ზ. ნაცვლიშვილი, გ. ტაბიძე, რ. დანელია,
ჯ. გიორგობიანი, მ. კუბლაშვილი

დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები

საქართველოს რესპუბლიკის სახალხო განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

რედაქტორი პროფესორი ჯ. სანიკიძე

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1990

Нацвлишвили Зубико Михайлович, Табидзе Гурам Сергеевич, Данелия Реваз Валерянович, Гиоргобиани Джимшер Александрович, Кублашвили Мурман Давидович

Основы дискретной математики
(На грузинском языке)

დისკრეტული მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სწავლების ყველა ფორმის სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს შემდეგი საკითხების ელემენტებს: წრფივი ალგებრა და ფუნქციონალური ანალიზი, განტოლებებისა და სისტემების მიახლოებითი ამოხსნა, ფუნქციათა ინტერპოლაცია, რიცხვითი გაწარმოება და ინტეგრება, სხვაობიანი სქემები, წრფივი დაპროგრამება, თამაშთა თეორია, გრაფთა თეორია, შემთხვევითი პროცესები.

რეცენზენტები: 1. ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, დოცენტი ი. ჭვარშეიშვილი,
2. გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი ა. ფუფუნაშვილი

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვ. რედ. გ. ზაკალაშვილი
ტექრედაქტორი თ. მანჯგალაძე
უფროსი კორექტორი ნ. დოლბაძე
კორექტორი დ. ყვავაძე
გამომშვები ო. მაჭავარიანი

ИБ № 4655. Учебное издание

გადაეცა წარმოებას 20.06.89. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.06.90. ქაღალდის ზომა $60\times90^{1}/_{16}$. საბეჭდი ქაღალდი № 1. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 27. საღებავგატარება 27. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 22,21.
ტირაჟი 5000. შეკვ. № 679.

ფასი [illegible] მან. [illegible] კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, გ. ჩუბინაშვილის ქ. № 50.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Г. Чубинашвили № 50.

საქართველოს რესპუბლიკის ბეჭდვითი სიტყვის სახელმწიფო კომიტეტის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.

Комбинат печати Государственного комитета Грузинской республики по печати, г. Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.

4306020500 — 427
Н————————— ბრძ. — 90
М — 602 (08) — 90
ISBN — 5 — 505 — 01384 — 8

წინასიტყვაობა

ტექნიკური პროფილის უმაღლეს სასწავლებლებში ამჟამად მოქმედი ტრადიციული სახელმძღვანელოები უმაღლეს მათემატიკაში ითვალისწინებს სტუდენტის მიერ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტებისა და მომიჯნავე საკითხების ათვისებას კლასიკური ანალიზის ჩარჩოებში. მეორეს მხრივ, უმაღლესი მათემატიკის კურსის სათანადო პროგრამაში ერთი სემესტრი მთლიანად დათმობილი აქვს დისკრეტული მათემატიკის მეთოდებსა და მათი მანქანური რეალიზაციის საკითხებს. ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან თანამედროვე მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგში სულ უფრო და უფრო ხშირად საქმე გვაქვს მათემატიკური ხასიათის ამოცანებთან, რომელთა ამოხსნა კლასიკური მათემატიკური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით ან საერთოდ ვერ ხერხდება, ან, უკეთეს შემთხვევაში, ასეთი გზით მიღებული ამოხსნა მისი რთული ანალიზური სტრუქტურის გამო გამოყენებისათვის პრაქტიკულად უვარგისია. მაგალითისათვის შეგვიძლია დავასახელოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები რამდენიმე ათეული თუ ასეული უცნობით, მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლებები, ასევე, რთული ტრანსცენდენტული განტოლებები, დიფერენციალური განტოლებები ან ასეთ განტოლებათა სისტემები, რომელთა ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში ვერ ხერხდება და მრავალი სხვა.

უნდა აღინიშნოს, რომ დღემდე არსებული ყველა სახელმძღვანელო თუ მონოგრაფია რიცხვითი ანალიზის საკითხებში, რომლებიც, როგორც წესი, მოიპოვება ჩვენთან რუსულ ენაზე, ეთანადება დისკრეტული მათემატიკის საუნივერსიტეტო კურსის პროგრამას. მეორე მხრივ, აღნიშნული ტიპის სახელმძღვანელო, რომელიც მთლიანად შეესაბამებოდეს ამჟამად მოქმედი უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების პროგრამას, არ მოგვეპოვება არც რუსულ, არც ქართულ ენაზე. ამ მხრივ წინამდებარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს მის ავტორთა ცდას შეავსოს აღნიშნული ხარვეზები ქართულ ენაზე მოსწავლე სტუდენტებისათვის. იგი გამოადგება აგრეთვე უნივერსიტეტის გამოთვლითი მათემატიკის და კიბერნეტიკის სპეციალობის სტუდენტებს და აგრეთვე ინჟინერ-მკვლევარებს. საერთოდ, წიგნით სარგებლობა შეუძლია ყველას, ვისაც ათვისებული აქვს ტექნიკური სასწავლებლისათვის გათვალისწინებუ-

ლი უმაღლესი მათემატიკის ზოგადი კურსის პროგრამა მთლიანი მოცულობით. ამასთან დაკავშირებით, წიგნში მოყვანილი ზოგიერთი მათემატიკური დებულებები და ცნებები მოცემულია მათი საწყისი განსაზღვრებების გარეშე.

წრფივი დაპროგრამება, თამაშთა თეორია და გრაფთა თეორია თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის დარგებია. ისინი შეისწავლიან ისეთი ამოცანების მათემატიკურ მოდელებს, რომლებშიც საჭიროა ამა თუ იმ აზრით საუკეთესო გადაწყვეტილებების მიღება.

სახელმძღვანელოში გადმოცემულ მასალას თან ერთვის სავარჯიშოები, აგრეთვე, ცალკეულ ამოცანათა მანქანური რეალიზაციის მაგალითები.

განსაზღვრებები, თეორემები, შედეგები, ცხრილები, ფორმულები დანომრილია პარაგრაფების მიხედვით, ხოლო ნახაზები მთლიანი ნაშრომის მიხედვით.

ხელნაწერის წაკითხვის დროს გამოთქმული შენიშვნებისა და საქმიანი წინადადებებისათვის ავტორები მადლობას უძღვნიან მათემატიკოსებს: ი. ჯვარშეიშვილს, მ. ზაქრაძეს, შ. ხუბეჯაშვილს, გ. ფიფიას·

წიგნი ზემოაღნიშნული ტიპის სახელმძღვანელოს შექმნის პირველ ცდას წარმოადგენს და, ბუნებრივია, ვერ იქნება დაზღვეული ნაკლოვანებებისაგან. ავტორები მადლობით მიიღებენ მკითხველთა ყველა შენიშვნებსა და წინადადებებს, რომელიც გათვალისწინებული იქნება ამ წიგნის შემდგომ გამოცემაში.

I თავი

მატრიცთა თეორიის ელემენტები

§ 1. მატრიცის ცნება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $m\times n$ რაოდენობის a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$) რიცხვები (ნამდვილი ან კომპლექსური). ამ რიცხვებისაგან შედგენილ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

მართკუთხა ცხრილს ეწოდება მ ა ტ რ ი ც ა m სტრიქონითა და n სვეტით.

A მატრიცის შემადგენელ a_{ij} რიცხვებს ეწოდება მ ა ტ რ ი ც ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი. პირველი i და მეორე j ინდექსი შესაბამისად იმ სტრიქონისა და სვეტის მაჩვენებელია, რომლებსაც ეკუთვნის ეს ელემენტი. მიღებულია (1) მატრიცის მოკლე ჩაწერა:

$$A=(a_{ij}) \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \text{ ან } A=(a_{ij})_{m,n}$$

m და n რიცხვებს მ ა ტ რ ი ც ი ს რ ი გ ე ბ ს უწოდებენ.

ორ მატრიცას ეწოდება ე რ თ ნ ა ი რ ი ტ ი პ ი ს, თუ მათი რიგები შესაბამისად ტოლია. (1) მატრიცაზე ამბობენ, რომ იგი არის $m\times n$ ტიპის. თუ $m=n$, მაშინ მატრიცას ეწოდება n რიგის კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ა. როცა $m\neq n$, მაშინ მას ეწოდება მ ა რ თ კ უ თ ხ ა მ ა ტ რ ი ც ა. კერძოდ $1\times n$ ტიპის მატრიცას ეწოდება ს ტ რ ი ქ ო ნ-მ ა ტ რ ი ც ა (სტრიქონ-ვექტორი), ხოლო $m\times 1$ ტიპის მატრიცას ეწოდება ს ვ ე ტ-მ ა ტ რ ი ც ა (სვეტ-ვექტორი). რიცხვი (სკალარი) შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც 1×1 ტიპის მატრიცა.

კვადრატული მატრიცის a_{11}, $a_{22}, \ldots$, a_{nn} ელემენტები ქმნიან ე. წ.

მთავარ დიაგონალს, ხოლო $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ ელემენტები — არა-მთავარ დიაგონალს.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \ldots 0 \\ . & . & . \quad . \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **დიაგონალური მატრიცა** თუ $\alpha_i \neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ და მოკლედ აღინიშნება $[\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n]$ სიმბოლოთი.

დიაგონალურ მატრიცას ეწოდება **ერთეულოვანი მატრიცა**, თუ $\alpha_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ და აღინიშნება E ასოთი, ე. ი.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{თუ } i\neq j, \\ 1, & \text{თუ } i=j, \end{cases}$$

კრონეკერის სიმბოლოს, მაშინ ერთეულოვანი მატრიცა ჩაიწერება $E=[\delta_{ij}]$ სახით.

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ეწოდება **ნულოვანი მატრიცა** და აღინიშნება O ასოთი. ნულოვან მატრიცაში როცა უნდათ მიუთითონ სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა, მიმართავენ $O_{m,n}$ აღნიშვნას.

როგორც ცნობილია, ყოველ $A=(a_{ij})$ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|A|=\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} (-1)^{\varkappa} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \tag{3}$$

სადაც (3) ჯამი გავრცელებულია ყველა შესაძლებელ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ გადანაცვლებაზე $1,2,\ldots, n$ რიცხვებიდან. მაშასადამე, იგი შეიცავს $n!$ შესაკრებს, გარდა ამისა $\varkappa=0$, თუ გადანაცვლება ლუწია და $\varkappa=1$, როცა გადანაცვლება კენტია.

ცხადია, რომ

$$|E|=1. \tag{4}$$

ორ $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცას ეწოდება ტ ო ლ ი: $A=B$, თუ ისინი ერთნაირი ტიპისაა და მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე. ი.

$$a_{ij}=b_{ij} \ (i=1, 2,\ldots, m; \ j=1, 2,\ldots,n).$$

ვთქვათ $y_1, y_2,\ldots, y_m$ სიდიდეები $x_1, x_2,\ldots,x_n$ სიდიდეებით გამოისახებიან წრფივად და ერთგვაროვნად:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

რომლის მოკლე ჩანაწერია

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=12,\ldots,m). \tag{1¹}$$

$x_1, x_2,\ldots, x_n$ სიდიდეების (1) ფორმულებით განხორციელებულ გარდაქმნას $y_1, y_2,\ldots, y_m$ სიდიდეებად ეწოდება წ რ ფ ი ვ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა. (1) გარდაქმნის კოეფიციენტები წარმოქმნიან $m\times n$ ტიპის მატრიცს. (1) გარდაქმნა ცალსახად განსაზღვრავს A მატრიცას და პირიქით

1. მ ა ტ რ ი ც ე ბ ი ს ჯ ა მ ი დ ა ს ხ ვ ა ო ბ ა. ვთქვათ

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

წრფივი გარდაქმნის საშუალებით $y_1, y_2,\ldots, y_m$ სიდიდეები გამოისახებიან $x_1, x_2,\ldots,x_n$ სიდიდეებით, ხოლო

$$z_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{3}$$

გარდაქმნით კი $z_1, z_2,\ldots, z_m$ სიდიდეები გამოისახებიან იმავე $x_1, x_2,\ldots, x_n$ სიდიდეებით, მაშინ

$$y_i+z_i=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})x_k \ (i=1,2,\ldots,m). \tag{4}$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. ორი ერთნაირი ტიპის $A=(a_{ik})_{m,n}$ და $B=(b_{ik})_{m,n}$ მატრიცების ჯამი ეწოდება იმავე ტიპის ისეთ $C=(c_{ik})_{m,n}$

მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$C=A+B,$$

სადაც

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1,2,\ldots,m; \quad k=1,2,\ldots,n).$$

ამრიგად,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\ldots a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\ldots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრების თანახმად შეიკრიბებიან მხოლოდ ერთნაირი ტიპის მატრიცები, ასევე (4) გარდაქმნის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა წარმოადგენს (2) და (3) გარდაქმნის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცების ჯამს.

მატრიცების ჯამი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1) $A+B=B+A$ (ჯამის კომუტაციურობა),

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (ჯამის ასოციაციურობა),

3) $A+O=A$,

სადაც A, B, C ერთნაირი ტიპის მატრიცებია.

ანალოგიურად განისაზღვრება A და B მატრიცთა სხვაობა:

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\ldots a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\ldots a_{2n}-b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2}\ldots a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix},$$

2. მატრიცის რიცხვზე ნამრავლი. განვიხილოთ (2) გარდაქმნით განსაზღვრული $y_1, y_2,\ldots,y_m$ სიდიდეების α რიცხვზე

$$\alpha y_i=\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})x_k \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

ნამრავლი, რომლის საფუძველზე შეგვიძლია შემოვიღოთ

განსაზღვრება 2. $A=(a_{ik})_{m,n}$ მატრიცის α რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $C=(c_{ik})_{m,n}$ მატრიცას, რომლის ელემენტები მიიღება A მატრიცის ყოველი ელემენტის α რიცხვზე გამრავლებით, ე. ი.

$$C=\alpha A,$$

სადაც $c_{ik}=\alpha a_{ik}$ $(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$.

ამრიგად,

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} \ldots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \ldots & \alpha a_{2n}\\ . & . & . \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \ldots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}.$$

მატრიცის რიცხვზე ნამრავლი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1) $1 \cdot A=A$,

2) $O \cdot A=O$,

3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\alpha A$,

5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

სადაც A და B ერთნაირი ტიპის მატრიცებია, ხოლო α, β — ნებისმიერი რიცხვები.

შევნიშნოთ, რომ თუ A არის n რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ $|\alpha A|=\alpha^n|A|$.

მართლაც,

$$|A\alpha| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\varkappa}\alpha a_{1\alpha_1}\cdot\alpha a_{2\alpha_2}\cdots\alpha a_{n\alpha_n}=$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\varkappa}\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{n\text{-ჯერ}}\, a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}=$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\varkappa}\alpha^n a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}=$$

$$=\alpha^n\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)} (-1)^{\varkappa} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}=\alpha^n|A|.$$

$-A=(-1)A$ მატრიცას ეწოდება A მატრიცის მოპირდაპირე მატრიცა.

3. მატრიცის მატრიცაზე ნამრავლი. ვთქვათ $z_1,z_2,\ldots,z_m$ გამოსახულია y_1, $y_2,\ldots,y_n$ სიდიდეებით

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{5}$$

გარდაქმნით, ხოლო y_1, $y_2,\ldots,y_n$ გამოსახულია x_1, $x_2,\ldots x_q$ სიდიდეებით

$$y_k=\sum_{j=1}^{q} b_{kj}x_j \tag{6}$$

ფორმულებით.

თუ (5) ფორმულაში $y_k (k=1,2,\ldots,n)$ ნაცვლად შევიტანთ (6) ფორმულებით განსაზღვრულ მათ მნიშვნელობებს, მაშინ $z_1, z_2,\ldots,z_m$ გამოისახებიან $x_1, x_2,\ldots,x_q$ სიდიდეებით:

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{q}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)x_j \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{7}$$

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრება 3. $A=(a_{ik})_{m,n}$ და $B=(b_{ij})_{n,q}$ მატრიცების ნამრავლი ეწოდება ისეთ $C=(c_{ij})_{m,q}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,q). \tag{8}$$

მაგალითი.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}.$$

განსაზღვრების თანახმად, (7) გარდაქმნის მატრიცის ელემენტები (5) და (6) გარდაქმნების მატრიცათა ნამარვლის ელემენტების ტოლია. ამრიგად, A და B მატრიცათა ნარმავლი შეესაბამება წრფივ გარდაქმნას, რომელიც მიმდევრობით განხორციელებული ორი წრფივი გარდაქმნის ტოლფასია, რომელთაგან პირველი მათგანი განისაზღვრება A მატრიცით, ხოლო მეორე — B მატრიცით და ჩაწერენ $C=AB$.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის B მატრიცაზე გამრავლება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც A მატრიცის სვეტების რიცხვი B მატრიცის სტრიქონების რიცხვის ტოლია. AB მატრიცას იმდენი სტრიქონი აქვს რამდენიც A-ს და იმდენი სვეტი რამდენიც B-ს. ცხადია, რომ საზოგადოდ, $AB\neq BA$, უფრო მეტიც, AB და BA მატრიცები შეიძლება იყოს სხვადასხვა ტიპის, კერძოდ, შეიძლება AB არსებობდეს, ხოლო BA-ს აზრი არ ჰქონდეს. მაგალითად, თუ:

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;. $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

მაშინ $AB=\begin{pmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{pmatrix}$,

ხოლო BA ნამრავლი არ არსებობს.

თუ $AB=BA$, მაშინ A და B მატრიცებს ეწოდება კომუტაციური მატრიცები. ცხადია, რომ ერთეულოვანი E მატრიცა და იმავე ტიპის ნებისმიერი A მატრიცა კომუტაციურია:

$$AE=EA=A. \tag{9}$$

ე. ი. მატრიცთა გამრავლებისას E ასრულებს ერთეულის როლს.

ცნობილია, რომ თუ A და B ერთნაირი ტიპის მატრიცებია, მაშინ

$$|AB|=|BA|=|A|\cdot|B|.$$

უშუალო გამოთვლებით ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი თვისებები:

1) $A(BC)=(AB)C$ (ნამრავლის ასოციაციურობა);
2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$ (ნებისმიერი α-სათვის);
3) $(A+B)C=AC+BC$ (დისტრიბუციულობა მარჯვნიდან);
4) $C(A+B)=CA+CB$ (დისტრიბუციულობა მარცხნიდან).

§ 3. ტრანსპონირებული მატრიცა

თუ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცაში ყველა სტრიქონს შევცვლით სვეტებით ან სვეტებს სტრიქონებით, მივიღებთ A მატრიცის ე. წ. ტრანსპონირებულ მატრიცას, რომელიც აღინიშნება A' ან A^T სიმბოლოთი, ე. ი.

$$A'=A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},$$

ტრანსპონირების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები

1) $(A')'=A$;
2) $(A+B)'=A'+B'$;
3) $(\lambda A)'=\lambda A'$;
4) $(AB)'=B'A'$,

სადაც A და B ისეთი მატრიცებია, რომ არსებობს AB ნამრავლი, ხოლო λ — ნებისმიერი რიცხვია.

დავამტკიცოთ მაგალითად, 4) თვისება. $(AB)'$ მატრიცის c'_{ij} ელემენტისათვის გვაქვს გამოსახულება

$$c'_{ij}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\ldots+a_{jn}b_{ni},$$

რომელიც წარმოადგენს B' მატრიცის i-ური სტრიქონისა და A' მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. $(AB)'=B'A'$.

თუ A მატრიცა კვადრატულია $|A'|=|A|$.

A მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ იგი თავის ტრანსპონირებული მატრიცის ტოლია, ე. ი.

$$A'=A.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სიმეტრიული მატრიცა კვადრატულია და მისი ელემენტები სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ. ამრიგად, $a_{ji}=a_{ij}$.

ცხადია, რომ $C=AA'$ მატრიცა სიმეტრიულია. მართლაც,

$$C'=(AA')'=(A')'A'=AA'=A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix},$$

§ 4. შებრუნებული მატრიცა

ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო E— იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება ისეთ B მატრიცას, რომლისთვისაც

$$A\cdot B=B\cdot A=E.$$

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი ე. ი.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \qquad (1)$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია.

მართლაც, ვთქვათ, რაიმე C მატრიცა აგრეთვე აკმაყოფილებს (1) პირობებს. $AC=E$ ტოლობა გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1}-ზე, მივიღებთ

$$A^{-1}(AC)=A^{-1}E,$$

რომელიც გადაიწერება ასე:

$$(A^{-1}A)C=A^{-1} \text{ ანუ } EC=A^{-1}, \text{ ე. ი. } C=A^{-1}.$$

განსაზღვრება 2. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება განსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია; წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული.

განსაზღვრება 3. A კვადრატული მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა ეწოდება

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას, სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ ელემენტის ალგებრული დამატება. ცხადია, რომ $E^{*}=E$.

თეორემა 1. ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$A^{*}A=AA^{*}=|A|E, \tag{2}$$

სადაც $|A|$-თი აღნიშნულია A მატრიცის დეტერმინანტი.

დამტკიცება. ვიპოვოთ $C=AA^{*}$ ნამრავლი. გვაქვს

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}.$$

დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილი თეორემების თანახმად

$$c_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{როცა } i\neq j, \\ |A|, & \text{როცა } i=j. \end{cases}$$

ამრიგად,

$$C=A\cdot A^{*}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=|A|E. \tag{3}$$

ანალოგიურად მიიღება $A^{*}A=|A|E$. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 2. იმისათვის, რომ A მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს არაგანსაკუთრებული. იგი გამოითვლება ფორმულით:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, A -ს გააჩნია შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, ე. ი. $AA^{-1}=E$. აქედან $|AA^{-1}|=|E|$, საიდანაც $|A|\cdot|A^{-1}|=$ $=1$, ცხადია $|A|\neq 0$.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ $|A|\neq 0$, მაშინ

$$\frac{1}{|A|}\,A^*A=A\cdot\frac{1}{|E|}\cdot A^*=E.$$

აქედან, შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ შებრუნებული და მიკავშირებული მატრიცების ზოგიერთი თვისება:

1) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

მართლაც, $A^{-1}A=E$ ტოლობიდან $|A^{-1}A=|E|$, საიდანაც $|A^{-1}|\times$ $\times|A|=1$, ე. ი.

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

მატრიცთა გამრავლების ასოციაციურობის თვისების თანახმად გვაქვს:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E, \quad \text{ე. ი.}$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

მაშასადამე, $B^{-1}\cdot A^{-1}$ არის AB მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. საზოგადოდ,

$$(A_1A_2\ldots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

3) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

მართლაც, $AA^{-1}=E$ ტოლობის ორივე ნაწილის ტრანსპონირებით მივიღებთ $(AA^{-1})'=E'=E$, საიდანაც $(A^{-1})'A'=E$, აქედან $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

4) $(A')^*=(A^*)'$. თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

5) თუ A არის n-ური რიგის მატრიცა და α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$(\alpha A)^*=\alpha^{n-1}A^*.$$

მართლთაც, (αA^*) მატრიცის $\bar{A}_{ij}$ ელემენტი იქნება $\alpha^{n-1}A_{ij}$, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

6) $(\alpha A)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}A^{-1}, \quad \alpha\neq 0.$

მართლაც,

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{|\alpha A|}(\alpha A^*)=\frac{1}{\alpha^n|A|}\cdot\alpha^{n-1}A^*=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A^*=\frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

7) ცხადია, რომ $|A^*|=|A|^{n-1}$, თუ $|A|\neq 0$.

8) $(AB)^*=B^*A^*$.

9) თუ A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ

$$(A^*)^*=\begin{cases} A, & \text{როცა } n=2, \\ |A|^{n-2}A, & \text{როცა } n>2. \end{cases}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შებრუნებული მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია ამოვხსნათ $AX=B$ და $УA=B$ მატრიცული განტოლებები. (X, $У$ უცნობი მატრიცებია). მართლაც, თუ $|A|\neq 0$, მაშინ $X=A^{-1}B$ და $У=BA^{-1}$.

§ 5. მატრიცის ხარისხი

ნებისმიერი A კვადრატული მატრიცის p ნატურალური ხარისხი აღინიშნება A^p სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A^p=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{p\text{-ჯერ}}.$$

მივიღოთ, რომ $A^0=E$, სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა. თუ A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, მაშინ მისი უარყოფითი ხარისხი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A^{-p}=(A^{-1})^p.$$

მატრიცის მთელი ხარისხისათვის მართებულია ტოლობები:

1) $A^pA^q=A^{p+q}$; 2) $(A^p)^q=A^{pq}$

ცხადია, რომ არაკვადრატული მატრიცის ახარისხება შეუძლებელია.

ვთქვათ $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ ერთნაირი ტიპის მატრიცებია.

განსაზღვრება 1. თუ ერთნაირი ტიპის $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცებისათვის $a_{ij}\leqslant b_{ij}$, მაშინ ამბობენ, რომ $A\leqslant B$.

ამ აზრით, საზოგადოდ, ნებისმიერი ორი მატრიცის შედარება შეუძლებელია.

მატრიცის აბსოლუტური სიდიდე (მოდული) აღინიშნება $\mathrm{mod}\, A$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება ასე:

$$modA=(|a_{ij}|),$$

სადაც $|a_{ij}|$ არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის აბსოლუტური სიდიდე.

თუ აზრი აქვს $A+B$ ჯამს და AB ნამრავლს, მაშინ:

1) $mod(A+B)\leqslant modA+modB$;

2) $mod(AB)\leqslant modA\cdot modB$;

3) $mod(\alpha A)=|\alpha| modA$ (α რიცხვია).

კერძოდ, ნებისმიერი ნატურალური p რიცხვისათვის:

$$modA^p\leqslant(modA)^p.$$

განსაზღვრება 2. A მატრიცის ნორმა ეწოდება ისეთ ნამდვილ $\|A\|$ რიცხვს რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $\|A\|\geqslant 0$, ხოლო $\|A\|=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $A=0$;

2) ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$, კერძოდ, $\|-A\|=\|A\|$

3) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$;

4) $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$.

3) —4) პირობებში იგულისხმება, რომ აზრი აქვს $A+B$ ჯამს და AB ნამრავლს. p ნატულარული რიცხვისა და A კვადრატული მატრიცისათვის

$$\|A^p\|\leqslant\|A\|^p.$$

თუ A და B ერთნაირი ტიპის მატრიცებია, მაშინ 3) პირობის თანახმად

$$\|B\|=\|A+(B-A)\|\leqslant\|A\|+\|B-A\|,$$

საიდანაც

$$\|A-B\| =\|B-A\|\geqslant\|B\|-\|A\|.$$

ანალოგიურად მიიღება $\|A-B\|\geqslant\|A\|-\|B\|$, უტოლობა. ამრიგად, $\|A-B\|\geqslant\|B\|-\|A\|$.

განსაზღვრება 3. მატრიცის ნორმას ეწოდება კანონიკური, თუ დამატებით სრულდება პირობები:

5) თუ $A=(a_{ij})$, მაშინ $|a_{ij}|\leqslant\|A\|$. $A=(a_{11})$-სკალარული მატრიცისათვის $\|A\|=|a_{11}|$;

6) $modA\leqslant modB$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\|A\|\leqslant\leqslant\|B\|$. კერძოდ, $\|A\|=\|modA\|$.

ვთქვათ $A=(a_{ij})$ ნებისმიერი ტიპის მატრიცაა. განვიხილოთ შემდეგი ნორმები:

1) $\|A\|_m=\max\limits_i\sum\limits_j|a_{ij}|$ (m — ნორმა);

2) $\|A\|_l=\max\limits_j\sum\limits_i|a_{ij}|$ (l — ნორმა);

3) $\|A\|_k=\sqrt{\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|^2}$ (k — ნორმა).

ადვილი საჩვენებელია, რომ m, l და k ნორმები აკმაყოფილებენ ნორმის ყველა პირობას.

მაგალითი. მოცემული

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

მატრიცისათვის გვექნება:

$$\|A\|_m=\max(1+2+3,\ \ 0+3+4,\ \ 5+1+2)=\max(6,7,8)=8;$$
$$\|A\|_l=\max(1+0+5,\ \ 2+3+1,\ \ 3+4+2)=\max(6,6,9)=9;$$
$$\|A\|_k=\sqrt{1^2+2^2+3^2+0^2+3^2+4^2+5^2+1^2+2^2}=\sqrt{69}.$$

კერძოდ,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

სვეტ-ვექტორისათვის, ზემოთ განხილულ ნორმებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\|X\|_m=\max_i x_i;$$

$$\|X\|_l=|x_1|+|x|_2+\ldots+|x_n|;$$

$$\|X\|_k=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2}.$$

თუ X-ის $x_1, x_2,\ldots,x_n$ კომპონენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ:

$$\|X\|_k=\sqrt{x_1^2+x^2{}_2+\ldots+x^2{}_n}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $||A||_m$, $||A||_l$, $||A||_k$ სიდიდეებისათვის სრულდება ნორმის 1) —4) პირობები. ცხადია, რომ 1) და 2) პირობა სრულდება. შევამოწმოთ 3) პირობის მართებულობა. ვთქვათ $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ ერთნაირი ტიპის მატრიცებია, მაშინ:

$$||A+B||_m=\max_i \sum_j |a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \max_i \{\sum_j |a_{ij}|+\Sigma|b_{ij}|\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}|+\max_i \sum_j |b_{ij}|=||A||_m+||B||_m.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$||A+B||_l \leqslant ||A||_l+||B||_l;$$

თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას:

$$\sum_{i,j}|a_{ij}|\,|b_{ij}| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j}|b_{ij}|^2},$$

მაშინ მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$||A+B||_k \leqslant \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}+\sqrt{\sum_{i,j}|b_{ij}|^2}=||A||_k+||B||_k.$$

ამრიგად, სამივე ნორმისათვის დამტკიცებულია 3) პირობა.

ახლა შევამოწმოთ 4) პირობის მართებულობა. ვთქვათ $A=(a_{ij})$ არის $m' \times n'$ ტიპის, ხოლო $B=(b_{ij})$ არის $m'' \times n''$ ტიპის მატრიცა. AB ნამრავლის არსებობისათვის აუცილებელია $m''=n'$ პირობა, გარდა ამისა AB მატრიცა იქნება $m' \times n''$ ტიპის.

გვაქვს:

$$||AB||_m=\max_i \sum_{j=1}^{n''}\left|\sum_{s=1}^{n'} a_{is}b_{sj}\right| \leqslant \max_i \left\{\sum_{j=1}^{n''}\sum_{s=1}^{n'}|a_{is}||b_{sj}|\right\}=$$
$$=\max_i \left\{\sum_{s=1}^{n'}|a_{is}|\sum_{j=1}^{n''}|b_{sj}|\right\} \leqslant \max_i \left\{\sum_{s=1}^{n'}|a_{is}| \cdot ||B||_m\right\}=$$
$$=\max_i \left\{\sum_{s=1}^{n'}|a_{is}|\right\} \cdot ||B||_m=||A||_m \cdot ||B||_m,$$

ანალოგიურად,

$$||AB||_l=\max_j \sum_{i=1}^{m'}\left|\sum_{s=1}^{n'} a_{is}b_{sj}\right| \leqslant \max_j \left\{\sum_{i=1}^{m'}\sum_{s=1}^{n'}|a_{is}||b_{sj}|\right\}=$$

$$= \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \sum_{i=1}^{m'} |a_{is}| \right\} \leqslant \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \cdot \|A\|_l \right\} =$$

$$= \|A\|_l \cdot \max_j \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| = \|A\|_l \cdot \|B\|_l.$$

ხოლო

$$\|AB\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \cdot |b_{sj}| \right\}^2}.$$

კოშის უტოლობის გამოყენებით და $m''=n'$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|AB\|_k \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} |b_{tj}|^2 \right\}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} \sum_{j=1}^{n''} |b_{tj}|^2} = \sqrt{\|A\|^2_k \cdot \|B\|^2_k} = \|A\|_k \cdot \|B\|_k.$$

მაშასადამე, აღნიშნული ნორმებისათვის 4) პირობა შესრულებულია.

ვაჩვენოთ, რომ $\|A\|_m$, $\|A\|_l$ და $\|A\|_k$ ნორმები კანონიკურია, ე. ი. უნდა შევამოწმოთ 5)—6) პირობები.

თუ $a_{pq} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, მაშინ:

$$\|A\|_m \geqslant |a_{p1}| + \ldots + |a_{pq}| + \ldots + |a_{pq'}| \geqslant |a_{pq}|,$$

$$\|A\|_l \geqslant |a_{1q}| + \ldots + |a_{pq}| + \ldots + |a_{m'q}| \geqslant |a_{pq}|,$$

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} |a_{ij}|^2} \geqslant |a_{pq}|.$$

ე. ი.

$$|a_{ij}| \leqslant |a_{pq}| \leqslant \|A\|_s \quad (s=m, \ l, \ k).$$

კერძოდ, თუ $A=(a_{11})$, მაშინ $\|A\|_m = \|A\|_l = \|A\|_k = |a_{11}|$.

თუ $mod A \leqslant mod B$, მაშინ $|a_{ij}| \leqslant |b_{ij}| \cdot$ $\|A\|_m$, $\|A\|_l$, $\|A\|_k$ ნორმების განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ:

$$\|A\|_s \leqslant \|B\|_s \quad (s=m, l, \ k).$$

ჩვენს მიერ შემოღებული ყოველი ნორმისათვის

$$\|A\|_s=\|\mathrm{mod}A\|_s \quad (s=m,\ l,\ k),$$

ე. ი. 6) პირობაც შესრულებულია, ამრიგად, $\|A\|_m$, $\|A\|_l$, $\|A\|_k$ წარმოადგენენ კანონიკურ ნორმებს.

შევნიშნოთ, რომ თუ E არის n რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, მაშინ:

$$\|E\|_m=\|E\|_l=1 \text{ და } \|E\|_k=\sqrt{n}.$$

§ 7. მატრიცის რაციონალური ფუნქცია

განვიხილოთ n-ური რიგის მატრიცა

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn} \end{pmatrix},$$

რომლის მრავალწევრები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$P(X)=A_0X^m+A_1X^{m-1}+\ldots+A_mE \quad (\text{მარჯვენა მრავალწევრი});$$

$$\widetilde{P}(X)=X^mA_0+X^{m-1}A_1+\ldots+EA_m \quad (\text{მარცხენა მრავალწევრი}),$$

სადაც $A_\nu(\nu=0,1,\ldots,m)$ მარჯვენა მრავალწევრში არიან $m\times n$ ტიპის, ხოლო მარცხენა მრავალწევრში $n\times m$ ტიპის მატრიცები (E არის n-ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცა).

საზოგადოდ,

$$P(X)\neq\widetilde{P}(X).$$

X მატრიცის რაციონალური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$R_1(X)=P(X)[Q(X)]^{-1} \text{ ან } R_2(X)=[Q(X)]^{-1}P(X),$$

სადაც $P(X)$ და $Q(X)$ მატრიცული მრავალწევრებია, ამასთან

$$|Q(X)|\neq O.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, მეორე რიგის X მატრიცისათვის

$$P(X)=X^2+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}X-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ვიპოვოთ $P\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$P\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 8. მატრიცის რანგი

განვიხილოთ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A_1=(a_{11},\ a_{12},\dots,a_{1n}),$$
$$A_2=(a_{21},\ a_{22},\dots,a_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_m=(a_{m1},\ a_{m2},\dots,a_{mn}).$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. ნებისმიერი ნამდვილი α_1, $\alpha_2,\dots,\alpha_k$ $(k\leqslant m)$ რიცხვებისათვის $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_kA_k$ ჯამს ეწოდება A_1, $A_2,\dots,A_k$ მატრიცების წრფივი კომბინაცია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. მატრიცათა სისტემას A_1, $A_2,\dots,A_k$, ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2,\dots$ α_k რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_1A_k=O, \tag{1}$$

სადაც $O=(0,0,\dots,0)$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. თუ A_1, $A_2,\dots,A_k$ სტრიქონები არ არის წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მათ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, ე. ი. A_1, $A_2,\dots,A_k$ სტრიქონებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ (1) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1=$ $=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0$.

თ ე ო რ ე მ ა. იმისათვის, რომ $A_1, A_2,\dots,A_k$ სტრიქონები იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სტრიქონებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენდეს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, A_1, $A_2,\dots,A_k$ $(k\geqslant2)$ სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ ადგილი აქვს (1) ტოლობას და

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_3 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} A_k.$$

ამრიგად, A_1 სტრიქონი არის დანარჩენი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია.

საკმარისობა. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონებიდან ერთერთი მაგალითად, A_1 წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას, ე. ი. არსებობს ისეთი რიცხვები, რომ

$$A_1 = \beta A_2 + \gamma A_3 + \ldots + \rho A_k,$$

მაშინ

$$(-1)A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \ldots + \rho A_k = O.$$

ე. ი. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

განსაზღვრება 4. A მატრიცის k-ური რიგის მინორი ეწოდება ამ მატრიცის ნებისმიერი k სტრიქონისა და k სვეტის ($k \leqslant \min(m, n)$) გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილი k რიგის დეტერმინანტს.

განსაზღვრება 5. A მატრიცის რანგი ეწოდება r რიცხვს, თუ ამ მატრიცას გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ერთი მაინც r რიგის მინორი, ხოლო ყველა $r+1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია. იგი აღინიშნება $RgA = r$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ $RgA \leqslant \min(m, n)$ და $RgO = 0$.

A მატრიცის დეფექტი ეწოდება $\min(m, n) - Rg\,A$ სხვაობას.

რადგანაც განსაზღვრებაზე დაყრდნობით მატრიცის რანგის გამოთვლა საკმაოდ შრომატევადია, ამიტომ მიმართავენ მატრიცას ცნობილ ელემენტარულ გარდაქმნებს (თ.5, §4).

ცნობილია, რომ თუ A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად მიღებულია B მატრიცა ($A \to B$), მაშინ $RgA = RgB$.

ცხადია, რომ ელემენტარული გარდაქმნებით ნებისმიერი A მატრიცა დაიყვანება ისეთ B მატრიცაზე, რომლის ყველა ელემენტი, გარდა $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ ($r \leqslant \min(m, n)$), ნულის ტოლია. ამრიგად, $RgA = RgB = r$.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

მატრიცის რანგი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენებით მი-ვიღებთ

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-7&9\\0&1&2&-3\\2&1&-8&11\\1&2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&4&-7&9\\0&1&2&-3\\2&1&-8&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&-4&6\\0&1&2&-3\\0&-3&-6&9\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&-3\\0&1&2&-3\\0&1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-5&7\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ამრიგად, $RgA=2$, ხოლო დეფექტია $4-2=2$.

მატრიცის რანგის გამოსათვლელად გამოიყენება შემდეგი წესიც; როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თუ A მატრიცის r რიგის რომელიმე მინორი განსხვავებულია ნულისაგან და ამ მინორის შემცველი (მომაარშიებელი) ყოველი $r+1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ $RgA=r$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ჩანს ამ მატრიცის ერთი მაინც მეორე რიგის მინორი, მაგალითად

$$\begin{vmatrix}-4&3\\-2&1\end{vmatrix}=-4+6=2\neq0.$$

მისი მომაარშიებელი მესამე რიგის ერთი მაინც მინორი

$$\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=1\neq0.$$

რადგან უკანასკნელი მინორის მომაარშიებელი ორივე მეოთხე რიგის მინორი ნულის ტოლია, ამიტომ $RgA=3$, ხოლო დეფექტი $4-3=1$.

ვთქვათ, მოცემულია ერთნაირი $m \times n$ ტიპის მატრიცათა მიმდევრობა:

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}) \quad \begin{array}{l}(k=1,2,\ldots),\\ (i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n),\end{array} \tag{1}$$

რომლის ზღვარი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k = (\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}). \tag{2}$$

თუ მატრიცთა მიმდევრობას აქვს ზღვარი, მაშინ მას ეწოდება კრებადი.

ლ ე მ ა. იმისათვის, რომ A_k $(k=1,2,\ldots)$ მატრიცთა მიმდევრობა იყოს კრებადი A მატრიცისაკენ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$||A-A_k|| \to 0, \quad \text{როცა} \quad k\to\infty \tag{3}$$

და

$$\lim_{k\to\infty} ||A_k|| = ||A||,$$

სადაც $||A||$ არის A მატრიცის ნებისმიერი კანონიკური ნორმა.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. თუ $A_k \to A = (a_{ij})$, მაშინ $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| < \varepsilon$, როცა $k > N(\varepsilon)$. საიდანაც $|A-A_k| < \varepsilon I$. აქ I არის $m \times n$ ტიპის მატრიცა, რომლის ყოველი ელემენტი ერთის ტოლია.

ნორმის ერთ-ერთი თვისების თანახმად

$$||A-A_k|| \leqslant \varepsilon ||I||, \quad \text{როცა} \quad k > N(\varepsilon),$$

ამრიგად,

$$\lim_{k\to\infty} ||A-A||_k = 0. \tag{4}$$

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ, შესრულებულია (3) პირობები. მაშინ, როცა $k > N(\varepsilon)$, გვექნება:

$$|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \leqslant ||A-A_k|| < \varepsilon.$$

ამრიგად,

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \ \text{ე. ი.} \ \lim_{k\to\infty} A_k = A.$$

გარდა ამისა, თუ $A_k \to A$, გვექნება:

$$|\,||A|| - ||A_k||\,| \leqslant ||A-A_k|| \to 0, \quad \text{როცა} \quad k\to\infty,$$

ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} ||A_k|| = ||A||.$$

შ ე დ ე გ ი. $A_k \to 0$, როცა $k \to \infty$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k\| = 0,$$

სადაც $\|A_k\|$ — რომელიღაც კანონიკური ნორმაა.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \text{ და } \lim_{k\to\infty} B_k = B,$$

მაშინ

1) $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k \pm B_k) = A \pm B,$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k B_k) = AB,$

3) $\lim\limits_{k\to\infty} A_k^{-1} = A^{-1} \qquad (|A| \neq 0),$

თუ განხილულ ოპერაციებს აზრი აქვს.

თუ მუდმივი C მატრიცისათვის აზრი აქვს CA_k და A_kC $(k=1,2,\ldots)$ მატრიცებს, მაშინ:

$$\lim_{k\to\infty} CA_k = C\lim_{k\to\infty} A_k = CA,$$

$$\lim_{k\to\infty} A_kC = (\lim_{k\to\infty} A_k)C = AC.$$

თ ე ო რ ე მ ა (კოში). A_k $(k=1,2,\ldots)$ მატრიცათა მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $N = N(\varepsilon)$ ნომერი, რომ როცა $K > N$, $p > 0$ შესრულდეს

$$\|A_{k+p} - A_k\| < \varepsilon \tag{5}$$

უტოლობა, სადაც $\|\cdot\|$ — ნებისმიერი კანონიკური ნორმაა.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. თუ სრულდება (5) უტოლობა, მაშინ A_k მატრიცის ნებისმიერი $a_{ij}^{(k)}$ ელემენტისათვის სრულდება კრებადობის კოშის კრიტერიუმი, ე. ი. არსებობს

$$\lim_{k\to\infty} A_k = (\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}).$$

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. თუ არსებობს

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k,$$

მაშინ დამტკიცებული ლემის თანახმად

$$\|A - A_k\| \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (5) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. მატრიცათა მწკრივი

მატრიცათა მწკრივი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k, \tag{1}$$

სადაც $A_1, A_2, \ldots$ ერთნაირი ტიპის მატრიცებია.

თუ არსებობს (1) ზღვარი, მაშინ მატრიცათა მწკრივს ეწოდება კრებადი, ხოლო ზღვრულ მატრიცას მოცემული მწკრივის ჯამი. თუ (1) ზღვარი არ არსებობს, მაშინ მატრიცათა მწკრივს ეწოდება განშლადი და მას არავითარი ჯამი არ მიეწერება.

თ ე ო რ ე მ ა 1. თუ მატრიცათა (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} A_j.$$

თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ არსებობს სასრული ზღვარი

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

გვაქვს: $A_k = S_k - S_{k-1}$, საიდანაც $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} S_k - \lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$

მატრიცათა (1) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{mod} A_k \tag{2}$$

მწკრივი.

თ ე ო რ ე მ ა 2. აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი კრებადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}) \quad (k=1,2,\ldots),$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{mod} A_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | a_{ij}^{(k)} | \right).$$

თეორემის პირობის თანახმად (2) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ყოველი $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ რიცხვითი მწკრივი კრებადია. ამრიგად, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ მწკრივიც კრებადია და ამასთან აბსოლუტურად, ე. ი. არსებობს

$$S=\lim_{N\to\infty} S_N=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} A_k$$

ზღვარი, რაც ნიშნავს (1) მწკრივის კრებადობას.

თ ე ო რ ე მ ა 3. თუ $||A||$ — ნებისმიერი კანონიკური ნორმაა და

$$\sum_{k=1}^{\infty}||A||_k \tag{3}$$

რიცხვითი მწკრივი კრებადია, მაშინ მატრიცათა (1) მწკრივი კრებადია და ამასთან აბსოლუტურადაც.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$A_k=(a_{ij}^{(k)})\quad (k=1,2,\ldots).$$

განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივი:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \tag{4}$$

$(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$. რადგანაც $|a_{ij}^{(k)}|\leqslant||A_k||$, ამიტომ (4)-ით განსაზღვრული ყოველი მწკრივი კრებადია და ამასთან აბსოლუტურად, ე. ი.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}\right)$$

მატრიცული მწკრივი განმარტების თანახმად კრებადია და ამასთან აბსოლუტურად.

გამოყენებით მათემატიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვთ ხარისხსოვან მატრიცულ მწკრივებს, ე. წ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k X^k \quad (\text{მარცხენა}) \tag{5}$$

და

$$\sum_{k=1}^{\infty} X^k A_k \quad (\text{მარჯვენა}) \tag{5'}$$

მწკრივებს, სადაც X არის n რიგის კვადრატული მატრიცა.

(5) ფორმულაში A_k არის $m \times n$ ტიპის მატრიცა ან რიცხვი, ხოლო (5′) ფორმულაში A_k არის $n \times m$ ტიპის მატრიცა ან რიცხვი.

თ ე ო რ ე მ ა 4. თუ r არის

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A_k \| x^k \tag{6}$$

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი, სადაც $\|A_k\|$ ($k=0,1,2,\ldots$) რომელიმე კანონიკური ნორმაა, მაშინ (5) და (5′) ხარისხოვანი მატრიცული მწკრივები კრებადია, როცა

$$\|X\| < r. \tag{7}$$

კერძოდ, a_k ($k=0,1,2,\ldots$) რიცხვითი კოეფიციენტებიანი

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

ხარისხოვანი მატრიცული მწკრივი კრებადია, როცა

$$\|X\| < r,$$

სადაც r არის $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| X^k$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც

$$\|A_k X^k\| \leqslant \|A_k\| \cdot \|X\|^k,$$

ამიტომ (7) უტოლობის თანახმად

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k X^k\|$$

მწკრივი კრებადია. აქედან გამომდინარე, თეორემა 3-ის თანახმად, (5) მწკრივი კრებადია.

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება (5′) მწკრივის კრებადობა. თეორემის მეორე წინადადების მართებულობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ a_k რიცხვისათვის $||a_k||=|a_k|$.

თ ე ო რ ე მ ა 5. თუ X კვადრატული მატრიცისათვის

$$||X||<1, \tag{8}$$

მაშინ

$$A+AX+AX^2+\ldots+AX^n+\ldots, \tag{9}$$

$$A+XA+X^2A+\ldots+X^nA+\ldots, \tag{9'}$$

გეომეტრიული პროგრესიები კრებადია. ამასთან

$$\sum_{k=0}^{\infty} AX^k = A(E-X)^{-1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^kA = (E-X)^{-1}A.$$

მართლაც, თეორემა 4-ისა და (8) პირობის თანახმად (9) პროგრესია კრებადია, ე. ი. არსებობს სასრული

$$S=\sum_{k=0}^{\infty} AX^k$$

მატრიცა.

განვიხილოთ იგივეობა

$$A(E+X+X^2+\ldots+X^k)(E-X)=A(E-X^{k+1}). \tag{10}$$

თუ (10) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$ და მხედველობაში მივიღებთ (8) პირობას, მივიღებთ:

$$S(E-X)=AE=A. \tag{11}$$

კერძოდ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ (11) ტოლობაში $A=E$, მივიღებთ

$S_1(E-X)=E$, სადაც $S_1=\sum_{k=0}^{\infty} X^k$. აქედან $|S_1|\cdot|E-X|=|E|=1$. რადგანაც $|S_1|$ სასრულია, ამიტომ $|E-X|\neq 0$.

ამრიგად, $E-X$ მატრიცა არაგანსაკუთრებულია და ამიტომ არსებობს $(E-X)^{-1}$.

(11) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ მარჯვნიდან $(E-X)^{-1}$-ზე, მივიღებთ:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty} AX^k = A(E-X)^{-1}.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k A = (E-X)^{-1}A, \text{ როცა } \|X\|<1.$$

შ ე დ ე გ ი. თუ $\|X\|<1$, მაშინ არსებობს $(E-X)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty} X^k$ შებრუნებული მატრიცა. თუ $\|E\|=1$, მაშინ

$$\|(E-X)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|X\|^k = \frac{1}{1-\|X\|}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $\|X\|<1$, მაშინ შეგვიძლია შევაფასოთ (9) მწკრივის ნაშთის ნორმა. გვაქვს:

$$R_k=\|A(E-X)^{-1}-A(E+X+X^2+\ldots+X^k)\|\leqslant\|A\|\cdot\|X^{k+1}+$$
$$+X^{k+2}+\ldots\|\leqslant\|A\|(\|X\|^{k+1}+\|X\|^{k+2}+\ldots) = \frac{\|A\|\cdot\|X\|^{k+1}}{1-\|X\|}.$$

მატრიცული მწკრივები საშუალებას გვაძლევენ განვსაზღვროთ ტრანსცენდენტული მატრიცული ფუნქციები. მაგალითად,

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

მტკიცდება, რომ ეს მწკრივი კრებადია ნებისმიერი X კვადრატული მატრიცისათვის.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.

1. მოცემულია მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ: $A-B$; $2A+3B$; AB; BA.

2. გამოთვალეთ AB ნამრავლი, თუ:

ა) $$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

ბ) $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}.$$

3. იპოვეთ A^3, თუ $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

4. დაამტკიცეთ, რომ $A^n=2^{n-1}$, თუ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. დაამტკიცეთ, რომ

$$D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k\end{pmatrix}, \text{ თუ } D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

6. დაამტკიცეთ, რომ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ და $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, თუ $AB=BA$.

7. იპოვეთ C მატრიცა, თუ:

ა) $C=A'B-BA'$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{pmatrix}$;

ბ) $C=A'B-9B$, $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 8\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

გ) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცა ერთადერთი გზით წარმოიდგინება სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული მატრიცების ჯამად.

8. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

ა) $$X\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,2\\ -5,6\end{pmatrix};$$

ბ) $$\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}.$$

9. იპოვეთ მატრიცის რანგი:

ა) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 40 & 15 & 68 \\ 14 & 7 & 16 \\ 20 & 10 & 59 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

დ) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

II თავი

ფუნქციონალური ანალიზის ელემენტები

§ 1. წრფივი სივრცის ცნება

მატრიცებზე და ორიენტირებულ მონაკვეთებზე (ვექტორებზე) წრფივი ოპერაციები (შეკრება და რიცხვზე გამრავლება) სხვადასხვანაირადაა განსაზღვრული, მაგრამ ახასიათებთ ერთი და იგივე თვისებები: კომუტატიურობა და ასოციაციურობა შეკრების მიმართ და რიცხვის ჯამზე ნამრავლის დისტრიბუციულობა.

ამ პარაგრაფში შევისწავლით ნებისმიერი ბუნების ობიექტების სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტებისათვის, რაიმე წესით, განსაზღვრულია შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები (წრფივი ოპერაციები) ისე, რომ ეს ოპერაციები აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს.

განსაზღვრება. ნებისმიერ ობიექტთა E სიმრავლეს ეწოდება წრფივი სივრცე, ხოლო მის ელემენტს — ვექტორი, თუ:

I. მოცემულია წესი (შეკრების ოპერაცია), რომლის მიხედვით E სიმრავლის ყოველ x და y ელემენტს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც x და y ელემენტების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x+y$ სიმბოლოთი;

II. მოცემულია წესი (რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია), რომლის მიხედვით E სიმრავლის ყოველ x ელემენტს და ნებისმიერ α რიცხვს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც ეწოდება x ელემენტის α რიცხვზე ნამრავლი და აღინიშნება αx სიმბოლოთი;

III. E სიმრავლის ყოველი x, y, z ელემენტებისა და ნებისმიერი α, β რიცხვებისათვის სრულდება აქსიომები:

1. $x+y=y+x$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. E სიმრავლეში არსებობს ისეთი θ (ნულოვანი ვექტორი) ელემენტი, რომ E სიმრავლის ყოველი x-ისათვის $x+\theta=x$;

4. E სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის მასში არსებობს მოპირდაპირე $(-x)$ ელემენტი ისეთი, რომ $x+(-x)=\theta$;

5. $\alpha\ (x+y)=\alpha x+\alpha y$;

6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$;

7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

8. E სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის $1\cdot x=x$.

წრფივი სივრცის მაგალითებია:

1) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

2) ორიენტირებულ მონაკვეთთა V_1, V_2, V_3 სიმრავლეები (წრფის, სიბრტყის და სივრცის) მათი შეკრებისა და სკალარაზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

3) ერთი და იგივე განზომილების მატრიცთა სიმრავლე მათი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

4) ვთქვათ, E ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო დალაგებული n — ეულების $x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ სიმრავლეა, რომელშიაც შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ldots,\ \alpha x_n).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ სრულდება 1—8 პირობები, ე. ი. E არის წრფივი სივრცე. მას ეწოდება n — განზომილებიანი ვექტორული სივრცე (კოორდინატული სივრცე) და აღინიშნება E_n სიმბოლოთი. ცხადია, E_n სივრცის ნულოვანი ვექტორია $\theta=(0,\ 0,\ldots,0)$, ხოლო $x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ ვექტორის მოპირდაპირე ელემენტია $-x=$ $=(-x_1,\ -x_1,\ldots,-x_n)$. $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ რიცხვებს ეწოდება x ვექტორის კოორდინატები.

თ ე ო რ ე მ ა 1. ყოველ წრფივ E სივრცეში ნულოვანი ელემენტი ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-3 აქსიომის თანახმად E სივრცეში არსებობს ერთი მაინც ნულოვანი ელემენტი. დავუშვათ, რომ E სივრცეში არსებობს ორი ნულოვანი θ_1 და θ_2 ელემენტი. მაშინ E სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის გვაქვს $x+\theta_1=x$, $x+\theta_2=x$. კერძოდ, $\theta_2+\theta_1=\theta_2$, $\theta_1+\theta_2=\theta_1$, საიდანაც 1-ლი აქსიომის თანახმად $\theta_1=\theta_2$.

თ ე ო რ ე მ ა 2. წრფივი სივრცის ნებისმიერი ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-4 აქსიომის თანახმად წრფივი სივრცის ყოველ ელემენტს გააჩნია ერთი მაინც მოპირდაპირე ელემენტი. დავუშ-

ვათ, რომ რომელიმე x ელემენტს გააჩნია ორი y_1 და y_2 მოპირდაპირე ელემენტი, ე. ი. $x+y_1=\theta$ და $x+y_2=\theta$.

თუ გავითვალისწინებთ წრფივი სივრცის აქსიომებს, მივიღებთ:

$$y_1=y_1+\theta=y_1+(x+y_2)=(y_1+x)+y_2=\theta+y_2=y_2, \quad \text{ე. ი.} \quad y_1=y_2.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3. წრფივი სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის

$$0\cdot x=\theta.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ x ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტია y, მაშინ:

$$0\cdot x=0\cdot x+\theta=0\cdot x+(x+y)=(0\cdot x+x)+y=(0+1)x+y=x+y=\theta,$$

ე. ი. $0\cdot x=\theta$.

თ ე ო რ ე მ ა 4. ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\alpha\cdot\theta=\theta$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-3 თეორემისა და მე-7 აქსიომის თანახმად

$$\alpha\cdot\theta=\alpha(0\cdot x)=(\alpha\cdot 0)x=0\cdot x=\theta.$$

ამრიგად, $\alpha\cdot\theta=\theta$.

თ ე ო რ ე მ ა 5. თუ $\alpha x=\theta$, მაშინ ან $\alpha=0$, ან $x=\theta$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\alpha\neq 0$, მაშინ:

$$x=1\cdot x=\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right)x=\frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\theta=\theta.$$

თუ $x\neq\theta$, მაშინ, ცხადია $\alpha=0$, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში $x=\theta$.

თ ე ო რ ე მ ა 6. წრფივი სივრცის ყოველი x ელემენტისათვის $(-1)x$ წარმოადგენს x-ის მოპირდაპირე ელემენტს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს $x+(-1)x=(1-1)x=0\cdot x=\theta$.

ეს თეორემა ამართლებს x-ის მოპირდაპირე ელემენტის $-x$-ით აღნიშვნას.

წრფივი სივრცის x და $(-y)$ ელემენტების ჯამს უწოდებენ x და y ელემენტების სხვაობას და აღნიშნავენ $x-y$ სიმბოლოთი.

§ 2. წრფივი სივრცის განზომილება. ბაზისი

ვთქვათ მოცემულია E_n სივრცე. ამ სივრცის $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია ეწოდება $\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2x^{(2)}+\ldots+\alpha_nx^{(n)}$ ჯამს, სადაც $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. E_n სივრცის $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots, x^{(n)}$ ელემენტთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი,

c_1, $c_2, \ldots, c_n$ რიცხვები, რომელთგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)} = \theta. \tag{1}$$

განსაზღვრება 2. E_n სივრცის $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ ელემენტთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებელი, თუ (1) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

თეორემა 1. იმისათვის, რომ E_n სივრცის ელემენტთა სისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებელი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სისტემის ერთი მაინც ელემენტი წარმოადგენდეს დანარჩენი ელემენტების წრფივ კომბინაციას.

აუცილებლობა. თუ (1) ტოლობაში $c_m \neq 0$, მაშინ გვექნება:

$$x^{(m)} = \gamma_1 x^{(1)} + \gamma_2 x^{(2)} + \ldots + \gamma_{m-1} x^{(m-1)},$$

სადაც

$$\gamma_j = -\frac{c_j}{c_m} \, (j = 1, 2, \cdots m-1),$$

ამრიგად, $x^{(m)}$ ვექტორი არის დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია.

საკმარისობა. ვთქვათ $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად, $x^{(m)}$ წარმოადგენს დანარჩენი ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე. ი. არსებობს ისეთი $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ რიცხვები, რომ

$$x^{(m)} = \gamma_1 x^{(1)} + \gamma_2 x^{(2)} + \ldots + \gamma_{m-1} x^{(m-1)}.$$

აქედან

$$\gamma_1 x^{(1)} + \gamma_2 x^{(2)} + \ldots + \gamma_{m-1} x^{(m-1)} + (-1) x^{(m)} = \theta,$$

რაც ნიშნავს $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ ვექტორების წრფივად დამოკიდებულებას.

შევნიშნოთ, რომ თუ ელემენტთა სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, მაშინ იგი წრფივად დამოკიდებულია.

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

თეორემა 2. თუ ელემენტთა სისტემა შეიცავს წრფივად დამოკიდებულ ქვესისტემას (ნაწილს), მაშინ მოცემული სისტემაც წრფივად დამოკიდებულია.

თეორემა 3. წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა სისტემის ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 1. E_3 სივრცეში ორი x და y ვექტორის წრფივად დამოკიდებულება ნიშნავს მათ პარალელობას რაიმე წრფის მიმართ, ხოლო სამი x, y, და z ვექტორის წრფივად დამოკიდებულება ნიშნავს, რომ ისინი პარალელურია რომელიმე სიბრტყის.

ვთქვათ, მოცემულია $x^{(j)}=(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ $(j=1,2,..m)$ ვექტორთა სისტემა. (1) ტოლობაში შემავალი $c_k (k=1,2,\ldots,m)$ მუდმივების განსაზღვრის მიზნით ამოვხსნათ სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_1^{(1)}+c_2x_1^{(2)}+\ldots+c_mx_1^{(m)}=0, \\ c_1x_2^{(1)}+c_2x_2^{(2)}+\ldots+c_mx_2^{(m)}=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1x_n^{(1)}+c_2x_n^{(2)}+\ldots+c_mx_n^{(m)}=0. \end{array}\right\}. \tag{2}$$

თუ მიღებული სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი, მაშინ მოცემული ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში იქნება წრფივად დამოუკიდებელი.

განვიხილოთ მოცემული ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცა

$$X=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(m)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(m)} \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, მისი რანგია r. (2) სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $r<m$. აქედან გამომდინარე $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(m)}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, როცა $r<m$, და წრფივად დამოუკიდებელია, თუ $r=m$ (შეუძლებელია, რომ $r>m$).

მაშასადამე, X მატრიცის r რანგი ამ სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რაოდენობის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ X მატრიცის რანგია r, მაშინ $x^{(j)} (j=12,\ldots m)$ სვეტ-ვექტორებს შორის მოიძებნება r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ხოლო ყოველი $r+1$ $(r+1\leqslant m)$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვიკვლიოთ ვექტორთა შემდეგი სისტემის წრფივად დამოკიდებულება:

$$x^{(1)}=(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1);$$
$$x^{(2)}=(1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1);$$
$$x^{(3)}=(1,\ -5,\ -1,\ 2,\ -1);$$
$$x^{(4)}=(3,\ -6,\ 2,\ 1,\ 1).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

რომლის რანგის გამოსათვლელად ჩავატაროთ ელემენტარული გარდაქმნები: პირველი სამი სტრიქონის ჯამი გამოვაკლოთ მეოთხე სტრიქონს, მივიღებთ:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრცის ყოველი მეოთხე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო ზედა მარცხენა კუთხეში მდგომი მესამე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

მაშასადამე, $r=3<4$, ამიტომ $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, ცხადია, რომ

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}-x^{(4)}=\theta.$$

განსაზღვრება 3. E სივრცეს ეწოდება n —განზომილებიანი, თუ E-ში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ხოლო ყოველი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. n რიცხვს ეწოდება E სივრცის განზომილება და აღინიშნება $\dim E$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ წრფივი სივრცის განზომილება არის ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი.

E_n წრფივ ვექტორულ სივრცეში გვაქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, \ 0, \ 0, \ldots, 0); \\ e_2 &= (0, \ 1, \ 0, \ldots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, \ 0, \ 0, \ldots 1). \end{aligned}$$

მართლაც, $c_1e_1+c_2e_2+\ldots+c_ne_n=(c_1, \ c_2, \ldots, c_n)=\theta$, საიდანაც $c_1=$ $=c_2=\ldots=c_n=0$.

ვაჩვენოთ, რომ E_n სივრცეში $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ ვექტორთა ყოველი სისტემა, სადაც $m>n$,წრფივად დამოკიდებულია. მართლაც, ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცა არის $n\times m$ ტიპის და აქედან გამომდინარე, მისი რანგი $r\leqslant \min(n, \ m)=n<m$. მაშასადამე, აღებული ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. E_n სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვია n , რომელიც ამართლებს ამ სივრცის აღნიშვნას E_n სიმბოლოთი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4. n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ბაზისი ეწოდება ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ n ელემენტთა დალაგებულ სისტემას.

n — განზომილებიანი წრფივი სივრცის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ მასში ყოველთვის არსებობს ბაზისი.

ვიტყვით, რომ ელემენტი დაშლილია რაიმე ბაზისის მიმართ, თუ ის წარმოადგენს ამ ბაზისის ელემენტების წრფივ კომბინაციას.

თ ე ო რ ე მ ა 4. E_n სივრცის ყოველი ელემენტი ერთადერთი სახით იშლება ამ სივრცის ბაზისის მიხედვით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $x \in E_n$ და $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ მისი ბაზისია. წრფივი სივრცის განზომილების განსაზღვრების თანახმად $x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. არსებობს ისეთი $c_0, c_1, \ldots, c_n$ რიცხვები, რომ

$$c_0 x + c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \ldots + c_n \varepsilon_n = \theta, \tag{3}$$

სადაც c_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. კერძოდ, $c_0 \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში (3)-დან გამომდინარეობს $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ელემენტების წრფივად დამოკიდებულება. (3)-დან მივიღებთ:

$$x = -\frac{c_1}{c_0}\varepsilon_1 - \frac{c_2}{c_0}\varepsilon_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_0}\varepsilon_n. \tag{4}$$

ე. ი. x ვექტორი წარმოადგენს $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას.

ვაჩვენოთ დაშლის ერთადერთობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს x-ის ორი დაშლა

$$x = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \ldots + \beta_n \varepsilon_n \quad \text{და} \quad x = \gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_n \varepsilon_n;$$

მაშინ

$$(\beta_1 - \gamma_1)\varepsilon_1 + (\beta_2 - \gamma_2)\varepsilon_2 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\varepsilon_n = \theta.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო გვექნება:

$$\beta_1 = \gamma_1, \quad \beta_2 = \gamma_2, \ldots, \beta_n = \gamma_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ რიცხვებს ეწოდება x ელემენტის კოორდინატები $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ბაზისის მიმართ, თუ

$$x = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \ldots + c_n \varepsilon_n.$$

ცხადია, რომ სივრცის ნულოვანი ელემენტის ყველა კოორდინატი

ნებისმიერი ბაზისის მიმართ ნულის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ვექტორის კოორდინატები წარმოადგენენ კოორდინატებს ორტთა ბაზისში:

$$e_j=(\delta_{1j},\ \delta_{2j},\ldots,\ \delta_{nj}),\ (j=1,\ 2,\ldots,n),$$

სადაც δ_{nj} — კრონეკერის სიმბოლოა, ამრიგად

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n.$$

განსაზღვრება 6. წრფივ სივრცეს ეწოდება უსასრულო განზომილებიანი, თუ მასში არსებობს წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების ნებისმიერი რაოდენობა.

განსაზღვრება 7. E_n სივრცის E_k ქვესიმრავლეს ეწოდება E_n-ის ქვესივრცე (წრფივი ქვესივრცე), თუ იგი წრფივი სივრცეა E_n-ში შემოღებული შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ: ე. ი. 1) თუ $x\in E_k$ და $y\in E_k$ მაშინ $x+y\in E_k$, 2) თუ $x\in E_k$, მაშინ ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\alpha x\in E_k$. 3) ცხადია, რომ ნებისმიერი E_n სივრცის ყოველი ქვესივრცე შეიცავს ნულოვან ელემენტს $\theta\in E_k$.

ქვესივრცის მაგალითებია:

1) ნულოვანი, ე. ი. ისეთი ქვესივრცე, რომელიც შედგება მოცემული E_n სივრცის ერთადერთი ნულოვანი ვექტორისაგან.

2) E_n სივრცის ქვესივრცეა თვითონ E_n სივრცე.

3) E_1 არის E_2-ის ქვესივრცე, ხოლო E_2 არის E_3-ის ქვესივრცე.

4) ერთი და იგივე განზომილების კვადრატულ მატრიცათა სივრცეში სიმეტრიულ მატრიცთა ქვესიმრავლე არის ქვესივრცე.

5) E_n სივრცის ყველა იმ $x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $x_1=0$, წარმოადგენს E_n-ის ქვესივრცეს.

6) E_n სივრცის ყველა იმ $x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ ელემენტთა სიმრავლე რომლებიც აკმაყოფილებენ $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=0$ პირობას, სადაც $c_1,\ c_2,\ldots,c_n$ ფიქსირებული რიცხვებია.

7) E_n სივრცის იმ $x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული არის

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

სისტემის ამონახსენი.

ცხადია, რომ E_k ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება E_n-ის განზომილებას. ქვესივრცეთა თანაკვეთა და გაერთიანება ისევ ქვესივრცეებია.

თ ე ო რ ე მ ა. 5. მოცემული E_n სივრცის ყოველი ორი წრფივი ქვესივრცის ჯამის განზომილება უდრის ამ ქვესივრცეების განზომილებათა ჯამისა და მათი თანაკვეთის განზომილების სხვაობას.

თ ე ო რ ე მ ა 6. თუ Er_1 და Er_2 არის E_n სივრცის ქვესივრცეები, მაშინ $E_m = Er_1 \cap Er_2$ ქვესივრცის განზომილება $m \geqslant r_1 + r_2 - n$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ მრავალწევრთა სიმრავლე წრფივი სივრცეა. ამ სივრცეში 1, x, $x^2, \ldots, x^n, \ldots$ ელემენტთა სისტემა იქნება ბაზისი.

მართლაც, ამ სისტემის ყოველი სასრული

$$x^{m_1},\ x^{m_2}, \ldots, x^{m_s} \quad (0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_s)$$

ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება

$$c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \ldots + c_s x^{m_s} = 0$$

ტოლობას, სადაც ერთი c_i მაინც, მაგალითად $c_2 \neq 0$. ეს კი შეუძლებელია,ვინაიდან ამ ტოლობის x^{m_1}-ზე შეკვეცით მივიღებდით, რომ $x^{m_2 - m_1}$ არის x^0, $x^{m_3 - m_1}, \ldots, x^{m} - ^{m_1}$ ხარისხების წრფივი კომბინაცია.

ამრიგად, მოცემული სივრცე უსასრულო განზომილებისაა. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, ქმნის $(n+1)$ — განზომილებიან წრფივ სივრცეს, ხოლო 1, x, $x^2, \ldots,$ x^n იქნება ბაზისი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. n-ური რიგის სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე ქმნის $c^2_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ — განზომილებიან წრფივ სივრცეს.

§ 8. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

ვთქვათ E_n სივრცის ვექტორებია:

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n),\ y = (y_1,\ y_2, \ldots, y_n).$$

ვიგულისხმოთ, რომ მათი კოორდინატები კომპლექსური რიცხვებია:

$$x_j = \xi_j + i\xi'_j; \quad y_j = \eta_j + i\eta'_j,$$

სადაც $i = \sqrt{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. როგორც ვიცით x_j და y_j-ს შეუღლებული რიცხვებია

$$x_j^* = \xi_j - i\xi'_j; \quad y^*_j = \eta_j - i\eta'_j.$$

ხოლო

$$x_j x_j^* = |x_j|^2.$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n} x_j x_j^* \tag{1}$$

რიცხვს.

სკალარულ ნამრავლს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. დადებითად განსაზღვრულობის თვისება. $(x, x)\geqslant 0$, მართლაც

$$(x,x)=\sum_{j=1}^{n} x_j x_j^*=\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\geqslant 0.$$

ცხადია, რომ $(\theta, \theta)=0$. თუ $(x, x)=0$, მაშინ $x_j=0$ $(j=1,2,\dots n)$, ე. ი. $x=\theta$.

2. ერმიტულად სიმეტრიულობის თვისება. სკალარულ ნამრავლს ეწოდება ერმიტულად სიმეტრიული, თუ $(y,x)=(x,y)^*$. (1) ტოლობით განსაზღვრულ სკალარულ ნამრავლს გააჩნია ერმიტულობის თვისება, მართლაც:

$$(y,x)=\sum_{j=1}^{n} y_j x^*_j=\sum_{j=1}^{n} x^*_j y_j=\left(\sum_{j=i}^{n} x_j y_j^*\right)^*=(x,y)^*.$$

ე. ი.

$$(y,x)=(x,y)^*. \tag{2}$$

3.
$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y). \tag{3}$$

$$(x,\alpha y)=\alpha^*(x,y). \tag{3'}$$

(3)-ის მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს (1)-დან. დავამტკიცოთ (3'). გვაქვს:

$$(x, \alpha y)=(\alpha y,x)^*=[\alpha(y, x)]^*=\alpha^*(y,x)^*=\alpha^*(x,y),$$

ე. ი.

$$(x,\alpha y)=\alpha^*(x,y).$$

4. დისტრიბუციულობის თვისება:

$$(x^{(1)}+x^{(2)},y)=(x^{(1)},y)+(x^{(2)},y) \tag{4}$$

$$(x, y^{(1)}+y^{(2)})=(x,y^{(1)})+(x,y^{(2)}). \tag{5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად

$$(x^{(1)}+x^{(2)}, y)=\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(1)}+x_j^{(2)})y_j^*=\sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)}y_j^*+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}x_j^{(2)}y_j^*=(x^{(1)}, y)+(x^{(2)}, y);$$

ხოლო

$$(x,y^{(1)}+y^{(2)})=(y^{(1)}+y^{(2)},x)^*=(y^{(1)}, x)^*+(y^{(2)},x)^*=$$
$$=(x,y^{(1)})+(x,y^{(2)}).$$

ამით მე-4 თვისება დამტკიცებულია.

შემოღებული n-განზომილებიანი კომპლექსური სივრცის გარდა განიხილავენ n — განზომილებიან ნამდვილ სივრცეს, ე. ი. სივრცეს, რომლის ვექტორების კოორდინატები ნამდვილი რიცხვებია.

ვთქვათ x და y არის n — განზომილებიანი ნამდვილი სივრცის ელემენტები. მათი ს კ ა ლ ა რ უ ლ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ეწოდება

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{n}x_jy_j \tag{1'}$$

რიცხვს, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $(x, x)\geqslant 0$ და $(x, x)=0$, როცა $x=\theta$;

2) $(x, y)=(y, x)$;

3) $(\alpha x, y)=(x, \alpha y)=\alpha(x,y)$ (α — ნამდვილი რიცხვია);

4) $(x+y, z)=(x,z)+(y,z)$;

$(x, y+z)=(x,y)+(x,z)$.

წრფივ სივრცეს, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, ეწოდება ევკლიდეს სივრცე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ E_n წარმოადგენს ევკლიდეს სივრცეს, თუ მისი ნებისმიერი $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ და $y=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$ ელემენტების სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია (1′) ტოლობით.

სკალარული ნამრავლის ცნება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ვექტორებს შორის.

1. n — განზომილებიან სივრცეში ვექტორის სიგრძე ეწოდება არა

უარყოფით $|x|=+\sqrt{(x,x)}$ რიცხვს. ცხადია, ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$|x|=\sqrt{(x.x)}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}:$$

ხოლო

$$|\alpha x|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha(x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha\alpha^*(x,x)}=$$
$$=\sqrt{|\alpha|^2(x,x)}=|\alpha|\sqrt{(x,x)}=|\alpha|\cdot|x|.$$

ორ არანულოვან x და y ვექტორებს შორის კუთხე განისაზღვრება

$$\varphi=\arccos\frac{(x,\ x)}{|x|\,|y|}$$

ტოლობით. როცა $x=0$ ან $y=0$, მაშინ კუთხე x და y ვექტორებს შორის არ განისაზღვრება.

თ ე ო რ ე მ ა. 1. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|(x,y)|\leqslant|x|\cdot|y| \qquad \text{(კოში — ბუნიაკოვსკის უტოლობა).}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ვექტორი $x-ty$, სადაც t ნებისმიერი რიცხვია. სკალარული ნამრავლის დადებითად განსაზღვრულობიდან გვაქვს.

$$(x-ty,\ x-ty)\geqslant 0.$$

ე. ი. ნებისმიერი t-სათვის

$$|y|^2t^2-2\ (x,y)t+|x|^2\geqslant 0.$$

იმისათვის, რომ უკანასკნელ უტოლობას ჰქონდეს ადგილი, აუცილებელია და საკმარისი $|y|^2t^2-2(x,y)t+|x|^2$ სამწევრის დისკრიმინანტი არ იყოს დადებითი, ე. ი. $(x,\ y)^2-|x|^2|y|^2<0$, საიდანაც გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.

E_n სივრცეში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x^2_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y^2_k\right).$$

თ ე ო რ ე მ ა. 2. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის მართებულია უტოლობა

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|. \qquad \text{(სამკუთხედის უტოლობა)}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=|x|^2+2(x,y)+|y|^2.$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის თანახმად მივიღებთ:

$$|x+y|^2\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2,$$

საიდანაც

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

შ ე დ ე გ ი. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის

$$|x+y|\geqslant||x|-|y||.$$

მართლაც,

$$|x+y|^2=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\geqslant|x|^2-2|(x,\ y)|+|y|^2\geqslant$$
$$\geqslant|x|^2-2|x||y|+|y|^2=(|x|-|y|)^2,$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

§ 4. ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. E_n სივრცის x და y ვექტორებს ეწოდება ორთოგონალური, თუ

$$(x,\ y)=0. \tag{1}$$

θ არის E_n სივრცის ნებისმიერი ვექტორის ორთოგონალური.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. $x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,x^{(m)}$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური, თუ ნებისმიერი ნატურალური j და k $(j\neq k)$ რიცხვებისათვის $(x^{(j)},\ x^{(k)})=0$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $x^{(1)}$ ვექტორი $x^{(2)},\ldots,x^{(m)}$ ვექტორების ორთოგონალურია, მაშინ იგი მათი ნებისმიერი წრფივი კომბინაციის ორთოგონალურიც იქნება. მართლაც, თუ

$$(x^{(1)},\ x^{(k)})=0, \qquad k=2,3,\ldots,m,$$

მაშინ

$$\left(x,\ \sum_{k=2}^{m}c_kx^{(k)}\right)=\sum_{k=2}^{m}c_k^*(x^{(1)},\ x^{(2)})=0,$$

სადაც $c_2,\ c_3,\ldots,\ c_m$ — ნებისმიერი მუდმივებია.

თ ე ო რ ე მ ა 1. არანულოვანი, წყვილ-წყვილად ორთოგონალური $x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,\ x^{(m)}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\ldots+c_mx^{(m)}=0. \tag{2}$$

(2) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $x^{(1)}$ ვექტორზე

$$c_1^*(x^{(1)},\ x^{(1)})+c_2^*(x^{(1)},\ x^{(2)})+\ldots+c_m^*(x^{(1)},\ x^{(m)})=0,$$

რადგანაც $(x^{(1)},x^{(1)})\neq 0$ და $(x^{(1)},x^{(j)})\neq 0$, როცა $j\neq 1$, ამიტომ $c_1^*=0$ ე. ი. $c_1=0$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $c_2=0,\ldots,\ c_m\neq 0$. მაშასადამე, $x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,\ x^{(m)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

შ ე დ ე გ ი 1. n — განზომილებიან E_n სივრცის ყოველი ორთოგონალური სისტემა შეიცავს არაუმეტეს n რაოდენობა ვექტორს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. E_n სივრცის $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_n$ ბაზისს ეწოდება ორთოგონალური, თუ

$$(\varepsilon_j,\ \varepsilon_k)=0,\ \text{როცა}\ j\neq k\ (j,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

თუ ε_j $(j=1,2,\ldots,\ n)$ ერთეულოვანი ვექტორებია, მაშინ ორთოგონალურ ბაზისს ეწოდება ნორმირებული (ორთონორმირებული). ამ შემთხვევაში $(\varepsilon_j,\ \varepsilon_k)=\delta_{jk}$.

E_n სივრცეში ორთონომირებული ბაზისის მაგალითია:

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0,0,\ldots,0),\\ e_2&=(0,.,0,\ldots,0),\\ &\cdots\cdots\\ e_n&=(0,0,0,\ldots,1).\end{aligned}$$

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_n$ ორთოგონალური ბაზისი ყოველთვის შეიძლება გავხადოთ ნორმირებული, რისთვისაც საჭიროა ბაზისის ყოველი ε_j ელემენტი გავყოთ მის სიგრძეზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული ვექტორები

$$\tilde{\varepsilon}_j^{(0)}=\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{(\varepsilon_i,\varepsilon_j)}}\quad (i=1,2,\ldots,\ n)$$

წარმოადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს.

თ ე ო რ ე მ ა 2. E_n სივრცის ნებისმიერი x ვექტორის კოორდინატები ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ უდრის ამ ვექტორისა და შესაბამისი საბაზისო ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ ორთონორმირებული ბაზისია და

$$x=\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2+\ldots+\xi_n\varepsilon_n. \tag{3}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ ε_j $(j=1,2,\ldots,\ n)$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$\xi_j=(x,\ \varepsilon_j)\qquad (j=1,\ 2,\ldots,n). \tag{4}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 2. ორთონორმირებულ ბაზისში ვექტორის სიგრძის კვადრატი მისი კოორდინატების მოდულების კვადრატების ჯამის ტოლია.

მართლაც, თუ (3) ტოლობას ავახარისხებთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$(x,\ x)=\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\ \varepsilon_j,\ \sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \varepsilon_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_j\ \xi_k^*(\varepsilon_j,\ \varepsilon_k) =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\ \xi_j^*=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2. \tag{5}$$

კერძოდ, როცა E_n — ნამდვილი სივრცეა, (5) ფორმულას ექნება სახე:

$$(x,\ x)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვაჩვენოთ, რომ $C\ (0,2\pi)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ldots \tag{6}$$

ვექტორთა (ანუ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა) სისტემა ორთოგონალურია.

მართლაც, ცხადია, რომ $C\ (0,2\pi)$ წრფივი სივრცეა, სადაც $f(t)\equiv 0$ არის ამ სივრცის ნულოვანი ვექტორი, ხოლო $f(t)$-ს მოპირდაპირე ვექტორია $-f(t)$. ნებისმიერი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციისათვის

$$(x,\ y)=\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ სახით შემოღებული სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს სკალარული ნამრავლის ყველა თვისებას. $C(0,2\pi)$ სივრცის $x(t)$ ელემენტის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|x|=\sqrt{\int_0^{2\pi} x^2(t)dt},$$

რომელსაც უწოდებენ $x(t)$ ფუნქციის ნორმას და აღნიშნავენ $\|x\|$ სიმბოლოთი.

$C(0,2\pi)$ სივრცეში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას ექნება სახე:

$$\left(\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt\right)^2 \leqslant \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \cdot \int_0^{2\pi} y^2(t)dt$$

ან, რაც იგივეა,

$$\left|\int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^{2\pi} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_0^{2\pi} y^2(t)dt}.$$

ამ უტოლობას დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკურ ანალიზში.

განსაზღვრების თანახმად, აღნიშნულ სივრცეში ყოველი ორი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქცია ორთოგონალურია, თუ

$$(x(t),\ y(t)) = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt = 0.$$

ნებისმიერი m ნატურალური რიცხვისათვის:

$$\int_0^{2\pi} \sin mxdx = \int_0^{2\pi} \cos mxdx = 0.$$

თუ m და n ნებისმიერი მთელი რიცხვებია ($m \neq n$), მაშინ:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nxdx = 0;$$

ასევე, თუ $m \neq n$, გვექნება:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nxdx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nxdx = 0.$$

რადგან

$$\int_0^{2\pi} 1^2\, dx = 2\pi, \int_0^{2\pi} \cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nxdx = \pi,$$

ამიტომ (6) სისტემაში შემავალი ფუნქციები არ არიან ნორმირებული $[0,2\pi]$-ზე. იმისათვის, რომ (6) სისტემა გავხადოთ ნორმირებული, საჭი-

რომ მასში შემავალი პირველი ფუნქცია გავამრავლოთ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-ზე, ხოლო დანარჩენი ფუნქციები კი $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$-ზე. ამის შემდეგ მივიღებთ $[0, 2\pi]$ შუალედში ფუნქციათა ორთონორმირებულ სისტემას:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

§ 5. ვექტორთა სისტემის ორთოგონალიზაცია

წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ არანულოვან ვექტორთა ყოველი ორთოგონალური სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ახლა განვიხილოთ მეთოდი, რომლითაც შესაძლებელია ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემიდან ორთოგონალურ ვექტორთა სისტემაზე გადასვლა.

ვთქვათ, E_n სივრცეში მოცემულია წრფივად დამოუკიდებელ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_n, \ldots \tag{1}$$

ვექტორთა სისტემა. ორთოგონალიზაციის პროცესით მათ მიმართ ავაგოთ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ორთოგონალური ვექტორთა სისტემა. დავუშვათ $e_1 = x_1$. e_2 ვექტორი განვსაზღვროთ $e_2 = \alpha e_1 + x_2$ გამოსახულებიდან, სადაც α ნამდვილი რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ e_2 ვექტორი იყოს e_1 ვექტორის ორთოგონალური, ე. ი.

$$(e_1, e_2) = (e_1, \alpha e_1 + x_2) = \alpha(e_1, e_1) + (e_1, x_2) = 0,$$

აქედან

$$\alpha = -\frac{(e_1, x_2)}{(e_1, e_2)} \tag{2}$$

ვინაიდან (1) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელა, ამიტომ ყოველი $x_i \neq 0$, ე. ი. $e_1 \neq 0$. ცხადია $e_2 = \alpha x_1 + x_2 \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ (1) სისტემის x_1, x_2 ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რაც ეწინააღმდეგება (1) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას.

დავუშვათ, რომ უკვე აგებული გვაქვს ნულისაგან განსხვავებულ ვექტორთა ორთოგონალური $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ ქვესისტემა. e_k ვექტორი ვიპოვოთ

$$e_k = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{k-1} e_{k-1} + x_k \tag{3}$$

გამოსახულებიდან. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ კოეფიციენტები შევარჩიოთ ისე,

რომ e_k ვექტორი იყოს $e_1,\ e_2,\ldots,e_{k-1}$ ვექტორების ორთოგონალური, ე. ი.

$$(e_1,\ e_k)=0,\ (e_2,\ e_k)=0,\ldots,\ (e_{k-1},\ e_k)=0.$$

თუ ამ ტოლობებში ჩავსვამთ (3)-დან განსაზღვრულ e_k-ს მნიშვნელობებს და მხედველობაში მივიღებთ $e_2,\ e_3,\ldots,e_{k-1}$ ვექტორების წყვილ-წყვილად ორთოგონალურობას, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&\beta_1(e_1,\ e_1)+(e_1,\ x_k)=0,\\
&\beta_2(e_2,\ e_2)+(e_2,\ x_k)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\beta_{k-1}(e_{k-1},\ e_{k-1})+(e_{k-1},\ x_k)=0.
\end{aligned}$$

აქედან, (2) ტოლობის ანალოგიურად, ვიპოვით $\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_{k-1}$ მნიშვნელობებს. თუ (3) ტოლობაში ჩავსვამთ $e_{k-1},\ldots,e_2,\ e_1=x_1$ მნიშვნელობებს, მაშინ:

$$e_k=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_{k-1}x_{k-1}+x_k. \tag{4}$$

ამრიგად, ავაგეთ $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_k$ ვექტორთა ორთოგონალური ქვესისტემა.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, ავაგებთ საძიებელ $e_1, e_2,\ldots,e_n$ ვექტორთა ორთოგონალურ სისტემას.

დ ა ს კ ვ ნ ა. ყოველ არანულოვან, წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემიდან შეიძლება ავაგოთ არანულოვან ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა. თუ დამტკიცებულ დებულებას გამოვიყენებთ ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის საბაზისო ვექტორთა სისტემისათვის, მივიღებთ შემდეგ დებულებას: ყოველ ევკლიდურ E_n სივრცეს გააჩნია ერთი მაინც ორთოგონალური საბაზისო სისტემა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ორთოგონალიზაციის პროცესი ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში. მოცემულ სივრცეში ორთოგონალიზაციის პროცესი ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ x_1, x_2 და x_3 სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. დავუშვათ $y_1=x_1$. y_1 და x_2 ვექტორებზე გავავლოთ სიბრტყე; ამ სიბრტყეზე ავიღოთ ისეთი y_2 ვექტორი, რომელიც y_1 ვექტორის ორთოგონალურია. y_1 და y_2 ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და x_3 ვექტორის საშუალებით ავაგოთ სამგანზომილებიანი სივრცე, რომელშიაც შევარჩიოთ ისეთი y_3 ვექტორი, რომელიც y_1 და y_2 ვექტორების ორთოგონალური იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ E არის t ცვლადის მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება 3-ს. ეს სიმრავლე ქმნის ოთხგანზომილებიან სივრცეს. ამ სივრცისათვის $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ არის ერთ-ერთი საბაზისო სისტემა (§ 2. მაგალითი 1). ამ სისტემის მიმართ გამოვიყენოთ ორთოგონალიზაციის პროცესი, ე. ი. ავაგოთ $e_1,\ e_2,\ e_3$ ორთოგონალური

საბაზისო სისტემა. ვთქვათ, სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია ასე:

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)dt.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ $e_1=1$. e_2 ვეძებოთ $e_2=\alpha+t$ სახით. α შევარჩიოთ, ისე, რომ e_2 იყოს e_1-ის ორთოგონალური, ე. ი.

$$(1,\alpha+t) = \int_{-1}^{1} (\alpha+t)dt=2\alpha=0;$$

მივიღეთ $\alpha=0$. ამგვარად, $e_2=t$. ახლა e_3 ვეძებოთ $e_3=\alpha_1+\alpha_2 t+t^2$ სახით. α_1 და α_2 შევარჩიოთ ისე, რომ e_3 იყოს $e_1=1$ და $e_2=t$ ვექტორების ორთოგონალური, ე. ი.

$$(1,\ e_3)=\int_{-1}^{1} (\alpha_1+\alpha_2 t+t^2)dt=0 \quad \text{და} \quad (t,\ e_3)=\int_{-1}^{1} (\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+t^3)dt=0,$$

საიდანაც

$$2\alpha_1+\frac{2}{3}=0 \ \text{ და } \ \frac{2\alpha_2}{3}=0; \ \text{ ე, ი. } \ \alpha_1=-\frac{1}{3}, \quad \alpha_2=0.$$

მაშასადამე, $e_3=t^2-\dfrac{1}{3}$. e_4 ვექტორი ვეძებოთ $e_4 = \beta_1+\beta_2 t + \beta_3\left(t^2-\dfrac{1}{3}\right)+t^3$ სახით.

ახლა β_1, β_2 და β_3 შევარჩიოთ ისე, რომ e_4 ვექტორი იყოს e_1, e_2, e_3 ვექტორების ორთოგონალური. ინტეგრალების გამოთვლის შედეგად მივიღებთ $e_4=t^3-\dfrac{3}{5}t$. ამრიგად, მოცემულ მრავალწევრთა ევკლიდური სივრცისათვის

$$e_1=1,\ e_2=t, \quad e_3=t^2-\frac{1}{3}, \quad e_4=t^3-\frac{3}{5}t;$$

იქნება ორთოგონალური საბაზისო სისტემა.

§ 6. ბაზისის შეცვლით ვექტორის კოორდინატების ცვლილება

გავარკვიოთ, თუ როგორ შეიცვლება ვექტორის კოორდინატები ბაზისის შეცვლით. ვთქვათ, მოცემულია n— განზომილებიანი წრფივი სივრცის ორი e_1, e_2,.., e_n და ε_1, ε_2,..., ε_n ბაზისი.

ცხადია, ε_i ვექტორები წრფივად გამოისახება პირველ ბაზისში:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\dots+a_{n1}e_n, \\ \varepsilon_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\dots+a_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\dots+a_{nn}e_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

ანუ მოკლედ,

$$\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \quad (j=1,2,\dots,n).$$

ამ გარდაქმნის კოეფიციენტებისაგან შედგენილ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება $e_1, e_2,\dots,e_n$ ბაზისიდან $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა. ვინაიდან $\varepsilon_j (j=1,2,\dots,n)$ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $|A|\neq 0$.

ვთქვათ $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ და $\eta_1, \eta_2,\dots,\eta_n$ არიან x-ის კოორდინატები შესაბამისად პირველ და მეორე ბაზისში, მაშინ:

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\dots+\xi_ne_n=\eta_1\varepsilon_1+\eta_2e_2+\dots+\eta_n\varepsilon_n.$$

(1) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\dots+\xi_ne_n=\eta_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\dots+a_{n1}e_n)+ \\ +\eta_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\dots+a_{n2}e_n)+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\eta_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\dots+a_{nn}e_n). \end{aligned} \tag{2}$$

რადგანაც x ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება $e_1, e_2,\dots, e_n$ ბაზისის მიმართ, ამიტომ (2) ტოლობის მარჯვენა მხარის სათანადო დალაგების შედეგად მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1=a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+\dots+a_{1n}\eta_n, \\ \xi_2=a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+\dots+a_{2n}\eta_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n=a_{n1}\eta_1+a_{n2}\eta_2+\dots+a_{nn}\eta_n. \end{array}\right. \tag{3}$$

როგორც ვხედავთ, (3) გარდაქმნის მატრიცა იგივეა, რაც A მატრიცა. ამრიგად, მეორე ბაზისში x ვექტორის კოორდინატები მიიღება (3)-დან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ $x=e_1+4e_2-e_3$. ვიპოვოთ ამ ვექტორის კოორდინატები ε_1, ε_2, ε_3 ბაზისში, თუ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 5e_1-e_2-2e_3, \\ \varepsilon_2 &= 2e_1+3e_2, \\ \varepsilon_3 &= -2e_1+e_2+e_3. \end{aligned} \tag{4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{cases} 1=5\eta_1+2\eta_2-2\eta_3, \\ 4=-\eta_1+3\eta_2+\eta_3, \\ -1=-2\eta_1+\eta_3. \end{cases}$$

რადგანაც

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ამიტომ კრამერის ფორმულებით

$$\eta_1=-13, \quad \eta_2=6, \quad \eta_3=-27.$$

ე. ი.

$$x=-13\varepsilon_1+6\varepsilon_2-27\varepsilon_3.$$

ამრიგად, ε_1, ε_2, ε_3 ბაზისში x-ის კოორდინატებია: $-13, 6, -27$. (3) ტოლობა ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

თუ (x) და $(x)'$ სიმბოლოებით აღვნიშნავთ x ვექტორის კოორდინატებისაგან შედგენილი ერთსვეტიან მატრიცებს, მაშინ (5) მატრიცული ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$(x)=A\cdot(x)'. \tag{6}$$

(5) ტოლობის ორივე მხარის ტრანსპონირებით მივიღებთ:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)=(\eta_1\ \eta_2, \dots, \eta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\dots a_{n2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n}\dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ან, რაც იგივეა

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)A', \tag{7}$$

სადაც A' არის A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

(7) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)(A')^{-1}. \qquad (8)$$

(7)-დან მიიღება x ვექტორის კოორდინატები ახალ ბაზისში, როცა ცნობილია მისი კოორდინატები ძველ ბაზისში.

ამოვხსნათ იგივე მაგალითი (8) ფორმულით. (4) გარდაქმნის მატრიცის შებრუნებული მატრიცა იქნება:

$$(A')^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

რადგან მოცემულ ბაზისში x ვექტორის კოორდინატებია 1, 4, —1, ამიტომ:

$$(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=(1,\ 4,-1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13, 6, -27),$$

ე. ი.

$$\eta_1=-13, \quad \eta_2=6, \quad \eta_3=-27.$$

§ 7. წრფივი ოპერატორები

ვთქვათ E და F არიან შესაბამისად n და m-განზომილებიანი წრფივი სივრცეები.

განსაზღვრება 1. A:$E\to F$ ასახვას, რომელიც E სივრცის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს F-ის გარკვეულ y ელემენტს, ეწოდება A ოპერატორი. მას აღნიშნავენ $y=Ax$ სიმბოლოთი და უწოდებენ სივრცის გარდაქმნას. Ax ეწოდება x ელემენტის სახე.

განსაზღვრება 2. A ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ E-ს ნებისმიერი x, x_1 და x_2 ელემენტებისათვის და k ნამდვილი რიცხვისათვის, სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1) $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$,

2) $A(kx)=kAx$.

წრფივი ოპერატორის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

I. ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი E სივრცის θ_E ნულოვან ელემენტს ასახავს F სივრცის θ_F ნულოვან ელემენტში. მართლაც,

$$A(\theta_E)=A(O\cdot x)=O\cdot Ax=\theta_F.$$

II. მოპირდაპირე ელემენტის სახე უდრის სახის მოპირდაპირეს, ე. ი. $A(-x)=-Ax$. მართლაც.

$$A(-x)=A(-1\cdot x)=(-1)Ax=-Ax.$$

III. თუ A წრფივი ოპერატორია, მაშინ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვებისა და სივრცის ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისათვის

$$A(k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_nx_n)=k_1Ax_1+k_2Ax_2+\ldots+k_nAx_n. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ ეს თვისება წრფივი ოპერატორის განსაზღვრების ექვივალენტურია.

მართლაც, თუ (1) ტოლობაში ვიგულისხმებთ $n=1$, მივიღებთ $A(k_1x_1)=k_1Ax_1$, ხოლო როცა $n=2$ და $k_1=k_2=1$, მივიღებთ $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$.

განსაზღვრება 3. ისეთ I გარდაქმნას, რომელსაც სივრცის ყოველი ელემენტი გადაჰყავს თავის თავში, ე. ი. $Ix=x$, უწოდებენ ერთეულოვან ანუ იგივურ გარდაქმნას, ხოლო ისეთ O გარდაქმნას, რომელიც E სივრცის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს F სივრცის ნულოვან ელემენტს უწოდებენ ნულ გარდაქმნას.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ I და O გარდაქმნები წრფივი ოპერატორებია.

მაგალითი 1. ვთქვათ, R ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა, ე. ი. კოორდინატთა სათავიდან გამოსული მიმართულების მქონე მონაკვეთების სიმრავლეა. O წერტილზე გავავლოთ რაიმე R' სიბრტყე. R სივრცის ყოველი x მონაკვეთის პროექცია R' სიბრტყეზე აღვნიშნოთ Ax-ით. მაშინ, პროექციის ცნობილ თვისებათა (მონაკვეთების ჯამის პროექცია უდრის მათი პროექციების ჯამს და მონაკვეთის რაიმე k რიცხვზე გამრავლებით პროექციაც გამრავლება ამავე k რიცხვზე) გამოყენებით მივიღებთ, რომ მოცემული გარდაქმნა წრფივია.

მაგალითი 2. განვიხილოთ t ცვლადის ისეთ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს. როგორც ვიცით, ასეთ მრავალწევრთა სიმრავლე ქმნის $(n+1)$—განზომილებიან წრფივ სივრცეს. ამ სივრცის ყოველ $f(t)$ მრავალწევრს შევუსაბამოთ მისი წარმოებული, ე. ი. $A(f(t))=f'(t)$. ვაჩვენოთ რომ A წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

1) $A[f(t)+g(t)]=[f(t)+g(t)]'=f'(t)+g'(t)=Af(t)+Ag(t)$,

2) $A[kf(t)]=[kf(t)]'=kf'(t)=k\cdot Af(t)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციათა $C[0,1]$ სივრცე. ყოველ $f(t)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ ინტეგრალი:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau, \quad \text{ე. ი} \quad Af(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული A ოპერატორი წრფივია. მართლაც,

$$1)\ A(f_1(t)+f_2(t))=\int_0^t [f_1(\tau)+f_2(\tau)]d\tau=\int_0^t f_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t f_2(\tau)d\tau=Af_1(t)+Af_2(t),$$

$$2)\ A[kf(t)]=\int_0^t kf(\tau)\,d\tau=k\int_0^t f(\tau)d\tau=kAf(t).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ცნობილია $C[a,\ b]$ სივრცეში განსაზღვრული ფრედჰოლმის ინტეგრალური A ოპერატორი, რომელსაც მოცემული $x(t)$ ფუნქცია გადაჰყავს $\int_a^b k(t,s)x(s)ds$ ინტეგრალში, ე. ი. $Ax(t)=$ $=\int_a^b k(t,s)x(s)ds$, სადაც $k(t,\ s)$ ფრედჰოლმის ოპერატორის გულია, დავამტკიცოთ რომ ფრედჰოლმის ოპერატორი წრფივი ოპერატორია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

$$1)\ A(x_1(t)+x_2(t))=\int_a^b k(t,\ s)\,[x_1(s)+x_2(s)]ds=$$

$$=\int_a^b k(t,\ s)x_1(s)ds+\int_a^b k(t,\ s)x_2(s)ds=Ax_1(t)+Ax_2(t),$$

$$2)\ Akx(t)=\int_a^b k(t,s)\cdot kx(t)dt=k\int_a^b k(t,s)x(t)\ dt=k\,Ax(t).$$

თუ F სივრცე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეა, მაშინ A ოპერატორს, რომელიც E-ს ასახავს R-ში, ეწოდება წრფივი ფორმა ან წრფივი ფუნქციონალი.

§ 8. კავშირი მატრიცებსა და წრფივ გარდაქმნებს შორის

ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის n-განზომილებიანი E წრფივი სივრცის რომელიმე ბაზისი, ხოლო A — სივრცის წრფივი გარდაქმნა.

თ ე ო რ ე მ ა. E სივრცის ვექტორთა ნებისმიერი $g_1, g_2, \ldots, g_n$ სისტემისათვის არსებობს სივრცის ერთადერთი ისეთი A წრფივი გარდაქმნა, რომ

$$Ae_1 = g_1, \quad Ae_2 = g_2, \ldots, Ae_n = g_n.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. იმისათვის, რომ ავაგოთ საძიებელი A გარდაქმნა, ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი. ვთქვათ

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n. \tag{1}$$

მაშინ

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \ldots + \xi_n Ae_n = \\ = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n.$$

რადგან x ცალსახად განისაზღვრება ბაზისის საშუალებით, ამიტომ Ax ვექტორიც ცალსახად განისაზღვრება $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ვექტორებით.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ვექტორებისთვის არსებობს ისეთი A წრფივი გარდაქმნა, რომ $Ae_i = g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; ამისათვის ყოველ e_i ვექტორს შევუსაბამოთ g_i ვექტორი, ხოლო ნებისმიერ $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ ვექტორს — $\xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n$ ვექტორი. რადგანაც x ცალსახად განისაზღვრება e_i ვექტორებით, ამიტომ მას შეესაბამება გარკვეული Ax ვექტორი, ე. ი. $Ax = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამგვარად განსაზღვრული A ოპეტრატორი წრფივია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყოველი A' წრფივი ოპერატორი, რომელიც $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისს შეუსაბამებს $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ვექტორებს, ემთხვევა A ოპერატორს.

მართლაც, პირობის თანახმად $A'e_i = g_i$. თუ x ვექტორს აქვს (1) სახე, მაშინ $A'x = \xi_1 A'e_1 + \xi' A'e_2 + \ldots + \xi_n A'e_n = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n = Ax$, ე. ი. $A' = A$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, სივრცეში შერჩეულია რაიმე $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი და მოცემულია A ოპერატორი. ცხადია, A ოპერატორი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორებს გადაიყვანს რომელიმე $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ ვექტორებში. თუ ვიგულისხმებთ,

რომ ამ ბაზისში $g_k = Ae_k$ ვექტორის კოორდინატებია შესაბამისად $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$, გვექნება:

$$\left\{\begin{array}{l} Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Ae_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{array}\right. \tag{2}$$

აღვნიშნოთ A_e სიმბოლოთი ის მატრიცა, რომლის სვეტებს წარმოადგენენ შესაბამისად Ae_k ვექტორის კოორდინატები, ე. ი.

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ae-ს ეწოდება A წრფივი ოპერატორის (გარდაქმნის) მატრიცა e_1 $e_2, \dots, e_n$ ბაზისში. ამრიგად, სივრცის მოცემულ სა ბაზისო სისტემაში ყოველ წრფივ ოპერატორს (გარდაქმნას) შეესაბამება გარკვეული მატრიცა.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა, ამის გამო A ოპერატორის შესაბამის მატრიცას აღნიშნავენ იგივე A ასოთი.

შევნიშნოთ, რომ ერთეულოვანი და ნულოვანი ოპერატორების მატრიცებია შესაბამისად ერთეულოვანი და ნულოვანი მატრიცები.

ამრიგად, ყოველი წრფივი გარდაქმნა (ოპერატორი) შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცის საშუალებით, ე. ი. მატრიცათა თეორია არის ის ანალიზური აპარატი, რომლის საშუალებითაც შეისწავ ლება წრფივი ოპერატორები სასრულგანზომილებიან წრფივ სივრცეში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, მოცემულია ისეთ მრავალწევრთა წრფივი სივრცე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს. A-თი აღვნიშნოთ ოპერატორი, რომელიც ყოველ $f(x)$ მრავალწევრს ასახავს მის წარმოებულში:

$$Af(x) = f'(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ $A^{n+1} = 0$. ვიპოვოთ A ოპერატორის მატრიცა მოცემული სივრცის $1, x, x^2, \dots, x^n$ ბაზისში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. A ოპერატორი, გამეორებული ერთიდაიგივე ელემენტზე $(n+1)$-ჯერ, ე. ი. A^{n+1} იქნება ნულოვანი გარდაქმნა, ვინაიდან მოცემული სივრციდან აღებული ყოველი მრავალწევრის $n+1$ რიგის წარმოებული უდრის ნულს.

ვიპოვოთ A წრფივი ოპერატორის მატრიცა მოცემულ $e_1=1$, $e_2=x,\ldots,$ $e_{n+1}=x^n$ ბაზისში. გვექნება:

$$
\begin{aligned}
&Ae_1=A\cdot 1=0,\\
&Ae_2=Ax=1=e_1,\\
&Ae_3=Ax^2=2x=2e_2,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&Ae_{n+1}=Ax^n=nx^{n-1}=ne_n.
\end{aligned}
$$

ამრიგად, (2) და (3) ტოლობათა საფუძველზე მივიღებთ მოცემულ ბაზისში მოცემული წრფივი გარდაქმნის მატრიცას:

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots 0\\ 0 & 0 & 2\ldots 0\\ . & . & . \quad .\\ 0 & 0 & 0\ldots n\\ 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix}
$$

განვიხილოთ შემდეგი საკითხი: ვთქვათ სივრცის ბაზისია e_1, $e_2,\ldots$ e_n, რომელშიაც x ვექტორის კოორდინატებია ξ_1, $\xi_2,\ldots,\xi_n$, ხოლო (3) არის A გარდაქმნის მატრიცა. ვიპოვოთ Ax ვექტორის კოორდინატები. გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
x&=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n,\\
Ax&=\xi_1Ae_1+\xi_2Ae_2+\ldots+\xi_nAe_n.
\end{aligned}
$$

თუ ამ ტოლობებში შევიტანთ (2)-დან განსაზღვრულ Ae_k მნიშვნელობებს, მაშინ გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
Ax=(&a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n)e_1+\\
&+(a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n)e_2+\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+(a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+a_{nn}\xi_n)e_n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

თუ $y=Ax$ ვექტორის კოორდინატებს აღვნიშნავთ η_1, $\eta_2,\ldots,\eta_n$ მაშინ (4) ტოლობებიდან გვექნება:

$$
\begin{cases}
\eta_1=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n,\\
\eta_2=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\eta_n=a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+a_{nn}\xi_n.
\end{cases}
\tag{5}
$$

ამრიგად, Ax ვექტორის კოორდინატები (5) ფორმულებით წრფივად გამოისახებიან x ვექტორის კოორდინატებით. შევნიშნოთ, რომ (5) ფორმულების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა ემთხვევა A_e მატრიცს.

თუ (Ax) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ Ax ვექტორის კოორდინატე-ბისაგან შედგენილ სვეტ-მატრიცას, ე. ი.

$$(Ax)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\quad \text{ხოლო}\quad (x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},$$

მაშინ მატრიცული ფორმით (5) სისტემა ჩაიწერება ასე:

$$(Ax)=A(x)=A_e(x). \tag{6}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, (2, —3, 1) არის სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის x ვექტორის კოორდინატები e_1, e_2, e_3 ბაზისში, ე. ი. $x=(2,-3,\ 1)=2e_1-3e_2+e_3$. ვიპოვოთ Ax ვექტორის კოორდინატები ამავე ბაზისში, თუ A წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცაა

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5) ტოლობის თანახმად

$$\begin{aligned}\eta_1&=1\cdot 2+(-1)\ (-3)+2\cdot 1=7,\\ \eta_2&=2\cdot 2+1\cdot(-3)+1\cdot 1=2,\\ \eta_3&=(-1)\cdot 2+3\cdot(-3)+2\cdot 1=-9.\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$Ax=(7,2,\ -9)=7e_1-2e_2+9e_3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. შევადგინოთ A წრფივი ოპერატორის მატრიცა

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0),\quad e_3=(0,0,1)$$

ბაზისში, რომელსაც

$$x_1=(0,0,1),\quad x_1=(0,1,1),\quad x_3=(1,1,1)$$

ვექტორები გადაჰყავს შესაბამისად $y_1=(2,3,5)$, $y_2=(1,\ 0,\ 1)$, $y_3=(0,1,-1)$ ვექტორებში, ე. ი.

$$Ax_1=y_1,\quad Ax_2=y_2,\quad Ax_3=y_3. \tag{7}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს ვექტორები e_1, e_2, e_3 ბაზისში წარმოიდგინება ასე.

$$\begin{aligned}x_1&=e_3, & y_1&=2e_1+3e_2+5e_3,\\ x_2&=e_2+e_3, & y_2&=e_1+e_3\\ x_3&=e_1+e_2+e_3, & y_3&=e_2-e_3.\end{aligned}$$

აქედან, (2) გარდაქმნების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
y_1&=Ax_1=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3,\\
y_2&=Ax_2=(a_{12}+a_{13})e_1+(a_{22}+a_{23})e_2+(a_{32}+a_{33})e_3,\\
y_3&=Ax_3=(a_{11}+a_{12}+a_{13})e_1+(a_{21}+a_{22}+a_{23})e_2+\\
&\qquad+(a_{31}+a_{32}+a_{33})e_3,
\end{aligned}$$

საიდანაც ადვილად გამოითვლება საძიებელი მატრიცის ელემენტები:

$$a_{11}=-1,\quad a_{12}=-1,\quad a_{13}=2,\quad a_{21}=1,\quad a_{22}=-3,\quad a_{23}=3,$$
$$a_{31}=-1,\quad a_{32}=-5,\quad a_{33}=5.$$

ე. ი. მოცემული A გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა იქნება:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}.$$

§ 9. მოქმედებები წრფივ ოპერატორებზე

განსაზღვრება 1. ვთქვათ $A:E\to F$ და $B:E\to F$ წრფივი ოპერატორებია. მათი ჯამი აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი და ეწოდება $(A+B)x=Ax+Bx$ ტოლობით განსაზღვრულ ოპერატორს.

ცხადია, რომ $A+B$ წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

$$(A+B)(x+y)=A(x+y)+B(x+y)=Ax+Ay+Bx+By.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $A:E\to F$, $B:E\to F$ და $C:E\to F$ წრფივი ოპერატორებია, მაშინ:

$$\begin{aligned}
&A+B=B+A,\\
&(A+B)+C=A+(B+C),\\
&A+O=A,\\
&A+(-A)=O,
\end{aligned}\tag{ა}$$

სადაც O ნულოვანი ოპერატორია, ხოლო $-A$ არის A-ს მოპირდაპირე ოპერატორი.

მაგალითად, შევამოწმოთ მეორე:

$$\begin{aligned}((A+B)+C)x&=(A+B)x+Cx=Ax+Bx+Cx=Ax+(Bx+Cx)=\\&=Ax+(B+C)x=(A+(B+C))x.\end{aligned}$$

განსაზღვრება 2. α რიცხვისა და A ოპერატორის ნამრავლი აღინიშნება αA სიმბოლოთი და ეწოდება $(\alpha A)x=\alpha Ax$ ტოლობით განსაზღვრულ ოპერატორს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ A და B წრფივი ოპერატორებია, მაშინ ნებისმიერი α და β რიცხვებისათვის

$$\begin{aligned}&\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\\&1.\ A=A,\\&0\cdot A=0,\\&(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\\&\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.\end{aligned}\tag{ბ}$$

ყველა იმ წრფივი ოპერატორის სიმრავლე, რომლებიც E სივრცეს ასახავენ F სივრცეში, აღინიშნება $L(E,\ F)$ სიმბოლოთი. (ა) და (ბ) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $L(E,\ F)$ სიმრავლე არის წრფივი სივრცე, ოპერატორთა ზემოთ მოყვანილი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

განსაზღვრება 3. ვთქვათ $E,\ F$ და G წრფივი სივრცეებია და $A\in L(E,\ F)$, $B\in L(F,G)$. B ოპერატორის A ოპერატორზე ნამრავლი, აღინიშნება BA სიმბოლოთი და ეწოდება $(BA)x=B(Ax)$, $x\in E$ ტოლობით განსაზღვრულ ოპერატორს.

BA წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

$$(BA)(x_1+x_2)=B\big(A(x_1+x_2)\big)=B(Ax_1+Ax_2)=B(Ax_1)+B(Ax_2)=$$
$$=(BA)x_1+(BA)x_2$$

და

$$(BA)(\alpha x)=B(A\alpha x)=B(\alpha Ax)=\alpha B(Ax)=\alpha(BA)x.$$

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ $AB\neq BA$ იმ შემთხვევაშიც კი, როცა $A\in L(E,\ F)$ და $B\in L(E,F)$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

1) თუ $A\in L(E,\ F)$, $B\in L(F,G)$ და $\alpha\in R$, მაშინ $\alpha(BA)=(\alpha B)A$.

2) თუ $A\in L(E,\ F)$, $B\in L(F.G)$ და $C\in L(E,\ F)$, მაშინ $(A+B)C=AC+$ $+BC$.

3) თუ $B\in L(E,\ F)$, $C\in L(E,\ F)$ და $A\in L(F,\ G)$, მაშინ $A(B+C)=$ $=AB+AC$.

4) $C\in L(E,\ F)$, $B\in L(F,\ G)$ და $A\in L\ (G,\ H)$, მაშინ $A(BC)=(AB)C$.

შევამოწმოთ მაგალითად მე-4 თვისება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის $(A(BC))x=((AB)C)x$, მართლაც

$$(A(BC))x=A((BC)x)=(AB)(Cx)=((AB)C)x.$$

თუ $A\in L(E,\ F)$, მაშინ $A^{n+m}=A^n\cdot A^m$, სადაც $A^n=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{n\text{-ჯერ}}$.

ადვილი შესამოწმებელია აგრეთვე, რომ წრფივი ოპერატორების ჯამს, რიცხვზე ნამრავლს და ოპერატორთა ნამრავლს, ეთანადება შესაბამისად მატრიცების ჯამი, რიცხვზე ნამრავლი და მატრიცების ნამრავლი.

ვთქვათ, A ნებისმიერი ურთიერთცალსახა წრფივი ასახვაა. თუ x ვექტორი A-ს გადაჰყავს y-ში, ე. ი. $Ax=y$, მაშინ გარდაქმნას, რომელსაც y ვექტორი გადაჰყავს x-ში, ეწოდება A გარდაქმნის შებრუნებული და აღნიშნება A^{-1} სიმბოლოთი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა წრფივია.

მართლაც, ვთქვათ

$A^{-1}u=x$, $A^{-1}v=y$, ცხადია $u=Ax$, $v=Ay$, სადაც u და v წრფივი სივრცის ნებისმიერი ელემენტებია. რადგანაც A წრფივი გარდაქმნაა, ამიტომ

$$A(x+y)=Ax+Ay=u+v,$$

აქედან

$$A^{-1}(u+v)=x+y=A^{-1}u+A^{-1}v\,.$$

შევამოწმოთ მეორე პირობა. გვაქვს

$$A(kx)=kAx=ku,$$

საიდანაც

$$A^{-1}(ku)=kx=k(A^{-1}u).$$

ვიგულისხმოთ, რომ A არის წრფივი გარდაქმნის მატრიცა. ვიპოვოთ შებრუნებული წრფივი გარდაქმნის მატრიცა. A^{-1} წრფივი გარდაქმნის მატრიცა აღვნიშნოთ X-ით. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ თანაფარდობიდან გამომდინარეობს $AX=AX=E$, ე. ი. $X=A^{-1}$.

შევნიშნოთ, რომ წრფივ გარდაქმნას, რომლის მატრიცა განსაკუთრებულია, არა აქვს შებრუნებული მატრიცა.

§ 10. სხვადასხვა ბაზისში წრფივი ოპერატორის მატრიცებს შორის კავშირი

§8-ში დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში განსაზღვრულ წრფივ ოპერატორსა და n-ური რიგის მატრიცებს შორის. როგორც ვიცით, ამისათვის საჭიროა სივრცეში წინასწარ ავირჩიოთ გარკვეული ბაზისი. ცხადია, რომ ბაზისის შეცვლით შეიცვლება წრფივი ოპერატორის შესაბამისი A მატრიცა. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ A მატრიცას და ბაზისის შეცვლის შედეგად მიღებული A_1 მატრიცას შორის კავშირი.

ვთქვათ A წრფივი ოპერატორის მატრიცა e_1, $e_2,\ldots,e_n$ ბაზისში

არის $A=(a_{ik})$, ხოლო e'_1, $e'_2,\dots,e'_n$ ბაზისში $A_1=(e'_{ik})$. საზოგადოდ $A\neq A_1$. $e_1, e_2,\dots,e_n$ ბაზისიდან e'_1, $e'_2,\dots,n'_n$ ბაზისში გადასვლის მატრიცა იყოს $C=(c_{ik})$. მაშინ

$$e'_i=c_{1i}e_1+c_{2i}e_2+\dots+c_{ni}e_n \quad i=1,2,\dots,n.$$

C მატრიცა განვიხილოთ, როგორც B წრფივი ოპერატორის მატრიცა e_1, $e_2,\dots$, e_n ბაზისში. ცხადია, რომ

$$Be_i=c_{1i}e_1+c_{2i}e_2+\dots+c_{ni}e_n=e'_i$$

მაშასადამე, B წრფივ ოპერატორს e_1, $e_2,\dots,e_n$ ვექტორები გადაყავს შესაბამისად e'_1, $e'_2,\dots$, e'_n ვექტორებში.

ცხადია, რომ $|C|\neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $e_1, e_2,\dots,e_n$ სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. არსებობს B^{-1} და $B^{-1}e'_1=e_1$, $B^{-1}e'_2=e_2,\dots$, $B^{-1}e'_n=e_n$. პირობის თანახმად

$$Ae_i'=a'_{1i}e_1+a'_{2i}e_2+\dots+a'_{ni}e'_n.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარეზე ვიმოქმედოთ B^{-1} ოპერატორით. მივიღებთ:

$$B^{-1}Ae_i'=a'_{1i}+a'_{2i}e_2+\dots+a_n'{}_ie_n.$$

რადგანაც $e'_i=Be_i$, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$B^{-1}ABe_i=a'_{1i}e_1+a'_{2i}e_2+\dots+a'_{ni}e_n,$$

მაგრამ e_1, $e_2,\dots,e_n$ ბაზისში ოპერატორის მატრიცა არის A_1, ხოლო B^- და B ოპერატორების მატრიცებია შესაბამისად C^{-1} და C, ამიტომ $A_1=C^{-1}AC$.

მიღებული დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივი ოპერატორის მატრიცის დეტერმინანტი არ არის დამოკიდებული ბაზისზე. მართლაც,

$$|A_1|=|C^{-1}AC|=|C^{-1}|\cdot|A|\cdot|C|=|C|^{-1}\cdot|A|\cdot|C|=|A|.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. e_1, e_2 ბაზისში მწრფივი A ოპერატორის მატრიცაა $A=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$. ვიპოვოთ მოცემული ოპერატორის მატრიცა $e'_1=e_1+2e'_2$, $e'_2=2e'_2+3e_3$ ბაზისში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გადასვლის მატრიცაა $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, ხოლო $C^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. მაშასადამე,

$$A_1=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

§ 11. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობანი

ვთქვათ E და F წრფივი სივრცეებია, ხოლო $A:E\to F$ წრფივი ოპერატორი. A ოპერატორის მატრიცაა $A=(a_{ik})$.

განსაზღვრება. 1.

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{1}$$

მრავალწევრს ეწოდება წრფივი A ოპერატორის (შესაბამისი მატრიცის) მახასიათებელი მრავალწევრი, ხოლო

$$|A-\lambda I|=0 \tag{2}$$

განტოლებას კი A ოპერატორის (შესაბამისი მატრიცის) მახასიათებელი ანუ ხაუკუნის განტოლება.

შევისწავლოთ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრი. იგი წარმოადგენს λ-ს მიმართ n-ური ხარისხის მრავალწევრის, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+g(\lambda) \tag{3}$$

სახით, სადაც $\varphi(\lambda)$-ს ხარისხი არ აღემატება $n-2$-ს. (3)-დან ჩანს, რომ A ოპერატორის მახასიათებელი მრავალწევრის ხარისხი უდრის მოცემული მატრიცის რიგს, ხოლო უფროსი წევრის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია.

$\varphi(\lambda)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრის მისაღებად (2) ტოლობაში დავუშვათ $\lambda=0$, მივიღებთ $\varphi(0)=|A|$.

თუ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრის ფესვებს აღვნიშნავთ $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ასოებით, მაშინ ვიეტას განზოგადოებული თეორემის თანახმად

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\ldots\lambda_n=|A|, \tag{4}$$

ხოლო

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

თუ A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ (4)-დან გამომდინარე მისი მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვი განსხვავებულია ნულისაგან.

