ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი II

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო
სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ
დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
თბილისი
1983

მათემატიკური ანალიზის კურსის სახელმძღვანელო განკუთვნილია უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის, პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

წიგნი წარმოადგენს მეორე გამოცემას.

Ч $\frac{20203}{m-608(06)}$

რ ე დ ა ქ ტ ო რ ი ს ა გ ა ნ

მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოს წინამდებარე მეორე ტომი ძირითადად მოიცავს იმ მასალას, რომელიც გათვალისწინებულია ფიზიკის ფაკულტეტის მეორე კურსის სტუდენტებისათვის აქ განხილულია ფუნქციონალურ მწკრივთა თეორიის საკითხები (ზოგადი თეორია, ხარისხოვანი მწკრივები, ფურიეს მწკრივები), ორმაგი მწკრივები, მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საკითხები, სტილტიესის ინტეგრალი და ველის თეორიის ელემენტები.

სახელმძღვანელოს 1—3 და 10—19 თავები დაწერილია ვლ. ჭელიძის მიერ, ხოლო 4—9 თავები ეკუთვნის ე. წ თლანაძეს.

თავი I

ფუნქციათა მიმდევრობა და ფუნქციათა მწკრივი

§ 1. ფუნქციათა მიმდევრობის და ფუნქციათა მწკრივის კრებადობის არე

ვთქვათ, რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{1.1}$$

E სიმრავლის ყოველი x_0 წერტილისათვის გვაქვს რიცხვთა მიმდევრობა

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0), \ldots,\ f_n(x_0), \ldots \tag{1.2}$$

თუ იგი კრებადია, მაშინ ამბობენ, რომ (1.1) *მიმდევრობა კრებადია* x_0 *წერტილში*. თუ (1,2) მიმდევრობა განშლადია, მაშინ (1.1) *მიმდევრობას ეწოდება განშლადი* x_0 *წერტილში*.

E სიმრავლის x წერტილს, რომელზედაც (1.1) მიმდევრობა კრებადია, ეწოდება *მიმდევრობის კრებადობის წერტილი*, ხოლო E სიმრავლის x წერტილს, რომელზედაც (1.1) მიმდევრობა განშლადია — *მიმდევრობის განშლადობის წერტილი*.

ამრიგად, E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციათა ყოველი მიმდევრობის მიმართ E სიმრავლე იყოფა ორ სიმრავლედ: *კრებადობის წერტილთა სიმრავლედ* და *განშლადობის წერტილთა სიმრავლედ*. პირველ მათგანს ეწოდება ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობის არე, მეორეს კი—განშლადობის არე. ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობისა და განშლადობის არეები, საზოგადოდ, ძალიან რთული აგებულების არიან.

ფუნქციათა (1.1) მიმდევრობას ეწოდება *კრებადი* E სიმრავლეზე სასრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ E სიმრავლის ყოველი x_0 წერტილისათვის

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

ე. ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n>N$, მართებულია უტოლობა

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

რიცხვი N დამოკიდებულია საზოგადოდ არა მარტო ε-ზე, არამედ x_0 წერტილზედაც.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზღვრული ფუნქცია (1.1) მიმდევრობისათვის ან $f_n(x)$ ფუნქციისათვის.

ერთ-ერთი ძირითადი საკითხი, რომელიც დაკავშირებულია მიმდევრობის კრებადობასთან, შემდეგში მდგომარეობს: თუ მიმდევრობის წევრებს აქვთ ესა თუ ის თვისება, მაგალითად, უწყვეტობა, შერჩება თუ არა იგივე თვისება ზღვრულ ფუნქციას? პასუხი ამ კითხვაზე საზოგადოდ უარყოფითია. განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრულია ფუნქციები

$$1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^n, \dots$$

ცხადია, ამ მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია $f(x)=0$, როდესაც $0\leqslant x<1$ და $f(1)=1$. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=1$ წერტილში. ამრიგად, უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია აღმოჩნდა წყვეტილი ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრულია ფუნქციები

$$\frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1+2x}, \dots, \frac{1}{1+nx}, \dots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზღვრული ფუნქცია $f(x)=0$, როდესაც $0<x\leqslant 1$ და $f(0)=1$. მაშასადამე, ზღვრული $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=0$ წერტილში. ამრიგად, უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია აღმოჩნდა ამ შემთხვევაშიაც წყვეტილი ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა

$$\frac{x}{1+x^2},\ \frac{2x}{1+2^2x^2}, \dots, \frac{nx}{1+n^2x^2}, \dots$$

მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია $f(x)=0$ მოცემულ [0,1] სეგმენტზე მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია [0,1] სეგმენტზე.

ამრიგად, უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია შეიძლება იყოს წყვეტილიც და უწყვეტიც.

ახლა განვიხილოთ მწკრივი

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \tag{1.3}$$

რომლის წევრები წარმოადგენენ E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციებს. ასეთი სახის მწკრივს ეწოდება ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა მ წ კ რ ი ვ ი. (1.3) მწკრივს შეგვიძლია შევუსაბამოთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$s_0(x),\ s_1(x), \ldots,\ s_n(x), \ldots, \tag{1.4}$$

სადაც

$$s_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

$s_n(x)$ გამოსახულებას ეწოდება (1.3) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი, ანუ უბრალოდ კ ე რ ძ ო ჯ ა მ ი.

ამრიგად, (1.3) მწკრივს შეგვიძლია შევუსაბამოთ მისი კერძო ჯამთა (1.4) მიმდევრობა. პირიქით, ფუნქციათა ყოველ მიმდევრობას

$$f_0(x),\ f_1(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{1.5}$$

შეგვიძლია ცალსახად შევუსაბამოთ ფუნქციათა მწკრივი

$$v_0(x)+v_1(x)+\cdots+v_n(x)+\cdots, \tag{1.6}$$

რომლის კერძო ჯამთა მიმდევრობაა (1.5). მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ

$$v_0(x)=f_0(x),\ v_1(x)=f_1(x)-f_0(x), \ldots,\ v_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x), \ldots$$

მაშინ (1.6) მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა იქნება (1.5). მაშასადამე, ფუნქციათა მიმდევრობიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ფუნქციათა მწკრივებზე და პირიქით.

ფუნქციათა (1.4) მიმდევრობის კრებადობის არეს ეწოდება (1.3) მ წ კ რ ი ვ ი ს კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ა რ ე, ხოლო ამავე მიმდევრობის განშლადობის არეს—(1.3) მ წ კ რ ი ვ ი ს გ ა ნ შ ლ ა დ ო ბ ი ს ა რ ე.

თუ (1 3) მწკრივი კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ მწკრივის ჯამი წარმოადგენს x ის ფუნქციას. ეს ჯამი აღვნიშნოთ $s(x)$-ით:

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

განსაზღვრის მიხედვით, $s(x)$ წარმოადგენს (1.4) ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრულ ფუნქციას:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

მწკრივს

$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)+\cdots \tag{1.7}$$

ეწოდება (1.3) მწკრივის n-ური ნაშთი ან უბრალოდ ნაშთი. (1.7) მწკრივი კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც (1.3) მწკრივი კრებადია E-ზე. ამ შემთხვევაში, თუ (1.7) მწკრივის ჯამს აღვნიშნავთ $r_n(x)$ სიმბოლოთი, მაშინ

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x).$$

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია შეიძლება იყოს როგორც წყვეტილი, ისე უწყვეტი ფუნქცია.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ უწყვეტ ფუნქციათა მწკრივის ჯამი შეიძლება იყოს როგორც წყვეტილი, ისე უწყვეტი ფუნქცია.

ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრულ ფუნქციას (მწკრივის ჯამს) რომ შერჩეს ესა თუ ის თვისება, რომელიც აქვს მიმდევრობის წევრებს (მწკრივის წევრებს), ამისათვის უზრუნველყოფილი უნდა იყოს კრებადობის გარკვეული ხასიათი. რას ნიშნავს კრებადობის ხასიათი, ამას ქვემოთ დაწვრილებით გავარჩევთ.

§ 2. ფუნქციათა მიმდევრობისა და ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი და არათანაბარი კრებადობა

ფუნქციათა (1.1) მიმდევრობის კრებადობა წარმოადგენს ლოკალურ ცნებას. როდესაც ვამბობთ, რომ ასეთი მიმდევრობა კრებადია E სიმრავლეზე, ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი კრებადია E სიმრავლის ყოველ ცალკეულ წერტილში. მაგრამ შეიძლება შემოვიღოთ სიმრავლეზე ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობის სხვა განსაზღვრა, რომელსაც უკვე აქვს არა ლოკალური, არამედ მთლიანი ხასიათი. ეს ცნება ფუნდამენტალური მნიშვნელობისაა მათემატიკურ ანალიზში.

ვთქვათ, (1.1) მიმდევრობა კრებადია E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის და E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n>N$, გვექნება

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

ნატურალური რიცხვი N დამოკიდებულია არა მარტო ε-ზე, არამედ E სიმრავლის x წერტილზედაც.

იბმის კითხვა: შეიძლება თუ არა N ისე შევარჩიოთ, რომ (2.1) უტოლობა სრულდებოდეს E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის და ყველა n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n>N$. თუ E სასრული სიმრავლეა, მაშინ საკითხი ადვილად წყდება: E სიმრავლის ყოველ x წერტილს შეესაბამება გარკვეული N, ასე რომ, N-სა-

თვის გვექნება სხვადასხვა მნიშვნელობები, რომელთა რიცხვი სასრულია. N-ის ამ მნიშვნელობებიდან უდიდესი გამოდგება E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის. თუკი E უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ E სიმრავლის ყოველი x წერტილს შეესაბამება თავისი N, ასე რომ, N-ის მნიშვნელობები იქნება უსასრულო, ხოლო ამ მნიშვნელობათა შორის შეიძლება არ არსებობდეს უდიდესი. ამ ნიადაგზე წარმოიშვა ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობის ცნება.

განსაზღვრა 1. (1.1) მიმდევრობას ეწოდება E სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-საგან დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } n>N.$$

ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობის ამ ახალ ცნებას უკვე ლოკალური ბუნება არა აქვს, არამედ იგი ახასიათებს მწკრივის კრებადობას მთელ E სიმრავლეზე.

ფუნქციათა (1.1) მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი და E სიმრავლის წერტილთა ისეთი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$, რომ მართებულია უტოლობა

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon \quad (n=1, 2, \ldots).$$

ისმის კითხვა: თუ ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია E სიმრავლეზე, იქნება თუ არა იგი თანაბრად კრებადი იმავე სიმრავლეზე? საზოგადოდ არა. მოვიყვანოთ

მაგალითი 4. განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x)=x(n+1)^2e^{-(n+1)x} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

რომელიც განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

თუ $x<0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=-\infty$, ხოლო როდესაც $x\geqslant 0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. მაშასადამე, (2.2) მიმდევრობის კრებადობის არეა $[0,+\infty[$ შუალედი და მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია $f(x)=0$.

მოცემული მიმდევრობა თანაბრად კრებადი არაა თავის ზღვრულ $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მართლაც,

$$f_n(x)-f(x)=x(n+1)^2e^{-(n+1)x}$$

და თუ ვიგულისხმებთ $x_n=\dfrac{1}{n+1}$ და $\varepsilon=e^{-1}$, მაშინ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$f_n(x_n)-f(x_n)=\frac{n+1}{e}>\frac{1}{e}.$$

მაშასადამე, კრებადობა არ შეიძლება თანაბარი იყოს არც ერთ $[0, a]$ სეგმენტზე, სადაც a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ უწყვეტწევრებიანი არათანაბრადკრებადი მიმდევრობა, რომლის ზღვრული ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციაა.

თანაბარი კრებადობის ცნება ადვილად ვრცელდება ფუნქციათა მწკრივზედაც. ვთქვათ, (1.3) მწკრივი კრებადია E სიმრავლეზე და მისი ჯამია $s(x)$ ფუნქცია. ამ მწკრივს ეწოდება თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე, თუ კერძო ჯამთა (1.4) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $s(x)$ ფუნქციისაკენ E სიმრავლეზე.

თეორემა 1. (1.1) მიმდევრობის თანაბარი კრებადობისათვის E სიმრავლეზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური N, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის შესრულდეს უტოლობა

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon, \tag{2.3}$$

როდესაც $n>N$ და როგორიც უნდა იყოს ნატურალური p.

დამტკიცება. თუ (1.1) მიმდევრობას აქვს ზღვრული ფუნქცია $f(x)$ და ეს მიმდევრობა E სიმრავლეზე თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური N, რომ

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

როდესაც $n>N$ და E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის. ანალოგიურად გვექნება

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან გვაქვს

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-$$
$$-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია თეორემაში აღნიშნული (2.3) პირობა. მაშინ E სიმრავლის ნებისმიერი

ფიქსირებული x წერტილისათვის (1.1) მიმდევრობა წარმოადგენს რიცხვთა მიმდევრობას, რომლისთვისაც შესრულებულია (2.3) უტოლობა. კოშის თეორემის თანახმად, არსებობს ამ მიმდევრობის სასრული ზღვარი და ამით დამტკიცებულია (1.1) მიმდევრობის ზღვრული $f(x)$ ფუნქციის არსებობა.

ახლა ავიღოთ E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი და ნებისმიერი ფიქსირებული ნატურალური n, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n>N$. თუ (2.3) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $p\to\infty$, მივიღებთ

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

ამით დადგენილია $f_n(x)$-ის თანაბარი მისწრაფება $f(x)$ ფუნქციისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

ფუნქციათა მწკრივებისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ანალოგიური თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

(1.3) მწკრივის თანაბარი კრებადობისათვის E სიმრავლეზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური N, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის შესრულდეს უტოლობა

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

როდესაც $n>N$ და როგორიც გინდა იყოს ნატურალური p.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი დებულება:

თუ E სიმრავლეზე თანაბრად კრებად $(u_n(x))$ მწკრივის ყველა წევრს გავამრავლებთ E-ზე შემოსაზღვრულ $g(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ $(u_n(x)g(x))$ მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე.

§ 3. ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობის ვაიერშტრასის ნიშანი

თეორემა 2 (ვაიერშტრასი). თუ

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{3.1}$$

მწკრივის წევრები E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$|u_n(x)|\leqslant a_n \quad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{3.2}$$

სადაც

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots \tag{3.3}$$

წარმოადგენს დადებით კრებად მწკრივს, მაშინ (3.1) მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რაკი (3.3) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ თუ $n>N$, გვექნება

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots<\varepsilon.$$

შემდეგ (3.2) პირობის თანახმად

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

მაგრამ თუ $n>N$, მაშინ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon.$$

ეს უტოლობა (3.1) მწკრივის E სიმრავლეზე თანაბარ კრებადობას ადასტურებს. თეორემა დამტკიცებულია.

(3.3) მწკრივს ეწოდება (3.1) მწკრივის მ ა ჟ ო რ ა ნ ტ უ ლ ი მ წ კ რ ი ვ ი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციათა მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)\sqrt{n+1}}, \tag{3.4}$$

რომელიც განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $|\sin(n+1)x|\leqslant 1$ ყოველ $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^{3/2}}.$$

მეორე მხრივ, დადებითი მწკრივი $\left(\frac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$ კრებადია. მაშასადამე, მე-2 თეორემის თანახმად (3.4) მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 4. ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრული ფუნქციის უწყვეტობა

თეორემა 3. თუ X შ უ ა ლ ე დ ზ ე უ წ ყ ვ ე ტ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა თ ა ნ ა ბ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი ა ა მ შ უ ა ლ ე დ ზ ე ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ქ ნ ე ბ ა უ წ ყ ვ ე ტ ი.

დამტკიცება. ვთქვათ, X შუალედზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n\geq 1}$ თანაბრად კრებადია X შუალედზე ზღვრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია X შუალედზე. ავიღოთ X შუალედის ნებისმიერი x_0 წერტილი და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა თანაბრად კრებადია X სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ X სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

როდესაც $n>N$.

ახლა ვთქვათ, n რაიმე ნატურალური რიცხვია, რომელიც მეტია N-ზე. რაკი $f_n(x)$ უწყვეტია X შუალედზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

როდესაც $|x-x_0|<\delta$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $|x-x_0|<\delta$, გვექნება

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+$$

$$+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და რაკი x_0 ნებისმიერად იყო აღებული X-დან, ამიტომ $f(x)$ უწყვეტია X-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის ანალოგიური თეორემა მწკრივებისათვის ასე ჩამოყალიბდება:

თუ შუალედზე უწყვეტ ფუნქციათა მწკრივი თანაბრად კრებადია ამ შუალედზე, მაშინ მწკრივის ჯამიც უწყვეტია იმავე შუალედზე.

შენიშვნა 1. თუ შუალედზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია ზღვრული ფუნქციისაკენ, მაშინ ზღვრული ფუნქცია შეიძლება არ იყოს უწყვეტი. მართლაც, 1-ლ და მე-2 მაგალითებში განხილული უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობების ზღვრული ფუნქციები წყვეტილია. ეს მიმდევრობები თანაბრად არ არიან კრებადი $[0, 1]$ სეგმენტზე თავისი ზღვრული ფუნქციებისაკენ, ვინაიდან კრებადობა თანაბარი რომ იყოს, მაშინ მე-3 თეორემის თანახმად, ზღვრული ფუნქციები უწყვეტი იქნებოდა.

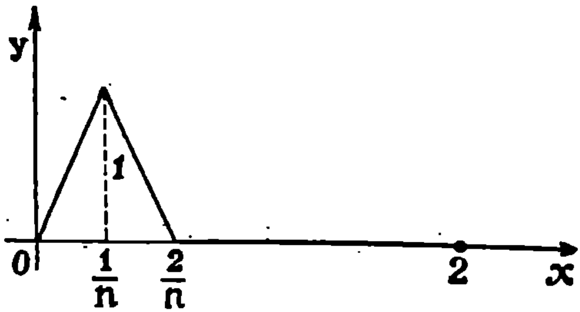
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა შეიძლება არათანაბრად იკრიბებოდეს უწყვეტი ფუნქციისაკენ. განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვთქვათ, $f_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია [0, 2] სეგმენტზე შემდეგნაირად:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{როდესაც } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ -nx+2, & \text{როდესაც } \frac{1}{n} < x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{როდესაც } \frac{2}{n} < x \leqslant 2. \end{cases}$$

$f_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე. ამ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 1-ლ ნახაზზე. ცხადია, ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობის ზღვრული ფუნქცია $f(x)=0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ფუნქციათა $(f_n(x))_{n>1}$ მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია [0,2] სეგმენტზე.

ანალოგიურ მაგალითს წარმოადგენს ზემოთ განხილული მე-4 მაგალითი.



ნახ. 1

როგორც ზემოთ დავინახეთ, უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობა აუცილებელი არ არის ზღვრული ფუნქციის უწყვეტობისათვის. აქედან ჩანს, რომ თანაბარი კრებადობა თუ აუცილებელი არ არის, მაშასადამე, ის ძლიერ მოთხოვნილებას წარმოადგენს მიმდევრობის ზღვრული ფუნქციის უწყვეტობისათვის და ამიტომ ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება ისე შესუსტდეს ეს მოთხოვნილება, რომ იგი საკმარისიც იყოს ზღვრული ფუნქციის უწყვეტო-

ბისათვის და ამასთან, აუცილებელიც? აქ ერთ კერძო შემთხვევაზე შევჩერდებით, როდესაც უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობა აუცილებელიც არის და საკმარისიც ზღვრული ფუნქციის უწყვეტობისათვის. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი

თეორემა 4 (დინი). თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n\geq 1}$ ზრდადია და კრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ აღებული მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[a, b]$-ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x)-f_n(x)=r_n(x).$$

რაკი $(f_n(x))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ $(r_n(x))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა იქნება კლებადი. ამის გარდა,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \tag{4.1}$$

$[a, b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში.

დავუშვათ, რომ $(f_n(x))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon>0$ და $[a, b]$ სეგმენტის წერტილთა ისეთი $(x_k)_{k\geq 1}$ მიმდევრობა, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$r_k(x_k)>\varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots).$$

ცხადია, ყოველი ფიქსირებული ნატურალური n რიცხვისათვის გვექნება

$$r_n(x_k)>\varepsilon, \text{ როდესაც } k>n.$$

ახლა $(x_k)_{k\geq 1}$ მიმდევრობიდან გამოვყოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე ξ წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა $(x_{k_i})_{i\geq 1}$. მაშასადამე, $r_n(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება

$$\lim_{i\to\infty} r_n(x_{k_i})=r_n(\xi)\geqslant\varepsilon. \tag{4.2}$$

მაგრამ (4.2) ტოლობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\xi)=0. \tag{4.3}$$

მეორე მხრივ, (4.2) უტოლობის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\xi)\geqslant\varepsilon. \tag{4.4}$$

(4.3) და (4.4) დამოკიდებულებანი ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $(f_n(x))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე

$f(x)$ ფუნქციისაკენ და ამით დინის (Dini) თეორემა დამტკიცებულია.

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-3 თეორემას, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა 5. X სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობის კრებადობისათვის უწყვეტი ფუნქციისაკენ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციათა მოცემული მიმდევრობა იყოს თანაბრად კრებადი X სეგმენტზე.

§ 5. წევრ-წევრად ზღვარზე გადასვლა

თეორემა 6. თუ ფუნქციათა მწკრივი $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+ +f_n(x)+\ldots$ თანაბრად კრებადია $]a, b[$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციისაკენ და თუ $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = c_n (n = 1, 2, \ldots)$, მაშინ მწკრივი (c_n) კრებადია და

$$\lim_{x\to a} f(x) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots,$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

დამტკიცება. რაკი $(f_n(x))$ მწკრივი თანაბრად კრებადია $]a,b[$ ინტერვალში, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური რიცხვი ν_0, რომ $]a,b[$ ინტერვალის ნებისმიერი x წერტილისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon,$$

როდესაც $n > \nu_0$ და ნებისმიერი ნატურალური p-სათვის.

ამ უტოლობაში n და p უცვლელად დავტოვოთ და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $x \to a$, გვექნება

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| \leqslant \varepsilon,$$

საიდანაც კოშის თეორემას თანახმად (c_n) მწკრივი კრებადია რომელიღაც C რიცხვისაკენ. ამ მწკრივის კერძო ჯამი აღვნიშნოთ C_n-ით. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to a} f(x) = C.$$

აღვნიშნოთ $s_n(x)$ და $r_n(x)$ სიმბოლოებით $(f_n(x))$ მწკრივის კერძო ჯამი და ნაშთი. ავიღოთ ნატურალური რიცხვი $\nu_1 > \nu_0$ ისე, რომ როდესაც $n > \nu_1$ ერთდროულად შესრულდეს ორი უტოლობა

$$|C - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad a < x < b.$$

შემდეგ ვთქვათ, ν არის რაიმე ნატურალური რიცხვი, რომელიც აღემატება ν_1-ს. გვაქვს:

$$|f(x) - C| = |[s_\nu(x) - C_\nu] + (C_\nu - C) + r_\nu(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |s_\nu(x) - C_\nu| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ თეორემის პირობის თანახმად

$$\lim_{x \to a} s_\nu(x) = C_\nu.$$

ამიტომ არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ როდესაც $0 < x - a < \delta$, გვექნება

$$|s_\nu(x) - C_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშასადამე,

$$|f(x) - C| < \varepsilon,$$

როდესაც $0 < x - a < \delta$, ე. ი.

$$\lim_{x \to a} f(x) = C.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ფუნქციათა მწკრივის ინტეგრება

ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ სეგმენტზე ინტეგრებად ფუნქციათა ჯამი ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და ჯამის ინტეგრალი ინტეგრალთა ჯამის ტოლია, თუ შესაკრებთა რიცხვი სასრულია. ბუნებრივად იბმის კითხვა: მართებულია თუ არა ზემოაღნიშნული თვისება ფუნქციათა მწკრივის შემთხვევაში? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. განვიხილოთ ფუნქციათა მწკრივი

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_h(x) + \ldots \tag{6.1}$$

სადაც

$$u_k(x) = x(k+1)e^{-(k+1)x^2} - xke^{-kx^2}.$$

ეს მწკრივი განსაზღვრულია $]-\infty+\infty[$ შუალედში. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ მწკრივის კერძო ჯამი $s_n(x)$ გამოისახება ასე

$$s_n(x) = x(n+1)\, e^{-(n+1)x^2}.$$

ცხადია, ნებისმიერი x-სათვის $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0$. მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა $]-\infty,+\infty[$ შუალედი და მწკრივის ჯამი $s(x)=0$.

თუ ავიღებთ $[0,1]$ სეგმენტს, ნებისმიერი n-სათვის გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u_k(x)dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u_k(x)dx = \int_0^1 x(n+1)\, e^{-(n+1)x^2}dx=$$

$$= -\frac{1}{2}\,[e^{-(n+1)x^2}]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n-1}.$$

აქედან

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u_k(x)dx = \frac{1}{2}.$$

შემდეგ,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx=\int_0^1 s(x)dx=0.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx \neq \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u_k(x)dx.$$

ამგვარად, ჩვენ ავაგეთ ინტეგრებად ფუნქციათა ისეთი მწკრივი, რომლის წევრ-წევრად ინტეგრება არ შეიძლება.

თეორემა 7. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებად ფუნქციათა მწკრივი

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{6.2}$$

ამავე სეგმენტზე თანაბრად კრებადია, მაშინ $s(x)$ ჯამიც ინტეგრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b s(x)dx=\int_a^b u_0(x)dx+\int_a^b u_1(x)dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)dx+\cdots. \tag{6.3}$$

დამტკიცება. რადგანაც (6.2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსე-

ბოძს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ამ სეგმენტის ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება უტოლობები

$$s_\nu(x)-\varepsilon<s(x)<s_\nu(x)+\varepsilon, \tag{6.4}$$

სადაც

$$s_\nu(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_\nu(x),$$

ამასთან, $s_\nu(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ახლა $[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

თუ $s_\nu(x)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე აღვნიშნავთ m_k^* და M_k^* სიმბოლოებით, მაშინ (6.4) უტოლობათა საფუძველზე გვექნება

$$m_k^*-\varepsilon<s(x)<M^*+\varepsilon, \tag{6.5}$$

ე. ი. $s(x)$ ფუნქციის ω_k რხევა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე არ აღემატება 6.5) უტოლობათა კიდურა წევრების სხვაობას, ე. ი.

$$\omega_k\leqslant\omega_k^*+2\varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{6.6}$$

სადაც $\omega_k^*=M_k^*-m_k^*$ არის $s_\nu(x)$ ფუნქციის რხევა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. თუ (6.6) უტოლობებს გავამრავლებთ $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ სიდიდეებზე და მიღებულ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k^*\Delta x_k+2\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k.$$

მაგრამ

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\,\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k^*\Delta x_k+2\varepsilon(b-a).$$

რაკი $s_\nu(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^*\Delta x_k<\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon + 2\varepsilon (b-a)$$

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის. რიმანის თეორემის თანახმად $s(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ მართებულია (6.3) ტოლობა. თუ მწკრივის n-ურ კერძო ჯამს აღვნიშნავთ $s_n(x)$ სიმბოლოთი, ნაშთს კი $r_n(x)$-ით, მაშინ

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x). \tag{6.7}$$

რადგანაც მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის და ყოველი x-სათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური N, რომ თუ $n > N$ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

და, მაშასადამე, როდესაც $n > N$ გვაქვს

$$\left| \int_a^b r_n(x) dx \right| < \varepsilon (b-a).$$

(6.7) ტოლობის თანახმად

$$\int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b r_n(x) dx.$$

მაგრამ

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b u_0(x) dx + \int_a^b u_1(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx.$$

მაშასადამე, თუ $n > N$ გვექნება

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x) dx \right| < \varepsilon (b-a).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b s(x) dx,$$

ე. ი. მართებულია (6.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა მოკლედ ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

სეგმენტზე ინტეგრებად ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მწკრივის ინტეგრება შეიძლება წევრ-წევრად.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ინტეგრებად ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობა აუცილებელი არაა მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებადობისათვის. მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

სადაც

$$u_k(x)=(k+1)x(1-x)^{k+1}-kx(1-x)^k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

ეს მწკრივი განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ მწკრივის n-ური კერძო ჯამი $s_n(x)$ გამოისახება ასე

$$s_n(x)=(n+1)x(1-x)^{n+1} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

ცხადია, მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა $[0,2[$ შუალედი, ამასთან,

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0, \quad 0\leqslant x<2.$$

მოცემული მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი $[0,1]$ სეგმენტზე. მართლაც, ავიღოთ $\varepsilon=\frac{1}{3e}$, $x_n=\frac{1}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. გვაქვს:

$$|s(x_n)-s_n(x_n)|=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}>\frac{1}{2e}>\varepsilon$$

ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის. ამიტომ მწკრივი თანაბრად კრებადი არაა.

შემდეგ

$$\int_0^1 s_n(x)dx=(n+1)\int_0^1 x(1-x)^{n+1}\,dx=(n+1)\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right),$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx=0,$$

ე. ი.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 u_k(x)dx=0.$$

ამის გარდა,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx=0.$$

ამრიგად, მიუხედავად იმისა, რომ მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადი არ არის [0,1] სეგმენტზე, მისი წევრ-წევრად ინტეგრება შესაძლებელია.

დამტკიცებული თეორემის ანალოგიური თეორემა ფუნქციათა მიმდევრობისათვის შემდეგია:

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებად ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n>1}$ თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია აღნიშნულ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

§ 7. ფუნქციათა მწკრივის გაწარმოება

დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ წარმოებად ფუნქციათა ჯამის წარმოებული შესაკრებ ფუნქციათა წარმოებულის ჯამის ტოლია, თუ შესაკრებთა რიცხვი სასრულია. მწკრივების შემთხვევაში ეს დებულება საზოგადოდ მართებული არ არის. ამასთან, აღსანიშნავია, რომ მწკრივის თანაბარი კრებადობაც საკმარისი არ არის ფუნქციათა მწკრივის წევრ წევრად გაწარმოებისათვის. მოვიყვანოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. განვიხილოთ ფუნქციათა მწკრივი

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, . \tag{7.1}$$

სადაც

$$u_k(x) = \frac{1}{k+1}\operatorname{arc\,tg} x^{k+1} - \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg} x^k, \quad u_0(x)=\operatorname{arctg} x.$$

ცხადია, რომ $u_k'(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$ წარმოებული უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

მოცემული მწკრივის n-ური კერძო ჯამისათვის გვაქვს:

$$s_n(x) = \frac{1}{n+1} \operatorname{arc\,tg} x^{n+1}.$$

აქედან ჩანს, რომ (7.1) მწკრივის ჯამი

$$s(x)=0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

გამოვთვალოთ $s_n'(1)$. გვაქვს

$$s_n'(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n+2}}.$$

აქედან $s_n'(1)=\frac{1}{2}$. მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(1)=\frac{1}{2},$$

ე. ი.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(1)= \frac{1}{2}.$$

მაგრამ

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right)'_{x=1} =0.$$

მაშასადამე, (7.1) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება არ შეიძლება, მიუხედავად იმისა, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 8. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციათა მწკრივი

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{7.2}$$

ამავე სეგმენტზე კრებადია, ხოლო წარმოებულთა მწკრივი

$$u_0'(x)+u_1'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots$$

თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მწკრივის $s(x)$ ჯამსაც აქვს წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$s'(x)=u_0'(x)+u_1(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots \tag{7.3}$$

დამტკიცება. თუ (7.3) მწკრივის ჯამს აღვნიშნავთ $f(x)$-ით, მაშინ ამ მწკრივის თანაბარი კრებადობის გამო, მე-6 თეორემის ძალით, ყოველი x-ისათვის $[a, b]$ სეგმენტზე გვექნება

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= s(x) - s(a).$$

ამრიგად,

$$s(x) = s(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის წარმოებულია $f(x)$. აქედან ვასკვნით, რომ $s(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია და

$$s'(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x),$$

ე. ი. შეიძლება (7.2) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ფუნქციათა მიმდევრობისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n \geq 1}$ კრებადია სეგმენტზე ზღვრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ხოლო $(f_n'(x))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია თავისი ზღვრული ფუნქციისაკენ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x).$$

ახლა დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი

თეორემა 9. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე დიფერენცირებად ფუნქციათა მწკრივი $(u_n(x))$ კრებადია ამ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც. თუ მწკრივი $(u_n'(x))$ თანაბრად კრებადია $[a, b]$-ზე, ხოლო ყოველი $u_n'(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მოცემული მწკრივი $(u_n(x))$ აგრეთვე თანაბრად კრებადია $[a, b]$-ზე; ამ მწკრივის ჯამი დიფერენცირებადი ფუნქციაა და მისი წარმოებული უდრის წარმოებულთა მწკრივის ჯამს:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, c არის $[a, b]$ სეგმენტის წერტილი, რომელშიც მოცემული მწკრივი კრებადია. რაკი $(u_n'(x))$ მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი ნატურალური N, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

როდესაც $n > N$ და ნებისმიერი ნატურალური p-სათვის.

თუ მოვახდენთ ამ უტოლობის ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)-u_k(c)]\right| < |x-c| \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მწკრივი $(u_k(x)-u_k(c))$ თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, და რაკი $(u_k(c))$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ $(u_n(x))$ მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$-ზე. ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ $F(x)$ და x_0 იყოს $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f_n(h) = \frac{u_n(x_0+h)-u_n(x_0)}{h}.$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა h-სათვის, რომლებიც ნულისაგან განსხვავებულია და რომელთათვის x_0+h ეკუთვნის $[a, b]$ სეგმენტს. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(h) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0+h) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\right].$$

რადგანაც ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > N$ და ნებისმიერი ნატურალური p-სათვის

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(h)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi)\right| < \varepsilon,$$

სადაც ξ მოთავსებულია x_0 და x_0+h რიცხვებს შორის, ამიტომ მწკრივი $(f_n(h))$ თანაბრად კრებადია $a-x_0<h<0$ და $0<h<b-x_0$ ინტერვალებში. მე-6 თეორემის თანახმად

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(h)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to 0+} f_n(h)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0),$$

$$\lim_{h\to 0-}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(h)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to 0-} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0).$$

ამრიგად

$$F'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0).$$

რაკი x_0 არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი, ამიტომ

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ფუნქციათა მიმდევრობისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე დიფერენცირებად ფუნქციათა მიმდევრობა $(F_n(x))_{n\geq 1}$ კრებადია $[a, b]$ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც და, თუ წარმოებულთა მიმდევრობა $(F_n'(x))_{n\geq 1}$ თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $(F_n(x))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა აგრეთვე თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ზღვრული ფუნქცია დიფერენცირებადია და მართებულია ტოლობა

$$\left(\lim_{n\to\infty} F_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty} F_n'(x).$$

§ 8. მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს

XIX საუკუნის მეორე ნახევრამდე მათემატიკოსებს ეგონათ, რომ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს წარმოებული ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლებელია, ზოგიერთი განსაკუთრებული წერტილებისა, რომელთა რიცხვი სასრულია, მაგრამ ეს შეხედულება მცდარი აღმოჩნდა. ვაიერშტრასმა ააგო უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ ვანდერ-ვარდენის (Van der Waerden) უწყვეტი ფუნქციის მაგალითს, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არა აქვს:

ავიღოთ $f_0(x)$ ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს მანძილს x წერტილიდან უახლოეს მთელრიცხვა წერტილამდე. ცხადია, ეს ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 1 და იგი წრფივია ყოველ $\left[\frac{i-1}{2}, \quad \frac{i}{2}\right]$ სეგმენტზე, სადაც i რაიმე მთელი რიცხვია. ყოველ ასეთ სეგმენტზე $y=f_0(x)$ წირის კუთხური კოეფიციენტია $+1$ ან -1.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f_n(x)=\frac{1}{4^n}f_0(4^n x) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $f_n(x)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{1}{4^n}$. მართლაც, გვაქვს

$$f_n\left(x+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{4^n}f_0\left[4^n\left(x+\frac{1}{4^n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4^n}f_0(4^n x+1)=f_n(x).$$

ამის გარდა, $f_n(x)$ ფუნქცია წრფივია ყოველ $\left[\frac{i-1}{2\cdot 4^n}, \quad \frac{i}{2\cdot 4^n}\right]$ სახის სეგმენტზე და ყოველ ასეთ სეგმენტზე $y=f_n(x)$ წირის კუთხური კოეფიციენტებია $+1$ ან -1. რადგანაც $]-\infty, +\infty[$ შუალედში

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\cdot 4^n} \quad (n=0, 1, \ldots).$$

ამიტომ ფუნქციათა მწკრივი

$$f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \tag{8.1}$$

თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე. მაშასადამე, $f_n(x)$ ფუნქციების უწყვეტობის გამო, ამ მწკრივის ჯამი $f(x)$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული არც ერთ წერტილში. ნებისმიერი x წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის შემცველი სეგმენტები

$$\Delta_0\supset\Delta_1\supset\ldots\supset\Delta_n\supset\ldots,$$

სადაც

$$\Delta_n = \left[\frac{i_n - 1}{2 \cdot 4^n}, \ \frac{i_n}{2 \cdot 4^n}\right] \quad (n=0, 1, \ldots),$$

ხოლო i_n მთელი რიცხვია. ცხადია

$$|\Delta_n| = \frac{1}{4^n}$$

და ამიტომ Δ_n-ზე არსებობს ისეთი x_n წერტილი, რომელიც დაშორებულია x წერტილიდან $\frac{1}{4^{n+1}}$ მანძილით. განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x}. \tag{8.2}$$

შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს:

1) $k > n$. ამ შემთხვევაში, $f_k(x_n) - f_k(x) = 0$, ვინაიდან $\frac{1}{4^{n+1}}$ წარმოადგენს $f_{n+1}(x)$, $f_{n+2}(x), \ldots$ ფუნქციების პერიოდთა მთელ ჯერადს. მაშასადამე,

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = 0.$$

2. $k \leqslant n$. რაკი $f_k(x)$ ფუნქცია წრფივია Δ_k სეგმენტზე, ამიტომ იგი წრფივია Δ_n სეგმენტზედაც, რომელიც Δ_k სეგმენტის ნაწილს წარმოადგენს, მაშასადამე,

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \pm 1.$$

ამიტომ

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{k} (\pm 1).$$

მაგრამ $\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)$ ლუწი რიცხვია, თუ n კენტია და კენტი რიცხვია, როდესაც n ლუწია. მაშასადამე, $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$ ფარდობა არ მიისწრაფვის რაიმე ზღვარისაკენ, როდესაც $n\to\infty$. შემდეგ, რაკი $\lim x_n=x$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია არ არის წარმოებადი x წერტილში. ამრიგად, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი არ არის არც ერთ წერტილში.

§ 9. უწყვეტ ფუნქციათა აპროქსიმაცია მრავალწევრებით

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად თეორემას, რომელიც ვაიერშტრასის თეორემის სახელწოდებითაა ცნობილი.

ლემა. მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$\sum_{k=0}^{n}(n\,x-k)^2\,C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}, \tag{9.1}$$

სადაც C_n^k არის ბინომური კოეფიციენტი, ამასთან $C_n^0=1$.

დამტკიცება. ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად

$$1=[x+(1-x)]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \tag{9.2}$$

ამ ტოლობაში n შევცვალოთ $(n-1)$-ით და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x-ზე, გვექნება

$$x=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}C_n^{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

აქედან

$$nx=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \tag{9.3}$$

ახლა ამ ტოლობაში n შევცვალოთ $(n-1)$-ით და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი ისევ x-ზე გავამრავლოთ, გვექნება

$$(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n-1} kC_{n-1}^k x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{n} C_n^{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

საიდანაც

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (9.3) ტოლობას, მივიღებთ

$$nx + n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{9.4}$$

გავამრავლოთ (9.2), (9.3) და (9.4) ტოლობების ორივე ნაწილები შესაბამისად n^2x^2, $-2nx$ და 1-ზე და ამის შემდეგ ისინი წევრ-წევრად შევკრიბოდ, გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

მაგრამ

$$nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}.$$

მაშასადამე, მართებულია (9.1) უტოლობა. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10 (ვაიერშტრასი). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მრავალწევრი $P(x)$, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევისათვის როდესაც $a=0$ და $b=1$. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

სადაც C_n^k ბინომური კოეფიციენტია. ამ მრავალწევრს ეწოდება ბერნშტეინის მრავალწევრი. როგორც ვხედავთ, $B_n(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა შემადგენლობაში შედიან აღებული ფუნქციის მნიშვნელობები.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $[0,1]$ სეგმენტის ყოველი x'' და x' წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x''-x'|<\delta$, გვექნება

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამის გარდა, არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ

$$|f(x)|\leqslant M, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

გვაქვს:

$$|f(x)-B_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

თუ $\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$, მაშინ $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, ხოლო თუ $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta$. მაშინ $\frac{(nx-k)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1$ და ამიტომაც

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{2M(nx-k)^2}{n^2\delta^2}.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი x-სათვის $[0,1]$ სეგმენტიდან, გვექნება

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M(nx-k)^2}{n^2\delta^2}$$

ამგვარად, ლემის თანახმად გვექნება

$$|f(x)-B_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+\frac{2M}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2 n^2}\cdot\frac{n}{4}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2\delta^2 n}.$$

ახლა ავიღოთ ნატურალური რიცხვი $N > \frac{M}{\delta^2\varepsilon}$. თუ $n>N$, გვექნება

$$\frac{M}{2\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამიტომ, თუ $n>N$, გვექნება

$$|f(x)-B_n(x)| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $a=0$, $b=1$.

დასასრულ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ x ცვლადის გარდაქმნას მოვახდენთ $x=a+(b-a)t$ ტოლობის მიხედვით, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტი ურთიერთცალსახად გადაისახება $[0,1]$ სეგმენტში. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$g(t)=f[a+(b-a)t],$$

დავინახავთ, რომ $g(t)$ წარმოადგენს $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ბერნშტეინის მრავალწევრი $B_n^*(t)$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$|g(t)-B_n^*(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{9.5}$$

თუ ისევ x ცვლადს დავუბრუნდებით და მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$g(t)=f(x),$$

მაშინ (9.5) უტოლობა მოგვცემს

$$\left| f(x) - B_n^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

მაგრამ $B_n^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ არის x-ის მიმართ მრავალწევრი. ვაიერშტრასის თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ვაიერშტრასის თეორემა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მრავალწევრთა თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამის სახით.

