოთ S-ით r_0-დან აღებული რეგულარული q სეგმენტთა ისეთი სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას

$$F(q)<\frac{i}{k}|q|. \tag{5.7}$$

ცხადია, რომ S სისტემა ფარავს $E_{i,k}$ სიმრავლეს ვიტალის აზრით.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვიტალის თეორემის ძალით, აღებული ε რიცხვისათვის S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ სეგმენტებისა, რომელთათვის მართებულია უტოლობები

$$\mu[E_{i,k}\cap(\bigcup_{j=1}^{\nu} q_j)]>\mu(E_{i,k})-\varepsilon, \tag{5.8}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}|q_j|<\mu(E_{i,k})+\varepsilon. \tag{5.9}$$

(5.7) და (5.9) უტოლობათა ძალით

$$\sum_{j=1}^{\nu}F(q_j)<\frac{i}{k}\sum_{j=1}^{\nu}|q_j|<\frac{i}{k}[\mu(E_{i,k})+\varepsilon]. \tag{5.10}$$

შემდეგ, რაკი $E_{i,k}$ სიმრავლის ყოველ x წერტილში $\overline{F}(x)>\frac{i+1}{k}$, ამიტომ 1-ლი ლემის თანახმად

$$F(q_j)\geqslant\frac{i+1}{k}\mu(q_j\cap E_{i,k}) \quad (j=1, 2, \ldots, \nu)$$

და, მაშასადამე, (5.8) უტოლობის ძალით

$$\sum_{j=1}^{\nu}F(q_j)\geqslant\frac{i+1}{k}\sum_{j=1}^{\nu}\mu(q_j\cap E_{i,k})=\frac{i+1}{k}\mu[E_{i,k}\cap(\bigcup_{j=1}^{\nu}q_j)]>$$

$$>\frac{i+1}{k}[\mu(E_{i,k})-\varepsilon]. \tag{5.11}$$

(5.10) და (5.11) უტოლობებიდან გვექნება

$$\frac{i+1}{k}\,[\mu\,(E_{i,k})-\varepsilon]<\frac{i}{k}\,[\mu(E_{i,k})+\varepsilon].$$

აქედან ვღებულობთ

$$\mu(E_{i,k})<(2i+1)\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო, უკანასკნელ უტოლობიდან მივიღებთ $\mu(E_{i,k})\leqslant 0$, ე. ი. $\mu(E_{i,k})=0$.

თუ გავითვალისწინებთ (5.5) ტოლობას, გვექნება $\mu(E)=0$. ამრიგად, თითქმის ყველგან r_0 ფიგურაზე

$$\overline{F}(x)=\underline{F}(x).$$

შემდეგ, მე-2 ლემის თანახმად, თითქმის ყველგან r_0 ფიგურაზე $\overline{F}(x)$ სასრულია და, მაშასადამე, თითქმის ყველგან r_0-ზე არსებობს სასრული წარმოებული $F'(x)$. ლებეგის თეორემა დამტკიცებულია,

შედეგი. r_0 ფიგურაზე ადიტიურ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას თითქმის ყველგან r_0-ზე აქვს სასრული წარმოებული.

თეორემა 5. r_0 ფიგურაზე ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი $F(r)$ ფუნქციის კლებადობისათვის (ზრდადობისათვის) აუცილებელია და საკმარისი, რომ თითქმის ყველგან r_0-ზე ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$F'(x)\leqslant 0 \quad [F'(x)\geqslant 0].$$

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ავიღოთ r_0-დან რაიმე სეგმენტი I. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=I\cap\{x:F'(x)\leqslant 0\}.$$

პირობის თანახმად

$$\mu(I-E)=0.$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. $F(r)$ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ I სეგმენტიდან აღებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ნებისმიერი $I_1, I_2, \ldots, I_m$ სეგმენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_m|<\eta,$$

ადგილი ექნება უტოლობას

$$|F(I_1)|+|F(I_2)|+\cdots+|F(I_m)|<\varepsilon. \tag{5.12}$$

აღვნიშნოთ S-ით ისეთი რეგულარული I^* სეგმენტთა სისტემა, რომელთათვის

$$F(I^*)\leqslant\varepsilon|I^*|. \tag{5.13}$$

ცხადია, S სისტემა ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით. ამიტომ ვიტალის თეორემის ძალით, S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ისეთი სეგმენტები $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_\nu^*$, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\mu[E\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)]>\mu(E)-\eta. \tag{5.14}$$

რადგანაც

$$I-E\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)\supset I-\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*,$$

ამიტომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ (5.14) უტოლობას, გვექნება

$$\mu(I-\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)\leqslant|I|-\mu[E\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)]=\mu(E)-\mu[E\cap(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)]<$$
$$<\mu(E)-[\mu(E)-\eta]=\eta.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $I-\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*$ სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტების სასრული სისტემისა. ვთქვათ, ეს სეგმენტებია $q_1, q_2, \ldots, q_i$. მაშინ

$$I=(\bigcup_{k=1}^{\nu} I_k^*)\cup(\bigcup_{k=1}^{i} q_k).$$

$F(r)$ ფუნქციის ადიტიურობისა და (5.12) და (5.13) თანაფარდობათა ძალით, გვაქვს

$$F(I)=\sum_{k=1}^{\nu} F(I_k^*)+\sum_{k=1}^{i} F(q_k)<\varepsilon\sum_{k=1}^{\nu} |I_k^*|+\varepsilon\leqslant\varepsilon(|r_0|+1).$$

რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $F(I)\leqslant 0$. მაშასადამე, $F(r)$ კლებადი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ $F(r)$ ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე და თითქმის ყველგან r_0-ზე $F'(x)=0$, მაშინ $F(r)=0$ ყოველი r-თვის r_0-დან.

შედეგი 2. თუ $F(r)$ და $\Phi(r)$ ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია r_0 ფიგურაზე და თითქმის ყველგან r_0-ზე $F(x)=\Phi'(x)$, მაშინ $F(r)=\Phi(r)$ ყოველი r ფიგურისათვის, რომელიც აღებულია r_0-დან.

თეორემა 6. თუ $F(r)$ არის ელემენტარული ფიგურის ადიტიური უწყვეტი ფუნქცია r_0 ფიგურაზე და r_0-ის ყოველ x წერტილში ადგილი აქვს უტოლობას $\underline{F}(x)\geqslant 0$, მაშინ $F(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0-ზე.

დამტკიცება. მსჯელობის სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ r_0 არის ორგანზომილებიანი ელემენტარული ფიგურა.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა r_0-ის ყოველ x წერტილში ადგილი აქვს უტოლობას

$$\underline{F}(x)>0. \tag{5.15}$$

ავიღოთ r_0-დან ნებისმიერი რეგულარული სეგმენტი Q და ვაჩვენოთ, რომ $F(Q)\geqslant 0$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $F(Q)<0$. გავყოთ Q სეგმენტი ოთხ კონგრუენტულ სეგმენტად $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}$. მაშინ $F(Q^{(1)}), F(Q^{(2)}), F(Q^{(3)}), F(Q^{(4)})$ რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია. ზემოაღნიშნული სეგმენტებიდან აღვნიშნოთ Q_1 ასოთი ის სეგმენტი, რომლისთვისაც $F(Q_1)<0$.

ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ავაგებთ ისეთ რეგულარულ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$Q=Q_0\supset Q_1\supset\cdots\supset Q_m\supset\cdots, \tag{5.16}$$

რომ $F(Q_m)<0 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. ცხადია,

$$d(Q_m)=\frac{d(Q)}{2^m}\to 0, \text{ როცა } m\to\infty.$$

მაშასადამე, არსებობს ერთადერთი წერტილი x_0, რომელიც ეკუთვნის ყველა Q_m $(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ სეგმენტს. შემდეგ, რადგანაც $F(Q_m)<0$, ამიტომ

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{F(Q_m)}{|Q_m|}\leqslant 0.$$

მაგრამ

$$\underline{F}(x_0)\leqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{F(Q_m)}{|Q_m|}.$$

აქედან ვღებულობთ $\underline{F}(x_0)\leqslant 0$, რაც (5.15) პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $F(Q)\leqslant 0$, არაა სწორი. ამიტომ $F(Q)\geqslant 0$.

ახლა ვთქვათ, r რაიმე სეგმენტია r_0-დან. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის r სეგმენტი შეგვიძლია გავყოთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ რეგულარულ სეგმენტებად $q_1, q_2, \ldots, q_m$ და R სეგმენტად ისე, რომ $|F(R)|<\varepsilon$. ზემოდამტკიცებულის ძალით $F(q_k)\geqslant 0 (k=1, 2, \ldots, m)$. მაშასადამე,

$$F(r)=F(q_1)+F(q_2)+\cdots+F(q_m)+F(R)>-\varepsilon.$$

რადგანაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $F(r)\geqslant 0$.

ამრიგად, r_0-დან აღებული ყოველი r სეგმენტისათვის $F(r)\geqslant 0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ r ნებისმიერი ელემენტარული ფიგურაა r_0-დან, მაშინ $F(r)\geqslant 0$.

ახლა ვთქვათ, r_0-ის ყოველ x წერტილში $\underline{F}(x)\geqslant 0$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi(r)=F(r)+\varepsilon|r|,$$

სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ცხადია, რომ

$$\underline{\Phi}(x)=\underline{F}(x)+\varepsilon>0$$

r_0 ფიგურის ყოველ წერტილში. ზემოდამტკიცებულის ძალით, ყოველი ელემენტარული ფიგურისათვის $r\subset r_0$ გვაქვს $\Phi(r)\geqslant 0$, ანუ $F(r)+\varepsilon|r|\geqslant 0$. რაკი ε რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია, ამიტომ $F(r)\geqslant 0$. მაშასადამე, $F(r)$ ფუნქცია ზრდადია r_0-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. თუ $F(r)$ არის n-განზომილებიანი ელემენტარული ფიგურის ადიტიური უწყვეტი ფუნქცია r_0 ფიგურაზე, თითქმის ყველგან r_0-ზე $\underline{F}(x)\geqslant 0$ და r_0-ის ყოველ წერტილში $\underline{F}(x)>-\infty$, მაშინ $F(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0-ზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=\{x:\underline{F}(x)<0\}^1.$$

პირობის ძალით $\mu(E)=0$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის ავაგოთ ისეთი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლე $G_m\supset r_0$, რომ

$$G_m\supset E \text{ და } \mu(G_m)<\frac{\varepsilon}{2m}.$$

[1] ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E სიმრავლის ყველა წერტილი მოთავსებულია r_0 ფიგურის შიგნით.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi_m(r)=\mu(G_m \cap r),$$

სადაც r ელემენტარული ფიგურაა r_0 ფიგურიდან. ცხადია, $\Phi_m(r)$ ადიტიური ზრდადი ფუნქციაა r_0-ზე და

$$\Phi_m(r)<\frac{\varepsilon}{2^m}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ G_m სიმრავლის ყოველ x წერტილში $\Phi_m'(x)=1$. კერძოდ, E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $\Phi'_m(x)=1$. განვიხილოთ მწკრივი

$$\Psi_\varepsilon(r)=\Phi_1(r)+\Phi_2(r)+\cdots+\Phi_m(r)+\cdots$$

ეს მწკრივი კრებადია და $\Psi_\varepsilon(r)<\varepsilon$. ამას გარდა, $\Psi_\varepsilon(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0-ზე.

ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ν და განვიხილოთ E სიმრავლის რაიმე x წერტილი. ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ x წერტილის შემცველი ისეთი რეგულარული სეგმენტი q, რომელიც მთლიანად მოთავსდება სიმრავლეთა $\bigcap\limits_{k=1}^{\nu} G_k$ გადაკვეთაში. ასეთი q სეგმენტისათვის გვაქვს

$$\frac{\Psi_\varepsilon(q)}{|q|}\geqslant\sum_{m=1}^{\nu}\frac{\Phi_m(q)}{|q|}=\nu.$$

აქედან

$$\underline{\Psi}_\varepsilon(x)\geqslant\nu.$$

რადგანაც ν ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ამიტომ $\underline{\Psi}_\varepsilon(x)=+\infty$. ამრიგად, E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $\underline{\Psi}_\varepsilon(x)=+\infty$.

შემდეგ, განვიხილოთ ფუნქცია

$$\chi(r)=F(r)+\Psi_\varepsilon(r).$$

ვაჩვენოთ, რომ r_0 ფიგურის ყოველ წერტილში $\underline{\chi}(x)\geqslant 0$. რადგანაც $\Psi_\varepsilon(r)$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ

$$\frac{\chi(q)}{|q|}\geqslant\frac{F(q)}{|q|}.$$

ასე რომ, თუ $x\overline{\in}E$, მაშინ $\underline{\chi}(x)\geqslant 0$. მაგრამ, თუ $x\in E$, მაშინ $\underline{\Psi}_\varepsilon(x)=+\infty$, ხოლო $\dfrac{F(q)}{|q|}$ ფარდობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, $\underline{\chi}(x)=+\infty$.

ამრიგად, r_0 ფიგურის ყოველ x წერტილში $\underline{\chi}(x)\geqslant 0$ და ამიტომ მე-6 თეორემის ძალით $\chi(r)$ ზრდადი ფუნქციაა r_0-ზე, ე. ი.

$$F(r)+\Psi_\varepsilon(r)\geqslant 0 \tag{5.17}$$

r_0-დან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის. შემდეგ, რაკი $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon(r)=0$, ამიტომ (5.17) თანაფარდობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon\to 0$, მივიღებთ $F(r)\geqslant 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციები

ზემოდამტკიცებული თეორემები შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. ავიღოთ ამ სეგმენტის ნებისმიერი ქვესეგმენტი $I=[\alpha, \beta]$. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ფუნქცია

$$\Phi(I)=f(\beta)-f(\alpha).$$

თუ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ არიან $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტები, მაშინ განსაზღვრის ძალით

$$\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\Phi(I_k).$$

მაშასადამე, $\Phi(I)$ წარმოადგენს ადიტიურ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა 8. *თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე არსებობს სასრული წარმოებული $f'(x)$.*

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ფუნქცია $\Phi(I)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე და ამიტომ მე-4 თეორემის ძალით თითქმის ყველგან არსებობს $\Phi(I)$ ფუნქციის სასრული წარმოებული და, მაშასადამე, თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე არსებობს აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის სასრული წარმოებულიც.

კერძოდ, თუ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე მას აქვს სასრული წარმოებული.

თეორემა 9. *$[a, b]$ სეგმენტზე აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობისათვის (კლებადობისათვის),*

აუცილებელია და საკმარისი, რომ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$f'(x) \geqslant 0 \quad [f'(x) \leqslant 0].$$

ეს თეორემა მე-5 თეორემიდან გამომდინარეობს.

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილში $f'(x)=0$, მაშინ მოცემული ფუნქცია მუდმივია $[a, b]$-ზე.

შედეგი 2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილში $f'(x)=g'(x)$, მაშინ მოცემული ფუნქციები მხოლოდ მუდმივით განსხვავდებიან.

§ 7. მაგალითი ზრდადი ფუნქციისა, რომლის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულია

ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ თუ ერთი ცვლადის ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია რაიმე სეგმენტზე და მისი წარმოებული თითქმის ყველგან ნულია, მაშინ აღებული ფუნქცია მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა მუდმივისაგან განსხვავებული ისეუწყვეტი ფუნქცია სასრული ვარიაციით, რომლის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლი იყოს? პასუხი დადებითია.

მოვიყვანოთ მაგალითი. ავიღოთ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვი ϑ და განვიხილოთ ფუნქცია

$$f_0(x)=x, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

გავყოთ $[0,1]$ სეგმენტი ორ კონგრუენტულ სეგმენტად $\Delta_0^{(1)}=\left[0, \frac{1}{2}\right]$ და $\Delta_1^{(1)}=\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. განვსაზღვროთ $f_1(x)$ ფუნქცია ასე:

1) $f_1(0)=f_0(0), \quad f_1\left(\frac{1}{2}\right)=f_0\left(\frac{1}{2}\right), \ f_1(1)=f_0(1),$

$$f_1\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1+\vartheta}{2} f_0\left(\frac{1}{2}\right), \quad f_1\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1-\vartheta}{2} f_0\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1+\vartheta}{2} f_0(1);$$

2) $f_1(x)$ უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე და წრფივია $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ ინტერვალებზე.

ახლა [0,1] სეგმენტი გავყოთ ოთხ კონგრუენტულ სეგმენტად

$$\Delta_0^{(2)}=\left[0,\ \frac{1}{4}\right],\quad \Delta_1^{(2)}=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],\quad \Delta_2^{(2)}=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\quad \Delta_3^{(2)}=\left[\frac{3}{4},\ 1\right].$$

ეს სეგმენტები ზოგადად ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Delta_k^{(2)}=\left[\alpha_k^{(2)},\alpha_{k+1}^{(2)}\right],\ \text{სადაც}\ \alpha_k^{(2)}=\frac{k}{2^2}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 2^2-1).$$

განვსაზღვროთ $f_2(x)$ ფუნქცია ასე:

$$1)\quad f_2\left(\alpha_k^{(2)}\right)=f_1\left(\alpha_k^{(2)}\right),\ f_2\left(\frac{\alpha_k^{(2)}+\alpha_{k+1}^{(2)}}{2}\right)=\frac{1-\vartheta}{2}f_1\left(\alpha_k^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{1+\vartheta}{2}f_1\left(\alpha_{k+1}^{(2)}\right)\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 2^2-1);$$

2) $f_2(x)$ უწყვეტია [0,1] სეგმენტზე და წრფივია $\left(\alpha_k^{(2)},\ \frac{\alpha_k^{(2)}+\alpha_{k+1}^{(2)}}{2}\right)$ და $\left(\frac{\alpha_k^{(2)}+\alpha_{k+1}^{(2)}}{2},\ \alpha_{k+1}^{(2)}\right)$ ინტერვალებზე.

საზოგადოდ, ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი n და გავყოთ [0,1] სეგმენტი კონგრუენტულ სეგმენტებად $\Delta_k^{(n)}=\left[\alpha_k^{(n)},\ \alpha_{k+1}^{(n)}\right]$, სადაც

$$\alpha_k^{(n)}=\frac{k}{2^n}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 2^n-1).$$

დავუშვათ, რომ $f_n(x)$ განსაზღვრულია და უწყვეტია [0,1] სეგმენტზე და ყოველ $\Delta_k^{(n)}$ სეგმენტზე წრფივია. $f_{n+1}(x)$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$1)\quad f_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)=f_n\left(\alpha_k^{(n)}\right),\ f_{n+1}\left(\frac{\alpha_k^{(n)}+\alpha_{k+1}^{(n)}}{2}\right)=\frac{1-\vartheta}{2}f_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)+$$

$$+\frac{1+\vartheta}{2}f_n\left(\alpha_{k+1}^{(n)}\right);$$

2) $\left(\alpha_k^{(n)},\ \frac{\alpha_k^{(n)}+\alpha_{k+1}^{(n)}}{2}\right)$ და $\left(\frac{\alpha_k^{(n)}+\alpha_{k+1}^{(n)}}{2},\ \alpha_{k+1}^{(n)}\right)$ ინტერვალებზე $f_{n+1}(x)$ ფუნქცია წრფივია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამნაირად განსაზღვრული $f_n(x)$ ფუნქციები ზრდადია და, ამას გარდა,

$$0 \leqslant f_0(x) \leqslant f_1(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots \leqslant 1.$$

ცხადია, რომ ფუნქციათა $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია $[0,1]$ სეგმენტზე რომელიღაც $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ვიწრო აზრით ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა და თითქმის ყველგან $[0,1]$ სეგმენტზე $f'(x)=0$.

ამისათვის განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტის ნებისმიერი ξ წერტილი და ავიღოთ ξ წერტილის შემცველი ერთი მეორეში ჩალაგებულ სეგმენტთა

მიმდევრობა $\left\{\left[\alpha_{k_n}^{(n)},\ \alpha_{k_n+1}^{(n)}\right]\right\}_{k=0}^{\infty}$, სადაც $\alpha_{k_n}^{(n)}=\frac{k_n}{2^n}$. აქ k_n არის 0-სა

და 2^n-1 შორის მოთავსებული რაიმე მთელი რიცხვი. ცხადია, რომ ან

$$\alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}=\frac{\alpha_{k_n}^{(n)}+\alpha_{k_n+1}^{(n)}}{2}, \quad \text{ან} \quad \alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}=\alpha_{k_n}^{(n)}.$$

პირველ შემთხვევაში,

$$f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}\right)-f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}\right)=f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)-\frac{1-\vartheta}{2}f_n\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)-$$

$$-\frac{1+\vartheta}{2}f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)=\frac{1-\vartheta}{2}\left[f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)-f_n\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)\right].$$

მეორე შემთხვევაში გვექნება:

$$f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}\right)-f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}\right)=\frac{1+\vartheta}{2}\left[f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)-f_n\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)\right].$$

მაშასადამე, საზოგადოდ გვექნება:

$$f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}\right)-f_{n+1}\left(\alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}\right)=\frac{1\pm\vartheta}{2}\left[f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)-f_n\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)\right].$$

შემდეგ, რადგანაც

$$f_n\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)=f\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right),\quad f_n\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)=f\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right),$$

ამიტომ

$$f\left(\alpha_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}\right)-f\left(\alpha_{k_{n+1}}^{(n+1)}\right)=\frac{1\pm\vartheta}{2}\left[f\left(\alpha_{k_n+1}^{(n)}\right)-f\left(\alpha_{k_n}^{(n)}\right)\right].$$

მაშასადამე,

$$f\left(\alpha^{(n)}_{k_n+1}\right)-f\left(\alpha^{(n)}_{k_n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1+\varepsilon_i\vartheta}{2}, \tag{7.1}$$

სადაც $\varepsilon_i=\pm 1$. რადგანაც $0<\vartheta<1$, ამიტომ

$$f\left(\alpha^{(n)}_{k_n+1}\right)-f\left(\alpha^{(n)}_{k_n}\right)\quad 0 \tag{7.2}$$

ყოველი n-თვის. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ვიწრო აზრით ξ წერტილში და რაკი ξ ნებისმიერი წერტილია $[0,1]$ სეგმენტიდან, ამიტომ $f(x)$ ზრდადია ვიწრო აზრით $[0,1]$ სეგმენტზე. ამის გარდა, (7.1) და (7.2) დამოკიდებულებებიდან გვაქვს

$$0<f\left(\alpha^{(n)}_{k_n+1}\right)-f\left(\alpha^{(n)}_{k_n}\right)<\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\cdots).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\alpha^{(n)}_{k_n+1}\right)-f\left(\alpha^{(n)}_{k_n}\right)\right]=0.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტის ნებისმიერ ξ წერტილ-ში და ამიტომ იგი უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე.

ლებეგის თეორემის ძალით, $f(x)$ ფუნქციას აქვს თითქმის ყველგან $[0,1]$ სეგმენტზე სასრული წარმოებული $f'(x)$.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული ξ წერტილში, მაშინ ეს წარმოებული იქნება ზღვარი შემდეგი გამოსახულებისა:

$$\frac{f\left(\alpha^{(n)}_{k_n+1}\right)-f\left(\alpha^{(n)}_{k_n}\right)}{\alpha^{(n)}_{k_n+1}-\alpha^{(n)}_{k_n}}=\prod_{i=0}^{n}(1+\varepsilon_i\vartheta),$$

როცა $n\to\infty$. მაგრამ, თუ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{n}(1+\varepsilon_i\vartheta)$ იგი ნულის ტოლია.

მაშასადამე, თუ არსებობს $f'(x)$, მაშინ იგი ნულის ტოლია.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ ისეთი ვიწრო აზრით ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია.

§ 8. ფუბინის თეორემა ფუნქციათა მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოების შესახებ

ლემა 3. *თუ ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრულ ელემენტარულ r ფიგურის ადიტიურ და თითქმის ყველგან წარმოებად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა $\{F_k(r)\}$ კრებადია $F(r)$ ფუნქციისაკენ, $r\subset r_0$, მაშინ თითქმის ყველგან r_0-ში არსებობს $F'(x)$ წარმოებული და მართებულია ტოლობა*

$$F'(x)=\lim_{k\to\infty} F'_k(x).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციები

$$\Phi_k(r)=F(r)-F_k(r) \quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

ცხადია, r_0 ფიგურიდან აღებული ყოველი ელემენტარული r ფიგურისათვის

$$\Phi_1(r)\geqslant\Phi_2(r)\geqslant\cdots\geqslant\Phi_k(r)\geqslant\cdots \tag{8.1}$$

და

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_k(r)=0. \tag{8.2}$$

რადგანაც $\Phi_k(r)$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ ფუნქციები ზრდადია r_0-ზე, ამიტომ მათ აქვთ თითქმის ყველგან r_0-ში სასრული წარმოებულები და (8.1) თანაფარდობის ძალით თითქმის ყველგან r_0-ში

$$\Phi'_1(x)\geqslant\Phi'_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\Phi'_k(x)\geqslant\cdots$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველგან r_0-ში არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi'_k(x)\geqslant 0$.

დავამტკიცოთ, რომ თითქმის ყველგან r_0-ში

$$\lim_{k\to\infty}\Phi'_k(x)=\varphi(x)=0.$$

ამისათვის განვიხილოთ სიმრავლეები

$$E=\{x:\varphi(x)>0\},\quad E_\nu=\left\{x:\varphi(x)>\frac{1}{\nu}\right\}\quad (\nu=1,2,\ldots).$$

ცხადია, რომ

$$E=E_1\cup E_2\cup\cdots E_k\cup\cdots$$

დავუშვათ, რომ $\mu(E)>0$. მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν_0, რომ $\mu(E_{\nu_0})>0$. ცხადია, რომ E_{ν_0} სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის და ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის გვექნება

$$\Phi'_k(x)\geqslant\varphi(x)>\frac{1}{\nu_0}.$$

1-ლი ლემის ძალით მართებულია უტოლობა

$$\Phi_k(r_0)\geqslant\frac{1}{\nu_0}\,\mu(E_{\nu_0}).$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (8.2) პირობას. მაშასადამე, $\mu(E)=0$ და ამით ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი (კლებადი) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ ფუნქციებისაგან შედგენილი მწკრივი $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)+\cdots$ კრებადია, მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე მართებულია ტოლობა

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi_m(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x).$$

ცხადია, რომ $\varphi_m(x)$ ფუნქციები ($m=1, 2, \ldots$) ზრდადია და

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)=f(x),$$

სადაც $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)+\cdots$

ლებეგის თეორემის ძალით $\varphi_m(x)$ ($m=1, 2, \cdots$) ფუნქციებს აქვთ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული წარმოებულები. ამის გარდა,

$$\Phi_1(r)\leqslant\Phi_2(r)\leqslant\cdots\leqslant\Phi_m(r)\leqslant\cdots,$$

სადაც $\Phi_m(r)$ არის $\varphi_m(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ფუნქცია:

$$\Phi_m(r)=\varphi_m(\beta)-\varphi_m(\alpha)$$

და $r=[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. რადგანაც $\varphi_m(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ $\Phi_m(r)$ ფუნქციაც ზრდადია იმავე სეგმენტზე და,

მაშასადამე, ზემოდამტკიცებული ლემის ძალით, თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე

$$f'(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi'_k(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+\cdots+f'_k(x)+\cdots$$

და ამით ფუბინის (G. Fubini)[1] თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. სიმრავლის სიმკვრივის წერტილები

ვთქვათ, E არის n-განზომილებიანი R^n სივრცის წერტილთა რაიმე სიმრავლე. R^n სივრცის x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის **გარე სიმკვრივის წერტილი**, თუ

$$\lim_{|q|\to 0}\frac{\mu^*(E\cap q)}{|q|}=1,$$

სადაც q არის x წერტილის შემცველი ცვლადი რეგულარული სეგმენტი.

E სიმრავლის რაიმე y წერტილს ეწოდება E სიმრავლის **გარე დისპერსიის წერტილი**, თუ

$$\lim_{|q|\to 0}\frac{\mu^*(E\cap q)}{|q|}=0,$$

სადაც q არის y წერტილის შემცველი რეგულარული სეგმენტი.

თუ E ზომადი სიმრავლეა, მაშინ მის გარე სიმკვრივის წერტილს **სიმკვრივის წერტილი** ეწოდება, ხოლო გარე დისპერსიის წერტილს კი — **დისპერსიის წერტილი**.

თეორემა 9. *R^n სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი გარე სიმკვრივის წერტილია.*

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E შემოსაზღვრული სიმრავლეა. ამ შემთხვევაში არსებობს E სიმრავლის შემცველი რაიმე r_0 სეგმენტი.

თუ E ღია სიმრავლეა, მაშინ E სიმრავლის ყოველი წერტილი იქნება სიმკვრივის წერტილი და ამ შემთხვევისათვის თეორემა მართებულია.

ახლა ვთქვათ, რომ E არის G_δ ტიპის სიმრავლე:

$$E=G_1\cap G_2\cap\cdots\cap G_k\cap\ldots,$$

[1] ფუბინი გვიდო (1879 — 1943) — იტალიელი მათემატიკოსი. მისი გამოკვლევები ეხება დისკრეტულ ჯგუფებისა და ავტომორფულ ფუნქციათა თეორიას, მინიმუმის კანონს და პროექციულ-დიფერენციალურ გეომეტრიას.

სადაც G_k $(k=1,2,\ldots)$ ღია სიმრავლეებია. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_k \supset \cdots$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$F(I)=\mu(I \cap E), \quad F_m(I)=\mu(I \cap G_m) \quad (m=1,2,\ldots),$$

სადაც I არის n-განზომილებიანი სეგმენტი. რადგანაც

$$\lim_{m\to\infty}(I \cap G_m)=I \cap E$$

და

$$I \cap G_1 \supset I \cap G_2 \supset \cdots \supset I \cap G_m \supset \cdots,$$

ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty} F_m(I)=F(I).$$

ცხადია, $F_m(I)$ ფუნქციები ზრდადია და მათ აქვთ E სიმრავლის ყოველ წერტილში სასრული წარმოებული. ამას გარდა, r_0 ფიგურაში მოთავსებული ყოველი I სეგმენტისათვის

$$F_1(I) \geqslant F_2(I) \geqslant \cdots \geqslant F_m(I) \geqslant \cdots$$

მაშასადამე, მე-3 ლემის ძალით, E სიმრავლის ყოველ x წერტილში არსებობს $F'(x)$ და მართებულია ტოლობა

$$F'(x)=\lim_{k\to\infty} F'_k(x).$$

შემდეგ, რაკი ყოველი G_k ღია სიმრავლეა, ამიტომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $F'_k(x)=1$ $(k=1,2,\ldots)$. მაშასადამე, E სიმრავლის ყოველ წერტილში $F'(x)=1$, ე. ი. E სიმრავლის ყოველი წერტილი სიმკვრივის წერტილია. ამ შემთხვევისათვის თეორემა მართებულია.

დასასრულს, ვთქვათ E ნებისმიერი სიმრავლეა. IX თავის მე-10 თეორემის ძალით, არსებობს E სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომ r_0 ფიგურიდან აღებული ყოველი I სეგმენტისათვის

$$\mu^*(I \cap E)=\mu(I \cap H).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$F(I)=\mu(I \cap H),$$

მაშინ H სიმრავლის ყველა x წერტილში $F'(x)=1$ და, მაშასადამე, E სიმრავლის თითქმის ყველა x წერტილში

$$\lim \frac{\mu^*(I \cap E)}{|I|}=1,$$

სადაც I არის x წერტილის შემცველი რეგულარული სეგმენტი. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე

$$f(x)=x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ როცა } x \neq 0 \quad \text{და } f(0)=0.$$

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ამ ფუნქციის წარმოებული ყოველ წერტილში, ხოლო $x=0$ წერტილის არცერთ მიდამოში $f'(x)$ შემოსაზღვრული არაა.

2. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ E-თი მოცემული სეგმენტის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომლებზედაც $f'(x)$ წარმოებული არსებობს. დაამტკიცეთ, რომ E არის $F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლე.

3. დაამტკიცეთ შემდეგი დებულება: თუ $f'(x)$ წარმოებული არსებობს ყოველ წერტილში, მაშინ მას არ შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

თავი XIII

რიმანის ინტეგრალი

§ 1. რიმანის ინტეგრალის განსაზღვრა

განსაზღვრა 1. ვთქვათ, ფართობადი E სიმრავლე დაყოფილია $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ სიმრავლეებად. ამ სიმრავლეთა სისტემას ვუწოდებთ E სიმრავლის წესიერ დანაწილებას, თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ ფართობადი სიმრავლეებია,

2) $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_\nu = E$,

3) $E_i \cap E_k = C_i \cap C_k$, სადაც C_j არის E_j სიმრავლის საზღვარი.

განსაზღვრა 2. ვთქვათ, λ რაიმე დადებითი რიცხვია, ხოლო სიმრავლეთა $\{E_1, E_2, \ldots, E_\nu\}$ სისტემა ფართობადი E სიმრავლის წესიერი დანაწილებაა. ამ დანაწილებას ვუწოდოთ E სიმრავლის წესიერი λ-დანაწილება, თუ $\lambda = \max\{d(E_1), d(E_2), \ldots, d(E_\nu)\}$.

ახლა ვთქვათ, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია განსაზღვრულია R^n სივრცეში მოთავსებულ რაიმე შემოსაზღვრულ ფართობად A სიმრავლეზე. განვიხილოთ ამ სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$. ყოველი ω_i სიმრავლიდან ავიღოთ ნებისმიერი ξ წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$S = f(\xi_1)|\omega_1| + f(\xi_2)|\omega_2| + \cdots + f(\xi_\nu)|\omega_\nu|.$$

ამ ჯამს ეწოდება რიმანის[1] (Riemann) ჯამი. ცხადია, რომ ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც ξ_i წერტილებზე, ისე λ-დანაწილებაზე.

---

[1] გეორგ ფრიდრიხ ბერნჰარდ რიმან (1826 — 66) — გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი. რიმანის მათემატიკური შემოქმედება მრავალმხრივია. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის საფუძვლები, ელიფსური და აბელის ფუნქციები, მარტივ რიცხვთა განლაგება, მინიმალური ზედაპირები, ტრიგონომეტრიული მწკრივები, სითბოგამტარებლობა, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციები და სხვა. რიმანის შრომებმა დიდი გავლენა მოახდინა მათემატიკის განვითარებაზე მე-19 საუკუნის მეორე ნახევარში და მე-20 საუკუნეში.

თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ A სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, მართებულია უტოლობა

$$|S-I|<\varepsilon,$$

სადაც I რაიმე მუდმივია, მაშინ ვიტყვით რომ S მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ და დავწერთ

$$\lim_{\lambda\to 0} S=I.$$

ამ შემთხვევაში I რიცხვს, თუ ასეთი არსებობს, ეწოდება რიმანის n-ჯერადი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციისა, გავრცელებული ფართობად A სიმრავლეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int\limits_A f(x)dx \quad \text{ან} \quad \overbrace{\int\int\cdots\int\limits_A}^{n\text{-ჯერ}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

ამრიგად. განსაზღვრის თანახმად,

$$\int\limits_A f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\,|\,\omega_i\,|.$$

თუ ზემოაღნიშნული ზღვარი არსებობს, მაშინ იტყვიან. რომ $f(x)$ ფუნქცია A სიმრავლეზე ინტეგრებადია რიმანის აზრით.

ამ თავში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია A სიმრავლეზე.

§ 2. ზედა და ქვედა ინტეგრალები. დარბუს თეორემა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია R^n სივრცეში მოთავსებულ ფართობად A სიმრავლეზე. განვიხილოთ A სიმრავლის რაიმე წესიერი დანაწილება $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$. ჯამებს

ნაშრომში „ფუნქციის ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენის შესახებ“, რიმანმა გამოიკვლია პრობლემა ფუნქციის გაშლისა ტრიგონომეტრიულ მწკრივად. ამასთან დაკავშირებით მან პირველმა მოვცა შემოსაზღვრული ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. ამით მან შეიტანა მნიშვნელოვანი წვლილი ინტეგრალის თეორიაში, და მოიყვანა კლასიკური მაგალითი ინტეგრებადი ფუნქციისა, რომლის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია. ამ ნაშრომს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა სიმრავლეთა თეორიისა და ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის განვითარებისათვის.

$$\bar{S}=\sum_{k=1}^{\nu} M_k\,|\omega_k|,\quad \underline{S}=\sum_{k=1}^{\nu} m_k\,|\omega_k|,$$

სადაც M_k და m_k არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები ω_k სიმრავლეზე, ეწოდება შესაბამისად **დარბუს ზედა** და **ქვედა ჯამი**. ცხადია, რომ

$$\underline{S}\leqslant \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,|\omega_k|\leqslant \bar{S},$$

სადაც ξ_k არის ω_k სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი.

აქედან ჩანს, რომ A სიმრავლის მოცემული დანაწილებისათვის დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები წარმოადგენენ შესაბამისად რიმანის ჯამთა სიმრავლის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს. მართლაც, ξ_k წერტილების შერჩევით

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,|\omega_k|$$

ჯამი შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ ახლოს როგორც $\bar{S}$ ჯამთან, ისე $\underline{S}$ ჯამთანაც.

დარბუს ჯამებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1°. **თუ ω_k $(k=1, 2, \ldots, \nu)$ სიმრავლეებს დავყოფთ ფართობად სიმრავლეებად, მაშინ დარბუს ზედა ჯამი არ გადიდდება, ხოლო ქვედა ჯამი არ შემცირდება.**

საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ ერთი რაიმე ω_k სიმრავლისათვის. ვთქვათ, ω_k სიმრავლე დაყოფილია ორ ფართობად ω'_k და ω''_k სიმრავლეებად. აღვნიშნოთ M'_k და M''_k სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრები ω'_k და ω''_k სიმრავლეებზე შესაბამისად. ცხადია, რომ $M'_k\leqslant M_k$, $M''_k\leqslant M_k$. ამ შემთხვევაში $\bar{S}$ ჯამში ყველა შესაკრები უცვლელი რჩება, გარდა $M_k\,|\omega_k|$ შესაკრებისა, რომლის ნაცვლად გვექნება ახლა ორი შესაკრები $M'_k\,|\omega'_k|$ და $M''_k\,|\omega''_k|$, ასე რომ $M_k|\omega_k|$ ნამრავლის ნაცვლად გვექნება ჯამი

$$M'_k|\,\omega'_k\,|+M''_k\,|\,\omega''_k\,|.$$

IX თავის მე-6 თეორემის ძალით,

$$M'_k\,|\,\omega'_k\,|+M''_k\,|\,\omega''_k\,|\leqslant M_k(|\,\omega'_k\,|+|\,\omega''_k\,|)=M_k\,|\,\omega_k\,|.$$

ამრიგად $\bar{S}$ ჯამი არ მატულობს.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ კლებულობს, როცა ω_k სიმრავლეებს დავყოფთ ფართობად სიმრავლეებად.

2°. დარბუს ნებისმიერი ქვედა ჯამი არ აღემატება ნებისმიერ ზედა ჯამს.

ვთქვათ, მოცემულია A სიმრავლის ორი ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_p\}$ და $\{\omega''_1, \omega''_2, \ldots, \omega''_q\}$. მათი შესაბამისი ზედა და ქვედა ჯამები იყოს $\bar{S}'$, $\underline{S}'$, და $\bar{S}''$ $\underline{S}''$, ე. ი.

$$\bar{S}' = \sum_{k=1}^{p} M'_k |\omega'_k|, \quad \underline{S}' = \sum_{k=1}^{p} m'_k |\omega'_k|,$$

$$\bar{S}'' = \sum_{k=1}^{q} M''_k |\omega''_k|, \quad \underline{S}'' = \sum_{k=1}^{q} m''_k |\omega''_k|.$$

დასამტკიცებელია, რომ $\underline{S}'' \leqslant \bar{S}''$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\omega_{ik} = \omega'_i \cap \omega''_k$. რადგანაც ω'_i და ω''_k ფართობადი სიმრავლეებია, ამიტომ, IX თავის მე-4 თეორემის ძალით, ω_{ik} სიმრავლეც ფართობადია. შემდეგ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\omega'_i = \bigcup_{k=1}^{q} \omega_{ik}, \qquad \omega''_k = \bigcup_{i=1}^{p} \omega_{ik}.$$

ამას გარდა,

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{k=1}^{q} \omega_{ik}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ორ სხვადასხვა ω_{ik} სიმრავლეს არა აქვს საერთო შიგა წერტილები. მართლაც, ავიღოთ

$$\omega_{ik} = \omega'_i \cap \omega''_k, \quad \omega_{rs} = \omega'_r \cap \omega''_s, \text{ სადაც } i \neq r.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ω_{ik} და ω_{rs} სიმრავლეებს აქვს საერთო შიგა წერტილი x. მაშინ x იქნებოდა საერთო შიგა წერტილი ω'_i და ω'_r სიმრავლეებისათვისაც, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად, ორ სხვადასხვა ω_{ik} სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეთ საერთო მხოლოდ საზღვრითი წერტილები. შემდეგ, IX თავის მე-6 თეორემის ძალით

$$|\omega'_i| = \sum_{j=1}^{q} |\omega_{ij}|, \quad |\omega''_k| = \sum_{j=1}^{p} |\omega_{jk}|, \quad |A| = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |\omega_{ik}|.$$

აღვნიშნოთ ახლა M_{ik} და m_{ik} სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები ω_{ik} სიმრავლეზე. ცხადია, რომ

$$M_{ik} \leqslant M'_i, \quad M_{ik} \leqslant M''_k, \quad m_{ik} \geqslant m'_i, \quad m_{ik} \geqslant m''_k.$$

რადგანაც

$$m_k''\,|\omega''_k| = \sum_{j=1}^{p} m''_k\,|\omega_{jk}| \leqslant \sum_{j=1}^{p} m_{jk}\,|\omega_{jk}|,$$

ამიტომ

$$\underline{S}'' = \sum_{k=1}^{q} m''_k\,|\omega''_k| \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_{ik}\,|\omega_{ik}|.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\bar{S}' \geqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_{ik}\,|\omega_{ik}|.$$

მაშასადამე,

$$\underline{S}'' \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_{ik}\,|\omega_{ik}| \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_{ik}\,|\omega_{ik}| \leqslant \bar{S}'.$$

რ. დ. გ.

აღვნიშნოთ ახლა H^*-ით $f(x)$ ფუნქციის ყველა ზედა ჯამის სიმრავლე, ხოლო H_*-ით — ყველა ქვედა ჯამის სიმრავლე. მე-2° თვისების თანახმად, H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ H^* სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან, H_* — კი ზემოდან.

ცხადია, რომ $\underline{I} \leqslant \bar{I}$, სადაც

$$\bar{I} = \inf H^*, \quad \underline{I} = \sup H_*.$$

$\bar{I}$ და $\underline{I}$ რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად *ზედა და ქვედა n-ჯერადი ინტეგრალები* $f(x)$ ფუნქციისა, *გავრცელებული* A *სიმრავლეზე* და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად სიმბოლოებით

$$\overline{\int_A} f(x)dx \quad \text{და} \quad \underline{\int_A} f(x)dx.$$

თეორემა 1 (დარბუ). თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ფართობად A სიმრავლეზე, მაშინ არსებობს ქვედა და ზედა ჯამების ზღვრები და მართებულია ტოლობები

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}=\bar{I},\quad \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\underline{I}.$$

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ ზედა ჯამისათვის, რადგან, ქვედა ჯამისათვის დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $f(x)$ ფუნქცია დადებითია A სიმრავლეზე. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ A სიმრავლის ისეთი წესიერი დანაწილება $\{A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_\nu^{(0)}\}$, რომ შესაბამისი ზედა $\bar{S}_0$ ჯამისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\bar{S}_0<\bar{I}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

აღვნიშნოთ C-თი $A, A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_\nu^{(0)}$ სიმრავლეთა საზღვრების ჯამი. ყოველი $A_i^{(0)}$ სიმრავლისათვის მოიძებნება $A_i^{(0)}$ სიმრავლეში მოთავსებული ისეთი ჩაკეტილი ფართობადი ω_i სიმრავლე, რომ

$$\left|A_i^{(0)}-\omega_i\right|<\frac{\varepsilon}{2\nu M}, \tag{2.1}$$

სადაც M წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ზედა საზღვარს A სიმრავლეზე. ვთქვათ, Γ არის $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ სიმრავლეთა საზღვრების ჯამი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P=\bigcup_{k=1}^{\nu}\omega_k,\quad Q=A-P.$$

ცხადია, რომ

$$Q=\bigcup_{k=1}^{\nu}A_k^{(0)}-\bigcup_{k=1}^{\nu}\omega_k=\bigcup_{k=1}^{\nu}\left(A_k^{(0)}-\omega_k\right).$$

რადგანაც $A_k^{(0)}-\omega_k$ $(k=1, 2, \ldots, \nu)$ სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო შიგა წერტილები არ აქვთ, ამიტომ IX თავის მე-6 თეორემის ძალით,

$$|Q|=\sum_{k=1}^{\nu}\left|A_k^{(0)}-\omega_k\right|$$

და, მაშასადამე, (2.1) უტოლობის თანახმად

$$|Q|<\frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.2}$$

შემდეგ, რაკი C და Γ სიმრავლეები ჩაკეტილია და ერთმანეთს არ კვეთენ, ამიტომ მათ შორის მანძილი $\rho(C, \Gamma)>0$. ავიღოთ რომელიმე დადებითი რიცხვი $\lambda<\rho(C, \Gamma)$.

განვიხილოთ ახლა A სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{p} M_i|E_i|,$$

სადაც M_i წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ზედა საზღვარს E_i სიმრავლეზე.

E_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ სიმრავლეები გავყოთ ორ ჯგუფად: პირველ ჯგუფში მოვათავსოთ ის E_i სიმრავლეები, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილები C-თან, მეორე ჯგუფში კი — დანარჩენი E_i სიმრავლეები. ვთქვათ, პირველი ჯგუფის სიმრავლეებია $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_r}$, ხოლო მეორე ჯგუფისა $E_{q_1}, E_{q_2}, \ldots, E_{q_s}$. ცხადია, რომ

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{r} M_{p_i}|E_{p_i}|+\sum_{i=1}^{s} M_{q_i}|E_{q_i}|. \tag{2.3}$$

რადგანაც ყოველ $E_{q_i}(i=1, 2, \ldots, s)$ სიმრავლეს აქვს საერთო წერტილი C-სთან და დიამეტრი $d(E_{q_i})<\rho(C, \Gamma)$, ამიტომ აღნიშნულ სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი P სიმრავლესთან და, მაშასადამე,

$$E_{q_1}\cup E_{q_2}\cup\cdots\cup E_{q_s}\subset Q.$$

აქედან, (2.2) უტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$|E_{q_1}\cup E_{q_2}\cup\cdots\cup E_{q_s}|=|E_{q_1}|+|E_{q_2}|+\cdots+|E_{q_s}|\leqslant|Q|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{s} M_{q_i}|E_{q_i}|\leqslant M\sum_{i=1}^{s}|E_{q_i}|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{i=1}^{r} M_{p_i}|E_{p_i}|\leqslant\bar{S}_0 \tag{2.4}$$

და, მაშასადამე, (2.3) და (2.4) თანაფარდობათა ძალით,

$$\bar{S}<\bar{S}_0+\frac{\varepsilon}{2}<\left(\bar{I}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\bar{I}+\varepsilon.$$

ამრიგად,

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}=\bar{I}.$$

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ფუნქციაა A სიმრავლეზე. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი K რიცხვი, რომ A სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $|f(x)|<K$. ვთქვათ,

$$\varphi(x)=f(x)+K.$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია დადებითია A სიმრავლეზე. განვიხილოთ A სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{E_1, E_2, \ldots, E_\nu\}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\bar{S}_\varphi=\bar{S}_f+K|A|,$$

სადაც $\bar{S}_\varphi$ და $\bar{S}_f$ სიმბოლოებით აღნიშნულია შესაბამისად φ და f ფუნქციების ზედა ჯამები.

ზემოდამტკიცებულის ძალით არსებობს $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{S}_\varphi$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}_\varphi=\overline{\int_A}\varphi(x)\,dx.$$

მაშასადამე, არსებობს $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{S}_f$ და

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}_f=\overline{\int_A}\varphi(x)dx-K|A|=\overline{\int_A}[\varphi(x)-K]dx=\bar{I}.$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

§ 3. ინტეგრებადობის სხვადასხვა ნიშნები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ თეორემებს, რომლებიც ეხებიან ფუნქციების ინტეგრებადობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

თეორემა 2 (რიმანი). *ფართობად A სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის A-ზე ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი,*

რომ A სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\bar{S}-\underline{S}<\varepsilon.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია A სიმრავლეზე, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ A სიმრავლის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|S-I|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.1}$$

სადაც S წარმოადგენს აღებული დანაწილების სათანადო რიმანის ჯამს, ხოლო

$$I=\int_A f(x)dx.$$

(3.1) უტოლობიდან გვაქვს

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<S<I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

აქედან

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant \underline{S}\leqslant \bar{S}\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშასადამე, $S-\underline{S}<\varepsilon$. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ A სიმრავლის ყოველი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, ადგილი აქვს უტოლობას $S-\underline{S}<\varepsilon$, ე. ი.

$$\lim_{\lambda\to 0}(\bar{S}-\underline{S})=0. \tag{3.2}$$

დარბუს თეორემის ძალით,

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}=\bar{I},\quad \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\underline{I}.$$

მაშასადამე, (3.2) ტოლობის ძალით, $\bar{I}=\underline{I}$.