განსაზღვრება 2. ვიტყვით, რომ A მატრიცა არის $\varphi(\lambda)$-ს ფესვი, თუ $\varphi(A)=0$.

დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა (ჰემილტონ-კელი) ყოველი მატრიცა თავისი მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვია.

განსაზღვრება 3. არანულოვან x ვექტორს ეწოდება წრფივი A ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი, თუ ასებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ

$$Ax=\lambda x. \tag{5}$$

ყოველ λ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს (5) ტოლობას, ეწოდება წრფივი A ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, ანუ მახასიათებელი რიცხვი.

თეორემა 1. E_n კომპლექსურ სივრცეში ყოველ წრფივ A ოპერატორს აქვს ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი.

განვიხილოთ E_n სივრცის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი. ვთქვათ ამ ბაზისში A ოპერატორის მატრიცაა $A=(e_{ij})$.

ამ ბაზისში x და Ax ვექტორების კოორდინატები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ და $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, ე. ი.

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n \quad \text{და} \quad Ax=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\ldots+\eta_n e_n.$$

დავუშვათ x არის A ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი. მაშინ (5) ტოლობის თანახმად

$$\eta_1=\lambda\xi_1, \quad \eta_2=\lambda\xi_2, \ldots, \eta_n=\lambda\xi_n.$$

ამრიგად,

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n=\lambda\xi_1, \\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=\lambda\xi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+a_{nn}\xi_n=\lambda\xi_n. \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)\xi_n=0. \end{cases} \tag{6}$$

ე. ი. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ უცნობთა მიმართ მივიღეთ წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა, არანულოვანი ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = |A-\lambda E|=0. \tag{7}$$

მიღებულ მრავალწევრს აქვს ერთი მაინც $\lambda=\lambda_0$ ფესვი. თუ (6) სისტემაში დავუშვებთ $\lambda=\lambda_0$ და გავითვალისწინებთ (7) პირობას, მივიღებთ ერთგვაროვან სისტემას, რომლის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

ასეთ სისტემას გააჩნია ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული $x^{(0)}=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)},\dots,\xi_n^{(0)})$ ამონახსენი. რადგან

$$Ax^{(0)}=\lambda x^{(0)},$$

ამიტომ $x^{(0)}=\xi_1^{(0)}e_1+\xi_2^{(0)}e_2+\dots+\xi_n^{(0)}e_n$ ვექტორი იქნება საკუთრივი ვექტორი, ხოლო λ_0—საკუთრივი მნიშვნელობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მტკიცდება, რომ წრფივი ოპერატორის მახასიათებელი მრავალწევრი არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე, საიდანაც გამომდინარეობს ბაზის შერჩევაზე მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვების დამოუკიდებლობა.

ბუნებრივად ისმის ამოცანა: როგორ ვიპოვოთ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა და საკუთრივი ვექტორი. მართებულია

თ ე ო რ ე მ ა 2. იმისათვის, რომ λ რიცხვი იყოს A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, აუცილებელია და საკმარისი იგი იყოს A ოპერატორის მახასიათებელი განტოლების ფესვი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ λ არის A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, ხოლო $x\neq 0$ შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. E_n სივრცის ბაზისია $e_1, e_2,\dots,e_n$, ხოლო $A=(a_{ik})$ ოპერატორის მატრიცაა ამ ბაზისში. რადგან

$$Ae_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}e_i \quad (k=1,2,\dots,n);$$

ამიტომ λ-ს შესაბამისი

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$$

საკუთრივი ვექტორისათვის (5) ტოლობა ჩაიწერება ასე:

$$\begin{gathered}Ax=\alpha_1Ae_1+\alpha_2Ae_2+\dots+\alpha_nAe_n=\\ =\alpha_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\dots+a_{n1}e_n)+\alpha_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\dots+a_{n2}e_n)+\dots+\\ +\alpha_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\dots+a_{nn}e_n)=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n},\alpha_n)e_1+\\ +(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n)e_2+\dots+(a_{n1}\alpha_1+a_n\alpha_2+\dots+a_{nn}\alpha_n)e_n=\\ =\lambda\alpha_1e_1+\lambda\alpha_2e_2+\dots+\lambda\alpha_ne_n\,.\end{gathered}$$

ბაზისში ვექტორის გაშლის ერთადერთობის თანახმად

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0,\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0.\end{cases} \tag{8}$$

იმისათვის, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

ამრიგად, თუ λ საკუთრივი მნიშვნელობაა, მაშინ იგი არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი.

პირიქით, ვთქვათ λ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ე. ი. ადგილი აქვს (9) ტოლობას. მაშასადამე, წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (8) სისტემას აქვს არანულოვანი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_n e_n=0$$

არის λ-ს შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 3. იმისათვის, რომ A წრფივი ოპერატორის $A=(a_{ik})$ მატრიცა მოცემულ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში იყოს დიაგონალური, აუცილებელია და საკმარისი საბაზისო ვექტორები წარმოადგენდნენ მოცემული ოპერატორის საკუთრივ ვექტორებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, საბაზისო e_k ვექტორი არის A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი. მაშინ

$$Ae_k=\lambda e_k \quad (k=1,2,\dots,n). \tag{10}$$

ამრიგად, წრფივი ოპერატორის მატრიცას აქვს

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots \lambda_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

სახე, ე. ი. იგი დიაგონალურია.

პირიქით, ვთქვათ A წრფივი ოპერატორის მატრიცა მოცემულ ბაზისში დიაგონალურია, ე. ი. აქვს (11) სახე. გვექნება $Ae_k=\lambda e_k$. ამრიგად, e_k არის A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი. თეორემა დამტკიცებულია.

დ ა ს კ ვ ნ ა. ვთქვათ A წრფივ ოპერატორს აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი, მაშინ თუ ამ ვექტორებს ავიღებთ ბაზისად, ამით $A=(a_{ik})$ მატრიცას დავიყვანთ დიაგონალურ სახეზე. პირიქით, თუ რაიმე ბაზისის მიმართ A ოპერატორის მატრიცა დიაგონალურია, მაშინ ამ ბაზისის ყველა ვექტორი მოცემული ოპერატორის საკუთრივი ვექტორია.

თ ე ო რ ე მ ა 4. თუ A წრფივი ოპერატორის $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ საკუთრივი მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ მათი შესაბამისი საკუთრივი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დამტკიცება ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. $k=1$-სათვის თეორემა მართებულია. მართლაც, e_1 არანულოვანი ვექტორია და ის წრფივად დამოუკიდებელია. დავუშვათ, რომ თეორემა მართებულია $k-1$ საკუთრივი ვექტორისათვის და დავამტკიცოთ მისი მართებულობა k რაოდენობის საკუთრივი ვექტორებისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_k e_k=\theta, \tag{12}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1 \neq 0$, (12) ტოლობიდან გვაქვს

$$A(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_k e_k)=\theta,$$

ე. ი.

$$\alpha_1\lambda_1 e_1+\alpha_2\lambda_2 e_2+\dots+\alpha_k\lambda_k e_k=\theta. \tag{13}$$

(12)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ λ_k-ზე და გამოვაკლოთ (13) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)e_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)e_2+\dots+\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)e_{k-1}=\theta.$$

მიღებულ ტოლობაში $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)\neq\theta$. ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ A წრფივი ოპერატორის მახასიათებელ განტოლებას აქვს n სხვადასხვა ფესვი, მაშინ ამ ოპერატორის შესაბამისი $A=(a_{ik})$ მატრიცა შეიძლება დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე.

მართლაც, მახასიათებელი განტოლების ყოველ λ_k ფესვს შეესაბამება ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი, ე. ი. თეორემა 4-ის თანახმად გვაქვს n წრფივად დამოუკიდებელი $e_1, e_2, \dots, e_n$ საკუთრივი ვექტორი. თუ ამ ვექტორებს ავიღებთ ბაზისად, მაშინ A წრფივი ოპერატორის შესაბამისი მატრიცა ამ ბაზისში იქნება დიაგონალური.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ სამგანზომილებიან ნამდვილ წრფივ სივრცეში, რომლის ბაზისია e_1, e_2, e_3, მოცემულია წრფივი ოპერატორის

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

მატრიცა. ვიპოვოთ ამ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობანი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ოპერატორის მახასიათებელი განტოლებაა:

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ -3 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2+4)=0.$$

რომლის ფესვებია: $\lambda_1=4$, $\lambda_{2,3}=\pm 2i$. რადგანაც ოპერატორი მოქმედებს ნამდვილ სივრცეში, ამიტომ კომპლექსურ ფესვებს მხედველობაში არ მივიღებთ. $\lambda=4$ იქნება გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა. მისი შესაბამისი $x=(x_1, x_2, x_3)$ საკუთრივი ვექტორის ასაგებად შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=0, \\ -3x_1+3x_2+x_3=0, \\ -2x_1+2x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ: $x_1=x_2$, $x_3=0$. ამრიგად, ნებისმიერი x-თვის მოცემული ოპერატორის $=4$ საკუთარი მნიშვნელობის შესაბამისი ვექტორი იქნება

$$x_1e_1+x_2e_2+o\cdot e_3=x_1(e_1+e_2).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ მატრიცით განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივვექტორები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-25\lambda+100=0.$$

$\lambda_1=5$, $\lambda_2=20$ წარმოადგენენ A წრფივი ოპერატორის საკუთრივ მნიშვნელობებს.

საკუთრივი ვექტორების ასაგებად განვიხილოთ განტოლებათა

$$\begin{cases} (17-\lambda)x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+(8-\lambda)x_2=0, \end{cases}$$

სისტემა. როცა $\lambda=5$, მივიღებთ მისი შესაბამისი $x(x_1, x_2)$ საკუთრივი ვექტორის განმსაზღვრელ

$$\begin{cases} 12x_1+6x_2=0, \\ 6x_1+3x_2=0, \end{cases}$$

სისტემას, რომლის რანგი $r=1$ და მისი ზოგადი ამონახსენია

$$x_2=-2x_1.$$

ამრიგად, $\lambda=5$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია

$$x(x_1,\ x_2)=(x_1,-2x_1)=x_1(1,-2).$$

x_1-ის ცვლილებით მივიღებთ კოლინეარულ ვექტორებს, რომლებიც წარმოადგენენ საკუთრივ ვექტორებს. როცა $\lambda=20$, გვექნება

$$\begin{cases} -3x_1+6x_2=0, \\ 6x_1-12x_2=0. \end{cases}$$

აქაც რანგი $r=1$ და მისი ამონახსენია $x_1=2x_2$. ამრიგად, $\lambda=20$ მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია

$$x(x_1,\ x_2)=(2x_2,\ x_2)=x_2(2,1).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. წრფივად დამოკიდებულია თუ არა ვექტორები:

ა) $a(2,\ -3,\ 1)$, $b(1,5,4)$, $r(4,1,-3)$;
ბ) $a(2,\ -1,\ 1)$, $b(1,2,3)$, $r(1,-3,-2)$.

2. იპოვეთ r ვექტორის კოორდინატები e_1', e'_2, ბაზისში, თუ იგი მოცემულია e_1, e_2 ბაზისში:

ა) $e_1'=2e_1+e_2$, $e_2'=3e_1+2e_2$, $r=e_1-3e_2$;
ბ) $e'_1=2e_1-e_2$, $e_2'=e_1+e_2$, $r=2e_1-5e_2$;
გ) $e_1'=-e_1+2e_2$, $e'_2=2e_1+3e_2$, $r=e_1+e_2$.

3. გამოიკვლიეთ, მოცემული სიმრავლე წარმოადგენს თუ არა წრფივ სივრცეს, თუ მასში განსაზღვრულია ვექტორთა ჯამისა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ოპერაციები:

ა) ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე, თუ ჯამია $a\cdot b$, ხოლო ნამრავლი a^{α};

ბ) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავე, თუ ჯამია $a\cdot b$, ხოლო ნამრავლია αa;

გ) ყველა იმ რადიუს-ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა ბოლოები მოთავსებულია მოცემულ წრფეზე, თუ წრფივი ოპერაციები განსაზღვრულია ჩვეულებრივად;

დ) $[-1,1]$ შუალედზე განსაზღვრული ყველა ლუწი (კენტი) ფუნქციის სიმრავლე, ჩვეულებრივი აზრით შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

ე) $[0,\ 1]$ შუალედზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე ჩვეულებრივი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

ვ) ერთიდაიგივე განზომილების დიაგონალური მატრიცათა სიმრავლე, მატრიცთა შეკრების და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

4. გამოიკვლიეთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა ვექტორთა სისტემა მოცემულ შუალედში:

ა) $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

ბ) $1,\ x,\ \sin x,\ (-\infty,\ +\infty)$;

გ) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x},\ (-\infty,\ +\infty)$;

დ) $1,\ x,\ x^2,\ (1+x)^2,\ (-\infty,\ +\infty)$;

ე) $\cos x,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

ვ) $1+x+x^2,\ 1+2x+x^2,\ 1+3x+x^2,\ (-\infty,\ +\infty)$;

ზ) $\dfrac{1}{x},\ x,\ 1,\ (0,\ 1)$.

5. ვთქვათ წრფივი სივრცის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და $y=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n$. დაამტკიცეთ, რომ y ამ სისტემის საშუალებით უამრავი გზით წარმოიდგინება.

6. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა შემდეგი სისტემები წარმოადგენენ E_n სივრცის ბაზისს:

ა) $x_1=(1,2,3,\ldots,n)$,
$x_2=(0,2,3,\ldots,n)$,
$\cdots\cdots$
$x_n=(0,0,0,\ldots,n)$;

ბ) $x_1=(1,1,1,\ldots,1)$,
$x_2=(1,1,1,\ldots,1,0)$,
$\cdots\cdots$
$x_n=(1,0,0,\ldots,0,0)$.

7. იპოვეთ n რიგის კვადრატულ მატრიცათა სივრცის განზომილება და აჩვენეთ, რომ მისი ერთ-ერთი ბაზისია:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ldots,\ A_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

8. დაამტკიცეთ, რომ თუ x ვექტორი $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$ ვექტორების ორთოგონალურია, მაშინ იგი მათი ნებისმიერი წრფივი კომბინაციის ორთოგონალურიც იქნება.

9. დაამტკიცეთ, რომ თუ E_n სივრცის

$$x_1=(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}),$$
$$x_2=(0, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n=(0, 0, \dots, \alpha_{nn}).$$

ვექტორთა სისტემა შეადგენს ამ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისს, მაშინ

$$\alpha_{ii}\neq 0 \text{ და } \alpha_{ij}=0, \text{ თუ } i\neq j.$$

10. წრფივია თუ არა $x=(x_1, x_2, x_3)$ ვექტორის გარდაქმნა:

ა) $Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,\ -3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3)$;

ბ) $Ax=(6-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2)$.

11. აჩვენეთ, რომ იმ მრავალწევრთა სივრცეში, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს და რომლის ბაზისია $1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{2}$, ჩვეულებრივი გაწარმოების ოპერაცია წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს, იპოვეთ ამ ოპერატორის მატრიცა $1,\ t,\ t^2, \dots,\ t^n$ ბაზისში.

12. იპოვეთ შემდეგი მატრიცით მოცემული წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობანი და საკუთრივი ვექტორები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

III თავი

დისკრეტული გამოთვლების ზოგიერთი საკითხი

§ 1. აპროქსიმაცია, კრებადობა

ვთქვათ მოცემული გვაქვს X, Y მეტრიკული სივრცეები და $f:X\to Y$, რომელიც განსაზღვრულია X სივრცის გარკვეულ $D(f)$ ნაწილზე. საჭიროა ამოვხსნათ

$$f(x)=y^* \tag{1}$$

განტოლება, სადაც y^* არის Y სივრცის მოცემული ელემენტი.

ვიგულისხმოთ, რომ (1) განტოლებას $D(f)$-ზე აქვს ერთადერთი x^* ამონახსენი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ x^*-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ავაგოთ ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც მიიღება $x^n \in X$ $(n=1,2,\ldots)$ მიახლოებითი ამონახსნების მიმდევრობა. მათი აგების დროს შესასწავლია საკითხები:

1) შევამოწმოთ, არის თუ არა კრებადი $x^{(n)}$ მიმდევრობა x^*-საკენ ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=x^*; \tag{2}$$

2) $\sigma_n=r_X(x^n, x^*)$ სიდიდეებისათვის მიღებული შეფასებები აპრიორულია თუ აპოსტერიორული (მათ შორის ის განსხვავებაა, რომ აპრიორული შეფასებები შეიძლება $x^{(n)}$-ის გამოთვლებამდე იყოს მოძებნილი, ხოლო აპოსტერიორული შეფასება მიიღება უკვე გამოთვლილი $x^{(n)}$-ის მნიშვნელობების საშუალებით). აქ და შემდეგში r_X აღნიშნავს მანძილს X სივრცეში.

3) შევაფასოთ $\{\sigma_n\}$ სიდიდეთა მიმდევრობის ნულისაკენ მისწრაფების რიგი, რაც ნიშნავს ნულისაკენ კრებადი ისეთი $\{\beta_n\}$ მიმდევრობის აგებას, რომ

$$\sigma_n \leqslant c\beta_n,$$

სადაც c რაიმე უცნობი მუდმივია. ასეთი ამოცანა საინტერესოა იმ შემთხვევაში, როცა კრებადობა დადგენილია, მაგრამ σ_n სიდიდეების შეფასება რთულია ან უხეში.

ხშირად, σ_n სიდიდეების აპრიორული შეფასებები საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ, n-ის რომელი მნიშვნელობისათვისაა σ_n საკმარისად მცირე.

$\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ასაგებად იყენებენ სხვადასხვა მეთოდს, რომელთა უმრავლესობა შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად:

ა) იტერაციული მეთოდები,

ბ) ალგორითმები, რომლებსაც მივყავართ უფრო მარტივ განტოლებებზე.

იტერაციული მეთოდების უმეტესობისათვის ზოგადი სქემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით: (1) განტოლება წარმოვადგინოთ

$$x=Q(x) \tag{3}$$

სახით, სადაც $Q:X\to X$ ისეთი ფუნქციაა, რომ x^* არის (3) განტოლების ერთადერთი ამონახსენი. ამის შემდეგ ნებისმიერად ავიღოთ $x^{(0)}$ და დავუშვათ

$$x^{(n+1)}=Q[x^{(n)}], \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

შევნიშნოთ, რომ X არის უსასრულოგანზომილებიანი სივრცე.

გარკვეული აზრით, უფრო მარტივად, შეგვიძლია ამოვხსნათ ამოცანები სასრულგანზომილებიან სივრცეში ანუ როგორც მათ უწოდებენ — სასრულგანზომილებიანი ამოცანები.

ვთქვათ, X_n და Y_n არიან შესაბამისად X და Y სივრცეების მააპროქსიმირებელი სივრცეები. დავუშვათ, მოცემულია

$$\varphi_n : X \to X_n, \qquad \Psi_n : Y \to Y_n.$$

ამის შემდეგ (1) განტოლება შეიცვლება

$$f_n(x_n) = \Psi_n(y^*) \tag{4}$$

მიახლოებითი განტოლებით. ამასთან, $f_n : X_n \to Y_n$ არის f-ის მააპროქსიმირებელი ფუნქცია.

აღნიშვნების დასამახსოვრებლად მოსახერხებელია გამოვიყენოთ სქემა (სქემა 1):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] & & Y \arrow[d, "\Psi_n"] \\
X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[u, shift right, "\bar{\varphi}_n"'] & & Y_n
\end{tikzcd}$$

სქემა 1.

ვთქვათ ყოველი n-ისათვის (4) განტოლებას აქვს ერთადერთი $x_n^* \in X_n$ ამონახსენი. რადგან $x_n^* \notin X$, ამიტომ მას ვერ ვუწოდებთ (1) განტოლების მიახლოებით ამონახსენს. მას უწოდებენ მიახლოებითი ამონახსენის კარკასს (ჩონჩხი).

(1) განტოლების მიახლოებითი ამონახსენი ეწოდება

$$x^{(n)} = \bar{\varphi}_n(x_n^*) \in X \tag{5}$$

ელემენტს. შევნიშნოთ, რომ ეს ელემენტი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს f ფუნქციის განსაზღვრის არეს. მართლაც, $\bar{\varphi}_n$ ფუნქცია მოქმედებს X_n-დან X-ში და არა f ფუნქციის $D(f)$ განსაზღვრის არეში.

რადგანაც $\bar{\varphi}_n$ ოპერატორის საშუალებით, კარკასების მიხედვით, ხდება მიახლოებითი ამონახსნების კონსტრუირება, ამიტომ ამ ოპერატორს უწოდებენ აღდგენის ოპერატორს.

φ_n და Ψ_n ოპერატორებს უწოდებენ ჩამოტანის ოპერატორებს.

მიახლოებითი $x^{(n)}$ ამონახსნებისა და x^* ზუსტი ამონახსენის სიახლოვე, როგორც აღვნიშნეთ, ხასიათდება

$$\sigma_n = r_X[x^{(n)},\ x^*]$$

სიდიდით.

ხშირად ინტერესს იმსახურებს

$$\tau_n = r_{X_n}[x^*_n,\ \varphi_n(x^*)]$$

სიდიდეც.

განსაზღვრება 1. ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს მიახლოებითი ამონახსნების კრებადობას, თუ $\sigma_n \to 0$ და მიახლოებითი ამონახსნების კარკასები კრებადია.

ვთქვათ, X და Y წრფივი ნორმირებული ნამდვილი სივრცეებია. (1) განტოლებას აქვს სახე:

$$Ax = y^*, \tag{6}$$

სადაც: $A: X \to Y$. ვიგულისხმოთ, რომ X_n და Y_n აგრეთვე წრფივი ნორმირებული ნამდვილი სივრცეებია, ხოლო

$$\varphi_n: X \to X_n, \quad \Psi_n: Y \to Y_n, \quad \overline{\varphi}_n: X_n \to X.$$

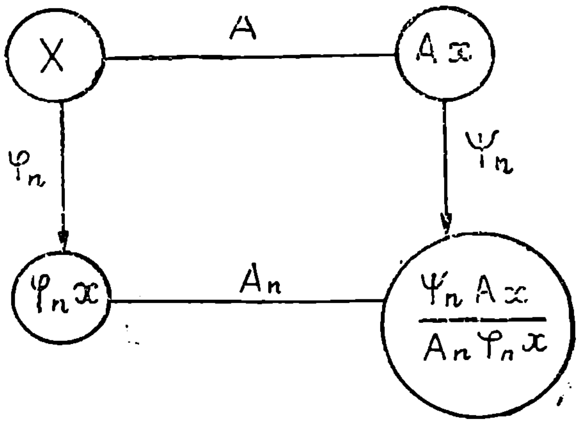
თუ (4) განტოლება წრფივია, მაშინ f_n-ის ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ $A_n: X_n \to Y_n$ და (4) მიახლოებით განტოლებას ექნება სახე:

$$A_n x_n = \Psi_n y^*. \tag{7}$$

განსაზღვრება 2. ვიტყვით, რომ (7) განტოლება ანხორციელებს (6) განტოლების აპროქსიმაციას $x \in D(A)$ ელემენტზე, თუ აპროქსიმაციის ზომა

$$\gamma_n(x) = \|A_n \varphi_n x - \Psi_n A x\|_{Y_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

ამ გამოსახულების დამახსოვრების მიზნით სასურველია ვისარგებლოთ სქემით (სქემა 2):



სქემა 2.

$\gamma_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ დამოკიდებულებას უწოდებენ აპროქსიმაციის პირობას. მართებულია შემდეგი

თეორემა. თუ

$$W_n = \|\overline{\varphi}_n\| \cdot \|A_n^{-1}\| \gamma_n(x^*) \to 0$$

და

$$\overline{\varphi}_n \varphi_n x^* \to x^*,$$

მაშინ ადგილი აქვს მიახლოებითი ამონახსნების კრებადობას, სახელდობრ,

$$\sigma_n = \|x^{(n)} - x^*\| \leqslant W_n + \|\overline{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\|.$$

§ 2. გამოთვლითი პროცესების მდგრადობა

დიდი ყურადღება ეთმობა მიახლოებითი სქემების მდგრადობის საკითხის შესწავლას. ზოგიერთი მიახლოებითი პროცესი არამდგრადია გამოთვლების დროს წარმოშობილი ცდომილებების მიმართ. ასეთ პროცესებში, n-ის ზრდასთან ერთად, საწყისი პირობების მცირედ შეცვლა, იწვევს ცდომილებათა სწრაფ დაგროვებას.

მდგრადობის შესწავლის აქტუალობა დაკავშირებულია თანამედროვე სწრაფმომქმედი ეგმ-ის ფართო დანერგვასთან.

განვიხილოთ

$$Ax = y^* \tag{1}$$

განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმი. იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორ ეტაპად: პირველ ეტაპზე

$$A_n x_n = y_n^* \tag{2}$$

განტოლებიდან ვპოულობთ x^*_n-ს, სადაც $y^*_n = \Psi_n y^*$. ხოლო მეორე ეტაპზე

$$x^{(n)} = \overline{\varphi}_n x_n^* \tag{3}$$

განტოლებიდან — $x^{(n)}$ მიახლოებას.

ცდომილებათა დაგროვება განსაკუთრებით თავს იჩენს პირველ ეტაპზე, რადგანაც ამ შემთხვევაში საქმე ეხება განტოლების ამოხსნას.

(2) განტოლების შედგენის დროს ადგილი აქვს დამახინჯებებს, რის გამოც სინამდვილეში ვხსნით

$$(A_n + \Delta A_n) x_n = y_n^* + \Delta y^*_n \tag{4}$$

განტოლებას, სადაც $\Delta A_n : X_n \to Y_n$, ხოლო $\Delta y_n^* \in Y_n$.

ΔA_n და Δy_n^* უწოდებენ მოცემული ამოცანის ნაზრდებს.

განსაზღვრება 1. მიახლოებითი ამონახსენის კარკასების

მოძებნის პროცესს ეწოდება o-მდგრადი თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) როცა

$$\frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|} \tag{5}$$

შეფარდება მიისწრაფვის ნულისაკენ, იგი უნდა იწვევდეს $(A_n+\Delta A_n)^{-1}$ ოპერატორის არსებობას (უკიდურეს შემთხვევაში საკმარისად დიდი n-ებისათვის მაინც);

ბ) (5) და $\frac{\|\Delta y^*_n\|}{\|y^*_n\|}$ ფარდობათა ნულისაკენ მისწრაფებიდან უნდა გამომდინარეობდეს მიახლოებითი ამონახსენის კარკასის $\|\Delta x_n^*\|/\|x^*_n\|$ ფარდობითი ცდომილების ნულისაკენ მისწრაფება.

თუ ა) და ბ) პირობებიდან ერთი მაინც არ სრულდება, მაშინ ამბობენ, რომ მიახლოებითი ამონახსნების კარკასების პოვნის პროცესი o — არამდგრადია.

თუ A არის X სივრცეზე მოცემული შემოსაზღვრული ოპერატორი, მაშინ $\mu(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ უწოდებენ A მატრიცის განპირობებულობის რიცხვს. $\mu(A)$ არ იცვლება A მატრიცის არც რაიმე რიცხვზე გამრავლებით და არც X და Y სივრცეების ნორმების ნებისმიერ მუდმივზე გამრავლებით.

ამრიგად, $\mu(A)$ წარმოადგენს A ოპერატორის საკმაოდ არსებით მახასიათებელს. დამტკიცების გარეშე ჩამოვაყალიბოთ.

თ ე ო რ ე მ ა 1. მიახლოებითი ამონახსენის კარკასების მოძებნის პროცესი რომ იყოს o-მდგრადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული.

თუ აღნიშნული მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია, მაშინ ეისწავლიან მისი ზრდადობის ხარისხს. თუ იგი არ იზრდება უფრო ჩქარა, ვიდრე n-ის რაიმე დადებითი ხარისხი, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს ხარისხობრივი o — არამდგრადობა. თუ ეს მიმდევრობა იზრდება უფრო ჩქარა, ვიდრე რაიმე განშლადი გეომეტრიული პროგრესია, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს მაჩვენებლიანი o-არამდგრადობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე რომ o— მდგრადობა (ან o-არამდგრდობა) დაკავშირებულია მხოლოდ (2) მიახლოებით განტოლებასთან ანუ $\{A_n\}$ ოპერატორების მიმდევრობასთან.

დაუბრუნდეთ მეორე ეტაპს. ვთქვათ, უკვე ნაპოვნი გვაქვს კარკასების $x_n^*+\Delta x_n^*$ მიახლოებითი მნიშვნელობები. დაუშვათ, რომ აღდგენის φ_n ოპერატორიც გამოთვლილია ნაზრდით ისე, რომ ფაქტიურად

გამოყენებულია $\overline{\varphi_n}+\Delta\overline{\varphi_n}$ ოპერატორი. ამრიგად, $x^{(n)}$ ელემენტის ნაცვლად გამოითვლება $x^{(n)}+\Delta x^{(n)}=(\overline{\varphi_n}+\overline{\Delta}\varphi_n)\ (x_n{}^*+\Delta x_n)$.

მიახლოებითი ამონახსენის პოვნის პროცესს ეწოდება o-მდგრადი, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

ა) (5) შეფარდების ნულისაკენ მისწრაფებიდან უნდა გამომდინარეობდეს $(A_n+\Delta A_n)^{-1}$ ოპერატორის არსებობა (უკიდურეს შემთხვევაში საკმარისად დიდი n-ებისათვის მაინც);

ბ) (5) და (6), ასევე

$$\frac{\|\Delta\,\overline{\varphi}_n\|}{\|\overline{\varphi}_n\|}$$

დამოკიდებულებების ნულისაკენ კრებადობა უნდა იწვევდეს მიახლოებითი ამონახსენის $\|\Delta x^n\|/\|x^n\|$ ფარდობითი ცდომილების ნულისაკენ კრებადობას. მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 2. ვთქვათ, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $x^*\neq 0$;

2) მიახლოებითი მონახსნები კრებადია,

3) მიახლოებითი ამონახსნების კარკასების მოძებნის პროცესი o-მდგრადია.

მაშინ, მიახლოებითი ამონახსენის პოვნის პროცესი რომ იყოს o-მდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი $\{\gamma_n\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა, სადაც $\gamma_n=\|\overline{\varphi}_n\|\cdot\|x_n{}^*\|$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. $\{\gamma_n\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის პირობა წარმოადგენს $\{\|x^{(n)}\|\}=\{\|\overline{\varphi}_n x_n{}^*\|\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის გაძლიერებას. ეს უკანასკნელი მიმდევრობა კი ყოველთვის შემოსაზღვრულია, თუ მიახლოებითი ამონახსნები კრებადია.

ცხადია, თუ $\{\mu(A_n)\}$ ან $\{\gamma_n\}$ შემოუსაზღვრელია, მაშინ შეისწავლიან მათი ზრდადობის ხარისხს. თუ ეს მიმდევრობები არ იზრდება უფრო ჩქარა, ვიდრე n-ის რაიმე დადებითი ხარისხი, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს ხარისხობრივი o-არამდგრადობა. თუ ამ მიმდევრობიდან ერთ-ერთი მაინც იზრდება უფრო ჩქარა ვიდრე ნებისმიერი განშლადი გეომეტრიული პროგრესია, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს მაჩვენებლიანი o-არამდგრადობა.

§ 3. მიახლოებითი რიცხვები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. 1. A რიცხვის მიახლოებითი რიცხვი ეწოდება ისეთ a რიცხვს, რომელიც უმნიშვნელოდ განსხვავდება A რიცხვისაგან და რომელსაც იგი ცვლის გამოთვლების პროცესში.

თუ ცნობილია, რომ $a<A$ მაშინ a-ს ეწოდება A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით, ხოლო თუ $a>A$ — მეტობით. მაგალითად, $\sqrt{3}$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით იქნება 1,73, ხოლო მეტობით — 1,74, ე. ი. $1,73<\sqrt{3}<1,74$. ის ფაქტი. რომ a არის A-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, აღინიშნება ასე: $a\approx A$.

განსაზღვრება 2. A რიცხვის a მიახლოებითი მნიშვნელობის ცდომილება ეწოდება $A-a$ სხვაობას და აღინიშნება Δa სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta a=A-a.$$

თუ $A<a$, მაშინ $\Delta a>0$; ხოლო თუ $A<a$, მაშინ $\Delta a<0$. ზუსტი A რიცხვის მისაღებად საჭიროა მის მიახლოებით მნივშნელობას დავუმატოთ შესაბამისი ცდომილება, თუ a აღებულია ნაკლებობით $A=a+\Delta a$; ან $A=a-\Delta a$ თუ a აღებულია მეტობით. ამრიგად, ზუსტი რიცხვი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ნულის ტოლი ცდომილებით.

განსაზღვრება 3. A რიცხვის a მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება $|A-a|$ გამოსახულებას და აღინიშნება Δ სიმბოლოთი:

$$\Delta=|\Delta a|=|A-a|. \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ A ცნობილია, მაშინ აბსოლუტური ცდომილება გამოითვლება (1) ფორმულით, მაგრამ ჩვეულებრივ უფრო ხშირად A არ არის ცნობილი, რის გამოც აბსოლუტური ცდომილება ვერ გამოითვლება (1) ფორმულით. ასეთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია შემოვიღოთ ე. წ. ზღვრული აბსოლუტური ცდომილების ცნება.

განსაზღვრება 4. a მიახლოებითი რიცხვის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება რიცხვს, რომელიც არაა ნაკლები მის აბსოლუტურ ცდომილებაზე და აღნიშნება Δ_a სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta=|A-a|\leqslant\Delta_a \tag{2}$$

აქედან ზუსტი რიცხვისათვის გვექნება საზღვრები:

$$a-\Delta_a\leqslant A\leqslant a+\Delta_a, \tag{3}$$

ე. ი. $a-\Delta_a$ არის A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით, ხოლო $a+\Delta_a$ — მეტობით.

მაგალითი 1. განვსაზღვროთ $a=3,14$-ის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება, რომელიც წარმოადგენს π რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$3,14<\pi<3,15.$$

ამიტომ $|a-\pi|<0,01$ და, მაშასადამე, შეგვიძლია მივიღოთ $\Delta_a=0,01$.

მიუხედავად იმისა, რომ აბსოლუტური ცდომილება (ან ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება) მიახლოების გარკვეული მახასიათებელია, იგი გაზომვის ან გამოთვლების ხარისხს ზუსტად ვერ დაახასიათებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ ბრტყელი ძელის a სისქის და l სიგრძის (სანტიმეტრებში) გაზომვის შედეგებია:

$$a=4\pm0,5, \qquad l=250\pm0,5.$$

ორივე გაზომვა შესრულებულია 0,5 სმ სიზუსტით. მიუხედავად ამისა სიზუსტის ხარისხი სხვადასხვაა ძელის სისქისა და სიგრძის გაზომვისას. კერძოდ, სისქის გაზომვა 0,5 სმ-ის სიზუსტით დამაკმაყოფილებლად არ ჩაითვლება. იგი სისქის ზომასთან შედარებით ძალიან დიდია, სიგრძის შემთხვევაში კი მიღებული სიზუსტე სავსებით დამაკმაყოფილებელია (შედარებით სიგრძის ზომასთან). ამრიგად, შედეგის ხარისხი გაცილებით უკეთ ხასიათდება ეგრეთ წოდებული ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ი თ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება ეწოდება $\frac{\Delta}{|A|}$ გამოსახულებას და აღინიშნება δ-თი, ე. ი.

$$\delta=\frac{\Delta}{|A|}, \tag{4}$$

საიდანაც $\Delta=\delta|A|$.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ A ზუსტი მნიშვნელობა და მაშასადამე, Δ ცდომილების მნიშვნელობაც, ჩვეულებრივ, ცნობილი არ არის, ამიტომ პრაქტიკაში საჭირო ხდება ფარდობითი ცდომილების შეფასება. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ ე. ი. ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ცდომილების ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6. მიახლოებითი a რიცხვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება ეწოდება ყოველ რიცხვს, რომელიც არ არის ნაკლები ფარდობით ცდომილებაზე და აღინიშნება δ_a სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\delta\leqslant\delta_a.$$

აქედან (4)-ის თანახმად გვექნება

$$\frac{\Delta}{|A|}\leqslant\delta_a, \quad \text{საიდანაც} \quad \Delta=|A|\delta_a.$$

ამრიგად, a რიცხვის ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებად შეიძლება ავიღოთ

$$\Delta_a=|A|\cdot\delta_a. \tag{5}$$

რადგან $A \approx a$, ამიტომ (5)-ის ნაცვლად ხშირად გამოიყენებენ ფორმულას

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a. \tag{6}$$

ზემოთ განხილულ მე-2 მაგალითში გაზომვათა ხარისხების შესადარებლად ვიპოვოთ ზღვრული ფარდობითი ცდომილებები:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0,5}{4} = 0,125,$$

$$\delta_l = \frac{\Delta_l}{|l|} = \frac{0,5}{250} = 0,002.$$

ამრიგად, ძელის სისქე გაზომილია 0,125 ფარდობითი სიზუსტით, ხოლო სიგრძე — 0,002 ფარდობითი სიზუსტით, ე. ი. ძელის სიგრძის გაზომვის ხარისხი უკეთესია სისქის გაზომვის ხარისხზე.

ზღვრული ფარდობითი ცდომილება საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ზუსტი რიცხვის საზღვრები, კერძოდ, ქვედა საზღვარია $a\ (1-\delta_a)$, ხოლო ზედა — $a(1+\delta_a)$. ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე:

$$A = a\ \ (1 \pm \delta_a).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $A > 0$, $a > 0$ და $\Delta_a < a$ მაშინ,

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leqslant \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

ამრიგად, a მიახლოებითი რიცხვის ზღვრულ ფარდობით ცდომილებად შეგვიძლია მივიღოთ

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

ანალოგიურად მიიღება $\Delta = A\delta \leqslant (a+\Delta)\delta_a$, საიდანაც

$$\Delta_a = \frac{a\,\delta_a}{1 - \delta_a}.$$

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება, $\Delta_a \ll a$ და $\delta_a \ll 1$ ($\ll$ ნიშანი აღნიშნავს „გაცილებით მცირე“), ამიტომ მართებულია მიახლოებითი ტოლობები:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{a}, \quad \Delta_a \approx a\delta_a.$$

პრაქტიკულ გამოთვლებში ფარდობით ცდომილებას წარმოადგენენ პროცენტული ფარდობით, ე. ი. $\delta_a \cdot 100$ სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 0^0C ტემპერატურის დროს 1 დმ³ წყლის წონა $p=999,847$ გრ$\pm 0,001$ გრ. განსაზღვრეთ აწონვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია $\Delta_p=0,001$ გრ და $999,846$ გრ$\leqslant p \leqslant 999,848$ გრ, ამიტომ (7)-ის თანახმად გვაქვს;

$$\delta_p=\frac{0,001}{999,846}\approx 10^{-4}\%.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ჰაერის საშუალო მოლეკულური მასაა $R=29,25$. დავადგინოთ R-ის საზღვრები, თუ ცნობილია, რომ ამ მიახლოებითი მნიშვნელობის ფარდობითი ცდომილებაა $\delta=0,001$.

ა მ ო ხ ს ნ ა: გვაქვს, $\delta_R=0,001$, მაშინ $\Delta_R=R\cdot\delta_R=29,25\cdot 0,001\approx$ $\approx 0,03$. მაშასადამე, $29,22\leqslant R\leqslant 29,28$

§ 4. რიცხვითი მეთოდებით ამოცანების ამოხსნის ცდომილებანი

რიცხვითი მეთოდებით ამოცანების ამოხსნისას ძირითადად გვხვდება შემდეგი სახის ცდომილებანი:

1. ცდომილებანი, რომლებიც დაკავშირებულია ამოცანის მათემატიკურ დასმასთან. როგორც ცნობილია ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება იშვიათად შეესაბამება იმ რეალურ მოვლენას, რომელსაც იგი აღწერს. როგორც წესი, იგი წარმოადგენს აღნიშნული მოვლენის გარკვეულ იდეალიზაციას. ხშირ შემთხვევაში ხდება განსახილველი მოვლენის მთელი რიგი პირობების გამარტივება ან საერთოდ უგულებელყოფა, რაც დაკავშირებულია მიღებული მათემატიკური მოდელის სირთულესთან. ზოგჯერ ზუსტი მათემატიკური ამოცანა ან ძნელად ამოსახსნელია, ან საერთოდ არ იხსნება. აღნიშნულიდან გამომდინარე მიღებული მათემატიკური ამოცანის შეცვლა, ამოხსნის თვალსაზრისით ხდება გამარტივებული მიახლოებითი ამოცანით: ამგვარი შეცვლით მიღებულ ცდომილებას ეწოდება მ ე თ ო დ ი ს ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა.

2. ცდომილებანი, რომლებიც დაკავშირებულია დასმულ ამოცანაში არსებულ უსასრულო პროცესებთან. კერძოდ, შესაძლოა შეგვხვდეს უსასრულო მწკრივებად წარმოდგენილი ფუნქციები, რომელთა მნიშვნელობების დადგენა დაკავშირებულია შესაკრებთა უსასრულო რაოდენობის გამოთვლასთან, რაც შეუძლებელია; ამიტომ აიღება შესაკრებთა წინასწარ განსაზღვრული სასრული რაოდენობა. აქედან გამომდინარე მიიღება ცდომილებანი, რომელთანაც ნ ა შ თ ი თ ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ს უწოდებენ.

3. ცდომილებანი დაკავშირებული მათემატიკურ ფორმულებში არსებულ რიცხვით პარამეტრებთან. ისინი მიახლოებით არიან მოცემული.

ასეთებია მთელი რიგი ფიზიკური კონსტანტები. აქედან მიღებულ ცდომილებებს **საწყის ცდომილებებს** უწოდებენ.

4. ცდომილებანი დაკავშირებული თვლის სისტემასთან. რაციონალურ რიცხვთა, რომ არაფერი ვთქვათ ირაციონალურ რიცხვებზე, ათწილადებად წარმოდგენა, ხშირად დაკავშირებულია მძიმის შემდეგ არსებულ ათობით ნიშანთა უსასრულო რაოდენობასთან (პერიოდული ათწილადები, ან უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები). გამოთვლების პროცესში, ცხადია, უნდა ავიღოთ ასეთ ციფრთა სასრული რაოდენობა, რაც წარმოშობს ცდომილებებს, რომელსაც **დამრგვალების ცდომილებებს** უწოდებენ. ზოგჯერ დამრგვალება გვიხდება აგრეთვე ჩვეულებრივი სასრული ათწილადებისა, რომელთაც მძიმის შემდეგ ძალზე ბევრი ათობითი ნიშანი გააჩნიათ. აქედან აგრეთვე მიიღება დამრგვალების ცდომილება.

5. მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებებთან დაკავშირებული ცდომილებები. ასეთ ცდომილებებს **მოქმედებათა ცდომილებებს** უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ რომელიმე კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისას ზემოთ ჩამოთვლილ რომელიმე ტიპის ცდომილება შეიძლება არ გვქონდეს, ან მათი გავლენა, გამოთვლების შედეგებზე იყოს უმნიშვნელო. მიუხედავად ზემოაღნიშნულისა, ცდომილებათა სრული ანალიზისათვის მხედველობაში უნდა იქნას მიღებული ყველა მათგანი.

§3. დამრგვალების მეთოდები, ნიშნადი ციფრი. სანდო ნიშნადი ციფრი

ცნობილია, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვი წარმოიდგინება სასრული ან უსასრულო ათწილადის სახით შემდეგნაირად:

$$a=\alpha_m\cdot 10^m+\alpha_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+\alpha_{m-n+1}\cdot 10^{m-n+1}+\ldots, \qquad (1)$$

სადაც α_i ($\alpha_i=0,1,2,\ldots,9$) არის a რიცხვის ათობითი ნიშნები ან ციფრები. ამასთან, უფროსი ციფრი $\alpha_m\neq 0$, ხოლო m (a რიცხვის უფროსი ათობითი თანრიგი) რაიმე მთელი რიცხვია. მაგალითად, $5341,67\ldots=$ $=5\cdot 10^3+3\cdot 10^2+4\cdot 10^1+1\cdot 10^0+6\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}+\ldots$ a რიცხვში ყოველი ათობითი ნიშანი გვიჩვენებს ათობით თანრიგს და ამ თანრიგში ერთეულების რაოდენობას. კერძოდ, α_m არის 10^m-ის ათობითი თანრიგი, α_{m-1} არის 10^{m-1}-ის ათობითი თანრიგი და ა. შ.

განსაზღვრება 1. მიახლოებითი რიცხვის ათწილადის სახით წარმოდგენაში ნიშნადი ციფრი ეწოდება ყველა ნულისაგან განსხვავებულ ციფრს და აგრეთვე ნულებს, რომლებიც მოთავსებულია ნიშნად ციფრებს შორის ან გამოსახავენ შენარჩუნებულ ათობით თანრიგს.

მაგალითად, 0,0005070 რიცხვში პირველი ოთხი ნული არ არის ნიშნადი ციფრი, რადგან ისინი გამოიყენებიან მხოლოდ სხვა ციფრების ათობითი თანრიგის დასადგენად. უკანასკნელი ნული კი ნიშნადია, რადგან იგი მიუთითებს შენარჩუნებულ 10^{-7} ათობით თანრიგს. თუ უკანასკნელი ნული ამ რიცხვში არ არის ნიშნადი, მაშინ მას არ დავწერთ. ამ აზრით 0,0005070 და 0,000507 რიცხვები არ არიან ტოლფასნი, რადგან პირველი შეიცავს ოთხ ნიშნად ციფრს, ხოლო მეორე მხოლოდ სამს.

მთელი რიცხვის ჩანაწერში მარჯვნივ დაწერილი ნულები შეიძლება განსაზღვრავდეს როგორც მხოლოდ დანარჩენი ციფრების ათობით თანრიგს, ისე წარმოადგენდნენ ნიშნად ციფრებს. მაგალითად, 576000 რიცხვში მისი ჩანაწერიდან არ შეგვიძლია დავადგინოთ, რამდენ ნიშნად ციფრს შეიცავს იგი, თუმცა მისი ნიშნადი ციფრების რაოდენობა სამზე ნაკლები არ არის. ამ გაურკვევლობის თავიდან ასაცილებლად მოსახერხებელია გამოვყოთ მისი ათობითი რიგი და ჩავწეროთ $5{,}76\cdot10^5$ სახით, თუ იგი შეიცავს სამ ნიშნად ციფრს, $5{,}7600\cdot10^5$ სახით, თუ — ხუთ ნიშნად ციფრს და ა. შ. ასეთი ჩაწერა მოსახერხებელია მაშინაც, როცა რიცხვი შეიცავს არანიშნადი ნულების დიდ რაოდენობას. მაგალითად, $0{,}0000000950=9{,}50\cdot10^{-8}$ და ა. შ. ზემოთქმულიდან გამომდინარე მიზანშეწონილია შემოვიღოთ მიახლოებითი რიცხვის **სანდო ციფრის** ცნება.

განსაზღვრება 2. a მიახლოებითი რიცხვის ათწილადის სახით წარმოდგენაში α_m ციფრს **სანდო ციფრი** ეწოდება, თუ მოცემული მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება იმ თანრიგის ერთეულის ნახევარს, რომელშიაც α_m ციფრი წერია.

მაგალითად, თუ ზუსტი $A=45{,}98$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა $a=46{,}00$, მაშინ a-ს გააჩნია სამი სანდო ციფრი, მართლაც, $\Delta=$

$$=|A-a|=0{,}02<\frac{1}{2}\cdot0{,}1=\frac{1}{2}\cdot10^{-1}$$

(სანდო ნიშნადი ციფრების რაოდენობა იქნება $2+|-1|=3$).

არ უნდა მოგვეჩვენოს, რომ მიახლოებითი რიცხვის სანდო ციფრები აუცილებლად ემთხვევა ზუსტი რიცხვის პოზიციური ჩანაწერის ციფრებს. მაგალითად, $a=9{,}995$ წარმოადგენს $A=10$ ზუსტი რიცხვის მიახლოებას სამი სანდო ციფრით, რადგან $|10-9{,}995|=0{,}005$. მაგრამ a და A რიცხვების პოზიციურ ჩანაწერში ერთნაირი ციფრები საერთოდ არ არის.

განსაზღვრება 3. ვიტყვით, რომ a რიცხვი წარმოადგენს A რიცხვის მიახლოებას n სანდო ციფრით, თუ a რიცხვის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება იმ თანრიგის ერთეულის ნახევარს, რომელიც უკავია n-ურ ნიშნად ციფრს.

თ ე ო რ ე მ ა. თუ დადებით მიახლოებით a რიცხვს აქვს n სანდო ციფრი, მაშინ ამ რიცხვის δ ფარდობითი ცდომილება აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\delta\leqslant \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

სადაც α_m არის a რიცხვის პირველი ნიშნადი ციფრი.

შევნიშნოთ, რომ ზღვრულ ფარდობით ცდომილებად შეგვიძლია ავიღოთ რიცხვი:

$$\delta_a=\frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

მოყვანილი თეორემა საშუალებას გვაძლევს სანდო ციფრთა რაოდენობით განვსაზღვროთ ფარდობითი ცდომილება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. რამდენი ათობითი ნიშანი (ციფრი) უნდა შევინარჩუნოთ $\sqrt{20}$ რიცხვში, თუ მისი ზღვრული ფარდობითი ცდომილება $\delta_a=0{,}001$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან პირველი ათობითი ნიშანია 4, ე. ი. $\alpha_m=4$, ამიტომ გვექნება

$$\frac{1}{4\cdot 10^{n-1}}\leqslant 0{,}001,$$

საიდანაც

$$10^{n-1}\geqslant \frac{1000}{4}=250,\ \text{ანუ}\ n-1\geqslant 2,\ n=3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. რას უდრის π რიცხვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება, თუ მის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ $a=3{,}14$ რიცხვს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩვენს შემთხვევაში $\alpha_m=3$, $n=3$, მაშასადამე

$$\delta_a=\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{600}=\frac{1}{6}\,\%.$$

ბუნებრივად ისმის საკითხი მიახლოებითი რიცხვის დამრგვალების შესახებ თვლის ათობით სისტემაში. a რიცხვის დამრგვალება ნიშნავს შევცვალოთ იგი ნაკლები ნიშნადი ციფრების მქონე მიახლოებითი a_1 რიცხვით ისე, რომ დამრგვალების $|a-a_1|$ ცდომილება იყოს მინიმალური.

იმისათვის, რომ მიახლოებითი რიცხვი დავამრგვალოთ n ნიშნად ციფრამდე, საჭიროა მასში უკუვაგდოთ დასახელებული ციფრის მარჯვნივ მდებარე ყველა სხვა ციფრი, ან თუ საჭიროა თანრიგების შე-

ნარჩუნება მათ ცვლიან ნულებით. ამასთან სარგებლობენ შემდეგი წესებით:

1. თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ დარჩენილი ათობითი ციფრები შენარჩუნებულია უცვლელად.

2. თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე მეტია, მაშინ უკანასკნელ შენარჩუნებულ ციფრს ემატება ერთეული.

3. თუ პირველი უკუგდებული ციფრი ტოლია 5-ის და უკუგდებულ ციფრებს შორის არის არანულოვანი ციფრი, მაშინ უკანასკნელ შენარჩუნებულ ციფრს ადიდებენ ერთი ერთეულით.

3. თუ პირველი უკუგდებული ციფრი ტოლია 5-ის და ყველა მომდევნო უკუგდებული ციფრები ნულის ტოლია, მაშინ უკანასკნელი შენარჩუნებული ციფრი რჩება უცვლელი, როცა იგი ლუწია და იზრდება ერთი ერთეულით, როცა — კენტია (ლუწი ციფრების წესი).

სხვანაირად, თუ რიცხვის დამრგვალებისას უკუგდებულია უკანასკნელი შენარჩუნებული ერთეულის ნახევარზე ნაკლები რიცხვი, მაშინ ყველა შენარჩუნებული ციფრი უცვლელია. თუ უკუგდებულია უკანასკნელი შენარჩუნებული ერთეულის ნახევარზე მეტი რიცხვი, მაშინ უკანასკნელი შენარჩუნებული ციფრი იზრდება ერთი ერთეულით, ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ უკუგდებულია უკანასკნელი შენარჩუნებული ციფრის ზუსტად ნახევრის ტოლი რიცხვი, მაშინ დამრგვალების ცდომილების კომპენსაციისათვის იყენებენ ლუწ ციფრთა კანონს.

ამრიგად, აღნიშნული წესით რიცხვის დამრგვალებით მიღებული ცდომილება არ აღემატება უკანასკნელი შენარჩუნებული ნიშნადი ციფრის შესაბამისი თანრიგის ერთეულის ნახევარს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თუ დავამრგვალებთ

$$3{,}1415925351\ldots$$

რიცხვს, შვიდ, რვა, ცხრა და ათ ნიშნად ციფრამდე, მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით მნიშვნელობებს: 3,141593; 3,1415925; 3,14159254 და 3,141592535. დამრგვალების აბსოლუტური ცდომილობები შესაბამისად

$$\frac{1}{2}\cdot 10^{-6},\quad \frac{1}{2}\cdot 10^{-7},\quad \frac{1}{2}\cdot 10^{-8}\quad \text{და}\quad \frac{1}{2}\cdot 10^{-9}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. დავამრგვალოთ 1,2500 და 1,3500 ორი ნიშნადი ციფრის სიზუსტით. მივიღებთ შესაბამისად 1,2 და 1,4, რომელთა აბსოლუტური ცდომილებაა $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}=0{,}05$.

შევნიშნოთ, რომ მიახლოებითი რიცხვის სიზუსტე დამოკიდებულია არა ნიშნადი ციფრების, არამედ სანდო ნიშნადი ციფრების რაოდენობაზე. იმ შემთხვევაში, როცა მიახლოებითი რიცხვი შეიცავს ზედმეტ

ნიშნად ციფრებს, მიმართავენ დამრგვალების შემდეგ წესს: მიახლოებითი გამოთვლების პროცესში მიღებული შუალედური შედეგის ნიშნად ციფრთა რაოდენობა ორ ერთეულზე მეტით არ უნდა აღემატებოდეს სანდო ციფრთა რაოდენობას ისე, რომ საბოლოო შედეგში ნიშნად ციფრთა რაოდენობამ ერთ ერთეულზე მეტით არ უნდა გადააჭარბოს სანდო ციფრთა რაოდენობას. ამასთან, თუ შედეგის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება უკანასკნელი შენარჩუნებული ათობითი თანრიგის ორ ერთეულს, მაშინ ზედმეტ ნიშნად ციფრს უწოდებენ საეჭვოს.

მოყვანილი წესი საშუალებას გვაძლევს, გამოთვლების სიზუსტის დაურღვევლად, უკუვაგდოთ ზედმეტი ნიშნადი ციფრები, რაც უზრუნველყოფს გამოთვლების დროის მნიშვნელოვან ეკონომიას, რასაც თავის მხრივ უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ეგმ-ზე ამოცანების რეალიზაციის დროს.

§ 6. მოქმედებათა ცდომილებები მიახლოებით რიცხვებზე

ცდომილებების გათვალისწინებით მიახლოებითი გამოთვლების თეორიაში განიხილავენ ორ პ ი რ დ ა პ ი რ და შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ამოცანას. გავეცნოთ თითოეული ამოცანის არსს:

თუ მოცემული გვაქვს მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებები და ცნობილია ამ მოქმედებათა ცდომილებები, მაშინ პირდაპირი ამოცანის მიზანია დავადგინოთ შედეგის ცდომილება.

შებრუნებულ ამოცანაში ცნობილია მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებები და მოცემულია შედეგის დასაშვები ცდომილება. შებრუნებული ამოცანის მიზანია დავადგინოთ, როგორი უნდა იყოს თითოეული მოქმედების ცდომილება რომ შედეგის ცდომილება არ აღემატებოდეს დასაშვებ ცდომილებას.

მოვიყვანოთ თეორემები მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებათა ცდომილებების შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა 1. მიახლოებითი რიცხვების ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება შესაკრებთა აბსოლუტური ცდომილებების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\Delta_a = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{a_i}\,, \tag{1}$$

სადაც

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. (2) ფორმულაში შემავალ თითოეულ შესაკრებს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი ნიშანი. ამიტომ თეორემა მართებულია ალგებრული ჯამისთვისაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ $a_1=20{,}56\pm0{,}02$; $a_2=70{,}27\pm0{,}01$, მაშინ $S=a_1+a_2=90{,}83\pm0{,}03$, ე. ი. $\Delta_s=0{,}03$, რომლის ბოლო ციფრი საეჭვოა.

თ ე ო რ ე მ ა. 2. ნულისაგან განსხვავებული მიახლოებითი რიცხვების ნამრავლის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება თანამამრავლთა ფარდობითი ცდომილებების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\delta_u=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ui},$$

სადაც

$$u=\prod_{i=1}^{n}u_i, \quad \text{სადაც } u_i\neq0 \quad (i=1,\ldots,n).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ $u_1\approx a=7{,}12$, $u_2\approx b=8{,}27$ რიცხვები ყველა ნიშნადი ციფრი სანდოა, მაშინ:

$$\begin{aligned} &\Delta_a=0{,}01, && \Delta_b=0{,}01, \\ &\delta_a=0{,}0015, && \delta_b=0{,}0013, \\ &a\cdot b=58{,}8824, && \delta_{ab}=\delta_a+\delta_b=0{,}0028, \\ &\delta_{ab}=0{,}003. && \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ ნამრავლის აბსოლუტური ცდომილება. რადგან $\Delta_{ab}=a\cdot b\cdot\delta_{ab}$, ამიტომ $\Delta_{ab}<60\cdot0{,}03=0{,}18$] კერძოდ შეგვიძლია ავიღოთ $\Delta_{ab}=0{,}2$. ამრიგად $u_1\cdot u_2=58{,}9\pm0{,}2$ (საეჭვო ციფრია 9).

თ ე ო რ ე მ ა 3] ორი მიახლოებითი რიცხვის ფარდობის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვრული ფარდობითი ცდომილებების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\delta_u=\delta_a+\delta_b,$$

სადაც

$$u=\frac{a}{b}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ $x\approx a=3{,}17$, $y\approx b=2{,}34$ რიცხვთა ყველა ნიშნადი ციფრი სანდოა, მაშინ

$$\begin{aligned} &\Delta_a=0{,}01, && \Delta_b=0{,}01, \\ &\delta_a=0{,}004, && \delta_b=0{,}005, \end{aligned}$$

$$u=\frac{a}{b}=1{,}355;\ \delta_u=\delta_a+\delta_b=0{,}004+0{,}005=0{,}009, \text{ საიდანაც } \delta_u\approx0{,}01.$$

გამოვთვალოთ ფარდობის აბსოლუტური ცდომილება:

$$\Delta_u = u \cdot \delta_u = 1{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}014,$$

ამიტომ

$$\frac{x}{g} = 1{,}355 \pm 0{,}014.$$

თ ე ო რ ე მ ა 4. თუ ხარისხის ფუძე მიახლოებითი რიცხვია, მაშინ მისი ზღვრული ფარდობითი ცდომილება ხარისხის მაჩვენებლისა და ფუძის ზღვრულ ფარდობით ცდომილებათა ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$\delta_u = n \cdot \delta_a,$$

სადაც

$$u = a^n.$$

თ ე ო რ ე მ ა 5. მიახლოებითი რიცხვის ფესვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება ფესქვეშა რიცხვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილებისა და ფესვის მაჩვენებლის ფარდობის ტოლია, ე. ი.

$$\delta_u = \frac{\delta_a}{n},$$

სადაც

$$u = \sqrt[n]{a}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მე-4 თეორემა მართებულია ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლისთვის, ამიტომ ცხადია მე-5 თეორემა მისი კერძო შედეგია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვთქვათ $a \approx x = 1{,}2$, რომლის ყველა ნიშნადი ციფრი სანდოა: $u = a^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$; $\delta_a = \frac{0{,}1}{1{,}2} \approx 0{,}09$; $\delta_u = 3 \cdot 0{,}09 = 0{,}27$. გამოვთვალოთ აბსოლუტური ცდომილება:

$$\Delta_u = u \cdot \delta_u = 1{,}728 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}51.$$

დამრგვალების ცდომილების გათვალისწინებით

$$x^3 = 1{,}7 \quad 0{,}5.$$

განვიხილოთ მაგალითი მიახლოებითი გამოთვლების პირდაპირ ამოცანის შესახებ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3}$$

ფორმულით მოცემული ქანქარის რხევის პერიოდის აბსოლუტური

ცდომილება, სადაც $\pi\approx 3,142$, $l\approx 120,00$ სმ, $g\approx 981,32$ სმ/წმ^2 (ყველა ნიშნადი ციფრი სანდოა).

მე-2, მე-3 და მე-5 თეორემების თანახმად $\delta_T=\delta_\pi+\dfrac{1}{2}(\delta_e+\delta_g)$.

თუ გავითვალისწინებთ

$$\Delta_\pi=0{,}00041,\qquad \delta_e=0{,}005,\qquad \Delta_g=0{,}005$$
$$\delta_\pi=0{,}00014.\qquad \Delta_e=0{,}000042,\qquad \delta_g=0{,}000006$$

ტოლობებს მივიღებთ $\delta_T=0{,}00017$.

Δ_T-ს შესაფასებლად (3)-დან გამოვთვალოთ T. მივიღებთ $T\approx 2,2$, ე. ი. $\Delta_T=2{,}2\cdot 0{,}00017=0{,}0004$. მძიმის შემდეგი სამი სანდო ნიშნადი ციფრის სიზუსტით $T\approx 2,198$.

მიახლოებითი გამოთვლების შებრუნებული ამოცანა ცალსახად არ ამოიხსნება, ამიტომ მის საწყის პირობებს ადებენ დამატებით შეზღუდვებს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. რა სიზუსტით უნდა გამოვთვალოთ მართი წრიული ცილინდრის ფუძის რადიუსი, რომ მისი $V=\pi R^2H$ მოცულობის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატებოდეს 100 სმ^3-ს. ვიგულისხმოთ რომ $R\approx 30$ სმ, $H=80$ სმ.

მე-2 და მე-3 თეორემების თანახმად:

$$\delta_V=\delta_\pi+2\cdot\delta_R+\delta_H,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta_V}{V}=\frac{\Delta_\pi}{\pi}+2\cdot\frac{\Delta_R}{R}+\frac{\Delta_H}{H}$$

ან

$$\Delta_V=\frac{Y}{\pi}\Delta\pi+\frac{2\cdot V}{R}\Delta_R+\frac{V}{R}\Delta_H.$$

მონაცემების თანახმად:

$$\Delta_V=72000\Delta_\pi+15200\Delta_H+2900\Delta_H.$$

რადგან $\Delta_V=100$ ამიტომ Δ_π, Δ_R, Δ_H-ის გამოსათვლელად მივიღებთ განტოლებას:

$$720\Delta_\pi+152\Delta_R+29\Delta_H=1.$$

რადგან π-ს აღება შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით შევარჩიოთ იგი ისე, რომ Δ_R და Δ_H-იყოს სასურველი სიზუსტით, კერძოდ თუ $\pi\approx 3,142$ მაშინ $\Delta_\pi=0{,}00041$, ე. ი. $720\cdot\Delta_\pi=0{,}296$ ამიტომ მივიღებთ:

$$152\cdot\Delta_R+29\Delta_H=0{,}704.$$

დავუშვათ, რომ R და H გამოთვლილია ერთიდაიმავე აბსოლუტური ცდომილებით $\Delta_R=\Delta_H$. მაშინ უკანასკნელი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$181\cdot\Delta_R=0,704,$$
$$\Delta_R=\Delta_H=0,003.$$

ამრიგად, თუ R და H გამოთვლილია სიზუსტით, რომელიც არ აღემატება 0,003-ს, მაშინ V გამოითვლება სიზუსტით, რომლის ცდომილება არ აღემატება 100 სმ³.

სავარჯიშო

1. გაზომვების შედეგად მიღებულია მიახლოებითი რიცხვები აბსოლუტური ცდომილებებით:

ა) $a=2,56$ $\quad b=5,2685$ $\quad \Delta_a=0,03$ $\quad \Delta_b=0,007$;
ბ) $a=3,76$ $\quad b=6,3541$ $\quad \Delta_a=0,04$ $\quad \Delta_b=0,0006$;
გ $a=4,15$ $\quad b=9,1562$ $\quad \Delta_a=0,02$ $\quad \Delta_b=0,0005$;

განსაზღვრეთ სანდო ნიშნადი ციფრები.

2. განსაზღვრეთ შემდეგი რიცხვების ზღვრული ფარდობითი ცდომილებები:

ა) $a=35,9\pm0,2,$ $\quad b=44,3\pm1,$
ბ) $a=45,12\pm0,01,$ $\quad b=21,17\pm0,02.$
გ) $a=0,00461\pm0,00003$ $\quad b=0,00521\pm0,00004.$

3. დაამრგვალეთ შემდეგი რიცხვები სამ ნიშნად ციფრამდე და განსაზღვრეთ Δ აბსოლუტური და δ ფარდობითი ცდომილებები:

ა) 2,15152, $\quad$ 31,3 7; $\quad$ 0,01356;
ბ) 625,55, $\quad$ 0,0003971, $\quad$ 152,67;

4. განსაზღვრეთ მიახლოებითი რიცხვის სანდო ნიშნადი ციფრები, თუ ცნობილია მათი ფარდობითი ცდომილებები:

ა) $a=0,8841,$ $\quad \delta_a=0,1\ \ 10^{-2}$;
ბ) $b=22,357,$ $\quad \delta_b=0,1\ \ 10^{-1}$;
გ) $c=592,8,$ $\quad \delta_c=2\%$.

5. განსაზღვრეთ შემდეგი მოქმედებების შედეგის ცდომილებები, თუ ვიცით რომ მოქმედებებში მონაწილე მიახლოებით რიცხვებში ყველა ციფრი სანდოა:

ა) $3,51\cdot8,5$; $\quad 5,683:5,032$;
ბ) $25,2\cdot1,748$ $\quad 0,144:1,3$;

გ) $0,257\cdot 651,3$; $726,676:829$;

დ) $0,151^3$; $\sqrt{2,51}$;

ე) $2,01^2$; $\sqrt{34,31}$.

6. პითაგორას თეორემით გამოვთვალოთ მართკუთხედის d დიაგონალი, თუ მისი გვერდების სიგრძეებია $a=3,18\pm 0,005$ სმ და $b=2,5\pm \pm 0,05$ სმ. განვსაზღვროთ ფარდობითი და აბსოლუტური ცდომილებები.

7. რა სიზუსტით უნდა გამოვთვალოთ წრიული კონუსის სიმაღლე, რომ მისი $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ მოცულობის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატებოდეს 1000 სმ³, თუ $R\approx 500$ სმ და $H=900$ სმ.

IV თავი

ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის მეთოდები

საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება $f(x)=0$ სახის განტოლების ამოხსნა. ასეთი განტოლების ზუსტი ფესვის პოვნა ზოგ შემთხვევაში დაკავშირებულია რთულ გამოთვლებთან, ზოგჯერ შეუძლებელიც კი არის. ამიტომ მიმართავენ განტოლების მიახლოებითი (რიცხვითი) ამოხსნის მეთოდებს. აქ გავეცნობით ზოგიერთ მეთოდს და შევაფასებთ მიახლოებითი ფესვის სიზუსტის რიგს.

§ 1. ფესვთა განცალება

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0, \tag{1}$$

სადაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული და უწყვეტია რაიმე სასრულ ან უსასრულო $a<x<b$ შუალედზე.

$x=\xi$ მნიშვნელობას ეწოდება (1) განტოლების **ფესვი** ანუ $f(x)$ ფუნქციის ნული თუ $f(\xi)=0$.

(1) განტოლების ξ ფესვის **განცალება** ეწოდება ისეთი $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის პოვნას, რომელიც არ შეიცავს ამ განტოლების სხვა ფესვს გარდა ξ წერტილისა.

$[\alpha, \beta]$-ს ეწოდება (1) განტოლების ξ ფესვის **იზოლაციის შუალედი**.

იზოლირებული მიახლოებითი ფესვების პოვნა ხდება ორ ეტაპად:

1. ფესვთა განცალება, ე. ი. ისეთი რაც შეიძლება მცირე სიგრძის

შუალედების პოვნა, რომლებიც შეიცავენ (1) განტოლების ერთ და მხოლოდ ერთ ფესვს.

2. მიახლოებითი ფესვების დაზუსტება, ე. ი. მათი დაყვანა მოცემული სიზუსტის რიგამდე.

ფესვის განცალება საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ განტოლების ფესვის პირველი მიახლოება. თუ ξ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილს, მაშინ აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება $\beta-\alpha$ სხვაობას. განტოლების ფესვის განცალებისათვის გამოიყენება ანალიზის ცნობილი თეორემები, რომლებსაც აქ მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად.

თ ე ო რ ე მ ა 1 (ფესვის არსებობის შესახებ). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a)f(b)<0$, მაშინ ამ სეგმენტის შიგნით არსებობს $f(x)=0$ განტოლების ერთი ფესვი მაინც.

თ ე ო რ ე მ ა 2 (ფესვის ერთადერთობის შესახებ). თუ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, $f(a)f(b)<0$ და $f'(x)$ (ან $f''(x)$) ინარჩუნებს ნიშანს $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $[a, b]$-ში $f(x)=0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ $f'(x)$-ინარჩუნებს ნიშანს $[a, b]$ სეგმენტზე ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის მონოტონურობას ამ ინტერვალზე, ხოლო $f''(x)$-ინარჩუნებს ნიშანს $[a, b]$-ზე ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ან ამოზნექილია ან ჩაზნექილი ამ ინტერვალზე.

თუ $f'(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და მარტივი გამოსათვლელია $f'(x)=0$ განტოლების ფესვები, მაშინ ფესვების განცალება ადვილია. ამისათვის საკმარისია დავადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი $f'(x)$ ფუნქციის ნულებში და $x=a$, $x=b$ წერტილებში. აქ ვგულისხმობთ შემდეგ პირობებს:

1^0. $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე,

2^0. $f(a)f(b)<0$,

3^0. $f'(x)$, $f''(x)$ ინარჩუნებენ ნიშანს $[a, b]$ — სეგმენტზე.

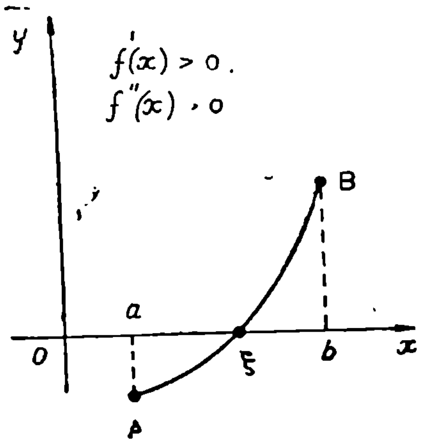
1^0 და 2^0 პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ a და b შორის არსებობს $f(x)=0$ განტოლების ფესვი. 2^0 და 3^0 პირობებიდან, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გამომდინარეობს, რომ $f(x)=0$ განტოლებას შუალედში აქვს ერთადერთი ფესვი.

ფესვის ერთადერთობის შემთხვევაში $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება ნახაზზე მოყვანილი ერთ-ერთი სახე (ნახ. 1,2,3,4).

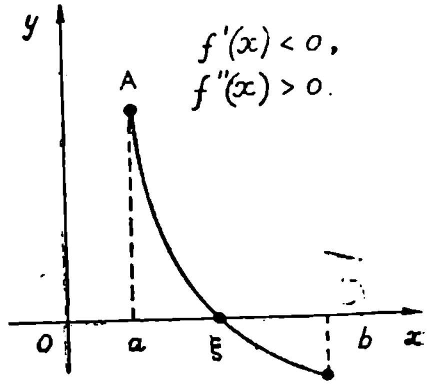
ფესვის განცალების ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში: $x=a$-დან დაწყებული შევარჩიოთ რაიმე Δx ბიჯი და ამ ბიჯით გამოვთვალოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობები მანამდე სანამ იგი არ შეიცვლის ნიშანს. იზოლაციის შუალედის მარჯვენა საზღვარი

$$\beta=x=a+i\Delta x,$$

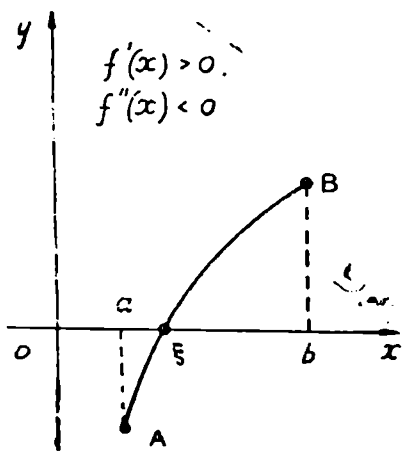
სადაც a არის იზოლაციის შუალედის მარცხენა საზღვარი;



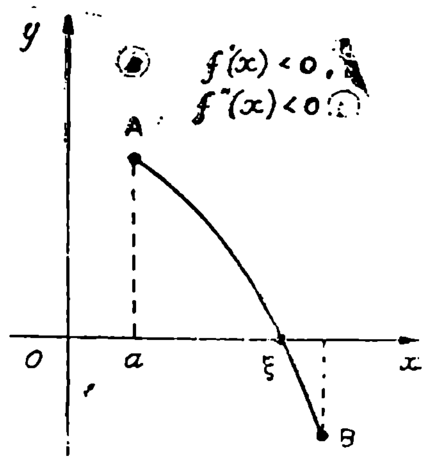
ნახ. 1.



ნახ. 2.



ნახ. 3.



ნახ. 4.

Δx-ცვლილების ბიჯი; i-ბიჯთა რიცხვი. β-ს პოვნის შემდეგ Δx ბიჯი მცირდება, $f(x)$-ის მნიშვნელობების გამოთვლა იწყება β-დან საწინააღმდეგო მიმართულებით, რისთვისაც იცვლება Δx ბიჯის ნიშანი. პროცესი გრძელდება მანამდე, სანამ $f(x)$ არ შეიცვლის ნიშანს. ამრიგად, მონაკვეთის მარცხენა საზღვარი იქნება

$$\alpha=\beta-\Delta x\,\frac{i}{t},$$

სადაც α არის მონაკვეთის ახალი მარცხენა საზღვარი, β-ახალი მარჯვენა

საზღვარი; t — ბიჯის შემცირების კოეფიციენტი; Δx—ცვლილების საწყისი ბიჯი.

თუ $[\alpha, \beta]$ არის $f'(x)$-ის მონოტონურობის შუალედი, მაშინ ეს შუალედი არის ერთი ფესვის იზოლაციის შუალედი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვაცალოთ შემდეგი განტოლების ფესვები

$$x^4-4x-2=0. \tag{2}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $f(x)=x^4-4x-2$, $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)\times\times(x^2+x+1)$, $f'(x)=0$ როცა $x=1$. $f(-\infty)>0$, $f(1)<0$, $f(+\infty)>0$. ამ რიგად, (2) განტოლებას აქვს ორი ფესვი, რომელთაგან ერთი მდებარეობს $(-\infty, 1)$ შუალედში, ხოლო მეორე — $(1, \infty)$ შუალედში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვსაზღვროთ შემდეგი განტოლების ნამდვილ ფესვთა რიცხვი,

$$e^x+2x-1=0. \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $f'(x)=e^x+2>0$, ამასთან $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$, ამიტომ (3) განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი.

ახლა განვიხილოთ მიახლოებითი ფესვის ცდომილების შეფასების საკითხი.

თ ე ო რ ე მ ა 3. თუ $f(x)=0$ განტოლების ξ ზუსტი და $\overline{x}$ მიახლოებითი ფესვები ეკუთვნიან ამ ფესვის იზოლაციის ერთსა და იგივე $[\alpha,\beta]$ შუალედს, ამასთან $|f'(x)|\geqslant m_1>0$, როცა $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$|\overline{x}-\xi| \leqslant \frac{|f(\overline{x})|}{m_1}. \tag{4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის თეორემის თანახმად

$$f(\overline{x})-f(\xi)=(\overline{x}-\xi)f'(c),$$

სადაც c — საშუალედო მნიშვნელობაა $\overline{x}$ და ξ მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. $c\in(\alpha, \beta)$. რადგან $f(\xi)=0$ და $|f'(c)|\geqslant m_1$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$|f(\overline{x})-f(\xi)|=|f(\overline{x})|\geqslant m_1|\overline{x}-\xi|,$$

საიდანაც

$$|\overline{x}-\xi| \leqslant \frac{|f(\overline{x})|}{m_1}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. m_1 რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ $|f'(x)|$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, როცა $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. ზოგჯერ (4) ფორმულამ შეიძლება მოგვცეს უხეში შედეგი. ამიტომ პრაქტიკაში ამა თუ იმ გზით ავიწ-

რომელიც ξ ფესვისა და მისი მიახლოებითი $\bar{x}$ მნიშვნელობის შემცველ $[\alpha, \beta]$ შუალედს და უშვებენ $|\bar{x}-\xi| \leqslant \beta-\alpha$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $x^4-x-1=0$ განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობაა $\bar{x}=1,22$. შევაფასოთ ამ ფესვის აბსოლუტური ცდომილება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $f(\bar{x})=-0,0047$. რადგან $\bar{x}=1,23$ წერტილში $f(x)=0,0588$, ამიტომ ξ ზუსტი ფესვი მოთავსდება $(1,22; 1,23)$ შუალედში, რომელზედაც $f'(x)=3x^3-1$ მონოტონურად ზრდადია. ამიტომ აღნიშნულ შუალედზე მისი უმცირესი მნიშვნელობა იქნება

$$m_1=3\cdot 1,22^3-1=4,448,$$

რომლის გათვალისწინებით (4) ფორმულა მოგვცემს შეფასებას:

$$|\bar{x}-\xi| \leqslant \frac{0,0047}{4,441} \approx 0,001.$$

§ 2. განტოლების გრაფიკული ამოხსნა

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0. \tag{1}$$

მისი ფესვები შეგვიძლია ვიპოვოთ მიახლოებით, როგორც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისები. პრაქტიკაში ხშირად უფრო მოხერხებულია (1) განტოლება შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური განტოლებით

$$\varphi(x)=g(x), \tag{2}$$

სადაც $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უფრო მარტივია ვიდრე $f(x)$. საძიებელ ფესვებს წარმოადგენენ $y=\varphi(x)$ და $y=g(x)$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ გრაფიკულად შემდეგი განტოლება

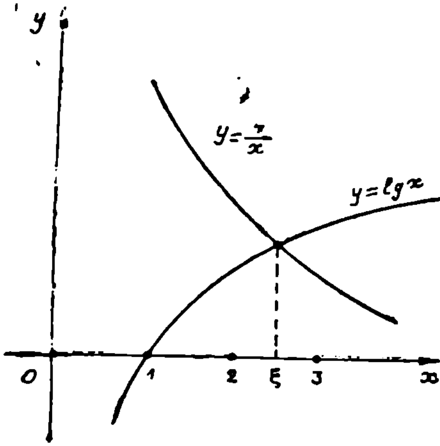
$$x \lg x=1. \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3) განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\lg x=\frac{1}{x}$$

და ავაგოთ $y=\lg x$ და $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციების გრაფიკები. მათი გადაკვეთის წერტილის აბსცისი იქნება (3) განტოლების მიახლოებითი ფესვი: $\xi \approx$ $\approx 2,5$ (ნახ. 5).

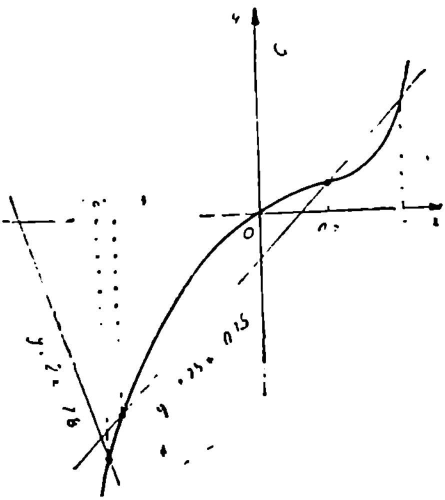
(2) განტოლების ფესვის პოვნა უფრო მარტივია იმ შემთხვევაში როცა $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი მათგანი წრფივია, მაგალითად, $\varphi(x)=ax+b$. ამ შემთხვევაში (2) განტოლების ფესვებს წარმოადგენენ $y=ax+b$ წრფისა და $y=g(x)$ წირის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები. ეს მეთოდი მოხერხებულია განსაკუთრებით ერთნაირი ტიპის ისეთი განტოლებების ამოხსნისას, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან წრფივი ნაწილის a და b კოეფიციენტებით. ამ შემთხვევაში საკითხი დაიყვანება $y=g(x)$ ფიქსირებული გრაფიკის სხვადასხვა წრფეებთან გადაკვეთის წერტილების პოვნაზე. ასეთ შემთხვევას მიეკუთვნება $x^n+ax+b=0$ სახის განტოლება.



ნახ. 5

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ გრაფიკულად $x^3-1,75x+0,75=0$ და $x^3+2x+7,8=0$ განტოლებები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 6). საძიებელ ფესვებს წარმოადგენენ $y=x^3$ წირის $y=1,75x-0,75$ და $y=-2x-7,8$ წრფეებთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისები. ნახაზიდან ჩანს რომ პირველ განტოლებას აქვს სამი ნამდვილი ფესვი: $x_1=1,5$; $x_2=0,15$; $x_3=1$; ხოლო მეორე განტოლებას — მხოლოდ ერთი ფესვი $x_1=-1,65$.



ნახ. 6

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: მიუხედავად იმისა, რომ გრაფიკული მეთოდი მოხერხებული და მარტივია, იგი გვაძლევს შედარებით უხეშ შედეგს. მას მიმართავენ იმ შემთხვევაში როცა განტოლების ფესვის პოვნა არ მოითხოვს მაღალი რიგის სიზუსტეს.

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0. \tag{1}$$

დავუშვათ $[a, b]$ არის (1) განტოლების ზუსტი ξ ფესვის იზოლაციის შუალედი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამისათვის გავყოთ ეს სეგმენტი შუაზე $x=\frac{a+b}{2}$ წერტილით. თუ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, მაშინ $\xi=\frac{a+b}{2}$ იქნება განტოლების ზუსტი ფესვი. თუ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, მაშინ ფესვი უნდა ვეძებოთ მიღებული $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ და $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ შუალედებიდან იმ შუალედში რომლის ბოლოებში $f(x)$ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშანი. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_1, b_1]$-ით. შემდეგ მიღებული სეგმენტისათვის გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა, ე. ი. $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ შუაზე $x=\frac{a_1+b_1}{2}$ წერტილით. თუ $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, მაშინ $\xi=\frac{a_1+b_1}{2}$ იქნება (1) განტოლების ზუსტი ფესვი. წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა ავირჩიოთ $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ და $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ სეგმენტებიდან ის, რომლის ბოლოებში $f(x)$ ფუნქციას აქვს საწინააღმდეგო ნიშნები. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ ან მივიღებთ (1) განტოლების ზუსტ ფესვს ან ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

რომელთათვისაც

$$f(a_n)f(b_n)<0 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2}$$

და

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a). \tag{3}$$

რადგან მიღებულ სეგმენტთა $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ მარცხენა ბოლოები ადგენენ მონოტონურად არაკლებად მიმდევრობას, ხოლო $b_1, b_2,$

$\ldots, b_n, \ldots$ მარჯვენა ბოლოები — მონოტონურად არაზრდად მიმდევრობას, ამიტომ (3) ტოლობის თანახმად არსებობს მათი საერთო ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ (2) უტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n)\leqslant 0, \quad (f(\xi))^2\leqslant 0,$$

საიდანაც $f(\xi)=0$. ამრიგად, ξ არის (1) განტოლების ფესვი, ამასთან, ცხადია, რომ

$$0\leqslant \xi - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}\,(b-a). \tag{4}$$

თუ $[a, b]$ სეგმენტი არ არის (1) განტოლების ფესვის იზოლაციის შუალედი, მაშინ ამ მეთოდით შეგვიძლია ვიპოვოთ (1) განტოლების ფესვებიდან ერთი მათგანი.

შუაზე გაყოფის მეთოდით განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის დიდი სიზუსტით პოვნა მოითხოვს ერთი და იგივე გამოთვლითი ოპერაციების მრავალჯერ გამეორებას, რაც განსაკუთრებით მოხერხებულია გამოთვლების ჩასატარებლად ეგმ-ზე. გამოთვლის პროგრამა შედგენილია ისე, რომ მანქანამ თვითონ იპოვოს $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ყოველი $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2,\ldots)$ სეგმენტის შუა წერტილში და შეარჩიოს მისი შესაბამისი ის ნახევარი, სადაც მოთავსებულია განტოლების ფესვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შუაზე გაყოფის მეთოდით დავაზუსტოთ

$$x^4+2x^3-x-1=0$$

განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია $[0,1]$ შუალედში.

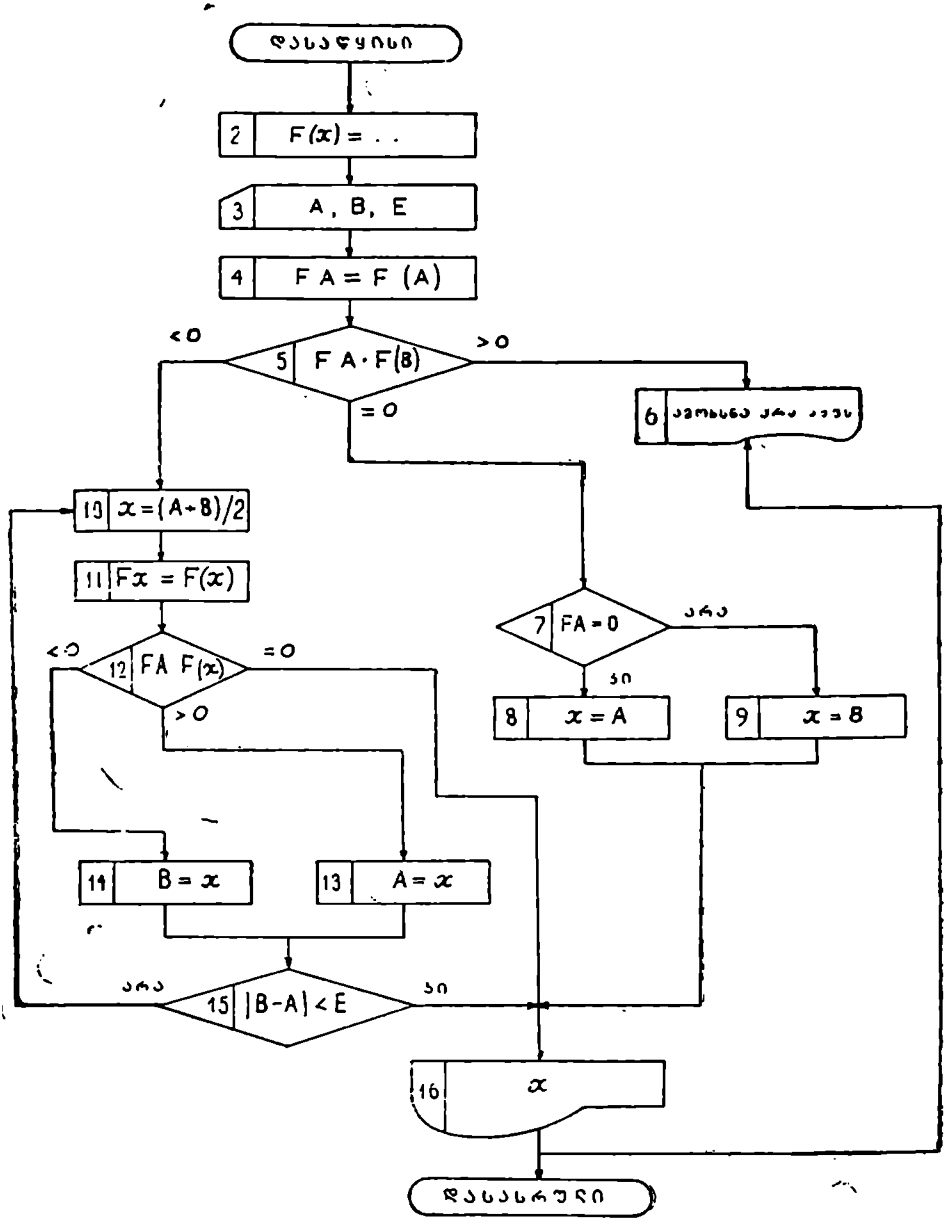
ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\begin{aligned}
&f(0)=-1, \quad f(1)=1,\\
&f(0{,}5)=-1{,}19, \quad f(0{,}75)=-0{,}59,\\
&f(0{,}875)=0{,}05, \quad f(0{,}8125)=-0{,}304,\\
&f(0{,}8438)=-0{,}135,\\
&f(0{,}8594)=-0{,}03 \text{ და ა. შ.}
\end{aligned}$$

შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$\xi=\frac{1}{2}\,(0{,}859+0{,}875)=0{,}867.$$

მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდის ალგორითმის ბლოკ-სქემა:


დასაწყისი
2
F(x) = . .
3
A, B, E
4
FA = F (A)
< 0
5
FA · F(B)
> 0
= 0
6
ამოხსნა არა აქვს
10
x = (A + B)/2
11
Fx = F(x)
< 0
12
FA F(x)
= 0
> 0
7
FA = 0
არა
კი
8
x = A
9
x = B
14
B = x
13
A = x
არა
15
|B - A| < E
კი
16
x
დასასრული

ბლოკ-სქემა № 1

ბლოკი 2 — განტოლების მარცხენა მხარის აღწერა F ფუნქციის სახით.

ბლოკი 3 —საწყისი მონაცემების შეტანა, სადაც A და B შესაბამისად იმ მონაკვეთის საწყისი და ბოლო წერტილებია, რომელშიც მოთავსებულია მოცემული განტოლების საძებნი ფესვი. E — მიახლოების სიზუსტეა.

ბლოკი 4 — გამოითვლება F ფუნქციის მნიშვნელობა საწყის A წერტილში და იგი ენიჭება FA-ს.

ბლოკი 5 — მოწმდება პირობა: F ფუნქციას A და B წერტილებში აქვს თუ არა ერთნაირი ნიშანი.

ბლოკი 6 — ხდება ინფორმაციის ბეჭდვა, რომ მოცემულ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

ბლოკი 7 — მოწმდება პირობა: A წერტილში F ფუნქციის მნიშვნელობა უდრის თუ არა ნულს.

ბლოკი 8 — x ცვლადს ენიჭება მონაკვეთის საწყისი ბოლოს მნიშვნელობა.

ბლოკი 9—x ცვლადს ენიჭება მონაკვეთის ბოლოს მნიშვნელობა B.

ბლოკი 10 — x ცვლადს ენიჭება იმ მონაკვეთის შუაწერტილის მნიშვნელობა, რომელშიაც მოთავსებულია ფესვი.

ბლოკი 11 — Fx-ს ენიჭება მონაკვეთის შუაწერტილში გამოთვლილი F ფუნქციის მნიშვნელობა.

ბლოკი 12 — მოწმდება პირობა FA და Fx სიდიდეებს აქვთ თუ არა ერთნაირი ნიშანი.

ბლოკი 13—14 — შესაბამისად A და B სიდიდეებს ენიჭება x ცვლადის მნიშვნელობა.

ბლოკი 15 — მოწმდება პირობა: მიღწეულია თუ არა საჭირო სიზუსტე.

ბლოკი 16 — ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის ბეჭდვა.

მოცემული ბლოკ-სქემის შესაბამის პროგრამას ზემოთ ხელით ამოხსნილი მაგალითისათვის ექნება შემდეგი სახე:

```
C     УТОЧЕННИЯ КОРНЯ МЕТОДОМ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ
      F (X)=X**4+2.*X**3—X—1
      READ (5,1) A, B, E
1     FORMA IT (3F 15.5)
      FA=F(A)
      IF(FA*F(B)) 2, 3, 4
4     FRINT 5
5     FORMAT (1ØX, 'HET PEШEHIIЯ')
      STOP
```

```
3     IF (FA) 6, 7, 6
7     X=A
      GOTO 8
6     X=B
      GOTO 8
2     X=(A+B)/2.
      FX=F(X)
      IF(FA*FX) 9, 8, 1Ø
9     B=X
      GOTO 11
1Ø    A=X
11    IF (ABS(B—A)—E) 8, 2, 2
8     PRINT 12, X
      STOP
12    FORMAT (5X, 'ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЯ КОРНЯ X=', F15.5)
      END
      ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЯ КОРНЯ X=0.86621
```

§ 4. ქორდების მეთოდი

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0. \tag{1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, $f(a)f(b)<0$ და $f'(x)$ ინარჩუნებს ნიშანს აღნიშნულ სეგმენტზე. განვიხილოთ (1) განტოლების ξ ფესვის პოვნის უფრო სწრაფი მეთოდი—ქორდების მეთოდი. პირობის თანახმად $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი წირი Ox ღერძს გადაკვეთს $[a, b]$ სეგმენტის ერთადერთ ξ წერტილში, რომელიც წარმოადგენს (1) განტოლების ფესვს. შევადგინოთ ორ $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$ წერტილზე გავლებული ქორდის განტოლება ;

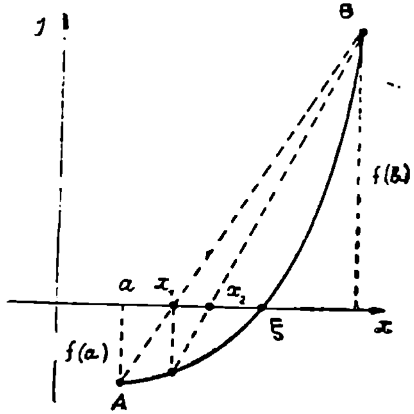
$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{2}$$

ქორდისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილის x_1 აბსცისი იქნება ξ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. როცა $x=x_1$, მაშინ $y=0$ და ამიტომ (2) განტოლებიდან მივიღებთ

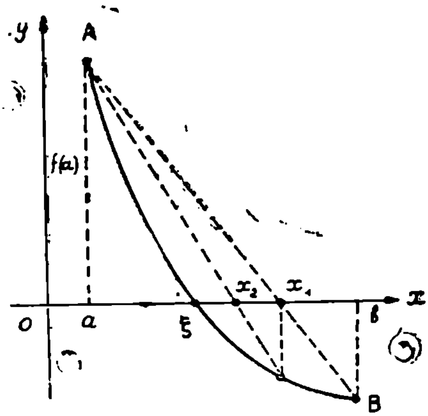
$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

საიდანაც

$$x_1=a-\frac{f'(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \tag{3}$$



ნახ. 7



ნახ. 8

x_1-ის სხვა სახით ჩაწერის მიზნით AB ქორდის განტოლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{x-b}{a-b}=\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)},$$

საიდანაც, როცა $x=x_1$, $y=0$, მივიღებთ

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b-a). \tag{4}$$

როცა $f'(x)\,f''(x)>0$, მაშინ ξ ფესვის უფრო ზუსტი მნიშვნელობის მისაღებად ვისარგებლოთ (3) ფორმულით $[x_1, b]$ სეგმენტისათვის (უძრავია b წერტილი), მივიღებთ ფესვის მეორე მიახლოებას (ნახ. 7 და ნახ. 9):

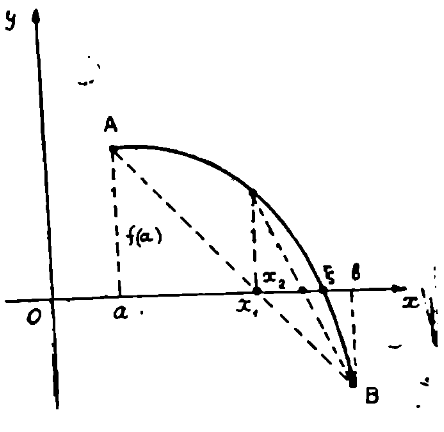
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}(b-x_1). \tag{5}$$

როცა $f'(x)\,f''(x)<0$, მაშინ ვისარგებლოთ (4) ფორმულით $[a,x_1]$ სეგმენტისათვის (უძრავია a წერტილი), მივიღებთ ფესვის მეორე მიახლოებას (ნახ. 8 და ნახ. 10)

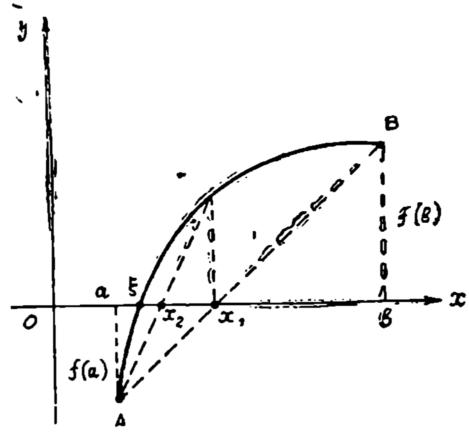
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(a)}(x_1-a). \tag{6}$$

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, მივიღებთ ξ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა მიმდევრობას

$$x_1,\ x_2,\dots,x_n,\dots \tag{7}$$



ნახ. 9



ნახ. 10

როდესაც b წერტილი უძრავია $(f'(x)f''(x)>0)$. მაშინ (7) მიმდევრობა ზრდადია. მისი ყოველი x_n $(n=1,2,\ldots)$ წევრი მდებარეობს $[a,\xi]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n). \tag{8}$$

როდესაც უძრავია a წერტილი $(f'(x)f''(x)<0)$, მაშინ (7) მიმდევრობა კლებადია. მისი ყოველი $x_n(n=1,2,\ldots)$ წევრი მდებარეობს $[\xi, b]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a). \tag{9}$$

დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$. რადგან (x_n) მიმდევრობა მონოტონური და შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს მისი ზღვარი, როცა $n\to\infty$. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{\xi}$. თუ გადავალთ ზღვარზე (8) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\bar{\xi}=\bar{\xi}-\frac{f(\bar{\xi})}{f(b)-f(\bar{\xi})}(b-\bar{\xi}),$$

საიდანაც $f(\bar{\xi})=0$. პირობის თანახმად (1) განტოლებას (a, b) შუალედში აქვს ერთადერთი ξ ფესვი, ამიტომ $\bar{\xi}=\xi$.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (9) ტოლობით განსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

შევაფასოთ $|x_n-\xi|$ ცდომილება. რადგან $f(\xi)=0$, ამიტომ ლაგრანჟის თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x_n)=f(x_n)-f(\xi)=(x_n-\xi)f'(c), \tag{10}$$

სადაც $\xi<c<x_n$. (10)-დან გამომდინარეობს ტოლობა

$$x_n-\xi=\frac{f(x_n)}{f'(c)}.$$

თუ $m>0$ არის $|f'(x)|$-ის უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მივიღებთ

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m},$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ $|x_n-\xi|$ ცდომილება $f(x_n)$—ის საშუალებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$x^3-0,2x^2-0,2x-1,2=0 \tag{11}$$

განტოლების დადებითი ფესვი 0,002 სიზუსტით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველად მოვახდინოთ ფესვის განცალება. რადგან $f(1)=-0,6<0$, და $f'(x)=3x^2-0,4x-0,2$ წარმოებული ნიშანს არ იცვლის (1, 2) შუალედში, $f(2)=5,6>0$, ამიტომ $1<\xi<2$, სადაც ξ — მოცემული განტოლების ერთადერთი ფესვია. მიღებული (1,2) შუალედის შესამცირებლად გავყოთ იგი შუაზე, მივიღებთ (1; 1,5) და (1,5, 2) შუალედებს. რადგან $f(1,5)=1,425>0$, ამიტომ $1<\xi<1,5$. თუ გამოვიყენებთ (8) და (9) ფორმულებს მივიღებთ:

$$x_1=1+\frac{0,6}{1,425+0,6}(1,5-1)=1+0,15=1,15;\quad f(x_1)=-0,173;$$

$$x_2=1,15+\frac{0,173}{1,425+0,173}(1,5-1,15)=1,190:\quad f(x_2)=-0,036;$$

$$x_3=1,190+\frac{0,036}{1,425-0,036}(1,5-1,190)=1,198;\quad f(x_3)=-0,0072.$$

ცხადია რომ მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)=6x-0,4\geqslant 0$, როცა $x\geqslant\frac{1}{15}$, ე. ი. $f'(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $x_3=1,198<x<1,5$ შუალედში.

ამიტომ ამ შუალედში $f'(x)\geqslant f'(1,198)=3,49$. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$0<\xi-x_3<\frac{0,0072}{3,49}\approx 0,002.$$

ამრიგად, $\xi=1,198+0,002\theta$, სადაც $0<\theta<1$.

შევნიშნოთ, რომ (11) განტოლების ზუსტი ფესვია $\xi=1,2$.

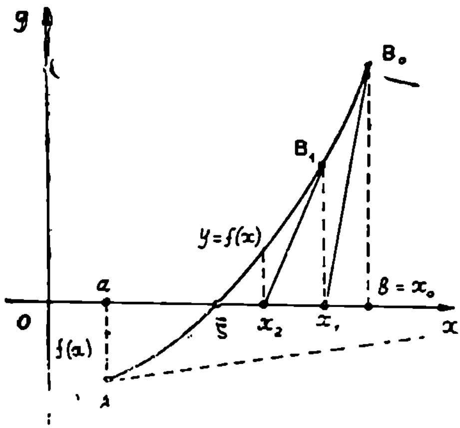
§ 5. მხებთა მეთოდი (ნიუტონის მეთოდი)

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0. \tag{1}$$

დავუშვათ, რომ $[a, b]$ არის ამ განტოლების ξ ფესვის იზოლაციის შუალედი, ამასთან $f'(x)$ და $f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია და ინარჩუნებენ ნიშანს როცა $a\leqslant x\leqslant b$.

ξ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად გავავლოთ მხები $y=f(x)$ წირის AB რკალის იმ ბოლოზე, რომელზედაც $f(x)$ და $f''(x)$-ს აქვთ ერთნაირი ნიშანი. განვიხილოთ შემთხვევა $f(b)>0$ და $f''(x)>0$, როცა $a\leqslant x\leqslant b$. ამ მხებისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ x_1-ით. იგი იქნება ξ ფესვის პირველი მიახლოება. მივიღოთ $b=x_0$ და გავავლოთ მხები $B_0(x_0, f(x_0))$ წერტილზე: მისი განტოლებაა (ნახ. 11).



ნახ. 11

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

როცა $x=x_1$, მაშინ $y=0$. ამიტომ (2)-დან მივიღებთ

$$-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0),$$

საიდანაც

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3}$$

ახლა $B_1(x_1, f(x_1))$ წერტილზე გავავლოთ $y=f(x)$ წირის მხები. ამ მხების Ox ღერძთან გადაკვეთის x_2 წერტილი იქნება ξ ფესვის მეორე

მიახლოება და ა. შ. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ $B_n(x_n;\ f(x_n))$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებას

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n). \tag{4}$$

თუ დავუშვებთ $y=0$, $x=x_{n+1}$, მაშინ (4)-დან მივიღებთ

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ შემთხვევაში დავუშვებთ $x_0=a$ და მაშასადამე, $f(x_0)\ f''(x_0)<0$, მაშინ $A(a,\ f(a))$ წერტილში $y=f(x)$ წირისადმი გავლებულმა მხებმა შეიძლება Ox ღერძი გადაკვეთოს $[a,\ b]$ სეგმენტის გარე x_1' წერტილში. ამით მიახლოება გაუარესდება.

თუ $f''(x)$ არ ინარჩუნებს ნიშანს $[a,\ b]$ სეგმენტზე, ე.ი. თუ $y=f(x)$ წირს აქვს გადაღუნვის წერტილი, მაშინ რკალის თითოეულ ბოლოში გავლებულმა მხებმა შეიძლება გადაკვეთოს Ox ღერძი $[a,\ b]$ სეგმენტის გარეთ.

ამრიგად, მიზანშეწონილია განტოლების ξ ფესვის x_0 საწყის მიახლოებად მივიღოთ სეგმენტის ის ბოლო წერტილი, რომლისთვისაც

$$f(x_0)f''(x_0)>0. \tag{6}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს წესი ზოგადია.

თ ე ო რ ე მ ა. თუ $f(a)f(b)<0$, ამასთან $f'(x)$ და $f''(x)$ განსხვავებული არიან ნულისაგან და ინარჩუნებენ ნიშანს, როცა $a\leqslant x\leqslant b$, მაშინ (6) უტოლობის დამაკმაყოფილებელი $x_0\in[a,\ b]$ საწყისი მიახლოებიდან გამომდინარე, მხებთა მეთოდით შეგვიძლია გამოვთვალოთ (1) განტოლების ერთადერთი ξ ფესვი სიზუსტის ნებისმიერი რიგით,

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მაგალითად, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ როცა $a\leqslant x\leqslant b$ (დანარჩენი შემთხვევები განიხილება ანალოგიურად). (6) პირობის თანახმად გვაქვს $f(x_0)>0$ (მაგალითად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $x_0=b$) მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $x_n>\xi$ $(n=0,1,2,\ldots)$ და მაშასადამე, $f(x_n)>0$. მართლაც, პირველ რიგში, $x_0>\xi$. ვთქვათ, $x_n>\xi$. დავუშვათ

$$\xi=x_n+(\xi-x_n).$$

ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$O=f(\xi)=f(x_0)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{1}{2}f''(c_n)(\xi-x_n)^2, \tag{7}$$

სადაც $\xi<c_n<x_n$. რადგან $f''(x)>0$, ამიტომ გვექნება

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)<0$$

და, ამრიგად,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}>\xi,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თუ გავითვალისწინებთ $f(x_n)$ და $f'(x_n)$-ის ნიშნებს, მაშინ (5) ფორმულიდან მივიღებთ $x_{n+1}<x_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, ე. ი. $x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots$ წარმოადგენს მონოტონურად კლებად შემოსაზღვრულ მიმდევრობას. ამიტომ არსებობს მისი ზღვარი. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{\xi}$.

თუ (5) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$\bar{\xi}=\bar{\xi}-\frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})},$$

ე. ი. $f(\bar{\xi})=0$, საიდანაც $\bar{\xi}=\xi$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

x_n მიახლოების ცდომილების შესაფასებლად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m_1}, \tag{8}$$

სადაც m_1 არის $|f'(x)|$-ის უმცირესი მნიშვნელობა $[a,\ b]$ სეგმენტზე. ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$f(x_n)=f[x_{n-1}+(x_n-x_{n-1})]=f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2, \tag{9}$$

სადაც $\xi_{n-1}\in(x_{n-1},\ x_n)$. x_n-ის განსაზღვრების თანახმად

$$f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=0,$$

ამიტომ (9)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{2}M_2(x_n-x_{n-1})^2,$$

სადაც, M_2 არის $|f''(x)|$-ის უდიდესი მნიშვნელობა $[a,\ b]$ სეგმენტზე. ამრიგად, (8) უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ დამოკიდებულებას:

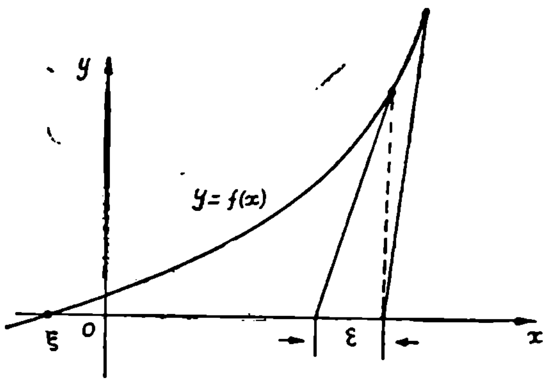
$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{M_2}{2m_1}(x_n-x_{n-1})^2. \tag{10}$$

თუ პროცესი კრებადია, მაშინ $x_n - x_{n-1} \to 0$, როცა $n \to \infty$. ამიტომ როცა $n \geqslant N$ გვექნება:

$$|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|,$$

ე. ი. რაიმე მიახლოებიდან დაწყებული x_{n-1} და x_n მიახლოებათა პირველი ათობითი ნიშნები სანდოა.

საზოგადოდ, ε-სიზუსტით x_{n-1} და x_n მიახლოებათა დამთხვევა სრულიადაც არ იძლევა x_n მიახლოებისა და ξ ზუსტი ფესვის დამთხვევას იგივე სიზუსტით (ნახ. 12).



ნახ. 12

ახლა გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომელიც დააკავშირებს x_n და x_{n+1} მიახლოებათა აბსოლუტურ ცდომილებებს. (7) ფორმულიდან

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

სადაც $c_n \in (x_n, \xi)$. აქედან (5) ფორმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

და, ამრიგად

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \tag{11}$$

(11) ფორმულა უზრუნველყოფს ნიუტონის პროცესის სწრაფ კრებადობას, თუ საწყისი x_0 მიახლოება ისეთია, რომ

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi-x_0|\leqslant q<1.$$

კერძოდ, თუ

$$\mu=\frac{M_2}{2m_1}\leqslant 1 \quad \text{და} \quad |\xi-x_n|<10^{-m},$$

მაშინ (11)-დან მივიღებთ

$$|\xi-x_{n+1}|<10^{-2m}.$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში, თუ x_n მიახლოების მძიმის შემდეგ ჰქონდა m სანდო ათობითი ნიშანი, მაშინ მომდევნო x_{n+1} მიახლოებას ექნება $2m$ მაინც სანდო ათობითი ნიშანი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ $\mu\leqslant 1$, მაშინ ნიუტონის მეთოდით საძიებელი ξ ფესვის სანდო ნიშანთა რიცხვი (მძიმის შემდეგ) ორმაგდება ყოველ ნაბიჯზე

მარტივად მიიღება უტოლობა

$$|\xi-x_{n+1}|\leqslant\frac{M}{2m}|\xi-x_n|^2, \tag{12}$$

სადაც M არის $|f''(x)|$-ის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო m არის $|f'(x)|$-ის უმცირესი მნიშვნელობა ამავე სეგმენტზე.

ამრიგად, (12) გამოსახულებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ახალი მიახლოების ცდომილება კლებულობს წინა მიახლოების ცდომილების კვადრატის პროპორციულად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ

$$x^4-3x^2+75x-10000=0$$

განტოლების უარყოფითი ფესვი ხუთი სანდო ციფრით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ დავუშვებთ $x=0,\ -10,\ -100,\ldots$, მივიღებთ

$$f(0)=-10000,\ f(-10)=-1050,\ f(-100)\approx 10^8.$$

ამრიგად, საძიებელი ξ ფესვი მდებარეობს $-100<\xi<-10$ შუალედში. შევამციროთ ეს შუალედი. რადგან $f(-11)=3453>0$, ამიტომ $-11<\xi<-10$. ამ შუალედში $f'(x)<0$ და $f''(x)>0$. რადგან $f(-10)>0$ და $f''(-11)>0$, ამიტომ საწყის მიახლოებად შეგვიძლია ავიღოთ $x_0=-11$. x_n $(n=0,1,2,\ldots)$ მიახლოებები გამოითვლებიან შემდეგი სქემით (ცხრ. 1)

ცხრილი 1

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n=-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	—11	3453	—5183	0,7
1	—10,3	134,3	—4234	0,03
2	—10,27	37,8	—4196	0,009
3	—10,261	0,2	—	—

შევჩერდეთ $n=3$-ზე. გვაქვს $f(x_3+0{,}001)=f(-10{,}260)$. რადგან $f(-10{,}260)<0$, ამიტომ $-10{,}261<\xi<-10{,}260$. ამ შუალედიდან აღებული ნებისმიერი რიცხვი მოგვცემს საძიებელ მიახლოებას.

§ 8. ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდი

ეს მეთოდი გულისხმობს ქორდათა და მხებთა მეთოდების ერთდროულად გამოყენებას $[a, b]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ $f(a)f(b)<0$, ხოლო $f'(x)$ და $f''(x)$ ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშნებს $[a, b]$ სეგმენტზე. კომბინირებული მეთოდის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს ყოველ ეტაპზე ვიპოვოთ $f(x)=0$ განტოლების ზუსტი ξ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობები ნაკლებობით და მეტობით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ქორდათა მეთოდით გამოთვლილი x_n მიახლოებისა და მხებთა მეთოდით გამოთვლილი $\overline{x}_n$ მიახლოების საერთო ციფრები, მარცხნიდან მარჯვნივ, აუცილებლად მიეკუთვნებიან ξ ფესვს. განიხილება ოთხი შემთხვევა:

1. $f'(x)>0, \quad f''(x)>0$ (ნახ. 7)
2. $f'(x)>0, \quad f''(x)<0$ (ნახ. 10)
3. $f'(x)<0, \quad f''(x)>0$ (ნახ. 8)
4 $f'(x)<0, \quad f''(x)<0$ (ნახ. 9)

აქ ჩვენ გავარჩევთ პირველ შემთხვევას. დანარჩენი შემთხვევები შეისწავლება პირველის ანალოგიურად. შევნიშნოთ, რომ ეს შემთხვევები შეიძლება დავიყვანოთ პირველზე თუ $f(x)=0$ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებებით:

$$-f(x)=0 \text{ ან } \pm f(-z)=0, \text{ სადაც } z=-x.$$

ამრიგად, ვთქვათ $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $a\leqslant x\leqslant b$. დავუშვათ $x_0=a$, $\overline{x}_0=b$. მაშინ, როგორც ვიცით

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(\overline{x}_n)-f(x_n)}(\overline{x}_n-x), \tag{1}$$

$$\overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{f(x_n)}{f'(\overline{x}_n)}, \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

თუ გავიხსენებთ § 4 და §5-ში ჩატარებულ მტკიცებებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$x_n < \xi < \overline{x}_n$$

და

$$0 < \xi - x_n < \overline{x}_n - x_n. \qquad (3)$$

თუ x_n მიახლოების დასაშვები აბსოლუტური ცდომილება მოცემულია წინასწარ და უდრის ε-ს, მაშინ მიახლოების პროცესი შეწყდება იმ მომენტში, როცა შესრულდება $\overline{x}_n - x_n < \varepsilon$ უტოლობა.

პროცესის დასრულებისას ξ ფესვის მნიშვნელობად უმჯობესია მივიღოთ უკანასკნელად მიღებულ მიახლოებათა საშუალო არითმეტიკული.

$$\overline{\xi} = \frac{1}{2}(x_n + \overline{x}_n).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი გამოვთვალოთ

$$x^5 - x - 0,2 = 0$$

განტოლების რომელიმე ერთი ფესვი $\varepsilon = 0,0005$ სიზუსტით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $f(1) < 0$, $f(1,1) > 0$, ამიტომ ფესვი მოთავსებულია (1; 1,1) შუალედში. გვაქვს $f'(x) = 5x^4 - 1$ და $f''(x) = 20x^3$. მიღებულ შუალედში $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, ე. ი. წარმოებულთა ნიშნები მუდმივია. დავუშვათ $x_0 = 1$, $\overline{x}_0 = 1,1$ და გამოვიყენოთ კომბინირებული მეთოდი. რადგან

$$f(x_0) = f(1) = -0.2; \; f(\overline{x}_0) = f(1,1) = 0,3105;$$
$$f'(\overline{x}_0) = f'(1,1) = 6,3205,$$

ამიტომ (1) და (2) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$x_1 = 1 + \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,51051} \approx 1,039; \quad \overline{x}_1 = 1,1 - \frac{0,31051}{6,3205} \approx 1,051.$$

რადგანაც $\overline{x}_1 - x_n = 0,012$, ამიტომ მიღებული სიზუსტე არ არის საკმარისი. ვიპოვოთ მიახლოებათა შემდეგი წყვილი

$$x_2 = 1,039 + \frac{0,012 \cdot 0,0282}{0,9595} \approx 1,04469; \quad \overline{x}_2 = 1,051 -$$

$$- \frac{0,0313}{5,1005} \approx 1,04487.$$

აქ $\overline{x}_2-x_2=0{,}00018$, ე. ი. მივაღწიეთ სიზუსტის სასურველ რიგს. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\overline{\xi}=\frac{1}{2}(1{,}04469+1{,}04487)=1{,}04478\approx1{,}045,$$

რომლის აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია შემდეგ რიცხვზე

$$\frac{1}{2}\cdot0{,}00018+0{,}00022=0{,}00031<\frac{1}{2}\cdot10^{-3}.$$

§ 7. იტერაციის ანუ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი

განტოლების ფესვის გამოთვლა ზოგჯერ უფრო მოხერხებულია მიმდევრობითი მიახლოების, ანუ, იტერაციის მეთოდით. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: განვიხილოთ განტოლება

$$f(x)=0, \tag{1}$$

სადაც $f(x)$ —უწყვეტი ფუნქციაა. საჭიროა ვიპოვოთ მისი ნამდვილი ფესვი. (1) განტოლება შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური განტოლებით

$$x=\varphi(x). \tag{2}$$

ვთქვათ $\varphi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე. რაიმე წესით, თუნდაც უხეშად, შევარჩიოთ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x_0\in[a, b]$ და ჩავსვათ იგი (2) განტოლების მარჯვენა ნაწილში. მივიღებთ გარკვეულ რიცხვს

$$x_1=\varphi(x_0). \tag{3}$$

ახლა (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში x_0 შევცვალოთ x_1-ით, მივიღებთ ახალ $x_2=\varphi(x_1)$ რიცხვს. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას

$$x_n=\varphi(x_{n-1})\quad(n=1,2,\ldots). \tag{4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ (x_n) მიმდევრობის ყველა წერტილი ეკუთვნის $[a,b]$ სეგმენტს. თუ ეს მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი იქნება (1) განტოლების ფესვი. მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით (4) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

ანუ

$$\xi=\varphi(\xi). \tag{5}$$

ამრიგად, ξ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსენს და მისი გამოთვლა შეიძლება (4) ფორმულით ნებისმიერი რიგის სიზუსტით.

თ ე ო რ ე მ ა 1. ვთქვათ $\varphi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და წარმოებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთან ყველა მისი მნიშვნელობა $\varphi(x)\in[a,b]$. თუ არსებობს ისეთი წესიერი q წილადი, რომ

$$|\varphi'(x)|\leqslant q<1, \quad (a<x<b) \tag{6}$$

მაშინ:

1) იტერაციის პროცესი

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{7}$$

კრებადია ნებისმიერი საწყისი $x_0\in[a, b]$ მნიშვნელობისათვის;

2) $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ზღვრული მნიშვნელობა წარმოდგენს (2) განტოლების ერთადერთ ფესვს $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ორი მიმდევრობითი მიახლოება:

$$x_n=\varphi(x_{n-1}), \quad x_{n+1}=\varphi(x_n),$$

საიდანაც

$$x_{n+1}-x_n=\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1}).$$

ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_{n+1}-x_n=(x_n-x_{n-1})\varphi'(\overline{x}_n),$$

სადაც

$$x_{n-1}<\overline{x}_n<x_n.$$

ამრიგად, (6) პირობის საფუძველზე მივიღებთ

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant q\,|x_n-x_{n-1}|, \tag{8}$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ $(n=1, 2\ldots)$:

$$\begin{aligned}
&|x_2-x_1|\leqslant q\,|x_1-x_0|,\\
&|x_3-x_2|\leqslant q\,|x_2-x_1|\leqslant q^2|x_1-x_0|,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|x_{n+1}-x_n|\leqslant q^n\,|x_1-x_0|.
\end{aligned} \tag{9}$$

განვიხილოთ მწკრივი

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots, \tag{10}$$

რომლისთვისაც x_n მიახლოებითი მნიშვნელობები წარმოადგენენ $(n+1)$-ე კერძო ჯამებს, ე. ი.

$$x_n=S_{n+1}.$$

(9) უტოლობის თანახმად (10) მწკრივის წევრები აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები არიან იმ გეომეტრიული პროგრესიის შესაბამის წევრებზე, რომლის მნიშვნელი $q<1$. ამიტომ (10) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. ამრიგად, არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim_{n\to\infty} x_n=\xi,$$

ამასთან, ცხადია, რომ $\xi\in[a, b]$.