თეორემა 11. ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n\geq 1}$, რომელიც

კრებადია ამ სეგმენტზე რაიმე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ $f(x)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} P_n(x),$$

სადაც $P_n(x)$ მრავალწევრია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(\varepsilon_n)_{n>1}$ არის ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, შეგვიძლია ავაგოთ მრავალწევრთა ისეთი მიმდევრობა $(P_n(x))_{n>1}$, რომ

$$|f_n(x)-P_n(x)|<\varepsilon_n,\quad a\leqslant x\leqslant b\quad (n=1, 2, \ldots).$$

მრავალწევრთა ეს მიმდევრობა არის საძიებელი. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ვთქვათ x_0 არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი. ავიღოთ ნატურალური რიცხვი N იმდენად დიდი, რომ ერთდროულად შესრულდეს უტოლობები:

$$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

როდესაც $n>N$, მაშინ გვექნება

$$|f(x_0)-P_n(x_0)|\leqslant|f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-$$
$$-P_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

როდესაც $n>N$. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

იპოვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის არე:

1. $x+x^4+\dots+x^{n^2}+\cdots$ პასუხი: $]-1, 1[$.
2. $\ln x+\ln^2 x+\dots+\ln^n x+\cdots$ პასუხი: $]e^{-1}, e[$.
3. $x+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}+\cdots$ პასუხი: $[-1,1[$.
4. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x^2}+\dots+\dfrac{1}{1+x^n}+\cdots$ პასუხი: $x<-1$ და $x>1$.
5. $\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{4}+\dots+\sin\dfrac{x}{2^n}+\cdots$ პასუხი: $]-\infty, +\infty[$

6. $x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}+x^2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{4}+\ldots+x^n\mathrm{tg}\dfrac{x}{2^n}+\cdots$ პასუხი: $]-2,2[$,

7. $\dfrac{\cos x}{e^x}+\dfrac{\cos 2x}{e^{2x}}+\ldots+\dfrac{\cos nx}{e^{nx}}+\ldots$ პასუხი: $]0,+\infty[$.

8. $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$ პასუხი: $]0,+\infty[$.

9. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი $\left(\dfrac{n}{x^n}\right)$ აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x|>1$,

10. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ აბსოლუტ-ურად კრებადია $]0,+\infty[$ შუალედში.

11. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$ აბსოლუ-ტურად კრებადია $]-\infty,-1[\,\cup\,]-\dfrac{1}{3},+\infty[$ სიმრავლეზე.

12. დაამტკიცეთ, რომ ლამბერტის მწკრივი $\left(\dfrac{x^n}{1-x^n}\right)$ აბსოლუტუ-რად კრებადია $]-1,1[$ ინტერვალში.

13. დაამტკიცეთ. რომ მწკრივი $\left(\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right)$ აბსოლუტურად კრე-ბადია $]-\infty,+\infty[\setminus\{-1,1\}$ სიმრავლეზე.

14. დაამტკიცეთ, რომ თუ დირიხლეს მწკრივი $\left(\dfrac{a_n}{n^x}\right)$ კრებადია x_0 წერტილში, მაშინ ეს მწკრივი კრებადია აგრეთვე ყოველ x წერ-ტილში, სადაც $x>x_0$.

15. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$ $(n=1, 2,\ldots)$ თანაბრად კრებადია $]0,+\infty[$ შუალედში.

16. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$ $(n=1,2,\ldots)$ თანაბრად კრებადია $]-\infty,+\infty[$ შუა-ლედში.

17. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ თანაბრად კრებადია ყოველ სასრულ $[a, b]$ სეგმენტზე და თანაბრად კრებადი არ არის $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

18. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებული $f'(x)$ $]a, b[$ ინტერვალში და

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფვის $f'(x)$-საკენ ყოველ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, სადაც $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

19. ისარგებლეთ ფუნქციათა თანაბარი კრებადობის ვაიერშტრასის ნიშნით და დაამტკიცეთ თანაბარი კრებადობა ფუნქციათა შემდეგი მწკრივებისა:

a) $\left(\frac{1}{x^2+n^2}\right)$ $]-\infty, +\infty[$ შუალედში;

b) $\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)$ $[0, +\infty[$ შუალედში;

c) (x^2e^{-nx}) $[0, +\infty[$ შუალედში;

d) $\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$ $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

20. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა მწკრივი $\left(2^n \sin\frac{1}{3^n x}\right)$ არ არის თანაბრად კრებადი $]0, +\infty[$ შუალედში.

21. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა მწკრივი $\left(\frac{(-1)^n}{n+\sin x}\right)$ თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე.

22. განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\, g(x) \quad (n=1, 2, \ldots),$$

სადაც

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია,} \\ 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \end{cases}$$

ცხადია, ყოველი $f_n(x)$ ფუნქცია ყველგან წყვეტილია. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფვის უწყვეტი ფუნქციისაკენ.

23. მოცემულია კრებადი მწკრივი (a_n). დაამტკიცეთ, რომ დირიხლეს მწკრივი $\left(\frac{a_n}{n^x}\right)$ თანაბრად კრებადია $[0,+\infty[$ შუალედში.

24. ვთქვათ, (a_n) მწკრივი კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი $(a_n e^{-nx})$ თანაბრად კრებადია $[0,+\infty[$ შუალედში.

25. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^3}$$

უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი $]-\infty,+\infty[$ შუალედში.

26. ვთქვათ, $r_1, r_2, r_n, \ldots$ რაციონალური რიცხვებია $[0,1]$ სეგმენტისა. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{3^k}$$

უწყვეტია, დიფერენცირებადია ირაციონალურ წერტილებში და არადიფერენცირებადი რაციონალურ წერტილებში.

27. დაამტკიცეთ. რომ რიმანის ძეტა-ფუნქცია

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

უწყვეტია $]1,+\infty[$ შუალედში და ამ შუალედში აქვს ყველა რიგის წარმოებული.

28. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n \quad (n=1, 2, \ldots)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში, მაგრამ

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

19. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \; (n=1,2,\ldots)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში, მაგრამ

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

30. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $(n=1, 2, \ldots)$ მიმდევრობა კრებადია [0,1] სეგმენტზე; მაგრამ

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

31. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x)=nx(1-x)^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია [0,1] სეგმენტზე, მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

32. დაამტკიცეთ, რომ შეიძლება $\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}\right)$ მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება.

თ ა ვ ი II

ხარისხოვანი მწკრივები

§ 1. ხარისხოვანი მწკრივის ცნება

ფუნქციათა მწკრივებს შორის თეორიული თვალსაზრისით უმარტივესი და ამასთან, მრავალი გამოყენებისათვის უმნიშვნელოვანესია ეგრეთ წოდებული ხარისხოვანი მწკრივები, ე. ი. შემდეგი სახის მწკრივები:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1.1}$$

სადაც $a_0, a_1, a_2,\cdots, a_n\cdots,$ მუდმივებია. ამ მუდმივებს ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

ხშირად, ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება უფრო ზოგად გამოსახულებას

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots, \tag{1.2}$$

სადაც a მუდმივი სიდიდეა. ეს ხარისხოვანი მწკრივი $x-a=y$ ჩასმით შეგვიძლია დავიყვანოთ (1.1) სახემდე. ამიტომ სიმარტივისათვის განვიხილავთ (1.1) სახის მწკრივებს.

ხარისხოვანი მწკრივის კერძო $s_n(x)$ ჯამი მრავალწევრია. თუ (1.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი $s(x)$ ჯამი საზოგადოდ ძალიან რთული აგებულების ფუნქციაა. $s_n(x)$ შეგვიძლია განვიხილოთ $s(x)$ ფუნქციის მიახლოებით გამოსახულებად, ამასთან, ამ მიახლოების სიზუსტე შეგვიძლია რაგინდ მაღალი გავხადოთ, თუ $s_n(x)$ კერძო ჯამში n საკმარისად დიდი ავიღეთ.

§ 2. აბელის პირველი თეორემა. კრებადობის ინტერვალი და კრებადობის რადიუსი

ისე როგორც ფუნქციათა ყოველი მწკრივისათვის, (1.1) ხარისხოვანი მწკრივის შესწავლისას პირველ რიგში უნდა დავსვათ საკითხი მისი კრებადობის არის შესახებ, ე. ი. იმის შესახებ, თუ x-ის რა მნიშვნელობისათვისაა ეს მწკრივი კრებადი.

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე ცარიელი სიმრავლე არაა. მართლაც, ხარისხოვანი (1.1) მწკრივი კრებადია, ყოველ შემთხვევაში, $x=0$ წერტილში მაინც.

ფუნქციათა ნებისმიერი მწკრივის კრებადობის არე შეიძლება წარმოადგენდეს ძალიან რთული აგებულების სიმრავლეს. მაგრამ, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე შუალედია, რაც აადვილებს მწკრივთა ამ კლასის შესწავლას. დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 1 (აბელის პირველი თეორემა). *თუ (1.1) მწკრივი კრებადია x_0 წერტილში, სადაც $x_0\neq 0$, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x|<|x_0|$.*

დამტკიცება. თეორემის პირობის თანახმად, მწკრივი

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$$

კრებადია, ამიტომ $a_nx_0^n\to 0$, როდესაც $n\to\infty$. მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ

$$|a_nx_0^n|\leqslant M\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

ახლა ვთქვათ, $|x|<|x_0|$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\left|\frac{x}{x_0}\right|=q$, გვექნება $0<q<1$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant Mq^n.$$

ამრიგად, (1.1) მწკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეები არ აღემატება დადებითი კრებადი

$$M+Mq+Mq^2+\cdots+Mq^n+\cdots$$

მწკრივის სათანადო წევრებს. ამიტომ მწკრივთა შედარების პირველი პრინციპის მიხედვით (1.1) მწკრივი კრებადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ (1.1) მწკრივი განშლადია x_0 წერტილში, იგი განშლადი იქნება ყოველ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x|>|x_0|$.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს ისეთი x_1 წერტილი, რომ $|x_1|>|x_0|$ და (1.1) მწკრივი კრებადია x_1 წერტილში, მაშინ აბელის თეორემის თანახმად ეს მწკრივი კრებადი იქნება x_0 წერტილში, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ახლა გავარკვიოთ, თუ რა ხასიათის კრებადობის არეები შეიძლება არსებობდეს ხარისხოვანი მწკრივებისათვის. განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი

$$1+x+2^2x^2+\ldots+n^nx^n+\ldots$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ მწკრივის კრებადობის არე შედგება მხოლოდ ერთი $x=0$ წერტილისაგან, თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას

$$u_n=|n^nx^n| \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

გვექნება

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\,|x|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)\,|x|:$$

აქედან ცხადია, რომ თუ $x\neq 0$, მაშინ

$$\lim_{n\to 8}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty.$$

მაშასადამე, დალამბერის ნიშნის მიხედვით მოცემული მწკრივი განშლადია, როცა $x\neq 0$. ამრიგად მწკრივის კრებადობის არე შედგება მხოლოდ ერთი $x=0$ წერტილისაგან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა $]-\infty,\ +\infty[$ შუალედი. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$u_n=\left|\frac{x^n}{n!}\right| \ (n=0,\ 1\ldots),$$

გვექნება

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|x|}{n+1}.$$

აქედან ყოველი x-სათვის გვექნება $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$. მაშასადამე, დალამბერის ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ, მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი

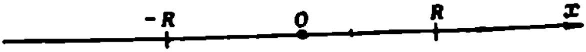
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

ეს წარმოადგენს გეომეტრიულ მწკრივს და ამიტომ იგი კრებადია

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $|x| < 1$. მაშასადამე, მწკრივის კრებადობის არეა $]-1, +1[$ ინტერვალი.

ამრიგად, ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე შეიძლება შედგებოდეს მხოლოდ ერთი წერტილისაგან, რიცხვთა ღერძისაგან და სასრული შუალედისაგან.

ახლა ვთქვათ, (1.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე არ წარმოადგენს არც წერტილს და არც რიცხვთა ღერძს. აღვნიშნოთ E-თი მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე. პირობის თანახმად არსებობს ისეთი დადებითი x_0 რიცხვი, რომლისთვისაც მოცემული მწკრივი განშლადია. მაშასადამე, ეს არე ზემოდან შემოსაზღვრულია. აღვნიშნოთ R ასოთი E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ცხადია, აღებული მწკრივი კრებადია $]-R, R[$ ინტერვალში (ნახ. 2) და განშლადია, როდესაც $|x| > R$, ხოლო როცა $x=-R$ ან $x=R$ შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა შემთხვევას: მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს ორივე $-R$ და R წერტილში, კრებადი იყოს ამ წერტილებიდან ერთ-ერთში, ხოლო განშლადი მეორეში. დაბოლოს, მწკრივი შეიძლება განშლადი იყოს ორივე $-R$ და R წერტილში.



ნახ. 2.

$]-R, R[$ ინტერვალს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის **კრებადობის ინტერვალი**, R რიცხვს კი **კრებადობის რადიუსი**.

თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ კრებადობის რადიუსია 0, ხოლო თუ მწკრივი კრებადია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, მაშინ $R=+\infty$.

ზემოთ განხილულ მაგალითებში კრებადობის რადიუსებია 0, $+\infty$, 1.

ზემოთ ნათქვამი ვრცელდება (1.2) სახის მწკრივებზე, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ კრებადობის შუალედის ცენტრი ამ შემთხვევაში იქნება $x=a$ წერტილი.

§ 3. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლა უმარტივეს შემთხვევებში

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის მოსაძებნად შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 2. თუ (1.1) მწკრივის კოეფიციენტები ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L,$$

მაშინ კრებადობის R რადიუსი იქნება:

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, \text{ როდესაც } 0<L<+\infty,\\ +\infty, \text{ როდესაც } L=0,\\ 0, \text{ როდესაც } L=+\infty.\end{cases}$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x|=L\cdot|x|.$$

თუ $0<L<+\infty$, მაშინ კოშის თეორემის მიხედვით (1.1) მწკრივი კრებადია, როდესაც $L|x|<1$, ე. ი. როდესაც $|x|<\frac{1}{L}$, და განშლადია, როდესაც $L|x|>1$, ე. ი. როდესაც $x>\frac{1}{L}$. მაშასადამე, $R=\frac{1}{L}$.

თუ $L=0$, მაშინ $L|x|=0<1$ და, მაშასადამე, მწკრივი კრებადია ყოველი x-სათვის, ე. ი. $R=+\infty$.

თუ $L=+\infty$, მაშინ ნულისაგან განსხვავებული ყოველი x-სათვის გვექნება $L|x|=+\infty>1$, და, მაშასადამე, $R=0$, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ (1.1) მწკრივის კოეფიციენტები ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L,$$

მაშინ მწკრივის კრებადობის რადიუსი R იქნება

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, \text{ როდესაც } 0<L<+\infty,\\ +\infty, \text{ როდესაც } L=0,\\ 0, \text{ როდესაც } L=+\infty.\end{cases}$$

ამ თეორემის დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ შემდეგი განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივის $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ კრებადობის არე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{1-x}{1+x}=z,$$

მოცემული მწკრივი ასე ჩაიწერება

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^n.$$

ეს კი არის z-ის მიმართ ხარისხოვანი მწკრივი. ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ მწკრივის კრებადობის არეა $[-1, 1[$ შუალედი.

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი უტოლობები:

$$-1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} < 1.$$

ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობებისა:

$$0 \leqslant \frac{2}{1+x} < 2\cdot$$

აქედან $x > 0$. მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა $]0, +\infty[$ შუალედი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$ მწკრივის კრებადობის არე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩვენს შემთხვევაში $a_n=\frac{1}{n^2}$. გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=1$ და კრებადობის ინტერვალი იქნება $]-1, 1[$. ამის გარდა, ადვილი შესამჩნევია, რომ მოცემული მწკრივი კრებადია $x=-1$ და $x=1$ წერტილებში. ამიტომ აღებული მწკრივის კრებადობის არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+m}}{2^{2n+m} n!\,(m+n)!},$$

სადაც m არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m}\, n!\,(m+n)!},$$

გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+m}\, n!\,(m+n)!}{2^{2n+2+m}(n+1)!\,(m+n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)(m+n+1)} = 0.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=+\infty$ და კრებადობის ინტერვალია რიცხვთა ღერძი.

მოცემული მწკრივის ჯამი აღინიშნება $I_m(x)$ სიმბოლოთი და მას ბ ე ს ე ლ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი გ ვ ა რ ი ს m რ ი გ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ეწოდება. ამრიგად

$$I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+m}}{2^{2n+m} n!\,(m+n)!}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ გ ა უ ს ი ს ჰ ი პ ე რ გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ წ კ რ ი ვ ი ს კრებადობის არე;

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\, x^n,$$

სადაც α, β, γ რიცხვები განსხვავებულია $0, -1, -2, \dots$ რიცხვებისაგან.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} \right| = 1.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $]-1, +1[$.

ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის კრებადობის ხასიათი მისი კრებადობის ინტერვალის ბოლო წერტილებში დამოკიდებულია α, β, γ რიცხვებზე. დაუმტკიცებლად აღვნიშნავთ შემდეგს: $x=1$ წერტილში

მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $\gamma > \alpha + \beta$, განშლადია, როდესაც $\gamma \leqslant \alpha + \beta$; $x = -1$ წერტილში მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $\gamma > \alpha + \beta$, პირობით კრებადია, როდესაც $-1 < \gamma - (\alpha + \beta) \leqslant 0$ და განშლადია, როდესაც $\gamma - (\alpha + \beta) \leqslant -1$.

ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის ჯამი აღინიშნება $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ სიმბოლოთი:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\, x^n.$$

§ 4. ხარისხოვანი მწკრივის თანაბარი კრებადობა

როგორც წინა თავში დავინახეთ, ფუნქციათა მწკრივის სხვადასხვა თვისების დასადგენად დიდი მნიშვნელობა აქვს თანაბარ კრებადობას. მას შემდეგ, რაც დავადგინეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არის ზოგადი სახე, ბუნებრივია შევეხოთ ხარისხოვანი მწკრივის თანაბარი კრებადობის საკითხს. შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ ხარისხოვანი მწკრივი (1.1) თანაბრად კრებადია თავისი კრებადობის $]-R, R[$ ინტერვალში? საზოგადოდ არა. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \tag{4.1}$$

მისი კრებადობის ინტერვალია $]-1, 1[$. მწკრივის ნაშთი

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n \to \infty$ ნებისმიერი x-სათვის $]-1, 1[$ ინტერვალიდან. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული n-სათვის $r_n(x) \to +\infty$, როდესაც $x \to 1-$. ამიტომ თუ x საკმარისად ახლო ავიღეთ 1-თან, მაშინ $r_n(x)$ რაგინდ დიდი იქნება. ამრიგად, (4.1) მწკრივის კრებადობა $]-1, 1[$ ინტერვალში თანაბარი არ არის.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 4. *თუ (1.1) მწკრივის კრებადობის რადიუსია R, $R > 0$, მაშინ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ $[a, b]$ სეგმენტზე, რომელიც მოთავსებულია $]-R, R[$ ინტერვალში.*

დამტკიცება. შევარჩიოთ დადებითი რიცხვი $x_0 < R$ ისე, რომ $[-x_0, x_0]$ სეგმენტი შეიცავდეს $[a, b]$ სეგმენტს (ნახ. 3).

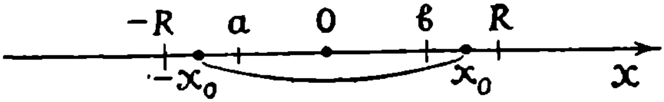
(1.1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია x_0 წერტილში, ე. ი. კრებადია მწკრივი

$$|a_0|+|a_1x_0|+|a_2x_0^2|+\cdots+|a_nx_0^n|+\cdots$$

მაგრამ თუ, $x\in[a,b]$, მაშინ $|x|\leqslant|x_0|$ და ამიტომ

$$|a_nx^n|\leqslant|a_nx_0^n|.$$

ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად (1·1) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 3.

თეორემა 5. ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი უწყვეტია კრებადობის ინტერვალში.

დამტკიცება. ვთქვათ, (1.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $]-R,R[$ და ავიღოთ ამ ინტერვალის ნებისმიერი x_0 წერტილი. რაკი $-R<x_0<R$, ამიტომ მოიძებნება x_0 წერტილის შემცველი ისეთი $[-r,r]$ სეგმენტი, რომელიც მოთავსებულია $]-R,R[$ ინტერვალში. მე-4 თეორემის თანახმად ამ სეგმენტში (1.1) მწკრივი თანაბრად კრებადია და, მაშასადამე, მისი ჯამი უწყვეტია x_0 წერტილში. რაკი x_0 ნებისმიერად იყო აღებული $]-R,R[$ ინტერვალში, ამიტომ (1.1) მწკრივის ჯამი უწყვეტია $]-R,R[$ ინტერვალში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant1}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\xi_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\},\quad \eta_n=\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\quad(n=1,2,\ldots).$$

თუ $(x_n)_{n\geqslant1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ $\xi_n=+\infty$ ყოველი n რიცხვისათვის, ხოლო თუ მიმდევრობა ქვემოდან არაა შემოსაზღვრული, მაშინ $\eta_n=-\infty$ ყოველი n-სათვის.

ვთქვათ, $(x_n)_{n\geqslant1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ

$$\xi_1\geqslant\xi_2\geqslant\cdots\geqslant\zeta_n\geqslant\cdots$$

$(\xi_n)_{n>1}$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n=\xi.$$

ξ სასრულია ან $\xi=-\infty$. ამ ξ რიცხვს ეწოდება $(x_n)_{n>1}$ მიმდევრობის ზედა ზ ღ ვ ა რ ი და, იგი აღინიშნება

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{ან} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

თუ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty.$$

შემდეგ, ვთქვათ, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ

$$\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \cdots \leqslant \eta_n \leqslant \cdots$$

და $(\eta_n)_{n>1}$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი.

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n=\eta.$$

η სასრულია ან $\eta=+\infty$. ამ η რიცხვს ეწოდება $(x_n)_{n>1}$ მიმდევრობის ქ ვ ე დ ა ზ ღ ვ ა რ ი და იგი აღინიშნება

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{ან} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

თუ მოცემული მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty.$$

რადგანაც ყოველი n-თვის $\eta_n \leqslant \xi_n$, ამიტომ

$$\underline{\lim_{n}}\, x_n \leqslant \overline{\lim_{n}}\, x_n.$$

ცხადია, თუ $(x_n)_{n>1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ და $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ სასრული რიცხვებია.

თეორემა 8. ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა $(x_n)_{n>1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ე ბ ი

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (-x_n), \tag{5.1}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ x_n = -\overline{\lim}_{n\to\infty}\ (-x_n). \tag{5.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\xi_n' = \sup P_n, \quad \eta_n' = \inf Q_n,$$

სადაც

$$P_n = \{x_n, \quad x_{n+1} \cdots\}, \quad Q_n = \{-x_n, -x_{n+1}, \cdots\}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi_n = -\eta_n' \cdot (n=1,\ 2,\ldots). \tag{5.3}$$

რადგანაც $\xi_n \geqslant x_k$, $\eta_n' \leqslant -x_k$ $(k=n, n+1\ldots)$; ამიტომ

$$-\xi_n \leqslant -x_k, \quad -\eta_n' \geqslant x_k \quad (k=n, n+1, \ldots).$$

შემდეგ, რაკი ξ_n არის P_n სიმრავლის ზედა ზღვარი და $-\eta_n'$ ნაკლები არ არის P_n სიმრავლის არც ერთ ელემენტზე, ამიტომ

$$\xi_n \leqslant -\eta_n'. \tag{5.4}$$

ასევე, ვინაიდან η_n' წარმოადგენს Q_n სიმრავლის ქვედა ზღვარს და $-\xi_n$ არ აღემატება Q_n სიმრავლის არც ერთ ელემენტს, ამიტომ $-\xi_n \leqslant \eta_n'$. აქედან

$$\xi_n \geqslant -\eta_n'. \tag{5.5}$$

(5.4) და (5.5) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (5.3) ტოლობის მართებულობა. მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\ \xi_n = -\lim_{n\to\infty}\ \eta_n',$$

ე. ი. მართებულია (5.1) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (5.2) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 7. ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა $(x_n)_{n>1}$ დ ა $(y_n)_{n>1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს

$$\underline{\lim}_{n}\ (x_n+y_n) \geqslant \underline{\lim}_{n}\ x_n + \underline{\lim}_{n}\ y_n, \tag{5.6}$$

$$\overline{\lim}_{n}\ (x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n}\ x_n + \overline{\lim}_{n}\ y_n. \tag{5.7}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\underline{x_n} = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \quad \overline{x_n} = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\},$$

$$\underline{y_n} = \inf\{y_n, y_{n+1} \cdots\}, \quad \overline{y_n} = \sup\{y_n, y_{n+1} \cdots\},$$

$\underline{z_n} = \inf\{x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \cdots\}$, $\overline{z_n} = \sup\{x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1} \cdots\}$.
ცხადია, რომ

$$\underline{x_n} \leqslant x_p \leqslant \overline{x_n}, \quad \underline{y_n} \leqslant y_p \leqslant \overline{y_n},$$

როდესაც $p \geqslant n$. ამ უტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$\underline{x_n} + \underline{y_n} \leqslant x_p + y_p \leqslant \overline{x_n} + \overline{y_n},$$

როდესაც $p \geqslant n$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\underline{x_n} + \underline{y_n} \leqslant \underline{z_n} \leqslant \overline{z_n} \leqslant \overline{x_n} + \overline{y_n}.$$

აქედან, ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $n \to \infty$, მივიღებთ (5,6) და (5.7) დამოკიდებულებებს.

თეორემა 8. ნამდვილ რიცხვთა $(x_n)_{n>1}$ და $(y_n)_{n>1}$ მიმდევრობებისათვის მართებულია შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\underline{\lim_n} (x_n - y_n) \geqslant \underline{\lim_n}\, x_n - \overline{\lim_n}\, y_n,$$

$$\overline{\lim_n} (x_n - y_n) \leqslant \overline{\lim_n}\, x_n - \underline{\lim_n}\, y_n.$$

დამტკიცება. მე-6 და მე-7 თეორემების თანახმად,

$$\underline{\lim_n} (x_n - y_n) \geqslant \underline{\lim_n}\, x_n + \underline{\lim_n} (-y_n) = \underline{\lim_n}\, x_n - \overline{\lim_n}\, y_n,$$

$$\overline{\lim_n} (x_n - y_n) \leqslant \overline{\lim_n}\, x_n + \overline{\lim_n} (-y_n) = \overline{\lim_n}\, x_n - \underline{\lim_n} (-y_n).$$

თეორემა დამტკიცებულია

თეორემა 9. თუ $\overline{\lim_n}\, x_n = \xi$, მაშინ არსებობს $(x_n)_{n>1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია ξ რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. თუ $\xi = -\infty$, მაშინ მოცემული მიმდევრობა კრებადია $-\infty$-კენ, ვინაიდან ყოველი n-თვის $x_n \leqslant \overline{x_n}$. ამ შემთხვევისათვის თეორემა ტრივიალურია.

ახლა ვთქვათ, რომ $\xi = +\infty$. განვიხილოთ $+\infty$-საკენ კრებადი ზრდადი მიმდევრობა $A_1, A_2, \ldots, A_k \cdots$, რიცხვი A_1-თვის არსებობს ისეთი ნომერი n_1, რომ

$$x_{n_1} > A_1 .$$

შემდეგ რიცხვი A_2-თვის არსებობს ნომერი $n_2 > n_1$ ისეთი, რომ

$$x_{n_2} > A_2.$$

საზოგადოდ, რიცხვი A_k-თვის მოიძებნება ისეთი ნომერი $n_k > n_{k-1}$, რომ

$$x_{n_k} > A_k,$$

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც კრებადია $+\infty$-კენ. ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია $\xi = +\infty$ შემთხვევაშიაც.

დასასრულ, თუ ξ სასრული რიცხვია, მაშინ ყოველი $\overline{x_n}$ სასრულია. რიცხვი 1-თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნომერი n_1, რომ

$$\overline{x_1} - 1 < x_{n_1} \leqslant \overline{x_1}.$$

შემდეგ, რიცხვი 2-თვის მოიძებნება ისეთი ნომერი $n_2 > n_1$, რომ

$$\overline{x_2} - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leqslant \overline{x_2}.$$

საზოგადოდ, k რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი $n_k > n_{k-1}$, რომ

$$\overline{x_k} - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant \overline{x_k}. \tag{5.8}$$

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ ქვემიმდევრობას. (5.8) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 10. *თუ $\underline{\lim}\, x_n = \eta$, მაშინ არსებობს $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია η-კენ.*

მე-9 და მე-10 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი. $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები წარმოადგენენ შესაბამისად ამავე მიმდევრობის ყველა კრებადი ქვემიმდევრობის ზღვართა შორის უდიდესსა და უმცირესს.

• **თეორემა 11.** *თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a-კენ, რომელიც სასრულია ან უსასრულო, მაშინ*

$$\underline{\lim_{n}}\, x_n = \overline{\lim_{n}}\, x_n = a. \tag{5.9}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რაკი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია a-კენ, ამიტომ აღნიშნული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია a-კენ და, მაშასადამე, მე-9 და მე-10 თეორემების თანახმად მართებულია (5.9) ტოლობები.

თეორემა 12. თ უ $(x_n)_{n\geq 1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ზ ე დ ა დ ა ქ ვ ე დ ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი ტ ო ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ე ს მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა ა მ ზ ღ ვ რ ე ბ ი ს ს ა ე რ თ ო მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა კ ე ნ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც ყოველი n-თვის მართებულია უტოლობები.

$$\underline{x_n} \leqslant x_n \leqslant \overline{x_n}.$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

თეორემა 13. თ უ $(x_n)_{n\geq 1}$ ა რ ი ს დ ა დ ე ბ ი თ ი a რ ი ც ხ ვ ი ს ა-კ ე ნ კ რ ე ბ ა დ ი მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა, მ ა შ ი ნ ყ ო ვ ე ლ ი $(y_n)_{n\geq 1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\overline{\lim_{n}}\, (x_n y_n) = a \cdot \overline{\lim_{n}}\, y_n. \tag{5.10}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თ უ $\overline{\lim\limits_{n}}\, y_n = +\infty$, მაშინ $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული და, მაშასადამე, $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაც არ იქნება ზემოდან შემოსაზღვრული. ამ შემთხვევაში მართებულია (5.10) ტოლობა. თუკი $\overline{\lim\limits_{n}}\, y_n = -\infty$, მაშინ $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია $-\infty$-კენ და. მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიც მართებულია (5.10) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ, რომ $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ $\overline{\lim\limits_{n}}\, y_n = b$ სასრული რიცხვია და, მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი N_0, რომ

$$y_n < b + \varepsilon, \quad \text{როდესაც } n > N_0.$$

შემდეგ, რაკი $a > 0$, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N \geqslant N_0$, რომ $x_n > 0$, როდესაც $n > N$. მაშასადამე,

$$x_n y_n < (b+\varepsilon)x_n, \quad \text{როდესაც } n > N.$$

აქედან

$$\overline{\lim_n}\,(x_n y_n) \leqslant (b+\varepsilon)a$$

და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$\overline{\lim_n}\,(x_n y_n) \leqslant ab. \tag{5.11}$$

შემდეგ, მე-9 თეორემის თანახმად არსებობს $(y_n)_{n>1}$ მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა $(y_{n_k})_{k>1}$, რომ

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = b$$

და ამასთან

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{k\to\infty} (x_{n_k} \cdot y_{n_k}) = ab$$

და, მაშასადამე,

$$\overline{\lim_n}\,(x_n y_n) \geqslant ab. \tag{5.12}$$

(5.11) და (5.12) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (5.10) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. კოში-ადამარის თეორემა

განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი $(a_n x^n)$. მართებულია შემდეგი

თეორემა 14 (კოში-ადამარი). *მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის R რადიუსი გამოითვლება ფორმულით*

$$R = \frac{1}{L}, \tag{6.1}$$

სადაც

$$L = \overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როდესაც $L=0$ და ვაჩვენოთ, რომ $R=+\infty$. ამ შემთხვევაში,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

ავიღოთ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი x რიცხვი და რაიმე დადებითი. რიცხვი $q < 1$. ზღვრის განსაზღვრის თანახმად, არსებობს ისეთი ნატურალური N, რომ

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{q}{|x|}, \text{ როდესაც } n \geqslant N.$$

აქედან გვაქვს

$$|a_n x^n| < q^n, \text{ როდესაც } n \geqslant N.$$

მაშასადამე, მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის წევრები, დაწყებული N-ური წევრიდან, ნაკლებია კრებადი გეომეტრიული (q^n) მწკრივის სათანადო წევრებზე. მაშასადამე, $(a_n x^n)$ მწკრივი კრებადია და რაკი x ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ $R = +\infty$. ამრიგად, (6.1) ტოლობა მართებულ ია, როდესაც $L = 0$.

ახლა ვთქვათ, $L = +\infty$. ამ შემთხვევაში, $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობა ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული და ამიტომ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი x რიცხვისათვის არსებობს ნატურალურ რიცხვთა ისეთი ზრდადი $(n_k)_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობა, რომ

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

აქედან გვაქვს

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, $(a_n x^n)$ მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამრიგად, მოცემული ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია ნულისაგან განსხვაევებული ყოველი x-თვის. ამიტომ $R = 0$. მაშასადამე, (6.1) ტოლობა მართებულია მაშინაც, როდესაც $L = +\infty$.

დასასრულ ვთქვათ, რომ L ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია. ვთქვათ,

$$|x| < \frac{1}{L}.$$

ეს უტოლობა ასე გადავწეროთ

$$|x| \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

მაგრამ მე-8 თეორემის თანახმად

$$|x|\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_nx^n|}<1.$$

მაშასადამე, გარკვეული დადებითი $q<1$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\sqrt[n]{|a_nx^n|}<q^n,\quad \text{როდესაც } n\geqslant N.$$

აქედან

$$|a_nx^n|<q^n;\ \text{როდესაც } n\geqslant N.$$

მაშასადამე, მწკრივთა შედარების პირველი პრინციპის თანახმად (a_nx^n) მწკრივი კრებადია, როდესაც $|x|<\frac{1}{L}$.

ახლა ვთქვათ, რომ x აკმაყოფილებს უტოლობას $|x|>\frac{1}{L}$. ეს უტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$|x|\cdot L=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_nx^n|}>1.$$

მე-9 თეორემის თანახმად არსებობს $(\sqrt[n]{|a_nx^n|})_{n>1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}x^{n_k}|})_{k>1}$, რომელიც კრებადია $|x|L$ რიცხვისაკენ. მაშასადამე, არსებობს ისეთი ნატურალური k_0, რომ

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}x^k|)}>1,\ \text{როდესაც } k>k_0$$

აქედან გვაქვს

$$|a_{n_k}x^{n_k}|>1,\ \text{როდესაც } k>k_0$$

და, მაშასადამე, (a_nx^n) მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $|x|>\frac{1}{L}$.

ამრიგად, (a_nx^n) მწკრივი კრებადია, როდესაც $|x|<\frac{1}{L}$ და განშლადია, როდესაც $|x|>\frac{1}{L}$. ამიტომ მართებულია (6.1) უტოლობა. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ $x+x^3+x^5+\ldots+x^{2k+1}+\ldots$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი. ამ შემთხვევაში

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ამიტომ

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

მაშასადამე, კოში-ადამარის თეორემის მიხედვით $R=1$.

§ 7. ხარისხოვანი მწკრივის ინტეგრება და გაწარმოება

განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{7.1}$$

ამ ხარისხოვან მწკრივთან ერთად განვიხილოთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივები:

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots, \tag{7.2}$$

$$a_1+2a_2x+\ldots+n\,a_nx^{n-1}+\ldots \tag{7.3}$$

(7.2) მწკრივი მიიღება (7.1) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით $[0,x]$ შუალედში, (7.3) მწკრივი კი — (7.1) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით.

თეორემა 15. ხარისხოვანი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების ან გაწარმოების შედეგად მიღებულ მწკრივებს ისეთივე კრებადობის რადიუსები აქვთ, როგორც აღებულ ხარისხოვან მწკრივს.

დამტკიცება: განვიხილოთ მწკრივები

$$a_0+\frac{a_1}{2}x+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^n+\cdots, \tag{7.4}$$

$$a_1x+2a_2x^2+\cdots+n\,a_nx^n+\cdots, \tag{7.5}$$

რომელთაგან პირველი მიიღება (7.2) მწკრივის x-ზე გაყოფით, მეორე კი (7.3) მწკრივის x-ზე გამრავლებით.

აღვნიშნოთ R, R' და R''-ით (7.1), (7.2) და (7.3) მწკრივების კრებადობის რადიუსები. ადვილი შესამჩნევია, რომ (7.4) და (7.5) მწკრივების კრებადობის რადიუსებია შესაბამისად R' და R''.

კოშის თეორემის თანახმად,

$$R=\frac{1}{L},\quad R'=\frac{1}{L'},\quad R''=\frac{1}{L''},$$

სადაც

$$L=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|},\quad L'=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}},\quad L''=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{n|a_n|}\,.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-13 თეორემას და $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ტოლობას, გვექნება

$$L'=\overline{\lim_n}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}=L.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $L''=L$. მაშასადამე $R'=R''=R$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16. (7.1) მწკრივის კრებადობის ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{7.5}$$

სადაც $f(x)$ წარმოადგენს (7.1) მწკრივის ჯამს. ამასთან, უკანასკნელი მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე, რომელიც მოთავსებულია (7.1) მწკრივის კრებადობის $]-R, R[$ ინტერვალში.

დამტკიცება. მე-15 თეორემის თანახმად (7.5) მწკრივის კრებადობის რადიუსია ისევ R, ხოლო მე-4 თეორემის მიხედვით ყოველ სეგმენტზე $[-r, r]\subset]-R, R[$ მოცემული (7.1) მწკრივი თანაბრად კრებადია. მაშასადამე, მართებულია (7.5) ტოლობა.

თეორემა 17. (7.1) მწკრივის $f(x)$ ჯამი წარმოებადია ამ მწკრივის კრებადობის $]-R, R[$ ინტერვალში და ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\tag{7.6}$$

დამტკიცება. მე-15 თეორემის თანახმად (7.6) მწკრივის კრებადობის რადიუსია R, ხოლო მე-4 თეორემის ძალით (7.6) მწკრივი

თანაბრად კრებადია ყოველ $[-r, r]$ სეგმენტზე, რომელიც მოთავსებულია $]-R, R[$ ინტერვალში. ამიტომ მართებულია (7.6) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ (7.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია R, $R > 0$, მაშინ ამ მწკრივის $f(x)$ ჯამს აქვს $]-R, R[$ ინტერვალში ყველა რიგის წარმოებული, ამასთან, $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ფუნქცია წარმოადგენს (7.1) მწკრივის n-ჯერ წევრ-წევრად გაწარმოებით მიღებულ მწკრივის ჯამს.

§ 8. აბელის მეორე თეორემა

როგორც ზემოთ დავინახეთ, ხარისხოვანი მწკრივი შესაძლებელია კრებადი იყოს მისი კრებადობის ინტერვალის ერთ-ერთ ან ორივე ბოლოზე. ასეთ შემთხვევაში მისი $s(x)$ ჯამი განსაზღვრული იქნება ასეთ ბოლო წერტილზედაც. ბუნებრივად ისმის კითხვა: ასეთ შემთხვევაში იქნება თუ არა უწყვეტი $s(x)$ ფუნქცია ამ წერტილზედაც? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი

თეორემა 18 (აბელის მეორე თეორემა). თ უ ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ი მ წ კ რ ი ვ ი

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{8.1}$$

კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ ი ს $x=R$ $(R>0)$ ს ა ზ ღ ვ რ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ზ ე კ რ ე ბ ა დ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\lim_{x\to R-} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_nR^n,$$

ს ა დ ა ც $f(x)$ წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს (8.1) მ წ კ რ ი ვ ი ს ჯ ა მ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, x აკმაყოფილებს უტოლობებს $0<x<R$ და $f(x)$ ასე წარმოვიდგინოთ

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

აბელის გარდაქმნის თანახმად, ყოველი ნატურალური ν რიცხვისათვის გვაქვს

$$\sum_{n=0}^{\nu} a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n=\sum_{n=0}^{\nu-1} s_n\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right]+s_\nu\left(\frac{x}{R}\right)^\nu=$$

$$=\left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{n=0}^{\nu-1} s_n\left(\frac{x}{R}\right)^n+s_\nu\left(\frac{x}{R}\right)^\nu, \tag{8.2}$$

სადაც

$$s_n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n.$$

რადგანაც

$$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu = s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

და $\frac{x}{R} < 1$, ამიტომ

$$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu \left(\frac{x}{R}\right)^\nu = 0.$$

მაშასადამე, თუ (8.2) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\nu \to \infty$, გვექნება

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\frac{x}{R}\right)^n \tag{8.3}$$

შემდეგ ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$s = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\infty} s \left(\frac{x}{R}\right)^n. \tag{8.4}$$

ახლა (8.3) ტოლობას გამოვაკლოთ (8.4) ტოლობა, გვექნება

$$f(x) - s = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) \left(\frac{x}{R}\right)^n. \tag{8.5}$$

რაკი $s_n \to s$, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური ν, რომ როდესაც $n > \nu$ გვექნება

$$| s_n - s | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, (8.5) ტოლობიდან გვაქვს

$$| f(x) - s | \leqslant \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\nu} | s_n - s | \left(\frac{x}{R}\right)^n +$$

$$+ \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=\nu+1}^{\infty} | s_n - s | \left(\frac{x}{R}\right)^n = s' + s''.$$

მაგრამ

$$s'' < \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$s'' < \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\nu} |s_n - s| .$$

ავიღოთ ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{\nu} |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

როდესაც

$$R - \eta < x < R.$$

მაშასადამე,

$$|f(x) - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

როდესაც $R - \eta < x < R$, ე. ი.

$$\lim_{x \to R-} f(x) = s.$$

აბელის მეორე თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. არითმეტიკული მოქმედებანი ხარისხოვან მწკრივებზე

ვთქვათ, მოცემულია ორი ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{9.1}$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \tag{9.2}$$

ამ მწკრივების კრებადობის რადიუსები აღვნიშნოთ შესაბამისად R_1 და R_2 სიმბოლოებით. ვიგულისხმოთ, რომ R_1 და R_2 ნულისაგან განსხვავებული რიცხვებია.

განვიხილოთ $]-R, R[$ ინტერვალი, სადაც R არის R_1 და R_2 რიცხვებს შორის უმცირესი. ეს ინტერვალი წარმოადგენს (9.1) და (9.2) მწკრივების კრებადობის ინტერვალებს შორის უმცირესს. ამიტომ მის ყოველ წერტილში კრებადი იქნება როგორც (9.1), ისე (9.2) ხარისხოვანი მწკრივი. მაშასადამე, ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ მწკრივთა შეკრების, გამოკლების ან გამრავლების წესები.

გამრავლების ოპერაციის მართებულობისათვის საკმარისია აღინიშნოს, რომ (9.1) და (9.2) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია $]-R, R[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში. აქედან ცხადია, რომ თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ აღნიშნავენ (9.1) და (9.2) მწკრივების ჯამებს სათანადოდ $]-R_1, R_1[$ და $]-R_2, R_2[$ ინტერვალებში, მაშინ $]-R, R[$ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$.f(x)\pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n,$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

სადაც

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

ამ ტოლობათა მარჯვენა ნაწილში შემავალი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის რადიუსები, ყოველ შემთხვევაში R-ზე ნაკლები არაა.

