ა. ა. სამარსკი

რიცხვითი მეთოდების შესავალი

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 2001

YDK 511(075.8)
ს 216

დამხმარე სახელმძღვანელოში განხილულია სხვაობიანი განტოლებები, რიცხვითი ანალიზის ტიპური საკითხები, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები, წრფივი ალგებრული განტოლებები და სხვაობიანი მეთოდები კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისათვის.

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების გამოყენებითი მათემატიკის და კომპიუტერულ მეცნიერებათა, მექანიკა-მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტების სტუდენტთათვის, აგრეთვე მეცნიერ-მუშაკთათვის, რომლებიც კომპიუტერზე რიცხვით მეთოდებს იყენებენ.

მთარგმნელი — თ. დავითაშვილი

ქართული თარგმნის რედაქტორები: — ჰ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე

რეცენზენტები: — ზ. გეგეჭკორი, მ. მენთეშაშვილი

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2001

ს $\frac{1602110000}{608(06)\text{-}01}$

ISBN 99928-33-28-9

სარჩევი

წინასიტყვაობა ქართული გამოცემისათვის

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გამოთვლითი ექსპერიმენტისა და მათემატიკური მოდელირების სფეროში ავტორის 35-წლიანი სამეცნიერო და პედაგოგიური მოღვაწეობის შედეგს. გამოთვლითი ექსპერიმენტის ჩატარებისას, ჩვეულებრივ, იკვლევენ ამოცანათა ზოგიერთ კლასს. ამ დროს ყოველთვის წამოიჭრება ბუნებრივი მოთხოვნა — დისკრეტული მოდელი და რიცხვითი ალგორითმი გამოსადეგი უნდა იყოს ამოცანათა მთელი კლასისათვის. ასეთი ალგორითმები აიგება ზოგადი თეორიის საფუძველზე. თვით თეორია კი უნდა იყოს საკმარისად ზოგადი და კონსტრუქციული: მისი შედეგების გამოყენება უნდა შეიძლებოდეს ნებისმიერი ამოცანისათვის ამოცანათა მოცემული კლასიდან, ანუ უნდა გვაძლევდეს საჭირო ხარისხის ალგორითმების აგებისა და გამოკვლევის საშუალებას.

რიცხვითი მეთოდების ჩვეულებრივი კურსი, როგორც წესი, შეიცავს შემდეგ განყოფილებებს: კვადრატული ფორმულები, ინტერპოლაცია და აპროქსიმაცია, არაწრფივი განტოლებებისა და წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა, ჩვეულებრივი და კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა. ამ ჩამონათვალს შეესაბამება წინამდებარე წიგნიც. თუმცა აქ (სხვა მრავალი დამხმარე სახელმძღვანელოსაგან განსხვავებით) ყურადღება გამახვილებულია დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის რიცხვით მეთოდებზე — სხვაობიანი მეთოდების თეორიასა და სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის იტერაციულ მეთოდებზე. ამ ნაწილებში მოყვანილი მასალა ავტორის ნაშრომების მიხედვითაა შედგენილი და გადმოცემულია სხვა წიგნებშიც, პირველ რიგში, მონოგრაფიაში А. А. Самарский, "Теория разностных схем", Москва, "Наука" 3-е изд., 1989.

წიგნს მსოფლიო ლიტერატურაში ანალოგი არ მოეძებნება. მისი განსაკუთრებულობაა — სხვაობიანი სქემების ზოგადი თეორიისა და იტერაციული მეთოდების ახსნა უმცროსკურსელი სტუდენტებისათვის გასაგები ფორმით (ელემენტარული მათემატიკური საშუალებების გამოყენებით) და ამ თეორიის გამოყენების ილუსტრაცია მარტივ შინაარსიან მაგალითებზე. თეორიის ცენტრალური

ნაწილია ბადური განტოლებების მდგრადობა, რომელიც მათემატიკური ფიზიკის სტაციონარული და არასტაციონარული განტოლებების ანალოგს წარმოადგენს. ეს განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$Ay = f \tag{1}$$

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f, \quad y_n = y(t_n), \quad t_n = n\tau, \quad n = 0,1,\dots \tag{2}$$

(ორშრიანი ოპერატორულ-სხვაობიანი სქემა)

სადაც A და B მატრიცები ან ოპერატორებია ბადურ ფუნქციათა H სივრცეში სკალარული ნამრავლით (,).

(2) ორშრიანი სქემისათვის მიღებულია საწყისი პირობების მიმართ ($f = 0$-ისათვის) მდგრადობის ზუსტი (აუცილებელი და საკმარისი) პირობა:

$$(By, y) \geq \frac{\tau}{2}(Ay, y) \ \text{ან} \ B \geq \frac{\tau}{2}A \ \text{თუ} \ A = A^* > 0, B > 0, B = B^*. \tag{3}$$

(2) სქემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც იტერაციული სქემა (1) განტოლების ამოსახსნელად. მისი კრებადობის საკმარისი პირობაა

$$(By, y) > \frac{\tau}{2}(Ay, y).$$

მკითხველთა ყურადღება მსურს მივაპყრო, აგრეთვე, ავტორისა და შემდგომ, ა. ვ. კუჩეროვისა და ე. ს. ნიკოლაევის მიერ გავრცობილ ცვალებად-სამკუთხა მეთოდს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგადი თეორია ძალაში რჩება სხვაობიანი განტოლებებისათვის მათი მიღების წესის მიუხედავად, მათ შორის, მაგალითად, სასრულ ელემენტთა მეთოდისთვისაც (რომელსაც ზოგჯერ პრიორიტეტს ანიჭებენ. თუმცა ეს სხვაობიანი აპროქსიმაციის აგების მხოლოდ ერთ-ერთი მეთოდია). ეს თეორია გამოიყენება საკმაოდ ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლებებისთვისაც.

ამ წიგნს ჩემი ქართველი კოლეგები უკვე მრავალი წლის განმაელობაში იყენებენ, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გამოთვლითი მათემატიკის სწავლებისას.

ვსარგებლობ შემთხვევით და მადლობას ვუხდი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფის კათედრის გამგეს ჰ. მელაძეს რიცხვითი მეთოდების თანამედროვე თეორიის პროპაგანდისა და ჩემი წიგნის ქართულ ენაზე გამოცემის ორგანიზებისთვის.

გამოვთქვამ იმედს, რომ ეს წიგნი შეესაბამება საქართველოში რიცხვითი მეთოდების, მათემატიკური მოდელირებისა და გამოთვლითი ექსპერიმენტის სფეროში სპეციალისტების მომზადების დონეს.

აკადემიკოსი ა. სამარსკი

წინათქმა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს რიცხვითი მეთოდების თეორიის შესავალს, რომელიც ანალიზის, წრფივი ალგებრისა და დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის მინიმალურ ცოდნას იყენებს. წიგნი შეიქმნა მ. ვ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკისა და კიბერნეტიკის ფაკულტეტის მეორე კურსის სტუდენტებისათვის, ავტორის მიერ რამდენიმე წლის განმაელობაში წაკითხული ლექციების გადამუშავების საფუძველზე.

წიგნის შინაარსი ტრადიციულია — ინტერპოლაცია და აპროქსიმაცია, რიცხვითი ინტეგრება, არაწრფივი განტოლების ამოხსნა, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პირდაპირი და იტერაციული მეთოდები, კოშის ამოცანისა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდები.

ავტორი მიისწრაფოდა გადმოცემული მასალა მისაწვდომი ყოფილიყო პირველი წაკითხვისთანავე, აქცევდა რა ყურადღებას რიცხვითი მეთოდების თეორიის ძირითად ცნებებს და უმარტივესი მაგალითებით მათ ილუსტრირებას.

ამჟამად მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებით აღწერილი ფიზიკისა და ტექნიკის მრავალი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის გამოიყენება სასრული სხვაობების მეთოდი. სხვაობიანი მეთოდების ძირითადი ცნებები (აპროქსიმაცია, მდგრადობა და კრებადობა) ჩვენ მიერ ილუსტრირებულია სხვაობიანი სქემების მაგალითებზე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის. დიფერენციალური განტოლებების აპროქსიმაციისას მიიღება სხვაობიანი განტოლებები, რომლებიც სპეციალური ტიპის (ბევრი ნულოვანი ელემენტის მქონე) მატრიცების მქონე მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემებს წარმოადგენს. მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ასეთი სისტემების ამოხსნის ეფექტური მეთოდების (პირდაპირის ან იტერაციულის) არჩევა. ამასთან დაკავშირებით, წიგნში გადმოცემულია იტერაციული მეთოდების ზოგადი თეორიის

საფუძვლები. დიდი ყურადღება აქვს დათმობილი კოპიუტერზე გამოთვლების მდგრადობის საკითხს. V თავში მარტივადაა გადმოცემული პირველი რიგის სხვაობიან განტოლებათა სისტემისათვის კოშის ამოცანის მდგრადობის თეორია. აქ მიღებულია სხვაობიანი სქემების მდგრადობის თანხვდენილი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, აგრეთვე გამოკვლეულია სხვაობიანი სქემების ასიმპტოტური მდგრადობა.

წიგნის მომდევნო ორ თავში (VI და VII) ელიფსური განტოლებებისა და სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდები განიხილება. ეს თავები დამატებითია და კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისათვის სხვაობიან სქემათა თეორიაზე გადასვლის საშუალებას იძლევა.

რიცხვითი მეთოდების ცალკეული ნაწილები უფრო სრულად გადმოცემულია წიგნებში: Самарский А. А., Теория разностных схем, М., "Наука", 1977; Самарский А. А. , Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., "Наука", 1978, აგრეთვე დამხმარე სახელმძღვანელოებში, რომელთა სია მოცემულიას წიგნის ბოლოს.

წიგნი გამიზნულია უმცროსი კურსის სტუდენტებისათვის, რომლებიც გამოყენებით მათემატიკასა და მათემატიკურ ფიზიკაში სპეციალიზდებიან. იგი სასარგებლო იქნება აგრეთვე რიცხვითი მეთოდების შემსწავლელი ასპირანტებისა და მეცნიერ-თანამშრომლებისთვისაც.

ავტორი სარგებლობს შესაძლებლობით, უღრმესი მადლობა გადაუხადოს ა. ვ. გულინს, რომელმაც წაიკითხა ხელნაწერი და მნიშვნელოვანი შენიშვნები მოგვცა, ე. ს. ნიკოლაევს — დამატების დაწერისას გაწეული დახმარებისათვის, აგრეთვე მ. ი. ბაკიროვასა და ნ. პ. სავენკოვას დახმარებისათვის წიგნზე მუშაობის პროცესში და მისი დასაბეჭდად მომზადებისათვის.

ა. ა. სამარსკი

შესავალი

სწრაფმოქმედი კომპიუტერის გამოჩენამ და განუწყვეტელმა სრულყოფამ მეცნიერების, კერძოდ და განსაკუთრებით მათემატიკის, ჭეშმარიტად რევოლუციური გარდაქმნა გამოიწვია. კოლოსალურად გაიზარდა რთული პროცესების თეორიული შესწავლისა და პროგნოზის, საინჟინრო კონსტრუქციების დაპროექტების შესაძლებლობები. მსხვილი სამეცნიერო-ტექნიკური პრობლემების გადაწყვეტა, რომელთა მაგალითებადაც გამოდგება ბირთვული ენერგიის დაუფლებისა და კოსმოსის ათვისების პრობლემები, შესაძლებელი გახდა მხოლოდ მათემატიკური მოდელირებისა და კომპიუტერისთვის გამიზნული ახალი რიცხვითი მეთოდების გამოყენების მეშვეობით.

პირველი დიდი პრობლემა — ბირთვული ენერგიის დაუფლება — ფიზიკისა და მექანიკის ისეთი რთული ამოცანების კომპლექსის გადაჭრას მოითხოვს, როგორიცაა: რეაქტორის მუშაობის მართვა, ურანის ბირთვების დაყოფის ენერგიის გამოყენება, გამჭოლი გამოსხივებისაგან დაცვა, რეაქტორის კედლების შესწავლა და სხვა. ყველა ეს ამოცანა აუცილებელია გადაიჭრას რეაქტორის მუშაობის დაწყებამდე, მათთვის მათემატიკური აღწერის (მოდელის) გამოყენებით და კომპიუტერზე რიცხვითი გამოთვლების ჩატარებით. მეორე დიდი პრობლემა — კოსმოსის ათვისება — საფრენი აპარატების შექმნასთან და მათთვის აეროდინამიკისა და ბალისტიკის მრავალი ამოცანის (მაგალითად, რაკეტის მოძრაობის გამოთვლა და მისი ფრენის მართვა) ამოხსნასთანაა დაკავშირებული. აქ, აგრეთვე, არის მექანიზმის, ფიზიკისა და ტექნიკის რთული ამოცანების კომპლექსი, რომელთა გადაწყვეტა მხოლოდ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით შეიძლება.

მივუთითებთ კაცობრიობის წინაშე მდგომ კიდევ ერთ პრობლემაზე — ენერგიის ახალი წყაროების მოპოვებაზე. ენერგიის მიღების ერთ-ერთი ძირითადი პროექტია დეითერიუმისა და გრიტიუმის ბირთვების მართვადი თერმობირთვული სინთეზის რეაქციის გამოყენება. თერმობირთვული საწვავის მარაგი დედამიწაზე

პრაქტიკულად ამოუწურავია, ხოლო რეაქციის პროდუქტები გარემოს არ აბინძურებს. ოღონდ, თერმობირთვული რეაქცია მხოლოდ ექსტრემალურ პირობებში იწყება — მაღალ ტემპერატურაზე (ათეული და ასეული მილიონი გრადუსების რიგის) და დეითერიუმისა და ტრიტიუმის დიდი შეკუმშვისას (ათასობითჯერ); ამას გარდა, საწვავი ნივთიერება ამ მდგომარეობაში წვის (სინთეზის) რეაქციის გაჩაღებისათვის საჭირო დროის განმავლობაში უნდა შევაკავოთ. ასეთი პირობების შექმნა ჯერჯერობით გადაუწყვეტელ სამეცნიერო-ტექნიკურ პრობლემას წარმოადგენს. არსებობს თერმობირთვული საწვავის (პლაზმის) გახურების, შეკუმშვისა და შეკავების რამდენიმე პროექტი. მათი რეალიზაციისას ჩნდება ბევრი საკითხი, რომლებიც ექსპერიმენტული დანადგარების დაპროექტებამდე უნდა გადაწყდეს. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა შესწავლილ იქნეს პლაზმის ყოფაქცევა მაღალი ტემპერატურებისა და სიმკვრივეების დროს, მაგნიტურ ველებში კი გაირკვეს პირობები, როცა შესაძლებელია თვით თერმობირთვული სინთეზის რეაქცია.

ასეთი გამოკვლევები ფიზიკური პროცესების მათემატიკური აღწერისაა (მათემატიკური მოდელის) და შემდგომ გამოთვლითი ალგორითმების საშუალებით სათანადო მათემატიკური ამოცანების კომპიუტერზე ამოხსნის საფუძველზე ტარდება.

დღესდღეობით შეიძლება ითქვას, რომ გაჩნდა ახალი ხერხი ისეთი რთული პროცესების თეორიული კვლევისა, რომლებიც შესაძლებელია მათემატიკურად აღიწეროს. ეს არის გამოთვლითი ექსპერიმენტი, ე. ი. საბუნებისმეტყველო-სამეცნიერო პრობლემების კვლევა გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებებით. კვლევის ამ ხერხის არსი რომელიმე ფიზიკური პრობლემის მაგალითზე ავხსნათ. ვთქვათ, რაიმე ფიზიკური პროცესია შესასწავლი. მათემატიკურ კვლევას წინ უსწრებს ფიზიკური მიახლოების შერჩევა, ე. ი. იმ საკითხის გადაწყვეტა, თუ რომელია უგულებელყოფილი. ამის შემდეგ პრობლემის კვლევა გამოთვლითი ექსპერიმენტის მეთოდით მიმდინარეობს, რომელშიც რამდენიმე ძირითადი ეტაპი შეიძლება გამოიყოს.

პირველ ეტაპზე ხდება მათემატიკური მოდელის არჩევა, ე. ი. პროცესის მიახლოებითი აღწერა ალგებრული, დიფერენციალური ან ინტეგრალური განტოლებების ფორმით. ეს განტოლებები, ჩვეუ-

ლებრივ, ძირითადი ფიზიკური სიდიდეების (ენერგიის, მოძრაობის რაოდენობის, მასის და სხვა) შენახვის კანონებს გამოხატავს. მიღებული მათემატიკური მოდელი აუცილებელია გამოკვლეულ იქნეს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის მეთოდებით. უნდა დადგინდეს, სწორადაა თუ არა დასმული ამოცანა, საკმარისია თუ არა საწყისი მონაცემები, ხომ არ ეწინააღმდეგებიან ისინი ერთმანეთს, არსებობს თუ არა დასმული ამოცანის ამოხსნა და ერთადერთია თუ არა იგი. ამ ეტაპზე გამოიყენება კლასიკური მათემატიკის მეთოდები. უნდა აღინიშნოს, რომ ბევრ ფიზიკურ ამოცანას ისეთ მათემატიკურ მოდელებამდე მივყავართ, რომელთა თეორიის დამუშავება საწყის სტადიაში იმყოფება. პრაქტიკაში მათემატიკური ფიზიკის ისეთი ამოცანების ამოხსნა გვიწევს, რომელთათვისაც არ გვაქვს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები.

გამოთვლითი ექსპერიმენტის მეორე ეტაპი მდგომარეობს ამოცანის გადასაწყვეტი მიახლოებითი რიცხვითი მეთოდის აგებაში, ე. ი. გამოთვლითი ალგორითმების არჩევაში. გამოთვლით ალგორითმში იგულისხმება არითმეტიკული და ლოგიკური ოპერაციების თანმიმდევრობა, რომელთა მეშვეობითაც მოიძებნება პირველ ეტაპზე ფორმულირებული ამოცანის ამოხსნა. ქვემოთ ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ თანამედროვე კომპიუტერებისათვის გამიზნული რიცხვითი ალგორითმებისათვის წაყენებულ მოთხოვნებს. არსებითად, მთელი წინამდებარე წიგნი ელემენტარული გამოთვლითი ალგორითმების განხილვას ეძღვნება.

მესამე ეტაპზე ხორციელდება კომპიუტერისთვის გამოთვლითი ალგორითმის დაპროგრამება და მეოთხე ეტაპზე — კომპიუტერზე გამოთვლების ჩატარება. ჩვენ არ შევჩერდებით პროგრამირებაზე კომპიუტერზე გამოთვლების ორგანიზაციასა და ჩატარებასთან დაკავშირებულ საკითხებზე, ვინაიდან ეს წინამდებარე წიგნის ჩარჩოებს სცილდება. მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ პროგრამირებაში საქმიანობა მჭიდროდ უნდა იყოს დაკავშირებული კონკრეტული რიცხვითი ალგორითმების დამუშავებასთან.

დაბოლოს, გამოთვლითი ექსპერიმეტის მეხუთე ეტაპად შეიძლება გამოიყოს მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი და მათემატიკური მოდელის შემდგომი დაზუსტება. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ მოდელი ძალზე უხეშია — გამოთვლების შედეგები ფიზ-

იკურ ექსპერიმენტს არ ეთანადება, ან მოდელი ძალზე რთულია და ამოხსნა საკმარისი სიზუსტით შეიძლება უფრო მარტივი მოდელებისთვისაც იქნეს მიღებული. მაშინ საჭიროა მუშაობა პირველი ეტაპიდან დაიწყოს, ე. ი. დაზუსტდეს მათემატიკური მოდელი და ყველა ეტაპი კვლავ იქნეს გავლილი.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ გამოთვლითი ექსპერიმენტი, როგორც წესი, სტანდარტული ფორმულით ერთხელ გამოთვლა კი არ არის, არამედ ეს არის, უპირველეს ყოვლისა, სხვადასხვა მათემატიკურ მოდელთათვის ვარიანტების სერიის გადათვლა.

ახლა გადავიდეთ გამოთვლითი ალგორითმისადმი წაყენებული ზოგიერთი ზოგადი მოთხოვნისა და მახასიათებლის დაწვრილებით განხილვაზე. გამოთვლითი ალგორითმების დამუშავება, გამოკვლევა და კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად მათი გამოყენება შეადგენს თანამედროვე მათემატიკის ერთი უზარმაზარი ნაწილის — გამოთვლითი მათემატიკის — შინაარსს. ამჟამად, გამოთვლით მათემატიკას, ამ ტერმინის ფართო გაგებით, განსაზღვრავენ, როგორც მათემატიკის იმ ნაწილს, რომელიც მოიცავს კომპიუტერების გამოყენებასთან დაკავშირებულ საკითხთა წრეს და ვიწრო აზრით — ღასმული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდებისა და ალგორითმების თეორიას. შემდგომში ჩვენ მხედველობაში გვექნება გამოთვლითი მათემატიკა მხოლოდ სიტყვის ვიწრო გაგებით.

ყველა რიცხვითი მეთოდისათვის საერთოა მათემატიკური ამოცანის სასრულგანზომილებიან ამოცანაზე დაყვანა. ეს უფრო ხშირად თავდაპირველი ამოცანის დისკრეტიზაციით ე. ი. უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციებიდან დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციებზე გადასვლით მიიღწევა. საწყისი ამოცანის დისკრეტიზაციის შემდეგ საჭიროა აიგოს გამოთვლითი ალგორითმი, ე. ი. მითითებულ იქნეს იმ არითმეტიკული და ლოგიკური მოქმედებების თანმიმდევრობა, რომლებიც კომპიუტერზე სრულდება და მოქმედებათა სასრული რიცხვის შემდეგ დისკრეტული ამოცანის ამოხსნას იძლევა. დისკრეტული ამოცანის მიღებული ამოხსნა თავდაპირველი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნად ითვლება.

კომპიუტერზე ამოცანის გადაწყვეტისას ჩვენ ყოველთვის ვღებულობთ თავდაპირველი ამოცანის არა ზუსტ, არამედ

რაიმე მიახლოებით ამოხსნას. რა განაპირობებს წარმოშობილ ცდომილებას? შეიძლება გამოიყოს თავდაპირველი მათემატიკური ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისას წარმოშობილი ცდომილების სამი ძირითადი მიზეზი. უპირველეს ყოვლისა, თავდაპირველ ამოცანაში შემავალი მონაცემები (საწყისი და სასაზღვრო პირობები, განტოლებების კოეფიციენტები და მარჯვენა მხარეები) ყოველთვის გარკვეული ცდომილებით მოიცემა. რიცხვითი მეთოდის ცდომილებას, რომელიც მასში შემავალი არაზუსტი მონაცემების მოცემით არის განპირობებული, აუცილებადი ცდომილება ეწოდება. შემდეგ, თავდაპირველი ამოცანის დისკრეტული ამოცანით შეცვლის დროს, წარმოიშობა ცდომილება, რომელსაც დისკრეტიზაციის ცდომილება ან, სხვანაირად, მეთოდის ცდომილება ეწოდება. მაგალითად, როცა $u'(x)$ წარმოებულს ვცვლით სხვაობიანი თანაფარდობით $(u(x+\Delta x) - u(x))/\Delta x$, ჩვენ ვუშვებთ დისკრეტიზაციის ცდომილებას, რომელსაც, როცა $\Delta x \to 0$, აქვს Δx რიგი. დაბოლოს, კომპიუტერში წარმოდგენილი რიცხვების სასრულთანრიგიანობას დამრგვალების ცდომილებამდე მივყავართ, რომელიც გამოთვლების პროცესში შეიძლება იზრდებოდეს. ბუნებრივია, მოვითხოვთ, რომ ცდომილება საწყისი მონაცემების მოცემაში და დისკრეტიზაციის შედეგად წარმოშობილი ცდომილება შეთანხმებულ იქნეს დისკრეტული ამოცანის კომპიუტერზე ამოხსნის ცდომილებასთან. ნათქვამიდან ჩანს, რომ გამოთვლითი ალგორითმებისადმი წაყენებული ძირითადი მოთხოვნაა სიზუსტე. ეს ნიშნავს, რომ გამოთვლითმა ალგორითმმა მოცემულ $\varepsilon > 0$ სიზუსტით უნდა მოგვცეს საწყისი ამოცანის ამოხსნა. მოქმედებათა სასრული $Q(\varepsilon)$ რიცხვის შემდეგ. ალგორითმი უნდა იყოს რეალიზებადი, ე. ი. ამოცანის ამოხსნას დასაშვები მანქანური დროის განმავლობაში უნდა იძლეოდეს. ალგორითმების უმრავლესობისათვის ამოცანის ამოხსნის დრო (გამოთვლების მოცულობა) $Q(\varepsilon)$ სიზუსტის ზრდის კვალობაზე, ე. ი. ε-ის შემცირებასთან ერთად იზრდება. ცხადია, ε შეიძლება იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ ამოცანის თვლის დრო დაუშვებლად დიდი გახდეს. მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ ალგორითმი ამოცანის ნებისმიერი სიზუსტით ამოხსნის პრინციპულ შესაძლებლობას იძლევა. თუმცა, პრაქტიკულად, ε სიზუსტეს არჩევენ

ისე, რომ მოცემულ კომპიუტერზე ალგორითმის რეალიზებადობის შესაძლებლობას ითვალისწინებენ. ყოველი ამოცანის, ალგორითმისა და მანქანისათვის არსებობს მისი მახასიათებელი ε მნიშვნელობა.

ვეცადოთ, რომ მოქმედებათა რიცხვი (და ამით ამოცანის ამოხსნის მანქანური დრო) $Q(\varepsilon)$ მოცემული ამოცანისათვის მინიმალური იყოს. ნებისმიერი ამოცანისათვის შეიძლება მოინახოს მრავალი ალგორითმი, რომლებიც რიგით ერთნაირ $\varepsilon > 0$ სიზუსტეს იძლევიან (როცა $\varepsilon \to 0$) მოქმედებათა სხვადასხვა რიცხვისათვის. როგორც იტყვიან, სიზუსტის რიგის მიხედვით ეკვივალენტურ ალგორითმებს შორის შეიძლება აირჩეს ისეთი, რომელიც ამოცანის ამოხსნას უმცირესი მანქანური დროის (მოქმედებათა $Q(\varepsilon)$ რიცხვის) დანახარჯით იძლევა. ასეთ ალგორითმებს ჩვენ ეკონომიურ ალგორითმებს ვუწოდებთ.

შევჩერდეთ გამოთვლითი ალგორითმებისადმი წაყენებულ კიდევ ერთ მოთხოვნაზე; სახელდობრ, მოვითხოვთ, რომ გამოთვლების პროცესში კომპიუტერის ავარიულ გაჩერებას ადგილი არ ჰქონდეს.

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ კომპიუტერის ოპერაციებს ახდენს რიცხვებზე, რომელთაც სასრული რაოდენობის ნიშნადი ციფრები აქვთ და ეკუთვნიან (მოდულის მიხედვით) არა მთელ რიცხვით ღერძს, არამედ რაღაც (M_0, M_∞), $M_0 > 0$, $M_\infty < 0$ ინტერვალს, სადაც M_0 – მანქანური ნულია, M_∞ – მანქანური უსასრულობა. თუ $|M| < M_\infty$ პირობა გამოთვლების პროცესში ირღვევა, ხდება კომპიუტერის ავარიული გაჩერება სათანრიგო ბადის გადავსების გამო და გამოთვლები წყდება. ავარიული შეჩერების შესაძლებლობა დამოკიდებულია როგორც ალგორითმზე, ასევე თავდაპირველ ამოცანაზე. თუ თავდაპირველი ამოცანის ამოხსნა გამოიხატება ძალიან დიდი (ძალიან პატარა) რიცხვებით $|M| > M_\infty$ ($|M| < M_0$), მაშინ, როგორც წესი, მასშტაბების შეცვლის გზით შესაძლებელია ამოცანის ისეთ სახემდე დაყვანა, რომ შემავალი სიდიდეების მოდული მოცემულ (M_0, M_∞) ინტერვალს ეკუთვნოდეს. ხშირად ავარიული გაჩერების თავიდან აცილება მოქმედებების რიგის შეცვლით შეიძლება. ავხსნათ ეს მარტივ მაგალითზე:

მაგალითი. ვთქვათ, $M_\infty = 10^p$, $M_0 = 10^{-p}$, $p = 2^n$, n – მთელი რიცხვია. საჭიროა $10^{p/2}$, $10^{p/4}$, $10^{-p/2}$, $10^{3p/4}$, $10^{-3p/4}$ რიცხვების ნამრავლი გამოითვალოს.

I-ლი ხერხი. რიცხვები კლებადობის რიგის მიხედვით გადავნომროთ: $q_1 = 10^{3p/4}$, $q_2 = 10^{p/2}$, $q_3 = 10^{p/4}$, $q_4 = 10^{-p/2}$, $q_5 = 10^{-3p/4}$ და გამოვთვალოთ ნამრავლები $S_{k+1} = S_k q_{k+1}$, $S_1 = q_1$. მაშინ პირველსავე ბიჯზე მოხდება ავარიული გაჩერება, ვინაიდან $S_2 = q_1 q_2 = 10^{5p/4} > M_\infty$.

მე-2 ხერხი. რიცხვები ზრდადობის რიგის მიხედვით გადავნომროთ: $q_1 = 10^{-3p/4}$, $q_2 = 10^{-p/2}$, $q_3 = 10^{p/4}$, $q_4 = 10^{p/2}$, $q_5 = 10^{3p/4}$. ამ შემთხვევაში პირველ ბიჯზე მივიღებთ:

$$S_2 = q_1 q_2 = 10^{-5p/4} < M_0 .$$

ე. ი. S_2 – მანქანური ნულია; ნულის ტოლი იქნება ყველა მომდევნო ნამრავლიც; ამდენად, აქ სიზუსტის სრული დაკარგვა ხდება.

მე-3 ხერხი. ავურიოთ ეს რიცხვები და დავუშვათ, რომ $q_1 = 10^{-3p/4}$, $q_2 = 10^{p/2}$, $q_3 = 10^{3p/4}$, $q_4 = 10^{-p/2}$, $q_5 = 10^{p/4}$. მაშინ თანმიმდევრულად ვიპოვით:

$$S_2 = q_1 q_2 = 10^{-p/4}, \qquad S_3 = S_2 q_3 = 10^{p/2},$$

$$S_4 = S_3 q_4 = 10^0, \qquad S_5 = S_4 q_5 = 10^{p/4},$$

ე. ი. გამოთვლების პროცესში არ ჩნდება $10^{p/2}$-ზე მეტი და $10^{-p/4}$-ზე ნაკლები რიცხვები. ასეთი ალგორითმი ავარიულ გაჩერებას არ გამოიწვევს.

III თავში ჩვენ შევხვდებით წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ისეთ იტერაციულ მეთოდს, რომელიც შეიძლება იწვევდეს ან არ იწვევდეს ავარიულ შეჩერებას იმისდა მიხედვით, თუ რა ხერხითაა გადანომრილი გამოთვლების თანმიმდევრობის განმსაზღვრელი საიტერაციო პარამეტრები.

გამოთვლების ყოველი აქტის დროს ჩნდება დამრგვალების ცდომილებები, ალგორითმის მიხედვით ეს ცდომილებები შეიძლება იზრდებოდეს ან ილეოდეს.

თუ გამოთვლების პროცესში დამრგვალების ცდომილებები უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ ასეთ ალგორითმს არამდგრადს (გამოთვლებისათვის არამდგრადს) უწოდებენ. თუკი დამრგვალების ცდომილებები არ გროვდება, მაშინ ალგორითმი მდგრადია.

მაგალითი 1. მოცემული y_0 და d-სთვის უნდა ვიპოვოთ y_i $(0 < i \le i_0)$ ფორმულით $y_{i+1} = y_i + d$ $(i \ge 0)$. დავუშვათ, y_i-ის გამოთვლისას წარმოიშვა ცდომილება სიდიდით δ_i, ე. ი. y_i-ის ზუსტი მნიშვნელობის ნაცვლად $\tilde{y}_i = y_i + \delta_i$ მიახლოებითი მნიშვნელობაა მიღებული. მაშინ y_{i+1}-ის ზუსტი მნიშვნელობის მაგიერ მივიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობას $\tilde{y}_{i+1} = (y_i + \delta_i) + d = y_{i+1} + \delta_i$. ამგვარად, ნებისმიერ საშუალო ბიჯზე დაშვებული ცდომილება გამოთვლების პროცესში არ იზრდება. ალგორითმი მდგრადია.

მაგალითი 2. განვიხილოთ განტოლება $y_{i+1} = qy_i$ $(i \ge 0$, y_0 და q მოცემულია). ვთქვათ, აქ, როგორც პირველ მაგალითში y_i-ს მაგივრად მიღებულია მნიშვნელობა $\tilde{y}_i = y_i + \delta_i$. მაშინ y_{i+1}-ის ნაცვლად მივიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობას

$$\tilde{y}_{i+1} = q(y_i + \delta_i) = y_{i+1} + q\delta_i .$$

აქედან ჩანს, რომ ცდომილება $\delta_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$, რომელიც y_{i+1}-ის გამოთვლისას წარმოიშვა, დაკავშირებულია δ_i-სთან განტოლებით

$$\delta_{i+1} = q\delta_i, \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

ამრიგად, გამოთვლების პროცესში ცდომილების აბსოლუტური მნიშვნელობა გაიზრდება, თუ $|q| > 1$ (ალგორითმი არამდგრადია) და, თუ $|q| \le 1$, მაშინ ცდომილება არ იზრდება, ე. ი. ალგორითმი მდგრადია. არამდგრადობას, ჩვეულებრივ აკავშირებენ დამრგვალების ცდომილების ექსპონენციალური ზრდის თვისებასთან. თუ ერთი ოპერაციიდან მეორე ოპერაციაზე გადასვლისას („ბიჯიდან ბიჯამდე") დამრგვალების ცდომილება ხარისხოვანი კანონით იზრდება, მაშინ ალგორითმი პირობითად მდგრადია (გამოთვლების მოცულობასა და საჭირო სიზუსტეზე გარკვეული შეზღუდვებისას). გამოთვლების პროცესი ასე შეიძლება განვიხილოთ: ბიჯიდან ბიჯზე გადასვლისას ხდება (დამრგვალების ცდომილების გამო) ბო-

ლო ნიშნადი ციფრების დამახინჯება (ბოლო ნიშნადი ციფრებიდან მარჯვნიდან მარცხნივ მოძრაობს „დამრგვალების ცდომილების ტალღა“). ჩვეულებრივ, ჩვენ გვჭირდება, რომ რამდენიმე წინა ნიშნადი ციფრი (4-5 ნიშანი) ჭეშმარიტი იყოს, ამიტომ გამოთვლები უნდა დამთავრდეს მანამდე, ვიდრე მათთან „დამრგვალების ცდომილების ტალღა“ მიაღწევს. თუ დამრგვალების ცდომილება ε_0 ბიჯიდან ბიჯამდე იზრდება ექსპონენციალური კანონით, მაშინ, როგორც წესი, გამოთვლების საშუალედო ეტაპზე ეს გამოიწვევს ავარიულ შეჩერებას (როგორც მეორე მაგალითში). თუ $|q|^i\varepsilon_0 \ge M_\infty$.

თუ $M_\infty = 10^p$, $\varepsilon_0 = 10^{-k_0}$, მაშინ ავარიული შეჩერება მოხდება, როცა $i_0 > (p + k_0)/\lg|q|$. სხვაგვარადაა საქმე, როცა დამრგვალების ცდომილება ხარისხოვნად იზრდება. ვთქვათ, $|\delta y_i| \approx i^n\varepsilon_0$ $(n \ge 1)$; მაშინ ავარიული შეჩერება მოხდება, როცა $i_0^n\varepsilon_0 \ge M_\infty$,

ე. ი. როცა $i_0 \ge \left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}M_\infty\right)^{1/n} = 10^{(p+k_0)/n}$.

აქედან ჩანს, რომ, თუ $n = 1$, ავარიული შეჩერება არ მოხდება ცხადი შეზღუდვის $i < M_\infty = 10^p$ გამო. უტოლობა $|\delta y_i| \le \varepsilon$, სადაც $\varepsilon = 10^{-k}$ — მოცემული სიზუსტეა, სამართლიანია, როცა $i \le \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/n} =$
$= 10^{(k_0-k)/n} = i_0$. თუ ε და ε_0 მოცემულია, მაშინ ეს უტოლობა განტოლებათა რიცხვის შეზღუდვას ნიშნავს $i \le i_0$. მაგალითად, როცა $k_0 = 12$, $k = 6$ გვაქვს $i \le 10^{6/n}$, ისე, რომ $i \le 10^3$ როცა $n = 2$. ცხადია, რომ შეიძლება ისეთი დიდი n-ის მითითება, რომ განტოლებათა შესაძლო რიცხვი i_0 ძალიან მცირე იყოს. თუმცა, პრაქტიკაში ჩვეულებრივ ისეთი შემთხვევები გვხვდება, როცა n არ არის დიდი (მაგალითად, ფაქტორიზაციის მეთოდისთვის) იხ. I თავი, §3 ($n = 2$, ე. ი. განტოლებათა რიცხვის ზრდასთან ერთად ცდომილება კვადრატული კანონით გროვდება).

ყოველი ამოცანის ამოხსნისას აუცილებელია ვიცოდეთ რაიმე მასში შემავალი (თავდაპირველი) მონაცემები — საძიებელი ფუნქციის საწყისი, სასაზღვრო მნიშვნელობები, კოეფიციენტები და განტოლების მარჯვენა მხარე და ა. შ.

ყოველი ამოცანისათვის ისმება ერთი და იგივე კითხვები: არსებობს თუ არა ამოცანის ამოხსნა? ერთადერთია თუ არა იგი და როგორაა ამოხსნა დამოკიდებული ამოცანაში შემავალ მონაცემებზე? შესაძლოა ორი შემთხვევა:

ამოცანა კორექტულად არის დასმული (ამოცანა კორექტულია); ეს ნიშნავს, რომ: 1) ამოცანა ამოხსნადია მასში შემავალი ნებისმიერი დასაშვები მონაცემებისათვის; 2) არსებობს ერთადერთი ამოხსნა; 3) ამოცანის ამოხსნა უწყვეტად არის დამოკიდებული მასში შემავალ მონაცემებზე (ამ მონაცემების მცირე ცვლილებას ამოხსნის მცირე ცვლილება შეესაბამება) — სხვა სიტყვებით, ამოცანა მდგრადია.

ამოცანა არაკორექტულად არის დასმული (ამოცანა არაკორექტულია), თუ მასში შემავალი მონაცემების მიმართ ამოხსნა არამდგრადია (ამ მონაცემების მცირე ცვლილებას ამოხსნის დიდი ცვლილება შეესაბამება).

კორექტული ამოცანის მაგალითია ინტეგრების ამოცანა, ხოლო არაკორექტული ამოცანის — გაწარმოების ამოცანა.

მაგალითები: 1. ინტეგრების ამოცანა. მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია; ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$J = \int_0^1 f(x)dx.$$

f შევცვალოთ $\tilde{f}$-ით და განვიხილოთ $\tilde{J} = \int_0^1 \tilde{f}(x)dx$ და სხვაობა

$\delta J = \tilde{J} - J = \int_0^1 \delta f dx \quad (\delta f = \tilde{f}(x) - f(x))$. აქედან ჩანს, რომ $|\delta J| \le$ $\le \max\limits_{0\le x\le 1}|\delta f(x)|$, $|\delta J| \le \varepsilon$, თუ $|\delta f| \le \varepsilon$, ე. ი. J უწყვეტადაა დამოკიდებული f-ზე. J ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოდ კვადრატურული ფორმულით

$$J_N = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k), \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{N} c_k = 1.$$

თუ გავიმეორებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას, მივიღებთ:

$$\delta J_N = \widetilde{J}_N - J_N = \sum_{k=1}^{N} c_k(\widetilde{f}_k - f_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \delta f_k,$$

$$|\delta J_N| \le \sum_{k=1}^{N} c_k \max_{1\le k\le N}|\delta f_k| = \max_{1\le k\le N}|\delta f_k|.$$

ამრიგად, ინტეგრალის გამოთვლის ამოცანა კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით კორექტულია.

2. გაწარმოების ამოცანა. მიახლოებით მოცემული $u(x)$ ფუნქციის გაწარმოების ამოცანა არაკორექტულია. მართლაც ვთქვათ, $\widetilde{u}(x) = u(x) + \frac{1}{N}\sin N^2 x$, სადაც N საკმარისად დიდია. მაშინ C მეტრიკაში (რაღაც $0 \le x \le \delta$ შუალედზე $(\delta > \pi/N^2)$) გვექნება $\|\delta u\|_C = \|\widetilde{u} - u\|_C = \frac{1}{N} \le \varepsilon$, როცა $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$. წარმოებულის ცდომილებისათვის $\delta u' = \widetilde{u}' - u' = N\cos N^2 x$ გვექნება $\|\delta u'\|_C = N \ge 1/\varepsilon$. ამრიგად, $u(x)$ ფუნქციის მცირე $O(\varepsilon)$ ცვლილებას C-ში შეესაბამება მისი წარმოებულის დიდი $O(1/\varepsilon)$ ცვლილება C-ში.

ამიტომ რიცხვითი გაწარმოება არაკორექტულია. იმისათვის რომ სხვაობიანი გაწარმოების ფორმულის მეშვეობით რაიმე $\varepsilon > 0$ სიზუსტით წარმოებულის მნიშვნელობა ვიპოვოთ, როცა ფუნქცია δ_i ცვლილებით არის მოცემული $(|\delta_i| \le \delta_0)$, აუცილებელია, ε, δ_0 და ბადის h ბიჯის შეთანხმებულობის პირობა შესრულდეს, მაგალითად, შემდეგი სახით: $\varepsilon \ge k\sqrt{\delta_0}$ ($k = \mathrm{const} > 0$ არ არის დამოკიდებული h, δ_0-ზე), ამასთანავე, ბადის ბიჯი შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ასევე ზემოდან. ამრიგად, სიზუსტე, რომელსაც რიცხვითი გაწარმოების დროს შეიძლება მივაღწიოთ, ლიმიტირებულია თვით ფუნქციის მოცემის სიზუსტით.

წინამდებარე წიგნში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ კორექტულ ამოცანებსა და რიცხვით მეთოდებს, რომლებიც კომპიუტერზე გამოყენებისათვის არის გამიზნული.

რიცხვითი მეთოდები ამოცანის მიახლოებით ამოხსნას გვაძლევს. ეს ნიშნავს, რომ რომელიღაც ამოცანის ზუსტი ამოხსნის (ფუნქციის ან ფუნქციონალის) მაგიერ ჩვენ ვპოულობთ სხვა ამოცანის ამოხსნას, რომელიც რაღაც აზრით (მაგალითად, ნორმით) ახლოსაა საძიებელთან. როგორც ნაჩვენები იყო, ყველა მეთოდის ძირითადი იდეა არის თავდაპირველი ამოცანის დისკრეტიზაცია ან აპროქსიმაცია (შეცვლა, მიახლოება) სხვა ამოცანით, რომელიც კომპიუტერზე ამოსახსნელად უფრო მოხერხებულია; ამასთანავე, მააპროქსიმირებელი ამოცანის ამოხსნა დამოკიდებულია ისეთ პარამეტრებზე, რომელთა მართვითაც შესაძლებელია ამოხსნა საჭირო სიზუსტით განისაზღვროს. მაგალითად, რიცხვითი ინტეგრების ამოცანაში ასეთი პარამეტრებია: კვადრატურული ფორმულის კვანძები და ნიშნები. შემდეგ, დისკრეტული ამოცანის ამოხსნა სასრულგანზომილებიანი სივრცის ელემენტია. შევჩერდეთ ამაზე დაწვრილებით.

მაგალითად, განვიხილოთ უწყვეტი $x \in [a, b]$ არგუმენტის, $f(x)$ ფუნქციათა $H = \{f(x)\}$ სივრცის დისკრეტიზაცია. $a \le x \le b$ მონაკვეთზე შემოვიღოთ წერტილთა სასრული სიმრავლე $\omega = \{x_i: i = 0, 1, \dots, N,\ x_0 = a,\ x_N = b,\ x_i < x_{i+1}\}$ და მას ვუწოდოთ ბადე, ხოლო x_i წერტილებს – ω ბადის კვანძები. თუ მეზობელ კვანძებს შორის მანძილი $h = x_i - x_{i-1}$ მუდმივია (i-ზე არაა დამოკიდებული), $h_i = h$ ყველა i-სთვის, $i = 1, 2, \dots, N$, მაშინ ბადეს უწოდებენ თანაბარს (h ბიჯით), წინააღმდეგ შემთხვევაში – არათანაბარს. ყველა x-სათვის, $x \in [a, b]$, განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ ω ბადის x_i კვანძის ან მთელრიცხვა i ($i = 0, 1, \dots, N$) არგუმენტის $y_i = f(x_i)$ ბადურ ფუნქციას, ხოლო $H = \{f(x), x \in [a. b]\}$ სივრცეს შევცვლით ბადური ფუნქციების სასრულგანზომილებიანი ($N + 1$ განზომილების) $H_{N+1} = \{y_i,\ 0 \le i \le N\}$ სივრცით. ცხადია, რომ $y_i = f(x_i)$ ბადური ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ვექტორი $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$.

შეიძლება მრავალი ცვლადის ფუნქციის $f(x)$ (როცა $x = x_1,\ldots,x_p$ — p-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცის წერტილია, $p > 1$) სივრცის დისკრეტიზაციაც ჩატარდეს. ასე, (x_1, x_2) სიბრტყეზე შეიძლება შემოვიღოთ ბადე $\omega = \{x_i = (i_1h_1,\ i_2h_2),\ i_1, i_2 = 0,\pm1\ldots\}$ როგორც სიმრავლე $x_1^{(i_1)} = i_1h_1$, $x_2^{(i_2)} = i_2h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $i_1, i_2 = 0, \pm1, \pm2$ პერპენდიკულარული წრფეების გადაკვეთის წერტილებისა (კვანძებისა), სადაც h_1 და h_2 — ბადის ბიჯებია შესაბამისი x_1 და x_2 მიმართულებით. ω ბადე, ცხადია, თანაბარია თითოეული ცვლადისათვის ცალ-ცალკე. $f(x) = f(x_1, x_2)$ ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ ბადურ ფუნქციას

$$y_{i_1i_2} = f(i_1h_1, i_2h_2),$$

თუ ω ბადე შეიცავს მხოლოდ იმ კვანძებს, რომლებიც ($0 \le x_1 \le \le \ell_1$, $0 \le x_2 \le \ell_2$) მართკუთხედს ეკუთვნის, ისე რომ $h_1 = \ell_1 / N_1$, $h_2 = \ell_2 / N_2$, მაშინ ბადეს სასრული $N = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$ რაოდენობის კვანძები გააჩნია, ხოლო ბადური $y_i = y_{i_1,i_2}$ ფუნქციების H_N სივრცე სასრულგანზომილებიანია.

ჩვენ ყველგან, მხოლოდ ბადური ფუნქციების სასრულგანზომილებიან სივრცეს განვიხილავთ. როცა უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციების $H = \{f(x)\}$ სივრცეს და თავდაპირველ ამოცანას ბადური ფუნქციების H_N სივრცითა და თავდაპირველი ამოცანის დისკრეტული აპროქსიმაციით ვცვლით, დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ კვანძების რაოდენობის გაზრდით თავდაპირველი ამოცანის ამოხსნას უკეთესად მივუახლოვდებით. მიახლოების ხარისხის შეფასება და აპროქსიმაციის ხერხის არჩევა რიცხვითი მეთოდების თეორიის მთავარი ამოცანაა.

წიგნის ძირითადი შინაარსი მეტ-ნაკლებად დაკავშირებულია დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნისათვის სხვაობიანი მეთოდების გამოყენებასთან. გამოვყოთ ორი ძირითადი საკითხი:

— დიფერენციალური განტოლებების დისკრეტული (სხვაობიანი) აპროქსიმაციის მიღება და, ამასთანავე, მიღებული სხვაობიანი განტოლებების გამოკვლევა;

— სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნა.

დისკრეტული აპროქსიმაციის (სხვაობიანი სქემის) მიღებისას მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ის ზოგადი მოთხოვნა, რომლის თანახმადაც სხვაობიანი სქემა რაც შეიძლება უკეთ უნდა აღწერდეს (მოდელირებას უწევდეს) თავდაპირველი დიფერენციალური განტოლებების ძირითად თვისებებს. ასეთი სხვაობიანი სქემები შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად, ვარიაციული პრინციპებისა და ინტეგრალური თანაფარდობების მეშვეობით (იხ. IV თავი). სხვაობიანი სქემის სიზუსტის შეფასება აპროქსიმაციის ცდომილებისა და სქემის მდგრადობის შესწავლაზე დადის. მდგრადობის შესწავლა რიცხვითი მეთოდების თეორიის ცენტრალური საკითხია და წინამდებარე წიგნში მას დიდი ყურადღება ეთმობა. რთული ამოცანების ამოსახსნელი ალგორითმები შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მარტივი ალგორითმების (მოდულების) მიმდევრობა (ჯაჭვი). ამიტომ რიცხვითი მეთოდების თეორიის მრავალი პრინციპული საკითხი შეიძლება მარტივი ალგორითმების მაგალითზე გაირკვეს.

პირველ თავში ერთგანზომილებიანი (ერთ მთელრიცხვა არგუმენტზე დამოკიდებული) სხვაობიანი განტოლებები განიხილება. ჩვენ ვიფარგლებით პირველი და მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებების განხილვით. მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებები წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას სამდიაგონალური მატრიცით. ამ განტოლებებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის ფაქტორიზაციის მეთოდი გამოიყენება. პირველ თავში საცნობარო მასალის სახით მოცემულია ცნობები წრფივი ოპერატორების შესახებ სასრულგანზომილებიან სივრცეში. შემდგომში ხდება გამოკვლევა სხვაობიანი ოპერატორების თვისებებისა, როგორც წრფივი ოპერატორებისა სასრულგანზომილებიან სივრცეში სკალარული ნამრავლით. ამასთანავე, გამოიყენება უმარტივესი მათემატიკური აპარატი — სხვაობიანი გაწარმოებისა და ნაწილობით აჯამვის ფორმულები.

მეორე თავში გადმოცემულია რიცხვითი ანალიზის ტრადიციული მასალა, ინტერპოლაცია, საშუალო კვადრატული აპროქსიმაცია და რიცხვითი ინტეგრება.

დიფერენციალური განტოლებების ბადეზე აპროქსიმაციის დროს მიიღება სხვაობიანი განტოლებები, რომლებიც სპეციალური

(გაიშვიათებული, ე. ი. მრავალი ნულოვანი ელემენტის შემცველი) მატრიცის მქონე მაღალი რიგის (ბადის კვანძების რიცხვის ტოლი) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენს. ასეთი მატრიცის უმარტივესი მაგალითია — სამდიაგონალური მატრიცა, რომელიც ზემოთ იყო მითითებული.

მესამე თავში გადმოცემულია წრფივი ალგებრული განტოლებების

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u^j = f^i, \quad i = 1,2,\ldots,N \,, \tag{1}$$

ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები. (1) შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცული ფორმით:

$$Au = f \,, \tag{2}$$

სადაც $A = (a_{ij})$ — $N \times N$ ზომის კვადრატული მატრიცაა, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^N)$ — საძიებელი ვექტორია, $f = (f^1, f^2, \ldots, f^N)$ — მოცემული ვექტორი (მარჯვენა მხარე).

განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის გამოიყენება პირდაპირი და იტერაციული მეთოდები.

II თავის §2-ში გაუსის გამორიცხვის მეთოდი და კვადრატული ფესვის მეთოდი განიხილება. ესენი პირდაპირი მეთოდებია, და სისტემის ამოხსნისათვის $O(N^3)$ არითმეტიკულ მოქმედებას საჭიროებს.

იტერაციული მეთოდების შესწავლისას უმჯობესია (2) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა განვიხილოთ როგორც პირველი გვარის ოპერატორული განტოლება, რომლის ოპერატორი N განზომილებიან H_N სივრცეში მოქმედებს, $(A: H_N \to H_N)$, $u, f \in H_N$ იმის ხაზგასასმელად, რომ ჩაწერის მატრიცული და ოპერატორული ფორმა ეკვივალენტურია, მატრიცას და შესაბამის ოპერატორს ერთი და იმავე A ასოთი აღვნიშნავთ.

იტერაციული მეთოდების (ერთბიჯიანი თუ ორშრიანი) თეორიის გადმოცემისას მნიშვნელოვან როლს ასრულებს იტერაციული სქემის კანონიკური ფორმა.

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f,\quad k=0,1,\ldots \text{ ყველა } y_0\text{-სთვის}, y_0\in H_N, \quad (3)$$

სადაც $A, B: H_N \to H_N$, $\{\tau_k\}$ – საიტერაციო პარამეტრებია.

ყველგან იგულისხმება, რომ A ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითი განსაზღვრულია ($A = A^* > 0$). დამტკიცებულია ზოგადი თეორემა სტაციონარული მეთოდის კრებადობის შესახებ, როცა $\tau_k = \tau = \text{const}$. კრებადობის საკმარის პირობას წარმოადგენს უტოლობა

$$(By, y) > \frac{\tau}{2}(Ay, y) \text{ ყველა } y \in H, \quad (4)$$

სადაც $B \neq B^*$ შეიძლება არათვითშეუღლებული ოპერატორი იყოს. აქედან გამომდინარეობს მარტივი იტერაციის მეთოდის, ზეიდელის მეთოდის, ზედა რელაქსაციის მეთოდის კრებადობა.

თუ ცნობილია ისეთი მუდმივები $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > \gamma_1$, რომ

$$\gamma_1(Bx, x) \leq (Ax, x) \leq \gamma_2(Bx, x) \text{ ყველა } x\text{-სთვის}, x \in H_N, \quad (5)$$

სადაც $B = B^* > 0$. მაშინ შეიძლება მოიძებნოს ჩებიშევის ოპტიმალურ პარამეტრთა ერთობლიობა $\{\tau_k^*\}$, რომლისთვისაც გამოთვლითი პროცესი მდგრადია და ავარიულ შეჩერებას არ იწვევს.

განიხილება უნივერსალური მონაცვლეობით – სამკუთხა მეთოდი $\{\tau_k^\alpha\}$ ერთობლიობითა და ოპერატორით

$$B = (D + \omega A_1)D^{-1}(D + \omega A_2), \quad (6)$$

სადაც $D = D^* > 0$, $A_1^* = A_2$, $A_1 + A_2 = A$, A_1 და A_2 მატრიცები სამკუთხაა. ω პარამეტრისათვის მიღებულია ფორმულა. ამ მეთოდის ალგორითმი მეტად მარტივია. ყველგან მოყვანილია ფორმულა საჭირო სიზუსტის მისაღწევად საკმარისი იტერაციების რაოდენობისათვის. სხვადასხვა მეთოდების შედარება ჩატარებულია მოდელურ ამოცანაზე მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებებისათვის $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 f_i$, $i = 1,2,\ldots,N-1$, $y_0 = y_N = 0$, $h = 1/N$, რომელიც შეესაბამება სასაზღვრო ამოცანას $u''(x) = -f(x)$ $(0 <$

$< x < l)$, $u(0) = u(l) = 0$. ეს განტოლება ლაპლასის განტოლების ერთგანზომილებიანი ანალოგია. ვინაიდან, იტერაციების რაოდენობა პრაქტიკულად განტოლებათა რიცხვზე დამოკიდებული არაა, შედარებისათვის შეიძლება ამ ერთგანზომილებიანი ამოცანით შემოვიფარგლოთ. მონაცვლეობით – სამკუთხა მეთოდს სჭირდება $O\left(\frac{l}{\sqrt{h}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ იტერაცია, სადაც $\varepsilon > 0$ – მოცემული სიზუსტეა.

შევნიშნავთ, რომ III თავში მარტივი მათემატიკური საშუალებებით ფაქტობრივად გადმოცემულია $Au = f$ $(A = A^* > 0)$ განტოლების ამოხსნის იტერაციული მეთოდების საკმაოდ სრული თეორია.

სხვაობიანი სქემების თეორიის ძირითადი ცნებები: აპროქსიმაციის ცდომილება, მდგრადობა, კრებადობა და სიზუსტე გადმოცემულია სასაზღვრო ამოცანებისა და კოშის ამოცანების მაგალითებზე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის (IV და V თავები). IV თავში შეისწავლება სამწერტილიანი სხვაობიანი სქემები II რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < l,$$
$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_2, \quad k(x) > 0, \quad q(x) \geq 0. \tag{7}$$

გამოკვლეულია საკითხები ერთგვაროვანი სხვაობიანი სქემების კრებადობის სიჩქარის შესახებ (სიზუსტის რიგის შესახებ) არათანაბარ ბადეზე წყვეტილი კოეფიციენტების შემთხვევაშიც. ამან ძალზე ფაქიზი აპრიორული შეფასებები მოითხოვა, რომლებიც მარჯვენა მხარის მიხედვით სხვაობიანი სქემის მდგრადობას გამოხატავს.

სხვაობიანი სქემის მისაღებად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მეთოდები: – ინტეგრო-ინტეპოლაციური, კვადრატული ფუნქციონალის აპროქსიმაციის, რიტცისა და გალიორკინის (IV თავი, §5).

კოშის ამოცანის ამოსახსნელად პირველი რიგის განტოლებებისათვის

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \tag{8}$$

გამოიყენება რუნგე-კუტას და ადამსის მეთოდები, რომლებიც V თავეშია გადმოცემული. ეს მეთოდები განტოლებათა სისტემებისათვისაც გამოდგება, როცა f და u ვექტორებია.

V თავეში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს კოშის ამოცანას განტოლებათა წრფივი სისტემისათვის

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{9}$$

სადაც $A = (a_{ij})$ – კვადრატული $N \times N$ ზომის მატრიცია, $u(t) = (u^1, u^2, \ldots, u^N)$, $f(t) = (f^1, f^2, \ldots, f^N)$ – N განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

კერძოდ, ასეთი ამოცანა წარმოიშობა, თუ სითბოგამტარებლობის განტოლებაში

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \tag{10}$$

ლაპლასის Δu ოპერატორს შევცვლით შესაბამისი სხვაობიანი ოპერატორით. მაშინ (9) შეიძლება გააზრებულ იქნეს, როგორც წრფეთა მეთოდი (10) სითბოგამტარებლობის განტოლებისათვის. თუ ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ რომელიმე ერთბიჯიან სქემას, ჩვენ მივალთ ზოგადი სახის ორშრიან ოპერატორულ-სხვაობიან სქემამდე, რომელიც კანონიკური სახით ასე ჩაიწერება:

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \ldots \text{ ყველა } y_0\text{-სთვის}, \ y_0 \in H_N, \tag{11}$$

სადაც $A, B: H_N \to H_N$ – წრფივი ოპერატორებია, τ – კი ბადის ბიჯია t-ს მიხედვით.

დამტკიცებულია, რომ სქემის მდგრადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$B \geq \frac{\tau}{2} A \text{ ან } (Bx, x) \geq \frac{\tau}{2}(Ax, x) \text{ ნებისმიერი } x\text{-სთვის, } x \in H_N. \quad (12)$$

ეს ოპერატორულ-სხვაობიანი სქემების მდგრადობის ზოგადი თეორიის ძირითადი თეორემაა (შეადარ. А. А. Самарский "Теория разностных схем"); იგი მეტად გამოსადეგია მათემატიკური ფიზიკის კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისათვის სხვაობიანი სქემების მდგრადობის გამოსაკვლევად (იხ. VII თავი). ფაქტობრივად §4-ში გადმოცემულია სხვაობიანი სქემების მდგრადობის ზოგადი თეორიის საფუძვლები ასიმპტოტური მდგრადობის ჩათვლით.

III-IV თავებში მიღებული ცნობები საშუალებას იძლევა ადვილად გადაეიდეთ კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდების თეორიის შესწავლაზე. VI თავში შესწავლილია სხვაობიანი სქემები, რომლებიც ახდენენ პუასონის განტოლებისა და ელიფსური განტოლებების აპროქსიმაციას მართკუთხედში, პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებით. აქ განხილულია როგორც კრებადობის საკითხები, ასევე სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები.

ორშრიანი სხვაობიანი სქემების მდგრადობის ზოგადი თეორია გადმოცემულია V თავში, რაც ამარტივებს VII თავში სხვაობიანი მეთოდების შესწავლას სითბოგამტარებლობის მუდმივი და ცვალებად კოეფიციენტებიანი განტოლებისათვის. აქ, აგრეთვე განხილულია ეკონომიკური სქემები მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის (ცვალებად მიმართულებათა, გახლეჩვის და ა. შ.) და ჯამური აპროქსიმაციის ზოგადი პრინციპი, რომელიც საშუალებას იძლევა რთული ამოცანა უფრო მარტივ ამოცანათა მიმდევრობად დანაწილდეს. ეს არსებითად ამარტივებს მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნას.

უნდა აღინიშნოს, რომ წიგნის ძირითადი შინაარსი ერთიანი თვალსაზრისითაა გადმოცემული. ერთიანობა იმის ხარჯზე მიიღწევა, რომ სხვაობიანი სქემები განხილულია, როგორც ოპერატორები ან ოპერატორულ-სხვაობიანი განტოლებები; ამსათან, ოპე-

რატორები სკალარულ ნამრაველიან სასრულგანზომილებიან სივრცეში მოქმედებს. იტერაციული მეთოდების თეორიისა და სხვაობიანი სქემების მდგრადობის თეორიის აგების დროს გამოიყენება ოპერატორების (მატრიცების) უმარტივესი თვისებები: ნიშანგანსაზღვრულობა, თვითშეუღლებლობა, საკუთრივი მნიშვნელობებისა და საკუთრივი ვექტორების ზოგიერთი თვისება; ამასთანავე, ოპერატორთა სტრუქტურის შესახებ არავითარი დაშვება არ კეთდება. თეორიის ყველა პირობა მეტად მოხერხებული აღმოჩნდა შემოწმებისათვის კონკრეტული სხვაობიანი სქემების შემთხვევაში. VI და VII თავების მასალა შეიძლება გამოდგეს უფრო რთული თეორიის [6, 9] წიგნების მიხედვით შესწავლის საფუძვლად.

თავი I

სხვაობიანი განტოლებები

ამ თავში შეისწავლება მთელრიცხვა არგუმენტის ბადური ფუნქციები და მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებები. ბადური ფუნქციებისა და სხვაობიანი ოპერატორების შესასწავლად გამოყენებულია უმარტივესი მათემატიკური აპარატი. მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნა ხდება გამორიცხვის — ე. წ. ფაქტორიზაციის მეთოდი.

§1. ბადური ფუნქციები

1. ბადური ფუნქციები და მათზე მოქმედებანი. როგორც უკვე ნახსენები იყო, მიახლოებით მეთოდებში უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციები, ჩვეულებრივ, იცვლება დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციებით — ბადური მთელრიცხვა არგუმენტის ფუნქციით

$$y(i) = y_i, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$y(i)$-სათვის შეიძლება შემოვიტანოთ ოპერაციები, რომლებიც წარმოადგენს გაწარმოებისა და ინტეგრების ოპერაციების დისკრეტულ (სხვაობიან) ანალოგს.

პირველი წარმოებულის ანალოგს წარმოადგენს პირველი რიგის სხვაობები:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ — მარჯვენა სხვაობა;

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ — მარცხენა სხვაობა;

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \text{ — ცენტრალური სხვაობა;}$$

ამასთან, ადვილად შეინიშნება, რომ $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$.

შემდეგ შეიძლება დაიწეროს მეორე რიგის სხვაობები:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i-1} + y_i,$$

$$\Delta\nabla y_i = \Delta(y_i - y_{i-1}) = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

ასე, რომ

$$\Delta^2 y_i = \Delta\nabla y_{i+1}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება m-ური რიგის სხვაობა

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i),$$

რომელიც შეიცავს $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$ მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ

$$\sum_{j=k}^{i} \Delta y_j = y_{i+1} - y_k, \quad \sum_{j=k}^{i} \nabla y_j = y_i - y_{k-1}.$$

2. ნამრავლის გაწარმოებისა და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულების სხვაობიანი ანალოგები. ვთქვათ, y_i, v_i — მთელრიცხვა არგუმენტის ნებისმიერი ფუნქციებია. მაშინ სამართლიანია ფორმულები

$$\Delta(y_i v_i) = y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_{i+1} \Delta v_i + v_i \Delta y_i, \tag{1}$$

$$\nabla(y_i v_i) = y_{i-1} \nabla v_i + v_i \nabla y_i = y_i \nabla v_i + v_{i-1} \nabla y_i, \tag{2}$$

რომელთა სისწორე შეიძლება უშუალოდ შემოწმდეს. მაგალითად,

$$\Delta(y_i v_i) = y_{i+1} v_{i+1} - y_i v_i;$$

$$y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_i (v_{i+1} - v_i) + v_{i+1} (y_{i+1} - y_i) = y_{i+1} v_{i+1} - y_i v_i = \Delta(y_i v_i).$$

$\nabla(y_i v_i)$-სთვის ფორმულის გამოყვანისას საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $\nabla(y_i v_i) = \Delta(y_{i-1} v_{i-1})$.

(1), (2) ფორმულები წარმოადგენს ნამრავლის გაწარმოების $(y(x)v(x))' = yv' + vy'$ ფორმულის ანალოგს.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ანალოგია ნაწილობითი აჯამვის ფორმულა

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i + (yv)_N - (yv)_0, \tag{3}$$

რომელიც ასეთი სახითაც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N-1} v_i \nabla y_i + y_{N-1} v_N - y_0 v_1 .$$

(3) ფორმულის გამოსაყვანად ვისარგებლოთ (1) ფორმულით; ც
ნება

$$y_i \Delta v_i = \Delta(y_i v_i) - v_{i+1} \Delta y_i = \Delta(y_i v_i) - v_{i+1} \nabla y_{i+1},$$

რადგან $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$; აქედან მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta(y_i v_i) - \sum_{i=0}^{N-1} v_{i+1} \nabla y_{i+1} + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i$$

$$= y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = (yv)_N - (yv)_0 .$$

თუ $y_0 = 0$, $y_N = 0$, მაშინ $\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i$.

ნაწილობითი აჯამვის ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ
მების გამოსათვლელად.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ჯამი $S_N = \sum_{i=1}^{N} i2^i$. დავუშ

$v_i = i$, $\nabla y_i = 2^i$; ასე რომ,

$$y_i = y_{i-1} + 2^i = y_0 + \sum_{j=1}^{i} 2^j = y_0 + 2^{i+1} - 2 .$$

ავარჩიოთ $y_0 = 2 - 2^{N+1}$; მაშინ $y_N = 0$. რადგან $v_0 = 0$, $\Delta v_i = 1$,
ტომ (3)-დან გამომდინარეობს

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = -\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=0}^{N-1} y_i =$$

$$= -N(y_0 - 2) - \sum_{i=0}^{N-1} 2^{i+1} = N2^{N+1} - (2^{N+1} - 2),$$

ასე რომ, $S_N = (N-1)2^{N+1} + 2$.

მაგალითი 2. გამოვითვალოთ $S_N = \sum_{i=1}^{N} i(i-1) = \sum_{i=1}^{N-1} i(i+1)$.

დავუშვათ, $y_i = i$, $\nabla v_i = i+1$. მაშინ $v_{i+1} = v_i + (i+1) = v_1 + (2+3+ +\cdots+(i+1)) = (v_1 - 1) + (i+1)(i+2)/2$, $v_i = v_1 - 1 + i(i+1)/2$. v_1 შევარჩიოთ პირობიდან $v_N = 0$, ე. ი. $v_1 = 1 - N(N+1)/2$. თუ გამოვიყენებთ (3) ფორმულას და გავითვალისწინებთ, რომ $y_0 = 0$, $v_N = 0$, $\nabla y_i = 1$. ვიპოვით

$$S_N = \sum_{i=1}^{N-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i =$$

$$= -(N-1)(v_1-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} i(i+1) = -\frac{1}{2}S_N + \frac{(N-1)N(N+1)}{2},$$

ასე რომ, $S_N = \frac{1}{3}(N-1)N(N+1)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = S_N + \sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

§2. სხვაობიანი განტოლებები

1. სხვაობიანი განტოლებები. $y_i = y(i)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ბადური ფუნქციების მიმართ წრფივ განტოლებას

$$a_0(i)y(i) + a_1(i)y(i+1) + \cdots + a_m(i)y(i+m) = f(i), \qquad (1)$$

სადაც $a_k(i)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, $f(i)$ – მოცემული ბადური ფუნქციებია, $a_0(i) \neq 0$, $a_m(i) \neq 0$ ეწოდება m-ური რიგის წრფივი სხვაობიანი განტოლება. იგი შეიცავს $y(i)$ ფუნქციის $m+1$ მნიშვნელობას.

თუ ვისარგებლებთ $\Delta y_i, \Delta^2 y_i, \ldots, \Delta^{m-1} y_i$ სხვაობებისათვის დაწერილი ფორმულებით, $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{i+m}$ მნიშვნელობები შეიძლება

გამოვსახოთ y_i-სა და აღნიშნული სხვაობების საშუალებით: $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$, $y_{i+2}=\Delta^2 y_i+2y_{i+1}-y_i=\Delta^2 y_i+2\Delta y_i+y_i$ და ა. შ. ამის შედეგად (1)-დან მივიღებთ m-ური რიგის სხვაობიანი განტოლების ახალ სახეს:

$$\alpha_0(i)y_i+\alpha_1(i)\Delta y_i+\dots+\alpha_m(i)\Delta^m y_i=f(i),\ i=0,\pm 1,\pm 2,\dots \quad (2)$$

(რითაც აიხსნება ტერმინი „სხვაობიანი განტოლება“). თუ $a_0, a_1,\dots,a_m$ კოეფიციენტები დამოკიდებული არაა i-ზე, $a_0\neq 0$ და $a_m\neq 0$, მაშინ (1)-ს ეწოდება m-ური რიგის წრფივი სხვაობიანი განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით.

როცა $m=1$, (1)-დან მიიღება პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლება

$$a_0(i)y_i+a_1(i)y_{i+1}=f(i),\ a_0(i)\neq 0,\ a_1(i)\neq 0, \quad (3)$$

როცა $m=2$ – მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება

$$a_0(i)y_i+a_1(i)y_{i+1}+a_2(i)y_{i+2}=f(i),\ a_0(i)\neq 0,\ a_2(i)\neq 0$$

ჩვენ შემოვიფარგლებით პირველი და მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებების შესწავლით.

2. **პირველი რიგის განტოლებები.** განვიხილოთ პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლება (3), $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$-ის ჩასმით მივიღებთ

$$\bar{a}_0(i)y_i+a_1(i)\Delta y_i=f(i), \quad \bar{a}_0=a_0+a_1$$

პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლების უმარტივეს მაგალითებს წარმოადგენს არითმეტიკული პროგრესიის $y_{i+1}=y_i+d$ და გეომეტრიული პროგრესიის $y_{i+1}=qy_i$ წევრებისათვის დაწერილი განტოლებები.

ჩავწეროთ (3) განტოლება ასეთი სახით:

$$y_{i+1}=q_i y_i+\varphi_i, \quad (4)$$

სადაც $q_i=-a_0(i)/a_1(i)$, $\varphi_1=f(i)/a_1(i)$. აქედან ჩანს, რომ თუ მოცემულია $y(i_0)$ მნიშვნელობა, როცა $i>i_0$, $y(i)$ ამოხსნა განისაზღვრება ცალსახად. ვთქვათ, $i=0$-სთვის მოცემულია $y_0=y(0)$. მაშინ

შეიძლება განვსაზღვროთ $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ თუ გამოვრიცხავთ მიმდევრობით $y_i, y_{i-1}, \ldots, y_1$-ს (4) ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$y_{i+1} = q_i q_{i-1} \ldots q_0 y_0 + \varphi_i + q_i \varphi_{i-1} + q_i q_{i-1} \varphi_{i-2} + \ldots + q_i q_{i-1} \ldots q_1 \varphi_0,$$

ან

$$y_{i+1} = \left(\prod_{k=0}^{i} q_k\right) y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{s=k+1}^{i} q_s\right) \varphi_k + \varphi_i \tag{5}$$

მუდმივკოეფიციენტიანი განტოლებისათვის $q_i = q$, აქედან მიიღება

$$y_{i+1} = q^{i+1} y_0 + \sum_{k=0}^{i} q^{i-k} \varphi_k, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

ანუ (4) მუდმივკოეფიციენტიანი სხვაობიანი განტოლების ამონახსნი.

3. პირველი რიგის უტოლობები. თუ (1) და (2) ტიპის გამოსახულებებში ტოლობის ნიშანს შევცვლით უტოლობის ნიშნებით $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ მივიღებთ m-ური რიგის სხვაობიან უტოლობებს. ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის სხვაობიანი უტოლობა

$$y_{i+1} \leq q y_i + f_i, \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad q \geq 0; \tag{7}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შემდგომში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $q > 0$ (y_0, q, f_i ცნობილია). ვიპოვოთ მისი ამოხსნა. ვთქვათ, v_i არის ამოხსნა სხვაობიანი განტოლებისა

$$v_{i+1} = q v_i + f_i, \quad i = 0,1,\ldots, \quad v_0 = y_0; \tag{8}$$

მაშინ, თუ (8)-ს გამოვაკლებთ (7)-ს, ვიპოვით

$$y_i \leq v_i \tag{9}$$

მართლაც, თუ (8)-ს გამოვაკლებთ (7)-ს, ვიპოვით

$$y_{i+1} - v_{i+1} \leq q(y_i - v_i) \leq q^2(y_{i-1} - v_{i-1}) \leq \ldots \leq q^{i+1}(y_0 - v_0) = 0.$$

v_i-ის ცხადი გამოსახულების (9)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$y_i \leq q^i y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} q^{i-1-k} f_k, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

რომელიც წარმოადგენს (7) უტოლობის ამოხსნას.

4. მუდმივკოეფიციენტიანი მეორე რიგის განტოლება. განვიხილოთ მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება

$$by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = f_i, \quad i = 0,1,\ldots, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \tag{11}$$

რომლის კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული i-ზე. თუ $f_i = 0$, მაშინ განტოლებას

$$by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0, \quad i = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

ერთგვაროვანი ეწოდება. შესაძლებელია მისი ამოხსნის ცხადი სახით პოვნა.

ვთქვათ, $\bar{y}_i$ – არის (12) ერგვაროვანი განტოლების ამოხსნა, $\overset{\bullet}{y}_i$ – (11) არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე ამოხსნა. მაშინ მათი ჯამი $y_i = \bar{y}_i + \overset{\bullet}{y}_i$ ასევე, ამოხსნა იქნება არაერთგვაროვანი განტოლებისა

$$b(\bar{y}_{i+1} + \overset{\bullet}{y}_i) - c(\bar{y}_i + \overset{\bullet}{y}_i) + a(\bar{y}_{i-1} + \overset{\bullet}{y}_{i-1}) =$$
$$= [b\bar{y}_{i+1} - c\bar{y}_i + a\bar{y}_{i-1}] + [b\overset{\bullet}{y}_{i+1} - c\overset{\bullet}{y}_i + a\overset{\bullet}{y}_{i-1}] = f_i$$

ეს თვისება (11) განტოლების წრფივობის შედეგია: იგი ძალაში რჩება ნებისმიერი რიგის (1) სხვაობიანი განტოლებისათვის. ცხადია, თუ $\bar{y}_i$ არის (12) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, მაშინ $c\bar{y}_i$, სადაც c – ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე დააკმაყოფილებს ამ განტოლებას.

ვთქვათ, $y_i^{(1)}$ და $y_i^{(2)}$ (12) განტოლების ორი ამონასხნია. მათ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ტოლობა

$$c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

დასაშვებია მხოლოდ $c_1 = c_2 = 0$ შემთხვევაში. ეს ეკვივალენტურია იმისა, რომ დეტერმინანტი სისტემისა

$$c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} = 0,$$
$$c_1 y_{i+m}^{(1)} + c_2 y_{i+m}^{(2)} = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

განსხვავებულია ნულისაგან ყველა i,m-სთვის კერძოდ,

$$\Delta_{i,i+1} = \begin{vmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ y_{i+1}^{(1)} & y_{i+1}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

ისევე, როგორც დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში, შეიძლება შემოვიტანოთ (12) სხვაობიანი განტოლების ზოგადი ამოხსნის ცნება და ვთქვათ, რომ თუ $y_i^{(1)}$ და $y_i^{(2)}$ ამოხსნები წრფივად დამოუკიდებელია, (12) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$y_i = c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} ,$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია. არაერთგვაროვანი (11) განტოლების ზოგადი ამოხსნა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$y_i = c_1 y_i^{(1)} + c_2 y_i^{(2)} + y_i^* , \tag{13}$$

სადაც y_i^* არის (11) განტოლების კერძო ამოხსნა. c_1 და c_2-ის განსაზღვრისათვის, ისევე, როგორც დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში, უნდა დაისვას დამატებითი პირობები – საწყისი და სასაზღვრო.

(12) განტოლების კერძო ამოხსნა შეიძლება ვიპოვოთ ცხადი სახით. ვეძებოთ იგი $y_i = q^i$ სახით, სადაც $q \neq 0$ ჯერჯერობით უცნობი რიცხვია. (12)-ში $y_k = q^k$-ის ჩასმის შედეგად მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $bq^2 - cq + a = 0$, რომლის ფესვებია

$$q_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b} , \qquad q_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b} . \tag{14}$$

$D = c^2 - 4ab$ დისკრიმინანტის მიხედვით შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

1) $D = c^2 - 4ab > 0$. q_1 და q_2 ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია. მათ შეესაბამება კერძო ამოხსნები

$$y_k^{(1)} = q_1^k , \qquad y_k^{(2)} = q_2^k ;$$

ეს ამოხსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან ნულისაგან განსხვავებულია შემდეგი დეტერმინანტი

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} q_1^k & q_1^{k+1} \\ q_2^k & q_2^{k+1} \end{vmatrix} = q_1^k q_2^k (q_2 - q_1) \neq 0$$

შევნიშნოთ, რომ $q_1 \neq 0$ და $q_2 \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $a = 0$ და (12) განტოლება აღარ იქნება მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება. (12) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე:

$$y_k = c_1 q_1^k + c_2 q_2^k. \tag{15}$$

2) $D = c^2 - 4ab < 0$ კვადრატულ განტოლებას აქვს კომპლექსურად შეუღლებული ფესვები:

$$q_1 = \frac{c + i\sqrt{|D|}}{2b}, \quad q_2 = \frac{c - i\sqrt{|D|}}{2b},$$

სადაც i – წარმოსახვითი ერთეულია. მოხერხებულია ეს ფესვები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$q_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad q_2 = \rho e^{-i\varphi}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|D|}}{c}.$$

კერძო ამონახსნები იქნება არა მარტო ფუნქციები

$$q_1^k = \rho^k e^{ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

$$q_2^k = \rho^k e^{-ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi),$$

არამედ

$$y_k^{(1)} = \rho^k \cos k\varphi, \quad y_k^{(2)} = \rho^k \sin k\varphi$$

ფუნქციებიც, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელია $\sin k\varphi$ და $\cos k\varphi$ ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო. ზოგად ამოხსნას აქვს სახე:

$$y_k = \rho^k(c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi). \tag{16}$$

3) $D = c^2 - 4ab = 0$. ფესვები ნამდვილი და ერთმანეთის ტოლია: $q_1 = q_2 = c/(2b) = q_0$. წრფივად დამოუკიდებელი იქნება ამონახსნები:

$$y_k^{(1)} = q_0^k, \qquad y_k^{(2)} = kq_0^k. \tag{17}$$

ვაჩვენოთ, რომ $y_k^{(2)}$ არის (12) განტოლების ამონახსნი:

$$by_{k+1}^{(2)} - cy_k^{(2)} + ay_{i-1}^{(2)} = b(k+1)q_0^{k+1} - ckq_0^k + a(k-1)q_0^{k-1} =$$
$$= k(bq_0^{k+1} - cq_0^k + aq_0^{k-1}) + (bq_0^2 - a)q_0^{k-1} = 0,$$

რადგანაც $bq_0^2 - a = b\dfrac{c^2}{4b^2} - a = \dfrac{D}{4b} = 0$. ვინაიდან

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} q_0^k & kq_0^k \\ q_0^{k+1} & (k+1)q_0^{k+1} \end{vmatrix} = q_0^{2k+1} \neq 0.$$

(17) იქნება წრფივად დამოუკიდებელი და ზოგად ამოხსნას ექნება ასეთი სახე

$$y_k = c_1q_0^k + c_2kq_0^k.$$

5. **მაგალითები.** განვიხილოთ (11) მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლების ამოხსნის მაგალითები.

1. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამოხსნა:

$$y_{k+1} - 2py_k + y_{k-1} = 0, \quad a = b = 1, \qquad c = 2p > 0.$$

დასაშვებია სამი შემთხვევა.

1) $p < 1$. ვთქვათ $p = \cos\alpha$; მაშინ $D = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha < 0$ კერძო ამოხსნებს ექნება სახე

$$y_k^{(1)} = \cos k\alpha, \quad y_k^{(2)} = \sin k\alpha.$$

2) $p > 1$. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $p = \mathrm{ch}\alpha$. q-სთვის მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $q^2 - 2\mathrm{ch}\alpha q + 1 = 0$; მისი დისკრიმინანტი ტოლია $D = 4(\mathrm{ch}^2\alpha - 1) = 4\mathrm{sh}^2\alpha$, ხოლო ფესვებს აქვს სახე: $q_{1,2} = \mathrm{ch}\alpha \pm \mathrm{sh}\alpha = e^{\pm\alpha}$. კერძო ამოხსნები იქნება შემდეგი ფუნქციები

$$y_k^{(1)} = \mathrm{ch}k\alpha, \qquad y_k^{(2)} = \mathrm{sh}k\alpha.$$

3) $p = 1$. ამ შემთხვევაში $q^2 - 2q + 1 = 0$, $q_{1,2} = 1$. კერძო ამოხსნებს აქვს სახე $y_k^{(1)} = 1$, $y_k^{(2)} = k$, ხოლო ზოგად ამოხსნას –

$$y_k = c_1 + c_2 k.$$

2. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამოხსნა:

$$y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 0.$$

დისკრიმინანტი ტოლია $D = 1 + 8 = 9$. ფესვები იქნება $q_{1,2} = (1 \pm 3)/2$. $q_1 = 2$, $q_2 = -1$. ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$y_k = c_1 2^k + c_2(-1)^k.$$

3. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამოხსნა:

$$y_{k+1} - y_k - 6y_{k-1} = 2^{k+1}. \tag{18}$$

არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნა არის ჯამი $y_k = \bar{y}_k + y_k^{*}$ ერთგვაროვანი განტოლების $\bar{y}_k$ ზოგადი ამოხსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების y_k^{*} კერძო ამოხსნისა. ჯერ ვიპოვოთ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნა. დისკრიმინანტი ტოლია $D = 1 + 24 = 25 > 0$ და $q^2 - q - 6 = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვები ტოლია $q_1 = 3$, $q_2 = -2$. ასე რომ $y_k^{(1)} = 3^k$, $y_k^{(2)} = (-2)^k$. y_k^{*} კერძო ამოხსნა ვეძებოთ შემდეგი სახით $y_k^{*} = c2^k$, სადაც $c = \text{const}$. ჩავსვათ $y_k^{*} = c2^k$ (18)-ში, მივიღებთ

$$c(2^{k+1} - 2^k - 6 \cdot 2^{k-1}) = c \cdot 2^{k-1}(-4) = 2^{k+1}, \quad c = -1.$$

(18) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$y_k = c_1 \cdot 3^k + c_2(-2)^k - 2^k.$$

6. მეორე რიგის ცვალებადკოეფიციენტებიანი სხვაობიანი განტოლება. კოშის ამოცანა და სასაზღვრო ამოცანა. განვიხილოთ ცვალებადკოეფიციენტებიანი სხვაობიანი განტოლება

$$b_i y_{i-1} - c_i y_i + a_i y_{i-1} = f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{19}$$

რადგან $b_i \neq 0$, ამიტომ (19) განტოლებიდან მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას

$$y_{i+1} = \frac{c_i y_i - a_i y_{i-1} + f_i}{b_i}, \quad b_i \neq 0. \tag{20}$$

გამოვსახოთ y_{i+1} და y_{i-1}-სა და პირველი მეორე რიგის სხვაობებით. მაშინ (19) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$a_i \Delta\nabla y_i + (b_i - a_i)\,\Delta y_i - (c_i - a_i - b_i)y_i = f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0.$$

პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლების ამოხსნა დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ მუდმივაზე და განისაზღვრება ცალსახად, თუ მოცემულია ერთი დამატებითი პირობა, მაგალითად $y_0 = c_0$. მეორე რიგის განტოლების ამოხსნა განისაზღვრება ორი ნებისმიერი მუდმივით და შეიძლება მოიძებნოს, თუ მოცემულია ორი დამატებითი პირობა. თუ ეს ორი პირობა მოცემულია ორ მეზობელ წერტილში, მაშინ ეს არის კოშის ამოცანა. თუ ეს პირობები მოცემულია ორ სხვადასხვა (არამეზობელ) წერტილში, მაშინ მიიღება სასაზღვრო ამოცანა. ჩვენთვის ძირითად ინტერესს წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Ly_i = b_i y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1}$$

და ჩამოვაყალიბოთ ეს ამოცანები უფრო დაწვრილებით.

კოშის ამოცანა. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების

$$Ly_i = f_i, \quad i = 1,2,..., \tag{21}$$

ამოხსნა

$$y_0 = \mu_1, \quad y_1 = \mu_2 \tag{22}$$

დამატებითი პირობებით.

(22)-ის მეორე პირობა შეიძლება ჩავწეროთ სხვაგვარად:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = \mu_2 - \mu_1 = \bar{\mu}_1$$

და ვთქვათ, რომ კოშის ამოცანის შემთხვევაში $i = 0$ წერტილში მოცემულია ორი სიდიდე

$$y_0 = \mu_1, \quad \Delta y_0 = \bar{\mu}_1 \tag{22'}$$

სასაზღვრო ამოცანა. ვიპოვოთ

$$Ly_i = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

განტოლების ამოხსნა დამატებითი პირობებით

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad N \geq 2 \tag{23}$$

სასაზღვრო კვანძებში $i = 0$ და $i = N$ შეიძლება მოცემული იყოს არა მარტო ფუნქციის მნიშვნელობები, არამედ მათი სხვაობები და კომბინაციები, ე. ი. გამოსახულებები $\alpha_1 \Delta y_0 + \beta_1 y_0$, როცა $i = 0$ და $\alpha_2 \nabla y_N + \beta_2 y_N$, როცა $i = N$. ასეთი პირობები შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით

$$y_0 = æ_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = æ_2 y_{N-1} + \mu_2. \tag{24}$$

თუ $æ_1 = æ_2 = 0$, მაშინ აქედან ვღებულობთ პირველი გვარის პირობებს (23). თუ $æ_1 = 1$, $æ_2 = 1$, გვექნება მეორე გვარის პირობები

$$\Delta y_0 = -\mu_1, \quad \nabla y_N = \mu_2\,. \tag{25}$$

თუ $æ_{1,2} \neq 0;1$, მაშინ (24) -ს ეწოდება მესამე გვარის პირობები:

$$-æ_1 \Delta y_0 + (1 - æ_1) y_0 = \mu_1, \quad æ_2 \nabla y_N + (1 - æ_2) y_N = \mu_2. \tag{26}$$

გარდა ამისა, შესაძლებელია დაისვას სასაზღვრო ამოცანები ამ პირობების კომბინაციით: როცა $i = 0$ – ერთი ტიპის პირობებია, $i = N$ – მეორე ტიპის პირობები.

კოშის ამოცანის ამოხსნა მოიძებნება უშუალოდ (21) განტოლებიდან (20) რეკურენტული ფორმულითა და $y_0 = \mu_1$, $y_1 = \mu_2$ საწყისი პირობების გათვალისწინებით. სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა მოიძებნება უფრო რთული მეთოდით – გამორიცხვის მეთოდით და იხილავთ ქვემოთ.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\Delta^2 y_{i-1} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0. \tag{27}$$

სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა. ერთგვაროვან განტოლებას $\Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0$ გააჩნია ზოგადი ამოხსნა $\bar{y}_i = c_1 + c_2 i$. არაერთგვაროვანი განტოლების $\Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 1$ კერძო ამოხსნა y_i^* ვეძებოთ $y_i^* = ci^2$ სახით. ამ გამოსახულების (27)-ში ჩასმით ვღებულობთ:

$$\Delta^2 y^{*}_{i-1} = c((i+1)^2 - 2i^2 + (i-1)^2) = 1,$$

ე. ი. $c = 1/2$. ამიტომ $y_i = \bar{y}_i + y^{*}_i = c_1 + c_2 i + i^2/2$. c_1 და c_2-ის განსაზღვრისათვის გამოიყენება სასაზღვრო პირობები, როცა $i = 0$ და $i = N$: $y_0 = c_1 = 0$, $y_N = c_2 N + N^2/2 = 0$, $c_2 = -N/2$. ამგვარად,

$$y_i = -\frac{1}{2} iN + \frac{1}{2} i^2 = -\frac{1}{2} i(N - i)$$

არის (27) ამოცანის ამოხსნა.