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას, მაშინ (7) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\xi=\varphi(\xi). \tag{11}$$

ამრიგად, ξ არის $x=\varphi(x)$ განტოლების ფესვი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს ფესვი ერთადერთია. მართლაც, თუ

$$\bar{\xi}=\varphi(\bar{\xi}), \tag{12}$$

მაშინ (11) და (12) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\bar{\xi}-\xi=\varphi(\bar{\xi})-\varphi(\xi),$$

რომლის მარჯვენა ნაწილის მიმართ ლაგრანჟის თეორემის გამოყენება მოგვცემს

$$\bar{\xi}-\xi=(\bar{\xi}-\xi)\varphi'(c), \quad c\in[\xi, \bar{\xi}],$$

საიდანაც

$$(\bar{\xi}-\xi)(1-\varphi'(c))=0. \tag{13}$$

რადგან $1-\varphi'(c)\neq 0$, ამიტომ (13)-დან შეგვიძლია დავწეროთ $\bar{\xi}-\xi=0$, $\bar{\xi}=\xi$, ე. ი. ξ ფესვი ერთადერთია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 1. q რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ $|\varphi'(x)|$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა ან ქვედა საზღვარი როცა $a\leqslant x\leqslant b$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თეორემის პირობებში იტერაციის მეთოდის კრებადობა დამოკიდებული არ არის $x_0\in[a, b]$ საწყისი მნიშვნელობის შერჩევაზე. ამის გამო გამოთვლებში დაშვებული ცალკეული ცდომილება, რომელსაც არ გამოვყავართ $[a, b]$ სეგმენტიდან, გავლენას არ მოახდენს საბოლოო შედეგზე, რადგან შეცდომით მიღებული მნიშვნელობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ახალი საწყისი x_0 მნიშვნელობა. ეს თვისება იტერაციის მეთოდს, გამოთვლების მიმართ, ხდის ერთ-ერთ საიმედო მეთოდად. ცხადია ამ მეთოდის გამოყენების დროს დაშვებულმა სისტემატიურმა შეცდომებმა შეიძლება ხელი შეუშალონ სასურველი შედეგის მიღებას.

ახლა განვიხილოთ ცდომილების შეფასების საკითხი. (9) ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+$$
$$+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant q^{n+p-1}|x_1-x_0|+q^{n+p-2}|x_1-x_0|+$$
$$+\cdots+q^n|x_1-x_0|=q^n|x_1-x_0|(1+q+q^2+\cdots+q^{p-1}).$$

გეომეტრიული პროგრესიის შეკრებით მივიღებთ:

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant q^n|x_1-x_0|\ \frac{1-q^p}{1-p}<\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|.$$

თუ $p\to\infty$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p}=\xi$, მაშინ უკანასკნელი დამოკიდებულებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|. \tag{14}$$

ამ დამოკიდებულებიდან ჩანს, რომ იტერაციის პროცესი იქნება მით უფრო სწრაფად კრებადი რაც უფრო მცირეა q რიცხვი.

გავეცნოთ კიდევ ერთ ფორმულას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ცდომილების შეფასებისათვის ზოგიერთ შემთხვევაში. ვთქვათ

$$f(x)=x-\varphi(x).$$

ცხადია, რომ $f'(x)=1-\varphi'(x)\geqslant 1-q$. აქედან, $f(\xi)=0$ პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$|x_n-\varphi(x_n)|=|f(x_n)-f(\xi)|=|x_n-\xi|\cdot|f'(\overline{x}_n)|\geqslant(1-q)\ |x_n-\xi|,$$

სადაც $\overline{x}_n\in(x_n,\ \xi)$ და, მაშასადამე

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|x_n-\varphi(x_n)|}{1-q}, \tag{15}$$

ე. ი.

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-q}. \tag{16}$$

(8) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|, \tag{17}$$

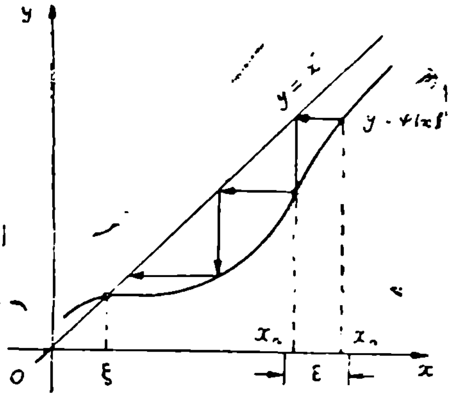
საიდანაც, თუ $q\leqslant\dfrac{1}{2}$, გამომდინარეობს უტოლობა

$$|\xi-x_n|\leqslant|x_n-x_{n-1}|,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ უტოლობიდან მივიღებთ

$$|\xi - x_n| < \varepsilon.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. არსებობს გავრცელებული აზრი, რომ თუ იტერაციის მეთოდის გამოყენებისას მიღებული ორი x_{n-1} და x_n მიახლოება ემთხვევა ერთმანეთს მოცემული ε სიზუსტით, მაშინ იგივე სიზუსტით ადგილი აქვს ტოლობას $\xi \approx x_n$. ზოგად შემთხვევაში ეს დასკვნა არ არის სწორი (ნახ. 13). უფრო მეტიც, მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ $\varphi'(x)$ ახლოსაა 1-თან, მაშინ $|\xi - x_n|$ სიდიდე შეიძლება იყოს დიდი, თუმცა $|x_n - x_{n-1}|$ სიდიდე — საგრძნობლად მცირეა.



ნახ. 13

იტერაციის პროცესი უნდა გავაგრძელოთ

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$$

უტოლობის შესრულებამდე, სადაც ε არის ξ ფესვის მოცემული ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება და $|\varphi'(x)| \leqslant q$. მაშინ (17) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$|\xi - x_n| \leqslant \varepsilon,$$

ე. ი.

$$\xi = x_n \pm \varepsilon.$$

შევნიშნოთ რომ, თუ

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

და

$$\xi = \varphi(\xi),$$

მაშინ

$$|\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| = |\xi - x_{n-1}| \cdot |\varphi'(\bar{x}_{n-1})| \leqslant q\,|\xi - x_{n-1}|,$$

$$(\bar{x}_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi)),$$

ე. ი.

$$|\xi - x_n| \leqslant |\xi - x_{n-1}|.$$

ამრიგად, კრებადი იტერაციის პროცესის შემთხვევაში $|\xi - x_n|$ ცდომილება მონოტონურად მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. ყოველი x_n მნიშვნელობა უფრო ზუსტია ვიდრე წინა x_{n-1} მნიშვნელობა. რა თქმა უნდა ყველა ამ დასკვნებში უგულებელყოფილია დამრგვალებათა ცდო-

მიღებები, ე. ი. ივარაუდება, რომ მიმდევრობით მიახლოებებს ვპოულობთ ზუსტად.

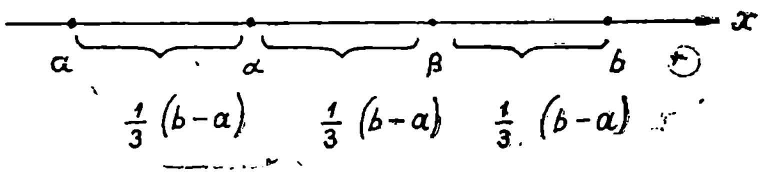
პრაქტიკაში ისიც ხდება, რომ უხეში მეთოდით ადგენენ ξ ფესვის არსებობას და იტერაციის მეთოდით მოითხოვენ მიიღონ ფესვის საკმაოდ ზუსტი მიახლოებითი მნიშვნელობა, ამასთან (6) ტოლობა სრულდება ამ ფესვის მხოლოდ რაიმე (a, b) მიდამოში. აქ x_0 საწყისი მნიშვნელობის უხეიროდ შერჩევამ შეიძლება გამოიწვიოს $x_n=\varphi(x_{n-1})$ $(n=1, 2,\ldots)$ მიახლოებების გამოსვლა (a, b) შუალედიდან ან შეიძლება დაკარგონ კიდევაც აზრი. ამიტომ სასარგებლოა თეორემა 1-ის კიდევ სხვა სახის ფორმულირება

თ ე ო რ ე მ ა 2. ვთქვათ $\varphi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთან

$$x=\varphi(x) \tag{18}$$

განტოლების ξ ფესვი მოთავსებულია უფრო ვიწრო $[\alpha, \beta]$ შუალედზე, სადაც

$$\alpha=a+\frac{1}{3}(b-a), \quad \beta=b-\frac{1}{3}(b-a) \quad (\text{ნახ. } 14)$$



ნახ. 14

თუ ა) $|\varphi'(x)|\leqslant q<1$, $a<x<b$; ბ) საწყისი მიახლოება $x_0\in[\alpha, \beta]$, მაშინ:

1) ყველა მიახლოება მოთავსებულია (a, b) შუალედში, ე. ი.

$$x_n=\varphi(x_{n-1})\in(a, b) \qquad (n=1, 2,\ldots);$$

2) (x_n) მიმდევრობა კრებადია, ე. ი. არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi,$$

ამასთან ξ არის (18) განტოლების ერთადერთი ფესვი $[a, b]$ სეგმენტზე;

3) მართებულია (14) შეფასება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1) ვთქვათ $x_0\in[\alpha, \beta]$, მაშინ აზრი აქვს $x_1=\varphi(x_0)$ ტოლობას. $\xi=\varphi(\xi)$ ტოლობის გათვალისწინებით ლაგრანჟის თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$$|x_1-\xi|=|\varphi(x_0)-\varphi(\xi)|=|x_0-\xi|\cdot|\varphi'(x_0)|\leqslant q(\beta-\alpha)<\frac{b-a}{3};$$

აქედან $x_1 \in (a, b)$. საზოგადოდ, თუ $x_{n-1} \in (a, b)$ $(n=1,2,\ldots)$ და $|x_{n-1}-\xi| < \frac{b-a}{3}$, მაშინ აზრი აქვს $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ტოლობას და

$$|x_n-\xi| = |\varphi(x_{n-1})-\varphi(\xi)| = |x_{n-1}-\xi| \cdot |\varphi'(\overline{x}_{n-1})| \leqslant q|x_{n-1}-\xi| < \frac{b-a}{3}.$$

ამრიგად. $x_n \in (a, b)$, სადაც $n=1,2,\ldots$.

თეორემა 1-ში მოყვანილი დამტკიცებების ანალოგიურად მარტივად მტკიცდება 2) და 3) დებულება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. ვთქვათ (18) განტოლების ξ ფესვის რაიმე (a, b) მიდამოში $\varphi'(x)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს და შესრულებულია უტოლობა

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1.$$

თუ $\varphi'(x) > 0$, მაშინ $x_n = \varphi(x_{n-1})$ მიმდევრობა მონოტონურად კრებადია ξ ფესვისაკენ.

თუ $\varphi'(x) < 0$ მაშინ (x_n) მიმდევრობითი მიახლოებები მერყეობენ ξ ფესვის მახლობლობაში.

მართლაც, 1) ვთქვათ $0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant q < 1$ და, მაგალითად, $x_0 < \xi$. მაშინ

$$x_1-\xi = \varphi(x_0)-\varphi(\xi) = (x_0-\xi)\varphi'(\xi_1) < 0,$$

სადაც $\xi_1 \in (x_0, \xi)$, ამასთან

$$|x_1-\xi| \leqslant q|x_0-\xi| < |x_0-\xi|.$$

მაშასადამე,

$$x_0 < x_1 < \xi.$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < \xi.$$

ანალოგიური შედეგი მიიღება როცა $x_0 > \xi$.

ამრიგად, $\varphi'(x) > 0$ შემთხვევაში საკმარისია x_0 საწყისი მიახლოება შევარჩიოთ ξ ფესვის შემცველ (a, b) მიდამოში; ყველა დანარჩენი $x_n (n=1,2,\ldots)$ მიახლოება მოთავსდება ამ მიდამოში და n ნომრის გაზრდით ისინი მონოტონურად მიუახლოვდებიან ξ ფესვს.

2) ვთქვათ $-1 < -q \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0$ და, მაგალითად, $x_0 < \xi$, ამასთან $x_1 = \varphi(x_0) \in (a, b)$.

გვაქვს

$$x_1-\xi = \varphi(x_0)-\varphi(\xi) = (x_1-\xi)\varphi'(\xi_1) > 0,$$

ე. ი.

$$x_1 > \xi \quad \text{და} \quad |x_1-\xi| < |x_0-\xi|.$$

წინა მსჯელობის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$x_0 < x_2 < \ldots < \xi < \ldots < x_3 < x_1,$$

ე. ი. მიმდევრობითი მიახლოებები იქნებიან ხან ნაკლები ხან მეტი ξ ფესვზე.

ამრიგად, $\varphi'(x) < 0$ შემთხვევაში, თუ ორი x_0 და x_1 მიახლოება ეკუთვნის ξ ფესვის (a, b) მიდამოს, მაშინ ყველა დანარჩენი $x_n (n=2,3,\ldots)$ მიახლოება ასევე მიეკუთვნება ამ მიდამოს, ამასთან (x_n) მიმდევრობა „შემოეხვევა" ξ ფესვს.

ცხადია, რომ

$$|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|.$$

იტერაციის მეთოდის გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: (2) განტოლების ამონახსენი არის $y=x$ და $y=\varphi(x)$ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისი.

ავიღოთ რაიმე $A_0 \,(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილი და ავაგოთ $A_0\, B_1 A_1 B_2\, A_2 \ldots$ ტეხილი წირი. $A_0, A_1, A_2 \ldots$ წერტილები ძევს $y=\varphi(x)$ წირზე, ხოლო $B_1, B_2 \ldots$ წერტილები $y=x$ წრფეზე. A_1 და B_1; A_2 და B_2 და ა. შ. წერტილების საერთო აბსცისები (ნახ. 15) შესაბამისად x_1, $x_2, \ldots$ წარმოადგენენ ξ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა მიმდევრობას. შეიძლება აღნიშნულ ტეხილებს ჰქონდეს სხვა სახე. თუ $\varphi'(x) > 0$, მაშინ მიიღება ნახ. 15-ზე ნაჩვენები $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \ldots$ ტეხილი, ხოლო თუ $\varphi'(x) < 0$, მაშინ მიიღება მე-16 ნახაზზე ნაჩვენები $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \ldots$ ტეხილი.

შევნიშნოთ, რომ თუ ξ წერტილის მიდამოში $\varphi'(x)$ აკმაყოფილებს $|\varphi'(x)| < 1$ პირობას, მაშინ (როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ) იტერაციის პროცესი კრებადია, ხოლო თუ $|\varphi'(x)| \geqslant 1$ — განშლადი (ნახ. 17 და 18).

ისმის კითხვა $f(x)=0$ განტოლებისათვის როგორ შევარჩიოთ $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ

$$x = \varphi(x) \tag{19}$$

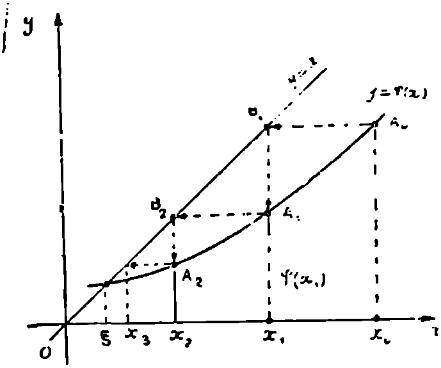
განტოლების მიმართ შეიძლებოდეს იტერაციის მეთოდის გამოყენება. საჭიროა (19) სახის ისეთი წარმოდგენა, რომ

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1. \tag{20}$$

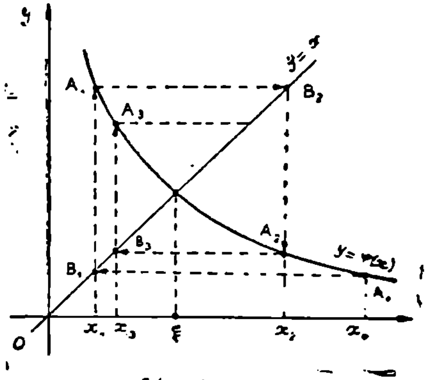
ამასთან, რაც უფრო მცირეა q, მით უკეთესი იქნება ამ პროცესის კრებადობის სიჩქარე. განვიხილოთ $f(x)=0$-ის ეკვივალენტური განტოლება

$$x = \lambda f(x) + x,$$

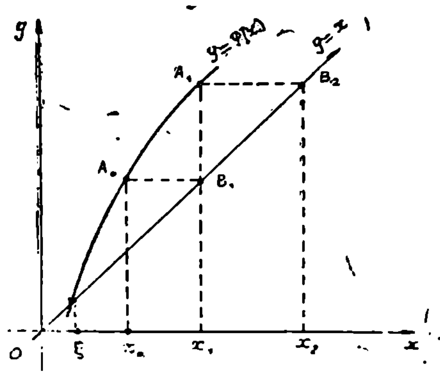
სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.



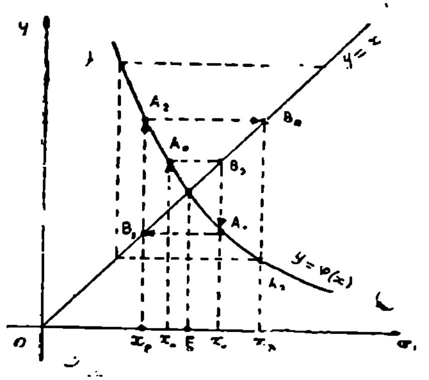
ნახ. 15



ნახ. 16



ნახ. 17



ნახ. 18

ამრიგად,

$$\varphi(x)=\lambda f(x)+x.$$

λ უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|\varphi'(x)|=|\lambda f'(x)+1|<1,$$

საიდანაც

$$-2<\lambda f'(x)<0.$$

ამ პირობიდან ჩანს, რომ λ-ს მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ

$$\lambda=\pm\frac{1}{M},$$

სადაც M არის $|f'(x)|$-ის უდიდესი მნიშვნელობა $[a,b]$-ზე, ამასთან ნი-

შანი შეირჩევა ისე, რომ λ-ს ჰქონდეს $f'(x)$—ის საწინააღმდეგო ნიშანი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$x^3+x-1000=0 \tag{21}$$

განტოლების უდიდესი დადებითი ფესვი 10^{-4} სიზუსტით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უხეშ საწყის მიახლოებად მივიღოთ $x_0=10$, ამასთან ცხადია, რომ $\xi<x_0$. (21) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x=1000-x^3 \tag{22}$$

ან

$$x=\frac{1000}{x^2}-\frac{1}{x} \tag{23}$$

ან

$$x=\sqrt[3]{1000-x} \tag{24}$$

და ა. შ. ამ ვარიანტებიდან უპირატესობა აქვს (24) ფორმას, რადგან თუ ძირითად შუალედად ავიღებთ (9,10)-ს და დავუშვებთ, რომ

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{1000-x},$$

გვექნება

$$\varphi'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}}.$$

აქედან

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}}\approx\frac{1}{300}=q.$$

გამოვთვალოთ x_n მიმდევრობითი მიახლოებები ერთი სათადარიგო ნიშნით შემდეგი ფორმულებით:

$$y_n=1000-x_n,$$

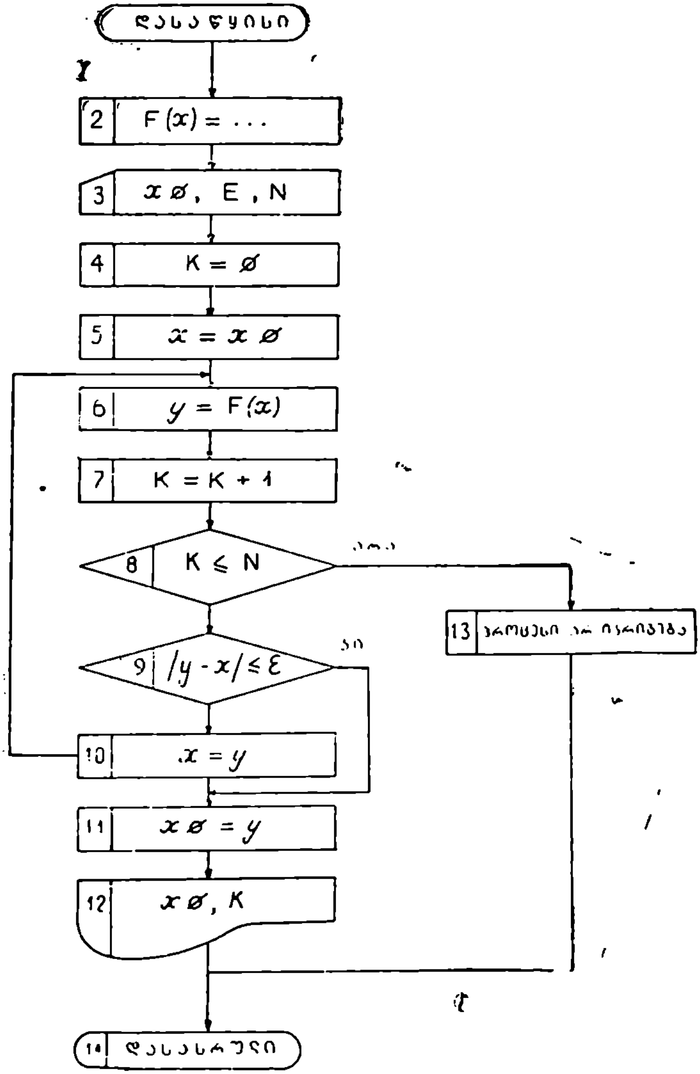
$$x_{n+1}=\sqrt[3]{y_n} \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

შევადგინოთ მიღებულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

n	x_n	y_n
0	10	990
1	9,96655	990,03345
2	9,96666	990,03334
3	9,96667	

რადგან $1-q\approx1$, ამიტომ 10^{-4}-მდე სიზუსტით შეგვიძლია დავუშვათ რომ $\xi=9,9667$.

მარტივი იტერაციის მეთოდის ბლოკ-სქემა



ბლოკ-სქემა № 2

ბლოკი 2 — $F(x)$ ფუნქციის აღწერა, სადაც $F(x)$ არის $x=\varphi(x$ განტოლების მარჯვენა მხარე.

ბლოკი 3 — საწყისი მონაცემების შეტანა, სადაც $x\varnothing$ საწყისი მიახლოებაა, E — მიახლოების სიზუსტე, ხოლო N — იტერაციის რაოდენობა.

ბლოკი 4 — იტერაციის რაოდენობის აღმნიშვნელ პარამეტრს k-ს ენიჭება საწყისი ნულოვანი მნიშვნელობა.

ბლოკი 5 — x ცვლადს ენიჭება საწყისი $x\varnothing$ მიახლოება.

ბლოკი 6 — საწყის $x\varnothing$ წერტილში ითვლება F ფუნქციის მნიშვნელობა.

ბლოკი 7 — იტერაციის რაოდენობა იზრდება ერთით.

ბლოკი 8—მოწმდება პირობა იტერაციის ბიჯის რაოდენობამ ხომ არ გადააჭარბა დასაშვებ რაოდენობას.

ბლოკი 9—მოწმდება პირობა მიღწეულია თუ არა საჭირო სიზუსტე.

ბლოკი 10 — x ცვლადს ენიჭება ამ წერტილში გამოთვლილი $Y= =F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა.

ბლოკი 11—$x\varnothing$ საწყისი მიახლოება იცვლება $F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობით.

ბლოკი 12 — ხდება მიახლოებითი ამონახსნისა და მის პოვნაზე დახარჯული იტერაციის რაოდენობის ბეჭდვა.

ბლოკი 13 — ხდება ინფორმაციის ბეჭდვა, რომ პროცესი არ იკრიბება.

მოცემული ბლოკ-სქემის შესაბამის პროგრამას ზემოთ ხელით ამოხსნილი პირველი მაგალითისათვის ექნება შემდეგი სახე:

```
C     МДТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИИ
      F(X)=(1ØØØ—X)**(1./3)
      READ (5,1)XØ, E, N
1     FORMAT (2F 15. 5, I6)
      X=XØ
      K=Ø
5     Y=F(X)
      K=K+1
      IF (K—N) 2, 2, 3
2     IF (ABS (Y—X). LE.E) GOTO4
      X=Y
      GOTO 5
4     XØ=Y
      WRITE (6, 6)XØ, K
```

```
 6    FORMAT (1∅X, 'ПРИБ. ЗНАЧ. КОРН. X∅=', F12.3,X, ,КОЛИЧ.
      ИТЕР. К= •I5)
      STOP
 3    WRITE (6, 7)
 7    FORMAT (ПРОЦЕС НЕ СХОД.') !
      STOP
      END
      ПРИБ. ЗНАЧ. КОРН. X∅=9.967 КОЛИЧ- ИНТЕР. К=2
```

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$x^3-x-1=0. \qquad (25)$$

რადგან $f(1)=-1<0$ და $f(2)=5>0$, ამიტომ განტოლების ξ ფესვი მოთავსდება (1, 2) შუალედში. (25) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ აგრეთვე შემდეგი სახით

$$x=x^3-1 \qquad (26)$$

აქ $\varphi(x)=x^3-1$, $\varphi'(x)=3x^2$. ამიტომ $\varphi'(x)\geqslant 3$, როცა $1\leqslant x\leqslant 2$ და მაშასადამე, იტერაციის პროცესის კრებადობის პირობები არ სრულდება.

თუ (25) განტოლებას ჩავწერთ

$$x=\sqrt[3]{x+1} \qquad (27)$$

სახით, მაშინ გვექნება

$$\Psi(x)=\sqrt[3]{x+1} \quad \text{და} \quad \Psi'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

აქედან $0<\Psi'(x)<\dfrac{3}{3\sqrt[3]{4}}<\dfrac{1}{4}$, როცა $1\leqslant x\leqslant 2$.

ამრიგად, იტერაციის პროცესი (27) განტოლებისათვის სწრაფად შესრულდება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ვიპოვოთ $x^4-2x-4=0$ განტოლების დადებითი ფესვის იზოლაციის შუალედი.

2. ვაჩვენოთ, რომ (1,2) შუალედში მოთავსებულია $x^3+x^2-11=0$ განტოლების ერთი ფესვი.

3. ვიპოვოთ x^4-[illegible]$x-3=0$ განტოლების რომელიმე ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა და შევაფასოთ მისი ცდომილება.

4. ამოვხსნათ გრაფიკულად $2-\lg x-x=0$ განტოლება.

5. შუაზე გაყოფის მეთოდით ვიპოვოთ $x^3+x^2-8=0$ განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია [0,4] შუალედში.

6. ქორდების მეთოდით ვიპოვოთ $x^4+3x-20=0$ განტოლების ფესვი 0,01 სიზუსტით.

7. მხებთა მეთოდით ვიპოვოთ $x^3-2x-5=0$ განტოლების ფესვი 0,01 სიზუსტით.

8. ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდით ვიპოვოთ $x^3-x^2-7=0$ განტოლების ფესვი (2, 3) შუალედში 0,001 სიზუსტით.

9. იტერაციის მეთოდით ვიპოვოთ $x^3-2x^2-4x-7=0$ განტოლების ფესვი 0,01 სიზუსტით.

10. მხებთა მეთოდის ორჯერ გამოყენებით ვიპოვოთ $x^4-8x+1=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა (1,6; 2) შუალედში. x_1 და x_2 გამოვთვალოთ მძიმიდან ორი ნიშნის სიზუსტით და შევაფასოთ x_2-ის ცდომილება.

V თავი

ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა

§ 1. ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდთა ზოგადი დახასიათება

პრაქტიკაში მრავალი საინჟინრო ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სახის განტოლება სისტემის ამოხსნაზე

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ x_2, \dots, x_n)=0 \\ f_2(x_1, \ x_2, \dots, x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \ x_2, \dots x_n)=0, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც n — უცნობთა რიცხვია, m—განტოლებათა რიცხვი, ხოლო $f_i(x_1, x_2 \dots, x_n)$ $(i=1,2,\dots,m)$ — საზოგადოდ არაწრფივი ფუნქციებია $m \neq n$.

$x_1, \ x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობათა ერთობლიობას ეწოდება (1) სისტემის ამონახსენი, თუ იგი ამ სისტემის ყველა განტოლებას გადააქცევს იგივეობად.

(1) სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსენი. თუ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია, მაშინ სისტემას ეწოდება არათავსებადი.

პრაქტიკული თვალსაზრისით დიდი მნიშვნელობა აქვს იმ შემთხვევას, როცა $f_i (i=1,2,\dots .m)$ ფუნქციები წარმოადგენენ $x_1 \ x_2, \dots, x_n$ უცნობთა წრფივ ფუნქციებს. სწორედ ასეთი შემთხვევისათვის ფართოდ არის დამუშავებული ამოხსნის, როგორც ანალიზური, ასევე რიცხვითი მეთოდები. მეორე შემთხვევისათვის კარგად არის შესწავლილი

ამონახსნის არსებობის ანალიზისა და მეთოდთა კრებადობის პროცესის აპარატი.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდები იყოფა ორ ჯგუფად: 1) ზ უ ს ტ ი მ ე თ ო დ ე ბ ი — წარმოადგენენ სისტემის ამონახსნთა გამოთვლის სასრულ ალგორითმებს (ასეთებია მაგალითად, კრამერის წესი, გაუსის მეთოდი, შებრუნებული მატრიცის მეთოდი და სხვ.). 2) ი ტ ე რ ა ც ი უ ლ ი მ ე თ ო დ ე ბ ი — საშუალებას გვაძლევენ, მოცემული სიზუსტით, კრებადი უსასრულო პროცესების გზით, ვიპოვოთ სისტემის ამონახსნები (მათ რიცხვს ეკუთვნის: იტერაციის, ზეიდელის, რელაქსაციის მეთოდები და სხვ.).

გარდაუვალი დამრგვალებების შედეგად ზუსტი მეთოდების შედეგებიც კი წარმოადგენენ მიახლოებით მნიშვნელობებს, ამასთან ამონახსნთა ცდომილებების შეფასება, ზოგად შემთხვევაში, დაკავშირებულია დიდ სირთულეებთან.

შევნიშნოთ რომ იტერაციული მეთოდების ეფექტური გამოყენება დამოკიდებულია საწყისი მიახლოების შერჩევაზე და პროცესის კრებადობის სიჩქარეზე.

§ 2. კრამერის წესი

განვიხილოთ n— უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $a_{11}, a_{12},\dots,a_{nn}$ კოეფიციენტები და $b_1, b_2,\dots b_n$ თავისუფალი წევრები ცნობილი რიცხვებია, ხოლო $x_1,x_2,\dots,x_n$ — უცნობები.

განვიხილოთ (1) სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ასევე, თავისუფალი წევრებისაგან და უცნობებისაგან შევადგინოთ სვეტ-მატრიცები:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

თუ გავიხსენებთ მატრიცების გამრავლების წესს და მატრიცების ტოლობას, მაშინ (1) სისტემა მატრიცული ფორმით ჩაიწერება ასე:

$$AX=B.$$

განვიხილოთ (1) სისტემის დეტერმინანტი

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta.$$

Δ დეტერმინანტის j-ური ($j=1,2,\dots n$) სვეტის ელემენტები შევცვალოთ B მატრიცა-სვეტის შესაბამისი ელემენტებით და მიღებული დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ_j სიმბოლოთი:

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თ ე ო რ ე მ ა. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j=1,\ 2,\dots,n \tag{2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვაჩვენოთ რომ $Y=A^{-1}B$ არის $AX=B$ განტოლების ანუ (1) სისტემის ამონახსენი. მართლაც,

$$AY=A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B.$$

ახლა ვაჩვენოთ ამ ამონახსნის ერთადერთობა, ვთქვათ Z არის $AX=B$ განტოლების ამონახსენი და $Z \neq Y$, ე. ი. $AZ=B$. ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1}-ზე, მივიღებთ

$$A^{-1}(AZ)=A^{-1}B,\ (AA^{-1})Z=Y, \quad EZ=Y, \quad Z=Y.$$

ე. ი. (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}A^*B, \tag{3}$$

სადაც A^* არის A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა. მატრიცების გამრავლების წესის თანახმად გვექნება

$$X=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} \dots A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2}\\ \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n\\ \dots\dots\dots\dots\\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

აქ A_{ij} წარმოადგენენ a_{ij} $(i, j=1,2,\dots,n)$ ელემენტების ალგებრულ დამატებებს. დეტერმინანტის ერთერთი თვისების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{cases}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n=\Delta_1\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n=\Delta_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n=\Delta_n.\end{cases}$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (4)-დან მივიღებთ

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\\ \Delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\ \frac{\Delta_2}{\Delta}\\ \vdots\\ \frac{\Delta_n}{\Delta}\end{pmatrix},$$

აქედან $x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j=1,2,\dots,n)$ თეორემა დამტკიცებულია.

(2)-ს უწოდებენ *კრამერის ფორმულებს*. (3) არის კრამერის ფორმულების *მატრიცული ფორმა*.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=0\\ 2x_1+2x_2-3x_3=-5\\ 4x_1-x_2+2x_3=-2.\end{cases}$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=39$$

და დამხმარე დეტერმინანტები:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-39;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=39.$$

(2) ფორმულების თანახმად

$$x_3=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1;\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=0;\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=1.$$

პ ა ს უ ხ ი. (—1, 0, 1).

§ 3. შებრუნებული მატრიცის მეთოდი

ვთქვათ მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

ანუ

$$AX=B, \tag{1'}$$

სადაც გამოყენებულია წინა პარაგრაფის აღნიშვნები:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

თუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე. ი. $|A|\neq 0$, მაშინ (1) სისტემა თავსებადია და მისი ამონახსენი მოიცემა ფორმულით

$$X=\frac{1}{|A|}A^*B=A^{-1}B. \tag{2}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1-x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=0. \end{cases} \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-14.$$

და ალგებრული დამატებები:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=7, \quad A_{14}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{24}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-15,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{34}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{42}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0, \qquad A_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

(2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$X=\frac{1}{|A|}A^{*}B=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & -6 \\ 7 & -7 & -7 & 0 \\ 5 & -15 & -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -14 \\ -28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=0 \\ x_3=1 \\ x_4=2. \end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ი. (3) სისტემის ამონახსენია (—1, 0, 1, 2).

§ 4. გაუსის მეთოდი

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის ანუ მიმდევრობით გამორიცხვის ალგორითმი გამოიყენება უფრო ხშირად ვიდრე სხვა ანალიზური მეთოდები. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: სისტემის განტოლებებიდან, უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვით მოცემული სისტემა დაიყვანება მის ეკვივალენტურ საფეხურა (ანუ სამკუთხა) სისტემაზე. უცნობთა მიმდევრობით გამორიცხვა ხორციელდება მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცის სტრიქონების მიმართ ე. წ. ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენებით. ამ გზით მიღებული მატრიცა მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცის ეკვივალენტურია. მიღებული მატრიცის შესაბამისი სისტემა კი — მოცემული სისტემის ეკვივალენტური. სტრიქონების მიმართ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები მდგომარეობს შემდეგში:

1. ნებისმიერი ორი სტრიქონის გადაადგილება,

2. ნებისმიერი სტრიქონის ყველა ელემენტის გამრავლება ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე.

3. მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების რაიმე რიცხვზე ნამრავლის მიმატებით სხვა, ნებისმიერი, სტრიქონის შესაბამის ელემენტებთან.

განვიხილოთ n-უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

თუ $a_{11}\neq 0$ (თუ $a_{11}=0$), მაშინ (1) სისტემის პირველ განტოლებად ავიღოთ ის განტოლება რომელშიაც x_1 უცნობის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან), მაშინ (1) სისტემის პირველი განტოლების ყველა წევრი გავყოთ a_{11}-ზე, რომელსაც ვუწოდოთ პირველი ბიჯის *წამყვანი ელემენტი*, ხოლო ამ განტოლებას — *წამყვანი განტოლება*, მივიღებთ:

$$x_1+c_{12}x_2+\dots+c_{1n}x_n=d_1, \tag{2}$$

სადაც

$$c_{1k}=\frac{a_{1k}}{a_{11}}(k\geqslant 2);\quad d_1=\frac{b_1}{a_{11}}. \tag{3}$$

ახლა (2) განტოლება გავამრავლოთ a_{21}-ზე და მიღებული განტოლება გამოვაკლოთ (1) სისტემის მეორე განტოლებას. შემდეგ (2) განტოლება გავამრავლოთ a_{31}-ზე და მიღებული განტოლება გამოვაკლოთ (1)-ის მესამე განტოლებას და ა. შ. ბოლოს (2) განტოლების a_{n1}-ზე ნამრავლი გამოვაკლოთ (1) სისტემის n-ურ განტოლებას, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\dots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+\dots+a_{3n}^{(1)}x_n=b_3^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2+a_{n3}^{(1)}x_3+\dots+a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}, \end{array}\right. \tag{4}$$

სადაც

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ik}^{(1)}=a_{ik}-a_{i1}c_{1k} \\ b_i^{(1)}=b_i-a_{i1}d_1 \end{array}\right. \qquad (i,\quad k\geqslant 2).$$

ახლა ვთქვათ $a_{22}^{(1)}\neq 0$ და (4) სისტემის პირველი განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $a_{22}^{(1)}$-ზე (მეორე ბიჯის წამყვან ელემენტზე), მივიღებთ

$$x_2+c_{23}x_3+\dots+c_{2n}x_n=d_2, \tag{5}$$

სადაც

$$c_{2k}=\frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}(k\geqslant 3),\qquad d_2=\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

თუ (5) წამყვანი განტოლებისა და (4) სისტემის მიმართ ჩავატარებთ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3+\ldots+a_{nn}^{(2)}x_n=b_n^{(2)}, \end{cases} \tag{6}$$

სადაც

$$\begin{cases} a_{ik}^{(2)}=a_{ik}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}c_{2k}, \\ b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-a_{i2}^{(1)}d_2 \end{cases} \qquad (i,\ k\ \geqslant 3).$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ ბოლომდე და ყველა ბიჯის პირველ განტოლებებს გავაერთიანებთ, მივიღებთ (1) სისტემის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემას, რომლის მატრიცას აქვს სამკუთხედის ფორმა (სამკუთხა მატრიცა):

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\ldots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad x_2+c_{23}x_3+\ldots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_{n-1}+c_{n-1,n}\,x_n=d_{n-1} \\ \qquad\qquad x_n=d_n. \end{cases} \tag{7}$$

(7) სისტემიდან თანმიმდევრულად ვიპოვით უცნობებს:

$$\begin{cases} x_n=d_n \\ x_{n-1}=d_{n-1}-c_{n-1,n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2=d_2-c_{23}x_3-\ldots-c_{2n}x_n \\ x_1=d_1-c_{12}x_2-\ldots-c_{1n}x_n. \end{cases}$$

ამრიგად, (1) სისტემის ამოსახსნელად საჭიროა, უცნობთა გამორიცხვის გზით, იგი დავიყვანოთ სამკუთხა სისტემაზე და შემდეგ ამოვხსნათ. სამკუთხა სისტემის კოეფიციენტთა მოძებნის პროცესს ეწოდება პ ი რ დ ა პ ი რ ი ს ვ ლ ა, ხოლო სისტემის ამონახსნის მიღების პროცესს — უ კ უ ს ვ ლ ა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ მეთოდით სისტემის ამოხსნის პროცესში შეიძლება ვიპოვოთ

$$|A|=a_{11}a_{22}^{(1)}\cdots a_{nn}^{(n-1)}.$$

გაუსის მეთოდის რეალიზაცია მოითხოვს გამრავლებისა და გაყოფის $\frac{1}{3}(n^3+3n^2-n)$ ოპერაციის შესრულებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 4x_1-2x_2-6x_3=2 \\ 5x_1+4x_2-5x_3+2x_4=1. \end{cases} \tag{8}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. $a_{11}=1$ მივიღოთ წამყვან ელემენტად, პირველი განტოლება — წამყვან განტოლებად და ბოლო სამი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი. ამისათვის პირველი განტოლება მორიგეობით გავამრავლოთ — 2-ზე, —4-ზე და —5-ზე და მივუმატოთ შესაბამისად მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებებს, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ x_2-3x_3+5x_4=-7 \\ -6x_2-10x_3+8x_4=-14 \\ -x_2-10x_3+12x_4=-19. \end{cases} \tag{9}$$

ანალოგიურად, (9) სისტემის მეორე განტოლება მივიღოთ წამყვან განტოლებად და მისი საშუალებით ამ სისტემის მესამე და მეოთხე განტოლებებში გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი, რაც მოგვცემს

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ x_2-3x_3+5x_4=-7 \\ -28x_3+38x_4=-56 \\ -13x_3+17x_4=-26. \end{cases} \tag{10}$$

გამარტივების მიზნით ამ სისტემის მესამე განტოლება გავყოთ —2-ზე და შემდეგ მეოთხე განტოლება მივუმატოთ მესამე განტოლებას, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ x_2-3x_3+5x_4=-7 \\ x_3-2x_4=2 \\ -13x_3+17x_4=-26. \end{cases} \tag{11}$$

ბოლოს მესამე განტოლება გავამრავლოთ 13-ზე და მივუმატოთ მეოთხე განტოლებას, მივიღებთ სამკუთხა სისტემას:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ x_2-3x_3+5x_4=-7 \\ x_3-2x_4=2 \\ -9x_4=0, \end{cases}$$

რომლის ამონახსნია $x_4=0$, $x_3=2$, $x_2=-1$, $x_1=3$ ანუ $(3, -1, 2, 0)$.

მოცემული სისტემის ამოხსნა პრაქტიკულად უფრო მოხერხებულია თუ გამოვიყენებთ სისტემის გაფართოებული მატრიცის ელემენტარულ გარდაქმნებს. ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4=-4 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-7 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases} \tag{12}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ (12) სისტემის გაფართოებული მატრიცა

$$A=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -7 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

წამყვან ელემენტად მივიღოთ $a_{11}=1$, ხოლო წამყვან სტრიქონად — პირველი სტრიქონი· მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ — 2-ზე, —3-ზე, და 1-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები, მივიღებთ ეკვივალენტურ მატრიცას ($A\to A_1$):

$$A_1=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & -10 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

A_1 მატრიცის მეოთხე სტრიქონის ყველა ელემენტი გავამრავლოთ $\frac{1}{2}$-ზე, მივიღებთ ($A_1\to A_2$):

$$A_2=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

A_2-ში წამყვან ელემენტად მივიღოთ, მაგალითად, $a_{44}=1$ და წამყვან სტრიქონად — მეოთხე სტრიქონი. მეორე სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები, ხოლო მესამე სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები გამრავლებული 5-ზე. პირველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მეოთხე სტრიქონი, მივიღებთ ($A_2\to A_3$):

$$A_3=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&-2\\0&3&5&0&-3\\0&-5&7&0&5\\0&-2&1&1&3\end{array}\right).$$

გამოთვლებისას უმჯობესია ისეთი გარდაქმნების ჩატარება და წამყვანი ელემენტების ისეთნაირად შერჩევა, რომ საქმე გვქონდეს მთელ რიცხვებთან (თუ ეს მოხერხდება). ამ მიზნით A_3 მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ 2-ზე, მივიღებთ ($A_3 \to A_4$):

$$A_4=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&-2\\0&6&10&0&-6\\0&-5&7&0&5\\0&-2&1&1&3\end{array}\right).$$

მესამე სტრიქონი მივიღოთ წამყვან სტრიქონად და მისი ელემენტები მივუმატოთ მეორე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, მივიღებთ ($A_4 \to \to A_5$):

$$A_5=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&-2\\0&1&17&0&-1\\0&-5&7&0&5\\0&-2&1&1&3\end{array}\right).$$

წამყვან ელემენტად ავიღოთ $a_{22}=1$, ხოლო წამყვან სტრიქონად — მეორე სტრიქონი. მეორე სტრიქონის ელემენტების 5-ზე ნამრავლი მივუმატოთ მესამე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, ხოლო 2-ზე ნამრავლი მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, მივიღებთ ($A_5 \to A_6$):

$$A_6=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&-2\\0&1&17&0&-1\\0&0&92&0&0\\0&0&35&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&-2\\0&1&17&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&35&1&1\end{array}\right),$$

რომლის შესაბამის წრფივ განტოლებათა სისტემას ექნება სახე:

$$\left\{\begin{aligned}x_1-2x_3&=-2\\x_2+17x_3&=-1\\x_3&=0\\35x_3+x_4&=1.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

ეს სისტემა ეკვივალენტურია (12) სისტემის. (13)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_3=0, \qquad x_4=1, \qquad x_2=-1, \qquad x_1=-2.$$

ამრიგად, მოცემული სისტემის ამონახსნია (—2, 1, —0, 1).

§ ვ. ზეიდელის მეთოდი

წრფივ განტოლებათა სისტემის მიახლოებითი ამოხსნის ზეიდელის მეთოდი არის მარტივი იტერაციის მეთოდის გარკვეული მოდიფიკაცია. ამ მეთოდის შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: x_i უცნობის $(k+1)$-ე მიახლოების გამოთვლისას გამოიყენება $x_1, \quad x_2, \ldots, x_{i-1}$ უცნობებისათვის ადრე გამოთვლილი $(k+1)$-ე მიახლოება. განვიხილოთ სისტემა:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

და დავიყვანოთ იგი შემდეგ სახეზე:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\beta_n+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n \end{array}\right. \tag{2}$$

ანუ მოკლედ

$$x_i=\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

ამ სისტემის ამონახსნის საწყის მიახლოებად ავიღოთ

$$x_1^{(0)}, \quad x_2^{(0)},\ldots, \quad x_n^{(0)},$$

ამასთან, ცხადია უნდა ვეცადოთ, რომ ეს მიახლოება გარკვეული თვალსაზრისით შეესაბამებოდეს საძიებელ $x_1, x_2,\ldots,x_n$ უცნობებს. შემდეგ დავუშვათ, რომ ცნობილია k-ური მიახლოება $x_i^{(k)}$ $(i=1, 2,\ldots,n)$ და ზეიდელის მეთოდით ავაგოთ $(k+1)$-ე მიახლოება შემდეგი ფორმულებით:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)}=\beta_1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k+1)}+\sum\limits_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^{(k+1)}=\beta_i+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum\limits_{j=i}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=\beta_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\alpha_{nj}x_j^{(k+1)}+\alpha_{nn}x_n^{(k)}, \end{array}\right.$$

$(k=0, \ 1, \ 2,\ldots)$.

თუ ეს პროცესი კრებადია (იხ. [6]), მაშინ მისი ზღვარი იქნება (2) სისტემის ამონახსენი.

ზეიდელის მეთოდი გვაძლევს უკეთეს კრებადობას, ვიდრე მარტივი იტერაციის მეთოდი, მაგრამ, საზოგადოდ მას მივყავართ უფრო შრომატევად გამოთვლებთან. ზეიდელის პროცესი შეიძლება იყოს კრებადი იმ შემთხვევაში, როცა მარტივი იტერაციის პროცესი განშლადია და პირიქით. ზოგჯერ ზეიდელის პროცესის კრებადობის სიჩქარე უფრო ნაკლებია მარტივი იტერაციის პროცესის კრებადობის სიჩქარეზე.

შევნიშნოთ, რომ მარტივი იტერაციის პროცესის კრებადობის საკმარისი პირობა საკმარისია აგრეთვე ზეიდელის მეთოდის პროცესის კრებადობისათვისაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left\{\begin{aligned} &10x_1+x_2+x_3=12\\ &2x_1+10x_2+x_3=13\\ &2x_1+2x_2+10x_3=14. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ სისტემას მივცეთ იტერაციისათვის მოხერხებული ფორმა:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1=1,2-0,1x_2-0,1x_3\\ &x_2=1,3-0,2x_1-0,1x_3\\ &x_3=1,4-0,2x_1-0,2x_2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ამონახსნის საწყის (ნულოვან) მიახლოებად მივიღოთ

$$x_1^{(0)}=1,2; \quad x_2^{(0)}=0; \quad x_3^{(0)}=0.$$

ზეიდელის პროცესის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^{(1)}=1,2-0,1\cdot 0-0,1\cdot 0=1,2\\ &x_2^{(1)}=1,3-0,2\cdot 1,2-0,1\cdot 0=1,06\\ &x_3^{(1)}=1,4-0,2\cdot 1,2-0,2\cdot 1,06=0,948. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ანალოგიური მსჯელობით გამოითვლება მეორე მიახლოება:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^{(2)}=1,2-0,1\cdot 1,06-0,1\cdot 0,948=0,9992\\ &x_2^{(2)}=1,3-0,2\cdot 0,9992-0,1\cdot 0,948=1,00536\\ &x_3^{(2)}=1,4-0,2\cdot 0,9992-0,2\cdot 1,00536=0,999098 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

და ა. შ. შევადგინოთ ცხრილი (ცხრ. 1) სადაც მოიცემა გამოთვლის შედეგები ოთხი ნიშნის სიზუსტით:

ცხრილი 1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9991
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.1000	1.0000	1.0000

(3) სისტემის ზუსტი ამონახსენია $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1.$

§ 6. რელაქსაციის მეთოდი

ვთქვათ მოცემულია წრფივ განტოლებათა არაგადაგვარებული სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

თავისუფალი წევრები გადავიტანოთ ტოლობების მარცხენა მხარეში. პირველი განტოლება გავყოთ — a_{11}-ზე, მეორე — a_{22}-ზე და ა. შ. n-ური განტოლება — a_{nn}-ზე. მივიღებთ რელაქსაციისათვის გამზადებულ სისტემას:

$$\begin{cases} -x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n+c_1=0 \\ b_{21}x_1-x_2+\ldots+b_{2n}x_n+c_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\ldots-x_n+c_n=0, \end{cases} \tag{2}$$

სადაც $b_{ij}=\dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}}\,(i\neq j),\quad c_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}}.$

ვთქვათ $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ არის (2) სისტემის ამონახსნის საწყისი (ნულოვანი) მიახლოება. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (2) სისტემაში, მივიღებთ ე. წ. „გადახრას“.

$$
\begin{cases}
R_1^{(0)}=c_1-x_1^{(0)}+\sum\limits_{j=2}^{n} b_{1j}x_j^{(0)}. \\
R_2^{(0)}=c_2-x_2^{(0)}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} b_{2j}x_j^{(0)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
R_n^{(0)}=c_n-x_n^{(0)}+\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{nj}x_j^{(0)}.
\end{cases} \tag{3}
$$

თუ $x_s^{(0)}$ $(s=1,2,\dots,n)$ უცნობებიდან ერთ-ერთ მათგანს მივცემთ $\delta x_s^{(0)}$ ნაზრდს, მაშინ შესაბამისი $R_s^{(0)}$ გადახრა შემცირდება $\delta x_s^{(0)}$ სიდიდით, ხოლო ყველა დანარჩენი $R_i^{(0)}(i\neq s,\ i=1,2,\dots,n)$ გადიდდება $b_{is}\delta x_s^{(0)}$ სიდიდით. ამრიგად, იმისათვის, რომ მომდევნო $R_s^{(1)}$ გადახრა ვაქციოთ ნულად, საკმარისია $x_s^{(0)}$ სიდიდეს მივცეთ $\delta x_s^{(0)}=R_s^{(0)}$ ნაზრდი, მივიღებთ: $R_s^{(1)}=0$ და $R_i^{(1)}=R_i^{(0)}+b_{is}\delta x_s^{(0)}$, როცა $i\neq s$.

რელაქსაციის (შესუსტების) მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ ყოველ ნაბიჯზე მიახლოების სათანადო კომპონენტის მნიშვნელობის ცვლილების საშუალებით ნულად ვაქცევთ მოდულით მაქსიმალურ R_i გადახრას. პროცესი დამთავრდება იმ მომენტში როცა საბოლოოდ გარდაქმნილი სისტემის ყველა R_i გადახრა იქნება ნულის ტოლი მოცემული სიზუსტით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რელაქსაციის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$
\begin{cases}
10x_1-2x_2-2x_3=6 \\
-x_1+10x_2-2x_3=7 \\
-x_1-x_2+10x_3=8,
\end{cases} \tag{4}
$$

გამოთვლები შევასრულოთ ორი ათობითი ნიშნის სიზუსტით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემა დავიყვანოთ რელაქსაციისათვის მოხერხებულ სახეზე.

$$
\begin{cases}
-x_1+0,2x_2+0,2x_3+0,6=0 \\
-x_2+0,1x_1+0,2x_3+0,7=0 \\
-x_3+0,1x_1+0,1x_2+0,8=0.
\end{cases}
$$

ამონახსნების საწყის (ნულოვან) მიახლოებად მივიღოთ ნულოვანი მნიშვნელობები

$$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$$

და ვიპოვოთ შესაბამისი $R_i^{(0)}$ $(i=1,2,3)$:

$$R_1^{(0)}=0{,}60;\quad R_2^{(0)}=0{,}70;\quad R_3^{(0)}=0{,}80.$$

ზემოთ მოყვანილი ზოგადი თეორიის მიხედვით დავუშვათ:

$$\delta x_3^{(0)}=0{,}80.$$

აქედან მივიღებთ:

$$R_1^{(1)}=R_1^{(0)}+0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}60+0{,}16=0{,}76;$$
$$R_2^{(1)}=R_2^{(0)}+0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}70+0{,}16=0{,}86;$$
$$R_3^{(1)}=R_1^{(0)}-R_2^{(0)}=0.$$

რელაქსაციის მეთოდით მოცემული სისტემის ამოხსნა მოყვანილია ცხრილში (ცხრ. 1).

ცხრილი 1

	x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
	0	0,60	0	0,70	0	0,80
		$\frac{0{,}16}{0{,}76}$		$\frac{0{,}16}{0{,}86}$	0,80	$-\frac{0{,}80}{0}$
		$\frac{0.17}{0{,}93}$	0,86	$-\frac{0{,}86}{0}$		$\frac{0{,}09}{0{,}09}$
	0,93	$-\frac{0{,}93}{0}$		$\frac{0{,}09}{0{,}09}$		$\frac{0{,}09}{0{,}18}$
		$\frac{0{,}04}{0{,}04}$		$\frac{0{,}04}{0{,}13}$	0,18	$-\frac{0{,}18}{0}$
		$\frac{0{,}03}{0.07}$	0,13	$-\frac{0{,}13}{0}$		$\frac{0{,}01}{0{,}01}$
	0,7	$-\frac{0{,}07}{0}$		$\frac{0{,}01}{0{,}01}$		$\frac{0{,}01}{0.02}$
		$\frac{0}{0}$		$\frac{0}{0{,}01}$	0,2	$-\frac{0{,}02}{0}$
		$\frac{0}{0}$	0,01	$-\frac{0{,}01}{0}$		$\frac{0}{0}$
$\sum$	1,00		1,00		1,00	

შემდეგ დავუშვებთ $\delta x_2^{(1)}=0{,}86$ და ა. შ. (გამოთვლების შედეგები

მოცემულია აღნიშნულ ცხრილში). თუ შევკრებთ ყველა $\delta_i^{(k)}(i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots)$ ნაზრდებს, მივიღებთ ამონახსნთა მნიშვნელობებს:

$$x_1=0+0,93+0,07=1,00$$
$$x_2=0+0,86+0,13+0,01=1,00$$
$$x_3=0+0,80+0,18+0,02=1,00.$$

შემოწმებისათვის, მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ მოცემული სისტემის განტოლებებში. ამ შემთხვევაში (4) სისტემა ამოხსნილია ზუსტად $x_1=x_2=x_3=1$.

§ 7. არაწრფივ განტოლებათა სისტემების მიახლოებითი ამოხსნა

არაწრფივ განტოლებათა სისტემას ზოგადად აქვს სახე

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $f_1, f_2,\ldots,f_n$ არიან $x_1, x_2, \ldots,x_n$ ცვლადების ნამდვილი ფუნქციები. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

მაშინ (1) ჩაიწერება

$$f(x)=0 \tag{1'}$$

სახით.

ვიგულისხმოთ, რომ (1) განტოლებას აქვს ამონახსენი და ვიპოვოთ იგი მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. დავუშვათ ცნობილია ამ განტოლების იზოლირებული x ამონახსნის p-ური მიახლოება:

$$x^{(p)}=(x_1^{(p)},\ x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)}).$$

მაშინ (1′) -ის ზუსტი ამონახსენი მოიცემა

$$x=x^{(0)}+\varepsilon^{(p)} \tag{2}$$

ტოლობით, სადაც $\varepsilon^{(p)}=(\varepsilon_1^{(p)},\ \varepsilon_2^{(p)},\ldots,\varepsilon_n^{(p)})$ არის გადახრა ანუ ცდომილება. ცხადია

$$f(x^{(p)}+\varepsilon^{(p)})=0. \tag{3}$$

დავუშვათ, რომ $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა x და $x^{(p)}$-ის შემცველ რაიმე არეში. (3)-ის მარჯვენა მხარე გავშალოთ ამ არეში $\varepsilon^{(p)}$-ს ხარისხების მიხედვით და მასში შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები

$$f(x^{(p)}+\varepsilon^{(p)})=f(x^{(p)})+f'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)}=0, \tag{4}$$

ან

$$\begin{aligned} f_i(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)},x_2+\varepsilon_2^{(p)},\ldots, x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)})&=f_i(x_1^{(p)}, x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)})+\\ +f'_{ix_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\ldots, x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)}+\ldots&+f'_{ix_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} \\ &(i=1,2,\ldots,n). \end{aligned} \tag{4'}$$

(4) და (4′) ფორმულებიდან გამომდინარე $f'(x)$-ში იგულისხმება $f_i(i=1,2,\ldots,n)$ ფუნქციების იაკობის მატრიცა, ე. ი.

$$f'(x)=F(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] (i,\, j=1,\,2,\cdots n),$$

ცხადია, რომ (4′) არის $\varepsilon_i^{(p)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ მიმართ წრფივი ფუნქცია:

$$f(x^{(p)})+F(x^{(p)})\varepsilon^{(p)}=0.$$

თუ იაკობის მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან

$$\varepsilon^{(p)}=-F^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}),$$

საიდანაც მიიღება რეკურენტული დამოკიდებულება საძიებელი ცვლადების მიმართ

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-F^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) \quad (p=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

ნულოვან მიახლოებად შეგვიძლია ავიღოთ საძიებელი ცვლადების ნებისმიერი, თუნდაც უხეში მიახლოება, იზოლირებული ამონახსნის არსებობის შუალედიდან. აღნიშნულ მეთოდს უწოდებენ ნ ი უ ტ ო ნ ი ს მ ე თ ო დ ს. ამ მეთოდით (1) სისტემის ამონახსნების არსებობის, ერთადერთობის და მიმდევრობით მიახლოების პროცესის კრებადობის შესახებ პასუხს გვაძლევს შემდეგი.

თ ე ო რ ე მ ა 1. ვთქვათ მოცემულია არაწრფივ განტოლებათა (1) სისტემა, სადაც

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2\ldots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია და გააჩნია პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ წერტილის რაიმე ω არეში, ე. ი. $f(x)\in C^{(2)}(\omega)$.

ვთქვათ $x^{(0)}$ წერტილი თავისი ჩაკეტილი K მიდამოთი ეკუთვნის ω-ს ე. ი.

$$\overline{U}_K(x^{(0)})=\{\|x-x^{(0)}\|\leqslant K\}\subset\omega,$$

ამასთან კმაყოფილდება შემდეგი პირობები:

1. როცა $x=x^{(0)}$, მაშინ იაკობის $F(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ $(i, \ j=1,2,\ldots,n)$ მატრიცას გააჩნია შებრუნებული F^{-1} მატრიცა და

$$\|F^{-1}(x^{(0)})\|\leqslant A_0;$$

2. $\|F^{-1}(x^{(0)})\cdot f(x^{(0)})\|\leqslant B_0\leqslant \frac{K}{2}$;

3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|\leqslant C$ $(i,j=1,\ 2,\ldots,n)$ და $x\in\overline{U}_K(x^{(0)})$;

4. A_0, B_0 და C აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$\mu_0=2nA_0B_0C\leqslant 1,$$

მაშინ $x^{(0)}$ საწყისი მნიშვნელობების შესაბამისი ნიუტონის პროცესი

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-F^{-1}(x^{(0)})f(x^{(p)})\quad (p=0,1,2,\ldots)$$

კრებადია და

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)}=x^*$$

არის $\overline{U}$ არეში (1) სისტემის ისეთი ერთადერთი ამონახსენი, რომ

$$\|x^*-x^{(0)}\|\leqslant 2B_0\leqslant K.$$

მართებულია აგრეთვე პროცესის კრებადობის სიჩქარის შესახებ

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ შესრულებულია წინა თეორემის 1)—4) პირობები, მაშინ $x^{(p)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$ მიმდევრობითი მიახლოებისათვის მართებულია

$$\|x^*-x^{(p)}\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{\,2^{p-1}} B_0,$$

უტოლობა, სადაც x^* არის (1)-ის ამონახსენი, ხოლო μ_0 განსაზღვრულია 1-ლი თეორემის მე-4 პირობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ნიუტონის მეთოდით ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+y^2-4z=0 \\ 3x^2-4y+z^2=0 \end{cases}$$

სისტემის დადებითი ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ მისი საწყისი მნიშვნელობაა

$$x_0=y_0=z_0=\frac{1}{2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$f(x)=\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{pmatrix}.$$

აქედან

$$f(x^{(0)})=\begin{pmatrix} 0,25+0,25+0,25-1 \\ 0,5+0,25-2 \\ 0,75-2+0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ იაკობის მატრიცი

$$F(x)=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$F(x^{(0)})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F(x^{(0)}) = -40,$$

$$F^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}.$$

(5)-დან მივიღებთ პირველ მიახლოებას

$$x^{(1)} = x^{(0)} - F^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ მეორე მიახლოება

$$f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,875^2 + 0,5^2 + 0,375^2 - 1 \\ 2\cdot 0,875 + 0,5^2 - 4\cdot 0.375 \\ 3\cdot 0,875^2 - 4\cdot 0,5 + 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{pmatrix},$$

$$F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0,875 & 2\cdot 0,5 & 2\cdot 0,375 \\ 4\cdot 0.875 & 2\cdot 0,5 & -4 \\ 6\cdot 0,875 & -4 & 2\cdot 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{pmatrix},$$

$$\det F(x^{(1)}) = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{vmatrix} = -64,75,$$

$$F^{-1}(x^{(1)}) = -\frac{1}{64,75}\begin{pmatrix} -15,25 & -3,75 & -4.75 \\ -23,625 & -2,6625 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{pmatrix}.$$

(5)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$x^{(2)}=x^{(1)}-F^{-1}(x^{(1)})f(x^{(1)})=\begin{pmatrix}0,875\\0,500\\0,375\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{64,75}\begin{pmatrix}-15,25 & -3,75 & -4,75\\-23,625 & -2,6250 & 9,625\\-19,25 & 12,25 & -1,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,15625\\0,28125\\0,43750\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,875\\0,5\\0,375\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,08519\\0,00338\\0,00507\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,78931\\0,49662\\0,36993\end{pmatrix}.$$

ანალოგიურად მიიღება

$$x^{(3)}=\begin{pmatrix}0,78521\\0,49662\\0,36992\end{pmatrix},\qquad f(x^{(3)})=\begin{pmatrix}0,00001\\0,00004\\0,00005\end{pmatrix}$$

და ა. შ.

თუ დავკმაყოფილდებით მესამე მიახლოებით, მივიღებთ

$$x=0,7852,\quad y=0,4966,\quad z=0,3699.$$

§ 8. დაშვების მეთოდები. გრადიენტული დაშვების მეთოდი

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$f_i(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=0,\quad (i=1,2,\dots,n),\tag{1}$$

სადაც

$$f_i:R^n\to R^1;\quad D(f_i)=G;\quad f_i,\ \ \frac{\partial f}{\partial x_i}\in C(G);\ (i=1,2,\dots,n),$$

ვიგულისხმოთ, რომ G არეში (1) სისტემას აქვს მხოლოდ იზოლირებული ამონახსნები.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\tag{2}$$

ანუ

$$\Phi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)f_j(x_1,x_2,\dots,x_n),\tag{3}$$

სადაც a_{ij} წარმოადგენენ დადებითად განსაზღვრულ რაიმე მატრიცის

ელემენტებს. მაშინ (1) სისტემის ყოველ $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ამონახსენს შეესაბამება $\Phi(x)$ ფუნქციის ნულოვანი მინიმუმი და პირიქით, $\Phi(x)$ ფუნქციის ყოველი ნულოვანი მინიმუმის წერტილი წარმოადგენს (1) სისტემის ამონახსენს.

ამგვარად, (1) სისტემის ამოხსნის ამოცანა მიიყვანება დამხმარე $\Phi(x)$ ფუნქციის ნულოვანი მინიმუმის წერტილის პოვნაზე.

ვთქვათ $x^{(0)}$ არის (1) სისტემის რაიმე ამონახსნის საწყისი მიახლოება, ე. ი. $\Phi(x)$ ფუნქციის — ნულოვანი მინიმუმის წერტილის მიახლოებითი მნიშვნელობა. განვიხილოთ $\Phi(x)=\Phi(x^{(0)})$ დონის ზედაპირი. ვთქვათ, V_0 არის ამ ზედაპირის $x^{(0)}$ წერტილში გამავალი არამხები მიმართულების ვექტორი. ავიღოთ $x=x^{(0)}+\lambda V_0$ წრფე. $x^{(0)}$ წერტილიდან ვიმოძრაოთ ამ წრფის გასწვრივ $\Phi(x)$ ფუნქციის კლებადობის მიმართულებით მანამ, სანამ $\Psi(\lambda)=\Phi(x^{(0)}+\lambda V_0)$ ფუნქცია არ მიაღწევს $\lambda=0$-თან უახლოეს მინიმუმის წერტილს. ვთქვათ ეს მიიღწევა როცა $\lambda=\lambda_0$, მაშინ მივიღებთ $x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda_0 V_0$ წერტილს. ახლა განვიხილოთ $\Phi(x)=\Phi(x^{(1)})$ დონის ზედაპირი და მის $x^{(1)}$ წერტილში გამავალი არამხები მიმართულების V_1 ვექტორი. კვლავ მოვძებნოთ $\Psi_1(\lambda)=\Phi(x^{(1)}+\lambda V_1)$ ფუნქციის უახლოესი მინიმუმი. ვთქვათ იგი მიიღწევა როცა $\lambda=\lambda_1$. შემდეგ დავუშვათ $x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda_1 V_1$ და ა. შ. ყოველ ეტაპზე გვიხდება გადაადგილება $\Phi(x)$ ფუნქციის კლებადობის მიმართულებით, ე. ი. ვახდენთ დაშვებას მინიმუმის წერტილისაკენ.

ზემოთ აღწერილი პროცესის ყოველ ბიჯზე საჭიროა ერთი ცვლადის

$$\Psi_k(\lambda)=\Phi(x^{(k)}+\lambda V_k) \tag{3}$$

ფუნქციის უახლოესი მინიმუმის მოძებნა, რომელსაც ვახორციელებთ

$$\Psi'(\lambda)=0 \tag{4}$$

განტოლების ამოხსნით.

ვიპოვით რა k-ურ ბიჯზე λ პარამეტრის λ_k-ურ მიახლოებით მნიშვნელობას შემდეგ ვუშვებთ:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k V_k. \tag{5}$$

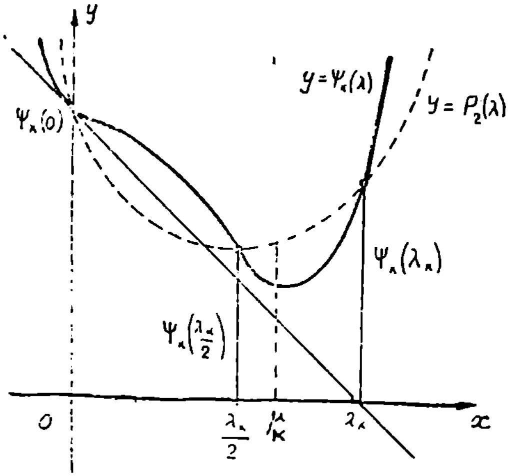
აუცილებელი არ არის, რომ λ_k პარამეტრის მნიშვნელობა ვიპოვოთ $\Psi_k(\lambda)$ ფუნქციის მინიმუმის პირობიდან. λ_k მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ, ნებისმიერი, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\Psi_k(\lambda_k)<\Psi_k(0). \tag{6}$$

λ_k და V_k პარამეტრების შერჩევის სხვადასხვა საშუალებებით განისაზღვრება სხვადასხვა დაშვების მეთოდი. ყველაზე ეფექტურია ავიღოთ

$$V_k=-\mathrm{grad}\Phi_k(x^{(k)})=\left(-\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_1}, -\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_2},\ldots,-\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_n}\right), \tag{7}$$

რადგან იგი გვაძლევს $x^{(k)}$-წერტილში $\Phi(x)$ ფუნქციის ყველაზე სწრაფი კლებადობის მიმართულებას. მეთოდებს რომლებშიაც $V_k = -\mathrm{grad}\,\Phi(x^{(k)})$ უწოდებენ უსწრაფესი ანუ გრადიენტული დაშვების მეთოდებს. ხშირად V_k ვექტორის მიმართულებად იღებენ საკოორდინატო ღერძებს, ასეთ მეთოდებს უწოდებენ *კოორდინატული დაშვების* მეთოდებს.



ნახ. 19

ბუნებრივია V_k ვექტორად ავიღოთ საკოორდინატო ღერძის ის მიმართულება, რომლის გასწვრივაც $|\Phi'(x)|$ ფუნქცია მინიმალურია. ასეთ მეთოდებს უწოდებენ *რელაქსაციურს*.

შემოვისაზღვროთ $V_k = -\mathrm{grad}\,\Phi(x^{(k)})$ შემთხვევის განხილვით. პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ორი ვარიანტი:

პირველ ვარიანტში λ_k-ს მნიშვნელობად იღებენ $y=\Psi_k(\lambda)=\Phi(x^{(k)}-\lambda\,\mathrm{grad}\,\Phi(x^{(k)}))$ წირის $(0, \Psi_k(0))$ წერტილში გამავალი მხებისა და λ ღერძის გადაკვეთის აბსცისას (ნახ. 19).

ცხადია

$$\lambda_k = -\frac{\Psi_k(0)}{\Psi'_k(0)} = \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\,\Phi(x^{(k)})}{\partial x_s}\right)^2}. \tag{8}$$

ამ ვარიანტის შესაბამისი მიმდევრობითი მიახლოებები მოიცემა ფორმულით:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_s}\right)^2}\,\mathrm{grad}\,\Phi(x^{(k)}). \tag{9}$$

მეორე ვარიანტში მოიძებნება შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)=\Phi\left(x^{(k)}-\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{grad}\Phi(x^{(k)})\right),$$

$$\Psi_k(\lambda_k)=\Phi(x^{(k)}-\lambda_k\operatorname{grad}\Phi(x^{(k)})),$$

სადაც λ_k განისაზღვრება (8) ტოლობიდან.

$\lambda=0,\ \frac{\lambda_k}{2},\ \lambda_k$ წერტილებში $\Psi_k(\lambda)$ ფუნქციის მნიშვნელობების მიხედვით აგებენ $P_2(\lambda)$ საინტერპოლაციო პოლინომს. λ-ს მნიშვნელობად კი იღებენ $P_2(\lambda)$ პოლინომის მინიმუმის μ_k წერტილს (ნახ. 19). რადგან

$$P_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\Psi_k(0)(2\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_0)-4\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)(\lambda-\lambda_k)\lambda+\right.$$

$$\left.+\Psi_k(\lambda_k)(2\lambda-\lambda_k)\lambda\right],$$

ხოლო

$$P_2'(\lambda)=\left[\Psi_k(0)(4\lambda-3\lambda_k)-4\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)(2\lambda-\lambda_k)+\Psi_k(\lambda_k)(4\lambda-\lambda_k)\right].$$

ამიტომ $P_2'(\mu_k)=0$ პირობიდან ვღებულობთ:

$$\mu_k=\frac{3\Psi_k(0)-4\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)+\Psi_k(\lambda_k)}{4\left[\Psi_k(0)-2\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)+\Psi_k(\lambda_k)\right]}\cdot\lambda_k. \tag{10}$$

ამრიგად, აღნიშნულ ვარიანტში $(k+1)$-ე მიახლოების გამოსათვლელად პირველ რიგში (8) ტოლობიდან ვპოულობთ λ_k-ს მნიშვნელობას, ხოლო მისი საშუალებით ვითვლით

$$\Psi_k(0)=\Phi(x^{(k)}),$$

$$\Psi_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)=\Phi\left(x^{(k)}-\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{grad}\Phi(x^{(k)})\right),$$

$$\Psi_k(\lambda_k)=(\Phi x^{(k)}-\lambda_k\operatorname{grad}\Phi(x^{(k)}))$$

სიდიდეებს, (10) ფორმულით ვპოულობთ μ_k-ს და ბოლოს

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\mu_k\operatorname{grad}\Phi(x^{(k)}). \tag{11}$$

მიუხედავად იმისა, რომ, მეორე ვარიანტში უფრო მეტი გამოთვლების ჩატარებაა საჭირო, პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ იგი გაცილებით სწრაფად კრებადია ვიდრე პირველ ვარიანტში აგებული იტერაციული პროცესი.

შევნიშნოთ, რომ თუ საძიებელი ამონახსნის მიდამოში $\Phi(x)$ ფუნქციას გააჩნია არანულოვანი მინიმუმი, მაშინ გრადიენტის მეთოდმა შეიძლება არც მოგვცეს ამონახსნი. გარდა ამისა, გრადიენტის მეთოდის გამოყენებას ართულებს არა მარტო $\Phi(x)$ ფუნქციის არანულოვანი მინიმუმის არსებობა, არამედ ისეთი წერტილების არსებობაც რომლებშიაც $\Phi(x)=0$.

სავარჯიშო

1) კრამერის წესით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 2x_1-5x_2-x_3=-1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x_1-3x_2=-2 \\ 5x_1-4x_2+x_3=1 \\ 3x_1+x_2+x_3=-5 \end{cases}$

1) შებრუნებული მატრიცის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=8 \\ 3x_1-4x_3+x_4=-1 \\ -x_1+2x_2+3x_3-x_4=-2 \\ 6x_1-x_2+x_3-x_4=-4 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x_1+x_3+x_4=-2 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=1 \\ -2x_1+x_2+x_3-2x_4=-3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4=1 \end{cases}$

3) გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4=-4 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=19 \\ 4x_1-5x_2+6x_3-7x_4=-6 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x_2-x_3+4x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-x_4=-8 \\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=-2 \end{cases}$

4) ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} 8x_1-0,5x_2+0,3x_3=13 \\ 2x_1-12x_2-0,7x_3=-18,7 \\ x_1+3x_2+2x_3=6,8 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 20x_1-5x_2+x_3+x_4=-17,8 \\ 2x_1+11x_2+2x_3+3x_4=3,6 \\ 3x_1-2x_2+22x_3+x_4=20,2 \\ x_1+x_2-3x_3+8x_4=17,6 \end{cases}$

5) რელაქსაციის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} 15x_1-3x_2-3x_3=8 \\ x_1+15x_2-3x_3=9 \\ x_1+x_2+15x_3=10 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x_1+0,0.1x_2+0,02x_3=0,025 \\ -x_1+4x_2-0,3x_3=1,7 \\ -x_1-0,4x_2+5x_3=4,8 \end{cases}$

6) ნიუტონის მეთოდით ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 3x^2-2y^2+2z^2=9 \\ x^2+y+z^2=6 \\ 2x^2-6y+z^2=0 \end{cases}$$

სისტემის დადებითი ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x_0=y_0=$ $=z_0=0,5$ საწყისი მიახლოებიდან გამომდინარე.

VI თავი

ფუნქციათა ინტერპოლირება

§1. ინტერპოლირების ამოცანის დასმა

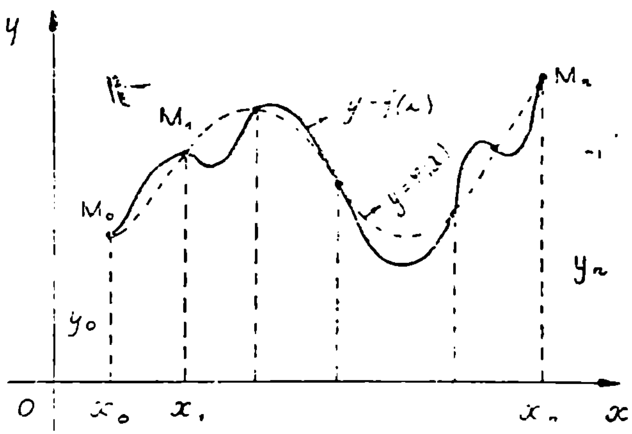
ვთქვათ მოცემულია x არგუმენტის $x_0, x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობების შესაბამისი რაიმე $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები:

$$f(x_0)=y_0,\quad f(x_1)=y_1,\ldots,\quad f(x)_n=y_n \qquad (1)$$

საჭიროა ავაგოთ ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს

$$\varphi(x_0),=y_0,\quad \varphi(x_1)=y_1,\ldots,\varphi(x_n)=y_n \qquad (2)$$

პირობებს. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს ისეთი $y=\varphi(x)$ წირის აგებას, რომელიც გადის $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1),\ldots,$ $(x_n,\ y_n)$ წერტილებზე. ცხადია, აღნიშნულ წერტილებზე შეიძლება უამრავი (ნახ. 20) წირის გავლება, ე. ი. არსებობს უამრავი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს



ნახ. 20

(2) პირობებს. ბუნებრივია წამოიჭრას ამოცანა: ვიპოვოთ ფუნქციათა კლასი, რომელშიაც იარსებებს ისეთი ერთადერთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც შესრულდება (2) პირობები.

ეს ამოცანა იქნება ცალსახა თუ ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ ისეთ $P(x)$ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება მოცემულ n რიცხვს და დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$P(x_0)=y_0, \quad P(x_1)=y_1, \ldots, \quad P(x_n)=y_n. \tag{3}$$

ასეთ ამოცანას ეწოდება პ ა რ ა ბ ო ლ უ რ ი ი ნ ტ ე რ პ ო ლ ი რ ე ბ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა, ხოლო $x_0, x_1, \ldots, x_n$ წერტილებს — ი ნ ტ ე რ პ ო ლ ა ც ი ი ს კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი. $P(x)$ პოლინომს, რომელიც აკმაყოფილებს (3) პირობებს, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ს ა ი ნ ტ ე რ პ ო ლ ა ც ი ო პ ო ლ ი ნ ო მ ი $x_0, x_1, \ldots, x_n$ კვანძების მიმართ.

ინტერპოლირების ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ფუნქცია, რომლისთვისაც მოცემულია მნიშვნელობათა (1) ცხრილი, უნდა შევცვალოთ ისეთი $P(x)$ პოლინომით, რომელიც წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებით ანალიზურ გამოსახულებას:

$$f(x) \approx P(x). \tag{4}$$

თუ x მოთავსებულია, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ კვანძების შემცველი მინიმალური სეგმენტის გარეთ, მაშინ (4) ფორმულას ეწოდება ე ქ ს ტ რ ა პ ო ლ ა ც ი ა.

ბუნებრივია ისმის ორი კითხვა: 1) ყოველთვის შესაძლებელია, თუ არა საინტერპოლაციო პოლინომის აგება და თუ შესაძლებელია, როდის იქნება ის ერთადერთი? 2) როგორია მიახლოების სიზუსტის რიგი?

თ ე ო რ ე მ ა. არსებობს ერთადერთი $P_n(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს და რომელიც დააკმაყოფილებს (3) პირობებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია $n+1$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული საინტერპოლაციო $x_0, x_1, \ldots, x_n$ კვანძები და $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები: $y_0, y_1, \ldots, y_n$. საჭიროა ავაგოთ ისეთი საინტერპოლაციო პოლინომი,

$$P_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

რომელიც დააკმაყოფილებს (3) პირობებს. ცხადია, რომ a_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ კოეფიციენტები დააკმაყოფილებენ შემდეგ სისტემას:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+\ldots+a_mx_0{}^m=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\ldots+a_mx_1{}^m=y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\ldots+a_mx_n{}^m=y_n. \end{array}\right. \tag{5}$$

ვთქვათ, $k \leqslant \min\ \{m+1,\ n+1\}$. განვიხილოთ (5) სისტემის პირველი k სტრიქონისა და პირველი k სვეტის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი და აღვნიშნოთ იგი ასე:

$$W(x_0,\ x_1,\ldots,x_{k-1})=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{k-1} & \ldots & x_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტს ეწოდება ვანდერმონდის დეტერმინანტი. მტკიცდება, რომ

$$W(x_0,x_1,\ldots,x_{k-1})=\prod_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k-1}(x_j-x_i). \tag{6}$$

რადგან $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, ამიტომ (6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $W(x_0,\ x_1,\ldots,x_{k-1})\neq 0$. ამრიგად, (5) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის $m+1$ და $n+1$ რიცხვებს შორის უმცირესს. აქედან გამომდინარე, თუ $n>m$, მაშინ (5) სისტემას, საზოგადოდ. არა აქვს ამონახსენი. თუ $n \leqslant m$,მაშინ (5) სისტემის ამონახსენი ყოველთვის არსებობს. ამასთან, როცა $n=m$, მაშინ ამონახსენი ერთადერთია. როცა $n<m$, მაშინ ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა. ამრიგად, $n+1$ კვანძზე ფუნქციის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის არსებობს ერთადერთი პოლინომი რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს და რომელიც ამ კვანძებზე ღებულობს მოცემულ მნიშვნელობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. სასრული სხვაობები

ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია. x არგუმენტის ნაზრდის (ბიჯი) ფიქსირებული სიდიდე აღვნიშნოთ $\Delta x=h$ სიმბოლოთი.

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{1}$$

გამოსახულებას ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის **პირველი რიგის სასრული სხვაობა.** **მეორე რიგის სასრული სხვაობა** ეწოდება პირველი რიგის სასრული სხვაობის სასრულ სხვაობას და აღინიშნება $\Delta^2 y$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y)=\Delta[f(x+\Delta x)-f(x)]=[f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)]-$$
$$-[f(x+\Delta x)-f(x)]=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x).$$

ანალოგიურად განისაზღვრებიან მაღალი რიგის სასრული სხვაობები.

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის n-ური რიგის სასრული სხვაობა

$$\Delta^n y=\Delta(\Delta^{n-1}y) \qquad (n=2,3,\ldots).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავაგოთ $P(x)=x^3-2x$ ფუნქციის სასრული სხვაობები $h=1$ ბიჯით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.[1] გვაქვს

$$\Delta P(x)=(x+1)^3-2(x+1)-(x^3-2x)=$$
$$=x^3+3x^2+3x+1-2x-2-x^3+2x=3x^2+3x-1;$$
$$\Delta^2 P(x)=\Delta(3x^2+3x-1)=3(x+1)^2+3(x+1)-1-$$
$$-(3x^2+3x-1)=3x^2+6x+3+3x+3-1-3x^2-3x+1=6x+6;$$
$$\Delta^3 P(x)=\Delta(\Delta^2 P(x))=\Delta(6x+6)=6(x+1)+6-(6x+6)=6;$$
$$\Delta^4 P(x)=\Delta(\Delta^3 P(x))=\Delta(6)=6-6=0;$$

ე. ი.

$$\Delta^3 P(x)=\mathrm{const}, \quad \Delta^n P(x)=0, \text{ თუ } n>3.$$

საზოგადოდ, თუ გვაქვს n-ური ხარისხის

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

პოლინომი, მაშინ

$$\Delta^n P_n(x)=n!a_0h^n=\mathrm{const}, \qquad \text{სადაც } \Delta x=h.$$

მართლაც, გავიხსენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა

$$(a+b)^n=C_n^0a^0b^n+C_n^1ab^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}+\ldots+C_n^na^nb^0$$

და შევასრულოთ მოქმედებები პირველი რიგის სასრული სხვაობის გამოსახულებაში

$$\Delta P_n(x)=P_n(x+h)-P_n(x)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x+h)+a_n-(a_0x^n+ax^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)=$$
$$=a_0[(x+h)^n-x^n]+a_1[(x+h)^{n-1}-x^{n-1}]+\ldots+a_{n-1}[(x+h)-x],$$

მივიღებთ $n-1$ ხარისხის

$$\Delta P_n(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$$

მრავალწევრს, სადაც $b_0=nha_0$. მეორე რიგის სასრული სხვაობისათვის გვექნება

$$\Delta^2 P_n(x)=\Delta(\Delta P_n(x))=b_0(x+h)^{n-1}+b_1(x+h)^{n-2}+\ldots+b_{n-1}-$$
$$-(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})=b_0[(x+h)^{n-1}-x^{n-1}]+$$
$$+b_1[(x+h)^{n-2}-x^{n-2}]+\ldots+b_{n-2}[(x+h)-x].$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ $n-2$ ხარისხის

$$\Delta^2 P_n(x)=c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-3}x+c_{n-2},$$

მრავალწევრს, სადაც $c_0=(n-1)hb_0=n(n-1)h^2a_0$. ანალოგიური მსჯელობით, საზოგადოდ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta^n P_n(x)=n!a_0h^n=\text{const},\ \Delta^k P_n(x)=0,\ \text{როცა}\ k>n.$$

Δ სიმბოლო შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ოპერატორი, რომელიც $y=f(x)$ ფუნქციას შეუსაბამებს $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ სხვაობას ($\Delta x=\text{const}$). ადვილი შესამოწმებელია Δ ოპერატორის შემდეგი თვისებები:

1) თუ $c=\text{const}$, მაშინ $\Delta c=0$;
2) $\Delta(cf(x))=c\Delta f(x)$;
3) $\Delta(f_1(x)+f_2(x))=\Delta f_1(x)+\Delta f_2(x)$;
4) $\Delta^m(\Delta^n f(x))=\Delta^{m+n}f(x)$;

სადაც m და n მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, ამასთან განსაზღვრების თანახმად მიღებულია $\Delta^0 f(x)=f(x)$.

(1) ფორმულიდან გვაქვს

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

თუ Δ ოპერატორს განვიხილავთ როგორც სიმბოლურ თანამამრავლს, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$f(x+\Delta x)=(1+\Delta)f(x). \tag{2}$$

ამ ფორმულის თანამიმდევრულად n-ჯერ გამოყენება მოგვცემს

$$f(x+n\cdot\Delta x)=(1+\Delta)^n f(x). \tag{3}$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x+n\Delta x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(x), \tag{4}$$

სადაც

$$C^k_n=\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$$

არის k — ელემენტიან ჯუფდებათა რიცხვი n ელემენტიდან.

ამრიგად, (4) ფორმულით გამოისახებიან $f(x)$ ფუნქციის თანამიმდევრული მნიშვნელობები მისი, სხვადასხვა რიგის, სასრული სხვაობებით.

თუ ვისარგებლებთ $\Delta \equiv (1+\Delta)-1$ იგივეობით და ნიუტონის ბინომის ფორმულით, მივიღებთ

$$\Delta^n f(x)=[(1+\Delta)-1]^n f(x)=(1+\Delta)^n f(x)-C_n^1(1+\Delta)^{n-1}f(x)+$$
$$+C_n^2(1+\Delta)^{n-2}f(x)-\ldots+(-1)^n f(x).$$

აქედან, (3) ფორმულის გათვალისწინებით

$$\Delta^n f(x)=f(x+n\Delta x)=C^1{}_n f[x+(n-1)\Delta x]+$$
$$+C_n^2 f[x+(n-2)\Delta x]-\ldots+(-1)^n f(x), \tag{5}$$

რომელიც გვაძლევს $f(x)$ ფუნქციის n-ური რიგის სასრული სხვაობის გამოსახულებას ამ ფუნქციის თანამიმდევრული მნიშვნელობებით.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი $f^{(n)}(x)$ წარმოებული $[x, x+n\Delta x]$ სეგმენტზე, მაშინ მართებულია ფორმულა

$$\Delta^n f(x)=(\Delta x)^n f^{(n)}(x+\theta n\Delta x), \tag{6}$$

სადაც $0<\theta<1$.

(6) ფორმულის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი:

როცა $n=1$, მაშინ მივიღებთ ლანგრანჟის სასრული ნაზრდის

$$\Delta f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)$$

ფორმულას, ე. ი. $n=1$ მნიშვნელობისათვის (6) ტოლობა მართებულია. დავუშვათ, რომ როცა $k<n$, სრულდება ტოლობა

$$\Delta^k f(x)=(\Delta x)^k f^{(k)}(x+\theta' k\Delta x),$$

სადაც $0<\theta'<1$. მაშინ

$$\Delta^{k+1} f(x)=\Delta^k[f(x+\Delta x)-f(x)]=$$
$$=(\Delta x)^k[f^{(k)}(x+\Delta x+\theta' k\Delta x)-f^{(k)}(x+\theta' k\Delta x)].$$

აქედან, ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta^{k+1} f(x)=(\Delta x)^k \Delta f^{(k+1)}(x+\theta' k\Delta x+\theta''\Delta x),$$

სადაც $0<\theta''<1$. თუ დავუშვებთ, რომ $\dfrac{\theta' k+\theta''}{k+1}=\theta$, მაშინ მივიღებთ

$$\Delta^{k+1} f(x)=(\Delta x)^{k+1} f^{k+1}(x+\theta(k+1)\Delta x),$$

ამასთან, $0<\theta<1$; მართლაც, $0<\theta'<1$, ამიტომ $0<\theta' k<k$; გვაქვს, $0<\theta''<1$. ამ ორი უტოლობის შეკრებით მივიღებთ $0<k\theta'+\theta''<$

$<k+1$, საიდანაც $0<\frac{k\theta'+\theta''}{k+1}<1$. ამით, (6) ფორმულის მართებულობა დამტკიცებულია.

ამ ფორმულით მყარდება კავშირი ფუნქციის სასრულ სხვაობებსა და მის წარმოებულებს შორის.

საკმაოდ მცირე Δx-სათვის (6) ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$f'(x)\approx\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},\quad f''(x)\approx\frac{\Delta' f(x)}{\Delta x^2},\dots,\quad f^{(n)}(x)\approx\frac{\Delta^{(n)}f(x)}{\Delta x^n}.$$

ახლა დავამყაროთ კავშირი ფუნქციის სასრულ სხვაობებსა და მის მნიშვნელობებს შორის.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $\Delta x=h$ ბიჯით ცხრილის სახით:

$$\begin{array}{c|c} x_i & x_0\ \ x_1\cdots x_m\cdots x_n \\ \hline y_i & y_0\ \ y_1\cdots y_m\cdots y_n \end{array},$$

სადაც $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,\dots,n)$. მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ

$$\begin{aligned}
&\Delta y_m=y_{m+1}-y_m,\\
&\Delta^2 y_m=\Delta y_{m+1}-\Delta y_m=y_{m+2}-2y_{m+1}+y_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta^k y_m=y_{m+k}-ky_{m+k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{m+k-2}+\dots+(-1)^k y_m.
\end{aligned}$$

თუ $m=0$, მაშინ

$$\Delta^k y_0=y_k-ky_{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{k-2}+\dots+(-1)^k y_0.$$

გვაქვს

$$\Delta y_0=y_1-y_0;\quad \Delta y_1=y_2-y_1;\quad \Delta y_2=y_3-y_2,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned}
&y_1=y_0+\Delta y_0,\\
&y_2=y_1+\Delta y_1=y_0+\Delta y_0+\Delta(y_0+\Delta y_0)=y_0+\Delta y_0+\\
&\qquad+\Delta y_0+\Delta^2 y_0=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0.
\end{aligned}$$

და ა. შ. ნებისმიერი k $(k=0,1,\dots,n)$ რიცხვისათვის გვექნება

$$y_k=y_0+k\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\dots+\Delta^k y_0,$$

რითაც მოიცემა კავშირი ფუნქციის სასრულ სხვაობებსა და მის მნიშვნელობებს შორის.

§ 3. სხვაობათა ცხრილი

ხშირად გვიხდება ისეთი $y=f(x)$ ფუნქციის განხილვა, რომელიც მოცემულია $y_i=f(x_i)$ ცხრილური მნიშვნელობებით არგუმენტების ტოლად დაშორებული x_i $(i=0,1,2,\ldots)$ მნიშვნელობებისათვის, სადაც

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h=\mathrm{const}.$$

y_i მიმდევრობის სასრული სხვაობები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,$$
$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y_i=\Delta(\Delta^{n-1}y_i)=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i.$$

პირველი ტოლობიდან გვაქვს

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i=(1+\Delta)y_i,$$

საიდანაც

$$y_{i+2}=(1+\Delta)y_{i+1}=(1+\Delta)^2y_i,$$
$$y_{i+3}=(1+\Delta)y_{i+2}=(1+\Delta)^3y_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{i+n}=(1+\Delta)^n y_i.$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად

$$y_{i+n}=y_i+C_n^1\Delta y_i+C_n^2\Delta^2 y_i+\ldots+\Delta^n y_i.$$

პირიქით, გვაქვს

$$\Delta^n y_i=[(1+\Delta)-1]^n y_i=$$
$$=(1+\Delta)^n y_i-C_n^1(1+\Delta)^{n-1}y_i+C_n^2(1+\Delta)^{n-2}y_i-\ldots+(-1)^n y_i.$$

ანუ

$$\Delta^n y_i=y_{n+i}-C_n^1 y_{n+i-1}+C_n^2 y_{n+i-2}-\ldots+(-1)^n y_i.$$

მაგალითად,

$$\Delta^2 y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i,$$
$$\Delta^3 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i.$$

და ა. შ. შევნიშნოთ, რომ $\Delta^n y_i$-ის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ მოცემული მიმდევრობის $n+1$ წევრი: $y_i, y_{i+1},\ldots, y_{i+n}$.

სხვადასხვა რიგის სასრული სხვაობები მოხერხებულია წარმოვადგინოთ ორი, ჰორიზონტალური და დიაგონალური ცხრილის სახით.

დიაგონალური ცხრილი

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$	
x_5	y_5		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_5			
x_6	y_0				

ჰორიზონტალური ცხრილი

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$		
x_5	y_5	Δy_5			
x_6	y_6				

დიაგონალური ცხრილი მიიღება, თუ k რიგის $(\Delta^k y_m)$ სხვაობებს ჩავწერთ იმ სტრიქონში, რომელიც მოთავსებულია $\Delta^k y_m$ სხვაობის განმსაზღვრელ $k-1$ რიგის $\Delta^{k-1}y_{m+1}$ და $\Delta^{k-1}y_m$ სხვაობების შემცველ სტრიქონებს შორის. ჰორიზონტალურ ცხრილში k რიგის სასრული სხვაობები ჩაწერილი არიან ერთ სტრიქონში $k-1$ რიგის სხვაობებთან ერთად იგივე ინდექსით. სასრულ სხვაობათა მნიშვნელობებს ჩაწერენ ფუნქციის ცხრილურ მნიშვნელობათა უკანასკნელი თანრიგის ერთეულებში, ჩანაწერში მარცხნივ მდგომ ნულებს ჩამოაშორებენ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევადგინოთ

$$y=4x^3-x^2+5x-2$$

ფუნქციის სხვაობათა ჰორიზონტალური ცხრილი $x_0=0$ საწყისი მნიშვნელობიდან $h=1$ ბიჯით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუშვათ $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$. მაშინ $y_0=-2$, $y_1=6$, $y_2=36$ და გვექნება

$$\Delta y_0=y_1-y_0=6-(-2)=8,$$
$$\Delta y_1=y_2-y_1=36-6=30,$$
$$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=30-8=22.$$

მიღებული შედეგები შევიტანოთ ჰორიზონტალურ ცხრილში (ცხრ. 1).

ც ხ რ ი ლ ი 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	−2	8	22	24
1	6	30	46	24
2	36	76	70	24
			94	24
3	112	146	118	24
4	258	240	142	24
5	498	358		

რადგან მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მესამე ხარისხის პოლინომს, ამიტომ მესამე რიგის სხვაობა მუდმივი სიდიდეა და ტოლია $\Delta^3 y_i=4\times 3!\cdot 1^3=4\cdot 3\cdot 2=24$ რიცხვის. ამიტომ ცხრილის შემდგომი შევსება შეიძლება გავაგრძელოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\Delta^2 y_{i+1}=\Delta^2 y_i+24 \qquad (i=0,1,2,\ldots)$$
$$\Delta y_{i+1}=\Delta y_i+\Delta^2 y_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$
$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \qquad (i=2,3,\ldots)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევადგინოთ $y=\cos x$ ფუნქციის სასრულ სხვაობათა დიაგონალური ცხრილი $h=0,1$ ბიჯით [0; 0,7] სეგმენტზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ჩავატარებთ გამოთვლებს, მივიღებთ შედეგთა ქვემოთ მოყვანილ ცხრილს (ცხრ. 2)

ც ხ რ ი ლ ი 2

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0,0	1,00000					
		—500				
0.1	0.99500		—993			
		—1493		13		
0,2	0,98037		—980		12	
		—2473		25		—2
0.3	0,95504		—955		10	
		—3428		35		—1
0,4	0,92105		—920		9	
		—4348		44		—3
0,5	0.87758		—876		6	
		—5224		56		
0,6	0.82534		—826			
		—6050				
0,7	0.76484					

§ 4. განზოგადებული ხარისხი

x რიცხვის n-ური განზოგადებული ხარისხი ეწოდება იმ n თანამამრავლთა ნამრავლს, რომელთაგან პირველი არის x, ხოლო ყოველი შემდეგი თანამამრავლი h-ით ნაკლებია წინაზე.

თუ x რიცხვის განზოგადებულ ხარისხს აღვნიშნავთ $x^{[n]}$ სიმბოლოთი, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$x^{[n]}=x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h], \tag{1}$$

სადაც h — რაიმე ფიქსირებული მუდმივი რიცხვია. მიღებულია, რომ $x^{[0]}=1$.

თუ $h=0$, მაშინ (1) განზოგადებული ხარისხი ემთხვევა ჩვეულებრივ ხარისხს: $x^{[n]}=x^n$.

დავუშვათ, $\Delta x=h$ და გამოვთვალოთ განზოგადებული ხარისხის სასრული სხვაობები. პირველი რიგის სხვაობისათვის მივიღებთ

$$\Delta(x^{[n]})=(x+h)^{[n]}-x^{[n]}=(x+h)x(x-h)\dots[x-(n-2)h]-$$
$$-x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-2)h]=x(x-h)\dots[x-(n-2)h]\times$$
$$\times\{(x+h)-[x-(n-1)h]\}=x(x-h)\dots[x-(n-2)h]nh=nhx^{[n-1]},$$

ე. ი.

$$\Delta x^{[n]}=nhx^{[n-1]}. \tag{2}$$

გამოვთვალოთ მეორე რიგის სხვაობა:

$$\Delta^2 x^{[n]}=\Delta(\Delta x^{[n]})=\Delta(nhx^{[n-1]})=nh\Delta(x^{[n-1]})=$$
$$=nh(n-1)hx^{[n-2]}=n(n-1)h^2x^{[n-2]}.$$

ამრიგად,

$$\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2 x^{[n-2]}.$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილი დასამტკიცებელია ზოგადი ფორმულა

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\dots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]},$$

სადაც $k=1,2,\dots,n$.

ცხადია, რომ

$$\Delta^k x^{[n]} = 0, \quad \text{როცა} \quad k>n.$$

(2) ფორმულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე სასრული შეჯამებადობის მარტივი ფორმულა. ვთქვათ, x_0, x_1, $x_2,\dots$ არიან, h ბიჯით, თანაბრად დაშორებული წერტილები:

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (i=0,1,2,\dots).$$

განვიხილოთ ჯამი

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}.$$

რადგან, (2) ფორმულის თანახმად

$$x^{[n]} = \frac{\Delta x^{[n+1]}}{h(n+1)},$$

ამიტომ

$$S_N = \frac{1}{h(n+1)}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta x_i^{[n+1]} = \frac{1}{h(n+1)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_{i+1}^{[n+1]} - x_i^{[n+1]}\right) =$$

$$= \frac{1}{h(n+1)}\left(x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \dots + x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]}\right) =$$

$$= \frac{1}{h(n+1)}\left(x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}\right).$$

ამრიგად,

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)}. \tag{3}$$

(3) ფორმულა, მთელი დადებითი ხარისხისათვის, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის ანალოგიურია.

ავაგოთ საინტერპოლაციო პოლინომი იმ კერძო შემთხვევისათვის, როდესაც საინტერპოლაციო კვანძები ერთმანეთისაგან თანაბარი $h=\text{const}$ მანძილით არიან დაშორებული. ვთქვათ, არგუმენტის მნიშვნელობებია:

$$\begin{aligned}
x_1&=x_0+h,\\
x_2&=x_1+h=x_0+2h,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x_n&=x_0+nh,
\end{aligned}$$

ხოლო $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned}
f(x_0)&=y,\\
f(x_1)&=y_1,\\
&\dots\\
f(x_n)&=y_n.
\end{aligned}$$

ვიპოვოთ $P_n(x)$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს და რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\dots,n). \tag{1}$$

1) პირობები ეკვივალენტურია იმისა, რომ

$$\Delta^m P_n(x_0)=\Delta^m y_0,$$

როცა $m=0,1,2,\dots,n$: $P_n(x)$ მრავალწევრი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}
P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+&\\
+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\dots&\\
\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}).&
\end{aligned} \tag{2}$$

თუ გამოვიყენებთ განზოგადებული ხარისხის ცნებას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned}
P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)^{[1]}+a_2(x-x_0)^{[2]}+a_3(x-x_0)^{[3]}+\dots&\\
\dots+a_n(x-x_0)^{[n]}.&
\end{aligned} \tag{3}$$

ჩვენი მიზანია $a_i(i=0,1,\dots,n)$ კოეფიციენტები ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს (1) პირობები. თუ (3) ტოლობაში დავუშვებთ $x=x_0$, მივიღებთ;

$$P_n(x_0)=y_0=a_0.$$

a_1 კოეფიციენტის საპოვნელად შევადგინოთ $P_n(x)$ მრავალწევრის პირველი რიგის სასრული სხვაობა

$$\begin{aligned}
\Delta P_n(x)=a_1h+2a_1(x-x_0)^{[1]}h+3a_3(x-x_0)^{[2]}h+\dots&\\
\dots+na_n(x-x_0)^{[n-1]}h,&
\end{aligned}$$

საიდანაც, როცა $x=x_0$, მივიღებთ

$$\Delta P_n(x)=\Delta y_0=a_1 h.$$

აქედან

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{1!\,h}.$$

a_2 კოეფიციენტის მისაღებად შევადგინოთ მეორე რიგის სასრული სხვაობა

$$\Delta^2 P_n(x)=2!h^2 a_2+2\cdot 3!h^2 a_3(x-x_0)^{[1]}+\ldots$$
$$\ldots+(n-1)nh^2 a_n(x-x\;)^{[n-2]}$$

და მასში ჩავუშვათ $x=x_0$, გვექნება

$$\Delta^2 P_n(x_0)=\Delta^2 y_0=2!h^2 a_2,$$

საიდანაც

$$a_2=\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_i=\frac{\Delta^i y_0}{i!\,hi}\ (i=0,1,2,\cdots,n),$$

სადაც $0!=1$, $\Delta^0 y=y$.

თუ კოეფიციენტების მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3) ფორმულაში, მივიღებთ ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომს:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)^{[2]}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)^{[n]}.\quad (4)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (4) პოლინომი აკმაყოფილებს დასმული ამოცანის მოთხოვნებს. მართლაც, ერთი მხრივ $P_n(x)$ პოლინომის ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს, მეორე მხრივ

$$P_n(x_0)=y_0,$$

ამავე დროს

$$P_n(x_k)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x_k-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x_k-x_0)(x_k-x_1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})=$$

$$=y_0+k\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{k!}\Delta^k y_0=$$

$$=(1+\Delta)^k y_0=y_k\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $h=0$, მაშინ (4) ფორმულიდან მიიღება y ფუნქციის ტეილორის პოლინომი. მართლაც,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k y_0}{h^k}=\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x=x_0}=y^{(k)}(x_0),$$

გარდა ამისა, ცხადია,

$$\lim_{h\to 0}\ (x-x_0)^{[n]}=(x-x_0)^n.$$

აქედან, როცა $h\to 0$, (3) ფორმულა მიიღებს ტეილორის პოლინომის სახეს:

$$P_n(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

პრაქტიკაში, გამოყენების თვალსაზრისით, (4) ფორმულას შეიძლება მივცეთ უფრო მოხერხებული სახე. ამისათვის შემოვიღოთ $t=\dfrac{x-x_0}{h}$ ცვლადი, მაშინ

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{h}\cdot\frac{x-x_0-2h}{h}\cdots\frac{x-x_0-(i-1)h}{h}=$$

$$=t(t-1)(t-2)\cdots(t-i+2),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (4) ფომულაში, მივიღებთ

$$P_n(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,\quad (5)$$

სადაც $t=\dfrac{x-x_0}{h}$ არის იმ ბიჯთა რიცხვი რომელიც საჭიროა იმისათვის რომ x წერტილმა, x_0 წერტილიდან გამომდინარე, მიაღწიოს თავის მდებარეობას. (5) არის ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა.

(5) ფორმულა სასარგებლოა გამოვიყენოთ $y=f(x)$ ფუნქციის ინტერპოლირებისათვის საწყისი x_0 წერტილის მიდამოში, სადაც $|t|$ მცირე სიდიდეა.

თუ $n=1$, მაშინ (5)-დან მივიღებთ წრფივ საინტერპოლაციო პოლინომს

$$P_1(x)=y_0+t\Delta y_0.$$

ხოლო როცა $n=2$, გვექნება პარაბოლური საინტერპოლაციო პოლინომი

$$P_2(x)=y_0+t\,\Delta y_0+\frac{t\,(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

ცხრილი 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_0	y_0						
x_1	y_1	Δy_0					
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$			
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$		
x_5	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$	
x_6	y_6	Δy_5	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_1$	$\Delta^6 y_0$

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ (5) ფორმულაში შეგვიძლია n რიცხვი ავიღოთ ნებისმიერად. პრაქტიკულად ამ შემთხვევაში n-ს შეარჩევენ ისე, რომ სიზუსტის მოცემული რიგით $\Delta^n y_i$ სხვაობა იყოს მუდმივი. საწყის x_0 მნიშვნელობად შეგვიძლია მივიღოთ x არგუმენტის ნებისმიერი ცხრილური მნიშვნელობა. თუ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი სასრულია, მაშინ n რიცხვი შემოსაზღვრულია, სახელდობრ, $n \leqslant N-1$, სადაც N არის y ფუნქციის მნიშვნელობათა რიცხვი.

(5) ფორმულის გამოყენების დროს მოხერხებულია ვისარგებლოთ სხვაობათა ჰორიზონტალური ცხრილით, რადგან ფუნქციის სხვაობათა საჭირო მნიშვნელობები მოთავსებული არიან ცხრილის შესაბამის ჰორიზონტალურ სტრიქონში (ცხრ. 1).

ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო პოლინომი გამოიყენება ცხრილის დასაწყისში. თუ გვინდა $x=\bar{x}$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, მაშინ x_0 მნიშვნელობად ავიღებთ არგუმენტის უახლოეს ნაკლებ მნიშვნელობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ნიუტონის ფორმულას ლაგრანჟის ფორმულასთან შედარებით, აქვს შემდეგი უპირატესობა: თუ $P_n(x)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრი უკვე აგებულია და იგი გვაძლევს არასაკმარის მიახლოებას, მაშინ საჭირო ხდება ახალი კვანძის დამატება და $P_{n+1}(x)$ მრავალ-

წევრის აგება. ახალი კვანძის დამატებისას როგორც ნიუტონის, ისე ლაგრანჟის მრავალწევრსაც დაემატება ერთი შესაკრები, ამასთან ნიუტონის მრავალწევრში წინა შესაკრებები უცვლელი რჩება, ლაგრანჟის მრავალწევრში კი ყველა შესაკრები შეიცვლება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $y=e^x$ ფუნქცია მოცემულია ($h=0{,}05$ ბიჯით) ცხრილით:

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
y	33.115	34,813	36.548	38,475	40.447

ავაგოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი [3,5; 3,6] სეგმენტზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სხვაობათა ცხრილი (ცხრ. 2)

ც ხ რ ი ლ ი 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,50	33,115	1698	87	5
3,55	34,813	1785	92	3
3,60	36,598	1877	95	
3,65	38,475	1972		
3,70	40,447			

შევნიშნოთ, რომ სხვაობათა სვეტებში არ ვუთითებთ ათობით თანრიგებზე (ისინი ცხადია ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტიდან). რადგან მესამე რიგის სხვაობები აგებულია, ამიტომ (5) ფორმულაში დავუშვათ $n=3$. თუ ავიღებთ $x_0=3{,}50$, $y_0=33{,}115$, გვექნება

$$P_3(x)=33{,}115+1{,}698t+0{,}087\,\frac{t(t-1)}{2}+0{,}005\,\frac{t(t-1)(t-2)}{6}$$

ანუ

$$P_3(x)=33{,}115+1{,}698t+0{,}0435t(t-1)+0{,}00083t(t-1)(t-2),$$

სადაც $t=\dfrac{x-3{,}50}{0{,}05}=20(x-3{,}5)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ ნატურალური რიცხვების კვადრატების ჯამი 1-დან n-მდე, ე. ი.

$$S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\Delta S_n=S_{n+1}-S_n=(n+1)^2.$$

აქედან
$$\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta(n+1)^2 = (n+2)^2 - (n+1)^2 =$$
$$= (2n+3)(2-1) = 2n+3,$$
$$\Delta^3 S_n = \Delta(2n+3) = 2(n+1)+3-(2n+3) =$$
$$= 2n+2+3-2n-3 = 2.$$

ამრიგად, S_n შეიძლება ვეძებოთ n-ის მიმართ მესამე ხარისხის პოლინომის სახით.

ΔS_1 და $\Delta^2 S_1$ სხვაობების განსაზღვრის მიზნით გამოვთვალოთ S_1, S_2, S_3 მნიშვნელობები:
$$S_1 = 1,$$
$$S_2 = S_1 + 2^2 = 1+4 = 5,$$
$$S_3 = S_2 + 3^2 = 5+9 = 14.$$
აქედან
$$\Delta S_1 = 5-1 = 4,$$
$$\Delta S_2 = 14-5 = 9,$$
$$\Delta^2 S_1 = 9-4 = 5,$$
ამასთან $\Delta^3 S_1 = 2$. თუ გავითვალისწინებთ $t = \frac{n-1}{1} = n-1$ ტოლობას, მაშინ (5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ
$$S_n = 1 + 4(n-1) + \frac{5(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{6},$$
საიდანაც,
$$S_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

§ 6. ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო მრავალწევრი

ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა პრაქტიკულად მოუხერხებელია ფუნქციის საინტერპოლაციოდ ცხრილის ბოლო მახლობლობაში. ამ შემთხვევაში გამოიყენება ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა, რომელსაც გამოვიყვანთ ამ პარაგრაფში.

ვთქვათ, არგუმენტის თანაბრად დაშორებული
$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$
მნიშვნელობებისათვის მოცემულია ფუნქციის
$$y_i = y(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$
მნიშვნელობები. განვიხილოთ შემდეგი სახის პოლინომი:
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) +$$
$$+ a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \ldots + a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1).$$

გადავწეროთ იგი ასე:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)^{[1]}+a_2(x-x_{n-1})^{[2]}+a_3(x-x_{n-2})^{[3]}+ \\ +\dots+a_n(x-x_1)^{[n]}. \tag{1}$$

ჩვენი მიზანია a_0, $a_1,\dots,$ a_n კოეფიციენტები შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს პირობები:

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\dots,n).$$

ამისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\Delta^i P_n(x_{n-i})=\Delta^i y_{n-i} \quad (i=0,1,2,\dots,n). \tag{2}$$

თუ $x=x_n$, მაშინ (1)-დან მივიღებთ

$$P_n(x_n)=y_n=a_0, \text{ ე. ი. } a_0=y_n.$$

ახლა განვიხილოთ (1) პოლინომის პირველი რიგის სასრული სხვაობა

$$\Delta P_n(x)=a_1\cdot 1\cdot h+a_2\cdot 2h(x-x_{n-1})^{[1]}+a_3\cdot 3h(x-x_{n-2})^{[2]}+ \\ +\dots+a_n nh(x-x_1)^{[n-1]},$$

საიდანაც, (2)-ის გათვალისწინებით, $x=x_{n-1}$ მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$\Delta P_n(x_{n-1})=\Delta y_{n-1}=a_1 h.$$

ამრიგად,

$$a_1=\frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

ანალოგიურად, შეიძლება დავადგინოთ მეორე რიგის სასრული სხვაობა

$$\Delta^2 P_n(x)=a_2\cdot 2!\,h^2+a_3\cdot 3\cdot 2h^2(x-x_{n-2})^{[1]}+\dots \\ \dots+a_n n(n-1)h^2(x-x_1)^{[n-2]}$$

და $x=x_{n-2}$ მნიშვნელობისათვის

$$a_2=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}.$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მარტივად მიიღება

$$a_i=\frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!\,h^i} \quad (i=0,1,\dots,n). \tag{3}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1) ფორმულაში, გვექნება

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h_1}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+ \\ +\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\dots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_1), \tag{4}$$

რომელსაც ეწოდება ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა. წინა პარაგრაფის მსგავსად (4) ფორმულას მივცეთ უფრო მოხერხებული სახე. ამ მიზნით დავუშვათ $t=\frac{x-x_n}{h}$, მაშინ

$$\frac{x-x_{n-1}}{h}=\frac{x-x_n+h}{h}=t+1, \quad \frac{x-x_{n-2}}{h}=t+2$$

და ა. შ. მივიღებთ

$$P_n(x)=y_0+ty_{n-1}+\frac{t\,(t+1)}{2!}\,\Delta^2 y_{n-2}+ \\ +\frac{t\,(t+1)(t+2)}{3!}\,\Delta^3 y_{n-3}+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{5}$$

თუ $x<x_0$ და x ახლოსაა x_0 მნიშვნელობასთან, მაშინ სასარგებლოა გამოვიყენოთ ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა, სადაც

$$t=\frac{x-x_n}{h}>0.$$

ამრიგად, ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა გამოიყენება ინტერპოლაციისათვის წინ და ექსტრაპოლაციისათვის უკან. მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა კი პირიქით, — ინტერპოლაციისათვის უკან და ექსტრაპოლაციისათვის წინ.

§ 7. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულების ცდომილებათა შეფასება

ვთქვათ, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ თანაბრად დაშორებული კვანძებია

$$x_{i+1}-x_i=h \qquad (i=0,1,2,\ldots, n-1).$$

მაშინ §5-ის (5) ფორმულის თანახმად მივიღებთ ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო პოლინომის ნაშთით წევრს

$$P_n(x)=h^{n+1}\,\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{1}$$

სადაც $t=\frac{x-x_0}{h}$, ხოლო ξ არის ნებისმიერი შუალედური მნიშვნელობა $x_0, x_1, \ldots, x_n$ და x წერტილებს შორის.

თუ $a=\min\limits_k\{x_k\}$, $\quad b=\max\limits_k\{x_k\}$ და

$$\max_{x\in[a,\,b]}|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_{n+1},$$

მაშინ მივიღებთ ნაშთითი წევრის შეფასებას

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|t(t-1)\cdots(t-n)|h^{n+1}. \qquad (2)$$

§6-ის (5) ფორმულიდან ანალოგიურად მიიღება ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო პოლინომის ნაშთითი წევრი:

$$R_n(x)=h^{n+1}\cdot\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (3)$$

სადაც $t=\dfrac{x-x_n}{h}$, ხოლო ξ -რაიმე საშუალედო მნიშვნელობაა x_0, x_1, ..., x_n კვანძებსა და x წერტილს შორის. ამ ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|R_n(x)|\leqslant|t(t+1)(t+2)\ldots(t+n)|M_{n+1}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (4)$$

როცა $n=2$, $h=1$, მაშინ (1)-დან მივიღებთ წრფივი ინტერპოლირების ცდომილების შეფასებას

$$|R_1(x)|\leqslant\frac{t(t-1)}{2!}M_2\leqslant\frac{t(1-t)}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}.$$

რადგან, როცა $0\leqslant t\leqslant 1$, გვაქვს

$$t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

ამიტომ საბოლოოდ

$$|R_1(x)|\leqslant\frac{\frac{1}{4}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}<10^{-7}.$$

ამრიგად, წრფივი ინტერპოლირება სრულიად დასაშვებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $y=\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია § 3-ის მე-2 მაგალითში. ვიპოვოთ $\cos 0{,}05$ მნიშვნელობა და შევაფასოთ ნაშთი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ $x=0{,}05$ მნიშვნელობა მოთავსებულია ცხრილის დასაწყისში. ნიუტონის მესამე რიგის პირველ საინტერპოლაციო პოლინომს აქვს სახე:

$$P_3(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 y_0.$$

ავიღოთ $x=0,0$. მაშინ $t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0,05-0}{0,1}=0,5$ და მივიღებთ

$$P_3(0,05)=1,00000+0,5(-0,00500)+\frac{0,5(-0,5)}{2}(-0,00993)+$$
$$+\frac{0,5(-0,5)(-1,5)}{6}(0,00013)\approx 0,99875.$$

აბსოლუტური ცდომილება შევაფასოთ (2) ფორმულით: $f^{(4)}(x)=\cos x$, ამიტომ $M_4=\cos 0=1$ და მაშასადამე

$$|P_3(0,05)|\leqslant\frac{0,1^4}{4!}\;|0,5(-0,5)(-1,5)(-2,)|<4.10^{-6}.$$

მიღებული შედეგის ყველა ციფრი სანდოა. შეგვიძლია ავიღოთ $\cos 0,05\approx 0,99875$, რაც ემთხვევა ხუთნიშნა ცხრილების შესაბამის შედეგს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $y=\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილის გამოყენებით ვიპოვოთ $\cos 0,55$ მნიშვნელობა და შევაფასოთ ცდომილება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, $x=0,55$ მდებარეობს ცხრილის ბოლოში. ნიუტონის, მესამე რიგის, მეორე საინტერპოლაციო პოლინომს აქვს სახე:

$$P_3(x)=y_n\Delta y_{n-1}+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 y_{n-3}.$$

ავიღოთ $x_n=0,60$, მაშინ $t=\frac{x-x_n}{h}=\frac{0,55-0,60}{0,1}=-0,5$. თუ $P_3(x)$-ის გამოსახულებაში შევიტანთ სხვაობებს და $t=-0,5$ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$P_3(0,55)=0,85252.$$

აბსოლუტური ცდომილება შევაფასოთ (4) ფორმულით: $f^{(4)}(x)=\cos x$, ამიტომ $M_4=\cos 0=1$ და

$$|P_4(0,55)|\leqslant 1\cdot\frac{0,1^4}{24}\;|(-0,5)\cdot 0,5\cdot 1,5\cdot 2,5|<4\cdot 10^{-6}.$$

ამრიგად, მიღებული შედეგის ყველა ციფრი სანდოა. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $\cos 0,55=0,85252$, რაც ემთხვევა ხუთნიშნა ცხრილების შესაბამის მნიშვნელობას.

§ 8. ცენტრალურ სხვაობათა ცხრილი

ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულების აგებისას გამოიყენება ფუნქციის მხოლოდ ის მნიშვნელობები, რომლებიც მდებარეობენ შერჩეული საწყისი მნიშვნელობის ერთ მხარეს, ე. ი. აღნიშნული ფორმულები ატარებენ ცალმხრივ ხასიათს.

ც ხ რ ი ლ ი 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

ხშირ შემთხვევაში სასარგებლოა საინტერპოლაციო ფორმულები, რომლებიც შეიცავენ ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობის მიმართ მის წინა და მომდევნო მნიშვნელობებს. მათ შორის უფრო მეტად გავრცელებულია ისინი, რომლებიც განლაგებული არიან მოცემული ფუნქციის სხვაობათა დიაგონალური ცხრილის ჰორიზონტალურ სტრიქონში და რომლებიც შეესაბამებიან x_0 და y_0 საწყის მნიშვნელობებს, ან სტრიქონებში, რომლებიც უშუალოდ მიკედლებული არიან მასთან. Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}, \ldots$ ეწოდება ცენტრალური სხვაობები (ცხრ. 1), სადაც

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0, \pm 1, \ \pm 2, \ldots), \qquad y_i = f(x_i),$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \ \text{და ა. შ.}$$

შესაბამის საინტერპოლაციო ფორმულებს უწოდებენ **ცენტრალურ სხვაობებიან საინტერპოლაციო** ფორმულებს. მათ რიცხვს მიეკუთვნებიან გაუსის, სტირლინგის და ბესელის ფორმულები, რომლებსაც აქ შევისწავლით.