ახლა გადავიდეთ ხარისხოვანი მწკრივების გაყოფის საკითხზე. ჯერ განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{1}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_n x^n - \ldots}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ ხარისხოვან მწკრივს, რომელიც მნიშვნელშია მოთავსებული, აქვს ნულისაგან განსხვავებული კრებადობის რადიუსი. მაშინ

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots$$

მიმდევრობის ზედა ზღვარი სასრულია და ამ მიმდევრობის ყველა წევრი ნაკლებია გარკვეულ დადებით M რიცხვზე, ამიტომ

$$|c_n| < M^n \quad (c=1, 2,\ldots). \tag{9.3}$$

ახლა შევადგინოთ ისეთი ხარისხოვანი მწკრივი

$$1+d_1x+ d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + \cdots, \tag{9.4}$$

რომ ფორმალურად ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$(1-c_1x - c_2x^2 - \ldots - c_nx^n - \ldots)(1+d_1x+d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + \ldots) = 1. \tag{9.5}$$

თუ ამ მწკრივებს გადავამრავლებთ მწკრივთა გამრავლების წესის მიხედვით, მივიღებთ

$$1+(d_1-c_1)x+(d_2-d_1c_1-c_2)x^2+(d_3-d_2c_1-d_1c_2-c_3)x^3 + \cdots + = 1.$$

ეს ტოლობა ფორმალურად იქნება დაკმაყოფილებული, თუ ვიგულისხმებთ

$$d_1 = c_1, \quad d_2 = d_1c_1 + c_2, \quad d_3 = d_2c_1 + d_1c_2 + c_3, \cdots,$$

(9.3) უტოლობიდან გვაქვს

$$|d_1| < M, \quad |d_2| \leqslant |d_1| \cdot |c_1| + |c_2| < M^2 + M^2 = 2M^2,$$

$$|d_3| \leqslant |d_2| \cdot |c_1| + |d_1| \cdot |c_2| + |c_3| < 2M^3 + 2M^3 = 4M^3$$

და საზოგადოდ

$$|d_n| < 2^{n-1}M^n. \tag{9.6}$$

მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ ეს უტოლობა დამტკიცებულია ინდექსის ყველა მნიშვნელობისათვის რაიმე n მნიშვნელობამდე უკანასკნელის ჩათვლით. მაშინ

$$|d_{n+1}| = |c_1d_n + c_2d_{n-1} + \cdots + c_{n+1}| \leqslant$$

$$\leqslant |d_n| \cdot |c_1| + |d_{n-1}| \cdot |c_2| + \cdots + |c_{n+1}|$$

და, მაშასადამე,

$$|d_{n+1}| < 2^{n-1}M^n \cdot M + 2^{n-2}M^{n-1}M^2 + \cdots + M^nM + M^{n+1} =$$

$$M^{n+1}(1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^nM^{n+1}.$$

ამრიგად, (9.6) უტოლობა მართებულია ყოველი n-სათვის, ვინაიდან იგი მართებულია, როდესაც $n = 1$.

(9.6) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (9.4) მწკრივის მაჟორანტული მწკრივია

$$1 + Mx + 2M^2x^2 + 2^2M^3x^3 + \ldots + 2^{n-1}M^nx^n + \cdots$$

ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x| < \frac{1}{2M}$, ამიტომ (9.4). მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x| < \frac{1}{2M}$.

მწკრივი $1 - c_1x - c_2x^2 - \ldots - c_nx^n - \ldots$ აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x| < \frac{1}{2M}$. მართლაც, ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R = \frac{1}{L}$ ნაკლები არ არის $\frac{1}{M}$ რიცხვზე, ვინაიდან $L \leqslant M$ და, მაშასადამე, მით უმეტეს მეტია $\frac{1}{2M}$ რიცხვზე. ამრიგად, ფორმალური (9.5) ტოლობას აზრი აქვს.

რაკი ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი 1-ის ტოლია, ამიტომ

$$1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_nx^n - \dots \neq 0,$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{1}{1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_nx^n - \dots} = 1 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n + \cdots$$

ეს ტოლობა მართებულია, როდესაც $|x| < \frac{1}{2M}$.

ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \cdots, \tag{9,7}$$

რომლის პირველი a_0 კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია და რომლის კრებადობის რადიუსი განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = a_0(1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_nx^n - \dots),$$

სადაც

$$c_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad c_2 = -\frac{a_2}{a_0}, \dots, c_n = -\frac{a_n}{a_0}, \dots$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \cdots} = \frac{1}{a_0} + \frac{d_1}{a_0}x + \frac{d_2}{a_0}x^2 + \cdots$$

ტოლობა მართებულია იმ x-სათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია გარკვეულ $\frac{1}{2M}$ რიცხვზე.

M რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, რომელიც მეტია

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \sqrt{\left|\frac{a_2}{a_0}\right|}, \quad \sqrt[3]{\left|\frac{a_3}{a_0}\right|}, \dots, \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}, \dots$$

მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

ამრიგად, თუ (9.7) მწკრივის კრებადობის რადიუსი ნულისაგან განსხვავებულია და $x = 0$ წერტილში მწკრივი ნული არ ხდება, მაშინ არსებობს მეორე ხარისხოვანი მწკრივი $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$, რომლის კრებადობის რადიუსი აგრეთვე განსხვავებულია ნულისაგან, ამასთანავე ორივე მწკრივი კრებადია გარკვეულ $]-R, R[$ ინტერვალში და

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \cdots} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \cdots$$

აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: თუ მოცემულია წილად რაციონალური ფუნქცია $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ ხარისხოვანი მწკრივებისა, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ რაიმე $]-r, r[$ ინტერვალში ხარისხოვან მწკრივად, თუ ხარისხოვანი $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ მწკრივების კრებადობის რადიუსები განსხვავებულია ნულისაგან და თუ რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელი არ ხდება ნული, როდესაც $x=0$.

თეორემა 19. თუ (a_n) და (b_n) კრებადი მწკრივებია და მათი ფორმალური გამრავლებით მიღებული მწკრივი (c_n) აგრეთვე კრებადია, მაშინ $C=AB$, სადაც A, B და C წარმოადგენენ შესაბამისად (a_n), (b_n) და (c_n) მწკრივების ჯამებს.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივები

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots,$$

$$c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots.$$

პირობის თანახმად ყოველი მათგანი კრებადია $x=1$ წერტილში და ამიტომ ისინი კრებადია $]-1, 1[$ ინტერვალში. თუ ამ ხარისხოვანი მწკრივების ჯამებს აღვნიშნავთ სათანადოდ $a(x)$, $b(x)$ და $c(x)$ სიმბოლოებით, მაშინ გვექნება

$$c(x)=a(x)\cdot b(x). \tag{9.8}$$

აბელის მეორე თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to 1-} c(x)=C, \quad \lim_{x\to 1-} a(x)=A, \quad \lim_{x\to 1-} b(x)=B.$$

მაშასადამე, თუ (9.2) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $x\to 1-$, მივიღებთ

$$C=A\cdot B.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. ხარისხოვანი მწკრივის გარდაქმნა

განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{10.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი R ნულისაგან განსხვავებულია. ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ $f(x)$

სიმბოლოთი. ამგვარად, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-R, R[$ ინტერვალში.

ავიღოთ რაიმე x_0 წერტილი $]-R, R[$ ინტერვალიდან და ამ ინტერვალის ნებისმიერი x წერტილი ასე წარმოვადგინოთ.

$$x=(x-x_0)+x_0.$$

ეს გამოსახულება (10.1) მწკრივში შევიტანოთ და ყოველ შესაკრებში ფრჩხილი გავხსნათ, მივიღებთ

$$f(x)=a_0+a_1[(x-x_0)+x_0]+a_2[(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)+x_0^2]+\cdots+$$
$$+a_n[(x-x_0)^n+n(x-x_0)^{n-1}x_0+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(x-x_0)^{n-2}x_0^2+\cdots+$$
$$+x_0^n]+\cdots \qquad (10.2)$$

თუ კვადრატულ ფრჩხილებს გავხსნით და წევრებს დავალაგებთ $x-x_0$ სხვაობის ხარისხების მიხედვით, მაშინ ასეთი ოპერაციის ფორმალურად ჩატარების შედეგად მივიღებთ ხარისხოვან მწკრივს

$$b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n+\cdots, \qquad (10.3)$$

სადაც $b_k(k=0, 1, 2,\ldots)$ კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულებით

$$b_0=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots,$$
$$b_1=a_1+2ax_0+3a_3x_0^2+\cdots+na_nx_0^{n-1}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n=a_n+\frac{n+1}{1}a_{n+1}x_0+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(10.3) მწკრივს ეწოდება (10.1) მწკრივის გარდაქმნის შედეგად მიღებული მწკრივი. მართებულია შემდეგი

თეორემა 20. *(10.3) მწკრივი კრებადია, თუ $|x-x_0|<R-|x|$, და ასეთ შემთხვევაში (10.3) მწკრივის ჯამი $f(x)$-ის ტოლია.*

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (10.3) მწკრივი მიიღება (10.2) მწკრივში კვადრატული ფრჩხილების გახსნისა და წევრთა გადანაცვლების შედეგად. ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (10.2) მწკრივში კვადრატული ფრჩხილების გახსნის შედეგად მიღებული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ე. ი. კრებადია მწკრივი

$$|a_0| + |a_1(x-x_0)| + |a_1x_0| + |a_2(x-x_0)|^2 +$$
$$+ |2a_2(x-x_0)x_0| + |a_2x_0^2| + \cdots + |a_n(x-x_0)^n|$$
$$+ |na_n(x-x_0)^{n-1}x_0| + \cdots + |a_nx_0^n| + \cdots,$$

ეს კი წარმოადგენს

$$a_0+a_1(|x-x_0|+|x_0|)+a_2(|x-x_0|+|x_0|)^2+\cdots+$$
$$+a_n(|x-x_0|+|x_0|)^n+\cdots$$

მწკრივის წევრთა აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილ მწკრივს, რომელიც კრებადია, ვინაიდან $|x-x_0|+|x_0| \in]-R, R[$. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ (10.1) მწკრივის გარდაქმნის შედეგად მიღებული (10.3) მწკრივი კრებადია $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ ინტერვალში, სადაც $\rho=R-|x|$. ეს მწკრივი შესაძლოა კრებადი აღმოჩნდეს ამ ინტერვალის გარეთაც.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ასე: თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $]-R, R[$ ინტერვალში კრებადი ხარისხოვანი (10.1) მწკრივის ჯამს, მაშინ $f(x)$ წარმოიდგინება $x-x_0$ სხვაობის ხარისხების მწკრივად, სადაც x_0 არის $]-R, R[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო $|x-x_0|<R-|x_0|$.

§ 11. ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად. ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივები

ჩვენ განვსაზღვრეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე და შევისწავლეთ ასეთი მწკრივის ჯამის თვისებები. გამოყენებებში საქმე გვაქვს შებრუნებულ ამოცანასთან: მოცემულია შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია და გამოსარკვევია, ამ შუალედში ეს ფუნქცია წარმოადგენს თუ არა ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს ანუ, როგორც იტყვიან, შეიძლება თუ არა $f(x)$ ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად; თუ ასეთი დაშლა შესაძლებელია, როგორ ვიპოვოთ ამ მწკრივის კოეფიციენტები.

მე-17 თეორემის შედეგის თანახმად, $f(x)$ ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად დაშლაზე შეიძლება ლაპარაკი იმ შემთხვევაში, როდესაც ამ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული მოცემულ შუალედში.

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს a წერტილში ყველა რიგის წარმოებული და შევადგინოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{11.1}$$

ამ მწკრივს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი. თუ $a=0$, მაშინ (11.1) მწკრივს მაკლორენის მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 21. ყოველი ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots, \tag{11.2}$$

რომლის კრებადობის R რადიუსი ნულისაგან განსხვავებულია, წარმოადგენს ამ მწკრივის ჯამის ტეილორის მწკრივს.

დამტკიცება. ავღნიშნოთ $f(x)$-ით (11.2) მწკრივის ჯამი:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

$f(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული $]a-R,\ a+R[$ ინტერვალში და

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n+(n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x-a)+(n+2)(n+1)\ldots$$
$$\ldots 3a_{n+2}(x-a)^2+\cdots,$$

თუ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... გამოსახულებებში x-ის ნაცვლად ავიღებთ a-ს, გვექნება

$$f(a)=a_0,\quad f'(a)=a_1,\quad f''(a)=2a_2,\ \ldots,\ f^{(n)}(a)=n!a_n,\ \ldots$$

აქედან გვაქვს

$$a_0=f(a),\quad a_1=\frac{f'(a)}{1},\quad a_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \ldots$$

მაშასადამე, (11.2) მწკრივი წარმოადგენს ამ მწკრივის $f(x)$ ჯამის ტეილორის მწკრივს და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქციის დაშლა შეიძლება ხარისხოვან მწკრივად, მაშინ ეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივია.

ახლა ისმის კითხვა: თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული რაიმე შუალედში, მაშინ ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი ხომ არ იქნება კრებადი, და თუ კრებადია, ხომ არ წარმოადგენს მისი ჯამი $f(x)$ ფუნქციას? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ როდესაც } x \neq 0, \\ 0, \text{ როდესაც } x=0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. თუ $x \neq 0$ გვაქვს:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots$$

ცხადია, რომ

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0 \left(t=\frac{1}{x}\right),$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-6\lim_{t\leftarrow\infty}\frac{t^5}{e^{t^2}}=0,$$

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=0,\ldots,$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივს აქვს სახე

$$0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\ldots=0.$$

ეს მწკრივი კრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და მისი ჯამი ნულის ტოლია. მეორე მხრივ $f(x)$ ფუნქცია ყველგან განსხვავებულია ნულისაგან. გარდა $x=0$ წერტილში. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია არ იშლება თავისი ტეილორის მწკრივად $x=0$ წერტილის არც ერთ მიდამოში:

ამრიგად, თუმცა $f(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული და მისი ტეილორის მწკრივი კრებადია, ამ მწკრივის ჯამი არ გვაძლევს $f(x)$ ფუნქციას.

ახლა ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული $x=0$ წერტილში, მაგრამ მწკრივი

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

განშლადია ნულისაგან განსხვავებულ ყოველ წერტილში? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2^m x)}{m!}.$$

ამ მწკრივის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია. ამის გარდა, ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია ნებისმიერი x-სათვის. ამ მწკრივის n-ჯერ გაწარმოება წევრ-წევრად გვაძლევს მწკრივს

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{mn}}{m!}\sin\left(2^m x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამიტომ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{mn}}{m!}\sin\left(2^m x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

აქედან

$$f^{(n)}(0)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{mn}}{m!}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

თუ n ლუწია, მაშინ $f^{(n)}(0)=0$, ხოლო თუ n კენტია: $n=2k+1$, მაშინ

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{(2k+1)m}}{m!}=(-1)^k\left(e^{2^{2k+1}}-1\right).$$

ამის გარდა, $f(0)=0$.

ამრიგად, ჩვენი ფუნქციის მაკლორენის მწკრივია

$$\frac{e^2-1}{1}x-\frac{e^{2^3}-1}{3!}x^3+\frac{e^{2^5}-1}{5!}x^5-\ldots$$

როცა $x\neq 0$ ამ მწკრივის ყოველი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობის ფარდობა წინა წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობასთან გვაძლევს:

$$\frac{e^{2^{2k+1}}-1}{(2k+1)!}\,|x|^{2k+1} : \frac{e^{2^{2k-1}}-1}{(2k-1)!}\,|x|^{2k-1}=$$

$$=\frac{e^{2^{2k+1}}-1}{e^{2^{2k-1}}-1}\cdot\frac{x^2}{2k(2k+1)}=\frac{e^{3.2^{2k-1}}-e^{-2^{2k-1}}}{1-e^{-2^{2k-1}}}\times$$

$$\times\frac{x^2}{2k(2k+1)}>\left(e^{3.\,2^{2k-1}}-1\right)\frac{x^2}{2k(2k+1)}.$$

ეს უკანასკნელი გამოსახულება მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, როდესაც $k\to\infty$, ე. ი. მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი განშლადია ნებისმიერი x-სათვის, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია.

ახლა გადავიდეთ იმ პირობების დადგენაზე, რომელთა შესრულების შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის (11.1) ტეილორის მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ რაიმე $]a-R,\ a+R[$ ინტერვალში.

$f(x)$ ფუნქციისათვის დავწეროთ ტეილორის ფორმულა n-ური დამატებითი წევრით:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x).$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 22. $f(x)$ ფუნქციის (11.1) ტეილორის მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ $]a-R,\ a+R[$ ინტერვალში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \tag{11.2}$$

$]a-R,\ a+R[$ ინტერვალის ყოველ x წერტილში.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ (11.1) მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ $]a-R,\ a+R[$ ინტერვალში. მაშინ

$$0=f(x)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\right]=f(x)-\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\right.$$

$$\left.+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{f(x)-\left[f(a)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} r_n(x).$$

პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $]a-R, a+R[$ ინტერვალში მართებულია (11.2) ტოლობა. მაშინ ამ ინტერვალის ნებისმიერი x წერტილისათვის გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)\right]\right\}=0,$$

ე. ი.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

და ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

დასასრულ, მოვიყვანოთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლებოდეს დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად. მართებულია შემდეგი

თეორემა 28. *თუ $]a-R, a+R[$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულები აკმაყოფილებს პირობებს*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M_n\quad(n=1, 2, \ldots), \tag{11.3}$$

სადაც M_n ისეთი რიცხვებია, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n(n+1)}=0, \tag{11.4}$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია დაიშლება ტეილორის მწკრივად.

დამტკიცება. ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი $r_n(x)$ დავწეროთ ლაგრანჟის სახით:

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც $a-R<\xi<a+R$. თუ მხედველობაში მივიღებთ (11.3) პირობას, მაშინ $]a-R, a+R[$ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$|r_n(x)|\leqslant M_{n+1}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)}\leqslant\frac{M_{n+1}R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}R^{n+1}}{(n+1)!}=0. \qquad (11.5)$$

ამისათვის განვიხილოთ (U_n) მწკრივი, სადაც

$$U_n=\frac{M_n R^n}{n!}.$$

რაკი

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)M_n}R,$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}=0.$$

მაშასადამე, (U_n) მწკრივი კრებადია და ამიტომ მართებულია (11.5) ტოლობა. ამ ტოლობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

მაშასადამე, 21-ე თეორემის თანახმად $f(x)$ ფუნქცია დაიშლება $]a-R, a+R[$ ინტერვალში ტეილორის მწკრივად და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ $M_n=K$ $(n=1, 2,\ldots)$, სადაც K მუდმივი n-ზე არ არის დამოკიდებული, (11.4) ტოლობა სრულდება.

§ 12. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად

1°. მაჩვენებლიანი e^x ფუნქცია. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=e^x$ ფუნქცია. ნებისმიერ სეგმენტზე $[-R, R]$ გვაქვს

$$|f^{(n)}(x)|=e^x\leqslant e^R \quad (n=1, 2,\ldots).$$

ამიტომ 23-ე თეორემის თანახმად e^x ფუნქცია დაიშლება ხარისხოვან მწკრივად $[-R, R]$ სეგმენტზე და რაკი R ნებისმიერია, ეს ფუნქცია დაიშლება ხარისხოვან მწკრივად $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. შემდეგ, რაკი

$$f(0)=1, \quad f^{(n)}(0)=1 \quad (n=1, 2,\ldots),$$

ამიტომ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (12.1)$$

კერძოდ, თუ $x=1$ გვექნება

$$e=2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

2°. $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=\sin x$ ფუნქცია. გვაქვს

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{(IV)}(0)=0,\ \ldots$$

x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $\sin x$ ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმოებულის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება ერთს. მაშასადამე, 23-ე თეორემის თანახმად $\sin x$ დაიშლება ხარისხოვან მწკრივად $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამრიგად,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \tag{12.2}$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას ხარისხოვანი მწკრივის გაწარმოების შესახებ, მივიღებთ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \tag{12.3}$$

ამ ტოლობას ადგილი აქვს x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

აღსანიშნავია, რომ $\sin x$ ფუნქცია იშლება ხარისხოვან მწკრივად x-ის მხოლოდ კენტ ხარისხებად, $\cos x$ ფუნქცია კი—მხოლოდ ლუწ ხარისხებად.

3°. $\operatorname{sh} x$ და $\operatorname{ch} x$ ფუნქციები. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $\operatorname{sh} x$ და $\operatorname{ch} x$ ფუნქციები. როგორც ვიცით

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

მაგრამ (12.1) ფორმულის მიხედვით

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

აქედან

$$e^x-e^{-x}=2x+2\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots+2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ 2-ზე, გვექნება

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \tag{12.4}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \tag{12.5}$$

4°. ln(1+x) და arctg x ფუნქციები. განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა]—1, 1[ინტერვალი და მისი ჯამია $\frac{1}{1+x}$. როდესაც $x>-1$, მაშინ

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+x).$$

ამიტომ მე-16 თეორემის თანახმად, როდესაც $-1<x<1$, გვექნება

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

ამრიგად,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \tag{12.6}$$

ამ მწკრივს ეწოდება *ლოგარითმული მწკრივი*. მისი კრებადობის რადიუსია 1.

(12.6) ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა $x=1$. მართლაც, თუ $x=1$, გვექნება მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

რომელიც კრებადია. მაშასადამე, აბელის მეორე თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

ე. ი.

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots \tag{12.7}$$

ამგვარად, (12.6) მწკრივის განსაზღვრის არეა]—1, 1] შუალედი.

ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა]—1, 1[ინტერვალი, ხოლო მისი ჯამია $\frac{1}{1+x^2}$. ამიტომ მე-16 თეორემის თანახმად, როდესაც $-1<x<1$, გვექნება

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

ამრიგად

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \tag{12.8}$$

ეს ფორმულა ძალაში რჩება, როდესაც $x=1$. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვექნება მწკრივი

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots,$$

რომელიც კრებადია. აბელის მეორე თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to 1-}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots,$$

ე. ი.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ (12.8) მწკრივი კრებადია $x=-1$ წერტილშიც. მაშასადამე, ამ მწკრივის კრებადობის არეა [—1, 1] სეგმენტი.

5°. ბინომური მწკრივი. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=(1+x)^\alpha$ ფუნქცია, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. გვაქვს

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\quad(n=1,2,\ldots).$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი იქნება

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \tag{12.9}$$

თუ α არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ დაწყებული გარკვეული ადგილიდან ყველა $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ გახდება ნული და (12.9) მწკრივი დაემთხვევა ნიუტონის ბინომის ფორმულას. α რიცხვის სხვა მნიშვნელობებისათვის ყველა $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ ნულისაგან განსხვავებულია და მაშინ (12.9) წარმოადგენს უსასრულო მწკრივს.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ α არ არის არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},$$

გვექნება

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\to 1\,,\ \text{როდესაც } n\to\infty.$$

მაშასადამე, მე-3 თეორემის თანახმად, (12.9) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია 1. დავამტკიცოთ, რომ $]-1,1[$ ინტერვალში მართებულია ტოლობა

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{12.10}$$

ამ მიზნით ვისარგებლოთ მაკლორენის ფორმულის დამატებითი წევრით კოშის სახით:

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0<\theta<1.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

და, მაშასადამე,

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^n$$

რადგანაც $-1<x<1$, ამიტომ $0<1-\theta<1+\theta x$, საიდანაც

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1.$$

შემდეგ, რაკი $-1<x<1$, ამიტომ $|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|$ გამოსახულება მოთავსებულია $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$ და $|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$ რიცხვებს შორის. თუ ამ ორი რიცხვიდან უდიდესს აღვნიშნავთ K-თი, მაშინ ნებისმიერი n-სათვის გვექნება

$$|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|<K.$$

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას

$$|r_n(x)|<K\left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n\right|.$$

უტოლობის მარჯვენა ნაწილში K-სთან მდგომი მამრავლი წარმოადგენს $(1+x)^{\alpha-1}$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივის n-ური წევრის აბსოლუტურ სიდიდეს. მაგრამ ეს მწკრივი კრებადია]—1, 1[ინტერვალში, რის გამოც ამ მწკრივის n-ური წევრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $n\to\infty$. ამიტომ]—1, 1[ინტერვალის ყოველ x წერტილში

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

და, მაშასადამე, 22-ე თეორემის მიხედვით მართებულია (12.10) ტოლობა, როდესაც $-1<x<1$.

(12.10) მწკრივის კრებადობის გამოკვლევას]—1, 1[ინტერვალის საზღვრებზე არ შევეხებით, მხოლოდ შევნიშნავთ შემდეგს: თუ $x=1$, და $\alpha>0$, მაშინ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუკი $-1<\alpha<0$, მწკრივი პირობით კრებადია, ხოლო თუ $\alpha\leqslant-1$, მწკრივი განშლადია. დაბოლოს, $x=-1$ წერტილში მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $\alpha\geqslant0$ და განშლადია, როდესაც $\alpha<0$. (12.10) მწკრივს ბ ი ნ ო მ უ რ ი მ წ კ რ ი ვ ი ეწოდება.

6°. arcsin x ფუნქცია. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=\arcsin x$ ფუნქცია. ამისათვის $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ფუნქცია დავშალოთ (12.10) ფორმულის მიხედვით:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\ldots+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+\ldots$$

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით 0-დან x-მდე ($|x|<1$), მივიღებთ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots$$

ამ მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $]-1, 1[$. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს მწკრივი კრებადია, როდესაც $x=\pm 1$.

7°. $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ფუნქცია. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=\operatorname{ar\,sh} x$ ფუნქცია. ამისათვის $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ფუნქცია დავშალოთ (12.10) ფორმულის მიხედვით. გვაქვს:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 - \ldots + (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k} + \ldots$$

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით 0-დან x-მდე ($|x|<1$), მივიღებთ

$$\operatorname{ar\,sh} x = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \ldots +$$

$$+ (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

ამ მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $]-1, 1[$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს მწკრივი კრებადია $x=1$ და $x=-1$ წერტილებშიც. მაშასადამე, აღნიშნული მწკრივის კრებადობის არეა $[-1,1]$ სეგმენტი.

8°. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ფუნქცია. დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, როდესაც $|x|<1$, გვაქვს

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$$

თუ ამ მწკრივებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ საინტერესო დაშლას:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n+\ldots$$

§ 13. ხარისხოვანი მწკრივების გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში

ვთქვათ, ცნობილია $f(x)$ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები a წერტილში და ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია იშლება ტეილორის მწკრივად a წერტილის მიდამოში. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობა ამ მიდამოს ყოველ წერტილში გამოითვლება ტეილორის მწკრივის საშუალებით, ხოლო მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ამ მწკრივის კერძო ჯამით. ამასთან, ცდომილება შეგვიძლია შევაფასოთ დამატებითი წევრის საშუალებით ანუ უშუალოდ მწკრივის ნაშთით. მაგალითად, თუ მივიღეთ ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი, მაშინ ცდომილების შეფასებას ვაწარმოებთ ლაიბნიცის თეორემის გამოყენებით. პრაქტიკაში მწკრივის ნაშთის შეფასება უფრო მოხერხებულია, ვინაიდან დამატებითი წევრის შეფასებისათვის საჭიროა სასურველი რიგის წარმოებულის ცოდნა მთელ განსახილავ ინტერვალში. ცნობილი მწკრივების კომბინირებით ზოგჯერ ხერხდება მოცემული ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად და ამ შემთხვევაში ფუნქციის წარმოებულების მოძებნა საჭირო არ არის.

1°. ლოგარითმის გამოთვლა. რადგანაც (12.7) მწკრივი ნიშანმონაცვლეობითია, ამიტომ, თუ მიახლოებით მივიღებთ

$$\ln 2 \simeq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

ცდომილება აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები იქნება, ვიდრე $\frac{1}{n+1}$. აქედან ჩანს, რომ თუ ავიღებთ მწკრივის 100000 წევრს, მაშინ ცდომილება არ აღემატება 0,00001 რიცხვს.

როგორც ვხედავთ, (12.7) მწკრივი ძალიან ნელა იკრიბება, უფრო სწრაფად კრებადი მწკრივების მისაღებად, და აგრეთვე ისეთი მწკრივების მისაღებად, რომლებიც გამოსაყენებელია ნებისმიერი დადებითი

რიცხვების ნატურალური ლოგარითმების გამოსათვლელად, (12·6) ფორმულაში მოვახდინოთ გარდაქმნა; x შევცვალოთ $-x$-ით, მაშინ გვექნება

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots$$

ეს ტოლობა გამოვაკლოთ (12,6) ტოლობას წევრ-წევრად, მივიღებთ

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right), \qquad (13.1)$$

ამ ფორმულაში ჩავსვათ $x=\dfrac{1}{2m+1}$, სადაც m ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. მაშინ, რაკი

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{m+1}{m},$$

(13,1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\ln(m+1)-\ln m=\frac{2}{2m+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2m+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2m+1)^4}+\ldots\right]. \qquad (13,2)$$

თუ $m=1$, გვექნება

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6}+\ldots\right).$$

ეს მწკრივი სწრაფად იკრიბება. ავიღოთ n-ური კერძო ჯამი

$$\ln 2\simeq\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n}}\right).$$

ცდომილება ასე შევაფასოთ:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+2}}+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+4}}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)=\frac{1}{4(2n+1)3^{2n+1}}.$$

ახლა ვიპოვოთ n, როდესაც ცდომილება არ აღემატება 0,00001 რიცხვს. უნდა გვქონდეს

$$4(2n+3)\cdot 3^{2n+1} > 10^6.$$

ამ უტოლობას ადგილი აქვს, როდესაც $n \geqslant 4$. მაშასადამე,

$$\ln 2 \simeq \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^8}\right) \simeq 0{,}693144.$$

ამრიგად, ახალ მწკრივში საკმარისია ავიღოთ 5 წევრი (ნაცვლად 100000 წევრისა თავდაპირველად აღებულ მწკრივში), რომ $\ln 2$ რიცხვისათვის მივიღოთ მიახლოებითი მნიშვნელობა იმავე სიზუსტით.

2°. π რიცხვის გამოთვლა. განვიხილოთ მწკრივი

$$\operatorname{ar\,ctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

როგორც ვიცით, ამ მწკრივის კრებადობის არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი. თუ ავიღებთ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, მაშინ $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{6}$. მაშასადამე,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots\right).$$

ეს მწკრივი გამოსადეგია გამოთვლებისათვის, მაგრამ არსებობს გაცილებით უფრო მოხერხებული მწკრივები π რიცხვის გამოსათვლელად. ვთქვათ, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. მაშინ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119}.$$

რადგანაც $\operatorname{tg} 4\alpha$ ახლოსაა ერთთან, ამიტომ 4α ახლოს იქნება $\frac{\pi}{4}$-თან.

ვთქვათ, $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$. მაშინ $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{239}$, აქედან

$$\beta = \operatorname{ar\,ctg}\frac{1}{239}.$$

მაშასადამე,

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \ldots\right) =$$

$$= 3{,}141592\ldots$$

3°. ინტეგრალის გამოთვლა. ვთქვათ, ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad (13,3)$$

და გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

სადაც x აღებულია მწკრივის კრებადობის ინტერვალში, თუ (13.3) ტოლობას ვაინტეგრებთ წევრ-წევრად $[a, x]$ სეგმენტზე, მივიღებთ $F(x)$ ფუნქციისათვის ხარისხოვან მწკრივს, რომლის კრებადობის რადიუსი იგივეა, რაც (13.3) მწკრივისა. თუ ინტეგრალი $\int_a^x f(t)\,dt$ გამოისახება სასრული სახით, მაშინ $F(x)$ არის ელემენტარული ფუნქცია; თუკი ინტეგრალი $\int_a^x f(t)dt$ ელემენტარულ ფუნქციებში ვერ გამოისახება, მაშინ (13,3) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით მიღებული მწკრივი წარმოადგენს არაელემენტარულ $F(x)$ ფუნქციის გამოსახულებას უმარტივესი ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

მაგალითი 10. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dx$. როგორც ვიცით

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots$$

აქედან

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots$$

ამ მწკრივის კრებადობის ინტერვალია]$-\infty$, $+\infty$[. ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{x^5}{5} - \ldots$$

ეს მწკრივი კრებადი არაა ელემენტარული ფუნქციისაკენ. იგი გვაძლევს ახალი ფუნქციის ანალიზურ წარმოდგენას, მასთან არა სასრული, არამედ უსასრულო მრავალი ოპერაციის საშუალებით.

როგორც პირველ ტომში იყო აღნიშნული, ინტეგრალს $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ეწოდება ინტეგრალური სინუსი და აღინიშნება $\mathrm{si}\,x$:

$$\mathrm{si}\, x = x - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{x^5}{5} - \ldots$$

ინტეგრალური სინუსი გვხვდება თეორიული ფიზიკის ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას.

მაგალითი 11. ალბათობათა თეორიაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფუნქცია

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt,$$

რომელსაც ალბათობათა ინტეგრალი ეწოდება. ამ ინტეგრალის გამოთვლა სასრული სახით არ შეიძლება. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად. ამისათვის (12.1) ფორმულაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ $-\frac{t^2}{2}$. გვექნება

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{t^6}{2^3 \cdot 3!} + \cdots$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ რიცხვზე და შემდეგ ვაინტეგრებთ 0-დან x-მდე, მივიღებთ

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots\right.$$

ამ მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $]-\infty, +\infty[$. ეს მწკრივი სწრაფად კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 12. გამოვთვალოთ მეორე გვარის ელიფსური ინტეგრალი

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{13.4}$$

სადაც $0<k^2<1$.

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დავშალოთ ბინომურ მწკრივად:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi-$$
$$-\frac{1\cdot 3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi-\ldots$$

ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია φ-ს მიმართ ნებისმიერ შუალედში. ამიტომ ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt=\varphi-\frac{k^2}{2}\int_0^{\varphi}\sin^2 t\, dt-\frac{k^4}{2\cdot 4}\int_0^{\varphi}\sin^4 t\,dt-$$
$$-\frac{1\cdot 3}{2.4.6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6 t\, dt-\ldots$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ინტეგრალები ადვილად გამოითვლება, როდესაც $\varphi=\frac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\, dt=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{k^4}{3}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{k^6}{5}-\ldots\right].$$

(13.4) ინტეგრალი განხილული იყო ლეჟანდრის (Legendre) მიერ და მისი ტერმინოლოგიის მიხედვით ამ ინტეგრალს ეწოდება მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს ე ლ ი ფ ს უ რ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი. ეს ინტეგრალი აღინიშნება $E(\varphi,k)$ სიმბოლოთი.

§ 14. კომპლექსურწევრებიანი მწკრივები

1°. კომპლექსურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი. კომპლექსურ რიცხვთა მიმდევრობას

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,\ldots,\quad z_n=x_n+iy_n,\ldots \tag{14.1}$$

ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი $\alpha=a+ib$ რიცხვისაკენ, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ყოველი ნატურალური n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n>N$, მართებულია უტოლობა

$$|z_n-\alpha|<\varepsilon.$$

α რიცხვს ეწოდება (14. 1) მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი და აღინიშნება

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\alpha.$$

ყოველ მიმდევრობას, რომელიც კრებადი არაა, განშლადი მიმდევრობა ეწოდება.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულება: (14.1) მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა α რ ი ც ხ ვ ი ს ა კ ე ნ მ ა შ ი ნ და მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო დ ე ს ა ც ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა $(x_n)_{n>1}$ და $(y_n)_{n>1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ე ბ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ a და b რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ა კ ე ნ.

2°. კომპლექსურწევრებიანი რიცხვთა მწკრივების კრებადობა. განვიხილოთ მწკრივი

$$w_0+w_1+\cdots w_n+\cdots, \tag{14.2}$$

რომლის წევრებია კომპლექსური რიცხვები

$$w_n=u_n+iv_n\quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

(u_n და v_n ნამდვილი რიცხვებია). ასეთი მწკრივების თეორია აიგება იმგვარადვე, როგორც ნამდვილწევრებიანი მწკრივთა თეორია. რიცხვს

$$s_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$$

ეწოდება (14.2) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი. (14.2) მწკრივი კრებადია, თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n. \tag{14.3}$$

s რიცხვს ეწოდება (14.2) მწკრივის ჯამი და წერენ

$$s=w_0+w_1+\cdots+w_n+\cdots \tag{14.4}$$

ან შემოკლებით

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

თუ მწკრივი კრებადი არ არის, მაშინ მას განშლადი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 24. (14.2) მწკრივი კრებადია და ჯამად აქვს $s=\sigma+i\tau$ რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კრებადია (u_n) და (v_n) მწკრივები და ჯამად აქვს შესაბამისად σ და τ.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k+iv_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k+i\sum_{k=0}^{n}v_k=\sigma_n+i\tau_n,$$

სადაც

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}u_k,\ \tau_n=\sum_{k=0}^{n}v_k.$$

აქ σ_n წარმოადგენს (u_n) მწკრივის კერძო ჯამს, τ_n კი (v_n) მწკრივის კერძო ჯამია.

დასამტკიცებელია, რომ თუ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$ და პირიქით. ეს კი გამომდინარეობს

$$|s-s_n|=\sqrt{(\sigma-\sigma_n)^2+(\tau-\tau_n)^2}$$

ტოლობიდან.

შედეგი. თუ (14.2) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი ზოგადი წევრი $w_n\to 0$, როდესაც $n\to\infty$.

მართლაც, თუ (14.2) მწკრივი კრებადია, მაშინ (u_n) და (v_n) მწკრივები კრებადია, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0, \quad \lim_{n\to\infty} v_n=0.$$

მაშასადამე, $\lim_{n\to\infty} w_n=0$.

თეორემა 25. თუ კრებადია $(|w_n|)$ მწკრივი, მაშინ კრებადია (14.2) მწკრივიც.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$|u_n|\leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}=|w_n|, \quad |v_n|\leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}=|w_n|.$$

მაშასადამე, კრებადია $(|u_n|)$ და $(|v_n|)$ მწკრივები და ამიტომ კრებადია (u_n) და (v_n) მწკრივებიც. აქედან 24-ე თეორემის თანახმად გამომდინარეობს (w_n) მწკრივის კრებადობა.

(w_n) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია $(|w_n|)$ მწკრივი. ამრიგად, 25-ე თეორემის თანახმად, აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი კრებადია. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ მართებული არაა; არსებობს კრებადი მწკრივები, რომლებიც აბსოლუტურად კრებადი არ არის. ასეთ მწკრივებს პირობით კრებადი მწკრივები ეწოდება.

კომპლექსურ წევრებიან მწკრივებზე მთლიანად ვრცელდება თეორემები, რომლებიც დამტკიცებული იყო ნამდვილწევრებიანი მწკრივებისათვის.

8°. ხარისხოვანი მწკრივები კომპლექსური წევრებით. მწკრივს

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\dots+c_nz^n+\dots, \tag{14.5}$$

სადაც $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადია (x და y ნამდვილი ცვლადებია) ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივი კომპლექსური წევრებით. $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ რიცხვებს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები.

ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება უფრო ზოგადი სახის მწკრივს

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots+c_n(z-a)^n+\dots, \tag{14.6}$$

სადაც a არის საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვი. ცხადია, რომ (14.6) მწკრივი შეგვიძლია დავიყვანოთ (14.5) სახემდე $z-a=\xi$ ჩასმით.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 25 (აბელის პირველი თეორემა) თუ (14.5) მწკრივი კრებადია $z_0\neq 0$ წერტილში, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია z-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|z| < |z_0|.$$

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ნამდვილწევრებიანი ხარისხოვანი მწკრივის შემთხვევაში.

(14.5) სახის ხარისხოვანი მწკრივებისათვის აბელის პირველი თეორემის გეომეტრიული შანაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ მწკრივის კრებადობიდან კომპლექსური სიბრტყის z_0 წერტილში გამომდინარეობს მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა ყოველ z წერტილში, რომელიც იმ წრის შიგნითაა მოთავსებული, რომლის რადიუსი და ცენტრია შესაბამისად $|z_0|$ და 0.

4°. მაჩვენებლიანი და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ეილერის ფორმულები. განვიხილოთ ხა რისხოვანი მწკრივები.

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}+\ldots,$$

სადაც z არის კომპლექსური ცვლადი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს მწკრივები კრებადია z-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ამ მწკრივების ჯამები აღვნიშნოთ შესაბამისად e^z, $\sin z$ და $\cos z$ სიმბოლოებით. ასე რომ

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{14.7}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2_n+1)!}, \tag{14.8}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}, \tag{14.9}$$

თუ $z=x$ ნამდვილი ცვლადია, მაშინ გვექნება ცნობილი e^x, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების დაშლა ხა რისხოვან მწკრივად

ცხადია, რომ

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z.$$

მაშასადამე, $\sin z$ არის კენტი ფუნქცია, $\cos z$ კი—ლუწი ფუნქცია. თუ (14.7) ფორმულაში z-ის ნაცვლად ავიღებთ iz-ს, გვექნება

$$e^{iz} = 1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}-\dots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right).$$

ამრიგად,

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{14.10}$$

ამ ფორმულაში z-ის ნაცვლად ავიღოთ $-z$, გვექნება

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{14.11}$$

(14.10) და (14.11) ტოლობების შეკრებისა და გამოკლების საშუალებით ადვილად მივიღებთ

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \tag{14.12}$$

(14.10) და (14.12) ფორმულებს ეწოდება ე ი ლ ე რ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი.

კერძოდ, თუ z ნამდვილ x მნიშვნელობას ღებულობს, მაშინ ეილერის ფორმულები ასე დაიწერება:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ კრებადობის რადიუსი და ინტერვალი და გამოიკვლიეთ კრებადობის ინტერვალის საზღვრით წერტილებში შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების ყოფაქცევა;

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n \quad (0<\alpha<1).$

პ ა ს უ ხ ი: $R=+\infty$; $]-\infty, +\infty[$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n.$

პასუხი. $R=\frac{1}{e}$; $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. როდესაც $x=\pm\frac{1}{e}$ მწკრივი განშლადია.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

პასუხი: $R=\frac{1}{3}$; $\left]-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right[$. მწკრივი პირობით კრებადია, როდესაც $x=-\frac{4}{3}$, ხოლო განშლადია $x=-\frac{2}{3}$ წერტილში.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$.

პასუხი: $R=1$; $]-1, 1[$. როცა $x=-1$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $m\geqslant 0$ და განშლადია, თუ $m<0$; $x=1$ წერტილში მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $m\geqslant 0$ და პირობით კრებადია, თუ $-1<m<0$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

პასუხი: $R=1$; $]-1, 1[$. როცა $x=\pm 1$, მწკრივი განშლადია.

6. დაშალეთ $y=\ln x$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $x=1$ წერტილის მიდამოში.

პასუხი: $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\dots$

7. დაშალეთ ტეილორის მწკრივად $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ ფუნქცია $x=2$ წერტილის მიდამოში.

პასუხი: $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\dots+$

$$+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots$$

. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=e^{2x}$ ფუნქცია.

პასუხი: $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\dots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\dots$

9. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=e^{-x^2}$ ფუნქცია.