შემდეგ, რაკი $\underline{S}\leqslant S\leqslant \bar{S}$, ამიტომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}S=I$, სადაც I არის $\bar{I}$ და $\underline{I}$ რიცხვების საერთო მნიშვნელობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა ასედაც შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

ფართობად A სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის A-ზე ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\overline{\int_A} f(x)dx = \int_{\overline{A}} f(x)dx.$$

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ ორ თეორემას, რომლებიც გვაძლევენ რიმანის აზრით ინტეგრებადობის სხვა აუცილებელ და საკმარის პირობებს. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ n-განზომილებიან r_0 სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ $E_\varepsilon = \{x : O(f;\ x) \geqslant \varepsilon\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია, სადაც ε მოცემული დადებითი რიცხვია, ხოლო $O(f;\ x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის რხევას x წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, ξ არის E_ε სიმრავლის რაიმე დაგროვების წერტილი. მაშინ E_ε სიმრავლიდან შეგვიძლია გამოვყოთ წერტილთა მიმდევრობა $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_\nu, \dots$, რომელიც კრებადია ξ წერტილისაკენ.

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი δ. რადგანაც $S(\xi;\ \delta)$ სფეროში მოთავსდება აღებული მიმდევრობის წერტილები, ამიტომ $M_\delta - m_\delta \geqslant \varepsilon$, სადაც M_δ და m_δ არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები $r_0 \cap S(\xi;\ \delta)$ სიმრავლეზე. თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\delta \to 0$, მივიღებთ $O(f;\ \xi) \geqslant \varepsilon$, ე. ი. $\xi \in E_\varepsilon$. მაშასადამე, E_ε ჩაკეტილი სიმრავლეა.

თეორემა 3. n-განზომილებიან r_0 სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის რიმანის აზრით ინტეგრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $E_\varepsilon = \{x : O(f;\ x) \geqslant \varepsilon\}$ სიმრავლის ზომა იყოს ნულის ტოლი.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია r_0 სეგმენტზე. გავყოთ r_0 სეგმენტი წვრილ-წვრილად არაგადამფარავ სეგმენტებად $I_1,\ I_2,\ \dots,\ I_\nu$ და ვთქვათ, $I_{\nu_1},\ I_{\nu_2},\ \dots,\ I_{\nu_p}$ ის სეგმენტებია, რომლებიც თავის შიგნით შეიცავენ E_ε სიმრავლის წერტილებს. ცხადია, რომ

$$M_{\nu_i} - m_{\nu_i} \geqslant \varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ p), \tag{3.3}$$

სადაც M_{ν_i} და m_{ν_i} სიმბოლოებით აღნიშნულია $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი I_{ν_i} სეგმენტზე. ამას გარდა, ცხადია, რომ

$$|I_{\nu_1}|+|I_{\nu_2}|+\cdots+|I_{\nu_p}|\geqslant\mu(E_\varepsilon). \tag{3.4}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3) და (3.4) უტოლობებს, მივიღებთ:

$$\bar{S}-\underline{S}=\sum_{i=1}^{\nu}(M_i-m_i)|I_i|\geqslant\sum_{i=1}^{p}(M_{\nu_i}-m_{\nu_i})|I_{\nu_i}|\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{p}|I_{\nu_i}|\geqslant\varepsilon\mu(E_\varepsilon).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, ამიტომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\bar{S}-\underline{S})=0$ და, მაშასადამე, $\mu(E_\varepsilon)=0$. ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $\mu(E_\varepsilon)=0$, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა r_0-ზე, ე. ი.

$$\overline{\int_{r_0}}f(x)\,dx-\underline{\int_{r_0}}f(x)dx=K>0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\varepsilon_0=\dfrac{K}{2|r_0|}$ და გავყოთ r_0 სეგმენტი $2^{\nu n}$ კონგრუენტულ სეგმენტად, სადაც ν ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. ეს სეგმენტები იყოს

$$I_1,\ I_2,\ldots,I_{2^{\nu n}}. \tag{3.5}$$

აღვნიშნოთ I_{p_k} $(k=1,\ 2,\ldots,r)$ სიმბოლოთი (3.5) მიმდევრობის ის სეგმენტები, რომელთათვისაც $O(f;\ I_{p_k})<\varepsilon_0$, სადაც $O(f;\ I_{p_k})$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $f(x)$ ფუნქციის რხევა I_{p_k} სეგმენტზე. შემდეგ, აღვნიშნოთ $I_{q_k}(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ სიმბოლოთი (3.5) მიმდევრობის ის სეგმენტები, რომელთათვისაც $O(f;\ I_{q_k})\geqslant\varepsilon_0$. აქ $r+s=2^{n\nu}$. ამას გარდა, ვთქვათ,

$$H_\nu=I_{q_1}\cup I_{q_2}\cup\cdots\cup I_{q_s}.$$

გვაქვს:

$$\bar{S}-\underline{S}=\sum_{i=1}^{2^{n\nu}} O(f;\ I_i)\,|I_i| = \sum_{k=1}^{r} O(f;\ I_{p_k})\,|I_{p_k}| + \sum_{k=1}^{s} O(f;\ I_{q_k})\,|I_{q_k}|.$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია r_0 სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ r_0 სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის $|f(x)|\leqslant M$ და რაკი $O(f;\ I_{q_k})\leqslant 2M$, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{s} O(f;\ I_{q_k})\,|I_{q_k}|\leqslant 2M\mu(H_\nu).$$

ამას გარდა,

$$\sum_{k=1}^{r} O(f;\ I_{p_k})\,|I_{p_k}|\leqslant \varepsilon_0\,|r_0| = \frac{K}{2\,|r_0|}\cdot|r_0| = \frac{K}{2}.$$

მაშასადამე,

$$K\leqslant \bar{S}-\underline{S}\leqslant\frac{K}{2}+2M\mu(H_\nu).$$

აქედან

$$\mu(H_\nu)\geqslant\frac{K}{4M}.$$

შემდეგ, ცხადია, რომ $H_{\nu+1}\subset H_\nu$. როგორც ცნობილია, სიმრავლეთა მიმდევრობა $H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_\nu\supset\cdots$ კრებადია და

$$\lim_{\nu\to\infty} H_\nu=\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i.$$

ამიტომ

$$\mu(H)=\lim_{\nu\to\infty}\mu(H_\nu)\geqslant\frac{K}{4M},$$

სადაც $H=H_1\cap H_2\cap\cdots\cap H_\nu\cap\cdots$

ადვილი შესამჩნევია, რომ H სიმრავლის ყოველ x წერტილში $O(f;x)\geqslant\geqslant\varepsilon_0$. ამიტომ $H\subset E_{\varepsilon_0}$ და, მაშასადამე,

$$\mu(E_{\varepsilon_0})\geqslant\mu(H)\geqslant\frac{K}{4M}>0.$$

მეორე მხრივ, $\mu(E_{\varepsilon_0})=0$.

ამრიგად, მივიღეთ წინააღმდეგობა და, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა r_0-ზე, სწორი არ არის. ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ზემოთ მოყვანილი თეორემა ეკუთვნის დიუ ბუა რეიმონს (Du Bois Reymond).

თეორემა 4 (ლებეგი). n-განზომილებიან r_0 სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის რიმანის აზრით ინტეგრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა იყოს ნულის ტოლი.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E-თი $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\{\varepsilon_\nu\}$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$E=E_{\varepsilon_1}\cup E_{\varepsilon_2}\cup\cdots\cup E_{\varepsilon_\nu}\cup\cdots$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია r_0-ზე რიმანის აზრით, მაშინ, მე-3 თეორემის ძალით,

$$\mu(E_{\varepsilon_\nu})=0 \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots)$$

და, მაშასადამე, $\mu(E)=0$ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\mu(E)=0$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. ადვილი შესამჩნევია, რომ $E\supset E_\varepsilon$, საიდანაც $\mu(E_\varepsilon)=0$. მაშასადამე, მე-3 თეორემის ძალით, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია r_0-ზე რიმანის აზრით და ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

§ 4. ზღვარზე გადასვლა რიმანის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

თეორემა 5. თუ ფართობად E სიმრავლეზე რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ E სიმრავლეზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია E-ზე და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{4.1}$$

დამტკიცება. თუ $|E|=0$, მაშინ თეორემა ტრივიალურია. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $|E|>0$.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია E-ზე. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ თანაბრად კლებადია E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ x-ზე დამოუკიდებლად მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვი $N(\varepsilon)>0$, რომ ყოველი x წერტილისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$f_k(x)-\frac{\varepsilon}{4|E|}<f(x)<f_k(x)+\frac{\varepsilon}{4|E|}, \text{ როდესაც } k>N. \tag{4.2}$$

ახლა k რიცხვი დავაფიქსიროთ და განვიხილოთ E სიმრავლის ისეთი წესიერი λ-დანაწილება, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{\nu}\left(M_i^{(k)}-m_i^{(k)}\right)|\omega_i|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3}$$

სადაც $m_i^{(k)}$ და $M_i^{(k)}$ არის $f_k(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები ω_i სიმრავლეზე. თუ m_i და M_i სიმბოლოებით აღვნიშნავთ $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს ω_i სიმრავლეზე, (4.2) უტოლობათა ძალით გვექნება

$$m_i^{(k)}-\frac{\varepsilon}{4|E|}\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M_i^{(k)}+\frac{\varepsilon}{4|E|} \quad (i=1, 2, \ldots, \nu).$$

აქედან ვღებულობთ:

$$M_i-m_i\leqslant\left(M_i^{(k)}-m_i^{(k)}\right)+\frac{\varepsilon}{2|E|}.$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.3) უტოლობას, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{\nu}(M_i-m_i)|\omega_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\nu}\left(M_i^{(k)}-m_i^{(k)}\right)|\omega_i|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}(M_i-m_i)|\omega_i|=0.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია E სიმრავლეზე.

ახლა დავამტკიცოთ (4.1) ტოლობის მართებულობა. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი $\varepsilon>0$. რადგანაც ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ x-ზე დამოუკი-

დებლად მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვი $N(\varepsilon)>0$, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{|E|}, \text{ როცა } k>N.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $k>N$, გვექნება

$$\left|\int_E f_k(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f_k(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6 (არცელა). თუ ფართობად E სიმრავლეზე ინტეგრებად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ ერთობლივ შემოსაზღვრულია და კრებადია E-ზე ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა აღებული მიმდევრობის ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია და $f(x)\equiv 0$. ასეთ შემთხვევაში დასამტკიცებელია, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=0. \tag{4.4}$$

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\{\sigma_k\}$. ყოველი $f_k(x)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია ავიღოთ E სიმრავლის ისეთი λ_k-დანაწილება $\left\{\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \ldots, \omega_{\nu_k}^{(k)}\right\}$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$0\leqslant\int_E f_k(x)dx-\underline{S}_k<\sigma_k, \tag{4.5}$$

სადაც

$$\underline{S}_k=m_1^{(k)}\left|\omega_1^{(k)}\right|+m_2^{(k)}\left|\omega_2^{(k)}\right|+\cdots+m_{\nu_k}^{(k)}\left|\omega_{\nu_k}^{(k)}\right|,$$

ხოლო $m_i^{(k)}$ არის $f_k(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა საზღვარი $\omega_i^{(k)}$ სიმრავლეზე. (4.5) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\left[\underline{S}_k-\int_E f_k(x)dx\right]=0 \text{ (იგულისხმება, რომ } \lim_{k\to\infty}\lambda_k=0).$$

მაშასადამე, რომ დავამტკიცოთ (4.4) ტოლობის მართებულობა, საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_k=0. \tag{4.6}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε და δ რიცხვები. დავამტკიცოთ ისეთი მთელი დადებითი N რიცხვის არსებობა, რომ, თუ $k>N$, მაშინ იმ $\omega_i^{(k)}$ სიმრავლეების ფართობთა ჯამი, რომლებიც შეესაბამებიან $m_i^{(k)}\geqslant\varepsilon$ რიცხვებს, ნაკლებია δ-ზე.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ეს ასე არ არის. მაშინ k-ს უსასრულოდ ბევრი მნიშვნელობისათვის $k_1<k_2<\cdots<k_s<\cdots$, იმ $\omega_i^{(k_s)}$ სიმრავლეების ფართობთა ჯამი, რომელთათვის $m_i^{(k_s)}\geqslant\varepsilon$ იქნება δ-ზე მეტი.

აღვნიშნოთ E_s სიმბოლოთი იმ $\omega_i^{(k_s)}$ სიმრავლეთა ჯამი, რომელთათვის $m_i^{(k_s)}\geqslant\varepsilon$. დაშვების ძალით

$$|E_s|>\delta \quad (s=1,\ 2,\ \cdots).$$

IX თავის 27-ე თეორემის ძალით არსებობს E სიმრავლის ერთი მაინც ისეთი x წერტილი, რომელიც მიეკუთვნება $\{E_s\}$ მიმდევრობის უსასრულო ბევრ წევრს. მაშასადამე, k-ს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლისათვის ადგილი ექნება უტოლობას $f_k(x)\geqslant\varepsilon$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას $f(x)=0$.

ამრიგად, არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომელიც ზემოთ აღნიშნულ პირობებს აკმაყოფილებს. ვთქვათ, $k\geqslant N$ და λ-დანაწილება $\left\{\omega_1^{(k)},\ \omega_2^{(k)},\ \ldots,\ \omega_{\nu_k}^{(k)}\right\}$ გავყოთ ორ ჯგუფად: პირველ ჯგუფში მოვათავსოთ ის $\omega_i^{(k)}$ სიმრავლეები, რომელთათვის $m_i^{(k)}\geqslant\varepsilon$, ხოლო მეორე ჯგუფში ის $\omega_i^{(k)}$ სიმრავლეები, რომელთათვის $m_i^{(k)}<\varepsilon$. მაშინ $\underline{S}_k$ ქვედა ჯამი ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\underline{S}_k=\sum_i^{(1)} m_i^{(k)}\left|\omega_i^{(k)}\right|+\sum_i^{(2)} m_i^{(k)}\left|\omega_i^{(k)}\right|,$$

სადაც $\sum\limits_i^{(1)}$ გავრცელებულია პირველი ჯგუფის $\omega_i^{(k)}$ სიმრავლეებისა-

თვის, ხოლო $\sum\limits_{i}^{(2)}$ — მეორე ჯგუფისათვის. მაშასადამე, გვექნება

$$0 \leqslant \underline{S}_k \leqslant \delta L + \varepsilon |E|,$$

სადაც

$$L = \sup_{x \in E} \{|f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots, |f_k(x)|, \ldots\}.$$

ცხადია, რომ $L < +\infty$, რადგან ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია.

რაკი δ და ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია, ამიტომ ადგილი აქვს (4.6) ტოლობას და, მაშასადამე, მართებულია (4.4) ტოლობა.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi_k(x) = |f_k(x) - f(x)|.$$

ცხადია, რომ $\{\varphi_k(x)\}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია და

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = 0.$$

ამიტომ ზემოდამტკიცებულის ძალით

$$\lim_{k \to \infty} \int_E \varphi_k(x) dx = 0.$$

მაგრამ

$$\left| \int_E f_k(x) dx - \int_E f(x) dx \right| \leqslant \int_E \varphi_k(x) dx.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f_k(x) dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ინტეგრებად ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობისაგან და ამ ფუნქციათა მიმდევრობის ერთობლივ შემოსაზღვრულობისაგან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა. მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, E რაიმე n-განზომილებიანი სეგმენტია. აღვნიშნოთ D სიმბოლოთი E-ში შემავალი ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლე. რადგანაც D თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ შეგვიძლია მისი ელემენტების გადანომვრა:

$$D = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}.$$

განვსაზღვროთ E-ზე $f_k(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f_k(x)=\begin{cases} 1, \text{ თუ } x=x_i \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \\ 0, \text{ თუ } x\in E-\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $f_k(x)$ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში, გარდა x_1, $x_2, \ldots, x_k$ წერტილებისა. ამის გარდა, ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია E სიმრავლეზე რიმანის აზრით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $|f_k(x)|\leq 1$ ყოველი k-თვის და ყოველი x წერტილისათვის E-დან. მაშასადამე, ფუნქციათა $\{f_k(x)\}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე. ვთქვათ,

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

ცხადია, E სიმრავლის ყოველ ირაციონალურ x წერტილში $f(x)=0$, ხოლო E სიმრავლის ყოველ რაციონალურ x წერტილში $f(x)=1$. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია E სიმრავლის ყოველ წერტილში და ამიტომ $f(x)$ ინტეგრებადი არაა E სიმრავლეზე.

სავარჯიშო

1. ვთქვათ, E არის $[0,1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overline{\int_0^1}\chi_E(x)dx=1 \text{ და } \underline{\int_0^1}\chi_E(x)dx=0.$$

2. ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[0,1]$ სეგმენტზე, მასთან $f(x)\leq\varphi(x)$. თუ $\psi(x)=\varphi(x)$, როდესაც $x\in E$, სადაც E არის $[0,1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, და $\psi(x)=f(x)$, როდესაც $x\overline{\in}E$, მაშინ დაამტკიცეთ, რომ

$$\overline{\int_0^1}\psi(x)dx=\int_0^1\varphi(x)dx,\quad \underline{\int_0^1}\psi(x)dx=\int_0^1 f(x)dx.$$

თ ა ვ ი XIV

ლებეგის ინტეგრალი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის

§ 1. ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრა

რიმანის მიერ შემოღებული ინტეგრალის განსაზღვრას ის ნაკლი აქვს, რომ უამრავი მარტივი ფუნქცია ინტეგრებადი არაა რიმანის აზრით. ასეთია, მაგალითად, დირიხლეს ფუნქცია. ლებეგის მიერ განხილული ინტეგრალი საშუალებას იძლევა ვაინტეგროთ არა მარტო რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციები, არამედ მრავალი ისეთი ფუნქციაც, რომლებიც რიმანის აზრით ინტეგრებადი არ არის.

ლებეგის ინტეგრალის თეორიას ჩვენ გადმოვცემთ ევკლიდეს R^n სივრცისათვის და ეს გარემოება შემდეგში ხელმეორედ აღნიშნული არ იქნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ვთქვათ, ზომადი E სიმრავლე დაყოფილია ზომად ქვესიმრავლეებად $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$. ამ სიმრავლეთა სისტემას ვუწოდებთ E სიმრავლის L-დანაწილებას, თუ $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ და $e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_\nu = E$.

ახლა ვთქვათ, სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრულია შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია და განვიხილოთ E სიმრავლის ნებისმიერი L-დანაწილება $\{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\}$. ჯამებს

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^{\nu} M_k \mu(e_k), \qquad \underline{S} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \mu(e_k),$$

სადაც M_k და m_k არიან $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები e_k სიმრავლეზე, ვუწოდოთ შესაბამისად ლ ე ბ ე გ ი ს ზ ე დ ა და ქ ვ ე დ ა ჯ ა მ ე ბ ი. ცხადია, რომ $\underline{S} \leqslant \bar{S}$. ლებეგის ჯამებს აქვს შემდეგი თვისებები:

1°. თ უ e_i $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ს დ ა ვ ყ ო ფ თ ზ ო მ ა დ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ა დ, მ ა შ ი ნ ლ ე ბ ე გ ი ს ზ ე დ ა ჯ ა მ ი ა რ გ ა დ ი დ- დ ე ბ ა, ხ ო ლ ო ქ ვ ე დ ა ჯამი ა რ შ ე მ ც ი რ დ ე ბ ა.

საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ ერთი რაიმე e_k სიმრავლისათვის. ვთქვათ, e_k სიმრავლე დაყოფილია ორ ზომად e'_k და e''_k სიმრავლედ.

ავღნიშნოთ M'_k და M''_k-თი $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრები e'_k და e''_k სიმრავლეებზე შესაბამისად. ცხადია, რომ $M'_k \leqslant M_k$, $M''_k \leqslant M_k$. ამ შემთხვევაში ზედა ჯამის ყველა შესაკრები უცვლელი რჩება, გარდა $M_k\mu(e_k)$ შესაკრებისა, რომლის ნაცვლად გვექნება ორი შესაკრები $M'_k\mu(e'_k)$ და $M''_k\mu(e''_k)$, ასე რომ $M_k\mu(e_k)$ გამოსახულების ნაცვლად გვექნება $M'_k\mu(e'_k)+M''_k\mu(e''_k)$ ჯამი. მაგრამ

$$M'_k\mu(e'_k)+M''_k\mu(e''_k) \leqslant M_k\mu(e'_k)+M_k\mu(e''_k)=M_k\mu(e_k).$$

ამრიგად, $\bar{S}$ ჯამი არ მატულობს.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ქვედა $\underline{S}$ ჯამი არ მცირდება.

3°. ლებეგის არც ერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება ნებისმიერ ზედა ჯამს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია E სიმრავლის ორი ნებისმიერი L-დანაწილება $\{e'_1, e''_2, \ldots, e'_p\}$ და $\{e''_1, e''_2, \ldots, e''_q\}$. მათი შესაბამისი ზედა და ქვედა ჯამები იყოს $\bar{S}'$, $\underline{S}'$ და $\bar{S}''$, $\underline{S}''$, ე. ი.

$$\bar{S}'=\sum_{k=1}^{p} M'_k\mu(e'_k), \quad \underline{S}'=\sum_{k=1}^{p} m'_k\mu(e'_k),$$

$$S''=\sum_{k=1}^{q} M''_k\mu(e'_k), \quad \underline{S}''=\sum_{k=1}^{q} m'_k\mu(e''_k).$$

დასამტკიცებელია, რომ $\underline{S}'' \leqslant \bar{S}'$.

ამისათვის ავიღოთ E სიმრავლის მესამე დანაწილება $\left\{e_{ik}\right\}_{i,k=1}^{p,q}$, სადაც

$$e_{ik}=e'_i \cap e''_k.$$

უშუალოდ ჩანს, რომ ეს ისევე L-დანაწილებაა. მართლაც, e_{ik} სიმრავლეები ზომადია და წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ. ამის გარდა,

$$e'_i=\bigcup_{k=1}^{q} e_{ik}, \quad e''_k=\bigcup_{i=1}^{p} e_{ik}, \quad E=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{k=1}^{q} e_{ik}.$$

ზომის ადიტიურობის გამო გვექნება

$$\mu(e'_i)=\sum_{k=1}^{q}\mu(e_{ik}), \quad \mu(e''_k)=\sum_{i=1}^{p}\mu(e_{ik}).$$

აღვნიშნოთ M_{ik} და m_{ik}-თი $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები e_{ik} სიმრავლეზე. ცხადია, რომ

$$M_{ik}\leqslant M'_i,\quad M_{ik}\leqslant M''_k,\quad m_{ik}\geqslant m'_i,\ m_{ik}\geqslant m''_k.$$

რადგანაც

$$m''_k\mu(e''_k)=\sum_{i=1}^{p} m''_k\mu(e_{ik})\leqslant\sum_{i=1}^{p} m_{ik}\mu(e_{ik}),$$

ამიტომ

$$\underline{S}''=\sum_{k=1}^{q} m''_k\mu\,(e''_k)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{k=1}^{q} m_{ik}\mu(e_{ik}). \tag{1.1}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\bar{S}'\geqslant\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{k=1}^{q} M_{ik}\mu(e_{ik}). \tag{1.2}$$

(1.1) და (1.2) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ $\underline{S}''\leqslant\bar{S}'$ და ამით 2° თვისება დამტკიცებულია.

ახლა აღვნიშნოთ H^*-ით $f(x)$ ფუნქციის ყველა ზედა ჯამის სიმრავლე, H_*-ით კი ყველა ქვედა ჯამის სიმრავლე. მე-2° თვისების თანახმად, H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ H^* სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, H_* კი ზემოდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\bar{I}=\inf H^*,\quad \underline{I}=\sup H_*.$$

ცხადია, რომ $\underline{I}\leqslant\bar{I}$.

$\bar{I}$ და $\underline{I}$ რიცხვებს ვუწოდოთ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ზედა და ქვედა n-ჯერადი ინტეგრალები, გავრცელებული E სიმრავლეზე და ისინი აღვნიშნოთ შესაბამისად ასე

$$(L)\overline{\int_E} f(x)dx \text{ და } (L)\underline{\int_E} f(x)dx.$$

თუ $\bar{I}=\underline{I}$, მაშინ ამ რიცხვების საერთო მნიშვნელობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის n-ჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული E სიმრავლეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$(L)\int\limits_E f(x)dx, \text{ ან } (L)\overbrace{\int\int\limits_E\cdots\int}^{n\text{-ჯერ}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2\cdots dx_n.$$

ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია E სიმრავლეზე,

შემდეგში, $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალს, გავრცელებულს E სიმრავლეზე, აღვნიშნავთ $\int\limits_E f(x)dx$ სიმბოლოთი.

თეორემა 1. სასრული ზომის E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული ზომადი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ლებეგის აზრით E სიმრავლეზე.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ m და M-ით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები E სიმრავლეზე. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და გავყოთ $[m, M]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით:

$$m=z_0<z_1<\cdots<z_\nu=M,$$

ამასთანავე თითოეული ქვესეგმენტის სიგრძე ε-ზე ნაკლები იყოს. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$e_k=\{x: z_{k-1}\leqslant f(x)<z_k\} \quad (k=1, 2, \ldots, \nu), \quad e_{\nu+1}=\{x: f(x)=z_\nu\}.$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ზომადია E-ზე, ამიტომ e_k სიმრავლეები $(k=1, 2, \ldots, \nu+1)$ ზომადია. განვიხილოთ ლებეგის ზედა და ქვედა ჯამები:

$$\bar{S}=\sum_{k=1}^{\nu+1} M_k\mu(e_k), \quad \underline{S}=\sum_{k=1}^{\nu+1} m_k\mu(e_k),$$

სადაც M_k და m_k არიან $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები e_k სიმრავლეზე. ცხადია, რომ

$$M_k-m_k\leqslant z_k-z_{k-1}<\varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots, \nu), \quad M_{\nu+1}=m_{\nu+1}.$$

ამიტომ

$$\bar{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k-m_k)\mu(e_k)\leqslant\varepsilon\mu(E)$$

და, მაშასადამე,

$$\bar{I}-\underline{I}\leqslant\varepsilon\mu(E).$$

რადგანაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $\overline{I}=\underline{I}$.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია E სიმრავლეზე ლებეგის აზრით და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. ლებეგის ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

თეორემა 2. სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია უტოლობები

$$m\mu(E)\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant M\mu(E), \tag{2.1}$$

სადაც m და M არიან $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები E-ზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ E სიმრავლის რაიმე L-დანაწილება $\{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\}$ და შევადგინოთ ჯამები

$$\bar{S}=\sum_{k=1}^{\nu}M_k\mu(e_k), \quad \underline{S}=\sum_{k=1}^{\nu}m_k\mu(e_k).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$m\mu(E)\leqslant\underline{S}\leqslant\bar{S}\leqslant M\mu(E). \tag{2.2}$$

რადგანაც $f(x)$ შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციაა E სიმრავლეზე, ამიტომ იგი ინტეგრებადია E-ზე და (2.2) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (2.1) უტოლობები. თეორემა დამტკიცებულია. ამ თეორემას ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის თეორემა.

თეორემა 3. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$|f(x)|\leqslant K, \tag{2.3}$$

მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant K\mu(E). \tag{2.4}$$

დამტკიცება. (2.3) უტოლობიდან გვაქვს

$$-K\leqslant f(x)\leqslant K.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$-K\mu(E)\leqslant\int\limits_E f(x)dx\leqslant K\mu(E).$$

აქედან მიიღება (2.4) უტოლობა.

თეორემა 4. თუ E სიმრავლის ზომა ნულია, მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის $\int\limits_E f(x)dx=0$.

ეს თეორემა გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან.

თეორემა 5. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია შემოსაზღვრული ზომადი $f(x)$ ფუნქცია და E სიმრავლე ჯამია სასრული ან თვლადი სისტემის წყვილწყვილად არაგადამკვეთი ზომადი $E_1, E_2, \ldots$ სიმრავლეებისა, მაშინ

$$\int\limits_E f(x)dx=\int\limits_{E_1} f(x)dx+\int\limits_{E_2} f(x)dx+\cdots$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E_k სიმრავლეების სისტემა სასრულია:

$$E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_\nu.$$

ვთქვათ, $\{e_1, e_1, \ldots, e_p\}$ არის E სიმრავლის რაიმე L-დანაწილება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$e_{ik}=e_i\cap E_k\ (i=1,\ 2, \ldots,\ p;\ k=1,\ 2, \ldots,\ \nu).$$

ცხადია, e_{ik} სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. ამას გარდა,

$$E_k=\bigcup_{i=1}^{p} e_{ik}\quad (k=1,\ 2, \ldots,\ \nu).$$

მაშასადამე, $\{e_{1k}, e_{2k}, \ldots, e_{pk}\}$ წარმოადგენს E_k სიმრავლის L-დანაწილებას. ვთქვათ,

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{p} M_i\,\mu(e_i),\qquad \bar{S}_k=\sum_{i=1}^{p} M_{ik}\,\mu(e_{ik}),$$

სადაც M_i და M_{ik} არიან $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრები e_i და

e_{ik} სიმრავლეებზე შესაბამისად. ადვილი მისახვედრია, რომ $M_{ik} \leqslant M_i$ $(k=1, 2, \cdots, \nu)$ და $e_i = e_{i1} \cup e_{i2} \cup \cdots \cup e_{i\nu}$. ამიტომ

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(e_{i1} \cup e_{i2} \cup \cdots \cup e_{i\nu}) = \sum_{i=1}^{p} M_i \sum_{k=1}^{\nu} \mu(e_{ik}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{\nu} M_i \mu(e_{ik}) \right) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{\nu} M_{ik} \mu(e_{ik}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sum_{i=1}^{p} M_{ik} \mu(e_{ik}) \right) = \sum_{k=1}^{\nu} \bar{S}_k \geqslant \sum_{k=1}^{\nu} \int_{E_k} f(x) dx.$$

მაშასადამე,

$$\int_E f(x)\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{\nu} \int_{E_k} f(x) dx. \tag{2.5}$$

ახლა ვთქვათ, $\{E_{1k}, E_{2k}, \ldots, E_{p_k k}\}$ არის E_k სიმრავლის ნებისმიერი L-დანაწილება $(k=1, 2, \cdots, \nu)$. მაშინ

$$\{E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{p_1 1};\ E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{p_2 2};\ E_{1\nu}, E_{2\nu}, \ldots, E_{p_\nu \nu}\}$$

წარმოადგენს E სიმრავლის გარკვეულ L-დანაწილებას. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{\nu} \bar{S}^*_k = \bar{S} \geqslant \int_E f(x) dx, \tag{2.6}$$

სადაც $\bar{S}_k^*$ არის ლებეგის ზედა ჯამი, რომელიც შეესაბამება E_k სიმრავლის აღებულ დანაწილებას, ხოლო $\bar{S}$ წარმოადგენს E სიმრავლის აღნიშნული L-დანაწილების შესაბამის ლებეგის ზედა ჯამს. (2.6) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{\nu} \int_{E_k} f(x)\, dx \geqslant \int_E f(x) dx. \tag{2.7}$$

(2.5) და (2.7) უტოლობები გვაძლევს

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx + \cdots + \int_{E_\nu} f(x) dx.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა E_k სიმრავლეთა სისტემა სასრულია.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც E_k სიმრავლეთა სისტემა თვლადია:

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S_\nu=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_\nu, \quad R_\nu=E_{\nu+1}\cup E_{\nu+2}\cup\cdots$$

ცხადია, რომ S_ν და R_ν სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი და ზემოდამტკიცებულის ძალით

$$\int_E f(x)dx=\int_{S_\nu} f(x)dx+\int_{R_\nu} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\nu}\int_{E_k} f(x)dx+\int_{R_\nu} f(x)dx.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად,

$$m\mu(R_\nu)\leqslant\int_{R_\nu} f(x)dx\leqslant m\mu(R_\nu) \tag{2.8}$$

და რადგანაც $S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_\nu\subset\cdots\subset E$ და $E=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_\nu\cup\cdots$, ამიტომ

$$\lim_{\nu\to\infty}\mu(R_\nu)=0.$$

მაშასადამე, (2.8) უტოლობების თანახმად,

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{R_\nu} f(x)dx=0.$$

ამრიგად,

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx+\cdots+\int_{E_\nu} f(x)dx+\cdots$$

და ამით თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თეორემა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $E_1, E_2, E_3,\ldots$ სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად აქვთ საერთო წერტილები, რომლებიც შეადგენენ ნულ-ზომის სიმრავლეს.

თეორემა 6. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული ზომადი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ეკვივალენტურია, მაშინ

$$\int_E f(x)dx=\int_E \varphi(x)dx. \tag{2.9}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E_1=\{x:f(x)=\varphi(x)\},\quad E_2=\{x:f(x)\neq\varphi(x)\}.$$

ცხადია, E_1 და E_2 არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია და $E=E_1\cup E_2$. მაშასადამე,

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx,$$

$$\int_E \varphi(x)dx=\int_{E_1} \varphi(x)dx+\int_{E_3} \varphi(x)dx.$$

რადგანაც $\mu(E_2)=0$, ამიტომ

$$\int_{E_2} f(x)dx=\int_{E_2} \varphi(x)dx. \tag{2.10}$$

E_1 სიმრავლეზე $f(x)=\varphi(x)$ და, მაშასადამე,

$$\int_{E_1} f(x)dx=\int_{E_1} \varphi(x)dx. \tag{2.11}$$

(2.10) და (2.11) ტოლობათა შეკრება გვაძლევს (2.9) ტოლობას.

თეორემა 7. *თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია E-ზე და $\int_E f(x)dx=0$, მაშინ $f(x)$ ნულის ეკვივალენტურია.*

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$H=\{x:f(x)>0\},\quad H_\nu=\left\{x:f(x)>\frac{1}{\nu}\right\}\quad(\nu=1,\ 2,\ldots).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$H=H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_\nu\cup\cdots$$

დავამტკიცოთ, რომ $\mu(H)=0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\mu(H)>0$. მაშინ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი k, რომ $\mu(H_k)>0$. საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int_{H_k} f(x)dx>\frac{1}{k}\,\mu(H_k),$$

ხოლო

$$\int_{E-H_k} f(x)dx\geqslant 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{H_k} f(x)dx+\int_{E-H_k} f(x)dx>\frac{1}{k}\mu(H_k)>0,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, $\mu(H)=0$ და ამიტომ $f(x)$ ნულის ეკვივალენტურია.

თეორემა 8. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია ორი შემოსაზღვრული ზომადი $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქცია, მაშინ

$$\int_E [f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_E f_1(x)\,dx+\int_E f_2(x)dx. \tag{2.12}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ და განვიხილოთ E სიმრავლის რაიმე L-დანაწილება $\{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\}$. შევადგინოთ ჯამები:

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{\nu} M_i\,\mu(e_i),\quad \underline{S}=\sum_{i=1}^{\nu} m_i\,\mu(e_i),$$

$$\bar{S}_1=\sum_{i=1}^{\nu} M_i^{(1)}\mu(e_i),\quad \underline{S}_1=\sum_{i=1}^{\nu} m_i^{(1)}\mu(e_i),$$

$$\bar{S}_2=\sum_{i=1}^{\nu} M_i^{(2)}\mu(e_i),\quad \underline{S}_2=\sum_{i=1}^{\nu} m_i^{(2)}\mu(e_i),$$

სადაც M_i, $M_i^{(1)}$, $M_i^{(2)}$, m_i, $m_i^{(1)}$, $m_i^{(2)}$ არიან შესაბამისად $f(x)$, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციების ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები e_i სიმრავლეზე. რადგანაც

$$m_i^{(1)}+m_i^{(2)}\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M_i^{(1)}+M_i^{(2)},$$

ამიტომ

$$\underline{S}_1+\underline{S}_2\leqslant \underline{S}\leqslant \bar{S}\leqslant \bar{S}_1+\bar{S}_2.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\underline{S}_1+\underline{S}_2\leqslant \int_E f(x)dx\leqslant \bar{S}_1+\bar{S}_2.$$

საიდანაც

$$\int_E f_1(x)dx+\int_E f_2(x)dx\leqslant\int_E f(x)\,dx\leqslant\int_E f_1(x)dx+\int_E f_2(x)dx,$$

ე. ი. მართებულია (2.12) ტოლობა.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ არის სასრული ზომის E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, მაშინ ნებისმიერი K რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\int_E Kf(x)dx=K\int_E f(x)dx. \tag{2.13}$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $K>0$. ვთქვათ, $F(x)=Kf(x)$ და ავიღოთ E სიმრავლის რაიმე L-დანაწილება. მაშინ

$$\bar S_F=K\bar S_f,$$

სადაც $\bar S_F$ და $\bar S_f$ სიმბოლოებით აღნიშნულია $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების ზედა ჯამები. ცხადია, რომ

$$\inf\{\bar S_F\}=K\inf\{\bar S_f\},$$

ე. ი.

$$\int_E F(x)dx=K\int_E f(x)dx.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (2.13) ტოლობას, თუ $K>0$.

თუ $K=0$, თეორემა ტრივიალურია. ახლა ვთქვათ, $K<0$. მაშინ, მე-8 თეორემის თანახმად

$$0=\int_E[Kf(x)+(-K)f(x)]dx=\int_E Kf(x)\,dx+\int_E(-K)f(x)dx=$$

$$=\int_E Kf(x)dx+(-K)\int_E f(x)dx.$$

აქედან მიიღება (2.13) ტოლობა. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

მე-8 და მე-9 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი. სასრული ზომის სიმრავლეზე შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციებისათვის $f_1(x),\ f_2(x),\dots,f_m(x)$ მართებულია ტოლობა

$$\int_E [K_1f_1(x)+K_2f_2(x)+\cdots+K_mf_m(x)]dx=K_1\int_E f_1(x)dx+$$
$$+K_2\int_E f_2(x)dx+\cdots+K_m\int_E f_m(x)dx,$$

სადაც $K_1, K_2, \ldots, K_m$ მუდმივებია.

თეორემა 10. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია $f(x)$, რომელიც თითქმის ყველა x წერტილისათვის აკმაყოფილებს $f(x)\geqslant 0$ უტოლობას, მაშინ

$$\int_E f(x)dx\geqslant 0.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E^-=\{x:f(x)<0\},\quad E^+=\{x:f(x)\geqslant 0\}.$$

პირობის ძალით, $\mu(E^-)=0$. მაშასადამე,

$$\int_E f(x)dx=\int_{E^+}f(x)dx+\int_{E^-}f(x)dx=\int_{E^+}f(x)dx\geqslant 0.$$

თეორემა 11. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციები $f(x)$ და $\varphi(x)$ და თითქმის ყველა x წერტილისათვის $f(x)\geqslant\varphi(x)$, მაშინ

$$\int_E f(x)dx\geqslant\int_E\varphi(x)dx. \qquad (2.14)$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად, თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე $f(x)-\varphi(x)\geqslant 0$, ამიტომ მე-8 და მე-10 თეორემის ძალით

$$\int_E f(x)dx-\int_E\varphi(x)dx=\int_E[f(x)-\varphi(x)]dx\geqslant 0.$$

აქედან მიიღება (2.14) უტოლობა.

თეორემა 12. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია $f(x)$, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|dx. \qquad (2.15)$$

დამტკიცება. რადგან $f(x)$ ფუნქცია ზომადია, ამიტომ $|f(x)|$ ფუნქციაც ზომადია. ამას გარდა,

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

მე-11 თეორემის ძალით,

$$-\int_E |f(x)|\, dx \leqslant \int_E f(x)\, dx \leqslant \int_E |f(x)| dx.$$

აქედან მიიღება (2.15) უტოლობა.

§ 3. რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შედარება

ვაჩვენოთ, რომ ლებეგის მიერ მოცემული ინტეგრალის განსაზღვრა უფრო ზოგადია, ვიდრე რიმანის. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 18. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით n განზომილებიან r სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ლებეგის აზრითაც იმავე სეგმენტზე და

$$(R)\int_r f(x)dx = (L)\int_r f(x)dx. \tag{3.1}$$

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით r სეგმენტზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია r-ზე და მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია. მაშასადამე, $f(x)$ ზომადია და იგი ინტეგრებადია ლებეგის აზრით.

ახლა დავამტკიცოთ (3.1) ტოლობის მართებულობა. ამისათვის r სეგმენტი გავყოთ ქვესეგმენტებად $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$. აღვნიშნოთ m_k და M_k-თი $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები r_k-ზე $k=1, 2, \ldots, \nu$). საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$m_k|r_k| \leqslant (L)\int_{r_k} f(x)dx \leqslant M_k|r_k| \quad (k=1, 2, \ldots, \nu).$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k|r_k| \leqslant (L)\int_r f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} M_k|r_k|.$$

აქედან გვაქვს

$$\underline{\int_r} f(x)dx \leqslant (L)\int_r f(x)dx \leqslant \overline{\int_r} f(x)dx.$$

მაგრამ, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით r-ზე, ამიტომ

$$\underline{\int_r} f(x)dx = \overline{\int_r} f(x)dx = (R)\int_r f(x)dx.$$

მაშასადამე, მართებულია (3.1) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა შევადგინოთ მაგალითი ისეთი ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციისა, რომელიც რიმანის აზრით ინტეგრებადი არ არის. ვთქვათ, n-განზომილებიან $r=[0, 1;\ 0,1;\cdots;\ 0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალური წერტილია,} \\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალური წერტილია.} \end{cases}$$

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა რიმანის აზრით r-ზე, რადგან r სეგმენტის ყოველ წერტილში იგი წყვეტილია. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ ზომადია r-ზე და, მაშასადამე, ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ლებეგის აზრით. ამით ნაჩვენებია, რომ ლებეგის ინტეგრალის ცნება უფრო ზოგადია, ვიდრე რიმანის ინტეგრალისა.

§ 4. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

ვთქვათ, R^n სივრცის სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრულია შემოსაზღვრული ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, $f_k(x), \ldots$, რომელიც კრებადია რაიმე აზრით შემოსაზღვრული ზომადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ისმის კითხვა: მართებულია თუ არა ტოლობა

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx. \tag{4.1}$$

თუ (4.1) ტოლობა მართებულია, მაშინ ამბობენ, რომ შესაძლებელია ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ (4.1) ტოლობა საზოგადოდ მართებული არაა. მართლაც, ვთქვათ, $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[0, 2]$ სეგმენტზე ასე:

$$f_k(x)=\begin{cases} k^2x, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{k}, \\ -k^2x+2k, & \text{როდესაც } \frac{1}{k}\leqslant x\leqslant \frac{2}{k}, \\ 0, & \text{როდესაც } \frac{2}{k}< x\leqslant 2. \end{cases}$$

$f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ფუნქციები უწყვეტია $[0, 2]$ სეგმენტზე და

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0.$$

მაგრამ

$$\int_0^2 f_k(x)dx=1 \quad (k=1, 2, \ldots) \text{ და } \int_0^2 f(x)dx=0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^2 f_k(x)\,dx \neq \int_0^2 f(x)dx.$$

ამიტომ ბუნებრივია დავსვათ საკითხი იმ დამატებით შეზღუდვებზე, რომლებიც საჭიროა დავადოთ $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ ფუნქციებს, რომ ადგილი ჰქონდეს (4.1) ტოლობას.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 14 (ლებეგი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ერთობლივ შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ ზომით კრებადია ზომად $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ მართებულია (4.1) ტოლობა.

დამტკიცება. რადგანაც ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის და ყოველი k-თვის ადგილი აქვს უტოლობას $|f_k(x)|<M$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ E სიმრავლის თითქმის ყველა x წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$|f(x)|\leqslant M. \tag{4.2}$$

მართლაც, რისის თეორემის ძალით, ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{f_{k_\nu}(x)\}$, რომელიც კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან E-ზე. იმ x წერტილებზე, სადაც $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_{k_\nu}(x)=f(x)$, თუ გადავალთ ზღვარზე $|f_{k_\nu}(x)|<M$ უტოლობაში, როდესაც $\nu\to\infty$, მივიღებთ (4.2) უტოლობას.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვი და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A_m(\delta)=\{x:|f_m(x)-f(x)|\geqslant\delta\}, \quad B_m(\delta)=\{x:|f_m(x)-f(x)|<\delta\}.$$

გვაქვს:

$$\left|\int_E f_m(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f_m(x)-f(x)|\,dx=$$

$$= \int\limits_{A_m(\delta)} |f_m(x)-f(x)|\,dx + \int\limits_{B_m(\delta)} |f_m(x)-f(x)|\,dx. \tag{4.3}$$

შემდეგ, რაკი $|f_m(x)-f(x)| \leqslant |f_m(x)|+|f(x)|$, ამიტომ თითქმის ყველგან $A_m(\delta)$ სიმრავლეზე ადგილი აქვს უტოლობას $|f_m(x)-f(x)|<2M$. მაშასადამე, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად,

$$\int\limits_{A_m(\delta)} |f_m(x)-f(x)|\,dx \leqslant 2M\mu(A_m(\delta)). \tag{4.4}$$

მეორე მხრით, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int\limits_{B_m(\delta)} |f_m(x)-f(x)|dx \leqslant \delta\mu(B_m(\delta)) \leqslant \delta\mu(E). \tag{4.5}$$

(4.4) და (4.5) უტოლობების ძალით, (4.3) თანაფარდობიდან ვღებულობთ

$$\left|\int\limits_E f_m(x)dx - \int\limits_E f(x)\,dx\right| \leqslant 2M\mu(A_m(\delta))+\delta\mu(E). \tag{4.6}$$

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და შევარჩიოთ δ რიცხვი ისე, რომ $\delta\mu(E)<\frac{\varepsilon}{2}$. ზომითი კრებადობის განსაზღვრის თანახმად

$\lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_m(\delta))=0$ და, მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ

$$2M\mu(A_m(\delta))<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } m>N.$$

მაშასადამე, (4.6) უტოლობიდან გვაქვს

$$\left|\int\limits_E f_m(x)\,dx - \int\limits_E f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

როცა $m>N$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (4.1) ტოლობა.

თეორემა 15 (ლებეგი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ერთობლივ შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია შემოსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას.

დამტკიცება. X თავის მე-13 თეორემის ძალით $f(x)$ ფუნქცია ზომადია E-ზე. შემდეგ, იმავე თავის 21-ე თეორემის თანახმად ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშასადამე, მე-14 თეორემის ძალით მართებულია (4.1) ტოლობა.

ეს თეორემა წარმოადგენს არცელას თეორემის განზოგადებას.

თავი XV

ლებეგის ზოგადი ინტეგრალი

§ 1. ლებეგის ზოგადი ინტეგრალის განსაზღვრა

ვთქვათ, $f(x)$ არის R^n სივრცის წერტილთა სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომელიც შემოუსაზღვრელია E-ზე. განვსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x) \geqslant 0$. ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის განვსაზღვროთ $[f(x)]_\nu$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$[f(x)]_\nu = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } f(x) \leqslant \nu, \\ \nu, & \text{თუ } f(x) > \nu. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $[f(x)]_\nu$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ზ ო მ ა დ ი ა. მართლაც, ნებისმიერი a რიცხვისათვის გვაქვს

$$\{x : [f(x)]_\nu > a\} = \begin{cases} \{x : f(x) > a\}, & \text{როდესაც } a \leqslant \nu, \\ \Lambda, & \text{როცა } a > \nu. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს $[f(x)]_\nu$ ფუნქციის ზომადობა.

შემდეგ, $[f(x)]_\nu$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს ლებეგის ინტეგრალი $\int\limits_E [f(x)]_\nu \, dx$. ამას გარდა, რადგან ფუნქციათა მიმდევრობა $\{[f(x)]_\nu\}$ ზრდადია, ამიტომ რიცხვთა მიმდევრობა $\left\{\int\limits_E [f(x)]_\nu dx\right\}$ იქნება ზრდადი და, მაშასადამე, არსებობს $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int\limits_E [f(x)]_\nu \, dx$, რომელიც სასრულია, ან უდრის $+\infty$. ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი, გავრცელებული E სიმრავლეზე და აღინიშნება $\int\limits_E f(x)\, dx$ სიმბოლოთი.

თუ ეს ინტეგრალი სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ან L-ინტეგრებადი E სიმრავლეზე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია E-ზე.

მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $H=\{x : f(x)=+\infty\}$, გვექნება

$$\int_E f(x)dx \geqslant \int_E [f(x)]_\nu\, dx \geqslant \int_H [f(x)]_\nu\, dx = \nu\mu(H).$$

აქედან

$$\mu(H) \leqslant \frac{1}{\nu}\int_E f(x)dx.$$

ვინაიდან ეს უტოლობა მართებულია ყოველი ν-თვის და $f(x)$ ჯამებადია E სიმრავლეზე, ამიტომ $\mu(H)=0$, ე. ი. $f(x)$ თითქმის ყველგან სასრულია E-ზე.