§3. სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა მეორე რიგის განტოლებებისათვის

1. სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა ფაქტორიზაციის მეთოდით. სხვაობიანი ამოცანა

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b y_{i+1} = - f_i,\ a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,$$
$$i = 1,2,\ldots N-1, \tag{1}$$

$$y_0 = æ_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = æ_2 y_{N-1} + \mu_2$$

წარმოადგენს წრფივი ალგებრული განტოლებების სისტემას $(N+1) \times (N+1)$ ზომის სამდიაგონალური მატრიცით

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -æ_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_i & -c_i & b_i & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -æ_2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)-ის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ

$$Ay = f, \; y = (y_0, y_1, \ldots, y_N), \quad f = (\mu_1, -f_1, \ldots, -f_{N-1}, \mu_2) \qquad (2)$$

პირველი სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში შესაბამისი მატრიცა $(N-1)\times(N-1)$ ზომისაა.

(1) სასაზღვრო ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ ფაქტორიზაციის მეთოდად წოდებული გამორიცხვის შემდეგი მეთოდი. დავუშვათ, ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (3)$$

განუსაზღვრელი α_{i+1} და β_{i+1} კოეფიციენტებით და ჩავსვათ $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ (1)-ში

$$(a_i \alpha_i - c_i) y_i + b_i y_{i+1} = -(f_i + \alpha_i \beta_i)$$

ამ იგივეობის (3)-თან შედარების შედეგად ვღებულობთ

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad (4)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad (5)$$

α_1 და β_1-ის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ $i = 0$-ზე სასაზღვრო პირობა. (3) და (1) ფორმულებიდან $i = 0$-სთვის ვღებულობთ

$$\alpha_1 = æ_1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

ვიცით რა α_1 და β_1, ვიპოვით α_i და β_i-ს ყოველი i-სთვის, $i = 2,3,\ldots,N$, (4) და (5) ფორმულებში i-დან $i+1$-ზე გადასვლით. (3) ფორმულით გამოთვლა კი $i+1$-დან i-ზე გადასვლით ხდება (ე. ი. ვიცით რა y_{i+1}, ვპოულობთ y_i-ს) და ამ გამოთვლების დაწყებისათვის მოცემული უნდა იყოს y_N. განვსაზღვროთ y_N სასაზღვრო პირობიდან $y_N = æ_2 y_{N-1} + \mu_2$ და (3) პირობიდან, როცა $i = N-1$: $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$. აქედან ვპოულობთ

$$y_N = \frac{\mu_2 + æ_2 \beta_N}{1 - \alpha_N æ_2} \qquad (7)$$

შევკრიბოთ ფაქტორიზაციის ყველა ფორმულა და ჩავწეროთ ისინი იმ თანმიმდევრობით, როგორც ვიყენებთ:

$$\overset{(\rightarrow)}{\alpha_{i+1}} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \alpha_1 = æ_1; \tag{8}$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\beta_{i+1}} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \beta_1 = \mu_1; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \overset{(\leftarrow)}{y_i} = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2,\ldots,2,1,0 \\ y_N = \frac{\mu_2 + æ_2\beta_N}{1-\alpha_N æ_2}. \end{gathered} \tag{10}$$

ისრები უჩვენებს გამოთვლების მიმართულებას: $(\rightarrow)$ i-დან $i+1$-საკენ, $(\leftarrow)$ $i+1$-დან i-საკენ.

ამგვარად, სასაზღვრო ამოცანა მეორე რიგის განტოლებისათვის დაიყვანება კოშის სამ ამოცანაზე პირველი რიგის განტოლებისათვის.

2. ფაქტორიზაციის მეთოდის მდგრადობა. ფაქტორიზაციის ფორმულების გამოყენება შეიძლება მაშინ, თუ (8) და (10) წილადების მნიშვნელები არ ხდება ნულის ტოლი. ამის საკმარისი პირობებია შემდეგი უტოლობები

$$\begin{gathered} |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \\ |æ_1| \leq 1, \quad |æ_2| \leq 1, \quad |æ_1| + |æ_2| < 2. \end{gathered} \tag{11}$$

ვაჩვენოთ, რომ (11) პირობებში $c_i - a_i\alpha_i$ და $1 - \alpha_N æ_2$ მნიშვნელები არ ხდება ნულის ტოლი და

$$|\alpha_i| \leq 1, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{12}$$

დავუშვათ, $|\alpha_i| \leq 1$ და ვაჩვენოთ, რომ $|\alpha_{i+1}| \leq 1$; მაშინ აქედან და პირობიდან $|\alpha_1| = |æ_1| \leq 1$ გამომდინარეობს (12). განვიხილოთ სხვაობა $|c_i - a_i\alpha_i| - |b_i| \geq |c_i| - |a_i||\alpha_i| - |b_i| \geq |a_i|(1 - |\alpha_i|) \geq 0$, ასე რომ, $|c_i - a_i\alpha_i| \geq |b_i| > 0$ და $|\alpha_{i+1}| = |b_i| / |c_i - a_i\alpha_i| \leq 1$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $|c_{i_0}|>|a_{i_0}|+|b_{i_0}|$ თუნდაც ერთ წერტილში $i = i_0$, მაშინ $|\alpha_i| < 1$ ყველა $i > i_0$-სთვის. მათ შორის $i = N$-სთვისაც: $|\alpha_N| < 1$. ამ შემთხვევაში $|1 - \alpha_N æ_2| \geq 1 - |\alpha_N||æ_2| \geq 1 - |\alpha_N| > 0$ და პირობა $|æ_1| + |æ_2| < 2$ არის ზედმეტი. თუ $|æ_1| < 1$, მაშინ $|\alpha_N| < 1$. თუ $|æ_1| = 1$, მაშინ $|æ_2| < 1$, $|\alpha_N| \leq 1$ და გვაქვს $|1 - \alpha_N æ_2| \geq 1 - |\alpha_N||æ_2| \geq 1 - |æ_2| > 0$. ამგვარად, (11) პირობის შესრულებისას (1) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, რომელსაც ვპოულობთ ფაქტორიზაციის (8)-(10) ფორმულებით.

კომპიუტერზე (8)-(10) ფორმულებით გამოთვლა მიახლოებით სრულდება ნიშნადი ციფრების სასრული რაოდენობით. დამრგვალების ცდომილების შედეგად, ფაქტობრივად მოიძებნება არა y_i ფუნქცია – (1) ამოცანის ამოხსნა, არამედ $\tilde{y}_i$ – იგივე ამოცანის ამოხსნა შეშფოთებული $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{æ}_1$, $\tilde{æ}_2$ კოეფიციენტებითა და $\tilde{f}_i$, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ მარჯვენა მხარეებით. დაისმის ბუნებრივი კითხვა: თვლის პროცესში ხომ არ ხდება დამრგვალების ცდომილების ზრდა, რასაც შეუძლია სიზუსტის დაკარგვამდე მიგვიყვანოს, შეუძლებელი გახადოს თვლის გაგრძელება განსასაზღვრელი სიდიდეების ზრდის გამო. ამის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ $y_{i+1} = qy_i$ ფორმულით y_i-ის პოვნა, როცა $q > 1$. რადგანაც $y_n = q^n y_0$, ნებისმიერი y_0-სთვის შეიძლება დავასახელოთ ისეთი n_0, რომლისთვისაც y_{n_0} იქნება მანქანური უსასრულობა. ფაქტობრივად, დამრგვალების ცდომილების არსებობის გამო განისაზღვრება არა ზუსტი y_i მნიშვნელობა, არამედ $\tilde{y}_i$ მნიშვნელობა $\tilde{y}_{i+1} = q\tilde{y}_i + \eta$ განტოლებიდან, სადაც η დამრგვალების ცდომილებაა. $\delta y_i = \tilde{y}_i - y_i$ ცდომილებისათვის მივიღებთ განტოლებას $\delta y_{i+1} = q\delta y_i + \eta$ $(i = 0,1,\ldots,\delta y_0 = \eta)$. $\delta y_i = q^i\eta + \eta(q^i - 1)/(q - 1)$ ფორმულიდან ჩანს, რომ δy_i ცდომილება, როცა $q > 1$, i-ს ზრდასთან ერთად ექსპონენციურად იზრდება.

დავუბრუნდეთ ფაქტორიზაციის მეთოდს და ვაჩვენოთ, რომ როცა $|\alpha_i| \leq 1$, δy_i ცდომილება არ იზრდება. მართლაც, $\tilde{y}_i =$

$=\alpha_{i+1}\tilde{y}_{i+1}+\beta_{i+1}$ და $y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1}$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს $\delta y_i=\alpha_{i+1}\delta y_{i+1}$ და $|\delta y_i|\le|\alpha_{i+1}||\delta y_{i+1}|<|\delta y_{i+1}|$, რადგან $|\alpha_{i+1}|\le 1$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ გამოთვლების პროცესში α_{i+1}, β_{i+1} კოეფიციენტებიც შეშფოთდება, მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ δy_i ცდომილება კვანძების N რაოდენობის კვადრატის პროპორციულია:

$$\max_{1\le i\le N}|\delta y_i|\le\varepsilon_0 N^2,$$

სადაც ε_0 – დამრგვალების ცდომილებაა. აქედან ჩანს კავშირი ამოცანის ამოხსნის ε სიზუსტეს, განტოლებათა N რაოდენობასა და მოცემული კომპიუტერისათვის ნიშნად ციფრთა რაოდენობას შორის, რადგან $\varepsilon_0 N^2\approx\varepsilon$.

3. ფაქტორიზაციის მეთოდის სხვა ვარიანტები. ზემოთ განხილულ ფაქტორიზაციის მეთოდს (8)-(10), რომელშიც y_i განისაზღვრება მიმდევრობით მარჯვნიდან მარცხნივ, მარჯვენა ფაქტორიზაცია ეწოდება. ანალოგიურად დაიწერება მარცხენა ფაქტორიზაციის ფორმულები.

$$\overset{(\leftarrow)}{\xi_i}=\frac{a_i}{c_i-b_i\xi_{i+1}},\quad i=N-1,N-2,\dots,2,1,\quad \xi_N=æ_2;\qquad(13)$$

$$\overset{(\leftarrow)}{\eta_i}=\frac{b_i\eta_{i+1}+f_i}{c_i-b_i\xi_{i+1}},\quad i=N-1,N-2,\dots,2,1,\quad \eta_N=\mu_2;\qquad(14)$$

$$\overset{(\rightarrow)}{y_{i+1}}=\xi_{i+1}y_i+\eta_{i+1},\quad i=0,1,\dots,N-1,\quad y_0=\frac{\mu_1+æ_1\eta_1}{1-\xi_1æ_1}.\qquad(15)$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $y_{i+1}=\xi_{i+1}y_i+\eta_{i+1}$, (1)-დან გამოვრიცხავთ y_{i+1}-ს, მივიღებთ:

$$-f_i=a_iy_{i-1}+(b_i\xi_{i+1}-c_i)y_i+b_i\eta_{i+1},$$

ანუ

$$y_i = \frac{a_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}} y_{i-1} + \frac{f_i + b_i\eta_{i+1}}{c_i - b_i\xi_{i+1}}$$

$y_i = \xi_i y_{i-1} + \beta_i$ ფორმულასთან შედარების შედეგად მივიღებთ (13) და (14)-ს. y_0 მნიშვნელობას ვპოულობთ პირობიდან $y_0 = æ_1 y_1 + \mu_1$ და ფორმულიდან $y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$.

$$|c_i - b_i\xi_{i+1}| \geq |c_i| - |b_i||\xi_{i+1}| \geq |a_i| + |b_i| \cdot (1 - |\xi_{i+1}|),$$

$$|1 - \xi_1 æ_1| \geq 1 - |\xi_1|\,|æ_1|$$

უტოლობებიდან ჩანს, რომ (11) პირობა უზრუნველყოფს მარცხენა ფაქტორიზაციის ფორმულების გამოყენების შესაძლებლობას და მათი გამოთვლითი მდგრადობას, რადგანაც $|\xi_i| \leq 1$ $(i = 1,2,\ldots,N)$.

მარჯვენა და მარცხენა ფაქტორიზაციების კომბინაცია იძლევა შემხვედრი ფაქტორიზაციის მეთოდს. ამ მეთოდში $0 \leq i \leq i_0 + 1$ არეში (8), (9) ფორმულებით გამოითვლება ფაქტორიზაციის კოეფიციენტები α_i, β_i, ხოლო $i_0 \leq i \leq N$ არეში (13), (14) ფორმულებით მოიძებნება ξ_i და η_i. როცა $i = i_0$, ხდება (10) და (15) ფორმის ამოხსნების შეუღლება.

$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}$, $\quad y_{i_0+1} = \xi_{i_0+1} y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$ ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$y_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0}}{1 - \alpha_{i_0+1}\xi_{i_0+1}}.$$

ამ ფორმულას აზრი აქვს, რადგან $|\xi_{i_0+1}|$ ან $|\alpha_{i_0+1}|$ სიდიდეთაგან ერთი მაინც (11)-ის ძალით ნაკლებია ერთზე და მაშასადამე, $1 - \alpha_{i_0+1} \cdot \xi_{i_0+1} > 0$. ვიცით რა y_{i_0}, (10) ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ყველა y_i, როცა $i < i_0$, ხოლო (15) ფორმულით – ყველა y_i, როცა $i > i_0$. გამოთვლები $i > i_0$ და $i < i_0$-სათვის წარმოებს ავტონომიურად (ადგილი აქვს გამოთვლების გაპარალელებას). შემხვედრი ფაქტორიზაციის მეთოდი განსაკუთრებით ხელსაყრელია, თუ, მაგალითად, საჭიროა y_i-ის პოვნა მხოლოდ ერთ $i = i_0$ კვანძში.

§4. სხვაობიანი განტოლებები, როგორც ოპერატორული განტოლებები

1. **წრფივი სივრცე**[*]. განვიხილოთ სიმრავლე H: x, y, z,..., ელემენტებისა, რომელთა შესახებ ცნობილია, რომ ნებისმიერ წყვილს x და y-ს, H-დან რაიმე სახით ეთანადება მესამე ელემენტი $z \in H$, რომელსაც მათი ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $z = x + y$, ყოველ $x \in H$ ელემენტსა და ყოველ λ რიცხვს ეთანადება $u \in H$ ელემენტი, რომელსაც ეწოდება x-ის λ რიცხვზე ნამრავლი და აღინიშნება $u = \lambda x$.

H სიმრავლეს ეწოდება წრფივი სივრცე, თუ შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები, განსაზღვრული მისი x, y, z,..., ელემენტებისათვის, შემდეგ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

1) $x + y = y + x$ ნებისმიერი x, y-სათვის H-დან (შეკრების კომუტატიურობა);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ნებისმიერი x, y, z-სთვის H-დან (შეკრების ასოციურობა);

3) არსებობს ელემენტი „ნული“, რომელიც აღინიშნება O-თი, ისეთი, რომ $x + O = x$ ნებისმიერი x-სათვის H-დან;

4) ნებისმიერი $x \in H$ ელემენტისათვის არსებობს საპირისპირო ელემენტი $(-x)$, ისეთი, რომ $x + (-x) = O$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (გამრავლების ასოციურობა);

7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (გამრავლების დისტრიბუტიულობა შეკრების მიმართ), სადაც λ და μ — ნებისმიერი რიცხვებია.

წრფივ სივრცეს ეწოდება კომპლექსური, თუ მისი ელემენტებისათვის განსაზღვრულია გამრავლება კომპლექსურ რიცხვებზე, და ნამდვილი, თუ განსაზღვრულია მხოლოდ ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლება.

---

[*] იხ., მაგალითად, Ильин В. А., Позняк Э. Г., Линейная алгебра, Наука, М., 1974

H წრფივი სივრცის x,y,z,... ელემენტებს ვექტორები ეწოდება.

x_1, x_2,...,x_N ვექტორებს წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_Nx_N = 0 \qquad (1)$$

ტოლობა მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. თუკი მოიძებნება არაერთდროულად ნულის ტოლი c_1, c_2, ..., c_N და ადგილი აქვს (1) ტოლობას, მაშინ x_1,...,x_N ვექტორებს წრფივად დამოკიდებული ეწოდება. H წრფივი სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალურ რიცხვს (თუ ასეთი არსებობს) H სივრცის განზომილება ეწოდება. სივრცეს, რომლესაც წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა უსასრულო სიმრავლე გააჩნია, უსასრულო განზომილებიანი ეწოდება.

H სივრცეს ეწოდება ნორმირებული, თუ ყველა $x \in H$ ელემენტისათვის განსაზღვრულია ნამდვილი რიცხვი $\|x\|$, რომელსაც ნორმა ეწოდება და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\|x\| > 0$, როცა $x \neq 0$; $\|x\| = 0$, თუ $x = 0$;

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (სამკუთხედის უტოლობა);

3) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$, სადაც c რიცხვია.

ევკლიდური (შესაბამისად, უნიტარული) სივრცე ეწოდება სასრულგანზომილებიან ნამდვილ წრფივ H სივრცეს (შესაბამისად, სასრულგანზომილებიან კომპლექსურ წრფივ H სივრცეს), რომელშიც ვექტორთა ყოველ x, y წყვილს ეთანადება ნამდვილი (სკალარული) რიცხვი (x, y), რომელსაც ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება და ამასთან ერთად, სრულდება პირობები:

ევკლიდური სივრცის შემთხვევაში:

1) $(x, y) = (y, x)$ (სიმეტრიულობა);

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (დისტრიბუციულობა);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (ერთგვაროვნება), სადაც λ – ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია;

4) თუ $x \neq 0$, მაშინ $(x, x) > 0$.

უნიტარული სივრცის შემთხვევაში:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ნებისმიერი კომპლექსური λ რიცხვისათვის;

4) თუ $x \neq 0$, მაშინ $(x, x) > 0$.

შევნიშნოთ, რომ შემოტანილი სკალარული ნამრავლი (x, y) H-ში ქმნის ნორმას

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{2}$$

სამართლიანია კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y), \tag{3}$$

რომელიც (2)-ის გათვალისწინებით შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. წრფივი ოპერატორები სასრულგანზომილებიან სივრცეებში. ვთქვათ, H არის სასრულგანზომილებიანი წრფივი სივრცე (x, y) სკალარული ნამრავლით. აღვნიშნოთ D-თი H-ის რაღაც ქვესივრცე. თუ ყოველ $x \in D$ ვექტორს განსაზღვრული წესით ეთადება $y = Ax$ ვექტორი H-დან, მაშინ ამბობენ, რომ H-ში მოცემულია A ოპერატორი. $D \subset H$ სიმრავლეს ეწოდება A ოპერატორის განსაზღვრის არე და აღინიშნება $D(A)$. ყველა $y = Ax$, $x \subset D(A)$ სახის ვექტორთა სიმრავლეს ეწოდება A ოპერატორის მნიშვნელობათა არე და აღინიშნება $R(A)$. თუ $D(A) = H$, მაშინ ამბობენ, რომ A ოპერატორი მოცემულია H-ზე.

A ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ ის ა) ადიტიურია, ე. ი. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ ნებისმიერი x_1, x_2-სთვის H-დან; ბ) ერთგვაროვანია, ე. ი. $A(cx) = cAx$ ნებისმიერი $x \in H$-სა და ნებისმიერი c რიცხვისათვის. ა) და ბ) მოთხოვნა ეკვივალენტურია პირობისა $A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2$ ნებისმიერი x_1, x_2-სათვის H-დან და ნებისმიერი c_1 და c_2 რიცხვებისათვის.

წრფივ ოპერატორს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი $M > 0$ მუდმივი, რომ

$$\|Ax\| \le M\|x\| \text{ ნებისმიერი } x\text{-სათვის } H\text{-დან.} \tag{4}$$

ასეთი M რიცხვების ზუსტ ქვედა ზღვარს A ოპერატორის ნორმა ეწოდება და აღინიშნება $\|A\|$. ცხადია, რომ

$$\|A\| \le \|A\| \cdot \|x\|. \tag{5}$$

ჩვენ ყოველთვის განვიხილავთ შემოსაზღვრულ წრფივ A ოპერატორებს, მოცემულს H-ზე $R(A) \subseteq H$ მნიშვნელობათა არით. ასეთი A ოპერატორი გადასახავს H-ს H-ში, რაც ჩაიწერება შემდეგი სახით $A: H \to H$.

სასრულგანზომილებიან სივრცეში ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი შემოსაზღვრულია.

თუ ყოველ y-ს H-დან შეესაბამება მხოლოდ ერთი $x \in H$ ვექტორი, რომლისთვისაც $Ax = y$, მაშინ ამ შესაბამისობით განისაზღვრება ოპერატორი A^{-1}, რომელსაც შებრუნებული ეწოდება: $A^{-1}: H \to H$. A^{-1} შებრუნებული ოპერატორის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ

$$A^{-1}(Ax) = x, \quad A(A^{-1}y) = y$$

ნებისმიერი x, y-სათვის H-დან.

D ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს $Dx = A(Bx)$ წესის მიხედვით, A და B ოპერატორების ნამრავლი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $D = AB$. E ოპერატორს ეწოდება ერთეულოვანი (იგივური), თუ $Ex = x$ ყველა x-სათვის H-დან. თუ არსებობს A^{-1}, მაშინ $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. A და B ოპერატორებს გადაადგილებადი ეწოდებათ, თუ $AB = BA$.

ცხადია, A^{-1} წრფივი ოპერატორია, თუ წრფივია A ოპერატორი. ადგილი აქვს *შემდეგ დებულებას:*

იმისათვის, რომ $A: H \to H$ წრფივ ოპერატორს გააჩნდეს შებრუნებული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $Ax = 0$ განტოლებას გააჩნდეს ერთადერთი $x = 0$ ამოხსნა.

$A^{*}: H \to H$ ოპერატორს ეწოდება $A: H \to H$ ოპერატორის შეუღლებული, თუ

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \text{ ნებისმიერი } x, y \in H.$$

A ოპერატორი თვითშეუღლებულია (სიმეტრიულია), თუ $A = A^*$ (ან $(Ax, y) = (x, Ay)$ ნებისმიერი x, y-სათვის H-დან). A წრფივ ოპერატორს ვუწოდოთ დადებითი, თუ $(Ax, x) > 0$ $(x \in H;\ x \neq 0)$; დადებითად განსაზღვრული, თუ $(Ax, x) \geq \delta\|x\|^2$, $(x \in H)$, სადაც $\delta > 0$ – რიცხვია; არაუარყოფითი, თუ $(Ax, x) \geq 0$, $(x \in H)$. ნებისმიერი A ოპერატორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ჯამის სახით:

$$A = A_0 + A_1,\ A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*),\ A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*),$$

სადაც $A_0 = A_0^*$ – თვითშეუღლებული ოპერატორია, $A_1 = -A_1^*$ – ირიბსიმეტრიული ოპერატორია, რომლისთვისაც ნამდვილ სივრცეში სრულდება $(A_1x, x) = -(x, A_1x) = -(A_1x, x)$ და, მამასადამე, $(A_1x, x) = 0$. ამიტომ, ნებისმიერი A ოპერატისათვის ნამდვილ H სივრცეში ადგილი აქვს ტოლობას

$$(Ax, x) = (A_0x, x) \text{ ნებისმიერი } x \in H \tag{6}$$

ჩვენ ვისარგებლებთ ოპერატორული უტოლობებით:

$$A \geq 0, \text{ თუ } (Ax, x) \geq 0, \text{ ყოველი } x\text{-სათვის}, x \in H,$$

$$A > 0, \text{ თუ } (Ax, x) > 0, \text{ ყოველი } x\text{-სთვის}, x \in H, x \neq 0; \tag{7}$$

$$A \geq \delta E, \text{ თუ } (Ax, x) \geq \delta\|x\|^2, \text{ ყოველი } x\text{-სთვის}, x \in H,$$

სადაც E – ერთეულოვანი ოპერატორია.

უტოლობა

$$B \geq \alpha A$$

ნიშნავს, რომ სრულდება პირობა $B - \alpha A \geq 0$, ე. ი. $((B - \alpha A)x, x) \geq \geq 0$ (ყველა x-სათვის, $x \in H$).

თუ $A \neq A^*$ ნამდვილ სივრცეში, მაშინ უტოლობა $A \geq 0$ $(A > 0)$ ეკვივალენტურია უტოლობის $A_0 \geq 0$ $(A_0 > 0)$, რაც გამომდინარეობს (6)-დან.

ვთქვათ, A დადებითი ოპერატორია, მაშინ არსებობს შებრუნებული ოპერატორი $A^{-1} : H \rightarrow H$, ამასთან $A^{-1} > 0$, თუ $A > 0$ და

$(A^{-1})^* = A^{-1}$, თუ $A^* = A$. მართლაც, A^{-1} ოპერატორი არსებობს, თუ $Ax = 0$ განტოლებას მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა გააჩნია. დავუშვათ, $Ax = 0$ როცა $x \neq 0$; მაშინ $0 = (Ax, x)$, როცა $x \neq 0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $A > 0$ ან $(Ax, x) > 0$, როცა $x \neq 0$. ამგვარად, თუ $A > 0$, მაშინ $Ax = y$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა.

3. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობანი. ვთქვათ, A თვითშეუღლებული ოპერატორია N-განზომილებიან სივრცეში H, (,) სკალარული ნამრავლით. განვიხილოთ ამოცანა A ოპერატორის საკუთრივ მნიშვნელობებზე: უნდა ვიპოვოთ λ პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობები (საკუთრივი მნიშვნელობები), რომელთათვისაც ერთგვაროვან განტოლებას

$$A\xi = \lambda\xi. \tag{8}$$

არატრივიალური ამოხსნა (საკუთრივი ვექტორები) გააჩნია. მოვიყვანოთ წრფივი ალგებრიდან ძირითადი ფაქტები საკუთრივ მნიშვნელობათა ამოცანაზე.

1) A თვითშეუღლებულ ოპერატორს გააჩნია N ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორი $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$(\xi_s, \xi_m) = \delta_{sm}, \quad \delta_{sm} = \begin{cases} 1, & s = m, \\ 0, & s \neq m. \end{cases} \tag{9}$$

2) შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობები ნამდვილია და შეიძლება მათი აბსოლუტური მნიშვნელობების ზრდის მიხედვით დალაგება:

$$0 \le |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \cdots \le |\lambda_N|. \tag{10}$$

3) თუ A დადებითი ოპერატორია, მაშინ ყველა საკუთრივი რიცხვი $\{\lambda_k\}$ დადებითია:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N. \tag{11}$$

მართლაც, $\lambda_s = (A\xi_s, \xi_s)/\|\xi_s\|^2 = (A\xi_s, \xi_s) > 0$, რადგან $\xi_s \neq 0$.

4) ნებისმიერი $x \in H$ ვექტორი შეიძლება გაეშალოთ $A = A^*$ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორების მიხედვით:

$$x = \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k , \quad c_k = (x, \xi_k) , \tag{12}$$

ამასთან, სამართლიანია პარსევალის ტოლობა:

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{N} c_k^2 . \tag{13}$$

მართლაც, $\{\xi_k\}$ სისტემის ორთონორმირებულობის (9) პირობის ძალით გვაქვს:

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k , \sum_{k'=1}^{N} c_{k'} \xi_{k'} \right) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{k'=1}^{N} c_k c_{k'} (\xi_k , \xi_{k'}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{k'=1}^{N} c_k c_{k'} \delta_{kk'} = \sum_{k=1}^{N} c_k^2 .$$

5) თუ $A = A^* > 0$, მაშინ $Ax = f$ განტოლების ამოხსნა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

$$x = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_k}{\lambda_k} \xi_k , \tag{14}$$

სადაც $f_k = (f, \xi_k)$ – f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. ვისარგებლოთ გამოსახულებით

$$x = \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k , \quad f = \sum_{k=1}^{N} f_k \xi_k$$

და დავწეროთ

$$0 = Ax - f = \sum_{k'=1}^{N} (\lambda_{k'} c_{k'} - f_{k'}) \xi_k ,$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა სკალარულად ξ_k-ზე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(\xi_k , \xi_{k'}) = \delta_{kk'}$, ვიპოვით $0 = \lambda_k c_k - f_k$, ე. ი. $c_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$.

6) თვითშეუღლებული A ოპერატორის ნორმა მისი მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვის ტოლია:

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le N} |\lambda_k| = |\lambda_N|. \tag{15}$$

მართლაც, ვისარგებლებთ რა (12)-ით, მივიღებთ

$$Ax = \sum_{k=1}^{N} c_k A\xi_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k \xi_k$$

და (10) და (13)-ის ძალით გვექნება

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 c_k^2 \le \lambda_N^2 \sum_{k=1}^{N} c_k^2 = \lambda_N^2 \|x\|^2,$$

ე. ი. $\|A\| \le \|\lambda_N\|$. ეს შეფასება მიიღწევა. მართლაც, როცა $x = \xi_k$, გვაქვს $\|Ax\|^2 = \|A\xi_N\|^2 = \|\lambda_N \xi_N\|^2 = |\lambda_N|^2$, რადგანაც $\|\xi_N\|^2 = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\|A\| = |\lambda_N|$.

7) თუ $A = A^*$, მაშინ

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \tag{16}$$

8) თუ $A = A^* > 0$, მაშინ $\lambda_1 E \le A \le \lambda_N E$ ან

$$\lambda_1 \|x\|^2 \le (Ax, x) \le \lambda_N \|x\|^2, \qquad \lambda_1 > 0,\ x \in H. \tag{17}$$

9) თუ A ოპერატორი დადებითია, მაშინ იგი დადებითად განსაზღვრულიცაა, ე. ი. არსებობს ისეთი მუდმივი $\delta > 0$, რომ $A > 0$ პირობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $A \le \delta E$. თვითშეუღლებული ოპერატორისათვის ეს თვისება (8) თვისებიდან გამომდინარეობს.

ზოგად შემთხვევაში A წარმოვადგინოთ ჯამის სახით $A = A_0 + A_1$, სადაც $A_0 = A_0^* > 0$, $A_1 = -A_1^*$ ირიბსიმეტრიული ოპერატორია. რადგან $(A_1 x, x) = 0$, ამიტომ $(Ax, x) = (A_0 x, x) > 0$. A_0-სთვის ძალაშია 8) თვისება. თუ აღვნიშნავთ $\lambda_1 = \lambda_1(A_0) = \delta > 0$, მივიღებთ $(A_0 x. x) = (Ax, x) \ge \delta \|x\|^2$ ყველა x-სათვის H-დან.

10) თუ არსებობს Q^{-1}, მაშინ ოპერატორული უტოლობები

$$C \geq 0, \quad Q^*CQ \geq 0 \tag{18}$$

ეკვივალენტურია. ეს გამომდინარეობს იგივეობიდან

$$(Q^*CQx, x) = (CQx, Qx) = (Cy, y),$$

სადაც $y = Qx$, $x = Q^{-1}y$.

11) ვთქვათ A_1 და A_2 თვითშეუღლებული, დადებითი და გადაადგილებადი ოპერატორებია H-ში:

$$A_1 = A_1^* > 0, \quad A_2 = A_2^* > 0 \quad A_1A_2 = A_2A_1. \tag{19}$$

მაშინ ოპერატორებს A_1, A_2, მათ ჯამს $A_1 + A_2$ და ნამრავლს A_1A_2 გააჩნიათ საკუთრივ ფუნქციათა საერთო სისტემა $\{\xi_k\}$:

$$A_1\xi_k = \lambda_k^{(1)}\xi_k, \quad A_2\xi_k = \lambda_k^{(2)}\xi_k,$$

$$\lambda(A_1 + A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2),$$

$$\lambda(A_1A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2).$$

12) თუ $A = A^* > 0$, მაშინ $A^{-1} = (A^{-1})^* > 0$ ოპერატორი აგრეთვე თვითშეუღლებულია, გააჩნია იგივე საკუთრივი ვექტორები, რაც A ოპერატორს, და საკუთრივი მნიშვნელობები $\lambda(A^{-1}) = 1/\lambda(A)$.

მართლაც, $A\xi_k = \lambda_k\xi_k$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\xi_k = \lambda_k A^{-1}\xi_k$, ე. ი. $(A^{-1})\xi_k = (1/\lambda_k)\xi_k$. აქედან ვასკვნით, რომ უტოლობები $\lambda_1 E \leq A \leq \lambda_N E$ და $(1/\lambda_N)E \leq A^{-1} \leq (1/\lambda_1)E$ ეკვივალენტურია.

4. განზოგადოებული ამოცანა საკუთრივ მნიშვნელობებზე. ვთქვათ, მოცემულია თვითშეუღლებული დადებითი B ოპერატორი. შემოვიღოთ ახალი სკალარული ნამრავლი $(x, y)_B = (Bx, y)$ და ნორმა $\|y\|_B = \sqrt{(By, y)}$.

H სივრცეს $(x, y)_B$ სკალარულ ნამრავლთან ერთად ეწოდება ენერგეტიკული სივრცე და აღინიშნება H_B-თი.

განვიხილოთ საკუთრივ მნიშვნელობებზე განზოგადოებული ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს განტოლების

$$Av = \mu Bv, \qquad v \neq 0 \tag{20}$$

არატრივიალური v ამონახსნების პოვნაში, სადაც A – თვითშეუღლებული, დადებითი ოპერატორია.

ვთქვათ, A და B ოპერატორები წარმოიდგინება შესაბამისად შემდეგი მატრიცებით $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1,2,...,N)$. (20) ოპერატორული განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ალგებრულ განტოლებათა სისტემის სახით

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} v^{(j)} = \mu \sum_{j=1}^{N} b_{ij} v^{(j)}, \quad i = 1,2,...,N,$$

სადაც $v^{(1)},...,v^{(N)}$ – v ვექტორების კომპონენტებია. საკუთრივი მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის მივიღებთ N-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას

$$\det(a_{ij} - \mu b_{ij}) = 0. \tag{21}$$

(20) ამოცანისათვის სამართლიანია თვისებები, რომლებიც ანალოგიურია საკუთრივ მნიშვნელობებზე ჩვეულებრივი ამოცანის თვისებებისა, კერძოდ: არსებობს N ცალი $(x, y)_B$ სკალარული ნამრავლის აზრით ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორი

$$(v_k, v_m)_B = \delta_{km}, \quad k, m = 1,2,...,N, \tag{22}$$

რომელთაც შეესაბამებათ საკუთრივი მნიშვნელობები

$$0 < \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_N \tag{23}$$

მესამე პუნქტის ანალოგიურად გვექნება

$$x = \sum_{k=1}^{N} c_k v_k, \quad c_k = (x, v_k)_B, \quad \|x\|_B^2 = \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \tag{24}$$

სამართლიანია ოპერატორული უტოლობები:

$$\mu_1 B \leq A \leq \mu_N B, \tag{25}$$

ამასთან, μ_N – A ოპერატორის ნორმაა H_B-ში. ეს ნიშნავს, რომ

$$\|Ax\|_B \leq \|A\|_B \, \|x\|_B.$$

შენიშვნა. უტოლობები

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B,\ \ \gamma_1 > 0, \tag{26}$$

$$\gamma_1 \le \mu_k \le \gamma_2, \qquad k = 1,2,\dots,N, \tag{27}$$

ექვივალენტურია. მართლაც, გავშალოთ ნებისმიერი ვექტორი $x = \sum_{k=1}^{N} c_k v_k$. ვიპოვოთ $(A - \gamma B)x = \sum_{k=1}^{N} c_k(\mu_k - \gamma)Bv_k$ და სკალარული ნამრავლი

$$((A - \gamma B)x, x) = \sum_{k=1}^{N} c_k^2(\mu_k - \gamma)(Bv_k, v_k) = \sum_{k=1}^{N}(\mu_k - \gamma)c_k^2,$$

სადაც γ ერთ-ერთია γ_1 და γ_2 რიცხვებიდან. თუ დავუშვებთ $x = v_k$, ვიპოვით $((A - \gamma B)v_k, v_k) = \mu_k - \gamma$. ვთქვათ, $\gamma - \gamma_2$ და სრულდება პირობა $A \le \gamma_2 B$; მაშინ $\mu_k \le \gamma_2$. სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც, ანალოგიურად ჩატარდება მსჯელობა, როცა $\gamma = \gamma_1$.

5. ბადური ფუნქციების წრფივი სივრცეები. სხვაობიანი ოპერატორები. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციებს, რომლებიც მოცემულია ბადეზე მთელრიცხვა კვანძებით:

$$\omega_N = \{i: i = 0,1,\dots,N\}.$$

თუ $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე შემოვიღებთ კვანძებს $x_i = ih$, $h = 1/N$ $(i = 0,1,\dots,N)$, მივიღებთ თანაბარ ბადეს h ბიჯით, როგორც $x_i = ih$ კვანძების ერთობლიობას მთელრიცხვა ინდექსებით:

$$\omega_h = \{x_i = ih: i = 0,1,\dots,N;\ h = 1/N\}.$$

ერთი ბადიდან მეორეზე გადასვლა ცხადია და შემდეგში ჩვენ ხშირად არ განვასხვავებთ მათ.

$\Omega_{N+1} = \{y_i, i = 0,1,\dots,N\}$-თი აღვნიშნოთ ω_N ბადეზე მოცემული ბადური ფუნქციების სივრცე, ხოლო $\overset{\circ}{\Omega}_{N+1} = \{y_i, i = 0,1,\dots,N;\ y_0 = 0, y_N = 0\}$-თი — ისეთი ბადური ფუნქციების ქვესივრცე, რომლებიც

ω_N-ზეა მოცემული და ნულდება ω_N ბადის სასაზღვრო კვანძებში: $y_0 = y_N = 0$ ფუნქციებს $\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$-დან აღვნიშნავთ ასე: $\overset{\circ}{y}(i) = \overset{\circ}{y}_i$.

განვიხილოთ უმარტივესი სხვაობიანი ოპერატორების მაგალითები. Δ მარჯვენა სხვაობიანი ოპერატორისათვის გვექნება

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0,1,...,N-1$$

განსაზღვრის არეა Ω_{N+1}, მნიშვნელობათა არე – N-განზომილებიანი $\Omega_N^+ = \{y_i, \ i = 0,1,...,N-1\}$ სივრცე.

∇ მარცხენა სხვაობიანი ოპერატორისათვის გვექნება:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, \quad i = 1,2,...,N;$$

განსაზღვრის არეს წარმოადგენს Ω_{N+1}, მნიშვნელობათა არეს – $\Omega_N^- = \{y_i, i = 1,2,...,N\}$ სივრცე.

ფორმულიდან

$$\Delta^2 y_{i-1} = \Delta(\Delta y_{i-1}) = \Delta(\nabla y_i) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

ჩანს, რომ მეორე რიგის სხვაობიანი ოპერატორი განსაზღვრულია y_i, $i = 1,2,...,N-1$, ბადური ფუნქციებისათვის, ე. ი. ასახავს Ω_{N+1}-ს $\Omega_{N-1} = \{y_i, \ i = 1,2,...,N-1\}$ სივრცეში. იგივე თვისება გააჩნია Λ სხვაობიან ოპერატორს:

$$\Lambda y_i = b_i y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1} = b_i \Delta(\nabla y_i) - (b_i - a_i)(\nabla y_i) - (c_i - a_i - b_i) y_i,$$
$$i = 1,2,...,N-1,$$

ე. ი. $\Lambda y_i \in \Omega_{N-1}$, თუ $y_i \in \Omega_{N+1}$ ან, შემოკლებულ ჩანაწერში,

$$\Lambda : \Omega_{N+1} \to \Omega_{N-1}.$$

განვიხილოთ სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანა

$$\Lambda y_i = -f_i, \ i = 1,2,...,N-1, \ y_0 = \mu_1, \ y_N = \mu_2 \tag{28}$$

და ჩავწეროთ იგი მატრიცული სახით:

$$AY = \Phi, \tag{29}$$

სადაც $\Phi = (f_1 + a_1\mu_1, \ f_2, \ ..., \ f_{N-2}, \ f_{N-1} + b_{N-1}\mu_2)$ – ცნობილი, $Y = (y_1, \ y_2, ..., \ y_{N-2}, \ y_{N-1})$ – უცნობი ვექტორებია განზომილებით

$N-1$, A არის $(N-1)\times(-1)$ ზომის კვადრატული სამდიაგონალური მატრიცა:

$$A=\begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & & & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{bmatrix}.$$

(28) და (29)-ის შედარებიდან ჩანს, რომ

$$\widetilde{\Lambda}y_i=-\varphi_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\Lambda}y_1=-c_1y_1+b_1y_2,\quad \varphi_1=f_1+a_1\mu_1, \\ \widetilde{\Lambda}y_i=\Lambda y_i,\quad \varphi_i=f_i,\quad i=2,3,\ldots,N-2, \\ \widetilde{\Lambda}y_{N-1}=a_{N-1}y_{N-2}-c_{N-1}y_{N-1},\quad \varphi_{N-1}=f_{N-1}+b_{N-1}\mu_2. \end{gathered} \tag{28'}$$

$\widetilde{\Lambda}$ სხვაობიანი ოპერატორი ასახავს Ω_{N-1}-ს Ω_{N-1}-ში. ძნელი არ არის შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{\Lambda}y_i=\Lambda \overset{\circ}{y}_i$. (28′)-ის მაგივრად გვექნება:

$$\Lambda \overset{\circ}{y}_i=-\varphi_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1.$$

განვიხილოთ (29) მატრიცის შესაბამისი A ოპერატორი, ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ

$$Ay_i=-\widetilde{\Lambda}y_i=-\Lambda \overset{\circ}{y}_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

მაშინ სხვაობიანი სასაზღვრო (28) ამოცანის მაგივრად მივიღებთ ოპერატორულ განტოლებას

$$Ay=\varphi,$$

სადაც $A:\Omega_{N-1}\to\ \Omega_{N-1}$, $\varphi\in\Omega_{N-1}$ ე. ი. A ოპერატორი მოქმედებს Ω_{N-1}-დან Ω_{N-1}-ში. ცხადია, A წრფივი ოპერატორია. შევნიშნოთ, რომ შეიძლება ჩავთვალოთ (თუ გავითვალისწინებთ, რომ $Ay=-\Lambda\overset{\circ}{y}$), რომ A ასახავს $\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$-ს Ω_{N-1}-ში.

$H = \Omega_{N-1}$ სივრცეში შეიძლება შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი

$$(y,v) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i$$

და ნორმა

$$\|y\| = \sqrt{(y,y)}\,.$$

თუ განიხილება მეორე ($æ_1 = æ_2 = 1$) ან მესამე ($æ_1 \neq 0$, $æ_2 \neq 0$) სასაზღვრო ამოცანა (იხ. (1), §3), მაშინ A მატრიცა არის $(N + 1) \times \times (N + 1)$ ზომის კვადრატული მატრიცა და A ოპერატორი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$Ay_i = -\Lambda y_i = -(b_i y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1}), \qquad i = 1,2,\ldots,N-1,$$
$$Ay_0 = -(æ_1 y_1 - y_0), \qquad Ay_N = -(y_N - æ_2 y_{N-1}),$$

ამ შემთხვევაში A ოპერატორი ასახავს ბადური ფუნქციების $H = \Omega_{N+1}$ სივრცეს თავის თავში: $A : H \to H$.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ პირველ სასაზღვრო ამოცანას მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებისათვის; ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $H = \Omega_{N-1}$.

6. გრინის სხვაობიანი ფორმულები. განვიხილოთ სხვაობიანი ოპერატორი:

$$Ly_i = b_i y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1}, \qquad i = 1,\ldots,N-1. \tag{30}$$

თუ $b_i \neq a_{i-1}$, მაშინ შესაბამისი მატრიცა სიმეტრიული არ არის. იგი სიმეტრიულია მხოლოდ როცა

$$b_i = a_{i+1}, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{31}$$

შემთხვევაში. უკანასკნელი პირობის გათვალისწინებით გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} Ly_i &= a_{i+1}y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1} = a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1}) - \\ &- (c_i - a_i - a_{i+1})y_i = a_{i+1}\nabla y_{i+1} - a_i \nabla y_i - (c_i - a_i - a_{i+1})y_i = \\ &= \Delta(a_i \nabla y_i) - (c_i - a_i - a_{i+1})y_i. \end{aligned} \tag{32}$$

დავყოთ $[0,1]$ მონაკვეთი x_i წერტილებით N ტოლ ნაწილად, დავუშვათ, რომ $y(x_i) = y_i = y(i)$ და შემოვიღოთ აღნიშვნები, რომლებითაც შემდეგში ყველგან ვისარგებლებთ:

$$h = \frac{1}{N}, \quad x_i = ih, \quad i = 0,1,\dots,N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1,$$

$$y_{x,i} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{\bar{x},i} = \frac{\nabla y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \tag{33}$$

$$y_{\bar{x}x,i} = y_{\bar{x}x}(i) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \frac{\Delta(\nabla y_i)}{h^2}.$$

გავყოთ (32) გამოსახულება h^2-ზე. მივიღებთ სხვაობიან ოპერატორს

$$\Lambda y_i = (ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i,$$

$$d_i = \frac{1}{h^2}(c_i - a_i - a_{i+1}), \quad i = 1,\dots,N-1. \tag{34}$$

§1-ში მიღებული იყო ნაწილობითი აჯამვის ფორმულა

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i + (yv)_N - (yv)_0. \tag{35}$$

თუ ვისარგებლებთ (33) აღნიშვნით, მას გადავწერთ შემდეგი სახით

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i v_{x,i} h = -\sum_{i=1}^{N} v_i y_{\bar{x},i} h + (yv)_N - (yv)_0, \tag{36}$$

რადგანაც $\sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i \left(\frac{\Delta v_i}{h}\right) h = \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i v_{x,i} h$ მასალის შემდგომი გადმოცემისათვის უფრო ხელსაყრელია, რომ (36)-ის მარცხენა ნაწილში მოვახდინოთ $i = 1$-დან $i = N - 1$-მდე აჯამვა; ეს მოგვცემს ფორმულას:

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{x,i} h = -\sum_{i=1}^{N} v_i y_{\bar{x},i} h + (yv)_N - y_0 v_1 \qquad (37)$$

ჩავსვათ აქ $v_i = a_i z_{\bar{x},i}$; მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i (az_{\bar{x}})_{x,i} h = -\sum_{i=1}^{N} a_i y_{\bar{x},i} z_{\bar{x},i} h + (ayz_{\bar{x}})_N - y_0 (az_{\bar{x}})_1, \qquad (38)$$

ეს გრინის პირველი სხვაობიანი ფორმულაა. შევუცვალოთ y_i-ს და z_i-ს ადგილები:

$$\sum_{i=1}^{N-1} z_i (ay_{\bar{x}})_{x,i} h = -\sum_{i=1}^{N} a_i z_{\bar{x},i} y_{\bar{x},i} h + (ay_{\bar{x}} z)_N - z_0 (ay_{\bar{x}})_1. \qquad (38')$$

თუ გამოვაკლებთ (38′)-ს (38)-დან მივიღებთ გრინის მეორე სხვაობიან ფორმულას:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-1} y_i (az_{\bar{x}})_{x,i} h = \sum_{i=1}^{N-1} z_i (ay_{\bar{x}})_{x,i} h + a_N (yz_{\bar{x}} - zy_{\bar{x}})_N - \\ - (y_0 (az_{\bar{x}})_1 - z_0 (ay_{\bar{x}})_1).\end{aligned} \qquad (39)$$

თუ სრულდება პირობები

$$y_0 = z_0 = 0, \qquad y_N = z_N = 0, \qquad (40)$$

ე ი. $y = \overset{\circ}{y}$, $z = \overset{\circ}{z} \in \overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$, მაშინ (39) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ბოლო ორი შესაკრები ნულის ტოლი ხდება და

$$\sum_{i=1}^{N-1} \overset{\circ}{y}_i (a \overset{\circ}{z}_{\bar{x}})_{x,i} h = \sum_{i=1}^{N-1} \overset{\circ}{z}_i (a \overset{\circ}{y}_{\bar{x}})_{x,i} h \qquad (41)$$

თუ (41) იგივეობის ორივე მხრიდან გამოვაკლებთ $\sum_{i=1}^{N-1} d_i \overset{\circ}{y}_i \overset{\circ}{z}_i h$

ჯამს, მივიღებთ გრინის მეორე ფორმულას y, z-სთვის $\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$-დან:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \overset{\circ}{y}_i \Lambda \overset{\circ}{z}_i h = \sum_{i=1}^{N-1} \overset{\circ}{z}_i \Lambda \overset{\circ}{y}_i h \tag{42}$$

სხვაობიანი ოპერატორისათვის:

$$\Lambda \overset{\circ}{y}_i = (a \overset{\circ}{y}_{\bar{x}})_{x,i} - d_i \overset{\circ}{y}_i \text{ ყველა } \overset{\circ}{y} \text{-სათვის } \overset{\circ}{\Omega}_{N+1} \text{-დან.} \tag{43}$$

ვთქვათ, $H = \Omega_{N-1} - y_i$, $i = 1,2,\dots,N-1$, ბადური ფუნქციების სივრცეა სკალარული ნამრავლით

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$$

და ნორმით

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}\,.$$

შემოვიტანოთ A ოპერატორი:

$$Ay = -\Lambda \overset{\circ}{y}, \quad y \in H\,, \tag{44}$$

მამინ გრინის მეორე ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$(y, Az) = (Ay, z). \tag{45}$$

ეს ფორმულა გამოხატავს A ოპერატორს თვითშეუღლებულობის თვისებას: $A^* = A$ და, მაშასადამე, $\Lambda^* = \Lambda$. $\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{y}$-სთვის $\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$-დან გრინის პირველი ფორმულა (38) გვაძლევს:

$$-\sum_{i=1}^{N-1} \overset{\circ}{y}_i (a \overset{\circ}{y}_{\bar{x}})_{x,i} h = \sum_{i=1}^{N} a_i (\overset{\circ}{y}_{\bar{x},i})^2 h > 0 \tag{46}$$

$$\text{როცა} \quad \overset{\circ}{y}_i \not\equiv 0\,,\ a_i > 0.$$

(რადგან $\overset{\circ}{y}_0 = \overset{\circ}{y}_N = 0$, ამიტომ ნულთან ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ $\overset{\circ}{y}_i \equiv 0$-სთვის $(i = 1,\dots,N-1)$), თუ გავითვალისწინებთ A ოპერატორის განსაზღვრას, ვიპოვით

$$(Ay,y)=\sum_{i=1}^{N}a_i(y_{\bar{x},i})^2h+\sum_{i=1}^{N-1}d_iy_i^2h>0,\quad a_i>0,\quad d_i\ge 0. \qquad (47)$$

ამგვარად, (43), (44) ფორმულებით განსაზღვრული A სხვაობიანი ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითია: $A=A^*>0$, თუ

$$a_i>0,\ d_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,N-1,\qquad a_N>0. \qquad (48)$$

7. მეორე რიგის სხვაობიანი ოპერატორის თვითშეუღლებულობის პირობა. ჩვენ დავრწმუნდით იმაში, რომ (31) პირობა საკმარისია (30) სხვაობიანი ოპერატორის თვითშეუღლებულობისათვის $H=\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$ სივრცეში, ვაჩვენოთ, რომ (31) პირობა აუცილებელია L-ის თვითშეუღლებულობისათვის.

წარმოვადგინოთ L ჯამის სახით:

$$Ly_i=L_1y_i+L_2y_i,$$
$$L_1y_i=a_{i-1}(y_{i+1}+y_i)-a_i(y_i-y_{i-1})-(c_i-a_i-b_i)y_i,$$
$$L_2y_i=(b_i-a_{i+1})y_{i+1}.$$

ოპერატორი $L_1y_i=h^2\Lambda y_i$, $\Lambda y_i=(ay_{\bar{x}})_{x,i}-d_iy_i$ როგორც წინა პუნქტში იყო ნაჩვენები, თვითშეუღლებულია სივრცეში $H=\overset{\circ}{\Omega}_{N+1}$ ან სივრცეში $H=\Omega_{N-1}$ სკალარული ნამრავლით $(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1}y_iv_ih$.

ამიტომ შეიძლება დავწეროთ:

$$\left(\frac{1}{h^2}L\overset{\circ}{y},\overset{\circ}{v}\right)-\left(\overset{\circ}{y},\frac{1}{h^2}L\overset{\circ}{v}\right)=$$

$$=\left(\Lambda\overset{\circ}{y},\overset{\circ}{v}\right)-\left(\overset{\circ}{y},\Lambda\overset{\circ}{v}\right)+\left(\frac{1}{h^2}L_2\overset{\circ}{y},\overset{\circ}{v}\right)-\left(\overset{\circ}{y},\frac{1}{h^2}L_2\overset{\circ}{v}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2}(b_i-a_{i+1})(y_{i+1}v_i-y_iv_{i+1})h.$$

აქედან ჩანს, რომ $\left(L\overset{\circ}{y},\overset{\circ}{v}\right)=\left(\overset{\circ}{y},L\overset{\circ}{v}\right)$, ე. ი. $L=L^*$ მხოლოდ შემდეგი პირობის დროს

$$\sum_{i=1}^{N-1}(b_i-a_{i+1})(y_{i+1}v_i-y_iv_{i+1})h=0. \tag{49}$$

y_i და v_i-ს ნებისმიერობის გამო შეიძლება ავილოთ $y_i=\delta_{i,i_0+1}$, $v_i=\delta_{i,i_0}$, სადაც i_0 – ნებისმიერი ფიქსირებული კვანძია ($i_0=1,2,...,N-1$), δ_{i,i_0} – კრონეკერის სიმბოლოა. მაშინ მივიღებთ $y_{i+1}v_i-v_iy_{i+1}=\delta_{i,i_0}$ და (49) პირობა მოგვცემს $b_{i_0}=a_{i_0+1}$. ამით (31) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ განტოლება

$$Ly_i=-f_i \tag{50}$$

შეიძლება მივიყვანოთ სახეზე

$$\tilde{L}y_i=\Delta(A_i\nabla y_i)-D_iy_i=-F_i\,, \tag{51}$$

სადაც $\tilde{L}$ – თვითშეუღლებული ოპერატორია. მართლაც, გავამრავლოთ (50) განტოლების ორივე ნაწილი $\mu_i\neq 0$-ზე:

$$\tilde{L}y_i=\mu_ia_iy_{i-1}-\mu_ic_iy_i+b_i\mu_iy_{i+1}=-\mu_if_i$$

და მოვითხოვოთ, რომ მიღებული განტოლებისათვის სრულდებოდეს (31) პირობა, ე. ი.

$$b_i\mu_i=(\mu a)_{i+1}=a_{i+1}\mu_{i+1}=A_{i+1}.$$

აქედან მივიღებთ $\mu_{i+1}=\left(\dfrac{b_i}{a_{i+1}}\right)\mu_i=\mu_1\prod\limits_{k=1}^{i}b_k/a_{k+1}$ და (51) განტოლებას, რომელშიც

$$A_i=a_i\mu_i,\ D_i=\mu_i(c_i-a_i-b_i),\ F_i=\mu_if_i.$$

8. მეორე რიგის სხვაობიანი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები. განვიხილოთ სხვაობიანი ამოცანა საკუთრივ მნიშვნელობებზე:

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i + \lambda y_i = 0,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ y_0 = y_N = 0, \tag{52}$$

ან $Ay = \lambda y$, $y \in \Omega_{N-1}$, სადაც A განისაზღვრება (44) ტოლობით.

ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითია, ამიტომ მას ეხება ყველაფერი, რაც მეოთხე პუნქტშია ნათქვამი.

უმარტივესი შემთხვევისათვის $a_i = 1$, $d_i = 0$ საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები შესაძლებელია ცხადი სახით ვიპოვოთ. ამგვარად, საჭიროა ვიპოვოთ არატრივიალური ამოხსნა ერთგვაროვანი განტოლებისა სასაზღვრო პირობებით

$$y_{\bar{x}x,i} + \lambda y_i = 0.\quad i = 1,2,\dots,N-1,\ hN = 1,\ y_0 = 0,\ y_N = 0,\ y_i \not\equiv 0 . \tag{53}$$

გადავწეროთ (53) განტოლება სახით

$$y_{i+1} - 2\cos\alpha\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad 2\cos\alpha = 2 - \lambda h^2. \tag{54}$$

ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$y_i = c_1 \cos i\alpha + c_2 \sin i\alpha. \tag{55}$$

მოვითხოვოთ $y_0 = c_1 = 0$, $y_N = c_2 \sin N\alpha = 0$ სასაზღვრო პირობების შესრულება. რადგან ვეძებთ არატრივიალურ ამოხსნას, ამიტომ $c_2 \neq 0$ და $\sin N\alpha = 0$ ე. ი. $N\alpha = m\pi$ $(m = 0,1,2,\dots)$, $\alpha = \alpha_m = m\pi/N = m\pi h$. $2\cos\alpha = 2 - \lambda h^2$ დამოკიდებულებიდან ვპოულობთ

$$\begin{aligned} \lambda h^2 &= 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \\ \lambda = \lambda_m &= \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi m h}{2}. \end{aligned} \tag{56}$$

λ_m-ის ამ მნიშვნელობას შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია,

$$y_m(i) = c\sin\mu m x_i,\ c \neq 0,\ x_i = ih,\ i = 0,1,2,\dots,N, \tag{57}$$

რომელიც განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი მამრავლის სიზუსტით. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$y_N(i) = c\sin\pi N x_i = c\sin\pi i = 0,\ i = 0,1,2,\ldots,$$
$$y_{N+1}(i) = c\sin\pi(N+1)x_i = c\sin[\pi N x_i + \pi x_i] =$$
$$= c\sin\pi x_i\cos\pi i = (-1)^i y_1(i),$$
$$y_{N+m+1}(i) = (-1)^i y_m(i),\ m = 1,2,\ldots,N-1.$$

მაშასადამე, მხოლოდ $y_m(i)$ ფუნქციებია წრფივად დამოუკიდებელი, $m < N$. ამგვარად, ნაპოვნია არატრივიალური ამოხსნა (λ_m საკუთრივი მნიშვნელობების შესაბამისი $y_m(i)$ საკუთრივი ფუნქციები).

c მამრაველი ისე შევარჩიოთ, რომ $y_m(i)$ ფუნქციის ნორმა ერთის ტოლი იყოს: $\|y_m(i)\| = c\|\sin\pi m x_i\| = 1,\ c > 0$.

ამისათვის უნდა გამოვთვალოთ

$$\|\sin\pi m x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} h\sin^2\pi m x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} h(1-\cos 2\pi m x_k).$$

თუ აღვნიშნავთ $\alpha = 2\pi m h$ და შევცვლით $\cos 2\pi m x_k = \cos\alpha k = \operatorname{Re} e^{i\alpha k}$, ვიპოვით

$$\sum_{k=1}^{N-1} h\cos 2\pi m x_k = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N-1} h e^{i\alpha k} = h\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha} - e^{i\alpha N}}{1-e^{i\alpha}} = -h,$$

$$\|\sin\pi m x_k\|^2 = \frac{(N-1)h}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} h\cos 2\pi m x_k = \frac{Nh}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\|\sin\pi m x\| = 1/\sqrt{2};$$

მაშასადამე, $c = \sqrt{2}$. ამგვარად, ფუნქციის

$$y_m(i) = \sqrt{2}\sin\pi m x_i \qquad (58)$$

ნორმა ერთის ტოლია.

განსხვავებული λ_s და λ_m საკუთრივი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები $y_s(i)$ და $y_m(i)$ ორთოგონალურია სკალარული ნამრავლის აზრით

$$(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

(53) ამოცანა (8) ამოცანის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ოპერატორით $Ay(i)=-\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x}(i)$. ეს ოპერატორი, ცხადია, თვითშეუღლებული და დადებითია, რადგან

$$(Ay,y)=\sum_{i=1}^{N-1}(y_{\bar{x},i})^2 h>0.$$

ამიტომ, ყველაფერი რაც მესამე პუნქტშია ნათქვამი, ამ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება.

λ_s საკუთრივი მნიშვნელობები იზრდება s-ის ზრდასთან ერთად, რადგან $\sin\frac{\pi h}{2}s<\sin\frac{\pi h}{2}(s+1)<1$, როცა $s\le N$. უმცირესი საკუთრივი მნიშვნელობა ტოლია $\lambda_1=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$. უდიდესი საკუთრივი მნიშვნელობა ტოლია $\lambda_{N-1}=\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$, რადგან

$$\sin\frac{\pi h}{2}(N-1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi h}{2}\right)=\cos\frac{\pi h}{2}.$$

თუ λ_1-ს გადავწერთ სახით $\lambda_1=\pi^2\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2$, $\xi=\pi h/2\le\pi/4$. როცა $h\le 1/2$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\sin\xi/\xi$ კლებულობს და გააჩნია მინიმუმი, როცა $\xi=\pi/4$, მივიღებთ $\lambda_1\ge 8$.

λ_{N-1}-სთვის გვაქვს შეფასება $\lambda_{N-1}<4/h^2$ და, მამასადამე,

$$8<\lambda_k<4/h^2,\quad k=1,2,\ldots,N-1.$$

§5. მაქსიმუმის პრინციპი სხვაობიანი განტოლებისათვის

1. მაქსიმუმის პრინციპი და მისი შედეგები. მეორე რიგის დადებითკოეფიციენტებიანი სხვაობიანი განტოლებისათვის

$$Ly_i = a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -\varphi_i,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2, \quad (1)$$

$$a_i > 0,\ b_i > 0,\ c_i \ge a_i + b_i,\ i = 1,2,\dots,N-1, \quad (2)$$

სამართლიანია მაქსიმუმის პრინციპი.

თეორემა 1. (მაქსიმუმის პრინციპი). ვთქვათ L სხვაობიანი ოპერატორი განსაზღვრულია (1), (2) ფორმულებით. თუ $\overline{\omega}$ ბადეზე მოცემული y_i ფუნქციისათვის, რომელიც განსხვავდება მუდმივისაგან, როცა $1 \le i \le N-1$, სრულდება $Ly_i \ge 0$ ($Ly_i \le 0$) პირობა ყველა i-სთვის, $i = 1,2,\dots,N-1$, მაშინ ამ ფუნქციას არ შეუძლია მიიღოს უდიდესი დადებითი (უმცირესი უარყოფითი) მნიშვნელობანი ბადის შიდა კვანძებში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $Ly_i \ge 0$ ($i = 1,2,\dots,N-1$). დავუშვათ, რომ თეორემა ჭეშმარიტი არ არის და y_i რაიმე შიდა კვანძში $i = i_*$ უდიდეს დადებით მნიშვნელობას აღწევს: $y_{i_*} = \max\limits_{0 \le i \le N} y_i = M_0 > 0$.

რადგან $y_i \ne \mathrm{const}$, მოიძებნება შიგა კვანძი i_0 (i_0 შეიძლება i_*-ს დაემთხვეს), რომელშიც $y_{i_0} = y_{i_*} = M_0 > 0$, ხოლო ერთ-ერთი მეზობელ, მაგალითად, $i = i_0 - 1$ კვანძში სრულდება მკაცრი უტოლობა $y_{i_0-1} < y_{i_0}$. ჩავწეროთ Ly_i გამოსახულება ასეთი სახით $Ly_i = b_i(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1}) - (c_i - a_i - b_i)y_i$. $i = i_0$ კვანძში გვექნება $Ly_{i_0} = b_{i_0}(y_{i_0+1} - y_{i_0}) - a_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) - (c_{i_0} - a_{i_0} - b_{i_0})y_{i_0} < 0$, რაც ეწინააღმდეგება $Ly_i \ge 0$ პირობას ყველა i-სთვის $i = 1,2,\dots,N-1$, მათ შორის $i = i_0$-სთვისაც. თეორემის პირველი დებულება დამტკიცებულია.

მეორე დებულება ანალოგიურად მტკიცდება (საკმარისია y_i შევცვალოთ $-y_i$-ით და ვისარგებლოთ ახლახანს დამტკიცებული დებულებით).

შედეგი 1. თუ სრულდება (2) პირობები, $Ly_i \le 0$ $(i = 1,2,\dots, N-1)$, $y_0 \ge 0$, $y_N \ge 0$, მაშინ $y_i \ge 0$ $(i = 0,1,\dots, N)$.

თუ $Ly_i \ge 0$, $y_0 \le 0$, $y_N \le 0$, მაშინ $y_i \le 0$ $(i = 0,1,\dots,N)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $Ly_i \le 0$ და $y_i < 0$ თუნდაც ერთ შიგა კვანძში $i = i_*$, მაშინ y_i აღწევს უმცირეს უარყოფით მნიშვნელობას შიგა კვანძში, რაც შეუძლებელია მაქსიმუმის პრინციპის ძალით.

შედეგი 2. თუ $\varphi_i \ge 0$, $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$, მაშინ (1)-(2) ამოცანის ამოხსნა არა-უარყოფითია: $y_i \ge 0$ $(i = 0,1,\dots,N)$.

შედეგი 3. თუ სრულდება (2) პირობები, მაშინ ამოცანას

$$Ly_i = 0,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ y_0 = 0,\ y_N = 0 \tag{3}$$

გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა და (1), (2) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი φ_i, μ_1, μ_2-სთვის.

დამტკიცება. თუ დავუშვებთ, რომ (3) ამოცანის ამოხსნა y_i 0-გან განსხვავებულია ერთ $i = i_*$ წერტილში მაინც, მაშინ მივიღებთ წინააღმდეგობას მაქსიმუმის პრინციპთან: თუ $y_{i_*} > 0$ ($y_{i_*} < 0$), მაშინ y_i აღწევს უდიდეს დადებით (უმცირეს უარყოფით) მნიშვნელობას რაიმე შიგა $i = i_0$ წერტილში, რაც შეუძლებელია. ამგვარად, $y_i \equiv 0$.

თეორემა 2. (შედარების თეორემა). ვთქვათ, y_i – (1), (2) ამოცანის ამოხსნაა, $\overline{y}_i$ კი შემდეგი ამოცანისა

$$L\overline{y}_i = -\overline{\varphi}_i,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ \overline{y}_0 = \overline{\mu}_1,\ \overline{y}_N = \overline{\mu}_2$$

ამასთან, სრულდება პირობები

$$|\varphi_i| \le \overline{\varphi}_i, \quad |\mu_1| \le \overline{\mu}_1, \quad |\mu_2| \le \overline{\mu}_2 .$$

მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$|y_i| \le \overline{y}_i \text{ ყველა } i\text{-სთვის},\ i = 0,1,\dots,N.$$

დამტკიცება. შედეგი (2)-ის ძალით გვაქვს $\bar{y}_i \geq 0$. $\bar{y}_i - y_i$ სხვაობისა და $\bar{y}_i + y_i$ ჯამისათვის მივიღებთ (1) სახის განტოლებას მარჯვენა მხარეებით $\bar{\varphi}_i - \varphi_i \geq 0$, $\bar{\mu}_1 - \mu_1 \geq 0$, $\bar{\mu}_2 - \mu_2 \geq 0$ და $\bar{\varphi}_i + \varphi_i \geq 0$, $\bar{\mu}_1 + \mu_1 \geq 0$, $\bar{\mu}_2 + \mu_2 \geq 0$ შესაბამისად რადგან $\bar{\varphi}_i \pm \varphi_i \geq 0$ და $\bar{\mu}_\alpha \pm \mu_\alpha \geq 0$ $(\alpha = 1,2)$, ამიტომ შედეგი (2)-ის ძალით $\bar{y}_i - y_i \geq 0$, $\bar{y}_i + y_i \geq 0$, საიდანაც გამომდინარეობს $-\bar{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i$, $|y_i| \leq \bar{y}_i$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

y_i ფუნქციას უწოდებენ მაჟორანტულს (1), (2) ამოცანის ამოხსნის მიმართ.

2. სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შეფასება. (1) (2) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა წარმოვადგინოთ ჯამის სახით $y_i = y_i^{(1)} + y_i^{(2)}$, სადაც $y_i^{(1)}$ – არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნაა ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით:

$$Ly_i = -\varphi_i,\ i = 1,2,\ldots,N-1,\ y_0 = y_N = 0, \tag{4}$$

ხოლო $y_i^{(2)}$ – ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნაა არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით:

$$Ly_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,N-1,\ y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2. \tag{5}$$

დავამტკიცოთ, რომ $y_i^{(2)}$-სთვის სამართლიანია შეფასება

$$\max_{0\leq i\leq N} |y_i^{(2)}| \leq \max(|\mu_1|,|\mu_2|)\,. \tag{6}$$

ვთქვათ, $\bar{y}_i$ – შემდეგი ამოცანის ამოხსნაა

$$L\bar{y}_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_N = \mu, \quad \mu = \max(|\mu_1|,|\mu_2|)\,,$$

მაშინ შედარების თეორემის მიხედვით $|y_i^{(2)}| \leq |\bar{y}_i|$, ხოლო მაქსიმუმის პრინციპის ძალით $\max\limits_{0\leq i\leq N} |\bar{y}_i| \leq \bar{\mu}$, რადგან $|\bar{y}_i| \geq 0$-ს შეუძლია მიაღწიოს უდიდეს დადებით მნიშვნელობას მხოლოდ საზღვარზე, ე. ი. როცა $i = 0$ ან $i = N$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\max\limits_{0\le i\le N}|y_i|$ სიდიდე ნორმას წარმოადგენს. ნორმა აღინიშნება $\|y\|_c$ სიმბოლოთი. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ შეფასება $\|y^{(2)}\|_c \le \max(|\mu_1|,|\mu_2|)$.

თეორემა 3. ვთქვათ, სრულდება პირობები

$$|a_i| > 0, |b_i| > 0, \bar{d}_i = |c_i| - |a_i| - |b_i| > 0, i = 1,2,...,N-1, \tag{7}$$

მაშინ (4) ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|y\|_c \le \|\varphi/\bar{d}\|_c. \tag{8}$$

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის გადავწეროთ (4) შემდეგი სახით

$$c_i y_i = a_i y_{i-1} + b_i y_{+1} + \varphi_i. \tag{4'}$$

ვთქვათ, $|y_i|$ უდიდეს $|y_{i_0}|>0$ მნიშვნელობას აღწევს, როცა $i = i_0$ $(0 < i_0 < N)$, ისე რომ $|y_i|\le|y_{i_0}|$ ნებისმიერი i-სთვის, $i = 0,1,...,N$, მაშინ (4′)-დან, როცა $i = i_0$, გამომდინარეობს

$$|c_{i_0}||y_{i_0}|=|a_{i_0}y_{i_0-1}+b_{i_0}y_{i_0+1}+\varphi_{i_0}|\le|a_{i_0}||y_{i_0-1}|+$$

$$+|b_{i_0}||y_{i_0+1}|+|\varphi_{i_0}|\le(|a_{i_0}|+|b_{i_0}|)|y_{i_0}|+\varphi_{i_0}|,$$

$$(|c_{i_0}|-|a_{i_0}|-|b_{i_0}|)|y_{i_0}|\le|\varphi_{i_0}|, \quad |y_{i_0}|\le\frac{|\varphi_{i_0}|}{\bar{d}_{i_0}}\le\left\|\frac{\varphi}{\bar{d}}\right\|_c.$$

ამით (8) შეფასება დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ $\hat{d}_1 = c_i - a_i - b_i > 0$ ან $\bar{d}_i = |c_i| - |a_i| - |b_i| > 0$ პირობა არ სრულდება, მაგალითად,

$$\hat{d}_1 = c_i - a_i - b_i \ge 0, a_i > 0, b_i > 0, i = 1,2,...,N-1, \tag{9}$$

ე. ი. d_i ზოგიერთ კვანძებში არ შეიძლება ნულის ტოლი გახდეს, მაშინ თეორემა 3-ით სარგებლობა არ შეიძლება. ამ შემთხვევაში (4) ამოცანის y_i ამოხსნის შესაფასებლად შეიძლება შემდეგნაირად მოვიქცეთ. წარმოვადგინოთ y_i ჯამის სახით $y_i = v_i + \omega_i$, სადაც ω_i შემდეგი ამოცანის ამოხსნაა

$$\overset{\circ}{L}\omega_i = b_i(\omega_{i+1} - \omega_i) - a_i(\omega_i - \omega_{i-1}) = -\varphi_i,$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \omega_0 = \omega_N = 0, \tag{10}$$

მაშინ v_i განისაზღვრება პირობიდან

$$Lv_i = b_i(v_{i+1} - v_i) - a_i(v_i - v_{i-1}) - \hat{d}_i v_i = -\hat{d}_i\omega_i,$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1, \quad v_0 = v_N = 0. \tag{11}$$

ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ თუ (10) და (11) განტოლებებს წევრ-წევრად შევკრიბავთ. ω_i ფუნქცია შეიძლება უშუალოდ შევაფასოთ (იხ. IV თავი, §3), თუ დავწეროთ მას ცხადი სახით, ხოლო v_i-ს შესაფასებლად ჩვენ დაგვჭირდება

თეორემა 4. (11) ამოცანის ამოხსნისათვის (9) პირობებში სამართლიანია შეფასება

$$\|v\|_c \le \|\omega\|_c. \tag{12}$$

დამტკიცება. თუ $\hat{d}_i \equiv 0$, შედეგი 3-ის ძალით $v_i \equiv 0$ და (12) შეფასება სრულდება. ვთქვათ, $\hat{d}_i \neq 0$ ერთ წერტილში მაინც. ავაგოთ $\bar{v}_i$ მაჟორანტა, როგორც შემდეგი ამოცანის ამოხსნა

$$L\bar{v}_i = -\hat{d}_i|\omega_i|, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_N = 0.$$

ვთქვათ, $\bar{v}_i \ge 0$ აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას, როცა $i = i_0$; მაშინ $\bar{v}_{i_0+1} - \bar{v}_{i_0} \le 0$, $\bar{v}_{i_0} - \bar{v}_{i_0-1} \ge 0$ და (9), (11)-დან გამომდინარეობს

$$\hat{d}_{i_0}\bar{v}_{i_0} \le -b_{i_0}(\bar{v}_{i_0+1} - \bar{v}_{i_0}) + a_{i_0}(\bar{v}_{i_0} - \bar{v}_{i_0-1}) + \hat{d}_{i_0}\bar{v}_{i_0} = L\bar{v}_{i_0} = \hat{d}_{i_0}|\omega_{i_0}|.$$

თუ $\hat{d}_{i_0} > 0$, მაშინ $\bar{v}_{i_0} < |\omega_{i_0}|$ და მაშინვე მივიღებთ (12) შეფასებას, რადგან $|v_i| = \bar{v}_i$. თუ $\hat{d}_{i_0} = 0$, მაშინ (11) განტოლება მიიღებს სახეს $b_{i_0}(\bar{v}_{i_0+1} - \bar{v}_{i_0}) + a_{i_0}(\bar{v}_{i_0} - \bar{v}_{i_0-1}) = 0$ და აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{v}_{i_0+1} = \bar{v}_{i_0-1} = \bar{v}_{i_0}.$$

რადგან $\bar{v}_i \not\equiv \mathrm{const}$, ამიტომ არსებობს ისეთი წერტილი $i = i_1$, რომელშიც $\bar{v}_{i_1} = \bar{v}_{i_0}$, ხოლო მეზობელ წერტილში, მაგალითად, $i = i_1 + 1$,

$\bar{v}_{i_1+1} < \bar{v}_{i_1}$; მაშინ აქ $\hat{d}_{i_1} \neq 0$ და ჩვენ მივიღებთ ზემოთ განხილულ შემთხვევას:

$$\bar{v}_{i_1} = \|\bar{v}\|_C \leq |\omega_{i_0}| \leq \|\omega\|_C .$$

3. სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის შეფასება ფაქტორიზაციის ფორმულების საშუალებით. იმ შემთხვევაში, როცა $b_i = a_{i-1}$, ე. ი. როცა Ly_i ოპერატორი თვითშეულებულია, (4) ფორმულის ამოხსნა შეიძლება შევაფასოთ მარჯვენა ფაქტორიზაციის ფორმულების საშუალებით. (4) განტოლება ჩავწეროთ ჩვენთვის უფრო ხელსაყრელი ფორმით

$$\Lambda y_i = (a y_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \qquad i = 1,2,\dots,N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad a_i > 0, \quad d_i \geq 0. \tag{13}$$

გადავწეროთ იგი ჩვეულებრივი სახით:

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \qquad y_0 = y_N = 0,$$

$$c_i = a_i + a_{i+1} + h^2 d_i, \; a_i > 0, \qquad i = 1,2,\dots,N-1.$$

განვიხილოთ ფაქტორიზაციის ფორმულები

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad y_N = 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}}{c_i - a_i \alpha_i}, \qquad \alpha_1 = 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i \beta_i + \varphi_i h^2}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_1 = 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1.$$

(7) პირობებში გვექნება $|\alpha_{i+1}| \leq 1$ და

$$|y_i| \leq |y_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq |y_N| + \sum_{s=i+1}^{N} |\beta_s| = \sum_{s=i+1}^{N} |\beta_s| .$$

შემოვიღოთ $\alpha_i \beta_i = \eta_i$ ფუნქცია. მივიღებთ

$$\eta_{i+1} = (\eta_i + h^2 \varphi_i) \alpha_{i+1},$$

$$|\eta_{i+1}| \leq |\eta_i| + h^2 |\varphi_i| \leq |\eta_1| + \sum_{k=1}^{i} h^2 |\varphi_k|,$$

ისე, რომ

$$|\beta_{s+1}| \le \frac{1}{\alpha_{s+1}} h \sum_{k=1}^{s} h|\varphi_k|.$$

ამის შედეგად ამოცანის ამოხსნისათვის მივიღებთ აპრიორულ შეფასებას:

$$\|y\|_c \le \sum_{s=1}^{N-1} h \frac{1}{a_{s+1}} \sum_{k=1}^{s} h|\varphi_k| \le \frac{1}{c_1} \sum_{s=1}^{N-1} h \sum_{k=1}^{s} h|\varphi_k|, \text{ როცა } a_s \ge c_1 > 0.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\|y\|_c \le \frac{1}{2C_1} \|\varphi\|_C, \tag{14}$$

რადგან

$$\sum_{s=1}^{N-1} h \sum_{k=1}^{s} h|\varphi_k| \le \|\varphi\|_C \sum_{s=1}^{N-1} x_s h < \frac{1}{2} \|\varphi\|_C.$$

სხვაობიანი სქემების კრებადობის შესწავლისას ვისარგებლებთ ამ შეფასებით.

თავი II

ინტერპოლება და რიცხვითი ინტეგრება

§1. ინტერპოლება და ფუნქციათა მიახლოება

1. ამოცანის დასმა. რიცხვითი ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას ფუნქციათა ინტერპოლების ამოცანა წარმოადგენს. ხშირად აუცილებელია $f(x)$ ფუნქციის აღდგენა x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $a \le x \le b$ მონაკვეთიდან, თუ ცნობილია მისი მნიშვნელობები ამ მონაკვეთის გარკვეულ სასრული რაოდენობის წერტილებში, ეს მნიშვნელობები შეიძლება მოიძებნოს გამოთვლების ან დაკვირვების (გაზომვის) შედეგად რაიმე ბუნებრივ ექსპერიმენტში. გარდა ამისა, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $f(x)$ ფუნქცია ფორმულითაა მოცემული და მისი მნიშვნელობების გამოთვლა ამ ფორმულით ძალიან შრომატევადია, ამიტომ სასურველია ფუნქციისათვის უფრო მარტივი (გამოთვლებისათვის ნაკლებად შრომატევადი) ფორმულა გვქონდეს. იგი საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ განსახილველი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში მოთხოვნილი სიზუსტით. ამგვარად, წამოიჭრება შემდეგი მათემატიკური ამოცანა:

ვთქვათ, $a \le x \le b$ მონაკვეთზე მოცემულია $\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ბადე და მის კვანძებში ცნობილია $y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $y(x_0) = y_0$, ..., $y(x_i) = y_i$, ..., $y(x_n) = y_n$. უნდა ავაგოთ ინტერპოლანტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც თანხვედრილია $y(x)$ ფუნქციასთან ბადის კვანძებში.

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,\ldots,n. \tag{1}$$

ინტერპოლების ძირითადი მიზანია $f(x)$-ის მნიშვნელობების გამოთვლის სწრაფი (ეკონომიური) ალგორითმის მიღება ისეთი x-ებისათვის, რომლებიც მონაცემთა ცხრილში არ არის.

ძირითადი კითხვა: როგორ შევარჩიოთ f(x) ინტერპოლანტი და როგორ შევაფასოთ y(x) – f(x) ცდომილება?

მაინტერპოლებელი f(x) ფუნქციები, როგორც წესი, გარკვეული ელემენტარული ფუნქციების წრფივი კომბინაციის სახით იგება

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x),$$

სადაც $\{\Phi_k(x)\}$ წრფივად დამოუკიდებელი ფიქსირებული ფუნქციებია, ხოლო $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტები.

(1) პირობიდან $\{c_k\}$ კოეფიციენტების მიმართ მივიღებთ $n + 1$ განტოლების სისტემას:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x_k) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

$\Phi_k(x)$ ფუნქციათა სისტემა ისეთია, რომ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ კვანძების ნებისმიერი შერჩევისას სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\Delta(\Phi) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & & \Phi_n(x_1) \\ & & & \cdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

მაშინ მოცემული y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$-ების მიხედვით c_k $(k = 0,1,\ldots,n)$ კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრება.

$\{\Phi_k(x)\}$ წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის როლში ყველაზე ხშირად ირჩევენ: ხარისხოვან ფუნქციებს $\Phi_k(x) = x^k$ (ამ შემთხვევაში $f = P_n(x)$ – n ხარისხის პოლინომია); ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს $\{\Phi_k(x) = \cos kx, \sin kx\}$ (f – ტრიგონომეტრიული პოლინომია). გამოიყენება აგრეთვე რაციონალური ფუნქციები

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m}{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_p x^p}$$

და მაინტერპოლებელი ფუნქციების სხვა სახეები. ჩვენ განვიხილავთ საინტერპოლაციო პოლინომებსა და სპლაინ-ინტერპოლაციას უბან-უბან პოლინომური ინტერპოლაციის შემთხვევას.

2. პოლინომური ინტერპოლება. ცნობილია, რომ $[a, b]$ მონაკვეთზე უწყვეტ ნებისმიერ $f(x)$ ფუნქციას შესაძლებელია კარგად მივუახლოვდეთ რაღაც $P_n(x)$ პოლინომით.

ვეიერშტრასის თეორემა. ნებისმიერი ε-სთვის $\varepsilon > 0$, არსებობს $n = n(\varepsilon)$ რიგის ისეთი $P_n(x)$ პოლინომი, სადაც

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

მაგრამ ეს თეორემა არ იძლევა პასუხს კითხვაზე მოცემულ $\{(x_i, y_i)\}$ წერტილთა სიმრაელისათვის კარგი საინტერპოლაციო პოლინომის არსებობის შესახებ.

ამგვარად, ვეძებოთ საინტერპოლაციო პოლინომი ასეთი სახით

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \,, \tag{2}$$

სადაც c_k — განუსაზღვრელი კოეფიციენტია. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $f(x_i) = y_i$, ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n = y_0,$$
$$c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n = y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n x_n^n = y_n.$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია ნულისაგან განსხვავებული ვანდერმონდის დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \ge k > m \ge 0} (x_k - x_m) \ne 0$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (2) საინტეროპლაციო პოლინომი არსებობს და იგი ერთადერთია (არსებობს მისი ჩაწერის მრავალი ფორმა).

' $\{\Phi_k(x)\}$ ბაზისის სახით ჩვენ ავიღეთ $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ერთიწევრთა ბაზისი. გამოთვლებისათვის უფრო ხელსაყრელია ლაგრანჟის n რიგის $\{\ell_k(x)\}$ პოლინომთა ან ლაგრანჟის კოეფიციენტთა ბაზისი:

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad i = k, \\ 0, & \text{თუ} \quad i \neq k, \quad i,k = 0,1,\ldots,n. \end{cases}$$

ძნელი დასანახი არ არის, რომ n რიგის პოლინომი

$$\ell_k(x) = \ell_k^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

აკმაყოფილებს ამ პირობებს. $\ell_k(x)$ პოლინომი, ცხადია, განისაზღვრება ერთადერთი სახით. მართლაც, ვთქვათ, არსებობს კიდევ ერთი $\bar{\ell}_k(x)$ პოლინომი; მაშინ მათი სხვაობა $\bar{\ell}_k(x) - \ell_k(x) = q_n(x)$ არის n რიგის პოლინომი, რომელიც ნული ხდება x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ $n + 1$ წერტილში. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\bar{\ell}_k(x) - \ell_k(x) \equiv 0$.

$\ell_k(x)y_k$ პოლინომი იღებს y_k მნიშვნელობას x_k წერტილში და ნულის ტოლია ყველა სხვა x_j კვანძში, როცა $j \neq k$. აქედან გამომდინარეობს, რომ საინტერპოლაციო პოლინომს

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{3}$$

აქვს ხარისხი არა უმეტეს n-სა და $P_n(x_i) = y_i$. (3) ფორმულას ლაგრანჟის ფორმულას უწოდებენ. (3) ფორმულით გამოთვლისას არითმეტიკული მოქმედებების რიცხვი n^2-ის პროპორციულია. $P_n(x)$ პოლინომის $f(x)$ ფუნქციასთან სიახლოვის შესაფასებლად უშვებენ, რომ არსებობს $n + 1$-ე რიგის უწყვეტი $f^{(n+1)}(x)$ წარმოებული. მაშინ ცდომილებისათვის ადგილი აქვს ფორმულას

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \quad \xi\in[a,b].$$

3. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა. კომპიუტერზე გამოთვლებისათვის მეტად ხელსაყრელია ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა. მისი ჩაწერისათვის უნდა შემოვიღოთ ე. წ. გაყოფილი სხვაობები:

პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობა $y(x_i, x_j) = [y(x_i) - y(x_j)]/ /(x_i - x_j)$; მეორე რიგის გაყოფილი სხეაობა $y(x_i, x_j, x_k) = = [y(x_i,x_j) - y(x_j, x_k)]/(x_i - x_k)$ და ა. შ. თუ $y(x) = P_n(x)$ – n-ური ხარისხის პოლინომია, მაშინ მისთვის პირველი გაყოფილი სხეაობა $P(x, x_0) = [P(x) - P(x_0)]/(x - x_0)$ არის $n-1$ ხარისხის პოლინომი, მეორე სხვაობა $P(x, x_0, x_1)$ – $(n-2)$-ე ხარისხის პოლინომი და ა. შ. ასე, რომ $(n+1)$-ე რიგის გაყოფილი სხვაობა ნულის ტოლია.

გაყოფილი სხეაობების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)\, P(x, x_0),$$

$$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1)\, P(x, x_0, x_1),$$

$$P(x, x_0, x_1) = P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)\, P(x, x_0, x_1, x_2)$$

და ა. შ. აქედან მივიღებთ ფორმულას $P(x)$-სათვის

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + \\ &+ (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \cdots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)P(x_0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

თუ $P(x)$ – საინტერპოლაციო პოლინომია $y(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ მისი მნიშვნელობები ბადის კვანძებში თანხვდება $y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს. ეს კი ნიშნავს, რომ თანხვდება გაყოფილი სხეაობებიც. ამიტომ (4)-ის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ

$$f(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

(ნიუტონის პოლინომი). მას შემდეგ, რაც გამოთვლილია გაყოფილი სხვაობები, ნიუტონის პოლინომი უმჯობესია ჰორნერის სქემით გამოითვალოს.

$$f(x) = y(x_0) + (x - x_0)[y(x_0, x_1) + (x - x_1)[y(x_0, x_1, x_2) + \cdots]].$$

ყოველი x-სათვის f(x)-ის გამოთვლა საჭიროებს n გამრავლებასა და 2n შეკრებას ან გამოკლებას.

არსებობს ინტერპოლების სხვა ფორმულებიც. მათ შორის ყველაზე ხშირად ერმიტის ინტერპოლება იხმარება. აქ ამოცანა შემდეგნაირად დაისმის: მოცემულია n კვანძი $\{x_i\}$, ფუნქციის $\{y_i\}$ მნიშვნელობა და წარმოებულის $\{y'_i\}$ მნიშვნელობა; საჭიროა ვიპოვოთ მაქსიმალური $2n - 1$ ხარისხის ისეთი პოლინომი, სადაც

$$P(x_i) = y_i, \quad P'(x_i) = y'_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

თუ ყველა x_i განსხვავებულია, მაშინ არსებობს ერთადერთი ამოხსნა და იგი ლაგრანჟის მეთოდის ანალოგიური ხერხით მოიძებნება.

საჭიროა მხედველობაში ვიქონიოთ, რომ მაღალი ხარისხის პოლინომის გამოყენებამ შეიძლება დამრგვალების ცდომილებებთან დაკავშირებულ რთულ პრობლემამდე მიგვიყვანოს.

4. **სპლაინ-ინტერპოლაცია.** განვიხილოთ უბან-უბან პოლინომიალური ბადური ინტერპოლების სპეციალური შემთხვევა, როცა ბადის ნებისმიერ მეზობელ კვანძებს შორის ფუნქციის ინტერპოლება კუბური პოლინომით ხდება (კუბური სპლაინ-ინტერპოლება). ყოველ ინტერვალზე მისი კოეფიციენტები კვანძებში შეუღლების პირობებიდან განისაზღვრება:

$$f_i = y_i,$$

$$f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0),$$

$$f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0), \quad i = 1,2,...,n - 1$$

გარდა ამისა, საზღვარზე $x = x_0$ და $x = x_n$-სთვის დასმულია პირობები

$$f''(x_0) = 0, \quad f''(x_n) = 0. \tag{5}$$

ვეძებოთ კუბური პოლინომი შემდეგი სახით

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \le x \le x_i. \quad (6)$$

პირობიდან $f_i = y_i$ გვაქვს

$$f(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1},$$
$$f(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad (7)$$
$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

გამოვითვალოთ წარმოებულები:

$$f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$
$$f''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \le x \le x_i,$$

და მოვითხოვოთ მათი უწყვეტობა $x = x_i$-სთვის:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$
$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1. \quad (8)$$

უცნობი კოეფიციენტების საერთო რიცხვი, ცხადია, ტოლია $4n$-სა, (7) და (8) განტოლებების რიცხვი ტოლია $4n - 2$-ის. დარჩენილ ორ განტოლებას ვღებულობთ (5) პირობიდან, როცა $x = x_0$ და $x = x_n$:

$$c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0.$$

გამოვსახავთ რა (8)-დან $d_i = (c_{i+1} - c_i)/3h_i$. ჩავსვამთ ამ გამოსახულებას (7)-ში და გამოვრიცხავთ $a_i = y_{i-1}$-ს, მივიღებთ

$$b_i = [(y_i - y_{i-1})/h_i] - \frac{1}{3}h_i(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1,2,\dots,n-1,$$

$$b_n = [(y_n - y_{n-1})/h_n] - \frac{2}{3}h_n c_n.$$

თუ ახლა b_i, b_{i+1} და d_i-ის გამოსახულებებს ჩავსვამთ (3)-ის პირველ ფორმულაში, მარტივი გარდაქმნების შედეგად c_i-ის განსაზღვრისათვის მივიღებთ მეორე რიგის სხვაობიან განტოლებას

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \tag{9}$$

$$i = 1,2\ldots, n-1,$$

სასაზღვრო პირობებით

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0. \tag{10}$$

პირობა $c_{n+1} = 0$ ეკვივალენტურია პირობისა $c_n + 3d_n h_n = 0$ და განტოლებისა $c_{j+1} = c_j + d_j h_j$. (9) სხვაობიანი განტოლება (10) პირობებით ფაქტორიზაციის მეთოდით ამოიხსნება.