პასუხი: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$.

10. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=(x-\mathrm{tg}\,x)\cos x$ ფუნქცია.

პასუხი: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+2}{(2n+3)!} x^{2n+3}$.

11. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=x\ln(1+x)$.

პასუხი: $x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n}+\dots$ $(-1<x\leqslant 1)$.

12. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=\sqrt{1+x^2}$ ფუნქცია.

პასუხი:
$$1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-3)}{2\cdot 4\dots(2n-2)}\,\frac{x^{2n}}{2n}+\dots\right].$$

13. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=\cos^2 x$ ფუნქცია.

პასუხი: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x|<\infty)$.

14. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ ფუნქცია.

პასუხი: $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} [1-(-2)^n]x^n$ $\left(|x|<\dfrac{1}{2}\right)$.

15. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$ ფუნქცია.

მითითება. ჯერ მოცემული ფუნქციის წარმოებული დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად და შემდეგ მოახდინეთ წევრ-წევრად ინტეგრება.

პასუხი: $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n} x^n$, $(|x|\leqslant 1)$.

16. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად $y=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ ფუნქცია, ისარგებლეთ ამ დაშლით და გამოთვალეთ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$ მწკრივის s ჯამი.

პასუხი: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$, $s=12$.

17. დაშალეთ ხარისხოვან მწკრივად $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$.

პასუხი: $\operatorname{arctg}2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $-\dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

18. ვთქვათ,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

უშუალოდ დაამტკიცეთ, რომ $f(x)\,f(y)=f(x+y)$.

19. დაშალეთ ხარისხოვან მწკრივად $y=e^x\sin x$.

პასუხი: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$.

20. დაშალეთ ხარისხოვან მწკრივად $y=\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

პასუხი: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$ $(|x|\leqslant 1)$.

21. დაამტკიცეთ, რომ (a_nx^n) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი R აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$l\leqslant R\leqslant L,$$

სადაც

$$l=\varliminf_{n}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ და } L=\varlimsup_{n}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

გამოთვალეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი

22. $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots$.

პასუხი: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$.

23. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$

პასუხი: $\operatorname{arctg} x \quad (|x| \leqslant 1)$.

24. $x+2x^2+3x^3+\dots$

პასუხი: $\frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| \leqslant 1)$.

25. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\dots$

პასუხი: $\frac{x}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$.

26. დაამტკიცეთ, რომ $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n!)}$ აკმაყოფილებს $y^{(IV)}=y$ განტოლებას.

27. დაამტკიცეთ, რომ $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ აკმაყოფილებს $xy''+y'-y=0$ განტოლებას.

თავი III

ორმაგი მწკრივები

§ 1. რიცხვთა ორმაგი მიმდევრობის ზღვარი

თუ მოცემულია რაიმე წესი, რომლის საშუალებით ნატურალურ რიცხვთა ყოველ m და n წყვილს შეგვიძლია შევუსაბამოთ რაიმე s_{mn} ობიექტი, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n>0}$.

განსაზღვრა 1. რაიმე s რიცხვს ეწოდება *რიცხვთა ორმაგი* $(s_{mn})_{m,n>0}$ *მიმდევრობის ზღვარი*, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|s_{mn}-s|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } m>N,\ n>N.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=s.$$

თუ რიცხვთა ორმაგ მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n>0}$ ზღვრად აქვს s რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემული ორმაგი მიმდევრობა *კრებადია* s რიცხვისაკენ.

რიცხვთა ორმაგ მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n>0}$ ეწოდება კრებადი $+\infty$-საკენ, თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$s_{mn}>A, \quad \text{როდესაც } m>N,\ n>N.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=+\infty.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება სიმბოლო

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=-\infty.$$

განსაზღვრა 2. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ ვუწოდებთ *ზრდადს* (*კლებადს*), თუ

$s_{mn}\geq s_{pq}$ ($s_{mn}\leq s_{pq}$), როდესაც $m\geq p$, $n\geq q$. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ ჩვენ ვუწოდებთ *მონოტონურს*, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი.

განსაზღვრა 3. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ ეწოდება *ზემოდან შემოსაზღვრული*, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი L, რომ $s_{mn}\leq L$ $(m,n=0, 1, 2, \ldots)$. ამავე მიმდევრობას ეწოდება *ქვემოდან შემოსაზღვრული*, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი l, რომ $s_{mn}\geq l$ $(m,n=0, 1, 2, \ldots)$.

თუ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ შემოსაზღვრულია ზემოდან და ქვემოდან, მაშინ მას *შემოსაზღრული მიმდევრობა* ეწოდება. ცხადია თუ ორმაგი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ

$$|s_{mn}|<M \quad (m,n=0, 1, 2, \ldots).$$

განსაზღვრა 4. ორმაგ $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ მიმდევრობას ჩვენ ვუწოდებთ *კვაზიშემოსაზღვრულს ზემოდან*, თუ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geq \nu}$ შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო მოცემულ ორმაგ მიმდევრობას ვუწოდებთ *კვაზიშემოსაზღვრულს ქვემოდან*, თუ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი μ, რომ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geq \mu}$ ქვემოდან შემოსაზღვრულია.

ორმაგ მიმდევრობას ჩვენ ვუწოდებთ *კვაზიშემოსაზღვრულს*, თუ იგი კვაზიშემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდანაც.

ადვილი შესამჩნევია, რომ *ყოველი კრებადი ორმაგი მიმდევრობა კვაზიშემოსაზღვულია*.

შენიშვნა. როგორც ცნობილია, თუ რიცხვთა მარტივი მიმდევრობა კრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია.. მაგრამ კრებადი ორმაგი მიმდევრობა შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მართლაც, ვთქვათ,

$$s_{mn}=\begin{cases} n, \text{ თუ } m=1; \ n=1, 2, \ldots, \\ 0, \text{ თუ } m\geq 2, \ n=1, 2 \ldots \end{cases}$$

ცხადია, რომ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geq 1}$ ნულისაკენ კრებადია, მაგრამ იგი შემოსაზღვრული არაა.

თეორემა 1. ზრდადი ორმაგი მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geqslant 0}$ ზემოდან შემოსაზღვრულია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$L=\sup\{s_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}.$$

L სასრული რიცხვია. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი p, რომ

$$s_{pp}>L-\varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი მოცემული ორმაგი მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$s_{mn}>L-\varepsilon, \text{ როდესაც } m>p, \ n>p.$$

მეორე მხრივ

$$s_{mn}\leqslant L \quad (m,n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

ამრიგად,

$$L-\varepsilon<s_{mn}\leqslant L, \text{ როდესაც } m>p, \ n>p.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=L.$$

ამით პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული ზრდადი ორმაგი მიმდევრობა კრებადია, ვაჩვენოთ, რომ იგი ზემოდან შემოსაზღვრულია. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ყოველი კრებადი ორმაგი მიმდევრობა კვაზიშემოსაზღვრულია; ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν და ისეთი M რიცხვი, რომ

$$s_{mn}\leqslant M, \text{ როდესაც } m>\nu, \ n>\nu.$$

რაკი მოცემული მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$s_{mn}\leqslant M \quad (m,n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 2. კლებადი ორმაგი მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მისი ქვემოდან შემოსაზღვრულობა.

§ 2. ორმაგი მიმდევრობის კრებადობის კოშის ნიშანი

ჯერ შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 5. რიცხვთა ორმაგ მიმდევრობას $(s_{mn})_{m,n>0}$ ვუწოდებთ ფუნდამენტალურს, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ როდესაც $m\geqslant N$, $n\geqslant N$, $\mu\geqslant 1$, $\nu\geqslant 1$, მართებულია უტოლობა

$$|s_{m+\mu,n+\nu}-s_{mn}|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

თეორემა 8. *რიცხვთა ორმაგი $(s_{mn})_{m,n>0}$ მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოცემული მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური.*

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც მარტივი მიმდევრობის შემთხვევაში.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ როდესაც $m\geqslant N$, $n\geqslant N$, $\mu\geqslant 1$, $\nu\geqslant 1$, მართებულია (2.1) უტოლობა.

განვიხილოთ მარტივი მიმდევრობა $(s_{rr})_{r>0}$. თუ $r\geqslant N$, გვექნება

$$|s_{r+k,r+k}-s_{rr}|<\varepsilon \quad (k=1,2,\ldots).$$

მაშასადამე, $(s_{rr})_{r>0}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და ამიტომ კოშის თეორემის თანახმად ეს მიმდევრობა კრებადია რაიმე s რიცხვისაკენ.

ახლა (2.1) უტოლობაში μ და ν მივასწრაფოთ უსასრულობისაკენ იმგვარად, რომ $m+\mu=n+\nu$; მაშინ მივიღებთ $|s-s_{mn}|\leqslant\varepsilon$, როდესაც $m>N$, $n>N$ ეს კი წარმოადგენს მოცემული მიმდევრობის კრებადობის პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ორმაგი მიმდევრობის განმეორებითი ზღვრები

ორმაგი მიმდევრობის ზემოთ განხილული ზღვრის გარდა, საჭიროა განხილვა სხვაგვარის ზღვრებისა, რომლებიც მიიღება ამა თუ იმ რიგით თითოეული ინდექსით ცალ-ცალკე ზღვარზე გადასვლის შემდეგ. ამ ზღვრებს *განმეორებითი ზღვრები* ეწოდება.

ვთქვათ, ყოველი ფიქსირებული m-სათვის არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn}=a_m.$$

აქ შეიძლება დავსვათ საკითხი $(a_m)_{m>0}$ მიმდევრობის ზღვრის შესახებ:

$$\lim_{m\to\infty} a_m=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s_{mn}).$$

ეს ზღვარი არის სწორედ ერთ-ერთი განმეორებითი ზღვრებიდან.

მეორე განმეორებით ზღვარს მივიღებთ, თუ ზღვრებზე გადასვლას მოვახდენთ შებრუნებული რიგით:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s_{mn}).$$

შევნიშნოთ, რომ განმეორებითი ზღვრები საზოგადოდ თანატოლი არ არიან. მართლაც, ვთქვათ,

$$s_{mn}=\frac{m-n}{m+n}\ (m,n=1,\ 2,\ \ldots).$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn}=-1,\ \lim_{m\to\infty} s_{mn}=1.$$

აქედან

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s_{mn})=-1,\quad \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s_{mn})=1.$$

ამრიგად, არსებობს ორივე განმეორებითი ზღვარი, მაგრამ არათანატოლი.

შეგვიძლია მოვიყვანოთ ისეთი ორმაგი მიმდევრობის მაგალითი, როდესაც არსებობს ერთი განმეორებითი ზღვარი, მეორე კი—არა. ვთქვათ,

$$s_{mn}=\frac{1}{m}\cos n\ \ (m,n=1,\ 2,\ \ldots).$$

ცხადია

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s_{mn})=0,$$

მაგრამ $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} s_{mn})$ არ არსებობს.

ეს მაგალითები გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა ინდექსებით ორი ზღვრული გადასვლის გადაადგილებისას ფრთხილად უნდა ვიყოთ, ხშირად მცდარი დასკვნების გაკეთება ხდება ასეთი არაკანონიერი გადასმის გამო.

თეორემა 4. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ორმაგი ზღვარი

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=s$$

და ყოველი m-სათვის არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn}=a_m\quad (m=1,\ 2,\ \ldots),$$

მაშინ არსებობს განმეორებითი ზღვარი

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} s_{mn})$$

და იგი ორმაგი s ზღვრის ტოლია.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ s სასრული რიცხვია. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|s_{mn}-s|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } m>N, \; n>N. \qquad (3,1)$$

ავიღოთ ნებისმიერი $m>N$ და (3.1) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $n\to\infty$, მივიღებთ:

$$|a_m-s|\leqslant\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{m\to\infty} a_m=s.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც s სასრულია.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $s=\pm\infty$. აზრის გარკვეულობისათვის ვთქვათ, რომ $s=+\infty$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N, რომ

$$s_{mn}>A, \quad \text{როდესაც } m>N, \; n>N.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn}\geqslant A, \quad \text{როდესაც } m>N.$$

მაშასადამე, რაკი A ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, გვექნება

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} s_{mn})=+\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ორმაგი მიმდევრობის ორმაგი ზღვრის არსებობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს განმეორებითი ზღვრების არსებობა. მართლაც, ვთქვათ,

$$s_{mn}=\frac{(-1)^n}{m}+\frac{(-1)^m}{n} \quad (m,n=1,\,2,\,\ldots).$$

რადგანაც

$$|s_{mn}| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

ამიტომ

$$\lim_{m,n \to \infty} s_{mn} = 0.$$

მაგრამ

$$\lim_{n \to \infty} (\lim_{m \to \infty} s_{mn}) \text{ და } \lim_{m \to \infty} (\lim_{n \to \infty} s_{mn})$$

არ არსებობს.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ორმაგი მიმდევრობის განმეორებითი ზღვრების არსებობიდან და მათი ტოლობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ორმაგი ზღვრის არსებობა. მართლაც, ვთქვათ,

$$s_{mn} = \frac{mn}{m^2 + n^2} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n \to \infty} (\lim_{m \to \infty} s_{mn}) = \lim_{m \to \infty} (\lim_{n \to \infty} s_{mn}) = 0.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი k და ვთქვათ, $m = kn$. მაშინ

$$s_{mn} = \frac{k}{1 + k^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში

$$\lim_{m,n \to \infty} s_{mn} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

რაკი k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ამიტომ არ არსებობს ორმაგი ზღვარი $\lim\limits_{m,n \to \infty} s_{mn}$.

თეორემა 6. თუ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n > 0}$ მონოტონურია, მაშინ მართებულია ტოლობები:

$$\lim_{m \to \infty} (\lim_{n \to \infty} s_{mn}) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{m \to \infty} s_{mn}) = \lim_{m,n \to \infty} s_{mn}. \tag{3.2}$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული ორმაგი მიმდევრობა ზრდადია. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ 1-ლი თეორემის ძალით არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{m,n \to \infty} s_{mn} = s.$$

რადგანაც

$$s_{mn} \leqslant s \quad (m, n=0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

ამიტომ ყოველი ფიქსირებული n-სათვის არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{m\to\infty} s_{mn} = b_n$$

და $b_n \leqslant s$. ცხადია $(b_n)_{n>0}$ მიმდევრობა ზრდადია და არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s_{mn} \right) = s' \leqslant s.$$

მეორე მხრივ, რაკი ყოველი m და n-სათვის $s_{mn} \leqslant s'$, ამიტომ $s \leqslant s'$ მაშასადამე, $s' = s$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s_{mn} \right) = s.$$

ანალოგიურად მტკიცდება ტოლობა

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s_{mn} \right) = s.$$

ამრიგად, მართებულია (3.2) ტოლობები, როდესაც მოცემული ორმაგი მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია.

ახლა ვთქვათ, რომ მოცემული ორმაგი მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა. მაშინ

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn} = +\infty.$$

ამ შემთხვევაში, ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$s_{mn} > A, \quad \text{როდესაც} \quad m > N,\ n > N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m\to\infty} s_{mn} = b_n > A, \quad \text{როდესაც} \quad n > N,$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s_{mn} \right) > A.$$

რადგანაც A ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} s_{mn} \right) = +\infty.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} s_{mn})=+\infty.$$

ამრიგად, მართებულია (2.2) ტოლობები.

§ 4. ძირითადი ცნებები ორმაგ მწკრივზე

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა ორმაგი მიმდევრობა $(u_{mn})_{m,n\geq 0}$. ორმაგი მიმდევრობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ორკარიანი უსასრულო მატრიცის სახით:

$$\begin{array}{llll}
u_{00} & u_{01} & u_{02}\cdots u_{0n}\cdots & \\
u_{10} & u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n}\cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
u_{m0} & u_{m1} & u_{m2}\cdots u_{mn}\cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}\tag{4.1}$$

ამ მატრიცის წევრებისაგან შედგენილ სიმბოლოს

$$\begin{array}{l}
u_{00}+u_{01}+u_{02}+\cdots+u_{0n}+\cdots+\\
+u_{10}+u_{11}+u_{12}+\cdots+u_{1n}+\cdots+\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+u_{m0}+u_{m1}+u_{m2}+\cdots+u_{mn}+\cdots+\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

ეწოდება ორმაგი მწკრივი. სიმოკლისათვის, ეს მწკრივი ჩავწეროთ ასე:

$$(u_{mn}) \text{ ან } \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}. \tag{4.2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$s_{mn}=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} u_{lk}\quad (m,n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

s_{mn} ჯამს ეწოდება (4.2) მწკრივის კერძო ჯამი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{mn}=s,$$

მაშინ s რიცხვს ეწოდება (4.2) მწკრივის ჯამი და წერენ

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}=s,$$

ამასთან, s შეიძლება იყოს გარკვეული ნიშნის უსასრულო დიდიც.

თუ (4.2) მწკრივს აქვს სასრული ჯამი, მაშინ მას კრებადი მწკრივი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში მწკრივი განშლადია.

თეორემა 6. (u_{mn}) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{mn}=0. \tag{4.3}$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$u_{mn}=s_{mn}-s_{m-1,n}-s_{m,n-1}+s_{m-1,n-1}\text{*},$$

ამიტომ მოცემული მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (4.3) ტოლობის მართებულობა.

შემოვიღოთ ახლა განმეორებითი მწკრივის ცნება. ამისათვის (4.1) მატრიცაში შევაჯამოთ თითოეული სტრიქონი ცალ-ცალკე, მივიღებთ მწკრივთა უსასრულო მიმდევრობას

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \quad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

ამ მიმდევრობას წევრების შეჯამებით მივიღებთ

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}. \tag{4.4}$$

ამ სიმბოლოს ეწოდება განმეორებითი მწკრივი.

თუ სტრიქონებს სვეტებით შევცვლით, ე. ი. (4.1) მატრიცის წევრებს შევაჯამებთ სვეტების მიხედვით, მაშინ შეგვიძლია შევადგინოთ მეორე განმეორებითი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}. \tag{4.5}$$

(4.4) განმეორებით მწკრივს კრებადი ეწოდება, თუ ყოველი m-სათვის არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} s_{mn}$ და, ამის გარდა, არსე-

* ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $s_{-1,0}=s_{0,-1}=s_{-1,-1}=0$.

ბობს სასრული განმეორებითი ზღვარი $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} s_{mn})$. ამ ზღვარს ეწოდება (4.4) განმეორებითი მწკრივის ჯამი.

(4.5) განმეორებითი მწკრივის ჯამი განისაზღვრება ანალოგიურად.

თეორემა 7. თუ ორმაგი მწკრივი (u_{mn}) კრებადია და, ამის გარდა, იგი კრებადია სტრიქონების მიხედვით, მაშინ (3.4) განმეორებითი მწკრივი კრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}.$$

ეს თეორემა მე-4 თეორემის შედეგია.

ანალოგიურ თეორემას ადგილი აქვს (4.5) განმეორებითი მწკრივისათვისაც.

შენიშვნა. (u_{mn}) მწკრივის კრებადობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ამ მწკრივის კრებადობა სტრიქონის ან სვეტის მიხედვით.

§ 5. დადებითი ორმაგი მწკრივები

(u_{mn}) ორმაგ მწკრივს დადებითი ეწოდება, თუ $u_{mn}>0$ ყოველი m და n-სათვის.

თეორემა 8. დადებითი ორმაგი მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ მწკრივის კერძო ჯამთა ორმაგი მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა.

ეს თეორემა 1-ლი თეორემის შედეგია.

თეორემა 9. თუ სამი დადებითი მწკრივიდან

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}$$

ერთი მათგანი კრებადია, მაშინ ორი დანარჩენი მწკრივიც კრებადია და მართებულია ტოლობები:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}.$$

ეს თეორემა მე-5 თეორემის შედეგია.

თეორემა 10. თუ მოცემულია ორი დადებითი ორმაგი მწკრივი (u_{mn}) და (v_{mn}), ამასთან, $u_{mn}\leqslant v_{mn}$ ყოველი m და

n-სათვის, მაშინ მეორე მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს პირველი მწკრივის კრებადობა.

დამტკიცება. მოცემული ორმაგი მწკრივების კერძო ჯამები აღვნიშნოთ შესაბამისად U_{mn} და V_{mn} სიმბოლოებით. ცხადია, რომ

$$U_{mn} \leqslant V_{mn} \quad (m, n=0, 1, 2, \ldots).$$

რაკი (v_{mn}) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ორმაგი მიმდევრობა $(V_{mn})_{m,n>0}$ შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, ორმაგი მიმდევრობაც $(U_{mn})_{m,n>0}$ შემოსაზღვრულია. ამიტომ, მე-8 თეორემის თანახმად, (u_{mn}) მწკრივი კრებადია.

თეორემა 11. თუ დადებითი ორმაგი მწკრივი (u_{mn}) და მარტივი მწკრივი (v_p) შედგება ერთი და იმავე წევრებისაგან, მაშინ ერთ-ერთი მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს მეორე მწკრივის კრებადობა და მათი ჯამები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მაგალითად, რომ (u_{mn}) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი აღვნიშნოთ U-თი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_k,$$

სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ავიღოთ ნატურალური m და n რიცხვები ისე, რომ (u_{mn}) მწკრივის კერძო ჯამი U_{mn} შეიცავდეს ყველა $v_0, v_1, \ldots, v_k$ წევრს. მაშინ ცხადია, რომ

$$V_k \leqslant U_{mn} \leqslant U.$$

აქედან გამომდინარეობს (v_p) მწკრივის კრებადობა. თუ აღვნიშნავთ ამ მწკრივის ჯამს V-თი, გვექნება

$$V \leqslant U. \tag{5.1}$$

შემდეგ, ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის შევარჩიოთ ნატურალური რიცხვი k ისე, რომ (u_{mn}) მწკრივის კერძო U_{mn} ჯამის ყველა შესაკრები იმყოფებოდეს $v_0, v_1, \ldots, v_k$ რიცხვებს შორის, მაშინ

$$U_{mn} \leqslant V_k \leqslant V.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$U \leqslant V. \tag{5.2}$$

(5.1) და (5.2) თანაფარდობებიდან გვაქვს $U = V$. თეორემა დამტკიცებულია.

აქედან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ კ რ ე ბ ა დ დ ა დ ე ბ ი თ ო რ- მ ა გ მ წ კ რ ი ვ შ ი შ ე ი ძ ლ ე ბ ა წ ე ვ რ ე ბ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ა დ გ ა დ ა- ნ ა ც ვ ლ ე ბ ა მ წ კ რ ი ვ ი ს ჯ ა მ ი ს შ ე უ ც ვ ლ ე ლ ა დ.

§ 6. აბსოლუტურად კრებადი ორმაგი მწკრივები

განვიხილოთ ორმაგი მწკრივი (u_{mn}), რომელიც შეიცავს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი წევრების უსასრულო სიმრავლეს. ამ მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ორმაგი მწკრივი $(|u_{mn}|)$.

თეორემა 12. ო რ მ ა გ ი მ წ კ რ ი ვ ი (u_{mn}) კ რ ე ბ ა დ ი ა, თ უ კ რ ე- ბ ა დ ი ა $(|u_{mn}|)$ მ წ კ რ ი ვ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a_{mn}=\frac{|u_{mn}|+u_{mn}}{2}, \quad b_{mn}=\frac{|u_{mn}|-u_{mn}}{2}, \tag{6.1}$$

ცხადია, რომ

$$a_{mn}\geqslant 0, \quad b_{mn}\geqslant 0.$$

(6.1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_{mn}=a_{mn}-b_{mn}, \quad |u_{mn}|=a_{mn}+b_{mn}.$$

შემდეგ, რაკი $a_{mn}\leqslant|u_{mn}|$, $b_{mn}\leqslant|u_{mn}|$, ამიტომ $(|u_{mn}|)$ მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_{mn}) და (b_{mn}) მწკრივების კრებადობა. მაშასადამე, (u_{mn}) მწკრივი კრებადია და

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ (u_{mn}) მწკრივი კრებადია, ხოლო $(|u_{mn}|)$ მწკრივი განშლადია, მაშინ (u_{mn}) მწკრივს ეწოდება არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივი ან უბრალოდ კრებადი მწკრივი.

თეორემა 13. თ უ (u_{mn}) მ წ კ რ ი ვ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ კ რ ე- ბ ა დ ი ა, მ ა შ ი ნ გ ა ნ მ ე ო რ ე ბ ი თ ი მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \text{ და } \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}$$

კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}. \tag{6.2}$$

დამტკიცება. ($|u_{mn}|$) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_{mn}) და (b_{mn}) მწკრივების კრებადობა. ამიტომ მე-8 თეორემის თანახმად

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}, \tag{6.3}$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}. \tag{6.4}$$

თუ (6.3) ტოლობებს წევრ-წევრად გამოვაკლებთ (6.4) ტოლობებს მივიღებთ (6.2) ტოლობებს.

თეორემა 14. თუ (u_{mn}) და (v_p) მწკრივები შედგება ერთი და იმავე წევრებისაგან, მაშინ ერთ-ერთი ამ მწკრივთაგანის აბსოლუტური კრებადობისაგან გამომდინარეობს მეორის აბსოლუტური კრებადობა და მათი ჯამების ტოლობა.

დამტკიცება. მაგალითად, ვიგულისხმოთ, რომ (u_{mn}) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია; მაშინ (a_{mn}) და (b_{mn}) მწკრივები კრებადია თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$v_p' = \frac{|v_p| + v_p}{2}, \quad v_p'' = \frac{|v_p| - v_p}{2},$$

მივიღებთ

$$v_p = v_p' - v_p'', \quad |v_p| = v_p' + v_p''.$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{m,n=2}^{\infty} a_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty} v_p', \quad \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty} v_p''. \tag{6.5}$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს (v_p) მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა. ამის გარდა, (6.5) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty} v_p.$$

თეორემა დამტკიცებულია,

ახლა დავუშვათ, რომ (u_{mn}) მწკრივი კრებადია. თუ ამ მწკრივში ნებისმიერად გადავანაცვლებთ წევრებს, მივიღებთ ახალ ორმაგ მწკრივს (u'_{mn}). ისმის კითხვა: კრებადია თუ არა (u'_{mn}) მწკრივი, და თუ კრებადია, მისი ჯამი ტოლია თუ არა (u_{mn}) მწკრივის ჯამისა? საზოგადოდ ეს ესე არ არის, მაგრამ მართებულია შემდეგი

თეორემა 15. თუ (u_{mn}) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (u'_{mn}) მწკრივიც კრებადია და მას იგივე ჯამი აქვს, რაც (u_{mn}) მწკრივს.

დამტკიცება. (u_{mn}) ორმაგი მწკრივის ყველა წევრიდან შევადგინოთ რაიმე მარტივი მწკრივი (v_p). რადგანაც ორმაგი მწკრივი (u_{mn}) აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ მე-14 თეორემის თანახმად (v_p) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი (u_{mn}) მწკრივის ჯამის ტოლია. შემდეგ, რაკი (u'_{mn}) და (v_p) მწკრივები ერთი და იმავე წევრებისაგან შედგება და (v_p) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ მე-14 თეორემის თანახმად (u'_{mn}) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია და მათ აქვთ ერთი და იგივე ჯამი. მაშასადამე, (u_{mn}) და (u'_{mn}) მწკრივებს ერთი და იგივე ჯამი აქვთ. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. ჰარდის გარდაქმნა

ლემა 1. თუ მოცემულია ორი ორმაგი მიმდევრობა $(u_{ik})_{i,k>0}$ და $(v_{ik})_{i,k>0}$, მაშინ ყოველი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} u_{ik}\, v_{ik} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} s_{ik}\Delta_{11}v_{ik} +$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1} s_{in}\Delta_{10}v_{in}+\sum_{k=0}^{n-1} s_{mk}\,\Delta_{01}\,v_{mk}+s_{mn}\,v_{mn}, \qquad (7.1)$$

სადაც

$$\Delta_{11}v_{ik}=v_{ik}-v_{i+1,k}-v_{i,k+1}+v_{i+1,k+1},$$

$$\Delta_{10}v_{in}=v_{in}-v_{i+1,n},\quad \Delta_{01}v_{mk}=v_{mk}-v_{m,k+1},$$

$$s_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} u_{ik},$$

დამტკიცება. აბელის გარდაქმნის თანახმად

$$\sum_{k=0}^{n} u_{ik} v_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} s'_{ik} \Delta_{01} v_{ik} + s'_{in} v_{in},$$

სადაც

$$s_{in} = u_{i0} + u_{i1} + \cdots + u_{in}.$$

შემდეგ

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} v_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} s'_{ik} \Delta_{01} v_{ik} + \sum_{i=0}^{m} s'_{in} v_{in}.$$

აბელის გარდაქმნის ძალით

$$\sum_{i=0}^{m} s'_{ik} \Delta_{01} v_{ik} = \sum_{i=0}^{m-1} s_{ik} \Delta_{11} v_{ik} + s_{mk} \Delta_{01} v_{mn}.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} v_{ik} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{ik} \Delta_{11} v_{ik} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} s_{mk} \Delta_{01} v_{mk} + \sum_{i=0}^{m} s'_{in} v_{in}.$$

მაგრამ

$$\sum_{i=0}^{m} s'_{in} v_{ik} = \sum_{i=0}^{m-1} s_{in} \Delta_{10} v_{in} + s_{mn} v_{mn}.$$

მაშასადამე, მართებულია (7.1) ტოლობა. ლემა დამტკიცებულია. (7.1) ტოლობას ეწოდება ჰარდის (Hardy) გარდაქმნა.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 6. ნამდვილ რიცხვთა ორმაგ მიმდევრობას $(\alpha_{ik})_{i,k>0}$ ჩვენ ვუწოდებთ კლებადს ვიწრო აზრით, თუ

$$\alpha_{ik} \geqslant \alpha_{i+1,k}, \quad \alpha_{ik} > \alpha_{i,k+1}, \quad \Delta_{11}\alpha_{ik} \geqslant 0 \quad (i,k=0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

ლემა 2. თუ დადებითი $(v_{ik})_{i,k>0}$ მიმდევრობა კლებადია ვიწრო აზრით, ხოლო $(u_{ik})_{i,k>0}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობას

$$\left| \sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} u_{pq} \right| \leqslant A$$

ყოველი i და k-სათვის, სადაც A დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველი ნატურალური m და n რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} v_{ik} \right| \leqslant A v_{00}.$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$s_{ik} = \sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} u_{pq},$$

ჰარდის გარდაქმნის ძალით გვექნება

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{ik} \Delta_{11} v_{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} s_{in} \Delta_{10} v_{in} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} s_{mk} \Delta_{01} v_{mk} + s_{mn} v_{mn}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} v_{ik} \right| \leqslant A \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{11} v_{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \Delta_{10} v_{in} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{0k} v_{mk} + v_{mn} \right\} = A v_{00}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 7. ჩვენ ვიტყვით, რომ ორმაგი მწკრივი (a_{mn}) აკმაყოფილებს აბელის პირობას, თუ

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} \right| \leqslant A \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

სადაც A დადებითი რიცხვია.

თეორემა 16. თუ (a_{mn}) მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას, ხოლო ორმაგი მიმდევრობა $(q_{mn})_{m,n>0}$ კლებადია ვიწრო აზრით, ამასთან,

$$\lim_{m \to \infty} q_{m0} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} q_{0n} = 0,$$

მაშინ ორმაგი მწკრივი $(a_{mn}q_{mn})$ კრებადია და

$$\left|\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\, q_{mn}\right| \leqslant A q_{00}. \tag{7.2}$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, q_{ik},$$

გვექნება

$$S_{m+p,n+q} - S_{mn} = \sum_{i=m+1}^{m+p}\sum_{k=0}^{n+q} a_{ik}\, q_{ik} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=n+1}^{n+q} a_{ik}\, q_{ik}. \tag{7.3}$$

მაგრამ

$$\left|\sum_{i=m+1}^{m+p}\sum_{k=0}^{n+q} a_{ik}\right| = \left|\sum_{i=0}^{m+p}\sum_{k=0}^{n+q} a_{ik} - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+q} a_{ik}\right| \leqslant 2A,$$

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=n+1}^{n+q} a_{ik}\right| = \left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+q} a_{ik} - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\right| \leqslant 2A.$$

(7.3) ჯამისათვის გამოვიყენოთ მე-2 ლემა, გვექნება

$$|S_{m+p,n+q} - S_{mn}| \leqslant 2A q_{m+1,0} + 2A q_{0,n+1}. \tag{7.4}$$

თუ m და n საკმარისად დიდია, მაშინ (7.4) უტოლობის მარჯვენა ნაწილი რაგინდ მცირეა და, მაშასადამე, $(a_{mn}q_m)$ მწკრივი კრებადია.

მეორე მხრივ, მე-2 ლემის თანახმად,

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, q_{ik}\right| \leqslant A q_{00},$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $m,n\to\infty$, მივიღებთ (7.2) შეფასებას.

შედეგი. თუ $(q_{mn})_{m,n\geqslant 0}$ მიმდევრობა კლებადია ვიწრო აზრით და

$$\lim_{m\to\infty} q_{m0}=0,\ \lim_{n\to\infty} q_{0n}=0,$$

მაშინ კრებადია მწკრივები

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q_{mn}\cos mx \cos ny \quad (x\neq 2k\pi,\quad y\neq 2k\pi),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q_{mn} \cos mx \sin ny \quad (x \neq 2k\pi, \quad y\text{—ნებისმიერია}),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q_{mn} \sin mx \cos ny \quad (y \neq 2k\pi, \quad x\text{—ნებისმიერია}).$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q_{mn} \sin mx \sin ny \quad (x \text{ და } y \text{ ნებისმიერია}).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $(q_{mn})_{m,n\geq 1}$ მიმდევრობა, სადაც $q_{mn}=\dfrac{1}{m^2+n^2}$, კლებადია ვიწრო აზრით და, ამის გარდა,

$$\lim_{m\to\infty} q_{m1}=0, \lim_{n\to\infty} q_{1n}=0.$$

$\left(\dfrac{1}{m+n}\right)_{m,n\geq 1}$ მიმდევრობა აგრეთვე კლებადია ვიწრო აზრით და

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}=0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}=0.$$

თეორემა 16. განვიხილოთ ნამდვილწევრებიანი ორმაგი მწკრივი (c_{mn}) და ვიგულისხმოთ, რომ

(a) ორმაგი მიმდევრობა $(|c_{mn}|)_{m,n\geq 0}$ კლებადია ვიწრო აზრით, ამასთან,

$$\lim_{m\to\infty} c_{m0}=0, \lim_{n\to\infty} c_{0n}=0,$$

(b) $c_{mn}>0$, თუ $m+n$ ლუწი რიცხვია და $c_{mn}<0$, როდესაც $m+n$ კენტია. მაშინ (c_{mn}) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება c_{00} რიცხვს.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a_{mn}=(-1)^{m+n}; \; q_{mn}=|c_{mn}|.$$

ცხადია, (a_{mn}) მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას. ამიტომ, მე-15 თეორემის თანახმად ორმაგი მწკრივი $(a_{mn}q_{mn})=(c_{mn})$ კრებადია და მისი ჯამის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება c_{00} რიცხვს. თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა წარმოადგენს ლაიბნიცის თეორემის ანალოგს.

(c_{mn}) მწკრივს, რომლისთვისაც შესრულებულია (b) პირობა, ვუწოდოთ ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, ადვილად მტკიცდება

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m+n+1}$$

მწკრივის კრებადობა. ამ მწკრივის ჯამის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება ერთს.

§ 8. ორმაგი მწკრივების გამრავლება

განვიხილოთ ორმაგი მწკრივები, (u_{ik}) და (v_{ik}). ამ მწკრივების ფორმალური ნამრავლი ეწოდება (w_{ik}) მწკრივს, სადაც

$$w_{ik} = \sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} u_{pq} v_{i-p, k-q}. \tag{8.1}$$

თუ (u_{ik}) და (v_{ik}) მწკრივები კრებადია, (w_{ik}) მწკრივი შეიძლება არ იყოს კრებადი.

ლემა. ნებისმიერი $(u_{mn})_{m,n>0}$ და $(v_{mn})_{m,n>0}$ ორმაგი მიმდევრობებისათვის მართებულია ტოლობა

$$W_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{ik} \ V_{m-i, n-k} \ \ (m,n = 0, 1. 2, \ldots),$$

სადაც

$$V_{pq} = \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} v_{ik}, \ W_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} w_{ik}$$

და w_{ik} განისაზღვრება (8.1) ტოლობით.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$W_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} u_{pq} v_{i-p, k-q} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} u_{00} v_{ik} + u_{01} v_{i, k-1} + \cdots + u_{0k} v_{i0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{i0} v_{0k} + u_{i1} v_{0, k-1} + \cdots + u_{ik} v_{00} \end{matrix} \right\} =$$

$$= u_{00} V_{mn} + u_{01} V_{m, n-1} + \cdots + u_{0n} V_{m0} +$$

$$u_{10} V_{m-1, n} + u_{11} V_{m-1, n-1} + \cdots + u_{1, n-1} V_{m-1, 1} +$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+u_{m0}V_{0n}+u_{m1}V_{0,n-1}+\cdots+u_{mn}V_{00}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{ik}V_{m-i,k-1},$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. ვთქვათ, მოცემულია ორმაგი მწკრივები (u_{ik}) და (v_{ik}). თუ ეს მწკრივები კრებადია და მათი ჯამები შესაბამისად U და V, ამასთან, (u_{ik}) აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო (v_{ik}) მწკრივის კერძო ჯამთა ორმაგი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ (w_{ik}) მწკრივიც კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{i,k=0}^{\infty}w_{ik}=UV. \tag{8.2}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$U_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{ik},\quad V_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}v_{ik},\quad W_{mn}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}w_{ik},$$

სადაც w_{ik} განსაზღვრულია (8.1) ტოლობით.

მე-2 ლემის თანახმად

$$W_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{ik}V_{m-i,n-k}=VU_{mn}+R_{mn},$$

სადაც

$$R_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{ik}(V_{m-i,n-k}-V).$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{m,n\to\infty}R_{mn}=0. \tag{8.3}$$

რაკი (v_{ik}) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|V_{pq}-V|<\frac{\varepsilon}{2M},\ \text{როდესაც}\ p>N,q>N, \tag{8.4}$$

სადაც

$$M=\sum_{i,k=0}^{\infty}|u_{ik}|.$$

შემდეგ, რაკი (u_{ik}) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu \geqslant N$, რომ

$$\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|u_{ik}|+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=\nu+1}^{\infty}|u_{ik}|<\frac{\varepsilon}{2M^*}, \tag{8.5}$$

სადაც

$$M^*=\sup\{|V_{ik}-V|\}_{i,k=0}^{\infty}.$$

ახლა ვთქვათ, რომ $m>2\nu$, $n>2\nu$. მაშინ (8.4) და (8.5) უტოლობების თანახმად

$$|R_{mn}|\leqslant\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}|u_{ik}||V_{m-i,n-k}-V|+$$

$$+\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=\nu+1}^{n}|u_{ik}||V_{m-i,n-k}-V|+\sum_{i=\nu+1}^{m}\sum_{k=0}^{n}|u_{ik}||V_{m-i,n-k}-V|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}|u_{ik}|+M^*\left\{\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=\nu+1}^{n}|u_{ik}|+\sum_{i=\nu+1}^{m}\sum_{k=0}^{n}|u_{ik}|\right\}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად, მართებულია (8.3) ტოლობა. მაშასადამე,

$$\lim_{m,n\to\infty}W_{mn}=\lim_{m,n\to\infty}(VU_{mn}+R_{mn})=UV.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა წარმოადგენს მერტენსის თეორემის ანალოგს.

თეორემა 18. თუ (u_{mn}) და (v_{mn}) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (w_{mn}) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია და მართებულია (8.2) ტოლობა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ორმაგი მწკრივი (W_{mn}^*), სადაც

$$W_{mn}^*=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|u_{ik}v_{m-i,n-k}|.$$

მე-17 თეორემის თანახმად, (W^*_{mn}) მწკრივი კრებადია. შემდეგ, რაკი

$$|W_{mn}| \leqslant W^*_{mn},$$

ამიტომ (W_{mn}) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. (8.2) ტოლობის მართებულობა გამომდინარეობს მე-17 თეორემიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. ორი ცვლადის ორმაგი ხარისხოვანი მწკრივი

ორი x და y ცვლადის ორმაგი ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის ორმაგ მწკრივს:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(x-x_0)^m(y-y_0)^n,$$

სადაც x_0, y_0, a_{mn}—მოცემული რიცხვებია. კერძოდ, თუ $x_0=y_0=0$, გვექნება

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\, x^m y^n. \tag{9.1}$$

თეორემა 10. *თუ (9.1) ორმაგი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $x=x_0\neq 0$, $y=y_0\neq 0$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია ყოველ $M(x, y)$ წერტილში, სადაც $|x|\leqslant|x_0|$, $|y|\leqslant|y_0|$.*

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც აბელის პირველი თეორემა მარტივი მწკრივების შემთხვევაში.

შენიშვნა. თუ (9.1) მწკრივი კრებადია (x_0, y_0) წერტილში, სადაც $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$, მაშინ ეს მწკრივი შეიძლება არამც თუ აბსოლუტურად კრებადი არ იყოს, არამედ უბრალოდ კრებადიც, როდესაც $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$. მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\, x^m y^n,$$

სადაც

$$a_{0n}=n!,\ a_{1n}=-n!,\ a_{mn}=0,\ \text{როდესაც}\ m>1\ (n=0,1,\ldots).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $(a_{mn}x^m y^n)$ მწკრივი კრებადია $x=1$ და $y=0$ წრფეების ყოველ წერტილში და განშლადია xOy სიბრტყის დანარჩენ წერტილებში.

ლემა. თუ ორმაგი ხარისხოვანი მწკრივი (9.1) კრებადია, როცა $|x|<1$, $|y|<1$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n=(1-x)(1-y)\sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn}\,x^m\,y^n, \tag{9.2}$$

სადაც

$$s_{mn}=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{lk},$$

ამასთან, ორივე მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x|<1$, $|y|<1$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $|x|<1$, $|y|<1$. მაშინ მწკრივი $(a_{mn}\,x^m\,y^n)$ აბსოლუტურად კრებადია. შემდეგ, მე-18 თეორემის თანახმად

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n=\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m\,y^n\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn}\,x^m\,y^n,$$

ამასთან უკანასკნელი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, აქედან მიიღება (9.2) ტოლობა.