§ 9. გაუსის საინტერპოლაციო ფორმულები

ვთქვათ, მოცემულია $2n+1$, ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებული, კვანძი:

$$x_{-n}, \ x_{-(n-1)}, \ldots, \ x_{-1}, \ x_0, \ x_1, \ldots, x_{n-1}, \ x_n,$$

სადაც

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const} \ \ (i = -n, \ -(n-1), \ \ldots, \ n-1)$$

და ამ კვანძების შესაბამისი $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები:

$$y_i = f(x_i) \quad (i=0, \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \pm n).$$

საჭიროა ავაგოთ ისეთი $P(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი არ აღემატება $2n$-ს და დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$P(x_i) = y_i \quad (i=0, \ \pm 1 \pm 2, \ldots, \pm n).$$

უკანასკნელი პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i. \tag{1}$$

ვეძებოთ იგი შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ & + a_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + a_4(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ & + a_5(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + \\ & + a_{2n-1}(x-x_{-(n-1)})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + \\ & + a_{2n}(x-x_{-(n-1)})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n), \end{aligned} \tag{2}$$

რომელიც მოკლედ ჩაიწერება ასე:

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)^{[1]}+a_2(x-x_0)^{[2]}+a_3(x-x_{-1})^{[3]}+a_4(x-x_{-1})^{[4]}+$$
$$+\ldots+a_{2n-1}(x-x_{-(n-1)})^{[2n-1]}+a_{2n}(x-x_{-(n-1)})^{[2n]}. \qquad (3)$$

წინა ორ პარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობების ანალოგიურად (1) ფორმულების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$a_0=y_0,\quad a_1=\frac{\Delta y_0}{1!\,h},\quad a_2=\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2},\quad a_3=\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3},$$
$$a_4=\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4},\ldots,\ a_{2n-1}=\frac{\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}},\quad a_{2n}=\frac{\Delta^{2n}y_{-n}}{(2n)!\,h^{2n}}.$$

თუ შემოვიღებთ $t=\frac{x-x_0}{h}$ აღნიშვნას და კოეფიციენტების მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3) ფორმულაში, მივიღებთ გაუსის პირველ საინტერპოლაციო ფორმულას:

$$P(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)\,t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$
$$+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{(t+2)(t+1)\,t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+ \qquad (4)$$
$$+\cdots+\frac{(t+n-1)\cdots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+\frac{(t+n-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}$$

ანუ, მოკლედ,

$$P(x)=y_0+t\,\Delta y_0+\frac{t^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{(t+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\cdots+\frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+\frac{(t+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}, \qquad (5)$$

სადაც $x=x_0+th$, $t^{[m]}=t(t-1)\ldots[t-(m-1)]$.

გაუსის პირველი საინტერპოლაციო პოლინომი შეიცავს

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-1},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-2},\ \Delta^6 y_{-3},\ldots$$

ცენტრალურ სხვაობებს (ცხრილში ეს სხვაობები ადგენენ ქვედა ტეხილ სტრიქონს ისრის მიმართულებით). ანალოგიურად მიიღება გაუსის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა, რომელშიაც შედიან

$$\Delta y_{-1},\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-2},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-3},\ \Delta^6 y_{-3},\ldots$$

ცენტრალური სხვაობები (ცხრილში ისინი ადგენენ ზედა ტეხილ სტრიქონს ისრის მიმართულებით). მას აქვს სახე:

$$P(x)=y_0+t\ \Delta y_{-1}+\frac{(t+1)\ t}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)\ t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\cdots+\frac{(t+2)(t+1)\ t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots+ \tag{6}$$
$$+\frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+\frac{(t+n)\ (t+n-1)\cdots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}$$

ანუ, უფრო კომპაქტურად

$$P(x)=y_0+t\Delta y_{-1}+\frac{(t+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2}+ \tag{7}$$
$$+\frac{(t+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots+\frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+\frac{(t+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

სადაც $x=x_0+th$.

§ 10. სტირლინგის საინტერპოლაციო ფორმულა

გაუსის პირველი და მეორე საინტერპოლაციო პოლინომების საშუალო არითმეტიკულს ეწოდება სტირლინგის საინტერპოლაციო პოლინომი

$$P(x)=y_0+t\ \frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+$$
$$+\frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{t(t^2-1^2)\ (t^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-1}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$
$$+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\cdots+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots[t^2+(n-1)^2]}{(2n-1)!}\times$$
$$\times\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

სადაც $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$P(x_i)=y_i \text{ როცა } i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\pm n.$$

§ 11. ბესელის საინტერპოლაციო ფორმულა

ამ ფორმულას გამოვიყვანთ გაუსის მეორე საინტერპოლაციო პოლინომის გამოყენებით. განვიხილოთ $2n+2$ თანაბრად დაშორებული საინტერპოლაციო კვანძი (h — ბიჯით):

$$x_{-n},\ x_{-(n-1)},\ldots,\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$$

და ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებია:

$$y_i=f(x_i) \quad (i=-n,\ldots,\ n+1).$$

თუ საწყის მნიშვნელობებად შევარჩევთ x_0 და y_0, მაშინ x_k $(k=0, \pm 1,\ 2,\ldots,\pm n)$ კვანძების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$P(x)=y_0+t\Delta y_{-1}+\frac{(t+1)t}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)\ t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$

$$+\frac{(t+2)\ (t+1)\ t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots+\frac{(t+n-1)\cdots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-2}y_{-n}+$$

$$+\frac{(t+n)(t-n+1)\cdots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}. \tag{1}$$

ახლა საწყის მნიშვნელობებად მივიღოთ x_1 და y_1 და გამოვიყენოთ $x_{1+k}(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\pm n)$ კვანძები, მაშინ

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=t-1,$$

ამასთან (1) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ყველა სხვაობის ინდექსი გაიზრდება ერთი ერთეულით. თუ (1)-ის მარჯვენა ნაწილში t-ს შევცვლით $t-1$ სხვაობით და ყველა სხვაობის ინდექსს გავადიდებთ 1-ით, მივიღებთ დამხმარე საინტერპოლაციო ფორმულას:

$$P(x)=y_1+(t-1)\Delta y_0+\frac{t(t-2)}{2!}\ \Delta^2\ y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1}\ +$$

$$+\frac{(t+1)\ t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1}+\frac{(t+1)\ t(t-1)(t-2)(t-3)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+ \tag{2}$$

$$+\ldots+\frac{(t+n-2)\cdots(t-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+\frac{(t+n-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\ \Delta^{2n}y_{-(n-1)}.$$

(1) და (2) ფორმულების საშუალო არითმეტიკული მარტივი გარდაქმნების შედეგად, მოგვცემს ბესელის საინტერპოლაციო პოლინომს

$$P(x)\ =\ \frac{y_0+y_1}{2}+\left(t-\ \frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\ \frac{t\ (t-1)}{2}\ \cdot\ \frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$

$$+\frac{\left(t-\ \frac{1}{2}\right)t\ (t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}\ +$$

$$+\frac{\left(t-\ \frac{1}{2}\right)t\ (t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2(-2)}{6!}\times$$

$$\times\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\dots(t-n)(t+n-1)}{(2n)!}\times$$

$$\times\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-(n-1)}}{2}+ \qquad (3)$$

$$+\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\dots(t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n},$$

სადაც $t=\frac{x-x_0}{h}$. როგორც აქედან ჩანს (3) პოლინომი მოცემულ $2n+2$ კვანძში ემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციას.

როცა $n=1$, მივიღებთ ბესელის აზრით კვადრატულ საინტერპოლაციო ფორმულას

$$P(x)=\frac{y_0+y_0+\Delta y_0}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\times$$

$$\times\frac{\Delta y_0-\Delta y_{-1}+\Delta y_1-\Delta y_0}{2}$$

ანუ

$$P(x)=y_0+t\Delta y_0-t_1(\Delta y_1-\Delta y_{-1}),$$

სადაც $t_1=\frac{t(1-t)}{4}$.

ბესელის ფორმულაში კენტი რიგის სხვაობების შემცველ ყველა წევრს თანამამრავლად აქვს $t-\frac{1}{2}$, ამიტომ როცა $t=\frac{1}{2}$, მაშინ (3) ფორმულა მნიშვნელოვნად მარტივდება.

$$P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\,\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3}{128}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}-$$

$$-\frac{5}{1024}\,\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\dots+(-1)^n\frac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]^2}{(2n)!\;2^{2n}}\times$$

$$\times\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}.$$

ამ შემთხვევას ეწოდება შუაში ინტერპოლირება. თუ (3) ფორმულაში მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას $p=t-\frac{1}{2}$, მაშინ იგი მიიღებს უფრო სიმეტრიულ სახეს:

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+p\,\Delta y_0+\frac{p^2-\frac{1}{4}}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\left(p^2-\frac{25}{4}\right)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+ \tag{4}$$

$$+\cdots+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n)!}\times$$

$$\times\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}+$$

$$+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n+1}$$

სადაც $p=\frac{1}{h}\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)$.

§ 12. ცენტრალურ საინტერპოლაციო ფორმულათა ცდომილებების შეფასება

მოვიყვანოთ დამტკიცების გარეშე, სტირლინგისა და ბესელის საინტერპოლაციო პოლინომების ნაშთითი წევრები:

ა) სტირლინგის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთითი წევრი. თუ სხვაობათა ცხრილის მაქსიმალური რიგია $2n$ და $x\in[x_0-nh, x_0+nh]$, მაშინ

$$R_n(x)=\frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2)\cdots(t^2-n^2),$$

სადაც $t=\frac{x-x_0}{h}$ და $\xi\in[x-nh,\ x_0+nh]$. თუ $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება უცნობია, მაშინ მცირე h — სათვის დაშვებულია მიახლოებითი ტოლობა

$$R_n(x)\approx\frac{\Delta^{2n+1}y_{-n-1}+\Delta^{2n+1}y_{-n}}{2(2n+1)!}+\Delta^{2n+1}y_{-n}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2).$$

ბ) ბესელის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთითი წევრი. თუ სხვაობათა ცხრილის მაქსიმალური რიცხვია $2n+1$ და $x\in[x_0-nh, x_0+nh]$, მაშინ

$$R_n(x)=\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots(t^2-n^2)[t-(n+1)],$$

სადაც

$$t=\frac{x-x_0}{h},\quad \xi\in[x_0-nh,\ x_0+(n+1)h].$$

როცა $f(x)$ მოცემულია ცხრილურად და h მცირეა, მაშინ

$$R_n(x)\approx\frac{\Delta^{2n+2}y_{-n-1}+\Delta^{2n+2}y_{-n}}{2(n+2)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots(t^2-n^2)[t-(n+1)].$$

კერძოდ, თუ $t=\frac{1}{2}$, მივიღებთ ცდომილებას შუაში ინტერპოლირებისათვის

$$R_n=\frac{h^{2n+2}f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(-1)^{n+1}\frac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)]^2}{2^{2n+2}},$$

ანუ

$$R_n\approx\frac{\Delta^{2n+2}y_{-n-1}+\Delta^{2n+2}y_{-n}}{2(2n+2)!}(-1)^{n+1}\frac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)]^2}{2^{2n+2}}.$$

თუ დავუშვებთ $t=p+\frac{1}{2}$, მაშინ

$$R_n(x)=\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n+1)^2}{4}\right].$$

§ 13. საინტერპოლაციო ფორმულების ზოგადი დახასიათება მუდმივი ბიჯის შემთხვევაში

ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომების აგების შემთხვევაში საწყის x_0 მნიშვნელობად აიღება საინტერპოლაციო კვანძებიდან პირველი ან უკანასკნელი. ცენტრალური საინტერპოლაციო ფორმულების შემთხვევაში კი საწყისი კვანძი შუა წერტილია, ქვემოთ მოყვანილ სქემაში ნაჩვენებია ძირითად საინტერპოლაციო ფორმულებში გამოყენებული სხვაობები, ამასთან მიმოხილვის მოხერხებულობისათვის ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო პოლინომში შეცვლილია ინდექსთა ნუმერაცია (ცხრ. 2).

საინტერპოლაციო ფორმულების დეტალური განხილვა გვიჩვე-

ნებს, რომ როცა $|t|\leqslant 0,25$, მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ სტირლინგის ფორმულა, ხოლო როცა $0,25\leqslant|t|\leqslant 0,75$ — ბესელის ფორმულა. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა ინტერპოლაცია ხდება ცხრილის დასაწყისში ან ბოლოში და საჭირო ცენტრალური სხვაობები არ არის საკმარისი.

ცხრილი 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	შენიშვნა
						ნიუტონის მეორე ფორმულა
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^3 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	სტირლინგის ფორმულა
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		ბესელის ფორმულა
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		ნიუტონის პირველი ფორმულა
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx.$$

ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილი (ცხრ. 3).

ც ხ რ ი ლ ი 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,51	0.5292437	85660	—896	—7
0,52	0,5378987	85654	—903	—7
0,53	0,5464641	84751	—910	—7
0,54	0,5549392	83841	—927	—6
0,55	1,5633233	82924	—923	
0,56	0,5716157	82001		
0,57	0,5798158			

ვიპოვოთ $\Phi(0,5437)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ცხრილი შევავსოთ $y=\Phi(x)$ ფუნქციის სასრული სხვაობებით. მივიღოთ, რომ $x_0=0,54$ და $x=0,5437$, მაშინ

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0,54337-0,54}{0,01}=0,37.$$

რადგან $\frac{1}{4}<t<\frac{3}{4}$, ამიტომ ვისარგებლოთ ბესელის (4) ფორმულით. გვაქვს

$$p=t-\frac{1}{2}=0,37-0,50=-0,13.$$

აქედან, მინიშნებული სხვაობების გამოყენებით, მივიღებთ

$$\Phi(0,5437)=\frac{0,5549392+0,5633233}{2}+(-0,13)0,0083841+$$
$$+\frac{0,0169-0,25}{2}\cdot\frac{-0,0000910-1,0000917}{2}+$$
$$+\frac{-0,13(0,0169-0,25)}{6}(-0,0000007)=0,5580420,$$

ამრიგად, $\Phi(0,5437)\approx0,5580520$.

§ 14. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა

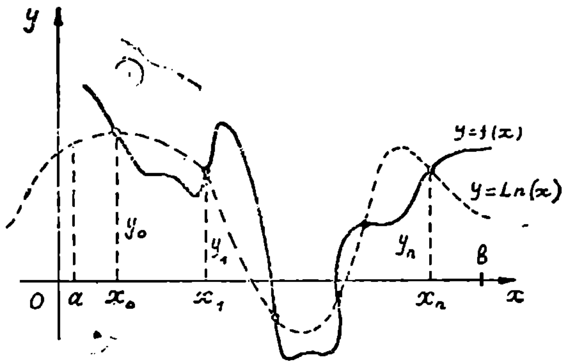
წინა ორ პარაგრაფში მიღებული საინტერპოლაციო ფორმულები გამოიყენებიან ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებული საინტერპოლაციო კვანძებისათვის. ნებისმიერად მოცემული კვანძებისათვის საინტერპოლაციო პოლინომის ასაგებად, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საჭიროა $n+1$ უცნობიანი $n+1$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხს-

ნა, რაც დაკავშირებულია შრომატევად გამოთვლებთან. პრაქტიკაში მიზანშეწონილია გამოვიყვანოთ საინტერპოლაციო პოლინომი უფრო მოხერხებული გზით.

ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია x არგუმენტის $n+1$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მნიშვნელობები: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ და ცნობილია მათი შესაბამისი $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები:

$$f(x_0)=y_0, \quad f(x_1)=y_1, \ldots, \quad f(x_n)=y_n.$$

საჭიროა ავაგოთ ისეთი $L_n(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს და რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს (ნახ. 21):



ნახ. 21

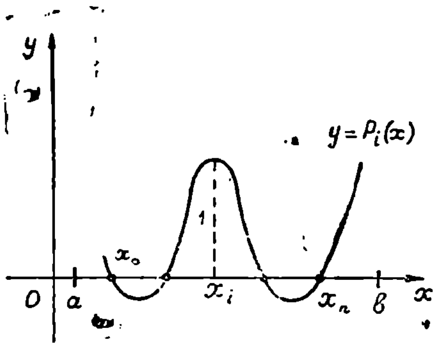
$$L_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

პირველ რიგში ამოვხსნათ კერძო ამოცანა: ავაგოთ ისეთი $P_i(x)$ პოლინომი, რომ

$$P_i(x_j)=0, \ j\neq i$$

და $P_i(x_i)=1$ (ნახ. 22) ანუ

$$P_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases} \quad (1)$$



ნახ. 22

რადგან საძიებელი პოლინომი ნულის ტოლია x_0, $x_1 \ldots x_{1-1}$, $x_{i+1}, \ldots,$ x_n წერტილებში (n წერტილში), ამიტომ

$$P_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n), \qquad (2)$$

სადაც c_i=const. თუ დავუშვებთ $x=x_i$ და მხედველობაში მივიღებთ $P_i(x_i)=1$ ტოლობას, მაშინ (2)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})\ \ (x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)=1,$$

საიდანაც

$$c_i=[(x_i-x_0)(x_1-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})\ \ (x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)]^{-1}.$$

თუ c_i-ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2) ფორმულაში მივიღებთ

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \tag{3}$$

ახლა გადავიდეთ ზოგადი ამოცანის ამოხსნაზე. ვიპოვოთ ისეთი $L_n(x)$ პოლინომი, რომელიც დააკმაყოფილებს $L_n(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$ პირობებს. მას აქვს სახე.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}P_i(x)y_i. \tag{4}$$

მართლაც, ცხადია, რომ ამ პოლინომის ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს. მეორე მხრივ (1) პირობის თანახმად გვაქვს

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n}P_i(x_j)y_j=y_j\quad(j=0,1,2,\dots,n)$$

თუ (3) ტოლობით მოცემულ $P_i(x)$-ის გამოსახულებას ჩავსვამთ (4) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}y_i \tag{5}$$

რომელსაც ეწოდება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი.

დავამტკიცოთ (5) ფორმულის ერთადერთობა. დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ $\widetilde{L}_n(x)$ პოლინომის ხარისხი არ აღემატება n-ს და იგი განსხვავებულია $L_n(x)$ პოლინომისაგან, ამასთან $\widetilde{L}_n(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$. მაშინ $Q_n(x)=\widetilde{L}_n(x)-L_n(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს, ნულის ტოლი იქნება x_0, $x_1,\dots$, x_n წერტილებში ($n+1$ წერტილში), ე. ი. $Q_n(x)\equiv0$. ამრიგად, $\widetilde{L}_n(x)\equiv L_n(x)$.

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ თუ საინტერპოლაციო კვანძები თანაბრად დაშორებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ ლაგრანჟის პოლინომი ემთხვევა შესაბამის ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომს.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მიღებული ყველა საინტერპოლაციო ფორმულა მიიღება ლაგრანჟის პოლინომიდან კვანძების სათანადო შერჩევით.

(5) ფორმულის მოკლედ ჩაწერის მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_0)\ldots(x-x_n). \tag{6}$$

თუ ამ ნამრავლს გავაწარმოებთ x ცვლადის მიმართ, მივიღებთ

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n).$$

დავუშვათ $x=x_i$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$, მაშინ

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n). \tag{7}$$

(6) და (7) გამოსახულებების გათვალისწინებით (5)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{\Pi'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}. \tag{8}$$

შევნიშნოთ, რომ სხვა ფორმულებისაგან განსხვავებით ლაგრანჟის ფორმულა ცხადი სახით შეიცავს y_i-ს, რასაც ზოგჯერ დიდი მნიშვნელობა აქვს.

განვიხილოთ (5) ფორმულის ორი კერძო შემთხვევა:

როცა $n=1$, მაშინ გვაქვს ორი კვანძი და ლაგრანჟის $y=L_1(x)$ ფორმულა წარმოადგენს მოცემულ ორ წერტილზე გამავალ წრფეს

$$y = \frac{x-b}{a-b}y_0 + \frac{x-a}{b-a}y_1,$$

სადაც a და b — ამ წერტილების აბსცისებია.

როცა $n=2$, მაშინ მივიღებთ სამ წერტილზე გამავალ $y=L_2(x)$ პარაბოლის განტოლებას

$$y = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}y_2,$$

სადაც a, b, c — აღნიშნული წერტილების აბსცისებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

k	0	1	2
x_k	-1	0	2
y_k	2	1	3

ავაგოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი და გამოვთვალოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x=\frac{1}{2}$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს: $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=2$; $y_0=2$, $y_1=1$, $y_2=3$. ამიტომ (5) ფორმულის თანახმად

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2=\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}\cdot 2+\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}\cdot 1+$$

$$+\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}\cdot 3=\frac{2x(x-2)}{3}+\frac{(x+1)(x-2)}{-2}+\frac{3x(x+1)}{6}=$$

$$=\frac{2x^2-2x}{3}+\frac{x^2-x-2}{-2}+\frac{x^2+x}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^2+$$

$$+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x+1=\frac{2}{3}\,x^2+\frac{1}{3}x+1.$$

ამრიგად, საძიებელი პოლინომია $L_2(x)=\frac{2}{3}\,x^2+\frac{1}{3}\,x+1$, ხოლო $x=\frac{1}{2}$ წერტილში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx L_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{4}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	5
y_k	1	3	2	5

ავაგოთ მესამე ხარისხის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი და გამოვთვალოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x=1$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

მოცემული ცხრილის მიხედვით

$$L_3(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}\cdot 1+\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}\cdot 3+$$

$$+\frac{(x-0)(x+2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}\cdot 2+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}\cdot 5=$$

$$=\frac{(x^2-5x+6)(x-5)}{-30}+\frac{x(x^2-8x+15)}{2}+\frac{x(x^2-7x+10)}{-3}+\frac{x(x^2-5x+6)}{6}=$$

$$=\left(-\frac{1}{30}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{2}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}\right)x^2+$$

$$+\left(-\frac{31}{30}+\frac{15}{2}-\frac{10}{3}+1\right)x+1=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

ამრიგად, საძიებელი პოლინომია

$$L_3(x)=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1,$$

საიდანაც,

$$f(1)\approx L_3(1)=3{,}267.$$

§ 15. ლაგრანჟის პოლინომის კოეფიციენტების გამოთვლა

ამ პარაგრაფში მოვიყვანოთ სქემა, რომელიც გააადვილებს ლაგრანჟის პოლინომის y_i-ის კოეფიციენტების გამოთვლას. მათ უწოდებენ ლაგრანჟის კოეფიციენტებს:

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\qquad (1)$$

ან უფრო კომპაქტური ფორმით

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\Pi'_{n+1}(x_i)},\qquad (2)$$

სადაც $\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)$, ამასთან, ლაგრანჟის ფორმულას ექნება სახე:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i^{(n)}(x)y_i.$$

შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის კოეფიციენტთა ფორმა $x=at+b$ $(a,b=\mathrm{const},\ a\neq 0)$ ჩასმის ინვარიანტულია. მართლაც, (1) ფორმულაში და-

ვუშვათ $x=at+b$; $x_j=at_j+b$ $(j=0,1,2,\ldots,n)$, მაშინ მრიცხველისა და მნიშვნელის a^n-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$L_i^{(n)}(t)=\frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)} \tag{3}$$

ანუ

$$L_i^{(n)}(t)=\frac{\Pi_{n+1}(t)}{(t-t_i)\Pi'_{n+1}(t_i)}, \tag{4}$$

სადაც $\Pi_{n+1}(t)=(t-t_0)\ldots(t-t_n)$, რის დამტკიცებად გვინდოდა.

ლაგრანჟის კოეფიციენტების გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ ქვემოთ მოყვანილი სქემა, რომელიც განსაკუთრებით მოხერხებულია ეგმ-ის გამოყენების დროს:

$$\left.\begin{array}{ccl}
x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2\ \ldots\ x_0-x_n \\
x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2\ldots\ x_1-x_n \\
x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2\ \ldots\ x_2-x_n \\
\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2\ \ldots\ x-x_n
\end{array}\right\} \tag{5}$$

პირველი სტრიქონის ელემენტების ნამრავლი აღვნიშნოთ K_1-ით, მეორე სტრიქონის ელემენტების ნამრავლი —K_2-ით და ა. შ. n-ური სტრიქონის ელემენტების ნამრავლი — K_n-ით. მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი იქნება $K_{n+1}(x)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}(x)}{K_i}\quad(i=0,1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

ამრიგად,

$$L_n(x)=\Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{K_i}. \tag{7}$$

თანაბრად დაშორებული კვანძების შემთხვევაში $(h=\mathrm{const})$ ლაგრანჟის კოეფიციენტები დაიყვანება უფრო მარტივ სახეზე.

მართლაც, თუ დავუშვებთ

$$x=x_0+th,$$

გვექნება

$$t_0=0,\quad t_1=1,\ldots,\quad t_n=n.$$

აქედან

$$\Pi_{n+1}(t)=t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)$$

და

$$\Pi'_{n+1}(i)=(-1)^{n-1}i!(n-1)!$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$L_i^{(n)}(t)= \frac{1}{n!}\ \Pi_{n+1}(t)\ \frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{t-i}, \quad (i=0,1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

სადაც

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

აქედან

$$L_n(x)= \frac{1}{n!}\ \Pi_{n+1}(t)\ \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{t-i}\,y_i, \tag{9}$$

ხოლო $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

§ 16. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ცდომილებათა შეფასება

მე-14 პარაგრაფში ჩვენ ავაგეთ $y=f(x)$ ფუნქციის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო $L_n(x)$ პოლინომი, რომელიც x_0, $x_1,\ldots,x_n$ კვანძებში ღებულობს $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1,\ldots$, $f(x_n)=y_n$ მნიშვნელობებს. ისმის კითხვა, რამდენად ახლოსაა აგებული პოლინომი $f(x)$ ფუნქციასთან კვანძებისაგან განსხვავებულ x წერტილებში, ე. ი. როგორ შევაფასოთ $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$ ნაშთითი წევრი. ამისათვის დავუშვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი $f'(x)$, $f''(x),\ldots$, $f^{(n+1)}(x)$ წარმოებულები კვანძების შემცველ $[a, b]$ სეგმენტზე. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$u(x)=f(x)-L_n(x)-k\Pi_{n+1}(x), \tag{1}$$

სადაც

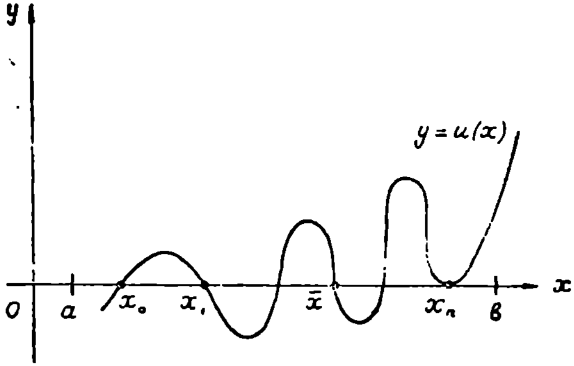
$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

და k — მუდმივი კოეფიციენტია, რომელსაც შევარჩევთ ქვემოთ.

$u(x)$ ფუნქციას აქვს $n+1$ ფესვი: x_0, $x_1,\ldots,x_n$.

k კეფიციენტი შევარჩიოთ ისე, რომ $u(x)$-ს ჰქონდეს $(n+2)$-ე ფესვი $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ ფიქსირებულ $\overline{x}$ წერტილში, რომელიც განსხვავებულია ინტერპოლაციის კვანძებისაგან (ნახ. 23). ამისათვის საკმარისია დავუშვათ.

$$f(\overline{x})-L_n(\overline{x})-k\Pi_{n+1}(x)=0.$$



ნახ. 23

რადგან $\Pi_{n+1}(\bar{x})=0$, ამიტომ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან

$$k=\frac{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})}. \tag{2}$$

k-ს ამ მნიშვნელობისათვის $u(x)$ ფუნქციას აქვს $n+2$ ფესვი $[a, b]$ სეგმენტზე და ტოლი იქნება ნულის შემდეგი სეგმენტების ბოლოებში:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

თუ ყოველი ამ სეგმენტისათვის გამოვიყენებთ როლის თეორემას დავრწმუნდებით, რომ $u'(x)$ წარმოებულს ექნება არანაკლებ $n+1$ ფესვისა $[a, b]$ სეგმენტზე. $u'(x)$-ის მიმართ იგივე თეორემის გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ $u''(x)$ წარმოებული ნულის ტოლი იქნება არანაკლებ n წერტილისა $[a, b]$ სეგმენტზე.

ამ პროცესის გაგრძელებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე $u^{(n+1)}(x)$ წარმოებულს ექნება ერთი მაინც ფესვი. აღვნიშნოთ იგი ξ ასოთი, ე. ი. $u^{(n+1)}(\xi)=0$.

რადგან

$$L_n^{(n+1)}(x)=0 \quad \text{და} \quad \Pi_{n+1}^{(n+1)}(x)=(n+1)!,$$

ამიტომ

$$u^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-k(n+1)!$$

როცა $x=\xi$, მივიღებთ

$$0=f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!,$$

საიდანაც

$$k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{3}$$

(2), (3) ფორმულების მარჯვენა ნაწილების შედარებით გვექნება

$$\frac{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

ე. ი.

$$f(\bar{x})-L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(\bar{x}). \tag{4}$$

რადგან $\bar{x}$ ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ (4) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირადაც

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x), \tag{5}$$

სადაც $\xi=\xi(x)\in[a, b]$.

(5) ფორმულა მართებულია $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილისათვის, მათ შორის საინტერპოლაციო კვანძებისათვისაც.

თუ აღვნიშნავთ

$$M_{n+1}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|,$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$|R_n(x)|=|f(x)-L_n(x)|\leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|, \tag{6}$$

სადაც

$$\Pi_{n+1}(x)—(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ავაგოთ $y=2^x$ ფუნქციის ლაგრანჟის პოლინომი $x_0=-1$; $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ კვანძებით და გამოვთვალოთ ნაშთი, რომელიც მიიღება თუ $f(x)=2^x$ ფუნქციას შევცვლით $L_3(x)$ პოლინომით

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები $y_0=\frac{1}{2}$, $y_1=1$, $y_2=2$, $y_3=4$. თუ ვისარგებლებთ ისევ (5) ფორმულით და ჩავატარებთ წინა მაგალითში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურს, მივიღებთ საძიებელ პოლინომს:

$$L_3(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+1.$$

გამოვთვალოთ $y=2^x$-ის წარმოებულები: $f'(x)=2^x\ln 2$, $f''(x)=2^x\ln^2 2$, $f'''(x)=2^x\ln^3 2$, $f^{(4)}(x)=2^x\ln^4 2$. გვაქვს

$$\min_k\{x_k\}=-1; \ \max_k\{x_k\}=2.$$

$[-1,\ 2]$ სეგმენტზე $y=2^x$ ფუნქცია ზრდადია, ე. ი. $0<2^x\leqslant 4$;

$$M_4=4\ln^4 2,\quad \ln 2=0{,}693\ldots<\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{ამიტომ}\ M_4<4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

$\Pi_4(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)$. (6) ფორმულის თანახმად

$$|R_3(x)|\leqslant\frac{1}{24}|x(x+1)(x-1)(x-2)|.$$

ახლა ვიპოვოთ მიახლოებითი მნიშვნელობა და შევაფასოთ ნაშთი

$$2^{1/2}=\sqrt{2}\approx L_3\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}406;\quad |R_3(\sqrt{2})|\leqslant 0{,}024.$$

ზუსტი მნიშვნელობა $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. რა სიზუსტით შეიძლება გამოვთვალოთ $\sqrt{115}$ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომით ($y=\sqrt{x}$ ფუნქციისათვის), თუ საინტერპოლაციო კვანძებად მივიღებთ: $x_0=100,\ x_1=121,\ x_2=144$.

ა მ ო ხ ს ნ ა: გვაქვს: $y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}$, $y''=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $y'''=\frac{3}{8}x^{-5/2}$ და

$$M_3=\max|y'''|=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{100^5}}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5},\ \text{როცა}\ 100\leqslant x\leqslant 1440.$$

ამიტომ

$$|R_2|\leqslant\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}|(115-100)(115-121)(115-144)|=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 6\cdot 2\cdot 29\approx 1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

§ 17. განცალებული სხვაობები

სხვაობათა ცხრილები ჩვენ შევადგინეთ თანაბრად დაშორებული კვანძებისათვის ($h=\text{const}$). პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ცხრილები ცვლადი h ბიჯით. მაგალითად, ასეთი ხასიათი აქვთ ემპირიულ მონაცემებს. ცვლად ბიჯიანი ცხრილების შემთხვევაში ხდება სასრულ სხვაობათა ცნების განზოგადება: სახელდობრ, შემოაქვთ ე. წ. გ ა ნ ც ა ლ ე ბ უ ლ ი ს ხ ვ ა ო ბ ე ბ ი.

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით და არგუმენტის

$x_0, x_1, \ldots,$ მნიშვნელობებს შეესაბამება ფუნქციის $y_0, y_1, \ldots$ მნიშვნელობები, სადაც

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad (i=0,1,2,\ldots)$$

სხვაობები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან.

პირველი რიგის განცალებული სხვაობები ეწოდება

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (i=0,1,2,\cdots)$$

სახის ფარდობებს და აღინიშნებიან $[x_i, x_{i+1}]$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (i=0,1,2\cdots),$$

მაგალითად,

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}; \quad [x_1, x_3] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}; \cdots$$

ანალოგიურად განისაზღვრებიან მეორე რიგის განცალებული სხვაობები:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]-[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i} \quad (i=0,1,2,\cdots)$$

მაგალითად,

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2]-[x_0, x_1]}{x_2-x_0}, \cdots$$

საზოგადოდ, n-ური რიგის განცალებული სხვაობები მიიღებიან $n-1$ რიგის განცალებული სხვაობებისაგან რეკურენტული თანაფარდობით

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}]-[x_i \cdots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i} \qquad (1)$$

$(n=1,2,\ldots; \quad i=0,1,2,\ldots)$.

შევნიშნოთ, რომ ელემენტთა გადაადგილებით განცალებული სხვაობები არ იცვლებიან, ე. ი. წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების სიმეტრიულ ფუნქციებს. მაგალითად,

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} = [x_1, x_0], \cdots$$

განცალებული სხვაობებისათვის ადგენენ ცხრილს (ცხრ. 1)

ცხრილი 1

x	y	განცალებული სხვაობები			
		I-რიგის	II-რიგის	III-რიგის	IV-რიგის
x_0	y_0				
		$[x_0, x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
		$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3\, x_4]$
		$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		
		$[x_3, x_4]$			
x_4	y_4				

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შევადგინოთ

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0.3	0.4	0,7	0,9
y_k	132,651	148,877	157,464	166.375	195,112	216.000

ცხრილით მოცემული ფუნქციის განცალებული სხვაობები:

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{148,877, - 132,651}{0,2 - 0} = \frac{162,26}{2} = 81,13;$$

$$[x_1, x_2[= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{157,464 - 148,877}{0,3 - 0,2} = \frac{8,587}{0,1} = 85,87;$$

$$[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{166,375 - 157,464}{0,4 - 0,3} = \frac{8,911}{0,1} = 89,11,$$

$$[x_3, x_4] = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{195,112 - 166,375}{0,7 - 0,4} = \frac{28,737}{0,3} = 95,79;$$

$$[x_4, x_5] = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} = \frac{216,000 - 195.112}{0,9 - 0,7} = \frac{20,888}{0,2} = 104,44;$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2]-[x_0, x_1]}{x_2-x_0} = \frac{85{,}87-81{,}13}{0{,}3-0} = \frac{4{,}74}{0{,}3} = 15{,}80;$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3]-[x_1, x_2]}{x_3-x_1} = \frac{89{,}11-85{,}87}{0{,}4-0{,}2} = \frac{3{,}24}{0{,}2} = 16{,}2;$$

$$[x_2, x_3, x_4] = \frac{[x_3, x_4]-[x_2, x_3]}{x_4-x_2} = \frac{95{,}79-89{,}11}{0{,}7-0{,}3} = \frac{6{,}68}{0{,}4} = 16{,}7;$$

$$[x_3, x_4, x_5] = \frac{[x_4, x_5]-[x_3, x_4]}{x_5+x_3} = \frac{104{,}44-95{,}79}{0{,}9-0{,}4} = \frac{8{,}65}{0{,}5} = 17{,}3;$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2, x_3]-[x_0, x_1, x_2]}{x_3-x_0} = \frac{16{,}2-15{,}8}{0{,}4-0} = \frac{0{,}4}{0{,}4} = 1;$$

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{[x_2, x_3, x_4]-[x_1, x_2, x_3]}{x_4-x_1} = \frac{16{,}7-16{,}2}{0{,}7-0{,}2} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1;$$

$$[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{[x_3, x_4, x_5]-[x_2, x_3, x_4]}{x_5-x_2} = \frac{17{,}3-16{,}7}{0{,}9-0{,}3} = \frac{0{,}6}{0{,}6} = 1;$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{[x_1, x_2, x_3 x_4]-[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4-x_0} = \frac{1-1}{0{,}7-0} = 0;$$

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{[x_2, x_3, x_4, x_5]-[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5-x_1} = \frac{1-1}{0{,}9-0{,}2} = 0.$$

მიღებული შედეგები გავაერთიანოთ ცხრილში (ცხრ. 2).

ცხრილი 2

x_k	y_k	I-რიგის	II რიგის	III-რიგის	IV-რიგის
0,0	132,651				
		81·13			
0,2	140,877		15·8		
0,3	157,464	85,87		1	
			16,2		0
0,4	166,375	89,11		1	
			16·7		0
0,7	195·112	95·79		1	
			17,3		
0,9	216,000	104,44			

§ 18. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა არათანაბრად დაშორებული კვანძებისათვის

განცალებულ სხვაობათა ცნების გამოყენებით ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმის ანალოგიური სახით. წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი

ლ ე მ ა. თუ $y=P(x)$ არის n-ური ხარისხის პოლინომი, მაშინ მისი $n+1$ რიგის განცალებული სხვაობა იგივურად ნულის ტოლია, ე. ი.

$$[x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \equiv 0$$

ერთმანეთისაგან განსხვავებული $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ რიცხვების ნებისმიერი სისტემისათვის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $P(x)$ არის n-ური ხარისხის პოლინომი, მაშინ

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \equiv P(x, x_0)$$

იქნება x-ის მიმართ $n-1$ ხარისხის პოლინომი. შემდეგ,

$$[x, x_0, x_1] = \frac{P(x, x_0) - P(x_0, x_1)}{x - x_1} \equiv P(x, x_0, x_1)$$

წარმოადგენს x-ის მიმართ $n-2$ ხარისხის პოლინომს. მართლაც, $P(x, x_0) - P(x_0, x_1) = P(x, x_0) - P(x_1, x_0)$ ფუნქციის ფესვია $x = x_1$ და მაშასადამე, ბეზუს თეორემის თანახმად $P(x, x_1) - P(x_0, x_1)$ პოლინომი უნაშთოდ იყოფა $x - x_1$ სხვაობაზე. ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ

$$[x, x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}] = P(x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

არის ნულოვანი ხარისხის პოლინომი, ე. ი.

$$P(x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = C.$$

აქედან

$$[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{C - C}{x - x_n} \equiv 0.$$

ვთქვათ $P(x)$ არის n-ური ხარისხის ლაგრანჟის ისეთი პოლინომი, რომ

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

სადაც $y = f(x)$ — მოცემული ფუნქციაა. $P(x)$ პოლინომის განცალებული სხვაობები აღვნიშნოთ: $P(x, x_0)$, $P(x, x_0, x_1), \ldots, P(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ სიმბოლოებით, გვექნება:

$$\begin{cases} P(x_0, x_1) = [x_0, x_1], \\ P(x_0, x_1, x_2) = [x_0, x_1, x_2], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(x_0, x_1, \ldots, x_n) = [x_0, x_1, \ldots, x_n]. \end{cases} \tag{2}$$

ლემის თანახმად,

$$P(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{3}$$

განსაზღვრების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0}=P(x,\ x_0), \tag{4}$$

საიდანაც

$$P(x)=P(x_0)+P(x,\ x_0)(x-x_0). \tag{5}$$

განცალებული სხვაობების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P(x,\ x_0,\ x_1,\dots,x_m)=\frac{P(x,\ x_0,\ x_1,\dots,x_{m-1})-P(x_0,\ x_1,\dots,x_m)}{x-x_m}.$$

აქედან

$$P(x,x_0,\ x_1,\dots,x_{m-1})=P(x_0,\ x_1,\dots,x_m)+(x-x_m)P(x,\ x_0,\ x_1,\dots,x_m) \tag{6}$$

$(m=1,2,\dots,n)$. (6) ფორმულის თანახმად (5) ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{gathered}P(x)=P(x_0)+P(x,\ x_0)(x-x_0)=P(x_0)+P(x_0,\ x_1)(x-x_0)+\\+P(x,\ x_0,\ x_1)(x-x_0)(x-x_1)=P(x_0)+P(x_0,\ x_1)(x-x_0)+\\+P(x_0,\ x_1,\ x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\dots\\ \dots+P(x_0,\ x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})+\\+P(x,\ x_0,\ x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),\end{gathered}$$

ანუ, (2) და (3) ტოლობების გათვალისწინებით, საბოლოოდ მივიღებთ ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომს არათანაბრად დაშორებული კვანძებისათვის

$$\begin{gathered}P(x)=y_0+[x_0,\ x_1](x-x_0)+[x_0,\ x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\\+\dots+[x_0,\ x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).\end{gathered} \tag{7}$$

(7) ფორმულის ცდომილება გამოითვლება ფორმულით

$$R_n(x)=f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{8}$$

სადაც ξ არის $x_0,\ x_1\dots,\ x_n$ კვანძებსა და x შორის საშუალედო მნიშვნელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შევადგინოთ

k	0	1	2	3
x_k	0	2,5069	5,0154	7,52270
y_k	0,3989423	0.3988169	0,3984408	0.3978138

ცხრილით მოცემული ფუნქციის ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი და ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x=3,7608$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ განცალებული სხვაობები:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0,3988169 - 0,3989423}{2,5069 - 0} = -0,0000500;$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0,3984408 - 0,3988169}{5,0154 - 2,5069} = -0,0001499;$$

$$[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{0,3978138 - 0,3984408}{7,52270 - 5,0154} = -0,00002496;$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0,0001499 + 0,0000500}{5,0154 - 0} = $$
$$= -0,0000199;$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-0,0002496 + 0,0001499}{7,52270 - 2.5069} =$$
$$= -0,0000199;$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} =$$
$$= \frac{-0,0000199 + 0,0000199}{7,52270 - 0} = 0.$$

მიღებული შედეგები გავაერთიანოთ ცხრილში (ცხრ. 3)

ც ხ რ ი ლ ი 3

x	y	I-რიგის	II-რიგის	III-რიგის
0 2,5069 5,0154 7.5270	0,3989423 0,3988169 0,3984408 0,3978138	—500 —1499 —2496	—199 —199	0

(7) ფორმულის თანახმად

$$P(x) = 0,3989423 - 0,0000500x - 0,0000199x\ (x - 2,5069),$$

საიდანაც, $P(3,7608) = 0,3986604$, ე. ი. $f(3,7608) \approx 0,3986604$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ვიპოვოთ $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ ფუნქციის სასრული სხვაობები $h=2$ ბიჯით.
2. შევადგინოთ $y = x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ ფუნქციის სხვაობათა ჰორიზონტალური ცხრილი $x = 0$ საწყისი მნიშვნელობიდან $h = 1$ ბიჯით.

3. შევადგინოთ $y=\sin x$ ფუნქციის სასრულ სხვაობათა დიაგონალური ცხრილი $h=0{,}1$ ბიჯით [0; 0,6] სეგმენტზე.

4. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

x	2,30	2,50	3,01	3,84	4,02	4,36
y	14,20	15,02	16,12	17,05	18,44	20,02

ავაგოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი [2, 3; 4,26], სეგმენტზე

5. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

x	321,0	322,6	324,2	325,2
y	2,5065	2,5088	2,5107	2,5116

გამოვთვალოთ $f(322{,}5)$.

6. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

x	1	3	5	6	8
y	5	6	7	9	11

ავაგოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი და გამოვთვალოთ $f(3{,}5)$.

7. ავაგოთ $y=3^x$ ფუნქციის ლაგრანჟის პოლინომი $x_0=-1$, $x_1=0$ $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$ კვანძებით და გამოვთვალოთ ნაშთი, რომელიც მიიღება, თუ $y=3^x$ ფუნქციას შევცვლით $L_4(x)$ პოლინომით.

8. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

x	0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8
y	14,6	16,3	17,2	18,1	19,6	20,6

შევადგინოთ განცალებული სხვაობები.

რიცხვითი გაწარმოება და ინტეგრება

§ 1. ფუნქციათა მიახლოებითი გაწარმოება

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა ხშირ შემთხვევაში მოითხოვს $f(x)$ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულის გამოთვლას. თუ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, თანაც საკმაოდ მარტივი ფორმით, მაშინ ამოცანა ამოიხსნება მათემატიკური ანალიზის მეთოდებით. იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$-ის ანალიზური გამოსახულება რთულია ან იგი მოცემულია ცხრილის სახით, მაშინ მის გაწარმოებას ვახდენთ ე. წ. *მიახლოებითი გაწარმოების ფორმულებით*. ამ ფორმულების მისაღებად $f(x)$ ფუნქციას მოცემულ შუალედზე ცვლიან საინტერპოლაციო $\varphi(x)$ ფუნქციით (უმეტეს შემთხვევაში $\varphi(x)$ მრავალწევრია). გვაქვს

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \tag{1}$$

სადაც $P_n(x)$ — საინტერპოლაციო მრავალწევრია, ხოლო $R_n(x)$ — ნაშთითი წევრი.

დავუშვათ, $f(x)$ წარმოებადია, k — რიგამდე ჩათვლით. მაშინ (1)-ის k-ჯერ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} f'(x)&=P_n'(x)+R'_n(x),\\ f''(x)&=P''_n(x)+R_n''(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ f^{(k)}(x)&=P_n^{(k)}(x)+R_n^{(k)}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

$f(x)$ ფუნქციის წარმოებულთა მიახლოებით მნიშვნელობად ღებულობენ (2) ტოლობების მარჯვენა მხარეთა პირველ შესაკრებებს, ე. ი.

$$\begin{aligned} f'(x)&\approx P'_n(x),\\ f''(x)&\approx P_n''(x).\\ &\dots\dots\dots\\ f^{(k)}(x)&\approx P_n^{(k)}(x). \end{aligned} \tag{3}$$

$R_n'(x), R_n''(x),\dots,R_n^{(k)}(x)$ ნაშთითი წევრები არიან შესაბამისად (3) მიახლოებითი ტოლობების ცდომილებები. $f(x)$ ფუნქციის $R_n(x)$ პოლინომით შეცვლისას იგულისხმება, რომ $R_n(x)$ საკმარისად მცირეა, მაგრამ აქედან არ გამომდინარეობს $R_n'(x), R_n''(x),\dots, R_n^{(k)}(x)$ ნაშთითი წევრების სიმცირე.

მიახლოებითი გაწარმოების შედეგად მიღებული ნაშთითი წევრები აღვნიშნოთ $r_k(x)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$r_k(x)=R_n^{(k)}(x) \quad (k=1,2,\dots) \tag{4}$$

§16 (5)-ის თანახმად გვექნება

$$r_1(x)= \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\cdot\frac{df^{(n+1)}(\xi)}{dx}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi'_{n+1}(x).$$

კერძოდ, როცა $x=x_i$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$, მივიღებთ

$$r_1(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi'_{n+1}(x_i), \quad \xi\in[x_0, x_n], \tag{5}$$

სადაც

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

ანალოგიურად გამოითვლება ნაშთითი წევრები მაღალი რიგის წარმოებულებისათვის.

ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულების გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები:

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის თანაბრად დაშორებული კვანძები $x_i=x_0+ih$ $(i=1,2,\ldots,n)$, სადაც $x_0=a$, $x_n=b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, ხოლო $y(x_i)=y_i(i=0,1,2,\ldots,n)$.

ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულით გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $x\in[a, b]$, $x\neq x_i$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$. ამისათვის იგი შევცვალოთ აღნიშნული საინტერპოლაციო ფორმულით, მივიღებთ

$$f(x)\approx y_0+q\Delta y_0+ \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+ \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0+ \\ +\cdots+\frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{(n-1)!}\Delta^n y_0, \tag{6}$$

სადაც $q=\dfrac{x-x_0}{h}$, $h=x_{i+1}-x_i$. (6) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$f(x)\approx y_0+q\Delta y_0+\frac{q^2-q}{2!}\Delta^2 y_0+ \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0+ \\ +\frac{q_0-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0+\cdots \tag{7}$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\frac{df(x)}{dq}$$

ტოლობას, მაშინ (7)-დან მივიღებთ

$$f'(x)\approx \frac{1}{h}\Bigg(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+ + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\Bigg), \tag{8}$$

$$f''(x)\approx \frac{1}{h^2}\Bigg(\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\Bigg). \tag{9}$$

ანალოგიურად გამოითვლება მაღალი რიგის წარმოებულები.

ნიუტონის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ეფექტურად გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულები შუალედის ბოლო წერტილებში. კერძოდ, გვექნება

$$f'(x)\approx \frac{1}{h}\Bigg(\Delta y_{n-1}+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_{n-3}+ + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4}+\dots\Bigg), \tag{10}$$

$$f''(x)\approx \frac{1}{h^2}\Big(\Delta^2 y_{n-2}+(q+1)\Delta^3 y_{n-3}+\dots\Big). \tag{11}$$

მიახლოებითი გაწარმოების ფორმულები გაცილებით მარტივია საინტერპოლაციო კვანძებში, ე. ი. როცა $q=0$ $(x=x_0)$, გვექნება

$$f'(x_0)\approx \frac{1}{h}\Bigg(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\cdots\Bigg), \tag{12}$$

$$f''(x_0)\approx \frac{1}{h}\Bigg(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0+\dots\Bigg). \tag{13}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით (ცხრ.1). ვიპოვოთ $f'(4)$, $f''(4)$.

ც ხ რ ი ლ ი 1

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
4	2			
		5		
5	7		12	
		17		6
6	24		18	
		35		
7	59			

ა მ ო ხ ს ნ ა. $h=1$-სათვის სასრულ სხვაობათა მნიშვნელობები შევიტანოთ იმავე ცხრილში. (12) და (13) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$f'(4)\approx\left(5-\frac{1}{2}\cdot 12+\frac{1}{3}\cdot 6\right)=1,\quad f'(4)=1.$$

$$f''(4)=\frac{1}{1^2}(12-6)=6,\quad f''(4)=6.$$

ახლა გამოვიყვანოთ რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით. განვიხილოთ $[a, b]$-ზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია და ამ სეგმენტის თანაბრად დაშორებული კვანძები:

$$x_i=x_0+ih \qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

ისე, რომ $x_0=a$, $x_n=b$ და $h=\dfrac{b-a}{n}$. ვთქვათ $y(x_i)=y_i\,(i=0,1,2,\ldots,n)$.

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით გამოვთვალოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობა $x\in[a, b]$ წერტილში, $x\neq x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, მივიღებთ

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Pi_{n+1}(x)y_i}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}. \tag{14}$$

აქედან

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{i!(n-i)!}\,\frac{d}{dq}\left\{\frac{q^{[n+1]}}{q-1}\right\}, \tag{15}$$

სადაც $q=\dfrac{x-x_0}{h}$; $\quad q^{[n+1]}=q(q-1)\ldots(q-n)$.

ანალოგიურად გამოითვლება $f(x)$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები.

თუ $x=x_i$, მაშინ ნაშთით წევრს ექნება სახე

$$r_1(x_i)=R'_n(x_i)=(-1)^{n-i}h^n\frac{i!\,(n-i)!}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi\in[a,b]. \tag{16}$$

როცა $n=2$, მაშინ (15)-დან მივიღებთ

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\,y_0(2q-3)-y_1(2q-2)+\frac{1}{2}\,y_2(2q-1)\right),$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$y'(x_i)=y_i' \qquad (i=0,1,2),$$

მაშინ

$$y'_0=\frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-y_2);$$

$$y'_1=\frac{1}{2h}(-y_0+y_2); \tag{17}$$

$$y'_2=\frac{1}{2h}(y_0-4y_1+3y_2);$$

რომელთა ნაშთითი წევრები მიიღება (16) ფორმულიდან

$$r_1(x_0)=\frac{1}{3}h^2y''(\xi_1),$$

$$r_1(x_1)=-\frac{1}{6}h^2y''(\xi_2),$$

$$r_1(x_2)=\frac{1}{3}h^2y''(\xi_3),$$

სადაც $\xi_i\in(x_0,x_2)$ $(i=1,2,3)$.

ანალოგიურად, $n=3$, $n=4$ და ა. შ. მნიშვნელობებისათვის (15)-დან მარტივად მიიღება მიახლოებითი გაწარმოების ფორმულები. მაგალითად:

I. $n=3$ (ოთხი წერტილი)

$$y'_0=\frac{1}{6h}(-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3)-\frac{h^3}{4}y^{(4)}(\xi_1),$$

$$y'_1=\frac{1}{6h}(-2y_0-3y_1+6y_2-y_3)+\frac{h^4}{12}y^{(4)}(\xi_2), \tag{18}$$

$$y'_2=\frac{1}{6h}(y_0-6y_1+3y_2+2y_3)-\frac{h^4}{12}y^{(4)}(\xi_3),$$

სადაც $\xi_i\in(x_0,\ x_3)$ $(i=1,2,3)$;

II. $n=4$ (ხუთი წერტილი)

$$y'_0=\frac{1}{12h}(-25y_0+48y_1-36y_2+16y_3-3y_4)+\frac{h^4}{5}y^{(5)}(\xi_1),$$

$$y'_1=\frac{1}{12h}(-3y_0-10y_1+18y_2-6y_3+y_4)-\frac{h^4}{20}y^{(5)}(\xi_2), \tag{19}$$

$$y'_2=\frac{1}{12h}(y_0-8y_1+8y_3-y_4)+\frac{h^4}{30}y^{(5)}(\xi_3),$$

სადაც $\xi_i\in(x_0,\ x_4)$ $(i=1,2,3)$.

§ 2. ფუნქციათა მიახლოებითი ინტეგრება

როგორც ცნობილია თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $F(x)$ არის მისი პირველადი ამ სეგმენტზე, მაშინ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1}$$

ხშირ შემთხვევაში $F(x)$ არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების სასრული რაოდენობის წრფივი კომბინაციით, ამიტომ (1) ფორმულით განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა არ ხერხდება. ამასთან, პრაქტიკაში უმეტეს შემთხვევაში, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია არა ანალიზურად არამედ ცხრილის საშუალებით, ამიტომ ფუნქციის პირველადის დადგენა შეუძლებელია. ანალოგიურ სიტუაციას აქვს ადგილი ჯერადი ინტეგრალების გამოთვლების შემთხვევაშიც. ამიტომ მნიშვნელობას იძენს განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი და კერძოდ რიცხვითი მეთოდებით გამოთვლა.

საზოგადოდ, ფუნქციათა რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობის დადგენაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დისკრეტული მნიშვნელობებით საინტეგრო შუალედიდან.

ფორმულებს, რომელთა საშუალებით ვპოულობთ განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხვით მნიშვნელობებს *კვადრატურულ ფორმულებს* ვუწოდებთ. ანალოგიურ ფორმულებს ორჯერადი ინტეგრალებისათვის ვუწოდებთ *კუბატურულ ფორმულებს*.

კვადრატურული ფორმულების მისაღებად, $[a, b]$ საინტეგრო შუალედზე მოცემულ $y=f(x)$ ფუნქციას ცვლიან $\varphi(x)$ საინტერპოლაციო პოლინომით და წერენ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{2}$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, მაშინ ისმის საკითხი (2) ფორმულის ცდომილების შეფასების შესახებ.

მოვიყვანოთ კვადრატურული ფორმულის მიღების მეთოდი ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის გამოყენებით. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის $n+1$ წერტილი $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ისეთი, რომ $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. ვთქვათ ამ წერტილებში $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია

$$y_i = f(x_i) \quad (i=0,1,\ldots,n). \tag{3}$$

მოცემული y_i მნიშვნელობებით ავაგოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}, \tag{4}$$

სადაც

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$
$$\Pi'_{n+1}(x)=(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n).$$

ცხადია

$$L_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n).$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას შევცვლით $L_n(x)$-ით, მივიღებთ

$$\int_a^b (x)\,dx=\int_a^b L_n(x)dx+R_n[f], \tag{5}$$

სადაც $R_n[f]$ წარმოადგენს (5) კვადრატურული ფორმულის ცდომილებას ან ნაშთით წევრს. (5)-დან (4)-ის გამოყენებით მიიღება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_a^b y\,dx=\sum_{i=0}^{n}A_i y_i+R_n[f], \tag{6}$$

სადაც

$$A_i=\int_a^b\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx \quad (i=0,1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

(6) ფორმულას უწოდებენ *ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურულ ფორმულას*, თუ საინტეგრო შუალედის ბოლო წერტილები საინტერპოლაციო კვანძებს წარმოადგენენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში — *ღია ტიპისას*.

შევნიშნოთ, რომ A_i კოეფიციენტების გამოსათვლელად მხედველობაში უნდა მივიღოთ:

1. ფიქსირებული საინტერპოლაციო კვანძებისათვის A_i კოეფიციენტები არ უნდა იყვნენ დამოკიდებული $f(x)$ ფუნქციაზე.

2. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის სტრუქტურიდან გამომდინარე, პოლინომებისათვის რომელთა ხარისხიც არ აღემატება n-ს კვადრატურული ფორმულა უნდა იყოს ზუსტი, ე. ი. $R_n[f]=0$. კერძოდ

თუ $y=x^k (k=0,1,2,\ldots,n)$, მაშინ $R_n[x^k]=0$ და A_k $(k=0,1,2,\ldots,n)$ კოეფიციენტების გამოსათვლელად მიიღება შემდეგი სისტემა:

$$\left\{\begin{array}{l} I_0=\sum_{i=0}^{n} A_i \\ I_1=\sum_{i=0}^{n} A_i x_i \\ I_2=\sum_{i=0}^{n} A_i x^2_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ I_n=\sum_{i=0}^{n} A_i x^n_i \end{array}\right. \tag{8}$$

სადაც

$$I_k=\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

(8) სისტემა თავსებადია, ვინაიდან მისი დეტერმინანტი ვანდერმონდის დეტერმინანტია და განსხვავებული საინტერპოლაციო კვანძებისათვის იგი განსხვავებულია ნულისაგან

$$D=\prod_{i>j}(x_i-x_j)\neq 0.$$

აქედან გამომდინარე A_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ცალსახად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შევადგინოთ კვადრატურული ფორმულა კვანძებისათვის:

$$x_0=\frac{1}{3}, \quad x_1=\frac{2}{3}, \quad x_0=1;$$

$$\int_0^1 ydx=A_0 y\left(\frac{1}{3}\right)+A_1 y\left(\frac{2}{3}\right)+A_2 y(1). \tag{9}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (9) ფორმულაში ვიგულისხმოთ

$$y=x^k \quad (k=0,1,2).$$

უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ

$$I_0=\int_0^1 dx=1,\quad I_1=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad I_2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

ამ მონაცემებით (8)-დან მიიღება A_0, A_1, A_2 კოეფიციენტების გამოსათვლელი სისტემა

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=1 \\ \frac{1}{3}A_0+\frac{2}{3}A_1+A_2=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9}A_0+\frac{4}{9}A_1+A_2=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს $A_0=\frac{3}{4}$, $A_1=0$, $A_2=\frac{1}{4}$. მაშასადამე,

$$\int_0^1 ydx=\frac{3}{4}\,y\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\,y(1).$$

ეს კვადრატურული ფორმულა ზუსტია იმ პოლინომებისათვის, რომელთა რიგი არ აღემატება $n=2$-ს.

§ 3. ნიუტონ-კოტესის კვადრატურული ფორმულა

ვთქვათ გამოსათვლელია

$$\int_a^b f(x)dx.$$

დავუშვათ, $[a, b]$ სეგმენტი დაყოფილია n ტოლ ნაწილად $h=\frac{b-a}{n}$ ბიჯით, სადაც

$$x_0=a,\quad x_i=x_0+ih\quad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

მოცემულ კვანძებში $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$.

$y=f(x)$ ფუნქციის შეცვლა ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით მოგვცემს (ნაშთითი წევრი უკუგდებულია)

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx=\sum_{i=0}^{n} A_i y_i, \tag{1}$$

სადაც A_i უცნობი კოეფიციენტებია.

როგორც ვიცით

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} P_i(x)y_i, \tag{2}$$

სადაც

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \tag{3}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$q=\frac{x-x_0}{h},$$

მაშინ

$$q^{[n+1]}=q(q-1)\ldots(q-n)$$

და (2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\,\frac{q^{[n-1]}}{q-i}y_i. \tag{4}$$

(1) და (4)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$A_i=\int_{x_0}^{x_n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\,\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dx.$$

ამ უკანასკნელიდან

$$q=\frac{x-x_0}{h} \quad \text{და} \quad dq=\frac{dx}{h}$$

გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A_i=h\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dq \quad (i=0,1,\cdots,n). \tag{5}$$

მივცეთ (5)-ს შემდეგი სახე

$$A_i=(b-a)H_i,$$

სადაც

$$H_i=\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n\frac{q^{[n-1]}}{q-i}\,dq \quad (i=0,1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

H_i-ს ($i=0,1,2,\ldots,$) უწოდებენ კ ო ტ ე ს ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ-ტ ე ბ ს. (6)-ის თანახმად (1) მიიღებს სახეს

$$\int_a^b ydx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i, \tag{7}$$

სადაც $h=\dfrac{b-a}{n}$ და $y_i=f(a+ih)$ $(i=0,1,\ldots,n)$.

ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ

1. $\sum\limits_{i=0}^{n} H_i=1$ (თუ (7)-ში ავიღებთ $a=0$, $b=1$, $y=1$),

2. $H_i=H_{n-i}$ (თუ (6) ფორმულაში n-ს შევცვალოთ $n-i$-თი)

(7) ფორმულებს (6) კოეფიციენტებით უწოდებენ ნ ი უ ტ ო ნ-კ ო-ტ ე ს ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ უ რ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს.

როცა $n=3$, (7)-დან მიიღება

$$\int_{x_0}^{x_3} ydx=\frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3),$$

რომლის ნაშთითი წევრი მოიცემა ფორმულით

$$R=-\frac{3h^5}{80}y^{(4)}(\xi),$$

სადაც $\xi\in(x_0,\ x_3)$.

საზოგადოდ, ნიუტონ-კოტესის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი დადგენილია სტეფენსენის [10] მიერ და $y=f(x)$ ფუნქციის მოთხოვნილი სიგლუვისათვის არის შემდეგი რიგის

$$R=O[h^{2E\left(\frac{n}{2}\right)+3}],$$

სადაც $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$ არის $\dfrac{n}{2}$ წილადის მთელი ნაწილი.

§ 4. მართკუთხედების, ტრაპეციის და სიმპსონის კვადრატული ფორმულები

მართკუთხედების ფორმულა შეგვიძლია მივიღოთ §2-ის (6)-დან თუ მასში დავუშვებთ $n=0$ და $A_0=x_1-x_0=h$. გვექნება

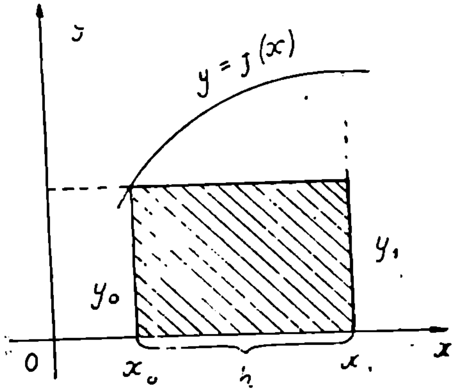
$$\int_{x_0}^{x_1} ydx=hy_0+R(h), \tag{1}$$

სადაც

$$R(h)=\int\limits_{x_0}^{x_1} ydx-hy_0=\int\limits_{x_0}^{x_0+h} ydx-hy_0.$$

(1) არის მართკუთხედების ფორმულა (ნახ. 24). ნაშთითი წევრის შესაფასებლად საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქცია იყოს უწყვეტად წარმოებადი $[x_0, x_1]$ შუალედში.

ცვლადი ზედა საზღვრიანი, ინტეგრალის გაწარმოების წესის თანახმად



ნახ 24,

$$F(x)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

გამოსახულებისათვის გვექნება:

$$F'(x)=f(b(x))\cdot b'(x)-f(a(x))a'(x),$$

ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში

$$R'(h)=y(x_0+h)-y_0,\quad R''(h)=y'(x_0+h).$$

რადგან $R(0)=R'(0)=0$, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$R'(h)=R'(0)+\int\limits_0^h y'(x_0+t)dt=hy'(\xi),\quad \xi\in(x_0,x_0+h),$$

ან

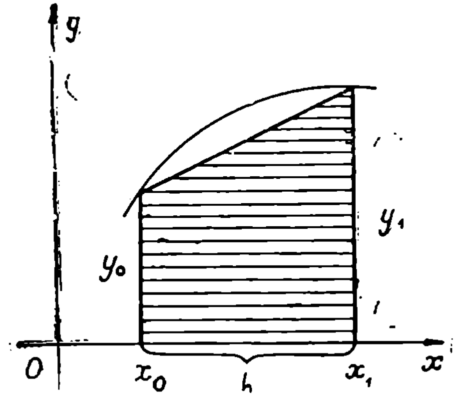
$$R(h)=R(0)+\int\limits_0^h ty'(\xi)dt=\frac{h^2}{2}y'(\xi),$$

ე. ი.

$$R(h)=\frac{(x_1-x_0)^2}{2}y'(\xi),\quad \xi\in(x_0,\ x_0+h). \tag{2}$$

ტრაპეციის ფორმულა მიიღება §2-ის (6)-დან თუ მასში $n=1$, $a=x_0$, $b=x_1$. კერძოდ, § 2-ის (7)-დან

$$H_0=-\int\limits_0^1\frac{q(q-1)}{q}dq=\frac{1}{2};\quad H_1=\int\limits_0^1 qdq=\frac{1}{2}.$$



ნახ. 25

ამიტომ

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + R(h), \quad (3)$$

რომელსაც უწოდებენ ტრაპეციის ფორმულას (ნახ. 25).

ნაშთითი წევრი

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

მისი შეფასების მიზნით დავუშვათ, რომ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[x_0, x_1]$-ში. ნაშთითი წევრი ჩავწეროთ

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2}\left(y(x_0) + y(x_0+h)\right)$$

სახით და მის მიმართ გამოვიყენოთ ცვლადი ზედა საზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების წესი, მივიღებთ

$$R'(h) = \frac{1}{2}[y(x_0+h) - y(x_0)] - \frac{h}{2} y'(x_0+h),$$

$$R''(h) = -\frac{h}{2} y''(x_0+h).$$

რადგან

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0,$$

ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h t y''(x_0 + t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2} y''(\xi) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4} y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^2}{12} y''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + h).$$

ამრიგად, საბოლოოდ

$$R(h)=-\frac{h^2}{12}\ y''(\xi)=-\frac{(x_1-x_0)^2}{12}y''(\xi). \tag{4}$$

სიმპსონის კვადრატურული ფორმულა მიიღება §2-ის (6)-დან თუ ამ უკანასკნელში $n=2$. მაშინ §2-ის (7) ფორმულის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ

$$H_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^2(q-1)(q-2)dq=\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{1}{6}$$

$$H_1=-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 q(q-2)dq=\frac{2}{3},$$

$$H_2=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 q(q-1)\,dq=\frac{1}{6}.$$

ამასთან, თუ დავუშვებთ, რომ $x_2-x_0=2h$, გვექნება

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} ydx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+R(h), \tag{5}$$

სადაც

$$R(h)=\int\limits_{x_0}^{x_2}ydx-\frac{h}{3}(y_1+4y_1+y_2)$$

ნაშთითი წევრია.

(3) ფორმულას ეწოდება **სიმპსონის კვადრატურული ფორმულა**.

მოვითხოვოთ, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ ფუნქციების უწყვეტობა $[x_0, x_2]$ სეგმენტზე. ნაშთითი წევრი შევაფასოთ $[x_1-h, x_1+h]$ სიმეტრიულ შუალედში. გვაქვს

$$R(h)=\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}ydx-\frac{h}{3}\left(y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\right).$$

ზემოთ გამოყენებული გაწარმოების წესის თანახმად

$$R'(h)=\frac{2}{3}[y(x_1-h)+y(x_1+h)]-\frac{4}{3}y(x_1)-\frac{h}{3}[-y'(x_1-h)+$$
$$+y'(x_1+h)],$$

$$R''(h) = \frac{1}{3}[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)],$$

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}[y'''(x_1+h)-y'''(x_1-h)] = -\frac{2h^2}{3}y^{\text{IV}}(\xi)$$

$$\xi_1 \in (x_1-h, x_1+h).$$

რადგან $R(0)=R'(0)=R''(0)=0$, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{\text{IV}}(\xi_1)dt =$$

$$= -\frac{2}{3}y^{\text{IV}}(\xi)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9}h^3 y^{\text{IV}}(\xi),$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{3}{9}\int_0^h t^3 y^{\text{IV}}(\xi_1)dt =$$

$$= -\frac{2}{9}y^{\text{IV}}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = \frac{1}{18}h^4 y^{\text{IV}}(\xi_1),$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{\text{IV}}(\xi_1)dt =$$

$$= -\frac{1}{18}y^{\text{IV}}(\xi_1)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90}y^{\text{IV}}(\xi),$$

$$\xi \in (x_1-h,\ x_1+h).$$

ამრიგად, სიმპსონის ფორმულის ნაშთით წევრს ექნება სახე

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}y^{\text{IV}}(\xi),\ \ \xi\in(x_0,x_2). \tag{6}$$

იმისათვის, რომ (1), (3), (5) ფორმულები გამოვიყენოთ ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა $[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ $h=\dfrac{b-a}{n}$ ბიჯით თანაბარ $[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედებად, სადაც $a=x_0$ და $b=x_n$, თუ გვაქვს (1) და (3) ფორმულები; ხოლო $h=\dfrac{b-a}{2n}$ ბიჯით — $[x_{2i},\ x_{2i+2}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედებად, სადაც $a=x_0$ და $b=x_{2n}$,

როცა საქმე გვაქვს (5) ფორმულასთან. $[x_i, x_{i+1}]$ შუალედებისათვის (1), (3) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ შესაბამისად

$$\int_a^b f(x)dx=h(y_0+y_1+\dots+y_{n-2}+y_{n-1})+R[f]$$

მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს, სადაც

$$R[t]=\frac{(b-a)h^2}{2}f'(\xi),\quad \xi\in(a,\ b).$$

და

$$\int_a^b f(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\dots+y_{n-1}\right)+R[t]$$

ტ რ ა პ ე ც ი ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს, სადაც

$$R[f]=\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi),\quad \xi\in(a,b).$$

თუ თითოეული $[x_{2i},\ x_{2i+2}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედისათვის გამოვიყენებთ (5) ფორმულას; მივიღებთ ე. წ. ს ი მ ბ ს ო ნ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})](+R[f],$$

სადაც

$$R[f]=\frac{(b-a)h^4}{180}y^{\text{IV}}(\xi),\quad \xi\in(a,\ b).$$

§ ე. ჩებიშევის ტიპის კვადრატურული ფორმულები

ჩებიშევის ტიპის კვადრატურულ ფორმულებს ზოგადად აქვს სახე

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\sum_{i=1}^{n}B_i f(t_i), \tag{1}$$

სადაც B_i — მუდმივი კოეფიციენტებია, ამასთან t_i აბსცისები ისეა შერჩეული, რომ

1. $B_i(i=1,2,\dots,n)$ კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია;

2. (1) კვადრატურული ფორმულა ზუსტია პოლინომებისათვის, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს.

ამრიგად, თუ $B_1=B_2=\ldots=B_n=B$ და $f(t)\equiv 1$, გვექნება

$$2=\sum_{i=1}^{n} B_i \text{ ან } B=\frac{2}{n}.$$

მაშასადამე, ჩებიშევის კვადრატურულ ფორმულას აქვს სახე

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \qquad (2)$$

t_i აბსცისები გამოითვლება იმ პირობით, რომ (1) ფორმულები ზუსტია $f(t)=t^k (k=0,1,2,\ldots,n)$ პოლინომებისათვის. აქედან გამომდინარე (2) ფორმულებისათვის გვექნება

$$\begin{cases} t_1+t_2+\cdots+t_n=0 \\ t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2=\dfrac{n}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1^n+t_2^n+\cdots+t_n^n=\dfrac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}, \end{cases} \qquad (3)$$

საიდანაც შეიძლება განისაზღვროს t_i $(i=1,2,\ldots,n)$. ჩებიშევმა დაამტკიცა, რომ (3) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება n-ური ხარისხის რაღაც ალგებრული განტოლების ამოხსნაზე.

ს. ნ. ბერნშტეინმა აჩვენა, რომ როცა $n=8$ და $n\geqslant 10$, მაშინ (3) სისტემას ნამდვილი ამონახსნები არ გააჩნია. ამიტომ აღნიშნულ შემთხვევებში ჩებიშევის კვადრატურულ ფორმულებს აზრი არა აქვს.

მოვიყვანოთ ჩებიშევის ფორმულის t_i-აბსცისების მნიშვნელობათა ცხრილი (ცხრ. 1).

ცხრილი 1

n	i	t_i	n	i	t_i
2	1;2	∓0,577350	6	1;6	∓0,866247
3	1;3	∓0,707107		2;5	∓0,422519
	2	0		3;4	∓0,266635
4	1;4	∓0,794654	7	1;7	∓0,883862
	2;3	∓0,1875592		2;6	∓0,529657
5	1;5	∓0,832498		3;5	∓0,323912
	2;4	∓0,374541		4	0
	3	0			

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვიყვანოთ ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულა $n=3$-სათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. t_i აბსცისების ($i=1,2,3$) გამოსათვლელად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=0 \\ t_1^2+t_2^2+t_3^3=1 \\ t_1^3+t_2^3+t_3^3=0. \end{cases} \tag{4}$$

(4)-ის ამოსახსნელად შემოვიღოთ თანაფარდობები

$$\begin{cases} c_1=t_1+t_2+t_3 \\ c_2=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3 \\ c_3=t_1t_2t_3. \end{cases} \tag{5}$$

(5)-ის გათვალისწინებით (4)-დან გვექნება

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=\frac{1}{2}\left[(t_1+t_2+t_3)^2-(t_1^2+t_2^2+t_3^2)\right]=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2} \\ c_3=\frac{1}{6}\left[(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+2(t_1^3+t_2^3+t_3^3)\right]= \\ \qquad =\frac{1}{6}(0-0+0)=0. \end{cases}$$

აქედან ცხადია, რომ t_i ($i=1,2,3$) არიან $t^3-c_1t^2+c_2t-c_3=0$ ან $t^3-\frac{1}{2}t=0$ განტოლების ფესვები.

ამრიგად, საძიებელი აბსცისებისათვის მიიღება

$$t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2=0, \quad t_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

და ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f(0)-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

გამოვიყენოთ ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულა $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალისათვის, რისთვისაც მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$x=\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2}t,$$

რომელიც $[a, b]$ მონაკვეთს გადაიყვანს $[-1, 1]$ მონაკვეთზე. გარდაქმნილი ინტეგრალისათვის ჩებიშევის ფორმულას ექნება სახე

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{6}$$

სადაც

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \tag{7}$$

და t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — (3) სისტემის ფესვებია (იხ. ცხრ. 1).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულით გამოვთვალოთ $I=\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$ ინტეგრალი $(n=5)$-სათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, მაშინ

$$I = \frac{1}{5}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)],$$

სადაც (7)-ის თანახმად

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0{,}83250) = 0{,}08375;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0{,}37454) = 0{,}31273;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0{,}5;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0{,}37454) = 0{,}68727;$$

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0{,}83250) = 0{,}91625.$$

ც ხ რ ი ლ ი 2

i	x_i	y_i
1	0,08375	0,0773
2	0,31273	0,2382
3	0,50000	0,3333
4	0,68727	0,4073
5	0,91625	0,4781
		1,5342

გამოთვლების საბოლოო შედეგები მოცემულია ცხრილში (ცხრ. 2). ამრიგად,

$$I = \frac{1}{5}\cdot 1{,}5342 = 0{,}3068.$$

შედარების მიზნით მოვიყვანოთ იგივე ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა

$$I = 0{,}306846\ldots$$

გაუსის კვადრატურული ფორმულების მისაღებად განვიხილოთ ლეჟანდრის ცნობილი პოლინომები

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

და მოვიყვანოთ მისი ზოგიერთი თვისება

1) $P_n(1)=1, \quad P_n(-1)=(-1)^n \quad (n=0,1,2,\ldots)$;

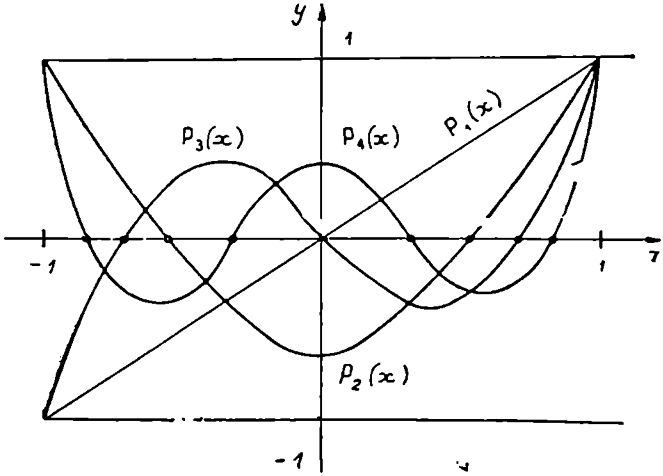
2) $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)Q_k(x)dx=0\ (k<n)$, სადაც $Q_k(x)$ არის k — ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი;

3) $P_n(x)$ პოლინომს $(-1,1)$ ინტერვალში გააჩნია n განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ამრიგად,

$$P_0(x)=1,$$
$$P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

რომელთა გრაფიკებს შესაბამისად აქვთ სახე (ნახ. 26).



ნახ. 26

გამოვიყვანოთ გაუსის კვადრატურული ფორმულა $[-1,1]$ შუალედისათვის ($[a, b]$ სეგმენტის შემთხვევა, მარტივი გარდაქმნებით დაიყვანება ამ შემთხვევაზე).

ვთქვათ, $y=f(x)$ მოცემულია $[-1,1]$ სეგმენტზე. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ აბსცისები და $A_1, A_2, \ldots, A_n$ კოეფიციენტები შევარჩიოთ ისე, რომ კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{1}$$

იყოს ზუსტი რაც შეიძლება მაღალი ხარისხის პოლინომისათვის. ვაჩვენოთ, რომ ეს ხარისხი $2n-1$-ის ტოლია. მართლაც, რადგან t_i და A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ მოცემული მუდმივების რაოდენობაა $2n$, ისინი ცალსახად განსაზღვრავენ სწორედ $2n-1$ ხარისხის პოლინომს.

ამრიგად, (1) ტოლობის მართებულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ჭეშმარიტი როცა $f(t)=1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}$.

მართლაც, თუ დავუშვებთ

$$\int_{-1}^{1} t^k dt=\sum_{i=1}^{n} A_i t^k_i \quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1) \tag{2}$$

და

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k,$$

მივიღებთ, რომ

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\sum_{k=0}^{2n-1} c_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k_i=\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ

$$\int_{-1}^{1} t^k dt=\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}=\begin{cases}\dfrac{2}{k+1} & \text{როცა } k \text{ ლუწია,}\\ 0 & \text{როცა } k \text{ კენტია,}\end{cases}$$

ტოლობას, მაშინ შეიძლება დავასკვნათ, რომ დასმული ამოცანის გა-

დასაწყვეტად საკმარისია t_i და A_i იყვნენ შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები (განტოლებათა რიცხვი $2n$):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

მივიღეთ არაწრფივი სისტემა, რომლის ამოხსნაც დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. არსებობს ხელოვნური მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ნაწილობრივ მაინც ავიცილოთ (3) სისტემის არაწრფივობასთან დაკავშირებული სირთულეები. მართლაც, განვიხილოთ პოლინომი

$$f(t) = t^k P_n(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}$$

სადაც $P_n(t)$—ლეჟანდრის პოლინომებია.

ივნაიდან (4) პოლინომების ხარისხი არ აღემატება $2n-1$-ს, ამიტომ (3)-ის თანახმად (4)-სათვის უნდა შესრულდეს (1), ე. ი.

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{5}$$

მეორე მხრივ ლეჟანდრის პოლინომების ორთოგონალობის თვისების გამო ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t) dt = 0 \quad \text{როცა} \quad k < n,$$

ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

(6) ტოლობები დაკმაყოფილდება ნებისმიერი A_i-სათვის თუ დავუშვებთ რომ

$$P_n(t)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ მივაღწიოთ (1) კვადრატურული ფორმულის მაღალი რიგის სიზუსტეს, t_i-მნიშვნელობებად უნდა ავიღოთ ლეჟანდრის პოლინომების ნულები. როგორც ცნობილია (მესამე თვისება) ეს ნულები ნამდვილი რიცხვებია და მოთავსებული არიან $(-1, 1)$ შუალედში. t_i აბსცისების საშუალებით (3) სისტემის პირველი n განტოლებათა სისტემიდან ადვილად შევძლებთ განვსაზღვროთ A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ კოეფიციენტები. რადგან აღნიშნული ქვესისტემის დეტერმინანტი არის ვანდერმონდის დეტერმინანტი, ამიტომ როცა $t_i \neq t_j$, მაშინ

$$D=\prod_{i>j}(t_i-t_j)\neq 0$$

და A_i კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან.

(1) ფორმულებს, სადაც t_i არიან ლეჟანდრის $P_n(t)$ პოლინომების ნულები და $A_i(i=1,2,\ldots,n)$ განისაზღვრებიან (3) სისტემიდან, უწოდებენ **გაუსის კვადრატურულ ფორმულებს.**

მაგალითი 1. გამოვიყვანოთ გაუსის კვადრატურული ფორმულა სამი ორდინატის შემთხვევაში ($n=3$).

ამოხსნა. ვიპოვოთ ლეჟანდრის $P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)$ პოლინომის ნულები:

$$t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}\approx-0{,}7746; \quad t_2=0; \quad t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}\approx 0{,}7746;$$

რომელთა გათვალისწინებით (3) სისტემიდან მივიღებთ A_1, A_2, A_3 კოეფიციენტების განმსაზღვრელ სისტემას

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}\,A_1+0\cdot A_2+\sqrt{\frac{3}{5}}\,A_3=0 \\ \frac{3}{5}A_1+0\cdot A_2+\frac{3}{5}A_3=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

აქედან

$$A_1=A_3=\frac{5}{9}, \qquad A_2=\frac{8}{9}.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

გაუსის კვადრატურულ ფორმულებს, გამოყენების თვალსაზრისით, აქვთ ერთგვარი ნაკლი, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ როგორც t_i აბსცისები, ისე A_i კოეფიციენტები საზოგადოდ ირაციონალური რიცხვებია. სამაგიეროდ ეს ნაკლი ნაწილობრივ კომპენსირდება აღნიშნული ფორმულების საკმაოდ დიდი სიზუსტის გამო.

გაუსის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

თუ შემოვიღებთ $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)dt.$$

ახლა გაუსის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{8}$$

სადაც

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{9}$$

t_i — ლეჟანდრის $P_n(t)$ პოლინომების ნულებია.

ნებისმიერი n-თვის (8) ფორმულის ნაშთით წევრს ექნება სახე [11]

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)} \quad (a < \xi < b),$$

საიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ

$$R_2 = \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875}\left(\frac{b-a}{2}\right)^9 f^{(8)}(\xi).$$

მოვიყვანოთ გაუსის ფორმულის ელემენტების შესაბამისი ცხრილი (ცხრ. 3)

ც ხ რ ი ლ ი 3

n	i	t_i	A_i
1	' 1	0	2
0	1;2	∓0,5773507	1
3	2 2 3	—0,7749667 0 +0,77499667	$\frac{5}{9}$=0,5555556 $\frac{8}{9}$=0,88888889 $\frac{5}{9}$ 0,5555556
4	1;4 2;3	∓0,86113631 ∓0,3398104	0,34785484 0,65214516
5	1;5 2;4 3	∓0,90617985 ∓0,53846931 0	0,23692688 0,47862868 0,56888889
6	1;6 3;5 1;4	∓0,93246951 ∓0,66120939 ∓0,23861919	0,17132450 0,36076158 0,46791394
7	1;7 2;6 3;5	∓0,04910791 ∓0,74153119 ∓0,40584515	0,12948496 0,27970540 0,41795918
8	1;8 2;7 3;6 4;5	∓0,96028986 ∓0,79666648 ∓0,52553242 ∓0,18343464	0,10122854 0,22238104 0,31370664 0,36268378

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გაუსის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით n—3-თვის გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს, $a=0$, $b=1$, მაშინ (9) ფორმულიდან და მე-3 ცხრილიდან გვექნება

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1=0{,}11270;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2=0{,}50000;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3=0{,}88730.$$

(8) ფორმულების კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ;

$$c_1=\frac{b-a}{2}A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}=0{,}27778;$$

$$c_2=\frac{b-a}{2}A_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}=0{,}444444;$$

$$c_3=\frac{b-a}{2}A_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}=0{,}27778.$$

აქვე მოვიყვანოთ შემდგომი გამოთვლების შესაბამისი ცხრილი (ცხრ. 4):

ც ხ რ ი ლ ი 4

i	x_i	y_i	c_i	c_iy_i
6	0,11270	1,10698	0.27778	0.30747
2	0,50000	1,41421	0,44444	0,62853
3	0,86730	1,66571	0.27778	0,46270
Σ				1,39870

ამრიგად, საძიებელი ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$I\approx\sum_{i=1}^{3}c_iy_i=1{,}39870,$$

ნაშთითი წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$R_3=\frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi),\quad \text{სადაც}\quad \xi\in(a\ b).$$

რადგან

$$f(x)=\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{1/2}.$$

ამიტომ

$$f^{(6)}(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)(1+2x)^{-11/2}\cdot 2^6=$$
$$=-945(1+2x)^{-11/2}.$$

აქედან

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(6)}(x)|=945$$

და

$$|R_3|\leqslant\frac{945}{15750}\left(\frac{1}{2}\right)^7\approx\frac{1}{2000}.$$

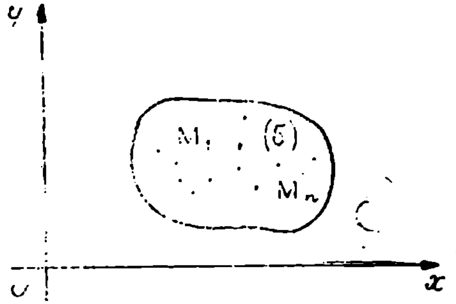
შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის უშუალო გამოთვლის შედეგია

$$I=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\approx 1,39872.$$

§ 7. კუბატურული ფორმულების შესახებ

კუბატურული ფორმულები გამოიყენება ორჯერადი ინტეგრალების რიცხვითი ინტეგრების შემთხვევაში.

ვთქვათ, $z=f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი რაიმე σ ბრტყელ არეში (ნახ. 27). განვიხილოთ ამ არის რაიმე $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\dots,N)$ წერტილთა სისტემა.



ნახ. 27

$$\iint_\sigma f(x, y)\, dxdy$$

ორჯერადი ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის დასადგენად დავუშვათ, რომ

$$\iint_\sigma f(x,y)dxdy\approx\sum_{i=1}^{N}A_i f(x_i, y_i). \qquad (1)$$

A_i კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა დავუშვათ, რომ (1) მართებულია ისეთი

$$P_n(x,y)=\sum_{k+l\leqslant n}c_{kl}x^k y^l \qquad (2)$$

პოლინომებისათვის, რომელთა ხარისხი არ აღემატება წინასწარ მოცემულ n რიცხვს. ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ (1) ფორმულა ზუსტი იყოს $x^k y^l$ სახის ნამრავლისათვის ($k, l=0,1,\dots,n$; $k+l\leqslant n$).

თუ (1) ტოლობაში $f(x, y)=x^k y^l$, მაშინ

$$\mathrm{I}_{kl}=\iint\limits_{\sigma} x^k y^l dxdy=\sum_{i=1}^{N} A_i x_i^k y_i^l \tag{3}$$

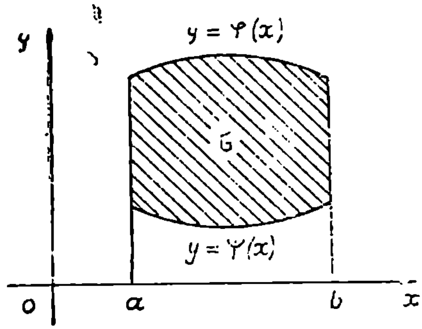
$$(k,\ l=0,1,\dots,n;\qquad k+l\leqslant n).$$

ამრიგად, A_i კოეფიციენტები შეგვიძლია განვსაზღვროთ (3) სისტემიდან. იმისათვის, რომ (3) სისტემა იყოს განსაზღვრული აუცილებელია, რომ ცვლადების N-რიცხვი ტოლი იყოს განტოლებების რიცხვის ე. ი.

$$N=(n+1)+n+(n-1)+\dots+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

შედეგის მაღალი რიგის სიზუსტის მისაღებად დიდ მნიშვნელობას იძენს აღნიშნული კვანძების გონივრულად შერჩევის საკითხი.

მოვიყვანოთ ორჯერადი ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ერთი, საკმაოდ გავრცელებული, მეთოდი. დავუშვათ ინტეგრების არე შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი წირებით. კერძოდ, ავიღოთ ისეთი σ არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ ($\psi(x)\leqslant\varphi(x)$) წირებით და $x=a$, $x=b$, წრფეებით (ნახ. 28). მაშინ, როგორც ვიცით მართებულია ტოლობა



ნახ. 28

$$I=\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy. \tag{4}$$

ვთქვათ,

$$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,\ y)dy, \tag{5}$$

მაშინ

$$\iint_\sigma f(x, y)dxdy = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{6}$$

(6) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ცნობილი კვადრატურული ფორმულა, მივიღებთ

$$\iint_\sigma f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i), \tag{7}$$

სადაც, $x_i \in [a, b] (i=1,2,\ldots,n)$ და A_i-რაიმე მუდმივი სიდიდეებია. თავის მხრივ

$$F(x_i) = \int_{\psi(y_i)}^{\varphi(x_i)} f(x_i, y)dy \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

ინტეგრალები გამოითვლებიან კვადრატურული ფორმულებით

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j), \tag{8}$$

სადაც B_{ij} — მუდმივი სიდიდეებია.

(7) ფორმულიდან, (8)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ *კუბატურულ ფორმულას*

$$\iint_\sigma f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j),$$

სადაც, A_i და B_{ij} — ცნობილი მუდმივებია.

§ 8. ზოგიერთი შენიშვნები კვადრატურულ ფორმულათა სიზუსტის შესახებ

როგორც ამ თავის წინა პარაგრაფებიდან ჩანს, ჩვენ მიერ განხილულ კვადრატურულ ფორმულებს აქვთ სახე:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R[f], \tag{1}$$

სადაც $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ არიან $[a, b]$ სეგმენტიდან აღებული კვანძები, A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — კვადრატურული ფორმულების კოეფიციენტები, ხოლო $R[f]$ — ნაშთითი წევრი.

მოვიყვანოთ კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის დამახასიათებელი ზოგიერთი ფაქტორი.

ძირითადად შემოვიფარგლებით თანაბარბიჯიანი კვადრატურული ფორმულებით. ასეთ ფორმულათა რიცხვს მიეკუთვნება მართკუთხედების, ტრაპეციის, სიმპსონის, ნიუტონ-კოტესის ფორმულები. ამ შემთხვევაში კვადრატურულ ფორმულათა სიზუსტის რიგი აღებული, h ბიჯის მიმართ, განისაზღვრება

$$R=O(h^m),\ h=\frac{b-a}{n} \tag{2}$$

ფორმულით, სადაც n-ინტეგრების შუალედის დაყოფის რიცხვია, ხოლო m ნატურალური რიცხვი, ნაშთითი წევრის რიგის მაჩვენებელია.

მაგალითად, ტრაპეციის ფორმულის ნაშთითი წევრია

$$R[f]=\frac{b-a}{12}\,h^2f''(\xi), \quad \xi\in]a\ b[,$$

მისი რიგი $m=2$. სიმპსონის ფორმულის ნაშთითი წევრია

$$R[f]=-\frac{b-a}{180}h^{(4)}f^{4}(\xi), \quad \xi\in]a,\ b[$$

მისი რიგი $m=4$.

კვადრატურული ფორმულა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მეტია მისი რიგი. ეს ფაქტორი განსაკუთრებით ვლინდება მაშინ, როცა ბიჯი მცირეა ან რაც იგივეა საინტეგრო შუალედის დაყოფის რიცხვი n დიდია.

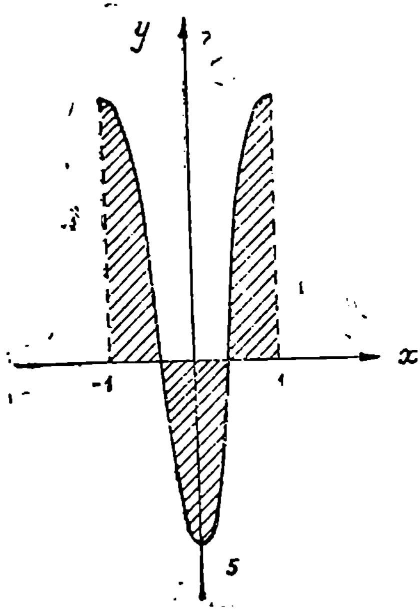
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთქმულიდან არ გამომდინარეობს, ის რომ ნებისმიერი კონკრეტული მაგალითისათვის მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატურული ფორმულა უფრო ზუსტ შედეგს გვაძლევს. შეგვიძლია მოვიყვანოთ მაგალითი როცა ერთიდაიმავე რაოდენობა კვანძებისათვის და ერთიდაიმავე ბიჯის შემთხვევაში, უფრო უხეში კვადრატურული ფორმულა უფრო ზუსტ შედეგს გვაძლევს. ამ ფაქტის ნათელსაყოფად განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{1}(-5+27x^2-15x^4)dx$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. უშუალო გამოთვლებით, ე. ი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ (ნახ. 29)

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=2(-5+9-3)=2.$$



ნახ. 29

$h=1$-სათვის ტრაპეციის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\frac{1}{2}f(-1)+f(0)+\frac{1}{2}f(1)=$$
$$=\frac{7}{2}-5+\frac{7}{2}=2.$$

ხოლო იგივე ბიჯისათვის სიმპსონის ფორმულით მივიღებთ

$$I=\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]=$$
$$=\frac{1}{3}(7-20+7)=-2.$$

ამრიგად, როგორც ვხედავთ გამოსათვლელი ინტეგრალის მნიშვნელობა მიღებული ნაკლები სიზუსტის მქონე ტრაპეციის ფორმულით არის ჭეშმარიტი იმ დროს როცა იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობა გამოთვლილი მაღალი სიზუსტის მქონე სიმპსონის ფორმულით მცდარია.

კვანძების ფიქსირებული რაოდენობისათვის კვადრატურული ფორმულების სიზუსტე დიდად არის დამოკიდებული კვანძების განლაგებაზე. კვანძების არაგონივრულმა შერჩევამ შეიძლება მოგვცეს უხეში შედეგი.

საზოგადოდ, თუ ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციას საინტეგრო შუალედში გააჩნია დიდი რაოდენობით ნულები ან ასევე დიდი რაოდენობით ექსტრემუმები (ე. ი. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის წარმოებულებს გააჩნიათ ნულები), მაშინ ეს ფაქტორები იწვევს კვადრატურული ფორმულებით მიღებული შედეგების გაუარესებას. ამიტომ ინტეგრების ბიჯი h ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ იგი იყოს გაცილებით ნაკლები ფუნქციის მეზობელ ნულებს, ან მეზობელ ექსტრემუმებს შორის მანძილზე. ამ მიზნით მიზანშეწონილია მოცემული საინტეგრო $[a, b]$ შუალედი დავყოთ ისეთ მცირე $[\alpha_i, \beta_i]$ შუალედებად რომლებშიაც $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციები შეინარჩუნებენ ნიშანს და თითოეულ მიღებულ შუალედზე შერჩეული ბიჯით მოვახდინოთ ინტეგრება კვადრატურული ფორმულებით. ამით შეგვიძლია მივაღწიოთ ცალკეულ შუალედებზე გამოთვლების მაღალ სიზუსტეს, რაც თავის მხრივ უზრუნველყოფს სასურველ სიზუსტეს მოცემულ $[a, b]$ შუალედზე.

კვადრატურული ფორმულების სრული ცდომილების დასადგენად მხედველობაში უნდა მივიღოთ აგრეთვე მოქმედებათა ცდომილებაც. ვთქვათ, თითოეული მიახლოებითი $f(x_i)$ სიდიდის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება მოცემულ ε სიდიდეს. ვიგულისხმოთ, რომ A_i კოეფიციენტები მოცემულია ზუსტად, მაშინ მოქმედებათა ცდომილება, კერძოდ, შეკრების R_1 ცდომილება შეფასდება თანაფარდობით

$$R_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} A_i \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} A_i. \tag{3}$$

რადგან (1) კვადრატურული ფორმულა ზუსტია $f(x)=1$ ფუნქციისათვის, ამიტომ გვექნება

$$\int_a^b dx = b - a = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

ამიტომ, (3)-დან მივიღებთ

$$R_1 \leqslant (b-a)\varepsilon. \tag{4}$$

აქედან გამომდინარე კვადრატურული ფორმულის სრული ცდომილება დამრგვალების ცდომილების გაუთვალისწინებლად, გამოისახება ფორმულით

$$\widetilde{R} = (b-a)\varepsilon + R[f],$$

სადაც $R[f]$ კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრია.

და ბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით ე. ი. $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, მაშინ ფაქტიურად შეუძლებელია კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის დადგენა. ასეთ შემთხვევაში კვადრატურული ფორმულით სარგებლობა მიზანშეწონილია შუალედებში, რომელთა ბოლოებს წარმოადგენენ კვანძები.

ამრიგად, კვადრატურული ფორმულით სიზუსტის ზემოთ ჩამოთვლილი მახასიათებლები: ნაშთი-წევრის რიგი, კვანძების შერჩევა, მოქმედებათა (შეკრების) ცდომილება, დამრგვალების ცდომილება საშუალებას გვაძლევს წარმოდგენა ვიქონიოთ კვადრატური ფორმულებით მიღებულ სრულ ცდომილებაზე და აქედან გამომდინარე გამოთვლების შედეგების საიმედობაზე.

აქ მოყვანილი დასკვნები სავსებით მართებულია კუბატურული ფორმულებისთვისაც.

სავარჯიშო

1. $y=f(x)$ მოცემულია ცხრილით:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,00	0,001	5	0,05	36,825
1	0,01	1,618	6	0,06	52,003
2	0.02	7,052	7	0,07	64,156
3	0,03	14,451	8	0.08	85,853
4	0,04	24.553	9	0,09	100,352

ა) შეადგინეთ სასრულ სხვაობათა ცხრილი მეექვსე რიგამდე ჩათვლით. გამოთვალეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები $x=0,00$; 0,01; 0,02; 0,03 წერტილებში

ბ) (12), (13) და (14) ფორმულების გამოყენებით გამოთვალეთ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულები $x=0,00$; 0,01; 0,02; 0,03 წერტილებში.

2. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,2	0,5000	10	2,2	12,0551
1	0,4	1,5622	11	2,4	12.8664
2	0,6	2,6431	12	2,6	13,5132
3	0,8	3.6835	13	2,8	14,2562
4	1,0	6,9004	14	3,0	15,3666
5	1,2	7,2050	15	3.2	16,4552
6	1,4	7.8022	16	3.4	17,6532
7	1,6	9,0666	17	3,6	18,2554
8	1,8	10,1288	18	3,8	19,3568
9	2.0	11,5322	19	4,0	20,5532

ა) მეხუთე რიგამდე სასრული სხვაობების გამოყენებით შევადგინოთ y'' წარმოებულის მნიშვნელობათა ცხრილი $x_k=0,4+0,2k$ ($k=1,2,\ldots,12$) წერტილებში.

ბ) მეოთხე რიგამდე სასრული სხვაობების გამოყენებით შევადგინოთ y''-ის მნიშვნელობათა ცხრილი $x_k=0,2+0,2k$ ($k=1,2,\ldots,10$) წერტილებში.

გ) (12), (13) და (14) ფომულების გამოყენებით გამოვთვალოთ y'-ის მნიშვნელობები $x_k=0,2+0,2k$ ($k=1,2,3,4$) წერტილებში.

3. მართკუთხედების ფორმულით გამოვთვალოთ

ა) $\displaystyle\int_2^5 \frac{\cos x}{x}dx.$ ბ) $\displaystyle\int_2^9 \sqrt{7x-1}\,dx.$

4. ტრაპეციის ფორმულით ამოვთვალოთ

ა) $\int\limits_0^{1,6} \ln\,(1+x^2)\,dx.$ ბ) $\int\limits_1^{2,3} \frac{\sin x^2}{x}dx.$

5. სიმპსონის ფორმულით გამოთვალეთ

ა) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$ ბ) $\int\limits_2^5 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

6. ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულით გამოთვალეთ ($n=5$)

ა) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+3x}.$ ბ) $\int\limits_1^3 \frac{xdx}{3+2x}.$

7. გაუსის კვადრატურული ფორმულით გამოთვალეთ ($n=4$)

ა) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx.$ ბ) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+4x}.$

VIII თავი

სხვაობიანი სქემები ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის

§ 1. სხვაობიანი სქემების მაგალითები

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნების ერთ-ერთი გავრცელებული მეთოდია სასრულ სხვაობიანი მეთოდი. მისი არსი მდგომარეობს ამონახსნთა რიცხვითი მნიშვნელობების ცხრილის შედგენაში. ეს მნიშვნელობები წარმოადგენენ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მნიშვნელობებს მოცემული არის წერტილთა სიმრავლეზე, რომელსაც ბადეს უწოდებენ. ცხრილების შესადგენად იყენებენ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელიც გარკვეული მიახლოებით ცვლის დიფერენციალურ განტოლებას. ალგებრულ განტოლებათა სისტემა მიიღება სხვაობიანი *სქემების* ანუ *სხვაობიანი ანალოგების* საშუალებით. მათი აგების სტრუქტურა დამოკიდებულია დასმული ამოცანისადმი მოთხოვნილი პირობებით.

მაგალითად, ავაგოთ სხვაობიანი სქემა

$$u'(x)+Au(x)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1}$$

$$u(0)=1, \tag{2}$$

ამოცანისათვის, სადაც u-საძიებელი ფუნქციაა, A-რაიმე მუდმივი რიცხვი. ავირჩიოთ $h>0$ ბიჯი და ბადის h, $2h$, $3h,\ldots$, $nh,\ldots$ წერტილებისათვის შევადგინოთ $u(x)$ ფუნქციის $u(0)$, $u(h),\ldots,u(nh),\ldots$ მნიშვნელობათა ცხრილი. ამისათვის (1) განტოლებაში წარმოებული შევცვალოთ

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

სხვაობიანი გამოსახულებით, h ბიჯი შევარჩიოთ ისე, რომ აღნიშნული შეცვლით გამოწვეული ცდომილება იყოს მცირე. ამრიგად, მიიღება (1) განტოლების სხვაობიანი ანალოგი

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+Au(x)=0, \tag{3}$$

რომლის საშუალებითაც აიგება საძიებელი ცხრილი. (3) გადავწეროთ რეკურენტული ფორმით

$$u(x+h)=(1-A\,h)u(x).$$

თუ x მივცემთ 0, h, $2h\ldots$ მნიშვნელობებს, მაშინ (2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}&u(h)=1-Ah,\\&u(2h)=(1-Ah)u(h)=(1-Ah)^2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&u(Nh)=(1-Ah)^N.\end{aligned}$$

როცა $h=\dfrac{1}{N}$, მაშინ

$$u(1)=\left(1-\frac{A}{N}\right)^N \quad (N=1,2,\ldots),$$

რაც წარმოადგენს (1), (2) სასაზღვრო ამოცანის $u(1)=e^{-A}$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას. ცხადია, რომ N-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობებისათვის $(1-A/N)^N$ მცირედ განსხვავდება e^{-A}-გან, ე. ი. როცა $h\to 0$, მაშინ მიახლოებითი ამონახსენი მიისწრაფის ზუსტი ამონახსნისაკენ.

თუ (1) განტოლებაში წარმოებულს შევცვლით

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \tag{4}$$

გამოსახულებით, მივიღებთ განსხვავებულ

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=0 \qquad (5)$$

სხვაობიან სქემას.

ანალოგიურად აიგება სხვაობიანი სქემა

$$u''(x)+Au'(x)+Bu(x)=f(x)$$

განტოლებისათვის თუ $u''(x)$ შევცვლით მეორე რიგის სხვაობიანი ანალოგით

$$\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}-\dfrac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h}=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2},$$

ხოლო $u'(x)$—(4) გამოსახულებით:

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}+A\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Bu(x)=f(x)$$

ანუ

$$\left(1+\frac{Ah}{2}\right)u(x+h)+(Bh^2-2)u(x)+\left(1-\frac{Ah}{2}\right)u(x-h)=h^2f(x). \qquad (6)$$

მსგავსად აიგება სხვაობიანი სქემები ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის. მაგალითად,

$$u'(x)+A(x)u(x)=0$$

განტოლებისათვის სხვაობიან სქემას ექნება სახე

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+A(x)u(x)=0,$$

ან

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+A(x)u(x)=0.$$

ასევე შეიძლება ავაგოთ სხვაობიანი სქემა არაწრფივი განტოლებისათვის. მაგალითად,

$$u'(x)+\cos(xu(x))=0$$

განტოლება შეიძლება მიახლოებით ამოვხსნათ

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\cos(xu(x))=0$$

სქემით.

განხილული მაგალითებიდან შეიძლება შეგვექმნას შთაბეჭდილება, თითქოს სხვაობიანი სქემებით დიფერენციალური ამოცანების ამოხსნა არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს. რაც, საზოგადოდ, ასე არ არის. უმარტივესი შემთხვევა, რომ განვიხილოთ, კერძოდ, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება შევცვალოთ შესაბამისი სხვაობიანი სქემით, მიღებული სხვაობიანი განტოლების ამონახსენი შეიძლება არ მიისწრაფოდეს ზუსტი ამონახსნისაკენ ($h \to 0$). ცხადია ასეთი სქემით შეუძლებელია ავაგოთ საძიებელი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობები მოთხოვნილი სიზუსტით.

სხვაობიანი სქემებით დიფერენციალური ამოცანების ამოხსნისას წარმოიქმნება, კიდევ ერთი ტიპის სირთულე. კერძოდ, კრებადი სხვაობიანი სქემების შემთხვევაშიც კი მიღებული ალგებრულ განტოლებათა სისტემა ხშირად ძნელი ამოსახსნელია. ამ სირთულის თავიდან აცილების მიზნით ზოგჯერ მიმართავენ სხვაობიანი სქემების სტრუქტურის ვარირებას, ხოლო ზოგჯერ მიმართავენ საძიებელი ფუნქციის წინასწარ მოცემული სიზუსტის შემცირებას.

როგორც მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, სხვაობიანი სქემები წარმოადგენენ სხვაობიან განტოლებებს, ამიტომ მათი შესწავლა არსებითად არის დაკავშირებული სხვაობიანი განტოლებების შესწავლასთან. შემდეგში შევისწავლით სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის აქტუალურ საკითხებს.

§ 2. უმარტივესი სხვაობიანი განტოლებები და მათი ამოხსნა

განტოლებას რომელიც, გარკვეული წესით, აკავშირებს ფუნქციის მნიშვნელობებს დისკრეტულ წერტილებში, ეწოდება **სხვაობიანი განტოლება.** თუ ეს სხვაობები შედიან პირველ ხარისხში, მაშინ განტოლებას ეწოდება **წრფივი,** წინააღმდეგ შემთხვევაში — **არაწრფივი.**

თუ Ox ღერძს, h — მუდმივი ბიჯით, დავყოფთ $x_{n+1}=x_n+h$ ($n=0,1,\ldots,$) წერტილებით და შემოვიღებთ $u(x_n)=u_n$ აღნიშვნას, მაშინ u-ს მიმართ სხვაობიანი განტოლება იქნება

$$f(h,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n)=0,$$

ხოლო წრფივი სხვაობიანი განტოლება

$$a_1(h)u_1+a_2(h)u_2+\ldots+a_n(h)u_n=b(h).$$

§ 1-ის (1) განტოლების (3) და (5) სხვაობიანი ანალოგიების შესაბამისი სხვაობიანი განტოლებები იქნება

$$au_n+bu_{n+1}=f_n,\quad b\neq 0 \tag{1}$$

და

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n, \quad c\neq 0. \tag{2}$$

(1) განტოლების ამონახსნის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა ერთ წერტილში. ეს ამონახსენი აიგება—

$$u_{n+1}=-\frac{a}{b}u_n+\frac{1}{b}f_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

ფორმულით. აქედან გამომდინარე (1) არის პირველი რიგის განტოლება.

(2) განტოლების შემთხვევაში საკმარისია ვიცოდეთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები ორ მეზობელ წერტილში, იმისათვის რომ

$$u_{n+1}=-\frac{b}{c}u_n-\frac{a}{c}u_{n-1}+\frac{1}{c}f_n, \quad (n=0,1.2,\cdots,)$$

ფორმულით ავაგოთ მისი ამონახსენი დანარჩენ წერტილებში. ამიტომ (2) განტოლება — მეორე რიგისაა.

ცხადია, რომ

$$au_n=f_n, \quad a\neq 0$$

ნულოვანი რიგის განტოლებაა.

ამრიგად, წრფივი სხვაობიანი განტოლება იქნება n-ური რიგის თუ მისი ამონახსნის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები მიმდევრობით n წერტილში.

(1) და (2) განტოლებების საძიებელი u ფუნქციის მნიშვნელობები $x_{n+1}=x_n+h(n\in Z)$ წერტილებში ქმნიან (u_n) მიმდევრობას:

$$\ldots u_{-n}, \; u_{-n+1},\ldots,u_{-2}, \; u_{-1}, \; u_0, \; u_1, \; u_2,\ldots, \; u_n,\ldots$$

რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც u ფუნქციის მნიშვნელობები ბადის წერტილებში (h ბიჯით), კერძოდ $u_k=u(x_k)$.

თუ Ox ღერძს დავყოფთ $x_k=x_0+kh$ წერტილებით ისე, რომ $h=1$, $x=0$, მაშინ მიღებულ $u_k=u(k)$ $(k\in Z)$ ეწოდება მ თ ე ლ ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ა ნ ი მიმდევრობა.

თუ (u_n) მიმდევრობა განსაზღვრულია Z სიმრავლეზე, მაშინ (1) და (2) განტოლებებს გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც აიგებიან შესაბამისად

$$u_{n+1}=\frac{1}{b}(f_n-au_n) \tag{3}$$

და

$$u_{n+1}=\frac{1}{c}(f_n-bu_n-au_{n+1}), \quad n\in Z \tag{4}$$

ფორმულებით.

(1) განტოლების რომელიმე (u_n) კერძო ამონახსნის მისაღებად საკმარისია დავასახელოთ მისი რაიმე u_m ელემენტი და (3)-დან ვიპოვოთ

$$u_{m+1}, \quad u_{m+2}, \ldots,$$

წევრები, ხოლო დანარჩენი წევრების მისაღებად $(n<m)$ ვისარგებლოთ (1)-დან გამომდინარე

$$u_{n-1}= \frac{1}{2}(f_n-bu_n), \quad a\neq 0$$

ფორმულით.

(2) განტოლებისათვის ორი მეზობელი u_{m+1} და u_m მნიშვნელობისათვის ანალოგიურად აიგება ამონახსნები

$$u_{n+1}= \frac{1}{c}(f_n-bu_n-au_{n-1}), \quad c\neq 0$$

და

$$u_{n-1}= \frac{1}{a} \quad (f_n-bu_n-cu_{n+1}), \quad a\neq 0$$

ფორმულებით.

ახლა ავაგოთ (1) და (2) განტოლებების ზოგადი ამონახსნები.

განვიხილოთ (1)-ის ერთგვაროვანი განტოლება:

$$au_{n+1}+bu_n=0. \tag{1^0}$$

Y_n-ით აღვნიშნოთ (1^0)-ის ის ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს $Y_0=1$ პირობას. მაშინ ცხადია, რომ ნებისმიერი α-თვის, $u_n= =\alpha_n Y$ ფუნქციაც დააკმაყოფილებს (1^0) განტოლებას. მართლაც, თუ $n=0$ მნიშვნელობის შესაბამის ამონახსნს აღვნიშნავთ $\overline{u}_0$-ით, მაშინ $\overline{u}=_n\overline{u}_0 Y$, ე. ი. ამ შემთხვევაში $\alpha=\overline{u}_0$. ამრიგად (1^0)-ის ზოგად ამონახსენს ექნება სახე

$$\overline{u}_n=\alpha Y_n. \tag{5}$$

(1) განტოლების რაიმე ორი ამონახსენი აღვნიშნოთ $(\widetilde{u}_n)$ და (u^*_n) სიმბოლოებით, ე. ი.

$$a\widetilde{u}_n+b\widetilde{u}_{n+1}=f_n,$$
$$au_n^*+bu^*_{n+1}=f_n.$$

მაშინ $\overline{u}_n=\widetilde{u}_n-u^*_n$ იქნება (1^0)-ის ამონახსენი, ამიტომ (1)-ის ამონახსენს ექნება

$$\widetilde{u}_n=u_n^*+\overline{u}_n$$

სახე, ან (5)-ის გათვალისწინებით

$$\widetilde{u}_n=u_n^*+\alpha Y_n.$$

რადგან α ნებისმიერია, ამიტომ უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ

$$u_n=u_n^*+\alpha Y_n \tag{6}$$

არის (1)-ის ზოგადი ამონახსენი.

ამრიგად, (1)-ის ზოგადი ამონახსენი მისი რომელიმე კერძო ამონახსნისა და (1^0)-ის ზოგადი ამონახსნის ჯამის ტოლია.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (2)-ის ზოგადი ამონახსენი მოიცემა

$$u_n=u_n^*+\alpha Y_n+\beta Z_n \tag{7}$$

ფორმულით, სადაც $u_n=\alpha Y_n+\beta Z_n$ არის (2)-ის შესაბამისი

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=0 \tag{2^0}$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსენი, ხოლო Y_n და Z_n არიან (2^0)-ის ის ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$Y_0=1, \qquad Y_1=0, \tag{$7'$}$$

$$Z_0=0, \qquad Z_1=1, \tag{$7''$}$$

პირობებს.

(6) და (7) ამონახსნები გამოვსახოთ შესაბამისად (1) და (2) განტოლებათა კოეფიციენტებით.

უშუალო შემოწმებით ცხადია, რომ (1^0)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს $Y_n=\alpha\left(-\frac{a}{b}\right)^n$ სახე, ე. ი. (1)-ის ზოგადი ამონახსენი იქნება

$$u_n=u_n^*+\alpha\left(-\frac{a}{b}\right)^n.$$

ახლა u_n^* გამოვსახოთ (1) განტოლების კოეფიციენტებით. ამისათვის ავაგოთ (1)-ის ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი ამონახსენი, ე. ი. (1)-ის ისეთი ამონახსენი, რომლის მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს

$$f_n=\begin{cases} 0, & n\neq 0, \\ 1, & n=0, \end{cases}$$

პირობას. ამ შემთხვევაში (1)-ს ექნება

$$au_n+bu_{n+1}=\delta_0^n \tag{8}$$

სახე, სადაც δ_0^n — კრონეკერის სიმბოლოა. G_n-ით აღვნიშნოთ (8)-ის ამონახსენი, ე. ი.

$$aG_n+bG_{n+1}=\delta_0^n \tag{9}$$

და განვიხილოთ შემთხვევები:

I $aG_n+bG_{n+1}=0$, როცა $n\leqslant -1$,
II $aG_0+bG_1=1$, როცა $n=0$,
III $aG_n+bG_{n+1}=0$, როცა $n\geqslant 1$.

როცა $n\leqslant 0$, მაშინ $G_n=0$ აკმაყოფილებს I განტოლებას, ამიტომ $G_1=\dfrac{1}{b}$ დააკმაყოფილებს II განტოლებას, ხოლო III განტოლების ამონახსნის მოსაძებნად შეგვიძლია დავწეროთ

$$G_{n+1}=-\frac{a}{b}G_n, \quad n\geqslant 1$$

რეკურენტული ფორმულა, საიდანაც

$$G_2=\frac{1}{b}\left(-\frac{a}{b}\right)=-\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$G_3=\frac{1}{b}\left(-\frac{a}{b}\right)^2=-\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_n=-\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{როცა } n\geqslant 1,$$

ე. ი.

$$G_n=\begin{cases} 0, & \text{როცა } n\leqslant 0, \\ -\dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{a}{b}\right)^n, & \text{როცა } n\geqslant 1 \end{cases} \tag{10}$$

გამოსახულება არის (1)-ის ფუნდამენტალური ამონახსენი და მაშასადამე, მისივე ამონახსენიც. (10) და (1^0) განტოლების ზოგად ამონახსნთა შეკრებით მივიღებთ (8)-ის ზოგად ამონახსნს:

$$G_n=\begin{cases} A\left(-\dfrac{a}{b}\right)^n, & \text{როცა } n\leqslant 0, \\ \left(A-\dfrac{1}{a}\right)\left(-\dfrac{a}{b}\right)^n, & \text{როცა } n\geqslant 1. \end{cases} \tag{11}$$

როცა $A=0$, მაშინ (11)-დან მიიღება (1)-ის (10) ფუნდამენტალური ამონახსენი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $\left|\dfrac{a}{b}\right|=1$, მაშინ ნებისმიერი A-სათვის (11) შემოსაზღვრულია როცა $n\to\pm\infty$. $A=0$-სა-

თვის (11) შემოსაზღვრულია როცა $\left|\frac{a}{b}\right|<1$ და $A=\frac{1}{a}$-სათვის (11) შემოსაზღვრულია, როცა $\left|\frac{a}{b}\right|>1$.

ფუნდამენტალური ამონახსენი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ (1)-ის კერძო ამონახსენი. მართლაც, თუ

$$u_n^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k}f_k \tag{12}$$

გამოსახულებას შევიტანთ (1)-ში და გავითვალისწინებთ

$$aG_{n-k}+bG_{n-k+1}=\delta_0^{n-k}=\delta_0^{\,n}$$

ტოლობას, მივიღებთ

$$au^*_n+bu^*_{n+1}=a\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k}f_k+b\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k+1}f_k=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(aG_{n-k}+bG_{n-k+1})f_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}=\delta_0^n f_k=f_n.$$

(11)-ის თანახმად (1)-ის კერძო ამონახსენი მოიცემა

$$u_n^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k}f_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\begin{cases}A\left(-\frac{a}{b}\right)^n & \text{როცა } n\leqslant k,\\ \left(A-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a}{b}\right)^n & \text{როცა } n\geqslant k\end{cases}$$

ფორმულით.

თუ $\left|\frac{a}{b}\right|\neq 1$, მაშინ G_n და f_n შემოსაზღვრულია, ე. ი. $|G_n|<F$, $|f_n|<F$. ამიტომ (9)მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს შეფასებას

$$|u_n^*|\leqslant\frac{F}{|a|}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{b}{a}\right|^{n-k}=\frac{F}{|a|-|b|}. \tag{13}$$

(7) ფორმულა გვაძლევს (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურას. ახლა მოვძებნოთ ჯერ (2^0)-ის ზოგადი ამონახსნის კონკრეტული ფორმა, ხოლო შემდეგ ფუნდამენტალური ამონახსნების საშუალებით ავაგოთ (2)-ის კერძო ამონახსნი.