შეიძლება შემოვიღოთ m რიგის სპლაინის ცნება, როგორც ფუნქციისა, რომელიც ბადის ყოველ მონაკვეთზე m რიგის პოლინომს წარმოადგენს და ბადის ყველა შიგა წერტილში ფუნქციისა და მისი $m-1$ რიგამდე ჩათვლით წარმოებულების უწყვეტობის პირობებს აკმაყოფილებს. ჩვეულებრივ, ინტერპოლებისათვის გამოიყენება შემთხვევა $m = 3$ (ზემოთ განხილული კუბური სპლაინი) და $m = 1$ (წრფივი სპლაინი, რომელიც შეესაბამება $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკის აპროქსიმაციას ისეთი ტეხილით, რომელიც (x_i, y_i) წერტილებზე გადის).

5. ინტერპოლაციის გამოყენება. ინტერპოლება გამოიყენება მრავალ ამოცანაში, რომელიც გამოთვლებთან არის დაკავშირებული. მივუთითოთ რამდენიმე მათგანზე:

ფიზიკური ექსპერიმენტის დამუშავება — ექსპერიმენტულად მიღებული ცხრილები მონაცემების მიხედვით მახასიათებელი სიდიდეებისათვის მიახლოებითი ფორმულის აგება.

მიახლოებითი ფორმულების აგება გამოთვლითი ექსპერიმენტის მონაცემით; აქ დაისმის ინტერპოლების არასტანდარტული ამოცანები, რადგანაც ჩვეულებრივ რაც შეიძლება მარტივი ფორმულები იწერება.

სუბტაბულირება, ე. ი. ცხრილების შემჭიდროება; გამოიყენება იმ შემთხვევებში, როდესაც ფუნქციის უშუალო გამოთვლა ძნელია ან, როდესაც მცირე რაოდენობის ექსპერიმენტული მონაცემები გვაქვს. მანქანაში შეიტანება მცირე ცხრილი, ხოლო გამოთვლები-

სათვის აუცილებელი ფუნქციის მნიშვნელობები საჭიროებისდა მიხედვით მოიძახება საინტერპოლაციო ფორმულის საშუალებით.

ინტერპოლება გამოიყენება აგრეთვე შებრუნებული ინტერპოლების ამოცანაშიც: მოცემულია $y_i = y(x_i)$ ცხრილი; ვიპოვეთ x_{ij} როგორც y_i-ს ფუნქცია. შებრუნებული ინტერპოლების მაგალითად შეიძლება დავასახელოთ განტოლების ფესვების პოვნის ამოცანა.

საინტერპოლაციო ფორმულები გამოიყენება, აგრეთვე ინტეგრალების გამოთვლისა და დიფერენციალური განტოლებებისათვის ინტეგრალური იგივეობების საფუძვლიანი აპროქსიმაციის დაწერის დროს.

6. საშუალო კვადრატული აპროქსიმაცია. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით საინტერპოლაციო $y(x)$ პოლინომების აგებას, რომლებიც თანხვდებოდა გამოსავალი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს ω ბადის გარკვეულ კვანძთა სიმრავლეზე:

$$y(x_i) = f(x_i),\ x_i \in \omega.$$

$y(x)$ ფუნქცია უახლოვდება (აპროქსიმირებს) $f(x)$ ფუნქციას ბადის ინტერვალში.

ვთქვათ, $L_2[a, b]$ – ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა სივრცეა სკალარული ნამრავლით

$$(f,\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

და ნორმით

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f,f)}\,.$$

განვიხილოთ L_2-ის ფუნქციებით $f(x)$ ფუნქციის აპროქსიმაციის ზოგადი ამოცანა. ამასთან, შევცვალოთ $y_i = f_i$ მოთხოვნა $\|f - y\|_{L_2}$ ნორმის მინიმუმის ან ნორმის სიმცირის პირობით: $\|f - y\|_{L_2} < \varepsilon$, სადაც $\varepsilon > 0$ მოცემული სიზუსტეა.

$\|f-y\|_{L_2}$-ის მოძებნის ამოცანა არის საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოების მოძებნის ამოცანა. $y(x)$-ის როლში ავიღოთ განზოგადებული პოლინომი

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

სადაც $\{\varphi_k(x)\}$–$[a, b]$-ზე ორთონორმირებული ფუნქციების ოჯახია

$$(\varphi_k,\varphi_m)=\delta_{km}, \quad \delta_{km}=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

c_k – ნებისმიერი კოეფიციენტებია. მაშინ საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოების ამოცანა დაიყვანება $n+1$: c_0, c_1, ..., c_n ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის მოძებნაზე:

$$\min_{\{c_k\}}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)\right\|=F(c_0,c_1,\ldots,c_n).$$

გამოვთვალოთ საშუალო კვადრატული გადახრა

$$\|f-y\|^2=\|f\|^2-2(f,y)+\|y\|^2.$$

ჩავსვამთ რა აქ გამოსახულებებს

$$(f,y)=\sum_{k=0}^{n} c_k(f,\varphi_k)=\sum_{k=0}^{n} c_k f_k, \quad f_k=(f,\varphi_k),$$

$$\|y\|^2=\sum_{k=0}^{n} c_k^2,$$

მივიღებთ

$$\|f-y\|^2=\|f\|^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-f_k)^2-\sum_{k=0}^{n} f_k^2.$$

აქედან ჩანს, რომ ცდომილების მინიმუმი მიიღწევა, როცა $c_k=f_k$ ე. ი. ფუნქციაზე

$$\bar{y}(x)=\bar{y}_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k\varphi_k(x).$$

ამ შემთხვევაში

$$\|f-\bar{y}_n(x)\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n} f_k^2 . \tag{11}$$

ამგვარად, საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოება არსებობს და იგი ერთადერთია. $c_k=f_k=(f,\varphi_k)$-ს განსაზღვრისათვის მას მივყავართ ინტეგრალების გამოთვლის ამოცანამდე.

თუ $\{\varphi_k\}$ ფუნქციები ქმნიან სრულ ორთონორმირებულ სისტემას, მაშინ სრულდება პარსევალ-სტეკლოვის ტოლობა:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2=\int_a^b f^2(x)dx=\|f\|^2. \tag{12}$$

(11) და (12)-ის შედარებით ვღებულობთ

$$\|f-\bar{y}_n\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^2 ,$$

ე. ი. $\|f-\bar{y}_n\|\to 0$ როცა $n\to\infty$; საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოება იკრიბება $f(x)$-სკენ და შესაძლებელია ნებისმიერი სიზუსტით აპროქსიმაცია: $\|f-\bar{y}_n\|\le\varepsilon$, თუ $n\ge N(\varepsilon)/n$ (საკმარისად დიდია).

შენიშვნა. ყველა მსჯელობა ძალაში რჩება თუ სკალარული ნამრავლი აიღება $\rho(x)>0$ წონით:

$$(f,\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\rho(x)dx .$$

შესაძლებელია აპროქსიმაციის სხვა კრიტერიუმებიც, როდესაც $f-y$ გადახრის მინიმიზაცია სხვა, მაგალითად, C სივრცის ნორმაში (თანაბარი მიახლოება) ხდება. საუკეთესო თანაბარი მიახლოებისას ჩვენ ვპოულობთ $y(x)$ ფუნქციას, რომელზედაც მიიღწევა

$$\min_{\{y\}} \max_{a\le x\le b} |f(x)-y(x)|.$$

მაგრამ ჯერჯერობით ვერ მოიძებნა [a, b] მონაკვეთზე მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის, სასრული რაოდენობა მოქმედებების შედეგად, საუკეთესო თანაბარი მიახლოების კოეფიციენტების მოძებნის მეთოდი. შესაძლებელია აპროქსიმაციის ამოცანების სხვა დასმები – დისკრეტულ სიმრავლეზე მონაკვეთების ერთობლიობაზე და სხვა. შეისწავლება, აგრეთვე, არაწრფივი აპროქსიმაციის მეთოდები. მაგალითად, რაციონალური ფუნქციების საშუალებით. ასეთი მეთოდები ეფექტურად გამოიყენება ექსპერიმენტების დამუშავების დროს.

§2. რიცხვითი ინტეგრება

1. ამოცანის დასმა. უმარტივესი კვადრატურული ფორმულები. რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს ინტეგრალის

$$J[f]=\int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნაში, სადაც $f(x)$ – მოცემული ფუნქციაა. [a, b] მონაკვეთზე შემოვიღოთ ბადე $\overline{\omega}=\{x_i : x_0=a< x_1<\dots< x_i< x_{i+1}<\dots< x_N=b\}$ და ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობად განვიხილოთ რიცხვი

$$J_N[f]=\sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i), \tag{2}$$

სადაც $f(x_i)$ – $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობაა $x=x_i$ კვანძში, c_i – წონითი მამრავლებია (წონები), რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ კვანძებზე და არ არის დამოკიდებული $f(x)$-ის არჩევაზე. (2) ფორმულას კვადრატურული ფორმულა ეწოდება.

კვადრატურების დახმარებით რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს ისეთი $\{x_i\}$ კვანძებისა და $\{c_i\}$ წონების მოძებნაში, სადაც კვადრატურული ფორმულის ცდომილება

$$D[f] = \sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i) - \int_a^b f(x)dx = J_N[f] - J[f]$$

მინიმალური უნდა იყოს მოცემული კლასის ფუნქციებისათვის (D[f] სიდიდე დამოკიდებულია f(x)-ის სიგლუვეზე). კვადრატურული ფორმულის აგებისას (1) ინტეგრალს, ჩვეულებრივ, წარმოადგენენ, როგორც შემდეგი სახის ინტეგრალების ჯამს

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

მათგან ყოველი ერთიეულოვანი სიგრძის მონაკვეთზე განხილულ სტანდარტულ ინტეგრალამდე დაიყვანება

$$L[f] = \int_0^1 f(s)ds \tag{3}$$

შემდეგი ჩასმის საშუალებით

$$x = \alpha + (\beta - \alpha)\, s, \tag{4}$$

$$f(x) = f(\alpha + (\beta - \alpha)s) = \bar{f}(s), \tag{5}$$

ისე რომ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = æ \int_0^1 \bar{f}(s)ds = æL[\bar{f}], \quad æ = \beta - \alpha$$

(f(s)-ის ზემოთ ხაზს გამოვტოვებთ). იგულისხმება, რომ $\overline{\omega}$ თანაბარი ბადეა. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$J[f] = \sum_{i=1}^{N} J_i,$$

$$J_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\int_0^1 f(x_{i-1} + hs)\, ds.$$

თუ $N = 2i_0$ – ლუწი რიცხვია, მაშინ

$$J[f] = \sum_{i=1}^{i_0} J_{2i-1},$$

$$J_{2i-1} = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = 2h\int_0^1 f(x_{2i-2} + 2hs)\, ds.$$

და ა. შ. ამგვარად, ამოცანა დადის (3) ინტეგრალისათვის ერთეულოვან მონაკვეთზე კვადრატურული ფორმულის აგებაზე. $0 \le s \le 1$ მონაკვეთზე ავარჩიოთ კვანძები $0 \le s_0 < s_1 < \cdots < s_m \le 1$ (კვადრატურული ფორმულის შაბლონი) და (3) ინტეგრალს შევუსაბამოთ ფორმულა

$$\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{m} p_k f(s_k). \tag{6}$$

განვიხილოთ უმარტივესი კვადრატურული ფორმულები:
მართკუთხედის ფორმულა (შაბლონი ერთ კვანძს შეიცავს):

$$m = 0, \quad p_0 = 1, \quad s_0 = \frac{1}{2}, \quad \Lambda_0(f) = f\left(\frac{1}{2}\right);$$

ტრაპეციის ფორმულა (ორი კვანძი):

$$m = 1, \quad p_0 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1,$$

$$\Lambda_1(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1));$$

სიმპსონის ფორმულა (სამი კვანძი):

$$m = 2, \quad p_0 = p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{4}{6}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1.$$

$$\Lambda_2(f) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right)$$

და სხვა. პრაქტიკაში, როგორც წესი, გამოიყენება ფორმულები შაბლონის კვანძების მცირე რაოდენობით.

ახლა დავწეროთ შესაბამისი ფორმულები (1) ინტეგრალისათვის თანაბარ ბადეზე $\{x_i = ih\}$ h ბიჯით. გავითვალისწინოთ (4) და (5) ჩასმა, მივიღებთ:

მართკუთხედის ფორმულას:

$$J_N[f] = \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_{i+1/2}), \quad x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h\,, \tag{7}$$

ტრაპეციის ფორმულას:

$$J_N[f] = \sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i)h, \quad c_0 = c_N = \frac{1}{2}, \quad c_i = 1, \quad i = 1,2,\ldots,N-1\,, \tag{8}$$

სიმპსონის ფორმულას:

$$J_N[f] = \sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i)h = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{N-2} + \\ + 4f_{N-1} + f_N) \quad \text{როცა} \quad N = 2i_0 \tag{9}$$

2. კვადრატურული ფორმულების აგება. ზემოთქმულის ძალით მსჯელობა საკმარისია სტანდარტული (3) ინტეგრალისათვის ვაწარმოოთ. მას შევუსაბამეთ კვადრატურულ ფორმულას

$$\int_0^1 f(s)ds \approx \sum_{k=0}^{m} p_k f(s_k) \tag{10}$$

ზოგად შემთხვევაში კვანძები და წონები უცნობია და საჭიროებენ განსაზღვრას.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც კვანძები მოცემულია და საჭიროა ვიპოვოთ კვადრატურული ფორმულის $\{p_k\}$ წონები. ჩვენ ვისარგებლებთ მოთხოვნით: (10) ფორმულა იყოს ზუსტი $r \le m$ ხარისხის ნებისმიერი $P_r(s)$ პოლინომისათვის

$$\Lambda[P_r] = L[P_r], \quad r \le m. \tag{11}$$

იმისათვის, რომ r ხარისხის პოლინომი (11)-ს აკმაყოფილებდეს, საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ კვადრატურული ფორმულა

ზუსტი იყოს ნებისმიერი σ ხარისხის s^σ ერთწევრისათვის ($\sigma = 0,1,\ldots,r$). თუ გავითვალისწინებთ, რომ $L[s^\sigma] = 1/(\sigma + 1)$, (11)-დან მივიღებთ $m + 1$ განტოლებას

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_m = 1,$$

$$p_0 s_0 + p_1 s_1 + \cdots + p_m s_m = 1/2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_0 s_0^\sigma + p_1 s_1^\sigma + \cdots + p_m s_m^\sigma = 1/(\sigma + 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_0 s_0^m + p_1 s_1^m + \cdots + p_m s_m^m = 1/(m + 1).$$

ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რადგანაც მისი დეტერმინანტი ვანდერმონდის დეტერმინანტია და იგი განსხვავებულია ნულისაგან, თუ ერთმანეთს არ ემთხვევა კვანძები $s_0 < s_1 < \cdots < s_m$.

თუ ჩავთვლით $m = 2$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1$, მივიღებთ სისტემას $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_1/2 + p_2 = 1/2$, $p_1/4 + p_2 = 1/3$, რომლის ამოხსნასაც სიმპსონის ფორმულის წონები წარმოადგენს: $p_0 = p_2 = 1/6$, $p_1 = 4/6$. ამგვარად, სიმპსონის ფორმულა ზუსტია მესამე ხარისხის პოლინომისათვის. მაგრამ, სიმეტრიის ძალით, ის ზუსტია მესამე ხარისხის ყველა პოლინომისათვისაც:

$$P_3(s) = 1 + \alpha_1(s - 1/2) + \alpha_2(s - 1/2)^2 + \alpha_3(s - 1/2)^3,$$

რადგანაც ის ზუსტია $f(s) = (s - 1/2)^3$-სთვის. მართლაც,

$$\Lambda\left[\left(s - \frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 0,$$

$$L\left[\left(s - \frac{1}{2}\right)^3\right] = \int_0^1 \left(s - \frac{1}{2}\right)^3 ds = 0.$$

მართკუთხედისა და ტრაპეციის ფორმულები ზუსტია წრფივი ფუნქციისათვის, ე. ი. პირველი ხარისხის პოლინომისათვის, რაშიც უშუალოდ შეიძლება დავრწმუნდეთ.

ზოგად შემთხვევებში $P_m(s)$-ად შეიძლება ავარჩიოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი

$$P_m(s) = \sum_{k=0}^{m} \ell_k^{(m)}(s) f(s_k),$$

სადაც $\ell_k^{(m)}(s)$ — ლაგრანჟის საინტერპოლაციო კოეფიციენტია. ტოლობიდან

$$L[P_m] = \int_0^1 P_m(s)ds = \sum_{k=0}^{m} f(s_k) \int_0^1 \ell_k^{(m)}(s)ds = \sum_{k=0}^{m} p_k f(s_k)$$

ჩანს, რომ (10) ფორმულა ზუსტია m ხარისხის პოლინომისათვის, თუ წონითი p_k მამრავლები განისაზღვრება ფორმულით

$$p_k = \int_0^1 \ell_k^{(m)}(s)ds. \tag{12}$$

ამ ტიპის ფორმულებს უწოდებენ კოტესის კვადრატურულ ფორმულებს. მსგავსი ფორმულების მაგალითებად მოვიყვანოთ კიდევ ორი ფორმულა: ოთხწერტილიან შაბლონზე $s_k = k/3$ $(k = 0,1,2,3)$, $m = 3$

$$\Lambda(f) = \frac{1}{8}\left(f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right),$$

$$p_0 = p_3 = \frac{1}{8}, \quad p_1 = p_2 = \frac{3}{8},$$

ხუთწერტილიან შაბლონზე $s_k = k/4$ $(k = 0,1,2,3,4)$, $n = 4$:

$$\Lambda(f) = \frac{1}{90}\left(7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right),$$

$$p_0 = p_4 = \frac{7}{90}, \quad p_1 = p_3 = \frac{32}{90}, \quad p_2 = \frac{12}{90}.$$

ზემოთ მოყვანილი ხუთივე კვადრატურული ფორმულის შაბლონი შედგება კვანძებისაგან, რომლებიც სიმეტრიულია $0 \le s \le 1$ მონაკვეთის $s = 1/2$ შუაწერტილის მიმართ.

3. ტეილორის ფორმულა ინტეგრალური ფორმის ნაშთითი წევრით. კვადრატურული ფორმულის ცდომილების გამოკვლევისას ჩვენ დაგვჭირდება ტეილორის ფორმულა, რომლის ნაშთითი წევრი მოცემულია ინტეგრალური ფორმით:

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{s^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(s),$$
$$R_{n+1}(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{13}$$

ეს ფორმულა შეიძლება დამტკიცდეს ინდუქციით n-ის მიმართ. ის სამართლიანია, როცა $n = 0$:

$$f(s) = f(0) + R_1(s), \quad R_1(s) = \int_0^s f'(t)dt.$$

დავუშვათ, რომ ის სამართლიანია n-სთვის. ნაწილობითი ინტეგრებით ვღებულობთ თანაფარდობას

$$\int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = -\frac{(s-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big|_0^s + \int_0^s \frac{(s-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt =$$
$$= \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^s \frac{(s-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt, \tag{14}$$

რაც ამტკიცებს (13) ფორმულას $n+1$-სთვის. თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$K_n(\xi) = \begin{cases} \xi^n/n! & \text{როცა} \quad \xi \geq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad \xi < 0, \end{cases} \tag{15}$$

მაშინ R_{n+1} ნაშთითი წევრისათვის ფორმულა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$R_{n+1}(s) = \int_0^1 K_n(s-t) f^{(n+1)}(t)dt. \tag{16}$$

4. ფორმულა კვადრატურული ფორმულის ცდომილებისათვის. გამოვიყვანოთ ფორმულა კვადრატურული ფორმულის

$$\Delta f = \Lambda[f] - L[f] \tag{17}$$

ცდომილებისათვის ფუნქციათა $C^{(n+1)}$ კლასში (რომელთაც აქვთ $n+1$ უწყვეტი წარმოებული $0 \le s \le 1$ მონაკვეთზე) $f(s) \in C^{(n+1)}[0, 1]$. მაშინ სამართლიანია (13) ფორმულა ან

$$f(s) = P_n(s) + R_{n+1}(s), \quad P_n(s) = \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{s^\sigma}{\sigma!} f^{(\sigma)}(0). \tag{18}$$

ზემოთქმულიდან (იხ. მეორე პუნქტი) აშკარაა, რომ $P_n(s)$ ხარისხის მრავალწევრისათვის (10) ფორმულა ზუსტია ორ შემთხვევაში: როცა $n \le m + 1 = n_0$ თუ m ლუწია და ფორმულა სიმეტრიულია; როცა $n \le m = n_0$ ყველა სხვა შემთხვევაში. ჩვენ აქ ვიგულისხმებთ, რომ

$$\Lambda[P_n] = L[P_n], \text{ ე. ი. } n \le n_0. \tag{19}$$

ახლა მივმართოთ $\Delta(f)$ სხვაობას და ჩავსვათ $f = P_n + R_{n+1}$ (17)-ში. თუ მხედველობაში მივიღებთ (16) და (19)-ს, გვექნება

$$\Delta f = \Lambda[f] - L[f] = (\Lambda[P_n] - L[P_n]) + (\Lambda[R_{n+1}] - L[R_{n+1}]) =$$

$$= \Lambda[R_{n+1}] - L[R_{n+1}] = \sum_{k=0}^{m} p_k \int_0^1 K_n(s_k - t) f^{(n+1)}(t)dt -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 K_n(s - t) f^{(n+1)}(t)dtds =$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{m} p_k K_n(s_k - t) - \int_0^1 K_n(s - t)ds \right] f^{(n+1)}(t)dt.$$

გამოვიყენებთ რა (15) გამოსახულებას $K_n(s-t)$-სთვის, ვიპოვით

$$\int_0^1 K_n(s-t)ds = \int_0^1 \frac{(s-t)^n}{n!}ds = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

საბოლოოდ ცდომილების ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\Delta(f) = \int_0^1 F_{n+1}(t) f^{(n+1)}(t)dt\,, \tag{20}$$

სადაც

$$F_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k K_n(s_k - t) - \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,. \tag{21}$$

აქედან გამომდინარეობს შეფასება ცდომილებისათვის

$$|\Delta(f)| \le M_{n+1} c_{n+1}, \tag{22}$$

როცა $|f^{(n+1)}(t)| \le M_{n+1}$, სადაც $M_{n+1} > 0$ – მუდმივია და

$$c_{n+1} = \int_0^1 |F_{n+1}(t)|dt\,.$$

თუ $F_{n+1}(t)$ არ იცვლის ნიშანს $0 \le s \le 1$ მონაკვეთზე, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით გვაქვს

$$\Delta(f) = f^{(n+1)}(\xi)\int_0^1 F_{n+1}(t)dt, \quad \xi \in [0,1]\,.$$

5. კონკრეტული ფორმულების ცდომილებათა შეფასება. (3) სტანდარტული ინტეგრალისათვის მივიღოთ კვადრატური ფორმულის $\Delta(\bar{f}) = \Lambda[\bar{f}] - L[\bar{f}]$ ცდომილების შეფასება. (1) და (3) ინტეგრალების შესაბამის ფორმულებზე გადასვლისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{d^\sigma \bar{f}(s)}{ds^\sigma} = æ^\sigma \frac{d^\sigma f(x)}{dx^\sigma}\,,$$

$$\bar{f}(s) = f(x), \quad x = \alpha + (\beta - \alpha)s, \quad dx = æ ds, \quad æ = \beta - \alpha.$$

ამიტომ ცდომილებისათვის

$$d[f] = \sum_{k=0}^{m} æp_k f(x_k) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = æ\Delta(\bar{f}).$$

(22)-ის ძალით სამართლიანია ფორმულა

$$|d[f]| \le c_{n+1} æ^{n+2} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$c_{n+1} = \int_0^1 |F_{n+1}(t)|\,dt.$$

$J_N[f] - J[f]$ ცდომილების გამოსათვლელად, ცხადია, საჭიროა ავჯამოთ ბადეზე $|d[f]|$ ცდომილებები.

განვიხილოთ უმარტივესი კვადრატურული ფორმულები.

1) მართკუთხედის ფორმულა: $m = 0$, $p_0 = 1$, $s_0 = 1/2$, $\Lambda(\bar{f}) = \bar{f}(1/2)$. ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\Delta_1[\bar{f}] = \int_0^1 F_2(t)\bar{f}''(t)dt, \quad F_2(t) = K_1\left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{(1-t)^2}{2},$$

ე. ი. $F_2(t) = -\frac{(1-t)^2}{2} < 0$ როცა $t > 1/2$, $F_2(t) = (1/2 - t) - (1-t)^2/2 = -t^2/2 < 0$ როცა $t < 0$, ე. ი. $F(t) < 0$ – ნიშანმუდმივი ფუნქციაა და

$$\Delta_1[\bar{f}] = \bar{f}''(\eta)\int_0^1 F_2(t)dt = -\frac{\bar{f}''(\eta)}{24}, \quad \eta \in (0,1),$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$d_i[f] = hf(x_{i-1/2}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = -\frac{h^3}{24} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (23)$$

თუ ავჯამავთ i-ს მიხედვით, $i = 1,2,\ldots,N$, და გავითვალისწინებთ, რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია

$$\sum_{i=1}^{N} hf''(\xi_i) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f''(\xi_i) = f''(\xi^*)(b-a), \quad \xi^* \in [a,b].$$

ცდომილებისათვის მივიღებთ მართკუთხედის ფორმულას:

$$D_N(f) = -\frac{h^2}{24} f''(\xi^*)(b-a).$$

თუ f(x)-ს აქეს მეოთხე რიგის უწყვეტი წარმოებულები მაინც, $f(x) \in C^{(n)}$, $(n \geq 4)$, მაშინ ცდომილებისათვის შეიძლება ასიმპტოტური გამლა დაიწეროს:

$$D_N(f) = \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4, \tag{24}$$

სადაც

$$\alpha_2 = -\frac{1}{24}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{1}{24}[f'(b) - f'(a)].$$

მართილაც, თუ ჩავსვამთ (20)-ში გამოსახულებას

$$f''(t) = \bar{f}''\left(\frac{1}{2}\right) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\bar{f}'''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \bar{f}^{IV}(\eta), \quad \eta \in (0,1)$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ ვიპოვით

$$\Delta_1(\bar{f}) = -\frac{1}{24}\bar{f}''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{960}\bar{f}^{IV}(\eta), \quad \eta \in (0,1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$D_N(f) = -\frac{h^2}{24}\sum_{i=1}^{N} hf''_{i-1/2} + \frac{h^4}{960}\sum_{i=1}^{N} hf^{IV}(\xi_i).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (23)-ის ძალით

$$\sum_{i=1}^{N} hf''_{i-1/2} = \int_a^b f''(x)dx - \frac{h^2}{24} f^{IV}(\xi^*)\cdot(b-a), \quad \xi^* \in [a,b],$$

ვიპოვით (24) გამლას.

(24)-დან ჩანს, რომ მართკუთხედის ფორმულას აქვს სიზუსტის მეოთხე რიგი $D_N(f) = O(h^4)$, თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $f'(a) = f'(b)$ პირობას. თუ ცნობილია $f'(a)$ და $f'(b)$, მაშინ შეიძლება დავუშვათ $f(x) = \varphi(x) + \alpha x + \beta x^2$, სადაც $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს პირობას $\varphi'(a) = \varphi'(b)$, თუ შევარჩევთ $\alpha = \dfrac{bf'(a) - af'(b)}{b-a}$, $\beta = \dfrac{f'(b) - f'(a)}{2(b-a)}$. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + c,$$

$$c = \frac{1}{2}\alpha(b^2 - a^2) + \frac{1}{6}\beta(b^3 - a^3)$$

ინტეგრალი $\varphi(x)$-დან გამოითვლება მართკუთხედის ფორმულით $O(h^4)$-ის სიზუსტით.

2) ტრაპეციის ფორმულა: $m = 1$, $p_0 = p_1 = 1/2$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1$,

$$\Lambda(\bar{f}) = \frac{1}{2}(\bar{f}(0) + \bar{f}(1)).$$

$F_2(t) = \dfrac{1}{2}t(1-t) > 0$ ფუნქცია ნიშანმუდმივია, ამიტომ სამართლიანია შეფასება

$$D_N(f) = \frac{h^2}{12}f''(\xi^*)(b-a), \quad \xi^* \in [a,b],$$

ე. ი. ტრაპეციის ფორმულის ნაშთით წევრში h^2-თან მდგომი კოეფიციენტი ორჯერ მეტია, ვიდრე მართკუთხედის ფორმულაში. თუ გავიმეორებთ ზემოთქმულის ანალოგიურ მსჯელობებს, დავრწმუნდებით, რომ სამართლიანია ფორმულა

$$D_N(f) = -2\alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4, \text{ როცა } f \in C^{(n)},\ n \geq 4,$$

სადაც α_2 განისაზღვრება (24)-ის თანახმად, $\alpha_4 = O(1)$.

3) სიმპსონის ფორმულა: $m = 2$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1$, $p_0 = p_2 = 1/2$, $p_1 = 4/6$,

$$\Lambda(\bar{f}) = \frac{1}{6}\left(\bar{f}(0) + 4\bar{f}\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right).$$

რადგანაც სიმპსონის ფორმულა ზუსტია მესამე ხარისხის პოლინომებისათვის, ამიტომ $n = 3$ და ჩვენ გამოვთვლით:

$$\Delta_3(\bar{f}) = \int_0^1 F_4(t)\bar{f}^{IV}(t)dt,$$

$$F_4(t) = \frac{1}{6}(K_3(0-t) + K_3(1-t)) + \frac{4}{6}K_3\left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{(1-t)^4}{24}.$$

აქედან ვპოულობთ

$$F_4(t) = \frac{1}{72}(2t^3 - 3t^4), \quad t < \frac{1}{2};$$

$$F_4(t) = \frac{1}{72}(2(1-t)^3 - 3(1-t)^4), \quad t > \frac{1}{2};$$

$$F_4(t) > 0 \text{ ყველა } t\text{-სთვის, } t \in (0, 1),$$

და, მაშასადამე,

$$\int_0^1 F_4(t)dt = \frac{1}{2880}.$$

ასე რომ, სამართლიანია ფორმულა

$$\Delta_3(\bar{f}) = \frac{1}{2880}\bar{f}^{IV}(\eta), \quad \eta \in (0,1).$$

გადავალთ რა x-ით ინტეგრალებზე და გავითვალისწინებთ, რომ $æ = 2h$, $\bar{f}^{IV}(\eta) = (2h)^4 f^{IV}(\xi_1)$, მივიღებთ

$$D_N(f)=\sum_{i=0}^{i_0-1}2h\left\{\frac{f_{i-1}+4f_i+f_{i+1}}{6}-\frac{1}{2h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x)dx\right\}=$$

$$=\frac{b-a}{180}h^4f^{IV}(\xi^*),\quad \xi^*\in[a,b],$$

სადაც $N=2i_0$, $h=1/N$.

თუ $f(x)\in C^{(n)}$ $(n\geq 6)$, მაშინ შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სახის გაშლა

$$D_N(f)=\alpha_4h^4+\alpha_6h^6,\quad \alpha_6=O(1),$$

$$\alpha_4=\frac{1}{180}\int_0^1 f^{IV}(x)dx=\frac{1}{180}(f'''(1)-f'''(0)).$$

6. სიზუსტის რიგის გაზრდა. რუნგეს მეთოდი. კვადრატურული ფორმულებისათვის (წინა შემთხვევის ანალოგიურად) შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სახის ასიმპტოტური გაშლა

$$D_N(f)=J_N(f)-J(f)=\alpha_2h^2+\alpha_4h^4+\alpha_6h^6+\cdots,$$

თუ $f(x)$ – საკმარისად გლუვი ფუნქციაა. ამ დროს $|\alpha_{k+2}|$ გაცილებით ნაკლებია $|\alpha_k|$-ზე $(k=2,4)$, ამიტომ კვადრატურული ფორმულის სიზუსტის რიგის გაზრდა მეტად მნიშვნელოვანია.

ჩავატაროთ გამოთვლები ორ თანაბარ ბადეზე შესაბამისად h_1 და h_2 ბიჯებით და ვიპოვოთ გამოსახულება $J^{h_1}[f]=J_{N_1}[f]$ და $J^{h_2}[f]=J_{N_2}[f]$, $h_1N_1=h_2N_2=b-a$. მოვითხოვოთ, რომ მათი წრფივი კომბინაციისათვის ცდომილება

$$\widetilde{D}^h(f)=\sigma D^{h_1}(f)+(1-\sigma)D^{h_2}(f)$$

უფრო მაღალი სიდიდე იყოს D^{h_1} და D^{h_2}-თან შედარებით. თუ $D^h=D_N$-სთვის ადგილი აქვს ფორმულას

$$D^h=J^h[f]-J[f]=\alpha_ph^p+\alpha_qh^q+\cdots,\ q>p,$$

მაშინ $\widetilde{D}^h = (\sigma J^{h_1}[f] + (1-\sigma)J^{h_2}[f]) - J[f]$-სთვის ვღებულობთ

$$\widetilde{D}^h(f) = \alpha_p(\sigma h_1^p + (1-\sigma)h_2^p) + \alpha_q(\sigma h_1^q + (1-\sigma)h_2^q) + \cdots$$

σ პარამეტრი ავარჩიოთ პირობიდან $\sigma h_1^p + (1-\sigma)h_2^p = 0$:

$$\sigma = h_2^p / (h_2^p - h_1^p).$$

მაშინ გვაქვს

$$\widetilde{D}^h(f) = \alpha_q(\sigma h_1^q + (1-\sigma)h_2^q) + \cdots = O(h^q),$$
$$h = \max(h_1, h_2),$$

ამასთან, $\sigma h_1^q + (1-\sigma)h_2^q < 0$. ასე, თუ $p = 2$, $q = 4$, მაშინ $\widetilde{D}^h(f) = -\alpha_4 h_1^2 h_2^2 + \cdots = O(h^4)$. ამგვარად, ჩავატარეთ რა h_1 და h_2 ბიჯებით გამოთვლები ორ ბადეზე, ჩვენ გავზარდეთ სიზუსტის რიგი 2-ით ($q - p$-ით) $\widetilde{J} = \sigma J^{h_1} + (1-\sigma)J^{h_2}$ -სთვის.

შევნიშნოთ, რომ $J^{2h}_{\text{ტრაპ.}}[f]$ ტრაპეციის ფორმულისა და $J^{2h}_{\text{მართკ.}}[f]$ მართკუთხედის ფორმულის კომბინირებით ბიჯით $2h$, ჩვენ მივიღებთ $J^{h}_{\text{სიმპს.}}[f]$ სიმპსონის ფორმულას h ბიჯით:

$$J^{h}_{\text{სიმპს.}}[f] = \frac{1}{3}J^{2h}_{\text{ტრაპ.}}[f] + J^{2h}_{\text{მართკ.}}[f] =$$
$$= \frac{h}{6}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}),$$

სადაც $h = (b-a)/(2N)$.

რამოდენიმე ბადეზე გამოთვლების ჩატარების მეთოდი გამოიყენება სიზუსტის ასამაღლებლად იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც ცდომილების მთავარი წევრის რიგი უცნობია (ეიტკინის პროცესი). ვიგულისხმოთ, რომ ცდომილებისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$D^h(f) = \alpha_p h^p + \alpha_q h^q + \cdots, \quad q > p,$$

ისე რომ

$$J^h[f] = J[f] + \alpha_p h^p + \alpha_q h^q + \cdots$$

გამოთვლები ჩავატაროთ სამ ბადეზე: $h_1 = h$, $h_2 = \rho h$, $h_3 = \rho^2 h$ $(0 < \rho < 1)$. ჯერ განვსაზღვროთ p. ამ დროს უგულვებელვყოფთ $O(h^q)$ წევრს. განვიხილოთ ფარდობა

$$A = \frac{J^{h_1}[f] - J^{h_2}[f]}{J^{h_2}[f] - J^{h_3}[f]} \approx \frac{h_1^p - h_2^p}{h_2^p - h_3^p} = \frac{1 - \rho^p}{\rho^p(1 - \rho^p)} = \left(\frac{1}{\rho}\right)^p,$$

აქედან ვიპოვით

$$p \approx \ln A \Big/ \ln\frac{1}{\rho}.$$

თუ ვიცით p-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, მაშინ ზემოთ მოცემული რუნგეს მეთოდით შეიძლება სიზუსტის რიგი გავზარდოთ. ამისათვის განვიხილოთ კომბინაცია $\tilde{J}^h = \sigma J^{h_1} + (1-\sigma) J^{h_2}$ და ავარჩიოთ σ ისე, რომ $\sigma h_1^p + (1-\sigma) h_2^p = (\sigma + (1-\sigma)\rho^p) h^p = 0$ ე. ი. $\sigma = \rho^p / (\rho^p - 1) = 1/(1-A)$. მაშინ $\tilde{D}^h = \tilde{J}^h - J$ ცდომილებისათვის მივიღებთ

$$\tilde{D}^h(f) = O(h^q).$$

ცხადია, ყველა ამ მსჯელობას აზრი აქვს $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი სიგლუვის შემთხვევაში.

7. სხვა კვადრატურული ფორმულები. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ

$$J[f] = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{25}$$

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით კვადრატურულ ფორმულებს მოცემული $\{x_k\}$ კვანძებით

$$J_N[f] = \sum_{k=0}^{N} c_k f(x_k). \qquad (26)$$

ეს ფორმულები ზუსტია ყველა N ხარისხის მრავალწევრისათვის. თუ უცნობებად ჩავთვლით არა მარტო c_k-ს, არამედ x_k კვანძებსაც, მაშინ შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ (26)-ე კვადრატურული ფორმულა ზუსტი იყოს ყველა $2N-1$ ხარისხის მრავალწევრისათვისაც. ასეთ ფორმულას გაუსის ფორმულა ეწოდება. მოეითხოვოთ, რომ ფორმულა ზუსტი იყოს $1, x, x^2, ..., x^m, ..., x^N$ ერთწევრისათვის, ე. ი.

$$J_N[x^m] = \sum_{k=0}^{N} c_k x_k^m = \int_0^1 x^m dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}, \quad m = 0,1,...,2N-1,$$

მაშინ კვანძებისა და წონებისათვის მივიღებთ $2N+2$ განტოლებას

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_N = 1,$$
$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_N x_N = 1/2,$$

$$c_0 x_0^m + c_1 x_1^m + \cdots + c_N x_N^m = 1/(m+1),$$

....

$$c_0 x_0^{2N+1} + c_1 x_1^{2N+1} + \cdots + c_N x_N^{2N+1} = 1/(2(N+1)).$$

უცნობთა საერთო რიცხვია $2N+2$, ე. ი. $N+1$ უცნობი კვანძი და $N+1$ წონითი მამრაელი. განტოლებათა რიცხვი აგრეთვე $2N+2$-ის ტოლია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ამ განტოლებათა სისტემას აქვს ამოხსნა.

მოვიყვანოთ გაუსის უმარტივესი ფორმულა, როცა $N = 2$:

$$J_N[f] = \frac{5}{18} f(x_0) + \frac{8}{18} f(x_1) + \frac{5}{18} f(x_2),$$

სადაც

$$x_0=\frac{1-\sqrt{0,6}}{2},\ x_2=\frac{1+\sqrt{0,6}}{2},\ x_1=\frac{1}{2}.$$

გაუსის ფორმულები კარგ სიზუსტეს იძლევიან კვანძთა მცირე რაცხვისათვის.

კიდევ ერთ მაგალითს წარმოადგენს ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულა, რომელშიც საუკეთესო კვანძებს იმ დაშვებით არჩევენ, როცა ყველა წონა ტოლია. ამ შემთხვევაში

$$J_N[f]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k).$$

თუ მოვითხოვთ, რომ ფორმულა ზუსტი იყოს $f(x)=x,\ x^2,\ \dots,\ x^N$-სათვის, მივიღებთ N განტოლებას $x_1, x_2, \dots, x_N$-ის განსაზღვრისათვის:

$$x_1^m+x_2^m+\dots+x_N^m=\frac{1}{m+1},\quad m=1,2,\dots,N.$$

ამ განტოლებებს აქვს ამოხსნა, როცა $m = 1,2,\dots,7,9$, ხოლო როცა $m = 8$ და $m \geq 10$ არა აქვს ნამდვილი ფესვები, როცა $m = 3$, ჩებიშევის ფორმულას აქვს სახე:

$$\int_0^1 f dx\approx J_3[f]=\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)\right].$$

მისთვის $\|f^{IV}\|_c$-სთან კოეფიციენტი ცდომილების შეფასების ფორმულაში ორჯერ ნაკლებია, ვიდრე სიმპსონის ფორმულისათვის.

შენიშვნები. რიგ შემთხვევებში ინტეგრალების გამოთვლას წინ უნდა უსწრებდეს მათი გარდაქმნა, რომელიც მხედველობაში მიიღებს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის სპეციფიკას.

მაგალითები: 1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}f_0(x)$, $f_0(0)\neq 0$, ე. ი. $f(x)$-ს აქვს განსაკუთრებულობა, როცა $x = 0$. ეს განსაკუთრებულობა შეიძლება ავიცილოთ ცვლადის შეცვლით:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{f_0(x)}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^1 f_0(x)d\sqrt{x} = \int_0^1 f(t^2)dt, \quad t = \sqrt{x}.$$

2) ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ექსპონენციალური ხასიათი აქვს $f(x) \approx ce^{\alpha x}$ ე. ი. $\ln f(x)$ ფუნქცია წრფივია. $f(x)$ წარმოვიდგინოთ სახით $f(x) = \exp\{\ln f(x)\}$, ვაინტეგროთ $\ln f(x)$ წრფივად $[x_{i-1}, x_i]$ მონაკვეთზე

$$\ln f(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \ln f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \ln f_i,$$

და შემდეგ x-ით ვაინტეგროთ x_{i-1}-დან x_i-მდე. ეს ფორმულა პრაქტიკაში გამოსადეგია.

3) თუ $f(x)$ არის სწრაფად ოსცილირებადი ფუნქცია, ისე რომ მისი ჩაწერა შეიძლება $f(x) = y(x)\cos\omega x$ სახით, სადაც $\omega \gg 1$ სიხშირე დიდია, მაშინ ინტეგრალის გამოთვლის დროს შეიძლება შემდეგი ხერხით ვისარგებლოთ. ჯერ ვაინტეგროთ ნაწილობით

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x)\cos\omega x dx =$$

$$= \frac{1}{\omega} y(x)\sin\omega x\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\omega}\int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(x)\sin\omega x dx.$$

თუ $y(x)$ წრფივი ფუნქციაა $[x_{i-1}, x_i]$-ზე, მაშინ ინტეგრალი მარჯვნივ აიღება ცხადი სახით. თუ $y(x)$ – n ხარისხის პოლინომია, მაშინ ნაწილობით ინტეგრება n-ჯერ უნდა მოვახდინოთ.

თავი III

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების რიცხვითი ამოხსნა

ამ თავში შეისწავლება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები, ე. ი. წრფივი ალგებრის რიცხვითი მეთოდები. არსებობს ორი ტიპის მეთოდები — პირდაპირი და იტერაციული. ჩვენ, უპირველეს ყოვლისა, განვიხილავთ გაუსის გამორიცხვის მეთოდს ზოგადი სახის სისტემებისათვის და ამ მეთოდის ვარიანტებს — ფაქტორიზაციისა და მატრიცული ფაქტორიზაციის მეთოდებს სპეციალური სახის სისტემებისათვის (სამდიაგონალური და ბლოკურ-სამდიაგონალური მატრიცები). ისინი წარმოადგენენ პირდაპირ მეთოდებს. მათი ეფექტურობა სისტემის რიგზე და მატრიცის სტრუქტურაზეა დამოკიდებული.

იტერაციული მეთოდების შესწავლისას განტოლებათა სისტემას ჩვენ ვიხილავთ, როგორც I გვარის ოპერატორულ განტოლებას $Au = f$ და ვაყალიბებთ ოპერატიული განტოლებებისათვის იტერაციული მეთოდების ზოგად თეორიას A ოპერატორის მიმართ მინიმალური შეზღუდვებით. ზოგადი თეორია საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ ზეიდელისა და ზედა რელაქსაციის მეთოდების კრებადობა A ოპერატორზე მინიმალური შეზღუდვებისას. განხილულია მეთოდების ორი კლასი: 1) იმ შემთხვევისათვის, როცა ცნობილია A ოპერატორის სპექტრის საზღვრები $\gamma_1 > 0$ და $\gamma_2 \geq \gamma_1$ რომელიმე ენერგეტიკულ H_D სივრცეში; 2) იმ შემთხვევისათვის, როცა γ_1 და γ_1 საზღვრები უცნობია. განსაკუთრებით ეფექტურია მონაცვლეობითი-სამკუთხა მეთოდი, რომელიც §5-ში შეისწავლება.

§1. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

1. **განტოლებათა სისტემები.** წრფივი ალგებრის ძირითადი ამოცანაა

$$Au = f \tag{1}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, სადაც $u = (u^{(1)},\ldots,u^{(N)})$ საძიებელი ვექტორია, $f = (f^{(1)},f^{(2)},\ldots,f^{(N)})$ – ცნობილი N-განზომილებიანი ვექტორი, $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1,2,\ldots,N)$ – $N \times N$ ზომის კვადრატული მატრიცა a_{ij} ელემენტებით.

დავუშვათ, რომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია $\det A \neq 0$, ისე რომ $Au = 0$ განტოლებას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა და (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა

$$u = A^{-1}f.$$

წრფივი ალგებრის კურსში (1) სისტემის ამოხსნა ჩვეულებრივ გამოისახება კრამერის ფორმულებით დეტერმინანტების შეფარდების სახით. (1) სისტემის რიცხვითი ამოხსნისათვის ეს ფორმულები გამოუსადეგარია, ვინაიდან ისინი $N + 1$ დეტერმინანტის გამოთვლას მოითხოვენ, რაც დიდი რაოდენობის მოქმედებებს საჭიროებს ($N!$ რიგის არითმეტიკული ოპერაციები). საუკეთესო მეთოდის შერჩევის შემთხვევაშიც კი ერთი დეტერმინანტის გამოთვლა მოითხოვს დაახლოებით იმდენ დროს, რასაც წრფივი განტოლებათა სისტემების ამოხსნა თანამედროვე რიცხვითი მეთოდებით. გარდა ამისა, მხედველობაში მისაღებია ისიც, რომ კრამერის ფორმულებით გამოთვლას ხშირად დამრგვალების დიდ ცდომილებასთან მივყავართ.

(1)-ისთვის უმეტესობა რიცხვითი მეთოდების თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შებრუნებული მატრიცის პოვნას არ საჭიროებენ. ამოხსნის მეთოდისადმი ძირითადი მოთხოვნაა მოცემული $\varepsilon > 0$ სიზუსტით მიახლოებითი ამოხსნის მოძებნა მინიმალური რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაციებით (რიცხვითი მეთოდის ეკონომიურობა).

2. სისტემების კერძო შემთხვევები. არ არის რთუ-ლი (1) სისტემის ამოხსნა ქვემოთ ჩამოთვლილ კერძო შემთხვევე-ბში. ვთქვათ მატრიცა A – დიაგონალურია. ე. ი. $a_{ij} = 0,\ j \neq i,\ a_{ii} \neq 0$ $(i, j = 1,2,\dots,N)$. მაშინ სისტემას აქვს სახე

$$a_{ii} u^{(i)} = f^{(i)},$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$u^{(i)} = f^{(i)}/a_{ii},\ i = 1,2,\dots,N.$$

თუ A ქვედა სამკუთხა მატრიცაა, ე. ი. $a_{ij} = 0$, როცა $j > i$ $(i, j = 1,2,\dots,N)$, $a_{ii} \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{aligned} &a_{11} u^{(1)} &&= f^{(1)}, \\ &a_{21} u^{(1)} + a_{22} u^{(2)} &&= f^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{N1} u^{(1)} + a_{N2} u^{(2)} + \dots + a_{NN} u^{(N)} &&= f^{(N)}. \end{aligned}$$

u ვექტორის კომპონენტები, $n = 1$-დან დაწყებული, მიმდევრობით მოიძებნება n-დან $n + 1$-ზე გადასვლით:

$$u^{(1)} = \frac{f^{(1)}}{a_{11}}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(f^{(2)} - a_{21} u^{(1)}\right), \quad \dots,$$

$$u^{(n+1)} = \frac{1}{a_{n+1,\,n+1}}\left(f^{(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k} u^{(k)}\right), \quad n = 2,3,\dots,N-1.$$

$u = (u^{(1)},\dots,u^{(N)})$ ვექტორის მოსაძებნად საჭიროა $1 + 3 + 5 + \cdots + 2N - 1 = N^2$ არითმეტიკული მოქმედება.

თუ A ზედა სამკუთხა მატრიცაა, ე. ი. $a_{ij} = 0$, როცა $j < i$, $a_{ii} \neq 0$ $(i, j = 1,2,\dots,N)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{N-1,N-1} + a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & a_{NN} \end{bmatrix},$$

მაშინ (1) სისტემას აქვს სახე

$$\begin{aligned} a_{11}u^{(1)} + a_{12}u^{(2)} + \cdots + a_{1N}u^{(N)} &= f^{(1)}, \\ a_{22}u^{(2)} + \cdots + a_{2N}u^{(N)} &= f^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{N-1,N-1}u^{(N-1)} + a_{N-1,N}u^{(N)} &= f^{(N-1)}, \\ a_{NN}u^{(N)} &= f^{(N)}. \end{aligned}$$

$u = A^{-1}f$ ვექტორის კომპონენტები $n + 1$-დან n-ზე გადასვლით მიმდევრობით განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით

$$u^{(N)} = \frac{f^{(N)}}{a_{NN}},\dots,u^{(n)} = \frac{1}{a_{NN}}\left(f^{(n)} - \sum_{k=n+1}^{N} a_{nk}u^{(k)}\right),\dots \qquad (2)$$

$$n = N-1, N-2,\dots,2,1,$$

რაც აგრეთვე N^2 მოქმედებას მოითხოვს.

მეთოდის არჩევა და მისი ეკონომიკურობა A მატრიცის სახეზე, აგრეთვე კომპიუტერის ტიპზეა დამოკიდებული.

ბევრი ამოცანისათვის A გაიშვიათებული მატრიცაა, რომლის ელემენტთა უმრავლესობა ნულია. ასეთი მატრიცები ხშირად გვხვდება დიფერენციალური განტოლებების სხვაობებით აპროქსიმაციის დროს. ამ მატრიცის ელემენტები, ჩვეულებრივ, მოცემული ფორმულებით გამოითვლება და მათი შენახვა მანქანის ოპერატიულ მეხ-

სიერებაში საჭირო არ არის. ეს ძალზე მნიშვნელოვანია, რადგან ასეთი მატრიცების რიგი რამდენიმე ათეულს, ზოგჯერ კი ასეულ ათასსაც შეიძლება აღწევდეს.

გაიშვიათებული მატრიცის კერძო შემთხვევას ლენტური მატრიცა წარმოადგენს; ყველა მისი არანულოვანი ელემენტი მთავარი დიაგონალის მახლობლობაში იმყოფება, ე. ი. $a_{ij}=0$, თუ $|i-j|>\ell$, სადაც $\ell<N$. ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები განლაგებულია $2\ell+1$ დიაგონალზე, მთავარი დიაგონალის ჩათვლით. ამის მაგალითია სამდიაგონალური მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & & 0 & -c_N \end{bmatrix}$$

შესაბამის (1) სისტემას აქვს სახე

$$\begin{aligned} -c_1u^{(1)}+b_1u^{(2)} \qquad\qquad &= f^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_iu^{(i-1)}-c_iu^{(i)}+b_iu^{(i+1)} \quad &= f^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_Nu^{(N-1)}-c_Nu^{(N)} &= f_N, \\ i=2,3,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

ეს არის მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება. იგი ჩვენ I თავში განვიხილეთ, სადაც მის ამოსახსნელად ფაქტორიზაციის მეთოდი გამოიყენებოდა.

3. პირველი გვარის ოპერატორული განტოლება. ცნობილია, რომ ნებისმიერი $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,N)$ მატრიცა განსაზღვრავს წრფივ A ოპერატორს, რომელიც H^N სივრცეს ასახავს თავის თავში: $Au\in H^N$ ნებისმიერი u-სთვის, $u\in H^N$ ან $A: H^N\to H^N$, პირიქით, ნებისმიერ A ოპერატორს (რაიმე $\xi_1,\ldots,\xi_N$ ბაზისში) შეესაბამება $A=(a_{ij})$ – $N\times N$ ზომის მატრიცა, სადაც a_{ij} $A\xi_j$ ვექტო-

რის კომპონენტაა. ამიტომ (1) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პირველი გვარის ოპერატორული განტოლება

$$Au = f, \qquad u, f \in H^N, \tag{3}$$

ოპერატორით $A : H^N \to H^N$.

(1) და (3) ამოცანების ექვივალენტობას ხაზი რომ გაუსვათ, როგორც მატრიცის, ასევე ოპერატორისათვის ერთი და იმავე A აღნიშვნას შევინარჩუნებთ. H^N აღნიშვნაში N ინდექსს გამოვტოვებთ და უბრალოდ H-ს დავწერთ. (1)-დან ოპერატორულ განტოლებაზე გადასვლა უფრო მოხერხებულია იტერაციული მეთოდების თეორიის გადმოცემისათვის. ამასთან, A მატრიცის სტრუქტურის შესახებ რაიმე კონკრეტული ინფორმაცია არ გამოიყენება.

H სივრცეში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი $(\ , \ )$ და ნორმა $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. ჩავთვალოთ, რომ A ოპერატორი თვითშეუღლებულია და დადებითია: $A = A^* > 0$. განვიხილავთ აგრეთვე ენერგეტიკულ სივრცეებს H_D სკალარული ნამრავლით $(u, v)_D = (Du, v)$ და ნორმით $\|u\|_D = \sqrt{(Du,u)}$, სადაც D წრფივი თვითშეუღლებული ოპერატორია $D : H \to H$, $D = D^* > 0$.

აღვნიშნოთ (ξ_s, λ_s)-ით $(s = 1,2,\dots,N)$ A ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები:

$$A\xi_s = \lambda_s \xi_s, \qquad (\xi_s, \xi_m) = \delta_{sm}, \quad s, m = 1,2,\dots,N,$$

რადგან $A > 0$, მაშინ $\lambda_s > 0$ და შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_N$, რაც ნიშნავს, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\lambda_1 E \le A \le \lambda_N E, \quad \lambda_1 = \min_s \lambda_s, \quad \lambda_N = \max_s \lambda_s .$$

λ_N/λ_1 შეფარდებას უწოდებენ მატრიცის განპირობებულობის რიცხვს. პრაქტიკაში უფრო მოსახერხებელია შებრუნებული ფარდობით, ე. ი. $\xi = \lambda_1/\lambda_N$ პარამეტრით სარგებლობა. მას განპირობებულობის ზომას ვუწოდებთ. იტერაციების კრებადობის სისწრაფე, როგორც ამას ქვემოთ ვაჩვენებთ, ამ ზომაზეა დამოკიდებული. სხეაობიანი განტოლებებისათვის, რომლებიც მათემატიკური ფიზი-

კის განტოლებების, მაგალითად, ლაპლასის განტოლების, აპროქსიმაციას ახდენს, ξ პარამეტრი მცირეა $\xi \approx 10^{-2} - 10^{-4}$ (განპირობებულობის რიცხვი დიდია).

$u = A^{-1}f$ ფორმულიდან ჩანს, რომ

$$\|u\| \le \|A^{-1}\|\|f\|, \quad \|A^{-1}\| = 1/\lambda_1.$$

ეს უტოლობა (1) ამოცანის ამოხსნის მარჯვენა მხარის მიმართ მდგრადობას გამოსახავს. თუ $\|A^{-1}\| = 1/\lambda_1$ ძალიან დიდია, მაშინ (3) ამოცანა შეიძლება არაკორექტური აღმოჩნდეს, ე. ი. მარჯვენა მხარის, აგრეთვე დამრგვალების ცდომილებების მიმართ არამდგრადი იყოს.

4. პირდაპირი და იტერაციული მეთოდები. (1) სისტემის ამოხსნის რიცხვით მეთოდებს პირობითად ყოფენ ორ ჯგუფად, გამოყოფენ რა პირდაპირ და იტერაციულ მეთოდებს (რასაკვირველია, არსებობს ჰიბრიდული მეთოდებიც). პირდაპირი მეთოდები საშუალებას იძლევა მოქმედებათა სასრული რაოდენობის შემდეგ განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამოხსნა მივიღოთ, თუ განტოლების მარჯვენა მხარე f და A მატრიცის a_{ij} ელემენტები ზუსტადაა მოცემული და გამოთვლები დამრგვალების გარეშე წარმოებს. პირდაპირი მეთოდის უმარტივესი მაგალითია ფაქტორიზაციის მეთოდი. რასაკვირველია პირდაპირი მეთოდებიც იძლევა ამოხსნას გარკვეული სიზუსტით. იგი დამოკიდებულია დამრგვალების ცდომილებაზე, ე. ი. მანქანაზე და გამოთვლითი მდგრადობის ხასიათზე, რასაც თვითონ მეთოდი განსაზღვრავს.

იტერაციული მეთოდი საშუალებას იძლევა სისტემის მიახლოებითი ამოხსნა ვიპოვოთ მიახლოებათა (იტერაციათა) მიმდევრობის აგების გზით, დაწყებული რაიმე საწყისი მიახლოებიდან. თვით მიახლოებითი ამოხსნა გამოთვლის შედეგს წარმოადგენს და იტერაციათა სასრული რიცხვის შემდეგ მიიღება.

ამა თუ იმ რიცხვითი მეთოდის შერჩევა დამოკიდებულია ბევრ გარემოებაზე — არსებულ პროგრამებზე, A მატრიცის სახეზე, გამოთვლების ტიპზე და სხვა. ავხსნათ სიტყვა „გამოთვლების ტიპი". შესაძლებელია ამოცანის სხვადასხვანაირი დასმა:

1) ვიპოვოთ ერთი კონკრეტული (1) ამოცანის ამოხსნა;

2) ვიპოვოთ (1) ამოცანის რამდენიმე ვარიანტის ამოხსნა ერთი და იმავე A მატრიცითა და სხვადასხვა f მარჯვენა მხარეებით. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ (1) ამოცანისათვის არაოპტიმალური მეთოდი ფრიად ეფექტური იყოს მრავალწერტილიანი გამოთვლებისათვის.

მრავალვარიანტიანი გამოთვლების შემთხვევაში შესაძლებელია ოპერაციათა საშუალო რიცხვის შემცირება ერთი ვარიანტისათვის, თუ ზოგიერთ სიდიდეებს შევინახავთ და ყოველი ვარიანტისათვის მათ ხელახლა არ გამოვთვლით. ეს, რასაკვირველია, დამოკიდებულია მანქანაზე, მისი ოპერატიული მეხსიერების მოცულობაზე.

ნათქვამიდან ნათელია, რომ ალგორითმის შერჩევა დამოკიდებული უნდა იყოს გამოთვლების ტიპზე, მანქანის ოპერატიული მეხსიერების მოცულობაზე და, რასაკვირველია, სისტემის რიგზე. ალგორითმის ხარისხი იმ მანქანური დროით განისაზღვრება, რომელიც (1) სისტემის ამოხსნის მოსაძებნად არის საჭირო. ბუნებრივია, რომ შეირჩეს ისეთი მეთოდი, რომლისთვისაც ამოხსნის დრო მინიმალურია სხვა მეთოდებთან შედარებით. მაგრამ თვლის დრო დამოკიდებულია ბევრ ფაქტორზე: იმ არითმეტიკულ და ლოგიკურ მოქმედებათა რიცხვზე, რომლებიც უნდა დაიხარჯოს მოცემული სიზუსტით ამოხსნის მისაღებად, მანქანის სწრაფმოქმედებასა და ოპერატიულ მეხსიერებაზე, პროგრამის ხარისხზე. ალგორითმების ხარისხის თეორიული შეფასების დროს მათი შედარება ხდება იმ არითმეტიკულ მოქმედებათა $Q(\varepsilon)$ რიცხვის მიხედვით, რომელიც საკმარისია მოცემული $\varepsilon > 0$ სიზუსტით ამოცანის ამოხსნის მოსაძებნად.

§2. პირდაპირი მეთოდები

1. გაუსის მეთოდი. არსებობს გაუსის მეთოდის რამდენიმე გამოთვლითი ვარიანტი, დაფუძნებული მიმდევრობითი გამორიცხვის იდეაზე. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის $Ax = f$, ანუ

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{1}$$

გაუსის მეთოდით ამოხსნის პროცესი ორი ეტაპისაგან შედგება.

პირველი ეტაპი (პირდაპირი სვლა). (1) სისტემა მიიყვანება სამკუთხა სახეზე

$$x + B^{+}x = \varphi, \tag{2}$$

სადაც $x = (x_1,\ldots,x_N)$ – უცნობი, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ – ცნობილი ვექტორებია, ხოლო B^{+} – ზედა სამკუთხა მატრიცაა.

მეორე ეტაპი (უკუსვლა). უცნობები $x_N, x_{N-1},\ldots,x_1$ განისაზღვრება §1-ის (2) ფორმულებით.

გადავიდეთ მეთოდის დაწვრილებით ახსნაზე. გაუსის მეთოდის პირველი ბიჯი მდგომარეობს ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა, x_1-ის გამორიცხვაში. დავუშვათ, რომ $a_{11} \neq 0$ (1)-ის პირველი განტოლება ($i = 1$) გავყოთ a_{11}-ზე და (1) სისტემა ჩავწეროთ სახით

$$x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1N}x_N = \varphi_1,\ b_{1j} = a_{ij}/a_{11},\ 2 \leq j \leq N,\ \varphi_1 = f_1/a_{11}, \tag{3}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iN}x_N = f_i, \qquad i = 2,3,\ldots,N \tag{4}$$

(3) განტოლება გავამრავლოთ a_{i1}-ზე, სადაც i ნებისმიერია შემდეგი რიცხვებიდან $i = 2,3,\ldots,N$, და მიღებული შედეგი გამოვაკლოთ (4)-ის i-ურ განტოლებას:

$$(a_{i2} - a_{i1}b_{12})x_2 + \cdots + (a_{iN} - a_{i1}b_{1N})x_N = f_i - a_{i1}\varphi_1,\ i = 2,3,\ldots,N.$$

შემოვიღებთ რა აღნიშვნებს

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, \quad f_i^{(1)} = f_i - a_{i1}\varphi_1, \quad i,j = 2,3,\ldots,N, \tag{5}$$

განტოლებათა მიღებულ სისტემას ((1) სისტემის ექვივალენტურს) გადავაწერთ შემდეგი სახით

$$x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1N}x_N = \varphi_1,$$

$$a_{i2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{iN}^{(1)}x_N = f_i^{(1)}, \quad i = 2,3,\ldots,N.$$

ამ სისტემის მატრიცის პირველი სვეტი ნულებისაგან შედგება, გარდა პირველი ელემენტისა ($i = 1, j = 1$), რომელიც 1-ის ტოლია.

მეორე ბიჯია x_2-ის გამორიცხვა სისტემიდან

$$a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2N}^{(1)}x_N=f_2^{(1)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{6}$$

$$a_{N2}^{(1)}x_2+\cdots+a_{NN}^{(1)}x_N=f_N^{(1)}.$$

ამისათვის გავყოთ პირველი განტოლება $a_{22}^{(1)}$-ზე:

$$x_2+b_{23}x_3+\cdots+b_{2N}x_N=\varphi_2,$$

$$\varphi_2=f_2^{(1)}/a_{22}^{(1)},\quad b_{2j}=a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)},\quad j=3,\dots,N,$$

შემდგომ გავამრავლოთ იგი $-a_{i2}^{(1)}$-ზე და შევკრიბოთ განტოლე-ბასთან

$$a_{i2}^{(1)}x_2+a_{i3}^{(1)}x_3+\cdots+a_{iN}^{(1)}x_N=f_i^{(1)},\quad i=3,4,\dots,N.$$

ამის შედეგად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{aligned} x_2+b_{23}x_3+\cdots+b_{2N}x_N&=\varphi_2,\\ a_{i3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{iN}^{(2)}x_N&=f_i^{(2)},\quad i=3,4,\dots,N, \end{aligned} \tag{7}$$

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}b_{2j},\quad f_i^{(2)}=f_i^{(1)}-a_{i2}^{(1)}\varphi_2,\quad i=3,4,\dots,N \tag{8}$$

$x_3, x_4,\dots,x_N$-სათვის გვაქვს $N-2$ რიგის სისტემა, რომელიც $x_2, x_3,\dots,x_N$-სათვის $N-1$ რიგის (6) სისტემის ანალოგიურია.

განვაგრძობთ რა მსჯელობას, $N-1$ ბიჯის შემდეგ (ე. ი. $x_1, x_2,\dots,x_{N-1}$-ის გამორიცხვის შემდეგ) მივიღებთ

$$a_{NN}^{(N-1)}x_N=f_N^{(N-1)},\text{ ან } x_N=\varphi_N,\quad \varphi_N=f_N^{(N-1)}/a_{NN}^{(N-1)}. \tag{9}$$

საბოლოოდ ვღებულობთ (2) სისტემას ზედა სამკუთხა მატრიცით

$$\begin{aligned} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+\cdots+b_{1N}x_N&=\varphi_1,\\ x_2+b_{23}x_3+\cdots+b_{2N}x_N&=\varphi_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ x_{N-1}+b_{N-1,N}x_N&=\varphi_{N-1},\\ x_N&=\varphi_N \end{aligned} \tag{10}$$

გაუსის მეთოდის უკუსვლა მდგომარეობს ზედა სამკუთხა მატრიცის მქონე (10) სისტემიდან ყველა x_i-ის განსაზღვრაში. ძნელი არ არის ჩვენება, რომ ზემოთ გადმოცემული გაუსის მეთოდის გამოყენება იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როცა ყველა მთავარი მინორი განსხვავებულია ნულისაგან.

გამოვთვალოთ გამრავლებათა და გაყოფათა რიცხვი გაუსის მეთოდში. ჯერ განვიხილოთ პირდაპირი სვლა. პირველ ბიჯზე მოითხოვება $Q_1 = N^2$ გამრავლება და გაყოფა, მეორეზე $Q_2 = (N-1)^2$ მოქმედება და ა. შ. სულ საჭიროა პირდაპირი სვლის N ბიჯი, რომელიც მოითხოვს

$$\sum_{k=1}^{N}(N-K+1)^2 = \sum_{s=1}^{N} s^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

გამრავლებასა და გაყოფას. უკუსვლისათვის, ცხადია, საჭიროა $N(N-1)/2$ გამრავლება. ამრიგად, (10 განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად $Q = N(N^2 + 3N - 1)/3$ გამრავლება და გაყოფა მოითხოვება. დაახლოებით ამდენივე შეკრება იქნება საჭირო.

მოვიყვანოთ გაუსის მეთოდის გამოყენების მაგალითი. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა სამი განტოლებით ($N = 3$):

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \tag{11}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \tag{12}$$

$$4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \tag{13}$$

პირდაპირი სვლა. პირველი ბიჯი. გავყოთ პირველი განტოლება $a_{11} = 2$-ზე

$$x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \tag{14}$$

(14) გავამრავლოთ -3-ზე და შევკრიბოთ (12)-თან, შემდეგ (14) გავამრავლოთ -4-ზე და შევკრიბოთ (13)-თან

$$-5x_2 - 6{,}5x_3 = -8, \tag{15}$$

$$3x_2 + x_3 = 1. \tag{16}$$

მივიღეთ მეორე რიგის სისტემა

მეორე ბიჯი. (15) გავყოთ – 5-ზე

$$x_2 + 1,3x_3 = 1,6. \tag{17}$$

(17) გავამრავლოთ – 3-ზე და შევკრიბოთ (16)-თან

$$-2,9x_3 = -5,8. \tag{18}$$

მესამე ბიჯი. გავყოთ (18) – 2,9-ზე

$$x_3 = 2.$$

ამის შდეგად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2, \\ x_2 + 1,3x_3 = 1,6, \\ x_3 = 2. \end{gathered}$$

ზედა სამკუთხა მატრიცით

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1,5 \\ 0 & 1 & 1,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

უკუსვლა. სისტემიდან მიმდევრობით ვპოულობთ

$$x_3 = 2, \qquad x_2 = 1,6 - 1,3x_3 = 1,6 - 1,3 \cdot 2 = -1,$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 1,5 \cdot x_3 = 1.$$

ამრიგად (11)-(13) სისტემის ამოხსნა ნაპოვნია

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$$

2. **კვადრატული ფესვის მეთოდი.** ეს მეთოდი გამოსადეგია სისტემებისათვის

$$Au = f \tag{19}$$

ერმიტის (ნამდვილ შემთხვევაში სიმეტრიული) A მატრიცით. A მატრიცა წარმოიდგინება ნამრავლის სახით

$$A = S^*DS, \tag{20}$$

სადაც S – ზედა სამკუთხაა, ხოლო D – დიაგონალური მატრიცა. $Au = f$ განტოლების ამოხსნა დაიყვანება ორი სისტემის მიმდევრობით ამოხსნაზე

$$S^* D y = f, \qquad Su = y. \tag{21}$$

(20) გაშლა რომ მივიღოთ, აღვნიშნოთ $S = (s_{ij})$, $D = (d_{ii}\delta_{ij})$ და ვიპოვოთ

$$(DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} d_{ik} s_{kj} = d_{ii} s_{ij}, \quad (S^* DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \bar{s}_{ki} d_{kk} s_{kj},$$

რადგან $S^* = (\bar{s}_{ji})$. ზედა ხაზი ნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებას.

ამის შედეგად მიიღება განტოლება

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{s}_{ki} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}. \tag{22}$$

(22) განტოლებათა სისტემა შეიძლება რეკურენტულად ამოიხსნას. რადგანაც S ზედა სამკუთხა მატრიცაა, $s_{ki} = 0$, როცა $k > i$ და $\bar{s}_{ik} = 0$ როცა $k < i$. აქედან გამომდინარე,

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} d_{kk} + \bar{s}_{ii} s_{ij} d_{ii} + \sum_{k=i+1}^{N} s_{ki} s_{kj} d_{kk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} + s_{ii} s_{ij} d_{ii} = a_{ij}.$$

როდესაც $i = j$ გვაქვს

$$|s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}. \tag{23}$$

ავარჩევთ რა

$$d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right), \tag{24}$$

;ვიპოვით

$$s_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right|}. \tag{25}$$

როდესაც $i < 0$, მივიღებთ

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk}}{\bar{s}_{ii} d_{ii}}. \tag{26}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $i = 1,2,\ldots$, მიმდევრობით ვიპოვით

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, \quad d_{11} = \operatorname{sign} a_{11}, \quad s_{22} = \sqrt{|a_{22} - d_{11}|s_{12}|^2|}, \ldots$$

მატრიცის დეტერმინანტი, ცხადია, ტოლია

$$\det A = \prod_{i=1}^{N} d_{ii} s_{ii}^2 .$$

კვადრატული ფესვის მეთოდი მოითხოვს $N^3/3$ რიგის არითმეტიკულ მოქმედებებს, ე. ი. დიდი N-ებისათვის ის ორჯერ უფრო სწრაფია გაუსის მეთოდზე და მეხსიერების ორჯერ ნაკლებ უჯრედს იკავებს. ეს გარემოება აიხსნება იმით, რომ მეთოდი იყენებს ინფორმაციას მატრიცის სიმეტრიის შესახებ.

3. გაუსის მეთოდის კავშირი მატრიცის მამრავლებად დაშლასთან. ვთქვათ, მოცემულია არაგადაგვარებული $N \times N$ რიგის A მატრიცა. წარმოვადგინოთ ის ნამრავლის სახით

$$A = BC, \; A = (a_{ij}), \; B = (b_{ij}), \; C = (c_{ij}), \tag{27}$$

სადაც B და C შემდეგი სახის სამკუთხა მატრიცებია

$$
B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & b_{NN} \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{1N} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{2N} \\ 0 & 0 & 1 & c_{3N} \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

ე. ი. $b_{ik}=0$, როცა $k>i$, $c_{ik}=0$ როცა $k<i$, $c_{ii}=1$. (27)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$
a_{ij}=\sum_{k=1}^{N} b_{ik}c_{kj}\,.
$$

გარდავქმნათ ეს ჯამი ორი ხერხით:

$$
\sum_{k=1}^{N} b_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}+b_{ii}c_{ij}+\sum_{k=i+1}^{N} b_{ik}c_{kj}=b_{ii}c_{ij}+\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj},
$$

$$
\sum_{k=1}^{N} b_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}+b_{ij}c_{jj}+\sum_{k=j+1}^{N} b_{ik}c_{kj}=b_{ij}c_{jj}+\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}.
$$

აქედან ვპოულობთ

$$
b_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \text{ როცა } i\ge j,\ b_{11}=a_{11},\ c_{11}=1,
$$

$$
c_{ij}=\frac{1}{b_{ii}}\left[a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right] \text{ როცა } i<j.
$$

B და C მატრიცები ნაპოვნია.

$Au=BCu=f$ განტოლების ამოხსნა დადის შემდეგი განტოლებების მიმდევრობით ამოხსნაზე

$$
B\varphi=f, \qquad Cu=\varphi.
$$

B და C მატრიცების აგება და $\varphi = B^{-1}f$-ის პოვნა გაუსის მეთოდის პირდაპირ სვლას, ხოლო

$$Cu = \varphi.$$

განტოლების ამოხსნა – უკუსვლას შეესაბამება.

§3. იტერაციული მეთოდები

1. იტერაციის მეთოდი წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად. ამ თავში განსაკუთრებულ ყურადღებას იტერაციულ მეთოდებზე გავამახვილებთ, რადგან ისინი ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სხვაობიანი განტოლებების ამოსახსნელად, რომელთა ოპერატორებსაც მაღალი რიგის ლენტური A მატრიცა შეესაბამება.

გადავიდეთ იტერაციული მეთოდის ზოგად აღწერაზე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემისათვის

$$Au = f. \tag{1}$$

მის ამოსახსნელად აირჩევა რაიმე საწყისი $y_0 \in H$ მიახლოება და მიმდევრობით მოიძებნება (1) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნები (იტერაციები). y_{k+1} იტერაციის მნიშვნელობა ცნობილი წინა იტერაციების y_k, y_{k-1},... საშუალებით გამოისახება. თუ y_{k+1}-ის გამოსათვლელად გამოიყენება მხოლოდ ერთი წინა იტერაცია, მაშინ იტერაციულ მეთოდს ერთბიჯიანი (ანუ ორშრიანი) მეთოდი ეწოდება. თუ y_{k+1} ორი y_k და y_{k-1} იტერაციით გამოისახება, მაშინ მეთოდს ორბიჯიანი (ანუ სამშრიანი) ეწოდება. ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ ერთბიჯიან მეთოდებს. ჩავთვალოთ, რომ $A : H \to H$ წრფივი ოპერატორია სასრულგანზომილებიან H სივრცეში სკალარული ნამრავლით (,).

მნიშვნელოვან როლს თამაშობს იტერაციული მეთოდების ჩაწერა ერთიანი (კანონიკური) ფორმით. ნებისმიერი ორშრიანი იტერაციული მეთოდი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი კანონიკური ფორმით:

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f\,,\ k=0,1,\ldots,\ \text{ყველა}\ y_0\in H, \tag{2}$$

სადაც $A:H\to H$ საწყისი (1) განტოლების ოპერატორია, $B:H\to H$ წრფივი ოპერატორია, რომელსაც შებრუნებული B^{-1} გააჩნია. k – იტერაციის ნომერია, ხოლო $\tau_1, \tau_2,\ldots,\tau_{k+1},\ldots$ საიტერაციო პარამეტრები, $\tau_{k+1}>0$. B ოპერატორი, საზოგადოდ, შესაძლებელია k ნომერზე იყოს დამოკიდებული; გადმოცემის სიმარტივისათვის ჩვენ ყველგან დავუშვებთ, რომ B k-ზე დამოკიდებული არ არის.

თუ $B=E$ ერთეულოვანი ოპერატორია, მაშინ მეთოდს

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f\,,\ k=0,1,\ldots,\ \text{ყველა}\ y_0\in H, \tag{3}$$

ცხადს უწოდებენ: y_{k+1} მოიძებნება ცხადი ფორმულით

$$y_{k+1}=y_k-\tau_{k+1}(Ay_k-f).$$

ზოგად შემთხვევაში, როცა $B\neq E$. (2) მეთოდს არაცხად იტერაციულ მეთოდს უწოდებენ: y_{k+1}-ის საპოვნელად საჭიროა ამოიხსნას განტოლება

$$By_{k+1}=By_k-\tau_{k+1}(Ay_k-f)=F_k,\ k=0,1,\ldots \tag{4}$$

ბუნებრივია მოვითხოვთ, რომ $By_{k+1}=F_k$ სისტემის ამოსახსნელად საჭირო გამოთვლების მოცულობა ნაკლები იყოს, ვიდრე $Au=f$ სისტემის პირდაპირ ამოსახსნელად.

(2) იტერაციული მეთოდის სიზუსტე ხასიათდება $z_k=y_k-u$ ცდომილების სიდიდით, ე. ი. სხვაობით (2) განტოლების y_k ამოხსნასა და საწყის წრფივ განტოლებათა სისტემის u ზუსტ ამოხსნას შორის. (2)-ში $y_k=z_k+u$ ჩასმა მიგვიყვანს ცდომილების მიმართ ერთგვაროვან განტოლებამდე:

$$B\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau_{k+1}}+Az_k=0\,,\quad k=0,1,\ldots,\quad z_0=y_0-u. \tag{5}$$

ამბობენ, რომ იტერაციული მეთოდი იკრიბება H_D-ში, თუ

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k\|_D = 0 \text{ , სადაც } \|z\|_D = \sqrt{(Dz,z)}\text{ , } D = D^* > 0,\ D: H \to H.$$

ჩვეულებრივ, იძლევიან რაიმე $\varepsilon > 0$ ცდომილებას (ფარდობითს), რომლითაც საჭიროა ვიპოვოთ y_k ამოხსნა და გამოთვლებს შეწყვეტენ, როგორც კი შესრულდება პირობა

$$\|y_n - u\|_D \le \varepsilon\|y_0 - u\|_D. \tag{6}$$

თუ $n = n(\varepsilon)$ უმცირესია იმ რიცხვთაგან, რომლისთვისაც (6) სრულდება, მაშინ (1) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მოსასმენად საჭირო არითმეტიკულ ოპერატორთა საერთო რიცხვი ტოლია $Q_n(\varepsilon) = n(\varepsilon)q_0$, სადაც q_0 ერთ იტერაციაზე დახარჯული, ე. ი. (4) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისათვის საჭირო ოპერაციების რიცხვია. ჩვენი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოვახდინოთ $Q_n(\varepsilon)$-ის მინიმიზაცია B მატრიცისა და $\{\tau_k\}$ პარამეტრების შერჩევის ხარჯზე. დავიწყოთ უმარტივესი იტერაციული მეთოდებიდან.

2. მარტივი იტერაციის მეთოდი. (1) განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ მარტივი იტერაციის მეთოდი

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k^{(i)} - \tau\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}y_k^{(j)} - f^{(i)}\right),\quad i = 1,2,\ldots,N\ , \tag{7}$$

სადაც $\tau > 0$ იტერაციული პარამეტრია. ჩავწეროთ (7) ოპერატორული სახით:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f\ ,\ k = 0,1,\ldots,\ \text{ყველა } y_0 \in H. \tag{8}$$

(3)-თან შედარება გვიჩვენებს, რომ მარტივი იტერაციის მეთოდი ცხად ორშრიან სქემას წარმოადგენს მუდმივი $\tau_k \equiv \tau$ პარამეტრით.

მარტივი იტერაციის მეთოდის სხვა ვარიანტებიც არსებობს, მაგალითად, ასეთი:

$$y_{k+1}^{(i)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j\ne i}^{1+N} a_{ij}y_k^{(j)} - f^{(i)}\right).$$

თუ ჩავსვამთ

$$\sum_{j\neq i}^{1+N} a_{ij}y_k^{(j)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}y_k^{(j)} - a_{ii}y_k^{(i)} = (Ay_k)^{(i)} - (Dy_k)^{(i)},$$

სადაც $D=(a_{ii}\delta_{ij})$ – დიაგონალური მატრიცაა, მივიღებთ

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k^{(i)} - \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}y_k^{(j)} - f^{(i)}\right),$$

ან, კანონიკური სახით,

$$D\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} + Ay_k = f, \quad k=0,1,\ldots, \quad \tau = 1.$$

თუმცა ფორმალურად ეს სქემა არაცხადია ($B = D \neq E$), მაგრამ $D=(a_{ii}\delta_{ij})$ – დიაგონალური მატრიცაა და ამიტომ y_{k+1} ცხადი ფორმულებით განისაზღვრება.

3. **ზეიდელის მეთოდი.** პრაქტიკაში ძალზე ფართოდ (განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა A მატრიცის შესახებ არასაკმარისი ინფორმაცია გვაქვს) გამოიყენება ზეიდელის იტერაციული მეთოდი ერთ-ერთი შემდეგი სახით:

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}y_{k+1}^{(j)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}y_k^{(j)} = f^{(i)}, \quad a_{ii}\neq 0, \quad i=1,2,\ldots,N, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}y_k^{(j)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}y_{k+1}^{(j)} = f^{(i)}, \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{10}$$

ორივე ფორმულიდან y_{k+1} ვექტორის კომპონენტები მიმდევრობით მოიძებნება. (9)-დან მიმდევრობით განვსაზღვრავთ $y_{k+1}^{(1)}, y_{k+1}^{(2)}, \ldots, y_{k+1}^{(N)}$:

$$y_{k+1}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(f^{(1)} - \sum_{j=2}^{N} a_{ij}y_k^{(j)}\right),$$

$$y_{k+1}^{(i)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(f^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{N}a_{ij}y_k^{(j)}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}y_{k+1}^{(j)}\right),\ i=2,\dots,N.$$

ვისარგებლებთ რა (10) ფორმულით, $i=N, N-1,\dots,1$-სთვის მიმდევრობით ვიპოვეთ

$$y_{k+1}^{(N)}=\frac{1}{a_{NN}}\left(f^{(N)}-\sum_{j=1}^{N-1}a_{Nj}y_k^{(j)}\right),$$

$$y_{k+1}^{(i)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(f^{(i)}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}y_k^{(j)}-\sum_{j=i+1}^{N}a_{ij}y_{k+1}^{(j)}\right),\ i=N-1,\dots,1.$$

ჩავწეროთ ეს მეთოდი მატრიცული (ოპერატორული) ფორმით. ამისთვის A მატრიცი ჯამის სახით წარმოვადგინოთ

$$A=A^-+D+A^+,$$

სადაც $D=(a_{ii}\delta_{ij})$ — დიაგონალური მატრიცაა $N\times N$ რიგის, $A^-=(a_{ij}^-)$ — ქვედა სამკუთხა (დიაგონალის ქვემოთ) მატრიცაა ნულებით მთავარ დიაგონალზე, $a_{ij}^-=0$ როცა $j\ge i$, $a_{ij}^-=a_{ij}$, როცა $j<i$, ხოლო $A^+=(a_{ij}^+)$ — ზედა სამკუთხა (დიაგონალს ზემოთ) მატრიცაა ნულებით მთავარ დიაგონალზე, $a_{ij}^+=0$ როცა $j\le i$, $a_{ij}^+=a_{ij}$, როცა $j>i$. A^-, D, A^+-ს განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$Dy^{(i)}=a_{ii}y^{(i)},\quad A^-y^{(i)}=\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}y^{(j)},$$

$$A^+y^{(i)}=\sum_{j=i+1}^{N}a_{ij}y^{(j)},\quad (A^++D)y^{(i)}=\sum_{j=i}^{N}a_{ij}y^{(j)}.$$

ამიტომ (9) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს

$$((A^{+}+D)y_{k+1})^{(i)}+(A^{-}y_{k})^{(i)}=f^{(i)},\ \ i=1,2,\dots,N,$$

ან. ვექტორული ფორმით,

$$(A^{+}+D)y_{k+1}+A^{-}y_{k}=f.$$

ცხადი გარდაქმნების შედეგად

$$(A^{+}+D)y_{k+1}+A^{-}y_{k}=(A^{+}+D)(y_{k+1}-y_{k})+$$
$$+(A^{-}+(A^{+}+D))y_{k}=(A^{+}+D)(y_{k+1}-y_{k})+Ay_{k}.$$

(10) ზეიდელის მეთოდი კანონიკური სახით ჩაიწერება:

$$(D+A^{+})(y_{k+1}-y_{k})+Ay_{k}=f,\ \ k=0,1,2,\dots \qquad (11)$$

შევადარებთ რა (2)-ს, ენახავთ, რომ (10) ზეიდელის მეთოდი შეესაბამება

$$B=D+A^{+},\ \ \tau\equiv 1,$$

ე. ი. (11) სქემა არის არაცხადი. მაგრამ, რადგან $B=D+A^{+}$ სამკუთხა მატრიცაა, იტერაცია ცხადი ფორმულებით მოიძებნება. ანალოგიურად ჩაიწერება ზეიდელის მეთოდის სხვა ვარიანტიც:

$$(D+A^{-})(y_{k+1}-y_{k})+Ay_{k}=f,\ \ \ k=0,1,\dots, \qquad (12)$$

როცა $B=D+A^{-}$ – ქვედა სამკუთხა მატრიცაა. შემდგომ პუნქტ 5-ში ნაჩვენები იქნება, რომ ზეიდელის მეთოდი კრებადია, თუ A სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

4. ზედა რელაქსაციის მეთოდი. იტერაციული პროცესის დასაჩქარებლად ω პარამეტრის შემოტანით ზეიდელის მეთოდი შესაძლებელია ზედა რელაქსაციის მეთოდამდე მივიყვანოთ ისე, რომ

$$(D+\omega A^{-})\frac{y_{k+1}-y_{k}}{\omega}+Ay_{k}=f,\ k=0,1,\dots,\ \text{ყველა } y_0\text{-სთვის } y_0\in H. \qquad (13)$$

(2)-თან შედარება გვიჩვენებს, რომ

$$B=D+\omega A^{-},\quad \tau=\omega.$$

მიეიყვანოთ (13) განტოლება სათველელ სახემდე. გაეითვალისწინებთ რა, რომ

$$(D+\omega A^{-})\frac{y_{k+1}-y_k}{\omega}+Ay_k=\left(A^{-}+\frac{1}{\omega}D\right)y_{k+1}+$$

$$+\left(A-A^{-}-\frac{D}{\omega}\right)y_k=\left(A^{-}+\frac{1}{\omega}D\right)y_{k+1}+\left(A^{+}+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)D\right)y_k,$$

გვექნება

$$\left(A^{-}+\frac{1}{\omega}D\right)y_{k+1}+\left(A^{+}+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)D\right)y_k=f\cdot$$

აქედან ვპოულობთ

$$y_{k+1}^{(i)}=y_k^{(i)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left[f^{(i)}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}y_{k+1}^{(j)}-\sum_{j=i}^{N}a_{ij}y_k^{(j)}\right],\ i=1,2,\ldots,N.$$

$\omega=1$ შემთხვევაში ვპოულობთ ზეიდელის მეთოდის ფორმულას.

ზედა რელაქსაციიის მეთოდის კრებადობის სიჩქარე დამოკიდებულია ω პარამეტრზე. მე–5 პუნქტში ვაჩვენებთ, რომ მეთოდის კრებადობისათვის უნდა მოვითხოვოთ $0<\omega<2$ პირობა.

5. სტაციონარული იტერაციული მეთოდის კრებადობა. ზეიდელისა და ზედა რელაქსაციის მეთოდები წარმოადგენს შემდეგი სახის არაცხადი სქემის მაგალითებს

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}+Ay_k=f,\ k=0,1,\ldots,\ \text{ყველა } y_0\text{-სთვის } y_0\in H, \tag{14}$$

არათვითშეუღლებული B ოპერატორით, რომელსაც შებრუნებული B^{-1} ოპერატორი გააჩნია. (14) მეთოდს სტაციონარული იტერაციული მეთოდი ეწოდება, რადგან B და τ იტერაციის ნომერზე არ არის დამოკიდებული. იმისათვის, რომ შებრუნებული B^{-1} ოპერატორი არსებობდეს, საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ B იყოს დადებითი. ვთქვათ $B=D+\omega A^{-1}$. ვინაიდან $A=A^{*}>0$, მაშინ $(A^{-1}y,y)=$ $=(A^{+}y,y)$, $(A^{+})^{*}=A^{-1}$ და $(Ay,y)=(Dy,y)+2(A^{-1}y,y)$, ე. ი.

