ე. წითლანაძე

# ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სახელმწიფო კომიტეტის მიერ დაშვებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლებისათვის

გამომცემლობა „ცოდნა"
თბილისი—1964

ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები შედგენილია მექანიკა-მათემატიკის, ფიზიკის და კიბერნეტიკის ფაკულტეტების სტუდენტთათვის. იგი გამოდგება აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის და ასპირანტებისათვის.

წიგნში წარმოდგენილია მეტრული სივრცის თეორია, ტოპოლოგიური სივრცის საკითხები, წრფივი ნორმირებული სივრცე და წრფივი ფუნქციონალის თვისებები ამ სივრცეში. განხილულია წრფივი სივრცის სუსტი ტოპოლოგიის საკითხები, რომლებიც ხშირად გამოიყენებიან თანამედროვე ვარიაციათა აღრიცხვაში, ფუნქციონალურ განტოლებებში და წრფივი და არაწრფივი პროგრამირების ამოცანებში. დაბოლოს მოკლედ შესწავლილია ფუნქციონალური განტოლება სრულად უწყვეტი წრფივი ოპერატორით.

## წინასიტყვაობა

კლასიკური მათემატიკური ანალიზის ამოცანების განზოგადებამ და ამ განზოგადებული ამოცანების ერთი გამაერთიანებელი მეთოდით გამოკვლევამ, მეოცე საუკუნის დასაწყისში, წარმოქმნა ახალი მეცნიერული დისციპლინა — ფუნქციონალური ანალიზი.

ფუნქციონალური ანალიზის განვითარებაში მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა ვარიაციათა აღრიცხვის პირობითი ექსტრემუმის თანამედროვე ამოცანების შესწავლამ, რომლებშიც მოითხოვება ფუნქციონალის მაქსიმუმის ან მინიმუმის მოძებნა აბსტრაქტულ სივრცეებში. ამ მიმართულებით განვითარდა ვარიაციათა აღრიცხვის ტოპოლოგიური მეთოდები, რომელიც წარმოადგენს ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან თავს.

წრფივი, განსაკუთრებით კი არაწრფივი, ინტეგრალური განტოლებების შესწავლამ მოითხოვა ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ნაწილის — ოპერატორთა თეორიის შექმნა. გამოირკვა, რომ ხშირად არსებობს ღრმა ანალოგია ალგებრის, გეომეტრიის, მათემატიკური ანალიზის, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და მათემატიკის სხვა დარგების ამოცანების გამოკვლევის მეთოდებს შორის. ხსენებული ანალოგიების საფუძველზე წარმოიქმნა ამ ამოცანების ზოგადი — ფუნქციონალური ანალიზის — მეთოდებით შესწავლის თეორია.

ფუნქციონალური ანალიზისათვის დამახასიათებელი ის არის, რომ მასში სრულიად სხვადასხვა ბუნების მათემატიკური ობიექტები (მაგალითად, რიცხვითი მიმდევრობები, ფუნქციები, წირები, ზედაპირები და სხვა) განიხილებიან როგორც გარკვეული აბსტრაქტული სივრცის წერტილები.

აბსტრაქტულ სივრცეთა შორის მნიშვნელოვანია ე. წ. წრფივი სივრცეები და წრფივ სივრცეთა შორის — ბანახის ტიპის (ანუ ნორმირებული) სივრცეები, რომელთა თეორია ამჟამად ყველაზე სრულად არის დამუშავებული.

ფუნქციონალური ანალიზის მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ მისი მეთოდები საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს დავუკავშიროთ მათემატიკის სულ სხვადასხვა დარგები.

წინამდებარე წიგნი მოიცავს ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლებს, რომელიც შეუძლია შეისწავლოს ყველამ, ვისაც უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის განათლება აქვს მესამე კურსის დონეზე. წიგნში გადმოცემული მასალა, რამდენადმე შემცირებული მოცულობით, დაწყებული 1950 წლიდან, მრავალჯერ წავიკითხე თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის. წიგნის მოცულობის განსაზღვრულობამ საშუალება არ მოგვცა მასში შეგვეტანა დიფერენციალური აღრიცხვის საკითხები ნორმირებულ სივრცეებში, წრფივ ოპერატორთა სპექტრული თეორია ჰილბერტის სივრცეში და არაწრფივი ფუნქციონალური ანალიზის ამოცანები, რო-

მლებსაც ჩვეულებრივად ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლების დამუშავების შემდეგ ვუკითხავთ სტუდენტებს. წიგნის მასალა, გარდა მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისა, გამოადგებათ ასპირანტებს, თეორიული ფიზიკის შემსწავლელთ და ახალგაზრდა მკვლევარ მათემატიკოსებს.

იმის გამო, რომ წინამდებარე ნაშრომი წარმოადგენს პირველ ცდას ფუნქციონალური ანალიზის ქართულ ენაზე გამოცემისა, ამიტომ იგი ვერ იქნება თავისუფალი ნაკლოვანებებისაგან. მკითხველის ყოველ შენიშვნას ჩვენ სიამოვნებით გავითვალისწინებთ წიგნის შემდგომი გამოცემების დროს.

წიგნის პირველ თავში გადმოცემულია მეტრული სივრცის საკითხები და მოყვანილია ტიპიური მეტრული სივრცეების მაგალითები. ვინაიდან ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად საფუძველს სიმრავლეთა თეორია წარმოადგენს, ამიტომ ამავე თავში გადმოცემულია აგრეთვე სიმრავლეთა თეორიის ზოგიერთი მეტრული საკითხი. გარდა ამისა, აქვე შეისწავლება სეპარაბელური და კომპაქტური სივრცეების ისეთი საკითხებიც, რომლებიც თანამედროვე მათემატიკაში მიჩნეულია, როგორც კლასიკური მასალა.

მეორე თავი დათმობილი აქვს ტოპოლოგიურ სივრცეს. სულ რამდენიმე უკანასკნელმა ათეულმა წელმა ნათელყო, რომ ფუნქციონალური ანალიზის განვითარებაში უდიდესი როლის შესრულება შეუძლია ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდებს. ამის გამო ამ თავში ყურადღება მივაქციეთ ტოპოლოგიური სივრცის ისეთ საკითხებს, რომლებსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც წრფივი, ისე არაწრფივი, ფუნქციონალური ანალიზის ამოცანების შესწავლაში.

მესამე თავში შესწავლილია წრფივი ნორმირებული სივრცის ძირითადი საკითხები. აქვე მოთხრობილია წრფივი ოპერატორების უმარტივესი თვისებების შესახებ. განხილულია აგრეთვე წრფივ ოპერატორთა სიმრავლე, როგორც წრფივი ნორმირებული სივრცე.

მეოთხე თავში განხილულია წრფივი ფუნქციონალები. შესწავლილია წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელების ამოცანა და მოძებნილია მათი ზოგადი სახე ზოგიერთი კერძო სახის ნორმირებულ სივრცეებში. აქვე მოყვანილია წრფივი ფუნქციონალის გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

მეხუთე თავი მიძღვნილია ელემენტებისა და წრფივი ფუნქციონალების სუსტი კრებადობისა და სუსტი კომპაქტურობის საკითხისადმი, რომლებსაც დიდი გამოყენება აქვთ თანამედროვე ვარიაციათა აღრიცხვის ამოცანებში და არაწრფივი ფუნქციონალური განტოლებების შესწავლაში.

მცირე მოცულობის მეექვსე თავი დათმობილი აქვს სრულად უწყვეტი ოპერატორის მარტივი თვისებების შესწავლას. აქვე განხილულია ოპერატორული განტოლება სრულად უწყვეტი ოპერატორით.

მთავარი ლიტერატურული წყაროები, რომლებითაც წიგნის შედგენისას ვსარგებლობდი, მოყვანილია ნაშრომის ბოლოში.

სასიამოვნო მოვალეობად ვთვლი მადლობა გადავუხადო პროფ. ვლადიმერ ჭელიძეს, რომლის რჩევებით და კრიტიკული შენიშვნებით წიგნის შედგენის დროს სისტემატურად ვსარგებლობდი.

წიგნის გამოსაცემად მომზადებაში დიდი დახმარება გამიწიეს ც. გაბელაიამ, ლ. ღლონტმა და კ. წითლანაძემ, რისთვისაც მათ უღრმეს მადლობას ვუძღვნი.

**ე. წითლანაძე**

**თბილისი**
**აპრილი, 1963 წ.**

# თავი I

## მეტრული სივრცე

### § 1. ფუნქციის ცნების განზოგადება

შესავალში აღნიშნული იყო, რომ ფუნქციონალური ანალიზისათვის დამახასიათებელია მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებების განზოგადება. მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ცნება, როგორც ვიცით, არის ორ (ან რამდენიმე) ცვლადს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების განსაზღვრა. შევეხოთ, პირველ ყოვლისა, ამ ცნების განზოგადებას. ასეთ განზოგადებას, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მივყავართ ოპერატორის განსაზღვრაზე.

ვთქვათ, $X$ და $Y$ ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეებია. გავიხსენოთ, რომ თუ $X$ სიმრავლის ყოველ $x$ ელემენტს, რაიმე წესით, შესაძლოა შევუსაბამოთ $Y$ სიმრავლის ერთი გარკვეული $y$ ელემენტი, მაშინ იტყვიან, რომ $X$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ცალსახა $y=f(x)$ ფუნქცია. ამ ტოლობაში $f$ აღნიშნავს წესს, რომლითაც $X$ სიმრავლის ყოველ $x$ ელემენტს შევუსაბამებთ $Y$ სიმრავლის $y$ ელემენტს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალური დამოკიდებულების მოყვანილ განსაზღვრაში სრულიადაც არ არის აუცილებელი, რომ $X$ და $Y$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეები იყოს. თუ $X$-ის და $Y$-ის მაგიერ სხვა ნებისმიერი ბუნების ელემენტების სიმრავლეებს ავიღებთ, მივიღებთ ფუნქციონალური დამოკიდებულების განზოგადებულ ცნებას.

ვთქვათ, $X$ და $Y$ ნებისმიერი ბუნების ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლეებია. წარმოვიდგინოთ, რომ ყოველ $x \in X$ ელემენტს გარკვეული წესით შესაძლოა შევუსაბამოთ ერთი გარკვეული $y \in Y$ ელემენტი. შესაბამისობის ხსენებული წესი აღვნიშნოთ $U$ ასოთი, ხოლო შესაბამისობის ფაქტი ჩავწეროთ ასე

$$y = Ux = U(x). \tag{1.1}$$

ამ პირობებში $U$-ს ვუწოდოთ *ოპერატორი*, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს გადასახავს გარკვეულ $y \in Y$ ელემენტში. თვით $X$ სიმრავლეს უწოდებენ $U$ ოპერატორის *განსაზღვრის არეს*, ხოლო $Y$ სიმრავლეს — *მნიშვნელობათა არეს*. კერძოდ, როცა $Y$ — რიცხვთა სიმრავლეა, (1.1) ტოლობა *ფუნქციონალს* განსაზღვრავს. (1.1) გამოსახულება $x$-ის და $y$-ის შესაბამისობის სიმბოლოა. ცხადია, რომ ასეთი ზოგადი სახით მოცემული შესაბამისობის საშუალებით ბევრი რამის თქმა არ შეიძლება. ფუნქციონალური დამოკიდებულების იმ თვისებების შესანარჩუნებლად, რომლებიც მათემატიკურ ანალიზშია ცნობილი, საჭიროა $X$ და $Y$ სიმრავლეებს გარკვეული პირობები მოვთხოვოთ. ამ გზით ჩვენ მივალთ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი $R_3$ სივრცის ცნების განზოგადებამდე. მართლაც, სივრცე $R_3$, როგორც გეომეტრიაშია ცნობილი, ყველა დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა სამეულების სიმრავლეა. ამასთანავე $R_3$ სივრცის ყოველ $M$ წერტილს რიცხვთა ერთადერთი

$(x, y, z)$ სამეული განსაზღვრავს და პირიქით. გარდა ამისა, მანძილი $R_3$ სივრცის $M_1(x, y, z)$ და $M_2(x, y, z)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ცნობილი ფორმულით:

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (1.2)$$

ამის ანალოგიურად განზოგადებული სივრცე შეიძლება ვუწოდოთ რიცხვთა სხვადასხვა მიმდევრობების (და არა უსათუოდ სამეულების) სიმრავლეს, გარკვეული თვისების ფუნქციების სიმრავლეს, ფუნქციათა მიმდევრობების სიმრავლეს და ა. შ. ისე როგორც $R_3$ სივრცის შემთხვევაში, განზოგადებულ სივრცეშიც, გარკვეული პირობების დაცვით, ზოგჯერ შესაძლოა განვსაზღვროთ მანძილი ამ სივრცის ელემენტებს შორის.

## § 2. მეტრული სივრცე

ნებისმიერი ელემენტებისაგან შედგენილ $X$ სიმრავლეს მეტრული სივრცე ეწოდება, თუ ყოველ ორ $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ ისეთი ნამდვილი $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ რიცხვი, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$\alpha$) $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})\geqslant 0$, $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x^{(1)}=x^{(2)}$ (იგივეობის აქსიომა),

$\beta$) $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})=\rho(x^{(2)}, x^{(1)})$ (სიმეტრიის აქსიომა),

$\gamma$) ნებისმიერი სამი $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \in X$ ელემენტისათვის შესრულებულია უტოლობა:

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)})+\rho(x^{(2)}, x^{(3)})\geqslant\rho(x^{(1)}, x^{(3)}) \quad (1.3)$$

(სამკუთხედის აქსიომა).

როგორც ამ განსაზღვრიდან ჩანს $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ (ანუ, სხვანაირად, მანძილი $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ ელემენტებს შორის) არის ორი ცვლადის $x^{(1)}$-ის და $x^{(2)}$-ის ფუნქცია. ამ ფუნქციას $X$ სივრცის მ ე ტ რ ი კ ა ს უწოდებენ. მეტრული სივრცის ელემენტებს ხშირად ამ სივრცის წერტილებსაც უწოდებენ. მკითხველი ადვილად წარმოიდგენს, რომ $\alpha$), $\beta$) და $\gamma$) აქსიომები გამოსახავენ $R_3$ სივრცეში (1. 2) ფორმულით მოცემული მანძილის ყველაზე მნიშვნელოვან თვისებებს. რაიმე სიმრავლეში მეტრიკის შემოღების ოპერაციას ამ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს მ ე ტ რ ი ზ ა ც ი ა ს უწოდებენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1. სამკუთხედის $\gamma$) აქსიომა შეიძლება განზოგადებული სახითაც ჩაიწეროს. სახელდობრ, თუ $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \in X$ ელემენტების სასრული მიმდევრობაა, მაშინ, როცა შესრულებულია (1.3) უტოლობა, შესრულებული იქნება შემდეგი უტოლობაც

$$\rho(x^{(1)}, x^{(k)})\leqslant\rho(x^{(1)}, x^{(2)})+\rho(x^{(2)}, x^{(3)})+\cdots+\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}). \quad (1.4)$$

2. $\gamma$) აქსიომიდან ადვილად მიიღება აგრეთვე ე. წ. „ოთხკუთხედის აქსიომა". თუ $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)} \in X$ ნებისმიერი ოთხი ელემენტია, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\rho(x^{(1)}, x^{(3)})-\rho(x^{(2)}, x^{(4)})|\leqslant\rho(x^{(1)}, x^{(2)})+\rho(x^{(3)}, x^{(4)}). \quad (1.5)$$

ეს უტოლობა გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ ოთხკუთხედში ორი გვერდის სხვაობა დანარჩენი ორი გვერდის ჯამს არ აღემატება.

3. (1.3) უტოლობიდან გამომდინარეობს ფორმულა:

$$|\rho(x^{(1)}, x^{(3)})-\rho(x^{(2)}, x^{(3)})|\leqslant\rho(x^{(1)}, x^{(2)}),$$

რომელიც სამკუთხედის აქსიომის სხვანაირ ჩაწერას წარმოადგენს.

მეტრულ $X$ სივრცეში და მასში აღებული სიმრავლეებისათვის შესაძლოა შემოვიღოთ ისეთი ცნებები, რომლებიც ცნობილია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებისათვის. მოვიყვანოთ ზოგიერთი მათგანი.

ვთქვათ, $M\subset X$ რაიმე სიმრავლეა და $p\in X$ არის ფიქსირებული წერტილი. მანძილი, $p$ წერტილიდან $M$ სიმრავლემდე, ვუწოდოთ არაუარყოფით $\rho(p, x)$ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს, როცა $x$ გაირბენს $M$ სიმრავლის ყველა წერტილს. ყველა იმ $p$ წერტილის სიმრავლეს, რომლებისთვისაც $\rho(p, M)=0$ ეწოდება $M$ *სიმრავლის ჩაკეტვა* და აღინიშნება $\overline{M}$-ით. $M$ სიმრავლეს *ჩაკეტილი ეწოდება*, როცა იგი თავის ჩაკეტვას ემთხვევა, ე. ი. $\overline{M}=M$.

ჩაკეტილი სიმრავლის მაგალითებია: 1) მეტრულ სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი სიმრავლე, რომლის ელემენტების რიცხვი სასრულია. 2) რიცხვითი წრფის ნებისმიერი $[a, b]$ სეგმენტის წერტილთა სიმრავლე. 3) სიმრავლე $M=$

$=M_1\cup M_2$, სადაც $M_1=\left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $M_2=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}$

და ა. შ.

იტყვიან, რომ $N$ *ღია სიმრავლეა*, თუ მისი $X-N$ დამატება ჩაკეტილია.

განვიხილოთ $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ზედა $d$ საზღვარი, როცა $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ გაირბენს $E$ სიმრავლის ყველა წერტილს. $d$ რიცხვს ეწოდება $E$ სიმრავლის *დიამეტრი*. $M$ სიმრავლეს *შემოსაზღვრული სიმრავლე* ეწოდება, თუ არსებობს $p\in M$ ელემენტი და ისეთი დადებითი $\eta$ რიცხვი, რომ $\rho(p, x)\leqslant\eta$, როცა $x$ გაირბენს $M$ სიმრავლის ყველა წერტილს. ვთქვათ, $x_0\in M$ ფიქსირებული ელემენტია $\varepsilon>0$ მოცემული რიცხვი. ყველა $x\in X$ წერტილის სიმრავლეს, რომლებისთვისაც $\rho(x, x_0)<\varepsilon$, ეწოდება $x_0$ წერტილის *სფერული* $\varepsilon$—*მიდამო*, ანუ—*ღია სფერო*. $x_0$ წერტილს ეწოდება სფეროს ცენტრი, ხოლო $\varepsilon$—მისი რადიუსი. ეს უკანასკნელი, ჩვეულებრივად $S(x, \varepsilon)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ყველა იმ $x\in X$ წერტილის სიმრავლეს, *რომლებისთვისაც* $\rho(x_0, x)=\varepsilon$ ეწოდება $S(x_0, \varepsilon)$ *სფეროს ზედაპირი* და აღინიშნება $S(x_0; \varepsilon)$ სიმბოლოთი. თუ ღია სფეროს დავუმატებთ მისი ზედაპირის წერტილებს მივიღებთ *ჩაკეტილ* $\widetilde{S}(x_0,\varepsilon)$ სფეროს.

ცხადია, რომ ყოველი ჩაკეტილი სფერო ჩაკეტილი სიმრავლეა. სრულიად ასევე განისაზღვრება $X$ სივრცეში მოთავსებული $M$ სიმრავლის $\varepsilon$—სფერული მიდამო.

იტყვიან, რომ $M$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $X$ სივრცეში, თუ $\overline{M}=X$. მოცემული $M$ სიმრავლის $\overline{M}$ ჩაკეტვა არის უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $M$ სიმრავლეს. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი $\overline{M}_1\supset M$ სიმრავლე დააკმაყოფილებს $\overline{M}\subset M_1$ პირობას.

მთელი $X$ სივრცე ერთდროულად ჩაკეტილიც არის და ღიაც. სრულიად ასევე, ყოველი ცარიელი სიმრავლე ჩაკეტილიც არის და ღიაც.

## § 3. მიმდევრობის ზღვარის ცნება მეტრულ სივრცეში

მათემატიკური ანალიზისათვის, გარდა სივრცისა და ფუნქციის ცნებისა, არსებითი მნიშვნელობა აქვს ელემენტთა მიმდევრობის ზღვარის ცნებას, რომელიც დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის მეტრულ თვისებებ-

თან. ფუნქციონალურ ანალიზშიც დიდი მნიშვნელობა აქვს ზღვარზე გადასვლის ოპერაციას, რომლის განსაზღვრისათვის მოხერხებულია გამოვიყენოთ სივრცის მეტრიკა. ისეთ $X$ სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია მისი ელემენტთა მიმდევრობის ზღვარის ცნება, აბსტრაქტული სივრცე ეწოდება.

ვიტყვით, რომ მეტრული $X$ სივრცის ელემენტების $\{x_n\}$ მიმდევრობა ამავე სივრცის $x^*$ ელემენტისაკენ კრებადია, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x^*)=0. \tag{1.6}$$

სხვანაირად, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ დაწყებული $n>N$ რიცხვიდან $S(x^*,\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტს. $x^*$ ელემენტს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი (ანუ ზღვარითი წერტილი) ეწოდება. ხშირად, კრებადობის ფაქტს ასე წერენ: $x_n\to x^*$, ან კიდევ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$.

მეტრული სივრცის ელემენტთა მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, ადვილად დასამტკიცებელი, რამდენიმე წინადადება.

**თეორემა 1.1.** მანძილი $\rho(x, y)$, სადაც $x$ და $y$ მეტრული $X$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტებია, არის მისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია.

მართლაც, ვთქვათ, $x_n\to x^*$, $y_n\to y^*$, სადაც $x_n$, $y_n$, $x^*$, $y^*\in X$. უნდა ვუჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)=\rho(x^*, y^*).$$

(1.5) ფორმულის ძალით, გვაქვს

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x^*, y^*)|\leqslant\rho(x_n, x^*)+\rho(y_n, y^*),$$

საიდანაც უშუალოდ ჩანს თეორემის სამართლიანობა.

**თეორემა 1.2.** ვთქვათ, $x_n\in X$ და $x_n\to x^*\in X$, მაშინ $\rho(x_m, x_n)\to 0$, როცა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად $m,n\to\infty$.

დამტკიცება გამომდინარეობს უტოლობიდან:

$$\rho(x_m, x_n)\leqslant\rho(x_m, x^*)+\rho(x^*, x_n),$$

რომლის მარჯვენა ნაწილი, პირობის თანახმად, მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $m$, $n\to\infty$.

შენიშვნა. საზოგადოდ, შებრუნებული თეორემა, ცხადია, არ არის სწორი. ე. ი. თუ $\rho(x_m, x_n)\to 0$, როცა $m$, $n\to\infty$, ეს ყოველთვის არ ნიშნავს, რომ $x_n\to x^*\in X$.

**თეორემა 1.3.** ელემენტთა კრებად $\{x_n\}$ მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარითი წერტილი აქვს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $x_n\to x^*$, $x_n\to x^{**}$, როცა $n\to\infty$ და $x^*\neq x^{**}$. გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა $x^*$, $x^{**}$ და $x_n$ წერტილებისათვის, გვექნება

$$\rho(x^*, x^{**})\leqslant\rho(x_n, x^*)+\rho(x_n, x^{**}).$$

ჩვენი დაშვების თანახმად, ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $n\to\infty$, მარცხენა ნაწილი კი არაუარყოფითი რიცხვია. ეს მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა $x^*=x^{**}$, რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. 4. ვთქვათ, $y \in X$ ნებისმიერად ფიქსირებული ელემენტია და $x_n \to x^*$, სადაც $\{x_n\}$, $x^* \in X$. მაშინ, რიცხვთა $\{\rho(x_n, y)\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

მართლაც, ნებისმიერი $n$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$\rho(x_n, y) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, y).$$

მაგრამ, ვინაიდან $x_n \to x^*$, ამიტომ რიცხვთა $\{\rho(x_n, x^*)\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზევიდან რაიმე $C_1$ რიცხვით. რაც შეეხება $\rho(x^*, y)$ მანძილს იგი სასრული რიცხვია, რომელიც აღვნიშნოთ $C_2$-ით. მივიღებთ, რომ $\rho(x_n, y) \leqslant C_1 + C_2 = C$.

თეორემა 1. 5. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია $x^*$ ზღვარისაკენ, $x^*$, $x_n \in X$, მაშინ ამ მიმდევრობის ყოველი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა აგრეთვე კრებადია იმავე ზღვარისაკენ.

მართლაც, პირობის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N = N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n > N$, მაშინ $\rho(x_n, x^*) < \varepsilon$. მაგრამ, მაშინ შესრულდება უტოლობაც: $\rho(x_{n_k}, x^*) < \varepsilon$, როცა $n_k > N$. ეს კი ამტკიცებს ჩვენ თეორემას.

მომდევნო პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ მეტრული სივრცეების კონკრეტულ მაგალითებს. შემოღებული იქნება აგრეთვე ელემენტების კრებადობის ცნებანი ამ კონკრეტულ სივრცეებში.

## § 4. მეტრული სივრცის მაგალითები

**1. ევკლიდეს $n$-განზომილებიანი $R_n$ სივრცე.** ევკლიდეს ერთგანზომილებიანი $R_1$, ორგანზომილებიანი $R_2$ და სამგანზომილებიანი $R_3$ ნამდვილი სივრცეების ანალოგიურად შეიძლება შემოვიღოთ $n$-განზომილებიანი ნამდვილი $R_n$ სივრცის ცნება. ამ სივრცის $x$ ელემენტი ეწოდება $n$ ნამდვილი რიცხვის დალაგებულ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სისტემას და დავწერთ $x = (x_1, \ldots, x_n)$, ან ასე $x(x_1, \ldots, x_n)$, ან კიდევ ასე $x = (x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. ფაქტიურად $R_n$ სივრცე ორნაირად შეიძლება გავიგოთ. ერთის მხრივ, იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც $x$ წერტილთა ერთობლიობა $x_1, \ldots, x_n$ კოორდინატებით, მეორეს მხრივ—როგორც $\vec{x}$ ვექტორთა ერთობლიობა $x_1, \ldots, x_n$ კოორდინატებით.

მანძილის, ანუ მეტრიკის ცნება, $R_n$ სივრცეში სხვადასხვა წესით შეიძლება შემოვიღოთ. მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია ე. წ. ევკლიდეს მეტრიკა. ვთქვათ, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. ვუწოდოთ

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{1.7}$$

რიცხვს მანძილი $x$ და $y$ წერტილებს შორის. წერტილთა $R_n$ სიმრავლეს, რომელშიც მანძილის ცნება (1.7) ტოლობით არის განსაზღვრული, ევკლიდეს $n$-განზომილებიანი სივრცე ეწოდება. $\Theta = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{n})$. წერტილს ეწოდება $R_n$ სივრცის ნული (კოორდინატთა სათავე). ადვილი შესამჩნევია, რომ (1.7) ფორმულით განსაზღვრული მეტრიკა აკმაყოფილებს § 2-ში ჩამოთვლილ $\alpha$), $\beta$) და $\gamma$) აქსიომებს. მათ შორის სამკუთხედის აქსიომა მინკოვს-

კის უტოლობის შედეგია. სახელდობრ, თუ $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $z=(z_i)\in R_n$ ნებისმიერი სამი ელემენტია, მაშინ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\ . \tag{1.8}$$

ვიტყვით, რომ $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ წერტილები (ელემენტები) ტოლია, თუ $x_i=y_i$, როცა $i=1,\ldots,n$.

ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}\in R_n$, $k=1,\ldots,n,\ldots$, $x^{(k)}=(x_i^{(k)})$, ელემენტების რაიმე მიმდევრობაა, რომელიც კრებადია $x^*=(x_1^*,\ldots,x^*_n)\in R_n$ წერტილისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},\ x^*)=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i^*)^2}=0,$$

ე. ი. $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$ ყოველი $i=1,\ldots,n$ ნიშნაკისათვის. ამგვარად, ელემენტთა მიმდევრობის კრებადობა $R_n$ სივრცეში ნიშნავს კრებადობას კოორდინატების მიხედვით.

მოყვანილი მაგალითის კერძო შემთხვევას (როცა $n=1$) წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცე, რომელშიც, თანახმად (1.7) ფორმულისა, მანძილი $x$, $y\in R_1$ ელემენტებს (რიცხვებს) შორის ტოლია

$$\rho(x,\ y)=|x-y|,$$

ხოლო ელემენტთა მიმდევრობის კრებადობის ცნება ემთხვევა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის კრებადობის ჩვეულებრივ განსაზღვრას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იმავე $R_n$ სივრცეში, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, მანძილის ცნება შეგვიძლია სხვანაირადაც შემოვიღოთ. მაგალითად, მანძილი $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $i=1,\ldots,n$ ელემენტებს შორის შეიძლება ვუწოდოთ გამოსახულებას:

$$\rho(x,\ y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|. \tag{1.9}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული $\rho(x,\ y)$ დააკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას.

2. $l_p^{(n)}$ სივრცე. ასე უწოდებენ სიმრავლეს, რომლის $x=(x_1,\ldots,x_n)=(x_i)$ წერტილი ეწოდება $n$ ნამდვილი რიცხვის $x_1,\ldots,x_n$ დალაგებულ მიმდევრობას. იგულისხმება, რომ $n$ სასრულია, ხოლო $p\geq 1$. ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in l_p^{(n)}$ ნებისმიერი ორი ელემენტია. ვიტყვით, რომ $x=y$, როცა $x_i=y_i$, $i=1,\ldots,n$. მანძილი $x$ და $y$ ელემენტებს შორის განსაზღვრულია ტოლობით:

$$\rho(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.10}$$

ცხადია, რომ $\rho(x,\ y)\geq 0$; ამასთანავე, $\rho(x,\ y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$. გარდა ამისა, $\rho(x,y)=\rho(y,\ x)$. სამკუთხედის აქსიომაც

შესრულებულია, ვინაიდან როცა $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $z=(z_i)\in l_r^{(n)}$ სამი ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{1.11}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$. ისე როგორც წინა მაგალითში, $\{x^{(k)}\}=\{(x_i^{(k)})\}\in l_r^{(n)}$ ელემენტთა უსასრულო მიმდევრობის კრებადობა ამავე სივრცის $x^*=(x_i^*)$ ელემენტისაკენ ნიშნავს, რომ $x_i^{(k)}\to x_i^*$, როცა $k\to\infty$, ყოველი $i=1, \ldots, n$ ნიშნაკისათვის.

3. **ჰილბერტის კოორდინატული $l_2$ სივრცე.** ამ სივრცეში ელემენტი $x$ ეწოდება ნამდვილ (ან კომპლექსურ) $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ რიცხვთა ისეთ დალაგებულ უსასრულო მიმდევრობას, რომლისთვისაც

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty. \tag{1.12}$$

ელემენტი $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)=(x_i)$, $i=1,2, \ldots$ აქაც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $\vec{x}$ ვექტორი, რომლის კოორდინატებია $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ თუ $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in l_2$ ნებისმიერი ელემენტებია, მაშინ

$$\rho(x, y)=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მწკრივი კრებადია, ვინაიდან, გარდა (1.12) მწკრივისა, კრებადია აგრეთვე $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2$ მწკრივი და

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (1.13) ფორმულით შემოღებული მეტრიკა აკმაყოფილებს ყველა საჭირო აქსიომას.

განვიხილოთ $l_2$ სივრცის კუთვნილი ისეთი $x=(x_i)$ ელემენტების $L$ სიმრავლე, რომლის $x_i$ კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს $0\leqslant x_k\leqslant\frac{1}{k}$, $k=1,2, \ldots$. $L$ სიმრავლეს ეწოდება $l_2$ *სივრცის ძირითადი პარალელეპიპედი*.

4. **$l_p (p\geqslant 1)$ სივრცე.** განვიხილოთ ნამდვილ (ან კომპლექსურ) $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ მწკრივი კრებადი იყოს. ეს მიმდევრობა ასეც ჩავწეროთ $x=(x_i)$ რიცხვთა ყველა ასეთი სახის მიმდევრობების სიმრავლეს $l_p$ სივრცე ეწოდება, როცა $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in l_p$ ელემენტებს შორის მანძილი განსაზღვრულია ტოლობით:

$$\rho(x, y)=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.15}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მწკრივი კრებადია. მართლაც, მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

ცხადია, რომ $\rho(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს § 2-ის $\alpha$) და $\beta$) აქსიომებს. დაკმაყოფილებულია აგრეთვე $\gamma$) აქსიომაც, ვინაიდან ნებისმიერი სამი $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $z=(z_i)\in l_p$ ელემენტისათვის და $p\geqslant 1$ რიცხვისათვის, მინკოვსკის უტოლობიდან, ადვილად მივიღებთ უტოლობას

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-z_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.16}$$

ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}=\{(x_i^{(k)})\}\in l_p$ელემენტთა კრებადი მიმდევრობაა $x^*=(x_i^*)\in l_p$ ელემენტისაკენ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (1.15) მეტრიკით კრებადობა ნიშნავს შემდეგს: $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i^*$ ყველა $i$ ნიშნაკისათვის. ისიც შევნიშნოთ, რომ, როცა $p=2$, მაშინ $l_p$ სივრციდან მივიღებთ ჰილბერტის კოორდინატულ $l_2$ სივრცეს. ისე, რომ $l_p$ სივრცე $l_2$ სივრცის განზოგადებას წარმოადგენს.

5. **რიცხვთა შემოსაზღვრული მიმდევრობების $m$ სივრცე.** ზემოთ განხილული მაგალითები წარმოქმნილია ევკლიდის სივრცის ანალოგიით და, ამიტომაც მანძილის ცნების შემოღებაში გამოყენებულია გეომეტრიული მოსაზრება. ახლა მოვიყვანოთ მეტრული სივრცის ისეთი მაგალითები, რომელთა ელემენტების ბუნება დაკავშირებული არ არის მათ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.

$X$ სიმრავლის $x$ ელემენტი იყოს რიცხვთა ისეთი $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ მიმდევრობა, რომ შესრულებული იყოს პირობა $|x_i|\leqslant C_x^{(1)}$, $i=1,\ldots,n,\ldots$, სადაც $C_x^{(1)}$ გარკვეული მუდმივია. აქაც ვისარგებლოთ ჩაწერით: $x=(x_1,\ldots x_n,\ldots)=(x_i)$ და $x_i$ რიცხვებს $x$ ელემენტის კოორდინატები ვუწოდოთ. ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in X$ ორი ნებისმიერი ელემენტია. ავაგოთ $\rho(x, y)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\rho(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|,\ i=1,\ldots,n,\ldots. \tag{1.17}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრულ მეტრიკას აზრი აქვს. მართლაც, პირობის თანახმად, გვაქვს $|x_i|\leqslant C_x^{(1)}$, $|y_i|\leqslant C_y^{(1)}$, $i=1,\ldots,n,\ldots$. ცხადია, ამ პირობებში შემოსაზღვრული იქნება $\{|x_i-y_i|\}$ მიმდევრობა და ამიტომ იარსებებს ზუსტი ზედა საზღვარი $\sup|x_i-y_i|$, $i=1,\ldots,n,\ldots$

$x$, $y\in X$ ელემენტები ტოლია, $x=y$, როცა $x_i=y_i$, $i=1,\ldots,n,\ldots$. ცხადია, (1.17) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია $\rho(x,y)\geqslant 0$, მასთან $\rho(x,y)=0$ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$. გარდა ამისა, ადგილი აქვს სიმეტრიის აქსიომასაც: $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

ვთქვათ, გარდა $x$ და $y$ ელემენტებისა, $z=(z_i)\in X$. გამოვიდეთ იგივეობიდან: $x_i-y_i=x_i-z_i+z_i-y_i$, მივიღებთ

$$|x_i-y_i|\leqslant|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\ \ (i=1,2,\ldots).$$

ამიტომ წინა უტოლობიდან დავწერთ:

$$\sup_i|x_i-y_i|\leqslant\sup_i|x_i-z_i|+\sup_i|z_i-y_i|,$$

ე. ი. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$. ამგვარად, სამკუთხედის აქსიომაც შესრულებულია.

ყველა შემოსაზღვრულ რიცხვითი მიმდევრობების სიმრავლეს, რომელშიც მეტრიკა (1.17) ფორმულით არის განსაზღვრული, ეწოდება $m$ სივრცე.

ვუჩვენოთ ახლა, რომ ელემენტთა უსასრულო $\{x^{(k)}\}=\{(x_i^{(k)})\}\in m$ მიმდევრობის კრებადობა $x^*=(x_i^*)\in m$ ელემენტისაკენ ნიშნავს შესაბამისი კოორდინატების კრებადობას, თანაბრად $i$ ნიშნაკის მიმართ. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $k\geqslant N$, გვექნება:

$$\rho(x^{(k)}, x^*)=\sup_i|x_i^{(k)}-x_i^*|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა:

$$|x_i^{(k)}-x_i^*|<\varepsilon,$$

ნებისმიერი ნიშნაკისათვის $i=1,\ldots, n,\ldots$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ პირიქითაც, თუ ყოველი ნიშნაკისათვის $i$ ადგილი აქვს $|x_i^{(k)}-x_i^*|<\varepsilon$ უტოლობას, როცა $k>N$, მაშინ $\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)}, x^*)=0$. ამით ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

**6. რიცხვთა კრებადი მიმდევრობების $c$ სივრცე.** ვთქვათ, $X$ არის ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტებია კრებადი რიცხვითი მიმდევრობები. ამ განსაზღვრის თანახმად, $x=(x_1,\ldots, x_n,\ldots)=(x_i)$ მიმდევრობა წარმოადგენს $X$ სიმრავლის ელემენტს: $x\in X$, თუ $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$, სადაც $\xi$ გარკვეული რიცხვია. ხშირად $x_i$ რიცხვებს $x$ ელემენტის კოორდინატებსაც უწოდებენ. ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in X$ ნებისმიერი ელემენტებია. $X$ სიმრავლეს $c$ სივრცე ეწოდება, როცა მასში მეტრიკა შემოღებულია ფორმულით:

$$\rho(x, y)=\sup_k|x_k-y_k|. \tag{1.18}$$

თუ ამ სივრცეს წინა მაგალითში განხილულ $m$ სივრცეს შევადარებთ, დავრწმუნდებით, რომ $c\subset m$. ამის გამო, შემოწმების გარეშე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მეტრიკის ყველა აქსიომა შესრულებულია. როგორც წინა მაგალითში, ელემენტთა მიმდევრობის კრებადობა $c$ სივრცეში ნიშნავს შესაბამისი კოორდინატების კრებადობას, თანაბრად $i$ ნიშნაკის მიმართ.

**7. რიცხვთა ყველა მიმდევრობის $s$ სივრცე.** ამ სივრცის განსაზღვრა დაფუძნებულია ერთ-ერთ არითმეტიკულ უტოლობაზე, რომელიც სამართლიანია ნამდვილი რიცხვების ნებისმიერი წყვილისათვის. შევჩერდეთ წინასწარ ხსენებული უტოლობის გამოყვანაზე.

ლემა. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი $\xi$ დ ა $\eta$ რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს ს ა მ ა რ თ ლ ი ა ნ ი ა უ ტ ო ლ ო ბ ა

$$\frac{|\xi+\eta|}{1+|\xi+\eta|}\leqslant\frac{|\xi|}{1+|\xi|}+\frac{|\eta|}{1+|\eta|}. \tag{1.19}$$

მართლაც: გამოვიდეთ ცხადი უტოლობიდან: $|\xi+\eta|\leqslant|\xi|+|\eta|$. მივუმატოთ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს რიცხვი: $|\xi+\eta|(|\xi|+|\eta|)$, გვექნება: $|\xi+\eta|+|\xi+\eta|(|\xi|+|\eta|)\leqslant|\xi|+|\eta|+|\xi+\eta|(|\xi|+|\eta|)$, ანუ $|\xi+\eta|(1+|\xi|+|\eta|)\leqslant(|\xi|+|\eta|)(1+|\xi+\eta|)$. გავყოთ უკანასკნელი უტოლობა ნამრავლზე: $(1+|\xi+\eta|)(1+|\xi|+|\eta|)\neq0$, მივიღებთ

$$\frac{|\xi+\eta|}{1+|\xi+\eta|}\leqslant\frac{|\xi|+|\eta|}{1+|\xi|+|\eta|}\leqslant\frac{|\xi|}{1+|\xi|+|\eta|}+\frac{|\eta|}{1+|\xi|+|\eta|}.$$

მიღებული უტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი შესაკრების მნიშვნელს ჩამოვაცილოთ $|\eta|$ შესაკრები, ხოლო მეორე შესაკრების მნიშვნელს კი $|\xi|$ შესაკრები. ამით, რა თქმა უნდა, უტოლობას არ შევასუსტებთ. ამ ოპერაციის შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ (1.19) უტოლობას.

გადავიდეთ ახლა $s$ სივრცის განსაზღვრაზე. ყველა კრებადი რიცხვითი მიმდევრობის $X$ სიმრავლეს $s$ სივრცე ეწოდება, თუ ნებისმიერი $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in X$ ელემენტებისათვის მანძილი განსაზღვრულია ფორმულით:

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}. \tag{1.20}$$

ახლავე შევნიშნოთ, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მწკრივი კრებადია, ვინაიდან

$$\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\leqslant\frac{1}{2^i}\ \text{და}\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\infty.$$

ვიტყვით, რომ $x$ და $y$ ელემენტები ტოლია და დავწერთ $x=y$, თუ $x_i=y_i$, როცა $i=1,\ldots,n,\ldots$.

ცხადია, რომ $\rho(x,y)\geqslant0$ და $\rho(x,y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$. გარდა ამისა, იმავე (1.20)-დან გამომდინარეობს, რომ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$. ვუჩვენოთ ახლა, რომ (1.20) ტოლობით განსაზღვრული მეტრიკა სამკუთხედის აქსიომასაც აკმაყოფილებს. მართლაც, ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $z=(z_i)\in s$ ნებისმიერი სამი ელემენტია. ავიღოთ (1.20) მწკრივის ზოგადი წევრი და წარმოვადგინოთ იგი ასე

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}=\frac{1}{2^i}\,\frac{|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|}{1+|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|}.$$

გამოვიყენოთ ახლა ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში (1.19) უტოლობა, რომელშიც $\xi$ რიცხვის ნაცვლად ავიღოთ $x_i-z_i$ რიცხვი, ხოლო $\eta$-ს ნაცვლად ავიღოთ $z_i-y_i$, მივიღებთ

$$\frac{1}{2^i}\,\frac{|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|}{1+|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|}\leqslant\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{1}{2^i}\,\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}.$$

ამ უტოლობის გამოყენებით, (1.20) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|},$$

ე. ი.

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

გავეცნოთ ახლა კრებადობის საკითხს $s$ სივრცეში. ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}=\{(x_i^{(k)})\in\}s$ ელემენტთა მიმდევრობა კრებადია $x^*=(x_i^*)\in s$ ელემენტისაკენ. $s$ სივრცეში შემოღებული მეტრიკის მიხედვით, ეს ნიშნავს შემდეგს: ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $k>N$, მაშინ

$$\rho(x^{(k)}, x^*)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i^*|}{1+|x_i^{(k)}-x_i^*|}<\varepsilon. \tag{1.21}$$

მაგრამ, როცა ეს უტოლობა შესრულდება, მაშინ, ფიქსირებული $i$ ნიშნაკისათვის, მით უმეტეს შესრულდება ასეთი უტოლობა:

$$\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i^*|}{1+|x_i^{(k)}-x_i^*|}<\varepsilon.$$

აქედან კი, $\varepsilon$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i^*. \tag{1.22}$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ შებრუნებული წინადადებაც სწორია, ე. ი. ჩავთვალოთ, რომ ადგილი აქვს (1.22) ტოლობას და დავამტკიცოთ (1.21) ფორმულის სამართლიანობა.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ (1.21) მწკრივისათვის $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ ერთ-ერთი მაჟორანტული მწკრივია, რომელიც $k$ ნიშნაკისაგან დამოუკიდებლად იკრიბება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (1.21) მწკრივი $k$ ნიშნაკის მიმართ თანაბრად კრებადია და, ამიტომ, მასში $k$ ნიშნაკის მიმართ წევრ-წევრად შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა. მაგრამ, როცა ადგილი აქვს (1.22) ტოლობას, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i^*|}{1+|x_i^{(k)}-x_i^*|}=0$$

და, მაშასადამე, მივიღებთ: $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^{(k)}, x^*)=0$. ეს კი ამტკიცებს ჩვენ წინადადებას.

ამრიგად, $s$ სივრცეში $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობის კრებადობა ზღვარითი $x^*$ ელემენტისაკენ ნიშნავს $x^{(k)}$ ელემენტის ყოველი $x_i^{(k)}$ კოორდინატის კრებადობას ზღვარითი $x^*$ ელემენტის შესაბამისი $x_i^*$ კოორდინატისაკენ, როცა $k\to\infty$. ცხადია, კოორდინატების ასეთნაირი კრებადობა, საზოგადოდ, არათანაბარი კრებადობაა $i$ ნიშნაკის მიმართ.

**8. შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციების $M$ სივრცე.** ვთქვათ, $T$ არის $R_n$ სივრცეში მოთავსებული ზომადი სიმრავლე. აღვნიშნოთ $X$-ით $T$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციის სიმრავლე. $X$ სიმრავლეში შემავალი ორი ეკვივალენტური ფუნქცია თანატოლ ფუნქციებად ჩავთვალოთ. ვთქვათ, $x(t)\in X$ და $y(t)\in X$. ავიღოთ $T$-დან ნებისმიერი ნულზომის $\sigma$ სიმრავლე და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mu(\sigma)=\sup_{t\in T-\sigma}|x(t)-y(t)|.$$

ვცვალოთ ყოველნაირად ნულზომის $\sigma$ სიმრავლე $T$-ში. მაშინ $\mu(\sigma)$ იცვლება და მივიღებთ რიცხვთა სიმრავლეს. ამ სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ვუწოდოთ $\rho(x, y)$ მანძილი $x(t)$ და $y(t)$ ელემენტებს შორის:

$$\rho(x, y)=\inf_{\sigma} \sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-y(t)|. \tag{1.23}$$

$X$ სიმრავლეს, რომელშიც მეტრიკა (1.23) ტოლობითაა განსაზღვრული ეწოდება ფუნქციონალური $M$ სივრცე.

დავამტკიცოთ, რომ $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას. 1) რადგანაც $\mu(\sigma)\geqslant 0$, ამიტომ $\inf_{\sigma}\mu(\sigma)\geqslant 0$, ე. ი. $\rho(x, y)\geqslant 0$. თუ $\rho(x, y)=0$, მაშინ ყოველი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის მოიძებნება ნულზომის ისეთი $\sigma\subset T$ სიმრავლე, რომ

$$\sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-y(t)|<\varepsilon,$$

ე. ი.

$$|x(t)-y(t)|<\varepsilon, \text{ როცა } t \in T-\sigma.$$

განვიხილოთ ახლა ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_n\}$ მიმდევრობა და ყოველი $\varepsilon_n$-თვის ავიღოთ სათანადო $\sigma_n\subset T$ სიმრავლე. მაშინ ყოველი $n$-თვის

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(T-\sigma_k)=T-\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma_k$$

სიმრავლეზე მართებულია უტოლობა

$$|x(t)-y(t)|<\varepsilon_n,$$

ე. ი.

$$|x(t)-y(t)|=0.$$

მაგრამ რაკი $\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ სიმრავლის ზომა ნულია, ამიტომ $x(t)$ და $y(t)$ ეკვივალენტური ფუნქციებია, ე. ი. $x=y$.

შემდეგ, ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $x(t)$ არის $y(t)$ ფუნქციის ეკვივალენტური, მაშინ $\rho(x, y)=0$. ამრიგად, $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x=y$. მაშასადამე, მეტრიკის პირველი აქსიომა შესრულებულია.

2) (1.23) ტოლობიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

3) სამკუთხედის აქსიომის შესამოწმებლად ავიღოთ $X$ სიმრავლის ნებისმიერი სამი ელემენტი $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$. ცხადია, ნებისმიერი ნულზომიანი $\sigma\subset T$ სიმრავლისათვის გვაქვს:

$$\sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-z(t)|\leqslant \sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-y(t)|+\sup_{t \in T-\sigma}|y(t)-z(t)|.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\rho(x,z)\leqslant \sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-y(t)|+\sup_{t \in T-\sigma} |y(t)-z(t)|. \tag{1.24}$$

ახლა ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ნულ-

ზომის ისეთი სიმრავლეები $\sigma_1 \subset T$ და $\sigma_2 \subset T$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$\sup_{t \in T-\sigma_1} |x(t)-y(t)| < \rho(x, y)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t \in T-\sigma_2} |y(t)-z(t)| < \rho(y, z)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\sup_{t \in T-\sigma} |x(t)-y(t)| < \rho(x, y)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t \in T-\sigma} |y(t)-z(t)| < \rho(y,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

სადაც $\sigma=\sigma_1 \cup \sigma_2$. მაშასადამე, (1.24) უტოლობის ძალით გვექნება

$$\rho(x, z) < \rho(x, y)+\rho(y, z)+\varepsilon.$$

აქედან, $\varepsilon$-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

ამრიგად, ადგილი აქვს მეტრიკის სამივე აქსიომას. მიღებულ სივრცეს ეწოდება $M$ სივრცე.

მკითხველს შეუძლია შეამოწმოს, რომ $M$ სივრცის ელემენტთა $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის კრებადობა ამავე სივრცის $x^*(t)$ ელემენტისაკენ ნიშნავს მოცემული მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან $T$-ზე.

**9. სასრული ზომადი ფუნქციების ($S$) სივრცე.** განვიხილოთ ევკლიდეს $R_n$ სივრცის რაიმე $T$ სიმრავლე. ვიგულისხმოთ, რომ იგი ზომადია ლებეგის აზრით. აღვნიშნოთ $X$-ით სიმრავლე ყველა სასრული ზომადი ფუნქციებისა. ფუნქციებს, რომელთა მნიშვნელობანი თანატოლია თითქმის ყველგან $T$ სიმრავლეზე, ვუწოდოთ თანატოლი ფუნქციები. ყველა სასრული ზომად ფუნქციების $X$ სიმრავლეს ($S$) ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება, თუ მანძილი $x(t)$, $y(t) \in X$ ელემენტებს შორის შემოღებულია ფორმულით

$$\rho(x, y)=\int_T \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\, dt, \tag{1.25}$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია ლებეგის აზრით. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოსაზღვრული და ზომადია, ამიტომ ამ ინტეგრალს აზრი აქვს. გარდა ამისა, ხსენებული ფუნქცია არაუარყოფითია და ამიტომ $\rho(x,y) \geqslant 0$. ისიც ცხადია, რომ როცა $x(t)=y(t)$, მაშინ $\rho(x, y)=0$. პირიქით, თუ $\rho(x,y)=0$, მაშინ $x(t)=y(t)$. მაშასადამე, $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x(t)=y(t)$. (1.25) ტოლობიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

ვთქვათ ახლა, რომ $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in (S)$ ნებისმიერი სამი ელემენტია. შევიტანოთ (1.19) უტოლობაში $\xi$ რიცხვის ნაცვლად $x(t)-z(t)$ ფუნქცია, ხოლო $\eta$ რიცხვის ნაცვლად კი $z(t)-y(t)$ ფუნქცია, მივიღებთ უტოლობას

$$\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} \leqslant \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}+\frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|}$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ: $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$. ამგვარად, როცა მანძილის ცნება (1 25) ფორმულით არის შემოღებული, მაშინ მეტრული სივრცის ყველა აქსიომა დაკმაყოფილებული იქნება.

გამოვარკვიოთ კრებადობის შინაარსი $(S)$ სივრცეში.

ვთქვათ, $\{x_n(t)\}\subset(S)$ არის ელემენტების მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $x^*(t)\in(S)$ ფუნქციისაკენ, ე. ი. $\rho(x_n,\ x^*)\to 0$, როცა $n\to\infty$. განვიხილოთ $T$ სიმრავლის იმ წერტილთა $\sigma_n(\omega)$ სიმრავლე, რომელზეც შესრულებულია უტოლობა:

$$|x_n(t)-x^*(t)|\geqslant\omega,$$

სადაც $\omega$ ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია. შევნიშნოთ, რომ

$$\rho(x_n,\ x^*)=\int\limits_T\frac{|x_n(t)-x^*(t)|dt}{1+|x_n(t)-x^*(t)|}\geqslant\int\limits_{\sigma_n(\omega)}\frac{|x_n(t)-x^*(t)|dt}{1+|x_n(t)-x^*(t)|},$$

საიდანაც, წინა უტოლობის ძალით, გვექნება

$$\rho(x_n,\ x^*)\geqslant\frac{\omega}{1+\omega}\operatorname{mes}\sigma_n(\omega).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $\rho(x_n,\ x^*)\to 0$, მაშინ $\operatorname{mes}\sigma_n(\omega)\to 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ.

ახლა ვთქვათ, რომ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ამ პირობებში $\left\{\frac{|x_n(t)-x^*(t)|}{1+|x_n(t)-x^*(t)|}\right\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადი იქნება ნულისაკენ. გადავიდეთ ზღვარზე ტოლობაში

$$\rho(x_n,\ x^*)=\int\limits_T\frac{|x_n(t)-x^*(t)|dt}{1+|x_n(t)-x^*(t)|},$$

როცა $n\to\infty$. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია თანაბრად შემოსაზღვრულია $n$ ნიშნაკის მიმართ რიცხვით ერთი, ამიტომ ზღვარზე გადასვლის ოპერაცია შეგვიძლია შევასრულოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით. ზღვარზე გადასვლის შემდეგ გვექნება: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ x^*)=0$.

**10. ყველა ზომადი ფუნქციის $S$ სივრცე.** განვიხილოთ ყველა ზომადი $x(t)$ ფუნქციის სიმრავლე, სადაც $t\in[0,1]$. ყოველ ასეთ $x(t)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ $M_x$ სიმრავლე ისეთი $\varepsilon>0$ რიცხვებისა, რომ ყოველი $\varepsilon\in M_x$ რიცხვისათვის შესრულებული იყოს უტოლობა

$$|x(t)|>\varepsilon$$

ისეთი $t$ წერტილების $N_\varepsilon\,[|x(t)|>\varepsilon]$ სიმრავლეზე, რომლის ზომა $\leqslant\varepsilon$, ე. ი. $\operatorname{mes}N_\varepsilon\,[|x(t)|>\varepsilon]\leqslant\varepsilon$. ნათქვამიდან გამომდინარეობს $M_x$ სიმრავლის შემდეგი თვისებები: $\alpha$) რიცხვი $1\in M_x$; $\beta$) თუ $\varepsilon_1\in M_x$, მაშინ ყოველი $\varepsilon_2\in M_x$, როცა $\varepsilon_2>\varepsilon_1$; $\gamma$) თუ $x_1(t)$, $x_2(t)$ ნებისმიერი ორი ზომადი ფუნქციაა და $|x_1(t)|\geqslant|x_2(t)|$, მაშინ $M_{x_1}\subseteq M_{x_2}$.

შემდეგში $x_1(t)$ და $x_2(t)$ ფუნქციებს თანატოლს ვუწოდებთ და დავწერთ $x_1(t)=x_2(t)$, თუ $x_1(t)=x_2(t)$ თითქმის ყველა $t\in[0,1]$ მნიშვნელობისათვის.

ვთქვათ, $\varepsilon_0(x)$ აღნიშნავს ყველა $\varepsilon\in M_x$ რიცხვების ზუსტ ქვედა სა-

ზღვარს. განვიხილოთ ნებისმიერი ორი ზომადი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქცია, $0 \leqslant t \leqslant 1$. მანძილი ამ ფუნქციებს შორის განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\rho(x, y) = \varepsilon_0(x - y). \tag{1.26}$$

[0,1] სეგმენტზე ყველა ზომადი ფუნქციის სიმრავლეს, რომელშიც მეტრიკა შემოღებულია (1.26) ფორმულით, ფუნქციონალური $S$ სივრცე ეწოდება. დავამტკიცოთ, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული მანძილი დააკმაყოფილებს მეტრული სივრცის ყველა აქსიომას. ვთქვათ, $\rho(x, y) = 0$. მაშინ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის გვექნება

$$\operatorname{mes} N_\varepsilon [\,|x(t) - y(t)| > \varepsilon] \leqslant \varepsilon,$$

ე. ი. $x(t) = y(t)$. ადვილი შესამჩნევია, რომ პირიქითაც, თუ $x(t) = y(t)$, მაშინ $\rho(x, y) = 0$. ცხადია, რომ $\rho(x, y) > 0$, როცა $x(t) \neq y(t)$ და $\rho(x,y) = \rho(y, x)$. ვთქვათ ახლა, $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in S$ სამი ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ

$$N_{\varepsilon_1}[\,|x(t) - y(t)| > \varepsilon_1] \subset N_{\varepsilon_2}[\,|x(t) - z(t)| > \varepsilon_2] + N_{\varepsilon_3}[\,|z(t) - y(t)| > \varepsilon_3],$$

სადაც

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0(x - z) + \varepsilon_0(z - y) + \beta, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0(x - z) + \frac{\beta}{2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0(z - y) + \frac{\beta}{2}$$

და $\beta > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ $\rho(x,z) + \rho(z,y) + \beta \in M_{x-y}$, საიდანაც $\inf M_{x-y} \leqslant \rho(x,z) + \rho(z, y) + \beta$ და, $\beta$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, დავწერთ $\rho(x,y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

შევეხოთ ახლა კრებადობის საკითხს $S$ სივრცეში. ვთქვათ, მიმდევრობა $\{x_n(t)\} \subset S$ კრებადია ამავე სივრცის ელემენტისაკენ $x^*(t)$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში კრებადობა ნიშნავს $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ზომით კრებადობას $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ საკმარისად დიდი ნატურალური $n$ ნიშნაკისათვის და ნებისმიერი რიცხვებისათვის $\eta$, $\varepsilon > 0$ შესრულდება უტოლობა

$$\operatorname{mes} N_\eta\, [\,|x_n(t) - x^*(t)| > \eta] < \varepsilon. \tag{1.27}$$

ვთქვათ, $\varepsilon_1 < \min(\eta, \varepsilon)$ ნებისმიერი რიცხვია. მაშინ, იმის გამო, რომ $x_n(t) \to x^*(t)$, საკმარისად დიდი $n$ ნიშნაკისათვის გვექნება

$$\operatorname{mes} N_{\varepsilon_1}[\,|x_n(t) - x^*(t)| > \varepsilon_1 < \varepsilon_1.$$

ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ

$$N_\eta\,[\,|x_n(t) - x^*(t)| > \eta] \subseteq N_{\varepsilon_1}[\,|x_n(t) - x^*(t)| > \varepsilon_1].$$

ამ დამოკიდებულებიდან და წინა უტოლობიდან მივიღებთ, რომ საკმარისად დიდი $n$ რიცხვისათვის შესრულებულია (1.27).

11. **უწყვეტი ფუნქციების $C(a, b)$ სივრცე.** ფუნქციონალური $C(a, b)$ სივრცის ელემენტებია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციები. მანძილი $C(a, b)$ სივრცის $x = x(t)$ და $y = y(t)$ ელემენტებს შორის განსაზღვრულია ასე:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|. \tag{1.28}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრულ მანძილს ჩებიშევის მეტრიკა ეწოდება. გეომეტრიულად $\rho(x, y)$ არის $x = x(t)$ და $y = y(t)$ წირებს შორის უდიდესი მან-

ძილი. შევნიშნოთ, რომ იგივეობისა და სიმეტრიულობის აქსიომები შესრულებულია და შემოწმებას არ საჭიროებს. შესრულებულია აგრეთვე სამკუთხედის აქსიომაც. მართლაც, თუ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)\in C(a, b)$ ნებისმიერი სამი ელემენტია, მაშინ უტოლობიდან:

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|,$$

მივიღებთ

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|,$$

ე. ი. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$.

განვიხილოთ ახლა უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობის საკითხი (1.28) ტოლობით განსაზღვრული მეტრიკის მიხედვით. ვთქვათ, $\{x_n(t)\}\subset C(a, b)$ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობაა, რომელიც კრებადია $x^*(t)\in C(a, b)$ უწყვეტი ფუნქციისაკენ, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=0$. სხვანაირად, ვთქვათ, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n>N$ შესრულდება უტოლობა $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x^*(t)|<\varepsilon$. მაშასადამე, როცა $n>N$, $t\in[a, b]$ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს უტოლობას: $|x_n(t)-x^*(t)|<\varepsilon$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე.

მკითხველი უშუალოდ დარწმუნდება იმაშიც, რომ თუ $\{x_n(t)\}$ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=0$.

შენიშვნა. ხშირად საჭიროა ე. წ. $C_T$ სივრცის განხილვა. ასე ეწოდება სივრცეს, რომლის ელემენტებია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ $T\subset R_n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული, ყველა უწყვეტი ფუნქცია. თუ $x(t)$, $y(t)\in C_T$, სადაც $t\in T$, მაშინ მათ შორის მანძილი განსაზღვრულია ტოლობით

$$\rho(x, y)=\max_{t\in T}|x(t)-y(t)|.$$

ელემენტთა მიმდევრობის კრებადობა ამ მეტრიკით ნიშნავს თანაბარ კრებადობას $n$-განზომილებიან $T$ სიმრავლეზე.

**12. უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების $C^{(k)}(a, b)$ სივრცე.** წინა მაგალითში განხილულ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ანალოგიით შესაძლოა შემოვიღოთ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა $C^{(k)}(a, b)$ სივრცე. ამ სივრცის ელემენტი ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ისეთ ფუნქციას, რომელსაც აქვს $k$ რიგის უწყვეტი წარმოებულები უკანასკნელის ჩათვლით. ვთქვათ, $x(t)$, $y(t)\in C^{(k)}(a, b)$, სადაც $t\in[a, b]$. მანძილი ამ ფუნქციებს შორის განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\rho(x, y)=\sum_{i=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,\tag{1.29}$$

სადაც ვგულისხმობთ, რომ ფუნქციის ნული რიგის წარმოებული თვითონ ფუნქციას ემთხვევა. ადვილად შევამოწმებთ, რომ $\rho(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას.

ელემენტთა $\{x_n(t)\}\subset C^{(k)}(a, b)$ მიმდევრობის კრებადობა $x^*(t)\in C^{(k)}(a,b)$

ელემენტისაკენ ნიშნავს, როგორც თვით $x_n(t)$ ელემენტების თანაბარ კრებადობას $x^*(t)$ ელემენტისაკენ, ისე $x_n^{(i)}(t)$ წარმოებულის თანაბარ კრებადობას ზღვარითი ფუნქციის შესაბამისი წარმოებულისაკენ, როცა $i$ ნიშნაკი გაირბენს მნიშვნელობებს $1, 2, \cdots, k$.

**13. ფრეშეს $Q$ სივრცე.** ევკლიდეს ორგანზომილებიან სივრცეში ავიღოთ რაიმე ჩაკეტილი სასრული არე. განვიხილოთ ამ არეში მდებარე ყველა წირის ერთობლიობა, რომელთა განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს პარამეტრული სახით:

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t), \\ y=y(t), \end{array}\right\} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $t$ ცვლადისა. ვთქვათ, $s'$ და $s''$ ორი ასეთი წირია. ამ წირების იმ წერტილებს, რომლებსაც $t$ პარამეტრის ერთიდაიგივე მნიშვნელობა შეესაბამება, ვუწოდოთ შესაბამი წერტილები. ვთქვათ, $\varepsilon>0$ რიცხვი აღნიშნავს $s'$ და $s''$ წირების შესაბამ წერტილებს შორის მანძილების მაქსიმუმს. ცხადია, რომ $\varepsilon$ რიცხვი დამოკიდებულია $s'$ და $s''$ წირების განტოლების პარამეტრული სახით ჩაწერაზე. ვუწოდოთ $\rho(s', s'')$ მანძილი $s'$ და $s''$ წირებს შორის $\varepsilon$ რიცხვების ზუსტ ქვედა საზღვარს, როცა ამ წირების განტოლებას ყველა შესაძლო პარამეტრული სახით ჩავწერთ. ბრტყელი წირების სიმრავლეს, რომელშიც მანძილის ცნება ასეა შემოღებული, ფრეშეს $Q$ სივრცე ეწოდება. მანძილი $\rho(s', s'')$ აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას. მეტრულ $Q$ სივრცეს გამოყენება აქვს ვარიაციათა აღრიცხვის ამოცანებში.

**14. ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2(a, b)$ სივრცე.** ვთქვათ, $(a, b)$ რიცხვითი წრფის სასრული ან უსასრულო ინტერვალია. აღვნიშნოთ $x(t)$-თი ნამდვილი და $(a, b)$ ინტერვალზე კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქცია. ყველა ასეთი $x(t)$ ფუნქციის სიმრავლე აღვნიშნოთ $L_2(a, b)$ სიმბოლოთი. ამასთანავე ფუნქციები, რომელთა მნიშვნელობანი $(a, b)$ ინტერვალზე თითქმის ყველგან ერთმანეთს ემთხვევა, ჩავთვალოთ თანატოლ ელემენტებად. შემოვიღოთ $x(t)$, $y(t)\in L_2(a, b)$ ფუნქციებს შორის მანძილი შემდეგი ფორმულით:

$$\rho(x, y)=\left\{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.30}$$

ცხადია, $\rho(x, y)\geqslant 0$ და $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x(t)=y(t)$. გარდა ამისა, $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

სამკუთხედის აქსიომა შედეგია მინკოვსკის ინტეგრალური უტოლობისა:

$$\left\{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_a^b [x(t)-z(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b [z(t)-y(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)\in L_2(a, b)$. ამრიგად, გვექნება: $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$.

ვთქვათ, ახლა $\{x_n(t)\}\subset L_2(a, b)$ კრებადი მიმდევრობაა $x^*(t)\in L_2(a, b)$ ელემენტისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [x_n(t)-x^*(t)]^2\, dt=0.$$

ელემენტთა მიმდევრობის ასეთი სახის კრებადობას საშუალო კრებადობა ეწოდება.

**15. ჩებიშევის ფუნქციონალური $L_2^{(\alpha)}(a, b)$ სივრცე.** როგორც ცნობილია ფუნქციათა კონსტრუქციულ თეორიაში, დიდი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის საუკეთესო მიახლოვების ამოცანას მოცემული კლასის ფუნქციების წრფივი კომბინაციების საშუალებით. ამ და მისი მსგავსი ამოცანების გამოკვლევასთან დაკავშირებით ჩებიშევმა შემოიღო ფუნქციონალური $L_2^{(\alpha)}(a, b)$ სივრცე. ამ სივრცის $x(t)$ ელემენტი ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთ ზომად ფუნქციას, რომლის კვადრატი ინტეგრებადია ლებეგის აზრით მოცემული $\alpha(t)$ წონით:

$$\int_a^b x^2(t)\alpha(t)dt<\infty,$$

სადაც $\alpha(t)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე არაკლებადი ფუნქცია. გამოსახულებას:

$$\rho(x, y)=\left\{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\alpha(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.31}$$

ეწოდება მანძილი $x(t), y(t) \in L_2^{(\alpha)}(a, b)$ ელემენტებს შორის.

ფუნქციათა $\{x_n(t)\}\subset L_2^{(\alpha)}(a, b)$ მიმდევრობა კრებადია $x^*(t)\in L_2^{(\alpha)}(a,b)$ ფუნქციისაკენ, თუ

$$\int_a^b [x_n(t)-x^*(t)]^2\alpha(t)dt\to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

ფუნქციათა $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ასეთნაირ კრებადობას ეწოდება საშუალო კრებადობა $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ $\alpha(t)$ წონით.

**16. ფუნქციონალური $L_p(0,1)$ სივრცე.** განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე ზომადი ნამდვილი $x(t)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt<\infty, \tag{1.32}$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია ლებეგის აზრით[1] და $p\geqslant 1$. ორ $x(t)$ და $\overline{x}(t)$ ფუნქციას, რომლებიც $[0,1]$ სეგმენტზე ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნულზომის სიმრავლეზე განსხვავდებიან, ტოლი ფუნქციები ვუწოდოთ და ჩავწეროთ $x(t)=\overline{x}(t)$.

ყველა ზომად ნამდვილ $x(t)$ ფუნქციის სიმრავლეს, რომლებისთვისაც შესრულებულია (1.32) პირობა, ეწოდება $L_p(0,1)$ სივრცე.

ხშირად $L_p(0,1)$ სივრცის ელემენტს $p$ ხარისხით ინტეგრებად ფუნქციასაც უწოდებენ.

დავამტკიცოთ, რომ თუ $x_1(t), x_2(t) \in L_p(0,1)$, მაშინ $x_1(t)\pm x_2(t) \in L_p(0,1)$. ამისათვის, წინასწარ შევჩერდეთ ერთი მარტივი უტოლობის გამოყვა-

[1] ყველაფერი აქ ნათქვამი სამართლიანია მაშინაც, როცა $[0,1]$ სეგმენტის ნაცვლად აღებულია ნებისმიერი სეგმენტი $[a, b]$.

ნაზე. ვთქვათ, $\xi$ და $\eta$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ცხადია, რომ როცა $|\xi|>|\eta|$, მაშინ უტოლობიდან

$$|\xi\pm\eta|\leqslant|\xi|+|\eta|$$

მივიღებთ $|\xi+\eta|\leqslant 2|\xi|$, და როცა $p\geqslant 1$, მით უმეტეს ადგილი ექნება უტოლობას

$$|\xi\pm\eta|^p\leqslant 2^p(|\xi|^p+|\eta|^p). \tag{1.33}$$

ამავე უტოლობას აქვს ადგილი მაშინაც, როცა $|\xi|\leqslant|\eta|$. ასე, რომ (1.33) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $\xi$ და $\eta$ ნამდვილი რიცხვებისათვის და $p\geqslant 1$.

ავიღოთ $\xi$ და $\eta$ რიცხვების როლში შესაბამისად $x_1(t)$ და $x_2(t)$ ფუნქციები, მაშინ (1.33) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|x_1(t)\pm x_2(t)|^p\leqslant 2^p(|x_1(t)|^p+|x_2(t)|^p).$$

ვინაიდან $x_1(t),\ x_2(t)\in L_p(0,1)$, ამიტომ

$$\int_0^1|x_1(t)\pm x_2(t)|^p dt\leqslant 2^p\int_0^1|x_1(t)|^p dt+2^p\int_0^1|x_2(t)|^p dt<\infty$$

და ამით ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა ნამდვილი $p\geqslant 1$ და $q$ რიცხვები, რომლებიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან $p^{-1}+q^{-1}=1$ ტოლობით. $p$ და $q$ რიცხვებს ურთიერთშეუღლებული რიცხვები ვუწოდოთ. ცხადია, როცა $p>1$, მაშინ $q>1$. განვიხილოთ შეუღლებული $p$ და $q$ რიცხვების შესაბამი $L_p(0,1)$ და $L_q(0,1)$ სივრცეები. ვთქვათ, $x(t)\in L_p(0,1)$ და $y(t)\in L_q(0,1)$ ნებისმიერი ელემენტებია. გამოვიყვანოთ მეტად საჭირო უტოლობა:

$$\int_0^1 x(t)y(t)dt\leqslant\left\{\int_0^1|x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_0^1|y(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.34}$$

რომელსაც ჰ ე ლ დ ე რ ი ს უტოლობა ეწოდება.

ამისათვის განვიხილოთ უტოლობა:

$$\frac{\xi^p}{p}+\frac{\eta^q}{q}\geqslant\xi\eta, \tag{1.35}$$

რომელსაც ადგილი აქვს ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი $\xi$ და $\eta$ და ურთიერთშეუღლებული $p$ და $q$ რიცხვებისათვის. ჩავსვათ (1.35) უტოლობაში $\xi$ და $\eta$ რიცხვების ნაცვლად შემდეგი დადებითი რიცხვები:

$$\xi=|x(t)|\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{-\frac{1}{p}},\quad \eta=|y(t)|\left(\int_0^1|y(t)|^q dt\right)^{-\frac{1}{q}},$$

მივიღებთ

$$|x(t)||y(t)|\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|y(t)|^q dt\right)^{-\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant p^{-1}|x(t)|^p\Big(\int_0^1|x(t)|^p dt\Big)^{-1}+q^{-1}|y(t)|^q\Big(\int_0^1|y(t)|^q dt\Big)^{-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $x(t)\in L_p(0,1)$ და $y(t)\in L_q(0,1)$, ამიტომ ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილში $|x(t)|^p$ და $|y(t)|^q$ ფუნქციები $[0,1]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია. ამის გამო მარცხენა ნაწილში $|x(t)||y(t)|$ ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებადი ფუნქცია იქნება იმავე სეგმენტზე. ნათქვამის ძალით, წინა უტოლობა შესაძლოა ვაინტეგროთ $[0,1]$ სეგმენტზე. შედეგად მივიღებთ უტოლობას:

$$\Big(\int_0^1|x(t)|^p dt\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1|y(t)|^q dt\Big)^{-\frac{1}{q}}\int_0^1|x(t)||y(t)|dt\leqslant p^{-1}+q^{-1}=1,$$

საიდანაც გვექნება

$$\int_0^1|x(t)||y(t)|dt\leqslant\Big\{\int_0^1|x(t)|^p dt\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\int_0^1|y(t)|^q dt\Big\}^{\frac{1}{q}}.$$

ახლა თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\int_0^1|x(t)||y(t)|dt\geqslant\int_0^1 x(t)y(t)dt,$$

მივიღებთ დასამტკიცებელ (1.34) უტოლობას.

ადვილად გამოვიყვანთ ახლა, აგრეთვე ხშირად საჭირო, მინკოვსკის ინტეგრალურ უტოლობასაც.

ვთქვათ, $x_1(t)$, $x_2(t)\in L_p(0,1)$ ნებისმიერი ელემენტებია. მაშინ, როგორც ზევით ვნახეთ, ჯამი $x_1(t)+x_2(t)\in L_p(0,1)$. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $|x_1(t)+x_2(t)|^{p-1}\in L_q(0,1)$. მართლაც, ვინაიდან $p=q(p-1)$, ამიტომ გვექნება

$$\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^{q(p-1)}dt=\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^p dt<\infty. \tag{1.36}$$

განვიხილოთ ახლა უტოლობა

$$\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^p dt=\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^{p-1}|x_1(t)+x_2(t)|dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^{p-1}|x_1(t)|dt+\int_0^1|x_1(t)+x_2(t)|^{p-1}|x_2(t)|dt. \tag{1.37}$$

ვინაიდან, (1.36) ფორმულის ძალით, ფუნქცია $|x_1(t)+x_2(t)|^{p-1}\in L_q(0,1)$, ხოლო პირობის ძალით $x_1(t)$, $x_2(t)\in L_p(0,1)$, ამიტომ (1.37) უტოლობის მარჯვენა ნაწილში მონაწილე ინტეგრალების მიმართ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰელ-

დერის (1.34) უტოლობა. მაშინ, როგორც მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, მივიღებთ

$$\int_0^1 |x_1(t)+x_2(t)|^p dt \le \left(\int_0^1 |x_1(t)+x_2(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |x_1(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 |x_2(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

გავამრავლოთ ამ უტოლობის ორივე ნაწილი შემდეგ გამოსახულებაზე: $\left(\int_0^1 |x_1(t)+x_2(t)|^p dt\right)^{-\frac{1}{q}}$ და ვისარგებლოთ $1-q^{-1}=p^{-1}$ ტოლობით, მივიღებთ მინკოვსკის ინტეგრალურ უტოლობას:

$$\left\{\int_0^1 |x_1(t)+x_2(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 |x_1(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |x_2(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.38)$$

როცა $p<1$, მაშინ ეს უტოლობა უკვე სამართლიანი არ არის.

ვთქვათ, $x_1(t)$, $x_2(t) \in L_p(0,1)$ ნებისმიერი ელემენტებია. მანძილი ამ ელემენტებს შორის განსაზღვრულია ფორმულით

$$\rho(x_1,\ x_2) = \left\{\int_0^1 |x_1(t)-x_2(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.39)$$

ცხადია, რომ $\rho(x_1,\ x_2) \geqslant 0$ და $\rho(x_1,\ x_2)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1(t)=x_2(t)$. ამასთანავე $\rho(x_1,\ x_2)=\rho(x_2, x_1)$. სამკუთხედის აქსიომის სამართლიანობის შესამოწმებლად, ავიღოთ ნებისმიერი სამი $x_1(t), x_2(t), x_3(t) \in L_p(0,1)$ ელემენტი და მინკოვსკის (1.38) უტოლობაში $x_1(t)$ და $x_2(t)$ ფუნქციების ნაცვლად შევიტანოთ შესაბამისად $x_1(t)-x_3(t)$ და $x_3(t)-x_2(t)$ ფუნქციები, მივიღებთ

$$\left\{\int_0^1 |x_1(t)-x_2(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_0^1 |x_1(t)-x_3(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_0^1 |x_3(t)-x_2(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\rho(x_1,\ x_2) \leqslant \rho(x_1,\ x_3)+\rho(x_3,\ x_2)$.

განვიხილოთ ახლა $x^*(t) \in L_p(0,1)$ ელემენტისაკენ კრებადი $\{x_n(t)\} \in L_p(0,1)$ მიმდევრობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)},\ x^*) = \lim_{n\to\infty} \left\{\int_0^1 |x^{(n)}(t)-x^*(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = 0,$$

ე. ი.

$$\int_0^1 |x^{(n)}(t)-x^*(t)|^p dt \to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

ამ სახის კრებადობას საშუალო კრებადობა ეწოდება $p$ მაჩვენებლით. ცხადია, როცა $p=2$, აქედან მივიღებთ ფუნქციათა მიმდევრობის საშუალო კრებადობას ჰილბერტის ფუნქციონალურ $L_2(0,1)$ სივრცეში.

17. $C_{L_2}$ სივრცე. ზოგჯერ ფუნქციათა ერთსა და იმავე სიმრავლეში შესაძლოა სხვადასხვა წესით შემოვიღოთ მეტრიკის ცნება.

ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე, რომელშიც, მე-10 მაგალითში შემოღებული მეტრიკის ნაცვლად, მანძილი ორ უწყვეტ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციას შორის განსაზღვრულია შემდეგი ფორმულით:

$$\rho(x, y)=\left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.40}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასე განსაზღვრული მეტრიკა დააკმაყოფილებს მეტრული სივრცის ყველა აქსიომას. მათ შორის, სამკუთხედის აქსიომა გამომდინარეობს მინკოვსკის ინტეგრალური (1.38) უტოლობიდან, რომელშიც ამ შემთხვევაში, უნდა დავუშვათ $p=2$.

$[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლეს, რომელშიც მეტრიკა შემოღებულია (1.40) ფორმულით, უწოდებენ $C_{L_2}$ სივრცეს.

18. მოვიყვანოთ ახლა მეტრული სივრცის აგების ერთი პრინციპი, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მეტრულ სივრცეთა მაგალითების სიმრავლე უსასრულოა.

განვიხილოთ რაიმე მეტრული $I$ სივრცე. ეს იმას ნიშნავს, რომ მის ყოველ ორ ელემენტს შორის განსაზღვრულია მანძილი. ვთქვათ $I_0$ რაიმე სიმრავლეა $I$ სივრციდან. ცხადია, $I_0$ სიმრავლეში თავისთავად იქნება განსაზღვრული მანძილის ცნება, რომელიც დააკმაყოფილებს მეტრული სივრცის ყველა აქსიომას. ისე, რომ თვითონაც მეტრული სივრცეა. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $I_0$ სივრცეში მეტრიკა ინდუცირებულია $I$ სივრცის მეტრიკით. თუ $I_0$ სიმრავლე ჩაკეტილიც არის, მაშინ მას $I$ სივრცის ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე ს უწოდებენ. აქედან ნათელია, რომ საზოგადოდ, ერთ მეტრულ სივრცეში შეგვიძლია ავაგოთ უამრავი მეტრული ქვესივრცე.

რა თქმა უნდა, ნათქვამიდან არ გამომდინარეობს, რომ ყოველი უსასრულო სიმრავლის მეტრიზაცია შესაძლოა.

## § 5. სიმრავლეთა თეორიის ზოგიერთი საკითხი მეტრულ სივრცეში

ზემოთ (იხ. § 2) შემოღებული იყო რიგი ცნებებისა მეტრულ სივრცეში, რომლებიც ჩვენთვის ცნობილია ევკლიდეს სივრცის სიმრავლეებისათვის. შევავსოთ ეს ცნებები კიდევ რამდენიმე განსაზღვრით.

ვთქვათ, $M$ არის მეტრული $X$ სივრცის სიმრავლე. ვიტყვით, რომ $x \in X$ არის $M$ სიმრავლის შ ე ხ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო $M$ სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც შეიცავს. $x \in X$ წერტილს ეწოდება $M$ სიმრავლის დ ა გ რ ო ვ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ცხადია, $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს და შეიძლება არ ეკუთვნოდეს $M$ სიმრავლეს. $x \in X$ წერტილს ეწოდება $M$ სიმრავლის ი ზ ო ლ ი რ ე ბ უ ლ ი

წ ე რ ტ ი ლ ი, თუ არსებობს ამ წერტილის მიდამო, რომელიც $M$ სიმრავლის არცერთ წერტილს არ შეიცავს, გარდა $x$ წერტილისა.

თეორემა 1.6. $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ყ ო ვ ე ლ ი შ ე ხ ე ბ ი ს $x$ წ ე რ ტ ი ლ ი ა რ ი ს $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ა ნ დ ა გ რ ო ვ ე ბ ი ს ა ნ ი ზ ო ლ ი რ ე ბ უ ლ ი წ ე რ-ტ ი ლ ი.

თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა განვიხილოთ ორი შემთხვევა. 1) შეხების $x$ წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში $x$ იქნება $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. 2) $M$ სიმრავლის შეხების $x$ წერტილს გააჩნია $S(x; \varepsilon)$ მიდამო ისეთი, რომელიც $M$ სიმრავლის წერტილთა მხოლოდ სასრული რიცხვს შეიცავს. ამ შემთხვევაში $x$ იქნება $M$ სიმრავლის იზოლირებული წერტილი. მართლაც, ვთქვათ, $S(x; \varepsilon)$ მიდამო, გარდა $x$ წერტილისა, შეიცავს $M$ სიმრავლის $x_1, \ldots, x_k$ წერტილებს. ავიღოთ $S(x; \varepsilon_0)$ მიდამო, სადაც $\varepsilon_0 = \min\{\rho(x, x_1), \ldots, \rho(x, x_k)\}$. ცხადია, $S(x; \varepsilon_0)$ არ შეიცავს $M$ სიმრავლის არცერთ წერტილს, გარდა თვით $x$ წერტილისა.

მოვიყვანოთ კიდევ სიმრავლეთა თეორიის რამდენიმე დებულება მეტრულ $X$ სივრცეში. სრულიად ისევე როგორც ევკლიდეს $n$. განზომილებიან $R_n$ სივრცეში. შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ თუ $M_1$, $M_2$ და $M_3$ არის $X$ სივრცის ნებისმიერი სამი სიმრავლე, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} (M_1 \cup M_2) \cap M_3 &= (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3), \\ (M_1 \cap M_2) \cup M_3 &= (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3) \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

გარდა ამისა, თუ ნებისმიერი $\alpha$ პარამეტრისათვის $M_\alpha$ არის $M$ სიმრავლის ქვესიმრავლე, სადაც $M \subset X$, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} M \setminus \bigcup_\alpha M_\alpha &= \bigcap_\alpha (M \setminus M_\alpha), \\ M \setminus \bigcap_\alpha M_\alpha &= \bigcup_\alpha (M \setminus M_\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

ვთქვათ ახლა, $\overline{M} \subset X$ არის $M$ სიმრავლის ჩაკეტვა. დავამტკიცოთ

თეორემა 1.7. მ ე ტ რ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $M$ ს ი მ რ ა ვ-ლ ი ს $\overline{M}$ ჩ ა კ ე ტ ვ ა ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა.

მართლაც, ვთქვათ $x_0$ არის $\overline{M}$ სიმრავლის ნებისმიერი დაგროვების წერტილი. მაშინ, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი იარსებებს ისეთი $\overline{x}_0 \in \overline{M}$ ელემენტი, რომ $\rho(x_0, \overline{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. ცხადია, $\overline{x}_0$ წერტილი $M$ სიმრავლის იზოლირებული ან დაგროვების წერტილია. ორივე შემთხვევაში იარსებებს $x \in M$ წერტილი ისეთი, რომ $\rho(x, \overline{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. გამოვიყენოთ ახლა $x, x_0, \overline{x}_0$ წერტილებისათვის სამკუთხედის აქსიომა, გვექნება: $\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, \overline{x}_0) + \rho(\overline{x}_0, x) < \varepsilon$. ვთქვათ ახლა, რომ $\varepsilon$ რიცხვი გაირბენს $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ მნიშვნელობებს, მაშინ წარმოიქმნება ელემენტების $\{x_n\} \in M$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება $x_0$ წერტილისაკენ. ისე რომ $x_0$ წერტილი იქნება $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი და, ამიტომ $x_0 \in \overline{M}$. ამრიგად, $\overline{M}$ სიმრავლის ყოველი დაგ-

როვების წერტილი თვითონ ამ სიმრავლეს ეკუთვნის. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{M}$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

მაგალითები 1. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ჩაკეტილია, ვინაიდან იგი წარმოადგენს ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ჩაკეტვას.

2. $C(a, b)$ სივრცე ჩაკეტილი სიმრავლეა, როგორც ყველა პოლინომის სიმრავლის ჩაკეტვა.

თეორემა 1.8. $\overline{M}$ სიმრავლის $\overline{\overline{M}}$ ჩაკეტვა ისევ $\overline{M}$ სიმრავლეა: $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$.

თეორემის დასამტკიცებლად, ცხადია, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\overline{\overline{M}}$ სიმრავლის ყოველი წერტილი იმავე დროს $\overline{M}$ სიმრავლის წერტილია. ვთქვათ, $x\in\overline{\overline{M}}$ ნებისმიერი წერტილია. მაშინ. ამ წერტილის ნებისმიერ სფერულ $S(x;\varepsilon)$ მიდამოში იარსებებს ერთი მაინც ისეთი $x_1$ წერტილი, რომ $x_1\in\overline{M}$.

განვიხილოთ ახლა სფერული $S(x_1, \varepsilon_1)$ მიდამო, რომლის $\varepsilon_1$ რადიუსი შევარჩიოთ ასე: $\varepsilon_1=\varepsilon-\rho(x, x_1)$. მაშინ $S(x_1;\varepsilon)\subset S(x,\varepsilon)$. მართლაც, ვთქვათ, $\bar{x}\in S(x_1, \varepsilon_1)$ ნებისმიერი წერტილია. ცხადია, $\rho(\bar{x}, x_1)<\varepsilon_1$. შევნიშნოთ, რომ $\rho(\bar{x}, x)\leqslant\rho(\bar{x}, x_1)+\rho(x_1, x)\leqslant\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)=\varepsilon$, ე. ი. $\bar{x}\in S(x;\varepsilon)$. ვინაიდან $x_1\in\overline{M}$, ამიტომ იარსებებს $S(x_1, \varepsilon_1)$ მიდამოს ერთი მაინც ისეთი $x_2$ წერტილი, რომ $x_2\in M$. მაშინ, ცხადია, $x_2\in S(x;\varepsilon)$. მაგრამ, $x_2$ ეკუთვნის აგრეთვე $\overline{M}$ სიმრავლეს. მაშასადამე, ნებისმიერი $x\in\overline{\overline{M}}$ წერტილის ყოველი $S(x;\varepsilon)$ მიდამო მუდამ შეიცავს $\overline{M}$ სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x\in\overline{M}$ და თეორემაც დამტკიცებულია.

თეორემა 1.9. მეტრულ სივრცეში ნებისმიერი რიცხვის ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთა, აგრეთვე სასრული რიცხვის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ჯამი, ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დავამტკიცოთ ჯერ თეორემის პირველი ნაწილი. განვიხილოთ ჩაკეტილ $M_\alpha$ სიმრავლეთა $M=\bigcap_{\alpha} M_\alpha$ თანაკვეთა, სადაც $\alpha$ რაიმე (სასრული ან უსასრულო) სიმრავლეზე იცვლება და ყოველი $M_\alpha\subset X$. საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ თუ $x$ არის $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაშინ $x\in M$. ვინაიდან $x$ დაგროვების წერტილია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $S(x;\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს და, მაშასადამე, $S(x;\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს ყოველი $M_\alpha$ სიმრავლის წერტილების უსასრულო სიმრავლეს. რადგანაც ყოველი $M_\alpha$ ჩაკეტილია, ამიტომ წერტილი $x$ ეკუთვნის ყველა $M_\alpha$ სიმრავლეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x$ ეკუთვნის მათ $M$ თანაკვეთასაც და ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $M_1, \ldots, M_n\subset X$ მოცემული ჩაკეტილი სიმრავლეებია, სადაც $n$ ნატურალური რიცხვია. აღვნიშნოთ $M=\bigcup_{i=1}^{n}M_i$ და დავუშვათ, რომ $M$ სიმრალის დაგროვების წერტილი $x\,\overline{\in}\,M$. მაშინ, $x$ არ ეკუთვნის არცერთ $M_i$ სიმრავლეს, სადაც $i=1,\ldots,n$. ამის გამო $x$ წერტილის გარშემო შეგვიძლია ავაგოთ $S(x;\varepsilon_1)$, $S(x;\varepsilon_2),\ldots,S(x;\varepsilon_n)$ მიდამოები ისეთი, რომ $S(x;\varepsilon_i)$ მიდამო $(i=1,\ldots,n)$ შეიცავდეს $M_i$ სიმრავლის წერტილების მხოლოდ სასრულ რაოდენობას.

ვთქვათ, $\varepsilon=\min[\rho(x, \varepsilon_1), \ldots, \rho(x, \varepsilon_n)]$. მაშინ ცხადია, $S(x; \varepsilon)$ მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილების მხოლოდ სასრულ რიცხვს. ეს კი იმას ეწინააღმდეგება, რომ $x$ არის $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ამრიგად, ჩვენი დაშვება სწორი არ არის და $x \in M$, ე. ი. $M$ ჩაკეტილი სიმრავლეა.

შენიშვნა 1. როცა ჩაკეტილ სიმრავლეთა მოცემული მიმდევრობა $M_1, M_2, \ldots$ უსასრულოა, მაშინ მათი ჯამი $M$ შეიძლება არ იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე. მაგალითად, მეტრულ $R_1$ სივრცეში (ნამდვილ რიცხვთა წრფეზე) განვიხილოთ ჩაკეტილ სიმრავლეთა შემდეგი უსასრულო მიმდევრობა: $M_1= \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], M_2=\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \ldots, M_n=\left[\frac{1}{n+2}, \frac{n+1}{n+2}\right], \ldots$, შევნიშნოთ, რომ $M=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i=(0,1)$ და, მაშასადამე, $M$ სიმრავლე არ არის ჩაკეტილი.

შენიშვნა 2. დამტკიცებული თეორემიდან და (1.42) ტოლობებიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: *მეტრულ სივრცეში ნებისმიერი რიცხვის ღია სიმრავლეთა ჯამი, აგრეთვე სასრული რიცხვის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა, ღია სიმრავლეა.*

**თეორემა 1.10.** *მეტრული $X$ სივრცის ნებისმიერი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა:*

$$\overline{M_1 \cup M_2}=\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2.$$

მართლაც, $M_1$, $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ და $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2 \cup \overline{M_1 \cup M_2}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \subset \overline{M_1 \cup M_2}$. ვუჩვენოთ ახლა პირიქით, რომ $\overline{M_1 \cup M_2}$ სიმრავლის ყოველი $x$ ელემენტი ეკუთვნის $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$ ჯამს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ და $x \,\overline{\in}\, \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x \,\overline{\in}\, \overline{M}_1$ და $x \,\overline{\in}\, \overline{M}_2$. ამიტომ, არსებობს ისეთი $\varepsilon>0$ რიცხვი, რომ $S(x; \varepsilon) \cap M_1$ თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, სადაც $S(x; \varepsilon)$ არის $x$ წერტილის $\varepsilon$ მიდამო. ავიღოთ ახლა $x$ წერტილის ახალი $S(x; \varepsilon_1)$ მიდამო ისეთი, რომ $S(x; \varepsilon_1) \subset S(x; \varepsilon)$ და $S(x; \varepsilon_1) \cap (M_1 \cup M_2)$ არ იყოს ცარიელი სიმრავლე. მაშინ, ცხადია, $S(x; \varepsilon_1) \cap M_2$ თანაკვეთა არ არის ცარიელი და, მაშასადამე, $x \in \overline{M}_2 \subset (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

**თეორემა 1.11.** *თუ $M_1$ არის მეტრული $X$ სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ დამატება $N_1=X-M_1$ ღია სიმრავლეა. პირიქით, თუ $M_2$ არის მეტრული $X$ სივრცის ღია სიმრავლე, მაშინ დამატება $N_2=X-M_2$ ჩაკეტილი სიმრავლეა.*

თეორემის პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად, ცხადია, საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ თუ $x_0 \in N_1$ ნებისმიერი წერტილია, მაშინ არსებობს ისეთი ღია $\rho(x, x_0)<r$ სფერო $x_0$ ცენტრით, რომლის ყველა $x$ წერტილი $N_1$ სიმრავლეს ეკუთვნის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი სფერო $x_0$ ცენტრით შეიცავს $M_1$ სიმრავლის წერტილებს. მაგრამ, მაშინ $x_0$ იქნება $M_1$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი და, ამ უკანასკნელის ჩაკეტილობის გა-

მო, გვექნება $x_0 \in M$. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას $x_0 \in N$ და, ამიტომ, $N$ ღია სიმრავლეა.

გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. ახლა, თეორემის პირობის ძალით, $M_2$ ღია სიმრავლეა. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $N_2$ იქნება ჩაკეტილი სიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ ამ პირობებში, $M_2$ სიმრავლეს ნებისმიერ $x_0$ წერტილთან ერთად მიეკუთვნება რაიმე სფერო, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $x_0$ წერტილში. ამის გამო, შეუძლებელია $x_0$ იყოს $N_2$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ამრიგად, $N_2$ სიმრავლის დაგროვების წერტილები შეიძლება იყოს მხოლოდ ამავე სიმრავლის წერტილები. ეს იმას ნიშნავს, რომ $N_2$ ჩაკეტილი სიმრავლეა და თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

## § 6. მეტრული სივრცის ბაზისი და დაფარვა

შემოვიღოთ მეტრული სივრცის ბაზისის ცნება. ვთქვათ, $X$ მეტრული სივრცეა. განვიხილოთ სასრული ან უსასრულო $\{M_\alpha\}$ სისტემა $M_\alpha \subset X$ სიმრავლეებისა. იტყვიან, რომ $\{M_\alpha\}$ სისტემა არის $X$ სივრცის ბაზისი, თუ ყოველი ღია $M \subset X$ სიმრავლე წარმოიდგინება ამ სისტემის სიმრავლეების სასრული ან უსასრულო ჯამის სახით.

**თეორემა 1.12.** *იმისათვის, რომ მეტრულ $X$ სივრცეში ღია სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემა იყოს ბაზისი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი ღია $M \subset X$ სიმრავლისათვის და ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის არსებობდეს $M_\alpha \subset \{M_\alpha\}$ სიმრავლე ისეთი, რომ $x \in M_\alpha \subset M$.*

დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{M_\alpha\}$ არის $X$ სივრცის ბაზისი. საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ღია $M \subset X$ სიმრავლისათვის და ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის არსებობს $M_\alpha \subset \{M_\alpha\}$ სიმრავლე ისეთი, რომ $x \in M_\alpha \subset M$. სივრცის ბაზისის განსაზღვრის ძალით, გვაქვს

$$M = \bigcup_k M_{\alpha_k}.$$

ვთქვათ, $x \in M$ ნებისმიერი ელემენტია. ცხადია, $x$ ელემენტი ეკუთვნის ერთ-ერთ $M_{\alpha_k} \subset M$ სიმრავლეს.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ამისათვის უნდა ვუჩვენოთ, რომ თუ ნებისმიერი ღია $M \subset X$ სიმრავლისათვის და ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ღია $M_\alpha \subset X$ სიმრავლე, რომ $x \in M_\alpha \subset M$, მაშინ ღია სიმრავლეების $\{M_\alpha\}$ სისტემა, არის $X$ სივრცის ბაზისი. აქ ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას, რომ $M_\alpha$ სიმრავლე იცვლება $x$ ელემენტის ცვლილებასთან ერთად. სხვანაირად, $\{M_\alpha\}$ სისტემა წარმოიქმნება $x$ ელემენტის ცვლილების ხარჯზე. ვთქვათ, $x \in M$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ პირობის ძალით, გვაქვს $x \in M_\alpha \subset M$. თუ შევაჯამებთ ყველა $M_\alpha$ სიმრავლეს, როცა $x$ ამოწურავს მთელ $M$ სიმრავლეს, გვექნება

$$M = \bigcup_k M_{\alpha_k},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\{M_\alpha\}$ სისტემა $X$ სივრცის ბაზისია.

ვიტყვით, რომ სივრცეს აქვს *თვლადი ბაზისი*, თუ ამ სივრცეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ბაზისი, რომელიც ელემენტების თვლადი სიმრავლისაგან შედგება. ასე მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის ნამდვილ რიცხვთა სივრცის თვლადი ბაზისი.

თეორემა 1.13. იმისათვის, რომ მეტრულ $X$ სივრცეს თვლადი ბაზისი ჰქონდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცეში არსებობდეს სასრული ან თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე.

ვიგულისხმოთ ჯერ, რომ $X$ სივრცეს თვლადი ბაზისი აქვს და დავამტკიცოთ, რომ ამ სივრცეში იარსებებს ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე. მართლაც, ვთქვათ, $\{M_k\}$ სივრცის თვლადი ბაზისია. ყოველი $M_k$ სიმრავლიდან ნებისმიერად ავირჩიოთ თითო $x_k$ ელემენტი. ასე წარმოიქმნება ელემენტების თვლადი $N=\{x_k\}\subset X$ სიმრავლე. ვთქვათ, $x\in X$ ნებისმიერი ელემენტია და $S(x, \varepsilon)$—ამ წერტილის ღია სფერული მიდამო. წინა თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი $M_k$ სიმრავლე, რომ $x\in M_k\subset S(x; \varepsilon)$. ამასთანავე, ყოველი $M_k$ სიმრავლე შეიცავს $N$ სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც. გამოდის, რომ ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტის ყოველი ღია სფერული $S(x; \varepsilon)$ მიდამო შეიცავს თვლადი $N$ სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $N$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა $X$ სივრცეში. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავუშვათ ახლა, რომ $X$ სივრცეში არსებობს თვლადი ყველგან მკვრივი $N=\{x_k\}\subset X$ სიმრავლე და დავამტკიცოთ, რომ $X$ სივრცეს უსათუოდ სიმრავლეთა თვლადი ბაზისიც ექნება. მართლაც, ავაგოთ ყოველი $x_k$ ელემენტის ღია სფერული $S\left(x_k; \frac{1}{n}\right)$ მიდამო, სადაც $n, k=1, 2, \ldots$ ამ სფეროების სიმრავლე ცხადია, თვლადი იქნება. როგორც ახლავე ვნახავთ ყველა $S\left(x_k; \frac{1}{n}\right)$ სფეროების სიმრავლე წარმოადგენს $X$ სივრცის თვლად ბაზისს. ამაში, რომ დავრწმუნდეთ ავიღოთ ნებისმიერი ღია $M\subset X$ სიმრავლე და მისი რაიმე $x\in M$ ელემენტი. ვინაიდან $M$ ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს სფერული $S\left(x; \frac{1}{m}\right)\subset M$ მიდამო. რადგან $N$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $X$ სივრცეში, ამიტომ არსებობს ისეთი $x_{k_0}\in N$ ელემენტი, რომ ადგილი ექნება $\rho(x, x_{k_0})<\frac{3}{m}$ უტოლობას. ამ პირობებში $S\left(x_{k_0}, \frac{2}{m}\right)$ სფერო შეიცავს $x$ ელემენტს და $S\left(x_{k_0}; \frac{2}{m}\right)\subset S\left(x; \frac{1}{m}\right)\subset M$. ამგვარად, ნებისმიერი ღია $M$ სიმრავლისათვის და მისი ყოველი $x$ ელემენტისათვის არსებობს ღია $S\left(x; \frac{1}{n}\right)$ სფერო ისეთი, რომ $S\left(x; \frac{1}{n}\right)\subset M$. წინა თეორემის ძალით, $S\left(x_k; \frac{1}{n}\right)$ სფეროების სიმრავლე წარმოადგენს $X$ სივრცის თვლად ბაზისს. ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ქვევით დაგვჭირდება კიდევ შემდეგი განსაზღვრა: სიმრავლეთა $\{N_\alpha\}$ სისტემას მეტრული $X$ სივრცის დაფარვა ეწოდება, თუ $\bigcup_\alpha N_\alpha=X$. როცა დაფარვა $\{N_\alpha\}$ ღია (ჩაკეტილი) სიმრავლეებისაგან შედგება, მაშინ მას ღია (ჩაკეტილი) დაფარვა ეწოდება. $\{N_\alpha\}$ სისტემას ცენტრირებული სისტემა ეწოდება, თუ ამ სისტემის ნებისმიერ სიმრავლეთა თანაკვეთა, როცა მათი რიცხვი სასრულია, არ არის ცარიელი.

**თეორემა 1.14.** თუ მეტრულ $X$ სივრცეს აქვს თვლადი ბაზისი, მაშინ მისი ყოველი ღია დაფარვიდან შეიძლება გამოვყოთ სასრული ან თვლადი ქვედაფარვა.

ვთქვათ, სიმრავლეთა $\{M_n\}$ სისტემა $X$ სივრცის თვლადი ბაზისია, ხოლო $\{N_\alpha\}$ — ამ სივრცის რაიმე დაფარვა. თუ $x \in X$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ არსებობს ბაზისის $M_n \subset \{M_n\}$ და დაფარვის $N_\alpha \subset \{N_\alpha\}$ სიმრავლეები ისეთი, რომ $x \in M_n \subset N_\alpha$. ყველა ასეთი $M_n$ სიმრავლეების რიცხვი სასრული ან თვლადია და ფარავს $X$ სივრცეს. ყოველი $M_n$ სიმრავლისათვის ავირჩიოთ მისი შემცველი $N_\alpha \subset \{N_\alpha\}$ სიმრავლე. ამ წესით $\{N_\alpha\}$ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ან თვლადი ქვედაფარვა $X$ სივრცისა.

## § 7. მეტრულ სივრცეთა ურთიერთგადასახვის ზოგიერთი საკითხი

1. ზევით შემოღებული გვქონდა ოპერატორის ცნება (იხ. § 1). შევეხოთ ახლა მეტრული $X$ და $Y$ სივრცეების ურთიერთგადასახვის ზოგიერთ მარტივ საკითხს. ვთქვათ, $U$ ოპერატორი $X$ სივრცის ყოველ $x$ ელემენტს გადასახავს $Y$ სივრცის $y$ ელემენტში. ამ ფაქტს ხშირად ასე გამოსთქვამენ: „ოპერატორი $U$ მოქმედებს $X$ სივრციდან $Y$ სივრცეში". ყველა $U(x)$ ელემენტები აღვნიშნოთ $U(X)$ სიმბოლოთი. ვიტყვით, რომ $U$ ოპერატორი $X$ სივრცეს გადასახავს $Y$ *სივრცეზე*, თუ $U(X)=Y$. იმ შემთხვევაში, როცა $U(X)\subset Y$, ვიტყვით, რომ $U$ ოპერატორი $X$ სივრცეს გადასახავს $Y$ *სივრცეში*.

მრავალი საკითხის შესწავლის დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს *შებრუნებული ოპერატორის* ცნებას. ვთქვათ, $U$ ოპერატორი მისი განსაზღვრის $X$ არის ყოველ $x$ ელემენტს გადასახავს მნიშვნელობათა $Y$ არის ერთ $y=U(x)$ ელემენტში. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $U$ არის $X$ სივრცეზე *ცალსახად* განსაზღვრული ოპერატორი. გარდა ამისა, როცა $U$ ოპერატორის მნიშვნელობათა არის ყოველ $y \in Y$ ელემენტს ამ ოპერატორის განსაზღვრის $X$ არის ერთი $x$ ელემენტი ეთანადება, განსაზღვრული $U(x)=y$ ტოლობით, მაშინ ეს უკანასკნელი თანადობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $y\in Y$ ელემენტებზე განსაზღვრული ოპერატორი, რომელიც ასე აღვნიშნოთ: $x=U^{-1}(y)$. ამ ოპერატორისათვის, ცხადია, განსაზღვრის არე იქნება $Y$, ხოლო $X$—მნიშვნელობათა არე. $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორებს ურთიერთ *შებრუნებული ოპერატორები* ეწოდება. ცხადია, რომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის გვექნება: $U^{-1}U(x)=U^{-1}y=x$, ხოლო ნებისმიერი $y \in Y$ ელემენტისათვის გვექნება: $UU^{-1}(y)=U(x)=y$. როცა $X$ და $Y$ სივრცეების ელემენტებს შორის ასეთი თანადობა არსებობს, მაშინ იტყვიან, რომ ადგილი აქვს $X$ და $Y$ სივრცეთა *ურთიერთ ცალსახა გადასახვას*. ყველაფერი, რაც აქ $X$ და $Y$ სივრცეების შესახებ ვთქვით შეიძლება გავიმეოროთ, შესაბამისად, ამ სივრცეებში აღებული სიმრავლეებისათვისაც.

2. **ოპერატორის ზოგიერთი უმარტივესი თვისება.** ვთქვათ, $M$ არის მეტრული $X$ სივრცის რაიმე სიმრავლე, რომელსაც $U$ ოპერატორი გადასახავს მეტრული $Y$ სივრცის $U(M)$ სიმრავლეში. $U(M)$ სიმრავლეს ვუწოდოთ $U$ *ოპერატორის სახე*, ხოლო $M$ სიმრავლეს — $U$ *ოპერატორის პირველსახე*.

**თეორემა 1.15.** თუ $M_1$, $M_2 \subset X$ *ნებისმიერი სიმრავლეებია, რომლებსაც* $U$ *ოპერატორი გადასახავს* $Y$ *სივრცის* $U(M_1)$ *და*

$U(M_2)$ სიმრავლეებზე, მაშინ, $M_1 \cup M_2$ ჯამის სახე ტოლია ამ სიმრავლეთა სახეების ჯამისა, ე. ი.

$$U(M_1 \cup M_2) = U(M_1) \cup U(M_2). \qquad (1.43)$$

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ (1.43) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყოველი ელემენტი მარცხენა ნაწილსაც ეკუთვნის და პირიქით. ვთქვათ, $y \in U(M_1) \cup U(M_2)$ ნებისმიერი ელემენტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $x$ ელემენტი, რომ იგი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეთაგან ერთს მაინც ეკუთვნის და $y = U(x)$. აქედან ჩანს, რომ $x \in M_1 \cup M_2$ და, ამიტომ, $y = U(x) \in U(M_1 \cup M_2)$.

ახლა ვთქვათ, $y \in U(M_1 \cup M_2)$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ არსებობს ისეთი $x \in M_1 \cup M_2$ ელემენტი, რომ $y = U(x)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $y = U(x) \in U(M_1) \cup U(M_2)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.16. თუ $U^{-1}$ არის $U$ ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი და, მაშასადამე, მოქმედებს $Y$ სივრციდან $X$ სივრცეში, მაშინ ნებისმიერი ორი $N_1$, $N_2 \subset Y$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$U^{-1}(N_1) \cup U^{-1}(N_2) = U^{-1}(N_1 \cup N_2). \qquad (1.44)$$

მართლაც, ვთქვათ, $x \in U^{-1}(N_1) \cup U^{-1}(N_2)$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $U^{-1}(N_1)$ და $U^{-1}(N_2)$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთს მაინც მიეკუთვნება $x$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $N_1$ და $N_2$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთი მაინც შეიცავს $U(x)$ ელემენტს. მაგრამ, მაშინ $U(x) \in N_1 \cup N_2$, ე. ი. $x \in U^{-1}(N_1 \cup N_2)$.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ $x \in U^{-1}(N_1 \cup N_2)$ ნებისმიერი ელემენტია. მაშინ ცხადია, $U(x) \in N_1 \cup N_2$ და ამიტომ, $N_1$ და $N_2$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთი მაინც შეიცავს $U(x)$ ელემენტს. ამ პირობებში $U^{-1}(N_1)$ და $U^{-1}(N_2)$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთი მაინც შეიცავს $x$ ელემენტს, ე. ი. $x \in U^{-1}(N_1) \cup U^{-1}(N_2)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.17. თუ $U$ ოპერატორი მოქმედებს $X$ სივრციდან $Y$ სივრცეში, $U^{-1}$ მისი შებრუნებული ოპერატორია და $N_1$, $N_2 \subset Y$ ნებისმიერი ორი სიმრავლე, მაშინ

$$U^{-1}(N_1) \cap U^{-1}(N_2) = U^{-1}(N_1 \cap N_2). \qquad (1.45)$$

ვთქვათ, $x \in U^{-1}(N_1) \cap U^{-1}(N_2)$ ნებისმიერი ელემენტია. მაშინ $x \in U^{-1}(N_1)$ და $x \in U^{-1}(N_2)$, ე. ი. $U(x) \in N_1$ და $U(x) \in N_2$. მაშასადამე, $U(x) \in N_1 \cap N_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x \in U^{-1}(N_1 \cap N_2)$.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $x \in U^{-1}(N_1 \cap N_2)$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $U(x) \in N_1 \cap N_2$, ე. ი. $U(x)$ ერთდროულად ეკუთვნის როგორც $N_1$ ისე $N_2$ სიმრავლეს: $U(x) \in N_1$ და $U(x) \in N_2$. ეს ნიშნავს, რომ $x \in U^{-1}(N_1)$ და $x \in U^{-1}(N_2)$ ერთდროულად, ე. ი. $x \in U^{-1}(N_1) \cap U^{-1}(N_2)$.

3. მაგალითები. 1) განვიხილოთ ევკლიდეს $R_n$ სივრცის რაიმე $M$ სიმრავლე (ეს სიმრავლე შეიძლება ემთხვეოდეს მთელ $R_n$ სივრცეს), რომელზეც განსაზღვრულია დალაგებულ $n$-ნამდვილი $(x_1, \ldots, x_n)$ ცვლადის ჩვეულებრივი ნამდვილი $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე $N \subset R_1$. ტოლობა $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ განსაზღვრავს ოპერატორს, რომელიც $n$-განზომილებიან $M \subset R_n$ სიმრავლეს გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა სივრცის $N$ სიმრავლეში.

2) ვთქვათ ახლა, $M \subset R_n$ სიმრავლის ყოველ $x=(x_1, \ldots, x_n)$ ელემენტს ეთანადება $N \subset R_m$ სიმრავლის გარკვეული $y=(y_1, \ldots, y_m)$ ელემენტი. $M$ და $N$ სიმრავლეების ეს თანადობა აღვნიშნოთ $y=U(x)$ სიმბოლოთი. ამით განსაზღვრულია ოპერატორი, რომელიც $n$-განზომილებიანი $M$ სიმრავლიდან მოქმედებს $m$-განზომილებიან $N$ სიმრავლეში.

3) ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. განვიხილოთ $U(x)$ ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$Ux=\int_a^b K(s, t)x(t)dt, \tag{1.46}$$

სადაც $K(s, t)$ არის გული, უწყვეტი $a \leqslant s, t \leqslant b$ კვადრატში. (1.46) ინტეგრალი წარმოადგენს ოპერატორს, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველ უწყვეტ $x(t)$ ფუნქციას გადასახავს ამავე სეგმენტზე უწყვეტ $Ux$ ფუნქციაში. ამ შემთხვევაში ოპერატორის, როგორც განსაზღვრის $M$ არე, ისე მისი მნიშვნელობათა $N$ არე, უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეებია.

4) ვთქვათ, მოცემულია $a \leqslant s, t \leqslant b$ კვადრატზე ზომადი $K(s, t)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)dsdt < \infty.$$

მაშინ ოპერატორი

$$Ux(s)=\int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

მოქმედებს $L_2(a, b)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $x(t) \in L_2(a, b)$ ელემენტი. ბუნიაკოვსკის უტოლობის ძალით, გვექნება

$$[Ux(s)]^2=\left(\int_a^b K(s, t)x(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b K^2(s, t)dt \int_a^b x^2(t)dt.$$

ვაინტეგროთ ეს უტოლობა $s$ ცვლადით, მივიღებთ

$$\int_a^b [Ux(s)]^2 ds \leqslant c \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)dsdt,$$

სადაც

$$c=\int_a^b x^2(t)dt.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $Ux(s) \in L_2(a, b)$.

5) ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. ვთქვათ, $U(\vec{x})$ ისეთი ოპერატორია, რომელიც ყოველ $n$-განზომილებიან $\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ ვექტორს, სადაც $x_i (i=1, \ldots, n)$ აღნიშნავს $\vec{x}$ ვექტორის კოორდინატებს, უთანადებს ნულოვან $\vec{\Theta}=(0, \ldots, 0)$ ვექტორს, ე. ი. $U(\vec{x})=\vec{\Theta}$. ამ შემთხვევაში $U(\vec{x})$ ოპერატორის განსაზღვრის $M$ სიმრავლე შედგება $n$-განზომილებიანი ვექტორებისაგან,

ხოლო მნიშვნელობათა $N$ სიმრავლე კი შედგება ერთადერთი $n$-განზომილებიანი ნულოვანი $\vec{\Theta}$ ვექტორისაგან. ასეთ ოპერატორს ნ უ ლ ო ვ ა ნ ო პ ე რ ატ ო რ ს უწოდებენ.

6) წ რ ფ ი ვ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. განვიხილოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} x_i \quad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{1.47}$$

სადაც $\mu_{ik}$ ნამდვილი რიცხვებია, $x_i$ რიცხვები აღნიშნავს ევკლიდეს $R_n$ სივრცის $\vec{x}$ ვექტორის კოორდინატებს: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. ეს გარდაქმნა $R_n$ სივრცის ყოველ $\vec{x}$ ვექტორს უთანადებს $n$-განზომილებიან $\vec{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ ვექტორს ისევ $R_n$ სივრციდან და, მაშასადამე, განსაზღვრავს გარკვეულ $U(\vec{x})$ ოპერატორს. ვინაიდან (1.47) ფორმულებით ყველა $x_i'$ გამოსახულია $x_i$ კოორდინატების წრფივი კომბინაციით, ამიტომ $U(\vec{x})$ ოპერატორს წ რ ფ ი ვ ი გ ა რდ ა ქ მ ნ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ს უწოდებენ და წერენ $\vec{x}' = U(\vec{x})$.

ცხადია, რომ $U(\vec{x})$ ოპერატორი ცალსახად განსაზღვრულია $(\mu_{ik})$ მატრიცით, სადაც $i, k = 1, \ldots, n$. შევნიშნოთ, რომ $(\mu_{ik})$ მატრიცით განსაზღვრულ ოპერატორს აქვს შემდეგი ცხადი თვისებები: $\alpha$) თუ $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)} \in R_n$ ნებისმიერი ვექტორებია, მაშინ $U(\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)}) = U(\vec{x}^{(1)}) + U(\vec{x}^{(2)})$ (ადიტიურობის თვისება); $\beta$) ნებისმიერი ნამდვილი $\lambda$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $U(\lambda\vec{x}) = \lambda U(\vec{x})$ (ერთგვაროვნების თვისება); $\gamma$) $U(\vec{\Theta}) = \vec{\Theta}$.

7) ი გ ი ვ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. ვთქვათ, $M$ არის მეტრული $X$ სივრცის რაიმე სიმრავლე. განვიხილოთ $Ux$ ოპერატორი, რომელიც $M$ სიმრავლის ნებისმიერ $x$ ელემენტს შეუსაბამებს ისევ ამ ელემენტს. ამ შემთხვევაში $U(x)$ ოპერატორის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არე ერთი და იგივე $M$ სიმრავლეა. $U(x)$ ოპერატორს ი გ ი ვ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ეწოდება და აღინიშნება $I$ ასოთი. ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $I(x) = Ix = x$.

8) მ ს გ ა ვ ს ე ბ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. ვთქვათ, $M$ არის მეტრული სივრცის რაიმე სიმრავლე, რომელშიც განსაზღვრულია $\lambda x$ ნამრავლის ცნება ნებისმიერი $\lambda$ რიცხვისა $x \in M$ ელემენტზე და $\lambda x \in M$. განვსაზღვროთ $U(x)$ ოპერატორი, რომელიც ყოველ $x$ ელემენტს გადასახავს $\lambda x$ ელემენტში. $U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს $M$ სიმრავლიდან ისევ $M$ სიმრავლეში და ეწოდება მსგავსების ოპერატორი.

9) დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი. ვთქვათ, $M$ აღნიშნავს $[a, b]$ სეგმენტზე დიფერენცირებად $x(t)$ ფუნქციათა სიმრავლეს. განვსაზღვროთ $Ux(t)$ ოპერატორი, რომელიც ყოველ $x(t)$ ფუნქციას შეუსაბამებს თავის $x'(t)$ წარმოებულს. ასე განსაზღვრულ $Ux(t)$ ოპერატორს ეწოდება დ ი ფ ე რ ე ნც ი რ ე ბ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი, რომელიც დიფერენცირებადი $x(t)$ ფუნქციების სიმრავლიდან მოქმედებს $N$ სიმრავლეში, რომლის ელემენტებია $x'(t)$ ფუნქციები.

10) განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I(\gamma) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

სადაც $f$ არის მისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია, $\gamma$ ბრტყელი $[a, b]$ სეგმენტზე დიფერენცირებადი $y=y(x)$ წირია, რომელიც გაივლის მოცემულ $C_1(a, y_1)$ და $C_2(b, y_2)$ წერტილებზე. ამ შემთხვევაში $I(\gamma)$ წარმოადგენს ოპერატორს (ფუნქციონალს), რომელიც ზემოხსენებული თვისების $y=y(x)$ წირების $M$ სიმრავლეს გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა $N$ სიმრავლეში.

## § 8. ოპერატორის უწყვეტობის ზოგიერთი ნიშანი

აღვნიშნოთ შემდეგში $E=(X, \rho)$ სიმბოლოთი აბსტრაქტული $X$ სივრცე $\rho$ მეტრიკით. ვთქვათ, $E=(X, \rho)$, $E_1=(X', \rho')$ ორი აბსტრაქტული მეტრული სივრცეა.