(2')-ის ამონახსნი ვეძებოთ $u_n=q^n$ სახით. უშუალო ჩასმით მივიღებთ

$$a+bq+cq^2=0 \tag{14}$$

მახასიათებელ განტოლებას. ვთქვათ, (14)-ს აქვს ორი ნამდვილი q_1 და q_2 ამონახსნი ($q_1 \neq q_2$). მაშინ $u_n^{(1)}=q_1^n$ და $u_n^{(2)}=q_2^n$ იქნებიან (2)-ის კერძო ამონახსნები და მაშასადამე, მისივე ამონახსნი იქნება

$$\overline{u}_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n. \tag{15}$$

α და β მუდმივების განსაზღვრის მიზნით მოვითხოვოთ საწყისი პირობები: როცა $n=0$, მაშინ $\overline{u}_n=\overline{u}_0$ და როცა $n=1$, მაშინ $\overline{u}_n=\overline{u}_1$, მივიღებთ

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\overline{u}_0, \\ \alpha q_1+\beta q_2=\bar{u}_1, \end{cases}$$

საიდანაც

$$\alpha=\frac{\overline{u}_0 q_2-\overline{u}_1}{q_2-q_1}, \qquad \beta=\frac{\overline{u}_1-\overline{u}_0 q_1}{q_2-q_1}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ პირობებს:

$$Y_0=\overline{u}_0=1, \qquad Y_1=\overline{u}_1=0,$$
$$Z_0=\overline{u}_0=0, \qquad Z_1=\overline{u}_1=1,$$

გვექნება:

$$\alpha=\frac{q_2}{q_2-q_1}, \qquad \beta=\frac{-q_1}{q_2-q_1}.$$

ამიტომ (15)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ (2)-ის კერძო ამონახსნს

$$\begin{cases} Y_n=\dfrac{q_2}{q_2-q_1}q_1^n-\dfrac{q_1}{q_2-q_1}q_2^n, \\ Z_n=-\dfrac{1}{q_2-q_1}q_1^n+\dfrac{1}{q_2-q_1}q_2^n. \end{cases} \tag{16}$$

როცა (14) აქვს ჯერადი $q_1=q_2$ ფესვები, მაშინ ერთ კერძო ამონახსნად უნდა ავიღოთ $u_n^{(1)}=q_1^n$, ხოლო მეორე კერძო ამონახსენი ვეძებოთ $u_n^{(2)}=y_n q_1^n$ სახით. მივიღებთ:

$$ay_{n-1}+bq_1 y_n+cq_1^2 y_{n+1}=0. \tag{17}$$

რადგან q_1 არის (14)-ის ჯერადი ფესვი, ამიტომ

$$\frac{a}{c}=q_1^2, \qquad \frac{b}{c}=-2q_1,$$

და (17) მიიღებს სახეს:

$$cq_1^2 y_{n-1} - 2cq_1^2 y_n + cq_1^2 y_{n+1} = 0$$

ან

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = 0,$$

ე. ი. $y_{n-1} - y_n = y_n - y_{n+1}$. ამრიგად, (17)-ის ამონახსნი წარმოადგენს ნებისმიერ არითმეტიკულ პროგრესიას. კერძოდ, შეგვიძლია ავიღოთ არითმეტიკული პროგრესია $y_n = n$ ზოგადი წევრით. ამ შემთხვევაში (2^0)-ის მეორე ამონახსნი იქნება $u^{(2)}_n = nq_1^n$.

ამრიგად, როცა $q_1 = q_2$, მაშინ (2)-ის ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\overline{u}_n = \alpha q_1^n + \beta n q_1^n \tag{18}$$

და ამ შემთხვევისათვის:

$$\begin{cases} Y_n = q_1^n - n q_1^n, \\ Z_n = \dfrac{1}{q_1} n q_1^n = n q_1^{n-1}. \end{cases}$$

(14)-ის q_1 და q_2 კომპლექსური ფესვების შემთხვევაში (2^0)-ის ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$\overline{u}_n = \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \cos n\varphi + \gamma_2 \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \sin n\varphi, \tag{19}$$

სადაც φ განისაზღვრება $\cos\varphi = -\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$ ტოლობიდან, ხოლო γ_1 და γ_2 ნებისმიერი მუდმივებია. მართლაც

$$q_1 = \sqrt{\frac{a}{c}}\left(-\frac{b}{2\sqrt{ac}} + i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)^2}\right),$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{a}{c}}\left(-\frac{b}{2\sqrt{ac}} - i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)^2}\right),$$

ამასთან $\dfrac{a}{c} > 0$ და $\left|\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}\right| < 1$ უტოლობებისა და

$$-\frac{b}{2\sqrt{ac}} = \cos\varphi, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)^2} = \sin\varphi$$

ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$q_1 = \sqrt{\frac{a}{c}}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad q_2 = \sqrt{\frac{a}{c}}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

თუ $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ და q_1, q_2-ის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (15)-ში მივიღებთ

$$u_n^{(1)}=\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \cos n\,\varphi$$

კერძო ამონახსენს, ხოლო თუ $\alpha=\beta=-\frac{1}{2i}$. მაშინ მივიღებთ

$$u_n^{(2)}=\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \sin n\,\varphi$$

მეორე კერძო ამონახსენს. მათი წრფივი კომბინაცია, ნებისმიერი γ_1 და γ_2 მუდმივებისათვის, მოგვცემს (19) ფორმას.

(2) განტოლების u_n^* კერძო ამონახსნის ასაგებად ჯერ ავაგოთ G_n ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ ა ლ უ რ ი ამონახსნი, ე. ი. (2)-ის ის ამონახსენი, რომელიც დააკმაყოფილებს f

$$f_n=\delta_0^{\,n}=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

პირობებს. G_n ფუნდამენტალურ ამონახსენს ვეძებთ როგორც:

I. $aG_{n-1}+bG_n+cG_{n+1}=0$ როცა $n\leqslant-1$,
II. $aG_{-1}+bG_0+cG_1=1$ როცა $n=0$,
III. $aG_{n-1}+bG_n+cG_{n+1}=0$ როცა $n\geqslant 1$

განტოლებათა ამონახსნების წრფივ კომბინაციას.

თუ q_1 და q_2 $(q_1\neq q_2)$ არის (14) განტოლების ნამდვილი ფესვები, მაშინ (2^0)-ის ზოგადი ამონახსენი იქნება

$$u_n=\alpha q_1^{\,n}+\beta q_2^{\,n}.$$

აქედან გამომდინარე I-ის G_n კერძო ამონახსენს ექნება

$$G_n=\alpha' q_1^{\,n}+\beta' q_2^{\,n} \quad (n\leqslant 0) \tag{20}$$

სახე, სადაც α' და β' გარკვეულად შერჩეული მუდმივებია. ანალოგიურად აიგება G_n კერძო ამონახსნები III შემთხვევაში, ე. ი.

$$G_n=\alpha'' q_1^{\,n}+\beta'' q_2^{\,n} \quad (n\geqslant 0), \tag{21}$$

სადაც α'' და β'' სათანადოდ შერჩეული მუდმივი სიდიდეებია.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $q_1\neq q_2$ და $|q_1|\neq 1$, $|q_2|\neq 1$, მაშინ უნდა განვიხილოთ შემთხვევები

ა) $|q_1|<1$, $|q_2|>1$,
ბ) $|q_1|<1$, $|q_2|<1$,
გ) $|q_1|>1$, $|q_2|<1$,
დ) $|q_1|>1$, $|q_2|>1$.

ა) შემთხვევაში თუ G_n შემოსაზღვრულია, როცა $n \to -\infty$, მაშინ (20)-დან $\alpha'=0$, ხოლო თუ G_n შემოსაზღვრულია, როცა $n \to +\infty$, მაშინ (21)-დან $\beta''=0$, ამიტომ

$$G_n = \begin{cases} \beta' q_2{}^n & \text{როცა } n \leqslant 0, \\ \alpha'' q_1{}^n & \text{როცა } n \geqslant 0, \end{cases}$$

საიდანაც, როცა $n=0$ უნდა ავიღოთ $\alpha''=\beta'$. ახლა β' შევარჩიოთ ისე რომ დაკმაყოფილდეს II განტოლება (G_n გავითვალისწინოთ II-ში), ე. ი.

$$a\beta' q_2{}^{-1} + b\beta' + c\beta' q_1 = 1,$$

საიდანაც

$$\beta' = \frac{1}{aq_2{}^{-1} + b + cq_1}$$

ამასთან,

$$aq_2{}^{-1} + b + cq_2 = (aq_2{}^{-1} + b + c(q_2) + c(q_1 - q_2) = c(q_2 - q_1) \neq 0.$$

ამრიგად, ა) შემთხვევაში

$$G_n = \begin{cases} \dfrac{1}{aq_2{}^{-1} + b + cq_1} q_2{}^n, & n \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{aq_2{}^{-1} + b + cq_1} q_1{}^n, & n \geqslant 0, \end{cases}$$

არის შემოსაზღვრული ფუნდამენტალური ამონახსენი.

თუ

$$\begin{cases} \max(|a|, \ |b|, \ |c|) \geqslant B > 0, \\ |q_1| < 1 - \dfrac{\theta}{2}; \qquad |q_2{}^{-1}| < 1 - \dfrac{\theta}{2}, \end{cases} \tag{22}$$

სადაც $B>0$, $\theta>0$ — რაიმე რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს

$$|G_n| \leqslant \frac{4}{B\theta}\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{|n|} \tag{23}$$

შეფასებას.

ბ) თუ G_n შემოსაზღვრულია როცა $n \to -\infty$, მაშინ (20)-დან $\alpha' = \beta' = 0$ და

$$G_n = \begin{cases} 0 & \text{როცა } n \leqslant 0, \\ \alpha'' q_1{}^n + \beta'' q_2{}^n & \text{როცა } n \geqslant 0. \end{cases}$$

$G_n=0$ პირობიდან $\alpha''=-\beta''$. წინას მსგავსად α'' შევარჩიოთ ისე, რომ დაკმაყოფილდეს II განტოლება:

$$\alpha' = -\frac{1}{c(q_1 - q_2)}.$$

ამრიგად, ბ) შემთხვევაში (2)-ის შემოსაზღვრული ფუნდამენტალური ამონახსენია

$$G_n = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad n \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{c(q_1-q_2)}(q_1{}^n - q_2{}^n), & \text{როცა} \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

გ) არის ა) შემთხვევის ანალოგიური და გვაძლევს (2)-ის

$$G_n = \begin{cases} \dfrac{1}{aq_1{}^{-1}+b+cq_2} q_1{}^n & \text{როცა} \quad n \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{aq_1{}^{-1}+b+cq_2} q_2{}^n & \text{როცა} \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

ფუნდამენტალურ შემოსაზღვრულ ამონახსენს.

დ) არის ბ) ანალოგიური.

თუ (14)-ს აქვს $q_1=q_2$ ჯერადი და ნამდვილი ფესვები, მაშინ ფუნდამენტალური ამონახსნის ასაგებად ვიყენებთ (2^0)-ის

$$n_n = \varkappa q_1{}^n + \beta n q_1{}^n$$

ამონახსენს; კერძოდ, როცა $|q_1|<1$, მივიღებთ

$$G_n = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad n \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{c} n q_1{}^{n-1}, & \text{როცა} \quad n \geqslant 0, \end{cases}$$

ხოლო როცა $|q_1|>1$, მაშინ

$$G_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} n q_1{}^{n+1}, & \text{როცა} \quad n \leqslant 0, \\ 0 & \text{როცა} \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

ამრიგად, ჩვენ შევისწავლეთ შემთხვევები ($|q_1|\neq 1$, $|q_2|\neq 1$, $a\neq 0$, $c\neq 0$) და ვაჩვენეთ ფუნდამენტალური შემოსაზღვრული ამონახსნის არსებობა. (23) ფორმულიდან ცხადია

$$|G_n| < G\rho^{|n|} \qquad (n\to\infty), \tag{24}$$

სადაც, $G>0$, $0<\rho<1$, ამასთან

$$\rho > \max\left\{\min\left(|q_1|, \frac{1}{|q_1|}\right), \ \min\left(|q_2|, \frac{1}{|q_2|}\right)\right\}.$$

მაშასადამე, (2)-ის G_n ფუნდამენტალური ამონახსენი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ მისი კერძო

$$u_n^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k} f_k \tag{25}$$

ამონახსენი, თუ ეს მწკრივი კრებადია. თუ ადგილი აქვს (24)-ს და (f_n) —შემოსაზღვრულია, ე. ი. $|f_n|<F$, მაშინ (25) კრებადია და

$$|u_n^*|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n-k} f_k\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{n} |G_{n-k} f_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |G_{n-k} f_k| \leqslant$$

$$\leqslant GF\left[\sum_{k=-\infty}^{n} \rho^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n}\right] \leqslant \frac{2G}{1-\rho} F. \tag{26}$$

ამრიგად, როცა $|q_1|\neq 1$, $|q_2|\neq 1$, მაშინ (25) ტოლობით მოცემული u_n^* არის (2) განტოლების ერთადერთი შემოსაზღვრული კერძო ამონახსენი.

შევნიშნოთ, რომ თუ შესრულებულია (22) პირობები, მაშინ (23) ის გათვალისწინებით (25)-დან მარტივად მიიღება

$$|u_n^*| \leqslant \frac{16}{B\,\theta^2} \sup_m |f_m|. \tag{27}$$

შეფასება.

ცხადია G_n-ის ყოფაქცევა არსებითად დამოკიდებულია (14) განტოლების ფესვთა კომპლექსურ სიბრტყეში განლაგებაზე. გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევები, როცა a, b, c კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია და $|q_1|<1$, $|q_2|>1$ ($|q_2|<1$, $|q_1|>1$), ამასთან

$$|q_1|<\rho, \quad |q_2^{-1}|<\rho \quad (|q_2|<\rho, \quad |q_1^{-1}|<\rho), \quad 0<\rho<1.$$

მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა. ვთქვათ, a, b, c ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო q_1, q_2—(14) განტოლების ფესვები. $|q_1|<1$, $|q_2|>1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$\frac{|b|-|a+c|}{|b|+|a|+|c|} \geqslant \theta > 0, \tag{28}$$

სადაც θ რაიმე მუდმივია. თუ ადგილი აქვს (28)-ს, მაშინ

$$|q_1|<1-\frac{\theta}{2}, \quad |q_2^{-1}|<1-\frac{\theta}{2}. \tag{29}$$

განვიხილოთ დიფერენციალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx}+Au=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0)=b. \end{cases} \tag{1}$$

და მისი შესაბამისი სხვაობიანი სქემა, რომელიც გამოისახება

$$\frac{u(a+h)-u(x)}{h}+Au(x)=0 \tag{2}$$

სხვაობიანი განტოლებით, სადაც h მოცემული შუალედის დაყოფის ბიჯია. ვთქვათ, $h=\dfrac{1}{N}$ $(N=1,2,\ldots)$. $x_n=nh$ წერტილში (2)-ის ამონახსენი აღვნიშნოთ u_n-ით. თუ $u_0=b$, მაშინ (2)-დან

$$u_n=(1-Ah)u_{n-1},$$

საიდანაც

$$u_n=(1-Ab)^n b=(1-Ah)^{x_n/h}b. \tag{3}$$

რადგან (1)-ის ამონახსნენია $u(x)=be^{-Ax}$, ამიტომ

$$u(x_n)=be^{-Ax_n}. \tag{4}$$

შევაფასოთ

$$\delta(x_n)=u_n-u(x_n)=[(1-Ah)^{x_n/h}-e^{-Ax_n}]b \tag{5}$$

ცდომილება. შევისწავლოთ $\delta(x_n)$-ის ცვლილების ხასიათი, როცა $h\to 0$ $(n\to\infty)$. გვაქვს:

$$(1-Ah)^{x_n/h}=e^{\frac{x^n}{h}\ln(1-Ah)}=e^{\frac{x^n}{h}\left[-Ah+\frac{A^2h^2}{2}+O(h^2)\right]}=$$

$$=e^{-Ax_n}e^{\frac{A^2x_nh}{2}}e^{O(h^2)}=e^{-Ax_n}\left[1+\frac{A^2hx_n}{2}+O(h^2)\right][1+O(h^2)]=$$

$$=e^{-Ax_n}+hb\frac{A^2x_n}{2}e^{-Ax_n}+O(h^2),$$

ამიტომ (3) მიიღებს სახეს:

$$u_n=be^{-Ax_n}+hb\,\frac{A^2x_n}{2}\,e^{-Ax_n}+O(h^2) \tag{3'}$$

და

$$\delta(x_n)=hb\frac{A^2x_n}{2}e^{-Ax_n}+O(h^2)=O(h), \tag{6}$$

ე. ი. $\delta(x_n)\to 0$, როცა $h\to 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხვაობიანი სქემის სიზუსტის რიგი უდრის ერთს.

ახლა ამოვხსნათ (1) განტოლება სქემით, რომელსაც შეესაბამება მეორე რიგის სხვაობანი განტოლება

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=0. \tag{7}$$

ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა ორ წერტილში $u(x_0)=u_0$ და $u(x_1)=u_1$. მაგრამ (1) ამოცანაში საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულია მხოლოდ ერთ წერტილში $u(o)=b$. ბუნებრივია სხვაობანი სქემისათვის ერთ საწყის მნიშვნელობად ავიღოთ $u_0=b$. მეორე საწყისი u_1 მნიშვნელობის მოსაძებნად ვისარგებლოთ (7) განტოლების ამონახსნის ცხადი ფორმით (§2, (16) მივიღებთ:

$$u_n=u_0\left(\frac{q_2}{q_2-q_1}q_1^n-\frac{q_1}{q_2-q_1}q_2^n\right)+u_1\left(-\frac{1}{q_2-q_1}q_1^n+\frac{1}{q_2-q_1}q_2^n\right)=$$
$$=\frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}q_1^n-\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}q_2^n, \tag{8}$$

სადაც

$$\left\{\begin{aligned} q_1&=\sqrt{1+A^2h^2}-Ah=1-Ah+\frac{A^2h^2}{2}+O(h^4),\\ q_2&=-(\sqrt{1+A^2h^2}+Ah)=(-1)\left(1+Ah+\frac{A^2h^2}{2}\right)+O(h^4)\end{aligned}\right. \tag{9}$$

არიან §2-ის (14) განტოლების ფესვები. ცხადია, (9)-დან

$$q_1^n=q_1^{x_n/h}=\left[1-Ah+\frac{A^2h^2}{2}+O(h^4)\right]^{x_n/h}=e^{(x_n/h)\ln\left[1-Ah+\frac{A^2h^2}{2}+O(h^4)\right]},$$

რადგან

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+O(z^4),$$

ამიტომ

$$\ln\left[1-Ah+\frac{A^2h^2}{2}+O(h^4)\right]=-Ah+\frac{A^3h^3}{6}+O(h^4),$$

საიდანაც

$$q_1^n = e^{x_n/h\left[-Ah+\frac{A^3h^3}{6}+O(h^4)\right]} = e^{-Ax_n}\left[1+h^2\frac{A^3x_n}{6}\right]+O(h^3). \quad (10)$$

ანალოგიური მსჯელობით მიიღება

$$q_2^n=(-1)^n e^{Ax_n}+O(h^2). \quad (11)$$

(10) და (11)-ის გათვალისწინებით (8)-დან მივიღებთ

$$u_n = \frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}\left[e^{-Ax_n}+h^2\frac{A^3x_n}{6}e^{-Ax_n}+O(h^3)\right]-$$
$$-\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}(-1)^n[e^{Ax_n}+O(h^2)]; \quad (12)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}\to b<+\infty$, როცა $h\to 0$, მაშინ (12)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები მიისწრაფვის (1) ამოცანის საძიებელი ამონახსნისაკენ.

რადგან

$$(-1)^n[e^{Ax_n}+O(h^2)]\xrightarrow{h\to 0}\begin{cases} e^{Ax_n} & \text{ლუწი } n\text{-სათვის,}\\ -e^{Ax_n} & \text{კენტი } n\text{-სათვის,}\end{cases}$$

ამიტომ (12)-ის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრების სასრული ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}\to 0, \quad \text{როცა} \quad h\to 0. \quad (13)$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ

$$\frac{u(x+h)-u(x-u)}{2h}-Au(x)=0$$

სხვაობიანი განტოლების ამონახსენი მიისწრაფოდეს (1) ამოცანის ზუსტი $u=be^{-Ax}$ ამონახსნისაკენ აუცილებელია

$$\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}\to 0, \quad \frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}\to b \quad (h\to 0). \quad (14)$$

მართლაც, რადგან $q_1\to 1$, $q_2\to -1$, როცა $h\to 0$ (იხ. (9)), ამიტომ (14)-ის თანახმად u_1 უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ $u_1\to u_0=b$, როცა $h\to 0$.

$u_1\approx u(h)$ საწყისი მნიშვნელობის მიხედვით შევისწავლოთ სხვაობიანი სქემის ამონახსნის კრებადობის სიჩქარის ხასიათი. ამ მიზნით $u(x)$ გავშალოთ $x=0$ წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად და ვისარ-

გებლოთ $u'+Au=0$ დიფერენციალური განტოლებით, მივიღებთ: $u(x_1)=u(o)-hA\,u(o)+O(h^2)=u(o)(1-Ah)+O(h^2)$,
რომელიც მართებულია მოცემული განტოლების ზუსტი ამონახსნისათვის. მიახლოებითი ამონახსნისათვის გვექნება

$$u_1=u_0(1-Ah) \qquad \text{ან} \quad u_1=u_0.$$

პირველ მათგანში დაშვებულია h^2 რიგის საწყისი ცდომილება, მეორეში h რიგის. ამ შემთხვევებში ამონახსნის კრებადობის სიჩქარის დასადგენად დავუშვათ;

$$u_0=b, \qquad u_1=(1-Ah)b, \tag{15}$$

მაშინ (9)-დან გვექნება

$$\left\{\begin{aligned} \frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}&=\frac{[1-Ah+O(h^2)]\,b-(1-Ah)b}{-2+O(h^2)}=O(h^2),\\ \frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}&=\frac{[-1-Ah+O(h^2)]b-(1-Ah)b}{-2+O(h^2)}=b+O(h_2).\end{aligned}\right. \tag{16}$$

(16)-ის გათვალისწინებით (12)-დან მიიღება

$$u_n=be^{-\Lambda x_n}+O(h^2).$$

ამრიგად, თუ საწყისი u_1 მნიშვნელობა მოცემულია h^2 რიგის სიზუსტით, მაშინ ამონახსნის ცდომილებაც იქნება h^2 რიგის. ცხადია, რომ თუ $u_0=b+O(h^2)$, მაშინ კრებადობის სიჩქარეც იქნება h^2 რიგის.

$u_1=u_0=b$ მეორე შემთხვევისათვის

$$\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}=\frac{[1-Ah+O(h^2)]b-b}{-2+O(h^2)}=\frac{1}{2}\,Ahb+O(h^2),$$

$$\frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}=\frac{-[1+Ah+O(h^2)]b-b}{-2+O(h^2)}=b+\frac{1}{2}\,Ahb+O(h^2),$$

და

$$u_n=\frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}[e^{-\Lambda x_n}+O(h^2)]-\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}(-1)^h[e^{\Lambda x_n}+O(h^2)]=$$

$$=\left[b+\frac{1}{2}\,Ahb+O(h^2)\right][e^{-\Lambda x_n}+O(h^2)]-(-1)^n\left[\frac{1}{2}\,Ahb+\right.$$

$$\left.+O(h^2)\right][e^{\Lambda x_n}+O(h^2)]=be^{-\Lambda x_n}+Ab\,\frac{e^{-\Lambda x_n}-(-1)^n e^{\Lambda x_n}}{2}\,h+O(h^2).$$

მაშასადამე, თუ ამონახსნის საწყისი მნიშვნელობა მოცემულია h რიგის სიზუსტით, მაშინ ამონახსენიც მოიძებნება იმავე სიზუსტით.

ამრიგად, (2) სქემიდან განსხვავებით (7) სქემა გვაძლევს ამონახსენს

უფრო მაღალი რიგის სიზუსტით. შევისწავლოთ ამის გამომწვევი მიზეზი. ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$u(x+h)=u(x)+u'(x)h+u''(x)\frac{h^2}{2}+u'''(x)\frac{h^3}{6}+O(h^4),$$

$$u(x-h)=u(x)-u'(x)h+u''(x)\frac{h^2}{2}-u'''(x)\frac{h^3}{6}+O(h^4),$$

საიდანაც მიიღება (2) და (7)-ის სხვაობანი ანალოგები წარმოებულებისათვის

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)+u''(x)\frac{h}{2}+O(h^3)=u'(x)+O(h), \tag{2'}$$

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}=u'(x)+u'''(x)\frac{h^2}{6}+O(h^4)=u'(x)+O(h^2). \tag{7'}$$

(2′) და (7′)-დან გამომდინარეობს, რომ (2)-ში წარმოებულის აპროქსიმაციის რიგია h, ხოლო (7)-ში — h^2. რაც თავის მხრივ განსაზღვრავს მათი ამონახსნების კრებადობის სიჩქარეებს.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული სქემებისათვის წარმოებულის აპროქსიმაციისა და ამონახსნის კრებადობის რიგი ერთიდაიგივეა. საზოგადოდ, ეს რომ ასე იყოს საჭიროა სქემის მდგრადობა. განვიხილოთ არამდგრადი სქემის მაგალითი:

როგორც ვიცით $u'(x)$ შეგვიძლია შევცვალოთ

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \tag{17}$$

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \tag{18}$$

ან

$$\mu\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+(1-\mu)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \tag{19}$$

სახის კომბინაციით, სადაც μ — რაიმე მუდმივია. კერძოდ, როცა $\mu=0$, მაშინ გვაქვს (17), ხოლო როცა $\mu=1$ — (18). μ-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მივიღებთ $u'(x)$-ის სხვადასხვა აპროქსიმაციას.

თუ $\mu=4$, მაშინ $u'(x)+Au(x)=0$ განტოლებისათვის გვექნება

$$4\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}-3\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+Au(x)=0 \tag{20}$$

სხვაობიანი სქემა, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$-2u(x-h)+(3+Ah)u(x)-u(x+h)=0 \tag{21}$$

სახით. (20)-ის ამონახსენი ვეძებოთ [0, 1] შუალედზე. ამისათვის დავყოთ იგი $h=1/N$ ბიჯით $x_0=0$, $x_n=nh=n/N$ $(n=1,2,\ldots, N)$ წერტილებად. როგორც ვიცით (21)-ის ამონახსენს ექნება სახე:

$$u_n=u_0\left(\frac{q_2}{q_2-q_1}q_1^n-\frac{q_1}{q_2-q_1}q_2^n\right)+u_1\left(-\frac{1}{q_2-q_1}q_1^n+\frac{1}{q_2-q_1}q_2^n\right), \quad (22)$$

სადაც q_1 და q_2 არის (21)-ის $-2+(3+4h)q-q^2=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვები

$$\begin{aligned} q_1&=\frac{1+Ah-\sqrt{1+6Ah+A^2h^2}}{2}=1-Ah+2A^2h^2+O(h^3),\\ q_2&=\frac{1+Ah+\sqrt{1+6Ah+A^2h^2}}{2}=2(1+Ah)+O(h^2), \end{aligned} \quad (23)$$

ან

$$q_1^n=[1-Ah+O(h^2)]^n=[1-Ah+O(h^2)]^{x_n/2}=e^{-Ax_n}+O(h), \quad (24)$$

$$q_2^n=[2(1+Ah)+O(h^2)]^n=[2(1+Ah)+O(h^2)]^{x_n/h}=2^{x_n/h}[e^{Ax_n}+O(h)].$$

თუ გავითვალისწინებთ (24)-ს, მაშინ (22)-დან მივიღებთ

$$u_n=\frac{q_2u_0-u_1}{q_2-q_1}[e^{-Ax_n}+O(h)]+\frac{q_1u_0-u_1}{q_2-q_1}[e^{Ax_n}+O(h)]2^{x_n/h}, \quad (25)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $u(0)=b$ და სხვაობიანი ამონახსნის საწყისი მნიშვნელობებია $u_0=b$, $u_1=b(1-Ah)$. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (25)-ში, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\begin{aligned} u_n=&\frac{[2+O(h)]b-(1-Ah)b}{[2+O(h)]-[1-O(h)]}[e^{-Ax_n}+O(h)]+\\ &+\frac{[1-Ah+2A^2h^2+O(h^3)]b-(1-Ah)b}{[1+O(h)]-[2+O(h)]}[e^{Ax_n}+O(h)]2^{x_n/h}=\\ &=[be^{-Ax_n}+O(h)]+[-2A^2be^{Ax_n}+O(h)]h^2 2^{x_n/h} \end{aligned}$$

თუ $x_n=x=\mathrm{const}$, მაშინ u_n-ის პირველი შესაკრები მიისწრაფის be^{-Ax} სიდიდისაკენ, ხოლო მეორე შესაკრები ∞ სასრულობისაკენ, როცა $h\to 0$.

ამრიგად, არსებობს სხვაობიანი სქემა, რომელიც აპროქსიმაციას უწევს (1) ამოცანას მაგრამ მისი ამონახსენი არ მიისწრაფის (1) ამოცანის ამონახსნისაკენ როცა $h\to 0$. შეგვიძლია ვთქვათ, უფრო მეტიც, კერძოდ, თუ ავიღებთ $u_1=u_0=be^{-Ax_n}$, მაშინ

$$u_n=[be^{-Ax_n}+O(h)]-\left[\frac{3}{2}A^2e^{Ax_n}+O(h)\right]h^2 2^{x_n/h}. \quad (26)$$

როგორც დავინახეთ (8) სხვაობიანი სქემა არ არის კრებადი ($h\to 0$) იმის გამო, რომ მას აქვს სწრაფად ზრდადი ამონახსენი ($h\to 0$) იმ შემთხვევაშიც კი როცა საწყისი პირობები შერჩეულია ზუსტად. ასეთი თვისების მქონე სქემას უწოდებენ არამდგრადს.

§ 4. სხვაობიანი სქემის ამონახსნის კრებადობა

§3-ში განხილული იყო მაგალითები დიფერენციალურ განტოლებათა აპროქსიმაციის შესახებ სხვაობიანი სქემებით. შესწავლილი იქნა სხვაობიანი განტოლების ამონახსნის მისი შესაბამისი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნისაკენ კრებადობის საკითხი. ამასთან, მხედველობაში იყო მიღებული სხვაობიანი სქემის მდგრადობის თვისება და განხილული იყო არამდგრადი სქემის მაგალითი.

ამ პარაგრაფში დაწვრილებით შევისწავლით კრებადობის, აპროქსიმაციის და მდგრადობის საკითხებს. აქვე ვაჩვენებთ, რომ ამონახსნის კრებადობა არის დიფერენციალური ამოცანის სხვაობიანი სქემით აპროქსიმაციისა და მიღებული სხვაობიანი სქემის მდგრადობის შედეგი.

D მონაკვეთზე დავსვათ რაიმე დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანა. მისი ამოხსნა ნიშნავს მოვძებნოთ D-ზე განსაზღვრული ისეთი ფუნქცია, რომელიც ამ მონაკვეთზე აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას, ხოლო მისი ერთ ან ორივე ბოლოზე — გარკვეულ დამატებით პირობებს.

დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანა ჩავწეროთ

$$Lu=f \tag{1}$$

სიმბოლოთი, სადაც L არის მოცემული დიფერენციალური ოპერატორი, ხოლო f-მოცემული ფუნქცია, რომელსაც მარჯვენა მხარეს უწოდებენ.

მაგალითები.

1)
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx}+\dfrac{x^2}{1-u^2}=\sin x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0)=1, \end{cases} \tag{2}$$

ამოცანის (1) სახით ჩაწერის მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$Lu\equiv\begin{cases} \dfrac{du}{dx}+\dfrac{x^2}{1+u^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(o). \end{cases}$$

$$f=\begin{cases} \sin x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1. \end{cases}$$

2)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2u}{dx^2}-(1+x^2)u=\sqrt{x}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.\\ u(0)=2, \qquad \dfrac{du(0)}{dx}=1.\end{array}\right. \tag{3}$$

აქ

$$Lu\equiv\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2u}{dx^2}-(1+x^2)u, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0),\\ \dfrac{du(0)}{dx},\end{array}\right.$$

$$f=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}\,, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2,\\ 1.\end{array}\right.$$

3)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2u}{dx^2}-(1+x)u=\sqrt{x^2+1}, \ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0)=2, \quad u(1)=1.\end{array}\right. \tag{4}$$

$$Lu\equiv\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2u}{dx^2}-(1+x)u, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0),\\ u(1).\end{array}\right.$$

$$f\equiv\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^3+1}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2,\\ 1.\end{array}\right.$$

ყველგან სიმარტივისთვის აღებულია $D=[0, 1]$. ვიგულისხმოთ, რომ $0\leqslant x\leqslant 1$ მონაკვეთზე არსებობს (1)-ის $u(x)$ ამონახსენი. იმისათვის, რომ ავაგოთ ეს ამონახსენი სასრულ სხვაობათა ან, რაც იგივეა ბადეთა მეთოდით, საჭიროა $h>0$ ბიჯით დავყოთ D არე წერტილებით. ამ წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება D_h ბადე. ამის შემდეგ ვიპოვოთ ბადის წერტილებში $u(x)$ ამონახსნის $[u]_h$ მნიშვნელობათა ცხრილი. $[u]_h$ არის D_h ბადეზე განსაზღვრული ბადური ანუ დისკრეტული ფუნქცია. რაც უფრო მცირეა h მით უფრო მეტია D_h-ის კვანძების რაოდენობა, ე. ი. ხშირია ბადე. მაგალითად, თუ $h=\dfrac{1}{N}$, სადაც N რაიმე ნატურალური რიცხვია, მაშინ ბადის წერტილებად შეგვიძლია ავიღოთ $x_0=0, x_1=h\ldots, x_n=nh, x_n=1$. $x_i=i_h$ წერტილებში $[u]_h$-ის მნიშვნელობები იქნება: $u(ih)=u_i$ $(i=0,1,\ldots,N)$.

თუ D_h ბადის წერტილებში დავუშვებთ

$$\frac{du}{dx}\approx\frac{u(x+h)-u(x)}{h},$$

მაშინ (2) ამოცანის ამონახსნის $[u]_h$ მნიშვნელობათა ცხრილის ასაგებად მივიღებთ სხვაობიან სქემას

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}+\dfrac{x_n^{\ 2}}{1+u_n^{\ 2}}=\sin x_n, \quad n=0,1,\ldots,\ N-1, \\ u_0=1. \end{cases} \tag{5}$$

D_h ბადის წერტილებში (5)-ის $u^{(h)}=(u_0^{(h)},\ u_1^{(h)},\ldots,u_N^{(h)})$ ამონახსენი არის საძიებელი $[u]_h$-ის მნიშვნელობები.

თუ დავუშვებთ

$$\frac{d^2u}{dx^2}\approx\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}, \tag{6}$$

მაშინ (3) ამოცანისათვის მივიღებთ სხვაობიან სქემას

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}-(1+x^2_n)u_n=\sqrt{x_n}, \quad n=1,2,\ldots,\ N, \\ u_0=2, \quad \dfrac{u_1-u_0}{h}=1. \end{cases} \tag{7}$$

ხოლო (4)-ამოცანისათვის

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}-(1+x_n)u_n=\sqrt{x_n^{\ 3}+1}, \quad n=1,2,\ldots,\ N-1. \\ u_0=2, \quad u(N)=1. \end{cases} \tag{8}$$

სხვაობიან სქემას.

შევნიშნოთ, რომ განსახილველ შემთხვევაში D_h ბადე h-ბიჯით თანაბრად დაშორებულ $N+1$ წერტილისაგან შესდგება. საზოგადოდ, არე შეიძლება დავყოთ არათანაბრად დაშორებული წერტილებით: $x_0=0,\ x_1=x_0+h_0,\ x_2=x_1+h_1,\ldots,x_{N-1}=x_{N-2}+h_{N-2},\ x_N=1$, სადაც $\max h_n\to 0$, როცა $N\to\infty$. ამონახსნის ყოფაქცევიდან გამომდინარე D არის დაყოფის იმ შუალედზე, სადაც ამონახსენი სწრაფად იზრდება (ან მცირდება) უნდა ავიღოთ უფრო ხშირი ბადე.

ყველგან ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, ვიგულისხმებთ, რომ u ამონახსენი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $[u]_h$—ბადური

ფუნქცია, რომელიც ბადის წერტილებში ემთხვევა u-ს. სხვაობიანი მეთოდით დიფერენციალური ამოცანის ამოხსნა გულისხმობს $[u]_h$ ცხრილის მოძებნას იმ თვისებით, რომ როცა ბადე ხშირდება $[u]_h$ მნიშვნელობათა ცხრილი უფრო ზუსტად ასახავს საძიებელ u ამონახსნს.

შევნიშნოთ, რომ საძიებელი $[u]_h$-ის შესაბამის ცხრილად არ არის სავალდებულო ავიღოთ კონკრეტული სხვაობიანი სქემით ნაპოვნი საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები, რომლებიც D_h ბადის წერტილებში ემთხვევიან ზუსტი ამონახსნის მნიშვნელობებს. ეს საკითხი ეხება ფუნქციათა ინტერპოლაციის ამოცანას, რომელიც ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში კონკრეტულად წყდება. აქედან გამომდინარე ზუსტ ამონახსნად ვიგულისხმებთ უკვე შერჩეულ $[u]_h$ ბადურ ფუნქციას და კონკრეტული სქემით აგებულ ამონახსნებს აღვნიშნავთ u^h-ით. ცხადია, შერჩეული სხვაობიანი სქემის თავისებურებებიდან გამომდინარე $u^{(h)}$ იქნება $[u]_h$ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ამრიგად, უნდა შევისწავლოთ $u^{(h)}$ მიახლოებითი ამონახსნის $[u]_h$ ამონახსნისაკენ კრებადობის საკითხი, როცა $h \to 0$ და ზუსტად განვსაზღვროთ ამ კრებადობის არსი. ამ მიზნით განვიხილოთ D_h ბადეზე განსაზღვრული წრფივი ნორმირებული U_h სივრცე, რომლის ელემენტებია D_h-ზე განსაზღვრული $u^{(h)}=(u_0^{(h)}, u_1^{(h)}, \dots, u_N^{(h)})$ ფუნქციები (ფაქტიურად, U_h არის $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ ვექტორთა სიმრავლე), ხოლო ნორმად აღებულია

$$\|u^h\|_{U_h}=\sup_n |u^{(h)}(x_n)|. \tag{9}$$

U_h სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტის, ე. ი. $a^{(h)}$ და $b^{(h)}$ ბადურ ფუნქციებს შორის გადახრა განისაზღვრება $\|a^{(h)}-b^{(h)}\|_{U_h}$ გამოსახულებით.

(1) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნში იგულისხმება $[u]_h$ ბადური ფუნქციის ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს (1)-ის შესაბამის

$$L_h u^{(h)}=f^{(h)} \tag{10}$$

განტოლებათა სისტემას. აქედან გამომდინარე, (10)-ის გათვალისწინებით (5) და (8) სქემები ჩაიწერება შესაბამისად

$$L_h^{(h)} u \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}+\dfrac{(nh)^2}{1+u_n^2}, & n=0,1,\dots, N-1 \\ u_0 & \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sin nh, & n=0,1,\dots,N-1, \\ 1. & \end{cases}$$

და

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}-(1+nh)u_n^2 \quad (n=1,2,\ldots,\ N-1) \\ u_0, \\ u_N. \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \sqrt{(nh)^3+1}, \quad n=1,2,\ldots,N-1, \\ 2, \\ 1. \end{cases}$$

სახით. ამრიგად, (10) სასაზღვრო ამოცანა არის h პარამეტრზე დამოკიდებულ განტოლებათა სისტემების ოჯახი.

ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი h-თვის (10) სისტემას გააჩნია $u^{(h)}\in U_h$ ამონახსნი.

განსაზღვრება 1. ვიტყვით, რომ (10) სისტემის $u^{(h)}$ ამონახსნი *კრებადია* (1) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნისაკენ თუ

$$\|[u]_h-u^{(h)}\|_{U_h}\to 0 \text{ როცა } h\to 0.$$

გარდა ამისა თუ მართებულია

$$\|[u]_h-u^{(h)}\|\leqslant ch^k$$

უტოლობა, სადაც $c>0$ და $k>0$ არიან h-გან დამოუკიდებელი მუდმივები, მაშინ გვაქვს h^k *რიგით კრებადობა* ანუ (10) სხვაობიან სქემას აქვს h-ის მიმართ k რიგის *სიზუსტე*.

აქედან გამომდინარე, § 3-ის (1) ამოცანისათვის $\delta(x_k)=u(x_k)-u_k^{(h)}$ სხვაობა, სადაც $u(x_k)$ არის (1)-ის ზუსტი, ხოლო $u_k^{(h)}$—(2) ან (7) სქემით აგებული მიახლოებითი ამონახსნები, მიისწრაფვის 0-კენ, როცა $h\to 0$. ამასთან, (2) სქემისათვის გვაქვს კრებადობა h რიგით, ხოლო (7) სქემისათვის— h^2 რიგით.

თუ (10) სქემა კრებადია, მაშინ ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით, h-ბიჯის სიმცირის ხარჯზე, შეგვიძლია ავაგოთ (1) ამოცანის ზუსტი u ამონახსნი. § 3-ში განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, რომ სხვაობიანი სქემის კრებადობისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს ბადის შერჩევას და სხვაობიანი თანაფარდობებით წარმოებულების გონივრულ შერჩევას. მაგალითად, § 3-ის (17) სქემის განშლადობა გამოიწვია იმან, რომ წარმოებული ვერ შევცვალეთ ხელსაყრელი სხვაობიანი თანაფარდობით. ცხადია, ასეთი სქემით ამონახსნის აგება არ შეიძლება. ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ თუ რა გავლენას ახდენს აპროქსიმაცია სქემის კრებადობის ხასიათზე.

ვთქვათ, $u^{(h)}\in U_h$ არის (10)-ის ერთადერთი ამონახსნი. თუ $[u]_h\in U_h$

ამონახსნისათვის სრულდება (10), მაშინ ერთადერთობის გამო გვაქვს იდეალური შემთხვევა $[u]_h=u^{(h)}$. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ გარემოებას იშვიათად აქვს ადგილი, ამიტომ საზოგადოდ (10)-ში $[u]_h$-ის ჩასმით წარმოიქმნება მარჯვენა მხარის მიმართ $\delta f^{(h)}$ ცდომილება (გადახრა), ე. ი.

$$L_h[u]_h=f^{(h)}+\delta f^{(h)}. \tag{13}$$

თუ $\delta f^{(h)}\to 0$, როცა $h\to 0$ ისე, რომ $[u]_h$ სულ უფრო ზუსტად აკმაყოფილებს (10)-ს, მაშინ ვიტყვით, რომ (10) სქემა ახდენს *აპროქსიმაციას* (1) *ამოცანის* u *ამონახსნზე*.

ამრიგად, აპროქსიმაციის შემთხვევაში (10)-ის $u^{(h)}$ ამონახსნი იმდენად მცირედ განსხვავდება $[u]_h$ ამონახსნისაგან, რომ

$$\delta f^{(h)}\to 0, \qquad \text{როცა} \quad h\to 0$$

პირობიდან გამომდინარეობს

$$u^{(h)}\to[u]_h, \quad \text{როცა} \quad h\to 0.$$

$\delta f^{(h)}$ ცდომილების არსის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ დიფერენციალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}+a(x)\dfrac{du}{dx}+b(x)u=\cos x, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0)=1,\\ u'(0)=2. \end{cases} \tag{14}$$

[0, 1] სეგმენტზე ავიღოთ D_h ბადე, სადაც $h=1/N$ და $x_n=nh$ ($n=0,1,2,\dots,N$). (14) ამოცანის $[u]_h$-ის მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად შევადგინოთ

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}+a(x_n)\dfrac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}+b(x_n)u_n=\cos x_n,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad n=1,2,\dots, N-1,\\ u_0=1,\\ \dfrac{u_1-u_0}{h}=2. \end{cases} \tag{15}$$

სხვაობიანი სქემა, სადაც

$$\begin{cases} \dfrac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}\approx\dfrac{d^2u(x)}{dx^2},\\ \dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}\approx\dfrac{du(x)}{dx},\\ \dfrac{u(h)-u(0)}{h}\approx\dfrac{du(0)}{dx}. \end{cases} \tag{16}$$

თუ ვისარგებლებთ

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-2u_n-u_{n-1}}{h^2} - a(nh)\,\dfrac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} + b(nh)u_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=1,2,\ldots,\ N-1, \\ u_0 \\ \dfrac{u_1-u_0}{h}, \end{cases} \tag{17}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos\ nh,\ n=1,\ 2,\ldots,N-1, \\ 1, \\ 2. \end{cases}$$

აღნიშვნებით. მაშინ (15) მიიღებს (10) სახეს.

$\delta f^{(h)}$ ცდომილების გამოსათვლელად დავაზუსტოთ თანაფარდობები:

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+\frac{h^3}{6}u'''(\xi_1),$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)-\frac{h^3}{6}u'''(\xi_2),$$

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_3),$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)-\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_4),$$

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(\xi_5),$$

სადაც ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 არიან $[x-h,\ x+h]$ შუალედის წერტილები.

უკანასკნელი ტოლობებიდან

$$\begin{cases} \dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = u'(x) + \dfrac{h^2}{12}\,[u'''(\xi_1)+u'''(\xi_2)], \\ \dfrac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \dfrac{h^2}{24}[u^{(4)}(\xi_3)+u^{(4)}(\xi_4)], \\ \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) + \dfrac{h}{2}\,u''(\xi_5). \end{cases} \tag{18}$$

ვიგულისხმოთ, რომ (14)-ის $u(x)$ ამონახსენს გააჩნია მეოთხე რიგამდე

შემოსაზღვრული წარმოებულები. (18)-ის გათვალისწინებით ადგილი აქვს

$$\frac{u(x+h)+2u(x)+u(x-h)}{h^2}+a(x)\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+b(x)u(x) =$$

$$=\frac{d^2u(x)}{dx^2}+a(x)\frac{du(x)}{dx}+b(x)u(x)+h^2\left[\frac{u^{(4)}(\xi_3)+u^{(4)}(\xi_4)}{24}+\right.$$

$$\left.+a(x)\frac{u'''(\xi_1)+u'''(\xi_2)}{12}\right].$$

ტოლობას, ამიტომ

$$L_h[u]_h=\begin{cases}\dfrac{u(x_n+h)-2u(x_n)+u(x_n-h)}{h^2}+a(x_n)\dfrac{u(x_n+h)-u(x_n-h)}{2h}+\\ \qquad +b(x_n)u(x_n), \quad n=1,2,\ldots, N-1,\\ u(0),\\ \dfrac{u(h)-u(0)}{h}.\end{cases}$$

გამოსახულება შეგვიძლია გადავწეროთ

$$L_h[u]_h=\begin{cases}\cos x_n+h^2\left[\dfrac{u^{(4)}(\xi_3)+u^{(4)}(\xi_4)}{24}+a(x_n)\dfrac{u'''(\xi_1)+u'''(\xi_2)}{12}\right],\\ \qquad n=1,2,\ldots, N-1\\ 1+0,\\ 2+h\dfrac{u''(\xi_5)}{2}.\end{cases}$$

ან

$$L_h[u]_h=f^{(h)}+\delta f^{(h)}$$

სახით,

სადაც

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}h^2\left[\dfrac{u^{(4)}(\xi_3)+u^{(4)}(\xi_4)}{24}+\dfrac{u'''(\xi_1)+u'''(\xi_2)}{12}\right],\\ 0,\\ h\dfrac{u''(\xi_5)}{2}.\end{cases} \tag{19}$$

(17) და (19) ფორმულებით მოცემული $f^{(h)}$ და $\delta f^{(h)}$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რაიმე F_h წრფივი ნორმირებული სივრცის ელემენტები. ამრიგად, თუ $g^{(h)}\in F_h$, მაშინ

$$g^{(h)}=\begin{cases}\varphi_n, \quad n=1,2\ldots,N-1,\\ \psi_0,\\ \psi_1.\end{cases}$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$ და ψ_0, ψ_1 არიან გარკვეულ რიცხვთა ნებისმიერი დალაგებული სისტემები. კერძოდ, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $g^{(h)}$ არის $\varphi_n(n=1,2,\ldots,N-1)$ ბადური ფუნქციისა და ψ_0, ψ_1 დალაგებული წყვილის ერთობლიობა. ამ სივრცეში წრფივი მოქმედებები განისაზღვრება, რიცხვთა დალაგებულ ენეულებზე შემოღებული წრფივი მოქმედებების ანალოგიურად, ხოლო ნორმა მოიცემა

$$\|g^{(h)}\|_{F_h}=\max \left(|\psi_0|, \ |\psi_1|, \ \max_n \ |\varphi_n|\right)$$

ფორმულით. ამიტომ (19)-დან გვექნება

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}\leqslant Ch, \tag{21}$$

სადაც C დამოკიდებულია $u(x)$-ზე და არ არის დამოკიდებული h-ზე. (21)-დან ცხადია, რომ $\delta f^{(h)}\to 0$, როცა $h\to 0$.

შევნიშნოთ, რომ (17)-ში L_h არის ოპერატორი რომელიც U_h-ის ყოველ $v^{(h)}=\{v_n\}$ ელემენტს ასახავს F_h სივრცის $g^{(h)}$ ელემენტში ($n=0, 1,2,\ldots,N$)

$$L_h v^{(h)}=\begin{cases} \dfrac{v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}}{h^2}+a(x_n)\,\dfrac{v_{n+1}-v_{n-1}}{2h}+b(x_n)v_n, \\ \hfill (n=0,1,\ldots,N-1) \\ v_0, \\ \dfrac{v_1-v_0}{h}. \end{cases}$$

ფორმულით. თუ $L_h u^{(h)}=f^{(h)}$ სკალარულ განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეები წარმოადგენენ F_h სივრცის $f^{(h)}$ ვექტორის კომპონენტებს, მაშინ L_h შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ოპერატორი, რომელიც ყოველ $u^{(h)}\in U_h$ ბადურ ფუნქციას შეუსაბამებს F_h სივრცის $f^{(h)}$ ელემენტს. აქედან გამომდინარე $L_h[u]_h$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც F_h სივრცის ელემენტი, ე. ი. $\delta f^{(h)}=L_h[u]_h-f^{(h)}$ არის F_h სივრცის ელემენტი, რომლის სიდიდე განისაზღვრება $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$ რიცხვით.

განსაზღვრება 2. ვიტყვით, რომ $L_h[u]_h=f^{(h)}$ სქემა ახდენს აპროქსიმაციას $Lu=f$ ამოცანის u ამონახსენზე, თუ $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}\to 0$, როცა $h\to 0$. თუ შესრულებულია

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}\leqslant Ch^k$$

პირობა, სადაც $C>0$, $h>0$ — რაიმე მუდმივებია, მაშინ ადგილი აქვს აპროქსიმაციას h^k რიგით.

§ 5. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა, მისი კავშირი ამონახსნის კრებადობასთან

ვთქვათ,

$$Lu=f \tag{1}$$

დიფერენციალური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის შედგენილი

$$L_h u^{(h)}=f^{(h)} \tag{2}$$

სხვაობიანი სქემა, რომელიც (1) ამოცანის u ამონახსენზე ახდენს აპროქსიმაციას h^k რიგით, ე. ი. (2)-ში $[u]_h$ ფუნქციის ჩასმით მიიღება $\delta f^{(h)}$ ცდომილება

$$L_h[u]_h=f^{(h)}+\delta f^{(h)}.$$

აქ

$$\|\delta f^{(h)}\|\leqslant C_1 h^{(k)}, \tag{3}$$

სადაც C_1 ბიჯზე დამოუკიდებელი მუდმივია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$L_h u^h=\begin{cases} 4\ \dfrac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}-3\dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}+Au_n=0, & n=1,2,\dots,\ N-1, \\ u_0=b. \end{cases}$$

სხვაობიანი სქემა ახდენს

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx}+Au=0, \\ u(0)=b. \end{cases}$$

ამოცანის აპროქსიმაციას h რიგით, მაგრამ, როგორც ეს §3-ში ვნახეთ, ამ სქემით აგებული $u^{(h)}$ მიახლოებითი ამონახსენი არ მიისწრაფის $[u]_h$ ამონახსნისაკენ, როცა $h\to 0$. ამრიგად, სქემის კრებადობისათვის აპროქსიმაციასთან ერთად საჭიროა მდგრადობაც.

განსაზღვრება 1. (2) სქემას ეწოდება მდგრადი თუ არსებობს ისეთი $h_0>0$, $\delta>0$ რიცხვები, რომ ყოველი $h<h_0$ და ისეთი ნებისმიერი $\varepsilon^{(h)}\in F_h$ შეშფოთებისათვის რომლისთვისაც $\|\varepsilon^h\|_{F_h}<\delta$,

$$L_h z^{(h)}=f^{(h)}+\varepsilon^{(h)} \tag{4}$$

სხვაობიან ამოცანას გააჩნია ერთი და მხოლოდ ერთი $z^{(h)}$ ამონახსენი, რომელიც (2)-ის $u^{(h)}$ ამონახსნისაგან გადახრილია $z^{(h)}-u^{(h)}$ სხვაობით და აკმაყოფილებს

$$\|z^{(h)}-u^{(h)}\|\leqslant C\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \tag{5}$$

უტოლობას, სადაც C არის h-გან დამოუკიდებელი რაიმე მუდმივი.

კერძოდ, (5) უტოლობა ნიშნავს იმას, რომ (2) სხვაობიანი სქემის მარჯვენა მხარის მცირე $\varepsilon^{(h)}$ შეშფოთება იწვევს თანაბრად h-ის მიმართ $z^{(h)}-u^{(h)}$ ამონახსნის მცირე გადახრას.

თუ $L_h: U_h \to F_h$ წრფივი ოპერატორია, მაშინ შეგვიძლია შემოვიღოთ მდგრადობის შემდეგი

განსაზღვრება 2. (2) სხვაობიანი სქემა მდგრადია, თუ ნებისმიერი $f^{(h)} \in F_h$-სათვის $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი $u^{(h)} \in U_h$ ამონახსენი, ამასთან

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leqslant C \|f^{(h)}\|_{F_h}, \tag{6}$$

სადაც $C=\text{const}$ არ არის დამოკიდებული h-ზე.

თეორემა. თუ $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ სხვაობიანი სქემა ახდენს აპროქსიმაციას $Lu=f$ ამოცანის u ამონახსენზე h^k რიგით და მდგრადია, მაშინ $u^{(h)} \to [u]_h$ $(h \to 0)$, ამასთან, ადგილი აქვს

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leqslant (CC_1) h^k. \tag{7}$$

შეფასებას, სადაც C და C_1 არიან შესაბამისად (3) და (5) შეფასებებში შემავალი მუდმივები.

დამტკიცება. თუ $\varepsilon^{(h)} \equiv \delta f^{(h)}$, $[u]_h \equiv z^{(h)}$, მაშინ (5)-ის თანახმად

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leqslant C \|\delta f^{(h)}\|_{F_h}.$$

(3)-ის გათვალისწინებით მიიღება (7), რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაგალითი. ვაჩვენოთ ეილერის

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} - G(x_n, y_n) = \varphi_n, \quad n=0,1,\dots,N-1, \\ u_0 = \psi. \end{cases} \tag{8}$$

სხვაობიანი სქემის მდგრადობა $(x_n = nh,\ h=1/N)$, რომელიც გამოიყენება

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - G(x,u) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0) = \psi. \end{cases} \tag{9}$$

დიფერენციალური ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად.

ვთქვათ, $G(x, u)$, $\psi(x)$ ისეთი ფუნქციებია, რომ არსებობს (9) ამოცანის ისეთი $u(x)$ ამონახსენი, რომლის $u'(x)$ და $u''(x)$ წარმოებულები შემოსაზღვრულია, ხოლო

$$\left|\frac{\partial G}{\partial u}\right| < M. \tag{10}$$

ადვილი შესამოწმებელია რომ (8) ახდენს (9) განტოლების $u(x)$ ამონახ-

სხვე აპროქსიმაციას! h რიგით. ვისარგებლოთ ზემოთ შემოღებული ნორმებით და შევამოწმოთ (8) სქემის მდგრადობა. თუ (8)-ს მივცემთ

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} - G(x_n, u_n), & n=0, 1,\ldots,N-1, \\ u_0, \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \varphi(x_n), & n=0, 1,2,\ldots, N-1, \\ \psi. \end{cases}$$

სახეს, მაშინ

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$$

ამოცანა ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1}-z_n}{h} - G(x_n, z_n) = \varphi(x_n) + \varepsilon_n \quad (n=0, 1,\ldots,N-1), \\ z_0 = \psi + \varepsilon, \end{cases} \tag{11}$$

ფორმით, სადაც

$$\varepsilon^{(h)} = \begin{cases} \varepsilon_n, & n=0,1,\ldots, N-1, \\ \varepsilon, & n=N. \end{cases}$$

(11)-ს წევრობრივ გამოვაკლოთ (8). თუ შემოვიღებთ

$$z_n - u_n = \omega_n$$

აღნიშვნას და გავითვალისწინებთ

$$G(x_n, z_n) - G(x_n, u_n) = \frac{\partial G(x_n, \xi_n)}{\partial u}\omega_n = M_n^{(h)}\omega_n$$

ტოლობას, სადაც ξ_n არიან z_n და u_n შორის მოთავსებული მუდმივები, მაშინ მივიღებთ $\omega^{(h)} = (\omega_0, \omega_1,\ldots,\omega_n)$-ის განმსაზღვრელ სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{n+1}-\omega_n}{h} - M_n^{(h)}\omega_n = \varepsilon_n, & n=0,1,2,\ldots,N-1, \\ \omega_0 = \varepsilon. \end{cases} \tag{12}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $M_n^{(h)} \leqslant M$ უტოლობას, მაშინ $nh \leqslant Nh = 1$ პირობისა და (10)-ის გათვალისწინებით

$$\begin{aligned} |\omega_{n+1}| &= |(1+hM_n^{(h)})\omega_n + h\varepsilon_n| \leqslant (1+Mh)|\omega_n| + h|\varepsilon_n| \leqslant \\ &\leqslant (1+Mh)^2|\omega_{n-1}| + h(1+Mh)|\varepsilon_{n-1}| + h|\varepsilon_n| \leqslant \\ &\leqslant (1+Mh)^2|\omega_{n-1}| + 2h(1+Mh)\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \leqslant \\ &\leqslant (1+Mh)^3|\omega_{n-2}| + 3h(1+Mh)^2\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \leqslant \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\leqslant (1+Mh)^{n+1}|\omega_0| + (n+1)(1+Mh)^n\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \leqslant \\ &\leqslant (1+Mh)^{n+1}\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} + (1+Mh)^n\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \leqslant \\ &\leqslant 2(1+Mh)^N\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \leqslant 2e^M\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h}, \end{aligned}$$

ე. ი.

$$|\omega_{n+1}|\leqslant 2e^{M}\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (6)-ის ანალოგიური შეფასება

$$\|\omega^{(h)}\|_{\boldsymbol{\sigma}_h}\leqslant 2e^{M}\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h},$$

რომელიც $C=2e^{M}$ მუდმივით ნიშნავს ეილერის სხვაობიანი სქემის მდგრადობას. თეორემის თანახმად (8) სქემა მდგრადია h-რიგით.

§ 6. რუნგე-კუტას და ადამსის სქემები

რუნგე-კუტას და ადამსის სხვაობიანი სქემები გამოვიყენოთ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dx}-G(x,\ u)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0)=a. \end{cases} \qquad (1)$$

დიფერენციალური ამოცანისათვის.

დავყოთ $0\leqslant x\leqslant 1$ შუალედი $h=\dfrac{1}{N}$ ბიჯით $x_n=nh \quad (n=0,\ 1,\ldots,N)$ წერტილებით და (1)-ის მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად შევადგინოთ სხვაობიანი სქემა:

$$L_h u^{(h)}=\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}-G(x_n,\ u_n), & n=0,1,\ldots,N-1, \\ u_0 \end{cases}$$

$$f^{(h)}=\begin{cases} 0, & n=0,1,\ldots,N-1, \\ a, \end{cases}$$

რომლის აპროქსიმაციის რიგია h. ამ სქემით გამოთვლებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული შინაარსი: თუ u_n უკვე გამოთვლილია, მაშინ

$$u_{n+1}=u_h+hG(x_n,u_n)$$

ფორმულით xOy სიბრტყის $(x_n,\ y_n)$ წერტილიდან გადავდივართ $(x_{n+1},\ u_{n+1})$ წერტილზე $u'=G(x,\ u)$ დიფერენციალური განტოლების $u=u(x)$ ინტეგრალური წირის $(x_n,\ y_n)$ წერტილზე გამავალი მხების მიმართულებით.

მაღალი რიგის სხვაობიან სქემებს შორის ერთ-ერთი ყველაზე პოპულარულია ე. წ. რუნგე-კუტას სქემა, რომელსაც ქვემოთ აღვწერთ.

ვთქვათ, x_n წერტილში უკვე გამოთვლილია საძიებელი ამონახსნის

u_n მნიშვნელობა. მეზობელ $x_{n+1}=x_n+h$ წერტილში u_{n+1} მნიშვნელობის მოსაძებნად, l მთელი რიცხვისათვის, გვაქვს

$$
\begin{aligned}
&k_1=G(x_n, \ u_n),\\
&k_2=G(x_n+\alpha h, \quad u_n+\alpha hk_1),\\
&k_3=G(x_n+\beta h, \quad u_n+\beta hk_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&k_l=G(x_n+\gamma h, \quad u_n+\gamma hk_{l-1})
\end{aligned}
\tag{3}
$$

გამოსახულებები, ხოლო (1) ამოცანისათვის

$$
L_h u^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}-(p_1k_1+\ldots+p_lk_l)=0, \quad n=0,1,\ldots,N=1,\\ u_0=a.\end{cases}
\tag{4}
$$

სხვაობიანი სქემა, სადაც $p_1, p_2,\ldots p_l, \alpha, \beta,\ldots,\gamma$ კოეფიციენტები უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ მოცემული l-თვის სქემის აპროქსიმაციის რიგი იყოს მაქსიმალური. ცნობილი u_n-ით შეგვიძლია (3)-დან გამოვთვალოთ $k_1, k_2,\ldots,k_l$ კოეფიციენტები და შემდეგ ვიპოვოთ

$$u_{n+1}=u_n+h(p_1k_1+p_2k_2+\ldots+p_lk_l).$$

როცა $l=1$, მაშინ (4) სქემა გვაძლევს ეილერის ცნობილ სხვაობიან სქემას, ხოლო $l=4$-თვის—რუნგე-კუტას სქემას:

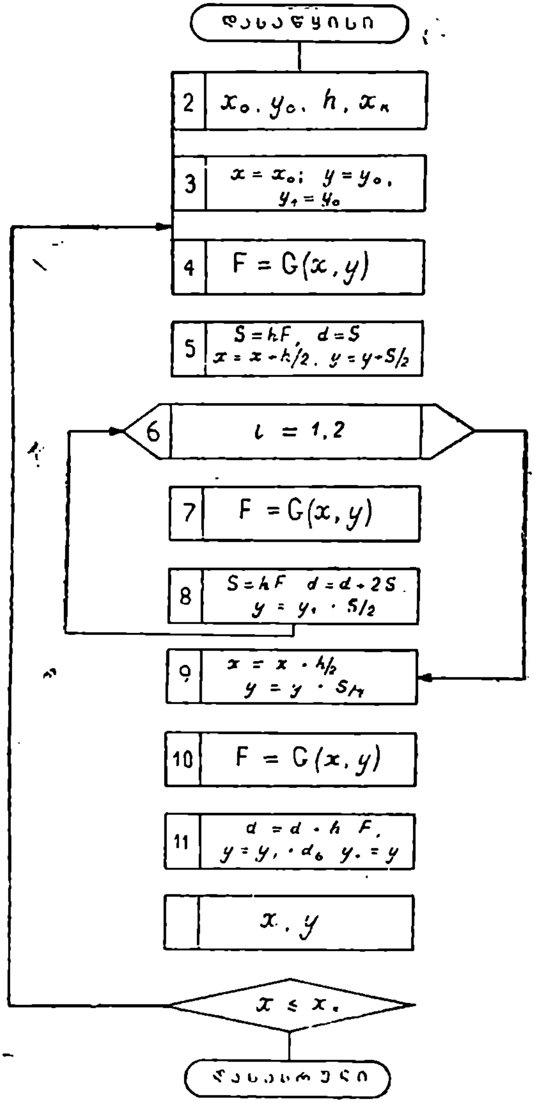
$$
L_h u^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{h}-\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \quad n=0,1,\ldots,N-1,\\ u_0=a,\end{cases}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
&k_1=G(x_n, \ u_n),\\
&k_2=G\left(x_n+\frac{h}{2}, \quad u_n+\frac{k_1h}{2}\right),\\
&k_3=G\left(x_n+\frac{h}{2}, \quad u_n+\frac{k_2h}{2}\right),\\
&k_4=G(x_n+h, \quad u_n+k_3h),
\end{aligned}
$$

რომლის აპროქსიმაციის რიგი უდრის ოთხს.

რუნგე-კუტას მეთოდის ბლოკ-სქემა



ბლოკ-სქემა № 3

ბლოკ-სქემის აღწერა:

მე-2 ბლოკში ხდება საწყისი x_0, y_0, h. x_k მონაცემების შეტანა.

მე-3 ბლოკში x, y, y_1 — ცვლადებს ენიჭებათ საწყისი მნიშვნელობანი.

მე-4 ბლოკში გამოითვლება G ფუნქციის მნიშვნელობა x, y წერტილებში და გამოთვლილი სიდიდე ინახება F—მისამართზე.

მე-5 ბლოკით გამოითვლება s და d დამხმარე ცვლადები და x, y მნიშვნელობები გამოითვლება ახალ წერტილში.

მე-6—8-ე ბლოკში ხდება F—ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა ახალ წერტილებში და s, d დამხმარე ცვლადებს ენიჭება ახალი მნიშვნელობა.

მე-9 ბლოკით ითვლება x, y ცვლადების მნიშვნელობა h და s სიდიდის გათვალისწინებით.

მე-10 ბლოკში გამოითვლება G ფუნქციის მნიშვნელობა x, y წერტილში.

მე-11 ბლოკით გამოითვლება d დამხმარე ცვლადის ახალი მნიშვნელობა, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება y სიდიდე და მისი მნიშვნელობა ენიჭება y_1-ს.

მე-12 ბლოკში იბეჭდება x, y მნიშვნელობები.

მე-13 ბლოკით ხდება იმის შემოწმება მივიღეთ თუ არა ბოლო კვანძი.

განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი: ამოვხსნათ

$$\frac{dy}{dx}=3xy-5x+2, \quad x\in[0,8;\ 2]$$

დიფერენციალური განტოლება $y(0,8)=0,5$ საწყისი პირობით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავიღოთ $x_0=0,8$; $h=0.3$; $x_k=1,7$. ჩვენს მიერ აღწერილი რუნგე-კუტას მეთოდის ბლოკ-სქემის შესაბამის პროგრამას მოცემული ამოცანისათვის ექნება შემდეგი სახე:

```
C     ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФ. УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ.
C     РУНГЕ-КУТТА
      F(X, Y)=3.*X*Y—5.*X+2.
      READ (5,1)XØ,YØ, YØ, H, XK
1     FORMAT (4E13.6)
      X=XØ
      Y=YØ
4     S=H*F(X, Y)
      D=S
      DO 2 I=1,2
      S=H*F(X+H/2., Y+S/2.)
```

```
2     D=D+2.*S
      X=X+H
      D=D+H*F(X, Y+S)
      Y=Y+D/6.
      WRITE (6, 3)X, Y
3     FORMAT (2X, 'X'='F15.6, 2X, 'Y=', E15.6)
      IF (X-XK) 4, 4, 5
5     STOP
      END
```

აღნიშნული პროგრამით მოცემული ამოცანის ეგმ-ზე რეალიზაციის შედეგად ვღებულობთ:

```
X=  Ø.8ØØØØØØE+ØØ      Y=   Ø.4Ø6382E+ØØ
X=  Ø.11ØØØØE+Ø1       Y=  -Ø.32232ØE+ØØ
X=  Ø.14ØØØØE+Ø1       Y=  -Ø.32964ØE+Ø1
X=  Ø.17ØØØØE+Ø1       Y=  -Ø.167599E+Ø2
```

ამრიგად, რუნგე-კუტას სქემის მიხედვით ცნობილი u_n-ის საშუალებით u_{n+1} მნიშვნელობის გამოსათვლელად, საჭიროა $G(x, u)$ ფუნქციის l-ჯერ გამოთვლა, რაც იწვევს აღნიშნული სქემით დასმული ამოცანის ამოსახსნელად განკუთვნილი მანქანური დროის საგრძობ დანახარჯს. ამ მხრივ რუნგე-კუტას სქემასთან შედარებით გარკვეული უპირატესობა აქვს ე. წ. ა დ ა მ ს ი ს სქემას.

ადამსის სქემის მიხედვით საძიებელი ფუნქციის u_{n+1} მნიშვნელობის მოსაძებნად საკმარისია $G(x, u)$ ფუნქცია გამოვთვალოთ მხოლოდ ერთხელ (x_n, u_n) წერტილში. სქემის აპროქსიმაციის რიგის მიუხედავად. ამასთან საჭირო იქნება შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციათა გარკვეული რაოდენობის შესრულება, რომელიც მოითხოვს გაცილებით მცირე დროს ვიდრე $G(x, u)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა:

(1) ამოცანისათვის ჩავწეროთ ა დ ა მ ს ი ს სქემა. თუ შემოვიღებთ

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1},$$
$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2},$$
$$\nabla^3 f_n = \nabla(\nabla^2 f_n) = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3},$$
$$G_n = G(x_n, u_n)$$

აღნიშვნებს, მაშინ სქემაში გამოყენებული სხვაობიანი განტოლებები ჩაიწერება ასე:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} - G_n = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{5}$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} - G_n - \frac{1}{2}\nabla G_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1), \tag{6}$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h}-G_n-\frac{1}{2}\nabla G_n-\frac{5}{12}\nabla^2 G_n=0 \quad (n=2,3,\ldots,\ N-1), \qquad (7)$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h}-G_n-\frac{1}{2}\nabla G_n-\frac{5}{12}\nabla^2 G_n-\frac{3}{8}\nabla^3 G_n=0 \qquad (8)$$

$$(n=3,\ 4,\ldots,\ N-1)$$

თუ ცნობილია u_n, $u_{n-1},\ldots$, მაშინ (5)—(3) განტოლებებიდან გამოითვლება u_{n+1}. თუ აღნიშნულ განტოლებებში u_{n+1}, $u_n,\ldots,u_N,\ldots$ მნიშვნელობების ნაცვლად შევიტანოთ $u((n+1)h)$, $u(nh)$, $u((n-1)h)$, $\ldots$, $\ldots u(Nh),\ldots$ მნიშვნელობებს, სადაც $u(x)$ არის (1)-ის ზუსტი ამონახსენი, მივიღებთ მარჯვენა მხარის მიმართ ცდომილებებს, რომელთა რიგია შესაბამისად h, h^2, h^3, h^4.

ადამსის ფორმულების მისაღებად

$$\frac{du}{dx}=G(x,\ u) \qquad (9)$$

განტოლების მარჯვენა მხარისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G(x,\ u(x))=F(x),$$

სადაც $u(x)$ არის (9) განტოლების ამონახსენი. გვექნება

$$u(x_n+h)-u(x_n)=\int_{x_n}^{x_n+h} u'(x)\,dx=\int_{x_n}^{x_n+h} F(x)dx.$$

ფუნქციათა ინტერპოლაციის თეორიიდან ცნობილია ისეთი k ხარისხის ერთადერთი $P_k(x,\ F)$ მრავალწევრის არსებობა, რომ x_n, $x_{n-1},\ldots$, x_{n-k} წერტილებში მან მიიღოს $F(x_n), F(x_{n-1}),\ldots,\ F(x_{n-k})$ მნიშვნელობები. თუ $F(x)$ საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა, მაშინ $x_n\leqslant x\leqslant x_n+h$ შუალედზე $P_k(x,F)$ მრავალწევრის გადახრა $F(x)$ ფუნქციიდან არ აღემატება h^{k+1} რიგის სიდიდეს, ე. ი.

$$\max|P_k(x,\ F)-F(x)|=O(h^{k+1}). \qquad (10)$$

ადამსის სხვაობიან ფორმულას აქვს სახე:

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h}-\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} P_k(x,\ F)dx=0. \qquad (11)$$

თუ (11)-ში u_n, u_{n+1}, $G(x_{n-s},\ u(x_{n-s}))$ შევცვლით $u(x_n)$, $u(x_{n+1})$,

$G(x_{n-s},\ u(x_{n-s}))$ სიდიდეებით, მივიღებთ ცდომილებას მარჯვენა მხარის მიმართ:

$$|\delta F^{(h)}|=\left|\frac{u(x_n+h)-u(x_n)}{h}-\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}P_k(x,\ F)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{u(x_n+h)-u(x_n)}{h}-\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}F(x)\,dx\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}[F(x)-P_k(x,\ F)]dx\right|\leqslant O+\max|F(x)-P_k(x,F)|=O(h^{k+1}).$$

როცა $k=0$, მაშინ

$$P_0(x,\ F)=G(x_n,u_n)=\text{const}$$

და (11) ფორმულა გვაძლევს (5)-ს;

როცა $k=1$, მაშინ

$$P_1(x,\ F)=\frac{1}{h}\left[(x-x_{n-1})G_n-(x-x_n)G_{n-1}\right].$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}P_1(x,\ F)dx=\frac{1}{h^2}\left.\frac{(x-x_{n-1})^2}{2}\right|_{x_n}^{x_n+h}G_n-\frac{1}{h^2}\left.\frac{(x-x_n)^2}{2}\right|_{x_n}^{x_n+h}G_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(\frac{4h^2}{2}-\frac{h^2}{2}\right)G_n-\frac{1}{h^2}\,\frac{h^2}{2}\,G_{n-1}=G_n+\frac{1}{2}\nabla G_n$$

და (11)-დან მივიღებთ (6)-ს. ანალოგიურად, როცა $k=2$, $k=3$, მაშინ (11)-დან მიიღება შესაბამისად (7) და (8).

(5) წარმოადგენს ეილერის ცნობილ სქემას, რომლის საშუალებით ამონახსნის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა ერთ წერტილში $u_0=a$. (6) სქემით ამონახსნის ასაგებად უნდა ვიცოდეთ ორ წერტილში საძიებელი ფუნქციის $u_0=a$ და u_1 მნიშვნელობები. (7) სქემის შემთხვევაში საჭიროა ვიცოდეთ სამ წერტილში ფუნქციის u_0, u_1, u_2 მნიშვნელობები. (8) სქემის შემთხვევაში კი ოთხ წერტილში ფუნქციის u_0, u_1, u_2,u_3 მნიშვნელობები. მათი გამოთვლა შეიძლება რუნგე-კუტას სქემით, ან ეილერის სქემით უფრო მცირე ბიჯებისათვის, ან $x=0$ წერტილის მიდამოში ამონახსნის ტეილორის მწკრივად გაშლით. ამრიგად, ადამსის მეთოდის ერთ-ერთი ნაკლი მდგომარეობს არასტანდარტული მეთოდით საწყისი მნიშვნელობების მოძებნაში.

მაშასადამე, ადამსის მეთოდის უპირატესობა რუნგე-კუტას მეთოდთან

შედარებით მდგომარეობს, იმაში, რომ იგი მოითხოვს G_n-ის გამოთვლას მხოლოდ ერთ წერტილში. შემდეგ შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციებით ვპოულობთ ∇G_n, $\nabla^2 G_n$, $\nabla^3 G_n, \ldots, V^k G_n$ სხვაობებს. რუნგე-კუტას მეთოდში კი საჭიროა G_n-ის l-ჯერ გამოთვლა. ადამსის მეთოდის ნაკლი მდგომარეობს არ ასტანდარტული მეთოდებით საწყისი მნიშვნელობების აგებაში, ამიტომ დიფერენციალური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის საჭიროა ამ ორი სქემის გონივრული კომბინირება.

§ 7. პროგნოზისა და კორექციის მეთოდი

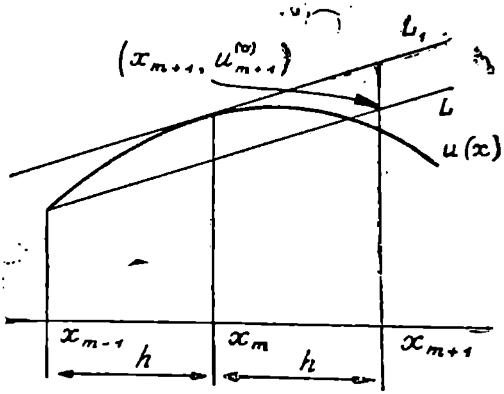
როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ ხშირად მიახლოებითი მეთოდით დიფერენციალური ამოცანის ამოსახსნელად მიზანშეწონილია ორი სქემის ერთდროულად გამოყენება. მაგალითად, რუნგე-კუტას მეთოდით ვითვლით საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობებს რამოდენიმე საწყის წერტილში, ხოლო დანარჩენ წერტილებში ამონახსნის მნიშვნელობის გამოსათვლელად ვიყენებთ ადამსის სქემას. ორი სქემის ერთდროულად გამოყენების ერთ-ერთი მეთოდია ე. წ. *პროგნოზისა* და *კორექციის* მეთოდი, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში. რაიმე მოსაზრებით (ან ინტუიციით) ვახდენთ საძიებელი $u(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობის მოძებნას x_{n+1} წერტილში, ე. ი. $u(x_{n+1})=u_{n+1}$. შემდეგ ვიყენებთ, რომელიმე ცნობილ მეთოდს და ვახდენთ გამოთვლილი მნიშვნელობის *შესწორებას* ანუ *კორექციას*. ბუნებრივია კორექტირებული მნიშვნელობის შემდგომი შესწორება მოვახდინოთ იმავე ფორმულით. აქედან გამომდინარე მიიღება იტერაციული პროცესი, რომლის გაგრძელებაც საჭიროა მოცემული სიზუსტით საძიებელი მნიშვნელობის მიღებამდე.

x_{m+1} წერტილში საძიებელი u_{m+1} ამონახსნის ნულოვანი მიახლოების პროგნოზირებისათვის ვიყენებთ მეორე რიგის

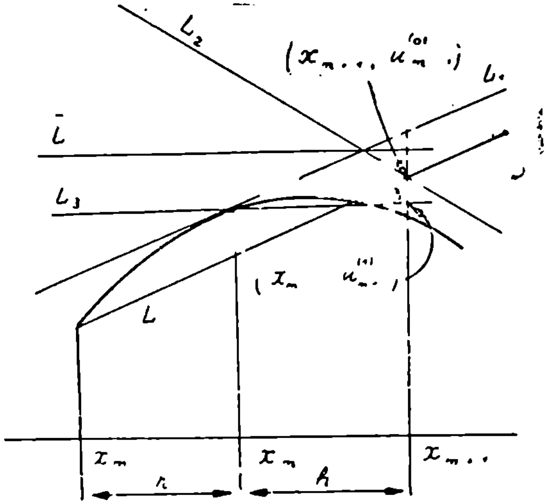
$$u^{(0)}_{m+1}=u_{m-1}+2hG(x_m, u_m) \tag{1}$$

ფორმულას. მიღებული ამონახსნის შესასწორებლად გამოვიყვანოთ სამუშაო ფორმულა. (x_m, u_m) წერტილში (ნახ. 30) L_1 მხების საკუთხი კოეფიციენტი იქნება

$G(x_m, u_m)\cdot\ (x_{m-1}, u_{m-1})$



ნახ. 30.



ნახ. 31.

წერტილზე გავავლოთ L_1-ის პარალელური L წრფე, რომლის გადაკვეთა x_{m+1} წერტილის შესაბამის ორდინატთან გვაძლევს $u^{(0)}{}_{m+1}$ პროგნოზირებულ მნიშვნელობას.

ახლა გამოვიყვანოთ u_{m+1}-ის კორექტირების ფორმულა. ამისათვის $(x_{m+1}, u^{(0)}{}_{m+1})$ წერტილში გავავლოთ L_2 მხები (ნახ. 31). L_1 მხების კუთხური კოეფიციენტია $G(x_m, u_m)$, ხოლო L_2 მხების კუთხური კოეფიციენტი იქნება

$$G(x_{m+1}, u^{(0)}{}_{m+1}).$$

L_1 და L_2 მხებთა კუთხური კოეფიციენტების გასაშუალოება მოგვცემს $\bar{L}$ წრფეს. (x_m, u_m) წერტილში გავავლოთ $L_3 \| \bar{L}$ და მისი გადაკვეთა x_{m+1} წერტილის შესაბამის ორდინატთან მივიღოთ $u^{(0)}{}_{m+1}$-ის ახალ კორექტირებულ $u^{(1)}{}_{m+1}$ მნიშვნელობად. ამ მნიშვნელობის ასაგებად შევადგინოთ ფორმულა

$$u^{(1)}{}_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[G(x_m\, u_m) + G(x_{m+1}, u^{(0)}{}_{m+1})],$$

რომელიც საშუალებას მოგვცემს $u^{(1)}{}_{m+1}$-ის საშუალებით ავაგოთ მისი ახალი კორექტირებული $u^{(2)}{}_{m+1}$ მნიშვნელობა და ა. შ. ამრიგად, მიიღება იტერაციული პროცესის ამსახველი

$$u_{m+1}^{(i+1)} = u_m + \frac{h}{2}[G(x_m, u_m) + G(x_{m+1}, u^{(i)}{}_{m+1})], \quad (i=1,2\ldots) \qquad (2)$$

ფორმულა.

იტერაციული პროცესი შეწყდება როცა რაიმე $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის

$$|u_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}|<\varepsilon. \tag{3}$$

საჭიროა შევისწავლოთ იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობები, გვაქვს,

$$u_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}=\frac{h}{2}\left[G(x_{m+1}, u^{(i)}{}_{m+1})-G(x_{m+1}, u_{m+1}^{(i-1)})\right],$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$h_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}=\frac{h}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\left[u^{(i)}{}_{m+1}-u_{m+1}^{(i-1)}\right], \tag{4}$$

სადაც $\frac{\partial G}{\partial u}$ გამოთვლილია x_{m+1} წერტილში. ამასთან u მოთავსებულია $u_{m+1}^{(i+1)}$ და $u^{(i)}{}_{m+1}$ შორის.

დავუშვათ, არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ

$$\left|\frac{\partial G}{\partial u}\right|\leqslant M.$$

მაშინ (4)-დან

$$\left|u_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}\right|\leqslant\frac{hM}{2}\left|u^{(i)}{}_{m+1}-u_{m+1}^{(i-1)}\right|,$$

რადგან

$$\left|u^{(i)}{}_{m+1}-u_{m+1}^{(i-1)}\right|\leqslant\frac{hM}{2}\left|u_{m+1}^{(i-1)}-u_{m+1}^{(i-2)}\right|,$$

ამიტომ

$$\left|u_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}\right|\leqslant\left(\frac{hM}{2}\right)^2\left|u_{m+1}^{(i-1)}-u_{m+1}^{(i-2)}\right|.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$|u_{m+1}^{(i+1)}-u^{(i)}{}_{m+1}|\leqslant\left(\frac{hM}{2}\right)^i\left|u^{(1)}{}_{m+1}-u^{(0)}{}_{m+1}\right|.$$

თუ $h<\frac{2}{M}$, მაშინ კორექტირებულ მნიშვნელობებს შორის სხვაობა მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $i\to\infty$, ე. ი. პროცესი კრებადია.

ამრიგად, აღნიშნულ პირობებში ვაჩვენეთ რომ $u^{(i)}{}_{m+1}$ კრებადია ისეთი

მნიშვნელობისაკენ, რომელიც საზოგადოდ შეიძლება არ იყოს დასმული ამოცანის ამონახსენი. აქვე უნდა აღინიშნოს რომ

$$u_{m+1}=u_m+2hG(x_m,\ u_m)$$

პრონგოზირების ფორმულა არის იგივე ტრაპეციების ფორმულა, ხოლო

$$u_{m+1}=u_m+\frac{h}{2}\left[G\ (x_m,\ u_m)+G\ (x_{m+1},\ u_{m+1})\right]$$

კორექციის ფორმულა არაცხადი ფორმულაა.

§ 3. სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდები

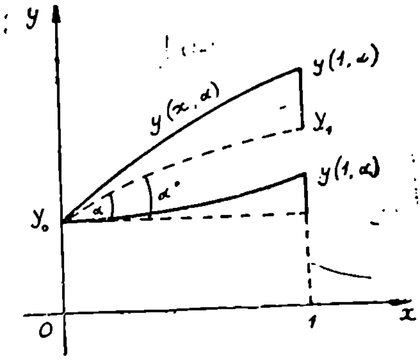
განვიხილოთ ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ y(0)=Y_0, \quad y(1)=Y_1, \end{cases} \tag{1}$$

რომლის ამოხსნა ნიშნავს ვიპოვოთ [0,1] სეგმენტზე უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ისეთი $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც (0,1)-ზე აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას, ხოლო $x=0$, $x=1$ წერტილებზე სასაზღვრო პირობებს. განვიხილოთ (1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ორი მეთოდი:

1. ს რ ო ლ ი ს მ ე თ ო დ ი. (1)-სათვის განვიხილოთ კოშის ამოცანა:

$$\begin{cases} y''=f(x,\ y,\ y'), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ y(0)=Y_0, \quad \left|\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\mathrm{tg}\alpha, \end{cases} \tag{2}$$



ნახ. 32

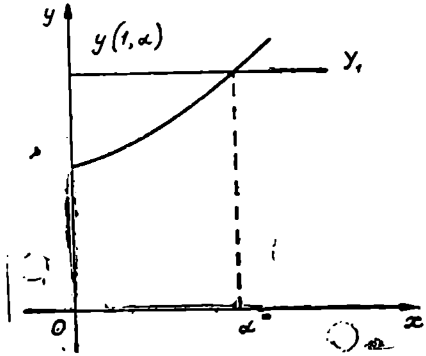
სადაც α არის (2) ამოცანის ინტეგრალური წირის (0, Y_0) წერტილში გავლებული მხების Ox ღერძთან დახრის კუთხე (ნახ. 32).

ფიქსირებული Y_0-სათვის (2) ამოცანის ამონახსენი აღვნიშნოთ $y=y(x,\ \alpha)$-ით. როცა $x=1$, მაშინ $y(x,\ \alpha)=y(1,\ \alpha)$ არის α-ს ფუნქცია.

(2) ამოცანის საშუალებით (1) ამოცანის ამოხსნის პროცესი

შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ ისეთი $\alpha=\alpha^*$, რომ (ნახ. 33) $(0,\ Y_0)$ გამოსულმა ინტეგრალურმა წირმა გაიაროს $(1,\ Y_1)$ წერტილში ე. ი.

$$y(1,\ \alpha)=Y_1. \tag{3}$$



ნახ. 33

ამრიგად, როცა $\alpha=\alpha^*$, მაშინ (2)-ის ამონახსენი ემთხვევა (1)-ის ამონახსნს, ე. ი. საკითხი დაიყვანება (3) ამოცანის ამოხსნაზე. ცხადია, (3) არის $F(\alpha)=0$ სახის განტოლება, სადაც $F(\alpha)=y(1,\ \alpha)-Y_1$.

ამრიგად, სროლის მეთოდის არსი მდგომარეობს (1)-ის ამოხსნის დაყვანაში (2)-ის ამოხსნაზე.

(3) ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შუაზე გაყოფის, ქორდათა ან მხებთა (ნიუტონის) მეთოდით.

სროლის მეთოდით (1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა მიზანშეწონილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა (2) ამოცანის $y(x,\ \alpha)$ ამონახსენი „უმნიშვნელოდ არის დამოკიდებული α-ზე". წინააღმდეგ შემთხვევაში პროცესი არ არის კრებადი. ვაჩვენოთ,თუ რა იგულისხმება „უმნიშვნელო დამოკიდებულების" ქვეშ. ვთქვათ, გვაქვს

$$\begin{cases} y''-a^2y=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ y(0)=Y_0, & y(1)=Y_1. \end{cases} \tag{1'}$$

ამოცანა, სადაც $a^2=\mathrm{const}\cdot(1')$ ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x)=\frac{e^{-ax}+e^{-a(2-x)}}{1-e^{-2a}}Y_0+\frac{e^{-a(1-x)}-e^{-a(1+x)}}{1-e^{-2a}}Y_1$$

a ზრდასთან ერთად Y_0 და Y_1-ის კოეფიციენტები რჩებიან შემოსაზღვრულ ფუნქციებად $0\leqslant x\leqslant 1$-შუალედში. $a>0$ -სათვის ისინი არ აღემატებიან ერთს. ამიტომ Y_0-და Y_1-ის მოცემისას დაშვებული მცირე ცდომილებები გვაძლევენ ამონახსნის მცირე ცდომილებებს.

ახლა განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} y''-a^2y=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ y(0)=Y_0, & y'(0)=\operatorname{tg}\alpha, \end{cases} \tag{2'}$$

რომლის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x)=\frac{aY_1+\operatorname{tg}\alpha}{2a}e^{ax}+\frac{aY_0-\operatorname{tg}\alpha}{2a}e^{-ax}.$$

თუ tg α-ს მოცემისას დაშვებულია ε ცდომილება, მაშინ $x=1$-თვის მივიღებთ

$$\Delta y(1)=\frac{\varepsilon}{2a}e^{a}-\frac{\varepsilon}{2a}e^{-a} \tag{4}$$

ნაზრდს. a-ს დიდი მნიშვნელობებისათვის (4)-ის მაკლები იმდენად მცირეა, რომ შეგვიძლია მისი უკუგდება. მაგრამ საკლებში $\frac{e^a}{2a}$ ხდება საკმაოდ დიდი. ამიტომ ამ შემთხვევაში სროლის მეთოდით (1)-ის ამოხსნის პროცედურა ფორმალურად დასაშვებია მაგრამ პრაქტიკულად უვარგისი.

2. ნიუტონის მეთოდი. ამ მეთოდით არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება რიგ წრფივ ამოცანათა ამოხსნებზე. იგი მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ ცნობილია, რაიმე $y_0(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1)-ის სასაზღვრო პირობებს და უხეშად უახლოვდება მას საძიებელ $y(x)$ ამონახსნს. დავუშვათ

$$y(x)=y_0(x)+v(x), \tag{5}$$

სადაც $v(x)$ არის $y(x)$-ის ნულოვანი შესწორება.

(5) შევიტანოთ (1)-ში და მოვახდინოთ მისი გაწრფივება

$$y''(x)=y_0''x)+v''(x)$$

და

$$f(x, y_0+v,\ y'_0+v')=f(x_0, y_0, y'_0)+\frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y_0}+$$

$$+\frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0}v'+O(v^2+|v'|^2)$$

ფორმულების გამოყენებით. თუ უკუვაგდებთ $O(v^2+|v'|^2)$ რიგის წევრებს, მაშინ $\bar{v}$ შესწორებისათვის მივიღებთ წრფივ ამოცანას

$$\begin{cases} \bar{v}''=p(x)\bar{v}'+q(x)\bar{v}+\varphi(x), \\ \bar{v}(0)=\bar{v}(1)=0, \end{cases} \tag{6}$$

სადაც

$$p(x)=\frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y'},\quad q(x)=\frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y}$$

$$\varphi(x)=f(x,\ y_0,\ y_0')-y''_0.$$

ანალიზური ან სხვა რაიმე ცნობილი მეთოდით (6) ამოცანის ამოხსნა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ $\bar{v}$ შესწორება და დავადგინოთ საძიებელი ამონახსნის მორიგი

$$y_1=y_0(x)+\bar{v}$$

მიახლოება. აღწერილი პროცესი შეგვიძლია გამოვიყენოთ იმ არაწრფივი ამოცანების ამოსახსნელად, რომლებიც შეიძლება მივიღოთ (1) ამოცანის აპროქსიმაციისას.

სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

§ 1. უმარტივესი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური ოპერატორების სხვაობიანი აპროქსიმაცია

1. ბ ა დ ე დ ა ბ ა დ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი. იმისათვის რომ დავწეროთ სხვაობიანი სქემა, რომელიც მიახლოებით აღწერს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას საჭიროა:

ა) არგუმენტის უწყვეტი ცვლილების არე შევცვალოთ დისკრეტული არით;

ბ) დიფერენციალური ოპერატორი შევცვალოთ რაიმე სხვაობიანი ოპერატორით, და დავწეროთ სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგი.

ამ პროცედურის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. ამრიგად, საწყისი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის საკითხი დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე.

განვიხილოთ ეს საკითხები უფრო დაწვრილებით. ცხადია, რომ მათემატიკური ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა შეუძლებელია არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის მისი უწყვეტად ცვლილების რაიმე არეში ევკლიდური სივრციდან. ამიტომ ბუნებრივია ამ არეში შევარჩიოთ რაიმე წერტილთა სასრული სიმრავლე და მხოლოდ ამ წერტილებში ვეძებოთ მიახლოებითი ამონახსენი. წერტილთა ასეთ სიმრავლეს ეწოდება ბ ა დ ე, ხოლო თითოეულ წერტილს—კ ვ ა ნ ძ ი.

ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულნი არიან ბადის კვანძებში ეწოდება ბ ა დ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი. ამრიგად, არგუმენტის ცვლილების უწყვეტი არე შევცვალეთ ბადით, ე. ი. არგუმენტის დისკრეტული ცვლილების არით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მოვახდინეთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების სივრცის აპროქსიმაცია ბადურ ფუნქციათა სივრცით.

სხვაობიანი ამონახსნის თვისებები, კერძოდ, მისი სიახლოვე ზუსტ ამონახსნთან, დამოკიდებულია ბადის შერჩევაზე.

განვიხილოთ სიბრტყეზე ბადის მაგალითები:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. (თანაბარი ბადე). განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქციათა სიმრავლე $u(x, t)$. განსაზღვრის არედ ავიღოთ მართკუთხედი

$$\overline{D}=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}.$$

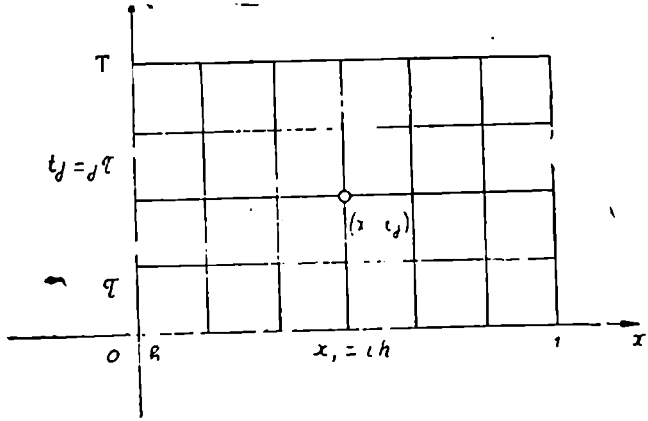
x ღერძის $[0,1]$ და t ღერძის $[0, T]$ შუალედები დავყოთ შესაბამისად

N_1 და N_2 ნაწილებად. ვთქვათ, $h={}^1/_{N_1}$, $\tau={}^T/_{N_2}$. დაყოფის წერტილებში გავავლოთ ღერძების პარალელური წრფეები. ამ წრფეების გადაკვეთის შედეგად მივიღებთ (x_i, t_j) კვანძებს, რომლებიც ქმნიან

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i,t_j)\in\overline{D}\}$$

ბადეს (ნახ. 34). x და t ღერძების მიმართულებით ამ ბადის ბიჯებია შესაბამისად h და τ.

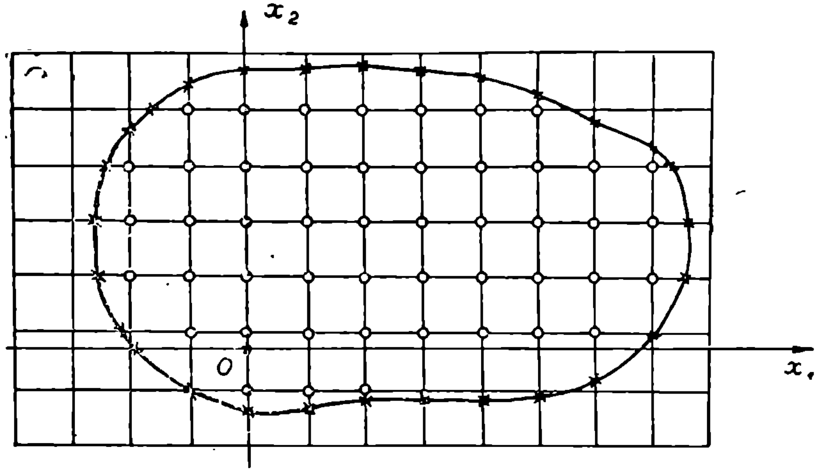
მ ე ზ ო ბ ე ლ ი კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი ეწოდება კვანძებს, რომლებიც განლაგებული არიან ერთ წრფეზე (ჰორიზონტალურზე ან ვერტიკალურზე) და რომელთა შორის მანძილი ბიჯის ტოლია (h ან τ).



ნახ. 34

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. (ბადე სიბრტყეზე). ვთქვათ, x_1Ox_2 სიბრტყეზე მოცემულია რთული ფორმის G არე Γ საზღვრით. თუ გავავლებთ $x_1^{(i_1)}=i_1h_1$ ($i_1=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $h_1>0$) და $x_2^{(i_2)}=i_2h_2$ ($i=0,\pm1,\pm2,\ldots$ $h_2>0$) წირებს, მაშინ x_1Ox_2 სიბრტყეზე მივიღებთ ბადეს (i_1h_1, i_2h_2) ($i_1, i_2=0,\pm1,\pm2,\ldots$) კვანძებით. საინტერესოა მხოლოდ ის კვანძები, რომლებიც ეკუთვნის $\bar{G}=G+\Gamma$ არეს. კვანძებს, რომლებიც მოთავსებული არიან G არის შიგნით, უწოდებენ შ ი გ ა კ ვ ა ნ ძ ე ბ ს. მათი სიმრავლე აღვნიშნოთ ω_h(ნახ.35) სიმბოლოთი. $x_1^{(i_1)}=i_1h_1$, $x_2^{(i_2)}=i_2h_2$ ($i_1, i_2=0,\pm1,\pm2,\ldots$) წრფეებისა და Γ-ს გადაკვეთის წერტილებს ეწოდება ს ა ს ა ზ ღ ვ რ ო კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი. ყველა სასაზღვრო კვანძების სიმრავლე აღვნიშნოთ γ_h სიმბოლოთი.

35 ნახაზზე ვარსკვლავიანი სიმბოლოთი აღნიშნულია სასაზღვრო კვანძები, ხოლო o-ით შიგა კვანძები. ჩანს, გვაქვს ისეთი სასაზღვრო კვანძები, რომლებიც h_1 ან h_2-ზე ნაკლები მანძილით არიან დაშორებული უახლოესი შიგა კვანძიდან. ამრიგად,მიუხედავად იმისა რომ ბადე



ნახ. 35

თანაბარია Ox_1 და Ox_2 მიმართულებით, $\overline{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h$ ბადე არათანაბარია $\bar{G}$-ის მიმართ.

უწყვეტი $x\in\bar{G}$ არგუმენტის $u(x)$ ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ $y(x_i)$ ბადურ ფუნქციებს. ბადური $y(x_i)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორის სახით.

თუ გარკვეული რიგით გადავნომრავთ ყველა საკვანძო წერტილს $x_1, x_2,\ldots,x_N$, მაშინ ამ კვანძებში ბადური ფუნქციის მნიშვნელობები შეიძლება განვიხილოთ როგორც

$$Y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_N)$$

ვექტორის კომპონენტები.

თუ G სასრულია, მაშინ Y ვექტორის N განზომილება სასრული რიცხვია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ბადე შედგება უსასრულო რაოდენობის კვანძებისაგან და Y ვექტორის განზომილებაც უსასრულო იქნება.

ჩვეულებრივ, განიხილავენ $\{\omega_h\}$ ბადეთა სიმრავლეს, რომლებიც დამოკიდებულია h ბიჯზე, როგორც პარამეტრზე, ამიტომ $y_h(x)$ ბადური ფუნქციებიც დამოკიდებული იქნებიან h პარამეტრზე (ან თანაბარი ბადის შემთხვევაში-კვანძების N რაოდენობაზე). არათანაბარი ბადის შემთხვევაში განიხილავენ $h=(h_1,\ h_2,\ldots,\ h_N)$ ვექტორს.

უწყვეტი $x\in G$ არგუმენტის $u(x)$ ფუნქციები არიან რაიმე H_0 ფუნქციონალური სივრცის ელემენტები, ხოლო $y_h(x)$ ბადურ ფუნქციათა სიმრავლე ქმნის გარკვეულ H_h სივრცეს. ამრიგად, სასრულ სხვაობათა გამოყენებით H_0 სივრცეს ვცვლით $y_h(x)$ ბადურ ფუნქციათა H_h სივრცით.

თუ განვიხილავთ $\{\omega_h\}$ ბადეთა სიმრავლეს, მაშინ მათ შეესაბამება $\{H_h\}$ ბადური ფუნქციების სივრცეთა სიმრავლე, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან h პარამეტრზე. H_h წრფივ სივრცეში შემოაქვთ $\|\cdot\|_h$ ნორმა, რომელიც წარმოადგენს H_0 სივრცის $\|\cdot\|_0$ ნორმის სხვაობიან ანალოგს.

ვთქვათ, $u(x)$ არის საწყისი უწყვეტი ამოცანის ამონახსენი H_0 სივრციდან, ხოლო y_h — მიახლოებითი ამოცანის ამონახსენი H_h სივრციდან. მიახლოებითი თეორიის ძირითად ინტერეს წარმოადგენს y_h და u ამონახსნების მიახლოების შეფასება. ამასთან, y_h და u არიან სხვადასხვა სივრცის ვექტორები. გვაქვს ორი შესაძლებლობა:

1. $\omega_h(G)$ სიმრავლეზე მოცემული y_h ბადური ფუნქცია, უწყვეტად გავავრცელოთ (მაგალითად, წრფივი ინტერპოლაციის საშუალებით) მთელ G არეზე, მივიღებთ x არგუმენტის უწყვეტ $\widetilde{y}(x, h)$ ფუნქციას. $\widetilde{y}(x, h)-u(x)$ სხვაობა ეკუთვნის H_0-ს. y_h და u-ს სიახლოვე ხასიათდება $\|\widetilde{y}(x, h)-u(x)\|_0$ რიცხვით.

2. H_0 სივრცე აისახება H_h სივრცეზე. ყოველ $u(x)\in H$ ფუნქციას შეუსაბამებენ ბადურ $u_h(x)$, $x\in\omega_h$ ფუნქციას, ასე რომ $u_h=P_hu\in H$, სადაც $P_h:H_0\rightarrow H_h$ წრფივი ოპერატორია.

P_h ოპერატორის შერჩევის ხარჯზე ეს შესაბამისობა შეიძლება დავამყაროთ სხვადასხვა ხერხით. თუ $u(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ $u_h(x)=u(x)$, სადაც $x\in\omega_h$. ზოგიერთ შემთხვევაში $x_i\in\omega_h$ კვანძში $u_h(x_i)$ ფუნქციას განსაზღვრავენ,როგორც ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობას ამ წერტილის რაიმე მიდამოში (მაგალითად, $O(h)$ დიამეტრით). შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $u(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა და $u_h(x_i)=u(x_i)$, $\forall x_i\in\omega_h$. u_h ბადური ფუნქციის შემოღების შემდეგ შეიძლება განვიხილოთ $y_h-u_h\in H_h$ სხვაობა. u_h და y_h-ის სიახლოვე ხასიათდება $\|y_h-u_h\|_h$ რიცხვით. ამასთან, ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ $\|\cdot\|_h$ ნორმამ მოახდინოს $\|\cdot\|_0$ ნორმის აპროქსიმაცია შემდეგი აზრით:

$$\lim_{h\rightarrow 0} \|u_h\|_h=\|u\|_0, \quad \forall u\in H_0.$$

ამ პირობას უწოდებენ H_h და H_0 სივრცეების ნორმების შ ე თ ა ნ ხ მ ე ბ უ ლ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ა ს.

2. მ ა რ ტ ი ვ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი ს ს ხ ვ ა ო ბ ი ა ნ ი ა პ რ ო ქ ს ი მ ა ც ი ა. ვთქვათ, მოცემულია L წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს $v=v(x)$ ფუნქციაზე. თუ Lv-ში შემავალ წარმოებულებს შევცვლით შესაბამისი სხვაობიანი დამოკიდებულებებით, მაშინ Lv-ს ნაცვლად მივიღებთ L_hv_h სხვაობიან გამოსახულებას, რომელიც წარმოად-

გენს v_h ბადური ფუნქციის მნიშვნელობების წრფივ კომბინაციას, განსაზღვრულს ბადის ზოგიერთ საკვანძო წერტილში (ამ უკანასკნელს უწოდებენ შ ა ბ ლ ო ნ ს):

$$L_h v_h(x) = \sum_{\xi \in Ш(x)} A(x, \xi) v_h(\xi)$$

ან

$$(L_h v_h)_i = \sum_{x_j \in Ш(x_i)} A_h(x_i, x_j) v_h(x_j),$$

სადაც $A_h(x, \xi)$ — კოეფიციენტებია, h — ბადის ბიჯი, $Ш(x)$ შაბლონი x წერტილში.

Lv ოპერატორის $L_h v_h$-ით შეცვლას ეწოდება დიფერენციალური ოპერატორის ა პ რ ო ქ ს ი მ ა ც ი ა სხვაობიანი ოპერატორით.

L ოპერატორის სხვაობიანი აპროქსიმაციის შესწავლა თავიდან ხდება ლოკალურად, ე. ი. სივრცის ყოველ ფიქსირებულ x წერტილში. თუ $v(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ $v_h(x) = v(x)$. L ოპერატორის სხვაობიან აპროქსიმაციამდე უნდა შევარჩიოთ შაბლონი, ე. ი. x წერტილის მეზობელი საკვანძო წერტილები, რომლებშიაც ბადური ფუნქციის მნიშვნელობები გამოყენებულნი იქნებიან L ოპერატორის აპროქსიმაციისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ოპერატორი $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v = v(x, t)$. ვთქვათ, (x, t) არის xOt სიბრტყის რაიმე ფიქსირებული წერტილი, ხოლო $h > 0$ და $\tau > 0$ — ორი რიცხვი (ბიჯები). იმისათვის რომ დავწეროთ L ოპერატორის სხვაობანი $L_{h\tau}$ აპროქსიმაცია უნდა შევარჩიოთ შაბლონი. პირველ რიგში შევჩერდეთ უმარტივესი სახის აპროქსიმაციაზე. ვთქვათ, შაბლონი შედგება ოთხი წერტილისაგან (ნახ. 36 ა).

$L_{h\tau}$ ოპერატორი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$L_{h\tau}^{(0)} v = \frac{v(x, t+\tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x+h, t) - 2v(x, t) + v(x-h, t)}{h^2}. \quad (1)$$

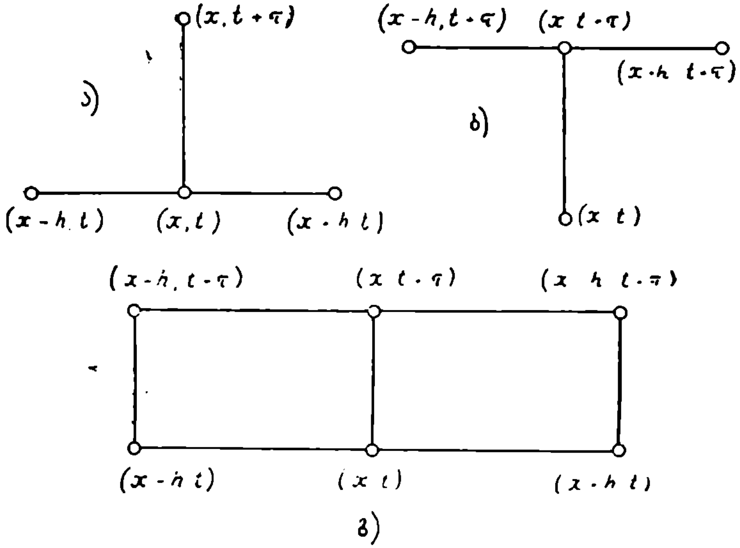
შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$v = v(x, t), \quad \hat{v} = v(x, t+\tau), \quad \check{v} = v(x, t-\tau),$$

$$v_{\bar{x}} = \frac{v(x) - v(x-h)}{h}, \quad \frac{1}{h}\left[v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)\right] = v_{\bar{x}x}(x). \quad (2)$$

ამ აღნიშვნებში v_t შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$v_t = \frac{v(x, t+\tau) - v(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{v} - v}{\tau}. \quad (3)$$



ნახ. 36

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)და (3), მაშინ (1) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$L_{h\tau}^{(0)} v = v_t - \widehat{v}_{\bar{x}x}. \qquad (1')$$

$L_{h\tau}^{(0)}$-ის აგების დროს ავიღეთ $v_{\bar{x}x}$-ის მნიშვნელობა t მომენტში. თუ გამოვიყენებთ შაბლონს (ნახ. 36,ბ), მაშინ $v_{\bar{x}x}$-ის მნიშვნელობა შეიძლება ავიღოთ $t+\tau$ მომენტში, რომელიც მოგვცემს

$$L_{h\tau}^{(1)} v = v_t - \widehat{v}_{\bar{x}x}. \qquad (4)$$

თუ ავიღებთ (1′) და (4) წრფივ კომბინაციას, მივიღებთ ერთპარამეტრიანი სხვაობიანი ოპერატორების ოჯახს

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} v = v_t - (\sigma \widehat{v}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)\, v_{\bar{x}x}), \qquad (5)$$

რომლებიც განსაზღვრული არიან ექვს წერტილიან შაბლონზე, როცა $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$.

სხვაობიანი აპროქსიმაციის რიგის შესაფასებლად ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$v_t = \frac{\partial v\,(x,\ t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 v(x,\ t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x,\ t+\tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2),$$

$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 v(x,\ t)}{\partial x^4} + O(h^4) = \frac{\partial^2 v(x,\ t+\tau/2)}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\tau}{2}\ \frac{\partial^3 v(x,\ t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2),$$

$$\hat{v}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x,\ t+\tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\ \frac{\partial^3 v(x,\ t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2),$$

რომელთა გათვალისწინებით (1′), (4′) და (5) მიიღებენ სახეს:

1) $$L_{h\tau}^{(0)} v = \frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v(x,\ t)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = Lv(x,t) + O(h^2+\tau),$$

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} v - Lv(x,\ t) = O(h^2+\tau);$$

2) $$L_{h\tau}^{(1)} v = \frac{\partial v(x,\ t+\tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x,\ t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) =$$

$$= Lv(x,\ t+\tau) = O(h^2+\tau),$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} - Lv(x,\ t+\tau) = O(h^2+\tau);$$

3) $$L_{h\tau}^{(0.5)} v = \frac{\partial v(x,\ t+\tau/2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x,\ t+\tau/2)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau^2) =$$

$$= Lv(x,\ t+\tau/2) + O(h^2+\tau^2),$$

$$\psi^{(0.5)} = L_{h\tau}^{(0.5)} v - Lv(x,\ t+\tau/2) = O(h^2+\tau^2).$$

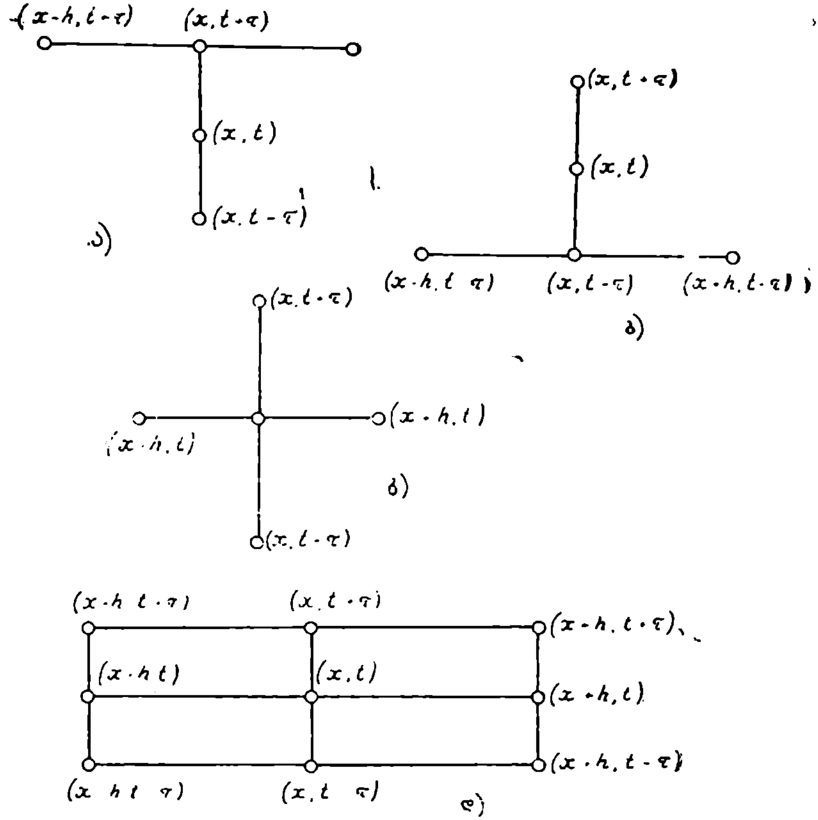
ამრიგად, $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ ოპერატორი ახდენს L-ის აპროქსიმაციას h-ის მიმართ მეორე რიგით (ნებისმიერი σ-სათვის), τ-ს მიმართ პირველი რიგით, როცა $\sigma=0$, $\sigma=1$, და მეორე რიგით, როცა $\sigma=0,5$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ოპერატორის შემთხვევაში L სხვაობანი ოპერატორის შესადგენად უნდა გამოვიყენოთ ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა დროის სამ $t-\tau$, t, $t+\tau$ მომენტში. მინიმალური იქნება ხუთ წერტილოანი შაბლონი (ნახ. 37, ა, ბ, გ). ერთ-ერთ შესაძლებელ სხვაობიან აპროქსიმაციას (ნახ. 37 დ), რომელიც იყენებს $v_{\bar{x}x}$ მნიშვნელობას შუა t შრეზე, აქვს სახე

$$L_{h\tau} v - v_{\bar{t}t} - v_{\bar{x}x}. \qquad (6)$$

სადაც

$$v_{\bar{t}t}(x,\ t) = (v(x,\ t+\tau) - 2v(x,\ t) + v(x,\ t-\tau)/\tau^2.$$



ნახ. 37

ანალოგიურად შეიძლება დავწეროთ ოპერატორი (ნახ. 38 ა):

$$L_{h_1}v = v_{\bar{t}t} - \hat{v}_{\bar{x}x} \tag{7}$$

ცხრა წერტილიან შაბლონზე შეიძლება შევადგინოთ ორპარამეტრიანი სხვაობანი სქემების ოჯახი

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1,\sigma_2)}v = v_{\bar{t}t} - \left(\sigma_1 \hat{v}_{\bar{x}x} + (1-\sigma_1-\sigma_2)\, v_{\bar{x}x} + \sigma_2 \check{v}_{\bar{x}x}\right), \tag{8}$$

როცა $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, მაშინ (8)-დან მიიღება (6), ხოლო როცა $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$ —მიიღება (7).

შევნიშნოთ, რომ

$$v_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 v(x,\, t)}{\partial t^2} + O(\tau_2).$$

$v_{\bar{x}x} = \dfrac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2)$ ფორმულიდან გამომდინარე (6)-ის აპროქსიმაციის რიგი იქნება $O(h^2+\tau^2)$. აპროქსიმაციის იგივე რიგი ექნება (8) ოპერატორს, როცა $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, სადაც σ ნებისმიერი რიცხვია.

σ_1 და σ_2 პარამეტრებს არსებითი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო აპროქსიმაციის რიგის, არამედ სხვაობიანი სქემების მდგრადობის განსაზღვრაშიც.

3. ა პ რ ო ქ ს ი მ ა ც ი ი ს ნ ა ზ რ დ ი ბ ა დ ე ზ ე. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ლოკალურ სხვაობიან აპროქსიმაციას (წერტილში აპროქსიმაცია). ჩვეულებრივ საჭიროა აპროქსიმაციის რიგის შეფასება მთელ ბადეზე.

ვთქვათ, ω_h არის ევკლიდური სივრცის რაიმე G არის ბადე, H_h— ამ ბადეზე მოცემული ბადური ფუნქციების წრფივი სივრცე, H_0—გლუვი $v(x)$ ფუნქციების სივრცე. დავუშვათ: 1) არსებობს ისეთი P_h ოპერატორი, რომ ნებისმიერი $u \in H_0$, $P_h u = u_h \in H_h$; 2) $\|\cdot\|_h$ და $\|\cdot\|_0$ ნორმები შეთანხმებულია, ე. ი.

$$\lim_{|h|\to 0} \|P_h u\|_h = \|u\|_0,$$

სადაც $|h|$ აღნიშნავს h ვექტორის ნორმას.

განვიხილოთ H_0-ზე მოცემული რაიმე L ოპერატორი და

$$L_h : H_h \to H_h.$$

L ოპერატორის აპროქსიმაციის ნაზრდი L_h ოპერატორით ეწოდება $\Psi_h = L_h v_h - (Lv)_h$ ბადურ ფუნქციას, სადაც $v_h = P_h v$, $(Lv)_h = P_h(Lv)$ ხოლო v არის H_0 სივრცის ნებისმიერი ელემენტი.

თუ $\|\Psi_h\|_h \to 0$, როცა $|h| \to 0$, ამბობენ, რომ L_h ოპერატორი ახდენს L-ის ა პ რ ო ქ ს ი მ ა ც ი ა ს.

ვიტყვით, რომ L_h სხვაობანი ოპერატორი ახდენს L-ის აპროქსიმაციას $m > 0$ რიგით თუ

$$\|\Psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m), \tag{9}$$

ანუ

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leqslant M|h|^m,$$

სადაც M არის $|h|$ -ზე დამოუკიდებელი მუდმივი.

ვთქვათ, $L_{h\tau} v_{h\tau}$ არის Lu, $u = u(x, t)$ ოპერატორის სხვაობიანი აპროქსიმაცია. $L_{h\tau}$ ოპერატორი განსაზღვრულია ბადურ $v_{h\tau}(x, t)$ ფუნქციებზე. დავუშვათ, $v(x, t)$, როგორც x-ის ფუნქცია ეკუთვნის H_0, მაშინ $v_h(x, t) = P_h v(x, t)$ ეკუთვნის H_h-ს ნებისმიერი $t \in [0, t_0]$. თუ $v(x, t)$ უწყვეტია t-ს მიმართ, მაშინ ნებისმიერი t-სათვის ($t \in \omega_\tau$) შეიძლება დაუშვათ

$v_{h\tau}(x, t)=v_h(x,t)$. ამრიგად, $v_{h\tau}(x, t)$ მოცემულია $\omega_{h\tau}$ ბადეზე და შეგვიძლია განვსაზღვროთ აპროქსიმაციის ნაზრდი.

$$\Psi_{h\tau}(x, t)=L_{h\tau}v_{h\tau}(x,t)-(Lv)_{h\tau}(x, t), \quad (x, t)\in\omega_{h\tau}.$$

ვიტყვით, რომ $L_{h\tau}$ახდენს L-ის აპროქსიმაციას $m>0$ რიგით x-ის მიმართ და $n>0$ რიგით t-ს მიმართ, თუ $v(x, t)$ საკმარისად გლუვი ფუნქციათა კლასისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|\Psi_{h\tau}(x, t)\|_{h\tau}=O(|h|^m+\tau^n) \text{ ანუ } \|\Psi_{h\tau}\|_{h\tau}\leqslant M\ (|h|^m+\tau^n),$$

სადაც $M>0$ არის $|h|$ და τ-ზე დამოუკიდებელი მუდმივი.

§ 2. სხვაობიანი ამოცანის დასმა. სქემების კრებადობა და სიზუსტე

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით დიფერენციალური ოპერატორის შეცვლას სხვაობიანი ოპერატორით. მაგრამ მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებში დიფერენციალურ განტოლებასთან ერთად დამატებით განიხილება საწყისი და სასაზღვრო პირობები, რომელთა საშუალებითაც ყველა შესაძლო ამონახსნებიდან გამოიყოფა ერთადერთი. ამიტომ სხვაობიანი ამოცანის ფორმულირების დროს დიფერენციალური ოპერატორის აპროქსიმაციასთან ერთად, აუცილებელია ეფექტურად აღვწეროთ სხვაობიანი სახით ეს დამატებითი პირობები.

სხვაობიანი განტოლებების ერთობლიობას, რომელთა საშუალებითაც ხდება ძირითადი განტოლებისა და შესაბამისი სასაზღვრო პირობების აპროქსიმაცია, ეწოდება **სხვაობიანი სქემა**.

მაგალითი. სითბოგამტარობის განტოლებისათვის პირველი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{cases} Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \ 0<x<1, \ 0<t\leqslant t_0 \\ u(0, t)=\mu_1(t), \ u_2(1,t)=\mu_2(t), \ u(x,0)=u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

შევარჩიოთ თანაბარი ბადე

$$\omega_{h\tau}=\{(x_i=ih, \ t_j=j\tau), \ i=0,1,\ldots,N_1, \ j=0,1,\ldots,N_2\}$$

და უმარტივესი ოთხწერტილიანი შაბლონი, მივიღებთ სხვაობიან ამოცანას

$$y_t=y_{\bar{x}x}+\varphi;$$

ანუ ინდექსური ფორმით:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{y^j_{i-1}-2y_i^j+y^j_{i+1}}{h^2}+\varphi_i^j, \quad 1\leqslant i\leqslant N_1-1, \ 0\leqslant j\leqslant N_2-1 \tag{1}$$
$$y_0^j=\mu_1(t_j), \ y^j_{N_1}=\mu_2(t_j), \ y^0_i=u_0(x_i).$$

მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა სახით, მაგალითად, $\varphi^j{}_i=f(x_i,t_j)$, $\varphi^j{}_i=f(x_i,\ t_{j+1/2})$ და ა. შ.