თეორემა 20. ვთქვათ, ორმაგი მწკრივი (a_{mn}) კრებადია და მისი ჯამია s რიცხვი, ხოლო ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\,x^m\,y^n$$

კრებადია, როდესაც $|x|<1$, $|y|<1$. თუ შესრულებულია პირობები

$$(a)\qquad \sup_{0<x<1}(1-x)\left|\sum_{m=0}^{\infty} s_{mn}\,x^m\right|=p_n<+\infty\quad (n=0,1,\ldots),$$

$$(b)\qquad \sup_{0<y<1}(1-y)\left|\sum_{n=0}^{\infty} s_{mn}\,y^n\right|=q_m<+\infty(m+0,1,\ldots),$$

მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x,y\to 1} f(x, y) = s. \tag{9.3}$$

დამტკიცება. რაკი $(a_{mn}\, x^m\, y^n)$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x| < 1$, $|y| < 1$, ამიტომ, ლემის თანახმად, გვაქვს

$$f(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn}\, x^m\, y^n. \tag{9.4}$$

ცხადია, რომ

$$f(x, y) - s = (1-x)(1-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} (s_{mn} - s) x^m y^n.$$

შემდეგ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ

$$|s_{mn} - s| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ როდესაც } m > \nu, \; n > \nu. \tag{9,5}$$

ახლა $f(x, y) - s$ წარმოვადგინოთ ასე:

$$f(x, y) - s = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) - f_4(x, y),$$

სადაც

$$f_1(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (s_{mn} - s) x^m y^n,$$

$$f_2(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (s_{mn} - s) x^m y^n,$$

$$f_3(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} (s_{mn} - s) x^m y^n,$$

$$f_4(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu} (s_{mn} - s) x^m y^n.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

თუ გამოვიყენებთ (b) პირობას, გვექნება

$$|f_1(x, y)| \leqslant (1-x) \sum_{m=0}^{\nu} q_m x^m + |s|(1-x) \sum_{m=0}^{\nu} x^m.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x,y\to 1} f_1(x, y) = 0. \tag{9.6}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{x,y\to 1} f_2(x, y) = 0. \tag{9.7}$$

შემდეგ, (9.5) უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$|f_3(x, y)| < \varepsilon (1-x)(1-y) \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} x^m y^n < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9.8}$$

დასასრულ ცხადია, რომ

$$\lim_{x,y\to 1} f_4(x, y) = 0, \tag{9.9}$$

მაშასადამე, (9.6), (9.7) და (9.9) ტოლობათა ძალით, აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f_1(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_3(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

როდესაც $1-\eta < x < 1$, $1-\eta < y < 1$. ამ უტოლობებისა და (9.8) უტოლობის თანახმად, გვექნება

$$|f(x, y) - s| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

როდესაც $1-\eta < x < 1$. $1-\eta < y < 1$. ამრიგად, მართებულია (9.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. თუ კრებადი (a_{mn}) ორმაგი მწკრივის კერძო ჯამთა ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n\geq 0}$ შემოსაზღვრულია, მაშინ მართებულია (9.3) ტოლობა.

დამტკიცება. ($a_{mn}x^m y^n$) მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა, როდესაც $|x| < 1$ და $|y| < 1$, ცხადია. შემდეგ,

$$\sup_{0<x<1} (1-x) \left| \sum_{m=0}^{\infty} s_{mn} x^m \right| \leqslant M < +\infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$\sup_{0 \le y < 1} (1-y) \left| \sum_{n=0}^{\infty} s_{mn} y^n \right| \le M < +\infty \quad (m=0, 1, 2, \ldots)$$

სადაც

$$M = \sup \{ |s_{mn}| \}_{m,n=0}^{\infty}.$$

მაშასადამე, შესრულებულია მე-20 თეორემის ყველა პირობა და ამიტომ მართებულია (9.3) ტოლობა.

შენიშვნა 1. მე-20 თეორემაში ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n>0}$ შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$a_{0k} = (-1)^k (2k+1), \quad a_{1k} = (-1)^{k+1} (2k+1), \quad a_{ik} = 0, \text{ როდესაც } i \ge 2$$

ცხადია, რომ

$$s_{0k} = (-1)^k (k+1), \quad s_{ik} = 0, \text{ როდესაც } i \ge 1 \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

და

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} = 0.$$

ამის გარდა, ორმაგი მწკრივი $(a_{mn} x^m y^n)$ აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $|x| < 1$, $|y| < 1$. შემდეგ,

$$p_n = 0 (n=0, 1, 2, \ldots), \quad q_0 = 1, \quad q_m = 0, \text{ როდესაც } m \ge 1.$$

ამრიგად, მე-20 თეორემის პირობები შესრულებულია, მაგრამ ორმაგი მიმდევრობა $(s_{mn})_{m,n>0}$ შემოუსაზღვრელია.

შენიშვნა 2. თუ მე-20 თეორემაში (a) და (b) პირობებიდან ერთი მაინც არ არის შესრულებული, მაშინ თეორემა შეიძლება არ იყოს მართებული. სათანადო მაგალითის აგებას მკითხველს ვანდობთ.

თავი IV

მრავალგანზომილებიანი სივრცის ზოგიერთი საკითხი

§ 1. n-განზომილებიანი სივრცის ცნება

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებსა და ღერძის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობა: ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ღერძის ერთადერთი წერტილი, ღერძის ყოველ წერტილს კი — გარკვეული ნამდვილი რიცხვი.

აღვნიშნოთ R^1-ით ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე. ვთქვათ, $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^1$. არაუარყოფით რიცხვს

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = |x^{(1)} - x^{(2)}| \qquad (1.1)$$

ეწოდება მანძილი $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ რიცხვებს (წერტილებს) შორის. R^1 სიმრავლეს, რომლის ელემენტებს შორის მანძილი განსაზღვრულია (1.1) ფორმულით, უწოდებენ *ევკლიდეს ერთგანზომილებიან სივრცეს*.

ავიღოთ სიბრტყეზე ურთიერთმართობული Ox_1 და Ox_2 ღერძები. ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, რომ სიბრტყეზე მდებარე M წერტილი ცალსახად არის განსაზღვრული ნამდვილი რიცხვების დალაგებული (x_1, x_2) წყვილით. პირიქით, ყოველ დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა (x_1, x_2) წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი M წერტილი. ამის გამო, ხშირად (x_1, x_2) წყვილს სიბრტყის წერტილს უწოდებენ, x_1 და x_2 რიცხვებს კი — M წერტილის კოორდინატებს. სწერენ ასე: $M(x_1, x_2)$. ამრიგად, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნამდვილი რიცხვების დალაგებულ წყვილებსა და სიბრტყის წერტილებს შორის.

აღვნიშნოთ სიბრტყის ყველა წერტილის სიმრავლე R^2-ით. ვთქვათ, $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}),\ M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \in R^2$. არაუარყოფით რიცხვს

$$\rho(M^{(1)}, M^{(2)}) = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})^2} \qquad (1.2)$$

ეწოდება მანძილი $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ და $M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ წერტილებს შორის. R^2 სიმრავლეს, რომლის წერტილებს შორის მანძილი განსაზღვრულია (1.2) ფორმულით, ეწოდება *ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სივრცე*.

ანალოგიურად, თუ სივრცეში ავიღებთ ურთიერთმართობულ Ox_1, Ox_2 და Ox_3 ღერძებს, მაშინ ნამდვილი რიცხვების დალაგებული სამეული (x_1, x_2, x_3) ცალსახად განსაზღვრავს $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილის მდებარეობას სივრცეში და პირიქით. ყველა ასეთი წერტილის სიმრავლეს ჩვეულებრივ R^3-ით აღნიშნავენ. ვთქვათ, $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, $M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) \in R^3$ არის ნებისმიერი ორი წერტილი. R^3 სიმრავლეს, რომლის წერტილთა შორის მანძილი განსაზღვრულია

$$\rho(M^{(1)}, M^{(2)})=\sqrt{(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})^2+(x_2^{(2)}-x_2^{(1)})^2+(x_3^{(2)}-x_3^{(1)})^2} \qquad (1.3)$$

ფორმულით, უწოდებენ *ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეს*.

საზოგადოდ, ვუწოდოთ ნამდვილი რიცხვების დალაგებულ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სისტემას n განზომილებიანი სივრცის M წერტილი, ხოლო თვით ამ რიცხვებს M წერტილის კოორდინატები. ჩავწეროთ ასე: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ყველა M წერტილის სიმრავლე აღვნიშნოთ R^n-ით. ამ სიმრავლის ორი $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$ და $M^{(2)}(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i^{(1)}=x_i^{(2)}$, $i=1,2,\ldots,n$. არაუარყოფით რიცხვს

$$\rho=(M^{(1)}, M^{(2)})=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2} \qquad (1.4)$$

ეწოდება *მანძილი* $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილებს შორის. R^n სიმრავლეს, რომელშიც ორ წერტილს შორის მანძილი განსაზღვრულია (1.4) ფორმულით, ეწოდება *ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცე*.

§ 2. მანძილის ზოგიერთი თვისება

ლემა. თუ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ და $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ *ნამდვილი (ან კომპლექსური) რიცხვებია, მაშინ*[1]

[1] როცა z კომპლექსური რიცხვია, მაშინ $|z|$ სიმბოლო აღნიშნავს z რიცხვის მოდულს.

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(1)}x_i^{(2)}|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(1)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(2)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ნებისმიერი ნამდვილი a და b რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა

$$ab\leqslant\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}, \qquad (2.2)$$

სადაც ტოლობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a=b$. ვთქვათ,

$$a=\frac{|x_i^{(1)}|}{A_1}, \quad b=\frac{|x_i^{(2)}|}{A_2} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

სადაც

$$A_1=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(1)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad A_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(2)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

მაშინ (2.2) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{|x_i^{(1)}x_i^{(2)}|}{A_1A_2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{|x_i^{(1)}|^2}{A_1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{|x_i^{(2)}|^2}{A_2^2}, \quad (i=1, 2, \ldots, n);$$

შევკრიბოთ ეს უტოლობები წევრ-წევრად, გვექნება

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(1)}x_i^{(2)}|}{A_1A_2}\leqslant 1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (2.1). ცხადია, (2.1) ფორმულაში ტოლობა მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i^{(1)}=\mu x_i^{(2)}$ ($i=1, 2, \ldots, n$), სადაც μ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

(2.1) უტოლობას ეწოდება შვარცის (Schwarz) უტოლობა.

შევნიშნოთ, რომ (1.4) ტოლობით განსაზღვრულ მანძილს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})\geqslant 0$, ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

მართლაც, როცა $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილები ერთმანეთს არ ემთხვევა, მაშინ, როგორც (1.4) ტოლობიდან ვხედავთ, $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})>0$. თუ $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ $x_i^{(1)}=x_i^{(2)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, და (1.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$\rho(M^{(1)}, M^{(2)})=0$. პირიქით, თუ $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})=0$, მაშინ, (1.4) ტოლობიდან მივიღებთ $x_i^{(1)}=x_i^{(2)}$, $i=1, 2, \ldots, n$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. ხშირად 1) თვისებას უწოდებენ მანძილის არაუარყოფითობის აქსიომას.

2) $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})=\rho(M^{(2)}, M^{(1)})$, რომლის მართებულობა გამომდინარეობს (1.4) ტოლობიდან. ამ თვისებას ეწოდება მანძილის სიმეტრიულობის აქსიომა.

3) თუ $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\ldots, x_n^{(1)})$, $M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)},\ldots, x_n^{(2)})$, $M^{(3)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)},\ldots, x_n^{(3)}) \in R^n$ სამი ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\rho(M^{(1)}, M^{(2)})\leqslant\rho(M^{(1)}, M^{(3)})+\rho(M^{(3)}, M^{(2)}). \tag{2.3}$$

მართლაც, გვაქვს

$$\rho(M^{(1)}, M^{(2)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)}-x_i^{(2)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(x_i^{(1)} - x_i^{(3)})+ \right.$$

$$\left. + (x_i^{(3)} - x_i^{(2)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ [\rho(M^{(1)}, M^{(3)})]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)}-x_i^{(3)}) (x_i^{(3)} - \right.$$

$$\left. -x_i^{(2)})+[\rho(M^{(3)}, M^{(2)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

მაგრამ, (2.1) უტოლობის ძალით, დავწერთ

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)}-x_i^{(3)})(x_i^{(3)}-x_i^{(2)})\leqslant\rho(M^{(1)}, M^{(3)})\rho(M^{(3)}, M^{(2)})$$

და წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$\rho(M^{(1)}, M^{(2)})\leqslant\{[\rho(M^{(1)}, M^{(3)})]^2+2\rho(M^{(1)}, M^{(3)})\rho(M^{(3)},M^{(2)})+$$

$$+[\rho(M^{(3)}, M^{(2)})]^2\}^{\frac{1}{2}}=\rho(M^{(1)}, M^{(3)})+\rho(M^{(3)}, M^{(2)}).$$

(2,3) უტოლობით გამოთქმულ თვისებას უწოდებენ მანძილის სამკუთხედის აქსიომას.

ამ აქსიომის სახელწოდება წარმოქმნილია იქიდან, რომ, თუ $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)} \in R^2$, მაშინ, (2.3) თვისების ძალით, $M^{(1)} M^{(2)} M^{(3)}$ სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე არ აღემატება დანარჩენი გვერდების სიგრძეების ჯამს.

ნებისმიერი ელემენტებისაგან შედგენილ Ω სიმრავლეს მეტრიკული სივრცე ეწოდება, თუ ყოველ ორ $M^{(1)}, M^{(2)} \in \Omega$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ ისეთი არაუარყოფითი ნამდვილი $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})$ რიცხვი, რომ შესრულებული იყოს 1)—3) აქსიომები.

რაკი R^n სივრცეში (1.4) ტოლობით განსაზღვრული მანძილისათვის მართებულია 1)—3) აქსიომები, ამიტომ R^n მეტრიკული სივრცეა.

§ 3. წრფივი მრავალსახეობა

მრავალი ცვლადის ფუნქციების შესწავლისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს გეომეტრიის ზოგიერთ საკითხს R^n სივრცეში.

განსაზღვრა. იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა ყველა კოორდინატი გამოისახება ერთი t პარამეტრის წრფივი ფუნქციებით, ვუწოდოთ R^n სივრცის ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა (წრფე):

$$x_i = k_i t + a_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ და $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ამასთან, k_i რიცხვთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ე. ი. $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 > 0$. პარამეტრი t იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, რიცხვები $x_1, x_2, \ldots, x_n$ წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია.

(3.1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობის (წრფის) განტოლებები R^n სივრცეში. კერძოდ, როცა $n=2$, მაშინ მივიღებთ წრფის პარამეტრულ განტოლებებს R^2 სიბრტყეზე; როცა $n=3$ წრფის პარამეტრულ განტოლებებს R^3 სივრცეში.

განსაზღვრა. იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა ყველა კოორდინატი გამოისახება $t_1, t_2, \ldots, t_k$ პარამეტრების წრფივი ფუნქციებით, ვუწოდოთ R^n სივრცის k-განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობა:

$$x_i = b_i + a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \cdots + a_{ik}t_k \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3.2}$$

სადაც $k \leqslant n$, $t_j \in]-\infty, +\infty[$, b_i—ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ნებისმიერი a_{ij} ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთადერთ პირობას: მრავალსახეობის მდე-

ბ ა რ ე ო ბ ა R^n ს ი ვ რ ც ე შ ი დ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ უ ლ ი ა მ ხ ო ლ ო დ k პ ა რ ა მ ე ტ რ ი თ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: როცა $k=n$ მივიღებთ თვით R^n სივრცეს. ამრიგად, R^n არის n-განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობა.

(3.2) სისტემას უწოდებენ k-განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობის განტოლებებს პარამეტრული სახით.

ზოგჯერ ხელსაყრელია წრფივი მრავალსახეობის განტოლებები ჩავწეროთ მხოლოდ მისი წერტილების კოორდინატებით. ამისათვის (3.2) სისტემიდან უნდა გამოვრიცხოთ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ პარამეტრები. გამოვყოთ (3.2) სისტემიდან ისეთი k განტოლებების ქვესისტემა, რომლის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. ამრიგად მიღებული ქვესისტემიდან განვსაზღვროთ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ პარამეტრები და შევიტანოთ მათი მნიშვნელობანი (3.2) სისტემაში, მივიღებთ

$$C_{r1}x_1+C_{r2}x_2+\cdots+C_{rn}x_n+d_r=0, \quad r=1, 2, \ldots n-k, \tag{3.3}$$

სადაც C_{ri} კოეფიციენტები გამოისახება (3.2) სისტემის b_i და a_{ij} კოეფიციენტებით.

§ 4. ამოცანები

1. ვ ი პ ო ვ ო თ ყ ვ ე ლ ა ი მ წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა, რ ო მ ე ლ ი ც გ ა ი ვ ლ ი ს მ ო ც ე მ უ ლ $M^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე.

მოცემულ წერტილზე გამავალ წრფეთა ოჯახს ეწოდება წ რ ფ ე თ ა კ ო ნ ა, ხოლო მოცემულ წერტილს—კ ო ნ ი ს ც ე ნ ტ რ ი.

დავწეროთ პირობა იმისა, რომ (3.1) წრფემ გაიაროს მოცემულ წერტილზე:

$$x_i^{(0)}=k_it_0+a_i, \quad i=1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

სადაც t_0 არის t პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება მოცემულ წერტილს. ახლა თუ (3.1) განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ (4.1) ტოლობებს, მივიღებთ

$$x_i-x_i^{(0)}=k_i(t-t_0), \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

რომელიც წარმოადგენს საძიებელი კონის განტოლებას. კონის ყოველ კონკრეტულ წრფეს შეესაბამება $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვების გარკვეული მნიშვნელობანი და პირიქით.

2. ვ ი პ ო ვ ო თ ო რ მ ო ც ე მ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე გ ა მ ა ვ ა ლ ი წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. ვთქვათ, R^n სივრცეში მოცემულია ორი

წერტილი $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\dots, x_n^{(1)})$ და $M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)},\dots, x_n^{(2)})$. ამ წერტილებზე გამავალი წრფე ეწოდება ყველა იმ M წერტილის სიმრავლეს, რომელთა $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ კოორდინატები დააკმაყოფილებს სისტემას

$$x_i=x_i^{(1)}+(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})t, \quad i=1, 2,\dots, n, \tag{4.3}$$

სადაც t პარამეტრი იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

თუ (4.3) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფის კანონიკურ განტოლებას

$$\frac{x_1-x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}-x_1^{(1)}}=\frac{x_2-x_2^{(1)}}{x_2^{(2)}-x_2^{(1)}}=\dots=\frac{x_n-x_n^{(1)}}{x_n^{(2)}-x_n^{(1)}}.$$

ყველა იმ M წერტილის სიმრავლეს, რომელთა $x_1, x_2,\dots,x_n$ კოორდინატები აკმაყოფილებს (4.3) სისტემას, ამასთან $0\leqslant t\leqslant 1$ ეწოდება $M^{(1)}M^{(2)}$ *მონაკვეთი*. იგი ძევს $M^{(1)}$ და $M^{(2)}$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე.

3. *შევადგინოთ $n-1$-განზომილებიანი იმ წრფივი L_{n-1} მრავალსახეობის განტოლება, რომელიც R^n სივრცის მოცემულ n წერტილზე გაივლის.*

ვთქვათ, მოცემულია წერტილები

$$M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\dots, x_n^{(1)}),\ M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)},\dots,x_n^{(2)}),\dots,$$

$$M^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},\dots, x_n^{(n)}).$$

რაკი, მოყვანილი ამოცანის შესაბამისად, განტოლებათა (3.3) სისტემაში $k=n-1$, ამიტომ საძიებელი მრავალსახეობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება

$$C_0+C_1x_1+\dots+C_nx_n=0, \tag{4.4}$$

რომელშიც $C_0, C_1,\dots,C_n$ კოეფიციენტები ისე უნდა განისაზღვროს, რომ L_{n-1} მრავალსახეობამ გაიაროს მოცემულ წერტილებზე. ამისათვის, ცხადია, ისინი უნდა გამოვთვალოთ სისტემიდან

$$C_0+C_1x_1^{(i)}+C_2x_2^{(i)}+\dots+C_nx_n^{(i)}=0, \quad i=1, 2,\dots,n. \tag{4.5}$$

როგორც ცნობილია, როცა

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი უდრის n-ს, მაშინ (4.5) სისტემას აქვს (მუდმივი მამრავლის სიზუსტით) ერთადერთი ამონახსნი C_0, $C_1, \ldots, C_n$ უცნობების მიმართ. ამოვხსნით რა (4.5) სისტემას ამ უცნობების მიმართ და შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს (4.4) განტოლებაში, მივიღებთ L_{n-1} მრავალსახეობის განტოლებას. იგი იქნება ერთადერთი.

როცა Δ მატრიცის რანგი n-ზე ნაკლებია, მაშინ (4.5) სისტემას C_0, $C_1, \ldots, C_n$ უცნობების მიმართ აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. ამ შემთხვევაში არსებობს უსასრულო სიმრავლე L_{n-1} მრავალსახეობებისა, რომლებიც გაივლიან მოცემულ წერტილებზე.

4. მოვძებნოთ პირობა იმისა, რომ R^n სივრცის $n-1$-განზომილებიანი წრფივი L_{n-1} მრავალსახეობა მოიცავდეს $n-k$-განზომილებიან წრფივ L_{n-k} მრავალსახეობას.

ვთქვათ,

$$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n=0 \tag{4.6}$$

არის L_{n-1} მრავალსახეობის განტოლება, ხოლო

$$C_{i1}x_1+C_{i2}x_2+\cdots+C_{in}x_n=0, \quad i=1, 2, \ldots, k \tag{4.7}$$

L_{n-k} მრავალსახეობის განტოლება. რაკი $L_{n-k} \subset L_{n-1}$, ამიტომ $x_1, \ldots, x_n$ კოორდინატების ის მნიშვნელობანი, რომლებიც (4.7) სისტემას აკმაყოფილებენ, დააკმაყოფილებენ აგრეთვე (4.6) განტოლებასაც. სხვანაირად, (4.6) განტოლება შედეგია (4.7) სისტემისა, ე. ი. C_1, $C_2, \ldots, C_n$ კოეფიციენტები წრფივად გამოისახება (4.7) სისტემის კოეფიციენტებით:

$$C_i=\lambda_1C_{1i}+\lambda_2C_{2i}+\cdots+\lambda_kC_{ki}; \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

სადაც $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$—წრფივი დამოკიდებულების კოეფიციენტებია. ამრიგად, როცა (4.6) და (4.7) განტოლებების კოეფიციენტებისათვის შესრულებულია (4.8) პირობები, მაშინ L_{n-1} მრავალსახეობა მოიცავს L_{n-k} მრავალსახეობას.

§ 5. ვექტორები n-განზომილებიან სივრცეში

ავიღოთ R^n სივრცეში ორი წერტილი $M^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ და $M^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$. ერთ-ერთი მათგანი მივიჩნიოთ $M^{(1)}M^{(2)}$ მონაკვეთის საწყის წერტილად, ხოლო მეორე — ბოლო წერტილად. მაშინ $M^{(1)}M^{(2)}$ მონაკვეთს გარკვეული გეზი ენიჭება და ამ შემთხვევაში მას ვექტორი ეწოდება. ვთქვათ, $M^{(1)}$ არის $M^{(1)}M^{(2)}$ მონაკვეთის საწყისი წერტილი, $M^{(2)}$—ბოლო წერტილი, მაშინ ამ ვექტორს $\overline{M^{(1)}M^{(2)}}$ სიმ-

ბოლოთი აღნიშნავენ. რიცხვებს $x_1^{(2)}-x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}-x_2^{(1)},\ldots$, $x_n^{(2)}-x_n^{(1)}$ ეწოდება $\overline{M^{(1)}M^{(2)}}$ ვექტორის კომპონენტები. ზოგჯერ მოხერხებულია ვექტორი ერთი ასოთი აღვნიშნოთ, მაგალითად, $\vec{P}$-თი, ან $\vec{Q}$-თი და ა. შ. ვექტორი $\vec{P}$, რომლის კომპონენტებია x_1, $x_2,\ldots,x_n$ აღინიშნება $\vec{P}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ სიმბოლოთი. ორი ვექტორი ურთიერთტოლია, თუ მათი შესაბამისი კომპონენტები ერთმანეთის ტოლია. ისეთ ვექტორს, რომლის ყველა კომპონენტი ნულია, ეწოდება ნულოვანი ვექტორი. ქვევით ნულოვან ვექტორს აღვნიშნავთ $\vec{0}$-თი.

$M^{(1)}M^{(2)}$ მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება $\overline{M^{(1)}M^{(2)}}$ ვექტორის სიგრძე და აღინიშნება $|\overline{M^{(1)}M^{(2)}}|$ სიმბოლოთი. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\vec{P}=M^{(1)}M^{(2)}$, $X_1=x_1^{(2)}-x_1^{(1)}$, $X_2=x_2^{(2)}-x_2^{(1)},\ldots, X_n=x_n^{(2)}-x_n^{(1)}$, მაშინ

$$|\vec{P}|=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}.$$

§ 6. არითმეტიკული მოქმედებანი ვექტორებზე

თუ $\vec{P}$ ვექტორის საწყისი წერტილი ნებისმიერად შეიძლება იქნეს აღებული R^n სივრცეში, მაშინ მას ეწოდება თავისუფალი ვექტორი. მოცემულია ვექტორი ნიშნავს, რომ მოცემულია მისი კომპონენტები.

შემოვიღოთ ვექტორთა ჯამის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია ორი $\vec{P}=(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ და $\vec{Q}=(Y_1, Y_2,\ldots,Y_n)$ თავისუფალი ვექტორი. $\vec{P}$ ვექტორის საწყისი ავიღოთ $M^{(1)}$ წერტილში, ხოლო ბოლო—$M^{(2)}$ წერტილში. $\vec{Q}$ ვექტორის საწყისი წერტილი მოვათავსოთ $\vec{P}$ ვექტორის ბოლო $M^{(2)}$ წერტილში, ხოლო მისი ბოლო წერტილი იყოს $M^{(3)}$. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ჯამი $\vec{P}+\vec{Q}$ ეწოდება $\overline{M^{(1)}M^{(3)}}$ ვექტორს. თუ $\vec{P}+\vec{Q}$ ვექტორის კომპონენტებს $Z_1, Z_2,\ldots,Z_n$ რიცხვებით აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება

$$Z_1=X_1+Y_1,\ Z_2=X_2+Y_2,\ldots,Z_n=X_n+Y_n.$$

რაკი განსაზღვრული გვაქვს ორი ვექტორის ჯამი, ანალოგიურად განისაზღვრება სასრული რიცხვის ვექტორების ჯამიც. თუ მოცემულია ვექტორები

$$\vec{P}_1=(X_1^{(1)}, X_2^{(1)},\ldots,X_n^{(1)}),\ \vec{P}_2=(X_1^{(2)}, X_2^{(2)},\ldots,X_n^{(2)}),\ldots,$$

$$\vec{P}_k=(X_1^{(k)}, X_2^{(k)},\ldots, X_n^{(k)}),$$

რომელთა ჯამი იყოს $\overrightarrow{P}=(X_1, X_2 \cdots, X_n)$, მაშინ გვექნება

$$X_1=\sum_{r=1}^{k} X_1^{(r)},\ X_2=\sum_{r=1}^{k} X_2^{(r)},\ldots,X_n=\sum_{r=1}^{k} X_n^{(r)}.$$

ვექტორთა ჯამს აქვს შემდეგი მარტივი თვისებები:

1. $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{P}$, ე. ი. ვექტორთა ჯამი დამოუკიდებელია შეკრების რიგისაგან. ამ თვისებას ვექტორთა შეკრების კომუტატიურობის კანონი ეწოდება.

2. ნებისმიერი სამი $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ და $\overrightarrow{R}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q})+\overrightarrow{R}=\overrightarrow{P}+(\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{R})$, რომელსაც ვექტორთა შეკრების ასოციატურობის კანონი ეწოდება.

ახლა განვსაზღვროთ ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი. რაიმე λ რიცხვისა და $\overrightarrow{P}=(X_1, X_2,\cdots,X_n)$ ვექტორის ნამრავლი (ან $\overrightarrow{P}$ ვექტორისა და λ რიცხვის ნამრავლი) ეწოდება ისეთ $\overrightarrow{Q}$ ვექტორს, რომლის კომპონენტები მიიღება $\overrightarrow{P}$ ვექტორის კომპონენტების λ რიცხვზე გამრავლებით. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\overrightarrow{Q}=\lambda\overrightarrow{P}=\overrightarrow{P}\lambda.$$

განსაზღვრის თანახმად

$$\overrightarrow{Q}=(\lambda X_1,\ \lambda X_2,\ldots,\lambda X_n).$$

რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლისათვის შესრულებულია შემდეგი ტოლობები:

1) ნებისმიერი ნამდვილი λ და μ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lambda(\mu\overrightarrow{P})=(\lambda\mu)\overrightarrow{P}.$$

ეს ტოლობა გამოსახავს გამრავლების ასოციატურობის კანონს.

2) ნებისმიერი $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{P}_1$, $\overrightarrow{P}_2$ ვექტორებისათვის გვაქვს

$$(\lambda+\mu)\overrightarrow{P}=\lambda\overrightarrow{P}+\mu\overrightarrow{P},\ \lambda(\overrightarrow{P}_1+\overrightarrow{P}_2)=\lambda\overrightarrow{P}_1+\lambda\overrightarrow{P}_2,$$

რომელიც წარმოადგენს გამრავლების დისტრიბუტიულობის კანონს.

3) $1\cdot\overrightarrow{P}=\overrightarrow{P}$;

4. $0\cdot\vec{P}=\vec{\theta}$ ყოველი $\vec{P}$ ვექტორისათვის, სადაც $\vec{\theta}$ ნულოვანი ვექტორია;

5. თუ $\lambda\vec{P}=\vec{\theta}$ და $\vec{P}\neq\vec{\theta}$; მაშინ $\lambda=0$;

6. $\vec{P}+\vec{\theta}=\vec{\theta}+\vec{P}=\vec{P}$ ყოველი $\vec{P}$ ვექტორისათვის.

ვექტორი $(-1)\vec{P}$ აღინიშნება $-\vec{P}$ სიმბოლოთი და მას $\vec{P}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი ეწოდება. ცხადია, თუ $\vec{P}=(X_1X_2,\cdots X_n)$, მაშინ $-\vec{P}=(-X_1,-X_2,\cdots,-X_n)$.

აგრეთვე ცხადია, რომ

$$\vec{P}+(-\vec{P})=\vec{\theta}.$$

ორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორის $\vec{P}_1-\vec{P}_2$ სხვაობა ეწოდება ისეთ $\vec{P}$ ვექტორს, რომელიც შეკრებილი $\vec{P}_2$ ვექტორთან გვაძლევს $\vec{P}_1$ ვექტორს. მაშასადამე, $\vec{P}$ ვექტორი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\vec{P}_2+\vec{P}=\vec{P}_1. \tag{6.1}$$

ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\vec{P}=\vec{P}_1+(-\vec{P}_2). \tag{6.2}$$

მართლაც, თუ (6.1) განტოლებაში $\vec{P}$-ს ნაცვლად შევიტანთ $\vec{P}_1+(-\vec{P}_2)$ გამოსახულებას, მივიღებთ

$$\vec{P}_2+[\vec{P}_1+(-\vec{P}_2)]=\vec{P}_2+[(-\vec{P}_2)+\vec{P}_1]=[\vec{P}_2+(-\vec{P}_2)]+$$

$$+\vec{P}_1=\vec{\theta}+\vec{P}_1=\vec{P}_1.$$

მაშასადამე, $\vec{P}_1+(-\vec{P}_2)$ ვექტორი არის (6.1) განტოლების ამონახსნი და ამიტომ მართებულია (6.2) ტოლობა. ამრიგად,

$$\vec{P}_1+(-\vec{P}_2)=\vec{P}_1-\vec{P}_2.$$

§ 7. ვექტორთა ჯამისა და რიცხვის ვექტორზე ნამრავლის თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}=(X_1, X_2,\cdots,X_n)$ და $\vec{Q}=(Y_1, Y_2,\cdots,Y_n)$. იტყვიან, რომ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, თუ ნებისმიერი ნამდვილი λ რიცხვისათვის $\lambda\vec{Q}-\vec{P}\neq\theta$. პირიქით, თუ არსებობს ნამდვილი რიცხვი λ ისეთი,

რომ $\lambda\vec{Q}-\vec{P}=\theta$, მაშინ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$-ს ეწოდება **წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი** ვექტორები.

თეორემა 1. მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა უ ტ ო ლ ო ბ ა

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \leqslant |\vec{P}||\vec{Q}|, \tag{7.1}$$

ა მ ა ს თ ა ნ ტ ო ლ ო ბ ა ს ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს მ ა შ ი ნ დ ა მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო ც ა $\vec{P}$ დ ა $\vec{Q}$ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი ა.

ცხადია, თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წრფივად დამოკიდებული ვექტორებია, მაშინ (7.1) ფორმულაში ადგილი აქვს ტოლობას. პირიქით, თუ (7,1) ფორმულაში ავიღებთ ტოლობას, მაშინ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ აღმოჩნდება წრფივად დამოკიდებული ვექტორები.

ახლა ვთქვათ, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. მაშინ გვექნება

$$0<|\lambda\vec{Q}-\vec{P}|^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda Y_i-X_i)^2=$$

$$=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}X_iY_i+\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$

აქ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს λ-ს მიმართ კვადრატულ სამწევრს, რომელსაც, პირობის ძალით, არა აქვს ნამდვილი ფესვები. მაშასადამე, სამწევრის დისკრიმინანტი უარყოფითია, ე. ი.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{i=1}^{n}Y_i^2<0.$$

აქედან მივიღებთ (7.1).

თეორემა 2. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $\vec{P}$ დ ა $\vec{Q}$ ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა უ ტ ო ლ ო ბ ა

$$|\vec{P}+\vec{Q}|\leqslant|\vec{P}|+|\vec{Q}|. \tag{7.2}$$

მართლაც, გვაქვს

$$|\vec{P}+\vec{Q}|^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iY_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\leqslant$$

$$\leqslant|\vec{P}|^2+2|\vec{P}||\vec{Q}|+|\vec{Q}|^2=(|\vec{P}|+|\vec{Q}|)^2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (7.2).

თეორემა 3. ნებისმიერი λ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$|\lambda\vec{P}|=|\lambda||\vec{P}|.$$

დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ რაკი $\lambda\vec{P}=(\lambda X_1, \lambda X_2,\ldots, \lambda X_n)$ ამიტომ

$$|\lambda\vec{P}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda X_i)^2}=\sqrt{\lambda^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}=|\lambda||\vec{P}|.$$

§ 8. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

$$\vec{P}=(X_1, X_2,\ldots, X_n) \text{ და } \vec{Q}=(Y_1, Y_2,\ldots, Y_n).$$

ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება $\sum_{i=1}^{n} X_iY_i$ რიცხვს და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$(\vec{P}, \vec{Q})=\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

მოვიყვანოთ სკალარული ნამრავლის რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ $(\vec{P}, \vec{P})\geqslant 0$, ამასთან $(\vec{P}, \vec{P})=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{P}=\theta$. გარდა ამისა, ცხადია,

$$|\vec{P}|=\sqrt{(\vec{P}, \vec{P})}.$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 4. ნებისმიერი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებისათვის მართებულია ტოლობა

$$(\vec{P}, \vec{Q})=(\vec{Q}, \vec{P}).$$

მართლაც, გვაქვს

$$(\vec{P}, \vec{Q})=\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i=\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i=(\vec{Q}, \vec{P}).$$

თეორემა 5. ნებისმიერი ნამდვილი λ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$(\lambda\vec{P}, \vec{Q})=(\vec{P}, \lambda\vec{Q})=\lambda(\vec{P}, \vec{Q}).$$

წინა თეორემის ძალით საკმარისია დავამტკიცოთ ტოლობა

$$(\lambda\vec{P},\ \vec{Q})=\lambda(\vec{P},\ \vec{Q}).$$

ეს უკანასკნელი კი გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$(\lambda\vec{P},\ \vec{Q})=\sum_{i=1}^{n}(\lambda X_i)Y_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=\lambda(\vec{P},\ \vec{Q}).$$

თეორემა 6. ნებისმიერი $\vec{P}_1=(X_1^{(1)},\ X_2^{(1)},\dots,\ X_n^{(1)})$, $\vec{P}_2=(X_1^{(2)},\ X_2^{(2)},\dots X_n^{(2)})$, $\vec{Q}=(Y_1,\ Y_2,\dots,\ Y_n)$ ვექტორებისათვის მართებულია ტოლობა $(\vec{P}_1+\vec{P}_2,\ \vec{Q})=(\vec{P}_1,\ \vec{Q})+(\vec{P}_2,\ \vec{Q})$.

თანახმად სკალარული ნამრავლის განსაზღვრისა, გვაქვს

$$(\vec{P}_1+\vec{P}_2,\ \vec{Q})=\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(1)}+X_i^{(2)})Y_i=\sum_{i=1}^{n}X_i^{(1)}Y_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}X_i^{(2)}Y_i=(\vec{P}_1,\ \vec{Q})+(\vec{P}_2,\ \vec{Q}).$$

შედეგი. თუ $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ და $\vec{P}$ ნებისმიერი სამი ვექტორია, მაშინ

$$(\vec{P},\ \vec{Q}_1+\vec{Q}_2)=(\vec{P},\ \vec{Q}_1)+(\vec{P},\ \vec{Q}_2).$$

თეორემა 7. ნებისმიერი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებისათვის მართებულია ტოლობა

$$(\vec{P},\ \vec{Q})=\frac{|\vec{P}+\vec{Q}|^2-|\vec{P}-\vec{Q}|^2}{4}. \tag{8.1}$$

მართლაც, გვაქვს

$$|\vec{P}+\vec{Q}|^2=(\vec{P}+\vec{Q},\ \vec{P}+\vec{Q})=(\vec{P},\ \vec{P})+2(\vec{P},\ \vec{Q})+(\vec{Q},\ \vec{Q})$$

და

$$|\vec{P}-\vec{Q}|^2=(\vec{P},\ \vec{P})-2(\vec{P},\ \vec{Q})+(\vec{Q},\ \vec{Q}).$$

თუ პირველ ტოლობას გამოვაკლებთ მეორეს და შედეგს გავყოფთ ოთხზე, მივიღებთ (8.1).

§ 9. კუთხე ორ ვექტორს შორის

ვთქვათ, $\vec{P}=(X_1,\ X_2,\dots,X_n)$ და $\vec{Q}=(Y_1,\ Y_2,\dots,\ Y_n)$ მოცემული არანულოვანი ვექტორებია. ϑ კუთხეს, რომლის კოსინუსი განსაზღვრულია ტოლობით

$$\cos\vartheta = \frac{(\vec{P}_1\ \vec{Q})}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{9.1}$$

ეწოდება $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

რაკი (7.1) უტოლობის ძალით

$$|(\vec{P}, \vec{Q})| \leqslant |\vec{P}||\vec{Q}|$$

და $\vec{P}$ და $\vec{Q} \neq \vec{\theta}$, ამიტომ (9.1) უტოლობას აქვს აზრი. შევნიშნოთ, რომ თუ შესრულებულია პირობა $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, მაშინ (9.1) ტოლობით ცალსახად განისაზღვრება ϑ კუთხე. იმ შემთხვევაში, როცა $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ე. ი., როცა

$$(\vec{P}, \vec{Q}) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 0,$$

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს ურთიერთმართობული ეწოდება.

§ 10. ერთეული ვექტორები

ავიღოთ R^n სივრცეში ისეთი $\vec{e}$ ვექტორი, რომლის სიგრძე $|\vec{e}| = 1$. ამ შემთხვევაში $\vec{e}$ ვექტორს ეწოდება ერთეული ვექტორი. მაგალითად, ვექტორები

$$\vec{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

ერთეული ვექტორებია, ამასთან ისინი ურთიერთმართობულია, ვექტორთა $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ სისტემას ეწოდება R_n სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი. მოვდოთ ეს ვექტორები $O(0, 0, \ldots, 0)$ წერტილზე და ყოველ მათგანზე გავავლოთ წრფე, რომელსაც მივანიჭოთ შესაბამისი ერთეული ვექტორის მიმართულება. მიღებული ღერძები აღვნიშნოთ სათანადოდ $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$. ისინი ურთიერთმართობულია

და იკვეთება O წერტილში, რომელსაც ვუწოდოთ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ე.

ამრიგად, მსგავსად ორი ან სამგანზომილებიანი სივრცისა, R^n სივრცეში შეგვიძლია განვიხილოთ კოორდინატთა ღერძების $Ox_1x_2\cdots x_n$ სისტემა.

ორ წრფეს ვუწოდოთ ურთიერთპარალელური R^n სივრცეში, თუ მათზე მდებარე ერთეული ვექტორები ტოლია ან მოპირდაპირე.

თეორემა 7. R^n ს ი ვ რ ც ე შ ი მ დ ე ბ ა რ ე ყ ო ვ ე ლ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი $\vec{P}=(X_1, X_2\cdots X_n)$ შ ე გ ვ ი ძ ლ ი ა დ ა ვ შ ა ლ ო თ ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ბ ა ზ ი ს ი ს მ ი ხ ე დ ვ ი თ შ ე მ დ ე გ ნ ა ი რ ა დ:

$$\vec{P}=X_1\vec{e_1}+X_2\vec{e_2}+\cdots+X_n\vec{e_n}.$$

მართლაც, გვაქვს

$$X_1\,\vec{e_1}=(X_1,0,0,\ldots,0),\ X_2\vec{e_2}=$$

$$=(0,\ X_2,\ 0,\ldots,0),\ldots,\ X_n\vec{e_n}=(0,\ 0,\ 0,\ldots,\ X_n).$$

ამიტომ

$$X_1\vec{e_1}+X_2\vec{e_2}+\cdots+X_n\vec{e_n}=(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)=\vec{P}$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

აღვნიშნოთ $\vec{P}$ და $\vec{e_k}$ $(k=1,\ 2.\ldots,\ n)$ ვექტორებს შორის კუთხე φ_k-თი, მაშინ (9.1) ტოლობის მიხედვით, გვექნება

$$\cos\varphi_k=\frac{(\vec{P},\ \vec{e_k})}{|\vec{P}||\vec{e_k}|}.$$

ვინაიდან $(\vec{P},\ \vec{e_k})=X_k$ და $|\vec{e_k}|=1$, ამიტომ

$$\cos\varphi_k=\frac{X_k}{|\vec{P}|}=\frac{X_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}},\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

ამ ტოლობებით განსაზღვრულ $\cos\varphi_k$ სიდიდეებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ე ბ ი. შევნიშნოთ მიმართულების კოსინუსების შემდეგი თვისება:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\varphi_k=1.$$

ამრიგად, $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსების კვადრატების ჯამი უდრის ერთს.

§ 11. წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების სისტემა

ზევით (იხ. § 7) გავეცანით ორი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის ცნებას, ახლა იგივე საკითხი შევისწავლოთ უფრო დაწვრილებით.

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორთა სისტემა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, რომელთა რიცხვია m. ვიტყვით, რომ R_n სივრცის რაიმე $\vec{P}$ ვექტორი წრფივად გამოისახება მოცემული სისტემის ვექტორებით, თუ არსებობს ნამდვილი რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{P}_i.$$

ვექტორთა მოცემული სისტემა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ წრფივად დამოუკიდებელია, თუ სისტემის არც ერთი ვექტორი წრფივად არ გამოისახება დანარჩენი $m-1$ ვექტორის საშუალებით. m რიცხვს ვექტორთა სისტემის რანგი ეწოდება.