ცხადია, ყოველი არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია ნულ ზომის E სიმრავლეზე და

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი $f(x)$ ფუნქცია არადადებითია, მაშინ, თანახმად განსაზღვრისა,

$$\int_E f(x)\,dx = -\int_E [-f(x)]dx.$$

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ არის სასრული ზომის E სიმრავლეზე ნებისმიერი ნიშნის ზომადი ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქციები

$$\overset{\bullet}{f}(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \quad \underset{\bullet}{f}(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

$\overset{\bullet}{f}(x)$ და $\underset{\bullet}{f}(x)$ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია, ასე რომ არსებობს ინტეგრალები $\int_E \overset{\bullet}{f}(x)dx$ და $\int_E \underset{\bullet}{f}(x)dx$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(x) = \overset{\bullet}{f}(x) - \underset{\bullet}{f}(x).$$

თუ $\overset{\bullet}{f}(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებიდან ერთი მაინც ჯამებადია E სიმრავლეზე,

მაშინ სხვაობას $\int\limits_E \overset{\bullet}{f}(x)dx - \int\limits_E \underset{\bullet}{f}(x)dx$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი, გავრცელებული E სიმრავლეზე და აღინიშნება $\int\limits_E f(x)dx$.

თუ $\overset{\bullet}{f}(x)$ და $\underset{\bullet}{f}(x)$ ფუნქციები ორივე ჯამებადია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ჯამებადი ანუ L-ინტეგრებადი E-ზე.

§ 2. ლებეგის ზოგადი ინტეგრალის თვისებები

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ ლებეგის ზოგადი ინტეგრალის ელემენტარულ თვისებებს.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია ურთიერთ არაგადამკვეთ სასრული ზომის სიმრავლეებზე $E_1, E_2, \dots, E_m$, მაშინ $f(x)$ ჯამებადია $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m$ სიმრავლეზე და მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\int\limits_{E_1} f(x)dx+\int\limits_{E_2} f(x)dx+\cdots+\int\limits_{E_m} f(x)dx. \tag{2. 1}$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)\geqslant 0$. მართლაც, თუ თეორემა მართებულია არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის, მაშინ იგი მართებულია არადადებითი ფუნქციებისათვისაც და ზოგადი შემთხვევა მიიღება შეკრების საშუალებით.

ამრიგად, ვთქვათ, E სიმრავლეზე $f(x)\geqslant 0$. რადგანაც ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის $[f(x)]_\nu$ შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int\limits_E [f(x)]_\nu\,dx=\int\limits_{E_1}[f(x)]_\nu\,dx+\int\limits_{E_2}[f(x)]_\nu\,dx+\cdots+\int\limits_{E_m}[f(x)]_\nu\,dx.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\nu\to\infty$ მივიღებთ (2.1) ტოლობას.

თეორემა 2 (ინტეგრალის სრული ადიტიურობა). თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია ზომად E სიმრავლეზე, რომელიც ჯამია ურთიერთ არაგადამკვეთი ზომად სიმრავლეთა თვლადი სისტემისა $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, მაშინ

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{2.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აქაც შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x) \geqslant 0$. ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_E [f(x)]_\nu dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} [f(x)]_\nu \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\nu \to \infty$, გვექნება

$$\int_E f(x) \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx. \tag{2.3}$$

მეორე მხრით, ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_E [f(x)]_\nu \, dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} [f(x)]_\nu \, dx.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\nu \to \infty$, მივიღებთ

$$\int_E f(x) dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} f(x) dx.$$

თუ მიღებულ უტოლობაში კიდევ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$, გვექნება

$$\int_E f(x) \, dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx. \tag{2.4}$$

(2.3) და (2.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (2.2) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ს ა ს რ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ა, მ ა შ ი ნ მ ა თ ი ჯ ა მ ი ც ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ა დ ა ჯ ა მ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ თ ა ჯ ა მ ი ს ტ ო ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისია ორი ფუნქციის შემთხვევა განვიხილოთ. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია სასრული ზომის E სიმრავლეზე.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ორივე ფუნქცია არაუარყოფითია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x) = f(x) + g(x).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$[F(x)]_\nu \leqslant [f(x)]_\nu + [g(x)]_\nu \leqslant [F(x)]_{2\nu}.$$

მაშასადამე,

$$\int_E [F(x)]_\nu\, dx \leqslant \int_E [f(x)]_\nu dx + \int_E [g(x)]_\nu\, dx \leqslant \int_E [F(x)]_{2\nu}\, dx.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\nu \to \infty$, გვექნება

$$\int_E F(x)dx \leqslant \int_E f(x)\, dx + \int_E g(x)dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

აქედან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\int_E F(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

ამრიგად, დადებითი ფუნქციებისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, E სიმრავლეზე $f(x) \geqslant 0$, ხოლო $g(x) < 0$ და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$H_1 = \{x : F(x) \geqslant 0\}, \quad H_2 = \{x : F(x) < 0\}.$$

რადგანაც H_1 სიმრავლეზე $f(x)$, $-g(x)$, $F(x)$ ფუნქციები არაუარყოფითია და $f(x) = F(x) + [-g(x)]$, ამიტომ ზემოდამტკიცებულის ძალით,

$$\int_{H_1} f(x)\, dx = \int_{H_1} F(x)dx - \int_{H_1} g(x)dx.$$

აქედან

$$\int_{H_1} F(x)\, dx = \int_{H_1} f(x)\, dx + \int_{H_1} g(x)dx. \tag{2.5}$$

შემდეგ, რადგანაც $-g(x)$, $f(x)$, $-F(x)$ ფუნქციები დადებითია H_2 სიმრავლეზე და $-g(x) = f(x) + [-F(x)]$, ამიტომ

$$-\int_{H_2} g(x)dx = \int_{H_2} f(x)dx - \int_{H_2} F(x)dx.$$

აქედან

$$\int_{H_2} F(x)dx = \int_{H_2} f(x)dx + \int_{H_2} g(x)dx. \tag{2.6}$$

თუ (2.5) და (2.6) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ და გავითვალისწინებთ, რომ $E=H_1\cup H_2$, $H_1\cap H_2=\Lambda$, მივიღებთ ტოლობას

$$\int_E F(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx+\int_E g(x)dx. \tag{2.7}$$

ამრიგად, (2.7) ტოლობის მართებულობა დავამტკიცეთ დადებითი და უარყოფითი ფუნქციებისათვის.

დასასრულ, ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ნებისმიერი ნიშნის ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E_1=\{x:f(x)\geqslant 0,\ g(x)\geqslant 0\},\quad E_2=\{x:f(x)\geqslant 0,\ g(x)<0\},$$
$$E_3=\{x:f(x)<0,\ g(x)<0\},\qquad E_4=\{x:f(x)<0,\ g(x)\geqslant 0\}.$$

ცხადია, რომ E_1, E_2, E_3 E_4 სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია და, ამას გარდა,

$$E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4.$$

ზემოდამტკიცებულის ძალით,

$$\int_{E_k} F(x)dx=\int_{E_k} f(x)\,dx+\int_{E_k} g(x)dx\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\int_E F(x)dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია სასრული ზომის E სიმრავლეზე და $f(x)\leqslant g(x)$, მაშინ

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx. \tag{2.8}$$

დამტკიცება. ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის $[f(x)]_\nu\leqslant[g(x)]_\nu$ მაშასადამე,

$$\int_E [f(x)]_\nu\,dx\leqslant\int_E [g(x)]_\nu\,dx.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\nu\to\infty$, მივიღებთ (2.8) უტოლობას.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $g(x)$ ჯამებადია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციაც ჯამებადია.

თეორემა 5. *თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია სასრული ზომის E სიმრავლეზე, ხოლო A მუდმივია, მაშინ $Af(x)$ ფუნქციაც ჯამებადია E-ზე და ადგილი აქვს ტოლობას*

$$\int_E Af(x)\,dx = A\int_E f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $f(x)\geqslant 0$. თუ A მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან. თუ $A=\frac{1}{m}$, სადაც m მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ კვლავ მე-3 თეორემის თანახმად

$$\int_E f(x)dx = m\int_E \frac{1}{m} f(x)dx.$$

საიდანაც

$$\int_E \frac{1}{m} f(x)dx = \frac{1}{m}\int_E f(x)dx.$$

აქედან გამომდინარეობს (2.9) ტოლობის მართებულობა ყოველი დადებითი რაციონალური A რიცხვისათვის.

ახლა ვთქვათ, A ნებისმიერი დადებითი ირაციონალური რიცხვია. მაშინ მოიძებნება A-საკენ კრებადი დადებითი რაციონალურ რიცხვთა ისეთი ორი მიმდევრობა $\{r'_k\}$ და $\{r''_k\}$, რომ $r'_k<A<r''_k$ $(k=1, 2,\cdots)$. რადგანაც

$$r'_k f(x)\leqslant Af(x)\leqslant r''_k f(x),$$

ამიტომ მე-4 თეორემის ძალით

$$r'_k\int_E f(x)dx \leqslant \int_E Af(x)dx \leqslant r_k''\int_E f(x)dx.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$, მივიღებთ (2.9) ტოლობას.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნიშნის ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია, ხოლო $A>0$. ვთქვათ, $F(x)=Af(x)$. ცხადია, რომ

$$\overset{\bullet}{F}(x)=A\overset{\bullet}{f}(x),\quad \underset{\bullet}{F}(x)=A\underset{\bullet}{f}(x),\quad F(x)=A\overset{\bullet}{f}(x)-A\underset{\bullet}{f}(x).$$

რაკი $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია, ამიტომ $\overset{\bullet}{f}(x)$ და $\underset{\bullet}{f}(x)$ ფუნქციებიც ჯამება-

დია და ზემოდამტკიცებულის ძალით $A\dot{f}(x)$ და $A\underset{\cdot}{f}(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია. მაშასადამე, $F(x)$ ფუნქციაც ჯამებადია. ამის გამო

$$\int\limits_E F(x)dx=\int\limits_E A\dot{f}(x)dx-\int\limits_E A\underset{\cdot}{f}(x)dx=A\int\limits_E \dot{f}(x)dx-A\int\limits_E \underset{\cdot}{f}(x)dx=$$

$$=A\left\{\int\limits_E \dot{f}(x)dx-\int\limits_E \underset{\cdot}{f}(x)dx\right\}=A\int\limits_E f(x)dx.$$

ამრიგად, მართებულია (2. 9) ტოლობა ნებისმიერი ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისათვის. თუ $A=0$, (2.9) ტოლობა ტრივიალურია.

დასასრულ, ვთქვათ, $A<0$, ცხადია, რომ

$$F(x)=-A\underset{\cdot}{f}(x)-(-A)\dot{f}(x).$$

რადგანაც $\underset{\cdot}{f}(x)$ და $\dot{f}(x)$ ფუნქციები ჯამებადია, ამიტომ $(-A)\underset{\cdot}{f}(x)$ და $(-A)\dot{f}(x)$ ფუნქციებიც ჯამებადია და, მაშასადამე, ჯამებადია $F(x)$ ფუნქცია. ამიტომ

$$\int\limits_E Af(x)dx=(-A)\int\limits_E \underset{\cdot}{f}(x)dx-(-A\int\limits_E \dot{f}(x)dx=A\int\limits_E f(x)dx.$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია E სიმრავლეზე და E სიმრავლის ყოველ წერტილში $f(x)\leqslant g(x)$, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\int\limits_E f(x)dx\leqslant\int\limits_E g(x)dx. \tag{2.10}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)=g(x)-f(x)$. E სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქცია ჯამებადია და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int\limits_E F(x)dx\geqslant 0.$$

მაგრამ

$$\int\limits_E F(x)\,dx=\int\limits_E g(x)dx-\int\limits_E f(x)dx.$$

მაშასადამე, მართებულია (2.10) უტოლობა.

თეორემა 7. სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $|f(x)|$ ფუნქცია იყოს ჯამებადი E-ზე. თუ ეს პირობა დაცულია, მაშინ

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\, dx. \tag{2.11}$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ $|f(x)| = \dot{f}(x) + \underset{\cdot}{f}(x)$. თუ $f(x)$ ჯამებადია E-ზე, მაშინ, განსაზღვრის თანახმად $\dot{f}(x)$ და $\underset{\cdot}{f}(x)$ ფუნქციები ჯამებადია E სიმრავლეზე და ამიტომ $|f(x)|$ ჯამებადი ფუნქციაა E-ზე. თუკი $|f(x)|$ ჯამებადია E-ზე, მაშინ მე-4 თეორემის თანახმად $\dot{f}(x)$ და $\underset{\cdot}{f}(x)$ ფუნქციები ჯამებადია E სიმრავლეზე. მაშასადამე, $f(x)$ ჯამებადია E-ზე.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ჯამებადია E სიმრავლეზე. თუ მოვახდენთ $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ უტოლობების ინტეგრებას, მაშინ მე-6 თეორემის ძალით გვექნება

$$-\int_E |f(x)|\, dx \leqslant \int_E f(x)\, dx \leqslant \int_E |f(x)|\, dx. \tag{2.12}$$

მაშასადამე, მართებულია (2.11) უტოლობა.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ზომადი ფუნქციებია სასრული ზომის E სიმრავლეზე, ამასთანავე $g(x)$ არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქცია E-ზე და E სიმრავლის ყოველ წერტილში $|f(x)| \leqslant g(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციაც იქნება ჯამებადი და

$$\int_E |f(x)|\, dx \leqslant \int_E g(x)dx.$$

ეს თეორემა მე-4 და მე-7 თეორემების შედეგია.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე, მაშინ იგი ჯამებადია E სიმრავლის ყოველ ზომად e ქვესიმრავლეზე.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილში $f(x) \geqslant 0$. რაკი $[f(x)]_N$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ზომადი E სიმრავლეზე, ამიტომ იგი ასეთივეა e

სიმრავლეზედაც და, მაშასადამე, ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის არსებობს $\int\limits_e [f(x)]_\nu dx$. შემდეგ, რადგანაც $[f(x)]_\nu \leqslant f(x)$, ამიტომ

$$\int\limits_e [f(x)]_\nu dx \leqslant \int\limits_E [f(x)]_\nu dx \leqslant \int\limits_E f(x) dx.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_e [f(x)]_\nu dx \leqslant \int\limits_E f(x) dx.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ჯამებადია e-ზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ზომადი $f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია E სიმრავლეზე და $\int\limits_E f(x)dx=0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ნულის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვაქვს

$$0 \leqslant \int\limits_E [f(x)]_\nu dx \leqslant \int\limits_E f(x) dx = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\int\limits_E [f(x)]_\nu dx=0$ ყოველი ν-თვის. წინა თავის მე-7 თეორემის ძალით $[f(x)]_\nu$ ნულის ეკვივალენტურია ყოველი ν-თვის. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$H=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{x : [f(x)]_\nu \neq 0\},$$

გვექნება $\mu(H)=0$ და რაკი E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის $\lim\limits_{\nu\to\infty} [f(x)]_\nu = f(x)$, ამიტომ $f(x)=0$, როცა $x \in E-H$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია სასრული ზომის E სიმრავლეზე, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\mu(e)<\eta$ პირობას, მართებულია უტოლობა

$$\left|\int\limits_e f(x) dx\right| < \varepsilon.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უარყოფითი არაა E სიმრავლის არც ერთ წერტილში. რადგანაც

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_E [f(x)]_\nu\, dx,$$

ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν_0, რომ

$$0 \leqslant \int_E f(x)dx - \int_E [f(x)]_{\nu_0} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ვთქვათ, $\eta = \frac{\varepsilon}{2\nu_0}$ და განვიხილოთ E სიმრავლის ნებისმიერი ზომადი e ქვესიმრავლე, ზომით η-ზე ნაკლები. გვაქვს:

$$\int_e f(x)\,dx - \int_e [f(x)]_{\nu_0}dx = \int_e \{f(x) - [f(x)]_{\nu_0}\}dx \leqslant \int_E \{f(x) - [f(x)]_{\nu_0}\}dx =$$

$$= \int_E f(x)\,dx - \int_E [f(x)]_{\nu_0}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან

$$\int_e f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_e [f(x)]_{\nu_0}\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \nu_0\mu(e) < \frac{\varepsilon}{2} + \nu_0\eta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებულ თვისებას ინტეგრალის ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი უ წ ყ ვ ე ტ ო ბ ა ეწოდება.

თეორემა 12. თ უ $f(x)$ დ ა $g(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ა ს ა ს რ უ ლ ი ზ ო მ ი ს E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე დ ა $g(x)$ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ $f(x)g(x)$ ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ც ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ა E-ზ ე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $g(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა E სიმრავლეზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის $|g(x)| \leqslant M$. მაშასადამე,

$$|f(x)\,g(x)| \leqslant M|f(x)|$$

და რაკი $|f(x)|$ ფუნქცია ჯამებადია, ამიტომ მე-8 თეორემის ძალით $|f(x)\,g(x)|$ ფუნქციაც ჯამებადია. ამრიგად, $f(x)\,g(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა E-ზე.

თეორემა 13. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ეკვივალენტური ზომადი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებიდან ერთი ჯამებადია, მაშინ მეორეც ჯამებადი იქნება და მათი ინტეგრალები თანატოლია.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ჯამებადია E-ზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H=\{x: f(x)=g(x)\}.$$

რადგანაც $f(x)$ და $g(x)$ ეკვივალენტური ზომადი ფუნქციებია, ამიტომ H სიმრავლე ზომადია და $\mu(E-H)=0$. ცხადია, $E-H$ სიმრავლეზე $g(x)$ ფუნქცია ჯამებადია, ვინაიდან $\int\limits_{E-H} g(x)dx=0$. ამას გარდა, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობის გამო E-ზე, იგი ჯამებადი იქნება H სიმრავლეზე და, მაშასადამე, $g(x)$ ჯამებადია H-ზე. ამრიგად, $g(x)$ ჯამებადია $E-H$ და H სიმრავლეებზე და ამიტომ იგი ჯამებადია E სიმრავლეზე. შემდეგ,

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\int\limits_H f(x)dx=\int\limits_H g(x)dx+\int\limits_{H-E} g(x)dx=\int\limits_E g(x)dx$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ჯამებადი ფუნქციის მნიშვნელობები შეგვიძლია შევცვალოთ ნულზომის სიმრავლეზე ინტეგრალის მნიშვნელობის შეუცვლელად.

§ 3. ზღვარზე გადასვლა ლებეგის ზოგადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით საკითხებს ლებეგის ზოგად ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ.

ლემა. თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრული არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$ თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\int\limits_E f(x)dx \leqslant \sup\left\{\int\limits_E f_m(x)dx\right\}. \tag{3.1}$$

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ E სიმრავლის თითქმის ყოველ x წერტილში მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m\to\infty}[f_m(x)]_\nu=[f(x)]_\nu \tag{3.2}$$

ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის.

ავიღოთ E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილი, რომელზედაც ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა კრებადია $f(x_0)$-საკენ. თუ $f(x_0)>\nu$, მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $f_m(x_0)>\nu$, როდესაც $m>N$. მაშასადამე,

$$[f_m(x_0)]_\nu=\nu=[f(x_0)]_\nu, \text{ როდესაც } m>N.$$

თუკი $f(x_0)<\nu$, მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N^*, რომ $f_m(x_0)<\nu$, როდესაც $m>N^*$. მაშასადამე,

$$[f_m(x_0)]_\nu=f_m(x_0), \text{ როდესაც } m>N^*.$$

შემდეგ, რადგანაც

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x_0)=f(x_0)=[f(x_0)]_\nu,$$

ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty} [f_m(x_0)]_\nu=[f(x_0)]_\nu.$$

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x_0)=\nu$. ამ შემთხვევაში, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი m_0, რომ $f_m(x_0)>\nu-\varepsilon$, როცა $m>m_0$ და, მაშასადამე, $\nu-\varepsilon<[f_m(x_0)]_\nu\leqslant\nu$, ე. ი.

$$0\leqslant|[f(x_0)]_\nu-[f_m(x_0)]_\nu|<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>m_0.$$

ამრიგად, თითქმის ყველგან E-ზე მართებულია (3.2) ტოლობა.

ახლა გადავიდეთ ლემის დამტკიცებაზე. რადგანაც ყოველი $[f_m(x)]_\nu$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ν რიცხვით, ამიტომ ლებეგის თეორემის ძალით,

$$\lim_{m\to\infty}\int_E [f_m(x)]_\nu dx=\int_E [f(x)]_\nu\, dx.$$

მაგრამ ყოველი m-სათვის

$$\int_E [f_m(x)]_\nu dx\leqslant\int_E f_m(x)dx\leqslant\sup\left\{\int_E f_m(x)dx\right\}.$$

მაშასადამე,

$$\int_E [f(x)]_\nu dx\leqslant\sup\left\{\int_E f_m(x)dx\right\}.$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\nu\to\infty$, მივიღებთ (3.1) უტოლობას. ლემა დამტკიცებულია.

კერძოდ, თუ $\sup\left\{\int_E f_m(x)dx\right\}<+\infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E-ზე.

თეორემა 14 (ბ. ლევი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების ზრდადი მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$, მაშინ

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx=\int_E f(x)dx, \tag{3.3}$$

სადაც

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

დამტკიცება. ადვილი მისახვედრია, რომ $\lim\limits_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx$ არის სასრული ან $+\infty$. ლემის ძალით,

$$\int_E f(x)dx\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx. \tag{3.4}$$

მეორე მხრით, ყოველი m-თვის $f_m(x)\leqslant f(x)$. მაშასადამე,

$$\int_E f_m(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.$$

ამ უკანასკნელ უტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx. \tag{3.5}$$

(3.4) და (3.5) თანაფარდობები გვაძლევს (3.3) ტოლობას.

თეორემა 15 (პ. ფატუ). თუ მოცემულია სასრული ზომის E სიმრავლეზე არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$, მაშინ

$$\int_E \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx\leqslant\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$g_k(x)=\inf\{f_k(x),\ f_{k+1}(x),\ldots\}.$$

რადგანაც $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ფუნქციები ზომადია, ამიტომ $g_k(x)$ ფუნქცია ზომადია E-ზე. თუ k-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს $1, 2, \ldots$, მივიღებთ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა ზრდად მიმდევრობას $\{g_k(x)\}$, რომე-

ლიც კრებადია E სიმრავლეზე $\liminf\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ ფუნქციისაკენ. ლევის თეორემის ძალით,

$$\int_E \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx.$$

მაგრამ

$$\int_E g_k(x)dx\leqslant\int_E f_k(x)dx \quad (k=1,2,\dots).$$

ამიტომ

$$\int_E \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx\leqslant\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx.$$

ფატუს თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16 (ლებეგი). *თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია ჯამებად ფუნქციათა თითქმის ყველგან ზრდადი მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \dots$ და ყოველი m-თვის*

$$\int_E f_m(x)dx\leqslant M,$$

სადაც M რაიმე მუდმივია, მაშინ ფუნქცია $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ ჯამებადია E სიმრავლეზე და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{3.6}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციები

$$g_m(x)=f_m(x)-f_1(x) \quad (m=1,\ 2,\dots).$$

ეს ფუნქციები ჯამებადია E სიმრავლეზე და თითქმის ყველგან E-ზე

$$g_m(x)\geqslant 0 \quad (m=1,\ 2,\dots).$$

ამას გარდა, თითქმის ყველგან E-ზე

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_m(x)\leqslant\cdots \tag{3.7}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (3.7) თა-

ნაფარდობას ადგილი აქვს E სიმრავლის ყოველ წერტილში. ლევის თეორემის ძალით

$$\int_E \lim_{m\to\infty} g_m(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_E g_m(x)dx,$$

ანუ

$$\int_E [f(x)-f_1(x)]dx = \lim_{m\to\infty}\int_E [f_m(x)-f_1(x)]dx \leqslant M - \int_E f_1(x)dx.$$

ამ თანაფარდობიდან გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობა E სიმრავლეზე და (3.6) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 17 (ლებეგი). თ უ ს ა ს რ უ ლ ი ზ ო მ ი ს E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა ზ ო მ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$ დ ა ყ ო ვ ე ლ ი m-თ ვ ი ს თ ი თ ქ მ ი ს ყ ვ ე ლ გ ა ნ E-ზ ე

$$|f_m(x)| \leqslant \varphi(x), \tag{3.8}$$

ს ა დ ა ც $\varphi(x)$ ა რ ა უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა E-ზ ე, მ ა შ ი ნ

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx \geqslant \int_E \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx, \tag{3.9}$$

$$\limsup_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx \leqslant \int_E \limsup_{m\to\infty} f_m(x)dx. \tag{3.10}$$

თ უ კ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა მ ო ც ე მ უ ლ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა E-ზ ე $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა კ ე ნ დ ა შ ე ს რ უ ლ ე ბ უ ლ ი ა (3.8) პ ი რ ო ბ ა, მ ა შ ი ნ

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx = \int_E f(x)dx. \tag{3.11}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (3.8) უტოლობას ადგილი აქვს E სიმრავლის ყოველ x წერტილში და ყველგან E-ზე $\varphi(x) < +\infty$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\underline{f}(x) = \liminf_{m\to\infty} f_m(x), \quad \overline{f}(x) = \limsup_{m\to\infty} f_m(x).$$

ცხადია, რომ ყოველი m-თვის $\varphi(x) \pm f_m(x) \geqslant 0$ და ამიტომ ფატუს თეორემის ძალით

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E [\varphi(x)+f_m(x)]dx \geqslant \int_E [\varphi(x)+\underline{f}(x)]dx, \tag{3.12}$$

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E [\varphi(x)-f_m(x)]dx \geqslant \int_E [\varphi(x)-\overline{f}(x)]dx. \tag{3.13}$$

მაგრამ

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E [\varphi(x)+f_m(x)]dx=\int_E \varphi(x)dx+\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx,$$

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E [\varphi(x)-f_m(x)]dx=\int_E \varphi(x)dx-\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობებს, (3.12) და (3.13) თანაფარდობებიდან გვაქვს

$$\liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx \geqslant \int_E \underline{f}(x)dx. \tag{3.14}$$

$$\liminf_{m\to\infty}\left\{-\int_E f_m(x)dx\right\} \geqslant -\int_E \overline{f}(x)dx. \tag{3.15}$$

(3.14) უტოლობა იგივეა, რაც (3.9) უტოლობა. შემდეგ, (3.14) უტოლობიდან გამომდინარეობს (3.10) უტოლობის მართებულობა.

თუ E სიმრავლის ყოველ წერტილში

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x),$$

მაშინ (3.9) და (3.10) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\int_E f(x)dx \leqslant \liminf_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx \leqslant \limsup_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3.11) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 18 (ლებეგი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$, რომელიც ზომით კრებადია ზომად $f(x)$ ფუნქციისაკენ და ყოველი m-თვის თითქმის ყველგან E-ზე ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f_m(x)|\leqslant\varphi(x), \tag{3.16}$$

სადაც $\varphi(x)$ არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციაა E-ზე, მაშინ

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{3.17}$$

დამტკიცება. (3.16) პირობის ძალით, ყოველი $f_m(x)$ ფუნქცია ჯამებადია. შემდეგ, რისის თეორემის თანახმად, ფუნქციათა მოცემულ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $f_{m_1}(x)$, $f_{m_2}(x),\ldots$, $f_{m_k}(x),\ldots$, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია E-ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშასადამე, თუ $|f_{m_k}(x)|\leqslant\varphi(x)$ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$, მივიღებთ

$$|f(x)|\leqslant\varphi(x). \tag{3.18}$$

ამ უტოლობას ადგილი აქვს თითქმის ყველგან E-ზე. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (3.18) უტოლობას ადგილი აქვს E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი დადებითი რიცხვი δ. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P_m(\delta)=\{x:|f_m(x)-f(x)|\geqslant\delta\},\quad Q_m(\delta)=\{x:|f_m(x)-f(x)|<\delta\}.$$

ცხადია, რომ $P_m(\delta)$ და $Q_m(\delta)$ სიმრავლეები არ იკვეთებიან და

$$E=P_m(\delta)\cup Q_m(\delta).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left|\int_E f_m(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f_m(x)-f(x)|dx=$$

$$=\int_{P_m(\delta)}|f_m(x)-f(x)|dx+\int_{Q_m(\delta)}|f_m(x)-f(x)|dx.$$

რადგანაც $Q_m(\delta)$ სიმრავლეზე $|f_m(x)|-f(x)|<\delta$, ამიტომ, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int_{Q_m(\delta)}|f_m(x)-f(x)|dx<\delta\mu(Q_m(\delta))\leqslant\delta\mu(E).$$

მეორე მხრით,

$$\int_{P_m(\delta)}|f_m(x)-f(x)|dx\leqslant\int_{P_m(\delta)}|f_m(x)|dx+\int_{P_m(\delta)}|f(x)|dx\leqslant 2\int_{P_m(\delta)}\varphi(x)dx.$$

ამრიგად,

$$\left|\int_E f_m(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant 2\int_{P_m(\delta)}\varphi(x)dx+\delta\mu(E). \tag{3.19}$$

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და დადებითი δ რიცხვი ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\delta\mu(E)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.20}$$

რადგანაც

$$\lim_{m\to\infty} P_m(\delta)=0,$$

ამიტომ $\varphi(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$2\int_{P_m(\delta)}\varphi(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m>N. \tag{3.21}$$

მაშასადამე, (3.20) და (3.21) თანაფარდობათა ძალით, (3.19) უტოლობიდან გვაქვს

$$\left|\int_E f_m(x)\,dx-\int_E f(x)dx\right|<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (3.17) ტოლობა.

შედეგი. *თუ სასრული ზომის* E *სიმრავლეზე მოცემულია ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა* $\{f_m(x)\}$, *რომელიც ზომით კრებადია* $f(x)$ *ფუნქციისაკენ და ყოველი* m*-თვის თითქმის ყველგან* E*-ზე ადგილი აქვს უტოლობას* $|f_m(x)|\leqslant\varphi(x)$, *სადაც* $\varphi(x)$ *არის* E*-ზე არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქცია, მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი* $g(x)$ *ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა*

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)\,g(x)dx=\int_E f(x)\,g(x)dx. \tag{3.22}$$

მართლაც, ვთქვათ, $|g(x)|\leqslant M$, მაშინ $|f_m(x)\,g(x)|\leqslant M\varphi(x)$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\operatorname{as} f_m(x)\;g(x)=f(x)\,g(x). \tag{3.23}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვი. გვაქვს:

$$\{x:|f_m(x)\;g(x)-f(x)\,g(x)|\geqslant\delta\}\subset\left\{x:|f_m(x)-f(x)|\geqslant\frac{\delta}{M}\right\}. \tag{3.24}$$

რადგანაც $\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{as} f_m(x)=f(x)$, ამიტომ (3.24) თანაფარდობის ძალით მართებულია (3.23) ტოლობა. მაშასადამე, ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით ადგილი აქვს (3.22) ტოლობას.

§ 4. ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები

განსაზღვრა **1.** თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია ჯამებად ფუნქციათა ისეთი ოჯახი $\{f(x)\}$, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს აღებული ოჯახის ფუნქციებისაგან დამოუკიდებელი დადებითი δ რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა δ-ზე ნაკლებია, ოჯახის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

მაშინ ამბობენ, რომ მოცემული ოჯახის ფუნქციებს აქვთ *ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები*.

თეორემა 19 (ლებეგი). *თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე მოცემული ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ ისეთია, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის*

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx = 0,$$

მაშინ მოცემული მიმდევრობის ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები.

დამტკიცება. ვთქვათ, თეორემა სწორი არაა. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: ყოველი დადებათი δ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ზომადი ქვესიმრავლე $e\subset E$, ზომით δ-ზე ნაკლები და ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ

$$\left|\int_e f_m(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

ვთქვათ, $\delta_1=\mu(E)$. მაშინ δ_1 რიცხვისათვის არსებობს E სიმრავლის ისეთი ზომადი e_1 ქვესიმრავლე, ზომით δ_1-ზე ნაკლები და ისეთი ნატურალური რიცხვი m_1, რთმ შესრულდება უტოლობა

$$\left|\int_{e_1} f_{m_1}(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

ვიპოვოთ ახლა ისეთი დადებით რიცხვი η_1, რომ E სიმრავლის ყოველი

ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η_1-ზე ნაკლებია, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\int_e f_{m_1}(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

ამასთანავე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\eta_1 < \delta_1$. შემდეგ $\delta_2 = \frac{\eta_1}{2}$ რიცხვისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ზომადი სიმრავლე $e_2 \subset E$, ზომით δ_2-ზე ნაკლები და ისეთი ნატურალური რიცხვი $m_2 > m_1$, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\left|\int_{e_2} f_{m_2}(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

ამის შემდეგ ვიპოვოთ ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta_2 < \delta_2$, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η_2-ზე ნაკლებია, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\int_e f_{m_2}(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

საზოგადოდ, ვთქვათ $\delta_i = \frac{\eta_{i-1}}{2}$ და მოვძებნოთ E სიმრავლის ზომადი e_i ქვესიმრავლე, ზომით δ_i-ზე ნაკლები და ისეთი ნატურალური რიცხვი $m_i > m_{i-1}$, რომ

$$\left|\int_{e_i} f_{m_i}(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

შემდეგ ვიპოვეთ ისეთ დადებით რიცხვს $\eta_i < \delta_i$, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η_i-ზე ნაკლებია, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\int_e f_{m_i}(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

ამის შემდეგ ვთქვათ, $\delta_{i+1} = \frac{\eta_i}{2}$ და ვიპოვოთ E სიმრავლის ზომადი e_{i+1} ქვესიმრავლე და სათანადო ნატურალური $m_{i+1} > m_i$ რიცხვი და ასე შემდეგ.

შევნიშნოთ, რომ

$$\mu(e_{i+1} \cup e_{i+2} \cup \cdots) < \frac{\eta_i}{2} + \frac{\eta_{i+1}}{2} + \cdots \leqslant \eta_i. \tag{4.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_i=e_i-(e_{i+1}\cup e_{i+2}\cup\cdots)\quad (i=1,2,\ldots). \tag{4.2}$$

ცხადია, E_i სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left|\int\limits_{E_i} f_{m_i}(x)dx\right| \geqslant \left|\int\limits_{e_i} f_{m_i}(x)dx\right| - \left|\int\limits_{H_i} f_{m_i}(x)dx\right| > \frac{3\varepsilon_0}{4}, \tag{4.3}$$

სადაც

$$H_i=e_i\cap(e_{i+1}\cup e_{i+2}\cup\cdots).$$

თეორემის პირობის ძალით მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν_1, რომ

$$\left|\int\limits_{E_1} f_m(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4},\ \text{როცა}\ m>\nu_1.$$

აღვნიშნავთ რა m_{i_1}-ით უმცირეს რიცხვს m_k რიცხვებიდან, რომელიც ν_1-ზე მეტია, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu_2\geqslant\nu_1$, რომ

$$\left|\int\limits_{M_1} f_m(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4},\ \text{როცა}\ m>\nu_2,$$

სადაც

$$M_1=E_1\cup E_{i_1}.$$

საზოგადოდ, განვსაზღვროთ ნატურალური რიცხვი ν_s ისე, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\left|\int\limits_{M_{s-1}} f_m(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4},\ \text{როცა}\ m>\nu_s,$$

სადაც

$$M_{s-1}=E_1\cup E_{i_1}\cup\cdots\cup E_{i_{s-1}}.$$

m_{i_s} იყოს უმცირესი ნატურალური რიცხვი m_k რიცხვებიდან, რომელიც მეტია $m_{i_{s-1}}$-ზე.

(4.3) უტოლობის თანახმად,

$$\left|\int\limits_{E_{i_s}} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| > \frac{3\varepsilon_0}{4}.$$

დასასრულ, შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E^*=E_1\cup E_{i_1}\cup\cdots\cup E_{i_k}\cup\cdots,\quad R_s=E_{i_{s+1}}\cup E_{i_{s+2}}\cup\cdots$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.1) და (4.2) დამოკიდებულებებს, გვექნება

$$\mu(R_s)<\delta_{i_s}$$

და ამიტომ

$$\left|\int\limits_{R_s} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული s რიცხვისათვის გვაქვს

$$\left|\int\limits_{E^*} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| \geqslant \left|\int\limits_{E_{i_s}} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| - \left|\int\limits_{M_{s-1}} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| -$$

$$-\left|\int\limits_{R_s} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| > \frac{3\varepsilon_0}{4}-\frac{\varepsilon_0}{4}-\frac{\varepsilon_0}{4}=\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{s\to\infty}\left|\int\limits_{E^*} f_{m_{i_s}}(x)dx\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{4},$$

რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $f_m(x)$ $(m=1, 2, \ldots)$ ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20 (ლებეგი). *თუ n-განზომილებიან r_0 სეგმენტზე ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\varphi_m(x)\}$ ერთობლივ შემოსაზღვრულია და ამ სეგმენტის ყოველი r ქვესეგმენტისათვის მართებულია ტოლობა*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{r}\varphi_k(x)dx=0,$$

მაშინ r_0-ზე ყოველი ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{r_0} f(x)\varphi_k(x)\,dx=0. \tag{4.4}$$

დამტკიცება. რადგანაც ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია r_0-ზე, ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $M>0$, რომ x-ზე დამოუკიდებლად და m-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ადგილი ექნება უტოლობას $|\varphi_m(x)|<M$.

დავამტკიცოთ, რომ r_0 სეგმენტიდან აღებული ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)dx=0. \tag{4.5}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε და ნებისმიერი ჩაკეტილი F სიმრავლე r_0-დან. მაშინ r_0 სეგმენტში მოიძებნება წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ისეთი სასრული სისტემა $\{r_1, r_2, \ldots, r_\nu\}$, რომ

$$\sum_{k=1}^{\nu}|r_k|<\mu(F)+\varepsilon, \quad \bigcup_{k=1}^{\nu} r_k\supset F.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$H=\bigcup_{k=1}^{\nu} r_k-F,$$

გვექნება

$$\int_F \varphi_m(x)dx=\int_A \varphi_m(x)dx-\int_H\varphi_m(x)dx;$$

სადაც $A=r_1\cup r_2\cup\cdots\cup r_\nu$. აქედან

$$\left|\int_F \varphi_m(x)dx\right|\leqslant\left|\int_A \varphi_m(x)dx\right|+\left|\int_H \varphi_m(x)dx\right|.$$

მაგრამ

$$\left|\int_H \varphi_m(x)dx\right|\leqslant M\mu(H)<M\varepsilon.$$

ამას გარდა, რაკი

$$\lim_{k\to\infty}\int_A\varphi_k(x)dx=0,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\left|\int_A \varphi_m(x)dx\right|<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>N.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_F \varphi_m(x)dx\right|<(M+1)\varepsilon, \text{ როდესაც } m>N,$$

ე. ი. მართებულია ტოლობა

$$\lim_{k\to\infty}\int_F \varphi_k(x)dx=0.$$

ახლა ვთქვათ, E არის r_0 სეგმენტში მოთავსებული ნებისმიერი ზომადი სიმრავლე. ვალე-პუსენის თეორემის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $F\subset E$, რომ $\mu(E-F)<\frac{\varepsilon}{M}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left|\int_E \varphi_m(x)dx\right|\leqslant\left|\int_F \varphi_m(x)dx\right|+\left|\int_{E-F}\varphi_m(x)dx\right|.$$

მაგრამ

$$\left|\int_{E-F}\varphi_m(x)dx\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

ხოლო ზემოდამტკიცებულის გამო

$$\lim_{m\to\infty}\int_F \varphi_m(x)dx=0.$$

მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N^*, რომ

$$\left|\int_F \varphi_m(x)dx\right|<\varepsilon,\ \text{როდესაც}\ m>N^*.$$

ამრიგად,

$$\left|\int_E \varphi_m(x)dx\right|<2\varepsilon,\ \text{როდესაც}\ m>N^*,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (4.5) ტოლობას.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არის ზომადი მარტივი ფუნქცია. მაშინ იგი ღებულობს მნიშვნელობათა სასრულ სისტემას: $y_1, y_2, \ldots, y_s$ და თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$E_i=\{x: f(x)=y_i\}\quad (i=1,\ 2,\ldots,s),$$

გვექნება

$$r_0=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_s.$$

ამასთან E_i სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\int_{r_0} f(x)\varphi_m(x)dx=\sum_{i=1}^{s} y_i\int_{E_i}\varphi_m(x)dx.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\int_{r_0} f(x)\,\varphi_m(x)dx=0.$$

დასასრულ, ვთქვათ, $f(x)$ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციაა. მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ $f(x)$ ფუნქციისაკენ კრებადი ზომად მარტივ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$, რომლისთვისაც შესრულდება პირობა

$$\lim_{k\to\infty}\int_{r_0}|f(x)-f_k(x)|\,dx=0.$$

ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\int_{r_0}|f(x)-f_k(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2M},\ \text{როდესაც}\ k>N. \tag{4.6}$$

შემდეგ, ავიღოთ ნებისმიერი ფიქსირებული $k>N$. რადგანაც $f_k(x)$ მარტივი ფუნქციაა, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N_1, რომ

$$\left|\int_{r_0} f_k(x)\varphi_m(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{როდესაც}\ m>N_1. \tag{4.7}$$

გვაქვს:

$$\left|\int_{r_0} f(x)\varphi_m(x)dx-\int_{r_0} f_k(x)\varphi_m(x)dx\right|\leqslant M\int_{r_0}|f(x)-f_k(x)|\,dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.6) და (4.7) უტოლობებს, გვექნება

$$\left|\int_{r_0} f(x)\varphi_m(x)dx\right|<\varepsilon,\ \text{როდესაც}\ m>N_1,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (4.4) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21 (ვიტალი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k(x)\}$ ზომით კრებადია ზომად $f(x)$ ფუნქციისაკენ და $f_k(x)$ ფუნქციებს აქვთ

ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები, მაშინ $f(x)$ ჯამებადია E-ზე და

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{4.8}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. თეორემის პირობის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი $\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η-ზე ნაკლებია, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\int_e f_k(x)dx\right|<\varepsilon,\quad k=1,\ 2,\dots$$

ახლა ავიღოთ E სიმრავლის ნებისმიერი ზომადი e ქვესიმრავლე, ზომით η-ზე ნაკლები და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$e'_k=\{x:f_k(x)\geqslant 0,\ x\in e\},\quad e''_k=\{x:f_k(x)<0,\ x\in e\}.$$

e'_k და e''_k ზომადი სიმრავლეებია და $\mu(e'_k)<\eta$, $\mu(e''_k)<\eta$. მაშასადამე,

$$\int_{e'_k}|f_k(x)|dx=\left|\int_{e'_k}f_k(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \int_{e''_k}|f_k(x)|dx=\left|\int_{e''_k}f_k(x)dx\right|<\varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$\int_e|f_k(x)|dx<2\varepsilon,\ k=1,\ 2,\dots$$

მაშასადამე, $|f_k(x)|$ $(k=1,\ 2,\dots)$ ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები.

რისის თეორემის ძალით, ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $\{f_{k_i}(x)\}$, რომელიც თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ და რაკი

$$\int_e|f_{k_i}(x)|dx<2\varepsilon\quad (i=1,\ 2,\dots),$$

ამიტომ ფატუს თეორემის თანახმად,

$$\int_e|f(x)|dx\leqslant 2\varepsilon.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლის ყოველ ზომად e ქვე-

სიმრავლეზე, რომლის ზომა η-ზე ნაკლებია. რადგანაც E სასრული ზომის სიმრავლეა, ამიტომ იგი შეგვიძლია დავყოთ ისეთ ზომად $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ სიმრავლეებად, რომ თითოეულის ზომა η-ზე ნაკლები იყოს. მაშასადამე,

$$\int_E |f(x)| dx \leqslant 2\nu\varepsilon$$

და ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე.

ახლა დავამტკიცოთ (4.8) ტოლობის მართებულობა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი δ და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P_k(\delta)=\{x : |f_k(x)-f(x)| \geqslant \delta\}, \quad Q_k(\delta)=\{x : |f_k(x)-f(x)| < \delta\}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left|\int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_{P_k(\delta)} |f_k(x)-f(x)| dx +$$

$$+\delta\mu(E) \leqslant \int_{P_k(\delta)} |f_k(x)| dx + \int_{P_k(\delta)} |f(x)| dx + \delta\mu(E).$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და δ ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს პირობა

$$\delta\mu(E) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η-ზე ნაკლებია, ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\int_e |f_k(x)| dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_e |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ, რადგანაც ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას $\mu(P_k(\delta)) < \eta$, როცა $k > N$. ამიტომ, როდესაც $k < N$, გვექნება

$$\left|\int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22 (ვიტალი). თუ სასრული ზომის E სიმრავლეზე ჯამებად ფუნქციათა $\{f_k(x)\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია ჯამებად $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ E სიმრავლის ყოველ ზომად e ქვესიმრავლისათვის

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx=\int_e f(x)dx \tag{4.9}$$

ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f_k(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები.

დამტკიცება. ჯერ პირობის აუცილებლობა დავამტკიცოთ. ვთქვათ, E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის მართებულია (4.9) ტოლობა, მაშინ მართებულია

$$\lim_{k\to\infty}\int_e \varphi_k(x)dx=0$$

ტოლობაც, სადაც $\varphi(x)=f_k(x)-f(x)$. მე-19 თეორემის ძალით $\varphi_k(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები. შემდეგ, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობის გამო ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი $\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\left|\int_e f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|\int_e \varphi_k(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

E სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, რომლის ზომა η-ზე ნაკლებია. მაშასადამე,

$$\left|\int_e f_k(x)dx\right|\leqslant\left|\int_e \varphi_k(x)dx\right|+\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon$$

უტოლობის ძალით, $f_k(x)$ ფუნქციებს აქვთ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

თეორემის პირობის საკმარისობა 21-ე თეორემიდან გამომდინარეობს.

§ 6. ფუბინისა და ტონელის თეორემები

ფუბინის თეორემა საშუალებას გვაძლევს ლებეგის ჯერადი ინტეგრალების გამოთვლა დავიყვანოთ ლებეგის მარტივი ინტეგრალების გამოთვლამდე. სიმარტივისათვის განვიხილავთ ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევას.

განსაზღვრა 2. ჩვენ ვიტყვით, რომ ორგანზომილებიან $r_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) თითქმის ყველა x-თვის $[a_1, b_1]$ სეგმენტიდან არსებობს ლებეგის ინტეგრალი

$$g(x)=\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy,$$

2) $g(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\iint_{r_0} f(x, y)dx\, dy=\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx.$$

ლემა 1. თუ $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y)$ ფუნქციებს აქვთ F-თვისება ორგანზომილებიან r_0 სეგმენტზე, მაშინ მათ წრფივ კომბინაციას $c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_mf_m$ აქვს აგრეთვე F-თვისება.

ამ ლემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

ლემა 2. თუ r_0 სეგმენტზე მოცემულია F-თვისების ფუნქციათა მონოტონური მიმდევრობა $\{f_k(x, y)\}$, რომელიც კრებადია r_0-ზე ჯამებად $f(x,y)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს აგრეთვე F-თვისება r_0-ზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული მიმდევრობა ზრდადია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$g_k(x)=\int_{a_2}^{b_2} f_k(x, y)dy \quad (k=1, 2, \ldots).$$

ლემის პირობის ძალით, ყოველი $g_k(x)$ ფუნქცია თითქმის ყველგან $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე სასრულია და ამ სეგმენტის თითქმის ყველა x-თვის ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობა $\{g_k(x)\}$ ზრდადია. ვთქვათ,

$$g(x)=\lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ $g(x)$ ჯამებადია $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე. შევნიშნოთ, რომ ყოველი k-თვის

$$\int_{a_1}^{b_1} g_k(x)dx \leqslant \iint_{r_0} f(x, y)dx\,dy < +\infty.$$

მე-16 თეორემის ძალით, $g(x)$ ჯამებადია და

$$\lim_{k\to\infty}\int_{a_1}^{b_1} g_k(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} g(x)dx.$$

შემდეგ, რადგანაც $g(x)$ ჯამებადია, ამიტომ იგი თითქმის ყველგან სასრულია და, მაშასადამე, იმ x წერტილებში, სადაც $g(x)$ სასრულია, გვაქვს

$$\int_{a_2}^{b_2} f_1(x, y)dy \leqslant \int_{a_2}^{b_2} f_2(x, y)dy \leqslant \cdots \leqslant \int_{a_2}^{b_2} f_k(x, y)dy \leqslant \cdots \leqslant g(x).$$

ამიტომ მე-16 თეორემის ძალით, თითქმის ყველგან $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} \lim_{k\to\infty} f_k(x, y)dy = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy.$$

მაშასადამე,

$$\iint_{r_0} f(x, y)dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\iint_{r_0} f_k(x, y)dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\int_{a_1}^{b_1} g_k(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} g(x)dx.$$

ამრიგად, $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

ლემა 3. თუ r_0 სეგმენტში მოთავსებული E სიმრავლე G_δ ტიპისაა, მაშინ ამ სიმრავლის მახასიათებელ $\chi_E(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

დამტკიცება. ამ ლემის დამტკიცება გავყოთ რამდენიმე ნაწილად. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ

1) E შედგება კოორდინატთა ღერძების პარალელური ერთგანზომილებიანი სეგმენტების სასრული სისტემისაგან· ამ შემთხვევაში E სიმრავლის ბრტყელი ზომა $\mu(E)=0$ და, მაშასადამე,

$$\iint_{r_0} \chi_E(x, y)dx\,dy = 0.$$

მეორე მხრით, თუ $\chi_E(x, y)$ ფუნქციას განვიხილავთ როგორც y-ის ფუნქციას, მაშინ იგი წარმოადგენს მახასიათებელ ფუნქციას ცარიელი სიმ-

მრავლისას, ან ისეთ სიმრავლისას, რომელიც შედგება წერტილთა სასრული რიცხვისაგან, გარდა, შესაძლებელია, x-ის მნიშვნელობათა სასრული სიმრავლისა. მაშასადამე, x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, შესაძლებელია, მნიშვნელობათა სასრული სიმრავლისა, არსებობს ინტეგრალი

$$g(x)=\int_{a_1}^{b_1}\chi_E(x,\ y)dy$$

და იგი ნულის ტოლია. ამიტომ

$$\int_{a_1}^{b_1}g(x)dx=0=\iint_{r_0}\chi_E(x,\ y)dx\,dy.$$

ამ შემთხვევისათვის ლემა დამტკიცებულია.