სხვაობიანი ამოცანა წარმოადგენს ე. წ. ცხადი სქემის გამოყენების მაგალითს. დროის ზედა შრეზე y^{j+1} ამონახსნის მნიშვნელობა განისაზღვრება ცხადი დამოკიდებულებით წინა შრეზე მისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით.

$$y^{j+1}=y^j+\tau(y^j{}_{\bar{x}x}+\varphi^j).$$

განვიხილოთ არაცხადი სქემა

$$Y_t=\hat{y}_{\bar{x}x}+\varphi,\quad y(x,\ 0)=u_0(x),\ y(0,\ t)=\mu_1(t),$$
$$y(1,t)=\mu_2(t),\ \ t\in\omega_\tau,\ \ x\in\omega_h.$$

$j+1$ შრეზე $\hat{y}=y^{j+1}$ მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$y^{j+1}/\tau-y^{j+1}_{\bar{x}x}=F^j,\quad F^j=y^j/\tau+\varphi^j,$$

ანუ

$$y_{i-1}^{j+1}-(2+h^2/\tau)y_i{}^{j+1}+y_{i+1}^{j+1}=-h^2F_i{}^j,\quad 0<i<N,$$
$$y_0{}^{j+1}=\mu_1(t_{j+1}),\ \ y_N{}^{j+1}=\mu_2(t_{j+1})$$

სამდიაგონალური მატრიცით.

ეს სისტემა შეიძლება ამოვხსნათ გადადენის მეთოდით.

ზემოთ განხილულ ამოცანაში სასაზღვრო პირობა პირველი გვარისაა, ამიტომ ის სხვაობიან ბადეზე აპროქსიმირდება ზუსტად. მესამე გვარის სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში აპროქსიმაცია მოითხოვს სპეციალურ გამოკვლევას.

განვიხილოთ სხვაობიანი სქემების კრებადობისა და სიზუსტის საკითხი.

ვთქვათ, Γ საზღვრიან G არეში საჭიროა

$$Lu=f(x),\quad x\in G \tag{2}$$

წრფივი განტოლების ამოხსნა

$$lu=\mu(x),\quad x\in\Gamma \tag{3}$$

დამატებითი პირობით, სადაც $f(x)$ და $\mu(x)$ მოცემული ფუნქციებია (ამოცანაში შემავალი მონაცემები), l—წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი. დაუშვათ, რომ ამ ამოცანის ამონახსენი არსებობს და ერთადერთია.

x-ის ცვლილების $G+\Gamma$ არე შევცვალოთ x_i კვანძების დისკრეტულ მნიშვნელობათა სიმრავლით.

ვთქვათ, h არის ბადის კვანძების სიხშირის მახასიათებელი ვექტორული პარამეტრი, ხოლო ω_h— ბადის შიგა კვანძების სიმრავლე, γ -ბა-

დის საზღვრის კვანძების სიმრავლე. (2)—(3) სასაზღვრო ამოცანას შევუსაბამოთ შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანა

$$L_h y_h=\varphi_h, \quad x\in\omega_h; \quad l_h y_h=\chi_h \quad \text{როცა} \quad x\in\gamma_h, \tag{4}$$

სადაც $\varphi_h(x)$ და $\chi_h(x)$ — ცნობილი ბადური ფუნქციებია, ხოლო L_h და l_h ოპერატორები, მოქმედებენ $\overline{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h$-ზე განსაზღვრულ ბადურ ფუნქციებზე. (4)-ის y_h ამონახსენი არის $\overline{\omega}_h$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია. h-ის ცვლილებით მივიღებთ h პარამეტრზე დამოკიდებულ $\{y_h\}$ ამონახსნების სიმრავლეს.

ყველა მიახლოებითი მეთოდის ძირითადი ამოცანაა მოცემული $\varepsilon>0$ სიზუსტით მიიღოს საწყისი (უწყვეტი) ამოცანის ამოხსნა სასრული ბიჯების შედეგად.

ზუსტი და მიახლოებითი ამოცანების ამონახსნების სიახლოვის შესადარებლად განვიხილოთ (4) სხვაობიანი ამოცანის ნაზრდი:

$$z_h=y_h-u_h,$$

რომლის გათვალისწინებით (4)-დან მივიღებთ იგივე ტიპის სასაზღვრო ამოცანას — z_h-ის მიმართ:

$$L_h z_h=\Psi_h, \quad x\in\omega_h, \quad l_h z_h=\nu_h, \quad x\in\gamma_h \tag{5}$$

სადაც

$$\Psi_h=\varphi_h-L_h u_h, \quad \nu_h=\chi_h-l_h u_h.$$

(5)-ის მარჯვენა მხარეებს უწოდებენ (4) სხვაობანი განტოლებით (2) განტოლების აპროქსიმაციის ნაზრდს და შესაბამისად (3) სასაზღვრო პირობის $l_h y_h=\chi_h$ სხვაობანი პირობით აპროქსიმაციის ნაზრდს (2)—(3) ამოცანის ამონახსნთა სიმრავლეზე.

ვიტყვით, რომ (4) ამოცანის ამონახსენი მიისწრაფვის (2) —(3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ((4) სქემა კრებადია), თუ

$$\|z_h\|_{(1_h)}=\|y_h-u_h\|_{(1_h)}\to 0, \quad \text{როცა} \quad |h|\to 0,$$

ანუ

$$\|z_h\|_{(1_h)}=\|\rho(|h|)\|, \quad \text{სადაც} \quad \rho(|h|)\to 0, \quad \text{როცა} \quad |h|\to 0.$$

(4) სხვაობანი სქემა აკრებადია $O(|h|^n)$ სიჩქარით ანუ აქვს სიზუსტის n-ური რიგი (აქვს $O(|h|^n)$ სიზუსტე), თუ საკმარისად მცირე $|h|\leqslant h_0$, სრულდება უტოლობა

$$\|z_h\|_{(1h)}=\|y_h-u_h\|_{(1h)}\leqslant M\,|h|^n,$$

სადაც $M>0$ არის $|h|$ და $n>0$-ზე დამოუკიდებელი მუდმივი.

ამბობენ, რომ (4) სხვაობანი სქემას გააჩნია აპროქსიმაციის n-ური რიგი, თუ

$$\|\Psi_h\|_{(2h)}=O(|h|^n), \quad \|\nu_h\|_{(3h)}=O\ (|h|^n).$$

f_h და $(Lu)_h$-ით აღვნიშნოთ შესაბამისად $f(x)$ და $Lu(x)$ მნიშვნელობები ω_h ბადეზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(f-Lu)_h=0$, მაშინ Ψ_h შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\Psi_h=(\varphi_h-L_hu_h)-(f_h-(Lu)_h)=(\varphi_h-f_h)+((Lu)_h-$$
$$-L_hu_h)=\Psi_h^{(1)}+\Psi_h^{(2)}.$$

ამრიგად, სქემის აპროქსიმაციის Ψ_h ნაზრდი მიიღება მარჯვენა მხარის $\Psi_h^1=\varphi_h-f_h$ აპროქსიმაციის ანზრდისა და დიფერენციალური ოპერატორის $\Psi_h^{(2)}=(Lu)_h-L_hu_h$ აპროქსიმაციის ნაზრდისაგან.

რადგან Ψ_h არის აპროქსიმაციის ნაზრდი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა კლასზე, ამიტომ $\|\Psi_h\|_{(2h)}=(|h|^n)$ პირობა შეიძლება შესრულდეს მაშინაც, როცა $\Psi_h^{(1)}$ და $\Psi_h^{(2)}$ ცალ-ცალკე არა აქვთ აპროქსიმაციის n-ური რიგი.

ბუნებრივია ისმება კითხვა: თუ როგორ გავლენას ახდენს სქემის სიზუსტეზე ამონახსნების აპროქსიმაციის რიგი. $z_h=y_h-u_h$ ნაზრდი არის (5) ამოცანის ამონახსენი Ψ_h(ან ν_h) მარჯვენა მხარით. ამიტომ სქემის სიზუსტისა და აპროქსიმაციის რიგის საკითხი დაიყვანება იმაზე თუ რა დამოკიდებულებაშია სხვაობიანი ამოცანის ამონახსენი მარჯვენა მხარეზე. თუ z_h უწყვეტად (ამასთან თანაბრად h-ის მიმართ) არის დამოკიდებული Ψ_h და ν_h-ზე (სქემა მდგრადია), მაშინ სქემის სიზუსტე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

მდგრადობის ზუსტ განსაზღვრებას განვიხილავთ ქვემოთ.

§ 8. საწყისი და სასაზღვრო პირობების აპროქსიმაცია

როგორც განვიხილეთ სქემის სიზუსტე დამოკიდებულია არა მარტო საწყისი განტოლების აპროქსიმაციაზე, არამედ დამატებითი (საწყისი და სასაზღვრო) პირობების აპროქსიმაციაზედაც.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ საწყისი და სასაზღვროს პირობების აპროქსიმაციის რამდენიმე მაგალითს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. სითბოგამტარობის განტოლებისათვის მესამე სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\leqslant t_0, \ u(x,0)=u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}u(0,t)=\sigma u(0,t)-\mu_1(t), \ u(1,t)=\mu_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

$\omega_{h\tau}$ ბადეზე დავწეროთ ცხადი სქემა

$$y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi, \quad y(x,\ 0) = u_0(x), \quad y(1,t) = \mu_2(t), \tag{2}$$

სადაც $\varphi = \varphi_i^j = f(x_i,\ t_j)$. ამ სქემას აქვს $O(h^2+\tau)$ აპროქსიმაცია.

$x=0$ წერტილში ავაგოთ იმავე რიგის აპროქსიმაცია სასაზღვრო პირობებისათვის. ამ მიზნით განვიხილოთ

$$u_{x,0} = \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(0,\ t)}{\partial x^2} + O(h^2).$$

თუ ვისარგებლებთ სითბოგამტარობის განტოლებით, როცა $x=0$ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u(0,\ t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial t} - f(0,\ t),$$

საიდანაც

$$u_x(0,\ t) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial t} - f(0,\ t)\right) = \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x} + O(h^2),$$

ე. ი. მარცხნივ მდგომი გამოსახულება, $x=0$ წერტილში, ახდენს $\frac{\partial u}{\partial x}$-ის აპროქსიმაციას $O(h^2)$ რიგით.

შევცვალოთ $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}$ გამოსახულება $u_{t,0} = \frac{u(0,\ t+\tau) - u(0,\ t)}{\tau}$ სხვაობიანი წარმოებულით, მივიღებთ სხვაობიან სასაზღვრო პირობას როცა $x=0$:

$$y_{x,0} = 0{,}5hy_{t,0} + \sigma y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0,t). \tag{3}$$

(1) ამოცანის ამონახსნებზე (3)-ს აქვს $O(h^2+\tau^2)$ აპროქსიმაციის რიგი. არაცხადი $y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi$ სქემის შემთხვევაში (3)-ის ნაცვლად უნდა ავიღოთ პირობა

$$\hat{y}_{x,0} = 0{,}5hy_{t,0} + \sigma\hat{y}_0 - \hat{\bar{\mu}}_1, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0,\ t). \tag{4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \tag{5}$$

$$u(0,t) = u_1(t), \quad u(1,t) = u_2(t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x).$$

ბუნებრივია, არსებითი ყურადღება გავამახვილოთ $\frac{\partial u}{\partial t}$ წარმოებულის აპროქსიმაციაზე.

ვთქვათ. x და t-ს მიმართ მოცემულია თანაბარი $\omega_{h\tau}$ ბადე. თუ გამოვიყენებთ უმარტივეს აპროქსიმაციას

$$u_t(x, 0)=\overline{u}_0(x),$$

მაშინ მისი ნაზრდი იქნება $O(\tau)$ რიგის. წარმოვადგინოთ $u_t(x,0)$ შემდეგი სახით

$$u_t(x,0)=\frac{u(x, \tau)-u(x,0)}{\tau}=\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2}+O(\tau^2).$$

ახლა მივმართოთ. საწყის დიფერენციალურ განტოლებას და ვიპოვოთ

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2}+f(x, 0)=Lu_0(x)+f(x,0); \quad Lu_0=\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.$$

რადგან

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2}=\frac{d^2 u_0(x)}{dx^2},$$

ამიტომ

$$u_t\,(x,0)-0,5\tau(Lu_0+f(x,0))=\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}+O(\tau^2).$$

ამრიგად. $y_t(x, 0)=\widetilde{u}_0(x)$. სადაც $\widetilde{u}_0(x)=\overline{u}_0(x)+0,5\tau(Lu_0+f(x, 0))$ ახდენს $\partial u(x, 0)/\partial t=\overline{u}_0(x)$ სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაციას $O(\tau^2)$ რიგით.

$u(x, 0)=u_0(x)$ პირობა და სასაზღვრო პირობა ამ შემთხვევაში აპროქსიმირდება ზუსტად. რაც შეეხება განტოლებას, მისი აპროქსიმაცია შეგვიძლია მოვახდინოთ ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული რომელიმე სქემით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. სითბოგამტარობის განტოლებისათვის სამშრიანი სხვაობიანი სქემა. განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\leq t_0, \tag{6}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \; u(0, t)=u_1(t), \; u(1,t)=u_2(t).$$

სითბოგამტარობის (6) განტოლების ამოსახსნელად ხშირად გამოიყენება ე. წ. სამშრიანი, სხვაობიანი სქემები, რომლებშიაც გამოყენებულია $y^{j-1}(x)$, $y^j(x)$, $y^{j+1}(x)$ ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები სამ t_{j-1}, t_j, t_{j+1} დროით შრეზე.

მაგალითად, $\omega_{h\tau}$ ბადეზე h და τ ბიჯებით განსაზღვრულ სიმეტრიულ სამშრიან სქემას აქვს სახე:

$$\frac{y^{j+1}-y^{j-1}}{2\tau}=\Lambda(\sigma y^{j+1}+(1-2\sigma)y^j+\sigma y^{j-1})+\varphi^j \tag{7}$$

$$y_i^0=u_0(x_i), \quad y_0^j=u_1^j, \quad y^j_N=u^j_2,$$

სადაც $\Lambda y=y_{\bar{x}x}$, $\varphi^j=f(x_i, t_j)$, σ—ნამდვილი პარამეტრია.

რადგანაც, t-ს მიმართ ცენტრალური სხვაობიანი წარმოებული ახდენს $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_j}$-ის აპროქსიმაციას $O(\tau^2)$-ით, ხოლო $\Lambda u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(h^2)$ ამიტომ (7) სქემით ხდება (6) განტოლების აპროქსიმაცია $O(h^2+\tau^2)$ რიგით. ადვილი შესამჩნევია, რომ (7) ამოცანა ბოლომდე განსაზღვრული არ არის. სამშრიანი სქემის გამოსაყენებლად საჭიროა კიდევ ერთი საწყისი პირობა, მაგალითად, $y(x, t)$-ის მნიშვნელობა პირველ შრეზე. ბუნებრივია უნდა მოვითხოვოთ რომ ამ პირობის შემოღებამ შეინარჩუნოს აპროქსიმაციის $O(\tau^2+h^2)$ რიგი.

შეიძლება მივუთითოთ $y(x, \tau)$ მოცემის ორ ხერხზე: ა) პირველ ბიჯს ვანხორციელებთ ორშრიანი სქემით

$$\frac{y^1-y^0}{\tau}=\frac{1}{2}\Lambda(y^1+y^0)+\varphi^0,$$

რომლითაც $y(x,\tau)$ განისაზღვრება $O(\tau^2+h^2)$ სიზუსტით; ბ) ვეძებთ $y(x, \tau)$-ს მნიშვნელობას $y(x, \tau)=u_0(x)+\tau\mu(x)$ სახით და ვარჩევთ μ-ს, ისეთნაირად, რომ $y(x, \tau)-u(x, \tau)$ სხვაობის ნაზრდმა არ გადააჭარბოს $O(\tau^2+h^2)$. საწყისი დიფერენციალური განტოლებიდან

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=Lu_0+f(x,0), \quad Lu_0+\frac{d^2u_0}{dx^2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ

$$u(x, \tau)-u_0(x)=\tau\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}+\frac{\tau^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}+O(\tau^3),$$

ტეილორის ფორმულაში, მივიღებთ $\mu=Lu_0+f(x, 0)$, საიდანაც

$$y(x, \tau)=u_0(x)+\tau(u''(x)+f(x, 0)).$$

§ 4. სხვაობიანი სქემის კორექტულობა

მათემატიკური ფიზიკიდან ცნობილია რომ ამოცანას ეწოდება კორექტული თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია გარკვეული კლასიდან მასში შემავალი მონაცემების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის,

ბ) ამოცანის ამოხსნა უწყვეტად არის დამოკიდებული მასში შემავალ მნიშვნელობებზე.

ანალოგიურად შემოაქვთ სხვაობიანი სქემების კორექტულობის ცნება. ვთქვათ, y_h არის რაიმე სხვაობიანი ამოცანის ამონახსენი, φ_h — მასში შემავალი მნიშვნელობები. ისინი დამოკიდებული არიან h

პარამეტრზე. h-ის ცვლილებით მივიღებთ $\{h\}$ ამონახსნებისა და ამოცანაში შემავალი $\{\varphi_h\}$ მნიშვნელობების მიმდევრობას. ამრიგად, ვიხილავთ არა ერთ არამედ h-ზე დამოკიდებული ამოცანების ოჯახს. კორექტულობის ცნება შემოდის სხვაობიანი სქემების ოჯახისათვის, როცა $|h|\to 0$.

ვიტყვით, რომ სხვაობიანი ამოცანა (სქემა) კორექტულია, თუ ყველა საკმაოდ მცირე $|h|\leqslant h_0$:

1) არსებობს სხვაობიანი ამოცანის y_h ამონახსენი და იგი ერთადერთია, მასში შემავალი რაიმე დასაშვები ოჯახიდან φ_h-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის;

2) y_h ამონახსენი უწყვეტად არის დამოკიდებული φ_h-ზე, ამასთან ეს დამოკიდებულება თანაბარია h-ის მიმართ.

უფრო ზუსტად მეორე პირობა ნიშნავს, რომ არსებობს h-ზე დამოუკიდებელი ისეთი $M>0$ მუდმივი, რომ საკმარისად მცირე $|h|\leqslant h_0$ სრულდება უტოლობა

$$\|\tilde{y}_h-y_h\|_{(1_h)}\leqslant M\|\tilde{\varphi}_h-\varphi_h\|_{(2_h)}.$$

სადაც $\tilde{y}_h$ არის ამოცანაში შემავალი $\tilde{\varphi}_h$ მონაცემების შესაბამისი ამონახსენი.

სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნის უწყვეტად დამოკიდებულების თვისებას მასში შემავალ მონაცემებზე უწოდებენ **ს ქ ე მ ი ს   მ დ გ რ ა დ ო ბ ა ს** ანუ მდგრადობას.

§ 5. მდგრადობა, აპროქსიმაცია და კრებადობა

ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი სასაზღვრო ამოცანა

$$\begin{cases} Lu=f(x), & \text{როცა} \quad x\in G, \\ lu=\mu(x), & \text{როცა} \quad x\in\Gamma. \end{cases} \tag{1}$$

განვიხილოთ მისი შესაბამისი სხვაობანი ამოცანა

$$\begin{cases} L_h u_h=\varphi_h, & \text{როცა} \quad x\in\omega_h, \\ l_h y_h=\tilde{\mu}_h, & \text{როცა} \quad x\in\gamma_h. \end{cases} \tag{2}$$

$z_h=y_h-u_h$ ნაზრდისათვის, სადაც u_h არის ω_h ბადეზე (1) ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობა, სასაზღვრო ამოცანას ექნება სახე:

$$\begin{cases} L_h z_h=\Psi_h, & \text{როცა} \quad x\in\omega_h, \\ l_h z_h=\nu_h, & \text{როცა} \quad x\in\gamma_h, \end{cases} \tag{3}$$

სადაც Ψ_h და ν_h წარმოადგენენ შესაბამისად განტოლებისა და დამატებითი პირობის ნაზრდებს. (3)-ს ნაცვლად ფორმალურად დავწეროთ

$$\tilde{L}_h z_h = \tilde{\Psi}_h.$$

თუ $\tilde{L}_h$ ოპერატორი წრფივია და სხვაობიანი სქემა კორექტული, მაშინ (§4, (1)) გვექნება

$$\|z_h\|_{(1_h)} \leqslant M \|\tilde{\Psi}_h\|_{(2_h)}$$

ანუ

$$\|z_h\|_{(1_h)} \leqslant M(\|\Psi_h\|_{(2_h)} \| + \|\nu_h\|_{(3_h)}), \tag{4}$$

საიდანაც ჩანს, რომ თუ სქემა მდგრადია და ახდენს მოცემული ამოცანის აპროქსიმაციას, მაშინ ის კრებადია (ჩვეულებრივ ამბობენ, რომ „აპროქსიმაციიდან და მდგრადობიდან გამომდინარეობს კრებადობა"), ამასთან სქემის სიზუსტე (კრებადობის სიჩქარე) განისაზღვრება აპროქსიმაციის რიგით.

ამრიგად, სქემების კრებადობისა და სიზუსტის რიგის შესწავლა დაიყვანება აპროქსიმაციის ნაზრდისა და მდგრადობის შესწავლაზე.

(4) შეფასებებს უწოდებენ *აპრიორულს*.

იმისათვის რომ კონკრეტული სქემების მდგრადობისათვის მივიღოთ (4) ტიპის შეფასებები, საჭიროა დამხმარე მათემატიკური აპარატი, კერძოდ: შეჯამების ფორმულები, გრინის სხვაობიანი ფორმულები, ჩალაგების თეორემის სხვაობიანი ანალოგი და სხვ. მათი განხილვა სცილდება საპროგრამო კურსს.

§ 6. დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის

განვიხილოთ უმარტივესი სხვაობიანი სქემა დირიხლეს ამოცანისათვის: ვიპოვოთ $G+\Gamma$ არეში უწყვეტი $u(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

და სასაზღვრო პირობას

$$u|_\Gamma = \mu(x),$$

სადაც, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_I)$, ხოლო G არის p განზომილებიანი სასრული არე Γ საზღვრით.

1. *ლაპლასის ოპერატორის სხვაობიანი აპროქსიმაცია.* პირველ რიგში განვიხილოთ ლაპლასის ოპერატორის სხვაობიანი ანალოგის აგების საკითხი. ვთქვათ,

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1,2. \tag{2}$$

თითოეული L_1u და L_2u ოპერატორისათვის მოვახდინოთ აპროქსიმაცია შესაბამისად სამწერტილიანი Λ_1 და Λ_2 ოპერატორებით:

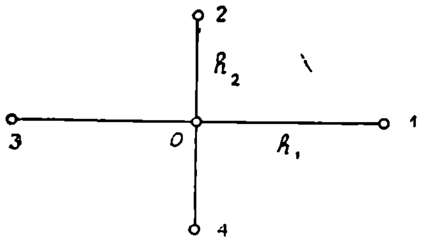
$$L_1v\sim\Lambda_1v=v_{\bar{x}_1x_1}=\frac{1}{h_1^2}(v(x_1+h_1,x_2)-2v(x_1,x_2)+v(x_1-h_1,x_2)),\quad(3)$$

$$L_2v\sim\Lambda_2v=v_{\bar{x}_2x_2}=\frac{1}{h_2^2}(v(x_1,x_2+h_2)-2v(x_1,x_2)+v(x_1,x_2-h_2)),\quad(4)$$

სადაც $\sim$ აღნიშნავს აპროქსიმაციის ნიშანს, ხოლო $h_1>0$ და $h_2>0$— ბიჯებს შესაბამისად x_1 და x_2 მიმართულებით.

Λ_1 ოპერატორი განსაზღვრულია სამწერტილიან რეგულარულ შაბლონზე:

$$(x_1-h_1,x_2),\quad(x_1,x_2),\quad(x_1+h_1,x_2);$$



ნახ. 38

Λ_2-სამ წერტილიან რეგულარულ შაბლონზე:

$$(x_1,x_2-h_2),\ (x_1,x_2),\ (x_1,x_2+h_2).$$

(3) და (4)-ს გამოყენებით ლაპლასის (2) ოპერატორი შევცვალოთ

$$\Lambda v=\Lambda_1v+\Lambda_2v=v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}\quad(5)$$

სხვაობიანი ოპერატორით, რომელიც განსაზღვრულია ხუთწერტილიან შაბლონზე („ჯვარი") (ნახ. 38). 38-ე ნახაზზე 0-ით აღნიშნულია (x_1, x_2) წერტილი, 1-ით — (x_1+h_1, x_2) წერტილი და ა. შ. (3) დ (5) ტოლობებიდან (ნახ. 38) გვაქვს

$$\Lambda v_0=\frac{1}{h_1^2}(v_1-2v_0+v_3)+\frac{1}{h_2^2}(v_2-2v_0+v_4).\quad(6)$$

კერძოდ, როცა $h_1=h_2=h$ (კვადრატულ შაბლონზე), გვექნება

$$\Lambda v_0=\frac{1}{h^2}(v_1+v_2+v_3+v_4-4v_0).\quad(7)$$

გამოვთვალოთ ლაპლასის ოპერატორის აპროქსიმაციის ნაზრდი. რადგან როცა $\alpha=1$ დ $\alpha=2$.

$$\Lambda_\alpha v=\frac{\partial^2v}{\partial x_\alpha^2}+\frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4v}{\partial x_\alpha^4}+O(h_\alpha^4)=L_\alpha v+\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha^2v+O(h_\alpha^4),\quad(8)$$

ამიტომ

$$\Lambda v-\Delta v=\frac{h_1^2}{12}L_1^2v+\frac{h_2^2}{12}L_2^2v+O(h_1^4+h_2^4),$$

საიდანაც

$$\Lambda v-\Delta v=O(|h|^2),\quad |h|^2=h_1^2+h^2_2.$$

(იგულისხმება, რომ $v(x)$ ფუნქციას გააჩნია არანაკლებ მეოთხე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული $x_\alpha-\bar{h}_\alpha \leqslant x_{\alpha'} \leqslant x_\alpha+\bar{h}_\alpha$, $\alpha=1,2, h_\alpha\leqslant\bar{h}_\alpha$ მართკუთხედში მაინც x_α ($\alpha=1,2$) მიმართ). ამრიგად, (5) სხვაობიანი ოპერატორით ხდება ლაპლასის ოპერატორის აპროქსიმაცია რეგულარულ ხუთწერტილიან შაბლონზე მეორე რიგით.

ანალოგიურად აიგება სხვაობიანი აპროქსიმაცია $p(p>2)$-განზომილებიანი

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u,\qquad L_\alpha u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \tag{9}$$

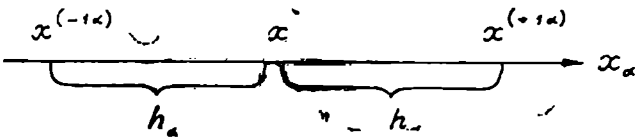
ლაპლასის ოპერატორისათვის. თუ L_α-ს შევცვლით სამწერტილიანი სხვაობიანი ოპერატორით, მივიღებთ

$$\Lambda v=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha v,\quad \Lambda_\alpha v=v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \tag{10}$$

რომელშიაც

$$\Lambda_\alpha v=v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}=\frac{1}{h^2_\alpha}\left(v^{(+1\alpha)}-2v+v^{(-1\alpha)}\right), \tag{11}$$

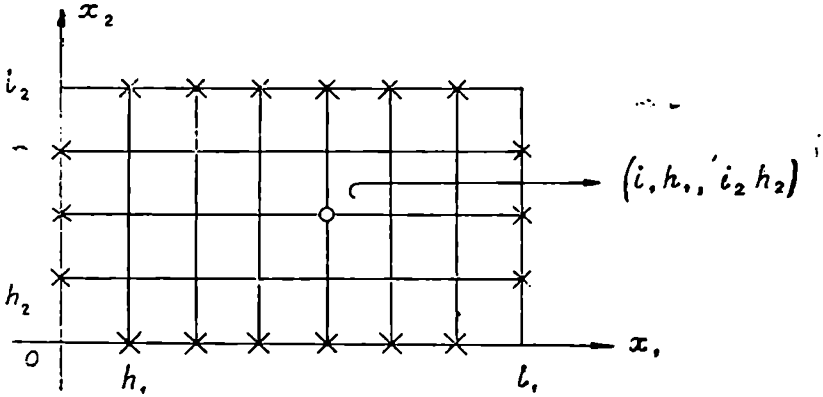
სადაც $v^{(\pm1\alpha)}=v(x^{(\pm1\alpha)})$. აქ $x^{(\pm1\alpha)}$ (ან $x^{(-1)\alpha}$) არის წერტილი, რომელშიც გადადის $x=(x_1,\ x_2,\dots,x_p)$ წერტილი h_α მანძილით x_α ღერძის მიმართ მარჯვენივ (ან მარცხნივ) (ნახ. 39).



ნახ. 39

(10) ოპერატორისათვის შაბლონი შედგება $x^{(\mp1\alpha)}(\alpha=1,2,\dots,p)$ სახის $2p+1$ წერტილისაგან, ხოლო აპროქსიმაციის ნაზრდი იქნება მეორე რიგის.

2. **დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანა მართკუთხედზე.** ვთქვათ, $\bar{G}_0=(0\leqslant x_1\leqslant l_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant l_2)$ მართკუთხედია l_1 და l_2 გვერდებით (ნახ. 40), ხოლო Γ-მისი საზღვარი.



ნახ. 40

$\overline{G}_0 = G_0 + \Gamma$ არეში განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის:

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x = (x_1, \ x_2) \in G_0, \\ u|_\Gamma = \mu(x). \end{cases} \tag{1'}$$

$\overline{G}_0$ — ზე ავაგოთ $\overline{\omega}_h$ ბადე, $h_1 = l_1/N_1$და $h_2 = l_2/N_2$ ბიჯებით, სადაც $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ მთელი რიცხვებია. ამისათვის გავავლოთ წრფეების ორი ოჯახი:

$$x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \quad (i_1 = 0, 1, \ldots, N_1); \quad x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \quad (i_2 = 0, 1, \ldots, \ N_2).$$

მათი გადაკვეთის $x = (i_1 h_1, \ i_2 h_2)$ წერტილებს უწოდებენ კ ვ ა ნ ძ ე ბ ს. თუ $x = (i_1 h_1, \ i_2 h_2)$ მდებარეობენ მართკუთხედის შიგნით, მაშინ მათ შ ი გ ა კ ვ ა ნ ძ ე ბ ს უწოდებენ. ვთქვათ, ω_h არის ყველა შიგა კვანძების სიმრავლე. მათი რიცხვი ტოლი იქნება $(N_1 - 1)$ $(N_2 - 1)$.

კვანძებს, რომლებიც მდებარეობენ მართკუთხედის საზღვარზე გარდა $(0,0)$, $(0, l_2)$, $(l_1, 0)$, (l_1, l_2) კვანძისა, უწოდებენ ს ა ს ა ზ ღ ვ რ ო ს. ისინი ქმნიან $\gamma_h = \{(i_1 h_1, \ i_2 h_2)\}$ სიმრავლეს. ყველა შიგა და სასაზღვრო კვანძების სიმრავლე ქმნის $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ბადეს $\overline{G}_0$ მართკუთხედზე. რადგან თითოეულ $x \in \omega_h$ შიგა კვანძში შეიძლება ავაგოთ ხუთწერტილიანი შაბლონი, ამიტომ ყველა შიგა კვანძში ლაპლასის Δu ოპერატორი შეგვიძლია შევცვალოთ

$$\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}$$

სხვაობიანი ოპერატორით. (1′) განტოლების $f(x)$ მარჯვენა მხარე შეიძლება შევცვალოთ მააპროქსიმირებელი $\varphi(x)$ ფუნქციით ისე, რომ

$$\varphi(x)-f(x)=O(|h|^2), \quad f(x)\in C^{(2)}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია და $\varphi(x)=f(x)$.

(1′) დირიხლეს ამოცანას შევუსაბამოთ სხვაობიანი ამოცანა: ვიპოვოთ $y(x)$ ბადური ფუნქცია, რომელიც შიგა კვანძებში (ω_h-ზე) აკმაყოფილებს

$$\Lambda y=-f(x), \quad \Lambda y=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}, \quad x\in\omega_h \tag{12}$$

განტოლებას და γ_h საზღვარზე ღებულობს მოცემულ $\mu(x)$ მნიშვნელობას

$$y(x)|_\Gamma=\mu(x). \tag{13}$$

როცა $h_1\neq h_2$, მაშინ $\overline{\omega_h}$ $(\overline{G})$ ბადეს უწოდებენ მ ა რ თ კ უ თ ხ ა ს, ხოლო $h_1=h_2=h$ შემთხვევაში—კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ს.

კვადრატულ ბადეზე Λy ოპერატორს ექნება სახე:

$$\Lambda y=\frac{1}{h^2}\left(y^{(+1_1)}+y^{(-1_1)}+y^{(+1_2)}+y^{(-1_2)}-4y\right).$$

ვთქვათ, $\varphi=0$ და ამოვხსნათ $\Lambda y=0$ განტოლება y-ის მიმართ:

$$y=\frac{1}{4}\left(y^{(-1_1)}+y^{(+1_1)}+y^{(-1_2)}+y^{(+1_2)}\right).$$

შაბლონის ცენტრში y-ის მნიშვნელობა ტოლია შაბლონის დანარჩენ წერტილებში y-ის მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულისა.

(N_1-1) (N_2-1) უცნობიანი (12) ალგებრული განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით. (12)—(13) სხვაობიანი სქემის სიზუსტის შესაფასებლად განვიხილოთ $z=y-u$ სხვაობა, სადაც y არის ამ ამოცანის ამონახსენი, ხოლო u წარმოადგენს ზუსტი (1′) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს. ჩავსვათ $y=z+u$ გამოსახულება (1′)-ში, მივიღებთ სასაზღვრო ამოცანას z-ის მიმართ:

$$\begin{cases}\Lambda z=-\Psi, & x\in\omega_h\\ z|_{\Gamma h}=0,\end{cases} \tag{14}$$

სადაც $\Psi=\Lambda u+f$ არის (1′) განტოლებას (12) სქემით აპროქსიმაციის ნაზრდი.

რადგან $Lu+f=0$, ამიტომ

$$\Psi=\Lambda u+f-Lu+Lu=\Lambda u-Lu,$$

ე. ი. $\Psi = \Lambda u - Lu$. (8)-დან გვაქვს:

$$\Psi = \frac{h_1^2}{12}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}} + \frac{h_2^2}{12}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}}, \quad \text{როცა} \quad u \in C^{(4)},$$

სადაც წარმოებულებზე ზემოდან ხაზი აღნიშნავს, რომ არგუმენტის მნიშვნელობები აიღება $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$ და $(x_1, x_2 - h_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$ ინტერვალების შუალედურ წერტილებში

$$\text{თუ} \quad M_4 = \max_{\bar{G}, \alpha} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} \right|, \quad \text{მაშინ} \; |\Psi| \leqslant M_4 \frac{|h|^2}{12}.$$

X თავი

წრფივი დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი

მათემატიკური დაპროგრამება თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის დარგია და შეისწავლის მრავალგანზომილებიანი ექსტრემალური ამოცანების თეორიასა და ამოხსნის რიცხვით მეთოდებს. ეს ამოცანები, როგორც წესი, პირობითი ექსტრემუმის ამოცანებია — უნდა ვიპოვოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმი ან მინიმუმი, როცა ცვლადები აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს (შეზღუდვებს). შეზღუდვები მოიცემა განტოლებებისა და უტოლობების სახით. პირობითი ექსტრემუმის პოვნის ამოცანა წამოიჭრება სახალხო მეურნეობის სხვადასხვა დარგის ამოცანების მათემატიკური მოდელირების დროს, როცა საჭიროა ამა თუ იმ აზრით საუკეთესო გეგმის (პროგრამის) შედგენა. აქედან გამომდინარეობს თვით საგნის სახელწოდებაც.

მათემატიკურ დაპროგრამებაში განსაკუთრებული ადგილი უკავია წრფივ დაპროგრამებას. იგი განიხილავს ისეთ ამოცანებს, რომლებშიაც მიზნის ფუნქცია (ფუნქცია, რომლის ექსტრემუმსაც ვეძებთ) და შეზღუდვებში შემავალი ფუნქციები წრფივია.

დამუშავებულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის მრავალი მეთოდი, რომელთაგან განსაკუთრებით აღსანიშნავია ე. წ. სიმპლექს-მეთოდი (ანუ სიმპლექსური მეთოდი) — უნივერსალური მეთოდი, რომლის საშუალებითაც შეიძლება ეგმ-ზე ამოიხსნას ამოცანა ათასობით ცვლადითა და შეზღუდვით.

კერძო ტიპის სხვადასხვა წრფივი ამოცანებისათვის დამუშავებულია აგრეთვე მრავალი ეფექტური ალგორითმი, მაგალითად, ტრანსპორტის ტიპის ამოცანებისათვის, ქსელური ნაკადების ამოცანებისათვის და სხვ.

§ 1. წრფივი დაპროგრამების ზოგიერთი ამოცანა

1. წარმოების დაგეგმვის ამოცანა. განიხილება საწარმო, რომლის განკარგულებაშია n სახის რესურსი: P_1, $P_2, \dots, P_n$ (რესურსებში იგულისხმება: დაზგა, დანადგარები, მუშახელი, ნედლეული, დროის ფონდი და სხვა). ყოველი რესურსის რაოდენობა შეზღუდულია. ვთქვათ, საწარმოს გააჩნია b_i-რაოდენობის P_i-რესურსი ($i=1,2,\dots,n$). საწარმოს შეუძლია დაამზადოს გარკვეული სახის პროდუქცია m სხვადასხვა ტექნოლოგიური პროცესით. ყოველი j — სახის ტექნოლოგიური ხერხი მოითხოვს i-სახის რესურსის a_{ij} დანახარჯს. ამოცანა გვეკითხება დასაგეგმავ T პერიოდში რა დრო უნდა დავუთმოთ ამა თუ იმ ტექნოლოგიურ პროცესს, რომ გამოშვებული პროდუქციის საერთო რაოდენობა იყოს მაქსიმალური, თუ ცნობილია, რომ j-ური ტექნოლოგიური პროცესი დროის ერთეულში იძლევა c_j რაოდენობის პროდუქციას.

თუ $x_1, x_2, \dots, x_m$-ით ავღნიშნავთ შესაბამისად პირველ, მეორე, და ა. შ. m-ური ტექნოლოგიური პროცესისათვის დათმობილ დროს, მაშინ ამოცანა შეიძლება ჩავწეროთ ცხრილის სახით (ცხრ. 1). რადგან j-ური ტექნოლოგიური პროცესის x_j დროის განმავლობაში გამოყენება იწვევს P_i რესურსის a_{ij} დანახარჯს და ამავე დროს ასეთმა დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს b_i-ს, ამიტომ ყოველი P_i რესურსისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ შეზღუდვა

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{im}x_m\leqslant b_i, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

გარდა ამისა დროის საერთო დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს დასაგეგმი დროის ხანგრძლივობას, ამიტომ

$$x_1+x_2+\dots+x_m\leqslant T. \tag{2}$$

ცხრილი 1

ტექნოლოგიური პროცესი / რესურსები	1	2	...	m	რესურსების რაოდენობა
P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	b_1
P_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	b_2
.			...		
.			...		
.			...		
P_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	b_n
დახარჯული დრო	x_1	x_2	...	x_m	
პროდუქციის რაოდენობა	c_1	c_2	...	c_m	

ბუნებრივია აგრეთვე, რომ

$$x_j \geqslant 0. \tag{3}$$

თუ გამოვთვლით დამზადებული პროდუქციის საერთო რაოდენობას, მივიღებთ

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m. \tag{4}$$

ამის შემდეგ ეს ამოცანა მათემატიკურად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leqslant b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leqslant b_n, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant T, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ \vdots \\ x_m \geqslant 0. \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსენი, რომელიც (4) გამოსახულებას მიანიჭებს უდიდეს მნიშვნელობას.

2. ნ ე დ ლ ე უ ლ ი ს გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა. საწარმო ამზადებს $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ სახის პროდუქციას, რისთვისაც მის განკარგულებაშია $b_1, b_2, \ldots, b_m$ რაოდენობის შესაბამისად $s_1, s_2, \ldots, s_m$ სახის ნედლეული. ყოველი ერთეული Π_j პროდუქცია საწარმოს აძლევს c_j შემოსავალს. ცნობილია, რომ Π_j სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა a_{ij} რაოდენოობის s_i სახის ნედლეული.

ამოცანა გვეკითხება რა რაოდენობით უნდა დავამზადოთ ესა თუ ის ნედლეული, რომ ამ გზით მიღებული საერთო შემოსავალი საწარმოსათვის იყოს რაც შეიძლება მეტი.

ამოცანის პირობა შეიძლება წარმოვადგინოთ მე-2 ცხრილის სახით.

ც ხ რ ი ლ ი 2

ნედლეული	ნედლეულის მარაგი	ს ა წ ა რ მ ო			
		Π_1	Π_2	$\ldots$	Π_n
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
.	.	.	.	$\ldots$	.
.	.	.	.	$\ldots$	.
.	.	.	.	$\ldots$	.
s_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	.	a_{mn}
შემოსავალი		c_1	c_2	..	c_n

თუ დამზადებული Π_j $(j=1,2,\ldots,n)$ პროდუქციის რაოდენობას აღვნიშნავთ x_j-ით, მაშინ დაიხარჯება i-ური სახის ნედლეულის $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ +\ldots a_{in}x_n$ რაოდენობა. ამიტომ გვექნება უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant b_m. \end{cases} \tag{1}$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$x_j\geqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

საერთო შემოსავალი ამ დროს იქნება

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n, \tag{3}$$

ე. ი. ეს ამოცანა მათემატიკურად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ (1) და (2) სისტემის ისეთი ამონახსენი, რომელიც (3) გამოსახულებას მიანიჭებს უდიდეს მნიშვნელობას.

3. დ ი ე ტ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა. ვთქვათ, ჩვენ განკარგულებაშია Π_1, $\Pi_2,\ldots,\Pi_n$ სახის პროდუქტი. ყოველი მათგანი შეიცავს B_1 $B_2,\ldots$, B_m ნივთიერებას გარკვეული რაოდენობით. კერძოდ a_{ij} $(i= =1,2,\ldots,m;$ $j=1,2,\ldots,n)$ იყოს j-ური პროდუქტის ერთ ერთეულში i-ური ნივთიერების რაოდენობა. ცნობილია i-ური ნივთიერების ის მინიმალური რაოდენობა b_1, $b_2,\ldots,b_m$, რომელიც უნდა მიიღოს ცოცხალმა ორგანიზმმა ნორმალური განვითარებისათვის.

ც ხ რ ი ლ ი 3

პროდუქტები / ქიმიური ნივთიერებები	პროდუქტებში ქიმიურ ნივთიერებათა შემცველობა			
	Π_1	Π_2		Π_n
b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
პროდუქციის რაოდენობა	x_1	x_2	...	x_n
პროდუქც. ერთეულის ფასი	c_1	c_2	...	c_n

ცნობილია, აგრეთვე Π_j-ური პროდუქტის ერთი ერთეულის ღირებულება c_j. ამოცანა მდგომარეობს ისეთი მენიუს შედგენაში, რომელიც ყველა საჭირო ნივთიერებას შეიცავს და დანახარჯი იქნება მი-

ნიმალური. თუ x_j-ით აღვნიშნავთ Π_j-ური პროდუქციის რაოდენობას, რომელსაც მენიუ ითვალისწინებს, მაშინ ამოცანის პირობა შეიძლება ჩავწეროთ ცხრილში (ცხრ. 3).

მათემატიკურად დიეტის ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\geqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\geqslant b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\geqslant b_m, \\ x_1\geqslant 0, \\ \quad\vdots \\ x_n\geqslant 0. \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსენი, რომელიც

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

წრფივ ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

4. ტ რ ა ნ ს პ ო რ ტ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა. ერთი და იმავე სახის პროდუქცია მოთავსებულია A_1, $A_2,\dots,A_n$ გაგზავნის პუნქტებში შესაბამისად a_1, $a_2,\dots,a_n$ რაოდენობით. აღნიშნულ პროდუქციაზე მოთხოვნაა B_1, $B_2,\dots B_m$ მიმღებ პუნქტებში შესაბამისად b_1, $b_2,\dots,b_m$ რაოდენობით. იგულისხმება, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$$

(ე. ი. მოთხოვნილებები და არსებული ტოლია).

A_i-ური გასაგზავნი პუნქტიდან B_j მიმღებ პუნქტში ერთი ერთეული პროდუქციის გადატანით მიღებული დანახარჯი აღვნიშნოთ c_{ij} სიმბოლოთი, სადაც $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$.

ამოცანის პირობა მოცემულია მე-4 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 4

მიმღები პუნქტი / გაგზავნის პუნქტი	B_1	B_2		B_m	მარაგი
A_1 A_2 ... A_n	c_{11} c_{21} ... c_{n1}	c_{12} c_{22} ... c_{n2}	... ...	c_{1m} c_{2m} ... c_{nm}	a_1 a_2 ... a_n
მოთხოვნები	b_1	b_2	...	b_m	$\sum\limits_i a_i=\sum\limits_j b_j$

მოგვეთხოვება შევადგინოთ ტვირთის გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომელიც გადაზიდვასთან დაკავშირებულ საერთო ხარჯებს მინიმუმამდე შეამცირებს.

თუ x_{ij}-ით აღვნიშნავთ A_i პუნქტიდან B_j-პუნქტში გადაზიდული პროდუქციის რაოდენობას, მაშინ ცხადია უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1m}=a_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n1}+x_{n2}+\dots+x_{nm}=a_n, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\dots+x_{n1}=b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{1m}+x_{2m}+\dots+x_{nm}=b_m. \end{cases} \tag{2}$$

(1) სისტემა ნიშნავს რომ ყოველი A_i პუნქტიდან გავიტანოთ მთლიანად იქ მოთავსებული ტვირთი, ხოლო (2) სისტემა ნიშნავს რომ ყოველ B_j პუნქტში მივიტანოთ იმდენი, რამდენიც მას ესაჭიროება. ამ შემთხვევაში საერთო დანახარჯი იქნება:

$$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\dots+c_{nm}x_{nm}. \tag{3}$$

ამოცანის პირობის თანახმად საჭიროა (1) და (2) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი x_{ij} ამონახსნების პოვნა, რომელიც (3) გამოსახულებას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

§ 2. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა

ჩვენ განვიხილეთ ამოცანები, რომლებიც შინაარსით ერთმანეთისაგან საკმაოდ განსხვავებულია, მაგრამ მათი მათემატიკური მოდელი თითქმის ერთი და იგივეა. კერძოდ, უცნობებს მოეთხოვებათ რომ ისინი იყვნენ არაუარყოფითები და დააკმაყოფილონ რაიმე განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემები. შევნიშნოთ, რომ უტოლობების დაყვანა განტოლებებზე ადვილი შესაძლებელია თუ შემოვიღებთ დამატებით უცნობებს და მათ დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ უტოლობის ერთ-ერთ მხარეს. გარდა ამისა, უცნობებს მოეთხოვებოდათ, რომ მათ რაიმე წრფივი ფუნქციისათვის მიენიჭებიათ მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა. აქაც შევნიშნოთ, რომ მაქსიმუმის მოთხოვნა ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ მინიმუმის მოთხოვნაზე, თუ მას გავამრავლებთ მინუს ერთზე. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია მათემატიკუ-

რად დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოცემულია n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

და ამავე უცნობების წრფივი ფორმა

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{2}$$

(როგორც წესი $n>m$, ამიტომ (1) სისტემას აქვს უამრავი ამონახსენი). საჭიროა ვიპოვოთ (1) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსენი, რომელიც (2) ფორმას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ასეთი სახით დასმულ ამოცანას ეწოდება **წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა.**

(1) სისტემას ეწოდება **შეზღუდვათა სისტემა**, ხოლო (2) წრფივ ფორმას — **მიზნის ფუნქცია.**

(1) სისტემის ყველა ამონახსენს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$x_i\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

ეწოდება **დასაშვები** ამონახსენი. ისეთ დასაშვებ ამონახსენს, რომელიც (2) წრფივ ფორმას ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას, ეწოდება **ოპტიმალური** ამონახსენი.

წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: ვიპოვოთ

$$F=CX$$

ფუნქციის მინიმუმი თუ X არის

$$\begin{cases} AX=B \\ X\geqslant O \end{cases}$$

სისტემის ამონახსენი, სადაც

$C=(c_1c_2,\ldots,c_n)$ მატრიცა-სტრიქონია; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ და $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

მატრიცა-სვეტებია, ხოლო

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

არის (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორული სახით:

ვიპოვოთ $F=\vec{C}\,\vec{X}$ ფუნქციის მინიმუმი თუ $\vec{X}$ არის

$$\begin{cases} x_1\vec{P}_1+x_2\vec{P}_2+\ldots+x_n\vec{P}_n=\vec{P}_0 \\ \vec{X}\geqslant O \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნები, სადაც

$$\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\quad \vec{P}_j=\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{pmatrix},\quad j=1,\ 2,\ldots n;$$

$$\vec{P}_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\quad \vec{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ვექტორებია.

თ ე ო რ ე მ ა 1. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ამოზნექილია.

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ორი დასაშვები ამონახსნის წრფივი ამოზნექილი კომბინაცია აგრეთვე წარმოადგენს ამონახსნს. ვთქვათ X_1 და X_2 არიან ამოცანის დასაშვები ამონახსნები, ე. ი.

$$\begin{cases} AX_1=B \\ X_1\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} AX_2=B \\ X_2\geqslant 0. \end{cases}$$

განვიხილოთ X_1 და X_2-ის წრფივი ამოზნექილი კომბინაცია

$$X=tX_1+(1-t)X_2,\qquad \text{სადაც}\ \ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

მაშინ

$$AX=A[tX_1+(1-t)X_2]=tAX_1+(1-t)AX_2=tB+(1-t)B=$$
$$=tB+B-tB=B,$$

ე. ი.

$$AX=B.$$

მაშასადამე, X-იც წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსნს. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე განისაზღვრება (1) სისტემაში შემავალი ჰიპერსიბრტყეებით, რომელთა რაოდენობა სასრულია.

დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი:

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ წრფივი დაპროგრამების ძირითად ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსენი, მაშინ მიზნის ფუნქცია ოპტიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის რომელიმე წვეროზე.

ახლა განვიხილოთ საკითხი როდის აქვს ამონახსენი შეზღუდვათა (1) სისტემას. ამისათვის საჭიროა სისტემის მატრიცის r რანგი ტოლი იყოს გაფართოებული მატრიცის რანგის (კრონეკერ-კაპელის თეორემა). იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს რანგი ტოლია უცნობების რაოდენობის (n-ის), მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი და რაიმე ოპტიმალურ ამონახსენზე ლაპარაკი ზედმეტია. თუ ეს ამონახსენი იქნება დასაშვები, მაშინ ის ოპტიმალურიც იქნება. ამიტომ წრფივი დაპროგრამების ამოცანისათვის საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა $r<n$. იმ r უცნობს, რომლის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტიც განსხვავებულია ნულისაგან, ვუწოდოთ ს ა ბ ა ზ ი ს ო უ ც ნ ო ბ ე ბ ი, ხოლო დანარჩენ $k=n-r$ უცნობებს — თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი უ ც ნ ო ბ ე ბ ი. შემდეგისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩავთვალოთ, რომ $x_1, x_2, \dots, x_k$ არიან თავისუფალი უცნობები, ხოლო $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ საბაზისო უცნობები

ცნობილია (იხ. [16] თ. 1. §3), რომ საბაზისო უცნობები შეიძლება გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით.

ვთქვათ, ასეთი გამოსახვის შემდეგ (1) სისტემიდან მივიღეთ

$$\begin{cases} x_{k+1}=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1k}x_k+\beta_1, \\ x_{k+2}=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2k}x_k+\beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\alpha_{r1}x_1+\alpha_{r2}x_2+\dots+\alpha_{r}x_k+\beta_r. \end{cases} \tag{3}$$

თუ (3)-ს შევიტანთ (2)-ში, მაშინ წრფივი ფორმაც შეიძლება გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით. დავუშვათ, რომ მან მიიღო შემდეგი სახე:

$$F=\gamma_0+\gamma_1x_1+\dots\gamma_kx_k, \tag{4}$$

მაშინ წრფივი დაპროგრამების (1), (2) ამოცანის ნაცვლად, ჩვენ შეგვიძლია დავსვათ (3), (4) ამოცანა. იმის გათვალისწინებით, რომ ამონახსნები დასაშვებიც იყოს, საჭიროა შესრულდეს n უტოლობა k უცნობის მიმართ:

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0, \\ \quad\vdots \\ x_k\geqslant 0, \\ \quad\vdots \\ \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1k}+\beta_1\geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r1}x_1+\alpha_{r}x_2+\dots+\alpha_{rk}x_k+\beta_k\geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

ცხადია, რომ (3) სისტემის ყველა დასაშვებ ამონახსენს შეესაბამება (5) უტოლობის ამონახსენი და პირიქით, თუ ავიღებთ (5)-ის რაიმე $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots$, $x^{(0)}_k$ ამონახსენს და ვიპოვით (3) სისტემით:

$$x^{(0)}_{k+l}=\alpha_{l1}x_1^{(0)}+\alpha_{l2}x_2^{(0)}+\ldots+\alpha_{lk}x_k^{(0)}+\beta_l; \quad l=1,2,\ldots n-k$$

ამონახსნებს, იგი დასაშვებიც იქნება, ე. ი. იქნება (1) სისტემის დასაშვები ამონახსენიც,

§ 3. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის ამონახსნები ქმნიან ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც შემოსაზღვრულია ჰიპერსიბრტყეებით. იმ შემთხვევაში როცა შესაძლებელია ორი ცვლადით გამოვსახოთ ეს შეზღუდვები, გეომეტრიული წარმოდგენა სიბრტყეზე კარგი საშუალება იქნება თვალსაჩინოებისათვს. დავსვათ ფორმალურად კონკრეტული ამოცანა და ამოვხსნათ იგი გეომეტრიულად.

ვთქვათ, ოთხი სახის ნედლეულით შეიძლება დავამზადოთ ორი სახის პროდუქცია. დანახარჯები, შემოსავალი და ნედლეულის რაოდენობები მოცემულია ცხრილით (ცხრ. 1)

ცხრილი 1

ნედლეული	მარაგი	პროდუქცია	
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	25	0	3
S_4	18	3	0
შემოსავალი		7	5

ცხრილი ასე წაიკითხება: Π_1 პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა S_1 სახის ნედლეულის ორი ერთეული; S_2-სახის ნედლეულის 2 ერთეული; S_3 არ არის საჭირო, ხოლო S_4 ნედლეულის 3 ერთეულია საჭირო.

Π_2 პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა 3, 1, 3,0 რაოდენობის შესაბამისად S_1, S_2, S_3და S_3 ნედლეული. Π_1 პროდუქციის ერთი ერთეული იძლევა 7 ერთეულ შემოსავალს, Π_1-კი 5-ერთეულს. გვეკითხებიან Π_1 და Π_2 პროდუქციის რამდენი ერთეული უნდა დავამზადოთ, რომ მივიღოთ მაქსიმალური შემოსავალი.

აღვნიშნოთ x_1 და x_2-ით შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის რაოდენობა. მაშინ შეზღუდვათა სისტემა ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 19, & S_1 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 2x_1+x_2\leqslant 13, & S_2 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 3x_2\leqslant 15, & S_3 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 3x_1\leqslant 18 & S_4 \text{ ნედლეულისათვის} \end{cases} \tag{1}$$

ხოლო შემოსავალი იქნება:

$$F=7x_1+5x_2. \tag{2}$$

შემოვიღოთ x_3, x_4, x_5, x_6 დამხმარე უცნობები, რომელთა საშუალებით შეზღუდვათა (1) სისტემა ჩაიწერება დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის სახით: საჭიროა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=19, \\ 2x_1+x_2+x_4=13, \\ 3x_2+x_5=15, \\ 3x_1+x_6=18. \end{cases} \tag{3}$$

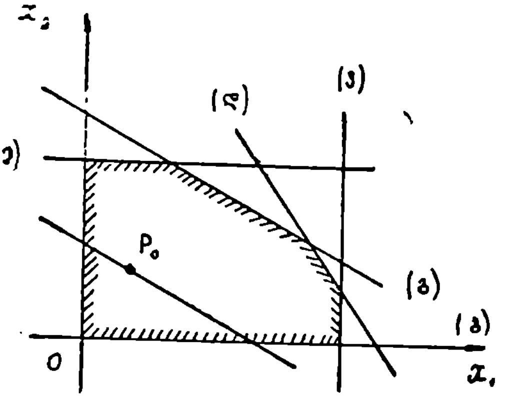
სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნები, რომლებიც $F=-7x_1-5x_2$ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. შევადგინოთ სისტემის მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

მისი რანგი $r=4$ (კერძოდ, ბოლო ოთხი სვეტით შედგენილი დეტერმინანტიგანსხვავებულია ნულისაგან). ამიტომ საბაზისო უცნობებად ჩავთვალოთ x_3, x_4, x_5 და x_6 ხოლო თავისუფალ უცნობებად x_1 და x_2. თუ მოვითხოვთ ყველა ცვლადის არაუარყოფითობას, მივიღებთ შეზღუდვათა სისტემას:

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0, \\ 19-2x_1-3x_2\geqslant 0, \\ 13-2x_1-x_2\geqslant 0, \\ 15-3x_2\geqslant 0, \\ 18-3x_1\geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

რაც შეეხება მიზნის ფუნქციას, ის თავიდანვე გამოსახული იყო თავისუფალი უცნობებით.



ნახ. 41.

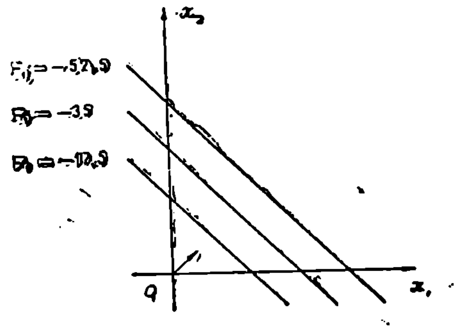
x_1Ox_2 სიბრტყეზე ავაგოთ (4) სისტემით განსაზღვრული არე, რისთვისაც პირველ რიგში ავაგოთ მასში შემავალი უტოლობების შესაბამისი წრფეები (ნახ. 41)

$$\begin{cases} x_1=0, & (ა)\\ x_2=0, & (ბ)\\ 19-2x_1-3x_2=0, & (გ)\\ 13-2x_1-x_2=0, & (დ)\\ 15-3x_2=0, & (ე)\\ 18-3x_1=0\cdot & (3) \end{cases}$$

დაშტრიხული ნაწილი იქნება დასაშვები ამონახსნების სიმრავლე.

ახლა ვნახოთ რას წარმოადგენს $F_1=-7x_1-5x_2$ ტოლობით განსაზღვრული წერტილების სიმრავლე. როგორც ცნობილია სხვადასხვა F_1-ისათვის ისინი იქნებიან პარალელური წრფეები. 42-ე ნახაზზე მოცემულია $F_1=-17{,}5$; $F_1=-35$ და $F_1=-52{,}5$-ის შესაბამისი წრფეები. ნახაზზე ისარი მიუთითებს F_1-ის კლებადობის დროს წრფის გადაადგილების მიმართულებას. ამიტომ აგებენ F_1-ის რაიმე მნიშვნელობისათვის წრფეს, ისე, რომ ის გადიოდეს დასაშვები ამონახსნების რომელიმე წერტილზე (ვთქვათ, P_0-ზე ნახ. 41) და შემდეგ იგი გადააქვთ პარალელურად კლებადობის მიმართულებით, მანამ, სანამ არ შეეხება უკიდურეს წერტილს, დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან.

F_1-ის კიდევ ოდნავ შემცირება გამოიწვევს იმას, რომ დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან აღარ მოიძებნება ერთი ისეთი წერტილიც კი, რომელზეც გაივლის მიზნის ფუნქცია. ასეთი დასაშვები ამონახსნის შესაბამისი წერტილია M (5, 3). ეს იმას ნიშნავს, რომ ოპტიმალური ამონახსენი იქნება $x_1=5$ და $x_2=3$ და მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა



ნახ. 42

$F_1=-7\cdot5-5\cdot3=50$, ე. ი. $F=50$, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებული ნედლეულის გამოყენებით შეიძლება დავამზადოთ Π_1 პროდუქციის 5 ერთეული და Π_2 პროდუქციის 3 ერთეული, რაც მოგვცემს უდიდეს შემოსავალს (50 ერთეულს).

§ 4. სიმპლექს-მეთოდის იდეა

ჩვენ ზემოთ გეომეტრიული მეთოდით ამოვხსენით წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა. ამ მეთოდით ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როდესაც თავისუფალი უცნობების რაოდენობა $k=2$. სხვა შემთხვევაში ამოცანის გრაფიკული ამოხსნა შეუძლებელია. ამიტომ აუცილებელია შევისწავლოთ ამოცანის ამოხსნის ანალიზური მეთოდი. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს წარმოადგენს ე. წ. სიმპლექს-მეთოდი, ანუ გეგმის თანდათანობით გაუმჯობესების მეთოდი.

სიმპლექსური მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან იღებენ რაიმე ამონახსნს და გარკვეული გარდაქმნების გამოყენებით გადადიან ახალ ამონახსნზე ისე, რომ ახალი ამონახსნის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლები იქნება წინა ამონახსენის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაზე. ასეთი იტერაციების სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით მიიღება ოპტიმალური ამონახსენი.

განსაზღვრება. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის ისეთ დასაშვებ ამონახსენს, რომელიც შეესაბამება თავისუფალი უცნობების ნულოვან მნიშვნელობებს ეწოდება საბაზისო ამონახსენი.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი

თეორემა. თუ მოცემულია წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა, რომელსაც გააჩნია ოპტიმალური ამონახსენი, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ოპტიმალური საბაზისო ამონახსენი.

სიმპლექსური მეთოდის გამოყენებით ხდება ამონახსნებიდან ოპტიმალური ამონახსენის პოვნა.

ახლა, აღნიშნული მეთოდით, ამოვხსნათ წინა პარაგრაფში გეომეტრიული მეთოდით ამოხსნილი ამოცანა:

შევადგინოთ შეზღუდვათა სისტემა

$$\left\{\begin{aligned} x_3&=19-2x_1-3x_2\\ x_4&=13-2x_1-x_2\\ x_5&=15-3x_2\\ x_6&=18-3x_1\end{aligned}\right. \tag{1}$$

და მიზნის ფუნქცია

$$F_1=-7x_1-5x_2. \tag{2}$$

აქ თავისუფალ უცნობებად აღებულია x_1 და x_2, მაშინ საბაზისო ამონახსენი იქნება:

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=19,\ x_4=13,\ x_5=15,\ x_6=18.$$

მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება $F_1=0$. (2) გამოსახულებაში ორივე თავისუფალი უცნობი შედის უარყოფითი კოეფიციენტით, ამიტომ ნებისმიერი მათგანის გაზრდა გამოიწვევს წრფივი ფორმის შემცირებას (შევნიშნოთ, რომ არც ერთის შემცირება არ შეგვიძლია რადგან მათ უკვე აქვთ მიღებული უმცირესი მნიშვნელობა). ავიღოთ და გავზარდოთ მაგალითად, x_2 ($x_1=0$ დავტოვოთ უცვლელად).

x_2-ის გაზრდა ჩვენ გვაწყობს უსასრულოდ (მიზნის ფუნქციაც შემცირდება უსასრულოდ), მაგრამ (1) სისტემიდან ჩანს, რომ ეს გამოიწვევს საბაზისო უცნობებისათვის უარყოფითი მნიშვნელობების მიღებას, რაც არ შეიძლება რადგან ამონახსენი აღარ იქნება დასაშვები. ამიტომ x_2-ს მივცეთ ისეთი უდიდესი მნიშვნელობა, რომ ერთ-ერთი საბაზისო უცნობი გახდეს ნულის ტოლი და სხვები დარჩნენ კვლავ დადებითი. ასეთი მნიშვნელობაა $x_2=5$, მაშინ x_5 გახდება ნულის ტოლი.

ავირჩიოთ ახლა თავისუფალი უცნობების ახალი x_1 და x_5 წყვილი, მაშინ საბაზისო უცნობები იქნებიან x_2, x_3, x_4 და x_6. გამოვსახოთ საბაზისო უცნობები და წრფივი ფორმა ახალი თავისუფალი უცნობებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_2=5-\dfrac{1}{3}x_5 \\ x_3=4-2x_1+x_5 \\ x_4=8-2x_1+\dfrac{1}{3}x_5 \\ x_6=18-3x_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$F_1=-25-7x_1+\frac{5}{3}x_5. \tag{4}$$

საბაზისო ამონახსენი ამ შემთხვევაში იქნება:

$$x_1=0,\ x_5=0,\ x_2=5,\ x_3=4,\ x_4=8,\ x_6=18,$$

ხოლო მიზნის ფუნქცია

$$F_1=-25.$$

(4) გამოსახულებაში x_1 უცნობი შედის უარყოფითი ნიშნით, ამიტომ მისი გაზრდა გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის შემცირებას.

გავზარდოთ x_1-ის მნიშვნელობა ორამდე. როცა $x_1=2$ ($x_5=0$), მაშინ (3) სისტემის მეორე ტოლობის მარჯვენა მხარე გაუტოლდება ნულს ($x_3=0$), ხოლო სხვა უცნობები დარჩებიან ისევ დადებითი. x_1-ის კიდევ უფრო გაზრდა გამოიწვევდა მიზნის ფუნქციის კიდევ უფრო შემცირებას, მაგრამ x_3 გახდებოდა უარყოფითი და ამონახსენი აღარ იქნებოდა დასაშვები.

ამიტომ უნდა ავიღოთ თავისუფალი უცნობების x_3 და x_5 წყვილი. გამოვსახოთ ამ თავისუფალი უცნობებით სხვა უცნობები და მიზნის ფუნქცია, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1=2-\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_5 \\ x_2=5-\dfrac{1}{3}x_5 \\ x_4=4+x_3-\dfrac{2}{3}x_5 \\ x_6=12+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{2}x_5 \end{cases} \tag{5}$$

$$F_1=-39+\frac{7}{2}x_3-\frac{11}{6}x_5. \tag{6}$$

ამ შემთხვევაში საბაზისო ამონახსენი იქნება:

$$x_3=0,\ x_5=0,\ x_1=2,\ x_2=5,\ x_4=4,\ x_6=12,$$

ხოლო მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა

$$F_1=-39.$$

(6) გამოსახულებაში x_5 უცნობი შედის უარყოფითი კოეფიციენტით, ამიტომ მისი გაზრდით მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდება. შევნიშნოთ, რომ როცა $x_5=6(x_3=0)$, მაშინ (5) სისტემის მესამე ტოლობის მარჯვენა მხარე გაუტოლდება ნულს ($x_4=0$), ხოლო სხვა უცნობები დარჩებიან დადებითი. ცხადია, რომ x_5-ის 6-ზე მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება უარყოფითი x_4 და ამიტომ ამონახსენი აღარ იქნება დასაშვები.

ამრიგად, თუ გადავალთ თავისუფალი უცნობების ახალ x_3, x_4 წყვილ-

ზე და მათი საშუალებით გამოვსახავთ სხვა უცნობებს და მიზნის ფუნქციას, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1=5+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ x_2=3-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 \\ x_5=6+\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4 \\ x_6=3-\frac{3}{4}x_3+\frac{9}{4}x_4, \end{cases}$$

$$F_1=-50+\frac{3}{4}x_3+\frac{11}{4}x_4. \tag{7}$$

თავისუფალი უცნობების ასეთი შერჩევა გვაძლევს შემდეგ საბაზისო ამონახსენს:

$$x_1=5,\quad x_2=3,\quad x_3=0,\quad x_4=0,\quad x_5=6,\quad x_6=3.$$

მიზნის ფუნქცია $F_1=-50$.

(7) ტოლობით განსაზღვრული მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაში ყველა უცნობი შედის დადებითი კოეფიციენტით. ამიტომ ნებისმიერი მათგანის ვაზრდა (შემცირება არ შეიძლება) გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის გაზრდას. მიღებული საბაზისო ამონახსენი იქნება ოპტიმალური და წრფივი ფორმის მინიმალური მნიშვნელობა $F_{\min}=-50$. მივიღეთ იგივე ამონახსენი რაც გრაფიკული მეთოდით ამოხსნის შემთხვევაში.

§ 5. სიმპლექს-მეთოდის ალგებრა

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა და შევისწავლოთ შეზღუდვათა სისტემისა და მიზნის ფუნქციის ალგებრულ გარდაქმნათა კანონები ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნის შემთხვევაში.

ვთქვათ, შეზღუდვათა სისტემასა და მიზნის ფუნქციას აქვთ სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{2}$$

დავუშვათ, რომ (1) სისტემის რანგი $r<n$. შეგვიძლია უცნობთა ისეთი დანომვრა, რომ თავისუფალ უცნობებად აღმოჩნდეს პირველი k უც-

ნობი: x_1, $x_2,\ldots,x_k$ (მათი რიცხვია $k=n-r$). ამ შემთხვევაში (1) და (2) გამოსახულებები მიიღებენ სახე:

$$\begin{cases} x_{k+1}=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1k}x_k+\beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l}=a'_{l1}x_1+a'_{l2}x_2+\ldots+a'_{lk}x_k+\beta_l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=a'_{r1}x_1+a''_{r2}x_2+\ldots+a'_{rk}x_k+\beta_r \end{cases} \tag{3}$$

$$F=\gamma_0+\gamma'_1x_1+\ldots+\gamma'_kx_k. \tag{4}$$

თავისუფალ უცნობთა ასეთი შერჩევის შესაბამისი საბაზისო ამონახსენია:

$$x_1=0,\quad x_2=0,\ldots,\quad x_k=0,\quad x_{k+1}=\beta_1,\ldots,x_n=\beta_r. \tag{5}$$

ვთქვათ, (5) ამონახსენი დასაშვებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_r$ არაუარყოფითი რიცხვებია. ამ ამონახსენის შესაბამისი ფორმა $F=\gamma_0$.

ვაჩვენოთ, როგორ უნდა გადავიდეთ (5) დასაშვები საბაზისო ამონახსენიდან სხვა დასაშვებ საბაზისო ამონახსენზე ისე, რომ F ფორმამ მიიღოს γ_0-ზე ნაკლები მნიშვნელობა. (3) და (4) ფორმულები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x_{k+1}=\beta_1-(-a_{11}'x_1-\ldots-a'_{1k}x_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l}=\beta_l-(-a'_{l1}x_1-\ldots-a'_{lk}x_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\beta_r-(-a'_1x_1-\ldots-a'_kx_k),, \end{cases} \tag{3}$$

$$F=\gamma_0-(-\gamma'_1x_1-\ldots-\gamma'_kx_k). \tag{4}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$-a'_{ij}=\alpha_{ij};\quad -\gamma_i'=\gamma_j\quad (i=1,2,\ldots,r;\quad j=1,2,\ldots,k),$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_{k+1}=\beta_1-(\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1k}x_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l}=\beta_l-(\alpha_{l1}x_1+\ldots+\alpha_{lk}x_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+i}=\beta_i-(\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{ik}x_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\beta_r-(\alpha_{r1}x_1+\ldots+\alpha_{rk}x_k), \end{cases} \tag{6}$$

$$F=\gamma_0-(\gamma_1x_1+\ldots+\gamma_kx_k). \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ ყველა შემთხვევაში, სიმპლექს-მეთოდის გამოყენების დროს, შეზღუდვათა სისტემა და წრფივი ფორმა უნდა ჩავწეროთ (6) — (7) ფორმით.

შევადგინოთ (6) და (7) ფორმულების კოეფიციენტებისაგან ცხრილი და მას ვუწოდოთ თავისუფალ უცნობთა მოცემული შერჩევის შესაბამისი სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 1).

ცხრილი 1

თავისუფალი უცნობები / საბაზისო უცნობები		x_1	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k
x_{k+1}	β_1	α_{11}	$\cdots$	α_{1s}	$\cdots$	α_{1j}	$\cdots$	α_{1k}
$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$
x_{k+l}	β_l	α_{l1}	$\cdots$	α_{ls}	$\cdots$	α_{lj}	$\cdot\cdot$	α_{lk}
$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot$
x_{k+i}	β_i	α_{i1}	$\cdots$	α_{is}	$\cdots$	α_{ij}	$\cdots$	α_{ik}
$\cdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$
x_n	β_r	α_{r1}	$\cdots$	α_{rs}	$\cdots$	α_{rj}	$\cdots$	α_{rk}
E	γ_0	γ_1	$\cdots$	γ_s	$\cdots$	γ_j	$\cdots$	γ_k

განვიხილოთ ის თავისუფალი უცნობები, რომლებიც F ფორმის გამოსახულებაში შედიან დადებითი γ_j კოეფიციენტით და ამ უცნობებიდან განვიხილოთ რომელიმე ერთი, მაგალითად x_j (გარკვეულობისათვის მიღებულია. ავიღოთ ისეთი თავისუფალი x_j უცნობი, რომლის γ_j კოეფიციენტიც უმცირესი დადებითი რიცხვია, მაგრამ ეს პირობა არ არის აუცილებელი). თუ ყველა თავისუფალი უცნობისათვის შევინარჩუნებთ ნულოვან მნიშვნელობებს, გარდა x_j უცნობისა, მაშინ ამ უკანასკნელის გაზრდა გამოიწვევს F ფორმის შემცირებას. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ x_j-ის გაზრდა შესაძლებელია მანამდესანამ $x_{k+1}, x_{k+2},\ldots,x_n$ საბაზისო უცნობებიდან რომელიმე პირველად არ გახდება ნულის ტოლი. მაგრამ როდის შეიძლება მოხდეს ეს? პასუხისათვის მივმართოთ (6) სისტემას. თუ მასში ყველა თავისუფალი უცნობი ნულის ტოლია, გარდა x_j-სა, მაშინ მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k+1}=\beta_1-\alpha_{1j}x_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{k+l}=\beta_l-\alpha_{lj}x_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n=\beta_r-\alpha_{lj}x_j. \end{array}\right. \tag{8}$$

თუ $\alpha_{lj}\leqslant 0$, მაშინ x_j-ის გაზრდა გამოიწვევს x_{k+l}-ის გაზრდას. მაშასადამე, x_{k+l} საბაზისო უცნობი ნულს არ გაუტოლდება როგორც უნდა გავზარდოთ x_j. ამიტომ, როცა $\alpha_{lj}\leqslant 0$, შეგვიძლია x_{k+l} საბაზისო უცნობებზე ყურადღება არ შევაჩეროთ.

ახლა განვიხილოთ მხოლოდ ის x_{k+l} საბაზისო უცნობები, რომელთათვისაც $\alpha_{ij}>0$. (8) სისტემიდან ცხადია, რომ x_{k+l} საბაზისო უცნობი გახდება ნულის ტოლი, როცა $x_j=\dfrac{\beta_l}{\alpha_{lj}}$. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}\geqslant 0 \tag{9}$$

(რადგან პირობის თანახმად $\beta_l\geqslant 0$). დავუშვათ

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}=\min_l\left(\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}\right),\quad \alpha_{lj}>0, \tag{10}$$

მაშინ ცხადია, რომ ნულოვანი მნიშვნელობიდან x_j-ის გაზრდით, პირველად ნულის ტოლი გახდება სწორედ x_{k+i} საბაზისო უცნობი. დანარჩენი საბაზისო უცნობები ჯერ კიდევ შეინარჩუნებენ არაუარყოფით მნიშვნელობებს. α_{ij} კოეფიციენტი დიდ როლს ასრულებს შემდგომ გარდაქმნებში. ამიტომ α_{ij}-ს ვუწოდოთ გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი, i-ურ სტრიქონს — გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ს ტ რ ი ქ ო ნ ი, ხოლო j-ურ სვეტს — გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ს ვ ე ტ ი.

ახლა x_j თავისუფალი უცნობი გავხადოთ საბაზისო უცნობად და მის ნაცვლად თავისუფალ უცნობთა რიცხვს მივაკუთვნოთ x_{k+i} უცნობი. თავისუფალ და საბაზისო უცნობთა კომპლექსებში დანარჩენი უცნობები უცვლელი დავტოვოთ: x_{k+1}, $x_{k+2},\ldots,x_{k+i-1}$, x_j, x_{k+i+1}, $\ldots,x_n$ საბაზისო უცნობთა ახალი კომპლექსი გამოვსახოთ თავისუფალ უცნობთა ახალი x_1, $x_2,\ldots,x_{j-1},x_{k+i}$, $x_{j+1},\ldots,x_k$ კომპლექსით. (6) სისტემის i-ური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_{k+i}=\beta_i-\alpha_{i1}x_1-\alpha_{ij-1}x_{j-1}-\alpha_{ij}x_j-\alpha_{ij+1}x_{j+1}-\ldots-\alpha_{ik}x_k.$$

აქედან

$$x_j=\frac{1}{\alpha_{ij}}(\beta_i-\alpha_{i1}x_1-\ldots-\alpha_{ij-1}x_{j-1}-x_{k+i}-x_{ij}\cdot\alpha_{ij+1}-\ldots-\alpha_{ik}x_k,$$

ანუ

$$x_j=\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}-\left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}}x_1+\cdots+\frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}x_{j-1}+\frac{1}{\alpha_{ij}}\,x_{k+i}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}x_{j+1}+\cdots+\frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}x_k\right). \tag{11}$$

დანარჩენი საბაზისო უცნობები რომ გამოვსახოთ ახალი თავისუფალი უცნობებით, საკმარისია (11) ფორმულით განსაზღვრული x_j-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ (6) სისტემის განტოლებებში. l-ური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_{k+l}=\beta_l-\frac{\alpha_{lj}\beta_i}{\alpha_{ij}}-\left[\left(\alpha_{l1}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}}\right)x_1+\cdots+\left(\alpha_{lj-1}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}\right)x_{j-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ij}}x_{k+i}+\left(\alpha_{lj+1}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}\right)x_{j+1}+\cdots+\left(\alpha_{lk}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}\right)x_k\right], \tag{12}$$

სადაც $l=1,2,\ldots, i-1, i+1,\ldots, r$. ანალოგიურად

$$F=\gamma_0-\frac{\gamma_j\beta_i}{\alpha_{ij}}-\left[\left(\gamma_1-\frac{\gamma_j\alpha_{ij}}{\alpha_{ij}}\right)x_1+\cdots+\left(\gamma_{j-1}-\frac{\gamma_j\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}\right)x_{j-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma_j}{\alpha_{ij}}x_{k+i}+\left(\gamma_{j+1}-\frac{\gamma_j\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}\right)x_{j+1}+\cdots+\left(\gamma_k-\frac{\gamma_j\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}\right)x_k\right]. \tag{13}$$

თუ ახალი თავისუფალი უცნობები ნულის ტოლია, მაშინ ახალ საბაზისო ამონახსენს და F ფორმას შესაბამისად ექნებათ შემდეგი სახე:

$$x_s=0,\ (s=1,2,\ldots, j-1,\ k+i,\ j+1,\ldots,\ k)$$

$$x_j=\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}};\quad x_{k+l}=\beta_l-\frac{\alpha_{lj}\,\beta_i}{\alpha_{ij}}(l=1,2,\cdots, i-1,\ i+1,\cdots, r) \tag{14}$$

$$F=\gamma_0-\frac{\gamma_j\,\beta_i}{\alpha_{ij}}. \tag{15}$$

ის ფაქტი, რომ მიღებული საბაზისო ამონახსენი წარმოადგენს დასაშვებს და რომ მისი შესაბამისი F ფორმა შემცირდა, შეიძლება უშუალო შემოწმებით. მართლაც, პირობის თანახმად ყველა $\beta_i\geqslant 0$, $\alpha_{ij}>0$ (შერჩევის თანახმად), ე. ი. $\frac{\beta_l}{\alpha_{ij}}\geqslant 0$. შემდეგ, თუ $\alpha_{ij}\leqslant 0$, მაშინ $\alpha_{ij}\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}\leqslant 0$ და ამიტომ, როგორც (14)-დან ჩანს $x_{k+l}\geqslant 0$. თუ $\alpha_{ij}\geqslant 0$, მაშინ (10)-ის თანახმად

$$x_{k+l}=\alpha_{lj}\left(\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}-\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right)\geqslant 0.$$

α_{ij} გენერალური ელემენტისათვის $\gamma_j>0$. ამიტომ როგორც (15)-დან ჩანს $F=\gamma_0-\gamma_j\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}\leqslant\gamma_0$, ე. ი. F ფორმის მნიშვნელობა არ იზრდება. ხოლო თუ $\beta_l>0$, მაშინ F მკაცრად მცირდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენი მსჯელობიდან ჩანს, რომ:

1) გენერალური ელემენტის შერჩევის (10) პირობა უზრუნველყოფს ახალი საბაზისო ამონახსენის დაშვებას.

2) γ_j კოეფიციენტის დადებითობა უზრუნველყოფს F ფორმის არაზრდადობას ახალ საბაზისო ამონახსენზე გადასვლისას. თუ $\gamma_j<0$, მაშინ ფორმა შეიძლება გაიზარდოს. $\gamma_j=0$ არ იწვევს F-ის ცვლილებას. ეს ფაქტები უშუალოდ გამომდინარეობს

$$F=\gamma_0-\frac{\gamma_j\beta_i}{\alpha_{ij}} \tag{16}$$

ფორმულიდან.

3) (16) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ $\beta_i=0$, მაშინ γ_j-ს ნიშნის დამოუკიდებლად, ახალ საბაზისო ამონახსენზე გადასვლისას, F არ შეიცვლება.

4) კონკრეტული ამოცანების სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას აუცილებელი არ არის ყველა იმ გარდაქმნების ჩატარება, რომლებსაც (3) სისტემა გადაჰყავს (12)-ში. (12) განტოლების კოეფიციენტთა გამოთვლის მიზნით ჩვენ აღვწერთ მარტივ პროცესს სიმპლექს-ცხრილის საშუალებით.

§ 6. სიმპლექს-მეთოდით მუშაობის ცხრილი

სიმპლექს-ცხრილი დავყოთ უჯრედებად. პირველი კოეფიციენტები ჩავწეროთ ზედა მარცხენა კუთხეში და ჩავატაროთ შემდეგი მოქმედებები:

1) ამოვარჩიოთ გენერალური ელემენტი. ვიპოვოთ მისი შებრუნებული სიდიდე $\lambda=\frac{1}{\alpha_{ij}}$ და შევიტანოთ იგი ცხრილში (ცხრ. 1) იმ უჯრედის ქვედა მარჯვენა კუთხეში, რომელშიაც α_{ij} ელემენტია.

2) i-ური სტრიქონის ზედა განყოფილების ყველა ელემენტი (α_{ij}-ს გარდა) გავამრავლოთ λ რიცხვზე და მიღებული შედეგები ჩავწეროთ ამავე სტრიქონის უჯრედების ქვედა ნაწილში შესაბამისად.

3) j-ური სვეტის ყველა უჯრედის ზედა განყოფილების (α_{ij}-ს გარდა) ელემენტების $-\lambda$-ზე ნამრავლი მოვათავსოთ ამავე სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილში შესაბამისად.

4) i-ური სტრიქონის უჯრედების ზედა ნაწილსა და j-ური სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილებში მოთავსებული რიცხვები აღვნიშნოთ მსხვილი შრიფტით ან სხვა რაიმე განსხვავებული აღნიშვნით (შეიძლება სხვანაირი ფერითაც).

ცხრილი 1

		x_1	...	x_s	...	x_j	...	x_k
x_{k+1}	β_1 $-\lambda\beta_i\alpha_{1j}$	α_{11} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{1j}$	...	α_{1s} $-\lambda\alpha_{ls}\alpha_{1j}$	...	α_{1j} $-\lambda\alpha_{1j}$	...	α_{1k} $-\lambda\alpha_{1k}\alpha_{1j}$
...	...	...	...	...	...		...	...
x_{k+l}	β_l $-\lambda\beta_i\alpha_{lj}$	α_{l1} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{lj}$	...	α_{ls} $-\lambda\alpha_{ls}\alpha_{lj}$	...	α_{lj} $-\lambda\alpha_{lj}$	...	α_{lk} $-\lambda\alpha_{lk}\alpha_{lj}$
			...		...	...	...	
x_{k+i}	β_i $\lambda\beta_i$	α_{i1} $\lambda\alpha_{i1}$	...	α_{is} $\lambda\alpha_{is}$	...	α_{ij} $\lambda=\frac{1}{\alpha_{ij}}$	...	α_{ik} $\lambda\alpha_{ik}$
			...		...		...	...
x_n	β_r $-\lambda\beta_i\alpha_{rj}$	α_{r1} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{rj}$	...	α_{rs} $-\lambda\alpha_{ls}\alpha_{rj}$	...	α_{rj} $-\lambda\alpha_{rj}$	...	α_{rk} $-\lambda\alpha_{ik}\alpha_{rj}$
F	γ_0 $-\lambda\beta_i\alpha_j$	γ_1 $-\lambda\alpha_{i1}\gamma_j$	...	γ_s $-\lambda\alpha_{is}\gamma_j$	...	γ_j $-\lambda\gamma_j$	...	γ_k $-\lambda\alpha_{ik}\gamma_j$

5) l-ური სტრიქონის ($l\neq i$) და s-ური ($s\neq j$) სვეტის გადაკვეთის უჯრედის ქვედა ნაწილში მოთავსებულ რიცხვს ვპოულობთ იმავე სტრიქონის გენერალური სვეტის უჯრედის ქვედა ნაწილში და იმავე სვეტის გენერალური სტრიქონის უჯრედის ზედა ნაწილში მოთავსებული რიცხვების გამრავლებით.

6) 1-ლი ცხრილიდან გადავიდეთ თავისუფალ უცნობთა ახალი კომპლექსის შესაბამის მე-2 ცხრილზე. ამ ცხრილში j-ური სვეტი პასუხობს ახალ თავისუფალ x_{k+i} უცნობს, ხოლო i-ური სტრიქონი — ახალ საბაზისო x_j უცნობს. დანარჩენ სტრიქონებსა და სვეტებში უცნობები უცვლელი რჩება.

7) მე-2 ცხრილის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ყველა უჯრედის ზემოთ მოვათავსოთ შესაბამისად 1-ლი ცხრილის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილების რიცხვები.

8) დანარჩენი უჯრედების ზედა ნაწილებში მოვათავსოთ 1-ლი ცხრილის შესაბამისი უჯრედების ზედა და ქვედა ნაწილებში მოთავსებული რიცხვების ჯამი.

		x_1	...	x_s	...	x_{k+i}	...	x_k
x_{k+1}	$\beta_1-\lambda\beta_l\alpha_{1j}$	$\alpha_{11}-\lambda\alpha_{l1}\alpha_{1j}$	...	$\alpha_{1s}-\lambda\alpha_{is}\alpha_{1j}$	...	$-\lambda\alpha_{1j}$	...	$\alpha_{1k}-\lambda\alpha_{lk}\alpha_{1j}$
...	...		...		...	...	...	
x_{k+l}	$\beta_l-\lambda\beta_i\alpha_{lj}$	$\alpha_{l1}-\lambda\alpha_{l1}\alpha_{lj}$	...	$\alpha_{ls}-\lambda_{is}\alpha_{lj}$	...	$-\lambda\alpha_{lj}$	...	$\alpha_{lk}-\lambda\alpha_{ik}\alpha_{lj}$
...		...	...		...	...	...	
x_j	$\lambda\beta_l$	$\lambda\alpha_{i1}$	...	$\lambda\alpha_{is}$	...	λ	...	$\lambda\alpha_{lk}$
x_n	$\beta_r-\lambda\beta_l\alpha_{rj}$	$\alpha_{r1}-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{rj}$	...	$\alpha_{rs}-\lambda\alpha_{ls}\alpha_{rj}$	...	$-\lambda\alpha_{rj}$	...	$\alpha_{rk}-\lambda\alpha_{ik}\alpha_{rj}$
F	$\gamma_0-\lambda\beta_i\gamma_j$	$\gamma_1-\lambda\alpha_{i1}\gamma_j$	...	$\gamma_s-\lambda\alpha_{ls}\gamma_j$	...	$-\lambda\gamma_j$	...	$\gamma_k-\lambda\alpha_{ik}\gamma_j$

მე-2 ცხრილისა და (2) ფორმულების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ ცხრილში ამოწერილია (12) სისტემის განტოლებათა კოეფიციენტები. მაშასადამე, მე-2 ცხრილი წარმოადგენს x_1, $x_2,\ldots,x_{j-1}$, x_{k+i}, $x_{j+1},\ldots,x_k$ თავისუფალ უცნობთა, ახალი კომპლექსის შესაბამის სიმპლექს—ცხრილს. ეს ცხრილ (12) სისტემის მიმართ ასრულებს იგივე როლს, რასაც 1-ლი ცხრილი (6) სისტემის მიმართ. ამიტომ სიმპლექს-მეთოდით ძირითადი მოცანის ამოხსნისას ზემოთ აღწერილი ოპერაციები მე-2 ცხრილით უნდა ჩავატაროთ და გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე და ა. შ. მანამდე, სანამ არ მივიღებთ ოპტიმალურ ამონახსენს.

ისმის კითხვა: რომელიმე ეტაპზე მიღებული ამონახსენი იქნება თუ არა ოპტომალური? ცხადია, რომ საბაზისო ამონახსენი ოპტიმალურია, მაშინ, როცა ნებისმიერი თავისუფალი უცნობის გაზრდა არ გამოიწვევს F ფორმის შემცირებას. მაგრამ, ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა წინა პარაგრაფის F ფორმის (7) გამოსახულებაში

$$\gamma_i \leqslant 0, \qquad i=1,2,\ldots,k.$$

რადგანაც $\gamma_i(i=1,2,\ldots,n)$ რიცხვები შეტანილია სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში, ამიტომ ოპტიმალური ამონახსენი მიიღება მაშინ, როცა სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონის ყველა რიცხვი გახდება არადადებითი (γ_0 მხედველობაში არ მიიღება).

§ 7. სიმპლექს-მეთოდით სარგებლობის წესი

1) შევარჩიოთ თავისუფალი უცნობები. ჩავთვალოთ ისინი ნულის ტოლად მოცემულ სისტემაში და ვიპოვოთ შესაბამისი საბაზისო ამონახსენი. თუ იგი არ აღმოჩნდება დასაშვები, მაშინ უნდა ვიპოვოთ თავისუფალ უცნობთა ისეთი კომპლექსი, რომლისთვისაც საბაზისო ამონახსენი დასაშვებია.

2) დასაშვები საბაზისო ამონახსენის მოძებნის შემდეგ საბაზისო უცნობები და წრფივი ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით და ჩავწეროთ ისინი (6) და (7) სახით (იხ. §5).

3) (6) და (7)-დან α_{ij} და γ_j რიცხვები შევიტანოთ სიმპლექს-ცხრილში.

4) გენერალური ელემენტის შესარჩევად ვისარგებლოთ შემდეგი წესით:

ა) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში ვიპოვოთ რაიმე დადებითი ელემენტი, მაგალითად, γ_j (γ_0 არ განიხილება). თუ უკანასკნელ სტრიქონში დადებითი ელემენტები არ არის, მაშინ მოცემულ სიმპლექს-ცხრილში ჩაწერილი საბაზისო ამონახსენი წარმოადგენს ოპტიმალურს.

ბ) შევადგინოთ $\dfrac{\beta_l}{\alpha_{ij}}$ ფარდობა, იმ l სტრიქონებისა j-ური სვეტიდან, რომელთათვისაც $\alpha_{ij}>0$.

გ) ამ ფარდობიდან ავიღოთ უმცირესი $\dfrac{\beta_l}{\alpha_{ij}}$ (თუ უმცირესი მნიშვნელობა მიიღება l-ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი). α_{ij} არის გენერალური ელემენტი.

5) სიმპლექს-ცხრილზე მუშაობის წესის დაცვით მოცემული ცხრილიდან გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე.

6) თუ ვერ მივაღწევთ ოპტიმალურ ამონახსენს, მაშინ უნდა გავიმეოროთ მე-4 წესიდან დაწყებული მსჯელობა და ა. შ. ოპტიმალური ამონახსნის მიღებამდე (ოპტიმალური ამონახსნის ნიშანი მითითებულია მე-4 წესის ა) პუნქტში).

§ 8. ამოცანების ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით

1. ვთქვათ ორ პუნქტს შორის საჭიროა უმცირესი დანახარჯებით განვახორციელოთ კავშირი, რომელსაც ექნება „a“ სატელეფონო, „b“ სატელეგრაფო და „c“ ფოტოტელეგრაფის არხები. კავშირისათვის გამოიყენება ორი ტიპის კაბელი შემდეგი მახასიათებლებით $a=4{,}8$; $b=4{,}95$; $c=2{,}08$. კაბელის საჭირო რაოდენობა და ღირებულება მოცემულია ცხრილით (ცხრ. 1).

დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის პირველ რიგში საჭიროა შევადგინოთ შეზღუდვა სისტემა და მიზნის ფუნქცია, რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: x_1-ით აღვნიშნოთ I ტიპის კაბელის

ც ხ რ ი ლ ი 1

არხების ტიპები	კაბელის ტიპები	
	I	II
სატელეფონო	0,12	0.72
სატელეგრაფო	0,54	1.8
ფოტოტელეგრაფი	0.8	0.24
1 კმ კაბელის ღირებულება	1,33	0,95

საჭირო რაოდენობა: x_2-ით კი II ტიპის კაბელის საჭირო რაოდენობა; მაშინ

$0,12x_1+0,72x_2$ — იქნება სატელეფონო არხების რაოდენობა,
$0,54x_1+1,8x_2$ — „ სატელეგრაფო არხების რაოდენობა,
$0,8x_1+0,24x_2$ — „ ფოტოტელეგრაფის არხების რაოდენობა.

ცხადია შეზღუდვათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0,12x_1+0,72x_2 \geqslant 4,8 \\ 0,54x_1+1,8x_2 \geqslant 4,95 \\ 0,8x_1+0,24x_2 \geqslant 2,08 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+6x_2 \geqslant 40 \\ 6x_1+20x_2 \geqslant 55 \\ 10x_1+3x_2 \geqslant 26 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \quad (1)$$

ამ შემთხვევაში საერთო დანახარჯები იქნება

$$F=1,33x_1+0,95x_2. \quad (2)$$

საჭიროა ვიპოვოთ (1) სისტემის ისეთი ამონახსენი, რომელიც (2) მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. თუ (1) უტოლობათა სისტემას გადავაქცევთ ტოლობებად, რისთვისაც შემოვიღებთ x_3, x_4 და x_5 ცვლადებს, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x_1+6x_2-x_3=40 \\ 6x_1+20x_2-x_4=55 \\ 10x_1+3x_2-x_5=26. \end{cases} \quad (3)$$

(3) სისტემის რანგი $r=3$, ამიტომ საბაზისო უცნობებად შეგვიძლია მივიღოთ რომელიმე სამი უცნობი, ხოლო თავისუფალ უცნობებად — დანარჩენი ორი უცნობი

საბაზისო უცნობებად ავიღოთ x_2, x_3, x_4 და გამოვსახოთ ისინი x_1 და x_5 თავისუფალი უცნობებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_3=12-(19x_1-2x_5) \\ x_4=158,33-(60,66x_1-6,66x_5) \\ x_2=8,6-(3,33x_1-0,33x_5). \end{cases} \tag{4}$$

მიზნის ფუნქცია იქნება

$$F=8,23-(1,83\ x_1-0,31\ x_2). \tag{5}$$

შევადგინოთ სიმპლექსური ცხრილი (ცხრ. 2)

ცხრილი 2

		x_1	x_5
x_3	12	19	—2
x_4	158,33	60,66	—0,66
x_2	8,66	3,33	—0,33
F	8,23	1,83	—0,31

გენერალური ელემენტი უნდა ვეძებოთ x_1-ის შესაბამის სვეტში, კერძოდ, $\frac{12}{19}$, $\frac{158,33}{60,66}$ და $\frac{8,66}{3,33}$ რიცხვებს შორის უმცირესი. ეს იქნება $\frac{12}{19}$, ამიტომ გენერალური ელემენტი იქნება 19 და $\lambda=\frac{1}{19}$ შეგვიძლია მივიღოთ სიმპლექსური ცხრილის უჯრედების ზედა და ქვედა ნაწილში ჩაწერილი შემდეგი რიცხვები (ცხრ. 3)

ცხრილი 3

		x_1	x_5
x_3	12 0,63	19 $\frac{1}{19}$	—2 —0,1
x_4	158,33 $-\frac{12\cdot 3,33}{19}$	60,66 $-\frac{60,66}{19}$	—0,66 $-\frac{2\cdot 60,66}{19}$
x_2	8,66 $-\frac{12\cdot 3,33}{19}$	3,33 $-\frac{3,33}{19}$	—0,33 $-\frac{2\cdot 3,33}{19}$
F	8,23 $-\frac{12\cdot 1,83}{19}$	1,83 — 0,09	—0,31 $\frac{2\cdot 1,83}{19}$

თუ გადავალთ შემდეგ სიმპლექსურ ცხრილზე, მივიღებთ (ცხრ. 4)

ც ხ რ ი ლ ი 4

		x_3	x_5
x_1	0,63	1	—0,1
x_4	120,02	—3,19	—0,28
x_2	6,56	—0,17	—0,33
F	7,08	—0.09	—0,12

მიღებული ცხრილის ბოლო სტრიქონში ყველა უცნობის კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ გეგმის კიდევ უფრო გაუმჯობესება შეუძლებელია, ე. ი. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$x_3=0;\ x_5=0;\ x_1=0,63;\ x_2=6,56;\ x_4=120,02;\ F=7,08.$$

2. ვთქვათ საწარმომ 6 საათის განმავლობაში უნდა დაამზადოს ორი Π_1 და Π_2 სახის პროდუქციის შესაბამისად 30 და 96 ერთეული. თითოეული ეს პროდუქცია შეიძლება დავამზადოთ ორ A და B დაზგაზე, რომლებსაც აქვთ განსხვავებული სიმძლავრეები და, რომელიც მოცემულია მე-5 ცხრილის სახით:

ც ხ რ ი ლ ი 5

	Π_1	Π_2
A	6	13
B	24	13

ც ხ რ ი ლ ი 6

	Π_1	Π_2
A	4	47
B	13	26

ეს ცხრილი შეიძლება წავიკითხოთ ასე: ერთი საათის განმავლობაში A დაზგაზე შეიძლება დამზადდეს Π_1 პროდუქციის 6 ერთეული და Π_2, პროდუქციის 13 ერთეული; ხოლო B დაზგაზე Π_1-ის 24 ერთეული და Π_2-ის 13 ერთეული პროდუქცია. კიდევ მოცემულია მე-6 ცხრილი, სადაც ჩაწერილია ის დანახარჯები, რომლებიც მიიღებიან დაზგის ერთი საათით მუშაობის დროს შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის ერთი ერთეულის დამზადებით

ამ მონაცემების საფუძველზე უნდა შევადგინოთ ისეთი გეგმა, რომ საერთო დანახარჯი იყოს მინიმალური. ამისათვის შემოვიღოთ ცვლადები x_1, x_2, x_3 და x_4, სადაც x_1 არის ის დრო, რომლის განმავლობაშიაც A დაზგა დაკავებული იქნება Π_1 პროდუქციის დამზადებაზე, x_2 დროის განმავლობაში კი A დაზგა იმუშავებს Π_2-პროდუქციის გამოშვებაზე. ასევე x_3 და x_4 იქნება B დაზგისათვის შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის დამზადებისათვის გამოყოფილი დრო. გეგმის შედგენა ფაქტიურად ნიშნავს x_1, x_2, x_3 და x_4 ცვლადების რაიმე კონკრეტული

მნიშვნელობების ალებას. ცხადია შეზღუდვათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_3+x_4\leqslant 6 \\ 6x_1+13x_3=30 \\ 24x_2+13x_4=96 \end{cases} \tag{6}$$

ხოლო მიზნის ფუნქცია იქნება

$$F=4x_1+47x_2+13x_3+26x_4. \tag{7}$$

იმისათვის, რომ (6) ს სტემაში შემავალი უტოლობები გადავაქციოთ ტოლობებად, შემოვიღოთ დამატებით კიდევ ორი ცვლადი $x_5=6-x_1-x_2$ და $x_6=6-x_3-x_4$. მაშინ შეზღუდვათა (6) სისტემა შეიცვლება ახალი (6′) სისტემით:

$$\begin{cases} x_5=6-x_1-x_2 \\ x_6=6-x_3-x_4 \\ 6x_1+13x_3=30 \\ 24x_2+13x_4=96. \end{cases} \tag{6′}$$

ამის შემდეგ, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ წრფივი დაპროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

საჭიროა ვიპოვოთ (6′) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსენი, რომელიც (7) ტოლობით განსაზღვრულ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

(6′) სისტემის რანგი $r=4$, უცნობთა რიცხვი $n=6$. მაშასადამე, თავისუფალ უცნობთა რიცხვი $k=n-r=2$. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ x_1 და x_4. თავისუფალ უცნობთა ამ წყვილის შესაბამისი საბაზისო ამონახსენი იქნება:

$$x_1=0 \quad x_2=4,\ x_3=\frac{30}{13},\quad x_4=0,\quad x_5=2,\quad x_6=\frac{48}{13},$$

რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსენს.

ახლა საბაზისო უცნობები და F ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_2=4-\dfrac{13}{24}x_4 \\ x_3=\dfrac{30}{13}-\dfrac{6}{13}x_1 \\ x_5=2-\left(x_1-\dfrac{13}{24}x_4\right) \\ x_6=\dfrac{48}{13}-\left(-\dfrac{6}{13}x_1+x_4\right), \end{cases} \tag{8}$$

$$F = 218 - \left(2x_1 - \frac{13}{24}x_4\right). \tag{9}$$

შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 7) და ვიპოვოთ გენერალური ელემენტი. მე-7 ცხრილის ბოლო სტრიქონში 2 და $-\frac{13}{24}$ წარმოადგენენ თავისუფალ უცნობთა კოეფიციენტებს. აქედან ამოვარჩიოთ x_1 სვეტის შესაბამისი დადებითი კოეფიციენტი 2. შევადგინოთ თავისუფალ წევრთა ფარდობა x_1 სვეტის შესაბამის დადებითი ელემენტებთან. მივიღებთ: $\frac{35}{13} : \frac{6}{13} = 5$; $2 : 1 = 2$; მათ შორის უმცირესი არის $2 : 1 = 2$, რომელიც შეესაბამება x_5 სტრიქონს. მაშასადამე, აღნიშნული „1“ წარმოადგენს გენერალურ ელემენტს. უჯრედების ქვედა ნაწილები შევავსოთ სიმპლექს-ცხრილზე მოქმედების წესის მიხედვით. x_1 და x_5-თან ისრებით ნაჩვენებია ის ფაქტი, რომ: x_1 თავისუფალი უცნობებიდან გადადის საბაზისო უცნობებში, ხოლო x_5 საბაზისო უცნობებიდან გადადის თავისუფალ უცნობებში. სიმპლექს-ცხრილზე მოქმედების წესის მიხედვით მე-7 ცხრილიდან გადავიდეთ მე-8 ცხრილზე. ამ

ცხრილი 7

		x_1	x_4
x_2	4 0	0 0	$\frac{13}{24}$ 0
x_3	$\frac{30}{13}$ $-\frac{12}{13}$	$\frac{6}{13}$ $-\frac{6}{13}$	0 $\frac{1}{4}$
x_5	2 2	1 1	$-\frac{13}{24}$ $-\frac{13}{24}$
x_6	$\frac{48}{13}$ $\frac{12}{13}$	$-\frac{6}{13}$ $\frac{6}{13}$	1 $-\frac{1}{4}$
F	213 -4	2 -2	$-\frac{13}{24}$ $\frac{26}{24}$

ცხრილი 8

		x_5	x_4
x_2	4 -3	0 1	$\frac{13}{24}$ $-\frac{13}{6}$
x_3	$\frac{18}{13}$ $\frac{72}{13}$	$-\frac{6}{13}$ $-\frac{24}{13}$	$\frac{1}{4}$ 4
x_1	2 3	1 -1	$-\frac{13}{24}$ $\frac{13}{6}$
x_6	$\frac{60}{13}$ $-\frac{54}{13}$	$\frac{6}{13}$ $\frac{18}{13}$	$\frac{3}{4}$ -3
F	214 -3	-2 1	$\frac{13}{24}$ $-\frac{13}{6}$

უკანასკნელ ცხრილში გენერალურ ელემენტს წარმოადგენს $\frac{1}{4}$ (რომელიც აღნიშნულია ცხრილში). x_4, თავისუფალი უცნობებიდან გადადის საბაზისო უცნობებში, ხოლო x_3— პირიქით. ცნობილი წესის მიხედვით მე-8 ცხრილიდან გადავიდეთ მე-9 ცხრილზე. ამ ცხრილის ბოლო სტრიქონის უცნობთა კოეფიციენტები უარყოფითი რიცხვებია. მაშასადამე, x_3 და x_5 თავისუფალ უცნობთა შესაბამისი საბაზისო ამონახსენი ოპტიმალურია. რადგან საბაზისო ამონახსნში თავისუფალი უცნობები ნულის ტოლია ($x_3=x_5=0$), ამიტომ საბაზისო უცნობებისა და F ფორმის მნიშვნელობა თავისუფალ წევრთა ტოლია. ოპტიმალური ამონახსენი იქნება:

$$x_1=5, \quad x_2=1, \quad x_3=0,$$
$$x_4=\frac{72}{13}, \quad x_5=0, \quad x_6=\frac{6}{13},$$

ხოლო $F_{min}=211$.

ცხრილი 9

		x_5	x_3
x_2	1	1	$-\frac{13}{6}$
x_4	$\frac{72}{13}$	$-\frac{24}{13}$	4
x_1	5	0	$\frac{17}{6}$
x_6	$\frac{6}{13}$	$\frac{24}{13}$	-3
F	211	-1	$-\frac{13}{6}$

§ 9. სიმპლექს-მეთოდით მუშაობის ანალიზი

ვთქვათ, წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{2}$$

ვიგულისხმოთ, რომ თავისუფალ უცნობთა ჩვენ მიერ შერჩეული კომპლექსის შესაბამისი საბაზისო ამონახსენი დასაშვებია. ამ შემთხვევაში უკვე შეგვიძლია ამოცანის ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით. ამისათვის საჭიროა შევადგინოთ ძირითადი სიმპლექს-ცხრილი და შემდეგ ცნობილი წესის მიხედვით გადავიდეთ სხვა ცხრილებზე, სანამ მივიღებდეთ ოპტიმალურ ამონახსენს. აქ შესაძლებელია წავაწყდეთ შემდეგ გართულებებს:

1) ერთი ცხრილიდან მეორეზე გადასვლის პროცესი შეწყდება, მიუხედავად იმისა, რომ ოპტიმალური ამონახსენი ჯერ კიდევ არ არის მიღებული.

2) ერთი ცხრილიდან მეორე ცხრილზე გადასვლისას არავითარ წინააღმდეგობას არა აქვს ადგილი და ეს პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, მაშინ ოპტიმალურ ამონახსენს ვერ მივაღწევთ.

შევისწავლოთ თითოეული ეს წინააღმდეგობა.

1) ერთი სიმპლექს-ცხრილიდან მეორეზე გადასვლა შეუძლებელია მაშინ, როცა მასში შეუძლებელია გენერალური ელემენტის შერჩევა. ეს შეიძლება მოხდეს შემდეგ შემთხვევებში.

ა) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში არა გვაქვს დადებითი ელემენტები (თავისუფალი წევრი არ ითვლება);

ბ) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში გვაქვს დადებითი ელემენტი, მაგრამ გენერალური ელემენტის საპოვნელად შერჩეულ სვეტში დადებითი წევრები არ შედიან.

როგორც ვიცით ა) შემთხვევა მოწმობს ოპტიმალური ამონახსნის მიღებაზე, ხოლო ბ) შემთხვევა მოწმობს იმაზე, რომ მინიმიზირებული ფორმა შემოუსაზღვრელია ქვემოდან. მართლაც, x_j სვეტის ელემენტთა არადადებითობა ნიშნავს, რომ x_j თავისუფალი უცნობი შედის საბაზისო უცნობებთან არაუარყოფითი კოეფიციენტებით. ამიტომ შეიძლება x_j სიდიდის უსასრულოდ გაზრდა ისე, რომ საბაზისო უცნობები უარყოფითი არასდროს არ გახდნენ. მაგრამ F-ის გამოსახულებაში x_j სიდიდე შედის უარყოფითი ნიშნით (სიმპლექს-ცხრილში დადებითია). ამიტომ მისი უსაზღვროდ გაზრდა გამოიწვევს F-ის უსაზღვროდ შემცირებას. მაშასადამე, ოპტიმალური ამონახსენი არ არსებობს.

2) წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ ამოცანაში უცნობთა n რიცხვი სასრულია. მაშასადამე, თავისუფალ უცნობთა სხვადასხვა კომპლექსიც სასრული რიცხვი იქნება. თავისუფალ უცნობთა ყოველ კომპლექსს შეესაბამება თავისი სიმპლექს-ცხრილი და პირიქით, ყოველ სიმპლექს-ცხრილს შეესაბამება თავისუფალ უცნობთა გარკვეული კომპლექსი. ამიტომ 2) შემთხვევა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მორიგი სიმპლექს-ცხრილი მიგვიყვანს თავისუფალ უცნობთა ისეთ

კომპლექსთან, რომელსაც ადგილი ჰქონდა ადრე. მაშასადამე, ერთი ცხრილიდან გამომდინარე, შეიძლება გავიმეოროთ გამოთვლების მთელი გზა და მივიდეთ იმავე სიმპლექს-ცხრილთან და ა. შ. ასეთი შემთხვევები იშვიათია, მაგრამ მაინც გვხვდება. მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ც ი კ ლ ი ს შ ე კ ვ რ ა ს. ციკლის შეკვრის თავიდან აცილება შეიძლება მარტივად, ამისათვის სიმპლექს-ცხრილში (მაგალითად, იმაში, რომელშიაც დაიწყო გამეორების ციკლი, ან ამ ციკლის სხვა, რომელიმე ცხრილში) გენერალური ელემენტის შესარჩევად მივმართოთ სხვა სვეტს, რომლისთვისაც ეს შერჩევა დასაშვებია.

F ფორმის ქვემოდან შემოუსაზღვრულობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ შეზღუდვათა სისტემა და F ფორმა მოცემულია შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1-2x_2+x_4=2 \\ x_1+x_2-x_5=5 \end{cases}$$

$$F=x_2-x_1.$$

თავისუფალ უცნობებად მივიღოთ x_4 და x_5. დავუშვათ $x_4=x_5=0$, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შესაბამისი საბაზისო ამონახსენი დასაშვებია. ამრიგად, ჩვენი შერჩევა მართებულია. საბაზისო უცუცნობები და F ფორმა გამოვსახოთ x_4 და x_5 საშუალებით, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1=4-\left(\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5\right) \\ x_2=1-\left(-\frac{1}{3}x_4-\frac{1}{3}x_5\right) \\ x_3=9-(x_4-x_5) \end{cases}$$

$$F=-3+\frac{2}{3}x_4-\frac{1}{3}x_5.$$

ცხრილი 1

		x_4	x_5
x_1	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	9	1	-1
F	-3	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 1). გენერალური ელემენტი უნდა ვეძებოთ x_5 თავისუფალი უცნობის შესაბამის სვეტში. რადგან ამ სვეტის ყველა რიცხვი უარყოფითია, ამიტომ გენერალური ელემენტის პოვნა შეუძლებელია. მაშასადამე, F ფორმა ქვემოდან შემოუსაზღვრელია და ოპტიმალური ამონახსენი არ არსებობს.

წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის ამოხსნის დასაწყისში (სიმპლექს-მეთოდით) უნდა გვქონდეს შეზღუდვათა სისტემის რაიმე დასაშვები საბაზისო ამონახსნის უშუალო შერჩევა, შეზღუდვათა სისტემის მატრიცის რანგის განსაზღვრითა და რაიმე წესით თავისუფალ უცნობთა შერჩევით. მაგრამ, როცა სისტემის უცნობთა და განტოლებათა რიცხვი დიდია, მაშინ ასეთი მეთოდით საბაზისო ამონახსნის შერჩევა გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ აქ ჩვენ გავეცნობით დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნის მოხერხებულ მეთოდს. აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ თვით ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს სიმპლექს-მეთოდი.

ვთქვათ მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0, \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{1}$$

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $b_i \geqslant 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში i-ურ განტოლებას გავამრავლებთ — 1-ზე).

შემოვიღოთ დამხმარე ξ_i $(i=1,2,\ldots,m)$ უცნობები, რომლებიც x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ უცნობებთან დაკავშირებულნი არიან

$$\xi_i=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

ტოლობებით და დამხმარე ფორმით

$$f=\sum_{i=1}^{m}\xi_i. \tag{3}$$

ამის შემდეგ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი

ა მ ო ც ა ნ ა. ვიპოვოთ (2) წრფივი ფორმის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსენი ($x_j \geqslant 0$, $\xi_i \geqslant 0$), რომელიც (3) წრფივ ფორმას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ გვაქვს $n+m$ უცნობი: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ და m განტოლება.

სისტემის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 & a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 & a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0\ldots 1 & a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

რომლის რანგი ტოლი იქნება m-ის, ამიტომ გვექნება m საბაზისო, უცნობი და n თავისუფალი უცნობი. საბაზისო უცნობებად შეგვიძლია მივიღოთ $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_m$. მაშინ ისინი განისაზღვრებიან $x_1, x_2,\ldots,x_n$ თავისუფალი უცნობებით (2) ტოლობების საშუალებით.

რადგან ყველა $b_i \geqslant 0$, ამიტომ ამ კომპლექსის შესაბამისი

$$\xi_i = b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$
$$x_j = 0 \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

საბაზისო ამონახსენი წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსენს. რადგან $\xi_i \geqslant 0$, ამიტომ ცხადია, რომ $\min f \geqslant 0$. ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა $\xi_i = 0$. მაშასადამე, თუ $\min f = 0$, მაშინ ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს x_j-ის არაუარყოფით მნიშვნელობათა სისტემა, რომლებიც ყველა ξ_i-ს გადააქცევენ ნულად, ე. ი. დააკმაყოფილებენ (1) სისტემას. მეორე მხრივ, ცხადია, მართებულია შებრუნებული დებულებაც: (1) სისტემის ყოველი დასაშვები ამონახსენი ξ_i-ს გადააქცევს ნულებად, ე. ი. $\min f = 0$.

ამრიგად, (1) სისტემის დასაშვები მნიშვნელობის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\min f = 0$. ეს საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი: (1) სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა f ფორმის მინიმუმზე დაყვანა. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ x_j $(j = 1,2,\ldots,n)$, საბაზისო უცნობებად ξ_i $(i=1,2,\ldots,m)$ და სიმპლექს-მეთოდით ჩავატაროთ f ფორმის მინიმიზაცია.

შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემთხვევას:

1) თუ $\min f = 0$, მაშინ ყველა $\xi_i = 0$ და x_j-ს მიღებული მნიშვნელობები შეადგენენ (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს.

2) თუ $\min f > 0$, მაშინ (1) სისტემას დასაშვები ამონახსენი არ გააჩნია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია შეზღუდვათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2 - x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5 - x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

და ფორმა

$$F = 6 - 2x_1 + x_2 - 3x_2 + 2x_4 + 10x_5.$$

ვიპოვოთ დასაშვები ამონახსენი, ამისათვის შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები

$$\begin{cases} \xi_1=2-x_1+x_2-2x_3+2x_4+6x_5 \\ \xi_2=5-x_1-2x_2+x_3-7x_4-3x_5 \\ \xi_3=4+x_1-x_2-x_3+x_4. \end{cases} \tag{5}$$

(5) შეზღუდვებითა და სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით მოვახდინოთ

$$f=\xi_1+\xi_2+\xi_3 \tag{6}$$

ფორმის მინიმიზაცია. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; ხოლო საბაზისო უცნობებად ξ_1, ξ_2, ξ_3. შევადგინოთ სიმპლექს—ცხრილი (ცხრ. 1) და ვიმოქმედოთ ჩვეულებრივი წესით.

ცხრილი 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	2 / 2	$\boxed{1 / 1}$	—1 / —1	2 / 2	—2 / —2	—6 / —6
ξ_2	5 / —2	1 / —1	2 / 1	—1 / —2	7 / 2	3 / 6
ξ_3	4 / 2	—1 / 1	1 / —1	1 / 2	—1 / —2	0 / —6
f	11 / —2	1 / —1	2 / 1	2 / —2	4 / 2	—3 / 6
F	6 / —4	2 / —2	—1 / 2	3 / —4	—2 / 4	—10 / 12

ამ ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში ამოწერილია F ფორმიდან თავისუფალი უცნობების კოეფიციენტები. შემდეგში ყველა გარდაქმნები ჩავატაროთ ამ უკანასკნელი სტრიქონისთვისაც. თუ ξ_1 უცნობს გადავიყვანთ თავისუფალ უცნობებში, ხოლო x_1-ს საბაზისო უცნობებში, მაშინ 1-ლი ცხრილიდან შეგვიძლია გადავიდეთ მე-2 ცხრილზე. მე-2 ცხრილიდან მე-3 ცხრილზე გადასვლა გამოწვეულია ξ_2-ის თავისუფალ უცნობებში, ხოლო x_2-ის საბაზისო უცნობებში გადასვლით. მესამე ეტაპზე ξ_3 გადადის თავისუფალ უცნობებში და x_3 საბაზისო უცნობებში (ცხრ. 4). ამ გარდაქმნათა შედეგად თავისუფალ უცნობებად მივიღებთ:

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad x_4 \text{ და } x_5;$$

ხოლო საბაზისო უცნობებად:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3.$$

ცხრილი 2

		ξ_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2 1	1 $-\frac{1}{3}$	-1 $\frac{1}{3}$	1 -1	-2 3	-6 3
ξ_2	3 1	-1 $-\frac{1}{3}$	$\boxed{\underline{3}}$ $\boxed{\frac{1}{3}}$	-3 -1	9 3	9 3
ξ_3	6 0	1 0	0 0	3 0	-3 0	-6 0
f	9 -3	-1 1	3 -1	0 3	6 -9	3 -9
F	2 -1	-2 $\frac{1}{3}$	1 $-\frac{1}{3}$	-1 1	2 -3	2 -3

როგორც მე-4 ცხრილიდან ჩანს f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმუმ მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ და მივიღეთ (4) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსენი:

ცხრილი 3

		ξ_1	ξ_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3 -2	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0	1 $-\frac{1}{3}$	1 1	-3 2
x_2	1 2	$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0	-1 $\frac{1}{3}$	3 -1	3 -2
ξ_3	6 2	1 $\frac{1}{3}$	0 0	$\boxed{\underline{3}}$ $\boxed{\frac{1}{3}}$	-3 -1	-6 -2
f	6 -6	0 -1	-1 0	3 -1	-3 3	-6 6
F	1 0	$-\frac{5}{3}$ 0	$-\frac{1}{3}$ 0	0 0	-1 0	-1 0

ცხრილი 4

		ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_4	x_5
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	1
x_2	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	1
x_3	2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	-2
f	0	-1	-1	-1	0	0
F	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	-1

$$x_4=0, \quad x_5=0, \quad x_1=1, \quad x_2=3, \quad x_3=2.$$

უფრო მეტიც, რადგან გარდაქმნებს ვატარებდით F ფორმის მიმართაც, საბოლოო ცხრილში მივიღეთ მისი გამოსახულება ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4 და x_5 თავისუფალი უცნობების საშუალებით.

ცხადია, რომ თუ მე-4 ცხრილში უკუვაგდებთ ξ_1, ξ_2, ξ_3 დამხმარე უცნობთა სვეტებს და f ფორმის შესაბამის სტრიქონს, მივიღებთ ცხრილს (ცხრ. 5), რომელიც საშუალებას მოგვცემს x_1,x_2, x_3 და F ფორმა გამოვსახოთ x_4 და x_5 თავისუფალი უცნობებით.