თუ ვექტორთა მოცემული სისტემა მოიცავს არანაკლებ $k<m$ ვექტორს, რომელთა საშუალებით წრფივად გამოისახება დანარჩენი $m-k$ ვექტორი, მაშინ იტყვიან, რომ მოცემული სისტემის ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. ამ შემთხვევაში ვექტორთა მოცემული სისტემის რანგი უდრის k.

გამოვიყვანოთ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისა და წრფივად დამოკიდებულების პირობები.

ვთქვათ, $\vec{P}_i = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)})$, სადაც $i=1, 2, \ldots, m$. თუ ვექტორთა მოცემული სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ არსებობს რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{P}_i = \vec{\theta}, \tag{11.1}$$

სადაც $\vec{\theta}$ არის R^n სივრცის ნულოვანი ვექტორი.

დავშალოთ სისტემის ყოველი ვექტორი სივრცის ორთონორმირებული ბაზისის მიხედვით:

$$\vec{P}_i = \sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)} \vec{e}_j, \quad i=1, 2, \ldots, m$$

და ჩავსვათ (11.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)} \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i X_j^{(i)}) \vec{e}_j = \vec{\theta}.$$

საიდანაც გვექნება

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_j^{(i)} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.2}$$

განვიხილოთ (11.2) სისტემის თავსებადობის შესაძლო შემთხვევები.

1°. ვთქვათ, $m > n$. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში (11.2) სისტემას უსათუოდ ექნება არატრივიალური ამონახსნი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ უცნობების მიმართ. მართლაც, განვიხილოთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \ldots & X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \ldots & X_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n^{(1)} & X_n^{(2)} & \ldots & X_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

თუ $\Delta = 0$, მაშინ (11.2) სისტემაში დავუშვათ, რომ $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_m = 0$. ამით (11.2) სისტემიდან მივიღებთ განტოლებათა ისეთ ერთგვაროვან სისტემას, რომლის სისტემის დეტერმინანტი $\Delta = 0$. როგორც ცნობილია, ასეთ სისტემას აქვს არატრივიალური ამონახსნი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ვექტორთა მოცემული სისტემის უკვე პირველი n ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (11.2) სისტემაში დავუშვათ, რომ $\lambda_{n+1} = 1$, ხოლო $\lambda_{n+2} = \lambda_{n+3} = \ldots = \lambda_m = 0$. განტოლებათა (11.2) სისტემიდან მივიღებთ არაერთგვაროვან სისტემას, რომლის სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. ასეთ სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსნი დანარჩენი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ უცნობების მიმართ. ამრიგად, R^n სივრცეში $n+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ყოველი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, მაშინ R^n სივრცის ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი გამოისახება მათი წრფივი კომბინაციით:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{P}_i,$$

სადაც ξ_i გარკვეული რიცხვებია.

2°. ვთქვათ $m = n$. ამ შემთხვევაში (11.2) სისტემის არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$\Delta=0$. სხვანაირად, ვექტორთა მოცემული სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\Delta \neq 0$.

8°. ახლა ვთქვათ $m<n$, ე. ი. (11.2) სისტემაში განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს. ასეთი სისტემის არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის რანგი იყოს m-ზე ნაკლები. ამრიგად, ვექტორთა მოცემული სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ (11.2) სისტემის მატრიცის ერთ-ერთი m რიგის დეტერმინანტი განსხვავდებოდეს ნულისაგან.

§ 12. n-განზომილებიანი სეგმენტი და სფერო

განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვები $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n$, სადაც

$$a_i<b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

n-განზომილებიანი $\bar{I}=[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n]$ სეგმენტი ეწოდება ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ხოლო n-განზომილებიანი $I=]a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n\ b_n[$ ინტერვალი არის ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ წერტილის სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$a_i<x_i<b_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

კერძოდ, როცა $n=1$, მაშინ $\bar{I}=[a_1\ b_1]$ სეგმენტი წარმოადგენს a_1 და b_1 რიცხვებს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, რომელსაც a_1 და b_1 რიცხვებიც ეკუთვნის, ხოლო $I=]a_1, b_1[$ ინტერვალია a_1 და b_1 რიცხვებს შორის მოთავსებული ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე, რომელსაც არ ეკუთვნის a_1 და b_1 რიცხვები.

თუ $n=2$, მაშინ $\bar{I}=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ სეგმენტი იქნება მართკუთხედი, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ხოლო $I=]a_1, b_1; a_2, b_2[$ ინტერვალი მართკუთხედია, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ამასთან მართკუთხედის გვერდებზე მდებარე წერტილები მას არ ეკუთვნის.

$c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ წერტილს, სადაც

$$c_i=\frac{a_i+b_i}{2} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

ვუწოდებთ $\bar{I}$ სეგმენტის (I ინტერვალის) ცენტრს,

$$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

გამოსახულებას კი $\bar{I}$ სეგმენტის (I ინტერვალის) ფართობს და მას აღვნიშნავთ $|\bar{I}|$ ან $|I|$ სიმბოლოთი.

n-განზომილებიან სივრცეში r-რადიუსიანი **სფერო**, ცენტრით $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ეწოდება ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-c_i)^2\leqslant r^2,$$

ხოლო ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-c_i)^2<r^2$$

— **ღია სფერო**, c ცენტრით და r რადიუსით.

ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-c_i)^2=r^2$$

ეწოდება **სფერული ზედაპირი**.

ერთგანზომილებიან სივრცეში სფეროს წარმოადგენს რიცხვითი წრფის მონაკვეთი, ხოლო მისი საზღვარია ამ მონაკვეთის ბოლო წერტილები.

ორგანზომილებიან სივრცეში სფერო არის წრე, მისი საზღვარი კი წრეწირია.

§ 13. წერტილის მიდამო

R^n სივრცის M წერტილის **მართკუთხოვანი მიდამო** ეწოდება M წერტილის შემცველ ყოველ n-განზომილებიან ინტერვალს, ხოლო ამავე წერტილის **სფერული მიდამო** M წერტილის შემცველ ნებისმიერ ღია სფეროს.

ცხადია ერთსა და იმავე წერტილს აქვს უამრავი როგორც მართკუთხოვანი, ისე სფერული მიდამო.

თეორემა 8. **თუ S არის M წერტილის r რადიუსიანი სფერული მიდამო, მაშინ არსებობს ამ წერტილის მართკუთხოვანი მიდამოც, რომლის ყველა წერტილი S მიდამოს ეკუთვნის.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, S სფეროს ცენტრია M_0 წერტილი. რაკი M ღია S სფეროს წერტილია და M_0 მისი ცენტრი, ამიტომ

$$\varepsilon = r - \rho(M, M_0) > 0.$$

ახლა განვიხილოთ ε რადიუსიანი ღია S^* სფერო ცენტრით M წერტილში. ადვილად დავინახავთ, რომ S^* სფეროს ყოველი წერტილი S სფეროს ეკუთვნის. მართლაც, S^* სფეროს ნებისმიერი M^* წერტილისათვის გვაქვს

$$\rho(M_0, M^*) \leqslant \rho(M_0, M) + \rho(M, M^*) < \rho(M_0, M) + \varepsilon = r.$$

მაშასადამე, $M^* \in S$.

ვთქვათ, M წერტილის კოორდინატებია $c_1, c_2, \ldots, c_n$. განვიხილოთ შემდეგი n-განზომილებიანი ინტერვალი:

$$I = \left] c_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ c_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}; \ldots; c_n - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ c_n + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right[.$$

ამ ინტერვალის ცენტრია M წერტილი და, მაშასადამე, ეს ინტერვალი M წერტილის მართკუთხოვანი მიდამოა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $I \subset S^*$. ამისათვის ავიღოთ I ინტერვალის ნებისმიერი $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი. მართებულია შემდეგი უტოლობები

$$c_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < x_i < c_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$|x_i - c_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ამ უკანასკნელი უტოლობების გამოყენებით მივიღებთ

$$\rho(M, p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} n} = \varepsilon.$$

მაშასადამე, $p \in S^* \subset S$.

ამრიგად, I ინტერვალის ყოველი წერტილი S სფეროს ეკუთვნის, ე. ი. $I \subset S$. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა M წ ე რ ტ ი ლ ი ს რ ა ი მ ე მართკუთხოვანი I მიდამო, მაშინ მოიძებნება ამავე წერტილის ისეთი სფერული S მიდამო, რომელიც I მიდამოში მოთავსდება.

როგორც ვხედავთ, აღებული M წერტილის ყოველი მართკუთხოვანი I მიდამოსათვის არსებობს ამავე წერტილის ისეთი სფერული S მიდამო, რომელიც I მიდამოშია მოთავსებული და, პირიქით, M წერტილის ყოველი სფერული S მიდამოსათვის არსებობს ამავე წერტილის მართკუთხოვანი I მიდამო, რომელიც მოთავსებულია S მიდამოში.

შემდეგში გამოვიყენებთ ზოგჯერ წერტილის სფერულ მიდამოს, ზოგჯერ კი მართკუთხოვანს.

§ 14. ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები

R^n სივრცეში ავიღოთ წერტილთა უსასრულო E სიმრავლე. ამ სივრცის რაიმე p წერტილს ეწოდება E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. თვითონ p წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს და შეიძლება არ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

თუ სიმრავლე შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს, მაშინ მას ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება. მაგალითად, ყოველი სეგმენტი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

E სიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილის სიმრავლეს წარმოებული სიმრავლე ეწოდება და იგი E' სიმბოლოთი აღინიშნება.

$E \cup E'$ სიმრავლეს ეწოდება E სიმრავლის ჩაკეტვა და აღინიშნება $\overline{E}$ სიმბოლოთი.

E სიმრავლის რაიმე p წერტილს ეწოდება განმხოლოებული წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, გარდა თვით p წერტილისა. მაშასადამე, განმხოლოებული წერტილი არ შეიძლება იყოს დაგროვების წერტილი E სიმრავლისათვის.

R^n სივრცის რაიმე p წერტილს ეწოდება E სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ მოიძებნება ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეს ეკუთვნის.

სიმრავლეს ღია სიმრავლე ეწოდება, თუ იგი შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან. მაგალითად, ყოველი n-განზომილებიანი ინტერვალი წარმოადგენს ღია სიმრავლეს R^n სივრცეში. ასევე, n-განზომილებიანი ღია სფეროც ღია სიმრავლეა R^n სივრცეში.

R^n სივრცის რაიმე p წერტილს ეწოდება E სიმრავლის გარე წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, ხოლო R^n სივრცის

რაიმე p_0 წერტილს ეწოდება E სიმრავლის **სასაზღვრო წერტილი**, თუ იგი არ არის E სიმრავლის არც შიგა და არც გარე წერტილი. მაგალითად, თუ E არის წრე, მაშინ E სიმრავლის სასაზღვრო წერტილებია წრის კონტურის წერტილები.

E სიმრავლის სასაზღვრო წერტილების სიმრავლეს E სიმრავლის **საზღვარი** ეწოდება.

R^n სივრციდან აღებულ რაიმე E სიმრავლეს **შემოსაზღვრული** ეწოდება, თუ არსებობს n-განზომილებიანი ისეთი სეგმენტი, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ყველა წერტილს[1].

თეორემა 10. **R^n სივრცის ნებისმიერი E სიმრავლის საზღვარი ჩაკეტილი სიმრავლეა.**

დამტკიცება. E სიმრავლის საზღვარი აღვნიშნოთ E_g-თი და განვიხილოთ E_g სიმრავლის ნებისმიერი დაგროვების წერტილი p. მაშინ p წერტილის ყოველი S მიდამო შეიცავს E_g სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. ვთქვათ, q არის E_g სიმრავლის რაიმე წერტილი, რომელიც S მიდამოშია მოთავსებული. ცხადია, S წარმოადგენს აგრეთვე q წერტილის მიდამოსაც. რაკი q არის E სიმრავლის სასაზღვრო წერტილი, ამიტომ მისი S მიდამო შეიცავს როგორც E სიმრავლის წერტილებს, ისე ისეთ წერტილებს, რომლებიც არ ეკუთვნის E სიმრავლეს. მაშასადამე, p წარმოადგენს E სიმრავლის სასაზღვრო წერტილს და ამიტომ $p \in E_g$. ამრიგად, E_g სიმრავლე შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს. ამით E_g სიმრავლის ჩაკეტილობა დამტკიცებულია.

შედეგი. **თუ R^n სივრცეში აღებულ ნებისმიერ E სიმრავლეს დავუმატებთ მის საზღვარს, მივიღებთ ჩაკეტილ სიმრავლეს.**

მართლაც, ყოველი p წერტილი, რომელიც $E \cup E_g$ სიმრავლეს არ ეკუთვნის, არის E სიმრავლის გარე წერტილი და ამიტომ იგი არ შეიძლება დაგროვების წერტილი იყოს არც E და არც E_g სიმრავლისათვის. მაშასადამე, $E \cup E_g$ სიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილი ამ სიმრავლეს ეკუთვნის.

R^n სივრცის წერტილთა რაიმე L სიმრავლეს **ტეხილი** ეწოდება, თუ L წარმოადგენს მონაკვეთთა ჯამს, ამასთანავე ამ მონაკვეთებიდან ყოველ მათგანს ერთი საერთო წერტილი აქვს რომელიმე სხვა მონაკვეთთან.

---

[1] ამ განსაზღვრაში n-განზომილებიანი სეგმენტის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ n-განზომილებიანი სფერო.

R^n სივრცეში აღებული რაიმე ღია G სიმრავლეს **ბმული სიმრავლე** ეწოდება, თუ ამ სიმრავლის ყოველი ორი წერტილის შეერთება შეიძლება G სიმრავლეში მოთავსებული ტეხილი წირით. ბმულ ღია სიმრავლეს **არე** ეწოდება.

თუ არეს დავუმატებთ მის საზღვრით წერტილებს, მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც **დახურული არე** ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$E \cup E_g = \bar{E}.$$

§ 15. წერტილთა მიმდევრობა

განვიხილოთ R^n სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots \tag{15.1}$$

ვიტყვით, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია $M^* \in R^n$ წერტილისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\rho(M^*, M_k) < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad k > N. \tag{15.2}$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{k \to \infty} M_k = M^*.$$

თუ M_k და M^* წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ და $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, მაშინ (15.2) უტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^*)^2} < \varepsilon, \quad \text{როცა } k > N.$$

თეორემა 8. **წერტილთა (15.1) მიმდევრობა კრებადია M^* წერტილისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა**

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.3}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ (15.1) მიმდევრობა კრებადია M^* წერტილისაკენ. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^*)^2} < \varepsilon, \text{ როცა } k > N$$

აქედან გამომდინარეობს

$$|x_i^{(k)}-x_i^*|<\varepsilon, \quad \text{როცა } k>N \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს (15.3) ტოლობებს. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ მართებულია (15.3) ტოლობები. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$|x_i^{(k)}-x_i^*|<\frac{\varepsilon}{n}, \; k>N, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{15.4}$$

მაგრამ

$$\rho(M_k, M^*)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i^*)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i^*|.$$

აქედან, თანახმად (15.4) უტოლობებისა, გვაქვს

$$\rho(M_k, M^*)<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad k>N,$$

ე. ი.

$$\lim_{k\to\infty} M_k = M^*.$$

ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ (15.1) მიმდევრობა კრებადია რაიმე M^* წერტილისაკენ, მაშინ მისი ყოველი ქვემიმდევრობაც კრებადია იმავე M^* წერტილისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$M_{n_1}, \; M_{n_2}, \ldots, \; M_{n_k}, \ldots \tag{15.5}$$

არის (15.1) მიმდევრობის ნებისმიერი ქვემიმდევრობა. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\rho(M_\nu, M^*)<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \nu>N.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი ნატურალური N^*, რომ, როცა $k>N^*$ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $n_k>N$, მაშინ

$$\rho(M_{n_k}, M^*)<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad k>N^*. \tag{15.6}$$

ამრიგად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ვიპოვეთ ისეთი ნატურალური N^* რიცხვი, რომ ადგილი აქვს (15.6) უტოლობას. ეს

კი იმას ნიშნავს, რომ (15.5) მიმდევრობა კრებადია M^* წერტილისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. *ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, (15.1) მიმდევრობა, გარდა M^* წერტილისა, კრებადია მეორე M^{**} წერტილისაკენ. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\rho(M_n, M^*) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(M_n, M^{**})< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n>N.$$

თუ M_n. M^*, M^{**} წერტილებზე გამოვიყენებთ სამკუთხედის აქსიომას და უკანასკნელ უტოლობებს გვექნება

$$\rho(M^*, M^{**})\leqslant\rho(M_n, M^*)+\rho(M_n, M^{**})<\varepsilon, \quad \text{როცა } n>N.$$

რაკი M^* და M^{**} გარკვეული წერტილებია, ხოლო ε—ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობა შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა $M^*=M^{**}$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა. წერტილთა (15.1) მიმდევრობას ეწოდება *შემოსაზღვრული*, თუ $\{M_1, M_2,\ldots,M_n,\ldots\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

თეორემა 12. *წერტილთა (15.1) მიმდევრობის შემოსაზღვრულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ისეთი დადებითი A რიცხვის არსებობა, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს*

$$|x_i^{(k)}|\leqslant A, \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad k=1, 2, 3,\ldots \qquad (15.7)$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, (15.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს n განზომილებიანი ისეთი სეგმენტი $[-A, A; -A, A;\ldots,-A, A]$, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს (15.1) მიმდევრობის ყველა წევრს, ამიტომ

$$-A\leqslant x_i^{(k)}\leqslant A, \quad i=1, 2,\ldots,n; \quad k=1, 2, 3,\ldots,$$

ე. ი. მართებულია (15.7) უტოლობები. იმით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (15.7) უტოლობებს. მაშინ

$$-A\leqslant x_i^{(k)}\leqslant A, \quad i=1, 2,\ldots, n; \quad k=1, 2, 3,\ldots$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი M_k წერტილი ეკუთვნის n-განზომილებიან $[-A, A; -A, A; \ldots; -A, A]$ სეგმენტს, ე. ი. (15.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და თეორემაც დამტკიცებულია.

თეორემა 13. წერტილთა ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (15.1) მიმდევრობა კრებადია M^* წერტილისაკენ. მაშინ მე-9 თეორემის ძალით

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი A რიცხვი, რომ

$$|x_i^{(k)}| < A, \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

მაშასადამე, მე-13 თეორემის ძალით, (15.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

განსაზღვრა. წერტილთა (15.1) მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური მიმდევრობა, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\rho(M_i, M_k) < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad i > N, \quad k > N.$$

თეორემა 14. წერტილთა (15.1) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს ფუნდამენტალური მიმდევრობა.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, (15.1) მიმდევრობა კრებადია M^* წერტილისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\rho(M_\nu, M^*) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad \nu > N.$$

მაშასადამე, ყოველი i და k-თვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $i > N$ და $k > N$ გვაქვს

$$\rho(M_i, M^*) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(M_k, M^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობებისა და (2.3) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ

$$\rho(M_i, M_k) \leq \rho(M_i, M^*) + \rho(M^*, M_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

როცა $i > N$, $k > N$.

ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, (15.1) მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. მაშინ ყოველი დადებითი ε

რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\rho(M_i, M_k)<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad i>N, \quad k>N,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\{(x_1^{(i)}-x_1^{(k)})^2+(x_2^{(i)}-x_2^{(k)})^2+\ldots+(x_n^{(i)}-x_n^{(k)})^2\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

როცა $i>N$, $k>N$, საიდანაც

$$|x_j^{(i)}-x_j^{(k)}|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad i>N, \quad k>N, \quad (j=1, 2,\ldots, n).$$

მაშასადამე, თანახმად კოშის თეორემისა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ, არსებობს ზღვრები $\lim\limits_{m\to\infty} x_j^{(m)}$ $(j=1, 2,\ldots, n)$ და ამიტომ (15.1) მიმდევრობა კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

ვინაიდან R^n სივრცის ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია ამავე სივრცის გარკვეული წერტილისაკენ, ამიტომ R^n-ს უწოდებენ სრულ სივრცეს.

ასევე, თუ R^n სივრცის ჩაკეტილი Ω სიმრავლის ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია Ω სიმრავლის წერტილისაკენ, მაშინ Ω-ს ეწოდება სრული სიმრავლე.

თეორემა 15. წერტილთა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წერტილთა მიმდევრობა აღებულია ორგანზომილებიანი R^2 სივრციდან. ვთქვათ,

$$M_1=(x_1, y_1), \; M_2=(x_2, y_2),\ldots, \; M_n=(x_n, y_n),\ldots \tag{15.8}$$

არის წერტილთა შემოსაზღვრული მიმდევრობა. ამ მიმდევრობასთან ერთად განვიხილოთ რიცხვთა შემდეგი ორი მიმდევრობა:

$$x_1\, x_2,\ldots, x_n,\ldots, \tag{15.9}$$

$$y_1, y_2,\ldots, y_n,\ldots \tag{15.10}$$

რაკი (15.8) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ (15.9) და (15.10) მიმდევრობებიც შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, (15.9) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე x^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$x_{n_1}, \; x_{n_2},\ldots, x_{n_k},\ldots \tag{15.11}$$

რიცხვთა (15.11) მიმდევრობას შეესაბამება (15.10) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა:

$$y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots \tag{15.12}$$

ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე y^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$y_{n_{k_1}}, y_{n_{k_2}}, \ldots, y_{n_{k_j}}, \ldots \tag{15.13}$$

რიცხვთა (15.13) მიმდევრობას შეესაბამება (15.11) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, x_{n_{k_j}}, \ldots$$

ეს მიმდევრობა კრებადია x^* წერტილისაკენ.

განვიხილოთ ახლა წერტილთა მიმდევრობა

$$M_{n_{k_1}}, M_{n_{k_2}}, \ldots, M_{n_{k_j}}, \ldots$$

ეს მიმდევრობა წარმოადგენს (15.8) მიმდევრობის ქვემიმდევრობას, რომელიც კრებადია $M^*=(x^*, y^*)$ წერტილისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 16. კომპაქტური სიმრავლე

ვთქვათ, Ω არის R^n სივრცის რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე. მაშინ Ω სიმრავლის წერტილთა ყოველი მიმდევრობაც იქნება შემოსაზღვრული. ზევით დამტკიცებული მე-15 თეორემის ძალით Ω სიმრავლის წერტილთა ყოველი მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა. ამის გამო Ω სიმრავლეს ეწოდება *კომპაქტური სიმრავლე R^n სივრცეში*. ამრიგად, R^n სივრცის ყოველი შემოსაზღვრული სიმრავლე კომპაქტური სიმრავლეა. კერძოდ, თუ Ω ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშინ მას *თავის თავში კომპაქტური* სიმრავლე ეწოდება. ამ შემთხვევაში, უბრალოდ ვიტყვით, რომ Ω არის *კომპაქტური სიმრავლე*, ანუ კომპაქტი.

მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა R^1 სივრცის ყოველი $]a, b[$ ინტერვალი კომპაქტური სიმრავლეა R^1 სივრცეში.

ცხადია, რომ თუ Ω_1 და Ω_2 არის R^n სივრცის ნებისმიერი ორი სიმრავლე, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ და Ω_1 კომპაქტურია Ω_2 სიმრავლეში, მაშინ Ω_1 კომპაქტური იქნება R^n სივრცეშიც. თუ Ω_1 კომპაქტური არ არის Ω_2 სიმრავლეში, შეიძლება კომპაქტური იყოს R^n სივრცეში.

შევნიშნოთ, რომ R^n სივრცის ყოველი სასრული Ω სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი უსასრულო მიმდევრობა არის კომპაქტური მიმდევრობა. მართლაც, ვთქვათ Ω სიმრავლის ელემენტებია $M^{(1)}$, $M^{(2)}, \ldots, M^{(N)}$, განვიხილოთ ამ ელემენტებისაგან შედგენილი ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობა $\{M'_k\}$. ცხადია, ამ უსასრულო მიმდევრობაში ერთ-ერთი ელემენტი მაინც, მაგალითად, $M^{(k)} \in \Omega$, განმეორდება უსასრულო რიცხვჯერ, ე. ი. $\{M'_k\}$ მიმდევრობა შეიცავს ისეთ $\{M'_{k_\alpha}\}$ ქვემიმდევრობას, რომლის ელემენტები ტოლია $M'_{k_1} = M'_{k_2} = \ldots = M'_{k_\alpha} = \ldots = M^{(k)}$. ცხადია, $\lim\limits_{\alpha\to\infty} M_{k_\alpha} = M^{(k)}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ Ω სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყოველი უსასრულო მიმდევრობა მუდამ შეიცავს ამავე სიმრავლის რომელიმე ელემენტისაკენ კრებად ქვემიმდევრობას.

თეორემა 16. R^n სივრცის ყოველი კომპაქტური Ω სიმრავლე შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, Ω კომპაქტურია, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული. ავიღოთ Ω სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი $M^{(1)}$ და რიცხვი $r_1=1$. ვინაიდან Ω არ არის შემოსაზღვრული, ამიტომ შეუძლებელია $S(M^{(1)}; r_1)$ სფერო შეიცავდეს Ω სიმრავლის ყველა ელემენტს. ვთქვათ, $M^{(2)} \in \Omega$ და $M^{(2)} \overline{\in} S(M^{(1)}, r_1)$. მაშინ $\rho(M^{(1)}, M^{(2)}) > r_1$. ავაგოთ ახალი $S(M^{(2)}; r_2)$ სფერო, სადაც $r_2 = \rho(M^{(1)}, M^{(2)}) + 1$. ცხადია, რომ შეუძლებელია $S(M^{(2)}; r_2)$ სფერო შეიცავდეს მთელ Ω სიმრავლეს. ვთქვათ, $M^{(3)} \in \Omega$ და $M^{(3)} \overline{\in} S(M^{(2)}; r_2)$. ცხადია, $\rho(M^{(1)}, M^{(3)}) > r_2$. ახლა ავაგოთ $S(M^{(3)}, r_3)$ სფერო, სადაც $r_3 = \rho(M^{(1)}, M^{(3)}) + 1$ და გავაგრძელოთ მომდევნო სფეროების აგებისა და მსჯელობის ეს პროცესი უსასრულოდ. ამის შედეგად წარმოიქმნება Ω სიმრავლის ელემენტების უსასრულო $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობა და რიცხვთა ზრდადი ისეთი უსასრულო მიმდევრობა, რომ $\rho(M^{(1)}, M^{(n)}) = r_n - 1 > r_{n-1}$. ახლა, თუ $n > m > 2$, გვექნება $\rho(M^{(1)}, M^{(n)} \geqslant r_{n+1} > r_m$. გამოვიყენოთ $M^{(1)}$, $M^{(m)}$, $M^{(n)}$ ელემენტებზე სამკუთხედის აქსიომა. გვექნება

$$\rho(M^{(1)}, M^{(n)}) \leqslant \rho(M^{(1)}, M^{(m)}) + \rho(M^{(m)}, M^{(n)}),$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ: $\rho(M^{(m)}, M^{(n)}) \geqslant 1$. ეს იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია $(M^{(n)})$ მიმდევრობიდან გამოვყოთ რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობა და, მითუმეტეს შეუძლებელია ამ მიმდევრობიდან გამოიყოს რაიმე კრებადი ქვემიმდევრობა, ამრიგად ჩვენ ავაგეთ ელემენტთა ისეთი უსასრულო მიმდევრობა $(M^{(n)})_{n>1} \subset \Omega$, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ კრებად ქვემიმდევრობას. გამოდის, რომ Ω არ

არის კომპაქტური სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. R^n **სივრცის ყოველი ჩაკეტილი კომპაქტური** Ω **სიმრავლე სრული სიმრავლეა.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $(M^{(k)})_{k>1}\subset\Omega$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა. რაკი Ω კომპაქტურია, ამიტომ ამ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი (M^{k_s}) ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვრული ელემენტი აღვნიშნოთ $M^*\in\Omega$. მაშინ გვექნება $\lim\limits_{k_s\to\infty}\rho(M^{(k_s)}, M^*)=0$. გარდა ამისა, ვინაიდან $(M^{(k)})_{k>1}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, ამიტომ

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k_s\to\infty}}\rho(M^{(k)}, M^{(k_s)})=0.$$

ახლა $M^{(k)}$, M^* და $M^{(k_s)}$ ელემენტებზე გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა, გვექნება

$$\rho(M^{(k)}, M^*)\leqslant\rho(M^{(k)}, M^{(k_s)})+\rho(M^{(k_s)}, M^*).$$

თუ აქ გადავალთ ზღვარზე, როცა $k, k_s\to\infty$, წინა შენიშვნების ძალით, მივიღებთ

$$\lim_{k\to\infty}\rho(M^{(k)}, M^*)=0.$$

მაშასადამე, Ω სიმრავლის ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ Ω სრული სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 17. სიმრავლის კომპაქტურობის პირობები

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი

განსაზღვრა. ვთქვათ, $\Omega\subset R^n$ რაიმე სიმრავლეა, ხოლო ε-ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. ვიტყვით, რომ $A\subset R^n$ სიმრავლე წარმოადგენს Ω სიმრავლის ε ბადეს, თუ ნებისმიერი $M\in\Omega$ ელემენტისათვის არსებობს ერთი მაინც ისეთი $a\in A$ ელემენტი, რომ $\rho(M, a)\leqslant\varepsilon$.

თუ A სასრული სიმრავლეა, მაშინ Ω სიმრავლეს ეწოდება **სრულად შემოსაზღვრული სიმრავლე.**

დავამტკიცოთ

თეორემა 18. R^n **სივრცის** Ω **სიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი** $\varepsilon>0$ **რიცხვისათვის არსებობდეს** Ω **სიმრავლის სასრული** ε **ბადე** $A\subset R^n$.

დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ Ω კომპაქტურია R^n სივრცეში, მაგრამ არსებობს ერთი მაინც $\varepsilon^*>0$ რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს Ω სიმრავლის სასრული ε^* ბადე R^n სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი $M^{(1)}\in\Omega$ ელემენტი. მაშინ Ω სიმრავლე შეიცავს ერთ ისეთ $M^{(2)}$ ელემენტს მაინც, რომ $\rho(M^{(1)}, M^{(2)})>\varepsilon^*$. ასეთი $M^{(2)}\in\Omega$ ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ Ω სიმრავლისათვის იარსებებს სასრული ε^* ბადე, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთადერთ $M^{(1)}$ ელემენტს. გამოვყოთ ახლა ისეთი $M^{(3)}\in\Omega$ ელემენტი, რომ $\rho(M^{(1)}M^{(3)})>\varepsilon^*$ და $\rho(M^{(2)}, M^{(3)})>\varepsilon^*$. ცხადია, $M^{(3)}$ ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ Ω სიმრავლისათვის იარსებებს სასრული ε^* ბადე, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ორ $M^{(1)}, M^{(2)}\in\Omega$ ელემენტს. თუ ასე გავაგრძელებთ Ω სიმრავლის ელემენტების გამოყოფას, მივიღებთ ელემენტების უსასრულო $(M^{(n)})_{n>1}\subset\Omega$ მიმდევრობას, რომელსაც ექნება შემდეგი თვისებები: 1) როცა $m\neq n$, მაშინ $\rho(M^{(n)}, M^{(m)})>\varepsilon^*$, 2) ნებისმიერი $\{M^{(n_k)}\}$ ქვემიმდევრობისათვის, როცა $n_s\neq n_r$, გვაქვს $\rho(M^{(n_r)}, M^{(n_s)})>\varepsilon^*$. ამრიგად, დაშვებამ მიგვიყვანა შემდეგ დასკვნამდე: Ω სიმრავლეში შესაძლოა გამოვყოთ ელემენტების უსასრულო $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობა, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ კრებად ქვემიმდევრობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ Ω არ არის კომპაქტური სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას, პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა, ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს Ω სიმრავლის სასრული ε ბადე R^n სივრცეში. ვთქვათ, $(M^{(n)})_{n>1}\subset\Omega$ არის ნებისმიერი მიმდევრობა. ვუჩვენოთ, რომ მისგან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1°. ვთქვათ, $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობა შეიცავს ტოლი ელემენტების უსასრულო $M, M, \ldots, \subset(M^{(n)})_{n>1}$ ქვემიმდევრობას. მაშინ $\{M\}$ ქვემიმდევრობა კრებადია M ელემენტისაკენ და წინადადება ამ შემთხვევაში დამტკიცებულია.

2°. ვთქვათ, ახლა $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობა შეიცავს ჯგუფებს, რომელთა რიცხვი თვლადია და თითოეული ჯგუფი ტოლი ელემენტებისაგან შედგება. იგულისხმება, რომ ყოველი ასეთი ჯგუფი შეიცავს ტოლი ელემენტების სასრულ რიცხვს. ასე რომ არ იყოს, მაშინ საქმე გვექნებოდა უკვე განხილულ შემთხვევასთან. ცხადია, რომ ზოგიერთი ჯგუფი შეიძლება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგებოდეს. ავიღოთ ამ ჯგუფებიდან თითო-თითო ელემენტი, მივიღებთ $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობის

უსასრულო ქვემიმდევრობას, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $(M^{(n)})_{n>1}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ამ ქვემიმდევრობის ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

ვინაიდან Ω სიმრავლისათვის არსებობს სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$ ბადე, ამიტომ არსებობს ჩაკეტილი სფეროების სასრული რიცხვი, რომელთა რადიუსებია $\frac{\varepsilon}{2}$ და, რომლებიც შეიცავენ Ω სიმრავლის ყველა ელემენტს. ცხადია, ეს სფეროები, კერძოდ, შეიცავენ $(M^{(n)})_{n>1}$ მიმდევრობასაც. რაკი სფეროების რიცხვი სასრულია, ამიტომ ერთი მათგანი მაინც, ვთქვათ, $\bar{S}_1$, შეიცავს $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს. ავიღოთ ახლა სფეროები, რომელთა ცენტრები არიან $\bar{S}_1$ სფეროს სხვადასხვა წერტილები და ერთნაირი რადიუსები $\frac{\varepsilon}{2^2}$. ამ სფეროების რიცხვი სასრულია. ისე როგორც ზემოთ, მათგან ერთ-ერთი $\bar{S}_2$ სფერო შეიცავს $\{M^{(n)}\}$ მიმდევრობის ისეთი ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც $\bar{S}_1$ სფეროში უკვე მოხვდა. ასევე ავაგოთ შემდეგი $\bar{S}_3$ სფერო $\frac{\varepsilon}{2^3}$ რადიუსით. ეს უკანასკნელი შეიცავს $(M^{(n)})_{n>1}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც წინამავალ $\bar{S}_2$ და $\bar{S}_1$ სფეროებში უკვე შედის. მივიღებთ სფეროების უსასრულო $\{\bar{S}_n\}$ მიმდევრობას, რომელშიც $\bar{S}_n$ სფეროს რადიუსი უდრის $\frac{\varepsilon}{2^n}$. გარდა ამისა, ყოველი $\bar{S}_n$ შეიცავს $(M^{(n)})_{n>1}$ მიმდევრობის ელემენტების ისეთ უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ყველა წინამავალ $\bar{S}_k (k<n)$ სფეროებსაც ეკუთვნის. ახლა $(\bar{S}_n)_{n>1}$ მიმდევრობის ყოველი სფეროდან თითო-თითო $M^{(n_k)}$ ელემენტი ნებისმიერად ავირჩიოთ. ასე წარმოიქმნება ელემენტების უსასრულო $(M^{(n_k)})_{k>1}$ ქვემიმდევრობა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ როცა $k<i$, მაშინ $n_k<n_i$, გვექნება $\bar{S}_i \subset \bar{S}_k$. ავიღოთ $(M^{(n_k)})_{k>1}$ მიმდევრობის ორი ნებისმიერი $M^{(n_k)} \in \bar{S}_k$ და $M^{(n_i)} \in \bar{S}_i$ ელემენტი; ცხადია, რომ $M^{(n_i)} \in \bar{S}_k$. რაკი $\bar{S}_k$ სფეროს დიამეტრი უდრის $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^k}$, ამიტომ $\rho(M^{(n)}, M^{(n_k)}) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. როგორც ჩანს $(M^{(n)})_{n>1}$ მიმდევრობიდან გამოყოფილი $(M^{(n_k)})_{k>1}$ ქვემიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, ვინაიდან R^n სრული სივრცეა, ამიტომ იგი კრებადია: თეორემა დამტკიცებულია.

§ 18. მანძილი სიმრავლეთა შორის

ავიღოთ R^n სივრცეში რაიმე Ω სიმრავლე და $M^{(0)}$ წერტილი. აღვნიშნოთ H-ით $\rho(M^{(0)}, M)$ რიცხვთა სიმრავლე, სადაც M გაირბენს Ω სიმრავლის ყველა ელემენტს. H სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება მ ა ნ ძ ი ლ ი $M^{(0)}$ წ ე რ ტ ი ლ ი დ ა ნ Ω ს ი მ რ ა ვ ლ ე მ დ ე და აღინიშნება $\rho(M^{(0)}, \Omega)$ სიმბოლოთი. ცხადია, $\rho(M^{(0)}, \Omega) \geqslant 0$.

თუ $M^{(0)} \in \Omega$ ან $M^{(0)}$ არის Ω სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაშინ $\rho(M^{(0)}, \Omega)=0$.

ახლა ვთქვათ, R^n სივრცეში აღებულია ორი B_1 და B_2 სიმრავლე. აღვნიშნოთ D-თი $\rho(p, q)$. რიცხვთა სიმრავლე, სადაც p გაირბენს B_1 სიმრავლის წერტილებს, q კი—B_2 სიმრავლისას. D სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება მ ა ნ ძ ი ლ ი B_1 და B_2 ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს შ ო რ ი ს და იგი აღინიშნება $\rho(B_1, B_2)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, თუ B_1 და B_2 სიმრავლეებს აქვთ საერთო წერტილი, მაშინ $\rho(B_1, B_2)=0$. შეიძლება B_1 და B_2 სიმრავლეებს არ ჰქონდეთ საერთო წერტილები, მაგრამ $\rho(B_1, B_2)=0$. მართლაც, ვთქვათ,

$$B_1=[0, 1;\ 0, 1],\ B_2=]-1,0;\ -1, 0[.$$

აქ B_1 წარმოადგენს დახურულ კვადრატს, რომლის მოპირდაპირე წვეროებია (0,0) და (1,1), ხოლო B_2 ღია კვადრატია, რომლის მოპირდაპირე წვეროებია (—1,—1) და (0,0).

ადვილი შესამჩნევია, რომ B_1 და B_2 სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილები, მაგრამ მიუხედავად ამისა, $\rho(B_1, B_2)=0$.

თეორემა 19. თ უ ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი Ω_1 და Ω_2 ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ი დ ა ნ ე რ თ ი მ ა ი ნ ც შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ Ω_1 და Ω_2 ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ შ ი ა რ ს ე ბ ო ბ ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ ისეთი p და q წერტილები, რომ

$$\rho(p, q)=\rho(\Omega_1, \Omega_2).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ Ω_1 სიმრავლე შემოსაზღვრულია. განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. თანახმად ნამდვილ რიცხვთა ქვედა საზღვარის განმარტებისა, ყოველი ε_m რიცხვისათვის მოიძებნება Ω_1 და Ω_2 სიმრავლეებში შესაბამისად ისეთი p_m და q_m წერტილები, რომ

$$\rho(p_m, q_m)<\rho(\Omega_1, \Omega_2)+\varepsilon_m, \quad (m=1, 2,\ldots). \tag{18.1}$$

მაშასადამე, გვექნება წერტილთა ორი მიმდევრობა

$$p_1, p_2,\ldots, p_m,\ldots \tag{18.2}$$

$$q_1, q_2,\ldots, q_m,\ldots \tag{18.3}$$

რადგანაც Ω_1 სიმრავლე შემოსაზღვრულია, ამიტომ (18.2) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე p^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$p_{m_1},\ p_{m_2},\ldots,p_{m_k},\ldots \tag{18.4}$$

ისიც შევნიშნოთ, რომ რაკი Ω_1 ჩაკეტილი სიმრავლეა, იმიტომ $p^* \in \Omega_1$ (18.4) მიმდევრობას შეესაბამება (18.3) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$q_{m_1},\ q_{m_2},\ldots,\ q_{m_k},\ldots \tag{18,5}$$

ადვილად დავინახავთ, რომ (18.5) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მართლაც, გამოვიყენოთ q_{m_k}, p^* და p_{m_k} წერტილებისათვის სამკუთხედის აქსიომა და (18.1) უტოლობა, გვექნება

$$\rho(q_{m_k}, p^*)\leqslant\rho(q_{m_k}, p_{m_k})+\rho(p_{m_k}, p^*)<$$

$$<\rho(\Omega_1, \Omega_2)+\rho(p_{m_k}, p^*)+\varepsilon_{m_k}. \tag{18.6}$$

რადგან $\{\varepsilon_m\}$ და (18.4) მიმდევრობები კრებადია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი μ რიცხვი, რომ

$$\rho(p_{m_k}, p^*)+\varepsilon_{m_k}<\mu. \quad (k=1, 2,\ldots).$$

მაშასადამე, (18.6) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\rho(q_{m_k}, p^*)<\rho(\Omega_1, \Omega_2)+\mu. \quad (k=1, 2,\ldots).$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (18.5) შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე q^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$q_{m_{k_1}},\ q_{m_{k_2}},\ldots,\ q_{m_{k_j}},\ldots \tag{18.7}$$

რაკი Ω_2 ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $q^* \in \Omega_2$.

(18.7) მიმდევრობას შეესაბამება (18.4) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა:

$$p_{m_{k_1}},\ p_{m_{k_2}},\ldots,p_{m_{k_j}},\ldots$$

ეს ქვემიმდევრობა კრებადია p^* წერტილისაკენ. ახლა, (18.1) უტოლობის ძალით, გვექნება

$$\rho(p_{m_{k_j}}, q_{m_{k_j}})<\rho(\Omega_1, \Omega_2)+\varepsilon_{m_{k_j}}. \tag{18.8}$$

მაგრამ

$$\lim_{j\to\infty}\varepsilon_{m_{k_j}}=0,\ \lim_{j\to\infty}\rho(p_{m_{k_j}}, q_{m_{k_j}})=\rho(p^*, q^*),$$

მაშასადამე (18.8) უტოლობიდან ზღვარზე გადასვლით, როცა $j\to\infty$, მივიღებთ

$$\rho(p^*, q^*)\leqslant\rho(\Omega_1, \Omega_2). \tag{18.9}$$

მეორე მხრივ, რაკი p^* და q^* შესაბამისად Ω_1 და Ω_2 სიმრავლეების წერტილებია, ამიტომ

$$\rho(p^*, q^*)\geqslant\rho(\Omega_1, \Omega_2). \tag{18.10}$$

(18.9) და (18.10) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს

$$\rho(p^*, q^*)=\rho(\Omega_1, \Omega_2).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ ჩაკეტილ Ω_1 და Ω_2 სიმრავლეებს საერთო წერტილი არა აქვთ და ამ სიმრავლეებიდან ერთი მაინც შემოსაზღვრულია, მაშინ $\rho(\Omega_1, \Omega_2)>0$.