2) ახლა ვთქვათ, E არის ორგანზომილებიანი ინტეგრალი, $(\alpha_1,\ \beta_1;\ \alpha_2,\ \beta_2)\subset r_0$. მაშინ

$$\iint_{r_0}\chi_E(x,\ y)dx\,dy=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2).$$

მეორე მხრით, ინტეგრალი

$$g(x)=\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\chi_E(x,\ y)dy$$

არსებობს ყველა x-თვის, ამასთან

$$g(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } a_1\leqslant x\leqslant\alpha_1, \text{ ან } \beta_1\leqslant x\leqslant b_1,\\ \beta_2-\alpha_2 \text{ როცა } \alpha_1<x<\beta_1.\end{cases}$$

აქედან

$$\int_{a_1}^{b_1}g(x)dx=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)=\iint_{r_0}\chi_E(x,\ y)dx\,dy.$$

მაშასადამე $\chi_E(x,\ y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

3) ვთქვათ, E არის r_0-ში მოთავსებული ელემენტარული ფიგურა; მაშინ იგი წარმოიდგინება წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ორგანზომილებიანი $r_1, r_2, \ldots, r_m$ სეგმენტთა ჯამის სახით, ამასთანავე ამ სეგმენტების საზღვრების ჯამი H შედგება კოორდინატთა ღერძების პარალელური ერთ-

განზომილებიანი სეგმენტებისაგან, რომელთა რიცხვი სასრულია. მაშასადამე,

$$E = r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_m \cup H.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში სიმრავლეებს წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო წერტილები. ამას გარდა,

$$\chi_E(x, y) = \chi_{r_1}(x, y) + \chi_{r_2}(x, y) + \cdots + \chi_{r_m}(x, y) + \chi_H(x, y).$$

მაგრამ ყოველ $\chi_{r_k}(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ფუნქციას, აქვს F-თვისება, ხოლო $\chi_H(x, y)$ ფუნქციას, 1)-ის ძალით, აქვს აგრეთვე F-თვისება. მაშასადამე, 1-ლი ლემის ძალით, $\chi_E(x, y)$ ფუნქციასაც აქვს F-თვისება.

4) ახლა ვიგულისხმოთ, რომ E არის r_0 სეგმენტში მოთავსებული ნებისმიერი ღია სიმრავლე. რადგანაც ღია სიმრავლე წარმოადგენს ელემენტარულ ფიგურათა ზრდადი მიმდევრობის ზღვარს, ამიტომ E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია $\chi_E(x, y)$ წარმოადგენს მახასიათებელ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობის ზღვარს. მაგალითად, თუ $\{q_k\}$ არის ელემენტარულ ფიგურათა ზრდადი მიმდევრობა, მასთან $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = E$, მაშინ

$$\lim_{k \to \infty} \chi_{q_k}(x, y) = \chi_E(x, y).$$

3)-ის ძალით, ყოველ $\chi_{q_k}(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება და, მაშასადამე, მე-2 ლემის თანახმად $\chi_E(x, y)$ ფუნქციასაც აქვს F-თვისება.

5) დასასრულ, ვთქვათ E წარმოადგენს r_0-ში მოთავსებულ G_δ ტიპის სიმრავლეს. მაშინ არსებობს E სიმრავლისაკენ კრებადი ღია სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა $\{G_k\}$. ცხადია, რომ მახასიათებელ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\chi_{G_k}(x, y)\}$ კლებადია და

$$\chi_E(x, y) = \lim_{k \to \infty} \chi_{G_k}(x, y).$$

მაგრამ ყოველ $\chi_{G_k}(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება. მაშასადამე, მე-2 ლემის თანახმად $\chi_E(x, y)$ ფუნქციას ექნება F-თვისება. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4. თუ r_0 სეგმენტში მოთავსებული რაიმე E სიმრავლის ბრტყელი ზომა ნულია, მაშინ E სიმრავლის იმ ნაწილის წრფივი ზომა, რომელიც კოორდინატთა

ღერძების პარალელურ წფეებზეა მოთავსებული, თითქმის ყოველი ასეთი წრფისათვის ნულია აგრეთვე.

დამტკიცება. IX თავის მე-10 თეორემის შედეგის თანახმად არსებობს G_δ ტიპის ისეთი სიმრავლე $H \supset E$, რომლის ბრტყელიზომა ნულის ტოლია. ამიტომ, თავიდან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E არის G_δ ტიპის სიმრავლე. მე-3 ლემის ძალით

$$\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} \chi_E(x, y)dy\right]dx = \iint_{r_0} \chi_E(x, y)dx\,dy = \mu(E) = 0. \tag{5.1}$$

რადგანაც $\int_{a_2}^{b_2} \chi_E(x, y)dy$ არაუარყოფითია, ამიტომ (5.1)-ის ძალით $[a_1, b_1]$ სეგმენტის თითქმის ყველა x წერტილისათვის

$$\int_{a_2}^{b_2} \chi_E(x, y)dy = 0. \tag{5.2}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $[a_2, b_2]$ სეგმენტის თითქმის ყველა y წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{a_1}^{b_1} \chi_E(x, x)\,dx = 0. \tag{5.3}$$

(5.2) და (5.3) ტოლობები ამტკიცებს ჩვენს ლემას.

ლემა 5. r_0 სეგმენტში მოთავსებულ ნებისმიერი ზომადი სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისმოთ, რომ r_0-დან აღებული ზომადი E სიმრავლის ბრტყელი ზომა ნულია. მე-4 ლემის ძალით, $\chi_E(x, y)$ ფუნქცია არის მახასიათებელი ფუნქცია y ღერძის პარალელურ თითქმის ყველა წრფეზე მოთავსებული E სიმრავლის ნაწილისა; ასე, რომ თითქმის ყველა x-სათვის $[a_1, b_1]$-დან არსებობს ინტეგრალი

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} \chi_E(x, y)dy$$

და ტოლია ნულისა. აქედან

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx = 0 = \mu(E) = \iint_{r_0} \chi_E(x, y)dx\,dy.$$

მაშასადამე, ნულოვანი ზომის სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

ახლა ვთქვათ, რომ E არის r_0-ში მოთავსებული ნებისმიერი ზომადი სიმრავლე. მაშინ, IX თავის მე-10 თეორემის შედეგის თანახმად არსებობს E სიმრავლის შემცველი G_δ ტიპის ისეთი H სიმრავლე, რომ $\mu(H-E)=0$. მაშასადამე, $\chi_{H-E}(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება. შემდეგ მე-3 ლემის ძალით, $\chi_H(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება. მაგრამ რაკი

$$\chi_E(x, y) = \chi_H(x, y) - \chi_{H-E}(x, y),$$

ამიტომ ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 6. r_0 სეგმენტზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

დამტკიცება. რადგანაც ყოველი ჯამებადი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც სხვაობა ორი არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციისა, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ ლემა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $f(x, y)$ არაუარყოფითია r_0-ზე. X თავის მე-14 თეორემის ძალით, შეგვიძლია ავაგოთ მარტივ ზომად ფუნქციათა ისეთი არაკლებადი მიმდევრობა $\{f_k(x, y)\}$, რომ

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x, y) = f(x, y).$$

მაგრამ, 1-ლი და მე-5 ლემის თანახმად, ყოველ ზომად მარტივ ფუნქციას აქვს F-თვისება. მაშასადამე, მე-2 ლემის ძალით $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს F-თვისება.

თუ x და y-ის როლებს შევცვლით, მე-6 ლემის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა 23 (ფუბინი). თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ჯამებადია $r_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე, მაშინ $[a_1, b_1]$ სეგმენტის თითქმის ყველა x წერტილისათვის არსებობს $\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy$ და თითქმის ყველა y-თვის $[a_2, b_2]$-დან არსებობს ინტეგრალი $\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx$ და მართებულია ტოლობა

$$\iint\limits_{r_0} f(x,\ y)dxdy=\int\limits_{a_1}^{b_1}\Big[\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,\ y)dy\Big]dx=\int\limits_{a_2}^{b_2}\Big[\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,\ y)dx\Big]dy.$$

ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: თუ $f(x,\ y)$ ფუნქცია ზომადია $r_0=[a_1,\ b_1;\ a_2, b_2]$ სეგმენტზე და არსებობს განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\Big[\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,\ y)dy\Big]dx \quad \text{და} \quad \int\limits_{a_2}^{b_2}\Big[\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,\ y)dx\Big]dy$$

და ისინი ტოლია, მაშინ არის თუ არა $f(x,\ y)$ ჯამებადი r_0 სეგმენტზე? პასუხი უარყოფითია. მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც ზიგმუნდს ეკუთვნის.

ვთქვათ, $r_0=[0,\ 1;\ 0,\ 1]$. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი რეგულარულ სეგმენტთა (კვადრატთა) მიმდევრობა $\{q_k\}$, მასთან $q_k\subset r_0(k=1,2,\cdots)$ და ყოველი q_k კვადრატის დიაგონალი მოთავსებულია $y=x$ წრფეზე. ყოველი q_k კვადრატი გავყოთ ოთხ კონგრუენტულ კვადრატად და q_k კვადრატის ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ კვადრატთა ერთი წყვილისათვის მივიჩნიოთ

$$f(x,\ y)=\frac{1}{|q_k|}\,,$$

კვადრატთა მეორე წყვილისათვის კი

$$f(x,\ y)=-\frac{1}{|q_k|}\,.$$

შემდეგ, აღებული $q_1,\ q_2,\cdots q_k,\cdots$ კვადრატების გარეთ ვიგულისხმოთ

$$f(x,\ y)=0.$$

ცხადია, რომ $f(x,\ y)$ ზომადია r_0-ზე. ამას გარდა, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^1 f(x,\ y)dy\Big]dx=\int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^1 f(x,\ y)dx\Big]dy=0.$$

$f(x,\ y)$ ფუნქცია ჯამებადი არაა r_0-ზე. მართლაც, ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის გვაქვს

$$\iint\limits_{r_0} |f(x,\ y)|\,dx\,dy\geqslant\sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{q_k}|f(x,\ y)|\,dxdy=m.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\iint_{r_0} |f(x, y)|dx\,dy = +\infty.$$

მაშასადამე, $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადი არაა r_0 სეგმენტზე.

თეორემა 24 (ტონელი). თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ზომადი არაუარყოფითი ფუნქციაა $r_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე, მაშინ ორი განმეორებითი ინტეგრალიდან

$$\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy\right]dx \quad \text{და} \quad \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx\right]dy$$

ერთ-ერთის არსებობა საკმარისია $f(x, y)$ ფუნქციის ჯამებადობისათვის r_0-ზე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ x-ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისათვის $[a_1, b_1]$-დან არსებობს ინტეგრალი

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy.$$

ამას გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ ჯამებადია $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე. ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის განვსაზღვროთ $f_m(x, y)$ ფუნქცია ასე

$$f_m(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{როდესაც } f(x, y) \leqslant m, \\ m, & \text{როდესაც } f(x, y) > m, \end{cases}$$

ე. ი.

$$f_m(x, y) = [f(x, y)]_m.$$

ყოველი $f_m(x, y)$ ფუნქციათაგანი ჯამებადია r_0-ზე. მაშასადამე, ფუბინის თეორემის ძალით

$$\iint_{r_0} f_m(x, y)dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} f_m(x, y)\,dy\right]dx \leqslant \int_{a_1}^{b_1} g(x)dx < +\infty.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$, გვექნება

$$\iint_{r_0} f(x, y)dx\,dy \leqslant \int_{a_1}^{b_1} g(x)dx < +\infty.$$

მაშასადამე, $f(x, y)$ არის ჯამებადი ფუნქცია r_0-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ვიტალისა და კარათეოდორის თეორემა

ლემა. თუ R სივრცეში შემოსაზღვრულ ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ქვემოდან ნახევრად უწყვეტი ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს:

1) E სიმრავლის ყოველ წერტილში $\varphi(x) \geqslant f(x)$,

2) $\int\limits_E [\varphi(x) - f(x)]dx \leqslant \varepsilon$[1].

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_k = \{x : (k-1)\eta \leqslant f(x) < k\eta,\ x \in E\} \quad (k=1,\ 2, \ldots),$$

სადაც

$$\eta = \frac{\varepsilon}{1+\mu(E)}.$$

რადგანაც E_k ზომადი სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $G_k \supset E_k$, რომ

$$\mu(G_k - E_k) < \frac{1}{k2^k} \quad (k=1,\ 2, \cdots). \tag{6.1}$$

ვთქვათ, $\chi_k(x)$ არის G_k სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta\chi_k(x).$$

ცხადია, ყოველი $\chi_k(x)$ ფუნქცია ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია R^n-ში და, მაშასადამე, $\varphi(x)$ ფუნქციაც ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია R^n-ში. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 1) პირობას. მეორე მხრით, თუ აღვნიშნავთ Q-თი ყველა G_h სიმრავლის შემცველ n-განზომილებიან სეგმენტს და გავითვალისწინებთ (6.1) უტოლობებს, გვექნება:

$$\int\limits_Q \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta \int\limits_Q \chi_h(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta\mu(G_h) < \sum_{k=1}^{\infty} k\eta\left[\mu(E_h) + \frac{1}{k2^k}\right] =$$

---

[1] თუ E სიმრავლის რომე x_0 წერტილში $\varphi(x_0) = +\infty$, $f(x_0) = +\infty$, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(x_0) - f(x_0) = 0$.

$$=\sum_{k=1}^{\infty} k\eta\mu(E_k)+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\eta\mu(E_k)+\eta\mu(E)+$$

$$+\eta\leqslant\int_E f(x)dx+\eta[1+\mu(E)]=\int_E f(x)dx+\varepsilon.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\int_E [\varphi(x)-f(x)]dx\leqslant\varepsilon.$$

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 2) პირობასაც.

განვიხილოთ ახლა ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული E სიმრავლეზე. განვსაზღვროთ $\omega_k(x)$ ფუნქცია ასე:

$$\omega_k(x)=\begin{cases} f(x), & \text{თუ } \rho(O,\ x)\leqslant k \text{ და } f(x)\leqslant k,\\ k, & \text{თუ } \rho(O,\ x)\leqslant k \text{ და } f(x)>k,\\ 0, & \text{თუ } \rho(O,\ x)>k, \text{ ან } x\overline{\in}E.\end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f_k(x)=\omega_k(x)-\omega_{k-1}(x)\quad(k=1,\ 2,\cdots).$$

ცხადია, რომ

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)+\cdots,$$

ამასთან ყოველი $f_k(x)$ შემოსაზღვრული არაუარყოფითი ფუნქციაა E სიმრავლეზე. ზემოდამტკიცებულის ძალით, ყოველი $f_k(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი ისეთი $\varphi_k(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1) E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის $\varphi_k(x)\geqslant f_k(x)$,

2) $\int_E [\varphi_k(x)-f_k(x)]dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2^k}\quad(k=1,\ 2,\cdots)$.

VII თავის 29-ე თეორემის შედეგის თანახმად, ფუნქცია

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_k(x)+\cdots$$

ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია და E-ზე აკმაყოფილებს 1) პირობას.

დასასრულს, ცხადია, რომ

$$\int_E [\varphi(x)-f(x)]dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E [\varphi_k(x)-f_k(x)]dx\leqslant\varepsilon.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25 (ვიტალი-კარათეოდორი). შემოსაზღვრულ ზომად E სიმრავლეზე მოცემულ ზომად $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს ფუნქციათა ორი მიმდევრობა $\{\varphi_k(x)\}$ და $\{\psi_k(x)\}$, რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ:

1) $\varphi_k(x)$ ფუნქციები ქვემოდან შემოსაზღვრულია და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი არიან E-ზე, $\psi_k(x)$ კი ზემოდან შემოსაზღვრულია და ზემოდან ნახევრადუწყვეტია;

2) $\{\varphi_k(x)\}$ მიმდევრობა კლებადია, ხოლო $\{\psi_k(x)\}$ — ზრდადია E-ზე;

3) E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის $\varphi_k(x)\geqslant f(x)\geqslant\psi_k(x)$ და

4) თითქმის ყველგან E-ზე

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}\psi(x)=f(x);$$

5) თუ $f(x)$ ჯამებადია E სიმრავლის რაიმე ზომად H ქვესიმრავლეზე, მაშინ $\varphi_k(x)$ და $\psi_k(x)$ ფუნქციები ჯამებადია H-ზე და

$$\lim_{k\to\infty}\int_H \varphi_k(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_H \psi_k(x)dx=\int_H f(x)dx.$$

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა E სიმრავლეზე.

ლემის ძალით, არსებობს ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი ისეთ ფუნქციათა $\{u_k(x)\}$ მიმდევრობა, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის $u_k(x)\geqslant f(x)$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ და

$$\lim_{k\to\infty}\int_E [u_k(x)-f(x)]dx=0. \tag{6.2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi_k(x)=\min\{u_1(x),\ u_2(x),\ldots,\ u_k(x)\}.$$

ყოველი $\varphi_k(x)$ ფუნქცია ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია E-ზე და

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_k(x) \geqslant \cdots$$

ცხადია, ყოველი $\varphi_k(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 1), 2), 3) პირობებს და, ამას გარდა, (6.2) ტოლობის ძალით,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E [\varphi_k(x) - f(x)]dx = 0.$$

ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\varphi_k(x) - f(x)\}$ ზრდადია და, მაშასადამე, ლევის თეორემის თანახმად,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E [\varphi_k(x) - f(x)]dx = \int_E \omega(x)dx,$$

სადაც $\omega(x) = \lim\limits_{k\to\infty}[\varphi_k(x) - f(x)]$. რადგანაც $\omega(x) \geqslant 0$, ამიტომ თითქმის ყველგან E-ზე $\omega(x) = 0$, ე. ი. თითქმის ყველგან E-ზე $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$. მაშასადამე, $\varphi_k(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ აგრეთვე 4) და 5) პირობებსაც.

ახლა განვსაზღვროთ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\psi_k(x)\}$. ლემის ძალით, არსებობს ქვემოდან ნახევრადუწყვეტ ფუნქციათა ისეთი კლებადი მიმდევრობა $\{v_k(x)\}$, რომ თითმის ყველგან E-ზე

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

ცხადია, რომ ყოველი $\dfrac{1}{v_k(x)}$ ფუნქცია ზემოდან ნახევრადუწყვეტია E-ზე. ამას გარდა, ფუნქციათა $\left\{\dfrac{1}{v_k(x)}\right\}$ მიმდევრობა ზრდადია და თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შემდეგ, $\psi_k(x)$ ფუნქცია განვსაზღვროთ ასე:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{v_k(x)}, & \text{თუ } \dfrac{1}{v_k(x)} \leqslant k, \\ k, & \text{თუ } \dfrac{1}{v_k(x)} > k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

ცხადია, რომ $\psi_k(x)$ ფუნქციები ზემოდან ნახევრადუწყვეტია E-ზე და თითოეული მათგანი შემოსაზღვრულია. ამას გარდა, ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\psi_k(x)\}$ ზრდადია და თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. $\psi_k(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ 1)—4) პირობებს.

დასასრულ, რადგანაც $\psi_k(x)$ ფუნქციები არაუარყოფითი არიან, ლებეგის თეორემის ძალით E სიმრავლის ყოველი ზომადი H ქვესიმრავლისათვის შესრულებულია ტოლობა:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_H \psi_k(x)\,dx=\int\limits_H f(x)dx.$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს 5) პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, განხილული როგორც ლებეგის ინტეგრალი, არსებობს და უდრის $\frac{1}{1-\alpha}$, როდესაც $0<\alpha<1$, ხოლო, თუ $\alpha>1$, მაშინ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$.

2. ვთქვათ, $f(x)$ ზომადი სასრული ფუნქციაა სასრული ზომის E სიმრავლეზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_\nu=(x:\nu-1\leqslant f(x)<\nu).$$

დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობისათვის E სიმრავლეზე აუცილებელია დასაკმარისი, რომ მწკრივი $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty}|\nu|\mu(E_\nu)$ იყოს კრებადი.

3. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე და $E_\nu=(x:-\nu\leqslant f(x)\leqslant\nu)$, მაშინ $\mu(E_\nu)=0\left(\frac{1}{\nu}\right)$.

4. ვთქვათ, $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a,\ b]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $f(x)=0$, როდესაც $\overline{x\in}[a,b]$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\int\limits_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx=O(h),\ \text{როდესაც}\ h\to 0.$$

5. მოცემულია ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_m(x)\}$, სადაც

$$f_m(x)=\frac{m^2x}{(1+m^2x^2)^2}\quad(m=1,\ 2,\cdots),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში არ შეიძლება ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

6. დაამტკიცეთ, რომ მე-18 თეორემა 21-ე თეორემის შედეგია.

7. ვთქვათ, $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე მოთავსებული ბრტყელი E სიმრავლე აკმაყოფილებს პირობას $\mu(E)>(1-\sigma)(b_1-a_1)(b_2-a_2)$, სადაც σ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. აღვნიშნოთ e-თი $x=a_1$ წრფის იმ (a_1, y) წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის

$$\text{mes lin } E_x^{[y]}>(1-\sqrt{\sigma})(b_1-a_1),$$

სადაც $E_x[y]$ სიმბოლოთი აღნიშნულია E სიმრავლის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მოთავსებულია $Y=y$ წრფეზე. დაამტკიცეთ, რომ e სიმრავლე ზომადია, და მართებულია უტოლობა

$$\text{mes lin } e>(1-\sqrt{\sigma})(b_2-a_2)$$

(ვლ. ჭელიძე).

თავი XVI

ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის გაწარმოება

ვთქვათ, n-განზომილებიან ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია ამ ფიგურაზე. ელემენტარული ფიგურის ფუნქციას

$$F(r)=\int_r f(x)dx, \tag{1.1}$$

სადაც $r\subset r_0$, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია r_0 ფიგურაზე და $F(r)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს, მაშინ r_0 ფიგურის ყოველ x_0 წერტილში, სადაც $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ზემოდან (ქვემოდან) ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\overline{D}F(x_0)\leqslant f(x_0)\quad [\underline{D}F(x_0)\geqslant f(x_0)].$$

კერძოდ, თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი, მაშინ ამ წერტილში $F(r)$ წარმოებადია და მართებულია ტოლობა

$$F'(x_0)=f(x_0). \tag{1.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x_0 წერტილში $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ზემოდან. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x_0 წერტილის შემცველი ისეთი რეგულარული სეგმენტი $Q\subset r_0$, რომ ყოველი x-თვის Q-დან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$\int_q f(x)dx\leqslant [f(x_0)+\varepsilon]\,|q|,$$

სადაც q არის x_0 წერტილის შემცველი ნებისმიერი რეგულარული სეგმენტი, რომელიც Q-შია მოთავსებული. თუ გავითვალისწინებთ (1.1) ტოლობას, გვექნება

$$F(q)\leqslant[f(x_0)+\varepsilon]\,|q|.$$

აქედან

$$\frac{F(q)}{|q|}\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

მაშასადამე, $\overline{D}F(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$ და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$\overline{D}F(x_0)\leqslant f(x_0). \tag{1.3}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ x_0 წერტილში $f(x)$ ნახევრადუწყვეტია ქვემოდან, მაშინ

$$\underline{D}F(x_0)\geqslant f(x_0). \tag{1.4}$$

კერძოდ, თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება (1.3) და (1.4) თანაფარდობებს და, მაშასადამე, ადგილი ექნება (1.2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. *თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია r_0 ფიგურაზე, მაშინ განუსაზღვრელი (1.1) ინტეგრალის წარმოებული თითქმის ყველგან r_0-ზე უდრის $f(x)$ ფუნქციას.*

დამტკიცება. $F(r)$ ფუნქცია ადიტიურია და აბსოლუტურად უწყვეტი r_0-ზე, ამიტომ თითქმის ყველგან r_0 ფიგურაზე არსებობს სასრული წარმოებული $F'(x)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_{m,n}=\left\{x:F'(x)>\frac{m+1}{n}>\frac{m}{n}>f(x)\right\},$$

სადაც $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ რადგანაც $f(x)$ და $F'(x)$ ფუნქციები ზომადია, ამიტომ $E_{m,n}$ სიმრავლე ზომადია.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\mu(E_{m,n})=0 \tag{1.5}$$

ყოველი ფიქსირებული m და n-სათვის. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. (1.1) ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ r_0 სიმრავლის ყოველი ზომადი e სიმრავლისათვის, რომლის ზომა ნაკლებია η-ზე, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $E_{m,n}$ სიმრავლის ყველა წერტილი მოთავსებულია r_0 ფიგურის შიგნით. ავიღოთ ისეთი ღია სიმრავლე $G \subset r_0$, რომ $G \supset E_{m,n}$ და $\mu(G - E_{m,n}) < \eta$.

აღვნიშნოთ S-ით r_0-დან აღებული ისეთი რეგულარული q სეგმენტების სისტემა, რომელთათვის

$$\frac{F(q)}{|q|} > \frac{m+1}{n}. \tag{1.6}$$

ცხადია, რეგულარულ სეგმენტთა S სისტემა ფარავს $E_{m,n}$ სიმრავლეს ვიტალის თვალსაზრისით. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ S სისტემის ყველა სეგმენტი მოთავსებულია G-ში. ვიტალის თეორემის ძალით S სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ისეთი სეგმენტებისა $q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots$, რომ

$$\mu(E_{m,n} - \bigcup_k q_k) = 0.$$

(1.6) უტოლობის თანახმად,

$$F(q_k) > \frac{m+1}{n} |q_k| \quad (k=1, 2, \cdots).$$

მაშასადამე, ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$\int_H f(x)dx > \frac{m+1}{n} \mu(H) \geqslant \frac{m+1}{n} \mu(E_{m,n}), \tag{1.7}$$

სადაც $H = \bigcup_k q_k$.

მეორე მხრით, $H \subset G$ და ამიტომ

$$H - E_{m,n} \subset G - E_{m,n}.$$

საიდანაც

$$\mu(H - E_{m,n}) < \eta.$$

მაშასადამე,

$$\left| \int_{H - E_{m,n}} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

აქედან

$$\int_H f(x)dx = \int_{H \cap E_{m,n}} f(x)dx + \int_{H - E_{m,n}} f(x)dx < \int_{H \cap E_{m,n}} f(x)dx + \varepsilon.$$

მაგრამ $E_{m,n}$ სიმრავლეზე $f(x)<\frac{m}{n}$, რის გამო

$$\int\limits_{H\cap E_{m,n}} f(x)dx \leqslant \frac{m}{n}\mu(E_{m,n}).$$

ამრიგად,

$$\int\limits_{H} f(x)dx < \frac{m}{n}\mu(E_{m,n})+\varepsilon. \tag{1.8}$$

(1.7) და (1.8) უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$(m+1)\mu(E_{m,n})<m\mu(E_{m,n})+n\varepsilon.$$

აქედან

$$\mu(E_{m,n})<n\varepsilon,$$

და რადგანაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ მართებულია (1.5) ტოლობა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $E=\{x: F'(x)>f(x)\}$. ცხადია, რომ

$$E=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{m,n}$$

და თუ გავითვალისწინებთ (1.5) ტოლობას, გვექნება $\mu(E)=0$. მაშასადამე, თითქმის ყველგან r_0-ზე,

$$F'(x)\leqslant f(x). \tag{1.9}$$

ახლა ვთქვათ,

$$\varphi(x)=-f(x),\quad \Phi(r)=\int\limits_{r}\varphi(x)dx.$$

ცხადია, $\Phi(r)=-F(r)$ და ზემოდამტკიცებულის ძალით, თითქმის ყველგან r_0-ზე მართებულია უტოლობა $\Phi'(x)\leqslant\varphi(x)$, ანუ

$$F'(x)\geqslant f(x). \tag{1.10}$$

(1.9) და (1.10) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა $F'(x)=f(x)$ თითქმის ყველგან r_0 ფიგურაზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ $F(r)$ არის ელემენტარული ფიგურის ადიტიური, უწყვეტი და ზრდადი ფუნქცია ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე, მაშინ მისი წარმოებული $F'(x)$ ჯამებადია r_0-ზე და

$$\int\limits_{r_0}F'(x)dx\leqslant F(r_0). \tag{1.11}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ვიცით, $F'(x)$ თითქმის ყველგან სასრულია r_0 ფიგურაზე და თითქმის ყველგან r_0-ზე $F'(x) \geqslant 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $F'(x) \geqslant 0$ ყველგან r_0 ფიგურაზე.

განვიხილოთ ფუნქცია $[F'(x)]_\nu$, სადაც ν ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ეს ფუნქცია ზომადია და შემოსაზღვრული. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi_\nu(r)=\int_r [F'(x)]_\nu dx,$$

სადაც r ნებისმიერი ელემენტარული ფიგურაა r_0-დან. მე-2 თეორემის ძალით, თითქმის ყველგან r_0-ზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Phi'_\nu(x)=[F'(x)]_\nu.$$

ვთქვათ,

$$\Psi_\nu(r)=F(r)-\Phi_\nu(r).$$

ცხადია, რომ თითქმის ყველგან r_0 ფიგურაზე

$$\Psi'_\nu(x)=F'(x)-\Phi'_\nu(x)=F'(x)-[F'(x)]_\nu \geqslant 0.$$

ამას გარდა, r_0 ფიგურის ყოველ x წერტილში $\underline{D}\Psi_\nu(x)>-\infty$. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $x \in r_0$. მაშინ ყოველი რეგულარული სეგმენტისათვის $q \subset r_0$, რომელიც x წერტილს შეიცავს, გვექნება

$$\frac{\Psi_\nu(q)}{|q|}=\frac{F(q)}{|q|}-\frac{\Phi_\nu(q)}{|q|} \geqslant \frac{F(q)}{|q|}-\nu.$$

აქედან

$$\underline{D}\Psi_\nu(x) \geqslant \underline{D}F(x)-\nu>-\infty.$$

მაშასადამე XII თავის მე-7 თეორემის ძალით, $\Psi_\nu(r)$ ფუნქცია ზრდადია r_0 ფიგურაზე, ე. ი. ყოველი ელემენტარული ფიგურისათვის $r \subset r_0$ მართებულია უტოლობა $F(r)-\Phi_\nu(r) \geqslant 0$. საიდანაც $\Phi_\nu(r) \leqslant F(r)$, და თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\nu \to \infty$, გვექნება

$$\int_r F'(x)dx \leqslant F(r).$$

კერძოდ, თუ $r=r_0$, მივიღებთ (1.11) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თ უ $F(r)$ წ ა მ ო ა დ გ ე ნ ს ა დ ი ტ ი უ რ უ წ ყ ვ ე ტ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ს ა ს რ უ ლ ი ვ ა რ ი ა ც ი ი თ r_0-ზ ე, მ ა შ ი ნ $F'(x)$ ჯ ა მ ე ბ ა დ ი ა r_0-ზ ე.

მართლაც, ჟორდანის თეორემის ძალით, $F(r)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი $F_1(r)$ და $F(r)$ ფუნქციისა:

$$F(r)=F_1(r)-F_2(r).$$

აქედან თითქმის ყველგან r_0-ზე

$$F'(x)=F'_1(x)-F'_2(x).$$

მაგრამ $F'_1(x)$ და $F'_2(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია r_0-ზე და ამიტომ $F'(x)$ წარმოებულიც ჯამებადია r_0-ზე.

თეორემა 4. *ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია წარმოადგენს თავისი წარმოებულის განუსაზღვრელ ინტეგრალს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(r)$ არის ელემენტარული ფიგურის ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია r_0 ფიგურაზე. რადგანაც ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის ამავე დროს ფუნქცია სასრული ვარიაციით, ამიტომ $F'(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა r_0 ფიგურაზე. ვთქვათ,

$$\Phi(r)=\int_r F'(x)dx.$$

$\Phi(r)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია r_0-ზე და, მე-2 თეორემის ძალით, თითქმის ყველგან r_0-ზე $\Phi'(x)=F'(x)$. თუ გავითვალისწინებთ XII თავის მე-4 თეორემის შედეგს, მივიღებთ $\Phi(r)=F(r)$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. ფუნქციის ლებეგის წერტილი

მე-2 თეორემა მნიშვნელოვნად შეგვიძლია გავაძლიეროთ. ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა **1.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია n-განზომილებიან I_0 სეგმენტზე. თუ ამ სეგმენტის x_0 წერტილში ($f(x_0)\neq\pm\infty$) მართებულია ტოლობა

$$\lim_{|q(x_0)|\to 0}\frac{1}{|q(x_0)|}\int_{q(x_0)}|f(x)-f(x_0)|\,dx=0,$$

სადაც $q(x_0)$ არის x_0 წერტილის შემცველი რეგულარული სეგმენტი, მაშინ x_0 წერტილს ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის *ლებეგის წერტილი.*

მართებულია შემდეგი

თეორემა 5. *თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია n-განზომილებიან სეგმენტზე, მაშინ I_0 სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილია.*

დამტკიცება. განვიხილოთ ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე $\{r_1, r_2, \dots, r_m, \dots\}$. რადგანაც $|f(t)-r_m|$ ფუნქცია ჯამება-

დია I_0 სეგმენტზე, ამიტომ მე-2 თეორემის თანახმად I_0 სეგმენტის თით-ქმის ყველა x წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{|q(x)|\to 0} \frac{1}{|q(x)|} \int_{q(x)} |f(t)-r_m|\,dt = |f(x)-r_m|. \tag{2.1}$$

აღვნიშნოთ E_m სიმბოლოთი I_0 სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც მართებული არაა (2.1) ტოლობა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E=\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \cup \{x: |f(x)|=+\infty\}.$$

რადგანაც $\mu(E)=0$, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ I_0-E სიმრავლის ყოველი წერტილი არის $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

ვთქვათ, $x_0 \in I_0 - E$. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ავიღოთ რაციონალური რიცხვი r_m ისე, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$|f(x_0)-r_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

რაკი $x_0 \overline{\in} E$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\eta>0$, რომ მართებული იყოს უტოლობა

$$\frac{1}{|q(x_0)|} \int_{q(x_0)} |f(x)-r_m|\,dx < |f(x_0)-r_m| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

როდესაც $|q(x_0)|<\eta$.

შემდეგ, რადგანაც

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f(x)-r_m| + |f(x_0)-r_m| < |f(x)-r_m| + \frac{\varepsilon}{3},$$

ამიტომ

$$\frac{1}{|q(x_0)|} \int_{q(x_0)} |f(x)-f(x_0)|\,dx < \frac{1}{|q(x_0)|} \int_{q(x_0)} |f(x)-r_m|\,dx + $$
$$+ \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{|q(x_0)|\to 0} \frac{1}{|q(x_0)|} \int_{q(x_0)} |f(x)-f(x_0)|\,dx = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. პირვანდელი ფუნქციის აღდგენა

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $F(x)$ ფუნქციას ამ სეგმენტის ყოველ წერტილში აქვს სასრული წარმოებული $F'(x)$. ისმის კითხვა: როგორ ვიპოვოთ პირვანდელი $F(x)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი წარმოებული $F'(x)$? თუ $F'(x)$ წარმოებული ინტეგრებადია რიმანის აზრით, მაშინ

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt.$$

მაგრამ შეიძლება არსებობდეს $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში $F(x)$ ფუნქციის სასრული წარმოებული $F'(x)$ და მასთან ეს წარმოებული შემოსაზღვრულიც იყოს $[a, b]$-ზე, მაგრამ იგი არ იყოს ინტეგრებადი რიმანის აზრით. მოვიყვანოთ

მაგალითი. ვთქვათ, E არის წრფივი, დადებითი ზომის შემოსაზღვრული არსად მკვრივი ჩაკეტილი სიმრავლე. $[a, b]$ სეგმენტზე, სადაც $a=\inf E$, $b=\sup E$, განვსაზღვროთ $F(x)$ ფუნქცია ასე:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ თუ } x\in E, \\ (x-\alpha_n)^2(x-\beta_n)^2\sin\dfrac{1}{(\beta_n-\alpha_n)(x-\alpha_n)(x-\beta_n)}, \text{ თუ } x\in(\alpha_n, \beta_n), \end{cases}$$

სადაც (α_n, β_n) $(n=1, 2, \cdots)$ წარმოადგენენ E სიმრავლის საკუთრივ მოსაზღვრე ინტერვალებს.

დავამტკიცოთ, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილში $F'(x)=0$. ვთქვათ, $\xi\in E$ და x იყოს $[a, b]$სეგმენტის წერტილი, რომელიც ძევს ξ წერტილის მარჯვნივ. თუ $x\in E$, მაშინ

$$F(x)=F(\xi)=0.$$

თუკი $x\in(\alpha_n, \beta_n)$, მაშინ, $\xi\leqslant\alpha_n<x$. ამიტომ $x-\xi\geqslant x-\alpha_n$ და

$$\left|\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}\right|\leqslant(x-\alpha_n)(x-\beta_n)^2\leqslant(x-\xi)(b-a)^2.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $D^+F(\xi)=0$.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $D^-F(\xi)=0$. ამრიგად, $F'(\xi)=0$.

თუ $x\in(\alpha_n, \beta_n)$, მაშინ

$$F'(x)=2(x-\alpha_n)(x-\beta_n)(2x-\alpha_n-\beta_n)\sin\frac{1}{(\beta_n-\alpha_n)(x-\alpha_n)(x-\beta_n)}+$$
$$+\frac{2x-\alpha_n-\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}\cos\frac{1}{(\beta_n-\alpha_n)(x-\alpha_n)(x-\beta_n)}. \qquad (3.1)$$

აქედან, როდესაც $x\in(\alpha_n, \beta_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, გვაქვს

$$|F'(x)|\leq 2|(x-\alpha_n)(x-\beta_n)(2x-\alpha_n-\beta_n)|+$$
$$+\frac{|2x-\alpha_n-\beta_n|}{\beta_n-\alpha_n}<2(\beta_n-\alpha_n)^3+1<2(b-a)^3+1.$$

ამრიგად, $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში არსებობს $F'(x)$ და ეს წარმოებული შემოსაზღვრულია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $F'(x)$ წყვეტილია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. (3.1) ტოლობიდან ჩანს, რომ, როდესაც x მიისწრაფვის α_n ან β_n-კენ, მაშინ $F'(x)$ წარმოებულს არა აქვს ზღვარი; ეს წარმოებული ირხევა -1 და 1 შორის.

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ $F'(x)$ წყვეტილია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. მართლაც, ავიღოთ E სიმრავლის ნებისმიერი x_0 წერტილი, რომელიც არ წარმოადგენს კიდურა წერტილს (E სიმრავლის რაიმე წერტილს ვუწოდებთ კიდურა წერტილს, თუ იგი E სიმრავლის რომელიმე მოსაზღვრე ინტერვალის ბოლო წერტილია). x_0 წერტილი წარმოადგენს E სიმრავლის კიდურა წერტილთა სიმრავლის დაგროვების წერტილს და რაკი ყოველ კიდურა წერტილში $F'(x)$ ფუნქციის რხევა არ არის 2-ზე ნაკლები, ამიტომ x_0 წერტილშიაც $F'(x)$ ფუნქციის რხევა 2-ზე ნაკლები არ იქნება. მაშასადამე, $F'(x)$ წყვეტილია E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

შემდეგ, რადგანაც $\mu(E)>0$, ამიტომ $F'(x)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე.

ამრიგად, რიმანის ინტეგრალით შეიძლება დასმული ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ კერძო შემთხვევაში. ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს უფრო ძლიერ იარაღს პირვანდელი ფუნქციის მოძებნისათვის, როცა ცნობილია წარმოებული.

ზემოთ დასმული ამოცანა შევისწავლოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

თეორემა 6. თუ n-განზომილებიან ელემენტარულ r_0 ფიგურაზე მოცემულია ელემენტარული ფიგურის ადიტიური უწყვეტი ფუნქცია $F(r)$, ამასთან r_0-ის ყოველ წერტილში არსებობს სასრული $F'(x)$ წარმოებული და ეს წარ-

მოებული ჯამებადი ფუნქციაა, მაშინ ყოველი ელემენტარული ფიგურისათვის $r \subset r_0$ მართებულია ტოლობა

$$F(r)=\int_r F'(x)dx. \tag{3.2}$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $\Phi_m(x)$ ფუნქცია ასე:

$$\Phi_m(x)=\begin{cases} F'(x), \text{ თუ } F'(x) \leqslant m, \\ m, \text{ თუ } F'(x)>m. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\Phi_m(x)$ ზომადი ფუნქციაა და, ამას გარდა,

$$|\Phi_m(x)| \leqslant |F'(x)|. \tag{3.3}$$

მაშასადამე, $\Phi_m(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა r_0-ზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Psi_m(r)=F(r)-\int_r \Phi_m(x)dx,$$

სადაც r ნებისმიერი ელემენტარული ფიგურაა r_0-დან. დავამტკიცოთ, რომ $\Psi_m(r)$ ზრდადია r_0 ფიგურაზე. ამ ფიგურის თითქმის ყველა x წერტილში

$$\Psi'_m(x)=F'(x)-\Phi_m(x) \geqslant 0.$$

შემდეგ, რადგანაც r_0 ფიგურის ყოველ x წერტილში $\Phi_m(x) \leqslant m$, ამიტომ ყოველი რეგულარული q სეგმენტისათვის მართებულია უტოლობა

$$\frac{1}{|q|}\int_q \Phi_m(x)dx \leqslant m$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{\Psi_m(q)}{|q|}=\frac{F(q)}{|q|}-\frac{1}{|q|}\int_q \Phi_m(x)\,dx \geqslant \frac{F(q)}{|q|}-m.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ r_0 ფიგურის ყოველ x წერტილში

$$\underline{D}\Psi_m(x) \geqslant F'(x)-m>-\infty.$$

მაშასადამე, XII თავის მე-6 თეორემის ძალით $\Psi_m(r)$ ფუნქცია ზრდადია r_0-ზე. ამიტომ ყოველი ელემენტარული ფიგურისათვის $r \subset r_0$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$F(r)-\int_r \Phi_m(x)dx \geqslant 0,$$

საიდანაც

$$F(r) \geqslant \int_r \Phi_m(x)dx. \tag{3.4}$$

მაგრამ $\lim_{m\to\infty} \Phi_m(x)=F'(x)$ და თუ გავითვალისწინებთ (3.3) უტოლობას, მაშინ ლებეგის თეორემის ძალით

$$\lim_{m\to\infty} \int_r \Phi_m(x)dx = \int_r F'(x)dx.$$

მაშასადამე, თუ (3.4) უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ

$$F(r) \geqslant \int_r F'(x)dx. \tag{3.5}$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $F_1(r)=-F(r)$. მაშინ $F'_1(x)=-F'(x)$. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად

$$F_1(r) \geqslant \int_r F'_1(x)dx, \quad r\subset r_0,$$

ანუ

$$-F(r) \geqslant \int_r [-F'(x)]dx.$$

აქედან

$$F(r) \leqslant \int_r F'(x)dx. \tag{3.6}$$

(3.5) და (3.6) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (3.2) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. შეიძლება $F(r)$ ფუნქციას ჰქონდეს r_0 ფიგურის ყოველ წერტილში სასრული წარმოებული $F'(x)$, მაგრამ ეს წარმოებული არ იყოს ჯამებადი r_0 ფიგურაზე. მართლაც, [0,1] სეგმენტზე განვსაზღვროთ $F(x)$ ფუნქცია ასე:

$$F(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}, \text{ როდესაც } x>0, \ F(0)=0.$$

ამ ფუნქციას აქვს [0,1] სეგმენტის ყოველ წერტილში სასრული წარმოებული $F'(x)$. დავამტკიცოთ, რომ $F'(x)$ ჯამებადი არაა [0,1] სეგმენტზე. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენ-

-ტი, სადაც $0<a<b<1$. ცხადია, $[a, b]$ სეგმენტზე $F'(x)$ წარმოებული შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე,

$$\int_a^b F'(x)dx=b^2\cos\frac{\pi}{b^2}-a^2\cos\frac{\pi}{a^2}.$$

კერძოდ, როდესაც $a_n=\sqrt{2\cdot 4^{-n-1}}$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}$, გვექნება

$$\int_{a_n}^{b_n} F'(x)dx=\frac{1}{2n}.$$

სეგმენტები $[a_n, b_n]\,(n=1, 2, \cdots)$ წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, გვექნება

$$\int_0^1|F'(x)|dx>\int_E|F'(x)|dx>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty.$$

მაშასადამე, $F'(x)$ ჯამებადი არაა $[0,1]$ სეგმენტზე.

§ 4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის სრული ვარიაცია

განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორია განუსაზღვრელი ინტეგრალის სრული ვარიაცია. მართებულია შემდეგი

თეორემა 7. ვთქვათ, n-განზომილებიან I_0 სეგმენტზე მოცემულია ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია. თუ

$$F(r)=\int_r f(x)\,dx,\ r\subset I_0,$$

მაშინ

$$V(F;\ I_0)=\int_{I_0}|f(x)|\,dx, \tag{4.1}$$

ე. ი. ადიტიური აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის სრული ვარიაცია უდრის ინტეგრალს ამ ფუნქციის წარმოებულის აბსოლუტურ სიდიდიდან.

დამტკიცება. გავყოთ I_0 სეგმენტი ქვესეგმენტებად $r_1, r_2, \ldots, r_m$. მაშინ

$$\sum_{k=1}^{m}|F(r_k)|=\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{r_k}f(x)dx\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{r_k}|f(x)|\,dx=\int_{I_0}|f(x)|\,dx.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$V(F;\ I_0)\leqslant \int_{I_0} |f(x)|dx. \tag{4.2}$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$A=\{x : f(x)\geqslant 0\},\quad B=\{x : f(x)<0\}.$$

მაშინ

$$\int_{I_0}|f(x)|dx=\int_A f(x)dx-\int_B f(x)dx.$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ I_0 სეგმენტის ნებისმიერი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის, ზომით η-ზე ნაკლები, გვექნება

$$\int_e |f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ვალე-პუსენის თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლეები $P\subset A$ და $Q\subset B$, რომ $\mu(A-P)<\eta$, $\mu(B-Q)<\eta$. მაშინ

$$\int_{I_0}|f(x)|dx<\int_P f(x)dx-\int_Q f(x)dx+\varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი P და Q სიმრავლეთა შორის მანძილი დადებითია, ამიტომ მოიძებნება ურთიერთ არაგადამკვეთი ისეთი ღია სიმრავლეები

$$G_1\supset P \text{ და } G_2\supset Q, \text{ რომ}$$

$$\mu(G_1-P)<\eta,\ \mu(G_2-Q)<\eta,\ G_1\subset I_0,\ G_2\subset I_0.$$

ამიტომ

$$\int_{I_0}|f(x)|dx<\int_{G_1} f(x)dx-\int_{G_2} f(x)dx+2\varepsilon. \tag{4.3}$$

V თავის 34-ე თეორემის თანახმად, G_1 სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა თვლადი სისტემისა:

$$G_1=q_1\cup q_2\cup\cdots\cup q_k\cup\cdots$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$\mu(G_1 - H'_\nu) < \mu, \text{ სადაც } H'_\nu = q_1 \cup q_2 \cup \cdots \cup q_\nu.$$

მაშინ გვექნება

$$\int_{G_1} f(x)dx - \int_{H'_\nu} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ,

$$\int_{H'_\nu} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\nu} \int_{q_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\nu} F(q_k).$$

ამრიგად,

$$\int_{G_1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{\nu} F(q_k) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

ანალოგიურად, G_2 სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა თვლადი სისტემისა:

$$G_2 = r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_k \cup \cdots$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ

$$\mu(G_2 - H''_m) < \eta, \text{ სადაც } H''_m = r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_m.$$

მაშინ

$$-\int_{G_2} f(x)dx + \int_{H''_m} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან

$$\int_{G_2} f(x)dx > \int_{H''_m} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{m} F(r_k) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5}$$

მაშასადამე, (4.4) და (4.5) უტოლობათა ძალით, (4.3) უტოლობიდან გვაქვს:

$$\int_{I_0} |f(x)|\,dx < \sum_{k=1}^{\nu} F(q_k) - \sum_{k=1}^{m} F(r_k) + 3\varepsilon,$$

საიდანაც

$$\int_{I_0} |f(x)|\,dx < \sum_{k=1}^{\nu} |F(q_k)| + \sum_{k=1}^{m} |F(r_k)| + 3\varepsilon.$$

მაგრამ

$$\sum_{k=1}^{\nu}|F(q_k)|+\sum_{k=1}^{m}|F(r_k)|\leqslant V(F;\ I_0).$$

ამრიგად,

$$\int_{I_0}|f(x)|\,dx<V(F;\ I_0)+3\varepsilon$$

და რაკი ε ნებისმიერია, ამიტომ

$$\int_{I_0}|f(x)|\,dx\leqslant V(F;\ I_0). \tag{4.6}$$

(4.2) და (4.6) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (4.1) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ნაწილობითი ინტეგრება

ამ პარაგრაფში, ისევე როგორც მომდევნო პარაგრაფში, ჩვენ განვიხილავთ ერთ ცვლადზე დამოკიდებულ ფუნქციებსა და მათ განსაზღვრულ ინტეგრალებს. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ლებეგის ინტეგრალისათვის მართებულია ნაწილობითი ინტეგრებისა და საშუალო მნიშვნელობის ის თეორემები, სათანადო ცვლილებებით, რომლებიც კარგადაა ცნობილი მათემატიკური ანალიზიდან რიმანის ინტეგრალისათვის.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია $[a,\ b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{5.1}$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით $f'(x)$ და $g'(x)$ არიან თითქმის ყველგან სასრული $[a,\ b]$ სეგმენტზე და ჯამებადი იმავე სეგმენტზე. ამის გარდა, $f(x)g'(x)$ და $g(x)f'(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია $[a,\ b]$-ზე.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\psi(x)=f(x)\,g(x)-\int_a^x f(t)g'(t)dt. \tag{5.2}$$

ცხადია, რომ $\psi(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. (5.2) ტოლობის ორივე ნაწილის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\psi'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-f(x)g'(x)=g(x)f'(x)$$

თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე. აქედან

$$\psi(x)=\psi(a)+\int_a^x g(t)f'(t)dt. \tag{5.3}$$

(5.2) დნ (5.3) ტოლობების საფუძველზე გვაქვს

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt=f(x)g(x)-f(a)g(a)-\int_a^x g(t)f'(t)dt.$$

თუ ამ ტოლობაში ვიგულისხმებთ $x=b$, მივიღებთ (5.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. საშუალო მნიშვნელობის თეორემები

თეორემა 0. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებიდან $f(x)$ ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციაა, ხოლო $g(x)$ ჯამებადია და თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე არაუარყოფითია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx, \tag{6.1}$$

სადაც μ არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს შორის მოთავსებული რიცხვი.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ m და M-ით $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები $[a, b]$ სეგმენტზე. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ არაუარყოფითია $[a, b]$-ზე. ცხადია, რომ

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x). \tag{6.2}$$

თუ მოვახდენთ (6.2) უტოლობების წევრ-წევრად ინტეგრებას, მივიღებთ

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx. \tag{6.3}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ დადებითი ზომის სიმრავლეზე $g(x)>0$, ვინაიდან თუ თითქმის ყველგან $g(x)=0$, (6.1) ტოლობა ტრივიალურია.