$(A^- y, y) = \frac{1}{2}((A - D)y, y)$. ჩავსვამთ რა ამ გამოსახულებას ფორმულაში $(By, y) = (Dy, y) + \omega(A^- y, y)$, ვიპოვით

$$(By, y) = \left(1 - \frac{1}{2}\omega\right)(Dy, y) + \omega(Ay, y) > 0,$$

თუ $0 < \omega < 2$.

$z_k = y_k - u$ ცდომილებისათვის ვღებულობთ ერთგვაროვან განტოლებას

$$B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,\ z_0 = y_0 - u. \tag{15}$$

თეორემა 1. ვთქვათ, A თვითშეუღლებული, დადებითი ოპერატორია და შესრულებულია პირობა

$$B > \frac{\tau}{2}A. \tag{16}$$

მაშინ (14) იტერაციული მეთოდი კრებადია H_A-ში ე. ი.

$$\|z\|_A = \|y_k - u\|_A \to 0,\ \text{როცა}\ k \to \infty.$$

დამტკიცება. ჩვენ დაგვეჭირდება ენერგეტიკული იგივეობა

$$2\tau\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau}, \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau}\right) + \|z_{k+1}\|_A^2 = \|z_k\|_A^2, \tag{17}$$

სადაც $\|z_k\|_A^2 = (Az, z)$. თავდაპირველად (15) განტოლება გარდავქმნათ სახემდე

$$\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + \frac{1}{2}A(z_k + z_{k+1}) = 0, \tag{18}$$

რისთვისაც ჩავსვათ $z_k = \frac{1}{2}(z_{k+1} + z_k) - \frac{\tau}{2}\frac{(z_{k+1} - z_k)}{\tau}$. თუ გავამრავლებთ (18)-ს სკალარულად $2\tau\left(\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau}\right) = 2(z_{k+1} - z_k)$ გა-

მოსახულებაზე და გავითვალისწინებთ, რომ $(Az_{k+1},z_k)=(z_{k+1},Az_k)$, რადგან $A=A^*$ და $(A(z_k+z_{k+1}), z_{k-1}-z_k)=(Az_{k+1}, z_{k+1})-(Az_k,z_k)+$ $+(Az_k, z_{k+1})-(Az_{k-1},z_k)=(Az_{k+1}, z_{k+1})-(Az_k, z_k)$, მივიღებთ (17)-ს.

ვთქვათ, შესრულებულია $B>\tau A/2$ პირობა, მაშინ (17) ტოლობის მარცხენა მხარეში პირველი შესაკრები არაუარყოფითია და $\|z_{k+1}\|_A^2\le\|z_k\|_A^2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $0\le\|z_{k+1}\|_A\le$ $\le\|z_k\|_A\le\cdots\le\|z_0\|_A$ ე. ი. $\{\|z_k\|_A\}$ მიმდევრობა არაზრდადია და ქვემოდან ნულით არის შემოსაზღვრული. ამიტომ ვეიერშტრასის თეორემის ძალით $\{\|z_k\|_A\}$ იკრიბება, როცა $k\to\infty$. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k\|_A=0$.

$$P=B-\frac{\tau}{2}A \text{ ოპერატორი დადებითია, ხოლო } P_0=B_0-\frac{\tau}{2}A=$$

$=\dfrac{1}{2}(P+P^*)$ დადებითად განსაზღვრული, ე. ი. მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\delta>0$ (იხ. თავი 1, §4), რომ

$$(Py, y)=(P_0y, y)\ge\delta\|y\|^2 \text{ ყველა } y\text{-სთვის}, y\in H.$$

ამიტომ (17) იგივეობიდან ვღებულობთ უტოლობას

$$\frac{2\delta}{\tau}\|z_{k+1}-z_k\|^2+\|z_{k+1}\|_A^2\le\|z_k\|_A^2, \tag{*}$$

$\{\|z_k\|_A\}$ მიმდევრობის კრებადობის გამო აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს

$$\lim_{k\to\infty}\|z_{k+1}-z_k\|=0. \tag{19}$$

შემდეგ, (15) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$Az_k=-\frac{1}{\tau}B(z_{k+1}-z_k),\quad z_k=-\frac{1}{\tau}A^{-1}B(z_{k+1}-z_k),$$

$$(Az_k,z_k)=\frac{1}{\tau^2}(A^{-1}B(z_{k+1}-z_k),B(z_{k+1}-z_k)), \tag{**}$$

$$\|z_k\|_A^2\le\frac{1}{\tau^2}\|A^{-1}\|\|B\|^2\|z_{k+1}-z_k\|^2.$$

აქედან და (19)-დან ვასკვნით, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k\|_A = 0$.

შენიშვნა. (*) და (**) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (14) იტერაციული მეთოდი კრებადია (16) პირობებში გეომეტრიული პროგრესის სიჩქარით, $\|z_{k+1}\|_A^2 \le \rho^2\|z_k\|_A^2$, სადაც $\rho^2 = 1 - \dfrac{2\delta\tau}{\|A^{-1}\|\|B\|^2} < 1$.

გამოვიყენოთ თეორემა 1. 2-4 პუნქტებში მოყვანილი იტერაციული მეთოდების კრებადობის დასამტკიცებლად.

მარტივი იტერაციის მეთოდი, $B = E$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $E \ge \dfrac{1}{\|A\|}A$, გვექნება,

$$B - \frac{\tau}{2}A = E - \frac{\tau}{2}A \ge \left(\frac{1}{\|A\|} - \frac{\tau}{2}\right)A > 0.$$

როცა $\dfrac{1}{\|A\|} - \dfrac{\tau}{2} > 0$. მარტივი იტერაციის მეთოდი კრებადია τ-ს ყველა მნიშვნელობებისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\tau < 2/\|A\|$.

ზეიდელის მეთოდი, $B = D + A^{-1}$, $\tau = 1$. ამ შემთხვევაში

$$B - \frac{1}{2}A = D + A^- - \frac{1}{2}(A^- + A^+ + D) = \frac{D}{2} + \frac{1}{2}(A^- + A^+),$$

$$\left(\left(B - \frac{1}{2}A\right)y, y\right) = \frac{1}{2}(Dy, y) + \frac{1}{2}((A^+ - A^-)y, y) = \frac{1}{2}(Dy, y) > 0,$$

თუ $D > 0$.

შენიშვნა. $D > 0$ უტოლობა გამომდინარეობს $A > 0$ პირობიდან. მართლაც, ვთქვათ, $A > 0$ და $\xi = (\xi^1, 0, \ldots, 0)$; მაშინ $(A\xi, \xi) = (D\xi, \xi) = a_{11}(\xi^1)^2 > 0$, ე. ი. $a_{11} > 0$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $a_{ii} > 0$ და, აქედან გამომდინარე, $D > 0$. ამგვარად, ზე-

დელის მეთოდი ყოველთვის იკრიბება, თუ A თვითშეუღლებული, დადებითი ოპერატორია.

კრებადობის სიჩქარის შეფასება რომ მივიღოთ, საჭიროა უფრო ძლიერი დაშვებები გავაკეთოთ. მოვიყვანოთ ერთ-ერთი თეორემა.

თეორემა 2. ზეიდელის მეთოდი იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით მნიშვნელობით $q < 1$, თუ $A = (a_{ij}) = A^{*} > 0$ და

$$\sum_{\substack{j \neq i}}^{1 \div N} |a_{ij}| \leq q|a_{ii}|,\ i = 1,2,\ldots,N,\ q < 1. \tag{20}$$

მართლაც, $z_k = y_k - u$ ცდომილებისათვის გვაქვს

$$a_{ii} z_{k+1}^{(i)} = -\sum_{j<i} a_{ij} z_{k+1}^{(j)} - \sum_{j>i} a_{ij} z_k^{(j)},$$

$$|a_{ii}||z_{k+1}^{(i)}| \leq \sum_{j<i} |a_{ij}||z_{k+1}^{(j)}| + \sum_{j>i} |a_{ij}||z_k^{(j)}|.$$

ვთქვათ, $\max|z_{k+1}^{(i)}|$ მიიღწევა რომელიღაც $i = i_0$-სთვის, ისე რომ

$$\|z_{k+1}\|_C = |z_{k+1}^{(i_0)}|, \quad |a_{i_0 i_0}| \cdot \|z_{k+1}\|_C \leq \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| \cdot \|z_{k+1}\|_C + \sum_{j>i_0} |a_{i_0 j}| \cdot \|z_k\|_C,$$

$$\|z_{k+1}\|_C \leq \left[\sum_{j>i_0} |a_{i_0 j}| \Bigg/ \left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| \right) \right] \|z_k\|_C.$$

(20) პირობის თანახმად გვაქვს

$$\sum_{j>i_0} |a_{i_0 j}| \leq q|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| < q\left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| \right),$$

და, აქედან გამომდინარე,

$$\|z_{k+1}\|_C \leq q\|z_k\|_C \leq q^{k+1}\|z_0\|_C,$$

რისი დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

(20) პირობა ნიშნავს, რომ $A=(a_{ij})$ არის მატრიცა ჭარბი დიაგონალური ელემენტებით.

ზედა რელაქსაციის მეთოდი. $B=D+\omega A^{-}$, $\tau=\omega$. ვიპოვოთ სხვაობა

$$B-\frac{\tau}{2}A=D+\omega A^{-}-\frac{\omega}{2}(A^{-}+A^{+}+D)=\left(1-\frac{\omega}{2}\right)D+\frac{\omega}{2}(A^{-}-A^{+})$$

და გამოვთვალოთ

$$\left(\left(B-\frac{\tau}{2}A\right)y,y\right)=\left(1-\frac{\omega}{2}\right)(Dy,y)>0\text{, როცა } 0<\omega<2.$$

ამრიგად, ზედა რელაქსაციის მეთოდი კრებადია ω-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $\omega\in(0,2)$, თუ $A=A^{*}>0$.

6. არაცხადი მარტივი იტერაციის მეთოდის კრებადობის სიჩქარე. იტერაციების მხოლოდ კრებადობის ფაქტი საკმარისი არ არის იმისათვის, რომ ამ მეთოდის ვარგისიანობაზე ვიმსჯელოთ. საჭიროა ინფორმაცია მეთოდის კრებადობის სიჩქარის შესახებ, ე. ი. ფაქტიურად იტერაციათა $n=n_0(\varepsilon)$ რიცხვის შესახებ, რომელიც საკმარისია ამოცანის ამოხსნის საპოვნელად მოცემული $\varepsilon>0$ სიზუსტით. იტერაციათა რიცხვი $n_0(\varepsilon)$ დამოკიდებულია τ პარამეტრზე. იგი საჭიროა შეირჩეს იტერაციათა რიცხვის $n=n(\varepsilon)$ მინიმუმის პირობიდან, რომლის დროსაც სრულდება პირობა $\|y_n-u\|_D\le\varepsilon\|y_0-u\|_D$, სადაც D – რაიმე ოპერატორია, $D=D^{*}>0$.

ჩვენ განვიხილავთ არაცხად სტაციონარულ სქემას (მარტივი იტერაციის არაცხადი სქემა):

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}+Ay_k=f\text{, } k=0,1,\ldots,\text{ ყველა } y_0\text{-სთვის, } y_0\in H, \quad (21)$$

სადაც A და B თვითშეუღლებული, დადებითი ოპერატორებია.

ზეიდელისა და ზედა რელაქსაციის მეთოდები სქემათა ამ ოჯახს არ ეკუთვნის, რადგანაც მათთვის B ოპერატორი თვითშეუღლებული არ არის.

$\omega_k = B^{-1}r_k$ შესწორებისათვის, სადაც $r_k = Ay_k - f$ – შეუსაბამობაა, ძალაშია ერთგვაროვანი განტოლება (ისევე, როგორც $z_k = y_k - u$ ცდომილებისათვის)

$$B\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\tau} + A\omega_k = 0\,,\ k = 0,1,\ldots,\ \omega_0 = B^{-1}(Ay_0 - f), \quad (22)$$

მართლაც, (21)-დან ვპოულობთ

$$y_{k+1} = y_k - \tau B^{-1}(Ay_k - f) = y_k - \tau\omega_k,$$

$$Ay_{k+1} - f = Ay_k - f - \tau A\omega_k, \qquad r_{k+1} = r_k - \tau A\omega_k.$$

რადგანაც $r_k = B(B^{-1}r_k) = B\omega_k$, აქედან გამომდინარეობს (22).

ჩავთვალოთ, რომ შესრულებულია ოპერატორული უტოლობები

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B,\ \ \gamma_1 > 0,\ \ \gamma_2 \ge \gamma_1 > 0, \quad (23)$$

ანუ

$$\gamma_1(Bx, x) \le (Ax, x) \le \gamma_2(Bx, x) \quad \text{ყველა } x \in H\text{-თვის}, \quad (24)$$

სადაც γ_1 და γ_2 მუდმივები ცნობილია.

თეორემა 3. ვთქვათ, შესრულებულია (23) და (24) პირობები, მაშინ (21) მეთოდით იტერაციათა მინიმალური რიცხვი მაშინ მიიღწევა, როცა

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (25)$$

ამასთან სრულდება უტოლობა

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le \rho_0^n\|Ay_0 - f\|_{B^{-1}},\ n = 1,2,\ldots \quad (26)$$

$$\rho_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi), \qquad \xi = \gamma_1/\gamma_2. \quad (27)$$

დამტკიცება. (22) ამოცანის ამონახსნისათვის ვისარგებლოთ შემდეგი შეფასებით (შეფასების დამტკიცება მოყვანილია V თავში).

$$\|\omega_n\|_B \le \rho^n\|\omega_0\|_B, \text{ როცა } \tau \le \tau_0, \quad (28)$$

სადაც $\rho = 1 - \tau\gamma_1$. ρ-ს მინიმუმი (რომლის დროსაც იტერაციათა რიცხვი მინიმალურია) მიიღწევა, როცა $\tau = \tau_0$: $\rho \geq \rho_0 = 1 - \tau_0\gamma_1 = (1-\xi)/(1+\xi)$. გასათვალისწინებელი დარჩა, რომ $\|\omega_n\|_B = \|B^{-1}r_n\|_B = \|r_n\|_{B^{-1}}$. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ მოვითხოვთ, რომ სრულდებოდეს პირობა $\rho_0^n \leq \varepsilon$, ანუ $(1/\rho_0)^n \geq 1/\varepsilon$, იტერაციის რიცხვისათვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას

$$n \geq \ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\rho_0). \tag{29}$$

შენიშვნა. $\varphi(\xi) = \ln(1+\xi)/(1-\xi) - 2\xi$ ფუნქცია დადებითია ყველა ξ-სთვის, $0 < \xi < 1$, რადგან $\varphi'(\xi) = 2\xi^2/(1-\xi^2) > 0$, $\varphi(0) = 0$, ამიტომ $1/\ln(1/\rho_0) < 1/(2\xi)$ და (29) პირობა შესრულებულია, თუ

$$n \geq n_0(\varepsilon) = (1/(2\xi))\ln 1/\varepsilon, \qquad \xi = \gamma_1/\gamma_2, \tag{30}$$

($n_0(\varepsilon)$ საზოგადოდ, არამთელია). (30) პირობა შეფასებისათვის უფრო მოხერხებულია.

შეფასება $\rho_0^n \leq \varepsilon$, ცხადია, შესრულდება, თუ $n_0(\varepsilon) \leq n < n_0(\varepsilon)+1$, ამიტომ n-ის როლში საკმარისია ავიღოთ $n_0(\varepsilon)+1$ რიცხვის მთელი ნაწილი.

7. მოდელური ამოცანა. სხვადასხვა იტერაციული მეთოდების შედარება მოვახდინოთ შემდეგ ეტალონურ ანუ მოდელურ ამოცანაზე

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -\tilde{f}_i, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$
$$v_0 = \mu_1, \quad v_N = \mu_2, \quad h = 1/N, \tag{31}$$

რომელიც წარმოადგენს სხვაობიან სქემას შემდეგი სასაზღვრო ამოცანისათვის

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\tilde{f}(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

განტოლებათა სისტემა ჯერ მატრიცული სახით ჩავწეროთ:

$$Av = f, \tag{32}$$

სადაც $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(N-1)})$ არის $N-1$ განზომილებიანი ვექტორი და $(N-1) \times (N-1)$ რიგის სამდიაგონალური A მატრიცა:

$$A = -\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(32) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს კომპონენტები $f_i = \tilde{f}_i$, როცა $i = 2,3,\ldots,N-2$, $f_1 = \tilde{f}_1 + \mu_1 / h^2$, $f_{N-1} = \tilde{f}_{N-1} + \mu_2 / h^2$. A მატრიცას შესაბამება A ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს $\omega_h = \{x_i = ih,\ 0 < i < N\}$ ბადის შიგა კვანძებში განსაზღვრულ ბადურ ფუნქციათა $H = \Omega_{N-1}$ სივრცეში. ვთქვათ, $\Lambda v = v_{\bar{x}x}$, $\overset{\circ}{v}$ – $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ 0 \le i \le N\}$ ბადეზე განსაზღვრული ბადური ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოლი ხდება საზღვარზე, როცა $i = 0, N$. მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$Av = -\Lambda \overset{\circ}{v}, \quad v \in \Omega_{N-1} = H, \quad \overset{\circ}{v} \in \overset{\circ}{\Omega}_{N+1}.$$

$H = \Omega_{N-1}$-ში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$$

და ვისარგებლოთ I თავის §4-ის (17) და (56) ფორმულებით, რომელთა ძალით

$$(Av, w) = (v, Aw), \text{ ე. ი. } A = A^*,$$

$$(Av, v) \ge \delta \|v\|^2, \quad \delta = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \quad A \ge \delta E.$$

შემდგომ, გვაქვს

$$\|A\| = \Delta = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}.$$

შევაფასოთ იტერაციათა რიცხვი მარტივი იტერაციის ცხადი სქემისათვის მოდელური ამოცანის შემთხვევაში. გვაქვს $B = E$, $\delta E \le A \le \Delta E$, ე. ი.

$$\gamma_1 = \delta, \quad \gamma_2 = \Delta, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \mathrm{tg}^2\frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}.$$

იტერაციათა რაოდენობისათვის გვექნება

$$n(\varepsilon) \ge n_0(\varepsilon) = \frac{\ln 1/\varepsilon}{2\xi} \approx \frac{2}{10h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

დავასახელოთ მნიშვნელობა $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} \approx e^{-10}$, მაშინ $n_0(\varepsilon) \approx$ $\approx \frac{2}{h^2} = 2N^2$. კერძოდ, იტერაციათა რიცხვი

$$n_0(\varepsilon) \approx 200 \text{ როცა } N = 10,$$

$$n_0(\varepsilon) \approx 20000 \text{ როცა } N = 100.$$

მარტივი იტერაციის მეთოდი ძალიან არის დამოკიდებული განტოლებათა N რიცხვზე $n_0(\varepsilon) \approx N^2$. ქვემოთ მოყვანილი იქნება მეთოდები (იხ. §4, §5), რომელთათვისაც n-ის დამოკიდებულება N-ზე შედარებით სუსტია ($n_0(\varepsilon) \approx N$ და $n_0(\varepsilon) \approx \sqrt{N}$).

(31) ამოცანა ტიპიურია, რადგანაც ანალოგიური სხვაობიანი განტოლება ახდენს ლაპლასის განტოლებას მოდელირების ორ-განზომილებიან და სამგანზომილებიან შემთხვევაში, ხოლო იტერ-აციათა რიცხვი პრაქტიკულად დამოკიდებული არ არის განზომი-ლებათა რიცხვზე (დამოკიდებულია მხოლოდ h-ზე).

8. სამშრიანი სქემა. თუ y_{k+1} გამოითვლება წინა ორი იტერაციის, y_k და y_{k-1} საშუალებით, მაშინ იტერაციულ მეთოდს ორბიჯიანს (ანუ სამშრიანს) უწოდებენ. მოვიყვანოთ სამშრიანი

იტერაციული სქემის მაგალითი. ცხადი სამშრიანი სქემა მუდმივი პარამეტრებით, ჩვეულებრივ, ჩაიწერება სახით

$$y_{k+1} = (1+\alpha)(E-\tau_0 A)y_k - \alpha y_{k-1} + (1+\alpha)\tau_0 f, \quad k = 1,2,\ldots \tag{33}$$

პირველი იტერაცია გამოითვლება მარტივი იტერაციის ცხადი მეთოდით:

$$y_1 = (E-\tau_0 A)y_0 + \tau_0 f \quad \text{ყველა } y_0\text{-თვის}, \ y_0 \in H, \tag{34}$$

სადაც

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \quad \alpha = \rho_1^2, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \tag{35}$$

$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ – არის $A = A^*$ ოპერატორის სპექტრის საზღვრები:

$$\gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (33), (34) მეთოდისათვის იტერაციათა რიცხვი მოიძებნება პირობიდან

$$q_n = \rho_1^n\left(1+\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}n\right) \le \varepsilon .$$

აქედან ჩანს, რომ

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{c_0}{2\sqrt{\xi}} \ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad 1 < c_0 < 2 . \tag{36}$$

(31) მოდელური ამოცანისათვის $\sqrt{\xi} \approx \pi h/2$ და

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{c_0}{\pi h}\ln\frac{1}{\varepsilon} \approx c_0\frac{0,32}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon} \approx c_0 \cdot 3,2N, \text{ როცა } \varepsilon \approx e^{-10}.$$

იტერაციათა რიცხვი:

$$n_0(\varepsilon) \approx 32 \div 60 \text{ როცა } N = 10,$$

$$n_0(\varepsilon) \approx 320 \div 620 \text{ როცა } N = 100,$$

ე. ი. გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე მარტივი იტერაციისათვის.

არაცხად სამშრიან სქემას აქვს სახე:

$$By_{k+1} = (1+\alpha)(B-\tau_0 A)y_k - \alpha By_{k-1} + (1+\alpha)\tau_0 f, \ k = 1,2,\ldots,$$

$$By_1 = By_0 - \tau_0 Ay_0 + \tau_0 f \quad \text{ყველა } y_0\text{-სთვის, } y_0 \in H.$$

თუ $B = B^* > 0$, (23), (24) უტოლობები სრულდება და α, τ_0 გამოითვლება (35) ფორმულებით, მაშინ იტერაციათა რიცხვის (36) შეფასება ამ შემთხვევაშიც სამართლიანი იქნება.

§4. ორშრიანი იტერაციული სქემა ჩებიშევის პარამეტრებით

1. ამოცანის დასმა. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$Au = f, \quad A: H \to H. \tag{1}$$

განვიხილოთ იტერაციული სქემა ცვლადი პარამეტრებით $\{\tau_k\}$:

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f\,,\ k = 0,1,2,\ldots, \text{ ყველა } y_0\text{-სთვის, } y_0 \in H. \tag{2}$$

ერთგვაროვან განტოლებას

$$B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0\,,\ k = 0,1,2,\ldots,\ z_0 = y_0 - u, \tag{3}$$

აკმაყოფილებს არა მხოლოდ $z_k = y_k - u$ ცდომილება, არამედ $\omega_k = B^{-1}(Ay_k - f)$ $(k = 0,1,\ldots)$ შესწორებაც $\omega_0 = B^{-1}(Ay_0 - f)$ საწყისი პირობით. იტერაციის დამთავრების პირობას აქვს სახე

$$\|z_n\|_D \le \varepsilon\|z_0\|_D, \text{ ან } \|\omega_n\|_D \le \varepsilon\|\omega_0\|_D, \tag{4}$$

(3)-დან ჩანს, რომ სადაც D.– დადებითი თვითშეუღლებულის ოპერატორია

$$z_{k+1} = S_{k+1}z_k, \qquad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}B^{-1}A, \tag{5}$$

სადაც S_{k+1} არის k შრიდან $k+1$-ზე გადასვლის ოპერატორი. გამოვრიცხავთ რა $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_1$-ს ვიპოვით:

$$z_n = T_n z_0,\ T_n = S_n S_{n-1} \ldots S_2 S_1, \text{ როცა } k = n - 1,$$

სადაც T_n არის (3) სქემის ამომხსნელი ოპერატორი. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\|z_n\|_D \le q_n\|z_0\|_D, \quad q_n = \|T_n\|_D. \tag{6}$$

(4) იტერაციათა დამთავრების პირობა შესრულებულია, თუ

$$q_n = \|T_n\|_D \le \varepsilon. \tag{7}$$

იტერაციათა $n = n(\varepsilon)$ რიცხვის შეფასებისათვის საჭიროა მივიღოთ (7) უტოლობა.

განვიხილოთ (2) ცხადი სქემა

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f,\ k = 0,1,2,..., \tag{8}$$

ამასთან, მოცემულია ნებისმიერი $y_0 \in H$. $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ პარამეტრები შევარჩიოთ $\min n(\varepsilon)$ პირობიდან. ამასთან ჩავთვალოთ, რომ

$$A = A^* > 0, \quad \gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0.$$

$r_k = Ay_k - f$ შეუსაბამობისათვის ადგილი აქვს ერთგვაროვან განტოლებას

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{\tau_{k+1}} + Ar_k = 0,\ k = 0,1,2,...,\ r_0 = Ay_0 - f,$$

ანუ

$$r_{k+1} = S_{k+1}r_k, \qquad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}A.$$

აქედან ვიპოვით

$$r_n = T_n r_0, \qquad T_n = S_1 S_2 ... S_n$$

ამომხსნელი T_n ოპერატორი არის A-ს მიმართ n ხარისხის პოლინომი:

$$T_n = P_n(A) = (E - \tau_1 A)(E - \tau_2 A)...(E - \tau_n A)$$

კოეფიციენტებით, რომლებიც მხოლოდ $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ პარამეტრებზეა დამოკიდებული.

$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$-ის საპოვნელად ვღებულობთ შეფასებას

$$\|r_n\| \le \|P_n(A)\|\ \|r_0\|.$$

უნდა ვიპოვოთ ისეთი $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ პარამეტრები, რომლებისთვისაც $\|P_n(A)\|$ მინიმალურია და შევაფასოთ ეს ნორმა γ_1 და γ_2

მუდმივებით. მოვიყვანოთ ამ ამოცანის ამოხსნა დამტკიცების გარეშე. აღვნიშნოთ $\mathfrak{R}_n = \left\{ -\cos\frac{2i-1}{2n}\pi, \quad i = 1,2,\dots,n \right\}$ სიმბოლოთი $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ჩებიშევის პოლინომის ნულების სიმრავლე $-1 \le x \le 1$ მონაკვეთზე, ხოლო $\{\mu_k\}$-თი ამ ნულების ნებისმიერი მიმდევრობა, $\mu_k \in \mathfrak{R}_n$. იტერაციათა $n(\varepsilon)$ რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის მიიღწევა

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0\mu_k}, \quad k = 1,2,\dots,n,$$
$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{9}$$

ამასთან სრულდება შეფასება

$$\|Ay_k - f\| \le q_n \|Ay_0 - f\|, \quad q_n = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}}, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}. \tag{10}$$

(8) სქემას (9) საიტერაციო პარამეტრებით ჩებიშევის იტერაციული სქემა ეწოდება.

მოთხოვნა $q_n \le \varepsilon$ ანუ $2\rho_1^n \le \varepsilon(1+\rho_1^{2n})$ შესრულებულია, თუ $\rho_1^n \le \varepsilon/2$, ანუ

$$n(\varepsilon) \ge \ln\frac{2}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{\rho_1}. \tag{11}$$

შევნიშნოთ (§3, პ.6), რომ $\ln\frac{1}{\rho_1} = \ln\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} > 2\sqrt{\xi}$, და შევცვალოთ (11) უფრო ძლიერი მოთხოვნით:

$$n(\varepsilon) > n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}\ln\frac{2}{\varepsilon}, \tag{12}$$

რომელიც მოხერხებულია შესამოწმებლად. (12)-დან, ცხადია, გამომდინარეობს (10) და $q_n \le \varepsilon$. შევადაროთ იტერაციათა რიცხვის

მიხედვით (8) სქემა პარამეტრების აღნიშნული ერთობლივი მარტივი იტერაციის მეთოდს მოდელური ამოცანის (§3) მაგალითზე. ამ შემთხვევაში $\xi \approx \pi^2 h^2/4$, $\sqrt{\xi} = \pi h / 2$.

მარტივი იტერაციის მეთოდისათვის

$$n_0^{(1)}(\varepsilon) \approx 2 / h^2 \text{ როცა } \varepsilon = 10^{-4}.$$

ჩებიშევის სქემისათვის

$$n_0^{(2)}(\varepsilon) \approx 3{,}4 / h \text{ როცა } \varepsilon = 10^{-4}.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$n_0^{(2)} \approx 34, \quad n_0^{(1)} \approx 200 \text{ როცა } N = 10,$$

$$n_0^{(2)} \approx 340, \quad n_0^{(1)} \approx 20000 \text{ როცა } N = 100.$$

2. პარამეტრების ოპტიმალური შერჩევის დასაბუთება. გადავიდეთ (10) შეფასების დამტკიცებაზე (9) საიტერაციო პარამეტრების შემთხვევაში. ჩვენთვის აუცილებელია ვიპოვოთ

$$\min_{\{\tau_k\}} \|P_n(A)\|.$$

პოლინომი

$$P_n(A) = \prod_{k=1}^{n} (E - \tau_k A) = c_0 + c_1 A + \cdots + c_k A^k + \cdots + c_n A^n,$$

$$c_0 = 1, \quad P_n(0) = 1$$

თვითშეუღლებულ ოპერატორს წარმოადგენს. ვთქვათ, ξ_s, λ_s $(s = 1,2,\ldots,N)$ – A ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციები და საკუთრივი რიცხვებია:

$$A\xi_s = \lambda_s \xi_s, \qquad (\xi_s, \xi_m) = \delta_{sm}, \quad s, m = 1,2,\ldots,N.$$

A^k ოპერატორს იგივე საკუთრივი ფუნქციები და λ_s^k საკუთრივი მნიშვნელობები გააჩნია:

$$A^k \xi_s = \lambda_s^k \xi_s. \tag{13}$$

გავამრავლებთ რა (13)-ს c_k-ზე და ავჯამავთ k-ს მიხედვით, $k = 0,1,\ldots,n$ ($c_0 = 1$), მივიღებთ

$$P_n(A)\xi_s = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \xi_s = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_s^k \xi_s = P_n(\lambda_s)\xi_s,$$

თუ შევადარებთ $P_n(A)\xi_s = \lambda_s(P_n(A))\xi_s$-ს, ვნახავთ, რომ

$$\lambda(P_n(A)) = P_n(\lambda(A)).$$

$P_n(A)$ ოპერატორული პოლინომის საკუთრივი მნიშვნელობები განისაზღვრება როგორც A ოპერატორის შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობების $P_n(\lambda)$ პოლინომი, ხოლო საკუთრივი ფუნქციები იგივეა, რაც A ოპერატორისა. $P_n(A)$ ოპერატორის თვითშეუღლებულობის გამო მისი ნორმა მოდულით უდიდესი საკუთრივი მნიშვნელობის ტოლია

$$\|P_n(A)\| = \max_{1\le s\le N} |P_n(\lambda_s)|.$$

A ოპერატორის λ_s საკუთრივი მნიშვნელობები ძევს $[\gamma_1, \gamma_2]$ მონაკვეთზე: $\gamma_1 \le \lambda_s \le \gamma_2$. ცხადია, რომ

$$\max_{1\le s\le N} |P_n(\lambda_s)| \le \max_{\gamma_1\le x\le \gamma_2} |P_n(x)|,$$

სადაც x უწყვეტი არგუმენტი იღებს ყველა მნიშვნელობას $[\gamma_1, \gamma_2]$ მონაკვეთზე და, აქედან გამომდინარე, $\|P_n(A)\|$-ის მინიმუმის ამოცანა დადის $P_n(x)$ პოლინომის მინიმაქსის ამოცანაზე, ე. ი. $\min_{\{\tau_k\}} \max_{\gamma_1\le x\le \gamma_2} |P_n(x)|$-ის მოძებნაზე.

$[\gamma_1,\gamma_2]$ მონაკვეთი ავსახოთ $[-1,1]$ მონაკვეთზე შემდეგნაირად

$$x = \frac{1}{2}[(\gamma_1 - \gamma_2)t + \gamma_2 + \gamma_1],\ -1 \le t \le 1, \text{ როცა } \gamma_1 \le x \le \gamma_2, \tag{14}$$

მაშინ $P_n(t) = \widetilde{P}_n(t)$. ნორმირების პირობა $P_n(0) = 1$ მიიღებს სახეს

$$\widetilde{P}_n(t_0) = 1, \quad t_0 = -1/\rho_0. \tag{15}$$

ამრიგად, უნდა ვიპოვოთ ისეთი პოლინომი, რომელიც $-1\leq t\leq 1$ მონაკვეთზე ყველაზე მცირედ არის გადახრილი ნულისაგან; ამასთან, $|\widetilde{P}_n(t)|$ უნდა იყოს მინიმალური ნორმირების დამატებითი (15) პირობის გათვალისწინებით. ასეთია შემდეგი პოლინომი

$$\widetilde{P}_n(t)=\frac{T_n(t)}{T_n(t_0)}, \tag{16}$$

სადაც $T_n(t)$ – ჩებიშევის პოლინომია,

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) \text{ როცა } |t| \leq 1, \tag{17}$$

$$T_n(t)=\frac{1}{2}\left[(t+\sqrt{t^2-1})^n+(t-\sqrt{t^2-1})^n\right] \text{ როცა } |t| > 1. \tag{18}$$

ჩებიშევის პოლინომს აქვს ნულები

$$t_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

$P_n(x)=(1-\tau_1 x)(1-\tau_2 x)\cdots(1-\tau_n x)$ პოლინომს აქვს ნულები $x_i=1/\tau_i$.

თუ მოვითხოვეთ, რომ ამ პოლინომების ფესვები ემთხვეოდეს და გავითვალისწინებთ x-სა და t-ს შორის (14) დამოკიდებულებას, მივიღებთ $2=[(\gamma_1+\gamma_2)+(\gamma_2-\gamma_1)t_i]\tau_i$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\tau_i = 2/[\gamma_2+\gamma_1+(\gamma_2-\gamma_1)t_i], \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

ე. ი. მივიღებთ (9) ფორმულას. შევნიშნოთ, რომ თუ $n=1$, მაშინ $\tau_i=\tau_0$ – მარტივი იტერაციის მეთოდის ოპტიმალური პარამეტრი იქნება.

ამრიგად, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ პარამეტრები განსაზღვრულია (9) ფორმულით, ახლა ვიპოვოთ

$$q_n=\max_{\gamma_1\leq x\leq\gamma_2}|P_n(x)|=\max_{-1\leq t\leq 1}|\widetilde{P}_n(t)|=\max_{-1\leq t\leq 1}\left|\frac{T_n(t)}{T_n(t_0)}\right|=\frac{1}{|T_n(t_0)|},$$

რადგანაც $\max\limits_{-1\le t\le 1}|T_n(t)|=1$. გვაქვს $|t_0|>1$; ამიტომ $|T_n(t_0)|$-სთვის ვი-სარგებლოდ (18) ფორმულით, როცა $t=t_0$. გარდავქმნათ მასში შე-მავალი გამოსახულებები (15)-ის გათვალისწინებით:

$$t_0 \pm \sqrt{t_0^2-1} = \frac{1}{\rho_0} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2}-1} = \frac{1}{\rho_0}\left[1 \pm \sqrt{1-\rho_0^2}\right] = \frac{1}{\rho_0}\left(1 \pm \frac{2\sqrt{\xi}}{1-\xi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho_0}(1 \pm \sqrt{\xi})^2 \Big/ (1-\xi) = (1 \pm \sqrt{\xi})^2/(1-\xi) = (1 \pm \sqrt{\xi})/(1 \mp \sqrt{\xi}),$$

ისე რომ $t_0 + \sqrt{t_0^2-1} = \dfrac{1}{\rho_1}$, $t_0 - \sqrt{t_0^2-1} = \rho_1$, და

$$|T_n(t_0)| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^n} + \rho_1^n\right) = \frac{1+\rho_1^{2n}}{2\rho_1^n} = \frac{1}{q_n}.$$

(10) შეფასება დამტკიცებულია.

3. გამოთვლითი მდგრადობა და პარამეტრების დალაგება. (8) იტერაციულ მეთოდს $\{\tau_k\}$ ჩებიშევის პარამეტრებით ზოგჯერ რიჩარდსონის მეთოდს უწოდებენ. ის დიდი ხანია ცნობილია, მაგრამ პრაქტიკულად თითქმის არ გამოიყენებოდა ბოლო დრომდე გამოთვლითი არამდგრადობის გამო. აეხსნათ ეს ცნება მაგალითზე. აეიღოთ განტოლებათა სისტემა

$$u(i-1) - 2u(i) + u(i+1) = 0,\ i = 1,2,\ldots,N-1,\ u(0) = 1,\ u(N) = 0. \quad (21)$$

მის ამოხსნას წარმოადგენს $u(i) = 1 - x_i$, $x_i = ih$, $h = 1/N$. ვეძებოთ ამ ამოცანის ამოხსნა ჩებიშევის იტერაციული მეთოდით, როცა $N = 20$. $n_0(\varepsilon)$-ის მნიშვნელობა შეგვეიძლია გამოვეთვალოთ. ის შეიძლება არამთელი იყოს. შევარჩიოთ უახლოესი მთელი რიცხვი $n \ge n_0$. მოცემული N და ε-სთვის $n(\varepsilon) = 64$. ვიცით რა, რომ

$$\gamma_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \gamma_2 = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2},$$

$$h = \frac{1}{N}, \quad \xi = \mathrm{tg}^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4} \approx 0{,}006\,,$$

τ_k შეიძლება გამოვთვალოთ (20) ფორმულით. საწყის მიახლოებად აიღება ფუნქცია

$$y_0^{(i)} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

აღმოჩნდა, რომ (8), (9) მეთოდისათვის არ არის სულერთი, როგორი მიმდევრობით აიღება ჩებიშევის პოლინომის μ_k ნულები. განვიხილოთ ნულების ნუმერაციით ორი ხერხი:

$$\alpha_1)\quad \mu_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad t_1 = \cos\frac{\pi}{2n}, \quad t_n = -\cos\frac{\pi}{2n},$$

$$\alpha_2)\quad \mu_k = -\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

გამოთვლების შედეგები მოყვანილია ცხრილში.

ცხრილი 1

k	ერთობლიობა α_1	k	ერთობლიობა α_2
	$\Delta_k = \max\limits_{x_i}\lvert y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i)\rvert$		$\Delta_k = \max\limits_{x_i}\lvert y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i)\rvert$
53	0,12	1	39,6
55	27	2	$2{,}6 \cdot 10^3$
57	$1{,}9 \cdot 10^4$	4	$8{,}2 \cdot 10^8$
59	$3{,}7 \cdot 10^7$	7	$3{,}3 \cdot 10^{11}$
60	$2{,}6 \cdot 10^9$	9	$1{,}2 \cdot 10^{14}$
61	$2{,}5 \cdot 10^{11}$	11	$1{,}9 \cdot 10^{16}$
62	$3{,}3 \cdot 10^{13}$	12	ავარიული შეჩერება
63	$5 \cdot 10^{15}$		
64	ავარიული შეჩერება		

N და n-ის უფრო მცირე მნიშვნელობებისათვის შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ y_k საშუალედო მნიშვნელობების გაზრდა არ მიგვიყვანს მანქანის ავარიულ გაჩერებამდე, მაგრამ ხდება დამრგვა-

ლების ცდომილებების დაგროვება და n იტერაციის შემდეგ იტერაციის დამთავრების პირობა $\|Ay_k - f\| \le \varepsilon \|Ay_0 - f\|$ არ შესრულდება.

გამოთვლითი პროცესის ამ ორ თავისებურებას – საშუალედო მნიშვნელობების ზრდას, რომელსაც მანქანის ავარიულ გაჩერებამდე მივყავართ და დამრგვალების ცდომილების დაგროვებას – ჩვენ ვახასიათებთ ერთი ტერმინით – გამოთვლითი არამდგრადობით. ჩებიშევის მეთოდის გამოთვლითი არამდგრადობის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ $S_{k+1} = E - \tau_{k+1}A$ გადასვლის ოპერატორის $\|S_{k+1}\|$ ნორმები ზოგიერთი იტერაციისათვის ერთზე მეტია, მაშინ როცა გამოთვლით პროცესში რეალური, ანუ დასაშვები რიცხვები ქვემოდან და ზემოდან შემოსაზღვრულია (არსებობს მანქანური ნული და მანქანური უსასრულობა) და გამოთვლების ყოველ ეტაპზე წარმოიშობა დამრგვალების ცდომილება.

გამოვთვალოთ $S_k = E - \tau_k A$ ოპერატორის ნორმა. რადგან $S_k^* = S_k$, მაშინ $\|S_{k+1}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(S_{k+1}x, x)|$. $\gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $(\tau_{k+1}\gamma_1 - 1)E \le \tau_{k+1}A - E \le (\tau_{k+1}\gamma_2 - 1)E$. თუ ჩავსვამთ აქ τ_{k+1}-ის გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ, რომ $1 - \tau_0\gamma_1 = \tau_0\gamma_2 - 1 = \rho_0$, მივიღებთ

$$-\frac{\rho_0(1-\mu_k)}{1+\rho_0\mu_k}E \le \tau_{k+1}A - E \le \frac{\rho_0(1+\mu_k)}{1+\rho_0\mu_k}E.$$

აქედან ვპოულობთ

$$\|S_{k+1}\| = \|\tau_{k+1}A - E\| = \begin{cases} \dfrac{\rho_0(1+\mu_k)}{1+\rho_0\mu_k}, & \text{როცა} \quad \mu_k > 0, \\[2ex] \dfrac{\rho_0(1-\mu_k)}{1+\rho_0\mu_k}, & \text{როცა} \quad \mu_k < 0, \end{cases}$$

ასე, რომ $\|S_{k+1}\| < 1$ ყველა $\mu_k > 0$ და $\|S_{k+1}\| > 1$, როცა $\mu_k < -(1-\rho_0)/(2\rho_0)$. რადგანაც

$$-\cos\frac{\pi}{2n} \le \mu_k \le -\cos\frac{2n-1}{2n}\pi = \cos\frac{\pi}{2n}, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

ამიტომ დიდი k ნომრებისათვის გვაქვს $\|S_k\| > 1$ და თუ მიმდევრობით ბევრი τ_k პარამეტრი გამოიყენება, რომელთათვისაც $\|S_k\| > 1$, ხდება დამრგვალების ცდომილების დაგროვება და იტერაციულ მიახლოებათა ზრდა, რასაც გამოთვლით არამდგრადობამდე მივყავართ.

ეს ეფექტი რომ შევასუსტოთ, ბუნებრივია რომ τ_k პარამეტრები, რომელთათვისაც $\|S_k\| > 1$, შევანაცვლოთ პარამეტრებით, რომელთათვისაც $\|S_k\| < 1$. სწორედ ამ მიმართულებით ხდება $\{\tau_k\}$ პარამეტრების ისეთი მიმდევრობის აგება, რომლისთვისაც იტერაციის კრებადობა მონოტონური ხასიათისაა და გამოთვლით არამდგრადობის ადგილი არა აქვს. არსებობს ჩებიშევის პოლინომის $t_i = -\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$ ნულების და ამით თვით $\{\tau_k\}$ პარამეტრების განლაგების ისეთი წესი, ნებისმიერი n-სთვის, რომლის დროსაც ადგილი აქვს გამოთვლით არამდგრადობას.

მოვიყვანოთ ეს წესი იმ შემთხვევისათვის, როცა n 2-ის ხარისხს წარმოადგენს, $n = 2^p$, $p > 0$ — მთელი რიცხვია*.
ამ წესით დალაგებული t_i ნულების სიმრავლე აღვნიშნოთ სიმბოლოთი

$$\mathfrak{R}^*_n = \left\{ -\cos\beta_i, \quad \beta_i = \frac{\pi}{2n}\theta_i^{(n)}, \quad i = 1,2,\ldots,n \right\}, \quad n = 2^p,$$

სადაც $\theta_i^{(n)}$ — $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ კენტი რიცხვებიდან ერთ-ერთია. ამოცანა დადის n კენტი რიცხვის სიმრავლის დალაგებაზე: $\theta_n = \{\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \ldots, \theta_n^{(n)}\}$. დაწყებული სიმრავლიდან $\theta_1 = \{1\}$, ავაგოთ სიმრავლე $\theta^*_n = \theta^*_{2^p}$ ფორმულებით

$$\theta_{2i-1}^{(2m)} = \theta_i^{(m)},$$

$$\theta_{2i}^{(2m)} = 4m - \theta_{2i-1}^{(2m)}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad m = 1,2,\ldots,2^{p-1},$$

---

* $\{\tau_k\}$ დალაგების წესი ნებისმიერი n-სათვის შეიძლება იხილოთ [6, 9]-ში.

თუ $\theta_i^{(m)}$ ცნობილია. $\{\tau_k^*\}$ პარამეტრების შესაბამის მიმდევრობას ვუწოდოთ მდგრადი ერთობლიობა. ვთქვათ, მაგალითად, $n=16=2^4$. მიმდევრობით ვიპოვოთ $\theta_1 = \{1\}$, $\theta_2 = \{1, 3\}$, $\theta_4 = \{1, 7, 3, 5\}$, $\theta_8 = \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}$, $\theta_{16} = \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}$. θ_m-დან θ_{2m}-ზე გადასვლისას საკმარისია ყოველი $\theta_{2i-1}^{(m)}$-ის შემდეგ ჩავსვათ $4m-\theta_{2i-1}^{(m)}$-ის ტოლი რიცხვი (ნუმერაცია შეესაბამება θ_m-ს). „მდგრადი" θ_n^* მიმდევრობა ამოცანაზე დამოკიდებული არ არის. იტერაციათა კრებადობას პარამეტრთა ამ $\{\tau_k^*\}$ ერთობლიობისათვის აქვს არამონოტონური ხასიათი, მაგრამ რხევები აქ დიდი არ არის და საბოლოო ჯამში ქრება.

მოვიყვანოთ გათვლის შედეგები (21) ამოცანისათვის (8), (9) სქემით $\{\tau_k^*\}$ პარამეტრთა მდგრადი ერთობლიობით:

k	1	4	8	16	24	32	48	50	62
Δ_k	39,6	4,7	1,1	0,2	0,1	0,04	$1{,}5\cdot10^{-3}$	$6{,}7\cdot10^{-3}$	$8{,}7\cdot10^{-5}$

4. არაცხადი სქემები. ზეიდელისა და ზედა რელაქსაციის მეთოდები უფრო სწრაფად კრებადია, ვიდრე მარტივი იტერაციის ცხადი მეთოდი. სწორედ ამითაა გამართლებული არაცხად სქემებზე გადასვლა. როგორ უნდა შევარჩიოთ B ოპერატორი? ძირითადია ზოგადი მოთხოვნა მოქმედებათა იმ $Q(\varepsilon)$ რიცხვის მინიმუმის შესახებ, რომელიც საჭიროა ამოხსნის $\varepsilon > 0$ სიზუსტით საპოვნელად. ეს დადის ორ მოთხოვნაზე: 1) იტერაციათა რიცხვის მინიმალურობაზე, რომელიც დამოკიდებულია როგორც B-ზე, ასევე $\{\tau_k\}$-ს შერჩევაზე; 2) მინიმალური იყოს მოქმედებათა რიცხვი, რომელიც საჭიროა $By_{k+1} = F_k$ განტოლების ამოსახსნელად (B ოპერატორის ეკონომიურობა). მაგალითად გამოდგება სამკუთხა ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება სამკუთხა მატრიცას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ცხადი სქემისათვის მიღებული შედეგები შეიძლება გადავიტანოთ არაცხადი სქემის შემთხვევაშიც. განვიხილოთ არაცხადი სქემა

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f\ ,\ k=0,1,\ldots,\ \text{ყველა}\ y_0\in H, \tag{22}$$

სადაც

$$A=A^*>0,\ B=B^*>0,\ \text{ და }\gamma_1B\le A\le\gamma_2B,\ \gamma_1>0. \tag{23}$$

თუ ავარჩევთ $\{\tau_k^*\}$ საიტერაციო პარამეტრებს (9) ფორმულებით და დავალაგებთ წინა პუნქტის მიხედვით, (22) ამოცანის ამოხსნისათვის მივიღებთ შეფასებას

$$\begin{gathered}\|Ay_n-f\|_{B^{-1}}\le q_n\|Ay_0-f\|_{B^{-1}},\quad q_n=\frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}},\\ \rho_1=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\quad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},\end{gathered} \tag{24}$$

სადაც γ_1 და γ_2 (23)-ში შემავალი რიცხვებია. იტერაციათა $n=n(\varepsilon)$ რიცხვისათვის სამართლიანია (11) და (12) შეფასებები. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, საკმარისია (22) ამოცანა დაეიყვანოთ ექვივალენტურ ამოცანამდე ცხადი სქემისათვის

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_{k+1}}+Cx_k=0\ ,\ k=0,1,\ldots,\ x_0=B^{1/2}\omega_0, \tag{25}$$

სადაც $x_k=B^{1/2}\omega_k$, $C=B^{-1/2}AB^{-1/2}$ – თვითშეუღლებული დადებითი ოპერატორია სპექტრის γ_1 და γ_2 საზღვრებით:

$$\gamma_1E\le C\le\gamma_2E. \tag{26}$$

მართლაც, ვინაიდან $B=B^*>0$, არსებობს $B^{1/2}=(B^{1/2})^*>0$. თუ ვიმოქმედებთ (22) განტოლებაზე $B^{-1/2}$ ოპერატორით, მივიღებთ (25)-ს $x_k=B^{1/2}\omega_k$-სთვის. მსჯელობის უკუსვლა ცხადია. რჩება (23) და (26) უტოლობათა ექვივალენტობის დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$\begin{gathered}J=((A-\gamma B)y,\ y)=(Ay,\ y)-\gamma(By,\ y)=\\ =(AB^{-1/2}(B^{1/2}y),\ B^{-1/2}(B^{1/2}y))-\gamma(B^{1/2}y,\ B^{1/2}y)=\end{gathered}$$

$$= (Cx, x) - \gamma(x, x) = ((C - \gamma E)x, x),$$

სადაც $x = B^{1/2}y$. ვინაიდან y (ე. ი. x-იც) ნებისმიერი ვექტორია H-დან,

$$J = ((A - \gamma B)y, y) = ((C - \gamma E)x, x) \qquad (27)$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $A - \gamma B$ და $C - \gamma E$ ოპერატორებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ. თუ, მაგალითად, $A - \gamma_1 B \geq 0$, მაშინ, როცა $\gamma = \gamma_1$ (27) ტოლობა გვაძლევს $C - \gamma_1 E \geq 0$ და ა. შ.

ცხადი სქემისათვის გვაქვს შეფასება $\|x_n\| \leq q_n \|x_0\|$. თუ ჩავსვამთ აქ $x_k = B^{1/2}\omega_k = B^{-1/2}r_k$, $r_k = Ay_k - f$, მივიღებთ (24) შეფასებას.

ზეიდელისა და ზედა რელაქსაციის მეთოდებისათვის $B \neq B^*$, ამიტომ ჩებიშევის პარამეტრთა ერთობლიობით სარგებლობა არ შეიძლება.

§5. მონაცვლეობით-სამკუთხა მეთოდი

1. **მონაცვლეობით-სამკუთხა მეთოდი.** განვიხილოთ არაცხადი იტერაციული სქემა

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \; k = 0,1,... \qquad (1)$$

თუ B ოპერატორი სასრული რაოდენობა ეკონომიური ოპერატორების ნამრავლია, მაშინ თვითონაც ეკონომიური იქნება. ასე მაგალითად, ეკონომიურია ოპერატორი $B = B_1B_2$, რომელიც სამკუთხა B_1 და B_2 ოპერატორების ნამრავლს წარმოადგენს.

განვიხილოთ ე. წ. მონაცვლეობით სამკუთხა მეთოდი – (1) მეთოდი, რომლისთვისაც B ოპერატორს აქვს სახე

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \qquad (2)$$

სადაც $D = D^* > 0$, $R_1^* = R_2$, $R_1 + R_2 = R$, $R = R^* > 0$, $\omega > 0$ – პარამეტრია.

ვაჩვენოთ, რომ B ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითია, ე. ი. (1) სქემა (2) ოპერატორით თავდაპირველ სქემათა (2)

ოჯახს (§3-დან) ეკუთვნის და შეიძლება ზოგადი თეორიის ყველა ადრე მიღებული შედეგით სარგებლობა. მართლაც,

$$(By, v) = ((D + \omega R_1)\, D^{-1}(D + \omega R_2)y, v) =$$
$$= ((D + \omega R_2)y, D^{-1}(D + \omega R_2)y, v) =$$
$$= (y, (D + \omega R_1)\, D^{-1}(D + \omega R_2)\, v)\,,$$

და, ამრიგად, $(By, v) = (y, Bv)$ ე. ი. $B = B^*$. შემდეგ ვპოულობთ $(By, y) = ((D + \omega R_2)y, D^{-1}(D + \omega R_2)y) = \|(D+\omega R_2)y\|^2_{D^{-1}} > 0$ ე. ი. $B = B^* > 0$.

R ოპერატორს შეესაბამება $R = (r_{ij})$ მატრიცა. R_1 და R_2 მატრიცების როლში შეიძლება გამოვიყენოთ ქვედა და ზედა სამკუთხა მატრიცები, ე. ი.

$$R_1 = (r^-_{ij}), \quad r^-_{ij} = \begin{cases} r_{ii}/2, & j = i, \\ r_{ij}, & j < i, \\ 0, & j > i; \end{cases}$$

$$R_2 = (r^+_{ij}), \quad r^+_{ij} = \begin{cases} r_{ii}/2, & j = i, \\ r_{ij}, & j > i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

თუ R – სიმეტრიული მატრიცაა, $r_{ji} = r_{ij}$, მაშინ R_1 და R_2 თვითშეუღლებულია $R_2 = R_1^*$.

$D = (d_{ij})$-ის როლში ავიღოთ დიაგონალური მატრიცა. მაშინ $D + \omega R_1$ – ქვედა სამკუთხა, ხოლო $D + \omega R_2$ – ზედა სამკუთხა მატრიცაა. ამგვარად, იტერაციული პროცესი დაიყვანება ქვედა და ზედა სამკუთხა მატრიცების მონაცვლეობით შებრუნებაზე. მართლაც, ყოველი იტერაციისთვის უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$By_{k+1} = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2)y_{k+1} = F_k, \tag{3}$$

სადაც

$$F_k = By_k - \tau_{k+1}Ay_k + \tau_{k+1}f.$$

თუ აღვნიშნავთ $D^{-1}(D+\omega R_2)y_{k+1}=\bar{y}_{k+1}$, მივიღებთ

$$(D+\omega R_1)\bar{y}_{k+1}=F_k, \quad (D+\omega R_2)y_{k+1}=D\bar{y}_{k+1}, \quad k=0,1,... \quad (4)$$

შევნიშნოთ, რომ $(R_1y, y)=(R_2y, y)=(Ry, y)/2$, ამის შედეგად ტოლობა

$$((D+\omega R_1)y,y)=(Dy,y)+\omega(R_1y,y)=$$

$$=\left(\left(D+\frac{\omega}{2}R\right)y,y\right)=((D+\omega R_2)y,y)>0,$$

რადგან $D>0$, $\omega>0$ და $R>0$.

აქედან გამომდინარეობს შებრუნებული ოპერატორების $(D+\omega R_1)^{-1}$. $(D+\omega R_2)^{-1}$ არსებობა, ე. ი. (4) ამოცანების ამოხსნადობა (იხ. თავი 1, §4, პ. 2).

2. ω პარამეტრის შერჩევა. იმისათვის, რომ ზოგადი თეორიით ვისარგებლოთ, საჭიროა ჯერ

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad (5)$$

უტოლობაში შემავალი γ_1 და γ_2 პარამეტრების პოვნა. ეს უტოლობა A და B ოპერატორების შემოსაზღვრულობისა და დადებითად განსაზღვრულობის გამო ყოველთვის სრულდება. დავიწყოთ $\omega>0$ პარამეტრის განსაზღვრით.

ლემა. ვთქვათ, B ოპერატორი განისაზღვრება (2) ფორმულით, სადაც

$$R_2^*=R_1, \quad R_1+R_2=R, \quad R=R^*>0$$

და R აკმაყოფილებს პირობებს

$$R\ge\delta D, \quad \delta>0, \quad R_1D^{-1}R_2\le\frac{\Delta}{4}R, \quad \Delta>0. \quad (6)$$

მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 B\le R\le\overset{\circ}{\gamma}_2 B, \quad \overset{\circ}{\gamma}_1(\omega)=\frac{\delta}{1+\omega\delta+0{,}25\omega^2\delta\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2(\omega)=\frac{1}{2\omega}. \quad (7)$$

$\xi(\omega) = \overset{\circ}{\gamma}_1(\omega) \big/ \overset{\circ}{\gamma}_2(\omega)$ შეფარდება აღწევს უდიდეს $\overset{\circ}{\xi} = \xi(\overset{\circ}{\omega})$ მნიშვნელობას, როცა

$$\omega = \overset{\circ}{\omega} = 2\big/\sqrt{\delta\Delta}\,; \tag{8}$$

ამასთან,

$$\overset{\circ}{\xi} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\eta})}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}. \tag{9}$$

დამტკიცება. (6) უტოლობები ნიშნავს, რომ

$$(Ry, y) \geq \delta(Dy, y), \quad (D^{-1}R_2 y, R_2 y) \leq \frac{\Delta}{4}(Ry, y),$$

ყოველი y-სთვის, $y \in H$.

გარდაქმნების შემდეგ

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2) = D - \omega(R_1 + R_2) + \omega^2 R_1 D^{-1} R_2 +$$
$$+ 2\omega(R_1 + R_2) = (D - \omega R_1)D^{-1}(D - \omega R_2) + 2\omega R.$$

მივიღებთ

$$(By, y) = (D^{-1}(D - \omega R_2)y, (D - \omega R_2)y) + 2\omega(Ry, y) =$$
$$= \|(D - \omega R_2)y\|^2_{D^{-1}} + 2\omega(Ry, y) \geq 2\omega(Ry, y),$$

ასე რომ

$$B \geq 2\omega R, \text{ ანუ } R \leq \frac{1}{2\omega}B, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{1}{2\omega}.$$

ახლა შევაფასოთ B ზემოდან. (6)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$B = D + \omega R + \omega^2 R_1 D^{-1} R_2 \leq \frac{1}{\delta}R + \omega R + \frac{\omega^2\Delta}{4}R \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left(1 + \omega R + \frac{\omega^2\delta\Delta}{4}\right)R, \quad R \geq \overset{\circ}{\gamma}_1 B, \quad \overset{\circ}{\gamma}_1 = \delta\left(1 + \omega\delta + \frac{\omega^2\delta\Delta}{4}\right)^{-1}$$

$Ry = f$ განტოლების ამოხსნისთვის საჭირო იტერაციების რაოდენობა დამოკიდებულია ფარდობაზე

$$\xi(\omega) = \overset{\circ}{\gamma}_1 \big/ \overset{\circ}{\gamma}_2 = 2\omega\delta\left(1 + \omega\delta + \omega^2\delta\Delta / 4\right)^{-1}.$$

ω შევარჩიოთ $\xi(\omega)$-ის მაქსიმუმის პირობიდან. თუ წარმოებულს $\xi'(\omega) = 2\delta\left(1 - \omega^2\delta\Delta / 4\right)\left(1 + \omega\delta + \omega^2\delta\Delta / 4\right)^{-2}$ გავუტოლებთ ნულს, ვიპოვით $\omega = \overset{\circ}{\omega} = 2\big/\sqrt{\delta\Delta}$; ამასთან $\xi''(\overset{\circ}{\omega}) < 0$. $\overset{\circ}{\omega}$ -ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ $\overset{\circ}{\gamma}_1$, $\overset{\circ}{\gamma}_2$, $\xi(\omega)$-ის ფორმულებში, მივიღებთ (9) ფორმულას. ლემა დამტკიცებულია.

3. კრებადობის სიჩქარე.

თეორემა. ვთქვათ, $A = A^* > 0$ ოპერატორი წარმოდგენილია $A = A_1 + A_2$ ჯამის სახით, $A_2 = A_1^*$, და სრულდება პირობები

$$A \geq \delta D, \quad A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\Delta}{4} A, \quad \delta > 0, \quad \Delta > 0. \tag{10}$$

მაშინ (1) მონაცვლეობით-სამკუთხა მეთოდისათვის, როცა

$$B = (D + \omega A_1)D^{-1}(D + \omega A_2), \quad D = D^* > 0, \tag{11}$$

$\omega = 2\big/\sqrt{\delta\Delta}$ პარამეტრითა და ჩებიშევის პარამეტრების ერთობლიობით

$$\tau_k^* = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k^*}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \tag{12}$$

სადაც

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \mu_k^* \in \overline{\mathfrak{R}}_n^*, \tag{13}$$

საკმარისია $n(\varepsilon)$ იტერაცია:

$$n_0(\varepsilon) \le n(\varepsilon) \le n_0(\varepsilon) + 1, \quad n_0(\varepsilon) < \ln\frac{2}{\varepsilon}\Big/(2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta})\,; \qquad (14)$$

ამასთან, სრულდება შეფასება

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le \varepsilon\|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}\,. \qquad (15)$$

დამტკიცება. ვისარგებლოთ წინა ლემით, ამასთან დავუშვათ, რომ $R = A$, $R_1 = A_1$, $R_2 = A_2$ და გამოვიყენოთ (24) შეფასება §4-დან:

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le q_n\|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}$$

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}}, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}.$$

$n = n(\varepsilon)$ იტერაციების რაოდენობისათვის §3-ში მიღებული იყო შეფასება $n_0(\varepsilon) \le n(\varepsilon) \le n_0(\varepsilon) + 1$, სადაც $n_0(\varepsilon) = \ln\frac{2}{\varepsilon}\Big/(2\sqrt{\xi})$. თუ აქ ჩავსვამთ $\xi = 2\sqrt{\eta}\big/(1+\sqrt{\eta})$, მივიღებთ (14)-ს.

4. მონაცვლეობით-სამკუთხა მეთოდის გამოყენების მაგალითი. განვიხილოთ მოდელური ამოცანა

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \qquad (16)$$

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0.$$

ვთქვათ, $H = \Omega_{N-1} - \omega_h$ ბადის შიგა $i = 1,2,\ldots,N-1$ კვანძებზე განსაზღვრული ბადური ფუნქციების სივრცეა. შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h\,.$$

$Ay = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x}$ ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრულია:

$$A \geq \delta E, \quad \delta = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}.$$

შემოვიღოთ ოპერატორები $Dy = y \quad (D = E)$ და

$$A_1 y = R_1 y = \frac{y_{\bar{x},i}}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2},$$

$$A_2 y = R_2 y = -\frac{y_{x,i}}{h} = -\frac{y_{i+1} - y_i}{h^2}, \quad A_1 + A_2 = A.$$

$(y_i)_k = y_k(i)$ იტერაციები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$(E + \omega A_1)(\bar{y}_i)_{k+1} = \left(\bar{y}_i + \omega\frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{h^2}\right)_{k+1} = F_k(i),$$

$$\bar{y}_{k+1}(i) = \frac{\omega \bar{y}_{k+1}(i-1) + h^2 F_k(i)}{h^2 + \omega},$$

$$(E + \omega A_2) y_{k+1}(i) = y_{k+1}(i) - \frac{\omega}{h^2}(y_{k+1}(i+1) - y_{k+1}(i)) = \bar{y}_{k+1}(i),$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y_{k+1}(i) = \frac{\omega y_{k+1}(i+1) + h^2 \bar{y}_{k+1}(i)}{\omega + h^2}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1.$$

$\bar{y}_{k+1}(i)$ მნიშვნელობები მოიძებნება მიმდევრობით, მარცხნიდან მარჯვნივ ($i-1$-დან i-კენ), ხოლო $y_{k+1}(i)$ – მარჯვნიდან მარცხნივ ($i+1$-დან i-სკენ); ამასთან ვითვალისწინებთ სასაზღვრო პირობებს

$$\bar{y}_{k+1}(0) = 0, \quad y_{k+1}(N) = 0.$$

ასეთი სახის ფორმულებს უწოდებენ მსრბოლი თვლის ფორმულებს.

$y_{\bar{x},i+1} = y_{x,i}$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $A_1^* = A_2$. მართლაც, რადგან $v_1 = v_0 + h v_{\bar{x},1} = h v_{\bar{x},1}$, ამიტომ

$$(A_2y, v) = -\sum_{i=1}^{N-1} y_{x,i} v_i = -y_1 v_1 \frac{1}{h} - \sum_{i=1}^{N-1} y_{i+1} v_{x,i} =$$

$$= y_1 x_{\bar{x},1} + \sum_{i=2}^{N} y_i v_{\bar{x},i} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{\bar{x},i} = h \sum_{i=1}^{N-1} y_i \frac{v_{\bar{x},i}}{h} = (y, A_1 v),$$

ე. ი. $A_1 = A_2^*$.

გამოვითვალოთ Δ მუდმივი:

$$(A_1A_2y, y) = (A_2y, A_2y) = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N-1}(y_{x,i})^2 h = \frac{1}{h^2}\sum_{i=2}^{N}(\bar{y}_{\bar{x},i})^2 h \le$$

$$\le \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N} h(y_{\bar{x},i})^2 = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N-1} h(Ay)_i y_i = \frac{1}{h^2}(Ay, y).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\Delta = 4/h^2$. ამგვარად,

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta} = \sin^2\frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}, \quad \sqrt{\eta} \approx \frac{\pi h}{2},$$

$$\xi = 2\sqrt{\eta}/(1+\sqrt{\eta}) \approx 2\sqrt{\eta} \approx \pi h, \quad \sqrt{\xi} = \sqrt{\pi h},$$

მაშასადამე,

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \ln\frac{2}{\varepsilon}.$$

თუ $\varepsilon = 10^{-4}$, მაშინ $n_0(\varepsilon) \approx 3/\sqrt{h}$.

შედეგი ასეთია:

$$n_0(\varepsilon) \approx 10 \text{ როცა } h = 1/10 \quad (N = 10),$$

$$n_0(\varepsilon) \approx 30 \text{ როცა } h = 1/100 \quad (N = 100).$$

გაეიხსენოთ, რომ როცა $N = 100$, მარტივი იტერაციის მეთოდით საჭიროა 20 000 იტერაცია და ცხადი ჩებიშევის სქემით – 340 იტერაცია. ამგვარად, ცვალებად-სამკუთხა მეთოდი ჩვენს მიერ შესწავლილ მეთოდებს შორის ყველაზე უკეთესი აღმოჩნდა.

§6. ვარიაციულ-იტერაციული მეთოდები

1. მინიმალურ შეუსაბამობათა მეთოდი. აქამდე, იტერაციული მეთოდების შესწავლისას, ჩვენ ყოველთვის ვთვლიდით, რომ γ_1 და γ_2 მუდმივები – H ან H_B-ში A ოპერატორის სპექტრის საზღვრები – ცნობილია. როგორ მოვიქცეთ, როცა ასეთი ინფორმაცია არა გვაქვს? ასეთ შემთხვევაში ვსარგებლობთ მეთოდებით, რომლებიც ცხადი სახით არ იყენებენ γ_1 და γ_2 პარამეტრებს. ასეთია ვარიაციული ტიპის მეთოდები. ჩვენ აქ განვიხილავთ მინიმალურ შეუსაბამობათა, უსწრაფესი დაშვებისა და შეუღლებულ გრადიენტთა მეთოდებს.

ჯერ განვიხილოთ მინიმალურ შეუსაბამობათა მეთოდი ცხადი სქემისათვის.

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f\,,\ k=0,1,\ldots,\text{ ყოველი } y_0\text{-სთვის, } y_0\in H,\quad (1)$$

$r_k=Ay_k-f$ შეუსაბამობისათვის გვაქვს ერთგვაროვანი განტოლება

$$\frac{r_{k+1}-r_k}{\tau_{k+1}}+Ar_k=0\,,\ \ k=0,1,\ldots,\ \ r_0=Ay_0-f.\qquad (2)$$

τ_{k-1} პარამეტრს ავირჩევთ τ_{k+1} შეუსაბამობის მინიმუმის პირობიდან შემდეგი ნორმის მიხედვით:

$$\|r_{k+1}\|^2=\|r_k-\tau_{k+1}Ar_k\|^2=\|r_k\|^2-2\tau_{k+1}(r_k,Ar_k)+\tau_{k+1}^2\|Ar_k\|^2=\varphi(\tau_{k+1})\,.$$

მოვახდინოთ ამ გამოსახულების დიფერენცირება τ_{k+1}-ის მიხედვით, ამასთან $\varphi'(\tau_{k+1})$ წარმოებული გავუტოლოთ ნულს

$$\varphi'(\tau_{k+1})=-2(r_k,Ar_k)+2\tau_{k+1}\|Ar_k\|^2=0,$$

მაშინ ვიპოვით

$$\tau_{k+1}=\frac{(Ar_k\,,r_k)}{\|Ar_k\|^2},\quad k=1,2,\ldots\qquad (3)$$

τ_{k+1}-ს ამ მნიშვნელობებისათვის მეორე წარმოებული $\varphi''(\tau_{k+1})$ დადებითია, და, მაშასადამე, $\min\limits_{\tau_{k+1}}\|r_{k+1}\|^2$ მიიღწევა.

აქამდე ჩვენ ვუშვებდით, რომ A – თვითშეუღლებული ოპერატორია. თუ $A = A^* > 0$, მაშინ სამართლიანია შეფასებები

$$\|r_{k+1}\| \le \rho_0 \|r_k\|, \quad \|Ay_n - f\| \le \rho_0^n \|Ay_0 - f\|,$$
$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \tag{4}$$

სადაც γ_1 და γ_2 A ოპერატორის სპექტრის ზუსტი საზღვრებია. მართლაც, რადგან (3)-ის ძალით $\|r_{k+1}\|$ მინიმალურია τ_{k+1}-სთვის, ამიტომ ნებისმიერი $\tau \neq \tau_{k+1}$-სთვის, ის უნდა იზრდებოდეს, ამიტომ

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|r_k - \tau_{k+1}Ar_k\|^2 \le \|r_k - \tau_0 Ar_k\|^2 \le \|E - \tau_0 A\|^2 \|r_k\|^2 .$$

მეორე მხრივ, ცნობილია, რომ

$$\|E - \tau_0 A\| = \rho_0, \text{ როცა } \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2) .$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\|\tau_{k+1}\| \le \rho_0 \|r_k\|$.

მაშასადამე მინიმალურ შეუსაბამობათა მეთოდი ისეთივე სიჩქარით არის კრებადი, როგორც მარტივი იტერაციის მეთოდი (თუ მარტივი იტერაციის მეთოდში γ_1 და γ_2-ის ზუსტი მნიშვნელობები გამოიყენება).

შეუსაბამობათა არაცხადი მეთოდის, ანუ შესწორებათა მეთოდის შემთხვევაში (1)-ის ნაცვლად შესწორებისათვის ვღებულობთ განტოლებას

$$B\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\tau_{k+1}} + A\omega_k = 0, \; k = 0,1,\ldots, \; \omega_k = B^{-1}r_k, \; \omega_0 = B^{-1}(Ay_0 - f), \tag{5}$$

სადაც τ_{k+1} განისაზღვრება ფორმულით

$$\tau_{k+1} = \frac{(A\omega_k, \omega_k)}{(B^{-1}A\omega_k, A\omega_k)}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{6}$$

(4)-ის ნაცვლად ვღებულობთ შეფასებას (იმ პირობებში, რომ $A = A^*$, $B = B^*$)

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le \rho_0^n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}.$$

2. **უსწრაფესი დაშვების მეთოდი.** უსწრაფესი დაშვების ცხადი მეთოდი მინიმალური შეუსაბამობის მეთოდისგან მხოლოდ τ_{k+1}-სთვის ფორმულით განსხვავდება:

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{7}$$

ეს ფორმულა მიიღება ან $z_{k+1}=y_{k+1}-u$ ცდომილების ნორმის $\|z_{k+1}\|_A$ მინიმალურობის პირობიდან, ან r_k და r_{k+1} შეუსაბამობათა ორთოგონალობის პირობიდან. თუ $r_{k+1} = r_k - \tau_{k+1}Ar_k$ განტოლებას სკალარულად გავამრავლებთ r_k-ზე, მივიღებთ $0 = (r_k, r_k) - r_{k+1}(Ar_k, r_k)$, საიდანაც გამომდინარეობს (7) ფორმულა. ვინაიდან $Az_k = Ay_k - Au = r_k$, ამიტომ (5)-დან $B = E$-ს შემთხვევისათვის ვღებულობთ

$$(Az_{k+1}, z_{k+1}) = (Az_k - \tau_{k+1}A^2z_k, z_k - \tau_{k+1}Az_k) =$$
$$= (r_k - \tau_{k+1}Ar_k, z_k - \tau_{k+1}r_k) = (r_k, z_k) - 2\tau_{k+1}(r_k, r_k) + \tau_{k+1}^2(Ar_k, r_k).$$

თუ მოვახდენთ $\|z_{k+1}\|_A^2$-ის τ_{k+1}-თი დიფერენცირებას და წარმოებულს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ (7)-ს.

შემდეგ, გვაქვს

$$\|z_{k+1}\|_A^2 = \|(E - \tau_{k+1}A)z_k\|_A^2 \le \|(E - \tau_0 A)z_k\|_A^2 \le$$
$$\le \|E - \tau_0 A\|^2 \|z_k\|_A^2 \le \rho_0^2 \|z_k\|_A,$$

ე. ი.

$$\|z_{k+1}\|_A = \|y_{k+1} - u\|_A \le \rho_0^2 \|y_0 - u\|_A.$$

უსწრაფესი დაშვების მეთოდი H_A-ში იმავე სიჩქარით იკრიბება, როგორც მარტივი იტერაციის მეთოდი.

3. შეუღლებულ გრადიენტთა მეთოდი. უფრო სწრაფად კრებადი ვარიაციული ტიპის მეთოდები შეიძლება ვიპოვოთ სამშრიან იტერაციულ სქემათა კლასში:

$$\begin{gathered} By_{k+1}=\alpha_{k+1}(B-\tau_{k+1}A)y_k+(1-\alpha_{k+1})By_{k-1}+\alpha_{k+1}\tau_{k-1}f, \\ k=1,2,\dots,\quad By_1=(B-\tau_1A)y_0+\tau_1 f. \end{gathered} \tag{8}$$

ჩვენ განვიხილავთ შეუღლებულ გრადიენტთა მეთოდს, რომელიც ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში. მისთვის α_{k+1} და τ_{k+1} საიტერაციო პარამეტრები განისაზღვრება ფორმულებით (იხ. [12]):

$$\tau_{k+1}=\frac{(r_k,\omega_k)}{(A\omega_k,A\omega_k)},\quad \alpha_{k+1}=\left(1-\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\frac{(r_k,\omega_k)}{(r_{k-1},\omega_{k-1})}\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-1}, \tag{9}$$

სადაც $k=0,1,2,\dots,$ იმ დაშვებით, რომ $A=A^*>0$, $B=B^*>0$, $\gamma_1 B\le A\le\gamma_2 B$, $\gamma_1>0$. τ_{k+1} და α_{k+1}-სთვის ფორმულები მიიღება ამომხსნელი ოპერატორის ნორმის მინიმალურობის პირობიდან ნებისმიერი k-სთვის, საიტერაციო პარამეტრების ასეთი ოპტიმალური მნიშვნელობისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\begin{gathered} \|y_n-u\|_A\le q_n\|y_0-u\|_A,\quad q_n=\frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}} \\ \rho_1=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\quad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \end{gathered} \tag{10}$$

ე. ი. შეუღლებულ გრადიენტთა მეთოდის კრებადობის სიჩქარე არანაკლებია ორშრიანი იტერაციული მეთოდის კრებადობის სიჩქარეზე ჩებიშევის პარამეტრებით (რომელიც იყენებს γ_1 და γ_2-ს τ_{k+1} პარამეტრის გამოსათვლელად). ამიტომ იტერაციის რაოდენობისათვის გვექნება შეფასება

$$n_0(\varepsilon)\le n(\varepsilon)\le n_0(\varepsilon)+1,\quad n_0(\varepsilon)=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\ln\frac{2}{\varepsilon}.$$

B ოპერატორის სახით შეიძლება ავიღოთ ცვალებად-სამკუთხა მეთოდის ფაქტორიზებული ოპერატორი

$$B = (D + \omega A_1)D^{-1}(D + \omega A_2),$$

$$A_1 + A_2 = A > 0, \quad A_1^* = A_2, \quad D = D^* > 0.$$

გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ იტერაციათა რაოდენობა ცვალებად-სამკუთხა მეთოდისა შეუღლებულ გრადიენტთა მეთოდთან ერთად ნაკლებია, ვიდრე ჩებიშევის სქემის გამოყენების შემთხვევაში.

§7. არაწრფივ განტოლებათა ამოხსნა

1. **საიტერაციო მეთოდები.** განვიხილოთ არაწრფივი განტოლება

$$f(x) = 0, x \in [a, b], \tag{1}$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა. განტოლებას შეიძლება ერთი ან რამოდენიმე ფესვი გააჩნდეს. მოითხოვება: 1) დადგინდეს განტოლების ფესვების არსებობა; 2) მოიძებნოს ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობები. ხშირად ორივე ამოცანა ერთდროულად იხსნება. ფესვების საპოვნელად გამოიყენება იტერაციული მეთოდები.

უმარტივესს წარმოადგენს დიხოტომიის მეთოდი (შუაზე გაყოფის მეთოდი). ვთქვათ, $f(x_0)f(x_1) \le 0$; მაშინ $[x_0, x_1]$ მონაკვეთზე ძევს არანაკლებ ერთი ფესვისა, ვიპოვოთ $f(x_2)$, სადაც $x_2 = (x_0 + x_1)/2$, და x_3-ად ავიღოთ x_0 და x_1 მნიშვნელობებიდან ის, რომლისთვისაც $f(x_2)f(x_3) \le 0$ პირობა სრულდება. $[x_2, x_3]$ მონაკვეთი კვლავ გავყოთ შუაზე და ა. შ. გაყოფა გავაგრძელოთ მანამ, ვიდრე მონაკვეთის სიგრძე არ გახდება 2ε-ზე ნაკლები, სადაც ε სიზუსტეა, რომლითაც უნდა განისაზღვროს ფესვი. მაშინ ამ მონაკვეთის შუა წერტილი მოგვცემს ფესვის მნიშვნელობას საჭირო ε სიზუსტით. ცხადია, პროცესი კრებადია გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, მნიშვნელით 1/2. მეთოდის ნაკლოვანებანი: $[x_0, x_1]$ საწყისი მონაკვეთის არჩევა — წინასწარ ცნობილი არ არის, რომელი ფესვისაკენ წარიმართება პროცესი (თუ $[x_0, x_1]$-ში რამოდენიმე ფესვია).

მეორე მეთოდი – მარტივი იტერაციის მეთოდია. (1) განტოლება ასეთი სახით გადაეწეროთ

$$x = \varphi(x), \tag{2}$$

სადაც $\varphi(x)$ შეიძლება განისაზღვროს ერთ-ერთი შემდეგი ხერხით:

$$\varphi(x) = x - \alpha f(x), \quad \alpha = \text{const},$$

$\varphi(x) = x + \rho(x)f(x)$, $\rho(x)$ – ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელსაც $[a, b]$ მონაკვეთზე ფესვები არ გააჩნია.

მარტივი იტერაციის მეთოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

სადაც n – იტერაციის ნომერია, x_0 – მოცემული ნებისმიერი საწყისი მიახლოება. საჭიროა ეიპოვოთ $x = \varphi(x)$ განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი (ფესვი) $x = x^*$ ფარდობითი ცდომილებით $\varepsilon > 0$, ისე რომ ყოველი n-სთვის, $n \geq n_0$, სრულდებოდეს უტოლობა

$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon\, |x_0 - x^*|, \quad n \geq n_0(\varepsilon). \tag{4}$$

ეს პირობა შეიძლება შესრულდეს, თუ $\{x_n\}$ იტერაციების მიმდევრობა კრებადია x^* ზღვრისაკენ, როცა $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. თუ სრულდება (4), მაშინ შეგვიძლია შევწყვიტოთ გამოთვლები, როცა $n = n_0$. აქედან ჩანს, რომ ძირითად საკითხს წარმოადგენს საკითხი იტერაციების კრებადობის, აგრეთვე მათი კრებადობის სიჩქარის, ე. ი. იტერაციების იმ მინიმალური $n_0(\varepsilon)$ რაოდენობის შესახებ, რომლისთვისაც (4) სრულდება. დავუშვათ, რომ x_0 წერტილის რომელიღაც δ მიდამოში

$$\Delta = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta), \quad \delta > 0, \tag{5}$$

$\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq q\,|x'' - x'| \text{ ყოველი } x', x''\text{-სთვის}, \; x', x'' \in \Delta \tag{6}$$

კოეფიციენტით q:

$$0 < q < 1 \tag{7}$$

და, ვთქვათ, საწყისი შეუსაბამობა იმდენად მცირეა, რომ

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \le (1 - q)\delta \tag{8}$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

– ყველა x_n იტერაცია ($n = 1,2,3,\ldots$) ეკუთვნის Δ ინტერვალს: $x_n \in \Delta$;

– $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია (8) განტოლების x^* ფესვისაკენ, როცა $n \to \infty$;

– (2) განტოლებას Δ-ში გააჩნია მხოლოდ ერთი ფესვი.

$x_k \in \Delta$ პირობა ნიშნავს, რომ

$$|x_k - x_0| < \delta. \tag{9}$$

(8)-ის ძალით გვაქვს $|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| \le (1 - q)\delta < \delta$, ე. ი. სრულდება (9), როცა $k = 1$. ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ, რომ (9) სამართლიანია ყოველი k-სთვის, $k = 1,2,\ldots$. დავუშვათ, რომ (9) სრულდება, როცა $k = 1,2,\ldots,n$; მაშინ შეიძლება გამოვთვალოთ $\varphi(x_n)$ და $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ (6)-დან გამომდინარეობს, რომ $|x_{k+1}-x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \le q|x_k - x_{k-1}|$, ე. ი.

$$|x_{k+1} - x_k| \le q|x_k - x_{k-1}|, \tag{10}$$

ამ უტოლობის მიმდევრობითი გამოყენებით ვიპოვით

$$|x_{k+1} - x_k| \le q^k|x_1 - x_0|, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x_{n+1} - x_0 = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$, მივიღებთ

$$|x_{n+1} - x_0| \le (q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1)|x_1 - x_0| =$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}|x_1 - x_0| < \frac{1}{1 - q}|x_1 - x_0| < \delta,$$

ე. ი. $x_{n+1} \in \Delta$. ვინაიდან (9) უტოლობა (8)-ის ძალით სამართლიანია $k = 1$-სთვის, ამიტომ ის სამართლიანი იქნება აგრეთვე k-თვის, როცა $k = 2,3,\ldots$ ამით თეორემის პირველი დებულება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა სხვაობა $x_{n+m}-x_n=(x_{n+m}-x_{n+m-1})+(x_{n+m-1}-x_{n+m+2})+\cdots+(x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)$, და შევაფასოთ იგი

$$|x_{n+m}-x_n|\le(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)|x_{n+1}-x_n|\le$$
$$=\frac{1-q^m}{1-q}q^n|x_1-x_0|<q^n\delta,$$

ე. ი. $|x_{n+m}-x_n|\to 0$ როცა $n\to\infty$ და ნებისმიერი m-სთვის, $m=1,2,\ldots$ აქედან კოშის კრიტერიუმის ძალით გამომდინარეობს $\{x_n\}$-ის კრებადობა: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*\in\Delta$. (3)-ში ზღვარზე გადასვლით, როცა $n\to\infty$, ვრწმუნდებით, რომ x^* არის (2) განტოლების ფესვი: $x^*=\varphi(x^*)$. ეს ფესვი ერთადერთია. მართლაც, ვთქვათ, არსებობს ორი განსხვავებული ფესვი x' და $x''\neq x'$, ასე რომ $x'=\varphi(x')$, $x''=\varphi(x'')$ მაშინ $|x''-x'|=|\varphi(x'')-\varphi(x')|\le q|x''-x'|<|x''-x'|$, ე. ი. $|x''-x'|<|x''-x'|$, რაც შეუძლებელია.

$z_{n+1}=x_{n+1}-x^*$ ცდომილებისათვის გვექნება

$$|z_{n+1}|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|\le q|x_n-x^*|=q|z_n|\le q^{n+1}|z_0|,$$
$$|z_{n+1}|\le q^{n+1}|z_0|, \tag{12}$$

ე. ი. მარტივი იტერაციის მეთოდი კრებადია გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით. იტარციათა რაოდენობა, რომლისთვისაც (4) უტოლობა სრულდება, განისაზღვრება პირობიდან $q_n\le\varepsilon$, ე. ი.

$$n\ge\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{q}$$

იტერაციების მინიმალური $n_0(\varepsilon)$ რაოდენობა, რომლისთვისაც (4) სრულდება, ცხადია, ტოლია

$$n_0(\varepsilon)=\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{q}\right]+1, \tag{13}$$

სადაც $[a]-a>0$ რიცხვის მთელი ნაწილია.

შენიშვნა. თუ $\varphi(x)$ Δ-ში აქვს წარმოებული, მაშინ (6) სრულდება იმ შემთხვევაში, როცა

$$|\varphi'(x)| \le q \text{ ყოველი } x \in \Delta. \tag{14}$$

2. ნიუტონის მეთოდი. მეთოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{15}$$

ეს ფორმულა მიიღება, თუ გაშლაში

$$\begin{gathered} 0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi), \\ \xi = x_n + \theta(x^* - x_n), \quad 0 \le \theta \le 1, \end{gathered} \tag{16}$$

სადაც x^* არის $f(x) = 0$ განტოლების ზუსტი ამონახსნი, უკუვაგდებთ უკანასკნელ წევრს და x^*-ს შევცვლით x_{n+1}-ით

$$0 = f(x_n) + f'(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\,.$$

ნიუტონის მეთოდს უწოდებენ აგრეთვე მხებთა მეთოდს ან გაწრფივების მეთოდს. მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ასეთია – $y = f(x)$ წირის ნაწილი, როცა $x \in [x_n, x_{n+1}]$, თუ $x_n < x_{n+1}$ (ან როცა $x \in [x_{n-1}, x_n]$, თუ $x_n > x_{n+1}$) იცვლება იმ მხების მონაკვეთით, რომელიც გაივლის $x = x_n$ წერტილში.

თუ ჩავწერთ $f(x) = 0$ განტოლებას $x = \varphi(x)$ სახით, დავინახავთ, რომ ნიუტონის მეთოდი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც მარტივი იტერაციის მეთოდი (3)

$$\varphi(x) = x - f(x)/f'(x) \tag{17}$$

მარჯვენა მხარით.

ნიუტონის მეთოდის ილუსტრირება მოვახდინოთ $a > 0$ რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების, ე. ი. $x^2 = a$ ან $f(x) = x^2 - a = 0$ განტოლების ამოხსნის მაგალითზე. (15) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\quad n=0,1,\ldots$$

ვთქვათ, $a=2$. თუ შევარჩევთ $x_0=1$, მაშინ $x_1=1{,}5$, $x_2=1{,}417$, $x_3=1{,}414\ldots$ ე. ი. იტერაციები ძალიან სწრაფად იკრიბება.

შევაფასოთ იტერაციების კრებადობის სიჩქარე. დავუშვათ, რომ არსებობს (1) განტოლების ნამდვილი x^* ფესვი. განვიხილოთ ფესვის რაღაც მიდამო:

$$\Delta_0=(x^*-\delta_0,x^*+\delta_0),\qquad \delta_0>0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ (17) ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია Δ_0-ში და მეორე წარმოებული შემოსაზღვრულია

$$|\varphi''(x)|\le 2q \tag{18}$$

სადაც $q>0$ მუდმივია. $\varphi(x)$ ფუნქცია გავშალოთ $x=x^*$-ის მიდამოში ტეილორის მწკრივად:

$$\begin{gathered}\varphi(x)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x-x^*)+\frac{\varphi''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,\\ \xi=x^*+\theta(x-x^*),\quad 0\le\theta\le 1.\end{gathered} \tag{19}$$

შემდეგ გამოვთვალოთ

$$\varphi'(x)=f(x)\cdot f''(x)/(f'(x))^2=-f(x)\cdot(1/f'(x))',$$

$$\varphi''(x)=-\left(f(x)\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'\right)'$$

და თუ შევნიშნავთ, რომ $\varphi'(x^*)=0$, როცა $f'(x^*)\ne 0$, მივიღებთ

$$\varphi(x_n)=\varphi(x^*)+\frac{(x_n-x^*)^2}{2}\varphi''(\xi). \tag{20}$$

$z_{n+1}=x_{n+1}-x^*$ ცდომილებისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$z_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 \varphi''(\xi),$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\varphi''(\xi) z_n^2.$$

აქედან და (18)-დან გამომდინარეობს

$$|z_{n+1}| \le q z_n^2. \tag{21}$$

თუ აღვნიშნავთ $v_n = q|z_n|$, მივიღებთ $v_{n+1} \le v_n^2 \le v_{n-1}^{2^2} \le \cdots \le v_1^{2^n} \le$ $\le v_0^{2^{n+1}}$ და, მაშასადამე,

$$|z_{n+1}| \le \frac{1}{q}(q|z_0|)^{2^{n+1}}. \tag{22}$$

აქედან ჩანს, რომ (15) იტერაციები კრებადია x^* ფესვისაკენ, როცა $n \to \infty$, თუ

$$q|z_0| < 1 \quad \text{ან} \quad |z_0| = |x_0 - x^*| < 1/q, \tag{23}$$

ე. ი. საწყისი მიახლოება მდებარეობს (1) განტოლების $x = x^*$ ფესვის $\Delta_0 = (x^* - 1/q, x^* + 1/q)$ მიდამოში და $\delta_0 = 1/q$. ასეთ შემთხვევაში ნიუტონის მეთოდი, როგორც ამბობენ, კვადრატული სიჩქარით არის კრებადი (მარტივი იტერაციის მეთოდი გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით არის კრებადი).