$U$ ოპერატორს, რომელიც $E$ სივრციდან $E_1$ სივრცეში მოქმედებს, ეწოდება *უწყვეტი* $x_0\in E$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი დადებითი $\delta=\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\rho'(Ux, Ux_0)<\varepsilon,$$

ყოველი ისეთი $x\in E$ ელემენტისათვის, რომლისთვისაც $\rho(x, x_0)<\delta$.

სხვანაირად, $U$ ოპერატორი *უწყვეტია* $x_0$ წერტილში, თუ $Ux_0$ წერტილის ნებისმიერი $\varepsilon$—მიდამოსათვის $O_\varepsilon(Ux_0)$ მოიძებნება $x_0$ წერტილის ისეთი $\delta$—მიდამო $O_\delta(x_0)$, რომ მისი სახე მთლიანად მოთავსდეს $O_\varepsilon(Ux_0)$ მიდამოში.

თუ ოპერატორი უწყვეტია $E$ სივრცის ყოველ წერტილში, მაშინ მას $E$ *სივრცეში უწყვეტი ოპერატორი ეწოდება*.

ცხადია, ყველაფერი აქ ნათქვამი სამართლიანია ფუნქციონალისთვისაც.

ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის მრავალი თვისება გადაიტანება მეტრულ $E$ სივრცეში განსაზღვრულ უწყვეტ $U$ ოპერატორზეც. ქვევით მოვიყვანთ ზოგიერთ ასეთ თვისებას.

**თეორემა 1.18.** *$E$ სივრცის ნებისმიერ $x^*$ წერტილში $U$ ოპერატორის უწყვეტობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $x^*$ წერტილისაკენ კრებად ნებისმიერ $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობას შეესაბამებოდეს $\{Ux_n\}\subset E_1$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $Ux^*\in E_1$ ელემენტისაკენ.*

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. დავუშვათ, რომ თეორემის პირობა შესრულებულია, მაგრამ $U$ ოპერატორი $x^*$ წერტილში არ არის უწყვეტი. მაშინ არსებობს $Ux^*$ წერტილის ისეთი $O_\varepsilon(Ux^*)$ მიდამო, რომ $x^*$ წერტილის ნებისმიერ $O_\delta(x^*)$ მიდამოში იარსებებს წერტილები, რომელთა სახე $O_\varepsilon(Ux^*)$ მიდამოს არ მიეკუთვნება. ვთქვათ, $\delta=\frac{1}{n}$, სადაც $n=1, 2, \ldots$ . მაშინ, ამ მიმდევრობას შეესაბამება ერთმანეთში ჩალაგებული სფეროების $\left\{O_{\frac{1}{n}}(x^*)\right\}$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ყოველ სფეროში ავიღოთ თითო $x_n\in O_{\frac{1}{n}}(x^*)$ წერტილი ისეთი, რომ $Ux_n\overline{\in} O_\varepsilon(Ux^*)$. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\rho(x_n, x^*)\leqslant\frac{1}{n}$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=0$, მაგრამ $\{Ux_n\}$ მიმდევრობა არ არის კრებადი $Ux^*$

ელემენტისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ თეორემის პირობა არ არის შესრულებული.

პირობის აუცილებლობა ცხადია.

**თეორემა 1.19.** *თუ $U$ ოპერატორი მოქმედებს $E$ სივრციდან $E_1$ სივრცეში, მაშინ $E$ სივრცეზე $U$ ოპერატორის უწყვეტობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $E_1$ სივრცეში მოთავსებული ყოველი ჩაკეტილი $M_1$ სიმრავლის $M$ პირველსახე იყოს ჩაკეტილი.*

ვთქვათ, $U$ ოპერატორი უწყვეტია $E$ სივრცეზე და ვთქვათ, $x$ არის $M$ სიმრავლის ჩაკეტვის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ არსებობს $\{x_n\}\in M$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $x$ ელემენტისაკენ და $\{Ux_n\}\in M_1$ მიმდევრობა კრებადია $Ux$ ელემენტისაკენ. ვინაიდან $M_1$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $Ux\in M_1$ და, მაშასადამე, $x\in M$. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

პირობის საკმარისობისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $U$ ოპერატორი უწყვეტია მუდამ, როცა $E_1$ სივრცეში მოთავსებული ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლის პირველსახე ჩაკეტილია. ავიღოთ ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტი და ნებისმიერი ღია $O_\varepsilon(Ux)\subset E_1$ მიდამო. ცხადია, $E_1\setminus O_\varepsilon(Ux)$ სიმრავლე ჩაკეტილია. პირობის თანახმად, ამ სიმრავლის $U^{-1}(E_1\setminus O_\varepsilon(Ux))\subset E$ პირველსახე ჩაკეტილია. ამასთანავე, $x\overline{\in} U^{-1}(E_1\setminus O_\varepsilon(Ux))$. შევნიშნოთ, რომ $E\setminus U^{-1}(E_1\setminus O_\varepsilon(Ux))$ ღია სიმრავლეა და $x\in E\setminus U^{-1}(E_1\setminus O_\varepsilon(Ux))$. ამის გამო, $E\setminus U^{-1}(E_1\setminus O_\varepsilon(Ux))$ სიმრავლე შეიცავს $x$ ელემენტის რაღაც $O_\delta(x)$ მიდამოსაც. აქედან ჩანს, რომ თუ $x_1\in O_\delta(x)$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $Ux_1\in O_\varepsilon(Ux)$, ე. ი. $U$ უწყვეტი ოპერატორია.

ხშირად საჭიროა უწყვეტი ოპერატორის აგება ისეთი ოპერატორების სუპერპოზიციის დახმარებით, რომელთა უწყვეტობა ცნობილია. ამ აგებას საფუძვლად უდევს თეორემა, რომელიც ანალოგიურია მათემატიკურ ანალიზში ცნობილი თეორემისა, რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ.

**თეორემა 1.20.** *თუ უწყვეტი $U$ ოპერატორი მოქმედებს $E$ სივრციდან $E_1$ სივრცეში, ხოლო უწყვეტი $V$ ოპერატორი მოქმედებს $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში, მაშინ $VU$ სუპერპოზიცია, რომელიც მოქმედებს $E$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში, არის უწყვეტი ოპერატორი.*

ავიღოთ $x\in E$ ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო $y=Ux\in E_1$ იყოს მისი სახე. ვთქვათ, $y_0=Ux_0$ არის $V$ ოპერატორის უწყვეტობის ერთ-ერთი წერტილი, სადაც $x_0\in E$ ნებისმიერი წერტილია და $y_0\in E_1$. გარდა ამისა, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. ვინაიდან $V$ ოპერატორი უწყვეტია, ამიტომ მოცემული $\varepsilon$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ მიდამო $O_\delta(y_0)$ ისეთი, რომ ყველა $y\in O_\delta(y_0)$ ელემენტისათვის $\rho(Vy, Vy_0)<\varepsilon$. მეორე მხრივ, $U$ ოპერატორის უწყვეტობის გამო, მოცემული $\delta$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\sigma>0$ რიცხვი, რომ $x_0$ ელემენტის $O_\sigma(x_0)$ მიდამოს ყველა $x$ ელემენტისათვის ადგილი ექნება $\rho(Ux, Ux_0)<\delta$ უტოლობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\rho(VUx, VUx_0)<\varepsilon$. ამრიგად, $VU$ ოპერატორი უწყვეტია $x_0$ წერტილში. $x_0$ წერტილის ნებისმიერობის გამო $VU$ უწყვეტი იქნება $E$ სივრცეში.

უწყვეტი ოპერატორის მაგალითები. 1) იგივური ოპერატორი უწყვეტია. დამტკიცება ცხადია.

2) ფრედჰოლმის ოპერატორი უწყვეტი გულით, რომელიც $C(a, b)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში მოქმედებს, უწყვეტი ოპერატორია.

მართლაც, ვთქვათ, მიმდევრობა $\{x_n(t)\}\subset C(a, b)$ კრებადია $C(a, b)$ სივრცის მეტრიკით უწყვეტი $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ, ე. ი. $\rho(x_n, x^*)\to 0$, როცა $n\to\infty$. გვაქვს

$$\rho(Ux_n, Ux^*)=\int_a^b K(s, t)[x_n(t)-x^*(t)]\,dt.$$

ვინაიდან $K(s, t)$ გული უწყვეტია $a\leqslant s, t\leqslant b$ კვადრატზე, ამიტომ აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე გადასვლით, ამ ტოლობიდან გვექნება

$$\rho(Ux_n, Ux^*)\leqslant\mu(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x^*(t)|=\mu(b-a)\rho(x_n, x^*)\to 0, \quad \text{როცა } n\to\infty,$$

სადაც $\mu=\max\limits_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s, t)|$.

3) განვიხილოთ $L_p(0,1)$, $(p\geqslant 1)$, სივრცეში ჩაკეტილი $S(x_0; r)$ სფერო, სადაც $x_0=x_0(t)$ არის $L_p(0,1)$ სივრცის რაიმე ელემენტი. განვსაზღვროთ ოპერატორი $Ux(t)$ შემდეგნაირად

$$Ux(t)=|x(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x(t), \tag{1.48}$$

სადაც $x(t)\in S(x_0, r)$ ნებისმიერი ელემენტია. პირველად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ეს ოპერატორი $S(x_0, r)$ სფეროს ელემენტებს გადასახავს $L_q(0,1)$ სივრცეში, სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$. მართლაც, გვაქვს

$$\int_0^1|Ux(t)|^q dt=\int_0^1|[|x(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x(t)]|^q dt=\int_0^1|x(t)|^p dt<\infty.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (1.48) ტოლობით განსაზღვრული ოპერატორი უწყვეტია. ამისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი $\{x_n(t)\}\subset S(x_0; r)$ მიმდევრობა, რომელიც $L_p(0,1)$ სივრცის მეტრიკით კრებადია $x^*(t)\in S(x_0; r)$ ელემენტისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1|x_n(t)-x^*(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

გვექნება

$$\rho(Ux_n, Ux^*)=\left\{\int_0^1\left||x_n(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x_n(t)-|x^*(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x^*(t)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ როცა $p\geqslant q$, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\{\int_0^1\left||x_n(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x_n(t)-|x^*(t)|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}x^*(t)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant r^{\frac{p}{q}}\left\{\max\left[r^q, \left(\frac{p}{q}\right)^q\right]\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^1|x_n(t)-x^*(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

ხოლო როცა $p<q$, მაშინ

$$\left\{\int_0^1 \left| |x_n(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} x_n(t) - |x^*(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} x^*(t) \right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{p+1}{p}} \left\{\int_0^1 |x_n(t) - x^*(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

ამრიგად, ნებისმიერი $p$ და $q$ რიცხვებისათვის, სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$, შესრულდება უტოლობა:

$$\left\{\int_0^1 \left| |x_n(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} x_n(t) - |x^*(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} x^*(t) \right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \mu\rho(x_n, x^*), \tag{1.49}$$

სადაც $\mu$ აღნიშნავს $r^{\frac{p}{q}}\left\{\max\left[r^q, \left(\frac{p}{q}\right)^q\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$ და $r^{\frac{p-1}{p}}$ რიცხვებს შორის უდიდესს. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(Ux_n, Ux^*)=0$.

## § 9. სივრცეთა ჰომეომორფულობა და იზომეტრულობა

ვთქვათ, $E$ და $E_1$ მეტრული სივრცეებია და $M\subset E$ და $N\subset E_1$—მათში აღებული სიმრავლეები. როგორც ვიცით, $M$ სიმრავლის გადასახვას $N$ სიმრავლეზე $U$ ოპერატორით უწოდებენ ურთიერთცალსახას, თუ $N$ სიმრავლის ყოველი წერტილი არის $M$ სიმრავლის მხოლოდ ერთი წერტილის სახე. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი სხვადასხვა წერტილი $U$ ოპერატორით $N$ სიმრავლის ორ სხვადასხვა წერტილში გადაისახება და, $N$ სიმრავლის ორი სხვადასხვა წერტილი $U^{-1}$ ოპერატორით $M$ სიმრავლის ორ სხვადასხვა წერტილში გადაისახება. $M$ და $N$ სიმრავლეების ურთიერთგადასახვას, რომელსაც $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორები განახორციელებენ, ურთიერთ ჰ ო მ ე ო მ ო რ ფ უ ლ ი გადასახვა ეწოდება, თუ ეს გადასახვა არის ურთიერთცალსახა და $U$ ოპერატორთან ერთად უწყვეტია შებრუნებული $U^{-1}$ ოპერატორიც. ორი სიმრავლე (ან ორი სივრცე) ურთიერთ ჰომეომორფული სიმრავლეებია (ან ურთიერთ ჰომეომორფული სივრცეებია), თუ არსებობს ისეთი $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორები, რომლებიც ამ სიმრავლეთა (სივრცეთა) შორის ჰომეომორფულ თანადობას ამყარებს. მაგალითად, თუ ავიღებთ ტოლგვერდა სამკუთხედს და მისი კონტურის წერტილების ცენტრალურ დაგეგმილებას მოვახდენთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე, დავრწმუნდებით, რომ სამკუთხედის კონტურის წერტილთა სიმრავლე და წრეწირის წერტილთა სიმრავლე ჰომეომორფული სიმრავლეებია. ჰომეომორფულია აგრეთვე $R_1$ სივრცის ნებისმიერი ორი ინტერვალი. სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში სფეროს, ელიფსოიდის და კუბის წერტილთა სიმრავლეებიც ურთიერთ ჰომეომორფულია და ა. შ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ორი სიმრავლის (ან ორი სივრცის, ან სივრცისა და სიმრავლის) ჰომეომორფულობის განსაზღვრა არ არის დაკავშირებული სიმრავლის (სივრცის) მეტრიკასთან და, ამიტომ, ქვევით ამ განსაზღვრას გამოვიყენებთ არა მეტრულ (მაგალითად, ტოპოლოგიურ) სიმრავლეებშიც (სივრცეებშიც).

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 1.21.** ვთქვათ, $E$ და $E_1$ ჰომეომორფული სივრცეებია, რომელთა შორის ურთიერთ ჰომეომორფულ გადასახვას განახორციელებენ $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორები. მაშინ $E$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი $M$ სიმრავლის $N=UM\subset E_1$ სახე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

მართლაც, ვინაიდან $M$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ უწყვეტი $U$ ოპერატორით მისი გადასახვა $N$ არის პირველსახე უწყვეტი $U^{-1}$ ოპერატორისა. თანახმად 1.19 თეორემისა, $N$ სიმრავლე ჩაკეტილი იქნება $E_1$ სივრცეში.

ისიც შევნიშნოთ, რომ $M$ სიმრავლის $N$ სიმრავლეზე ჰომეომორფული გადასახვის დროს $\overline{M}$ ჩაკეტვა გადაისახება $\overline{N}$ ჩაკეტვაზე.

1.19 თეორემიდან მარტივად გამომდინარეობს აგრეთვე შემდეგი დებულება:

$E$ და $E_1$ სივრცეების ურთიერთ ცალსახა გადასახვის ჰომეომორფულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ გადასახვისას $E$ სივრცის ყოველ ჩაკეტილ (ღია) სიმრავლეს $E_1$ სივრცის ჩაკეტილი (ღია) სიმრავლე შეესაბამებოდეს.

განვიხილოთ ახლა მეტრული სივრცეების ჰომეომორფულობის ერთი კერძო სახეობა, რომელსაც სივრცეების იზომეტრულობა ეწოდება. ვიტყვით, რომ $E=(x, \rho)$ და $E_1=(x', \rho')$ სივრცეების ურთიერთცალსახა $y=Ux$ გადასახვა, სადაც $x\in E$, $y\in E_1$, იზომეტრულია, თუ ნებისმიერი $x_1, x_2\in E$ წერტილებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\rho(x_1, x_2)=\rho'(Ux_1, Ux_2).$$

ამ შემთხვევაში $E$ და $E_1$ სივრცეებს ურთიერთ იზომეტრული სივრცეები ეწოდება. ასევე განისაზღვრება ორი სიმრავლის იზომეტრულობაც. ცხადია, რომ ყოველი განსაზღვრა ან დებულება, რომელიც $E$ სივრცეშია შემოღებული ან დამტკიცებული, როცა იგი დაკავშირებულია ამ სივრცის მხოლოდ მეტრიკასთან, სამართლიანია მისი იზომეტრული $E_1$ სივრცისთვისაც. ამის გამო, ორი იზომეტრული სივრცე, რომელთა ელემენტები ერთმანეთისაგან, შესაძლოა სრულიად განსხვავებული იყოს, იგივური სივრცეებია.

მაგალითად, ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2(a, b)$ სივრცე იზომეტრულია კოორდინატული $l_2$ სივრცისა (დამტკიცება ამ წინადადებისა, რომელსაც ფიშერ-რისის თეორემას უწოდებენ, იხილეთ ქვემოთ).

## § 10. სეპარაბელური სივრცე

დიდი ხანია შემჩნეული იყო, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი წარმოიდგინება რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარის სახით. სიმრავლეთა თეორიის ტერმინებში ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ჩაკეტვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ემთხვევა. სხვანაირად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სიმრავლეში. ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ზოგჯერ, აღებულ სიმრავლეში ყველგან მკვრივი სიმრავლე შესაძლოა იყოს თვლადი სიმრავლე.

1. ზემოთ ნათქვამთან დაკავშირებით შემოვიღოთ შემდეგი მნიშვნელო-

ვანი განსაზღვრა: მეტრულ $E=(x, \rho)$ სივრცეს სეპარაბელური სივრცე ეწოდება, თუ მასში არსებობს თვლადი (ან სასრული) ყველგან მკვრივი $\{x_n\}\in E$ მიმდევრობა. თვით $\{x_n\}$ მიმდევრობას უწოდებენ თვლად ყველგან მკვრივ ქსელს $E$ სივრცეში.

შენიშვნა. სასრული ყველგან მკვრივი მიმდევრობა შესაძლოა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს გააჩნდეს. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სასრული სიმრავლე არის ჩაკეტილი სიმრავლე და ჩაკეტვა ამავე სიმრავლეს ემთხვევა. სივრცის სეპარაბელობის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $E$ სივრცე სეპარაბელურია და $\{x_n\}\subset E$ არის თვლადი ყველგან მკვრივი ქსელი, მაშინ ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომ $\lim\limits_{n_k\to\infty}\rho(x_{n_k}, x)=0$.

**თეორემა 1.22.** სეპარაბელური სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე სეპარაბელურია.

ვთქვათ, $E=(x, \rho)$ არის სეპარაბელური სივრცე და $\{x_k\}$ — მისი ელემენტების ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე. $M\subset E$ იყოს ნებისმიერი სიმრავლე. ავიღოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_k\}$ მიმდევრობა. ყოველი ფიქსირებული $n$ ნიშნაკისათვის მოვძებნოთ $M$ სიმრავლეში ისეთი $x^{(n,k)}$ ელემენტი, რომ

$$\rho(x_n, x^{(n,k)})<\rho(x_n, M)+\varepsilon_k.$$

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი $x\in M$ ელემენტი და $\varepsilon>0$ რიცხვი. არსებობს $\{x_k\}$ სიმრავლის ისეთი $x_n$ ელემენტი, რომ $\rho(x, x_n)<\varepsilon$. ვინაიდან $\varepsilon_k\to 0$, ამიტომ საკმარისად დიდი $k$ ნიშნაკისათვის გვექნება $\varepsilon_k<\varepsilon$. დავწეროთ ახლა შეფასება:

$$\rho(x, x^{(n,k)})\leqslant\rho(x, x_n)+\rho(x_n, x^{(n,k)})<$$
$$<\rho(x_n, M)+\varepsilon_k+\varepsilon<2\varepsilon+\rho(x_n, M)<3\varepsilon.$$

ამრიგად, ყოველი $x\in M$ ელემენტისათვის მოძებნილია ისეთი $x^{(n,k)}\in M$ ელემენტი, რომ $\rho(x, x^{(n,k)})<3\varepsilon$ $(n, k=1, 2, \ldots)$. ვინაიდან $x^{(n,k)}$ არის ორ $n$ და $k$ ნიშნაკზე დამოკიდებული ელემენტი, რომელთაგან ყოველი თვლად მნიშვნელობებს ღებულობს, ამიტომ $\{x^{(n,k)}\}\subset M$ სიმრავლე თვლადია და $M$ სიმრავლეში ყველგან მკვრივი. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 1.23.** თუ სეპარაბელური $M\subset E$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $E=(x, \rho)$ სივრცეში, მაშინ $E$ სივრცეც სეპარაბელურია.

აღვნიშნოთ თვლადი ყველგან მკვრივი ქსელი $M$ სიმრავლეში $\{x_n\}$-ით. ვთქვათ, $x\in E$ ნებისმიერი ელემენტია და $\varepsilon>0$ — ნებისმიერი რიცხვი. იმის გამო, რომ $M$ ყველგან მკვრივია $E$ სივრცეში, ამიტომ არსებობს $\bar{x}\in M$ ელემენტი ისეთი, რომ $\rho(x, \bar{x})<\dfrac{\varepsilon}{2}$. ვინაიდან $\{x_n\}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $M$ სიმრავლეში და, ამიტომ $\bar{x}\in M$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x_{n_0}\in\{x_n\}$ ელემენტი, რომ $\rho(\bar{x}, x_{n_0})<\dfrac{\varepsilon}{2}$. ამის შემდეგ კი ცხადია, რომ

$$\rho(x, x_{n_0})\leqslant\rho(x, \bar{x})+\rho(\bar{x}, x_{n_0})<\varepsilon$$

და, რადგანაც $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ყველგან მკვ-

რივია $E$ სივრცეში. ამით დამტკიცებულია, რომ $E$ არის სეპარაბელური სივრცე.

2. **სეპარაბელური სივრცის მაგალითები.** 1) $R_n$ სივრცე სეპარაბელურია. მართლაც ამ სივრცის ყოველი წერტილი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ისეთ წერტილთა მიმდევრობის ზღვარი, რომელთა კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია. ყველა ისეთ წერტილთა სიმრავლე კი, რომელთა კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია, თვლადი სიმრავლეა. ამგვარად, $R_n$ სივრცეში ყველგან მკვრივ თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს ყველა იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელთა კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია.

2) $l_p$ სივრცე $p\geqslant 1$, სეპარაბელურია. მართლაც, განვიხილოთ სიმრავლე $M\subset l_p$ ყველა ისეთი $a=(r_1, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$ ელემენტებისა, რომელთა ყველა $r_i$ კოორდინატი რაციონალური რიცხვებია, სადაც $n$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ვინაიდან $M$ სიმრავლის ყოველი $a$ ელემენტი დახასიათებულია რაციონალურ რიცხვთა სასრული და დალაგებული $r_i$ კოორდინატით, სადაც ყოველი $r_i$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იცვლება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ამიტომ $M$ თვლადი სიმრავლეა. ვუჩვენოთ ახლა, რომ $M$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $l_p$ სივრცეში. ვთქვათ, $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ არის $l_p$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p<\infty,$$

და $\varepsilon>0$ — ნებისმიერი რიცხვი. მაშინ საკმარისად დიდი ნატურალური $n$ რიცხვისათვის გვექნება:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{1.50}$$

ახლა $M$ სიმრავლიდან ისეთი $a=(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots 0, 0,)$ ელემენტი შევარჩიოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i-x_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{1.51}$$

გამოვთვალოთ $x$ და $a$ ელემენტებს შორის მანძილი, მივიღებთ

$$\rho(x, a)=\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i-r_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i-r_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

აქედან, (1.50) და (1.51) ფორმულების დახმარებით, მივიღებთ $\rho(x, a)<\varepsilon$.

3) $C(a, b)$ სივრცე სეპარაბელურია. მართლაც, ვთქვათ, $x(t)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $\varepsilon>0$ — ნებისმიერი რიცხვი. ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, არსებობს ნამდვილი კოეფიციენტებიანი ისეთი $P(t)$ პოლინომი, რომ

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

გარდა ამისა, $P(t)$ პოლინომისათვის არსებობს $P^*(t)$ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით ისეთი, რომ

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|P^*(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ახლა შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\rho(x, P^*)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-P^*(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-P(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|P(t)-P^*(t)|<\varepsilon.$$

ამრიგად, ნებისმიერი $x(t)\in C(a, b)$ ელემენტისათვის არსებობს $P^*(t)$ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით, რომლითაც ნებისმიერი სიზუსტით და თანაბრად შეგვიძლია მივუახლოვდეთ $x(t)$ ფუნქციას. მაგრამ, ყველა ისეთ პოლინომთა სიმრავლე, რომელთა კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვებია არის თვლადი. როგორც ვხედავთ, $C(a, b)$ სივრცეში ყველგან მკვრივ თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს რაციონალურ კოეფიციენტებიან პოლინომთა სიმრავლე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ყველა რაციონალურ კოეფიციენტებიან პოლინომთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია $C_{L_2}$ სივრცეშიც. ისე, რომ $C_{L_2}$ სივრცე აგრეთვე სეპარაბელურია.

4) $L_p(0,1)$ ს ი ვ რ ც ე ს ე პ ა რ ა ბ ე ლ უ რ ი ა. ვთქვათ, $x(t)\in L_p(0,1)$ არის ნებისმიერი ელემენტი და $\varepsilon>0$ — ნებისმიერი რიცხვი. არსებობს $[0,1]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული ზომადი $f(t)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\int_0^1|x(t)-f(t)|^p dt<\frac{\varepsilon^p}{3}, \tag{1.52}$$

ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი $f(t)$ ფუნქცია კი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი ($p$ ხარისხით საშუალოდ კრებადობის აზრით). სხვანაირად, არსებობს, $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული, ისეთი უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქცია, რომ

$$\int_0^1|\varphi(t)-f(t)|^p dt<\frac{\varepsilon^p}{3}. \tag{1-53}$$

ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის ზღვარი რაციონალურ კოეფიციენტებიან პოლინომთა მიმდევრობისა ($L_p$ სივრცის მეტრიკის აზრით). სხვანაირად, არსებობს $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ისეთი $P^*(t)$ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით, რომ

$$\int_0^1|P^*(t)-\varphi(t)|^p dt<\frac{\varepsilon^p}{3}. \tag{1.54}$$

ახლა კი ცხადია, რომ

$$\rho(x, P^*)=\left\{\int_0^1|x(t)-P^*(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1|x(t)-f(t)|^p dt+\int_0^1|f(t)-\varphi(t)|^p dt+\int_0^1|\varphi(t)-P^*(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

საიდანაც (1.52), (1.53) და (1.54) უტოლობათა ძალით, მივიღებთ $\rho(x,P^*)<\varepsilon$. ამგვარად, ყველა რაციონალურ კოეფიციენტებიან პოლინომთა სიმრავლე, რომელიც როგორც ვიცით თვლადია, ყველგან მკვრივია $L_p$ სივრცეში.

5) $m$ სივრცე არასეპარაბელურია. მართლაც, განვიხილოთ $m$ სივრცის $M$ სიმრავლე $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ელემენტებით, სადაც $x_i=0$ ან 1. ყველა ასეთი ელემენტების სიმრავლე წარმოადგენს $m$ სივრცეში მოთავსებულ „ერთეულოვანი კუბის“ წვეროებს. ცხადია, მანძილი $M$ სიმრავლის ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ყოველ ორ წერტილს შორის, უდრის ერთს. ამასთანავე სიმრავლე $M$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ავაგოთ $M$ სიმრავლის ყოველი $x$ წერტილის გარშემო $S\left(x, \frac{1}{3}\right)\subset m$ სფერო $\frac{1}{3}$-ის ტოლი რადიუსით. ამ სფეროების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ვთქვათ $m_1$ არის $m$ სივრცეში ყველგან მკვრივი სიმრავლე. მაშინ ყოველი $S\left(x, \frac{1}{3}\right)$ სფერო $m_1$ სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც უნდა შეიცავდეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ $m_1$ არ არის თვლადი სიმრავლე. მაშასადამე, $m$ არასეპარაბელური სივრცეა.

შენიშვნა. დღემდე ცნობილ ყველა კონკრეტულ სეპარაბელურ სივრცეს ბაზისი აქვს. თუმცა დამტკიცებული არ არის, რომ ყოველ სეპარაბელურ სივრცეს ბაზისი აქვს.

## § 11. სრული სივრცე

როგორც ცნობილია, მათემატიკური ანალიზისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს ბოლცანო-კოშის აუცილებელსა და საკმარის ნიშანს ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის კრებადობის შესახებ. ბოლცანო-კოშის ნიშანი ნებისმიერი მეტრული სივრცის ელემენტთა მიმდევრობისათვის საზოგადოთ სწორი არ არის. ბუნებრივია, ამიტომ მეტრული სივრცეებიდან გამოვყოთ ის სივრცეები, რომლებშიც ელემენტთა უსასრულო მიმდევრობისათვის ადგილი ექნება ანალოგიურ თვისებას.

დავიწყოთ შემდეგი განსაზღვრით: მეტრული $E$ სივრცის ელემენტების უსასრულო $\{x_n\}$ მიმდევრობას ფუნდამენტალური (ანუ თავის თავში კრებადი) მიმდევრობა ეწოდება, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი ისეთი, რომ ადგილი აქვს

$$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$$

უტოლობას, როცა $m, n>N$. ზემოთ დამტკიცებული ერთი თეორემის ძალით (თეორემა 1.2) მეტრულ სივრცეში ყოველი კრებადი მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. შებრუნებული წინადადება არ არის საზოგადოდ სამართლიანი.

მაგალითები. 1) განვიხილოთ ყველა რაციონალურ რიცხვთა $M$ სიმრავლე. მეტრიკა $M$ სიმრავლეში შემოვიღოთ ფორმულით:

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)})=|x^{(1)}-x^{(2)}|, \qquad x^{(1)}, x^{(2)}\in M.$$

ავიღოთ რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო $\{x_n\} \in M$ მიმდევრობა, სადაც $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, რომელიც, როგორც ადვილი სანახავია, არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი (ნეპერის $e$ რიცხვი) $M$ სიმრავლეს არ ეკუთვნის. ამგვარად, მიმდევრობა $\{x_n\}$ ფუნდამენტალურია, მაგრამ $M$ სიმრავლეში არ არის კრებადი.

2) განვიხილოთ ახლა ყველა $P(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, პოლინომების $M$ სიმრავლე, რომელშიც $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t) \in M$ ელემენტებს შორის მანძილი განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\rho(P^{(1)}, P^{(2)}) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |P^{(1)}(t) - P^{(2)}(t)|.$$

ვთქვათ, $\{P^{(n)}(t)\} \in M$ პოლინომთა ისეთი მიმდევრობაა, რომელიც თანაბრად კრებადია, პოლინომისაგან განსხვავებული, $x(t) \in C(0,1)$ უწყვეტი ფუნქციისაკენ. ცხადია, $\{P^{(n)}(t)\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, რომელსაც $M$ სიმრავლეში არ აქვს ზღვარითი ელემენტი.

**თეორემა 1.24.** თუ მეტრული $E$ სივრცის ელემენტთა ფუნდამენტალური $\{x_n\}$ მიმდევრობის რაიმე $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა კრებადია $x^* \in E$ ელემენტისაკენ, მაშინ $\{x_n\}$ მიმდევრობა აგრეთვე კრებადი იქნება იმავე $x^*$ ელემენტისაკენ.

მართლაც, როცა $n_k > n$ და $n \to \infty$ ცხადია $\rho(x_n, x_{n_k}) \to 0$. ამასთანავე, სამკუთხედის აქსიომის ძალით, გვაქვს

$$\rho(x^*, x_n) \leqslant \rho(x^*, x_{n_k}) + \rho(x_n, x_{n_k}),$$

სადაც პირობის თანახმად $\rho(x^*, x_{n_k}) \to 0$, როცა $n_k \to \infty$. გარდა ამისა, წინა შენიშვნის გამო, $\rho(x_n, x_{n_k}) \to 0$, ამიტომ $\rho(x^*, x_n) \to 0$, როცა $n \to \infty$ და, მაშასადამე, $x_n \to x^*$.

*განსაზღვრა.* მეტრული $E$ სივრცის წერტილთა $M$ სიმრავლეს შემოსაზღვრული სიმრავლე ეწოდება, თუ არსებობს სასრული რადიუსის სფერო, რომელიც $M$ სიმრავლის ყველა წერტილს შეიცავს.

ცხადია, როცა მეტრული $E$ სივრცე ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცეა, მოყვანილი განსაზღვრა, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის შემოსაზღვრულობის ჩვეულებრივ განსაზღვრას ემთხვევა.

**თეორემა 1.25.** მეტრულ სივრცეში ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ფუნდამენტალური $\{x_n\} \in E$ მიმდევრობა. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N$, რომ როცა $n, m > N$ შესრულდება $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ უტოლობა. კერძოდ, შესრულდება აგრეთვე $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ უტოლობა, როცა $n > N$. განვიხილოთ რიცხვთა სასრული მიმდევრობა $\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \ldots \rho(x_{N-1}, x_N)$. ვთქვათ, $r$ აღნიშნავს ამ რიცხვთა შორის უდიდესს. ავაგოთ ახლა $E$ სივრცეში $S(x_N, r)$ სფერო. მაშინ ცხადია, ადგილი ექნება $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ უტოლობას ყველა $n = 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისათვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობის ყოველი ელემენტი $x_n \in S(x_N, r)$, ე. ი. $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თეორემა 1.26. მანძილების სიმრავლე, მეტრული $E$ სივრცის ნებისმიერი $x$ ელემენტიდან ფუნდამენტალური $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობის ელემენტებამდე, შემოსაზღვრულია.

მართლაც, ვთქვათ $\varepsilon>0$ რაიმე რიცხვია. არსებობს ისეთი ნატურალური $n_0$ რიცხვი, რომ როცა $m, n>n_0$ ადგილი ექნება $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$ უტოლობას. ახლა დავაფიქსიროთ $m>n_0$ რიცხვი და ვისარგებლოთ $\rho(x, x_n)\leqslant\rho(x,x_m)+$ $+\rho(x_m, x_n)$ უტოლობით. ვთქვათ, $K$ აღნიშნავს $\rho(x, x_1), \ldots ,\rho(x, x_m)$ რიცხვთა შორის უდიდესს, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური $n$ რიცხვისათვის, წინა უტოლობიდან გვექნება $\rho(x, x_n)<K+\varepsilon$ და თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან, კერძოდ გამომდინარეობს, რომ სიმრავლე მანძილებისა, ფუნდამენტალური მიმდევრობის ნებისმიერი ელემენტიდან ამ მიმდევრობის სხვა ელემენტებამდე, შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

თეორემა 1.27. თუ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ მეტრული $E$ სივრცის ორი ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, მაშინ რიცხვთა $\{\rho(x_n, y_n)\}$ მიმდევრობა უსათუოდ კრებადია.

დამტკიცებისათვის ვისარგებლოთ ოთხკუთხედის აქსიომით

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho(x_m, x_n)+\rho(y_m, y_n).$$

ვინაიდან $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობებია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $n_0$ რიცხვი, რომ როცა $n, m>n_0$ გვექნება $\rho(x_m, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(y_m, y_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ და წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)|<\varepsilon.$$

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა $\{\rho(x_n, y_n)\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს ბოლცანო-კოშის საკმარის პირობას ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის კრებადობის შესახებ და, ამიტომ იგი კრებადია.

თეორემა 1.28. თუ მეტრული $E$ სივრცის $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ მიმდევრობათაგან ერთ-ერთი, მაგალითად, $\{x_n\}$ ფუნდამენტალურია და $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0$, მაშინ $\{y_n\}$ მიმდევრობაც ფუნდამენტალური იქნება.

მართლაც, გამოვიყენოთ სამკუთხედის განზოგადებული აქსიომა:

$$\rho(y_m, y_n)\leqslant\rho(y_m, x_m)+\rho(x_m, x_n)+\rho(x_n, y_n). \tag{1.55}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $m, n\to\infty$, მაშინ, თეორემის პირობის თანახმად, $\rho(x_m, y_m)\to0$ და $\rho(x_n, y_n)\to0$. გარდა ამისა, ვინაიდან $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ როცა $m, n\to\infty$, მაშინ $\rho(x_m, x_n)\to0$. როგორც (1.55) უტოლობიდან ჩანს, როცა $m, n\to\infty$, მაშინ $\rho(y_m, y_n)\to0$, ე. ი. $\{y_n\}$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა.

ზემოთ აღნიშნული გვქონდა, რომ სავალდებულო არ არის მეტრულ $E$ სივრცეში ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადი იყოს. იქვე მოყვანილი გვქონდა ამ ფაქტის დამადასტურებელი მაგალითებიც. ამ საკითხთან დაკავშირებულია შემდეგი მნიშვნელოვანი

განსაზღვრა. თუ მეტრული $E$ სივრცე ისეთია, რომ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{x_n\}\in E$ მიმდევრობა კრებადია

ამავე სივრცის რაიმე $x$ ელემენტისაკენ, მაშინ $E$-ს სრული სივრცე ეწოდება.

მოვიყვანოთ სრული სივრცის ზოგიერთი მაგალითი.

1. ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცე, რომელშიც მანძილი განსაზღვრულია ფორმულით

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)})=|x^{(1)}-x^{(2)}|, \ x^{(1)}, x^{(2)} \in R_1,$$

სრული სივრცეა.

მართლაც, ვთქვათ, $\{x_k\} \subset R_1$ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $n_0$, რომ, როცა $m, n>n_0$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$\rho(x_m, x_n)=|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

თანახმად კოშის ცნობილი ნიშნისა, ნამდვილ რიცხვთა შემოსაზღვრული მიმდევრობის ზღვარის არსებობის შესახებ, ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს ისეთი $x^* \in R_1$ რიცხვის არსებობა, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, x^*)=0$. ეს კი ამტკიცებს ჩვენ წინადადებას.

2. $R_n$ სრული სივრცეა. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{x^{(k)}\} \in R_n$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $n_0$, რომ როცა $r, s>n_0$ გვექნება:

$$\rho(x^{(r)}, x^{(s)})=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(r)}-x_i^{(s)})^2\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

ე. ი. $i$ ნიშნაკის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ადგილი აქვს $|x_i^{(r)}-x_i^{(s)}|<\varepsilon$ უტოლობას. უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ ყველა რიცხვითი $\{x_i^{(k)}\}$ მიმდევრობა, როცა $k=1, 2, \ldots$, ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. რიცხვითი წრფის (ე. ი. $R_1$ სივრცის) სისრულის გამო, ყოველი $x_i^{(k)}$ მიმდევრობა კრებადია: $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}=$ $=x_i^*$. ამ პირობებში $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა კრებადია $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ელემენტისაკენ. ამრიგად, მივიღეთ: $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, x^*)=0$ და $R_n$ სივრცის სისრულე დამტკიცებულია.

3. $l_p^{(n)}$ სრული სივრცეა. დამტკიცება წინა მაგალითის ანალოგიურია.

4. $l_p$ სრული სივრცეა. ავიღოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{x^{(k)}\} \in l_p$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots)$, $k=1, 2, \ldots$, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $n_0$ რიცხვი, რომ როცა $m, n>n_0$, გვექნება

$$\rho(x^{(m)}, x^{(n)})=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p\right]^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \qquad (1.56)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $m, n>n_0$ შესრულდება აგრეთვე უტოლობა $|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ფიქსირებული $i$ ნიშნაკისათვის რიცხვთა $\{x_i^{(k)}\}=(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots)$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ვთქვათ, $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i^*$. დავამტკიცოთ, რომ $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ არის $l_p$ სივრ-

ცის ელემენტი და $x^{(k)} \to x^*$, როცა $k \to \infty$. მართლაც, (1.56) უტოლობიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ როგორიც უნდა იყოს ნატურალური $N$ რიცხვი შესრულდება უტოლობა:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

ახლა თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i^{(m)} - x_i^*|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

საიდანაც $N$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გვექნება

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^*|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon.$$

უკანასკნელი უტოლობა ნიშნავს, რომ $x^* \in l_p$ და $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x^*) = 0$. მაშასადამე, $l_p$ სრული სივრცეა.

5. $m$ სივრცე სრულია. ავიღოთ $m$ სივრცეში ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots)$, $k = 1, 2, \ldots$. თვით $m$ სივრცის განსაზღვრიდან გვაქვს $|x_i^{(k)}| < C_x^{(k)}$ უტოლობა, რომელსაც ადგილი აქვს თანაბრად $i$ ნიშნაკის ყველა $i = 1, 2, \cdots$ მნიშვნელობისათვის, სადაც $C_x^{(k)}$ მუდმივია. ვინაიდან $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური $n_0$ რიცხვი, რომ როცა $r, s \geqslant n_0$, გვექნება:

$$\rho(x^{(r)}, x^{(s)}) = \sup_i |x^{(r)} - x^{(s)}|,$$

საიდანაც

$$|x_i^{(r)} - x_i^{(s)}| < \varepsilon. \tag{1.57}$$

უკანასკნელი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ ნამდვილ რიცხვთა $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots)$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, მაშასადამე, კრებადია რაღაც $x_i^*$ რიცხვისაკენ. ახლა ვთქვათ $i = 1, 2, \ldots$, მაშინ წარმოიქმნება რიცხვთა $(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ მიმდევრობა. ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა განსაზღვრავს $m$ სივრცის გარკვეულ $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ ელემენტს. ამისათვის (1.57) უტოლობაში დავაფიქსიროთ $r > n_0$ და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $s \to \infty$, მივიღებთ უტოლობას:

$$|x_i^{(r)} - x_i^*| < \varepsilon, \tag{1.58}$$

რომელსაც ადგილი აქვს $i$ ნიშნაკის ყველა მნიშვნელობისათვის. ახლა გამოვიდეთ $x_i^* = (x_i^* - x_i^{(r)}) + x_i^{(r)}$ იგივეობიდან, რომლის შეფასება, (1.58) უტოლობის დახმარებით, მოგვცემს

$$|x_i^*| \leqslant |x_i^* - x_i^{(r)}| + |x_i^{(r)}| < \varepsilon + C_x^{(r)},$$

სადაც $C_x^{(r)}$ მუდმივია და $i$ — ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. უკანასკნელი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ რიცხვთა $(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ მიმდევრობა შემოსაზღვ-

რულია და, ამიტომ $x^* \in m$, ამასთანავე (1.58) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $r > n_0$ ადგილი აქვს აგრეთვე უტოლობას

$$\sup_i |x_i^{(r)} - x_i^*| < \varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{r \to \infty} \rho(x^{(r)}, x^*) = 0$, რაც ჩვენ წინადადებას ამტკიცებს.

6. ყველა კრებადი მიმდევრობის $c$ სივრცე სრულია. მართლაც, ვთქვათ, $\{x^{(k)}\} \subset c$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots)$ და $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots$ მიმდევრობა, ყოველი ფიქსირებული $k$ ნიშნაკისათვის კრებადია ($k = 1, 2, \ldots$). ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ნატურალური $n_0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $m, n > n_0$ შესრულდება უტოლობა:

$$\rho(x^{(m)}, x^{(n)}) = \sup_i |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $i$ ნიშნაკის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon. \tag{1.59}$$

ეს უტოლობა გვიჩვენებს, რომ ნამდვილ რიცხვთა $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს მიმდევრობის კრებადობის ბოლცანო-კოშის პირობას და, ამიტომაც იგი კრებადია გარკვეული ზღვარისაკენ. ვთქვათ, $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i^*$. მოვიგონოთ ახლა, რომ $i$ ნიშნაკს შეუძლია მიიღოს $i = 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობანი. ამის გამო, წინა ტოლობიდან წარმოიქმნება რიცხვთა $x_1^*, x_2^*, \ldots$ მიმდევრობა. დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა განსაზღვრავს გარკვეულ $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ ელემენტს, რომელიც $c$ სივრცეს ეკუთვნის და იგი სწორედ $x^{(k)}$ მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტია. ამისათვის გადავიდეთ (1.59) უტოლობაში ზღვარზე, როცა $m \to \infty$ და ნიშნაკი $n$ ფიქსირებულია, მივიღებთ

$$|x_i^{(n)} - x_i^*| \leqslant \varepsilon. \tag{1.60}$$

გამოვიყენოთ ახლა პირობა, რომ $x^{(k)} \in c$. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\lim\limits_{i \to \infty} x_i^{(k)} = \bar{x}_k$ ზღვარი. სხვანაირად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $\mu = \mu(i, k)$ რიცხვი, რომ როცა $i \geqslant \mu$ შესრულდება უტოლობა:

$$|x_i^{(k)} - \bar{x}_k| < \varepsilon. \tag{1.61}$$

ავიღოთ ახლა იგივეობა:

$$x_m^* - x_k^* = x_m^* - x_m^{(r)} + x_m^{(r)} - \bar{x}_r + \bar{x}_r - x_k^{(r)} + x_k^{(r)} - x_k^*.$$

აქედან, (1.60) და (1.61) უტოლობების გამოყენებით, მივიღებთ

$$|x_m^* - x_k^*| \leqslant |x_m^* - x_m^{(r)}| + |x_m^{(r)} - \bar{x}_r| + |\bar{x}_r - x_k^{(r)}| + |x_k^{(r)} - x_k^*| < 4\varepsilon,$$

როცა $r > n_0$ და $m, k \geqslant \mu$. ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $x_1^*, x_2^*, \ldots$ მიმდევრობა კრებადია და, ამიტომ $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots) \in c$. გარდა ამისა, (1.60) უტოლობიდან ჩანს, რომ

$$\sup_i |x_i^{(k)} - x_i^*| < \varepsilon,$$

ე. ი. $\rho(x^{(k)}, x^*) < \varepsilon$, საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობის გამო, გვექნება: $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, x^*) = 0$ და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

7. ყველა რიცხვითი უსასრულო მიმდევრობების $s$ სივრცე სრულია. დამტკიცება წინა მაგალითებში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურია.

8. $C(a, b)$ სივრცე სრულია. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_k(t)\} \subset C(a, b)$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა. ამ უკანასკნელის განსაზღვრის თანახმად, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, არსებობს ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ როცა $m, n > N$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\max|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon. \tag{1.62}$$

ვთქვათ, $t = t_0 \in [a, b]$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, მაშინ, (1.62) უტოლობის ძალით, $\{x_k(t_0)\}$ მიმდევრობისათვის შესრულებულია რიცხვითი მიმდევრობის კრებადობის კოშის აუცილებელი და საკმარისი ნიშანი. ამრიგად, $t$ ცვლადის ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა კრებადია გარკვეული $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ახლა თუ დავამტკიცეთ, რომ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა $[a, b]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ, ამით დამტკიცებული იქნება, რომ $x^*(t) \in C(a, b)$. ამისათვის (1.62) უტოლობაში დავაფიქსიროთ $n$ რიცხვი და ვთქვათ, რომ $m \to \infty$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $N$ რიცხვი, რომ

$$\max|x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon, \text{ როცა } n > N.$$

როგორც ვიცით, ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ $\{x_k(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია უწყვეტი $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ამით დამტკიცებულია, რომ $C(a, b)$ სრული სივრცეა.

9. $S$ სივრცე სრულია. ვთქვათ, $\{x_n(t)\} \subset S$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა. უნდა დავამტკიცოთ, რომ იგი ზომით კრებადია $S$ სივრცეში. გამოვყოთ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობიდან ისეთი $\{x_{n_k}(t)\}$ ქვემიმდევრობა, რომ როცა $n > n_k$ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\rho(x_n, x_{n_k}) \leqslant \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{1.63}$$

მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის განსაზღვრის ძალით, ასეთი ქვემიმდევრობის გამოყოფა შესაძლოა. (1.63) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant \frac{1}{2^{k+2}}.$$

ვთქვათ, $M_k$ არის ყველა იმ $t \in [0,1]$ წერტილთა სიმრავლე, რომელზეც შესრულებულია უტოლობა:

$$|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| > \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{1.64}$$

როგორც ვიცით, $S$ სივრცეში მეტრიკა ისეა განსაზღვრული, რომ

$$\text{mes } M_k \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\omega_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} M_k, \quad T_i = [0,1] - \omega_i, \tag{1.65}$$

მივიღებთ

$$\operatorname{mes}\omega_i \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i}, \quad \operatorname{mes} T_i \geqslant 1 - \frac{1}{2^i}, \quad \operatorname{mes} \bigcup_{i=1}^{\infty} T = 1. \tag{1.66}$$

$T$ სიმრავლის ყველა $t'$ წერტილში, როცა $k \geqslant i$, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|x_{n_k}(t') - x_{n_{k+1}}(t')| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{1.67}$$

ავიღოთ ახლა იგივეობა

$$x_{n_{k+m}}(t') - x_{n_k}(t') = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{n_{k+i+1}}(t') - x_{n_{k+i}}(t')),$$

რომელსაც ადგილი აქვს ნებისმიერი ნატურალური $m > 1$ რიცხვისათვის. ამ იგივეობაში აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე გადასვლის შედეგად, თუ გამოვიყენებთ (1.67) უტოლობასაც, გვექნება

$$|x_{n_{k+m}}(t') - x_{n_k}(t')| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |x_{n_{k+i}}(t') - x_{n_{k+i+1}}(t')| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+i+1}} < \frac{1}{2^k}. \tag{1.68}$$

$\{x_{n_k}(t')\}$ მიმდევრობა, ყოველი ფიქსირებული $t' \in T_i$ წერტილისათვის, რიცხვითი მიმდევრობაა. (1.68) შეფასება გვიჩვენებს, რომ ეს მიმდევრობა, როგორც ფუნდამენტალური რიცხვითი მიმდევრობა, კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k}(t') = x^*(t'). \tag{1.69}$$

ზღვარითი $x^*(t')$ ფუნქცია განსაზღვრულია $T_i$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე ნებისმიერი $i$ ნიშნაკისათვის, ამიტომ $x^*(t')$ განსაზღვრული იქნება $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ ჯამზეც. ამრიგად, $x^*(t')$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ $[0,1]$ სეგმენტზე, გარდა შესაძლოა, ნულზომის სიმრავლისა. თანახმად $S$ სივრცის განსაზღვრისა, $x^*(t') \in S$. გადავიდეთ ახლა (1.68) უტოლობაში ზღვარზე, როცა $m \to \infty$ და გამოვიყენოთ (1.69) ტოლობა, მივიღებთ უტოლობას:

$$|x^*(t') - x_{n_k}(t')| \leqslant \frac{1}{2^k},$$

რომელსაც ადგილი აქვს $T_i$ სიმრავლის ყველა $t'$ წერტილში (როცა $k \geqslant i$). კერძოდ, ეს შეფასება სამართლიანია მაშინაც, როცა $i = k$, ე. ი. სამართლიანია $T_k$ სიმრავლეზე. ვინაიდან $T_k$ სიმრავლის ზომა აკმაყოფილებს უტოლობას (იხ. (1.66)):

$$\operatorname{mes} T_k > 1 - \frac{1}{2^k},$$

ამიტომ

$$\rho(x^*, x_{n_k})\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

ასე, რომ

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k}=x^*.$$

მაგრამ, $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ და, მაშასადამე, თავიდან აღებული მიმდევრობაც ზომით კრებადი იქნება იმავე $x^*$ ფუნქციისაკენ.

**10.** $(S)$ სივრცე სრულია. ვთქვათ, $\{x_n(t)\}\subset(S)$ რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. გამოვყოთ ამ მიმდევრობიდან ისეთი $\{x_{n_k}(t)\}$ ქვემიმდევრობა, რომ როცა $n\geqslant n_k$ ადგილი ქონდეს უტოლობას:

$$\rho(x_n, x_{n_k})<\frac{1}{2^k}.$$

ჩვენ ვთვლით, რომ $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, მაშინ გვექნება

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})<\frac{1}{2^k}.$$

განვიხილოთ მწკრივი:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})=\sum_{k=1}^{\infty}\int_T\frac{|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}{1+|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}\,dt; \tag{1.70}$$

ვინაიდან მაჟორანტული მწკრივი $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ კრებადია, ამიტომ აგრეთვე კრებადია (1.70) მწკრივი. შევნიშნოთ, რომ (1.70) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქციები დადებითია. ვინაიდან (1.70) მწკრივი კრებადია და ინტეგრალქვეშა ფუნქციები კი დადებითი, ამიტომ ფუნქციონალური მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}{1+|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|} \tag{1.71}$$

კრებადი იქნება თითქმის ყველგან $T$ სიმრავლეზე. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ დაწყებული საკმარისად დიდი $k$ ნიშნაკიდან ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\leqslant 1.$$

ახლა თუ ვისარგებლებთ ცხადი უტოლობით

$$1\leqslant\frac{2}{1+|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|},$$

ადვილად მივიღებთ უტოლობას:

$$|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\leqslant 2\frac{|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}{1+|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}.$$

აქედან გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}{1+|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|}.$$

ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილში მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან $T$-ზე, ამიტომ კრებადია თითქმის ყველგან $T$-ზე ფუნქციონალური მწკრივი:

$$x_{n_1}(t)+[x_{n_2}(t)-x_{n_1}(t)]+[x_{n_3}(t)-x_{n_2}(t)]+\cdots+[x_{n_k}(t)-x_{n_{k-1}}(t)]+\cdots,$$

რომლის პირველი $n$ წევრის ჯამია $x_{n_k}(t)$. სხვანაირად, არსებობს ისეთი ზომადი $x^*(t)\in(S)$ ფუნქცია, რომ თითქმის ყველგან $T$ სიმრავლეზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k}(t)=x^*(t).$$

ცხადია, მაშინ $\{x_{n_k}(t)\}$ მიმდევრობა ზომითაც კრებადი იქნება $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ფუნდამენტალური $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის $\{x_{n_k}(t)\}$ ქვემიმდევრობა ზომით კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ამის გამო თვით $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა აგრეთვე ზომით კრებადია იმავე ზღვარითი ფუნქციისაკენ.

**11. $L_p(0,1)$ სივრცე სრულია** (ფ. რისის თეორემა). ავიღოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{x_n(t)\}\in L_p(0,1)$ მიმდევრობა. მაშინ მოცემული $\varepsilon_k=\frac{1}{2^{kp}}$ რიცხვისათვის, სადაც $k$ ნატურალური რიცხვია, მოიძებნება ისეთი $N=N(\varepsilon_k)$ რიცხვი, რომ როცა $n, m\geqslant N$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$[\rho(x_n, x_m)]^p=\int_0^1|x_n(t)-x_m(t)|^p dt<\frac{1}{2^{kp}}. \tag{1.72}$$

ეს უტოლობა გვიჩვენებს, რომ, როცა $m, n\geqslant N$, ისეთი $t\in[0,1]$ წერტილების $\sigma_k$ სიმრავლის ზომა, რომელზეც

$$|x_n(t)-x_m(t)|>\frac{1}{2^k}, \tag{1.73}$$

ნაკლებია $\frac{1}{2^k}$ რიცხვზე. ავიღოთ $\{n\}$ მიმდევრობის ზრდადი ქვემიმდევრობა $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. ცხადია, (1.73) უტოლობის ძალით, როცა $n_k\geqslant N$ და $t\in\sigma_k$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|>\frac{1}{2^k}.$$

განვიხილოთ თანაკვეთა

$$\Omega_k=\bigcap_{i=k}^{\infty}\{[0,1]-\sigma_i\}=[0,1]-\bigcup_{i=k}^{\infty}\sigma_i.$$

ცხადია, $\Omega_k\subset\Omega_{k+1}$; გარდა ამისა, $\operatorname{mes}\Omega_k\geqslant 1-\frac{1}{2^{k-1}}$. აღვნიშნოთ $\Omega_0=\lim_{k\to\infty}\Omega_k$, მაშინ $\operatorname{mes}\Omega_0=1$, ამასთანავე $\Omega_k$ სიმრავლეზე, როცა $n_k\geqslant N$, შესრულებულია უტოლობა

$$|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\leqslant\frac{1}{2^k},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\{x_{n_k}(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია თავის თავ-

ში $\Omega_0$ სიმრავლეზე. ვინაიდან $\Omega_0$ ზღვარია სიმრავლეთა $\{\Omega_k\}$ მიმდევრობისა, ამიტომ $\Omega_0$ სიმრავლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთ $\Omega_i$ სიმრავლეს და, მაშასადამე, $\{x_{n_k}(t)\}$ მიმდევრობა თავის თავშია კრებადი $\Omega_0$ სიმრავლეზე გარკვეული ზღვარითი $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. გარდა ამისა, ვინაიდან $\Omega_0$ სიმრავლის ზომა ერთის ტოლია, ამიტომ $\Omega_0$ სიმრავლე $[0,1]$ სეგმენტისაგან მხოლოდ ნულზომის სიმრავლით განსხვავდება. გამოდის, რომ ზღვარითი $x^*(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე თითქმის ყველგან.

მეორე მხრივ, $\{x_{n_k}(t)\}$ არის ფუნდამენტალური $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა და, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n_r, n_s>N$ შესრულდება უტოლობა

$$\int_0^1 |x_{n_r}(t)-x_{n_s}(t)|^p dt<\varepsilon.$$

ცხადია, ამ უტოლობას მით უმეტეს ადგილი აქვს $\Omega_i\subset[0,1]$ სიმრავლეზე:

$$\int_{\Omega_i} |x_{n_r}(t)-x_{n_s}(t)|^p dt<\varepsilon.$$

დავაფიქსიროთ $n_r>N$ ნიშნაკი და გადავიდეთ უკანასკნელ უტოლობაში ზღვარზე, როცა $n_s\to\infty$. ისიც შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\{x_{n_s}(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია თავის თავში $\Omega_i$ სიმრავლეზე, ამიტომ ზღვარზე შეგვიძლია გადავიდეთ ინტეგრალის ნიშნის შიგნით. გვექნება

$$\int_{\Omega_i} |x_{n_k}(t)-x^*(t)|^p dt\leqslant\varepsilon.$$

ახლა ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $i\to\infty$, მივიღებთ

$$\int_{\Omega_0} |x_{n_r}(t)-x^*(t)|^p dt\leqslant\varepsilon,$$

ანუ

$$\int_0^1 |x_{n_r}(t)-x^*(t)|^p dt\leqslant\varepsilon, \text{ როცა } n_r\geqslant N.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის არსებობა ადასტურებს, რომ $x_{n_r}(t)-x^*(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $L_p(0,1)$ სივრცეს. მაგრამ, ვინაიდან $\{x_{n_r}(t)\}\subset L_p(0,1)$, ამიტომ $x^*(t)\in L_p(0,1)$. საბოლოოდ, რადგანაც $\lim\limits_{n_r\to\infty}\rho(x_{n_r}, x^*)=0$ და $\rho(x_n, x^*)\leqslant$ $\leqslant\rho(x_n, x_{n_r})+\rho(x_{n_r}, x^*)$, ამიტომ როცა $n$ და $n_r\to\infty$, მივიღებთ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=$ $=0$; ამით დამტკიცებულია, რომ ფუნქციონალური სივრცე $L_p(0,1)$ სრულია.

კერძოდ, როცა $p=2$, აქედან მივიღებთ, რომ ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2(0,1)$ სივრცე სრულია.

**არასრული სივრცის მაგალითები.** მოვიყვანოთ ახლა არასრული მეტრული სივრცის რამდენიმე მაგალითი.

1) რაციონალურ რიცხვთა $R$ სივრცე, რომელშიც მეტრიკა განსაზღვრულია ტოლობით

$$\rho(r_1, r_2)=|r_1-r_2|,$$

სადაც $r_1, r_2 \in R$, არასრული სივრცეა. მართლაც, განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა $\{r_n\}$ მიმდევრობა, სადაც $r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ცხადია, ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, მაგრამ მისი ზღვარი არ არის რაციონალური რიცხვი.

2) ვთქვათ, $X$ არის $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ნამდვილ კოეფიციენტებიანი პოლინომის სივრცე. ავიღოთ მისი ორი ნებისმიერი $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t) \in X$ ელემენტი. მანძილი ამ ელემენტებს შორის ვუწოდოთ გამოსახულებას:

$$\rho(P^{(1)}, P^{(2)})=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|P^{(1)}(t)-P^{(2)}(t)|.$$

განვიხილოთ პოლინომთა $\{P_n(t)\}\subset X$ მიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადია უწყვეტი $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ. ვთქვათ, $x^*(t)$ არ არის პოლინომი. ცხადია, $\{P_n(t)\}$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა $X$ სივრცეში, მაგრამ მას $x$ სივრცეში ზღვარი არა აქვს. პოლინომთა $X$ სივრცე არასრული სივრცეა.

3) სივრცე $C_{L_2}$ არასრულია. მართლაც, განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციების $\{x_n(t)\}\subset C_{L_2}$ მიმდევრობა, სადაც $x_n(t)$ ფუნქციები განვსაზღვროთ ასე:

$$x_n(t)=\begin{cases} 1 & , \text{ როცა } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-\frac{t}{n}, & \text{ როცა } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \\ 0 & , \text{ როცა } \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\rho(x_m, x_n)=\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} t^2dt+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}\left(1-\frac{t}{m}\right)^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0, \text{ როცა } m, n\to\infty.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n(t)\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა $C_{L_2}$ სივრცეში. ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია $C_{L_2}$ სივრცის მეტრიკით წყვეტილი $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$x^*(t)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{როცა } \frac{1}{2}< t\leqslant 1. \end{cases}$$

მართლაც, ელემენტარული გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\rho(x_n, x^*)=\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

ე. ი. $\rho(x_n, x^*)\to 0$, როცა $n\to\infty$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ $\{x_n(t)\}$ არის უწყვეტ ფუნქციათა ფუნდამენტალური მიმდევრობა, მაგრამ $C_{L_2}$ სივრცეში არა აქვს ზღვარი. მისი ზღვარითი $x^*(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $L_2$ სივრცეს.

## § 12. სივრცის სისრულის ერთი გამოყენება

ზემოთ დაუმტკიცებლად იყო გამოთქმული წინადადება იმის შესახებ, რომ $L_2(a, b)$ იზომეტრიულია ჰილბერტის კოორდინატული $l_2$ სივრცისა. ახლა, როცა ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ხსენებული სივრცეები სრულია, შესაძლოა მოვიყვანოთ ამ დებულების დამტკიცება.

შევჩერდეთ წინასწარ რამდენიმე მნიშვნელოვან განსაზღვრაზე $L_2(a, b)$ სივრცეში. ვთქვათ, $f(t), \varphi(t)\in L_2(a, b)$. ამ ელემენტებს ურთიერთ ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ელემენტები ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt=0.$$

მაგალითად, ფუნქციათა $\{\sin(2n+1)x\}_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა ორთოგონალური მიმდევრობაა $L_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ სივრცეში. მართლაც, თუ $m\neq n$ და $m, n= 0, 1, 2, \ldots$, გვექნება

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2m+1)x\sin(2n+1)x\,dx=0.$$

ფუნქციათა სისტემები

$$\sin\frac{\pi}{l}x,\quad \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \sin\frac{n\pi}{l}x, \ldots.$$

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\quad \cos\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \ldots.$$

აგრეთვე ორთოგონალური სისტემებია $L_2(0, l)$ სივრცეში. $f(t)\in L_2(a, b)$ ფუნქციას ამ სივრცის ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ელემენტი ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f^2(t)dt=1.$$

ავიღოთ ფუნქციათა ნებისმიერი სასრული $f_1(t), \ldots, f_n(t) \in L_2(a, b)$ სისტემა. მინკოვსკის უტოლობის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left\{\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n f_i(t)\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b f_i^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $L_2(a, b)$ სივრცეს, $f_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ ფუნქციებთან ერთად, მათი ალგებრული ჯამიც ეკუთვნის, ე. ი. $\sum_{i=1}^n f_i(t) \in L_2(a, b)$. ცხადია, რომ მაშინ ამ ელემენტების წრფივი კომბინაცია $\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$ აგრეთვე მიეკუთვნება $L_2(a, b)$ სივრცეს, სადაც $a_i (i=1, \ldots, n)$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განვიხილოთ ახლა ფუნქციათა $\{\varphi_k(t)\} \subset L_2(a, b)$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობას ორთონორმირებული მიმდევრობა ეწოდება $L_2(a, b)$ სივრცეში, თუ

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ როცა } i \neq j, \\ 1, \text{ როცა } i=j. \end{cases} \tag{1.74}$$

ასე მაგალითად, ფუნქციათა მიმდევრობები

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

არის ორთონორმირებული $L_2(-\pi, \pi)$ სივრცეში.

ვთქვათ, $x(t) \in L_2(a, b)$ ნებისმიერი ელემენტია. ფუნქციონალურ მწკრივს

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t),$$

სადაც

$$c_k = \int_a^B x(t)\varphi_k(t)dt, \tag{1.75}$$

ეწოდება $x(t)$ ელემენტის ფურიეს მწკრივი, ხოლო $c_k$—რიცხვებს ამ ელემენტის ფურიეს კოეფიციენტები.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t).$$

$s_n(t)$ ფუნქციას ვუწოდოთ $x(t)$ ელემენტის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი. ცხადია, $s_n(t) \in L_2(a, b)$. განვიხილოთ კერძო ჯამების მიმდევრობა

$\{s_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ (ე. ი. ხსენებული მიმდევრობა კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ $L_2(a, b)$ სივრცის მეტრიკით), თუ შესრულებულია პირობა

$$\int_a^b x^2(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2. \tag{1.77}$$

ამ პირობას **პარსევალის ტოლობას** უწოდებენ. მართლაც, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $x(t)$, $s_n(t) \in L_2(a, b)$, ამიტომ $x(t) - s_n(t) \in L_2(a, b)$. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_a^b [x(t) - s_n(t)]^2 dt = \int_a^b [x^2(t) - 2x(t)s_n(t) + s_n^2(t)]dt.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გამოვიყენებთ (1.74), (1.75), (1.76) და (1.77) ფორმულებს, ადვილად მივიღებთ ტოლობას

$$\int_a^b [x(t) - s_n(t)]^2 dt = \int_a^b x^2(t)dt - \sum_{i=1}^{n} c_k^2, \tag{1.78}$$

რომელსაც **ბესელის იგივეობა** ეწოდება. ამ იგივეობიდან ჩანს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{n} c_k^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)dt,$$

საიდანაც, $n$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)dt,$$

ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty.$$

ვთქვათ, კერძოდ, როგორც პირობაშია მოცემული, შესრულებულია (1.77) ტოლობა, მაშინ (1.78) ტოლობიდან, ზღვარზე გადასვლის შედეგად, მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x, s_n) = 0$$

და ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

როცა პარსევალის (1.77) ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $x(t) \in L_2(a, b)$ ელემენტისათვის, მაშინ ფუნქციათა $\{\varphi_k(t)\}$ მიმდევრობას **ჩაკეტილი მიმდევრობა** ეწოდება $L_2(a, b)$ სივრცეში. თვითონ (1.77) ტოლობა არის ამ მიმდევრობის ჩაკეტილობის პირობა.

ამის შემდეგ მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ თუ $\{\varphi_k(t)\}$ არის

ფუნქციათა ჩაკეტილი მიმდევრობა $L_2(a, b)$ სივრცეში და $x(t)$, $y(t)$ ამ სივრცის ორი ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ

$$\int_a^b x(t)y(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i, \tag{1.79}$$

სადაც $a_i$ და $b_i$, შესაბამისად, არიან $x(t)$ და $y(t)$ ელემენტების ფურიეს კოეფიციენტები:

$$a_i=\int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad b_i=\int_a^b y(t)\varphi_i(t)dt.$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ $x(t)+y(t)\in L_2(a, b)$ ელემენტის ფურიეს კოეფიციენტებია

$$a_i+b_i=\int_a^b [x(t)+y(t)]\varphi_i(t)dt \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი განსაზღვრა: ფუნქციათა ნებისმიერ $\{\varphi_k(t)\}\in \in L_2(a, b)$ მიმდევრობას **სრული სისტემა** ეწოდება, თუ $L_2(a, b)$ სივრცეში არ არსებობს ნულოვანი ელემენტისაგან განსხვავებული ისეთი ელემენტი, რომელიც ყველა $\varphi_k(t)$ ფუნქციის ორთოგონალური იქნება.

იმისათვის, რომ **ორთონორმირებული მიმდევრობა** $\{\varphi_k(t)\}\subset \subset L_2(a, b)$ **სრული სისტემა იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ჩაკეტილი.**

გადავიდეთ ახლა ფიშერ-რისის თეორემის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $\{\varphi_k(t)\}\in L_2(a, b)$ არის ფუნქციათა რაიმე ორთონორმირებული სრული სისტემა. დავამყაროთ $L_2(a, b)$ სივრცის და $l_2$ სივრცის ელემენტებს შორის შემდეგნაირი თანადობა. პირველი მათგანის ყოველ $x(t)\in L_2(a, b)$ ელემენტს შევუსაბამოთ $l_2$ სივრცის $A=(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ ელემენტი, სადაც $a_i(i=1, 2, \ldots n, \ldots,)$ რიცხვები $x(t)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. ავიღოთ ნებისმიერი ორი $x(t)$, $y(t)\in L_2(a, b)$ ელემენტი, რომელთა ფურიეს კოეფიციენტები შესაბამისად არის $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)=A$ და $(b_1, \ldots, b_n, \ldots)= =B, A, B\in l_2$. მაშინ ელემენტი $x(t)-y(t)\in L_2(a, b)$ და მისი ფურიეს კოეფიციენტები იქნება $(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n, \ldots)$. დავწეროთ $\{\varphi_k(t)\}$ სისტემის ჩაკეტილობის პირობა $x(t)-y(t)$ ელემენტის ფურიეს კოეფიციენტების საშუალებით, გვექნება

$$\int_a^b [x(t)-y(t)]^2 dt=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2. \tag{1.80}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\rho(x, y)=\rho(A, B)$, ე. ი. $L_2(a, b)$ იზომეტრულია $l_2$ სივრცის რაიმე ნაწილისა.

იმისათვის, რომ თეორემა ბოლომდე იყოს დამტკიცებული საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ $l_2$ სივრცის ყოველ ელემენტს $A=(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, იმავე აზრით, შეესაბამება $L_2(a, b)$ სივრცის რაღაც $x(t)$ ელემენტი.

პირობის თანახმად გვაქვს $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$. შევადგინოთ წრფივი კომბინაციები შემდეგი სახისა:

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t).$$

თუ გამოვიყენებთ $\{\varphi_i(t)\}$ მიმდევრობის ჩაკეტილობის თვისებას ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b [s_n(t) - s_{n+m}(t)]^2 dt = \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^2. \tag{1.81}$$

მაგრამ, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ მწკრივის კრებადობის გამო, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, მოიძებნება ისეთი $N = N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n > N$, ნებისმიერი $m > 0$ რიცხვისათვის, ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^2 \leqslant \varepsilon.$$

ამის შემდეგ (1.80) ტოლობიდან ნათელია, რომ $\{s_n(t)\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, ვინაიდან $L_2(a, b)$ სრული სივრცეა, ამიტომ $\{s_n(t)\}$ საშუალოდ კრებადია რაღაც $x(t) \in L_2(a, b)$ ელემენტისაკენ. ვისარგებლოთ ახლა ჰელდერის შემდეგი უტოლობით:

$$\left| \int_a^b [x(t) - s_n(t)] \varphi_m(t) dt \right| \leqslant \left\{ \int_a^b \varphi^2{}_m(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b [x(t) - s_n(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_a^b [x(t) - s_n(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \rho(x, s_n).$$

ვინაიდან $\rho(x, s_n) \to 0$, როცა $n \to \infty$, ამიტომ წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_a^b x(t) \varphi_m(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b s_n(t) \varphi_m(t) dt.$$

საბოლოოდ შევნიშნოთ, რომ საკმარისად დიდი $n$ ნიშნაკისათვის, გვექნება

$$\int_a^b s_n(t) \varphi_m(t) dt = a_m$$

და, მაშასადამე, წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_a^b x(t)\varphi_m(t)dt = a_m.$$

ამრიგად, ყოველ $A=(a_1, \dots, a_n, \dots) \in l_2$ ელემენტს შეესაბამება გარკვეული $x(t) \in L_2(a,b)$ ელემენტი, რომლის ფურიეს კოეფიციენტები სწორედ $A$ ელემენტის კომპონენტებია. ამით ფიშერ-რისის თეორემა ბოლომდე დამტკიცებულია.

## § 13. მეტრული სივრცის გასრულება

ქვევით იზომეტრული სივრცეები მიჩნეულია როგორც ერთი და იგივე მეტრული სივრცე. ვთქვათ, $X$ რაიმე მეტრული არასრული სივრცეა. სრულ $\Omega$ სივრცეს $X$ სივრცის *გასრულება* ეწოდება, თუ $X$ არის ქვესიმრავლე $\Omega$ სივრცისა და, თუ $X$ ყველგან მკვრივია $\Omega$ სივრცეში. ისე როგორც, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩართულია ნამდვილ რიცხვთა სრულ სივრცეში და ამ სივრცეში იგი ყველგან მკვრივია, სავსებით გარკვეული წესით, ყოველი მეტრული $X$ სივრცე შეგვიძლია ჩავრთოთ მის გასრულებაში $\Omega$, რომელშიაც $X$ სიმრავლე ყველგან მკვრივი იქნება.

მოვიგონოთ, რომ კანტორის თეორიის მიხედვით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველი ირაციონალური რიცხვი განსაზღვრულია რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტალური მიმდევრობის საშუალებით. ამის მსგავსად, მეტრული $X$ სივრცის გასრულების ელემენტები განსაზღვრულია $X$ სივრცის ფუნდამენტალური მიმდევრობების საშუალებით.

დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 1. 29.** *ყოველ არასრულ მეტრულ სივრცეს გასრულება აქვს და ეს გასრულება ერთადერთია.*

წინასწარ შემოვიღოთ ეკვივალენტური მიმდევრობების ცნება. ვთქვათ, $\{x_n\}, \{x_n'\} \in X$ ორი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. იტყვიან, რომ ეს მიმდევრობები *ეკვივალენტურია*, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n')=0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ ეკვივალენტურ $\{x_n\}, \{x_n'\}$ მიმდევრობათაგან ერთ-ერთი, მაგალითად, $\{x_n\}$ მიმდევრობა, კრებადია $x^*$ ელემენტისაკენ, მაშინ მეორე მიმდევრობაც კრებადია იმავე ელემენტისაკენ. მართლაც, სამკუთხედის აქსიომის თანახმად,

$$\rho(x_n', x^*) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x^*, x_n),$$

და რადგანაც პირობის ძალით ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n')=0, \qquad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x^*)=0,$$

ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n', x^*)=0$. ისიც შევნიშნოთ, რომ თუ ორი ფუნდამენტალური მიმდევრობა მესამე ფუნდამენტალური მიმდევრობის ეკვივალენტურია, მაშინ ისინი ურთიერთ ეკვივალენტურიც იქნება.

დავანაწილოთ $X$ სივრცის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა ფუნდამენტალური მიმდევრობის სიმრავლე კლასებად ისე, რომ ერთსა და იმავე კლასს მივაკუთვნოთ ყველა ურთიერთ ეკვივალენტური მიმდევრობა. ყველა ასეთი კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\Omega$-თი. ვთქვათ, $\alpha$ და $\beta$ ორი ნებისმი-

ერი კლასია (ელემენტია) $\Omega$ სიმრავლიდან და $\{x_n\}\subset\alpha$, $\{y_n\}\subset\beta$ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობებია. თანახმად ოთხკუთხედის აქსიომისა შეგვიძლია დავწეროთ

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho(x_m, x_n)+\rho(y_m, y_n).$$

ვთქვათ, $m,n\to\infty$, მაშინ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობების ფუნდამენტალურობის გამო ადგილი ექნება ტოლობებს:

$\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(x_m, x_n)=0$, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(y_m, y_n)=0$ და მაშასადამე, წინა უტოლობიდან მივიღებთ, რომ $\{\rho(x_n, y_m)\}$ მიმდევრობა არის ფუნდამენტალური რიცხვითი მიმდევრობა. ვთქვათ,

$$\rho(\alpha,\beta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n). \tag{1.82}$$

დავამტკიცოთ, რომ $\alpha$ და $\beta$ კლასებში ნაცვლად ფუნდამენტალური $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობებისა, შეგვეძლო აგვეღო შესაბამისად მათი ეკვივალენტური სხვა ფუნდამენტალური $\{x_n'\}\subset\alpha$ და $\{y_n'\}\subset\beta$ მიმდევრობები, ამით $\rho(\alpha,\beta)$ რიცხვი არ შეიცვლებოდა. მართლაც, ისევ ოთხკუთხედის აქსიომის ძალით

$$|\rho(x_n' y_n')-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho x_n, x_n')+\rho(y_n, y_n');$$

მაგრამ, $\{x_n\}, \{x_n'\}$ და $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობების ეკვივალენტობის გამო, როცა $n\to\infty$, გვექნება:

$\rho(x_n, x_n')\to 0$, $\rho(y_n, y_n')\to 0$ და წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$\rho(\alpha,\beta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n', y_n').$$

ამრიგად, $\rho(\alpha,\beta)$ სავსებით ცალსახად განსაზღვრულია $\alpha$ და $\beta$ კლასებით. სხვანაირად, $\rho(\alpha,\beta)$ არის $\alpha$ და $\beta$ კლასების ცალსახა ფუნქცია. ვუწოდოთ $\rho(\alpha,\beta)$ ფუნქციას მანძილი $\alpha$ და $\beta$ კლასებს (ელემენტებს) შორის. დავრწმუნდეთ, რომ მანძილის ცნების ასეთნაირი განსაზღვრა $\Omega$ სიმრავლეში დასაშვებია. ამისათვის საჭიროა შევამოწმოთ, რომ $\rho(\alpha,\beta)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრული სივრცის აქსიომებს.

ცხადია, რომ $\rho(\alpha,\beta)\geqslant 0$. ვთქვათ, $\rho(\alpha,\beta)=0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n\}, \{y_n\}$ ეკვივალენტური მიმდევრობებია და ამიტომ, ისინი ერთსა და იმავე კლასს ეკუთვნის, ე. ი. $\alpha=\beta$.

თვით $\rho(\alpha,\beta)$ ფუნქციის განსაზღვრიდან ჩანს, რომ სიმეტრიის აქსიომაც შესრულებულია.

ვთქვათ, $\alpha,\beta,\gamma$ სამი სხვადასხვა კლასია $\Omega$ სიმრავლიდან და $\{x_n\}\subset\alpha$, $\{y_n\}\subset\beta$, $\{z_n\}\subset\gamma$ — მათში აღებული ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობები. ადგილი აქვს უტოლობას

$$\rho(x_n, y_n)\leqslant\rho(x_n, z_n)+\rho(z_n, y_n),$$

საიდანაც ზღვარზე გადასვლის შემდეგ, როცა $n\to\infty$, (1.82) ტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\rho(\alpha,\beta)\leqslant\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta).$$

ამრიგად, $\rho(\alpha,\beta)$ ფუნქცია სამკუთხედის აქსიომასაც აკმაყოფილებს.

ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\Omega$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია ეკვივალენტური ფუნდამენტალური მიმდევრობების კლასები, არის მეტრული სივრცე.

დავამტკიცოთ, რომ თავიდან აღებული მეტრული $X$ სივრცე შეგვიძლია ჩავთვალოთ, როგორც $\Omega$ სივრცის ქვესიმრავლე.

მართლაც, ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი ელემენტია. შევუსაბამოთ ამ ელემენტს Ω სივრცის ისეთი კლასი (ელემენტი) $\alpha_x$, რომელიც შედგება $x$ ელემენტისაკენ კრებადი ყველა მიმდევრობებისაგან. $X$ და Ω სივრცეების ელემენტების ასეთი თანადობიდან პირდაპირ ჩანს, რომ თუ $\alpha_x, \beta_y \in \Omega$ და $\alpha_x = \beta_y$, მაშინ $x=y$; ამასთანავე $\rho(\alpha_x,\beta_y)=\rho(x,y)$. სხვანაირად, თუ $x\in X$ ელემენტს და შესაბამ $\alpha_x \in \Omega$ კლასს იგივურ ელემენტებად ჩავთვლით, ე. ი. $x=\alpha_x$, ამით $X$ სივრცე იზომეტრიული ნაწილი გახდება Ω სივრცისა.

ახლა ისიც ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი $\alpha \in \Omega$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება ისეთი ფუნდამენტალური $\{x_n\}\subset X$ მიმდევრობა და ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი მოიძებნოს, რომ როცა $n \geqslant N$ შესრულებული იყოს $\rho(x_n,\alpha)<\varepsilon$ უტოლობა. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n\}\subset\alpha$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა. როცა $n, m \geqslant N$, გვექნება $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. მაგრამ, მაშინ $\rho(x_n,\alpha)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon$, ე. ი. $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_n,\alpha)=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $\alpha\in\Omega$ წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს $X$ სივრცის წერტილს, ე. ი. $X$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია Ω სივრცეში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ Ω სრული სივრცეა. Ω სივრცე ჩვენ ისე ავაგეთ, რომ როგორიც უნდა იყოს ფუნდამენტალური $\{x_n\}\in X$ მიმდევრობა, იგი უსათუოდ კრებადია Ω სივრცის რაღაც $\alpha$ ელემენტისაკენ. განვიხილოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{\alpha^{(k)}\}\in\Omega$ მიმდევრობა. ვინაიდან $X$ ყველგან მკვრივია Ω სივრცეში, ამიტომ შესაძლოა ავაგოთ $\{\alpha^{(k)}\}$ მიმდევრობის ეკვივალენტური $\{x_n\}\in X$ მიმდევრობა; ამისათვის საკმარისია $x_n$ ელემენტი შერჩეული იყოს შემდეგი პირობით: $\rho(x_n,\alpha^{(n)})<\frac{1}{n}$. ასე აგებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალური იქნება და, ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, იგი კრებადია რაღაც $\alpha\in\Omega$ ელემენტისაკენ, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\alpha)=0$. ახლა უტოლობიდან

$$\rho(\alpha^{(n)},\alpha)\leqslant\rho(\alpha^{(n)},x_n)+\rho(x_n,\alpha)$$

პირდაპირ ჩანს, რომ $\{\alpha^{(n)}\}$ მიმდევრობა კრებადია Ω სივრცეში $\alpha\in\Omega$ ელემენტისაკენ. ამრიგად, Ω სრული სივრცეა.

თეორემის დამტკიცების დასამთავრებლად საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $X$ სივრცის Ω გასრულება ერთადერთია. ვთქვათ, $\Omega_1$ არის $X$ სივრცის სხვა გასრულება. ვუჩვენოთ, რომ Ω და $\Omega_1$ იზომეტრიული სივრცეებია. ამისათვის უნდა აღმოვაჩინოთ ისეთი ოპერატორის არსებობა, რომელიც Ω სივრციდან მოქმედებს $\Omega_1$ სივრცეში და შემდეგი თვისებები აქვს: 1) $Ux=x$ ყველა $x\in X$ ელემენტისათვის: 2) თუ $\alpha,\alpha^{(1)}\in\Omega$ ელემენტების ნებისმიერი წყვილია და $U\alpha, U\alpha^{(1)}\in\Omega_1$ — მათი სახეებია, მაშინ $\rho(\alpha,\alpha^{(1)})=\rho(U\alpha,U\alpha^{(1)})$. ასეთი $U$ ოპერატორი არსებობს. მართლაც, ვთქვათ, $\alpha\in\Omega$ ნებისმიერი ელემენტია. არსებობს ისეთი ფუნდამენტალური $\{x_n\}\subset X$ მიმდევრობა, რომ Ω სივრცეში ადგილი აქვს $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\alpha)=0$ ტოლობას. ვინაიდან, პირობის თანახმად, Ω სივრცე აგრეთვე $X$ სივრცის გასრულებას წარმოადგენს, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადი იქნება $\Omega_1$ სივრცეშიც რაიმე $a\in\Omega$ ელემენტისაკენ, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$.

განვსაზღვროთ ახლა $U$ ოპერატორი ასე: $U(\alpha)=a$. დავრწმუნდეთ, რომ ასე განსაზღვრული $U$ ოპერატორი Ω სივრცეს იზომეტრიულად გადასახავს $\Omega_1$ სივრცეში. ამისათვის, ვთქვათ, $\{x_n\}$, $\{x_n'\}\subset X$ ორი ნებისმიერი ფუნდამენ-

ტალური მიმდევრობაა, რომლებიც $\Omega$ სივრცეში არიან კრებადი შესაბამისად $\alpha$ და $\alpha^{(1)}$ ელემენტებისაკენ, ე. ი.

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, \alpha)=0, \ \lim_{n \to \infty} \rho(x_n', \alpha^{(1)})=0, \ \alpha, \alpha^{(1)} \in \Omega.$$

ვთქვათ, გარდა ამისა, რომ იგივე მიმდევრობები $\Omega$ სივრცეში იკრიბებიან შესაბამისად $a$ და $a^{(1)}$ ელემენტებისაკენ:

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, a)=0, \ \lim_{n \to \infty} (x_n', a^{(1)})=0, \ a, a^{(1)} \in \Omega.$$

მაშინ, თანახმად (1.82) ფორმულისა, დავწეროთ

$$\rho(\alpha, \alpha^{(1)})=\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n'),$$

$$\rho(a, a^{(1)})=\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n'),$$

ე. ი. $\rho(\alpha, \alpha^{(1)})=\rho(a, a^{(1)})$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**სივრცის გასრულების მაგალითები.** 1) ვინაიდან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის ნამდვილ რიცხვთა სივრცის ქვესიმრავლე და მასში მკვრივია, ამიტომ რაციონალურ რიცხვთა გასრულებას რიცხვითი წრფე წარმოადგენს.

2) ვთქვათ, $X$ არის ყველა $P(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, პოლინომის სიმრავლე, რომელშიც შემოღებულია ჩებიშევის მეტრიკა. როგორც ვიცით, ეს სივრცე არასრულია. $X$ სიმრავლის გასრულებას $C(a, b)$ სივრცე წარმოადგენს. მართლაც, $X \in C(a,b)$. გარდა ამისა, ვთქვათ, $f(t) \in C(a,b)$ ნებისმიერი ელემენტია. ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $P(t)$ პოლინომი, რომ, როცა $a \leqslant t \leqslant b$, ადგილი ექნება $\rho(f, P)<\varepsilon$ უტოლობას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $X$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $C(a.b)$ სივრცეში.

3) ზემოთ დამტკიცებული იყო, რომ $C_{L_2}$ სივრცე არასრულია. ახლა ვუჩვენოთ, რომ $C_{L_2}$ სივრცის გასრულებას ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2(a,b)$ სივრცე წარმოადგენს. მართლაც, ცხადია, $C_{L_2} \subset L_2(a,b)$. ვთქვათ, $f(t) \in L_2(a,b)$ ნებისმიერი ელემენტია და $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვი. მაშინ, როგორც ცნობილია, ერთის მხრივ არსებობს შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია $\varphi(t)$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b \left[f(t)-\varphi(t)\right]^2 dt<\frac{\varepsilon^2}{4}, \text{ ე. ი. } \rho(f, \varphi)<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.83}$$

ხოლო მეორეს მხრივ, ლუზინის თეორემის ძალით, არსებობს $[a,b]$ სეგმენტზე ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $\Psi(t)$, რომ იმ $t \in [a, b]$ წერტილთა $\sigma$ სიმრავლის ზომა, რომელზეც $\varphi(t) \neq \Psi(t)$, აკმაყოფილებს პირობას $\operatorname{mes} \sigma \leqslant \frac{\varepsilon^2}{16 K}$, სადაც $|\varphi(t)|$, $|\Psi(t)|<K$. შევაფასოთ ახლა მანძილი $\varphi(x)$ და $\Psi(x)$ ფუნქციებს შორის. გვაქვს

$$\rho(\varphi, \Psi)=\left\{\int^b [\varphi(t)-\Psi(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\int [\varphi(t)-\Psi(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2k\left\{\int_\sigma dt\right\}^{\frac{1}{2}}=2k\left((\operatorname{mes} \sigma)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.84}$$

გამოვიყენოთ $f(t)$, $\varphi(t)$, $\Psi(t) \in L_2$ ელემენტებზე სამკუთხედის აქსიომა, მივიღებთ

$$\rho(f, \Psi) \leqslant \rho(f; \varphi) + \rho(\varphi, \Psi),$$

საიდანაც, (1.83) და (1.84) უტოლობების დახმარებით დავწერთ $\rho(f, \Psi) \leqslant \varepsilon$ და ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

4) განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების $C^{(p)}(a, b)$ სიმრავლე და ვთქვათ $x(t)$, $y(t) \in C^{(p)}(a, b)$ ნებისმიერი ელემენტებია. მანძილის ცნება, ჩებიშევის მეტრიკისაგან განსხვავებით, შემოვიღოთ შემდეგი ტოლობით

$$\rho(x, y) = \left\{ \int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

ავიღოთ ისეთ უწყვეტ ფუნქციათა $\{x_n(t)\} \subset C^{(p)}(a, b)$, მიმდევრობა, რომელიც საშუალოდ კრებადია $p$ მაჩვენებლით წყვეტილი ფუნქციისაკენ. ცხადია, $\{x_n(t)\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა $C^{(p)}(a, b)$ სივრცეში, მაგრამ ამ სივრცეში მას ზღვარი არ აქვს. ამის გამო $C^{(p)}(a, b)$ არასრული სივრცეა. სავსებით ისევე, როგორც წინა მაგალითში მტკიცდება, რომ $C^{(p)}(a, b)$ სივრცის გასრულებას წარმოადგენს $L_p(a, b)$ სივრცე.

## § 14. სრული სივრცის თვისებები

მოვიყვანოთ მეტრული სივრცის სისრულესთან დაკავშირებული რამდენიმე მნიშვნელოვანი დებულება, რომლებსაც მრავალი გამოყენება აქვს.

პირველ ყოვლისა მოვიგონოთ, რომ მათემატიკურ ანალიზში ხშირად გამოიყენება კანტორის ცნობილი თეორემა, რიცხვითი წრფეზე სეგმენტების კლებადი მიმდევრობის თანაკვეთის შესახებ. კანტორის თეორემის განზოგადებას მეტრულ სივრცეში წარმოადგენს შემდეგი:

**თეორემა 1.30** მეტრული $X$ სივრცის სისრულისათვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცეში მოთავსებული ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილ სფეროთა ნებისმიერი $\{\overline{S}_n(r_n)\}$ მიმდევრობისათვის, სადაც $r_n \to 0$, თანაკვეთა $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i$ არ იყოს ცარიელი.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ $X$ სივრცე სრულია და $\{\overline{S}_n\}$ ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი სფეროების მიმდევრობაა, რომელთა რადიუსები $r_n \to 0$. აღვნიშნოთ $\{x_0^{(n)}\}$-ით, შესაბამისად, ამ სფეროების ცენტრების მიმდევრობა და ვუჩვენოთ, რომ $\{x_0^{(n)}\} \subset X$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა. მართლაც, როცა $n > m$, მაშინ $\rho(x_0^{(n)}, x_0^{(m)}) < 2r_m$, ვინაიდან $X$ სივრცე სრულია, ამიტომ არსებობს $x^* \in X$ ელემენტი ისეთი, რომ $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^*, x_m) = 0$. ახლა დავრწმუნდეთ, რომ ზღვარითი ელემენტი $x^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i$. ეს იქიდან ჩანს, რომ $\overline{S}_m$ სფერო შეიცავს $\{x_0^{(n)}\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტს, გარდა შესაძლოა $x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(m-1)}$ ელემენტებისა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $\overline{S}_m$ სფეროსათვის $x^*$ ელემენტი არის ზღვარითი

წერტილი. ვინაიდან ყველა $\widetilde{S}_m$ ჩაკეტილია, ამიტომ ნებისმიერი $m$ ნიშნაკისათვის ელემენტი $x^* \in \widetilde{S}_m$.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ამისათვის დავუშვათ, რომ $X$ სივრცე არასრულია, ე. ი. $X$ სივრცეში არსებობს ერთი მაინც ფუნდამენტალური $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელსაც ზღვარი არ აქვს. შევეცადოთ ავაგოთ $X$ სივრცეში ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი სფეროების ისეთი $\{\widetilde{S}_m\}$ მიმდევრობა, რომელთა რადიუსების $\{r_m\}$ მიმდევრობა ნულისაკენ იკრიბება და $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{S}_m$ თანაკვეთა კი ცარიელი სიმრავლეა. ავიღოთ ერთ-ერთი ფუნდამენტალური $\{x_n\}\subset X$ მიმდევრობა, რომელსაც $X$ სივრცეში არა აქვს ზღვარი. შევარჩიოთ $m_1$ ნიშნაკი ისე, რომ როცა $n > m_1$ გვქონდეს $\rho(x_{m_1}, x_n) < \frac{1}{2}$ უტოლობა. ავაგოთ ჩაკეტილი $\widetilde{S}_1$ სფერო, რომლის ცენტრი იქნება $x_{m_1}$ წერტილი და რადიუსი ერთის ტოლი. ამის შემდეგ შევარჩიოთ $m_2 > m_1$ ნიშნაკი ისე, რომ როცა $n > m_2$ შესრულდეს $\rho(x_{m_2}, x_n) < \frac{1}{2^2}$ უტოლობა. ვთქვათ, $\widetilde{S}_2$ ჩაკეტილი სფეროა $x_{m_2}$ ცენტრით და $\frac{1}{2}$ რადიუსით. ცხადია, $\widetilde{S}_2 \subset \widetilde{S}_1$. ახლა შევარჩიოთ $m_3 > m_2$ ისე, რომ როცა $n > m_3$, შესრულდეს $\rho(x_{m_3}, x_n) < \frac{1}{2^3}$ უტოლობა. ავაგოთ ჩაკეტილი $\widetilde{S}_3$ სფერო $x_{m_3}$ ცენტრით. $\frac{1}{2^2}$ რადიუსით და გავაგრძელოთ ამ წესით ჩაკეტილი სფეროების აგება. მაშინ წარმოიქმნება ერთმანეთში ჩალაგებული სფეროების $\{\widetilde{S}_m\}$ მიმდევრობა, რომელთა რადიუსების მიმდევრობა $\left\{\frac{1}{2^{m-1}}\right\} \to 0$, როცა $m \to \infty$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{S}_i$ არის ცარიელი სიმრავლე. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ჩავთვალოთ, რომ არსებობს $x^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{S}_i$ წერტილი. მაშინ, $\widetilde{S}_i$ სფერო, დაწყებული $x_{m_i}$ ელემენტიდან, შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტს, ე. ი. როცა $n > m_i$, მაშინ ადგილი ექნება $\rho(x^*, x_n) < \frac{1}{2^{i-1}}$ უტოლობას. აქედან, როცა $i \to \infty$ (მაშინ $n \to \infty$), გვექნება $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას იმის შესახებ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობას არ აქვს ზღვარი. ამრიგად, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{S}_i$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

ახლა შემოვიღოთ მეტრულ სივრცეში *არსად მკვრივი სიმრავლის ცნება*. ვთქვათ, $A$ არის მეტრული $X$ სივრცის რაიმე სიმრავლე. ვიტყ-

ვით, რომ $A$ სიმრავლე არსად მკვრივია $X$ სივრცეში, თუ ამ სივრცეში აღებულ ნებისმიერ სფეროში შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი ახალი სფერო, რომელიც არ შეიცავს $A$ სიმრავლის არცერთ წერტილს.

$X$ სივრცეში მოთავსებულ რაიმე $A$ სიმრავლეს ეწოდება პირველი კატეგორიის სიმრავლე $X$ სივრცეში, თუ იგი წარმოიდგინება $X$-ში არსად მკვრივი სასრული ან თვლადი სისტემის ჯამის სახით. თუ სიმრავლე პირველი კატეგორიის არ არის, მაშინ მას მეორე კატეგორიის სიმრავლე ეწოდება. ამ განსაზღვრის თანახმად, რაციონალური რიცხვების სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე. ნამდვილ რიცხვთა სივრცე მეორე კატეგორიის სივრცეა.

**თეორემა 1.30.** ყოველი სრული მეტრული $X$ სივრცე მეორე კატეგორიის სიმრავლეა.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $X$ პირველი კატეგორიის სიმრავლეა და, მაშასადამე, შეიძლება იგი წარმოვადგინოთ ასე:

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

სადაც ყოველი $A_i$ სიმრავლე არსად მკვრივია $X$ სივრცეში. ვინაიდან $A_1$ სიმრავლე არსად მკვრივია $X$ სივრცეში, ამიტომ არსებობს $S_1(a_1,\varepsilon_1)\subset X$ სფერო $a_1$ ცენტრით და $\varepsilon_1$ რადიუსით, რომელიც არ შეიცავს $A_1$ სიმრავლის არცერთ წერტილს. ვინაიდან $A_2$ სიმრავლე არსად მკვრივია $X$ სივრცეში, ამიტომ $S_1\left(a_1,\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ სფერო შეიცავს $S_2(a_2,\varepsilon_2)$ სფეროს, რომელიც არ შეიცავს $A_2$ სიმრავლის არცერთ წერტილს. ავირჩიოთ $\varepsilon_2\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}$ რადიუსი. გავაგრძელოთ ასეთნაირი წესით სფეროების აგება. მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ სფეროების $\{S(a_n,\varepsilon_n)\}$ მიმდევრობას, რომელშიც ყოველი $S_n(a_n,\varepsilon_n)\cap A_n$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა და $\varepsilon_n\leqslant\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\leqslant\frac{\varepsilon_{n-2}}{2^2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{\varepsilon_2}{2^{n-2}}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}}$, ე. ი. $\varepsilon_n\to 0$, როცა $n\to\infty$. ცხადია, ჩვენს მიერ აგებული სფეროების ცენტრების $\{a_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია:

$$\rho(x_{n+p},x_n)<\varepsilon_n,\quad p>1. \qquad (1.85)$$

ვინაიდან $X$ სრული სივრცეა, ამიტომ არსებობს $a^*\in X$ ელემენტი ისეთი, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(a_n,a^*)=0$. ახლა, თუ (1.85) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $p\to\infty$ მივიღებთ: $\rho(a_n,a^*)\leqslant\frac{\varepsilon_n}{2}<\varepsilon_n$. მაგრამ ეს უტოლობა ნიშნავს, რომ $S(a_n,\varepsilon_n)$ სფერო შეიცავს $a^*$ ელემენტს, ამიტომ $a^*\overline{\in}A_n$.

როგორც ვხედავთ, ერთის მხრივ $a^*\in X$, მეორეს მხრივ $x^*$ არ ეკუთვნის არცერთ $A_n$ სიმრავლეს და, მაშასადამე, $a^*\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=X$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩვენს თეორემას.

## 15. ბანახისა და კაჩოპოლის პრინციპი

როგორც ცნობილია, მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს მნიშვნელოვანი როლი ეკუთვნის სხვადასხვა ფუნქციონალური განტოლებების (დიფერენ-

ციალური და ინტეგრალური განტოლებების, სასრული და უსასრულო ალგებრული სისტემების და სხვათა) ამონახსნის არსებობისა და ერთადობის დამტკიცებაში. ამ მეთოდით, გარდა იმისა, რომ გარკვეულ პირობებში შეგვიძლია დავამტკიცოთ ზუსტი ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, მისი საშუალებით შეგვიძლია ავაგოთ საძიებელი ამონახსნის მიახლოვებანი საჭირო სიზუსტით.

მიმდევრობითი მიახლოვების მეთოდის განზოგადებას ნებისმიერი სრული მეტრული სივრცის შემთხვევაში წარმოადგენს ბანახისა და კაჩოპოლის პრინციპი. სანამ ამ პრინციპს ჩამოვაყალიბებდეთ და დავამტკიცებდეთ, შევჩერდეთ ზოგიერთ საჭირო განსაზღვრაზე.

ავიღოთ ორი მეტრული $X$ და $Y$ სივრცე, რომელთა ელემენტები შესაბამისად $x$-ით და $y$-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, $A\subset X$ არის $U$ ოპერატორის განსაზღვრის არე, ხოლო $B\subset Y$ მნიშვნელობათა არე. კერძოდ, თუ მნიშვნელობათა $B$ არე მთელ $Y$ სივრცეს ემთხვევა, მაშინ

$$Ux=y$$

განტოლებას ყოველი $y\in Y$ ელემენტისათვის, ერთი $x\in A$ ამონახსნი მაინც აქვს. დავუშვათ, რომ $U$ ოპერატორი ურთიერთცალსახა თანადობას ამყარებს $A\subset X$ და $B\subset Y$ სიმრავლეებს ელემენტებს შორის, მაშინ $Ux=y$ განტოლებას, სადაც $x\in A$, $y\in B$, ყოველი მოცემული $y$ ელემენტისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ვთქვათ ახლა, რომ მეტრული $X$ სივრცე სრულია და $A\subset X$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. წარმოვიდგინოთ, რომ $U$ ოპერატორი $A$ სიმრავლის ელემენტებს ამავე სიმრავლის ელემენტებში გადასახავს, ე. ი. თუ $x\in A$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $Ux\in A$. რაიმე $x\in A$ ელემენტს ეწოდება $U$ ოპერატორის *უძრავი წერტილი*, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$Ux^*=x^*.$$

სხვანაირად, ეს იმას ნიშნავს, რომ $U$ ოპერატორის ყოველი უძრავი წერტილი არის

$$Ux=x \tag{1.86}$$

განტოლების ამონახსნი. ვთქვათ, $x_1, x_2\in A$ ნებისმიერი ორი ელემენტია. თუ შესრულებულია უტოლობა

$$\rho(Ux_1, Ux_2)\leqslant \alpha\,\rho(x_1,x_2), \tag{1.87}$$

სადაც $0<\alpha<1$, მაშინ $U$ ოპერატორს *კუმშვის ოპერატორი* ეწოდება. ბანახსა და კაჩოპოლს ეკუთვნის შემდეგი

**თეორემა 1.31.** *თუ $U$ კუმშვის ოპერატორია და სრულ $X$ სივრციდან ისევ $X$ სივრცეში მოქმედებს, მაშინ $X$ სივრცეში არსებობს (1.86) განტოლების ერთადერთი $x^*$ ამონახსნი. ამასთანავე, $x^*$ ამონახსნი არის ზღვარითი ელემენტი $x_{m+1}=Ux_m(m=0,1\cdots)$ მიმდევრობისა, სადაც $x_0\in X$ ნებისმიერი ელემენტია. გარდა ამისა, $\{x_m\}$ მიმდევრობა კრებადია $x^*$ ამონახსნისაკენ შემდეგი სიჩქარით:*

$$\rho(x_m,x^*)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1). \tag{1.88}$$

ავიღოთ ნებისმიერი $x_0\in A$ ელემენტი და ავაგოთ შემდეგი მიმდევრობა:

$$x_1=Ux_0,\ x_2=Ux_1,\cdots,\ x_m=Ux_{m-1},\cdots\in X.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. თეორემის პირობის თანახმად, ადგილი აქვს შეფასებებს

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ux_0, Ux_1) \leqslant \alpha\,\rho(x_0, x_1) = \alpha\,\rho(x_0, Ux_0),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ux_1, Ux_2) \leqslant \alpha\,\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2 \rho(x_0, Ux_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

საიდანაც, ნებისმიერი $n > m$ ნიშნაკისათვის, ადვილად მივიღებთ

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1})\,\rho(x_0, U_{x0}) = \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x_0, Ux_0).$$

აქედან, თუ გამოვიყენებთ უტოლობებს $\alpha < 1$, $n > m$, $\alpha^m - \alpha^n < \alpha^m$, გვექნება

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\,\rho(x_0, Ux_0). \tag{1.89}$$

ახლა ცხადია, რომ როცა $m, n \to \infty$, მაშინ $\rho(x_m, x_n) \to 0$. ამრიგად, $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია $X$ სივრცეში და, ვინაიდან $X$ სრული სივრცეა, ამიტომ არსებობს ისეთი $x^* \in X$ ელემენტი, რომ $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_m, x^*) = 0$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $x^*$ არის $U$ ოპერატორის უძრავი წერტილი, ანუ (1.86) განტოლების ამონახსნი. გვაქვს:

$$\rho(x^*, Ux^*) \leqslant \rho(x^*, x_m) + \rho(x_m, Ux^*) \leqslant \rho(x^*, x_m) + \rho(Ux_{m-1}, Ux^*) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x^*, x_m) + \alpha\,\rho(x_{m-1}, x^*).$$

ზემოთ დამტკიცებულის ძალით, $x^*$ არის $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და საკმარისად დიდი $m$ ნიშნაკისათვის შესრულდება უტოლობები

$$\rho(x^*, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_{m-1}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

ამ უტოლობების დახმარებით, წინა უტოლობიდან მივიღებთ:
$\rho(x^*, Ux^*) < \varepsilon$. ვინაიდან $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ გვექნება $\rho(x^*, Ux^*) = 0$, ე. ი. $Ux^* = x^*$.

ახლა ვუჩვენოთ, რომ $x^*$ ამონახსნი ერთადერთია. დავუშვათ, რომ (1.86) განტოლებას, გარდა $x^*$ ამონახსნისა, აქვს კიდევ სხვა $\overline{x}^* \neq x^*$ ამონახსნი. გვაქვს

$$\rho(x^*, \overline{x}^*) = \rho(Ux^*, U\overline{x}^*) \leqslant \alpha\,\rho(x^*, \overline{x}^*).$$

ვინაიდან $x^* \neq \overline{x}^*$, ამიტომ $\rho(x^*, \overline{x}^*) > 0$ და მივიღებთ $1 \leqslant \alpha$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $\alpha < 1$. ამრიგად, დაშვება სწორი არ არის და $\overline{x}^* = x^*$.

თეორემის დამტკიცების დასამთავრებლად, საჭიროა შევაფასოთ მიმდევრობითი $x_m$ მიახლოებების კრებადობის სიჩქარე ზღვარითი $x^*$ ელემენტისაკენ. ამისათვის გადავიდეთ (1.89) უტოლობაში ზღვარზე როცა $n \to \infty$ და გავიხსენოთ რომ $Ux_0 = x_1$ მივიღებთ

$$\rho(x_m, x^*) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\,\rho(x_0, x_1).$$

როგორც ამ უტოლობიდან ჩანს, $x_0$ ელემენტის შერჩევა გავლენას ახდენს მხოლოდ კრებადობის სიჩქარეზე. გარდა ამისა, ეს უტოლობა $x_m$ ელემენტის ირგვლივ განსაზღვრავს იმ ღია სფერულ მიდამოს, რომელშიც მოთავსებულია ამონახსნი $x^*$. კერძოდ, როცა $m=0$ მივიღებთ

$$\rho(x_0, x^*) < \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1).$$

ეს უტოლობა, ნულოვანი და პირველი მიახლოების საშუალებით, გამოსახავს ცდომილების შეფასებას, რომელსაც ადგილი ექნება, თუ ნულოვან მიახლოებაზე შევჩერდებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კუმშვის ყოველი $U$ ოპერატორი უწყვეტია. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n\} \subset X$ არის $x^*$ ელემენტისაკენ, ნებისმიერი კრებადი მიმდევრობა, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x^*) = 0$. მაშინ, ოპერატორის კუმშვის (1.87) პირობიდან გვექნება

$$\rho(Ux_n, Ux^*) \leqslant \alpha \rho(x_n, x^*),$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} \rho(Ux_n, Ux^*) = 0.$$

მოვიყვანოთ ბანახისა და კაჩოპოლის თეორემის ზოგიერთი გამოყენება.

1. ვთქვათ, $y=f(t)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნამდვილი ფუნქცია, რომლის ყველა მნიშვნელობა მოთავსებულია იმავე სეგმენტზე. ამას გარდა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \mu |t_1 - t_2|,$$

სადაც $t_1$, $t_2 \in [a,b]$ არის $t$ ცვლადის ნებისმიერი ორი მნიშვნელობა და ლიპშიცის მუდმივი $\mu < 1$. ცხადია, ამ პირობებში $y=f(t)$ წარმოადგენს კუმშვის ოპერატორს და ამიტომ ბანახისა და კაჩოპოლის თეორემის თანახმად, არსებობს ერთადერთი $t \in [a,b]$ ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს $f(t)=t$ განტოლების ფესვს. ამასთანავე $t$ წარმოადგენს $t_0, t_1=f(t_0), t_2=f(t_1), \ldots$ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტს, სადაც $t_0 \in [a,b]$ ნებისმიერი ელემენტია.

2. განვიხილოთ $n$-განზომილებიანი ნამდვილი $R_n$ სივრცე, რომლის ნებისმიერ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y=(y_1 y_2, \ldots, y_n)$ ელემენტებს შორის $\rho(x, y)$ მანძილი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

$R_n$ სივრცე ასეთი მეტრიკით არის სრული სივრცე. ავიღოთ $y=Ux$ ოპერატორი, რომელიც $R_n$ სივრციდან ამავე სივრცეში მოქმედებს და განსაზღვრულია განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + b_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

სადაც $\{\alpha_{ij}\}$ ნამდვილ ელემენტებიანი რიცხვითი მატრიცაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leqslant \alpha < 1. \tag{1.90}$$

ხოლო $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ნამდვილი რიცხვებია. შევნიშნოთ, რომ თუ $y'=Ux'$, $y''=Ux''$, სადაც $x'=(x_1', x_2', \ldots, x'_n)$, $y'=(y_1', y_2', \ldots, y'_n)$, $x''=(x_1'', x''_2, \ldots, x_n'')$ და $y''=(y_1'', y_2'', \ldots, y_n'') \in R_n$. მაშინ

$$\rho(Ux', Ux'')=\max_i |y_i'-y_i''|=$$

$$=\max_i \Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j'-x_j'')\Big| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\,|x_j'-x_j''| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \max_i |x_j'-x_j''| \leqslant \alpha\,\rho(x', x'').$$

ამრიგად, როცა შესრულებულია (1.90) პირობა, მაშინ

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.91}$$

განტოლებათა სისტემას, ნებისმიერი $b_1, \cdots, b_n$ რიცხვებისათვის, აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ახლა იმავე $R_n$ სივრცეში მანძილი განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

მაშინ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, $R_n$ ამ მეტრიკის მიმართაც სრული სივრცე იქნება და (1.91) განტოლებათა სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$\max_i \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leqslant \mu < 1.$$

3. ვთქვათ, მოცემულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$y'=f(x,y) \tag{1.92}$$

$y_0=y(x_0)$ საწყისი პირობით, სადაც $f(x,y)$ არის ბრტყელ $(D)$ არეში განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც $y$ ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant \mu |y_1-y_2|,$$

$(x_0, y_0)$, $(x, y_1)$, $(x, y_2) \in (D)$. დავამტკიცოთ შემდეგი

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა. გ ა რ კ ვ ე უ ლ ი $d>0$ რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს $|x-x_0| \leqslant d$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ე რ თ ა დ ე რ თ ი $y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა, რ ო მ ე ლ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს (1.92) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს დ ა $y_0=f(x_0)$ ს ა წ ყ ი ს პ ი რ ო ბ ა ს.

ამისათვის (1.92) განტოლება, საწყის პირობასთან ერთად, შევცვალოთ ეკვივალენტური

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt \tag{1.93}$$

ინტეგრალური განტოლებით. $f(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, არსებობს ისეთი $(D')\subset(D)$ არე, რომ $(x_0,y_0)\in(D')$ და ყველა $(x,y)\in(D')$ წერტილებისათვის $|f(x,y)|\leqslant\mu$, სადაც $\eta$ გარკვეული მუდმივია. შევარჩიოთ ახლა $d$ რიცხვი ისე, რომ დაკმაყოფილებული იყოს შემდეგი პირობები:

1) როცა $|x-x_0|\leqslant d$, მაშინ $|y-y_0|\leqslant\mu d$,

2) $\mu d<1$.

ავიღოთ $|x-x_0|\leqslant d$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ისეთი $y(x)$ ფუნქციის სრული $\Omega$ სივრცე, რომლებისთვისაც $|y(x)-y(x_0)|\leqslant\mu d$ და განვიხილოთ

$$Uy=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)\,dt$$

ოპერატორი.

ცხადია, როცა $y(t)\in\Omega$, მაშინ $Uy\in\Omega$. მართლაც, გვაქვს

$$|Uy-y_0|=\Big|\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)\,dt\Big|\leqslant\mu d.$$

ვთქვათ, $y_1(x)$ და $y_2(x)$ არის $\Omega$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტები, მაშინ

$$|Uy_1-Uy_2|\leqslant\int_{x_0}^{x}\big|f\big(t,y_1(t)\big)-f\big(t,y_2(t)\big)\big|dt\leqslant\mu d\max|y_1-y_2|,$$

საიდანაც გვექნება

$$\rho\,(Uy_1,Uy_2)\leqslant\mu d\rho\,(y_1,y_2).$$

ვინაიდან 2) პირობის თანახმად $\mu d<1$, ამიტომ $Uy$ არის კუმშვის ოპერატორი და, ამიტომ არსებობს $Uy=y$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობასაც აკმაყოფილებს.

4. ახლა განვიხილოთ წრფივი ინტეგრალური განტოლება

$$x(s)=x_0(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,x(t)dt,\tag{1.94}$$

სადაც $x_0(s)\in L_2(a,b)$ მოცემული ელემენტია, $x(s)\in L_2(a,b)$ საძიებელი ამონახსნია, $\lambda$ არის განტოლების პარამეტრი და $K(s,t)$ არის $a\leqslant s,t\leqslant b$ კვადრატზე მოცემული ზომადი ისეთი ფუნქცია, რომ

$$\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt<\infty.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$Ux=x_0(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,at$$

ოპერატორი $L_2(a,b)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში მოქმედებს. ვაჩვენოთ, რომ (1.94) ინტეგრალურ განტოლებას $\lambda$ პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.95}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მართლაც, ვთქვათ, $x_1(s)$ და $x_2(s)$ არის $L_2(a,b)$ სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტი. გვაქვს:

$$\rho(Ux_1, Ux_2) = \left\{\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,t)x_1(t)\,dt - \lambda\int_a^b K(s,t)x_2(t)dt\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda|\left\{\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\,(x_1(t) - x_2(t))\,dt\right|^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |\lambda|\left\{\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b [x_1(t) - x_2(t)]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda|\left\{\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\rho(x_1, x_2).$$

როგორც ვხედავთ, თანახმად (1.95) პირობისა, $Ux$ არის კუმშვის ოპერატორი და გამოთქმული წინადადება დამტკიცებულია.

5. ბანახისა და კაჩოპოლის თეორემა ხშირად გამოიყენება აგრეთვე არაწრფივი ოპერატორული განტოლების ამოხსნის არსებობისა და ერთადობის საკითხების შესწავლაში. ავიღოთ მაგალითად, არაწრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$y(s) = f(s, \lambda\int_0^1 K(s, t, y(t))\,dt), \tag{1.96}$$

სადაც $f(s,z)$ განსაზღვრულია, როცა $0 \leqslant s \leqslant 1, -\infty < z < \infty$, უწყვეტია განსაზღვრის არეში ორივე $s$ და $z$ არგუმენტის მიმართ და $z$ არგუმენტის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$|f(s,z'') - f(s,z')| \leqslant \mu_1|z'' - z'|. \tag{1.97}$$

$K(s,t,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, როცა $0 \leqslant s,t \leqslant 1, -\infty < y < \infty$, უწყვეტია

განსაზღვრის არეში ყველა $(s, t, y)$ ცვლადის მიმართ და $y$ ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$|K(s, t, y'') - K(s, t, y')| \leqslant \mu_2 |y'' - y'|. \tag{1.98}$$

დავამტკიცოთ, რომ $\lambda$ პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$|\lambda| < \frac{1}{\mu_1 \mu_2}, \tag{1.99}$$

(1.96) ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მართლაც, განვიხილოთ ოპერატორი

$$Uy = f\left(s, \lambda \int_0^1 K(s, t, y(t))\, dt\right),$$

რომლის განსაზღვრის არე იყოს [0,1] სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა სრული $C(0,1)$ სივრცე; მაშინ $Uy \in C(0,1)$. ვთქვათ, $y', y''$ არის $C(0,1)$ სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტი. მაშინ, თანახმად (1.97) და (1.98) პირობებისა, გვექნება

$$|Uy'' - Uy'| = \left| f\left(s, \lambda \int_0^1 K(s, t, y''(t))dt\right) - f\left(s, \lambda \int_0^1 K(s,t, y'(t))dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \mu_1 \left| \int_0^1 K(s, t, y''(t))\, dt - \int_0^1 K(s,t, y'(t))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \mu_1 \int_0^1 |K(s, t, y''(t)) - K(s, t, y'(t))| dt \leqslant \mu_1 \mu_2 |\lambda| \int_0^1 |y''(t) - y'(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1 \mu_2 |\lambda| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y''(t) - y'(t)|,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |Uy'' - Uy'| \leqslant \mu_1 \mu_2 |\lambda| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y''(t) - y'(t)|,$$

ანუ

$$\rho(Uy'', Uy') \leqslant \mu_1 \mu_2 |\lambda| \rho(y'', y').$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (1.99) პირობას დავრწმუნდებით, რომ $Uy$ არის კუმშვის ოპერატორი. მაშასადამე, როცა შესრულებულია (1.97) და (1.98) პირობები, მაშინ (1.97) განტოლებას $\lambda$ პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც (1.99) პირობას აკმაყოფილებს, აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

# § 16. კომპაქტური სიმრავლე

როგორც ცნობილია, მათემატიკური ანალიზის მრავალი დებულების დამტკიცებაში გამოიყენება ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცის შესანიშნავი თვისება იმის შესახებ, რომ მასში ნებისმიერი შემოსაზღვრული სიმრავლის ყოველი უსასრულო მიმდევრობიდან მუდამ შეიძლება კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა. ასეთივე თვისება აქვს ყოველ უსასრულო მიმდევრობას, რომელიც ეკუთვნის $n$-განზომილებიანი $R_n$ სივრცის შემოსაზღვრულ სიმრავლეს. ეს თვისება, მაგალითად, საფუძვლად უდევს ვაიერშტრასის ცნობილ თეორემას: უწყვეტი ფუნქცია, ნამდვილ რიცხვთა სივრცის ყოველ შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ $M$ სიმრავლეზე, არის თანაბრად უწყვეტი. იგი ამ სიმრავლეზე შემოსაზღვრულია და თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს მიაღწევს. როცა ნამდვილ რიცხვთა სივრციდან ნებისმიერ მეტრულ სივრცეზე გადავდივართ, მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებების დიდი უმეტესობა არ რჩება ძალაში. ასე მაგალითად, თუ $f(x)$ არის მეტრული $X$ სივრცის ჩაკეტილ სფეროში უწყვეტი ფუნქციონალი, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ იგი ამ სფეროში ყოველთვის თანაბრად უწყვეტიც იქნება. არც ის გამომდინარეობს, რომ იგი უსათუოდ შემოსაზღვრულია და თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს მიაღწევს.