(6.3) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$m \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)dx : \int_a^b g(x)dx \leqslant M.$$

ინტეგრალთა ფარდობა გარკვეული რიცხვია:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx : \int_a^b g(x)dx = \mu.$$

აქედან მიიღება (6.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

კერძოდ, თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტის შიგნით მოიძებნება ისეთი წერტილი ξ, რომ $f(\xi)=\mu$ და, მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

ზემოდამტკიცებულ თეორემას ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა, ხოლო (6.1) ფორმულას საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა.

თეორემა 10. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია, ხოლო $g(x)$ მონოტონურია, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{6.4}$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ცხადია, რომ $g(x)$ შემოსაზღვრულია და ამიტომ $f(x)\,g(x)$ ჯამებადია $[a, b]$-ზე.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \quad (6.5)$$

რადგანაც $g'(x)$ წარმოებული თითქმის ყველგან სასრულია და არაუარყოფითი, ხოლო $F(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ მე-9 თეორემის ძალით არსებობს ისეთი წერტილი $\xi \in [a, b]$, რომ

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx) = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)[g(b) - g(a)].$$

მაშასადამე ამ ტოლობის თანახმად, (6.5) ტოლობიდან გვაქვს

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)] = g(a)F(\xi) +$$

$$+ g(b)[F(b) - F(\xi)] = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

ამრიგად, (6.4) ფორმულის მართებულობა დამტკიცებულია, როცა $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე.

ახლა ვთქვათ, რომ $g(x)$ ნებისმიერი ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$-ზე. ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი m და $[a, b]$ სეგმენტი გავყოთ m ურთიერთ კონგრუენტულ სეგმენტებად შემდეგი წერტილების საშუალებით:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

განვსაზღვროთ უწყვეტი $g_m(x)$ ფუნქცია ასე:

$$g_m(x) = \begin{cases} g(x_{k-1}), & \text{თუ } x = x_{k-1} \ (k = 1, 2, \cdots, m+1), \\ \text{წრფივია ყოველ } [x_{k-1}, x_k] \text{ სეგმენტზე } (k = 1, 2, \cdots, m). \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ზრდადია და აბსოლუტურად უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ ზემოდამტკიცებულის ძალით არსებობს ისეთი წერტილი $\xi_m \in (a, b)$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)g_m(x)dx = g_m(a)\int_a^{\xi_m} f(x)dx + g_m(b)\int_{\xi_m}^b f(x)dx.$$

მაგრამ $g_m(a)=g(a)$, $g_m(b)=g(b)$. მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)g_m(x)dx = g(a)\int_a^{\xi_m} f(x)dx + g(b)\int_{\xi_m}^b f(x)dx. \tag{6.6}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქციათა მიმდევროვა $\{g_m(x)\}$ კრებადია $g(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ყოველ წერტილში. მაგრამ $g(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი. მაშასადამე, თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე $g(x)$ უწყვეტია. ამის გარდა, $[a, b]$-ზე $|f(x)g_m(x)|\leqslant K|f(x)|$, სადაც

$$K=\max\{|g(a)|, \ |g(b)|\}.$$

მაშასადამე, ლებეგის თეორემის ძალით,

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)g_m(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{6.7}$$

ახლა ვთქვათ, $\{\xi_{m_k}\}$ არის $\{\xi_m\}$ მიმდევრობის კრებადი ქვემიმდევრობა:

$$\lim_{k\to\infty}\xi_{m_k}=\xi.$$

ცხადია, $\xi\in[a, b]$. გვაქვს

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{\xi_{m_k}} f(x)dx=\int_a^{\xi} f(x)dx, \quad \lim_{k\to\infty}\int_{\xi_{m_k}}^b f(x)dx=\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (6.7) ტოლობას, (6.6) ტოლობიდან მივიღებთ (6.4) ტოლობას. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, $g(x)$ ფუნქცია კი კლებადია და $g(b)\geqslant 0$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx. \tag{6.8}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$\varphi(x)=\begin{cases} g(x), & \text{როდესაც } a\leqslant x<b; \\ 0, & \text{როდესაც } x=b. \end{cases}$$

მაშინ (6.4) ფორმულის თანახმად,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\quad a\leqslant\xi\leqslant b.$$

მაგრამ $\varphi(a)=g(a)$ და

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

მაშასადამე, მართებულია (6.8) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 12. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $g(x)$ ფუნქცია ზრდადია და $\varphi(a)\geqslant 0$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{6.9}$$

(6.8) და (6.9) ფორმულებს ეწოდება ბონეს (Bonnet) ფორმულები. (6.4) ფორმულას, ისევე როგორც (6.8) და (6.9)-ს, ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა.

§ 7. განუსაზღვრელი ჯერადი ინტეგრალის კერძო წარმოებულები

ვთქვათ, ორი x და y ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $r_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე. ავიღოთ r_0 სეგმენტის ნებისმიერი (x, y) წერტილი. ფუბინის თეორემის თანახმად

$$\iint\limits_{r_{x,y}} f(t, \tau)dt\,d\tau=\int_{a_1}^x dt\int_{a_2}^y f(t, \tau)\,d\tau=\int_{a_2}^y d\tau\int_{a_1}^x f(t, \tau)dt,$$

სადაც $r_{x,y}=[a_1, x; a_2, y]$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$F(x, y)=\iint\limits_{r_{x,y}} f(t, \tau)\,dt\,d\tau,$$

გვექნება

$$F(x, y)=\int\limits_{a_1}^{x} dt \int\limits_{a_2}^{y} f(t, \tau)\,d\tau=\int\limits_{a_2}^{y} d\tau \int\limits_{a_1}^{x} f(t, \tau)\,dt. \tag{7.1}$$

$F(x, y)$ ფუნქცია არის $f(x, y)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, გამოსახული x და y ცვლადების საშუალებით.

თეორემა 13. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $r_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტზე, ხოლო $F(x, y)$ წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს, მაშინ თითქმის ყველგან r_0 სეგმენტზე არსებობს სასრული შერეული კერძო წარმოებულები $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ და $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$ და თითქმის ყველაგან r_0-ზე მართებულია ტოლობა

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

დამტკიცება. (7.1) ტოლობების თანახმად, ყოველი ფიქსირებული y-თვის, $a_2<y\leqslant b_2$, მართებულია ტოლობა

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=\int\limits_{a_2}^{y} f(x, \tau)\,d\tau \tag{7.2}$$

თითქმის ყველა x-თვის, $a_1\leqslant x\leqslant b_1$.

ასევე, ყოველი ფიქსირებული x-თვის, $a_1<x\leqslant b_1$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=\int\limits_{a_1}^{x} f(t, y)\,dt \tag{7.3}$$

თითქმის ყველა y-თვის, $a_2\leqslant y\leqslant b_2$.

აღვნიშნოთ H-ით r_0 სეგმენტის იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის მართებული არ არის ერთი მაინც (7.2) და (7.3) ტოლობებიდან. H სიმრავლის ბრტყელი ზომა ნულის ტოლია. ამრიგად, r_0-H სიმრავლეზე $F(x, y)$ წარმოებადია როგორც x-ის მიმართ, ისე y-ის მიმართაც.

ახლა, თუ (7.2) ტოლობას გავაწარმოებთ y-ით, (7.3) ტოლობას კი x-ით, ანალოგიურად მივიღებთ, რომ თითქმის ყველგან r_0-ზე

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = f(x, y).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოება

ვთქვათ, ორი x და α ცვლადის $f(x, \alpha)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $r_0 = [a \leqslant x \leqslant b;\ \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1]$ მართკუთხედზე. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული α-თვის, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, $f(x, \alpha)$ ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ α ცვლადის $F(\alpha)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1.$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 14 (ვალე-პუსენი). თუ ყოველი ფიქსირებული x-თვის, $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x, \alpha)$ არის α-ს მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე და $f'_\alpha(x, \alpha)$ ჯამებადია r_0 სეგმენტზე, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx \tag{8.1}$$

α-ს თითქმის ყველა მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტიდან.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $f(x, \alpha)$ აბსოლუტურად უწყვეტია α-ს მიმართ ყოველი ფიქსირებული x-თვის, ამიტომ არსებობს თითქმის ყველგან $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე კერძო წარმოებული $f'_\alpha(x, \alpha)$. იმ წერტილთა სიმრავლის ზომა, სადაც არ არსებობს $f'_\alpha(x, \alpha)$, ნულის ტოლია.

განვიხილოთ $\Phi(\alpha)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

ფუბინის თეორემის თანახმად, $\Phi(\alpha)$ შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე მოთავსებულ ნულ ზომის სიმრავლეზე. ამას გარდა, $\Phi(\alpha)$ ჯამებადია $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე. ფუბინის თეორემის თანახმად,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi(\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f'_\alpha(x, \alpha)d\alpha = F(\alpha) - F(\alpha_0).$$

აქედან $F'(\alpha)=\Phi(\alpha)$ თითქმის ყველგან $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე, ე. ი. მართებულია (8.1) ტოლობა α-ს თითქმის ყველა მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f'_\alpha(x, \alpha)$ კერძო წარმოებული r_0-ზე სასრულია და ჯამებადი, მაშინ მართებულია (8.1) ტოლობა.

სავარჯიშო

1. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[0, 1]$ სეგმენტზე ასე:

$$f(x)=x^2 \sin \frac{\pi}{x}, \text{ როდესაც } 0<x<1, \quad f(0)=0.$$

დაამტკიცეთ, რომ $f'(x)$ წარმოებული სასრულია მოცემული სეგმენტის ყოველ წერტილში, მაგრამ ეს წარმოებული ჯამებადი არ არის.

2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b+\varepsilon]$ სეგმენტზე, $\varepsilon>0$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = o(h)$, როდესაც $h\to 0+$, მაშინ $f(x)$ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე მუდმივია.

3. დაამტკიცეთ, რომ ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი წარმოადგენს ლებეგის წერტილს.

4. დაამტკიცეთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მოთავსებული ყოველი ნულზომიანი E სიმრავლისათვის არსებობს ამ სეგმენტზე უწყვეტი ზრდადი $f(x)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილში $f'(x)=+\infty$.

5. დაამტკიცეთ, რომ მე-6 თეორემა ძალაში რჩება მაშინაც, როდესაც $F'(x)=+\infty$ წერტილთა თვლად სიმრავლეზე.

თავი XVII

L^p სივრცე

§ 1. p ხარისხით ჯამებად ფუნქციათა ზოგიერთი თვისება

განვიხილოთ R^n სივრცეში მოთავსებული სასრული ზომის რაიმე E სიმრავლე. ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ზომად $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *p-ხარისხით ჯამებადი* E-ზე, თუ $\int_E |f(x)|^p dx < +\infty$, სადაც p მოცემული დადებითი რიცხვია.

p-ხარისხით ჯამებად ყველა ფუნქციის სიმრავლე აღვნიშნოთ $L^p(E)$ ან მოკლედ L^p სიმბოლოთი. p-ხარისხით ჯამებად ფუნქციებს ვუწოდებთ L^p კლასის ფუნქციებს. ცხადია, ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია L^p კლასის ფუნქციაა.

თეორემა 1. *თუ* $f(x)\in L^p(E)$, *მაშინ* $f(x)\in L^q(E)$ *ყოველი* q *რიცხვისათვის, რომელიც* p-*ზე ნაკლებია.*

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P=\{x:|f(x)|\leqslant 1\},\quad Q=E-P.$$

რადგანაც P სიმრავლეზე $|f(x)|^q$ ფუნქცია ჯამებადია, ხოლო Q სიმრავლის ყოველ x წერტილში $|f(x)|^q<|f(x)|^p$ და, ამას გარდა, $|f(x)|^p$ ჯამებადია Q-ზე, ამიტომ $f(x)\in L^q(E)$.

ლემა. *თუ* α *და* β *დადებითი რიცხვებია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი* $p\geqslant 1$ *რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა*

$$(\alpha+\beta)^p\leqslant 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p). \tag{1.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(t)=\frac{(1+t)^p}{1+t^p},$$

სადაც $t\geqslant 0$. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$\varphi'(t)=\frac{p(1+t)^{p-1}(1-t^{p-1})}{(1+t^p)^2}.$$

აქედან ჩანს, რომ $[0,1]$ სეგმენტზე $\varphi(t)$ ფუნქცია ზრდადია, $(1, +\infty)$ ინტერვალში კლებადია; ამიტომ $\varphi(t)$ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, როცა $t=1$ და რაკი $\varphi(1)=2^{p-1}$, ამიტომ

$$\frac{(1+t)^p}{1+t^p}\leqslant 2^{p-1},\quad 0\leqslant t<+\infty.$$

აქედან

$$(1+t)^p\leqslant 2^{p-1}(1+t^p). \tag{1.2}$$

ახლა თუ მივიჩნევთ $t=\frac{\alpha}{\beta}$, მაშინ (1.2) უტოლობიდან გვაქვს

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^p\leqslant 2^{p-1}\left(1+\frac{\alpha^p}{\beta^p}\right),$$

აქედან მიიღება (1.1) უტოლობა.

თუ $p\geqslant 1$, (1.1) დამოკიდებულებაში ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა $\alpha=\beta$.

თეორემა 2. *თუ $f(x)\in L^p$ და $g(x)\in L^p$, $p\geqslant 1$, მაშინ $f(x)+g(x)$ არის აგრეთვე L^p კლასის ფუნქცია.*

დამტკიცება. ლემის ძალით,

$$(|f(x)|+|g(x)|)^p\leqslant 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)+g(x)$ არის L^p კლასის ფუნქცია. თეორემა დამტკიცებულია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $f(x)\in L^p$, მაშინ $cf(x)\in L^p$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

თუ $f(x)\in L^p(E)$, მაშინ გამოსახულებას $\left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის *ნორმა* და იგი აღვნიშნოთ $||f||_p$ სიმბოლოთი:

$$||f||_p=\left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

თეორემა 3 (ჰელდერი-რისი). *თუ $f(x)\in L^p(E)$ და $g(x)\in L^q(E)$, სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, მაშინ $f(x)g(x)$ ნამრავლი ჯამებადია E სიმრავლეზე და მართებულია უტოლობა*

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|\,dx\leqslant \|f\|_p\cdot\|g\|_q. \tag{1.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ნულის ეკვივალენტური არ არიან და, ამას გარდა, $\mu(E)\neq 0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში (1.3) თანაფარდობა ტრივიალურია. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

მაშინ V თავის მეორე პარაგრაფის ლემის ძალით,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\leqslant\frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p}+\frac{|p(x)|^q}{q\,\|q\|_q^q}.$$

თუ მოვახდენთ ამ უტოლობის წევრ-წევრად ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\frac{1}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\int\limits_E|f(x)g(x)|dx\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

აქედან გამომდინარეობს (1.3) უტოლობის მართებულობა.

(1.3) თანაფარდობაში ტოლობის ნიშანს ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|g(x)|^q=c\,|f(x)|^p$ თითქმის ყველგან E-ზე, სადაც c-დადებითი რიცხვია.

(1.3) უტოლობას ჰ ე ლ დ ე რ-ი ს ი ს უტოლობა ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როცა $p=q=2$, (1.3) უტოლობას ბ უ ნ ი ა კ ო ვ ს კ ი ს უტოლობა ჰქვია.

თეორემა 4 (მინკოვსკი-ისი). თ უ $f(x)$ დ ა $g(x)$ ა რ ი ა ნ $L^p(E)$ კ ლ ა ს ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი, $p\geqslant 1$, მ ა შ ი ნ ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს უ ტ ო ლ ო ბ ა ს

$$\left\{\int\limits_E(|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{1.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $p=1$, (1.4) უტოლობა ცხადია. ამიტომ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $p>1$. რადგანაც $|f(x)|+|g(x)|$ არის $L^p(E)$ კლასის ფუნქცია, ამიტომ, როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, $(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}$ არის $L^q(E)$ კლასის ფუნქცია, სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

შემდეგ, გამოვიყენებთ რა ჰელდერის უტოლობას

$$(|f|+|g|)^p=|f|(|f|+|g|)^{p-1}+|g|(|f|+|g|)^{p-1}$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყოველ წევრის მიმართ, მივიღებთ

$$\int\limits_E(|f|+|g|)^p dx=\int\limits_E|f|(|f|+|g|)^{p-1}dx+$$

$$+\int_E |g|(|f|+|g|)^{p-1}dx \leqslant \|f\|_p \left\{\int_E (|f|+|g|)^p dx\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\|g\|_p \left\{\int_E (|f|+|g|)^p dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ $\left\{\int_E (|f|+|g|)^p dx\right\}^{\frac{1}{q}}$ რიცხვზე, მივიღებთ (1.4) უტოლობას, რომელსაც ეწოდება მინკოვსკი-რისის უტოლობა.

(1.4) თანაფარდობაში ტოლობის ნიშანი მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითქმის ყველგან E-ზე $|f(x)|=C|g(x)|$, სადაც C დადებითი რიცხვია.

მინკოვსკი-რისის უტოლობა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p. \tag{1.5}$$

განსაზღვრა 1. $L^p(E)$ სიმრავლეს, სადაც მისი f და g ელემენტებს შორის მანძილი განსაზღვრულია ტოლობით

$$\rho(f, g)=\|f-g\|_p,$$

ეწოდება L^p სივრცე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ L^p წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს.

§ 2. ფუნქციათა მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობა

განვიხილოთ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციათა რაიმე მიმდევრობა

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots \tag{2.1}$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით $(p\geqslant 1)$ $L^p(E)$ კლასის $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k-f\|_p=0, \tag{2.2}$$

ან რაც იგივეა,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)-f(x)|^p dx=0.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\underset{k\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, f_k(x)=f(x)$$

[l. i. m. (limit in mean) — საშუალო ზღვარი].

თეორემა 5. თუ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციათა (2.1) მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით ($p\geqslant 1$) $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა ზომით კრებადია იმავე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი δ და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_m(\delta)=\{x:|f_m(x)-f(x)|\geqslant\delta\}.$$

ცხადია,

$$\int\limits_E|f_m(x)-f(x)|^p dx\geqslant\int\limits_{E_m(\delta)}|f_m(x)-f(x)|^p dx\geqslant\delta^p\mu(E_m(\delta)).$$

რადგანაც δ ფიქსირებულია და ადგილი აქვს (2.2) ტოლობას, ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty}\mu(E_m(\delta))=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციათა (2.1) მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით ($p\geqslant 1$) $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ (2.1) მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\{f_{m_k}(x)\}$, რომელიც თითქმის ყველგან E-ზე კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

მართლაც, მე-5 თეორემის ძალით. ფუნქციათა (2.1) მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ხოლო რისის თეორემის თანახმად (2.1) მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\{f_{m_k}(x)\}$, რომელიც კრებადია თითქმის ყველგან E-ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შენიშვნა. ფუნქციათა (2.1) მიმდევრობის p-მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობიდან $f(x)$ ფუნქციისაკენ, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს (2.1) მიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობა E-სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

განვიხილოთ მაგალითი. ყოველი მთელი დადებითი m რიცხვისათვის განვსაზღვროთ [0,1) შუალედში ფუნქციები $\varphi_1^{(m)}(x)$, $\varphi_2^{(m)}(x),\ldots,\varphi_m^{(m)}(x)$ შემდეგნაირად:

$$\varphi_i^{(m)}(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } x\in\left[\dfrac{i-1}{m},\ \dfrac{i}{m}\right),\\[2ex] 0, & \text{თუ } x\,\overline{\in}\left[\dfrac{i-1}{m},\ \dfrac{i}{m}\right)\end{cases}\quad (i=1,2,\ldots,m).$$

ამგვარად აგებულ ფუნქციებს თუ გადავნომრავთ რიგრიგობით ერთი ნიშნაკით, მივიღებთ ფუნქციათა მიმდევრობას

$$f_1(x)=\varphi_1^{(1)}(x),\quad f_2(x)=\varphi_1^{(2)}(x),\quad f_3(x)=\varphi_2^{(2)}(x),\quad f_4(x)=\varphi_1^{(3)}(x),\cdots$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქციათა ეს მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით ნულისაკენ. მართლაც, თუ $f_n(x)=\varphi_i^{(m)}(x)$, გვექნება

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p dx=\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} dx=\frac{1}{m}\,.$$

თუ $m\to\infty$, მაშინ $n\to\infty$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|^p dx=0.$$

შემდეგ, ფუნქციათა $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა კრებადი არაა $[0,1)$ შუალედის არც ერთ წერტილში. მართლაც, ვთქვათ, ξ არის $[0,1)$ შუალედის ნებისმიერი წერტილი. ნებისმიერი m რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $i\leq m$, რომ $\xi\in\left[\frac{i-1}{m},\ \frac{i}{m}\right)$, ისე რომ $\varphi_i^{(m)}(\xi)=1$. მაშასადამე, $f_1(\xi), f_2(\xi),\dots, f_n(x),\dots$ მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრჯერ შეგვხვდება რიცხვი 1 და ამიტომ ფუნქციათა $\{f_m(x)\}$ მიმდევრობა არ იქნება კრებადი ξ წერტილში. მაშასადამე, იგი არ იქნება კრებადი $[0,1)$ შუალედის არც ერთ წერტილში.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით, მაგრამ მოცემულ შუალედში იგი არსად კრებადი არაა ჩვეულებრივი გაგებით.

შებრუნებით, (2.1) მიმდევრობის კრებადობისაგან $f(x)$ ფუნქციისაკენ, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს (2.1) მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობა p-მაჩვენებლით იმავე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $[0,2]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f_m(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f_m(x)=\begin{cases} m^3x, \text{ თუ } 0\leq x\leq\frac{1}{m}, \\ -m^3x+2m^2, \text{ თუ } \frac{1}{m}<x\leq\frac{2}{m} \quad (m=1,2,\cdots) \\ 0, \text{ თუ } \frac{2}{m}<x\leq 2. \end{cases}$$

ყოველი $f_m(x)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე.

ცხადია, რომ [0,2] სეგმენტის ყოველ x წერტილში

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=0.$$

მაგრამ

$$\int_0^2 [f_m(x)]^p dx > m^{3p}\int_0^{\frac{1}{m}} x^p dx=\frac{m^{2p-1}}{p+1}$$

და რადგანაც $p\geqslant 1$, ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^2 [f_m(x)]^p dx=+\infty.$$

თეორემა 6. თუ $f_k(x)\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$ და

$$\underset{k\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} f_k(x)=f(x),\quad \mathrm{l.\,i.\,m.}\, f_k(x)=g(x),$$

მაშინ $f(x)\sim g(x)$.

დამტკიცება. მინკოვსკის უტოლობის ძალით

$$\left\{\int_E |f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_E |[f(x)-f_m(x)]+[f_m(x)-g(x)]|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\leqslant \|f-f_m\|_p+\|f_m-g\|_p\to 0,$$

როცა $m\to\infty$. მაშასადამე, $f(x)\sim g(x)$.

ლემა. ვთქვათ, $\{f_k(x)\}_1^\infty$ მიმდევრობის წევრები არაუარყოფითია და წარმოადგენენ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციებს, $p\geqslant 1$. თუ

$$\sum_{m=1}^\infty \|f_m\|_p=A<+\infty, \tag{3.3}$$

მაშინ ფუნქციონალური მწკრივი $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ თითქმის ყველგან კრებადია E სიმრავლეზე, მისი ჯამი $f(x)\in L^p(E)$ და მართებულია უტოლობა

$$\|f\|_p\leqslant\sum_{m=1}^\infty \|f_m\|_p.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$g_m(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \quad (m=1,2,\ldots).$$

ცხადია, რომ

$$\| g_m \|_p \leqslant \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_p \leqslant A. \tag{2.4}$$

აქედან

$$\int_E [g_m(x)]^p dx \leqslant A^p (m=1,2,\cdots).$$

რადგანაც

$$\lim_{m\to\infty} [g_m(x)]^p = [f(x)]^p$$

და $\{g_m(x)\}$ მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ ლევის თეორემის ძალით,

$$\int_E [f(x)]^p dx = \lim_{m\to\infty} \int_E [g_m(x)]^p dx \leqslant A^p.$$

მაშასადამე, $f(x) \in L^p(E)$. ამის გარდა,

$$\| f \|_p = \lim_{m\to\infty} \| g_m \|_p$$

და თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.4) უტოლობას, გვექნება

$$\| f \|_p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i \|.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. $L^p(E)$ *კლასის ფუნქციათა (2.1) მიმდევრობის p-მაჩვენებლით ($p \geqslant 1$) საშუალოდ კრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას*

$$\| f_i - f_k \|_p < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } i > N,\ k > N. \tag{2.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, (2.1) მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით $f(x)$ ფუნქციისა-

კენ, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|f_m-f\|_p<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m>N.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი i და k იმ პირობით, რომ $i>N$, $k>N$. მაშინ

$$\|f_i-f\|_p<\frac{\varepsilon}{2},\ \|f_k-f\|_p<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

მაშასადამე, რისი-მინკოვსკის უტოლობის ძალით,

$$\|f_i-f_k\|_p=\|(f_i-f)+(f-f_k)\|_p\leq\|f_i-f\|_p+\|f-f_k\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ

$$\|f_i-f_k\|_p<\varepsilon, \text{ როდესაც } i>N,\ k>N.$$

მაშინ რიცხვი $\frac{1}{2}$-თვის მოიძებნება ისეთი $f_{m_1}(x)$ და $f_{m_2}(x)$ ფუნქციები, რომელთათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$\|f_{m_2}-f_{m_1}\|_p<\frac{1}{2},\ m_2>m_1.$$

შემდეგ, $\frac{1}{2^2}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ორი ფუნქცია $f_{m_3}(x)$ და $f_{m_4}(x)$, რომ

$$\|f_{m_4}-f_{m_3}\|_p<\frac{1}{2^2},\ m_4>m_3>m_2.$$

საზოგადოდ, $\frac{1}{2^k}$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $f_{m_{2k}}(x)$ და $f_{m_{2k-1}}(x)$ ფუნქციები, რომ

$$\|f_{m_{2k}}-f_{m_{2k-1}}\|_p<\frac{1}{2^k},\ m_{2k}>m_{2k-1}>m_{2k-2}>\cdots>m_1\ (k=1, 2,\ldots).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$g_k(x)=f_{m_{2k-2}}(x)-\sum_{i=k}^{\infty}|f_{m_{2i}}(x)-f_{m_{2i-1}}(x)|,$$

$$h_k(x)=f_{m_{2k-2}}(x)+\sum_{i=k}^{\infty}|f_{m_{2i}}(x)-f_{m_{2i-1}}(x)|.$$

რადგანაც

$$\sum_{i=k}^{\infty}\|f_{m_{2i}}-f_{m_{2i-1}}\|_p<\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{k-1}}<+\infty, \tag{2.7}$$

ამიტომ ლემის ძალით $g_k(x)\in L^p(E)$, $h_k(x)\in L^p(E)$ და

$$\|h_k-g_h\|_p=2\sum_{i=i}^{\infty}\|f_{m_{2i}}-f_{m_{2i-1}}\|_p<\frac{1}{2^{k-2}}. \tag{2.8}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\{g_k(x)\}$ და $\{h_k(x)\}$ მიმდევრობები არიან შესაბამისად ზრდადი და კლებადი. ვთქვათ,

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}g_m(x).$$

რადგანაც $h_k(x)\geqslant g_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$, ამიტომ

$$0\leqslant h_k(x)-f(x)\leqslant h_k(x)-g_k(x)$$

და, მაშასადამე, (2.8) უტოლობის თანახმად,

$$\|h_k-f\|_p\leqslant\|h_k-g_h\|_p<\frac{1}{2^{k-2}}. \tag{2.9}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)\in L^p(E)$.

შემდეგ, რაკი

$$f(x)-f_{m_{2k-2}}(x)=[f(x)-h_k(x)]+\sum_{i=k}^{\infty}|f_{m_{2i}}(x)-f_{m_{2i-1}}(x)|,$$

ამიტომ (2.7) და (2.9) უტოლობების ძალით,

$$\|f-f_{m_{2k-2}}\|_p\leqslant\|f-h_k\|_p+\sum_{i=k}^{\infty}\|f_{m_{2i}}-f_{m_{2i-1}}\|_p<\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{3}{2^{k-1}},$$

საიდანაც

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{m_{2k-2}}\|_p=0.$$

მაშასადამე, მოცემული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu \geqslant N$, რომ

$$\| f - f_{m_{2k-2}} \|_p < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } k > \nu.$$

ახლა თუ ავიღებთ $s > \nu$ და $k > \nu$, გვექნება

$$\| f - f_s \|_p \leqslant \| f - f_{m_{2k-2}} \|_p + \| f_{m_{2k-2}} - f_s \|_p < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{s \to \infty} \| f - f_s \|_p = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. L^p სივრცე სრულია.

თეორემა 8. თუ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციათა $\{x_m(t)\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით $(p \geq 1)$ $x(t)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{m \to \infty} \| x_m \|_p = \| x \|_p. \tag{2.10}$$

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\| x_m \|_p = \| (x_m - x) + x \|_p \leqslant \| x_m - x \|_p + \| x \|_p,$$

$$\| x \|_p = \| (x - x_m) + x_m \|_p \leqslant \| x - x_m \|_p + \| x_m \|_p.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\big| \| x_m \|_p - \| x \|_p \big| \leqslant \| x_m - x \|_p.$$

თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ (2.10) ტოლობას, ვინაიდან პირობის ძალით $\lim\limits_{m \to \infty} \| x_m - x \|_p = 0$.

§ 3. ზემოდან არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციები

ჩვენ ვიტყვით, რომ ზომად E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი $f(x)$ ფუნქცია ზემოდან არსებითად შემოსაზღვრულია, თუ ეს ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციის ეკვივალენტურია.

$f(x)$ ფუნქციის არსებითად ზუსტი ზედა საზღვარი ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ეკვივალენტურ და ზემოდან შემოსაზღვრულ ფუნქციების ზუსტ ზედა საზღვართა სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს და იგი აღინიშნება სიმბოლოთი, $\operatorname{vrai\,max} f(x)$, ხოლო $|f(x)|$ ფუნქციის არსებითად ზუსტ ზედა საზღვარს აღნიშნავენ $\| f \|_\infty$ სიმბოლოთი.

ახლა $L^{\infty}(E)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა არსებითად შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციათა სიმრავლე, სადაც ეკვივალენტური ფუნქციები გაიგივებულია.

ცხადია, რომ $L^{\infty}(E)$ წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს, თუ მის ორ f და g ელემენტს შორის მანძილს ასე განვსაზღვრავთ:

$$\rho(f, g)=\operatorname{vrai\,max}|f(x)-g(x)|=\|f-g\|_{\infty}.$$

თეორემა 9. თუ რომელიმე დადებითი p რიცხვისათვის $f(x)\in L^p(E)$, მაშინ

$$\lim_{q\to+\infty}\|f\|_q=\|f\|_{\infty}. \tag{3.1}$$

დამტკიცება. თუ $\|f\|_{\infty}=0$, მაშინ ყოველი დადებითი q რიცხვისათვის $\|f\|_q=0$ და თეორემა ტრივიალურია.

დავუშვათ, რომ $\|f\|_{\infty}>0$ და ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი $a<\|f\|_{\infty}$. განვიხილოთ $H(a)=\{x:|f(x)|>a\}$ სიმრავლე. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\|f\|_q=\left(\int_E|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant\left(\int_{H(a)}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant a[\mu(H(a))]^{\frac{1}{q}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\liminf_{q\to+\infty}\|f\|_q\geqslant a$$

და რაკი a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, რომელიც $\|f\|_{\infty}$ რიცხვზე ნაკლებია, ამიტომ

$$\liminf_{q\to+\infty}\|f\|_q\geqslant\|f\|_{\infty}. \tag{3.2}$$

თუ $\|f\|_{\infty}=+\infty$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\limsup_{q\to+\infty}\|f\|_q\leqslant\|f\|_{\infty}. \tag{3.3}$$

ახლა ვთქვათ, $\|f\|_{\infty}<+\infty$. მაშინ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე

$$|f(x)|^q\leqslant|f(x)|^p(\|f\|_{\infty})^{q-p}$$

და ამიტომ

$$\|f\|_q\leqslant(\|f\|_p)^{\frac{p}{q}}(\|f\|_{\infty})^{1-\frac{p}{q}}.$$

აქედან
$$\limsup_{q\to+\infty}\|f\|_q\leqslant\|f\|_\infty. \tag{3.4}$$

(3.2) და (3.4) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (3.1) ტოლობის მართებულობა. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

§ 4. ფუნქციათა მიმდევრობის სუსტად კრებადობა

განსაზღვრა 2. $L^p(E)$ კლასის ($p>1$) ფუნქციათა $\{x_m(t)\}$ მიმდევრობას ეწოდება სუსტად კრებადი $L^p(E)$ კლასის $x(t)$ ფუნქციისაკენ, თუ $L^q(E)$ კლასის ყოველი $y(t)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m\to\infty}\int_E x_m(t)y(t)dt=\int_E x(t)y(t)dt,$$

სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

თეორემა 10. თუ $L^p(E)$ კლასის ფუნქციათა $\{x_m(t)\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია p-მაჩვენებლით ($p>1$) $x(t)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ეს მიმდევრობა სუსტად კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ჰელდერ-რისის უტოლობის ძალით, L^q კლასის ყოველი $y(t)$ ფუნქციისათვის, სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, გვაქვს:

$$\left|\int_E x(t)y(t)dt-\int_E x_m(t)y(t)dt\right|=\left|\int_E[x(t)-x_m(t)]y(t)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_E|x(t)-x_m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\to 0,$$

როცა $m\to\infty$. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1. თუ $p>1$, მაშინ ნულისაგან განსხვავებული ყოველი ნამდვილი u რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა:

$$|1+u|^p>1+pu. \tag{4.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(u)=|1+u|^p-1-pu. \tag{4.2}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს ფუნქცია კლებადია $(-\infty, 0)$ შუალედში ხოლო იგი ზრდადია $(0, +\infty)$ შუალედში. შემდეგ, რაკი $\varphi(0)=0$, ამიტომ

$$|1+u|^p-1-pu>0, \text{ თუ } u\neq 0,$$

ე. ი. მართებულია (4.1) უტოლობა.

ლემა 2. თუ $p\geqslant 2$, მაშინ ყოველი ნამდვილი u რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|1+u|^p\geqslant 1+pu+c|u|^p, \tag{4.3}$$

სადაც c არის u-ზე დამოუკიდებელი დადებითი რიცხვი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\psi(u)=\varphi(u)|u|^{-p},\quad u\neq 0,$$

სადაც $\varphi(u)$ განსაზღვრულია (4.2) ტოლობით. 1-ლი ლემის ძალით $\psi(u)>0$, თუ $u\neq 0$, ხოლო

$\psi(0+)=\psi(0-)=+\infty$, როცა $p>2$ და $\psi(0+)=\psi(0-)=1$, როცა $p=2$. დასასრულ, $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\psi(u)=1$.

რადგანაც $\psi(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, 0)$ და $(0, +\infty)$ შუალედებში, ამიტომ $\psi(u)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა საზღვარი $(-\infty, +\infty)$ შუალედში დადებითი რიცხვი იქნება. აღვნიშნოთ იგი c ასოთი. მაშინ გვექნება $\psi(u)\geqslant c$, ე. ი.

$$\frac{|1+u|^p-1-pu}{|u|^p}\geqslant c.$$

აქედან მიიღება (4.3) უტოლობა.

თეორემა 11 (ფ. რისი). თუ $L^p(E)$ კლასის $(1<p<+\infty)$ ფუნქციათა $\{x_m(t)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ და, ამის გარდა, $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m\|_p=\|x\|_p$, მაშინ ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $p\geqslant 2$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$u=\frac{x_m(t)-x(t)}{x(t)}. \tag{4.4}$$

მაშინ მე-2 ლემის ძალით

$$\left|1+\frac{x_m(t)-x(t)}{x(t)}\right|^p\geqslant 1+p\frac{x_m(t)-x(t)}{x(t)}+c\,\frac{|x_m(t)-x(t)|^p}{|x(t)|^p}.$$

მიღებული უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $|x(t)|^p$ გამოსახულებაზე და შემდეგ მოვახდინოთ ინტეგრება წევრ-წევრად, მივიღებთ

$$\int_E |x_m(t)|^p dt \geqslant \int_E |x(t)|dt + p\int_E |x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)]dt+$$

$$+c\int_E |x_m(t)-x(t)|^p dt. \tag{4.5}$$

პირობის ძალით $\{x_m(t)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty}\int_E |x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)]dt=0.$$

შემდეგ, რაკი

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m\|_p=\|x\|_p,$$

ამიტომ, თუ (4.5) უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ ტოლობას

$$\lim_{m\to\infty}\int_E |x_m(t)-x(t)|^p dt=0.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია, როცა $p\geqslant 2$.

ახლა დავუშვათ, რომ $1<p<2$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(u)=\begin{cases}\dfrac{|1+u|^p-1-pu}{|u|^p}, & \text{თუ } |u|\geqslant 1,\\[2ex] \dfrac{|1+u|^p-1-pu}{u^2}, & \text{თუ } |u|\leqslant 1.\end{cases}$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\varphi(0+)=\varphi(0-)=\frac{1}{2}p(p-1)$$

და რადგანაც $\varphi(u)>0$, როცა $u\neq 0$, ამიტომ $\varphi(u)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა საზღვარი იქნება დადებითი რიცხვი. აღვნიშნოთ იგი c-თი. გვაქვს:

$$|1+u|^p\geqslant 1+pu+c|u|^p, \text{ როცა } |u|\geqslant 1, \tag{4.6}$$

$$|1+u|^p\geqslant 1+pu+c|u^2|, \text{ როცა } |u|\leqslant 1. \tag{4.7}$$

ვთქვათ, u განსაზღვრულია (4.4) ტოლობით. მაშინ (4.6) და (4.7) უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$|x_m(t)|^p \geqslant |x(t)|^p + p|x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)] + c\,|x_m(t)-x(t)|^p,$$

როდესაც $|x_m(t)-x(t)| \geqslant |x(t)|$,

$$|x_m(t)|^p \geqslant |x(t)|^p + p\,|x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)] +$$
$$+c\,|x_m(t)-x(t)|^2\,|x(t)|^{p-2},$$

როდესაც $|x_m(t)-x(t)| < |x(t)|$.

შემოვიღებთ რა აღნიშვნას

$$E_m = \{x : |x_m(t)-x(t)| \geqslant |x(t)|,\ x \in E\},$$

გვექნება

$$\int_{E_m} |x_m(t)|^p dt \geqslant \int_{E_m} |x(t)|^p dt + p\int_{E_m} |x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)]\,dt +$$

$$+c\int_{E_m} |x_m(t)-x(t)|^p dt,$$

$$\int_{E-E_m} |x_m(t)|^p dt \geqslant \int_{E-E_m} |x(t)|^p dt + p\int_{E-E_m} |x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-$$

$$-x(t)]\,dt + c\int_{E-E_m} |x_m(t)-x(t)|^2\,|x(t)|^{p-2} dt.$$

ამ უტოლობათა შეკრება გვაძლევს

$$\int_E |x(t)|^p dt \geqslant \int_E |x(t)|^p dt + p\int_E |x(t)|^{p-2}x(t)[x_m(t)-x(t)]\,dt +$$

$$+c\int_{E_m} |x_m(t)-x(t)|^p dt + c\int_{E-E_m} |x(t)-x_m(t)|^2\,|x(t)|^{p-2} dt.$$

ძიღებული უტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ინტეგრალი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $m\to\infty$, ხოლო

$$\lim_{m\to\infty}\int_E |x_m(t)|^p dt = \int_E |x(t)|^p dt.$$

მაშასადამე,

$$\int_{E_m} | x_m(t) - x(t) |^p dt + \int_{E-E_m} | x_m(t) - x(t) |^2 | x(t) |^{p-2} dt \to 0,$$

როცა $m \to \infty$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{m \to \infty} \int_{E_m} | x_m(t) - x(t) |^p dt = 0, \tag{4.8}$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{E-E_m} | x_m(t) - x(t) |^2 | x(t) |^{p-2} dt = 0. \tag{4.9}$$

რადგანაც $| x_m(t) - x(t) | < | x(t) |$, როცა $t \in E - E_m$, ამიტომ ბუნიაკოვსკის უტოლობის ძალით,

$$\int_{E-E_m} | x_m(t) - x(t) |^p dt \leqslant \int_{E-E_m} | x(t) |^{p-1} | x_m(t) - x(t) | dt =$$

$$= \int_{E-E_m} | x(t) |^{\frac{p}{2}} | x(t) |^{\frac{p}{2} - 1} | x_m(t) - x(t) | dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{E-E_m} | x(t) |^p dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E-E_m} | x(t) |^{p-2} | x_m(t) - x(t) |^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.9) ტოლობას, გვექნება

$$\lim_{m \to \infty} \int_{E-E_m} | x_m(t) - x(t) |^p dt = 0. \tag{4.10}$$

მაშასადამე, (4.8) და (4.10) ტოლობების თანახმად

$$\lim_{m \to \infty} \int_E | x_m(t) - x(t) |^p dt = 0.$$

ამრიგად, თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

§ 5. კომპაქტურობის ნიშნები L^p სივრცეში

განსაზღვრა 3. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთანავე ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)=0$, როცა $x \overline{\in} [a, b]$. ფუნქციას

$$f_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(x)dx,$$

სადაც $t\in[a, b]$, ეწოდება სტეკლოვის[1] ფუნქცია (აქ h რომელიღაც დადებითი რიცხვია).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სტეკლოვის ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Phi(t)=\int_{a-h}^{t} f(x)dx,$$

გვექნება

$$f_h(t)=\frac{1}{2h}\left[\Phi(t+h)-\Phi(t-h)\right].$$

მაგრამ $\Phi(t)$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას.

ლემა 1. თუ $f(x)\in L^p([a, b])$, მაშინ $f_h(t)\in L^p([a, b])$ და მართებულია უტოლობა

$$\int_a^b |f_h(t)|^p dt \leqslant \int_a^b |f(x)|^p dx, \quad p>1. \tag{5.1}$$

დამტკიცება. ჰელდერის უტოლობის თანახმად,

$$|f_h(t)|^p=\left(\frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} f(x)dx\right|\right)^p \leqslant \frac{1}{(2h)^p}\left\{\int_{t-h}^{t+h} dt\right\}^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{t-h}^{t+h} |f(x)|^p dx=$$

$$=(2h)^{-p}(2h)^{\frac{p}{q}}\int_{t-h}^{t+h} |f(x)|^p dx=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(x)|^p dx. \tag{5.2}$$

---

[1] სტეკლოვი ვ. ა. (1863 — 1926) — გამოჩენილი საბჭოთა მათემატიკოსი, აკადემიკოსი 1912 წლიდან. სტეკლოვის ნაშრომების დიდი ნაწილი ეხება მათემატიკური ფიზიკის საკითხებს.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f^*_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|f(x)|^p dx,\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{5.3}$$

$f^*_h(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. (5.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $u=x-t$, გვექნება

$$f^*_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(u+t)|^p du,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

ტონელის თეორემის თანახმად ორჯერად ინტეგრალში ინტეგრების რიგის შეცვლის შესახებ, (5.2) თანაფარდობიდან მივიღებთ

$$\int_a^b |f_h(t)|^p dt\leqslant\int_a^b f^*_h(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}du\int_a^b|f(u+t)|^p dt=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}du\int_{a+u}^{b+u}|f(t)|^p dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}du\int_a^b|f(t)|^p dt=\int_a^b|f(t)|^p dt.$$

ამრიგად, მართებულია (5.1) უტოლობა. ლემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)\in L^p([a, b])$ და $g(x)\in L^p([a, b])$, $p>1$, მაშინ

$$\rho(f_h, g_h)\leqslant\rho(f, g). \tag{5.4}$$

მართლაც, რადგანაც $F(x)\in L^p(a, b])$, სადაც $F(x)=f(x)-g(x)$ და $F_h(t)=f_h(t)-g_h(t)$, ამიტომ 1-ლი ლემის ძალით,

$$\int_a^b |f_h(t)-g_h(t)|^p dt\leqslant\int_a^a|f(x)-g(x)|^p dx.$$

თუ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს ავიყვანთ $\frac{1}{p}$ ხარისხში, მივიღებთ (5.4) უტოლობას.

ლემა 2. თუ $f(x)\in L^p([a, b])$, $p>1$, მაშინ

$$\lim_{h\to 0}\rho(f_h, f)=0. \tag{5.5}$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $a<t<b$ და h იმდენად მცირეა, რომ $[t-h, t+h]\subset[a, b]$, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით

$$f_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(x)dx=f(\xi),$$

სადაც ξ არის $[t-h, t+h]$ სეგმენტის რომელიღაც წერტილი. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{h\to 0} f_h(t)=f(t). \tag{5.6}$$

ამრიგად, (a, b) ინტერვალის ყოველ t წერტილში მართებულია (5.6) ტოლობა. მეორე მხრით, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია ამავე სეგმენტზე და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი K რიცხვი, რომ $|f(x)|\leqslant K$ და რაკი $f(x)=0$, როცა $x\overline{\in}[a, b]$, ამიტომ h-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და t-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან გვექნება $|f_h(t)|\leqslant K$. მაშასადამე, ლებეგის თეორემის ძალით,

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x)-f(x)|^p dt=0,$$

ე. ი. მართებულია (5.5) ტოლობა.

ახლა განვიხილოთ $L^p([b, a])$ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ვიპოვოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი $g(x)$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $\rho(f, g)<\varepsilon$. პირველი ლემის შედეგის თანახმად, $\rho(f_h, g_h)<\varepsilon$. მაგრამ

$$\rho(f_h, f)\leqslant\rho(f_h, g_h)+\rho(g_h, g)+\rho(g, f)<2\varepsilon+\rho(g_h, g).$$

რაკი $g(t)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ ზემოდამტკიცებულის ძალით

$$\lim_{h\to\infty}\rho(g_h, g)=0.$$

მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$\rho(g_h, g)<\varepsilon, \text{ როცა } 0<h<\delta.$$

ამიტომ

$$\rho(f_h, f)<3\varepsilon, \text{ როცა } 0<h<\delta,$$

ე. ი. მართებულია (5.5) ტოლობა. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12 (ა. კოლმოგოროვი[1]). $L^p([a, b])$ სივრცეში მოთავსებული E სიმრავლის კომპაქტურობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობების შესრულება:

1) არსებობს ისეთი დადებითი K მუდმივი, რომ E სიმრავლის ყოველი $f(x)$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leqslant K^p, \quad (p>1);$$

2) ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს მხოლოდ ε-ზე დამოკიდებული ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტისათვის

$$\rho(f_h, f) < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < h < \eta.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, E კომპაქტური სიმრავლეა. მაშინ VI თავის მე-18 და მე-19 თეორემების ძალით იგი შემოსაზღვრულია და ამით 1) პირობის აუცილებლობა ნაჩვენებია.