ცხრილი 5

		x_4	x_5
x_1	1	2	-1
x_2	3	2	1
x_3	2	-1	-2
F	1	-1	-1

მე-5 ცხრილიდან უნდა დავიწყოთ F ფორმის მინიმუმზე დაყვანა. როგორც ამ ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონიდან ჩანს F ფორმის შემცირება მეტად აღარ შეიძლება- ე. ი. $\min F=1$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მე-5 ცხრილში არ შედიან ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის შესაბამისი სვეტები. უფრო მეტიც, თუ დასაშვები ამონახსნის მოძებნის პროცესში ξ_i დამხმარე უცნობი გახდა თავისუფალი, მაშინ მის შესაბამის სვეტში გენერალური ელემენტის ამორჩევას არ მოვახდენთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში შემდეგ ნაბიჯზე ξ_i გადავა საბაზისო ამონახ-

სნთა რიცხვში და ეს გარემოება ვერ მიგვაახლოებს დასაშვები ამონახსნისაკენ. ცხადია, რომ ξ_i-ს სვეტები არავითარ გავლენას არ მოახდენენ უკანასკნელ ცხრილზე, ამიტომ შეიძლება ცხრილიდან მათი ამოშლა.

§ 11. დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნა

წინა პარაგრაფში ჩვენ მივუთითეთ შეზღუდვათა სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოძებნის მეთოდზე. ერთი მხრივ სიმპლექს-მეთოდზე მუშაობა მოითხოვს დასაშვები საბაზისო ამონახსნის ცოდნას. ამ პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენებთ როგორც დასაშვები ამონახსნის, ასევე დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნის მეთოდს.

დავუშვათ, რომ §2-ში სიმპლექს-მეთოდით, დამხმარე f ფორმის მინიმიზაციით უკვე ვიპოვეთ

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1}$$

სისტემის დასაშვები ამონახსენი. თუ ამ შემთხვევაში ξ_i დამხმარე უცნობებიდან ყველა გახდა თავისუფალი უცნობი, მაშინ ამოცანა ამოხსნილად ჩაითვლება. მართლაც, ამ შემთხვევაში საბაზისო ამონახსნებად აღმოჩნდებიან x_j უცნობები და მაშასადამე,

$$\xi_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

დამხმარე სისტემისათვის ნაპოვნი დასაშვები საბაზისო ამონახსენი მოგვცემს აგრეთვე (1) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსენს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ შეზღუდვათა

$$\begin{cases} 3+6x_1-x_2-x_3-4x_4-x_5+3x_6=0 \\ 6+3x_1-x_2+4x_4-2x_5+5x_3=0 \\ 3+7x_1+2x_2+5x_3+6x_4-x_5=0 \end{cases} \tag{3}$$

სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსენი. ამისათვის შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები:

$$\begin{cases} \xi_1=3+6x_1-x_2-x_3+4x_4-x_5+3x_6 \\ \xi_2=6+3x_1-x_2+4x_4-2x_5+5x_6 \\ \xi_3=3+7x_1+2x_2+5x_3+6x_4-x_5 \end{cases} \tag{4}$$

და ფორმა

$$f=\xi_1+\xi_2+\xi_3. \qquad (5)$$

(4) სისტემისა და (5) ფორმისათვის შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 1)

ცხრილი 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
ξ_1	3 / —3	6 / $\frac{3}{2}$	1 / $-\frac{1}{2}$	1 / 0	—4 / 2	1 / $-\frac{1}{2}$	—3 / $\frac{5}{2}$
ξ_2	6 / 3	—3 / $-\frac{3}{2}$	1 / $\frac{1}{2}$	0 / 0	—4 / —2	$\boxed{2}$ / $\frac{1}{2}$	—5 / $-\frac{5}{2}$
ξ_3	3 / —3	—7 / $\frac{3}{2}$	—2 / $-\frac{1}{2}$	—5 / 0	—6 / 2	1 / $-\frac{1}{2}$	0 / $\frac{5}{2}$
f	12 / —12	—16 / 6	0 / —2	—4 / 0	—14 / 8	4 / —2	—8 / 10

გენერალურ ელემენტად შევარჩიეთ მე-2 სტრიქონისა და მე-5 სვეტის გადაკვეთაში მდგომი რიცხვი „2“. მე-2 ცხრილზე გადასვლისას ξ_2 გადადის თავისუფალ უცნობად.

როგორც ჩანს f ფორმამ უკვე მიაღწია თავის მინიმალურ მნიშვნელობას, მიუხედავად ამისა (3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსენი ჯერ კიდევ არ მიგვიღია, რადგან მხოლოდ ξ_2 გადავიდა თავისუფალ უცნობებში, ხოლო ξ_1 და ξ_3 დარჩნენ საბაზისო უცნობთა რიცხვში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. შევნიშნოთ, რომ მე-2 ცხრილში ξ_1 და ξ_3 დამხმარე უცნობებისათვის შენარჩუნებული თავისუფალი წევრები ნუ-

ცხრილი 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	—2	$-\frac{1}{2}$
ξ_2	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—2	$-\frac{5}{2}$
ξ_3	0	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	—5	—4	$\frac{5}{2}$
f	0	—10	—2	—4	—6	2

ლის ტოლია. მართლაც. $f=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ ფორმამ, უკვე მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას. მაგრამ პირობის თანახმად ყველა $\xi_i \geqslant 0$. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $\xi_i=0$. ახლა მე-2 ცხრილიდან გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე. თუ მკაცრად დავიცავთ სიმპლექს-ცხრილზე მუშაობის წესს, მაშინ გენერალურ ელემენტად უნდა ავიღოთ ξ_3 სტრიქონის და x_6 სვეტის შესაბამისი რიცხვი, ე. ი. $\frac{5}{2}$. ერთი მხრივ ნაწილობრივ გადავუხვევთ ამ წესს და ვაჩვენებთ, რომ განსახილველ შემთხვევაში შეიძლება გადავიდეთ (4) სისტემის. ახალ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე გენერალური ელემენტის სხვანაირი შერჩევითა და f ფორმის მნიშვნელობის გაზრდის გარეშე. მართლაც. გენერალურ ელემენტად ავირჩიოთ ξ_1 სტრიქონისა და x_2 სვეტის შესაბამისი ელემენტი, ე. ი. $\frac{1}{2}$. ამ შემთხვევაში გენერალური ელემენტის შერჩევის პირობა შესრულებულია: $0:\frac{1}{2}=0$ წარმოადგენს მინიმალურს.

მაშასადამე, ჩვენ მიერ შერჩეული გენერალური ელემენტის შესაბამისი ახალი საბაზისო ამონახსენი დასაშვებია. მეორე მხრივ, რადგან მე-2 ცხრილში ξ_1-სათვის თავისუფალი წევრი $\beta_1=0$, ამიტომ f ფორმის მნიშვნელობა არ შეიცვლება იმ γ_i კოეფიციენტისაგან დამოუკიდებლად, რომელიც დგას f ფორმის სტრიქონსა და გენერალური ელემენტის შესაბამის სვეტში. ამრიგად, გენერალური ელემენტის აღნიშნული შერჩევით მართლაც გადავალთ ახალ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე f ფორმის მნიშვნელობის შენარჩუნებით. ამ გზით შევავსოთ მე-2 სიმპლექს-ცხრილი იმ დაშვებით რომ გენერალურ ელემენტად არჩეულია $\frac{1}{2}$. მივიღებთ მე-3 ცხრილს.

შემდეგი ცხრილის შედგენის მიზნით ξ_1 გადავიყვანოთ თავისუფალ უცნობებში, მივიღებთ მე-4 ცხრილს (იხ. §5-ის შენიშვნა).

(3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსენი ჯერ კიდევ არ არის მიღებული, მაგრამ მე-4 ცხრილში დამხმარე უცნობთა რიცხვი შემცირდა მე-3 ცხრილთან შედარებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ცხადია, რომ გენერალურ ელემენტად შეგვიძლია შევარჩიოთ არა მარტო ჩვენ მიერ შერჩეული $\frac{1}{2}$, არამედ ის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, რომელიც ξ_i დამხმარე უცნობის სტრიქონშია. მე-4 ცხრილში ξ_3 წარმოადგენს საბაზისო უცნობს. ξ_3 სტრიქონში რომ ყოფილიყო ერთი მაინც დადებითი ელემენტი, მაშინ შეგვეძლო მისი მიღება გენერალურ ელე-

ცხრილი 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
ξ_1	0 0	$-\frac{9}{2}$ -9	$\boxed{\frac{1}{2}}$ 2	1 2	-2 -4	$-\frac{1}{2}$ -1
x_5	3 0	$-\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$ -1	0 -1	-2 2	$-\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$
ξ_3	0 0	$-\frac{11}{2}$ $-\frac{45}{2}$	$-\frac{5}{2}$ 5	-5 5	-4 -10	$\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$
f	0 0	-10 -18	-2 4	-4 4	-6 -8	2 -2

ცხრილი 4

		x_1	x_3	x_4	x_6
x_2	0	—9	2	—4	—1
x_5	3	3	—1	0	—2
ξ_3	0	—28	0	—14	0
f	0	—28	0	—14	0

მენტალ. ამ შემთხვევაში ξ_3-ს გადავიყვანდით თავისუფალ უცნობთა რიცხვში და ამით მივიღებდით (3) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსენს. მაგრამ ξ_3 სტრიქონში არც ერთი დადებითი წევრი არ არის. როგორ მოვიქცეთ ამ შემთხვევაში? ამოვიწეროთ ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება

$$\xi_3 = 0 - (-28x_1 - 14x_4).$$

(3) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნისათვის $\xi_3 = 0$. მაშასადამე, რადგან $x_1 \geqslant 0$ და $x_4 \geqslant 0$, ამიტომ (3) სისტემის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნისათვის $x_1 = x_4 = 0$. ამიტომ შეგვიძლია ამოვშალოთ x_1-ის და x_4-ის შესაბამისი სვეტები, მივიღებთ მომდევნო ცხრილს (ცხრ. 5):

მე-5 ცხრილის ξ_3 სტრიქონში ნულოვანი ელემენტებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება სრულდება იგივურად, ამიტომ შეიძლება ცხრილიდან ამ სტრიქონის ამოშლა. თუ ასევე ამოვშლით f ფორმის შესაბამის სტრიქონს, მივიღებთ (3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნებიდან ერთ-ერთი ამონახსნის შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს (ცხრ. 6).

ცხრილი 5

		x_3	x_6
x_2	0	2	—1
x_5	3	—1	—2
ξ_3	0	0	0
f	0	0	0

ცხრილი 6

		x_3	x_6
x_2	0	2	—1
x_5	3	—1	—2

შენიშვნა 3. იმის შემდეგ რაც f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას, მე-3 და მის მომდევნო ცხრილებში f-ის შესაბამის სტრიქონებს არავითარი გავლენა არ მოუხდენიათ არც გენერალური ელემენტის შერჩევაზე და არც (4) სისტემისათვის მიღებულ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე. ამ მიზეზის გამო, როგორც კი f მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, შეიძლება ცხრილში f-ის შესაბამისი სტრიქონის ამოშლა.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა. ვთქვათ მოცემულია შეზღუდვათა (1) სისტემა. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მისი დასაშვები საბაზისო ამონახსნი. შემოვიღოთ ξ_i დამხმარე უცნობები და დამხმარე f ფორმა. f-ის მინიმიზაციით ვიპოვით (1)-ის დასაშვებ ამონახსნს, ეს მოხდება მაშინ, როცა $\min f=0$. პირიქით $f=0$-ის შესაბამისი (2) სისტემის ყოველი დასაშვები ამონახსნი გვაძლევს (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს.

f-ის მინიმიზაციის დროს სიმპლექს-ცხრილიდან ამოვშლით იმ სვეტებს, რომელთა შესაბამისი დამხმარე ξ_i უცნობები გადავლენ თავისუფალ უცნობებში. თუ (1) სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოძებნის დროს ყველა ξ_i უცნობი აღმოჩნდება თავისუფალ უცნობთა რიცხვში, მაშინ ამოცანა ამოხსნილია და ნაპოვნი დასაშვები ამონახსენი იქნება (1) სისტემის საბაზისო ამონახსენი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ზოგიერთი ξ_i დარჩება საბაზისო უცნობთა რიცხვში. (1) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის პოვნა შეიძლება იმ შემთხვევაში, როცა ყველა დამხმარე უცნობს

გადავიყვანთ თავისუფალ უცნობთა რიცხვში ისე, რომ f დარჩეს ნულის ტოლი.

დამხმარე უცნობებიდან განვიხილოთ ნებისმიერი, ვთქვათ ξ_k. რადგან f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ ξ_k-სათვის თავისუფალი წევრი ტოლი უნდა იყოს ნულის. სიმპლექსცხრილში განვიხილოთ ξ_k-ს შესაბამისი სტრიქონი. თუ ამ სტრიქონში ერთი მაინც დადებითი ელემენტია, მაშინ მისი მიღება შეიძლება გენერალურ ელემენტად. შემდეგ ნაბიჯზე ξ_k გადავა თავისუფალ უცნობთა რიცხვში და ცხრილში შემცირდება დამხმარე უცნობთა რიცხვი.

მსგავს გარდაქმნათა თანამიმდევრული ჩატარებით მივალთ შემდეგი ორი შემთხვევიდან ერთ ერთზე.

ა) ყველა დამხმარე უცნობი ამოვარდება,

ბ) ნებისმიერი დარჩენილი დამხმარე უცნობის შესაბამის სტრიქონში ყველა ელემენტი არადადებითია. ა) შემთხვევაში ამოცანა ამოხსნილია. განვიხილოთ ბ) შემთხვევა: დარჩენილი დამხმარე უცნობებიდან ნებისმიერი მათგანი ავღნიშნოთ ξ_k-თი. როგორც აღვნიშნეთ ξ_k-სათვის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია. ამიტომ ξ_k სტრიქონის შესაბამის განტოლებას ექნება სახე:

$$\xi_k = 0 - \sum_j a_{jk} x_j + \dots, \tag{6}$$

სადაც ყველა $a_{jk} \geqslant 0$. მრავალწევრში ვგულისხმობთ ξ_i თავისუფალი უცნობების შესაბამის $\beta_i \xi_i$ წევრებს, რომლებიც ადრე ჩატარებული გარდაქმნების შედეგად გადავიდნენ თავისუფალ უცნობებში.

(1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნისათვის ყველა დამხმარე უცნობი ტოლია ნულის. ამიტომ, თუ x_j სიდიდეები დააკმაყოფილებენ (1) სისტემას, მაშინ (6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-\sum_j a_{jk} x_j = 0, \qquad a_{jk} < 0. \tag{7}$$

ცხადია, რომ ამ განტოლებაში შეგვიძლია დავტოვოთ მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული წევრები:

$$\sum_j a_{jk} x_j = 0, \qquad a_{jk} < 0. \tag{8}$$

ახლა ვთქვათ x_j რიცხვები ქმნიან (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს, მაშინ ყველა $x_j \geqslant 0$. მაგრამ რადგან ყველა $a_{jk} < 0$, ამიტომ (7) განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ მაშინ როცა ყველა $x_j = 0$. ამრიგად, (1) სისტემის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნისათვის

$$x_j = 0 \quad (a_{jk} < 0). \tag{9}$$

$a_{jk} = 0$ ჩანაწერი გვიჩვენებს, რომ (8) ტოლობები გავრცელებულია მხოლოდ იმ x_j-ზე, რომლებიც შედიან (7)-ში.

თუ გავითვალისწინებთ (8) ტოლობებს, მაშინ შეგვეძლება (8)-ში შემავალი x_j უცნობების შესაბამისი სვეტების ამოშლა სიმპლექს-ცხრილიდან. ამის შემდეგ ξ_k სტრიქონის ყველა ელემენტი აღმოჩნდება ნულის ტოლი და ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება იქნება იგივური და მაშასადამე, მისი ამოშლაც შეიძლება სიმპლექს-ცხრილიდან. ამით, დარჩენილ ცხრილში ისევ შევამცირებთ დამხმარე უცნობთა რიცხვს. მსგავს ოპერაციათა ჩატარების შედეგად მივიღებთ, რომ სიმპლექს-ცხრილში დამხმარე უცნობები აღარ გვექნება და მაშასადამე, მივიღებთ (1) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსნს. ამ შემთხვევაში უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ცხრილიდან გამორიცხული x_j უცნობი ნულის ტოლია.

სავარჯიშო

1. ამოხსენით სიმპლექსური მეთოდით შემდეგი ამოცანები:

ა) ვიპოვოთ $\min L=-3x_1+x_2-4x_3$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} 7x_1+4x_2-3x_3\leqslant 12 \\ 6x_1-2x_2+5x_3\leqslant 7 \\ 2x_1+x_2+3x_3\leqslant 7 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

ბ) ვიპოვოთ $\max L=6x_1+7x_2-x_3+3x_4$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+x_4=12 \\ 6x_2+3x_3+2x_4\leqslant 10 \\ 7x_2-2x_3-3x_4\leqslant 6 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3\geqslant 0, \quad x_4\geqslant 0. \end{cases}$$

გ) ვიპოვოთ $\max L=x_1+2x_2+4x_3+3x_4$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_4=9 \\ -2x_1+x_3-4x_4=6 \\ -5x_2+7x_4\leqslant 7 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3\geqslant 0, \quad x_4\geqslant 0. \end{cases}$$

დ) ვიპოვოთ $\min L=-6x_1-7x_2-9x_3$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3\leqslant 6 \\ -4x_1-2x_2+5x_3\leqslant 7 \\ 3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

ე) ვიპოვოთ $\min L = -2x_1-3x_2+x_3-5x_4-6x_5+x_6$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3+7x_4-8x_5=10 \\ 3x_2+7x_3-x_4+4x_5+x_6=12 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6). \end{cases}$$

პასუხი: ა) $x_1=0, \quad x_2=\frac{14}{11}, \quad x_3=\frac{21}{11}, \quad \min L=-\frac{70}{11};$

ბ) $x_1=-\frac{76}{3}, \quad x_2=0, \quad x_3=\frac{10}{3}, \quad x_4=0, \quad \min L=\frac{146}{3};$

გ) $x_1=0, \quad x_2=\frac{7}{6}, \quad x_3=\frac{47}{3}, \quad x_4=\frac{11}{6}, \quad \max L=\frac{141}{2};$

დ) $x_1=\frac{1}{23}, \quad x_2=0, \quad x_3=\frac{33}{23}, \quad \min L=-\frac{303}{23};$

ე) $x_1=94, \quad x_2=x_3=x_4=x_6=0, \quad x_5=3, \quad \min L=-86.$

2. ამოხსენით ამოცანები ხელოვნური ბაზისის მეთოდით:

ა) ვიპოვოთ $\min L=-3x_1+x_2+3x_3-x_4$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1+2x_3-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=6 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

ბ) ვიპოვოთ $\max L=-2x_1-x_2+x_3+x_4$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

გ) ვიპოვოთ $\max L=x_1-2x_2+3x_3$, თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3) \end{cases}$$

დ) ვიპოვოთ $\min L=x_1+x_2-x_3-2x_5$, თუ

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ x_3-2x_4=2 \\ 3x_2-x_4+x_5\leqslant 5 \\ x_2+x_5\geqslant 3 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

პასუხი: ა) $x_1=1, \quad x_2=1, \quad x_3=3, \quad x_4=0, \quad \min L=7;$

ბ) $x_1=3, \quad x_2=0, \quad x_3=1, \quad x_4=3, \quad \max L=-2;$

გ) ამოცანას ამონახსენი არა აქვს;

დ) $x_1=0, \quad x_2=2, \quad x_3=4, \quad x_4=1, \quad x_5=1, \quad \min L=-2.$

3. ამოხსენით გრაფიკულად:

ა) $L=2x_1+3x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 10 \\ x_1+2x_2\leqslant 4 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

ბ) $L=-4x_1-x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 6x_1+x_2\geqslant 6 \\ 3x_1+4x_2\geqslant 12 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

გ) $L=-3x_1-x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 12 \\ x_1-x_2\leqslant 1 \\ 5x_1+x_2\geqslant 5 \\ 3x_1+2x_2\geqslant 6 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

დ) $L=x_1-x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 \\ -x_1+x_2\leqslant 2 \\ 3x_1-x_2\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

პასუხი:

ა) $x_1=0$, $x_2=0$, $\min L=0$; $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{5}{2}$, $\max L=\frac{27}{4}$.

ბ) $x_1=\infty$, $x_2=\infty$, $\min L=-\infty$; $x_1=\frac{4}{7}$; $x_2=\frac{18}{7}$, $\max L=-\frac{34}{7}$.

გ) $x_1=3$, $x_2=2$, $\min L=-11$; $x_1=\frac{4}{7}$, $x_2=\frac{15}{7}$, $\max L=-\frac{27}{7}$.

დ) $x_1=0$, $x_2=2$, $\min L=-2$; $x_1=4$, $x_2=0$, $\max L=1$.

XI თავი

თამაშთა თეორიის ელემენტები

§ 1. თამაშთა თეორიის საგანი, მათემატიკური მოდელები

თამაშთა თეორია შეისწავლის კონფლიქტური ტიპის მოვლენათა მათემატიკურ მოდელებს. ეს ისეთი მოვლენებია, რომლებშიაც მონაწილეობს რამდენიმე დაინტერესებული მხარე, ამასთან მათი ინტერესები არ ემთხვევა ერთმანეთს.

კონფლიქტური ამოცანებით, კერძოდ აზარტული თამაშებით, დაინტერესება დაიწყო ჯერ კიდევ აღორძინების ეპოქაში. ამოცანათა მეცნიერული განხილვა გვხვდება პასკალის, ფერმას და ჰიუგენსის მიმოწერებში. ფაქტიურად აქ ეყრება საფუძველი ალბათობის თეორიას.

თამაშთა თეორიის ჩამოყალიბება ხდება მე-20 საუკუნის ოციან წლებში ჯერ ფრანგი მათემატიკოსის ბორელის მეცადინეობით, შემდეგ კი ამერიკელი მეცნიერის ჯონ ფონ ნეიმანის დასრულებული თეორიით.

თამაშთა თეორია ძალზე სწრაფი ტემპებით განვითარდა და ახლაც ვითარდება. ობიექტურ რეალობად იქცა მისი პრაქტიკული გამოყენებაც. ვერ დაასახელებ ადამიანის მოღვაწეობის რაიმე სფეროს, სადაც არ მოიძებნოს კონფლიქტის ანუ თამაშის ტიპის ამოცანა.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია თამაშთა თეორიის როლი ეკონომიკური მეცნიერებისათვის, მასზეა დაფუძნებული წონასწორობისა და მდგრადობის თეორიები.

ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნა ნიშნავს ამოცანის შინაარსის ამსახველი მათემატიკური ამოცანის ჩამოყალიბებას. რაც უფრო სრულადაა გადმოცემული მოდელში ამოცანის პირობები, მით უფრო კარგი და მისაღებია იგი. მოდელი ამავე დროს უნდა იყოს საკმაოდ ზოგადი და რეალიზებადი, ე. ი. მის ჩარჩოებში უნდა ხდებოდეს

ამოცანათა ფართო კლასი და უნდა ხერხდებოდეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა.

კონფლიქტის მათემატიკური მოდელირების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს ყველა არსებითი ფაქტორი, პირველ რიგში კი მისი ძირითადი კომპონენტები:

1) მონაწილენი, რომლებსაც მოთამაშეები ეწოდება,

2) გადაწყვეტილებანი, რომელთა მიღებაც მოთამაშეებს შეუძლიათ (მოთამაშეთა სტრატეგიები),

3) მოთამაშეთა მიზნები. ისინი წარმოადგენენ რაღაც სარგებლიანობებს (მოგებას, წაგებას და სხვა) და, როგორც წესი, მოცემული არიან ფუნქციების საშუალებით.

არსებობს თამაშთა თეორიის სხვადასხვა მოდელი ანუ ფორმა. ყველაზე უფრო გავრცელებული, შესწავლილი და მისაღები ფორმაა თამაშის ე. წ. ნორმალური ფორმა. ჩვენც ძირითადად ამ მოდელს შევისწავლით. განვიხილავთ აგრეთვე თამაშებს ე. წ. პოზიციური ფორმით. ძირითადად ჩვენ შევისწავლით თამაშებს ორი მონაწილით. თამაშები მრავალი მონაწილით (ორზე მეტი მონაწილით) რთულია იმის გამო, რომ მოთამაშეთა შორის შესაძლებელია წარმოიშვას დაჯგუფებები (კოალიციები). მათ ჩვენ აქ არ შევისწავლით.

საგნის შესწავლის დროს სტუდენტმა პირველ რიგში ყურადღებით უნდა აითვისოს ძირითადი ცნებები და შეითვისოს მათემატიკური მოდელის არსი, მოთამაშეთა მიდგომა და ამოხსნის კრიტერიუმები. კურსში ძირითადია წონასწორობის სიტუაციის ცნება. მისი შინაარსის გაგება ბევრად განსაზღვრავს საგნის ათვისების დონეს.

თამაშთა თეორია მათემატიკური დისციპლინაა და მისი მკაცრი მათემატიკური შესწავლა მოითხოვს საკმაოდ ფართო მათემატიკურ განათლებას. ტექნიკური სპეციალობის სტუდენტთათვის ისეთი თეორემების დამტკიცება, როგორიცაა უსასრულო თამაშთა ძირითადი თეორემა, ნეშის თეორემა ბიმატრიცული თამაშებისათვის და სხვა, არაა სავალდებულო. საკმარისია ასეთ შემთხვევაში სტუდენტი დაკმაყოფილდეს თეორემის შინაარსის აღქმით.

§ 2. თამაშები პოზიციური ფორმით

თამაშის პოზიციური ფორმა სალონური თამაშების ბუნებრივი გეომეტრიული მოდელია, რომელშიაც არსებითია მოთამაშეთა მიერ გადაწყვეტილებათა მიღება გარკვეული თანმიმდევრობით. თამაში იწყება საწყისი მდგომარეობიდან (პოზიციიდან) და შედგება მოთამაშეთა სვლების მიმდევრობისაგან. ზოგიერთ თამაშში სვლებს შორის შეიძლება გაკეთდეს შემთხვევითი სვლები. სვლების დაწესებული მიმდევრო-

ბისა და შინაარსის გარდა თამაშში არსებითია აგრეთვე თამაშის მსვლელობის შესახებ მოთამაშეების ინფორმირება, რომელიც შეიძლება იყოს სხვადასხვა სისრულის და ხასიათის. მაგალითად, ჭადრაკის თამაშის დროს თითოეულმა მოთამაშემ იცის თუ რა სვლები გაკეთდა თავისი სვლის მომენტამდე (იცის პოზიცია, რომელშიდაც უნდა გააკეთოს სვლა); პოკერში მოთამაშემ არ იცის, საზოგადოდ, ზოგიერთი სვლა-შემთხვევითი სვლა; ნარდის თამაშისას მოთამაშემ იცის წინასვლები სრულად, მაგრამ მისი სვლების სიმრავლე აღებულ მომენტში დამოკიდებულია შემთხვევაზე.

ყოველი თამაში უნდა დამთავრდეს რაღაც შედეგით, ეს შედეგი კი უნდა იყოს შეფასებული თითოეული მოთამაშის მიერ სარგებლიანობის თვალსაზრისით. ეს იმას ნიშნავს, რომ საბოლოო პოზიციათა სიმრავლეზე მოთამაშეს უნდა ჰქონდეს უპირატესობის მიმართება. ეს მიმართება ცხოვრებაში გამოიხატება ქულებით, თანხით ან სხვ. ჩვენ მას წარმოვიდგენთ როგორც ფუნქციას, რომელიც თამაშის ყოველ გამოსავალს (საბოლოო პოზიციას) შეუსაბამებს გარკვეულ რიცხვს — მოგებას.

გადავიდეთ პოზიციური თამაშის ფორმალურ განსაზღვრებაზე. ამისათვის წინასწარ საჭირო იქნება ე. წ. ტოპოლოგიური ხის ცნება. ესაა წვეროების სასრული სიმრავლე, ერთი გამოკვეთილი A საწყისი წვეროთი, რომლებიც შეერთებულია ხაზებით (შტოებით), ისე, რომ მიღებულია ბმული ფიგურა ჩაკეტილი მრუდის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ორი წვეროსათვის არსებობს შტოების ერთადერთი მიმდევრობა, რომელიც მათ აერთებს. ორ წვეროს ეწოდება მეზობელი, თუ მათ აერთიანებს შტო.

C წვერო მისდევს B წვეროს, თუ A და C წვეროების შემაერთებელი შტოების მიმდევრობა გადის B-ზე. წვერო საბოლოოა, თუ მას არ მოსდევს არც ერთი წვერო. სხვაგვარად წვეროს ეწოდება პროზიცია, ხოლო შტოს-ალტერნატივა. საბოლოო პოზიციის A წვეროსთან შემაერთებელ შტოთა მიმდევრობას ეწოდება პარტია. ასეთი ტერმინოლოგიის საშუალებით შეგვიძლია გადავიდეთ პოზიციური თამაშის ფორმალურ განსაზღვრებაზე.

განსაზღვრება 1. Γ პოზიციური თამაში ეწოდება ტოპოლოგიურ ხეს, რომლისთვისაც მოცემულია:

1. A საწყისი წვერო, რომელსაც ეწოდება თამაშის საწყისი პოზიცია.
2. ხის საბოლოო პოზიციებზე განსაზღვრული ორი ნამდვილი ფუნქცია, რომლებსაც ეწოდება მოთამაშეთა მოგების ფუნქციები;
3. არასაბოლოო პოზიციების დაყოფა P_0, P_1, P_2 სიმრავლეებად — მოთამაშეთა სვლების სიმრავლეებად. P_0 სიმრავლის პოზიციაში სვლა შემთხვევითია, P_1-ის პოზიციაში — I მოთამაშის, P_2-ის პოზიციაში — II მოთამაშისა;

4. ალბათური განაწილება P_0 სიმრავლის ყოველ პოზიციაში არსებულ ალტერნატივებზე.

5. $P_i(i=1,2)$ სიმრავლის დახლეჩა P_i^* ქვესიმრავლეებად, ე. წ. ინფორმაციულ ქვესიმრავლეებად. ეს დახლეჩა ისეთია, რომ თითოეული ინფორმაციული სიმრავლის პოზიციას აქვს ერთი და იმავე რაოდენობის ალტერნატივები და არცერთ ინფორმაციულ სიმრავლეში არ შედის ერთი პარტიის ორი პოზიცია.

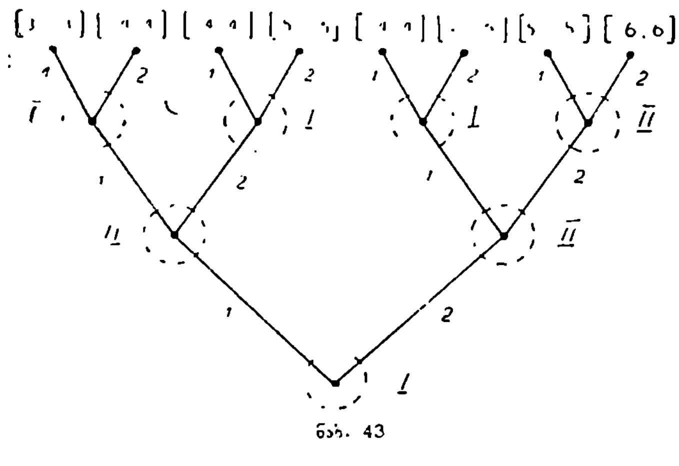
ინფორმაციული სიმრავლე ეს ის სიმრავლეა, რომლის შესახებაც მოთამაშემ იცის, რომ მასში იმყოფება, მაგრამ ზუსტად არ იცის ამ სიმრავლის რომელ პოზიციაშია.

ყველაფერი ეს წარმოვიდგინოთ ერთი მარტივი თამაშის ნაირსახეობებით: ნახაზებზე ინფორმაციულ სიმრავლეებს შემოვხაზავთ წყვეტილი მრუდეებით. საბოლოო პოზიციებში მიღებული წყვილების პირველი წევრი პირველი მოთამაშის მოგებაა, მეორე—მეორე მოთამაშისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ შემდეგი თამაში:
I სვლას აკეთებს I მოთამაშე და ირჩევს 1 ან 2 რიცხვს,
II სვლას აკეთებს II მოთამაშე და ირჩევს 1 ან 2 რიცხვს,
III სვლას აკეთებს I მოთამაშე და ირჩევს 1 ან 2 რიცხვს.
ამის შემდეგ თამაში მთავრდება და იკრიბება სამივე ეტაპზე არჩეული რიცხვები. თუ ეს ჯამი კენტია, ასეთ თანხას უხდის II მოთამაშე I-ს, თუ ლუწია — პირიქით.

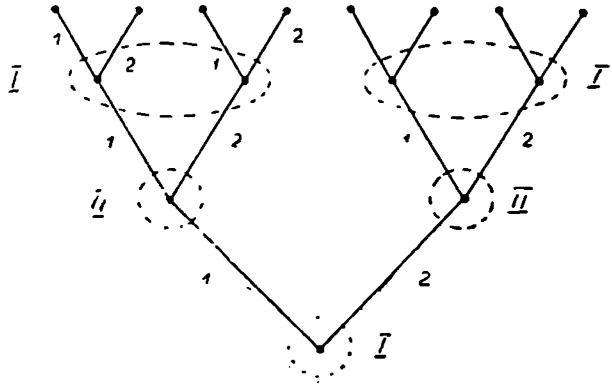
იმისდა მიხედვით, თუ როგორ არიან მოთამაშენი ინფორმირებული სვლების შესახებ, გვექნება სხვადასხვა შემთხვევა:

ა) თითოეულმა მოთამაშემ იცის ყველა წინა სვლა. თამაშის ხეს ექნება სახე (ნახ. 43):



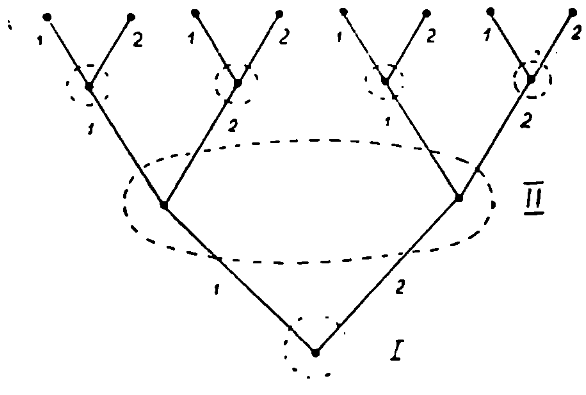
ნახ. 43

ბ) მეორე მოთამაშემ იცის I სვლა, ხოლო პირველმა მოთამაშემ არ იცის II სვლა (ნახ. 44):



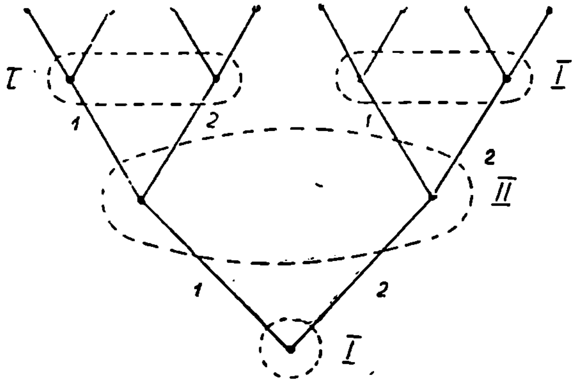
ნახ. 44

გ) მეორე მოთამაშემ არ იცის I სვლა, ხოლო პირველმა იცის II სვლა (ნახ. 45):



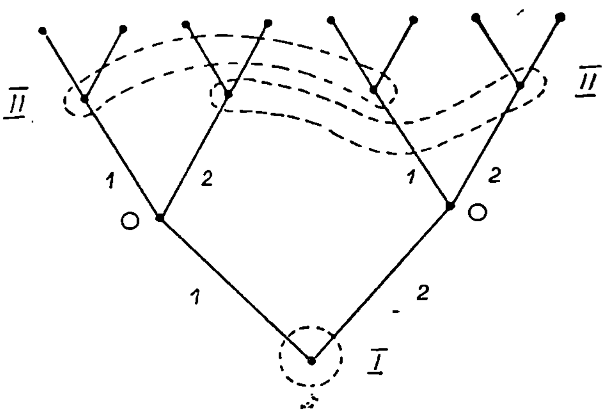
ნახ 45

დ) მეორე მოთამაშემ არ იცის I სვლა, ხოლო პირველმა მოთამაშემ არ იცის II სვლა (ნახ. 46):



ნახ. 46

ე) ვთქვათ I სვლის შემდეგ კეთდება შემთხვევითი სვლა (II სვლა)— აირჩევა რიცხვი 1 ალბათობით 1/4, რიცხვი — 2— ალბათობით 3/4. III სვლა II მოთამაშისაა, რომელმაც იცის II სვლის შედეგი, მაგრამ არ იცის I სვლა. III სვლაზე მეორე ირჩევს ისევ 1 ან 2-ს. სამივე სვლის შედეგები იკრიბება და მოთამაშენი მოგებებს იღებენ ზემოთ აღწერილი წესით (ნახ. 47):



ნახ 47

როგორც ვხედავთ, პოზიციური ფორმა გვიჩვენებს მრავალსვლიანი თამაშების განშტოების სქემას სვლათა მიმდევრობითი შესრულებისას, ეს ფორმა ძალზე მოხერხებულია მცირე და საშუალო სიდიდის თამაშების აღწერისათვის. ისეთი თამაშები, რომელთა კვანძებშიაც ალტერნატივების რიცხვი შესამჩნევად იზრდება (მაგალითად, ჭადრაკში), შეუძლებელია აღიწეროს ასეთი ფორმით. თუმცა სამართლიანობა მოითხოვს ითქვას, რომ ასეთი თამაშებისათვის არც მეორე ფორმა იძლევა პრაქტიკულად სასურველ შედეგს.

§ 8. თამაშები ნორმალური ფორმით

წარმოვიდგინოთ პოზიციური თამაში ჭადრაკის მაგალითზე. მოჭადრაკე აკეთებს სვლას მაშინ, როდესაც მისი ჯერი დადგება. რაც უფრო მაღალი კვალიფიკაციისა მოჭადრაკე, ის უფრო მეტ „სვლებს ითვლის" — მან რამდენიმე სვლისათვის იცის პასუხები პარტიის ნებისმიერი სიტუაციისათვის. ახლა წარმოვიდგინოთ ისეთი მოჭადრაკე, რომელსაც გამზადებული აქვს ყველა შესაძლო პოზიციისათვის ერთი გარკვეული სვლა (კარგი ან ცუდი). ამ სვლათა ერთობლიობით განისაზღვრება მისი თამაში. თუ მეორე მოთამაშესაც აქვს სვლათა ერთი ასეთი ერთობლიობა, მაშინ თამაშის შედეგი ცალსახად იქნება განსაზღვრული — მას მოთამაშეთა ჩარევის გარეშე გაარკვევს მესამე პირი — ვთქვათ, მსაჯი.

ცხადია, სვლათა ზემოაღნიშნული ერთობლიობა ძალზე დიდი მოცულობისაა, დიდია აგრეთვე ამ ერთობლიობათა სიმრავლეც. პრაქტიკულად მათი აღწერა შეუძლებელია, მაგრამ თეორიული თვალსაზრისით დასაშვებია. დასაშვებია ის, რომ თამაშის წინ მოთამაშე ირჩევს იმ სვლებს, რომლებიც მან უნდა გააკეთოს მოსალოდნელ პოზიციებში. სხვანაირად ამბობენ, რომ მოთამაშე ირჩევს გარკვეულ სტრატეგიას.

განსაზღვრება 1. მოთამაშის სტრატეგია არის ფუნქცია, რომელიც ამ მოთამაშის ყოველ საინფორმაციო სიმრავლეს შეუსაბამებს რომელიღაც ალტერნატივას.

აღვნიშნოთ პირველი და მეორე მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლეები შესაბამისად S_1 და S_2-ით. სტრატეგიათა ყოველი $\{s_1, s_2\}$ წყვილისათვის, სადაც $s_1 \in S_1$ და $s_2 \in S_2$, მოცემული უნდა იყოს $H_1(s_1, s_2)$ და $H_2(s_1, s_2)$ ფუნქციები, განსაზღვრული S_1 და S_2 სიმრავლეთა $S_1 \times S_2$ დეკარტულ ნამრავლზე. მათ შესაბამისად ეწოდება პირველი და მეორე მოთამაშის მოგების ფუნქციები.

განსაზღვრება 2. სტრატეგიათა $\{s_1, s_2\}$ წყვილს, სადაც $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, ეწოდება სიტუაცია.

თამაში ნორმალური ფორმით წარმოიდგინება შემდეგნაირად: პირველი მოთამაშე S_1 სიმრავლიდან ირჩევს რაღაც s_1 სტრატეგიას, მეორე მოთამაშე S_2 სიმრავლიდან ირჩევს s_2 სტრატეგიას. ამის შემდეგ პირველი ღებულობს $H_1(s_1, s_2)$ მოგებას, ხოლო მეორე — $H_2(s_1, s_2)$ მოგებას.

განსაზღვრება 3. თამაში ნორმალური ფორმით არის ოთხეული

$$\langle S_1, \ S_2, \ H_1, \ H_2 \rangle.$$

თუ სტრატეგიათა S_1 და S_2 სიმრავლეები სასრულია, მაშინ თამაშის წარმოდგენა შეიძლება მატრიცის სახით, რომლის ელემენტები მოგებათა წყვილებია შესაბამის სიტუაციებში. ამისათვის საჭიროა გადავნომროთ S_1 და ნომრები შევუსაბამოთ სტრიქონებს, გადავნომროთ S_2 და ნომრები შევუსაბამოთ სვეტებს. მაგალითისათვის ნორმალური ფორმით წარმოვადგინოთ წინა პარაგრაფში განხილული თამაში. პირველი მოთამაშის 4 შესაძლო სტრატეგია თანმიმდევრულად წარმოვიდგინოთ ასე: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), სადაც პირველი კომპონენტი არჩევანია I სვლაზე, მეორე კი — მესამე სვლაზე. მეორე მოთამაშის სტრატეგია არის ერთიანის ან ორიანის არჩევა მეორე სვლაზე (განვიხილოთ დ) ვარიანტი).

$$\begin{array}{cc} (1, & 1) \\ (1, & 2) \\ (2, & 1) \\ (2, & 2) \end{array} \quad \begin{pmatrix} [3, & -3] & [-4, & 4] \\ [-4, & 4] & [5, & -5] \\ [-4, & 4] & [5, & -5] \\ [5, & -5] & [-6, & 6] \end{pmatrix}$$

სასრული თამაშები ასეთი ორმაგი მატრიცების საშუალებით მოიცემა. ამიტომ მათ *ბიმატრიცულ თამაშებს* უწოდებენ. თუ თამაშები ანტაგონისტურია, ე. ი. თუ $H_1(s_1, s_2) = -H_2(s_1, s_2)$ ნებისმიერი სიტუაციისათვის, მაშინ მატრიცის ყოველი წყვილის მეორე ელემენტი არის პირველის მოპირდაპირე რიცხვი. წყვილების ჩაწერა აღარაა საჭირო, შეიძლება ჩავწეროთ მხოლოდ ერთგანზომილებიანი მატრიცა. ჩვენი მაგალითი არის ანტაგონისტური თამაშის ნიმუში, რომლის მატრიცაა:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \\ -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

ანტაგონისტურ თამაშებს სხვაგვარად *ნულჯამიანი თამაშები* ეწოდება, ხოლო სასრულ ანტაგონისტურ თამაშებს — *მატრიცული თამაშები*.

§ 4. ოპტიმალობის კრიტერიუმები

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თითოეული მოთამაშის მიზანია მიიღოს რაც შეიძლება დიდი მოგება, მაგრამ ეს მარტო მის სურვილზე და ოსტატობაზე კი არაა დამოკიდებული, არამედ მეორე მოთამაშის მოქმედებაზეც (არჩევანზე). ყოველი სიტუაცია ხომ ორივე მოთამაშის არჩევანს შეიცავს და ერთის არჩევანი შეიძლება სრულებით არ იყოს სახარბიელო მეორესათვის. მიუხედავად ამისა, უნდა გაირკვეს როგორ იმოქმედოს მოთამაშემ კონკრეტულ თამაშში, დადგინდეს როდის შეიძლება ჩაითვალოს თამაში ამოხსნილად. უნდა ვაღიაროთ, რომ ამ მიმართულებით სრული სიცხადე არაა მიღწეული, და, ალბათ, ვერც მიიღწევა. გამონაკლისს წარმოადგენენ ანტაგონისტური თამაშები.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ამოხსნადობის ძირითადი კონცეფციები ანუ ოპტიმალობის კრიტერიუმები, რომლებიც მიღებულია თანამედროვე მეცნიერებაში.

ო პ ტ ი მ ი ს ტ უ რ ი ა მ ო ნ ა ხ ს ე ნ ი. ესაა საუკეთესო სიტუაცია ორივე მოთამაშისათვის, თუ ასეთი არსებობს. თითოეული მოთამაშე ეძებს თავისი მოგების ფუნქციის მაქსიმუმს (ჩვენ ყველგან განვიხილავთ ისეთ H_1 და H_2 ფუნქციებს, რომლებიც თავიანთ განსაზღვრის $S_1 \times S_2$ არეზე აღწევენ უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს):

$$V_1=\max_{\{s_1,\ s_2\}} H_1(s_1,\ s_2), \qquad V_2=\max_{\{s_1,\ s_2\}} H_2(s_1,\ s_2).$$

თუ ორივე მაქსიმუმი მიიღწევა ერთსა და იმავე (s_1^*, s_2^*) სიტუაციაში, მაშინ ეს სიტუაცია იქნება თამაშის ამონახსენი, ხოლო s_1^* და s_2^* — ოპტიმალური სტრატეგიები შესაბამისად პირველი და მეორე მოთამაშისათვის.

ოპტიმისტური ამონახსნები, როგორც წესი არსებობს ისეთ ამოცანებში, სადაც ფაქტიურად მოთამაშეებს შორის კონფლიქტი არაა, მაშასადამე, ამოცანა არაა თამაშის ტიპის. ცხადია, ანტაგონისტურ თამაშში ოპტიმისტური ამონახსენი არ შეიძლება არსებობდეს.

პ ე ს ი მ ი ს ტ უ რ ი ა ნ უ მ ა ქ ს ი მ ი ნ უ რ ი ა მ ო ნ ა ხ ს ე ნ ი. მოთამაშე ყოველი გადაწყვეტილებისათვის ორიენტაციას იღებს ყველაზე უარეს მოსალოდნელ შედეგზე, ანუ გარანტირებულ მნიშვნელობაზე და ისე არჩევს თავის სტრატეგიას, რომ ეს გარანტირებული მოგება იყოს მაქსიმალური. ეს მაქსიმინური მოგებები $V_1=\max\limits_{s_1}\min\limits_{s_2} H_1(s_1, s_2)$ და $V_2=\max\limits_{s_2}\min\limits_{s_1} H_2(s_1, s_2)$ გვაძლევენ თამაშის ამონახსენს. s_1^* და s_2^* სტრატეგიებს, რომელზედაც მიიღწევა მაქსიმუმები, ეწოდება ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ი ს ტ რ ა ტ ე გ ი ე ბ ი შესაბამი-

სად პირველი და მეორე მოთამაშისათვის. მაქსიმინურმა მიდგომამ, ბუნებრივია, უნდა გაამართლოს ნულჯამიან თამაშებში. ბუნებრივად იბადება კითხვა — ყოველთვის არის თუ არა მაქსიმინური სტრატეგია მართლაც საუკეთესო.

წ ო ნ ა ს წ ო რ უ ლ ი ა მ ო ნ ა ხ ს ე ნ ი. ეს ისეთი სიტუაციაა, რომლისგანაც გადახრა არაა სახარბიელო თითოეული მოთამაშისათვის.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. $\{s_1^*, s_2^*\}$ სიტუაციას ეწოდება წონასწორობის სიტუაცია, თუ $H_1(s_1, s_2^*)\leqslant H_1(s_1^*, s_2^*)$, $\forall s_1\in S_1$, $H_2(s_1^*, s_2)\leqslant \leqslant H_2(s_1^*, s_2^*)$, $\forall s_2\in S_2$.

დ ა ს ა შ ვ ე ბ ი ა ნ უ პ ა რ ე ტ ო ს ა მ ო ნ ა ხ ს ე ნ ი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. $\{s_1^*, s_2^*\}$ სიტუაციას ეწოდება პარეტოს ამონახსენი, თუ არ არსებობს $\{s_1, s_2\}$ $(s_1\in S_1;\ s_2\in S_2)$ სიტუაცია, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$H_1(s_1, s_2)\geqslant H_1(s_1^*, s_2^*),\quad H_2(s_1, s_2)\geqslant H_2(s_1^*, s_2^*).$$

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, პარეტოს ამონახსენი გვეუბნება, რომ არცერთ მოთამაშეს არ შეუძლია თავისი მოგების გაზრდა, თუ არ დააზარალა მეორე. პარეტის ოპტიმუმი ფაქტიურად არის „კოლექტიური წონასწორობა“.

პარეტოს ამონახსნები, როგორც წესი, ძალზე ბევრია. ანტაგონისტურ თამაშებში, მაგალითად, ნებისმიერი სიტუაცია პარეტოს ამონახსენია.

საზოგადოდ, ბუნებრივია, იდეალურად ჩაითვალოს ის სიტუაცია, რომელიც იქნება როგორც დასაშვები, ასევე წონასწორული.

§ 3. ანტაგონისტური თამაშები. ზოგადი თეორია

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. 1. თამაშს ეწოდება ანტაგონისტური ანუ ნულჯამიანი, თუ ნებისმიერი სიტუაციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$H_1(s_1, s_2)+H_2(s_1, s_2)=0.$$

გადავწეროთ ეს ტოლობა ასეთნაირად $H_1(s_2, s_2)=-H_2(s_1, s_2)$. იგი გვეუბნება, რომ რასაც იგებს პირველი მოთამაშე, იმას აგებს მეორე. სხვანაირად ამბობენ რომ მოთამაშეთა ინტერესები სავსებით საწინააღმდეგოა. იმის გამო, რომ H_2 ფუნქცია განისაზღვრება H_1 ფუნქციით, შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ პირველი მოთამაშის მოგების ფუნქციით და აღვნიშნოთ იგი $H(s_1, s_2)$-ით. მეორე მოთამაშის მოგების ფუნქცია იქნება $-H(s_1, s_2)$. თამაში წარმოგვიდგება $<S_1, S_2, H>$ სამეულის სახით.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ანტაგონისტური თამაშებისათვის ბუნებრივი და საინტერესო უნდა იყოს მაქსიმინური მიდგომა, მითუმეტეს რომ იგი მჭიდროდ უკავშირდება წონასწორობის სიტუაციის ცნებას. ჩავწეროთ წონასწორობის სიტუაციის განსაზღვრება ანტაგონისტური თამაშებისათვის. $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ სიტუაცია იქნება წონასწორობის სიტუაცია, თუ ნებისმიერი $s_1 \in S_1$ და $s_2 \in S_2$ სტრატეგიებისათვის ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2), \qquad -H(\bar{s}_1, s_2) \leqslant -H(\bar{s}_1, s_2).$$

მეორე უტოლობის (-1)-ზე გამრავლებით და პირველთან გაერთიანებით, მივიღებთ

$$H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, s_2). \tag{1}$$

ეს უკანასკნელი ორმაგი უტოლობა გამოსახავს H ფუნქციის განსაკუთრებულ თვისებას — $\{\bar{s}_1, s_2\}$ წერტილი არის ფუნქციის უნაგირა წერტილი. ამ წერტილში H ფუნქცია პირველი ცვლადის მიმართ აღწევს მაქსიმუმს, ხოლო მეორე ცვლადის მიმართ — მინიმუმს.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ უნაგირა წერტილის (წონასწორობის სიტუაციის) განსაზღვრება წერტილოვანი თვისება როდია, იგი გულისხმობს უტოლობათა შესრულებას სტრატეგიათა მთელ სიმრავლეებზე და იგი უნდა განვასხვავოთ ანალოგიური გეომეტრიული და ანალიზური ცნებებისაგან: შეიძლება რაიმე არეზე ფუნქციას ჰქონდეს რამდენიმე ლოკალური უნაგირი, მაგრამ თამაშთა თეორიის გაგებით ისინი იქნებიან უნაგირა წერტილები, თუ ამ წერტილებში H ფუნქციის მნიშვნელობები სხვადასხვაა. გარდა ამისა, თამაშის უნაგირა წერტილი ხშირად არის საზღვარზე და სრულებით არ ჰგავს უნაგირს.

ახლა გავიხსენოთ მოთამაშეთა გარანტირებული მოგებები ანუ მაქსიმინები. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული პირველი მოთამაშისათვის ეს იქნება $\max\limits_{s_1} \min\limits_{s_2} H(s_1, s_2)$, ხოლო მეორე მოთამაშისათვის $\max\limits_{s_2} \min\limits_{s_1} [-H(s_1, s_2)]$. თუ გავიხსენებთ, რომ $\min[-f(x)] = -\max f(x)$ და $\max[-f(x)] = -\min f(x)$, მაშინ $-\min\limits_{s_2} \max\limits_{s_1} H(s_1, s_2)$ იქნება მეორე მოთამაშის გარანტირებული მოგება. $\min\limits_{s_2} \max\limits_{s_1} H(s_1, s_2)$ იქნება ის გარანტირებული სიდიდე, რომელსაც არ აღემატება მეორე მოთამაშის წაგება (რა თქმა უნდა, თუ არ მოისურვებს).

თ ე ო რ ე მ ა 1. მართებულია უტოლობა

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2) \leqslant \min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.: ნებისმიერი $s_1 \in S_1$ და $s_2 \in S_2$ სტრატეგიებისათვის ცხადია, რომ

$$\min_{s_2} H(s_1,s_2) \leqslant \max_{s_1} H(s_1, s_2).$$

უტოლობის მარცხენა მხარე არის s_1-ის, ხოლო მარჯვენა მხარე s_2-ის ფუნქცია, ამიტომ

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2) \leqslant \max_{s_1} H(s_1, s_2)$$

უტოლობა სრულდება ნებისმიერი s_2-სათვის. ამის გამო მართებული იქნება აგრეთვე დამოკიდებულება

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1,s_2) \leqslant \min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2).$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. $V_* = \max\limits_{s_1} \min\limits_{s_2} H(s_1, s_2)$ სიდიდეს ეწოდება თამაშის ქვედა მნიშვნელობა ანუ ქვედა ფასი, ხოლო $V^* = \min\limits_{s_2} \max\limits_{s_1} H(s_1, s_2)$ სიდიდეს — ზედა მნიშვნელობა ანუ ზედა ფასი.

თუ თამაშის ზედა და ქვედა მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ თამაშს აქვს ამონახსენი და $V = V_* = V^*$ სიდიდეს უწოდებენ თ ა მ ა შ ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს.

თ ე ო რ ე მ ა 2. იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1,s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2) \tag{2}$$

ტოლობას, აუცილებელი და საკმარისია H ფუნქციას გააჩნდეს უნაგირა წერტილი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ, არსებობს $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ უნაგირა წერტილი, ე. ი. ნებისმიერი $s_1 \in S_1$ და $s_2 \in S_2$-სათვის სრულდება

$$H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, s_2) \tag{3}$$

ტოლობა. ამიტომ მართებულია

$$\max_{s_1} H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \leqslant \min_{s_2} H(\bar{s}_1, s_2)$$

უტოლობაც. მარცხენა მხარეში s_2-ის ნაცვლად ავიღოთ მინიმუმის მიმნიჭებელი მნიშვნელობა. ხოლო მარჯვნივ s_1-ის ნაცვლად — მაქსიმუმის მიმნიჭებელი, მაშინ მითუმეტეს შესრულდება

$$\min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1,s_2) \leqslant \max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1,s_2)$$

უტოლობა, რომელიც წინა თეორემასთან ერთად ამტკიცებს საკმარისობას.

ახლა დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს (2) ტოლობას. $\bar{s}_1$ და $\bar{s}_2$-ით აღვნიშნოთ ის მნიშვნელობები, რომლებზედაც მიიღწევა გარე ექსტრემუმები, მაშინ ადგილი ექნება უტოლობათა შემდეგ ჯაჭვს:

$$\min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2) = \max_{s_1} H(s_1, \bar{s}_2) \geqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{s_2} H(\bar{s}_1, s_2) = \max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2).$$

კიდურა წევრების ტოლობის გამო აქედან ვღებულობთ

$$\max_{s_1} H(s_1, \bar{s}_2) = H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \min_{s_2} H(\bar{s}_1, s_2). \tag{3'}$$

ეს კი უნაგირა წერტილის განსაზღვრების ტოლფასია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ არსებობს ისეთი $\bar{s}_1 \in S_1$, $\bar{s}_2 \in S_2$ და ნამდვილი V რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant V \leqslant H(\bar{s}_1, s_2), \quad \forall s_1 \in S_1, \quad s_2 \in S_2,$$

მაშინ $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ წონასწორობის სიტუაციაა და $V = H(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ზემოთ, აქაც

$$\max_{s_1} H(s_1, \bar{s}_2) = V = \min_{s_2} H(\bar{s}_1, s_2);$$

$$V = \min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2) = \max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2).$$

მაშასადამე, გარე ექსტრემუმები მიიღწევა $\bar{s}_1$ და $\bar{s}_2$-სათვის და $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ არის წონასწორობის სიტუაცია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ და $\{\bar{s}_1^*, \bar{s}_2^*\}$ წონასწორობის სიტუაციებს ეწოდება ურთიერთჩანაცვლებადი, თუ წონასწორობის სიტუაციებს წარმოადგენენ აგრეთვე $\{\bar{s}_1, s_2^*\}$ და $\{s_1^*, \bar{s}_2\}$. სიტუაციებს ეწოდება ექვივალენტური, თუ $H(\bar{s}, \bar{s}_2) = H(s_1^*, s_2^*)$.

თ ე ო რ ე მ ა 3. ანტაგონისტურ თამაშებში წონასწორობის სიტუაციები ექვივალენტურია და ურთიერთჩანაცვლებადი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ გვაქვს ორი $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ და $\{s_1^*, s_2^*\}$ წონასწორობის სიტუაცია. § 4-ის განსაზღვრება 1-ის თანახმად:

$$H(s_1^*, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \leqslant H(s_1, \bar{s}_2^*),$$
$$H(\bar{s}_1, s_2^*) \leqslant H(s_1^*, s_2^*) \leqslant H(\bar{s}_1^*, \bar{s}_2),$$

საიდანაც $H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = H(s_1^*, \bar{s}_2) = H(\bar{s}_1, s_2^*) = H(s_1^*, s_2^*)$. ექვივალენტურობა დამტკიცებულია. ჩანაცვლებადობაც იოლად მტკიცდება იგივე განსაზღვრებიდან გამომდინარე. მართლაც, ნებისმიერი s_1 და s_2-სათვის

$$H(s_1, \bar{s}_2) \leqslant H(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = H(s_1^*, \bar{s}_2) = H(s_1^*, s_2^*) = H(s_1^*, s_2) \text{ და } \{s_1^*, \bar{s}_2\}$$

წონასწორობის სიტუაციაა. $\{\bar{s}_1, s^*_2\}$ სიტუაციისათვის დამტკიცება ანალოგიურია.

შ ე დ ე გ ი. ანტაგონისტურ თამაშს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთადერთი მნიშვნელობა.

თეორემა 2-ის თანახმად ანტაგონისტურ თამაშს აქვს ამონახსენი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია წონასწორობის სიტუაცია ანუ უნაგირა წერტილი. დავუშვათ, რომ თამაშს აქვს $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ უნაგირა წერტილი. (3) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ პირველ მოთამაშეს გარანტირებული აქვს $V=H(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ მოგების მიღება, თუ ის აირჩევს $\bar{s}_1$ სტრატეგიას. ამავე დროს პირველ მოთამაშეს არც უნდა ჰქონდეს მეტის მიღწევის იმედი, ვინაიდან მეორე მოთამაშე, $\bar{s}_2$ სტრატეგიის არჩევით, არ მისცემს მას ამის საშუალებას.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში ყველაფერი გარკვეულია. პირველმა მოთამაშემ უნდა აირჩიოს $\bar{s}_1$ სტრატეგია, მეორემ — $\bar{s}_2$ სტრატეგია. ბუნებრივია შემდეგი ცნებების შემოღება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4. თუ $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ არის ანტაგონისტური თამაშის წონასწორობის სიტუაცია, მაშინ მას ეწოდება თამაშის ამონახსენი. $\bar{s}_1$ და $\bar{s}_2$ სტრატეგიებს ეწოდება შესაბამისად პირველი და მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიები.

გასარკვევი რჩება ძირითადი საკითხი — როდისაა მართებული (2) ტოლობა ან მისი ტოლფასი (3) დამოკიდებულება. ბუნებრივია, მისი დადებითი გადაწყვეტა მოითხოვს სხვადასხვა დაშვებას მოგების ფუნქციასა და სტრატეგიათა სიმრავლეებზე. ამ საკითხს ჩვენ განვიხილავთ, შემდგომში კონკრეტული ტიპის თამაშებისათვის.

§ 6. მატრიცული თამაშები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. ანტაგონისტურ თამაშს ეწოდება მატრიცული ანუ მართკუთხა თამაში, თუ ორივე მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლე სასრულოა.

მატრიცული თამაშები ყველაზე უფრო კარგად შესწავლილი თამაშებია. დიდია მათი პრაქტიკული მნიშვნელობაც, ვინაიდან ბუნებაში, როგორც წესი, სასრული რაოდენობა ობიექტებთან გვაქვს საქმე, და ამას გარდა, უსასრულო თამაშების მიახლოება ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში ხერხდება მატრიცული თამაშებით.

ვინაიდან S_1 და S_2 სასრულო სიმრავლეებია, შეიძლება მათი ელემენტების გადანომვრა, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$S_1=\{1,2,\ldots,m\}, \quad S_2=\{1,2,\ldots,n\}.$$

მოგების $H(i, j)$ ფუნქცია, სადაც $i \in S_1$, $j \in S_2$, შეიძლება წარმოვიდგინოთ (a_{ij}) მართკუთხა მატრიცის სახით. თუ პირველი ცვლადი გაირბენს სტრიქონის ნომრებს, ხოლო მეორე — სვეტის ნომრებს, ცხადია, გვექნება:

$$a_{ij}=H(i,j).$$

ამრიგად, სასრული ანტაგონისტური თამაში სავსებით განისაზღვრება მისი მატრიცით. თვით თამაში ასე წარმოგვიდგება: პირველი და მეორე მოთამაშე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ირჩევენ სტრიქონებისა და სვეტების ნომრებს შესაბამისად. არჩეული სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზე მდებარე რიცხვი გვიჩვენებს პირველი მოთამაშის მოგებას (მეორის წაგებას).

გარანტირებული მოგებები და უნაგირა წერტილი. მატრიცული თამაშები წარმოადგენენ ანტაგონისტური თამაშების კერძო სახეს, ამიტომ ანტაგონისტურ თამაშთა ზოგადი თეორიის ყველა ცნება და ფაქტი ავტომატურად გადავა მატრიცულ თამაშებზე. კერძოდ, $\{i,j\}$ წყვილი იქნება სიტუაცია. თამაშის ქვედა მნიშვნელობა იქნება $V_* = \max_i \min_j a_{ij}$, ზედა მნიშვნელობა კი — $V^* = \min_j \max_i a_{ij}$. $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ სიტუაცია იქნება წონასწორობის სიტუაცია ანუ უნაგირა წერტილი, თუ ნებისმიერი i და j-თვის შესრულდება უტოლობა $a_{i\bar{j}} \leqslant a_{\bar{i}\bar{j}} \leqslant a_{\bar{i}j}$. აქაც უნაგირა წერტილის არსებობა მინიმაქსისა და მაქსიმინის ტოლობის ტოლფასია.

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, V_* არის სტრიქონების მინიმალური ელემენტებიდან უდიდესი, ხოლო V^* არის სვეტების მაქსიმალური ელემენტებიდან უმცირესი. მაშასადამე, უნაგირა წერტილი ისეთი სიტუაციაა, რომლის შესაბამისი რიცხვი უმცირესია თავის სტრიქონში და უდიდესი თავის სვეტში. ცხადია, მატრიცაში ასეთი რიცხვის არსებობა სრულებით არაა სავალდებულო. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ერთი კლასიკური მაგალითი სამხედრო-ტაქტიკური თამაშებიდან.

მაგალითი (პოლკოვნიკ ბლოტოს თამაში). პოლკოვნიკი ბლოტო (პირველი მოთამაშე) და კაპიტანი კიუე ებრძვიან ერთმანეთს ორი ობიექტისათვის. ბლოტოს განკარგულებაშია 5 პოლკი, კიუეს განკარგულებაში — 3 პოლკი. მათ თავიანთი ძალები უნდა გაანაწილონ ორ ობიექტზე საბრძოლველად. ცხადია, ბლოტოს სტრატეგიათა სიმრავლე შედგება 6 ელემენტისაგან (სტრიქონისაგან), ხოლო კიუეს სტრატეგიათა სიმრავლე — 4 ელემენტისაგან (სვეტისაგან). მოგება განისაზღვრება შემდეგნაირად: თითოეულ ობიექტზე იგებს ის, რომელსაც აღმოაჩნდება იქ პოლკების მეტი რაოდენობა. მოგების სიდიდე განისაზღვრება მოწინააღმდეგის პოლკების რაოდენობით პლიუს ერთი (ე.

ი. პოლკის განადგურებისათვის და ობიექტის აღებისათვის იძლევა თითო ერთეული). საერთო მოგება ყოველ სიტუაციაში შედგება ორივე ობიექტზე მოგებათა ალგებრული ჯამით. შევადგინოთ თამაშის მატრიცა. სტრატეგიები წარმოვიდგინოთ წყვილებით. მაგალითად, [2,3] აღნიშნავს, რომ ბლოტო პირველ ობიექტზე აგზავნის 2 პოლკს, ხოლო მეორე ობიექტზე — 3 პოლკს.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} [3,0] & [2,1] & [1,2] & [0,3] \end{array} \\
\begin{array}{c} [5,0] \\ [4,1] \\ [3,2] \\ [2,3] \\ [1,4] \\ [0,5] \end{array} &
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
5 & 3 & 0 & -1 \\
1 & 5 & 2 & -2 \\
-2 & 2 & 5 & 1 \\
-1 & 0 & 3 & 5 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ვნახოთ თამაშის ქვედა და ზედა მნიშვნელობები:

$$V_* = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{0, -1, -2, -2, -1\} = 0,$$

$$V^* = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{5, 5, 5, 5\} = 5.$$

თამაშს არა აქვს ამონახსენი.

ბლოტოს გარანტირებული აქვს ნულოვანი მოგება, კიეეს კი გარანტირებული აქვს, რომ არ წააგებს ხუთზე მეტს. და ეს ხდება ისეთ თამაშში, სადაც ერთ მოთამაშეს (ბლოტოს) აქვს შესამჩნევი უპირატესობა. ისმის კითხვა, შეუძლია თუ არა ბლოტოს რაიმე ხერხით გაზარდოს თავის მოგება? ანალოგიურად, შეუძლია თუ არა კიეეს რაიმე ხერხით შეამციროს თამაშის ზედა მნიშვნელობა?

თამაშის შერეული გაფართოება. წარმოვიდგინოთ ერთი წუთით, რომ ბლოტო და კიეე ორი ობიექტისათვის ბრძოლას აწარმოებენ ხშირად, ვთქვათ ასჯერ, და თითოეულის მიზანია საშუალო მოგება იყოს მაქსიმალური. როგორ მოიქცეოდნენ მაშინ ისინი? ბუნებრივია, სხვადასხვა ბრძოლაში თითოეული მოთამაშე გამოიყენებდა სხვადასხვა სტრატეგიას. შეიძლება ითქვას, რომ სტრატეგიებს მოთამაშენი გამოიყენებდნენ სხვადასხვა სიხშირით. ცხადია, თუ კიეე სხვადასხვა ბრძოლაში გამოიყენებს სხვადასხვა სტრატეგიებს, მაშინ მისი საშუალო წაგება 100 ბრძოლაში გაცილებით ნაკლები იქნება ხუთზე. ასევე ცხადია, თუ ბლოტო ყოველ ბრძოლაში შემთხვევით აირჩევს პირველ ან მეექვსე სტრატეგიას, მაშინ მისი საშუალო მოგება გაიზრდება.

გამოვიყენოთ ეს იდეა და ამავე დროს დავრჩეთ თამაშის ნორმალური ფორმის ჩარჩოებში. ამისათვის მოგვიხდება სიხშირეებისა და

საშუალო მოგების ცნებებიდან გადავიდეთ მათ ანალოგზე — ალბათობებსა და მოგების მათემატიკურ ლოდინზე. ამრიგად, შემდგომში მოთამაშენი აირჩევენ ალბათურად თავიანთ სტრატეგიებს.

განსაზღვრება 2. ვთქვათ, მოცემულია თამაში $m\times n$ ტიპის მატრიცით. პირველი მოთამაშის შერეული სტრატეგია ეწოდება ვექტორს:

$$X=(x_1,\ x_2,\ldots,x_m),\ \text{სადაც}\ x_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1.$$

ხოლო მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგია ეწოდება ვექტორს:

$$Y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n),\ \text{სადაც}\ y_j\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j=1.$$

შერეული სტრატეგიების კომპონენტები წარმოადგენენ შესაბამისი სტრიქონის ან სვეტის არჩევის ალბათობას. შერეული სტრატეგია, რომლის ერთი კომპონენტი უდრის ერთს, ხოლო დანარჩენი ნულს, წარმოადგენს სტრატეგიას ძველი აზრით. მათ, შერეული სტრატეგიისაგან განსხვავებით, წმინდა სტრატეგიებს უწოდებენ.

განსაზღვრება 3. პირველი მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლეს

$$S_m=\left\{X=(x_1,\ \ x_2,\ldots,x_m):x_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}. \tag{1}$$

ეწოდება m — განზომილებიანი ფუნდამენტალური სიმპლექსი, ხოლო მეორე მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლეს

$$S_n=\left\{Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n):\ \ y_j\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1\right\}, \tag{2}$$

ეწოდება n-განზომილებიანი ფუნდამენტალური სიმპლექსი.

გეომეტრიულად სიბრტყეზე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ორგანზომილებიანი სიმპლექსი, როგორც მონაკვეთი (1,0) და (0,1) წვეროებით. სივრცეში სამგანზომილებიანი სიმპლექსი, როგორც სამკუთხედი (1, 0, 0), (0,1,0) და (0,0, 1) წვეროებით.

თუ მოთამაშენი სტრატეგიას ირჩევენ შემთხვევით (ალბათურად), მაშინ მოგების ფუნქციაც შემთხვევითია მისი მნიშვნელობებია მატრი-

ცის ელემენტები. ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$H(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j=XAY^T. \qquad (3)$$

ვინაიდან მოთამაშენი წმინდა სტრატეგიებს ირჩევენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ამის გამო a_{ij} მოგების ალბათობაა x_iy_j— სტრიქონისა და სვეტის არჩევის ალბათობათა ნამრავლი.

განსაზღვრება 4. A მატრიციანი თამაშის შერეული გაფართოება ეწოდება $<S_m, S_n, H(X, Y)>$ ანტაგონისტურ თამაშს, სადაც S_m, S_n და $H(X, Y)$ განისაზღვრებიან (1)—(3) ფორმულებით.

ამრიგად, მატრიცული თამაშიდან გადავედით მის შერეულ გაფართოებაზე, უფრო რთულ უსასრულო თამაშზე. ახლა უკვე მოთამაშენი ირჩევენ წერტილებს მრავალგანზომილებიანი სიმპლექსებიდან. ეს განზოგადება იძლევა თამაშის ამოხსნის საშუალებას, თუმცა მხოლოდ შერეულ სტრატეგიებში.

მატრიცულ თამაშთა ძირითადი თეორემა. ვთქვათ მოცემულია თამაში A მატრიცით და მისი $<S_m, S_n, H>$ შერეული გაფართოება. $<S_m, S_n, H>$ ანტაგონისტურ თამაშს ყოველთვის აქვს ამონახსენი, ე. ი. არსებობს ისეთი $\bar{X}$ და $\bar{Y}$ სტრატეგიები, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$H(X,\bar{Y})\leqslant H(\bar{X}, \bar{Y})\leqslant H(\bar{X}, Y), \ \forall X\in S_m, \ Y\in S_n \qquad (4)$$

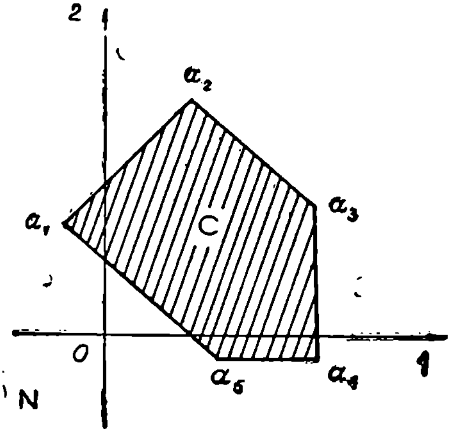
$$H(\bar{X}, \bar{Y})=\max_X \min_Y H(X, Y)=\min_Y \max_X H(X,Y). \qquad (5)$$

ამჟამად არსებობს მინიმაქსის თეორემის უამრავი დამტკიცება, მათგან ყველაზე ელემენტარულად ითვლება ჟ. ვილის დამტკიცება, რომელიც დამყარებულია ამოზნექილ სიმრავლეთა თვისებებზე. ჩვენ აქ მოვიყვანთ დ. გეილის მიერ შემოთავაზებულ „გეომეტრიულ“ დამტკიცებას, რომელიც გადმოღებულია ვილი-ნეიმანის ვარიანტიდან.

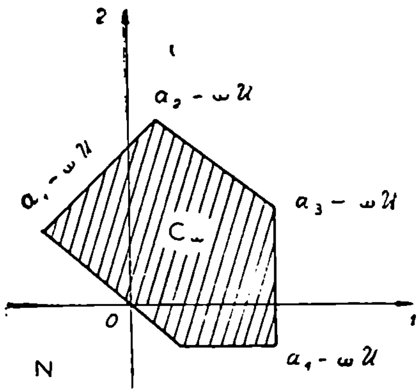
დამტკიცება. გეომეტრიული თვალთახედვისათვის ავიღოთ თამაში ორსტრიქონიანი მატრიცით, მაგალითად, 2×5 ტიპის მატრიცით

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

და ვექტორ-სვეტები აღვნიშნოთ შესაბამისად a_1, a_2, a_3, a_4, a_5-ით. გამოვსახოთ ეს წერტილები სიბრტყეზე (ნახ. 48)



ნახ. 48



ნახ. 49

და მათზე მოვჭიმოთ ამოზნექილი წრფივი $C = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ გარსი, რომელიც ნახაზზე წარმოადგენს დაშტრიხულ მრავალკუთხედს.

სიმრავლე გადავაადგილოთ მთავარი ბისექტრისსის გასწვრივ მანამ, სანამ მას ექნება შეხება მხოლოდ უარყოფით კვადრანტთან და არ ექნება საერთო შიგა წერტილი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ვიხილავთ ისეთ C_ω სიმრავლეს, რომელიც შედგება $X' = X + \omega U$ წერტილებისაგან, სადაც $U = (1, 1)$ და ω არჩეულია ისე, რომ C_ω-ს ჰქონდეს შეხება უარყოფით N ორნანტთან, ცხადია (ნახ. 49)

$$C_\omega = \langle a_1 + \omega U,\ a_2 + \omega U,\ a_3 + \omega U,\ a_4 + \omega U,\ a_5 + \omega U \rangle .$$

ω ისეა შერჩეული, რომ C_ω ეხება N-ს ამიტომ იგი არ შეიცავს უარყოფით ვექტორს, მაგრამ შეიცავს არადადებით ვექტორს. ეს იმას ნიშნავს, რომ უტოლობათა სისტემას (2 უტოლობა, 5 ცვლადი)

$$\sum_{j=1}^{5} y_j (a_j + \omega U) \leqslant 0 \tag{6}$$

აქვს ისეთი არაუარყოფითი ამონახსენი $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4, \bar{y}_5)$, რომ

$$\sum_{j=1}^{5} \bar{y}_j = 1.$$

ორი ამოზნექილი სიმრავლის განცალების თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი L წრფე, რომელიც გაივლის სათავეზე და ერთმანე-

თისაგან გაჰყოფს C_ω და N სიმრავლეებს. ავიღოთ $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ ვექტორი, რომელიც L წრფის პერპენდიკულარულია, დევს C_ω სიმრავლის მხარეს და $\overline{x}_1+\overline{x}_2=1$. ეს ვექტორი C_ω სიმრავლის ყველა ვექტორთან ადგენს არაბლაგვ კუთხეს. ამიტომ ყველა j-სათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$(\overline{X}, \; a_j+\omega U)\geqslant 0. \tag{7}$$

(6) უტოლობები გვაძლევს

$$AY^T=\sum_{j=1}^{n}\overline{y}_j a_j\leqslant -\sum_{j=1}^{5}\overline{y}_j\omega U=-\omega U. \tag{8}$$

(7) უტოლობებიდან გამოდის:

$$(\overline{X}, \; a_j)\geqslant -\omega(\overline{X}, \; U)=-\omega, \tag{9}$$

საიდანაც

$$\overline{X}\cdot A\geqslant -\omega E, \qquad E=(1,1,1,1,1). \tag{10}$$

(9) და (10) გაერთიანება მოგვცემს

$$\overline{X}AY^T\geqslant -\omega(E, \; Y)=-\omega=-\omega\cdot(X, \; U)\geqslant XA\overline{Y}^T.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ წონასწორობის სიტუაციაა, ხოლო ω — თამაშის მნიშვნელობა.

ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ს ტ რ ა ტ ე გ ი ა თ ა თ ვ ი ს ე ბ ე ბ ი. მატრიცულ თამაშთა ძირითადი თეორემა გვეუბნება, რომ მატრიცულ თამაშებს შერეულ სტრატეგიებში ყოველთვის აქვს ამონახსენი, ე. ი. არსებობს X^* და Y^* ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის $V=H(X^*, Y^*)$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობას:

$$H(X^*, \; Y^*)=\max_X \min_Y H(X, \; Y)=\min_Y \max_X H(X, \; Y) \tag{11}$$

ან, რაც იგივეა:

$$H(X, \; Y^*)\leqslant H(X^*, Y^*)\leqslant H(X^*, Y), \quad \forall X, Y. \tag{12}$$

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ ოპტიმალურ სტრატეგიათა ზოგიერთ თვისებას, რომელიც ხშირად გამოიყენება თამაშთა ამოხსნისათვის.

თ ე ო რ ე მ ა 1. დავუშვათ, V არის მატრიცული თამაშის ფასი. იმისათვის, რომ სტრატეგია $\overline{X}$ იყოს პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია, აუცილებელი და საკმარისია S_n-დან ნებისმიერი Y-სათვის შესრულდეს უტოლობა

$$V\leqslant H(\overline{X}, \; Y). \tag{13}$$

ანალოგიურად, Y იქნება II მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\forall X \in S_m$

$$V \geqslant H(X, \ \overline{Y}). \tag{14}$$

დამტკიცება ჩავატაროთ პირველი მოთამაშისათვის, აუცილებლობა გამომდინარეობს იქედან, რომ $\overline{X}$ ოპტიმალური სტრატეგიისათვის მოიძებნება ისეთი $\overline{Y}$, რომ $\{\overline{X}, \ \overline{Y}\}$ იქნება უნაგირა წერტილი.

დ ა ვ ა მ ტ კ ი ც ო თ საკმარისობა. დავუშვათ რომ ყოველი Y-თვის $\overline{X}$ აკმაყოფილებს (13) უტოლობას. მეორეს მხრივ არსებობს $\{X^*, Y^*\}$ უნაგირა წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს (12)-ს და $H(X^*, \ Y^*) = V$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$H(X^*, \ Y^*) \leqslant H(\overline{X}, \ Y).$$

ამ უტოლობაში Y შევცვალოთ Y^*-ით, ხოლო (12)-ის მარცხენა უტოლობაში X შევცვალოთ $\overline{X}$-ით, მივიღებთ

$$H(\overline{X}, \ Y^*) \leqslant H(X^*, \ Y^*) \leqslant H(\overline{X}, \ Y^*).$$

მაშასადამე,

$$H(X^*, \ Y^*) = H(\overline{X}, \ Y^*),$$

და საბოლოოდ

$$H(X, \ Y^*) \leqslant H(\overline{X}, \ Y^*) \leqslant H \ (\overline{X}, \ Y).$$

$\{\overline{X}, \ Y^*\}$ ყოფილა უნაგირა წერტილი, მაშასადამე, $\overline{X}$ ოპტიმალური სტრატეგიაა.

თ ე ო რ ე მ ა 2. იმისათვის რომ $\{\overline{X}, \ \overline{Y}\}$ წყვილი იყოს თამაშის ამონახსენი, აუცილებელი და საკმარისია ნებისმიერი i და j-თვის ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) სრულდებოდეს უტოლობები

$$H(i, \ \overline{Y}) \leqslant H(\overline{X}, \ \overline{Y}) \leqslant H(\overline{X}, \ j), \tag{15}$$

სადაც $H(i, \ Y)$ მოგების ფუნქციის მნიშვნელობაა, როცა პირველი მოთამაშე ხმარობს i-ურ წმინდა სტრატეგიას, მეორე კი — Y შერეულ სტრატეგიას.

აუცილებლობა პირდაპირი შედეგია (12) თანაფარდობის. დ ა ვ ა მ-ტ კ ი ც ო თ საკმარისობა. (14)-დან ნებისმიერი X და Y-თვის

$$H(X, \ \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} H(i, \ \overline{Y}) x_i \leqslant H(\overline{X}, \overline{Y}) \sum_{i=1}^{m} x_i = H(\overline{X}, \ \overline{Y}),$$

$$H(\overline{X}, \ Y) = \sum_{j=1}^{n} H(\overline{X}, \ J) y_j \geqslant H(\overline{X}, \overline{Y}) \sum_{j=1}^{n} y_j = H \ (\overline{X}, \overline{Y}).$$

საინტერესოა თუ რომელი წმინდა სტრატეგიებისათვის აქვს ადგილი (14)-ში ტოლობას და რომლებისათვის მკაცრ უტოლობას.

თ ე ო რ ე მ ა 3. თუ $\bar{X}$ პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა და რომელიღაც j_0-თვის $H(\bar{X}, j_0) > V$, მაშინ მეორე მოთამაშის ნებისმიერი ოპტიმალურ სტრატეგიაში $\bar{y}_{j_0}=0$. ანალოგიურად, თუ მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $\bar{Y}$ და რომელიღაც i_0-სათვის $H(i_0, \bar{Y}) < V$, მაშინ პირველი მოთამაშის ნებისმიერი ოპტიმალურ სტრატეგიაში $\bar{x}_{i_0}=0$.

დ ა ვ ა მ ტ კ ი ც ო თ თ ე ო რ ე მ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ნ ა წ ი ლ ი. პირობის თანახმად:

$$\sum_{j\neq j_0} H(\bar{X}, j)\bar{y}_j \geqslant V \sum_{j\neq j_0} \bar{y}_j$$

$$H(\bar{X}, j_0)\bar{y}_{i_0} > V\cdot\bar{y}_{j_0},\ \text{თუ},\ \bar{y}_{j_0}\neq 0.$$

რომელთა შეკრება მოგვცემს

$$\sum_{j=1}^{n} H(\bar{X}, j_0)\bar{y}_j = H(\bar{X}, \bar{Y}) = V > V\sum_{j=1}^{n}\bar{y}_j = V,$$

მაშასადამე, $\bar{y}_{j_0}\neq 0$ დაშვება არაა სწორი.

ამრიგად, (15) თანაფარდობაში ტოლობები მიიღწევა იმ წმინდა სტრატეგიებისათვის, რომლებიც ოპტიმალურ სტრატეგიებში შედიან მდადებითი ალბათობებით. შეგვიძლია (15) ასე გადავწეროთ

$$\max_i H(i, \bar{Y}) = H(\bar{X}, \bar{Y}) = \min_j H(\bar{X}, j). \tag{16}$$

შემდგომში ამ ტოლობებს გამოვიყენებთ თამაშების რიცხვითი მეთოდებით ამოხსნისას.

თ ე ო რ ე მ ა 4. თითოეული მოთამაშის ოპტიმალურ სტრატეგიათა სიმრავლე არის ამოზნექილი და ჩაკეტილი.

დავამტკიცოთ თეორემა პირველი მოთამაშისათვის. ვთქვათ $\bar{X}$ და X^* ორი ოპტიმალური სტრატეგიაა, მაშინ

$$H(\bar{X}, Y)\geqslant V,\quad H(X^*, Y)\geqslant V,\qquad \forall Y\in S_n.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\lambda+\bar{X}(1-\lambda)\cdot X^*$ წერტილი $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ სეგმენტიდან, მაშინ

$$H(\lambda\bar{X}+(1-\lambda)X^*, Y) = \lambda H(\bar{X}, Y) + (1-\lambda)H(X^*, Y) \geqslant V$$

ნებისმიერი Y-თვის, და მაშასადამე წერტილი ოპტიმალურია. ჩაკეტილობა გამომდინარეობს X-ის მიმართ H ფუნქციის უწყვეტობიდან.

თ ე ო რ ე მ ა 5. ვთქვათ, მოცემულია თამაში A' მატრიცით, რომლის ყოველი ელემენტი მიიღება A მატრიცის შესაბამისი ელემენტიდან C მუდმივის დამატებით. ასე რომ, ახალი თამაშის მოგების ფუნქცია

$$H'(X,Y)=H(X,\ Y)+C.$$

თუ $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ არის H ფუნქციის უნაგირა წერტილი, მაშინ ის იქნება უნაგირა წერტილი H' ფუნქციისათვისაც (დამტკიცება მარტივია).

დ ო მ ი ნ ი რ ე ბ ა. ხშირად შესაძლებელი ხდება დადგინდეს თუ რომელი წმინდა სტრატეგიები შევლენ ოპტიმალურ სტრატეგიებში ნულოვანი ალბათობით. ეს პირველ რიგში ხორციელდება დომინირების პრინციპის საფუძველზე. ცხადია მოთამაშემ (ვთქვათ პირველმა) არ უნდა გამოიყენოს ისეთი სტრიქონი, რომელიც უარესია სხვა სტრიქონზე ყოველი მდგენელით. ეს პირნციპი ჩამოყალიბებულია ქვემოთ მოყვანილ თეორემებში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. ვიტყვით, რომ l-ური სტრიქონი დომინირებს k-ურ სტრიქონზე, თუ $\forall j=1,2,\ldots,n$-თვის $a_{lj}\geqslant a_{kj}$ და ერთი რომელიღაც j_0-სათვის $a_{lj_0}>a_{kj_0}$. ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ l-ური სვეტი დომინირებს k-ურ სვეტზე, თუ $\forall i=1,2,\ldots,m$-სათვის $a_{il}\leqslant \leqslant a_{ik}$ და ერთი რომელიღაც i_0-თვის $a_{i_0l}<a_{i_0k}$.

თ ე ო რ ე მ ა 6. თუ თამაშში A მატრიცით l-ური სტრიქონი დომინირებს k-ურ სტრიქონზე, მაშინ პირველი მოთამაშის ყოველ ოპტიმალურ $\overline{X}$ სტრატეგიაში $\overline{x}_k=0$.

თ ე ო რ ე მ ა 7. თუ თამაშში A მატრიცით l-ური სვეტი დომინირებს k-ურ სვეტზე, მაშინ მეორე მოთამაშის ყოველ ოპტიმალურ $\overline{Y}$ სტრატეგიაში $\overline{y}_k=0$.

მართებულია უფრო ზოგადი თეორემები:

თ ე ო რ ე მ ა 8. თუ მატრიცის k-ური სტრიქონი დომინირდება სხვა სტრიქონების ამოზნექილი წრფივი კომბინაციით, მაშინ პირველი მოთამაშის ყოველ ოპტიმალურ $\overline{X}$ სტრატეგიაში $\overline{x}_k=0$.

თ ე ო რ ე მ ა 9. თუ მატრიცის k-ური სვეტი დომინირდება დანარჩენი სვეტების ამოზნექილი წრფივი კომბინაციით, მაშინ მეორე მოთამაშის ყოველ ოპტიმალურ $\overline{Y}$ სტრატეგიაში $\overline{y}_k=0$.

დ ა ვ ა მ ტ კ ი ც ო თ თ ე ო რ ე მ ა 8. მოცემულობის თანახმად

$$\sum_{i\neq k}a_{ij}x_i\geqslant a_{kj},\ \forall j=1,2,\ldots,n. \qquad \sum_{i\neq k}x_i=1,\ x_i\geqslant 0.$$

თუ განვიხილავთ მეორე მოთამაშის $\overline{Y}$ ოპტიმალურ სტრატეგიას, მაშინ წინა უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sum_{i\neq k}a_{ij}x_i\overline{y}_j\geqslant a_{kj}\overline{y}_j, \qquad \forall j=1,2,\ldots,n.$$

რადგანაც ერთი მაინც j-სათვის ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას, ამიტომ

$$\sum_{i\neq k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{y}_j > \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\bar{y}_j. \tag{17}$$

განვიხილოთ პირველი მოთამაშის შერეული სტრატეგია $X=(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, \ldots, x_m)$, მაშინ (17) შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\bar{y}_j = H(k, \bar{Y}) < H(X, \bar{Y}) < H(\bar{X}, \bar{Y}) = V,$$

სადაც $\bar{X}$-ით აღნიშნულია პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია და გამოყენებულია მისი თვისება. მე-3 თეორემის თანახმად ვღებულობთ რომ $\bar{x}_k=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. არაანტაგონისტური თამაშები

ანტაგონისტური თამაშების თეორია, როგორც ვნახეთ, პრინციპულად წარმოადგენს დასრულებულ, დახვეწილ თეორიას როგორც პრობლემატური, ასევე მათემატიკური თვალსაზრისით. მიუხედავად ამისა, ეს თეორია პრაქტიკული თვალსაზრისით ძალზე ვიწროა და გამოყენებას პოულობს მხოლოდ სამხედრო საქმესა და სალონურ თამაშებში. ეკონომიკურ და სოციალურ ამოცანებში, როგორც წესი, არ სრულდება $H_1(s_1, s_2)+H_2(s_1, s_2)=0$ ტოლობა, რაგინდ იზოლირებული არ უნდა იყვნენ მოთამაშეები ერთმანეთისაგან. ამის გამო უკვე ეჭვის თვალით უნდა შევხედოთ მაქსიმინურ პრინციპს, მითუმეტეს რომ ეს პრინციპი (და არა მარტო იგი) არავითარ სასარგებლო შედეგს არ იძლევა არც თეორიული (მინიმაქსის თეორემის მსგავსად) და არც პრაქტიკული თვალსაზრისით.

ჩვენ განვიხილავთ სასრული არაანტაგონისტურ თამაშებს. აქ, ბუნებრივია, გამოგვადგება ის ცნებები, რომლებითაც ვსარგებლობთ მატრიცულ თამაშებში — წმინდა სტრატეგია, სიტუაცია, შერეული სტრატეგია, გარანტირებული მოგება და სხვა; მაგრამ ამავე დროს აღარ გამოგვადგება ცნებები — თამაშის ფასი, უნაგირა წერტილი..., ახალ განსაზღვრებას მოითხოვს ოპტიმალური სტრატეგია და თამაშის ამოხსნა. წინასწარ უნდა ვთქვათ, რომ არაანტაგონისტური თამაშებისათვის არაა შექმნილი ისეთი სრული და დამთავრებული თეორია, როგორც ანტაგონისტური თამაშებისათვის.

სასრული არაანტაგონისტური თამაშები შეიძლება მოცემულ იქნეს ისეთი მატრიცის საშუალებით, რომლის ელემენტები რიცხვთა

წყვილებია. პირველი რიცხვი იქნება პირველი მოთამაშის მოგება, მეორე-მეორესი. სასრული არაანტაგონისტურ თამაშებს სხვაგვარად ბ ი მ ა ტ რ ი ც უ ლ ი თამაშები ეწოდება.

განასხვავებენ ბიმატრიცული (საზოგადოდ არაანტაგონისტური) თამაშების ორ, კოოპერაციულ და არაკოოპერაციულ ვარიანტს. ეს ხდება იმისდა მიხედვით, დაშვებულია თუ არა მოთამაშეებს შორის შეთანხმება (კოალიცია, კოოპერაცია). ისე კი, წესებისაგან დამოუკიდებლად, მოთამაშეებს ან ერთ-ერთ მათგანს შეიძლება აწყობდეს ან არ აწყობდეს თათბირი თამაშის წინ.

როგორც ზემოთ ვთქვით, ბიმატრიცული თამაში მოიცემა ორმაგი მატრიცით

$$[A,\ B]=\begin{pmatrix} [a_{11},\ b_{11}] & [a_{12},\ b_{12}]\ldots & [a_{1n},\ b_{1n}] \\ [a_{21},\ b_{21}] & [a_{22},\ b_{22}]\ldots & [a_{2n},\ b_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [a_{m1},\ b_{m1}] & [a_{m2},\ b_{m2}]\ldots & [a_{mn},\ b_{mn}], \end{pmatrix},$$

ხოლო მისი შერეული გაფართოება

$$< S_m,\ S_n,\ H_1(X,Y),\ H_2(X,Y) > \tag{1}$$

ოთხეულით, სადაც S_m და S_n განსაზღვრული არიან §6-ის (1) და (2)-ის მიხედვით, ხოლო მოგების ფუნქციები ბუნებრივად:

$$\begin{aligned} H_1(X,Y)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j=XAY^T, \\ H_2(X,Y)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j=XBY^T. \end{aligned} \tag{2}$$

§4-ის განსაზღვრება 1-ის თანახმად $\{\overline{X},\ \overline{Y}\}$ სიტუაციას ეწოდება წონასწორობის სიტუაცია, თუ ნებისმიერი $X\in S_m$ და $Y\in S_n$-სათვის

$$H_1(X,\overline{Y})\leqslant H_1(\overline{X},\ \overline{Y}) \quad \text{და} \quad H_2(\overline{X},\ Y)\leqslant H_2(\overline{X},\ \overline{Y}). \tag{3}$$

წონასწორობის სიტუაციის არსებობას ბიმატრიცულ თამაშებში, როგორც ვნახავთ, აღარა აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა, მაგრამ მაინც ძალზე მნიშვნელოვანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა (ნ ე შ ი). ბიმატრიცულ თამაშს შერეულ სტრატეგიებში ყოველთვის გააჩნია წონასწორობის სიტუაცია.

მოვიყვანოთ რამდენიმე კლასიკური მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. „ოჯახური კონფლიქტი". ცოლსა და ქმარს შეუძლიათ აირჩიონ ორი გასართობიდან ერთი — წავიდნენ ან ოპერაში ან ფეხბურთის მატჩზე. თუ ორივე გადაწყვეტს ერთი და იგივე ღონის-

ძიებაზე წასვლას, მაშინ ისინი მიიღებენ გარკვეულ სარგებელს. ვთქვათ ქმარი (პირველი მოთამაშე) ფეხბურთიდან ღებულობს ორჯერ მეტ სარგებელს, ვიდრე ოპერიდან, ცოლი (მეორე მოთამაშე) კი პირიქით. თუ ისინი გადაწყვეტენ სხვადასხვა გასართობზე წასვლას, მაშინ საღამო მთავრდება მხოლოდ უსიამოვნებით და ვერც ერთი ვერ მიიღებს ვერავითარ სარგებელს.

თუ ორივე მოთამაშისათვის პირველ სტრატეგიად ავიღებთ ფეხბურთზე წასვლას, ხოლო მეორე სტრატეგიად —თეატრში წასვლას, მაშინ თამაშის მატრიცას ექნება სახე

$$\begin{pmatrix} [2,\ 1] & [0,\ 0] \\ [0,\ 0] & [1,\ 2] \end{pmatrix}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. „ბანდიტთა დილემა". ორი ბანდიტი ერთი და იმავე დანაშაულისათვის ელოდება განაჩენს. პროკურორს ეჭვი არ ეპარება, რომ ორივე დამნაშავეა, მაგრამ არ გააჩნია უტყუარი მტკიცებანი. ამიტომ თუ არცერთი არ გამოტყდება, პროკურორს შეუძლია მიუსაჯოს პატიმრობა ორივეს მხოლოდ თითო წლით. თუ ორივე დამნაშავე აღიარებს დანაშაულს, მაშინ თითოეულს მიუსჯიან 5 წლიან პატიმრობას. დაბოლოს, თუ მხოლოდ ერთი აღიარებს, მაშინ ის განთავისუფლდება, მეორეს კი მიუსჯიან ათი წლით პატიმრობას. თუ პირველ სტრატეგიად ორივესათვის ჩავთვლით აღიარებას, მეორე სტრატეგიად კი აუღიარებლობას, მაშინ თამაშის მატრიცა იქნება

$$\begin{pmatrix} [-5,\ -5] & [-0,\ -10] \\ [-10,\ \ 0] & [-1,\ -1] \end{pmatrix}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თამაშის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{pmatrix} [4,\ 4] & [0,\ 0] \\ [0,\ 0] & [3,\ 3] \end{pmatrix}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. თამაშის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{pmatrix} [2,\ 2] & [10,\ 1] \\ [1,\ -100] & [2,\ -200] \end{pmatrix}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. თამაშის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{pmatrix} [1,\ 3] & [2,\ 3] \\ [1,\ 1] & [2,\ 1] \end{pmatrix}.$$

პირველ მაგალითში გვაქვს ორი $\{1,1\}$ და $\{2,2\}$ წონასწორობის სიტუაცია, მაგრამ ისინი არ არიან ურთიერთ ჩანაცვლებადი და ექვივალენტური.

მეორე მაგალითში გვაქვს ერთადერთი $\{1, 1\}$ წონასწორობის სიტუაცია. $\{2, 2\}$ სიტუაცია არაა წონასწორობის სიტუაცია, მაგრამ იგი ორივე მოთამაშისათვის უმჯობესია, ვიდრე $\{1, 1\}$ სიტუაცია.

მესამე მაგალითში ორი $\{1\ \ 1\}$ და $\{2, 2\}$ წონასწორობის სიტუაციაა. ადგილი არა აქვს ჩანაცვლებადობას და ექვივალენტურობას, მაგრამ $\{1, 1\}$ სიტუაცია უმჯობესია ორივე მოთამაშისათვის და მისი არჩევის საწინააღმდეგოდ არ ჩანს არავითარი მოსაზრება.

მეორე მაგალითში გვაქვს ერთი $\{1,1\}$ წონასწორობის სიტუაცია. იგი აწყობს ორივე მოთამაშეს, მაგრამ პირველ მოთამაშეს აქვს ერთი უპირატესობა — მას შეუძლია თავისთვის აირჩიოს აშკარად ცუდი მეორე სტრიქონი და ამით დიდი ზიანი მიაყენოს მეორე მოთამაშეს. ამას პირველი მოთამაშე გააკეთებს იმის ათვის, რომ აიძულოს მეორე აირჩიოს მისთვის აშკარად უარესი მეორე სვეტი. ამგვარად, კოოპერაციის შემთხვევაში პირველი მოთამაშე აიძულებს მეორეს შეუთანხმდეს $\{1, 2\}$ სიტუაციაზე.

ცხადია, მეორე მოთამაშეს ამ თამაშში არ აწყობს კოოპერაცია. თუმცა არაკოორპერაციულ ვარიანტშიც, თუ თამაში მრავალჯერ მეორდება, პირველ მოთამაშეს შეთანხმების გარეშეც შეუძლია მიაღწიოს საწადელს შიგა და შიგ მეორე სტრიქონის არჩევით.

მეხუთე მაგალითში, როგორც პირველი ასევე მეორე მოთამაშისათვის სტრატეგიები არ განირჩევიან ერთმანეთისაგან და თითოეულის მოგება დამოკიდებულია მხოლოდ მეორის არჩევანზე. მიუხედავად იმისა, რომ ყველა სიტუაცია წონასწორულია, მოთამაშეთათვის ერთობლივად, რა თქმა უნდა, სასურველია $\{1,2\}$ სიტუაცია.

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, ძნელია შემუშავდეს ამოხსნის ერთი კრიტერიუმი, რომელსაც ექნება სასურველი თვისებები. ამიტომაც არსებობს ამოხსნის სხვადასხვა განსაზღვრება. ისინი არსებითად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან კოოპერაციულ და არაკოალიციურ შემთხვევებში.

არაკოალიციური თამაშის ამოხსნა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. სიტუაციას ეწოდება დასაშვები ამონახსენი ანუ ამონახსენი პარეტოს აზრით თუ არ არსებობს სხვა $\{X, Y\}$ სიტუაცია, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$H_1(X,Y)\geqslant H_1(\overline{X}, \overline{Y}), \qquad H_2(X,Y)\geqslant H_2(\overline{X},\overline{Y}).$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. არაკოოპერაციულ თამაშს ეწოდება ამოხსნადი ნეშის აზრით, თუ ყველა წონასწორობის სიტუაცია ურთიერთჩანაცვლებადია.

განსაზღვრება 3. ვიტყვით, რომ არაკოოპერაციულ თამაშს აქვს ამონახსენი ძლიერი აზრით, თუ დასაშვებ ამონახსნებში არსებობს წონასწორობის სიტუაციები და ისინი არიან ექვივალენტური და ურთიერთჩანაცვლებადი.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, პარეტოს ამონახსნები, როგორც წესი, ბევრია ხოლმე. ნეშის აზრით ამონახსენიც შეიძლება იყოს სიტუაციათა სიმრავლე. ძლიერი აზრით ამონახსნთა სიმრავლე, ცხადია, უფრო მცირეა და ხშირად სავსებით დამაკმაყოფილებელი.

გავარჩიოთ ამოხსნები ჩვენს მაგალითზე:

მაგალით 1-ში დასაშვები ამონახსენი ორია $\{1, 1\}$ და $\{2,2\}$. ნეშისა და ძლიერი აზრით ამონახსნები თამაშს არ გააჩნია. მაგალით 2-ში გვაქვს ერთი წონასწორობის სიტუაცია $\{1,1\}$, იგი ამონახსენია ნეშის აზრით. დანარჩენი სამი სიტუაცია დასაშვებია. ძლიერი აზრით ამონახსენი არ არსებობს, ვინაიდან დასაშვებ სიტუაციებში არაა წონასწორობის სიტუაცია. მაგალით 3-ში ერთი დასაშვები ამონახსენია $\{1, 1\}$, წონასწორობის სიტუაცია კი ორი და ისინი ჩაუნაცვლებადი არიან. ძლიერი აზრით ამონახსენია $\{1,1\}$, ვინაიდან იგი პარეტოს ამონახსენიცაა და წონასწორობის სიტუაციაც. მაგალით 4-ში ორი დასაშვები ამონახსენია $\{1, 1\}$ და $\{1,2\}$, წონასწორობის სიტუაციაა $\{1, 1\}$. იგი ამონახსენია ყველა აზრით. მაგალით 5-ში ყველა სიტუაცია წონასწორობის სიტუაციაა და ყველა მათგანი წარმოადგენს ამონახსენს ნეშის აზრით. დასაშვები ამონახსენი $\{1, 2\}$ ერთადერთია, რომელიც ამონახსენია ძლიერი აზრითაც.

კოოპერაციული თამაშის ამოხსნა. ახლა დავუშვათ, თამაშის წინ მოთამაშეებს შორის მოლაპარაკება ნებადართულია. ამასთან, იგულისხმება, რომ დადებული შეთანხმება მოთამაშეთათვის აუცილებელია და მისგან გადახვევა დაუშვებელია.

კოოპერაცია ერთის მხრივ ასწორებს ბევრ სიძნელეს, რომელიც გვხვდება არაკოალიციურ ვარიანტში, მაგრამ ზოგჯერ, როგორც ეს იყო მაგალით 4-ში, წამოჭრის დამატებით პრობლემებს.

კოოპერაციული თამაშის ამოხსნის განსაზღვრება მოგვცა ჯ. ფონ ნიმანმა. მოვიყვანოთ ეს კონცეფცია.

კოოპერაციულ ვარიანტში მოთამაშეებს შეუძლიათ გამოიყენონ საერთო შერეული სტრატეგია $(x_{11}, x_{12},\ldots,x_{mn})$, სადაც x_{ij} $(i=1, 2,\ldots,$

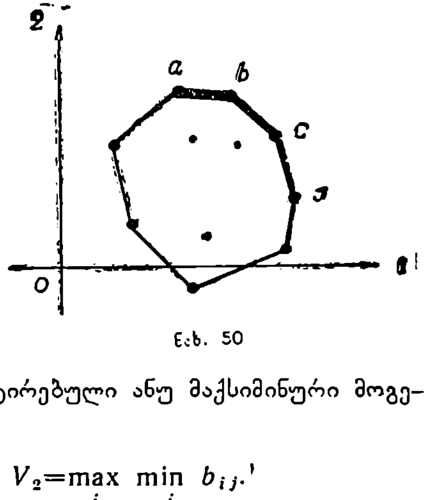
m; $j=1, 2,\ldots,n$) არის $\{i, j\}$ სიტუაციის არჩევის ალბათობა. ამრიგად, $x_{ij}\geqslant 0$ და

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1.$$

წარმოვიდგინოთ გეომეტრიული სურათი: მატრიცის წყვილები გამოვსახოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, სადაც აბსცისა იქნება პირველი მოთამაშის მოგება, ორდინატა — მეორე მოთამაშის მოგება. სიბრტყეზე მივიღებთ mn წერტილს. მოსალოდნელი მოგება

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij},\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij}\right]$$

წარმოგვიდგება როგორც ამ წერტილებზე მოჭიმული ამოზნექილი წრფივი გარსი — მრავალკუთხედი (ნახ. 50). ამ მრავალკუთხედის ყოველი წერტილი მიიღება კონკრეტული შერეული სტრატეგიით. პარეტოს ამონახსნები შერეულ სტრატეგიებში იქნება ის წერტილები, რომელთა არც ზემოთ და არც მარჯვნივ არ არსებობს მრავალკუთხედის წერტილი. ესაა მრავალკუთხედის „ჩრდილო-აღმოსავლეთი“ წერტილები, ჩვენს შემთხვევაში $abcd$ ტეხილი. ამ დასაშვებ სიმრავლიდან პირველ მოთამაშეს უფრო აწყობს ყველაზე მარჯვენა d წერტილი, მეორე მოთამაშეს კი ყველაზე ზედა a წერტილი. დასაშვები სიმრავლის შემცირება შეიძლება მოთამაშეთა გარანტირებული ანუ მაქსიმინური მოგებების ხარჯზე. ავიღოთ



ნახ. 50

$$V_1=\max_i \min_j a_{ij},\quad V_2=\max_j \min_i b_{ij}.$$

ისინი დასაშვები არიდან ჩამოჭრიან ნაწილს. მივიღებთ $ebcf$ სიმრავლეს, რომელიც არის ე. წ. სათათბირო სიმრავლე ანუ ამონახსენი ნეიმან-მორგენშტერნის აზრით.

არსებობს სხვადასხვა მოსაზრებანი სათათბირო სიმრავლიდან ამონახსენის არჩევისათვის.

მიუხედავად იმისა, რომ თამაშთა თეორია და მათემატიკური დაპროგ-რამება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აღმოცენდა და განვითარდა, მათ შორის აღმოჩნდა ღრმა კავშირი როგორც ფორმალურად, ასევე შინაარსობრივად. კავშირმა შემდგომში მნიშვნელოვანი როლი შეას-რულა ორივე თეორიის განვითარებაში. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ამ ორი დისციპლინის რიცხვითი მეთოდები, რომლებიც ფაქტიურად გაერთიანებული არიან თავიანთი სპეციფიკისა და მიზნების გამო. ჩვენ აქ ვნახავთ, რომ წრფივი დაპროგრამებისა და მატრიცულ თამაშთა ამოცანები მიიყვანებიან ერთიმეორეზე და ამ აზრით ექვივალენტურ ამო-ცანებს წარმოადგენენ.

წრფივი დაპროგრამების თეორია, ამოცანის მიყვა-ნა მატრიცულ თამაშზე. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ე. წ. „სტანდარტული ფორმით" ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: ვიპოვოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყო-ფილებენ

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_n\geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

უტოლობებს და ანიჭებენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{2}$$

წრფივ ფუნქციას. ვექტორული აღნიშვნებით ზემოთ ჩამოყალიბებუ-ლი ამოცანა შეიძლება ასე დაისვას:

მოცემულია $m\times n$ ტიპის A მატრიცა და $b=(b_1, b_2,\ldots, b_m)$, $C=$ $=(c_1, c_2,\ldots,c_n)$ ვექტორები. ვიპოვოთ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$AX\leqslant B, \quad X\geqslant O \tag{1}$$

შეზღუდვებს და (X, C) სკალარულ ნამრავლს მიანიჭებს მაქსიმუმს.

ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს (1) შეზღუდვებს, ეწოდება **დასაშვები ვექტორი** (დასაშვები ამონახსენი). შეიძლება (1) სის-ტემა იყოს არათავსებადი, მაშინ დასაშვები ვექტორი არ არსებობს. გეომეტრიულად დასაშვებ ვექტორთა სიმრავლე n-განზომილებიან სივ-რცეში არის ამოზნექილი მრავალწახნაგა. ეს მრავალწახნაგა წარმოად-გენს (1) შეზღუდვებით მოცემულ $n+m$ ნახევარსივრცეთა თანაკვეთას.

(2) ფუნქციას **მიზნის ფუნქცია** ეწოდება. რადგანაც მიზნის ფუნქცია წრფივია, მან შეიძლება მიაღწიოს ექსტრემუმს მხო-

ლოდ საზღვრის წერტილებში — ან წვეროებში, ან მთლიანად წახნაგზე (ეს ფაქტი ფორმალურადაც იოლი დასამტკიცებელია).

აქვე აღვნიშნოთ, რომ შეიძლება (1) სისტემა იყოს თავსებადი, მაგრამ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას მაინც არ ჰქონდეს ოპტიმალური ამონახსენი. ეს შეიძლება მოხდეს მაშინ, როცა დასაშვებ ვექტორთა სიმრავლე შემოუსაზღვრელია.

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანები:

ვიპოვოთ $X=(x_1, x_2,\dots,x_n)$ ვექტორი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{cases} AX\leqslant B, \quad X\geqslant 0 \\ (C,\ X)\underset{X}{\rightarrow}\max. \end{cases} \tag{3}$$

ამ ამოცანასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ $Y=(y_1,\ y_2,\dots,y_m)$ ვექტორი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{cases} YA\geqslant C, \quad Y\geqslant 0 \\ (Y,b)\underset{Y}{\rightarrow}\min \end{cases} \tag{4}$$

(3) და (4) ამოცანებს ერთმანეთის ორადულ (ან შეუღლებულ) ამოცანებს უწოდებენ, რადგანაც წრფივი დაპროგრამების თეორიის ძირითადი შედეგები შეეხება ამ ორი ამოცანის ერთდროული ამოხსნადობისა და ურთიერთმიმართების საკითხებს.

ფორმალური ახლობლობა (3) და (4) ამოცანებს შორის ადვილი შესამჩნევია. უფრო საინტერესოა ამ ამოცანების ურთიერთმიმართება ეკონომიკური თვალსაზრისით. ვნახოთ ეს ტექნოლოგიური პროცესის გამართვის ამოცანის მაგალითზე. ეს ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს:

ვიპოვოთ n ტექნოლოგიური პროცესის ისეთი $x_1, x_2,\dots,x_n$ ინტენსივობები, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i(i=1,2,\dots,m), \quad x_j\geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} x_jc_j\underset{X}{\rightarrow}\max,$$

სადაც c_j შემოსავალია j-ური პროცესის ერთეულოვანი ინტენსივობით გამოყენების დროს; b_i-არსებული რესურსების რაოდენობა, ხოლო a_{ij} არის i-ური რესურსების ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j-ური ტექნოლოგიური პროცესისათვის ერთეულოვანი ინტენსივობით მუშაობისას.

შეუღლებული ამოცანა: ვიპოვოთ ისეთი არაუარყოფითი $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ცვლადები, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j=1,2,\ldots,n), \quad \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \underset{Y}{\rightarrow} \min.$$

დავუკვირდეთ შეზღუდვებს შეუღლებულ ამოცანაში. ფიქსირებული j-სათვის $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ კოეფიციენტები აღნიშნავენ საქონლის რაოდენობას, ხოლო c_j გვიჩვენებს შემოსავალს ფულად ერთეულებში. მაშასადამე, y_i-ს უნდა ჰქონდეს ფულადი განზომილება ერთეულოვანი საქონლისათვის ანუ — აღნიშნავდეს შესაბამისი საქონლის ფასს.

ამრიგად, შეზღუდვები გვეუბნება, რომ დანახარჯები j-ურ პროცესზე ერთეულოვანი ინტენსივობით მუშაობისას (მარცხენა მხარე) არ უნდა იყოს ამ პროცესიდან მიღებულ შემოსავალზე ნაკლები.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ, y_i ფასები უნდა იყოს ისეთი, რომ არცერთმა ტექნოლოგიურმა პროცესმა არ მოგვცეს დადებითი მოგება, (შეუღლებული ამოცანის მიზნის ფუნქცია აღწერს ყველა რესურსების ერთობლივ ფასს. ეს ფასი გვინდა იყოს მინიმალური).

თუ პირდაპირ ამოცანაში ვიპოვით დასაშვებ ამონახსენს და მისი შესაბამისი მოგება ტოლი იქნება არსებული რესურსების საერთო ღირებულების (მეორე ამოცანის ამონახსენი), მაშინ ცხადია ეს იქნება პირდაპირი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსენი.

ეს ფაქტი წარმოადგენს ოპტიმალობის კრიტერიუმის ეკონომიკურ ინტერპრეტაციას, რომლის მათემატიკური ჩამოყალიბება ასეთია:

თ ე ო რ ე მ ა 1. თუ (3) ამოცანას აქვს X დასაშვები ამონახსენი, ხოლო (4) ამოცანას—Y დასაშვები ამონახსენი და ეს ამონახსნები აკმაყოფილებენ

$$(C, X)=(Y, B) \tag{5}$$

პირობას, მაშინ ისინი წარმოადგენენ ორტიმალურ ამონახსნებს (3) და (4) ამოცანებისათვის შესაბამისად.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (3) და (4)-დან მარტივად მიიღება

$$(C, X) \leqslant (YA, X) \leqslant (Y, B) \tag{6}$$

უტოლობები, სადაც X არის პირდაპირი ამოცანის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსენი, ხოლო Y — ორადი ამოცანის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსენი. (5) და (6)-დან ცხადია თეორემის სამართებულობა.

შ ე დ ე გ ი. თუ (3) ამოცანას არ გააჩნია სასრული ოპტიმალური ამონახსენი, მაშინ (4) ამოცანას არა აქვს დასაშვები ამონახსენი და პირიქით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: დავუშვათ, რომ (4) ამოცანას აქვს Y დასაშვები ამონახსენი, მაშინ პირდაპირი ამოცანის (C,X) ფუნქცია იქნებოდა (Y, B) რიცხვით შემოსაზღვრული. წინააღმდეგობა უარყოფს ჩვენს დაშვებას.

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ ორივე (3) და (4) ორადულ ამოცანებს აქვს დასაშვები ამონახსენი, მაშინ მათ ექნება $\overline{X}$ და $\overline{Y}$ ოპტიმალური ამონახსნები და $(C, \overline{X})=(\overline{Y}, b)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: განვიხილოთ თამაში შემდეგი ბლოკური მატრიცით:

$$\begin{pmatrix} O & A^T & -B^T \\ -A & O & C^T \\ B & -C & O \end{pmatrix}$$

სადაც O-ნულებისაგან შედგენილი მატრიცაა შესაბამისი განზომილებებით. ჩვენი მატრიცა ირიბადსიმეტრიულია, მოთამაშენი არიან აბსოლუტურად ერთნაირ მდგომარეობაში, ამიტომ თამაშის მნიშვნელობა ნულის ტოლია და ორივე მოთამაშეს გააჩნია ერთი და იგივე ოპტიმალური სტრატეგია

$$\overline{Z}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2,\dots,\bar{y}_n, \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2,\dots\bar{x}_m, \lambda).$$

რადგანაც თამაშის ფასი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\begin{cases} -\overline{X}A+\lambda B\geqslant 0 \\ \overline{Y}A^T-\lambda C\geqslant 0 \\ -\overline{Y}B^T+\overline{X}C^T\geqslant 0. \end{cases}$$

თუ $\lambda>0$, დავუშვათ, რომ $X^*=\overline{X}/\lambda$, $Y^*=\overline{Y}/\lambda$. მაშინ მივიღებთ

$$\begin{cases} X^*A\leqslant B, \quad X^*\geqslant 0, \\ Y^*A^T\geqslant C, \quad Y^*\geqslant 0, \\ (X^*,C^T)\geqslant (Y^*, B^T). \end{cases}$$

ეს უტოლობები გვეუბნება, რომ X^* და Y^* დასაშვები ამონახსნებია, უკანასკნელი უტოლობა კი სინამდვილეში ყოფილა ტოლობა.

ახლა დავუშვათ, რომ $\lambda=0$, მაშინ

$$-\overline{X}A\geqslant 0, \quad \overline{Y}A^T\geqslant 0,$$
$$(-Y, B^T)+(X,C^T)>0,$$

ანუ

$$\overline{X}A\leqslant 0, \quad \overline{Y}A^T\geqslant 0,$$
$$(\overline{X}, C^T)>(\overline{Y}, B^T).$$

უკანასკნელ უტოლობაში ან მარცხენა მხარეა დადებითი, ან მარჯვენა უარყოფითი. დავუშვათ, რომ მარცხენა მხარეა დადებითი.

რადგანაც (3) ამოცანას აქვს X' დასაშვები ამონახსენი, ამიტომ $X'+$ $+\alpha\overline{X}$ ჯამიც იქნება დადებითი დასაშვები ამონახსენი ($\alpha>0$). α-ს ხარჯზე $(X'+\alpha\overline{X}, C^T)$ შეიძლება გავხადოთ რაგინდ დიდი, ამიტომ (3) ამოცანის მიზნის ფუნქცია შემოუსაზღვრელია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (4) ამოცანას არა აქვს დასაშვები ამონახსენი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ანალოგიურ წინააღმდეგობას მივიღებთ, თუ დავუშვებთ, რომ (Y^T, B^T) უარყოფითია.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ ორადული ამოცანებისათვის შესაძლებელია ოთხი შემთხვევა. ან არცერთ ამოცანას არა აქვს დასაშვები ამონახსენი, ან ორივეს აქვს დასაშვები ამონახსენი და მაშასადამე ამონახსნებიც, ან ერთი ამოცანა შემოუსაზღვრელია და მეორეს არა აქვს დასაშვები ამონახსენი.

მე-2 თეორემის დამტკიცება კონსტრუქციულია. აგებული ბლოკური მატრიცით განხილული თამაშის ამოხსნა გვაძლევს ორადული ამოცანების ამონახსნებს.

მატრიცული თამაშის დაყვანა წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე. ვთქვათ მოცემულია თამაში $m\times n$ ტიპის A მატრიცით. თუ პირველი მოთამაშე ირჩევს $X=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ შერეულ სტრატეგიას, მაშინ მეორე მოთამაშის ყოველი წმინდა სტრატეგიისათვის ის მიიღებს შესაბამისად მოგებებს:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m_1}x_m\\
a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m_2}x_m\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_{1n}x_1+a_{1n}x_2+\ldots+a_{mn}x_n.
\end{array}$$

მოცემული X-სათვის ამ სიდიდეებიდან უმცირესი იქნება პირველი მოთამაშის გარანტირებული მოგება. ვთქვათ, ω არის ამ გამოსახულებათა ქვედა საზღვარი. ცხადია, პირველი მოთამაშე დაინტერესებულია რომ ω იყოს რაც შეიძლება დიდი. ამრიგად, პირველი მოთამაშის ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ ω და არაუარყოფითი $x_1, x_2,\ldots,x_m$ რიცხვები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m_1}x_m\geqslant\omega\\
a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m_2}x_m\geqslant\omega\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_m\geqslant\omega\\
x_1+x_2+\ldots+x_m=1.
\end{array}$$

და ამავე დროს ω იყოს მაქსიმალური.

ანალოგიურად ჩამოყალიბდება მეორე მოთამაშის ამოცანა:

ვიპოვოთ არაუარყოფითი $y_1, y_2, \dots, y_n$ და ω რიცხვები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1n}y_n &\leqslant \omega \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2n}y_n &\leqslant \omega \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\dots+a_{mn}y_n &\leqslant \omega \end{aligned}$$

და ამავე დროს ω იყოს მინიმალური.

ცხადია, რომ ეს ორი ამოცანა ორადული ამოცანებია.