იტერაციების დამთავრების პირობა $|z_n| \le \varepsilon|z_0|$, როგორც (22)-დან ან $|z_n| \le (q|z_0|)^{2^{n-1}}|z_0|$-დან გამომდინარეობს, სრულდება, თუ $n \ge n_0(\varepsilon)$, სადაც

$$n_0(\varepsilon) = \left[\ln\left(1 + \ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{q|z_0|}\right)\Big/\ln 2\right]. \tag{24}$$

ცხადია, რომ თუ საწყისი მიახლოება მოთავსებულია x^*-ის მცირე მიდამოში, მაშინ ყველა მომდევნო იტერაცია ამავე Δ_0 მიდამოში დარჩება. მართლაც, ვთქვათ, $|x_0 - x^*| \le \delta_0$, ამასთან $q\delta_0 < 1$. მაშინ გვექნება

$$|x_1 - x^*| \le q|x_0 - x^*|^2 \le q\delta_0^2 < \delta_0 ,$$

$$|x_2 - x^*| \le q|x_1 - x^*|^2 \le q\delta_0 < \delta_0$$

და ა. შ. ასე რომ ყოველი n-სთვის, $n = 1,2,\ldots$, $|x_n - x^*| \le \delta_0$.

შენიშვნები. 1. ჩვენ არ ვჩერდებით $x = x^*$ ფესვის არსებობის დამტკიცებაზე.

2. ნიუტონის მეთოდების კვადრატული კრებადობა შეიძლება დადგინდეს $f(x)$ ფუნქციაზე უფრო სუსტ შეზღუდვებშიც:

$$|f'(x)| \ge M_1 > 0,\ |f''(x)| \le M_2,\ \text{ყველა } x\text{-თვის},\ x \in \Delta_0. \qquad (25)$$

(15) და (16)-ის გამოყენებით $z_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ ცდომილებისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$z_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} z_n^2 ,$$

საიდანაც (25) პირობის ძალით გამომდინარეობს უტოლობა

$$|z_{n+1}| \le q|z_n|^2,\ \ q = M_2/(2M_1),$$

რომელიც ემთხვევა (21)-ს (განსხვავება არის მხოლოდ q-ში). შემდეგი მსჯელობები მიგვიყვანს (22), (23) და (24)-მდე.

3. ნიუტონის უწყვეტი მეთოდი. $f(x) = 0$ განტოლების ამოხსნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \quad x > 0, \quad x(0) = u_0 , \qquad (26)$$

კოშის ამოცანის ამოხსნის ზღვარი, როცა $t \to \infty$, თუ ეს ზღვარი არსებობს. აღვნიშნოთ $x=x(t)$-ით კოშის ამოცანის ამონახსნი, x_*-ით – $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი. მათი სხვაობისათვის $z(t) = x(t) - x_*$, გვაქვს

$$\frac{dz}{dt} + (f(x) - f(x_*)) = \frac{dz}{dt} + f'(\xi)\cdot z, \quad \xi = x_* + \theta z, \quad 0 \le \theta \le 1,$$

$$\frac{dz}{dt} + \alpha(t)\cdot z = 0, \quad t > 0, \quad z(0) = u_0, \quad \alpha(t) = f'(\xi).$$

აქედან ჩანს, რომ $|z(t)| \to 0$, როცა $t \to \infty$, თუ $f'(x) > 0$.

(26) განტოლების ამოსახსნელად რომელიმე ცხადი მეთოდით უნდა ვისარგებლოთ. $x(t)$-ის x_0-კენ კრებადობის სიჩქარე დამოკიდებულია მხოლოდ $f(x)$-ის წარმოებულის სიდიდეზე.

4. მკვეთთა მეთოდი. ნიუტონის მეთოდში $f'(x_n)$ წარმოებულის გამოთვლა შეიძლება შრომატევადი აღმოჩნდეს. თუ f_n'-ს შევცვლით სხვაობიანი შეფარდებით $(f_n - f_{n-1})/(x_n - x_{n-1})$ მივიღებთ მკვეთთა საიტერაციო მეთოდს

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{27}$$

მკვეთთა მეთოდი ნიუტონის მეთოდზე უფრო ნელა არის კრებადი, მაგრამ (27)-ში მხოლოდ ფუნქციის გამოთვლაა საჭირო, (15)-ში კი უნდა ვიპოვოთ ფუნქცია და მისი წარმოებული. ამიტომ მკვეთთა მეთოდში გამოთვლების მოცულობა ყოველ იტერაციაზე, ზოგადად რომ ვთქვათ, ნაკლებია.

თავი IV

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდები

§1. სხვაობიანი სქემების თეორიის ძირითადი ცნებები

სასრულ სხვაობათა მეთოდი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის უნივერსალურ მეთოდს წარმოადგენს. სანამ შევუდგებოდეთ ამ მეთოდის განხილვას, აუცილებელია შემოვიტანოთ სხვაობიან სქემათა თეორიის ძირითადი ცნებები — აპროქსიმაცია, მდგრადობა და კრებადობა.

1. უმარტივესი სხვაობიანი ოპერატორები. დიფერენციალური განტოლების ნაცვლად სხვაობიანი განტოლება რომ მივიღოთ, აუცილებელია:

— არგუმენტის უწყვეტი ცვლილების არე შევცვალოთ წერტილების დისკრეტული სიმრავლით (ბადით);

— დიფერენციალური განტოლება შევცვალოთ სხვაობიანი განტოლებით (მოვახდინოთ ბადეზე აპროქსიმირება).

დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის საკითხი სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნაზე დადის. წინა თავებში ჩვენ უკვე განვიხილეთ ბადეთა მაგალითები:

1) $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე თანაბარი ბადე h ბიჯით: კვანძების სიმრავლე $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,2,\dots,N,\ h = 1/N\}$; $x_0 = 0$, $x_N = 1$ — სასაზღვრო კვანძებია; $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,2,\dots,N-1\}$ — შიდა კვანძების სიმრავლე;

2) არათანაბარი ბადე: $0 \le x \le 1$ მონაკვეთი იყოფა ნებისმიერი წერტილებით N ნაწილად $x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1}$; $h_i = x_i - x_{i-1}$ ბადის ბიჯია.

$$\overline{\omega}_h = \{x_i,\ i=0,1,\ldots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\},\ \sum_{i=1}^{N} h_i = 1,\ \omega_h = \{x_i,\ 0 < i < N\};$$

3) ბადე $0 \le t \le T$ მონაკვეთზე: $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n=0,1,\ldots,n_0,\ n_0\tau = T\}$.

უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციის ნაცვლად (მაგალითად, $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე) განიხილება დისკრეტული x_i არგუმენტის ფუნქცია $y(x_i) = y_i$, სადაც x_i $\overline{\omega}_h$ ბადის კვანძია ან კიდევ x_i დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციაა, სადაც i – კვანძის ნომერია. ამ ფუნქციას ბადური ფუნქცია ეწოდება. ყოველი ბადური ფუნქცია $y(x_i) = y_i$ წარმოდგება ვექტორის სახით $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}, y_N)$, ამიტომ ბადური ფუნქციების სიმრავლე ქმნის სასრულგანზომილებიან, ჩვენს შემთხვევაში $(N + 1)$ განზომილებიან H სივრცეს. ჩვეულებრივ, განიხილავენ $\{\overline{\omega}_h\}$ ბადეთა ოჯახს, რომელიც დამოკიდებულია ბიჯზე, როგორც პარამეტრზე. ამიტომ ბადური ფუნქციებიც $y = y_h(x)$ დამოკიდებულია ბიჯზე, როგორც პარამეტრზე (ან N-ზე), თუ ბადე თანაბარია. არათანაბარი ბადის შემთხვევაში h-ის ქვეშ იგულისხმება $h = (h_1, h_2, \ldots, h_N)$ ვექტორი. ამიტომ, ბუნებრივია, ბადურ ფუნქციათა სივრცე ჩაიწეროს h ინდექსით – H_h.

H_h სივრცეში შეიძლება შემოვიტანოთ $\|\cdot\|_h$ ნორმა. მივუთითოთ ნორმის უმარტივეს სახეებზე:

$$\|y\|_C = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |y(x)| \ \text{ან}\ \|y\|_C = \max_{0 \le i \le N} |y_i|;$$

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h\right)^{1/2}$$

დიფერენციალური ოპერატორი იცვლება სხვაობიანი ოპერატორით, რომელიც ბადურ ფუნქციათა სივრცეში მოქმედებს.

ვთქვათ, G — R^p $(p = 1,2,3)$ ევკლიდური სივრცის არეა Γ საზღვრით. მაგალითად, G — $0 < x < 1$ ინტერვალია, ხოლო Γ — წერტილები $x = 0$, $x = 1$; G — მართკუთხედია $0 < x_1 < \ell_1$, $0 < x_2 < \ell_2$, $x = (x_1, x_2) \in G$ $(p = 2)$, Γ კი წარმოადგენს $x_2 = 0$, $x_2 = \ell_2$, $x_1 = 0$, $x_1 = \ell_1$ წრფეთა მონაკვეთებს და ა. შ. ვთქვათ, მოცემულია წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი L, რომელიც $v(x)$ ფუნქციაზე მოქმედებს, $x \in G$. $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $\overline{\omega}_h$ ბადე და განვიხილოთ ბადური $v_h(x)$ ფუნქცია, $x \in \omega_h$. $x_i \in \omega_h$ წერტილში Lv შევცვალოთ $v_h(x)$ ბადური ფუნქციის მნიშვნელობების წრფივი კომბინაციით ბადის კვანძთა რაიმე სიმრავლეზე, რომელსაც შაბლონი ეწოდება.

$$(L_h v)_i = \sum_{x_j \in \sigma_i} a_{ij}^h v_h(x_j), \quad x_i \in \omega_h(G), \tag{1}$$

სადაც a_{ij}^h — კოეფიციენტებია, ხოლო σ_i — შაბლონი, $\sigma_i \in \overline{\omega}_h$.

Lv-ს ასეთ შეცვლას $L_h v$-თი ეწოდება L დიფერენციალური ოპერატორის აპროქსიმაცია ბადეზე L_h სხვაობიანი ოპერატორით, ანუ L ოპერატორის სხვაობიანი აპროქსიმაცია. ჩვეულებრივ, ოპერატორის L_h სხვაობიანი აპროქსიმაციის შესწავლა ჯერ ლოკალურად, ე. ი. ბადის ყოველ წერტილში ხდება. L_h-ის აგება $\sigma(x)$ შაბლონის, ანუ $x \in \omega_h$ კვანძის მეზობელი კვანძების სიმრავლის შერჩევით იწყება. ამ კვანძებში $v_h(x)$ ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები შეიძლება L_h ოპერატორის გამოსახულების ჩასაწერად იქნეს გამოყენებული.

განვიხილოთ L_h-ის აგების რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. პირველი წარმოებული ტოლია $Lv = \dfrac{dv}{dx} = v'(x)$. ავიღოთ სამი კვანძი $(x - h,\ x,\ x + h)$. შეიძლება ვისარგებლოთ ნებისმიერი გამოსახულებით:

$$L_h^+ v = \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = v_x \text{ (შაბლონი } (x, x+h));$$

$$L_h^- v = \frac{v(x)-v(x-h)}{h} = v_{\bar{x}} \text{ (შაბლონი } (x-h, x));$$

$$L_h^\circ v = \frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h} = v_{\overset{\circ}{x}} \text{ (შაბლონი } (x-h, x+h)).$$

ხშირად გამოიყენება სახელწოდებები: $L_h^+ v = v_x$ – მარჯვენა, $L_h^- v = v_{\bar{x}}$ – მარცხენა, $L_h^\circ v = v_{\overset{\circ}{x}} = \frac{1}{2}(L_h^+ v + L_h^- v)$ – ცენტრალური სხვაობიანი წარმოებული. სამწერტილიან შაბლონზე შეიძლება განსაზღვროს სხვაობიანი ოპერატორი

$$L_h^{(\sigma)} v = \sigma v_x + (1-\sigma) v_{\bar{x}},$$

სადაც σ ნამდვილი პარამეტრია. ამრიგად, სამწერტილიან შაბლონზე პირველ წარმოებულს უსასრულოდ ბევრი სხვაობიანი აპროქსიმაცია გააჩნია.

L_h ოპერატორით L ოპერატორის აპროქსიმაციის ცდომილება ეწოდება სხვაობას

$$\psi = L_h v - Lv.$$

ამბობენ, რომ L_h-ს აპროქსიმაციის m-ური რიგი აქვს x წერტილში, თუ

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m) \text{ ან } |\psi(x)| \le Mh^m,$$

სადაც $M = \text{const} > 0$ არ არის h, m-ზე დამოკიდებული, $h, m > 0$.

ტეილორის ფორმულის გამოყენებით

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) +$$

$$+ \frac{h^2}{2} v''(x) \pm \frac{h^3}{6} v'''(x) + \frac{h^4}{24} v^{IV}(x) + O(h^5),$$

ადვილად მივიღებთ შეფასებებს

$$v_x - v' = O(h), \quad v_{\bar{x}} - v' = O(h), \quad v_{\overset{\circ}{x}} - v' = O(h^2),$$

$$\psi^{(\sigma)} = L_h^{(\sigma)} v - Lv = O\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)h + h^2\right).$$

მაგალითი 2. მეორე წარმოებული: $Lv = \dfrac{d^2v}{dx^2} = v''(x)$. ავიღოთ იგივე სამწერტილიანი შაბლონი, პირველ მაგალითშია და დავწეროთ ოპერატორი

$$L_h v(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ $v(x+h) = v(x) + hv_x$, $v(x-h) = v(x) - hv_{\bar{x}}$ და გარდავქმნათ $L_h v(x)$:

$$L_h v(x) = \frac{v_x(x) - v_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)}{h} = v_{\bar{x}x}(x). \quad (2)$$

გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა $v(x \pm h)$-სთვის; მივიღებთ:

$$\psi = L_h v - Lv = \frac{h^2}{12} v^{IV}(x) + O(h^4) = O(h^2),$$

ე. ი. L_h-ს აპროქსიმაციის მეორე რიგი აქვს.

ჩვეულებრივ, მოითხოვენ აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასებას ბადეზე, ე. ი. რაიმე ბადურ ნორმაში $\|\cdot\|_h$. ამბობენ, რომ L_h-ს აქვს აპროქსიმაციის m-ური რიგი ბადეზე, თუ

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(h^m).$$

2. სხვაობიანი სქემა. ჩვეულებრივ, $Lu = f(x)$ დიფერენციალური განტოლებას ხსნიან რაიმე დამატებითი პირობებით – საწყისი (კოშის ამოცანა), სასაზღვრო (სასაზღვრო ამოცანა) ან საწყისი და სასაზღვრო პირობებით ერთად. სხვაობიან განტოლებებზე გადასვლისას უნდა მოვახდინოთ ამ დამატებითი პირობების აპროქსიმაციაც.

ვთქვათ, მოცემულია G არე Γ საზღვრით. ვეძებთ

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \tag{3}$$

წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას $u=u(x)$, $x \in \overline{G}$. საზღვარზე მოცემულია დამატებითი პირობები

$$u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \tag{4}$$

$\overline{G} = G \div \Gamma$ არეში შემოვიღოთ ბადე $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, $\omega_h \in G$, $\gamma_h \in G$ და (3), (4) ამოცანას შევუსაბამოთ სხვაობიანი ამოცანა (1) სახის L_h წრფივი ოპერატორით:

$$L_h y_h = \varphi_h(x), \quad x \in \omega_h; \quad y_h(x) = \nu_h(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{5}$$

$y_h(x)$, $\varphi_h(x)$, $\nu_h(x)$ ფუნქციები ბადის h ბიჯზე არის დამოკიდებული. h-ის შეცვლით მივიღებთ მიმდევრობებს $\{y_h\}$, $\{\varphi_h\}$, $\{\nu_h\}$. ამრიგად, ჩვენ განვიხილავთ არა ერთ სხვაობიან ამოცანას, არამედ ამოცანების ოჯახს, რომელიც h პარამეტრზეა დამოკიდებული. ამოცანათა ამ ოჯახს სხვაობიანი სქემა ეწოდება.

მაგალითი 1. კოშის ამოცანა:

$$Lu = \frac{du}{dt} + \lambda u = f(t)\,, \;\; t > 0, \;\; u(0) = u_0.$$

ეილერის სხვაობიან სქემას აქვს სახე

$$L_\tau y = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \lambda y_n = f_n\,,\; y_n = y(t_n)\,,\; t_n = n\tau \in \omega_\tau,\; n = 0, 1, \ldots,\; y_0 = u_0.$$

მაგალითი 2. პირველი სასაზღვრო ამოცანა:

$$Lu = u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \tag{6}$$

ვისარგებლოთ (2) სამწერტილიანი სხვაობიანი ოპერატორით:

$$L_h y_i = y_{\bar{x}x,i} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$$

და მივიღებთ სხვაობიან სასაზღვრო ამოცანას ბადეზე $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ 0 \le i \le N,\ x_N = 1\}$:

$$L_h y_i = y_{\bar{x}x,i} = -f_i, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$
$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \qquad (6')$$

3. **მდგრადობა.** ჩვენთვის უფრო მოხერხებული იქნება, თუ (5) სხვაობიან სქემას ჩავწერთ ოპერატორული ფორმით. ამისათვის (5) განტოლება ჯერ მატრიცული სახით ჩავწეროთ

$$AY_h = \Phi_h, \qquad (7)$$

სადაც Y_h – საძიებელი N სასრულგანზომილებიანი ვექტორია.

N იმ კვანძების რიცხვის ტოლია, რომლებშიც Y_h ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები უცნობია ((6′) პირველი სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში Y_h-ის განზომილება უდრის $N-1$-ს, ბადის შიდა კვანძების რიცხვს). $y_h(x_i)$-ის მნიშვნელობები $x_i \in \omega_h$ კვანძებში Y_h ვექტორის კომპონენტებს წარმოადგენს, $\varphi_h(x_i)$ – Φ_h ვექტორის კომპონენტებია, A კი $N \times N$ რიგის კვადრატული მატრიცაა.

შემოვიღოთ ბადური ფუნქციების N განზომილებიანი სივრცე H_h და ვთქვათ, A_h არის A მატრიცის შესაბამისი წრფივი ოპერატორი $A_h : H_h \to H_h$. (7)-ის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ

$$A_h y_h = \varphi_h, \qquad \varphi_h \in H_h. \qquad (8)$$

ვთქვათ, $\|\cdot\|_{(1h)}$ და $\|\cdot\|_{(2h)}$ ვექტორული ნორმებია H_h სივრცეში.

ვიტყვით, რომ სხვაობიანი სქემა (8) მდგრადია, თუ არსებობს ისეთი $M > 0$ მუდმივი, რომელიც დამოკიდებული არ არის h-ისა და φ_h-ის ამორჩევაზე, რომ (8) განტოლების ამონახსნისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|y_h\|_{(1h)} \le M\|\varphi_h\|_{(2h)}, \qquad (9)$$

ყველა საკმაოდ მცირე h-სთვის: $|h| \le h_0$.

(8) სხვაობიან სქემას კორექტული (კორექტულად დასმული) ეწოდება, თუ (8) განტოლების ამოხსნა არსებობს და ერთადერთია მასში შემავალი ნებისმიერი მონაცემებისათვის $\varphi_h \in H_h$ და ამასთან, თუ სქემა მდგრადია, ე. ი. სრულდება (9) პირობა.

სქემის მდგრადობა ნიშნავს, რომ y_h ამოხსნა უწყვეტადაა დამოკიდებული მასში შემავალ მონაცემებზე, ამასთან ეს უწყვეტი დამოკიდებულება თანაბარია h-ის მიმართ. თუ $\tilde{y}_h$ არის $A_h\tilde{y}_h = \tilde{\varphi}_h$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ A_h-ის წრფივობის გამო $A_h(\tilde{y}_h - y_h) = \tilde{\varphi}_h - \varphi_h$; და (9)-დან გამომდინარეობს

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(1h)} \leq M\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{(2h)} . \tag{10}$$

ამოცანაში შემავალი მონაცემების მცირე შეშფოთებას შეესაბამება ამონახსნის მცირე შეშფოთება.

თუ სქემა (8) ამოხსნადია, მაშინ არსებობს შებრუნებული ოპერატორი A_h^{-1} და

$$y_h = A_h^{-1}\varphi_h, \quad \|y_h\|_{(1h)} \leq \|A_h^{-1}\|\|\varphi_h\|_{(2h)} , \tag{11}$$

სადაც $\|A_h^{-1}\| = \|A_h^{-1}\|_{(2h\to 1h)}$ – A_h^{-1} ოპერატორის ნორმაა.

მდგრადობა ნიშნავს შებრუნებული ოპერატორის თანაბრად შემოსაზღვრულობას h-ის მიმართ

$$\|A_h^{-1}\| \leq M . \tag{12}$$

სქემას ეწოდება არამდგრადი, თუ არ მოიძებნება h-ზე დამოუკიდებელი M მუდმივი, რომელიც აღემატება $\|A_h^{-1}\|$-ს ე. ი. $\|A_h^{-1}\|$ უსაზღვროდ იზრდება, როცა $|h| \to 0$.

შეიძლება მოხდეს, რომ პირველი გვარის სასაზღვრო პირობის ნაცვლად – $u = \mu$, როცა $x \in \Gamma$ – მოცემული იყოს პირობა

$$\ell u = \mu(x), \quad x \in \Gamma , \tag{13}$$

სადაც ℓ – რაიმე წრფივი დიფერენციალური ოპერატორია, მაგალითად, $\ell u = u' - \sigma u$, $\sigma > 0$ ან $\ell u = u'$, როცა $x = 0$ (ან $x = 1$). მაშინ (3), (4) ამოცანის ნაცვლად გვექნება ამოცანა

$$Lu = f(x), \quad x \in G; \ \ell u = \mu(x), \quad x \in \Gamma . \tag{14}$$

შესაბამის სხვაობიან სქემას შემდეგი სახე ექნება

$$L_h y_h = \varphi_h \text{ როცა } x \in \omega_h, \quad \ell_h y_h = \bar{\mu}_h \text{ როცა } x \in \gamma_h, \qquad (15)$$

სადაც ℓ_h წრფივი სხვაობიანი ოპერატორია, რომელიც ახდენს ℓ ოპერატორის აპროქსიმაციას. შეიძლება მოხდეს ისე, რომ φ_h და $\bar{\mu}_h$ უნდა შეფასდეს სხვადასხვა ნორმებში.

სქემა (15) მდგრადია, თუ მისი ამონახსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|y_h\|_{(1h)} \le M_1 \|\varphi_h\|_{(2h)} \le M_2 \|\bar{\mu}_h\|_{(3h)}, \qquad (16)$$

სადაც $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ მუდმივები დამოკიდებული არ არის h-ზე, φ_h და $\bar{\mu}_h$ საწყისი მონაცემების შერჩევაზე.

უნდა აღინიშნოს, რომ (15) სხვაობიანი სქემა შეიძლება $A_h y_h = \varphi_h$ ოპერატორული სახითაც ჩაიწეროს. მაგრამ ამ შემთხვევაში, (9)-ში და (16)-ში $\|\cdot\|_{(2h)}$ შეიძლება არ დაემთხვეს ერთმანეთს; ისევე როგორც მათი მარჯვენა მხარეები (ეს ცხადი ხდება უკვე პირველი სასაზღვრო ამოცანის განხილვისას).

4. მდგრადი სქემის მაგალითი. მდგრადი სქემის მაგალითად განვიხილოთ სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანა

$$y_{\bar{x}x,i} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -\varphi_i, \quad i = 1,2,\dots,N-1, \qquad (17)$$
$$y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad hN = 1.$$

I თავის §4-ის მიხედვით განვმარტოთ A_h ოპერატორი. ვთქვათ, H_h – ბადის შიგა $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ კვანძებში განსაზღვრული ბადური ფუნქციების სივრცე. ავიღოთ $y \in H_h$ ($y_h(x)$-თან ინდექსს ჯერჯერობით გამოვტოვებთ) და $\overset{\circ}{y}$ ფუნქცია, რომელიც შიგა წერტილებში ემთხვევა y ფუნქციას, ხოლო საზღვარზე ნულის ტოლი ხდება $\overset{\circ}{y}_0 = \overset{\circ}{y}_N = 0$. მაშინ A_h ოპერატორი განვსაზღვროთ შემდეგი იგივეობით

$$(A_h y)_i = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

და (17)-ის ნაცვლად მივიღებთ ოპერატორულ განტოლებას

$$A_h y_h = \varphi_h. \tag{18}$$

H_h სივრცეში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

H_h სივრცეში A_h ოპერატორი თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრულია და

$$\delta E \le A_h \le \Delta E, \text{ ანუ } \delta\|y\|^2 \le (A_h y, y) \le \Delta\|y\|^2 \text{ ყველა } y \in H_h, \tag{19}$$

სადაც δ და Δ – A ოპერატორის უმცირესი და უდიდესი საკუთრივი მნიშვნელობებია და ტოლია

$$\delta = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \|A_h\| = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}. \tag{20}$$

A_h^{-1} შებრუნებული ოპერატორი თვითშეუღლებულია, თუ $A_h = A_h^*$. I თავის §4-ში ნაჩვენებია, რომ (19) უტოლობები ექვივალენტურია შემდეგი ოპერატორული უტოლობებისა:

$$\frac{1}{\Delta}E \le A_h^{-1} \le \frac{1}{\delta}E, \quad \|A_h^{-1}\| = \frac{1}{\delta}. \tag{21}$$

აქედან გამომდინარეობს შებრუნებული A_h^{-1} ოპერატორის ნორმის თანაბრად შემოსაზღვრულობა: $\|A_h^{-1}\| \le 1/\delta < 1/8$ და აპრიორული შეფასება

$$\|y_h\| \le \frac{1}{\delta}\|\varphi_h\| \le \frac{1}{8}\|\varphi_h\|, \tag{22}$$

რომელიც (18) სქემის მდგრადობას გამოხატავს. ეს შეფასება შეიძლება მივიღოთ ენერგეტიკული უტოლობების მეთოდით

$\lambda_k(A_h^{-1})$ საკუთრივი მნიშვნელობების შეფასების გარეშე. მართლაც, $A_h y_h = \varphi_h$ განტოლება სკალარულად გავამრავლოთ y_h-ზე: $(A_h y_h, y_h) = (\varphi_h, y_h)$ და ვისარგებლოთ უტოლობებით $(\varphi_h, y_h) \le \|\varphi_h\| \|y_h\|$, $\|y_h\|^2 \le \frac{1}{\delta}(A_h y_h, y_h)$; მაშინ მივიღებთ უტოლობას $\delta\|y_h\|^2 \le \|\varphi_h\| \|y_h\|$, საიდანაც გამომდინარეობს (22) შეფასება.

(17) სქემა მდგრადია აგრეთვე $\|y\|_C$ ნორმაში:

$$\|y_h\|_C \le \frac{1}{2}\|\varphi_h\|_C, \quad \|y\|_C = \|y\|_{C_h} = \max_{0<i<N}|y_i|. \tag{23}$$

ეს გამომდინარეობს სამწერტილიანი სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შეფასებიდან, რომელიც მიღებულია I თავის §5-ის მესამე პუნქტში. მოცემულ შემთხვევაში შეფასებას აქვს სახე

$$\|y_h\|_C \le \sum_{s=1}^{N-1} h \sum_{k=1}^{s} h|\varphi_k| \le \|\varphi\|_C \sum_{s=1}^{N} x_s h < \frac{1}{2}\|\varphi_h\|_C,$$

რადგანაც

$$\sum_{s=1}^{N} x_s h = h^2 \sum_{s=1}^{N} s = \frac{N(N-1)}{2} h^2 = \frac{1-h}{2} < \frac{1}{2}.$$

5. არაკორექტული სქემის მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია სქემა

$$A_h y_h = \varphi_h$$

და $\|A_h\| \to \infty$, როცა $|h| \to 0$. განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა – ვიპოვოთ φ_h მარჯვენა მხარე, თუ ცნობილია ამოხსნა y_h:

$$B_h \varphi_h = y_h, \; B_h = A_h^{-1}.$$

ის არაკორექტულია, რადგან

$$\|B_h^{-1}\| = \|(A_h^{-1})^{-1}\| = \|A_h\| \to \infty \text{ როცა } |h| \to 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი M მუდმივისათვის, რომელიც h-ზე დამოკიდებული არ არის, შეიძლება მივუთითოთ ისეთი h_*, რომ $\|B_h^{-1}\| > M$, როცა $|h| \le h_*$. ვთქვათ, $\tilde{\varphi}_h$ არის $B_h\tilde{\varphi}_h = \tilde{y}_h$ განტოლების ამოხსნა, ხოლო φ_h – $B_h\varphi_h = y_h$ განტოლების ამოხსნა, მაშინ

$$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\| \le \|B_h^{-1}\| \|\tilde{y}_h - y_h\|.$$

თუ $\|B_h^{-1}\| \le M$, როცა $|h| \ge h_0$, ასე რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\| \le M\|\tilde{y}_h - y_h\|,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ სქემა კვაზიმდგრადია. შეიძლება თუ არა, ამ სქემით სარგებლობა φ_h-ის საპოვნელად მოთხოვნილი ε სიზუსტით, თუ y_h მოცემულია რაიმე ε_0 სიზუსტით:

$$\|\tilde{y}_h - y_h\| \le \varepsilon_0$$

$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\| \le \|B_h^{-1}\| \|\tilde{y}_h - y_h\|$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $B_h\varphi_h = y_h$ ამოცანის ამოხსნა განისაზღვრება $\|B_h^{-1}\|\varepsilon_0$ სიზუსტით. ვთქვათ. φ_h უნდა ვიპოვოთ $\varepsilon > 0$ სიზუსტით ისე, რომ სრულდებოდეს $\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\| \le \varepsilon$; ეს შესაძლებელია, თუ სრულდება პირობა

$$\|B_h^{-1}\|\varepsilon_0 \le \varepsilon.$$

აქედან განისაზღვრება დასაშვები $h \ge h_0$ ბიჯი, ე. ი. h_0.

ავხსნათ ეს კონკრეტულ (17) ამოცანაზე. ამისთვის გვაქვს

$$\|B_h^{-1}\| = \|A_h\| = \Delta = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2} \le \frac{4}{h^2},$$

და პირობა $\|B_h^{-1}\|\varepsilon_0 = \Delta\varepsilon_0 \le \varepsilon$ შესრულებულია, თუ $4\varepsilon_0/h^2 \le \varepsilon$, ანუ

$$h \ge h_0 = 2\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon}.$$

აქედან ჩანს, რომ ამოცანაში შემავალი მონაცემები უფრო მაღალი ε_0 სიზუსტით უნდა იყოს მოცემული, ვიდრე ამოხსნის განსაზღვრის ε სიზუსტე.

ვთქვათ, მოცემულია მარჯვენა მხარის ცდომილება $\varepsilon_0 = 10^{-8}$ და მოთხოვნილი სიზუსტე $\varepsilon = 10^{-4}$. მაშინ $h_0 = 2 \cdot 10^{-2} = 1/50$, ე. ი. სიზუსტეს $\varepsilon = 10^{-4}$ შეიძლება მიეაღწიოთ მხოლოდ ბადეზე ბიჯით $h \geq 1/50$. თუ, მაგალითად, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-4}$, მაშინ $h_0 = 1$ და $\varepsilon = 10^{-4}$ სიზუსტე არც ერთი ბადის შემთხვევაში არ მიიღწევა, როცა ამოცანაში შემავალი მონაცემები ასეთი სიზუსტით არის მოცემული.

6. აპროქსიმაცია და კრებადობა. (14) ამოცანის სხვაობიანი მეთოდით ამოხსნისას საჭიროა ვიცოდეთ, როგორი სიზუსტით უახლოვდება სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა დასმული ამოცანის ამოხსნას. ცდომილების შესაფასებლად, რომელიც (14) ამოცანის (15) სხვაობიანი სქემით შეცვლისას წარმოიშვება, საჭიროა ამ ამოცანების ამოხსნების შედარება. ეს შედარება ბადურ ფუნქციათა H_h სივრცეში მოვახდინოთ. $u_h(x)$-ით აღვნიშნოთ (14) ამოცანის ზუსტი $u(x)$ ამოხსნის მნიშვნელობები ω_h ბადეზე: $u_h \in H_h$. განვიხილოთ ცდომილება

$$z_h = y_h - u_h,$$

სადაც y_h — (15) ამოცანის ამოხსნაა. თუ ჩავსვამთ (15)-ში $y_h = z_h + u_h$ და $u = u(x)$ ფუნქციას ჩავთვლით მოცემულად, მაშინ z_h-სთვის მივიღებთ სხვაობიან ამოცანას

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad \ell_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \tag{24}$$

სადაც ψ_h-ს, $\psi_h = \varphi_h - L_h u_h$, უწოდებენ აპროქსიმაციის ცდომილებას $L_h y_h = \varphi_h$ განტოლებისათვის $Lu = f(x)$ განტოლების $u = u(x)$ ამოხსნაზე (შეუსაბამობა სსვაობიანი სქემისათვის ამოხსნაზე), $\nu_h = \overline{\mu}_h - \ell_h u_h$ კი აპროქსიმაციის ცდომილებაა $\ell_h y_h = \overline{\mu}_h$ სხვაობიანი სასაზღვრო პირობისათვის (14) ამოცანის ამოხსნაზე.

ვიტყვით, რომ:

(15) სხვაობიანი სქემა კრებადია, თუ

$$\|z_h\|_{(1h)} \to 0 \text{ როცა } |h| \to 0;$$

(15) სხვაობიან სქემას აქვს m რიგის სიზუსტე, ანუ კრებადია $O(|h|^m)$ სიჩქარით, თუ

$$\|z_h\|_{(1h)} = \|y_h - u_h\|_{(1h)} \le M|h|^m$$

ან

$$\|z_h\|_{(1h)} = O(|h|^m), \quad m > 0,$$

სადაც $M > 0$ – h-ზე დამოუკიდებელი მუდმივია.

(15) სხვაობიან სქემას აქვს აპროქსიმაციის m რიგი ამოხსნაზე, თუ

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(3h)} = O(|h|^m), \quad m > 0. \tag{25}$$

ψ_h და ν_h შეუსაბამობათა შეფასება ხდება იმ დაშვებით, რომ ამოსავალი ამოცანის ამოხსნა არსებობს და გააჩნია იმდენი წარმოებული, რამდენიც აპროქსიმაციის m-ური რიგის მისაღებად მოითხოვება.

მოვიყვანოთ ψ_h-ის შეფასების ორი მაგალითი.

მაგალითი 1. მოცემულია ამოცანა

$$Lu = -u'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{26}$$

და სხვაობიანი სქემა

$$L_h y = -y_{\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x = ih, \quad 1 \le i \le N-1, \quad y_0 = y_N = 0,$$

ამ შემთხვევაში სასაზღვრო პირობები სრულდება ზუსტად, $\nu_h = 0$ (h ინდექსი $\varphi(x)$ და $u(x)$-თან ჯერჯერობით გამოიტოვება) და

$$\psi_h = \varphi - L_h u = \varphi + u_{\bar{x}x} = \varphi + \left(u'' + \frac{1}{2}h^2 u^{IV} + O(h^4)\right) =$$

$$= (\varphi + u'') + \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(h^4) = \varphi - f + O(h^2),$$

რადგანაც $u'' = -f(x)$. აქედან ჩანს, რომ $\|\psi_h\|_C = O(h^2)$, თუ დავუშვებთ, რომ $\varphi = f$ ან $\varphi = f + O(h^2)$.

პირველ პუნქტში მოყვანილი იყო $\psi = L_h v_h - (Lv)_h$ ცდომილების შეფასება ნებისმიერი ფუნქციისათვის. $z_h = y_h - u_h$ ცდომილების შეფასებისას გამოიყენება ψ_h შეუსაბამობა, რომელიც ახასიათებს $Lu - f$ ოპერატორის $L_h u_h - \varphi_h$ ოპერატორით აპროქსიმაციის ცდომილებას ამოსავალი ამოცანის $u = u(x)$ ამოხსნაზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f - Lu = 0$, $\psi_h = \varphi_h - L_h u_h$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\psi_h = (\varphi_h - L_h u_h) - (f - Lu)_h =$$
$$= (\varphi_h - f_h) - (L_h u_h - (Lu)_h) = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)},$$

სადაც $\psi_h^{(1)} = -(L_h u_h - (Lu)_h)$, $\psi_h^{(2)} = \varphi_h - f_h$, $\psi_h^{(1)}$ – L ოპერატორის L_h ოპერატორით აპროქსიმაციის ცდომილებაა (6) ამოცანის $u = u(x)$ ამოხსნაზე, $\psi_h^{(2)}$ – განტოლების მარჯვენა მხარის აპროქსიმაციის ცდომილებაა. მოთხოვნა $\|\psi_h\|_{(2h)} = O(|h|^m)$, ცხადია, შესრულებულია, თუ $\|\psi_h^{(1)}\|_{(2h)} = O(|h|^m)$, $\|\psi_h^{(2)}\|_{(2h)} = O(|h|^m)$. მაგრამ ეს პირობები აუცილებელი არ არის $\|\psi_h\|_{(2h)} = O(|h|^m)$ შეფასებისათვის, რაზეც შემდეგი მაგალითი მოწმობს.

მაგალითი 2. პირველი სასაზღვრო ამოცანა (26). გამოვთვალოთ

$$-\psi_h^{(1)} = u_{\bar{x}x} - u'' = \frac{1}{12}h^2 u^{IV} + O(h^4) = O(h^2).$$

ვთქვათ, $\varphi = f + \dfrac{1}{12}h^2 f_{\bar{x}x}$, ე. ი. $\varphi - f = O(h^2)$. აქედან ჩანს, რომ $\psi_h^{(1)} = O(h^2)$ და $\psi_h^{(2)} = O(h^2)$, მაგრამ სქემას აქვს აპროქსიმაციის მეოთხე რიგი, ვინაიდან

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)} = \varphi - f + \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(h^4) =$$
$$= \frac{h^2}{12}(f_{\bar{x}x} + u^{IV}) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}(f'' + u^{IV}) + O(h^4),$$

$\psi_h = O(h^4)$, რადგანაც $u^{IV} + f''(x) = 0$, $u'' + f(x) = 0$ განტოლების ძალით.

7. მდგრადობისა და აპროქსიმაციის კავშირი კრებადობასთან. განვიხილოთ წრფივი სხვაობიანის სქემა (15). თუ სქემა მდგრადია და ახდენს ამოსავალი ამოცანის აპროქსიმაციას, მაშინ ის კრებადია (ჩვეულებრივ ამბობენ: „მდგრადობიდან და აპროქსიმაციიდან გამომდინარეობს სქემის კრებადობა"). მართლაც, L_h და ℓ_h-ის წრფივობის გამო $z_h = y_h - u_h$ ცდომილებისათვის ვღებულობთ (24) ამოცანას, რომელიც (15) ამოცანის ანალოგიურია y_h-სთვის. ამიტომ, თუ (15) სქემა მდგრადია, ე. ი. (16) შეფასება ჭეშმარიტია, მაშინ z_h-სათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|z_h\|_{(1h)} \le M_1\|\psi_h\|_{(2h)} + M_2\|\nu_h\|_{(3h)}. \qquad (27)$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\|z_h\|_{(1h)} = \|y_h - u_h\|_{(1h)} = O(|h|^m),$$

თუ

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = O(|h|^m), \ \|\nu_h\|_{(3h)} = O(|h|^m).$$

ამრიგად, სხვაობითი სქემების კრებადობისა და სიზუსტის რიგის შესწავლა დადის აპროქსიმაციის ცდომილებისა და მდგრადობის შესწავლაზე, ე. ი. (16) აპრიორული შეფასების მიღებაზე.

მაგალითი 3. (17) სხვაობიანი სქემებისათვის ($y_{\bar{x}x,i} = -\varphi_i$, $i = 1,2,\dots,N-1$, $y_0 = 0$, $y_N = 0$) ადრე მიღებული გვქონდა (23) შეფასება. აპროქსიმაციის შეფასება, ცხადია, ტოლია $\|\psi_h\|_{C_h} = O(h^2)$, როცა $\varphi_i = f_i$, $\|\psi_h\|_{C_h} = O(h^4)$ როცა $\varphi_i = f_i + \dfrac{h^2}{12} f_{\bar{x}x,i}$. ვინაიდან $z_{\bar{x}x,i} = -\psi_{h,i}$ როცა $i=1, 2, \dots, N-1$, $z_0=0$, $z_N=0$, ამიტომ z-თვისაც სამართლიანია შეფასება $\|z\|_C \le \dfrac{1}{2}\|\psi\|_C$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\|y_h - u_h\|_C = O(h^m)$, სადაც $m = 2$, როცა $\varphi = f$, $m = 4$, როცა $\varphi = f + \dfrac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}$.

ამით (26) სქემის შესწავლა დამთავრებულია ((26) სქემის შესწავლა ფაქტიურად ილუსტრირებულია ბოლო სამ მაგალითზე). ეს არის სხვაობიანი სქემების შესწავლის ტიპიური მაგალითი.

§2. ერთგვაროვანი სამწერტილიანი სქემები

1. ამოცანის დასმა. განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1. \tag{1}$$

$$k(x) \geq q > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

ასეთი განტოლება აღწერს ტემპერატურის ან კონცენტრაციის (დიფუზიის განტოლება) სტაციონარულ, ე. ი. დროის მიხედვით უცვლელ განაწილებას (სითბოგამტარებლობის სტაციონარული განტოლება). თუ $u = u(x)$ ტემპერატურაა, მაშინ $W(x) = -k(x)\dfrac{du}{dx}$ სითბური ნაკადია ($k(x)$ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი). (1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, თუ $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია. თუ $k(x)$-ს $x = \xi$ წერტილში აქვს პირველი გვარის წყვეტა, ისე რომ $[k] = k(\xi + 0) - k(\xi - 0) \neq 0$, მაშინ ამ წერტილში u ტემპერატურა და (ku') სითბური ნაკადი უწყვეტი უნდა იყოს:

$$[u] = 0, [ku'] = 0 \text{ როცა } x = \xi.$$

შესაძლოა, სასაზღვრო პირობები სხვა სახით იყოს მოცემული: $ku' = \sigma_1 u - \mu_1$, როცა $x = 0$, $-ku' = \sigma_2 u - \mu_2$, როცა $x = 1$. თუ $\sigma_1 > 0$, მაშინ ეს არის მესამე გვარის პირობა, როცა $\sigma_1 = 0$ – მეორე გვარისა ($ku' = -\mu_1$, როცა $x = 0$). შესაძლოა სხვადასხვა პირობების კომბინაციაც, როცა $x = 0$ და $x = 1$.

2. სამწერტილიანი სხვაობიანი სქემები. $0 \le x < 1$ მონაკვეთზე შემოვიღოთ თანაბარი ბადე $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \dots, N\}$, $h = 1/N$ ბიჯით და ავირჩიოთ (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) სამწერტილიანი შაბლონი. მისთვის დავწეროთ სხვაობიანი სქემა, რომელიც (1) ამოცანის აპროქსიმაციას მოახდენს. ნებისმიერ სხვაობიან განტოლებას ამ შაბლონზე ექნება სახე

$$b_i y_{i+1} - c_i y_i + a_i y_{i-1} = -h^2 \varphi_i, \tag{2}$$

სადაც a_i, b_i, c_i – კოეფიციენტებია, დამოკიდებული $k(x)$, $q(x)$ და h-ზე ისინი ჯერჯერობით განუსაზღვრელია. გადავწეროთ (2) სხვა სახით:

$$\frac{1}{h}\left(b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) - d_i y_i = -\varphi_i, \tag{3}$$
$$d_i = (c_i - a_i - b_i)/h^2.$$

ვიტყვით, რომ სხვაობიანი სქემა ერთგვაროვანია, თუ ბადის ყველა წერტილში მისი კოეფიციენტები დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი კოეფიციენტებისათვის გამოითვლება ერთი და იმავე ფორმულებით. ამრიგად, თუ შემოვიღებთ $A[\bar{k}(s)]$, $B[\bar{k}(s)]$, $D[\bar{k}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$ ფუნქციონალებს, განსაზღვრულს $-1 \le s \le 1$ მონაკვეთზე ნებისმიერი უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციისათვის და გამოვთვლით (3) სქემის კოეფიციენტებს ფორმულებით

$$a_i = A[k(x_i + sh)], \quad b_i = B[k(x_i + sh)],$$

$$d_i = D[k(x_i + sh)], \quad \varphi_i = F[f(x_i + sh)], \quad \bar{k}(s) = k(x_i + sh),$$

მაშინ ასეთი სქემა ერთგვაროვანი იქნება. მოვიყვანოთ უმარტივესი ფუნქციონალები

$$A[\bar{k}(s)] = \bar{k}(-0{,}5), \quad a_i = k_{i-1/2} = k(x_i - 0{,}5h),$$

$$F(\bar{f}(s)) = f(0), \quad \varphi_i = f_i = f(x_i)$$

და ა. შ.

თუ სქემა ერთგვაროვანია, მაშინ მოხერხებულია აღნიშვნათა უინდექსო სისტემით სარგებლობა:

$$\Lambda y = \frac{1}{h}(by_x - ay_{\bar{x}}) - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \tag{4}$$
$$y(0) = \mu_1, \quad y(1) = \mu_2,$$

სადაც

$$a = a(x),\ b = b(x),\ y = y(x),\ x = ih \in \omega_h,$$
$$y_x = (y(x+h) - y(x))/h, \quad y_{\bar{x}} = (y(x) - y(x-h))/h.$$

(4) ამოცანის ამოხსნადობისათვის საკმარისია, რომ $a > 0$, $b > 0$, $d \geq 0$, ამასთან ამოხსნა შეიძლება მოიძებნოს ფაქტორიზაციის მეთოდით (იხ. თავი II, §3).

3. აპროქსიმაციის პირობები. გამოვთვალოთ (4) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება:

$$\psi = (\Lambda v + \varphi) - (Lv + f) = (\Lambda v - Lv) + (\varphi - f) =$$
$$= \left[\frac{1}{h}(bv_x - av_{\bar{x}}) - (kv')'\right] - (d - q)v + (\varphi - f),$$

სადაც $v(x)$ – ნებისმიერი საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა, ხოლო k, q და f-ს იმდენი წარმოებული აქვს, რამდენიც შემდგომი მსჯელობისთვისაა საჭირო. ვისარგებლოთ ტეილორის ფორმულით:

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) \pm \frac{h^3}{6}v'''(x) + O(h^4)$$

და ვიპოვოთ

$$v_x = v' + \frac{h}{2}v'' + \frac{h^2}{6}v''' + O(h^3),$$
$$v_{\bar{x}} = v' - \frac{h}{2}v'' + \frac{h^2}{6}v''' + O(h^3).$$

ჩავსვათ v_x და $v_{\bar{x}}$-ის ეს გამოსახულებები ფორმულაში ψ-სთვის:

$$\psi = \left(\frac{1}{h}(b-a) - k'\right)v' + \left(\frac{b+a}{2} - k\right)v'' + \frac{h(b-a)}{6}v''' -$$
$$-(d-q)v + (\varphi - f) + O(h^2).$$

აქედან ჩანს, რომ სქემას აქვს აპროქსიმაციის მეორე რიგი, თუ შესრულებულია პირობები

$$\frac{b-a}{h} = k'(x) + O(h^2), \quad \frac{b+a}{2} = k(x) + O(h^2),$$
$$d = q(x) + O(h^2), \quad \varphi = f(x) + O(h^2). \tag{5}$$

ამ შემთხვევაში $\psi = O(h^2)$.

(4) სქემა კოეფიციენტებით

$$b_i = k_{i+1/2}, \quad a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i,$$
$$b_i = \frac{k_i + 2k_{i+1/2} + k_{i+1}}{4}, \quad a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i,$$

აკმაყოფილებს აპროქსიმაციის მეორე რიგის (5) პირობებს, ხოლო სქემა კოეფიციენტებით

$$b_i = k_{i+1}, \quad a_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{2}$$

არ აკმაყოფილებს პირველი რიგის აპროქსიმაციის პირობებსაც კი, ვინაიდან

$$\frac{1}{h}(b_i - a_i) - k_i' = O(1).$$

§3. კონსერვატული სხვაობიანი სქემები

1. ერთგვაროვანი კონსერვატული სქემები. I თავის §4-ში ჩვენ დავადგინეთ, რომ Λy ოპერატორის თვითშეუღლებულობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს პირობა $b_i = a_{i+1}$. ამ შემთხვევაში §2-ის (2) ამოცანა მიიღებს სახეს

$$\Lambda y=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i, \tag{1}$$

$$i=1,2,\ldots,N-1,\quad y_0=\mu_1,\quad y_N=\mu_2.$$

განტოლება

$$a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}-hd_iy_i=-h\varphi_i, \tag{2}$$

წარმოადგენს სითბური ბალანსის ბადურ ანალოგს ინტერვალზე $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$:

$$\omega_{i+1/2}-\omega_{i-1/2}-\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}qu\,dx=-\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx,\quad \omega=ku',$$

(რომელიც მიიღება §2-ის (1) განტოლების ინტეგრებით $x_{i-1/2}\le x\le x_{i+1/2}$ ინტერვალზე) და უწოდებენ კონსერვატულ სქემას, ე. ი. სქემას, რომლისთვისაც სრულდება ფიზიკური შენახვის კანონების სხვაობიანი ანალოგები.

მოთხოვნა $b_i=a_{i+1}$ ერთგვაროვანი სქემისათვის ნიშნავს, რომ $B[k(x+sh)]=A[k(x+(s+1)/h)]$ ან $B[\bar{k}(s)]=A[\bar{k}(s+1)]$ ნებისმიერი უბან-უბან უწყვეტი $\bar{k}(s)$ ფუნქციებისათვის $[-1,1]$ მონაკვეთზე. ეს შესაძლოა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $A[\bar{k}(s)]$ ფუნქციონალი დამოკიდებული არაა $\bar{k}(s)$ მნიშვნელობებზე, როცა $0\le s\le 1$, ხოლო $B[\bar{k}(s)]$ – $\bar{k}(s)$-ის მნიშვნელობებზე, როცა $-1\le s\le 0$, ისე რომ $a(x)=A[k(x+sh)]$, როცა $-1\le s\le 0$ კონსერვატიული სქემის $a(x)$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ $k(x)$ მნიშვნელობებზე $[x-h, x]$ მონაკვეთზე. მეორე რიგის აპროქსიმაციის (5) პირობები §2-დან (2) კონსერვატიული სქემისათვის ღებულობს სახეს

$$\begin{gathered}\frac{a(x+h)-a(x)}{h}=k'(x)+O(h^2),\\ \frac{a(x+h)+a(x)}{2}=k(x)+O(h^2),\end{gathered} \tag{3}$$

$$d(x) = q(x) + O(h^2),\ \varphi(x) = f(x) + O(h^2). \tag{4}$$

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$a(x) = k(x) - 1/2hk'(x) + O(h^2) = k(x - 1/2h) + O(h^2).$$

(2) კონსერვატიული სქემა ჩავწეროთ უინდექსო აღნიშვნებში:

$$\begin{gathered}(ay_{\bar{x}})_x - d(x)y = -\varphi(x),\\ x = ih \in \omega_h, \quad y(0) = \mu_1, \quad y(1) = \mu_2.\end{gathered} \tag{5}$$

მოვითხოვოთ აგრეთვე, რომ სრულდებოდეს პირობები

$$a \geq c_1 > 0, \qquad d \geq 0. \tag{6}$$

პრაქტიკაში a, d და φ-სთვის საჭიროა მარტივი ფორმულებით ვისარგებლოთ, მაგალითად, $a_i = k_{i-1/2}$, $d_i = q_i$, $\varphi_i = f_i$.

თუ $k(x)$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის ბადის $x = x_i$ წერტილში, მაშინ ერთგვაროვანი სქემის კოეფიციენტები შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$a_i = k_{i-1/2} \text{ ან } a_i = 1/2(k(x_{i-1} + 0) + k(x_i - 0)),$$

$$d_i = 1/2(q(x_i - 0) + q(x_i + 0)), \quad \varphi_i = 1/2(f(x_i - 0) + f(x_i + 0)).$$

ამ შემთხვევაში (3) პირობები შესრულებულია ყველგან, ხოლო (4) პირობები იცვლება შემდეგით

$$d_i - 1/2(q_{i-0} + q_{i+0}) = O(h^2), \quad \varphi_i - 1/2(f_{i-0} + f_{i+0}) = O(h^2).$$

მოვიყვანოთ სქემის მაგალითი, რომლის კოეფიციენტები გამოითვლება ბადის ინტერვალებზე ინტეგრების საშუალებით:

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1} = \left(\int_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x_i + sh)}\right)^{-1};$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x_i + sh)ds;$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} q(x_i + sh)ds.$$

ცხადია, რომ (3) და (4) პირობები შესრულებულია.

2. აპროქსიმაციის ცდომილება. განვიხილოთ კონსერვატიული სქემა აპროქსიმაციის მეორე რიგით. ვთქვათ, $u = u(x)$ ამოცანის ზუსტი ამოხსნაა

$$Lu = k(u')' - q(x)u = -f(x),\ 0 < x < 1,\ \ u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2, \quad (6)$$

ხოლო $y_i = y(x_i)$ – (5) სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა. განვიხილოთ სქემის ცდომილება, ე. ი. ბადური ფუნქცია

$$z(x) = y(x) - u(x), \quad x \in \overline{\omega}_h.$$

ჩავსვათ $y(x) = z(x) + u(x)$ (5) განტოლებაში და დავუშვათ, რომ $u(x)$ მოცემული ფუნქციაა, $z(x)$ ცდომილებისათვის მივიღებთ ამოცანას

$$\begin{gathered} \Lambda z = (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi(x), \quad x \in \omega_h, \\ z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad a \ge c_1 > 0, \quad d \ge 0, \end{gathered} \qquad (6')$$

სადაც $\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi$ (5) სქემის შეუსაბამობაა ამოსავალი დიფერენციალური ამოცანის $u = u(x)$ ამოხსნაზე.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $Lu + f = 0$, დავწერთ

$$\begin{aligned} \psi &= (\Lambda u + \varphi) - (Lu + f) = (\Lambda u - Lu) + (\varphi - f) = \\ &= [(au_{\bar{x}})_x - (ku')'] - (d - q)u + (\varphi - f). \end{aligned}$$

ჩვენი დაშვების თანახმად, (5) სქემა აკმაყოფილებს მეორე რიგით აპროქსიმაციის პირობებს. ეს ნიშნავს, რომ $\psi = O(h^2)$, თუ $k \in C^{(3)}$, $q, f \in C^{(2)}$, $u \in C^{(4)}$ და, აქედან გამომდინარე,

$$\|\psi\|_C = O(h^2).$$

ამ დაშვებაში სქემას აქვს სიზუსტის მეორე რიგი.

მაგრამ სიზუსტის იგივე რიგი შენარჩუნებულია უფრო დაბალი სიგლუვის შემთხვევაშიც:

$$k(x),\ q(x),\ f(x) \in C^{(2)}, \quad u \in C^{(3)}. \tag{7}$$

ლემა. თუ (7) პირობები სრულდება, მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$\frac{(ku')_{i+1/2} - (ku')_{i-1/2}}{h} = (ku')'_i + O(h^2), \tag{8}$$

სადაც $u = u(x)$ (6) განტოლების ამონახსნია.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$v_{i\pm 1/2} = v_i \pm \frac{1}{2} h v'_i + \frac{h^2}{8} v''_i + \frac{h^3}{48} v'''_i\left(x_i \pm \theta^{(\pm)} \frac{h}{2}\right),$$

$$0 \le \theta^{(\pm)} \le 1, \quad \frac{1}{h}(v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) = v'_i + O(h^2).$$

თუ ჩავსვამთ აქ $v=ku'$ და გავითვალისწინებთ, რომ $(ku')''=(qu-f)'$, $(ku')'''=(qu-f)''$, მივიღებთ (8) ფორმულას.

ლემის თანახმად, (7) პირობების გათვალისწინებით, აპროქსიმაციის ψ ცდომილება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ

$$\psi_i = \eta_{x,i} + \overset{*}{\psi}_i, \quad \eta_i = (a u_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2}, \quad \overset{*}{\psi}_i = O(h^2).$$

შემდგომ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$a_i = k_{i-1/2} + O(h^2), \quad \text{როცა} \quad k(x) \in C^{(3)},$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = (u')_{i-1/2} + O(h^2) \ \text{ როცა } u \in C^{(3)},$$

მივიღებთ $\eta_i \in O(h^2)$. მართლაც,

$$u_i = u_{i-1/2} + \frac{1}{2} h u'_{i-1/2} + \frac{1}{8} h^2 u''_{i-1/2} + O(h^3),$$

$$u_{i-1} = u_{i-1/2} - \frac{1}{2} h u'_{i-1/2} + \frac{1}{8} h^2 u''_{i-1/2} + O(h^3),$$

$$u_{\bar{x},i} = u'_{i-1/2} + O(h^2),$$

$$a_i u_{\bar{x},i} = (k_{i-1/2} + O(h^2))(u'_{i-1/2} + O(h^2)) = (ku')_{i-1/2} + O(h^2)),$$

$$\eta_i = O(h^2)$$

ქვემოთ მიღებული იქნება აპრიორული შეფასება $\|z\|_C$ უშუალოდ η და ψ^*-ს საშუალებით.

3. აპრიორული შეფასებები. შევაფასოთ z ცდომილება ψ-ს საშუალებით. უპირველეს ყოვლისა, გავიხსენოთ (14) შეფასება, რომელიც მიღებული იყო I თავის §5-ში. შევცვალოთ y z-ით, ხოლო φ — ψ-ით. ეს უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\|z\|_C \le \frac{1}{2c_1}\|\psi\|_C .$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$(az_{\bar{x}})_x - dz = -\mu_x, \quad x \in \omega_h, \quad z(0) = z(1) = 0, \quad a \ge c_1 \ge 0, \quad d \ge 0$$

ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|z\|_C \le \frac{2}{c_1}\left(1, |\mu|\right], \tag{9}$$

სადაც

$$(y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h .$$

წარმოვადგინოთ z ჯამის სახით: $z = w + v$, სადაც w და v შემდეგი ამოცანების ამონახსნებია

$$(aw_{\bar{x}})_x = -\mu_x, \quad x \in \omega_h, \quad w(0) = w(1) = 0;$$

$$\Lambda v = (av_{\bar{x}})_x - dv = -d\omega, \quad x \in \omega_h, \quad v(0) = v(1) = 0.$$

ω ფუნქციას ვიპოვით ცხადი სახით, ხოლო v-ს შეფასებისათვის ვისარგებლებთ მაქსიმუმის პრინციპით. განტოლებიდან

$$(aw_{\bar{x}} + \mu)_x = 0, \quad (aw_{\bar{x}})_{i+1} + \mu_{i+1} = (aw_{\bar{x}})_i + \mu_i$$

გამომდინარეობს, რომ $aw_{\bar{x}} + \mu = \mathrm{const} = c_0$. მოვახდინოთ ცხადი გარდაქმნები:

$$w_i = w_{i-1} + \frac{(c_0 - \mu_i)h}{a_i} = c_0 \sum_{k=1}^{i} \frac{h}{a_k} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\mu_k}{a_k} h + \omega_0; \quad \omega_0 = 0$$

$$0 = w_N = c_0 \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{a_k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{a_k} h;$$

$$c_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{a_k} h \bigg/ \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{a_k}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{h}{a_k} \bigg/ \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{a_k}., \quad 0 < \alpha_i \le 1,$$

ვიპოვით, რომ

$$w_i = \alpha_i \sum_{k=1}^{N} \frac{h\mu_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{i} \frac{h\mu_k}{a_k},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$|w_i| = \left| -(1-\alpha_i) \sum_{k=1}^{i} \frac{h\mu_k}{a_k} + \alpha_i \sum_{k=i+1}^{N} \frac{h\mu_k}{a_k} \right| \le$$

$$\le (1-\alpha_i) \sum_{k=1}^{i} \frac{h|\mu_k|}{a_k} + \alpha_i \sum_{k=i+1}^{N} \frac{h|\mu_k|}{a_k} \le \sum_{k=1}^{N} \frac{h|\mu_k|}{a_k}.$$

გასათვალისწინებელი რჩება, რომ $a_k \ge c_1 \ge 0$ და მივიღებთ

$$\|w\|_C \le \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^{N} h|\mu_k| = \frac{1}{c_1} (1, |\mu|]. \tag{10}$$

v-ს შეფასებისათვის ვისარგებლოთ მე-4 თეორემით I თავის §5-დან:

$$\|v\|_C \le \|w\|_C. \tag{11}$$

(10) და (11) უტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ

$$\|z\|_C \le \|w+v\|_C \le 2\|w\|_C \le \frac{2}{c_1}(1,|\mu|],$$

ე. ი. დამტკიცებულია (9) შეფასება.

ახლა დავუბრუნდეთ (6′) ამოცანას, სადაც $\psi = \eta_x + \psi^{*}$. წარმოვადგინოთ ψ შემდეგი სახით

$$\psi = \mu_x, \qquad \text{სადაც} \quad \mu_i = \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^{*} \tag{12}$$

და ვისარგებლოთ (9) შეფასებით. მაშინ (6′) ამოცანის ამოხსნისათვის მივიღებთ შემდეგ აპრიორულ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|z\|_C &\le \frac{2}{c_1}\left\{(1,|\eta|] + \sum_{i=1}^{N} h\left|\sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^{*}\right|\right\}, \\ \|z\|_C &\le \frac{2}{c_1}\left\{(1,|\eta|] + (1,|\psi^{*}|]\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

საჩვენებელი დარჩა, რომ ადგილი აქვს (12) ფორმულას. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ $\rho_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^{*}$, ვნახავთ, რომ $\rho_{i+1} - \rho_i = h\psi_i^{*}$,

ე. ი. $\psi_i^{*} = \rho_{x,i}$ და $\psi = \eta_x + \rho_x = \mu_x$, სადაც $\mu_i = \eta_i + \rho_i$.

4. სხვაობიანი სქემის კრებადობა და სიზუსტე. გადავიდეთ სხვაობიანი სქემის სიზუსტის შეფასებაზე. თუ დავუშვებთ

$$k(x),\ q(x),\ f(x) \in C^{(2)}, \qquad u(x) \in C^{(3)},$$

მივიღებთ $\eta(x) = O(h^2)$, $\psi^{*} = O(h^2)$. ახლა დაგვრჩა ვისარგებლოთ (13) შეფასებით, რომელიც შეიძლება უფრო უხეში შეფასებით შეიცვალოს

$$\|z\|_C \le \frac{2}{c_1}(\|\eta\|_C + \|\psi^{*}\|_C).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (5) სქემა თანაბრად კრებადია მეორე რიგით, ე. ი. $||z||_C = ||y-u||_C \le Mh^2$. თუ (7) პირობები სრულდება.

უფრო რთულია სქემის კრებადობის დამტკიცება წყვეტილი $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ კოეფიციენტების კლასში. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $k(x)$-ს აქვს პირველი გვარის წყვეტა ერთ წერტილში, ხოლო $q(x)$ და $f(x)$ უწყვეტია და $C^{(2)}$ კლასს ეკუთვნის.

$Q^{(k)}[a, b]$-თი აღვნიშნოთ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე, განსაზღვრული $[a, b]$ მონაკვეთზე, რომელთაც $[a, b]$-ზე k უბან-უბან უწყვეტი წამოებული გაჩნიათ.

ამრიგად, ვთქვათ, $k(x)\in Q^{(2)}$, $q(x)$, $f(x)\in C^{(2)}$ და $k(x)$-ს აქვს პირველი გვარის წყვეტა $[x_n, x_{n+1}]$ მონაკვეთის ξ წერტილში, ისე რომ $\xi = x_n + \theta h$, $0 \le \theta \le 1$. როცა $x = \xi$, შესრულებულია შეუღლების პირობები.

$$u_- = u_+, \quad (ku')_- = (ku')_+ = w_0,$$

სადაც

$$v_+ = v(\xi + 0), \quad v_- = v(\xi - 0).$$

მაშინ $\eta_i = (au_{\bar{x}}) - (ku')_{i-1/2} = O(h^2)$, როცა $i \ne n+1$, $\psi_i^* = O(h^2)$ ყველა $i = 1, 2, \dots, N-1$, $\eta_{n+1} = a_{n+1}u_{x,n} - (ku')_{n+1/2}$. თუ ჩავსვამთ აქ

$$u_{n+1} = u(\xi) + (1-\theta)hu'_+ + O(h^2),$$

$$u_n = u(\xi) - \theta hu'_- + O(h^2),$$

$$u_{x,n} = (u_{n+1} - u_n)/h = \theta u'_- + (1-\theta)u'_+ + O(h) =$$

$$= \theta\frac{(ku')_-}{k_-} + (1-\theta)\frac{(ku')_+}{k_+} + O(h) = w_0\left(\frac{\theta}{k_-} + \frac{1-\theta}{k_+}\right) + O(h),$$

$$(ku')_{n+1/2} = (ku')_- + O(h) = w_0 + O(h) \text{ როცა } \theta > 1/2,$$

$$(ku')_{n+1/2} = (ku')_+ + O(h) = w_0 + O(h) \text{ როცა } \theta < 1/2,$$

მივიღებთ

$$\eta_{n+1}=w_0\left[a_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_-}+\frac{1-\theta}{k_+}\right)-1\right]+O(h),$$

ე. ი. $\eta_{n+1}=O(1)$ ნებისმიერი სქემისათვის და მხოლოდ სქემისათვის კოეფიციენტებით

$$\overset{\circ}{a}_i=\left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}$$

გვაქვს $\eta_{n+1}=O(h)$. მართლაც,

$$\frac{1}{\overset{\circ}{a}_{n+1}}=\frac{1}{h}\int_{x_n}^{\xi}\frac{dx}{k(x)}+\frac{1}{h}\int_{\xi}^{x_{n+1}}\frac{dx}{k(x)}=\frac{\theta}{k_-}+\frac{1-\theta}{k_+}+O(h),$$

ე. ი. $\overset{\circ}{a}_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_-}+\frac{1-\theta}{k_+}\right)=1+\theta(h)$ და, აქედან გამომდინარე, $\eta_{n+1}=$ $=O(h)$. (13) უტოლობის მარჯვენა მხარეში შედის სიდიდე

$$(1,|\eta|]=\sum_{i=1,i\neq n+1}^{N}h|\eta_i|+h|\eta_{i+1}|.$$

ამით დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. წყვეტილ კოეფიციენტთა კლასში $k(x)\in Q^{(2)}$, $q(x)$, $f(x)\in C^{(2)}$ ნებისმიერ ერთგვაროვან სხვაობიან სქემას (5) აპროქსიმაციის მეორე რიგით აქვს სიზუსტის პირველი რიგი, ხოლო სქემას კოეფიციენტებით $a_i=\overset{\circ}{a}_i$ სიზუსტის მეორე რიგი აქვს.

§4. ერთგვაროვანი სქემები არათანაბარ ბადეებზე

1. კონსერვატული სქემა არათანაბარ ბადეზე. $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე ავარჩიოთ ნებისმიერი არათანაბარი ბადე

$$\hat{\omega}_h = \{x_i,\ i = 0,1,\ldots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}$$

არათანაბარ ბადეზე სამწერტილიანი კონსერვატული სქემის მისაღებად დავწეროთ ბალანსის განტოლება $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ მონაკვეთზე:

$$w_{i+1/2} - w_{i-1/2} - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qu\,dx = -\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx, \quad w = ku'.$$

ის ერთნაირად იწერება როგორც თანაბარი, ასევე არათანაბარი ბადისათვის. ახლა მოვახდინოთ ბალანსის განტოლებაში შემავალი ინტეგრალებისა და წარმოებულის აპროქსიმაცია:

$$w_{i-1/2} = (ku')_{i-1/2} \sim a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \quad h_i = x_i - x_{i-1},$$

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \sim \varphi_i \hbar_i, \qquad \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qu\,dx \sim d_i u_i \hbar_i,$$

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}),$$

სადაც a_i, d_i და φ_i რაიმე ბადური ფუნქციებია. შედეგად მივიღებთ სხვაობიან სქემას

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right] - d_i y_i = -\varphi_i, \qquad (1)$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$

d_i და φ_i-სთვის ვისარგებლოთ უმარტივესი ფორმულებით $\varphi_i = f_i$, $d_i = q_i$, $i = 1,2,\ldots,N-1$. a_i კოეფიციენტები განისაზღვრებიან $k(x)$

ფუნქციის მნიშვნელობებით (x_{i-1}, x_i) ინტერვალზე, ამიტომ ის შეიძლება ისეთივე ავიღოთ, როგორც თანაბარ ბადეზე. ასე რომ $a_i = k_{i-1/2} + O(h_i^2)$, როცა $k(x) \in C^{(2)}$.

2. აპროქსიმაციის ცდომილება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\hbar_i}$$

და სხვაობიანი სქემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy = -\varphi, \quad x = x_i \in \hat{\omega}_h, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \qquad (1)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z = y - u$, z-სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$(az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad z_0 = z_N = 0, \qquad (2)$$

სადაც

$$\psi = \Lambda u + \varphi = (au_{\bar{x}})_{\hat{x}} - du + \varphi \qquad (3)$$

არის შეუსაბამობა (1) სქემისათვის $u = u(x)$ ამოხსნაზე.

ლემა 1. თუ $qu \in C^{(2)}$, $f \in C^{(2)}$, მაშინ აპროქსიმაციის ψ ცდომილებისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$\psi = \eta_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad (4)$$

სადაც $\eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2} - h_i^2(qu-f)_i'/8$, $\psi_i^* = O(\hbar_i^2)$, როცა $\varphi_i = f_i$, $d_i = q_i$.

ვისარგებლოთ იგივეობით პირველი პუნქტიდან. ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით

$$0 = w_{\hat{x},i} - \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}(qu - f)dx, \quad w_i = (ku')_{i-1/2},$$

გამოვაკლოთ ეს იგივეობა (3) ტოლობას

$$\psi = \left[(au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2}\right] - (du)_i + \varphi_i + \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}(qu - f)dx \qquad (5)$$

მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამის სახით: $x_{i-1/2}$-დან x_i-მდე და x_i-დან $x_{i+1/2}$-მდე; შემდგომ, თუ ინტეგრალქვეშა $\tilde{f} = qu - f$ ფუნქციას გავშლით $x = x_i$ კვანძის მიდამოში, ვიპოვით

$$\frac{1}{\hbar_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\tilde{f}(x)dx = \frac{1}{\hbar_i}\left\{\int_{x_{i-1/2}}^{x_i}[\tilde{f}_i + (x - x_i)\tilde{f}_i{}']dx + O(h_i^3) +\right.$$

$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}}[\tilde{f}_i + (x - x_i)\tilde{f}_i']dx + O(h_{i+1}^3)\right\} = \tilde{f}_i + \frac{1}{8\hbar_i}(h_{i+1}^2 - h_i^2)\tilde{f}_i' + O(\hbar_i^2),$$

რადგანაც $h_i^3 + h_{i+1}^3 < (2\hbar_i)^3$. შეცვლა $h_{i+1}^2\tilde{f}_i' = h_{i+1}^2\tilde{f}_{i+1}' + O(h_{i+1}^3)$ გვაძლევს

$$\frac{1}{\hbar_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\tilde{f}(x)dx = \tilde{f}_i + \frac{1}{8}(h^2\tilde{f}')_{\hat{x},i} + O(\hbar_i^2).$$

თუ ამ გამოსახულებას, სადაც $\tilde{f} = qu - f$, ჩავსვამთ (5)-ში და გავითვალისწინებთ, რომ $\varphi_i = f_i$, $d_i = q_i$, მივიღებთ (4) ფორმულას.

η_i-ის რიგის შესაფასებლად განვიხილოთ სხვაობა $(au_{\bar{x}})_i - -(ku')_{i-1/2}$, როცა $k \in C^{(2)}$, $u \in C^{(3)}$. თუ ვისარგებლებთ დაშვებით $a_i = k_{i-1/2} + O(h_i^2)$ და ფორმულებით

$$u_i = u_{i-1/2} + h_i u_{i-1/2}'/2 + h_i^2 u_{i-1/2}''/8 + O(h_i^3),$$
$$u_{i-1} = u_{i-1/2} - h_i u_{i-1/2}'/2 + h_i^2 u_{i-1/2}''/8 + O(h_i^3),$$
$$u_{\bar{x},i} = (u_i - u_{i-1})/h_i = u_{i-1/2}' + O(h_i^2),$$

მივიღებთ

$$(au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2} = (k_{i-1/2} + O(h_i^2))(u_{i-1/2}' + O(h_i^2)) - (ku')_{i-1/2} = O(h_i^2).$$

ამრიგად, სამართლიანია შეფასება

$$\eta_i = O(h_i^2), \text{ როცა } k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}, \; u(x) \in C^{(3)}.$$

შენიშვნა. ჩვენ დავუშვით, რომ d_i და φ_i გამოითვლებოდა უმარტივესი ფორმულებით: $d_i = q_i$, $\varphi_i = f_i$. თუ ვისარგებლებთ უფრო რთული ფორმულებით, მაგალითად,

$$\varphi_i = \frac{h_i f_{i-1/2} + h_{i+1} f_{i+1/2}}{2\hbar_i}, \quad \varphi_i = \frac{1}{\hbar_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx,$$

მაშინ ბადური ფუნქცია $\psi_i^{*} = O(\hbar_i^2) - (d_i - q_i)u_i + (\varphi_i - f_i)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\psi_i^{*} = \rho_{\hat{x},i} + \psi_i^{**},$$

სადაც $\psi_i^{**} = O(\hbar_i^2)$, $\rho_i = O(h_i^2)$, და (4) ფორმულაში η_i შევცვალოთ ჯამით $\eta_i + \rho_i$:

$$\psi = (\rho_i + \eta_i)_{\hat{x}} + \psi^{**}, \tag{4'}$$

$$\rho_i = O(h_i^2), \quad \eta_i = O(h_i^2), \quad \psi_i^{**} = O(\hbar_i^2), \text{ როცა } k, q, f \in C^{(2)}, \; u \in {}^{(3)}.$$

3. კრებადობის სიჩქარის შეფასება. (2)-(4) ამოცანისათვის სამართლიანია აპრიორული შეფასება

$$\|z\|_C \le \frac{2}{c_1}\{(1,|\eta|] + (1,|\psi^{*}|]\}, \tag{6}$$

სადაც $(y,v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h_i$. თუ შესრულებულია (7) პირობები §3-დან, მაშინ

$$\eta_i = O(h_i^2), \quad \psi_i^{*} = O(\hbar_i^2).$$

თუ ჩავსვამთ η_i და ψ_i^{*}-ს (6)-ში, დავრწმუნდებით, რომ სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. გლუვ კოეფიციენტთა k, q, $f \in C^{(2)}$ კლასში (1) სახის ნებისმიერი სქემა ინარჩუნებს სიზუსტის მეორე რიგს არათანაბარ ბადეთა ნებისმიერ მიმდევრობაზე.

თუ გავითვალისწინებთ მეორე პუნქტის შენიშვნას, ψ_i^{*} შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $\psi_i^{*} = \rho_{\hat{x},i} + \psi_i^{**}$, სადაც $\rho_i = O(h_i^2)$, $\psi_i^{**} = O(\hbar_i^2)$. მაშინ (6)-ის ნაცვლად სამართლიანია შეფასება

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1}\{(1,|\eta+\rho|] + (1,|\psi^{**}|]\} ;$$

თეორემა სიზუსტის მეორე რიგის არათანაბარ ბადეზეც ძალაში რჩება.

თუ $k(x)$ კოეფიციენტს აქვს პირველი გვარის წყვეტა სასრული რაოდენობის წერტილებში, მაშინ ყოველთვის შესაძლებელია ისეთი არათანაბარი $\hat{\omega}_h(k)$ ბადის შერჩევა, რომ წყვეტის წერტილები ამ ბადის კვანძებს წარმოადგენდეს. მაშინ ნებისმიერ სქემას ექნება სიზუსტის მეორე რიგი.

ამრიგად, ნებისმიერ ერთგვაროვან, აპროქსიმაციის მეორე რიგის ($\psi = O(h^2)$) მქონე სქემას თანაბარ ბადეზე და უწყვეტ კოეფიციენტთა კლასში სიზუსტის მეორე რიგი აქვს; წყვეტილ კოეფიციენტთა კლასში კი იგივე რიგი აქვს არათანაბარ $\hat{\omega}_h(k)$ ბადეთა სპეციალური შერჩევისას.

4. ზუსტი სქემა. (1) ამოცანისათვის §2-დან შეიძლება აიგოს ზუსტი სამწერტილიანი სქემა, რომლის ამონახსნი ნებისმიერი ბადის კვანძით წერტილებში დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანის ზუსტ $u = u(x)$ ამოხსნას ემთხვევა. მოვახდინოთ ამ ფაქტის ილუსტრირება ამოცანის კერძო შემთხვევაში, როცა $q(x) \equiv 0$:

$$(ku')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \qquad (7)$$

განტოლების ინტეგრებით x_i-დან x-მდე მივიღებთ განტოლებას

$$(ku') - (ku')_i + \int_{x_i}^{x} f(\xi)d\xi = 0 .$$

გავყოთ ის $k(x)$-ზე და ვაინტეგროთ x-ის მიმართ ჯერ x_i-დან x_{i+1}-მდე:

$$u_{i+1} - u_i - (ku')_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx'}{k(x')} \int_{x_i}^{x'} f(\xi)d\xi = 0 , \qquad (8)$$

შემდეგ x_{i-1}-დან x_i-მდე:

$$u_i - u_{i-1} - (ku')_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx'}{k(x')} \int_{x_i}^{x'} f(\xi)d\xi = 0 . \qquad (9)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\overset{\circ}{a}_i = \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}$$

(8) გავამრავლოთ $\overset{\circ}{a}_{i+1} / h_{i+1}$ -ზე, (9) – $\overset{\circ}{a}_i / h_i$ -ზე და პირველს გამოვაკლოთ მეორე. მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{1}{\hbar_i} \left[\overset{\circ}{a}_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \overset{\circ}{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \varphi_i = 0,$$

ან

$$(a^0 u_{\bar{x}})_{\hat{x},i} + \varphi_i = 0 , \qquad (10)$$

სადაც

$$\varphi_i = \frac{a_i^0}{h_i \hbar_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx'}{k(x')} \int_{x'}^{x_i} f(t)dt + \frac{a_{i+1}^0}{h_{i+1} \hbar_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx'}{k(x')} \int_{x_i}^{x'} f(t)dt .$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x' = x_i + sh_i$, როცა $x_{i-1} \le x' \le x_i$ და $x' = x_i + sh_{i+i}$, როცა $x_i \le x' \le x_{i+1}$, მაშინ ეს ფორმულა შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$\varphi_i = \frac{h_i a_i^0}{\hbar_i}\int_{-1}^{0}\frac{ds}{k(x_i + sh_i)}\int_{s}^{0} f(x_i + \lambda h_i)d\lambda +$$

$$+\frac{h_{i+1} a_{i+1}^0}{\hbar_i}\int_{0}^{1}\frac{ds}{k(x_i + sh_{i+1})}\int_{0}^{s} f(x_i + \lambda h_{i+1})d\lambda.$$

ამრიგად, (10) სქემა ზუსტია ნებისმიერ არათანაბარ ბადეზე უბან-უბან უწყვეტი ნებისმიერი $k(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებისათვის. ცხადია, ამ სქემის პრაქტიკულად გამოყენება გართულებულია იმით, რომ კოეფიციენტები გამოისახება $k(x)$ და $f(x)$-დან ინტეგრალების სახით და საჭირო ხდება მათი კვადრატურული ფორმულებით გამოთვლა.

5. სიზუსტის რიგის ამაღლება. ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ მიახლოებით ამოხსნის სიზუსტის ასამაღლებლად საჭიროა ან ბადის h ბიჯის შემცირება, ან სქემის სიზუსტის რიგის ამაღლება. მაგრამ მაღალი რიგის სიზუსტის სქემების აგება მიზანშეწონილია მხოლოდ მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებებისათვის, რადგან ცვალებადკოეფიციენტებიანი განტოლებების შემთხვევაში ეს დიდ ტექნიკურ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და ხშირად შრომატევად ალგორითმებამდე მივყავართ. ჩვენ უკვე მოვიყვანეთ $O(h^4)$ სიზუსტის სქემის მაგალითი $u'' = -f(x)$ განტოლებისათვის. ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$u'' - qu = -f(x), \quad q = \text{const} > 0.$$

დავწეროთ სხვაობიანი სქემა თანაბარ ბადეზე:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x} - dy = -\varphi(x)$$

და შევარჩიოთ d და φ ისე, რომ მას ჰქონდეს $O(h^4)$ აპროქსიმაცია. აპროქსიმაციის ცდომილება ტოლია

$$\psi = \Lambda u + \varphi = (\Lambda u - u'') - (d - q)u + \varphi - f =$$

$$= \frac{h^2}{12} u^{IV} - (d - q)u + \varphi - f + O(h^4).$$

თუ აქ ჩავსვამთ $u^{IV} = qu'' - f'' = q(qu - f) - f'' = q^2u - gf - f''$, მივიღებთ

$$\psi = -\left(d - q - \frac{h^2}{12} q^2\right)u + \varphi - \left(f + \frac{h^2}{12} qf + \frac{h^2}{12} f''\right) + O(h^4);$$

აქედან გამომდინარე, $\psi = O(h^4)$, თუ დავუშვებთ, რომ $d = q + \frac{h^2}{12} q^2$, $\varphi = f + \frac{h^2}{12}(qf + f'')$. სიზუსტის რიგი შენარჩუნებული იქნება, თუ φ-ს ფორმულაში f''-ს შევცვლით მისი სხვაობიანი აპროქსიმაციით $f_{\bar{x}x}$, რადგან $h^2 f'' = h^2 f_{\bar{x}x} + O(h^4)$.

სქემის სიზუსტის ამაღლება h-ის შემცირების გზით შემოსაზღვრულია აგრეთვე ეკონომიურობის მოთხოვნით, ე. ი. მოცემული სიზუსტით ამოხსნის მისაღებად საჭირო დროის ეკონომიით. ამიტომ პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ერთი და იგივე სქემით გათვლა ბადეთა მიმდევრობაზე, რაც სიზუსტის ამაღლების შესაძლებლობას იძლევა თვლის დროის უმნიშვნელო გაზრდის ხარჯზე (რუნგეს მეთოდი), ამოხსნის საკმარისი სიგლუვის შემთხვევაში.

დავუშვათ, რომ სხვაობიანი ამოცანის ამოსახსნელად ნებისმიერ თანაბარ ბადეზე სამართლიანია ასიმპტოტური გაშლა

$$y_i^h = u_i + \alpha(x_i)h^{k_1} + O(h^{k_2}), \quad k_2 > k_1 > 0, \tag{11}$$

სადაც $\alpha(x_i)$ არ არის h-ზე დამოკიდებული. უნდა ვიპოვოთ ისეთი $\widetilde{y}_i$ ბადური ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\widetilde{y}_i = u_i + O(h^{k_2}) \tag{12}$$

კვანძთა რაიმე $\widetilde{\omega}_h$ სიმრავლეზე.

განვიხილოთ ორი ბადე ω_{h_1} და ω_{h_2} ბიჯებით h_1 და h_2, რომელთაც საერთო კვანძები აქვს; საერთო კვანძთა სიმრავლე $\tilde{\omega}_h$-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, $y_i^{h_1}$ და $y_i^{h_2}$ – სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნებია ω_{h_1} და ω_{h_2} ბადეებზე, შესაბამისად, შევადგინოთ მათი წრფივი კომბინაცია $\tilde{y}_i = \sigma y_i^{h_1} + (1-\sigma) y_i^{h_2}$ და ჩავსვათ აქ (11) გაშლა:

$$\tilde{y}_i = u_i + \alpha(x_i)(\sigma h_1^{k_1} + (1-\sigma) h_2^{k_1}) + O(h^{k_2}).$$

თუ $\alpha(x_i)$-თან მდგომ კოეფიციენტს გავუტოლებთ ნულს, ვიპოვით

$$\sigma = h_2^{k_1} / (h_2^{k_1} - h_1^{k_1}); \tag{13}$$

ამასთან, $x_i \in \tilde{\omega}_h$ კვანძებში სრულდება (12) მოთხოვნა.

ამრიგად, ბადური ამოხსნის სიზუსტის ასამაღლებლად კვანძთა რაიმე $\tilde{\omega}_h$ სიმრავლეზე საჭიროა ამოცანა ორჯერ ამოეხსნათ ω_{h_1} და ω_{h_2} ბადეებზე, რომელთა თანაკვეთა არის $\tilde{\omega}_h$ და შევადგინოთ მათი წრფივი კომბინაცია კოეფიციენტებით σ და $(1-\sigma)$, სადაც σ (13)-დან განისაზღვრება.

კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ $h_2 = h_1/2$, $h_1 = h$; მაშინ $\tilde{\omega}_h = \omega_{h_1}$. მეორე რიგის სიზუსტის სქემისათვის გვაქვს $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ და $\sigma = -1/3$, $1-\sigma = 4/3$.

$$z_i = y_i - u_i = \alpha(x_i) h^2 + O(h^4)$$

გაშლის მიღება შესაძლებელია $\psi_i = \beta(x_i) h^2 + O(h^4)$ შეუსაბამობის გაშლიდან. იგი წარმოადგენს

$$\Lambda z = -\psi, \qquad z_0 = z_N = 0$$

ამოცანის მარჯვენა მხარეს.

არათანაბარი ბადეების გამოყენება სიზუსტის ემპირიულად გაზრდის ფართო შესაძლებლობას იძლევა კვანძების რაოდენობის გაზრდის გარეშე, თუ წინასწარ ცნობილია ამოსავალი ამოცანის

ამოხსნის ყოფაქცევა. მაგალითად, კოეფიციენტებისა და მარჯვენა მხარის ძლიერი ცვალებადობის არეში ბუნებრივია შევამჭიდროვოთ ბადე. კოეფიციენტების წყვეტის საზღვრის მახლობლობაში ბადეს, ჩვეულებრივ, ამჭიდროვებენ გეომეტრიული პროგრესის კანონით. წინასწარი ინფორმაცია რომ მივიღოთ, საჭიროა ჩავატაროთ გათვლა ჯერ უხეშ ბადეზე და ამის შემდეგ — სპეციალურ ბადეზე.

§5. სხვაობიანი სქემების აგების მეთოდები

ზემოთქმულიდან ნათელია, რომ კონკრეტული დიფერენციალური განტოლებებისათვის დაწერილი სხვაობიანი სქემები უნდა ასახავდეს ამოსავალი ამოცანის ძირითად თვისებებს (ისეთებს, როგორიცაა თვითშეუღლებლობა, ნიშანგანსაზღვრულობა და ა. შ.) ბადურ ფუნქციათა სივრცეში. ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული სასაზღვრო ამოცანისათვის მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა კონსერვატულობის თვისება, რომელიც სხვაობიანი ოპერატორის თვითშეუღლებლობის თვისების ტოლფასია. მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს სათანადო თვისების მქონე სხვაობიანი სქემის მიღება. ამჟამად ასეთი სქემების ასაგებად გამოიყენება რიგი მეთოდებისა, რომლებზედაც საუბარი გვექნება ამ პარაგრაფში.

1. **ინტეგრო-ინტერპოლური მეთოდი**. ჩვეულებრივ, დიფერენციალური განტოლება შენახვის რომელიმე ფიზიკურ კანონს გამოხატავს. ეს კანონი შეიძლება ინტეგრალური ფორმით ჩაიწეროს (ბალანსის განტოლება) ბადის ინტერვალისათვის (უჯრედისათვის). დიფერენციალური განტოლება მიიღება ბალანსის განტოლებიდან ბადის ბიჯის ნულისაკენ მისწრაფებით. ამასთან, ვუშვებთ, რომ არსებობს განტოლებაში შემავალი უწყვეტი წარმოებულები. ბალანსის განტოლებაში შემავალი წარმოებულები და ინტეგრალები ბადეზე საჭიროა შეიცვალოს მიახლოებითი გამოსახულებით ბადეზე. შედეგად მივიღებთ ერთგვაროვან სქემას. ასეთ მეთოდს ინტეგრო-ინტერპოლაციური მეთოდი, ანუ ბალანსის მეთოდი ეწოდება. მოვახდინოთ მისი ილუსტრაცია შემდეგი ამოცანის მაგალითზე

$$(ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (ku') - \sigma_1 u = -\mu_1, \tag{1}$$

$$\text{როცა } x = 0, \quad u(1) = \mu_2.$$

დავწეროთ სითბური ბალანსის განტოლება $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე:

$$w_{i+1/2} - w_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx, \quad w = ku', \tag{2}$$

სადაც $(-w(x))$ – სითბური ნაკადია, ხოლო $q(x)u(x)$ – სითბური ჩამჭერობის სიმძლავრე (როცა $q < 0$ – წყაროებისა), რომელიც ტემპერატურის პროპორციულია, $f(x)$ – გარეგანი წყაროების (ჩამჭერების) განაწილების სიმკვრივე. ამ განტოლების მარცხენა მხარეში ჩაწერილია სითბოს რაოდენობა სითბოს ნაკადებისა და გარეგანი წყაროების ხარჯზე, მარჯვენა მხარეში კი სითბოს რაოდენობა, რომელიც გადაეცემა გარემოს გვერდითი ზედაპირიდან სითბოგაცელის ხარჯზე.