დავამტკიცოთ ახლა 2) პირობის აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, E კომპაქტური სიმრავლეა, მაგრამ 2) პირობას ადგილი არ აქვს. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი და ისეთი ორი მიმდევრობა $\{h_n\}$ და $\{f^{(n)}(x)\}$, რომ

$$\lim_{k\to\infty} h_k = 0, \quad \rho\left(f^{(n)}_{h_n}, f^{(n)}\right) \geqslant \varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots),$$

სადაც h_n $(n=1, 2,\ldots)$ დადებითი რიცხვებია, ხოლო $f^{(n)}(x) \in E (n=1,2,\ldots)$.

დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციათა $\left\{f^{(n)}(x)\right\}$ მიმდევრობიდან არ გამოიყოფა p-მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი ქვემიმდევრობა. დავუშვათ სა-

---

[1] ანდრია ნიკოლოზის-ძე კოლმოგოროვი (დ. 1903) — გამოჩენილი საბჭოთა მათემატიკოსი, აკადემიკოსი, სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (1941). მეცნიერული მოღვაწეობა დაიწყო ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, შემდეგში კოლმოგოროვმა შეიტანა არსებითი განძი ეგრეთ წოდებული კონსტრუქციული ლოგიკის დამუშავებაში, ტოპოლოგიაში, ფუნქციათა მიახლოების თეორიასა და ფუნქციონალურ ანალიზში. კოლმოგოროვის ფრიად მნიშვნელოვანი ნაშრომები ეხება ალბათობათა თეორიას, სადაც საბჭოთა მათემატიკოს ა. ი. ხინჩინთან ერთად დაიწყო ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენება, რამაც მას საშუალება მისცა ამოეხსნა მრავალი რთული პრობლემა და აეგო ფართოდ ცნობილი სისტემა ალბათობათა თეორიის აქსიომატურად დაფუძნებისა.

წინააღმდეგო, ვთქვათ, აღნიშნული მიმდევრობიდან გამოიყოფა p-მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი ქვემიმდევრობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ კრებადია თვით $\{f^{(n)}(x)\}$ მიმდევრობა. ვთქვათ,

$$\text{l. i. m. } f^{(n)}(x)=F(x).$$

ცხადია, რომ

$$\varepsilon\leqslant\rho\left(f_{h_n}^{(n)}, f^{(n)}\right)\leqslant\rho\left(f_{h_n}^{(n)}, F_{h_n}\right)+\rho\left(F_{h_n}, F\right)+\rho(F, f^{(n)}).$$

პირველი ლემის შედეგის ძალით.

$$\rho\left(f_{h_n}^{(n)}, F_{h_n}\right)\leqslant\rho(f^{(n)}, F)$$

და, მაშასადამე,

$$\varepsilon\leqslant2\rho(f^{(n)}, F)+\rho(F_{h_n}, F),$$

ხოლო მე-2 ლემის თანახმად არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(F_{h_n}, F)<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n>N.$$

მაშასადამე, $\rho(F, f^{(n)})>\frac{\varepsilon}{4}$, როცა $n>N$, ე. ი. ფუნქციათა $\{f^{(n)}\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადი არაა $F(x)$ ფუნქციისაკენ. მივიღეთ წინააღმდეგობა და ამიტომ $\{f^{(n)}(x)\}$ მიმდევოობიდან არ გამოიყოფა p-მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი ქვემიმდევრობა. ეს კი იმას მოასწავებს, რომ E სიმრავლე არ არის კომპაქტური. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს 2) პირობის შესრულების აუცილებლობას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია 1) და 2) პირობები. დასამტკიცებელია E სიმრავლის კომპაქტურობა. ავიღოთ რაიმე დადებითი რიცხვი h და E სიმრავლის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის ავაგოთ სტეკლოვის $f_h(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_h(x)\}$ ოჯახი და დავამტკიცოთ, რომ იგი ერთობლივ თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. გვაქვს:

$$|f_h(x'')-f_h(x')|=\frac{1}{2h}\left|\int_{x''-h}^{x''+h}f(t)dt-\int_{x'-h}^{x'+h}f(t)dt\right|=$$

$$
=\frac{1}{2h}\left|\int\limits_{x'+h}^{x''+h} f(t)dt-\int\limits_{x'-h}^{x''-h} f(t)dt\right|\leqslant\frac{1}{2h}\left|\int\limits_{x'+h}^{x''+h} f(t)dt\right|+
$$

$$
+\frac{1}{2h}\left|\int\limits_{x'-h}^{x''-h} f(t)dt\right|.
$$

ჰელდერი-რისის უტოლობის თანახმად,

$$
\left|\int\limits_{x'+h}^{x''+h} f(t)dt\right|\leqslant\left[\int\limits_{x'+h}^{x''+h}|f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left|\int\limits_{x'+h}^{x''+h} dt\right|^{\frac{1}{q}}\leqslant K|x''-x'|^{\frac{1}{q}}.
$$

ანალოგიურად მივიღებთ,

$$
\left|\int\limits_{x'-h}^{x''-h} f(t)td\right|\leqslant K|x''-x'|^{\frac{1}{q}}.
$$

მაშასადამე,

$$
|f_h(x'')-f_h(x')|\leqslant\frac{K}{h}|x''-x'|^{\frac{1}{q}}.
$$

აქედან ჩანს, რომ ფუნქციათა $\{f_h(x)\}$ ოჯახი ერთობლივ თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

შემდეგ, ჰელდერი-რისის უტოლობის ძალით,

$$
|f_h(x)|\leqslant\frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x-h}^{x+h}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{x-h}^{x+h} dt\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{K}{(2h)^{\frac{1}{p}}}.
$$

ამრიგად, $\{f_h(x)\}$ ოჯახი ერთობლივ შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. არცელას თეორემის თანახმად, ყოველი ფიქსირებული $h>0$ რიცხვისათვის უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_h(x)\}$ სიმრავლე კომპაქტურია $C_{[a, b]}$ სივრცეში და მით უმეტეს იგი კომპაქტურია $L^p([a, b])$ სივრცეშიც.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. 2) პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $h>0$, რომ E სიმრავლის ყოველი $f(x)$ ელემენტი-

სათვის გვექნება $\rho(f, f_h)<\varepsilon$. ეს იმას ნიშნავს, რომ, $\{f_h(x)\}$ წარმოადგენს E-თვის ε-ბადეს და რაკი ეს ε-ბადე კომპაქტურია, ხოლო $L^p([a, b])$ სრულ სივრცეს წარმოადგენს, ამიტომ ფრეშეს თეორემის ძალით E კომპაქტური სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ფუნქციათა ორთოგონალური სისტემა. ფურიეს განზოგადებული მწკრივი

ვთქვათ, R^n სივრცეში აღებულია დადებითი ზომის რაიმე E სიმრავლე. $L^2(E)$ კლასის $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს ურთიერთორთოგონალური ეწოდება, თუ

$$\int_E \varphi(x)g(x)dx=0.$$

$L^2(E)$ კლასის ფუნქციათა სისტემას $\left\{\omega_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ ეწოდება ორთოგონალური E-ზე, თუ

$$\int_E \omega_i(x)\omega_k(x)dx=\begin{cases}0, & \text{თუ } i\neq k,\\ \lambda_k, & \text{თუ } i=k,\end{cases} \quad (i, k=0, 1, 2, \cdots).$$

აქ იგულისხმება, რომ აღებული სისტემის არცერთი ფუნქცია ნულის ეკვივალენტური არაა.

$L^2(E)$ კლასის ფუნქციათა $\left\{\omega_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$ სისტემას ჰქვია ორთონორმირებული E-ზე, თუ

$$\int_E \omega_i(x)\omega_k(x)dx=\begin{cases}0, & \text{თუ } i\neq k,\\ 1, & \text{თუ } i=k,\end{cases} \quad (i, k=0, 1, 2, \ldots).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{6.1}$$

წარმოადგენს ორთონორმირებულ სისტემას $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ცხადია, თუ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ $\left\{\frac{\omega_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}$ სისტემა ორთონორმირებულია E-ზე.

თუ $f(x) \in L^2(E)$ და $\{\omega_k(x)\}$ ორთოგონალური სისტემაა, მაშინ რიცხვებს

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_E f(x) \omega_k(x) dx \quad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{6.2}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი $\{\omega_k(x)\}$ სისტემაში, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x)$ მწკრივს კი $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ი $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის მიმართ და წერენ

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x). \tag{6.3}$$

(6.3) ფორმულაში $\sim$ სიმბოლო მხოლოდ იმას აღნიშნავს, რომ c_k კოეფიციენტები გამოთვლილია $f(x)$ ფუნქციის მიხედვით თანახმად (6.2) ფორმულისა. მაგრამ სრულებით არ იგულისხმება, რომ მწკრივი $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x)$ კრებადია.

ბუნებრივად ისმის კითხვები: რა თვისებები აქვს ამ მწკრივს? რა აზრით გამოსახავს იგი $f(x)$ ფუნქციას?

იმისათვის რომ ორთოგონალური სისტემა $\{\omega_k(x)\}$ საზოგადოდ გამოსადეგი იყოს ყველა ფუნქციის მწკრივად გაშლისათვის, იგი უნდა იყოს ს რ უ ლ ი, ე. ი. მას ის თვისება უნდა ჰქონდეს, რომ თუ მოცემულ სისტემას შევუერთებთ რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქციას, მაშინ შევსებული სისტემა არ უნდა იქნეს ორთოგონალური. მართლაც, ეს ასე რომ არ იყოს, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ეკვივალენტური არაა და რომლის ფურიეს მწკრივი $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის მიმართ შედგება მხოლოდ ნულებისაგან.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \omega_i(x)$$

და გამოვთვალოთ $\int_E |f(x) - T_k(x)|^2 dx$. გვაქვს:

$$\int_E |f(x) - T_k(x)|^2 dx = \int_E |f(x)|^2 dx - 2\int_E f(x) T_k(x) dx + \int_E T_k^2(x) dx.$$

მაგრამ

$$\int_E f(x)T_k(x)dx = \sum_{i=0}^{k} c_i \int_E f(x)\omega_i(x)dx = \sum_{i=0}^{k} c_i^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\{\omega_k(x)\}$ არის ორთონორმირებული სისტემა, მივიღებთ

$$\int_E T_k^2(x)dx = \sum_{i=0}^{k} c_i^2.$$

მაშასადამე,

$$\int_E |f(x) - T_k(x)|^2 dx = \int_E |f(x)|^2 dx - \sum_{i=0}^{k} c_i^2. \tag{6.4}$$

რადგანაც ტოლობის მარცხენა ნაწილი არაუარყოფითი რიცხვია, ამიტომ

$$\sum_{i=0}^{k} c_i^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 dx.$$

აქედან, k-ს ნებისმიერობის გამო, გვექნება:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 dx. \tag{6.5}$$

(6.5) თანაფარდობას ეწოდება ბესელის (Bessel) უტოლობა.

ზოგიერთი $\{\omega_k(x)\}$ სისტემისათვის და $L^2(E)$ კლასის ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 = \int_E |f(x)|^2 dx. \tag{6.6}$$

(6.6) ტოლობას ეწოდება პარსევალის (Parseval) ტოლობა. ცხადია, თუ ადგილი აქვს (6.6) ტოლობას, მაშინ (6.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x) - T_k(x)|^2 dx = 0.$$

მაშასადამე, პარსევალის ტოლობა ნიშნავს იმას, რომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა $\{T_k(x)\}$ საშუალოდ კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

თეორემა 13 (რისი-ფიშერი). თუ ფუნქციათა სისტემა $\{\omega_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ორთონორმირებულია E-ზე, ხოლო რიცხვთა მიმდევრობა $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ ისეთია, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2<+\infty$, მაშინ არსებობს $L^2(E)$ კლასის ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტებია $\{\omega_k(x)\}$ სისტემაში $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ რიცხვები და

$$\int_E |f(x)|^2 dx=\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$T_k(x)=\sum_{i=0}^{k} c_i\,\omega_i(x).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_E |T_{m+k}(x)-T_m(x)|^2 dx=\sum_{i=m+1}^{m+k} c_i^2.$$

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2$ მწკრივის კრებადობის გამო, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\int_E |T_p(x)-T_q(x)|^2 dx<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } p>N,\ q>N.$$

ამიტომ მე-7 თეორემის ძალით არსებობს $L^2(E)$ კლასის ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x)-T_k(x)|^2 dx=0. \tag{6.7}$$

ახლა ვთქვათ, $k>i$. გვაქვს:

$$c_i=\int_E T_k(x)\,\omega_i(x)dx=\int_E f(x)\omega_i(x)dx+\int_E [T_k(x)-f(x)]\omega_i(x)dx. \quad (6.8)$$

ჰელდერის უტოლობის ძალით,

$$\left|\int_E [T_k(x)-f(x)]\omega_i(x)dx\right|\leqslant\left(\int_E |T_k(x)-f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

თუ (6.8) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $k\to\infty$, მივიღებთ

$$c_i=\int_E f(x)\omega_i(x)dx.$$

ამრიგად, c_i რიცხვები წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის მიმართ.

დასასრულ, (6.7) ტოლობიდან გამომდინარეობს პარსევალის ტოლობა

$$\int_E |f(x)|^2dx=\sum_{k=0}^{\infty}c^2_k. \quad (6.9)$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თეორემა 14. ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი   ს ი ს ტ ე მ ა (6.1) ს რ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა ა $I_0=[-\pi, \pi]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ეს თეორემა დავამტკიცოთ ლებეგის მეთოდით. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, (6.1) სისტემა სრული არაა. მაშინ არსებობს ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ეკვივალენტური არ არის და რომელიც ორთოგონალურია (6.1) მიმდევრობის ელემენტებისა.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. რადგანაც $f(x)$ იგივურად ნული არ არის, ამიტომ $(-\pi, \pi)$ ინტერვალში მოიძებნება ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)\neq 0$. მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები ε და δ, რომ $|f(x)|>\varepsilon$, როდესაც $x\in I=(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset(-\pi, \pi)$, მასთან $f(x)$ ნიშანს ინარჩუნებს I ინტერვალში.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)>\varepsilon$, როცა $x\in I$. განვიხილოთ ფუნქცია $T_n(x)=[t(x)]^n$, სადაც $t(x)=1-\cos\delta+\cos(x-x_0)$. ცხადია, რომ $t(x)\geqslant 1$, როცა $x\in I$, ხოლო $t(x)>1$ ყოველ Δ სეგმენტზე, რომელიც I ინტერვალშია მოთავსებული. ადვილი დასამ-

ტკიცებულია, რომ $T_n(x)$ არის ტრიგონომეტრიული პოლინომი, ე. ი.

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია (6.1) სისტემის ყოველი ფუნქციის ორთოგონალურია, ამიტომ იგი $T_k(x)$ ფუნქციის ორთოგონალური იქნება:

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx=0 \tag{6.10}$$

ყოველი n-თვის. აქედან

$$\int_I f(x)T_n(x)dx+\int_{I_0-I} f(x)T_n(x)dx=\sigma_1+\sigma_2=0.$$

ვთქვათ,

$$M=\max_{x\in I_0}|f(x)|,\quad \sigma=\min_{x\in\Delta} t(x).$$

ცხადია, $\sigma>1$. ამიტომ

$$\sigma_1>\varepsilon\int_\Delta\sigma^n\,dx=\varepsilon|\Delta|\sigma^n\to+\infty,\text{ როცა } n\to\infty.$$

შემდეგ, რადგანაც $|t(x)|\leqslant 1$, როცა $x\in I_0-I$, ამიტომ

$$|\sigma_2|\leqslant M(|I_0|-|I|).$$

ამრიგად,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_1=+\infty,\quad \sup_{1\leq n<\infty}|\sigma_2|\leqslant M(|I_0|-|I|)$$

და ამიტომ მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი ν, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_\nu(x)dx>0.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (6.10) ტოლობას. მაშასადამე, არ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ორთოგონალური იყოს (6.1) სისტემის ყველა ფუნქციისა.

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა, რომელიც ორთოგონალურია (6.1) სისტემის ყველა ფუნქციისა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt.$$

მაშინ $F(-\pi)=0$, ხოლო პირობა $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ გვაძლევს $F(\pi)=0$. შემდეგ, დაშვების თანახმად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx=0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx=0 \quad (k=1, 2,\ldots).$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით, ამ ტოლობებიდან მივიღებთ $A_1=B_1=A_2=B_2=\cdots=0$. ამის გარდა, $A_0=0$. სადაც $A_0, A_1, B_1, \ldots$, არიან $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $F(x)-\frac{A_0}{2}$ უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია და ამიტომ ზემოდამტკიცებულის თანახმად $F(x)=\frac{A_0}{2}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)\sim 0$.

ამრიგად, არ არსებობს ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ეკვივალენტური არაა და რომელიც ორთოგონალური იყოს ფუნქციათა (6.1) სისტემისა. მაშასადამე, (6.1) სისტემა სრულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ცხადია, რომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ $[a, a+2\pi]$ სეგმენტი, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი

განსაზღვრა 4. სასრული ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციათა ორთონორმირებულ $\{\omega_i(x)\}$ სისტემას ეწოდება ჩაკეტილი E სიმრავლეზე, თუ $L^2(E)$ კლასის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს პარსევალის (6.6) ტოლობას.

თეორემა 15. ორთონორმირებული $\{\omega_i(x)\}$ სისტემის სისრულისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ეს სისტემა იყოს ჩაკეტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული სისტემა ჩაკეტილია E-ზე და განვიხილოთ L^2 კლასის რაიმე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ყოველი $\omega_i(x)$

ფუნქციის ორთოგონალურია. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია და, მაშასადამე, პარსევალის ტოლობის ძალით,

$$\int_E |f(x)|^2 dx = 0.$$

აქედან $f(x) \sim 0$. ამრიგად, $\{\omega_i(x)\}$ სისტემა სრულია. ამით თეორემის პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{\omega_i(x)\}$ არის სრული სისტემა. ავიღოთ L^2 კლასის რაიმე $f(x)$ ფუნქცია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები მოცემულ სისტემაში იყოს $c_0, c_1, c_2, \ldots$ რადგანაც $c^2_0 + c^2_1 + \cdots + c^2_k + \cdots < +\infty$, ამიტომ რისი-ფიშერის თეორემის ძალით არსებობს L^2 კლასის ისეთი $g(x)$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\omega_i(x)\}$ სისტემაში არის $c_0, c_1, c_2, \cdots$ და

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^2_k = \int_E |g(x)|^2 dx.$$

ამ შემთხვევაში $f(x) - g(x)$ ორთოგონალურია ყოველი $\omega_i(x)$ ფუნქციისა და, რადგანაც მოცემული სისტემა სრულია, ამიტომ $f(x) \sim g(x)$. მაშასადამე, L^2 კლასის ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას

$$\int_E |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} c^2_k.$$

მაშასადამე, მოცემული სისტემა ჩაკეტილია.

ამრიგად, L^2 კლასის ფუნქციათა არეში ფუნქციათა სისტემის ჩაკეტილობისა და სისრულის ცნებები ურთიერთ ეკვივალენტურია.

შედეგი. ტრიგონომეტრიული სისტემა (6.1) ჩაკეტილი სისტემაა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

მართლაც, მე-14 თეორემის თანახმად (6.1) სისტემა სრულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, და, მაშასადამე, მე-15 თეორემის ძალით იგი ჩაკეტილია ამავე სეგმენტზე.

ამრიგად, თუ $f(x)$ არის პერიოდული ფუნქცია 2π პერიოდით და $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a^2_k + b^2_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \tag{6.11}$$

სადაც

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_h=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_h=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$(k=1,\ 2,\cdots).$$

(6.11) ტოლობა წარმოადგენს პარსევალის ტოლობას.

თეორემა 16. თუ ორთონორმირებული სისტემა $\{\omega_i(x)\}$ ჩაკეტილია E-ზე, მაშინ L^2 კლასის ყოველი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_E f(x)g(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_h\beta_k, \tag{6.12}$$

სადაც

$$\alpha_h=\int_E f(x)\omega_h(x)dx,\ \ \beta_h=\int_E g(x)\omega_h(x)dx\quad (k=0,\ 1,\ldots).$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $f(x)+g(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\omega_i(x)\}$ სისტემაში არის $\alpha_k+\beta_k$ $(k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ და რადგანაც $f(x)+g(x)$ L^2 კლასის ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int_E |f(x)+g(x)|^2dx=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_h+\beta_h)^2.$$

აქედან გვაქვს

$$\int_E |f(x)|^2dx+2\int_E f(x)g(x)dx+\int_E |g(x)|^2dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^2{}_h+2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\beta_k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta^2{}_h.$$

მაშასადამე, სამართლიანია (6.12) ტოლობა. ამ ტოლობას უწოდებენ პარსევალის განზოგადებულ ტოლობას.

სავარჯიშო

1. მოცემულია $p>0$, $q>0$, $r>0$ და $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)\in L^p$, $g(x)\in L^q$ და $r(x)\in L^r$, მაშინ

$$\left|\int_E f(x)g(x)h(x)dx\right|\leq\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_E |h(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2. თუ $f(x)\in L^p([a,\ b])$, $p>1$, მაშინ

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt=o(h^q),\ \text{როდესაც}\ h\to 0,$$

სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

3. თუ $f(x)\in L^p([a,\ b])$, მაშინ

$$\lim_{h\to\infty}\int_\alpha^\beta |f(x+h)-f(x)|^p dx=0,$$

სადაც $[\alpha,\ \beta]$ სეგმენტი მოთავსებულია $[a,\ b]$ სეგმენტის შიგნით.

თავი XVIII

სტილტიესის ინტეგრალი

მე-19 საუკუნის მიწურულში რიმანის ინტეგრალის ცნებამ განიცადა სრულიად სხვა სახის განზოგადება. ეს განზოგადება მოცემული იყო 1894 წელს ჰოლანდიელი მათემატიკოსის სტილტიესის (Th. I. Stieltjes) მიერ (1856—1894).

სტილტიესის ინტეგრალი განსაკუთრებულ როლს თამაშობს მათემატიკურ ანალიზში, მექანიკაში, მათემატიკურ ფიზიკასა და ალბათობათა თეორიაში, კერძოდ, იგი გამოიყენება წირით და ჯერად ინტეგრალთა თეორიაში, მომენტთა და პოტენციალის თეორიაში.

§ 1. სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია ორი $f(x)$ და $\alpha(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}, \tag{1.1}$$

სადაც

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

ამ ჯამს სტილტიესის ჯამი ეწოდება. ცხადია, რომ ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც ξ_k წერტილებზე, ისე $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე.

თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი λ-დანაწილებისათვის და $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტიდან აღებული ყოველი ξ_k წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|S - I| < \varepsilon,$$

სადაც I რაიმე რიცხვია, მაშინ ვიტყვით, რომ S მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ, როცა $\lambda \to 0$ და დავწერთ

$$\lim_{\lambda \to 0} S = I.$$

თუ არსებობს ასეთი I რიცხვი, მაშინ ამ რიცხვს ეწოდება სტილტიესის ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციისა $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, გავრცელებული $[a, b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება $\int_a^b f(x)d\,\alpha(x)$ სიმბოლოთი. ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ.

რიმანის ინტეგრალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კერძო შემთხვევა სტილტიესის ინტეგრალისა, თუ $\alpha(x)$ ფუნქციად მივიჩნევთ თვით დამოუკიდებელ ცვლადს: $\alpha(x)=x$.

თეორემა 1. სტილტიესის ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ნებისმიერი λ და λ' რიცხვებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, $0<\lambda'<\lambda_0$,

$$|S_\lambda - S_{\lambda'}| < \varepsilon, \tag{1.2}$$

სადაც S_λ არის $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილების შესაბამისი სტილტიესის ჯამი.

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი რიცხვი $\lambda_0>0$, რომ ადგილი აქვს (1.2) უტოლობას.

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $\{\lambda_k\}$ ისეთი, რომ $\lambda_k<\lambda_0$ $(k=1, 2, \ldots)$. ყოველ დადებით λ' რიცხვს, $\lambda'<\lambda_0$, შეესაბამება უამრავი სტილტიესის $S_{\lambda'}$ ჯამი. ამ ჯამებიდან ავიღოთ რომელიმე ფიქსირებული ჯამი და იგი ისევ $S_{\lambda'}$-ით აღვნიშნოთ. მაშინ (1.2) უტოლობის ძალით გვექნება

$$S_{\lambda'} - \varepsilon < S_{\lambda_k} < S_{\lambda'} + \varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\{S_{\lambda_k}\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{S_{\lambda_{k_i}}\}$- ვთქვათ,

$$\lim_{i\to\infty} S_{\lambda_{k_i}} = I. \tag{1.3}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda = I. \tag{1.4}$$

(1.3) ტოლობის ძალით, i იმდენად დიდი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|S_{\lambda_{k_i}} - I| < \varepsilon.$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.2) უტოლობას, გვექნება

$$|S_\lambda - S_{\lambda_{k_i}}| < \varepsilon, \text{ როცა } 0 < \lambda < \lambda_0.$$

მაშასადამე,

$$|S_\lambda - I| \leqslant |S_\lambda - S_{\lambda_{k_i}}| + |S_{\lambda_{k_i}} - I| < 2\varepsilon,$$

როცა $0<\lambda<\lambda_0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (1.4) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. სტილტიესის ინტეგრალის თვისებები

სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

1°. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი A და B რიცხვებისათვის $Af(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $B\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ იმავე სეგმენტზე და

$$\int_b^a A f(x)\, d\,[B\alpha(x)] = AB \int_a^b f(x) d\,\alpha(x).$$

2°. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f_1(x)+f_2(x)$ ჯამიც ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ იმავე სეგმენტზე და

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, d\,\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)\, d\,\alpha(x) + \int_a^b f_2(x) d\alpha(x).$$

3°. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე ცალ-ცალკე $\alpha_1(x)$ და $\alpha_2(x)$ ფუნქციების მიმართ, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ ფუნქციის მიმართაც იმავე სეგმენტზე და

$$\int_a^b f(x)\,d[\alpha_1(x)+\alpha_2(x)]=\int_a^b f(x)\,d\,\alpha_1(x)+\int_a^b f(x)d\alpha_2(x).$$

4°. $$\int_a^b d\,\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(a).$$

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$-ის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ $[a', b']$ ქვესეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ყოველი λ და λ' რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $0<\lambda<\lambda_0$, $0<\lambda'<\lambda_0$, მართებულია უტოლობა

$$|S_\lambda(a, b)-S_{\lambda'}(a, b)|<\varepsilon,$$

სადაც $S_\lambda(a, b)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილების სტილტიესის შესაბამისი ჯამი.

თუ $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში შევიტანთ a' და b' წერტილებს, ხოლო დაყოფის წერტილებს, რომლებიც მოდის $[a, a']$ და $[b', b]$ სეგმენტებზე ავიღებთ ერთსა და იმავეს ორივე დაყოფისათვის, მაშინ გვექნება

$$|S_\lambda(a, b)-S_{\lambda'}(a, b)|=|S_\lambda(a', b')-S_{\lambda'}(a', b')|<\varepsilon,$$

როცა $0<\lambda<\lambda_0$, $0<\lambda'<\lambda_0$.

მაშასადამე, 1-ლი თეორემის ძალით არსებობს $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_\lambda(a', b')$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე და $a<c<b$, მაშინ არსე-

ბობს $\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)$ და $\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$ და მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)+\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x). \qquad (2.1)$$

დამტკიცება. მე-2 თეორემის ძალით არსებობს $\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)$ და $\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$ ინტეგრალები. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება ისეთი, რომ დაყოფის წერტილების შემადგენლობაში ყოველთვის შედიოდეს c წერტილი. მაშინ

$$S_\lambda(a, b)=S_\lambda(a, c)+S_\lambda(c, b)$$

და რაკი ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი არსებობს, ამიტომ ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda\to 0$, მივიღებთ (2.1) ტოლობას.

შენიშვნა. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებზე, სადაც $a<c<b$, მაშინ $f(x)$ შეიძლება არ იყოს ინტეგრებადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{როდესაც } 0<x\leq 1, \end{cases} \qquad \alpha(x)=\begin{cases} x, & \text{როდესაც } -1\leq x\leq 0. \\ 0, & \text{როდესაც } 0<x\leq 1. \end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)d\alpha(x)=0, \qquad \int\limits_0^1 f(x)d\alpha(x)=0.$$

განვიხილოთ $[-1, 1]$ სეგმენტის λ-დანაწილება და ვიგულისხმოთ, რომ რიცხვი 0 არ შედის დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში, მაშინ

$$S_\lambda(-1, 1)=f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=-\frac{x_{k-1}}{\xi_k},$$

სადაც $x_{k-1}<0<x_k$ და $\xi_k>0$. რადგანაც ξ_k შეიძლება ავიღოთ რაგინდ მცირე, ამიტომ

$S_\lambda(-1, 1)$ აბსოლუტური სიდიდით შეიძლება რავინდ დიდი გავხადოთ. ამის გარდა, თუ $\xi_k<0$, მაშინ $S_\lambda(-1, 1)=0$, მაშასადამე, არ არსებობს ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\alpha(x)$.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ და $\alpha(x)$ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი უწყვეტია c წერტილში, $a<c<b$, ხოლო მეორე შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში და არსებობს $\int\limits_a^c f(x)\,d\alpha(x)$ და $\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$. მაშინ იარსებებს $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება და ვიგულისხმოთ, რომ c წერტილი შედის დაყოფის წერტილთა რიცხვში. მაშინ

$$S_\lambda(a, b)=S_\lambda(a, c)+S_\lambda(c, b).$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\lambda\to0$, მივიღებთ ტოლობას

$$\lim_{\lambda\to0} S_\lambda(a, b)=\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)+\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x). \tag{2.2}$$

ახლა ვთქვათ, c წერტილი არ შედის $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილთა რიცხვში და ვიგულისხმოთ, რომ

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

არის ამ დანაწილების შესაბამისი სტილტიესის ჯამი. $[a, b]$ სეგმენტის ამ დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში თუ შევიტანთ c წერტილსაც, მაშინ ამ ახალი დანაწილების სტილტიესის სათანადო ჯამი აღვნიშნოთ S'-ით. (2.2) ტოლობის ძალით, S' ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda\to0$, არის $\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)+\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$. მაშასადამე, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to0}(S-S')=0. \tag{2.3}$$

ცხადია, თუ $x_{k-1}<c<x_k$, მაშინ S ჯამი განსხვავდება S' ჯამისაგან

იმით, რომ S ჯამში k-ური შესაკრები იქნება $f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$, ხოლო მეორე ჯამში მის ნაცვლად გვექნება

$$f(\xi'_k)[\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})]+f(\xi''_k)[\alpha(x_k)-\alpha(c)],$$

სადაც

$$x_{k-1}\leqslant \xi'_k\leqslant c,\quad c\leqslant \xi''_k\leqslant x_k,$$

ამასთან ξ'_k და ξ''_k აღნიშნულ შუალედებში აღებულია ნებისმიერად. ამიტომ

$$S-S'=f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]-f(\xi'_k)[\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})]-$$

$$-f(\xi''_k)[\alpha(x_k)-\alpha(c)].$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $\alpha(x)$ უწყვეტია c წერტილში, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის თანახმად მართებულია (2.3) ტოლობა. თუკი $\alpha(x)$ შემოსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $f(x)$ უწყვეტია c წერტილში, მაშინ $S-S'$ სხვაობა წარმოვადგინოთ ასე

$$S-S'=[f(\xi_k)-f(c)][\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]+\alpha(x_k)[f(c)-f(\xi''_k)]+$$

$$+\alpha(x_{k-1})[f(\xi'_k)-f(c)]+\alpha(c)[f(\xi''_k)-f(\xi'_k)].$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda\to 0$, მივიღებთ (2.3) ტოლობას და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ნაწილობითი ინტეგრება

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $\alpha(x)$ ფუნქცია იქნება ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის მიმართ იმავე სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b \alpha(x)df(x)=\Big[f(x)\alpha(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)d\alpha(x), \tag{3.1}$$

სადაც

$$\Big[f(x)\alpha(x)\Big]_a^b=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a).$$

დამტკიცება. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ და ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი. სტილტიესის ჯამი

$$S=\sum_{k=1}^{n}\alpha(\xi_k)[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე

$$S=-\alpha(\xi_1)f(a)-\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)[\alpha(\xi_{k+1})-\alpha(\xi_k)]+\alpha(\xi_n)f(b).$$

თუ მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილს მივუმატებთ და გამოვაკლებთ $f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)$ გამოსახულებას, გვექნება

$$S=\Big[f(x)\alpha(x)\Big]_a^b-\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)[\alpha(\xi_{k+1})-\alpha(\xi_k)]+$$

$$+f(b)[\alpha(b)-\alpha(\xi_n)]+f(a)[\alpha(\xi_1)-\alpha(a)]\Big\}. \tag{3.2}$$

(3.2) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda\to 0$, მივიღებთ (3.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. სტილტიესის ინტეგრალის არსებობა ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში

ვთქვათ, $f(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ ზრდადია ამავე სეგმენტზე. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

აღვნიშნოთ m_k და M_k-თი $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე და შევადგინოთ ჯამები:

$$\overline{S}=\sum_{k=1}^{n}M_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],\qquad \underline{S}=\sum_{k=1}^{n}m_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

სადაც $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$. $\bar{S}$ და $\underline{S}$ ჯამებს ვუწოდოთ შესაბამისად სტილტიეს-დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები.

რადგანაც $\alpha(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\underline{S} \leqslant S \leqslant \bar{S}.$$

შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება გარკვეული ქვედა ჯამი $\underline{S}$ და გარკვეული ზედა ჯამი $\bar{S}$. რაც შეეხება S ჯამს, იგი განსაზღვრული არაა, ვინაიდან ξ_k წერტილები ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ სათანადო სეგმენტებზე. თუ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებას უცვლელად დავტოვებთ, ხოლო ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის შიგნით ვცვლით ξ_k წერტილს ისე, რომ $\lim f(\xi_k)=M_k$, მაშინ $\lim S=\bar{S}$.

ანალოგიურად, ξ_k წერტილების შერჩევით S ჯამი შეგვიძლია რაგინდ ახლოს გავხადოთ $\underline{S}$ ჯამთან. ამრიგად, $\bar{S}$ და $\underline{S}$ ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილებას, წარმოადგენენ სტილტიესის იმ ჯამთა სიმრავლის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს, რომლებიც შეესაბამებიან $[a, b]$ სეგმენტის იმავე დანაწილებას.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სტილტიეს-დარბუს ნებისმიერი ქვედა ჯამი არ აღემატება ნებისმიერ ზედა ჯამს.

თეორემა 6. $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის ზრდადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\bar{S}-\underline{S}<\varepsilon. \tag{4.1}$$

დამტკიცება. ჯერ დავადგინოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს ინტეგრალი $I=\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $0<\lambda<\lambda_0$ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<S<I+\frac{\varepsilon}{2},$$

სადაც S-ით აღნიშნულია აღებული დანაწილების სათანადო სტილტიესის ჯამი. მაშასადამე,

$$I-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant \underline{S}\leqslant \bar{S}\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან გამომდინარეობს (4.1) უტოლობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილების, $0<\lambda<\lambda_0$, სათანადო ზედა და ქვედა ჯამებისათვის ადგილი აქვს (4.1) უტოლობას. ამ შემთხვევაში, ცხადია, რომ $\underline{I}=\bar{I}$, სადაც

$$\bar{I}=\inf\{\bar{S}\},\quad \underline{I}=\sup\{\underline{S}\}.$$

ეს საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ I ასოთი. რადგანაც

$$\underline{S}\leq I\leq \bar{S},\quad \underline{S}\leq S\leq \bar{S},$$

ამიტომ $|S-I|<\varepsilon$, ე. ი.

$$\lim_{\lambda\to 0} S=I.$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით იმავე სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. რადგანაც ყოველი ფუნქცია სასრული ვარიაციით წარმოიდგინება როგორც სხვაობა ორი ზრდადი ფუნქციისა, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$-ზე.

შემდეგ, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $[a, b]$ სეგმენტზე, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი $\delta(\varepsilon)$, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x''-x'|<\delta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x')-f(x')|<\varepsilon.$$

მაშასადამე, თუ განვიხილავთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ λ-დანაწილებას $\{[x_{k-1}, x_k]\}$, $0<\lambda<\delta$, მაშინ ყოველი k-თვის გვექნება $M_k-m_k<\varepsilon$, სადაც M_k და m_k წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. მაშასადამე,

$$\bar{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=$$

$$=\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

მე-6 თეორემის ძალით, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ უწყვეტია იმავე სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$-ზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ.

ეს თეორემა მე-5 და მე-7 თეორემების შედეგია.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx, \tag{4.2}$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ლებეგის ინტეგრალია.

დამტკიცება. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. გვაქვს:

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\alpha'(t)dt.$$

მაშასადამე,

$$S-\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(\xi_k)-f(x)]\alpha'(x)dx. \tag{4.3}$$

რადგანაც $\alpha(x)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $[a, b]$-ზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი K, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ორი x' და x'' წერტილებისათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$|\alpha(x'')-\alpha(x')|\leqslant K|x''-x'|.$$

ედან გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველგან $[a,b]$ სეგმენტზე $'(x)| \leqslant K$. მაშასადამე,

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\alpha'(x)dx\right| \leqslant K(M_k - m_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx =$$

$$= K(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}).$$

მიტომ (4.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$\left|S - \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx\right| \leqslant K\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{4.4}$$

აკი $f(x)$ ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a, b]$-ზე, ამიტომ 4.4) უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $\lambda \to 0$. აშასადამე, მართებულია (4.2) ტოლობა.

§ 5. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები

თეორემა 10. თუ შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტე-რებადია სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, აშინ

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leq M \mathop{\mathrm{V}}_a^b(\alpha), \tag{5.1}$$

ადაც

$$M = \sup_{a \leq b \leq b} |f(x)|.$$

თუკი $\alpha(x)$ შემოსზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა $a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $f(x)$ ფუნქციის მი-ართ, მაშინ

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leq |f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)| + K \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f), \tag{5.2}$$

ადაც

$$K = \sup_{a \leq x \leq b} |\alpha(x)|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად,

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})].$$

მაგრამ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]\right|\leq M\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha).$$

აქედან გამომდინარეობს (5.1) უტოლობა.

ახლა დავუშვათ, რომ შემოსაზღვრული $\alpha(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $f(x)$ ფუნქციის მიმართ. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად,

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b\alpha(x)df(x).$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს (5.2) თანაფარდობა. თეორემა დამტკიცებულია.

(5.1) და (5.2) ფორმულებს ვუწოდოთ ს ა შ უ ა ლ ო მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი.

თეორემა 11. თ უ $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა მ ო ნ ო ტ ო ნ უ რ ი ა, ხ ო ლ ო $\alpha(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ა ა მ ა ვ ე ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე, მ ა შ ი ნ $[a, b]$-ზე ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი ξ წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ ლ ი ს თ ვ ი ს ა ც მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)[\alpha(\xi)-\alpha(a)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(\xi)]. \qquad (5.3$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არაუარყოფითი კლებადი ფუნქციაა. მე-8 თეორემის თანახმად არსებობს $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$. ე ინტეგრალი აღვნიშნოთ I ასოთი.

სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად, $\lim\limits_{\lambda\to 0} S=I$, სადაც

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})].$$

ცხადია, რომ

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[\alpha(x_k)-\alpha(a)]-\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[\alpha(x_{k-1})-\alpha(a)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_{k-1})-f(x_k)][\alpha(x_k)-\alpha(a)]+f(x_{n-1})[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

თუ ავღნიშნავთ A და B-თი $\alpha(x)-\alpha(a)$ ფუნქციის უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობებს, გვექნება

$$A f(a)\leqslant S\leqslant B f(a).$$

მაშასადამე,

$$A f(a)\leqslant I\leqslant B f(a).$$

აქედან

$$A\leqslant\frac{I}{f(a)}\leqslant B.$$

რადგანაც $\alpha(x)-\alpha(a)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ამ სეგმენტზე მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\frac{I}{f(a)}=\alpha(\xi)-\alpha(a).$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)[\alpha(\xi)-\alpha(a)]. \tag{5.4}$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს ბონეს ფორმულის განზოგადებას.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ კლებადია და დადებითი არ რჩება $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=f(x)-f(b).$$

ცხადია, $\varphi(x)$ კლებადია და არაუარყოფითი $[a, b]$ სეგმენტზე. ზემო-

დამტკიცებულის ძალით, $[a, b]$-ზე მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^b \varphi(x)d\alpha(x)=\varphi(a)[\alpha(\xi)-\alpha(a)]=[f(a)-f(b)][\alpha(\xi)-\alpha(a)].$$

ეს ტოლობა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)+[f(a)-f(b)]\alpha(\xi). \tag{5.5}$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ $-f(x)$ იქნება კლებადი ფუნქცია და, მაშასადამე, (5.5) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int_a^b [-f(x)]d\alpha(x)=-f(b)\alpha(b)+f(a)\alpha(a)-[f(a)-f(b)]\alpha(\xi).$$

მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილს თუ გავამრავლებთ -1-ზე, მივიღებთ (5.5) ფორმულას. შემდეგ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)+[f(a)-f(b)]\alpha(\xi)=f(a)[\alpha(\xi)-\alpha(a)]+$$
$$+f(b)[\alpha(b)-\alpha(\xi)].$$

ამრიგად, მართებულია (5.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო $\alpha(x)$ მონოტონური ფუნქციაა იმავე სეგმენტზე, მაშინ $[a, b]$-ზე მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(\xi)[\alpha(b)-\alpha(a)]. \tag{5.6}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\alpha(x)$ კლებადი ფუნქციაა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha(x)df(x). \tag{5.7}$$

მაგრამ (5.5) ფორმულის ძალით, არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b \alpha(x)df(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)+[\alpha(a)-\alpha(b)]f(\xi).$$

თუ მიღებულ გამოსახულებას ჩავსვამთ (5.7) ტოლობაში, მივიღებთ (5.6) ტოლობას.

ადვილი მისახვედრია, რომ (5.6) ფორმულა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\alpha(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე.

(5.3), (5.4) და (5.6) ფორმულებს ვუწოდოთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულები.

§ 6. სტილტიესის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. მე-2 თეორემის ძალით $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ ნებისმიერ $[a, x]$ სეგმენტზე, სადაც $a \leqslant x \leqslant b$. ფუნქციას

$$F(x)=C+\int_a^x f(t)d\alpha(t),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება **სტილტიესის განუსაზღვრელი ინტეგრალი** $f(x)$ ფუნქციისა $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ.

თეორემა 13. *თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ იქნება ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$-ზე.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$F(x)=C+\int_a^x f(t)d\alpha(t), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულის თანახმად,

$$|F(x_k)-F(x_{k-1})|=\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,d\alpha(t)\right|\leqslant M\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{\mathrm{V}}}(\alpha),$$

სადაც

$$M=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|<M\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha).$$

მიღებული უტოლობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 14. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე უწყვეტი სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\alpha(x)$-ის მიმართ იქნება უწყვეტი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ, x_0 არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი. ცხადია, რომ

$$|F(x)-F(x_0)|\leqslant M\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}}(\alpha),$$

სადაც

$$M=\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|.$$

$\alpha(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $\lim\limits_{x\to x_0}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}}(\alpha)=0$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=F(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15. თუ უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ იქნება უწყვეტი $\alpha(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებში, ხოლო აღნიშნუ-

ლი განუსაზღვრელი ინტეგრალი x_0 წერტილში წყვეტილია, როდესაც $f(x_0)\neq 0$ და $\alpha(x)$ ფუნქციისათვის x_0 არის წყვეტის წერტილი.

დამტკიცება. ამ თეორემის პირველი ნაწილი მე-14 თეორემის შედეგია. გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $x_0\neq a$, $f(x_0)\neq 0$, ამასთანავე x_0 წარმოადგენს $\alpha(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილს. განვსაზღვროთ ორი ფუნქცია $\beta(x)$ და $\gamma(x)$ შემდეგნაირად:

$$\beta(x)=\begin{cases}\alpha(x), & \text{თუ } a\leqslant x<x_0,\\ \alpha(x_0-), & \text{თუ } x=x_0,\\ \alpha(x)-\alpha(x_0+)+\alpha(x_0-), & \text{თუ } x_0<x\leqslant b,\end{cases}$$

$$\gamma(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } a\leqslant x<x_0,\\ \alpha(x_0)-\alpha(x_0-), & \text{თუ } x=x_0,\\ \alpha(x_0+)-\alpha(x_0-), & \text{თუ } x_0<x\leqslant b.\end{cases}$$

$\beta(x)$ და $\gamma(x)$ ფუნქციები წარმოადგენენ ფუნქციებს სასრული ვარიაციით. ცხადია, რომ

$$\alpha(x)=\beta(x)+\gamma(x).$$

აღვნიშნოთ $a(x)$, $b(x)$ და $c(x)$ სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალები შესაბამისად $\alpha(x)$, $\beta(x)$ და $\gamma(x)$ ფუნქციების მიმართ. ცხადია, რომ

$$a(x)=b(x)+c(x).$$

რადგანაც $\beta(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ $b(x)$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში. მეორე მხრით,

$$c(x)=\begin{cases}C \text{ მუდმივს, როცა } a\leqslant x<x_0,\\ C+f(x_0)[\alpha(x_0)-\alpha(x_0-)], \text{ როდესაც } x=x_0,\\ C+f(x_0)[\alpha(x_0+)-\alpha(x_0-)], \text{ როდესაც } x_0<x\leqslant b.\end{cases}$$

აქედან ცხადია, რომ $c(x)$ წყვეტილია x_0 წერტილში. მაშასადამე, $a(x)$ ფუნქცია წყვეტილია x_0 წერტილში და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის $\alpha(x)$-ის მიმართ განუსაზღვრელი ინტეგრალის ნახტომთა $S(x)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$S(x)=f(a)[\alpha(a+)-\alpha(a)]+\sum_{x_k<x} f(x_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_k-)]+$$
$$+f(x)[\alpha(x)-\alpha(x-)],\quad a<x\leqslant b,$$

სადაც $x_1, x_2, \cdots$ წარმოადგენენ $\alpha(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებს.

ადვილი მისახვედრია, რომ $\alpha(x)-S(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის სტილტიესის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\alpha(x)-S(x)$ ფუნქციის მიმართ, სადაც $S(x)$ წარმოადგენს $\alpha(x)$ ფუნქციის ნახტომთა ფუნქციას.

§ 7. სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლა

თეორემა 16. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ იმავე სეგმენტზე სასრულია და ყოველ $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b)$ ინტერვალზე მუდმივია, სადაც $a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)[\alpha(a+)-\alpha(a)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(b-)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n} f(c_k)[\alpha(c_k+)-\alpha(c_k-)]. \tag{7.1}$$

დამტკიცება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha)=|\alpha(a+)-\alpha(a)|+|\alpha(b)-\alpha(b-)|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\{|\alpha(c_k)-\alpha(c_k-)|+|\alpha(c_k+)-\alpha(c_k)|\}.$$

მაშასადამე, $\alpha(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე და ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. ცხადია, რომ

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,d\alpha(x), \tag{7.2}$$

სადაც $c_0=a,\ c_{n+1}=b$.

გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,d\alpha(x)$. ამისათვის $[c_{k-1}, c_k]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად წერტილებით $c_{k-1}=x_0<x_1<\cdots<x_m=c_k$ და შევადგინოთ სტილტიესის ჯამი:

$$S=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})],$$

სადაც $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$. ცხადია, რომ

$$S=f(\xi_1)\,[\alpha(x_1)-\alpha(c_{k-1})]+f(\xi_m)\,[\alpha(c_k)-\alpha(x_{m-1})],$$

რადგან სხვა შესაკრებები ისპობა. ამ ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda\to 0$, მივიღებთ:

$$\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,d\alpha(x)=f(c_{k-1})\,[\alpha(c_{k-1}+)-\alpha(c_{k-1})]+f(c_k)\,[\alpha(c_k)-\alpha(c_k-)].$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (7.2) ტოლობას, მივიღებთ (7.1).

თეორემა 17. *თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია იმავე სეგმენტზე, მაშინ*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int\limits_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx, \tag{7.3}$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ლებეგის ინტეგრალია.