იმისათვის, რომ ნებისმიერი მეტრული სივრცის შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ $M$ სიმრავლეზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციონალს ჰქონდეს სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ანალოგიური თვისებები, საჭიროა $M$ სიმრავლეს მოვთხოვოთ ე. წ. კომპაქტურობა. ზოგიერთი ამოცანის გამოკვლევისას, ხშირად $f(x)$ ფუნქციონალის განსაზღვრის $M$ არე არ არის კომპაქტური. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციონალს ზემოთ ხსენებული თვისებები ჰქონდეს, როცა $M$ არ არის კომპაქტური სიმრავლე, საჭიროა $f(x)$ იყოს ძლიერი აზრით უწყვეტი ფუნქციონალი (ფუნქციონალის უწყვეტობის განსაზღვრა ძლიერი აზრით მოყვანილი იქნება ქვემოთ).

შევჩერდეთ სიმრავლის კომპაქტურობისა და მასზე განსაზღვრული ფუნქციონალის ზოგიერთ საკითხზე.

ვთქვათ, $M$ არის მეტრული $X$ სივრცეში მოთავსებული სიმრავლე. ვიტყვით, რომ $M$ *სიმრავლე კომპაქტურია $X$ სივრცეში*, თუ ამ სიმრავლის ელემენტების ყოველი უსასრულო $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს რაიმე $x \in X$ ელემენტისაკენ კრებად ქვემიმდევრობას. კერძოდ, თუ $M$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშინ მას *თავის თავში კომპაქტური* სიმრავლე ეწოდება. ამ შემთხვევაში, უბრალოდ ვიტყვით, რომ $M$ არის *კომპაქტური სიმრავლე*, ანუ *კომპაქტი*.

მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცის ყოველი სასრული $(a,b)$ ინტერვალი კომპაქტური სიმრავლეა $R_1$ სივრცეში.

ცხადია, რომ თუ $M_1$ და $M_2$ არის $X$ სივრცეში მოთავსებული ნებისმიერი ორი სიმრავლე, $M_1 \subset M_2$ და $M_1$ კომპაქტურია $M_2$ სიმრავლეში, მაშინ $M_1$ კომპაქტური იქნება $X$ სივრცეშიც. თუ $M_1$ კომპაქტური არ არის $M_2$ სიმრავლეში, მაშინ იგი შეიძლება კომპაქტური იყოს $X$ სივრცეში.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მეტრული სივრცის ყოველი სასრული სიმრავლე კომპაქტური სიმრავლეა. ეს გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან. ვთქვათ, $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. ავიღოთ ამ სიმრავლის ელემენტე-

ბისაგან შედგენილი ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობა $\{x'_n\}$. ცხადია, ამ უსასრულო მიმდევრობაში ერთ-ერთი ელემენტი მაინც, მაგალითად $x_i \in M$, განმეორდება უსასრულო რიცხვჯერ, ე. ი. $\{x'_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს ისეთ $\{x_{n'_k}\}\subset\{x'_n\}$ ქვემიმდევრობას, რომლის ელემენტები თანატოლია: $x'_{n_1}=x'_{n_2}=\cdots=x'_{n_k}=\cdots=x_i$. ცხადია, $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n'_k}=x_i$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყოველი უსასრულო მიმდევრობა მუდამ შეიცავს ამავე სიმრავლის რომელიმე ელემენტისაკენ კრებად ქვემიმდევრობას.

თეორემა.1.32. **მეტრულ სივრცეში მოთავსებული ყოველი კომპაქტური $A$ სიმრავლე შემოსაზღვრული სიმრავლეა.**

თეორემის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვთქვათ, $A$ კომპაქტური სიმრავლეა, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული. ვთქვათ, $a_1\in A$ ნებისმიერი ელემენტია და $r_1=1$. ვინაიდან $A$ არ არის შემოსაზღვრული, ამიტომ შეუძლებელია $S(a_1, r_1)$ სფერო შეიცავდეს $A$ სიმრავლის ყველა წერტილს. ვთქვათ, $a_2\in A$ და $a_2\overline{\in} S(a_1, r_1)$. მაშინ $\rho(a_1, a_2)\geqslant r_1$. ავაგოთ ახალი $S(a_2, r_2)$ სფერო, სადაც $r_2=\rho(a_1, a_2)+1$. შეუძლებელია $S(a_2, r_2)$ შეიცავდეს მთელ $A$ სიმრავლეს. დავუშვათ, $a_3\overline{\in} A$ და $a_3\overline{\in} S(a_2, r_2)$. ცხადია, $\rho(a_1,a_3)\geqslant r_2$. ახლა ავაგოთ $S(a_3, r_3)$ სფერო, სადაც $r_3=\rho(a_1, a_3)+1$ და გავაგრძელოთ აგებისა და მსჯელობის ეს პროცესი უსასრულოდ. ამის შედეგად წარმოიქმნება $A$ სიმრავლის ელემენტების უსასრულო $\{a_n\}$ მიმდევრობა და რიცხვთა ზრდადი ისეთი უსასრულო $\{r_n\}$ მიმდევრობა, რომ $\rho(a_1, a_n)=r_n-1\geqslant r_{n-1}$. ახლა, თუ $n>m>2$, გვექნება $\rho(a_1, a_n)\geqslant r_{n+1}\geqslant r_m$. გამოვიყენოთ $a_1, a_m, a_n$ ელემენტებზე სამკუთხედის აქსიომა, გვექნება

$$\rho(a_1, a_n)\leqslant\rho(a_1, a_m)+\rho(a_m, a_n),$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ: $\rho(a_m, a_n)\geqslant 1$. ეს იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია $\{a_n\}$ მიმდევრობიდან გამოიყოს რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, მითუმეტეს შეუძლებელია ამ მიმდევრობიდან გამოიყოს რაიმე კრებადი ქვემიმდევრობა. ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ ელემენტთა ისეთი უსასრულო $\{a_n\}\subset A$ მიმდევრობა, რომელიც არცერთ კრებად ქვემიმდევრობას არ შეიცავს. გამოდის, რომ $A$ არ არის კომპაქტური სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას.

შებრუნებული წინადადება საზოგადოდ არ არის სწორი. ამის დასამტკიცებლად მივმართოთ შემდეგ მაგალითს. ჰილბერტის კოორდინატულ $l_2$ სივრცეში ავიღოთ ელემენტების უსასრულო $\{e_m\}$ მიმდევრობა, სადაც $e_1=(1,0,0,\ldots)$, $e_2=(0,1,0,\ldots)$ და ა. შ. ყველა ეს ელემენტი დალაგებულია სფეროს ზედაპირზე, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $\Theta=(0,0,\ldots)$ წერტილში და რადიუსი უდრის 1. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $m$ და $n$ ნიშნაკებისათვის გვაქვს: $\rho(e_m, e_n)=\sqrt{2}$, ამიტომ $\{e_m\}$ მიმდევრობიდან შეუძლებელია რაიმე კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა. ამ მაგალითში საქმე გვაქვს მეტრულ $l_2$ სივრცესთან, რომელშიც შემოსაზღვრული სიმრავლე (ერთეულოვანი სფერო) არ არის კომპაქტური.

წინა თეორემიდან და ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ სიმრავლის შემოსაზღვრულობა არის მისი კომპაქტურობის აუცილებელი პირობა და არა საკმარისი.

**თეორემა 1.33.** ყოველი მეტრული კომპაქტური სივრცე სრულია.

ავიღოთ მეტრული კომპაქტური $X$ სივრცე. ვთქვათ, $\{x_n\}\subset X$ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. ვინაიდან $X$ სივრცე კომპაქტურია, ამიტომ ამ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი აღვნიშნოთ $x^*\in X$. გვექნება: $\lim\limits_{n_k\to\infty}\rho(x_{n_k},X^*)=0$.

გარდა ამისა, ვინაიდან $\{x_n\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, ამიტომ $\lim\limits_{n,n_k\to\infty}\rho(x_n,x_{n_k})=0$. შევნიშნოთ ახლა, რომ $x_n,x^*$ და $x_{n_k}$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\rho(x_n,x^*)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x^*).$$

გადავიდეთ აქ ზღვარზე, როცა $n, n_k\to\infty$. წინა შენიშვნების ძალით, მივიღებთ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x^*)=0$.

ამრიგად, მეტრულ კომპაქტურ $X$ სივრცეში ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია. ამიტომ იგი სრული სივრცე იქნება.

შემოვიღოთ ახლა ერთი მნიშვნელოვანი

განსაზღვრა. ვთქვათ, $X$ მეტრული სივრცეა, $M\subset X$ რაიმე სიმრავლე და $\varepsilon$—ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. ვიტყვით, რომ $A\subset X$ სიმრავლე წარმოადგენს $\varepsilon$-ქსელს $M$ სიმრავლის მიმართ, თუ ნებისმიერი $x\in M$ ელემენტისათვის არსებობს ერთი მაინც ისეთი $a\in A$ წერტილი, რომ $\rho(x,a)\leqslant\varepsilon$.

$M$ სიმრავლეს სრულად შემოსაზღვრული სიმრავლე ეწოდება, თუ $\varepsilon$-ქსელი, ე. ი. $A$ სიმრავლე, არის სასრული სიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი სრულად შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე შემოსაზღვრული სიმრავლეა. მართლაც, ვთქვათ, $M$ სრულად შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $\varepsilon$-ქსელი $A$ შეიცავს წერტილთა სასრულ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სიმრავლეს, მაშინ $M$ სიმრავლის დიამეტრი $d(M)\leqslant\varepsilon(n+1)$.

შებრუნებული წინადადება არ არის სწორი, როგორც ამაში შემდეგი მაგალითი გვარწმუნებს. ვთქვათ, $\widetilde{S}(\Theta,1)$ არის ერთეულოვანი სფერო ჰილბერტის კოორდინატულ $l_2$ სივრცეში, სადაც $\Theta\in l_2$ ნულოვანი ელემენტია. განვიხილოთ ამ სფეროს ზედაპირზე ელემენტების უსასრულო $\{e_k\}$ მიმდევრობა, სადაც $e_1=(1,0,0,\ldots)$, $e_2=(0,1,0,\ldots)$ და ა. შ. ვთქვათ, $m\neq n$, მაშინ $\rho(e_m,e_n)=\sqrt{2}$. ნათელია, რომ $\widetilde{S}(0,1)$ სფეროში შეუძლებელია არსებობდეს სასრული $\varepsilon$-ქსელი ისეთი $\varepsilon$ რიცხვისათვის, რომელიც შერჩეული იქნება პირობით $\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## § 17. სიმრავლის კომპაქტურობის პირობები

გადავიდეთ ახლა სიმრავლის კომპაქტურობის ზოგიერთი პირობის განხილვაზე.

**თეორემა 1.34** (ჰაუსდორფი). იმისათვის, რომ სრულ მეტრულ $X$ სივრცეში მოთავსებული $M$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობდეს $M$ სიმრავლის სასრული $\varepsilon$-ქსელი $X$ სივრცეში.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $M$ სიმრავლე კომპაქტურია $X$ სივრცეში, მაგრამ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $\varepsilon^*>0$ რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს $M$ სიმრავლის სასრული $\varepsilon^*$-ქსელი $X$ სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი $x_1\in M$ ელემენტი. მაშინ, $M$ სიმრავლე შეიცავს ერთ ისეთ $x_2$ ელემენტს მაინც, რომ $\rho(x_1,x_2)>\varepsilon^*$. ასეთი $x_2\in M$ ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ $M$ სიმრავლისათვის იარსებებს $\varepsilon^*$-ქსელი, რომელიც შეიცავს ერთადერთ $x_1$ ელემენტს. გამოვყოთ ახლა ისეთი $x_3\in M$ ელემენტი, რომ $\rho(x_1, x_3)>\varepsilon^*$ და $\rho(x_2, x_3)>\varepsilon^*$. ცხადია, $x_3$ ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ $M$ სიმრავლისათვის იარსებებს $\varepsilon^*$-ქსელი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ორ $x_1, x_2\in M$ ელემენტს. თუ მოყვანილი მსჯელობით გავაგრძელებთ $M$ სიმრავლის ელემენტების გამოყოფას, მივიღებთ უსასრულო $\{x_n\}\subset M$ მიმდევრობას, რომელსაც შემდეგი თვისებები აქვს: 1) როცა $m\neq n$, მაშინ $\rho(x_n, x_m)>\varepsilon^*$, 2) ნებისმიერი $\{x_{n_s}\}$ ქვემიმდევრობისათვის, როცა $n_s\neq n_r$ გვაქვს $\rho(x_{n_r}, x_{n_s})>\varepsilon^*$. ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა შემდეგ დასკვნამდე: $M$ სიმრავლეში შესაძლოა გამოვყოთ ელემენტების უსასრულო $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც არ შეიცავს არცერთ კრებად ქვემიმდევრობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ სიმრავლე არ არის კომპაქტური, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $M$ სიმრავლის სასრული $\varepsilon$-ქსელი $X$ სივრცეში. საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ $M$ სიმრავლე კომპაქტურია. ამისათვის კი საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ როგორიც უნდა იყოს $\{x_n\}\subset M$ მიმდევრობა შეიძლება მისგან კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა.

აქ ორი შესაძლო შემთხვევა განვიხილოთ.

$1°$. ვთქვათ, $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს ტოლი ელემენტების უსასრულო $\bar{x}, \bar{x}, \dots\in\{x_n\}$ ქვემიმდევრობას. მაშინ $\{\bar{x}\}$ ქვემიმდევრობა კრებადია $\bar{x}$ ელემენტისაკენ და წინადადება ამ შემთხვევაში დამტკიცებულია.

$2°$. წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს ჯგუფებს, რომელთა რიცხვი თვლადია და თითოეული ჯგუფი ტოლი ელემენტებისაგან შედგება. იგულისხმება, რომ ყოველი ასეთი ჯგუფი შეიცავს ტოლი ელემენტების სასრულ რიცხვს. ასე რომ არ იყოს, მაშინ საქმე უკვე განხილულ შემთხვევასთან გვექნებოდა. ისიც ცხადია, რომ ზოგიერთი ჯგუფი შეიძლება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგებოდეს. ამ ჯგუფებიდან ავიღოთ თითო-თითო ელემენტი. მივიღებთ თავიდან აღებულ $\{x_n\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $\{x_n\}$-ით აღვნიშნოთ. ამ ქვემიმდევრობის ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

ვინაიდან $M$ სიმრავლისათვის არსებობს სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$ -ქსელი, ამიტომ არსებობს ჩაკეტილი სფეროების სასრული რიცხვი, რომელთა რადიუსები უდრის $\frac{\varepsilon}{2}$ და, რომლებიც შეიცავენ $M$ სიმრავლის ყველა ელემენტს. ცხადია, ეს სფეროები, კერძოდ, შეიცავენ $\{x_n\}$ მიმდევრობასაც. ვინაიდან სფეროების რიცხვი სასრულია, ამიტომ ერთი მათგანი მაინც, ვთქვათ $\overline{S_1}$, შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს. ავიღოთ ახლა

სფეროები, რომელთა ცენტრები არის $\widetilde{S}_1$ სფეროს სხვადასხვა წერტილები და აქვთ ერთნაირი რადიუსები $\frac{\varepsilon}{2^2}$. ამ სფეროების რიცხვი სასრულია. ისე როგორც ზემოთ, მათგან ერთ-ერთი $\widetilde{S}_2$ სფერო შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც $\widetilde{S}_1$ სფეროში უკვე მოხვდა. ასევე ავაგოთ შემდეგი $\widetilde{S}_3$ სფერო $\frac{\varepsilon}{2^3}$ რადიუსით. ეს უკანასკნელი შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც წინამავალ $\widetilde{S}_2$ და $\widetilde{S}_1$ სფეროებში უკვე შედის. როგორც ვხედავთ, სფეროების $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$, $\widetilde{S}_3$ აგების მოყვანილი წესი ისეთია, რომ მისი გაგრძელება შესაძლოა უსასრულოდ. მივიღებთ სფეროების უსასრულო $\{\widetilde{S}_n\}$ მიმდევრობას, რომელშიც $\widetilde{S}_n$ სფეროს რადიუსი უდრის $\frac{\varepsilon}{2^n}$. გარდა ამისა, ყოველი $\widetilde{S}_n$ შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების ისეთ უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ყველა წინამავალ $\widetilde{S}_k$ $(k<n)$ სფეროებსაც ეკუთვნის. ახლა $\{\widetilde{S}_n\}$ მიმდევრობის ყოველი სფეროდან თითო-თითო $x_{n_k}$ ელემენტი ავირჩიოთ. ასე წარმოიქმნება ელემენტების უსასრულო $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ, როცა $k<i$, მაშინ $n_k<n_i$, გვექნება $\widetilde{S}_i \subset \widetilde{S}_k$. ავიღოთ $\{x_{n_k}\}$ მიმდევრობის ორი ნებისმიერი $x_{n_k} \in \widetilde{S}_k$ და $x_{n_i} \in \widetilde{S}_i$ ელემენტი; ცხადია, რომ $x_{n_i} \in \widetilde{S}_k$. ვინაიდან $\widetilde{S}_k$ სფეროს დიამეტრი უდრის $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^k}$, ამიტომ $\rho(x_{n_i}, x_{n_k}) = \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. როგორც ჩანს $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან გამოყოფილი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, ვინაიდან $X$ სივრცე სრულია, ამიტომ იგი კრებადია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

როცა $M$ სიმრავლე ემთხვევა $X$ სივრცეს, მაშინ თეორემა სამართლიანია $X$ სივრცისათვის.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1. **სრული მეტრული $X$ სივრცის $M$ სიმრავლის კომპაქტურობისათვის საკმარისია, რომ არსებობდეს კომპაქტური ε-ქსელი. ამ შემთხვევაში კომპაქტური ε-ქსელი იქნება $M$ სიმრავლის სასრული 2ε-ქსელი.**

მართლაც, ვთქვათ, $A \subset X$ არის $M$ სიმრავლის კომპაქტური ε-ქსელი. მაშინ დამტკიცებული თეორემის ძალით $A$ სიმრავლისათვის არსებობს სასრული ε-ქსელი $A_1$.

$A_1$ სიმრავლე წარმოადგენს $M$ სიმრავლისათვის 2ε-ქსელს. მართლაც, ვთქვათ, $x \in M$ ნებისმიერი ელემენტია. მისთვის არსებობს ისეთი $a \in A$ ელემენტი, რომ $\rho(x,a)<\varepsilon$. მაგრამ $a \in A$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $a_1 \in A_1$ ელემენტი, რომ $\rho(a, a_1)<\varepsilon$. დავწეროთ ახლა ნებისმიერი $x \in M$, $a \in A, a_1 \in A_1$ ელემენტებისათვის სამკუთხედის უტოლობა, გვექნება

$$\rho(x, a_1) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, a_1) < \varepsilon,$$

გამოდის, რომ როცა $M$ სიმრავლისათვის არსებობს კომპაქტური ε-ქსელი, მაშინ ამ სიმრავლისათვის არსებობს აგრეთვე სასრული 2ε-ქსელიც.

2. ყოველი კომპაქტური $X$ სივრცე სეპარაბელურია. ამის დასამტკიცებლად, განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_n\}$ მიმდევრობა. $X$ სივრცეში ავაგოთ სასრული $\varepsilon_n$-ქსელები. მივიღებთ $A_n \subset X$ სიმრავლეების $\{A_n\}$ მიმდევრობას, რომლის ყოველი $A_n$ სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რიცხვს: $A_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_{p_n}^{(n)})$. განვიხილოთ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ჯამი, რომელიც თვლადი სიმრავლეა. ცხადია, ეს ჯამი ყველგან მკვრივია $X$ სიმრავლეში, ე. ი. $X$ სივრცე სეპარაბელურია.

მაგალითები. 1) ბოლცანოს თეორემის ძალით, ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცეში ყოველი შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე კომპაქტური სიმრავლეა.

2) ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცე არ არის კომპაქტური. მართლაც, ავიღოთ ამ სივრცეში ყველა ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა. ცხადია, არც თვითონ ეს მიმდევრობა და არც რაიმე მისი ქვემიმდევრობა არ არის კრებადი.

3) ევკლიდეს $n$-განზომილებიანი $R_n$ სივრცე არ არის კომპაქტური. $R_n$ სივრცის ყოველი შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე კომპაქტურია. მართლაც, $R_n$ სივრცეში შეგვიძლია ავიღოთ იმდენად დიდი $K$ კუბი, რომელიც $M$ სიმრავლეს მთლიანად შეიცავს. ამის შემდეგ, კუბი $K$ დავანაწილოთ ისეთ მცირე კუბებად, რომ მათი წიბოების სიგრძე იყოს $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, სადაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ადვილი შესამჩნევია, რომ მცირე კუბების წვეროების ω სიმრავლე სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$-ქსელია $K$ კუბისათვის, ამიტომ ω იქნება სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$—ქსელი $M \subset K$ სიმრავლისთვისაც.

4) ჰილბერტის კოორდინატული სივრცე $l_2$ არ არის კომპაქტური. შევნიშნოთ, რომ ამ სივრცეში (ისე, როგორც კიდევ სხვა მრავალ მეტრულ სივრცეში) არსებობს შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც არ არის კომპაქტური. მაგალითად, ავიღოთ $l_2$ სივრცეში ერთეულოვანი ჩაკეტილი $\widetilde{S}_1$ სფერო. ამ სფეროს ზედაპირზე ავიღოთ ელემენტების შემდეგი უსასრულო მიმდევრობა: $x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $x_2\ (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ ამ მიმდევრობის ნებისმიერ $x_i$ და $x_j (i \neq j)$ ელემენტებს შორის მანძილი მუდმივია და უდრის $\sqrt{2}$. ცხადია, არც $\{x_n\}$ მიმდევრობა და არც მისი რაიმე ქვემიმდევრობა არ არის კრებადი. ასე, რომ $\widetilde{S}_1$ სფერო არ არის კომპაქტური.

მიუხედავად ამისა, $l_2$ სივრცე შეიცავს კომპაქტურ სიმრავლეებსაც. მართლაც, ვთქვათ, $\Omega \subset l_2$ რაიმე სიმრავლეა $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ ელემენტებისა, სადაც $|\omega_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$ ასეთი ω ელემენტების Ω სიმრავლეს $l_2$ სივრცის ფუნდამენტალური პარალელეპიპედი ეწოდება.

ფუნდამენტალური Ω პარალელეპიპედი კომპაქტური სიმრავლეა.

დასამტკიცებლად, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. შევარჩიოთ ნატურალური $N$ რიცხვი შემდეგი უტოლობით: $\frac{1}{2^N}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. განვიხილოთ ისეთი $A\subset\Omega$ სიმრავლე $\omega^*\in\Omega$ ელემენტებისა, რომლებსაც ასეთი კოორდინატები ექნება: $\omega^*=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N, 0, 0, \ldots)$. ვინაიდან $N$ ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, ამიტომ $A$ სიმრავლე არის $N$-განზომილებიანი სივრცის შემოსაზღვრული სიმრავლე. განვიხილოთ ნებისმიერი $\omega\in\Omega$ ელემენტი. მანძილი $\omega$ და $\omega^*$ ელემენტებს შორის იქნება:

$$\rho(\omega,\omega^*)=\left\{\sum_{K=N+1}^{\infty}\omega_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{K=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k-2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\frac{1}{2^N}+\frac{1}{2^{N+1}}+\right.$$

$$\left.+\cdots\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\varepsilon}.$$

$A$ სიმრავლე კომპაქტია. აღვნიშნოთ $A$ სიმრავლის სასრული $\sqrt{\varepsilon}$-ქსელი $A_1$-ით. მაშინ ნებისმიერი $\omega\in\Omega$ ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho(\omega,\omega_1)\leqslant\rho(\omega^*,\omega)+\rho(\omega^*,\omega_1),$$

სადაც $\omega_1\in A_1$ არის $\sqrt{\varepsilon}$-ქსელის ის წერტილი, რომლისთვისაც $\rho(\omega^*,\omega_1)\leqslant\sqrt{\varepsilon}$. თუ ახლავე ზემოთ გამოყვანილი უტოლობით ვისარგებლებთ, მივიღებთ: $\rho(\omega, \omega_1)\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$. ამრიგად, $A$ სიმრავლის სასრული $\sqrt{\varepsilon}$- ქსელი $A_1$ იმავე დროს არის Ω სიმრავლის სასრული $2\sqrt{\varepsilon}$- ქსელი. ამის გამო, Ω ფუნდამენტალური პარალელეპიპედი კომპაქტური სიმრავლეა.

## § 18. კომპაქტის ზოგიერთი თვისება

ზემოთ ვნახეთ, რომ კომპაქტურობა სიმრავლის ელემენტების შინაგანი თვისებაა და არ არის დამოკიდებული მეტრული სივრცის თვისებებზე, რომელსაც ეს სიმრავლე ეკუთვნის. ამის გამო ყოველი კომპაქტი თავის-თავად მეტრული სივრცეა და მისი თვისებები შეგვიძლია სხვა სივრცისგან დამოუკიდებლად შევისწავლოთ. ქვემოთ ჩვენ შევჩერდებით კომპაქტის ზოგიერთი ასეთი თვისების განხილვაზე.

თეორემა 1.35. ვთქვათ, $M$ სიმრავლე კომპაქტურია მეტრულ $X$ სივრცეში. იმისათვის, რომ $M$ სიმრავლე იყოს კომპაქტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $M$ იყოს ჩაკეტილი.

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $M$ სიმრავლე კომპაქტია, მაგრამ არ არის ჩაკეტილი. ავიღოთ ისეთი $\{x_n\}\subset M$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $x^*\overline{\in} M$ ელემენტისაკენ. ცხადია, შეუძლებელია $\{x_n\}$ მიმდევრობა ისეთ ქვემიმდევრობას შეიცავდეს, რომელიც $M$ სიმრავლის

რაიმე ელემენტისაკენ იქნება კრებადი. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ სიმრავლე არ არის კომპაქტი. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $M$ კომპაქტურია $X$ სივრცეში და ჩაკეტილია. ვაჩვენოთ, რომ $M$ კომპაქტია. ავიღოთ ნებისმიერი $\{x_n\}\subset M$ მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა შეიცავს კრებად $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობას. ვთქვათ, $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k}=x^*\in X$. მაგრამ, ვინაიდან $M$ სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $x^*\in M$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ კომპაქტია და თეორემა დამტკიცებულია.

იმავე გზით, რომლითაც დამტკიცებული იყო ჰაუსდორფის თეორემა, მტკიცდება შემდეგი

დებულება. იმისათვის, რომ მეტრული $M$ სიმრავლე კომპაქტი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $M$ იყოს სრული და სრულად შემოსაზღვრული სიმრავლე.

თეორემა 1.36. იმისათვის, რომ მეტრული $X$ სივრცე კომპაქტი იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ყოველი ღია $\{M_\alpha\}$ დაფარვა შეიცავდეს სასრულ ქვედაფარვას.

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად ჩავთვალოთ, რომ მეტრული $X$ სივრცე კომპაქტია და $\{M_\alpha\}$ არის მისი რაიმე ღია დაფარვა. დავუშვათ, რომ შეუძლებელია $\{M_\alpha\}$ დაფარვა შეიცავდეს სასრულ ქვედაფარვას. ვინაიდან $X$ კომპაქტია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს მასში სასრული $\varepsilon$-ქსელი. შევარჩიოთ $\varepsilon$ რიცხვი ასე: $\varepsilon=\frac{1}{n}$, სადაც $n=1, 2,\cdots$ მაშინ ყოველი $n$-სთვის გვექნება სათანადო $\varepsilon=\frac{1}{n}$-ქსელი, რომლის ელემენტები იყოს $x_k^{(n)}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი დასახელებული $n$-სთვის გვექნება შესაბამი $\varepsilon$-ქსელის $x_1^{(n)},\ldots x_{k_n}^{(n)}$ წერტილები. ქსელის ყოველი წერტილის გარშემო ავაგოთ ღია $S\left(x_{k_n}^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$ სფერო და შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $n$-სთვის ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$X=\bigcup_{k_n} S\left(x_{k_n}^{(n)}, \frac{1}{n}\right).$$

ჩვენი დაშვების ძალით, ყოველი $n$-სთვის არსებობს ერთი მაინც $S\left(x_{k_n}^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$ სფერო, რომლის დაფარვა შეუძლებელი იქნება $M_\alpha$ სიმრავლეთა სასრული რაოდენობით. განვიხილოთ ასეთ სფეროთა ცენტრების $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}\subset X$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, ამ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი არის $x^*\in X$, რომელიც ეკუთვნის $\{M_\alpha\}$ დაფარვის რომელიმე ღია $M_{\alpha^*}$სიმრავლეს. ცხადია, არსებობს $x^*$ ელემენტის სფერული ისეთი $S(x^*,\varepsilon)$ მიდამო, რომ $S(x^*,\varepsilon)\subset M_{\alpha^*}$. ახლა, თუ $n$ ნიშნაკს იმდე-

ნად დიდს ავირჩევთ, რომ $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$, მაშინ $S(x_{k_n}^{(n)}, \varepsilon)\subset M_{\alpha*}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ მარტო ერთი $M_{\alpha*}$ სიმრავლე ფარავს $S\left(x_{k_n}^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$ სფეროს. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს პირობის აუცილებლობას.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ახლა უნდა ვიგულისხმოთ, რომ მეტრული $X$ სივრცის ყოველი ღია $\{M_\alpha\}$ დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა. საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ მაშინ $X$ კომპაქტია. ამისათვის სივრცის ყოველი $x$ წერტილის ირგვლივ ავიღოთ ღია სფერული $M_\varepsilon(x)$ მიდამო, სადაც $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. ყველა $M_\varepsilon(x)$ მიდამო განახორციელებს $X$ სივრცის ღია დაფარვას. პირობის თანახმად, $X$ სივრცე შეიცავს ისეთ ელემენტთა სასრულ $x_1, \ldots, x_k$ მიმდევრობას, რომ $M_\varepsilon(x_1), \ldots, M_\varepsilon(x_k)$ ღია მიდამოები იქნება აგრეთვე მისი დაფარვა. $x_1, \ldots, x_k$ ელემენტები წარმოადგენს სასრულ $\varepsilon$-ქსელს $X$ სივრცეში. ეს იმას ნიშნავს, რომ $X$ სივრცე სრულიად შემოსაზღვრულია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $X$ სივრცე სრულია. ამისათვის საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ ამ სივრცეში ყოველი ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი სფეროების უსასრულო მიმდევრობის თანაკვეთა ერთადერთი წერტილისაგან შედგება, თუ ამ სფეროების რადიუსების მიმდევრობა ნულისაკენ იკრიბება. აღვნიშნოთ ასეთი სფეროების ერთ-ერთი მიმდევრობა $\{\widetilde{S}_n\}$-ით. დავუშვათ, რომ მათი თანაკვეთა ცარიელია. მაშინ, ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტი უნდა ეკუთვნოდეს $X-\widetilde{S}_n$ სიმრავლეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ $X-\widetilde{S}_n$ წარმოადგენს $X$ სივრცის დაფარვას და შეუძლებელია მისგან რაიმე სასრული ქვედაფარვის გამოყოფა. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას. ამრიგად, $X$ სივრცე სრულია.

ის ფაქტი, რომ $X$ სივრცე სრულია და სრულად შემოსაზღვრული საკმარისია იმისათვის, რომ იგი იყოს კომპაქტი.

შენიშვნა 1. ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე შემდეგი დებულება: **იმისათვის, რომ მეტრული $X$ სივრცე კომპაქტი იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცის ყოველ ცენტრირებულ ჩაკეტილ სიმრავლეების სისტემას ჰქონდეს არაცარიელი თანაკვეთა.**

შენიშვნა 2. დამტკიცებული თეორემა, რიცხვითი წრფის ჩაკეტილი სიმრავლისათვის, წარმოადგენს ჰეინე-ბორელის ცნობილ თეორემას.

თეორემა 1. 37. **კომპაქტის ყოველი უწყვეტი გადასახვა კომპაქტია, თუ ეს გადასახვა უწყვეტად შებრუნებადია.**

ვთქვათ, $U$ უწყვეტი ოპერატორია, რომელიც $X$ კომპაქტს გადასახავს მეტრული სივრცის $Y=Ux$ სიმრავლეში. აღვნიშნოთ $U^{-1}$-ით შებრუნებული უწყვეტი ოპერატორი. განვიხილოთ $Y$ სიმრავლის რაიმე ღია $\{N_\alpha\}$ დაფარვა. შემოვიღოთ აგრეთვე აღნიშვნა $M_\alpha=U^{-1}N_\alpha$ და განვიხილოთ სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემა. როგორც ვიცით, უწყვეტი $U^{-1}$ გადასახვის დროს ღია $N_\alpha$ სიმრავლის $M_\alpha$ პირველსახე არის ღია სიმრავლე. ამის გამო, სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემა წარმოადგენს $X$ კომპაქტის ღია დაფარვას. წინა თეორემის

ძალით, ლია $\{M_\alpha\}$ დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ სასრული $M_1, \ldots, M$ ქვედაფარვა. ამ დაფარვას $\{M_\alpha\}$ დაფარვიდან შეესაბამება $N_1, \ldots, N_k$ სასრული ქვედაფარვა, სადაც $N_k = UM_k$. ამის გამო $Y$ სიმრავლე იქნება კომპაქტი.

**თეორემა 1. 38.** თუ $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორები განახორციელებენ $X$ და $Y$ კომპაქტების ურთიერთ ცალსახა გადასახვას შესაბამისად და, თუ $X$ კომპაქტის $Y$ კომპაქტზე გადამსახველი $U$ ოპერატორი უწყვეტია $X$ სივრცეზე, მაშინ $X$ და $Y$ ურთიერთ ჰომეომორფული სივრცეები იქნება.

მართლაც, წინა თეორემის ძალით, როგორიც უნდა იყოს ჩაკეტილი $M \subset X$ სიმრავლე $N = UM \subset Y$ სიმრავლე კომპაქტი იქნება. ამის გამო, $N$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. ამასთანავე გვაქვს $U^{-1}N = M$, ე. ი. ნებისმიერი ჩაკეტილი $M$ სიმრავლის პირველსახე ჩაკეტილი სიმრავლეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $U^{-1}$ უწყვეტია. ამრიგად, $U$ და $U^{-1}$ ოპერატორები განახორციელებენ, შესაბამისად, $X$ და $Y$ სივრცეების ურთიერთცალსახა და უწყვეტ გადასახვას. ამიტომ $X$ და $Y$ ურთიერთ ჰომეომორფული სივრცეებია.

## § 19. სიმრავლის კომპაქტურობის პირობები ზოგიერთ კერძო სახის სივრცეში

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, ვარიაციათა აღრიცხვაში და მათემატიკური ანალიზის სხვა დარგებში ფართო გამოყენება აქვს ისეთ კომპაქტურ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები გარკვეული კლასის ფუნქციებია. ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ სიმრავლის კომპაქტურობის პირობებს კერძო სახის ზოგიერთ ფუნქციონალურ სივრცეში. პირველ ყოვლისა, შევჩერდეთ ამ პირობების შესწავლაზე უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცეში. წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრა.

განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციათა უსასრულო $M \subset C(0,1)$ სიმრავლე, რომლის ელემენტები აღვნიშნოთ $x(t) \in M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა $M$ სიმრავლე ერთობლივ შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს ისეთი დადებითი $\mu$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $x(t) \in M$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x(t)| \leqslant \mu, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$M$ სიმრავლეს ეწოდება ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როგორიც უნდა იყოს $t_1, t_2 \in [0,1]$, თუ $|t_1 - t_2| < \delta$, ნებისმიერი $x(t) \in M$ ელემენტისათვის შესრულდება უტოლობა

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

**თეორემა 1. 39 (არცელა).** იმისათვის, რომ $M \subset C(0,1)$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $x(t) \in M$ ფუნქციები ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტი იყოს.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობების აუცილებლობა. ვთქვათ, $M$ კომპაქტური სიმრავლეა $C(0,1)$ სივრცეში. ჰაუსდორფის თეორემის თანახმად, $C(0,1)$ სივრცეში არსებობს უწყვეტ ფუნქციათა სასრული $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ სისტემა, რომელიც M სიმრავლისათვის წარმოადგენს $\frac{\varepsilon}{3}$-ქსელს. აღვნიშნოთ

$\mu = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \max |x_i(t)|$, $i = 1, \ldots, n$. ნებისმიერი $x(t) \in M$ ფუნქციისათვის არსებობს $\frac{\varepsilon}{3}$-ქსელის ერთი მაინც ისეთი $x_i(t) \in C(0,1)$ ელემენტი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\rho(x, x_i) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_i(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

ახლა ნებისმიერი $x(t) \in M$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი შეფასება:

$$|x(t)| \leq |x_i(t)| + |x(t) - x_i(t)| \leq \mu + \frac{\varepsilon}{3} = \mu_1.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ ერთობლივ შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{\varepsilon}{3}$-ქსელის უწყვეტი $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ ფუნქციები ერთობლივ უწყვეტიც არიან $[0,1]$ მონაკვეთზე. ამის გამო, ყოველი $x_k(t)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $\delta_k$ რიცხვი, რომ ყოველი $t_1, t_2 \in [0,1]$ წყვილისათვის, როცა $|t_2 - t_1| < \delta_k$, შესრულებული იყოს უტოლობა

$$|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ვთქვათ, $\delta = \min \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ახლა ნებისმიერი $x(t) \in M$ ფუნქციისათვის, რომლის მანძილი ქსელის $x_i(t)$ ფუნქციამდე $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე ნაკლებია, როცა $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in [0,1]$, გვექნება

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| +$$
$$+ |x_i(t_2) - x(t_2)| \leq 2 \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_i(t)| +$$
$$+ |x_i(t_1) + x_i(t_2)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეა. ამით პირობების აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ თეორემის პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, ფუნქციათა $M$ სიმრავლე $[0,1]$ სეგმენტზე ერთობლივ შემოსაზღვრულ და ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციებისაგან შედგება. დავამტკიცოთ, რომ ამ პირობებში $M$ სიმრავლისათვის $C(0,1)$ სივრცეში არსებობს სასრული $\varepsilon$-ქსელი. პირობის თანახმად, ყველა $t \in [0,1]$ მნიშვნელობისათვის და ყველა $x(t) \in M$ ფუნქციისათვის გვაქვს $|x(t)| \leq \mu$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. დავყოთ $[0,1]$ მონაკვეთი $n$ თანატოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები იყოს: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, $n$. თუ $n$ რიცხვს საკმარისად დიდს ავიღებთ, მაშინ ნებისმიერი $x(t) \in M$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ უტოლობა:

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \varepsilon, \text{ როცა } |t_2 - t_1| < \frac{1}{n} \text{ და } t_1, t_2 \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]. \quad (1 \cdot 100)$$

ახლა ყოველი $x(t)\in M$ ფუნქციისათვის $\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right]$ მონაკვეთებზე ავაგოთ ისეთი წრფივი $x_n(t)$ ფუნქცია, რომ $x_n\left(\frac{i}{n}\right)=x\left(\frac{i}{n}\right)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ · $\overline{x}(t)=$ $=x_n(t)$ განტოლება წარმოადგენდეს $n$ გვერდიან პოლიგონს, რომელიც ჩახაზულია $x=x(t)$ წირში. ყველა $x_n(t)$ ფუნქციის $M_n$ სიმრავლე ქმნის $M$ სიმრავლის ε-ქსელს. მართლაც, ყველა $t\in\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right]$ მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$x_n\left(\frac{i}{n}\right)=x\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant x_n(t)\leqslant x_n\left(\frac{i+1)}{n}\right)=x\left(\frac{i+1}{n}\right),$$

ე. ი.

$$|\,x(t)-x\left(\frac{i}{n}\right)|\leqslant|\,x(t)-x_n(t)\,|\leqslant|\,x(t)-x\left(\frac{i+1}{n}\right)|\,;$$

აქედან კი, (1·100) უტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$|\,x(t)-x_n(t)\,|<\varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $M_n$ არის $M$ სიმრავლისათვის ε-ქსელი $C(0,1)$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ $M_n$ არის შემოსაზღვრული სიმრავლე $n+1$-განზომილებიან სივრცეში. ამის გამო $M_n$ კომპაქტური სიმრავლეა. ეს კი საკმარისია იმისათვის, რომ $M$ იყოს კომპაქტური სიმრავლე.

მოვიყვანოთ არცელას თეორემის ერთი განზოგადება. წინასწარ შევჩერდეთ რამდენიმე საჭირო განსაზღვრაზე.

განვიხილოთ $X$ და $X_1$ კომპაქტები. აღვნიშნოთ $C_u$-თი სიმრავლე ყველა უწყვეტი $U=U(x)$ ოპერატორებისა, რომლებიც $X$ კომპაქტს გადასახავენ $X_1$ კომპაქტზე, სადაც $x\in X$, $U\in X_1$. შემოვიღოთ $C_u$ სიმრავლეში მანძილის ცნება შემდეგნაირად: თუ $U_1=U_1(x)$ და $U_2=U_2(x)$, სადაც $x\in X$, $U_1$, $U_2\in X_1$, არის $C_u$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი, მაშინ მათ შორის მანძილი იყოს

$$\rho(U_1,U_2)=\sup_{x\in X}\rho(U_1(x),\ (U_2(x)).$$

ამ ტოლობით შემოღებული მანძილის ცნება აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას. $U=U(x)$ ოპერატორს, რომელიც $X$ კომპაქტს გადასახავს $X_1$ კომპაქტზე, ვუწოდოთ თ ა ნ ა ბ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ ელემენტების ნებისმიერი $x_1$, $x_2\in X$ წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1,x_2)<\delta$, შესრულდება $\rho\big(U(x_1),U(x_2)\big)<\varepsilon$ უტოლობა.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ყ ო ვ ე ლ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი, რ ო მ ე ლ ი ც კ ო მ პ ა ქ ტ ს გ ა დ ა ს ა ხ ა ვ ს კ ო მ პ ა ქ ტ ზ ე, ი მ ა ვ ე დ რ ო ს ა რ ი ს თ ა ნ ა ბ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვთქვათ, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეუძლებელია მოიძებნოს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $x_1$, $x_2\in X$ ელემენტების ყველა წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1,x_2)<\delta$, შესრულდეს $\rho\big(U(x_1),U(x_2)\big)<\varepsilon$ უტოლობა. სხვანაირად, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, მოიძებნება ისეთი $x_1$, $x_2\in X$ ელემენტები, რომ $\rho(x_1,x_2)<\delta$, მაგრამ $\rho\big(U(x_1),$

$U(x_2)\big)\geqslant\varepsilon$. ავიღოთ ახლა $\delta_k>0$ რიცხვების $\{\delta_n\}$ ისეთი მიმდევრობა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. ყოველი $\delta_n$ რიცხვისათვის არსებობს წყვილი ისეთი $x_n$, $x'_n\in X$ ელემენტებისა, რომ $\rho(x_n, x'_n)<\delta$; მაგრამ $\rho\big(U(x_n),\ U(x_n')\big)\geqslant\varepsilon$. განვიხილოთ $\{x_n\}$, $\{x'_n\}\subset X$ მიმდევრობები. ვინაიდან $X$ სივრცე კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება კრებადი ქვემიმდევრობა გამოვყოთ, რომელიც სიმარტივისათვის, ისევ $\{x_n\}$ -ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$, სადაც $x^*\in X$. ვინაიდან, გარდა ამისა, $\rho(x_n, x_n')<\delta_n$ და $\delta_n\to 0$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=x^*$. ახლა გავიხსენოთ, რომ $U$ ოპერატორი უწყვეტია $X$ სივრცეში და, მაშასადამე, უწყვეტია $x^*$ წერტილზეც. ამის გამო, ადგილი უნდა ჰქონდეს $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\big(U(x_n),\ U(x^*)\big)=0$ და $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\big(U(x'_n),\ U(x^*)\big)=0$ ტოლობებს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას იმის შესახებ, რომ $\rho\big(U(x_n),\ U(x'_n)\big)\geqslant\varepsilon$. ამით ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ $C_u$ სიმრავლის ისეთი $M$ ქვესიმრავლე, რომელსაც შემდეგი თვისება ექნება: როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $\rho(x_1, x_2)<\delta$ შესრულდება $\rho(U(x_1),\ U(x_2))<\varepsilon$ უტოლობა ყველა $U\in M$ ელემენტისათვის და ყველა, $x_1$, $x_2\in X$ წყვილისათვის. ამ პირობებში ოპერატორთა $M$ სიმრავლეს ეწოდება ერთობლივ უწყვეტი ოპერატორების ოჯახი.

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ახლა არცელას განზოგადებული თეორემა.

**თეორემა 1. 40.** იმისათვის, რომ $M\subset C_u$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს $C_u$ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $M$ იყოს ერთობლივ უწყვეტი ოპერატორების ოჯახი.

დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა, რისთვისაც დავუშვათ, რომ $M$ კომპაქტური სიმრავლეა $C_u$ სივრცეში. ვთქვათ, $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. არსებობს ელემენტების სასრული $U_1, \dots, U_n\in M$ მიმდევრობა, რომელიც $\frac{\varepsilon}{3}$-ქსელია $M$ ოჯახისათვის. პირობის თანახმად, ყოველი $U_i\ (i=1, 2, \dots, n)$ უწყვეტი ოპერატორია და, ზემოთ დამტკიცებული წინადადების ძალით, თანაბრად უწყვეტიც იქნება. ამის გამო, $\frac{\varepsilon}{3}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ ელემენტების ყოველი $x_1$, $x_2\in X$ წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1, x_2)<\delta$, შესრულდება $\rho(U_i(x_1), U_i(x_2))<\frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობა. ამასთანავე, ნებისმიერი $U\in M$ ელემენტისათვის არსებობს ქსელის ერთი მაინც ისეთი $U_i$ ელემენტი, რომ ადგილი ექნება $\rho(U, U_i)>\frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობას. უკანასკნელი შენიშვნების გამო, როცა $\rho(x_1, x_2)<\delta$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho\big(U(x_1),\ U(x_2)\big)\leqslant\rho\big(U(x_1),\ U_i(x_1)\big)+\rho\big(U_i(x_1), U_i(x_2)\big)+$$
$$+\rho\big(U_i(x_2),\ U(x_2)\big)<\varepsilon,$$

ე. ი. $U$ ოპერატორების $M$ სიმრავლე ერთობლივ უწყვეტი ოჯახია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ამისათვის უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $M$ არის ოპერატორების ერთობლივ უწყვეტი ოჯახი. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $M$ კომპაქტურია $C_u$ სივრცეში.

განვიხილოთ $X$ კომპაქტის ყველა გადასახვების $\Omega$ სიმრავლე $X_1$ კომპაქტზე. ცხადია, $M\subset C_u\subset\Omega$. მეტრიკა $\Omega$ სიმრავლეში შემოვიღოთ იმავე წესით, როგორც $C_u$ სივრცეში, ე. ი. თუ $V_1(x), V_2(x)\in\Omega$ ორი ნებისმიერი ოპერატორია, რომლებიც $X$ კომპაქტს გადასახავს $X_1$ კომპაქტზე, მაშინ

$$\rho(V_1(x), V_2(x))=\sup_{x\in X}\rho(V_1(x), V_2(x)).$$

ავიღოთ $X$ კომპაქტის $X_1$ კომპაქტზე უწყვეტ გადასახვათა თანაბრად კრებადი $\{U_k(x)\subset\}C_u$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის $U^*(x)$ ზღვარი ისევ უწყვეტი ოპერატორია და $X$ კომპაქტს გადასახავს $X_1$ კომპაქტზე. ამის გამო $U^*(x)\in C_u$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $C_u$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე $\Omega$ სიმრავლეში. ამგვარად, თუ დავამტკიცეთ, რომ $M$ სიმრავლე კომპაქტურია $\Omega$ სივრცეში, მაშინ $M$ კომპაქტური იქნება ჩაკეტილ $C_u$ სიმრავლეშიც. ვთქვათ, $x_1,\ldots,x_n\in X$ არის $X$ კომპაქტის-$\frac{\delta}{2}$-ქსელი. წარმოვადგინოთ $X$ სიმრავლე ისეთი $\omega_i$ $(i=1,\ldots,n)$ სიმრავლეების ჯამის სახით, რომელთა თანაკვეთა ცარიელია და ნებისმიერი $\overline{x}_1, \overline{x}_2\in\omega_i$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს $\rho(\overline{x}_1, \overline{x}_2)<\delta$ უტოლობას. ასეთი წარმოდგენა $X$ სიმრავლისა შესაძლოა, თუ, მაგალითად, $\omega_i$ სიმრავლეების როლში ავიღებთ შემდეგი სახის სიმრავლეებს:

$$\omega_i=S(x_i,\delta)-\bigcup_{k<i}S(x_k,\delta),$$

სადაც ყოველი $S(x_\nu,\delta)$ აღნიშნავს ღია სფეროს $x_\nu$ ცენტრით და $\delta$ რადიუსით. აღვნიშნოთ $U_1, U_2,\ldots, U_m$-ით $X_1$კომპაქტის რაიმე $\varepsilon$-ქსელი. ვთქვათ, $C_u^{(i)}$ არის ყველა იმ ოპერატორთა სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელობა $\omega_i$ სიმრავლეზე მოგვცემს $U_i$ ელემენტს. ასეთ ოპერატორთა რიცხვი სასრულია. ვთქვათ, $U\in M$ ნებისმიერი ელემენტია. ყოველი $x_i\in\{x_k\}^n_{k=1}$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $U_j\in\{U_k\}^m_{k=1}$ ელემენტი, რომ $\rho(U(x_i), U_j)<\varepsilon$. შევარჩიოთ $V\in C_u^{(i)}$ ელემენტი ისე, რომ $V(x_i)=U_j$; მაშინ, როცა $x\in\omega_i$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho\big(U(x), V(x)\big)\leqslant\rho\big(U(x),U(x_i)\big)+\rho\big(U(x_i),V(x_i)\big)+$$
$$+\rho\big(V(x), V(x_i)\big)<2\varepsilon.$$

უკანასკნელი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ $C_u^{(i)}$ სიმრავლე წარმოადგენს $M$ სიმრავლის სასრულ $2\varepsilon$-ქსელს $\Omega$ სივრცეში. ამრიგად, $M$ კომპაქტურია და თეორემა დამტკიცებულია.

**სიმრავლის კომპაქტურობის პირობა ფრეშეს $Q$ სივრცეში.** შევისწავლოთ ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სიბრტყის სასრულ არეში მდებარე ყველა წირის სიმრავლის კომპაქტურობის პირობა.

**თეორემა 1. 41** (ჰილბერტი). ყველა იმ წრფევად წირთა $M\subset Q$ სიმრავლე, რომლებიც სიბრტყის სასრულ ნაწილშია მოთავსებული და, რომელთა სიგრძეების სიმრავლე შემოსაზღვრულია, არის კომპაქტური სიმრავლე.

თეორემის დასამტკიცებლად $M$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი დავყოთ $n$ თანატოლი სიგრძის რკალებად და დაყოფის წერტილები ქორდებით შევაერთოთ. მივიღებთ ტეხილების $Q^{(n)}$ სიმრავლეს. ყოველ $q \in M$ წირს შეესაბამება თავისი $q_n \in Q^{(n)}$ ტეხილი. ვთქვათ, $M$ სიმრავლის წირების სიგრძეთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია $K$ რიცხვით. ვთქვათ, $q \in M$ ნებისმიერი წირია და $q_n \in Q^{(n)}$ მისი შესაბამი ტეხილი. ნებისმიერი რკალის და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძე არ აღემატება $\frac{K}{n}$ რიცხვს. ისიც ცხადია, რომ მანძილი $q$ წირის ნებისმიერი რკალის წერტილებსა და ამ რკალის მომჭიმავი ქორდის წერტილებს შორის არ აღემატება $\frac{2K}{n}$ რიცხვს. $q$ წირისა და მისი შესაბამი $q_n$ ტეხილის განტოლებები ჩავწეროთ პარამეტრული სახით ისე, რომ $q_n$ ტეხილის წვეროებს (რომლებიც $q$ წირზე მდებარეობენ) შეესაბამებოდეს $t$ პარამეტრის $\frac{i}{n}$ მნიშვნელობანი ($i=1, 2, \ldots, n$). $q$ წირის და $q_n$ ტეხილის პარამეტრული განტოლებებიდან ისიც მოვითხოვოთ, რომ როცა პარამეტრი $t$ გაირბენს $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ ინტერვალის წერტილებს, მივიღოთ $q$ წირის ერთი რკალი და მისი მომჭიმავი ქორდა. მანძილი $q$ წირის და $q_n$ ტეხილის შესაბამ წერტილებს შორის (იხ. მაგალითი 13) აკმაყოფილებს $\rho(q, q_n) \leqslant \frac{2K}{n}$ უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ტეხილების $Q^{(n)}$ სიმრავლე წარმოადგენს $M$ სიმრავლის $\frac{2K}{n}$-ქსელს. ყოველი $q_n$ ცალსახად არის განსაზღვრული მისი წვეროების კოორდინატებით; ამ ტეხილის ყველა წვეროს კოორდინატების რიცხვი კი უდრის $2(n+1)$. ყველა ეს კოორდინატი თანაბრად შემოსაზღვრულია. ამის გამო $Q^{(n)}$ სიმრავლე კომპაქტურია. 79-ე გვერდზე დამტკიცებული დებულების ძალით, ამ პირობებში $M$ სიმრავლეც კომპაქტური იქნება.

დამტკიცებული თეორემა სამართლიანია მაშინაც, როცა $M$ სიმრავლე ეკუთვნის ევკლიდეს $n$-განზომილებიან $R_n$ სივრცეს.

**$L_p(0,1)$ სივრცის ფუნქციათა ოჯახის კომპაქტურობის ნიშანი.** ვთქვათ, $x(t) \in L_p(0,1)$. გავაგრძელოთ $x(t)$ ფუნქცია $[0,1]$ სეგმენტის გარეთ $x(t)=0$ ტოლობით, როცა $t \overline{\in} [0,1]$. დავამტკიცოთ

ლემა. ფუნქცია

$$x_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu} x(s)\, ds \tag{1.101}$$

ეკუთვნის $L_p(0,1)$ სივრცეს.

$x_\mu(t)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს (1.101) ტოლობით, სტეკლოვის ფუნქციას უწოდებენ.

პირველ ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $x(t) \in L_p(0,1)$, ამიტომ

$$\int_0^1 |x(t)|\, dt < +\infty \quad \text{და} \quad \int_{t-\mu}^{t+\mu} |x(s)|\, ds < +\infty,$$

ე. ი. $x(s) \in L_1(t-\mu, t+\mu)$.

ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$\int_0^1 |x_\mu(t)|^p\, dt \leqslant \int_0^1 |x(t)|^p dt. \tag{1·102}$$

(1·101) ტოლობიდან გვექნება

$$\left|x_\mu(t)\right|^p = \frac{1}{(2\mu)^p}\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu} 1\cdot x(s) ds\right|^p. \tag{1·103}$$

ვისარგებლოთ იმით, რომ $1 \in L_q(t-\mu, t+\mu)$ და $x(s) \in L_p(t-\mu, t+\mu)$ და გარდავქმნათ ახლა ინტეგრალი ჰელდერის უტოლობით (იხ. უტოლობა (1·34)), მივიღებთ

$$\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu} 1\cdot x(s) ds\right| \leqslant \left(\int_{t-\mu}^{t+\mu} ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}\left|x(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}[x(s)]^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ამის შემდეგ (1·103) ტოლობიდან გვექნება

$$|x_\mu(t)|^p \leqslant \frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu} |x(s)|^p ds.$$

გარდავქმნათ ამ ინტეგრალში საინტეგრო ცვლადი $s=t+\xi$ ტოლობით, მივიღებთ:

$$|x_\mu(t)|^p \leqslant \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu} |x(t+\xi)|^p d\xi = \frac{1}{2\mu}\int_0^1\left[\int_{-\mu}^{\mu} |x(t+\xi)|^p d\xi\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\int_0^1 |x(t+\xi)|^p\, dt\right]d\xi. \tag{1·104}$$

ახლა თუ ავიღებთ $\eta=t+\xi$ ჩასმას, გვექნება

$$\int_0^1 |x(t+\xi)|^p dt = \int_\xi^{1+\xi} |x(\eta)|^p d\eta,$$

და ვინაიდან $x(\eta)$ ფუნქცია $[1, 1+\xi]$ სეგმენტზე ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\int_\xi^{1+\xi} |x(\eta)|^p d\eta = \int_\xi^1 |x(\eta)|^p d\eta,$$

ე. ი.

$$\int_0^1 |x(t+\xi)|^p d\xi = \int_\xi^1 |x(\eta)|^p d\eta.$$

მაგრამ

$$\int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta \leqslant \int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta.$$

ამრიგად,

$$\int_0^1 |x(t+\xi)|^p d\xi \leqslant \int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta.$$

ამ შეფასების გამოყენებით (1·104) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|x_\mu(t)|^p \leqslant \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta\right] d\xi = \int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta.$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს $t$ ცვლადით $[0,1)$ სეგმენტზე, გვექნება

$$\int_0^1 |x_\mu(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |x(\eta)|^p d\eta = \int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$$

და ლემა დამტკიცებულია.

ავიღოთ (1·102) უტოლობაში $x(t)=y(t)-z(t)$, მაშინ ცხადია, $x_\mu(t)= =y_\mu(t)-z_\mu(t)$ და მივიღებთ

$$\int_0^1 |y_\mu(t)-z_\mu(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |y(t)-z(t)|^p dt.$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\rho(y_\mu, z_\mu) \leqslant \rho(y, z). \tag{1·105}$$

ეს უტოლობა გამოგვადგება შემდეგი თეორემის დამტკიცების დროს.

**თეორემა 1. 42** (კ ო ლ მ ო გ ო რ ო ვ ი). ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ $\varphi(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა $M\subset L_p(0,1)$ ო ჯ ა ხ ი კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი ი ყ ო ს $L_p(0,1)$ ს ი ვ რ ც ე შ ი, ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი და ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა, რ ო მ შ ე ს რ უ ლ ე ბ უ ლ ი ი ყ ო ს შ ე მ დ ე გ ი ო რ ი პ ი რ ო ბ ა:

1) ყ ო ვ ე ლ ი $\varphi(t)\in M$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა თ ვ ი ს ა დ გ ი ლ ი ჰ ქ ო ნ დ ე ს უ ტ ო ლ ო ბ ა ს:

$$\left\{\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C,$$

ს ა დ ა ც $C$—მ უ დ მ ი ვ ი ა.

2) ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $\mu<\delta$, ნებისმიერი $\varphi(t)\in M$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\rho(\varphi, \varphi_\mu)<\varepsilon.$$

დავამტკიცოთ პირობების აუცილებლობა. ვთქვათ, ფუნქციათა $M$ ოჯახი კომპაქტურია. პირველი პირობის აუცილებლობა იქიდან გამომდინარეობს, რომ თანახმად 1.33 თეორემისა, კომპაქტური $M$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

დავამტკიცოთ მეორე პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან $M$ სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $L_p(0,1)$ სივრცეში არსებობს ამ სიმრავლის სასრული $\frac{\varepsilon}{3}$ -ქსელი $T$. ცნობილია, რომ ყოველ $\varphi(t)\in L_p(0,1)$ ფუნქციას შეგვიძლია ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ უწყვეტი ფუნქციით $L_p(0.1)$ სივრცის მეტრიკით. ამის გამო, $T$ სიმრავლის ელემენტებად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ უწყვეტი ფუნქციები. ვთქვათ, ეს ფუნქციებია: $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$. მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ თუ $\varphi(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მისი სტეკლოვის ფუნქცია

$$\varphi_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds,$$

როცა $\mu\to 0$, მიისწრაფვის $\varphi(t)$ ფუნქციისაკენ $L_p(0,1)$ სივრცის მეტრიკით. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, გვექნება

$$\varphi_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds=\varphi(\xi),\quad t-\mu\leqslant\xi\leqslant t+\mu,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ, როცა $\mu\to 0$, მაშინ $\varphi_\mu(t)\to\varphi(t)$ თანაბრად $t\in[0,1]$ ცვლადის მიმართ. მაგრამ, ამ პირობებში $\varphi_\mu(t)\to\varphi(t)$ საშუალოდაც $p$ მაჩვენებლით.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი $\varphi_k(t)\in T$ ელემენტი. ახლახან დამტკიცებულის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta_k>0$ რიცხვი, რომ როცა $\mu<\eta_k$, მაშინ

$$\rho\left((\varphi_k)_\mu, \varphi_k\right)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

როცა $k$ ნიშნაკი გაირბენს ყველა შესაძლო მნიშვნელობას: $1,\ldots, n$, მოგვეცემა $\eta_1,\ldots,\eta_n$ რიცხვები. ვთქვათ, $\eta=\min\limits_k \eta_k$; მაშინ $\rho((\varphi_k)_\mu, \varphi_k)<\frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობა შესრულდება ყველა $k=1,\ldots, n$ მნიშვნელობისათვის.

ვთქვათ ახლა, $\varphi(t)\in M$ ნებისმიერი ელემენტია. არსებობს ისეთი $\varphi_i(t)\in T$ ფუნქცია, რომ ადგილი ექნება $\rho(\varphi, \varphi_i)<\frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობას. გამოვიყენოთ $\varphi$, $\varphi_\mu$, $\varphi_i$, $(\varphi_i)_\mu$ ელემენტებზე სამკუთხედის აქსიომა, მივიღებთ

$$\rho(\varphi_\mu, \varphi)\leqslant\rho(\varphi_\mu, (\varphi_i)_\mu)+\rho((\varphi_i)_\mu, \varphi_i)+\rho(\varphi_i, \varphi);$$

მაგრამ, (1·105) უტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\rho(\varphi_{\mu}, (\varphi_i)_{\mu}) \leqslant \rho(\varphi, \varphi_i).$$

ამიტომ, როცა $\mu \to 0$ წინა უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\rho(\varphi_{\mu}, \varphi) \leqslant 2\rho(\varphi_i, \varphi) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

და მეორე პირობის აუცილებლობაც დამტკიცებულია.

თეორემის პირობების საკმარისობის დასამტკიცებლად, აღვნიშნოთ $X_{\mu}$-თი ყველა $\varphi_{\mu}(t)$ ფუნქციის სიმრავლე. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $\mu$-სათვის $X_{\mu}$ სიმრავლე კომპაქტურია. ჯერ ვუჩვენოთ, რომ $X_{\mu}$ სიმრავლე ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციების ოჯახია. მართლაც, ვთქვათ, $t, t_1 \in [0,1]$ ორი ნებისმიერი წერტილია. თანახმად სტეკლოვის ფუნქციის განსაზღვრისა, ნებისმიერი $\varphi(t) \in M$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\left|\varphi_{\mu}(t_1) - \varphi_{\mu}(t)\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu} \varphi(s)\,ds - \int_{t_1-\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds\right| =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t-\mu} \varphi(s)ds - \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds + \int_{t_1+\mu}^{t-\mu} \varphi(s)ds -\right.$$

$$\left.- \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds - \int_{t-\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds - \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds -\right.$$

$$\left.- \int_{t-\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)ds\right| \leqslant \frac{1}{2\mu}\left[\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds\right| + \left|\int_{t-\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)\, ds\right|\right].$$

გამოვიყენოთ უკანასკნელი ორი ინტეგრალის გარდასაქმნელად ჰელდერის უტოლობა, მივიღებთ

$$\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} \varphi(s)ds\right| \leqslant \left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} ds\right|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} |\varphi(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= |t_1 - t|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t+\mu}^{t_1+\mu} |\varphi(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |t_1 - t|^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

სრულიად ასევე,

$$\left|\int_{t-\mu}^{t_1-\mu} \varphi(s)ds\right| \leqslant |t_1-t|^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ამ ორი უკანასკნელი უტოლობის გამოყენებით, წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$|\varphi_\mu(t_1)-\varphi_\mu(t)| \leqslant \frac{C}{\mu}|t_1-t|^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.106}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციების $X_\mu$ სიმრავლე ყოველი ფიქსირებული $\mu$-სთვის ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციათა ოჯახია.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ $X_\mu$ არის $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციების თანაბრად შემოსაზღვრული სიმრავლე. მართლაც, როცა $|t_1-t|<\mu$, (1.106) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|\varphi_\mu(t_1)-\varphi_\mu(t)| \leqslant C\mu^{-\frac{1}{p}},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\mu$ სიგრძის სეგმენტზე ნებისმიერი $x_\mu(t)$ ფუნქციის რხევა არ აღემატება $C\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს. თუ $\mu > \frac{1}{n}$, მაშინ $x_\mu(t)$ ფუნქციის რხევა არ აღემატება $nC\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს. ამასთანავე, (1.102) უტოლობის თანახმად და თეორემის პირველი პირობისა, გვაქვს:

$$\int_0^1 |\varphi_\mu(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \leqslant C^p,$$

რაც მხოლოდ მაშინ არის შესაძლო, როცა არსებობს ერთი მაინც ისეთი $t_0 \in [0,1]$ მნიშვნელობა, რომ $|\varphi_\mu(t_0)| \leqslant C$. გარდა ამისა, ვინაიდან რხევა ნებისმიერი $\varphi_\mu(t) \in X_\mu$ ფუნქციისა არ აღემატება $nC\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს, ამიტომ

$$|\varphi(t)| \leqslant |\varphi_\mu(t_0)| + nC\mu^{-\frac{1}{p}} \leqslant C + nC\mu^{-\frac{1}{p}} = C_1.$$

ამრიგად, როცა $\mu$ ფიქსირებულია, ფუნქციათა $X_\mu$ ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე.

არცელას თეორემის თანახმად, $X_\mu$ სიმრავლე კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით. მაგრამ, მაშინ $X_\mu$ კომპაქტური იქნება საშუალო კრებადობის აზრითაც $p$ მაჩვენებლით.

თეორემის მეორე პირობის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\mu$, რომ ყოველი $\varphi(t)\in M$ ელემენტისათვის შესრულდება უტოლობა

$$\rho(\varphi,\ \varphi_\mu)<\varepsilon.$$

როგორც ვხედავთ $X_\mu$ სიმრავლე არის $M$ სიმრავლის $\varepsilon$-ქსელი და, ვინაიდან თვით $X_\mu$ კომპაქტურია, ამიტომ $M$ სიმრავლეც კომპაქტური იქნება. ამით კოლმოგოროვის თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 1. 43** (მ. რისი). იმისათვის რომ ფუნქციათა $M$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს $L_p(0,1)$ სივრცეში საკმარისია შემდეგი პირობები:

1) ფუნქციათა $M$ სიმრავლე უნდა იყოს თანაბრად შემოსაზღვრული, ე. ი. ყველა $\varphi(t)\in M$ ფუნქციებისათვის უნდა შესრულებული იყოს უტოლობა

$$\left(\int_0^1 |\varphi(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}<C,$$

სადაც $C$ მუდმივია;

2) ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\mu>0$ რიცხვი, რომ $M$ სიმრავლის ყველა ფუნქციისათვის, როცა $|\Delta t|<\mu$, გვქონდეს უტოლობა

$$\left\{\int_0^1 |\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

ვთქვათ, ყველა $\varphi(t)=0$, როცა $t\overline{\in}[0,1]$. განვიხილოთ სტეკლოვის ფუნქცია

$$\varphi_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds.$$

როგორც წინა თეორემაში დავრწმუნდით, ყოველი ფიქსირებული $\mu$ რიცხვისათვის $X_\mu$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციები, კომპაქტურია $L_p$ სივრცეში $p$ მაჩვენებლით საშუალო კრებადობის აზრით.

ავიღოთ ცხადი უტოლობა

$$\left|\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds\right|\leqslant\left(\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

რომელშიც $\varphi(s)$ ფუნქციის ნაცვლად შევიტანოთ $\varphi(t)-\varphi(s)$ სხვაობა, გვექნება

$$\left|\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}[\varphi(t)-\varphi(s)]ds\right|\leqslant\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(t)-\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}[\varphi(t)-\varphi(s)]ds=\varphi(t)-\varphi_\mu(t),$$

წინა უტოლობიდან, როცა მას $p$ ხარისხად ავამაღლებთ, მივიღებთ:

$$|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p\leqslant\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(t)-\varphi(s)|^p ds.$$

აქედან, $s=t+\Delta t$ ჩასმით, გვექნება

$$|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p\leqslant\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}|\varphi(t)-\varphi(t+\Delta t)|^p d(\Delta t),$$

საიდანაც $t$ ცვლადით ინტეგრების შედეგად, მივიღებთ

$$\int_0^1|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p dt\leqslant\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}d(\Delta t)\int_0^1|\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|^p dt.$$

ახლა გამოვიყენოთ თეორემის მეორე პირობა, გვექნება შეფასება:

$$\left(\int_0^1|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

ამ უტოლობიდან ვრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი $\varphi(t)\in M$ ფუნქციისათვის არსებობს $\varphi_\mu(t)$ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის $X_\mu\subset C_{L_p}(0,1)$ სიმრავლეს და, რომელიც $\varphi(t)$ ფუნქციისაგან დაშორებულია ნებისმიერ $\varepsilon$ რიცხვზე ნაკლები მანძილით. როგორც ვიცით, ამ პირობებში, ფუნქციათა $M$ ოჯახი კომპაქტურია.

**სიმრავლის კომპაქტურობის პირობა $C^\infty$ სივრცეში.** განვიხილოთ ფუნქციონალური სივრცე, რომლის ელემენტი $x$ ვუწოდოთ $[a,b]$ სეგმენტზე ისეთ $\varphi_i(t)$ უწყვეტი ფუნქციების მიმდევრობას: $x=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\ldots)$, რომლებიც თანაბრად შემოსაზღვრულია რაიმე $K$ რიცხვით: $|\varphi_i(t)|\leqslant K$. შემდეგში $\varphi_i(t)$ ფუნქციებს ვუწოდოთ $x$ ელემენტის კოორდინატები.

ყველა $x$ ელემენტის სიმრავლეს უწოდებენ $C^\infty$ სივრცეს, რომელშიც მანძილი $x^{(1)}=(\varphi_1^{(1)}(t),\ldots,\varphi_n^{(1)}(t),\ldots)$, $x^{(2)}=(\varphi_1^{(2)}(t),\ldots,\varphi_n^{(2)}(t),\ldots)\in C^\infty$ ელემენტებს შორის განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$\rho(x^{(1)},x^{(2)})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi_i^{(1)}(t)-\varphi_i^{(2)}(t)|.$$

ამ ფორმულით განსაზღვრული მანძილი, როგორც ადვილი შესამჩნევია, დააკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას. ამასთანავე $C^\infty$ სრული სივრცეა.

**თეორემა 1.44.** *$M\subset C^\infty$ სიმრავლის კომპაქტურობისათვის საკმარისია, რომ მისი ელემენტების $k$-ური კოორდინატების სიმრავლე, ნებისმიერი $k$ ნიშნაკისათვის, კომპაქტური იყოს.*

მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, შეგვიძლია იმდენად დიდი ნატურალური $N$ რიცხვი ავიღოთ, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$K\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon.$$

ახლა განვიხილოთ $C^{\infty}$ სივრცის იმ $x_N$ ელემენტების $M_N$ სიმრავლე, რომელთა ყველა კოორდინატი, $N$ ნიშნაკიდან დაწყებული, ნულის ტოლია: $x_N=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_N(t),0,\ldots,0,\ldots)$.

ვინაიდან, თეორემის პირობის ძალით, $C^{\infty}$ სივრცის ყველა ელემენტის $k$-ური კოორდინატების სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ $M_N$ კომპაქტური სიმრავლეა $C^{\infty}$ სივრცეში. შევაფასოთ $x=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_N(t),\varphi_{N+1}(t),\ldots)\in M$ და $x_N=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_N(t),0,\ldots,0,\ldots)\in M_N$ ელემენტებს შორის მანძილი. გვაქვს:

$$\rho(x,x_N)=\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max|\varphi_i(t)|\leqslant K\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon.$$

როგორც ვხედავთ, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, $M\subset C^{\infty}$ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი კომპაქტური $M_N$ სიმრავლე, რომ მანძილი ნებისმიერი $x\in M$ ელემენტიდან $x_N\in M_N$ ელემენტამდე აკმაყოფილებს $\rho(x_1,x_N)<\varepsilon$ უტოლობას. ამის გამო $M$ კომპაქტური სიმრავლეა და თეორემა დამტკიცებულია.

**თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა სიმრავლის კომპაქტურობის პირობები.** ვთქვათ, $t$ ნამდვილი ცვლადია, რომელიც მთელ რიცხვით წრფეზე იცვლება: $-\infty<t<+\infty$. განვიხილოთ ყველა იმ $x(t)$ ფუნქციების $M_{\infty}$ სიმრავლე, რომლებიც შემოსაზღვრულია $(-\infty,+\infty)$ ინტერვალზე. მანძილი $x_1(t), x_2(t)\in M_{\infty}$ ელემენტებს შორის განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\rho(x_1, x_2)=\sup_{-\infty<t<\infty}|x_1-x_2|.$$

ასე განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას და ამ მეტრიკის მიმართ $M_{\infty}$ სრული სივრცეა.

შემოვიღოთ თითქმის პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრა. იტყვიან, რომ $x(t)$ ფუნქცია თითქმის პერიოდულია $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე, თუ იგი ამ ინტერვალზე უწყვეტია და ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta=\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $(x,x+\eta)$ ინტერვალი შეიცავს ისეთ ერთ $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ რიცხვს მაინც, რომლისთვისაც შესრულდება უტოლობა:

$$|x(t+\sigma)-x(t)|\leqslant\varepsilon,\quad -\infty<t<+\infty.$$

$\sigma$ რიცხვს ეწოდება $x(t)$ ფუნქციის $\varepsilon$-პერიოდი. ცხადია, თითქმის პერიოდულ ფუნქციების სიმრავლე ეკუთვნის $M_{\infty}$ სივრცეს.

**თეორემა 1.45.** *იმისათვის რომ თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა $M$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობა:*

1) *ფუნქციათა $M$ ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტი უნდა იყოს $(-\infty,+\infty)$ ინტერვალზე;*

2) ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\eta=\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი $(a, a+\eta)\subset(-\infty,+\infty)$ ინტერვალი შეიცავდეს $\sigma$ რიცხვს, რომელიც $\varepsilon$-პერიოდი იქნება ყველა $x(t)\in M$ ფუნქციისათვის.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობების აუცილებლობა. ვინაიდან თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია მთელ $(-\infty,+\infty)$ ინტერვალზე, ამიტომ 1) პირობის აუცილებლობის დამტკიცება მოითხოვს მხოლოდ ანალოგიური პირობების აუცილებლობის დამტკიცების განმეორებას არცელას თეორემაში.

ვუჩვენოთ 2) პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან $M$ სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ, ერთის მხრივ, არსებობს $\frac{\varepsilon}{3}$ ქსელი: $x_1(t),\ldots,x_n(t)\in M$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $x(t)\in M$ ელემენტისათვის არსებობს ქსელის ისეთი ერთი $x_i(t)$ ელემენტი მაინც, რომ

$$\rho(x,\ x_i)<\frac{\varepsilon}{3};$$

საიდანაც ნებისმიერი $t\in(-\infty,+\infty)$ წერტილისათვის გვაქვს

$$|x(t)-x_i(t)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.107}$$

მეორე მხრივ, ბორის თეორემის ძალით, როცა თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა სიმრავლე სასრულია, მაშინ არსებობს ისეთი $\eta>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $(a, a+\eta)\subset(-\infty,+\infty)$ ინტერვალი შეიცავს $\sigma$ რიცხვს, რომელიც ყველა $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ ფუნქციისათვის წარმოადგენს $\frac{\varepsilon}{3}$ პერიოდს:

$$|x_i(t+\sigma)-x_i(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad(i=1,\ldots,n). \tag{1.108}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (1.107) და (1.108) უტოლობებს, გვექნება

$$|x(t+\sigma)-x(t)|\leqslant|x(t+\sigma)-x_i(t+\sigma)|+|x_i(t+\sigma)-x_i(t)|+|x_i(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

აქედან ჩანს, რომ $\sigma$ რიცხვი არის ნებისმიერი $x(t)\in M$ ელემენტის $\varepsilon$-პერიოდი და 2) პირობის აუცილებლობის დამტკიცება დამთავრებულია.

გადავიდეთ პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ 1) და 2) პირობები შესრულებულია. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $M$ კომპაქტური სიმრავლეა.

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. არსებობს ისეთი $\eta=\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი $\eta$ სიგრძის ინტერვალი შეიცავს ყველა $x(t)\in M$ ფუნქციისათვის საერთო $\varepsilon$-პერიოდს.

ავაგოთ $x(t)\in M$ ფუნქციის დახმარებით $\overline{x}(t)$ ფუნქცია:

$$\overline{x}(t)=x(t),\ \text{როცა}\ -\eta\leqslant t\leqslant\eta,$$

$$\overline{x}(t)=x(t-\sigma_n),\ \text{როცა}\begin{cases} n\eta<t\leqslant(n+1)\eta, & n=1,2,3,\ldots\\ n\eta\leqslant t<(n+1)\eta, & n=-2,-3,\ldots,\end{cases}$$

სადაც $\sigma_n$ არის ყველა $x(t)\in M$ ფუნქციის $\varepsilon$-პერიოდი $\big(n\eta,(n+1)\eta\big)$ ინტერვალში.

აღვნიშნოთ ყველა $\overline{x}(t)$ ფუნქციის სიმრავლე $M_\varepsilon$-ით. ცხადია, რომ ფუნქციათა $M_\varepsilon$ ოჯახი $[-\eta,\eta]$ სეგმენტზე თანაბრად შემოსაზღვრული და ერ-

თობლივ უწყვეტია და, ამიტომ, ამ სეგმენტზე იგი კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით. $\overline{x}(t)$ ფუნქციების განსაზღვრის ძალით, ვინაიდან $t-\sigma_n\subset[-\eta,\eta]$, ამიტომ ყოველი თანაბრად კრებადი $\{\overline{x_k}(t)\}$ მიმდევრობა, $[-\eta;\eta]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადი იქნება რიცხვით წრფეზე, სადაც $\overline{x_k}(t)\in M_\varepsilon$. ამის გამო, რიცხვით წრფეზე $M_\varepsilon$ სიმრავლე კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით, ამასთანავე $\overline{x}(t)$ ფუნქციის განსაზღვრის ძალით

$$x(t)-\overline{x}(t)=0,\ \text{როცა}\ t\in[-\eta,\eta].$$

$$x(t)-\overline{x}(t)=x(t)-x(t-\sigma_n),\ \text{როცა}\ \begin{cases} n\eta<t\leqslant(n+1)\eta, & n=1,2,\ldots \\ n\eta\leqslant t<(n+1)\eta, & n=-2,-3,\ldots \end{cases}$$

ვინაიდან $\sigma_n$ არის $x(t)$ ფუნქციის ε-პერიოდი, ამიტომ ნებისმიერი $t\in(-\infty,\infty)$ წერტილისათვის გვექნება

$$|x(t)-\overline{x(t)}|<\varepsilon,$$

საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა: $\rho(x,\overline{x})<\varepsilon$. მაშასადამე, $M_\varepsilon$ არის $M$ სიმრავლის კომპაქტური ε-ქსელი და ამიტომ ფუნქციათა $M$ ოჯახი კომპაქტურია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**სიმრავლის კომპაქტურობის პირობები $l_p$ სივრცეში.** ვთქვათ, $M\subset l_p$ რაიმე სიმრავლეა. მოვიყვანოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები $M$ სიმრავლის კომპაქტურობისა $l_p$ სივრცეში.

**თეორემა 1.46.** *$l_p$ სივრცის ელემენტების რაიმე $M$ სიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:*

*1) უნდა არსებობდეს ისეთი დადებითი $K$ მუდმივი, საერთო ყველა $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in M$ ელემენტისათვის, რომ*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\leqslant K^p; \tag{1.109}$$

*2) ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყველა $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in M$ ელემენტისათვის შესრულებული იყოს პირობა:*

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p\leqslant\varepsilon^p. \tag{1.110}$$

ვთქვათ, $M$ სიმრავლე კომპაქტურია. მაშინ, როგორც ვიცით, იგი შემოსაზღვრულია, ე. ი. არსებობს ისეთი $K$ რიცხვი, საერთო ყველა $x=(x_k)\in M$ ელემენტისათვის, რომ

$$\rho(x,\Theta_{l_p})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant K,$$

სადაც $\Theta_{l_p}$ არის $l_p$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი. ამით (1.109) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა (1.110) პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან $M$ კომპაქტურია, ამიტომ არსებობს ელემენტების ისეთი სასრული $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{m}=\{x^{(i)}=$

$=(x_k^{(i)})\Big|_{i=1}^{n}$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(i)}\in l_p$, რომ ნებისმიერი $x=(x_k)\in M$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შესრულდება $\rho(x,x^{(i)})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ უტოლობა, სადაც $x^{(i)}$ გარკვეული ელემენტია $(i=1,2,\ldots,n)$. სხვანაირად, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_k^{(i)}|^p\leqslant\frac{\varepsilon^p}{2^p}. \tag{1.111}$$

გარდა ამისა, რადგანაც $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ მიმდევრობა სასრულია, ამიტომ ყველა მისი ელემენტისათვის არსებებს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\sum_{k=N}^{\infty}|x_k^{(i)}|^p\leqslant\frac{\varepsilon^p}{2^p}\quad(i=1,\ldots,n). \tag{1.112}$$

ახლა კი მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$\Big(\sum_{k=N}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{k=N}^{\infty}|x_k-x_k^{(i)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=N}^{\infty}|x_k^{(i)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

საიდანაც (1.111) და (1.112) უტოლობების ძალით, მივიღებთ (1.110) უტოლობას.

გადავიდეთ პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე.

საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ როცა შესრულებულია 1) და 2) პირობები, მაშინ $M$ სიმრავლე კომპაქტურია. ვთქვათ, $x=(x_i)\in M$ ნებისმიერი ელემენტია. აღვნიშნოთ $x_N$-ით ელემენტი, რომლის პირველი $N$ კოორდინატი იქნება $x$ ელემენტის პირველი $N$ კოორდინატი, ხოლო ყველა დანარჩენი კოორდინატი უდრის ნულს: $x_N=(x_1,\ldots,x_N,0,0,\ldots)$. ყველა $x_N$ სახის ელემენტის სიმრავლე აღვნიშნოთ $M_N$-ით. მაშინ, თანახმად (1.110) პირობისა, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის და $x\in M$ ელემენტისათვის გვაქვს $\rho(x,x_N)\leqslant\varepsilon$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M_N$ სიმრავლე წარმოადგენს $M$ სიმრავლის $\varepsilon$-ქსელს.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი $\{x_N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}=\{x_N^{(k)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ldots,\ x_N^{(k)},\ 0,\ 0\ldots)\}_{k=1}^{\infty}\subset M_N$ მიმდევრობა. თანახმად (1.110) პირობისა, გვაქვს $|x_i^{(k)}|\leqslant K$ $(i=1,\ldots,N)$. ამის გამო, $\{x_N^{(k)}\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ისეთი $\{x_N^{(k_s)}\}_{k_s=1}^{\infty}$ ქვემიმდევრობა, რომლის ელემენტების პირველ $N$ ადგილზე მყოფი კოორდინატები კრებადია სასრული ზღვრებისაკენ, ხოლო დანარჩენი კოორდინატები კი ნულებია. ვთქვათ, $\lim\limits_{K_s\to\infty}x_N^{(k_s)}=x_N^*$. ცხადია, $x_N^*\in l_p$. ჩვენ ვხედავთ, რომ $M_N$ სიმრავლის ელემენტების ყოველი უსასრულო მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ $l_p$ სივრცის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა. ამგვარად, $M_N$ კომპაქტური სიმრავლეა. მაშასადამე, კომპაქტური იქნება თვით $M$ სიმრავლეც და თეორემა დამტკიცებულია.

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ უწყვეტი ფუნქციის თვისებების შესწავლაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის განსაზღვრის არის აგებულებას. ასე მაგალითად, როცა ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ამ სეგმენტზე უსათუოდ შემოსაზღვრულია და მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს. ამ და მსგავსი დებულებების დამტკიცებაში გამოიყენება $[a,b]$ სეგმენტის კომპაქტურობა.

სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის თვისებების ერთი ნაწილი შეიძლება გავავრცელოთ უწყვეტ ფუნქციონალზეც, თუ ეს უკანასკნელი განსაზღვრულია მეტრული სივრცის კომპაქტურ სიმრავლეზე.

ქვევით ჩვენ შევეხებით ფუნქციონალის ზოგიერთ ასეთ თვისებას. ჯერ შევჩერდეთ რამდენიმე მნიშვნელოვან განსაზღვრაზე.

ვთქვათ, $E=(x,\rho)$ მოცემული აბსტრაქტული მეტრული სივრცეა, $f(x)$ იყოს ამ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი. ავიღოთ $E$ სიმრავლის რაიმე $x_0$ წერტილი. როგორც ვიცით, თუ მოცემულო $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ შესრულებული იყოს $\rho'\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon$ უტოლობა ყველა $x\in E$ ელემენტისათვის, როცა $\rho(x,x_0)<\delta$, მაშინ $f(x)$ **ფუნქციონალი უწყვეტია $x_0$ წერტილში.** აქ $\rho'$ აღნიშნავს მეტრიკას ნამდვილ რიცხვთა $R_1$ სივრცეში. სხვანაირად, $f(x)$ ფუნქციონალი უწყვეტია $x_0$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $x_0$ წერტილისაკენ, გვექნება $\lim\limits_{n\to\infty}\rho'\big(f(x_n),f(x_0)\big)=0$.

$f(x)$ ფუნქციონალს, რომელიც უწყვეტია $E$ სივრცის ყოველ წერტილში, ეწოდება **უწყვეტი ფუნქციონალი $E$ სივრცეში.**

ავიღოთ ღია $S(x_0,\varepsilon)\subset E$ სფერო $x_0\in E$ ცენტრით და $\varepsilon$ რადიუსით. $f(x)$ ფუნქციონალის **ზედა ზღვარი $x_0$ წერტილში** ვუწოდოთ გამოსახულებას

$$\overline{f}(x_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\sup_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x)\right]. \tag{1.113}$$

სრულიად ასევე, $f(x)$ ფუნქციონალის **ქვედა ზღვარს $x_0$ წერტილში** უწოდებენ გამოსახულებას:

$$\underline{f}(x_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\inf_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x)\right]. \tag{1.114}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\varepsilon$ რიცხვი კლებულობს, მაშინ $\sup\limits_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x)$ არ იზრდება, ხოლო $\inf\limits_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x)$ არ მცირდება, ამიტომ (1.113) და (1.114) ზღვრები არსებობს. ცხადია,

$$\underline{f}(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\overline{f}(x_0).$$

თუ $E$ სივრცის $x_0$ წერტილში ადგილი აქვს $\overline{f}(x_0)=f(x_0)$ ტოლობას, მაშინ

$f(x)$ ზემოდან უწყვეტი ფუნქციონალი ეწოდება $x_0$ წერტილში, ხოლო თუ $\underline{f}(x_0)=f(x)$, მაშინ $f(x)$ ქვემოდან უწყვეტი ფუნქციონალია $x_0$ წერტილში.

ფუნქციონალის ზედა და ქვედა ზღვრების საშუალებით განისაზღვრება ფუნქციონალის რხევა წერტილზე. სახელდობრ, სხვაობას

$$\omega f(x_0)=\overline{f}(x_0)-\underline{f}(x_0)$$

უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციონალის რხევას $x_0$ წერტილში.

თუ ფუნქციონალის რხევა $\omega f(x_0)=0$, მაშინ $f(x)$ უწყვეტია $x_0$ წერტილში.

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ $f(x)$ უწყვეტია $x_0$ წერტილში, მაშინ მისი რხევა ამ წერტილში ნულის ტოლია.

აღვნიშნოთ $f(E)$ სიმბოლოთი $f(x)$ ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლე, როცა $x$ ელემენტი გაირბენს $E$ სივრცის წერტილებს. თუ სიმრავლე $f(E)$ შემოსაზღვრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციონალი შემოსაზღვრულია $E$ სივრცეზე. პირიქით, თუ ფუნქციონალი $f(x)$ შემოსაზღვრულია $E$ სივრცეზე, მაშინ ნამდვილ რიცხვთა $f(E)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, $f(E)$ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები შესაბამისად არის $\mu_1$ და $\mu_2$. ამ რიცხვებს ჰქვია შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციონალის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები $E$ სივრცეში. შესაძლოა არსებობდეს ისეთი $x_0\in E$ ელემენტი, რომ $f(x_0)=\mu_1$, მაშინ იტყვიან, რომ ფუნქციონალი $f(x)$ აღწევს თავის ზუსტ ზედა საზღვარს $E$ სივრცეზე. ასევე, თუ არსებობს ისეთი ელემენტი $\overline{x}_0\in E$, რომ $f(\overline{x}_0)=\mu_2$, მაშინ $f(x)$ აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს $E$ სივრცეზე.

შესაძლოა $f(x)$ ფუნქციონალი უწყვეტი იყოს $E$ სივრცეში, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა ან ზუსტ ქვედა საზღვარს.

$\mu_1-\mu_2$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციონალის რხევა $E$ სივრცეში. აღვნიშნოთ $f(x)$ ფუნქციონალის რხევა $E$ სივრცეში $\omega f(x)$ სიმბოლოთი. თუ $f(x)$ შემოსაზღვრული არ არის $E$ სივრცეში, მაშინ $\omega f(x)=+\infty$. ცხადია აგრეთვე, რომ $\omega f(x)\geqslant 0$.

ვთქვათ, $\{x_n\}\subset E$ არის $x^*\in E$ ელემენტისაკენ კრებადი მიმდევრობა: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x^*)=0$. თუ $f(x)$ ფუნქციონალი ისეთია, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)\leqslant f(x^*),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციონალს ზემოდან ნახევრად უწყვეტი ეწოდება $x^*$ წერტილზე. ანალოგიურად არის განსაზღვრული ფუნქციონალის ნახევრად უწყვეტობა წერტილზე ქვემოდან.

თუ $f(x)$ ფუნქციონალი ნახევრად უწყვეტია ზემოდან $E$ სივრცის ყოველ წერტილზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციონალს ეწოდება ნახევრად უწყვეტი ზემოდან $E$ სივრცეში. ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქციონალს ეწოდება ნახევრად უწყვეტი ქვემოდან $E$ სივრცეში, თუ იგი ნახევრად უწყვეტია ქვემოდან $E$ სივრცის ყოველ წერტილში.

თეორემა 1.47. თუ $E$ კომპაქტია, მაშინ მასზე განსაზღვრული ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, მაგალითად, $f(x)$ ფუნქციონალი არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული. მაშინ, არსებობს ელემენტების ისეთი უსასრულო $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა, რომ $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა უსასრულოდ ზრდადი იქნება. ვინაიდან $E$ სივრცე კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს კრებად $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობას. ვთქვათ, $x^*\in E$ ამ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტია: $\lim\limits_{n_k\to\infty}\rho(x_{n_k}, x^*)=0$. რადგან $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციონალია, ამიტომ ერთის მხრივ, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი სფერული $S(x^*,\varepsilon)$ მიდამო, რომელშიც $f(x)$ ფუნქციონალის მნიშვნელობანი $f(x^*)$ რიცხვისაგან $\varepsilon$-ზე ნაკლები სიდიდით განსხვავდება. სხვანაირად, როგორიც უნდა იყოს $x'\in S(x^*,\varepsilon)$, $x'\neq x^*$ ელემენტი ადგილი ექნება $f(x')<f(x^*)+\varepsilon$ უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციონალი $S(x^*,\varepsilon)$ სფეროში შემოსაზღვრულია. მაგრამ, მეორეს მხრივ, ცხადია, $S(x^*,\varepsilon)$ სფეროში მოხვდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლე. ჩვენი დაშვების თანახმად, ამ ელემენტებზე $f(x)$ ფუნქციონალი მიიღებს ნებისმიერად დიდ მნიშვნელობებს.

ამრიგად, დაშვებას, რომ $f(x)$ არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან, მივყავართ წინააღმდეგობამდე.

ასევე დამტკიცდება $E$ კომპაქტზე $f(x)$ ფუნქციონალის შემოსაზღვრულობა ქვევიდან.

თეორემა 1.48. $E$ კომპაქტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი უსათუოდ მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვარს.

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს. ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემის მეორე ნახევარი.

ვთქვათ, $\mu$ არის $f(x)$ ფუნქციონალის ზუსტი ქვედა საზღვარი $E$ კომპაქტზე. მაშინ არსებობს ელემენტების ისეთი $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა, რომ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას:

$$\mu\leqslant f(x_n)\leqslant\mu+\frac{1}{n}.$$

გამოვყოთ ახლა $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან კრებადი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x^*$. ასეთი კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა შესაძლოა, ვინაიდან ყოველი $x_n$ ეკუთვნის $E$ კომპაქტს. ჩვენი ფუნქციონალის უწყვეტობის ძალით, გვაქვს: $\lim\limits_{n_k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x^*)$. მაგრამ იმის გამო, რომ

$$\mu\leqslant f(x_{n_k})\leqslant\mu+\frac{1}{n_k},$$

გვექნება

$$\lim_{n_k\to\infty}f(x_{n_k})=\mu.$$

თეორემაც დამტკიცებულია

შენიშვნა. როგორც ზევით აღვნიშნეთ, ფუნქციონალის უწყვეტობა

და შემოსაზღვრულობა საკმარისი არ არის იმისათვის, რომ იგი თავის განსაზღვრის სიმრავლეზე აღწევდეს თავის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს. უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი, რომ აღწევდეს თავის ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებს, საკმარისია მისი განსაზღვრის სიმრავლე იყოს კომპაქტი. ნათქვამის დასადასტურებლად განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე, ყველა იმ $x(t)$ უწყვეტ ფუნქციის $M$ სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $x(0)=0$, $x(1)=1$, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\leqslant 1$. $M$ სიმრავლე შემოსაზღვრული და ჩაკეტილია მაგრამ არ არის კომპაქტური. განვსაზღვროთ $M$ სიმრავლეზე ფუნქციონალი

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt.$$

ამ ფუნქციონალის ზუსტი ქვედა საზღვარია 0. მართლაც, ავიღოთ $x(t)=t^n\in M$, სადაც $n$—ნატურალური რიცხვია, გვექნება

$$f(x)=\frac{1}{2n+1}.$$

აქედან ჩანს, ერთის მხრივ, რომ $f(x)$ შეიძლება ნებისმიერად მცირე გავხადოთ. მეორე მხრივ, $M$ სიმრავლის ნებისმიერი $x(t)$ ელემენტისათვის გვაქვს $f(x)>0$. ამიტომ $f(x)$ ფუნქციონალი თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს ვერ მიაღწევს.

ამ მაგალითიდან მკაფიოდ ჩანს ის სიძნელე, რომელიც ხშირად იჩენს თავს ვარიაციათა აღრიცხვის ამოცანებში ფუნქციონალის მინიმალური წირის არსებობის დამტკიცების დროს. როგორც ვიცით, ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, $n$-ცვლადზე დამოკიდებული უწყვეტი ფუნქცია ჩაკეტილ $n$-განზომილებიან სფეროში თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს უსათუოდ მიაღწევს. როცა $n$-განზომილებიანი სივრციდან გადავდივართ უსასრულო განზომილებიან მეტრულ სივრცეზე და გვსურს მის რაიმე შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ სიმრავლეში (მაგალითად, ჩაკეტილ სფეროში სასრული რადიუსით) დავასაბუთოთ ისეთი ელემენტის არსებობა, რომელიც გარკვეულ უწყვეტ ფუნქციონალს მინიმალურ (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას ანიჭებს, დამატებით სიძნელეს ვაწყდებით. ეს სიძნელე იმით არის გამოწვეული, რომ უსასრულო განზომილებიანი სივრცის შემოსაზღვრული სიმრავლე (კერძოდ სფერო სასრული რადიუსით) არაკომპაქტურია.

**თეორემა 1.49.** *$E$ კომპაქტზე ქვემოდან ნახევრად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს.*

ვთქვათ, $\mu$ არის $f(x)$ ფუნქციონალის ზუსტი ქვედა საზღვარი და ვიგულისხმოთ, რომ $\mu$ სასრულია. ამ შემთხვევაში არსებობს $E$ კომპაქტის ელემენტთა ისეთი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$f(x_n)<\mu+\frac{1}{n}\quad (n=1,2,\ldots).\qquad *$$

რადგანაც $E$ კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $E$ კომპაქტის გარკვეულ $x_0$ ელემენტისაკენ, მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის მოიძებნება

ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$f(x_{n_k})>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } k>N.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (*) უტოლობას, გვექნება

$$\mu+\frac{1}{n_k}>f(x_0)-\varepsilon, \text{ როდესაც } k>N.$$

მაშასადამე, $\mu\geqslant f(x_0)-\varepsilon$ და, რაკი $\varepsilon$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $\mu\geqslant f(x_0)$. მეორე მხრივ, $\mu\leqslant f(x_0)$, მაშასადამე, $\mu=f(x_0)$.

თუ $\mu=-\infty$, მსგავსი მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ არსებობს ისეთი $x^*\in E$ წერტილი, რომ $f(x^*)=-\infty$, თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $E$ კ ო მ პ ა ქ ტ ზ ე ზ ე მ ო დ ა ნ ნ ა ხ ე ვ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი ა ღ წ ე ვ ს თ ა ვ ი ს ზ უ ს ტ ზ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ს.

## § 21. გამოყენება კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის გამოკვლევაში

ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა [0,1] სეგმენტი და განვიხილოთ მასზე განსაზღვრული ისეთი ნამდვილი $\varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant m|t_1-t_2|, \tag{1.115}$$

სადაც $m$ მუდმივია, ხოლო $t_1,t_2\in[0,1]$ ნებისმიერი ორი წერტილია. ყველა ასეთი $\varphi(t)$ ფუნქციის სიმრავლე (საერთო $m$ მუდმივით) აღვნიშნოთ $C_m$-ით. ცხადია, ყოველი $\varphi(t)\in C_m$ ელემენტი არის უწყვეტი ფუნქცია. შემოვიღოთ $C_m$ სიმრავლეში ისეთივე მეტრიკა როგორიც $C(a,b)$ სივრცეში გვქონდა. $C_m$ სივრცე ამ მეტრიკით სრულია. მართლაც, ვთქვათ, მიმდევრობა $\{\varphi_k(t)\}\in C_m$ თანაბრად კრებადია $\varphi(t)$ ფუნქციისაკენ. გვექნება:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=\lim_{k\to\infty}|\varphi_k(t_1)-\varphi_k(t_2)|\leqslant m|t_1-t_2|,$$

სადაც $t_1,t_2\in[0,1]$ ნებისმიერი წერტილებია. ამრიგად, $\varphi(t)\in C_m$, ე. ი. $C_m$ არის სრული სივრცე. ადვილი შესამჩნევია, რომ $C_m$ სივრცე არაკომპაქტურია. მართლაც, ავიღოთ, მაგალითად, ფუნქციათა უსასრულო $\{\Psi_k(t)\}\subset C_m$ მიმდევრობა, სადაც $\Psi_k(t)=mt+k$, $m$ არის (1.115) უტოლობაში შემავალი ლიფშიცის მუდმივი ($k=1,2,\ldots$). ცხადია, რომ $\{\Psi_k(t)\}$ მიმდევრობიდან შეუძლებელია კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $C_m$ სივრცე არაკომპაქტურია.

გამოვყოთ $C_m$ სივრციდან ისეთი $\varphi(t)$ ელემენტების $C_N$ სიმრავლე, რომლებიც დააკმაყოფილებენ პირობას

$$|\varphi(t)|\leqslant N,$$

სადაც $N$ გარკვეული მუდმივია. ცხადია, $C_N\subset C_m\subset C(0,1)$. ჰილბერტს ეკუთვნის შემდეგი

**თეორემა 1.50** $C_N$ ს ი ვ რ ც ე კ ო მ პ ა ქ ტ ი ა.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $\varphi(t)\in C_N$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $R$ მართკუთხედში, რომლის წვეროების კოორდინატები იქნება $(0,-N)$, $(0,N)$,

$(1, N)$, $(1, -N)$. დავყოთ $R$ მართკუთხედის ის გვერდი, რომელიც $t$ ღერძის პარალელურია, $n$ თანატოლ ნაწილად, ხოლო ამავე მართკუთხედის ის გვერდი, რომელიც $\varphi(t)$ ღერძის პარალელურია, დავყოთ $kn$ თანატოლ ნაწილად, სადაც $n$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და $k$ არის $\frac{2N}{m}$ რიცხვის მთელი ნაწილი. თუ დაყოფის წერტილებზე $t$ და $\varphi(t)$ ღერძების პარალელურ წრფეებს გავავლებთ, მივიღებთ $R$ მართკუთხედის დანაწილებას მცირე მართკუთხედებად, რომელთა რიცხვი იქნება $kn^2$.

განვიხილოთ რაიმე $\varphi(t) \in C_N$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის შესაბამ წირზე ავიღოთ ისეთი ორი $M_1\left(t_1, \varphi(t_1)\right)$ და $M_2\left(t_2, \varphi(t_2)\right)$ წერტილი, რომლებიც მცირე მართკუთხედების ერთსა და იმავე ვერტიკალზე მდებარეობენ, მაშინ გვექნება:

$$|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n},$$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant m|t_1 - t_2| \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{2N}{kn}.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $M_1$ და $M_2$ წერტილები ერთდროულად, ან ერთ მცირე მართკუთხედს, ან ერთსა და იმავე ვერტიკალში მდებარე ორ მოსაზღვრე მართკუთხედს ეკუთვნის. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(t)$ წირს, მცირე მართკუთხედების ყოველ ვერტიკალში, ან ერთ მცირე მართკუთხედთან, ან ორ მოსაზღვრე მცირე მართკუთხედთან, აქვს საერთო წერტილები. ისიც ცხადია, რომ ყოველ $\varphi(t) \in C_N$ წირს საერთო წერტილები აქვს მცირე მართკუთხედების მხოლოდ გარკვეულ სასრულ რაოდენობასთან. ვინაიდან მცირე მართკუთხედების რიცხვი სასრულია, ხოლო $C_N$ უსასრულო სიმრავლეა, ამიტომ ამ უსასრულო სიმრავლეში იარსებებს უსასრულო რაოდენობა წირებისა, რომლებსაც ერთსა და იმავე მცირე მართკუთხედებთან ექნებათ საერთო წერტილები. ავღნიშნოთ ამ წირების სიმრავლე $C_N^{(1)}$ სიმბოლოთი: $C_N^{(1)} \subset C_N$. ამის შემდეგ, გავავლოთ ხელახლა კოორდინატთა ღერძების ისეთი პარალელური წრფეები, რომლებიც წინა მცირე მართკუთხედების გვერდებს შუაზე გაყოფს. თუ გავიმეორებთ მსჯელობას, რომლითაც ზემოთ $C_N$ სიმრავლიდან გამოვყავით $C_N^{(1)}$ სიმრავლე, დავრწმუნდებით, რომ $C^{(1)}{}_N$-დან შესაძლოა გამოვყოთ ისეთი წირების ახალი უსასრულო $C_N^{(2)}$ ქვესიმრავლე, რომლებსაც საერთო წერტილები ექნებათ ახალი დაყოფის ერთსა და იმავე მართკუთხედებთან. ამ წესით $C_N$ სიმრავლიდან გამოვყოფთ სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობას

$$C_N^{(1)} \supset C_N^{(2)} \supset C_N^{(3)} \supset \ldots \supset C_N^{(r)} \supset \ldots$$

ავიღოთ ნებისმიერი $C_N^{(r)}$ სიმრავლე. ამ სიმრავლის ყოველ წირს იმ მცირე მართკუთხედებთან, რომლებიც $r$-ჯერ დაყოფის შედეგად მიიღება, აქვს საერთო წერტილები. ვთქვათ, $\varphi_r^{(1)}$, $\varphi_r^{(2)} \in C_N^{(r)}$ ნებისმიერი ორი წირია. ვინაიდან $C_N^{(r)}$ სიმრავლის ყოველ წირს, ნებისმიერ ვერტიკალში, ან ერთ მცირე, ან ორ მოსაზღვრე მცირე მართკუთხედთან აქვს საერთო წერტილები და $r$ დაყოფის შემდეგ მიღებული მცირე მართკუთხედის ვერტიკალური გვერდის სიგრძეა $\frac{2N}{2^{r-1}kn}$, ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგ შეფასებას:

$$|\varphi_r^{(1)}(t)-\varphi_r^{(2)}(t)|\leqslant\frac{2N}{2^{r-1}kn}.$$

განვიხილოთ ახლა უსასრულო $\{\varphi_r(t)\}\subset C_N^{(r)}$ მიმდევრობა. იმის გამო, რომ $C_N^{(r+s)}\subset C_N^{(r)}$, როცა $s>0$, ამიტომ წინა შეფასების ძალით გვექნება

$$|\varphi_{r+s}(t)-\varphi_r(t)|<\frac{2N}{2^{r-1}kn}.$$

როგორც ჩანს უწყვეტ ფუნქციათა $\{\varphi_r(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია რაიმე უწყვეტი $\varphi(t)\in C_N$ ფუნქციისაკენ. ამრიგად, $C_N$ კომპაქტია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ავიღოთ მეტრული $C^{(1)}(0,1)$ სივრცე, რომლის ელემენტებია $[0,1)$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი $\varphi(t)$ ფუნქციები. განვიხილოთ კვადრატული ფუნქციონალი

$$\Phi(\varphi)=\int_0^1(A\varphi^2+B\varphi'^2)dt, \tag{1.115'}$$

სადაც $A=A(t)$, $B=B(t)\in C^{(1)}(0,1)$, $B(t)>0$, ხოლო ყოველი $\varphi(t)\in C^{(1)}(0,1)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_0^1\varphi^2(t)dt=1. \tag{1.116}$$

იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.116) პირობას, აღვნიშნოთ $\chi$ სიმბოლოთი. როგორც ცნობილია, (1.115') ფუნქციონალის გამოკვლევაზე მიიყვანება პირობითი ექსტრემუმის შესწავლა შემდეგი ფუნქციონალისა:

$$I(\varphi)=\int_0^1F(t,\varphi,\varphi')dt,$$

სადაც კონკურენციაში მონაწილე წირები უნდა აკმაყოფილებდნენ (1.116) პირობას. შევნიშნოთ, რომ იმ $\varphi(t)\in C^{(1)}(0,1)$ ფუნქციებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.116) პირობას, (1.115) ფუნქციონალი ქვემოდან შემოსაზღვრულია. მართლაც, გვაქვს შეფასება

$$\Phi(\varphi)\geqslant\min_{0\leqslant t\leqslant1}A(t)\int_0^1\varphi^2(t)dt+\int_0^1B(t)\varphi'^2(t)dt\geqslant\min_{0\leqslant t\leqslant1}A(t).$$

$\chi$ სიმრავლეზე (1.115) ფუნქციონალის ზუსტი ქვედა საზღვარი აღვნიშნოთ $\mu$-თი. დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ისეთი $\varphi^*(t)\in\chi$ ელემენტი, რომ $\Phi(\varphi^*)=\mu$.

შევჩერდეთ წინასწარ ორი დამხმარე დებულების დამტკიცებაზე.

**ლემა 1. 1.** თუ ნამდვილი რიცხვების სასრული $\{\xi_i\}_{i=0}^n$ მიმდევრობის ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$|\xi_{i+1}+\xi_{i-1}-2\xi_i|<K\quad(i=1,\ldots,\ n-1), \tag{1.117}$$

სადაც $K>0$ რაიმე რიცხვია, მაშინ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\left|\frac{\xi_s-\xi_r}{s-r}-\frac{\xi_k-\xi_s}{k-s}\right|\leqslant K\frac{k-r}{2}, \tag{1.118}$$

ს ა დ ა ც $0\leqslant r<s<k\leqslant n$.

მართლაც, დავწეროთ (1.117) უტოლობა, როცა $i=j+1, j+2,\ldots,s-1$ და შემდეგ ყველა ისინი შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\sum_{i=j+1}^{s-1}|\xi_{i+1}+\xi_{i-1}-2\xi_i|<K(s-j-1),$$

საიდანაც გვექნება

$$\left|\sum_{i=j+1}^{s-1}(\xi_{i+1}+\xi_{j-1}-2\xi i)\right|<K(s-j-1),$$

ანუ

$$[\xi_{j+1}+\xi_j-(\xi_s-\xi_{s-1})]\leqslant K(s-j-1).$$

თუ ამ უტოლობაში $j$ ნიშნაკს მიმდევრობით მივცემთ $j=r, r+1,\ldots,s-1$ მნიშვნელობებს და მიღებულ უტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$[\xi_s-\xi_r-(s-r)(\xi_s-\xi_{s-1})]\leqslant K\frac{(s-r-1)(s-r)}{2}.$$

გავყოთ ამ უტოლობის ორივე ნაწილი $s-r>0$ რიცხვზე, გვექნება

$$\left|\frac{\xi_s-\xi_r}{s-r}-(\xi_s-\xi_{s-1})\right|\leqslant K\,\frac{s-r-1}{2}.$$

ადგილი აქვს აგრეთვე უტოლობას:

$$\left|\frac{\xi_k-\xi_s}{k-s}+(\xi_s-\xi_{s-1})\right|\leqslant K\,\frac{k-s+1}{2},$$

რომელიც წინა უტოლობის ანალოგიურად მიიღება. უკანასკნელი ორი უტოლობის შეკრებით მივიღებთ (1.118) უტოლობას.

ლემა 1.2. თ უ $\varphi(t)\in C(0,1)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა წ ე რ ტ ი ლ თ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $t_1, t_2, t_3$ ს ა მ ე უ ლ ი ს ა თ ვ ი ს, ს ა დ ა ც $0\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant 1$, ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს პ ი რ ო ბ ა ს

$$\left|\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_2)}{t_3-t_2}\right|<K\frac{t_3-t_1}{2}, \tag{1.119}$$

ს ა დ ა ც $K$ დ ა დ ე ბ ი თ ი მ უ დ მ ი ვ ი ა, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $\varphi(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი, რ ო მ ე ლ ი ც უ წ ყ ვ ე ტ ი ა [0,1] ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე.

დავუშვათ, რომ რაიმე $t_0\in[0,1]$ წერტილზე $\varphi(t)$ ფუნქციის წარმოებული ან არ არსებობს, ან არსებობს, მაგრამ წყვეტილია. მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon>0$ რიცხვი, რომ $t_0$ წერტილის ნებისმიერ $\rho(t,t_0)<\delta$ მიდამოში მოიძებნება $t_1<t_2$ და $t_1'<t_2'$ წერტილები, რომლებისთვისაც შესრულდება უტოლობა

$$\left|\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{\varphi(t_2')-\varphi(t_1')}{t_2'-t_1'}\right|>\varepsilon. \tag{1.120}$$

თუ ახლა $t_3$ წერტილს განვსაზღვრავთ შემდეგი პირობიდან

$$K\frac{t_3-t_0}{2}=\frac{\varepsilon}{6}, \tag{1.121}$$

ხოლო $\delta$ რიცხვს იმდენად მცირეს ავიღებთ, რომ როცა $\rho(t,t_0)<\delta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\frac{K}{2}\rho(t,t_0)<\frac{\varepsilon}{6}, \tag{1.122}$$

მაშინ (1.119) პირობიდან გვექნება

$$\left|\frac{\varphi(t_3)-\varphi(t)}{t_3-t}-\frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_0)}{t_3-t_0}\right|<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{1.123}$$

დავწეროთ (1.119) უტოლობა წერტილთა $t_1$, $t_2$, $t_3$ და $t_1'$, $t_2'$, $t^{3'}$ ორი სამეულისათვის და ვისარგებლოთ (1.121), (1.122) და (1.123) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$\left|\frac{\varphi(t)_2-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{\varphi(t_3)-\varphi(t_0)}{t_3-t_0}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{\varphi(t_2')-\varphi(t_1')}{t_2'-t_1'}-\frac{\varphi(t_3')-\varphi(t_0)}{t_3'-t_0}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ ორი უტოლობის შეკრებით მივიღებთ

$$\left|\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{\varphi(t_2')-\varphi(t_1')}{t_2'-t_1'}\right|<\varepsilon. \tag{1.124}$$

ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა შეუთავსებელ (1.120), (1.124) ფორმულებზე და ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $\varphi^*=\varphi^*(t)\in X$ წირი, რომელზედაც (1.115) ფუნქციონალი აბსოლუტურ მინიმუმს მიაღწევს, ე. ი. შესრულდება $\Phi(\varphi^*)=\mu$ ტოლობა.

ვთქვათ, $\varphi(t)\in X$—ნებისმიერი ელემენტია. დავანაწილოთ $[0,1]$ სეგმენტი $t_0=0$, $t_1=\Delta t$, $t_2=2\Delta t,\ldots,t_{n-1}=(n-1)\Delta t$, $t_n=1$ წერტილებით ელემენტარულ შუალედებად, სადაც $\Delta t=\frac{1}{n}$. შევაერთოთ $(t_0,\varphi(t_0)),\ldots,(t_n,\varphi(t_n))$ წერტილები წრფის მონაკვეთებით, მივიღებთ $\varphi=\varphi(t)$ წირში ჩახაზულ $Q^{(n)}$ ტეხილს. ავიღოთ კვადრატული ფორმა:

$$\Phi^{(n)}=\Phi^{(n)}(\varphi(t_1),\ldots,\varphi(t_{n-1}))=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[A(t_i)\varphi^2(t_i)+B(t_i)\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{\Delta t}\right)^2\right]\Delta t, \tag{1.125}$$

სადაც $\varphi(t_i)$, $(i=0,\ldots,n-1)$, აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{i=0}^{n-1}\varphi^2(t_i)\Delta t=1. \tag{1.126}$$

განვიხილოთ $\Phi^{(n)}$ ფორმის აბსოლუტური მინიმუმი $X$ სიმრავლის იმ ელემენტებზე, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (1.126) პირობას. აღვნიშნოთ ეს მინიმუმი $\Phi_0^{(n)}$-ით. შევნიშნოთ, რომ $\varphi^{(n)}$ ფორმის აბსოლუტური მინიმუმი (1.126) პირობით უდრის $\frac{1}{\Delta t}\Phi^{n}$ ფორმის აბსოლუტურ მინიმუმს

$$\sum_{i=0}^{n-1}\varphi^2(t_i)=1$$

პირობით.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\liminf_{n\to\infty}\Phi_0^{(n)}\leqslant\mu.$$

მართლაც, არსებობს ისეთი $\varphi(t)\in\chi$ წირი, რომ

$$\varphi(t)=\mu+\varepsilon.$$

ვინაიდან $\varphi(t)\in C^{(1)}(0,1)$, ამიტომ $n$-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის შეგვიძლია $\varphi(t)$ ფუნქციას მიუახლოვდეთ ისეთი $Q^{(n)}$ ტეხილით, რომლის წვეროების კოორდინატები იქნება:

$$(i\Delta t,\ \varphi(t_i)),\ i=0,1,\ldots,n,\ \text{სადაც}\ \varphi(0)=\varphi(1)\ \text{და}$$

$$\Phi(\varphi)\geqslant\Phi^{(n)}(\varphi(t_1),\ldots,\varphi(t_{n-1}))-\varepsilon, \tag{1.127}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varphi^2(t_i)\Delta t=1+\varepsilon_1\ \ (|\varepsilon_1|<\varepsilon). \tag{1.128}$$

ავიღოთ გარდაქმნა

$$\overline{\varphi}(t_i)=\frac{\varphi(t_i)}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}$$

და დავწეროთ $\Phi^{(n)}$ ფორმა და (1.128) პირობა $\overline{\varphi}(t_1),\ldots,\overline{\varphi}(t_{n-1})$ არგუმენტებისათვის, გვექნება

$$\Phi^{(n)}(\overline{\varphi}(t_1),\ldots,\overline{\varphi}(t_{n-1}))=\frac{1}{1+\varepsilon_1}\Phi^{(n)}(\varphi(t_1),\ldots,\varphi(t_n))\geqslant\Phi_0^{(n)}, \tag{1.129}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\overline{\varphi}^2(t_i)\Delta t=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varphi^2(t_i)}{1+\varepsilon_1}=1. \tag{1.130}$$

გავითვალისწინოთ (1.127), (1.129) უტოლობანი და შევაფასოთ ქვემოდან (1.115) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციონალის პირობითი $\mu$ მინიმუმი, მივიღებთ

$$\mu\geqslant\Phi(\varphi)-\varepsilon\geqslant\Phi^{(n)}(\varphi(t_1),\ldots,(\varphi(t_{n-1}))-2\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{1+\varepsilon_1}\Big[(1+\varepsilon_1)^2\Phi^{(n)}(\overline{\varphi}(t_1),\ldots,\overline{\varphi}(t_{n-1}))-2\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon_1}\Phi^{(n)}(\overline{\varphi}(t_1),\ldots\overline{\varphi}(t_{n-1}))-2\varepsilon\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon_1}\Phi_0^{(n)}-2\varepsilon.$$

როცა $n\to\infty$. $\varepsilon$ და $\varepsilon_1$ რიცხვების ნებისმიერობის გამო, აქედან მივიღებთ

$$\mu\geqslant\liminf_{n\to\infty}\Phi_0^{(n)}. \tag{1.131}$$

დავწეროთ ახლა $\frac{1}{\Delta t}\Phi^{(n)}$ ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა, როცა $\sum_{i=0}^{n}\varphi^2(t_i)=1$. ეილერ-ლაგრანჟის წესის თანახმად, იმისათვის, რომ $Q^{(n)}$ ტეხილი განახორციელებდეს ხსენებულ ექსტრემუმს, აუცილებელია შესრულებული იყოს პირობა:

$$A(t_i)\varphi(t_i)-\left(B(t_i)\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{\Delta t}-B(t_{i-1})\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\Delta t}\right)\frac{1}{\Delta t}+\lambda_0^{(n)}\varphi(t_i)=0,$$

სადაც $\lambda_0^{(n)}$ მუდმივია და უდრის $\frac{1}{\Delta t}\Phi^{(n)}$ ფორმის უმცირეს საკუთრივ მნიშვნელობას: $\lambda_0^{(n)}=\Phi_0^{(n)}$. გამოვიყენოთ $B(t_i)=B(t_{i-1})+\Delta tB'(\xi_i)$ გარდაქმნა, სადაც $t_{i-1}<\xi_i<t_i$, და წინა განტოლება ახლა ასე ჩავწეროთ

$$\frac{\varphi(t_{i+1})\varphi(t_{i-1})\quad 2\varphi(t_i)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\Delta t}{B(t)}\left[A(t_i)\varphi(t_i)+B'(\xi_i)\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i+1})}{\Delta t}+\lambda_0^{(n)}\varphi(t_i)\right],$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\left|\frac{\varphi(t_{i+1})+\varphi(t_{i-1})-2\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\leqslant a|\varphi(t_i)|\Delta t+$$

$$+b\left|\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\Delta t, \tag{1.132}$$

სადაც

$$a=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{A(t)-\lambda_0^{(n)}}{B(t)},\quad b=\frac{\max\limits_{1\leqslant t\leqslant 1}B'(t)}{\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}B(t)}.$$

დავწეროთ ეს უტოლობა $i$ ნიშნაკის $i=k, k+1,\ldots,s$ მნიშვნელობებისათვის და ყველა მიღებული უტოლობა შევკრიბოთ, გვექნება

$$\sum_{i=k}^{s}\left|\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_{i-1})-2\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\leqslant a\sum_{i=k}^{s}|\varphi(t_i)|\Delta t+$$

$$+b\sum_{i=k}^{s}\left|\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\Delta t.$$

ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ჯამის შემდგომი გარდაქმნისათვის გამოვიყენოთ შვარცის უტოლობა, ხოლო მეორე ჯამის გარდაქმნისათვის ვისარგებლოთ უტოლობით

$$\left|\sum_{i=k}^{s} A(t_i)\varphi^2(t_i)\Delta t+\sum_{i=k}^{s} B(t_i)\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{\Delta t}\right)^2\Delta t\right|\leqslant|\mu|+1,$$

რომელსაც, (1.131) შეფასების ძალით, ადგილი აქვს მინიმალური $Q^{(n)}$ ტეხილისათვის, როცა ნიშნაკი $n$ საკმარისად დიდია. ადვილი გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ

$$\sum_{i=k}^{s}\left|\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_{i-1})-2\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\leqslant a+b\omega, \tag{1.133}$$

სადაც

$$\omega=\frac{1}{\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}B(t)}(|\mu|+1+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}A(t)).$$

ახლა ისიც შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\sum_{i=k}^{s}\left|\frac{\varphi(t_{i+1})+\varphi(t_{i-1})-2\varphi(t_i)}{\Delta t}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|\frac{\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)}{\Delta t}-\frac{\varphi(t_{s+1})-(t_s)}{\Delta t}\right|,$$

რომლის დახმარებით (1.133) უტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\left|\frac{\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)}{\Delta t}-\frac{\varphi(t_{s+1})-\varphi(t_s)}{\Delta t}\right|\leqslant a+b\omega. \tag{1.134}$$

ვინაიდან $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, როცა $s$ ნიშნაკი მიიღებს $1, 2,\ldots,n-1$ მნიშვნელობებს, მაშინ ფარდობა $\dfrac{\varphi(t_{s+1})-\varphi(t_s)}{\Delta t}$ ერთხელ მაინც მიიღებს დადებით მნიშვნელობას და ერთხელ მაინც მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობას. ეს კი საკმარისია იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left|\frac{\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)}{\Delta t}\right|\leqslant a+b\omega=K=\text{const}. \tag{1.135}$$

დავწეროთ ეს უტოლობა $k=0,1,\ldots,r\leqslant n-1$ მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ ყველა ისინი შევკრიბოთ. ამის შემდეგ ადვილად მივიღებთ

$$|\varphi(t_r)|\leqslant K. \tag{1.136}$$

(1.135) და (1.136) უტოლობების დახმარებით ახლა შესაძლოა (1.132) უტოლობა ასე დავაზუსტოთ:

$$\left|\frac{\varphi(t_{i+1})+\varphi(t_{i-1})-2\varphi(t_i)}{\Delta t^2}\right|\leqslant(a+b)K=K_1=\text{const}.$$

გამოვიყენოთ 1.1 ლემა, მივიღებთ

$$\left|\frac{\varphi(t_s)-\varphi(t_r)}{(s-r)\Delta t}-\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_s)}{(k-s)\Delta t}\right|\leqslant K_2\frac{k-r}{2}\Delta t. \tag{1.137}$$

(1.135) და (1.136) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ პოლიგონალურ ფუნქციათა $\{Q^{(n_k)}(t)\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს ჰილბერტის თეორემის პირობებს ბრტყელ წირთა ოჯახის კომპაქტურობის შესახებ (იხ. თეორემა 1.42). ვთქვათ, $\{Q^{(n)}(t)\}$ არის ამ ოჯახიდან გამოყოფილი თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ფუნქცია იყოს $\varphi^*(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(t)=\varphi^*(t).$$

$\varphi^*(t)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,1] სეგმენტზე და, გარდა ამისა, $\varphi^*(0)=\varphi^*(1)=0$. ამასთანავე, თანახმად (1.137) უტოლობისა, რიცხვთა ნებისმიერი $t_1<t_2<t_3$ სამეულისათვის [0,1] სეგმენტიდან გვაქვს

$$\left|\frac{\varphi^*(t_2)-\varphi^*(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{\varphi^*(t_3)-\varphi^*(t_2)}{t_3-t_2}\right|\leqslant K_2\frac{t_3-t_1}{2}.$$

თანახმად 1.2 ლემისა, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi^*(t)$ ფუნქციას [0,1] სეგმენტზე აქვს უწყვეტი წარმოებული. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\varphi^*(t)$ აკმაყოფილებს აგრეთვე (1.116) პირობას.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ $\varphi^*(t)$ არის სწორედ ის ფუნქცია, რომლისთვისაც $\Phi(\varphi^*)=\mu$. მართლაც, ავაგოთ $\{\Psi_n(t)\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$\Psi_n(t)=\frac{Q^{(n)}(t_{k+1})-Q^{(n)}(t_k)}{\Delta t}$$

და $t_k<t<t_k+\Delta t=t_{k+1}$.