(2)-დან სამწერტილიანი სხვაობითი სქემა რომ მივიღოთ, $w_{i-1/2}$, $w_{i+1/2}$ და ინტეგრალები (2)-ში უნდა შევცვალოთ კვანძით წერტილებში (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) ინტეგრალქვეშა ფუნქციების მნიშვნელობების წრფივი კომბინაციით. მაგალითად,

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx \approx d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}} q(x)dx.$$

ვაინტეგროთ $u' = w/k$ ტოლობა x-ის მიმართ x_{i-1}-დან x_i-მდე:

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w}{k(x)}dx \approx hw_{i-1/2}\frac{1}{a_i}, \quad a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1},$$

რის შედეგადაც (2)-დან მივიღებთ სქემას

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,$$

$$\varphi_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx.$$

გამოყვანისას ჩვენ ფაქტიურად ვგულისხმობდით, რომ $u=\mathrm{const}$, როცა $x_{i-1/2}\le x\le x_{i+1/2}$, $w=\mathrm{const}$, როცა $x_{i-1}\le x\le x_i$.

a_i, d_i, φ_i-სათვის აქ დაწერილი გამოსახულებების ნაცვლად, ბუნებრივია, ავიღოთ უფრო მარტივი ფორმულები, როგორც ეს წინა პარაგრაფებში. მესამე გვარის სასაზღვრო პირობისათვის

$$(ku')_0=\sigma_1u_0-\mu_1$$

დავწეროთ სხვაობიანი აპროქსიმაცია, როცა $x=0$. ამისათვის ვისარგებლოთ ბალანსის განტოლებით, როცა $0\le x\le x_{1/2}=h/2$,

$$w_{1/2}-w_0-\int\limits_0^{x_{1/2}}qudx=-\int\limits_0^{x_{1/2}}f(x)dx.$$

თუ აქ ჩავსვამთ

$$w_{1/2}=a_1u_{\bar{x},1},\quad w_0=(ku')_0=\sigma_1u_0-\mu_1,$$

$$\int\limits_0^{x_{1/2}}qudx\sim q_0u_0\frac{1}{2}h,\quad \int\limits_0^{x_{1/2}}f(x)dx\sim f_0\frac{1}{2}h$$

და u-ს ყველგან შევცვლით y-ით, მივიღებთ სხვაობიან სასაზღვრო პირობას

$$a_1y_{\bar{x},1}-\sigma_1y_0+\mu_1-hq_0y_0/2=-hf_0/2,$$

რომელიც შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$a_1y_{\bar{x},1}=\bar{\sigma}_1y_0-\bar{\mu}_1,\ \text{სადაც}\ \bar{\sigma}_1=\sigma_1+hq_0/2,\ \mu_1=\mu_1+hf_0/2.\quad (3)$$

შევაფასოთ შეუსაბამობის სიდიდე (1) განტოლებისათვის $u=u(x)$ ამოხსნაზე

$$\psi_0 = a_1 u_{\bar{x},1} - \bar{\sigma}_1 u_0 + \bar{\mu}_1 .$$

ჩავსვათ აქ

$$a_1 = k_{1/2} + O(h^2) = k_0 + 1/2hk_0' + O(h^2),$$
$$u_1 = u_0 + hu_0' + h^2 u_0''/2 + O(h^3),$$
$$u_{\bar{x},1} = (u_1 - u_0)/h = u_0' + hu_0''/2 + O(h^2),$$

მივიღებთ

$$\psi_0 = (ku')_0 + 1/2h(ku')_0' - \bar{\sigma}_1 u_0 + \bar{\mu}_1 + O(h^2) =$$
$$= [(ku')_0 - \sigma_1 u_0 + \mu_1] + 1/2h[(ku')' - qu + f]_0 + O(h^2) = O(h^2),$$

ე. ი. (3) მესამე გვარის სხვაობიანი სასაზღვრო პირობა ახდენს $(ku')_0 = \sigma_1 u_0 - \mu_1$ პირობის აპროქსიმაციას, როცა $x = 0$, მეორე რიგის ცდომილებით $\psi_0 = O(h^2)$.

პრაქტიკული გამოყენებისათვის (3) სასაზღვრო პირობა უნდა ჩაიწეროს სახით

$$y_0 = æ_1 y_1 + \tilde{\mu}_1, \quad æ_1 = \frac{a_i}{a_i + h\bar{\sigma}_1}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{h\bar{\mu}_1}{a_i + h\bar{\sigma}_1}.$$

სქემის სიზუსტის ასამაღლებლად საჭიროა ინტეგრალების გამოსათვლელად უფრო მაღალი რიგის ინტერპოლება გამოვიყენოთ.

2. კვადრატული ფუნქციონალის აპროქსიმაციის მეთოდი. სასაზღვრო ამოცანა

$$Lu = (ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

ექვივალენტურია იმ ელემენტის მოძებნის ამოცანისა, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს კვადრატულ ფუნქციონალს

$$J[u] = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2)dx - 2\int_0^1 fudx .$$

$0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე მოცემული $u(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ ფუნქციათა სიმრავლეზე. შემოვიღოთ ბადე $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,N\}$ $0 \le x \le 1$ სეგმენტზე და მოვახდინოთ ფუნქციონალის აპროქსიმაცია, ამისათვის წარმოვადგინოთ ის ინტეგრალების ჯამის სახით ბადის ინტერვალების მიხედვით:

$$J[u] = \sum_{i=1}^{N} J_i[u], \quad J_i[u] = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (k(u')^2 + qu^2 - 2fu)dx,$$

რის შემდეგაც მოვახდინოთ J_i-ს აპროქსიმაცია, მაგალითად, შემდეგნაირად:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (k(u')^2 dx \approx a_i (u_{\overline{x},i})^2 h,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (qu^2 - 2fu)dx \approx \frac{h}{2}[(qu^2 - 2fu)_i + (qu^2 - 2fu)_{i-1}],$$

სადაც a_i რაიმე კოეფიციენტია, მაგალითად,

$$a_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx.$$

შედეგად მივიღებთ ფუნქციონალს

$$J_h[y] = \sum_{k=1}^{N} ha_k (y_{\overline{x},k})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_k y_k^2 - 2f_k y_k)h,$$

სადაც $y_i = y(i)$ – ნებისმიერი ბადური ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოლი ხდება, როცა $i = 0, N$.

განტოლებას

$$Ay = \varphi \quad \text{ან} \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j = \varphi_i, \quad A = A^* > 0,$$

გააჩნია ამოხსნა, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს

$$I_A[y] = (Ay, y) - 2(\varphi, y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} y_j y_i - 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_i y_i \, .$$

ამაში დავრწმუნდებით, თუ გავუტოლებთ ნულს წარმოებულს

$$\frac{\partial I_A[y]}{\partial y_{i_0}} = 2\sum_{j=1}^{N} a_{i_0 j} y_j - 2\varphi_{i_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 I_A}{\partial y_{i_0}^2} > 0 \, ,$$

ვინაიდან $a_{ii} > 0$ ყველა i-სთვის, $i = 1,2,\ldots,N$, A ოპერატორის დადებითობის გამო: $A > 0$.

თუ გამოვთვლით წარმოებულებს

$$\frac{\partial I_h}{\partial y_i} = 2a_i y_{\bar{x},i} - 2a_{i+1} y_{\bar{x},i+1} + (2q_i y_i - 2f_i)h,$$

$$\frac{\partial^2 I_h}{\partial y_i^2} = \frac{2a_i}{h} + \frac{2a_{i+1}}{h} + 2q_i h > 0,$$

დავრწმუნდებით, რომ ელემენტი $y = y(x) \in H_h$, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს კვადრატულ ფუნქციონალს, წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - q_i y_i = -f_i, \; i = 1,2,\ldots,N-1, \; y_0 = y_N = 0.$$

3. ინტეგრალური იგივეობის აპროქსიმაციის მეთოდი (ჯამურ იგივეობათა მეთოდი). ვთქვათ,

$$(ku')' - qu + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \qquad (4)$$

თუ (4) განტოლებას გავამრავლებთ ნებისმიერ დიფერენცირებად $v(x)$ ფუნქციაზე, რომელიც ნულის ტოლი ხდება, როცა $x = 0$ და $x = 1$, ვაინტეგრებთ x-ის მიმართ 0-დან 1-მდე, მივიღებთ იგივეობას

$$I(u,v) = \int_0^1 (ku'v' + quv - fv)dx = 0 \, .$$

შევცვლით რა მეორე პუნქტის ანალოგიურად ინტეგრალთა და u', v' წარმოებულებს, დავწერთ ჯამურ იგივეობას

$$I_h[y,v]=\sum_{i=1}^{N}a_i y_{\bar{x},i}v_{\bar{x},i}h+\sum_{i=1}^{N-1}(q_i y_i-f_i)v_i h=0.$$

შემდგომ, დაეუშვებთ რა $v_i=\delta_{i,i_0}$, $0<i_0<N$, და გავითვალისწინებთ, რომ $v_{\bar{x},i}=0$, როცა $i<i_0$ და $i>i_0+1$, $v_{\bar{x},i_0+1}=-1/h$, $v_{\bar{x},i_0}=1/h$, მივიღებთ

$$h\left(\frac{1}{h}a_{i+1}y_{x,i}-\frac{1}{h}a_i y_{\bar{x},i}\right)+(q_i y_i-f_i)h=0 \text{ როცა } i=i_0,$$

ე. ი. $(ay_{\bar{x}})_x-qy=-f$.

4. რიტცისა და ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდები (ვარიაციულ-სხვაობიანი მეთოდები). ფუნქციონალის

$$I[u]=(Au,u)-2(u,f),$$

მინიმუმის მოძებნის ამოცანა, სადაც A თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული წრფივი ოპერატორია ჰილბერტის H სივრცეში (x, y) სკალარული ნამრავლით, ექვივალენტურია

$$Au=f$$

განტოლების ამოხსნის ამოცანისა. ვიხილავთ სასრულგანზომილებიან V_n სივრცეთა მიმდევრობას ბაზისით $\{\varphi_i^{(n)}\}$, $i=1,2,\dots,n$.

რიტცის მეთოდი მდგომარეობს ისეთი $u_n\in V_n$ ელემენტის მოძებნაში, რომელიც $I[u]$ ფუნქციონალს ანიჭებს V_n-ში. u_n მიახლოებით ამოხსნას ვეძებთ ჯამის სახით

$$u_n=\sum_{j=1}^{n}y_j\varphi_j, \tag{5}$$

სადაც $y_1,\dots,y_n$ – უცნობი კოეფიციენტებია. გამოთვლები გვაძლევს

$$I[u_n] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j - 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i ,$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = (A\varphi_i, \varphi_j), \quad \beta_i = (f, \varphi_i);$$

$I[u_n] = \Phi(y_1,...,y_n)$ არის y_i-ის n კოეფიციენტის ფუნქცია. თუ გავუტოლებთ ნულს წარმოებულებს $\partial I[u_n]/\partial y_i$, მივიღებთ n განტოლებათა სისტემას

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j - \beta_i = 0, \quad i = 1,2,...,n ,$$

საიდანაც განისაზღვრება $y_1, y_2, ..., y_n$.

მოვახდინოთ რიტცის მეთოდის ილუსტრაცია (4) ამოცანის მაგალითზე. $\varphi_i(x)$ ფუნქციის როლში ავიღოთ ფუნქცია:

$$\omega_i(x) = \eta\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \eta_i(x), \quad \eta(s) = \begin{cases} 0, & s < -1, \quad s > 1, \\ 1 + s, & -1 < s < 0, \\ 1 - s, & 0 < s < 1. \end{cases}$$

თუ a_{ij}-ის ფორმულაში ჩავსვამთ $A\varphi_i = -(k\varphi'_i)' + q\varphi_i$, გვექნება

$$\alpha_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \left(k \frac{d\eta_i}{dx} \frac{d\eta_j}{dx} + q\eta_i \eta_j \right) dx,$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x) \eta_i(x) dx. \tag{6}$$

გამოთვლები გვაძლევს

$$\frac{d\eta_i}{dx} = 0 \text{ როცა } x < x_{i-1}, x > x_{i+1},$$

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \begin{cases} 1/h, & \text{როცა} \quad x_{i-1} < x < x_i , \\ -1/h, & \text{როცა} \quad x_i < x < x_{i+1}. \end{cases}$$

აქედან და (6)-დან ჩანს, რომ $[\alpha_{ij}]$ მატრიცი სამდიაგონალურია, ვინაიდან ნულისაგან განსხვაევებულია მხოლოდ ის α_{ij}-ები, რომელთათვისაც $j=i-1$, i, $i+1$. ამიტომაც y_i-სთვის ვღებულობთ სისტემას

$$\alpha_{i,i-1}y_{i-1}+\alpha_{i,i}y_i+\alpha_{i,i+1}y_{i+1}-\beta_i=0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a_i=-h\alpha_{i,i-1}+h^2d_i=h\alpha_{i,i}+h(\alpha_{i,i-1}+\alpha_{i,i+1}),$$
$$\beta_i=-h^2\varphi_i$$

და შევნიშნავთ, რომ $\alpha_{i+1,i}=\alpha_{i,i+1}$, მივიღებთ სქემას

$$a_iy_{i-1}-(a_i+a_{i+1}+h^2d_i)y_i+\alpha_{i+1}y_{i+1}+h^2\varphi_i=0,$$

ან

$$(ay_{\bar{x}})_x-dy+\varphi=0, \tag{7}$$

სადაც

$$a_i=\int_{-1}^{0}k(x_i+sh)ds+h^2\int_{-1}^{0}q(x_i+sh)s(1+s)ds,$$

$$d_i=\int_{-1}^{0}q(x_i+sh)(1+s)ds+\int_{0}^{1}q(x_i+sh)(1-s)ds,$$

$$\varphi_i=\int_{-1}^{0}f(x_i+sh)(1+s)ds+\int_{0}^{1}f(x_i+sh)(1-s)ds.$$

ეს არის სქემა აპროქსიმაციის მეორე რიგით.

ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდში u_n ამოხსნას ისევ (6) სახით ვეძებთ, მხოლოდ y_i კოეფიციენტები მოიძებნება Au_n-f შეუსაბამობის ორთოგონალობის პირობიდან $\varphi_i(x)$ ბაზისურ ფუნქციებთან:

$$(Au_n-f,\varphi_i)=0,\quad i=1,2,\ldots,n; \tag{8}$$

ამასთან, A ოპერატორის თვითშეუღლებლობა არ მოითხოვება. (4) ამოცანისათვის ვირჩევთ იგივე ბაზისურ ფუნქციებს. (5)-ის ჩასმით (8)-ში ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას y_i-სთვის. თუ გამოვთვლით α_{ij} და β_i-ის, მივიღებთ იგივე (7) სქემას, რაც რიტცის მეთოდით გვქონდა მიღებული. საკოორდინატო $\varphi_i(x) = \eta\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$ ფუნქციების აღნიშნული შერჩევისას რიტცისა და ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდები სასრულ ელემენტთა მეთოდს ემთხვევა.

თავი V

კოშის ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სხვაობიან სქემებს პირველი რიგის ჩვეულებრივი (საზოგადოდ, არაწრფივი) დიფერენციალური განტოლებების საწყისი მონაცემებით (კოშის ამოცანისათვის) ამოსახსნელად. ეს რიცხვითი მეთოდების გამოყენების კლასიკური არეა. არსებობს მრავალი სხვაობიანი მეთოდი, რომელთა ნაწილი მანქანამდე ეპოქაში წარმოიშვა და თანამედროვე კომპიუტერებისათვის გამოსადეგი აღმოჩნდა. ჩვენ შემოვიფარგლებით იმ ძირითადი სხვაობიანი სქემების მოკლე გადმოცემით, რომლებიც პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება და რომელთათვისაც არსებობს შესაბამისი სტანდარტული პროგრამები.

§1. რუნგე-კუტას მეთოდები

1. კოშის ამოცანა პირველი რიგის განტოლებისათვის. ვთქვათ, საჭიროა, ვიპოვოთ უწყვეტი ფუნქცია $u = u(t)$, $0 \le t \le T$, რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას, როცა $t > 0$ და საწყის პირობებს, როცა $t = 0$:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad 0 < t \le T, \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

აქ $f(t, u)$ მოცემული ორი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციაა.

თუ ფუნქცია $f(t,u)$ განსაზღვრულია $D = \{0 \le t \le T, |u - u_0| \le U\}$ მართკუთხედში და D არეში u ცვალადის მიმართ ლიფშიცის პირობას აკმაყოფილებს:

$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \le K|u_1 - u_2|$ ყველა (t, u_1), (t, u_2)-სთვის D-დან, (2)
სადაც $K = const > 0$, მაშინ (1) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა.

ამ დებულების დასამტკიცებლად (1) განტოლებას ვაინტეგრებთ 0-დან t-მდე:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds, \tag{3}$$

ხოლო მიღებული ინტეგრალური განტოლება ამოვხსნათ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით (პიკარის მეთოდით):

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u_n(s))ds, \tag{4}$$

სადაც n – მიახლოების ნომერია (იტერაციის ნომერი). პიკარის მეთოდი კრებადია და (3) განტოლების, ანუ (1) კოშის ამოცანის ერთადერთ ამოხსნას განსაზღვრავს.

ეს მეთოდი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ (1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა, თუ (4)-ში ინტეგრალს რომელიმე კვადრატურული ფორმულით შევცვლით, მაგრამ მიღებული ალგორითმებისათვის გამოთვლების მოცულობა დიდია, რადგან ყოველი იტერაციისათვის (ფიქსირებული t-სთვის) ინტეგრალის გამოთვლაა საჭირო.

ზოგჯერ (1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოიყენება ანალიზური მეთოდი, რომელიც (1) კოშის ამოცანის ამოხსნის ტეილორის მწკრივად გაშლის იდეაზე არის დაფუძნებული. $u_n(t)$ მიახლოებით ამოხსნას ვეძებთ სახით:

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0) + u_0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

სადაც $u^{(1)}(0) = \frac{du}{dt}(0) = f(0, u_0)$, ხოლო $u^{(k)}(0)$ $(k \ge 2)$ წარმოებულის მნიშვნელობას ვპოულობთ (1) განტოლების თანდათანობითი გაწარმოებით

$$u^{(2)}(0)=u''(0)=\frac{d}{dt}f(t,u)\Big|_{t=0}=f_t(0,u_0)+f(0,u_0)f_u(0,u_0),$$

$$u^{(3)}(0)=u'''(0)=\frac{d^2}{dt^2}f(t,u)\Big|_{t=0}=f_{t^2}(0,u_0)+2f_{ut}(0,u_0)f(0,u_0)+$$

$$+f_{u^2}(0,u_0)u''(0),\ldots,$$

$$f_t=\frac{\partial f}{\partial t},\quad f_u=\frac{\partial f}{\partial u},\quad f_{ut}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial t}$$

და ა. შ.

მცირე t-ებისათვის (5) მწკრივთა მეთოდით შეგვიძლია $u(t)$ ზუსტ ამოხსნას კარგად მივუახლოვდეთ არც თუ ისე დიდი n-ებისათვის. აქ გამოთვლების მოცულობა დამოკიდებულია არა მხოლოდ $\varepsilon>0$ ($|u(t)-u_n(t)|<\varepsilon$) სიზუსტესა და $n=n(\varepsilon)$-ზე, არამედ $f(t,u)$ ფუნქციის სახეზეც, რადგან $u^{(k)}(t)$ წარმოებულის მოძებნა შეიძლება ძალზე შრომატევადი აღმოჩნდეს.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $f(t,u)$ ფუნქცია საკმაოდ გლუვია, ე. ი. გააჩნია იმდენი წარმოებული (t და u-ს მიხედვით), რამდენიც მსჯელობის მიხედვით არის საჭირო.

(1) ამოცანისათვის სხვაობიანი სქემების შესწავლამდე განვიხილოთ მისი ამოხსნის მდგრადობა. როგორ შეიცვლება (1) ამოცანის ამოხსნა საწყისი პირობების შეცვლით? ვთქვათ, $\tilde{u}(t)$ – (1) განტოლების ამოხსნაა საწყისი პირობით $\tilde{u}(0)=\tilde{u}_0$. $z(t)=\tilde{u}(t)-u(t)$ ცდომილებისათვის ვღებულობთ განტოლებას

$$\frac{dz}{dt}=\alpha(t)z,\quad 0<t\le T,\quad z(0)=z_0=\tilde{u}_0-u_0, \tag{6}$$

სადაც $\alpha(t)=[f(t,\tilde{u})-f(t,u)]/z=f_u(t,u+\theta z),\quad 0\le\theta\le 1$.

(6)-ს ამოხსნა არის ფუნქცია $z(t)=z(0)\exp\left\{\int_0^t\alpha(s)ds\right\}$. თუ $f_u\le 0$ ყველა t, u-სთვის, მაშინ

$|z(t)| \le |z(0)|$ ანუ $|\tilde{u}(t) - u(t)| \le |\tilde{u}_0 - u_0|$ ყველა t-სთვის, $t \in [0, T]$.

ე. ი. (1) ამოცანის ამოხსნა მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ (საწყისი მონაცემების ცდომილება არ იზრდება). (1) ამოცანა მდგრადია მარჯვენა მხარის მიმართაც:

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \le |\tilde{u}_0 - u_0| + \varepsilon T, \text{ როცა } 0 \le t \le T, \text{ თუ } f_u \le 0,$$

სადაც $\tilde{u}(t)$ – (1) ამოცანის ამოხსნაა მარჯვენა მხარით

$$\tilde{f} = f(t, \tilde{u}) + \delta f, \quad |\delta f| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

(6) ამოცანის ამოხსნის ყოფაქცევა, როცა $t \to \infty$ ისეთივეა, როგორიც შემდეგი წრფივი განტოლების ამოხსნისა:

$$\frac{dz}{dt} + \lambda z = 0, \quad 0 < t \le T, \quad z(0) = z_0,$$

იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოდელური განტოლება მდგრადობის შესწავლისას.

2. ეილერის სხვაობიანი სქემა. ინტეგრების $0 \le t \le T$ მონაკვეთზე შემოვიღოთ ბადე $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots\}$. $y_n = y(t_n)$-ით აღვნიშნოთ ბადური ფუნქცია. (1) განტოლების ამოხსნის უმარტივესი რიცხვითი მეთოდია ეილერის სხვაობიანი სქემა:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0. \qquad (7)$$

$y_n = y(t_n)$ მნიშვნელობებს, დაწყებული $y_0 = u_0$-დან, ვპოულობთ მიმდევრობით ცხადი ფორმულის გამოყენებით

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0.$$

$u = u(t)$-ის ნაცვლად ჩვენ ვპოულობთ ბადურ ფუნქციას $y_n = y(t_n)$ — (1) ამოცანის მიახლოებით ამოხსნას.

ბადური ფუნქცია

$$z_n = y_n - u(t_n)$$

არის სხვაობიანი სქემის ცდომილება. z_n-სთვის დავწეროთ განტოლება. ამისთვის ჩავსვამთ $y_n = z_n + u_n$ (7)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ

$$y_{n+1} - y_n = (z_{n+1} - z_n) + (u_{n+1} - u_n),$$

$$f(t_n, y_n) = f(t_n, u_n) + [f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n)] = f(t_n, u_n) + \alpha_n z_n,$$

სადაც $\alpha_n = f_u(t_n, u_n + \theta z_n), 0 \le \theta \le 1$.

საბოლოოდ, z_n-სთვის მივიღებთ ამოცანას

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = \alpha_n z_n + \psi_n, \quad n = 0,1,\ldots, \quad z_0 = 0, \tag{8}$$

სადაც ψ_n – შეუსაბამობაა, ანუ (7) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებაა (1) ამოცანის $u = u(t)$ ამოხსნაზე და ტოლია

$$\psi_n = f(t_n, u_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}. \tag{9}$$

შევაფასოთ ψ_n, როცა $\tau \to 0$. ამისთვის ჩავსვათ

$$u_{n+1} = u(t_n + \tau) = u(t_n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) \cdots$$

(9)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ (1)-ის თანახმად $\frac{\partial u}{\partial t}(t_n) = f(t_n, u_n)$ მაშინ მივიღებთ: $\psi_n = O(\tau)$, ანუ $\|\psi\|_C = \max\limits_{0 \le t_n \le T} |\psi_n| = O(\tau)$. ეს ნიშნავს, რომ ეილერის სქემას აპროქსიმაციის პირველი რიგი აქვს.

ვაჩვენოთ, რომ ეილერის სქემა კრებადია, ე. ი. $\|z\|_C = \|y_n - u_n\|_C \to 0$ როცა $\tau \to 0$ და მას სიზუსტის პირველი რიგი გააჩნია, ე. ი.

$$\|z\|_C = \max_{0 \le t_n \le T} |z_n| = O(\tau).$$

დამტკიცებისათვის დავუშვათ, რომ

$$-K \le f_u(t,u) \le 0, \quad \tau \le 2/K. \tag{10}$$

(8)-დან განვსაზღვროთ

$$z_{n+1} = (1 + \tau\alpha_n)z_n + \tau\psi_n,$$
$$|z_{n-1}| \le |1 + \tau\alpha_n|\,|z_n| + \tau|\psi_n| \le |z_n| + \tau|\psi_n|,$$

რადგან (10)-ის თანახმად $|1 + \tau\alpha_n| \le 1$, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|z_{n+1}| \le |z_0| + \sum_{s=0}^{n}\tau|\psi_s| = \sum_{s=0}^{n}\tau|\psi_s|, \tag{11}$$

ე. ი. $\|z\|_C = O(\tau)$.

თუ (10) პირობა არ სრულდება, მაგრამ $|f_u| \le K$, მაშინ (11)-ის ნაცვლად მივიღებთ $|z_{n+1}| \le Te^{KT}\|\psi\|_C$, და $\|z\|_C = O(\tau)$ ძალაში რჩება.

3. სიზუსტის რიგის გადიდება. ეილერის მეთოდი მეტად მარტივია, მაგრამ დაბალ სიზუსტეს გვაძლევს. τ-ს მიმართ რიცხვითი ამოხსნის სიზუსტე ალგორითმის გართულების გარეშე შეიძლება აუამაღლოთ. სიზუსტის ამაღლების რუნგეს მეთოდის იდეა შემდეგში მდგომარეობს: დავუშვათ, რომ $u = u(t)$ ამოხსნა საკმაოდ გლუვეია და $z_n = y_n - u_n$ ცდომილება τ-ს ხარისხების მიმართ შემდეგნაირად გაიშლება:

$$y_n = u_n + \alpha(t)\tau + \beta(t)\tau^2 + \cdots, \tag{12}$$

სადაც $\alpha(t)$ და $\beta(t)$ ფუნქციები დამოკიდებული არ არის τ-ზე.

ავირჩიოთ ორი ბადე τ_1 და τ_2 ბიჯებით, რომელთაც საერთო კვანძები გააჩნიათ (მაგალითად, $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = \tau/2$); ორივე ბადეზე ამოვხსნათ (7) ამოცანა და ვიპოვოთ $y^{(1)}(t_{n_1})$ და $y^{(2)}(t_{n_2})$ შესაბამისად. ავიღოთ ორივე ბადისათვის საერთო კვანძი $t_{n^*} = t_{n_1} = t_{n_2}$ და დავწეროთ (12), როცა $n = n^*$:

$$y^{(1)}(t_{n^*}) = u(t_{n^*}) + \alpha(t_{n^*})\tau_1 + O(\tau_1^2),$$
$$y^{(2)}(t_{n^*}) = u(t_{n^*}) + \alpha(t_{n^*})\tau_2 + O(\tau_2^2).$$

შევადგინოთ წრფივი კომბინაცია σ პარამეტრით:

$$\widetilde{y}(t_{n^*}) = \sigma y^{(1)}(t_{n^*}) + (1-\sigma)y^{(2)}(t_{n^*}) =$$
$$= u(t_{n^*}) + [\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2]\alpha(t_{n^*}) + O(\tau_1^2 + \tau_2^2).$$

თუ τ-ს ავირჩევთ პირობიდან $\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2 = 0$, ე. ი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\sigma = \tau_2/(\tau_2 - \tau_1)$, მივიღებთ

$$\widetilde{y}(t_{n^*}) = u(t_{n^*}) + O(\tau^2), \quad \tau = \max(\tau_1, \tau_2).$$

$\widetilde{y}$ ბადური ფუნქცია $u = u(t)$ ამოხსნას უახლოვდება τ-ს მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით. ამრიგად, ჩვენ გავზარდეთ ეილერის მეთოდის სიზუსტე, ჩავატარეთ რა გათვლა ბადეებზე ბიჯებით τ_1 და τ_2. (12)-ის გათვალისწინებით ეს პროცედურა შეიძლება გავაგრძელოთ. თუ ჩავატარებთ გამოთვლებს (7) სქემით სამ ბადეზე ბიჯებით τ_1, τ_2 და τ_3, (1) ამოცანის ამოხსნას სიზუსტის მესამე რიგით განვსაზღვრავთ ამ ბადეების საერთო კვანძებში.

4. რუნგე-კუტას სქემები. სიზუსტის რიგი შეიძლება ავამაღლოთ სხვაობიანი სქემის გართულების გზით. პრაქტიკაში მეტად გავრცელებულია რუნგე-კუტას სქემები სიზუსტის მეორე და მეოთხე რიგით.

რუნგე-კუტას სიზუსტის მეორე რიგის სქემის გამოთვლა ორ ეტაპად ტარდება. პირველ ეტაპზე ეილერის სქემით ბიჯით $\alpha\tau$ გამოითვლება $\bar{y}_n$ შუალედური მნიშვნელობა:

$$\bar{y}_n = y_n + \alpha\tau f(t_n, y_n);$$

მეორე ეტაპზე გამოითვლება y_{n+1}-ის მნიშვნელობა ფორმულით:

$$y_{n+1} = y_n + \tau(1-\sigma)f(t_n, y_n) + \sigma\tau f(t_n + \alpha\tau, \bar{y}_n),$$

სადაც $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ – პარამეტრია. $\bar{y}_n$-ის გამორიცხვით მივიღებთ სქემას y_{n+1}-სთვის:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1-\sigma)f(t_n, y_n) + \sigma f(t_n + \alpha\tau, y_n + \alpha\tau f(t_n, y_n)) \quad (13)$$

სქემის სიზუსტის რიგი α და τ პარამეტრზეა დამოკიდებული.

ვიპოვოთ შეუსაბამობის, ანუ (13) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილების გამოსახულება. ამისათვის, მეორე პუნქტის ანალოგიურად, $(y_{n+1}-y_n)/\tau$ გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს და y_n, y_{n+1}-ის ნაცვლად ჩავსვათ u_n და u_{n+1}. ამის შედეგად შეუსაბამობისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\psi_n=(1-\sigma)f(t_n,u_n)+\sigma f(t_n+\alpha\tau,u_n+\alpha\tau f(t_n,u_n))-\\-(u_{n+1}-u_n)/\tau. \tag{13'}$$

თუ ვისარგებლებთ გაშლით ტეილორის ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\psi_n=\tau(\sigma\alpha-1/2)u_n''+O(\tau^2).$$

აქედან ჩანს, რომ (13) სქემას აპროქსიმაციის მეორე რიგი $\psi_n=O(\tau^2)$ გააჩნია, თუ სრულდება პირობა

$$\sigma\alpha=1/2. \tag{14}$$

ამრიგად, არსებობს სქემების ერთპარამეტრიანი ოჯახი (13), (14), რომელთაც აპროქსიმაციის მეორე რიგი გააჩნია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

1) $\sigma=1,\ \alpha=1/2$:

$$\frac{\bar{y}_n-y_n}{\tau/2}=f(t_n,y_n),\quad \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=f\left(t_n+\frac{\tau}{2},\bar{y}_n\right). \tag{15}$$

ეს არის პრედიქტორ-კორექტორის ცნობილი სქემა. იგი შეიძლება სხვანაირად გადაიწეროს:

$$\bar{y}_n=y_n+\frac{\tau}{2}f(t_n,y_n),\quad y_{n+1}=y_n+\tau f\left(t_n+\frac{\tau}{2},\bar{y}_n\right),$$

ან, $\bar{y}_n$-ის გამორიცხვის შემდეგ,

$$(y_{n+1}-y_n)/\tau=f\left[t_n+\frac{\tau}{2},y_n+\frac{\tau}{2}f(t_n,y_n)\right]. \tag{15'}$$

2) $\sigma = 1/2,\ \alpha = 1$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + \tau f(t_n, y_n))\right]. \qquad (16)$$

ეს სქემა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც პრედიქტორ-კორექტორი: პირველად — ეილერის სქემა τ ბიჯით (პრედიქტორი):

$$\bar{y}_n = y_n + \tau f(t_n, y_n);$$

შემდეგ — სქემა ნახევარჯამით (კორექტორი):

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau = 1/2\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_n)\right].$$

პრედიქტორ-კორექტორის მეთოდის იდეა ხშირად გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისათვის სხვაობიანი სქემების დაწერის დროს.

მოვიყვანოთ ფორმულები მეოთხე რიგის სიზუსტის რუნგე-კუტას სქემისათვის

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}\left[k_1(y_n) + 2k_2(y_n) + 2k_3(y_n) + k_4(y_n)\right], \qquad (17)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0,$$

სადაც k_1, k_2, k_3, k_4 — შესწორებებია, რომლებიც გამოითვლება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \tau/2, y_n + \tau k_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + \tau/2, y_n + \tau k_2/2), \quad k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_3). \end{aligned} \qquad (18)$$

მოცემული y_n-სთვის y_{n+1}-ის საპოვნელად საჭიროა მხარის ოთხჯერ გამოთვლა.

ავხსნათ თუ როგორ უნდა ჩატარდეს გამოთვლები ამ სქემის მიხედვით, როცა $n = 0$, ცნობილია $y_0 = u_0$. k_1, k_2, k_3, k_4 შეიძლება თანმიმდევრობით გამოვთვალოთ და ვიპოვოთ

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\tau[k_1(y_0) + 2k_2(y_0) + 2k_3(y_0) + k_4(y_0)],$$

რის შემდეგაც გამოთვლები მეორდება, როცა $n = 1,2,...$ შეუსაბამობისათვის ვღებულობთ გამოსახულებას

$$\psi_n = \frac{1}{6}[k_1(u_n) + 2k_2(u_n) + 2k_3(u_n) + k_4(u_n)] - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}, \quad (19)$$

სადაც $k_i(u_n)$ $(i = 1,2,3,4)$ განისაზღვრება (18) ფორმულით, რომლებშიც y_n-ის ნაცვლად u_n-ია ჩასმული. თუ გავშლით u_{n+1}, $k_2(u_n)$, $k_3(u_n)$, $k_4(u_n)$-ს $t = t_n$-ის მიდამოში, დავრწმუნდებით, რომ $\psi_n = O(\tau^4)$, ე. ი. (17), (18) სქემას აპროქსიმაციის მეოთხე რიგი გააჩნია, თუ $u = u(t)$-ს აქვს უწყვეტი წარმოებული მეოთხე რიგამდე ჩათვლით.

რუნგე-კუტას ყველა მეთოდი ცხადი (y_{n+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოთვლების ჩატარება ცხადი ფორმულების მიხედვით) და ერთბიჯიანი (y_{n+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა ბადეზე ერთი ბიჯი t_n-დან t_{n+1}-მდე) მეთოდია.

5. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა. პირველ პუნქტში ჩვენ განვიხილეთ (1) დიფერენციალური განტოლების მნიშვნელოვანი თვისება — მდგრადობა (საწყისი მონაცემებისა და მარჯვენა მხარის მიმართ). საწყისი მონაცემების მიმართ (1) არაწრფივი განტოლების მდგრადობის შესასწავლად განვიხილოთ მოდელური განტოლება

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0. \quad (20)$$

მისი ამოხსნა $u(t) = u_0 e^{-\lambda t}$ კლებულობს, როცა $\lambda > 0$ და

$$|u(t)| \le |u_0|, \text{ როცა } \lambda \ge 0 \text{ ყველა } t \ge 0\text{-სთვის}, \quad (21)$$

ე. ი. (20) განტოლება მდგრადია, როცა $\lambda \ge 0$, რაც შეესაბამება პირობას $f_u \le 0$.

ჩნდება ბუნებრივი მოთხოვნა: სხვაობიანი სქემებისათვის, რომლებიც მოდელური განტოლების აპროქსიმაციას ახდენს, (21) უტოლობის ანალოგი უნდა შესრულდეს:

$$|y_n| \le |y_0| \text{ ყველა } n\text{-სთვის}, \quad n = 1,2,... \quad (22)$$

ქვემოთ ვნახავთ, რომ ეს ყოველთვის არ სრულდება.

1) ეილერის ცხადი სქემა.

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\lambda y_n=0, \quad y_{n+1}=(1-\tau\lambda)y_n. \tag{23}$$

აქედან ჩანს, რომ პირობა

$$|y_{n+1}|\le|y_n|\le\cdots\le|y_0| \tag{24}$$

სრულდება, როცა $|1-\tau\lambda|\le 1$ ანუ $-1\le 1-\tau\lambda\le 1$ ე. ი. როცა

$$\tau\lambda\le 2. \tag{25}$$

თუ, მაგალითად, $\tau\lambda\ge 3$, მაშინ

$$|y_{n+1}|=|\tau\lambda-1|\,|y_n|\ge 2|y_n|\ge\cdots\ge 2^{n+1}|y_0|,$$

$$|y_n|\ge 2^n|y_0|\to\infty \text{ როცა } n\to\infty.$$

სქემა არამდგრადია, (24) პირობა არ სრულდება. ამრიგად, ეილერის სქემა პირობით კრებადია, როცა $\tau\le 2/\lambda$, $\lambda>0$.

2) ეილერის არაცხადი სქემა:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\lambda y_{n+1}=0, \quad y_{n+1}=\frac{1}{1+\tau\lambda}y_n. \tag{26}$$

რადგან $1/(1+\tau\lambda)\le 1$ ნებისმიერი $\tau\lambda$-სთვის, $\tau\lambda\ge 0$. ამიტომ სქემა უპირობოდ მდგრადია:

$$|y_n|\le|y_0| \text{ ნებისმიერი } \tau;\ \lambda\text{-სთვის},\ \tau,\lambda\ge 0,\ n=0,1,2,\ldots \tag{27}$$

3) სქემა წონებით:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\lambda(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)y_n)=0, \quad y_{n+1}=qy_n. \tag{28}$$

სქემა მდგრადია, როცა

$$|q|\le 1, \quad q=\frac{1-(1-\sigma)\tau\lambda}{1+\sigma\tau\lambda}.$$

ვხედავთ, რომ $|q|\le 1$, თუ $-1-\sigma\tau\lambda\le 1-(1-\sigma)\tau\lambda\le 1+\sigma\tau\lambda$ ან, $1+\tau(\sigma-1/2)\lambda\ge 0$, ასე, რომ $1+\sigma\tau\lambda\ge\tau\lambda/2>0$. ამრიგად, სქემა

წონებით უპირობოდ (ნებისმიერი τ-სთვის) მდგრადია, როცა $\sigma>1/2$ და პირობით მდგრადია, როცა $\sigma < 1/2$, თუ $\tau \leq 1/((1/2 - \sigma)\lambda)$.

4) რუნგე-კუტას მეორე რიგის სქემა. თუ ჩავსვამთ $f = -\lambda y$-ს (13)-ში მივიღებთ:

$$y_{n+1} = qy_n, \quad q = 1 - \tau\lambda + \frac{1}{2}\tau^2\lambda^2. \tag{29}$$

სქემა მდგრადია, $|y_n| \leq |y_0|$, როცა $|q| = 1 - \tau\lambda + \frac{1}{2}\tau^2\lambda^2 \leq 1$, რასაც ადგილი აქვს, როცა

$$\tau\lambda \leq 2. \tag{25}$$

რუნგე-კუტას მეორე რიგის სქემა მდგრადია იმავე პირობებში, რომელშიც ეილერის ცხადი სქემა.

5) რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სქემა. თუ ჩავსვამთ $f = -\lambda y$ – (17), (18)-ში მივიღებთ:

$$y_{n+1} = qy_n,$$
$$q = 1 - \tau\lambda + \frac{1}{2}\tau^2\lambda^2 - \frac{1}{6}\tau^3\lambda^3 + \frac{1}{24}\tau^4\lambda^4. \tag{30}$$

$|q| \leq 1$ უტოლობა სრულდება, როცა $\tau\lambda \leq 2{,}78$ ე. ი. მეოთხე რიგის სქემის მდგრადობის პირობა ოდნავ სუსტია, ვიდრე მეორე რიგის სქემის მდგრადობის (25) პირობა.

ეს მაგალითები გვიჩვენებს, რომ ცხადი ერთბიჯიანი სქემები პირობითად მდგრადია, ხოლო არაცხად სქემებს შორის არის უპირობოდ (აბსოლუტურად) მდგრადი (მაგალითად, (28), როცა $\sigma \geq 1/2$) სქემები. თუ $\lambda > 0$ დიდია, მაშინ τ ბიჯი, (25)-ის თანახმად, საკმაოდ მცირე უნდა შეირჩეს.

6. კრებადობისა და სიზუსტის შესახებ. რუნგე-კუტას სქემას არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = f(t), \quad \lambda > 0, \; t > 0, \; u(0) = u_0. \tag{31}$$

აქვს სახე:

$$y_{n+1} = qy_n + \tau\varphi_n, \quad q = q(\tau\lambda), \tag{32}$$

სადაც გამოსახულებები q და φ_n-სთვის სქემის რიგზეა დამოკიდებული. ასე, მეორე რიგის სქემებისათვის გვაქვს

$$q = 1 - \tau\lambda + \frac{1}{2}\tau^2\lambda^2,$$

$$\varphi_n = (1-\sigma)f(t_n) + \sigma f(t_n + \alpha\tau), \quad \alpha\sigma = \frac{1}{2}.$$

$z_n = y_n - u_n$ ცდომილებისათვის ვიღებთ

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + \left(\lambda - \frac{\lambda^2\tau}{2}\right)z_n = \psi_n$$

ანუ

$$z_{n+1} = qz_n + \tau\psi_n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad z_0 = 0,$$

სადაც ψ_n – შეუსაბამობა ტოლია

$$\psi_n = \varphi_n - (u_{n+1} - u_n)/\tau - \left(\lambda - \frac{1}{2}\tau\lambda^2\right)u_n = O(\tau^2).$$

მდგრადობის (25) პირობის ძალით $|q| \le 1$ და

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + \tau|\psi_n| \le \sum_{k=0}^{n} \tau|\psi_k|, \tag{33}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (32) სქემა კრებადია და გააჩნია სიზუსტის მეორე რიგი ($O(\tau^2)$ სიჩქარით ანუ მეორე რიგით იკრიბება):

$$\|z\|_C = O(\tau^2)$$

ამრიგად, თუ სქემა მდგრადია და ახდენს (1) განტოლების აპროქსიმაციას, მაშინ იგი კრებადია. ეს დებულება, დამტკიცებული მოდელური ამოცანისათვის, ზოგადი მნიშვნელობებისაა და ნებისმიერი მეორე რიგის სქემებისთვისაა სამართლიანი.

ანალოგიურად მტკიცდება რუნგე-კუტას (13) სქემის $O(\tau^2)$ სიჩქარით კრებადობა, როცა $f_u \le 0$. ამ შემთხვევაში z_n-სთვის, $z_n = y_n - u_n$, როცა $\sigma\alpha = 1/2$, ვღებულობთ ამოცანას:

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}=\beta_n\left(1+\frac{1}{2}\tau\gamma_n\right)z_n+\tau\psi_n, \tag{34}$$

სადაც $\beta_n=f_u(t_n,\ u_n+\theta_1 z_n)$, $\gamma_n=f_u(t_n+\tau/2,\ u_n+\theta_2 z_n)$ $(0\le\theta_i\le 1,$ $i=1,2)$, ხოლო ψ_n განისაზღვრება (13′) ფორმულის მიხედვით. (34) გადავწეროთ სახით:

$$z_{n+1}=q_n z_n+\tau\psi_n,\qquad q_n=1+\tau\beta_n(1+\tau\,\gamma_n/2).$$

მდგრადობის პირობა $|q_n|\le 1$ ან $-1\le q_n\le 1$ შესრულდება, თუ

$$2-\tau|\beta_n|+1/2\tau^2|\beta_n||\gamma_n|\ge 0,\qquad 1/2\tau|\beta_n|\,|\gamma_n|\le|\beta_n|$$

ან $\tau|\gamma_n|\le 2$. პირველი უტოლობა აგრეთვე სრულდება, როცა $\tau|\beta_n|\le 2$, და, მაშასადამე, საკმარისია, რომ

$$\tau K\le 2, \tag{35}$$

თუ $f_u\le 0$, $|f_u|\le K$, $(t,u)\in D$. (35) პირობა (25)-ის ანალოგიურია და უზრუნველყოფს (33) შეფასების შესრულებას, საიდანაც გამომდინარეობს (13) სქემის კრებადობა მეორე რიგით, $\|z\|_C=O(\tau^2)$.

§2. მრავალბიჯიანი სქემები. ადამსის მეთოდები

1. **მრავალბიჯიანი მეთოდები.** §1-ში განვიხილეთ რუნგე-კუტას მეთოდები კოშის ამოცანის

$$\frac{du}{dt}=f(t,u),\quad 0<t\le T,\ u(0)=u_0 \tag{1}$$

რიცხვითი ამოხსნისათვის. ეს მეთოდები ერთბიჯიანია: y_{n+1} ახალი მნიშვნელობის განსაზღვრისას გამოიყენება მხოლოდ y_n მნიშვნელობა. ზოგად შემთხვევაში y_n მიახლოებითი ამოხსნის განსაზღვრისათვის შეიძლება განვიხილოთ m-ბიჯიანი სხვაობიანი სქემები $(m\ge 1)$, ე. ი.

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{\tau}y_{n-k}=\sum_{k=0}^{m}b_k f_{n-k},\quad n=m,m+1,\ldots, \tag{2}$$

a_k, b_k კოეფიციენტებს არჩევენ აპროქსიმაციისა და მდგრადობის მოთხოვნებიდან გამომდინარე. ზოგადობის დაურღვეველად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1. \tag{6}$$

რადგან (2) განტოლების კოეფიციენტები განსაზღვრულია მამრავლის სიზუსტით. თუ გავშლით ψ_n-ს τ-ს ხარისხების მიხედვით და მოვითხოვთ, რომ შეუსაბამობას მოთხოვნილი რიგი ჰქონდეს, მივიღებთ პირობებს a_k, b_k-ს განსაზღვრისათვის. ვინაიდან $u = 1$ არის $u_t = f(t, u)$ განტოლების ამოხსნა, როცა $f = 0$, ამიტომ (2)-დან გამოდის რომ

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = 0. \tag{7}$$

ჩვეულებრივ, (2) სქემის ასაგებად იყენებენ სხვა ხერხებს ისეთს, რომლებიც საინტერპოლაციო და კვადრატურულ ფორმულებს იყენებს. ასე, თუ ვაინტეგრებთ (1) დიფერენციალურ განტოლებას t-თი t_{n-n_0}-დან t_n-მდე, მივიღებთ:

$$u_n - u_{n-n_0} = \int_{t_{n-n_0}}^{t_n} f(t, u(t))dt. \tag{8}$$

აქედან სხვაობიანი სქემის მისაღებად ინტეგრალისათვის შეიძლება რომელიმე კვადრატურული ფორმულა გამოვიყენოთ.

2. ადამსის მეთოდი. ყოველი კვადრატურული ფორმულა წარმოქმნის შესაბამის მეთოდს (1) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის. განვიხილოთ იგივეობა, რომელიც შეესაბამება (8) იგივეობას, როცა $n_0 = 1$,

$$u_n - u_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, u(t))dt, \tag{9}$$

ıდა მასში ინტეგრალი კვადრატურული ფორმულით შევცვალოთ:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt \approx \tau\sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k},u_{n-k}). \tag{10}$$

(9) და (10)-ის გათვალისწინებით შეიძლება დაიწეროს ადამსის სხვაობიანი სქემა:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k},y_{n-k}). \tag{11}$$

იგი შეიძლება მივიღოთ (2)-დან, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $a_k = 0$, როცა $k = 2,3,\ldots,m$ და $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

(10) კვადრატურული ფორმულით, რომლის საფუძველზეც აგებულია ადამსის სქემა, შეიცავს ბადეთა კვანძებს, რომლებიც ინტეგრების $t_{n-1} \le t \le t_n$ ინტერვალს არ ეკუთვნის. ჩვეულებრივ, გამოიყენება მოთხოვნა, რომ კვადრატურული ფორმულა ზუსტი იყოს m-ური ხარისხის მრავალწევრისათვის. ამასთან, აირჩევა საინტერპოლაციო მრავალწევრი კვანძებით.

სქემის ამგვარად აგების დროს მისი აპროქსიმაციის ცდომილება კვადრატურული ფორმულის ცდომილებას ემთხვევა. მართლაც, (11) სქემისათვის შეუსაბამობა ტოლია

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k},u_{n-k}) - \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}.$$

ჩავსვამთ რა აქ გამოსახულებას (9)-დან

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt,$$

მივიღებთ ფორმულას შეუსაბამობისათვის:

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k},u_{n-k}) - \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt. \tag{12}$$

და მასში ინტეგრალი კვადრატურული ფორმულით შევცვალოთ:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt \approx \tau \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}). \qquad (10)$$

(9) და (10)-ის გათვალისწინებით შეიძლება დაიწეროს ადამსის სხვაობიანი სქემა:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}). \qquad (11)$$

ივი შეიძლება მივიღოთ (2)-დან, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $a_k = 0$, როცა $k = 2,3,\ldots,m$ და $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

(10) კვადრატურული ფორმულით, რომლის საფუძველზეც აგებულია ადამსის სქემა, შეიცავს ბადეთა კვანძებს, რომლებიც ინტეგრების $t_{n-1} \le t \le t_n$ ინტერვალს არ ეკუთვნის. ჩვეულებრივ, გამოიყენება მოთხოვნა, რომ კვადრატურული ფორმულა ზუსტი იყოს m-ური ხარისხის მრავალწევრისათვის. ამასთან, აირჩევა საინტერპოლაციო მრავალწევრი კვანძებით.

სქემის ამგვარად აგების დროს მისი აპროქსიმაციის ცდომილება კვადრატურული ფორმულის ცდომილებას ემთხვევა. მართლაც, (11) სქემისათვის შეუსაბამობა ტოლია

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}) - \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}.$$

ჩავსვამთ რა აქ გამოსახულებას (9)-დან

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt,$$

მივიღებთ ფორმულას შეუსაბამობისათვის:

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,u(t))dt. \qquad (12)$$

3. ცხადი და არაცხადი სქემები. თუ $b_0 = 0$, მაშინ (11) სქემა ცხადია და

$$y_n = y_{n-1} + \tau \sum_{k=1}^{m} b_k f_{n-k} . \qquad (13)$$

ადამსის ცხადი სქემის უმარტივესი მაგალითია ეილერის სქემა

$$y_n - y_{n-1} = \tau f_{n-1}, \text{ როცა } m = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1. \qquad (14)$$

თუ (11)-ში ვიგულისხმებთ, რომ $m = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, მაშინ მივიღებთ ადამსის არაცხად სქემას

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = f_n \text{, ანუ } y_n - \tau f(t_n, y_n) = y_{n-1}. \qquad (15)$$

არაცხადი სიმეტრიული ერთბიჯიანი სქემა ($m = 1$)

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] \qquad (16)$$

შეესაბამება მნიშვნელობებს $m = 1$, $b_0 = b_1 = 1/2$ და გააჩნია აპროქსიმაციის მეორე რიგი: $\psi_n = O(\tau^2)$. y_n-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოიხსნას (ყველა n-სთვის) არაწრფივი განტოლება

$$y_n - 1/2\tau f(t_n, y_n) = F_{n-1},$$

სადაც $F_{n-1} = y_{n-1} + 1/2\tau f(t_{n-1}, y_{n-1})$.

ახლა განვიხილოთ ადამსის ორბიჯიანი სქემები, რომლებიც $m = 2$ შემთხვევას შეესაბამება. ცხად ორბიჯიან სქემას ($m = 2$) აქვს სახე:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{3}{2} f_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-2},$$
$$m = 2, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{3}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}. \qquad (17)$$

მას აპროქსიმაციის მეორე რიგი გააჩნია:

$$\psi_n = \frac{3}{2} f(t_{n-1}, u_{n-1}) - \frac{1}{2} f(t_{n-2}, u_{n-2}) - \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} = O(\tau^2).$$

გამოვიკვლიოთ მდგრადობა შესაბამისი მოდელური სქემისა

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \lambda\left(\frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{2} y_{n-2}\right) = 0, \quad \lambda > 0 \tag{18}$$

ჩავსვათ აქ $y_n = q^n$, მივიღებთ

$$q^2 - \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right)q - \frac{1}{2}\mu = 0, \quad \mu = \lambda\tau. \tag{19}$$

რადგან $D = 1 - \mu + \frac{9}{4}\mu^2 > 0$ ყველა μ-სთვის, ამიტომ q_1 და q_2 ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია. მდგრადობა ნიშნავს, რომ $|q_1| \le 1$ და $|q_2| \le 1$. ვისარგებლოთ შემდეგი თვისებებით, რომლებიც უშუალოდ მოწმდება: $q^2 + bq + c = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვები მოდულით არ აღემატება ერთს:

$$|q_{1,2}| \le 1, \quad \text{თუ} \quad |b| \le 1 + c, \quad c \le 1. \tag{20}$$

(19) განტოლებისათვის გვაქვს $b = 3\mu/2 - 1$, $c = -\mu/2$, და პირობა $|3\mu/2 - 1| \le 1 - \mu/2$, სრულდება, როცა $\mu \le 1$ ანუ

$$\tau\lambda \le 1,$$

ე. ი. (18) სქემა პირობით მდგრადია (τ ბიჯი ეილერის სქემაში დასაშვებ ბიჯზე 2-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს).

დავწეროთ ადამსის ორბიჯიანი ($m = 2$) არაცხადი სქემა. თუ მოვითხოვთ, რომ (10) კვადრატურული ფორმულა ზუსტი იყოს 0, 1, 2 ხარისხის პოლინომებისათვის, ე. ი. $F(t) = f(t, u(t)) = \{1, t, t^2\}$, ვიპოვით კოეფიციენტებს $b_0 = 5/12$, $b_1 = 8/12$, $b_2 = -1/12$. სქემას აქვს სახე:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}). \tag{21}$$

გამოვიკვლიოთ მდგრადობა მოდელური ამოცანისა

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \frac{\lambda}{12}(5y_n + 8y_{n-1} - y_{n-2}) = 0. \qquad (22)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $y_n = q^n$, მივიღებთ მახასიათებელ განტოლებას

$$aq^2 + bq + c = 0,\ a = 1 + \frac{5}{12}\tau\lambda,\ b = \frac{8}{12}\tau\lambda - 1,\ c = -\frac{1}{12}\tau\lambda.$$

(20) პირობები, რომელთაც დროსაც $|q_{1,2}| \le 1$, მიიღებს სახეს $|b| \le a + c$, $c \le a$, აქედან გამომდინარეობს, რომ (22) სქემა მდგრადია, როცა $\tau\lambda \le 6$.

4. კოშის ამოცანა მეორე რიგის განტოლებებისათვის. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t, u(t)), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1. \qquad (23)$$

ყველაზე გავრცელებულია შტორმერის მეთოდი:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} = \sum_{k=-1}^{m} b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}), \quad m \ge 0, \quad n = 1,2,\ldots, \qquad (24)$$

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_1 \quad \text{ან} \quad \frac{y_1 - y_0}{\tau} = \tilde{u}_1.$$

$\bar{u}_1$ (ან $\tilde{u}_1$) მნიშვნელობა ისე აირჩევა, რომ აპროქსიმაციის ცდომილებას $\psi_0 = \frac{1}{\tau}[u(\tau) - u(0)] - \frac{\partial u}{\partial t}(0) - \tilde{u}_1 + u_1$ ჰქონდეს განსაზღვრული რიგი, მაგალითად $\psi_0 = O(\tau^p)$, სადაც p – (24) სქემის აპროქსიმაციის რიგია. მაგალითად, როცა $p = 2$, ვპოულობთ

$$u(\tau) = u(0) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(0) + \frac{1}{2}\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0) + O(\tau^3),$$

$$\psi_0 = u_1 + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0) - \widetilde{u}_1 + O(\tau^2) = \frac{\tau}{2} f(0, u(0)) +$$

$$+ O(\tau^2) - \widetilde{u}_1 + u_1 = O(\tau^2),$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ

$$\widetilde{u}_1 = u_1 + 1/2\tau f(0, u_0), \quad \overline{u}_1 = u_0 + \tau\widetilde{u}_1 .$$

თუ $b_{-1} = 0$, მაშინ (24) სქემა ცხადია, რადგან მარჯვენა მხარეში შედის მხოლოდ ცნობილი მნიშვნელობები $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-m}$. თუ $b_{-1} \neq 0$, (24) სქემა არაცხადია და y_{n+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოიხსნას განტოლება

$$y_{n+1} - b_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) = F(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-m}, t_n).$$

(24) სხვაობიანი სქემისა მისაღებად გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} u'' v\,dt &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} u'' v\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'' v\,dt = \\ &= (u'v - uv')\Big|_{t_{n-1}}^{t_n} + (u'v - uv')\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} u v''\,dt, \end{aligned} \tag{25}$$

სადაც $v(t)$ – უბან-უბან წრფივი ფუნქციაა

$$v(t) = \begin{cases} (t - t_{n-1})/\tau & \text{როცა} \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ (t_{n+1} - t)/\tau & \text{როცა} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \end{cases} \tag{26}$$

ჩავსვათ (26) (25)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ $v''(t) = 0$:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} u'' v\,dt = \frac{1}{\tau}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) . \tag{27}$$

თუ შემდეგ $v(t)$-ს გავამრავლებთ (23) განტოლებაზე და გავითვალისწინებთ (27)-ს, მივიღებთ იგივეობას

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, u(t))v(t)dt\,. \tag{28}$$

(24) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება $u = u(t)$ ამოხსნის მიმართ ანუ (24) სქემისათვის შეუსაბამობა, განისაზღვრება ფორმულით

$$\psi_n = \sum_{k=-1}^{m} b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}) - \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\tau^2}\,,$$

რომელიც (28) იგივეობის ძალით, შეიძლება ჩაიწეროს სახით

$$\psi_n = \sum_{k=-1}^{m} b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}) - \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, u(t))v(t)dt\,. \tag{29}$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვალდი $s = (t - t_n)/\tau$ და ინტეგრალი უფრო მოხერხებული ფორმით ჩავწეროთ:

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} F(t)v(t)dt = \int_{-1}^{1} F(t_n + s\tau)\bar{v}(s)ds,$$

$$F = f(t, u(t)), \quad \bar{v}(s) = \begin{cases} 1 + s, & s < 0, \\ 1 - s, & s > 0. \end{cases}$$

(29)-დან ჩანს, რომ პირველი შესაკრები არის კვადრატურული ფორმულა ინტეგრალისათვის $F(t) = f(t, u(t))$ ფუნქციიდან $v(t) \geq 0$ წონით. სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება მთლიანად განისაზღვრება კვადრატურული ფორმულის ცდომილებით. ამის საფუძველზე აგებულ მეთოდებს ადამს-შტორმერის მეთოდებსაც უწოდებენ.

ყველაზე მარტივი მართკუთხედის ფორმულა გვაძლევს სქემას

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} = f(t_n, y_n)\,,$$

რადგან $\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} v(t)dt = 1$.

მოდელური ამოცანისათვის

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\lambda u=0,\quad \lambda>0,\quad t>0,\quad u(0)=0,\quad \frac{du}{dt}(0)=u_1$$

გვაქვს

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2}+\lambda y_n=0.$$

თუ აქ ჩავსვამთ $y_n=q^n$, ვიპოვით $q^2-2(1-\tau^2\lambda/2)q+1=0$; $D<0$, როცა $\lambda\tau^2\le 4$, $\tau\le 2\sqrt{\lambda}$; ამასთან $|q_1|=|q_2|$ და სქემა მდგრადია, როცა $\tau\le 2\sqrt{\lambda}$ ანუ $\tau\sqrt{\lambda}\le 2$.

5. განტოლებათა სისტემები. ბევრი მეთოდი შეუცვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ კოშის ამოცანის ამოსახსნელად განტოლებათა სისტემისათვის:

$$\frac{du}{dt}=f(t,u),\quad t>0,\quad u(0)=u_0, \tag{30}$$

სადაც $u=(u_1(t),u_2(t),...,u_N(t))$ – საძიებელი, ხოლო $f=(f_1,f_2,..., f_N)$ – მოცემული ვექტორებია. ჩავწეროთ (30) კომპონენტების მიხედვით:

$$\frac{du_i}{dt}=f_i(t,u),\quad t>0,\quad u_i(0)=u_i^0,\quad i=1,2,...,N. \tag{31}$$

ვთქვათ, u, v – (30) ამოცანის ორი ამოხსნაა საწყისი პირობებით $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$. მათი სხვაობისათვის $z=v-u$ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)z_j,$$

სადაც α_{ij} – $\partial f_i/\partial u_j$ წარმოებულის მნიშვნელობა რაიმე საშუალედო წერტილში $(t,\bar{u}_j)$, $\bar{u}_j=(u_1,u_2,...,u_{j-1},u_j+\theta_j z_j,u_{j+1},...,u_N)$

$(0 \le \theta_j \le 1,\ j = 1,2,\dots,N)$. ამიტომ (30) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის წრფივ მოდელს წარმოადგენს წრფივი სისტემა

$$\frac{du_i}{dt} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} u_j = f_i(t) \tag{32}$$

ანუ, ვექტორული ფორმით,

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad A = (\alpha_{ij}). \tag{33}$$

ამ განტოლების მდგრადობისათვის საწყისი მონაცემების მიმართ საკმარისია, რომ A მატრიცა არაუარყოფითი იყოს. შემდეგ პარაგრაფში ნაპოვნი იქნება წრფივ განტოლებათა (33) სისტემის მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება განტოლებათა სისტემები, რომლებსაც ხისტს უწოდებენ და რომელთა ჩვეულებრივი მეთოდებით ამოხსნა დიდ სიძნელეებს წარმოადგენს. დავუშვათ, $\{\lambda_k\}$ – A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია (თუ A არასიმეტრიულია, λ_k-ები შეიძლება კომპლექსური იყოს). (33) განტოლებათა სისტემას უწოდებენ ხისტს, თუ $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ $(k = 1,2,\dots,N)$ და თუ ფარდობა $\xi = \max\limits_k \mathrm{Re}\lambda_k / \min\limits_k \mathrm{Re}\lambda_k$ დიდია.

თუ A მატრიცი სიმეტრიულია, მაშინ ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია და (33) სისტემის სიხისტე ნიშნავს, რომ A მატრიცი დადებითია და რომ სისტემა ცუდადაა განპირობებული, ე. ი.

$$\xi = \frac{\max\limits_k \lambda_k}{\min\limits_k \lambda_k} \gg 1$$

ხისტია, კერძოდ განტოლებები, რომლებიც კერძოწარმოებულიანი განტოლებების ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე დაყვანისას მიიღება ოპერატორის (რომელიც შეიცავს წარმოებულებს სივრცული ცვლადების მიხედვით, მაგალითად, ლაპლასის ოპერატორი, სითბოგამტარებლობის განტოლების შემთხვევაში) სხვაობიანი აპროქსიმაციის გზით.

ცხადი მეთოდები გამოუსადეგარი აღმოჩნდა ხისტი სისტემების რიცხვითი ამოხსნისათვის, რადგან მდგრადობის მოთხოვნის გამო ბიჯს დიდი შეზღუდვები ედება. ეს კი უარყოფითად მოქმედებს სიზუსტის მოთხოვნაზე. ავხსნათ ეს ორი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის მაგალითზე

$$\frac{du_1}{dt}+a_1u_1=0,\quad \frac{du_2}{dt}+a_2u_2=0,\quad A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$t>0,\quad a_2>0,\quad a_1>0,\quad a_2>>a_1$$

ამ სისტემის ამოხსნა არის ვექტორი

$$u(t)=(u_1(t),u_2(t)),$$

$$u_1(t)=u_1(0)e^{-a_1t},\quad u_2(t)=u_2(0)e^{-a_2t};$$

მისი კომპონენტები კლებულობენ t-ს ზრდასთან ერთად, ამასთან $|u_2(t)|\ll|u_1(t)|$ საკმაოდ დიდი t-სთვის.

აჳიღოთ ცხადი სქემა

$$\frac{y_1^{n+1}-y_1^n}{\tau}+a_1y_1^n=0,\quad \frac{y_2^{n+1}-y_2^n}{\tau}+a_2y_2^n=0, \tag{35}$$

$$n=0,1,\ldots,\quad y_i^n=y_i(t_n),\quad i=1,2.$$

სისტემა იშლება ორ განტოლებად, რომელთაგან თითოეული შეიძლება ცალკე ამოიხსნას, მაგრამ ისინი დაკავშირებულია საერთო τ ბიჯის შერჩევით. სქემა მდგრადია, თუ ერთდროულად სრულდება ორი პირობა $a_1\tau\le 2$ და $a_2\tau\le 2$. რადგან $a_2>>a_1$, ამიტომ ორივე პირობა სრულდება, როცა $\tau\le 2/a_2$. დასაშვები τ ბიჯი ფაქტიურად განისაზღვრება იმ კომპონენტით, რომელიც უფრო სწრაფად კლებულობს.

(34) სისტემის ამოსახსნელად გამოდგება არაცხადი სქემა

$$\frac{y_1^{n+1}-y_1^n}{\tau}+a_1y_1^{n+1}=0,\quad \frac{y_2^{n+1}-y_2^n}{\tau}+a_2y_2^{n+1}=0,$$

რომელიც მდგრადია ნებისმიერი τ-სა და $a_1\ge 0$, $a_2\ge 0$-თვის.

ბოლო დროს შეიქმნა მთელი რიგი არაცხადი სქემების, ალგორითმებისა და პროგრამებისა, რომლებიც გამოდგება წრფივი და არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების ხისტი სისტემების ამოსახსნელად.

6. ზოგადი შენიშვნები. 1. ამა თუ იმ რიცხვითი მეთოდის ამორჩევისას მხედველობაში მიიღება ბევრი გარემოება, ისეთი, როგორიცაა გამოთვლების მოცულობა, სიზუსტის რიგი, მდგრადობა დამრგვალების ცდომილებების მიმართ და სხვა. ჩვენ ყველგან ვიხილავდით მეთოდებს მუდმივი $\tau = t_{n+1} - t_n$ ბიჯით. ცვლად $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ ბიჯზე გადასვლა ფორმალურ ხასიათს ატარებს და ერთბიჯიანი სქემებისათვის რაიმე ახალ პრინციპულ საკითხებთან არ მიგვიყვანს. მრავალბიჯიანი სქემებისათვის $(m \geq 2)$ ფორმულები იცვლება.

ზოგად შემთხვევაში ამოხსნა შეიძლება ძლიერ ცვლადი მონოტონური ფუნქცია იყოს. ბუნებრივია ვისარგებლოთ არათანაბარი ბადით და $u(t)$ ფუნქციის სწრაფი ცვალებადობის არეში შევამციროთ ბიჯი (შევამჭიდროვოთ ბადე), რათა ბადური ამონახსნით $u(t)$-ს უფრო ზუსტი მიახლოება მივიღოთ. მაგრამ ჩვენთვის წინასწარ ცნობილი არ არის $u = u(t)$ ამოხსნის ყოფაქცევა. ამიტომ პრაქტიკაში ასე იქცევიან: თავდაპირველად გათვლებს ატარებენ თანაბარ ბადეზე; თუ ჩანს, რომ $u = u(t)$ ამოხსნა ძლიერ იცვლება რომელიმე ინტერვალზე $t_* < t < t^*$, $[t_*, t^*]$-ზე ბადეს ამჭიდროვებენ და ამოცანის ამოხსნას განაგრძობენ ასეთ არათანაბარ ბადეზე. საერთოდ, რეკომენდირებულია გამოთვლების ჩატარება რამოდენიმე შემჭიდროვებულ ბადეზე. თუ ბადის შემჭიდროვებისას ამოხსნა მცირედ იცვლება, მაშინ საჭირო სიზუსტე მიღწეულია. სიზუსტის რიგის ასამაღლებლად შეიძლება რუნგეს მეთოდის გამოყენება, რომელიც იყენებს სხვადასხვა ბადეებზე გათვლას (თუ $u = u(t)$ საკმაოდ გლუვია). გამოთვლების მსვლელობაში შეიძლება აუცილებელი აღმოჩნდეს სხვადასხვა სიზუსტის რიგის სქემების გამოყენება არგუმენტის ცვალებადობის სხვადასხვა არეში.

2. ხშირად გვიხდება განტოლებების ამოხსნა ძლიერ ცვლადი კოეფიციენტებით, მაგალითად

$$\frac{du}{dt} = \alpha(t)u, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0. \tag{36}$$

ასეთი განტოლება გხვდება ქიმიური კინეტიკის ამოცანების აღწერისას. მისი ამოხსნა არის ფუნქცია:

$$u(t) = u_0 \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\}.$$

თუ $\alpha(t) \geq 0$, შეიძლება გამოვიყენოთ ეილერის სქემა ნებისმიერი τ-თი:

$$y_{n+1} = y_n + \tau\alpha_n y_n = (1 + \tau\alpha_n)y_n. \tag{37}$$

თუ კი $\alpha(t) < 0$, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $1 + \alpha_{n_1}\tau < 0$ რომელიღაც $n = n_1$-სთვის და $y_{n_1+1} < 0$ ე. ი. ამოხსნა კარგავს აზრს. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ ცხადი სქემით

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \tau\alpha_n y_{n+1}, \\ y_{n+1} = y_n / (1 - \tau\alpha_n), \quad 1 - \tau\alpha_n > 1, \end{gathered} \tag{38}$$

რომელიც მდგრადია ნებისმიერი τ-სთვის. თუ $\alpha(t)$ იცვლის ნიშანს t-ს რომელიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ იმ კვანძებში, სადაც $\alpha(t) > 0$, უნდა გამოვიყენოთ (37) ცხადი სქემა, ხოლო კვანძებში, სადაც $\alpha(t) < 0$ — (38) არაცხადი სქემა.

ადამსის მეთოდები ნაკლებად შრომატევადია, ვიდრე რუნგე-კუტას მეთოდები. ადამსის მეთოდების ნაკლია გამოთვლების არასტანდარტული დასაწყისი; $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$-ის განსაზღვრისათვის, ჩვეულებრივ, გამოიყენება რუნგე-კუტას მეთოდი. ორბიჯიანი (და, მითუმეტეს, მრავალბიჯიანი) ადამსის სქემებისათვის τ ბიჯის შეცვლა იწვევს ფორმულების გართულებას, რუნგე-კუტას მეთოდებისაგან განსხვავებით. მოცემული სიზუსტის მისაღწევად პრაქტიკაში გამოიყენება რუნგე-კუტას და ადამსის მეთოდების კომბინაცია, ბიჯის ავტომატური შერჩევის პროგრამით.

§3. პირველი რიგის ჩვეულებრივი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის კოშის ამოცანის აპროქსიმაცია

1. კ ო შ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა. ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით წრფივ სხვაობიან სქემებს (ერთბიჯიანი ან ორშრიანი), რომლებიც ჩნდებიან პირველი რიგის ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისათვის კოშის ამოცანის აპროქსიმაციის დროს, აგრეთვე კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა აპროქსიმაციისას.

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{du_i}{dt}+\sum_{j=1}^{N}a_{ij}u_j=f_i(t),\quad t\ge 0,\quad u_i(0)=u_i^0,\quad i=1,2,\ldots,N. \tag{1}$$

აღვნიშნოთ $A=(a_{ij})$-თი $N\times N$ რიგის კვადრატული მატრიცა t-გან დამოუკიდებელი a_{ij} ელემენტებით, $u(t)$-თი, $u(t)=(u_1(t), u_2(t),\ldots,u_N(t))$ – საძიებელი, ხოლო $f(t)$-თი, $f(t)=(f_1(t), f_2(t),\ldots,f_N(t))$ – მოცემული N-განზომილებიანი ვექტორები და ჩავწეროთ სქემა შემდეგი სახით:

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t),\quad t\ge 0,\quad u(0)=u_0. \tag{2}$$

დავტოვოთ იგივე A აღნიშვნა შესაბამისი ოპერატორისათვისაც, რომელიც N-განზომილებიან H^N სივრცეში $A: H^N\to H^N$ მოქმედებს. H^N სივრცეში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი (u, v) და ნორმა $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$. ვიგულისხმებთ, რომ A ოპერატორი დადებითია:

$$A>0,\ \text{ანუ}\ (Ax,x)>0\ \text{ყველა}\ x\text{-სთვის}\ H^N\text{-დან},\ x\ne 0.$$

(1) კოშის ამოცანას (2) პირობით ერთადერთი ამოხსნა გააჩნია. მართლაც, ვთქვათ არსებობს (2) ამოცანის ორი ამოხსნა – $\bar{u}(t)$ და $\bar{\bar{u}}(t)$, მაშინ მათი სხვაობა აკმაყოფილებს ერთგვაროვან პირობებს

$$\frac{dz}{dt} + Az = 0, \quad t > 0, \quad z(0) = 0, \quad z(t) = \bar{u}(t) - \bar{\bar{u}}(t). \tag{3}$$

(3) გავამრავლოთ სკალარულად z-ზე და გავითვალისწინოთ, რომ $\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z, z)$, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2 + (Az, z) = 0,$$

$$\|z(t)\|^2 + 2\int_0^t (Az(t'), z(t'))dt' = \|z(0)\|^2.$$

რადგან $A > 0$, $z(0) = 0$, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\|z(t)\|^2 = 0, \quad z(t) \equiv 0, \quad \bar{u}(t) \equiv \bar{\bar{u}}(t).$$

აღვნიშნოთ (2) ამოცანის ამოხსნის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება $f(t) \equiv 0$-თვის:

$$\|u(t)\| \le e^{-\lambda_1 t}\|u(0)\|, \text{ თუ } A = A^* > 0, \tag{4}$$

სადაც λ_1 – A ოპერატორის უმცირესი საკუთრივი მნიშვნელობაა:

$$A\xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1,2,\ldots,N, \quad 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N$$

(4)-ის დასამტკიცებლად (2) ამოცანის $u(t)$ ამოხსნა ვეძებოთ სახით

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\xi_k, \quad \|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2(t).$$

ამ გამოსახულების ჩასმის შემდეგ (1) განტოლებაში, სადაც $f(t) \equiv 0$, ვიპოვით

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d\alpha_k}{dt} + \lambda_k \alpha_k\right)\xi_k = 0,$$

და, შესაბამისად, $\frac{d\alpha_k}{dt}+\lambda_k\alpha_k=0$, $\alpha_k(t)=\alpha_k(0)e^{-\lambda_k t}$, ასე რომ

$$\|u(t)\|^2=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2(0)e^{-2\lambda_k t}\le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2(0)=e^{-2\lambda_1 t}\|u(0)\|^2 .$$

2. სხვაობიანი სქემები. შემოვიტანოთ ბადე t ცვლადის მიხედვით τ ბიჯით: $\omega_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,2...\}$ და აღვნიშნოთ $y_n=y(t_n)$-ით $t_n=n\tau$ (ანუ n) არგუმენტის ბადური ფუნქცია მნიშვნელობებით H^N-დან. დავწეროთ ცხადი სქემა

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=f_n,\quad n=0,1,2,...,\quad y_0=u_0, \tag{5}$$

ასე, რომ y_{n+1} გამოითვლება ცხადი ფორმულით

$$y_{n+1}=y_n-\tau(Ay_n-f_n),\quad n=0,1,2,...,\quad y_0=u_0, \tag{5'}$$

(5) ამოცანის y_n ამოხსნა დამოკიდებულია არა მხოლოდ τ-ზე, არამედ N-ზე, ანუ $h=1/N$ პარამეტრზე: $y_n=y_{n,\tau,h}$.

ფაქტიურად ვიხილავთ არა ერთ ამოცანას (5), არამედ ამოცანათა ერთობლიობას $\{5_{\tau,h}\}$ ყველა შესაძლებელი τ და h-სთვის. სწორედ ეს არის სხვაობიანის სქემა. მისი ამოხსნაა ფუნქციათა ოჯახი $\{y_{n,\tau,h}\}$. ჩანაწერი რომ არ გავართულოთ, იმ შემთხვევაში, როცა ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, τ და h ინდექსებს გამოვტოვებთ. (5) სქემა ერთბიჯიანი (ანუ ორშრიანი) სხვაობიანი სქემაა.

საზოგადოდ, ორშრიანი სქემის ქვეშ ესმით განტოლება, რომელიც აკავშირებს $y(t)$ ვექტორის მნიშვნელობებს არგუმენტის ორი მნიშვნელობისათვის – $t=t_n$ და $t=t_{n+1}$ (ორი შრისათვის):

$$By_{n+1}=Cy_n+F_n,\quad n=0,1,...,$$

სადაც B, C – $N\times N$ რიგის კვადრატული მატრიცებია (წრფივი ოპერატორები $B,C:H^N\to H^N$), y_n, F_n – N განზომილებიანი ვექტორებია. ეს განტოლება ყოველთვის შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი კანონიკური ფორმით:

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=\varphi_n,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad y_0=u_0. \qquad (6)$$

y_{n+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოიხსნას განტოლება

$$By_{n+1}=\Phi_n,\ \ \Phi_n=By_n-\tau(Ay_n-\varphi_n).$$

ყველგან ვგულისხმობთ, რომ არსებობს შებრუნებული ოპერატორი B^{-1}.

თუ $B=E$ ერთეულოვანი ოპერატორია, ვღებულობთ (5) ცხად სქემას. $B\neq E$ შემთხვევაში (6) სქემას არაცხადს უწოდებენ. ხშირად გვხვდება სქემები:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_{n+1}=\varphi_n \ \ \textit{(წმინდა არაცხადი სქემა)} \qquad (7)$$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\frac{1}{2}A(y_n+y_{n+1})=\varphi_n \ \ \textit{(სიმეტრიული სქემა)} \qquad (8)$$

ისინი კერძო შემთხვევებია (როცა $\sigma=1$ და $\sigma=1/2$) შემდეგი სქემებისა წონებით

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+A(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)y_n)=\varphi_n,\quad n=0,1,\ldots, \qquad (9)$$

რომელიც შეიძლება (6) კანონიკური ფორმით ჩაიწეროს, სადაც

$$B=E+\sigma\tau A, \qquad (10)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)y_n=y_n+\tau\sigma(y_{n+1}-y_n)/\tau.$$

3. აპროქსიმაციის ცდომილება. ვთქვათ, $u=u(t)$ – (1) ამოცანის ამოხსნაა, $y_n=y(t_n)$ – (6) ამოცანის ამოხსნა. ჩავსვამთ რა (6)-ში $y_n=u_n+z_n$, $z_n=y_n-u_n$ ცდომილებისათვის, $u_n=u(t_n)$, მივიღებთ

$$B\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}+Az_n=\psi_n,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad z_0=0, \qquad (11)$$

სადაც

$$\psi_n = \varphi_n - Au_n - B\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}. \tag{12}$$

არის შეუსაბამობა, ანუ (6) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება ამოსავალი (1) ამოცანის $u = u(t)$ ამოხსნის მიმართ.

ვთქვათ, $\|u\|_{(1)}$, $\|u\|_{(2)}$ რაიმე ნორმებია $H^N = H_h$-ში. (6) სქემა კრებადია, თუ $\|z_n\|_{(1)} \to 0$, როცა $\tau \to 0$ ყველა n-სთვის, $n = 1,2,...$ (6) სქემას გააჩნია სიზუსტის m-ური რიგი ანუ კრებადია $O(\tau^m)$ სიჩქარით, თუ

$$\|z_n\|_{(1)} = O(\tau^m), \quad \text{ე. ი.} \quad \|z_n\|_{(1)} \le M\tau^m, \tag{13}$$

სადაც $M = \text{const}$ არაა დამოკიდებული τ-ზე.

გავიხსენოთ, რომ (6) სქემას გააჩნია აპროქსიმაციის m-ური რიგი (1) განტოლების ამოხსნის მიმართ, თუ ψ_n შეუსაბამობისათვის სრულდება შეფასება

$$\|\psi_n\|_{(2)} = O(\tau^m). \tag{14}$$

გავარკვიოთ (6) სქემის აპროქსიმაციის პირობები, როცა $m = 1,2$. ვიგულისხმოთ, რომ $u = u(t)$-ს გააჩნია იმდენი წარმოებული, რამდენიც მსჯელობის დროს დაგვჭირდება და ვიპოვეთ

$$u_{n+1} = \left(u + \frac{\tau}{2}u' + \frac{\tau^2}{8}u''\right)_{n+1/2} + O(\tau^3),$$

$$u_n' = \left(\frac{du}{dt}\right)_n, \quad u_n'' = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n,$$

$$u_n = \left(u - \frac{\tau}{2}u' + \frac{\tau^2}{8}u''\right)_{n+1/2} + O(\tau^3),$$

$$\frac{1}{\tau}(u_{n+1} - u_n) = u_{n+1/2}' + O(\tau^2),$$

$$\psi_n = \varphi_n - (Au + Bu')_{n+1/2} + \frac{\tau}{2} Au'_{n+1/2} + O(\tau^2) =$$

$$= \varphi_n - f_{n+1/2} + (f - Au - u')_{n+1/2} + (E - B + \frac{\tau}{2} A) u'_{n+1/2} + O(\tau^2) =$$

$$= \varphi_n - f_{n+1/2} + (E - B + \frac{\tau}{2} A) u'_{n+1/2} + O(\tau^2).$$

აქედან ჩანს, რომ (14) პირობა შესრულდება, თუ

$$\begin{gathered} \|\varphi_n - f_{n+1/2}\|_{(2)} = O(\tau^m), \\ \|(E - B + \frac{\tau}{2} A) u'\|_{(2)} = O(\tau^m), \quad m = 1,2. \end{gathered} \tag{15}$$

კერძოდ, ცხადი სქემისათვის ($B = E$ შემთხვევაში) გვაქვს:

$$\left\| \frac{\tau}{2} Au' \right\|_{(2)} = O(\tau),$$

და $\|\psi_n\|_{(2)} = O(\tau)$, როცა $\|\varphi_n - f_{n+1/2}\| = O(\tau)$, მაგალითად, როცა $\varphi_n = f_n$.

სიმეტრიული სქემებისათვის ($\sigma = 1/2$), $B = E + \tau A/2$, თუ $\|\varphi_n - -f_{n+1/2}\|_{(2)} = O(\tau^2)$, მაშინ $\|\psi_n\|_{(2)} = O(\tau^2)$, რადგან $\|(E - B + \tau A/2)u'\|_{(2)} = = 0$; ამასთან, შეიძლება ავიღოთ, მაგალითად $\varphi_n = f_{n-1/2}$.

სქემას წინგასწრებით ($\sigma = 1$) გააჩნია აპროქსიმაციის პირველი რიგი, რადგან

$$\|(E - B + \tau A/2)u'\|_{(2)} = \tau \|Au'\|_{(2)}/2 = O(\tau).$$

4. მდგრადობა და კრებადობა. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, (6) სქემა მდგრადია (საწყისი მონაცემებისა და მარჯვენა მხარის მიმართ), თუ მისი ამოხსნა უწყვეტადაა დამოკიდებული ამოცანაში შემავალ მონაცემებზე (y_0-ზე და φ_n-ზე), ამასთან ეს დამოკიდებულება უწყვეტია τ-სა და N-ის ანუ h-ის მიმართ. ამოცანების ამოხსნის შესაფასებლად გამოვიყენოთ $\|u\|_{(1)}$ ნორმა, ხოლო

მარჯვენა მხარის შესაფასებლად — $\|v\|_{(2)}$ ნორმა. ვისარგებლოთ მდგრადობის უფრო მკაცრი განმარტებით.

(6) სქემა მდგრადი იქნება, თუ ნებისმიერი y_0, φ_n-სთვის არსებობს ისეთი $M_1 > 0$ და $M_2 > 0$ მუდმივები, დამოუკიდებელი τ, N, y_0, φ_n-ზე, რომ (6) ამოცანის ამოხსნისათვის სრულდება უტოლობა

$$\|y_n\|_{(1)} \le M_1\|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0\le k<n}\|\varphi_k\|_{(2)} \tag{16}$$

თუ (6) სქემა მდგრადია და გააჩნია აპროქსიმაცია $\|\psi_n\|_{(2)} \to 0$, როცა $\tau \to 0$, მაშინ ის კრებადია:

$$\|y_n - u_n\|_{(1)} \to 0 \quad \text{როცა } \tau \to 0, \quad n = 1,2,\ldots \tag{17}$$

(სქემის აპროქსიმაციიდან და მდგრადობიდან გამომდინარეობს კრებადობა). მართლაც, თუ (6) სქემა მდგრადია, მაშინ (11) ამოცანის $z_n = y_n - u_n$ ამოხსნისათვის, (16)-ის თანახმად, სრულდება შეფასება

$$\|z_n\|_{(1)} \le M_2 \max_{0\le k<n}\|\psi_k\|_{(2)}\,. \tag{18}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\|z_n\|_{(1)} \to 0$, თუ $\|\psi_n\|_{(2)} \to 0$, როცა $\tau \to 0$.

კრებადობისა და სიზუსტის რიგის შესწავლა დადის (6) სქემისათვის აპროქსიმაციის ცდომილებისა და მდგრადობის შესწავლაზე.

§4. ორშრიანი სქემის მდგრადობა

1. საწყისი მონაცემების მიმართ მდგრადობა. განვიხილოთ ორშრიანი სქემა კანონიკური ფორმით

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

მოცემულია საწყისი მნიშვნელობა $y_0 \in H$, სადაც $A, B : H \to H$ $(H = H^N)$. (1) ამოცანის ამოხსნა შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი შემდეგი ამოცანის

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0,\quad n=0,1,\ldots,\quad y_0=u_0, \tag{2}$$

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=\varphi_n,\quad n=0,1,\ldots,\quad y_0=0, \tag{3}$$

($y^{(1)}$ – (2) ამოცანის ამოხსნაა, $y^{(2)}$ – (3)-ისა) ამოხსნის ჯამის სახით – $y=y^{(1)}+y^{(2)}$.

(1) სქემა მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ, თუ (2) ამოცანის ამოხსნისათვის ჭეშმარიტია შეფასება

$$\|y_n\|_{(1)}\le M_1\|y_0\|_{(1)}. \tag{4}$$

(1) სქემა მდგრადია მარჯვენა მხარის მიმართ, თუ (3) ამოცანის ამოხსნისათვის ძალაშია შეფასება

$$\|y_n\|_{(1)}\le M_2\max_{0\le k<n}\|\varphi_k\|_{(2)}, \tag{5}$$

აქ M_1, M_2 დამოკიდებული არ არის N, τ, n-ზე.

ჩვენ ვისარგებლებთ საწყისი მონაცემების მიმართ მდგრადობის უფრო მარტივი პირობით:

$$\|y_n\|_{(1)}\le\|y_{n-1}\|_{(1)},\ldots,\|y_1\|_{(1)}\le\|y_0\|_{(1)}\quad(M_1=1), \tag{6}$$

აგრეთვე ρ – მდგრადობის პირობით:

$$\|y_n\|_{(1)}\le\rho\|y_{n-1}\|_{(1)}\le\cdots\le\rho^n\|y_0\|_{(1)},\quad\rho>0. \tag{7}$$

ცხადია, სქემა მდგრადია (4) განმარტების აზრით, თუ $\rho=e^{c_0\tau}$, სადაც $c_0=\mathrm{const}$ არაა დამოკიდებული n, τ, N-ზე. ამ შემთხვევაში $\rho^n=e^{c_0t_n}\le e^{c_0T}=M_1$, როცა $0\le t_n\le T$, $c_0>0$, ან $\rho^n\le 1$, როცა $c_0\le 0$.

H სივრცეში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი $(\ ,\ )$ და ნორმა $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. ვთქვათ, $D=D^*>0$ – თვითშეუღლებული დადებითი ოპერატორია. ნორმად ავიღოთ $\|y\|_{(1)}$ ენერგეტიკული ნორმა

$$\|y\|_{(1)}=\|y\|_D=\sqrt{(Dy,y)}. \tag{8}$$

კერძოდ, $D=A$, $D=E$ ან $D=B$ (როცა $B=B^*>0$) (2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$y_{n+1} = Sy_n, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \tag{9}$$

სადაც S – შრიდან შრეზე გადასვლის ოპერატორია.

(2) სქემა მდგრადია H_D-ში, თუ ჭეშმარიტია შეფასება

$$\|y_{n+1}\|_D \le \|y_n\|_D. \tag{10}$$

$\|y_{n-1}\|_D \le \|Sy_n\|_D \le \|S\|_D\|y_n\|_D$ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ (10) უტოლობა ექვივალენტურია პირობის

$$\|S\|_D \le 1. \tag{11}$$

ეს პირობა, თავის მხრივ, ექვივალენტურია პირობის

$$J_D = \|y\|_D^2 - \|Sy\|_D^2 = (Dy,y) - (DSy,Sy) \ge 0, \quad \text{ყველა } y\text{-სთვის } H\text{-დან}. \tag{12}$$

ამგვარად, (10), (11) და (12) ერთმანეთის ექვივალენტურია, ე. ი. ნებისმიერი მათგანის შესრულება უზრუნველყოფს დანარჩენი ორის შესრულებას.

2. კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. ძირითადი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $A = A^*$ – თვითშეუღლებული დადებითი ოპერატორია და არსებობს B^{-1} ოპერატორი, მაშინ H_A-ში (2) სქემის მდგრადობისათვის:

$$\|y_{n+1}\|_A \le \|y_n\|_A \tag{13}$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$(By,y) - \frac{\tau}{2}(Ay,y) \ge 0 \text{ ყველა } y\text{-სთვის } H\text{-დან ანუ } B \ge \frac{\tau}{2}A. \tag{14}$$

დამტკიცება. საკმარისია დავრწმუნდეთ, (14) და $J_A \ge 0$ უტოლობების ექვივალენტურობაში, სადაც

$$J_A = (Ay,y) - (ASy,Sy) = (Ay,y) - (Ay - \tau AB^{-1}Ay, y - \tau B^{-1}Ay) =$$

$$= 2\tau(AB^{-1}Ay,y) - \tau^2(AB^{-1}Ay, B^{-1}Ay).$$

აღვნიშნოთ $B^{-1}Ay = x$, $Ay = Bx$ მივიღებთ

$$J_A = 2\tau\left((Bx, x) - \frac{\tau}{2}(Ax, x)\right) \geq 0 \text{ ყველა } x\text{-სთვის } H\text{-დან.} \quad (15)$$

ე. ი. (14), (15) და, შესაბამისად, (13), (14) უტოლობები ექვივალენტურია. ეს ნიშნავს, რომ (14)-დან გამომდინერეობს (11), (12), როცა $D = A$ და (13) ((14) პირობა საკმარისია მდგრადობისათვის). თუკი სქემა მდგრადია, ე. ი. (13) სრულდება ან $\|S\|_A \leq 1$, მაშინ $J_A \geq 0$ და, შესაბამისად $B \geq \tau A/2$, ((14) პირობის აუცილებლობა).

შენიშვნა. (14) პირობა შეიძლება აეხსნათ შემდეგი სხვაობიანი სქემის მაგალითზე

$$b\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + ay_n = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad a > 0, \quad b > 0$$

a, b რიცხვითი კოეფიციენტებით. ეს სქემა შეესაბამება კოშის ამოცანას

$$bu'(t) + au(t) = 0, \; t > 0, \; u(0) = u_0.$$

$y_{n+1} = (1 - \tau a/b)y_n$ ფორმულიდან ჩანს, რომ სქემა მდგრადია, ე. ი. $|y_{n+1}| \leq |y_n| \leq \cdots \leq |y_0|$, თუ $|1 - \tau a/b| \leq 1$, $-1 \leq 1 - \tau a/b \leq 1$, ე. ი. $b \geq \tau a/2$. $B \geq \tau A/2$ ოპერატორულ უტოლობასთან ანალოგია ცხადია.

3. ძირითადი თეორემის გამოყენების მაგალითები. *მაგალითი 1.* ცხადი სქემა: $B = E$, $A = A^* > 0$. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან $(Ax, x) \leq \|Ax\| \, \|x\| \leq \|A\| \, \|x\|^2$ გამომდინარეობს, რომ $A \leq \|A\| \, E$ ანუ

$$E \geq \frac{1}{\|A\|} A. \quad (16)$$

ახლა განვიხილოთ სხვაობა $B-\frac{1}{2}\tau A = E-\frac{1}{2}\tau A \geq \frac{1}{\|A\|}A-\frac{1}{2}\tau A =$ $=\left(\frac{1}{\|A\|}A-\frac{\tau}{2}\right)A$. რადგან $A>0$, ამიტომ $B-\frac{1}{2}\tau A \geq 0$ პირობა შესრულდება, როცა $\frac{1}{\|A\|}-\frac{\tau}{2}\geq 0$, ე. ი. როცა

$$\tau \leq 2/\|A\|. \tag{17}$$

ეს არის ცხადი სქემის მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა H_A-ში ($\|y_n\|_A \leq \|y_0\|_A$).

მაგალითი 2. სქემა (9) წონებით §3-დან. $A=A^*>0$. მისთვის $B=E+\sigma\tau A$ და $B-\frac{1}{2}\tau A = E+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau A \geq \left(\frac{1}{\|A\|}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau\right)A \geq 0$ თუ

$$1+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau\|A\|\geq 0. \tag{18}$$

აქედან ჩანს, რომ სქემა წონებით მდგრადია H_A-ში ყველა τ-სთვის, $\tau>0$ (უპირობოდ მდგრადია), თუ $\sigma \geq 1/2$ და პირობით კრებადია, როცა $\tau \leq 1/[(1/2-\sigma)\|A\|]$, თუ $\sigma<1/2$.

მაგალითი 3. H-ში მდგრადობა (როცა $D=E$) §3-ის (9) სქემისათვის წონებით.

$$(E+\sigma\tau A)\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad B=E+\tau\sigma A. \tag{19}$$

(19) განტოლების ორივე მხარის მიმართ A^{-1} ოპერატორის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\widetilde{B}\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\widetilde{A}y_n=0, \quad n=0,1,2,\ldots,$$
$$\widetilde{B}=A^{-1}+\sigma\tau E, \quad \widetilde{A}=E. \tag{20}$$

თეორემა 1-ის თანახმად ეს სქემა მდგრადია $H_{\widetilde{A}} = H$-ში, ($\widetilde{A}^* = \widetilde{A} = E > 0$), როცა $\widetilde{B} - \frac{1}{2}\tau\widetilde{A} = A^{-1} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau E \geq \left(\frac{1}{\|A\|} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\right)E \geq 0$

ე. ი. (18)-ის შესრულების დროს (ამასთან ჩვენ გავითვალისწინეთ $A^{-1} \geq \frac{1}{\|A\|}E$ შეფასება, რომელიც (16)-დან გამომდინარეობს). ამგვარად, (18)-დან გამოდის, რომ (19)-სთვის ჭეშმარიტია (16) შეფასება, როცა $D = \widetilde{A}$, ე. ი.

$$\|y_n\| \leq \|y_0\|. \tag{21}$$

(19) სქემა შეიძლება ჩავწეროთ სახით

$$y_{n+1} = Sy_n,\ S = ((E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma)\tau A), \quad A = A^* > 0. \tag{22}$$

ამიტომ მისთვის (18) პირობის დროს სამართლიანია (21) შეფასება რაც ნიშნავს

$$\|(E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma)\tau A)\| \leq 1, \quad \text{თუ} \quad 1 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\|A\| \geq 0. \tag{23}$$

ეს შეფასება შემდეგში გამოგვადგება.

4. მდგრადობა H_B-ში.

თეორემა 2. თუ $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$, მაშინ H_B-ში (2) სქემის მდგრადობისათვის:

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|_B \tag{24}$$

აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს (14) პირობა.

დამტკიცება: (2) სქემა ჩავწეროთ (9) სახით და ვაჩვენოთ, რომ პირობა

$$\|S\|_B \leq 1 \tag{25}$$

ექვივალენტურია (14) უტოლობისა, ე. ი. (14)-დან გამოდის (25) და პირიქით, (25)-დან გამომდინარეობს (14).

ვთქვათ, y – ნებისმიერი ვექტორია H-დან; წარმოვიდგინოთ იგი სახით

$$y=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\xi_k\,,$$

სადაც $\{\xi_k\}$ – საკუთრივი ვექტორებია შემდეგი ამოცანისა

$$A\xi_k=\lambda_k B\xi_k\,,\quad \lambda_k>0,$$

$$(B\xi_k,\xi_m)=\delta_{km}=\begin{cases}1, & k=m, \quad k,m=1,2,\ldots,N,\\ 0, & k\neq m,\end{cases} \tag{26}$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$S\xi_k=\xi_k-\tau B^{-1}A\xi_k=(1-\tau\lambda_k)\xi_k, \qquad BS\xi_k=(1-\tau\lambda_k)B\xi_k$$

და ვიპოვოთ

$$(By,y)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2,\quad (Ay,y)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\alpha_k^2,$$

$$(BSy,Sy)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2(1-\tau\lambda_k)^2\leq\|S\|_B^2\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2=\|S\|_B^2(By,y), \tag{27}$$

სადაც

$$\|S\|_B^2=\max_{1\leq k\leq N}(1-\tau\lambda_k)^2\,. \tag{28}$$

(25) უტოლობა ექვივალენტურია პირობისა:

$$\tau\lambda_k\leq 2, \qquad k=1,2,\ldots,N, \tag{29}$$

რომელიც, თავის მხრივ, (14) უტოლობის ექვივალენტურია, რადგან

$$(By,y)-\frac{\tau}{2}(Ay,y)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\left(1-\frac{\tau\lambda_k}{2}\right).$$

ამით (24)-ის და (14)-ის ექვივალენტურობა დამტკიცებულია.

5. ρ მდგრადობა.

თეორემა 3. თუ $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$, მაშინ ნებისმიერი ρ-სთვის, $\rho > 0$, (2) სქემის ρ მდგრადობისათვის:

$$\|y_{n+1}\|_D \le \rho\|y_n\|_D, \quad D = A,B, \tag{30}$$

აუცილებელი და საკმარისი პირობაა ოპერატორული უტოლობა

$$\frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B. \tag{31}$$

დამტკიცება. (31) უტოლობები ექვივალენტურია უტოლობებისა (იხ. თავი I, §4, პ. 4):

$$\frac{1-\rho}{\tau} \le \lambda_k \le \frac{1+\rho}{\tau}, \quad k = 1,2,\ldots,N \tag{32}$$

სადაც λ_k – (26) ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია.

დავუშვათ, რომ $D = B$ და სამართლიანია (31) ან (32). (32)-დან გამოდის $-\rho \le \tau\lambda_k - 1 \le \rho$, $|1 - \tau\lambda_k| \le \rho$ და (27)-ის ძალით $\|S\|_B \le \rho$ (რადგან $\|S\|_B^2$ – უმცირესი მუდმივია, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა $(BSy, Sy) \le M(By, y)$), ე. ი. სრულდება (30) შეფასება (საკმარისობა). თუ ძალაშია (30) შეფასება, მაშინ $|1 - \tau\lambda_k| \le \rho$ და, შესაბამისად, შესრულებულია (32) და (31) (აუცილებლობა).

ანალოგიურად მტკიცდება თეორემა, როცა $D = A$, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$(ASy,Sy) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\lambda_k(1-\tau\lambda_k)^2 \le \max_{1\le k\le N}(1-\tau\lambda_k)^2(Ay,y).$$

(30)-დან გამომდინარეობს

$$\|y_n\|_D \le \rho^n\|y_0\|_D.$$

წამოიჭრება კითხვა, რა პირობებში აქვს ადგილი (30) აპრიორულ შეფასებას, თუ $\rho<1$? ამაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. ვთქვათ, შესრულებულია პირობები

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad \gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \tag{33}$$

მაშინ, (2) ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|y_{n+1}\|_D \le \rho\, \|y_n\|_D, \quad \rho = 1 - \tau\gamma_1, \quad D = A, B, \tag{34}$$

თუ

$$\tau \le \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{35}$$

დასამტკიცებლად უნდა გამოვთვალოთ ნორმა $\|S\|_B = \|S\|_A = \max\limits_{1\le k\le N}|1-\tau\lambda_k|$ იმ პირობით, რომ $\gamma_1 \le \lambda_k \le \gamma_2$, $0 < \gamma_1 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \le \cdots \le \lambda_N = \gamma_2$. განვიხილოთ სხვაობა

$$\varphi_k = (1-\tau\lambda_1)^2 - (1-\tau\lambda_k)^2 = 2\tau(\lambda_k - \lambda_1)\left(1 - \frac{\tau}{2}(\lambda_k + \lambda_1)\right).$$

აქედან ჩანს, რომ $\varphi_k \ge 0$, როცა

$$1 - \frac{\tau}{2}(\lambda_k + \lambda_1) \ge 1 - \frac{\tau}{2}(\gamma_2 + \gamma_1) \ge 1 - \frac{\tau_0}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = 0,$$

ე. ი. $\max\limits_{1\le k\le N}|1-\tau\lambda_k| = 1 - \tau\gamma_1$, თუ $\tau \le \tau_0$. თეორემა დამტკიცებულია.

6. მარჯვენა მხარის მიმართ მდგრადობა. ენერგეტიკული უტოლობების მეთოდი. განვიხილოთ (3) ამოცანა და გადავწეროთ იგი სახით

$$y_{n+1} = Sy_n + \tau B^{-1}\varphi_n, \quad n = 0,1,\ldots, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad y_0 = 0. \tag{36}$$

ვისარგებლოთ სამკუთხედის უტოლობით

$$\|y_{n+1}\|_D \le \|Sy_n\|_D + \tau\|B^{-1}\varphi_n\|_D \le \|S\|_D\, \|y_n\|_D + \tau\|B^{-1}\varphi_n\|_D. \tag{37}$$

თუ შესრულებულია თეორემა 2-ის პირობები, მაშინ $B = B^* > 0$, $D = B$ და $\|S\|_D = \|S\|_B \le 1$, როცა $B \ge \frac{\tau}{2}A$, $\|B^{-1}\varphi_n\|_B^2 =$

$= (B(B^{-1}\varphi_n), B^{-1}\varphi_n) = (B^{-1}\varphi_n, \varphi_n) = \|\varphi_n\|^2_{B^{-1}}$ და (37)-დან გამომდინარეობს

$$\|y_{n+1}\|_B \le \|y_n\|_B + \tau\|\varphi_n\|_{B^{-1}}.$$

თუ ავჯამავეთ n-ის მიხედვით, $n = 0,1,2,\ldots$ და გავითვალისწინებთ, რომ $y_0 = 0$, მივიღებთ

$$\|y_n\|_B \le \sum_{k=0}^{n-1} \tau\|\varphi_k\|_{B^{-1}}. \tag{38}$$

ეს აპრიორული შეფასება გამოხატავს (1) სქემის მდგრადობას მარჯვენა მხარის მიმართ იგივე (14) პირობის დროს.

შეიძლება სხვა შეფასებების მიღებაც. ამისათვის ვისარგებლოთ ენერგეტიკული უტოლობების საკმაოდ ზოგადი მეთოდით. ჩავსვათ $y_n = \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) - \frac{\tau}{2}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$ (1)-ში:

$$\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2}A(y_{n+1} + y_n) = \varphi_n.$$

გავამრავლოთ ეს განტოლება სკალარულად $2(y_{n+1} - y_n)$-ზე და გავითვალისწინოთ, რომ

$$(A(y_{n+1} + y_n), y_{n+1} - y_n) = (Ay_{n+1}, y_{n+1}) + (Ay_n, y_{n+1}) -$$
$$- (Ay_{n+1}, y_n) - (Ay_n, y_n) = (Ay_{n+1}, y_{n+1}) - (Ay_n, y_n),$$

რადგან $(Ay_n, y_{n+1}) = (Ay_{n+1}, y_n)$ A-ს თვითშეუღლებლობის გამო. შედეგად მივიღებთ „ენერგეტიკულ იგივეობას"

$$2\tau\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right) + (Ay_{n+1}, y_{n+1}) = \tag{39}$$
$$= (Ay_n, y_n) + 2(\varphi_n, y_{n+1} - y_n).$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $\varphi_n = 0$ და $B \geq \frac{\tau}{2}A$, სამართლიანია (B) შეფასება.

გარდავქმნათ $2(\varphi_n, y_{n+1} - y_n) = 2\tau\left(\varphi_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right)$. ამისთვის ვისარგებლოთ უტოლობით:

$$|ab| = \left(\sqrt{2\varepsilon a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}b\right) \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2,$$

სადაც a, b, $\varepsilon > 0$ — ნებისმიერი რიცხვებია. ჩვენ შემთხვევაში

$$2(\varphi_n, y_{n+1} - y_n) \leq 2\tau\|\varphi_n\|\left\|\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right\| \leq$$

$$\leq 2\tau\varepsilon\left\|\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_n\|^2.$$

ამ უტოლობის (39) იგივეობაში ჩასმით მივიღებთ

$$2\tau\left(\left(B - \varepsilon E - \frac{\tau}{2}A\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right) + \|y_{n+1}\|_A^2 \leq$$
$$\leq \|y_n\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_n\|^2. \tag{40}$$

თუ სრულდება უტოლობა

$$B \geq \varepsilon E + \frac{\tau}{2}A, \quad \varepsilon > 0, \tag{41}$$

მაშინ (40)-დან გამომდინარეობს (n-ის k-თი შეცვლით)

$$\|y_{k+1}\|_A^2 \leq \|y_k\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_k\|^2.$$

თუ ავჯამავთ k-ს მიხედვით, k= 0,1,2,...,n−1, მივიღებთ შეფასებას

$$\|y_n\|_A^2 \le \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\|\varphi_k\|^2 , \tag{42}$$

რომელიც გამოხატავს (1) სქემის მდგრადობას მარჯვენა მხარისა და საწყისი მონაცემების მიმართ H_A-ში.

მაგალითი. სქემა წონებით (1): $B = E + \sigma\tau A$. მისთვის (41) პირობა ნიშნავს, რომ

$$(1-\varepsilon)E + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau A \ge 0 .$$

კერძოდ, (42) შეფასება ძალაშია, როცა $\varepsilon = 1$ და $\sigma \ge 1/2$.

7. ასიმპტოტური მდგრადობა. კოშის ამოცანისათვის

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 .$$

§3 პ.1-ში მიღებული იყო შეფასება

$$\|u(t)\| \le e^{-\lambda_1 t}\|u(0)\| ,$$

სადაც $\lambda_1 = \min\limits_k \lambda_k(A)$.

ვიპოვოთ პირობები, რომელთა დროსაც ანალოგიურ შეფასებას ადგილი აქვს (2) სქემისათვის. ვისარგებლოთ თეორემა 4-ით. ვთქვათ, სრულდება (33) პირობები, მაშინ (34), (35)-ის ძალით

$$\|y_n\|_A \le \rho^n\|y_0\|_A , \quad \rho = 1 - \tau\gamma_1, \quad \tau \le \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} . \tag{43}$$

აქედან გამოდის შეფასება, რომელიც ასიმპტოტური მდგრადობის თვისებას გამოხატავს:

$$\|y_n\|_A \le e^{-\gamma_1 t_n}\|y_0\|_A , \tag{44}$$

(ამასთან, გათვალისწინებულია, რომ $\rho = 1 - \tau\gamma_1 < e^{-\tau\gamma_1}$).

განვიხილოთ სქემა წონებით და დავუშვათ, რომ

$$\delta E \le A \le \Delta E, \quad \delta = \lambda_1 > 0, \quad \Delta = \lambda_N > 0. \tag{45}$$

გამოვთვალოთ γ_1 და γ_2. (45)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$B = E + \sigma\tau A \ge \left(\frac{1}{\Delta} + \sigma\tau\right) A = \frac{1}{\gamma_2} A,$$

$$B \le \left(\frac{1}{\delta} + \sigma\tau\right) A = \frac{1}{\gamma_1} A, \tag{46}$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{1 + \sigma\tau\delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta}{1 + \sigma\tau\Delta}.$$

ცხადი სქემისათვის $\gamma_1 = \delta$, $\gamma_2 = \Delta$ ასიმპტოტური მდგრადობის პირობა

$$\tau \le 2/(\delta + \Delta) \tag{47}$$

ახლოა ჩვეულებრივი მდგრადობის პირობასთან ($\rho = 1$-ით): როცა $\sigma \ne 0$, $\tau \le 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ პირობას მივყავართ

$$2 + 2(\sigma - 1/2)\tau(\delta + \Delta) - 2\sigma(1 - \sigma)\tau^2\delta\Delta \ge 0$$

უტოლობასთან. როცა $\sigma = 1$, ის ნებისმიერი τ-სთვის სრულდება, ე. ი. წმინდა არაცხადი სქემა ($\sigma = 1$-ით) უპირობოდ ასიმპტოტურად მდგრადია. სიმეტრიული სქემა

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2} A(y_{n+1} + y_n) = 0, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \tag{48}$$

ასიმპტოტურად მდგრადია

$$\tau \le \tau^*, \quad \tau^* = 2/\sqrt{\delta\Delta} \tag{49}$$

პირობის დროს და უპირობოდ კრებადია ჩვეულებრივი აზრით. ამ შემთხვევაში

$$\rho = e^{-\lambda_1\tau + O(\tau^3)} < e^{-\lambda_1\tau}$$

და ძალაშია შეფასება

$$\|y_n\| \le e^{-\lambda_1 t_n}\|y_0\|, \quad \text{როცა } \tau \le \tau^*, \quad \sigma = 1/2. \tag{50}$$

რა ხდება, თუ პირობა $\tau \le \tau_0$ არ სრულდება, ე. ი. $\tau > \tau_0$? მაშინ $\max\limits_k |1 - \tau\lambda_k|$ მიიღწევა არა $k = 1$-სთვის, არამედ, როცა $k = N$ და $\rho = \tau\gamma_2 - 1$. სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნის ასიმპტოტიკას (დიდი t_n-ებისთვის) არავითარი საერთო არა აქვს თავდაპირველი ამოცანის ასიმპტოტურ ამოხსნასთან. ამრიგად, ასიმპტოტური მდგრადობის დარღვევას დიდი t-ების დროს მივყავართ სქემის სიზუსტის დაკარგვამდე.

თავი VI

სხვაობიანი მეთოდები ელიფსური განტოლებებისათვის

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სხვაობიან სქემებსა და სხვაობიან განტოლებათა ამოხსნის მეთოდებს პუასონის განტოლებისა და ცვალებადკოეფიციენტებიანი ელიფსური განტოლებებისათვის.

§1. სხვაობიანი სქემები პუასონის განტოლებისათვის

1. ამოცანის დასმა. განვიხილოთ პუასონის განტოლება

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,x_2)\,. \tag{1}$$

ვეძებოთ მისი ამოხსნა, რომელიც უწყვეტია მართკუთხედზე

$$\overline{G}=G\bigcup\Gamma=\{x=(x_1,x_2):\quad 0\le x_\alpha\le\ell_\alpha,\quad \alpha=1,2\}$$

და Γ საზღვარზე იღებს მოცემულ მნიშვნელობებს:

$$u|_\Gamma=\mu(x). \tag{2}$$

(1) განტოლებითა და (2) პირობით განსაზღვრულ ამოცანას დირიხლეს ამოცანა (პირველი სასაზღვრო ამოცანა) ეწოდება.

2. სხვაობიანი სქემა „ჯვარი“. (1), (2) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის $\overline{G}$-ში შემოვიღოთ ბადე $\overline{\omega}_h=\omega_h\bigcup\gamma_h=$ $=\{x_i=(i_1h_1,i_2h_2),\quad i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha,\quad h_\alpha=\ell_\alpha/N_\alpha,\quad \alpha=1,2\}$ და აღვნიშნოთ $y_i=y_{i_1i_2}=y(i_1,i_2)=y(x_{i_1},x_{i_2})$ სიმბოლოთი $\overline{\omega}_h$-ზე

მოცემული ბადური ფუნქცია; h_1 და h_2 – ბადის ბიჯებია x_1 და x_2 კოორდინატების მიხედვით.

დავწეროთ სხვაობიანი სქემა (1) (2) ამოცანისათვის, რისთვისაც მოვახდინოთ ყოველი $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$ წარმოებულის აპროქსიმაცია სამწერტილიან შაბლონზე, ამასთან დავუშვათ, რომ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sim \frac{u(x_1 - h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h_1, x_2)}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \sim \frac{u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h_2)}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2},$$

ნიშანი ~ ნიშნავს აპროქსიმაციას. ამ გამოსახულებების საშუალებით (1) შევცვალოთ სხვაობიანი განტოლებით

$$\frac{y(i_1 - 1, i_2) - 2y(i_1, i_2) + y(i_1 + 1, i_2)}{h_1^2} + \\ + \frac{y(i_1, i_2 - 1) - 2y(i_1, i_2) + y(i_1, i_2 + 1)}{h_2^2} = -f(i_1, i_2), \tag{3}$$

ან, შემოკლებულ ჩანაწერში,

$$y_{\bar{x}_1 x_1}(i_1, i_2) + y_{\bar{x}_2 x_2}(i_1, i_2) = -f(i_1, i_2).$$

უინდექსო აღნიშვნებში გვექნება

$$y_{\bar{x}_1 x_1}(x) + y_{\bar{x}_2 x_2}(x) = -f(x), \quad x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h(G). \tag{4}$$

ამ განტოლებასთან ერთად უნდა განვიხილოთ სასაზღვრო პირობები

$$y = \mu(x), \quad x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \gamma_h. \tag{5}$$

ბადის γ_h საზღვარი შედგება ყველა $(0,i_2)$, (N_1, i_2), $(i_1,0)$, (i_1,N_2) სახის კვანძებისაგან, მაგრამ მართკუთხედის წვეროები (0,0), $(0,N_2)$, $(N_1,0)$, (N_1,N_2) სქემაში რომლებიც არ გამოიყენება. (3) სხვაობიანი განტოლება ჩაწერილია ხუთწერტილიან შაბლონზე

$$(i_1-1, i_2), (i_1+1, i_2), (i_1, i_2), (i_1, i_2-1), (i_1, i_2+1).$$

(4) სქემას ხშირად უწოდებენ სქემას „ჯვარი“. თუ $h_1 = h_2 = h$, ე. ი. ბადეები x_1 და x_2-ის მიხედვით ემთხვევიან, ω_h ბადეს კვადრატულს უწოდებენ. ასეთ ბადეზე (4) სხვაობიანი სქემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$y(i_1,i_2) =$$

$$= \frac{y(i_1-1,i_2)+y(i_1+1,i_2)+y(i_1,i_2-1)+y(i_1,i_2+1)+h^2 f(i_1,i_2)}{4}.$$

ერთგვაროვანი განტოლებისათვის $(f=0)$ მივიღებთ

$$y(i_1,i_2) = \frac{1}{4}[y(i_1-1,i_2)+y(i_1+1,i_2)+y(i_1,i_2-1)+y(i_1,i_2+1)],$$

ე. ი. მნიშვნელობა შაბლონის ცენტრში დანარჩენ კვანძებში მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულით განისაზღვრება.

3. **აპროქსიმაციის ცდომილება.** ვთქვათ, $u = u(x)$ – (1), (2) დირიხლეს ამოცანის ამოხსნაა, ხოლო $y = y(i_1, i_2)$ – (4), (5) სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა. განვიხილოთ ცდომილება

$$z(x) = y(x) - u(x), \; x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h.$$

თუ ჩავსვამთ (4), (5)-ში $y = z + u$, მივიღებთ $z = z(x)$ ცდომილებისათვის არაერთგვაროვან განტოლებას

$$\Lambda z = z_{\bar{x}_1 x_1} + z_{\bar{x}_2 x_2} = -\psi(x), \quad x \in \omega_h(G), \tag{6}$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით

$$z = 0, \text{ როცა } x \in \gamma_h. \tag{7}$$

აქ

$$\psi(x) = \Lambda u + f(x) = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + f(x) \tag{8}$$

არის შეუსაბამობა ან (4) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება (1) განტოლების $u = u(x)$ ამოხსნაზე.

ვაჩვენოთ, რომ

$$|\psi| \leq M_4 \frac{h_1^2 + h_2^2}{24}, \tag{9}$$

სადაც

$$M_4 = \max_{x \in G}\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right|\right).$$

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ ფორმულებს

$$u(x_1 \pm h_1, x_2) = u(x_1, x_2) \pm h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \pm \frac{h_1^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{h_1^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\overline{x}_1, x_2), \quad \overline{x}_1 = x_1 + \theta_1^{(\pm)} h_1, \quad 0 \leq \theta_1^{(\pm)} \leq 1,$$

$$u(x_1, x_2 \pm h_2) = u(x_1, x_2) \pm h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \pm \frac{h_2^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{h_2^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \overline{x}_2), \quad \overline{x}_2 = x_2 + \theta_2^{(\pm)} h_2, \quad 0 \leq \theta_2^{(\pm)} \leq 1,$$

ვიპოვით

$$\psi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x)\right) + \frac{h_1^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\overline{x}_1, x_2) + \frac{h_2^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \overline{x}_2).$$

აქედან და (1)-დან გამომდინარეობს (9).

ამგვარად, (4) სქემას გააჩნია აპროქსიმაციის მეორე რიგი.

4. სქემა სიზუსტის გადიდებული რიგით. გამოვიყენებთ რა ცხრაწერტილიან შაბლონს (x_1,x_2), $(x_1\pm h_1,x_2)$, $(x_1,x_2\pm h_2)$, $(x_1\pm h_1, x_2\pm h_2)$, შეიძლება ავაგოთ სქემა, თუ დავუშვებთ, რომ (1)-(2) ამოცანის ამოხსნა $u = u(x) \in C^{(6)}(\overline{G})$. ამ სქემას აქვს სახე

$$\Lambda' y = \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2\right) y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{10}$$

$$\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad \Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2},$$

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 f.$$

უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ შეუსაბამობა ტოლია

$$\psi = \Lambda' u + \varphi = O(|h|^4). \tag{11}$$

$z = y - u$ ცდომილებისათვის, სადაც y – (10) ამოცანის ამოხსნაა, ვღებულობთ

$$\Lambda' z = -\psi(x), \quad x \in \omega_h; \quad z = 0, \quad x \in \gamma_h. \tag{12}$$

5. სხვაობიანი ოპერატორის თვისებები. ვთქვათ $\overset{\circ}{y}(x)$ ბადური ფუნქციაა, მოცემული $\overline{\omega}_h = \omega_h(\overline{G})$ ბადეზე და ნულის ტოლია ბადის γ_h საზღვარზე, და ვთქვათ, $\overset{\circ}{\Omega}$ – $\overset{\circ}{y}$ ბადური ფუნქციების სიმრავლეა.

განვსაზღვროთ A ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$Ay = -\Lambda \overset{\circ}{y} = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2}, \text{ ყველა } y\text{-სთვის } \Omega\text{-დან}, \tag{13}$$

სადაც Ω – ისეთი ბადური ფუნქციების სივრცეა, რომლებიც ω_h-ის შიგა კვანძებშია მოცემული და ემთხვევა იქ $\overset{\circ}{y}$-ს, $y(x) = \overset{\circ}{y}(x)$, როცა $x \in \omega_h$. აღვნიშნოთ

$$\varphi = f + \frac{\mu(\ell_1, x_2)}{h_1^2}, \text{ როცა } x_1 = \ell_1 - h_1, \quad 0 < x_2 < \ell_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(0, x_2)}{h_1^2}, \quad x_1 = h_1, \quad 0 < x_2 < \ell_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(x_1, \ell_2)}{h_2^2}, \quad 0 < x_1 < \ell_1, \quad x_2 = \ell_2 - h_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(x_1, 0)}{h_2^2}, \quad 0 < x_1 < \ell_1, \quad x_2 = h_2,$$

$\varphi(x) = f(x)$ დანარჩენ $x \in \omega_h$ წერტილებში. მაშინ (4), (5) სხვაობიან სქემას გადავწერთ ოპერატორული სახით:

$$A\varphi = \varphi, \qquad y, \varphi \in H, \tag{14}$$

სადაც $H = \Omega$.

H-ში შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი

$$(y, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \overset{o}{y}(i_1, i_2) \overset{o}{v}(i_1, i_2) h_1 h_2$$

და ვაჩვენოთ, რომ A ოპერატორი თვითშეუღლებულია. A წარმოვადგინოთ $A = A_1 + A_2$ ჯამის სახით, სადაც $A_1 y = -\overset{o}{y}_{\bar{x}_1 x_1}$, $A_2 y = -\overset{o}{y}_{\bar{x}_2 x_2}$ და ვაჩვენოთ, რომ თითოეული „ერთგანზომილებიანი" ოპერატორი – A_1 და A_2 – თვითშეუღლებულია. საკმარისია ეს ვაჩვენოთ A_1 ოპერატორისათვის. განვიხილოთ სკალარული ნამრავლი

$$(A_1 y, v) = -\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \overset{o}{y}_{\bar{x}_1 x_1}(i_1, i_2) \overset{o}{v}(i_1, i_2) h_1 \right). \tag{15}$$

ვისარგებლოთ გრინის ერთგანზომილებიანი ფორმულით (თავი I, §4):

$$\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1x_1}(i_1,i_2)\overset{\circ}{v}(i_1,i_2)h_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \overset{\circ}{y}(i_1,i_2)\overset{\circ}{v}_{\bar{x}_1x_1}(i_1,i_2)h_1.$$

ჩავსვამთ რა (15)-ში ამ გამოსახულებას, მივიღებთ

$$(A_1y,v) = -\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2\left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \overset{\circ}{y}(i_1,i_2)\overset{\circ}{v}_{\bar{x}_1x_1}(i_1,i_2)h_1\right) = (y,A_1v).$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $A_2^* = A_2$ და, მაშასადამე,

$$(Ay,v) = ((A_1 + A_2)y,v) = (A_1y,v) + (A_2v,y) =$$
$$= (y,A_1v) + (y,A_2v) = (y,Av),$$

ე. ი. $A^* = A$.

თუ გრინის პირველი სხვაობიანი ფორმულით ვისარგებლებთ

$$\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1x_1}(i_1,i_2)\overset{\circ}{y}(i_1,i_2)h_1 = -\sum_{i_1=1}^{N_1}(\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1}(i_1,i_2))^2h_1,$$

მაშინ მივიღებთ

$$(A_1y,y) = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2\sum_{i_1=1}^{N_1}(\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1}(i_1,i_2))^2h_1 > 0,$$

და, ანალოგიურად, $(A_2y, y) > 0$, ასე რომ $A > 0$, ე. ი. A თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია.

რთული არ არის A ოპერატორის δ და Δ საზღვრების პოვნა, ე. ი. იმ რიცხვებისა, რომელთათვისაც სრულდება უტოლობა $\delta E \le A \le \Delta E$, სადაც E ერთეულოვანი ოპერატორია. მართლაც, I თავის §4-ში ნაჩვენებია, რომ

$$\delta_1\sum_{i_1=1}^{N_1-1}(\overset{\circ}{y}(i_1,i_2))^2h_1 \le \sum_{i_1=1}^{N_1}(\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1}(i_1,i_2))^2h_1 \le \Delta_1\sum_{i_1=1}^{N_1-1}(\overset{\circ}{y}(i_1,i_2))^2h_1,$$

სადაც

$$\delta_1 = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1}; \quad \Delta_1 = \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1}.$$

თუ ავჯამავთ ამ უტოლობებს i_2-ის მიხედვით, $i_2 = 1,2,...,N_2 - 1$. მივიღებთ $\delta_1(y,y) \le (A_1y,y) \le \Delta_1(y,y)$.

ანალოგიურად ვიპოვით $\delta_2(y,y) \le (A_2y,y) \le \Delta_2(y,y)$, სადაც

$$\delta_2 = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}; \quad \Delta_2 = \frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\delta\|y\|^2 \le (Ay,y) \le \Delta\|y\|^2, \tag{16}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \delta_2 = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}, \\ \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1} + \frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}. \end{aligned} \tag{17}$$

კვადრატში ($\ell_1 = \ell_2 = 1$) კვადრატულ ბადეზე (h_1=h_2=h) გვაქვს

$$\delta = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}, \quad \delta + \Delta = \frac{8}{h^2}. \tag{18}$$

6. სხვაობიანი ამოცანა საკუთრივ მნიშვნელობებზე. განვიხილოთ ამოცანა: ვიპოვოთ λ პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობები (საკუთარი მნიშვნელობები), რომელთათვისაც ერთგვაროვან ამოცანას

$$y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2} + \lambda y = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y = 0, \quad x \in \gamma_h \tag{19}$$

გააჩნია არატრივიალური ამოხსნა (საკუთრივი ფუნქციები). ვისარგებლოთ ცვლადთა განცალების მეთოდით და ვეძებოთ (19) ამოცანის ამოხსნა

$$y(x_1,x_2) = v(x_1)w(x_2) \not\equiv 0 \tag{20}$$

– მხოლოდ x_1-ზე დამოკიდებული $v(x_1)$ ფუნქციისა და მხოლოდ x_2-ზე დამოკიდებული $w(x_2)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით. თუ ჩავსვამთ (20)-ს (19)-ში და გავყოფთ $y = vw$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{v_{\bar{x}_1x_1}}{v} = -\frac{w_{\bar{x}_2x_2}}{w} - \lambda, \quad (x_1, x_2) \in \omega_h. \tag{21}$$

მარცხენა მხარე დამოკიდებულია მხოლოდ x_1-ზე, ხოლო მარჯვენა მხარე – მხოლოდ x_2-ზე; (21) ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ შემდეგი პირობის დროს

$$\frac{v_{\bar{x}_1x_1}}{v} = \lambda^{(1)}, \quad -\frac{w_{\bar{x}_2x_2}}{w} - \lambda = \lambda^{(1)},$$

სადაც $\lambda^{(1)} = \text{const}$. აქედან მივიღებთ ორ ერთგანზომილებიან ამოცანას საკუთრივ მნიშვნელობებზე $0 \le i_1h_1 \le \ell_1$ და $0 \le i_2h_2 \le \ell_2$ მონაკვეთისათვის, შესაბამისად:

$$\begin{gathered} v_{\bar{x}_1x_1} + \lambda^{(1)}v = 0, \quad 0 < x_1 = i_1h_1 < \ell_1, \quad 1 \le i_1 \le N_1 - 1, \\ v = 0, \quad i_1 = 0, N_1, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} w_{\bar{x}_2x_2} + \lambda^{(2)}w = 0, \quad 0 < x_2 = i_2h_2 < \ell_2, \quad 1 \le i_2 \le N_2 - 1, \\ w = 0, \quad i_2 = 0, N_2, \end{gathered} \tag{23}$$

სადაც $\lambda^{(2)} = \lambda - \lambda^{(1)}$, ან $\lambda = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}$.

მივმართოთ I თავის §4-ის პ.8-ს და ამოვწეროთ (22), (23) ამოცანების ამოხსნა შემდეგი სახით

$$\lambda_{k_1}^{(1)} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1h_1}{2\ell_1}, \quad v_{k_1}^{(1)}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{\ell_1}}\sin\frac{\pi k_1x_1}{\ell_1}, \quad k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1,$$

$$\lambda_{k_2}^{(2)} = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2h_2}{2\ell_2}, \quad w_{k_2}^{(2)}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{\ell_2}}\sin\frac{\pi k_2x_2}{\ell_2}, \quad k_2 = 1,2,\ldots,N_2 - 1,$$

სადაც

$$x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (19) ამოცანას გააჩნია საკუთრივი მნიშვნელობები

$$\lambda_{k_1k_2} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1 h_1}{2\ell_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2 h_2}{2\ell_2}, \tag{24}$$
$$k_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1,2,$$

და შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები $y_k = v_{k_1}^{(1)}(x_1)w_{k_2}^{(2)}(x_2)$:

$$y_k = y_{k_1k_2}(x_1,x_2) = \sqrt{\frac{4}{\ell_1\ell_2}}\sin\frac{\pi k_1 x_1}{\ell_1}\sin\frac{\pi k_2 x_2}{\ell_2}, \tag{25}$$
$$x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha, \quad k_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1,2.$$

ეს საკუთრივი ფუნქციები ორთონორმირებულია:

$$(y_{k_1k_2}, y_{m_1m_2}) = \delta_{k_1m_1}\delta_{k_2m_2}.$$

(17) და (25)-დან ჩანს, რომ

$$\delta = \min\lambda_{k_1k_2} = \lambda_{1,1}, \quad \Delta = \max\lambda_{k_1k_2} = \lambda_{N_1-1,N_2-1},$$

სადაც δ და Δ განისაზღვრება (17) ფორმულების მიხედვით. δ და Δ-სთვის სამართლიანია შეფასებები

$$\delta \geq 8\left(\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2}\right), \quad \Delta < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}. \tag{26}$$

7. სქემის „ჯვარი" კრებადობის სიჩქარის შეფასება. მაქსიმუმის პრინციპი. სქემის $z = y - u$ ცდომილებისათვის პუნქტ 3-ში მიღებულია (6), (7) ამოცანა, სადაც

$$\psi(x) = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2. \tag{27}$$

იმ დაშვებით, რომ საკმარისად გლუვია (1), (2) ამოცანის ამოხსნა $u = u(x) \in C^{(4)}(\overline{G})$. დავამტკიცოთ, რომ (4) სქემა იკრიბება $O(|h|^2)$

სიზუსტით (აქვს სიზუსტის მეორე რიგი) ბადურ C ნორმაში, ე. ი. $\|z\|_C = O(|h|^2)$, სადაც $\|z\|_C = \max\limits_{x\in\omega_h}|z(x)|$. ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება (6), (7) ამოცანის ამოხსნის შეფასებები ψ მარჯვენა მხარის მიხედვით. დირიხლეს (4) სხვაობიანი ამოცანა წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის კერძო შემთხვევას

$$\begin{gathered}\mathscr{L}[y] = a_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} - b_{i_1-1,i_2} y_{i_1-1,i_2} - b_{i_1+1,i_2} y_{i_1+1,i_2} - \\ - b_{i_1,i_2-1} y_{i_1,i_2-1} - b_{i_1,i_2+1} y_{i_1,i_2+1} = \varphi_{i_1,i_2}, \\ x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h; \quad y = \mu, \quad x \in \gamma_h,\end{gathered} \tag{28}$$

სადაც $a = a_{i_1 i_2}$, $b = b_{i_1 i_2}$ კოეფიციენტებია. (4) შემთხვევაში გვაქვს

$$\begin{gathered}a_{i_1 i_2} = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right), \\ b_{i_1\pm1,i_2} = \frac{1}{h_1^2}, \quad b_{i_1,i_2\pm1} = \frac{1}{h_2^2},\end{gathered} \tag{29}$$

$\mathscr{L}[y]$ ოპერატორი შეიძლება სხვაგვარად ჩავწეროთ:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}[y] = d_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} + b_{i_1-1,i_2}(y_{i_1,i_2} - y_{i_1-1,i_2}) + \\ + b_{i_1+1,i_2}(y_{i_1,i_2} - y_{i_1+1,i_2}) + b_{i_1,i_2-1}(y_{i_1,i_2} - y_{i_1,i_2-1}) + \\ + b_{i_1,i_2+1}(y_{i_1 i_2} - y_{i_1 i_2+1}),\end{gathered} \tag{30}$$

სადაც $d_{i_1 i_2} = a_{i_1 i_2} - b_{i_1-1,i_2} - b_{i_1+1,i_2} - b_{i_1,i_2-1} - b_{i_1,i_2+1}$. ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება პირობები

$$d = d_{i_1 i_2} \ge 0, \quad b_{i_1\pm1,i_2} > 0, \quad b_{i_1,i_2\pm1} \ge 0. \tag{31}$$

(4) ამოცანისათვის გვექნება $d \equiv 0$.

თეორემა 1. ვთქვათ, სრულდება (31) პირობები და $\varphi(x) \ge 0$, $y|_\gamma \ge 0$. მაშინ (28) განტოლების ამოხსნა არაუარყოფითია, ე. ი. $y(x) \ge 0$, $\overline{\omega}_h = \omega_h(\overline{G})$ ბადის ყველა კვანძში.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ თეორემის მტკიცება მცდარია და არსებობს ერთი კვანძი მაინც $x_{i_0}=(i_1^0h_1, i_2^0h_2)$, რომელშიც $y(x_{i_0})<0$. მაშინ $y(x)$ ფუნქცია ბადის რომელიღაც შიგა კვანძზე უნდა ღებულობდეს უმცირეს უარყოფით მნიშვნელობას $\min\limits_{x\in\omega_h} y(x) = = y(x_*)$. ამ კვანძში სრულდება (28) განტოლება. თუ $d(x_*)=0$ და $\varphi(x_*)=0$, მაშინ (28) განტოლება სრულდება მხოლოდ $y(x)=y(x_*)$ პირობის დროს შაბლონის ყველა კვანძში. თუმცა, რადგან $\varphi(x)\not\equiv 0$, არსებობს კვანძი $x_{i_{**}}$, რომელშიც $y(x_{i_{**}})=y(x_{i_*})=\min y(x)= = c_0<0$ და ერთი კვანძში მაინც, მაგალითად, $x=x_{i_1+1}$ კვანძში, გვექნება $y_{i_1+1}>c_0$ და, მაშასადამე, $\mathscr{L}[y]\big|_{x=x_{i_{**}}}<0$ რაც ეწინააღმდეგება პირობას $\mathscr{L}[y]=\varphi(x)\ge 0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 2. (შედარების თეორემა). ვთქვათ, $\bar{y}(x)$ –

$$\mathscr{L}[\bar{y}]=\bar{\varphi},\quad x\in\omega_h,\quad \bar{y}=\bar{\mu},\quad x\in\gamma_h \tag{32}$$

ამოცანის ამოხსნაა და სრულდება (31) პირობა. თუ

$$|\varphi(x)|\le\bar{\varphi}(x),\quad x\in\omega_h,\quad |\mu(x)|\le\bar{\mu}(x),\quad x\in\gamma_h, \tag{33}$$

მაშინ (28) ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$|y(x)|\le\bar{y}(x),\ \text{ყველა } x\text{-სთვის } \bar{\omega}_h\text{-დან.}$$

საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ $u=\bar{y}(x)+y(x)$, $v=\bar{y}(x)- - y(x)$ ფუნქციებისათვის სრულდება თეორემა 1-ის პირობები და, მაშასადამე, $u(x)\ge 0$, $v(x)\ge 0$ ანუ $y(x)\ge -\bar{y}(x)$, $y(x)\le\bar{y}(x)$ ე. ი. $|y|\le\bar{y}$.

ამგვარად, $\bar{y}(x)$ ფუნქცია მაჟორანტაა. თუ $\bar{y}(x)$ მაჟორანტა ნაპოვნია, (28) ამოცანის ამოხსნა თეორემა 2-ის თანახმად შეიძლება შევაფასოთ. (4) ამოცანისათვის მაჟორანტად შევარჩიოთ ფუნქცია

$$\bar{y}(x)=C[L^2-(x_1^2+x_2^2)],\quad L^2=\ell_1^2+\ell_2^2. \tag{34}$$

თავდაპირველად გამოვთვალოთ

$$\overline{\varphi} = \mathcal{L}[\overline{y}] = -\Lambda\overline{y} = C\Lambda(x_1^2 + x_2^2) = C(\Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2) = 4C,$$

რადგან

$$(x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{h_1^2}((x_1 + h_1)^2 - 2x_1^2 + (x_1 - h_1)^2) = 2.$$

(34) ფორმულიდან ჩანს, რომ $\overline{\mu} = \overline{y}(x) > 0$ γ_h საზღვარზე. მივმართოთ ახლა (6), (7) ამოცანას (4) სქემის $z = y - u$ ცდომილებისათვის. თუ შევარჩევთ $4C = \|\psi\|_C$ და გავითვალისწინებთ, რომ $|z|_{\gamma_h} = 0$, მივიღებთ $|z(x)| < \overline{y}(x) < CL^2$, ასე რომ

$$\|z\|_C \le \frac{L^2}{4}\|\psi\|_C. \tag{35}$$

აქედან და (9)-დან გამომდინარეობს (4) სქემის თანაბრად კრებადობა სიზუსტის მეორე რიგით.

შენიშვნა. (28) განტოლება შეიძლება შეიცვალოს უფრო ზოგადი სახის განტოლებით

$$\mathcal{L}[y] = a(x)y(x) - \sum_{\substack{\xi\in\sigma(x)\\ \xi\neq x}} b(x,\xi)y(\xi) = \varphi(x), \tag{36}$$

სადაც $a(x) > 0$, $b(x, \xi) > 0$, $\sigma(x)$ – შაბლონის $\xi \neq x$ კვანძების სიმრავლეა ცენტრით x კვანძში, ამასთან

$$d(x) = a(x) - \sum_{\substack{\xi\in\sigma(x)\\ \xi\neq x}} b(x,\xi) \ge 0.$$

(36) განტოლებისათვის სამართლიანია თეორემა 1 და თეორემა 2. სიზუსტის გადიდებული რიგის მქონე სქემის შემთხვევაში შაბლონი შედგება ცხრა კვანძისაგან, $\sigma(x)$ სიმრავლე – რვა კვანძისაგან, ამასთან $a = \frac{5}{3}(h_1^{-2} + h_2^{-2})$, ხოლო მარჯვენა მხარეში არის კოეფიციენტები $\frac{1}{6}(5h_1^{-2} + h_2^{-2})$, $\frac{1}{6}(5h_2^{-2} - h_1^{-2})$, რომლებიც დადებითია მხოლოდ

$$1/\sqrt{5} \le h_1/h_2 \le \sqrt{5}$$

პირობის დროს და, მაშასადამე, (35) სახის შეფასებაც ამ პირობის დროს მიიღება.

§2. სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნა

1. პირდაპირი მეთოდები. ცვლადთა განცალების მეთოდი. დირიხლეს ამოცანისათვის სხვაობიან განტოლებათა სისტემას §1-დან

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu, \quad x \in \gamma_h \qquad (1)$$

გააჩნია მაღალი $(N_1-1)(N_2-1)$ რიგის მატრიცა. ჩვეულებრივ იღებენ $N_1, N_2 \sim 50\text{-}100$, ასე რომ (1) სისტემაში განტოლებათა რიცხვი $10^3 - 10^4$-ის ტოლია. გაუსის მეთოდით ასეთი მაღალი რიგის სისტემის ამოხსნას დასჭირდება $(N_1-1)^3(N_2-1)^3$ რიგის მოქმედებათა რიცხვი, ე. ი. $10^9 - 10^{12}$ მოქმედება, (1) სიზუსტის მატრიცას ერთი კარგი თვისება რომ არ ჰქონდეს: მატრიცის სისტემა გაიშვიათებულია და მხოლოდ $\sim 5N_1N_2$ ნულისაგან განსხვავებული ელემენტი აქვს. ამიტომ სხვაობიან განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად ხერხდება ისეთი მეთოდების აგება, რომლებიც $O(N\ln N)$ და უფრო მეტიც, $O(N)$ მოქმედებას მოითხოვს, სადაც $N=(N_1-1)\times (N_2-1)$. აღვწეროთ პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანის მართკუთხედში ამოხსნის ერთ-ერთი პირდაპირი მეთოდი.

გადავწეროთ (1) ამოცანა სახით

$$\Lambda \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad \overset{\circ}{y}|_{\gamma_h} = 0, \qquad (2)$$

სადაც $\overset{\circ}{y}(x) \equiv y(x)$, როცა $x \in \omega_h$, ხოლო $\varphi(x)$ განისაზღვრება §1-დან (14) ფორმულებით.

მისი ამოხსნა შეიძლება ცელადთა განცალების მეთოდით ვიპოვოთ. ვთქვათ,

$$\{v_{k_2}^{(2)}(x_2), \lambda_{k_2}^{(2)}\} \quad (k_2 = 1,2,\dots,N_2-1)$$
$$\Lambda_2 v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h, \quad v(0) = v(\ell_2) = 0. \tag{3}$$

ამოცანის საკუთრივი ფუნქციები და საკუთრივი მნიშვნელობებია. გამოსახულება $\lambda_{k_2}^{(2)}$-სა და $v_{k_2}(x_2)$-სთვის §1-ის პ.6-შია მოცემული.

გავშალოთ $\overset{o}{y}(x_1, x_2)$ ამოხსნა და $\varphi(x_1, x_2)$ მარჯვენა მხარე საკუთრივი ფუნქციების მიხედვით:

$$\overset{o}{y}(x_1,x_2) = \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_2}(x_1) v_{k_2}(x_2), \tag{4}$$

$$\varphi(x_1,x_2) = \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \varphi_{k_2}(x_1) v_{k_2}(x_2), \tag{5}$$

სადაც $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = 1,2,\dots,N_\alpha - 1$, $\alpha = 1,2$, $c_{k_2}(x_1)$ და $\varphi_{k_2}(x_1)$ - ფურიეს კოეფიციენტებია, მაგალითად

$$\varphi_{k_2}(x_1) = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \varphi(x_1, i_2 h_2) v_{k_2}(i_2 h_2).$$

$c_{k_2} v_{k_2}$ ნამრავლის მიმართ გამოვიყენოთ $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ოპერატორი:

$$\Lambda c_{k_2}(x_1) v_{k_2}(x_2) = v_{k_2}(x_2) \Lambda_1 c_{k_2}(x_1) + c_{k_2}(x_1) \Lambda_2 v_{k_2}(x_2) =$$
$$= v_{k_2}(x_2) \Lambda_1 c_{k_2}(x_1) - \lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1) v_{k_2}(x_2) =$$
$$= [\Lambda_1 c_{k_2}(x_1) - \lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1)] v_{k_2}(x_2).$$

ჩავსვამთ რა ამ გამოსახულებას (2)-ში და გავითვალისწინებთ (5)-ს, მივიღებთ

$$\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\{\Lambda_1 c_{k_2}(x_1)-\lambda_{k_2}^{(2)}c_{k_2}(x_1)+\varphi_{k_2}(x_1)\}v_{k_2}(x_2)=0\,. \qquad (6)$$

$\{v_{k_2}(x_2)\}$-ს ორთოგინალობის გამო ეს იგივეობა შესაძლებელია მხოლოდ ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების ნულთან ტოლობის შემთხვევაში:

$$\begin{gathered}\Lambda_1 c_{k_2}(x_1)-\Lambda_{k_2}^{(2)}c_{k_2}(x_1)=-\varphi_{k_2}(x_1), \quad k_2=1,2,\ldots,N_2-1,\\ x_1=i_1h_1, \quad 0<i_1<N_1, \quad c_{k_2}(i_1h_1)=0, \quad i_1=0,N_1.\end{gathered} \qquad (7)$$

მართლაც, თუ გაავამრავლებთ (6)-ს სკალარულად $v_{k_2}(x_2)$-ზე, მივიღებთ

$$0=\sum_{k=1}^{N_2-1}\{\cdot\}_k(v_k,\dot{v}_{k_2})=\sum_{k=1}^{N_2-1}\{\cdot\}_k\delta_{kk_2}=\{\cdot\}_{k_2}=0\,,$$

სადაც $\{\cdot\}_{k_2}$ (6)-ის ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებაა.

(7) ამოცანები იხსნება ფაქტორიზაციის მეთოდით; სულ საჭიროა ფაქტორიზაციის ალგორითმის N_2-1-ჯერ გამოყენება, როცა $k_2=1,2,\ldots,N_2-1$. ვიცით რა $c_{k_2}(x_1)$, (4) ფორმულის მიხედვით ვიპოვით (2) ამოცანის ამოხსნას. ამისთვის ჯერ უნდა გამოვთვალოთ $\varphi_{k_2}(x_1)\,(k_2=1,2,\ldots,N_2-1)$ ფურიეს კოეფიციენტები. (4) და (5) ფორმულებიდან ჩანს, რომ $y(x_1,x_2)$ და $\varphi_{k_2}(x_1)$ გამოითვლება ერთი და იმავე სახის ფორმულების საშუალებით:

$$w_i=\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k\sin\frac{k\pi i}{N}, \quad i=1,2,\ldots,N-1\,. \qquad (8)$$

ჯამების გამოსათვლელად შემუშავებულია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის სპეციალური ალგორითმი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ (8) ჯამი $5N\log_2 N$ არითმეტიკული მოქმედე-

ბით (როცა $N = 2^n$, n მთელი რიცხვია) $O(N^2)$-ის მაგივრად (ეს რაოდენობაა საჭირო, როცა აჯამვის ჩვეულებრივ წესს ვიყენებთ). ეს ალგორითმი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ თავდაპირველი (2) ამოცანის ამოხსნა $O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ მოქმედებით. შეიძლება მოვახდინოთ ცვლადთა განცალების მეთოდისა და რედუქციის ან დეკომპოზიციის მეთოდის კომბინირება. ეს უკანასკნელი გაუსის მეთოდის მოდიფიკაციას წარმოადგენს. შედეგად მივიღებთ ალგორითმს $Q \approx 5N_1 N_2 \log_2 N_2$ მოქმედებათა რიცხვით, რაც ორჯერ ნაკლებია, ვიდრე ზემოთ განხილული განცალების ალგორითმისათვის.

2. **იტერაციული მეთოდები.** პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანის ამოსახსნელად მართკუთხედში ყველაზე ეკონომიურია პირდაპირი მეთოდები. ამჟამად არსებობს მართკუთხედში პუასონის განტოლების ამოსახსნელად სამი ტიპის, აგრეთვე შერეული სასაზღვრო პირობებით. იმ შემთხვევაში კი, როცა არე მართკუთხა არ არის ან განიხილება განტოლება ცვლადი კოფიციენტებით, გამოიყენება იტერაციული მეთოდები. ფაქტიურად, პირდაპირი მეთოდები მხოლოდ იმ შემთხვევაშია ეკონომიური, როცა ცვლადთა განცალება ხდება.

III თავში განიხილებოდა იტერაციული მეთოდების თეორია განტოლებისათვის

$$Ay = \varphi,$$

სადაც $A = A^* > 0$. ხდებოდა სხვადასხვა მეთოდების შედარება მოდელური ერთგანზომილებიანი ამოცანისათვის $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე:

$$y_{\bar{x}x} = -f(x)\,,\ x = ih,\ 0 < i < N,\ y_0 = y_N = 0.$$

მისთვის A ოპერატორს აქვს სახე $Ay = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x}$. A ოპერატორის საზღვრები განისაზღვრება მუდმივებით

$$\delta = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\quad \Delta = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}.$$

III თავში განხილული მეთოდებისათვის იტერაციათა რაოდენობა დამოკიდებულია ფარდობაზე

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta} = \mathrm{tg}^2\frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}. \tag{9}$$

ახლა განვიხილოთ მოდელური ამოცანა – დირიხლეს ორგანზომილებიანი ამოცანა ერთეულოვან კვადრატში ($\ell_1 = \ell_2 = 1$) კვადრატულ ბადეზე ბიჯით $h_1 = h_2 = h$:

$$Ay = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2} = \varphi, \quad \varphi, y \in H. \tag{10}$$

თითოეული მიმართულებით ინტერვალების რიცხვი N-ის ტოლია, ასე რომ $h = 1/N$.

A ოპერატორის δ და Δ საზღვრები ნაპოვნია §1-ში (იხ. (18) §1-დან), $\eta = \delta/\Delta$ ფარდობა ემთხვევა (9)-ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ იტერაციათა რაოდენობა დამოკიდებულია განზომილებათა რიცხვზე. ამიტომ სხვადასხვა იტერაციული მეთოდებისათვის იტერაციათა რიცხვის ის შეფასებები, რომელიც ერთგანზომილებიანი მოდელური ამოცანისათვის მივიღეთ, სამართლიანია ორგანზომილებიან შემთხვევაშიც.

კვადრატული ბადის შემთხვევაში იტერაციათა რაოდენობა ორგანზომილებიანი ამოცანისათვის შეიძლება რამდენადმე განსხვავდებოდეს იტერაციათა რიცხვისაგან ერთგანზომილებიანი ამოცანისათვის.

ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ ცვალებად-სამკუთხა იტერაციულ მეთოდს დირიხლეს სხვაობიანი (10) ამოცანის ამოსახსნელად.

3. ცვალებად-სამკუთხა მეთოდი.

$$Au = f, \quad A = A^* > 0, \quad A : H \to H, \tag{11}$$

ოპერატორული განტოლების ამოხსნისათვის III თავში განხილული იყო ორშრიანი ერთბიჯიანი იტერაციული მეთოდები, რომლებიც ჩაწერილი იყო შემდეგი კანონიკური ფორმით:

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f\,, \; k = 0,1,\dots,n, \text{ ყველა } y_0\text{-სთვის } H\text{-დან}, \tag{12}$$

სადაც $B : H \to H$, $B = B^* > 0$. A და B-სთვის სრულდება პირობები

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \tag{13}$$

სადაც γ_1, γ_2 – მუდმივებია.

მოცემული γ_1, γ_2-სთვის იტერაციების მინიმალური რაოდენობა $\min_{\{\tau_k\}} n(\varepsilon)$ მიიღწევა ჩებიშევის პარამეტრების

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0\sigma_k}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},$$
$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{14}$$

შერჩევისას, სადაც σ_k ჩებიშევის პოლინომის ნულების სპეციალურად დალაგებული რაიმე სიმრავლეა; ასეთი დალაგებისას (12) მეთოდი გამოთვლებისათვის მდგრადია.

$(k+1)$-ე იტერაციის განსაზღვრისათვის გვაქვს განტოლება

$$By_{k+1} = F_k, \quad F_k = By_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f).$$

y_{k+1}-ის გამოთვლის დროს იტერაციათა რიცხვი დამოკიდებულია B-ზე. თუ შევარჩევთ

$$B = (D+\omega A_1)D^{-1}(D+\omega A_2), \tag{15}$$

სადაც A_1 და A_2 ოპერატორებია სამკუთხა მატრიცებით $A_1^* = A_2$, $A_1 + A_2 = A$, ხოლო $D = D^* > 0$ – ნებისმიერი ოპერატორია, მივიღებთ ცვალებად-სამკუთხა მეთოდს, ჩვეულებრივ, $D = (d_{i_1 i_2})$ – დიაგონალური მატრიცია. III თავში მოცემულია ამ მეთოდის თეორია და ნაპოვნია γ_1, γ_2 და ω მუდმივები მოცემულ პირობებში

$$A \geq \delta D, \quad A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\Delta}{4} A, \quad \delta > 0, \quad \Delta \geq \delta > 0, \tag{16}$$

რომლებიც ექვივალენტური სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$(Ay,y) \geq \delta(Dy,y), \quad (D^{-1}A_2 y, A_2 y) \leq \frac{\Delta}{4}(Ay,y).$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \xi = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \tag{17}$$

ხოლო იტერაციების რიცხვისათვის მართებულია შეფასება

$$n(\varepsilon) \approx n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}} \ln\frac{2}{3}. \tag{18}$$

4. ცვალებად-სამკუთხა მეთოდი დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანისათვის. დავუბრუნდეთ (10) ამოცანას. A ოპერატორი წარმოვიდგინოთ ჯამის სახით $A = A_1 + A_2$, სადაც

$$A_1 y = \frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2}, \quad A_2 y = -\frac{y_{x_1}}{h_1} - \frac{y_{x_2}}{h_2},$$

და (15)-ში დავუშვათ $D = E$. A_1 და A_2-ის შეუღლებულობა: $A_2 = A_1^*$ შეიძლება ვაჩვენოთ მათი მატრიცების შედარების გზით ან გრინის პირველი სხვაობიანი ფორმულით: $(A_1 y, v) = (y, A_1^* v) = (y, A_2 v)$.

y_{k+1}-ის განსაზღვრისათვის ვღებულობთ განტოლებას

$$By_{k+1} = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2) y_{k+1} = F_k,$$

$$F_k = B\overset{\circ}{y}_k + \tau_{k+1}(\Lambda y_k + \varphi), \ (y_k = \mu, \ \overset{\circ}{y}_k = 0, \text{ როცა } x \in \gamma_h).$$

y_{k+1} მნიშვნელობები მიმდევრობით მოიძებნება განტოლებიდან

$$(E + \omega A_1)\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)} = F_k, \quad (E + \omega A_2)\overset{\circ}{y}_{k+1} = \overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}.$$

აქედან ვღებულობთ ფორმულებს

$$\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}(i_1, i_2) = \left[\frac{\text{æ}_1 \overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}(i_1 - 1, i_2) + \text{æ}_2 \overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}(i_1, i_2 - 1) + F_k(i_1, i_2)}{1 + \text{æ}_1 + \text{æ}_2}\right],$$

$$\text{æ}_1 = \frac{\omega}{h_1^2}, \quad \text{æ}_2 = \frac{\omega}{h_2^2}, \tag{19}$$

$$\overset{\circ}{y}_{k+1}(i_1, i_2) = \left[\frac{\text{æ}_1 \overset{\circ}{y}_{k+1}(i_1 + 1, i_2) + \text{æ}_2 \overset{\circ}{y}_{k+1}(i_1, i_2 + 1) + \overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}(i_1, i_2)}{1 + \text{æ}_1 + \text{æ}_2}\right].$$

$\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}(i_1,i_2)$ რომ განვსაზღვროთ, შევარჩიოთ კვანძი $i_1=1$, $i_2=1$ მართკუთხედის მარცხენა კუთხეში; მაშინ $\{(i_1,i_2),(i_1-1,i_2),(i_1,i_2-1)\}$ შაბლონის დანარჩენი ორი კვანძი (i_1-1,i_2) და (i_1,i_2-1) ძევს საზღვარზე და, შესაბამისად, $\overset{\circ}{y}{}^{(1)}(i_1-1,i_2)=\overset{\circ}{y}{}^{(1)}(i_1,i_2-1)=0$ ცნობილია. ვიცით რა $\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}$, როცა $i_1=1$, $i_2=1$, მიმდევრობით ვპოულობთ $\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}$-ს, როცა $i_1=2,3,\ldots,N_1-1$ და $i_2=1$ (პირველ სტრიქონზე). შემდეგ, დავუშვათ $i_2=2$ და მიმდევრობით ვიპოვოთ $\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}$ მეორე სტრიქონზე, როცა $i_1=1,2,\ldots,N-1$.

$\overset{c}{y}_{k+1}$-ის განსაზღვრისათვის გამოთვლები ჩავატაროთ $\{(i_1,i_2),(i_1+1,i_2),(i_1,i_2+1)\}$ შაბლონზე სვეტების მიხედვით ზემოდან ქვემოთ: დავაფიქსიროთ $i_1=N_1-1,N_1-2,\ldots,2,1$ და ყოველი i_1-სთვის ვცვალოთ $i_2=N_2-1,N_2-2,\ldots,2,1$. დავიწყოთ $\overset{\circ}{y}_{k+1}$-ის გამოთვლა კვანძიდან ($i_1=N_1-1$, $i_2=N_2-1$) მარჯვენა ზედა კუთხეში. უნდა აღვნიშნოთ, რომ $\overset{\circ}{y}_{k+1}$-ის გამოთვლა სტრიქონების მიხედვითაც შეიძლება ვაწარმოოთ, მარჯვნიდან მარცხნივ: დავაფიქსიროთ $i_2=N_2-1,N_2-2,\ldots,2,1$ და ყოველი i_2-სთვის შევცვალოთ $i_1=$ $=N_1-1,N_1-2,\ldots,2,1$. სხვათა შორის, $\overset{\circ}{y}{}_k^{(1)}$-ის გამოთვლა შეიძლება ვაწარმოოთ არა სტრიქონების, არამედ სვეტების მიხედვით ქვემოდან ზემოთ. ეს თვით ფორმულებიდანაც ჩანს.

გამოთვლები წარმოებს (19) რეკურენტული ფორმულების მიხედვით; თვლაც ცხადია, მდგრადია. აღნიშნული ტიპის ალგორითმს მსრბოლი თვლის ალგორითმს უწოდებენ.

დავთვალოთ ბადის ერთ კვანძზე მოსული არითმეტიკულ მოქმედებათა რიცხვი. F_k-ის გამოთვლისათვის საჭიროა შეკრების 10

და გამრავლების 10 ოპერაცია; მოცემული F_k-სთვის y_{k+1}-ის გამოთვლას სჭირდება შეკრების 4 და გამრავლების 6 ოპერაცია.

სულ y_{k+1}-ის ერთ კვანძში გამოსათვლელად საჭიროა შეკრების 14 და გამრავლების 16 ოპერაცია. მოქმედებათა რიცხვი შეიძლება შევამციროთ, თუ ოპერატიულ მეხსიერებაში შევინახავთ არა ერთ, არამედ ორ მიმდევრობას $\{y_k\}$ და $\{w_{k+1}\}$ და y_{k+1}-ის განსაზღვრისათვის ვისარგებლებთ ალგორითმით

$$(E+\omega A_1)\overset{\circ}{w}_{k+1/2}=\Lambda y_k+f,\quad (E+\omega A_2)\overset{\circ}{w}_{k+1}=\overset{\circ}{\omega}_{k+1/2},$$

$$y_{k+1}=y_k+\tau_{k+1}\overset{\circ}{w}_{k+1}.$$

ამ შემთხვევაში y_k-დან y_{k+1}-ზე გადასასვლელად საკმარისია შეკრების 10 და გამრავლების 10 ოპერაცია ერთ კვანძზე.

5. ცვალებად-სამკუთხა მეთოდის პარამეტრების შერჩევა დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანისათვის. III თავის ზოგადი თეორიით (იხ. III თავი, §5) რომ ვისარგებლოთ, უნდა განვსაზღვროთ (16) პირობაში შემავალი δ და Δ მუდმივები. ჩვენს შემთხვევაში $A=A_1+A_2\geq\delta E$, სადაც δ – A ოპერატორის უმცირესი საკუთრივი მნიშვნელობაა, რომელიც ტოლია

$$\delta=4\left(\frac{1}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1}+\frac{1}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}\right). \tag{20}$$

განვიხილოთ ოპერატორი $A_1D^{-1}A_2=A_1A_2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$A_1^*=A_2,\quad (a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2),$$

ვიპოვით

$$(A_1A_2y,y)=(A_2y,A_2y)=$$

$$=\left(\left(\frac{1}{h_1}y_{x_1}+\frac{1}{h_2}y_{x_2}\right)^2,1\right)\leq\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)((y_{x_1})^2+(y_{x_2})^2,1)=$$

$$=\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\left[(y_{\bar{x}_1})^2+(y_{\bar{x}_2})^2\right]_{i_1i_2}h_1h_2\le\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)(Ay,y)$$

რადგან (იხ. V თავის §1):

$$(Ay,y)=\sum_{i_2=1}^{N_2-1}h_2\sum_{i_1=0}^{N_1-1}(y_{x_1})^2_{i_1i_2}h_1+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}h_1\sum_{i_2=0}^{N_2-1}(y_{x_2})^2_{i_1i_2}h_2\,.$$

თუ შევადარებთ უტოლობებს

$$(A_1A_2y,y)\le\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)(Ay,y)\quad \text{და}\quad A_1A_2\le\frac{\Delta}{4}A\,,$$

დავასკვნით, რომ

$$\Delta=4\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right). \tag{21}$$

ვიცით რა δ და Δ, ვპოულობთ $\eta=\delta/\Delta$; V თავის §5-ის ფორმულებით კი ვიპოვით γ_1, γ_2, ξ პარამეტრებს, რის შედეგადაც ვაფასებთ იტერაციების რიცხვს ფორმულით

$$n(\varepsilon)\approx\ln\frac{2}{3}\Big/\ln\frac{1}{\rho_1},\quad \rho_1=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\,.$$

ვისარგებლოთ $n(\varepsilon)$-ით და შევარჩიოთ ჩებიშევის პარამეტრთა მდგრადი ერთობლიობა σ_k, τ_{k+1} და $\omega=2\big/\sqrt{\delta\Delta}$.

მოვიყვანოთ ამოხსნის მეთოდების შედარების შედეგი იტერაციების $n_0(\varepsilon)$ რიცხვის მიხედვით: მარტივი იტერაციის მეთოდისა $(n_0^{(1)}(\varepsilon))$, ცხადი სქემისა ჩებიშევის ერთობლიობით $(n_0^{(2)}(\varepsilon))$ და ცვალებად-სამკუთხა მეთოდისა $(n_0^{(3)}(\varepsilon))$ ორგანზომილებიანი (10) ამოცანისათვის, რისთვისაც ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულებით. $n_0^{(1)}(\varepsilon)\approx 2/h^2$, $n_0^{(2)}(\varepsilon)\approx 3{,}2/h$, $n_0^{(3)}(\varepsilon)\approx 2{,}9\big/\sqrt{h}$, როცა $\varepsilon=10^{-4}$ (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

h	$n_0^{(1)}(\varepsilon)$	$n_0^{(2)}(\varepsilon)$	$n_0^{(3)}(\varepsilon)$
1/10	200	32	9
1/50	5000	160	21
1/100	20000	320	29

6. სხვაობიანი განტოლებები ცვლადი კოეფიციენტებით. ვთქვათ, $\overline{G} = \{(x_1,x_2):\ 0 \le x_\alpha \le \ell_\alpha,\ \ \alpha = 1,2\}$ მართკუთხედში უნდა ამოვხსნათ დირიხლეს ამოცანა ცვალებადკოეფიციენტებიანი ელიფსური განტოლებისათვის:

$$Lu = L_1 u + L_2 u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad u = \mu(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad 0 < c_1 \le k_\alpha \le c_2, \quad \alpha = 1,2, \tag{22}$$

სადაც c_1 და c_2 – მუდმივებია. როცა $k_1 \equiv k_2 \equiv 1$, მივიღებთ პუასონის განტოლებას $\Delta u = -f$.

სხვაობიანი სქემა ივება $\overline{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1,\ i_2 h_2) |\ i_\alpha = 0,1,\dots,N_\alpha,$ $h_\alpha = \ell_\alpha / N_\alpha;\ \ \alpha = 1,2\}$ ბადეზე. ყოველ L_α ოპერატორს სამწერტილიან შაბლონზე $(x_\alpha - h_\alpha,\ x_\alpha,\ x_\alpha + h_\alpha)$ ვცვლით სხვაობიანი ოპერატორით:

$$\Lambda_\alpha u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}(u_\alpha^{(+1_\alpha)} - u)}{h_\alpha} - \frac{a_\alpha(u - u^{(-1_\alpha)})}{h_\alpha}\right],$$

სადაც $u^{(\pm 1_1)} = u((i_1 \pm 1)h_1, i_2 h_2)$, $u^{(\pm 1_2)} = u(i_1 h_1, (i_2 \pm 1)h_2)$. a_1 და a_2-სთვის შეიძლება შევარჩიოთ უმარტივესი გამოსახულებები

$$a_1(x_1,x_2) = k_1(x_1 - 1/2h_1,\ x_2) = k_1^{(-1/2_1)},$$

$$a_2(x_1,x_2) = k_2(x_1,\ x_2 - 1/2h_2) = k_2^{(-1/2_2)},$$

რომლებიც აპროქსიმაციის მეორე რიგს უზრუნველყოფენ

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2).$$

ამის შედეგად Lu ოპერატორს შეესაბამება სხვაობიანი ოპერატორი ხუთწერტილიან შაბლონზე:

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = (a_1 u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2}.$$

დავწეროთ (22) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა

$$\begin{gathered}\Lambda y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \\ 0 < c_1 \le a_\alpha \le c_2, \quad \alpha = 1,2,\end{gathered} \tag{23}$$

ბადური ფუნქციების $H = \Omega_N$ სივრცეში, სადაც $N = (N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$, შემოვიღოთ ოპერატორი

$$Ay = -\Lambda \overset{\circ}{y}, \quad A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 y = -\Lambda_1 \overset{\circ}{y}, \quad A_2 y = -\Lambda_2 \overset{\circ}{y}$$

და (23) ოპერატორული ფორმით ჩავწეროთ:

$$Ay = \varphi, \quad y, \varphi \in H,$$

სადაც φ განსხვავდება f-სგან მხოლოდ ოთხ სასაზღვრო კვანძში

$$(i_1 = 1, N_1 - 1,\ 0 < i_2 < N_2) \text{ და } (0 < i_1 < N_1,\ i_2 = 1, N_2 - 1).$$

A ოპერატორი, ცხადია, თვითშეუღლებულია: $(Ay,v) = (y,Av)$. ფორმულიდან

$$-\sum_{i_1=1}^{N_1-1} (a_1 \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1})_{x_1,i_1} \overset{\circ}{y}_{i_1} h_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} (a_1 (\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1})^2)_{i_1} h_1$$

და $0 < c_1 \le a \le c_2$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$c_1(Ry,y) \le (Ay,y) \le c_2(Ry,y) \quad \text{ან} \quad c_1 R \le A \le c_2 R, \tag{24}$$

სადაც R – ზემოთ შესწავლილი ლაპლასის ოპერატორია

$$Ry = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2}. \tag{25}$$

აქედან ვასკვნით, რომ

$$c_1 \overset{\circ}{\delta} E \leq A \leq c_2 \overset{\circ}{\Delta} E,$$

სადაც $\overset{\circ}{\delta}$ და $\overset{\circ}{\Delta}$ განისაზღვრება (20), (21) ფორმულებით.

(23) ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია ცვალებად-სამკუთხა მეთოდით ვისარგებლოთ, რომლის ოპერატორი

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_1 + R_2 = R, \quad R_1^* = R_2, \text{ როცა } D = E.$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, სადაც $\gamma_1 = c_1 \overset{\circ}{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2 \overset{\circ}{\gamma}_2$, ხოლო $\overset{\circ}{\gamma}_1$ და $\overset{\circ}{\gamma}_2$ მუდმივები (25) ოპერატორისათვის ნაპოვნია. იტერაციების რაოდენობისთვის გვაქვს შეფასება

$$n_0(\varepsilon) \approx \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\bar{n}_0(\varepsilon), \quad \bar{n}_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}} \ln\frac{2}{3}.$$

ცვალებადკოეფიციენტებიანი განტოლებისათვის $\sqrt{c_2/c_1}$ -ჯერ მეტი იტერაციაა საჭირო, ვიდრე პუასონის განტოლებისათვის.

თუმცა ლაპლასის ოპერატორის შესაბამისი R ოპერატორი შეიძლება არ შემოვიტანოთ და ცვალებადკოეფიციენტებიანი ოპერატორი მაშინვე შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 y = \frac{1}{h_1}\left(a_1 y_{\bar{x}_1} + \frac{1}{2} y a_{x_1}\right) + \frac{1}{h_2}\left(a_2 y_{\bar{x}_2} + \frac{1}{2} y a_{x_2}\right),$$

$$A_2 y = -\frac{1}{h_1}\left(a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{1}{2} y a_{x_1}\right) - \frac{1}{h_2}\left(a_2^{(+1_2)} y_{x_2} + \frac{1}{2} y a_{x_2}\right).$$

B ოპერატორი შეირჩევა სახით

$$B = (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2), \tag{26}$$

სადაც $D = d(x)E$ – დიაგონალური მატრიცაა. ზოგადი თეორიის გამოყენება რომ შევძლოთ, უნდა ვიპოვოთ $A \geq \delta D$, $A_1 D^{-1} A_2 \leq$

$\leq \frac{\Delta}{4} A$ პირობაში შემავალი δ და Δ მუდმივები. d(x) კოეფიციენტი შეირჩევა η= δ/Δ ფარდობის მაქსიმუმის და, შესაბამისად, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$-ის მაქსიმუმის პირობიდან. შედეგად მიიღება ალგორითმი, რომლისთვისაც იტერაციების რაოდენობა $n_0(\varepsilon)$ სუსტადაა დამოკიდებული c_2/c_1 ფარდობაზე. ამას მოწმობს ცხრილი 3.

ცხრილი 3

c_2/c_1	h = 1/32		h = 1/128	
	D = E	D = d(x)E	D = E	D = d(x)E
2	23	20	45	39
8	46	23	90	47
32	92	25	180	53
128	184	26	360	57
512	367	26	720	59

თავი VII

სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდები

ამ თავში განხილულია სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოსახსნელი სხვაობიანი სქემები. დაწვრილებით არის გამოკვლეული მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგანზომილებიანი განტოლება. მრავალგანზომილებიანიანი სითბოგამტარებლობის განტოლებისათვის ცვლადი კოეფიციენტებით მოყვანილია სხვაობიანი სქემები.

§1. მუდმივკოეფიციენტებიანი სითბოგამტარებლობის განტოლება

1. ამოცანის დასმა. ერთგვაროვან ღეროში $0<x<\ell$ სითბოს გავრცელების პროცესი აღიწერება შემდეგი სითბოგამტარებლობის განტოლებით

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_0(x,t), \tag{1}$$

სადაც $u=u(x,t)$ ტემპერატურაა ღეროს x წერტილში დროის t მომენტში, c — ერთეულოვანი მასის სითბოტევადობა, ρ — სიმკვრივე, $c\rho$ — სიგრძის ერთეულის სითბოტევადობა, k — სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი, f_0 კი — სითბური წყაროების სიმკვრივე. ზოგად შემთხვევაში k, c, ρ, f_0, გარდა x და t ცვლადებისა, შეიძლება დამოკიდებული იყოს $u=u(x,t)$ ტემპერატურაზე (სითბოგამტარებლობის კვაზიწრფივი განტოლება). თუ k, c, ρ მუდმივებია, (1) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f,\quad f=\frac{f_0}{c\rho},\tag{2}$$

სადაც $a^2=k/(c\rho)$ ტემპერატურაგამტარებლობის კოეფიციენტია. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $a=1$, $\ell=1$. მართლაც, თუ შემოვიღებთ ცვლადებს $x_1=\frac{x}{\ell}$, $t_1=\frac{a^2t}{\ell^2}$, $f_1=\frac{\ell^2}{a^2}f$, მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+f_1,\quad 0<x_1<1.$$

ჩვენ განვიხილავთ პირველ სასაზღერო ამოცანას (ზოგჯერ ამბობენ: საწყის-სასაზღვრო ამოცანას) $\overline{D}=\{0\le x\le 1,\quad 0\le t\le T\}$ არეში. ვეძებთ

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le 1,\quad u(0,t)=u_1(t),\\ u(1,t)=u_2(t),\quad 0\le t\le T.\end{gathered}\tag{3}$$

ამოცანის $\overline{D}$ არეში უწყვეტ $u=u(x,t)$ ამოხსნას.

2. სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნის ზოგიერთი თვისება. მაქსიმუმის პრინციპის ძალით (3) ამოცანის ამოხსნისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$\begin{gathered}\max_{0\le x\le 1,\,0\le t\le T}|u(x,t)|\le\max\left(\max_{0\le x\le 1}|u_0(x)|,\max_{0\le t\le T}|u_1(t)|,\max_{0\le t\le T}|u_2(t)|\right)+\\ +\int_0^T\max_{0\le x\le 1}|f(x,t)|\,dt.\end{gathered}\tag{4}$$

განვიხილოთ ერთგვაროვანი განტოლება ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

ამ ამოცანის ამოხსნა ცვლადთა განცალების მეთოდით განისაზღვრება. ის შემდეგი სახისაა

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x), \tag{6}$$

სადაც λ_k და $X_k(x)$ შემდეგი ამოცანის

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

საკუთრივი მნიშვნელობები და ორთონორმირებული საკუთრივი ფუნქციებია და ტოლია

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \qquad X_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x, \tag{7}$$

ამასთან,

$$(X_k, X_m) = \int_0^1 X_k(x) X_m(x) dx = \delta_{km},$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \ne m. \end{cases}$$

მართლაც, ყველა კერძო ამოხსნა $u_k(x,t) = c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x)$ (ჰარმონიკები) განტოლებასა და (5) სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს. საწყისი პირობიდან

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x) \tag{8}$$

მოიძებნება $c_k = (u_0, X_k)$ კოეფიციენტები.

(6) და (8)-დან გამომდინარობს, რომ

$$\|u(t)\|^2 = (u(x,t), u(x,t)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t}\|X_k\|^2 \le$$

$$\le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|u_0\|^2,$$

რადგანაც

$$\|u_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \lambda_k > \lambda_{k-1} > \cdots > \lambda_1 = \pi^2.$$

ამრიგად, (5) ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|u(t)\| \le e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|, \quad \lambda_1 = \pi^2, \tag{9}$$

რომელიც გამოსახავს (5) ამოცანის ასიმპტოტურ ($t \to \infty$ -სთვის) მდგრადობის საწყისი მონაცემების მიმართ (§4, §7, თავი V). რადგანაც k-ს მრდასთან ერთად $\lambda_k = k^2\pi^2$ იზრდება, დაწყებული რაღაც t მომენტიდან (6) ჯამში პირველი შესაკრები (პირველი ჰარმონიკა) მნიშვნელოვნად გადააჭარბებს დანარჩენებს, ე. ი. ადგილი ექნება მიახლოებითი ტოლობას

$$u(x,t) \approx c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x).$$

პროცესის ამ სტადიას რეგულარულ რეჟიმს უწოდებენ.

3. სხვაობიანი სქემები. $\overline{D}$ არეში შემოვიღოთ ბადე

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j): \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \quad i = 0,1,\dots,N, \quad h = 1/N,$$
$$j = 0,1,\dots,L, \quad \tau = T/L\}$$

ბიჯებით: h (x-ის მიმართ) და τ (t-ს მიმართ). თუ x-ით წარმოებულს შევცვლით სხვაობიანი გამოსახულებებით

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \sim \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_{\bar{x}x,i} = \Lambda u_i,$$

(3)-ს მაგიერად მივიღებთ დიფერენციალურ-სხვაობიან განტოლებათა სისტემას (წრფეთა მეთოდი)

$$\frac{dv_i}{dt} = \Lambda v_i + f_i, \quad i = 1,2,\ldots;$$

სასაზღვრო და საწყისი პირობებით

$$v_0(t) = u_1(t), \quad v_N(t) = u_2(t), \quad v_i(0) = u_0(x_i).$$

ამ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის, V თავის ანალოგიურად, t-ს მიმართ წარმოებული შევცვალოთ სხვაობიანი ფარდობით

$$\frac{dv_i}{dt} \sim \frac{v_i(t_{j+1}) - v_i(t_j)}{\tau} = \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = (v_t)_i^j,$$

ხოლო მარჯვენა მხარე ავიღოთ $t = t_j$ (j-ურ შრეზე) და $t = t_{j+1}$ ($j+1$ შრეზე) კვანძებში მნიშვნელობების წრფივი კომბინაციის სახით:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \Lambda y_i^{j+1} + (1-\sigma)\Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \tag{10}$$

სადაც σ – პარამეტრია, ხოლო φ_i^j რაიმე მარჯვენა მხარეა, მაგალითად, $\varphi_i^j = f_i^j$, $\varphi_i^j = f_i^{j+1/2}$, და ა. შ. აქვე უნდა დაუმატოთ დამატებითი პირობები

$$y_0^j = u_1(t_j), \quad y_N^j = u_2(t_j), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \tag{11}$$
$$j = 0,1,2,\ldots, \quad 0 \le i \le N.$$

(10) სქემა განსაზღვრულია ექვს წერტილიან შაბლონზე

$$\begin{array}{ccc}
(x_{i-1}, t_{j+1}) & (x_i, t_{j+1}) & (x_{i+1}, t_{j+1}) \\
\times & \times & \times \\
\times & \times & \times \\
(x_{i-1}, t_j) & (x_i, t_j) & (x_{i+1}, t_j)
\end{array}$$

განვიხილოთ ცხადი ($\sigma = 0$) სქემა ოთხ წერტილიან შაბლონზე:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{y_{i-1}^j-2y_i^j+y_{i+1}^j}{h^2}+\varphi_i^j. \qquad (12)$$

$(j+1)$ შრეზე მნიშვნელობები გამოითვლება ცხადი ფორმულით

$$y_i^{j+1}=\left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right)y_i^j+\frac{\tau}{h^2}(y_{i-1}^j+y_{i+1}^j)+\tau\varphi_i^j.$$

$\sigma = 1$ შემთხვევაში ვღებულობთ სრულიად არაცხად სქემას – სქემას წინ წანაცვლებით შაბლონზე $\begin{array}{ccc} x & x & x \\ & x & \end{array}$:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{y_{i-1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i+1}^{j+1}}{h^2}+\varphi_i^j. \qquad (13)$$

(13)-დან y_i^{j+1}-ის განსაზღვრისათვის ვღებულობთ სასაზღვრო ამოცანას

$$\frac{\tau}{h^2}y_{i-1}^{j+1}-\left(1+\frac{2\tau}{h^2}\right)y_i^{j+1}+\frac{\tau}{h^2}y_{i+1}^{j+1}=-F_i^j, \quad 0<i<N,$$

$$F_i^j=y_i^j+\tau\varphi_i^j, \quad y_0^{j+1}=u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1}=u_2(t_{j+1}),$$

რომელიც ფაქტორიზაციის მეთოდით იხსნება.

ხშირად გამოიყენება სიმეტრიული არაცხადი სქემა (ზოგჯერ მას კრანკ-ნიკოლსონის სქემას უწოდებენ), სადაც $\sigma = 1/2$ და შაბლონია $\begin{array}{ccc} x & x & x \\ x & x & x \end{array}$:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i-1}^{j+1}+2y_i^{j+1}+y_{i+1}^{j+1}}{h^2}+\frac{y_{i-1}^j-2y_i^j+y_{i+1}^j}{h^2}\right)+\varphi_i^j. \qquad (14)$$

y_i^{j+1} მნიშვნელობები ახალ შრეზე ამ შემთხვევაშიც მოიძებნება ფაქტორიზაციის მეთოდით სასაზღვრო ამოცანისათვის:

$$\frac{\tau}{2h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1+\frac{\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad 0<i<N,$$

$$y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}), \tag{15}$$

$$F_i^j = \left(1-\frac{\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{2h^2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j.$$

ზოგად შემთხვევაში (ნებისმიერი σ-სთვის) (10) სქემას უწოდებენ სქემას წონებით. როცა $\sigma \neq 0$, ის არაცხადია და y_i^{j+1} გამოითვლება ფაქტორიზაციის მეთოდით, როგორც

$$\begin{gathered}\sigma\tau\Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad 0<i<N,\\ y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}), \quad j=0,1,\dots\end{gathered} \tag{16}$$

ამოცანის ამოხსნა. გადავიდეთ ნებისმიერ σ-ს შემთხვევაში (10) სქემის თვისებების შესწავლაზე.

4. აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასება. იმისათვის, რომ (10) სქემის (სქემა წონებით) სიზუსტის რიგი შევაფასოთ, საჭიროა ჯერ აპროქსიმაციის ცდომილება (შეუსაბამობა) შევაფასოთ და ვიპოვოთ აპრიორული შეფასებები, რომლებიც მარჯვენა მხარის მიმართ სქემის მდგრადობას გამოხატავს. (10), (11) სხვაობიანი სქემა ზუსტად ითვალისწინებს საწყის და სასაზღვრო პირობებს. (10) სქემა გადავწეროთ უინდექსო ფორმით. შემოვიღებთ რა აღნიშვნებს

$$y = y_i^j, \quad \hat{y} = y_i^{j+1}, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

$$y_t = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau}, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j,$$

მივიღებთ

$$\begin{gathered}y_t = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \quad (x_i,t_j)\in\omega_{h\tau}, \quad y(x,0)=u_0(x),\\ y_0 = u_1(t), \quad y_N = u_2(t), \quad (t=t_j=j\tau, \quad j=0,1,\dots)\end{gathered} \tag{17}$$

ვთქვათ, $u = u(x_i, t_j)$ – (3) ამოცანის ზუსტი ამოხსნაა, y კი – (17) სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა. ჩავსვამთ რა (17)-ში $y = z + u$, $z = y - u$ ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ პირობებს:

$$z_t = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \quad z(x,0) = 0, \quad z(0,t) = z(1,t) = 0, \tag{18}$$

სადაც

$$\psi = \Lambda u^{(\sigma)} + \varphi - u_t \tag{19}$$

არის (17) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება (3) ამოცანის $u = u(x, t)$ ამოხსნაზე (სქემის შეუსაბამობა).