დამტკიცება. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. გვაქვს:

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\alpha'(x)\,dx, \quad x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k.$$

მაშასადამე,

$$S-\int\limits_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}[f(\xi_k)-f(x)]\,\alpha'(x)\,dx. \tag{7.4}$$

თუ $\alpha(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x=b$ წერტილში, მაშინ $\alpha(b-)$ სასრულია, ხოლო $[a, b)$ შუალედის ყოველ წერტილში არსებობს $\alpha'(x)$ და იგი შემოსაზღვრულია აღნიშნულ შუალედში, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx+f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(b-)]. \tag{7.7}$$

დასასრულს, თუ $\alpha(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $a<c_1<c_2<\dots<c_m<b$ წერტილებში, ხოლო $[a, b]-\{a, c_1, c_2,\dots, c_m, b\}$ სიმრავლეზე აქვს შემოსაზღვრული $\alpha'(x)$ წარმოებული, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx+f(a)\,[\alpha(a+)-\alpha(a)]+$$

$$+f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(b-)]+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[\alpha(c_k+)-\alpha(c_k-)]. \tag{7.8}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^3 x^2\,d\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)=x^3$, როდესაც $1<x\leqslant 3$ და $\alpha(x)=4$, თუ $x=1$.

$\alpha(x)$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=1$ წერტილში. (7.5) ფორმულის ძალით,

$$\int_1^3 x^2\,d\alpha(x)=\int_1^3 x^2\cdot 3x^2dx+1^2(1^3-4)=\left[\frac{3}{5}\,x^5\right]_1^3-3=\frac{711}{5}=142{,}2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_{-1}^2 x\,d\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)=x^2$, როდესაც $-1\leqslant x<2$ და $\alpha(2)=0$.

(7. 7) ფორმულის თანახმად,

$$\int_{-1}^2 x\,d\alpha(x)=\int_{-1}^2 x\cdot 2x\,dx+2\cdot[0-4]=-2.$$

აქედან

$$\left|S-\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx\right| \leqslant O\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\alpha'(x)|\,dx,$$

სადაც

$$O=\max\{O_1,\ O_2,\ldots,\ O_n\},$$

ხოლო O_k ($k=1, 2,\cdots, n$) არის $f(x)$ ფუნქციის რხევა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ $\lim\limits_{\lambda\to 0} O=0$ და, მაშასადამე, თუ (7.4) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda\to 0$, მივიღებთ (7.3) ტოლობას.

თეორემა 18. *თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ წყვეტილია $x=a$ წერტილში, მასთან $\alpha(a+)$ სასრულია და $(a, b]$ შუალედის ყოველ წერტილში არსებობს $\alpha'(x)$ და იგი შემოსაზღვრულია აღნიშნულ შუალედში, მაშინ*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx+f(a)\,[\alpha(a+)-\alpha(a)]. \tag{7.5}$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $\alpha^*(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}\alpha(x), & \text{როცა } a<x\leqslant b,\\ \alpha(a+), & \text{როცა } x=a.\end{cases}$$

ცხადია, რომ $\alpha^*(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამიტომ მე-17 თეორემის ძალით,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha^*(x)=\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx. \tag{7.6}$$

მეორე მხრივ,

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha^*(x_k)-\alpha^*(x_{k-1})]+$$
$$+f(\xi_1)\,[\alpha(a+)-\alpha(a)].$$

ამ უკანასკნელ ტოლობაში თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\lambda\to 0$ და გავითვალისწინებთ (7.6) ტოლობას, მივიღებთ (7.5) ტოლობას.

§ 8. ზღვარზე გადასვლა სტილტიესის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

თეორემა 19. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_n(x)\}$ თანაბრად კრებადია იმავე სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ხოლო $\alpha(x)$ წარმოადგენს ფუნქციას სასრული ვარიაციით, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \tag{8.1}$$

დამტკიცება. ცნობილი თეორემის თანახმად, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$M_n=\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|.$$

რადგანაც ფუნქციათა აღებული მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}M_n=0. \tag{8.2}$$

შემდეგ, მე-10 თეორემის ძალით,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|\leqslant M_n\mathop{\mathrm{V}}_a^b(\alpha), \tag{8.3}$$

და თუ გავითვალისწინებთ (8.2) ტოლობას, (8.3) უტოლობიდან მიიღება (8.1) ტოლობა.

თეორემა 20 (ჰელი). თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და სასრული ვარიაციის ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\alpha_n(x)\}$ კრებადია სასრულ $\alpha(x)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე და ყოველი n-თვის $\mathop{\mathrm{V}}_a^b(\alpha_n)<K$, სადაც K რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \tag{8.4}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha)\leqslant K$. ამისათვის $[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით: $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$. გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k(x_i)-\alpha_k(x_{i-1})|<K \quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m}|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|\leqslant K.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha)\leqslant K.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε და $[a, b]$ სეგმენტი გავყოთ $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ წერტილებით $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტებად ისე, რომ ყოველ მათგანში $f(x)$ ფუნქციის რხევა ნაკლები იყოს $\frac{\varepsilon}{3K}$ რიცხვზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_{k-1})]\,d\alpha(x)+\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k}d\alpha(x).$$

მაგრამ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}d\alpha(x)=\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}).$$

ამის გარდა, $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე

$$|f(x)-f(x_{k-1})|<\frac{\varepsilon}{3K}$$

და, მაშასადამე, მე-10 თეორემის ძალით,

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_{k-1})]\,d\alpha(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3K}\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{\mathrm{V}}}(\alpha).$$

ამრიგად,

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_{k-1})]\,d\alpha(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3K}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

და ამიტომ

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\sum_{k=1}^{m}f(x_{k-1})[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]+\Theta\cdot\frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც $|\Theta|\leqslant 1$.

ანალოგიურად ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)=\sum_{k=1}^{m}f(x_{k-1})[\alpha_n(x_k)-\alpha_n(x_{k-1})]+\Theta_n\cdot\frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც $|\Theta_n|<1$.

შემდეგ, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}f(x_{k-1})[\alpha_n(x_k)-\alpha_n(x_{k-1})]-\sum_{k=1}^{m}f(x_{k-1})[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

როცა $n>N$. მაშასადამე, თუ $n>N$, გვექნება

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|<\varepsilon,$$

ე. ი. მართებულია (8.4) ტოლობა.

სავარჯიშო

1. $f(x)$ და $\alpha(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როდესაც } -1\leq x<0,\\ 0, & \text{როდესაც } 0\leq x\leq 1,\end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}0. & \text{როდესაც } -1\leq x\leq 0,\\ 1, & \text{როდესაც } 0<x\leq 1.\end{cases}$$

დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, d\alpha(x)$ არ არსებობს.

2. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int\limits_{0}^{2} x^2\, d\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ განსაზღვრულია ასე

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } 0\leq x<2; \\ 5, & \text{როდესაც } x=2. \end{cases}$$

პასუხი: 20.

თავი XIX

დანჟუას ინტეგრალები

მე-16 თავში განვიხილეთ ისეთი $F(x)$ ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც [0, 1] სეგმენტის ყოველ წერტილში აქვს სასრული $F'(x)$ წარმოებული და ვაჩვენეთ, რომ ეს წარმოებული ჯამებადი არაა [0, 1] სეგმენტზე. ამრიგად, ლებეგის აზრით ინტეგრების ოპერაცია საზოგადოდ ვერ წყვეტს პირვანდელი ფუნქციის აღდგენის ამოცანას, როდესაც პირვანდელ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული სეგმენტზე.

1912 წელს ა. დანჟუამ (A. Denjoy) [3ა] მოგვცა ინტეგრების უფრო ზოგადი პროცესი, ვიდრე ლებეგის მიერ მოცემული პროცესია და უჩვენა, რომ ეს პროცესი სავსებით წყვეტს პირვანდელი ფუნქციის აღდგენის ამოცანას, როდესაც პირვანდელი ფუნქციის წარმოებული სასრულია სეგმენტზე. დანჟუას მიერ შემოღებულ ინტეგრალს უწოდებენ დ ა ნ ჟ უ ა ს ვ ი წ რ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს.

1916 წელს ა. დანჟუამ [36] მოგვცა ინტეგრების კიდევ უფრო ზოგადი პროცესი, რომელიც საშუალებას იძლევა აღვადგინოთ პირვანდელი ფუნქცია არა მარტო მისი ჩვეულებრივი წარმოებულის მიხედვით, არამედ მისი აპროქსიმატული წარმოებულითაც. დანჟუას მიერ შემოღებულ მეორე ინტეგრალს უწოდებენ დ ა ნ ჟ უ ა ს ფ ა რ თ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს.

1916 წელს ა. ხინჩინმა [27, 28] განიხილა ინტეგრალი, რომელიც დანჟუას ვიწრო და ფართო ინტეგრალების შორისულია.

შევნიშნოთ, რომ დანჟუას მიერ მოცემული ინტეგრალის განსაზღვრა კონსტრუქციულია და იგი ეყრდნობა ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიას. დანჟუას ვიწრო და ფართო ინტეგრალების მეორენაირი განსაზღვრა, რომელიც წარმოიშვა ნ. ლუზინის [15], ა. ხინჩინისა [27, 28] და პ. რომანოვსკის [19] შრომების საფუძველზე, ცნობილია ინტეგრალის დესკრიპტიული განსაზღვრის სახელწოდებით და ეყრდნობა ფუნქციის აბსოლუტური უწყვეტობის ცნების განზოგადებას და არა ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიას.

1923 წელს ლომანმა (H. Looman) [49] განაზოგადა დანჟუას ვიწრო ინტეგრალის ცნება ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევისათვის. მის მიერ

მოცემულია ინტეგრალის კონსტრუქციული განსაზღვრა ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიაზე დაყრდნობით.

1934 წელს მ. კრჟიჟანსკიმ (M. Krzyżański) [46, 47] მოგვცა დანჟუას ვიწრო ინტეგრალის დესკრიპტიული განსაზღვრა ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში.

1936 წელს ს. კემპისტიმ (S. Kempisty) [45] ააგო n-ჯერადი ინტეგრალის თეორია, რომელიც ანალოგიურია დანჟუას ვიწრო ინტეგრალის თეორიისა. ინტეგრალის განსაზღვრა დესკრიპტიულია.

1941 წელს პ. რომანოვსკიმ [20] ააგო n-ჯერადი ინტეგრალის თეორია, რომელიც წარმოადგენს დანჟუას ვიწრო ინტეგრალის თეორიის განზოგადებას;

რომანოვსკის მიერ მოცემული n-ჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა უფრო ზოგადი ხასიათისაა, ვიდრე კემპისტისა.

1947 წელს ამ წიგნის ავტორის მიერ [29] აგებული იყო ორჯერადი ინტეგრალის თეორია, რომელიც წარმოადგენს დანჟუას ფართო ინტეგრალის განზოგადებას.

ამ თავში მოცემულია მხოლოდ დანჟუას ინტეგრალთა თეორია. ამ თეორიის განზოგადებას მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მისი სირთულის გამო, არ განვიხილავთ.

§ 1. ფუნქციის ზედა და ქვედა აპროქსიმატული ზღვრები

ვთქვათ, R^n სივრცეში მოთავსებული დადებითი ზომის E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ზომადი $F(x)$ ფუნქცია და x_0 იყოს E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი. $F(x)$ ფუნქციის ზედა აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში ეწოდება ისეთ y რიცხვთა ($y=+\infty$ სიდიდის ჩათვლით) სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს, რომ $\{x: F(x)>y,\ x\in E\}$ სიმრავლისათვის x_0 დისპერსიის წერტილია, ხოლო $F(x)$ ფუნქციის ქვედა აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში ჰქვია ისეთ y რიცხვთა ($y=-\infty$ სიდიდის ჩათვლით) სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს, რომ $\{x: F(x)<y,\ x\in E\}$ სიმრავლისათვის x_0 დისპერსიის წერტილია. ამ ზღვრებს აღვნიშნავთ შესაბამისად სიმბოლოებით

$$\limsup_{x\to x_0} \operatorname{ap} F(x) \text{ და } \liminf_{x\to x_0} \operatorname{ap} F(x).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ VII თავის მე-14 და მე-15 თეორემებს, ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგ უტოლობათა მართებულობას:

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) \leqslant \liminf_{x\to x_0} \operatorname{ap} F(x) \leqslant \limsup_{x\to x_0} \operatorname{ap} F(x) \leqslant \limsup_{x\to x_0} F(x).$$

როცა $F(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა აპროქსიმატული ზღვრები x_0 წერტილში თანატოლია, მაშინ ამ ზღვრების საერთო მნიშვნელობას ეწოდება $F(x)$ ფუნქციის *აპროქსიმატული ზღვარი* x_0 წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{ap}\, F(x)$.

თეორემა 1. *თუ* x_0 *ზომადი* E *სიმრავლის სიმკვრივის წერტილია და* $F(x)$ *ფუნქცია ზომადია* E*-ზე, მაშინ ამ ფუნქციის ზედა აპროქსიმატული ზღვარი* x_0 *წერტილში ისეთ* y *რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარია, რომ* $\{x : F(x)\leqslant y,\ x\in E\}$ *სიმრავლისათვის* x_0 *იქნება სიმკვრივის წერტილი.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\limsup_{x\to x_0} \mathrm{ap}\, F(x)=L.$$

მაშინ ყოველი y რიცხვისათვის, რომელიც L რიცხვს აღემატება, x_0 იქნება $\{x : F(x)>y,\ x\in E\}$ სიმრავლის დისპერსიის წერტილი, ხოლო $A(y)=\{x : F(x)\leqslant y,\ x\in E\}$ სიმრავლისათვის კი სიმკვრივის წერტილი. ამიტომ იმ y რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი, რომელთათვის $A(y)$ სიმრავლეს x_0 წერტილი აქვს სიმკვრივის წერტილად, იქნება L რიცხვი.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ *თუ* x_0 *წერტილი* E *სიმრავლის სიმკვრივის წერტილია, მაშინ* $F(x)$ *ფუნქციის ქვედა აპროქსიმატული ზღვარი* x_0 *წერტილში ისეთ* y *რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია, რომ* $\{x : F(x)\geqslant y,\ x\in E\}$ *სიმრავლისათვის* x_0 *იქნება სიმკვრივის წერტილი.*

თეორემა 2. *ვთქვათ,* $F(x)$ *ფუნქცია ზომადია* E *სიმრავლეზე და* x_0 *ამ სიმრავლის სიმკვრივის წერტილია. იმისათვის რომ* L *რიცხვი იყოს* $F(x)$ *ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი* x_0 *წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი* ε *რიცხვისათვის* x_0 *წარმოადგენდეს* $H(\varepsilon)=\{x : L-\varepsilon\leqslant F(x)\leqslant L+\varepsilon,\ x\in E\}$ *სიმრავლის სიმკვრივის წერტილს.*

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, L არის $F(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $H_1(\varepsilon)=\{x : F(x)\geqslant L-\varepsilon,\ x\in E\}$ და $H_2(\varepsilon)=\{x : F(x)\leqslant L+\varepsilon,\ x\in E\}$ სიმრავლეებს x_0 ექნებათ სიმკვრივის წერტილად და რაკი $H(\varepsilon)=H_1(\varepsilon)\cap H_2(\varepsilon)$, ამიტომ x_0 იქნება $H(\varepsilon)$ სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. დავუშვათ, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $H(\varepsilon)$ სიმრავლეს x_0 წერტილი აქვს სიმკვრივის წერტილად. დავამტკიცოთ, რომ L რიცხვი $F(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარია x_0 წერტილში. ცხადია, x_0 წარმოადგენს $H_1(\varepsilon)$ და $H_2(\varepsilon)$ სიმრავლეების სიმკვრივის წერტილს. აქედან 1-ლი თეორემის თანახმად, დავასკვნით, რომ L იქნება $F(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში. ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 8. ვთქვათ, x_0 წერტილი ზომადი E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილია, ხოლო $F(x)$ ფუნქცია ზომადია E-ზე. იმისათვის რომ L რიცხვი იყოს $F(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს E სიმრავლის ისეთი H ნაწილი, რომლისთვისაც x_0 სიმკვრივის წერტილია და, გარდა ამისა,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} F(x) = L.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} F(x) = L.$$

მაშინ მე-2 თეორემის თანახმად, ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის x_0 იქნება

$$E_n = [L - \frac{1}{n} \leqslant F(x) \leqslant L + \frac{1}{n}, x \in E] \cap S\left(x_0; \frac{1}{n}\right)$$

სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი. ცხადია, რომ

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

სიმრავლისათვის x_0 წერტილი სიმკვრივის წერტილია.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} F(x) = L. \tag{1.1}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ვთქვათ, ν ისეთი მთელი დადებითი რიცხვია, რომ $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. მაშინ E_ν სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება

$$L - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant L + \varepsilon$$

და, რაკი $H \cap E_\nu = E_\nu$, ამიტომ $H - \{x_0\}$ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\rho(x, x_0) < \frac{1}{\nu}$, გვექნება

$$|F(x) - L| < \varepsilon.$$

მაშასადამე, მართებულია (1.1) ტოლობა. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, რომ არსებობს E სიმრავლის ისეთი H ნაწილი, რომლისთვისაც x_0 წერტილი სიმკვრივის წერტილია და მართებულია (1.1) ტოლობა. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ $M(\delta) = H \cap S(x_0; \delta)$ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$L - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant L + \varepsilon.$$

რადგანაც x_0 წარმოადგენს $M(\delta)$ სიმრავლის სიმკვრივის წერტილს, ამიტომ x_0 იქნება აგრეთვე სიმკვრივის წერტილი $\{x : L - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant L + \varepsilon,\ x \in E\}$ სიმრავლისათვის. მაშასადამე, მე-2 თეორემის თანახმად, L იქნება $F(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

2. ფუნქციის აპროქსიმატული წარმოებული. წარმოებული სიმრავლის მიმართ

ვთქვათ, დადებითი ზომის წრფივ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია სასრულია E-ზე. ავიღოთ E სიმრავლის სიმკვრივის x_0 წერტილი, $x_0 \in E$. გამოსახულებებს

$$\limsup_{x \to x_0} \text{ap} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{და} \quad \liminf_{x \to x_0} \text{ap} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

ეწოდება შესაბამისად $F(x)$ ფუნქციის **ზედა და ქვედა აპროქსიმატული წარმოებულები** x_0 წერტილში. ეს წარმოებულები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\overline{D}_{ap}F(x_0)$ და $\underline{D}_{ap}F(x_0)$ სიმბოლოებით.

თუ $F(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა აპროქსიმატული წარმოებულები x_0 წერტილში თანატოლია, მაშინ ამ წარმოებულების საერთო მნიშვნელობას ეწოდება $F(x)$ ფუნქციის **აპროქსიმატული წარმოებული** x_0 წერტილში; იგი აღვნიშნოთ $D_{ap}F(x_0)$ სიმბოლოთი. იმ შემთხვევაში, როდესაც $D_{ap}F(x_0)$ სასრულია, $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება **აპროქსიმატულად წარმოებადი** x_0 წერტილში.

აპროქსიმატული წარმოებულის ცნება შემოღებული იყო დანჟუას და ხინჩინის მიერ.

ახლა განვსაზღვროთ ფუნქციის წარმოებული სიმრავლის მიმართ. ვთქვათ, წრფივ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია სასრულია E-ზე და x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც E-ს ეკუთვნის. გამოსახულებებს

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \text{ და } \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

ეწოდება შესაბამისად $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ ე დ ა და ქ ვ ე დ ა წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი x_0 წერტილში E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ და ისინი აღინიშნება შესაბამისად $\overline{D}_E F(x_0)$ და $\underline{D}_E F(x_0)$ სიმბოლოებით.

თუ $F(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ თანატოლია, მაშინ ამ წარმოებულების საერთო მნიშვნელობას ეწოდება $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ და აღინიშნება $D_E F(x_0)$ სიმბოლოთი. იმ შემთხვევაში, როდესაც $D_E F(x_0)$ სასრულია, $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი x_0 წერტილში E სიმრავლის მიმართ.

თეორემა 4. *თ უ ზ ო მ ა დ E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე ს ა ს რ უ ლ ი ზ ო მ ა დ ი $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ი თ ქ მ ი ს ყ ვ ე ლ გ ა ნ E-ზ ე წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ, მ ა შ ი ნ $F(x)$ ა პ რ ო ქ ს ი მ ა ტ უ ლ ა დ წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა თ ი თ ქ მ ი ს ყ ვ ე ლ გ ა ნ E-ზ ე დ ა თ ი თ ქ მ ი ს ყ ვ ე ლ გ ა ნ E-ზ ე მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა*

$$D_E F(x) = D_{ap} F(x). \tag{2.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ E სიმრავლე ნულზომისაა, მაშინ თეორემა ტრივიალურია; ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ E სიმრავლე დადებითი ზომისაა.

ვთქვათ, x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილს ($x_0 \in E$), რომელზედაც არსებობს $D_E F(x_0)$. რადგანაც

$$D_E F(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0},$$

ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{ap} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ და მართებულია ტოლობა

$$D_{ap} F(x_0) = D_E F(x_0).$$

ლებეგის თეორემის ძალით, E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი ამ სიმრავლის სიმკვრივის წერტილია და რაკი თითქმის ყველგან E-ზე არ-

სებობს $D_E F(x)$, ამიტომ (2.1) ტოლობა მართებულია თითქმის ყველგან E-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. VB-ფუნქციები და VB*-ფუნქციები

ვთქვათ, წრფივ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $F(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი იმ სეგმენტთა სასრული სისტემა $\left\{[\alpha_k, \beta_k]\right\}_{k=1}^{n}$, რომელთა ბოლოები E სიმრავლეს ეკუთვნის. შევადგინოთ ჯამი

$$S=\sum_{k=1}^{n}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|.$$

ზემოთ აღნიშნულ სახის სეგმენტთა ყოველ სისტემას შეესაბამება არაუარყოფითი რიცხვი S. აღვნიშნოთ H სიმბოლოთი ყველა S რიცხვის სიმრავლე. H სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $F(x)$ ფუნქციის სუსტი ვარიაცია E სიმრავლეზე და იგი აღინიშნება $V(F; E)$ სიმბოლოთი.

თუ $V(F; E)<+\infty$, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია სასრული ვარიაციით ფართო აზრით E სიმრავლეზე, ან მოკლედ, VB-ფუნქცია E სიმრავლეზე.

ახლა ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია სასრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს. განვიხილოთ ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი იმ სეგმენტთა სასრული სისტემა $\left\{[\alpha_k, \beta_k]\right\}_{k=1}^{n}$, რომელთა ბოლოები E სიმრავლეს ეკუთვნის და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}O(F;[\alpha_k, \beta_k]),$$

სადაც $O(F;[\alpha_k, \beta_k])$ წარმოადგენს $F(x)$ ფუნქციის რხევას $[\alpha_k, \beta_k]$ სეგმენტზე. ზემოთ აღნიშნული სახის სეგმენტთა ყოველ სისტემას შეესაბამება არაუარყოფითი რიცხვი σ. აღვნიშნოთ H^* სიმბოლოთი ყველა σ რიცხვის სიმრავლე. H^* სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $F(x)$ ფუნქციის ძლიერი ვარიაცია E სიმრავლეზე და იგი აღინიშნება $V^*(F; E)$ სიმბოლოთი.

თუ $V^*(F;\ E) < +\infty$, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია სასრული ვარიაციით ვიწრო აზრით E სიმრავლეზე, ან მოკლედ, VB^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $F(x)$ არის VB^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე, იგი იქნება VB-ფუნქციაც იმავე სიმრავლეზე.

შემდეგ, თუ E წარმოადგენს სეგმენტს, მაშინ $F(x)$ ფუნქციის სუსტი და ძლიერი ვარიაციები ემთხვევა აბსოლუტურ ვარიაციას.

თეორემა 5. თუ $F(x)$ ფუნქცია VB-ფუნქციაა E სიმრავლეზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია E-ზე.

დამტკიცება. ავიღოთ E სიმრავლის რაიმე ფიქსირებული x_0 წერტილი. ცხადია E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant V(F,\ E).$$

აქედან ვღებულობთ

$$|F(x)| \leqslant |F(x_0)| + V(F;\ E).$$

მაშასადამე, $F(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

თეორემა 6. თუ $F(x)$ არის VB-ფუნქცია (VB^*-ფუნქცია-E სიმრავლეზე, მაშინ იგი იქნება VB-ფუნქცია (VB^*) ფუნქცია) E სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეზე.

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 7. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოადგენს VB-ფუნქციებს E სიმრავლეზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაციაც $af(x) + bg(x)$ იქნება VB-ფუნქცია E-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$F(x) = af(x) + bg(x)$$

და განვიხილოთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი იმ სეგმენტთა სისტემა $\{[\alpha_k,\ \beta_k]\}_{k=1}^{n}$, რომელთა ბოლოები E სიმრავლეს ეკუთვნის. გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leqslant |a| \sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| + |b| \sum_{k=1}^{n} |g(\beta_k) -$$

$$- g(\alpha_k)| \leqslant |a|\, V(f;\ E) + |b|\, V(g;\ E).$$

აქედან ცხადია, რომ

$$V(F,\ E)\leqslant|a|V(f;\ E)+|b|V(g;\ E)<+\infty.$$

მაშასადამე, $F(x)$ არის VB-ფუნქცია E-ზე:

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 8. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არიან VB^*-ფუნქციები E სიმრავლეზე, მაშინ წრფივი კომბინაცია $af(x)+bg(x)$ აგრეთვ VB^*-ფუნქციაა.

თეორემა 9. E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული ზრდად $F(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედშ შემოსაზღვრული ზრდადი ფუნქცია, რომელიც E სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქციას ემთხვევა.

დამტკიცება. E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H(x)=(-\infty,\ x]\cap E \tag{3.1}$$

და განვსაზღვროთ $\Phi(x)$ ფუნქცია ასე:

$$\Phi(x)=\begin{cases} \sup\limits_{t\in H(x)} F(t), & \text{თუ } H(x)\neq\Lambda, \\ \inf\limits_{t\in E} F(t), & \text{თუ } H(x)=\Lambda. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ზრდადია $(-\infty$ $+\infty)$ შუალედში. ამის გარდა, $\Phi(x)=F(x)$, როდესაც $x\in E$. თეორემ დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ $F(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს VB-ფუნქციას E სიმრავლეზე, მაშინ არსებობს ისეთი $\Psi(x)$ ფუნქცია, რომელიც VB-ფუნქციაა $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედში და E სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქციას ემთხვევა.

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $\Psi(x)$ ფუნქცია ასე

$$\Psi(x)=\begin{cases} V\big(F;\ H(x)\big), & \text{თუ } H(x)\neq\Lambda, \\ 0, & \text{თუ } H(x)=\Lambda, \end{cases}$$

სადაც $H(x)$ სიმრავლე განსაზღვრულია (3.1) ტოლობით. ცხადია, $\Psi(x$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ზრდადია $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედში ხოლო $\Psi(x)-F(x)$ ფუნქცია ზრდადია და შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე. მაშასადამე, მე-9 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი $\Phi(x$

ფუნქცია, რომელიც ზრდადია და შემოსაზღვრულია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში და E სიმრავლეზე ემთხვევა $\Psi(x)-F(x)$ ფუნქციას. მაშასადამე,

$$F(x)=\Psi(x)-\Phi(x), \text{ როდესაც } x\in E.$$

მაგრამ $\Psi(x)-\Phi(x)$ ფუნქცია, როგორც სხვაობა ორი შემოსაზღვრული ზრდადი ფუნქციისა $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, იქნება VB-ფუნქცია იმავე შუალედში და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ სასრული $F(x)$ ფუნქცია VB^*-ფუნქციაა შემოსაზღვრულ E სიმრავლეზე, მაშინ იგი იქნება VB^*-ფუნქცია $\overline{E}$ ჩაკეტვაზე.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$a=\inf E, \quad b=\sup E.$$

ცხადია, a და b წერტილები $\overline{E}$ სიმრავლეს ეკუთვნის. ავიღოთ $\overline{E}$ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილები

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\Delta=[a, b], \ \Delta_k=[a_{k-1},a_k], \ k=1, 2, \ldots, n.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $\Delta_k\cap E=\Lambda$, მაშინ $\Delta_{k-1}\cap E\neq\Lambda$ და $\Delta_{k+1}\cap E\neq\Lambda$.

ვთქვათ, $1=k_0<k_1<\cdots<k_r=n$ ის ნომრებია Δ_k სეგმენტებისა, რომელთათვის $\Delta_k\cap E\neq\Lambda$, ხოლო $j_0<j_1<\cdots<j_s$ იყოს იმ Δ_k სეგმენტების ნომრები, რომელთათვის $\Delta_k\cap E=\Lambda$.

ყოველ $\Delta_{k_m}\cap E$ სიმრავლიდან ავიღოთ b_m წერტილი და განვიხილოთ $\Delta^*_m=[b_{m-1}, b_m]$ სეგმენტები $(m=1, 2, \cdots, r)$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\sum_{m=1}^{r} O(F;\ \Delta_{k_m})\leqslant O(F;\ \Delta_1)+O(F;\ \Delta_n)+2\sum_{m=1}^{r} O(F;\ \Delta^*_m),$$

$$\sum_{\nu=1}^{s} O(F;\Delta_{j_\nu})\leqslant \sum_{m=1}^{r} O(F;\ \Delta^*_m).$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} O(F;\Delta_k) < 3\sum_{m=1}^{r} O(F;\ \Delta^*_m) + 2O(F;\ \Delta) \leqslant 3V^*(F;\ E) + 2O(F;\ \Delta).$$

აქედან ვღებულობთ

$$V^*(F;\ \overline{E}) \leqslant 3V^*(F;\ E) + 2O(F;\ \Delta) < +\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12. თუ $F(x)$ არის VB-ფუნქცია E სიმრავლეზე მაშინ თითქმის ყველგან E-ზე იგი წარმოებადია E სიმრავლის მიმართ.

დამტკიცება. მე-10 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომელიც VB-ფუნქციაა $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედში და E სიმრავლეზე ემთხვევა $F(x)$ ფუნქციას. ლებეგის თეორემის თანახმად $\Phi(x)$ წარმოებადია თითქმის ყველგან $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედში და, მაშასადამე, იგი თითქმის ყველგან E-ზე წარმოებადია E სიმრავლის მიმართ. ამიტომ $F(x)$ ფუნქცია თითქმის ყველგან E-ზე იქნება წარმოებადი E სიმრავლის მიმართ.

თეორემა 13. თუ $F(x)$ არის VB^*-ფუნქცია ჩაკეტილ შემოსაზღვრულ E სიმრავლეზე, მაშინ თითქმის ყველგან E-ზე იგი წარმოებადია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები $a=\inf E$, $b=\sup E$. ვთქვათ $\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_k,\ \cdots$ E სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალებია და განვსაზღვროთ $m(x)$ და $M(x)$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$m(x)=\begin{cases} m_k, & \text{როდესაც } x\in\delta_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots),\\ F(x), & \text{როდესაც } x\in E,\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases} M_k, & \text{როდესაც } x\in\delta_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots),\\ F(x), & \text{როდესაც } x\in E,\end{cases}$$

სადაც m_k და M_k წარმოადგენენ შესაბამისად $F(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს $\overline{\delta}_k$ სეგმენტზე.

რადგანაც $F(x)$ არის VB^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე, ამიტომ $m(x)$ და $M(x)$ წარმოადგენენ VB^*-ფუნქციებს $[a,\ b]$ სეგმენტზე. მაშასადამე, ლებეგის თეორემის თანახმად, თითქმის ყველგან $[a,\ b]$ სეგმენტზ

არსებობს სასრული წარმოებულები $m'(x)$ და $M'(x)$. კერძოდ, თითქმის ყველგან E-ზე არსებობს სასრული წარმოებულები $m'(x)$ და $M'(x)$.

აღვნიშნოთ H-ით E სიმრავლის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებზედაც სასრულია $m'(x)$ და $M'(x)$. დავამტკიცოთ, რომ H სიმრავლის ყოველ x წერტილზე მართებულია ტოლობა

$$m'(x)=M'(x). \tag{3.2}$$

ვთქვათ, $\xi \in H$. მაშინ E-დან შეგვიძლია გამოვყოთ წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}$, რომელიც კრებადია ξ წერტილისაკენ და, მაშასადამე,

$$m'(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{m(x_n)-m(\xi)}{x_n-\xi}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)-F(\xi)}{x_n-\xi},$$

$$M'(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{M(x_n)-M(\xi)}{x_n-\xi}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)-F(\xi)}{x_n-\xi}.$$

აქედან გვაქვს $m'(\xi)=M'(\xi)$. მაშასადამე, თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე მართებულია (3.2) ტოლობა.

შემდეგ, ცხადია, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში მართებულია უტოლობები

$$m(x)\leqslant F(x)\leqslant M(x). \tag{3.3}$$

კერძოდ, თუ $x \in E$, მაშინ

$$m(x)=F(x)=M(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ H სიმრავლის ყოველ x_0 წერტილში მართებულია ტოლობა

$$F'(x_0)=m'(x_0)=M'(x_0).$$

რადგანაც $m(x_0)=F(x_0)=M(x_0)$, ამიტომ (3.3) უტოლობებიდან გვექნება

$$m(x)-m(x_0)\leqslant F(x)-F(x_0)\leqslant M(x)-M(x_0). \tag{3.4}$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $x>x_0$. მაშინ თუ (3.4) უტოლობის ყველა წევრს გავყოფთ $x-x_0$ სხვაობაზე, გვექნება

$$\frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{M(x)-M(x_0)}{x-x_0}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$m'(x_0)\leqslant \underline{D}^+F(x_0)\leqslant \overline{D}^+F(x_0)\leqslant M'(x_0).$$

მაგრამ, რაკი $m'(x_0)=M'(x_0)$, ამიტომ

$$D^+F(x_0)=m'(x_0).$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$D^-F(x_0)=m'(x_0).$$

მაშასადამე, $F'(x_0)=m'(x_0)$. ამრიგად, H სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. თუ E სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქცია ზომადია და იგი VB-ფუნქციაა E სიმრავლის რაიმე H ნაწილზე, მაშინ არსებობს ზომადი M სიმრავლე, $H\subset M\subset E$, რომელზედაც $F(x)$ წარმოადგენს VB-ფუნქციას. ამის გარდა, $F(x)$ ფუნქცია აპროქსიმატულად წარმოებადია თითქმის ყველგან M-ზე.

დამტკიცება. მე-10 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომელიც VB-ფუნქციაა $(-\infty, +\infty)$ შუალედში და H სიმრავლის ყოველ x წერტილში მართებულია ტოლობა $F(x)=\Phi(x)$.

აღვნიშნოთ M-ით E სიმრავლის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის $F(x)=\Phi(x)$. რაკი $F(x)$ ფუნქცია ზომადია E-ზე, იგი M სიმრავლეზედაც ზომადია, და, მაშასადამე, ზომადია M სიმრავლე. ამის გარდა, $H\subset M\subset E$. ცხადია, $F(x)$ წარმოადგენს VB-ფუნქციას M სიმრავლეზე. მაშასადამე, ლებეგის თეორემისა და მე-4 თეორემის თანახმად, თითქმის ყველგან M-ზე არსებობს სასრული აპროქსიმატული წარმოებული $D_{ap}F(x)$ და $D_{ap}F(x)=\Phi'(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. VBG-ფუნქციები და VBG*-ფუნქციები

E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია განზოგადებული სასრული ვარიაციით ფართო აზრით E სიმრავლეზე, ან მოკლედ, VBG-ფუნქცია E სიმრავლეზე, თუ E წარმოიდგინება ისეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამად, რომლებზედაც $F(x)$ წარმოადგენს VB-ფუნქციას.

ახლა ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია სასრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს. ჩვენ ვიტყვით, რომ $F(x)$ არის ფუნქცია განზოგადებული სასრული ვარიაციით ვიწრო აზრით E სიმრავლეზე, ან მოკლედ, VBG^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე, თუ E წარმოიდგინება ისეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამად, რომლებზედაც $F(x)$ იქნება VB^*-ფუნქცია.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულება: თუ $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ წარმოადგენენ VBG-ფუნქციებს (VBG^*-ფუნქციებს) E სიმრავლეზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+\cdots+C_nF_n(x)$ და მათი ნამრავლი $F_1(x)\cdot F_2(x)\cdots\cdots F_n(x)$ აგრეთვე VBG-ფუნქციებია (VBG^*-ფუნქციებია) E სიმრავლეზე.

თეორემა 15 (დანჟუა-ხინჩინი). თუ ზომად E სიმრავლეზე ზომადი $F(x)$ ფუნქცია VBG-ფუნქციაა E-ზე, მაშინ თითქმის ყველგან E-ზე $F(x)$ იქნება აპროქსიმატულად წარმოებადი.

დამტკიცება. პირობის თანახმად, $F(x)$ არის VBG-ფუნქცია E სიმრავლეზე, ამიტომ E შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ისეთ E_k სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამად, რომლებზედაც $F(x)$ იქნება VB-ფუნქცია. რაკი $F(x)$ ზომადია E სიმრავლეზე, ხოლო E_k-ზე იგი VB-ფუნქციაა, ამიტომ მე-14 თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი ზომადი M_k სიმრავლე, $E_k\subset M_k\subset E$, რომ თითქმის ყველგან M_k-ზე არსებობს სასრული აპროქსიმატული წარმოებული $D_{ap}F(x)$. შემდეგ, ცხადია, რომ

$$E=\bigcup_k M_k.$$

მაშასადამე, თითქმის ყველგან E-ზე არსებობს სასრული აპროქსიმატული წარმოებული $D_{ap}F(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16. (დანჟუა-ლუზინი). თუ $F(x)$ არის VBG^*-ფუნქცია ზომად E სიმრავლეზე, მაშინ $F(x)$ წარმოებადია E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში.

დამტკიცება. პირობის ძალით $F(x)$ წარმოადგენს VBG^*-ფუნქციას E სიმრავლეზე, ამიტომ E წარმოიდგინება ისეთ E_h სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამად, რომლებზედაც $F(x)$ იქნება VB^*-ფუნქცია. მე-11 თეორემის ძალით, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი E_k სიმრავლე ჩაკეტილია. მაგრამ მე-13 თეორემის თანახმად $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია თითქმის ყველგან E_h-ზე. მაშასადამე, $F(x)$ წარმოებადია თითქმის ყველგან E-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. AC-ფუნქციები და AC*-ფუნქციები

E სიმრავლეზე სასრულ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი ფართო აზრით E სიმრავლეზე, ან მოკლედ AC-ფუნქცია E-ზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისე-

თი $\eta>0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$, სადაც α_k და β_k წერტილები

E სიმრავლეს ეკუთვნის, უტოლობიდან $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$ გამომდინარეობს უტოლობა $\sum_{k=1}^{n}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|<\varepsilon$.

ახლა ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია სასრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ რაიმე E სიმრავლე, რომელიც მოთავსებულია $[a, b]$ სეგმენტზე.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი ვიწრო აზრით E სიმრავლეზე ანუ AC^*-ფუნქცია E-ზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის

$\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$, სადაც $\alpha_k\in E$, $\beta_k\in E$, უტოლობიდან $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$ გამომდინარეობს უტოლობა $\sum_{k=1}^{n}O(F;[\alpha_k, \beta_k])<\varepsilon$.

ცხადია, რომ ყოველი AC^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე იქნება AC-ფუნქცია E-ზე.

თეორემა 17. თუ $F(x)$ არის AC-ფუნქცია შემოსაზღვრულ E სიმრავლეზე, მაშინ $F(x)$ იქნება VB-ფუნქცია იმავე სიმრავლეზე.

დამტკიცება. რადგანაც E სიმრავლეზე $F(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას, ამიტომ არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$,

სადაც $\alpha_k\in E$, $\beta_k\in E$, უტოლობიდან $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$ გამომდინარეობს

უტოლობა $\sum_{k=1}^{n}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|<1$. მაშასადამე, ყოველი I სეგმენტისათვის, რომლის სიგრძე η-ზე ნაკლებია, გვექნება

$$V(F;\ E\cap I)\leqslant 1.$$

E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს ისეთი I^* სეგმენტი, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ყველა წერტილს. I^* სეგმენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ისეთი სეგმენტისა $I_1, I_2, \ldots, I_m$, რომ თითოეული სეგმენტის სიგრძე იყოს η-ზე ნაკლები. მაგრამ $V(F;\ E\cup I_k)\leqslant 1$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ და, მაშასადამე, $F(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$M=\sup_{x\in E}|F(x)|,$$

გვექნება

$$V(F;\ E)\leqslant \sum_{k=1}^{m}V(F;\ E\cap I_k)+2mM\leqslant m+2mM<+\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18. თუ $F(x)$ არის AC^*-ფუნქცია შემოსაზღვრული E სიმრავლეზე, მაშინ იგი იქნება VB^*-ფუნქცია იმავე სიმრავლეზე.

დამტკიცება. რადგანაც $F(x)$ წარმოადგენს AC^*-ფუნქციას E სიმრავლეზე, ამიტომ არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ ყოველი I სეგმენტისათვის, რომლის სიგრძე η-ზე ნაკლებია, გვექნება

$$V^*(F;\ E\cap I)\leqslant 1.$$

ვთქვათ, I_0 არის უმცირესი სეგმენტი, რომელიც E სიმრავლეს შეიცავს, ხოლო M იყოს $|F(x)|$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვარი E სიმრავლეზე. დავყოთ I_0 სეგმენტი ქვესეგმენტებად $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ისე, რომ თითოეული ქვესეგმენტის სიგრძე ნაკლები იყოს η-ზე. მაშინ გვექნება

$$V^*(F;\ E)\leqslant \sum_{k=1}^{n}V^*(F;\ E\cap I_k)+2nM\leqslant n+2nM<+\infty.$$

მაშასადამე, $F(x)$ წარმოადგენს VB^*-ფუნქციას. თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია შემდეგი დებულებები:

1. თუ $F_1(x), F_2(x),\ldots, F_n(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციებს (AC^*-ფუნქციებს) E სიმრავლეზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+\cdots+C_nF_n(x)$ და ნამრავლი $F_1(x)\cdot F_2(x)\cdots F_n(x)$ აგრეთვე AC-ფუნქციებია (AC^*-ფუნქციებია) E-ზე.

2. თუ $F(x)$ არის AC-ფუნქცია (AC^*-ფუნქცია) E სიმრავლეზე, მაშინ $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია (AC^*-ფუნქცია) E სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეზე.

3. თუ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის $\overline{E}$ ჩაკეტვაზე, ხოლო E-ზე იგი AC-ფუნქციაა (AC^*-ფუნქციაა), მაშინ $\overline{E}$ სიმრავლეზედაც $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია (AC^*-ფუნქცია).]

ამ დებულებათა დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

განსაზღვრა 1. რაიმე $[a, b]$ სეგმენტს ჩვენ ვუწოდებთ პირველი გვარის სეგმენტს წრფივი E სიმრავლის მიმართ, თუ (a, b) ინტერვალი არ შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს; სეგმენტი მეორე გვარისაა, თუ მისი ბოლოები E სიმრავლეს ეკუთვნის, ხოლო აღებულ სეგმენტს, ვუწოდებთ მესამე გვარის სეგმენტს, თუ მისი ერთი ბოლო მაინც E სიმრავლეს ეკუთვნის და (a, b) ინტერვალი E სიმრავლის წერტილებს შეიცავს.

ლემა. თუ (a, b) ინტერვალი ჩაკეტილი E სიმრავლის წერტილებს შეიცავს, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტი ისე შეგვიძლია დავყოთ ქვესეგმენტებად, რომ ამ სეგმენტებიდან არაუმეტეს ორისა იქნება მესამე გვარის სეგმენტები რაგინდ მცირე სიგრძეებისა, არაუმეტეს ორი სეგმენტისა იქნება პირველი გვარის და ერთი სეგმენტი მეორე გვარისა.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ α და β ასოებით ჩაკეტილი $[a, b]\cap E$ სიმრავლის უმცირესი და უდიდესი ელემენტები. თუ $\alpha=a$ და $\beta=b$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტი იქნება მეორე გვარის სეგმენტი და ამ შემთხვევისათვის ლემა მართებულია.

ახლა ვთქვათ, $a<\alpha$, $\beta<b$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი a' და b' რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a<a'<\alpha,\ \beta<b'<b,\ \alpha-a'<\varepsilon,\ b'-\beta<\varepsilon.$$

ცხადია, $[a, a']$ და $[b', b]$ სეგმენტები პირველი გვარისაა, ვინაიდან

(a, a') და (b', b) ინტერვალები არ შეიცავენ E სიმრავლის წერტილებს; $[a', \alpha]$ და $[\beta, b']$ წარმოადგენენ მესამე გვარის სეგმენტებს, ხოლო $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი მეორე გვარისაა. ასე რომ $[a, b]$ სეგმენტი დავყავით ხუთ სეგმენტად; ამათგან ორი სეგმენტი პირველი გვარის სეგმენტია, ერთი კი მეორე გვარისაა და ორი სეგმენტი მესამე გვარის სეგმენტებია რაგინდ მცირე სიგრძეებით. ამ შემთხვევაში ლემა დამტკიცებულია.

თუ $\alpha=a$ ან $\beta=b$, ლემა მაშინაც მართებულია.

თეორემა 18 (ვლ. ჭელიძე). ვ თ ქ ვ ა თ, E ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა და $E\subset[a, b]$. თ უ $I=[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე უ წ ყ ვ ე ტ ი $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს AC-ფ უ ნ ქ ც ი ა ს რ ო გ ო რ ც E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, ი ს ე $(I\text{-}E)^{\circ}$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე დ ა ც, მ ა შ ი ნ $F(x)$ ი ქ ნ ე ბ ა AC-ფ უ ნ ქ ც ი ა $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე[1].

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია AC-ფუნქციაა E სიმრავლეზე, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta'>0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\left\{[\alpha'_k, \beta'_k]\right\}_{k=1}^{n}$, სადაც $\alpha'_k\in E, \beta'_k\in E$ $(k=1,2,\ldots,n)$ უტოლობიდან $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta'_k-\alpha'_k)<\eta'$ გამომდინარეობს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{n}|F(\beta'_k)-F(\alpha'_k)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.1}$$

შემდეგ, რაკი $F(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას $(I-E)^{\circ}$ სიმრავლეზე, ამიტომ აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta''>0$, რომ $(I-E)^{\circ}$ სამრავლეში მოთავსებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\left\{[\alpha''_k, \beta''_k]\right\}_{k=1}^{m}$, უტოლობიდან $\sum\limits_{k=1}^{m}(\beta''_k-\alpha''_k)<\eta''$ გამომდინარეობს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{m}|F(\beta''_k)-F(\alpha''_k)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.2}$$

---

[1] $(I-E)^{\circ}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $I-E$ სიმრავლის ყველა შიგა წერტილის სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ნებისმიერი სასრული სისტემა

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_\nu, \beta_\nu], \tag{5.3}$$

ისეთი, რომ მართებული იყოს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\beta_k-\alpha_k)<\eta,$$

სადაც η უმცირესია η' და η'' რიცხვებს შორის. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\nu}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|<\varepsilon. \tag{5.4}$$

თუ (5.3) სეგმენტები პირველი ან მეორე გვარისაა E სიმრავლის მიმართ, მაშინ (5.1) და (5.2) უტოლობათა ძალით მართებულია (5.4) უტოლობა.

თუკი (5.3) სეგმენტებიდან არცერთი არ არის არც პირველი და არც მეორე გვარისა, მაშინ, ლემის თანახმად, ყოველი ასეთი $[\alpha_i, \beta_i[$ სეგმენტი შეგვიძლია დავყოთ ქვესეგმენტებად $\left[\alpha_i^{(s)}, \beta_i^{(s)}\right]$ $(1\leqslant s\leqslant 5)$ ისე, რომ არაუმეტესი ორისა იქნება პირველი გვარის სეგმენტები, ერთი—მეორე გვარისა, ორი სეგმენტი კი მესამე გვარისა. ვთქვათ, ეს უკანასკნელი სეგმენტებია $\left[\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}\right]$ და $\left[\alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)}\right]$ და ისინი ისე ავარჩიოთ, რომ მართებული იყოს უტოლობები:

$$\left|F\left(\beta_i^{(1)}\right)-F\left(\alpha_i^{(1)}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{6.2^{i+1}}, \quad \left|F\left(\beta_i^{(2)}\right)-F\left(\alpha_i^{(2)}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{6.2^{i+1}}. \tag{5.5}$$

გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{\nu}|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|\leqslant\sum_i\sum_{1\leq s\leq 2}\left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right|+$$

$$+\sum_i\sum{}'\left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right|+\sum_i\sum{}''\left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right|, \tag{5.6}$$

სადაც ფიქსირებული i-თვის $\sum'$ გავრცელებულია პირველი გვარის ყველა $\left[\alpha_i^{(s)}, \beta_i^{(s)}\right]$ სეგმენტზე, $\sum''$ კი მეორე გვარის ყველა $\left[\alpha_i^{(s)}, \beta_i^{(s)}\right]$ სეგმენტზე.