$\{\Psi_n(t)\}$ მიმდევრობა თანაბრად იკრიბება $\varphi^{*\prime}$ ფუნქციისაკენ, რაც გამომდინარეობს (1.137) უტოლობიდან. ნათქვამის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(Q^{(n)})=\int_0^1(A\varphi^{*2}+B\varphi^{*\prime 2})dt=\Phi(\varphi^*)$$

და ვინაიდან (1.131) უტოლობის ძალით $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(Q^{(n)})=\Phi_0$, ამიტომ $\Phi(\varphi^*)=\Phi_0=\mu$.

---

## თავი II

# ტოპოლოგიური სივრცე

ტოპოლოგია თანამედროვე გეომეტრიის ყველაზე ახალგაზრდა განშტოებაა. მისი იდეური საფუძვლები ჯერ კიდევ ა. პუანკარეს, მ. ფრეშეს, ფ. რისის და სხვების შრომებში გვხვდება. ტოპოლოგია ორი ძირითადი მიმართულებით ვითარდებოდა. ეს მიმართულებებია ე. წ. სიმრავლურ-თეორიული ტოპოლოგია და კომბინატორული, ანუ ალგებრული ტოპოლოგია. უკანასკნელი რამდენიმე ათეული წლის განმავლობაში პ. ალექსანდროვის, ს. ლეფშეცის, ვიეტორისის, ჩეხისა და სხვათა გამოკვლევებმა შესაძლებელი გახადა ამ ორი მიმართულების საგრძნობი დაახლოება.

ქვევით ჩვენ შევისწავლით სიმრავლურ-თეორიული ტოპოლოგიის მხოლოდ ზოგიერთ მარტივ საკითხს.

## § 1. ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრა

მეტრული სივრცის მრავალი განსაზღვრა და დებულება უშუალოდ არ არის დაკავშირებული ამ სივრცის მეტრიკის ცნებასთან, არამედ დაკავშირებულია სივრცის წერტილის (ელემენტის) მიდამოს ცნებასთან. წერტილის მიდამოს ცნება კი ისე უნდა იყოს განსაზღვრული, რომ აღებულ სივრცეში მოვახერხოთ გამოვყოთ ყველა ღია ქვესიმრავლის სისტემა.

ნებისმიერი ბუნების ელემენტთა $X$ სიმრავლეს **ტოპოლოგიური სივრცე** ეწოდება, თუ მასში გამოყოფილია ქვესიმრავლეები, რომლებსაც $X$ სივრცის ღია სიმრავლეები ჰქვია, ამასთანავე იგულისხმება, რომ შესრულებულია შემდეგი აქსიომები:

1) თვით $X$ და ცარიელი სიმრავლე ღია სიმრავლეებია;

2) თუ მოცემულია ნებისმიერი სისტემა ღია სიმრავლეებისა, მაშინ მათი ჯამი ღია სიმრავლეა, ხოლო თუ ღია სიმრავლეთა სისტემა სასრულია, მაშინ ამ სიმრავლეთა თანაკვეთაც ღია სიმრავლეა.

როცა $X$ სივრცის ღია ქვესიმრავლეების სისტემა აკმაყოფილებს 1) და 2) აქსიომებს, მაშინ იტყვიან, რომ $X$ **სივრცეში შემოღებულია ტოპოლოგია.**

ვთქვათ, $M$ არის $X$ სივრცის ნებისმიერი ღია სიმრავლე. $X—M$ სიმრავლეს **ჩაკეტილი სიმრავლე** ეწოდება.

ტოპოლოგიური სივრცის 1) და 2) აქსიომების ძალით, ვინაიდან ცარიელი სიმრავლე ღია სიმრავლეა, ამიტომ მისი დამატება $X$ ჩაკეტილია. პირიქით, რადგანაც $X$ ღია სიმრავლეა, ამიტომ მისი დამატება, ე. ი. ცარიელი სიმრავლე, ჩაკეტილი სიმრავლეა.

როგორც ვიცით, მეტრულ სივრცეში ნებისმიერი რიცხვის ღია სიმრავლეთა ჯამი და ნებისმიერი სასრული რიცხვის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა

ღია სიმრავლეებია. ამის გამო ყოველი მეტრული სივრცე ტოპოლოგიური სივრცე იქნება.

ტოპოლოგიური სივრცის მეორე მაგალითად შეგვიძლია განვიხილოთ $X$ სიმრავლე, რომელიც მხოლოდ ორი $a$ და $b$ ელემენტისაგან შედგება. ამ სივრცის ღია სიმრავლეებად მივიღოთ თვით $X$ სიმრავლე, ცარიელი სიმრავლე და სიმრავლე, რომელიც მხოლოდ ერთი $a$ ელემენტისაგან შედგება. ცხადია, მაშინ შესრულებული იქნება 1) და 2) აქსიომები. ამასთანავე, ჩაკეტილი სიმრავლეები იქნება თვით $X$, ცარიელი სიმრავლე და მხოლოდ ერთი $b$ ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე.

ვთქვათ, $X$ სიმრავლეში ორი სხვადასხვა წესით არის შემოღებული ტოპოლოგია. ამ შემთხვევაში ერთი და იგივე $X$ სიმრავლე წარმოგვიდგება; როგორც ორი სხვადასხვა, მაგრამ ერთი და იმავე წერტილებისაგან შედგენილი ტოპოლოგიური $X_1$ და $X_2$ სივრცე. აღვნიშნოთ $G_1$ და $G_2$-ით შესაბამისად ღია ქვესიმრავლეების სისტემები $X_1$ და $X_2$ სივრცეებში. თუ $G_2 \subset G_1$, მაშინ იტყვიან, რომ $X_1$ სივრცის ტოპოლოგია უფრო ძლიერია, ვიდრე $X_2$ სივრცისა.

ავიღოთ ტოპოლოგიური $X$ სივრცე და მასში მოთავსებული ყველა ღია ქვესიმრავლის $G$ სისტემა. შემოვიღოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილის მიდამოს ცნება. $G$ სისტემის ყოველ ღია სიმრავლეს, რომელიც $x$ წერტილს შეიცავს, ამ წერტილის მ ი დ ა მ ო ეწოდება.

ვთქვათ, ახლა $M \subset X$ რაიმე სიმრავლეა. $x \in M$ წერტილს ეწოდება $M$ სიმრავლის შ ი გ ა წ ე რ ტ ი ლ ი $X$ ტოპოლოგიური სივრცის მიმართ, თუ არსებობს $x$ წერტილის ერთი მაინც ისეთი მიდამო, რომელიც $M$ სიმრავლეს ეკუთვნის. $x$ წერტილს ეწოდება $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ ამ წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილების უსასრულო სიმრავლეს.

ტოპოლოგიური $X$ სივრცის $M$ სიმრავლის შეხების წერტილი ისევე განისაზღვრება, როგორც მეტრულ სივრცეში. სახელდობრ, თუ $x \in X$ წერტილი ისეთია, რომ მისი ყოველი მიდამო $M$ სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც შეიცავს, მაშინ $x$ წერტილს ეწოდება $M$ სიმრავლის შ ე ხ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი. ამ განსაზღვრიდან კერძოდ გამომდინარეობს დაგროვების წერტილის ცნება. მართლაც, $M$ სიმრავლის შეხების $x \in X$ წერტილი, მაშინ იქნება $M$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, როცა $x$ წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. $M \subset X$ სიმრავლის შეხების ყველა წერტილის სიმრავლეს ეწოდება $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ჩ ა კ ე ტ ვ ა ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში და აღინიშნება $\overline{M}$-ით.

$X$ სიმრავლეს, რომელშიც შემოღებულია სიმრავლის ჩაკეტვის ოპერაცია, უწოდებენ ზ ო გ ა დ ტ ო პ ო ლ ო გ ი უ რ ს ი ვ რ ც ე ს.

შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ $M \subset X$ სიმრავლის $\overline{M}$ ჩაკეტვა $X$ ტოპოლოგიურ სივრცეში ემთხვევა $X$ სივრცის ყველა იმ ჩაკეტილი სიმრავლეების თანაკვეთას, რომლებიც $M$ სიმრავლეს შეიცავენ.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $M$ სიმრავლის ყველა შიგა წერტილის $N$ სიმრავლე ღია სიმრავლეა და $N \subset M$. სხვაობას $\overline{M}-N$ ეწოდება $M$ სიმრავლის ს ა ზ ღ ვ ა რ ი $X$ სივრცის მიმართ.

რაიმე $M$ სიმრავლის $\overline{M}$ ჩაკეტვას $X$ ტოპოლოგიურ სივრცეში ისეთივე თვისებები აქვს, როგორიც სიმრავლის ჩაკეტვას მეტრულ სივრცეში. აი ზოგი მათგანი:

α) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2, \quad M_1, M_2 \subset X,$

β) $M \subset \overline{M},$

γ) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

δ) ცარიელი სიმრავლის ჩაკეტვა ცარიელი სიმრავლეა. ამასთანავე, ადვილი შესამჩნევია, რომ ჩაკეტილი სიმრავლე ემთხვევა თავის ჩაკეტვას $X$ სივრცეში.

ზემოთ ჩვენ შემოვიღეთ ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრა ისეთი ღია სიმრავლეების სისტემის საშუალებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ 1) და 2) აქსიომებს. სხვათა შორის, ტოპოლოგიური სივრცის ცნება შეიძლება შემოვიღოთ ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლეების სისტემის საშუალებითაც, რომლებიც დააკმაყოფილებენ გარკვეულ აქსიომებს. სახელდობრ, ვუწოდოთ $X$ სიმრავლეს ტოპოლოგიური სივრცე, თუ ამ სიმრავლეში განსაზღვრულია ისეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ აქსიომებს:

1′) თვით $X$ და ცარიელი სიმრავლე ჩაკეტილი სიმრავლეებია;

2′) ნებისმიერი რიცხვის ჩაკეტილი სიმრავლეების თანაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა და სასრული რიცხვის ჩაკეტილი სიმრავლეთა ჯამი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრას შესაძლოა საფუძვლად დავუდოთ აგრეთვე სიმრავლის ჩაკეტვის ცნებაც, თუ ზემოთ ჩამოთვლილ α)—δ) პირობებს მივიჩნევთ აქსიომებად, რომლებსაც სიმრავლის ჩაკეტვა უნდა აკმაყოფილებდეს. თუ $X$ სიმრავლეში ტოპოლოგიას ამ წესით შემოვიღებთ, მაშინ ჩაკეტილი სიმრავლე განისაზღვრება როგორც ისეთი, რომელიც თავის ჩაკეტვას ემთხვევა $X$ სიმრავლეში, ხოლო ღია სიმრავლე კი განისაზღვრება როგორც ჩაკეტილი სიმრავლის დამატება.

## § 2. ტოპოლოგიური გადასახვა

ვთქვათ, $X$ და $Y$ ტოპოლოგიური სივრცეებია და ვთქვათ, $U$ ოპერატორი $X$ სივრცეს გადასახავს $Y$ სივრცეში. ცალსახა $U$ გადასახვა უწყვეტია $x \in X$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $M \subset X$ სიმრავლისათვის, რომლის $\overline{M}$ ჩაკეტვა შეიცავს $x$ წერტილს, გვაქვს: $U(x) \in \overline{U(M)}$, სადაც $U(M)$ არის $M$ სიმრავლის სახე $Y$ სივრცეში, ხოლო $\overline{U(M)}$ მისი ჩაკეტვაა $Y$ სივრცეში. როცა $U$ უწყვეტია $X$ სივრცის ნებისმიერ წერტილში, მაშინ $U$ გადასახვა უწყვეტია $X$ სივრცეში.

უწყვეტი გადასახვის განსაზღვრა შეიძლება შევცვალოთ შემდეგი ეკვივალენტური განსაზღვრებით:

1) იტყვიან, რომ $X$ სივრცის $U$ გადასახვა $Y$ სივრცეში უწყვეტია, თუ $Y$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი $B$ სიმრავლის $U^{-1}(B)$ პირველსახე ჩაკეტილი სიმრავლეა $X$ სივრცეში.

2) $X$ სივრცის $Y$ სივრცეში $U$ გადასახვა უწყვეტია, თუ $Y$ სივრცის ყოველი ღია $A$ სიმრავლის $U^{-1}(A)$ პირველსახე ღია სიმრავლეა $X$ სივრცეში.

3) $X$ სივრცის $Y$ სივრცეში $U$ გადასახვა უწყვეტია, თუ ნებისმიერი $C \subseteq X$ სიმრავლისათვის $U(\overline{C}) \subseteq \overline{U(C)}$.

ვთქვათ, უწყვეტი $U$ გადასახვა ტოპოლოგიური $X$ სივრცისა ტოპოლოგიურ

$\dot{Y}$ სივრცეზე არის ურთიერთ ცალსახა გადასახვა. ვთქვათ, გარდა ამისა, $\dot{Y}$ სივრცის შებრუნებული $U^{-1}$ გადასახვაც $X$ სივრცეზე უწყვეტია, მაშინ $U$ გადასახვას *ურთიერთ უწყვეტს*, ანუ *ტოპოლოგიურ გადასახვას* უწოდებენ $X$ სივრცისა $Y$ სივრცეზე. ამ შემთხვევაში $X$ და $Y$ სივრცეებს, ისე როგორც მეტრული სივრცეების შემთხვევაში, ურთიერთ *ჰომეომორფული* სივრცეები ეწოდება.

## § 3. ტოპოლოგიური ნამრავლი

მრავალი საკითხის შესწავლაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ტოპოლოგიური სივრცეების ე. წ. *ტოპოლოგიური ნამრავლის* ცნება. ტოპოლოგიური სივრცეების სასრული $X_1, X_2, \ldots, X_n$ მიმდევრობის *ტოპოლოგიური* $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *ნამრავლი ეწოდება* ყველა დალაგებული $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სისტემის სიმრავლეს, სადაც $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.

სივრცეების ტოპოლოგიურ ნამრავლში ელემენტის მიდამოს ცნება შემდეგნაირად შემოაქვთ. ვთქვათ, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ტოპოლოგიური ნამრავლის ნებისმიერი ელემენტია. განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების რაიმე მიდამოები $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სივრცეებში. ამ მიდამოების ტოპოლოგიურ ნამრავლს ეწოდება $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ელემენტის მიდამო. თუ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ტოპოლოგიურ ნამრავლში ამ წესით შემოვიღებთ ტოპოლოგიას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ტოპოლოგიური ნამრავლის $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ელემენტის ორი ნებისმიერი მიდამოს თანაკვეთა ამ ელემენტის მიდამოს შეიცავს. გარდა ამისა, თუ $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ არის $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ელემენტის $O(x_1, x_2, \ldots x_n)$ მიდამოს რაიმე ელემენტი, მაშინ არსებობს $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ ელემენტის ისეთი $O'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ მიდამო, რომელიც ეკუთვნის $O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მიდამოს.

განვიხილოთ ახლა ტოპოლოგიურ $X_\alpha$ სივრცეთა $\{X_\alpha\}$ სიმრავლე. ამ სიმრავლის ყველა სივრცის ტოპოლოგიური $\prod_\alpha X_\alpha$ ნამრავლი ეწოდება ისეთ $x = \{x_\alpha\}$ სისტემების სიმრავლეს, რომელშიც ყოველი $x_\alpha$ ერთ გარკვეულ $X_\alpha$ სივრცეს ეკუთვნის.

ტოპოლოგია $\prod_\alpha X_\alpha$ ნამრავლში შემოღებული იყო ა. ტიხონოვის მიერ შემდეგნაირად: ვთქვათ, $x \in \prod_\alpha X_\alpha$ ნებისმიერი ელემენტია. მისი მიდამოების ასაგებად ავიღოთ $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}$ ელემენტების ნებისმიერი სასრული სიმრავლე, სადაც $x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}$ $(i=1,\ldots, p)$. განვიხილოთ $O(x_{\alpha_i}) \subset X_{\alpha_i}$ მიდამოები. $x$ ელემენტის მიდამო ტოპოლოგიურ $\prod_\alpha X_\alpha$ ნამრავლში იყოს ყველა იმ $y = \{y_\alpha\}$ ელემენტის სიმრავლე, რომელშიც $y_{\alpha_i} \in O(x_{\alpha_i})$, ხოლო დანარჩენი $y_\alpha$ ნებისმიერად არიან აღებული შესაბამ $X_\alpha$ სივრცეებში. როცა ნიშნაკი $p$ გაირბენს მთელი რიცხვების ყველა შესაძლო სასრულ ჯგუფებს მივიღებთ $x$ ელემენტის ყველა მიდამოს.

მოვიყვანოთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ტოპოლოგიური ნამრავლის მაგალითები.

1. სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე ორი წრფის ტოპოლოგიური ნამრავლია.

2. ევკლიდეს $n$ განზომილებიანი სივრცე $n$ წრფის ტოპოლოგიური ნამრავლია.

3. ვთქვათ, წრეწირი ბრუნავს ისეთი ღერძის გარშემო, რომელიც ამ წრეწირის სიბრტყეში მდებარეობს, მაგრამ მას არ კვეთს. ბრუნვის შედეგად მიღებულ ზედაპირს ტ ო რ ი ე წ ო დ ე ბ ა. ტორი წარმოადგენს ორი წრეწირის ტოპოლოგიურ ნამრავლს.

თეორემა 2.1. ო რ ი მ ე ტ რ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ი ს ტ ო პ ო ლ ო გ ი უ რ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი მ ე ტ რ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ა.

ვთქვათ, $X$ და $Y$ მეტრული და მაშასადამე, ტოპოლოგიური სივრცეებია, რომელთა მეტრიკა, შესაბამისად, იყოს $\rho(x, x')$ და $\rho(y, y')$, სადაც $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$. ამ სივრცეების ტოპოლოგიურ $[X, Y]$ ნამრავლში მეტრიკა შემოვიღოთ შემდეგი ტოლობით:

$$\rho[(x, y); (x', y')] = \sqrt{\rho^2(x, x') + \rho^2(y, y')}.$$

ცხადია, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული მეტრიკა აკმაყოფილებს იგივეობისა და სიმეტრიის აქსიომებს.

დავამტკიცოთ, რომ იგი აკმაყოფილებს სამკუთხედის აქსიომასაც. ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in [X, Y]$ სამი ელემენტისათვის, სადაც $x, x', x'' \in X$, $y, y', y'' \in Y$, შესრულდება უტოლობა:

$$\rho[(x, y); (x'', y'')] \leqslant \rho[(x, y); (x', y')] + \rho[(x', y'); (x'', y'')]. \qquad (2.1)$$

გამოვიდეთ იგივეობიდან:

$$\left[\sqrt{\rho^2(x, x') + \rho^2(y, y')} + \sqrt{\rho^2(x', x'') + \rho^2(y', y'')}\right]^2 =$$
$$= \rho^2(x, x') + \rho^2(x', x'') + \rho^2(y, y') + \rho^2(y' y'') +$$
$$+ 2\sqrt{[\rho(x, x')\rho(x', x'') + \rho(y, y')\rho(y', y'')]^2 + [\rho(x, x')\rho(y', y'') - \rho(y, y')\rho(x', x'')]^2}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\left[\sqrt{\rho^2(x, x') + \rho^2(y, y')} + \sqrt{\rho^2(x', x'') + \rho^2(y', y'')}\right]^2 \geqslant \rho^2(x, x') + \rho^2(x', x'') +$$
$$+ \rho^2(y, y') + \rho^2(y', y'') + 2[\rho(x, x')\rho(x', x'') + \rho(y, y')\rho(y', y'')] =$$
$$= [\rho(x, x') + \rho(x', x'')]^2 + [\rho(y, y') + \rho(y', y'')]^2$$

და ვინაიდან

$$\rho(x, x'') \leqslant \rho(x, x') + \rho(x', x''),$$
$$\rho(y, y'') \leqslant \rho(y, y') + \rho(y' y''),$$

ამიტომ წინა უტოლობიდან გვექნება

$$\sqrt{\rho^2(x, x') + \rho^2(y, y')} + \sqrt{\rho^2(x', x'') + \rho(y', y'')} \geqslant \sqrt{\rho^2(x, x'') + \rho^2(y, y'')}.$$

თეორემაც დამტკიცებულია.

## § 4. ტოპოლოგიური სივრცის ბმულობა

იტყვიან, რომ ტოპოლოგიური სივრცე ბ მ უ ლ ი ა, თუ შეუძლებელია იგი დავშალოთ ორი ჩაკეტილი და არაცარიელი სიმრავლის ჯამად, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილი. სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება ტოპოლოგიურ სივრცეში მოთავსებული სიმრავლის ბმულობა. სახელდობრ,

$M \subset X$ სიმრავლე ბ მ უ ლ ი ა თუ იგი შეუძლებელია წარმოდგენილი იყოს როგორც ჯამი ორი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლისა, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილი. ჩაკეტილ ბმულ სიმრავლეს კ ო ნ ტ ი ნ უ უ მ ს უწოდებენ. მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სივრცე ბმული სივრცეა. სიმრავლე, რომელიც მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგება, ბმულია. სიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა ნამდვილი რიცხვისაგან, გარდა ნულისა, არაბმული სიმრავლეა.

თეორემა 2.2. ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა ყ ო ვ ე ლ ი ს ე გ მ ე ნ ტ ი კ ო ნ ტ ი ნ უ უ მ ს წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს.

ვთქვათ, $[a, b]$ ნამდვილ რიცხვთა სივრცის ნებისმიერი სეგმენტია. დავუშვათ, რომ $[a, b]$ არ არის ბმული სიმრავლე. მაშინ იგი წარმოიდგინება ისეთი ორი არაცარიელი ჩაკეტილი $N_1$ და $N_2$ სიმრავლის ჯამის სახით, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილი. ვთქვათ, $x \in N_1$ ნებისმიერი წერტილია და $d = \rho(x, N_2)$. ცხადია, $d > 0$ და არსებობს ერთი მაინც ისეთი $y \in N_2$ წერტილი, რომ $\rho(x, y) = d$. ავიღოთ $x$ წერტილის ღია სფერული $S(x, d)$ მიდამო. ამ სფეროს შიგნით არ მოთავსდება $N_2$ სიმრავლის არცერთი წერტილი. ახლა განვიხილოთ $y$ წერტილის ნებისმიერი ღია სფერული $\varepsilon$—მიდამო $S(y, \varepsilon)$. ცხადია, ეს მიდამო შეიცავს $N_1$ სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს და, მაშასადამე, $y$ არის $N_1$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ვინაიდან, დაშვების თანახმად, $N_1$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $y \in N_1$. ამრიგად, როგორც ჩანს, $y \in N \cap {}_1 N_2$, რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.3. თუ $M_1$ და $M_2$ ტ ო პ ო ლ ო გ ი უ რ ი $X$ ს ი ვ რ ც ი ს ო რ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა, რ ო მ ლ ე ბ ს ა ც ა რ ა ა ქ ვ თ ს ა ე რ თ ო წ ე რ ტ ი ლ ი დ ა ბ მ უ ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე $M \subset M_1 \cup M_2$, მ ა შ ი ნ $M$ ე კ უ თ ვ ნ ი ს ა ნ $M_1$ ა ნ $M_2$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვთქვათ, თეორემის ყველა პირობა შესრულებულია, მაგრამ $M$ მთლიანად არ ეკუთვნის არც $M_1$ და არც $M_2$ სიმრავლეს. ვინაიდან, პირობის თანახმად, $M \subset M_1 \cup M_2$, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას

$$M = (M \cap M_1) \cup (M \cap M_2). \tag{2.2}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში $M \cap M_1$ და $M \cap M_2$ შესაკრებნი ისეთი ჩაკეტილი არაცარიელი სიმრავლეებია, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილი. გამოდის, რომ ბმული $M$ სიმრავლე (2.2) ტოლობით წარმოდგენილია როგორც ჯამი ორი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლისა, რომლებსაც არ აქვთ საერთო წერტილი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 2.4. თ უ ტ ო პ ო ლ ო გ ი უ რ ი $X$ ს ი ვ რ ც ი ს ყ ო ვ ე ლ ი ო რ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ე კ უ თ ვ ნ ი ს ბ მ უ ლ $M \subset X$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს, მ ა შ ი ნ $X$ ს ი ვ რ ც ე ბ მ უ ლ ი ა.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $X$ არ არის ბმული სივრცე. მაშინ იგი დაიშლება ორი ისეთი არაცარიელი ჩაკეტილი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლის ჯამად, რომლებსაც არ აქვთ საერთო წერტილი: $X = M_1 \cup M_2$. ვთქვათ, $x \in M_1$ და $y \in M_2$ ნებისმიერი ელემენტებია. თეორემის პირობის თანახმად $x, y \in M \subset X = M_1 \cup M_2$. წინა თეორემის ძალით, ბმული $M$ სიმრავლე ეკუთვნის ან $M_1$ ან $M_2$ სიმრავლეს. ვთქვათ, მაგალითად, რომ $M \subset M_1$. მაშინ, ცხადია, $x, y \in M_1$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $x \in M_1$, $y \in M_2$ და $M_1, M_2$ სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტი. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 2.5.** *ვთქვათ, $X$ ტოპოლოგიური სივრცეა და $M_1$ და $M_2$ მისი ბმული სიმრავლეებია, რომელთა თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე, მაშინ $M=M_1 \cup M_1$ ბმული სიმრავლეა.*

მართლაც, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: $M=M_1 \cup M_2$, $M^*=M_1 \cap M_2$. ცხადია. $M^*$ სიმრავლე არ არის ცარიელი. დავუშვათ, რომ $M$ არ არის ბმული. მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი არაცარიელი ისეთი ჩაკეტილი $P_1$ და $P_2$ სიმრავლის ჯამი, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა: $M=P_1 \cup P_2$, სადაც $P_1 \cap P_2$ ცარიელი სიმრავლეა. ვთქვათ, $x \in M^*$ რაიმე ელემენტია, მაშინ $x \in M$. ვინაიდან $P_1$ და $P_2$ სიმრავლეთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა და $M=P_1 \cup P_2$, ამიტომ $x$ ელემენტი ეკუთვნის ან $P_1$ ან $P_2$ სიმრავლეს. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x \in P_1$. ავიღოთ $P_2$ სიმრავლიდან ნებისმიერი $y$ ელემენტი. ცხადია, $y \in M$, და რადგანაც $M=M_1 \cup M_2$, ამიტომ $y$ ელემენტი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთს მაინც მიეკუთვნება. ვთქვათ, $y \in M_1$. გვაქვს

$$M_1=(M_1 \cap P_1) \cup (M_1 \cap P_2). \tag{2.3}$$

შევნიშნოთ, რომ $M_1 \cap P_1$ არ არის ცარიელი სიმრავლე, რადგანაც $x \in M_1 \cap P_1$. ასევე $M_2 \cap P_2$ არ არის ცარიელი სიმრავლე, ვინაიდან $y \in M_1 \cap P_2$. გარდა ამისა, $M_1 \cap P_1$ და $M_1 \cap P_2$ სიმრავლეები ჩაკეტილი არიან და მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ამრიგად, (2.3) ტოლობის მიხედვით, $M_1$ სიმრავლე წარმოდგენილია ორი ისეთი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლის ჯამის სახით, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M_1$ არ არის ბმული სიმრავლე, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ თუ $y \in M_2$, მაშინ $M_2$ არ იქნება ბმული სიმრავლე. მიღებული წინააღმდეგობები ამტკიცებს თეორემას.

**თეორემა 2.6.** *ვთქვათ, ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში მოცემულია ბმულ სიმრავლეთა ისეთი $\{M_\alpha\}$ სისტემა, რომ $\bigcap_\alpha M_\alpha$ არ არის ცარიელი სიმრავლე; მაშინ $\bigcup_\alpha M_\alpha$ ბმული სიმრავლე იქნება.*

თეორემის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $\bigcup_\alpha M_\alpha$ არ არის ბმული. მაშინ ეს უკანასკნელი დაიშლება ისეთი ორი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლის ჯამის სახით, რომელთა თანაკვეთა ცარიელია. აღვნიშნოთ ხსენებული დაშლა ასე:

$$\bigcup_\alpha M_\alpha = M_{(1)} \cup M_{(2)}.$$

ამ პირობებში, ზემოთ დამტკიცებულის ძალით (იხ. თეორემა 2.3), ყოველი $M_\alpha$ სიმრავლე ეკუთვნის ან $M_{(1)}$ ან $M_{(2)}$ სიმრავლეს. ვინაიდან $\bigcap_\alpha M_\alpha$ ცარიელი სიმრავლე არ არის, ამიტომ არსებობს ერთი მაინც $x \in \bigcap_\alpha M_\alpha$ ელემენტი, ე. ი. $x \in M_\alpha$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x$ ელემენტი ეკუთვნის ან $M_{(1)}$ ან $M_{(2)}$ სიმრავლეს. ვთქვათ, $x \in M_{(1)}$. როგორც ჩანს, ყოველ $M_\alpha$ სიმრავლეს ერთის მხრივ, აქვს საერთო ელემენტი $M_{(1)}$ სიმრავლესთან, ხოლო მეორე მხრივ

$M_\alpha$ მთლიანად ეკუთვნის ან $M_{(1)}$ ან $M_{(2)}$ სიმრავლეს. ცხადია, ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $M_\alpha \subset M_{(1)}$. მაგრამ, თუ ნებისმიერი $\alpha$ ნიშნაკისათვის $M_\alpha \subset M_{(1)}$, მაშინ $\bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha \subset M_{(1)}$. გამოდის, რომ $M_{(2)}$ ცარიელი სიმრავლეა. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 2.7. ვთქვათ, $X$ ტოპოლოგიური სივრცეა და $M$ კი მასში მოთავსებული ბმული სიმრავლეა. თუ $N$ სიმრავლე ისეთია, რომ $M \subset N \subseteq \overline{M}$, მაშინ $N$ იქნება ბმული სიმრავლე.

მართლაც დავუშვათ, რომ $N$ არ არის ბმული სიმრავლე. მაშინ არსებობს ორი არაცარიელი ისეთი ჩაკეტილი $N_1$ და $N_2$ სიმრავლე, რომ $N = N_1 \cup N_2$ და $N_1 \cap N_2$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ვინაიდან $M$ ბმული სიმრავლეა და $M \subset N = N_1 \cup N_2$, ამიტომ 2.3 თეორემის ძალით, $M$ მთლიანად ეკუთვნის ან $N_1$ ან $N_2$ სიმრავლეს. ვთქვათ, $M \subset N_1$. გავიხსენოთ, რომ $N_1$ ჩაკეტილია $N$ სიმრავლეში. ამის გამო, $N$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი, რომელიც $M$ სიმრავლის შეხების წერტილია, ეკუთვნის $N_1$ სიმრავლეს, ე. ი. მთელი სიმრავლე $N \subset N_1$. მაგრამ, მაშინ $N_2$ უნდა იყოს ცარიელი სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია:

შენიშვნა. ვთქვათ, $M$ არის ევკლიდეს $n$—განზომილებიანი $R_n$ სივრცეში მოთავსებული რაიმე სიმრავლე. იტყვიან, რომ $M$ ამოზნექილი სიმრავლეა, თუ მისი ყოველი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი, მთლიანად ეკუთვნის $M$ სიმრავლეს.

2.7 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ევკლიდეს $n$—განზომილებიანი სივრცის ყოველი ამოზნექილი სიმრავლე (და თვით $R_n$ სივრცე) ბმული სიმრავლეა.

კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა წრფის ერთი წერტილის შემცველი ყოველი სიმრავლე, ნებისმიერი სეგმენტი, ყოველი ნახევარსეგმენტი (სასრული ან უსასრულო) და ნებისმიერი ინტერვალი (სასრული ან უსასრულო), როგორც ამოზნექილი სიმრავლეები, ბმული სიმრავლეებია. ამასთანავე, ნამდვილ რიცხვთა წრფეს, გარდა ჩამოთვლილისა, არ გააჩნია სხვა ბმული სიმრავლე.

## § 5. სიმრავლეთა ჯაჭვი და კომპონენტები ტოპოლოგიურ სივრცეში

განვიხილოთ ტოპოლოგიური $X$ სივრცეში მოთავსებული სიმრავლეთა სასრული მიმდევრობა $M_1, M_2, \ldots, M_k$. ვთქვათ, არცერთი $M_1 \cap M_2$, $M_2 \cap M_3$, …, $M_{k-1} \cap M_k$ თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე. მაშინ სიმრავლეთა $M_1, \ldots, M_k$ მიმდევრობას ეწოდება $M_1$ და $M_k$ სიმრავლეების შემაერთებელი ჯაჭვი $X$ სივრცეში. ამასთანავე, თუ თანაკვეთა $M_1 \cap M_k$ ცარიელი სიმრავლე არ არის, მაშინ ჯაჭვს ჩაკეტილი ჯაჭვი ეწოდება.

2.5 თეორემის ძალით, თუ ჯაჭვის ყოველი სიმრავლე ბმული სიმრავლეა, მაშინ მათი ჯამიც ბმული სიმრავლე იქნება.

ავიღოთ ახლა $X$ სივრცეში სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემა. ყოველ $M_\alpha \subset \{M_\alpha\}$ სიმრავლეს ამ სისტემის ელემენტი ვუწოდოთ. ვთქვათ, შესაძლოა $\{M_\alpha\}$ სისტემის ნებისმიერი ორი სიმრავლის შეერთება $X$ სივრცეში ჯაჭვით, ამავე სისტემის რაიმე ელემენტების საშუალებით. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $\{M_\alpha\}$ სისტემა შეჯაჭვულია $X$ სივრცეში.

2.6 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\{M_\alpha\}$ სისტემა შეჯაჭვულია

$X$ სივრცეში და ყოველი $M_\alpha$ სიმრავლე ბმულია, მაშინ $\bigcup_\alpha M_\alpha$ ბმული სიმრავლე იქნება. კერძოდ, თუ $\{M_\alpha\}$ სისტემის ყოველი ორი ელემენტის თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე და ყოველი $M_\alpha$ ბმული სიმრავლეა, მაშინ $\bigcup_\alpha M_\alpha$ აგრეთვე ბმული სიმრავლე იქნება.

ვთქვათ, $x$ არის $X$ ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. სიმრავლე, რომელიც ერთადერთი $x$ წერტილისაგან შედგება, ბმული სიმრავლეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი არაცარიელი ტოპოლოგიური $X$ სივრცე უსათუოდ შეიცავს ბმულ სიმრავლეს. განვიხილოთ $X$ სივრცის ყველა იმ სიმრავლის $M=\{M_\alpha\}$ სისტემა, რომლის ყოველი $M_\alpha$ ელემენტი შეიცავს $x$ წერტილს. როგორც ზემოთ ვნახეთ, $K=\bigcup_\alpha M_\alpha$ ბმული სიმრავლეა. ცხადია, $K$ წარმოადგენს $X$ სივრცის უდიდეს ბმულ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს $x$ წერტილს. $K$ სიმრავლეს ეწოდება $x$ წერტილის ბ მ უ ლ ი კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ი $X$ სივრცეში.

ავიღოთ ახლა რაიმე $A \subset X$ ქვესიმრავლე და ავაგოთ $A$ ქვესიმრავლის ყოველი წერტილის ბმული კომპონენტი $A$ სიმრავლეში. ყველა ამ კომპონენტის სიმრავლეს ეწოდება $A$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ი $X$ სივრცეში. თუ $X$ სივრცე თვითონ ბმულია, მაშინ იგი ემთხვევა მისი ნებისმიერი წერტილის კომპონენტს. 2.7 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი წერტილის კომპონენტი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

## § 6. ტოპოლოგიური სივრცის ფილტრი

განვიხილოთ ტოპოლოგიური $X$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ისეთი $\Omega$ ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $X$ სივრცეში მოთავსებული ყოველი სიმრავლე, რომელიც $\Omega$ ოჯახის რომელიმე სიმრავლეს შეიცავს, თვითონ ეკუთვნის $\Omega$ ოჯახს.

2) $\Omega$ ოჯახის სასრული რიცხვის სიმრავლეთა თანაკვეთა ისევ ოჯახს ეკუთვნის.

3) ცარიელი სიმრავლე არ ეკუთვნის $\Omega$ ოჯახს.

ამ პირობებით განსაზღვრულ $\Omega$ ოჯახს ეწოდება $X$ სივრცის ფ ი ლ ტ რ ი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. $\alpha$) ავიღოთ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში ფიქსირებული $x$ წერტილი. ამ სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომლებიც $x$ წერტილს შეიცავენ, არის $X$ სივრცის ფილტრი.

$\beta$) $X$ სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომლებიც შეიცავენ ნებისმიერ ფიქსირებულ არაცარიელ $A \subset X$ სიმრავლეს, არის $X$ სივრცის ფილტრი.

$\gamma$) ვთქვათ, $X$ უსასრულო ტოპოლოგიური სივრცეა. განვიხილოთ ამ სივრცის ყველა სასრული ქვესიმრავლეების დამატებანი $X$ სივრცემდე. ყველა ამ დამატებათა სიმრავლე წარმოადგენს $X$ სივრცის ფილტრს.

$\delta$) ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. ამ წერტილის ყველა მიდამოს სისტემა X სივრცეში აგრეთვე ფილტრია.

განვიხილოთ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური $X$ სივრცის ორი ფილტრი $\Omega_1$ და $\Omega_2$. თუ $\Omega_2 \subset \Omega_1$ მაშინ სიმრავლეთა $\Omega_2$ ოჯახს უწოდებენ $\Omega_1$ ფილტრის მაჟორანტულ ფილტრს. ამასთანავე იტყვიან, რომ $\Omega_2$ უფრო უ ხ ე შ ი ფილტრია $X$ სივრცისა, ვიდრე $\Omega_1$ ფილტრი. როცა სივრცის ორი ფილტრი ურთიერთ მაჟორანტულია, მაშინ ეს ფილტრები ერთმანეთს ემთხვევა.

ვთქვათ, $\Omega$ არის ტოპოლოგიური $X$ სივრცის რაიმე ფილტრი, ხოლო $\{M_\alpha\}$—არაცარიელ $M_\alpha$ სიმრავლეთა სისტემა $X$ სივრცეში. თუ ნებისმიერი $\omega\subset\Omega$ სიმრავლისათვის მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი $M_\alpha$ სიმრავლე, რომ $M_\alpha\subset\omega$, მაშინ სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემას ეწოდება $\Omega$ *ფილტრის ბაზისი*.

ფილტრის ბაზისს აქვს შემდეგი ცხადი თვისებები:

1) ნებისმიერი ორი $M_1, M_2\subset\{M_\alpha\}$ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი $M_3\subset\{M_\alpha\}$ სიმრავლე, რომ $M_3\subset M_1 \cap M_2$.

2) $\{M_\alpha\}$ ბაზისი არ შეიცავს ცარიელ სიმრავლეს.

თუ $\Omega$ ფილტრი ისეთია, რომ არ არსებობს $X$ სივრცის არცერთი სხვა უფრო უხეში ფილტრი, მაშინ $\Omega$ ოჯახს ამ სივრცის *მიკროფილტრი* ეწოდება.

## § 7. გამოყოფის აქსიომები

ზემოთ შემოღებული იყო ტოპოლოგიური სივრცის ცნება 1) და 2) აქსიომების საშუალებით. მათემატიკური ანალიზისა, გეომეტრიისა და სხვა დარგების ამოცანების გადაწყვეტამ წარმოქმნა აუცილებლობა ხსენებული აქსიომებით განსაზღვრული ტოპოლოგიური სივრცეების კლასის შევიწროებისა. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კლასის შევიწროება მოხდა ე. წ. *გამოყოფის აქსიომების* შემოღებით.

**1. გამოყოფის აქსიომები.** ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს ეწოდება $T_0$ *სივრცე*, თუ დაკმაყოფილებულია შემდეგი

**აქსიომა.** *ნებისმიერ ორ $x$, $y\in T_0$, სადაც $x\neq y$, წერტილთაგან ერთ-ერთს მაინც გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც მეორე წერტილს არ შეიცავს.*

ამ აქსიომას გამოყოფის პირველი აქსიომა ეწოდება.

ავიღოთ ახლა ისეთი ტოპოლოგიური $X$ სივრცე, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი

**აქსიომა.** *როგორიც უნდა იყოს ერთმანეთისაგან განსხვავებული $x$, $y\in X$ წერტილები, თითოეულ მათგანს გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორე წერტილს.*

ამ აქსიომას *გამოყოფის მეორე აქსიომა* ეწოდება. ცხადია, უკანასკნელი აქსიომა არის გამოყოფის პირველი აქსიომის განზოგადება. ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს, რომლის ელემენტები აკმაყოფილებენ გამოყოფის მეორე აქსიომას, ეწოდება $T_1$ *სივრცე*.

ახლა განვიხილოთ ისეთი ტოპოლოგიური $X$ სივრცე, რომლის წერტილები აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომას:

*როგორიც უნდა იყოს ერთმანეთისაგან განსხვავებული $x$, $y\in X$ წერტილები, თითოეულ მათგანს გააჩნია ისეთი $O(x)$ და $O(y)$ მიდამო, რომ $O(x)\cap O(y)$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.*

ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს, რომლის წერტილები აკმაყოფილებს ამ აქსიომას, ეწოდება $T_2$ *სივრცე*, ანუ *ჰაუსდორფის სივრცე*.

ჰაუსდორფის სივრცეს *რეგულარული* ანუ $T_3$ *სივრცე* ეწოდება, თუ დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობა:

*ნებისმიერი $x\in T_3$ წერტილისათვის და ნებისმიერი ჩაკეტილი $A\subset T_3$ სიმრავლისათვის, რომელიც არ შეიცავს $x$*

წერტილს. არსებობს $x$ წერტილის $O(x)$ მიდამო და $A$ სიმრავლის $O(A)$ მიდამო, რომელთა თანაკვეთა $O(x) \cap O(A)$ ცარიელი სიმრავლეა.

ავიღოთ ჰაუსდორფის $T_2$ სივრცე და მასში მოთავსებული ნებისმიერი ჩაკეტილი ორი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლე, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. თუ არსებობს ისეთი $O(M_1)$ და $O(M_2)$ მიდამოები, რომ $O(M_1) \cap O(M_2)$ სიმრავლე აგრეთვე ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ $T_2$ სივრცეს **ნორმალური** სივრცე ეწოდება.

ისევე როგორც მეტრულ სივრცეში, იტყვიან რომ ღია სიმრავლეთა რაიმე $\{M\alpha\}$ სისტემა წარმოადგენს $X$ **ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისს**, თუ ყოველი ღია $M \subset X$ სიმრავლე წარმოიდგინება ამ სისტემის სიმრავლეების სასრული ან უსასრულო ჯამის სახით. თუ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში არსებობს ერთი მაინც $\{M_\alpha\}$ ბაზისი, რომელიც $M_\alpha$ სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლისაგან შედგება, მაშინ ბაზისს ეწოდება $X$ **სივრცის თვლადი ბაზისი**. ბაზისის ყოველ $M_\alpha$ სიმრავლეს **ბაზისის ელემენტი** ეწოდება.

2. **მიდამოებრივი სივრცე.** იტყვიან, რომ ნებისმიერი $Y$ სიმრავლე **მიდამოებრივი სივრცეა** $N_\alpha$ სიმრავლეთა $\{N\alpha\}$ სისტემის მიმართ, თუ $Y$ სიმრავლეში არსებობს ქვესიმრავლეების ისეთი $\{N\alpha\}$ სისტემა, რომ ნებისმიერ $y \in Y$ წერტილს შეესაბამება ერთი მაინც $N_\alpha$ სიმრავლე და $y \in N_\alpha$. ყოველ ასეთ $N_\alpha$ ქვესიმრავლეს $y$ ელემენტის მიდამო ეწოდება. თვით $\{N_\alpha\}$ სისტემას ეწოდება $Y$ სივრცის მიდამოების სისტემა.

ვთქვათ, $Y$ სივრცის მიდამოების $\{N_\alpha\}$ სისტემა ისეთია, რომ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

ა) ნებისმიერი $y \in Y$ წერტილის ყოველი ორი მიდამოს თანაკვეთა შეიცავს $y$ წერტილის რაიმე მიდამოს.

ბ) თუ $y'$ არის $y \in Y$ ელემენტის $N\alpha(y)$ მიდამოს რაიმე წერტილი, მაშინ არსებობს $y'$ წერტილის ისეთი $N_{\alpha'}(y') \subset \{N\alpha\}$ მიდამო, რომ $N_{\alpha'}(y') \subset N\alpha(y)$.

როცა მიდამოების $\{N_\alpha\}$ სისტემა აკმაყოფილებს ა) და ბ) პირობებს, მაშინ $\{N\alpha\}$ სისტემას ეწოდება $Y$ სივრცის მიდამოების **აბსოლუტური** სისტემა.

შემოვიღოთ მიდამოებრივ $Y$ სივრცეში სიმრავლის ჩაკეტვის ოპერაცია. ვთქვათ, $N_\alpha \subset \{N_\alpha\}$ არის ნებისმიერი სიმრავლე. ისე როგორც ზემოთ (იხ. §5), $\bar{y} \in Y$ წერტილს ვუწოდოთ $N_\alpha$ სიმრავლის **შეხების** წერტილი, თუ $\bar{y}$ წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს $N_\alpha$ სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც. $N_\alpha$ სიმრავლის ყველა შეხების წერტილთა $\bar{N}_\alpha$ სიმრავლეს ვუწოდოთ $N\alpha$ სიმრავლის **ჩაკეტვა**, ხოლო სიმრავლეთა $\{N_\alpha\}$ სისტემას—ჩაკეტვის ოპერაციის წარმომქმნელი სისტემა $Y$ სივრცეში. ადვილი შესამჩნევია, რომ ჩაკეტვის ოპერაცია დააკმაყოფილებს ტოპოლოგიური სივრცის 1') და 2') აქსიომებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის ჩაკეტვის ოპერაცია, მიდამოებრივ $Y$ სივრცეს გადააქცევს ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცედ.

ვთქვათ, $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ არის $Y$ სივრცის მიდამოების ორი ისეთი სის-

ტემა, რომლებიც ჩაკეტვის ერთსა და იმავე ოპერაციას განსაზღვრავენ $Y$ სივრცეში. ამ შემთხვევაში $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ სისტემების მიდამოების ტოლფასი სისტემები ეწოდება.

გავეცნოთ მიდამოებრივი სივრცის წარმომქმნელი ორი სისტემის ტოლფასობის ერთ ნიშანს.

თეორემა 2.8. ერთიდაიმავე მიდამოებრივი $Y$ სივრცის მიდამოების ორი $\{N_\alpha\}=\{N_\alpha(y)\}$ და $\{N_\beta\}=\{N_\beta(y)\}$ სისტემის ტოლფასობისათვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერო $N_\alpha(y)\subset\{N_\alpha\}$ მიდამოსათვის არსებობდეს ისეთი $N_\beta(y)\subset\{N_\beta\}$ მიდამო, რომ $N_\beta(y)\subseteq N_\alpha(y)$ და პირიქით.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მიდამოების $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ სისტემები ტოლფასია და დავუშვათ, რომ $\{N_\alpha\}$ სისტემის რომელიმე $N_\alpha(y)$ მიდამო არ შეიცავს $\{N_\beta\}$ სისტემის არცერთ $N_\beta(y)$ მიდამოს. მაშინ ცხადია, რომ ყოველი $N_\beta(y)$ მიდამო შეიცავს $Y-N_\alpha(y)$ სიმრავლის წერტილებს. ამის გამო, ერთის მხრივ, $\{N_\beta\}$ სისტემით წარმოქმნილ $Y$ სივრცეში $y$ იქნება $Y-N_\alpha(y)$ სიმრავლის შეხების წერტილი, ხოლო მეორეს მხრივ, ვინაიდან $N_\alpha(y)\cap Y-N_\alpha(y)$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ $\{N_\alpha\}$ სისტემით წარმოქმნილ $Y$ სივრცეში $y$ წერტილი არ არის $Y-N_\alpha(y)$ სიმრავლის შეხების წერტილი. ეს იმას ნიშნავს, რომ მიდამოთა $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ სისტემებისათვის სიმრავლის ჩაკეტვის ოპერაციები სხვადასხვანაირად არის განსაზღვრული, ე. ი. $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ არ არის ტოლფასი სისტემები. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს პირობის აუცილებლობას.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ამისათვის საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ თუ ყოველი $N_\alpha(y)\subset\{N_\alpha\}$ მიდამო შეიცავს რომელიმე $N_\beta(y)$ მიდამოს და პირიქით, მაშინ მიდამოების $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ სისტემები ტოლფასია. ვთქვათ, $M$ არის $\{N_\alpha\}$ სისტემით წარმოქმნილი $Y$ სივრცის რაიმე სიმრავლე, ხოლო $y$ არის $M$ სიმრავლის შეხების წერტილი. მაშინ, შეხების წერტილის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი $N_\alpha(y)$ მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილებს. გარდა ამისა, ვინაიდან პირობის თანახმად, ყოველი $N_\beta(y)$ მიდამო შეიცავს რომელიმე $N_\alpha(y)$ მიდამოს, ამიტომ ყოველი $N_\beta(y)$ შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $y$ წერტილი არის $\{N_\beta\}$ სისტემით წარმოქმნილი $Y$ სივრცეში მოთავსებული $M$ სიმრავლის შეხების წერტილი. ამრიგად, $\{N_\alpha\}$ და $\{N_\beta\}$ მიდამოები ტოლფასი სისტემებია და თეორემაც დამტკიცებულია.

## § 8. ტოპოლოგიური სივრცის რეგულარებისა და ნორმალურობის ნიშნები

რეგულარული და ნორმალური სივრცეების განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნორმალური სივრცე რეგულარულიც იქნება.

ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს დებულებები, რომლებიც შეიცავენ აუცილებელსა და საკმარის პირობებს იმისა, რომ ტოპოლოგიური სივრცე $T_1$ რეგულარული ან ნორმალური იყოს.

**თეორემა 2.9.** *ტოპოლოგიური $T_1$ სივრცის რეგულარობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს შემდეგი პირობა: ნებისმიერი $x \in T_1$ წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი $O(x)$ მიდამოსათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\sigma(x)$ მიდამო, რომ ჩაკეტვა $\overline{\sigma}(x) \subset O(x)$.*

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $T_1$ რეგულარული სივრცეა, $x$ — მისი ნებისმიერი წერტილი და $O(x)$ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო. საკმარისია დავამტკიცოთ ისეთი $\sigma(x)$ მიდამოს არსებობა, რომ $\overline{\sigma}(x) \cap (T_1 - O(x))$ იყოს ცარიელი სიმრავლე. ავაგოთ $T_1 - O(x)$ სიმრავლისა და $x$ წერტილის ისეთი $\sigma(T_1 - \sigma(x))$ და $\sigma(x)$ მიდამოები, რომ $(T_1 - O(x)) \cap \sigma(x)$ თანაკვეთა იყოს ცარიელი სიმრავლე. მაშინ ცარიელი —იქნება $(x) \cap \sigma(T_1 - O(x))$ სიმრავლეც და მით უმეტეს, ცარიელი იქნება $\overline{\sigma}(x) \cap (T_1 - O(x))$ სიმრავლე.

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ ნებისმიერი $x \in T_1$ წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი $O(x)$ მიდამოსათვის მუდამ არსებობს ისეთი $\sigma(x)$ მიდამო, რომ $\overline{\sigma}(x) \subset O(x)$. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $T_1$ სივრცე რეგულარულია. შევნიშნოთ, რომ $T_1 - O(x)$ სიმრავლე, როგორც ღია სიმრავლის დამატება, ჩაკეტილია და $x \overline{\in} T_1 - O(x)$. ვინაიდან $O(x) \cap (T_1 - O(x))$ ცარიელი სიმრავლეა და, პირობის თანახმად $\overline{\sigma}(x) \subset O(x)$, ამიტომ $T_1 - \sigma(x)$ არის $T_1 - O(x)$ სიმრავლის ისეთი მიდამო, რომ $(T_1 - \overline{\sigma}(x)) \cap \sigma(x)$ თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, ამრიგად, ნებისმიერი $x \in T_1$ წერტილისათვის და ჩაკეტილი $(T_1 - \sigma(x)) \subset T_1$ სიმრავლისათვის, რომელიც $x$ წერტილს არ შეიცავს, არსებობს $\sigma(x)$ მიდამო და $T_1 - \overline{\sigma}(x)$ მიდამო ისეთი, რომ $(T_1 - \overline{\sigma}(x)) \cap \sigma(x)$ ცარიელი სიმრავლეა. მაშასადამე, $T_1$ რეგულარული სივრცეა და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 2.10.** *იმისათვის, რომ ტოპოლოგიური $T_1$ სივრცე ნორმალური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს პირობა: ნებისმიერი ჩაკეტილი $M \subset T_1$ სიმრავლისათვის და ამ სიმრავლის ნებისმიერი $\Omega(M)$ მიდამოსათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\omega(M)$ მიდამო, რომ $\overline{\omega}(M) \subset \Omega(M)$.*

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $M$ ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლეა ნორმალური $T_1$ სივრცისა და $\Omega(M)$ ამ სიმრავლის ნებისმიერი მიდამოა. მაშინ, $T_1 - \Omega(M)$ სხვაობა ჩაკეტილი სიმრავლე იქნება და $M \cap (T_1 - \Omega(M))$ თანაკვეთა კი ცარიელი სიმრავლე. ვინაიდან $T_1$ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა, ამიტომ არსებობს ისეთი $\omega(M)$ და $\omega(T_1 - \Omega(M))$ მიდამოები, რომ $\omega(M) \cap \omega(T_1 - \Omega(M))$ იქნება ცარიელი სიმრავლე. ამ პირობებში, ცხადია, $\overline{\omega}(M) \cap \omega(T_1 - \Omega(M))$ თანაკვეთა აგრეთვე ცარიელი სიმრავლეა და $\overline{\omega}(M) \subset T_1 - \omega(T_1 - \Omega(M))$ ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი $M$ სიმრავლისათვის და ამ სიმრავლის ნებისმიერი $\Omega(M)$ მიდამოსათვის მუდამ არსებობს ასეთი $\omega(M)$ მიდამო, რომ $\overline{\omega}(M)\subset\Omega(M)$. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $T_1$ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა. მართლაც, ვინაიდან $M\cap(T_1-\Omega(M))$ თანაკვეთთა ცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ $M\subset T_1-(T_1-\Omega(M))$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $T_1-(T_1-\Omega(M))$ სიმრავლე არის $M$ სიმრავლის მიდამო. პირობის ძალით, არსებობს ისეთი $\omega(M)$ მიდამო, რომ $\overline{\omega}(M)\subset\Omega(M)=T_1-(T_1-\Omega(M))$. როგორც ვხედავთ, $T_1-\Omega(M)$ და $M$ ჩაკეტილი სიმრავლეებისათვის $T_1-\overline{\omega}(M)\supset T_1-\Omega(M)$ და $\omega(M)$ სიმრავლეები არიან შესაბამისად, ისეთი მიდამოები, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ამრიგად, $T_1$ ისეთი სივრცეა, რომ როგორიც უნდა იყოს მასში მოთავსებული ორი ჩაკეტილი სიმრავლე მუდამ შეიძლება ამ სიმრავლეების ისეთი მიდამოების აგება, რომელთა თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე. მაშასადამე, $T_1$ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცე ყოფილა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 2.11.** ყოველი მეტრული სივრცე ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა.

ვთქვათ, $X$ მეტრული სივრცეა, $M_1$ და $M_2$ კი მასში მოთავსებული ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი სიმრავლე. ვთქვათ, გარდა ამისა, $x\in M_1$ ნებისმიერი წერტილია, რომელიც $M_2$ სიმრავლის შეხების წერტილი არ არის. აღვნიშნოთ მანძილი $x$ წერტილიდან $M_2$ სიმრავლემდე $2\rho_x$-ით ცხადია, $\rho_x>0$. განვიხილოთ $x$ წერტილის ისეთი $\Omega(x,\rho_x)$ მიდამო $X$ სივრცეში, რომლის წერტილები $x$ წერტილიდან დაშორებული არიან არა უმეტეს $\rho_x$ მანძილისა. ცხადია, როცა $x$ გაირბენს $M_1$ სიმრავლის ყველა წერტილს, მაშინ წარმოიქმნება $\Omega(x,\rho_x)$ მიდამოების $\{\Omega(x,\rho_x)\}_{x\in M_1}$ სისტემა. ავაგოთ ახლა $M_1$ სიმრავლის მიდამო შემდეგნაირად:

$$\Omega(M_1)=\bigcup_{x\in M_1}\Omega(x,\ \rho_x).$$

ასეთი წესით ავაგოთ $M_2$ სიმრავლის $\Omega(M_2)=\bigcup\limits_{x\in M_2}\Omega(x,\ \rho_x)$ მიდამო. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვთქვათ, არსებობს $y\in\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ წერტილი. მაშინ $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეები შეიცავენ ისეთ თითო $x_1\in M_1$ და $x_2\in M_2$ წერტილს მაინც, რომ $y\in\Omega(x_1,\ \rho_{x_1})$, $y\in\Omega(x_2,\ \rho_{x_2})$, სადაც ვგულისხმობთ $\rho_{x_2}\leqslant\rho_{x_1}$. შევაფასოთ $\rho(x,\ M_2)$ მანძილი, გვაქვს:

$$\rho(x,\ M_2)\leqslant\rho(x_1,\ x_2)\leqslant\rho(x_1,\ y)+\rho(y,\ x_2)\leqslant\rho_{x_1}+\rho_{x_2}\leqslant2\rho_{x_1}.$$

უკანასკნელი უტოლობა კი $\rho_{x_1}$-ის განსაზღვრის გამო, შეუძლებელია და თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. შემობრუნებული თეორემა საზოგადოდ არ არის სწორი. არ უნდა გვეგონოს, რომ ყოველი ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცე მეტრიზებადია.

## § 9. უწყვეტი ფუნქციონალის ზოგიერთი საკითხი ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეში

ავიღოთ რაიმე ტოპოლოგიური $X$ სივრცე და ნამდვილ რიცხვთა $Y$ სივრცე. განვიხილოთ ყველა დალაგებული $(x, y)$ წყვილების $Z$ სიმრავლე, სადაც $x \in X$, $y \in Y$ და $(x, y) \in Z$. ვთქვათ, ყოველ $x \in X$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ ერთი ან რამდენიმე ისეთი $y=f(x) \in Y$ ელემენტი, რომ $(x, y) \in Z$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეზე *განსაზღვრულია* $f(x)$ *ფუნქციონალი*. როცა ყოველ ფიქსირებულ $x \in X$ ელემენტს შეესაბამება მხოლოდ ერთი $f(x) \in Y$ სახე, მაშინ $f(x)$ *ცალსახა ფუნქციონალი* ჰქვია. $f(x)$ ფუნქციონალი განახორციელებს ტოპოლოგიური $X$ სივრცის გადასახვას ნამდვილ რიცხვთა $Y$ სივრცეში.

ფუნქციონალის უწყვეტობა $x \in X$ წერტილზე და მთელ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად: ცალსახა $y=f(x)$ ფუნქციონალს *უწყვეტი ფუნქციონალი ეწოდება* $x \in X$ *წერტილზე*, თუ ნებისმიერი $M \subset X$ სიმრავლისათვის, რომლის $\overline{M}$ ჩაკეტვა $x$ წერტილს შეიცავს გვაქვს $f(x) \in \overline{f(M)}$, სადაც $f(M)$ არის $M$ სიმრავლის სახე, ხოლო $\overline{f(M)}$ — მისი ჩაკეტვა $Y$ სივრცეში. როცა $f(x)$ ფუნქციონალი უწყვეტია ყოველ $x \in X$ წერტილზე, ზემოთ მოყვანილი აზრით, მაშინ მას *უწყვეტ ფუნქციონალს უწოდებენ* $X$ *სივრცეზე* (შეადარეთ უწყვეტი გადასახვის განსაზღვრას გვ. 36).

მ. ფრეშემ დასვა შემდეგი ამოცანა: მოვძებნოთ ისეთი ტოპოლოგიური სივრცეების შესაძლო ფართო კლასი, რომელშიც არსებობს მუდმივისაგან განსხვავებული უწყვეტი ფუნქციონალი.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა ეკუთვნის პ. ურისონს. ქვემოთ მოგვყავს ურისონის შედეგი.

თეორემა 2.12. თუ $M_1$ და $M_2$ *ნორმალური ტოპოლოგიური* $X$ *სივრცის ორი ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომელთა თანაკვეთა ცარიელია, მაშინ არსებობს* $X$ *სივრცეში უწყვეტი* $f(x)$ *ფუნქციონალი, რომელიც ნებისმიერი ორი ნამდვილი* $a$ და $b$, $a<b$, *რიცხვისათვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

1) $f(x)=a$, *როცა* $x \in M_1$,

2) $f(x)=b$, *როცა* $x \in M_2$,

3) $a \leq f(x) \leq b$, *როცა* $x \overline{\in} M_1$ *და* $x \overline{\in} M_2$.

თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ შევნიშნოთ, რომ $a$ და $b$ რიცხვების ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ, შესაბამისად, 0 და 1 რიცხვები. მართლაც, $f(x)$ ფუნქციონალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$f(x)=(b-a)\varphi(x)+a,$$

სადაც $\varphi(x)$ ფუნქციონალი აკმაყოფილებს 1)—3) პირობებს, როცა $a=0$ და $b=1$.

გავყოთ თეორემის დამტკიცება ორ ნაწილად. ჯერ ავაგოთ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს 1)—3) პირობებს, სადაც $a=0$, $b=1$, და შემდეგ დავამტკიცოთ, რომ იგი უწყვეტია.

ავიღოთ $M_1$ სიმრავლის $\Omega(M_1)=X-M_2=A_1$ მიდამო. ვინაიდან $X$ ნორ-

მალური ტოპოლოგიური სივრცეა და $M_1 \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ 2.10 თეორემის ძალით, $M_1$ სიმრავლის $A_1$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი $A_0 = \omega(M_1)$ მიდამო რომ $\overline{A}_0 \subset A_1$.

ვთქვათ, $n$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ხოლო $m = 0,1,2,\cdots,2^n$. ვთქვათ აგებულია $M_1$ სიმრავლის მიდამოების ისეთი $\left\{A_{\frac{m}{2^n}}\right\}$ მიმდევრობა, რომ როცა $m' < m''$, მაშინ $A_{\frac{m'}{2^n}} \subset A_{\frac{m''}{2^n}}$. ამ პირობებში, იმავე 2.10 თეორემის ძალით, შეიძლება $M_1$ სიმრავლის ისეთი $A_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}$ მიდამო ავაგოთ, რომ შესრულებული იყოს პირობები

$$\overline{A}_{\frac{m}{2^n}} \subset A_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}} \subset \overline{A}_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}} \subset A_{\frac{m+1}{2^n}}.$$

გავაგრძელოთ $M_1$ სიმრავლის მიდამოების აგების ეს წესი უსასრულოდ. მაშინ ცხადია, წარმოიქმნება $M_1$ სიმრავლის ღია მიდამოების ისეთი თვლადი $\{A_r\}$ სისტემა, $r \in [0,1]$, რომ $M_1 \subset A_0$, $\overline{A}_{r'} \subset A_{r''}$, როცა $r' < r''$.

ვთქვათ ახლა, $t$ არის (0,1) ინტერვალზე განსაზღვრული პარამეტრი. ავაგოთ $M_1$ სიმრავლის $A_t$ მიდამო, რომელიც წარმოადგენს $A_r$ მიდამოების ჯამს: $A_t = \bigcup\limits_{r<t} A_r$.

$A_t$ მიდამოს ის თვისება აქვს, რომ როცა $t' < r' < r'' < t''$, მაშინ $\overline{A}_{t'} \subset \overline{A}_{r'} \subset A_{r''} \subset A_{t''}$. გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ $A_t$ ცარიელი სიმრავლეა, როცა $t < 0$ და $A_t = X$, როცა $t > 1$. მაშინ როგორიც უნდა იყოს $t$ პარამეტრის $t'$ და $t''$ მნიშვნელობანი, როცა $t' < t''$, გვექნება $\overline{A}_{t'} \subset A_{t''}$. ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი წერტილია.

განვიხილოთ ყველა ღია $A_t$ სიმრავლე, რომლებიც არ შეიცავენ $x$ წერტილს და შევნიშნოთ, რომ ამ სიმრავლეთა t ნიშნაკების სიმრავლე არის ნამდვილ რიცხვთა ნახევარი წრფე: $-\infty < t \leqslant \mu_x$, ან $-\infty < t < \mu_x$. ახლა საძიებელი ფუნქციონალი განვსაზღვროთ $\varphi(x) = \mu_x$ ტოლობით. $\mu_x$ რიცხვი სავსებით განსაზღვრულია, როცა მოცემულია $x \in X$ ელემენტი. ცხადია, რომ როცა $x \in A_0$, კერძოდ, როცა $x \in M_1$, მაშინ $\varphi(x) = 0$. თუ $x \in A_1$, კერძოდ, როცა $x \in M_2$, მაშინ $\varphi(x) = 1$. გარდა ამისა, მთელ $X$ სივრცეში ადგილი აქვს $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ უტოლობას.

დავამტკიცოდ ახლა თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი წერტილია და $\varepsilon > 0$ — ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. ავაგოთ $x$ წერტილის $\Omega(x) = A_{\mu_x+\varepsilon} - \overline{A}_{\mu_x-\varepsilon} \subset A_{\mu_x+\varepsilon} - A_{\mu_x-\varepsilon}$ მიდამო. ყოველი $x' \in \Omega(x)$ წერტილი ეკუთვნის $A_{\mu_x+\varepsilon}$ მიდამოს და არ ეკუთვნის $A_{\mu_x-\varepsilon}$ მიდამოს. ამის გამო ადგილი აქვს უტოლობას

$$\mu_x - \varepsilon \leqslant \mu_{x'} \leqslant \mu_x + \varepsilon,$$

ე. ი.

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(x)$ უწყვეტია ნებისმიერ $x \in X$ წერტილში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $x$ წერტილისათვის და ამ წერ-

ტილის ყოველი $\Omega(x) \in x$ მიდამოსათვის არსებობს უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც $x$ წერტილზე ნულის ტოლია და $\Omega(x)$ მიდამოს გარეთ ყოველ წერტილში უდრის ერთს.

შენიშვნა 2. თუ $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეთაგან ერთ-ერთი, მაგალითად, $M_1$ ცარიელი სიმრავლეა, მაშინაც თეორემა სამართლიანია. ამ შემთხვევაში ყოველ $x \in X$ წერტილში ფუნქციონალი $\varphi(x)=1$.

ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს პ. ურისონის კიდევ ერთი თეორემა, რომლის დამტკიცება ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ეკუთვნის ლებეგს, ბრაუერს, კარათეოდორის და ტიტცს.

საკითხი შეეხება უწყვეტი ფუნქციონალის უწყვეტად გაგრძელების ამოცანას ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეში.

თეორემა 2.13. თუ $M$ არის ნორმალურ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში მოთავსებული ჩაკეტილი სიმრავლე და $f(x)$ ამ სიმრავლეზე უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქციონალია, მაშინ არსებობს მთელ $X$ სივრცეზე უწყვეტი და შემოსაზღვრული ისეთი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციონალს $M$ სიმრავლეზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f_0(x)=f(x),\quad \mu_0=\sup|f(x)|,$$

სადაც, $x \in M$. განვიხილოთ $M$ სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, რომლის $x$ წერტილებისათვის შესრულებულია უტოლობა $f_0(x) \leqslant -\frac{\mu_0}{3}$. აღვნიშნოთ ხსენებული სიმრავლე $M^\circ_1$-ით. ანალოგიურად ამისა, $M$ სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, რომლის $x$ წერტილები აკმაყოფილებენ $f_0(x) \geqslant \frac{\mu_0}{3}$ პირობას, აღვნიშნოთ $M^\circ_2$-ით. წინა თეორემის ძალით, არსებობს მთელ $X$ სივრცეში ისეთი უწყვეტი ფუნქციონალი $F_0(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$1)\quad F_0(x)=-\frac{\mu_0}{3},\ \text{როცა}\ x \in M^\circ_1,$$

$$2)\quad F_0(x)=\frac{\mu_0}{3},\ \text{როცა}\ x \in M^\circ_2,$$

$$3)\quad -\frac{\mu_0}{3} \leqslant F_0(x) \leqslant \frac{\mu_0}{3},\ \text{როცა}\ x \overline{\in} M^\circ_1,\quad \text{და}\quad x \overline{\in} M^\circ_2.$$

ავაგოთ ახლა $M$ სიმრავლეზე განსაზღვრული შემდეგი სახის ფუნქციონალი:

$$f_1(x)=f_0(x)-F_0(x).$$

$f_1(x)$ ფუნქციონალი აკმაყოფილებს პირობებს:
ა) $f_1(x)$ უწყვეტია $M$ სიმრავლეზე,

ბ) $\mu_1=\sup|f_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}\mu_0,\ x \in M.$

$f_1(x)$ ფუნქციონალის დახმარებით, ანალოგიური მსჯელობით, ავაგოთ $f_2(x)$ ფუნქციონალი. სახელდობრ, აღვნიშნოთ $M_1'$-ით და $M'_2$-ით $M$ სიმრავლის ჩაკე-

ტილი ქვესიმრავლეები, რომელთა $x$ წერტილებზე შესრულებული იქნება შესაბამისად $f_1(x)\leqslant-\frac{\mu_1}{3}$ და $f_1(x)\geqslant\frac{\mu_1}{3}$ უტოლობები. ვთქვათ, $F_1(x)$ არის ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $X$ სივრცეზე და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$1')\ \ F_1(x)=-\frac{\mu_1}{3},\ \text{როცა}\ x\in M'_1,$$

$$2')\ \ F_1(x)=\frac{\mu}{3},\ \text{როცა}\ x\in M'_2,$$

$$3')\ -\frac{\mu_1}{3}\leqslant F_1(x)\leqslant\frac{\mu_1}{3},\ \text{როცა}\ x\,\overline{\in}\,M_1'\ \text{და}\ x\,\overline{\in}\,M'_2.$$

წინა თეორემის ძალით, $F_1(x)$ ფუნქციონალი არსებობს. განვსაზღვროთ ამის შემდეგ $M$ სიმრავლეზე ახალი $f_2(x)$ ფუნქციონალი შემდეგი ტოლობით:

$$f_2(x)=f_1(x)-F_1(x)$$

და გავაგრძელოთ უსასრულოდ $f_i(x)$ და $F_i(x)$ ფუნქციონალების აგება ამ წესით. მაშინ, ერთის მხრივ, მივიღებთ ფუნქციონალთა $\{f_i(x)\}$ მიმდევრობას, რომლის ყოველი $f_i(x)$ ელემენტი იქნება $M$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი, მეორეს მხრივ, მივიღებთ ფუნქციონალთა $\{F_i(x)\}$ მიმდევრობას, რომლის ყოველი $F_i(x)$ ელემენტი იქნება მთელ $X$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი, ცხადია აგრეთვე, რომ ადგილი ექნება შეფასებებს:

$$|f_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\mu_0\ \text{და}\ |F_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\mu_0}{3}. \tag{2,4}$$

გარდა ამისა, როგორც $f_n(x)$ და $F_n(x)$ ფუნქციონალების აგების ხერხიდან ჩანს' $M$ სიმრავლეზე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)\ (n=0,1,\ldots). \tag{2.5}$$

შევადგინოთ ეხლა ფუნქციონალთა მწკრივი

$$F_0(x)+F_1(x)+\cdots+F_n(x)+\ldots, \tag{2.6}$$

რომლის ყოველი წევრი არის $X$ სივრცეზე უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქციონალი. ვინაიდან, (2.6) მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ (2.4) უტოლობებს და რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{\mu_0}{3}<\infty,$$

ამიტომ (2.6) მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი $X$ სივრცეში. აღვნიშნოთ (2.6) მწკრივის ჯამი $F(x)$-ით. $F(x)$ ფუნქციონალი განსაზღვრულია მთელ $X$ სივრცეში ტოლობით:

$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i(x).$$

იგი $X$ სივრცეში უწყვეტი და შემოსაზღვრულია. უკანასკნელ მწკრივს $M$ სიმრავლეზე აქვს სახე:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}[f_n(x)-f_{n-1}(x)]=f_0(x)=f(x).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ ტოპოლოგიური $X$ სივრცე ნორმალური არ არის, მაშინ არსებობს ისეთი $f(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც უწყვეტია რაიმე ჩაკეტილ $M\subset X$ სიმრავლეზე და რომლის უწყვეტი გაგრძელება მთელ $X$ სივრცეზე არ შეიძლება.

ამის დასამტკიცებლად, ვთქვათ, $M_1$ და $M_2$ არის $X$ სივრცეში მოთავსებული ჩაკეტილი სიმრავლეები, რომელთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ვინაიდან $X$ სივრცე ნორმალური არ არის, ამიტომ $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეების ნებისმიერი მიდამოების თანაკვეთა არ იქნება ცარიელი სიმრავლე. ავაგოთ ჩაკეტილი $M=M_1\cup M_2$ სიმრავლე, რომელზეც განვსაზღვროთ ისეთი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი, რომ $f(x)=0$, როცა $x\in M_1$, ხოლო $f(x)=1$, როცა $x\in M_2$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ შეუძლებელია უწყვეტად გავაგრძელოთ $f(x)$ ფუნქციონალი მთელ $X$ სივრცეზე. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, რომ შესაძლოა $f(x)$ ფუნქციონალის უწყვეტი გაგრძელება მთელ $X$ სივრცეზე. ავაგოთ $M_1$ სიმრავლის $\Omega(M_1)$ მიდამო ისეთი $x\in X$ წერტილებისაგან, რომელშიც $f(x)<\frac{1}{2}$. ასევე, ავაგოთ $M_2$ სიმრავლის $\Omega(M_2)$ მიდამო ისეთი $x\in X$ წერტილებისაგან, რომელშიც $f(x)>\frac{1}{2}$, მაშინ, $\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, რაც შეუძლებელია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. დამტკიცებული თეორემიდან და წინა შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ უწყვეტი ფუნქციონალის უწყვეტი გაგრძელება მხოლოდ ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეშია შესაძლებელი. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ ტოპოლოგიური $X$ სივრცე მხოლოდ მაშინ არის ნორმალური, როცა შესაძლოა ამ სივრცის ნებისმიერ ჩაკეტილ $M$ სიმრავლეზე ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციონალის გაგრძელება მთელ $X$ სივრცეზე.

## §. 10. ტოპოლოგიური სივრცის მეტრიზების ამოცანა

ვთქვათ, $X$ ტოპოლოგიური სივრცეა, რომელშიც შესაძლოა გარკვეული წესით შემოღებული იყოს მეტრიკის ცნება. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $X$ სივრცე მეტრიზებადია.

ტოპოლოგიური სივრცის მეტრიზების ამოცანა ისმება შემდეგნაირად: რა პირობები უნდა იყოს შესრულებული, რომ ტოპოლოგიური $X$ სივრცე იყოს მეტრიზებადი. სხვანაირად, ეს იმას ნიშნავს, რომ უნდა მოიძებნოს პირობები იმისა, რომ ტოპოლოგიური $X$ სივრცე ჰომეომორფული იყოს რაიმე მეტრული სივრცისა.

სანამ დასმულ ამოცანას ვუპასუხებდეთ, წინასწარ დავამტკიცოთ რამდენიმე დებულება, რომელიც შემდეგში გამოგვადგება.

**თეორემა 2.14.** (ა. ტიხონოვი). ყოველი რეგულარული სივრცე თვლადი ბაზისით ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა.

ვთქვათ, $X$ რეგულარული ტოპოლოგიური სივრცეა თვლადი $\Lambda=\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ ბაზისით. ავიღოთ ნებისმიერი ისეთი ორი ჩაკეტილი $N_1$, $N_2\subset X$ სიმრავლე, რომ $N_1 \cap N_2$ იყოს ცარიელი სიმრავლე. ავირჩიოთ ნებისმიერი $x \in N_1$ წერტილი. ცხადია, $x \notin N_2$. ვინაიდან $X$ რეგულარული სივრცეა, ამიტომ არსებობს ისეთი $\Omega(x)$ და $\Omega(N_2)$ მიდამოები, რომ

$$\Omega(x) \cap \Omega(N_2) \tag{2.7}$$

თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე. ზემოთ დამტკიცებული 2.8 და 2.9 თეორემების ძალით, თვლადი $\Lambda$ ბაზისი $x$ წერტილის ერთი ისეთ $M_x$ მიდამოს მაინც შეიცავს, რომლის ჩაკეტვა მიეკუთვნება $\Omega(x)$ მიდამოს:

$$\overline{M}_x\subseteq\Omega(x). \tag{2.8}$$

(2.7) და (2.8) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\overline{M}_x \cap \Omega(N_2)$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. წარმოვიდგინოთ, რომ $x$ წერტილი გაირბენს $N_1$ სიმრავლის ყველა წერტილს, მაშინ $M_x$ მიდამო გაირბენს $\Lambda$ ბაზისის კუთვნილი მიდამოების სასრულ ან თვლად ნაწილს. ვთქვათ, ეს მიდამოებია $M_1^{(1)}$, $M_2^{(1)},\ldots$; ცხადია, რომ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i^{(1)}\supset N_1$ და, გარდა ამისა, $M_i^{(1)} \cap N_2 (i=1,2,\ldots)$ თანაკვეთები იქნება ცარიელი სიმრავლეები.

სრულიად ასევე, $N_2$ სიმრავლის წერტილებისათვის, თვლადი $\Lambda$ ბაზისიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ან თვლადი ნაწილი ისეთი $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)},\ldots$ მიდამოებისა, რომ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i^{(2)}\supset N_2$ და $M_i^{(2)} \cap N_1$ თანაკვეთები იყოს ცარიელი სიმრავლეები.

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_n &= M_n^{(1)}-\bigcup_{i=1}^{n-1} (\overline{\Omega}_i \cap M_n^{(2)}), \\ \omega_n &= M_n^{(2)}=\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{\Omega}_i \cap M_n^{(2)}) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

და ავაგოთ სიმრავლეები:

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n,\ \ P= \bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n. \tag{2.10}$$

ცხადია, რომ $M$ და $P$ წარმოადგენენ შესაბამისად $N_1$ და $N_2$ ჩაკეტილი სიმრავლეების მიდამოებს: $N_1\subset M$, $N_2\subset P$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $M$ და $P$ მიდამოების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლე იქნება. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $M \cap P$ ერთ ელემენტს მაინც შეიცავს. აღვნიშნოთ ეს ელემენტი $y$-ით:

$$y \in M \cap P,$$

მაშინ, (2.10) და (2.9) ტოლობების ძალით, გვექნება

$$y \in \Omega_r \cap \omega_s \ (r, \ s=1, \ 2, \cdots). \tag{2.11}$$

ვაჩვენოთ, რომ (2.11) შეუძლებელია. ამისათვის, ჯერ განვიხილოთ $r \leqslant s$ შემთხვევა, გვექნება:

$$\Omega_r \cap \omega_s = \Omega_r \cap \left[ M_s^{(2)} - \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} (\overline{\Omega}_i \cap M_s^{(2)}) \right) \right] \subseteq$$

$$\subseteq \Omega_r \cap [M_s^{(2)} - (\overline{\Omega}_r \cap M_s^{(2)})] \subseteq \Omega_r \cap (X - \Omega_r).$$

$\Omega_r \cap (X - \Omega_r)$ თანაკვეთა კი ცარიელი სიმრავლეა. ამრიგად, როცა $r \leqslant s$, მაშინ $\Omega_r \cap \omega_s$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა და ამ შემთხვევაში (2.11) შეუძლებელია. განვიხილოთ ახლა $r > s$ შემთხვევა. გვაქვს:

$$\Omega_r \cap \omega_s = \omega_s \cap \left[ M_r^{(1)} - \left( \bigcup_{i=1}^{r-1} (\overline{\omega}_i \cap M_n^{(1)}) \right) \right] \subseteq$$

$$\subseteq \omega_s \cap [M_r^{(1)} - (\omega_s \cap M_r^{(1)})] \subseteq \omega_s \cap (X - \omega_s).$$

$\omega_s \cap (X - \omega_s)$ სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა. მაშასადამე, $\Omega_r \cap \omega_s$ თანაკვეთა მაშინაც ცარიელი სიმრავლეა, როცა $s < r$. გამოდის, რომ (2.11) ამ შემთხვევაშიც შეუძლებელია. საბოლოოდ უნდა ჩაითვალოს, რომ $M$ და $P$ მიდამოების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

მაშასადამე, რეგულარული $X$ სივრცე ისეთია, რომ მასში მოთავსებული ნებისმიერი ორი არაგადამკვეთი ჩაკეტილი $N_1$ და $N_2$ სიმრავლისათვის არსებობს შესაბამისად ისეთი $M$ და $P$ მიდამოები, რომ $M \cap P$ ცარიელი სიმრავლეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $X$ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა და თეორემა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პ. ურისონის ერთი თეორემა, რომელიც ჰომეომორფულ თანადობას ამყარებს რეგულარულ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცესა და ჰილბერტის $l_2$ სივრცის $L$ ძირითადი პარალელეპიპედს შორის.

**თეორემა 2.15.** თვლადი ბაზისიანი ყოველი ტოპოლოგიური რეგულარული სივრცე ჰილბერტის $l_2$ სივრცის ძირითადი $L$ პარალელეპიპედის ჰომეომორფულია.

თეორემის დასამტკიცებლად ავიღოთ ნებისმიერი რეგულარული ტოპოლოგიური $X$ სივრცე, რომლის თვლადი ბაზისი იყოს $(M_1, M_2, \cdots)$. ბაზისის ელემენტებიდან ისეთი $(M_i, M_k)$ წყვილები გამოვყოთ, რომლებსაც აქვთ $\overline{M}_i \subset M_k$ თვისება. ყოველ ასეთ წყვილს ბაზისის დაყვანილი წყვილი დავარქვათ ვთქვათ, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ ბაზისის ყველა დაყვანილი წყვილია, სადაც $Q_n = (M_i, M_k)$. ვინაიდან $X$ რეგულარული სივრცეა ბაზისით, ამიტომ ა. ტიხონოვის თეორემის ძალით, $X$ სივრცე ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცე იქნება. ამ სივრცეში $M_i$ და $X - M_k$ ჩაკეტილი სიმრავლეებია, ამიტომ ურისონის თეორემის ძალით ყოველი დაყვანილი $Q_n = (M_i, M_k)$ წყვილისათვის არსებობს $f_n(x)$ ფუნქციონალი, განსაზღვრული მთელ $X$ სივრცეზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $f_n(x) = 0$, როცა $x \in \overline{M}_i$,

ბ) $f_n(x) = 1$, როცა $x \in X - M_k$,

გ) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, როცა $x \in X$.

ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი წერტილია. ავაგოთ ნამდვილ რიცხვთა თვლადი $\{\xi_n(x)\}$ მიმდევრობა, სადაც $\xi_n(x)=\frac{1}{n} f_n(x) \quad (n=1,2,\ldots)$. ცხადია, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^2_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} f^2_n(x) < \infty.$$

გარდა ამისა, გვაქვს $0 \leqslant \xi_n(x) \leqslant 1$. ამის გამო, რიცხვთა $\{\xi_n(x)\}$ მიმდევრობა განსაზღვრავს $L$ პარალელეპიპედის $f(x)=(\xi_n(x))(n=1, 2,\ldots)$ ელემენტს. შევუსაბამოთ ყოველ $x \in X$ წერტილს $L$ პარალელეპიპედის $f(x)$ წერტილი. ამ თანადობის ძალით, როცა $x$ გაირბენს მთელ $X$ სივრცის წერტილებს, მაშინ $f(x)$ წერტილი გაირბენს $L$ პარალელეპიპედის წერტილებს. სხვანაირად, ეს იმას ნიშნავს, რომ ფაქტიურად აგებულია $X$ სივრცის $f$ გადასახვა $L$ სიმრავლეზე. დავამტკიცოდ, რომ ჩვენ მიერ აგებული $f$ გადასახვა არის $X$ სივრცისა და $L$ სიმრავლის ურთიერთ ცალსახა გადასახვა. მართლაც, ვთქვათ, $x$ და $y$ არის $X$ სივრცის ორი სხვადასხვა წერტილი. $x$ წერტილისათვის არსებობს ბაზისის ისეთი ერთი $M_k$ ელემენტი მაინც, რომ $y \overline{\in} M_k$. ამასთანავე, თანახმად 2.9 თეორემისა, $x$ წერტილისათვის არსებობს ბაზისის ისეთი $M_i$ ელემენტი, რომ $\overline{M}_i \subseteq M_k$. ახლა, თუ გავიხსენებთ დაყვანილი წყვილის განსაზღვრას, დავრწმუნდებით, რომ $(M_i, M_k)$ დაყვანილი წყვილია. ვინაიდან $x \in M_i \subset \overline{M}_i$, $y \in X - M_k$, ამიტომ არსებობს ისეთი უწყვეტი $f_n$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $X$ სივრცეზე და $f_n(x)=0$, $f_n(y)=1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$. სხვანაირად, ეს იმას ნიშნავს, რომ $\xi_n(x)$ და $\xi_n(y)(n=1, 2,\ldots)$ რიცხვებით განსაზღვრული შესაბამი $f(x)$, $f(y) \in L$ წერტილები ერთმანეთისგან განსხვავებულია. ამით დამტკიცებულია, რომ $f$ განახორციელებს $X$ სივრცისა და $L$ პარალელეპიპედის წერტილების ურთიერთცალსახა გადასახვას.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ გადასახვა $f$ არის ურთიერთუწყვეტიც. ამისათვის ჯერ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $M$ სიმრავლისათვის, რომლის $\overline{M}$ ჩაკეტვა შეიცავს $x$ წერტილს, გვაქვს $f(x) \in \overline{f(M)}$, სადაც $f(M)$ არის $M$ სიმრავლის სახე $L$ სიმრავლეში, ხოლო $\overline{f(M)}$—მისი ჩაკეტვა. ვინაიდან $l_2$ მეტრული სივრცეა, ამიტომ $f(x) \in \overline{f(M)}$ ნიშნავს, რომ $\rho(f(x), \overline{f(M)})=0$. როგორც ზემოთ ვნახეთ, $f_n$ უწყვეტი ფუნქციონალია და, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $(M_1, M_2,\ldots)$ ბაზისი შეიცავს $x$ წერტილის ისეთ $\Omega i_n$ მიდამოს, რომ ნებისმიერი $y \in \Omega i_n$ წერტილისათვის შესრულდება უტოლობა

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon. \tag{2.12}$$

ავიღოთ ახლა $x$ წერტილის ისეთი $\Omega$ მიდამო, რომ $\Omega(x) \subset \bigcap_{n=1}^{m} \Omega i_n$, სადაც $m$ ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვია. ვთქვათ, $z$ ამ მიდამოს ნებისმიერი წერტილია: $z \in \Omega(x)$. თანახმად (2.12) უტოლობისა, გვექნება

$$|\xi_n(x)-\xi_n(z)| = \frac{1}{n}|f_n(x)-f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{2.13}$$

შევაფასოთ მანძილი $f(x)$, $f(z) \in L$ წერტილებს შორის. გვაქვს

$$\rho(f(x), f(z)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_n(x)-\xi_n(z))^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{m}(\xi_n(x)-\xi_n(z))^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty}(\xi_n(x)-\xi_n(z))^2}.$$

გამოვიყენოთ უკანასკნელ ტოლობაში (2.13) შეფასება, მივიღებთ

$$\rho(f(x), f(z)) \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(z))^2}$$

და, რადგანაც ყოველი $n$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს $f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$ უტოლობას, ამასთანავე $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ და საკმარისად დიდი $m$ რიცხვისათვის $\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, ამიტომ გვექნება

$$\rho(f(x), f(z)) \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\varepsilon^2\left(\frac{\pi^2}{6}+1\right)} < 2\varepsilon.$$

პირობის თანახმად, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვი იყო, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ $\rho(f(x), f(z)) = 0$. მაგრამ $\Omega(x)$ მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილებს, რის გამოც $\rho(f(x), f(M)) = 0$.

ამრიგად, $f(x)$ გადასახვა $X$ სივრცისა $L$ პარალელეპიპედზე არის უწყვეტი გადასახვა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ შებრუნებული გადასახვაც უწყვეტია. ვთქვათ, $\rho(f(x), f(M)) = 0$, მაშინ $x \in \overline{M}$. მართლაც, ავიღოთ $x$ წერტილის ნებისმიერი $M_k \subset (M_1, M_2, \ldots)$ მიდამო. ვთქვათ, $M_i \subset (M_1, M_2, \ldots)$ ის სიმრავლეა, რომლის ჩაკეტვა $\overline{M}_i \subset M_k$. მაშინ $(M_i, M_k)$ იქნება ბაზისის ელემენტის დაყვანილი წყვილი, რომელიც აღვნიშნეთ $Q_n$-ით. ტოლობა $\rho(f(x), f(M)) = 0$ ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი ერთი წერტილი მაინც, რომ $z = f(y) \in f(M)$ (სადაც $y \in M$ არის $z$-ის პირველსახე) დაშორებული იქნება $f(x)$ წერტილიდან $\frac{1}{m}$ რიცხვზე ნაკლები მანძილით:

$$\rho(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n(x)-\xi_n(y))^2} < \frac{1}{m}.$$

აქედან გვაქვს

$$|\xi_m(x)-\xi_m(x)| < \frac{1}{m}, \quad |f(x)-f_m(y)| < 1.$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ $f_m(x)=0$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ $f_m(y)<1$, $y\in\Omega_k$. როგორც ჩანს, $x$ წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს $M$ სიმრავლის წერტილებს, ამიტომ $x\in\bar{M}$ და თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა უკვე ადვილად დამტკიცდება პ. ურისონის ერთი თეორემა, რომელშიც მოცემულია მარტივი აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ ტოპოლოგიური სივრცე თვლადი ბაზისით იყოს მეტრიზებადი.

**თეორემა 2.16.** ტოპოლოგიური $X$ სივრცე თვლადი ბაზისით მეტრიზებადია მხოლოდ მაშინ, როცა იგი რეგულარულია.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ამისათვის დავუშვათ, რომ $X$ მეტრიზებადი სივრცეა და დავამტკიცოთ მისი რეგულარობა. ვინაიდან $X$ მეტრიზებადია, ამიტომ 2.11 თეორემის ძალით, იგი ნორმალური სივრცე იქნება და, მით უმეტეს, იქნება რეგულარული სივრცე.

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად უნდა დავრწმუნდეთ, რომ რეგულარული ტოპოლოგიური $X$ სივრცე თვლადი ბაზისით უსათუოდ მეტრიზებადია; სხვანაირად, საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ $X$ ჰომეომორფულია რაიმე მეტრული სივრცისა (ან ჰომეომორფულია მეტრული სივრცის რაიმე სიმრავლისა). უკანასკნელი წინადადება კი დამტკიცებული იყო 2.15 თეორემაში. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

## § 11. კომპაქტური და ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები

1. ვთქვათ, $X$ ტოპოლოგიური სივრცეა. ვიტყვით, რომ $X$ კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, თუ $X$ სივრცეში მოთავსებულ ყოველ უსასრულო ქვესიმრავლეს ერთი დაგროვების წერტილი მაინც აქვს. ავიღოთ კომპაქტურ ტოპოლოგიურ სივრცეში მოთავსებული რაიმე ჩაკეტილი $P$ სიმრავლე. კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრის თანახმად, ყოველ უსასრულო ქვესიმრავლეს, რომელიც $P$ სიმრავლესაც ეკუთვნის, ერთი დაგროვების წერტილი მაინც აქვს. ეს დაგროვების წერტილი, $P$ სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო, ეკუთვნის $P$-ს. ამის გამო, კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ჩაკეტილი $P$ სიმრავლე თითონაც კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა. თუ $P\subset X$ სიმრავლე ისეთია, რომ მისი ყოველი ქვესიმრავლის დაგროვების წერტილი ისევ $P$ სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ $P$-ს კომპაქტური ქვესიმრავლე ეწოდება. ვთქვათ, $P\subset X$ ისეთი ქვესიმრავლეა, რომლის ყოველ უსასრულო ქვესიმრავლეს ერთი დაგროვების წერტილი მაინც აქვს $X$ სივრცეში. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $P$ სიმრავლე კომპაქტურია $X$ სივრცეში.

**თეორემა 2.17 (კანტორი).** თუ $X$ კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $\left\{P_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subset X$—არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეების მიმდევრობა და

$$P_1\supset P_2\supset\cdots\supset P_n\supset\ldots, \tag{2.14}$$

მაშინ $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა.

1°. ვთქვათ $P_i$ სიმრავლეთა შორის მხოლოდ მათი სასრული რაოდენობა

არის ერთმანეთისგან განსხვავებული სიმრავლეები, ხოლო ყველა დანარჩენი ერთმანეთს ემთხვევა. $P_1, \ldots, P_n$ სიმრავლეები იყოს ერთმანეთისაგან განსხვავებული, ხოლო $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ იყოს თანატოლი სიმრავლეები. მაშინ, (2.14) პირობის ძალით $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = P_{n+1}$, რომელიც, თანახმად პირობისა, არ არის ცარიელი სიმრავლე.

2°. ვთქვათ, ყოველი $P_i (i=1,2,\ldots)$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული სიმრავლეა. ავიღოთ ერთმანეთის მომდევნო ორი $P_i$ და $P_{i+1}$ სიმრავლე. ვინაიდან $P_i \supset P_{i+1}$, ამიტომ $P_i - P_{i+1}$ სხვაობა არ არის ცარიელი სიმრავლე. მაშინ არსებობს ისეთი $x_i$ წერტილი, რომ $x_i \in P_i$ და $x_i \overline{\in} P_{i+1}$. როცა $i$ ნიშნაკი გაირბენს $1, 2, \ldots$ მნიშვნელობებს, მაშინ წარმოიქმნება წერტილთა თვლადი $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ სიმრავლე, რომელსაც, $X$ სივრცის კომპაქტურობის გამო, აქვს დაგროვების წერტილი. აღვნიშნოთ იგი $x$-ით. $x$ დაგროვების წერტილია აგრეთვე ყველა $P_i$ სიმრავლისა და, მათი ჩაკეტილობის გამო, ეკუთვნის ყოველ $P_i$ სიმრავლეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i$ თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე.

3°. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $P_i$ სიმრავლეთა შორის უსასრულოდ ბევრი არის ერთმანეთისგან განსხვავებული სიმრავლეები. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს შემთხვევა წინა შემთხვევაზე მიიყვანება. მართლაც, ამისათვის საკმარისია $\left\{P_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ მიმდევრობიდან გამოვყოთ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეები. ცხადია, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეთა თანაკვეთა იგივე იქნება, როგორიც თავიდან აღებული სიმრავლეებისა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეში მოცემულია ღია სიმრავლეთა სასრული ან უსასრულო $\{M_\alpha\}$ სისტემა. ისევე, როგორც მეტრულ სივრცეში, ვიტყვით, რომ ეს სისტემა **ფარავს ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს**, თუ $X = \bigcup_\alpha M_\alpha$. თუ $\{M_\alpha\}$ სისტემა თვლადია ან სასრული, მაშინ დაფარვას, შესაბამისად, თვლადი ან სასრული დაფარვა ეწოდება.

**თეორემა 2.18 (ჰეინე-ბორელი).** *თუ ღია სიმრავლეთა თვლადი $\{M_i\}$ სისტემა ფარავს კომპაქტურ ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს, მაშინ ამ სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ღია სიმრავლეთა სასრული სისტემა, რომელიც აგრეთვე $X$ სივრცეს დაფარავს.*

თეორემის დასამტკიცებლად ავაგოთ სიმრავლეთა თვლადი $\{N_i\}$ სისტემა, სადაც $N_i = X - \bigcup_{j=1}^{i} M_j$. ცხადია, რომ $N_i$ სიმრავლეები ჩაკეტილია და

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots,$$

ამასთანავე $\bigcap_{k=1}^{\infty} N_k$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. თანახმად კანტორის თეო-

რემისა (თეორემა 2.17), გარკვეული $n$ ნიშნაკისათვის $N_n$ სიმრავლე ცარიელი სიმრავლე იქნება და $X=\bigcup_{j=1}^{n} M_j$. ეს კი ამტკიცებს ჩვენს თეორემას.

2. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ერთ-ერთ მნიშვნელოვან კლასს წარმოადგენს ბიკომპაქტური სივრცეები. ტოპოლოგიურ $X$ სივრცეს უწოდებენ **ბიკომპაქტურ ტოპოლოგიურ სივრცეს**, თუ ამ სივრცის ყოველი დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ ამავე სივრცის სასრული დაფარვა. ჰაუსდორფის ბიკომპაქტურ ტოპოლოგიურ სივრცეს **ბიკომპაქტი** ეწოდება. ცხადია, რომ ყოველი ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტური სივრცე იქნება.

**თეორემა 2.19.** თუ ღია სიმრავლეთა $\{N_\alpha\}$ სისტემა ფარავს ბიკომპაქტური სივრცის რაიმე ჩაკეტილ $M$ სიმრავლეს, მაშინ ამ სისტემიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სიმრავლეთა სასრული სისტემა, რომელიც აგრეთვე დაფარავს $M$ სიმრავლეს.

ვთქვათ, $X$ ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\{N_\alpha\}$ სისტემა ფარავს $M$ სიმრავლეს, ამიტომ იგივე სისტემა და ღია $N=X-M$ სიმრავლე იქნება მთელი $X$ სივრცის დაფარვა. ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრის ძალით, $\{N_\alpha\}$ სისტემიდან და $N$ სიმრავლიდან შესაძლოა გამოვყოთ $X$ სივრცის სასრული $\{N_i\}_{i=1}^{n}$ დაფარვა, სადაც $n$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. ვინაიდან $N\cap M$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ $\{N_i\}_{i=1}^{n}$ დაფარვა, რომელშიც არ შევა $N$ სიმრავლე, იქნება $M$ სიმრავლის სასრული დაფარვა და თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ დებულება, რომელიც ამყარებს კავშირს ბიკომპაქტსა და ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეს შორის.

**თეორემა 2.20.** ყოველი ბიკომპაქტი ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა.

ავიღოთ $X$ ბიკომპაქტი და მასში მოთავსებული ორი ნებისმიერი არაგადამკვეთი ჩაკეტილი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლე. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ შესაძლოა ავაგოთ $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეების ისეთი $\Omega(M_1)$ და $\Omega(M_2)$ მიდამოები, რომ $\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ იყოს ცარიელი სიმრავლე.

ვთქვათ, $x\in M_1$ არას ფიქსირებული წერტილი. ვინაიდან პირობის თანახმად, $X$ ჰაუსდორფის სივრცეა, ამიტომ როგორიც უნდა იყოს $\bar{x}\in M$ წერტილი არსებობს ისეთი $\Omega_{\bar{x}}(x)$ და $\Omega_x(\bar{x})$ მიდამოები, რომ $\Omega_{\bar{x}}(x)\cap\Omega_x(\bar{x})$ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. როცა $\bar{x}$ წერტილი გაირბენს $M_2$ სიმრავლის ყველა წერტილს, მაშინ მივიღებთ მიდამოების $\{\Omega_x(\bar{x})\}$ სისტემას, რომლის ყოველი $\Omega_x(\bar{x})$ ელემენტის თანაკვეთა $\Omega_{\bar{x}}(x)$ მიდამოსთან ცარიელი სიმრავლეა. ზემოთ დამტკიცებული 2.19 თეორემის ძალით, $\{\Omega_x(\bar{x})\}$ სისტემიდან შეიძლება გამოვყოთ მიდამოების სასრული $\{\Omega_x(\bar{x}_i)\}_{i=1}^{n}$ სისტემა, რომელიც აგრეთვე დაფარავს $M_2$ სიმრავლეს. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\Sigma_x=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_x(\bar{x}_i),\sigma_x=\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_{\bar{x}_i}(x).$$

ახლა ვთქვათ, $x$ წერტილი გაირბენს $M_1$ სიმრავლის ყველა წერტილს, მაშინ მივიღებთ სიმრავლეთა $\{\sigma_x\}$ სისტემას, რომელიც წარმოადგენს $M_1$ სიმრავლის დაფარვას. ვინაიდან $M_1$ ბიკომპაქტის ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ 2.19 თეორემის ძალით $\{\sigma_x\}$ სისტემიდან შეიძლება გამოვყოთ სიმრავლეთა სასრული $\left\{\sigma_{x_k}\right\}_{k=1}^{\nu}$ სისტემა, რომელიც აგრეთვე დაფარავს $M_1$ სიმრავლეს.

ახლა კი ავაგოთ მიდამოები:

$$\Omega(M_1)=\bigcup_{i=1}^{\nu}\sigma_{x_i} \quad \text{და} \quad \Omega(M_2)=\bigcap_{i=1}^{\nu}\Sigma_{x_i}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\Omega(M_1)$ და $\Omega(M_2)$ არის $M_1$ და $M_2$ სიმრავლეების სწორედ ის მიდამოები, რომელთა არსებობის დამტკიცება ჩვენ გვინდოდა. სხვანაირად, საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ ცარიელი სიმრავლეა. მართლაც,

$$\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)=\left(\bigcup_{i=1}^{\nu}\sigma_{x_i}\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\nu}\Sigma_{x_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{\nu}\left[\sigma_{x_i}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\nu}\Sigma_{x_i}\right)\right]\subset\bigcup_{i=1}^{\nu}(\sigma_{x_i}\cap\Sigma_{x_i}).$$

მაგრამ უკანასკნელი ჯამი ცარიელი სიმრავლეა და, ამიტომ მასში შემავალი $\Omega(M_1)\cap\Omega(M_2)$ თანაკვეთა აგრეთვე ცარიელი სიმრავლე იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ $X$ ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

3. შევეხოთ ახლა ბიკომპაქტური სივრცის უწყვეტი გადასახვის ერთ მნიშვნელოვან საკითხს.

თეორემა 2.21. ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცის უწყვეტი გადასახვა ტოპოლოგიურ სივრცეზე არის ბიკომპაქტური სივრცე.

თეორემის დასამტკიცებლად ავიღოთ ბიკომპაქტური $X$ სივრცე და მისი უწყვეტი $f$ გადასახვა ტოპოლოგიურ $Y=f(X)$ სივრცეზე. ვთქვათ, სიმრავლეთა $\{N_\alpha\}$ სისტემა წარმოადგენს $Y$ სივრცის დაფარვას, $M_\alpha=\varphi(N_\alpha)$, სადაც $\varphi$ არის შექცეული გადასახვა, $M_\alpha\subset X$. ყველა $M_\alpha$ სიმრავლეთა $\{M_\alpha\}$ სისტემა წარმოადგენს $X$ სივრცის დაფარვას და რაკი $X$ ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, ამიტომ არსებობს სიმრავლეთა სასრული სისტემა $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, რომელიც აგრეთვე დაფარავს $X$ სივრცეს. ამ სიმრავლეთა $N_1=f(M_1)$, $N_2=f(M_2), \ldots, N_n=f(M_n)$ სახეები იქნება $Y$ სივრცის სასრული დაფარვა. როგორც ჩანს $Y$ ისეთი ტოპოლოგიური სივრცეა, რომლის ყოველი $\{N_\alpha\}$ დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ ამავე სივრცის სასრული $\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ დაფარვა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $Y$ ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა და თეორემა დამტკიცებულია.

თ ა ვ ი III

## წრფივი სივრცე

მათემატიკის სხვადასხვა დარგების შესწავლისას ხშირად განვიხილავთ ისეთ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტებზე შესაძლოა გარკვეული წესით შევასრულოთ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები. ასე მაგალითად, სამგანზომილებიან ვექტორთა სიმრავლეში ორი თავისუფალი ვექტორის ჯამი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალია. ცნობილია აგრეთვე ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის მოძებნის წესი. მათემატიკურ ანალიზში განვიხილავთ ორი ფუნქციის ჯამსა და ნამრავლს. ხშირად ვაწარმოებთ მატრიცების შეკრებასა და გამრავლებას. წრფივ ალგებრაში განვიხილავთ გარდაქმნების ჯამსა და ნამრავლს და ა. შ.

შევნიშნოთ, რომ ხშირად შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების შესრულება საჭიროა სხვადასხვა ბუნების ელემენტების შემცველ სიმრავლეებში. იმისათვის, რომ ასეთი მაგალითები ერთიანი მეთოდით შევისწავლოთ უნდა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემოვიღოთ გარკვეული აქსიომების დახმარებით, რომლებიც საფუძვლად უდევს წრფივი სივრცის განსაზღვრას.

### § 1. რგოლი, ველი, ჯგუფი, წრფივი სისტემა, წრფივი ქვესივრცე და წრფივი სივრცე.

1. განვიხილოთ ნებისმიერი ბუნების $x$, $y$, $z$,... ელემენტთა რაიმე $X$ სიმრავლე. ვთქვათ, $X$-ში შემოღებულია ელემენტების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, ე. ი. $X$ სიმრავლის ყოველი ორი $x$ და $y$ ელემენტისათვის ცალსახად განსაზღვრულია $x+y$ ჯამი და $xy$ ნამრავლი, რომლებიც $X$ სიმრავლეს ეკუთვნის.

$X$ სიმრავლეს *რ გ ო ლ ი* ეწოდება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ, თუ ეს ოპერაციები შემდეგ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

1) $X$ სიმრავლის ნებისმიერი $x$ და $y$ ელემენტებისათვის $x+y=y+x$, *შ ე კ რ ე ბ ი ს   კ ო მ უ ტ ა ტ ი უ რ ო ბ ა*.

2) $X$ სიმრავლის ნებისმიერი $x$, $y$ და $z$ ელემენტებისათვის მართებულია შეკრებისა და გამრავლების *ა ს ო ც ი ა ტ ი უ რ ო ბ ი ს* კანონები:

$$(x+y)+z=x+(y+z),\ (xy)z=x(yz).$$

3) შეკრების ოპერაცია შებრუნებადია, ე. ი. ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის მოიძებნება ისეთი $x'\in X$ ელემენტი, რომ $x+x'=y$.

4) ნებისმიერი $x$, $y$, $z\in X$ ელემენტებისათვის შესრულებულია გამრავლების *დ ი ს ტ რ ი ბ უ ტ ი უ ლ ო ბ ი ს* კანონი:

$$x(y+z)=xy+xz,\ (y+z)x=yx+zx.$$

იმ შემთხვევაში,, როცა 1)–4) აქსიომების გარდა ადგილი აქვს გამრავ-

ლების კომუტატიურობის აქსიომას, ე. ი. როცა $xy=yx$, მაშინ $X$ სიმრავლეს **კომუტატიური რგოლი** ეწოდება.

შენიშვნა 1. ადვილი შესამოწმებელია, რომ რგოლში შეიძლება ვაწარმოოთ არა მარტო ორი ელემენტის შეკრება, არამედ შეგვიძლია შევკრიბოთ ელემენტთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობა და მათი ჯამი ისევ რგოლის ელემენტი იქნება.

შენიშვნა 2. ვთქვათ, $z \in X$ რაიმე ელემენტია. თანახმად 3) აქსიომისა, $X$ რგოლში არსებობს ისეთი $x'$ ელემენტი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$z+x'=z. \tag{3.1}$$

დავამტკიცოთ, რომ $X$ რგოლის ნებისმიერი $x$ ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა

$$x+x'=x. \tag{3.2}$$

3) აქსიომის თანახმად $z$ და $x$ ელემენტებისათვის მოიძებნება $X$ რგოლში ისეთი $y$ ელემენტი, რომ

$$z+y=x. \tag{3.3}$$

თუ (3.1) ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $y$ ელემენტს და ვისარგებლებთ 1) და 2) აქსიომებით, გვექნება

$$(z+y)+x'=z+y,$$

საიდანაც, (3.3) ტოლობის თანახმად, მივიღებთ (3.2) ტოლობას.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $x'$ ერთადერთი ელემენტია, რომელიც (3.2) ტოლობას აკმაყოფილებს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $X$ რგოლში არსებობს $x'$ ელემენტისაგან განსხვავებული $x''$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$x+x''=x \tag{3.4}$$

ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის. თუ (3.2) და (3.4) ტოლობებში $x$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ შესაბამისად $x''$ და $x'$ ელემენტებს, გვექნება

$$x''+x'=x'', \quad x'+x''=x'.$$

ამ უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x'=x''$ რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას.

როგორც ვხედავთ, (3.2) განტოლებაში $x'$ ელემენტს ისეთივე თვისებები აქვს, როგორიც ნულს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. ამის გამო, $x'$ ელემენტს, რომელიც ნებისმიერი $x$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს (3.2) განტოლებას, ეწოდება $X$ რგოლის **ნულოვანი ელემენტი**. შემდეგში სიმრავლის ნულოვან ელემენტს ავღნიშნავთ $\Theta$ ასოთი.

შენიშვნა 3. ვთქვათ, $x \in X$ მოცემული ელემენტია. მაშინ

$$x+x'=\Theta \tag{3.5}$$

განტოლებას აქვს ერთადერთი $x'$ ამონახსნი. მართლაც, ვთქვათ, $x'' \in X$ არის (3.5) განტოლების მეორე ამონახსნი, ე. ი. გვაქვს

$$x+x'=\Theta, \quad x+x''=\Theta;$$

თუ პირველი ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $x''$ ელემენტს, მივიღებთ

$$(x+x')+x''=\Theta+x''=x''. \tag{3.6}$$

გარდა ამისა, სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი ტოლობა:

$$(x+x')+x''=(x+x'')+x'=\Theta+x'=x'. \qquad (3.7)$$

შევადაროთ (3.6) და (3.7), მივიღებთ $x'=x''$ და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

(3.5) განტოლების ამონახსნი აღვნიშნოთ $-x$ სიმბოლოთი და მას ვუწოდოთ $x$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი.

შენიშვნა 4. განვიხილოთ განტოლება

$$x+x'=y,$$

სადაც $x$, $y$ არის $X$ რგოლის ნებისმიერად ფიქსირებული ელემენტები. მივუმატოთ (3.8) განტოლების ორივე ნაწილს $-x$ ელემენტი, მივიღებთ

$$x'=y+(-x).$$

ჩვეულებრივად $y+(-x)$ ელემენტს აღნიშნავენ $y-x$ სიმბოლოთი და უწოდებენ $y$ და $x$ ელემენტების სხვაობას.

შენიშვნა 5. ვინაიდან რგოლში განსაზღვრულია ნებისმიერი ორი ელემენტის ნამრავლი. ამიტომ განსაზღვრულია რგოლის ელემენტების ნებისმიერი სასრული რიცხვის ნამრავლიც. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ 4) აქსიომის ძალით, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$x\sum_{k=1}^{m} y_k=\sum_{k=1}^{m} xy_k, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)x=\sum_{k=1}^{n} y_k x,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j,$$

სადაც $x$, $x_i$, $y_j \in X$, ხოლო $m$ და $n$ ნატურალური რიცხვებია.

ნებისმიერი $x$, $y$, $z \in X$ ელემენტებისათვის სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი ტოლობები:

$$x(y-z)=xy-xz, \ (y-z)x=yx-zx, \ x\cdot\Theta=\Theta.$$

$$\Theta\cdot x=\Theta, \ (-x)y=-xy, \ x(-y)=-xy, \ (-x)(-y)=xy.$$

მაგალითები. ა) განვიხილოთ ყველა ნამდვილი რიცხვის $R$ სიმრავლე. ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი და ნამრავლი ისევ ნამდვილი რიცხვია. ნამდვილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები აკმაყოფილებს ასოციატიურობისა და კომუტატიურობის კანონებს. ორი ნებისმიერი ნამდვილი $a$ და $b$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნამდვილი $c$ რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $a+c=b$. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში შესრულებულია აგრეთვე დისტრიბუტიულობის კანონი და ბოლოს, ადგილი აქვს ნამდვილ რიცხვთა გამრავლების კომუტატიურობის კანონსაც. ამის გამო, $R$ სიმრავლე კომუტატიური რგოლია.

ბ) ადვილი შესამჩნევია, რომ ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე აგრეთვე კომუტატიური რგოლია.

გ) ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე არ წარმოადგენს რგოლს, ვინაიდან ამ სიმრავლეში შესრულებული არ არის 3) აქსიომა.

დ) ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლე აგრეთვე კომუტატიური რგოლია.

ე) განვიხილოთ ყველა $n$ რიგის მატრიცის სიმრავლე. იგი შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ რგოლია, მაგრამ ეს რგოლი არაკომუტატიურია.

ავიღოთ ორი $X$ და $X_1$ რგოლი. ვთქვათ, $X$ და $X_1$ რგოლების ელემენტებს შორის შესაძლოა დავამყაროთ ისეთი ურთიერთ ცალსახა თანადობა რომ თუ $x$, $y \in X$ ელემენტებს შეესაბამება $x_1$ $y_1 \in X_1$ ელემენტები, მაშინ $x+ +y \in X$ ჯამს შეესაბამებოდეს $x_1+y_1 \in X_1$ ჯამი, ხოლო $xy \in X$ ნამრავლს შეესაბამებოდეს $x_1y_1 \in X_1$ ნამრავლი. ამ შემთხვევაში $X$ და $X_1$ სიმრავლეებს ურთიერთ იზომორფული რგოლები ეწოდება.