ვიპოვოთ ψ-ს გაშლა h და τ-ს ხარისხებად $\left(x_i, \bar{t} = t_j + \frac{1}{2}\tau\right)$ წერტილის მიახლოებაში. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$u^{(\sigma)} = \sigma\hat{u} + (1-\sigma)u = \frac{u+\hat{u}}{2} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau u_t,$$

$$\hat{v} = \bar{v} + \frac{1}{2}\tau\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3\bar{v}}{\partial t^3} + O(\tau^4),$$

$$\bar{v} = v\left(x, t_j + \frac{1}{2}\tau\right),$$

$$v = \bar{v} - \frac{1}{2}\tau\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2} - \frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3\bar{v}}{\partial t^3} + O(\tau^4),$$

$$\Lambda u = u_{\bar{x}x} = Lu + \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

მივიღებთ

$$\psi = \left(L\bar{u} + \bar{f} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right) + \varphi - \bar{f} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4).$$

რადგანაც (3) განტოლებას ძალით გვაქვს

$$L\bar{u} + \bar{f} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0,$$

მაშინ

$$L\frac{\partial u}{\partial t} = L^2 u + Lf$$

და

$$\psi = \left(\varphi - \bar{f} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{f}\right) + \left(\frac{h^2}{12} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\right)L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4).$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\psi = O(\tau + h^2), \text{ როცა } \varphi = \bar{f} \text{ და } \sigma \neq \frac{1}{2},$$

$$\psi = O(\tau^2 + h^2), \text{ როცა } \varphi = \bar{f} \text{ და } \sigma = \frac{1}{2}.$$

თუ σ-ს შევარჩევთ ისე, რომ $L^2\bar{u}$-თან მდგომი კოეფიციენტი ნულის ტოლი იყოს:

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \tag{20}$$

ხოლო φ ტოლი იყოს

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}L\bar{f} \quad \text{ან} \quad \varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f} \tag{21}$$

(რადგანაც $\Lambda f - Lf = O(h^2)$), ორივე გამოსახულება განსხვავდება $O(h^4)$ სიდიდით), მაშინ მივიღებთ სქემას აპროქსიმაციის გაუმჯობესებული რიგით (x-ის მიმართ): $\psi = O(h^4 + \tau^2)$, როცა $\sigma = \sigma_*$. ეს სქემაც არაცხადია და ამიტომ y_i^{j+1} მოიძებნება $\sigma_*\tau\Lambda\hat{y} - \hat{y} = -F$ განტოლებიდან ფაქტორიზაციის მეთოდით.

5. სქემის მდგრადობა. შევუდგეთ (17) სქემის მდგრადობისა და კრებადობის შესწავლას. ჯერ განვიხილოთ ცხადი სქემა ($\sigma = 0$) და წმინდა არაცხადი სქემა ($\sigma = 1$). (17) განტოლება ცხადი სქემისათვის ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad 0 < i < N,$$
$$y_0^{j+1} = 0, \quad y_N^{j+1} = 0, \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad 0 \le i \le N. \tag{22}$$

თუ y_i^j-თან მდგომი კოეფიციენტი არაუარყოფითია, ე. ი.

$$\tau \le h^2/2, \tag{23}$$

მაშინ (22)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\|y^{j+1}\|_C \le \|y^j\|_C + \tau\|\varphi^j\|_C, \tag{24}$$

სადაც $\|y\|_C = \max\limits_{0 \le i \le N}|y_i|$. ავჯამოთ k-ს მიმართ 0-დან $j-1$-მდე; გვექნება

$$\|y^j\|_C \le \|y^0\|_C + \sum_{k=0}^{j-1} \tau\|\varphi^k\|_C \,. \tag{25}$$

სწორედ ეს უტოლობა გამოხატავს ბადურ C ნორმაში ცხადი სქემის მდგრადობას, საწყისი პირობებისა და მარჯვენა მხარის მიმართ (23) პირობის დროს (ცხადი სქემა პირობითად მდგრადია).

(17) არაცხადი სქემა, როცა $\sigma=1$, გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\tau\Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -F_i, \quad F_i = y_i^j + \tau\varphi_i^j$$

ანუ

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad 0 < i < N,$$
$$y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0.$$

ახლა ვისარგებლოთ პირველი თავის §5-ის მე-3 თეორემით:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + A_{i+1} y_{i+1} = -F_i,$$

$$C_i = A_i + A_{i+1} + D_i, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = y_N = 0$$

ამოცანის ამოხსნისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\|y\|_C \le \left\|\frac{F}{D}\right\|_C.$$

ჩვენ შემთხვევაში $A_i = A_{i+1} = \tau/h^2$, $D_i = 1$,

$$\|y^{k+1}\|_C \le \|F^k\|_C \le \|y^k\|_C + \tau\|\varphi^k\|_C. \tag{26}$$

აქედან ავჯამაეთ რა k-ს მიმართ, $k = 0, 1, ..., j-1$, მივიღებთ (25) შეფასებას, ამრიგად, წმინდა არაცხადი სქემა უპირობოდ მდგრადია, ე. ი. ნებისმიერი τ და h-სთვის. ნებისმიერი σ-ს შემთხვევაში სხვაობიან განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\sigma\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j,$$

$$0 < i < N, \quad y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0,$$

$$F_i^j = \left(1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j.$$

აქედან ჩანს, რომ y_i^j-თან მდგომი კოეფიციენტი არაუარყოფითია, თუ

$$\tau \le \frac{h^2}{2(1-\sigma)}, \quad \text{ანუ} \quad \sigma \ge 1 - \frac{h^2}{2\tau}. \tag{27}$$

ამ პირობების დროს $\|F\|_C \le \|y\|_C + \tau\|\varphi\|_C$, თუ ამის შემდეგ ვისარგებლებთ I თავის §5-ის მე-3 თეორემით, მივიღებთ (25) შეფასებას (27) პირობების დროს. კერძოდ, სიმეტრიული სქემა მდგრადია C-ში, თუ $\tau \le h^2$. ფაქტიურად კი (17) სქემა $\sigma \ge 1/2$ დროს უპირობოდ მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ C-ში, ასე, რომ

$$\|y^j\|_C \le M_0\|y^0\|_C,$$

სადაც $M_0 = \mathrm{const} > 1$, მაგრამ ეს უტოლობა საკმარისად რთული ხერხით მტკიცდება.

ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ სხვა ნორმაში სქემის (წონებით) მდგრადობის პირობას ექნება შემდეგი სახე

$$\sigma \ge \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \tag{28}$$

ასე, რომ სქემა, როცა $\sigma \ge 1/2$, უპირობოდ მდგრადია, ხოლო, როცა $\sigma < 1/2$, (27)-ის ნაცვლად ისმება მდგრადობის პირობა

$$\tau \le \frac{h^2}{4(1/2-\sigma)}. \tag{29}$$

აღნიშნული (29) შემდეგი მიიღება მდგრადობის ზოგადი თეორიის საფუძველზე.

I თავის §4-ის ანალოგიურად შემოვიღოთ A ოპერატორი:

$$Ay = -\Lambda \mathring{y}, \quad y \in \Omega_{N-1}, \quad \mathring{y} \in \mathring{\Omega},$$

სადაც $\mathring{\Omega}_{N+1}$ – ისეთ $\mathring{y}$ ფუნქციათა სიმრავლეა, რომლებიც განსაზღვრულია $\overline{\omega}_h = \{x_i\colon\ x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,N,\ h = 1/N\}$ ბადეზე და ნულის ტოლია საზღვარზე, როცა $i = 0, N$, ხოლო y არის ω_h ბადის, $x \in \omega_h = \{x_i\colon x_i = ih,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ h = 1/N\}$ შიდა კვანძებზე განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლე.

კანონიკური სახით ჩავწეროთ სქემა წონებით:

$$Bz_t + Az = \psi(t), \quad t \in \overline{\omega}_h, \quad z(0) = 0, \quad B = E + \sigma\tau A. \tag{30}$$

ამისათვის საკმარისია (18)-ში ჩავსვათ გამოსახულება

$$z^{(\sigma)} = \sigma\hat{z} + (1-\sigma)z = z + \sigma(\hat{z} - z) = z + \sigma\tau z_t.$$

A ოპერატორი, როგორც I თავში იყო ნაჩვენები, თვითშეუღლებული და დადებითია: $A = A^* > 0$, თუ სკალარულ ნამრავლს H-ში განვსაზღვრავთ ფორმულით

$$(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h\,.$$

(30) სქემის მდგრადობა გამოკვლეულია V თავში, სადაც ნაჩვენებია, რომ (30) სქემა მდგრადია H_A-ში, როცა

$$\sigma \ge \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}\,. \tag{31}$$

მოცემულ შემთხვევაში $\|A\| = \dfrac{4}{h^2}\cos^2\dfrac{\pi h}{2}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ (7) სქემა მდგრადია ნებისმიერი τ და h-სთვის, თუ $\sigma \ge$ $\ge 1/2$. თუ $\sigma < 1/2$, მაშინ სქემა მდგრადია, როცა

$$\tau \le \frac{1}{(1/2-\sigma)\|A\|}\,.$$

ჩავსვათ აქ $\|A\| \approx 4/h^2$, მივიღებთ

$$\tau \le \frac{h^2}{4(1/2-\sigma)} \quad \text{და} \quad 4(1/2-\sigma)\tau \le h^2.$$

კერძოდ, როცა $\sigma = \sigma_*$, გვაქვს $4(1/2 - \sigma_*)\tau = h^2/3 < h^2$, ე. ი. აპროქსიმაციის გაუმჯობესებული რიგის მქონე სქემა უპირობოდ მდგრადია.

6. სქემის კრებადობა. (17) სქემის კრებადობის დასამტკიცებლად საჭიროა, (30) ამოცანისათვის აპრიორული შეფასება მივიღოთ. z-სთვის ვისარგებლოთ უტოლობით, რომელიც სქემათა კრებადობის გამოკვლევისას V თავში იყო მიღებული. ამ უტოლობის თანახმად (30) და (18)-ისათვის სამართლიანია ცდომილების შეფასება

$$\|z^j\|_A \le \sum_{k=0}^{j-1} \tau\|\psi^k\|, \quad \text{როცა} \quad \sigma \ge 0, \ \ \sigma \ge \sigma_0. \tag{32}$$

ჩავსვამთ რა აქ $Az = \overset{\circ}{z}_{\bar{x}x}$, ვიპოვით

$$\|z\|_A^2 = (Az, z) = -(\overset{\circ}{z}_{\bar{x}x}, \overset{\circ}{z}) = (\overset{\circ}{z}_{\bar{x}}, \overset{\circ}{z}_{\bar{x}}] = \sum_{i=1}^{N} h(z_{\bar{x},i})^2$$

ვისარგებლოთ შეფასებით

$$\|z\|_C = \max_{x\in\omega_h}|z| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} h(z_{\bar{x},i})^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\|z\|_A$$

მივიღებთ

$$\|z^j\|_C \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\tau\|\psi^k\|, \tag{33}$$

ე. ი. (17) სქემა კრებადია C ბადურ ნორმაში სიჩქარით

$$\|y^j - u^j\|_C = \|z^j\|_C = O(h^2 + \tau) \text{ , როცა } \sigma \ne 1/2,\ \sigma \ge \sigma_0,$$

$$\|z^j\|_C = O(h^2 + \tau^2) \text{ , } \sigma = 1/2. \text{ თუ } \sigma_* \ge 0, \text{ ე. ი. } \tau \ge h^2/\sigma,$$

მაშინ $\sigma = \sigma_*$ სქემისთვისაც სამართლიანია (33) შეფასება და

$$\|z^j\|_C = O(h^4 + \tau^2) \text{ , როცა } \sigma = \sigma_*.$$

7. ასიმპტოტური მდგრადობა. (5) ამოცანის საწყისი მონაცემების მიმართ ასიმპტოტური (როცა $t \to \infty$) მდგრადობის თვისება გამოისახება (9) შეფასებით. t-ს დიდი მნიშვნელობებისათვის (5) ამოცანის ამოხსნა განისაზღვრება პირველი ჰარმონიკით

$$u(x,t) \approx c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x)$$

(რეგულარული რეჟიმი). ბუნებრივია, მოვითხოვოთ, რომ სხვაობიანი ამოცანის

$$y_t = \sigma\Lambda\hat{y} + (1-\sigma)\Lambda y; \quad x = ih, \quad t = j\tau,$$
$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad j = 0,1,\dots, \tag{34}$$
$$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad y(x,0) = u_0(x),$$

ამოხსნას ანალიზური თვისებები ჰქონდეს.

V თავში ოპერატორულ-სხვაობიანი სქემებისათვის წონით

$$By_t + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad B = E + \sigma\tau A.$$

$$\delta E \le A \le \Delta E, \quad \delta > 0, \quad A = A^* > 0.$$

დადგენილია ასიმპტოტური მდგრადობა

$$\|y^j\| \le e^{-\delta t_j}\|\overset{\circ}{y}\|$$

წონებიანი სქემებისათვის შემდეგ დამატებით პირობებში

$$\tau \le \tau_0(\sigma),$$

სადაც $\tau_0 = 2/(\delta + \Delta)$ ცხადი სქემისათვის ($\sigma = 0$), $\tau \to \infty$ (τ ნებისმიერია) არაცხადი სქემისათვის ($\sigma = 1$) და $\tau_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$ სიმეტრიული სქემისათვის ($\sigma = 1/2$), (34) სქემისათვის გვაქვს

$$\delta = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}, \quad \delta + \Delta = \frac{4}{h^2}.$$

ცხადი სქემისათვის ($\sigma = 0$) $\tau_0 = h^2/2$ და ასიმპტოტური მდგრადობის პირობა ჩვეულებრივი მდგრადობის პირობას ემთხვევა, არაცხადი სქემა $\sigma = 1$ კვლავ უპირობოდ მდგრადია, მაგრამ სიმეტრიული სქემა, $\sigma = 1/2$, რომელიც მდგრადია ჩვეულებრივი აზრით, ასიმპტოტურად მდგრადია, როცა სრულდება პირობა

$$\tau \le \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{h^2}{\sin \pi h} \approx \frac{h}{\pi}.$$

ამ შემთხვევაში (34) სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა ($\sigma = 1/2$-სათვის) t-ს დიდი მნიშვნელობებისათვის განისაზღვრება პირველი ჰარმონიკით:

$$y_i^j \approx c_1\rho^j \sin\pi x_i \approx c_1 e^{-\lambda_1 t_j} \sin\pi x_i\,.$$

აქ

$$\rho = (1-1/2\tau\delta)/(1+1/2\tau\delta) = e^{-\lambda_1\tau}(1+O(\tau^2))\,.$$

თუ $\tau \le \tau_0$ პირობა დარღვეულია, ე. ი. $\tau > \tau_0$, მაშინ t-ს დიდი მნიშვნელობებისათვის ჭარბობს არა პირველი, არამედ უკანასკნელი ჰარმონიკა:

$$y_i^j \approx c_1\rho^j \sin\pi(N-1)x_i \approx c_1\rho^j(-1)^i \sin\pi x_i\,,$$

სადაც $\rho = \dfrac{1/2\tau\Delta - 1}{1/2\tau\Delta + 1} < e^{-\lambda_1\tau}$ რასაც, რა თქმა უნდა, არავითარი კავშირი არა აქვს დიფერენციალური განტოლების ამოხსნასთან.

ასიმპტოტური მდგრადობის მოთხოვნა მჭიდროდ არის დაკავშირებული სქემის სიზუსტესთან და ფაქტობრივად ასიმპტოტური სიზუსტის მოთხოვნასაც ნიშნავს. ეს განსაკუთრებით ნათლად იჩენს თავს რეალურ ბადეებზე გათვლების დროს დიდი t-ებისათვის. შევნიშნოთ, რომ სიმეტრიული სქემისათვის $\tau \approx h/\pi$ პირობა არ არის დამამძიმებელი პირობა. მტკიცდება, რომ წმინდა არაცხად სქემას ($\sigma = 1$) დიდი t-ებისათვის შეიძლია უზრუნველყოს მისაღები სიზუსტე მხოლოდ ისეთი τ ბიჯისათვის, რომელიც ცხადი სქემის ბიჯის სადარია. ეს კი დიდი t-ებისათვის გამოთვლების ჩატარების დროს წმინდა არაცხად სქემას უკარგავს მის ძირითად უპირატესობას — მდგრადობას ნებისმიერი τ და h-სთვის.

§2. სითბოგამტარებლობის მრავალგანზომილებიანი ამოცანები

1. **სხვაობიანი სქემები წონებით.** $x=(x_1,x_2)$ სიბრტყე-ზე განვიხილოთ G არე Γ საზღვრით. ვეძიოთ სითბოგამტარებლობის ამოცანის ამოხსნა არეში $\overline{G}=G+\Gamma$ ყველა t-სთვის, $0\le t\le T$. საძიებელია ისეთი $u(x,t)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0,T]=\{(x,t):\ x\in G,\ 0\le t\le T\}$ ცილინდრში და $Q_T=G\times[0,T]=\{(x,t):\ x\in G,\ 0<t\le T\}$ არეში აკმაყოფილებს სითბოგამტარებლობის განტოლებას

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x,t),\quad Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\tag{1}$$

G არის Γ საზღვარზე კი აკმაყოფილებს პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებს

$$u=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad 0\le t\le T,\tag{2}$$

და საწყის პირობებს, როცა $t=0$:

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}.\tag{3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\overline{G}$ მართკუთხედია:

$$\overline{G}=\{x=(x_1,x_2):\ 0\le x_1\le \ell_1,\ 0\le x_2\le \ell_2\}.$$

$\overline{G}$-ში შემოვიღოთ მართკუთხა ბადე

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=(ih_1,ih_2),\ i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha,\ h_\alpha=\ell_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=1,2\}$$

საზღვრით

$$\gamma_h=\{x_i=(i_1h_1,\ i_2h_2):\ i_1=0,N_1,\ 0<i_2<N_2;\ i_2=0,N_2,\ 0<i_1<N_1\}.$$

მოვახდინოთ $Lu=\Delta u$ ლაპლასის ოპერატორის სხვაობიანი ოპერატორით აპროქსიმაცია ხუთწერტილიან შაბლონზე (იხ. თავი VI, §1)

$$Lu \sim \Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}$$

(1)-(3) ამოცანა შევცვალოთ დიფერენციალურ-სხვაობიანი ამოცანით (წრფეთა მეთოდით):

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \Lambda v_i(t) + f_i(t), \quad i=(i_1,i_2), \quad v_i(0)=u_0(x_i),$$
$$x_i \in \omega_h, \quad v_i(t)\Big|_{\gamma_h} = \mu_i(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

$0 \le t \le T$ შუალედზე შემოვიტანოთ $\omega_\tau = \{t_j = j\tau:\ 0 \le t_j \le T\}$ ბადე τ ბიჯით. დავწეროთ სქემა წონებით

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j) + \varphi^j, \quad j=0,1,\dots \tag{5}$$

სადაც

$$y^j = y(x_i, t_j) = y(i_1h_1, i_2h_2; t_j), \quad x=(i_1h_1, i_2h_2) \in \omega_h.$$

(5) განტოლებას დავურთოთ პირობები

$$y(x,0)=u_0(x), \quad x=(i_1h_1, i_2h_2) \in \overline{\omega}_h,$$
$$y(x_i,t) = \mu_i(t), \quad x \in \gamma_h, \quad t = j\tau \in \overline{\omega}_h. \tag{5'}$$

აქედან ჩანს, რომ ახალ $t=t_{j+1}$ შრეზე $\hat{y}=y^{j+1}$-ის განსაზღვრისათვის უნდა ამოვხსნათ სხვაობიანი განტოლება

$$\hat{y} - \sigma\tau\Lambda\hat{y} = F, \quad F = y + (1-\sigma)\tau\Lambda y + \tau\varphi, \quad x \in \omega_h,$$
$$\hat{y} = \mu, \quad x \in \gamma_h. \tag{6}$$

ამ ამოცანის ამოხსნადობა იქიდან გამომდინარეობს, რომ $(E-\sigma\tau\Lambda)$ ოპერატორი დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია, როცა $\sigma > -1/(\tau\|A\|)$, რადგანაც $(E-\sigma\tau\Lambda)\overset{\circ}{y} = (E+\sigma\tau A)y$ $\overline{\omega}_h$ ბადეზე განსაზღვრულ იმ $\overset{\circ}{y}$ ფუნქციათა სივრცეში, რომლებიც ნულდება γ_h საზღვარზე (იხ. თავი VI). ვაჩვენოთ ეს.

შემოვიღებთ რა სკალარულ ნამრავლს

$$(y,v)=\sum_{x_i\in\omega_h} y(x_i)v(x_i)h_1h_2=$$
$$=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}h_1\sum_{i_2=1}^{N_2-1}h_2y(i_1h_1,i_2h_2)v(i_1h_1,i_2h_2) \tag{7}$$

და გაეითვალისწინებთ, რომ $(Ay,y)\le\|Ay\|\,\|y\|\le\|A\|\,\|y\|^2$, ვიპოვით

$$\left((E-\sigma\tau\Lambda)\overset{\circ}{y},\overset{\circ}{y}\right)=\left((E+\sigma\tau A)y,y\right)=\|y\|^2+\sigma\tau(Ay,y)\ge$$
$$\ge\left(\frac{1}{\|A\|}+\sigma\tau\right)(Ay,y)>0,$$

რადგან $(Ay,y)\ge\delta\|y\|^2>0$ (იხ. VI თავი, §1, მე-5 პუნქტი).

სხვაობიანი განტოლება ჩავწეროთ დაწერილებით, ინდექსური სახით

$$\sigma\gamma_1(\hat{y}_{i_1-1,i_2}+\hat{y}_{i_1+1,i_2})-(1+2\sigma(v_1+v_2))\hat{y}_{i_1i_2}+$$
$$+\sigma\gamma_2(\hat{y}_{i_1,i_2-1}+\hat{y}_{i_1,i_2+1})=-F_{i_1i_2}, \tag{8}$$

სადაც

$$y_{i_1i_2}=y(i_1h_1,i_2h_2),\quad v_1=\tau/h_1^2,\quad v_2=\tau/h_2^2,$$
$$F_{i_1i_2}=(1-2(1-\tau)(v_1+v_2))y_{i_1i_2}+(1-\sigma)v_1(y_{i_1-1,i_2}+y_{i_1+1,i_2})+$$
$$+(1-\sigma)v_2(y_{i_1,i_2-1}+y_{i_1,i_2+1})+\varphi_{i_1i_2},$$
$$\hat{y}_{i_1i_2}=\hat{\mu}_{i_1i_2},\quad x_i=(i_1h_1,i_2h_2)\in\gamma_h.$$

ეს სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანა $\hat{y}$-ის მიმართ იგივე მეთოდებით იხსნება, რითაც დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის (იხ. VI თავი, §2). აქ განტოლების კოეფიციენტები მუდმივებია, $\overline{G}$ არე მართკუთხედია, ამიტომ (8) განტოლების

ამოსახსნელად უფრო ეკონომიურია პირდაპირი მეთოდები. იტერაციული მეთოდები ნაკლებად ეკონომიურია.

2. მდგრადობა და კრებადობა. ვისარგებლებთ რა ზემოთ (VI თავში) განსაზღვრული A ოპერატორით:

$$Ay = -\Lambda \overset{\circ}{y} = -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \overset{\circ}{y} \in \overset{\circ}{\Omega}, \quad y \in \Omega = H,$$

(5) სქემას ჩავწერთ კანონიკური სახით:

$$B\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j, \quad j = 0,1,\ldots, \quad y^0 = u_0, \quad y \in H, \tag{9}$$

$$B = E + \sigma\tau A.$$

A ოპერატორი შესწავლილია VI თავში. იგი თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრულია $H = \Omega$ სივრცეში, რომლის განზომილებაა $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$,

$$A = A^*, \quad \delta_0 E \le A \le \Delta_0 E,$$

სადაც

$$\delta_0 = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2};$$
$$\Delta_0 = \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2\ell_1} + \frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2\ell_2}, \quad \Delta_0 = \|A\|. \tag{10}$$

ზოგადი თეორიის ძალით (იხ. V თავი) (9) სქემა მდგრადია H_A-ში, როცა

$$\sigma \ge \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \tag{11}$$

კერძოდ, ცხადი სქემისათვის გვაქვს პირობა

$$\tau \le \frac{2}{\Delta_0}, \quad \text{ანუ} \quad \tau < \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right)^{-1} \tag{12}$$

კვადრატულ ბადეზე ($h_1 = h_2 = h$) ცხადი სქემის მდგრადობის პირობას აქვს სახე

$$\tau < h^2/4.$$

(შეადარეთ $\tau < h^2/2$ პირობას ერთგანზომილებიანი ამოცანის შემთხვევისათვის). (11)-დან ჩანს, რომ სქემა, რომლისთვისაც

$$\sigma \geq 1/2,$$

მათ შორის წმინდა არაცხადი ($\sigma = 1$) და სიმეტრიული ($\sigma = 1/2$) უპირობოდ მდგრადია. ცხადი სქემა ($\sigma = 0$) შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ

$$\begin{aligned} y_{i_1 i_2}^{j+1} = (1 - 2(\gamma_1 + \gamma_2)) y_{i_1 i_2}^{j} + \gamma_1 (y_{i_1 - 1, i_2}^{j} + y_{i_1 + 1, i_2}^{j}) + \\ + \gamma_2 (y_{i_1, i_2 - 1}^{j} + y_{i_1, i_2 + 1}^{j}) + \tau \varphi_{i_1 i_2}^{j}. \end{aligned} \tag{13}$$

(12)-ის მარჯვენა მხარეში y-თან მდგომი კოეფიციენტების ჯამი ერთის ტოლია. თუ ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითია, ე. ი. სრულდება (12)-ის ეკვივალენტური პირობა $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1/2$, $\gamma_1 = \tau/h_1^2$, $\gamma_2 = \tau/h_2^2$, მაშინ (13)-დან გამომდინარეობს უტოლობა

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau\|\varphi^j\|_C.$$

თუ ავჯამავთ k-ს მიმართ, $k = 0, 1, \ldots, j - 1$, მივიღებთ შეფასებას (შედარეთ §1-ს)

$$\|y^j\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{k=0}^{j-1} \tau \|\varphi^k\|_C, \tag{14}$$

რომელიც სამართლიანია წმნიდა არაცხადი სქემისათვის ($\sigma = 1$) ბადის ნებისმიერი ბიჯის შემთხვევაში. ყველა დანარჩენ შემთხვევაში (14) შეფასებას ადგილი აქვს, როცა $\sigma \geq 1 - 1/(\tau\Delta_0)$. კრებადობის დამტკიცებისათვის, ჩვეულებრივ, საჭიროა გამოვიკვლიოთ შეუსაბამობა

$$\psi = \Lambda(\sigma\hat{u} + (1 - \sigma)u) + \varphi - u_t.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Lambda u = Lu + O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, ერთიგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად ვიპოვით

$$\psi = O(|h|^2 + \tau^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) O(\tau).$$

$z = y - u$ ცდომილებისათვის გვაქვს ამოცანა

$$B\frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} + Az^j = \psi^j, \quad j = 0,1,\ldots, \quad z^0 = z(0) = 0.$$

აქედან და აპრიორული შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ (5) სქემა კრებადია C-ში $O(\tau + |h|^2)$ სიჩქარით, როცა $\sigma \neq 1/2$ და $O(\tau^2 + |h|^2)$ სიჩქარით, როცა $\sigma = 1/2$ (ერთგანზომილებიანი შემთხვევის სრული ანალოგია), თუ $\sigma \geq 1 - \dfrac{1}{\tau\Delta_0}$.

ამოცანის ამოხსნისათვის V თავში მიღებული შეფასების ძალით სრულდება უტოლობა

$$\|z^{j+1}\|_A \leq \sum_{k=0}^{j} \tau \|\psi^k\|, \text{ როცა } \sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta_0}, \quad \sigma \geq 0,$$

სადაც

$$\|z\|_A^2 = \|z\|_{A_1}^2 + \|z\|_{A_2}^2, \quad A_1 y = -y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad A_2 y = -y_{\bar{x}_2 x_2},$$

$$\|z\|_A^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 (z_{\bar{x}_1}(i_1, i_2))^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_2 (z_{\bar{x}_2}(i_1, i_2))^2.$$

აქედან გამომდინარეობს (5) სქემის უპირობოდ მდგრადობა და კრებადობა H_A-ში $O(\tau + |h|^2)$ სიჩქარით, როცა $\sigma \neq 1/2$, $\sigma \geq 1/2$ და $O(\tau^2 + |h|^2)$ სიჩქარით, როცა $\sigma = 1/2$.

ზემოთ მოყვანილი გამოკვლევა უნდა შევავსოთ ასიმპტოტური მდგრადობის პირობებით. ეს პირობები $\tau \leq \tau_0$ მიღებული იყო ოპერატორულ-სხვაობიანი სქემისათვის (წონებით) ნებისმიერი ოპერატორით

$$A = A^* > 0, \quad \delta_0 E \le A \le \Delta_0 E,$$

ამიტომ ამ პირობებით სარგებლობა ჩვენი (5) სქემისათვისაც შეიძლება. ვისარგებლოთ (10) გამოსახულებებით δ_0 და Δ_0-სთვის. მივიღებთ ასიმპტოტური მდგრადობის პირობებს $\tau \le \tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(1)} = 2\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}\right)^{-1}$ ცხადი სქემისათვის $(\sigma = 0)$; $\tau \le \tau_0^{(2)}$, $\tau_0^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 \Delta_0}}$, ხოლო δ_0, Δ_0 – (10)-დან – სიმეტრიული $(\sigma = 1/2)$ სქემისათვის.

კერძოდ, როცა $h_1 = h_2 = h$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, გვაქვს

$$\delta_0 = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2\ell}, \quad \Delta_0 = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2\ell},$$

$$\tau_0^{(1)} = \frac{h^2}{4}, \quad \tau_0^{(2)} = \frac{h^2}{2}\left(\sin\frac{\pi h}{\ell}\right)^{-1} \approx \frac{h\ell}{2\pi}.$$

ზღვრული $\tau_0^{(2)}$ მნიშვნელობა ორჯერ მცირეა, ვიდრე ერთგანზომილებიანი (5) სქემისათვის (§1-დან).

წმინდა არაცხადი სქემა $\sigma = 1$ უპირობოდ ასიმპტოტურად მდგრადია.

3. ცვლადი კოეფიციენტი. განვიხილოთ (1) ამოცანა, ამასთან დავუშვათ, რომ L არის მეორე რიგის ელიფსური ოპერატორი ცვალებადი კოეფიციენტებით შერეული წარმოებულების გარეშე:

$$Lu = L_1 u + L_2 u, \quad L_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right),$$

$$L_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right),$$

$$c_1 \le k_\alpha(x,t) \le c_2, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T = G \times (0,T].$$

მოვახდინოთ L_1 და L_2 ოპერატორების აპროქსიმაცია სხვაობიანი სამწერტილიანი ოპერატორით:

$$L_1 \sim \Lambda_1, \quad L_2 \sim \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 v = (a_1 v_{\bar{x}_1})_{x_1}, \quad \Lambda_2 v = (a_2 v_{\bar{x}_2})_{x_2},$$

სადაც $a_1 = a_1(i_1h_1,\ i_2h_2,\ t)$, $a_2 = a_2(i_1h_1,\ i_2h_2,\ t)$ – k_1 და k_2 მნიშვნელობათა რაიმე ფუნქციონალებია, შესაბამისად; უმარტივეს შემთხვევაში $a_1 = k_1((i_1 - 1/2)h_1,\ i_2h_2,\ t)$, $a_2 = k_2(i_1h_1,\ (i_2 - 1/2)h_2,\ t)$ რაც აპროქსიმაციის მეორე რიგს უზრუნველყოფს: $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2)$, $\alpha = 1,2$. L ოპერატორს შევუსაბამოთ სხვაობიანი ოპერატორი Λ:

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = (a_1 v_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 v_{\bar{x}_2})_{x_2}. \tag{15}$$

$\Lambda_1 v$ და $\Lambda_2 v$ ჩავწეროთ ინდექსურ ფორმაში

$$\Lambda_1 v = \frac{1}{h_1}\Big[a_1((i_1+1)h_1, i_2h_2; t)\frac{v_{i_1+1,i_2} - v_{i_1 i_2}}{h_1} -$$

$$- a_1(i_1h_1, i_2h_2; t)\frac{v_{i_1 i_2} - v_{i_1-1,i_2}}{h_1}\Big],$$

$$\Lambda_2 v = \frac{1}{h_2}\Big[a_2(i_1h_1, (i_2+1)h_2; t)\frac{v_{i_1,i_2+1} - v_{i_1 i_2}}{h_2} -$$

$$- a_2(i_1h_1, i_2h_2; t)\frac{v_{i_1 i_2} - v_{i_1,i_2-1}}{h_2}\Big].$$

სხვაობიან სქემას წონებით იგივე (5) სახე აქვს, რაც §1-ში. აიღება იგივე $H = \Omega$ ბადური სივრცე (7) სკალარული ნამრავლით და განისაზღვრება A ოპერატორი:

$$Ay = -\Lambda \overset{\circ}{y} = -(a_1 \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1})_{x_1} - (a_2 \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2})_{x_2}. \tag{16}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ A ოპერატორის ერთგანზომილები-ანი შემთხვევისათვის:

$$c_1(\mathring{A}y,y)\le(Ay,y)\le c_2(\mathring{A}y,y),\quad \mathring{A}y=-\mathring{y}_{\bar{x}x},$$
$$0<c_1\le a\le c_2,$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთივე უტოლობები სრულდება ორგანზომილებიანი (15) ოპერატორისათვისაც:

$$c_1\mathring{A}\le A\le c_2\mathring{A},\quad \mathring{A}y=-\mathring{y}_{\bar{x}_1x_1}-\mathring{y}_{\bar{x}_2x_2}.$$

აქედან ჩანს, რომ $\delta E\le A\le \Delta E$, $\delta=c_1\delta_0$, $\Delta=c_2\Delta_0$, სადაც δ_0 და Δ_0 განისაზღვრება (10) ფორმულებით. ახალ შრეზე $\hat{y}=y^{j+1}$-ის განსაზღვრისათვის ვღებულობთ (6) ამოცანას, სადაც Λ განისაზღვრება (15)-დან. ცხადი სქემის შემთხვევაში $\hat{y}$ ყოველ $x\in\omega_h$ კვანძში განისაზღვრება ფორმულით

$$\hat{y}=y+(1-\sigma)\tau\Lambda y+\tau\varphi.$$

არაცხადი სქემისათვის ($\sigma\ne 0$) უნდა ამოიხსნას ცვალებად კოეფიციენტებიანი ხუთწერტილიანი სხვაობიანი განტოლება. აქ გამოიყენება იტერაციული მეთოდები. მათგან ყველაზე ეკონომიურია ცვალებადსამკუთხა მეთოდი (იხ. V თავი, §6), რომლისთვისაც იტერაციათა რაოდენობა $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{h}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$-ის ტოლია, თუ $\tau\approx O(h)$. ცვალებადკოეფიციენტებიანი სხვაობიანი განტოლებისათვის ცვალებად-სამკუთხა მეთოდის აღწერა მოცემულია VI თავში. (6) განტოლებისათვის (15) სახის Λ ოპერატორით ეს მეთოდი რამდენადმე უნდა შეიცვალოს.

§3. ეკონომიური სქემები

1. ცვალებად მიმართულებათა მეთოდი. შევადაროთ ცხადი და არაცხადი (5) სქემები ორი მახასიათებლის მიხედვით: y^{j+1}-ის გამოსათვლელად საჭირო გამოთვლების მოცულობა და τ ბიჯზე შეზღუდვა.

ცხადი სქემა: ω_h ბადეზე y^{j+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭირო მოქმედებათა რიცხვი კვანძების რაოდენობის პროპორციულია, ე. ი. ერთ კვანძზე მოსული მოქმედებების რაოდენობა ω_h ბადეზე არ არის დამოკიდებული, თუმცა τ ბიჯი მკაცრად შემოსაზღვრულია ზემოდან პირობით $\tau \le \tau_0(h)$: $\tau \le h^2/4$, როცა $h_1 = h_2 = h$ (13) სქემისათვის.

არაცხადი სქემა: ($\sigma \ge 1/2$): y^{j+1}-ის განსაზღვრისათვის საჭიროა ხუთწერტილიანი $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ სხვაობიანი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის ამოხსნა; ამ შემთხვევაში ω_h ბადის ერთ კვანძზე მოსული მოქმედებების რიცხვი იზრდება, როცა $|h| \to 0$, (ცვლადი კოეფიციენტების დროს მაინც).

ისმება ამოცანა — აიგოს სქემები, რომლებშიც შერწყმულია ცხადი და არაცხადი სქემების საუკეთესო თვისებები: უპირობოდ მდგრადი და ბადის ყოველ შრეზე კვანძთა რიცხვის პროპორციული მოქმედებათა რაოდენობით. ასეთ სქემებს ეკონომიურ სქემებს უწოდებენ. ცხადია, უნდა შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი აზრით, უპირობოდ მდგრადი სქემები ასიმპტოტურად მდგრადი უნდა იყოს. ეს იწვევს ბიჯზე შეზღუდვას, თუმცა უფრო სუსტს (მაგალითად, $\tau \lesssim \ell h/(2\pi)$, როცა $\sigma = 1/2$, $h_1 = h_2 = h$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$) ვიდრე მდგრადობის პირობა ($\tau \le h^2/4$) ცხადი სქემისათვის. სიტყვამ მოიტანა და უნდა აღვნიშნოთ, რომ $\tau = O(h)$ პირობა ბუნებრივია $O(\tau^2 + |h|^2)$ სქემისათვის. პირველი ეკონომიური სქემები გამოჩნდა 1955-1956 წლებში და ეწოდა ცვალებად მიმართულებათა მეთოდი. მათი ეკონომიურობის ძირითადი ალგორითმული იდეა ის არის, რომ t_j შრიდან t_{j+1} შრეზე გადასვლისათვის უნდა ამოიხსნას სამწერტილიანი სხვაობიანი განტოლებები ფაქტორიზაციის მეთოდით ω_h ბადის ჯერ სტრიქონების, ხოლო შემდეგ — სვეტების გასწვრივ.

მოვიყვანოთ ცვალებად მიმართულებათა მეთოდის (პისმენ-რეკფორდის განწვრივ-განივი სქემის) ფორმულები (1) ამოცანისათვის L ოპერატორით: $Lu = L_1u + L_2u$, სადაც L_α ერთ-ერთია შემდეგი ოპერატორებიდან:

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \text{ ანუ } L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad \alpha = 1,2.$$

ვთქვათ, Λ_1, Λ_2 – შესაბამისი სამწერტილიანი ოპერატორებია და $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. შემოვიღებთ რა შუალედურ $\bar{y} = y^{j+1/2}$ მნიშვნელობას, ცვალებად მიმართულებათა სხვაობიან სქემას შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბებთ:

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau/2} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1/2} = \bar{\mu}, \tag{1}$$

$$\text{როცა} \quad i_1 = 0, N_1,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi^j, \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1} = \mu^{j+1}, \tag{2}$$

$$\text{როცა} \quad i_2 = 0, N_2, \quad y^0 = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

სადაც $\bar{\mu}$ – $\mu(x, t)$ ფუნქციის საშუალედო მნიშვნელობაა და ტოლია

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^j + \mu^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu^{j+1} - \mu^j).$$

$y^{j+1/2}$ და y^{j+1}-ის განსაზღვრისათვის გვაქვს სხვაობიანი სასაზღვრო ამოცანები:

$$\begin{gathered} 0{,}5\tau\Lambda_1 y^{j+1/2} - y^{j+1/2} = -F^j, \\ F^j = y^j + 0{,}5\tau(\Lambda_2 y^j + \varphi^j), \quad x \in \omega_h, \\ y^{j+1/2} = \bar{\mu}, \quad i_1 = 0, N_1, \\ 0{,}5\tau\Lambda_2 y^{j+1} - y^{j+1} = -F^{j+1/2}, \\ F^{j+1/2} = y^{j+1/2} + 0{,}5\tau(\Lambda_1 y^{j+1/2} + \varphi^j), \quad x \in \omega_h, \\ y^{j+1} = \mu^{j+1}, \quad i_2 = 0, N_2. \end{gathered} \tag{3}$$

პირველი ამოცანა იხსნება ფაქტორიზაციის სტრიქონების მიმართ, ($i_2 = 1,2,\ldots,N_2 - 1$), მეორე კი – იგივე მეთოდით სვეტების მიმართ ($i_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1$). ერთ კვანძზე მოსული მოქმედებათა რაოდენობა სასრულია და ბადეზე არ არის დამოკიდებული.

(3) სქემა მდგრადია როგორც საწყისი პირობების, ასევე მარჯვენა მხარის მიმართ ნებისმიერი τ და $|h|$-სთვის და აქვს $O(\tau^2 + |h|^2)$ სიზუსტე. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გამოვრიცხავთ $y^{j+1/2}$-ს და (1), (2) სქემას დავიყვანთ ეკვივალენტურ ორშრიან სქემაზე B_j ფაქტორიზირებული ოპერატორით:

$$B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+Ay^j=\Phi^j, \quad j=0,1,\ldots, \quad y^0=u_0\in H,$$

$$B=\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right), \quad A_\alpha y=-\Lambda_\alpha \overset{\circ}{y}=-\overset{\circ}{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha=1,2, \tag{4}$$

სადაც $H = \Omega - \omega_h$ ბადის შიგა კვანძებზე განსაზღვრული ბადური ფუნქციების სივრცეა.

ცხადია, რომ $A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1,2, \quad A_1A_2 = A_2A_1$. ამიტომ $B = E + \tau A/2 + \tau^2 A_1A_2/4 \geq E + \tau A/2 > \tau A/2$, და სქემა მდგრადია.

2. ფაქტორიზირებული სქემები. B ოპერატორს, რომელიც წარმოდგენილია ოპერატორის ნამრავლის სახით: $B = B_1B_2\ldots B_p$ ვუწოდოთ ფაქტორიზებული, ხოლო შესაბამის სქემას:

$$B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+Ay^j=\Phi^j, \quad j=0,1,\ldots, \quad y^0=y(0), \tag{5}$$

ფაქტორიზებული.

თუ

$$B_\alpha v=F_\alpha, \quad \alpha=1,2,$$

ამოცანის ამოხსნისთვის, მოცემული F_α მარჯვენა მხარით, საჭიროა $O(N_1N_2)$ მოქმედება, მაშინ ცნობილი y^j-ის მიხედვით y^{j+1}-ის საპოვნელადაც $O(N_1N_2)$ მოქმედება იქნება საჭირო (B_α ოპერატორი „ეკონომიურია“). რადგან

$$By^{j+1} = B_1B_2y^{j+1} = F^j,$$

ალგორითმი დადის

$$B_1y^{j+1/2} = F^j, \quad B_2y^{j+1} = y^{j+1/2}$$

განტოლებების თანმიმდევრულ ამოხსნაზე. ორშრიანი სქემების მდგრადობის თეორიაზე დაყრდნობით, წონებიანი სქემებიდან გამომდინარე, ძნელი არ არის ეკონომიური ფაქტორიზებული სქემის აგება (რეგულარიზაციის მეთოდით).

ამრიგად, ვთქვათ,

$$A = A_1 + A_2, B = E + \sigma\tau A = E + \sigma\tau(A_1 + A_2),$$

$$A_1 = A_1^*, \quad A_2 = A_2^*.$$

მაშინ (9) სქემა §2-დან მდგრადია, როცა $\sigma \geq \sigma_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\tau\|A\|}$. (9)

სქემაში B ოპერატორი შევცვალოთ ფაქტორიზებული ოპერატორით $\widetilde{B} = (E + \sigma\tau A_1)(E + \sigma\tau A_2)$, რომელიც B-სგან $\sigma^2\tau^2A_1A_2$ წევრით განსხვავდება

$$\widetilde{B} = B + \sigma^2\tau^2A_1A_2.$$

ამის შედეგად მივიღებთ ფაქტორიზებულ სქემას

$$\widetilde{B}\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \Phi^j, \quad j = 0,1,\ldots, \quad y^0 = u_0 \in H, \qquad (6)$$

აპროქსიმაციის იმავე $O((\sigma - 1/2)\tau + \tau^2)$ რიგით, რაც ჰქონდა ამოსავალ წონებიან სქემას. რადგან ამოსავალი წონებიანი სქემა მდგრადია ($\sigma \geq \sigma_0$), ამიტომ ფაქტორიზებული (6) სქემაც მდგრადია

$$\widetilde{B} > B \geq \tau A/2,$$

პირობის ძალით. ეს უკანასკნელი სამართლიანია, თუ A_1 და A_2 გადაადგილებადია და $A_\alpha^* = A_\alpha > 0, \quad \alpha = 1,2$.

y^{j+1}-ის საპოვნელად ვღებულობთ განტოლებას $\widetilde{B}y^{j+1} = F^j$ ანუ

$$(E+\sigma\tau A_1)(E+\sigma\tau A_2)y^{j+1}=F^j,$$
$$F^j=\widetilde{B}y^j+\tau(\Phi^j-Ay^j),$$

რომელიც შემდეგი მიმდევრობით იხსნება:

$$(E+\sigma\tau A_1)\overline{y}=F^j,\quad (E+\sigma\tau A_2)y^{j+1}=\overline{y}$$

(შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით). უფრო ეკონომიურია შემდეგი ალგორითმი (ეკონომია ხდება F^j მარჯვენა მხარეების გამოთვლის ხარჯზე):

$$(E+\sigma\tau A_1)w^{j+1/2}=F^j=\Phi^j-Ay^j,$$
$$(E+\sigma\tau A_2)w^{j+1}=w^{j+1/2},\quad y^{j+1}=y^j+\tau w^{j+1}. \tag{7}$$

მაგრამ ამ დროს უნდა შევინახოთ არა ერთი, არამედ ორი ვექტორი ($w^{j+1/2}$ ან w^{j+1} და y^j). როცა $\sigma=1$ (7)-დან გამომდინარეობს ცვალებად მიმართულებიანი მეორე სქემა (დუგლას-რეკფორდის სქემა)

$$\frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}+A_1y^{j+1/2}+A_2y^j=\Phi^j,$$
$$(E+\tau A_2)\frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau}=\frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}.$$

3. **ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდი.** ამოცანათა ფართო კლასისათვის (განტოლებები ცვალებადი კოეფიციენტებით, რთული ფორმის არეები და ა. შ.) ეკონომიური სქემები რომ მივიღოთ, აუცილებელია სხვაობიანი სქემის ცნების შეცვლა.

უარი ვთქვათ აპროქსიმაციის ჩვეულებრივ განმარტებაზე, რომელიც ზემოთ განვიხილეთ და შევცვალოთ იგი ჯამური აპროქსიმაციის უფრო სუსტი ცნებით. ავხსნათ ეს. ვთქვათ, j შრიდან $j+1$ შრეზე გადასვლა ხორციელდება რამდენიმე საფეხურად, ყოველ მათგანზე გამოიყენება ჩვეულებრივი ორშრიანი სქემა, რომელიც ამოსავალი განტოლების აპროქსიმაციას არ ახდენს, მაგრამ შეუსაბამობათა ჯამი ყოველი შუალედური სქემისათვის

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha \tag{8}$$

მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა t ცვლადის მიმართ τ ბიჯი მიისწრაფის ნულისაკენ.

ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდის იდეა შეიძლება გადმოვცეთ კოშის ამოცანის მაგალითზე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\frac{du}{dt} + au = f(x), \quad t > 0, u(0) = u_0, \tag{9}$$

სადაც $a > 0$ – რიცხვია. ვიგულისხმოთ, რომ

$$a = a_1 + a_2,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0, \qquad f(t) = f_1(t) + f_2(t). \tag{10}$$

ცხადია, რომ ასეთი წარმოდგენა ყოველთვის არის შესაძლებელი.

შემოვიღოთ ბადე $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots\}$ და ყოველ $(t_j,\ t_{j+1})$ ბიჯზე (9)-ის მაგივრად მიმდევრობით ამოვხსნათ ორი განტოლება

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dv_{(1)}}{dt} + a_1 v_{(1)} = f_1(t), \quad t_j \le t \le t_{j+1/2} = t_j + \frac{\tau}{2}, \\ \frac{1}{2}\frac{dv_{(2)}}{dt} + a_2 v_{(2)} = f_2(t), \quad t_{j+1/2} \le t \le t_{j+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

საწყისი მონაცემებით

$$v_{(1)}(t_j) = v(t_j),\ v_{(2)}(t_{j+1/2}) = v_{(1)}(t_{j+1/2}),\ \ j = 0, 1, \ldots,\ \ v_{(1)}(0) = u_0. \tag{12}$$

(11)-(12) ამოცანის ამოხსნას წარმოდგენს ფუნქცია

$$v(t) = v_{(2)}(t). \tag{13}$$

(11) სისტემის თითოეული განტოლების აპროქსიმირება მოვახდინოთ ორშრიანი სხვაობიანი სქემით, ბიჯით $\tau/2$. მაგალითად, ავიღოთ არაცხადი სქემა

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} + a_1 y^{j+1/2} = f_1^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} + a_2 y^{j+1} = f_2^j. \tag{14}$$

(11) სქემებისათვის გამოვითვალოთ ψ_1 და ψ_2 შეუსაბამობები. ჩავსვათ (11)-ში

$$y^j = z^j + u^j, \quad y^{j+1/2} = z^{j+1/2} + u^{j+1/2}, \quad y^{j+1} = z^{j+1} + u^{j+1},$$

$$\frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau} + a_1 z^{j+1/2} = -\psi_1^j, \quad \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau} + a_2 z^{j+1} = -\psi_2^j,$$

$$j = 0,1,\ldots, \quad z^0 = 0, \quad \psi_1^j = \frac{u^{j+1/2} - u^j}{\tau} + a_1 u^{j+1/2} - f_1^j,$$

$$\psi_2^j = \frac{u^{j+1} - u^{j+1/2}}{\tau} + a_2 u^{j+1} - f_2^j.$$

ჩავსვამთ რა გამოსახულებებს

$$u^{j+1} = (u + \tau \overset{\circ}{u}/2)^{j+1/2} + O(\tau^2), \quad u^j = (u - \tau \overset{\circ}{u}/2)^{j+1/2} + O(\tau^2),$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \psi_1^j &= (\overset{\circ}{u}/2 + a_1 u - f_1)^{j+1/2} + O(\tau), \\ \psi_2^j &= (\overset{\circ}{u}/2 + a_2 u - f_2)^{j+1/2} + O(\tau). \end{aligned} \tag{15}$$

აქედან ჩანს, რომ $\psi_1^j = O(1)$, $\psi_2^j = O(1)$, თუმცა

$$\psi_1^j + \psi_2^j = O(\tau) \to 0, \quad \text{როცა} \quad \tau \to 0. \tag{16}$$

ზემოთ მოყვანილი ყველა მსჯელობა, დაწყებული (10), (11), (14)-დან, ძალაშია, თუ a_1 და a_2 – მატრიცები ან ოპერატორებია, ხოლო u, f, y – ვექტორები.

ამრიგად, (11), (12) სქემა ახდენს (9) ამოცანის აპროქსიმაციას (16) ჯამური აზრით (ასეთ სქემებს ადიტიური სქემები ეწოდება).

(11), (12) სქემების კრებადობის დასამტკიცებლად უნდა მივიღოთ $z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$ ცდომილების შეფასება, რომელიც გაითვალისწინებს ჯამური აპროქსიმაციის (16) თვისებას. დავუშვათ

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{\bullet}{\psi}_\alpha$$

$$\overset{\circ}{\psi}_\alpha = (\overset{\circ}{u}/2 + a_\alpha u - f_\alpha)^{j+1/2}, \quad \overset{\bullet}{\psi}_\alpha = O(\tau), \quad \alpha = 1,2,$$

$$z^{j+1/2} = \eta_{j+1/2} + \xi_{j+1/2}, \quad z^{j+1} = \eta_{j+1} + \xi_{j+1},$$

სადაც η_{j+1}, ξ_{j+1} შემდეგი ამოცანების ამოხსნები არის

$$\eta_{j+1/2} = \eta_j + \tau\overset{\circ}{\psi}_1, \quad \eta_{j+1} = \eta_{j+1/2} + \tau\overset{\circ}{\psi}_2, \quad j = 0,1,\ldots, \quad \eta_0 = 0, \quad (17)$$

$$(1 + a_1\tau)\xi_{j+1/2} = \xi_j + \tau\widetilde{\psi}_1, \quad (1 + a_2\tau)\xi_{j+1} = \xi_{j+1/2} + \tau\widetilde{\psi}_2, \quad j = 0,1,\ldots, \quad (18)$$

$$\xi_0 = 0,$$

$$\widetilde{\psi}_1^j = \overset{\bullet}{\psi}{}_1^j - a_1\tau\eta_{j+1/2}, \quad \widetilde{\psi}_2^j = \overset{\bullet}{\psi}{}_2^j - a_2\tau\eta_{j+1}. \quad (19)$$

აქედან ვპოულობთ $\eta_{j+1} = \eta_j + \tau(\overset{\circ}{\psi}{}_1^j + \overset{\circ}{\psi}{}_2^j) = \eta_j = \cdots = \eta_0 = 0$. ე. ი. $\eta_j = 0$ ყველა j-სთვის, $j = 0,1,\ldots$, და $z^j = \xi_j$.

$$\eta_{j+1/2} = \tau\overset{\circ}{\psi}_1 = O(\tau), \quad \widetilde{\psi}_\alpha = O(\tau). \quad (20)$$

(16)-დან ვღებულობთ

$$|\xi_{j+1/2}| \le |\xi_j| + \tau|\widetilde{\psi}_1^j|,$$

$$|\xi_{j+1}| \le |\xi_{j+1/2}| + \tau|\widetilde{\psi}_2^j| \le |\xi_j| + \tau(|\widetilde{\psi}_1^j| + |\widetilde{\psi}_2^j|),$$

ასე, რომ სამართლიანია შეფასება

$$|z^{j+1}| \le \sum_{k=0}^{j} \tau(|\widetilde{\psi}_1^k| + |\widetilde{\psi}_2^k|), \quad (21)$$

საიდანაც (17)-ის ძალით გამომდინარეობს, რომ (14) ადიტიური სქემა კრებადია $O(\tau)$ სიზუსტით.

(11)-ის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ განტოლებათა სხვა სისტემა:

$$\frac{dv_{(1)}}{dt}+a_1v_{(1)}=f_1(t),\quad t_j\le t\le t_{j+1},\quad v_{(1)}(t_j)=v(t_j),$$

$$\frac{dv_{(2)}}{dt}+a_2v_{(2)}=f_2(t),\quad t_j\le t\le t_{j+1},\quad v_{(2)}(t_j)=v_{(1)}(t_{j+1}),\qquad (22)$$

$$j=0,1,\ldots,\quad v_{(1)}(0)=u_0.$$

ამ ამოცანის ამოხსნას წარმოადგენს ფუნქცია

$$v(t)=v_{(2)}(t).\qquad (23)$$

(11)-სგან განსხვავებით, აქ ორივე განტოლების ინტერპრეტაცია ხდება მთელ $t_j\le t\le t_{j+1}$ მონაკვეთზე. ამიტომ ამ განტოლებების აპროქსიმაცია წარმოებს τ ბიჯით (და არა $\tau/2$-ით, როგორც (11)-ის შემთხვევაში) და მიიღება იგივე (14) სქემა. (9) ამოცანის (11) ან (22) ამოცანათა სისტემაზე დაყვანის ორივე მეთოდი იყენებს ერთი და იმავე თეისებას

$$a=a_1+a_2.\qquad (24)$$

და პირობას $f=f_1+f_2$, რომელიც ყოველთვის შეიძლება დავაკმაყოფილოთ.

მაგალითისათვის განვიხილოთ სითბოგამტარებლობის განტოლება:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x,t),\quad x=(x_1,x_2),\\ Lu=\Delta u=L_1u+L_2u,\quad \ell_\alpha u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,\end{gathered}\qquad (25)$$

L_1 და L_2 – „ერთგანზომილებიანი" ოპერატორებია.

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t}=L_\alpha v_{(\alpha)}+f_\alpha,\qquad (26)$$

განტოლების ამოხსნა, ხცადია, წარმოადგენს უფრო მარტივ ამოცანას, ვიდრე (25) განტოლების ამოხსნა. $L=L_1+L_2$, $f=f_1+f_2$ პი-

რობები უზრუნველყოფენ ჯამურ აპროქსიმაციას სქემისათვის, რომელიც მიიღება ჩვეულებრივი აპროქსიმაციის დროს, მაგალითად, ორშრიანი წონებიანი სქემების საშუალებით სისტემის თითოეული განტოლებისათვის

$$\frac{dv_{(1)}}{\partial t} = L_1 v_{(1)} + f_1, \quad t_j \le t \le t_{j+1}, \quad v_{(1)}^j = v^j,$$

$$\frac{dv_{(2)}}{\partial t} = L_2 v_{(2)} + f_2, \quad t_j \le t \le t_{j+1}, \quad v_{(2)}^j = v_{(1)}^{j+1},$$

ამის შედეგად მივიღებთ ადიტიურ სქემას, ლოკალურად ერთგანზომილებიან სქემას ან გახლეჩის სქემას

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1(\sigma_1 y^{j+1/2} + (1-\sigma_1)y^j) + \varphi_1^j, \quad x \in \omega_h,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\sigma_2 y^{j+1} + (1-\sigma_2)y^{j+1/2}) + \varphi_2^j, \tag{27}$$

$$x \in \omega_h, \quad j = 0,1,\ldots, \quad y^0 = u_0(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$y^{j+1/2}\Big|_{\gamma_h} = \mu^{j+1/2}, \quad y^{j+1}\Big|_{\gamma_h} = \mu^{j+1}.$$

აქ $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}$, $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}$. σ_1 და σ_2 პარამეტრები მდგრადობისა და აპროქსიმაციის პირობებიდან განისაზღვრება. მაგალითად, როცა $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, მივიღებთ სქემას წინ წანაცვლებით

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \varphi_1^j,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2^j, \quad j = 0,1,\ldots$$

ჩავსვამთ რა აქ $y^j = z^j + u^j$, $y^{j+1/2} = z^{j+1/2} + (u^j + u^{j+1})/2$, $y^{j+1} = z^{j+1} + u^{j+1}$, z ცდომილებისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau} = \Lambda_1 z^{j+1/2} + \psi_1^j, \quad \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 z^{j+1} + \psi_2^j,$$

სადაც u – ამოსავალი (25) ამოცანის ამოხსნაა, ψ_1 და ψ_2 – შეუსაბამობებია, ტოლი

$$\psi_1^j = \Lambda_1 \frac{u+\hat{u}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\hat{u}-u}{\tau} + \varphi_1, \quad \psi_2^j = \Lambda_2 \hat{u} - \frac{1}{2}\frac{\hat{u}-u}{\tau} + \varphi_2,$$

$$\hat{u} = u^{j+1}, \quad u = u^j.$$

აქედან ჩანს, რომ $\psi_1 = O(1)$, $\psi_2 = O(1)$. ე. ი. (27)-ის ყოველი განტოლება ცალკე აღებული (25) განტოლების აპროქსიმაციას არ ახდენს. ავიღოთ შეუსაბამობათა ჯამი

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \Lambda_1 \frac{u+\hat{u}}{2} + \Lambda_2 \hat{u} - \frac{\hat{u}-u}{\tau} + \varphi_1 + \varphi_2 =$$

$$= (L_1 + L_2)\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varphi_1 + \varphi_2 + O(\tau + |h|^2),$$

სადაც $\bar{u} = u^{j+1/2}$. თუ მხედველობაში მივიღებთ (25) განტოლებას, როცა $t = t_{j+1/2}$, გვექნება

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 - f^{j+1/2} + O(\tau + |h|^2) = O(\tau + |h|^2),$$

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

თუ

$$\varphi_1 + \varphi_2 = f^{j+1/2} + O(\tau^2).$$

ამის მიღწევა შესაძლებელია, თუ დავუშვებთ, რომ, მაგალითად

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = f^{j+1/2} \quad \text{ან} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = f^j/2.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (27) სქემა თანაბრად კრებადია სიჩქარით

$$O(\tau + |h|^2), \text{ ე. ი. } \|y^{j+1} - u^{j+1}\|_C = O(\tau + |h|^2).$$

მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, რომ ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდი საშუალებას იძლევა შედარებით რთული ამოცანები დავუნაწევროთ უფრო მარტივ ამოცანათა მიმდევრობად, რაც არსებითად ამარტივებს მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნას.

დამატება

მარშ-ალგორითმი და რედუქციის მეთოდი სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად

პრაქტიკაში გვხვდება ბევრი ისეთი გამოყენებითი ხასიათის ამოცანა, რომელთაც მაღალი რიგის სპეციალური სახის (ბევრი ნულოვანი ელემენტის მქონე გაიშვიათებული მატრიცით) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე მივყავართ. ასეთი სისტემები წარმოიშვება ელიფსური განტოლებების სხვაობიანი აპროქსიმაციისა ან არაცხადი სქემების გამოყენების დროს სითბოგამტარებლობის განტოლებისათვის და სხვა.

სამწერტილიან შაბლონზე მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების აპროქსიმაციის შედეგად IV თავში მიღებული იყო მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება, რომელიც $N-1$ რიგის ($N-1$ – შიგა კვანძების რიცხვია) წრფივ ალგებრულ განტოლებათას სისტემას წარმოადგენს სამდიაგონალური მატრიცით. I თავის §3-ში ასეთი სისტემის ამოსახსნელად აგებული იყო მეთოდი, რომლის რეალიზაციისთვისაც $O(N)$ არითმეტიკული ოპერაციაა საჭირო.

ხუთწერტილიან შაბლონზე პუასონის ორგანზომილებიანი ამოცანის აპროქსიმაციის დროს VI თავში მიღებული იყო სხვაობიანი სქემა, რომელსაც შეესაბამება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $N=(N_1-1)\times(N_2-1)$ რიგის (აქ N_1-1, N_2-1 – თითოეული მიმართულებით შიგა კვანძების რაოდენობაა) ხუთდიაგონალური მატრიცით. თუ უცნობების ვექტორს დავშლით N_1-1 ელემენტიან ბლოკებად, სისტემას ჩავწერთ ბლოკურ – სამდიაგონალური მატრიცით, რომლის ბლოკების რიცხვია N_2-1. ასეთი სისტემისათვის VI თავის §2-ში განხილული იყო ცვლადთა

განცალების მეთოდი O(N logN) შეფასებით ოპერაციათა რაოდენობისათვის. ასეთი ტიპის ამოცანების მრავალგზის ამოხსნის დროს დიდ მნიშვნელობას იძენს გამოსათვლელი ალგორითმის ეკონომიურობა.

ქვემოთ აგებული იქნება სამდიაგონალური მატრიცის მქონე სპეციალური სისტემების ამოხსნის მეთოდი. ამ მეთოდისათვის მხოლოდ O(N) ოპერაციაა საჭირო როგორც იმ შემთხვევაში, როცა მატრიცის ელემენტები სკალარებია, ასევე მაშინ, როცა ბლოკური მატრიცა გვაქვს.

1. მარშ-ალგორითმი. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მატრიცის ელემენტები სკალარებია. ჩავწეროთ სისტემა სამდიაგონალური მატრიცით სამწერტილიანი სხვაობიანი ამოცანის სახით:

$$-y_{i-1}+Cy_i-y_{i+1}=F_i, \quad 1\le i\le N-1, \quad y_0=0, \quad y_N=0, \tag{1}$$

სადაც C – რიცხვია და დავუშვათ, რომ $N=2k+1$. თუ მეორე რიგის (1) სხვაობიან განტოლებას ჩავწერთ რეკურენტული თანაფარდობის სახით

$$y_{i+1}=Cy_i-y_{i-1}-F_i, \quad i\ge 1, \quad y_0=0, \tag{2}$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ყველა y_i უცნობი შეიძლება მიმდევრობით ვიპოვოთ (2) ფორმულის მიხედვით, თუ რაიმე ხერხით გამოვთვლით y_1 მნიშვნელობას. ამასთან, ნებისმიერი y_i წრფივად გამოისახება y_0 და y_1-ის საშუალებით. ზემოთქმული საფუძველს გვაძლევს ნებისმიერი i-სთვის, $i\ge 1$, დავწეროთ თანაფარდობა

$$y_{i+1}=\alpha_i y_1-\beta_{i-1}y_0-p_i, \tag{3}$$

სადაც α_i, β_i, p_i – ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. თუ დავუშვებთ

$$\alpha_0=1, \quad \beta_{-1}=0, \quad p_0=0, \tag{4}$$

მაშინ (3) სამართლიანი იქნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $i=0$. ამრიგად, ვეძებთ (1) ამოცანის ამოხსნას (3) სახით ნებისმიერი i-სთვის, $i\ge 0$.

თუ (1)-ს ჩავწერთ რეკურენტული თანაფარდობის სახით

$$y_{i-1} = Cy_i - y_{i+1} - F_i, \quad i \le N-1, \quad y_N = 0 \tag{5}$$

და ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატარებთ, მივიღებთ, რომ (1) ამოცანის ამოხსნა ნებისმიერი $i \le N$-სათვის შეიძლება ვეძებოთ სახით

$$y_{i-1} = \xi_{N-i} y_{N-1} - \eta_{N-i-1} y_N - q_{N-1}, \tag{6}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\xi_0 = 1, \quad \eta_{-1} = 0, \quad q_0 = 0. \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ y_{N-1}-ს ვიპოვით, მაშინ შეიძლება ყველა y_i-ის გამოთვლა (5) ფორმულის მიხედვით.

ვიპოვოთ y_1 და y_{N-1}. ამისთვის განვსაზღვროთ $\alpha_i, \beta_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i$ კოეფიციენტები. თუ შევადარებთ (2) და (3)-ს, როცა $i = 1$, ხოლო (5) და (6)-ს როცა $i = N-1$, მივიღებთ

$$\alpha_1 = \xi_1 = C, \quad \beta_0 = \eta_0 = 1, \quad p_1 = F_1, \quad q_1 = F_{N-1}. \tag{8}$$

ახლა ვიპოვოთ რეკურენტული ფორმულები საძიებელი კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის.

(1) განტოლებაში ჩავსვათ (3), აგრეთვე მისგან გამომდინარე გამოსახულებანი y_i და y_{i-1}-სთვის:

$$y_i = \alpha_{i-1} y_1 - \beta_{i-2} y_0 - p_{i-1}, \quad y_{i-1} = \alpha_{i-2} y_1 - \beta_{i-3} y_0 - p_{i-2},$$

მივიღებთ

$$-(\alpha_{i-2} - C\alpha_{i-1} + \alpha_i) y_1 + (\beta_{i-3} - C\beta_{i-2} + \beta_{i-1}) y_0 +$$
$$+ p_{i-2} - Cp_{i-1} + p_i = F_i, \qquad i \ge 2.$$

ეს ტოლობები რომ იგივური იყოს ყველა i-სთვის, საკმარისია $i \ge 2$-სთვის დავუშვათ, რომ

$$p_i = Cp_{i-1} - p_{i-2} + F_i, \tag{9}$$

$$\alpha_i = C\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}, \quad \beta_{i-1} = C\beta_{i-2} - \beta_{i-3}. \tag{10}$$

ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ (6) და (1)-ს i-სთვის, $i \le N-2$, მივიღებთ რეკურენტულ თანაფარდობებს

$$q_{N-i} = Cq_{N-i-1} - q_{N-i-2} + F_i,$$

$$\xi_{N-i} = C\xi_{N-i-1} - \xi_{N-i-1}, \qquad \eta_{N-i-1} = C\eta_{N-i-2} - \eta_{N-i-3}.$$

შევცვალოთ აქ $N - i$ i-თი. $i \geq 2$ შემთხვევისათვის მივიღებთ ფორმულებს

$$q_i = Cq_{i-1} - q_{i-2} + F_{N-i}, \tag{11}$$

$$\xi_i = C\xi_{i-1} - \xi_{i-2}, \qquad \eta_{i-1} = C\eta_{i-2} - \eta_{i-3}. \tag{12}$$

ამრიგად, (4), (7)-(12) ფორმულები მთლიანად განსაზღვრავენ საძიებელ კოეფიციენტებს. შევადაროთ (10) და (12) (4), (7), (8) პირობების დროს. მივიღებთ, რომ $\beta_i = \eta_i = \xi_i = \alpha_i$, როცა $i \geq 0$. ამგვარად, (3), (6) ფორმულები მიიღებენ სახეს

$$y_{i+1} = \alpha_i y_1 - \alpha_{i-1} y_0 - p_i, \quad i \geq 0, \tag{13}$$

$$y_{i-1} = \alpha_{N-i} y_{N-1} - \alpha_{N-i-1} y_N - q_{N-i}, \quad i \leq N, \tag{14}$$

სადაც

$$p_i = Cp_{i-1} - p_{i-2} + F_i, \quad i \geq 2, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = F_1, \tag{15}$$

$$q_i = Cq_{i-1} - q_{i-2} + F_{n-i}, \quad i \geq 2, \quad q_0 = 0, \quad q_1 = F_{N-1}, \tag{16}$$

$$\alpha_i = C\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}, \quad i \geq 2, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = C. \tag{17}$$

ახლა ვიპოვოთ y_1 და y_{N-1}. ამისათვის (13)-ში დავუშვათ, რომ $i = k$, ხოლო (14)-ში – $i = k + 2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $N = 2k + 1$, მივიღებთ

$$y_{k+1} = \alpha_k y_1 - \alpha_{k-1} y_0 - p_k, \qquad y_{k+1} = \alpha_{k-1} y_{N-1} - \alpha_{k-2} y_N - q_{k-1}.$$

თუ მეორე ტოლობას გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ განტოლებას y_1 და y_{N-1}-ის მიმართ:

$$\alpha_{k-1} y_{N-1} - \alpha_k y_1 + \alpha_{k-1} y_0 - \alpha_{k-2} y_N = q_{k-1} - p_k. \tag{18}$$

თუ (13)-ში დავუშვებთ, რომ $i = k - 1$, ხოლო (14)-ში – $i = k + 1$ და პირველს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ კიდევ ერთ განტოლებას y_1 და y_{N-1}-სთვის:

$$-\alpha_k y_{N-1} + \alpha_{k-1} y_1 - \alpha_{k-1} y_0 + \alpha_{k-1} y_N = p_{k-1} - q_k. \tag{19}$$

გავითვალისწინოთ, რომ $y_0 = y_N = 0$ და შევკრიბოთ და გამოვაკლოთ (18) და (19). მივიღებთ ექვივალენტურ სისტემას

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_{k-1} - \alpha_k)(y_{N-1} + y_1) = q_{k-1} - p_k + p_{k-1} - q_k, \\
&(\alpha_{k-1} + \alpha_k)(y_{N-1} - y_1) = q_{k-1} - p_k - p_{k-1} + q_k,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

რომლის ამოხსნის შემდეგ ვიპოვით საძიებელ y_1 და y_{N-1} მნიშვნელობებს:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\alpha_{k-1}^2 - \alpha_k^2)^{-1}[\alpha_k(q_{k-1} - p_k) + \alpha_{k-1}(p_{k-1} - q_k)], \\
y_{N-1} &= (\alpha_{k-1}^2 - \alpha_k^2)^{-1}[\alpha_{k-1}(q_{k-1} - p_k) + \alpha_k(p_{k-1} - q_k)].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

ამგვარად, (1) ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში: p_{k-1}, p_k, q_{k-1}, q_k, α_{k-1}, α_k კოეფიციენტებს გამოვთვლით (15)-(17) ფორმულებით, y_1, y_{N-1} მნიშვნელობებს – (21) ფორმულებით და y_i უცნობებს, როცა $i = 2,3,...,k$, – (2) ფორმულის მიხედვით, ხოლო როცა $i = N-2, N-3,..., k+1$, – (5) ფორმულის მიხედვით მოცემული y_0, y_N და გამოთვლილი y_1, y_{N-1} მნიშვნელობების გამოყენებით. აღწერილ ალგორითმს ეწოდა მარშ-ალგორითმი. ადვილი დასათვლელია, რომ ამ ალგორითმის რეალიზაციისათვის საჭიროა დაახლოებით $8N$ ოპერაცია. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $C \neq 2\cos m\pi/N$, m – მთელი რიცხვით, მაშინ (1) ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, თუ $\alpha_{k-1}^2 \neq \alpha_k^2$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (21) ფორმულები ნულზე გაყოფას არ შეიცავენ.

ზემოთ აღწერილი მარშ-ალგორითმი შეიძლება გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა C – კვადრატული მატრიცაა, F_i – მოცემული, ხოლო y_i – საძიებელი ვექტორებია. შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ VI თავში განხილული დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის მართკუთხედზე (ამ მართკუთხედში შემოღებულ ყოველი მიმართულებით თანაბარ ბადეზე) შეიძლება (1) სახით ჩაიწეროს. ამ შემთხვევაში ვექტორის კომპონენტები საძიებელი ბადური ფუნქციის ბადის i-ური სტრიქონის შესაბამის მნიშ-

ენელობებს წარმოადგენს, ხოლო C მატრიცა სამდიაგონალურია და მისი რიგი ბადის შიგა სტრიქონების რაოდენობის ტოლია.

ვთქვათ, C მატრიცის რიგია M. მაშინ p_i, q_i ვექტორების ზომა M-ის ტოლია და p_{k-1}, q_{k-1}, p_k, q_k-ს გამოსათვლელად (15), (16) ფორმულების მიხედვით O(MN) ოპერაცია დაგვჭირდება. ცხადია, ასეთივე რაოდენობის ოპერაციები იქნება საჭირო y_i, $2\le i\le N-2$ ვექტორების მოსაძებნად (2), (5) ფორმულების მიხედვით. ახლა განვიხილოთ საკითხი y_1 და y_{N-1}-ის გამოთვლის შესახებ.

(17) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ α_k არის C-ს მიმართ k რიგის პოლინომი, ამასთან თუ C რიცხვია, მაშინ α_k – ალგებრული პოლინომია, ხოლო თუ C – მატრიცაა, მაშინ α_k – მატრიცული პოლინომია. პოლინომი, რომელიც (17) რეკურენტულ თანაფარდობას აკმაყოფილებს, ცხადი სახით წარმოიდგინება: $\alpha_k=U_k(C/2)$, სადაც $U_k(x)$ მეორე გვარის k რიგის ჩებიშევის პოლინომია:

$$U_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(k+1)a\cos x}{\sin\arccos x}, & |x|\le 1,\\[2ex] \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{k+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{k+1}}{2\sqrt{x^2-1}}, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

თუ გამოვიყენებთ ცხად გამოსახულებას α_k-სთვის, $k\ge 0$, და გავითვალისწინებთ, რომ α_k – პოლინომია უფროს ხარისხთან ერთეულოვანი კოეფიციენტით, შეიძლება შემდეგი გაშლა მივიღოთ:

$$\begin{aligned}\alpha_k-\alpha_{k-1}&=\prod_{\ell=1}^{k}\left(C-2\cos\frac{(2\ell-1)\pi}{2k+1}E\right),\\ \alpha_k+\alpha_{k-1}&=\prod_{\ell=1}^{k}\left(C-2\cos\frac{2\ell\pi}{2k+1}E\right).\end{aligned}\tag{22}$$

(22) და (20)-ის გამოყენებით ავაგოთ შემდეგი ალგორითმი y_1 და y_{N-1}-ის გამოსათვლელად:

$$v_0 = p_k - q_{k-1} - p_{k-1} + q_k, \quad w_0 = q_{k-1} - p_k - p_{k-1} + q_k,$$

$$\left(C - 2\cos\frac{(2\ell-1)\pi}{2k+1}E\right)v_\ell = v_{\ell-1},$$

$$\left(C - 2\cos\frac{2\ell\pi}{2k+1}E\right)w_\ell = w_{\ell-1}, \quad \ell = 1,2,\dots,k, \tag{23}$$

$$y_1 = 0{,}5(v_k - w_k), \quad y_{N-1} = 0{,}5(v_k + w_k).$$

რადგან (23)-ის თითოეულ სისტემას სამდიაგონალური მატრიცა აქვს (ასეთი სისტემების რაოდენობაა 2k) და შეიძლება ფაქტორიზაციის მეთოდით ამოხსნას $O(M)$ ოპერაციის დანახარჯით, მაშინ y_1 და y_{N-1}-ის გამოსათვლელად $O(NM)$ არითმეტიკული ოპერაცია დაგვჭირდება.

ამგვარად, სამდიაგონალური მატრიცის მქონე (1) სისტემის ამოსახსნელად აგებულია მეთოდი, რომლისთვისაც არითმეტიკული ოპერაციების რიცხვი უცნობთა რიცხვის პროპორციულია.

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ აგებული მარშ-ალგორითმი შეიძლება რიცხვითად არამდგრადი იყოს. მართლაც, თუ C რიცხვი აკმაყოფილებს პირობას $|C| > 2$, მაშინ ალგორითმისათვის დამახასიათებელია N-ის მიხედვით ცდომილების ექსპონენციალური ზრდა, რადგანაც $q^2 - Cq + 1 = 0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის ერთ-ერთი მოდულით ერთიანზე მეტია. ასეთივე ტიპის არამდგრადობას აქვს ადგილი იმ შემთხვევაშიც, როცა C მატრიცს აქვს მოდულით 2-ზე მეტი მნიშვნელობის მქონე საკუთრივი მნიშვნელობა. ასეთი ამოცანებისათვის ამჟამად აგებულია მარშ-ალგორითმის ვარიანტი, რომელიც მდგრადია იმ აზრით, რომ N-ის ზრდასთან ერთად ცდომილება ხარისხოვანი კანონით იზრდება.

2. რედუქციის მეთოდი. რიგ შემთხვევებში სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად დიდი მნიშვნელობა აქვს მიღებული ამონახსნის სიზუსტეს. ფაქტორიზაციის მეთოდის (რომელიც გამოიყენება ასეთი სისტემების ამოსახსნელად) ფორმულების ანალიზი გვაჩვენებს, რომ ცდო-

მილების წყარო შეიძლება ფაქტორიზაციის კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულები იყოს. ეს ფორმულები შეიცავს გაყოფას მნიშვნელობის მიხედვით ახლოს მყოფ სიდიდეებზე. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ამ ტიპის სისტემების ამოხსნის რედუქციის მეთოდს, რომელიც თავისუფალია ამ ნაკლისაგან.

ამგვარად, უნდა ვიპოვოთ სამწერტილიანი სხვაობიანი ამოცანის

$$-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1 \le i \le N-1, \qquad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \tag{24}$$

ამოხსნა, სადაც $c_i = a_i + b_i + d_i$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $d_i \ge 0$, $N = 2^n$. რედუქციის მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ (24) სისტემიდან ჯერ კენტი ნომრების მქონე, ხოლო შემდეგ 2-ის ჯერადი ნომრების მქონე უცნობები უნდა გამოვრიცხოთ და ა. შ.

ამოვწეროთ (24) სისტემის სამი ერთმანეთის მომდევნო განტოლება ნომრებით $i-1$, i, $i+1$, სადაც i — ლუწი რიცხვია:

$$-a_{i-1} y_{i-2} + (a_{i-1} + b_{i-1} + d_{i-1}) y_{i-1} + b_{i-1} y_i = f_{i-1}, \tag{25}$$

$$-a_i y_{i-1} + (a_i + b_i + d_i) y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \tag{26}$$

$$-a_{i+1} y_i + (a_{i+1} + b_{i+1} + d_{i+1}) y_{i+1} - b_{i+1} y_{i+2} = f_{i+1}. \tag{27}$$

გავამრავლოთ (25) განტოლება გამოსახულებაზე $\alpha_i^{(1)} = a_i (a_{i-1} + b_{i-1} + d_{i-1})^{-1}$, (27) განტოლება — გამოსახულებაზე $\beta_i^{(1)} = b_i (a_{i+1} + b_{i-1} + d_{i-1})^{-1}$ და შევკრიბოთ (26)-თან მიღებული განტოლებები. ვიპოვით

$$-a_i^{(1)} y_{i-2} + (a_i^{(1)} + b_i^{(1)} + d_i^{(1)}) y_i - b_i^{(1)} y_{i+2} = f_i^{(1)}, \qquad i = 2,4,6,\dots,N-2, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \tag{28}$$

სადაც $a_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} a_{i-1}$, $b_i^{(1)} = \beta_i^{(1)} b_{i+1}$, $d_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} d_{i-1} + d_i + \beta_i^{(1)} d_{i+1}$, $f_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} f_{i-1} + f_i + \beta_i^{(1)} f_{i+1}$. თუ ლუწი ნომრების მქონე უცნობები ნაპოვნია (ისინი აკმაყოფილებენ (28) სისტემას), მაშინ დანარჩენი უცნობები განისაზღვრება ფორმულებით

$$y_i = \frac{f_i + a_i y_{i-1} + b_i y_{i+1}}{a_i + b_i + d_i}, \quad i = 1,3,5,\dots,N-1.$$

უცნობთა გამორიცხვის აღწერილი პროცესი, ცხადია, შეიძლება გამოეიყენოთ (28) სისტემის მიმართ, საიდანაც მეორე ბიჯზე გამოვრიცხავთ 2-ის ჯერადი (მაგრამ არა 4-ის ჯერადი) ნომრების მქონე უცნობებს. გამორიცხვის პროცესის ℓ-ური ბიჯის შედეგად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{gathered} -a_i^{(\ell)} y_{i-2^\ell} + (a_i^{(\ell)} + b_i^{(\ell)} + d_i^{(\ell)}) y_i - b_i^{(\ell)} y_{i+2^\ell} = f_i^{(\ell)}, \\ i = 2^\ell, 2\cdot 2^\ell, 3\cdot 2^\ell, \dots, N-2^\ell, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

სადაც

$$\begin{gathered} a_i^{(\ell)} = \alpha_i^{(\ell)} a_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}, \quad b_i^{(\ell)} = \beta_i^{(\ell)} b_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}, \\ d_i^{(\ell)} = \alpha_i^{(\ell)} d_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + d_i^{(\ell-1)} + \beta_i^{(\ell)} d_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}, \\ f_i^{(\ell)} = \alpha_i^{(\ell)} f_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + f_i^{(\ell-1)} + \beta_i^{(\ell)} f_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}, \\ \alpha_i^{(\ell)} = a_i^{(\ell-1)} (a_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + b_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + d_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)})^{-1}, \\ \beta_i^{(\ell)} = b_i^{(\ell-1)} (a_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + b_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)} + d_{i+2^{\ell-1}}^{(\ell-1)})^{-1}, \\ i = 2^\ell, 2\cdot 2^\ell, 3\cdot 2^\ell, \dots, N-2^\ell, \quad \ell \ge 1. \end{gathered} \tag{30}$$

აქ გამოიყენება აღნიშვნები

$$a_i^{(0)} = a_i, \quad b_i^{(0)} = b_i, \quad d_i^{(0)} = d_i, \quad f_i^{(0)} = f_i.$$

გამორიცხვის პროცესი დასრულდება $(n-1)$-ე ბიჯზე, როცა (29) სისტემაში დარჩება მხოლოდ ერთი განტოლება $y_{N/2} = y_{2^{n-1}}$ უცნობის მიმართ. ამ განტოლებიდან ვიპოვით

$$y_{2^{n-1}} = \frac{f_{2^{n-1}}^{(n-1)} + a_{2^{n-1}}^{(n-1)} y_0 + b_{2^{n-1}}^{(n-1)} y_N}{a_{2^{n-1}}^{(n-1)} + b_{2^{n-1}}^{(n-1)} + d_{2^{n-1}}^{(n-1)}}, \quad y_0 = y_N = 0. \tag{31}$$

დანარჩენი უცნობები განისაზღვრება ფორმულებით

$$y_i = \frac{f_i^{(\ell)} + a_i^{(\ell)} y_{i-2^\ell} + b_i^{(\ell)} y_{i+2^\ell}}{a_i^{(\ell)} + b_i^{(\ell)} + d_i^{(\ell)}}, \quad i = 2^\ell, 3\cdot 2^\ell, 5\cdot 2^\ell, \ldots, N-2^\ell, \quad (32)$$

სადაც $\ell = n-2, n-3, \ldots, 0$, $y_0 = y_N$.

შევნიშნოთ, რომ (32) ფორმულა შეიცავს (31) ფორმულას, როცა $\ell = n-1$.

ამგვარად, რედუქციის მეთოდის პირდაპირი სვლის დროს (30) ფორმულების მიხედვით, როცა $\ell = 1,2,\ldots,n-1$, გამოითვლება $a_i^{(\ell)}$, $b_i^{(\ell)}$, $d_i^{(\ell)}$, $f_i^{(\ell)}$, ხოლო უკუსვლის დროს (32) ფორმულების მიხედვით როცა $\ell = n-1, n-2, \ldots, 0$, გამოითვლება საძიებელი ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ მეთოდი არ მოითხოვს დამატებითი მეხსიერებას, რადგან $a_i^{(\ell)}$, $b_i^{(\ell)}$, $d_i^{(\ell)}$, $f_i^{(\ell)}$ სიდიდეები შეიძლება განლაგდეს შესაბამისად $a_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}$, $b_{i-2^{\ell-1}}^{(\ell-1)}$, $d_i^{(\ell-1)}$, $f_i^{(\ell-1)}$-ის ადგილზე. მეთოდის რეალიზაციისათვის საჭიროა 12N შეკრება, 8N გამრავლება და 3N გაყოფა.

ლიტერატურა

1. Бахвалов Н. С., Численные методы, М., Наука, 1975
2. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, М., Наука, 1966, ч. 1; Физматгиз, 1962, ч. 2.
3. Воеводин В. В., Численные методы алгебры; теория и алгорифмы, М., Наука, 1966
4. Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., Наука, 1977
5. Калиткин Н. Н., Численные методы, М., Наука, 1978
6. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А., Методы вычислений, Киев, Высшая школа, 1977
7. Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., Наука, 1980
8. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., Наука, 1979
9. Самарский А. А., Теория разностных схем, М., Наука, 1977
10. Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравний, М., Наука, 1976
11. Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., Наука, 1973
12. Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978
13. Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы газовой динамики, М., Наука, 1980
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., Наука, 1972
15. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1963
16. Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967

საგნობრივი საძიებელი

აღნიშვნათა ნუსხა

$\omega_N = \{i;\ \ i = 0,1,\dots,N\}$ – ბადე, რომლის კვანძების კოორდინატები მთელი რიცხვებია

$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ \ h = 1/N,\ \ 0 \le i \le N\}$ – თანაბარი ბადე h ბიჯით მონაკვეთზე [0,1]

h – ω_h ბადის ბიჯი

$y_i = y(x_i) = y(i)$ – ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა ბადის i-ურ კვანძში

$\hat{\omega}_h$ – არათანაბარი ბადე

$h_i = x_i - x_{i-1}$ – არათანაბარი $\hat{\omega}_h$ ბადის ბიჯი

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$$

$v_{i_1 i_2} = v(x^1_{i_1}, x^2_{i_2})$ – ორგანზომილებიანი ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა (i,j) კვანძში

$v^n_{i_1 i_2} = v(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, t_n)$ – ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა (i,j) კვანძში n-ურ დროით შრეზე

$v^{n+1}_{ij} = \hat{v}$ – ბადური ორგანზომილებიანი ფუნქციის მნიშვნელობა (i,j) კვანძში $n+1$ დროით შრეზე

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – მარჯვენა სხვაობა i-ურ კვანძში

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ – მარცხენა სხვაობა i-ურ კვანძში

$\delta y_i = \dfrac{1}{2}(\nabla y_i + \nabla y_i)$ – ცენტრალური სხვაობა i-ურ კვანძში

$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta(\nabla y_{i+1}) = \Delta(\Delta y_i)$ – მეორე რიგის სხვაობა

$y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h$ – მარჯვენა სხვაობიანი წარმოებული i კვანძში

$y_{\bar{x},i} = (y_i - y_{i-1})/h$ – მარცხენა სხვაობიანი წარმოებული i კვანძში

$y_{\overset{\circ}{x},i} = (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$ – ცენტრალური სხვაობიანი წარმოებული i კვანძში

$y_{\bar{x}x,i} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$ – მეორე სხვაობიანი წარმოებული

H – ჰილბერტის სივრცე

(y, v) – $(y, v) \in H$ ელემენტების სკალარული მამრავლი $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$

E – ერთეულოვანი ოპერატორი

A^* – A ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი

A^{-1} – A ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი

$A > 0$ – დადებითი ოპერატორი

$A \geq 0$ – არაუარყოფითი ოპერატორი

$A \geq \delta E, \delta > 0$ – დადებითადგანსაზღვრული ოპერატორი

$\|y\|_A = \sqrt{(Ay,y)}, \quad y \in H$ – ენერგეტიკული ნორმა

ბადურ ფუნქციათა სივრცე

$$\Omega_{N+1} = \{y_i, \quad i = 0,\dots,N\}$$

$$\overset{o}{\Omega}_{N-1} = \{y_i, \quad i = 0,\dots,N; \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0\}$$

სადაც $\overset{o}{y}_i$ არის ფუნქცია $\overset{o}{\Omega}_{N+1}$-დან

სკალარული ნამრავლები და ნორმები ბადეზე

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y,y)}$$

$$(y,v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h, \quad \|y]| = \sqrt{(y,y]}$$

$$\|y\|_C = \max_{x_i \in \bar{\omega}_h} |y(x_i)| = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i)|$$

გამომცემლობის რედაქტორი მ. ჯაჯანაშვილი
კორექტორი ც. მოლოდინი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 3.07.01
საბეჭდი ქაღალდი 60X84 1/16
პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 18,5 სააღრ.-საგამომც. თაბახი 12,4
ტირაჟი 300 შეკვეთის №31

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
380021, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო კომპიუტერული სამსახური
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1