(5.5) უტოლობათა ძალით,

$$\sum_i \sum_{1\leqslant s\leqslant 2} \left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right| < \sum_i \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.7}$$

ამის გარდა,

$$\sum_i \sum{}' \left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.8}$$

$$\sum_i \sum{}'' \left|F\left(\beta_i^{(s)}\right)-F\left(\alpha_i^{(s)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.9}$$

ვინაიდან

$$\sum_i \sum{}' \left(\beta_i^{(s)}-\alpha_i^{(s)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu}(\beta_i-\alpha_i) < \eta \leqslant \eta'',$$

$$\sum_i \sum{}'' \left(\beta_i^{(s)}-\alpha_i^{(s)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu}(\beta_i-\alpha_i) < \eta \leqslant \eta'.$$

მაშასადამე, (5.7) და (5.9) უტოლობათა თანახმად, მივიღებთ (5.4) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 19. თუ $F(x)$ არის AC-ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე და თითქმის ყველგან $D_{ap}F(x) \leqslant 0$, მაშინ $F(x)$ იქნება კლებადი მოცემულ სეგმენტზე.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $F(x)$ არის AC-ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი იქნება VB-ფუნქცია იმავე სეგმენტზე. მაშასადამე, ლებეგის თეორემის თანახმად თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს სასრული წარმოებული $F'(x)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P=\{x: -\infty < F'(x) < +\infty, \ x\in[a, b]\}, \ \ Q=\{x: D_{ap}(x) \leqslant 0\}.$$

მაშინ

$$\mu(P)=\mu(Q)=b-a.$$

ვთქვათ, $E=P\cap Q$. ცხადია, რომ $\mu(E)=b-a$ და E სიმრავლის ყოველ x წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x)=D_{ap}F(x).$$

ამრიგად, თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე $F'(x) \leqslant 0$ და, ამიტომ, ლებეგის თეორემის თანახმად $F'(x)$ ფუნქცია კლებადია მოცემულ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $F(x)$ ფუნქცია AC-ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე და თითქმის ყველგან სეგმენტზე $D_{ap}F(x) \geqslant 0$, მაშინ $F(x)$ იქნება ზრდადი მოცემულ სეგმენტზე.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია $\Phi(x) = -F(x)$. ცხადია, რომ $D_{ap}\Phi(x) \leqslant 0$ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე და რაკი $\Phi(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას მოცემულ სეგმენტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად $\Phi(x)$ კლებადია სეგმენტზე. მაშასადამე, $F(x)$ იქნება ზრდადი ფუნქცია იმავე სეგმენტზე.

თეორემა 20 (ვლ. ჭელიძე). თუ $I_0=[a_0, b_0]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია AC-ფუნქციაა I_0-ში მოთავსებულ ჩაკეტილ E_0 სიმრავლეზე და თითქმის ყველგან E_0-ზე $D_{ap}F(x) \leqslant 0$ და, ამის გარდა, $F(x)$ კლებადია $(I_0 - E_0)^\circ$ სიმრავლეზე, მაშინ მოცემული ფუნქცია კლებადია I_0 სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ I_0 სეგმენტის ნებისმიერი ქვესეგმენტი $[a, b]$ და დავამტკიცოთ, რომ

$$F(b) - F(a) \leqslant 0. \tag{5.10}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E = E_0 \cap [a, b], \quad H = \{x : D_{ap}F(x) \leqslant 0,\ x \in E_0\} \cap [a, b].$$

რაკი $F(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას E_0 სიმრავლეზე, ამიტომ იგი იქნება AC-ფუნქცია E სიმრავლეზედაც და, მაშასადამე, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრული სისტემისათვის $\left\{[a_k, b_k]\right\}_{k=1}^{m}$, სადაც $a_k \in E$, $b_k \in E$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, უტოლობიდან $\sum\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \eta$ გამომდინარეობს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{m} |F(b_k) - F(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.11}$$

შემდეგ, ავიღოთ ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $H^* \subset H$, რომ მართებული იყოს უტოლობა

$$\mu(H^*) > \mu(H) - \frac{\eta}{4}. \tag{5.12}$$

აღვნიშნოთ S ასოთი $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული $[\alpha, \beta]$ სეგმენტთა სისტემა, რომელთათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant \varepsilon(\beta - \alpha). \tag{5.13}$$

ცხადია, სეგმენტთა S სისტემა ფარავს H^* სიმრავლეს ვიტალის აზრით და, მაშასადამე, ვიტალის თეორემის თანახმად, ამ სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი ისეთი სეგმენტებისა $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n]$, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) - \frac{\eta}{4} < \mu(H^*) < \mu[H^* \cap (\bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k])] + \frac{\eta}{4}. \tag{5.14}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E^* = E - H^* \cap (\bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k)). \tag{5.15}$$

აქედან გვექნება

$$E = E^* \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k)\Big).$$

E^* სიმრავლე ჩაკეტილია, ამასთანავე E^* და $H^* \cap (\bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k])$ სიმრავლეების საერთო წერტილები შეიძლება იყოს $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტების ბოლოები.

შემდეგ, (5.12) და (5.14) უტოლობათა ძალით, (5.15) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\mu(E^*) = \mu(E) - \mu(H^* \cap (\bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k])) = \mu(H) -$$

$$- \mu\big(H^* \cap (\bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k])\big) < \mu(H^*) + \frac{\eta}{4} - \left[\mu(H^*) - \frac{\eta}{4}\right] = \frac{\mu}{2}. \tag{5.16}$$

ახლა E^* სიმრავლე დავფაროთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ისეთი სეგმენტებით $[\alpha_1^*, \beta_1^*,], [\alpha^*_2, \beta^*_2], \cdots, [\alpha^*_\nu, \beta^*_\nu]$, რომ მართებული იყოს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\beta^*_k - \alpha^*_k) < \mu(E^*) + \frac{\eta}{2}.$$

აქედან, (5.16) უტოლობის თანახმად,

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\beta_k^* - \alpha_k^*) < \eta.$$

სეგმენტები $[\alpha_k^*, \beta_k^*]$ $(k=1, 2, \ldots, \nu)$ ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ მათ საერთო შიგა წერტილები არ ჰქონდეთ $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტებთან. ამის გარდა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$[\alpha^*_k, \beta^*_k] \subset [a, b] \quad (k=1, 2, \ldots, \nu).$$

დავყოთ $[a, b] - [\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k) \cup \bigcup_{k=1}^{\nu}(\alpha_k^*, \beta_k^*)]$ სიმრავლე წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტებათ.

$$[a_1^* \; b_1^*], \; [a_2^*, \; b_2^*], \ldots, \; [a_p^*, \; b_p^*].$$

მაშინ

$$[a, b] = (\bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k]) \cup (\bigcup_{k=1}^{\nu} [\alpha_k^*, \beta_k^*]) \cup (\bigcup_{k=1}^{p} [a_k^*, b_k^*]). \quad (5.17)$$

სეგმენტები $[\alpha_k, \beta_k]$, $[\alpha_i^*, \beta_i^*]$, $[a_j^*, b_j^*]$ წყვილ-წყვილად არ ფარავენ ერთმანეთს, ამასთანავე ყოველი $[a^*_j, b_j^*]$ სეგმენტი პირველი გვარისაა E სიმრავლის მიმართ. ამიტომ

$$F(b_j^*) - F(a_j^*) \leqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, p)$$

და, მაშასადამე,

$$\sum_{j=1}^{p}[F(b_j^*) - F(a_j^*)] \leqslant 0. \quad (5.18)$$

შემდეგ, ლემის ძალით, ყოველი $[\alpha^*_i, \beta^*_i]$ სეგმენტი, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს E^* სიმრავლის წერტილებს, შეგვიძლია დავყოთ ისეთ ქვესეგმენტებად $[\alpha^*_{i,s}, \beta^*_{i,s}]$, რომლებიდან არაუმეტესი ორისა, მაგალითად, $[\alpha^*_{i,1}, \beta^*_{i,1}]$, $[\alpha^*_{i,2}, \beta^*_{i,2}]$ იქნება მესამე გვარის სეგმენტები იმდენა მცირე სიგრძეებით, რომ

$$|F(\beta^*_{i,1}) - F(\alpha^*_{i,1})| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^{i+1}}, \; |F(\beta^*_{i,2}) - F(\alpha^*_{i,2})| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^{i+1}}. \quad (5.19)$$

დანარჩენი სეგმენტებიდან, არაუმეტესი ორისა იქნება პირველი გვარის და ერთი სეგმენტი მეორე გვარისა.

(5.17) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]+\sum_{i}\sum_{1<s<2}[F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})]+$$
$$+\sum_{i}\sum{}'[F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})]+\sum_{i}\sum{}''[F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})]+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}|F(b^*_j)-F(a^*_j)|, \tag{5.20}$$

სადაც ფიქსირებული i-თვის $\sum'$ გავრცელებულია პირველი გვარის ყველა $[\alpha^*_{i,s}, \beta^*_{i,s}]$ სეგმენტზე, $\sum''$ კი ყველა $[\alpha^*_{i,s}, b^*_{i,s}]$ სეგმენტზე, რომლებიც წარმოადგენენ მეორე გვარის სეგმენტებს E^* სიმრავლის მიმართ. რაკი

$$\sum_{i}\sum{}''(\beta^*_{i,s}-\alpha^*_{i,s})\leqslant\sum_{i=1}^{\nu}(\beta_i^*-\alpha_i^*)<\eta,$$

ამიტომ

$$\sum_{i}\sum{}''|F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.21}$$

შემდეგ, (5.19) უტოლობათა ძალით,

$$\sum_{i}\sum_{1\leqslant s\leqslant 2}|F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.22}$$

ამის გარდა,

$$\sum_{i}\sum{}'[F(\beta^*_{i,s})-F(\alpha^*_{i,s})]\leqslant 0. \tag{5.23}$$

ამრიგად, (5.18), (5.21), (5.22) და (5.23) უტოლობათა ძალით, (5.20) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$F(b)-F(a)<\sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]+\varepsilon. \tag{5.24}$$

მაგრამ (5.13) და (5.14) უტოლობათა თანახმად,

$$\sum_{k=1}^{n}[F(\beta_k)-F(\alpha_k)]<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\Big[\mu(H^*)+$$
$$+\frac{\eta}{4}\Big]\leqslant\varepsilon\left(b_0-a_0+\frac{\eta}{4}\right).$$

მაშასადამე, (5.24) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$F(b)-F(a)<\varepsilon\left(b_0-a_0+\frac{\eta}{4}+1\right).$$

აქედან, ε-ის ნებისმიერობის გამო, გვაქვს

$$F(b)-F(a)\leqslant 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ACG-ფუნქციები და ACG*-ფუნქციები

E სიმრავლეზე უწყვეტ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება *განზოგადებული აბსოლუტურად უწყვეტი ფართო აზრით* E სიმრავლეზე ანუ ACG-ფუნქცია E-ზე, თუ E წარმოიდგინება ისეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამის სახით, რომლებზედაც $F(x)$ არის AC-ფუნქცია.

ახლა ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და E იყოს ამ სეგმენტში მოთავსებული რაიმე სიმრავლე. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება *განზოგადებული აბსოლუტურად უწყვეტი* E სიმრავლეზე ანუ ACG-ფუნქცია E-ზე, თუ E წარმოიდგინება ისეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამის სახით, რომლებზედაც $F(x)$ არის AC^*-ფუნქცია.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულებები:

1°. *თუ* $F(x)$ *არის* ACG-*ფუნქცია* (ACG^*-*ფუნქცია*) E *სიმრავლეზე, მაშინ* $F(x)$ *იქნება* VBG-*ფუნქცია* (VBG^*-*ფუნქცია*) *იმავე სიმრავლეზე*.

2°. *თუ* $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ *ფუნქციები* ACG-*ფუნქციებია* (ACG^*-*ფუნქციებია*) E-*ზე, მაშინ წრფივი კომბინაციაც* $A_1F_1(x)+A_2F_2(x)+\cdots+A_nF_n(x)$ *იქნება აგრეთვე* ACG-*ფუნქცია* (ACG^*-*ფუნქცია*) *იმავე* E *სიმრავლეზე*.

მე-15 თეორემის თანახმად, *თუ* $F(x)$ *არის* ACG-*ფუნქცია* ზო-

მად E სიმრავლეზე, მაშინ იგი E სიმრავლის თითქმის ყველა x წერტილში აპროქსიმატულად წარმოებადია.

ასევე, მე-16 თეორემის თანახმად, თუ $F(x)$ არის ACG^*-ფუნქცია E სიმრავლეზე, მაშინ იგი თითქმის ყველგან წარმოებადია E-ზე.

ახლა ავაგოთ მაგალითი სეგმენტზე ACG-ფუნქციისა, რომელიც ჩვეულებრივი აზრით დიფერენცირებადი არ არის დადებითი ზომის სიმრავლეზე.

განვიხილოთ დადებითი ზომის სრულყოფილი არსადმკვრივი შემოსაზღვრული P სიმრავლე. ამ სიმრავლის ბოლოები იყოს a და b. ცხადია, $P\subset[a, b]$. ვთქვათ, $\{\delta_h=(\alpha_k, \beta_k)\}$ არის P სიმრავლის საკუთრივ მოსაზღვრე ინტერვალთა სისტემა. δ_k ინტერვალის ცენტრი აღვნიშნოთ γ_k სიმბოლოთი. გვაქვს:

$$[a, b]=P\cup(\bigcup_k \delta_k). \tag{6.1}$$

აღვნიშნოთ ρ_n-ით $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული იმ უდიდესი სეგმენტის სიგრძე, რომელსაც არა აქვს საერთო წერტილი $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ინტერვალებთან. ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty}|\delta_n|=0, \quad \lim_{n\to\infty}\rho_n=0.$$

განვსაზღვროთ $F(x)$ ფუნქცია ასე

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ როდესაც } x\in P, \\ |\delta_n|+\rho_n, \text{ როდესაც } x=\gamma_n,\ n=1, 2, \ldots, \\ \text{წრფივია } [\alpha_n, \gamma_n] \text{ და } [\gamma_n, \beta_n] \text{ სეგმენტებზე}, \ n=1, 2, \ldots \end{cases}$$

რაკი $\rho_n\to 0$, როდესაც $n\to\infty$, ამიტომ $F(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და იგი წარმოადგენს AC-ფუნქციას P სიმრავლეზე. ამის გარდა, $F(x)$ არის AC-ფუნქცია ყოველ δ_k ინტერვალზე. მაშასადამე, (6.1) ტოლობის თანახმად, $F(x)$ ფუნქცია ACG-ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე.

დავამტკიცოთ, რომ $F(x)$ დიფერენცირებადი არ არის P სიმრავლის არც ერთ წერტილში. პირობის თანახმად, $F(x)=0$, როდესაც $x\in P$, ამიტომ

$$\underline{D}F(x)\leqslant 0\leqslant\overline{D}F(x), \text{ როდესაც } x\in P. \tag{6.2}$$

ახლა ავიღოთ P სიმრავლის ნებისმიერი ξ წერტილი. ვთქვათ, i_n არის ინდექსი იმ სეგმენტისა $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ სეგმენტებიდან, რომელიც უმცირესად დაშორებულია ξ წერტილიდან. მაშინ

$$0<|\gamma_{i_n}-\xi|<|\delta_{i_n}|+\rho_n.$$

ამრიგად,

$$F(\gamma_{i_n})-F(\xi)=|\delta i_n|+\rho_n>|\gamma_{i_n}-\xi|.$$

რაკი $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{i_n}=\xi$, ამიტომ ან $\overline{D}F(\xi)\geqslant 1$ ან $\underline{D}F(\xi)\leqslant -1$. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.2) უტოლობებს, გვექება $\underline{D}F(\xi)<\overline{D}F(\xi)$, ე. ი. $F(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა ξ წერტილში.

განსაზღვრა 2. R^n სივრცეში მოთავსებული E სიმრავლის პორცია ეწოდება n-განზომილებიანი I სეგმენტისა და E სიმრავლის გადაკვეთას, თუ I^0 ინტერვალი შეიცავს E სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც.

თეორემა 21 (ბერი). თუ ჩაკეტილი F სიმრავლე დაფარულია ჩაკეტილი სიმრავლეთა $\{F_n\}$ სისტემით, მაშინ F_n სიმრავლეებიდან ერთი მაინც შეიცავს F სიმრავლის პორციას.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არც ერთი F_n სიმრავლე არ შეიცავს F სიმრავლის არც ერთ პორციას. მაშინ მათემატიკური ინდუქციით შეგვიძლია ავაგოთ F სიმრავლის ისეთ პორციათა კლებადი მიმდევრობა $P_1\supset P_2\supset\cdots\supset P_n\supset\cdots$, რომ

$$P_k\cap F_k=\Lambda\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

მაშასადამე,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}P_k\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\Lambda.$$

მაგრამ კანტორის თეორემის თანახმად, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ სიმრავლე ცარიელი არაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ F სიმრავლე მთლიანად მოთავსებული არაა $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ ჯამში, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. $[a,\ b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია რომ იყოს ACG-ფუნქცია მოცემულ სეგმენტზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე $E\subset[a,\ b]$ შეიცავდეს ისეთ პორციას, რომელზედაც $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $F(x)$ არის ACG-ფუნქცია. მაშინ $[a,\ b]$ წარმოიდგინება როგორც ჯამი ისეთი სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემისა $\{E_n\}$, რომლებზედაც $F(x)$ არის AC-ფუნქცია. $F(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, შეგვიძ-

ლია ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი E_n სიმრავლე ჩაკეტილია. ბერის თეორემის თანახმად, ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე $E\subset[a, b]$ შეიცავს P პორციას, რომელიც მთლიანად მოთავსდება რომელიმე E_n სიმრავლეში. მაგრამ რაკი $F(x)$ არის AC-ფუნქცია E_n სიმრავლეზე, ამიტომ იგი იქნება AC-ფუნქცია P სიმრავლეზე და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. დავუშვათ, რომ ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე $E\subset[a, b]$ შეიცავს პორციას, რომელზედაც $F(x)$ არის AC-ფუნქცია და ვთქვათ, $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ წარმოადგენენ $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებულ ყველა რაციონალურ ინტერვალებს, რომლებზედაც $F(x)$ არის ACG-ფუნქცია. ცხადია, ასეთი ინტერვალები არსებობს. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$G=\bigcup_n I_n, \quad H=[a, b]-G.$$

G სიმრავლეზე $F(x)$ არის ACG-ფუნქცია.

დავამტკიცოთ, რომ H სიმრავლე შედგება მხოლოდ a და b წერტილებისაგან. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, H სიმრავლე შეიცავს (a, b) ინტერვალის რაიმე წერტილს. რაკი H სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ არსებობს ისეთი I ინტერვალი, რომ $H\cap I\neq\Lambda$ და $F(x)$ არის AC-ფუნქცია $H\cap I$ სიმრავლეზე. ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ I რაციონალური ინტერვალია. $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას I ინტერვალზე, ვინაიდან

$$I\subset(H\cap I)\cup G.$$

მაშასადამე, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ $I=I_m$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან I შეიცავს H სიმრავლის წერტილებს, I_m კი არ შეიცავს H სიმრავლის არც ერთ წერტილს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამიტომ H შედგება მხოლოდ a და b ელემენტებისაგან. ამ სიმრავლეზე $F(x)$ არის ACG-ფუნქცია. მაშასადამე $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 23. თუ $I_0=[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია ACG-ფუნქციაა I_0-ზე და I_0 სეგმენტის თითქმის ყოველ x წერტილში $D_{ap}F(x)\geqslant 0$, მაშინ $F(x)$ ზრდადია I_0-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ წარმოადგენენ I_0-დან აღებულ ისეთ რაციონალურ სეგმენტებს, რომლებზედაც $F(x)$ ზრდადია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H=I_0-\bigcup_n r^{\circ}_n.$$

დავამტკიცოთ, რომ H შედგება მხოლოდ a და b წერტილებისაგან. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, H შეიცავს (a, b) ინტერვალის წერტილებს. რაკი H ჩაკეტილი სიმრავლეა და $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად H შეიცავს ისეთ პორციას $P=H\cap I$, რომელზედაც $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია. ამის გარდა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ I რაციონალური სეგმენტია.

შემდეგ, რაკი $F(x)$ ზრდადია $(I_0-P)^0$ სიმრავლეზე და თითქმის ყველგან P-ზე $D_{ap}F(x)\geqslant 0$, ამიტომ მე-20 თეორემის თანახმად $F(x)$ იქნება ზრდადი I_0 სეგმენტზე. მაშასადამე, არსებობს ისეთი r_k, რომ $I=r_k$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ვინაიდან ერთის მხრივ I° შეიცავს H სიმრავლის წერტილებს, ხოლო მეორე მხრივ r°_k ინტერვალი არ შეიცავს H სიმრავლის წერტილებს.

ამრიგად, H სიმრავლე შედგება მხოლოდ a და b წერტილებისაგან და, მაშასადამე, $F(x)$ ზრდადია I_0 სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. *თუ $F(x)$ არის ACG-ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე და $D_{ap}F(x)=0$ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე, მაშინ $F(x)=C$.*

მართლაც, რაკი $D_{ap}F(x)=0$ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე, ამიტომ $F(x)$ არ იქნება არც ზრდადი და არც კლებადი მოცემულ სეგმენტზე, ე. ი. იგი მუდმივია.

შედეგი 2. *თუ $F(x)$ და $\Phi(x)$ წარმოადგენენ ACG-ფუნქციებს $[a, b]$ სეგმენტზე და თითქმის ყველგან ამ სეგმენტზე $D_{ap}F(x)=D_{ap}\Phi(x)$, მაშინ $F(x)=\Phi(x)+C$.*

მართლაც, პირობის ძალით, თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე

$$D_{ap}[F(x)-\Phi(x)]=0.$$

აქედან, 1-ლი შედეგის თანახმად

$$F(x)-\Phi(x)=C.$$

საიდანაც $F(x)=\Phi(x)+C$.

თეორემა 24. *თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $F(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ქვედა და ზედა აპროქსიმატული წარმოებულები, გარდა, შესაძლებელია, წერტილთა თვლადი სიმრავლისა, მაშინ $F(x)$ იქნება ACG-ფუნქცია.*

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A=\{x:-\infty<\underline{D}_{ap}F(x)\leqslant\overline{D}_{ap}F(x)<+\infty\}.$$

A სიმრავლის ყოველ x წერტილს შევუსაბამოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ x წარმოადგენდეს $\{t : |F(t)-F(x)| \geqslant n(t-x)\}$ სიმრავლის დისპერსიის წერტილს. შემდეგ, ვთქვათ, A_n არის A სიმრავლის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომ ყოველი h რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $0 \leqslant h \leqslant \frac{2}{n}$, შესრულდეს უტოლობა

$$\mu(\{t : |F(t)-F(x)| \geqslant n(t-x),\ x \leqslant t \leqslant x+h\}) < \frac{h}{4}. \tag{6.3}$$

ცხადია,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

თუ ყოველი მთელი i რიცხვისათვის შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A^i{}_n = A_n \cap \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right],$$

გვექნება

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} A^i{}_n.$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველ $A^i{}_n$ სიმრავლეზე $F(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას. ავიღოთ $A^i{}_n$ სიმრავლის ორი ნებისმიერი წერტილი x_1 და x_2, სადაც $x_1 < x_2$ და ვთქვათ, $x_3 = 2x_2 - x_1$. აქედან გვაქვს

$$0 < x_3 - x_1 = 2(x_3 - x_2) \leqslant \frac{2}{n}.$$

თუ (6.3) უტოლობაში ვიგულისხმებთ $x = x_1$ და $h = x_3 - x_1$, გვექნება

$$\mu(\{t : |F(t)-F(x_1)| \geqslant n(t-x_1),\ x_1 \leqslant t \leqslant x_3\}) \leqslant \frac{x_3 - x_1}{4} = \frac{x_3 - x_2}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$\mu(\{t : |F(t)-F(x_1)| \geqslant n(t-x_1),\ x_2 \leqslant t \leqslant x_3\}) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{2}. \tag{6.4}$$

შემდეგ, $0 < x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{n}$. ახლა, თუ (6.3) უტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $x = x_2$ და $h = x_3 - x_2$, მივიღებთ

$$\mu(\{t : |F(t)-F(x)| \geqslant n(t-x_2),\ x_2 \leqslant t \leqslant x_3\}) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{4}. \tag{6.5}$$

(6.4) და (6.5) უტოლობებიდან გამომდინარეობს არსებობა ისეთი წერ-

ტილისა $t_0\in[x_2,x_3]$, რომ ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს თანაფარდობებს

$$|F(t_0)-F(x_1)|<n(t_0-x_1)\leqslant n(x_3-x_1)=2n(x_2-x_1),$$

$$|F(t_0)-F(x_2)|<n(t_0-x_2)\leqslant n(x_3-x_1)=2n(x_2-x_1).$$

ამ უტოლობათა ძალით გვაქვს:

$$|F(x_2)-F(x_1)|\leqslant 4n(x_2-x_1). \tag{6.6}$$

ამრიგად, $A^i{}_n$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი x_1 და x_2 წერტილისათვის მართებულია (6.6) უტოლობა. ამიტომ $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია $A^i{}_n$ სიმრავლეზე. მაშასადამე, $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას A სიმრავლეზე.

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა $[a, b]-A=D$. პირობის ძალით D სასრული ან თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ D სიმრავლეზე $F(x)$ იქნება ACG-ფუნქცია და, მაშასადამე, $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $F(x)$ ფუნქციას აქვს ამ სეგმენტის ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლებელია, წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლისა, სასრული წარმოებული რიცხვები $\overline{D}^+F(x)$ და $\underline{D}^+F(x)$ ან $\left(\overline{D}^-F(x)\right.$ და $\left.\underline{D}^-F(x)\right)$, მაშინ $F(x)$ წარმოადგენს ACG^*-ფუნქციას.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A=\{x:-\infty<\underline{D}^+F(x)<\underline{D}^+F(x)<+\infty\}.$$

აღვნიშნოთ A_n სიმბოლოთი A სიმრავლის ისეთი x წერტილთა სიმრავლე, რომ ყოველი x' წერტილისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $0\leqslant x'-x\leqslant\frac{1}{n}$, მართებული იყოს უტოლობა

$$|F(x')-F(x)|\leqslant n(x'-x), \tag{6.7}$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A^i{}_n=A_n\cap\left[\frac{i}{n}+\frac{i+1}{n}\right],$$

გვექნება

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}A^i{}_n.$$

ახლა განვიხილოთ სეგმენტი $\Delta=[x_1, x_2]$, რომლის ბოლოები $A^i{}_n$ სიმ-

რავლეს ეკუთვნის. მაშინ Δ სეგმენტიდან აღებული ყოველი x' წერტილისათვის გვექნება

$$0 \leqslant x' - x_1 \leqslant \frac{1}{n}.$$

მაშასადამე, (6.7) უტოლობის თანახმად,

$$|F(x') - F(x_1)| \leqslant n(x' - x_1) \leqslant n|\Delta|.$$

აქედან ვღებულობთ

$$O(F; \Delta) \leqslant 2n|\Delta|. \qquad (6.7)$$

დასასრულს განვიხილოთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ისეთ სეგმენტთა სასრული სისტემა $\{\Delta_k\}_{k=1}^{p}$, რომელთა ბოლოები A'_n სიმრავლეს ეკუთვნის. მაშინ (6.7) უტოლობის თანახმად გვექნება

$$\sum_{k=1}^{p} O(F; \Delta_k) \leqslant 2n \sum_{k=1}^{p} |\Delta_k|.$$

ამ უტოლობის საფუძველზე ვასკვნით, რომ $F(x)$ არის AC^*-ფუნქცია A'_n სიმრავლეზე. მაშასადამე, $F(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას A სიმრავლეზე.

შემდეგ, რაკი $[a, b] = A \cup D$, სადაც D სასრული ან თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ $F(x)$ იქნება ACG^*-ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. დანჟუას ინტეგრალების განსაზღვრა. უმარტივესი თვისებები

$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება D-ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ არსებობს ამ სეგმენტზე ACG-ფუნქცია $F(x)$ ისეთი, რომ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე მართებულია ტოლობა $D_{ap}F(x) = f(x)$. ამ შემთხვევაში $F(x)$ ფუნქციას ჰქვია $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი D-ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე.

სხვაობას $F(b) - F(a)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული D-ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება $(D)\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი:

$$F(b)-F(a)=(D)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება D^*-ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ არსებობს ამ სეგმენტზე ACG^*-ფუნქცია $F(x)$ ისეთი, რომ თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე მართებულია ტოლობა $F'(x)=f(x)$. ამ შემთხვევაში $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი D^*-ინტეგრალი, $F(b)-F(a)$ სხვაობას კი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება $(D^*)\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი:

$$F(b)-F(a)=(D^*)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.2}$$

D-ინტეგრალს ეწოდება დანჟუას ფართო ინტეგრალი, D^*-ინტეგრალს კი დანჟუას ვიწრო ინტეგრალი.

თეორემა 26. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები D-ინტეგრებადია (D^*-ინტეგრებადია) $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $A f(x)+B\varphi(x)$ აგრეთვე D-ინტეგრებადია (D^*-ინტეგრებადია) $[a, b]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$(D)\int_a^b [A f(x)+B\varphi(x)]\,dx=A\cdot(D)\int_a^b f(x)\,d(x)+B\cdot(D)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\left((D^*)\int_a^b [A f(x)+B\varphi(x)]\,dx=A\cdot(D^*)\int_a^b f(x)\,dx+B\cdot(D^*)\int_a^b \varphi(x)\,dx\right).$$

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 27. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია (D^*-ინტეგრებადია) $[a, b]$ და $[b, c]$ სეგმენტებზე, მაშინ იგი D-ინტეგრებადია (D^*-ინტეგრებადია) $[a, c]$ სეგმენტზე და ც.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ და $[b, c]$ სეგმენტებზე, ამიტომ არსებობს ისეთი $\Phi_1(x)$ და $\Phi_2(x)$ ფუნქციები, რომლებიც ACG-ფუნქციებია შესაბამისად $[a, b]$ და $[b, c]$ სეგმენტებზე და

$$D_{ap}\Phi_1(x)=f(x) \text{ თითქმის ყველგან } [a,\ b]\text{-ზე},$$
$$D_{ap}\Phi_2(x)=f(x) \text{ თითქმის ყველგან } [b,\ c]\text{-ზე}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$F_1(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(b)-\Phi_1(b),\quad F_2(x)=\Phi_2(x).$$

ცხადია, $F_1(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $F_1(b)=F_2(b)$. ამის გარდა, $F_1(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას $[a, b]$-ზე.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x), \text{ თუ } a\leqslant x\leqslant b, \\ F_2(x), \text{ თუ } b\leqslant x\leqslant c. \end{cases}$$

$F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, c]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე იგი ACG-ფუნქციაა. ამის გარდა, თითქმის ყველგან $[a, c]$ სეგმენტზე მართებულია ტოლობა

$$D_{ap}F(x)=f(x).$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, c]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 28. თუ $f(x)$ ფუნქცია D^*-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი D-ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე და

$$(D^*)\int_a^b f(x)\,dx=(D)\int_a^b f(x)\,dx.$$

თეორემა 29. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი იქნება D^*-ინტეგრებადი იმავე სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx=(D^*)\int_a^b f(x)\,dx.$$

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 30. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას მხოლოდ ერთი ინტეგრალი შეესაბამება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)$ და $\Phi(x)$ წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის

ორ სხვადასხვა განუსაზღვრელ D-ინტეგრალს. მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე გვექნება

$$D_{ap}F(x)=D_{ap}\Phi(x)=f(x).$$

აქედან 23-ე თეორემის მე-2 შედეგის თანახმად, გვექნება

$$F(x)=\Phi(x)+C.$$

მაშასადამე,

$$F(b)-F(a)=\Phi(b)-F(a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 81. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, და თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე ადგილი აქვს უტოლობას $f(x)\geqslant\varphi(x)$, მაშინ

$$(D)\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant(D)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{7.3}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)$ და $\Phi(x)$ წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განუსაზღვრელ D-ინტეგრალებს. მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე მართებულია ტოლობა

$$D_{ap}F(x)=f(x),\quad D_{ap}\Phi(x)=\varphi(x).$$

მაშასადამე, თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე,

$$D_{ap}F(x)\geqslant D_{ap}\Phi(x).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\Psi(x)=F(x)-\Phi(x)$, თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე გვექნება

$$D_{ap}\Psi(x)=D_{ap}F(x)-D_{ap}\Phi(x)\geqslant 0. \tag{7.4}$$

რადგანაც $\Psi(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ (7.4) უტოლობიდან, 23-ე თეორემის თანახმად, მივიღებთ

$$\Psi(b)-\Psi(a)\geqslant 0.$$

მაგრამ

$$\Psi(b)-\Psi(a)=F(b)-F(a)-[\Phi(b)-\Phi(a)]\geqslant 0.$$

აქედან მიიღება (7.3) უტოლობა.

თეორემა 32. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ზომადია და თითქმის ყველგან სასრული იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი D-ინტეგრალია $F(x)$. რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია ACG-ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ $[a, b]$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი ჩაკეტილ სიმრავლეთა ისეთი $\{E_n\}$ სისტემისა, რომ ყოველ E_n სიმრავლეზე $F(x)$ იქნება AC-ფუნქცია. მე-8 თეორემის თანახმად, ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს $F_n(x)$ ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, რომელიც E_n სიმრავლეზე ემთხვევა $F(x)$ ფუნქციას. მაშასადამე, თითქმის ყველგან E_n-ზე გვაქვს ტოლობა

$$f(x)=D_{ap}F(x)=F'_n(x)$$

და რაკი წარმოებული ფუნქციისა სასრული ვარიაციით ზომადია და თითქმის ყველგან სასრულია, ამიტომ $f(x)$ ზომადია და თითქმის ყველგან სასრულია E_n-ზე. ამრიგად, $f(x)$ ზომადია და თითქმის ყველგან სასრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 33. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და თითქმის ყველგან ამ სეგმენტზე $f(x)\geqslant 0$, მაშინ $f(x)$ იქნება ჯამებადი $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი D-ინტეგრალი. მაშინ თითქმის ყველგან $[a, b]$ სეგმენტზე გვექნება

$$D_{ap}F(x)=f(x)\geqslant 0.$$

რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია ACG-ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ 23-ე თეორემის თანახმად $F(x)$ ზრდადია. მაშასადამე, $F'(x)$ ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და რაკი თითქმის ყველგან $F'(x)=D_{ap}F(x)$, ამიტომ $f(x)$ წარმოადგენს ჯამებად ფუნქციას. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად, დანჟუას ინტეგრების პროცესი არაუარყოფითი ფუნქციისათვის ლებეგის ინტეგრების პროცესის ეკვივალენტურია.

დასასრულ, $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ხინჩინის აზრით ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ იგი ამ სეგმენტზე D-ინტეგრებადია და განუსაზღვრელი D—ინტეგრალი თითქმის ყველგან წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 8. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

ლემა 1. თუ $F(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო ამავე სეგმენტზე $\Phi(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრუ-

ლია და იგი სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია $F(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი $I=[\alpha, \beta]$ ქვესეგმენტისათვის მართებულია უტოლობები

$$|\Psi(\beta)-\Psi(\alpha)|\leqslant M\cdot|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)|+O(\Phi;\ I)[F(\beta)-F(\alpha)], \qquad (8.1)$$

$$O(\Psi;\ I)\leqslant M\cdot O(\Phi;\ I)+O(\Phi;\ I)[F(\beta)-F(\alpha)], \qquad (8.2)$$

სადაც

$$\Psi(x)=F(x)\Phi(x)-\int_a^x \Phi(t)\,dF(t), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

$M=\sup\limits_{a\leq x\leq b}|F(x)|$, ხოლო $O(\Psi;\ I)$ წარმოადგენს $\Psi(x)$ ფუნქციის რხევას I სეგმენტზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ I სეგმენტის ნებისმიერი ქვესეგმენტი $I^*=[\alpha^*, \beta^*]$. სტილტიესის ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად,

$$\Psi(\beta^*)-\Psi(\alpha^*)=[\Phi(\beta^*)-\Phi(\alpha^*)]\,F(\beta^*)+[F(\beta^*)-F(\alpha^*)]\,\Phi(\alpha^*)-$$

$$-\int_{\alpha^*}^{\beta^*}\Phi(x)\,dF(x)=[\Phi(\beta^*)-\Phi(\alpha^*)]\,F(\beta^*)+[F(\beta^*)-F(\alpha^*)][\Phi(\alpha^*)-\mu],$$

სადაც μ რიცხვი მოთავსებულია $\Phi(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს შორის. მაშასადამე,

$$|\Psi(\beta^*)-\Psi(\alpha^*)|\leqslant M\,|\Phi(\beta^*)-\Phi(\alpha^*)|+O(\Phi;\ I^*)\,[F(\beta^*)-F(\alpha^*)].$$

თუ ამ უტოლობაში I^* სეგმენტს შევცვლით I სეგმენტით, მივიღებთ (8.1) უტოლობას. ამ უტოლობიდან ადვილად მიიღება (8.2) უტოლობა.

შედეგი. თუ $\Phi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\Psi(x)$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე სეგმენტზე.

ლემა 2. თუ $\Phi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე მოთავსებულ რაიმე E სიმრავლეზე $\Phi(x)$ წარმოადგენს AC-ფუნქციას, მაშინ $\Psi(x)$ იქნება AC-ფუნქცია E-ზე.

დამტკიცება. რადგანაც $\Phi(x)$ არის AC-ფუნქცია E სიმრავლეზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი სეგმენტთა ყოველი სასრუ-

ლი სისტემისათვის $\{I_k=[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{n}$, სადაც $\alpha_k \in E$, $\beta_k \in E$, უტოლობიდან $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\eta$, გამომდინარეობს უტოლობები

$$\sum_{k=1}^{n}|\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2M},\ O(\Phi;\ I_k)<\frac{\varepsilon}{4M},\ (k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

სადაც $M=\sup\limits_{a\le x\le b}|F(x)|$. მაშასადამე, (8.1) უტოლობის თანახმად გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}|\Psi(\beta_k)-\Psi(\alpha_k)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, $\Psi(x)$ არის AC-ფუნქცია E-ზე. ლემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ თუ $\Phi(x)$ არის AC^*-ფუნქცია $[a, b]$-ზე მოთავსებულ E სიმრავლეზე, მაშინ $\Psi(x)$ იქნება აგრეთვე AC^*-ფუნქცია იმავე სიმრავლეზე.

შედეგი. თუ $\Phi(x)$ არის ACG-ფუნქცია (ACG^*-ფუნქცია) $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\Psi(x)$ ფუნქციაც იქნება ACG—ფუნქცია (ACG^*-ფუნქცია) იმავე სეგმენტზე.

თეორემა 34. თუ $F(x)$ ფუნქცია სასრული ვარიაციისაა $I_0=[a,\ b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე, მაშინ $F(x)\varphi(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია I_0-ზე და მართებულია ტოლობა

$$(D)\int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx=\Phi(b)\,F(b)-\Phi(a)\,F(a)-\int_a^b \Phi(x)\,dF\,(x), \tag{8.3}$$

სადაც

$$\Phi(x)=\Phi(a)+(D)\int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $F(x)$ ფუნქცია ზრდადია I_0 სეგმენტზე. განვიხილოთ $\Psi(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$\Psi(x)=F(x)\,\Phi(x)-\int_a^x \Phi(t)\,dF\,(t). \tag{8.4}$$

მე-2 ლემის შედეგის თანახმად $\Psi(x)$ წარმოადგენს ACG-ფუნქციას I_0 სეგმენტზე. (8.4) ტოლობიდან გვაქვს:

$$D_{ap}\Psi(x)=F'(x)\,\Phi(x)+F(x)\,D_{ap}\Phi(x)-\Phi(x)\,F'(x)=F(x)\,\varphi(x).$$

მაშასადამე, $F(x)\,\varphi(x)$ არის D-ინტეგრებადი ფუნქცია I_0 სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$(D)\int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx=\Psi(b)-\Psi(a). \tag{8.5}$$

თუ გავითვალისწინებთ (8.4) და (8.5) ტოლობებს, მივიღებთ (8.3) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 35. თუ $F(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\varphi(x)$ წარმოადგენს D^*-ინტეგრებად ფუნქციას იმავე სეგმენტზე, მაშინ $F(x)\,\varphi(x)$ ფუნქცია D^*-ინტეგრებადია $[a, b]$-ზე და მართებულია ტოლობა

$$(D^*)\int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx=\Phi(b)\,F(b)-\Phi(a)\,F(a)-\int_a^b\Phi(x)\,dF(x). \tag{8.6}$$

§ 9. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა

თეორემა 36. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია მონოტონურია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამავე სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია, მაშინ (a, b) ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ მართებულია ტოლობა

$$(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\cdot(D)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\cdot(D)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{9.1}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=(D)\int_a^x f(t)\,dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად,

$$(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=F(b)\,\varphi(b)-\int_a^b F(x)\,d\,\varphi(x).$$

რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად (a, b) ინტერვალში მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b F(x)\,d\,\varphi(x)=F(\xi)\,[\varphi(b)-\varphi(a)].$$

მაშასადამე,

$$(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\,F(\xi)+[F(b)-F(\xi)]\,\varphi(b)=$$

$$=\varphi(a)\cdot(D)\int_a^{\xi} f(t)\,dt+\varphi(b)\cdot(D)\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 37. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $\varphi(x)$ ფუნქცია კლებადია და $\varphi(b)\geqslant 0$, მაშინ (a, b) ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\cdot(D)\int_a^{\xi} f(x)\,dx. \qquad (9.2)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $g(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{როდესაც } a\leqslant x<b,\\ 0, & \text{როდესაც } x=b.\end{cases}$$

მაშინ (9.1) ფორმულის თანახმად (a, b) ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\cdot(D)\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

მაგრამ $g(a)=\varphi(a)$ და

$$(D)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

მაშასადამე, მართებულია (9.2) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 38. თუ $f(x)$ ფუნქცია D-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $\varphi(x)$ ფუნქცია ზრდადია და $\varphi(a)\geqslant 0$, მაშინ (a, b) ინტერვალში მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\cdot(D)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{9.3}$$

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 39. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია მონოტონურია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამავე სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია D^*-ინტეგრებადია, მაშინ (a, b)-ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D^*)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\cdot(D^*)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\cdot(D^*)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{9.4}$$

თეორემა 40. თუ $f(x)$ ფუნქცია D^*-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია კლებადია და $\varphi(b)\geqslant 0$, მაშინ (a, b) ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D^*)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\cdot(D^*)\int_a^\xi f(x)\,dx. \tag{9.5}$$

თეორემა 41. თუ $f(x)$ ფუნქცია D^*-ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\varphi(x)$ ზრდადია და $\varphi(a)\geqslant 0$, მაშინ (a, b) ინტერვალში მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$(D^*)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\cdot(D^*)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{9.6}$$

ლიტერატურა

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, ГИТТЛ, Москва, 1948.
2. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного. ГОНТИ, Москва, 1938.
3. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Физматгиз, Москва, 1961.
4. Бэр Р., Теория разрывных функций, перев. с франц. ГТТИ, Москва, 1932.
5. Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно-малых, т. I, перев. с франц. ,ГТТИ, Москва, 1933; т. II, перев. с франц., ГТТИ, Москва, 1935.
6. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I, перев. с немец., ГТТИ, Москва, 1947.
7. Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса. ОНТИ, Москва, 1936.
8. Гохман Э. Х., Интеграл Стильтьеса и его приложения, Физматгиз, Москва, 1958.
9. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, перев. с англ., Москва, 1939.
10. Камке Е., Интеграл Лебега — Стильтьеса, перев. с немец., Физматгиз, Москва, 1959.
11. Ковалько А. С., Интеграл Лебега, издат. Львовского ун-та, 1951.
12. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. I, издат. Московского ун-та, 1954; вып. II, изд., Московского ун-та, 1960.
13. Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, перев. с франц., ГТТИ, Москва, 1934.
14. Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного. Учпедгиз, Москва, 1940.
15. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд. Гостехиздат, Москва, 1951.
16. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа. Гостехиздат, Москва, 1951.
17. Макаров И. П., Теория функций действительного переменного, Госуд. издат. «Высшая школа», Москва, 1962.
18. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, Москва, 1957.
19. Романовский П. И. Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis, Fundam. Math., 19, 38—44, 1932.
20. Романовский П. И. Integrale de Denjoy dans l'espace á n-dimensions. Матем,. Сборник, т. 9, 281—307, 1941.
21. Сакс С., Теория интеграла, перев. с англ., ИЛ., Москва, 1949.

22. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, Москва, 1959.
23. Титчмарш Е., Теория функций, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1951.
24. Фролов Н. А., Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, Москва, 1953.
25. Халмош П., Теория меры, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1953.
26. Хаусдорф Ф., Теория множеств, перев. с немец., ОНТИ, Москва, 1937.
27. Хинчин А. Я., Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy, C. R. Acad. Sci. Paris, 162, 287—291, 1916.
28. Хинчин А. Я., О процессе интегрирования Данжуа, Матем. Сборник, Москва, 30, 543—557, 1918.
29. Челидзе В. Г., Двойные интегралы Данжуа, თბილისის მათემ. ინსტიტ. შრომები, XV, 155—242, 1947.
30. Aumann G., Reelle Funktionen, Berlin — Gölingen — Heidelbéerg, 1954.
31. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
32. Borel E., Leoçns sur la théorie des fonctions, Paris, 1928.
33. Carathéodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leibzig—Berlin, 1927.
34. Carathéodory C., Masβ und Integral und ihre Aigebraisierung, Basel, 1956.
35. Denjoy A., Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue, C. R. Acad. Sci. Paris, 154, 859—862, 1912.
36. Denjoy A., Mémoire sur la totalisation des nombres d'érivés non — sommables, Ann. Ecole Norm., 33. 127—222, 1916.
37. Fraenkel A., Einleitung in die Mengenlehre, Berlin, 1928.
38. Graves L. M. The theory of functions of real variables, New York—London, 1956.
39. Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, I. Band, Berlin, 1921.
40. Hahn H., Reelle Funktionen, I. Teil: Punktfunktionen, Leibzig, 1932.
41. Hahn H. and Rosenthal A., Set functions, Albuquerque, 1948.
42. Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, New York, 1949.
43. Hobson E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, vol., I, Cambridge, 1927; vol. II, 1926.
44. Ieffery R. L., The theory of functions of a real variable, Toronto, 1951.
45. Kempisty S., Sur les fonctions absolument continues d'intervale. Fundam. Math., 27, 10—37, 1936.
46. Krzyzánski M., Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables. C. R. Acad. Sci Paris, 198, 2058—2060, 1934.
47. Krzyzánski M., Sur l'extension de l'opération intégrale de Denjoy aux fonctions de deux variables. Bull. du Séminaire Math. de l'université de Wilno, 2, 41—51, 1939.
48. Kestelman H., Modern theories of integration, Oxford, 1937.

49. L o o m a n H., Sur la totalisation des dérivées des fonctions continue de plusieurs variables independantes, Fundam. Math., IV, 246—285, 1923.
50. M c S h a n e E. I., Integration, Princeton, 1944.
51. N e u m a n n I. von, Functional Operators, vol. 1, Measures and Integgrals, Princeton, 1950.
52. S c h l e s i n g e r L. und P l e s s n e r A., Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Berlin — Leibzig, 1929.
53. S i e r p i n s k i W., Leçons sur les nombres transfinis, Paris, 1950.
54. S i k o r s k i R., Funkcje rzeczywiste, m. I, Warszawa, 1958, m. II, Warszawa, 1959.
55. S t o n e M. H., The theory of real functions, part I, 1940.
56. V a l l é e P o u s s i n C., Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Paris, 1916.

შინაარსი

თ ა ვ ი IV

კარდინალური რიცხვები

თ ა ვ ი V

მეტრიკული სივრცე

თ ა ვ ი VI

სრული და კომპაქტური სივრცეები

თავი VII

ნამდვილი ფუნქციები

თავი VIII

ფუნქციები სასრული ვარიაციით, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები

თავი IX

ზომადი სიმრავლეები

თავი X

ზომადი ფუნქციები

თ ა ვ ი XI

ელემენტარული ფიგურის ფუნქციები

თ ა ვ ი XII

წარმოებული რიცხვები

თ ა ვ ი XIII

რიმანის ინტეგრალი

თ ა ვ ი XIV

ლებეგის ინტეგრალი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის

თ ა ვ ი XV

ლებეგის ზოგადი ინტეგრალი

თ ა ვ ი XVI

ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

თ ა ვ ი XVII

L^p სივრცე

თ ა ვ ი XVIII

სტილტიესის ინტეგრალი

თ ა ვ ი XIX

დანჟუას ინტეგრალები

საზოგადოებრივი რედაქტორი ა. ბენდუქიძე
გამომც. რედაქტორი დ. ბერიძე
ტექრედაქტორი ა. კაციტაძე
კორექტორი მ. კაპახიძე

გადაეცა წარმოებას 24/X-63 წ. ხელმოწერილია
დასაბეჭდად 26/VI-64 წ. ანაწყობის ზომა $6^1/_4 \times 10$.
ქაღალდის ზომა 60×90. ნაბეჭდი თაბახი 39,25.
საავტორო თაბახი 31,7. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 34.
უე 03691 ტირაჟი 2.000 შეკვ. № 1054.

ფასი 1 მან. 33 კაპ.

სტამბა № 1, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.
Типография № 1, Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50.