იზომორფულ რგოლებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები: α) $X$ რგოლის ნულოვან $\Theta$ ელემენტს შეესაბამება იზომორფული $X_1$ რგოლის ნულოვანი $\Theta_1$ ელემენტი. ამასთანავე, ეს შესაბამისობა არის ურთიერთ ცალსახა. β) თუ $x \in X$ და $x_1 \in X_1$ ურთიერთ ცალსახად შესაბამი ელემენტებია, მაშინ- $x \in X$ ელემენტს ურთიერთ ცალსახად შეესაბამება- $-x_1 \in X_1$ ელემენტი.

2. როგორც ზემოთ ვნახეთ, რგოლის ელემენტებზე შეგვიძლია ვაწარმოოთ ალგებრისა და არითმეტიკის ზოგიერთი ოპერაცია. რგოლის უკეთესი დახასიათებისათვის, მოვითხოვთ დამატებით კიდევ შემდეგი ორი პირობა:

1) $X$ რგოლი კომუტატიურია;

2) $X$ რგოლის ნებისმიერი $a$ და $b$ ელემენტებისათვის, $a \neq \Theta$, $ax=b$ განტოლება ამოხსნადია.

ამ პირობების დახმარებით შემოვიღოთ ველის განსაზღვრა. ველი ეწოდება კომუტატიურ $X$ რგოლს, რომელიც შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ ერთ ელემენტს მაინც და ამ რგოლის ნებისმიერი $a$ და $b$ ელემენტებისათვის, სადაც $a \neq \Theta$, ამოხსნადია $ax=b$ განტოლება.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება: თუ $F$ არის რაიმე ველი, მაშინ $F$-ში არსებობს ისეთი $e$ ელემენტი, რომ $F$-ის ყოველი $x$ ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა

$$xe=ex=x.$$

ამ მიზნით ავიღოთ $F$ ველის ნებისმიერი $a$ ელემენტი, რომელიც განსხვავებულია $\Theta$ ელემენტისაგან და აღვნიშნოთ $e$-თი $ax=a$ განტოლების ამონახსნი:

$$ae=a.$$

ახლა ავიღოთ $F$ ველის ნებისმიერი $b$ ელემენტი და აღვნიშნოთ $q$-თი $ax=b$ განტოლების ამონახსნი:

$$aq=b.$$

მაშინ გვექნება

$$eb=e(aq)=(ea)q=(ae)q=aq=b.$$

ამით დებულება დამტკიცებულია.

$e$ ელემენტს ერთეულოვანი ელემენტი ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ ველში მხოლოდ ერთი ერთეულოვანი ელემენტია. მართლაც, ვთქვათ, $e_1$ მეორე ერთეულოვანი ელემენტია. მაშინ გვექნება

$$ee_1=e, \quad e_1e=e_1.$$

აქედან ვღებულობთ $e_1=e$ და ამით დებულება დამტკიცებულია.

შევისწავლოთ ახლა შემდეგი განტოლება:

$$ax=e, \ a\neq\Theta. \tag{3.9}$$

ამ განტოლებას, მოცემული $a\in F$ ელემენტისათვის ერთადერთი ამონახსნი აქვს. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $x=x_1$ და $x=x_2$ ორი სხვადასხვა ამონახსნია, მაშინ გვექნება

$$ax_1=e, \ ax_2=e.$$

ამ ტოლობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$(ax_1)x_2=ex_2=x_2, \ (ax_2)x_1=ex_1=x_1.$$

მაგრამ

$$(ax_1)x_2=a(x_1x_2)=a(x_2x_1)=(ax_2)x_1.$$

მაშასადამე, $x_2=x_1$.

აღვნიშნოთ (3.9) განტოლების ამონახსნი $a^{-1}$ სიმბოლოთი და მას ვუწოდოთ $a$ ელემენტის *შებრუნებული ელემენტი*.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $a^{-1}x=e$ განტოლების ამონახსნია $a$ ელემენტი. ამიტომ $(a^{-1})^{-1}=a$.

*მაგალითები.* ა) ყველა ნამდვილი რიცხვის $R$ სიმრავლე წარმოადგენს ველს. მართლაც, $R$ არის კომუტატიური რგოლი და, გარდა ამისა, $ax=b$ განტოლებას, სადაც $a\neq\Theta$, აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

ბ) ყველა რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე აგრეთვე ველია.

გ) ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე არ წარმოადგენს ველს. ეს იქიდან ჩანს, რომ ორი მთელი რიცხვის ფარდობა ყოველთვის არ არის მთელი რიცხვი.

3. განვიხილოთ ნებისმიერი არაცარიელი $X$ სიმრავლე. ვთქვათ, ყოველ დალაგებულ წყვილს $x, \ y\in X$ ელემენტებისა შესაძლოა გარკვეული წესით შევუსაბამოთ ერთი გარკვეული $x+y\in X$ ელემენტი, რომელსაც ვუწოდოთ $x$ და $y$ ელემენტების ჯამი. ამასთანავე მოვითხოვოთ, რომ ელემენტების ჯამი აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1) ნებისმიერი $x, \ y, z\in X$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს შეკრების ასოციატიურობის კანონს:

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

არსებობს ერთი მაინც ისეთი $\Theta$ ელემენტი, რომ ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x+\Theta=x.$$

ყოველ ასეთი თვისების $\Theta$ ელემენტს ვუწოდოთ $X$ სიმრავლის *მარჯვენა ნულოვანი ელემენტი*.

3) ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტისათვის არსებობს ერთი მაინც ისეთი $-x\in X$ ელემენტი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x+(-x)=\Theta.$$

ყოველ ასეთი თვისების $-x$ ელემენტს $x$ ელემენტის *მარჯვენა მოპირდაპირე ელემენტი* ეწოდება.

თუ $X$ სიმრავლის ელემენტების ყველა დალაგებული $(x, \ y)$ წყვილებისათვის განსაზღვრულია $x+y\in X$ შეკრების ოპერაცია და დაკმაყოფილებულია

1)—3) აქსიომები, მაშინ $X$ სიმრავლეს ეწოდება ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ვთქვათ, $X'$ არის $X$ ჯგუფის რაიმე ქვესიმრავლე, რომელიც შეკრების ოპერაციის მიმართ აგრეთვე ჯგუფს წარმოადგენს, მაშინ $X'$ ქვესიმრავლეს ეწოდება $X$ ჯგუფის ქვეჯგუფი.

მაგალითები. ა) განვიხილოთ მეტრული $l_p$ სივრცე, $p\geqslant 1$; ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ ამ სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტია. $x$ და $y$ ელემენტების ჯამი ვუწოდოთ მესამე $x+y\in l_p$ ელემენტს, რომლის კოორდინატები იყოს $(x_i+y_i)$. ნულოვანი ელემენტი განვსაზღვროთ ასე: $\Theta=(0, 0,\ldots, 0,\ldots)$, ხოლო $x$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი იყოს $-x=(-x_i)$. ამის შემდეგ ცხადია, რომ შესრულებული იქნება 1)—3) აქსიომები და ამიტომ $l_p$ სივრცე წარმოადგენს ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ბ) განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე ჩებიშევის მეტრიკით, ე. ი. განვიხილოთ მეტრული $C(0,1)$ სივრცე. შეკრების ოპერაცია ამ სივრცეში განვსაზღვროთ, როგორც ორი უწყვეტი ფუნქციის ჩვეულებრივი ჯამი. სივრცის ნულოვან ელემენტად ავიღოთ უწყვეტი $x(t)\equiv 0$ ფუნქცია, ხოლო $x(t)\in C(0,1)$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი იყოს $-x(t)\in C(0,1)$ ფუნქცია. ადვილი შესამჩნევია, რომ $C(0,1)$ სივრცე არის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

გ) ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეც ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ნებისმიერ $X$ სიმრავლეს ტოპოლოგიური ჯგუფი ეწოდება, თუ იგი არის ტოპოლოგიური სივრცე და წარმოადგენს ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ.

შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა. ვთქვათ, $M$ და $N$ არის ნებისმიერი $X$ სიმრავლის ქვესიმრავლეები, ხოლო $x\in M$ და $y\in N$ იყოს ნებისმიერი ელემენტები. აღვნიშნოთ $-M$, $M+N$, $M-N$ სიმბოლოებით შესაბამისად $\{-x\}$, $\{x+y\}$, $\{x-y\}$ სიმრავლეები. კერძოდ, $M+y=\{x+y\}$, სადაც $x$ გაირბენს მთელ $M$ სიმრავლეს, $y+M=\{y+x\}$, სადაც $x$ გაირბენს მთელ $M$ სიმრავლეს.

$X$ სიმრავლეს ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფი ეწოდება, თუ იგი ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ და წარმოადგენს ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეს და, ამასთანავე არსებობს ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტების ისეთი $O(x)$ და $O(y)$ მიდამოები, რომ $x-y$ ელემენტის ნებისმიერი $O(x-y)$ მიდამოსათვის: $O(x)-O(y)\subset O(x-y)$.

$X$ სიმრავლეს მეტრული ჯგუფი ეწოდება, თუ $X$ არის ჯგუფი და მეტრული სივრცე და, ამასთანავე შესრულებულია პირობა: როცა $\rho(x_n, x^*)\to 0$ და $\rho(y_n, y^*)\to 0$, მაშინ $\rho(x_n-x^*, y_n-y^*)\to 0$, როცა $n\to\infty$, სადაც $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $x^*$, $y^*\in X$.

გავიხსენოთ, რომ ჯგუფის განსაზღვრაში არ იყო მოთხოვნილი $x+y$ და $y+x$ ელემენტების ტოლობა. თუ მოვითხოვთ, რომ შეკრების ოპერაცია კომუტატიურია, მაშინ $X$ ჯგუფს კომუტატიური ანუ აბელის ჯგუფი ეწოდება შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ზემოთ მოყვანილ ა) და ბ) მაგალითებში $l_p$ და $C(0,1)$ სივრცეები აბელის ჯგუფებია.

ხშირად მოხერხებულია ჯგუფის ცნება შემოვიღოთ სიმრავლის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციის განსაზღვრით.

ავიღოთ არაცარიელი $X$ სიმრავლე და ვთქვათ, ყოველ დალაგებულ

წყვილს $x$, $y \in X$ ელემენტებისა შესაძლოა გარკვეული წესით შევუსაბამოთ ერთადერთი $xy \in X$ ელემენტი, რომელსაც $x$ და $y$ ელემენტების ნამრავლი ვუწოდოთ; ამასთანავე მოვითხოვოთ, რომ ეს ნამრავლი აკმაყოფილებდეს შემდეგ აქსიომებს:

1′) ელემენტების ნებისმიერი $x$, $y$ $z \in X$ სამეულისათვის ადგილი აქვს გამრავლების ასოციატიურობის კანონს:

$$(xy)z = x(yz).$$

2′) არსებობს ერთი მაინც $e \in X$ ელემენტი, რომელსაც აქვს თვისება:

$$xe = x,$$

სადაც $x \in X$ ნებისმიერი ელემენტია. ასეთი თვისების $e$ ელემენტს მარჯვენა ერთეულოვანი ელემენტი ვუწოდოთ.

3′) ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს ერთი მაინც $x^{-1} \in X$ ელემენტი, რომელსაც აქვს თვისება:

$$xx^{-1} = e.$$

$x^{-1}$ ელემენტს ეწოდება $x$ ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი.

თუ $X$ სიმრავლის ელემენტების ყველა დალაგებული წყვილისათვის განსაზღვრულია $xy \in X$ გამრავლების ოპერაცია, რომელიც დააკმაყოფილებს 1′)—3′) აქსიომებს, მაშინ $X$ სიმრავლეს ეწოდება ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. როცა, გარდა 1′)—3′) აქსიომებისა შესრულებულია $xy = yx$ პირობა, მაშინ $X$ სიმრავლეს აბელის ჯგუფი ეწოდება გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

შევადაროთ ჯგუფის განსაზღვრა შეკრების ოპერაციის მიმართ ჯგუფის განსაზღვრას გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ჩვენ ვნახავთ, ამ განსაზღვრებაში არსებითი არ არის იმ წესის აღნიშვნა, რომლითაც ჯგუფის ელემენტების დალაგებულ წყვილს შევუსაბამებთ ამავე ჯგუფის მესამე ელემენტს. „შეკრების“ ოპერაცია შეიძლება შევცვალოთ „გამრავლების“ ოპერაციით. როცა ჯგუფს განვსაზღვრავთ შეკრების ოპერაციით, მაშინ ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს ნულოვანი ელემენტი, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს ასრულებს მოპირდაპირე ელემენტი და პირიქით.

მაგალითები. ა′) ნულიდან განსხვავებული ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე არის ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

ბ′) სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $+1$ და $-1$, არის ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

გ′) ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე არ წარმოადგენს ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

გავეცნოთ რამდენიმე მარტივ დებულებას ჯგუფების შესახებ, რომლებიც ჯგუფის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს.

**თეორემა 3.1** თუ $X$ არის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ, მაშინ ნებისმიერი ელემენტის მარჯვენა მოპირდაპირე ელემენტი ამავე ელემენტის მარცხენა მოპირდაპირე ელემენტიც იქნება.

თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x+(-x)=(-x)+x=\Theta.$$

მართლაც, ვინაიდან $X$ ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ, ამიტომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x+(-x)=\Theta.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ მარცხნიდან $-x$ და ვისარგებლოთ 1) აქსიომით, გვექნება

$$(-x)+x+(-x)=(-x)+[x+(-x)]=-x+\Theta=-x.$$

მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილს ახლა მივუმატოთ მარჯვნიდან $-x$ ელემენტის მოპირდაპირე $-(-x)$ ელემენტი, მივიღებთ

$$(-x)+x+(-x)+[-(-x)]=-x+[-(-x)];$$

აქედან, თანახმად 3) და 2) აქსიომებისა, გამომდინარეობს

$$(-x)+x=\Theta$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.2.** თუ $X$ არის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ, მაშინ მარჯვენა ნულოვანი ელემენტი მარცხენა ნულოვანი ელემენტიც იქნება, ამასთანავე ჯგუფში ნულოვანი ელემენტი ერთადერთია.

დავამტკიცოთ ჯერ თეორემის პირველი ნაწილი. ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი ელემენტია. გამოვიდეთ იგივეობიდან:

$$\Theta+x=x+(-x)+x,$$

რომელშიც გამოვიყენოთ წინა თეორემის შედეგი, გვექნება

$$\Theta+x=x+\Theta,$$

საიდანაც, თანახმად 2) აქსიომისა, მივიღებთ

$$\Theta+x=x.$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ ახლა, $X$ ჯგუფში, გარდა $\Theta$ ნულოვანი ელემენტისა, არსებობს მეორე $\Theta_1$ ნულოვანი ელემენტი. მაშასადამე, გვექნება $\Theta_1+\Theta=\Theta_1$ და $\Theta_1+\Theta=\Theta$. აქედან $\Theta=\Theta_1$ და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.3.** თუ $X$ არის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ, მაშინ ამ ჯგუფის ყოველ ელემენტს მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე ელემენტი აქვს.

მართლაც, ვთქვათ, $x \in X$ ნებისმიერი ელემენტია, რომლის მოპირდაპირე ელემენტია $-x$. ვთქვათ, $y$ არის იმავე $x$ ელემენტის მეორე მოპირდაპირე ელემენტი. თანახმად 2) აქსიომისა, დავწერთ

$$y=y+\Theta,$$

საიდანაც, 3) აქსიომის ძალით მივიღებთ

$$y=y+\Theta=y+x+(-x).$$

ვინაიდან, დაშვების თანახმად, $y$ არის $x$-ის მოპირდაპირე ელემენტი, ამიტომ

$$y+x=\Theta$$

მაშასადამე,

$$y=\Theta+(-x).$$

აქედან კი, წინა თეორემის ძალით, გვაქვს $y=-x$. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.4.** თუ $X$ ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ, მაშინ $X$ ჯგუფის ნებისმიერი $a$ და $b$ ელემენტებისათვის

$$x+a=b \tag{3.10}$$

განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

განვიხილოთ $c=b+(-a)$ ელემენტი. ვინაიდან $X$ ჯგუფია, ამიტომ $c\in X$. ვაჩვენოთ, რომ $c$ ელემენტი არის (3.10) განტოლების ამონახსნი. მართლაც. ჩავსვათ ამ განტოლების მარცხენა ნაწილში $x$-ის ნაცვლად $c$, მივიღებთ $c+$ $+a=[b+(-a)]+a=b$. ამრიგად, $c$ მართლაც (3.10) განტოლების ამონახსნია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $c$ ერთადერთი ამონახსნია. ვთქვათ $c'$ იმავე განტოლების მეორე ამონახსნია, ე. ი. $c'+a=b$. მივუმატოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მარჯვნიდან $-a$ ელემენტი და გამოვიყენოთ 3) აქსიომა, მივიღებთ

$$c'+a+(-a)=b+(-a), \text{ ე. ი. } c'=c.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

სავსებით ასევე დამტკიცდება ეს თეორემა $a+x=b$ განტოლებისათვისაც.

**თეორემა 3.5.** თუ $X$ ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ, მაშინ ნებისმიერი $x, y, z\in X$ ელემენტებისათვის $x+y=z+y$ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $x=z$.

მართლაც, მივუმატოთ მოცემული ტოლობის ორივე ნაწილს მარჯვნიდან $-y$ ელემენტი, მივიღებთ

$$x+y+(-y)=z+y+(-y),$$

საიდანაც 3) აქსიომის ძალით, გვაქვს $x+\Theta=z+\Theta$. ეს კი, თანახმად 2) აქსიომისა, ნიშნავს $x=z$.

სავსებით ასევე დამტკიცდება ეს თეორემა $y+x=y+z$ ტოლობისათვის.

**თეორემა 3.6.** თუ $X$ ჯგუფია გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მაშინ მისი ნებისმიერი $a$ ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული $a^{-1}$ ელემენტი ამავე ელემენტის მარცხენა შებრუნებული ელემენტიც იქნება.

მართლაც, 2) და 3) აქსიომების თანახმად

$$a^{-1}(aa^{-1})=a^{-1}e=a^{-1}.$$

ახლა $a^{-1}(aa^{-1})=a^{-1}$ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მარჯვნიდან $a^{-1}$ ელემენტის მარჯვენა შებრუნებულ $x$ ელემენტზე, გვექნება

$$[a^{-1}(aa^{-1})]x=a^{-1}x=e.$$

აქედან

$$(a^{-1}a)(a^{-1}x)=e.$$

მაგრამ $a^{-1}x=e$. ამიტომ გვაქვს

$$(a^{-1}a)e=e,$$

ანუ

$$a^{-1}a=e. \qquad (3.12)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(3.12) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a^{-1}$ ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული ელემენტია $a$.

**თეორემა 3.7.** თუ $X$ ჯგუფია გამრავლების ოპერაციის მიმართ და $e$ ამ ჯგუფის მარჯვენა ერთეულოვანი ელემენტია, მაშინ იგი მარცხენა ერთეულოვანი ელემენტიც იქნება და ეს ელემენტი ერთადერთია.

ავიღოთ $X$ ჯგუფის ნებისმიერი $a$ ელემენტი და $aa^{-1}=e$ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მარჯვნიდან $a$ ელემენტზე, გვექნება

$$(aa^{-1})a=ea.$$

ეს ტოლობა ჩავწეროთ ასე:

$$a(a^{-1}a)=ea.$$

აქედან

$$ea=ae=a.$$

მაშასადამე, $e$ წარმოადგენს $X$ ჯგუფის მარცხენა ერთეულოვან ელემენტს.

ერთეულოვანი ელემენტის ერთადერთობა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ველის შემთხვევაში.

**თეორემა 3.8.** თუ $X$ ჯგუფია გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მაშინ ამ ჯგუფის ყოველ $a$ ელემენტს მხოლოდ ერთი შებრუნებული $a^{-1}$ ელემენტი აქვს.

ვთქვათ, $a$ ელემენტს, გარდა $a^{-1}$ შებრუნებული ელემენტისა, აქვს მეორე შებრუნებული $x$ ელემენტი. მაშინ მართებულია ტოლობა

$$ax=e.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ $a^{-1}$ ელემენტზე, გვექნება

$$a^{-1}(ax)=a^{-1}e.$$

აქედან გვაქვს

$$(a^{-1}a)x=a^{-1},$$

ანუ

$$ex=a^{-1},$$

ე. ი. $x=a^{-1}$. ამრიგად, ჯგუფის ყოველ $a$ ელემენტს აქვს ერთადერთი $a^{-1}$ შებრუნებული ელემენტი.

შენიშვნა. ზემოთ დამტკიცებული 3.1—3.8 თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ შემდეგი გამოთქმები: „მარჯვენა (მარცხენა) მოპირდაპირე ელემენტი", „მარჯვენა (მარცხენა) ნულოვანი ელემენტი" „მარჯვენა (მარცხენა) შებრუნებული ელემენტი", „მარჯვენა (მარცხენა) ერთეულოვანი ელემენტი" შეგვიძლია შევცვალოთ შესაბამისად გამოთქმებით: „მოპირდაპირე ელემენტი", „ნულოვანი ელემენტი", „შებრუნებული ელემენტი", „ერთეულოვანი ელემენტი".

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე შემდეგი

**თეორემა 3.9.** თუ $X$ ჯგუფია გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მაშინ ამ ჯგუფის ნებისმიერი $a$ და $b$ ელემენტებისათვის, სადაც $a\neq\Theta$, $ax=b$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=a^{-1}b$.

ამ თეორემის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

4. განვიხილოთ ნებისმიერი $X$ სიმრავლე. ვთქვათ, $R$ აღნიშნავს ყველა ნამდვილი (ან ყველა კომპლექსური) რიცხვის სიმრავლეს. $X$ სიმრავლის ელემენტები აღვნიშნოთ $x$, $y$, $z$,... ასოებით, ხოლო $R$ ველის ელემენტები იყოს $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... .

ვიტყვით, რომ $X$ სიმრავლე წ რ ფ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა ა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები: 1) $X$ წარმოადგენს აბელის ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ, 2) $X$ სიმრავლეში განსაზღვრულია $x$, $y$, $z$,... ელემენტების კომუტატიური გამრავლება $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... რიცხვებზე ისე, რომ დაკმაყოფილებული იყოს შემდეგი პირობები: ა) როცა $x \in X$ და $\alpha \in R$, მაშინ $\alpha x \in X$. ბ) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, 3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, გ) $1\cdot x=x$, დ) $0\cdot x=\Theta$, სადაც $\Theta$ არის $X$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი. ე) თუ $\alpha x=\Theta$ და $x\neq\Theta$, მაშინ $\alpha=0$.

როცა $R$ ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეა, მაშინ $X$ სიმრავლეს ნ ა მ დ ვ ი ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა ე წ ო დ ე ბ ა, ხოლო როცა $R$ ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლეა, მაშინ $X$ სიმრავლეს კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა ეწოდება.

წრფივი სისტემის განსაზღვრიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები: ა) თუ $x-y=\Theta$, მაშინ $x=y$; ბ) ნებისმიერი $\alpha\in R$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $\alpha\Theta=\Theta$; გ) თუ $\alpha x=\Theta$, მაშინ $\alpha=0$, ან $x=\Theta$; დ) თუ $\alpha x=\alpha y$, მაშინ $x=y$ ან $\alpha=0$; ე) თუ $\alpha x=\beta x$, მაშინ $x=\Theta$, ან $\alpha=\beta$; ვ) თუ $\alpha x=\Theta$ და $\alpha\neq0$, მაშინ $x=\Theta$, ზ) თუ $(\alpha-\beta)x=\Theta$, მაშინ $\alpha=\beta$, ან $x=\Theta$.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) განვიხილოთ $n$-განზომილებიან ყველა ვექტორის $X$ სიმრავლე. ყოველი $\vec{x}=(\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n)\in X$ ვექტორი არის დალაგებული ნამდვილი $\xi_i(i=1,\dots, n)$ რიცხვების ერთობლიობა ამასთანავე, $\vec{o}=(o, o,\dots, o)$ ვექტორი იყოს $X$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი. თუ ამ სიმრავლეში შეკრების ოპერაციას განვსაზღვრავთ როგორც ვექტორთა ჩვეულებრივ შეკრებას, ხოლო გამრავლების ოპერაციას განვსაზღვრავთ როგორც ნამდვილი რიცხვისა და ვექტორის ჩვეულებრივ გამრავლებას, მაშინ $X$ სიმრავლე იქნება ნ ა მ დ ვ ი ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა.

2) თუ სათანადოთ განვსაზღვრავთ ელემენტების შეკრების ოპერაციას და რიცხვისა და ელემენტის ნამრავლის ცნებას, მაშინ მეტრული $R_n$, $l_p^{(n)}$, $l_p$, $m$, $c$, $s$, $M$, $(S)$, $S$, $C(a, b)$, $C^{(k)}(a, b)$ სივრცეები, რომლებიც პირველ თავში იყო განხილული წრფივი სისტემები იქნება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რა თქმა უნდა, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ წრფივი სისტემა უსათუოდ მეტრული სივრცე უნდა იყოს.

3) განვიხილოთ $n$ რიგის ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ყველა ნამდვილი ამონახსნის $X$ სიმრავლე. თუ ორი ამონახსნის ჯამს განვსაზღვრავთ როგორც ორი ფუნქციის ჩვეულებრივ ჯამს, ხოლო რიცხვისა და რაიმე ამონახსნის ნამრავლს განვსაზღვრავთ, როგორც ნამდვილი რიცხვისა და ფუნქციის ჩვეულებრივ ნამრავლს, მაშინ $X$ იქნება ნამდვილი წრფივი სისტემა. ანალოგიურად, ყველა კომპლექსური ამონახსნის სიმრავლე არის კომპლექსური წრფივი სისტემა.

5. განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი აბსტრაქტული მეტრული $E=(X, \rho)$

სივრცე. ვიტყვით, რომ $E$ ნამდვილი (კომპლექსური) წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ე ა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

*a*) $E$ არის ნამდვილი (კომპლექსური) წრფივი სისტემა;

*b*) თუ ადგილი აქვს $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=0$ ტოლობას, მაშინ ადგილი ექნება $\lim_{n\to\infty}\rho(\alpha x_n, \alpha x^*)=0$ ტოლობასაც, სადაც $x_n, x\in E$, $\alpha\in R$;

*c*) თუ $\lim_{n\to\infty}\rho(\alpha_n, \alpha^*)=0$, მაშინ $\lim_{n\to\infty}\rho(\alpha_n x, \alpha^* x)=0$, სადაც $x\in E$ ნებისმიერი ელემენტია, $\alpha_n, \alpha^*\in R$;

*d*) თუ $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x^*)=0$ და $\lim_{n\to\infty}\rho(y_n, y^*)=0$, მაშინ $\lim_{n\to\infty}\rho\ (x_n+y_n, x^*+y^*)=0$, სადაც $x_n, y_n, x^*, y^*\in E$.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ა) ავიღოთ მეტრული $R_n$ სივრცე და $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in R_n$ ნებისმიერი ორი ელემენტი, $i=1,2,\ldots, n$. ვუწოდოთ $x$ და $y$ ელემენტების ჯამი მესამე $x+y=(x_i+y_i)\in R_n$ ელემენტს. გარდა ამისა, $\alpha$ რიცხვისა და $x$ ელემენტის ნამრავლი ვუწოდოთ $\alpha x=(\alpha x_i)\in R_n$ ელემენტს. ამის შემდეგ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $R_n$ არის წრფივი სივრცე.

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $l_p^{(n)}$ სივრცე აგრეთვე წრფივი სივრცეა, თუ ელემენტების შეკრებისა და რიცხვის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციებს ისევე განვსაზღვრავთ, როგორც $R_n$ სივრცეში.

ბ) ვთქვათ, $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in l_p$, $p\geqslant 1$, $i=1,2,\ldots$, არის ნებისმიერი ელემენტები. მათი ჯამი იყოს $x+y=(x_i+y_i)\in l_p$ ელემენტი, ხოლო $\alpha$ რიცხვის ნამრავლი $x$ ელემენტზე იყოს $\alpha x=(\alpha x_i)\in l_p$ ელემენტი. ამის შემდეგ $l_p$ სივრცე წრფივ სისტემად გადაიქცევა.

თუ $x$ ელემენტის $x_i$ კოორდინატები კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ $l_p$ (და, მაშასადამე $l_2$) კომპლექსური წრფივი სივრცე იქნება.

გ) $m$, $c$, $s$ სივრცეები, რომლებშიც ჩვეულებრივი წესით არის შემოღებული ელემენტების შეკრებისა და რიცხვის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები, აგრეთვე წრფივი სივრცეებია.

დ) უწყვეტი ფუნქციების $C(a, b)$ სივრცე და ფუნქციონალური $L_p$, $p\geqslant 1$, სივრცე წრფივი სივრცეებია.

წრფივ სივრცეებში სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან ე. წ. წრფივად დამოუკიდებელი და წრფივად დამოკიდებული ელემენტები.

ვთქვათ $x_1, x_2,\ldots, x_n\in E$ გარკვეული ელემენტებია, რომელთა რიცხვი სასრულია. ვიტყვით, რომ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ელემენტებია, თუ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\Theta$ ტოლობა შესაძლოა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა რიცხვი $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. პირიქით, როცა არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ რიცხვები, რომ ყველა არ უდრის ნულს და $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\Theta$, მაშინ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ელემენტებს წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ელემენტები ეწოდება.

ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ წრფივად დამოკიდებული ელემენტებია და, მაგალითად $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \beta_2 x_3 + \cdots + \beta_{n-1} x_n,$$

სადაც $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i + 1}{\alpha_1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $x_1$ ელემენტი არის $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ელემენტების წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. ა) ფუნქციათა მიმდევრობა $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2, \cdots, x_n(t) = t^{n-1} \in C(a, b)$, წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებია.

ბ) ფუნქციათა მიმდევრობა $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \sin^2 t$, $x_3(t) = \cos^2 t \in C(a, b)$, წრფივად დამოკიდებული ელემენტებია, ვინაიდან $\sin^2 t + \cos^2 t - 1 = 0$.

გ) განვიხილოთ $n$-განზომილებიან ვექტორთა წრფივი $E_n$ სივრცე, რომელშიც ავიღოთ წრფივად დამოკიდებული ვექტორების სასრული $\vec{x}, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_k$ მიმდევრობა. ვთქვათ, $\vec{x}_i = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. ვინაიდან ეს ვექტორები წრფივად დამოკიდებული არიან, ამიტომ არსებობს $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის და $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i = 0$, ანუ

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\xi_1^{(1)} + \alpha_2\xi_1^{(2)} + \cdots + \alpha_k\xi_1^{(k)} = 0, \\ &\alpha_1\xi_2^{(1)} + \alpha_2\xi_2^{(2)} + \cdots \alpha_k\xi_2^{(k)} = 0. \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\alpha_1\xi_n^{(1)} + \alpha_2\xi_n^{(2)} + \cdots + \alpha_k\xi_n^{(k)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

როგორც ვხედავთ $\vec{x}_1\ \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ვექტორების წრფივად დამოკიდებულება $E_n$ სივრცეში ნიშნავს იმას, რომ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ რიცხვები უნდა წარმოადგენდეს ერთგვაროვანი წრფივი ალგებრული (3.13) სისტემის არანულოვან ამონახსნს. შევადგინოთ (3.13) სისტემის მატრიცი

$$A = \begin{Vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_1^{(k)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_2^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_n^{(k)} \end{Vmatrix}.$$

როგორც ცნობილია, თუ $A$ მატრიცის რანგი უდრის უცნობთა $k$ რიცხვს, მაშინ (3.13) სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. თუ კი $A$ მატრიცის რანგი ნაკლებია $k$ რიცხვზე, მაშინ (3.13) სისტემას არანულოვანი ამონახსნიც აქვს. უკანასკნელ შემთხვევაში $\vec{x}_1\ \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ ვექტორები იქნება წრფივად დამოკიდებული.

დ) $E_n$ სიმრავლეში ავიღოთ ერთეულოვან ვექტორთა შემდეგი მიმდევრობა: $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots$, $\vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორთა ეს მიმდევრობა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა. მართლაც, განტოლებათა (3.13) სისტემა ამ შემთხვევაში იქნება:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \\ &\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

ამ სისტემას კი მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს: $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_i}=0$ ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $\alpha_i=0$. ამის გამო $\vec{e_1},\ldots,\vec{e_n}$ არის ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა.

ეხლა წრფივ $E$ სივრცეში ავიღოთ ელემენტების უსასრულო სისტემა. ვიტყვით, რომ $\{x_\nu\}$ სისტემა წ რ ფ ი ვ ა დ  დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა, თუ ამ სისტემის ყოველი სასრული რაოდენობა სხვადასხვა ელემენტებისა არის წრფივად დამოუკიდებელი.

წრფივ $E$ სივრცეს ეწოდება $n$—გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი  წ რ ფ ი ვ ი  ს ი ვ რ ც ე, თუ, იგი შეიცავს $n$ წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტს და მისი ყოველი $n+1$ ელემენტი უკვე წრფივად დამოკიდებული არის. თუ $E$ სივრცეს გააჩნია წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების უსასრულო სიმრავლე, მაშინ მას უ ს ა ს რ უ ლ ო  გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ  წ რ ფ ი ვ  ს ი ვ რ ც ე ს უწოდებენ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ა) $n$—განზომილებიან ვექტორთა წრფივი $E_n$ სივრცე არის $n$ განზომილებიანი სივრცე. ამ სივრცეში არსებობს მხოლოდ $n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი: $\vec{e_1}=(1,0,\ldots,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0,\ldots,0),\cdots,\vec{e_n}=(0,0,\ldots,1)$.

ბ) წრფივ $C(a,b)$ სივრცეში ავიღოთ ელემენტების უსასრულო სისტემა: $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2,\ldots$, $x_n(t)=t^{n-1},\ldots$ ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა და, ამიტომ $C(a,b)$ სივრცე უსასრულო განზომილებიანი სივრცეა.

განვიხილოთ წრფივი $E$ სივრცე და მისი ელემენტების რაიმე არაცარიელი $L$ სიმრავლე. $L$ სიმრავლეს წ რ ფ ი ვ ი  მ რ ა ვ ა ლ ს ა ხ ე ო ბ ა ეწოდება, თუ, გარდა წრფივად დამოუკიდებელი $x_1, x_2,\ldots, x_k\in L$ ელემენტებისა, ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის ნებისმიერი $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$ წრფივი კომბინაცია. როცა $L$ სიმრავლე ჩაკეტილია, მაშინ $L$ სიმრავლეს ეწოდება $E$ სივრცის ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ა) განვიხილოთ სამგანზომილებიან ვექტორთა წრფივი $E_3$ სივრცე. ამ სივრცის ყველა იმ ვექტორების $M$ სიმრავლე, რომლებიც პარალელური არიან რაიმე სიბრტყისა (ან წრფისა), იქნება $E_3$ სივრცის ქვესივრცე.

ბ) ყველა იმ $n$—განზომილებიანი $\vec{x}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ვექტორის $M$ სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ ერთგვაროვან $n$ განტოლების სისტემას $n$ უცნობით: $\alpha_{i1}\xi_1+\alpha_{i2}\xi_2+\cdots+\alpha_{in}\xi_n=0$, სადაც $\alpha_{ik}$ მოცემული ნამდვილი რიცხვებია $(i,\ k=1,\ 2,\ldots,n)$, წარმოადგენს ყველა $n$—განზომილებიანი ვექტორის წრფივი $E_n$ სივრცის ქვესივრცეს.

გ) ვთქვათ, $E=C(0,1)$. სიმრავლე $M\subset C(0,1)$, რომლის ელემენტები არის ფუნქციები: $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2,\ldots$, $x_n(t)=t^{n-1},\ldots$, წარმოადგენს $C(0,1)$ სივრცის მრავალსახეობას, ხოლო მისი ჩაკეტვა $\overline{M}=C(0,1)$.

ვთქვათ, $M$ არის $E$ სივრცეში მოთავსებული რაიმე სიმრავლე. ყველა $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ სახის სასრული წრფივი კომბინაციების სიმრავლეს, სადაც ყველა $x_i \in M$, ეწოდება $M$ სიმრავლის წ რ ფ ი ვ ი გ ა რ ს ი.

მოცემული $M$ სიმრავლის წრფივი გარსი არის უმცირესი მრავალსახეობა $E$ სივრცეში, რომელიც $M$ სიმრავლეს შეიცავს.

როცა $M$ სასრული სიმრავლეა, მაშინ მისი წრფივი გარსი არის სასრული განზომილების. წრფივი გარსის ელემენტებს თუ დავუმატებთ მისი ელემენტების ყველა კრებადი მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტებს, მივიღებთ ჩ ა კ ე ტ ი ლ წ რ ფ ი ვ გ ა რ ს ს,

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ უწყვეტი ფუნქციების $\{t^n\}_{n=0}^{\infty} \subset C(0,1)$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ჩაკეტილი წრფივი გარსია თვით $C(0,1)$ სივრცე.

წრფივ $E$ სივრცეში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ე. წ. ამოზნექილი სიმრავლე. ვიტყვით, რომ $N \subset E$ სიმრავლე ა მ ო ზ ნ ე ქ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა, თუ ნებისმიერი $x, y \in \mathrm{N}$ ელემენტებისათვის ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის $\alpha x + \beta y$ წრფივი კომბინაცია, სადაც $\alpha$ და $\beta$ არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha + \beta = 1$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $N$ ამოზნექილი სიმრავლეა და $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$, მაშინ წრფივი კომბინაცია $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in N$, სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ და $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

თუ $M \subset E$ ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ უმცირეს ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს $M$ სიმრავლეს, ეწოდება $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ა მ ო ზ ნ ე ქ ი ლ ი გ ა რ ს ი.

თუ $N \subset E$ ამოზნექილი სიმრავლეა, მაშინ $N = \alpha N + \beta N$, სადაც ნამდვილი რიცხვები $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, ხოლო $\alpha N$ აღნიშნავს $\alpha x$ სახით ელემენტების სიმრავლეს, როცა $x$ გაირბენს მთელ $N$ სიმრავლეს. ცხადია, რომ წრფივი სივრცის ყოველი ქვესივრცე ამოზნექილი სიმრავლეა.

ავიღოთ წრფივი $E_1$ და $E_2$ სივრცეები. ვთქვათ, ამ სივრცეების ელემენტებს შორის შესაძლოა ისეთი ურთიერთ ცალსახა თანადობა დავამყაროთ, რომ როცა $x_1, y_1 \in E_1$ ელემენტები ურთიერთ ცალსახა თანადობაშია შესაბამისად $x_2, y_2 \in E_2$ ელემენტებთან, მაშინ $x_1 + y_1 \in E_1$ ელემენტი ურთიერთ ცალსახა თანადობაში იყოს $x_2 + y_2 \in E_2$ ელემენტთან. ამ შემთხვევაში $E_1$ და $E_2$ უ რ თ ი ე რ თ ი ზ ო მ ო რ ფ უ ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ე ე ბ ი ეწოდება. ასე მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და ერთ წრფეზე მდებარე ყველა წერტილის სიმრავლე ურთიერთ იზომორფული წრფივი სივრცეებია.

ახლა შემოვიღოთ პ ი რ დ ა პ ი რ ი ჯ ა მ ი ს ცნება. ვთქვათ, როგორც ზემოთ, $E$ წრფივი სივრცეა, ხოლო $L_1, L_2, \ldots, L_n$—მისი ქვესივრცეები. ვთქვათ, ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2, \ldots$, $x_n \in L_n$ ელემენტები, რომ $x$ ცალსახად წარმოიდგინება შემდეგი ჯამის სახით:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{3.15}$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ წრფივი $E$ სივრცე არის $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ქვესივრცეების პირდაპირი ჯამი და დავწერთ $E=\bigcup_{i=1}^{n}+L_i$. თვითონ (3.15) ტოლობას ეწოდება $x$ ელემენტის დაშლა აღებული ქვესივრცეების ელემენტების მიხედვით.

ანალოგიურად შეიძლება შემოვიღოთ წრფივი სივრცეების პირდაპირი ჯამი. სახელდობრ, ვთქვათ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ წრფივი მეტრული სივრცეებია. შევადგინოთ ამ სივრცეების ელემენტებისაგან ყველა შესაძლო დალაგებული სისტემები $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სადაც $x_i \in E_i (i=1, 2, \ldots, n)$. ვაჩვენოთ, რომ $E$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია ყველა ასეთი დალაგებული სისტემები, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრფივი სივრცე. ამისათვის საჭიროა სათანადოდ შემოვიღოთ ელემენტების ჯამისა, რიცხვის ელემენტზე გამრავლებისა და ზღვარზე გადასვლის ოპერაციები. ვთქვათ, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ არის $E$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი. მანძილი $x$ და $y$ ელემენტებს შორის ვუწოდოთ გამოსახულებას:

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{n} \rho_{E_i}(x_i, y_i),$$

სადაც $\rho_{E_i}(x_i, y_i)$ აღნიშნავს მანძილს $x_i, y_i \in E_i$ ელემენტებს შორის. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\rho(x, y)$ დააკმაყოფილებს მანძილის ყველა აქსიომას. $x$ და $y$ ელემენტების ჯამი ვუწოდოთ ელემენტს

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

ხოლო $\alpha$ რიცხვისა და $x$ ელემენტის ნამრავლი იყოს ელემენტი:

$$\alpha x=(\alpha x_1 \ldots, \alpha x_n),$$

$x+y$ ჯამს აზრი აქვს, ვინაიდან $x_i+y_i \in E_i$; ასევე აზრი აქვს $\alpha x$ ნამრავლს, ვინაიდან $\alpha x_i \in E_i$.

განვიხილოთ ახლა ისეთი მიმდევრობები $\left\{x_1^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in E_1$, $\left\{x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in E_2, \ldots, \left\{x_n^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in E_n$, რომ $\lim_{k\to\infty} \rho_{E_1}(x_1^{(k)}, x_1^*)=0$, $\lim_{k\to\infty} \rho_{E_2}(x_2^{(k)}, x_2^*)=0, \ldots,$ $\lim_{k\to\infty} \rho_{E_n}(x_n^{(k)}, x_n^*)=0$, სადაც $x_i^* \in E_i$, $i=1,2,\ldots,n$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $\left\{\overline{x_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \in E$ მიმდევრობა, სადაც $\overline{x}_k=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ კრებადია $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in E$ ელემენტისაკენ და დავწერთ

$$\lim_{k\to\infty} \rho_E(\overline{x}_k, x^*)=0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ, როცა $E$ სიმრავლეში მოყვანილი წესით არის შემოღებული შეკრებისა, რიცხვზე გამრავლებისა და ზღვარზე გადასვლის ოპერაციები, მაშინ დაკმაყოფილებულია წრფივი სივრცის ყველა აქსიომა. ამის გამო $E$ სიმრავლე გადაიქცევა წრფივ სივრცედ. $E$ სივრცეს ეწოდება $E_1, E_2, \ldots, E_n$ მეტრული წრფივი სივრცეების პ ი რ დ ა პ ი რ ი ჯ ა მ ი და წერენ

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}+E_i.$$

1. წრფივ სივრცეთა შორის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ე. წ. ბანახის სივრცეს, ანუ ნორმირებულ სივრცეს. წრფივსა და სრულ $E$ სივრცეს ბ ა ნ ა ხ ი ს ს ი ვ რ ც ე ანუ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ეწოდება, თუ ყოველ $x \in E$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ არაუარყოფითი ნამდვილი $\|x\|$ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

α) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = \Theta$,

β) ნებისმიერი $x$, $y \in E$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ უტოლობას.

γ) ნებისმიერი (ნამდვილი ან კომპლექსური) $\alpha$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ა) $E_n$ სივრცე, რომლის ელემენტებია $n$—განზომილებიანი $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ვექტორები, ბანახის სივრცეა. ნორმა $\vec{x}$ ელემენტისა განსაზღვრულია ფორმულით:

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ბ) უწყვეტ ფუნქციათა $C(a,b)$ სივრცე ნორმირებული სივრცეა. თუ $x(t) \in C(a, b)$, მაშინ

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

გ) $l_p$ ნორმირებული სივრცეა. $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_p$ ელემენტის ნორმა განსაზღვრულია ტოლობით

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

დ) $L_p$ (0,1), $p \geqslant 1$, სივრცე, აგრეთვე ნორმირებული სივრცეა, რომელშიც $x(t)$ ელემენტის ნორმა ეწოდება რიცხვს

$$\|x\| = \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

ე) წრფივი $s$, $(S)$ სივრცეები წარმოადგენს არანორმირებული სივრცეების მაგალითებს.

ჩვეულებრივად, ნორმირებულ სივრცეში მანძილის ცნება ელემენტებს შორის შემოაქვთ შემდეგი ტოლობით:

$$\rho(x,y) = \|x - y\|. \tag{3.15}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ფორმულით განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მანძილის ყველა აქსიომას.

γ) აქსიომიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ $\|x\| = \rho(x, \Theta)$. ნორმირებული სივრცის აქსიომები მისი ელემენტების იმ ძირითად თვისებებს გამოსახავენ, რომელიც ახასიათებს ვექტორის სიგრძეს ევკლიდეს სივრცეში. $E$

სივრცეს ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ე წ ო დ ე ბ ა, თუ $E$ ნამდვილი წრფივი სივრცეა. პირიქით, როცა $E$ კომპლექსური წრფივი სივრცეა, მაშინ მისგან წარმოქმნილი ნორმირებული სივრცეც კომპლექსურია.

ნორმირებულ $E$ სივრცეში ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობის კრებადობა $x^* \in E$ ელემენტისაკენ ნიშნავს ნორმით კრებადობს:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x^*\| = 0.$$

დავამტკიცოთ, რომ ნორმირებულ სივრცეში ნებისმიერი $x, y \in E$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\|x - y\| \geqslant \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|. \tag{3.16}$$

მართლაც, გამოვიდეთ $x = y + (x-y)$ იგივეობიდან, საიდანაც ნორმებზე გადასვლის შემდეგ, თანახმად β) აქსიომისა, მივიღებთ

$$\|x\| \leqslant \|y\| + \|x-y\|,$$

ე. ი.

$$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|.$$

ანალოგიურად მივიღებთ უტოლობას

$$\|y - x\| \geqslant \|y\| - \|x\|.$$

უკანასკნელი ორი უტოლობიდან გამომდინარეობს (3.16) უტოლობა დამტკიცებული უტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\|x + y\| \geqslant \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ნ ო რ მ ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი ა. ამისათვის უნდა ვუჩვენოთ, რომ თუ $\{x\}_n \in E$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $x^* \in E$ ელემენტისაკენ, ე. ი. თუ

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x^*\| = 0,$$

მაშინ

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x^*\|.$$

ვისარგებლოთ (3.16) უტოლობით. დავწერთ

$$\big|\, \|x_n\| - \|x^*\| \,\big| \leqslant \|x_n - x^*\|.$$

გადავიდეთ ზღვარზე როცა $n \to \infty$, მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} \big|\, \|x_n\| - \|x^*\| \,\big| = 0$$

და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ამ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\{x_n\} \in E$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია, მაშინ მიმდევრობა $\{\|x_n\|\}$ შემოსაზღვრულია: $\|x_n\| \leqslant \mu$ $n = 1, 2, \ldots$, სადაც $\mu$ გარკვეული დადებითი რიცხვია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ თუ ნორმირებულ სივრცეში ელემენტთა ნორმების $\{\|x_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია,

თუ $\{\|x_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\{x_n\} \in E$ მიმდევრობას ნ ო რ მ ი თ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ეწოდება.

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე, რომ ნორმირებულ $E$ სივრცეში ელემენტების შეკრებისა და რიცხვის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები ნორმით უწყვეტი ოპერაციებია. ამ წინადადების პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ თუ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $x^*$, $y^* \in E$ და

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0, \ \lim_{n\to\infty} \|y_n - y^*\| = 0,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n+y_n) - (x^*+y^*)\| = 0. \tag{3.17}$$

ამისათვის გამოვიდეთ შემდეგი უტოლობიდან:

$$\|(x_n+y_n)-(x^*+y^*)\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|y_n - y^*\|.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $n\to\infty$ მივიღებთ (3.17) ტოლობას.

თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ თუ

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0 \text{ და } \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha^*\| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha^*| = 0,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n x_n - \alpha^* x^*\| = 0. \tag{3.18}$$

ამისათვის ავიღოთ იგივეობა

$$\alpha_n x_n - \alpha^* x^* = \alpha_n(x_n - x^*) + x^*(\alpha_n - \alpha^*).$$

გადავიდეთ ამ იგივეობაში ნორმებზე და თანაც გამოვიყენოთ $\beta$) და $\gamma$) აქსიომები, მივიღებთ

$$\|\alpha_n x_n - \alpha^* x^*\| \leqslant |\alpha_n| \, \|x_n - x^*\| + |\alpha_n - \alpha^*| \, \|x^*\|.$$

ახლა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$ და გამოვიყენოთ მოცემული პირობები, მივიღებთ (3.18) ტოლობას. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

2. ზემოთ ჩვენ შემოვიღეთ სასრული განზომილებიანი წრფივი სივრცის განსაზღვრა. ამ განსაზღვრის მიხედვით ნორმირებული $E$ სივრცე სასრული განზომილებიანია, თუ არსებობს წრფივად დამოუკიდებელი ისეთი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სასრული რაოდენობა, რომ ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტი ცალსახად წარმოიდგინება როგორც მათი წრფივი კომბინაცია:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i. \tag{3.19}$$

პირიქით, რიცხვთა ყოველი დალაგებული $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მიმდევრობისათვის მოიძებნება მხოლოდ ისეთი $x \in E$ ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ცალსახა (3.19) წარმოდგენას. სხვანაირად, $n$-განზომილებიან ნორმირებულ სივრცეში ყოველ $x$ ელემენტს შეესაბამება რიცხვთა გარკვეული დალაგებული $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მიმდევრობა და პირიქით. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვებს ეწოდება $x$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი და აღინიშნება ასე: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

$n$—განზომილებიან ნორმირებულ $E$ სივრცეში ელემენტების შეკრებისა და რიცხვის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად: თუ $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in E$, მაშინ $x+y = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$, ხოლო $k$ რიცხვის ნამრავლი $x$ ელემენტზე არის $kx=(k\alpha_1, k\alpha_2, \cdots, k\alpha_n)$ ელემენტი.

შევნიშნოთ, რომ (3.19) ტოლობაში $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ელემენტებს შორის არცერთი არ არის ნულოვანი ელემენტი. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, მაგალითად $x_1=\Theta$; მაშინ, შეგვიძლია დავწეროთ: $x_1=o\cdot x_2+ +o\cdot x_3+\cdots+o\cdot x_n$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x_1$ გამოისახება $x_2, \cdots, x_n$ ელემენტების წრფივი კომბინაციით. ეს ტოლობა კი შეუძლებელია, ვინაიდან $x_1, x_2, \cdots, x_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებია.

*თეორემა 3.10.* თუ $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ არის $n$—განზომილებიანი ნორმირებული $E$ სივრცის ელემენტი, მაშინ არსებობს ისეთი $m>0$ რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ წრფივად დამოუკიდებელ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ ელემენტებზე, რომ

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{1}{m}\|x\|, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

თეორემის დასამტკიცებლად აღვნიშნოთ $\bar{S}$-ით ყველა იმ $n$—განზომილებიან $\vec{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა ნორმა (სიგრძე) უდრის ერთს:

$$\|\vec{\alpha}\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 1.$$

გეომეტრიულად $\bar{S}$ არის $n$—განზომილებიანი ერთეულოვანი სფეროს ზედაპირის წერტილების სიმრავლე. ვინაიდან, $\bar{S}$ არის $n$—განზომილებიანი და ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლე, ამიტომ იგი კომპაქტური სიმრავლეა. ვთქვათ, $\{\vec{\alpha}^{(m)}=(\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)})\} \in \bar{S}$ არის უსასრულო ქვემიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია $\vec{\alpha}^*=(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ ზღვარისაკენ, ე. ი.

$$\lim_{m\to\infty} \|\vec{\alpha}^{(m)} - \vec{\alpha}^*\| = \lim_{m\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^*)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

ვინაიდან, $\|\vec{\alpha}^{(m)}\|=1$, $m=1, 2, \ldots$ და ნორმა უწყვეტი ფუნქციონალია, ამიტომ $\|\vec{\alpha}^*\|=1$, ე. ი. $\vec{\alpha}^* \in \bar{S}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\bar{S}$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

შევუსაბამოთ $\vec{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \bar{S}$ ვექტორს $x \in E$ ელემენტი, რომლის კოორდინატები ემთხვევა $\vec{\alpha}$ ვექტორის კოორდინატებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს (3.19) დაშლას, სადაც $\|\vec{\alpha}\|=1$ და $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2=1$, $x \neq \Theta$.

ვთქვათ, როგორც ზემოთ, $\{\vec{\alpha}^{(m)}\} \in \bar{S}$ არის ნორმით კრებადი მიმდევრობა $\vec{\alpha}^* \in \bar{S}$ ელემენტისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ $i$ ნიშნაკის ყოველი შესაძლო

მნიშვნელობისათვის (გავიხსენოთ, რომ $i=1, 2,\ldots,n$) ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{m\to\infty} |\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^*|=0.$$

ყოველი კომპლექსი $n$ დალაგებული $(\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)},\ldots,\alpha_n^{(m)})=\overrightarrow{\alpha^{(m)}}$ რიცხვისა განსაზღვრავს $E$ სივრცის $x(\overrightarrow{\alpha^{(m)}})=(\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)},\ldots,\alpha_n^{(m)})$ ელემენტს. როცა $m$ ნიშნაკი გაირბენს ყველა ნატურალურ მნიშვნელობას, ცხადია, წარმოიქმნება $\{x(\overrightarrow{\alpha^{(m)}})\}\subset E$ მიმდევრობა. სავსებით ასევე, ზღვარითი $\overrightarrow{\alpha^*}=(\alpha_1^*, \alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*)$ ელემენტი წარმოქმნის $x(\overrightarrow{\alpha^*})=(\alpha_1^*, \alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*)\in E$ ელემენტს. გარდა ამისა, როცა $\lim\limits_{m\to\infty}\|\overrightarrow{\alpha^{(m)}}-\overrightarrow{\alpha^*}\|=0$, მაშინ $\lim\limits_{m\to\infty}\|x(\overrightarrow{\alpha^{(m)}})-x(\overrightarrow{\alpha^*})\|=0$. ამ დებულების დამტკიცება მოყვანილია მომდევნო თეორემაში.

ვინაიდან ელემენტის ნორმა უწყვეტი ფუნქციონალია, ამიტომ $\{\|x(\overrightarrow{\alpha^{(m)}})\|\}$ მიმდევრობა კრებადი იქნება $\|x(\overrightarrow{\alpha^*})\|$ ნორმისაკენ:

$$\lim_{m\to\infty}\|x(\overrightarrow{\alpha^{(m)}})\|=\|x(\overrightarrow{\alpha^*})\|.$$

როგორც ჩანს $\|x(\overrightarrow{\alpha})\|$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია $\overline{S}$ კომპაქტზე $\overrightarrow{\alpha}\in\overline{S}$, უწყვეტია. ამიტომ, იგი მიაღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას (იხ. თავი I, თეორემა 1.45). ვთქვათ, $\min\limits_{\overrightarrow{\alpha}\in\overline{S}}\|x(\overrightarrow{\alpha})\|=m$. ვინაიდან $\|x(\overrightarrow{\alpha})\|>0$ ყველა $\overrightarrow{\alpha}\in\overline{S}$ ელემენტისათვის, ამიტომ $m>0$. ნებისმიერი $x(\overrightarrow{\alpha})\neq\Theta$ ელემენტისათვის, $\overrightarrow{\alpha}\in\overline{S}$, გვაქვს: $\|x(\overrightarrow{\alpha})\|\geqslant m$, სადაც

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=1. \tag{3.20}$$

განვიხილოთ ელემენტი:

$$y=\beta x(\overrightarrow{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i, \tag{3.21}$$

სადაც

$$\beta=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right\}^{-\frac{1}{2}},\quad \beta_i=\alpha_i\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2=1.$$

$y$ ელემენტი აკმაყოფილებს (3.20) პირობებს, ამიტომ $\|y\|>m$. ამასთანავე (3.21) ტოლობიდან გვაქვს

$$\|x\|=\|y\|\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\geqslant m\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

საიდანაც

$$|\alpha_i|\leqslant\frac{1}{m}\|x\|,\ i=1,2,\ldots,n;$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.11.** იმისათვის რომ $n$-განზომილებიან $E$ სივრცეში $\{x^{(m)}\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადი იყოს $x^*\in E$ ელემენტისაკენ, სადაც $x^{(m)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}x_i$, $x^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*x_i$, აუცილებელი და საკმარისია, $i$ ნიშნაკის ყველა $i=1,2,\ldots,n$ მნიშვნელობისათვის შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

$$\lim_{m\to\infty}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^*|=0. \tag{3.22}$$

დავამტკიცოთ ჯერ პირობების საკმარისობა. ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ როცა შესრულებულია (3.22) პირობები, მაშინ $\lim\limits_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x^*\|=0.$

როგორც ვიცით, ნორმირებულ სივრცეში რიცხვის გამრავლება სივრცის ელემენტზე არის უწყვეტი ოპერაცია, ამიტომ ერთის მხრივ გვაქვს

$$\lim_{m\to\infty}\|\alpha_i^{(m)}x_i-\alpha_i^*x_i\|=0,\ i=1,2,\ldots,n,$$

მეორეს მხრივ, უწყვეტია აგრეთვე შეკრების ოპერაციაც, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}x_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*x_i\right\|=0,$$

ე. ი.

$$\lim_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x^*\|=0.$$

ამით დამტკიცებულია (3.22) პირობების საკმარისობა.

ახლა დავამტკიცოთ (3.22) პირობების აუცილებლობა. ამისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ როცა

$$\lim_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x^*\|=0,$$

მაშინ ადგილი აქვს (3.22) ტოლობებს. განვიხილოთ $x^{(m)}-x^*\in E$ სხვაობა. ამ სხვაობის კოორდინატები იქნება: $x^{(m)}-x^*=(\alpha_1^{(m)}-\alpha_1^*,\ \alpha_2^{(m)}-\alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^{(m)}-$ $-\alpha_n^*)$. თანახმად 3.10 თეორემისა, არსებობს ისეთი $\mu$ რიცხვი, რომ

$$|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^*|\leqslant\mu\|x^{(m)}-x^*\|,\ i=1,2,\ldots,n.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\|x^{(m)}-x^*\|\to0$, როცა $m\to\infty$, ამიტომ წინა უტოლობებიდან დავწერთ:

$$\lim_{m\to\infty}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^*|=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

ამით თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

**თეორემა 3.12.** იმისათვის, რომ სასრული განზომილებიანი ნორმირებული $E$ სივრცეში მოთავსებული $M$ სიმრავლე

კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი ი ყ ო ს, ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი და ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა, რ ო მ $M$ ი ყ ო ს ნ ო რ მ ი თ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი.

პირობის აუცილებლობა დამტკიცებას არ საჭიროებს (იხ. თეორემა 1.29). დავამტკიცოთ მისი საკმარისობა. ამისათვის ვთქვათ, $M$ ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლეა და დავამტკიცოთ, რომ იგი კომპაქტური სიმრავლე იქნება. ავიღოთ $M$ სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერი უსასრულო $\{x^{(m)}\}$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(m)}=(\alpha_1^{(m)},\ldots,\alpha_n^{(m)})$. ვინაიდან ეს მიმდევრობა ნორმით შემოსაზღვრულია, ამიტომ 3.10 თეორემის ძალით, რიცხვითი $\{\alpha_i^{(m)}\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია $i$ ნიშნაკის ყოველი $i=1, 2,\ldots,n$ მნიშვნელობისათვის. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, შემოსაზღვრული $\{\alpha_i^{(m)}\}$ რიცხვითი მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი $\{\alpha_i^{(m_k)}\}\in\{\alpha_i^{(m)}\}$ ქვემიმდევრობა. ვთქვათ, $\alpha_i^{(m_k)}\to\alpha_i^*$, ე. ი. ვთქვათ, $\lim\limits_{m_k\to\infty}|\alpha_i^{(m_k)}-\alpha_i^*|=0$.

მაშინ, წინა თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი $x^*=(\alpha_1^*, \alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*)$ ელემენტი, რომ

$$\lim_{m_k\to\infty}\|x^{(m_k)}-x^*\|=0.$$

ამრიგად, $M$ სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო $\{x^{(m)}\}$ მიმდევრობიდან გამოვყავით ნორმით კრებადი $\{x^{(m_k)}\}$ ქვემიმდევრობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.13.** ყ ო ვ ე ლ ი ს ა ს რ უ ლ ი გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $E$ ს ი ვ რ ც ე ს რ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ა.

თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\{x^{(m)}\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობა, სადაც $x^{(m)}=(\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)},\ldots,\alpha_n^{(m)})$ $(m=1, 2,\ldots)$, არის კრებადი.

ვინაიდან $E$ სასრული განზომილებიანი სივრცეა, ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$x^{(m)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}x_i,$$

სადაც $x_1, x_2,\ldots,x_n\in E$ წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებია, ხოლო $n$ არის სივრცის განზომილება. რაკი $\{x^{(m)}\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, ამიტომ გვექნება

$$\lim_{p,s\to\infty}\|x^{(p)}-x^{(s)}\|=0. \tag{3.23}$$

გარდა ამისა, როგორც ვიცით, როგორიც უნდა იყოს $i=1, 2,\ldots,n$ ნიშნაკი, ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|\alpha_i^{(p)}-\alpha_i^{(s)}|\leqslant\mu\|x^{(p)}-x^{(s)}\|,$$

სადაც $\mu>0$ გარკვეული რიცხვია (იხ. თეორემა 3.10). თუ გამოვიყენებთ (3.23) ტოლობას, აქედან მივიღებთ

$$\lim_{p,s\to\infty}|\alpha_i^{(p)}-\alpha_i^{(s)}|=0.$$

როგორც ვხედავთ, $i$ ნიშნაკის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ნამდვილ რიცხვთა $\{\alpha_i^{(m)}\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს კრებადობის კოშის ნიშანს, ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_i^{(m)}=\alpha_i^*.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ 3.11 თეორემას, გვექნება

$$\lim_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x^*\|=0,$$

სადაც

$$x^*=(\alpha_1^*, \alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*)\in E.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.14.** თუ $E$ ნორმირებული სივრცეა და $L$—მისი წრფივი მრავალსახეობა, რომლის განზომილება სასრული რიცხვია, მაშინ $L$ იქნება $E$ სივრცის ქვესივრცე.

თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ წრფივი $L$ მრავალსახეობა არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ავიღოთ $L$ მრავალსახეობის ელემენტთა ნებისმიერი ნორმით კრებადი $\{x^{(m)}\}$ მიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x^*\in E$. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $x^*\in L$. ვინაიდან $L$ მრავალსახეობის განზომილება სასრული რიცხვია, ამიტომ წინა თეორემის ძალით $L$ იქნება სრული სივრცე. $\{x^{(m)}\}$ მიმდევრობა არის $L$ სრული მრავალსახეობის ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, ამიტომ არსებობს ისეთი $x'^*\in L$ ელემენტი, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x'^*\|=0.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, როცა მეტრულ სივრცეში მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ ეს ზღვარი ერთადერთია, ე. ი. $x^*=x'^*$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $x_0$ ნორმირებული $E$ სივრცის რაიმე ელემენტია, ხოლო $r$—ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. ჩაკეტილი $\widetilde{S}(x_0, r)$ სფერო, $x_0$ ცენტრით და $r$ რადიუსით, არის ისეთი $x\in E$ ელემენტების სიმრავლე,რომლებისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\|x-x_0\|\leqslant r.$$

სრულიად ანალოგიურად, უტოლობა $\|x-x_0\|<r$ განსაზღვრავს ღია $S(x_0, r)$ სფეროს, ხოლო $\|x-x_0\|=r$ ტოლობა განსაზღვრავს $\widetilde{S}(x_0, r)$ სფეროს ზედაპირს.

**თეორემა 3.15.** ნორმირებულ $E$ სივრცეში ყოველი ჩაკეტილი სფერო ამოზნექილი სიმრავლეა.

მართლაც, ვთქვათ, $x, y\in\widetilde{S}(x_0, r)\subset E$ და $\alpha$, $\beta$ ისეთი ნამდვილი რიცხვებია, რომ $\alpha+\beta=1$ და $\alpha, \beta\geqslant 0$. მაშინ

$$\|(\alpha x+\beta y)-x_0\|=\|(\alpha x+\beta y)-(\alpha+\beta)x_0\|=\|\alpha(x-x_0)+$$
$$+\beta(y-y_0)\|\leqslant\alpha\|x-x_0\|+\beta\|y-y_0\|\leqslant(\alpha+\beta)r\leqslant r.$$

მაშასადამე, $\alpha x+\beta y\in\widetilde{S}(x_0, r)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

სრულიად ასევე დავრწმუნდებით, რომ ნორმირებულ სივრცეში ყოველი ღია $S(x_0, r)$ სფეროც ამოზნექილი სიმრავლეა.

**თეორემა 3.16.** თუ $E$ წრფივი სივრცეა, რომელშიც შესრულებულია ნორმირებული სივრცის მხოლოდ $\alpha$) და $\gamma$) აქსიომები (იხ. გვ. 157) და, თუ $E$ სივრცეში მოთავსებული ერთეულოვანი $\widetilde{S}(\Theta, 1)$ სფერო ამოზნექილი სიმრავლეა, მაშინ შეს-

რულებული იქნება ნორმირებული სივრცის β) აქსიომაც. სხვანაირად, $E$ იქნება ნორმირებული სივრცე.

თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $x, y \in E$ ელემენტებისათვის შესრულებული იქნება სამკუთხედის აქსიომა: $||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$. ამისათვის გამოვიდეთ იგივეობიდან:

$$x+y=(||x||+||y||)\left(\alpha \frac{x}{||x||}+\beta \frac{y}{||y||}\right), \tag{3.24}$$

სადაც

$$\alpha=\frac{||x||}{||x||+||y||}, \quad \beta=1-\alpha.$$

ცხადია, რომ ნამდვილი რიცხვები $\alpha, \beta \geqslant 0$ და $\alpha+\beta=1$. შევაფასოთ $x+y$ ელემენტის ნორმა. გვაქვს:

$$||x+y||=(||x||+||y||)\left\|\alpha \frac{x}{||x||}+\beta \frac{y}{||y||}\right\|.$$

ეხლა შევნიშნოთ, რომ $\left\|\frac{x}{||x||}\right\|=1$, $\left\|\frac{y}{||y||}\right\|=1$ და, მაშასადამე, $\frac{x}{||x||}$, $\frac{y}{||y||} \in \widetilde{S}(\Theta, 1)$.

ვინაიდან, პირობის ძალით, $\widetilde{S}(O, 1)$ სფერო ამოზნექილი სიმრავლეა და $\alpha+\beta=1$, ამიტომ

$$\alpha\frac{x}{||x||}+\beta \frac{y}{||y||} \in \widetilde{S}(\Theta, 1).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\left\|\alpha \frac{x}{||x||}+\beta \frac{y}{||y||}\right\| \leqslant 1.$$

ამის შემდეგ, (3.24) ტოლობიდან მივიღებთ

$$||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

## § 3. საუკეთესო მიახლოების ამოცანა წრფივ ნორმირებულ სივრცეში

1. მრავალი კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტის დროს ისმება საკითხი წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის მოცემული ელემენტის საუკეთესო მიახლოებისა (ანუ აპროქსიმაციისა) ამავე სივრცის $E_1$ ქვესივრცის ელემენტით. პირველად საუკეთესო მიახლოების ამოცანები დასმული და ამოხსნილი იყო პ. ჩებიშევის მიერ $C(a, b)$ და $L_2^{(\alpha)}(a, b)$ სივრცეებში.

ავიღოთ $x \in E$ და $y \in E_1$ ელემენტები. ვთქვათ, $E_1 \neq E$ და $x \overline{\in} E_1$. გამოსახულებას $||x-y||$ ეწოდება $y$ ელემენტის გ ა დ ა ხ რ ა $x$ ელემენტისაგან. ვთქვათ, რომ $E_1$ ქვესივრცეში არსებობს ისეთი $\widetilde{y}$ ელემენტი, რომ $||x-\widetilde{y}||$ გადახრას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა ყველა $y \in E_1$ ელემენტებს შორის. მაშინ $\widetilde{y}$ ელემენტს ეწოდება $x$ ელემენტის ს ა უ კ ე თ ე ს ო მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ა.

ქვემოთ სივრცის ყოველ $x$ ელემენტს, რომლის ნორმა უდრის ერთს ($\|x\|=1$), ვუწოდებთ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ე ლ ე მ ე ნ ტ ს.

**თეორემა 3.17.** ვ თ ქ ვ ა თ, $E_1$ ა რ ი ს წ რ ფ ი ვ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $E$ ს ი ვ რ ც ი ს ი ს ე თ ი ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე, რ ო მ $E_1 \neq E$. მ ა შ ი ნ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $\varepsilon>0$ რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $y \in E$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი, რ ო მ ყ ვ ე ლ ა $x \in E_1$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა თ ვ ი ს ა დ გ ი ლ ი ე ქ ნ ე- ბ ა შ ე ფ ა ს ე ბ ა ს: $\|x-y\|>1-\varepsilon$.

ვინაიდან $E_1 \neq E$, ამიტომ არსებობს ისეთი $y_0 \in E$ ელემენტი, რომ $y_0 \bar{\in} E_1$. ვთქვათ,

$$d=\inf_{x \in E_1}\|y_0-x\|.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $d>0$. მართლაც, თუ $d=0$, მაშინ $y_0$ ელემენტი იქნებოდა $E_1$ სივრცის ელემენტების მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი და იგი მიეკუთვნებოდა თვით $E_1$ ქვესივრცეს, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულ პირობას. ზუსტი ქვედა საზღვრის განსაზღვრის ძალით, ნებისმიერი $\delta>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_0 \in E_1$ ელემენტი, რომ

$$d \leqslant \|y_0-x_0\| < d+\delta. \tag{3.25}$$

განვიხილოთ ახლა ელემენტი

$$y=\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}.$$

ცხადია, რომ $\|y\|=1$. გარდა ამისა, $y \bar{\in} E_1$. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $y \in E_1$, მაშინ $y_0=y\|y_0-x_0\|+x_0$ ელემენტი იქნებოდა აგრეთვე $E_1$ ქვესივრცის ელემენტი, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულ პირობას.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი $x \in E_1$ ელემენტი და შევაფასოთ ნორმა:

$$\|y-x\|=\left\|\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}-x\right\|=\frac{1}{\|y_0-x_0\|}\left\|y_0-x_0-\|y_0-x_0\|x\right\|.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $x'=x_0+\|y_0-x_0\|x$, გვექნება

$$\|y-x\|=\frac{1}{\|y_0-x_0\|}\|y_0-x'\|.$$

თანახმად (3.25) უტოლობისა, აქედან მივიღებთ

$$\|y-x\|>\frac{1}{d+\delta}\|y_0-x'\|.$$

ვინაიდან $x' \in E_1$, ამიტომ

$$\|y_0-x'\| \geqslant d$$

და წინა უტოლობიდან დავწერთ

$$\|y-x\|>\frac{d}{d+\delta}=1-\frac{\delta}{d+\delta}.$$

შევარჩიოთ ეხლა $\delta$ რიცხვი ისე, რომ მან დააკმაყოფილოს შემდეგი უტოლობა:

$$\varepsilon>\frac{\delta}{d+\delta}.$$

მაშინ წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$\|y-x\|>1-\varepsilon$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

საუკეთესო მიახლოვების ამოცანა არსებითად არის დამოკიდებული წრფივი ნორმირებული სივრცის განზომილებასთან. ამასთან დაკავშირებით დავამტკიცოთ ფ. რისის შემდეგი.

**თეორემა 3.18.** იმისათვის რომ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის $E_1$ ქვესივრცე სასრული განზომილებიანი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $E_1$ ქვესივრცეში მოთავსებული ყოველი ნორმით შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე იყოს კომპაქტური $E_1$ ქვესივრცეში.

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $E_1$ არის $n$—განზომილებიანი ქვესივრცე. მაშინ, როგორც ზემოთ იყო დამტკიცებული (იხ. 3.12 თეორემაში პირობის საკმარისობის დამტკიცება), ნებისმიერი ნორმით შემოსაზღვრული $M\subset E_1$ სიმრავლე არის კომპაქტური სიმრავლე.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ამისათვის დავუშვათ, რომ $E_1$ ქვესივრცის ყოველი ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლე კომპაქტური სიმრავლეა. დავამტკიცოთ, რომ $E_1$ იქნება სასრული განზომილებიანი ქვესივრცე. ავიღოთ ნებისმიერი $x_1\in E_1$ ელემენტი, $\|x_1\|=1$. აღვნიშნოთ $E_2$-თი $E$ სივრცის ქვესივრცე, რომელიც წარმოქმნილია $x_1$ ელემენტით. $E_2$ არის ერთგანზომილებიანი ქვესივრცე და შედგება ყველა $\alpha x_1$ სახის ელემენტისაგან და მათი ზღვარითი ელემენტებისაგან, სადაც $\alpha$ ნებისმიერი ნამდვილი (ან კომპლექსური) რიცხვია.

აქ შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს: ან $E_2=E_1$, ანდა $E_2\neq E_1$. თუ $E_2=E_1$. მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება. თუკი $E_2\neq E_1$, მაშინ თანახმად 3.17 თეორემისა, $E_1$ ქვესივრცე შეიცავს ისეთ ნორმირებულ $x_2$ ელემენტს, რომ $\|x_1-x_2\|\geqslant\frac{1}{2}$. განვიხილოთ ახლა $E$ სივრცის $E_3$ ქვესივრცე, რომელიც წარმოქმნილია $x_1$ და $x_2$ ელემენტებით. $E_3$ ქვესივრცე შედგება ყველა $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ სახის ელემენტისაგან, და მათი ზღვარითი ელემენტებისაგან, სადაც $\alpha_1$, $\alpha_2$ ნებისმიერი ნამდვილი (ან კომპლექსური) რიცხვებია. აქაც შესაძლოა ორ შემთხვევას ჰქონდეს ადგილი: ან $E_3=E_1$, ანდა $E_3\neq E_1$. თუ $E_3=E_1$, მაშინ $E_1$ ქვესივრცის განზომილება უდრის ორს და თეორემის დამტკიცება დამთავრებული იქნება. თუ $E_3\neq E_1$, მაშინ იმავე 3.17 თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი $x_3\in E_1$ ელემენტი, რომ $\|x_1-x_3\|\geqslant\frac{1}{2}$, $\|x_2-x_3\|\geqslant\frac{1}{2}$ და $\|x_3\|=1$.

გავაგრძელოთ ეს მსჯელობა ამგვარადვე ქვემოთ. შესაძლოა ორ შემთხვევას ჰქონდეს ადგილი: ან რომელიმე $E_n$ ქვესივრცე დაემთხვევა $E_1$ სივრცეს, ანდა $E_n$ ქვესივრცეების აგების პროცედურა გაგრძელდება უსასრულოდ. თუ $E_n$ დაემთხვა $E_1$ ქვესივრცეს, მაშინ $E_1$ აღმოჩნდება $n$—განზომილებიანი ქვესივრცე. თუ $E_n$ ქვესივრცე $n$-ის არცერთი მნიშვნელობისათვის არ დაემთხვა $E_1$ ქვესივრცეს, მაშინ წარმოიქმნება ნორმირებული ელემენტების ისეთი უსასრულო $\{x_n\}\in E_1$ მიმდევრობა, რომ ნებისმიერი $s$ და $r$ ნიშნაკებისათვის, სადაც $s\neq r$, ადგილი ექნება $\|x_r-x_s\|\geqslant\frac{1}{2}$ უტოლობას. ადვილი შესამჩნევია,

რომ ეს უკანასკნელი შემთხვევა შეუძლებელია. მართლაც, ერთის მხრივ, $\{x_n\}\in E_1$ მიმდევრობა ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლეა, ხოლო მეორეს მხრივ, ამ მიმდევრობიდან შეუძლებელია ნორმით კრებადი ქვემიმდევრობის გამოყოფა, ვინაიდან $\|x_r-x_s\|\geqslant\frac{1}{2}$. ამრიგად, $E_1$ ქვესივრცე შეიცავს ნორმით შემოსაზღვრულ არაკომპაქტურ $M=\{x_n\}$ სიმრავლეს. ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.19.** *ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა, ხოლო $E_1$ მისი სასრული განზომილებიანი ქვესივრცე. გარდა ამისა, ვთქვათ, $x$ არის $E$ სივრცის ნებისმიერი ფიქსირებული ელემენტი. მაშინ $E_1$ ქვესივრცის ელემენტებს შორის არსებობს $\tilde{y}$ ელემენტი, რომელიც $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოება იქნება.*

თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ $x\in E$ ელემენტი ეკუთვნის აგრეთვე $E_1$ ქვესივრცეს, მაშინ $\|x-\tilde{y}\|=0$ და $x=\tilde{y}$. ამ შემთხვევაში $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოება თვითონ ეს ელემენტია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $x\overline{\in} E_1$. ვთქვათ, $y_0\in E_1$ არის ნებისმიერი ელემენტი და $\delta=\|x-y_0\|$. თავისთავად ცხადია, რომ $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოება იმ $y\in E_1$ ელემენტებს შორის უნდა ვეძებოთ, რომლებისთვისაც შესრულდება $\|x-y\|\leqslant\delta$ უტოლობა. გამოვიდეთ $y=(y-x)+x$ იგივეობიდან, რომლის ორივე ნაწილში გადავიდეთ ნორმებზე და თანაც გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა, მივიღებთ:

$$\|y\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|\leqslant\delta+\|x\|. \tag{3.26}$$

როგორც ვხედავთ, ყოველი $y\in E_1$ ელემენტი, რომელიც დააკმაყოფილებს $\|x-y\|\leqslant\delta$ უტოლობას, დააკმაყოფილებს აგრეთვე (3.26) უტოლობასაც. ყველა $y\in E_1$ ელემენტის სიმრავლე, რომლებისთვისაც შესრულებულია (3.26) უტოლობა აღვნიშნოთ $M$-ით.

ნათქვამის ძალით, ყოველი $y\in E$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $\|x-y\|\leqslant\delta$ პირობას, იქნება $M$ სიმრავლის ელემენტი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოება არის $M$ სიმრავლის ელემენტი. შევნიშნოთ, რომ (3.26) უტოლობა განსაზღვრავს ჩაკეტილ სფეროს $E_1$ ქვესივრცეში, რომლის ცენტრი იმყოფება $\Theta$ ნულოვან წერტილში და რადიუსი უდრის $\|x\|+\delta$. მაშასადამე, $M\subset E_1$ არის ნორმით შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლე და, რადგანაც $E_1$ სასრული განზომილებიანი სივრცეა, ამიტომ 3.12 თეორემის ძალით, იგი კომპაქტი იქნება.

ამის შემდეგ $f(y)=\|x-y\|$ გამოსახულება განვიხილოთ როგორც $M$ კომპაქტზე განსაზღვრული ფუნქციონალი.

დავამტკიცოთ, რომ $f(y)$ უწყვეტი ფუნქციონალია. ამისათვის ავიღოთ $y^*\in M$ ელემენტისაკენ ნორმით კრებადი ნებისმიერი $\{y_n\}\subset M$ მიმდევრობა. მაშინ $\{x-y_n\}\in E$ მიმდევრობა იქნება ნორმით კრებადი $x-y^*$ ელემენტისაკენ. მართლაც, გვაქვს $\lim\limits_{n\to\infty}\|(x-y_n)-(x-y^*)\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y^*\|=0$. ამრიგად, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x-y_n)=f(x-y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(y^*)$. ამით $f(y)$ ფუნქციონალის უწყ-

ვეტობა დამტკიცებულია. ჩვენთვის ცნობილი თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 1.49), იარსებებს ისეთი $\widetilde{y}\in M$ ელემენტი, რომელზედაც $f(y)$ უწყვეტი ფუნქციონალი თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს მიაღწევს. სხვანაირად $\widetilde{y}$ იქნება $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოება.

წრფივი ნორმირებული სივრცის უსასრულო განზომილებიან ქვესივრცეში შედარებით სუსტ დებულებას აქვს ადგილი. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი

**თეორემა 3.20.** ვთქვათ, $x$ არის წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ფიქსირებული ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის $E_1$ ქვესივრცეს. მაშინ არსებობს ისეთი $y_0\in E_1$ ელემენტი, რომ ყველა $y\in E_1$ ელემენტებისათვის ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\|x-y_0\|\leqslant 2\|x-y\|. \tag{3.27}$$

თეორემის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ თანახმად პირობისა, $\rho(x, E_1)>0$. ცხადია, რომ $E_1$ ქვესივრცის ყოველი $y$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|x-y\|\leqslant\rho(x, E_1).$$

შევარჩიოთ ისეთი $y_0\in E_1$ ელემენტი, რომ

$$\|x-y_0\|\geqslant 2\rho(x, E_1).$$

უკანასკნელი ორი უტოლობიდან მივიღებთ (3.27) უტოლობას.

მართებულია აგრეთვე შემდეგი

**თეორემა 3.21.** ვთქვათ, $E_1$ და $E_2$ არის წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ისეთი ორი ქვესივრცე, რომ $E_1\cap E_2=\Theta$, ერთ-ერთი მათგანი ნორმით შემოსაზღვრულია და აქვს სასრული განზომილება. მაშინ არსებობს ისეთი $\mu$ მუდმივი, რომ $y\in E_1$ და $z\in E_2$ ელემენტების ნებისმიერი წყვილისათვის ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\|y\|+\|z\|\leqslant\mu\|y+z\|.$$

თეორემის დასამტკიცებლად ვიგულისხმოთ, რომ $E_1$ და $E_2$ ქვესივრცეთაგან $E_1$ არის ნორმით შემოსაზღვრული სასრული განზომილებიანი ქვესივრცე.

დავუშვათ, რომ თეორემა არ არის სწორი. მაშინ იარსებებს ისეთი $\{y_k\}\in E_1$ და $\{z_k\}\in E_2$ მიმდევრობანი, რომ

$$\|y_k\|+\|z_k\|>k\|y_k+z_k\|.$$

დავუშვათ, რომ $\|y_k\|+\|z_k\|=1$. ეს უკანასკნელი პირობა, ცხადია, თეორემის ზოგადობას არ შეზღუდავს. თანახმად 3.12 თეორემისა, ნორმით შემოსაზღვრული $\{y_k\}$ მიმდევრობა იქნება კომპაქტური სიმრავლე და მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ ნორმით კრებადი $\{y_{k_n}\}$ ქვემიმდევრობა. ვთქვათ,

$$\lim_{k_n\to\infty}\|y_{k_n}-y^*\|=0,\ y^*\in E_1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ პირობებში $\{z_{k_n}\}$ ქვემიმდევრობა ნორმით კრე-

ბადი იქნება $-y^*$ ელემენტისაკენ. მართლაც, თანახმად ჩვენი დაშვებისა, გვაქვს

$$\|y_{k_n}+z_{k_n}\|<\frac{1}{k_n}(\|y_{k_n}\|+\|z_{k_n}\|)=\frac{1}{k_n}$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{k_n\to\infty}\|y_{k_n}+z_{k_n}\|=0.$$

ახლა ავიღოთ იგივეობა:

$$z_{k_n}+y^*=(z_{k_n}+y_{k_n})+(y^*-y_{k_n}),$$

რომლის ორივე ნაწილში გადავიდეთ ნორმებზე და თანაც გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა, მივიღებთ:

$$\|z_{k_n}+y^*\|\leqslant\|z_{k_n}+y_{k_n}\|+\|y_{k_n}-y^*\|,$$

საიდანაც ზღვარზე გადასვლის შემდეგ, გვექნება

$$\lim_{k_n\to\infty}\|z_{k_n}+y^*\|=0.$$

იმის გამო, რომ $\{y_{k_n}\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $y^*$ ელემენტისაკენ, ხოლო $\{z_{k_n}\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $-y^*$ ელემენტისაკენ, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\lim_{k_n\to\infty}\|y_{k_n}\|=\|y^*\|,\quad \lim_{k_n\to\infty}\|z_{k_n}\|=\|-y^*\|=\|y^*\|$$

და, რადგანაც $\|y_{k_n}\|+\|z_{k_n}\|=1$, ამიტომ $2\|y^*\|=1$, ე. ი. $y^*\neq\Theta$.

ამრიგად, ერთის მხრივ. $y^*$ როგორც $\{y_{k_n}\}$ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი უნდა ეკუთვნოდეს $E_1$ ქვესივრცეს. მეორეს მხრივ, იგივე $y^*$ როგორც $\{-z_{k_n}\}$ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი უნდა ეკუთვნოდეს $E_2$ ქვესივრცეს. მაგრამ, თეორემის პირობის ძალით $E_1\cap E_2=\Theta$ და, მაშასადამე, $y^*=\Theta$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩვენს თეორემას.

ზემოთ 3.19 თეორემაში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის $E_1$ ქვესივრცე სასრული განზომილებიანია, მაშინ ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის არსებობს საუკეთესო $\tilde{y}\in E_1$ მიახლოება.

საზოგადოდ $\tilde{y}$ ელემენტი, რომელიც საუკეთესო მიახლოებას განახორციელებს, არ არის ერთადერთი. იმისათვის, რომ $\tilde{y}$ ერთადერთი იყოს საჭირო $E$ სივრცისაგან მოვითხოვოთ დამატებითი პირობა. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ ერთი მნიშვნელოვანი

განსაზღვრა: ვთქვათ, $x, y\in E$ ორი ნებისმიერი ელემენტია, $x\neq\Theta$, $y\neq\Theta$. ვიტყვით, რომ $E$ მ კ ა ც რ ა დ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ა, თუ $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $y=\alpha x$, სადაც $\alpha$ დადებითი რიცხვია. მკაცრად ნორმირებული სივრცეებია, მაგალითად, $L_p(0, 1)$ და $l_p$, $p>1$; სივრცე $C(a, b)$ არ არის მკაცრად ნორმირებული.

მართებულია შემდეგი

**თეორემა 3.22.** ვ თ ქ ვ ა თ, $E$ მ კ ა ც რ ა დ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ე ა და $E_1$ მ ი ს ი $n$—გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე. მ ა შ ი ნ $E$ ს ი ვ რ ც ი ს ყ ო ვ ე ლ ი $x$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს $E_1$ ს ი მ-

რავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელიც გვაძლევს $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოებას.

თეორემის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $x$ ელემენტის საუკეთესო მიახლოებას გვაძლევს არა ერთი, არამედ ორი $\widetilde{y}', \widetilde{y}'' \in E_1$ ელემენტი. ვთქვათ, $E_1$ ქვესივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებია $y_1, y_2, \ldots, y_n$. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\widetilde{y}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i, \quad \widetilde{y}'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' y_i.$$

დაშვების თანახმად,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' y_i \right\| = \rho.$$

ავიღოთ იგივეობა

$$x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' + \alpha_i''}{2} y_i = \frac{1}{2} \left( x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i \right) + \frac{1}{2} \left( x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' y_i \right),$$

და ორივე ნაწილში გადავიდეთ ნორმებზე, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' + \alpha_i''}{2} y_i \right\| \leqslant \rho.$$

გარდა ამისა,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' + \alpha_i''}{2} y_i \right\| \geqslant \rho.$$

ამ უტოლობისა და წინა უტოლობის შედარებით, მივიღებთ ტოლობას

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' + \alpha_i''}{2} y_i \right\| = \rho,$$

ე. ი.

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' + \alpha_i''}{2} y_i \right\| = \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i \right\| + \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' y_i \right\|.$$

ვინაიდან $E$ მკაცრად ნორმირებული წრფივი სივრცეა, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა

$$x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i = \alpha \left( x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' y_i \right). \tag{3.28}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\alpha = 1$. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში $x$ ელემენტი წარმოგვიდგებოდა $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ელემენტების წრფივი კომბინაციის სახით:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i' - \alpha \alpha_i''}{1 - \alpha} y_i$$

და $x$ მიეკუთვნებოდა $E_1$ ქვესივრცეს. მაგრამ ეს შემთხვევა გამორიცხული გვაქვს. მაშასადამე, $\alpha=1$ და (3.28) ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i'-\alpha_i'')y_i=\Theta.$$

ვინაიდან, $y_1, y_2,\ldots,y_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_i'=\alpha_i''$, $i==1, 2,\ldots,n$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\widetilde{y}'=\widetilde{y}''$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ვთქვათ, $t$ იცვლება $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციების $1, t, t^2,\ldots,t^n$ სისტემა, სადაც $n$ ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. ამ ფუნქციების წრფივი კომბინაციები, ე. ი. $n$ ხარისხის $P_n(t)$ პოლინომები, წარმოადგენს $C(a, b)$ სივრცის $E_1$ ქვესივრცეს, რომლის განზომილება არის $n+1$. თანახმად 3.19 თეორემისა, არსებობს $n$ ხარისხის $P^*(t)=\alpha_0^*+\alpha_1^*t+\cdots+\alpha_n^*t^n$ პოლინომი, რომელიც მოცემული უწყვეტი $x(t)\in C(a, b)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებას გვაძლევს. სხვანაირად, ყველა $n$ ხარისხის $P_n(t)$ პოლინომებს შორის

$$\|x(t)-P_n^*(t)\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-P_n(t)|$$

ნორმას უმცირესი მნიშვნელობა აქვს.

2. მოვიყვანოთ წინა მაგალითის განზოგადება. ვთქვათ, $E$ ბანახის სივრცეა და $y_1, y_2,\ldots,y_n$ მისი წრფივად დამოუკიდებელი ფიქსირებული ელემენტების სასრული სისტემაა. ამ ელემენტებით წარმოქმნილი წრფივი გარსი აღვნიშნოთ $E_1$-ით. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს $E$ სივრცის $n$—განზომილებიან ქვესივრცეს. თანახმად (3.19) თეორემისა, $E_1$ ქვესივრცის ყველა $\alpha_1y_1++\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n$ სახის ელემენტებს შორის, სადაც $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ნამდვილი რიცხვებია, არსებობს $n$ ნამდვილი $\alpha_1^*, \alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*$ რიცხვი, რომლებისთვისაც $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*y_i\right\|$ ნორმას აქვს მინიმალური მნიშვნელობა. თუ კერძოდ, $E$ სივრცე მკაცრად ნორმირებულია, მაშინ თანახმად 3.22 თეორემისა, საუკეთესო $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*y_i$ მიახლოება ერთადერთია.

## § 4. წრფივი ოპერატორი ნორმირებულ სივრცეში

1. ვთქვათ, $E_1$ და $E_2$ ნორმირებული სივრცეებია და $M\subset E_1$ რაიმე სიმრავლეა. ავიღოთ $U=U(x)$ ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არეა $M$, ხოლო $M$ სიმრავლის სახე არის $N=U(M)\subset E_2$. ჩვენი უახლოესი მიზანია წრფივი ოპერატორის განსაზღვრა.

1°. $U$ ოპერატორს, რომლის პირველსახეა $M\subset E_1$ და სახე $N\subset E_2$, ეწოდება ნ ო რ მ ი თ უ წ ყ ვ ე ტ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი $x^*\in M$ წ ე რ ტ ი ლ შ ი, თუ $M$

სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც ნორმით კრებადია $x^*$ ელემენტისაკენ, მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n) - U(x^*)\| = 0.$$

თუ $U(x)$ ნორმით უწყვეტია $M$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე, მაშინ მას უწოდებენ ნორმით უწყვეტ ოპერატორს $M$ სიმრავლეზე. კერძოდ, $U$ შეიძლება უწყვეტი იყოს მთელ $E_1$ სივრცეზე.

2°. $U(x)$ ოპერატორს ადიტიური ოპერატორი ეწოდება $M$ სიმრავლეზე, თუ $x_1, x_2 \in M$ ელემენტების ნებისმიერი წყვილისათვის, სადაც $x_1+x_2 \in M$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$U(x_1+x_2) = U(x_1) + U(x_2).$$

3°. $U(x)$ ოპერატორს, რომელიც ნორმით უწყვეტია და ადიტიური $M$ სიმრავლეზე, წრფივი ოპერატორი ეწოდება ამ სიმრავლეზე.

4°. $U(x)$ ოპერატორს ერთგვაროვანი ოპერატორი ეწოდება $M \subset E_1$ სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი $x \in M$ ელემენტისათვის და ნამდვილი $\alpha$ რიცხვისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას

$$U(\alpha x) = \alpha U(x),$$

სადაც $\alpha x \in M$.

აღვნიშნოთ $E_1$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი $\Theta_1$-ით, $E_2$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი კი $\Theta_2$-ით.

**თეორემა 3.23.** თუ ადიტიური $U(x)$ ოპერატორი $M \subset E_1$ სიმრავლეს გადასახავს $N \subset E_2$ სიმრავლეში, მაშინ

α) $U(\Theta_1) = \Theta_2$, $\Theta_1 \in M$, $\Theta_2 \in N$.

β) ნებისმიერი $x \in M$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$U(x) = -U(-x). \tag{3.29}$$

თეორემის პირველი ნახევრის დასამტკიცებლად გამოვიდეთ იგივეობიდან

$$\Theta_1 = \Theta_1 + \Theta_1,$$

რომლის ორივე ნაწილზე გავავრცელოთ $U$ ოპერატორი და ვისარგებლოთ მისი ადიტიურობის თვისებით, მივიღებთ

$$U(\Theta_1) = U(\Theta_1 + \Theta_1) = U(\Theta_1) + U(\Theta_1),$$

აქედან კი მივიღებთ $U(\Theta_1) = \Theta_2$.

თეორემის მეორე ნახევრის დასამტკიცებლად, ვისარგებლოთ უკვე მიღებული შედეგით და ჩავწეროთ იგი ასე:

$$\Theta_2 = U(\Theta_1) = U[x + (-x)].$$

ახლა გამოვიყენოთ $U$ ოპერატორის ადიტიურობის თვისება, გვექნება

$$\Theta_2 = U(x) + U(-x).$$

საიდანაც მივიღებთ

$$U(-x) = -U(x)$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.24.** თუ $U(x)$ არის $M \subset E_1$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ადიტიური ოპერატორი და, თუ იგი ნორმით უწყვე-

ტია რაიმე $x^* \in M$ წერტილში, მაშინ იგი ნორმით უწყვეტი იქნება მთელ $M$ სიმრავლეზე.

მართლაც, ვთქვათ $\{x_n\} \in M$ არის ნორმით კრებადი რაიმე მიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x \in M$. ავიღოთ იგივეობა

$$x_n = [x^* + (x_n - x)] + (x - x^*),$$

რომელშიც შევნიშნოთ, რომ როცა

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

მაშინ $\{x^* + (x_n - x)\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადი იქნება $x^*$ ელემენტისაკენ. ვინაიდან $U(x)$ ადიტიურია, ამიტომ წინა იგივეობიდან დავწერთ

$$U(x_n) = U[x^* + (x_n - x)] + U(x) - U(x^*),$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n) - U(x)\| = \lim_{n\to\infty} \| U[x^* + (x_n - x)] - U(x^*)\|.$$

იმის გამო, რომ $U$ ოპერატორი უწყვეტია $x^*$ წერტილზე, ამიტომ აქედან მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n) - U(x)\| = 0$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი

შ ე დ ე გ ი. თუ ადიტიური $U(x)$ ოპერატორი ნორმით უწყვეტია $M$ სიმრავლის ერთ წერტილზე, მაშინ იგი იქნება წრფივი ოპერატორი $M$ სიმრავლეზე.

**თეორემა 3.25.** თ უ $U(x)$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი წ რ ფ ი ვ ი ა $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, მ ა შ ი ნ ი გ ი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ც ი ქ ნ ე ბ ა.

დასამტკიცებელია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი $\alpha$ რიცხვისათვის და $x \in M$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას.

$$U(\alpha x) = \alpha U(x)$$

როცა $\alpha = 0$, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

ვთქვათ, $\alpha = n$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ $U$ ოპერატორის ადიტიურობის გამო, გვექნება

$$U(nx) = U(\overbrace{x + x + \cdots + x}^{n}) = U(x) + U(x) + \cdots + U(x) = nU(x)$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\alpha = -n$, გვექნება

$$U(-nx) = U(-x - x - \cdots - x) = U(-x) + U(-x) + \cdots + U(-x)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ 3.29 ტოლობა, გვექნება

$$U(-nx) = -U(x) - U(x) - \cdots - U(x) = -nU(x).$$

ვთქვათ $\alpha = \frac{1}{m}$, სადაც ნულისაგან განსხვავებული მთელი რიცხვია. მაშინ, უკვე დამტკიცებულის ძალით, დავწერთ

$$mU\left(\frac{1}{m}x\right) = U\left(m \cdot \frac{1}{m}x\right) = U(x),$$

ე. ი.

$$U\left(\frac{1}{m}x\right)=\frac{1}{m}U(x).$$

ავიღოთ ახლა შემთხვევა, როცა $\alpha=\frac{n}{m}$, სადაც $n$ და $m$ მთელი რიცხვებია, მასთან $m\neq 0$. ამ შემთხვევაში, უკვე დამტკიცებულის ძალით, გვაქვს

$$U\left(\frac{n}{m}x\right)=\overbrace{U\left(\frac{1}{m}x\right)+U\left(\frac{1}{m}x\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{m}x\right)}^{n}=U\left(n\cdot\frac{1}{m}x\right)=$$

$$=nU\left(\frac{1}{m}x\right)=\frac{n}{m}U(x).$$

განვიხილოთ ახლა უკანასკნელი შესაძლო შემთხვევა, როცა $\alpha$ ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვია. როგორც ცნობილია, არსებობს რაციონალურ რიცხვთა $\{r_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $\alpha$ რიცხვისაკენ: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha$. ვინაიდან $E_1$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\|r_nx-\alpha x\|=0.$$

გარდა ამისა, იმის გამო, რომ $U$ უწყვეტი ოპერატორია $M$ სიმრავლეზე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|\alpha U(x)-U(\alpha x)\|=\|U(x)\lim_{n\to\infty}r_n-U(\alpha x)\|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|U(r_nx)-U(\alpha x)\|=0,$$

ე. ი.

$$\alpha U(x)=U(\alpha x)$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ ახლა, $U(x)$ არის ნებისმიერი ოპერატორი (არა აუცილებლად წრფივი), რომელიც ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. $U(x)$ ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია $E_1$ სივრცეში, თუ არსებობს ისეთი $\mu$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|U(x)\|\leqslant\mu\|x\|. \tag{3.30}$$

ცხადია, თუ ნორმით შემოსაზღვრული $U(x)$ ოპერატორი გადასახავს რაიმე ნორმით შემოსაზღვრულ $M\subset E_1$ სიმრავლეს $N\subset E_2$ სიმრავლეში, ე. ი. თუ $U(M)=N$, მაშინ $N$ აგრეთვე ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლე იქნება.

**თეორემა 3.20.** *ვთქვათ, ადიტიური $U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს ნორმირებული $E_1$ სივრციდან ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. იმისათვის, რომ $U(x)$ იყოს წრფივი ოპერატორი $E_1$ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ნორმით შემოსაზღვრული $E_1$ სივრცეზე.*

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $U(x)$ წრფივი ოპერატორია $E_1$ სივრცეზე. დავამტკიცოთ, რომ იგი ამ სივრცეზე იქნება ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. და-

ვუშვათ, რომ $U(x)$ წრფივი ოპერატორია $E_1$ სივრცეზე, მაგრამ არ არის ნორმით შემოსაზღვრული ამ სივრცეზე. მაშინ არსებობს ელემენტების ისეთი $\{x_n\} \in E_1$ მიმდევრობა, რომ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\| U(x_n) \| > n \, \| x_n \| . \tag{3.31}$$

ავაგოთ $E_1$ სივრცის ახალი $\{x_n'\}$ მიმდევრობა შემდეგნაირად:

$$\{x_n'\} = \left\{ \frac{1}{n \, \| x_n \|} \, x_n \right\}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს მიმდევრობა ნორმით კრებადია $\Theta_1 \in E_1$ ნულოვანი ელემენტისაკენ. მართლაც, გვაქვს

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n \, \| x_n \|} \, x_n - \Theta_1 \right\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n \, \| x_n \|} \, x_n \right\| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ვინაიდან $U(x)$ წრფივი ოპერატორია $E_1$ სივრცეზე, ამიტომ იგი ნორმით უწყვეტი იქნება $E_1$ სივრცის ყოველ წერტილში. კერძოდ იგი ნორმით უწყვეტია $\Theta_1$ წერტილშიც:

$$\lim_{n \to \infty} \| U(x_n') - U(\Theta_1) \| = \lim_{n \to \infty} \| U(x_n') \| = 0,$$

უკანასკნელი ტოლობა კი შეუძლებელია, ვინაიდან

$$\| U(x_n') \| = \left\| U \left( \frac{1}{n \, \| x_n \|} \, x_n \right) \right\| = \frac{1}{n} \, \frac{1}{\| x_n \|} \, \| U(x_n) \|$$

ტოლობიდან, (3.31) უტოლობის ძალით, გვექნება

$$\| U(x_n') \| > 1 .$$

მაშასადამე, $U(x)$ ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია $E_1$ სივრცეზე.

გადავიდეთ თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე, ე. ი. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $E_1$ სივრცეზე ადიტიური და ნორმით შემოსაზღვრული $U(x)$ ოპერატორი უწყვეტი ოპერატორია მთელ $E_1$ სივრცეზე. ვთქვათ, $\{x_k\} \subset E_1$ არის ნებისმიერი ნორმით კრებადი მიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x^* \in E_1$:

$$\lim_{k \to \infty} \| x_k - x^* \| = 0.$$

ვინაიდან $U(x)$ ადიტიური და ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორია, ამიტომ

$$\| U(x_k) - U(x^*) \| = \| U(x_k - x^*) \| \leqslant \mu \, \| x_k - x^* \| ,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\lim_{k \to \infty} \| U(x_k) - U(x^*) \| = 0.$$

მაშასადამე, $U(x)$ ოპერატორი ნორმით უწყვეტია მთელ $E_1$ სივრცეში და, ვინაიდან იგი ადიტიურიც არის, ამიტომ $U(x)$ წრფივია $E_1$ სივრცეზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $U(x)$ წრფივი ოპერატორია $E_1$ სივრცეზე. ზემოთ დამტკიცებულის ძალით, იგი აკმაყოფილებს (3.30) პირობას. უმცირეს $\mu$ რიცხვს, რომელიც დააკმაყოფილებს (3.30) უტოლობას, ეწოდება $U(x)$ ოპერატორის

ნორმა და აღინიშნება $\|U\|$ სიმბოლოთი. ამ განსაზღვრის მიხედვით დავწერთ:

$$\|U(x)\| \leqslant \|U\| \ \|x\|.$$

თეორემა 3.27. $\|U\| = \sup\limits_{x \in \bar{S}_1} \|U(x)\|$ სადაც $\bar{S}_1$ აღნიშნავს $E_1$ სივრცის ერთეულოვან ჩაკეტილ სფეროს.

მართლაც, $\|U\|$ რიცხვის განსაზღვრის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_0 \in E_1$ ელემენტი, რომ

$$\|U(x_0)\| > (\|U\| - \varepsilon)\|x_0\|.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $x \in \bar{S}_1$ ელემენტი, გვექნება

$$\|U(x)\| \leqslant \|U\| \cdot \|x\| \leqslant \|U\|,$$

ე. ი.

$$\sup_{x \in \bar{S}_1} \|U(x)\| \leqslant \|U\|. \tag{3.32}$$

შევაფასოთ $U(x)$ ოპერატორის ნორმა

$$x' = \frac{x_0}{\|x\|}$$

ელემენტზე, რომლის ნორმა უდრის ერთს. გვაქვს

$$\|U(x')\| = \frac{1}{\|x_0\|} \|U(x_0)\| > \|U\| - \varepsilon$$

და, ვინაიდან $\|x'\| = 1$, ე. ი. $x' \in \bar{S}_1$, ამიტომ

$$\sup_{x \in \bar{S}_1} \|U(x)\| \geqslant \|U(x')\| > \|U\| - \varepsilon.$$

აქედან, ვინაიდან $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია, მივიღებთ

$$\sup_{x \in \bar{S}_1} \|U(x)\| \geqslant \|U\|.$$

შევადაროთ (3.35) და (3.36) შეფასებანი, გვექნება

$$\|U\| = \sup_{x \in \bar{S}_1} \|U(x)\|$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.28. ვთქვათ, წრფივი $U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. თუ $M_1 \subset E_1$ ნებისმიერი კომპაქტური სიმრავლეა, მაშინ, $M_2 = U(M_1) \subset E_2$ იქნება კომპაქტური სიმრავლე $E_2$ სივრცეში.

მართლაც, ავიღოთ $M_2$ სიმრავლის ელემენტთა ნებისმიერი $\{y_n\}$ მიმდევრობა და ვთქვათ, $\{x_n\}$ მისი ერთერთი წინასახეა, ე. ი. $y_n = U(x_n)$. ვინაიდან $M_1$ კომპაქტური სიმრავლეა, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შევვიძლია გამოვყოთ ნორმით კრებადი ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x^* \in E_1$. მაშინ, $U$ ოპერატორის ნორმით უწყვეტობის გამო, $\{y_{n_k}\} = \{U(x_{n_k})\}$ იქნება ნორმით კრებადი მიმდევრობა გარკვეული $y^* = U(x^*) \in E_2$

ელემენტისაკენ. ამრიგად, ნებისმიერი $\{y_n\}$ მიმდევრობიდან გამოვყავით ნორმით კრებადი $\{y_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა და თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ავიღოთ ევკლიდეს $n$ განზომილებიანი $R_n$ სივრცე. ვთქვათ, $(c_{ij})$ არის რიცხვითი მატრიცი $c_{ij}$, $i, j=1, 2,\ldots,n$, ნამდვილი ელემენტებით. განვიხილოთ $y=U(x)$ ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, \tag{3.33}$$

სადაც $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R_n$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in R_n$. დავამტკიცოთ, რომ (3.33) სისტემით განსაზღვრული ოპერატორი არის $R_n$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი. მართლაც, ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}$ არის $R_n$ სივრცის ელემენტთა ნორმით კრებადი რაიმე მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$, $k=1, 2,\ldots$ . ამ მიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი იყოს $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$:

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i^*)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=0,$$

ე. ი.

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i^*,\ i=1, 2,\ldots,n.$$

გარდა ამისა, ვთქვათ,

$$y^{(k)}=U(x^{(k)}),\ y^*=U(x^*),\ y^{(k)}=(y_1^{(k)},\ldots,y_n^{(k)}),$$

სადაც $k=1, 2,\ldots$ , ხოლო $y^*=(y_1^*,\ldots,y_n^*)\in R_n$. მაშინ, გვექნება

$$\|y^{(k)}-y^*\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i^{(k)}-y_i^*)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x_j^{(k)}-x_j^*)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

გამოვიყენოთ აქ ჰელდერის უტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x_j^{(k)}-x_j^*)\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(k)}-x_j^*)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

მაშინ წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$\|y^{(k)}-y^*\|\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(k)}-x_j^*)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$, გვექნება

$$\lim_{k\to\infty}\|y^{(k)}-y^*\|=0.$$

ამრიგად, განხილული ოპერატორი ნორმით უწყვეტია $R_n$ სივრცეზე. ამასთა-

ნაჲე, ვინაიდან ნებისმიერი $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})\in R_n$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$U(x^{(1)}+x^{(2)})=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j^{(1)}+x_j^{(2)})=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^{(2)}=U(x^{(1)})+U(x^{(2)}),$$

ამიტომ $y=U(x)$ არის ადიტიური ოპერატორიც.

ცხადია, (3.33) სისტემით განსაზღვრული ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია. მართლაც, ნებისმიერი $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R$ ელემენტისათვის,

$$\|y\|=\|U(x)\|=\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\mu\|x\|,$$

სადაც

$$\mu=\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

2) განვიხილოთ $y=U(x)$ ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია წრფივი განტოლებების შემდეგი უსასრულო სისტემით:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j,\quad i=1,2,\ldots, \tag{3.34}$$

სადაც $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ არის $E_1=l_p$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. $y=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)$ ელემენტი ეკუთვნის $E_2=l_q$ სივრცეს, თუ $c_{ij}$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^q<\infty,$$

სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$. მართლაც, გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}x_j\right|^q\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}^q=$$
$$=\mu\|x\|,$$

სადაც

$$\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^q.$$

მიღებული უტოლობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ (3.34) სისტემით

განსაზღვრული ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია $l_p$ სივრცეზე. ცხადია, ამასთანავე, რომ იგი ადიტიურიც არის. 3.26 თეორემის თანახმად, ოპერატორი (3.34) წრფივი ოპერატორია.

3) ვთქვათ, $a \leqslant s, t \leqslant b$ კვადრატზე განსაზღვრულია კვადრატით ინტეგრებადი $K(s, t)$ ფუნქცია:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt < \infty.$$

მაშინ ოპერატორი:

$$U(x) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt \tag{3.35}$$

მოქმედებს ჰილბერტის წრფივი ფუნქციონალური $L_2(a, b)$ სივრციდან იმავე სივრცეში, სადაც $f(s)$ არის კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე. ცხადია, (3.35) ოპერატორი ადიტიურია. ვაჩვენოთ, რომ იგი ნორმით უწყვეტია $L_2(a, b)$ სივრცეზე. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n(t)\} \subset L_2(a, b)$ არის $x^*(t) \in L_2(a, b)$ ელემენტისაკენ ნორმით კრებადი მიმდევრობა:

$$\lim_{n \to \infty} ||x_n(t) - x^*(t)|| = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_a^b [x_n(t) - x^*(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

მაშინ

$$|| U(x_n) - U(x^*) || = \lambda \left\{ \int_a^b \left[ \int_a^b K(s, t)(x_n(t) - x^*(t)) dt \right]^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

გარდავქმნათ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ჰელდერის ინტეგრალური უტოლობის დახმარებით, გვექნება

$$|| U(x_n) - U(x^*) || \leqslant |\lambda| \left[ \int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b [x_n(t) - x^*(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ახლა, თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} || U(x_n) - U(x^*) || = 0.$$

ამრიგად, (3.35) ოპერატორი არის წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი $L_2(a, b)$ სივრცეზე.

4) ავიღოთ წრფივი ნორმირებული $C(0, 1)$ სივრცე, რომელზეც განვსაზღვროთ ინტეგრალური ოპერატორი:

$$U(x) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt, \tag{3.36}$$

სადაც $K(s, t)$ გული $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ კვადრატზე უწყვეტი ფუნქციაა და $x(t) \in C(0, 1)$. ცხადია, რომ $U(x) \in C(0, 1)$.

$U(x)$ ოპერატორი, განსაზღვრული (3.36) ტოლობით, არის წრფივი ოპერატორი $C(0, 1)$ სივრცეზე. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n(t)\}\subset C(0, 1)$ არის ნორმით კრებადი მიმდევრობა უწყვეტი $x^*(t) \in C(0, 1)$ ფუნქციისაკენ.
მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\| U(x_n) - U(x^*) \| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left| \int_0^1 K(s, t)[x_n(t) - x^*(t)]dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant s,t\leqslant 1} |K(s, t)| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n(t) - x^*(t)|.$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n) - U(x^*) \| = 0.$$

მაშასადამე, $U(x)$ უწყვეტი ოპერატორია $C(0, 1)$ სივრცეზე და, ვინაიდან იგი ადიტიურიც არის, ამიტომ იგი წრფივია.

გამოვთვალოთ ამ ოპერატორის ნორმა. ვთქვათ, $x(t) \in C(0, 1)$ არის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ

$$\| U(x) \| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left| \int_0^1 K(s, t)x(t)dt \right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left| \int_0^1 K(s, t)dt \right| =$$

$$= \| x \| \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |K(s, t)|dt.$$

ოპერატორის ნორმის განსაზღვრის თანახმად, აქედან დავწერთ

$$\| U \| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |K(s, t)|dt \tag{3.37}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\mu = \max_{0\leqslant s,t\leqslant 1} |K(s, t)|, \quad \eta(t) = \operatorname{sign} K(s_0, t),$$

სადაც $s_0$ არის წერტილი, რომელშიც $s$-ის მიმართ უწყვეტი (3.36) ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმუმს. ცხადია, $|\eta(t)| \leqslant 1$.

ვთქვათ, $x_n(t)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც შემდეგი თვისებები აქვს: $|x_n(t)| \leqslant 1$ და $x_n(t) = \eta(t)$ ყველგან, გარდა $\omega\subset[0, 1]$ სიმრავლისა, რომლის ზომა $\leqslant \dfrac{1}{2n\mu}$. ამ პირობებში უწყვეტი $x_n(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს წყვეტილი $\eta(t)$ ფუნქციის ზომით მიახლოებას. იმის გამო, რომ $|x_n(t) - \eta(t)| \leqslant |x_n(t)| + |\eta(t)| \leqslant 2$, ამიტომ გვაქვს

$$\left| \int_0^1 K(s, t)\eta(t)dt - \int_0^1 K(s, t)x_n(t)dt \right| \leqslant \int_0^1 |K(s, t)| |\eta(t) - x_n(t)|dt =$$

$$= \int_\omega |K(s, t)| |\eta(t) - x_n(t)| dt + \int_{\omega_1} |K(s, t)| |\eta(t) - x_n(t)| dt =$$

$$= \int_\omega |K(s, t)| |\eta(t) - x_n(t)| dt,$$

სადაც $\omega_1=[0,1]\setminus\omega$ არის სიმრავლე, რომელზეც $\eta(t)=x_n(t)$. აქედან $s$ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$\left|\int_0^1 K(s,t)\eta(t)dt-\int_0^1 K(s,t)x_n(t)dt\right| < 2\mu \operatorname{mes}\omega \leqslant \frac{1}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\int_0^1 K(s,t)\eta(t)dt \leqslant \int_0^1 K(s,t)x_n(t)dt+\frac{1}{n} < \|U\|\cdot\|x_n\|+\frac{1}{n}.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int_0^1 |K(s_0,t)|\,dt \leqslant \|U\|\,\|x_n\|+\frac{1}{n}$$

და, რადგანაც $\|x_n\|\leqslant 1$, ამიტომ ამ უტოლობაში თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $n\to\infty$, გვექნება

$$\int_0^1 |K(s_0,t)|\,dt \leqslant \|U\|,$$

ე. ი.

$$\|U\|\geqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\,dt.$$

მიღებული შეფასებიდან და (3.37) უტოლობიდან, მივიღებთ

$$\|U\|=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\,dt.$$

5) განვსაზღვროთ $C(0,1)$ სივრცეზე ოპერატორი

$$U(x)=\int_0^t x(s)ds,$$

სადაც $x(t)\in C(0,1)$.

$U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს $C(0,1)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. ცხადია, რომ $U(x)$ ადიტიური ოპერატორია. ავიღოთ ნებისმიერი უწყვეტი $x^*(t)\in C(0,1)$ ფუნქცია და მისკენ ნორმით კრებადი $\{x_n(t)\}\subset C(0,1)$ მიმდევრობა:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(t)-x^*(t)\|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x^*(t)|=0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\|U(x_n)-U(x^*)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|U(x_n)-U(x^*)|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1[x_n(s)-\right.$$

$$\left.-x^*(s)]ds\right| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}|x_n(s)-x^*(s)|=\|x_n-x^*\|,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} ||U(x_n) - U(x^*)||=0.$$

როგორც ვხედავთ, $U(x)$ ადიტიური და უწყვეტი ოპერატორია, ამიტომ იგი წრფივი ოპერატორი იქნება მთელ $C(0, 1)$ სივრცეზე.

6) განვიხილოთ $U(x)$ ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არეა $C(0, 1)$ სივრცეში მოთავსებული უწყვეტად წარმოებადი $x(t)$ ფუნქციები, ხოლო მნიშვნელობათა არე შედგენილია შემდეგი სახის უწყვეტი ფუნქციებისაგან:

$$Ux(t)=[x(t)]' \in C(0, 1).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ასე განსაზღვრული ოპერატორი არ არის ნორმით შემოსაზღვრული. მართლაც, ავიღოთ $Ux(t)$ ოპერატორის განსაზღვრის არიდან, მაგალითად, უწყვეტად წარმოებადი ნორმირებული ფუნქციების $\{x_n(t)\}=\{\sin n\pi t\}$ მიმდევრობა, $||x_n(t)||=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\sin n\pi t|=1$. ჩვენს მიერ განსაზღვრული ოპერატორი ამ მიმდევრობას გადასახავს უწყვეტი ფუნქციების $\{U(x_n)\}=\{n\pi\cos n\pi t\}$ მიმდევრობაში, სადაც $||U(x_n)||=n\pi \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\cos n\pi t|=n\pi$.

როგორც ვხედავთ, ფუნქციათა $\{n\pi\cos n\pi t\}$ მიმდევრობისათვის შეუძლებელია მოიძებნოს ისეთი $\mu$ რიცხვი, რომ. როგორიც უნდა იყოს $n$ შესრულებული იყოს $||U(x_n)||\leqslant\mu||x_n||$ უტოლობა. უკანასკნელი უტოლობა მით უმეტეს შეუძლებელია ყველა იმ $x(t)$ ელემენტისათვის, რომლებიც ეკუთვნის ოპერატორის განსაზღვრის არეს.

2. ვთქვათ, $y=U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს ნორმირებული $E_1$ სივრციდან ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, იმისათვის, რომ $E_1$ სივრცეზე ადიტიური $y=U(x)$ ოპერატორი წრფივი იყოს, საკმარისია $U(x)$ უწყვეტი იყოს $E_1$ სივრცის ერთ წერტილში. როცა სივრცე $E_1$ სასრული განზომილებისაა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3.20. თუ ადიტიური და ერთგვაროვანი $y=U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს სასრული განზომილების წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან—ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში, მაშინ იგი წრფივი ოპერატორია.