შედეგი 2. თუ R^n სივრცეში აღებულია ჩაკეტილი Ω სიმრავლე და რაიმე p წერტილი, მაშინ Ω სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც ისეთი q წერტილი, რომ $\rho(p, \Omega)=\rho(p, q)$.

§ 19. სიმრავლის დიამეტრი

ავიღოთ R^n სივრცეში რაიმე Ω სიმრავლე. ვთქვათ, $\rho(p, q)$ მანძილია p და q წერტილებს შორის, სადაც $p, q\in\Omega$. განვიხილოთ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლე $\{\rho(p, q)\}$. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს, როცა p და q გაირბენს Ω სიმრავლის ყველა წერტილს, ეწოდება Ω სიმრავლის დიამეტრი და აღინიშნება $d(\Omega)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, თუ Ω სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ $d(\Omega)<+\infty$ და, პირიქითაც, თუ $d(\Omega)<+\infty$, მაშინ Ω შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

თეორემა 20. შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ $\Omega\subset R^n$ სიმრავლეში არსებობს ისეთი p და q წერტილი, რომ

$$\rho(p, q)=d(\Omega).$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $(\varepsilon_m)_{m\geqslant1}$ მიმდევრობა. ყოველი ε_m რიცხვისათვის მოიძებნება Ω სიმრავლეში ისეთი p_m და q_m წერტილი, რომ

$$\rho(p_m, q_m)>d(\Omega)-\varepsilon_m.$$

მაშასადამე, მივიღებთ წერტილთა ორ მიმდევრობას

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots, \tag{19.1}$$

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots \tag{19.2}$$

(19.1) მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის გამო მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ p^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$p_{m_1},\ p_{m_2},\dots,p_{m_k},\dots$$

ახლა განვიხილოთ (19,2) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა

$$q_{m_1},\ q_{m_2},\dots,\ q_{m_k},\dots$$

ეს მიმდევრობა შეიძლება კრებადი არ იყოს, მაგრამ შეგვიძლია მისგან გამოვყოთ რაიმე q^* წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$q_{m_{k_1}},\ q_{m_{k_2}},\dots,\ q_{m_{k_j}},\dots$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{j\to\infty} p_{m_{k_j}}=p^*.$$

შემდეგ Ω სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო $p^*, q^*\in\Omega$. ამის გარდა,

$$\rho(p_{m_{k_j}},\ q_{m_{k_j}})>d(\Omega)-\varepsilon_{m_{k_j}}$$

თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $j\to\infty$, მივიღებთ

$$\rho(p^*,\ q^*)\geqslant d(\Omega).$$

მეორე მხრივ,

$$\rho(p^*,\ q^*)\leqslant d(\Omega).$$

მაშასადამე,

$$\rho(p^*,\ q^*)=d(\Omega).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თავი V

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

მატერიალურ სამყაროში არსებულ კანონზომიერებათა მათემატიკურად შესწავლის ამოცანას ხშირად მივყევართ მრავალი ცვლადის ფუნქციათა განხილვამდე. ასეთი ფუნქციების საშუალებით შეიძლება უფრო რთული დამოკიდებულებების მათემატიკურად გამოსახვა, ვიდრე ეს ერთი ცვლადის ფუნქციებით ხდება. ამიტომ მრავალი ცვლადის ფუნქციათა თეორიას დიდი პრაქტიკული გამოყენება აქვს.

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრა

მოვიყვანოთ რამდენიმე ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციების მაგალითები:

1. როგორც ცნობილია, ომის კანონის მიხედვით, დენის J ძალა გამოისახება ფორმულით

$$J=\frac{V}{R},$$

სადაც V ძაბვაა, R—ჯაჭვის წინაღობა. აქ J არის ორი V და R ცვლადების ფუნქცია.

2. მოძრავი მატერიალური წერტილის კინეტიკური T ენერგია გამოისახება ასე:

$$T=\frac{mv^2}{2},$$

სადაც m და v მოძრავი წერტილის მასა და სიჩქარეა. მაშასადამე, T წარმოადგენს მასისა და სიჩქარის ფუნქციას.

3. როგორც ცნობილია მართკუთხა პარალელეპიპედის V მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$V=xyz,$$

სადაც x, y, და z აღებული პარალელეპიპედის განზომილებებია. ცხადია, V არის სამი x, y და z ცვლადის ფუნქცია.

4. ვთქვათ, Ox ღერძზე მდებარეობს n მატერიალური წერტილი $M_1(x_1)$, $M_2(x_2), \ldots, M_n(x_n)$ ურთიერთტოლი მასებით. მაშინ ამ წერტილთა სისტემის ინერციის ცენტრის x აბსცისა განისაზღვრება ფორმულით:

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

რომელიც მართებულია მოცემული წერტილების ნებისმიერი მდებარეობისათვის Ox ღერძზე. ამრიგად, x რიცხვი სავსებით განისაზღვრება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ აბსცისებით და, მაშასადამე, იგი წარმოადგენს n ცვლადის ფუნქციას.

5. ტოლობით

$$z=x^2+y^2$$

მოცემულია ორ x და y ცვლადებზე დამოკიდებული z ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მთელ xOy სიბრტყეზე.

6. ტოლობით

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

მოცემულია x და y ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქცია. იგი განსაზღვრულია ერთეულოვან წრეში, რომელსაც არ ეკუთვნის საზღვრის წერტილები.

7. განვიხილოთ გამოსახულება

$$u=\arcsin(x^2+y^2+z^2-3),$$

რომელიც განსაზღვრავს სამ x, y და z ცვლადებზე დამოკიდებულ u ფუნქციას. მისი განსაზღვრის არე დახასიათებულია შემდეგი უტოლობებით: $-1\leqslant x^2+y^2+z^2-3\leqslant+1$ ანუ $2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$. ამრიგად, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა კონცენტრული სფეროებით შემოსაზღვრული სფერული შრე. სფეროების საერთო ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, ხოლო რადიუსები შესაბამისად უდრის $\sqrt{2}$ და 2-ს. ფუნქციის განსაზღვრის არეს ეკუთვნის სფეროების ზედაპირის წერტილებიც.

8. ტოლობა

$$f(x, y)=\sqrt{-x^2-y^2-1}$$

არ განსაზღვრავს ფუნქციას, ვინაიდან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ ტოლობას არა აქვს აზრი.

ახლა მოვიყვანოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზოგადი განსაზღვრა.

თუ R^n სივრცეში აღებული Ω სიმრავლის ყოველ $p=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილს რაიმე წესით შეესაბამება გარკვეული ω რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრულია p წერტილის ფუნქცია, ანუ n ცვლადის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\omega = f(p) \text{ ან } \omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

p წერტილის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ კოორდინატებს ეწოდება **არგუმენტები**, ხოლო Ω სიმრავლეს — **ფუნქციის განსაზღვრის არე**.

f სიმბოლოს ნაცვლად შეიძლება ვიხმაროთ სხვა სიმბოლოებიც, მაგალითად φ, F, Φ, ψ, და ა. შ.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, მაგრამ განსაზღვრის Ω არე არ არის დასახელებული, მაშინ ფუნქციის განსაზღვრის არედ ღებულობენ იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებისთვისაც მოცემულ გამოსახულებას აქვს გარკვეული ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. ვთქვათ, x და y ცვალებადებზე დამოკიდებული u ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$u = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x - y}.$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x და y ცვლადების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \ x \gtrless y.$$

თუ x და y ცვლადებს განვიხილავთ როგორც xOy სიბრტყის წერტილის კოორდინატებს, მაშინ აღებული ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ერთეულრადიუსიანი წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, გარდა იმ წერტილებისა, რომლებიც მდებარეობენ $x=y$ წრფეზე (ნახ. 4).

2. განვიხილოთ ფუნქცია

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$$

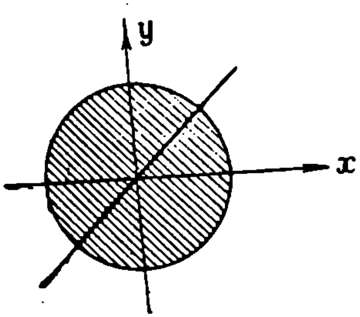
იგი განსაზღვრულია x და y ცვლადების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს:

$$x^2+y^2-x\geqslant 0,\ 2x-x^2-y^2>0.$$

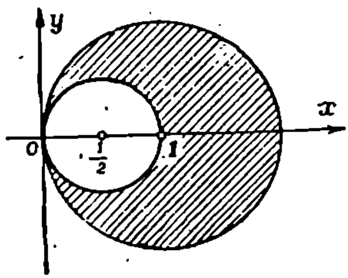
მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება მე-5 ნახაზზე დაშტრიხული წერტილების სიმრავლე.

8. ავიღოთ ფუნქცია

$$z=\ln(x+2y-2).$$

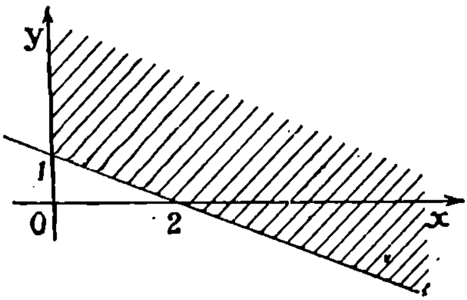


ნახ. 4.



ნახ. 5.

ამ ფუნქციის განსაზღვრის Ω არეს წარმოადგენს სიბრტყის იმ $M(x, y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა x და y კოორდინატები დააკმაყოფილებს უტოლობას $x+2y-2>0$ ანუ $y>1-\frac{x}{2}$. ცხადია, Ω სიმრავლე წარმოადგენს ნახევარსიბრტყეს, რომლის წერტილები იმყოფება $y=1-\frac{x}{2}$ წრფის ზევით. თვით ამ წრფის წერტილები Ω არეს არ ეკუთვნის (ნახ. 6).



ნახ. 6.

4. განვიხილოთ სამ x, y, z ცვლადზე დამოკიდებული შემდეგი სახის u ფუნქცია:

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$$

ცხადია, ამ ტოლობით განსაზღვრულმა ფუნქციამ რომ ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობები მიიღოს, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს პირობა

$$1-x^2-y^2-z^2\geqslant 0 \text{ ანუ } x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

გეომეტრიულად $M(x, y, z)$ წერტილების Ω სიმრავლე, როცა x, y, z კოორდინატები აკმაყოფილებენ უკანასკნელ პირობას, წარმოადგენს სფეროს, ერთის ტოლი რადიუსით და ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. Ω სიმრავლეს ეკუთვნის სფეროს ზედაპირის წერტილებიც.

§ 2. ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი

როგორც ვიცით, თუ მოცემულია ერთი x ცვლადის $f(x)$ ფუნქცია, მაშინ xOy სიბრტყეზე $y=f(x)$ განტოლება გამოსახავს გარკვეულ წირს.

ახლა განვიხილოთ ორ x და y ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქცია

$$z=f(x, y), \tag{2. 1}$$

რომელიც განსაზღვრულია xOy სიბრტყის რაიმე D არეში (კერძოდ, შეიძლება D არე იყოს მთელი xOy სიბრტყე). თუ D არის ყოველ $m(x, y)$ წერტილს შევუსაბამებთ სივრცის $M(x, y, z)$ წერტილს, სადაც $z=f(x, y)$, მაშინ R^3 სივრცეში მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც ეწოდება $z=f(x, y)$ ფუნქციის გ რ ა ფ ი კ ი გარკვეულ პირობებში ეს გრაფიკი წარმოადგენს ზედაპირს. ამრიგად გეომეტრიულად (2, 1) განტოლება გამოსახავს გარკვეულ ზედაპირს (ნახ. 7).

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}. \tag{2. 2}$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ერთეულრადიუსიანი წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. თუ (2.2) განტოლების ორივე ნაწილს ავამაღლებთ კვადრატში, მივიღებთ

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

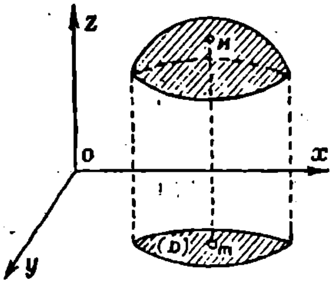
როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან არის ცნობილი, უკანასკნელი

განტოლება წარმოადგენს იმ ერთეულრადიუსიან სფეროს განტოლებას, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა. რაც შეეხება (2. 2) განტოლებას, იგი გამოსახავს აღნიშნული სფეროს ზედა ნახევარს (ნახ. 8).

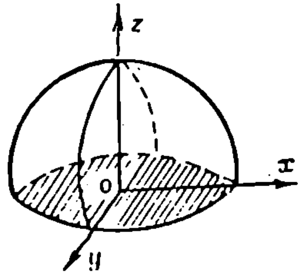
2. განვიხილოთ ფუნქცია

$$z=x^2+y^2.$$

მისი გრაფიკი, როგორც ცნობილია, ბრუნვის პარაბოლოიდია.



ნახ. 7.



ნახ. 8.

ახლა განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქციის გეომეტრიული გამოსახვის ხერხი. ეს ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ (2. 1) განტოლება განიხილება როგორც xOy სიბრტყეზე წირთა გარკვეული ოჯახის განტოლება.

ვთქვათ $z=h$, სადაც h რაიმე მუდმივი სიდიდეა. მაშინ

$$f(x, y)=h \qquad (2.\ 3)$$

წარმოადგენს xOy სიბრტყეზე იმ C' წირის გეგმილის განტოლებას, რომელიც მიიღება (2. 1) ზედაპირისა და $z=h$ სიბრტყის გადაკვეთით. აღვნიშნოთ C' წირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე C ასოთი. C წირს ეწოდება (2. 1) ზედაპირის ან $f(x, y)$ ფუნქციის $z=h$ მნიშვნელობის შესაბამისი *დონის წირი*.

თუ (2. 3) განტოლებაში h პარამეტრს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, (2. 1) ფუნქციის გრაფიკზე მივიღებთ კვეთებს, რომელთა გეგმილები xOy სიბრტყეზე წარმოადგენს დონის წირებს.

მაგალითი. ვიპოვოთ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ზედაპირის დონის წირები. თუ ავიღებთ $z=h$, მაშინ დონის წირთა ოჯახის განტოლება იქნება

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=h, \qquad 0\leqslant h<1.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის დონის წირები იქნება კონცენტრული წრეწირები ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. თუ $h=1$, მაშინ მივიღებთ წერტილს. ამ შემთხვევაში დონის წირი წარმოადგენს გადაგვარებულ წირს.

ორი ცვლადის ფუნქციის დონის წირების ცნების ანალოგიურად შეგვიძლია შემოვიღოთ სამი ცვლადის ფუნქციის დონის ზედაპირების ცნება.

$u=f(x, y, z)$ ფუნქციის *დონის ზედაპირი* ეწოდება იმ ზედაპირს, რომლის წერტილებში მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა. დონის ზედაპირის განტოლება, რომელიც შეესაბამება $u=h$ მნიშვნელობას, იქნება

$$f(x, y, z)=h.$$

გამოყენებით მეცნიერებებში ხშირად სარგებლობენ დონის წირებით ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოდგენისათვის. ასე, მაგალითად, განიხილავენ რა ადგილის წერტილის სიმაღლეს ზღვის დონიდან როგორც ორი ცვლადის (წერტილის კოორდინატების) ფუნქციას, რუკაზე გადაიტანენ (ავლებენ) ამ ფუნქციის დონის წირებს. ტოპოგრაფიაში ამ წირებს უწოდებენ ჰორიზონტალებს. მიღებული ჰორიზონტალების ქსელის საშუალებით მოხერხებულია თვალის დევნება ადგილის სიმაღლის ცვლილებაზე.

§ 3. მრავალი ცვლადის რთული ფუნქცია

ვთქვათ, მოცემულია n ფუნქცია

$$\begin{aligned} u_1&=\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m),\\ u_2&=\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_n&=\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m), \end{aligned} \qquad (3.\ 1)$$

რომლებიც განსაზღვრულია m-განზომილებიანი სივრცის A არეში. ამის გარდა, ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი სივრცის რაიმე B არეში განსაზღვრული $\omega=f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ A არის ყოველ $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ წერტილს შეესაბამება B არის გარკვეული $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ წერტილი, სადაც $u_1, u_2, \dots, u_n$ განისაზღვრებიან (3. 1) ტოლობებიდან. მაშინ ω წარმოადგენს m დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \dots, x_m$ ცვლადის ფუნქციას, განსაზღვრულს A არეში. ფუნქციას $\omega=f[\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots,$

$\ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)] = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ეწოდება m დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots x_m$ ცვლადის რთული ფუნქცია.

მაგალითი 1. ფუნქცია $\omega = \operatorname{tg} w\sqrt{u^2+v^2}$, სადაც $u = \sin(x+y)$, $v = x^2+y^2+z^2$, $w = xyzt$, არის ოთხი დამოუკიდებელი x, y, z, t ცვლადის რთული ფუნქცია.

მაგალითი 2. ფუნქცია $\omega = (x+y+z)^2+t^2$, სადაც

$$x = e^t, \ y = \cos t, \ z = \sin t$$

წარმოადგენს ერთი დამოუკიდებელი t ცვლადის რთულ ფუნქციას.

§ 4. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი

მრავალი ცვლადის ფუნქციას ზღვრის ცნება შემოღებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევის ანალოგიურად, მაგრამ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი შეისწავლება არა მარტო ცალკე ცვლადების, არამედ მათი ერთობლიობის მიმართაც, რაც წარმოადგენს ახალ გარემოებას ერთი ცვლადის ფუნქციის ზღვართან შედარებით.

ვთქვათ, $p^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით p^* წერტილისა, განსაზღვრულია

$$\omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(p)$$

ფუნქცია.

ამბობენ, რომ ω ფუნქციას p^* წერტილში ზღვარად აქვს A რიცხვი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(p) - A| < \varepsilon, \text{ როცა } 0 < \rho(p, p^*) < \eta,$$

სადაც $\rho(p, p^*)$ წარმოადგენს მანძილს p და p^* წერტილებს შორის. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^* \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^*}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$$

ან

$$\lim_{p \to p^*} f(p) = A.$$

ფუნქციის ზღვრის ასეთი განსაზღვრა კოშის ეკუთვნის.

არსებობს აგრეთვე ჰაინეს მიერ მოცემული ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრა. ჰაინეს მიხედვით, $f(p)$ ფუნქციას p^* წერტილში ზღვრად აქვს A რიცხვი, თუ p^* წერტილისაკენ კრებად წერტილთა ნებისმიერი

მიმდევრობისათვის $(p_m)_{m\geq 1}$, $(p_m \neq p^*,\ m=1, 2, \ldots)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სათანადო მიმდევრობა $f(p_1), f(p_2), \ldots, f(p_m), \ldots$ კრებადია A რიცხვისაკენ.

ისე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციის ზღვრის ეს ორი განსაზღვრა ერთმანეთის ტოლფასია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ ჩასმა $xy=\alpha$ და შევნიშნოთ, რომ როცა $x\to 0$, $y\to 0$ მაშინ $\alpha\to 0$ გვექნება

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2-\sqrt{\alpha+4}}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{-\alpha}{\alpha\left(2+\sqrt{\alpha+4}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 4}} \frac{6x^2-13xy+6y^2}{14x^2-25xy+6y^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან $6x^2-13xy+6y^2$ და $14x^2-25xy+6y^2$ მრავალწევრების მნიშვნელობები, როცა $x=6$, $y=4$ უდრის 0, ამიტომ თითოეული მათგანი შეიცავს $2x-3y$ მამრავლს. ამის გამო გვექნება

$$\lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 4}} \frac{6x^2-13xy+6y^2}{14x^2-25xy+6y^2} = \lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 4}} \frac{(2x-3y)(3x-2y)}{(2x-3y)(7x-2y)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 4}} \frac{3x-2y}{7x-2y} = \frac{5}{17}.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის, ზღვრის ზემოთ შემოღებული განსაზღვრის გარდა, არსებობს ფუნქციის ზღვრის სხვა ცნებაც.

განვიხილოთ, მაგალითად, ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია (x^*, y^*) წერტილის რაიმე მიდამოში. თუ დავა-

ფიქსირებთ y ცვლადს, მაშინ $f(x, y)$ წარმოადგენს x ცვლადის ფუნქციას და ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ ზღვარი $\lim\limits_{x \to x^*} f(x, y)$. ცხადია, ეს ზღვარი, თუკი იგი არსებობს, y-ის ფუნქციას წარმოადგენს და ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ მიღებული ზღვრის ზღვარი

$$\lim_{y \to y^*}[\lim_{x \to x^*} f(x, y)]. \tag{4. 1}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ ზღვარი

$$\lim_{x \to x^*}[\lim_{y \to y^*} f(x, y)]. \tag{4. 2}$$

ამ ზღვრებს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის **განმეორებითი ზღვრები** (x^*, y^*) წერტილში. განმეორებით (4. 1) და (4. 2) ზღვრები, საზოგადოდ, არ არის ერთმანეთის ტოლი. მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x, y) = \frac{x - y - x^2 - y^2}{x+y}, \text{ თუ } x+y \neq 0.$$

ეს ფუნქცია (0, 0) წერტილში არ არის განსაზღვრული. ვიგულისხმოთ, რომ $y \neq 0$. მაშინ

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = -1 - y.$$

აქედან

$$\lim_{y \to 0}[\lim_{x \to 0} f(x, y)] = -1. \tag{4. 3}$$

ახლა დავუშვათ, რომ $x \neq 0$. მაშინ

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = 1 - x.$$

საიდანაც

$$\lim_{x \to 0}[\lim_{y \to 0} f(x, y)] = 1. \tag{4. 4}$$

(4. 3) და (4. 4) ტოლობებიდან ჩანს, რომ აღებული ფუნქციისათვის (0, 0) წერტილში განმეორებითი ზღვრები განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

ახლა ისმის კითხვა: როდის არის ერთმანეთის ტოლი ფუნქციის განმეორებითი ზღვრები? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 1. **ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (x^*, y^*) წერტილის რაიმე მიდამოში და x^*-საგან განსხვავებული ნებისმიერი x მნიშვნელობისათვის არსებობს**

$$\lim_{y \to y^*} f(x, y) = \varphi(x)$$

და y^*-საგან განსხვავებული ნებისმიერი y-ისათვის არსებობს

$$\lim_{x\to x^*} f(x, y)=\psi(y).$$

თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\substack{x\to x^*\\ y\to y^*}} f(x, y)=A, \tag{4. 5}$$

მაშინ არსებობს ორივე განმეორებითი ზღვარი (x^*, y^*) წერტილში და

$$\lim_{x\to x^*}[\lim_{y\to y^*} f(x, y)]=\lim_{y\to y^*}[\lim_{x\to x^*} f(x, y)]=A.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. (4. 5) ტოლობის თანახმად, არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon, \text{ როცა } 0<|x-x^*|<\eta,$$

$$0<|y-y^*|<\eta. \tag{4. 6}$$

თუ ავიღებთ y-ს იმ პირობით, რომ $0<|y-y^*|<\eta$, მაშინ (4. 6) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $x\to x^*$, მივიღებთ

$$|\psi(y)-A|\leqslant\varepsilon. \tag{4. 7}$$

ამრიგად, (4. 7) უტოლობას ადგილი აქვს ყოველი y-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $0<|y-y^*|<\eta$ უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{y\to y^*}\psi(y)=A,$$

ე. ი.

$$\lim_{y\to y^*}[\lim_{x\to x^*} f(x, y)]=A.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\lim_{x\to x^*}[\lim_{y\to y^*} f(x, y)]=A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვსაზღვროთ $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$, $y\to+\infty$. ვიტყვით, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას ზღვრად აქვს A რიცხვი, როცა $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \text{ როცა } x > N, \ y > N.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = A.$$

აგრეთვე ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, როცა $x \to x^*$, $y \to y^*$, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x, y) > M, \text{ როდესაც } 0 < \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \eta.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ y \to y^*}} f(x, y) = +\infty.$$

სიმბოლო

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ y \to y^*}} f(x, y) = -\infty$$

იმას ნიშნავს, რომ ყოველი დადებითი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x, y) < -M, \quad \text{როდესაც} \quad 0 < \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \eta.$$

დასასრულ, ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია მიისწრაფვის $+\infty$, როცა $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ

$$f(x, y) > M, \text{ როცა } x > N, \ y > N$$

და დავწერთ

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = +\infty.$$

ანალოგიური შინაარსი აქვს შემდეგ სიმბოლოებსაც:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = -\infty, \quad \lim_{\substack{y \to -\infty \\ y \to -\infty}} f(x, y) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = +\infty,$$

§ 5. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა

ვთქვათ, $f(p)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $p^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ წერტილის რაიმე მიდამოში და $f(p^*)$ სასრულია. ვიტყვით, რომ $f(p)$ ფუნქცია **უწყვეტია** p^* **წერტილში**, თუ

$$\lim_{p \to p^*} f(p) = f(p^*).$$

$f(p)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** რაიმე D **არეში**, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში.

თუ ფუნქცია $f(p)$ არ არის უწყვეტი p^* წერტილში, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε და η რიცხვისათვის არსებობს ისეთი p' წერტილი, რომ $\rho(p', p^*) < \eta$ და

$$|f(p') - f(p^*)| > \varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(p)$ ფუნქცია წყვეტილია p^* წერტილში. თანახმად ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრისა ჰაინეს მიხედვით, როცა $f(p)$ არის წყვეტილი ფუნქცია p^* წერტილში, მაშინ არსებობს p^* წერტილისაკენ კრებადი ისეთი $\{p^{(n)}\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{k \to \infty} f(p^{(k)}) \neq f(p^*).$$

მოვიყვანოთ უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციების მაგალითები.

1. განვიხილოთ $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } x^2 + y^2 > 0. \\ c, & \text{როცა } x = 0,\ y = 0, \end{cases}$$

სადაც c მუდმივი სიდიდეა.

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია xOy სიბრტყის ყოველ წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია წყვეტილია $(0, 0)$ წერტილში. ამისათვის განვიხილოთ სიბრტყის წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$p_1 = (1, 1),\ p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, p_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right), \dots,$$

ცხადია,

$$\lim_{m \to \infty} p_m = (0, 0).$$

ამის გარდა,

$$f(p_m)=f\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}\right)=\frac{m^2}{2}.$$

აქედან

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)=+\infty,$$

ამრიგად,

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)\neq f(0,\ 0).$$

მაშასადამე, $f(x,\ y)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (0, 0) წერტილში xOy სიბრტყის დანარჩენ წერტილებში აღებული ფუნქცია უწყვეტია.

ორი ცვლადის ფუნქციის წყვეტის წერტილები შეიძლება შეადგენდეს რაიმე წირს. მაშინ ამ წირს ეწოდება აღებული ფუნქციის წყვეტის წერტილთა წირი.

8. ვთქვათ, $f(x,\ y)$ ფუნქცია ასეა განსაზღვრული:

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}, & \text{როცა } x\neq y,\\ 0, & \text{როცა } x=y.\end{cases}$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს მთელი xOy სიბრტყე. დავამტკიცოთ, რომ $y=x$ წრფის ყოველი წერტილი $f(x,\ y)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია. ავიღოთ აღნიშნულ წრფეზე რაიმე $p=(a,\ a)$ წერტილი. განვიხილოთ წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$p_1(a+1,\ a-1),\ \ldots,\ p_m=\left(a+\frac{1}{m},\ a-\frac{1}{m}\right),\ \ldots,$$

ცხადია,

$$\lim_{m\to\infty} p_m=(a,\ a),$$

ხოლო

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)=+\infty,$$

ვინაიდან

$$f(p_m)=f(x_m,\ y_m)=\frac{m}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)\neq f(a,\ a).$$

ამრიგად, $f(x, y)$ ფუნქცია წყვეტილია $y=x$ წრფის ყოველ წერტილში.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღებული ფუნქცია უწყვეტია xOy სიბრტყის დანარჩენ წერტილებში. ამ ფუნქციის წყვეტის წირს წარმოადგენს $y=x$ წრფე.

შეიძლება ორი ცვლადის ფუნქცია წყვეტილი იყოს xOy სიბრტყის რაიმე ნაწილის ყოველ წერტილში.

თეორემა 2. თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, იგი უწყვეტია ამ წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილში. დასამტკიცებელია, რომ $f(x, y_0)$ და $f(x_0, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამისად x_0 და y_0 წერტილებში.

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილში, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } |x-x_0|<\eta, \ |y-y_0|<\eta.$$

აქედან ცხადია,

$$|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } |x-x_0|<\eta.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x, y_0)$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება $f(x_0, y)$ ფუნქციის უწყვეტობა y_0 წერტილში.

შენიშვნა. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ფუნქცია იყოს უწყვეტი ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ რაიმე წერტილში, მაგრამ იგი არ იყოს უწყვეტი ერთდროულად ორივე ცვლადის მიმართ იმავე წერტილში. მართლაც, ვთქვათ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{როცა } x=y=0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ $(0, 0)$ წერტილში. მართლაც, რადგანაც

$$f(x, 0)=0, \ f(0, y)=0,$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=0, \ \lim_{y\to 0} f(0, y)=0,$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=f(0, 0), \ \lim_{y\to 0} f(0, y)=f(0, 0)=0.$$

მაშასადამე, $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0, 0) წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ აღებული ფუნქცია უწყვეტი არაა ორივე ცვლადის მიმართ (0, 0) წერტილში, ამისათვის განვიხილოთ წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$p_1=(1, 1), \ldots, \ p_m=\left(\frac{1}{m}, \ \frac{1}{m}\right), \ldots$$

ცხადია,

$$\lim_{m\to\infty} p_m=(0, 0),$$

ხოლო

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)=\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{2}{m^2}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}}=1,$$

$$\lim_{m\to\infty} f(p_m)\neq f(0, 0)$$

და ამიტომ $f(x, y)$ წყვეტილია (0, 0) წერტილში.

§ 6. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების თვისებები

ისე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, ადვილად მტკიცდება შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 3. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების ჯამი და ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციებია, თუ აღებული ფუნქციების რიცხვი სასრულია.

თუ უწყვეტი ფუნქციების რიცხვი უსასრულოა, მაშინ დებულება, საზოგადოდ, არ არის სწორი.

თეორემა 4. ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობა უწყვეტი ფუნქციაა, თუ მნიშვნელი ნულად არ იქცევა.

თეორემა 5. უწყვეტი რთული ფუნქცია, რომელიც შედგენილია სასრულ რიცხვ უწყვეტი ფუნქციებისაგან, უწყვეტი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი რთული ფუნქცია $f(u, v, w, \ldots)$, სადაც $u, v, w, \ldots$ არიან $x, y, z \ldots$ ცვლადების უწყვეტი ფუნქციები:

$$u=\varphi_1(x, y, z, \ldots), \quad v=\varphi_2(x, y, z, \ldots), \quad w=\varphi_3(x, y, z, \ldots), \ldots$$

ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია $(u_0, v_0, w_0, \ldots)$ წერტილში. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ ფუნქციები კი $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ წერტილში, მასთან

$$\varphi_1(x_0, y_0, z_0, \ldots)=u_0,$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, z_0, \ldots)=v_0,$$

$$\varphi_3(x_0, y_0, z_0, \ldots)=w_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ვთქვათ, $F(x, y, z, \ldots)$ ის ფუნქციაა, რომელსაც მივიღებთ, თუ $f(u, v, w, \ldots)$ ფუნქციაში $u, v, w, \ldots$ ფუნქციების ნაცვლად აღნიშნულ ფუნქციებს ჩავსვამთ შესაბამისად, ე. ი.

$$F(x, y, z, \ldots)=f[\varphi_1(x, y, z, \ldots), \varphi_2(x, y, z, \ldots),$$

$$\varphi_3(x, y, z, \ldots), \ldots],$$

დასამტკიცებელია $F(x, y, z, \ldots)$ ფუნქციის უწყვეტობა $(x_0, y_0, z_0, \ldots))$ წერტილში.

რადგანაც $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ ფუნქციები უწყვეტია $(x_0, y_0, z_0, \cdots$ წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} u=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} v=v_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} w=w_0, \cdots$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} F(x, y, z, \ldots)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} f[\varphi_1(x, y, z, \ldots), \varphi_2(x, y, z, \ldots),$$

$$\varphi_3(x, y, z, \ldots), \ldots]=\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to v_0\\ w\to w_0\\ \cdots\cdots}} f(u, v, w, \ldots)=f(u_0, v_0, w_0, \ldots)=$$

$$=f[\varphi_1(x_0, y_0, z_0, \ldots), \varphi_2(x_0, y_0, z_0, \ldots),$$

$$\varphi_3(x_0, y_0, z_0, \ldots), \ldots]=F(x_0, y_0, z_0, \ldots).$$

ამრიგად,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0\\ \cdots\cdots}} F(x, y, z, \ldots)=F(x_0, y_0, z_0, \ldots).$$

მაშასადამე, $F(x, y, z, \ldots)$ ფუნქცია უწყვეტია $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია p_0 წერტილში და $f(p_0)\neq 0$, მაშინ არსებობს p_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(p)$ ფუნქცია ინარჩუნებს იმავე ნიშანს, რაც აქვს $f(p_0)$ რიცხვს.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(p_0)>0$. ვთქვათ,

$$\varepsilon=\frac{1}{2}f(p_0)$$

რადგანაც $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია p_0 წერტილში, ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } \rho(p, p_0)<\eta \qquad (6.1)$$

ავიღოთ η რადიუსიანი $S(p_0, \eta)$ სფერო ცენტრით p_0 წერტილში. ეს სფერო წარმოადგენს p_0 წერტილის მიდამოს. მაშასადამე, (6.1) უტოლობის ძალით,

$$f(p_0)-\varepsilon<f(p), \text{ როცა } p\in S(p_0; \varepsilon).$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში ჩავსვამთ ε რიცხვის ნაცვლად მის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}f(p_0)<f(p), \text{ როცა } p\in S(p_0; h).$$

ამრიგად, $f(p)>0$ ყოველთვის, როცა $p\in S(p_0; \eta)$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 1. Ω სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(p)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული ამ სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი და-

დებითი M რიცხვი, რომ Ω სიმრავლის ყოველი p წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(p)| < M.$$

თეორემა 7. თუ $f(p)$ უწყვეტი ფუნქციაა შემოსაზღვრულ დახურულ A არეზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ არეზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(p)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული არაა A არეზე. მაშინ ყოველი მთელი დადებითი m რიცხვისათვის არსებობს A არეში ისეთი p_m წერტილი, რომ

$$|f(p_m)| \geqslant m. \tag{6.2}$$

თუ m-ს მივცემთ მნიშვნელობებს 1, 2, 3,... მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას

$$p_1, p_2, \cdots p_m, \cdots \tag{6.3}$$

A არის შემოსაზღვრულობის გამო (6. 3) მიმდევრობაც შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე p_0 წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$p_{m_1}, p_{m_2}, \cdots, p_{m_k}, \cdots$$

A არის დახურულობის გამო p_0 წერტილი A არეს ეკუთვნის.

ამასთან, ვინაიდან $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია A არეში, ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} f(p_{m_k}) = f(p_0). \tag{6.4}$$

მეორე მხრივ, (6. 2) უტოლობის ძალით,

$$|f(p_{m_k})| \geqslant m_k.$$

საქედან

$$\lim_{k\to\infty} |f(p_{m_k})| = +\infty.$$

საიდანაც (6. 4) ტოლობის თანახმად.

$$|f(p_0)| = +\infty.$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $f(p_0)$ სასრულია.

ამრიგად, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f(p)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია A არეში, სწორი არაა. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ A არე შემოუსაზღვრელია ან იგი არაა დახურული, მაშინ თეორემა საზოგადოდ მართებული არაა.

ვთქვათ, $f(p)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე Ω სიმრავლეზე. აღვნიშნოთ $f(\Omega)$ სიმბოლოთი $f(p)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, როცა p წერტილი გაირბენს Ω სიმრავლის ყველა წერტილს. თუ $f(\Omega)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ $f(p)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია Ω სიმრავლეზე და, პირიქით, თუ $f(p)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია Ω სიმრავლეზე, მაშინ $f(\Omega)$ სიმრავლეც შემოსაზღვრულია.

აღვნიშნოთ $f(\Omega)$ სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები შესაბამისად M და m ასოებით. M და m რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად $f(p)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ ე დ ა დ ა ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი Ω ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე.

თუ Ω სიმრავლეზე არსებობს ისეთი p_0 წერტილი, რომ $f(p_0)=M$, მაშინ ამბობენ, რომ $f(p)$ ფუნქცია აღწევს Ω სიმრავლეზე თავის ზედა საზღვარს p_0 წერტილში. ასევე, თუ Ω სიმრავლეზე მოიძებნება ისეთი q_0 წერტილი, რომ $f(q_0)=m$, მაშინ $f(p)$ ფუნქცია აღწევს Ω სიმრავლეზე თავის ქვედა საზღვარს q_0 წერტილში.

შეიძლება, რომ $f(p)$ ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული Ω სიმრავლეზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზედა ან ქვედა საზღვარს.

თეორემა 8. თ უ $f(p)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ა შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ დ ა ხ უ რ უ ლ A ა რ ე შ ი, მ ა შ ი ნ ი გ ი მ ი ა ღ წ ე ვ ს თ ა ვ ი ს ზ ე დ ა დ ა ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ A არეზე, ამიტომ, მე-7 თეორემის თანახმად, $f(p)$ შემოსაზღვრულია. ამ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად M და m ასოებით.

განვიხილოთ ახლა ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $(\varepsilon_\nu)_{\nu\geqslant 1}$. თანახმად ზედა საზღვრის განსაზღვრისა, აღებული $\varepsilon_\nu(\nu=1,\ 2,\ldots)$ რიცხვისათვის არსებობს A არეში ისეთი p_ν წერტილი, რომ

$$f(p_\nu)>M-\varepsilon_\nu\ (\nu=1,\ 2,\ldots). \tag{6.5}$$

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს წერტილთა მიმდევრობა

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_\nu,\ldots. \tag{6.6}$$

A არის შემოსაზღვრულობის გამო (6. 6) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე p_0 წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$p_{\nu_1},\ p_{\nu_2},\ldots,\ p_{\nu_k},\ldots$$

რაკი A არე დახურულია, ამიტომ p_0 იქნება A არის წერტილი. პირობის ძალით, $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია p_0 წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} f(p_{\nu_k})=f(p_0).$$

მეორე მხრივ, (6, 5) უტოლობის ძალით,

$$f(p_{\nu_k})>M-\varepsilon_{\nu_k}.$$

აქედან, თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $k\to\infty$ მივიღებთ

$$f(p_0)\geqslant M. \qquad (6.7)$$

მაგრამ

$$f(p_0)\leqslant M. \qquad (6.8)$$

ამიტომ (6. 7) და (6. 8) თანაფარდობები გვაძლევს

$$f(p_0)=M.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზედა საზღვარს p_0 წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება A არეზე ისეთი q წერტილის არსებობა, რომ

$$f(q)=m.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 2. $f(p)$ ფუნქციას ეწოდება **თანაბრად უწყვეტი** A არეზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს A არის წერტილებისაგან დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ A არის ყოველი p' და p'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას, $\rho(p',p'')<\eta$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(p'')-f(p')|<\varepsilon.$$

თუ $f(p)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არაა A არეზე, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება A არეზე ისეთი ორი p' და p'' წერტილი, რომ $\rho(p',p'')<\eta$, ხოლო $|f(p')-f(p'')|\geqslant\varepsilon_0$.

თეორემა 9. თუ $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ A არეზე, მაშინ იგი თანაბრად უწყვეტია ამ არეზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $f(p)$ ფუნქ-

ცია თანაბრად უწყვეტი არაა A არეზე. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება A არეზე ისეთი ორი წერტილი p' და p'', რომ $\rho(p', p'')<\eta$, ხოლო

$$|f(p'')-f(p')|\geqslant\varepsilon_0.$$

ახლა განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $(\eta_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ მიმდევრობა.

აღებული $\eta_\nu(\nu=1, 2, \ldots)$ რიცხვისათვის მოიძებნება A არეზე ისეთი p_ν' და p_ν'' წერტილები, რომ

$$\rho(p_\nu'', p_\nu')<\eta_\nu \quad (\nu=1, 2, \ldots), \tag{6.9}$$

ხოლო

$$|f(p_\nu'')-f(p_\nu')|\geqslant\varepsilon_0 \quad (\nu=1, 2, \ldots). \tag{6.10}$$

განვიხილოთ წერტილთა შემდეგი ორი მიმდევრობა

$$p_1', p_2', \cdots, p_\nu', \cdots \tag{6,11}$$

$$p_1'', p_2'', \cdots, p_\nu'', \cdots \tag{6.12}$$

A არის შემოსაზღვრულობის გამო (6. 11) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ რაიმე p_0 წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა

$$p_{\nu_1}', p_{\nu_2}', \cdots, p_{\nu_h}', \cdots \tag{6.13}$$

ვინაიდან A არე დახურულია, ამიტომ p_0 წარმოადგენს A არის წერტილს. (6. 13) მიმდევრობას შეესაბამება (6. 12) მიმდევრობის შემდეგი ქვემიმდევრობა:

$$p_{\nu_1}'', p_{\nu_2}'', \cdots, p_{\nu_k}'', \cdots. \tag{6.14}$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია p_0 წერტილისაკენ. სამკუთხედის აქსიომისა და (6. 9) უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\rho(p_{\nu_k}'', p_0)\leqslant\rho(p_{\nu_k}'', p_{\nu_k}')+\rho(p_{\nu_h}', p_0)<\eta_{\nu_k}+\rho(p_{\nu_h}', p_0). \tag{6.15}$$

მაგრამ

$$\lim_{k\to\infty}\eta_{\nu_k}=0, \lim_{k\to\infty}\rho(p_{\nu_k}', p_0)=0.$$

მაშასადამე, (6. 15) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\lim_{k\to\infty}\rho(p''_{\nu_k},\ p_0)=0,$$

ე. ი.

$$\lim_{k\to\infty}p''_{\nu_k}=p_0.$$

ამრიგად,

$$\lim_{k\to\infty}p'_{\nu_k}=\lim_{k\to\infty}p''_{\nu_k}=p_0$$

და

$$|f(p''_{\nu_k})-f(p'_{\nu_k})|\geqslant\varepsilon_0\ (k=1,\ 2,\ldots). \tag{6.16}$$

რადგანაც $f(p)$ ფუნქცია უწყვეტია p_0 წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty}f(p'_{\nu_k})=\lim_{k\to\infty}f(p''_{\nu_k})=f(p_0). \tag{6.17}$$

მაშასადამე, (6. 17) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{k\to\infty}|f(p''_{\nu_k})-f(p'_{\nu_k})|=|f(p_0)-f(p_0)|=0, \tag{6.18}$$

მეორე მხრივ, (6. 16) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{k\to\infty}|f(p''_{\nu_k})-f((p'_{\nu_k})|\geqslant\varepsilon_0. \tag{6.19}$$

(6. 18), და (6. 19) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ $0\geqslant\varepsilon_0$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $f(p)$ თანაბრად უწყვეტია A არეზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ $f(p)=f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია A არეში და ამ არის $p_1=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ldots,\ x_n^{(1)})$ და $p_2=(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ldots,\ x_n^{(2)})$ წერტილებში $f(p_1)=M_1$, $f(p_2)=M_2$, მაშინ M_1 და M_2 რიცხვებს შორის მოთავსებული ნებისმიერი N რიცხვისათვის A არეში მოიძებნება ისეთი p_0 წერტილი, რომ $f(p_0)=N$.