§ 9. თამაშთა ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

თამაშთა თეორია პრაქტიკული ამოცანებისაგან არის აღმოცენებული. სავსებით ბუნებრივია, რომ თეორიამ პირუკუ უნდა მოგვცეს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის საშუალებანი. ამონახსნები ჩვენს შემთხვევაში წარმოადგენენ სტრატეგიებს (როგორც წესი, შერეულს) და თამაშის მნიშვნელობას. გავეცნოთ ამ სიდიდეების პოვნის ალგორითმებს.

პირველ რიგში დავიწყებთ უმარტივესი თამაშებით, ე. ი. ისეთი თამაშებით, სადაც ერთ-ერთ მოთამაშეს აქვს მხოლოდ ორი სტრატეგია. ასეთი თამაშები იმითაცაა საინტერესო, რომ ორგანზომილებიანი გეომეტრიული წარმოდგენები იძლევიან მრავალგანზომილებიან ამოცანებზე განზოგადოების საშუალებას. რაც შეეხება ზოგად მატრიცულ თამაშებს, მათი ამოხსნისათვის არსებობს მრავალი ალგორითმი. პირველ რიგში აქ აღსანიშნავია წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის სიმპლექს-მეთოდი და მატრიცულ თამაშთა ამოხსნის იტერაციული მეთოდი. იტერაციული მეთოდის არსს ჩვენ განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითზე. არსებობს ამ მეთოდის განზოგადება უსასრულო თამაშებისთვისაც. უსასრულო თამაშის (მიახლოებითი) ამოხსნა შეიძლება აგრეთვე წინასწარ მისი შეცვლით (მიახლოებით) სასრული თამაშით. ეს საკითხებ, გაშუქებულია სპეციალურ ლიტერატურაში. არაანტაგონისტური თამაშებისათვის დამუშავებულია ალგორითმები წონასწორობის სიტუაციების საპოვნელად. ამ საკითხებს სირთულის გამო არ განვიხილავთ.

2×2-ზე თამაშის ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულია თამაში მატრიცით

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

შევამოწმოთ აქვს თუ არა ამ მატრიცას უნაგირა წერტილი. თუ ასეთი წერტილი არსებობს, მაშინ ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის ფასი ნაპოვნია.

დავუშვათ, რომ მატრიცას არა აქვს უნაგირა წერტილი, მაშინ მოთამაშეებს გააჩნიათ მხოლოდ ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები. ვეძიოთ ეს სტრატეგიები $X=(x,\ 1-x)$ და $Y=(y,\ 1-y)$ სახით, სადაც $0<x<1$ და $0<y<1$. მოგების ფუნქცია იქნება

$$H(X,Y)=a_{11}xy+a_{12}x(1-y)+a_{21}(1-x)y+a_{22}(1-x)(1-y)=$$
$$=xy(a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21})+x(a_{12}-a_{21})+y(a_{21}-a_{22})+a_{22}.$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უნაგირა წერტილი ანუ ისეთი $\{\overline{X},\ \overline{Y}\}$, რომ

$$\max_X\ H(X,\ \overline{Y})=H(\overline{X},\ \overline{Y})=\min_Y\ H(\overline{X},Y).$$

მაქსიმუმი და მინიმუმი განიხილება X-ით და Y-ით, მაგრამ ფაქტიურად x და y-ით. რადგანაც ექსტრემუმები მიიღწევა $[0,\ 1]$ სეგმენტის შიგა წერტილებში, ამიტომ კერძო წარმოებულები იქ ნულის ტოლი უნდა იყოს, მაშასადამე

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}=y(a_{11}-a_{22}-a_{12}-a_{21})+a_{12}-a_{22}=0,$$

$$\frac{\partial H(x,\ y)}{\partial y}=x(a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21})+a_{21}-a_{22}=0.$$

აქედან კი

$$\overline{x}=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

$$\overline{y}=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

ოპტიმალური სტრატეგიებია: $\overline{X}=(\overline{x},\ 1-\overline{x})$, $\overline{Y}=(\overline{y},\ 1-\overline{y})$, თამაშის მნიშვნელობა კი

$$V=H(\overline{X},\ \overline{Y})=\frac{a_{11}\ a_{22}-a_{12}\ a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

ცხადია თამაშის ამონახსენი ყოველთვის იარსებებს და იგი იქნება ერთადერთი, თუ მნიშვნელი $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}\neq 0$. ცხადია, რომ მნიშვნელობის ნულთან ტოლობა ოპტიმალური წმინდა სტრატეგიების არსებობის ტოლფასია, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

$2\times n$-ზე თამაშის გრაფიკული ამოხსნა. განვიხილოთ თამაში, როცა პირველ მოთამაშეს აქვს მხოლოდ ორი სტრატეგია, ე. ი. თამაშის მატრიცას აქვს სახე

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

პირველი მოთამაშის შერეული სტრატეგია ვეძებოთ $X=(x,\ 1-x)$ სახით, სადაც $x\in[0,1]$ და გამოვიყენოთ ფორმულა

$$V=\max_X \min_j H(X,\ J).$$

მეორე მოთამაშის სხვადასხვა სტრატეგიისათვის პირველი მოთამაშე მიიღებს მოგებებს შესაბამისად:

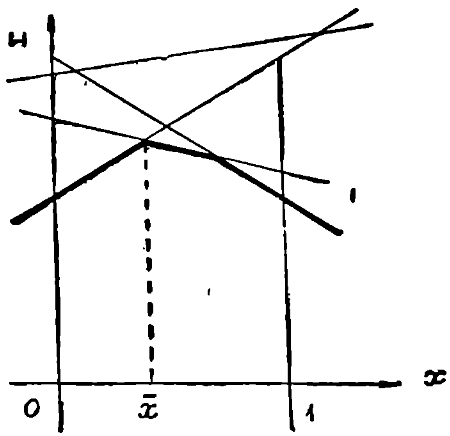
$$H(x,\ 1)=xa_{11}+(1-x)a_{21}$$
$$H(x,\ 2)=xa_{12}+(1-x)a_{22}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$H(x,\ n)=xa_{1n}+(1-x)a_{2n}.$$

მართკუთხა კოორდინატთა xOH სისტემაში ეს ტოლობები გამოვსახოთ წრფეებით. $[0,\ 1]$ სეგმენტის ყოველი x-თვის წრფეთა მინიმალური ორდინატა გვაძლევს პირველი მოთამაშის მინიმალურ (გარანტირებულ) მოგებას,

$$V=\min_j\ (xa_{1j}+(1-x)a_{2j}).$$

ეს გამოსახულება არის x ცვლადის ფუნქცია და გეომეტრიულად წარმოადგენს n წრფის ქვედა მომვლებს. ამ მომვლების მაქსიმუმის x წერტილი გვაძლევს პირველი მოთამაშის ოპტიმალურ სტრატეგიას $\bar{X}=(\bar{x},\ 1-\bar{x})$, ხოლო ორდინატა — თამაშის მნიშვნელობას (ნახ. 51):

$$V=\max_x \min_j\ (xa_{1j}+(1-x)a_{2j}).$$



ნახ. 51

როგორ ვიპოვოთ მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია? თუ $x=0$ ან $x=1$, მაშინ პირველ მოთამაშეს ჰქონია ოპტიმალური

წმინდა სტრატეგია და ასეთივე ექნება მეორესაც. მისი პოვნა იოლია. ვთქვათ, ახლა $\bar{x}$ არის სეგმენტის შიგა წერტილი და თანაც ერთადერთი. მაშინ იგი წარმოადგენს ორი წრფის გადაკვეთას და მეორე მოთამაშემ უნდა აირჩიოს მხოლოდ ამ წრფეების შესაბამისი სვეტების შერეული კომბინაცია (სხვა სვეტები აიღებიან ნულოვანი ალბათობებით), ვინაიდან ამ შემთხვევაში პირველ მოთამაშეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ის მოგება, რასაც ის მიიღებდა $2\times n$-ზე თამაშში. 2×2-ზე თამაშისათვის კი გვაქვს მზა ფორმულები.

იმ შემთხვევაში, როცა $\bar{x}$ ბევრია და მაშასადამე, შეადგენს ჰორიზონტალურ მონაკვეთს, მაშინ აუცილებლად $H=a_{1j_0}=a_{2j_0}=V$ და j_0 არის მეორე მოთამაშის წმინდა ოპტიმალური სტრატეგია, რადგან ის არ მისცემს საშუალებას პირველს მიიღოს V-ზე მეტი. წმინდა ოპტიმალური სტრატეგია ექნება პირველ მოთამაშესაც.

$m\times 2$-ზე თამაშის გრაფიკული ამოხსნა. ახლა ვთქვათ მეორე მოთამაშეს აქვს მხოლოდ ორი სტრატეგია. ასეთი თამაში მოიცემა მატრიცით:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, მეორე მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას ვეძებთ $Y=(y,1-y)$ სახით და ვსარგებლობთ ფორმულით

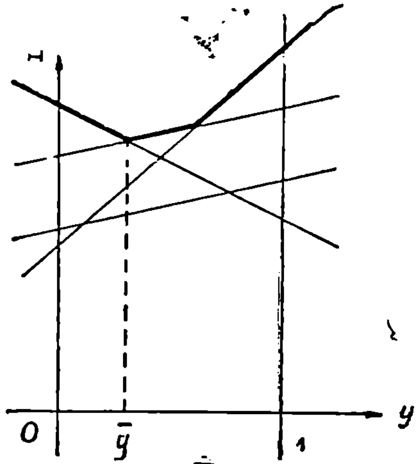
$$V=\min_{Y}\ \max_{i}\ H(i,\ Y).$$

ამოცანა მდგომარეობს $V(y)=\min_i(a_{i1}y+a_{i2}(1-y))$ ფუნქციის მინიმუმის პოვნაში. $V(y)$ ფუნქცია კი yOH მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წარმოგვიდგენს

$$\begin{aligned} H(1,y)&=a_{11}y+a_{12}(1-y)\\ H(2,y)&=a_{21}y+a_{22}(1-y)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ H(m,y)&=a_{m1}y+a_{m2}(1-y) \end{aligned}$$

წრფეთა ზედა მომვლებს. ამ მომვლების მინიმუმის $\bar{y}$ წერტილი მოგვცემს მეორე მოთამაშის $\bar{Y}=(\bar{y},\ 1-\bar{y})$ ოპტიმალურ სტრატეგიას, შესაბამისი ორდინატა კი წარმოადგენს თამაშის ფასს. დანარჩენი მსჯელობა წინა პარაგრაფის დასასრულის ანალოგიურია (ნახ. 52).

მატრიცულ თამაშთა ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდი. თამაშთა ამოხსნის იტერაციული მეთოდი ემყარება შემდეგ ინტუიციურ მოსაზრებას: ვთქვათ მატრიცულ თამაშში ჩაბმულია ორი მოწინააღმდეგე დიდი ხნის განმავლობაში და ყოველ პარტიაში თითოეული ირჩევს საუკეთესო გადაწყვეტილებებს იმ მოსაზრებით, რომ მოწინააღმდეგე მოიქცევა ისე, როგორც წინა პარტიებში. მაშინ მოთამაშეთა მიერ წმინდა სტრატეგიების არჩევის სიხშირეების ერთობლიობა პარტიების რაოდენობის ზრდასთან ერთად უნდა უახლოვდებოდეს მოთამაშეთა ოპტიმალურ სტრატეგიებს. მეთოდი გავარჩიოთ შემდეგი მარტივი 3×3 თამაშისათვის:



ნახ. 52

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

I პარტიაში ორივე ირჩევს ნებისმიერ წმინდა სტრატეგიას. ვთქვათ პირველი მოთამაშე ირჩევს პირველ სტრიქონს, მეორე — პირველ სვეტს.

II პარტიისათვის პირველი მსჯელობს შემდეგნაირად: თუ მეორე მოთამაშე ისევ აირჩევს პირველ სვეტს, ჩემთვის საუკეთესოა მეორე (ან პირველი) სტრიქონი, ანალოგიურად მსჯელობს მეორე მოთამაშე — ის აირჩევს მესამე სვეტს.

III პარტიისათვის პირველი მოთამაშე მსჯელობს: მეორე მოთამაშე თამაშობს (1/2, 0,1/2) შერეული სტრატეგიით. ამ სტრატეგიის საწინააღმდეგოდ საუკეთესოა ჩემი II სტრატეგია, ვინაიდან $H(1,y)=1$, $H(2,y)=2,5$, $H(3,y)=-2$. ანალოგიურად, მეორე მოთამაშე პირველის შერეული (1/2, 1/2, 0) სტრატეგიის საწინააღმდეგოდ ირჩევს მეორე სვეტს, ვინაიდან $H(X,1)=2$, $H(X,2)=0,5$, $H(X,3)=1,5$.

თამაშის შემდგომი მსვლელობა აღიწერება შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

პარტიის №	სტრიქონი	I მოთამაშის შერეული სტრატეგია	I მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება	სვეტი	II მოთამაშის შერეული სტრატეგია	I მოთამაშის მოსალოდნელი წაგება
1	1	(1,0,0)	2	1	(1,0, 0)	2
2	2	(1/2· 1/2,0)	2	3	(1/2, 0,1/2)	0
3	2	(1/3, 2/3,0)	21/2	2	(1/3, 1/3,1/3)	1/2
4	2	(1/4, 3/4,0)	12/3	2	(1/4, 2/4,1/4)	1/3
5	2	(1/5, 4/5,0)	11/4	2	(1/5, 3/5,1/5)	1/4
6	3	(1/6, 4/6,1/6)	1	2	(1/6, 4/6,1/6)	1/5
7	3	(1/7, 4/7,3/7)	4/3	2	(1/7, 5/7,1/7)	2/3
8	3	(1/8, 4/8,3/8)	11/7	3	(1/8, 5/8,2/8)	6/7
9	2	(1/9, 5/9,3/9)	1	3	(1/9, 5/9,3/9)	5/8

თეორიულად დამტკიცებულია, რომ სტრატეგიათა მიმდევრობები პარტიების ზრდასთან ერთად მიისწრაფიან მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიებისაკენ, ხოლო მოსალოდნელი მოგებების მიმდევრობები —თამაშის მნიშენელობისაკენ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ვიპოვოთ მოთამაშეთა გარანტირებული მოგებები შემდეგ მატრიცულ თამაშებში:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ვიპოვოთ უნაგირა წერტილები შემდეგ თამაშებში:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 21 \\ 6 & 6 & 5 & 7 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

3. ვიპოვოთ პირველი მოთამაშის მოგება აღებული შერეული სტრატეგიებისათვის:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$X=(1/2,\quad 1/2)$.
$Y=(1/4,\quad 3/4)$,

ბ) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$X=(1/6,\quad 1/3,\quad 1/2)$.
$Y=(1/3,\quad 1/2,\quad 1/6)$,

გ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$X=(1/3,\quad 0,\quad 2/3)$.
$Y=(0,\quad 5/6,\quad 1/6)$,

დ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$X=(1/4,\quad 1/4,\quad 1/2,\quad 0)$,
$Y=(1/8,\quad 3,\ 8,\quad 1/8,\quad 3/8)$.

ე) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$,

$X=(1/5,\ 1/5,\ 2/5,\ 1/5)$,
$Y=(2/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5)$.

ვ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$,

$X=(1/6,\ 2/6,\ 3/6)$,
$Y=(2/6,\ 1/6,\ 2/6,\ 1/6)$.

4. შევამოწმოთ, არის თუ არა მოცემული შერეული სტრატეგიები ოპტიმალური (ვისარგებლოთ თ. XI, § 6. თეორემა 2-ით):

ა) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$\overline{X}=(1/2,\ 1/2)$
$\overline{Y}=(1/2,\ 1/2)$.

ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\overline{X}=(3/5,\ 2/5)$,
$\overline{Y}=(4/5,\ 0,\ 1/5)$.

გ) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\overline{X}=(5/7,\ 2/7)$,
$\overline{Y}=(3/7,\ 2/7,\ 0.\ 0)$.

დ) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$\overline{X}=(1/6,\ 1/3,\ 1/2)$,
$\overline{Y}=(0,\ 1/2,\ 1/2)$.

ე) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

ვ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\overline{X}=(1/3,\ 2/3,\ 0)$, $\overline{X}=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$,
$\overline{Y}=(1/5,\ 3/5,\ 1/5)$, $\overline{Y}=(1/3,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 1/6)$.

5. ამოვხსნათ 2×2 თამაშები:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

ე) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, ვ) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის მნიშვნელობა შემდეგი მატრიცული თამაშებისათვის (გამოვიყენოთ თ. XI, §6. თეორემა 2):

ა) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. დომინირების, ცნების გამოყენებით ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგიები თამაშში:

ა) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

ე) $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, ვ) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

8. ამოვხსნათ გრაფიკულად შემდეგი თამაშები:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

ე) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ვ) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

ზ) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, თ) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9. ვიპოვოთ თამაშის ამონახსენი მიახლოებით (ჩავატაროთ 10 იტერაცია):

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, დ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

ე) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ვ) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

XII თავი

გრაფთა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

§ 1. შესავალი

გრაფთა თეორია თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი დარგია. იგი წარმოადგენს ისეთი ობიექტების ან პროცესების განზოგადებულ მათემატიკურ მოდელს, რომელთა წარმოდგენა შეიძლება წერტილთა ერთობლიობით და ამ წერტილთა წყვილებს შორის გარკვეული მიმართების აღმნიშვნელი წირებით.

გრაფთა თეორია სათავეს იღებს გამოჩენილი მათემატიკოსის ლ. ეილერის (XVIII ს.) შრომებში. როგორც დამოუკიდებელი მათემატიკური დისციპლინა, იგი ჩამოყალიბდა ჩვენი საუკუნის 50-იან წლებში. მის განვითარებაზე გარკვეული გავლენა იქონია გამოკვლევებმა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, რომლებიც შეეხებოდნენ ელექტრულ ქსელებს, კრისტალთა მოდელებს და მოლეკულათა სტრუქტურას. გრაფთა თეორიის ენა მოსახერხებელი აღმოჩნდა მათემატიკურ

ეკონომიკასა და თამაშთა თეორიაში, მათემატიკურ ლოგიკასა და ალგორითმების თეორიაში, ინფორმაციის თეორიაში, მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, ბიოლოგიაში, ფსიქოლოგიაში და სხვა.

აღსანიშნავია აგრეთვე ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების ინტენსიურ განვითარებასთან გრაფებზე დაკავშირებული მრავალი ექსტრემალური ამოცანა: ქსელური და დინამიური დაპროგრამების ამოცანები, კომბინატორული ამოცანები, კალენდარული დაგეგმვის ამოცანა და სხვა.

§ 2. ძირითადი ცნებები

გრაფი განისაზღვრება შემდეგი ორი მათემატიკური ობიექტის ერთობლიობით: 1) გარკეული ელემენტების X სიმრავლით, რომლებსაც ეწოდება გრაფის წ ვ ე რ ო ე ბ ი; 2) X სიმრავლის ყოველ ელემენტსა და მის რაღაც ქვესიმრავლეს შორის T შესაბამისობით.

გრაფს ეწოდება ს ა ს რ უ ლ ი, თუ X სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა სასრულია. ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ სასრულ გრაფებს.

წვეროთა წყვილებს შორის შესაბამისობანი (კავშირები) განსაზღვრავენ გრაფის წ ი ბ ო ე ბ ს, თუ ეს წყვილები არ არის დალაგებული, ე. ი. განსხვავება საწყის და ბოლო წვეროებს შორის არ არის არსებითი. თუ აღნიშნული განსხვავება არსებითია, მაშინ წვეროების შემაერთებელ წიბოებს ეწოდება რ კ ა ლ ე ბ ი. გრაფის წვეროები აღინიშნება წერტილებით ან მცირე წრეებით, წიბოები — არამიმართული წირებით (სწორით ან მრუდით), ხოლო რკალების გამოსახატავად საჭიროა წიბოზე მიმართულების აღნიშვნა ისრის საშუალებით.

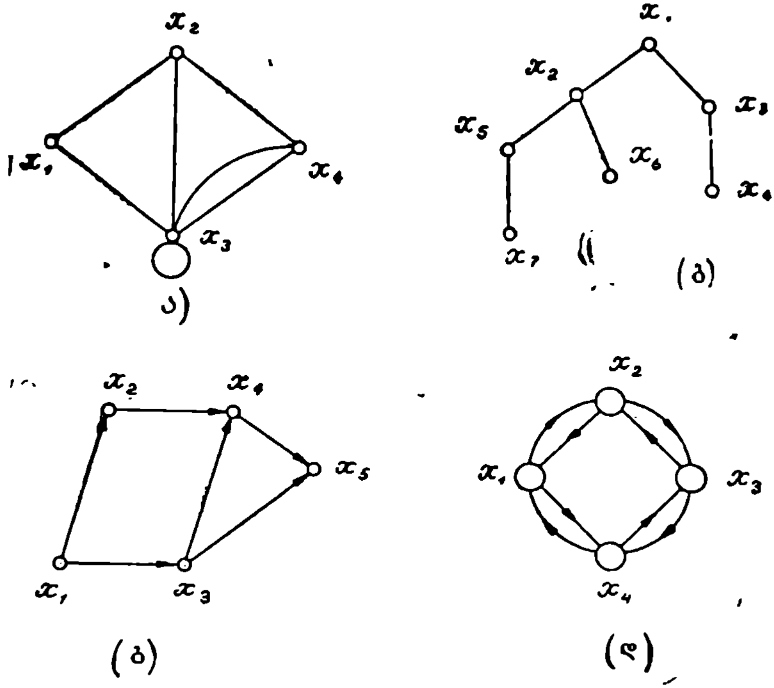
53-ე ნახაზზე გამოსახულია რამოდენიმე კონკრეტული გრაფი. განვიხილოთ მაგალითად ბ) შემთხვევა. წვეროთა სიმრავლეა $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, ხოლო T შესაბამისობას განსაზღვრავენ შემდეგი თანაფარდობები:

$$T_{x_1}=\{x_2\ \ x_3\},\ T_{x_2}=\{x_1,\ x_5,,\ x_6\},\ T_{x_3}=\{x_1,\ x_4\},\ T_{x_4}=\{x_3\},$$
$$T_{x_5}=\{x_2,\ x_7,\},\ T_{x_6}=\{x_2\},\ T_{x_7}=\{x_5\}.$$

თუ გრაფის წვეროები შეერთებულია წიბოებით, მაშინ მას ეწოდება ა რ ა ო რ ი ე ნ ტ ი რ ე ბ უ ლ ი გ რ ა ფ ი (ნახ. 53, ა), ხოლო რკალებით შედგენილ გრაფს უწოდებენ ო რ ი ე ნ ტ ი რ ე ბ უ ლ ან მ ი მ ა რ თ უ ლ გ რ ა ფ ს (ნახ. 53, გ, დ). გარკვეულ შემთხვევებში განიხილება შერეული გრაფებიც, რომლებიც შეიცავენ როგორც წიბოებს, ისე რკალებს. მაგალითად, ქალაქის გეგმა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ გრაფის სახით, რომლის წვეროებს წარმოადგენენ გზაჯვარედინები, ხოლო წიბოებს და რკალებს ქუჩები შესაბამისად ორმხრივი და ცალმხრივი მოძრაობით.

გრაფის ორ წვეროს ეწოდება მ ო მ ი ჯ ნ ა ვ ე, თუ ისინი განსაზღვრავენ წიბოს ან რკალს. ორ წიბოს ან რკალს ეწოდება მ ო მ ი ჯ ნ ა ვ ე, თუ მათ გააჩნია საერთო წვერო. საზოგადოდ, დასაშვებია ნებისმიერი რაოდენობა წიბოების ან რკალებისა, რომლებიც აერთებენ ორ წვეროს. წიბოს ან რკალს, რომლის წარმომქმნელი წვეროები ემთხვევიან ერთმანეთს, ეწოდება მ ა რ ყ უ ჟ ი (x_3 წვერო, ნახ. 53, ა). გრაფის წყვილ-წყვილად მომიჯნავე წიბოების მიმდევრობა ქმნის ჯაჭვს. ჯაჭვს ეწოდება მ ა რ ტ ი ვ ი, თუ მისი წიბოები განსხვავებულია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში—რ თ უ ლ ი. ჩაკეტილ ჯაჭვს (რომელიც იწყება და მთავრდება ერთსა და იმავე წვეროში) ეწოდება ც ი კ ლ ი. მაგალითად, x_1x_2, x_2x_4, x_4x_3 წიბოები ქმნიან ჯაჭვს, ხოლო x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 წიბოები—ც ი კ ლ ს (ნახ. 53, ა).

თუ გრაფის წვეროთა ყოველი წყვილისათვის არსებობს მათი შემაერთებელი ჯაჭვი, მაშინ ასეთ გრაფს ეწოდება ბ მ უ ლ ი. არაბმული გრაფი შედგება რამოდენიმე განცალკევებული ბმული გრაფისაგან (კომპონენტებისაგან). სასრულ ბმულ გრაფს, რომელიც შედგება არაუმცი-



ნახ. 53

რეს ორი წვეროსაგან და არ შეიცავს ციკლს, ეწოდება ხ ე. ხის წვეროთა ყოველი წყვილისათვის არსებობს მათი შემაერთებელი ერთადერთი ჯაჭვი. თუ ხეს გააჩნია n წვერო, მაშინ წიბოების რაოდენობაა $n-1$.

როგორც ორიენტირებულ, ისე არაორიენტირებულ გრაფზე ამბობენ, რომ წიბო ან რკალი მისი წარმომქმნელი წვეროების ინცინდენტურია და ეს წვეროები არიან წიბოს ან რკალის ინციდენტური. წვეროს, რომელიც არ არის არცერთი წიბოს ინცინდენტური, ეწოდება იზოლირებული წვერო. გრაფს, რომელიც შედგება მხოლოდ იზოლირებული წვეროებისაგან, ეწოდება ნულ-გრაფი, ხოლო გრაფს ეწოდება სრული, თუ მისი წვეროების ნებისმიერი წყვილი შეერთებულია ერთი წიბოთი მაინც.

ორიენტირებულ გრაფს ეწოდება სიმეტრიული, თუ მასში ყოველი მომიჯნავე წვეროთა წყვილი შეერთებულია საწინააღმდეგოდ ორიენტირებული რკალებით (ნახ. 53, დ). წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფს უწოდებენ არასიმეტრიულს.

ორიენტირებულ გრაფებში ჯაჭვისა და ციკლის ანალოგებს წარმოადგენს გზა და კონტური. ორიენტირებულ გრაფში რკალების ისეთ მიმდევრობას, რომლის დროსაც წინამდებარე რკალის ბოლო წარმოადგენს მომდევნო რკალის დასაწყისს ეწოდება გზა. გზის მაგალითია x_1x_3, x_3x_4, x_4x_5 რკალების მიმდევრობა (ნახ. 53, გ). გზას, რომლის საწყისი და ბოლო წვეროები ერთმანეთს ემთხვევიან, ეწოდება კონტური. გზის შემადგენელი რკალების რაოდენობას ეწოდება გზის სიგრძე.

ორიენტირებულ გრაფს ეწოდება ძლიერად ბმული, თუ მისი წვეროების ყოველი წყვილისათვის არსებობს მათი შემაერთებელი გზა.

გრაფს ეწოდება მოცემული გრაფის ნაწილი, თუ მისი წვეროების და წიბოების (ან რკალების) სიმრავლეები წარმოდგენენ ქვესიმრავლეებს, შესაბამისად, მოცემული გრაფის წვეროთა და წიბოთა (ან რკალთა) სიმრავლეებისა. მოცემული G გრაფის G' ნაწილს, რომლის წვეროთა X' სიმრავლე წარმოადგენს G გრაფის წვეროთა X სიმრავლის ქვესიმრავლეს, ხოლო წიბოთა (ან რკალთა) სიმრავლეს შეადგენენ გრაფის ის წიბოები (ან რკალები), რომელთა ორივე ბოლო ეკუთვნის X' სიმრავლეს, ეწოდება გრაფის ქვეგრაფი. ერთი წვეროს შესაბამისი ქვეგრაფი შედგება მარყუჟებისაგან ამ წვეროში.

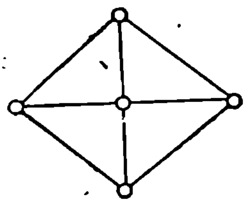
ვთქვათ მოცემულია ბმული არაორიენტირებული გრაფი. რადგან ყოველი ორი მოცემული x', x'' წვერო დაკავშირებულია, ამიტომ მოიძებნება მარტივი გზები x', x'' ბოლოებით. ამ მარტივი გზების სიგრძეები წარმოადგენენ არაუარყოფით მთელ რიცხვებს და ამიტომ მოიძებ-

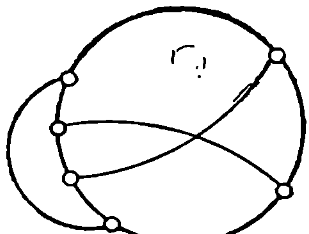
ნება x' და x'' შორის უმცირესი სიგრძის გზები, რომელთა სიგრძეს უწოდებენ $d(x', x'')$ მანძილს x' და x'' წვეროებს შორის. თუ დავუშვებთ, რომ $d(x,x)=0$, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ d ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკის აქსიომებს:

1) $d(x', x'')\geqslant 0$,
2) $d(x', x'')=0 \Rightarrow x'=x''$,
3) $d(x', x'')=d(x'', x')$,
4) $d(x'', x''')\leqslant d(x', x'')+d(x'', x''')$.

გრაფს უწოდებენ ბ რ ტ ყ ე ლ ს, თუ შესაძლებელია სიბრტყეზე მისი ისეთი გამოსახვა, რომ წიბოთა ყველა თანაკვეთა წარმოადგენს გრაფის წვეროებს.

54-ე ნახაზზე გამოსახული გრაფებიდან ა) წარმოადგენს ბრტყელ, ხოლო ბ) — არაბრტყელ გრაფს.


ა)


ბ)

ნახ. 54

გრაფის წარმოდგენა შესაძლებელია არა მარტო ნახაზის სახით, არამედ მატრიცული ფორმითაც. გრაფის მატრიცული ჩაწერა ერთი მხრივ მოხერხებულია ეგმ-ზე გრაფების დამუშავებისათვის, ხოლო მეორე მხრივ საშუალებას იძლევა გამოყენებული იქნას გრაფთა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის დროს მატრიცათა ფორმალური თვისებები.

n წვეროს მქონე გრაფის მ ო მ ი ჯ ნ ა ვ ე ო ბ ი ს მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება n რიგის $A=(a_{ij})$ მატრიცას, რომლისთვისაც a_{ij} ტოლია x_i და x_j წვეროების შემაერთებელ რკალთა რაოდენობისა. მაგალითად, ნახ. 53 გ-ზე გამოსახული გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

თუ მომიჯნავეობის მატრიცის ელემენტებია მხოლოდ 0 და 1, მაშინ გრაფი არ შეიცავს პარალელურ რკალებს, ხოლო თუ მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ გრაფს არ გააჩნია მარყუჟები.

n წვეროსა და l რკალისაგან შედგენილი გრაფის ი ნ ც ი დ ე ნ ც ი ი ს მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება $n \times l$ რიგის $B=(b_{ij})$ მატრიცას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $b_{ij}=1$, თუ i წვერო წარმოადგენს j რკალის საწყის წვეროს; $b_{ij}=-1$, თუ i წვერო წარმოადგენს j რკალის ბოლო წვეროს და $b_{ij}=0$, თუ i წვერო არ არის j რკალის ინციდენტური. მაგალითად, თუ ნახ. 53, გ-ზე გამოსახული გრაფის რკალებს გადავნომრავთ შემდეგი სახით: $x_1x_2 \to 1$, $x_1x_3 \to 2$, $x_2x_4 \to 3$, $x_3x_4 \to 4$, $x_3x_5 \to 5$, $x_4x_5 \to 6$, მაშინ მისთვის ინციდენციის მატრიცა იქნება

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 8. ქსელური მოდელების მნიშვნელობა

ქსელები, როგორც გარკვეული სახის გრაფები, ფართოდ გამოიყენება მრავალი პრაქტიკული ხასიათის ამოცანის გადაწყვეტის საქმეში. საკმარისია აღინიშნოს, რომ დაახლოებით 70% რეალობასთან დაკავშირებული წრფივი დაპროგრამების ამოცანებისა შეიძლება განხილული იქნას, როგორც ქსელური ან ქსელურ ამოცანებთან დაკავშირებული. ქსელური მოდელების გამოყოფის მიზანშეწონილობა მდგომარეობს იმაში, რომ ქსელების განსაკუთრებული მათემატიკური მახასიათებლები იძლევა ოპტიმალური ამონახსნების პოვნის ეფექტურობის არსებითად ამაღლების საშუალებას.

სასრულ ბმულ ორიენტირებულ გრაფს მარყუჟების გარეშე უწოდებენ ქ ს ე ლ ს, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) გრაფი შეიცავს ორ და მხოლოდ ორ ისეთ წვეროს, რომელთაგან ერთს არ აქვს შემავალი რკალები და ეწოდება წ ყ ა რ ო, ხოლო მეორეს არ გააჩნია გამომავალი რკალები და ეწოდება ჩ ა ს ა ვ ა ლ ი;

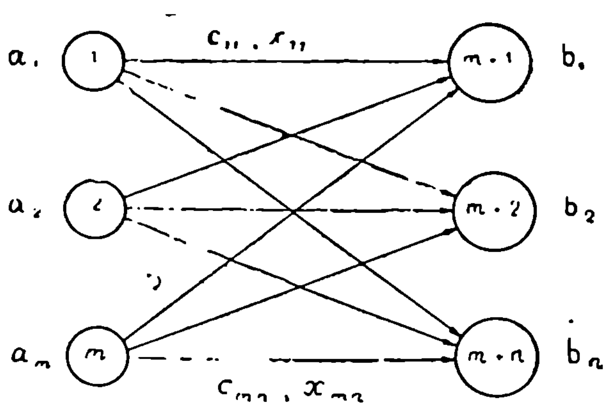
ბ) გრაფის ყოველ რკალს შეესაბამება ერთი ან რამოდენიმე რიცხვი. ეს რაოდენობრივი მახასიათებლები შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნას მრავალი სახით, მაგალითად, რკალის სიგრძე (პუნქტებს შორის მანძილი), დრო, ღირებულება, რკალის გამშვები შესაძლებლობა და სხვა.

აღსანიშნავია, რომ ქსელის შემთხვევაში გრაფის წვეროებს უწოდებენ კ ვ ა ნ ძ ე ბ ს. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ტრანსპორტის ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: მოცემულია ერთგვაროვანი არა ურთიერთშენაცვლებადი პროდუქტების მწარმოებელი m პუნქტი (i-ურ პუნქტში წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაა a_i) და მოხმარების n პუნქტი (j-ურ პუნქტში მოხმარებული პროდუქციის რაოდენობაა b_j); c_{ij} არის i-ური პუნქტიდან j-ურ პუნქტში ერთეული პროდუქტის გადატანის ღირებულება, ხოლო x_{ij} არის i-ური პუნქტიდან j-ურ პუნქტში გადატანილი პროდუქტის რაოდენობა. მაშინ წარმოების ყოველი პუნქტიდან მოხმარების ყოველ პუნქტში პროდუქტების გადატანის ჯამური ღირებულება იქნება $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, რომლის მინიმიზაცია

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1} x_{ij}=a_i, \quad i=1,2,\ldots,m \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=1,2,\ldots,n \\
x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n
\end{cases}
$$

შეზღუდვებში: (სადაც $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$) წარმოადგენს განსახილველ ამოცანას.

ამ ამოცანის ქსელური მოდელირებისათვის (ნახ. 55) წარმოებისა და მოხმარების პუნქტებს შევუსაბამოთ ქსელის კვანძები (შესაბამისად 1, 2,…,m და $m+1$, $m+2$,…, $m+n$ ნომრებით), ხოლო მარშრუტებს,



ნახ. 55

რომლებითაც იგზავნება პროდუქტი, შევუსაბამოთ ქსელის რკალები c_{ij} და x_{ij} რაოდენობრივი მახასიათებლებით.

ამრიგად, ტრანსპორტის ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმიზაციის ამოცანას ნახ. 55-ზე გამოსახულ ქსელზე. საზოგადოდ, ოპტიმიზაცია ქსელებზე მოიცავს მრავალი სხვადასხვაგვარი შინაარსის ამოცანას. მაგალითად, თუ მოცემულია ქსელის ყველა რკალის სიგრძე, მაშინ უმცირესი გზის ამოცანა მდგომარეობს უმცირესი სიგრძის მქონე გზის მოძებნაში წყაროდან (ან სხვა რომელიმე წვეროდან) ყველა დანარჩენ წვერომდე, ამასთან, გზის სიგრძეში იგულისხმება მისი შემადგენელი რკალების სიგრძეების ჯამი. აღსანიშნავია აგრეთვე მაქსიმალური ნაკადის ამოცანა ქსელში. მასში ნაკადი შეიძლება გაგებული იქნას, როგორც რაღაც ობიექტების (სითხის, მგზავრების, ტვირთის, ავტომობილების და სხვ.) რაოდენობა, რომელიც საჭიროა გადაადგილებული იქნას ქსელის რკალების საშუალებით წყაროდან ჩასავალამდე იმ პირობებში, როდესაც თითოეული რკალის გამშვები შესაძლებლობა შემოსაზღვრულია. ამოცანა მდგომარეობს წყაროდან ჩასავალამდე ნაკადის მაქსიმალური სიდიდის განსაზღვრაში.

დიდი პრაქტიკული ღირებულების შემცველია ამოცანები, რომელთა შინაარსს შეადგენს პროგრამის (პროექტის, ოპერაციათა კომპლექსის) კალენდარული დაგეგმვა (ე. ი. დაგეგმვა დროში), ისე რომ გათვალისწინებული იყოს მასში შემავალ ოპერაციათა (სამუშაოთა) ხანგრძლივობა და შესრულების თანმიმდევრობა. ასეთი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად წარმატებით გამოიყენება ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდები, რომელთაგან ზოგიერთს ქვემოთ განვიხილავთ.

§ 4. ქსელური დაგეგმვა და მართვა

თანამედროვე მეცნიერულ-ტექნიკური რევოლუციის პირობებში ყოველი ახალი სისტემის (მშენებლობა, ახალი პროდუქციის გამოშვების მომზადება, გამოყენებითი სამეცნიერო-კვლევითი სამუშაო და სხვ.) შექმნა დაკავშირებულია ისეთი პროგრამის (პროექტის, ოპერაციათა კომპლექსის) განხორციელებასთან, რომელიც შეიცავს მრავალ ურთიერთდაკავშირებულ ოპერაციას (სამუშაოს). ამიტომ თანამედროვე პროგრამების ორგანიზაციული მართვის, კერძოდ კი მათი კალენდარული დაგეგმვის, მეთოდები არიან დიდი პრაქტიკული ღირებულების. ამ მხრივ მნიშვნელოვანი პროგრესი იქნა მიღწეული მე-20 საუკუნის 50-იანი წლების ბოლოს, როდესაც დამუშავებული იქნა ე. წ. ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდები. მათში ცენტრალურ როლს ასრულებს ე. წ. ქსელური გრაფიკი, რომელიც წარმოადგენს პროგრამაში შემავალი

ოპერაციებისა და მათი შესრულების თანმიმდევრობის თვალსაჩინო ასახვას. ქსელური გრაფიკი გრაფთა თეორიის თვალსაზრისით წარმოადგენს ქსელს, რომელშიც ქსელის რკალებს (ისრებს) შეესაბამება ოპერაციები, ხოლო კვანძებს — ე. წ. ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ე ბ ი. ხდომილობა განისაზღვრება როგორც დროის ის მომენტი, როდესაც მთავრდება ერთი და იწყება სხვა ოპერაციები, არ მოითხოვება რომ გრაფიკზე რკალის სიგრძე პროპორციული იყოს შესაბამისი ოპერაციის ხანგრძლივობისა. ოპერაციების დროში მიმდინარეობა გრაფიკზე მოიცემა ხდომილობების ნუმერაციის საშუალებით, ამასთან ყოველი ოპერაციის საწყისი ხდომილობის ნომერი ნაკლები უნდა იყოს ბოლო ხდომილობის ნომერზე:

გარდა აღნიშნულისა ქსელური გრაფიკი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ აუცილებელ მოთხოვნებს:

1) მხოლოდ საწყის ხდომილობას არ გააჩნია შემავალი ისარი და მხოლოდ დამამთავრებელ ხდომილებას — გამომავალი ისარი;

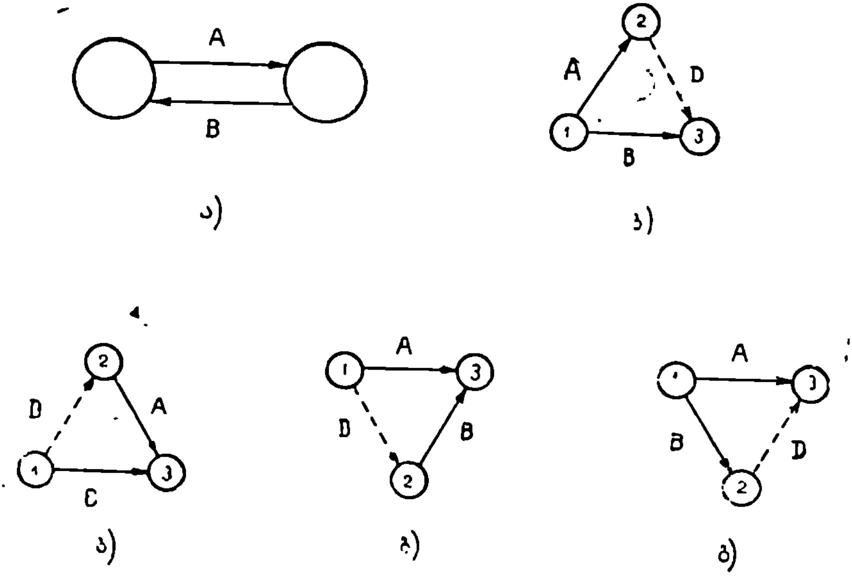
2) გრაფიკს, როგორც ქსელს, არ უნდა გააჩნდეს კონტურები და მარყუჟები, რადგან მათი არსებობა ნიშნავს, იმას რომ რაღაც ოპერაციის დაწყების პირობას წარმოადგენს მისი დამთავრება;

3) ოპერაციათა არცერთი წყვილი არ უნდა განისაზღვრებოდეს ერთი და იგივე საწყისი და ბოლო ხდომილობებით. ასეთი სიტუაციების წარმოქმნა დაკავშირებულია ორი ან რამოდენიმე ოპერაციის ერთდროულად შესრულების შესაძლებლობასთან. მაგალითად, A და B ოპერაციები (ნახ. 56,ა) განისაზღვრება ერთი და იგივე ხდომილობით. ამ სიტუაციის თავიდან ასაცილებლად შემოაქვთ ფიქტიური ოპერაციები, რომლებიც არ მოითხოვენ დროის დანახარჯებს.

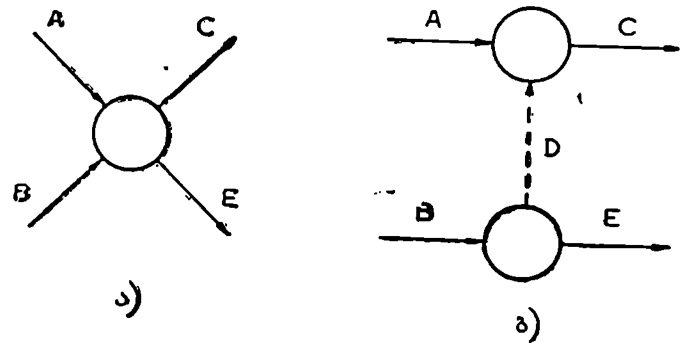
56-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ფიქტიური ოპერაციის შემოღების სხვადასხვა შესაძლებლობები.

აღსანიშნავია, რომ ფიქტიური ოპერაციები გამოიყენება აგრეთვე ოპერაციათა ლოგიკური კავშირების სწორი ასახვისათვის. მაგალითად თუ C ოპერაციას უშუალოდ წინ უსწნებს A და B, ხოლო E-ს მხოლოდ B, მაშინ ამ სიტუაციას სწორად ასახავს ნახ. 57, ბ, რომელშიც გამოიყენება ფიქტიური D ოპერაცია, და არასწორად ასახავს ნახ. 57, ა.

ქსელურ გრაფიკში რაიმე ოპერაციის ჩართვის დროს ოპერაციათა სწორი თანამიმდევრობის უზრუნველსაყოფად საჭიროა განსაზღვრული იყოს როგორც მისი უშუალოდ წინმსწრები, ისე ის ოპერაციები რომლებიც სრულდება მასთან ერთდროულად და უშუალოდ მის შემდეგ. დალაგებულ ქსელურ გრაფიკში ოპერაციათა შესაბამისი ყველა ისარი მიმართულია მხოლოდ მარცხნიდან მარჯვნივ. ასეთი გრაფიკის ყოველ ვერტიკალურ შრეში შემავალი ხდომილობის წინასწრები ხდომილობე-



ნახ. 56



ნახ. 57

ბი განლაგებულია მხოლოდ ამ შრიდან მარცხნივ არსებულ შრეებში. აღსანიშნავია, რომ სწორად შედგენილი გრაფიკის დალაგება ყოველთვის შესაძლებელია, რაც არ ითქმის, მაგალითად, კონტურების შემცველ გრაფიკზე (მასში რომელიღაც ისრები მიმართული იქნება მარჯვნიდან მარცხნივ).

ქვემოთ კონტურულ მაგალითზე განვიხილავთ ქსელური გრაფიკის

ძირითად დროით მახასიათებლებს, მათი გამოთვლის მეთოდებსა და ქსელის ანალიზის ზოგიერთ სხვა ასპექტს.

პირველ ცხრილში მოცემულია ოპერაციათა კომპლექსი, შედგენილი ათი A-J ოპერაციისაგან. ამასთან, ცხრილში ასახულია ყოველი ოპერაციისათვის უშუალოდ წინმსწრები ოპერაციები და თითოეული ოპერაციის ხანგრძლივობა დღეებში.

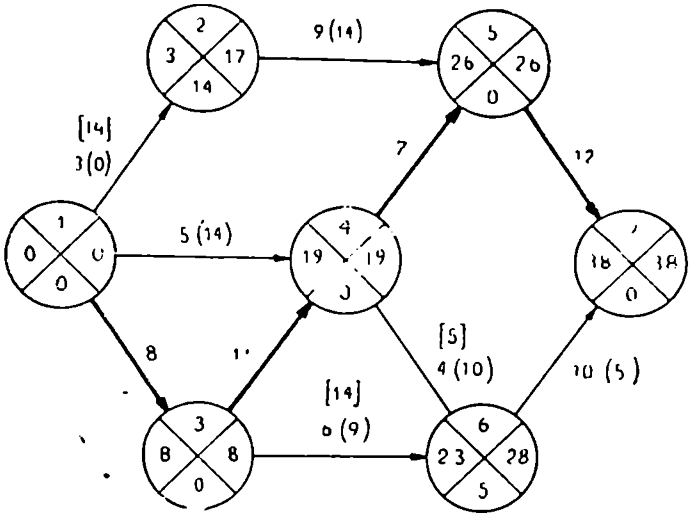
ცხრილი 1

ოპერაციები	წინმსწრები ოპერაციები	ოპერაციათა ხანგრძლივობა, დღეები	ხდომილობები	
			საწყისი	ბოლო
A	—	3	1	2
B	—	8	1	3
C	—	5	1	4
D		9	2	5
E	B	11	3	4
F	B	6	3	6
G	C, E	7	4	5
H	C, E	4	4	6
I	D, G	12	5	7
J	F, H	10	6	7

როგორც ცხრილიდან ჩანს A, B და C ოპერაციებს არ გააჩნია წინმსწრები ოპერაცია, ამიტომ მათი დაწყება შეიძლება პარალელურად დროის ათვლის ნულოვანი წერტილიდან. D-ს დაწყება შეიძლება მხოლოდ A-ს დამთავრების შემდეგ, E და F-ის დაწყება შეიძლება B-ს დამთავრების შემდეგ და ა. შ. ეს ინფორმაცია ასახულია ქსელზე (ნახ. 58), რომლის კვანძები დაყოფილია 4 სექტორად და თითოეული კვანძის შესაბამისი ხდომილობის ნომერი ჩაწერილია ზედა სექტორებში. ოპერაციებისა და ხდომილობების ნომრებს შორის შესაბამისობა მოცემულია ცხრილ 1-ში, ხოლო ამავე ცხრილში მოცემული ოპერაციების ხანგრძლიობა აღნიშნულია ქსელის თითოეულ რკალზე (ფრჩხილების გარეშე), რაც შეეხება ქსელზე აღნიშნულ სხვა რაოდენობრივ მახასიათებლებსა და მკვეთრად გამოხატულ რკალებს, მათ განსაზღვრებას მოვიყვანთ ქვემოთ.

პირველ რიგში გამოვთვალოთ ოპერაციათა მთელი კომპლექსის მოსალოდნელი ხანგრძლიობა, რომელიც უშუალოდ არ გამომდინარეობს ცხრილ 1-ში მოყვანილი ინფორმაციიდან, ამისათვის საჭიროა გამოთვლილი იქნას ყოველი ხდომილობის დადგომის ვადა (ე. წ. ადრეული ვადა), რომელიც აღვნიშნოთ ხდომილობების შესაბამისი წრეების მარცხენა სექტორში.

საწყისი ხდომილობა 1-ის დადგომის დრო ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. რადგან 1—2 და 1—3 ოპერაციების ხანგრძლიობებია შესაბამისად 3 და 8, ამიტომ 2 და 3 ხდომილობების დადგომისათვის საჭიროა



ნახ 58

3 და 8 დღე. როგორც აღვნიშნეთ ეს მონაცემები ჩაიწერება ხდომილობების მარცხენა სექტორში. რაც შეეხება 4 ხდომილობას, მასში შემავალი ოპერაციებია 1—4 და 3—4, რომელთგან პირველი მთავრდება პროგრამის დაწყებიდან 5 დღეში, ხოლო მეორე $8+11=19$ დღეში; რადგან 4 ხდომილობის დადგომისთვის აუცილებელია 3—4 ოპერაციის დასრულება, ამიტომ მისი დადგომის მოსალოდნელი (ადრეული) ვადაა 19 დღე.

ხდომილობა 5-ის დადგომისათვის აუცილებელია 2—5 და 4—5 ოპერაციების დამთავრება, რომელთაგან პირველი მთავრდება $3+9=12$ დღეში, ხოლო მეორე $19+7=26$ დღეში. ამრიგად, ხდომილობა 5-ის დადგომის ვადაა 26 დღე, ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ პროგრამის დამამთავრებელი 7 ხდომილობის დადგომის ვადაა 38, რაც აგრეთვე წარმოადგენს მთლიანად პროგრამის შესრულების ვადას.

თუ მოვახდენთ ხდომილობების დადგომის ადრეული ვადის განსაზღვრის ზემოთაღნიშნული პროცედურის განზოგადებას, მივიღებთ: i—j ოპერაციისათვის j საბოლოო ხდომილობის დადგომის ადრეული t^o_j ვადა უდრის i საწყისი ხდომილობის დადგომის ადრეული t^o_i ვადისა და i—j ოპერაციის t_{ij} ხანგრძლივობის ჯამს; ხოლო თუ j ხდომილობისათვის არსებობს რამოდენიმე შემავალი ოპერაცია, მაშინ აღნიშნული ჯამებიდან აიღება უდიდესი, ე. ი.

$$t^o_j = \max_i (t^o_i + t_{ij}).$$

58-ე ნახაზზე გამოსახულ ქსელზე ჩატარებული გამოთვლები საშუალებას იძლევა, გარდა პროგრამის საერთო ხანგრძლიობისა (38 დღე), განისაზღვროს აგრეთვე ე. წ. კრიტიკული გზა — ქსელური გრაფიკის მნიშვნელოვანი მახასიათებელი. პროგრამის საწყისი ხდომილობიდან დამამთავრებელ ხდომილობამდე ოპერაციათა მიმდევრობას ეწოდება კ რ ი ტ ი კ უ ლ ი გ ზ ა, თუ იგი ხასიათდება მაქსიმალური დროის ხანგრძლიობით. ამ გზით შემადგენელ ხდომილობებსა და ოპერაციებს უწოდებენ აგრეთვე კრიტიკულს.

როგორც ზემოთმოყვანილი გამოთვლებიდან ჩანს კრიტიკული გზა— ეს ის გზაა, რომლის ხანგრძლიობა პროგრამის სრული ხანგრძლივობის (38 დღის) ტოლია. კრიტიკული გზის მოსაძებნად ჩავატაროთ ქსელის ანალიზი ბოლოდან, ე. ი. დამამთავრებელი 7 ხდომილობიდან. მისი დადგომის ხანგრძლივობა (38 დღე) განსაზღვრულია 5—7 ოპერაციით, ხოლო 5 ხდომილობის დადგომის ვადა 4—5 ოპერაციით; რაც შეეხება 4 — ხდომილობის დადგომის ვადას, იგი განისაზღვრება 3—4 ოპერაციით და ბოლოს, 3 ხდომილობის ვადას განსაზღვრავს 1—3 ოპერაცია. ამრიგად, 38 დღის ხანგრძლივობის რეალიზაციას ახდენს 1—3—4—5—7 გზა, რომელიც 58-ე ნახაზზე გამოსახული ქსელისთვის არის სწორედ კრიტიკული გზა. რაც შეეხება სხვა, ე. წ. არაკრიტიკულ გზებს, მათი ხანგრძლიობა 38 დღეზე ნაკლებია; მაგალითად, 1—2—5—7 გზის ხანგრძლივობაა 3+9+12=24 დღე, 1—4—6—7 გზის — 5+4+10=19 დღე. ამრიგად, ნებისმიერი კრიტიკული ოპერაციის ხანგრძლიობის გადიდება იწვევს პროგრამის საერთო ხანგრძლიობის გადიდებას, მაშინ როცა არაკრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის გადიდებამ შეიძლება არავითარი გავლენა არ მოახდინოს პროგრამის საერთო ხანგრძლიობაზე. სწორედ ამაში მდგომარეობს კრიტიკული გზის განსაზღვრის დიდი პრაქტიკული ღირებულება, რადგან იგი გვიჩვენებს, თუ პროგრამის შესრულებისას რომელ ოპერაციებს უნდა მიექცეს პირველ რიგში ყურადღება, ისე რომ აუცილებლად იქნას დაცული მათი შესრულების ვადები. თუ საჭიროა მთლიანი პროგრამის ხანგრძლიობის შემცირება, ამისათვის შესწავლილი უნდა იქნას სწორედ კრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირების შესაძლებლობა. აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ ქსელური გრაფიკი შეიძლება შეიცავდეს არა ერთ, არამედ რამოდენიმე კრიტიკულ გზას, ამასთან ყოველ მათგანში შემავალი ოპერაციები უშუალო გავლენას ახდენენ დამამთავრებელი ხდომილობის დადგომის ვადაზე.

ზემოთმოყვანილი გამოთვლები, რომლებმაც საშუალება მოგვცეს დაგვედგინა მთლიანი პროგრამის ხანგრძლივობა და მისი მარეალიზებელი კრიტიკული გზა, ეყრდნობოდნენ თითოეული ხდომილობისათვის,

ე. წ. ადრეული ვადების $t^{\text{ა}}_j$ გაანგარიშებებს. ეს შედეგები საშუალებას იძლევა გამოთვლილი იქნას თითოეული ხდომილობის დადგომის ე. წ. გვიანი ვადა. რაიმე i ხდომილობის გვიანი $t^{\text{გ}}_i$ ვადა j ხდომილობის დადგომის გვიანი $t^{\text{გ}}_j$ ვადისა და $i-j$ ოპერაციის ხანგრძლიობის სხვაობის ტოლია. თუ i ხდომილობიდან გამოდის რამოდენიმე ოპერაცია, მაშინ სხვაობებიდან აიღება უმცირესი, ე. ი.

$$t^{\text{გ}}_i=\min_{i} (t^{\text{გ}}_i - t_{ij}).$$

ამ ფორმულით სარგებლობის წესი მდგომარეობს შემდეგში: დამამთავრებელი k ხდომილობის დადგომის ადრეული და გვიანი ვადები ემთხვევიან, ე. ი. $t^{\text{ა}}_k=t^{\text{გ}}_k$, საიდანაც თუ დავიწყებთ ამ ფორმულის გამოყენებას, მიმდევრობით გამოითვლება არაკრიტიკული ხდომილობების გვიანი ვადები (კრიტიკული ხდომილობებისათვის ადრეული და გვიანი ვადები ემთხვევიან).

მოვახდინოთ ზემოაღნიშნულის დემონსტრირება 58-ე ნახაზზე გამოსახული ქსელური გრაფიკისათვის, სადაც ყოველი ხდომილობის დადგომის გვიანი ვადა აღნიშნულია შესაბამისი წრის მარჯვენა სექტორში. ადრეული ვადებისგან განსხვავებული გვიანი ვადების არარსებობა ნიშნავს ამ ხდომილობის დადგომის ვადის გადაწევის შესაძლებლობას (როგორც ზემოთ აღინიშნა, ასეთი გადაწევა კრიტიკული ხდომილობებისათვის შეუძლებელია). განსახილველ ქსელურ გრაფიკზე არის მხოლოდ ორი არაკრიტიკული 2 და 6 ხდომილობა. 6 ხდომილობის დადგომის ვადაა პროგრამის დაწყებიდან 23 დღე, მაგრამ იგი შეიძლება დამდგარიყო 28 დღის შემდეგაც, რადგან მისგან გამომავალი 6—7 ოპერაციის ხანგრძლიობაა 10 დღე და ამიტომ პროგრამის საერთო ხანგრძლიობა არ შეიცვლებოდა (ცხადია, რომ, მაგალითად, 29 დღის ვადა უკვე გამოიწვევდა ასეთ ცვლილებას). 28 დღე წარმოადგენს სწორედ 6 ხდომილობის დადგომის გვიან ვადას. ანალოგიურად შეიძლება გამოვიანგარიშოთ 2 ხდომილობის დადგომის გვიანი ვადა — 17 დღე (26—9=17).

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ კრიტიკული გზის ხანგრძლობა ტოლია მთლიანი პროგრამის შესრულების ვადისა, ხოლო არაკრიტიკული გზის ხანგრძლიობა მასზე ნაკლებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი არაკრიტიკული ოპერაცია დაკავშირებულია რაღაც არანულოვან დროით რეზერვთან, მაშინ როცა კრიტიკული ოპერაციებისათვის ეს რეზერვი ნულის ტოლია. ამ მოსაზრებების ფორმალიზაციის მოთხოვნილებას მივყავართ ყოველი ოპერაციისათვის ისეთი სიდიდეების განხილვამდე, როგორიცაა ოპერაციის დროის თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი და ს რ უ ლ ი რეზერვები. $i-j$ ოპერაციის დროის თავისუფალი

$R^{\text{თ}}_{ij}$ რეზერვი და სრული $R^{\text{ს}}_{ij}$ რეზერვი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$t^{\text{თ}}_{ij}=t^{\text{ა}}_{j}-t_{ij}-t^{\text{ა}}_{i},$$
$$R^{\text{ს}}_{ij}=t^{\text{გ}}_{j}-t_{ij}-t^{\text{ა}}_{j},$$

სადაც t_{ij}, $t^{\text{ა}}_{i}$, $t^{\text{ა}}_{j}$, $t^{\text{გ}}_{j}$ — ზემოთ განსაზღვრული სიდიდეებია.

ამ სიდიდეების გათვალისწინებით შეგვიძლია ვთქვათ რომ $i-j$ ოპერაცია ეკუთვნის კრიტიკულ გზას თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

$$t^{\text{ა}}_{i}=t^{\text{გ}}_{i}$$
$$t^{\text{ა}}_{j}=t^{\text{გ}}_{j}$$
$$R^{\text{ა}}_{ij}=R^{\text{ს}}_{ij}=0.$$

ქსელურ გრაფიკზე (ნახ. 58) არაკრიტიკულ ოპერაციათა დროის თავისუფალი რეზერვები აღნიშნულია შესაბამის ისარზე მრგვალ ფრჩხილებში, ხოლო დროის სრული რეზერვები — კვადრატულ ფრჩხილებში (იქ სადაც ისინი განსხვავდებიან თავისუფალი რეზერვებისაგან).

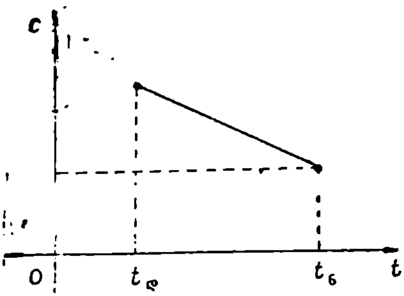
აუცილებელია აღინიშნოს დროის თავისუფალ და სრულ რეზერვებს შორის განსხვავების ერთი არსებითი ასპექტი. თავისუფალი რეზერვების გამოყენება (ოპერაციათა ხანგრძლიობის ვადა) შესაძლებელია ყველა ოპერაციისათვის ერთდროულად, რითაც, ცხადია, ისინი გახდებიან კრიტიკულნი, მაგრამ პროგრამის მთლიანი ხანგრძლიობა ამით არ შეიცვლება, რაც შეეხება სრულ რეზერვებს მათი ერთდროული გამოყენება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. მაგალითად, 1—2 და 2—5 ოპერაციების სრული რეზერვები ტოლია 14 დღისა და თითოეული მათგანი შეიძლება გამოყენებული იქნას, მაგრამ არა ერთდროულად, რადგან მაშინ ამ ოპერაციათა ერთობლივი ხანგრძლიობა იქნებოდა 3+14+9+14=40 დღე, რაც 14 დღით აღემატება 5 ხლომილობის დადგენილ ვადას.

დროითი რეზერვების განსაზღვრა მნიშვნელოვანია პროგრამის განხორციელების სხვადასხვა ეტაპებზე. მაგალითად თუ ნახ. 58-ზე ასახული პროგრამის მე-8 დღეზე, როდესაც იწყება 3—4 და 3—6 ოპერაციები, ხოლო გრძელდება 2—5 ოპერაცია, წარმოიშვა შემსრულებელთა დეფიციტი, მაშინ მისი ლიკვიდაცია შესაძლებელია 3—6 ოპერაციის დაწყების გადაწევის ხარჯზე, რადგან მას აქვს დროის საკმარისი თავისუფალი რეზერვი. ასეთი გადაწევა გრაფიკზე აღინიშნება შესაბამისი ხანგრძლივობის მქონე ფიქტიური ოპერაციის შემოტანით. განსხვავებულ მაგალითად შეგვიძლია მოვიყვანოთ სიტუაცია, როდესაც შედგენილი გრაფიკის საერთო ხანგრძლივობა აჭარბებს პროგრამის შესრულების დირექტიულ ვადას. ამ მდგომარეობის გამოსას-

წორებელ გზას ცხადია, წარმოადგენს რომელიღაც კრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირება, რაც ჩვეულებრივად საჭიროებს დამატებით რესურსებს. ამ რესურსების გამოთავისუფლება შესაძლებელია სწორედ არაკრიტიკული გზების ხანგრძლიობის გაზრდის ხარჯზე, ხოლო თუ რა ზღვრამდეა ეს შესაძლებელი, ამას გვიჩვენებენ გამოთვლილი დროის რეზერვები. აღწერილ სიტუაციაში გასათვალისწინებელია ის გარემოება, რომ, კრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირებით და არაკრიტიკული გზების ხანგრძლიობის გაზრდით, შეიძლება თვითონ კრიტიკული გზა შეიცვალოს.

როგორც უკანასკნელი სიტუაციისთვის აღვნიშნეთ, პროგრამის ხანგრძლივობის მიზნით საჭირო ხდება ხოლმე რომელიღაც კრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირება, მაგრამ პასუხისთვის კითხვაზე, თუ, სახელდობრ, რომელი ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირებებია საჭიროა უკვე აღარ არის საკმარისი ქსელური გრაფიკის ანალიზი მხოლოდ დროის კრიტერიუმით. საქმე იმაშია, რომ ოპერაციათა ხანგრძლიობის შემცირება დაკავშირებულია დანახარჯების გაზრდასთან, ამიტომ ასეთი ტიპის ინფორმაცია აუცილებელია იმ მიზნით, რომ პროგრამის ხანგრძლიობის შემცირება შესრულდეს მინიმალური დანახარჯებით. ამასთან ერთად, ცხადია, საჭიროა იმის ცოდნაც თუ ტექნოლოგიურ პირობებში რა მინიმალურ ვადამდეა შესაძლებელი ყოველი ოპერაციის ხანგრძლიობის შემცირება.

სწორედ აღნიშნული ფაქტორების გასათვალისწინებლად არის შემუშავებული „დრო-ღირებულება“ მეთოდი, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში. პროგრამაში შემავალი ყოველი ოპერაციისათვის ადგენენ ხანგრძლიობის ორ ვადას: ნ ო რ მ ა ლ უ რ ს და დ ა ჩ ქ ა რ ე ბ უ ლ ს. ნორმალური ხანგრძლიობა ხასიათდება იმით, რომ მას შეესაბამება ოპერაციის შესრულების მინიმალური დანახარჯები, ამასთან, მისი გაზრდა არ ამცირებს დანახარჯებს, რაც შეეხება დაჩქარებულ ხანგრძლიობას, იგი ტოლია ოპერაციის შესასრულებლად საჭირო დროის იმ მინიმუმისა, რომელიც განპირობებულია ტექნოლოგიური ან სხვა აუცილებელი შეზღუდვებით, ამასთან, ნორმალურ ვარიანტთან შედარებით იგი მოითხოვს უფრო დიდ დანახარჯებს. ითვლება, რომ ოპერაციის ხანგრძლიობამ შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა დაჩქარებულ და ნორმალურ ხანგრძლიობებს შორის ინტერვალიდან. ნახ. 59-ზე გამოსახულია დამოკიდებულება



ნახ. 59

ოპერაციის t ხანგრძლიობასა და მასთან დაკავშირებულ c დანახარჯებს შორის ($t_{დ}$ — დაჩქარებული, ხოლო $t_{ნ}$ — ნორმალური ხანგრძლივობაა).

სიმარტივისათვის უშვებენ რომ [$t_{დ}$, $t_{ნ}$] შუალედში დანახარჯები იზრდება ოპერაციის ხანგრძლივობის შემცირების პროპორციულად, ე. ი. ოპერაციის ყოველი ერთი დღით დაჩქარება მოითხოვს ერთი და იმავე დამატებით დანახარჯებს.

დავუბრუნდეთ ახლა 58-ე ნახაზზე გამოსახულ ქსელურ გრაფიკს და მოვახდინოთ მისი ანალიზი ღირებულებითი ფაქტორების გათვალისწინებით ანუ მოვიყვანოთ მისთვის „დრო-ღირებულება“ მეთოდის ილუსტრაცია. ამ მეთოდისთვის საჭირო ზემოთაღნიშნული მონაცემები მოვიყვანოთ ცხრილში (ცხრ. 2):

ცხრილი 2

ოპერაციები	ნორმალური ვარიანტი		დაჩქარებული ვარიანტი		I დღის დაჩქარებისათვის დანახარჯების მატება, მან.
	დრო, დღეები	დანახარჯები, მან.	დრო, დღეები	დანახარჯები, მან.	
1—2	3	130	3	130	—
1—3	8	250	5	340	30
1—4	5	80	4	90	10
2—5	9	280	6	400	40
3—4	11	220	9	250	15
3—6	6	310	4	380	35
4—5	7	160	5	180	20
4—6	4	100	4	100	—
5—7	12	420	7	545	25
6—7	10	200	6	260	15
სულ	—	2150	—	2675	—

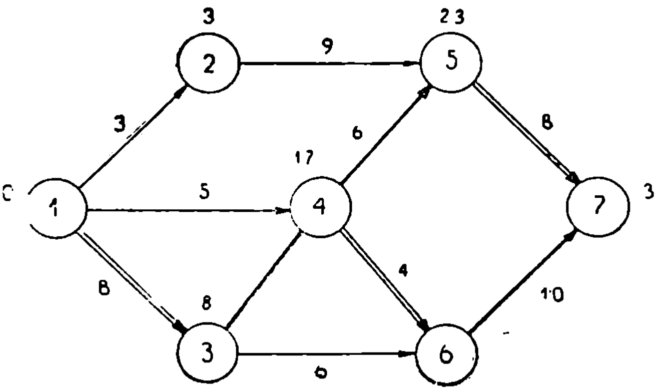
ცხრილიდან ჩანს რომ დანახარჯების გაზრდის ხარჯზე შესაძლებელია ნორმალური ხანგრძლიობის შემცირება ყველა ოპერაციისათვის, გარდა 1—2 და 4—6 ოპერაციებისა.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ პროგრამის სრული ხანგრძლიობის (38 დღე) შესამცირებლად საჭიროა კრიტიკული ოპერაციების ხანგრძლიობის შემცირება. როგორც (ცხრ. 2) ჩანს გრაფიკის ოთხი კრიტიკული ოპერაციიდან (ნახ. 58) დანახარჯების უმცირესი ნამატი მოდის 3—4 ოპერაციაზე (15 მან.). ამიტომ მისი ხანგრძლიობის 2 დღით შემცირება (შემდგომი შემცირება შეუძლებელია) პროგრამის სრულ ხანგრძლიობას დაიყვანს 36 დღეზე.

დარჩენილი კრიტიკული სამუშაოებიდან დანახარჯთა უმცირესი ნამატი (20 მან.) მოდის 4—5 ოპერაციაზე. ამიტომ მისი, მაქსიმალურად

შესაძლებელი 1 დღით შემცირებით პროგრამის ხანგრძლიობა გაუტოლ-
დება 35 დღეს.

შემდეგ მიზანშეწონილია 5—7 ოპერაციის ხანგრძლიობის შემცირება ამიტომ მისი 4 დღით შემცირებით მივიღებთ 31 დღის ხანგრძლიობის გრაფიკს, რომელიც გამოსახულია (ნახ. 60) ნახაზზე:



ნახ. 60

როგორც ნახაზიდან ჩანს პროგრამის ხანგრძლივობის შემცირებამ 38 დღიდან 31 დღემდე გამოიწვია მეორე —1—3—4—6—7 კრიტიკული გზის წარმოქმნა. ამის შემდეგ კვლავ განვაგრძობთ შემცირების ვარიანტების მოძებნას. 5—7 ოპერაციის ხანგრძლიობის შემცირება, როგორც ცხრილიდან ჩანს, შესაძლებელია კიდევ 1 დღით, მაგრამ, მაშინ 1—დღით უნდა შემცირდეს 4—6 ან 6—7 ოპერაციის ხანგრძლიობა, მაგრამ; რადგან 4—6 ოპერაციის ხანგრძლიობა შემცირებას არ ექვემდებარება, ამიტომ რჩება 1 დღით 5—7 და 6—7 ოპერაციათა ხანგრძლიობის შემცირება, რომელთა საერთო დანახარჯების ნამატი იქნება 25+15=40 (მან.). მაგრამ თუ შევნიშნავთ, რომ ამ დროს 1—3 ოპერაციის 1 დღით შემცირება მოითხოვს 40 მანეთზე ნაკლებ 30 მანეთს, ამიტომ შემდგომ ეტაპზე მიზანშეწონილია 1—3 ოპერაციის ხანგრძლიობის შემცირება 3 დღით, რითაც პროგრამის ხანგრძლიობა შემცირდება 28 დღემდე. თუ საჭიროა შემდგომი შემცირება, მაშინ განვახორციელებთ ზემოთაღნიშნულ 5—7 და 6—7 ოპერაციათა ხანგრძლიობის 1 დღით ერთდროულ შემცირებას და პროგრამის ხანგრძლიობა გაუტოლდება მინიმალურ 27 დღეს, რადგან შემდგომი შემცირება შეუძლებელია.

მე-3 ცხრილში მოყვანილია პროგრამის ხანგრძლიობის 38 დღიდან 27 დღემდე შემცირების ზემოთაღწერილი ეტაპები და ყოველი ეტაპის

შესაბამისი მთლიანი პროგრამის დანახარჯები. როგორც ცხრილიდან ჩანს პროგრამის ხანგრძლიობის შემცირებამ დამატებით მოითხოვა დანახარჯი, რომელიც უდრის 2430—2150=285 (მან.).

ცხრილი 3

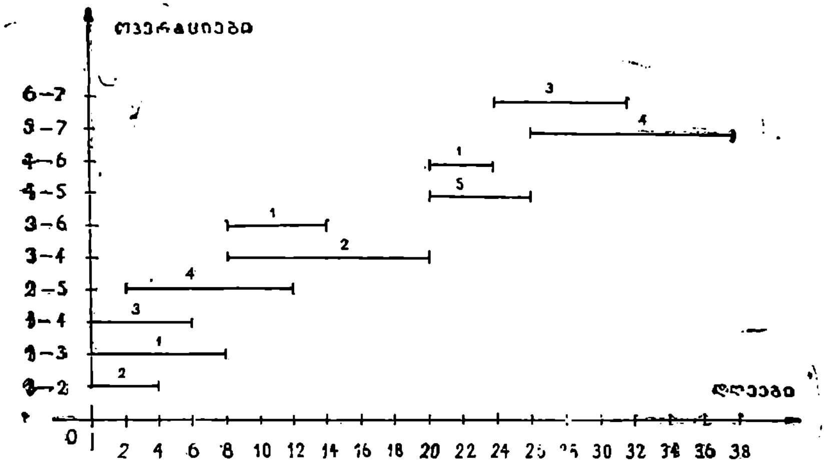
პროგრამის ხანგრძლიობა	დასაჩქარებელი ოპერაციები	საერთო ჯამური დანახარჯები, მან.
38	—2	2150
37	3—4	2165
36	3—4	2180
35	4—5	2200
34	5—7	2225
33	5—7	2250
32	5—7	2275
31	5—7	2300
30	1—3	2330
29	1—3	2360
28	1—3	2390
27	5—7 და 6—7	2430

დანახარჯების გარდა ქსელური გრაფიკის ანალიზი მოითხოვს აგრეთვე შრომითი და მატერიალური რესურსების განაწილების ფაქტორის გათვალისწინებასაც. ქვემოთ ნახ. 58-ზე გამოსახული ქსელური გრაფიკის მაგალითზე განხილული იქნება განაწილების პრობლემის ერთერთი ასპექტი.

განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც რესურსთა რომელიღაც სახე საჭიროა პროგრამის, მრავალი ოპერაციის შესასრულებლად, მაგრამ გარკვეულ კალენდარულ ვადებში, ოპერაციათა პარალელური მიმდინარეობის გამო, რესურსის მოთხოვნილება აჭარბებს არსებულ რაოდენობას. ვაჩვენოთ (ნახ. 58), რომ გრაფიკის კორექტირების გზით შესაძლებელია აღნიშნული დეფიციტის ლიკვიდაცია.

რადგან ქსელური გრაფიკის გამოსახვა არ ხდება დროის მასშტაბში, ამიტომ მიზანშეწონილია მასთან ერთად ე. წ. წრფივი გრაფიკის განხილვა, რომელიც შედგენილია დროის მასშტაბის გათვალისწინებით (ნახ. 60).

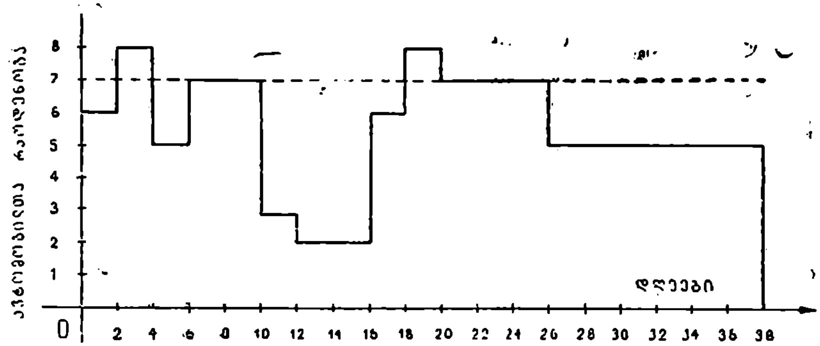
როგორც ნახაზიდან ჩანს ორდინატთა ღერძზე აღნიშნულია ოპერაციები, ხოლო, აბსცისათა ღერძზე დღეები. ამასთან აღსანიშნავია, რომ თუ ცნობილია პროგრამის დაწყების ვადა, მაშინ აბსცისათა ღერძზე აღინიშნება მისგან დაწყებული მიმდევრობით ზუსტი კალენდარული ვადები. გრაფიკზე აღნიშნულ ყოველ ოპერაციას შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის სიგრძე გრაფიკზე აღებულ მასშტაბში ტოლია ოპერაციის ხანგრძლიობისა. ამასთან, ოპერაციათა დროში შესრულების მიმდევრობა 58-ე ნახაზზე ასახულის იგივურია, ხოლო მკვეთრად გამოსახული მონაკვეთები შეესაბამებიან კრიტიკულ ოპერაციებს.



ნახ. 61

ცხადია, რომ ყოველი კონკრეტული ვადის ოპერაციათა შესრულების კონტროლისთვის წრფივ გრაფიკს გააჩნია დამოუკიდებელი ღირებულება, მაგრამ გარდა ამისა, მისი გამოყენებით შესაძლებელია ზემოთაღნიშნულ რესურსთა განაწილების ანალიზის ჩატარება.

დავუშვათ, რომ ყოველი ოპერაციის შესრულება მოითხოვს რომელიღაც სახის ტექნიკურ საშუალებებს (მაგალითად ავტომანქანებს). წრფივი გრაფიკის ყოველ მონაკვეთთან აღვნიშნოთ ავტომანქანათა ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა შესაბამისი ოპერაციის შესასრულებლად. მაგალითად, 1—2 ოპერაცია მოითხოვს 2 ავტომანქანას, 1—3 ოპერაცია — 1 ავტომანქანას და ა. შ. როგორც გრაფიკიდან ჩანს პროგრამის მთლიანი ხანგრძლიობა (38 დღე) შეიძლება დაიყოს დროის ისეთ პერიოდებად, რომ თითოეულ პერიოდში ავტომანქანების მოთხოვნილება ტოლი იყოს რაღაც ფიქსირებული რიცხვისა, რომელიც გამოითვლება როგორც ჯამი ამ პერიოდში პარალელურად მიმდინარე ოპერაციებისათვის საჭირო ავტომანქანათა რაოდენობისა. მაგალითად, პირველი 3 დღის განმავლობაში პარალელურად მიმდინარე ოპერაციებია 1—2, 1—3 და 1—4, ამიტომ საერთო მოთხოვნილება ყოველდღე შეადგენს $2+1+3=6$ ავტომანქანას: მე-4 და მე-5 დღეს სრულდება 1—3, 1—4 და 2—5 ოპერაციები. ამიტომ ყოველდღე საჭიროა $1+3+4=8$ ავტომანქანა და ა. შ. ამ გამოთვლების შედეგად მივიღებთ ყოველი პერიოდისათვის საჭირო ავტომანქანების რაოდენობებს, რაც შეიძლება გამოვსახოთ გრაფიკულად (ნახ. 62).



ნახ. 62

დავუშვათ რომ პროგრამის შესასრულებლად გამოყოფილია მხოლოდ 7 ავტომანქანა (წყვეტილი ხაზი, ნახ. 62). ეს იმას ნიშნავს, რომ მე-4 და 24-ე დღეებისათვის შეიქმნება დეფიციტი, რადგან ამ პერიოდების დასაწყისისათვის ავტომანქანების მოთხოვნილება 8-ის ტოლია. დეფიციტის ლიკვიდაცია შესაძლებელია თუ შევნიშნავთ, რომ 2—5 ოპერაციას აქვს 14 დღის ტოლი დროის თავისუფალი რეზერვი (ნახ. 58) და მას დავიწყებთ არა მე-4, არამედ მე-6 დღიდან. ანალოგიურად, თუ 6—7 ოპერაციის დაწყებას გადავწევთ 3 დღით (მისი თავისუფალი რეზერვია 5 დღე), მაშინ დეფიციტის შემცველი მეორე ზემოაღნიშნული სიტუაციაც ლიკვიდირებული იქნება. ამის შედეგად შეიცვლება ნახ. 58, 61 და 62-ზე გამოსახული გრაფიკები და თითოეულ დღეზე ავტომობილთა რაოდენობა არ იქნება 7-ზე მეტი.

XIII თავი

მონტე-კარლოს მეთოდი

§ 1. შემთხვევითი სიდიდეები

შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება სიდიდეს, რომელმაც ცდის შედეგად შეიძლება მიიღოს ესა თუ ის, წინასწარ უცნობი მნიშვნელობა. შემთხვევითი სიდიდის მაგალითებია: დღე-ღამეში სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რიცხვი; 100 გასროლისას მიზანში მოხვედრის სიხშირე და ა. შ.

1. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები. X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული თუ მას შეუძლია მი-

იღოს, $x_1, x_2, \dots, x_n$ იზოლირებულ მნიშვნელობათა (სასრული ან უსასრულო) სიმრავლე.

X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე განისაზღვრება

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ p_1 & p_2 \dots p_n \end{pmatrix},$$

ცხრილით, სადაც $x_1, x_2, \dots, x_n$ არის X-ის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო $p_1, p_2, \dots, p_n$ — მათი შესაბამისი ალბათობები. სახელდობრ, ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს x_i მნიშვნელობას უდრის p_i-ს, ე. ი. $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,2,\dots,n)$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ნებისმიერი სიდიდეებია, ხოლო $p_1, p_2, \dots, p_n$ რიცხვებმა უნდა დააკმაყოფილონ ორი პირობა:

$$1)\ p_i > 0 \quad (i=1\ 2\ \dots\ n) \tag{1}$$

$$2)\ p_1+p_2+\ \dots+p_n=1. \tag{2}$$

X შემთხვევითი სიდიდის მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ლ ო დ ი ნ ი ეწოდება

$$MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{3}$$

რიცხვს. მისი ფიზიკური შინაარსის დადგენის მიზნით (3) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{-1},$$

საიდანაც ჩანს რომ MX არის X-ის საშუალო მნიშვნელობა.

მათემატიკური ლოდინი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1) ნებისმიერი მუდმივი c სიდიდისათვის

$$M(X+c)=MX+c; \tag{4}$$

2) ნებისმიერი X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$M(X+Y)=MX+MY; \tag{5}$$

3) $M(cX)=cMX$. (6)

X შემთხვევითი სიდიდის დ ი ს პ ე რ ს ი ა ეწოდება

$$DX=M(X-MX)^2 \tag{7}$$

რიცხვს.

მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია წარმოადგენენ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელოვან რიცხვით მახასიათებლებს. თუ დაკვირვე-

პის შედეგად X-ის მნიშვნელობებია $x_1, x_2, \ldots, x_N$. მაშინ მათი საშუალო არითმეტიკული ახლოს იქნება MX-თან, ე. ი.

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}\approx MX. \tag{8}$$

DX დისპერსია ახასიათებს ამ მნიშვნელობების გაფანტულობას MX საშუალო მნიშვნელობის ირგვლივ.

თუ ვისარგებლებთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებით, მაშინ (7) ფორმულა შეიძლება დავიყვანოთ ისეთ სახეზე, რომლითაც მარტივად გამოითვლება დისპერსია

$$DX=MX^2-(MX)^2.$$

მოვიყვანოთ დისპერსიის ორი ძირითადი თვისება:

1) ნებისმიერი მუდმივი c რიცხვისათვის

$$D(X+c)=DX; \tag{10}$$

2) $$D(cX)=c^2DX. \tag{11}$$

ალბათობის თეორიის კურსიდან ცნობილია რომ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$M(XY)=MX\cdot MY \tag{12}$$

$$D(X+Y)=DX+DY. \tag{13}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3) ფორმულის თანახმად

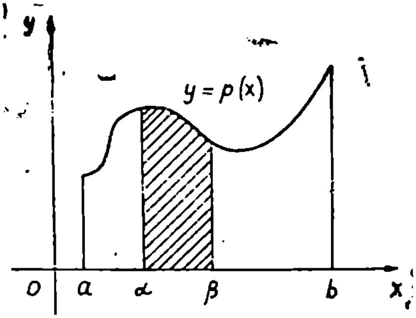
$$MX=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3,5,$$

ხოლო (9) ფორმულით მივიღებთ

$$DX=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots+6^2\cdot\frac{1}{6}-(3,5)^2=2,917.$$

2. უ წ ყ ვ ე ტ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ე ე ბ ი. X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი თუ მას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა რაიმე (a, b) შუალედიდან.

X შემთხვევითი სიდიდე განისაზღვრება მისი შესაძლო მნიშვნელობების შემცველი (a, b) შუალედით და მისი ე. წ. ალბათობათა განაწილების $p(x)$ სიმკვრივით, რომლის ფიზიკური არსი მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ (α, β) არის (a, b)-ში შემავალი ნებისმიერი შუალედი, ე. ი. $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$. ალბათობა იმისა, რომ X აღმოჩნდება (α,β) შუალედში გამოითვლება



ნახ. 63

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx. \qquad (14)$$

ინტეგრალით, რომლის მნიშვნელობა გვაძლევს დაშტრიხული (ნახ.63) მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.

a და b შეიძლება მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობები, შესაძლებელია $a = -\infty$, $b = +\infty$.

რაც შეეხება $p(x)$ სიმკვრივეს, მან უნდა დააკმაყოფილოს ორი პირობა:

$$1) \quad p(x) > 0 \qquad (15)$$

$$2) \quad \int_a^b p(x)dx = 1. \qquad (16)$$

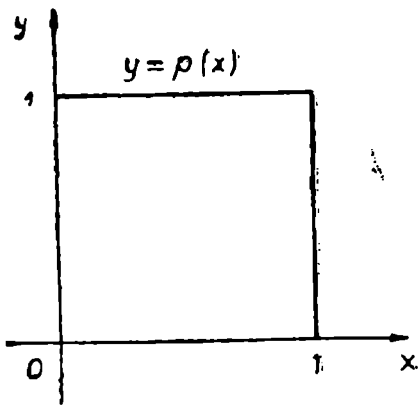
უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია ეწოდება შესაბამისად

$$MX = \int_a^b xp(x)\,dx, \qquad (17)$$

და

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 p(x)dx \qquad (18)$$

რიცხვებს.



ნახ. 64

მაგალითი 2. თუ $(0,1)$ შუალედში განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივეა $p(x) = 1$, მაშინ მას ეწოდება *თანაბრად განაწილებული* ამ შუალედზე (ნახ. 64).

მართლაც, ნებისმიერი $(\alpha,\ \beta)\subset(0{\cdot}1)$ შუალედისათვის გვაქვს

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} dx=\beta-\alpha.$$

ადვილად ვამოითვლება:

$$MX=\int_0^1 xp(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2};$$

$$DX=\int_0^1 x^2p(x)dx-(MX)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

3. ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეები. ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება სიდიდეს, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $(-\infty,\ \infty)$ შუალედზე და რომლის სიმკვრივე

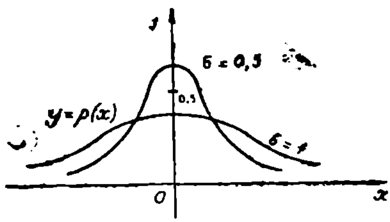
$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{19}$$

სადაც a და $\sigma>0$ რიცხვითი პარამეტრებია.

a პარამეტრი გავლენას არ ახდენს $y=p(x)$ წირის ფორმაზე, ხოლო σ-ს ცვლილება იწვევს აღნიშნული წირის ფორმის ცვლილებას. მართლაც, ცხადია, რომ

$$\max p(x)=p(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

თუ σ-ს შევამცირებთ, მაშინ $\max p(x)$ გაიზრდება, მაგრამ $y=p(x)$ წირითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ნაკვეთის ფართობი (ნახ. 65) ტოლი იქნება 1-ის.



ნახ. 65

ადვილი დასამტკიცებელია რომ

$$MX=a,\quad DX=\sigma^2.$$

ნებისმიერი $P(x'<\xi<x'')$ სახის ალბათობა ადვილად გამოითვლება ცხრილით, რომელშიაც მოყვანილია

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt.$$

ფუნქციის მნიშვნელობები. მართლაც, (14)-ის თანახმად

$$P(x'<\xi<x'')=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx,$$

რომელიც $x-a=\sigma t$ ჩასმით მიიღებს სახეს:

$$P(x'<\xi<x'')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2}e^{-t^2/2}dt,$$

სადაც $t_1=(x'-a)/\sigma$, $t_2=(x''-a)/\sigma$. აქედან გამომდინარეობს ტოლობა

$$P(x'<\xi<x'')=0{,}5[\Phi(t_2)-\Phi(t_1)].$$

შევნიშნოთ, რომ $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეებს ხშირად ვხვდებით სხვადასხვა საკითხის გამოკვლევის დროს.

„ს ა მ ი ს ი გ მ ა ს" წ ე ს ი. $x'=a-3\sigma$, $x''=a+3\sigma$ შერჩევით ვიპოვით $t_1=-3$; $t_2=3$. მაშასადამე,

$$P(a-3\sigma<\xi<a+3\sigma)=\Phi(3)=0{,}997. \tag{20}$$

0,997 ალბათობა იმდენად ახლოსაა 1-თან, რომ ზოგჯერ შეგვიძლია (20) ფორმულის შემდეგი ინტერპრეტაცია: ერთი ცდის შედეგად შეუძლებელია მივიღოთ ξ-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლებიც 3σ-ით მეტად განსხვავდებოდეს $M\xi$ რიცხვისაგან.

ა ლ ბ ა თ უ რ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა. განვიხილოთ $r=0{,}67456$ სიდიდე და შევარჩიოთ $x'=a-r$, $x''=a+r$. მაშინ $t_1=-0{,}6745$, $t_2=0{,}6745$ და

$$P(a-r<\xi<a+r)=\Phi(0{,}145)=0{,}500.$$

ეს ტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$P(|\xi-a|<r)=0{,}5.$$

რადგან ξ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$P(|\xi-a|=r)=0,$$

ამიტომ საწინააღმდეგო უტოლობის ალბათობაც უდრის 0,5, ე. ი.

$$P(|\xi-a|>r)=0{,}5.$$

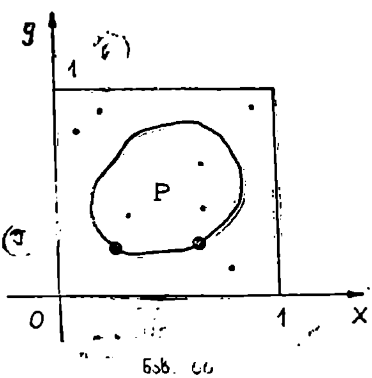
უკანასკნელი ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის a-დან გადახრა მეტი იქნება თუ ნაკლები r რიცხვზე სულ ერთია — ისინი ტოლალბათურია. ამიტომ r-ს უწოდებენ ა ლ ბ ა თ უ რ ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ს.

მონტე-კარლოს მეთოდი — არის შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირების საშუალებით მათემატიკური ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდი. იგი თავს იჩენს 1949 წ. ამერიკელი მათემატიკოსების შრომებში (ნეიმანი, ულამი), ხოლო მოგვიანებით ამ მეთოდს ეძღვნება ჩვენი ქვეყნის მათემატიკოსთა შრომები (1955—1956 წწ), თუმცა მისი თეორიული საფუძველი ცნობილი იყო ადრე. ამ მეთოდმა ფართო გამოყენება მიიღო ეგმ-ის დანერგვის შემდეგ, ვინაიდან შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირება ძალზე შრომატევადი სამუშაოა, რაც წარმატებით ხორციელდება სწორედ ეგმ-ის საშუალებით.

თვით დასახელება „მონტე-კარლო“ წარმოიშვა ქალაქ მონტე-კარლოს მონაკოს სათავადოში, რომელიც ცნობილი იყო თავის ბანქოს სათამაშო სახლით.

მონტე-კარლოს მეთოდი ეწოდება მეთოდს, რომელიც დამყარებულია შემთხვევითი სიდიდის მოდელირებასა და საძიებელი სიდიდის სტატისტიკური შეფასების აგებაზე. მისი საშუალებით შეიძლება ისეთი პროცესების მოდელირება, რომელთა მიმდინარეობაზე გავლენას ახდენენ შემთხვევითი ფაქტორები. გარდა ამისა, ამ მეთოდით შეიძლება ისეთი ამოცანების ამოხსნა, ალბათური მოდელის აგების გზით, რომლებიც არ არიან დაკავშირებული შემთხვევითობასთან. ამ აზრით მონტე-კარლოს მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის უნივერსალურ მეთოდს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ საჭიროა გამოვთვალოთ ერთეულოვან კვადრატში მოთავსებული ნებისმიერი P ბრტყელი ნაკვთის ფართობი (ნახ. 66). ამ კვადრატში ავიღოთ N რაოდენობის წერტილი და მათგან P-ში მოთავსებული წერტილების რიცხვი აღვნიშნოთ N'-ით. გეომეტრიულად ცხადია, რომ P ფიგურის ფართობი მიახლოებით N_1/N ფარდობის ტოლია. ამასთან, რაც უფრო დიდია N რიცხვი, მით უფრო მეტია ამ შეფასების (მიახლოების) სიზუსტე.



ნახ. 66

მონტე-კარლოს მეთოდის პირველი თავისებურებაა — გამოსათვლელი ალგორითმის მარტივი სტრუქტურა. როგორც წესი, ადგენენ პროგრამას ერთი შემთხვევითი ცდის განხორციელები-

სათვის (წინა მაგალითში უნდა შეირჩეს შემთხვევითი წერტილი კვადრატში და შემოწმდეს — ეკუთვნის თუ არა ეს წერტილი P ფიგურას), შემდეგ ამ ცდას იმეორებენ N-ჯერ, ამასთან, ყოველი ცდა დამოუკიდებელია ყველა დანარჩენისაგან.

მეთოდის მეორე თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ, როგორც წესი, გამოთვლების ცდომილება $\sqrt{D/N}$-ის პროპორციულია, სადაც D — რაიმე მუდმივია, ხოლო N — ცდათა რიცხვი. აქედან ცხადია, რომ თუ მაგალითად, გვინდა ცდომილების 10-ჯერ შემცირება (პასუხში კიდევ ერთი სანდო ათობითი ნიშნის მისაღებად) საჭიროა N გავადიდოთ 100-ჯერ.

§ 3. შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირება

სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა მივიღოთ მოცემული F კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები, ან რაც იგივეა — შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება.

ნებისმიერი X შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება შეიძლება რომელიმე შემთხვევითი სიდიდის ერთი ან რამოდენიმე მნიშვნელობის გარდაქმნის შედეგად. ამ პროცესს ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის გ ა თ ა მ ა შ ე ბ ა.

საწყის X სიდიდედ მოსახერხებელია ავიღოთ (0,1) შუალედზე თანაბრად განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდე. მისი მოდელირება შეიძლება სხვადასხვა საშუალებით. განვიხილოთ ერთი მათგანი. მტკიცდება, რომ

$$\xi_{k+1}=\{a\,\xi_k\}\,,\quad k=0,1,2\ldots$$

რეკურენტული ფორმულით მიღებული რიცხვები, სადაც $\xi_1\in(0,1)$ ნებისმიერი რიცხვია, a-ნებისმიერი დიდი რიცხვი, ხოლო $\{a\,\xi_k\}$ არის $a\,\xi_k$ რიცხვის წილადი ნაწილი, თანაბრადაა განაწილებული (0,1) შუალედზე.

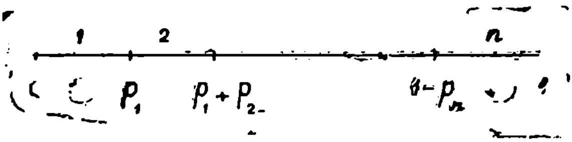
რიცხვებს, რომლებიც მიიღებიან რაიმე ფორმულით და წარმოადგენენ ξ შემთხვევითი სიდიდის იმიტაციას, ეწოდება ფ ს ე ვ დ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი   რ ი ც ხ ვ ე ბ ი. მათი მიღება ხდება ეგმ-ის საშუალებით.

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების ცხრილით

$$X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\cdot\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\cdot\end{pmatrix}.$$

საჭიროა მისი გათამაშება. ამ მიზნით განვიხილოთ (0,1) შუალედი და $y\in(0\ 1)$ რიცხვი. ეს შუალედი n დავყოთ ნაწილად ისე, რომ მიღებული

დანაყოფი შუალედების სიგრძეები იყოს p_1 $p_2 \ldots, p_n$. დაყოფის წერტილთა კოორდინატები იქნება: $y=p_1$, $y=p_1+p_2, \ldots$; $y=p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}$. მიღებული წერტილები (ნახ. 67) გადავნომროთ 1,2,...n რიცხვებით.



ნახ. 67

X-ის გათამაშება მოვახდინოთ შემდეგნაირად: ავირჩიოთ ξ-ს მნიშვნელობა და ავაგოთ $y=\xi$ წერტილი. თუ ეს წერტილი მოხვდება i-ურ შუალედში მაშინ მივიღოთ, რომ $X=x_i$. ვაჩვენოთ, რომ ამ პროცესით მართლაც შეიძლება X-ის მოდელირება. რადგან ξ სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული (0,1)-ზე, ამიტომ რომელიმე ინტერვალში ξ-ს მოხვედრის ალბათობა ამ ინტერვალის სიგრძის ტოლია, ე. ი.

$$P(0<\xi<p_1)=p_1$$
$$p(p_1<\xi<p_1+p_2)=p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}<\xi<1)=p_n.$$

დაშვების თანახმად $X=x_i$, მაშინ როცა

$$p_1+p_2+\ldots+p_{i-1}<\xi<p_1+p_2+\ldots+p_i,$$

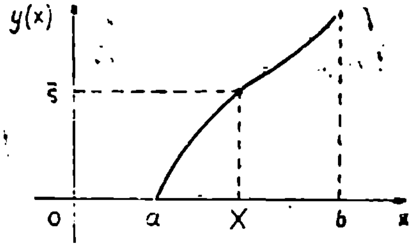
ხოლო ამ ხდომილობის ალბათობა $P(X=x_i)=p_i$.

ახლა განვიხილოთ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის გათამაშების საკითხი. ვთქვათ, საჭიროა მივიღოთ (a, b) შუალედზე განსაზღვრული $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის მქონე X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები. ვაჩვენოთ, რომ X-ის მნიშვნელობების მიღება შეიძლება

$$\int_a^x f(x)dx=\xi \qquad (1)$$

განტოლებიდან. განვიხილოთ ფუნქცია

$$y(x)=\int_a^x f(t)dt.$$



ნახ. 68

განაწილების სიმკვრივის თვისებების თანახმად

$$y(a)=0, \; y(b)=1, \; y'(x)=f(x)>0,$$

როცა $x \in (a, \; b)$, ე. ი. $y(x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია (0,1)-ზე (ნახ. 68), ამიტომ ნებისმიერი $y=\xi$ $(0<\xi<1)$ წრფე მის გრაფიკს კვეთს ერთადერთ წერტილში. გადაკვეთის წერტილის აბსცისას მივიღებთ X-ის მნიშვნელობად. ამრიგად, (1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $(\alpha, \; \beta) \subset (a, \; b)$ ინტერვალი. $y(x)$ ფუნქციით იგი აისახება Oy ღერძის $(y(\alpha), \; y(\beta))$ შუალედში. თუ $X \in (\alpha, \; \beta)$, მაშინ $\xi \in (y(\alpha), \; y(\beta))$ და პირიქით, ე. ი.

$$P(\alpha<X<\beta)=P(y(\alpha)<\xi<y(\beta)).$$

რადგან ξ თანაბრადაა განაწილებული (0,1) შუალედზე, ამიტომ

$$P(y(\alpha)<\xi<y(\beta))=y(\beta)-y(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

ამრიგად,

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ (1) განტოლების X (შემთხვევითი სიდიდის) ამონახსნის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$.

§ 4. მასობრივი მომსახურების სისტემის გაანგარიშება

მასობრივი მომსახურების თეორია, როგორც ალბათობის თეორიის ნაწილი, შეისწავლის სხვადასხვა სახის რეალური მასობრივი მომსახურების სისტემების მათემატიკურ მოდელებს. ამ სისტემას ახასიათებს „შემავალი ნაკადი“ (გამოძახებათა, კლიენტთა) და თვით მომსახურების მექანიზმი (ალგორითმი). მისი ტიპიური მაგალითია ავტომატური სატელეფონო სადგურის ცნობათა ბიურო, რომელშიც დროის შემთხვევით მომენტებში შემოდის მოთხოვნა — ა ბ ო ნ ე ნ ტ ი ს გ ა მ ო ძ ა ხ ე ბ ა (მათი რიცხვი ქმნის შემავალ ნაკადს), ხოლო მომსახურების მექანიზმი შედგება კავშირგაბმულობის ფიქსირებული n არხისაგან (ტელეფონისტისაგან), რომელთაგანაც ერთ-ერთი მოემსახურება გამოძახებას, თუ ერთი არხი მაინც თავისუფალია. თუ გამოძახების მომენტში ყველა არხი (ტელეფონისტი) დაკავებულია ამ მომენტამდე მოსულ გამოძახებათა მომსახურებით, მაშინ ტელეფონზე მივიღებთ სისტემის დაკავებულობის ნიშნს (სიგნალს). ამრიგად, გამოძახება მიიღებს უარს მომსახურეობაზე.

ასეთი ტიპის მასობრივი მომსახურების სისტემას ეწოდება n-არხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემა რიგის გარეშე.

არსებობს მასობრივი მომსახურების სისტემები რიგით. ამის მაგალითია საბილეთო სალაროები, როდესაც გამოძახება (ბილეთის ასაღებად მისული ადამიანი) დგება რიგში, თუ სისტემა (სალარო) დაკავებულია და ელოდება მის განთავისუფლებას.

მასობრივი მომსახურების სისტემები განსხვავდებიან იმის მიხედვით თუ როგორია მათში შემავალ მოთხოვნათა ნაკადი, რომლის დახასიათებაც შესაძლებელია ორ მომდევნო მოთხოვნას შორის დროის შუალედის (იგი შემთხვევითი სიდიდეა) განაწილებით. ყველაზე გავრცელებული პირობა, რომელსაც უყენებენ შემავალ ნაკადს, არის მისი სტაციონარულობა, ე. ი. დროისაგან დამოუკიდებლობა.

მასობრივი მომსახურების სისტემის დაგეგმვისას უნდა გავითვალისწინოთ რომ ყოველი დამატებითი არხის გახსნა დაკავშირებულია ხარჯებთან. გარდა ამისა შემოსული მოთხოვნის რიგში დგომა იწვევს მოცდენას, ამიტომ უნდა შევეცადოთ არხების რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ მინიმალური იყოს ერთი მხრივ გამოძახების რიგში დგომის და მეორე მხრივ სისტემის არხის უქმად ყოფნის დრო. ერთდროულად ორივე სიდიდის მინიმიზირება შეუძლებელია, ამიტომ სისტემის ოპტიმიზაცია უნდა მოხდეს რაიმე ე. წ. მიზნის ფუნქციის გამოყენებით (მაგალითად, მაქსიმალური იყოს ფულად ერთეულებში გამოსახული მოგება).

ზოგიერთ მარტივ შემთხვევაში შესაძლებელი ხდება მასობრივი მომსახურების ამოცანის ანალიზური ამოხსნის მოძებნა. მაგრამ საზოგადოდ ეს შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მონტე-კარლოს მეთოდით. განვიხილოთ მაგალითი.

შევეხოთ n-არხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემას. მომსახურების განაცხადი მოდის პირველ არხზე. თუ იგი დაკავებულია, მყისვე გადადის მეორე არხზე და ა. შ. თუ განაცხადის შემოსვლის მომენტში ყველა არხი დაკავებულია, მაშინ იგი უქმდება (მომსახურებაზე უარის თქმა). საჭიროა განვსაზღვროთ მუშაობის T_0 დროის განმავლობაში რამდენ განაცხადს მოემსახურება სისტემა და რამდენი განაცხადი გაუქმდება.

ასეთი ამოცანები გვხვდება არა მარტო საყოფაცხოვრებო მომსახურების სისტემაში, არამედ ნებისმიერი საწარმოს მუშაობის ორგანიზაციის გამოკვლევისას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემაში შემავალი ნაკადი წარმოადგენს ე. წ. პუასონის ნაკადს, ე. ი. როდესაც ორი მეზობელი განაცხადის შემოსვლას შორის დროის τ შუალედი არის $(0,\infty)$-ში ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $f(x)=ae^{-ax}$ განა-

წილების სიმკვრივით. როგორც ვიცით ამ განაწილების მათემატიკური ლოდინი $M\tau=\frac{1}{a}$. a -ს ეწოდება განაცხადთა ნაკადის ს ი მ კ ვ რ ი ვ ე.

τ შემთხვევითი სიდიდის მოდელირებისათვის ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (1) ფორმულით, რომელსაც, ჩვენ შემთხვევაში ექნება სახე

$$\int_0^{\tau} ae^{-ax}dx=\xi,$$

საიდანაც

$$1-e^{-a\tau}=\xi, \quad \tau=-\frac{1}{a}\ln(1-\xi). \tag{1}$$

რადგან $1-\xi$ შემთხვევითი სიდიდეც თანაბრადაა განაწილებული (0,1) შუალედზე, ამიტომ (1)-ის ნაცვლად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულითაც:

$$\tau=-\frac{1}{a}\ln\xi. \tag{2}$$

§ 5. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

წინა პარაგრაფში განხილული ამოცანა თავისი ბუნებით იყო ალბათური და ამიტომ მონტე-კარლოს მეთოდით მისი ამოხსნაც იყო ბუნებრივი. ახლა განვიხილოთ ამოცანა, რომელსაც თითქმის არავითარი კავშირი არა აქვს შემთხვევითობასთან — განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი ამოხსნა.

ვთქვათ გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$I=\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{1}$$

შევარჩიოთ ნებისმიერი ξ შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების $p(x)$ სიმკვრივე ნულის ტოლი ხდება (a, b) შუალედის გარეთ.

ადვილი მისახვედრია, რომ $\eta=\frac{\varphi(\xi)}{p(\xi)}$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის I-ს:

$$M\eta=\int_a^b \frac{\varphi(x)}{p(x)}\, p(x)dx=I.$$

ახლა განვიხილოთ N ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე: $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$. სამი სიგმას წესს მათთვის ექნება სახე:

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_j - I\right| < 3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right) \approx 0.997. \tag{2}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ავარჩევთ $p\,\xi$ შემთხვევითი სიდიდის N მნიშვნელობას: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, მაშინ საკმაოდ დიდი N-ისათვის

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi(\xi_j)}{p(\xi_j)} \approx I.$$

(2)-დან გამომდინარეობს, აგრეთვე , რომ მიახლოების ცდომილება არ გადააჭარბებს $3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}$ სიდიდეს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ξ შემთხვევითი სიდიდე უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ მისი გათამაშება იყოს ადვილი და ამასთან $D\eta$ იყოს რაც შეიძლება მცირე, რაც განსაზღვრავს ცდომილების სიმცირეს.

უნდა აღინიშნოს ის ფაქტიც, რომ მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება განსაკუთრებით ეფექტურია ჯერადი ინტეგრალების გამოთვლისას, მაშინ როცა სხვა მიახლოებითი მეთოდებით ამ საკითხის გადაწყვეტა შედარებით რთულია.

§ 6. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

ვთქვათ, $y=f(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ G არეში და საჭიროა გამოვთვალოთ

$$J=\iint_G f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{1}$$

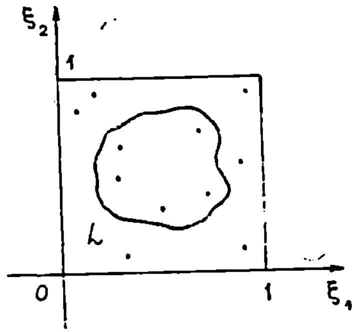
ორჯერადი ინტეგრალი. გეომეტრიულად J არის R^3 სივრცის იმ მართი ცილინდრის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია G არეთი, მისი Γ კონტურით განსაზღვრული ცილინდრული ზედაპირითა და $y=f(x_1, x_2)$ ზედაპირით.

(1) ინტეგრალი გარდავქმნათ ისე, რომ ახალი საინტეგრო არე მთლიანად მოთავსდეს ორგანზომილებიან მართკუთხედში:

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i=1,2). \tag{2}$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)\,\xi_i \qquad (i=1,2), \tag{3}$$



ნახ. 69

მაშინ ცხადია მართკუთხედი აისახება ერთეულოვან კვადრატზე:

$$0\leqslant\xi_i\leqslant 1 \quad (i=1,2) \tag{4}$$

და, მაშასადამე, ახალი საინტეგრო S არე მთლიანად მოთავსდება ამ კვადრატში (ნახ. 69). გარდაქმნის იაკობიანს ექნება სახე:

$$\frac{D(x_1,x_2)}{D(\xi_1,\xi_2)}=\begin{vmatrix} b_1-a_1 & 0 \\ 0 & b_2-a_2 \end{vmatrix}=(b_1-a_1)(b_2-a_2).$$

ამრიგად,

$$J=\iint\limits_S F(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \tag{5}$$

სადაც

$$F(\xi_1,\xi_2)=(b_1-a_1)\ (b_2-a_2)f[a_1+(b_1-a_1)\xi_1,\ a_2+(b_2-a_2)\xi_2].$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\xi=(\xi_1,\xi_2);\quad ds=d\xi_1 d\xi_2,$$

მაშინ

$$J=\iint\limits_S F(\xi)ds. \tag{5}$$

გამოვთვალოთ ეს ინტეგრალი შემთხვევით ცდათა მეთოდით. შევარჩიოთ [0,1] მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევით წერტილთა ორი მიმდევრობა

$$\xi_1^{(1)},\quad \xi_2^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)},\ldots$$
$$\xi_1^{(2)},\quad \xi_2^{(2)},\ldots,\xi_n^{(2)},\ldots$$

$M_i(\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)})$ $(i=1,2,\ldots)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი წერტილები. საკმაოდ დიდი N-ისათვის შევამოწმოთ M_1, $M_2,\ldots,M_N$ წერტილებიდან რომელი ეკუთვნის S არეს (პირველი კატეგორია) და რომელი — არა (მეორე კატეგორია). ვთქვათ,

$$M_i\in S,\quad \text{როცა}\quad i=1,2,\ldots,n \tag{6}$$
$$M_i\bar{\in} S,\quad \text{როცა}\quad i=n+1,\quad n+2,\ldots,N. \tag{7}$$

S არის L გლუვი კონტურის შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს იმას საზღვრის რომელ წერტილებს მივაკუთვნებთ S არეს და რომლებს — არა.

თუ ავიღებთ $M_i \in S$ წერტილთა საკმაოდ დიდ რაოდენობას, შეგვიძლია მიახლოებით დავუშვათ

$$y_{\text{საშ.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(M_i)$$

ამიტომ საძიებელი ინტეგრალი გამოისახება ფორმულით:

$$J = y_{\text{საშ.}} \cdot s = \frac{s}{n} \sum_{i=1}^{n} F(M_i), \tag{8}$$

სადაც s საინტეგრო არის ფართობია. თუ ეს ფართობი რთული გამოსათვლელია, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$s \approx \frac{n}{N}.$$

ამიტომ

$$J \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(M_i).$$

თუ S არის ერთეულოვანი კვადრატი, მაშინ $(s=1)$ $n=N$ და გვექნება

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(M_i).$$

(6) და (7) პირობათა შესამოწმებლად სარგებლობენ S არის L საზღვრის ანალიზური გამოსახულებით. უმარტივეს შემთხვევაში, თუ L მოცემულია

$$\varphi(\xi) = 0 \tag{9}$$

განტოლებით, სადაც როცა $\varphi(\xi) < 0$, მაშინ $\xi \in S$ და როცა $\varphi(\xi) > 0$, მაშინ $\xi \in S$, გვექნება: 1) თუ $\varphi(M_i) < 0$, მაშინ M_i წერტილი პირველი კატეგორიისაა; 2) თუ $\varphi(M_i) > 0$, მაშინ M_i — მეორე კატეგორიისაა, თუ $\varphi(M_i) = 0$, მაშინ შეთანხმების მიხედვით M_i წერტილს მიაკუთვნებენ პირველ ან მეორე კატეგორიას. ზოგჯერ (9) განტოლებას ცვლიან ისეთი ეკვივალენტური განტოლებით, რომელიც საგრძნობლად გააიოლებს გარდაქმნებს. მაგალითად, წრისათვის $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + \frac{1}{4} \leqslant 0$

უტოლობა უმჯობესია შეიცვალოს $\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$ უტოლობით, რადგან ამ უკანასკნელის შემოწმება უფრო ადვილია.

თუ S არე — სტანდარტულია და მოცემულია

$$\begin{cases}\underline{\xi_1}\leqslant\xi_1\leqslant\overline{\xi_1}\\ \underline{\xi_2}(\xi_1)\leqslant\xi_2\leqslant\overline{\xi_2}(\xi_1)\end{cases}\tag{10}$$

პირობებით, მაშინ ამ ტოლობების შესრულებით შეგვიძლია დავადგინოთ $M(\xi_1, \xi_2)$ შემთხვევითი წერტილის კატეგორია. პრაქტიკულად ეს მოხერხებულია შემდეგი სქემით (ცხრ. 1):

ც ხ რ ა ლ ი 1

ξ_1	$\underline{\xi_1}$	$\overline{\xi_1}$	ε_1	ξ_2	$\underline{\xi_2}$	$\overline{\xi_2}$	ε_2

სადაც

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & \text{თუ}\quad \xi_i\in[\underline{\xi_i},\ \overline{\xi_i}]\\ 0, & \text{თუ}\quad \xi_i\notin[\underline{\xi_i},\ \overline{\xi_i}],\end{cases}\qquad (i=1,2)$$

$\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2$. ცხადია, თუ $\varepsilon=1$, მაშინ $M\in S$; თუ $\varepsilon=0$, მაშინ $M\notin S$. $y=F(M)$ ფუნქციის მნიშვნელობები გამოითვლება მხოლოდ იმ M წერტილებში, რომელთათვისაც $\varepsilon=1$, ხოლო ინტეგრალი გამოითვლება (8) ფორმულით.

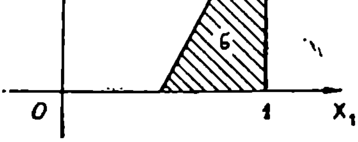
მ ა გ ა ლ ი თ ი. მონტე-კარლოს მეთოდით მიახლოებით გამოვთვალოთ

$$J=\iint\limits_S(x_1^2+x_2^2)dx_1dx_2,\tag{11}$$

სადაც S საინტეგრო არე მოცემულია

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant 1\\ 0\leqslant x_2\leqslant 2x_1-1\end{cases}\tag{12}$$

უტოლობებით (ნახ. 70).



ნახ. 70

ა მ ო ხ ს ნ ა. საინტეგრო არე მოთავსებულია $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ კვადრატში. ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ [0,1] სეგმენტზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით რიცხვთა ცხრილით (ცხრ. 2):

ცხრილი 2

0,57705	0.35483	0,11578	0.65339	0,66674
0,71618	0,09393	0,93045	0,93382	0,99279
0,73710	0,30304	0,93011	0.05758	0.24202
0,70131	0,55186	0,42844	0,00336	0,94010
0,16961	0.64003	0,52906	0,88222	0,60981
0,53324	0,20514	0,09461	0.98585	0,13094
0,43166	0,00188	0,99602	0,52103	0,35193
0,26275	0,55709	0,69962	0,91827	0.64560
0,05926	0,86977	0.31311	0.07069	0.64559
0,66289	0,31303	0,27004	0,13928	0.68008

რომლის ყოველი მორიგი წყვილი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $M(x_1, x_2)$ შემთხვევითი წერტილის x_1 და x_2 კოორდინატი. დავკმაყოფილდეთ $N=20$ შემთხვევითი წერტილით, ამასთან სიმარტივისათვის კოორდინატები დავამრგვალოთ სამ ათობით ნიშნამდე. შედეგები მოყვანილია ცხრილში (ცხრ. 3), სადაც დაშვებულია

$$\underline{x_1}=\frac{1}{2}, \quad \overline{x_1}=1, \quad \underline{x}_2(x_1)=0, \quad \overline{x_2}\ (x_1)=2x_1-1,$$

$$y=x^2{}_1+x^2{}_2.$$

აქედან

$$y_{საშ}=\frac{1}{4}\cdot 3,837=0,96$$

და მაშასადამე, $s=\frac{1}{4}$-ის გათვალისწინებით (8)-დან მივიღებთ

$$J=y_{საშ}\cdot s=0\ 96\cdot\frac{1}{4}=0,24. \tag{13}$$

თუ მიახლოებით მივიღებთ რომ

$$s\approx\frac{n}{N}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},$$

მაშინ

$$J\approx 0,96\cdot\frac{1}{5}=0,19.$$

ცხრილი 3

x_1	$\underline{x_1}$	$\overline{x_1}$	ε_1	x_2	$\underline{x_2}(x_1)$	$\overline{x_2}(x_1)$	ε_2	ε	y
0,577	0,500	1,000	1	0,716	0	1,154	0	0	
0.737	0,500	1,000	1	0,701	0	0,474	0	0	
0,170	0,500	1,000	0	0,533				0	
0,432	0.500	1,000	0	0,263				0	
0,057	0,500	1,000	0	0,663				0	
0,355	0.500	1,000	0	0,094				0	
0.303	0,500	1,000	0	0,552				0	
0,640	0,500	1,000	1	0,205	0	0,280	1	1	0,452
0,002	0,500	1,000	0	0,557				0	
0,870	0,500	1,000	1	0,323	0	0,740	1	1	0,855
0,116	0,500	6,000	0	0,930				0	
0,930	0,500	1,000	1	0,428	0	0,860	1	1	1,048
0,529	0,500	1,000	1	0,095	0	0,058	0	0	
0,996	0,500	1,000	1	0,700	0	0,992	1	1	1,482
0,313	0,500	1,000	0	0,270				0	
0,653	0,500	1,000	1	0,934	0	0,306	0	0	
0,058	0,500	1,000	0	0,003				0	
0,882	0.500	1,000	1	0,986	0	0,764	0	0	
0,621	0,500	1,000	1	0,918	0	0,042	0	0	
0,071	0,500	1.000	0	0,239				0	
Σ								4	3,837

შევნიშნოთ რომ ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობაა

$$J=\frac{7}{32}\,m\approx0,22,$$

ამიტომ (13) შედეგის ფარდობითი ცდომილება

$$\delta=\frac{0,24-0,22}{0,22}\approx9\,\%.$$

ცხადია სტატისტიკური კანონზომიერების გამოსავლენად არ არის საკმარისი $N=20$, მაგრამ უხეში ორიენტაციისათვის მიღებული შედეგი დამაკმაყოფილებელია.

ლიტერატურა

1. ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, დ. გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, 1988.
2. ა. ბუაძე, წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 1980.
3. შ. ქემხაძე, უმაღლესი ალგებრა. თბილსის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1972
4. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Издательство „Наука». Москва. 1965.
5. М. А. Акивис, В. В. Гольхберг. Тензорные исчисление. Издательство «Наука». Москва. 1972.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики т., Физматгиз, 1963 (1970).
7. Бахвалов Н. С. Численные методы. т. «Наука», 1973.
8. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. т. «Наука", 1973.
9. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы Функционального анализа. Государственное издательство технической литературы. Москва. 1951. Ленинград.
10. И. Ф. Степенсен. Теория интерполяции. М. — Л., 1935.
11. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, Физматгиз. М., 1959, т.I.
12. ვ. ბალაბანოვი და სხვ. უმაღლესი მათემატიკა III ნაწილი. გამომცემლობა „განათლება", თბილისი 1988.
13. А. А. Самарский, Теория разностных схем, Москва „Наука", 1983.
14. И. М. Соболь, Метод Монте — Карло. Москва, «Наука». Главная редакция физико — математической литературы, 1985.
15. ა. ელიზბარიძე, ზ. ნაცვლიშვილი. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1978.
16. Гасс. С. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
17. ლურსმანაშვილი ა. პ. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება, თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1967.
18. ა. ელიზბარიძე, ზ. ნაცვლიშვილი, ა. კვალიაშვილი. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1985.
19. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Москва, «Мир», 1964.
20. Н. Н. Воробов. Теория игр — лекции для экономистов — кибернетиков. Л.: Изд — во ЛГУ. 1974.
21. ჯ. გიორგობიანი. თამაშები ორი მონაწილით. გამომცემლობა „მეცნიერება", 1985.
22. К. Берги. Теория графов и ее применения. Издательство иностранной литературы, Москва. 1962.
23. Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон; Потоки в сетях. Издательство «Мир», Москва, 1966.
24. Харари Ф. Теория графов. Т., Мир, 1970.
25. С. М. Ермиков, Г. А. Михайлов. Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976.

სარჩევი