მართლაც, ვთქვათ $E_1$ სივრცის განზომილება არის $n$. აღვნიშნოთ $E_1$ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტები $x_1, x_2,\ldots,x_n$-ით. მაშინ ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ტოლობით:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_n x_i,$$

სადაც $\alpha_i$ კოეფიციენტები გარკვეული რიცხვებია. ვინაიდან პირობის ძალით $U(x)$ ოპერატორი ადიტიური და ერთგვაროვანია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U(x_i).$$

ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}\subset E_1$ არის ელემენტების უსასრულო მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია $x^*\in E_1$ ელემენტისაკენ. გარდა ამისა, ვთქვათ, $x^{(k)}=(\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_n^{(k)})$, $x^*=(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$. მაშინ, როგორც ვიცით (თეორემა 3.11), ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^*,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{3.38}$$

გვაქვს:

$$\lim_{k\to\infty}\|U(x^{(k)})-U(x^*)\|=\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(k)}U(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*U(x_i)\right\|,$$

რომლის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ წრფივი სივრცისათვის სავალდებულო $c$) აქსიომა და ტოლობები (3.38), გვექნება

$$\lim_{k\to\infty}\|U(x^{(k)})-U(x^*)\|=0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი ოპერატორი უწყვეტია მთელ $E_1$ სივრცეზე და თეორემა დამტკიცებულია.

## § 5. მწკრივი ნორმირებულ სივრცეში

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა. განვიხილოთ ელემენტთა $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i \tag{3.39}$$

ნორმით კრებადია $x^*\in E$ ელემენტისაკენ, ან ამ მწკრივის ჯამი არის $x^*$, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x^*-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|=0.$$

იმ ფაქტს, რომ (3.39) მწკრივის ჯამი არის $x^*$ ხშირად ასეც წერენ

$$x^*=\sum_{i=1}^{\infty}x_i. \tag{3.40}$$

**თეორემა 3.30.** ვთქვათ, კრებადია რიცხვითი $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|$ მწკრივი და ადგილი აქვს (3.40) ტოლობას, მაშინ შესრულდება უტოლობა:

$$\|x^*\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|. \tag{3.41}$$

მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $n$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\|x^*-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|<\varepsilon.$$

ავიღოთ ახლა იგივეობა:

$$x^* = x^* - \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

რომლის ორივე ნაწილში გადავიდეთ ნორმებზე და გამოვიყენოთ წინა უტოლობა, გვექნება

$$\|x^*\| < \varepsilon + \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

ვინაიდან $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს (3.41) უტოლობა.

**თეორემა 3.31.** თუ $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ რიცხვითი მწკრივი კრებადია, მაშინ (3.39) მწკრივი ნორმით კრებადი იქნება.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $m > n$. გვექნება

$$S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} x_i,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\|S_m - S_n\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|.$$

ვინაიდან, პირობის ძალით, $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ მიღებული უტოლობის მარჯვენა ნაწილი საკმარისად დიდი $n$-თვის ნებისმიერად მცირეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\{x_n\} \in E$ მიმდევრობა არის კერძო ჯამების ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, ვინაიდან $E$ სრული სივრცეა, ამიტომ ეს მიმდევრობა ნორმით კრებადია რაიმე $x^* \in E$ ელემენტისაკენ, ე. ი.

$$\lim_{n \to \infty} \|x^* - S_n\| = \lim_{n \to \infty} \left\| x^* - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| = 0.$$

ამრიგად, (3.39) მწკრივი ნორმით კრებადია და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.32.** თუ $M$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში, მაშინ ნებისმიერი $x \in E$, $x \neq \Theta$,

ელემენტი შესაძლოა გავშალოთ ამ ელემენტისაკენ ნორმით კრებად მწკრივად

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i,$$

სადაც $x_i\in M$ და $||x_i||\leqslant\frac{3}{2^i}||x||$.

თეორემის დასამტკიცებლად $E$ სივრცეში ავაგოთ $\bar{S}_1=\bar{S}_1\left(\frac{||x||}{2}, x\right)$ სფერო, რომლის ცენტრია $x$ და რადიუსი უდრის $\frac{||x||}{2}$. ვინაიდან $M$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $E$ სივრცეში, ამიტომ $\bar{S}_1$ სფეროში მოხვდება ერთი $x_1\in M$ წერტილი მაინც. ამის შემდეგ ავიღოთ ისეთი $x_2\in M$ წერტილი, რომ $\bar{S}_2=\bar{S}_2\left(\frac{||x||}{2^2}, x\right)$ სფერო შეიცავდეს $x_1+x_2$ ელემენტს. ახლა $x_3\in M$ იყოს ისეთი წერტილი, რომ ელემენტი $x_1+x_2+x_3\in\bar{S}_3=\bar{S}_3\left(\frac{||x||}{2^3}, x\right)$. საზოგადოდ, $x_n\in M$ იყოს ისეთი, რომ წერტილი $x_1+\cdots+x_n\in\bar{S}_n=\bar{S}_n\left(\frac{||x||}{2^n}, x\right)$.
სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|\leqslant\frac{||x||}{2^n},$$

საიდანაც გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|=0.$$

$\{x_n\}\in M$ მიმდევრობა აგებულია ისე, რომ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$||x_1||=||x_1-x+x||\leqslant||x_1-x||+||x||\leqslant\frac{3}{2}||x||,$$

$$||x_2||=||x_2+x_1-x-x_1+x||\leqslant||x-x_1-x_2||+||x-x_1||\leqslant$$
$$\leqslant\frac{||x||}{2^2}+\frac{||x||}{2}=\frac{3}{2^2}||x||,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$||x_n||=||x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1-x+x-x_1-\cdots-x_{n-1}||\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|+$$
$$+\left\|x-\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right\|\leqslant\frac{3}{2^n}||x||$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.33. ვთქვათ, წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში არსებობს სიმრავლეთა ისეთი თვლადი $\{M_k\}$ მიმდევრობა, რომ $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$; მაშინ ამ მიმდევრობის ერთ-ერთი სიმრავლე მაინც ყველგან მკვრივი იქნება $E$ სივრცის რაიმე ჩაკეტილ სფეროში.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $E$ სივრცის ყოველ ჩაკეტილ სფეროში, არსებობს ჩაკეტილი სფერო, რომელიც არ შეიცავს არცერთი $M_k$ სიმრავლის არცერთ წერტილს. ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \cdots$. ნათქვამის გამო, ნებისმიერი $\bar{S}_0 \subset E$ სფერო შეიცავს $\bar{S}_1$ სფეროს $r_1$ რადიუსით, რომელიც არ შეიცავს $M_1$ სიმრავლის არცერთ წერტილს. $\bar{S}_1$ სფერო შეიცავს $\bar{S}_2$ სფეროს $r_2$ რადიუსით, რომელიც არ შეიცავს $M_2$ სიმრავლის არცერთ წერტილს და ა. შ. ამ წესით ჩვენ ავაგებთ ერთმანეთში ჩალაგებული სფეროების $\{\bar{S}_n\}$ მიმდევრობას, რომელთა რადიუსების $\{r_n\}$ მიმდევრობა, ცხადია, შეგვიძლია ნულისაკენ კრებადი ჩავთვალოთ. თანახმად 1.26 თეორემისა არსებობს $x$ წერტილი, რომელიც ყველა ამ სფეროებს მიეკუთვნება. მაგრამ წერტილი $x \in E$ და $x \overline{\in} M_k$, $k=1, 2, \ldots$ რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

## § 6. წრფივი ოპერატორის მატრიცული სახე

ვთქვათ, $E_m$ და $E_n$ არის შესაბამისად $m$ და $n$ განზომილების წრფივი ნორმირებული სივრცეები. განვიხილოთ წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების ორი $\left\{e'_k\right\}_{k=1}^{m} \subset E_m$ და $\left\{e_k''\right\}_{k=1}^{n} \in E_n$ მიმდევრობა, სადაც $e'_1=(1, 0,\ldots,0)$, $e'_2=(0, 1, 0,\ldots,0),\ldots,$ $e'_m=(0, 0,\ldots,1)$, $e_1''=(1, 0,\ldots,0)$, $e_2''=(0,1,0,\ldots,0),\ldots$ $e_n''=(0, 0,\ldots,1)$. მაშინ, როგორც ვიცით, ნებისმიერი $x \in E_m$ ელემენტი წარმოიდგინება შემდეგი ტოლობით:

$$x=\alpha_1 e_1'+\alpha_2 e_2'+\cdots+\alpha_m e_m',$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_m$ არის $x$ ელემენტის კოორდინატები. სავსებით ასევე, ნებისმიერი $y \in E_n$ ელემენტისათვის გვაქვს

$$y=\beta_1 e_1''+\beta_2 e_2''+\cdots+\beta_n e_n'',$$

სადაც $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n$ არის $y$ ელემენტის კოორდინატები.

ვთქვათ, $y=U(x)$ წრფივი ოპერატორია, რომელიც მოქმედებს $E_m$ სივრციდან $E_n$ სივრცეში. მაშინ, ეს ტოლობა ჩაიწერება ასე:

$$y=U(x)=U\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j'\right)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j U(e_j').$$

აქ ყოველი $U(e_j') \in E_n$ და, თუ მისი კოორდინატებისათვის შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$U(e_j')=(c_{1j}, c_{2j},\ldots,c_{nj}),$$

მაშინ $U(e_j')$ ელემენტი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$U(e_j')=\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i''.$$

ეხლა $y=U(x)$ წრფივი ოპერატორი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j''=\sum_{j=1}^{m}\alpha_i U(e_i')=\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ji}e_j''\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i c_{ij}\right)e_j''.$$

ეს ტოლობა კი შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა $x$, $y$ და $U(x)$ ელემენტების კოორდინატებს შორის ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i c_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებს, რომ $y=U(x)$ ოპერატორის $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ კოორდინატები მიიღება $x$ ელემენტის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ კოორდინატებით, თუ მოვახდენთ ამ უკანასკნელთა წრფივ გარდაქმნას $(c_{ij})$ მატრიცით. პირიქით, ყოველი სასრული $(c_{ij})$ მატრიცი $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ განსაზღვრავს წრფივ ოპერატორს, რომელიც სასრული განზომილების წრფივი ნორმირებული $E_m$ სივრციდან მოქმედებს $E_n$ სივრცეში.

ხშირად, გამოყენებით საკითხებში, ისეთ წრფივ ოპერატორსაც ვხვდებით, რომელიც განსაზღვრულია უსასრულო რიცხვითი მატრიცით. ქვევით ჩვენ მოვიყვანთ ასეთი ოპერატორის მხოლოდ ერთ კონკრეტულ მაგალითს.

ვთქვათ $(c_{ik})$ რიცხვითი ისეთი უსასრულო მატრიცაა, რომ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}^2<\infty. \tag{3.42}$$

განვიხილოთ $y=U(x)$ ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებათა შემდეგი უსასრულო სისტემით:

$$y_i=\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}x_i, \tag{3.43}$$

სადაც $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\in l_2$, ე. ი.

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_i^2<\infty.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3.43) სისტემით განსაზღვრული ოპერატორი მოქმედებს $l_2$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. მართლაც, გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}x_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)=$$

$$=\|x\|^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}^2<\infty.$$

ამავე უტოლობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ

$$\|y\| = \| U(x)\| \leq \mu \|x\|,$$

სადაც

$$\mu = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

როგორც ვხედავთ, $(c_{ik})$ უსასრულო მატრიცით განსაზღვრული $y = U(x)$ ოპერატორი, როცა შესრულებულია პირობა (3.42), ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორია და, ვინაიდან იგი ადიტიურიც არის, ამიტომ იგი მთელ $l_2$ სივრცეში წრფივი ოპერატორი იქნება.

## § 7. წრფივი ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი

ვთქვათ, $E_1$ და $E_2$ წრფივი ნორმირებული სივრცეებია და $y = U(x)$ წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს, რომელიც $E_1$ სივრციდან მოქმედებს $E_2$ სივრცეში. ავიღოთ $E_2$ სივრცის რაიმე $y$ ელემენტი, მაშინ $U(x) = y$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრფივი ოპერატორული განტოლება უცნობი $x \in E_1$ ელემენტის მიმართ. ასეთ განტოლებაზე მიიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა, წრფივი დიფერენციალური განტოლების, წრფივი ინტეგრალური განტოლების, წრფივი ინტეგროდიფერენციალური განტოლების და მრავალი სხვა ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნა. ხშირად ასეთი განტოლების შესწავლა არსებითად დაკავშირებულია წრფივი ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორის ცნებასთან.

ვთქვათ, წრფივ $y = U(x)$ ოპერატორს აქვს შებრუნებული $U^{-1}y = x$ ოპერატორი. როცა $y \in E_2$ ელემენტი მოცემულია, მაშინ ოპერატორულ $y = U(x)$ განტოლებას აქვს ერთადერთი $x_1 \in E_1$ ამონახსნი. მართლაც, დავუშვათ, $x_2 \in E_1$ არის ამ განტოლების მეორე ამონახსნი. გვექნება

$$U(x_1) = y, \quad U(x_2) = y.$$

აქედან მივიღებთ, რომ $x_1 = U^{-1}y$, $x_2 = U^{-1}y$, ე. ი. $x_1 = x_2$.

ზემოთ გავეცანით შებრუნებული ოპერატორის ზოგიერთ საკითხს, სადაც მოთხოვნილი არ იყო ოპერატორის წრფივობა (იხ. თავი I). აქ ჩვენ გავეცნობით წრფივი ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორის რამდენიმე მნიშვნელოვან თვისებას.

**თეორემა 3.34.** (ს. ბანახი). თუ წრფივი $y = U(x)$ ოპერატორი წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეს ურთიერთ ცალსახად გადასახავს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეზე, მაშინ არსებობს $U(x)$ ოპერატორის შებრუნებული წრფივი ოპერატორი, რომელიც $E_2$ სივრცეს გადასახავს $E_1$ სივრცეზე.

პირობის თანახმად, $y = U(x)$ ოპერატორი ისეთია, რომ თუ $x_1 \neq x_2$, მაშინ $U(x_1) \neq U(x_2)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველ $y \in E_2$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი $x \in E_1$ ელემენტი, განსაზღვრული $Ux = y$ ტოლობით. კერძოდ, $\Theta_2 \in E_2$ ნულოვან ელემენტს შეესაბამება მხოლოდ $\Theta_1 = U^{-1}\Theta_2 \in E_1$ ნულოვანი ელემენტი და პირიქით. ცხადია, $E_1$ და $E_2$ სივრცეების ელემენტებს შორის ცალსახა შესაბამისობა ნიშნავს $U^{-1}y = x$ ოპერატორის არსებობას.

დავამტკიცოთ, რომ $U^{-1}y = x$ არის ადიტიური ოპერატორი. ამისათვის

საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $y^{(1)}, y^{(2)} \in E_2$ ელემენტებისათვის, სადაც $y^{(1)}=U(x^{(1)})$, $y^{(2)}=U(x^{(2)})$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in E_1$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$U^{-1}(y^{(1)}+y^{(2)})=U^{-1}(y^{(1)})+U^{-1}(y^{(2)}). \tag{3.44}$$

ამისათვის გამოვიყენოთ $U(x)$ ოპერატორის ადიტიურობის თვისება:

$$U(x^{(1)}+x^{(2)})=U(x^{(1)})+U(x^{(2)})=y^{(1)}+y^{(2)},$$

საიდანაც $x^{(1)}+x^{(2)}=U^{-1}(y^{(1)}+y^{(2)})$. ვინაიდან, $U^{-1}(y^{(1)})=x^{(1)}$ და $U^{-1}(y^{(2)})=x^{(2)}$, ამიტომ წინა ტოლობიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ (3.44) ტოლობას.

ეხლა დავამტკიცოთ, რომ $U^{-1}(y)$ უწყვეტი ოპერატორია მთელ $E_2$ სივრცეზე. ამისათვის, 3.26 თეორემის თანახმად, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $U^{-1}(y)$ ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორია. გამოვყოთ $E_2$ სივრცეში ისეთი $y$ ელემენტების $\omega_n \subset E_2$ სიმრავლე, რომლებისთვისაც დაკმაყოფილებული იქნება უტოლობა

$$\| U^{-1}(y) \| \leqslant n \|y\|. \tag{3.45}$$

როცა $n$ გაირბენს ყველა ნატურალურ მნიშვნელობებს, მაშინ წარმოიქმნება $\omega_n$ სიმრავლეთა ისეთი თვლადი $\{\omega_n\}$ სისტემა, რომ ყოველი $y \in E_2$ იქნება რომელიმე $\omega_n$ სიმრავლის ელემენტი, ამიტომ

$$E_2=\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n.$$

3.33 თეორემის თანახმად, როცა ნორმირებული სივრცე წარმოიდგინება $\omega_n$ სიმრავლეთა თვლადი ჯამის სახით, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი მაინც, ვთქვათ $\omega_n$, ყველგან მკვრივი სიმრავლე იქნება რაიმე $\overline{S_0} \subset E_2$ სფეროში. ავიღოთ ნებისმიერად $y_0 \in \omega_n$ ელემენტი და განვიხილოთ $\overline{S}_0$ სფეროს ისეთი $z$ ელემენტების სიმრავლე $Z$, რომლებისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$\alpha_2 < \|z-y_0\| < \alpha_1,$$

სადაც $\alpha_2$ და $\alpha_1$ რიცხვები აკმაყოფილებენ $0<\alpha_2<\alpha_1$ უტოლობას. როცა $z$ წერტილი გაირბენს მთელ $Z$ სიმრავლეს, მაშინ $z-y_0$ სახის ელემენტები წარმოქმნიან ახალ $Z_0$ სიმრავლეს, რომელსაც ჩვეულებრივად უწოდებენ $Z$ სიმრავლის პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ძ ვ რ ა ს $y_0$ ელემენტით. ვინაიდან $\omega_n$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $S_0$ სფეროში, ამიტომ იგი ყველგან მკვრივი იქნება აგრეთვე $Z$ სიმრავლეში.

აღვნიშნოთ $\omega_N$-ით სიმრავლე, რომელიც მიიღება $\omega_n$ სიმრავლის $y_0$ ელემენტით პარალელური ძვრის შედეგად და დავამტკიცოთ, რომ $\omega_N$ ყველგან მკვრივია $Z_0$ სიმრავლეში. ამისათვის ავიღოთ $Z$ სიმრავლის ისეთი ნებისმიერი $z$ ელემენტი, რომ $z \in \omega_n$. მაშინ $z-y_0 \in Z_0$. გამოვიყენოთ $U^{-1}$ ოპერატორის ადიტიურობის თვისება და უტოლობა (3.45), გვექნება

$$\| U^{-1}(z-y_0)\| \leqslant \| U^{-1}(z)\| + \| U^{-1}(y_0)\| \leqslant n(\|z\|+\|y_0\|)=$$
$$=n(\|z-y_0+y_0\|+\|y_0\|) \leqslant n(\|z-y_0\|+2\|y_0\|) \leqslant n\Big(1+$$
$$+\frac{2\|y_0\|}{\|z-y_0\|}\Big)\|z-y_0\| \leqslant n\|z-y_0\|\left(1+2\frac{\|y_0\|}{\beta}\right)=N\|z-y_0\|,$$

სადაც

$$N=n\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right).$$

როგორც ჩანს ელემენტი $z-y_0\in\omega_N$, ე. ი. $\omega_N$ ყველგან მკვრივია $Z_0$ სიმრავლეში.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი $y^*\in E_2$ ელემენტი. ცხადია, არსებობს ისეთი $\alpha$ რიცხვი, რომ $\alpha_2<\|\alpha y^*\|<\alpha_1$. ავიღოთ $\{y_k\}\subset\omega_N$ მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია $\alpha y^*$ ელემენტისაკენ. მაშინ, $\left\{\frac{1}{\alpha}y_k\right\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადი იქნება $y^*$ ელემენტისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\omega_N$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $E_2$ სივრცეში. თანახმად 3.32 თეორემისა, ნებისმიერი $y^*\in E_2$ ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ამ ელემენტისაკენ ნორმით კრებადი შემდეგი მწკრივის სახით:

$$y^*=\sum_{i=1}^{\infty}y_i,$$

სადაც $\|y_i\|<\frac{3}{2^i}\|y\|$. განვიხილოთ ახლა მწკრივი:

$$\sum_{i=1}^{\infty}U^{-1}(y_i) \tag{3.46}$$

ვინაიდან $\|U^{-1}y_i\|\leqslant N\|y_i\|<\frac{3N}{2^i}\|y^*\|$, ამიტომ მწკრივი:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|U^{-1}(y_i)\|$$

ნორმით კრებადი იქნება და, 3.31 თეორემის ძალით, ნორმით კრებადი იქნება აგრეთვე (3.46) მწკრივი რაიმე $x^*\in E_1$ ელემენტისაკენ:

$$x^*=\sum_{i=1}^{\infty}U^{-1}(y_i). \tag{3.47}$$

ამასთანავე, თანახმად 3.30 თეორემისა, ადგილი ექნება შეფასებას:

$$\|x^*\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\|U^{-1}(y_i)\|\leqslant 3N\|y\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=3N\|y^*\|. \tag{3.48}$$

ახლა (3.47) მწკრივის ორივე ნაწილზე გავავრცელოთ წრფივი $U$ ოპერატორი, გვექნება

$$U(x^*)=\sum_{i=1}^{\infty}U(U^{-1}(y_i))=\sum_{i=1}^{\infty}y_i=y^*,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x^*=U^{-1}(y^*).$$

აქედან, თანახმად (3.48) უტოლობისა, დავწერთ შეფასებას:

$$||x^*||=||U^{-1}(y^*)||\leqslant 3N||y^*||,$$

რომელსაც ადგილი აქვს ნებისმიერი $y^*\in E_2$ ელემენტისათვის. ეს იმას ნიშნავს, რომ $U^{-1}$ არის ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი და, ვინაიდან იგი ადიტიურიც არის, ამიტომ $U^{-1}$ წრფივი ოპერატორია.

## § 8. ოპერატორის სხვა თვისებები

მოვიყვანოთ ნორმირებულ სივრცეში განსაზღვრული (არა უსათუოდ წრფივი) ოპერატორის რამდენიმე თვისება.

თეორემა 3.35. თუ შებრუნებადი $U$ ოპერატორი გადასახავს წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეზე, ხოლო ცალსახა $V$ ოპერატორი გადასახავს $E_2$ სივრცეს $E_1$ სივრცეზე და ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს $VU(x)=I(x)=x$ ტოლობას, მაშინ $V=U^{-1}$.

თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ოპერატორული განტოლება

$$y=U(x),\ x\in E_1,\ y\in E_2.$$

ვინაიდან $U$ გადასახავს $E_1$ სივრცეს $E_2$ სივრცეზე, ამიტომ ამ განტოლებას ნებისმიერი $y\in E_2$ ელემენტისათვის აქვს $x$ ამონახსნი, რომელიც შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$x=I(x)=(VU)x=V(U(x))=V(y).$$

ახლა თუ გამოვიყენებთ პირობებს იმის შესახებ, რომ არსებობს $U^{-1}(y)=x$ და $V$ ცალსახა ოპერატორია, გვექნება $U^{-1}=V$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.36. თუ $U(x)$ ადიტიური და ერთგვაროვანი ოპერატორია, რომელიც წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეს გადასახავს წრფივი ნორმირებული $E_2$ სივრცის $\omega$ სიმრავლეში, მაშინ $\omega$ წრფივი მრავალსახეობა იქნება.

დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ თუ $y_1, y_2\in\omega_2$ ორი ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $y_1+y_2\in\omega$ და, თუ $y\in\omega$ არის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $\alpha x\in\omega$, სადაც $\alpha$ ნებისმიერი რიცხვია. ვთქვათ, $x_1$ არის $y_1$ ელემენტის ერთ-ერთი პირველსახე, ხოლო $x_2$ არის $y_2$ ელემენტის ერთ-ერთი პირველსახე, ე. ი. $y_1=U(x_1)$, $y_2=U(x_2)$. მაშინ $x_1+x_2\in E_1$, ხოლო $U(x_1+x_2)\in\omega$. ვანაიდან $U$ ადიტიური ოპერატორია, ამიტომ

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)=y_1+y_2\in\omega.$$

ახლა ვთქვათ, $x$ არის $y$ ელემენტის ერთ-ერთი პირველსახე, მაშინ $\alpha x\in E_1$ და $U(\alpha x)\in\omega$. ვინაიდან $U$ ერთგვაროვანი ოპერატორია, ამიტომ $U(\alpha x)=\alpha U(x)=\alpha y\in\omega$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.37. თუ, ადიტიური, ერთგვაროვანი და შებრუნებადი $y=U(x)$ ოპერატორი წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეს გადასახავს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეზე, მაშინ $U^{-1}$ ადიტიური და ერთგვაროვანი ოპერატორი იქნება.

ავიღოთ ორი ნებისმიერი $y_1, y_2\in E_2$ ელემენტი. ვთქვათ, $x_1$ არის $y_1$-ის ერთ-ერთი პირველსახე, ხოლო $x_2$ არის $y_2$-ის ერთ-ერთი პირველსახე: $y_1=U(x_1)$, $y_2=U(x_2)$. ვინაიდან $U$ შებრუნებადი ოპერატორია, ამიტომ $x_1=U^{-1}(y_1)$, $x_2=U^{-1}(y_2)$. ამასთანავე, $U$ ოპერატორის ადიტიურობის გამო

გვაქვს: $y_1+y_2=U(x_1)+U(x_2)=U(x_1+x_2)$, საიდანაც $x_1+x_2=U^{-1}(y_1+y_2)$, ე. ი. $U^{-1}(y_1+y_2)=U^{-1}(y_1)+U^{-1}(y_2)$.

ვთქვათ, ახლა $y\in E_2$ არის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო $x$ მისი ერთადერთი წინასახე: $x=U^{-1}(y)$. მაშინ, ნებისმიერი $\alpha$ რიცხვისათვის, გვექნება: $U(\alpha x)=\alpha U(x)=\alpha y$, საიდანაც $U^{-1}(\alpha y)=\alpha x=\alpha U^{-1}(y)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.38. ვთქვათ, ადიტიური $y=U(x)$ ოპერატორი წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეს გადასახავს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეზე. იმისათვის, რომ არსებობდეს შებრუნებული $U^{-1}$ ოპერატორი, აუცილებელი და საკმარისია $U(x)=\Theta_2$ განტოლებას ჰქონდეს ერთადერთი $x=\Theta_1$ ამონახსნი, სადაც $\Theta_1$ და $\Theta_2$ შესაბამისად არიან $E_1$ და $E_2$ სივრცეების ნულოვანი ელემენტები.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, ყოველი $y\in E_2$ ელემენტისათვის არსებობს შებრუნებული $U^{-1}(y)\in E_1$ ოპერატორი. ვუჩვენოთ, რომ $U(x)=\Theta_2$ განტოლებას აქვს $x=\Theta_1$ ამონახსნი და ეს ამონახსნი ერთადერთია. მართლაც, $U(\Theta_1)=U(x-x)=U(x)-U(x)=\Theta_2$. სხვანაირად, ადიტიური $U(x)$ ოპერატორი გადასახავს $E_1$ სივრცის ნულოვან ელემენტს $E_2$ სივრცის ნულოვან ელემენტში. ვინაიდან, ჩვენი დაშვების თანახმად, შებრუნებული ოპერატორი არსებობს მთელ $E_2$ სივრცეში, ამიტომ $U(\Theta_1)=\Theta_2$ განტოლებიდან გვექნება $\Theta_1=U^{-1}(\Theta_2)$. ახლა დავამტკიცოთ, რომ $x=\Theta_1$ არის $U(x)=\Theta_2$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი. მართლაც, ვთქვათ ამ განტოლებას, გარდა ნულოვანი $x=\Theta_1$ ამონახსნისა, აქვს მეორე $x=x^*\in E_1$ ამონახსნი. მაშინ, ერთდროულად ადგილი აქვს იგივეობებს: $U(\Theta_1)=\Theta_2$, $U(x^*)=\Theta_2$, საიდანაც $\Theta_1=U^{-1}(\Theta_2)$, $x^*=U^{-1}(\Theta_2)$, ე. ი. $x^*=\Theta_1$.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $U(x)=\Theta_2$ ოპერატორულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნია $x=\Theta_1$. ვუჩვენოთ, რომ არსებობს $U^{-1}$ ოპერატორი, განსაზღვრული მთელ $E_2$ სივრცეზე. ცხადია, როცა $x_1, x_2\in E_1$ ისეთი ელემენტებია, რომ $x_1\neq x_2$, მაშინ $x_1-x_2\neq\Theta_1$ და $U(x_1-x_2)=U(x_1)-U(x_2)\neq\Theta_2$ ე. ი. $U(x_1)\neq U(x_2)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $U(x)=y$ განტოლებას, ნებისმიერი ფიქსირებული $y\in E_2$ ელემენტისათვის, აქვს ერთადერთი $x=U^{-1}(y)$ ამონახსნი. სხვანაირად, $U(x)$ ადიტიურ ოპერატორს მთელ $E_2$ სივრცეზე აქვს შებრუნებული $U^{-1}$ ოპერატორი.

შედეგი. იმ შემთხვევაში, როცა $y=U(x)$ ოპერატორი წრფივია $E_1$ სივრცეზე, წინა სამი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი

შედეგი. იმისათვის, რომ წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული $y=U(x)$ წრფივი ოპერატორისათვის არსებობდეს შებრუნებული $U^{-1}(y)=x$ ოპერატორი, განსაზღვრული მთელ წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეზე, აუცილებელი და საკმარისია $U(x)=\Theta_2$ ოპერატორულ განტოლებას ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი იყოს $x=\Theta_1$.

მოყვანილ პირობებში შებრუნებული ოპერატორი იქნება ადიტიური და ერთგვაროვანი.

თეორემა 3.39. ვთქვათ, წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრცე არის $y=U(x)$ ადიტიური ოპერატორის განსაზღვრის არე, ხო-

ლო $N$ — მისი მნიშვნელობათა არე, რომელიც ეკუთვნის წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეს. იმისათვის, რომ არსებობდეს $N$ სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი შებრუნებული $U^{-1}(y)$ ოპერატორი აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს მუდმივი $\mu > 0$ რიცხვი, რომელიც ყველა $x \in E_1$ ელემენტებისათვის დააკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\|U(x)\| \geqslant \mu \|x\|. \tag{3.49}$$

ქვემოთ ჩვენ გამოვრიცხავთ მსჯელობიდან შემთხვევას, როცა $E_1$ არის ერთელემენტიანი სიმრავლე და ეს ელემენტია $\Theta_1$, ვინაიდან თეორემა ამ შემთხვევაში დამტკიცებას არ მოითხოვს.

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად ჩავთვალოთ, რომ არსებობს $N \subset E_2$ სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი შებრუნებული $x = U^{-1}(y)$ ოპერატორი, $x \in E_1$, $y \in N$. მაშინ $\|x\| = \|U^{-1}(y)\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|y\|$. ვინაიდან $\|U^{-1}\| > 0$, ამიტომ აქედან გვექნება $\|y\| \geqslant \frac{1}{\|U^{-1}\|} \|x\|$, ანუ $\|U(x)\| \geqslant \mu \|x\|$, სადაც $\mu = \frac{1}{\|U^{-1}\|}$.

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად, ვთქვათ შესრულებულია (3.49) უტოლობა. განვიხილოთ ოპერატორული $U(x) = \Theta_2$ განტოლება. ვინაიდან $U(x)$ ადიტიური ოპერატორია, ამიტომ 3.38 თეორემის ძალით, ხსენებულ ოპერატორულ განტოლებას აქვს ერთადერთი $x = \Theta_1$ ამონახსნი. ამის გამო არსებობს $N$ სიმრავლეზე განსაზღვრული შებრუნებული $U^{-1}(y)$ ოპერატორი. გამოვიყენოთ (3.49) უტოლობა, გვექნება

$$\|U^{-1}(y)\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|y\| = \frac{1}{\mu} \|y\|,$$

ამასთანავე $U^{-1}(y)$ ადიტიურიც არის. მაშასადამე, შებრუნებული $U^{-1}$ ოპერატორი არსებობს, იგი ნორმით შემოსაზღვრული და ადიტიურია $N$ სიმრავლეზე, ე. ი. $U^{-1}$ წრფივი ოპერატორია.

## § 9. ოპერატორის გაგრძელება

ვთქვათ, $E_1$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა, $M$ კი მისი წრფივი ქვესიმრავლე. განვიხილოთ $M$-ზე განსაზღვრული $U_1(x)$ ოპერატორი, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე მოთავსებულია რაიმე წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. თუ არსებობს $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული $U_2(x)$ ოპერატორი, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე მოთავსებულია $E_2$ სივრცეში და

$$U_2(x) = U_1(x), \text{ როცა } x \in M,$$

მაშინ $U_2(x)$ ოპერატორს ეწოდება $U_1(x)$ ოპერატორის გაგრძელება $M$ სიმრავლიდან $E_1$ სიმრავლემდე.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $U_1(x)$ და $U_2(x)$ ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორებია, მაშინ, ვინაიდან $M \subset E_1$, ამიტომ $\|U_1\|_M \leqslant \|U_2\|_{E_1}$. თუ აღმოჩნდა $\|U_1\|_M = \|U_2\|_{E_1}$, მაშინ ვიტყვით, რომ $U_2(x)$ წარმოადგენს $U_1(x)$ ოპერატორის გაგრძელებას $M$ სიმრავლიდან $E_1$ სიმრავლემდე ნორმის შეუცვლელად.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როცა $U_2(x)$ ოპერატო-

რი, რომელიც წარმოადგენს $U_1(x)$ ოპერატორის გაგრძელებას $M$ სიმრავლიდან $E_1$ სიმრავლემდე, არის წრფივი ოპერატორი. ამ შემთხვევაში $U_2(x)$ ოპერატორს ეწოდება $U_1(x)$ ოპერატორის **წრფივი გაგრძელება** $M$ სიმრავლიდან $E_1$ სიმრავლემდე.

**თეორემა 3.40.** ვთქვათ, $U_1(x)$ ოპერატორი განსაზღვრულია $M\subset E_1$ სიმრავლეზე, ხოლო მნიშვნელობათა არე მოთავსებულია $E_2$ სივრცეში. იმისათვის, რომ არსებობდეს $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივი $U_2(x)$ გაგრძელება $M$ სიმრავლიდან $L(M)$ წრფივ მრავალსახეობამდე, აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ისეთი დადებითი $\mu$ რიცხვი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_1(x_i)\right\|\leqslant\mu\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|, \tag{3.50}$$

სადაც $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$ არის $M$ სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერი სასრული სისტემა, ხოლო $\left\{\alpha_i\right\}_{i=1}^{n}$ ნებისმიერი $\alpha_i$ რიცხვების სასრული სისტემაა.

ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $U_2(x)$ ოპერატორი წარმოადგენს $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივ გაგრძელებას $M$ სიმრავლიდან წრფივ $L(M)$ მრავალსახეობამდე. ავიღოთ $M$ სიმრავლის ელემენტთა ნებისმიერი სასრული სისტემა $\left\{\alpha_i\right\}_{i=1}^{n}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i.$$

ცხადია, $x\in L(M)$. პირობის თანახმად,

$$U_1(x_i)=U_2(x_i)\ \ (i=1,\,2,\ldots,n)$$

და რადგანაც $U_2(x)$ არის $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივი გაგრძელება, ამიტომ

$$U_2(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_2(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_1(x_i).$$

მეორე მხრივ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_1(x_i)\right\|=\|U_2(x)\|=\left\|U_2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|U_2\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|=\mu\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|,$$

სადაც $\mu=\|U_2\|$. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $x\in L(M)$ ნების-

მიერი ელემენტია, მაშინ $L(M)$ სიმრავლის განსაზღვრის ძალით, არსებობს $M$ სიმრავლის ელემენტები $x_1,\ldots,x_n$ და ისეთი $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ მუდმივები, რომ

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i.$$

ავაგოთ $U_2(x)$ ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$U_2(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_1(x_i). \tag{3.51}$$

დავამტკიცოთ, რომ $U_1(x)$ ოპერატორის საძიებელი წრფივი გაგრძელება $M$ სიმრავლიდან $L(M)$ სიმრავლემდე არის ამ ტოლობით განსაზღვრული $U_2(x)$ ოპერატორი.

ვთქვათ, $x^{(1)}, x^{(2)}\in L(M)$ ორი ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ

$$x^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}x_i,\quad x^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(2)}x_i,$$

საიდანაც

$$x^{(1)}+x^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(1)}+\alpha_i^{(2)})x_i.$$

(3.51) ტოლობის თანახმად

$$U_2(x^{(1)}+x^{(2)})=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(1)}+\alpha_i^{(2)})U_1(x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}U_1(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(2)}U_1(x_i)=U_2(x^{(1)})+U_2(x^{(2)}),$$

ე. ი. $U_2(x)$ ადიტიური ოპერატორია. გარდა ამისა, (3.50) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x\in L(M)$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|U_2(x)\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_1(x_i)\right\|\leqslant\mu\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|=\mu\|x\|,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $U_2(x)$ არის ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი $L(M)$ წრფივ მრავალსახეობაზე. ამრიგად, $U_2(x)$ წრფივი ოპერატორია. ამასთანავე ცხადია, რომ როცა $x\in M$, მაშინ $U_2(x)=U_1(x)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.41.** ვთქვათ, $E_1$ და $E_2$ წრფივი ნორმირებული სივრცეებია. ავიღოთ $E_1$ სივრცეში ყველგან მკვრივი წრფივი $L$ მრავალსახეობა და მასზე განსაზღვრული $U_1(x)$ წრფივი ოპერატორი, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე მოთავსებულია $E_2$ სივრცეში. მაშინ არსებობს $U_1(x)$ ოპერატორის

ერთადერთი წრფივი $U_2(x)$ გაგრძელება წრფივი $L$ მრავალსახეობიდან მთელ $E_1$ სივრცემდე ნორმის შეუცვლელად.

განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E_1$ ელემენტი. ვინაიდან $L$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა $E_1$ სივრცეში, ამიტომ არსებობს $\{x_m\} \in L$ მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადი იქნება $x$ ელემენტისაკენ, ე. ი. $\lim\limits_{m \to \infty} \|x_m - x\| = 0$.

განვსაზღვროთ $U_2(x)$ ოპერატორი შემდეგი ტოლობით:

$$\lim_{m \to \infty} \|U_2(x) - U_1(x_m)\| = 0 \tag{3.52}$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული $U_2(x)$ არის სწორედ საძიებელი გაგრძელება $U_1(x)$ ოპერატორისა $L$ სიმრავლიდან მთელ $E_1$ სივრცემდე.

ჯერ დავრწმუნდეთ, რომ (3.52) ტოლობით განსაზღვრული $U_2(x)$ ოპერატორი არსებობს, რომლის განსაზღვრის არეა $E_1$ და მნიშვნელობათა არე მოთავსებულია $E_2$ სივრცეში. მართლაც, ვინაიდან $\{x_m\} \subset L$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $x \in E_1$ ელემენტისაკენ, ამიტომ, იგი ფუნდამენტალური მიმდევრობა იქნება: $\lim\limits_{m,n \to \infty} \|x_m - x_n\| = 0$. მაგრამ, პირობის თანახმად, $U_1$ ოპერატორი წრფივია $L$ სიმრავლეზე, ამიტომ

$$\|U_1(x_m) - U_1(x_n)\| = \|U_1(x_m - x_n)\| \leqslant \|U_1\| \, \|x_m - x_n\|,$$

საიდანაც

$$\lim_{m,n \to \infty} \|U_1(x_m) - U_1(x_n)\| = 0,$$

ე. ი. $\{U_1(x_m)\} \subset E_2$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, რადგანაც $E_2$ სრული სივრცეა, ამიტომ იგი ნორმით კრებადი იქნება გარკვეული $U(x) \subset E_2$ ელემენტისაკენ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $U(x)$ არ არის დამოკიდებული $\{x_m\}$ მიმდევრობის შერჩევისაგან. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_m'\} \subset L$ არის მეორე მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია იმავე $x \in E_1$ ელემენტისაკენ. მაშინ, ცხადია, $\{x_m - x_m'\} \subset L$ მიმდევრობა ნორმით კრებადი იქნება $\Theta_1 \in E_1$ ელემენტისაკენ. გვექნება

$$\lim_{m \to \infty} \|U_1(x_m) - U_1(x_m')\| = \lim \|U_1(x_m - x_m')\| \leqslant$$

$$\leqslant \|U_1\| \lim_{m \to \infty} \|x_m - x_m'\| = 0,$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს წინადადებას.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $x \in L$, მაშინ $U_2(x) = U_1(x)$. მართლაც, საკმარისია ამ შემთხვევაში ავიღოთ ყველა $x_m = x$, $m = 1, 2, \ldots$ .

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ $U_2(x)$ ადიტიური ოპერატორია მთელ $E_1$ სივრცეზე. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი $x', x'' \in E_1$ ელემენტები და ისეთი $\{x_m'\}, \{x_m''\} \subset L$ მიმდევრობები, რომ

$$\lim_{m \to \infty} \|x_m' - x'\| = 0, \quad \lim_{m \to \infty} \|x_m'' - x''\| = 0.$$

მაშინ ცხადია, ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობასაც

$$\lim_{m \to \infty} \|(x_m' + x_m'') - (x' + x'')\| = 0$$

და, თანახმად $U_2$ ოპერატორის განსაზღვრისა, (3.52) ტოლობიდან დავწერთ

$$\lim_{m\to\infty} \|U_2(x')-U_1(x_m')\|=0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \|U_2(x'')-U_1(x_m'')\|=0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \|U_2(x'+x'')-U_1(x_m'+x_m'')\|=0.$$

ავიღოთ ახლა შემდეგი ცხადი უტოლობა:

$$\|U_2(x'+x'')-U_2(x')-U_2(x'')\| \leqslant \|U_2(x'+x'')-U_1(x_m'+x_m'')\| + \\ + \|U_2(x')-U_1(x_m')\| + \|U_2(x'')-U_1(x_m'')\|,$$

რომელშიც გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$ და გამოვიყენოთ წინა ტოლობები, მივიღებთ

$$\|U_2(x'+x'')-U_2(x')-U_2(x'')\|=0,$$

ე. ი.

$$U_2(x'+x'')=U_2(x')+U_2(x'').$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $U_2(x)$ ნორმით უწყვეტი ოპერატორია ნებისმიერ $x\in E_1$ წერტილზე. ვთქვათ, ისე როგორც ზემოთ, $\{x_m\}\subset L$ არის ერთ-ერთი მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია $x$ ელემენტისაკენ. მაშინ, როგორც ვიცით, ადგილი აქვს $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m\|=\|x\|$ ტოლობას. ვინაიდან $U_1$ ოპერატორი წრფივია $L$ სიმრავლეზე, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|U_2(x)\| \leqslant \|U_2(x)-U_1(x_m)\| + \|U_1(x_m)\| \leqslant \\ \leqslant \|U_2(x)-U_1(x_m)\| + \|U_1\|\ \|x_m\|.$$

აქედან, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ

$$\|U_2(x)\| \leqslant \|U_1\|\ \|x\| \tag{3.53}$$

ამრიგად, $U_2(x)$ არის ადიტიური და ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი მთელ $E_1$ სივრცეზე. 3.26 თეორემის თანახმად, იგი წრფივი ოპერატორი იქნება $E_1$ სივრცეზე.

დავამტკიცოთ, რომ $\|U_2\|=\|U_1\|$. ეს ტოლობა გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან. როგორც ვიცით, $\|U_2\|$ არის უმცირესი რიცხვი, რომელიც ყველა $x\in E_1$ ელემენტისათვის დააკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\|U_2(x)\| \leqslant \|U_2\|\ \|x\|.$$

უკანასკნელ უტოლობას თუ შევადარებთ (3.53), გვექნება

$$\|U_2\| \leqslant \|U_1\|.$$

მაგრამ 3.27 თეორემის თანახმად ადგილი აქვს აგრეთვე შეფასებას

$$\|U_2\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|U_2(x)\| \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|U_1(x)\| = \|U_1\|.$$

ამ უტოლობიდან და წინა უტოლობიდან მივიღებთ: $\|U_2\|=\|U_1\|$.

დარჩა დასამტკიცებელი, რომ $U_2(x)$ არის ერთადერთი გაგრძელება $U_1(x)$ ოპერატორისა $L$ სიმრავლიდან მთელ $E_1$ სივრცემდე. დავუშვათ, რომ $U_2'(x)$ არის მეორე ოპერატორი, რომელიც ისეთივე გაგრძელებაა $U_1(x)$ ოპერატორისა, როგორიც $U_2(x)$ ოპერატორი. მაშინ, ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტისათვის, რომლისკენაც ნორმით კრებადია $\{x_m\}\subset L$ მიმდევრობა, გვექნება

$$\lim_{m\to\infty} \|U_2(x)-U_1(x_m)\| = \lim_{m\to\infty} \|U_2'(x)-U_1(x_m)\| = 0. \tag{3.54}$$

გამოვიდეთ ახლა იგივეობიდან:

$$U_2(x)-U_2'(x)=U_2(x)-U_1(x_m)+U_1(x_m)-U_2'(x),$$

რომელშიც გადავიდეთ ნორმებზე, მივიღებთ

$$\|U_2(x)-U_2'(x)\| \leqslant \|U_2(x)-U_1(x_m)\|+\|U_2'(x)-U_1(x_m)\|.$$

გადავიდეთ ზღვარზე როცა $m\to\infty$ და გამოვიყენოთ (3.54) ტოლობა, გვექნება

$$U_2(x)=U_2'(x)$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი ცხადი

შ ე დ ე გ ი. ვ თ ქ ვ ა თ. წ რ ფ ი ვ ი $U(x)$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი მ ო ქ მ ე დ ე ბ ს წ რ ფ ი ვ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $E_1$ ს ი ვ რ ც ი დ ა ნ წ რ ფ ი ვ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ $E_2$ ს ი ვ რ ც ე შ ი. გ ა რ დ ა ა მ ი ს ა, ვ თ ქ ვ ა თ, $L$ ა რ ი ს წ რ ფ ი ვ ი მ რ ა ვ ა ლ ს ა ხ ე ო ბ ა, რ ო მ ე ლ ი ც ყ ვ ე ლ გ ა ნ მ კ ვ რ ი ვ ი ა $E_1$ ს ი ვ რ ც ე შ ი. თ უ $U(x)$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ი ს ე თ ი ა, რ ო მ $U(x)=\Theta_2$, როცა $x\in L$, მაშინ $U(x)=\Theta_2$, როცა $x\in E_1$, ე. ი. თ უ $U(x)$ ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ა $L$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, მ ა შ ი ნ ი გ ი ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ი ქ ნ ე ბ ა მ თ ე ლ $E_1$ ს ი ვ რ ც ე ზ ე.

ქვევით ჩვენ მოვიყვანთ კიდევ ერთი თეორემის დამტკიცებას ოპერატორის გაგრძელების შესახებ, როცა ოპერატორის ეანსაზღვრისა და მნიშვნელობათა სიმრავლეები დახასიათებულია დამატებითი პირობებით.

წინასწარ შემოვიღოთ

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ვიტყვით, რომ $E$ სიმრავლე არის $\pi$ ტიპის სივრცე და აღვნიშნავთ $E^{(\pi)}$ სიმბოლოთი, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) $E$ არის წრფივი ნორმირებული სივრცე.

2) $E$ სივრცეში აღებული ჩაკეტილ სფეროთა შეჭიდული ყოველი $\{S_\alpha\}$ სისტემა ისეთია, რომ $\bigcap\limits_\alpha \bar{S}_\alpha$ თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე.

თეორემა 3.42. ვ თ ქ ვ ა თ, $E_1$ წ რ ფ ი ვ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ე პ ა რ ა ბ ე ლ უ რ ი ს ი ვ რ ც ე ა დ ა $L$ მ ა ს შ ი მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი რ ა ი მ ე ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე. თ უ $L$ ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ე ზ ე გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი წ რ ფ ი ვ ი $U_1(x)$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი $L$-ს გ ა დ ა ს ა ხ ა ვ ს $\pi$ ტ ი პ ი ს $E^{(\pi)}$ ს ი ვ რ ც ე შ ი, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $U_1(x)$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ს წ რ ფ ი ვ ი $U_2(x)$ გ ა გ რ ძ ე ლ ე ბ ა $\bar{L}$ ქ ვ ე ს ი ვ რ ც ი დ ა ნ მ თ ე ლ $E_1$ ს ი ვ რ ც ე მ დ ე ნ ო რ მ ი ს შ ე უ ც ვ ლ ე ლ ა დ, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო ქ მ ე დ ე ბ ს $E_1$ ს ი ვ რ ც ი დ ა ნ $L^{(\pi)}$ ს ი ვ რ ც ე შ ი.

თეორემის დასამტკიცებლად ავაგოთ ჩაკეტილი $\bar{L}'$ სიმრავლე, რომლის $x'$ ელემენტები განსაზღვრულია ტოლობით:

$$x'=x+tx_1, \tag{3.55}$$

სადაც $x_1$ არის $E_1$ სივრცის ფიქსირებული ელემენტი, $x\in\bar{L}$ და $-\infty<t<\infty$. ცხადია, $\bar{L}'$ იქნება $E_1$ სივრცის ქვესივრცე. კერძოდ, როცა $x_1\in\bar{L}$, მაშინ $\bar{L}'=\bar{L}$, ხოლო როცა $x_1\bar{\in}\bar{L}$, მაშინ $\bar{L}\subset\bar{L}'$. ისიც შევნიშნოთ, რომ როცა $x_1\bar{\in}\bar{L}$, მაშინ $\bar{L}'$ ქვესივრცის ყოველი ელემენტი ცალსახად არის განსაზღვ-

რული (3.55) ტოლობით. მართლაც, ვთქვათ, $\bar{L}'$ ქვესივრცის ერთი და იგივე $x'$ ელემენტი წარმოიდგინება (3.55) ტოლობით ორი სხვადასხვა სახით:

$$x' = x + tx_1 = \bar{x} + t_1 x_1, \quad x, \bar{x} \in \bar{L}, \quad x_1 \in E, \quad t \neq t_1.$$

მაშინ

$$x_1 = \frac{1}{t - t_1} (\bar{x} - x),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $x_1 \in \bar{L}$. ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენ პირობას.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $U_1(x)$ ოპერატორის $U_2'(x)$ გაგრძელება $\bar{L}$ ქვესივრციდან $\bar{L}'$ ქვესივრცემდე, რომელიც დააკმაყოფილებს თეორემის ყველა პირობას. ცხადია, საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\bar{L}$ არის $\bar{L}'$ სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი. რისთვისაც საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ (3.55) ტოლობაში ელემენტი $x_1 \overline{\in} \bar{L}$.

დავუშვათ, რომ არსებობს $U_2'(x)$ გაგრძელება, მაშინ ნებისმიერი $x' \in \bar{L}'$ ელემენტისათვის გვექნება:

$$U_2'(x') = U_2'(x) + tU_2'(x_1) = U_1(x) + tU_2'(x_1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $U_2'(x')$ განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ $U_2'(x_1) \in E^{(\bar{n})}$ ელემენტი.

ავაგოთ $E^{(\bar{n})}$ სივრცეში ჩაკეტილი სფეროების ისეთი $\{\bar{S}_x\}$ სისტემა, რომ $\bar{S}_x$ სფეროს ცენტრი იყოს $U_1(x) \in E^{(\bar{n})}$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $r = r_x = \|U_1\| \, \|x_1 - x\|$.

დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება: იმისათვის, რომ არსებობდეს წრფივი $U_2'$ ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არეა $\bar{L}'$ და მნიშვნელობათა არე ეკუთვნის $E^{(\bar{n})}$ სივრცეს და, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს: $U_2'(x) = U_1(x)$, როცა $x \in \bar{L}$, $\|U_2'\| = \|U_1\|$, აუცილებელი და საკმარისია, არსებობდეს ისეთი ჩაკეტილი სფეროების $\{\bar{S}_x\}$ სისტემა, რომ მათი თანაკვეთა იყოს არაცარიელი სიმრავლე.

ჯერ შევამოწმოთ პირობის აუცილებლობა. ამისათვის, ვთქვათ, $U_2'$ ოპერატორი არსებობს, რომელსაც ჩამოთვლილი თვისებები აქვს. რადგანაც $\bar{L}'$ სიმრავლეზე $U_2'$ ოპერატორს იგივე ნორმა აქვს, როგორიც $U_1$ ოპერატორს $\bar{L}$ სიმრავლეზე, ამიტომ $x \in \bar{L}$, $x_1 \in L'$ ელემენტებისათვის, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \|U_2'(x) - U_1(x)\| = \|U_2'(x_1) - U_2'(x)\| = \|U_2'(x_1 - x)\| \leqslant \\ \leqslant \|U_2'\| \, \|x_1 - x\| = \|U_1\| \, \|x_1 - x\|. \end{aligned} \tag{3.56}$$

ეს უტოლობა (როცა იცვლება $x \in \bar{L}$ ელემენტი) გამოხატავს ჩაკეტილი სფეროების $\{\bar{S}_x\}$ სისტემას. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $\bigcap_x \bar{S}_x$ სიმრავლე არ არის ცარიელი. თეორემის პირობების თანახმად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ $\{\bar{S}_x\}$ არის შეჭიდული სფეროების სისტემა. ავიღოთ ამ სისტემის ორი ნებისმიერი $\bar{S}_{x_1'}, \bar{S}_{x_2'} \subset \{\bar{S}_x\}$ სფერო, რომელთა რადიუსებია შესაბამისად $r_1$ და $r_2$, ხოლო ცენტრები — $y_1' = U_1(x_1')$ და $y_2' = U_1(x_2')$ წერტილები. გამოვიყენოთ (3.56) და უტოლობა

$$\big|\, \|x_1 - x_1'\| + \|x_1 - x_2'\| \,\big| \geqslant \|x_2' - x_1'\|,$$

გვექნება:

$$r_1+r_2=\|U_1\|(\|x_1-x_1'\|+\|x_1-x_2'\|)\geqslant\|U_1\|\,\|x_1'-x_2'\|\geqslant$$
$$\geqslant\|U_1(x_1'-x_2')\|=\|y_1'-y_2'\|.$$

ამ შეფასებიდან ჩანს, რომ მანძილი $\bar S_{x_1'}$ და $\bar S_{x_2'}$ სფეროების ცენტრებს შორის არ აღემატება ამ სფეროების რადიუსების ჯამს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\bar S_{x_1'}\cap\bar S_{x_2'}$ თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე. მაშასადამე, $\{\bar S_x\}$ არის შეჭიდული სფეროების სისტემა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. დავუშვათ, რომ $\{\bar S_x\}$ სისტემის კუთვნილი ყველა სფეროების თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე. აღვნიშნოთ $y_0$-ით მათი თანაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი. განვსაზღვროთ საძიებელი $U_2'$ ოპერატორი შემდეგნაირად: $x_1\in\bar L'$ წერტილზე ადგილი ჰქონდეს $U_2'(x_1)=y_0$ ტოლობას და ნებისმიერ $x'\in\bar L'$ ელემენტზე განსაზღვრული იყოს ტოლობით:

$$U_2'(x)=tU_2'(x_1)+U_2'(x)=ty_0+U_2'(x),$$

სადაც, როგორც ვიცით, ელემენტი $x\in\bar L$. ვინაიდან $x'$ ელემენტის წარმოდგენა (3.55) სახით ცალსახაა, ამიტომ ამ პირობებით განსაზღვრული $U_2'$ არის ადიტიური ოპერატორი. ვუჩვენოთ, რომ $U_2'$ არის ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი $L'$ ქვესივრცეზე. მართლაც, როცა $t\neq 0$, გვაქვს

$$\|U_2'(x')\|=\|tU_2'(x_1)+U_2'(x)\|=|t|\left\|U_2'(x_1)-U_2'\left(-\frac{x}{t}\right)\right\|=$$
$$=|t|\left\|U_2'(x_1)-U_1\left(-\frac{x}{t}\right)\right\|\leqslant|t|\,r_{-\frac{x}{t}}=|t|\,\|U_1\|\left\|x_1+\frac{x}{t}\right\|=$$
$$=\|U_1\|\,\|x+tx_1\|=\|U_1\|\,\|x'\|.$$

ამრიგად, $U_2'$ არის ადიტიური და ნორმით შემოსაზღვრული ოპერატორი და, ამიტომ იგი წრფივია. ამასთანავე, უკანასკნელი უტოლობიდან პირდაპირ ჩანს, რომ $\|U_2'\|\leqslant\|U_1\|$. მაგრამ ისიც ცხადია, რომ

$$\|U_2'\|_{\bar L'}\geqslant\|U_2'\|_{\bar L}=\|U_1\|,$$

და, მაშასადამე $\|U_2'\|=\|U_1\|$.

ამით დამტკიცებულია, რომ არსებობს წრფივი $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივი $U_2'(x)$ გაგრძელება. ამ გაგრძელებას ადგილი აქვს $\bar L$ ქვესივრციდან $\bar L'$ ქვესივრცემდე ნორმის შეუცვლელად.

დარჩა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივი $U_2(x)$ გაგრძელება $\bar L$ ქვესივრციდან მთელ $E_1$ სივრცემდე და, რომ ეს გაგრძელება შესაძლოა ნორმის შეუცვლელად.

ვინაიდან $E_1$ სეპარაბელური სივრცეა, ამიტომ არსებობს მისი ელემენტების თვლადი $\omega$ სიმრავლე, რომელიც ყველგან მკვრივია $E_1$ სივრცეში. აქ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1) $\bar L\cap\omega$ თანაკვეთა მთლიანად ეკუთვნის $\bar L$ ქვესივრცეს,

2) $\omega$ სიმრავლე შეიცავს ისეთ წერტილებს, რომლებიც არ ეკუთვნის $\bar L$ ქვესივრცეს.

თუ ადგილი აქვს 1) შემთხვევას, მაშინ $\overline{L}$ ყველგან მკვრივი იქნება $E_1$ სივრცეში და, 3.41 თეორემის ძალით, ჩვენი წინადადება დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ მეორე შესაძლო შემთხვევა. ვთქვათ, $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots\in\omega$ ის წერტილებია, რომლებიც არ ეკუთვნიან $\overline{L}$ ქვესივრცეს. იმ წესით, რომლითაც ზემოთ აგებული იყო $\overline{L}'$ ქვესივრცე, ავაგოთ $\overline{L}^{(1)}$ ქვესივრცე და მასზე განსაზღვრული $U^{(1)}(x)$ ოპერატორი, რომელიც იქნება $U_1(x)$ ოპერატორის წრფივი გაგრძელება ნორმის შეუცვლელად $\overline{L}$ სიმრავლიდან $\overline{L}^{(1)}$ სიმრავლემდე. ამ წესით ავაგოთ ქვესივრცეთა $\{\overline{L}^{(n)}\}$ მიმდევრობა: $\overline{L}\subset\overline{L}^{(1)}\subset\overline{L}^{(2)}\subset\cdots$ და მათზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორების $\{U^{(n)}(x)\}$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ყოველი $U^{(k)}(x)$ ოპერატორი წარმოადგენს წინამავალი $U^{(k-1)}(x)$ ოპერატორის წრფივ გაგრძელებას ნორმის შეუცვლელად $\overline{L}^{(k-1)}$ ქვესივრციდან $L^{(k)}$ ქვესივრცემდე:

$$U_1\subset U^{(1)}\subset U^{(2)}\subset\ldots,$$
$$\|U_1\|=\|U^{(1)}\|=\|U^{(2)}\|=\ldots.$$

ცხადია, რომ თუ რომელიმე $n$ რიცხვისათვის $\overline{L}^{(n)}=E$, მაშინ შესაბამისი $U^{(n)}(x)$ ოპერატორი იქნება $U_1(x)$ ოპერატორის საძიებელი გაგრძელება $\overline{L}$ ქვესივრციდან $E$ სივრცემდე.

დავუშვათ, რომ არცერთი $\overline{L}^{(n)}\neq E$. მაშინ, $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots$ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი ელემენტები, რომლებიც არ მიეკუთვნება $\overline{L}^{(n)}$ სიმრავლეს. ვთქვათ, $x^{(n)}$ არის პირველი ასეთი ელემენტი. ავაგოთ (3.55) ფორმულის დახმარებით ჩაკეტილი $\overline{L}^{(n+1)}$ ქვესივრცე და გავაგრძელოთ $U^{(n)}(x)$ ოპერატორი ნორმის შეუცვლელად $\overline{L}^{(n)}$ სიმრავლიდან $\overline{L}^{(n+1)}$ სიმრავლემდე. ოპერატორი, რომელიც ამ წრფივ გაგრძელებას განახორციელებს, აღვნიშნოთ $U^{(n+1)}(x)$-ით. ანალოგიურად ავაგოთ $\overline{L}^{(n+2)}, \overline{L}^{(n+3)},\ldots$ ქვესივრცეები და შესაბამი $U^{n+3}(x),\ldots$ ოპერატორები. მათი აგების წესი ისეთია, რომ

$$\overline{L}\subset\overline{L}^{(n+1)}\subset\overline{L}^{(n+2)}\subset\ldots.$$

და

$$\|U_1\|=\|U^{(n+1)}\|=\|U^{(n+2)}\|=\ldots.$$

თუ რომელიმე $\overline{L}^{(n)}=E$, მაშინ სათანადო წრფივი $U^{(n)}(x)$ ოპერატორი იქნება $U_1(x)$ ოპერატორის საძიებელი გაგრძელება. თუკი არცერთი $\overline{L}^{(n)}\neq E$, მაშინ $\omega$ სიმრავლის ყოველი $x$ ელემენტი მიეკუთვნება $\overline{L}^{(n)}$ ქვესივრცეს. ცხადია, მაშინ $\omega$ სიმრავლის წრფივი $L(\omega)$ გარსის ყოველი ელემენტიც მიეკუთვნება $\overline{L}^{(n)}$ ქვესივრცეს. ავიღოთ ნებისმიერი $x\in L(\omega)$ ელემენტი. არსებობს ისეთი $L^{(n)}$ ქვესივრცე, რომ $x\in\overline{L}^{(n)}$. განვსაზღვროთ წრფივ $L(\omega)$ გარსზე ახალი ოპერატორი:

$$U^*(x)=U^{(n)}(x) \tag{3.57}$$

და დავამტკიცოთ, რომ იგი სწორედ საძიებელი წრფივი ოპერატორია. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ (3.57) ტოლობით განსაზღვრული $U^*(x)$ ოპერატორი არ არის დამოკიდებული $n$ ნიშნაკის შერჩევაზე. ეს იქიდან ჩანს, რომ თუ $x\in\overline{L}^{(m)}$, $x\notin\overline{L}^{(n)}$ და $m<n$, მაშინ $U^{(m)}(x)=U^{(n)}(x)$.

$U^*(x)$ ოპერატორი ადიტიურია. მართლაც, ვთქვათ, $x^*, x^{**} \in L(\omega)$ ნებისმიერი ელემენტებია, სადაც $x^* \in \overline{L}^{(m)}$, $x^{**} \in \overline{L}^{(n)}$ და $m < n$. მაშინ $x^* + x^{**} \in \overline{L}^{(n)}$ და ამიტომ

$$U^{(*)}(x^* + x^{**}) = U^{(n)}(x^* + x^{**}) = U^{(n)}(x^*) + U^{(n)}(x^{**}) =$$
$$= U^{(*)}(x^*) + U^{(0)}(x^{**}).$$

ამასთანავე, $U^*(x)$ ნორმითაც შემოსაზღვრულია წრფივ $L(\omega)$ გარსზე. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x \in L(\omega)$ ელემენტისათვის, თანახმად (3.57) ტოლობისა, გვაქვს

$$\|U^*(x)\| = \|U^{(n)}(x)\| \leqslant \|U_n\| \; \|x\| = \|U_1\| \; \|x\|.$$

ამრიგად, $U^*(x)$ ოპერატორი წრფივია $L(\omega)$ სიმრავლეზე.

უკანასკნელი უტოლობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ $\|U^*\| \leqslant \|U_1\|$. ამასთანავე, ვინაიდან $U^*(x)$ ოპერატორის განსაზღვრის არე შეიცავს $U_1(x)$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს, ამიტომ ადგილი აქვს ასეთ უტოლობასაც:

$$\|U^*\| \geqslant \|U_1\|.$$

საიდანაც, წინა უტოლობის ძალით, მივიღებთ $\|U^*\| = \|U_1\|$.

თანახმად 3.41 თეორემისა, არსებობს $U_2(x)$ ოპერატორი, განსაზღვრული ჩაკეტილ $\overline{L}(\omega)$ სიმრავლეზე, რომელიც იქნება $U^*(x)$ ოპერატორის წრფივი გაგრძელება ნორმის შეუცვლელად წრფივი $L(\omega)$ გარსიდან მის $\overline{L}(\omega)$ ჩაკეტვამდე. მაგრამ, რადგანაც $\omega$ ყველგან მკვრივი სიმრავლეა $E$ სივრცეში, ამიტომ მართებულია $\overline{L}(\omega) = E$ ტოლობა. $U_2(x)$ ოპერატორი დააკმაყოფილებს თეორემაში მოთხოვნილ ყველა პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

## § 10. წრფივ ოპერატორთა სივრცე

განვიხილოთ ორი წრფივი ნორმირებული $E_1$, $E_2$ სივრცე და ყველა იმ წრფივი ოპერატორის $\Omega$ სიმრავლე, რომლებიც $E_1$ სივრციდან მოქმედებენ $E_2$ სივრცეში. $\Omega$ სიმრავლის ელემენტებისათვის შემოვიღოთ ცნებანი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლებისა.

ვთქვათ, $U^{(1)}$, $U^{(2)} \in \Omega$ ნებისმიერი ორი ელემენტია. $U$ ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$U(x) = U^{(1)}(x) + U^{(2)}(x), \tag{3.58}$$

სადაც $x \in E$, ვუწოდოთ $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ოპერატორების ჯამი და დავწერთ $U = U^{(1)} + U^{(2)}$. ცხადია, რომ $U$ ოპერატორი ადიტიურია და, გარდა ამისა, აკმაყოფილებს პირობას.

$$\|U(x)\| \, U^{(1)}(x) + U^{(2)}(x)\| \leqslant (\|U^{(1)}\| + \|U^{(2)}\|) \|x\|.$$

როგორც ჩანს, წრფივ ოპერატორთა ჯამი, რომელიც განსაზღვრულია (3.58) ტოლობით, თვითონაც წრფივი ოპერატორი არის და $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში მოქმედებს. ამის გამო, ოპერატორი $U \in \Omega$.

რაიმე $\alpha$ რიცხვისა და $U \in \Omega$ ოპერატორის $\widetilde{U}$ ნამრავლი განვსაზღვროთ ტოლობით

$$\widetilde{U}(x) = \alpha U(x).$$

ცხადია, $\widetilde{U}$ ისევ წრფივი ოპერატორი იქნება, რომლის განსაზღვრის არეა $E_1$ და მნიშვნელობათა სიმრავლე მოთავსებულია $E_2$ სივრცეში. მაშასადამე, $\widetilde{U}\in\Omega$. $\Omega$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი ვუწოდოთ $\vartheta$ ოპერატორს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ $\vartheta(x)=\Theta_2$ ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტისათვის, სადაც $\Theta_2$ არის $E_2$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი.

ავიღოთ ოპერატორთა $\{U_n\}\subset\Omega$ მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ $\{U_n\}$ ნორმით თანაბრად კრებადია $E_1$ სივრცეზე, თუ არსებობს ისეთი $\overline{U}$ ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში და, თუ ნებისმიერი $x$ ელემენტისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(x)-\overline{U}(x)\|=0.$$

$\overline{U}$ ოპერატორს ეწოდება $\{U_n\}$ მიმდევრობის ზღვარითი ოპერატორი.

შემოვიღოთ $\Omega$ სიმრავლეში ელემენტის ნორმის ცნება. თუ $U\in\Omega$, მაშინ მის ნორმას ვუწოდებთ რიცხვს

$$\|U\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U(x)\|. \tag{3.59}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ელემენტის ნორმა, რომელიც ამ ფორმულით არის განსაზღვრული, დააკმაყოფილებს ნორმის ყველა სავალდებულო აქსიომას.

მართლაც, დავრწმუნდეთ ჯერ იმაში, რომ $\|U\|=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $U=\vartheta$. ვთქვათ, $\|U\|=0$, მაშინ $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|U(x)\|=0$. აქედან გვექნება, რომ ერთეულოვან $\|x\|\leqslant 1$ სფეროში ადგილი აქვს $U(x)=\Theta_2$ ტოლობას. ვინაიდან $U$ ოპერატორი ადიტიურია $E_1$ სივრცეზე, ამიტომ მისი მნიშვნელობა ნებისმიერ $\widetilde{x}\in E_1$ ელემენტზე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობით: $U(\widetilde{x})=\|\widetilde{x}\|\,U\left(\dfrac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|}\right)$ და, რადგანაც $\dfrac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|}$ არის ერთეულოვანი სფეროს ზედაპირის ელემენტი, ამიტომ $U(\widetilde{x})=\Theta_2$.

ამრიგად, $U$ ოპერატორი ისეთია, რომ $E_1$ სივრცის ყველა ელემენტს გადასახავს $E_2$ სივრცის ნულოვან $\Theta_2$ ელემენტში. ეს იმას ნიშნავს, რომ $U=\vartheta$. გარდა ამისა, პირდაპირ ჩანს, რომ $\|U\|>0$, როცა $U\neq\vartheta$.

$\Omega$ სიმრავლის ელემენტების ნორმებისათვის შესრულებულია სამკუთხედის აქსიომაც. მართლაც, ვთქვათ $U^{(1)}$, $U^{(2)}\in\Omega$. ნორმის განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$\|U^{(1)}+U^{(2)}\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U^{(1)}(x)+U^{(2)}(x)\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U^{(1)}(x)\|+\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U^{(2)}(x)\|=$$
$$=\|U^{(1)}\|+\|U^{(2)}\|.$$

დაბოლოს ცხადია, რომ ნებისმიერი $\alpha$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\|\alpha U\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\alpha U(x)\|=|\alpha|\,\|U\|.$$

დავამტკიცოთ ს. ბანახისა და გ. შტეინჰაუზის ორი მნიშვნელოვანი თეორემა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყველა წრფივი ოპერატორის $\Omega$ სიმ-

რავლე, რომლებიც $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში მოქმედებს, არის წრფივი ნორმირებული სივრცე.

**თეორემა 3.43.** თუ წრფივ ოპერატორთა $\{U_n\}\in\Omega$ მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადია $E_1$ სივრცეზე $\overline{U}$ ოპერატორისაკენ, რომელიც $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში მოქმედებს და, თუ რიცხვითი $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\overline{U}(x)$ წრფივი ოპერატორი იქნება $E_1$ სივრცეზე.

დავამტკიცოთ ჯერ $\overline{U}(x)$ ოპერატორის ადიტიურობა. ვთქვათ, $x,y\in E_1$ ნებისმიერი ელემენტებია. თანახმად თეორემის პირველი პირობისა, ერთის მხრივ გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty}\|\overline{U}_n(x+y)-\overline{U}(x+y)\|=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(x)-\overline{U}(x)\|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(y)-\overline{U}(x)\|=0.$$

მეორეს მხრივ, ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|\overline{U}(x+y)-\overline{U}(x)-\overline{U}(y)\|\leqslant\|\overline{U}(x+y)-\overline{U}_n(x+y)\|+$$
$$+\|\overline{U}(x)-U_n(x)\|+\|\overline{U}(y)-U_n(y)\|,$$

საიდანაც, როცა $n\to\infty$, წინა ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\overline{U}(x+y)=\overline{U}(x)+\overline{U}(y).$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ზღვარითი $\overline{U}(x)$ ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია $E_1$ სივრცეზე, ამისათვის გამოვიყენოთ თეორემის მეორე პირობა, რომლის თანახმად $\|U_n\|\leqslant\mu$, $(n=1;\ 2,\dots)$, სადაც $\mu$ რაღაც რიცხვია. ვინაიდან ყოველი $U_n(x)$ წრფივი ოპერატორია, ამიტომ

$$\|U_n(x)\|\leqslant\|U_n\|\ \|x\|\leqslant\mu\|x\|.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$ და, გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\|U_n(x)\|=\|U(x)\|$, მივიღებთ

$$\|\overline{U}(x)\|\leqslant\mu\|x\|.$$

ამრიგად, ზღვარითი $\overline{U}(x)$ ოპერატორი წრფივია და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.44.** წრფივ ოპერატორთა $\Omega$ სიმრავლე სრულია.

ავიღოთ ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{U_n\}\in\Omega$ მიმდევრობა ე. ი. ისეთი, რომ

$$\lim_{m,n\to\infty}\|U_m-U_n\|=0.$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან

$$\|U_m-U_n\|\geqslant\big|\|U_m\|-\|U_n\|\big|,$$

ამიტომ (3.60) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{m,n\to\infty}\left|\|U_m\|-\|U_n\|\right|=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\{\|U_n\|\}$ რიცხვითი მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, მაშასადამე, იგი შემოსაზღვრული იქნება.

დავამტკიცოთ, რომ არსებობს წრფივი $\bar{U}\in\Omega$ ოპერატორი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n-\bar{U}\|=0. \tag{3.65}$$

ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი $x\in E_1$ ელემენტი. ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|U_m(x)-U_n(x)\|\leqslant\|(U_m-U_n)x\|\leqslant\|U_m-U_n\|\,\|x\|.$$

საიდანაც, თანახმად (3.60) ტოლობისა მივიღებთ

$$\lim_{m,n\to\infty}\|U_m(x)-U_n(x)\|=0.$$

როგორც ვხედავთ $\{U_n(x)\}\subset E_2$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, ვინაიდან $E_2$ სივრცე სრულია, ამიტომ იგი ნორმით კრებადი იქნება გარკვეული $z=\bar{U}(x)\in E_2$ ელემენტისაკენ. ამ მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $x\in E_1$ ელემენტს შეესაბამება ისეთი $\bar{U}(x)\in E_2$ ელემენტი, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(x)-U(x)\|=0.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, დამტკიცებულია შემდეგი ფაქტი: თუ $\{U_n\}\subset\Omega$ არის წრფივი ოპერატორების ფუნდამენტალური მიმდევრობა, მაშინ არსებობს $\bar{U}$ ოპერატორი, რომელიც $E_1$ სივრციდან მოქმედებს $E_2$ სივრცეში და $\{U_n\}$ მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადია $\bar{U}$-საკენ $E_1$ სივრცეზე. გარდა ამისა, ვინაიდან $\{\|U_n\|\}$ რიცხვითი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ წინა თეორემის ძალით, $\bar{U}(x)$ იქნება წრფივი ოპერატორი $E_1$ სივრცეზე და მაშასადამე, $\bar{U}\in\Omega$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\bar{U}$ სწორედ ის ოპერატორია, რომელიც დააკმაყოფილებს (3.61) პირობას.

მართლაც, ვინაიდან $\{U_n\}(x)\subset E_2$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი $x$ ელემენტისათვის, რომელიც ერთეულოვან სფეროს ეკუთვნის, ადგილი ექნება უტოლობას

$$\|U_{n+p}(x)-U_n(x)\|<\varepsilon,\ \text{როცა}\ n\geqslant N,$$

სადაც $p$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\|\bar{U}(x)-U_n(x)\|\leqslant\|\bar{U}(x)-U_{n+p}(x)\|+\|U_{n+p}(x)-U_n(x)\|.$$

აქედან, წინა უტოლობის დახმარებით, მივიღებთ

$$\|\bar{U}(x)-U_n(x)\|\leqslant\|\bar{U}(x)-U_{n+p}(x)\|+\varepsilon,\ \text{როცა}\ n\geqslant N.$$

გადავიდეთ ამ უტოლობაში ზღვარზე როცა $p\to\infty$, გვექნება

$$\|\bar{U}(x)-U_n(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

მოვიგონოთ ელემენტის ნორმის განსაზღვრა $\Omega$ სიმრავლეში და გამოვიყენოთ უკანასკნელი უტოლობა, მივიღებთ

$$\|\bar{U}-U_n\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(\bar{U}-U_n)x\|\leqslant \varepsilon, \text{ როცა } n\geqslant N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\|U-U_n\| = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ წრფივ ოპერატორთა მიმდევრობის ნორმით თანაბრად კრებადობის ერთი საკმარისი ნიშანი.

თეორემა 3.45. ვთქვათ, წრფივი ოპერატორების $\{U_n\}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი მათგანი მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია პირობები: 1) $\{U_n(x)\}\in E_2$ მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადია $\bar{U}$ ოპერატორისაკენ ყოველი $x\in M$ ელემენტისათვის, სადაც $M$ არის ყველგან მკვრივი სიმრავლე $E_1$ სივრცეში. 2) რიცხვითი $\{\|U_a\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია $\mu$ რიცხვით. მაშინ $\{U_n(x)\}$ მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადი იქნება მთელ $E_1$ სივრცეზე წრფივი $\bar{U}(x)$ ოპერატორისაკენ.

თეორემის პირობების ძალით, ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $\bar{x}\in M$ ელემენტი რომ

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3\mu}.$$

გარდა ამისა, $\{U_n(\bar{x})\}$ მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადია ზღვარითი $\bar{U}(\bar{x})$ ოპერატორისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(\bar{x})-\bar{U}(x)\|=0$$

ნებისმიერი $\bar{x}\in M$ ელემენტისათვის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\{U_n\}(x)\subset E_2$ ფუნდამენტალური მიმდევრობა იქნება. მართლაც, არსებობს იმდენად დიდი $N$ ნატურალური რიცხვი, რომ როცა $m, n\geqslant N$, გვექნება

$$\|U_m(x)-U_n(x)\|\leqslant\|U_m(\bar{x}-x)\|+\|U_n(x-\bar{x})\|+$$

$$+\|U_m(\bar{x})-U_n(\bar{x})\|\leqslant 2\mu\cdot\frac{\varepsilon}{3\mu}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

ვინაიდან $E_2$ სრული სივრცეა, ამიტომ, 3.43 თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი წრფივი $\bar{U}(x)$ ოპერატორი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(x)-U(x)\|=0$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია

დავამტკიცოთ ბანახის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი

თეორემა 3.46. თუ წრფივი ოპერატორების $\{U_n\}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი $U_n$ მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში და თუ

ეს მიმდევრობა ნორმით თანაბრად კრებადია $E_1$ სივრცეზე $U(x)$ ოპერატორისაკენ, მაშინ ნორმების $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თეორემის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, რომ თეორემის პირობები შესრულებულია, მაგრამ $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრული არ იქნება არცერთ $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$ სფეროში, რომლის $x_0$ ცენტრი არის $E_1$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი და $\varepsilon$ რადიუსი ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. მართლაც, $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა რომ რომელიმე $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$ სფეროში შემოსაზღვრული იყოს, ე. ი. ადგილი რომ ჰქონდეს უტოლობას $\|U_n(x)\| \leqslant \mu$, $n = 1, 2, \ldots$, სადაც $x \in \bar{S}(x_0, \varepsilon)$, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$\|U_n(x'')\| \leqslant \mu$$

უტოლობასაც, სადაც $x'' = \varepsilon\|x'\|^{-1}x' + x_0 \in \bar{S}(x_0, \varepsilon)$ ხოლო $x'$ არის $E_1$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი და $x' \neq \Theta_1$. ვინაიდან ყოველი $U_n$ წრფივი ოპერატორია, ამიტომ წინა უტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\|\varepsilon\|x'\|^{-1}U_n(x') + U_n(x_0)\| \leqslant \mu,$$

და ვინაიდან

$$\varepsilon\|x'\|^{-1}\|U_n(x')\| - \|U_n(x_0)\| \leqslant \|\varepsilon\|x'\|^{-1}U_n(x') + U_n(x_0)\|,$$

ამიტომ

$$\varepsilon\|x'\|^{-1}\|U_n(x')\| - \|U_n(x_0)\| \leqslant \mu.$$

აქედან მივიღებთ

$$\|U_n(x')\| \leqslant \mu_1\|x'\|, \tag{3.62}$$

სადაც

$$\mu_1 = \varepsilon^{-1}(\mu + \|U_n(x_0)\|).$$

თანახმად პირობისა, $\{U_n(x_0)\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია. მაშასადამე, ნორმების $\{\|U_n(x_0)\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და (3.62) უტოლობაში $\mu_1$ სასრული რიცხვია. ამის გამო, იმავე (3.62) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\|U_n\| \leqslant \mu_1$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ამრიგად, თუ დავუშვებთ, რომ $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ $\{\|U_n(x)\|\}$ მიმდევრობა არ იქნება შემოსაზღვრული არცერთ ჩაკეტილ $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$ სფეროში.

ვთქვათ ახლა, $\bar{S} \subset E_1$ ნებისმიერი ჩაკეტილი სფეროა. თანახმად დამტკიცებული წინადადებისა, თუ $\{\|U_n\|\}$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ $\{\|U_n(x)\|\}$ მიმდევრობაც არ იქნება შემოსაზღვრული $\bar{S}$ სფეროში. ამის გამო, არსებობს $U_{n_1}$ ოპერატორი და ისეთი $x_1 \in \bar{S}$ ელემენტი, რომ $\|U_{n_1}(x_1)\| > 1$. ვინაიდან $U_{n_1}$ ნორმით უწყვეტი ოპერატორია, ამიტომ წინა უტოლობას ადგილი ექნება რაიმე ჩაკეტილ $\bar{S}_1(x_1, \varepsilon_1)$ სფეროში. მაგრამ, $\bar{S}_1(x_1, \varepsilon_1)$ სფეროშიც არ არის შემოსაზღვრული $\{\|U_n(x)\|\}$ მიმდევრობა და, ამიტომ არსებობს $U_{n_2}$ ოპერატორი, $n_2 > n_1$ და ისეთი $x_2 \in \bar{S}_1(x_1, \varepsilon_1)$ ელემენტი, რომ $\|U_{n_2}(x_2)\| > 2$. მაგრამ, $U_{n_2}$ ოპერატორის უწყვეტობის გამო, უკანასკნელ უტოლობას ადგილი ექნება აგრეთვე რაიმე $\bar{S}_2(x_2, \varepsilon_2) \subset \bar{S}_1(x_1, \varepsilon_1)$ სფეროში სადაც $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$. თუ გავაგრძელებთ მოყვანილ მსჯელობას უსასრულოდ, მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ სფეროთა $\{\bar{S}_n(x_n, \varepsilon_n)\}$ მიმდევრობას, სადაც

$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_1}{n}$. ცხადია, რადიუსების $\{\varepsilon_n\}$ მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ. თანახმად 1.29 თეორემისა, არსებობს $x^* \in \bar{S}_n(x_n, \varepsilon_n)(n=1, 2, \dots)$ ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება უტოლობას: $\|U_{n_k}x^*\| > k$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $\{U_n x\}$ არის ნორმით კრებადი მიმდევრობა ყოველი $x \in E_1$ ელემენტისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

## § 11. წრფივი ოპერატორების ნამრავლი

ავიღოთ წრფივი ნორმირებული $E_1$, $E_2$, $E_3$ სივრცეები. ვთქვათ, წრფივი $y=U(x)$ ოპერატორი მოქმედებს $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში, ხოლო წრფივი $z=V(y)$ ოპერატორი მოქმედებს $E_2$ სივრციდან $E_3$ სივრცეში. განვსაზღვროთ $W=VU$ ნამრავლი, როგორც ისეთი ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს $E_1$ სივრციდან $E_3$ სივრცეში და, რომელსაც აქვს სახე

$$W(x)=V(U(x)).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $W(x)$ აგრეთვე წრფივი ოპერატორია.

მართლაც, ცხადია, $W(x)$ ნამრავლი ადიტიური ოპერატორია. ვაჩვენოთ, რომ იგი წარმოადგენს $E_1$ სივრცეზე ნორმით შემოსაზღვრულ ოპერატორს. ვთქვათ, $x \in E_1$ ნებისმიერი ელემენტია, გვექნება

$$\|W(x)\| = \|V(U(x))\| \leqslant \|V\| \, \|U(x)\| \leqslant \|V\| \, \|U\| \, \|x\|.$$

ამრიგად, $W(x)$ წრფივი ოპერატორია, ამასთანავე $\|W\| \leqslant \|U\| \, \|V\|$.

სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება წრფივ ოპერატორთა ნამრავლი იმ შემთხვევაშიც, როცა ოპერატორთა რიცხვი ორს აღემატება.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა წრფივი $U(x)$, $V(x)$ და $W(x)$ ოპერატორები წრფივი ნორმირებული $E$ სივრციდან მოქმედებენ ისევ ამ სივრცეში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$(UV)W=U(VW), \qquad (\alpha U\cdot V)=\alpha(U\cdot V),$$
$$(U+V)W=UW+VW, \qquad U(\alpha V)=\alpha(U\cdot V),$$
$$W(U+V)=WU+WV, \qquad \alpha(U+V)=\alpha U+\alpha V,$$

სადაც $\alpha$ ნებისმიერი (ნამდვილი ან კომპლექსური) რიცხვია. კერძოდ, შეგვიძლია განვიხილოთ ოპერატორის „ხარისხებიც". ასე მაგალითად, $U^2=U\cdot U$, $U^3=U^2\cdot U$ და ა. შ.

**მაგალითი:** ვთქვათ, $U(x)=tx(t)$, სადაც $x(t) \in C(0,1)$. მაშინ $U^2(x)= = U(U(x))=t^2x(t)$, $U^3(x)=t^3x(t)$ და ა. შ.

შევნიშნოთ, რომ წრფივი ოპერატორების ნამრავლი საზოგადოდ არ არის კომუტატიური; $U\cdot V \neq VU$.

განვიხილოთ, მაგალითად, წრფივი ოპერატორი:

$$U(x)=t+x(t),$$

სადაც $x(t) \in C(0,1)$. ეს ოპერატორი მოქმედებს $C(0,1)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. ავიღოთ მეორე წრფივი ოპერატორი:

$$V(x)=tx(t).$$

ეს უკანასკნელიც მოქმედებს $C(0,1)$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. შევადგინოთ ნამრავლები:

$$U(V(x))=t(1+x(t)),$$
$$V(U(x))=t(t+x(t)),$$

ე. ი.

$$U\cdot V \neq VU.$$

როგორც ვხედავთ, ყველა იმ წრფივი ოპერატორების $\Omega_0$ სიმრავლე, რომლებიც წრფივი ნორმირებული $E$ სივრციდან მოქმედებს ამავე სივრცეში, წარმოადგენს არაკომუტატიურ ნორმირებულ რგოლს.

ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ წრფივი ოპერატორების ნორმირებული $\Omega_0$ რგოლი შეიცავს აგრეთვე ერთეულოვან ოპერატორსაც, ე. ი. ისეთ $e$ ოპერატორს, რომ $e\cdot U=U\cdot e=U$, სადაც $U\in\Omega_0$.

**თეორემა 3.47.** თუ $U\in\Omega_0$ ისეთი წრფივი ოპერატორია, რომ $\|U\|<1$, მაშინ არსებობს $e+U$ ოპერატორის შებრუნებული $(e+U)^{-1}$ წრფივი ოპერატორი და $\|(e+U)\|^{-1}\leqslant\frac{1}{1-\|U\|}$.

განვიხილოთ მწკრივი

$$e-U+U^2-\cdots+(-1)^nU^n+\cdots \tag{3.63}$$

ვინაიდან $\|U^n\|\leqslant\|U\|^n$და$\|U\|<1$, ამიტომ ამ მწკრივის ელემენტების ნორმებისაგან შედგენილი რიცხვითი მწკრივი კრებადი იქნება (იხ. თეორემა 3.30). თანახმად 3.31 თეორემისა, თვითონ (3.63) მწკრივი ნორმით კრებადი იქნება.

დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი ნორმით კრებადია $(e+U)^{-1}$ ოპერატორისაკენ. მართლაც, ავიღოთ შემდეგი იგივეობა:

$$(e+U)(e-U+U^2-\cdots+(-1)^n\ U^n)=e+(-1)^nU^{n+1}$$

თეორემის პირობის თანახმად:

$$\|U^{n+1}\|\leqslant\|U\|^{n+1}\to 0,\ \text{როცა}\ n\to\infty.$$

ამიტომ $U^{n+1}\to\vartheta_0$, როცა $n\to\infty$, სადაც $\vartheta_0$ არის $\Omega$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი. ამის გამო, როცა $n\to\infty$, წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$(e+U)(e-U+U^2-\cdots)=e,$$

ე. ი.

$$e-U+U^2-\cdots=e(e+U)^{-1}=(e+U)^{-1} \tag{3.64}$$

ამით დამტკიცებულია $(e+U)^{-1}$ ოპერატორის არსებობა. გარდა ამისა, თანახმად 3.30 თეორემისა, გვექნება

$$\|(e+U)^{-1}\|\leqslant 1+\|U\|+\|U^2\|+\cdots\leqslant 1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q},$$

სადაც $q=\|U\|$. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი:

**თეორემა 3.48.** თუ არსებობს $U\in\Omega_0$ ოპერატორის შებრუნებული $U^{-1}$ ოპერატორი და $V\in\Omega_0$ ოპერატორი ისეთია, რომ $\|V\|<\|U^{-1}\|$, მაშინ არსებობს $U+V$ ოპერატორის შებრუნებული $(U+V)^{-1}$ ოპერატორი და ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|(U+V)^{-1}-U^{-1}\|<\frac{\|U^{-1}\|}{1-\|U^{-1}\|\ \|V\|}.$$

მართლაც, ვინაიდან $U^{-1}$ არსებობს და, ამასთანავე $UU^{-1}=e$, ამიტომ ადგილი აქვს წარმოდგენას: $U+V=U(e+U^{-1}V)$. თეორემის პირობის თანახმად, გვაქვს: $\|U^{-1}V\|\leqslant\|U^{-1}\|\ \|V\|<1$. მაშასადამე, $e+U^{-1}V$ ოპერატორი აკმაყოფილებს 3.46 თეორემის პირობებს და, ამიტომ არსებობს მისი შებრუნებული $(e+U^{-1}V)^{-1}$ ოპერატორი. (3.64) ფორმულის თანახმად, ეს უკანასკნელი წარმოიდგინება ნორმით კრებადი შემდეგი მწკრივით:

$$(e+U^{-1}V)^{-1}=e-U^{-1}V+(U^{-1}V)^2-\cdots+(-1)^n(U^{-1}V)^n+\cdots \tag{3.65}$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $(e+U^{-1}V)^{-1}$ და $U^{-1}$ არიან შესაბამისად $e+U^{-1}V$ და $U$ ოპერატორების შებრუნებული ოპერატორები, ამიტომ $U(e+U^{-1}V)$ ნამრავლის შებრუნებული ოპერატორი იქნება $U^{-1}(e+U^{-1}V)^{-1}$. მაგრამ, ცხადია, $U(e+U^{-1}V)=U+V$.

ამრიგად, არსებობს $U+V$ ოპერატორის შებრუნებული $U^{-1}(e+U^{-1}V)^{-1}$ ოპერატორი. ამით დამტკიცებულია თეორემის პირველი ნაწილი.

თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად, ავიღოთ იგივეობა:

$$(U+V)^{-1}-U^{-1}=U^{-1}(e+U^{-1}V)^{-1}-U^{-1}=U^{-1}[(e+U^{-1}V)^{-1}-e].$$

აქედან გვაქვს

$$\|(U+V)^{-1}-U^{-1}\|\leqslant\|(e+U^{-1}V)^{-1}-e\|\;\|U^{-1}\|.$$

თუ ამ უტოლობის მარჯვენა მხარეში $(e+U^{-1}V)^{-1}$ ოპერატორის ნაცვლად ჩავსვამთ მის (3.65) გაშლას, მივიღებთ:

$$\|(U+V)^{-1}-U^{-1}\|\leqslant\|-U^{-1}V+(U^{-1}V)^2-\cdots+(-1)^n(U^{-1}V)^n+ +\cdots\|\;\|U^{-1}\|\leqslant[\|U^{-1}V\|+\|(U^{-1}V)^2\|+\cdots+\|(U^{-1}V)^n\|+ +\cdots]\|U^{-1}\|\leqslant(\|U^{-1}V\|+\|U^{-1}V\|^2+\cdots)\|U^{-1}\|= =\frac{\|U^{-1}V\|\;\|U^{-1}\|}{1-\|U^{-1}V\|}<\frac{\|U^{-1}\|}{1-\|U^{-1}V\|},$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

## § 12. წრფივი ოპერატორის სპექტრი

წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში განვიხილოთ წრფივი $U$ ოპერატორი, რომელიც $E$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში მოქმედებს. ვთქვათ $I(x)$ არის იგივური ოპერატორი და $\lambda$ ნამდვილი ან კომპლექსური პარამეტრია. ავიღოთ განტოლება

$$(U-\lambda I)x=y, \tag{3.66}$$

სადაც $y\in E$ ფიქსირებული ელემენტია. ამ განტოლებას **წრფივი არაერთგვაროვანი ოპერატორული განტოლება** ეწოდება, ხოლო

$$(U-\lambda I)x=\Theta. \tag{3.67}$$

განტოლებას, მისი შესაბამი **ერთგვაროვანი განტოლება**. ვინაიდან $U-\lambda I$ ოპერატორი წრფივია, ამიტომ ერთგვაროვან განტოლებას მუდამ აქვს ე. წ. ტრივიალური $x=\Theta$ ამონახსნი. შებრუნებულ $R_\lambda=(U-\lambda I)^{-1}$ ოპერატორს, როცა იგი არსებობს, ეწოდება (3.66) განტოლების **რეზოლვენტა**. ცხადია, რეზოლვენტის არსებობა დამოკიდებულია $\lambda$ რიცხვის მნიშვნელობებზე. $\lambda$ რიცხვის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც არსებობს $R_\lambda$ რეზოლვენტა ეწოდება (3.66) განტოლების (ანუ $U$ ოპერატორის) რეგულარული მნიშვნელობა (ანუ რეგულარული წერტილი). ისიც ცხადია, რომ $U$ ოპერატორის ყოველი რეგულარული მნიშვნელობისათვის (3.66) განტოლებას აქვს ერთადერთი $x=R_\lambda y$ ამონახსნი, ამასთანავე, $U$ ოპერატორის რეგულარული მნიშვნელობისათვის ერთგვაროვან (3.67) განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

$\lambda$ რიცხვს, რომლისთვისაც ერთგვაროვან (3.67) განტოლებას არატრივიალური ამონახსნი აქვს, ეწოდება $U$ ოპერატორის **საკუთრივი რიცხვი**, ხოლო მის შესაბამის არატრივიალურ ამონახსნს ჰქვია $U$ **ოპერატორის საკუთრივი ელემენტი**. $\lambda$ რიცხვის ყველა იმ მნიშვნელობის სიმრავლეს,

რომლებისთვისაც $U-\lambda I$ ოპერატორი არ არის შებრუნებადი, ეწოდება $U$ ოპერატორის სპექტრი. ოპერატორის სპექტრი შეიცავს ყველა საკუთრივ რიცხვს, თუმცა შესაძლოა სპექტრი შეიცავდეს საკუთრივი რიცხვებიდან განსხვავებულ მნიშვნელობებსაც.

თანახმად 3.45 თეორემისა, როცა $\lambda$ რიცხვი აკმაყოფილებს $|\lambda|>\|U\|$ პირობას, მაშინ $U-\lambda I$ ოპერატორი შებრუნებადია. ვთქვათ $\Delta\lambda$ რიცხვი აკმაყოფილებს $|\Delta\lambda|<\|(U-\lambda I)^{-1}\|$ პირობას, მაშინ 3.46 თეორემის ძალით, $U-(\lambda+\Delta\lambda)I$ ოპერატორი აგრეთვე შებრუნებადი იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\lambda$ რიცხვთან ერთად, $\lambda+\Delta\lambda$ რიცხვი იქნება $U$ ოპერატორის რეგულარული მნიშვნელობა. ამის გამო, $U$ ოპერატორის რეგულარულ რიცხვთა სიმრავლე ღია სიმრავლეა და, ამიტომ სპექტრი, როგორც მისი დამატება, ჩაკეტილი სიმრავლე იქნება.

**თეორემა 3.49.** თუ წრფივი $U$ ოპერატორი, რომელიც წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში, შებრუნებადია, მაშინ ყოველი წრფივი $V$ ოპერატორი, რომელიც $E_1$ სივრციდან მოქმედებს $E_2$ სივრცეში და აკმაყოფილებს პირობას $\|U-V\|<\|U^{-1}\|^{-1}$, აგრეთვე შებრუნებადი იქნება. ამასთანავე, $q$ რიცხვისათვის, რომელიც $\|U-V\|\,\|U^{-1}\|\leqslant q<1$ უტოლობას აკმაყოფილებს, ადგილი აქვს $\|V^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-q}\|U^{-1}\|$ შეფასებას.

ვინაიდან, თეორემის პირობის თანახმად, $U$ ოპერატორი შებრუნებადია, ამიტომ ბანახის თეორემის ძალით (თეორემა 3.34), $U^{-1}$ ოპერატორი წრფივია. გავამრავლოთ $U-V$ სხვაობაზე $U^{-1}$ ოპერატორი, გვექნება

$$U^{-1}(U-V)=I-U^{-1}V.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გამოვიყენებთ უტოლობას $\|U-V\|\,\|U^{-1}\|\leqslant q<1$, მივიღებთ

$$\|U^{-1}(U-V)\|\leqslant\|U^{-1}\|\,\|U-V\|\leqslant q<1. \tag{3.68}$$

შევნიშნოთ, რომ წრფივი $U^{-1}(U-V)$ ოპერატორი მოქმედებს $E_2$ სივრციდან $E_1$ სივრცეში, და, რადგანაც მისი ნორმა აკმაყოფილებს (3.68) პირობას, ამიტომ იგი აკმაყოფილებს 3.46 თეორემის პირობებს. ამის გამო, არსებობს $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული $(U^{-1}V)^{-1}$ ოპერატორი, რომლის ნორმა დააკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\|(U^{-1}V)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-q}. \tag{3.69}$$

ვინაიდან $U^{-1}V$ ოპერატორი შებრუნებადია, ამიტომ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე მთელი $E_1$ სივრცე იქნება. აღვნიშნოთ $V$ ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე $N$-ით. ადვილი შესამჩნევია, რომ $N=E_2$. მართლაც, ვთქვათ რომელიმე ელემენტი $y\in E_2$ და $y\bar{\in} N$. მაშინ, $U^{-1}y$ ელემენტი არ უნდა ეკუთვნოდეს $U^{-1}V$ ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რაც შეუძლებელია.

ცხადია, რომ $(U^{-1}V)^{-1}(U^{-1}V)=I$. ამის გამო, თანახმად 3.35 თეორემისა, გვექნება $(U^{-1}V)^{-1}U^{-1}=V^{-1}$. ამით დამტკიცებულია, რომ $V$ ოპერატორი შებრუნებადია.

ახლა გამოვიყენოთ (3.69) უტოლობა, მივიღებთ დასამტკიცებელ შეფასებასაც:

$$\|V^{-1}\| \leqslant \|(U^{-1}V)^{-1}\| \; \|U^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}\|U^{-1}\|.$$

კერძოდ, თუ $E_1=E_2=E$, $\|U\|<1$, $V=I$, მაშინ $I-U$ ოპერატორი შებრუნებადია. ამასთანავე, თუ $\|U\|\leqslant q<1$, მაშინ $\|(I-U)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განვიხილოთ ორი წრფივი ოპერატორული განტოლება:

$$(I-U_1)x=y, \; (I-U_2)x=y,$$

სადაც $U_1$ და $U_2$ წრფივი ოპერატორებია, რომლებიც წრფივი ნორმირებული $E$ სივრციდან მოქმედებენ ამავე სივრცეში, $x, y \in E$. ვთქვათ, $\|U_1-U_2\|\leqslant\delta$, სადაც $\delta$ რაიმე დადებითი რიცხვია. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ოპერატორი $I-U_1$ შებრუნებადია, $\delta\|(I-U_1)^{-1}\|<1$, მაშინ $I-U_2$ ოპერატორი აგრეთვე შებრუნებადი იქნება. გარდა ამისა, თუ მოცემული $y\in E$ ელემენტისათვის გვაქვს ამონახსნები:

$$x_1=(I-U_1)^{-1}y, \; x_2=(I-U_2)^{-1}y,$$

მაშინ

$$\|x_1-x_2\|\leqslant\delta\|(I-U_1)^{-1}\| \; \|x_1\|.$$

თუკი

$$\delta\|(I-U_2)^{-1}\|\leqslant q\leqslant 1,$$

მაშინ

$$\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{\delta}{1-q}\|x_2\|.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) განვიხილოთ ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება:

$$x(s)-\int_a^b K_1(s, t)x(t)dt=x(s)-U_1(x)=f(s), \tag{3.70}$$

სადაც $x(s)\in C(a, b)$, $K_1(s,t)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა $a\leqslant s$, $t\leqslant b$ კვადრატზე, $f(s)\in C(a, b)$ ფუნქციაც მოცემულია.

გარდა ამ ინტეგრალური განტოლებისა, ავიღოთ მეორე განტოლება:

$$x(s)-\int_a^b K_2(s, t)x(t\; dt=x(s)-U_2(x)=f(s), \tag{3.71}$$

სადაც $K_2(s, t)$ გადაგვარებული გულია. საზოგადოდ, (3.71) განტოლების ამოხსნა უფრო ადვილია, ვიდრე (3.70) განტოლებისა. ვთქვათ, $x_1(t)$ და $x_2(t)$ წარმოადგენენ, შესაბამისად, ამ განტოლების ამონახსნებს. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\max_{a\leqslant s,\, t\leqslant b} |K_1(s, t)-K_2(s, t)|\leqslant\delta,$$

მაშინ $\|U_1-U_2\|\leqslant\delta(b-a)$. თუ $\delta$ რიცხვი საკმარისად მცირეა და

$$I(x)-U_1(x)=x(s)-\int_a^b K_1(s, t)x(t)dt$$

ოპერატორი შებრუნებადია, მაშინ შებრუნებადი იქნება აგრეთვე

$$I(x)-U_2(x)=x(s)-\int_a^b K_2(s,\,t)x(t)dt$$

ოპერატორიც. სხვანაირად, იარსებებს (3.71) განტოლების

$$x_2(t)=(I-U_2)^{-1}f$$

ამონახსნი და $\|x_1(t)-x_2(t)\|$ ცდომილება იქნება საკმარისად მცირე.

2) ვთქვათ, $x=(\xi_i)$, $y=(\eta_i)\in l_2$, $i=1,2,\ldots$ ვიგულისხმოთ, რომ $y$ ელემენტი მოცემულია. განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა უსასრულო სისტემა:

$$\xi_i-\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=\eta_i, \tag{3.72}$$

$\xi_i$ უცნობებით, რომლის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი $(a_{ik})$ მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<\infty$ პირობას. შემოვიღოთ წრფივი $U(x)$ ოპერატორი, რომლის კომპონენტები იყოს $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$, $i=1,2,\ldots.$ ასეთი ოპერატორი მოქმედებს $l_2$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. (3.72) სისტემა შეგვიძლია $U$ ოპერატორის საშუალებით ასე ჩავწეროთ:

$$(I-U)x=y,$$

სადაც $I$ იგივური ოპერატორია. წრფივი $I-U$ ოპერატორისათვის არსებობს შებრუნებული $(I-U)^{-1}$ ოპერატორი. განვსაზღვროთ $l_2$ სივრცის $n$-განზომილებიან $l_2^{(n)}$ ქვესივრცეში წრფივი $U^{(n)}(x)$ ოპერატორი შემდეგნაირად: როცა $i\leqslant n$, მაშინ $U^{(n)}(x)$ ოპერატორის კომპონენტები იყოს $\zeta_i=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$, ხოლო როცა $i>n$, მაშინ $\zeta_i=0$. ცხადია, როცა $n\to\infty$, მაშინ წარმოიქმნება წრფივ ოპერატორთა ისეთი $\{U^{(n)}(x)\}$ მიმდევრობა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\|U^{(n)}-U\|=0$. ამ პირობებში, როგორიც უნდა იყოს $\delta>0$ რიცხვი არსებობს იმდენად დიდი $n$ რიცხვი, რომ შესრულდება უტოლობა $\|U^{(n)}-U\|<\delta$.

ავიღოთ ახლა ისეთი $\delta$ რიცხვი, რომ $\delta\|(I-U)^{-1}\|\leqslant q<1$. მაშინ $I_1-U^{(n)}$ ოპერატორი აგრეთვე შებრუნებადი იქნება, სადაც $I_1$ არის იგივური ოპერატორი $l_2^{(n)}$ სივრცეში. აქ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა თეორემის შენიშვნა, რომელშიც $U_2$ ოპერატორის როლში ავიღოთ ნებისმიერი $U^{(n)}$ ოპერატორი საკმარისად დიდი $n$ ნიშნაკით. ვთქვათ, $x=(I-U)^{-1}y$ და $x_n=(I_1-U^{(n)})^{-1}y$, მაშინ ადგილი ექნება შეფასებას:

$$\|x-x_n\|\leqslant\frac{\delta}{1-q}\|(I-U)^{-1}\|\;\|x\|.$$

---

## თ ა ვ ი IV

# წრფივი ფუნქციონალი

## § 1. წრფივი ფუნქციონალის განსაზღვრა. წინასწარი თეორემები

როგორც ვიცით, როცა ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლის ელემენტები ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ ოპერატორს ფუნქციონალი ეწოდება. ვთქვათ, ფუნქციონალი $f(x)$ განსაზღვრულია წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეზე. ნამდვილ (კომპლექსურ) რიცხვთა $R$ სიმრავლე წრფივი ნორმირებული სივრცეა, რომელშიც ელემენტის ნორმა არის ამ ელემენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ამის გამო $f(x)$ ფუნქციონალი, $x \in E$, არის ისეთი ოპერატორი, რომელიც წრფივი ნორმირებული $E$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $R$ სივრცეში.

სრულიად ისევე, როგორც წრფივი ოპერატორის შემთხვევაში, $f(x)$ ფუნქციონალი წრფივია, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) იგი ადიტიურია, ე. ი. ელემენტების ნებისმიერი $x_1, x_2 \in E$ წყვილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

2) $f(x)$ ფუნქციონალი $E$ სივრცეზე ნორმით უწყვეტია, ე. ი. როცა $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x^*)$, სადაც $x^*\in E$, $x_n\in E\,(n=1,2,\ldots)$.

წრფივი $f(x)$ ფუნქციონალი ნორმით შემოსაზღვრულია $E$ სივრცეზე, თუ არსებობს ისეთი $\mu$ რიცხვი, რომ ყველა $x\in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(x)|\leqslant\mu\|x\|.$$

უმცირეს რიცხვს, რომელიც ამ უტოლობას აკმაყოფილებს ეწოდება $f$ ფუნქციონალის ნორმა და აღინიშნება $\|f\|$ სიმბოლოთი. ამრიგად, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|.$$

ცხადია, წრფივ ფუნქციონალს აქვს ისეთივე თვისებები, როგორიც წრფივ ოპერატორს ჰქონდა. სახელდობრ, ადგილი აქვს თეორემებს:

**თეორემა 4.1.** *წრფივი ფუნქციონალი ერთგვაროვანი ფუნქციონალია.*

**თეორემა 4.2.** *ადიტიური ფუნქციონალი, რომელიც ნორმით უწყვეტია წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ერთ წერტილზე, ნორმით უწყვეტია მთელ $E$ სივრცეზე, ე. ი. წრფივია.*

**თეორემა 4.3.** *იმისათვის რომ წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ადიტიური ფუნქციონალი იყოს წრფივი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ნორმით შემოსაზღვრული $E$ სივრცეზე.*

**თეორემა 4.4.** $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

წ რ ფ ი ვ ი  ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი ს  მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვთქვათ, $x(t)$ არის ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის $C(a, b)$ სივრცეს. ინტეგრალი

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

წარმოადგენს წრფივ ფუნქციონალს, განსაზღვრულს მთელ $C(a, b)$ სივრცეზე. მართლაც, ცხადია, იგი ადიტიური ფუნქციონალია. გარდა ამისა, იგი $C(a, b)$ სივრცეზე ნორმით შემოსაზღვრულიც არის:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|\, |b-a| = |b-a|\, \|x\|.$$

მაშასადამე, $f(x)$ წრფივი ფუნქციონალია.

2) ვთქვათ, ახლა $x(t) \in L_2(a, b)$, მაშინ ინტეგრალი

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

არსებობს და წარმოადგენს წრფივ ფუნქციონალს, განსაზღვრულს $L_2(a, b)$ სივრცეზე.

3) ვთქვათ, $\varphi(t)$ არის $C(a, b)$ სივრცის ფიქსირებული ელემენტი, ხოლო $x(t)$ ამავე სივრცის ნებისმიერი ელემენტია. განვიხილოთ ფუნქციონალი:

$$f(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt \tag{4.1}$$

თუ $x_1(t), x_2(t) \in C(a, b)$, მაშინ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, ე. ი. $f(x)$ ადიტიური ფუნქციონალია. ამასთანავე ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \int_a^b |\varphi(t)|\,dt = \|x\| \int_a^b |\varphi(t)|\,dt,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (4.1) ფუნქციონალი ნორმით შემოსაზღვრულია $C(a, b)$ სივრცეზე. ამის გამო, $f(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია (4.1) ტოლობით, არის წრფივი. ამასთანავე $\|f\| = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$.

4) ავიღოთ ფიქსირებული $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2$ ელემენტი და ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ ელემენტი. განვიხილოთ ფუნქციონალი:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

ამ ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციონალს აზრი აქვს მთელ $l_2$ სივრცეზე, რადგანაც

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|\,\|y\|.$$

ამავე უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ნორმით შემოსაზღვრული ფუნქციონალია და, ვინაიდან $f(x)$ ადიტიურიც არის, ამიტომ იგი წრფივი ფუნქციონალია $l_2$ სივრცეზე. გარდა ამისა, როცა $x=y$, მაშინ წინა უტოლობა გადადის ტოლობაში და, ამიტომ $\|f\|=\|y\|$.

დავამტკიცოთ შემდეგი ორი მარტივი თეორემა.

**თეორემა 4.5.** თუ $f(x)$ არის წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, მაშინ ყველა იმ $x\in E$ ელემენტის $\overline{L}$ სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $f(x)=0$ განტოლებას, არის $E$ სივრცის ქვესივრცე.

მართლაც, ვინაიდან $f(x)$ ფუნქციონალი ადიტიური და ერთგვაროვანია, ამიტომ ნებისმიერი $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\in\overline{L}$ ელემენტებისათვის და ნებისმიერი $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ რიცხვებისათვის გვექნება

$$f(\alpha^{(1)} x^{(1)}+\alpha^{(2)}x^{(2)}+\cdots+\alpha^{(n)}x^{(n)})=\alpha^{(1)}f(x^{(1)})+\alpha^{(2)}f(x^{(2)})+\cdots+$$
$$+\alpha^{(n)}f(x^{(n)})=0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფივი კომბინაცია $\alpha^{(1)}x^{(1)}+\alpha^{(2)}x^{(2)}+\cdots+\alpha^{(n)}x^{(n)}\in\overline{L}$.

ახლა ვთქვათ, $\{x_n\}\subset\overline{L}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $x^*\in E$ ელემენტისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ $x^*\in\overline{L}$. მართლაც, რადგანაც $f(x)$ ნორმით უწყვეტი ფუნქციონალია, ამიტომ $f(x^*)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. მაშასადამე, $x^*\in\overline{L}$ და თეორემა დამტკიცებულია.

ავიღოთ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცე და მისი $\overline{L}$ ქვესივრცე. თუ $E$ სივრცეში არსებობს წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების ისეთი $x_1, x_2, \ldots, x_r\overline{\in}\,\overline{L}$ მიმდევრობა, რომ ყოველი $x\in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$x=\sum_{i=1}^{r}\beta_i x_i+y, \tag{4.2}$$

სადაც $y\in\overline{L}$, მაშინ $r$ რიცხვს ეწოდება $\overline{L}$ ქვესივრცის ინდექსი. ამასთანავე იგულისხმება, რომ წარმოდგენა (4.2) შეუძლებელია $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ელემენტებზე ნაკლები რაოდენობის ელემენტებით.

**თეორემა 4.5.** თუ $\overline{L}$ არის ყველა იმ $x\in E$ ელემენტის ქვესივრცე, რომლებიც აკმაყოფილებს $f(x)=0$ განტოლებას, სადაც $f(x)\not\equiv 0$ არის წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, მაშინ $\overline{L}$ ქვესივრცის ინდექსი უდრის ერთს.

თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ არსებობს ერთადერთი ისეთი $x_1\in E$, $x_1\overline{\in}\,\overline{L}$ ელემენტი, რომ ყოველი $x\in E$ ელემენტი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$x=\beta_1 x_1+y, \tag{4.3}$$

სადაც $y\in\overline{L}$. შევარჩიოთ $\beta_1$ რიცხვი და $y$ ელემენტი შემდეგნაირად; $\beta_1=\dfrac{f(x)}{f(x_1)}$, სადაც $f(x_1)\neq 0$, $y=x-\dfrac{f(x)}{f(x_1)}x_1$. აქედან გვექნება $x=\dfrac{f(x)}{f(x_1)}x_1+y$,

სადაც $f(y)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_1)}f(x_1)$, ე. ი. $y\in\bar{L}$. დარჩა დასამტკიცებელი, რომ ფიქსირებული $x_1$ ელემენტისათვის (4.3) წარმოდგენა ერთადერთია. მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს მეორე $y'$ ელემენტი, რომლისთვისაც აგრეთვე ადგილი აქვს ტოლობას: $x=\beta_1'x_1+y'$. მაშინ გვექნება

$$(\beta_1-\beta_1')x_1=y'-y.$$

თუ $\beta=\beta_1$, მაშინ $y=y$; თუ კი $\beta_1\neq\beta_2$, მაშინ $x_1=\frac{1}{\beta_1-\beta_1'}(y'-y)\in\bar{L}$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. ამრიგად (4.3) წარმოდგენა არის ცალსახა და თეორემა დამტკიცებულია.

## § 2. წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელება

წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელების ამოცანა სრულიად ისევე ისმება, როგორც წრფივი ოპერატორისათვის. ისიც ცხადია, რომ წრფივი ფუნქციონალისათვის სამართლიანია 3.40, 3.42 თეორემები, რომლებიც დამტკიცებული იყო წინა თავში. იგულისხმება, რომ ხსენებულ თეორემებში $E_2$ სივრცის როლს, წრფივი ფუნქციონალის შემთხვევაში, შეასრულებს ნამდვილ რიცხვთა $R$ სივრცე. აქ ჩვენ დავამტკიცებთ ისეთ დებულებებს, რომლებსაც ადგილი აქვს მხოლოდ წრფივი ფუნქციონალისათვის.

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $\bar{L}$ ამ სივრცის ქვესივრცე. ვთქვათ, წრფივ $\bar{L}$ ქვესივრცეზე განსაზღვრულია წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომლის ნორმა $\bar{L}$ სიმრავლეზე იყოს $\|l\|_{\bar{L}}=\sup\limits_{\|x\|=1}|l(x)|$. იტყვიან, რომ წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $E$ სივრცეზე, არის $l(x)$ ფუნქციონალის გაგრძელება $\bar{L}$ ქვესივრციდან $E$ სივრცემდე, თუ $\bar{L}$ ქვესივრცის ყველა $x$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს $l(x)=F(x)$ ტოლობას.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც წარმოადგენს $l(x)$ ფუნქციონალის გაგრძელებას $\bar{L}$ ქვესივრციდან მთელ $E$ სივრცემდე?

ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს ჰანისა და ბანახის შემდეგი

**თეორემა 4.6.** *თუ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის $\bar{L}$ ქვესივრცეზე განსაზღვრულია წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, მაშინ არსებობს მთელ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

1) $F(x)=l(x)$, *როცა* $x\in L$, 2) $\|F\|_E=\|l\|_{\bar{L}}$.

ეს თეორემა გამომდინარეობს 3.41 თეორემიდან.

ჰანისა და ბანახის თეორემიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგები. მოვიყვანოთ ეს შედეგები.

**თეორემა 4.7.** *თუ, $x_0$ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ნებისმიერი ფიქსირებული ელემენტია, მაშინ არსებობს $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომ*

$$1)\ \|l\|=1,\qquad 2)\ l(x_0)=\|x_0\|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $\overline{L}$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებს აქვს $tx_0$ სახე, სადაც $t$ იცვლება მთელ რიცხვით წრფეზე. ცხადია, $\overline{L}$ არის $E$ სივრცის ქვესივრცე. განვსაზღვროთ $\overline{L}$ ქვესივრცეზე $\varphi(x)$ ფუნქციონალი შემდეგნაირად:

$$\varphi(x)=\varphi(tx_0)=t\|x_0\|.$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული $\varphi(x)$ ფუნქციონალი არის წრფივი $\overline{L}$ ქვესივრცეზე. გარდა ამისა, $\varphi(x)$ ფუნქციონალს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\alpha)\ \varphi(x_0)=\|x_0\|,\ \beta)\ |\varphi(x)|=|\varphi(tx_0)|=\|t\|\ \|x_0\|=\|tx_0\|.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\|\varphi\|=1$.

თანახმად 4.6 თეორემისა, არსებობს $\varphi(x)$ ფუნქციონალის წრფივი $l(x)$ გაგრძელება, $\overline{L}$ ქვესივრციდან მთელ $E$ სივრცემდე, რომელსაც ექნება 1) და 2) თვისებები.

ზოგჯერ 4.7 თეორემას შემდეგი სახითაც გამოსთქვამენ: თუ $x_0$ წ რ ფ ი ვ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $E$ ს ი ვ რ ც ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ფ ი ქ ს ი რ ე ბ უ ლ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ა, რ ო მ ე ლ ი ც ს ი ვ რ ც ი ს ნ უ ლ ო ვ ა ნ ე ლ ე მ ე ნ ტ ს ა რ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი წ რ ფ ი ვ ი $\overline{l}(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი, რ ო მ

$$1')\ \|\overline{l}\|=\frac{1}{\|x_0\|},\ 2')\ \overline{l}(x_0)=1.$$

ამ წინადადების დასამტკიცებლად საკმარისია ავიღოთ

$$\overline{l}(x)=\frac{1}{\|x_0\|}l(x),$$

ფუნქციონალი, სადაც $l(x)$ ის ფუნქციონალია, რომელიც მონაწილეობდა თეორემის დამტკიცებაში.

დამტკიცებული 4.7 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ წრფივ ნორმირებულ სივრცეში არსებობს წრფივი ფუნქციონალი, რომელიც იგივურად ნულის ტოლი არ არის მთელ სივრცეში. გარდა ამისა, თუ ნებისმიერი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალისათვის ადგილი აქვს $l(x)=0$ ტოლობას, $x\in E$, მაშინ $x=\Theta$, სადაც $\Theta\in E$ ნულოვანი ელემენტია. შემდეგ, თუ ნებისმიერი წრფივი $l$ ფუნქციონალისათვის ადგილი აქვს $l(x_1)=l(x_2)$ ტოლობას, სადაც $x_1, x_2\in E$, მაშინ $x_1=x_2$.

გავეცნოთ კიდევ ასეთ შედეგსაც: თუ ნებისმიერი წრფივი $l$ ფუნქციონალისათვის, $\|l\|=1$, ადგილი აქვს $|l(x_0)|\leqslant K$ უტოლობას, სადაც $K$ რიცხვი დამოუკიდებელია $l$ ფუნქციონალისაგან, მაშინ $\|x_0\|\leqslant K$.

4.7 თეორემას გარკვეული გეომეტრიული შინაარსიც აქვს. ვთქვათ, $l(x)$ ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალია, რომელიც განსაზღვრულია წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში. ყველა იმ $x\in E$ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც დააკმაყოფილებს $l(x)=c$ განტოლებას, სადაც $c$ მუდმივია, ვუწოდოთ სიბრტყე. ეს სიბრტყე $E$ სივრცეს ორ მარჯვენა და მარცხენა—ნაწილებად გაყოფს. ეს ნაწილები დახასიათებულია უტოლობებით: $l(x)\geqslant c$ და $l(x)\leqslant c$. კერძოდ, თუ $E$ სივრცის ყველა ელემენტისათვის $l(x)\geqslant c$ (ან $l(x)\leqslant c$), მაშინ $l(x)=c$ სიბრტყეს ეწოდება $E$ სივრცის ს ა ყ რ დ ე ნ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე. სრულიად ანალოგიურად განსაზღვრავენ საყრდენ სიბრტყის $E$ სივრცის რაიმე სიმრავ-

ლისთვისაც. სახელდობრ, თუ $E$ სივრცის რაიმე $M$ სიმრავლის ყველა $x$ წერტილისათვის $l(x)\geqslant c$ (ან $l(x)\leqslant c$), მაშინ ვიტყვით, რომ $M$ სიმრავლე მოთავსებულია $l(x)=c$ სიბრტყის მარჯვენა (მარცხენა) მხარეზე.

ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ჩაკეტილი $\overline{S}_r\subset E$ სფეროს ზედაპირის ნებისმიერი $x_0\in\overline{S}_r$ წერტილში არსებობს $\overline{S}_r$ სფეროს საყრდენი სიბრტყე. მართლაც, ნებისმიერი $x\in\overline{S}_r$ ელემენტისათვის გვაქვს $l(x)\leqslant\|l\|\,\|x\|\leqslant r$ და $l(x_0)=\|x_0\|=r$.

თეორემა 4.8. *ვთქვათ, $L$ არის წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის წრფივი მრავალნაირობა და $x_0\overline{\in} L$— ფიქსირებული ელემენტი $E$ სივრცისა. თუ $d=\inf\limits_{x\in I}\|x-x_0\|>0$, მაშინ არსებობს ისეთი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $E$ სივრცეზე და აქვს შემდეგი თვისებები:*

1) $F(x)=0$, ყველა $x\in L$,
2) $F(x_0)=1$,
3) $\|F(x)\|=\dfrac{1}{d}$.

*დამტკიცება.* განვიხილოთ $E$ სივრცის ყველა იმ $y$ ელემენტის $L_1=L+x_0$ სიმრავლე, რომლებიც წარმოდგენილია შემდეგი წრფივი კომბინაციის სახით: $y=x+tx_0$, სადაც $x\in L$, $-\infty<t<\infty$. ცხადია, რომ $L_1$ სიმრავლე წარმოადგენს $E$ სივრცის წრფივ მრავალნაირობას. დავამტკიცოთ, რომ $L_1$ მრავალნაირობის ყოველი $y$ ელემენტის $y=x+tx_0$ წარმოდგენა არის ცალსახა. მართლაც, ვთქვათ $y\in L_1$ ელემენტი შესაძლოა წარმოვიდგინოთ ორი სხვადასხვა სახით: $y=x_1+t_1x_0$, $y=x_2+t_2x_0$, სადაც $t_1\neq t_2$ და $x_1$, $x_2\in L$. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ დავუშვებთ $t_1=t_2$, მაშინ წარმოდგენის ცალსახობა უკვე დამტკიცებული იქნება. ჩვენი დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ $x_1-x_2=(t_1-t_2)x_0$, საიდანაც გამომდინარეობს

$$x_0=\frac{1}{t_1-t_2}(x_1-x_2),$$

ე. ი. $x_0\in L$. ეს დასკვნა კი ეწინააღმდეგება $x_0\overline{\in} L$ პირობას. ჩვენ ვხედავთ, რომ $t$ რიცხვი და $x\in L$ ელემენტი ცალსახად განსაზღვრავს $y=x+tx_0\in L_1$ ელემენტს. განვსაზღვროთ ახლა $L_1$ მრავალსახეობაზე $l(x)$ ფუნქციონალი შემდეგნაირად: $l$ ფუნქციონალის მნიშვნელობა $y=x+tx_0$ ელემენტზე იყოს $t$, ე. ი. $l(y)=t$. ცხადია, როცა $y=x$, მაშინ $t=0$ და, ნებისმიერი $x\in L$ ელემენტისათვის გვექნება $l(x)=0$. როცა $y=x_0$, მაშინ $x=\Theta$ და $t_1=1$, ამიტომ $l(x_0)=1$.

დავამტკიცოთ, რომ ჩვენ მიერ აგებული $l(y)$ ფუნქციონალის ნორმა განისაზღვრება $\|l\|=\dfrac{1}{d}$ ტოლობით. მართლაც, გვაქვს

$$|l(y)|=|t|=\frac{|t|\,\|y\|}{\|y\|}=\frac{|t|\,\|y\|}{\|x+tx_0\|}=\frac{y}{\left\|x_0-\left(-\dfrac{x}{t}\right)\right\|};$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\left\|x_0-\left(-\frac{x}{t}\right)\right\|\geqslant d,$$

ამიტომ

$$|l(y)|\leqslant\frac{\|y\|}{d},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\|l\|\leqslant\frac{1}{d}.$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ $\|l\|\geqslant\frac{1}{d}$. ვინაიდან $L\subset E$ წრფივი მრავალნაირობაა, ამიტომ არსებობს $L$ სიმრავლის ელემენტთა ისეთი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=d. \tag{4.4}$$

ამასთანავე, $l$ ფუნქციონალის ადიტიურობის გამო, გვაქვს

$$|l(x_n-x_0)|=|l(x_n)-l(x_0)|=1$$

და, ვინაიდან

$$|l(x_n-x_0)|\leqslant\|l\|\,\|x_n-x_0\|,$$

ამიტომ

$$\|l\|\,\|x_n-x_0\|\geqslant 1,$$

საიდანაც, ზღვარზე გადასვლის შემდეგ, (4.4) ტოლობის დახმარებით, მივიღებთ

$$\|l\|\geqslant\frac{1}{d}. \tag{4.5}$$

ახლა (4.2) და (4.5) უტოლობებიდან ნათელია, რომ $\|l\|=\frac{1}{d}$.

ამრიგად, აგებულია ისეთი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის 1)—3) პირობებს $L_1$ წრფივ მრავალნაირობაზე. ჰანისა და ბანახის თეორემის თანახმად, შეგვიძლია $l(x)$ ფუნქციონალი გავაგრძელოთ ნორმის შეუცვლელად $L_1$ მრავალნაირობიდან მთელ $E$ სივრცემდე. გაგრძელების შედეგად მივიღებთ $F(x)$ ფუნქციონალს, რომელსაც ექნება თეორემაში მოთხოვნილი ყველა თვისება.

ზოგჯერ უმჯობესია 4.8 თეორემა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით: *ვთქვათ, $L$ არის წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის წრფივი მრავალნაირობა და $x_0\overline{\in}L$ არის $E$ სივრცის ფიქსირებული ელემენტი, რომლის მანძილი $L$ მრავალნაირობამდე უდრის $d=\inf_{x\in L}\|x-x_0\|>0$. მაშინ არსებობს ისეთი $\widetilde{F}(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $E$ სივრცეზე და აქვს შემდეგი თვისებები:*

$$1)\ \widetilde{F}(x)=0,\ \text{ყველა}\ \ x\in L,\quad 2)\ \|\widetilde{F}\|=1,\quad 3)\ \widetilde{F}(x_0)=d.$$

იმისათვის, რომ უკანასკნელი წინადადება დავამტკიცოთ, საკმარისია 4.8 თეორემაში ნაცვლად $F(x)$ ფუნქციონალისა ავიღოთ $\widetilde{F}(x)=F(x)\cdot d$ ფუნქციონალი.

**თეორემა 4.9.** *თუ მოცემულია წრფივი $L\subset E$ მრავალნაირობა და წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის $x_0$ ელემენტი, მაშინ*

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ არსებობდეს $L$ მრავალნაირობის ელემენტთა წრფივი კომბინაციების ისეთი $\{q_n\}\subset L$ მიმდევრობა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\|q_n-x_0\|=0$ მდგომარეობს იმაში, რომ ნებისმიერი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალისათვის, რომელიც ნულის ტოლია $L$ მრავალნაირობაზე, ადგილი ჰქონდეს $l(x_0)=0$ ტოლობას.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა, ვთქვათ, $x_0\in\overline{L}$, სადაც $\overline{L}$ არის $L$ მრავალნაირობის ჩაკეტვა. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $L$ სიმრავლის ელემენტების წრფივი კომბინაციების ისეთი $\{g_n\}$ მიმდევრობა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-x_0\|=0$. ვთქვათ, $l$ არის ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალი, რომელიც ნებისმიერ $x\in L$ ელემენტზე უდრის ნულს: $l(x)=0$. მაშინ ცხადია, რომ $l(g_n)=0$ და, მაშასადამე, $l(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} l(g_n)=0$.

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად, დავუშვათ საწინააღმდეგო: $x_0\,\overline{\in}\,\overline{L}$. მაშინ 4.8 თეორემის თანახმად, უნდა არსებობდეს ისეთი წრფივი $l(x)=\widetilde{F}(x_0)$ ფუნქციონალი, რომ $\widetilde{F}(x)=0$ ყველა $X\in\overline{L}$ ელემენტისათვის და $\widetilde{F}(x_0)=d=\rho(x_0,\overline{L})>0$, რაც ეწინააღმდეგება $l(x_0)=\widetilde{F}(x_0)=0$ პირობას.

დამტკიცებული თეორემა გვაძლევს აუცილებელსა და საკმარის პირობას ნორმირებული $E$ სივრცის მოცემული $x_0$ ელემენტის აპროქსიმირებისა ამავე სივრცის მოცემული სხვა ელემენტების წრფივი კომბინაციებით.

დავამტკიცოთ ახლა ფ. რისისა და ე. ჰელის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.10. ვთქვათ, $\Omega$ არის $E$ სივრცეში მოთავსებული რაიმე სიმრავლე და $f(x)$ ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული რაიმე ფუნქციონალია. იმისათვის, რომ არსებობდეს მთელ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $f(x)=F(x)$, როცა $x\in\Omega$,

2) $\|F(x)\|\leqslant M$,

სადაც $M>0$ მოცემული რიცხვია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\Omega$ სიმრავლის ელემენტთა ყოველი სასრული $x_1, x_2,\ldots, x_r$ მიმდევრობისათვის და ნამდვილ რიცხვთა ყოველი სასრული $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_r$ მიმდევრობისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(x_i)\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|. \tag{4.6}$$

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ არსებობს $E$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს 1) და 2) პირობებს. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ შესრულებული იქნება (4.6) უტოლობა. მართლაც, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left|F\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\right|\leqslant\|F\|\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|,$$

საიდანაც, თანახმად 2) პირობისა, გვექნება

$$\left|F\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right)\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|$$

და რაკი $F$ ადიტიური ფუნქციონალია, ამიტომ

$$\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i F(x_i)\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|.$$

შემდეგ, რადგანაც ყველა $x_i\in\Omega$, ამიტომ, თანახმად, 1) პირობისა, $F(x_i)=$ $=f(x_i)$, $i=1,2,\ldots,r$. უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ (4.5) უტოლობას.

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად უნდა დავუშვათ, რომ შესრულებულია (4.6) უტოლობა და ვუჩვენოთ, რომ არსებობს მთელ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც დააკმაყოფილებს 1) და 2) პირობებს. ავაგოთ წრფივი $L\subset E$ მრავალნაირობა, რომლის $y$ ელემენტები არის $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ სახის წრფივი კომბინაციები, სადაც $r$ ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, $\alpha_i$ ნებისმიერი რიცხვებია, ხოლო $x_i\in\Omega$ არის ნებისმიერი ელემენტები. $L$ მრავალნაირობაზე განვსაზღვროთ შემდეგი სახის ფუნქციონალი:

$$l(y)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(x_i).$$

შევნიშნოთ, რომ $l(y)$ ფუნქციონალი განსაზღვრულია ცალსახად. მართლაც, თუ

$$y=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i' x_i',$$

მაშინ, თანახმად (4.5) პირობისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(x_i)-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i' f(x_i')\right|\leqslant M\left(\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{s}\alpha_i' x_i'\right\|\right)\leqslant$$

$$\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i' x_i'\right\|=0.$$

გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი $y_1$, $y_2\in L$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $l(y_1+y_2)=l(y_1)+l(y_2)$. ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $l(y)$ ნორმით შემოსაზღვრული ფუნქციონალია. მართლაც. თანახმად (4.5) პირობისა, გვექნება

$$|l(y)|=\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(x_i)\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|.$$

ამრიგად, $l(y)$ არის წრფივი ფუნქციონალი $L$ მრავალნაირობაზე. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\|l\|_L \leqslant M$. ჰანისა და ბანახის თეორემის თანახმად, არსებობს $E$ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: 1) $F(x)=l(x)$, როცა $x \in L$, 2) $\|F\|_E=\|l\|_L \leqslant M$ და თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი

შ ე დ ე გ ი. სახელდობრ, ვთქვათ, $\Omega$ სიმრავლე წარმოადგენს $E$ სივრცის ელემენტების თვლად $\{x_n\}$ სისტემას და $\mu_n=f(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, მაშინ წინა თეორემა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

**თეორემა 4.11.** ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ $E$ ს ი ვ რ ც ე შ ი ა რ ს ე ბ ო ბ დ ე ს ი ს ე თ ი წ რ ფ ი ვ ი $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო ც ე მ უ ლ ი $M>0$ რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს, ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ს მ ო ც ე მ უ ლ ი $\{x_n\} \subset E$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს და ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა მ ო ც ე მ უ ლ ი $\{\mu_n\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს, ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ დ ე ს პ ი რ ო ბ ე ბ ს:

1) $F(x_n)=\mu_n$, $n=1,2,\ldots$, 2) $\|F\|_E \leqslant M$,

ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი და ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა, რ ო მ ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა ყ ო ვ ე ლ ი ს ა ს რ უ ლ ი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს შ ე ს რ უ ლ ე ბ უ ლ ი ი ყ ო ს პ ი რ ო ბ ა

$$\left|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\right\|.$$

ქ ვ ე მ ო თ ა მ თ ე ო რ ე მ ა ს გ ა მ ო ვ ი ყ ე ნ ე ბ თ ე. წ. მ ო მ ე ნ ტ თ ა პ რ ო ბ ლ ე მ ი ს შ ე ს წ ა ვ ლ ა შ ი.

## § 3. წრფივი კომპლექსური ფუნქციონალის გაგრძელება

განვიხილოთ აბსტრაქტული $Z$ სიმრავლე ისეთი $z$ ელემენტებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

I. $Z$ სიმრავლის $z$ ელემენტებისათვის განსაზღვრულია შეკრებისა და კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები, ამასთანავე ისე, რომ

$\alpha$) თუ $z_1, z_2 \in Z$, მაშინ $z_1+z_2 \in Z$.

$\beta$) თუ $z \in Z$, მაშინ ნებისმიერი კომპლექსური $\lambda$ რიცხვისათვის $\lambda z \in Z$.

შეკრებისა და კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების $\alpha$) და $\beta$) ოპერაციებს ახასიათებს ასოციატიურობისა, კომუტატიურობისა, შეკრებისა და გამრავლების დისტრიბუტიულობის თვისებები.

II. $Z$ სიმრავლეში განსაზღვრულია ნამდვილი $\|z\|$ ფუნქცია—ნორმა $z$ ელემენტისა, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

$\alpha'$) $\|z\|>0$ და $\|z\|=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $z=\Theta_z$, სადაც $\Theta_z$ არის $Z$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი,

$\beta'$) $\|\lambda z\|=|\lambda|\, \|z\|$,

$\gamma'$) $\|z_1+z_2\| \leqslant \|z_1\|+\|z_2\|$.

III. $Z$ სიმრავლე სრულია.

$Z$ სიმრავლეს, რომლის ელემენტები აკმაყოფილებენ I, II, III პირობებს, უწოდებენ ს რ უ ლ კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ წ რ ფ ი ვ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ს ი ვ რ ც ე ს.

ქვემოთ $Z$ სიმრავლეს მოკლედ ვუწოდებთ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ კ ო მ პ-

ლექსურ სივრცეს. ვინაიდან ნორმირებული კომპლექსური სივრცის ელემენტებისათვის შესრულებულია წრფივი ნორმირებული სივრცის ყველა აქსიომა, ამიტომ $Z$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბანახის ტიპის სივრცე.

ვთქვათ, $M\subset Z$ რაიმე სიმრავლეა. თუ $M$ სიმრავლის ყოველ $z$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ გარკვეული კომპლექსური $f(z)$ რიცხვი, მაშინ იტყვიან, რომ $M$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია კომპლექსური $f(z)$ ფუნქციონალი. კომპლექსური $f(z)$ ფუნქციონალი შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს ისეთი, $N>0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $z\in M$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს $|f(z)|<N$ უტოლობას.

$l(z)$ ფუნქციონალს, რომელიც განსაზღვრულია ნორმირებულ კომპლექსურ $Z$ სივრცეზე, წრფივი ფუნქციონალი ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $l(z_1+z_2)=l(z_1)+l(z_2)$, $z_1,z_2\in Z$.

2) ნებისმიერი კომპლექსური $\lambda$ რიცხვისათვის $l(\lambda z)=\lambda l(z)$, სადაც $z\in Z$ ნებისმიერი ელემენტია.

3) $l(z)$ უწყვეტი ფუნქციონალია $Z$ სივრცის ნულოვან $\Theta_z$ ელემენტზე.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $l(z)$ ფუნქციონალი, რომელიც 1)—3) პირობებს აკმაყოფილებს, უწყვეტია მთელ ნორმირებულ კომპლექსურ $Z$ სივრცეზე და ყველა $z\in Z$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$|l(z)|\leqslant K\|z\|, \tag{4.7}$$

სადაც $K$ გარკვეული რიცხვია. უმცირეს $K$ რიცხვს, რომელიც (4.7) პირობას აკმაყოფილებს ეწოდება $l(z)$ ფუნქციონალის ნორმა და აღინიშნება ჩვეულებრივი $\|l\|$ სიმბოლოთი. კომპლექსური წრფივი ფუნქციონალის ნორმა გამოითვლება ფორმულით:

$$\|l\| = \sup_{\|z\|=1}|l(z)|$$

**თეორემა 4.12.** *თუ $Z$ ნორმირებული კომპლექსური სივრცე და $l(z)$—კომპლექსური წრფივი ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია $\overline{L}\subset Z$ ქვესივრცეზე, მაშინ არსებობს წრფივი კომპლექსური $F(z)$ ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $Z$ სივრცეზე და აკმაყოფილებს პირობებს:*

$$F(z)=l(z), \qquad \text{როცა } z\in\overline{L}, \quad \|F\|_Z=\|l\|_{\overline{L}}$$

*დამტკიცება.* განვიხილოთ $\overline{L}$ ქვესივრცეზე განსაზღვრული ნამდვილი ფუნქციონალი:

$$\varphi(z)=Rel(z), \qquad z\in\overline{L}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\varphi(z)$ წრფივი ფუნქციონალია. მართლაც, ვთქვათ, $z_1, z_2\in\overline{L}$ ნებისმიერი ელემენტებია, მაშინ $\varphi(z_1+z_2)=Rel(z_1)+Rel(z_2)=\varphi(z_1)+\varphi(z_2)$. როგორც ჩანს $\varphi(z)$ არის ადიტიური ფუნქციონალი $\overline{L}$ ქვესივრცეზე. გარდა ამისა, ნებისმიერი $z\in\overline{L}$ ელემენტისათვის გვაქვს

$$|\varphi(z)|=|Rel(z)|\leqslant|l(z)|\leqslant\|l\|\ \|z\|.$$

ამრიგად, $\varphi(z)$ ნამდვილი ფუნქციონალი წრფივია $\overline{L}$ ქვესივრცეზე, ამასთანავე როგორც უკანასკნელი უტოლობიდან ჩანს, $\varphi(z)$ და $l(z)$ ფუნქციონალთა ნორმები $\|\varphi\|$ და $\|l\|$ ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან უტოლობით:

$$\|\varphi\| \leqslant \|l\|. \tag{4.8}$$

განვიხილოთ ახლა $\overline{L}$ ქვესივრცე და $Z$ სივრცე, როგორც ნამდვილი სივრცეები. მაშინ ჰანისა და ბანახის თეორემის თანახმად, ნამდვილი $\varphi(z)$ ფუნქციონალი შეგვიძლია $\overline{L}$ ქვესივრციდან გავაგრძელოთ მთელ $Z$ სივრცემდე ნორმის შეუცვლელად. ვთქვათ, რომ ეს გაგრძელება არის $f(z)$, $z \in Z$. ავაგოთ შემდეგი ფუნქციონალი:

$$F(z) = f(z) - if(iz)$$

და დავამტკიცოთ, რომ $F(z)$ არის წრფივი ფუნქციონალი მთელ $Z$ სივრცეზე, $F(z) = l(z)$, როცა $z \in \overline{L}$ და $\|F\|_Z = \|l\|_{\overline{L}}$, ამით ჩვენი თეორემაც დამტკიცებული იქნება. ცხადია, $F(z)$ ადიტიური ფუნქციონალია, ვინაიდან ადიტიურია $f(z)$. გარდა ამისა, გვაქვს

$$|F(z)| \leqslant |f(z)| + |if(iz)| \leqslant \|f\|(\|z\| + \|iz\|) = 2\|f\|\,\|z\| = 2\|\varphi\|\,\|z\|.$$

თანახმად (4.8) უტოლობისა, აქედან მივიღებთ

$$|F(z)| \leqslant 2\|l\|\,\|z\|.$$

ამრიგად, $F(z)$ ადიტიური და ნორმით შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, იგი წრფივია მთელ $Z$ სივრცეზე. ახლა დავრწმუნდეთ, რომ $\|F\| = \|l\|$. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ისეთი $z_0 \in Z$ ელემენტი, რომ $\|z_0\| = 1$, $\|F\| \leqslant |F(z_0)| + \varepsilon$ და $F$ ორთოგონალური არ იყოს $z_0$ წერტილისა. მაშინ $z_1 = z_0 \operatorname{sign} F(z_0)$ ელემენტის ნორმა

$\|z_1\| = \|z_0 \operatorname{sign} F(z_0)\| = 1$ და $F(z_1) = F(z_0 \operatorname{sign} F(z_0)) = \operatorname{sign} F(z_0) F(z_0) = |\operatorname{sign} F(z_0)|^2\,|F(z_0)| = |F(z_0)|$ იქნება ნამდვილი რიცხვი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\varphi(z) = Re F(z)$ და, ამიტომ $\varphi(z_1) = F(z_1)$. ამასთანავე $\varphi(z_1) \leqslant \|\varphi\|\,\|z_1\| = \|\varphi\|$ (ვინაიდან $\|z_1\| = 1$).

ამრიგად, $F(z) \leqslant \|\varphi\|$, ანუ $|F(z_0)| \leqslant \|\varphi\| + \varepsilon$, ე. ი. $\|F_1\| \leqslant \|\varphi\| + 2\varepsilon$. ვინაიდან $\varepsilon$ ნებისმიერია და ადგილი აქვს (4.8) შეფასებას, ამიტომ $\|F\|_Z = \|l\|_{\overline{L}}$.

დარჩა დავამტკიცოთ, რომ როცა $z \in \overline{L}$, მაშინ $F(z) = l(z)$. ვთქვათ, $l(z) = \alpha + i\beta$, მაშინ $l(iz) = il(z) = -\beta + i\alpha$. ამის გამო $Re\,l(iz) = -\beta = \varphi(iz)$. გარდა ამისა, $\alpha = Re\,l(z) = \varphi(z)$. ამრიგად,

$$l(z) = \varphi(z) - i\varphi(iz)$$

და, მართლაც, $F(z) = l(z)$, როცა $z \in \overline{L}$.

## § 4. შეუღლებული სივრცე

განვიხილოთ ყველა იმ ფუნქციონალთა $\overline{E}$ სიმრავლე, რომლებიც წრფივია ნორმირებულ $E$ სივრცეზე. $\overline{E}$ სიმრავლის ელემენტებისათვის (წრფივი ფუნქციონალებისათვის) შეგვიძლია შემოვიღოთ შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები. თუ $l_1, l_2 \in \overline{E}$ ნებისმიერი ფუნქციონალებია, რომლებიც წრფივი არიან $E$ სივრცეზე, მაშინ მათი ჯამი ვუწოდოთ ისეთ $l$ ფუნქ-

ციონალს, რომელიც ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის განსაზღვრულია ტოლობით: $l(x)=l_1(x)+l_2(x)$. ცხადია, ამ ტოლობით განსაზღვრული $l$ ფუნქციონალი წრფივია მთელ $E$ სივრცეზე და, მაშასადამე, $l \in \overline{E}$. რაიმე $\alpha$ რიცხვისა და $l_1 \in \overline{E}$ ფუნქციონალის $l^*=\alpha l_1$ ნამრავლი განვსაზღვროთ $l^*(x)=\alpha l_1(x)$ ტოლობით, სადაც $x \in E$ ნებისმიერი ელემენტია. ასე განსაზღვრული $l^*$ ფუნქციონალი წრფივია მთელ $E$ სივრცეზე და, ამიტომ ეკუთვნის $\overline{E}$ სიმრავლეს. ყოველი წრფივი $l \in \overline{E}$ ფუნქციონალის ნორმა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\|l\| \geqslant 0$ და $\|l\|=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l(x)=0$;

2) $$\|l_1+l_2\| = \sup \frac{|l_1(x)+l_2(x)|}{\|x\|} \leqslant \sup \frac{|l_1(x)+l_2(x)|}{\|x\|} \leqslant \sup \frac{|l_1(x)|}{\|x\|} + \sup \frac{|l_2(x)|}{\|x\|} = \|l_1\| + \|l_2\|;$$

3) ნებისმიერი $\alpha$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $l \in \overline{E}$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\|\alpha l\|=|\alpha|\,\|l\|$.

ნათქვამიდან ვხედავთ, რომ $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ ყველა წრფივი ფუნქციონალის $\overline{E}$ სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ ნორმირებულ სივრცეს. $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ ყველა წრფივი ფუნქციონალების $\overline{E}$ სივრცეს, ეწოდება $E$ სივრცის *შეუღლებული სივრცე*.

**თეორემა 4.13.** *შეუღლებული $\overline{E}$ სივრცე სრული სივრცეა.*

ავიღოთ წრფივი ფუნქციონალების ნებისმიერი ფუნდამენტალური $\{l_n\} \subset \overline{E}$ მიმდევრობა და დავამტკიცოთ, რომ იგი ნორმით კრებადია $\overline{E}$ სივრცის გარკვეული $l$ ელემენტისაკენ. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ როცა $m, n > N$, მაშინ

$$\|l_m - l_n\| < \varepsilon.$$

ამ პირობებში, ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის, რიცხვთა $\{l_n(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია. მართლაც, გვაქვს

$$|l_m(x) - l_n(x)| = |(l_m - l_n)x| \leqslant \|l_m - l_n\|\ \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

აღვნიშნოთ $\{l_n(x)\}$ მიმდევრობის ზღვარი $l(x)$-ით:

$$\lim_{n \to \infty} l_n(x) = l(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ $l(x)$ წრფივი ფუნქციონალია $E$ სივრცეზე. ვთქვათ, $x, y \in E$ ნებისმიერი ელემენტებია. მაშინ

$$l(x+y) = \lim_{n \to \infty} l_n(x+y) = \lim_{n \to \infty} l_n(x) + \lim_{n \to \infty} l_n(y) = l(x) + l(y).$$

$l(x)$ ფუნქციონალი ნორმით შემოსაზღვრულია. მართლაც ავიღოთ ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $p$ რიცხვისათვის, როცა $n > N$ შესრულდეს უტოლობა

$$\|l_{n+p}\| \leqslant \|l_n\| + 1.$$

მაშინ, ნებისმიერი $x$ ელემენტისათვის, ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობასაც:

$$|l_{n+p}(x)| \leqslant \|l_{n+p}\|\ \|x\| \leqslant (\|l_n\| + 1)\|x\|,$$

საიდანაც, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $p\to\infty$, მივიღებთ

$$\lim_{p\to\infty}|l_{n+p}(x)|=|l(x)|\leqslant(\|l_n\|+1)\|x\|.$$

ამრიგად, $l(x)$ წრფივი ფუნქციონალია $E$ სივრცეზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციონალთა $\{l_n\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია წრფივი $l$ ფუნქციონალისაკენ. გავიხსენოთ, რომ

$$\|l-l_n\|=\sup\frac{|l(x)-l_n(x)|}{\|x\|}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $x_\varepsilon\in E$ ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება შეფასებას

$$\|l-l_n\|\leqslant\frac{|l(x_\varepsilon)-l_n(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

ვინაიდან $l_n$ და $l$ ფუნქციონალები წრფივია (და, მაშასადამე, ერთგვაროვანი), ამიტომ წინა უტოლობას შეგვიძლია ასეთი სახე მივცეთ

$$\|l-l_n\|\leqslant\left|l\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)-l_n\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

ზემოთ ვნახეთ, რომ რიცხვთა $\left\{l_n\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)\right\}$ მიმდევრობა კრებადია $l\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)$ რიცხვისაკენ. ამის გამო, დაწყებული საკმარისად დიდი $n_0$ ნიშნაკიდან, ყოველი $n>n_0$ მნიშვნელობისათვის, გვექნება

$$\left|l\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)-l_n\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ახლა კი ცხადია, რომ როცა $n<n_0$, მაშინ $\|l-l_n\|<\varepsilon$. თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც ზემოთ ვნახეთ წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალთა სიმრავლე წარმოადგენს ბანახის ტიპის სრულ $\overline{E}$ სივრცეს. სრულიად ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ $\overline{E}$ სივრცის შეუღლებული სივრცე $\overline{\overline{E}}$ და ა. შ. $\overline{\overline{E}}$ სივრცეს ეწოდება $E$ სივრცის მეორე შეუღლებული სივრცე. $\overline{\overline{E}}$ სივრცე წარმოადგენს ყველა იმ წრფივი ფუნქციონალის სიმრავლეს, რომლებიც განსაზღვრულია $\overline{E}$ სივრცეზე, სადაც $\overline{E}$, როგორც ვიცით, არის $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ყველა წრფივი ფუნქციონალის ნორმირებული სივრცე. განვიხილოთ წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, სადაც $x\in E$ და $l\in\overline{E}$. როცა $l$ ელემენტი ფიქსირებულია და იცვლება $x$ ელემენტი $E$ სივრცეზე, მაშინ $l(x)$ წარმოადგენს $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს, რომლის ნორმა არის $\|l\|$. პირიქით, როცა ფიქსირებულია $x$ ელემენტი და იცვლება $l$ ელემენტი შეუღლებულ $\overline{E}$ სივრცეზე, მაშინ ჩვენ მივიღებთ $\overline{E}$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს, რომელიც აღვნიშნოთ $x(l)$ სიმბოლოთი. ადვილი შესამჩნევია, რომ $x(l)$ ფუნქციონალის ნორმა უდრის $\|x\|$. მართლაც, ერთის მხრივ, გვაქვს

$$|x(l)|\leqslant\|x\|\,\|l\|,$$

ხოლო მეორეს მხრივ, როცა $x \in E$ ელემენტი მოცემულია, მაშინ ჰანისა და ბანახის თეორემის შედეგების ძალით, არსებობს ისეთი $l \in \overline{E}$ ელემენტი, რომ

$$|x(l)| = \|x\| \; \|l\|$$

და, მაშასადამე, $x(l)$ ფუნქციონალის ნორმა უდრის $\|x\|$. $l(x)$ და $x(l)$ ფუნქციონალების ზემოთ მოყვანილი ურთიერთობის გამო, ვექტორულ ალგებრაში მიღებული თერმინოლოგიის ანალოგიურად, $l(x) = x(l) = (l, x)$ გამოსახულებას შეგვიძლია $l$ და $x$ ელემენტების (ვექტორების) სკალარული ნამრავლი ვუწოდოთ. სკალარული $(l, x)$ ნამრავლი წრფივად არის დამოკიდებული როგორც $x$, ისე $l$ ელემენტისაგან. ამრიგად, $(l, x)$ ფაქტიურად წარმოადგენს ორადწრფივ ფუნქციონალს, რომლის ზოგად განსაზღვრას ქვემოთ გავეცნობით.

იმ შემთხვევაში, როცა $E = \overline{\overline{E}}$, მაშინ $E$ სივრცეს თვითშეუღლებული სივრცე ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როცა $E = \overline{\overline{E}}$, მაშინ $E$ სივრცეს რეფლექსური სივრცე ეწოდება. ცხადია, როცა $E$ რეფლექსური სივრცეა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$E = \overline{\overline{E}} = \overline{\overline{\overline{\overline{E}}}} = \cdots$$

$$\overline{E} = \overline{\overline{\overline{E}}} = \cdots$$

ა. პლესნერმა დაამტკიცა, რომ ყოველი წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცე ან რეფლექსურია, ანდა $E, \overline{E}, \overline{\overline{E}}, \overline{\overline{\overline{E}}}, \ldots$ სივრცეთა მიმდევრობის ყველა სივრცეები სხვადასხვანი არიან.

**ორადწრფივი ფუნქციონალის განსაზღვრა.** ვთქვათ, $E_1$ და $E_2$ წრფივი ნორმირებული სივრცეებია. განვიხილოთ $\varphi(x, y)$ ფუნქციონალი, სადაც $x \in E_1$ და $y \in E_2$ ნებისმიერი ელემენტებია. $\varphi(x, y)$ ფუნქციონალს ორადწრფივი ფუნქციონალი ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $\alpha)$ $\varphi(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, y) = \xi_1 \varphi(x_1, y) + \xi_2 \varphi(x_2, y)$; $\beta)$ $\varphi(x, \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2) = \overline{\eta}_1 \varphi(x, y_1) + \overline{\eta}_2 \varphi(x, y_2)$, $\gamma)$ $\sup\limits_{\|x\|, \|y\| \leqslant 1} |\varphi(x, y)| < \infty$, სადაც $x_1, x_2 \in E_1$, $y_1, y_2 \in E_2$ ნებისმიერი ელემენტებია, ხოლო $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$—ნებისმიერი რიცხვები. გამოსახულებას $\sup\limits_{\|x\|, \|y\| \leqslant 1} |\varphi(x, y)|$ ეწოდება $\varphi(x, y)$ ორადწრფივი ფუნქციონალის ნორმა და აღინიშნება $\|\varphi\|$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ როცა $x$ ფიქსირებულია, მაშინ $\varphi(x, y)$ წრფივი ფუნქციონალია $y$ ელემენტის მიმართ და პირიქით.

მაგალითები 1) $\psi(x, y) = (x, y)$ სკალარული ნამრავლი ორადწრფივი ფუნქციონალია, ამასთანავე $x \in E$ და $y \in \overline{E}$. ასე, მაგალითად, თუ

$$x(t) \in L_p(0,1), \; y(t) \in L_q(0,1), \; p^{-1} + q^{-1} = 1, \text{ მაშინ}$$

$$(x, y) = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

როცა $p = q = 2$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს სკალარული ნამრავლის გამოსახულებას ჰილბერტის ფუნქციონალურ $L_2(0,1)$ სივრცეში.

2) ვთქვათ, $K(s, t)$ არის, $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ კვადრატზე უწყვეტი ფუნქცია და $x(t)$, $y(t) \in C(0,1)$, მაშინ

$$\varphi(x, y)=\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, y(s) dt\, ds$$

იქნება ორადწრფივი ფუნქციონალი.

## § 5. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე ზოგიერთ სივრცეში

წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე, ამა თუ იმ წრფივ ნორმირებულ სივრცეში, ეწოდება ამ სივრცის ნებისმიერ ელემენტზე დამოკიდებულ ანალიზურ გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს ისეთ პარამეტრებს, რომელთა ყოველი კერძო მნიშვნელობისათვის მიიღება, აღებულ სივრცეში განსაზღვრული, წრფივი ფუნქციონალი. ამასთანავე ყველა ფუნქციონალი, რომლებიც ამ გზით მიიღება, ამოსწურავს მოცემულ სივრცეზე განსაზღვრულ ყველა შესაძლო წრფივ ფუნქციონალთა სიმრავლეს.

**1. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $s$ სივრცეში.** ნორმირებული წრფივი $s$ სივრცე, როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა ყველა კრებადი მიმდევრობის სივრცეა. ვთქვათ, $l(x)$ არის $s$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. ავიღოთ $s$ სივრცის ელემენტების ისეთი $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა, რომ $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$, $x_k^{(k)}=1$ და $x_n^{(k)}=0$, როცა $n \neq k$, $n, k= =1,2, \ldots$

ვთქვათ, $x=(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ არის $s$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. ცხადია, რომ $x$ ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე

$$x=\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i x^{(i)}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i x^{(i)}.$$

პირობის თანახმად $l(x)$ ფუნქციონალი წრფივია და, მაშასადამე, ნორმით უწყვეტია მთელ $s$ სივრცეზე. ამის გამო ადგილი ექნება ტოლობას

$$l(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i l(x^{(i)})=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \tag{4.10}$$

სადაც $a_i=l(x^{(i)})$, $i=1, 2, \ldots$ ვინაიდან $l(x)$ განსაზღვრულია მთელ $s$ სივრცეზე და, მაშასადამე, ყოველ $x \in s$ წერტილში აქვს სასრული მნიშვნელობა, ამიტომ (4.10) მწკრივი კრებადია ნებისმიერი $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ელემენტისათვის. ეს კი შესაძლებელია მაშინ, როცა დაწყებული $i$ ნიშნაკის რაღაც $i=N$ მნიშვნელობიდან ყველა $a_i=0$ და (4.10) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$l(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i x_i. \tag{4.11}$$

პირიქით, როგორიც უნდა იყოს ნამდვილი $a_k$ რიცხვები და ნატურალური $N$ რიცხვი, (4.11) გამოსახულება წარმოადგენს წრფივ ფუნქციონალს $s$ სივრცეში. ამით დამტკიცებულია, რომ (4.11) გამოსახავს წრფივი ფუნქციონალის ზოგად სახეს $s$ სივრცეში.

2. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $l_p (p \geqslant 1)$ სივრცეში. ავიღოთ ნორმირებული ელემენტების $\{x^{(k)}\} \subset l_p$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$, $x_i^{(k)} = 0$, როცა $i \neq k$, ხოლო $x_i^{(i)} = 1$. ვთქვათ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \subset l_p$ ნებისმიერი ელემენტია. ავაგოთ ახალი $\{y^{(n)}\} \subset l_p$ მიმდევრობა, სადაც

$$y^{(n)} = x - \sum_{i=1}^{n} x_i x^{(i)}.$$

შევნიშნოთ,

$$y^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

ვინაიდან $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, ამიტომ $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p = 0$. ამის გამო $\{\|y_n\|\}$ მიმდევრობა ნულისაკენ არის კრებადი:

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n\| = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\sum_{i=1}^{\infty} x_i x^{(i)}$ მწკრივი ნორმით კრებადია $x$ ელემენტისაკენ

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i x^{(i)}.$$

ვთქვათ, $l(x)$ არის $l_p$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. მაშინ მისი ადიტიურობისა და უწყვეტობის გამო, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i l(x^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \tag{4.12}$$

სადაც $a_i = l(x^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots$

მოვძებნოთ ახლა აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს კოეფიციენტების $\{a_i\}$ მიმდევრობა, რომ (4.12) მწკრივი მუდამ გამოსახავდეს $l_p$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

**თეორემა 4.14.** იმისათვის, რომ (4.12) იყოს $l_1$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი აუცილებელი და საკმარისია, რომ კოეფიციენტთა $\{a_i\}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული, ე. ი. $y = \{a_i\}$ მიმდევრობა იყოს $m$ სივრცის ელემენტი. ამასთანავე $\|l\| = \sup_i |a_i| = \|y\|_m$.

დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ამისათვის დავუშვათ, რომ (4.12) არის $l_1$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. დავამტკიცოთ, რომ ელემენტი $y = \{a_i\} \in m$ და $\|l\| = \|y\|_m$. ცხადია,

$$\|x^{(k)}\| = 1, \; k = 1, 2, \ldots .$$

გარდა ამისა,

$$|a_i|=|l(x^{(1)})|\leqslant\|l\|\ \|x^{(i)}\|=\|l\|.$$

მაშასადამე, ელემენტი $y=(a_1,\ a_2,\dots,\ a_n,\dots)\in m$. შემდეგ, თუ გავიხსენებთ ელემენტის ნორმის გამოსახულებას წრფივ ნორმირებულ $m$ სივრცეში, გვექნება

$$\|y\|_m=\rho(y,\ \Theta_m)=\sup_i|a_i|\leqslant\|l\|, \tag{4.13}$$

ე. ი.

$$\|l\|=\|y\|_m.$$

პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $y\in m$. დავრწმუნდეთ, რომ (4.12) გამოსახავს წრფივ ფუნქციონალს და $\|l\|=\|y\|_m$. ვინაიდან $x=(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\dots)\subset l_1$, ამიტომ მწკრივი $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty$. გარდა ამისა, ვინაიდან $\|y\|_m=\sup\limits_i|a_i|$, ამიტომ $|a_i|\leqslant\|y\|_m$. ამის შემდეგ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_i||x_i|\leqslant\sup_i|a_i|\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=\|y\|_m\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (4.12) მწკრივი კრებადია, ამასთანავე

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right|\leqslant\|y\|_m\|x\|. \tag{4.14}$$

ამ უტოლობიდან ჩანს, რომ $l(x)$ ფუნქციონალი ნორმით შემოსაზღვრულია და რადგანაც $l(x)$ ადიტიურია, ამიტომ იგი წრფივი ფუნქციონალი იქნება. (4.14) უტოლობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ $\|l\|\leqslant\|y\|_m$ და თუ ამ უკანასკნელ უტოლობას შევადარებთ (4.13), მივიღებთ $\|l\|=\|y\|_m$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, რომ $l_1$ სივრცის შეუღლებული $\overline{l}_1$ სივრცე არის $m$ სივრცე:

**თეორემა 4.15.** იმისათვის, რომ (4.12) იყოს წრფივი ფუნქციონალი $l_p(p>1)$ სივრცეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $y=\{a_i\}$ მიმდევრობა იყოს $l_q$ სივრცის ელემენტი, სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$, ამასთანავე $\|l\|=\|y\|_q$.

პირობის აუცილებლობაში გვარწმუნებს შემდეგი მსჯელობა. ვთქვათ, $l(x)$, რომელიც განსაზღვრულია (4.12) ტოლობით, არის $l_p$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. ვუჩვენოთ, რომ მაშინ რიცხვთა $y=\{a_i\}$ მიმდევრობა, სადაც $a_i=l(x^{(i)})$, განსაზღვრავს $l_q$ სივრცის ელემენტს (იგულისხმება, რომ $p^{-1}+q^{-1}=1$). ავიღოთ $\overline{x}=(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\dots)$ ელემენტი, სადაც

$$\overline{x}_i=\begin{cases}|a_i|^{\frac{q}{p}}\operatorname{sign}a_i, & \text{როცა } i\leqslant n,\\ 0 & ,\ \text{როცა } i>n,\end{cases}$$

და $n$ ნებისმიერად ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\overline{x}\in l_p$. მართლაც, გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\overline{x_i}|^p=\sum_{i=1}^{n}|\overline{x_i}|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\overline{x_i}|^p=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q<\infty.$$

ამ პირობებში $l$ ფუნქციონალის მნიშვნელობა $\overline{x}$ ელემენტზე, როგორც ეს (4.12) ჩანს, იქნება

$$l(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}a_i|a_i|^{\frac{q}{p}}\operatorname{sign}a_i=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q.$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\|\overline{x}\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right\}^{\frac{1}{p}},$$

ამიტომ

$$|l(\overline{x})|\leqslant\|l\|\,\|\overline{x}\|=\|l\|\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right\}^{\frac{1}{p}},$$

ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\leqslant\|l\|\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\|l\|,$$

ანუ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|l\|.$$

გავიხსენოთ, რომ ნატურალური $n$ რიცხვი ნებისმიერად იყო ფიქსირებული, ამიტომ წინა უტოლობა შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგი უტოლობით:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|l\|, \tag{4.15}$$

და, მაშასადამე, $y\in l_q$.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $y\in l_q$. ვუჩვენოთ, რომ $l(x)$, განსაზღვრული (4.12) ტოლობით, წრფივი ფუნქციონალია. ცხადია, $l(x)$ არის ადიტიური ფუნქციონალი. იგი, ამავე დროს, ნორმით შე-

მოსაზღვრულიც არის. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ჰელდერის უტოლობას, გვექნება

$$|l(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right|\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=\|x\|_p\|y\|_q.$$

ამრიგად, $l(x)$ წრფივი ფუნქციონალია მთელ $l_p$ სივრცეზე. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\|l\|\leqslant\|y\|_q;$$

თუ ამ უტოლობას შევადარებთ (4.15) უტოლობასთან, მივიღებთ $\|l\|=$ $=\|y\|q$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ე ბ ი. 1. დამტკიცებული თეორემიდან ვხედავთ, რომ როცა $p>1$, მაშინ $\overline{l_p}=l_q$ და $\overline{\overline{l_p}}=\overline{l_q}=l_p$, ე. ი. $l_p$ რეფლექსური სივრცეა.

2. კერძოდ, როცა $p=q=2$, მაშინ საქმე გვექნება ჰილბერტის კოორდინატულ $l_2$ სივრცესთან და, ვინაიდან $\overline{l_2}=l_2$, ამიტომ $l_2$ არის თვითშეუღლებული სივრცე.

3. ევკლიდეს $n$ განზომილებიან $R_n$ სივრცეში ყოველი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, სადაც $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R_n$, ასე წარმოიდგინება

$$l(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,$$

სადაც $a_1, \ldots, a_n$ ნებისმიერი რიცხვებია. ამასთანავე $l(x)$ ფუნქციონალის ნორმა შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\|l\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right\}^{1/2}.$$

**3. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $c$ სივრცეში.** განვიხილოთ $c$ სივრცის ელემენტების $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა: $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},\ldots, x_n^{(k)},\ldots)$, $k=1, 2,\ldots,$ სადაც

$$x_n^{(k)}=\begin{cases}1, & \text{როცა } n=k,\\ 0, & \text{როცა } n\neq k.\end{cases}$$

ცხადია, რომ ნებისმიერად ფიქსირებული $k$ ნიშნაკისათვის $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$. ამიტომ, ელემენტები $x^{(k)}\in c$. ავიღოთ აგრეთვე $x'=(1, \ldots, 1, \ldots)=(x_i^{(i)})\in c$ ელემენტი. ვთქვათ, $l(x)$ არის $c$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, სადაც $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\in c$ ნებისმიერი ელემენტია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $l(x^{(k)})=c_k$. $l(x')=c'$ $\alpha=\lim x_n$, $a=c'-\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$, სადაც $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$ როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, აბსოლუტურად კრებადი მწკრივია.

**თ ე ო რ ე მ ა 4.16.** *$c$ სივრცეში განსაზღვრულ ყოველ წრფივ $l(x)$ ფუნქციონალს აქვს შემდეგი სახე:*

$$l(x)=a\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}c_kx_k,$$

ამასთანავე

$$\|l\| = |a| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|.$$

თეორემის დასამტკიცებლად ავაგოთ $\{y_n\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$y_n = x - \alpha x' - \sum_{k=1}^{n} (x_k - \alpha) x^k.$$

ვინაიდან $x$, $x'$, $x^{(k)} \in c$, ამიტომ $y_n \in c$ და მაშასადამე, მიმდევრობა $\{y_n\} \in c$. გარდა ამისა, გვაქვს

$$y_n = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1} - \alpha, x_{n+2} - \alpha \ldots,),$$

საიდანაც

$$\|y_n\| = \sup_{i \geqslant n+1} |x_i - \alpha|.$$

ვინაიდან $\alpha$, ჩვენი აღნიშვნების მიხედვით, არის $x_1, x_2, \ldots$ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი, ამიტომ $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n\| = 0$. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \alpha x' - \sum_{k=1}^{n} (x_k - \alpha) x^{(k)} \right\| = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x = \alpha x' + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \alpha) x^{(k)}.$$

იმის გამო, რომ $l$ წრფივი ფუნქციონალია მთელ $s$ სივრცეზე, ამიტომ ნებისმიერი $x \in c$ ელემენტისათვის, გვექნება

$$l(x) = \alpha l(x') + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \alpha) l(x^{(k)}) = \alpha c' + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \alpha) c_k. \tag{4.16}$$

ამ ტოლობაში $c'$ და $c_k$ კოეფიციენტებს აქვს გარკვეული თვისებები, რომელთა შესწავლა საშუალებას მოგვცემს დავაბოლოვოთ თეორემის დამტკიცება. ამ თვისებების შესწავლისათვის ავიღოთ ნებისმიერად ფიქსირებული ნატურალური $r$ რიცხვი და $z = \{z_k\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$z_k = \begin{cases} \operatorname{sign} c_k, & \text{როცა } k \leqslant r, \\ 0, & \text{როცა } k > r. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = 0$, $z \in c$, $\|z\| = 1$; თუ დავწერთ (4.16) ტოლობას $z$ ელემენტისათვის, მივიღებთ

$$l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$$

და, ვინაიდან $l(z) \leqslant \|l\| \, \|z\| = \|l\|$, ამიტომ $\sum\limits_{k=1}^{r} |c_k| \leqslant \|l\|$. ახლა ისიც გამოვიყენოთ, რომ $r$ ნებისმიერი რიცხვია, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leqslant \|l\|.$$

ამრიგად მწკრივი, რომლის წევრებია $c_n$ რიცხვები, აბსოლუტურად კრებადია. თუ გამოვიყენებთ $a$ რიცხვის განსაზღვრას, (4.16) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$l(x)=a\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}c_kx_k. \tag{4.17}$$

ავილოთ ახლა $\overline{z}=(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n, \ldots)$ მიმდევრობა, სადაც

$$\overline{z}_k=\begin{cases}\operatorname{sign} c_k, & \text{როცა } k\leqslant r,\\ \operatorname{sign} a, & \text{როცა } k>r.\end{cases}$$

ცხადია, $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{z}_k=\operatorname{sign} a=\alpha$ $\overline{z}\in c$, $\|\overline{z}\|=1$ და, ამიტომ გვექნება

$$l(\overline{z})=a\operatorname{sign} a+\sum_{k=1}^{r}c_k\operatorname{sign} c_k+\sum_{k=r+1}^{\infty}c_k\operatorname{sign} a=|a|+\sum_{k=1}^{r}|c_k|+$$

$$+\sum_{k=r+1}^{\infty}c_k\operatorname{sign} a\leqslant\|l\|.$$

აქედან $r$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, ერთის მხრივ გვექნება

$$|a|+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\leqslant\|l\|, \tag{4.18}$$

მეორეს მხრივ ადგილი აქვს შეფასებას

$$l(\overline{z})\leqslant\left(|a|+\sum_{k=1}c_k|\right)\|\overline{z}\|.$$

ამიტომ

$$\|l\|\leqslant|a|+\sum_{k=1}^{\infty}C_k|.$$

უკანასკნელის შედარება (4.18) უტოლობასთან მოგვცემს

$$\|l\|=|a|+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|.$$

(4.17) ფორმულა ამ უკანასკნელ ტოლობასთან ერთად ამტკიცებს ჩვენ თეორემას.

**4. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $C(0,1)$ სივრცეში.** წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე უწყვეტ ფუნქციათა ნორმირებულ $C(0,1)$ სივრცეში მოძებნილი იყო ფ. რისის მიერ. სახელდობრ, ფ. რისის მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

**თეორემა 4.17.** *$C(0,1)$ სივრცეში განსაზღვრული ყოველი წრფივი ფუნქციონალი გამოისახება სტილტიესის ინტეგრალით:*

$$l(x)=\int_0^1 x(t)dg(t), \tag{4.19}$$

*სადაც $g(t)$ არის $l$ ფუნქციონალით განსაზღვრული ფუნქცია*

შემოსაზღვრული ცვლილებით და მისი სრული ცვლილება [0,1] სეგმენტზე უდრის $\|l\|$.

გავიხსენოთ [0,1] სეგმენტზე შემოსაზღვრულ და ზომად ფუნქციათა $M$ სივრცე. ცხადია, $M$ სივრცეს, კერძოდ, ეკუთვნის [0,1] სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი $x(t)$ ფუნქცია, ვინაიდან $x(t)$ ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულიც იქნება და ზომადიც. გარდა ამისა, უწყვეტი ფუნქციის ნორმა, $M$ სივრცის აზრით, ემთხვევა ამავე ფუნქციის ნორმას, $C(0,1)$ სივრცის აზრით. მართლაც, $x(t)$ უწყვეტი ფუნქციის ნორმა $M$ სივრცეში არის:

$$\|x\|_M = \inf_{\text{mes}\,\sigma=0} \sup_{t\in[0,1]-\sigma} |x(t)| = \max_{t=[0,1]} |x(t)| = \|x\|_C.$$

ამის გამო უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც [0,1] სეგმენტზე ყველა შემოსაზღვრული და ზომადი ფუნქციების $M=M(0,1)$ სივრცის ქვესივრცე. თუ $l(x)$ არის $C(0,1)$ სივრცეში განსაზღვრული ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალი, მაშინ ჰანისა და ბანახის თეორემის ძალით, არსებობს მთელ $M(0,1)$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $F(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $F(x)=l(x)$, როცა $x\in C(0,1)$,
2) $\|F\|_M=\|l\|_C$.

განვიხილოთ ახლა [0,1] სეგმენტზე შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირად არის განსაზღვრული:

$$y_t=y_t(\xi)=\begin{cases}1, & \text{როცა } 0\leqslant\xi\leqslant t,\\ 0, & \text{როცა } t<\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

და აღვნიშნოთ

$$F(y_t)=g(t).$$

დავამტკიცოთ, რომ $g(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით. ამისათვის, დავყოთ (0,1] სეგმენტი: $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ წერტილებით და აღვნიშნოთ $\varepsilon_i=\text{sign}[g(t_i)-g(t_{i-1})]$, $i=1,2,\ldots,n$, მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}[g(t_i)-g(t_{i-1})]\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[F(\xi_{t_i})-F(\xi_{t_{i-1}})] =$$

$$=F\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}})].$$

ვინაიდან

$$\|F\|_M=\|l\|_C \quad \text{და} \quad \left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}})\right\|=1,$$

ამიტომ წინა ტოლობიდან გვექნება:

$$\operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)\leqslant\|F\|_M=\|l\|_C. \tag{4.20}$$

ამის შემდეგ ნებისმიერი უწყვეტი $x(t)\in C(0,1)$ ფუნქციის საშუალებით ავაგოთ ასეთი ფუნქცია:

$$z_n=z_n(\xi)=\sum_{r=1}^{n}x\left(\frac{r}{n}\right)\left[y_{\frac{r}{n}}(\xi)-y_{\frac{r-1}{n}}(\xi)\right]. \tag{4.21}$$

$\chi_n(\xi)$ ფუნქცია, $\frac{r-1}{n} < \xi \leqslant \frac{r}{n}$ შუალედში, მიიღებს $x\left(\frac{r}{n}\right)$ მნიშვნელობას, ე. ი. $\chi_n(\xi)$ არის კიბური ფუნქცია, რომელიც აპროქსიმირებას ახდენს $x(t)$ ფუნქციისა. ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\chi_n\|=0$ და $F$ ფუნქციონალი უწყვეტია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$l(x)=F(x)=\lim_{n\to\infty} F(\chi_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[g\left(\frac{r}{n}\right)-g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right].$$

ვინაიდან $x(t)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $g(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, ამიტომ

$$l(x)=\lim_{n\to\infty} F(\chi_n)=\int_0^1 x(t)dg(t),$$

ამასთანავე

$$|l(x)|=\left|\int_0^1 x(t)dg(t)\right|\leqslant \operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|=\operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)\|x\|,$$

ე. ი.

$$\|l\|\leqslant \operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t),$$

საიდანაც, (4.20) უტოლობასთან ერთად, მივიღებთ

$$\|l\|=\operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t).$$

პირიქით, თუ $g_1(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებებით, მაშინ სტილტიესის ინტეგრალი

$$l(x)=\int_0^1 x(t)dg_1(t)$$

წარმოადგენს $C(0,1)$ სივრცეში განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს. თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $g(t)$ არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $[0,1]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში ინტეგრალი (4.19) წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალს. მართლაც, ვთქვათ, $\mu=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|g'(t)|$ და $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ არის $[0,1]$ სეგმენტის ნებისმიერი დაყოფა, მაშინ ლაგრანჟის ფორმულის ძალით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$g(t_{i+1})-g(t_i)=g'(\tau_i)(t_{i+1}-t),\ t_i\leqslant\tau_i\leqslant t_{i+1},\ i=0,1,\ldots,n-1$$

და, თუ შევაჯამებთ ყველა ასეთი სახის სხვაობების აბსოლუტურ მნიშვნელობებს, გვექნება

$$\sum_{i=0}^{n-1}|g(t_{i+1})-g(t_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}|g'(\tau_i)|(t_{i+1}-t_i)\leqslant\mu\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)=\mu(b-a).$$

ამრიგად, $g(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით. ახლა შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)[g(t_{i+1})-g(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)g'(\tau_i)(t_{i+1}-t_i),$$

საიდანაც, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$\int_0^1 x(t)dg(t)=\int_0^1 x(t)g'(t)dt.$$

და ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

**5. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $L_p$ სივრცეში, სადაც $p\geqslant 1$.**

ვთქვათ, $l(x)$ არის $L_p$ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. ავაგოთ ფუნქცია

$$y_t=y_t(\xi)=\begin{cases}1, & \text{როცა } 0\leqslant\xi\leqslant t,\\ 0, & \text{როცა } t<\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$l(y_t)=g(t).$$

დავამტკიცოთ, რომ $g(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა $[0,1]$ სეგმენტზე. მართლაც, ვთქვათ, $\delta_1,\ldots,\delta_n$ არის $[0,1]$ სეგმენტის ინტერვალების ნებისმიერი მიმდევრობა, რომლებიც წყვილ-წყვილად ერთმანეთს არა ჰფარავენ და რომელთა ბოლო წერტილებია შესაბამისად $t_i$ და $t_i'$, სადაც $t_i<t_i'$, $i=1,2,\ldots,n$. ვთქვათ, გარდა ამისა,

$$\varepsilon_i=\operatorname{sign}[g(t_i')-g(t_i)], \text{ მაშინ}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i')-g(t_i)| = \sum_{i=1}^{n}[g(t_i')-g(t_i)]\varepsilon_i=l\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\,\varepsilon_i\right)\leqslant$$

$$\leqslant\|l\|\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\,\varepsilon_i\right\|.$$

$\delta_i$ ინტერვალზე $(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\varepsilon_i$ ფუნქცია ღებულობს $\varepsilon_i=\pm 1$ მნიშვნელობებს და ყველა სხვა ინტერვალზე კი ნულის ტოლია. გარდა ამისა, ვინაიდან $\delta_i$ სეგმენტები წყვილ-წყვილად ერთმანეთს არა ფარავენ, ამიტომ

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\varepsilon_i\right\|=\left(\sum_{i=0}^{n}|\delta_i|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

სადაც $|\delta_i|$ აღნიშნავს $\delta_i$ ინტერვალის სიგრძეს, და (4.22) უტოლობიდან გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i')-g(t_i)|\leqslant\|l\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|\right)^{\frac{1}{p}},$$

რაც ამტკიცებს $g(t)$ ფუნქციის აბსოლუტურ უწყვეტობას.

როგორც ცნობილია, აბსოლუტურად უწყვეტ $g(t)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $[0,1]$ სეგმენტზე მას თითქმის ყველგან აქვს ჯამებადი $\alpha(t)=g'(t)$ წარმოებული.

2) $g(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს თავისი წარმოებულის ლებეგის ინტეგრალს:

$$g(t)=g(0)+\int_0^t \alpha(\tau)d\tau.$$

შევნიშნოთ, რომ $y_0(\xi)=\Theta_p$, სადაც $\Theta_p$ არის $L_p$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი და, მაშასადამე, მივიღებთ

$$g(t)=\int_0^t \alpha(\tau)d\tau.$$

თანახმად $g(t)$ ფუნქციის განსაზღვრისა, გვექნება

$$g(t)=l(y_t)=\int_0^1 y_t(\tau)\alpha(\tau)d\tau. \tag{4.23}$$

ვთქვათ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ნებისმიერი რიცხვებია და $x(t)$ კიბური ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $x(t)=C_i$ ტოლობებით, როცა $t_{i-1}\leqslant t<t_i$, $i=1, 2,\ldots, n$. მაშინ იგი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$x(t)=\sum_{i=1}^n c_i(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}).$$

წრფივი $l$ ფუნქციონალი, (4.23) ტოლობის ძალით, ნებისმიერი $x(t)$ კიბური ფუნქციისათვის შემდეგნაირად წარმოგვიდგება

$$l(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt. \tag{4.24}$$

თუ $x=x(t)$ არის რაიმე ზომადი და შემოსაზღვრული ფუნქცია, მაშინ როგორც ცნობილია, არსებობს თანაბრად შემოსაზღვრულ კიბურ ფუნქციათა $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა, რომელიც $[0,1]$ სეგმენტზე თითქმის ყველგან $p$—ხარისხით კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p dt=0,$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

თანახმად (4.24) ტოლობისა, გვექნება

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

ამრიგად, (4.24) ტოლობა სამართლიანი ყოფილა ყოველი ზომადი შემოსაზღვრული $x(t)$ ფუნქციისათვისაც.

ამის შემდეგ განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა $p>1$. ვთქვათ, $x_n(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$x_n(t)=\begin{cases}|\alpha(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\alpha(t), & \text{როცა } |\alpha(t)|^{q-1}\leqslant n,\\ n^{q-1}\operatorname{sign}\alpha(t), & \text{როცა } |\alpha(t)|^{q-1}>n,\end{cases}$$

სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$. ცხადია, $x_n(t)$ არის შემოსაზღვრული და ზომადი ფუნქცია. გვაქვს

$$|l(x_n)|=\left|\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)dt\right|\leqslant \|l\|\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}=\|l\|\;\|x_n\|.$$

გარდა ამისა, $x_n(t)$ ფუნქციის განსაზღვრის ძალით, ადგილი აქვს შეფასებას

$$|l(x_n)|\geqslant l(x_n)=\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 |x_n(t)|\,|\alpha(t)|dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1 |x_n(t)|\;|x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}dt=\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}dt=\int_0^1 |x_n(t)|^p dt.$$

აქედან და წინა შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p dt\leqslant|l(x_n)|\leqslant\|l\|\;\|x_n\|,$$

ე. ი.

$$\|l\|\geqslant\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ვინაიდან $\alpha(t)$ ჯამებადი ფუნქციაა, თანახმად $x_n(t)$ ფუნქციების განსაზღვრისა, როცა $n\to\infty$, თითქმის ყველგან $[0,1]$ სეგმენტზე $|x_n(t)|\to|\alpha(t)|^{q-1}$, ე. ი. $|x_n(t)|^p\to|\alpha(t)|^{pq-p}=|\alpha(t)|^q$. მაშასადამე, წინა უტოლობიდან, ზღვარზე გადასვლის შემდეგ, როცა $n\to\infty$, გვექნება:

$$\|l\|\geqslant\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.25}$$

მაშასადამე, $\alpha(t)\in L_q$. ახლა ცხადია, რომ ვინაიდან ნებისმიერი $x(t)\in L_p$ ელემენტისათვის, ჰელდერის უტოლობის ძალით, ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt\right|\leqslant\|x\|_p\|\alpha\|_q,$$

ამიტომ $x(t)\alpha(t)$ ნამრავლი ჯამებადი ფუნქციაა.

ავიღოთ $\{x_n(t)\}\subset L_p$ მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$x_n=x_n(t)=\begin{cases}x(t), & \text{როცა } |x(t)|\leqslant n,\\ n\operatorname{sign}x(t), & \text{როცა } |x(t)|>n.\end{cases} \tag{4.26}$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1 |x(t)-x_n(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

თუ ავიღებთ გამოსახულებას

$$\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt - l(x_n)\right| = \left|\int_0^1 [x(t)-x_n(t)]\alpha(t)dt\right| \leqslant \|x-x_n\|_p\|\alpha\|_q,$$

რომელიც, წინა ტოლობის ძალით, ნულისაკენ მიისწრაფვის როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$l(x)=\lim_{n\to\infty} l(x_n)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

გარდა ამისა, ვინაიდან

$$|l(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\right|\leqslant\|x\|_p\|\alpha\|_q,$$

ე. ი.

$$\|l\|\leqslant\|\alpha\|_q.$$

ამიტომ (4.25) უტოლობასთან შედარების შემდეგ, მივიღებთ

$$\|l\|=\|\alpha\|_q.$$

ამრიგად დამტკიცებულია შემდეგი

**თეორემა 4.18.** $L_p$ სივრცეში განსაზღვრულ წრფივ $l(x)$ ფუნქციონალს, როცა $p>1$, აქვს სახე:

$$l(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,$$

სადაც

$$\alpha(t)\in L_q,\ \ \|l\|=\left\{\int_0^1|\alpha(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}=\|\alpha\|_q \text{ და } p^{-1}+q^{-1}=1.$$

პირველად ეს თეორემა დამტკიცებული იყო მ. ფრეშეს მიერ 1907 წელს, როცა $p=2$. შემდეგ 1910 წელს, როცა $p>1$ იგი დაამტკიცა ფ. რისმა.

იმ შემთხვევაში, როცა $p=1$ წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $L_1$ სივრცეში მოძებნილი იყო ჰ. შტეინჰაუზის მიერ 1918 წ. სახელდობრ, ჰ. შტეინჰაუზის მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

**თეორემა 4.19.** $L_1$ სივრცეში ყოველ წრფივ ფუნქციონალს აქვს სახე

$$l(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,$$

სადაც $\alpha(t)$ არის $[0,1]$ სეგმენტზე თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული ფუნქცია და

$$\|l\|=\inf_{\substack{\sigma\subset[0,1]\\ \mathrm{mes}\,\sigma=0}}\ \sup_{t\in[0,1]-\sigma}|\alpha(t)|.$$

თეორემის დასამტკიცებლად, ვთქვათ, $0\leqslant\xi<\xi+\Delta\xi\leqslant1$ და

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta\xi}, & \text{როცა } \xi\leqslant t\leqslant\xi+\Delta\xi,\\ 0, & \text{როცა } 0\leqslant t\leqslant\xi \text{ და } \xi+\Delta\xi<t\leqslant1.\end{cases}$$

თანახმად (4.24) ფორმულისა, გვექნება

$$|l(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt\right|=\frac{1}{\Delta\xi}\left|\int_\xi^{\xi+\Delta\xi}\alpha(t)dt\right|$$

და, ვინაიდან

$$|l(x)|\leqslant\|l\|\ \|x\|=\|l\|,$$

ამიტომ

$$\left|\int_\xi^{\xi+\Delta\xi}\alpha\ (t)dt\right|\leqslant\|l\|\Delta\xi.$$

როგორც ჩანს, ფუნქცია

$$g(\xi)=\int_0^\xi \alpha(t)dt$$

აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას და, ვინაიდან $g'(t)=\alpha(t)$ თითქმის ყველგან $[0,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ თითქმის ყველგან $[0,1]$ სეგმენტზე გვექნება

$$|\alpha(t)|\leqslant\|l\|. \tag{4.27}$$

ახლა თუ $x(t)\in L_1$ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციაა, ხოლო $\{x_n(t)\}\subset L_1$ მიმდევრობა განსაზღვრულია ისევ (4.26) პირობებით, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ და

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}l(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

გარდა ამისა, გვაქვს

$$\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\right|\leqslant\inf_{\substack{\sigma\subset[0,1]\\ \mathrm{mes}\,\sigma=0}}\ \sup_{t\in[0,1]-\sigma}|\alpha(t)|\int_0^1|x(t)|dt,$$

რომლის შედარება (4.27) ფორმულასთან მოგვცემს:

$$\|l\|=\inf_{\substack{\sigma\subset[0,1]\\ \mathrm{mes}\,\sigma=0}}\ \sup_{t\in[0,1]-\sigma}|\alpha(t)|.$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

## § 6. რეფლექსური სივრცის მაგალითები

წრფივი ფუნქციონალის ანალიზური გამოსახულება კერძო სახის წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში საშუალებას გვაძლევს წარმოდგენა ვიქონიოთ აღებული სივრცის $\overline{E}$ შეუღლებულსა და $\overline{\overline{E}}$ მეორე შეუღლებულ სივრცეებზე. როგორც ვიცით, როცა $\overline{\overline{E}}$ ემთხვევა $E$-ს, მაშინ $E$ სივრცეს რეფლექსური სივრცე ეწოდება. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

**თეორემა 4.20.** *ევკლიდეს $n$-განზომილებიანი $R_n$ სივრცე რეფლექსური სივრცეა.*

მართლაც, როგორც წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი გამოსახულება გვარწმუნებს, $R_n$ სივრცის შეუღლებული სივრცე $\overline{R_n}$ არის ისევ ევკლიდეს $n$-განზომილებიანი სივრცე: $\overline{R_n}=R_n$. სხვანაირად, $R_n$ თვითშეუღლებული სივრცეა. აქედან ცხადია, რომ $\overline{R_n}$ სივრცის შეუღლებული $\overline{\overline{R_n}}$ სივრცე ისევ ევ-

კლიდეს $n$-განზომილებიანი $R_n$ სივრცე იქნება: $\overline{\overline{R}}_n=\overline{R}_n=R$ და, მაშასადამე, $R_n$ რეფლექსური სივრცეა.

თეორემა 4.21. $L_p$ და $l_p(p>1)$ რეფლექსური სივრცეებია.

მართლაც, 4.18 თეორემა გვარწმუნებს, რომ $L_p$ სივრცის შეუღლებული სივრცეა $L_q$ სივრცე: $\overline{L}_p=L_q$, სადაც $p^{-1}+q^{-1}=1$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\overline{L}_q=L_p=\overline{\overline{L}}_p$. სავსებით ასევე დავრწმუნდებით, რომ $l_p$ აგრეთვე რეფლექსური სივრცეა. კერძოდ, როცა $p=2$, მივიღებთ, რომ ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2$ სივრცე და ჰილბერტის კოორდინატული სივრცე $l_2$ თვითშეუღლებული სივრცეებია.

თეორემა 4.22. უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცე არარეფლექსური სივრცეა.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, რომ $C(0,1)$ რეფლექსური სივრცეა. ვთქვათ, $l(x)$ არის $C(0,1)$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, სადაც $x\in C(0,1)$ და $l$ ეკუთვნის $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციათა $V$ სიმრავლეს შემოსაზღვრული ცვლილებით. $V$ სიმრავლე წრფივი ნორმირებული სივრცეა, რომელშიც $l_1$, $l_2\in V$ ელემენტებს შორის მანძილი ეწოდება რიცხვს: $\rho(l_1, l_2)=\operatorname*{var}_0^1(l_1-l_2)$, ხოლო $l\in V$ ელემენტის ნორმა არის: $\|l\|=\operatorname*{var}_0^1(l)$. დაშვების, თანახმად სათანადოდ შერჩეული $x\in C(0,1$ ელემენტისათვის უნდა არსებობდეს $V$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი წრფივი ფუნქციონალი $L$, რომ $L_x(l)=l(x)$, ე. ი.

$$L_x(l)=\int_0^1 x(t)dl(t), \tag{4.29}$$

სადაც $l(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით $[0,1]$ სეგმენტზე. ვთქვათ, $x_0(t)\in C(0,1)$ ფიქსირებული ელემენტია და $x_0(t)\neq 0$. ავაგოთ $V$ სივრცეზე შემდეგი სახის ფუნქციონალი:

$$L_{x_0}(t)=l(t_0+0)-l(t_0-0), \tag{4.30}$$

სადაც $l=l(t)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, ხოლო $t_0\in[0,1]$ გარკვეული წერტილია. ადვილი შესამჩნევია, რომ $L_{x_0}(l)\neq 0$. (4.30) ტოლობა გამოსახავს $l(t)$ ფუნქციის ნახტომს $t_0$ წერტილზე. (4.30) ფუნქციონალი ნორმით შემოსაზღვრულია. მართლაც, გვაქვს

$$|L_{x_0}(l)|=|l(t_0+0)-l(t_0-0)|<\operatorname*{var}_0^1(l)=\|l\|,$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\|L_{x_0}\|\leqslant 1$. გარდა ამისა, (4.30) ადიტიური ფუნქციონალია. ამრიგად, $F_{x_0}(l)$ არის $V$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი და, ამიტომ, (4.29) ტოლობის ძალით, იგი ასე წარმოიდგინება:

$$L_{x_0}(l)=\int_0^1 x_0(t)dl(t).$$

ახლა ავიღოთ $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $l_0(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, რომელიც განსაზღვრულია ინტეგრალით:

$$l_0(t)=\int_0^t x_0(\tau)d\tau.$$

ამ ფუნქციისთვის, ერთის მხრივ, გვექნება

$$L_{x_0}(l_0)=0,$$

ხოლო მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$L_{x_0}(l_0)=\int_0^1 x_0(t)dl_0(t)=\int_0^1 x^2_0(t)dt>0.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩვენ თეორემას.

## § 7. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახის ზოგიერთი გამოყენება

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $G$ მისი რაიმე ქვე სიმრავლე. $G$ სიმრავლეს უწოდებენ ფუნდამენტალურ სიმრავლეს $E$ სივრცეში, თუ მისი ელემენტების ყველა წრფივი კომბინაციის სიმრავლე მკვრივია $E$ სივრცეში. $G$ სიმრავლეს ეწოდება ტოტალური სიმრავლე $E$ სივრცეში, თუ ყოველი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც ნულის ტოლია $G$ სიმრავლის ყოველ წერტილში, ნულის ტოლია $E$ სივრცის ყოველ წერტილშიც.

**თეორემა 4.23.** ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $G\subset E$ სიმრავლე და ნებისმიერი $y_0\in E$ ელემენტი. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ არსებობდეს $G$ სიმრავლის ელემენტთა წრფივი კომბინაციების $\{g_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია $y_0$ ელემენტისაკენ, შემდეგში მდგომარეობს: ყოველი წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც ნულის ტოლია ყველა $x\in G$ ელემენტზე, ნულის ტოლი იყოს $y_0$ ელემენტზეც.

პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ როცა $l(x)=0$ ნებისმიერი $x\in G$ ელემენტისათვის, მაშინ $l(g_n)=0$, ვინაიდან $g_n$ არის $x$ ელემენტების წრფივი კომბინაცია. ამასთანავე, ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-y_0\|=0$, ამიტომ $l$ ფუნქციონალის უწყვეტობის გამო გვექნება $\lim\limits_{n\to\infty} l(g_n)=l(y_0)$.

პირობის საკმარისობა გამომდინარეობს 4.8 თეორემიდან, რომელშიც საკმარისია $L$ მრავალნაირობა შევცვალოთ $G$ სიმრავლის ელემენტების ყველა წრფივი კომბინაციით.

**შედეგი.** იმისათვის, რომ $G\subset E$ სიმრავლე ფუნდამენტალური იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს ტოტალური $E$ სივრცეში.

წრფივ $l\in \overline{E}$ ფუნქციონალს ეწოდება $x_0\in E$ ელემენტის ორთოგონალური, თუ $l(x_0)=0$. ანალოგიურად ამისა, $l$ ორთოგონალურია $G\subset E$ სიმრავლისა, თუ $l(x)=0$ ყოველი $x\in G$ ელემენტისათვის.

ვთქვათ ახლა, $L$ არის წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ქვესივრცე. თუ გამოვიყენებთ 4.8 თეორემას, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

**თეორემა 4.24.** ყოველი $L\subset E$ ქვესივრცისათვის არსებობს $E$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $l(x)$ ფუნქციონალი, რომელიც ამ სივრცეზე იგივურად არ არის ნულის ტოლი და ორთოგონალურია მთელი $L$ ქვესივრცისა.

გამოყენება $C(0,1)$ და $L_p(0,1)$ სივრცეებში. შევჩერდეთ § 7-ში მოყვანილი თეორემების გამოყენებაზე $C(0,1)$ და $L_p(0,1)$ სივრცეებში.

ავიღოთ უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცე და ელემენტთა $\{x_n(t)\}\subset C(0,1)$ მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ ეს მიმდევრობა ჩაკეტილია $C(0,1)$ სივრცეში, თუ ნებისმიერი $x(t)\in C(0,1)$ ელემენტისათვის არსებობს

$$\tilde{x}_n=\sum_{i=1}^{S_n}\alpha_i^{(n)}x_i(t)$$

წრფივი კომბინაციების ისეთი $\{\tilde{x}_n(t)\}\subset C(0,1)$ მიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ. $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობას ეწოდება სრული მიმდევრობა $C(0,1)$ სივრცეში, თუ ნებისმიერი $g(t)$ ფუნქციისათვის შემოსაზღვრული ცვლილებით $[0,1]$ სეგმენტზე, როცა შესრულებულია ტოლობები

$$\int_0^1 x_n(t)dg(t)=0 \quad (n=1,\ 2,\ldots),$$

მაშინ $g(0)=g(t)=g(1)$ $t$ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის $[0,1]$ სეგმენტიდან, გარდა, შესაძლებელია, $t$ ცვლადის მნიშვნელობათა თვლადი სიმრავლისა.

შემოვიღოთ ანალოგიური განსაზღვრანი $L_p(0,1)$ სივრცისათვის, სადაც $p\geqslant 1$. სახელდობრ, ვიტყვით, რომ $\{x_n(t)\}\subset L_p(0,1)$ მიმდევრობა ჩაკეტილია $L_p(0,1)$ სივრცეში, თუ ნებისმიერი $x(t)\in L_p(0,1)$ ფუნქციისათვის არსებობს

$$\tilde{x}_n(t)=\sum_{i=1}^{S_n}\beta_i^{(n)}x_i(t)$$

წრფივი კომბინაციების ისეთი $\{\tilde{x}_n\}\subset L_p(0,1)$ მიმდევრობა, რომელიც $p$ ხარისხით საშუალოდ კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\tilde{x}_n(t)-x(t)|^p dt=0.$$

ასევე, $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობას ეწოდება სრული მიმდევრობა $L_p(0,1)$ სივრცეში, თუ ნებისმიერი $y(t)\in L_q(0,1)$ ელემენტისათვის $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, ტოლობებიდან

$$\int_0^1 x_n(t)y(t)dt=0 \quad (n=1,\ 2,\ldots),$$

გამომდინარეობს, რომ $y(t)=0$.

თუ ახლა გავიხსენებთ წრფივი ფუნქციონალის ზოგად სახეს $C(0,1)$ სივრცეში, ადვილად ვნახავთ, რომ $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ჩაკეტილობისათვის $C(0,1)$ სივრცეში აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ფუნდამენტალური.

სრულიად ასევე, თუ გამოვიყენებთ წრფივი ფუნქციონალის ზოგად სახეს $L_p(0,1)$ სივრცეში დავრწმუნდებით, რომ $L_p(0,1)$ სივრცეში $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს მიმდევრობა იყოს ჩაკეტილი ამავე სივრცეში.

გამოვიყენოთ წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე და გამოვთქვათ 4.23 თეორემა $C(0,1)$ სივრცის შემთხვევაში. გვექნება შემდეგი

**თეორემა 4.25.** იმისათვის, რომ არსებობდეს $C(0,1)$ სივრცის ელემენტების ისეთი $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა, რომლის ელემენტების წრფივი კომბინაციები თანაბრად კრებადია მოცემული $x(t)\in C(0,1)$ ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი $g(t)$ ფუნქციისათვის შემოსაზღვრული ცვლილებით $[0,1]$ სეგმენტზე, ტოლობებიდან

$$\int_0^1 x_n(t)dg(t)=0 \quad (n=1,\ 2,\ldots),$$

გამომდინარეობდეს ტოლობა

$$\int_0^1 x(t)dg(t)=0.$$

სრულიად ასევე, თუ ვისარგებლებთ წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი წარმოდგენით და 4.23 თეორემით, $L_p(0,1)$ სივრცის შემთხვევაში გვექნება

**თეორემა 4.26.** იმისათვის, რომ არსებობდეს $L_p(0,1)$ სივრცის ელემენტების ისეთი $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა, რომლის ელემენტების წრფივი კომბინაციების $\{\tilde{x}_n(t)\}$ მიმდევრობა $p$ ხარისხით საშუალოდ კრებადია მოცემული $x(t)\in L_p(0,1)$ ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ, როცა $p=1$, ნებისმიერი ზომადი შემოსაზღვრული $y(t)$ ფუნქციისათვის $[0,1]$ სეგმენტზე ტოლობებიდან

$$\int_0^1 y(t)\tilde{x}_n(t)dt=0 \quad (n=1,\ 2,\ldots), \tag{4.30}$$

გამომდინარეობდეს ტოლობა

$$\int_0^1 y(t)x(t)dt=0, \tag{4.31}$$

ხოლო როცა $p>1$, მაშინ ნებისმიერი ფუნქციისათვის $y(t)\in L_q(0,1)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, (4.30) ტოლობებიდან უნდა გამომდინარეობდეს (4.31) ტოლობა.

## § 8. მომენტთა პრობლემა

ვთქვათ, $[0,1]$ სეგმენტზე მოცემულია ფუნქციათა თვლადი $\{\varphi_i(t)\}$ სისტემა, რომელიც რაიმე კონკრეტულ წრფივ ნორმირებულ ფუნქციონალურ $E$ სივრცეს ეკუთვნის. გარდა ამისა, ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა $\{\mu_i\}$ მიმდევრობა. მოვძებნოთ პირობები, რომელიც უზრუნველყოფენ წრფივი ნორმირე-

ბული ფუნქციონალური $E_1$ სივრცის ისეთი $\Psi(t)$ ფუნქციის არსებობას, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას[1]

$$\int_0^1 \Psi(t)\varphi_i(t)dt = \mu_i \quad (i=1, 2,\ldots).$$

ასეთია მომენტთა პრობლემის შინაარსი. პირველად იგი შესწავლილი იყო პ. ჩებიშევის მიერ. დასმული ამოცანის შემდგომი განვითარება ეკუთვნის ტ. სტილტიესსა, ა. მარკოვს, ჰ. ჰამბურგერსა და სხვებს.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ მომენტთა პრობლემის ამოხსნას $C(0,1)$ და $L_p(0,1)$ სივრცეების შემთხვევაში, რომელიც პირველად გამოიკვლია ფ. რისმა. ამ სივრცეებისათვის მომენტთა პრობლემის ამოხსნა უშუალოდ გამომდინარეობს 4.11 თეორემიდან.

ავიღოთ ჯერ უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცე. ვთქვათ, $\{x_i(t)\}\subset C(0,1)$ არის უწყვეტ ფუნქციათა ნებისმიერი მიმდევრობა, $\{\mu_i\}$ — ნამდვილ რიცხვთა მოცემული მიმდევრობა და $M>0$ — მოცემული რიცხვი. 4.11 თეორემის თახახმად გვექნება

**თეორემა 4.27.** იმისათვის, რომ არსებობდეს ისეთი $g(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, რომლისთვისაც

$$\operatorname*{Var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)\leqslant M$$

და რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებებს

$$\int_0^1 x_i(t)dg(t)=\mu_i \quad (i=1, 2,\ldots),$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნამდვილ რიცხვთა ყოველი სასრული $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ სისტემისათვის შესრულებული იყოს უტოლობა:

$$\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mu_i\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i(t)\right\|.$$

გამოვთქვათ ახლა იგივე თეორემა $L_p(0,1)$ სივრცის შემთხვევაში.

**თეორემა 4.28.** ვთქვათ, $p>1$. იმისათვის, რომ არსებობდეს $y(t)\in L_q(0,1)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\left\{\int_0^1 |y(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant M, \quad p^{-1}+q^{-1}=1,$$

და რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებებს

$$\int_0^1 x_i(t)y(t)dt=\mu_i,\ x_i(t)\in L_p(0,1) \quad (i=1, 2,\ldots),$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნამდვილ რიცხვთა ყოველი სასრული $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ სისტემისთვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mu_i\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i(t)\right\|.$$

---

[1] იგულისხმება, რომ ინტეგრალები არსებობს გარკვეული აზრით.

როცა $p=1$, მაშინ $\{x_i(t)\}$ უნდა იყოს ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობა, საძიებელი $y(t)$ ფუნქცია კი შემოსაზღვრული და ისეთი, რომ

$$\operatorname*{Var}_{0\leq t\leq 1} |y(t)| \leqslant M.$$

ამ შემთხვევაში $y(t)$ ფუნქციის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მოცემულია შემდეგი უტოლობით:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i\right| \leqslant M \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i(t)\right| dt.$$

## § 9. განტოლებათა ზოგიერთი უსასრულო სისტემის ამოხსნადობის პირობები

წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახის ცოდნას, გარდა § 7-ში მოყვანილი გამოყენებებისა, დიდი მნიშვნელობა აქვს სხვადასხვა ფუნქციონალური განტოლებების გამოკვლევაში. ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს ერთი ასეთი გამოყენება უსასრულო უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობის დამტკიცებაში.

ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ ელემენტებიანი უსასრულო $\{a_{ik}\}$ მატრიცი და ნამდვილ რიცხვთა $\{\mu_i\}$ მიმდევრობა. საჭიროა მოიძებნოს ნამდვილ რიცხვთა $\{z_k\}$ მიმდევრობა, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებათა შემდეგ უსასრულო სისტემას

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k = \mu_i \quad (i=1, 2,\ldots). \tag{4.32}$$

განვიხილოთ დასმული ამოცანა $c$ და $l_1$ სივრცეებში.

1. ვთქვათ, აღებულია ისეთი $\{x_i\}\subset c$ მიმდევრობა, რომ

$$x_i=(a_{i_1}, a_{i_2},\ldots)=(a_{ik}) \text{ და } \lim_{k\to\infty} a_{ik}=0 \quad (i=1, 2,\ldots).$$

გავიხსენოთ, რომ ყოველ წრფივ $F(x)$ ფუნქციონალს $c$ სივრცეში აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=a\alpha+\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i,$$

სადაც $x=(x_1, x_2,\ldots)\in c$ და $||F||=|a|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|.$

ახლა ვიგულისხმოთ 4.11 თეორემაში $F(x_i)=\mu_i$, $x_i=a_{ik}$, $c_k=z_k$. ცხადია, $\alpha=\lim a_{ik}=0$. ამის გამო ხსენებული თეორემის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ დებულებას:

**თეორემა 4.29.** იმისათვის, რომ არსებობდეს რიცხვთა $\{z_k\}$ მიმდევრობა, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებათა უსასრულო (4.32) სისტემას და იმავე დროს $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|z_i|\leqslant M$ პირო-

ბას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნამდვილ რიცხვთა ყოველი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ სასრული სისტემისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i\right| \leqslant M \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ik}\right|.$$

2. ვთქვათ ახლა, მიმდევრობა $\{x_i\} \subset l_1$, სადაც $x_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots) = (a_{ik})$ და $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty$ $(i=1, 2, \ldots)$. როგორც ვიცით, ყოველ წრფივ $F(x)$ ფუნქციონალს $l_1$ სივრცეში აქვს სახე

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \xi_k,$$

სადაც $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \subset l_1$ და $\|F\| = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |z_i|$.

ავიღოთ $F(x_i) = \mu_i$, $\xi_k = a_{ik}$, მაშინ 4.11 თეორემის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ დებულებას:

**თეორემა 4.30.** იმისათვის, რომ არსებობდეს რიცხვთა უსასრულო $\{z_k\}$ მიმდევრობა, რომელიც დააკმაყოფილებს წრფივ განტოლებათა უსასრულო (4.32) სისტემას და ამავე დროს $\sup_{1 \leqslant i < \infty} |z_k| \leqslant M$ პირობას, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნამდვილ რიცხვთა ყოველი სასრული $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ სისტემისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left|\sum_{i=1}^{r} \beta_i \mu_i\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{r} \beta_i a_{ik}\right|.$$

## § 10. ბიორთოგონალური მიმდევრობანი და ბაზისი

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა. $E$ სივრცის ელემენტების $\{x_i\}$ მიმდევრობას და $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_j\} \subset \overline{E}$ მიმდევრობას ბიორთოგონალური მიმდევრობანი ეწოდება, თუ

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } i=j, \\ 0, & \text{როცა } i \neq j. \end{cases}$$

ვთქვათ, $x \in E$ რაიმე ელემენტია. მწკრივს

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x) x_i \tag{4.33}$$

უწოდებენ $x$ ელემენტის დაშლას $\{x_i\}$ და $\{l_j\}$ ბიორთოგონალური მიმდევრობების მიხედვით.

წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_j\}$ მიმდევრობას სრული მიმდევრობა ეწო-

დება, თუ ამ მიმდევრობის ყოველი $l_j$ ელემენტისათვის $l_j(x)=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x=\Theta$.

**თეორემა 4.31.** თუ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_j\}$ მიმდევრობა სრულია და $x\in E$ ელემენტის (4.33) დაშლა ნორმით კრებადი მწკრივია, მაშინ მისი ჯამი იქნება $x$.

მართლაც, გვაქვს

$$l_j\left(x-\sum_{i=1}^{\infty}l_i(x)x_i\right)=l_j(x)-l_j(x)=0.$$

ვინაიდან $l_j$ არის წრფივი ფუნქციონალების სრული მიმდევრობის ელემენტი, ამიტომ წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}l_i(x)x_i. \tag{4.34}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 4.32.** თუ (4.33) მწკრივი ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის კრებადია და მისი ჯამია $x$, მაშინ ნებისმიერი წრფივი $l\in\overline{E}$ ფუნქციონალისათვის რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty}l_i(x)l(x_i)$$

კრებადი იქნება $l(x)$ რიცხვისაკენ.

თეორემის დასამტკიცებლად შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i(x)l(x_i)=l\left(\sum_{i=1}^{n}l_i(x)x_i\right).$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}l_i(x)x_i\right\|=0,$$

ამიტომ გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim l\left(\sum_{i=1}^{n}l_i(x)x_i\right)=l(x).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ რიცხვითი (4.34) მწკრივი კრებადია $l(x)$ რიცხვისაკენ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ ერთი დამხმარე წინადადება, რომელსაც მომდევნო თეორემის დამტკიცებაში გამოვიყენებთ და, რომელსაც აქვს დამოუკიდებელი ინტერესიც.

**ლემა.** თუ $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი წრფივი $l\in E$ ფუნქციონალისათვის $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|l(x_n)|<\infty$, მაშინ ნორმათა $\{\|x_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $E$ სივრცის შეუღლებულ $\bar{E}$ სივრცეში ავაგოთ ფუნქციონალთა $\{\bar{l}_n\}$ მიმდევრობა შემდეგნაირად: $\bar{l}_n(l)=l(x_n)$. ვინაიდან, მოცემული პირობის თანახმად, ნებისმიერი წრფივი $l\in\bar{E}$ ფუნქციონალისათვის $\varlimsup_{n\to\infty}|l(x_n)|<\infty$, ამიტომ $\varlimsup_{n\to\infty}|\bar{l}_n(l)|<\infty$. თანახმად 3.45 თეორემისა, ნორმების $\{\|\bar{l}_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და შეგვიძლია დავწეროთ: $|\bar{l}_n(l)|\leqslant\mu\,\|l\|$, სადაც $\mu$ მუდმივია. გარდა ამისა, 4.7 თეორემის ძალით, არსებობს $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი წრფივი $l_n\in\bar{E}$ ფუნქციონალი, რომ $|l_n(x_n)|=\|x_n\|$ და $\|l_n\|=1$.

ამრიგად, როგორიც უნდა იყოს $n$ ნიშნაკი, გვექნება

$$\|x_n\|=|l_n(x_n)|=|\bar{l}_n(l_n)|\leqslant\mu\,\|l_n\|=\mu$$

და ამით ლემაც დამტკიცებულია.

**თეორემა 4.33.** თ უ $E$ ს ი ვ რ ც ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ს $\{x_i\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა დ ა $l_j$ წ რ ფ ი ვ ი ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ე ბ ი ს $\{l_j\}\subset\bar{E}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ს რ უ ლ ი ბ ი ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ე ბ ი ა დ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი წ რ ფ ი ვ ი $l\in E$ ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი ს ა თ ვ ი ს

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i l(x_i)$$

მ წ კ რ ი ვ ი ს კ ე რ ძ ო

$$s_n'=\sum_{i=1}^{n} l_i l(x_i)$$

ჯ ა მ ე ბ ი ს ნ ო რ მ ე ბ ი შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა თ ა ვ ი ს ს ი მ რ ა ვ ლ ე შ ი, მ ა შ ი ნ მ წ კ რ ი ვ ი

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)x_i \tag{4.35}$$

ნ ო რ მ ი თ კ რ ე ბ ა დ ი ი ქ ნ ე ბ ა ყ ო ვ ე ლ ი ი ს ე თ ი $x$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ ე ლ ი ც $\{x_i\}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ს წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ე ბ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი ა.

თეორემის დასამტკიცებლად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} l_i(x)x_i, \tag{4.36}$$

მაშინ, ერთის მხრივ, მივიღებთ:

$$l(s_n(x))=\sum_{i=1}^{n} l_i(x)l(x_i),$$

ხოლო, მეორეს მხრივ, გვექნება

$$s'_n(x)=\sum_{i=1}^{n} l_i(x)l(x_i),$$

ე. ი.

$$s_n'(x) = l(s_n(x)).$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $n$ ნიშნაკისათვის, $s'_n(x)$ ფუნქციონალი წრფივია $x$-ის მიმართ და, ვინაიდან პირობის თანახმად, ნორმების $\{\|s_n'\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია თავის სიმრავლეში, ამიტომ გვექნება

$$|l(s_n(x))| = |s'_n(x)| \leqslant \|s_n'\| \; \|x\| < \infty$$

და

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, |l(s_n(x))| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, |s_n(x)(l)| < \infty.$$

ამრიგად, ნებისმიერი $x$ ელემენტისათვის, თანახმად ზევით დამტკიცებული ლემისა, ნორმების $\{\|s_n(x)\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ვინაიდან $\{x_i\}$, $\{l_j\}$ მიმდევრობები ბიორთოგონალურია, ამიტომ (4.36) ტოლობიდან გვექნება: $s_n(x_j) = x_j$; აქედან მივიღებთ, რომ $\{s_n(x_j)\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $x_j$ ელემენტისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n(x_j) - x_j\| = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნორმით კრებადია აგრეთვე $\{s_n(x)\}$ მიმდევრობა ყოველი ისეთი $x$ ელემენტისათვის, რომელიც $\{x_i\}$ მიმდევრობის ელემენტების წრფივი კომბინაციების ზღვარითი ელემენტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (4.35) მწკრივიც ნორმით კრებადია (ყოველი ასეთი $x$ ელემენტისათვის) და თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ წრფივი ფუნქციონალების $\{l_j\} \subset \bar{E}$ მიმდევრობა და $E$ სივრცის ელემენტების $\{x_i\}$ მიმდევრობა სრული ბიორთოგონალური მიმდევრობებია და ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i l_i(x)$$

მწკრივის კერძო

$$s_n'' = \sum_{i=1}^{n} x_i l_i(x)$$

ჯამების ნორმები შემოსაზღვრულია თავის სიმრავლეში, მაშინ მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(x_i) l_i$$

ნორმით კრებადი იქნება ყოველი ისეთი წრფივი $l \in E$ ფუნქციონალისათვის, რომელიც $\{l_j\}$ მიმდევრობის ელემენტების წრფივი კომბინაციების ზღვარია.

შევჩერდეთ წინა თეორემის ერთ გამოყენებაზე. ვთქვათ, ფუნქციათა $\{x_i(t)\}$ მიმდევრობა ეკუთვნის $L_p(0,1)$ სივრცეს, სადაც $p > 1$, ხოლო $\{y_j(t)\}$ — ეკუთვნის $L_p(0,1)$ სივრცის შეუღლებულ $L_q(0,1)$ სივრცეს. ვიგულისხმოთ, რომ $\{x_i(t)\}$ და $\{y_i(t)\}$ სრული ბიორთოგონალური მიმდევრობანია. ამ პირო-

ბებში ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ ნებისმიერი $x(t) \in L_p(0,1)$ ფუნქციისათვის მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \int_0^1 x(t) y_i(t) dt$$

ნორმით კრებადია (ე. ი. $p$ ხარისხით საშუალოდ კრებადია) $x(t)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ნებისმიერი $y(t) \in L_q(0,1)$ ფუნქციისათვის მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i \int_0^1 y(t) x_i(t) dt$$

აგრეთვე ნორმით (ე. ი. $q$ ხარისხით საშუალოდ) კრებადი იქნება $y(t)$ ფუნქციისაკენ. ამ დებულების დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს წინა თეორემიდან.

პირველად ჰ. ჩებიშევმა და ა. მარკოვმა ააგეს ფუნქციათა ბიორთოგონალური მიმდევრობების მაგალითები, რომლებსაც მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვთ ფუნქციათა კონსტრუქციულ თეორიაში.

მოვიყვანოთ ბიორთოგონალური მიმდევრობების რამდენიმე მაგალითი ზოგიერთ კერძო სახის წრფივ ნორმირებულ სივრცეში.

ავიღოთ ჩებიშევის $L_2^{(\alpha)}(a, b)$ სივრცე და მისი ელემენტების ორი $\{x_i(t)\}$ და $\{y_i(t)\}$ მიმდევრობა, სადაც $a \leqslant t \leqslant b$. ამ მიმდევრობებს **ბიორთოგონალური მიმდევრობები** ეწოდება $\alpha(t)$ წონით, თუ

$$\int_a^b x_i(t) y_k(t) \alpha(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{როცა } i \neq k, \\ 1, & \text{როცა } i = k. \end{cases}$$

**მაგალითი 1** (პ. ჩებიშევი). ვთქვათ, $\alpha(t)=1$; $t=\cos\varphi$, $x_i(t)=$

$$= \operatorname{sign} n \, \frac{\sin(i+1)\varphi}{\sin\varphi} \ (i=0,1,2,\ldots), \ y_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{d/k+1} \frac{\mu(d)}{d} \, \frac{\sin \dfrac{k+1}{d} \varphi}{\sin\varphi} \ (k=0,1,2,\ldots),$$

სადაც $d$ გაირბენს $k+1$ რიცხვის ყველა მარტივ გამყოფებს, ამასთანავე $d$-ს მნიშვნელობებს მიეკუთვნება აგრეთვე $d=1$ და $d=k+1$, როცა უკანასკნელი კენტი რიცხვია. $\mu(d)$ მებიუსის ფუნქციაა, ე. ი. ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები: 1) $\mu(1)=1$; 2) $\mu(a)=0$, თუ $a$ იყოფა ისეთი რიცხვის კვადრატზე, რომელიც განსხვავდება ერთისაგან; 3) $\mu(a)=(-1)^r$, თუ $a$ არ იყოფა ისეთი რიცხვის კვადრატზე, რომელიც განსხვავებულია ერთისაგან, სადაც $r$ აღნიშნავს $a$ რიცხვის ყველა იმ მარტივი გამყოფების რიცხვს, რომლებიც განსხვავდებიან ერთისაგან.

მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $\{x_i(t)\}$ და $\{y_i(t)\}$ მიმდევრობების პირველ ოთხ ელემენტს აქვს შემდეგი სახე:

$$x_0(t)=1. \qquad y_0(t)=\frac{1}{2},$$

$$x_1(t)=\begin{cases} -1, & \text{როცა } -1<t<0, \\ +1, & \text{როცა } \ 0<t<1. \end{cases} \qquad y_1(t)=t.$$

$$x_2(t)=\begin{cases}-1, \text{ როცა } -1<t<-\frac{1}{2},\\ +1, \text{ როცა } -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2},\\ -1, \text{ როცა } \frac{1}{2}<t<1.\end{cases} \qquad y_2(t)=2\left(t^2-\frac{1}{3}\right),$$

$$x_3(t)=\begin{cases}-1, \text{ როცა } -1<t<-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ +1, \text{ როცა } -\frac{1}{\sqrt{2}}<t<0,\\ -1, \text{ როცა } 0<t<\frac{1}{\sqrt{2}},\\ +1, \text{ როცა } \frac{1}{\sqrt{2}}<t<1.\end{cases} \qquad y_3(t)=2t(2t^2-1).$$

ფუნქციათა $\{x_i(t)\}$ და $\{y_k(t)\}$ მიმდევრობები ბიორთოგონალური მიმდევრობებია $[-1, +1]$ სეგმენტზე. $x_i(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ხოლო $y_k(t)$ ფუნქცია $t$ ცვლადის პოლინომია, რომელსაც $(-1, +1)$ ინტერვალში აქვს $k$ მარტივი ნული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2 (ა. მ ა რ კ ო ვ ი). ფუნქციები: $x_0(t)=1$, $x_i(t)=\operatorname{sign}\cos i\varphi$ $(i=1, 2,\ldots)$, $y_0(t)=\frac{1}{\pi}$, $y_k(t)=\frac{1}{2}\sum_{d\mid k}\frac{(-1)^h}{d}\frac{\cos k\varphi}{\cos\varphi}$ $(k=1, 2,\ldots)$, წარმოადგენს ბიორთოგონალური ფუნქციების $\{x_i(t)\}$ და $\{y_i(t)\}$ მიმდევრობებს $L_2^{(\alpha)}(-1, 1)$ სივრცეში $\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ წონით, სადაც $t=\cos\varphi$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $d$ გაირბენს $k$ რიცხვის ყველა იმ კენტ გამყოფს, რომელიც არ შეიცავს კვადრატულ გამყოფებს, $h$ არის $d$ რიცხვის იმ მარტივი გამყოფების რიცხვი, რომლებსაც აქვთ $4n+1$ სახე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3 (პ. ჩ ე ბ ი შ ე ვ ი). ავიღოთ ფუნქციონალური $L_p(-1, +1)$ სივრცე და მისი შეუღლებული $L_q(-1, +1)$ სივრცე, სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $p<2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, მაშინ $q>2$. ვთქვათ, $\{P_n(t)\}$ აღნიშნავს ჩებიშევის პოლინომების მიმდევრობას. $P_n(t)$ ფუნქციები გამრავლებული შესაბამისად $2^{n-1}\sqrt{2}$ რიცხვებზე წარმოადგენენ ბიორთოგონალურ მიმდევრობას $\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ წონით $[-1, 1]$ სეგმენტზე:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(t)P_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}1, \text{ როცა } m=n,\\ 0, \text{ როცა } m\neq n.\end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Q_m(t)=\frac{P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

მაშინ, როცა $p<2$, $Q_m(t)\in L_p(-1, 1)$, ხოლო $P_n(t)\in L_q(-1, 1)$ და

$$(P_m, P_n)=\int_{-1}^{+1} P_n(t)Q_m(t)dt=\begin{cases}1, \text{ როცა } m=n,\\ 0, \text{ როცა } m\neq n.\end{cases}$$

შემოვიღოთ ახლა წრფივი ნორმირებული სივრცის თვლადი ბაზისის ცნება. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თვლადი ბაზისის არსებობა წრფივ ნორმირებულ სივრცეში საშუალებას გვაძლევს წრფივი ოპერაციები სივრცის ელემენტებზე შევცვალოთ ჩვეულებრივი ოპერაციებით ამ ელემენტების „კოორდინატებზე“. ელემენტის „კოორდინატები“ კი მარტივად გამოითვლება სივრცის თვლადი ბაზისის ელემენტების დახმარებით.

ვთქვათ, $E$ სასრული განზომილების წრფივი ნორმირებული სივრცეა. იტყვიან, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ ელემენტების მიმდევრობა წარმოადგენს $E$ სივრცის ბაზისს, თუ ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის არსებობს ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ მიმდევრობა, რომ ადგილი აქვს დაშლას:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n.$$

აქ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ რიცხვებს ეწოდება $x$ ელემენტის კოორდინატები და ცალსახად გამოითვლებიან ბაზისის ელემენტებით.

მაგალითი. განვიხილოთ ყველა სამგანზომილებიან თავისუფალ $\vec{x}$ ვექტორთა $E_3$ სივრცე. ამ სივრცის ბაზისს წარმოადგენს ურთიერთ მართობული ერთეულოვანი $x_1 = \vec{i}$, $x_2 = \vec{j}$, $x_3 = \vec{k}$ ვექტორები, რომელთა საშუალებით ნებისმიერი $\vec{x}$ ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება შემდეგი ტოლობით:

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{i} + \xi_2 \vec{j} + \xi_3 \vec{k},$$

სადაც $\vec{x}$ ვექტორის $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ კოორდინატები წარმოადგენს ამ ვექტორის გეგმილებს $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ღერძებზე: $\xi_1 = (\vec{x}, \vec{i})$, $\xi_2 = (\vec{x}, \vec{j})$, $\xi_3 = (\vec{x}, \vec{k})$.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $E$ უსასრულო განზომილების წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $\{x_i\}$ — მისი წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების თვლადი სისტემა. იტყვიან, რომ $\{x_i\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს $E$ სივრცის თვლად ბაზისს, თუ ყოველი $x \in E$ ელემენტი ცალსახად წარმოიდგინება

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

მწკრივით, სადაც $a_i$ — ნამდვილი რიცხვებია ($x$ ელემენტის კოორდინატებია) და გამოითვლებიან ბაზისის ელემენტების დახმარებით.

**თეორემა 4.34.** *ყოველი წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცე თვლადი ბაზისით არის სეპარაბელური სივრცე.*

თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ $E$ სივრცეში, რომელსაც თვლადი $\{x_i\} \subset E$ ბაზისი გააჩნია, არსებობს $E$ სივრცის ელემენტთა ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე. ავაგოთ ბაზისის ელემენტებით $M \subset E$ სიმრავლე, რომლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$ სახის წრფივ კომბინაციას, სადაც $p$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ხოლო $r_i$ რაციონალური რიცხვებია. $M$ სიმრავლე $E$ სივრცეში ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლეა. მართლაც, ვთქვათ, $M_p$ არის ყველა $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$ სახის ელემენტე-

ბის სიმრავლე, სადაც ნატურალური $p$ რიცხვი ფიქსირებულია, ხოლო რაციონალური $r_i$ რიცხვები ნებისმიერად იცვლება. ცხადია, რომ $M_p$ თვლადი სიმრავლეა და ამიტომ, $M=\sum_{p=1}^{\infty} M_p$ სიმრავლე აგრეთვე თვლადი იქნება.

ვთქვათ, $x \in E$ ნებისმიერი ელემენტია. გვაქვს:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0. \tag{4.37}$$

ყოველი ნატურალური $p$ რიცხვისათვის შესაძლოა შევარჩიოთ ისეთი რაციონალური $r_i^{(p)}$ $(i=1, 2,\ldots,p)$ რიცხვები, რომ ადგილი ჰქონდეს შეფასებებს:

$$|r_i^{(p)} - a_i| < \frac{1}{p^2 \|x_i\|}.$$

ვთქვათ,

$$x^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} r_i^{(p)} x_i.$$

ვინაიდან $\sum_{i=1}^{p} r_i^{(p)} x_i \in M_p$, ამიტომ $x^{(p)} \in M_p$. ცხადია, გვექნება

$$\left\| x^{(p)} - \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} (r_i^{(p)} - a_i) x_i \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} |r_i^{(p)} - a_i| \, \|x_i\| < p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

ახლა უკვე ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ $\{x_p\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $x$ ელემენტისაკენ. მართლაც, გვაქვს

$$\|x^{(p)} - x\| \leqslant \left\| x^{(p)} - \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{p} a_i x_i - x \right\| <$$

$$< \frac{1}{p} + \left\| \sum_{i=1}^{p} a_i x_i - x \right\|,$$

საიდანაც, თანახმად (4.37) ტოლობისა, მივიღებთ:

$$\lim_{p \to \infty} \|x^{(p)} - x\| = 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ არის ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე $E$ სივრცეში და თეორემა დამტკიცებულია.

ბუნებრივად ისმება შემდეგი ამოცანა: მუდამ აქვს თუ არა წრფივ ნორმირებულ სეპარაბელურ $E$ სივრცეს თვლადი ბაზისი? ამ პრობლემას დღემდე არც დადებითი და არც უარყოფითი პასუხი არ აქვს, თუმცა დღემდე ცნო-

ბილ ყოველ წრფივ ნორმირებულ სეპარაბელურ სივრცეში თვლადი ბაზისი აგებულია.

განვიხილოთ $E_1$ სიმრავლე, რომლის $y$ ელემენტი ვუწოდოთ ნამდვილ რიცხვთა ისეთ $y=(a_1, a_2,\ldots)$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

ნორმით კრებადია. თუ $y_1=(a_1^{(1)}, a_2^{(1)},\ldots)$, $y_2=(a_1^{(2)}, a_2^{(2)},\ldots)\in E_1$, მაშინ მათი ჯამი ვუწოდოთ $y_1+y_2=(a_1^{(1)}+a_1^{(2)}, a_2^{(1)}+a_2^{(2)},\ldots)\in E_1$ ელემენტს, ხოლო $a$ რიცხვისა და $y=(a_1, a_2,\ldots)\in E_1$ ელემენტის $ay$ ნამრავლი განვსაზღვროთ ჩვეულებრივად: $ay=(aa_1, aa_2,\ldots)\in E_1$. განვსაზღვროთ, გარდა ამისა, $y$ ელემენტის ნორმა შემდეგი ტოლობით

$$\|y\|=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ ელემენტის ნორმა განსაზღვრულია ასე, მაშინ დაკმაყოფილებული იქნება ნორმისათვის სავალდებულო ყველა აქსიომა. ამის შემდეგ $E_1$ გადაიქცევა წრფივ ნორმირებულ სივრცედ. დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 4.35.** $E_1$ სივრცე სრულია.

ვთქვათ, $\{y_k\}\subset E_1$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა და $y_k=(a_1^{(k)}, a_2^{(k)},\ldots)$ $(k=1, 2,\ldots)$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $N=N(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი, რომ როგორიც უნდა იყოს $m,n\geqslant N$ და $p$ რიცხვები, ადგილი ექნება უტოლობას

$$\|y_m-y_n\|=\sup_p\left\|\sum_{i=1}^{p}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i\right\|<\varepsilon,$$

ე. ი.

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i\right\|<\varepsilon. \tag{4.38}$$

შევაფასოთ $|a_p^{(m)}-a_p^{(n)}|$. ერთის მხრივ, თუ ავიღებთ

$$(a_p^{(m)}-a_p^{(n)})x_p=\sum_{i=1}^{p}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i-\sum_{i=1}^{p-1}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i$$

იგივეობას და გადავალთ მასში ნორმებზე, მაშინ (4.38) უტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\|(a_p^{(m)}-a_p^{(n)})x_p\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{p}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{p-1}(a_i^{(m)}-a_i^{(n)})x_i\right\|<2\varepsilon.$$

მეორე მხრივ, შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\|(a_p^{(m)}-a_p^{(n)})x_p\|=|a_p^{(m)}-a_p^{(n)}|\,\|x_p\|.$$

ამის გამო გვექნება შემდეგი შეფასება:

$$|a_p^{(m)} - a_p^{(n)}| < \frac{2\varepsilon}{\|x_p\|}.$$

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა $\{a_p^{(m)}\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, მაშასადამე, იგი იქნება კრებადი რაიმე ნამდვილი $a_p^*$ რიცხვისაკენ. თეორემის დამტკიცების დასამთავრებლად საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ ელემენტი $y^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots) \in E_1$ და $\{y_k\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $y^*$ ელემენტისაკენ. გადავიდეთ (4.38) უტოლობაში ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, მაშინ ნებისმიერი $m \geqslant N$ და $p$ რიცხვებისათვის, გვექნება

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} (a_i^{(m)} - a_i^*) x_i \right\| < \varepsilon. \tag{4.39}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$s_p^{(m)} = \sum_{i=1}^{p} a_i^{(m)} x_i, \quad s_p^* = \sum_{i=1}^{p} a_i^* x_i$$

მაშინ, თანახმად (4.39) უტოლობისა, თუ

$$s_{p+r}^* - s_p^* = \left( s_{p+r}^{(m)} - s_p^{(m)} \right) - \left( s_{p+r}^{(m)} - s_{p+r}^* \right) + (s_p^{(m)} - s_p^*)$$

იგივეობაში გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ შეფასებას

$$\left\| s_{p+r}^* - s_p^* \right\| \leqslant \left\| s_{p+r}^{(m)} - s_p^{(m)} \right\| + 2\varepsilon, \ r \geqslant 1. \tag{4.40}$$

ვინაიდან $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(m)} x_i$ ნორმით კრებადი მწკრივია, ამიტომ დავაფიქსირებთ რა $\varepsilon > 0$ რიცხვს (ამით დაფიქსირებული იქნება, ცხადია, $N$ რიცხვიც), ნებისმიერი $\varepsilon_1 > 0$ რიცხვისათვის შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ $2\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ პირობა, რის შემდეგ დავაფიქსიროთ $m \geqslant N$ და ავირჩიოთ ნატურალური $N_1$ რიცხვი ისე, რომ როცა $p \geqslant N_1$ შესრულებული იყოს უტოლობა

$$\left\| s_{p+r}^{(m)} - s_p^{(m)} \right\| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

მაშინ, (4.40) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\left\| s_{p+r}^* - s_p^* \right\| < \varepsilon_1,$$

სადაც $p \geqslant N_1$ და $r \geqslant 1$. როგორც ვხედავთ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^* x_i$ მწკრივი ნორმით კრებადია და, ამრიგად, $y^* \in E_1$. ამასთანავე, (4.39) უტოლობიდან გვექნება

$$\sup_p \left\| \sum_{i=1}^{p} (a_i^{(m)} - a_i^*) x_i \right\| \leqslant \varepsilon, \quad m \geqslant N,$$

$$\|y_m - y^*\| < \varepsilon$$

და ამით $\{y_m\}$ მიმდევრობის ნორმით კრებადობაც დამტკიცებულია.

გავეცნოთ ახლა პირობებს, რომლებიც საკმარისი და აუცილებელია იმისათვის, რომ $\{x_i\}$ მიმდევრობა იყოს წრფივი ნორმირებული სეპარაბელური $E$ სივრცის თვლადი ბაზისი. აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების წრფივი გარსი $L^{(n)}$ სიმბოლოთი, ხოლო $x_{n+1}, x_{n+2} \cdots$ ელემენტების წრფივი ჩაკეტილი გარსი—$\widetilde{L}^{(n)}$ სიმბოლოთი. როგორც ყოველთვის, $P, Q \subset E$ სიმრავლეებს შორის მანძილი ვუწოდოთ რიცხვს:

$$\rho(P, Q) = \inf_{x \in P,\, y \in Q} \|x - y\|.$$

**თეორემა 4.36** (მ. გრინბლუმი). იმისათვის, რომ $\{x_i\}$ მიმდევრობა იყოს $E$ სივრცის სრული და თვლადი ბაზისი, საკმარისი და აუცილებელია, არსებობდეს ისეთი $\alpha > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n$ რიცხვისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\rho(\widetilde{s_1}, \widetilde{L}^n) \geqslant \alpha, \tag{4.41}$$

სადაც $\widetilde{s_1}$ არის $L^n$ წრფივი გარსის ერთეულოვანი სფეროს ზედაპირის წერტილთა სიმრავლე.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია (4.41) პირობა; ვუჩვენოთ, რომ $\{x_i\}$ არის $E$ სივრცის ბაზისი. ავაგოთ შემდეგი სახის ელემენტი:

$$x^* = x - \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i, \tag{4.42}$$

სადაც $x \in E$ ნებისმიერი ელემენტია, $\{l_i\}$ არის $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივი $l_i \in \bar{E}$ ფუნქციონალების მიმდევრობა, რომელიც $\{x_i\}$ მიმდევრობის ბიორთოგონალურია. $x^*$ ელემენტი ეკუთვნის $\widetilde{L}^{(n)}$ წრფივ გარსს. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $x^* \overline{\in} \widetilde{L}^{(n)}$, მაშინ, 4.8 თეორემის თანახმად, არსებობს მთელ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი წრფივი $F$ ფუნქციონალი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $F(x^*) = 1$ და ნებისმიერი $x \in \widetilde{L}^n$ ელემენტისათვის $F(x) = 0$. ავაგოთ ახალი ფუნქციონალი:

$$l(x) = F(x) - \sum_{i=1}^{n} l_i(x) F(x_i).$$

ცხადია, რომ ყოველი $x_l$ ელემენტისათვის გვექნება: $l(x_i) = 0$ და, ვინაიდან $\{x_i\}$ არის სრული მიმდევრობა, ამიტომ $l(x)$ იგივურად ნულის ტოლია მთელ $E$ სივრცეზე. მაგრამ, როცა $i \leqslant n$, მაშინ $l_i(x^*) = 0$ და, მაშასადამე, გვექნება $l(x^*) = F(x^*) = 1$. მიღებული წინააღმდეგობა გვარწმუნებს, რომ $x^* \in \widetilde{L}^{(n)}$,

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\widetilde{x^*} = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i,$$

მაშინ (4.42) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x=x^*+\widetilde{x}^*, \tag{4.43}$$

სადაც $x^*\in\widetilde{L}^{(n)}$, $\widetilde{x}^*\in L^{(n)}$. ახლა ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|\widetilde{x}^*\|=\left\|\sum_{i=1}^{n} l_i(x)x_i\right\|\leqslant\frac{1}{\alpha}\|x\|. \tag{4.44}$$

მართლაც, გვაქვს

$$\|x\|=\|x^*+\widetilde{x}^*\|=\|\widetilde{x}^*\|\left\|\frac{\widetilde{x}^*}{\|\widetilde{x}^*\|}+\frac{x^*}{\|x^*\|}\right\|\geqslant\|\widetilde{x}^*\|\,\rho(\widetilde{s}_1,\widetilde{L}^{(n)})\geqslant\|\widetilde{x}^*\|\,\alpha,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (4.44) ტოლობა. მაშასადამე, 4.32 თეორემის ძალით მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)x_i$$

ნორმით კრებადი იქნება. დავამტკიცოთ, რომ $x$ არის ამ მწკრივის ჯამი:

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)x_i.$$

დავუშვათ, რომ

$$y=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(y)x_i.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობა შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l_i(x)=l_i(y)$, ე. ი. $l_i(z)=0$ ნებისმიერი $i$ ნიშნაკისათვის, სადაც $z=x-y$. თანახმად (4.43) ტოლობისა, $z\in E$ ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობით

$$z=z^*+\widetilde{z}^*,$$

სადაც $z^*\in\widetilde{L}^{(n)}$, $\widetilde{z}^*\in L^{(n)}$. ვინაიდან $\widetilde{z}^*=\sum_{i=1}^{n} l_i(z)x_i$, ამიტომ $\widetilde{z}^*=\Theta$ და როგორიც უნდა იყოს ნატურალური $n$ რიცხვი $z=z^*\in\widetilde{L}^{(n)}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $z$ ეკუთვნის ყველა წრფივი ჩაკეტილი $\widetilde{L}^{(n)}$ გარსების თანაკვეთებს.

ვნახოთ რას წარმოადგენს ხსენებული თანაკვეთა. ვინაიდან $\{x_i\}$ მიმდევრობა სრულია, ამიტომ არსებობს $\eta_n=\sum_{k=1}^{m_n} c_{ik}x_{ik}$ წრფივი კომბინაციების ისეთი $\{\eta_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადი იქნება $z$ ელემენტისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\|\eta_n-z\|=0. \tag{4.45}$$

ამ პირობებში არსებობს ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ $\|\eta_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|z\|$, როცა $n > N$. ამასთანავე, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\|\eta_n - z\| = \|\eta_n\| \left\| \frac{\eta_n}{\|\eta_n\|} - \frac{z}{\|\eta_n\|} \right\| \geqslant \frac{1}{2}\|z\|\,\alpha,$$

რომელიც, (4.45) ტოლობის ძალით, შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა $z = \Theta$, ე. ი. $x = y$. ამით პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{x_i\}$ არის $E$ სივრცის ბაზისი. მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის და ნატურალური $n$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $C$ მუდმივი, რომ

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i \right\| \leqslant C\|x\|. \tag{4.46}$$

ვთქვათ, $\xi \in \widetilde{s}_1 \subset L^{(n)}$ და $\eta \in \widetilde{L}^{(n)}$ ნებისმიერი ელემენტებია. მაშინ

$$x = \xi + \eta = \sum_{i=1}^{\infty} l_i(x) x_i = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x) x_i,$$

სადაც

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i, \quad \eta = \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x) x_i.$$

(4.46) უტოლობის თანახმად გვექნება $\|\xi\| \leqslant M\|\xi + \eta\|$ და, ვინაიდან $\|\xi\| = 1$, ამიტომ $\|\xi + \eta\| \geqslant \frac{1}{C}$. ახლა ცხადია, რომ

$$\rho(\widetilde{s}_1, L^{(n)}) = \inf_{\xi \in \widetilde{s}_1,\ \eta \in \widetilde{L}^{(n)}} \|\xi - \eta\| \geqslant \frac{1}{C},$$

რომელსაც ადგილი აქვს ნებისმიერი $n$ რიცხვისათვის. ამით პირობის აუცილებლობაც დამტკიცებულია.

გავეცნოთ კიდევ შემდეგ საინტერესო საკითხს: რა პირობებში იქნება $\{x_i\} \subset E$ ბაზისი „მდგრადი". სხვანაირად, როგორია ის პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ისეთი სხვა $\{y_i\} \subset E$ მიმდევრობის არსებობას, რომელიც გარკვეული აზრით „ახლოა" $\{x_i\}$ ბაზისთან და, რომელიც აგრეთვე $E$ სივრცის ბაზისი იქნება.

ნ. ბარიმ შეისწავლა ბაზისის მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები ჰილბერტის ფუნქციონალურ $L_2$ სივრცეში. ჩვენ ქვევით მოვიყვანთ მ. კრეინის, დ. მილმანისა და მ. რუტმანის ერთ თეორემას, რომელიც შეეხება ამ საკითხს ნებისმიერ წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში.

თეორემა 4.37. ვ თ ქ ვ ა თ, $\{x_i\}$ ა რ ი ს წ რ ფ ი ვ ი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი $E$ ს ი ვ რ ც ი ს ბ ა ზ ი ს ი, ე. ი. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $x \in E$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ც ა ლ ს ა ხ ა დ დ ა ი შ ლ ე ბ ა $x = \sum_{i=1}^{\infty} l_i(x) x_i$ მ წ კ რ ი ვ ა დ. მ ა შ ი ნ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი

$\{y_i\}\subset E$ მიმდევრობა, რომლის ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობებს: $\|x_i-y_i\|\leqslant\frac{1}{2^{i+1}\,\|l_i\|}$ $(i=1, 2,\ldots)$, აგრეთვე იქნება $E$ სივრცის ბაზისი.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად ავაგოთ შემდეგი სახის ოპერატორი:

$$Ux=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)\,(x_i-y_i).$$

$Ux$ ოპერატორი განსაზღვრულია $E$ სივრცის ყოველ $x$ ელემენტზე. რაც უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი შეფასებიდან:

$$\|Ux\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|l_i(x)|\|x_i-y_i\|\leqslant\|x\|\sum_{i=1}^{\infty}\|l_i\|\,\|x_i-y_i\|\leqslant$$

$$\leqslant\|x\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{\|x\|}{2}.$$

გარდა ამისა, ცხადია, $Ux$ ოპერატორი მოქმედებს $E$ სივრციდან ისევ $E$ სივრცეში, წრფივია და $\|U\|\leqslant\frac{1}{2}$. თანახმად 3.45 თეორემისა, წრფივ $Vx$ ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია $Vx=x-Ux=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)y_i$ ტოლობით, აქვს შებრუნებული წრფივი ოპერატორი

$$V^{-1}=(e-U)^{-1}=e+U+U^2+\cdots,$$

სადაც $e$ იგივური ოპერატორია.

ვთქვათ, $y=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(y)x_i$ არის ნებისმიერი ელემენტი და დავუშვათ, რომ $y=V^{-1}x$, მივიღებთ

$$V^{-1}x=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(V^{-1}x)x_i.$$

თუ ახლა ამ ტოლობაზე გავავრცელებთ $V$ ოპერატორს და გავითვალისწინებთ, რომ $Vx_i=y_i$ $(i=1, 2,\ldots)$, გვექნება

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(V^{-1}x)y_i.$$

ამრიგად ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტი იშლება

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i$$

სახის მწკრივად. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს დაშლა არის ცალსახა. მართლაც, უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილზე გავავრცელოთ $V^{-1}$ ოპერატორი, მივიღებთ $\alpha_i=l_i(V^{-1}x)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი: ვთქვათ, $\{x_i\}$ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ბაზისია და $\{z_n\}\subset E$ არის $z_n$ ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომლის ჩაკეტილი წრფივი გარსი ემთხვევა $E$ სივრცეს. მაშინ არსებობს $E$ სივრცის სხვა $\{y_n\}$ ბაზისიც, სადაც

$$y_n=\sum_{i=1}^{s_n}\beta_{n_i}z_i,$$

$\beta_{n_i}$—გარკვეული მუდმივი რიცხვებია.

შ ე დ ე გ ი 2. ავიღოთ, კერძოდ, $C(0,1)$ სივრცე და მისი ელემენტთა მიმდევრობა $1, t, t^2,\dots,t^n,\dots$ ამ მიმდევრობის წრფივი ჩაკეტილი გარსი ემთხვევა $C(0,1)$ სივრცეს. ზემოთ ნათქვამის ძალით, ადგილი აქვს ვაიერშტრასის შემდეგ დებულებას: არსებობს პოლინომების ისეთი $\{P_i(t)\}$ მიმდევრობა, რომ ყოველი უწყვეტი $x(t)$ ფუნქცია შესაძლოა ცალსახად წარმოვადგინოთ [0,1] სეგმენტზე თანაბრად კრებადი

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_iP_i(t)$$

მწკრივის სახით.

## § 11. მაგალითები

1. ჰილბერტის ფუნქციონალურ $L_2(a, b)$ სივრცეში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ეგრეთ წოდებულ ორთოგონალურ ბაზისს. $\{x_i\}\subset L_2(a, b)$ ბაზისს ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ბ ა ზ ი ს ი ეწოდება, თუ სკალარული ნამრავლი $(x_i, x_j)=0$, როცა $i\neq j$. გარდა ამისა, თუ $\|x_i\|=1$, $i=1, 2,\dots$, მაშინ $\{x_i\}$ ბაზისს ეწოდება ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ბაზისი. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t,\dots, \cos nt, \sin nt,\dots, \tag{4.47}$$

წარმოადგენს $L_2(-\pi, \pi)$ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისს, ხოლო ფუნქციათა სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\dots \tag{4.48}$$

ამავე სივრცის ორთონორმირებული ბაზისია. ნებისმიერი $x(t)\in L_2(-\pi,\pi)$ ელემენტი ცალსახად იშლება ფურიეს მწკრივად

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

სადაც

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\,dt\quad (k=1, 2,\dots)$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[x(t)-s_n(t)]^2dt=0,$$

$$s_n(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

ვთქვათ, $\{x_i(t)\}$ არის $L_2(a, b)$ სივრცის ბაზისი. იტყვიან, რომ იგი **სრული ბაზისია** $L_2(a, b)$ სივრცეში, თუ არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული არცერთი $x(t)\in L_2(a, b)$ ელემენტი, რომელიც $\{x_i(t)\}$ ბაზისის ყოველი ელემენტის ორთოგონალურია.

**თეორემა 4.38.** *ტრიგონომეტრიული ფუნქციათა* (4.47) *სისტემა $L_2(-\pi, \pi)$ სივრცის სრული ბაზისია.*

მართლაც, ვთქვათ, $x(t)\in L_2(-\pi, \pi)$ არის ფუნქცია, რომელიც $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთოგონალურია [4.47] მიმდევრობის ყველა ელემენტისა და $x(t)\neq 0$. ვთქვათ, $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია და $y(t)$ არის $C_{L_2(-\pi,\pi)}$ სივრცის ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომ $\|x(t)-y(t)\|<\frac{\varepsilon}{3}$. ვთქვათ, $|y(t)|<\mu$, სადაც $\mu>0$. შევარჩიოთ ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\delta<\frac{\varepsilon^2}{36\mu^2}$ და $\delta<2\pi$. ავაგოთ ახლა უწყვეტი $z(t)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$z(t)=y(t), \text{ როცა } t\in[-\pi, \pi-\delta],$$
$$z(\pi)=z(-\pi)=y(-\pi),$$

ხოლო $(\pi-\delta, \pi)$ ინტერვალზე $z(t)$ განვსაზღვროთ წრფივი ინტერპოლების წესით. ამ პირობებში $|z(t)|<\mu$ და

$$\|y-z\|=\left\{\int_{\pi-\delta}^{\pi}[y(t)-z(t)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{4\mu^2\delta}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ვინაიდან $z(\pi)=z(-\pi)$, ამიტომ $z(t)$ ფუნქცია უწყვეტად და $2\pi$ პერიოდულობით შეგვიძლია გავაგრძელოთ მთელ $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე. ამის გამო $z(t)$ ფუნქციის მიმართ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვაიერშტრასის თეორემა მთელ $(-\pi, \pi)$ ინტერვალზე და კერძოდ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, რომლის თანახმადაც, არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული $A(t)$ პოლინომი, რომ

$$|z(t)-A(t)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi.$$

შევაფასოთ ახლა ნორმა:

$$\|z(t)-A(t)\|=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|z(t)-A(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ

$$\|x(t)-A(t)\|\leqslant\|x(t)-y(t)\|+\|y(t)-z(t)\|+\|z(t)-A(t)\|<\varepsilon.$$

ამრიგად, ყველა ტრიგონომეტრიული პოლინომის სიმრავლე ყველგან მკვრივია $L_2(-\pi, \pi)$ სივრცეში. ვინაიდან, თანახმად ჩვენი დაშვებისა, $x(t)$ ფუნქცია ორთოგონალურია (4.47) სისტემის ყოველი ელემენტისა, ამიტომ იგი ორთოგონალური იქნება ამ მიმდევრობის ელემენტების ნებისმიერი წრფივი კომბინაციისა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x(t)$ ორთოგონალურია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული პოლინომისა, ე. ი. $x(t)=\Theta_{L_2}$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

2. განვიხილოთ ლეჟანდრის პოლინომების $\{P_n(t)\}$ სისტემა, სადაც

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n[(t^2-1)^n]}{dt^n},$$

და $P_n(t)\in L_2(-1, 1)$. ეს სისტემა წარმოადგენს $L_2(-1, 1)$ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისს. წინა თეორემის ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $\{P_n(t)\}$ მიმდევრობა სრულია $L_2(-1, 1)$ სივრცეში.

3. $l_p$ სივრცეში ორთონორმირებულ ბაზისს წარმოადგენს შემდეგი სახის მიმდევრობა:

$$x_1=(1, 0, 0,\ldots),\ x_2=(0, 1, 0,\ldots),\ldots$$

ნებისმიერი $x\in l_p$ ელემენტი დაიშლება

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i, x)x_i$$

სახის მწკრივად, სადაც

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x_i, x)x_i\right\|=0.$$

4. $C(0, 1)$ სივრცეში ბაზისი მოძებნილი იყო შაუდერის მიერ. შაუდერის ბაზისი ეწოდება $C(0, 1)$ სივრცის ელემენტთა შემდეგ სისტემას:

$$1,\ t,\ \varphi_{01}(t),\ \varphi_{0,\frac{1}{2}}(t),\ \varphi_{\frac{1}{2},1}(t),\ \varphi_{0,\frac{1}{4}}(t),\ \varphi_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(t),\ldots,\ \varphi_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(t),\ldots$$
$$(i=0, 1,\ldots,2^k-1;\ k=0, 1, 2,\ldots),$$

სადაც $\varphi_{\alpha\beta}(t)$ არის მრავალკუთხა ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\varphi_{\alpha\beta}(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}(|x-\alpha|-|2x-\alpha-\beta|+|x-\beta|),\ \ \alpha<\beta.$$

აქ იგულისხმება, რომ $(\alpha, \beta)$ ინტერვალის გარეთ $\varphi_{\alpha\beta}(t)$ უდრის ნულს, ხოლო $(\alpha, \beta)$ ინტერვალზე $\varphi_{\alpha\beta}(t)$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის სიმაღლეა 1. ამრიგად,

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{\alpha\beta}(t)=0,\ \text{როცა}\ t<\alpha\ \text{და}\ t<\beta,\\ &\varphi_{\alpha\beta}(t)=2t-2\alpha,\ \text{როცა}\ t<\frac{\alpha+\beta}{2},\\ &\varphi_{\alpha\beta}(t)=-2t+2\beta,\ \text{როცა}\ t>\frac{\alpha+\beta}{2}.\end{aligned}\right\}$$

ნებისმიერი $x(t)$ ფუნქცია ცალსახად იშლება შაუდერის ბაზისით შემდეგ მწკრივად:

$$x(t)=x(0)+[x(1)-x(0)]t+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1} a_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(x)\,\varphi_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(t), \tag{4.49}$$

რომელიც თანაბრად კრებადია $[0, 1]$ სეგმენტზე $x(t)$ ფუნქციისაკენ. გაშლის კოეფიციენტები განისაზღვრება ტოლობებით:

$$a_{\alpha\beta}(x)=x\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}[x(\alpha)+x(\beta)].$$

მწკრივის კერძო

$$S_n(t)=x(0)+[x(1)-x(0)]t+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2^k-1} a_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(x)\,\varphi_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(t)$$

ჯამის გრაფიკი არის $x=x(t)$ ფუნქციის გრაფიკში ჩახაზული ტეხილი, რომლის წვეროები მოთავსებულია $\left(\frac{i}{2^n}, x\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)$ წერტილებში $(i=0, 1,\ldots,2^n)$.

ნ. $L_p(0, 1)$ სივრცეში ბაზისს წარმოადგენს ჰაარის ორთოგონალური ფუნქციების $\{\chi_n^{(k)}(t)\}$ სისტემა, სადაც

$$\chi_0^{0}(t)=0$$

და

$$\chi_n^{(k)}(t)=\begin{cases}\chi_n^{(1)}(0)=\sqrt{2^n},\ \chi_n^{(2^n)}(1)=-\sqrt{2^n};\\ \sqrt{2^n}, \text{ როცა } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant t<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}};\\ -\sqrt{2^n}, \text{ როცა } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<t\leqslant\dfrac{2k}{2^{n+1}};\\ 0, \ [0, 1] \text{ სეგმენტის ყველა სხვა წერტილში,}\end{cases}$$
$$(n=0, 1,\ldots,\ k=1, 2,\ldots,2^n).$$

$\chi_n^{(k)}(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია $[0, 1]$ სეგმენტზე. აი რამდენიმე ამ ფუნქციათაგან:

$$\chi_0^{(1)}(t)=\begin{cases}+1, \text{ როცა } 0\leqslant t<\dfrac{1}{2};\\ -1, \text{ როცა } \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1.\\ 0, \text{ როცა } t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\chi_1^{(1)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2}, \text{ როცა } 0\leqslant t<\dfrac{1}{4},\\ -\sqrt{2}, \text{ როცა } \dfrac{1}{4}<t\leqslant\dfrac{1}{2};\\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.}\end{cases}$$

$$\chi_1^{(2)}(t)=\begin{cases} \sqrt{2}, \text{ როცა } \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{4}; \\ -\sqrt{2}, \text{ როცა } \frac{3}{4}<t\leqslant 1; \\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.} \end{cases}$$

$$\chi_2^{(1)}(t)=\begin{cases} 2, \text{ როცა } 0\leqslant t<\frac{1}{8}; \\ -2, \text{ როცა } \frac{1}{8}<t\leqslant \frac{1}{4}; \\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.} \end{cases}$$

$$\chi_2^{(2)}(t)=\begin{cases} 2, \text{ როცა } \frac{1}{4}\leqslant t<\frac{3}{8}; \\ -2, \text{ როცა } \frac{3}{8}<t\leqslant \frac{1}{2}; \\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.} \end{cases}$$

$$\chi_2^{(3)}(t)=\begin{cases} 2, \text{ როცა } \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{5}{8}; \\ -2, \text{ როცა } \frac{5}{8}<t\leqslant \frac{3}{4}; \\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.} \end{cases}$$

$$\chi_2^{(4)}(t)=\begin{cases} 2, \text{ როცა } \frac{3}{4}\leqslant t<\frac{7}{8}; \\ -2, \text{ როცა } \frac{7}{8}<t\leqslant 1, \\ 0, \text{ ყველა სხვა წერტილში.} \end{cases}$$

ავიღოთ ჰაარის ფუნქციათა სისტემის ორი $\chi_n^{(j)}(t)$ და $\chi_n^{(k)}(t)$ ელემენტი, რომელთა ქვედა ნიშნაკები თანატოლია და $j>k\geqslant 1$. ცხადია, $\chi_n^{(j)}(t)\chi_n^{(k)}(t)\equiv 0$. ახლა ავიღოთ $\chi_m^{(k)}(t)$ და $\chi_n^{(j)}(t)$ ელემენტები, სადაც $m>n$. შევნიშნოთ, რომ $[0, 1]$ სეგმენტის ქვეინტერვალი, რომელშიც $\chi_m^{(k)}(t)\neq 0$, მთლიანად ეკუთვნის იმ ინტერვალს, რომელშიც $\chi_n^{(j)}(t)$ ფუნქცია მუდმივია და, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_0^1 \chi_m^{(k)}(t)\chi_n^{(j)}(t)dt=\lambda\int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}}\chi_m^{(k)}(t)\,dt=\lambda\left[\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}}-\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}}\right]=0.$$

გარდა ამისა, გვაქვს

$$\int_0^1 \chi_0^{(0)}(t)\chi_m^{(k)}(t)dt=0.$$

ამრიგად, ჰაარის ფუნქციების $\{\chi_n^{(k)}(t)\}=\{\varphi_n(t)\}$ სისტემა წარმოადგენს ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემას.

შაუდერმა დაამტკიცა, რომ როგორიც უნდა იყოს $x(t)\in L_p(0, 1)$ ფუნქცია, სადაც $p\geqslant 1$, მუდამ ადგილი აქვს ცალსახა დაშლას:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(t),$$

სადაც

$$c_i=\int_0^1 x(t)\varphi_i(t)dt \quad (i=0, 1, 2,\ldots)$$

და მწკრივი $p$ ხარისხით საშუალოდ კრებადია $x(t)$ ფუნქციისაკენ $[0,1]$ სეგმენტზე:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|x(t)-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t)\right|^p dt=0.$$

## თავი V

## სუსტი კრებადობა და სუსტი კომპაქტურობა

წრფივ ნორმირებულ სივრცეში დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მრავალი საკითხის გამოკვლევისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს ელემენტებისა და წრფივი ფუნქციონალების, ეგრეთ წოდებულ, სუსტად კრებადობას, რომელიც არსებითად განსხვავდება ნორმით კრებადობისაგან.

### § 1. ელემენტების სუსტი კრებადობა

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $\overline{E}$ — მისი შეუღლებული სივრცე. ვიტყვით, რომ $E$ სივრცის ელემენტთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა **სუსტად კრებადია** $x_0 \in E$ ელემენტისაკენ და დავწერთ

$$x_n \xrightarrow{ს} x_0,$$

თუ ნებისმიერი წრფივი $l \in \overline{E}$ ფუნქციონალისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n) = l(x_0).$$

$x_0$ ელემენტს ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის **სუსტი ზღვარი**.

თეორემა 5.1. *წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის ელემენტთა ნორმით კრებადი ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომლის ზღვარია $x \in E$ ელემენტი, სუსტად კრებადიც იქნება იმავე $x$ ელემენტისაკენ.*

მართლაც, ვთქვათ, $l \in E$ არის ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალი. გვაქვს:

$$|l(x_n) - l(x)| = |l(x_n - x)| \leqslant \|l\|\,\|x_n - x\|$$

და ვინაიდან პირობის თანახმად ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n) = l(x).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. დამტკიცებული თეორემის შებრუნებული თეორემა არ არის სწორი. მართლაც, ავიღოთ ჰილბერტის ფუნქციონალური $L_2(0,1)$ სივრცის ელემენტების $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა, სადაც $x_n(t) = \sin n\pi t$ $(n=1, 2,\ldots)$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს მიმდევრობა სუსტად კრებადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნულოვანი $x_0(t) = \Theta$ ელემენტისაკენ. როგორც ვიცით, $L_2(0,1)$ სივრცეში ყოველი წრფივი $l$ ფუნქციონალი ცალსახად წარმოიდგინება სკალარული ნამრავლით:

$$l(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt,$$

სადაც $x(t),\ \alpha(t)\in L_2(0,1)$. აქედან გვაქვს:

$$l(x_n)=l(\sin n\pi t)=\int_0^1 \sin n\pi t\, \alpha(t)dt,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $l(x_n)$ $(n=1,2,\dots)$ არის $\alpha(t)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები და, მაშასადამე $\lim\limits_{n\to\infty} l(x_n)=0$. ამრიგად, $x_n(t)=\sin n\pi t \overset{\text{ს}}{\to} \Theta$, როცა $n\to\infty$.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ იგივე მიმდევრობა არ არის ნორმით კრებადი $\Theta$ ელემენტისაკენ. მართლაც,

$$\|x_n-\Theta\|=\|x\|=\left\{\int_0^1 \sin^2 n\pi t\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**თეორემა 6.2.** *თუ $E$ სასრული განზომილების წრფივი ნორმირებული სივრცეა, მაშინ $x_0\in E$ ელემენტისაკენ სუსტად კრებადი ყოველი $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა ნორმით კრებადიც იქნება იმავე $x_0$ ელემენტისაკენ.*

თეორემის დასამტკიცებლად ვიგულისხმოთ, რომ $\xi_1,\dots,\xi_k$ არის $E$ სივრცის ერთ-ერთი ბაზისი, სადაც $k$ აღნიშნავს $E$ სივრცის განზომილებას. გვაქვს

$$x_n=\alpha_1^{(n)}\xi_1+\dots+\alpha_k^{(n)}\xi_k,$$
$$x_0=\alpha_1^{(0)}\xi_1+\dots+\alpha_k^{(0)}\xi_k,$$

სადაც $\alpha_1^{(n)},\dots,\alpha_k^{(n)},\alpha_1^{(0)},\dots,\alpha_k^{(0)}$ ცალსახად განსაზღვრული რიცხვებია. ავიღოთ ისეთი წრფივი $l_i\in\overline{E}$ ფუნქციონალი, რომ $l_i(\xi_i)=1$ და $l_i(\xi_k)=0$, როცა $i\neq k$. მაშინ, გვექნება: $l_i(x_n)=\alpha_i^{(n)}$ და $l_i(x_0)=\alpha_i^{(0)}$. ვინაიდან $\{x_n\}$ არის $x_0$ ელემენტისაკენ სუსტად კრებადი მიმდევრობა, ამიტომ ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალისათვის და, კერძოდ $l_i$ ფუნქციონალისათვის, ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} l_i(x_n)=l_i(x_0),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_i^{(n)}=\alpha_i^{(0)}\qquad (i=1,2,\dots,k).$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n\geqslant N$, მაშინ

$$|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{\mu k}\qquad (i=1,\dots,k),$$

სადაც $\mu=\sup\limits_i\|\xi_i\|$. ახლა პირდაპირ ჩანს, რომ

$$\|x_n-x_0\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(0)})\xi_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i^{(0)}|\,\|\xi_i\|<\varepsilon.$$

$\varepsilon$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.3. ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $\overline{E}$—მისი შეუღლებული სივრცე. იმისათვის, რომ $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იყოს $x_0\in E$ ელემენტისაკენ აუცილებელია და საკმარისი შესრულებული იყოს შემდეგი ორი პირობა;

1) ნორმების $\{\|x_n\|\}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული,

2) ყოველი წრფივი $l_\Gamma\in\Gamma$ ფუნქციონალისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას: $\lim\limits_{n\to\infty} l_\Gamma(x_n)=l_\Gamma(x_0)$, სადაც $\Gamma\subset\overline{E}$ არის $\overline{E}$ სივრცეში ყველგან მკვრივი სიმრავლე.

ჯერ დავამტკიცოთ პირობების აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{x_n\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $x_0$ ელემენტისაკენ. მაშინ ცხადია, რომ $\overline{E}$ სივრცის ყოველი წრფივი ფუნქციონალისათვის, კერძოდ $\Gamma$ სიმრავლის კუთვნილი ყოველი წრფივი ფუნქციონალისათვის, უნდა შესრულებული იყოს 2) პირობა. რაც შეეხება 1) პირობის აუცილებლობას, იგი უშუალოდ გამომდინარეობს IV თავში დამტკიცებული ლემიდან.

დავამტკიცოთ ახლა პირობების საკმარისობა. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ 1) და 2) პირობები შესრულებულია. ვთქვათ, $\mu=\sup[\|x_n\|,\|x_0\|]$ $(n=1,2,\ldots)$. თანახმად 1) პირობისა, $\mu$ სასრულია. ავიღოთ ნებისმიერი წრფივი $l\in\overline{E}$ ფუნქციონალი. ვინაიდან $\Gamma$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $\overline{E}$ სივრცეში, ამიტომ როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, არსებობს ისეთი ელემენტი $l_\Gamma\in\Gamma$, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\|l-l_r\|<\frac{\varepsilon}{2\mu}.$$

შემდეგ,

$$l(x_n-x_0)=l(x_n-x_0)+l_\Gamma(x_n-x_0)-l_\Gamma(x_n-x_0)$$

იგივეობაში გადავიდეთ ნორმებზე და გამოვიყენოთ წინა უტოლობა, გვექნება

$$|l(x_n-x_0)|\leqslant|(l-l_\Gamma)(x_n-x_0)|+|l_\Gamma(x_n-x_0)|\leqslant\|l-l_\Gamma\|\,\|x_n-x_0\|+$$
$$+|l_\Gamma(x_n-x_0)|<\frac{\varepsilon}{2\mu}(\|x_n\|+\|x_0\|)+|l_\Gamma(x_n-x_0)|\leqslant\varepsilon+|l_\Gamma(x_n-x_0)|.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty} l_\Gamma(x_n-x_0)=0$ და $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ საბოლოოდ წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n)=l(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.4. თუ $\{x_n\}\subset E$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია სუსტი $x_0\in E$ ზღვრისაკენ, მაშინ არსებობს ისეთი $\{y_n\}\subset E$ მიმდევრობა, რომლის წევრები $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების წრფივ კომბინაციებს წარმოადგენს და

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_0\|=0.$$

სხვა სიტყვებით, ეს თეორემა ასეც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: თუ $x_n\xrightarrow{b}x_0$, მაშინ $x_0$ ეკუთვნის $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების წრფივ $\overline{L}$ ჩაკეტილ გარსს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, რომ $x_0$ არ ეკუთვნის $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების წრფივ ჩაკეტილ $\bar{L}$ გარსს. მაშინ, 4.8 თეორემის ძალით არსებობს ისეთი წრფივი $l \in \overline{E}$ ფუნქციონალი, რომ $l(x_0)=1$ და $l(x_n)=0$ $(n=1, 2, \ldots)$. აქედან პირდაპირ ჩანს, რომ $\lim_{n\to\infty} l(x_n) \neq l(x_0)$, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემა 5.5. თუ $x_0 \in E$ არის $\{x_n\} \subset E$ მიმდევრობის სუსტი ზღვარი, მაშინ $\|x_0\| \leqslant \underline{\lim}_n \|x_n\|$.

5.3 თეორემის თანახმად $\overline{\lim}_n \|x_n\|$ სასრულია. დავუშვათ თეორემის საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, $\|x_0\| > \underline{\lim}_n \|x_n\|$. მაშინ, იარსებებს ისეთი $c$ რიცხვი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$\|x_0\| > c > \underline{\lim}_n \|x_n\|.$$

მაშასადამე, არსებობს ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ როცა $n \geqslant N$, მაშინ

$$\|x_0\| > c \geqslant \|x_n\|.$$

ახლა განვიხილოთ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $l_0 \in \overline{E}$ ფუნქციონალი, რომელსაც ექნება შემდეგი თვისებები:

$$1)\ \|l_0\| = 1,$$
$$2)\ l_0(x_0) = \|x_0\|.$$

4.7 თეორემის თანახმად, არსებობს $l_0$ ფუნქციონალი, რომელსაც აქვს 1) და 2) თვისებები. ამ ფუნქციონალისათვის გვექნება:

$$l_0(x_n) \leqslant \|l_0\|\ \|x_n\| = \|x_n\| < c \ (n=1, 2, \ldots).$$

ამრიგად, მივიღებთ $\lim_{n\to\infty} l_0(x_n) \neq l_0(x_0)$, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემა 5.6. ვთქვათ, $U(x)$ წრფივი ოპერატორია, რომელიც წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. თუ $\{x_n\} \subset E_1$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია სუსტი $x_0 \in E_1$ ზღვრისაკენ, მაშინ $\{U(x_n)\} \subset E_2$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იქნება სუსტი $U(x_0) \subset E_2$ ზღვრისაკენ.

აღვნიშნოთ $E_1$ და $E_2$ სივრცეების შეუღლებული სივრცეები შესაბამისად $\overline{E}_1$-ით და $\overline{E}_2$-ით. ავიღოთ ნებისმიერი წრფივი $l \in \overline{E}_2$ ფუნქციონალი. იგი განსაზღვრულია მთელ $E_2$ სივრცეზე. მაშინ, გვექნება: $l(U(x_n)) = \varphi(x_n)$. შევნიშნოთ, რომ $\varphi$ არის $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი. მართლაც, თუ $x', x'' \in E_1$ ნებისმიერი ორი ელემენტია, მაშინ

$$\varphi(x'+x'') = l(U(x'+x'')) = l(U(x') + U(x'')) = l(U(x')) + \\ + l(U(x'')) = \varphi(x') + \varphi(x'').$$

გარდა ამისა, $\varphi(x)$ ფუნქციონალი ნორმით უწყვეტიც არის მთელ $E_1$ სივრცეზე. მართლაც, ვთქვათ, $\{y_n\} \subset E_1$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $y^* \in E_1$ ელემენტისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y^*\| = 0.$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi(y_n)-\varphi(y^*)|=\lim_{n\to\infty}|l(U(y_n))-l(U(y^*))|=0,$$

ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty}\|U(y_n)-U(y^*)\|=0.$$

ამრიგად, დამტკიცებულია, რომ $\varphi$ არის $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი და, მაშასადამე, $\varphi\in\overline{E_1}$. ისიც ცხადია, რომ $l(U(x_0))=\varphi(x_0)$. ვინაიდან, პირობის თანახმად, $x_n\xrightarrow{\text{ს}}x_0$ და $\varphi$ წრფივი ფუნქციონალია, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x_0)$, ანუ $\lim l(U(x_n))=l(U(x_0))$. გავიხსენოთ ახლა, რომ $l$ არის ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალი $\overline{E}_2$ სივრციდან, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $U(x_n)\xrightarrow{\text{ს}}U(x_0)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $E$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა და $\overline{E}$—მისი შეუღლებული სივრცე. $E$ სივრცის ელემენტების მიმდევრობის სუსტი კრებადობის ანალოგიურად, შესაძლებელია $\overline{E}$ სივრცის კუთვნილი წრფივი ფუნქციონალების მიმდევრობის სუსტი კრებადობის განსაზღვრა. სახელდობრ, წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_n\}\subset\overline{E}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია წრფივი $l_0\in\overline{E}$ ფუნქციონალისაკენ, თუ ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}l_n(x)=l_0(x).$$

წრფივი ფუნქციონალების სუსტი კრებადობის ფაქტს ასეც აღნიშნავენ: $l_n\xrightarrow{\text{ს}}l_0$. წრფივ $l_0$ ფუნქციონალს უწოდებენ $\{l_n\}$ მიმდევრობის სუსტ ზღვარს.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_n\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია სუსტი $l_0$ ზღვრისაკენ, მაშინ ყოველი მისი ქვემიმდევრობაც სუსტად კრებადია იმავე $l_0$ ფუნქციონალისაკენ. გარდა ამისა, წრფივ ფუნქციონალთა მიმდევრობას შესაძლოა ჰქონდეს მხოლოდ ერთი სუსტი ზღვარი.

**თეორემა 5.7.** თუ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_n\}\subset\overline{E}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია წრფივი $l_0\in\overline{E}$ ფუნქციონალისაკენ, მაშინ $\{\|l_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ამ თეორემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 251 გვერდზე დამტკიცებული ლემიდან.

**თეორემა 5.8.** იმისათვის, რომ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_n\}\subset\overline{E}$ მიმდევრობა იყოს სუსტად კრებადი წრფივი $l_0\in\overline{E}$ ფუნქციონალისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

1) ნორმების $\{\|l_n\|\}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}l_n(x)=l_0(x)$, ყოველი $x\in\Omega$ ელემენტისათვის, სადაც $\Omega\subset E$ არის სიმრავლე, რომლის ელემენტების ყველა წრფივი კომბინაციების სიმრავლე ყველგან მკვრივია $E$ სივრცეში.

დავამტკიცოთ პირობების აუცილებლობა. ვინაიდან $l_n \xrightarrow{b} l_0$, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in \widetilde{S}_1(\Theta, 1)$ ელემენტისათვის, ერთის მხრივ, ადგილი ექნება უტოლობას:

$$|l_n(x)| < \varepsilon + |l_0(x)| \leqslant \varepsilon + \|l_0\|.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს

$$\|l_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |l_n(x)| \leqslant \varepsilon + \|l_0\|.$$

ამრიგად, ნორმების $\{\|l_n\|\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. რაც შეეხება 2) პირობას, მისი აუცილებლობა თავისთავად ცხადია.

გადავიდეთ პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $x$ არის $E$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. ავიღოთ $x_0$ ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს $\Omega$ სიმრავლის ელემენტების წრფივ კომბინაციას და რომელიც დააკმაყოფილებს უტოლობას

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2\nu},$$

სადაც $\nu = \sup\{\|l_n\|, \|l_0\|\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ და $\varepsilon$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. გადავიდეთ ახლა

$$l_n(x) - l_0(x) = [l_n(x) - l_n(x_0)] + [l_n(x_0) - l_0(x_0)] + [l_0(x_0) - l_0(x)]$$

იგივეობაში აბსოლუტურ მნიშვნელობებზე, გვექნება

$$|l_n(x) - l_0(x)| \leqslant |l_n(x_0) - l_0(x_0)| + (\|l_n\| + \|l_0\|)\,\|x - x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant |l_n(x_0) - l_0(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

თანახმად თეორემის 2) პირობისა, მოცემული $\varepsilon$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N = N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n \geqslant N$, მაშინ

$$|l_n(x_0) - l_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, წინა უტოლობიდან, როცა $n \geqslant N$, მივიღებთ

$$|l_n(x) - l_0(x)| < \varepsilon.$$

ვინაიდან უკანასკნელ უტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის, ამიტომ $l_n \xrightarrow{b} l_0$ და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 5.9.** თუ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცე სეპარაბელურია, მაშინ $E$ სივრცეზე განსაზღვრული ნორმით შემოსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალების ყოველი $\{l_n\} \subset \overline{E}$ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

**დამტკიცება.** ვინაიდან $E$ სივრცე სეპარაბელურია, ამიტომ არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი $\{x_n\} \subset E$ მიმდევრობა. ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $\|l_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. ეს დაშვება, $l_n$ ფუნქციონალების ერთგვაროვნების გამო, არ დაარღვევს თეორემის ზოგადობას. რადგან, პირობის თანახმად, $\{l_n\}$ არის $E$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალთა ნორმით შემო-

საზღვრული მიმდევრობა. ამიტომ ნამდვილ რიცხვთა $\{l_n(x_1)\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და შესაძლებელია მისგან ისეთი $\{l_n^{(1)}\}\subset\{l_n\}$ ქვემიმდევრობის გამოყოფა, რომ რიცხვთა $\{l_n^{(1)}(x_1)\}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი. ამის შემდეგ წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_n^{(1)}\}$ მიმდევრობიდან გამოვყოთ ისეთი ქვემიმდევრობა $\{l_n^{(2)}\}\subset\{l_n^{(1)}\}$, რომ რიცხვითი $\{l_n^{(2)}(x_2)\}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი. თუ გავაგრძელებთ ზემოთ აღწერილ პროცესს, მივიღებთ წრფივ ფუნქციონალთა მიმდევრობებს

$$\left.\begin{matrix} l_1^{(1)}, & l_2^{(1)}, & \ldots, & l_n^{(1)}, & \ldots \\ l_1^{(2)}, & l_2^{(2)}, & \ldots, & l_n^{(2)}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1^{(k)}, & l_2^{(k)}, & \ldots & l_n^{(k)}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \tag{5.1}$$

ამ მიმდევრობებისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ყოველი მიმდევრობა, დაწყებული მეორე მიმდევრობიდან, არის წინა მიმდევრობის ქვემიმდევრობა და, ამიტომ კრებადია ყოველ ელემენტზე, რომელზედაც კრებადია მისი წინამავალი მიმდევრობა. ახლა (5.1) მიმდევრობიდან გამოვყოთ დიაგონალური მიმდევრობა: $l_1^{(1)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_n^{(n)}, \ldots$ და შევნიშნოთ, რომ რიცხვითი

$$l_1^{(1)}(x_n),\ l_2^{(2)}(x_n), \ldots \tag{5.2}$$

მიმდევრობა კრებადი იქნება $E$ სივრცეში ყველგან მკვრივ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყოველ $x_n$ ელემენტზე.

ვთქვათ, $x\in E$ ნებისმიერი ელემენტია. ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_k$ ელემენტი, რომ

$$\|x-x_k\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ამასთანავე, როგორიც უნდა იყოს წრფივი $l<\overline{E}$ ფუნქციონალი, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$|l(x)-l(x_k)|=|l(x-x_k)|\leqslant\|l\|\ \|x-x_k\|.$$

კერძოდ, ვინაიდან $\|l_n^{(n)}\|\leqslant1$, ამიტომ

$$|l_n^{(n)}(x_k)-l_n^{(n)}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(n=1, 2, \ldots).$$

ახლა ისიც გამოვიყენოთ, რომ (5.2) მიმდევრობა კრებადია ყოველ $x_k$ ელემენტზე. მაშასადამე, აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N=N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n'$, $n''\geqslant N$, გვექნება

$$\left|l_{n'}^{(n')}(x_k)-l_{n''}^{(n'')}(x_k)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ავიღოთ იგივეობა:

$$l_{n'}^{(n')}(x)-l_{n''}^{(n'')}(x)=l_{n'}^{(n')}(x)-l_{n'}^{(n')}(x_k)+l_{n'}^{(n')}(x_k)-l_{n''}^{(n'')}(x_k)+$$
$$+l_{n''}^{(n'')}(x_k)-l_{n''}^{(n'')}(x)$$

და მის ორივე ნაწილში გადავიდეთ აბსოლუტურ მნიშვნელობებზე. თუ ამის შემდეგ წინა ორ უტოლობას გამოვიყენებთ, გვექნება

$$\left| l_{n'}^{(n')}(x)-l_{n''}^{(n'')}(x)\right|\leqslant\left| l_{n'}^{(n')}(x)-l_{n'}^{(n')}(x_k)\right|+\left| l_{n'}^{(n')}(x_k)-l_{n''}^{(n'')}(x_k)\right|+$$

$$+\left| l_{n''}^{(n'')}(x_k)-l_{n''}^{(n'')}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

ამრიგად, $\{l_n^{(n)}\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია გარკვეული წრფივი $l_0\in\overline{E}$ ფუნქციონალისაკენ და იმის გამო, რომ $\{l_n^{(n)}\}\subset\{l_n\}$, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

ნებისმიერ ω სიმრავლეს **სუსტად კომპაქტური** სიმრავლე ეწოდება $\overline{E}$ სივრცეში, თუ მისი ელემენტების ყოველი უსასრულო მიმდევრობიდან შესაძლებელია გამოვყოთ $\overline{E}$ სივრცის გარკვეული ელემენტისაკენ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

5.9 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $E$ სეპარაბელური სივრცეა, მაშინ მისი შეუღლებული $\overline{E}$ სივრცის ყოველი ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლე იქნება სუსტად კომპაქტური $E$ სივრცეში.

## § 2. ელემენტების სუსტი კრებადობის პირობები ზოგიერთ სივრცეში

ამ პარაგრაფში შევისწავლით ელემენტების სუსტი კრებადობის აუცილებელსა და საკმარის პირობებს ზოგიერთ მნიშვნელოვან წრფივ ნორმირებულ სივრცეში.

1. დავიწყოთ უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ სივრცის ელემენტების სუსტი კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების შესწავლით.

**თეორემა 5.10.** იმისათვის, რომ უწყვეტ ფუნქციათა $\{x_n(t)\}\subset C(0,1)$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იყოს $x_0(t)\in C(0,1)$ ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს შემდეგი ორი პირობა:

1) $|x_n(t)|\leqslant\mu$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$, სადაც $\mu$ დადებითი რიცხვია;

2) $\{x_n(t)\}$ კრებადია $x_0(t)$ ფუნქციისაკენ $[0,1]$ სეგმენტის ყოველ $t$ წერტილზე.

ვთქვათ, $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $x_0(t)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ 5.3 თეორემის თანახმად ამ მიმდევრობის ნორმების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია: $\sup\limits_n\|x_n\|=\mu<\infty$, საიდანაც მივიღებთ $\|x\|\leqslant\mu$ $(n=1, 2, \ldots)$.

ამით 1) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია. 2) პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ $C(0,1)$ სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგი სახის წრფივი $l$ ფუნქციონალი: $l(x)=x(t)$. ვინაიდან $x_n(t)\xrightarrow{b}x_0(t)$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} l(x_n)=l(x_0)$, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

ახლა დავამტკიცოთ 1) და 2) პირობების საკმარისობა. როგორც ვიცით, ყოველი წრფივი $l$ ფუნქციონალი $C(0,1)$ სივრცეში გამოისახება სტილტიესის ინტეგრალით:

$$l(x)=\int_0^1 x(t)dg(t),$$

სადაც $g(t)$ არის $l$ ფუნქციონალით ცალსახად განსაზღვრული ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით [0,1] სეგმენტზე. საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ როცა შესრულებულია 1) და 2) პირობები, მაშინ, როგორიც უნდა იყოს $g(t)$ ფუნქცია [0,1] სეგმენტზე შემოსაზღვრული ცვლილებებით, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)dg(t)=\int_0^1 x_0(t)dg(t). \tag{5.3}$$

ცნობილია, რომ $g(t)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $g(t)=g_1(t)-g_2(t)$, სადაც $g_1(t)$ და $g_2(t)$ არის [0,1] სეგმენტზე არაკლებადი ფუნქციები. ახლა, თუ $g(t)$ ფუნქციას ჩავწერთ $g(t)=[g_1(t)+t]-[g_2(t)+t]$ სხვაობის სახით, მაშინ იგი წარმოდგენილი იქნება ორი მკაცრად ზრდადი ფუნქციის სხვაობით. მაგრამ, მაშინ უწყვეტი $x(t)\in C(0,1)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int_0^1 x(t)dg(t)=\int_{g(0)}^{g(1)} x[g^{-1}(\gamma)]d\gamma, \tag{5.4}$$

სადაც მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ლებეგის ინტეგრალს, $g^{-1}(\gamma)$ არის $g(t)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, განსაზღვრული $[g(0), g(1)]$ შუალედში. ამასთანავე, თუ $t_0\in[0,1]$ წარმოადგენს $g(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილს, მაშინ $[g(t_0-0),\ g(t_0+0)]$ შუალედში $g^{-1}(\gamma)=t_0$. ჩვენი $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის უწყვეტი $x_n(t)$ ფუნქციებისათვის (5.4) ტოლობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_0^1 x_n(t)\,dg(t)=\int_{g(0)}^{g(1)} x_n[g^{-1}(\gamma)]d\gamma \quad (n=1,2,\ldots).$$

ვინაიდან ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ლებეგის ინტეგრალია და $x_n(t)$ ფუნქციები კი ერთობლივ შემოსაზღვრული, ამიტომ მარჯვენა ნაწილში შესაძლოა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გადავიდეთ ზღვარზე როცა $n\to\infty$. ამრიგად, არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n)=l(x_0).$$

$l$ ფუნქციონალის ნებისმიერობის გამო, ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_n \xrightarrow{\text{ს}} x_0$ და თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ გავიხსენებთ, რომ $C(0,1)$ სივრცის ელემენტების $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ნორმით კრებადობა $x_0(t)\in C(0,1)$ ელემენტისაკენ წარმოადგენს ამ მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას $x_0(t)$ უწყვეტი ფუნქციისაკენ და გამოვიყენებთ 5.4 და 5.10 თეორემებს, დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების მართებულობაში:

თ უ $\{x_n(t)\}\in C(0,1)$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ე რ თ ო ბ ლ ი ვ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა [0,1] ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე დ ა ი გ ი ა მ ს ე გ მ ე ნ ტ ი ს ყ ო ვ ე ლ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე კ რ ე ბ ა დ ი ა უ წ ყ ვ ე ტ ი $x_0(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $\{y_n(t)\}\subset C(0,1)$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა, რ ო მ ე ლ ი ც თ ა ნ ა ბ რ ა დ (ე. ი. ნ ო რ მ ი თ) კ რ ე ბ ა დ ი ი ქ ნ ე ბ ა $x_0(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა კ ე ნ, ს ა დ ა ც $y_n(t)$ გ ა მ ო ი ს ა-

ხება $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის ელემენტების შემდეგი წრფივი კომბინაციებით:

$$y_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}x_i(t),$$

სადაც $\alpha_i^{(n)}$ კოეფიციენტები გარკვეული მუდმივი რიცხვებია.

2. ავიღოთ ახლა $l_p(p>1)$ სივრცე. გავეცნოთ ამ სივრცეში ელემენტების მიმდევრობის სუსტი კრებადობის აუცილებელსა და საკმარის პირობებს.

თეორემა 5.11. განვიხილოთ $\{x_n\}\subset l_p$ მიმდევრობა, სადაც $x_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_i^{(n)}, \dots)=(x_i^{(n)})$ $(n=1, 2, \dots)$. იმისათვის, რომ $\{x_n\}$ სუსტად კრებადი იყოს $x_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots)$ ელემენტისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

1) ნორმების $\{\|x_n\|\}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული;

2) როგორიც უნდა იყოს $i=1, 2, \dots$ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i^{(0)}$.

თეორემის დასამტკიცებლად $l_p$ სივრცის შეუღლებულ $l_q=\overline{l_p}$ სივრცეში განვიხილოთ ყველგან მკვრივი $\Gamma$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $l_p$ სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგი სახის წრფივი ფუნქციონალები $l^{(k)}=(\underbrace{0, 0, \dots 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)$. თანახმად 5.3 თეორემისა, იმისათვის, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იყოს $x_0$ ელემენტისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია, შესრულებული იყოს 1) პირობა და ნებისმიერი წრფივი $l^{(k)}\in\Gamma$ ფუნქციონალისათვის გვქონდეს: $\lim\limits_{n\to\infty} l^{(k)}(x_n)=l^{(k)}(x_0)$, $(k=1, 2, \dots)$. ვინაიდან $l^{(k)}(x_n)=x_k^{(n)}$ და $l_k^{(x_0)}=x_k^{(0)}$, ამიტომ წინა ტოლობა ასეც ჩაიწერება: $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}=x_k^{(0)}$. თეორემა დამტკიცებულია.

3. $L_p(0,1)$ $(p>1)$ სივრცეში სუსტი კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მოძებნილი იყო ფ. რისის მიერ. სახელდობრ, ფ. რისმა დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა 5.12. იმისათვის, რომ ფუნქციათა $\{x_n(t)\}\subset L_p(0,1)$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იყოს $x_0(t)\in L_p(0,1)$ ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი ორი პირობა:

1) ნორმების $\{\|x_n(t)\|\}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული;

2) ნებისმიერი $\tau\in[0,1]$ წერტილისათვის შესრულებული იყოს ტოლობა:

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^{\tau} x_n(t)dt=\int_0^{\tau}x_0(t)dt.$$

1) პირობა ისეთივეა, როგორიც ზოგად 5.3 თეორემაში.

2) პირობის აუცილებლობისა და საკმარისობის საჩვენებლად დავანაწილოთ [0,1] სეგმენტი $\tau_0=0<\tau_1<\tau_2\cdots<\tau_{n-1}<\tau_n=1$ წერტილების საშუალე-

ბით მცირე შუალედებად. განვსაზღვროთ [0,1] სეგმენტზე $\alpha_\tau(t)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\alpha_\tau(t)=\begin{cases}1, & \text{როცა } t\in[0,\ \tau]\\ 0, & \text{როცა } t\in(\tau,\ 1).\end{cases}$$

მაშინ ფუნქციათა $\{y_n(t)\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$y_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[\alpha_{\tau_i}(t)-\alpha_{\tau_{i-1}}(t)\right]$$

$\mu_i$ მუდმივებია, წარმოადგენს ყველგან მკვრივ სიმრავლეს $L_p$ სივრცის შეუღლებულ $L_q=\overline{L}_p$ სივრცეში. 5.3 თეორემის თანახმად, იმისათვის, რომ $x_n(t)\xrightarrow{b}x_0(t)$ აუცილებელი და საკმარისია. 1) პირობასთან ერთად, შესრულებული იყოს აგრეთვე პირობა:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha_\tau(t)dt=\int_0^1 x_0(t)\alpha_\tau(t)dt,$$

ანუ $\alpha_\tau(t)$ ფუნქციის განსაზღვრის ძალით, ნებისმიერი $\tau\in[0,1]$ წერტილისათვის შესრულებული იყოს პირობა:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\tau x_n(t)dt=\int_0^\tau x_0(t)dt.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## § 3. სუსტად კომპაქტური სიმრავლე და ფუნქციონალის სუსტი უწყვეტობა

როგორც ცნობილია, უწყვეტი ფუნქცია $n$—განზომილებიანი სივრცის ყოველ შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ სიმრავლეზე, არის შემოსაზღვრული და მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა (ზუსტ ქვედა) საზღვარს. ფუნქციონალისათვის, რომელიც განსაზღვრულია უსასრულო განზომილების სივრცეში, ეს დებულება არ არის მართებული. თუ $f(x)$ არის წრფივ ნორმირებულ $E$ სივრცეში განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალი, ეს არ ნიშნავს, რომ იგი $\widetilde{S}(o,\ r)\subset E$ სფეროში შემოსაზღვრულია და მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა (ზუსტ ქვედა) საზღვარს.

მაგალითად, $\widetilde{S}_1(\Theta,1)\subset C(0,1)$ სფეროში განსაზღვრული

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt$$

ფუნქციონალი, სადაც $x(0)=x(1)=1$, არ მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს. მართლაც, ერთის მხრივ, როგორც ადვილი გამოთვლები გვარწმუნებს, თუ $x(t)=t^n$, მაშინ $f(x)=\dfrac{1}{2n+1}$ და $\inf\limits_{|x|\leqslant1}f(x)=0$. მეორეს მხრივ, (0, 0) და (1, 1) წერტილებზე გამავალი ყოველი უწყვეტი წირისათვის $f(x)>0$. ეს

გამოწვეულია იმით, რომ აქ კონკურენციაში დაშვებულ წირთა ოჯახი არ არის კომპაქტური.

ამასთან დაკავშირებით თავს იჩენს ე. წ. ფუნქციონალის სუსტი უწყვეტობა და სიმრავლის სუსტი კომპაქტურობის ცნებანი. ვთქვათ, $M \subset E$ ნებისმიერი სიმრავლეა. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრები:

**განსაზღვრა 1.** ვიტყვით, რომ $M \subset E$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციონალი სუსტად უწყვეტია $x_0 \in M$ წერტილზე, თუ ნებისმიერი $\{x_n\} \subset M$ მიმდევრობისათვის, რომელიც სუსტად კრებადია რაიმე $x_0 \in M$ ელემენტისაკენ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

როცა $f(x)$ სუსტად უწყვეტია $M$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე, მაშინ უბრალოთ ვიტყვით, რომ $f(x)$ სუსტად უწყვეტია $M$ სიმრავლეზე.

**განსაზღვრა 2.** ვიტყვით, რომ $M \subset E$ სიმრავლე სუსტად კომპაქტურია, თუ ნორმით შემოსაზღვრული ყოველი $\{x_n\} \subset M$ მიმდევრობიდან შესაძლოა გამოვყოთ $x_0 \in M$ წერტილისაკენ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, თუ წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცე ისეთია, რომ მისი ყოველი ნორმით შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე სუსტად კომპაქტურია, მაშინ სუსტად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი $M$ სიმრავლეზე შემოსაზღვრული იქნება და ამ სიმრავლეზე უსათუოდ მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა (ზუსტ ქვედა) საზღვარს.

დავამტკიცოთ ჯერ შემდეგი მნიშვნელოვანი

**თეორემა 5.13.** ნორმირებული წრფივი სეპარაბელური $E$ სივრცის შეუღლებული $\overline{E}$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი სფერო კომპაქტურია.

საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ $\overline{E}$ სივრცის $\widetilde{S}_1 = \widetilde{S}(\Theta.1)$ სფეროსათვის. ვინაიდან $E$ სეპარაბელური სივრცეა, ამიტომ ამ სივრცეში არსებობს ყველგან მკვრივი თვლადი $\{x_n\}$ მიმდევრობა. ავიღოთ წრფივი $l_n$ ფუნქციონალების ნებისმიერი $\{l_n\} \subset \widetilde{S}_1 \subset \overline{E}$ მიმდევრობა. მაშინ ადგილი ექნება შეფასებას

$$|l_n(x_1)| \leqslant \|l_n\| \, \|x_1\| \leqslant \|x_1\|$$

და, მაშასადამე, $\{l_n(x_1)\}$ არის შემოსაზღვრული რიცხვთა მიმდევრობა. ამრიგად, $\{l_n(x_1)\}$ მიმდევრობიდან შესაძლოა გამოვყოთ კრებადი $\{l_{n_k^{(1)}}(x_1)\}$ ქვემიმდევრობა. ამასთანავე, გვაქვს

$$|l_{n_k^{(1)}}(x_2)| \leqslant \|x_2\|$$

და, მაშასადამე, რიცხვთა $\{l_{n_k^{(1)}}(x_2)\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. გამოვყოთ უკანასკნელი მიმდევრობიდან კრებადი $\{l_{n_k^{(2)}}\}$ ქვემიმდევრობა და განვაგრძოთ მოყვანილი მსჯელობა უსასრულოდ. ასეთი წესით გამოყოფილი ყოველი მიმდევრობა წინა მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა და, მაშასადამე, კრებადია ყველა იმ ელემენტზე, რომლებზედაც კრებადი იყო წინა მიმდევრობა.

განვიხილოთ ახლა ფუნქციონალთა დიაგონალური $\{l_{n_k^{(k)}}\}$ მიმდევრობა, ვინაიდან $l_{n_m^{(m)}}, l_{n_{m+1}^{(m+1)}}, \ldots$ მიმდევრობა კრებადია ყოველ $x_m$ ელემენტზე, ამიტომ ფუნქციონალთა $\{l_{n_k^{(k)}}\}$ მიმდევრობა კრებადია $E$ სივრცეში მოთავსებულ ყველგან მკვრივ თვლადი $\{x_n\}$ სიმრავლის ყოველ ელემენტზე.

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და $x \in E$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x_k$ ელემენტი, რომ $\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$. მაშასადამე, ნებისმიერი წრფივი $l \in \overline{E}$ ფუნქციონალისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|l(x_k) - l(x)| \leqslant \|l\| \, \|x - x_k\| < \|l\| \frac{\varepsilon}{3}.$$

კერძოდ, $\{l_{n_m^{(m)}}\} \subset \widetilde{S}_1$ მიმდევრობისათვის, გვექნება

$$|l_{n_m^{(m)}}(x_k) - l_{n_m^{(m)}}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

გარდა ამისა, არსებობს ისეთი ნატურალური $N$ რიცხვი, რომ როცა $m$ და $p > N$, მაშინ

$$|l_{n_m^{(m)}}(x_k) - l_{n_p^{(p)}}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

უკანასკნელი უტოლობების ძალით, ყველა $m, p \geqslant N$ ნიშნაკისათვის და ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|l_{n_m^{(m)}}(x) - l_{n_p^{(p)}}(x)| \leqslant |l_{n_m^{(m)}}(x) - l_{n_m^{(m)}}(x_k)| + |l_{n_m^{(m)}}(x_k) - l_{n_p^{(p)}}(x_k)| +$$
$$+ |l_{n_p^{(p)}}(x_k) - l_{n_p^{(p)}}(x)| < \varepsilon.$$

როგორც ჩანს ყოველი $x$ ელემენტისათვის $\{l_{n_k}(x)\}$ არის კრებადი მიმდევრობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალთა $\{l_{n_k^{(k)}}\}$ ქვემიმდევრობა კრებადია გარკვეული წრფივი $l \in \widetilde{S}_1$ ფუნქციონალისაკენ. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\{l_{n_k^{(k)}}\}$ სუსტად კრებადია სუსტი $l$ ზღვრისაკენ: $l_{n_k^{(k)}} \xrightarrow{s} l$. ამრიგად, $\widetilde{S}_1$ სფეროს ნებისმიერი უსასრულო $\{l_n\}$ მიმდევრობიდან გამოვყავით ამავე სფეროს $l$ ელემენტისაკენ სუსტად კრებადი $\{l_{n_k^{(k)}}\}$ ქვემიმდევრობა, ე. ი. $\widetilde{S}_1$ სუსტად კომპაქტურია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. $l_p$, $L_p(0,1)$ $(p \geqslant 1)$ სივრცეში ყოველი ჩაკეტილი სფერო სუსტად კომპაქტურია. სუსტად კომპაქტურია აგრეთვე ყოველი ჩაკეტილი სფერო $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ყველა ფუნქციებისა შემოსაზღვრული ცვლილებით.

თეორემა 5.14. თ უ $M \subset E$ ს უ ს ტ ა დ კ ო მ პ ა ქ ტ უ რ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა, ხ ო ლ ო $f(x)$—მ ა ს ზ ე გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ს უ ს ტ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი, მ ა შ ი ნ:

$1^0$. $f(x)$ ი ქ ნ ე ბ ა შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე;

$2^0$. $f(x)$ მ ი ა ღ წ ე ვ ს $M$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე თ ა ვ ი ს ზ უ ს ტ ზ ე დ ა დ ა ზ უ ს ტ ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ს.

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრულია $M$ სიმრავლეზე ზემოდან, რისთვისაც დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ იარსებებს ისეთი $\{x_n\} \subset M$ მიმდევრობა, რომ $f(x_n) > n$. ვინაიდან $M$ სუსტი კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სუსტად კრებადი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა. აღვნიშნოთ მისი სუსტი ზღვარი $x_0 \in M$. ჩვენი დაშვების მიხედვით გვექნება: $f(x_{n_k}) > n_k$ და, მაშასადამე, $\lim\limits_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = \infty$. მაგრამ, ვინაი-

დან $f(x)$ სუსტად უწყვეტი ფუნქციონალია, ამიტომ $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$. მიღებული წინააღმდეგობა გვარწმუნებს, რომ $f(x)$ არის ზემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციონალი $M$ სიმრავლეზე.

სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $f(x)$ არის ქვემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციონალი $M$ სიმრავლეზე.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ცხადია, რომ როგორიც უნდა იყოს $x\in M$ ელემენტი, გვექნება: $f(x)\leqslant \sup\limits_{x\in M} f(x)$. ზუსტი ზედა საზღვრის თვისების ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $x'\in M$ ელემენტი, რომელზედაც შესრულდება უტოლობა:

$$f(x')>\sup_{x\in M} f(x)-\varepsilon.$$

ამრიგად, არსებობს ისეთი $\{x_n\}\in M$ მიმდევრობა, რომ

$$\sup_{x\in M} f(x)-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant \sup_{x\in M} f(x).$$

გამოვყოთ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან სუსტად კრებადი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომლის სუსტი ზღვარი იყოს $x_0\in M$. ამ პირობებში, წინა უტოლობის ძალით, ერთის მხრივ გვაქვს:

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})=\sup_{x\in M} f(x),$$

ხოლო, მეორეს მხრივ $f(x)$ ფუნქციონალის სუსტი უწყვეტობის გამო, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0).$$

მაშასადამე, $\sup\limits_{n_k\to\infty} f(x)=f(x_0)$.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $M$ სიმრავლეზე სუსტად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციონალი მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს.

## § 4. $C(0,1)$ სივრცის უნივერსალობა

ზემოთ დამტკიცებული იყო, რომ სეპარაბელური წრფივი ნორმირებული $E$ სივრცის შეუღლებული $\overline{E}$ სივრცის ყოველი ნორმით შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლე სუსტად კომპაქტურია (თეორემა 5.9). ამ თეორემასთან დაკავშირებულია ფუნქციონალური ანალიზის შემდეგი მნიშვნელოვანი ამოცანა: არსებობს თუ არა ისეთი მეტრული სეპარაბელური $X$ სივრცე, რომელიც შეიცავს ნებისმიერ სეპარაბელურ მეტრულ სივრცეს, როგორც იზომეტრულ ნაწილს. ასეთი „უნივერსალური“ $X$ სივრცის არსებობა 1924 წელს პირველად პ. ურისონმა დაამტკიცა. შემდეგში ბანახმა და მაზურმა აღმოაჩინეს, რომ $C(0,1)$ არის სწორედ ასეთი უნივერსალური სივრცე.

**თეორემა 5.15.** ვ თ ქ ვ ა თ, $M_1$ ა რ ი ს ყ ვ ე ლ ა რ ი ც ხ ვ ი თ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ე ბ ი ს (ე. ი. $S$ ს ი ვ რ ც ი ს) ი ს ე თ ი $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ს ს ი მ რ ა ვ ლ ე, რ ო მ ლ ი ს $\xi_i$ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ე ნ პ ი რ ო ბ ა ს: $0\leqslant\xi_i\leqslant 1$. მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს უ წ ყ ვ ე ტ ი $x=Uy$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი, $y\in M_2$, რ ო მ ე ლ ი ც კ ა ნ ტ ო რ ი ს ს რ უ ლ ყ ო ფ ი ლ $M_2$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს გ ა დ ა ს ა ხ ა ვ ს $M_1$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე.

მართლაც, ყოველი ნამდვილი $y \in M_2$ რიცხვი შესაძლოა ცალსახად წარმოვადგინოთ უსასრულო სამწილადად

$$y=\frac{2}{3}A_1+\frac{2}{3^2}A_2+\cdots+\frac{2}{3^n}A_n+\cdots,$$

სადაც $A_i=0$ ან 1. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_1(y)=\frac{A_1}{2}+\frac{A_3}{2^2}+\cdots+\frac{A_{2k-1}}{2^k}+\cdots$$

$$B_2(y)=\frac{A_2}{2}+\frac{A_6}{2^2}+\cdots+\frac{A_{2(2k-1)}}{2^k}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_m(y)=\frac{A_{2^m}}{2}+\frac{A_{2^m\cdot 3}}{2^2}+\cdots+\frac{A_{2^m(2k-1)}}{2^k}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

და განვსაზღვროთ ოპერატორი $U_y=(B_1(y), B_2(y),\ldots, B_m(y),\ldots)$. ასე განსაზღვრული $Uy$ ოპერატორი უწყვეტად გადასახავს $M_2$ სიმრავლეს $M_1$ სიმრავლეზე. ჯერ დავრწმუნდეთ, რომ ყოველი $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m,\ldots)$ ელემენტი არის სახე ერთი $y\in M_2$ ელემენტისა მაინც. მართლაც, გამოვსახოთ $\xi_m$ კოორდინატები უსასრულო ორწილადად:

$$\xi_m=\frac{C_1^{(m)}}{2}+\frac{C_2^{(m)}}{2^2}+\cdots+\frac{C_k^{(m)}}{2^k}+\cdots,$$

სადაც $C_k^{(m)}=0$, ან 1 $(k, m=1,2,\ldots)$.
ახლა თუ

$$\left|\begin{matrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)}\ldots & C_k^{(1)}\ldots \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)}\ldots & C_k^{(2)}\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1^{(m)} & C_2^{(m)}\ldots & C_k^{(m)}\ldots \end{matrix}\right| \quad \text{და} \quad \left|\begin{matrix} A_1 A_3\cdots A_{(2k-1)}\cdots \\ A_2 A_6\cdots A_{2(2k-1)}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{2^m} A_{2^m\cdot 3}\cdots A_{2^m(2k-1)}\cdots \end{matrix}\right|$$

მატრიცების შესაბამი ელემენტების იდენტიფიკაციას მოვახდენთ, გვექნება $Uy=x$.

დავამტკიცოთ, რომ $Uy$ არის ნორმით უწყვეტი ოპერატორი, ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ. რომ $y'$, $y''\in M_2$ ელემენტების, საკმარისად მახლობელ, ნებისმიერ წყვილს, $U$ ოპერატორი გადასახავს მახლობელ $x'=Uy'$, $x''=Uy''\in M_1$ ელემენტებში. ამისათვის ავიღოთ ორი, საკმარისად მახლობელი, ნებისმიერი $y'$ და $y''$ ელემენტი. მაშინ, ამ რიცხვების უსასრულო სამწილადად გაშლის პირველი $2^m(2k-1)$ ნიშანი ერთმანეთს დაემთხვევა, $B_j(y')$ და $B_j(y'')$ $(j=1,2,\ldots,m)$ რიცხვების უსასრულო ორწილადად გაშლაში ერთმანეთს დაემთხვევა პირველი $k$ ნიშანი და, $j$ ნიშნაკის ყველა $j=1,2,\cdots,m$ მნიშვნელობისათვის, შესრულდება უტოლობა:

$$|B_j(y')-B_j(y'')|\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

ვინაიდან $m$ და $k$ რიცხვები შეიძლება იყოს ნებისმიერად დიდი, ამიტომ $\|Uy'-Uy''\|_s$ ნორმა იქნება ნებისმიერად მცირე, რაც $Uy$ ოპერატორის უწყვეტობას მოასწავებს.

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: თუ $M_1$ არის $s$ სივრცის ისეთი $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ ელემენტების ქვესიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობებს $|\xi_i|\leqslant 1$ $(i=1, 2, \dots)$, მაშინ არსებობს ნორმით უწყვეტი $x=U_1 y$ ოპერატორი, რომელიც კანტორის სრულყოფილ $M_2$ სიმრავლეს გადასახავს $M_1$ სიმრავლეზე.

ამ დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ზემოთ განხილული $Uy$ ოპერატორის ნაცვლად ავიღოთ $U_1y=(B_1'(y), B_2'(y), \dots, B_n'(y), \dots)$ ოპერატორი, რომლის კომპონენტები განსაზღვრულია $Uy$ ოპერატორის კომპონენტებით შემდეგნაირად:

$$B'_m(y)=2B_m(y)-1 \quad (m=1, 2, \dots).$$

ხშირად აქ მოყვანილ დებულებას ასეც გამოსთქვამენ: $s$ სივრცის ისეთი $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ ელემენტების ჩაკეტილი $M_1$ სიმრავლე, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობებს $|\xi_i|\leqslant 1$ $(i=1, 2, \dots)$, წარმოადგენს $[0,1]$ სეგმენტის რაიმე ჩაკეტილი $M_2$ სიმრავლის უწყვეტ სახეს.

**თეორემა 5.16.** (ფრეშე). *ყოველი მეტრული სეპარაბელური $X$ სივრცე იზომეტრულია რაღაც წრფივი სეპარაბელური $E$ სივრცის ნაწილისა.*

ვთქვათ, $\{x_n\}$ არის $X$ სივრეში ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე. ასეთი მიმდევრობა არსებობს. $X$ სივრცის ყოველ $x$ ელემენტს შევუსაბამოთ ნამდვილ რიცხვთა ყველა შემოსაზღვრული მიმდევრობის $m$ სივრცის $y=(y_1, \dots, y_n, \dots)$ ელემენტი შემდეგი წესით:

$$y_n=\rho(x, x_n)-\rho(x_1, x_n) \quad (n=1, 2, \dots). \tag{5.5}$$

ცხადია, რომ $\{y_i\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მართლაც, გვაქვს

$$|y_n|=|\rho(x, x_n)-\rho(x_n, x_1)|\leqslant\rho(x, x_1)$$

და, ამიტომ $X$ სივრცისა და $m$ სივრცის ელემენტების შესაბამისობა არის შესაძლო შესაბამისობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $X$ სივრცის გადასახვა $m$ სივრცეში (5.5) ოპერატორით არის იზომეტრული გადასახვა. ვთქვათ, $x'$ და $x''$ არის $X$ სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტი. მათი შესაბამი ელემენტები $m$ სივრცეში ავღნიშნოთ $y'=(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ და $y''=(y_1'', y_2'', \dots, y_n'', \dots)$. თანახმად (5.5) ტოლობებისა, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} y_n' &= \rho(x', x_n)-\rho(x_1, x_n),\\ y_n'' &= \rho(x, x_n)-\rho(x_1, x_n). \end{aligned}\right. \quad (n=1,2, \dots).$$

აქედან მივიღებთ:

$$\|y'-y''\|=\sup_n |y_n'-y_n''|=\sup_n|\rho(x', x_n)-\rho(x'', x_n)|\leqslant\rho(x', x''). \tag{5.6}$$

ეს უტოლობა გვაძლევს $\|y'-y''\|$ ნორმის შეფასებას ზემოდან. შევაფასოთ იგივე ნორმა ქვემოდან. ვინაიდან $\{x_n\}$ არის ყველგან მკვრივი მიმდევრობა $X$ სივრცეში, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon<\rho(x', x'')$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_l$ ელემენტი, რომ $\rho(x', x_l)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. ამასთანავე შევნიშნოთ რომ

$$\rho(x'', x_l)\geqslant\rho(x'', x')-\rho(x', x_l)\geqslant\rho(x'', x')-\frac{\varepsilon}{2}.$$

ახლა ცხადია, რომ

$$|y_n'-y_n''|=|\rho(x', x_n)-\rho(x'', x_n)|\geqslant\rho(x'', x_n)-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\rho(x', x'')-\varepsilon.$$

აქედან

$$\|y'-y''\|\geqslant\rho(x', x'')-\varepsilon. \tag{5.7}$$

$\varepsilon$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, (5.6) და (5.7) უტოლობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\rho(y', y')=\|y'-y''\|=\rho(x', x'').$$

როგორც ვხედავთ, (5.5) არის $X$ სივრცის იზომეტრული გადასახვა $m$ სივრცის სეპარაბელურ რაღაც $\Omega$ სიმრავლეზე. ცხადია, $\Omega$ სიმრავლის წრფივი $L$ გარსი იქნება სეპარაბელური სივრცე და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.17. (ბანახი და მაზური). ყოველი წრფივი ნორმირებული და სეპარაბელური $E$ სივრცე $C(0,1)$ სივრცის ნაწილის იზომეტრულია.

ავიღოთ $\overline{E}$ სივრცეში ჩაკეტილი $\widetilde{S}_1$ სფერო. $\widetilde{S}_1$ არის სუსტად კომპაქტური სიმრავლე და წარმოადგენს [0, 1] სეგმენტის ჩაკეტილი $\Omega$ სიმრავლის უწყვეტ სახეს. ავიღოთ ნებისმიერი $\{t_n\}\subset\Omega$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $t\in\Omega$ რიცხვისაკენ: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t$. ამ მიმდევრობას შეესაბამება წრფივ ფუნქციონალთა $\{l_{t_n}\}\subset\widetilde{S}_1$ მიმდევრობა, რომლისგანაც შესაძლოა გამოვყოთ წრფივი $l_t\in\widetilde{S}_1$ ფუნქციონალისაკენ სუსტად კრებადი $\left\{l_{t_{n_k}}\right\}$ ქვემიმდევრობა. თანახმად წრფივ ფუნქციონალთა მიმდევრობის სუსტი კრებადობის განსაზღვრისა, ნებისმიერი $x\in E$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\lim_{n_k\to\infty} l_{t_{n_k}}(x)=l_t(x).$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ფიქსირებული $x$ ელემენტისათვის $l_t(x)$ არის $t$ ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი ასე:

$$l_t(x)=\varphi_x(t)$$

და შევნიშნოთ, რომ $\varphi_x(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის არეა $\Omega$ სიმრავლე. გავაფართოვოთ $\varphi_x(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის $\Omega$ არე [0,1] სეგმენტამდე, ხოლო თვით $\varphi_x(t)$ ფუნქცია $[0,1]-\Omega$ სიმრავლეზე გავაგრძელოთ წრფივი ფუნქციით. მაშინ $\varphi_x(t)$ განსაზღვრული იქნება მთელ [0,1] სეგმენტზე და $\varphi_x(t)\in C(0,1)$.

როგორც ვიცით

$$\|\varphi_x(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_x(t)|$$

და, ვინაიდან $[0,1]-\Omega$ სიმრავლეზე $\varphi_x(t)$ არის წრფივი ფუნქცია, ამიტომ ერთის მხრივ გვექნება

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_x(t)|=\max_{\Omega}|\varphi_x(t)|, \tag{5.8}$$

მეორეს მხრივ კი

$$|\varphi_x(t)|=|f_t(x)|\leqslant\|f_t\|\,\|x\|\leqslant\|x\|.$$

ჰანი-ბანახის თეორემის ძალით, მოცემული $x$ ელემენტისათვის არსებობს წრფივი $\overline{l}$ ფუნქციონალი, რომლის ნორმა უდრის ერთს და

$$\|\overline{l}(x)\|=\|x\|.$$

ცხადია, $\overline{l} \in \widetilde{S}_1$ და, ამიტომ არსებობს ისეთი $t_0 \in \Omega$, რომლისთვისაც $l_{t_0} = \overline{l}$. ამრიგად, გვაქვს

$$|l_{t_0}(x)| = |\varphi_x(t_0)| = \|x\|$$

და

$$\max_{t \in [0,1]} |\varphi_x(t)| = \|x\|. \tag{5.9}$$

ახლა (5.8) და (5.9) ტოლობების შედარებით მივიღებთ:

$$\|\varphi_x\|_C = \|x\|_E.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ყოველ $x \in E$ ელემენტს შეესაბამება ისეთი უწყვეტი $\varphi_x$ ფუნქცია, რომლის ნორმა უდრის $x$ ელემენტის ნორმას.

$E$ სივრცის ელემენტებისა და $C(0,1)$ სივრცის ელემენტების მოყვანილი შესაბამისობა ისეთია, რომ თუ $x'$, $x'' \in E$ ელემენტების შესაბამი ელემენტები $C(0,1)$ სივრცეში არის $\varphi_{x'}$ და $\varphi_{x''}$, მაშინ $x' - x''$ ელემენტს შეესაბამება $\varphi_{x'-x''} = \varphi_{x'} - \varphi_{x''}$ უწყვეტი ფუნქცია და

$$\rho(x', x'') = \|x' - x''\| = \|\varphi_{x'} - \varphi_{x''}\| = \rho(\varphi_{x'}, \varphi_{x''}).$$

ამრიგად, $E$ სივრცის გადასახვა $C(0,1)$ სივრცის ნაწილზე არის იზომეტრული გადასახვა. თეორემა დამტკიცებულია.

5.16 და 5.17 თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მეტრული სეპარაბელური $X$ სივრცე იზომეტრულია $C(0,1)$ სივრცის ნაწილისა.

თავი VI

# სრულად უწყვეტი ოპერატორი

## § 1. სრულად უწყვეტი ოპერატორის განსაზღვრა და მისი ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, $Ux$ წრფივი ოპერატორია, რომელიც წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. $Ux$ ოპერატორი $E_1$ სივრცის ნორმით შემოსაზღვრულ ყოველ სიმრავლეს გადასახავს $E_2$ სივრცის ნორმით შემოსაზღვრულ სიმრავლეში. გარდა ამისა, როგორც ზემოთ იყო დამტკიცებული (თეორემა 3.28), $U$ ოპერატორი $E_1$ სივრცის ყოველ კომპაქტურ სიიოავლეს გადასახავს $E_2$ სივრცის კომპაქტურ სიმრავლეში.

ხშირად, სხვადასხვა ფუნქციონალური განტოლებების გამოკვლევისათვის, საკმარისი არ არის ოპერატორის მხოლოდ ნორმით უწყვეტობა, საჭიროა $U$ ოპერატორს ჰქონდეს უფრო ძლიერი თვისება. ერთ-ერთი ასეთი ძლიერი თვისება არის ე. წ. ოპერატორის სრული უწყვეტობა.

**განსაზღვრა.** წრფივ $U$ ოპერატორს, რომელიც $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში მოქმედებს, სრულად უწყვეტი ეწოდება, თუ იგი $E_1$ სივრცის ყოველ ნორმით შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გადასახავს $E_2$ სივრცის კომპაქტურ სიმრავლეში.

მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი ოპერატორი:

$$Ux = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt, \tag{6.1}$$

სადაც $x(t) \in C(0, 1)$, $K(s, t)$ არის $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ კვადრატზე უწყვეტი ფუნქცია. დავამტკიცოთ, რომ (6.1) ტოლობით განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი სრულად უწყვეტია. $Ux$ ოპერატორი მოქმედებს $C(0, 1)$ სივრციდან ამავე სივრცეში. ვთქვათ, $M$ არის ნორმით შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლე $C(0,1)$ სივრცეში და ყველა $x(t) \in M$ ელემენტისათვის $\|x(t)\| \leqslant \mu$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\{UM\}$ სიმრავლე თანაბრად არის შემოსაზღვრული. მართლაც, ნებისმიერი $x(t) \in M$ ელემენტისათვის გვექნება:

$$|Ux| = \left|\int_0^1 K(s, t)x(t)dt\right| \leqslant \max|K(s, t)| \, \|x(t)\| \leqslant \mu \max|K(s, t)|.$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ $\{UM\}$ სიმრავლე არის ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციების ოჯახი. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ როცა $|s_1 - s_2| < \delta$, მაშინ $t \in [0, 1]$ ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას:

$$|K(s_1, t) - K(s_2, t| < \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

ამ ტოლობის ძალით, ყველა $Ux$ უწყვეტი ფუნქციისათვის $\{UM\}$ ოჯახიდან, როცა $|s_1-s_2|<\delta$, გვექნება შეფასება

$$|Ux(s_1)-Ux(s_2)|\leqslant\int_0^1|K(s_1, t)-K(s_2, t)||x(t)|dt<\varepsilon.$$

ამრიგად, $\{UM\}$ არის ერთობლივ უწყვეტი და თანაბრად შემოსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე. არცელას თეორემის ძალით. $\{UM\}$ კომპაქტური სიმრავლეა და, მაშასადამე, $Ux$ არის სრულად უწყვეტი ოპერატორი.

არასრულად უწყვეტი ოპერატორის მაგალითს წარმოადგენს იგივური ოპერატორი. მართლაც, იგივური ოპერატორი $E_1$ სივრცის კუთვნილ $\widetilde{S}_1(1, \Theta_{E_1})$ სფეროს თავისთავში გადასახავს, რომელიც საზოგადოდ, როგორც ვიცით, არაკომპაქტური სიმრავლეა.

## § 2. შეუღლებული ოპერატორი

ვთქვათ, $y=Ux$ წრფივი ოპერატორი წრფივ ნორმირებულ $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. ავიღოთ $E_2$ სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი წრფივი $l\in\overline{E}_2$ ფუნქციონალი ($\overline{E}_2$ არის $E_2$ სივრცის შეუღლებული სივრცე). $l$ ფუნქციონალი $y=Ux\in E_2$ ელემენტებზე მოგვცემს:

$$ly=l(Ux)=\widetilde{l}x, \tag{6.2}$$

სადაც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, $\widetilde{l}$ არის $E_1$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი და, მაშასადამე, $\widetilde{l}\in\overline{E}_1$, სადაც $\overline{E}_1$ არის $E_1$ სივრცის შეუღლებული სივრცე. ამრიგად, (6.2) ტოლობა ყოველ $l\in\overline{E}_2$ ელემენტს შეუსაბამებს $\widetilde{l}\in\overline{E}_1$ ელემენტს. ამ შესაბამობის გამომსახველი ოპერატორი $U^*$-ით აღვნიშნოთ: $U^*l=\widetilde{l}$. $U^*$ ოპერატორის განსაზღვრის არე ეკუთვნის $\overline{E}_2$ სივრცეს, მნიშვნელობათა არე კი $E_1$ არის. $U^*$ ოპერატორს $U$ ოპერატორის **შეუღლებული ოპერატორი** ეწოდება.

**მაგალითი.** ვთქვათ, $K(s, t)$ არის $0\leqslant s, t\leqslant 1$ კვადრატზე უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $x(t)\in L_2(0, 1)$ ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციაა. განვიხილოთ შემდეგი ოპერატორი:

$$Ux=y(s)=\int_0^1 K(s, t)x(t)dt.$$

იგი $L_2(0, 1)$ სივრციდან ამავე სივრცეში მოქმედებს. ავიღოთ ნებისმიერი წრფივი $l$ ფუნქციონალი, განსაზღვრული $L_2(0, 1)$ სივრცის $y(s)$ ელემენტებზე. როგორც ვიცით, $l$ ეკუთვნის ისევ $L_2(0, 1)$ სივრცეს და, თანახმად 4.18 თეორემისა, წარმოიდგინება შემდეგი ინტეგრალით:

$$l(Ux)=(l, Ux)=\int_0^1 l(s)Uxds=\int_0^1 l(s)y(s)ds.$$

აქედან გვექნება

$$l(Ux)=\int_0^1 l(s)\left[\int_0^1 K(s,\,t)x(t)dt\right]ds=\int_0^1 x(s)\left[\int_0^1 K(t,\,s)l(t)\right]ds=$$

$$=\left(x(s),\,\int_0^1 K(t,\,s)l(t)dt\right),$$

ისე რომ

$$U^*l=\int_0^1 K(t,\,s)l(t)dt.$$

როგორც ვხედავთ, შეუღლებული $U^*$ ოპერატორი წარმოიდგინება იგივე $K$ გულით, რომელშიც გადაადგილებულია არგუმენტები.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 6.1.** თუ $U$ ოპერატორი წრფივია, რომელიც წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში, მაშინ შეუღლებული $U^*$ ოპერატორი აგრეთვე წრფივი იქნება და $\|U^*\|=\|U\|$.

ვთქვათ, $l_1, l_2\in \overline{E}_2$ ნებისმიერი ელემენტებია და $U^*l_1=\widetilde{l}_1$, $U^*l_2=\widetilde{l}_2$. მაშინ, არსებობს ერთადერთი ისეთი ფუნქციონალი $\widetilde{l}_1+\widetilde{l}_2\in E_1$, რომ

$$(l_1+l_2)Ux=(\widetilde{l}_1+\widetilde{l}_2)x,$$

საიდანაც

$$U^*(l_1+l_2)=\widetilde{l}_1+\widetilde{l}_2=U^*l_1+U^*l_2.$$

მაშასადამე, $U^*$ ადიტიური ოპერატორია. ვთქვათ ახლა, $x\in E_1$ ნებისმიერი ელემენტია. შეუღლებული ოპერატორის განსაზღვრის ძალით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$|\widetilde{l}x|=|l(Ux)|\leqslant\|l\|\,\|Ux\|\leqslant\|l\|\,\|U\|\,\|x\|,$$

საიდანაც გვექნება

$$\|\widetilde{l}\|\leqslant\|l\|\,\|U\|$$

და, ვინაიდან $\widetilde{l}=U^*l$, ამიტომ

$$\|U^*l\|\leqslant\|U\|\,\|l\|.$$

როგორც ვხედავთ, შეუღლებული $U^*$ ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულია. ამრიგად, $U^*$ არის $\overline{E}_2$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი.

წინა უტოლობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ

$$\|U^*\|\leqslant\|U\|. \tag{6.3}$$

ვთქვათ, $x_0\in E_1$ ნებისმიერად ფიქსირებული ელემენტია. თანახმად 4.7 თეორემისა, არსებობს წრფივი $l_0\in \overline{E}_2$ ფუნქციონალი, რომლის ნორმა უდრის ერთს და $l_0(Ux_0)=\|Ux_0\|$. ამასთანავე, ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|Ux_0\|=l_0(Ux_0)=\widetilde{l}_0x_0\leqslant\|\widetilde{l}_0\|\,\|x_0\|=\|U^*l_0\|\,\|x_0\|\leqslant$$
$$\leqslant\|U^*\|\,\|l_0\|\,\|x_0\|=\|U^*\|\,\|x_0\|.$$

აქედან მივიღებთ

$$\|U^*\| \geqslant \|U\|. \tag{6.4}$$

ახლა (6.3) და (6.4) ფორმულებიდან ცხადია, რომ

$$\|U^*\| = \|U\|$$

და თეორემა ბოლომდეა დამტკიცებული.

**თეორემა 6.2.** სრულად უწყვეტი $y=Ux$ ოპერატორის მნიშვნელობათა არე (ოპერატორის სახე) სეპარაბელური სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y=Ux$ ოპერატორი მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში. $\widetilde{S}_n \subset E_1$ იყოს ჩაკეტილი სფერო, რომლის ცენტრი მოთავსებულია ნულოვან $\Theta_{E_1} \in E_1$ წერტილში და რადიუსი უდრის $n$. აღვნიშნოთ $U\widetilde{S}_n = \Omega_n \subset E_2$. თანახმად სრულად უწყვეტი ოპერატორის განსაზღვრისა $\Omega_n$ სიმრავლე იქნება კომპაქტური. გარდა ამისა, $\Omega_n$ სეპარაბელური სიმრავლეა. ამრიგად, $\Omega_n$ სიმრავლეში არსებობს თვლადი ყველგან მკვრივი $A_n$ სიმრავლე. ვთქვათ, $\Omega$ არის $U$ ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე, მაშინ

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

ცხადია, რომ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე იქნება $\Omega$ სიმრავლეში ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 6.3.** თუ წრფივი $U_1x$ და $U_2x$ ოპერატორები, რომლებიც წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_2$ სივრცეში მოქმედებენ, სრულად უწყვეტი ოპერატორებია, მაშინ $U=\alpha U_1+\beta U_2$ ოპერატორი იქნება აგრეთვე სრულად უწყვეტი ოპერატორი, სადაც $\alpha$ და $\beta$ ნებისმიერი რიცხვებია.

მართლაც, ვთქვათ, $N \subset E_1$ არის ნორმით შემოსაზღვრული სიმრავლე. ავიღოთ ნებისმიერი $\{Ux_n\}=\{\alpha U_1x_n+\beta U_2x_n\} \subset E_2$ მიმდევრობა, სადაც $\{x_n\} \subset N$. ვინაიდან $U_1$ სრულად უწყვეტი ოპერატორია, ამიტომ $\{U_1x_n\} \subset E_2$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ნორმით კრებადი $\{U_1x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა. განვიხილოთ ახლა $\{U_2x_{n_k}\}$ მიმდევრობა. იმის გამო, რომ $U_2$ ოპერატორიც სრულად უწყვეტია, $\{U_2x_{n_k}\}$ მიმდევრობიდანაც შეგვიძლია გამოვყოთ ნორმით კრებადი $\{U_2x_{n_{k_l}}\}$ ქვემიმდევრობა. ახლა ნათელია, რომ $\{Ux_{n_{k_l}}\}$ მიმდევრობა იქნება ნორმით კრებადი. ამრიგად, $\{Ux_n\}=\{\alpha U_1x_n+\beta U_2x_n\}$ მიმდევრობიდან ჩვენ გამოვყავით ნორმით კრებადი $\{Ux_{n_{k_l}}\}$ ქვემიმდევრობა. მაშასადამე, $UN$ სიმრავლე კომპაქტურია, ე. ი. $U$ არის სრულად უწყვეტი ოპერატორი.

**თეორემა 6.4.** ვთქვათ, წრფივი $U$ ოპერატორი მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ

$E_2$ სივრცეში, ხოლო წრფივი $V$ ოპერატორი მოქმედებს $E_2$ სივრციდან წრფივ ნორმირებულ $E_3$ სივრცეში. თუ $U$ და $V$ ოპერატორებიდან ერთ-ერთი სრულად უწყვეტი ოპერატორია, მაშინ $VU$ იქნება სრულად უწყვეტი ოპერატორი.

ამ თეორემის დამტკიცება მარტივად გამომდინარეობს წრფივი ოპერატორის შემდეგი თვისებებიდან: წრფივი ოპერატორი ნორმით შემოსაზღვრულ ყოველ სიმრავლეს გადასახავს ნორმით შემოსაზღვრულ სიმრავლეში და ყოველ კომპაქტურ სიმრავლეს გადასახავს კომპაქტურ სიმრავლეში.

**თეორემა 6.5.** ვთქვათ, $\{U_n\}$ არის სრულად უწყვეტი წრფივი ოპერატორების მიმდევრობა, მასთან ყოველი $U_n$ ოპერატორი წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს $E_2$ სივრცეში. გარდა ამისა, ვთქვათ, $\{U_n\}$ ნორმით კრებადია $U$ ოპერატორისაკენ. მაშინ $U$ ოპერატორიც იქნება სრულად უწყვეტი ოპერატორი.

ავიღოთ $E_1$ სივრცის ჩაკეტილი ერთეულოვანი $\widetilde{S}(\Theta_{E_1}, 1)=\widetilde{S}_1$ სფერო.

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ $U\widetilde{S}_1$ კომპაქტური სიმრავლეა. თეორემის პირობის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $U_{n_0}$ ოპერატორი, რომ

$$\| U-U_{n_0}\| <\varepsilon.$$

$U_{n_0}(\widetilde{S}_1)$ კომპაქტური სიმრავლეა. ვთქვათ, $x\in\widetilde{S}_1$ ნებისმიერი ელემენტია. გვაქვს

$$\| U(x)-U_{n_0}(x)\| \leqslant \| U-U_{n_0}\| \, \| x\| <\varepsilon.$$

როგორც ვხედავთ, $U_{n_0}(\widetilde{S}_1)$ წარმოადგენს $U(\widetilde{S}_1)$ სიმრავლის კომპაქტურ $\varepsilon$-ქსელს. ამრიგად, $U(\widetilde{S}_1)$ კომპაქტური სიმრავლეა და თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 6.6.** ვთქვათ, წრფივი $Ux$ ოპერატორი წრფივი ნორმირებული $E_1$ სივრციდან მოქმედებს წრფივ ნორმირულ $E_2$ სივრცეში. თუ $Ux$ სრულად უწყვეტი ოპერატორია, მაშინ შეუღლებული $U^*$ ოპერატორიც სრულად უწყვეტი იქნება.

გავიხსენოთ, რომ შეუღლებული $U^*$ ოპერატორი $\overline{E}_2$ სივრციდან მოქმედებს $E_1$ სივრცეში, სადაც $\overline{E}_1$ და $\overline{E}_2$ არის, შესაბამისად, $E_1$ და $E_2$ სივრცეების შეუღლებული სივრცეები. განვიხილოთ $E_2$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალების ნორმით შემოსაზღვრული ნებისმიერი $\{l_n\}\in\overline{E}_2$ მიმდევრობა. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\{U^*l_n\}\in\overline{E}_1$ არის კომპაქტური მიმდევრობა. ვინაიდან $\{l_n\}$ არის ნორმით შემოსაზღვრული მიმდევრობა, ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ $E_2$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი $l\in\overline{E}_2$ ფუნქციონალისაკენ კრებადი $\{l_{n_k}\}$ მიმდევრობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ როგორიც უნდა იყოს $y\in E_2$ ელემენტი ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$\lim_{n_k\to\infty} l_{n_k}(y)=l(y).$$

სუსტი $l$ ზღვრის ნორმა აკმაყოფილებს უტოლობას.

$$\|l\| = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|l_{n_k}\| \leqslant M.$$

ვთქვათ, $\overline{l} = U^*(l)$, $\overline{l_{n_k}} = U^*(l_{n_k}) \in \overline{E_1}$, მაშინ როგორიც უნდა იყოს $x \in E_1$ ელემენტი გვექნება:

$$\lim_{n_k\to\infty} \overline{l}_{n_k}(x) = \lim_{n_k\to\infty} l_{n_k}(x) = l(Ux) = \overline{l}(x)$$

და, მაშასადამე, $\{\overline{l}_{n_k}\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია სუსტი $l$ ზღვარისაკენ. ახლა დავამტკიცოთ, რომ წრფივ ფუნქციონალთა იგივე მიმდევრობა ნორმით კრებადიც იქნება წრფივი $\overline{l}$ ფუნქციონალისაკენ. დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაშინ არსებობს ისეთი $\mu > 0$ რიცხვი, რომ

$$\|\overline{l}_{n_k} - \overline{l}\| \geqslant \mu \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

ვთქვათ, $\overline{S_1}$ არის $E_1$ სივრცის კუთვნილი სფეროს ზედაპირი, რომლის რადიუსი უდრის ერთს და ცენტრი მოთავსებულია ნულოვან წერტილში. $n_k$ ნიშნაკის ყოველი მნიშვნელობისათვის არსებობს ისეთი $x_{n_k} \in \overline{S_1}$ ელემენტი, რომ

$$|\overline{l}_{n_k}(x_{n_k}) - \overline{l}(x_{n_k})| > \frac{1}{2} \|\overline{l}_{n_k} - \overline{l}\| \geqslant \frac{1}{2}\mu.$$

სხვანაირად, ეს უტოლობა ნიშნავს შემდეგს:

$$|l_{n_k}(Ux_{n_k}) - l(Ux_{n_k})| > \frac{1}{2}\mu. \tag{6.5}$$

გამოვიყენოთ ახლა $U$ ოპერატორის მოცემული თვისება იმის შესახებ, რომ იგი სრულად უწყვეტია. ვინაიდან $\{x_{n_k}\}$ მიმდევრობა ნორმით შემოსაზღვრულია, ამიტომ $\{Ux_{n_k}\} \subset E_2$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ნორმით კრებადი ქვემიმდევრობა, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $\{Ux_{n_k}\}$-სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ვთქვათ, $Ux_0$ ამ მიმდევრობის ზღვარია:

$$\lim_{n_k\to\infty} \|Ux_{n_k} - Ux_0\| = 0.$$

გვაქვს

$$|l_{n_k}(Ux_{n_k}) - l(Ux_{n_k})| \leqslant |l_{n_k}(Ux_{n_k}) - l_{n_k}(Ux_0)| + |l_{n_k}(Ux_0) - l(Ux_0)| +$$
$$+ |l(Ux_0) - l(Ux_{n_k})| \leqslant 2M \|Ux_{n_k} - Ux_0\| + |l_{n_k}(Ux_0) - l(Ux_0)| \to 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

აქედან და (6.5) უტოლობიდან ნათელია, რომ $\{\overline{l}_{n_k}\}$ მიმდევრობა ნორმით კრებადია $\overline{l}$ ზღვრისაკენ.

ამრიგად, $U^*$ არის სრულად უწყვეტი ოპერატორი და თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ დებულებას: ვთქვათ, წრფივი $U$ ოპერატორი ისევ $E_1$ სივრციდან $E_2$ სივრცეში მოქმედებს. თუ მისი შეუღლებული $U^*$ ოპერატორი, რომელიც $\overline{E_2}$ სივრციდან $\overline{E_1}$ სივრცეში მოქმედებს, სრულად უწყვეტი ოპერატორია, მაშინ $U$ აგრეთვე სრულად უწყვეტი ოპერატორი იქნება.

დამტკიცებული თეორემიდან და ამ შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ თუ წრფივ $U$ და $U^*$ ოპერატორთაგან ერთ-ერთი სრულად უწყვეტი ოპერატორია, მაშინ მეორე ოპერატორიც სრულად უწყვეტი იქნება.

## § 3. ფუნქციონალური განტოლება სრულად უწყვეტი ოპერატორით

წრფივი ნორმირებული სივრცეების ურთიერთ უწყვეტი გადასახვის ამოცანების გამოკვლევასთან დაკავშირებით ფ. რისმა განიხილა წრფივი გადასახვის ერთი მნიშვნელოვანი შემთხვევა, რომელმაც იგი მიიყვანა ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლების თეორიის განზოგადებაზე.

ვთქვათ, $E$ არის წრფივი ნორმირებული სივრცე თვლადი $\{e_i\}\subset E$ ბაზისით. ავაგოთ ახალი $E_1$ სივრცე, რომლის $\xi$ ელემენტი ვუწოდოთ ნამდვილ რიცხვთა ისეთ $(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$ მწკრივი ნორმით კრებადია $E$ სივრცის გარკვეული ელემენტისაკენ. თუ $E_1$ სივრცეში ელემენტების შეკრების და ნამდვილი რიცხვის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციებს შემოვიღებთ ჩვეულებრივი წესით და, თუ ელემენტის ნორმას განვსაზღვრავთ ტოლობით:

$$\|\xi\|=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|,$$

მაშინ იგი გადაიქცევა წრფივ ნორმირებულ სრულ სივრცედ. დავამყაროთ $E$ და $E_1$ სივრცეების ელემენტებს შორის ურთიერთ ცალსახა თანადობა შემდეგი წესით: $E$ სივრცის ყოველ $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$ ელემენტს შევუსაბამოთ $E_1$ სივრცის $\xi=(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$ ელემენტი და პირიქით.

$E$ და $E_1$ სივრცეთა ელემენტების ურთიერთ ცალსახა თანადობა განსაზღვრავს ადიტიურ $A\xi=x$ ოპერატორს, რომელიც ნორმით იქნება შემოსაზღვრული. მართლაც, გვაქვს

$$\|A\xi\|=\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right\|\leqslant\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\|\xi\|.$$

ამრიგად, $A$ არის წრფივი ოპერატორი, რომელიც $E_1$ სივრციდან მოქმედებს $E$ სივრცეში. თანახმად ბანახის თეორემისა, ამ პირობებში არსებობს $A$ ოპერატორის შებრუნებული წრფივი $A^{-1}$ ოპერატორი, რომელიც $E$ სივრციდან $E_1$ სივრცეში მოქმედებს.

განვიხილოთ ახლა წრფივი სრულად უწყვეტი $U$ ოპერატორი, რომელიც $E$ სივრცეს თავის თავში გადასახავს. თუ $U^*$ არის $U$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი, მაშინ, როგორც ვიცით, $\|U^*\|=\|U\|$ და $U^*$ აგრეთვე სრულად უწყვეტი ოპერატორი იქნება. იყოს $\widetilde{S}_1\subset E$ ჩაკეტილი სფერო ერთის ტოლი რადიუსით და $N=U\widetilde{S}_1\subset E$. $N$ არის კომპაქტური სიმრავლე.

განვიხილოთ ფუნქციონალური

$$Ux-x=y \tag{6.6}$$

განტოლება, სადაც $x, y \in E$. დავამტკიცოთ, რომ $U$ ოპერატორი შეგვიძლია დავშალოთ შემდეგნაირად:

$$U = U_1 + U_2, \tag{6.7}$$

სადაც $U_1$ და $U_2$ წრფივი ოპერატორებია, რომელთაგან $U_1$ ოპერატორი $S_1$ სფეროს გადასახავს $E$ სივრცის სასრული განზომილების $L \subset E$ ქვესივრცეზე, რომლის ბაზისი იქნება $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n}$, ხოლო $U_2$ ოპერატორის ნორმა დააკმაყოფილებს პირობას: $\|U_2\| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. მართლაც, გვაქვს

$$Ux = A_n(Ux) + R_n(Ux) = U_1x + U_2x, \tag{6.8}$$

სადაც

$$U_1x = A_n(Ux), \quad U_2x = R_n(Ux)$$

და წრფივი $A_n(Ux)$ და $R_n(Ux)$ ოპერატორები განსაზღვრული არიან შემდეგი ტოლობებით:

$$A_n(Ux) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad R_n(Ux) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

ავიღოთ ისეთი $\varepsilon' > 0$ რიცხვი, რომ $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{2 + \|A^{-1}\|}$, სადაც $\varepsilon$ ნებისმიერი რიცხვია და $A^{-1}$ არის ზემოთ განსაზღვრული წრფივი $A$ ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი. ვინაიდან $N$ კომპაქტური სიმრავლეა, ამიტომ მასში არსებობს $Ux_1, Ux_2, \ldots, Ux_k$ სასრული $\varepsilon'$—ქსელი, სადაც $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{k}$, $\left\{Ux_i\right\}_{i=1}^{k} \subset E$. მაშასადამე, ნებისმიერი $Ux \in N$ ელემენტისათვის არსებობს $\varepsilon'$—ქსელის ისეთი $Ux_i$ ელემენტი, რომ

$$\|Ux - Ux_i\| < \varepsilon_1. \tag{6.9}$$

შევაფასოთ ახლა $\|R_n(Ux)\|$, გვაქვს:

$$\begin{aligned}
&\|R_n(Ux)\| = \|Ux - A_n(Ux)\| \leqslant \|Ux - Ux_i\| + \|Ux_i - A_n(Ux)\| = \\
&= \|Ux - Ux_i\| + \|A_n(Ux_i) + R_n(Ux_i) - A_n(Ux)\| \leqslant \|Ux - Ux_i\| + \\
&+ \|A_n(Ux_i) - A_n(Ux)\| + \|R_n(Ux_i)\| = \|Ux - Ux_i\| + \|A_n(Ux_i - Ux)\| + \\
&+ \|R_n(Ux_i)\| \leqslant \|Ux - Ux_i\| + \|A^{-1}\| \, \|Ux_i - Ux\| + \|R_n(Ux_i)\| = \\
&= \|Ux - Ux_i\|(1 + \|A^{-1}\|) + \|R(Ux_i)\|.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

ვინაიდან მწკრივი:

$$Ux_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

ნორმით კრებადია $Ux_i \in E$ ელემენტისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი $n_0$ რიცხვი, რომ როცა $n \geqslant n_0$, მაშინ

$$\|R_n(Ux_i)\| < \varepsilon'.$$

ამის შემდეგ, (6.10) უტოლობიდან, (6.9) უტოლობის გამოყენებით, როცა $n \geqslant n_0$, მივიღებთ

$$\|R_n(Ux)\| < (2 + \|A^{-1}\|)\varepsilon',$$

საიდანაც

$$\|R_n(Ux)\| < \varepsilon,$$

სადაც $0<\varepsilon<1$. მაგრამ, ჩვენი აღნიშვნების თანახმად: $R_n(Ux)=U_2x$ და, მაშასადამე, გვაქვს

$$\sup_{x\in\overline{S}_1}\|U_2x\|=\sup_N\|R_n(Ux)\|,$$

ე. ი. $\|U_2\|\leq\varepsilon$, სადაც $0<\varepsilon<1$.

სრულიად ასევე დავრწმუნდებით, რომ $U$ ოპერატორის შეუღლებული $U^*$ ოპერატორიც შეიძლება დაიშალოს ორი ოპერატორის ჯამის სახით:

$$U^*=U_1^*+U_2^*,$$

რომელთაგან $U_1^*$ ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის სასრული განზომილების სიმრავლე, ხოლო $U_2^*$ ოპერატორის ნორმა ნებისმიერად მცირეა.

ახლა ადვილი შესამჩნევია, რომ არსებობს $(I-U_2)^{-1}$ და $(I-U_2^*)^{-1}$ ოპერატორები, სადაც $I$ იგივური ოპერატორია. ეს წინადადება გამომდინარეობს 3.46 თეორემიდან.

გადავწეროთ (6.6) განტოლება შემდეგი სახით:

$$U_1x-(I-U_2)x=y \tag{6.11}$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა $(I-U_2)x=x'$, მაშინ წინა განტოლება ასე გადაიწერება:

$$Vx'-x'=y, \tag{6.12}$$

სადაც $V=U_1(I-U_2)^{-1}$. ახლა, თუ (6.6) განტოლებასთან ერთად განვიხილავთ განტოლებას:

$$U^*f-f=g, \tag{6.13}$$

სადაც $f, g\in\overline{E}$, მაშინ ეს უკანასკნელი განტოლება შეგვიძლია ანალოგიურად ჩავწეროთ ასე:

$$V^*f-f=g', \tag{6.14}$$

სადაც $V^*$ არის $V$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი, ხოლო $g'=(I-U_2^*)^{-1}g$ მოცემული ელემენტია.

ამრიგად, (6.6) და (6.13) განტოლებები შეგვიძლია შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური (6.12) და (6.14) განტოლებებით. უკანასკნელ განტოლებებში $V$ არის სასრული განზომილების ოპერატორი, რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორიც უნდა იყოს $x'\in E$ ელემენტი $Vx'$ ეკუთვნის $E$ სივრცის სასრული განზომილების ქვესივრცეს. იგივე ითქმის $V^*$ შეუღლებულ ოპერატორზედაც.

ახლა ვუჩვენოთ, რომ (6.12) და (6.14) ოპერატორული (მაშასადამე, (6.6) და (6 13) ოპერატორული) განტოლებების ამოხსნა შეიძლება დავიყვანოთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. ამისათვის, წინასწარ, დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 6.7. ვთქვათ, წრფივი $W$ ოპერატორი მოქმედებს წრფივი ნორმირებული $E$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ $E$ და $\overline{E}$ სივრცეებს გააჩნიათ თვლადი ბიორთოგონალური ბაზისები. მაშინ $W$ ოპერატორი ცალსახად განისაზღვრება გარკვეული უსასრულო მატრიცით, ხოლო შეუღლებული $W^*$ ოპერატორი — მისი ტრანსპონირებული მატრიცით.

მართლაც, ვთქვათ, $x \in E$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \|x - A_n x\| = 0,$$

სადაც

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

ვინაიდან $W$ ოპერატორი ნორმით უწყვეტია, ამიტომ ერთის მხრივ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \|Wx - W(A_n x)\| = 0,$$

ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| Wx - \sum_{i=1}^{n} \xi_i We_i \right\| = 0,$$

ხოლო მეორეს მხრივ, ვინაიდან $We_i \in E$, ამიტომ

$$We_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots).$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| Wx - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_i \right) \right\| = 0,$$

ანუ

$$Wx = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_i \right).$$

მაგრამ $Wx$ წარმოადგენს $E$ სივრცის ელემენტს და ამიტომ გვექნება

$$Wx = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k. \tag{6.15}$$

ახლა, ვთქვათ, $\{l_i\} \in \overline{E}$ არის $\{e_i\} \subset E$ მიმდევრობის ბიორთოგონალური წრფივი ფუნქციონალების მიმდევრობა. მაშინ, (6.15) ტოლობიდან, თუ გამოვიყენებთ (6.14) დაშლას, მივიღებთ

$$\eta_m = l_m(Wx) = l_m \left[ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_k \right) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} l_m \left[ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_k \right) \right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i l_m \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} e_k \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} l_m(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{mi} \xi_i, \tag{6.16}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x$ ელემენტის დაშლის $\xi_m$ კოორდინატები ცალსახად განსაზღვრავენ $Wx$ ოპერატორის დაშლის $\eta_m$ კოორდინატებს. კავშირი ხსენებულ კოორდინატებს შორის განხორციელებულია უსასრულო $\{a_{mi}\}$ მატრიცის ელემენტებით.

ვთქვათ ახლა, $W^*g=f$ არის $Wx$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი, რომელიც $\overline{E}$ სივრციდან ისევ ამ სივრცეში მოქმედებს. თანახმად შეუღლებული ოპერატორის განსაზღვრისა გვაქვს: $g(Wx)=f(x)$. დავშალოთ $g$ და $f$ ელემენტები $\overline{E}$ სივრცის ბაზისის მიხედვით, გვექნება

$$g=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i l_i,\ f=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i l_i.$$

გამოვთვალოთ წრფივი $g$ ფუნქციონალი $Wx$ ელემენტზე, გვექნება

$$g(Wx)=g\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)c_i\right]=\lim_{n\to\infty}g\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)e_k\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)g(e_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)\alpha_k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k\right)\xi_i. \tag{6.17}$$

გარდა ამისა, გვაქვს

$$g(Wx)=f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i l_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\xi_i. \tag{6.18}$$

(5.17) და (5.18) ტოლობების შედარებით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\xi_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_i\right)\xi_i. \tag{6.19}$$

ვთქვათ, კერძოდ $x=e_m$, მაშინ $\xi_m=1$ და $\xi_i=0$, როცა $i\neq m$. ამ შემთხვევაში (6.19) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\beta_m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{km}\alpha_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_{km}\alpha_k. \tag{6.20}$$

მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $W$ ოპერატორის შეუღლებული $W^*$ ოპერატორს შეესაბამება $W$ ოპერატორის შესაბამი $\{a_{mi}\}$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცი. (6.16) და (6.20) ფორმულები გვაძლევენ წრფივი $W$ და $W^*$ ოპერატორების მატრიცულ წარმოდგენებს იმ შემთხვევაში, როცა $E$ და $\overline{E}$ სივრცეებს ბიორთოგონალური თვლადი ბაზისები გააჩნიათ.

ახლა დავუბრუნდეთ ზემოთ დასმულ ამოცანას: დავიყვანოთ (6.12) და (6.14) ოპერატორული განტოლებები ეკვივალენტურ ალგებრულ განტოლებათა სისტემებზე.

განვიხილოთ ჯერ (6.12) განტოლება, რომელშიც $x'$ და $y$ ელემენტები დავშალოთ $E$ სივრცის $\{e_i\}$ ბაზისის მიხედვით:

$$x'=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i' e_i, \quad y=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i' e_i.$$

ვთქვათ, $V$ ოპერატორს შეესაბამება $\{b_{ik}\}$ მატრიცი. ვინაიდან $V$ არის $n$-განზომილებიანი ოპერატორი, ამიტომ $b_{ik}=0$, როცა $i>n$. (6.12) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}\xi_k'\right)e_i-\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i' e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i' e_i,$$

რომლის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში $e_i$ ელემენტების კოეფიციენტების გატოლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{ik}\xi_k'-\xi_i'=\eta_i', \text{ სადაც } i=1,\ 2,\ldots,n, \\ -\xi_i=\eta_i, \text{ სადაც } i=n+1,\ n+2,\ldots \end{array}\right\} \tag{6.21}$$

ვინაიდან $y$ ელემენტი მოცემულია, ამიტომ მისი დაშლის $\eta_i'$ კოეფიციენტები ცნობილი იქნება. ამრიგად, (6.21) სისტემაში $\xi_{n+1}, \xi_{n+2},\ldots$ ცნობილი რიცხვებია და ხსენებული სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\xi_k'-\xi_i=\eta_i'+\sum_{k=n+1}^{\infty} b_{ik}\eta_k' \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{6.22}$$

განტოლებათა უკანასკნელ სისტემაში $\xi_1', \xi_2',\ldots,\xi_n'$ არიან უცნობები. განტოლებათა რიცხვიც უდრის $n$-ს. ყველა ეს უცნობი გარკვეულ პირობებში განისაზღვრება (6.22) სისტემიდან.

განვიხილოთ ახლა (6.14) განტოლება. დავშალოთ $f$ და $g$ ელემენტები $E$ სივრცის $\{l_i\}$ ბაზისის მიხედვით, გვექნება

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i l_i, \quad g'=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i' l_i.$$

ვინაიდან $V^*$ ოპერატორი განისაზღვრება $V$ ოპერატორის გამსაზღვრელი მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცით, ამიტომ (6.14) განტოლება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\beta_k\right)l_i-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i l_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i' l_i,$$

საიდანაც გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\beta_k-\beta_i=\alpha_i' \ (i=1,\ 2,\ldots),$$

ანუ

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\beta_k - \beta_i = \alpha_i', \quad i=1, \ 2,\dots n \tag{6.23}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\beta_k - \beta_i = \alpha_i', \ i=n+1, \ n+2,\dots .$$

თუ (6.23) სისტემიდან ამოვხსნით $\beta_1, \beta_2,\dots,\beta_n$ უცნობებს, მაშინ დანარჩენი $\beta_{n+1}, \beta_{n+2},\dots$ უცნობები გამოითვლებიან შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\beta_k - \alpha_i', \ i=n+1, \ n+2,\dots .$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ოპერატორული (6.14) განტოლება დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა (6.23) სისტემაზე. იმის გამო, რომ (6.22) და (6.23) არის ალგებრულ განტოლებათა ტრანსპონირებული სისტემები, ამიტომ თუ ერთ-ერთი მათგანი, ნებისმიერი მარჯვენა ნაწილებისათვის, ცალსახად ამოხსნადია, მაშინ მეორეც, ნებისმიერი მარჯვენა ნაწილებისათვის, ცალსახად ამოხსნადი იქნება. ადვილი გასაგებია, რომ წინადადებები, რომლებიც (6.22) და (6.23) სისტემების ამონახსნების არსებობისა და ერთადობისათვის არის სამართლიანი, სამართლიანი იქნება აგრეთვე (6.7) და (6.13) (ე. ი. (6.12) და (6.14)) განტოლებებისთვისაც.

ვთქვათ, $\Theta_E$ და $\Theta_{\overline{E}}$ არიან შესაბამისად $E$ და $\overline{E}$ სივრცეების ნულოვანი ელემენტები. ზემოთ ნათქვამის გამო ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს:

1. თუ (6.7) და (6.13) განტოლებათაგან ერთ-ერთი ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა ნაწილისათვის, მაშინ მეორე მათგანიც ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა ნაწილისათვის. როცა ხსენებულ განტოლებათაგან ერთ-ერთი ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა ნაწილისათვის, მაშინ მოცემული მარჯვენა ნაწილისათვის ამონახსნი ერთადერთია. ამ პირობებში კერძოდ, $Ux-x=\Theta_E$ და $U^*f-f=\Theta_E$ განტოლებებს ექნებათ მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები.

2. თუ $Ux-x=\Theta_E$ განტოლებას არანულოვანი ამონახსნები აქვს, მაშინ $U^*f-f=\Theta_{\overline{E}}$ განტოლებასაც ექნება არანულოვანი ამონახსნები. ამასთანავე, ამ განტოლებების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა თანატოლი იქნება. ამ შემთხვევაში არაერთგვაროვან $Ux-x=y$ განტოლებას მხოლოდ მაშინ ექნება ამონახსნი, როცა $y$ ელემენტი $U^*f-f=\Theta_E$ განტოლების ყველა ამონახსნების ორთოგონალურია.

3. $Ux=x$ ფუნქციონალურ განტოლებას შესაძლოა ჰქონდეს მხოლოდ სასრული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისა.

## ლიტერატურა


1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
2. Alexandroff P., Hopf H., Topologie, I. J. Springer, Berlin, 1935.
3. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.
4. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warczawa, 1932.
5. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, Физматгиз, 1958.
6. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1958.
7. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. I, Изд. МГУ, 1954.
8. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, ОНТИ, 1935.
9. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.
10. Немыцкий В. В., Метод неподвижных точек в анализе, УМН, вып. I, 1936.
11. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948.
12. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, Гостехиздат, 1947.
13. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950
14. Рисс Ф. и Секефальви—Надь, Лекции по функциональному анализу, Изд. ИЛ, 1954.
15. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. I и II, Гостехиздат, 1951.
16. Халилов З. И., Основы функционального анализа, Изд. АГУ, 1949.
17. Хилле Э. и Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, Изд. ИЛ, 1962.

# ს ა რ ჩ ე ვ ი



## თ ა ვ ი I

### მეტრული სივრცე



## თ ა ვ ი II

### ტოპოლოგიური სივრცე



## თ ა ვ ი III

### წრფივი სივრცე

## თ ა ვ ი IV

### წრფივი ფუნქციონალი



## თ ა ვ ი V

### სუსტი კრებადობა და სუსტი კომპაქტურობა



## თ ა ვ ი VI

### სრულად უწყვეტი ოპერატორი

Цитланадзе Элизбар Семенович

**Основы функционального анализа**

(на грузинском языке)

Издательство „Цодна"

Тбилиси—1964

რედაქტორი პროფ. ვლ. ჭელიძე
გამომც. რედაქტორი დ. ბერიძე
ტექრედაქტორი გ. ხანდამიშვილი
კორექტორი ლ. ამაშუკელი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24/X-1964 წ. ქაღალდის ზომა $70 \times 108^{1}/_{16}$.
ნაბეჭდი თაბახი 19. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 19,77

**ფასი 82 კაპ.**

შეკვ. № 287 | უე 00698 | ტირაჟი 1000

გამომცემლობა „ცოდნა", თბილისი, კამოს ქ. № 18.
Издательство „Цодна", Тбилиси, ул. Камо № 18.

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს ბეჭდვითი სიტყვის სახელმწიფო
კომიტეტის მთავარპოლიგრაფმრეწველობის თბილისის სტამბა № 13

Тбилисская типография № 13 Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров Грузинской ССР по печати