დამტკიცება. შევაერთოთ p_1 და p_2 წერტილები ნებისმიერი ტეხილი წირით, რომლის ყველა წერტილი A არეს ეკუთვნის. ვთქვათ, ამ ტეხილი წირის განტოლებებია

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ldots,\ x_n=\varphi_n(t),$$

სადაც $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ მასთან

$$x_i^{(1)}=\varphi i(t_1),\ x_i^{(2)}=\varphi_i(t_2)\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

და $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ ფუნქციები უწყვეტია $[t_1, t_2]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ, $F(t)$ ის ფუნქციაა, რომელსაც მივიღებთ, თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციაში $x_1, x_2, \ldots x_n$ ცვლადების ნაცვლად აღნიშნულ φ_i ფუნქციებს ჩავსვამთ, ე. ი.

$$F(t) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)].$$

მე-5 თეორემის თანახმად, $F(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $[t_1, t_2]$ სეგმენტზე. ცხადია,

$$F(t_1) = f(p_1) = M_1, \quad F(t_2) = f(p_2) = M_2.$$

მაშასადამე, t_1 და t_2 რიცხვებს შორის არსებობს ისეთი τ რიცხვი, რომ

$$F(\tau) = N.$$

განვიხილოთ $p_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წერტილი, სადაც

$$\xi_1 = \varphi_1(\tau), \quad \xi_2 = \varphi_2(\tau), \ldots, \quad \xi_n = \varphi_n(\tau).$$

ცხადია, p_0 აღებული ტეხილი წირის წერტილია, გვაქვს

$$f(p_0) = f[\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)] = F(\tau) = N.$$

ამრიგად, A არეში ვიპოვეთ ისეთი p_0 წერტილი, რომ

$$f(p_0) = N.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

კითხვები

1. მოიყვანეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრა. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა არე?

2. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი? მოიყვანეთ მაგალითები.

3. რას უწოდებენ დონის წირებსა და დონის ზედაპირებს? მოიყვანეთ დონის წირებისა და დონის ზედაპირების მაგალითები.

4. განსაზღვრეთ მრავალი ცვლადის რთული ფუნქცია.

5. მოიყვანეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრა.

6. რას უწოდებენ მრავალი ცვლადის ფუნქციის განმეორებით ზღვრებს?

7. გამოთქვით და დაამტკიცეთ თეორემა ორი ცვლადის ფუნქციის განმეორებითი ზღვრების ტოლობის შესახებ.

8. მოიყვანეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრა წერტილში და არეში.

9. მოიყვანეთ მაგალითები მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციისა წერტილში და არეში.

10. მოიყვანეთ მაგალითი წერტილში წყვეტილი მრავალი ცვლადის ფუნქციისა.

11. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის წყვეტის წირი?

12. დაამტკიცეთ, რომ თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტი იქნება ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართაც იმავე წერტილში.

13. იქნება თუ არა მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტი წერტილში, თუ იგი უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ იმავე წერტილში?

14. გამოთქვით და დაამტკიცეთ თეორემები მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების შესახებ.

სავარჯიშო

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

1. $u=x+\sqrt{y}$, პასუხი: ნახევარსიბრტყე $y\geqslant 0$.

2. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$, პასუხი: $|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$.

3. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$, პასუხი: რგოლი $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

4. $u=\ln(-x-y)$, პასუხი: ნახევარსიბრტყე $x+y<0$.

5. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. პასუხი: $x^2+y^2-z^2=0$ კონუსის გარე არე.

6. $u=\ln(xyz)$, პასუხი: სამგანზომილებიანი სივრცის ოთხი ოქტანტის ერთობლიობა.

7. $u=\ln(z^2-x^2-y^2-1)$. პასუხი: $x^2+y^2-z^2=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის შიგა არე.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დონის წირები:

8. $z=x+y$, პასუხი: პარალელური წრფეები.

9. $z=x^2+y^2$. პასუხი: კონცენტრიული წრეწირები.

10. $z=x^2-y^2$. პასუხი: ტოლგვერდა ჰიპერბოლების ოჯახი საერთო $y=\pm x$ ასიმპტოტებით.

11. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$. პასუხი. მსგავსი ელიფსების ოჯახი.

12. $z=\sqrt{xy}$. პასუხი: იმ ტოლგვერდა ჰიპერბოლების ოჯახი, რომლებიც ასიმპტოტურად უახლოვდებიან კოორდინატთა ღერძებს და მოთავსებულია პირველსა და მესამე კვადრანტებში.

13. $z=|x|+y$. პასუხი: იმ ორმუხლა ტეხილი წირების ოჯახი, რომელთა წვეროები მდებარეობს Oy ღერძზე.

14. $z=\min(x, y)$. პასუხი: კუთხეები, რომელთა გვერდები პარალელურია კოორდინატთა Ox და Oy ღერძების დადებითი მიმართულებისა. კუთხეების წვეროები მდებარეობს $y=x$ წრფეზე.

15. $z=\max(|x|, |y|)$. პასუხი: ისეთი კვადრატების კონტურების ოჯახი, რომელთა საერთო ცენტრია $O(0, 0)$. კვადრატების გვერდები პარალელურია კოორდინატთა Ox და Oy ღერძებისა, როცა $z>0$. დონის წირი გადაგვარდება $O(0, 0)$ წერტილად, როცა $z=0$.

16. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$. პასუხი: კოორდინატთა სათავეზე გამავალი და Ox ღერძის ორთოგონალური წრეწირების კონა, რომლებსაც არ ეკუთვნის კოორდინატთა სათავე.

17. $z=x^y$. პასუხი: $y=\frac{c}{\ln x}$ წირთა ოჯახი.

18. $z=\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$. პასუხი: $(-a, 0)$ და $(a, 0)$ წერტილებზე გამავალი და Oy ღერძის ორთოგონალური წრეწირების ოჯახი. თვით $(-a, 0)$ და $(a, 0)$ წერტილები არ ეკუთვნის დონის წირებს.

19. $z=\operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$. პასუხი: $x=m\pi$ და $y=n\pi$ $(m,n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ წრფეები, როცა $z=0$; $m\pi<x<(m+1)\pi$. $n\pi<y<(n+1)\pi$ კვადრატების ერთობლიობა, როცა $z=-1$ ან $z=1$, სადაც $z=(-1)^{m+n}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დონის ზედაპირები:

20. $u=x+y+z$. პასუხი: პარალელური სიბრტყეების ოჯახი.

21. $u=x^2+y^2+z^2$. პასუხი: იმ კონცენტრიული სფეროების ოჯახი, რომელთა საერთო ცენტრია კოორდინატთა სათავე.

22. $u=x^2+y^2-z^2$. პასუხი: ორკალთა ჰიპერბოლოიდების ოჯახი, როცა $u<0$; ცალკალთა ჰიპერბოლოიდების ოჯახი, როცა $u>0$, კონუსი, როცა $u=0$.

23. $u=(x+y)^2+z^2$. პასუხი: იმ ელიფსური ცილინდრების ოჯახი, რომელთა საერთო ღერძია $x+y=0$, $z=0$ წრფე.

24. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$. პასუხი: $x^2+y^2+z^2=\pi n(n=0,$

1, 2, ...) კონცენტრიული სფეროების ოჯახი, როცა $u=0$; $n\pi<x^2+$ $+y^2+z^2<(n+1)\pi$, სფერული შრეების ოჯახი, როცა $u=-1$ ან $u=1$, სადაც $u=(-1)^n$.

გამოთვალეთ შემდეგი განმეორებითი ზღვრები:

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; პასუხი: 0.

26. $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; პასუხი: 1.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}$; პასუხი: $\dfrac{1}{2}$.

28. $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}$; პასუხი: 1.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; პასუხი: 0.

30. $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; პასუხი: 1.

31. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; პასუხი: 0.

32. $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; პასუხი: 1.

გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვრები:

33. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; პასუხი: 0.

34. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to4}}\dfrac{6x^2-13xy+6y^2}{14x^2-25xy+6y^2}$; პასუხი: $\dfrac{5}{17}$.

35. $\lim\limits_{\substack{x\to10\\y\to2a}}\dfrac{ax^2-(2a^2+5)xy+10ay^2}{3ax^2+(4a^2-15)xy-20ay^2}$; პასუხი: $\dfrac{5-2a^2}{15+4a^2}$.

36. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; პასუხი: 0.

37. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \dfrac{(x-a)a^n-(a-y)x^n+(a-x)}{(x-y)(a-y)(a-x)}$. პასუხი: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

38. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x^3-y^3}}{\sqrt{3(x-y)}}$; პასუხი: $\dfrac{\pi}{4}$.

39. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{y^3-1}}{\sqrt{(x^2-1)^3}-y+1}$; პასუხი: $-\dfrac{3}{2}$.

40. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$. პასუხი: 2.

41. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$; პასუხი: 1.

42. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$; პასუხი: 1.

43. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; პასუხი: 1.

44. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$; პასუხი: 1.

45. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$; პასუხი: a.

46. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; პასუხი: e.

47. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; პასუხი: $\ln 2$.

48. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=$

$$=\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}.$$

49. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

50. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}.$$

51. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$z=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

უწყვეტია $x^2+y^2<1$ არეში.

52. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$z=x\sin\frac{1}{y}$$

უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წყვეტის წერტილები:

53. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; პასუხი: (0, 0).

54. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; პასუხი: $x^2+y^2=1$ წრეწირის წერტილები.

55. $u=\dfrac{xy}{x+y}$; პასუხი: $y=-x$ წრფის წერტილები.

56. $u=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; პასუხი: $y=\pm x$ წრფეების წერტილები.

57. $u=\sin\frac{1}{xy}$; პასუხი: Ox და Oy ღერძების წერტილები.

58. შეამოწმეთ, რომ წრფივი ფუნქცია

$$u=2x-3y+5$$

თანაბრად უწყვეტია xOy სიბრტყეში.

59. შეამოწმეთ, რომ ფუნქცია

$$u=\sqrt{x^2+y^2}$$

თანაბრად უწყვეტია xOy სიბრტყეში.

60. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$u=\arcsin\frac{x}{y}$$

არ არის თანაბრად უწყვეტი თავისი განსაზღვრის არეში.

თავი VI

მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

ახლა შევუდგეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციების დიფერენციალური აღრიცხვის შესწავლას. აქ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცვლილების ხასიათის შეფასება. ერთი შეხედვითაც კი ცხადია, რომ თვით ამოცანის დასმა გაცილებით რთულია, ვიდრე ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, ვინაიდან მრავალი ცვლადის ფუნქციის ხასიათი შეიძლება განვიხილოთ სხვადასხვა მიმართულებით.

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და კერძო დიფერენციალები

განვიხილოთ რაიმე G არეში განსაზღვრული ორი ცვლადის $u=f(x, y)$ ფუნქცია და ამ არეში ავიღოთ რომელიმე (x_0, y_0) წერტილი. მივანიჭოთ y ცვლადს y_0 მნიშვნელობა და ვცვალოთ მხოლოდ x. მაშინ u იქნება მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია. გამოვთვალოთ ამ უკანასკნელის წარმოებული $x=x_0$ წერტილში. ამისათვის მივცეთ x_0-ს Δx ნაზრდი და u ფუნქციის სათანადო ნაზრდი აღვნიშნოთ $\Delta_x u$ სიმბოლოთი. გვექნება

$$\Delta_x u=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x u$ ნაზრდს ეწოდება აღებული ფუნქციის კერძო ნაზრდი x-ით. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $u=f(x, y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული x ცვლადით (x_0, y_0) წერტილში და იგი აღინიშნება $f'_x(x_0, y_0)$ სიმბოლოთი. ამავე წარმოებულს აღნიშნავენ აგრეთვე $\frac{\partial u}{\partial x}$ ან $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად განისაზღვრება $u=f(x, y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0, y_0) წერტილში:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

ამავე წარმოებულს აღნიშნავენ აგრეთვე $\frac{\partial u}{\partial y}$ ან $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ სიმბოლოთი.

თუ მოცემულია n ცვლადის ფუნქცია

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

მაშინ მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებული რაიმე $(x_1^{(0)}x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ წერტილში განისაზღვრება იმგვარადვე, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. მაგალითად,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}\ldots x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})}{\Delta x_1}.$$

მოვიყვანოთ მაგალითები.

1. ვიპოვოთ

$$u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

2. მოცემულია ფუნქცია $u=\ln(\sin xy)$ ვიპოვოთ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(\sin xy)'_x}{\sin xy} = y \operatorname{ctg} xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(\sin xy)'_y}{\sin xy} = x \operatorname{ctg} xy.$$

3. ვიპოვოთ $u=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

4. მოცემულია ფუნქცია $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$. ვიპოვოთ მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2).$$

5. ვიპოვოთ $u=e^{xy}\sin(x^2+y^2)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\,e^{xy}\sin(x^2+y^2)+2xe^{xy}\cos(x^2+y^2)=$$

$$=e^{xy}[y\sin(x^2+y^2)+2x\cos(x^2+y^2)].$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{xy}[x\sin(x^2+y^2)+2y\cos(x^2+y^2)].$$

6. ვიპოვოთ $u=(\cos x)^{\sin y}$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან

$$\ln u=\sin y\cdot\ln\cos x,$$

ამიტომ

$$\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y\,\frac{(\cos x)'_x}{\cos x}=-\sin y\,\mathrm{tg}\,x,$$

საიდანაც

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\,\mathrm{tg}\,x\sin y\cdot(\cos x)^{\sin y}$$

შემდეგ

$$\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial y}=\cos y\ln\cos x,$$

აქედან

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos y\ln(\cos x)\,.\,(\cos x)^{\sin y}$$

7. კლაპეირონის კანონის მიხედვით, იდეალური გაზის რაიმე მასის აბსოლუტურ T ტემპერატურასა, მის მიერ დაკავებულ V მოცუ-

ლობას და p წნევას შორის დამოკიდებულება მოცემულია $pv=RT$ ტოლობებით, სადაც R უნივერსალური გაზური მუდმივია. ამ ტოლობიდან T, v, p სიდიდეთაგან ერთ-ერთი გამოისახება დანარჩენი ორი ცვლადის საშუალებით. ვთქვათ, მაგალითად, p და v არგუმენტებია, ხოლო T მათი ფუნქცია: $T=\frac{pv}{R}$, გვექნება

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{v}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial v}=\frac{p}{R}. \tag{1.1}$$

თუ დამოუკიდებელი ცვლადებია p და T, ხოლო v მათი ფუნქციაა, მაშინ $v=\frac{RT}{p}$. საიდანაც

$$\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},\quad \frac{\partial v}{\partial T}=\frac{R}{p}. \tag{1.2}$$

ახლა ვთქვათ, v და T დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო p მათზე დამოკიდებული ფუნქცია, ე. ი. $p=\frac{RT}{v}$. მაშინ

$$\frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{RT}{v^2},\quad \frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{v}. \tag{1.3}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.1), (1.2), (1.3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს თერმოდინამიკაში ცნობილი შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{v^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{v}{R}=-\frac{RT}{pv}=-1.$$

განვსაზღვროთ ახლა მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო დიფერენციალები. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია სამ ცვლადზე დამოკიდებული u ფუნქცია

$$u=f(x,\ y,\ z),$$

გამოსახულებას $\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$, სადაც Δx არის x ცვლადის ნებისმიერი ნაზრდი, ეწოდება u ფუნქციის კერძო დიფერენციალი x ცვლადით და ასე აღინიშნება:

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x. \tag{1.4}$$

კერძოდ, თუ $u=x$, მაშინ (1.4) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$dx=\Delta x.$$

მაშასადამე, (1.4) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx. \tag{1.5}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ აღებული ფუნქციის პირველი რიგის კერძო დიფერენციალები y და z ცვლადებით:

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz. \tag{1.6}$$

(1.5) და (1.6) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\frac{d_x u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d_y u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{d_z u}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

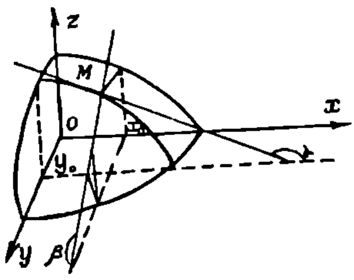
§ 2. ორი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულების გეომეტრიული შინაარსი

განვიხილოთ ორ ცვლადზე დამოკიდებული უწყვეტი ფუნქცია

$$z=f(x, y). \tag{2.1}$$

როგორც ვიცით, (2.1) განტოლება განსაზღვრავს $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ რაიმე ზედაპირს (ნახ.9).

გეომეტრიულად კერძო წარმოებული $f'_x(x_0, y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს აღებული ზედაპირისა და $y=y_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძთან, ხოლო კერძო წარმოებული $f'_y(x_0, y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს აღებული ზედაპირისა და $x=x_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[(x_0, y_0), f(x_0, y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძთან (ნახ. 9). მაშასადამე, გვაქვს



ნახ. 9

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha, \quad f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

§ 3. მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

განვიხილოთ ერთ ცვლადზე დამოკიდებული $y=f(x)$ ფუნქცია. თუ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული x წერტილში, მაშინ მისი ნაზრდი $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\Delta y=hf'(x)+\varepsilon h, \tag{3.1}$$

სადაც $\varepsilon=\varepsilon(h)$ მიისწრაფვის ნულისაკენ h ნაზრდთან ერთად. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში Δy წარმოიდგინება ორი შესაკრების ჯამის სახით. პირველი შესაკრები წარმოადგენს h-ის მიმართ წრფივ ფუნქციას, რომელსაც აღებული ფუნქციის ნაზრდის *მთავარი ნაწილი* ეწოდება. თუ h საკმაოდ მცირეა, მაშინ $f'(x)h$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ფუნქციის Δy ნაზრდის საკმაოდ ზუსტი მნიშვნელობა.

პირიქითაც, თუ $f(x)$ ფუნქციის Δy ნაზრდისათვის მოიძებნება h-ის ისეთი წრფივი Ah ფუნქცია, რომ

$$f(x+h)-f(x)=Ah+\varepsilon h, \tag{3.2}$$

სადაც ε ნულისაკენ მიისწრაფვის h-თან ერთად, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული x წერტილში.

მართლაც, ამ შემთხვევაში (3.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+\varepsilon.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $h\to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A.$$

ამრიგად, არსებობს $f'(x)$ წარმოებული და იგი A-ს ტოლია. ამის გამო, *$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ არსებობს x-ზე დამოკიდებული ისეთი A რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას*

$$f(x+h)-f(x)=Ah+\varepsilon h,$$

სადაც ε ნულისაკენ მიისწრაფვის h-თან ერთად.

ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკითხი რაიმე წერტილში

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია ორ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქცია $u=f(x,y)$, რომელიც განსაზღვრულია G არეში. ამ არეში ვიღოთ (x,y) წერტილი და x და y-ს მივცეთ h და k ნაზრდები შე-

საბამისად. მაშინ აღებული ფუნქციის Δu ნაზრდი განისაზღვრება ტოლობით

$$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y).$$

ამ ნაზრდს ეწოდება აგრეთვე u ფუნქციის სრული ნაზრდი.

შტოლცის (Stolz) განსაზღვრის მიხედვით, $u = f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x, y) წერტილში, თუ არსებობს ისეთი A და B სიდიდეები დამოკიდებული მხოლოდ x და y-ზე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\Delta u = Ah + Bk + \varepsilon\rho,$$

სადაც Δu აღებული ფუნქციის სრული ნაზრდია, ხოლო $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ და $\varepsilon \to 0$, როცა $\rho \to 0$.

ამ შემთხვევაში, $Ah + Bk$ გამოსახულებას ეწოდება აღებული ფუნქციის სრული დიფერენციალი და აღინიშნება du ან df სიმბოლოთი. ამრიგად, გვაქვს

$$du = Ah + Bk.$$

თეორემა 1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს სასრული კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ და } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

დამტკიცება. რაკი $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, ამიტომ

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{3.3}$$

სადაც A და B დამოუკიდებელია Δx და Δy ნაზრდებისაგან, ხოლო $\varepsilon \to 0$, როცა $\rho \to 0$.

თუ (3.3) ტოლობაში ვიგულისხმებთ $\Delta y = 0$, გვექნება

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + \varepsilon' |\Delta x|, \tag{3.4}$$

სადაც ε' ნულისაკენ მიისწრაფვის Δx-თან ერთად, ახლა გავყოთ (3.4) ტოლობის ორივე ნაწილი Δx ნაზრდზე და ვადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$ მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\frac{\partial f}{\partial y}=B.$$

თეორემა დამტკიცდა.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, მაშინ, დამტკიცებული თეორემის ძალით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{3.5}$$

ახლა (3.5) ფორმულაში ვიგულისხმოთ $f=x$, მაშინ $dx=\Delta x$. ანალოგიურად მივიღებთ $dy=\Delta y$. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{3.6}$$

შემდეგ, რაკი

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx=d_x f,\ \frac{\partial f}{\partial y}dy=d_y f,$$

ამიტომ (3.6) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$df=d_x f+d_y f,$$

ე. ი. ფუნქციის სრული დიფერენციალი კერძო დიფერენციალების ჯამის ტოლია.

თეორემა 2. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია იმავე წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, მაშინ მისი ხრული ნაზრდი

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\rho,$$

სადაც $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ სასრული სიდიდეებია, ხოლო $\varepsilon\to 0$, როცა $\rho\to 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)]=0,$$

ე. ი. $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (x, y) წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: თუ $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს (x, y) წერტილში სასრული კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია იქნება თუ არა უწყვეტი ამ წერტილში? პასუხი უარყოფითია. მართლაც. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{როცა } x=y=0. \end{cases}$$

როგორც ვიცით, ეს ფუნქცია უწყვეტი არაა $(0,0)$ წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $f'_x(0,0)$ და $f'_y(0,0)$, გვაქვს

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

ანალოგიურად ვაჩვენოთ, რომ $f'_y(0,0)=0$.

ამრიგად, არსებობს $f'_x(0,0)$ და $f'_y(0,0)$ სასრული კერძო წარმოებულები, მაგრამ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტი არაა $(0,0)$ წერტილში.

თეორემა 8. თუ $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ არსებობს (x, y) წერტილის რაიმე მიდამოში და (x, y) წერტილში ისინი უწყვეტია, მაშინ ამ წერტილში $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია.

დამტკიცება. $f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი Δf შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\Delta f=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)].$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x,$$

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

სადაც θ_1 და θ_2 1-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვებია. მაშასადამე,

$$\Delta f=f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

მაგრამ $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ კერძო წარმოებულების უწყვეტობის გამო (x, y) წერტილში გვაქვს

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)=f'_x(x,\ y)+\varepsilon',$$

$$f'_y(x,\ y+\theta_2\Delta y)=f'_y(x,\ y)+\varepsilon'',$$

სადაც ε' და ε'' ნულისაკენ მიისწრაფვიან Δx და Δy ნაზრდებთან ერთად. ამრიგად,

$$\Delta f=f'_x(x,\ y)\Delta x+f'_y(x,\ y)\Delta y+\varepsilon'\Delta x+\varepsilon''\Delta y.$$

მაგრამ

$$\varepsilon'\Delta x+\varepsilon''\Delta y=\frac{\varepsilon'\Delta x+\varepsilon''\Delta y}{\rho}\cdot\rho=\varepsilon\rho,$$

სადაც

$$\varepsilon=\frac{1}{\rho}(\varepsilon'\Delta x+\varepsilon''\Delta y),\ \ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0. \tag{3.7}$$

მართლაც,

$$|\varepsilon|\leqslant|\varepsilon'|\frac{|\Delta x|}{\rho}+\varepsilon''\frac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant|\varepsilon'|+|\varepsilon''|.$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3.7) ტოლობის მართებულობა. ამრიგად

$$\Delta f=f'_x(x,\ y)\Delta x+f'_y(x,\ y)\Delta y+\varepsilon\rho,$$

სადაც $\varepsilon\to 0$, როცა $\rho\to 0$. უკანასკნელი ტოლობიდან ვასკვნით $f(x,\ y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას $(x,\ y)$ წერტილში.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა მრავალი ცვლადის უწყვეტი არადიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელსაც აქვს პირველი რიგის სასრული კერძო წარმოებულები. პასუხი დადებითია. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,\ y)=x+y+\sqrt{|xy|}\ ,$$

რომელიც უწყვეტია x და y ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის. კერძო წარმოებულის განსაზღვრის უშუალო გამოყენებით მივიღებთ

$$f'_x(0,0)=1,\ \ f'_y(0,0)=1.$$

ვუჩვენოთ, რომ $f(x,\ y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა $(0,0)$ წერტილში. ამისათვის განვიხილოთ მოცემული ფუნქციის სრული ნაზრდი Δf. გვაქვს:

$$\Delta f=f(\Delta x,\ \Delta y)-f(0,0)=\Delta x+\Delta y+\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}=\Delta x+\Delta y+\varepsilon\rho,$$

სადაც

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\sqrt{|\Delta x\, \Delta y|}\,, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

მაგრამ, თუ $\Delta x = \Delta y$, მაშინ

$$\varepsilon = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

მაშასადამე, ε არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $\rho \to 0$ და ამიტომაც, $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა (0,0) წერტილში.

ამრიგად, უწყვეტ $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის სასრული კერძო წარმოებულები (0,0) წერტილში, მაგრამ იგი დიფერენცირებადი არაა იმავე წერტილში.

ახლა ბუნებრივად ისმის კითხვა: **არსებობს თუ არა მრავალი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულები წყვეტილია?**

დავამტკიცოთ ასეთი ფუნქციის არსებობა. ამისათვის განვიხილოთ $f(x, y)$ ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$f(x, y) = xy\sin\frac{1}{xy}\,, \text{ თუ } x \neq 0,\ y \neq 0$$

და

$$f(x, 0) = f(0, y) = f(0,0) = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ xOy სიბრტყეზე. კერძო წარმოებულის განსაზღვრის მიხედვით, გვექნება

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ კერძო წარმოებულები წყვეტილი ფუნქციებია (0,0) წერტილში.

ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x \neq 0$, $y \neq 0$, მაშინ

$$f'_x(x, y) = y\sin\frac{1}{xy} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{xy}\,.$$

განვიხილოთ წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots,$$

სადაც

$$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\,.$$

გვაქვს

$$f'_x(x_n, y_n) = -\sqrt{2n\pi}\,,$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} f'_x(x_n, y_n) = -\infty \neq f'_x(0,0).$$

მაშასადამე, $f'_x(x, y)$ წარმოებული უწყვეტი არაა $(0,0)$ წერტილში. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $f'_y(x, y)$ კერძო წარმოებულიც წყვეტილია $(0,0)$ წერტილში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილში. გვაქვს

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \Delta x \Delta y \sin\frac{1}{\Delta x \Delta y} = \varepsilon\rho,$$

სადაც

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\Delta x\Delta y \sin\frac{1}{\Delta x\Delta y}, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

მაგრამ

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\rho}|\Delta x||\Delta y| \leqslant \frac{|\Delta x||\Delta y|}{|\Delta x|} = |\Delta y|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0.$$

მაშასადამე, $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილში და მისი სრული დიფერენციალი ამ წერტილში ნულის ტოლია, ე. ი. $df = 0$.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ მრავალი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულები წყვეტილია.

§ 4. ორ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი

განვიხილოთ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია რაიმე G არეში. როგორც ვიცით

$$z = f(x, y) \tag{4.1}$$

განტოლება გამოსახავს სივრცეში გარკვეულ ზედაპირს (ნახ.10). ამ ზედაპირზე ავიღოთ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. ცხადია, $z_0 = f(x_0, y_0)$.

როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან, P_0 წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა კონის განტოლებაა

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

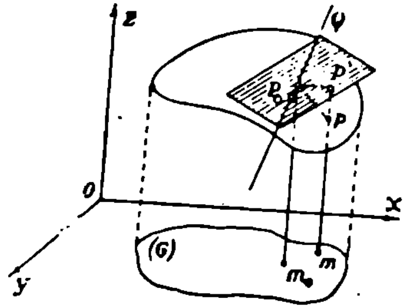
ვეძებოთ ამ სიბრტყეთა ძნულში ისეთი

$$z=f(x_0, y_0)+A_0(x-x_0)+B_0(x-x_0) \tag{4.2}$$

სიბრტყე, რომ $f(x,y)-[f(x_0, y_0)+A_0(x-x_0)+B_0(x-x_0)]$ სხვაობა იყოს მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ρ-სთან შედარებით, სადაც

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ მანძილი PP' უნდა იყოს მაღალ რიგის უსასრულოდ მცირე ρ-სთან შედარებით; აქ P აღებული ზედაპირის წერტილია, რომლის პირველი ორი კოორდინატია x და y, ხოლო P' წარმოადგენს (4.2) სიბრტყის წერტილს, რომლის პირველ ორი კოორდინატია ისევ x და y.



ნახ. 10

თუ არსებობს ასეთი (4.2) სიბრტყე, მაშინ მას ეწოდება (4.1) ზედაპირის მხები სიბრტყე P_0 წერტილში. თვით P_0 წერტილს კი—შეხების წერტილი.

თეორემა 4. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ (4.1) ზედაპირს აქვს მხები სიბრტყე $P_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ წერტილში.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, ამიტომ

$$f(x,y)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\varepsilon\rho,$$

სადაც

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

და ε ნულისაკენ მიისწრაფვის ρ-სთან ერთად. დავამტკიცოთ, რომ

$$z=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0) \quad (4.3)$$

სიბრტყე არის P_0 წერტილზე გამავალი (4.1) ზედაპირის მხები სიბრტყე. ცხადია,

$$f(x, y)-\left[f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right]=\varepsilon\rho.$$

რადგანაც ε ნულისაკენ მიისწრაფვის ρ-სთან ერთად, ამიტომ $\varepsilon\rho$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ρ-სთან შედარებით და, ამის გარდა, (4.3) სიბრტყე გადის P_0 წერტილზე. მაშასადამე, (4.3) სიბრტყე წარმოადგენს P_0 წერტილზე გამავალ (4.1) ზედაპირის მხებ სიბრტყეს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მხები სიბრტყის (4.3) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0). \quad (4.4)$$

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული

თეორემა 5. *თუ (4.1) ზედაპირს აქვს P_0 წერტილში მხები სიბრტყე, რომელიც Oz ღერძის პარალელური არაა, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში.*

დამტკიცება. აღნიშნული მხები სიბრტყის განტოლება იყოს

$$z=f(x_0, y_0)+A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0);$$

მაშინ

$$f(x, y)-[f(x_0, y_0)+A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)]=\varepsilon'\rho,$$

სადაც $\varepsilon'\to 0$, როცა $\rho\to 0$. აქედან

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)=A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)+\varepsilon'\rho;$$

მაშასადამე, $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, *იმისათვის, რომ (4.1) ზედაპირს ჰქონდეს Oz ღერძის არაპარალელური მხები სიბრტყე*

$$P_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$$

წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი (x_0, y_0) წერტილში.

მაშასადამე, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ (4.1) ზედაპირის P_0 წერტილზე შეგვიძლია გავავლოთ მხები სიბრტყე, რომლის განტოლებაა (4.4). მაგრამ

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)=df, \tag{4.5}$$

ამიტომ (4.4) და (4.5) ტოლობების ძალით,

$$df=z-f(x_0, y_0),$$

ე. ი. $f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი არის (4.1) ზედაპირის მხები სიბრტყის აპლიკატის ნაზრდი.

წრფეს, რომელიც მხები სიბრტყის მართობია შეხების წერტილში, ზედაპირის ნორმალი ეწოდება.

თუ ნორმალის მიმართულების კოეფიციენტებს აღვნიშნავთ L, M და N-ით, მაშინ ნორმალის განტოლება იქნება

$$\frac{X-x_0}{L}=\frac{Y-y_0}{M}=\frac{Z-z_0}{N}, \tag{4.6}$$

სადაც X, Y, Z ნორმალის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია.

თუ ვისარგებლებთ (4.4) სიბრტყისა და (4.6) წრფის მართობულობის პირობით, მაშინ ნორმალის განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{X-x_0}{-p}=\frac{Y-y_0}{-q}=\frac{Z-z_0}{1},$$

სადაც

$$p=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

თუ ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს აღვნიშნავთ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$-თი, გვექნება

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

§ 5. სრული წარმოებული

ვთქვათ, მაგალითად, ოთხგანზომილებიან G არეში განსაზღვრულია ოთხი ცვლადის ფუნქცია

$$\omega=f(t, u, v, w).$$

ვიგულისხმოთ, რომ u, v და w წარმოადგენენ t ცვლადის ფუნქციებს;

$$u=\varphi(t),\ v=\psi(t),\ w=\chi(t),$$

რომლებიც განსაზღვრულია ერთსა და იმავე (a, b) შუალედში. ამის გარდა, დავუშვათ, რომ (t, u, v, w) წერტილი არ გამოდის G არიდან, როცა t იცვლება a და b-ს შორის. ამ შემთხვევაში

$$w=f[t,\ \varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]$$

წარმოადგენს t ცვლადის რთულ ფუნქციას. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 6. თუ $\omega=f(t, u, v, w)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (t, u, v, w) წერტილში, ხოლო u, v, და w ფუნქციები დიფერენცირებადია t ცვლადით, მაშინ არსებობს ω რთული ფუნქციის წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial w}\frac{dw}{dt}. \tag{5.1}$$

დამტკიცება. მივცეთ t-ს ნაზრდი Δt; მაშინ u, v, w მიიღებს ნაზრდებს $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ და, მაშასადამე, w ფუნქციაც მიიღებს სათანადო Δw ნაზრდს:

$$\Delta\omega=f(t+\Delta t,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(t, u, v, w).$$

რადგანაც $f(t, u, v, w)$ დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta\omega=f'_t(t, u, v, w)\Delta t+f'_u(t, u, v, w)\Delta u+f'_v(t, u, v, w)\Delta v+$$
$$+f'_w(t, u, v, w)\Delta w+\varepsilon\rho, \tag{5.2}$$

სადაც ε ნულისაკენ მიისწრაფვის ρ-სთან ერთად; აქ

$$\rho=\sqrt{(\Delta t)^2+(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2}$$

თუ (5.2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ Δt ნაზრდზე და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t\to 0$ მივიღებთ (5.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

$\frac{d\omega}{dt}$ წარმოებულს ეწოდება ω ფუნქციის სრული წარმოებული. ცხადია, რამდენი არგუმენტიც გინდა შედიოდეს f ფუნქციაში გაწარმოების ფორმულა დაიწერება (5.1) ფორმულის მსგავსად.

თუ (5.1) ტოლობის ორივე ნაწილს dt-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial t}dt+\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv+\frac{\partial\omega}{\partial w}dw. \tag{5.3}$$

როგორც ვხედავთ, (5.3) გამოსახულება იგივეა, რაც ω ფუნქციის სრული დიფერენციალის გამოსახულება, გამოთვლილი იმ შემთხვევისათვის, როცა t, u, v, w დამოუკიდებელი ცვლადებია. მაგრამ განსხვავება იმაშია, რომ (5.3) ტოლობაში du, dv, dw წარმოადგენენ $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ ფუნქციების დიფერენციალებს. მაშასადამე, *მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის ადგილი აქვს სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას.*

შენიშვნა. თუ $f(t, u, v, w)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა, მაგრამ აქვს სასრული კერძო წარმოებულები

$$f'_t(t, u, v, w),\ f'_u(t, u, v, w),\ f'_v(t, u, v, w),\ f'_w(t, u, v, w),$$

მაშინ (5.1) ფორმულა შეიძლება არ იყოს მართებული.

მაგალითი. ვიპოვოთ $u=5x^2+8xy-y^2$ ფუნქციის სრული წარმოებული, სადაც $x=\cos t$, $y=\sin t$.

(5.1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

მაგრამ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=10x+8y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=8x-2y,$$

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t.$$

მაშასადამე,

$$\frac{du}{dt}=(10x+8y)(-\sin t)+(8x-2y)\cos t=$$

$$=-(10x+8y)y+(8x-2y)x=8x^2-12xy-8y^2.$$

§6. სრული კერძო წარმოებულები

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ ის შემთხვევა, როცა ამოცანას საფუძვლად ედო ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი. მაგრამ ძალიან ხშირად გამოიყენება რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადი. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია ფუნქცია

$$\omega=f(x, y, u, v, w),$$

სადაც

$$u=\varphi(x, y),\quad v=\psi(x, y),\quad w=\chi(x, y).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y, u, v, w)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y, u, v, w) წერტილში, ხოლო u, v, w-ს აქვს პირველი რიგის სას-

რული კერძო წარმოებულები x და y ცვლადების მიმართ. თუ f ფუნქციაში u, v, w ფუნქციების ნაცვლად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს, მივიღებთ მხოლოდ x და y ცვლადების ფუნქციას:

$$\omega=f[x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y), \chi(x, y)]=F(x, y).$$

$\frac{\partial \omega}{\partial x}$ და $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ კერძო წარმოებულებს ეწოდება ω ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები. ვიპოვოთ ეს კერძო წარმოებულები.

$\frac{\partial \omega}{\partial x}$ კერძო წარმოებულის გამოსათვლელად y უნდა განვიხილოთ როგორც მუდმივი და ამიტომ გვექნება იგივე ამოცანა, რაც წინა პარაგრაფში იყო განხილული. ასე რომ, შეგვიძლია გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა, რომელიც მოგვცემს

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6.1}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{6.2}$$

(6.1) და (6.2) ფორმულებით გამოითვლება ω რთული ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები x და y ცვლადების შესაბამისად.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ და $\chi(x, y)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია და დავამტკიცოთ, რომ $\omega=F(x, y)$ ფუნქციაც დიფერენცირებადია. ამისათვის x და y ცვლადებს მივცეთ Δx და Δy ნაზრდები; მაშინ u, v, w და ω მიიღებენ სათანადო ნაზრდებს Δu, Δv, Δw და $\Delta\omega$. გვაქვს:

$$\Delta\omega=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=$$

$$=f(x+\Delta x, y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(x, y, u, v, w). \tag{6.3}$$

რადგანაც $f(x, y, u, v, w)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta\omega=f'_x(x, y, u, v, w)\Delta x+f'_y(x, y, u, v, w)\Delta y+$$

$$+f'_u(x, y, u, v, w)\Delta u+f'_v(x, y, u, v, w)\Delta v+$$

$$+f'_w(x, y, u, v, w)\Delta w+\varepsilon'\rho', \tag{6.4}$$

სადაც

$$\rho'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2}$$

და ε' ნულისაკენ მიისწრაფვის ρ'-თან ერთად.

შემდეგ, რადგანაც u, v, w ფუნქციებიც დიფერენცირებადია. ამიტომ

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \rho,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2 \rho,$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \rho,$$

სადაც

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

და ε_1, ε_2, ε_3 მიისწრაფვიან ნულისაკენ ρ-სთან ერთად.

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (6.4) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\Delta\omega = f'_x(x, y, u, v, w)\Delta x + f'_y(x, y, u, v, w)\Delta y +$$

$$+ f'_u(x, y, u, v, w)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) +$$

$$+ f'_v(x, y, u, v, w)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) +$$

$$+ f'_w(x, y, u, v, w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y\right) + f'_u(x, y, u, v, w)\varepsilon_1 \rho +$$

$$+ f'_v(x, y, u, v, w)\varepsilon_2 \rho + f'_w(x, y, u, v, w)\varepsilon_3 \rho + \varepsilon' \rho'.$$

მაგრამ

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = du, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y = dv, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y = dw,$$

მაშასადამე,

$$\Delta\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw +$$

$$+ \left(\varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial v} + \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial w}\right)\rho + \varepsilon' \rho'. \tag{6.5}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw = \frac{\partial \omega}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\Delta y. \tag{6.6}$$

ამისათვის (6.1) და (6.2) ტოლობების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ შესაბამისად Δx და Δy-ზე და მიღებული ტოლობები წევრ-წევრად შევკრიბოთ, გვექნება

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \omega}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+\frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y\right)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (6.6) ტოლობას.

მაშასადამე, (6.6) ტოლობის ძალით, (6.5) ფორმულიდან გვაქვს

$$\Delta\omega=\frac{\partial \omega}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \omega}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\rho, \tag{6.7}$$

სადაც

$$\varepsilon=\varepsilon_1\frac{\partial f}{\partial u}+\varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial v}+\varepsilon_3\frac{\partial f}{\partial w}+\varepsilon'\frac{\rho'}{\rho}. \tag{6.8}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\frac{\rho'}{\rho}$ შემოსაზღვრული სიდიდეა. მართლაც,

$$\frac{\rho'}{\rho}=\sqrt{1+\frac{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

აქედან

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2}=1+\left(\frac{\Delta u}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\Delta w}{\rho}\right)^2=1+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\varepsilon_1\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\varepsilon_2\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\varepsilon_3\right)^2.$$

მაგრამ $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\leqslant 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant 1$. ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $M>0$ რომ $\frac{\rho'}{\rho}<M$. მაშასადამე, $\frac{\rho'}{\rho}$ შემოსაზღვრული სიდიდეა და ამიტომ, (6.8) ტოლობის ძალით,

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0.$$

(6.7) ტოლობის თანახმად $\omega=F(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია და

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy.$$

ახლა თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.6) ტოლობას, გვექნება

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

ამრიგად, ω ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოისახება იმგვარადვე, როგორც სრული დიფერენციალი, გამოთვლილი იმ შემთხვევისათვის, როცა x, y, u, v, w დამოუკიდებელი ცვლადებია, ე. ი. მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის ადგილი აქვს სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას.

მაგალითი. მოცემულია ფუნქცია $\omega=\sqrt{u^2+v^2}$, სადაც $u=x+y$, $v=xy$. ვიპოვოთ $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ და $\frac{\partial\omega}{\partial y}$.

(6.1) და (6.2) ფორმულების თანახმად

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

მაგრამ

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

მაშასადამე,

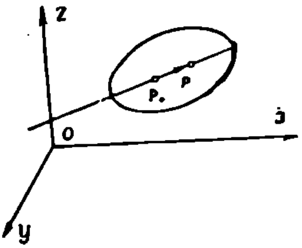
$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}y=\frac{u+vy}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}x=\frac{u+vx}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

§ 7. მიმართული წარმოებული. გრადიენტი

შემოვიღოთ ეგრეთ წოდებული მიმართული წარმოებულის ცნება, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკური ანალიზის გამოყენებით საკითხებში.

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია სამგანზომილებიან სივრცის G არეში. ცხადია, $f(x, y, z)$ ფუნქცია წარმოადგენს G არის $p=(x, y, z)$ წერტილის $f(p)$ ფუნქციას. ავიღოთ G არეში რომელიმე წერტილი $p_0=(x_0, y_0, z_0)$ და ამ წერტილზე გავავლოთ რაიმე L ღერძი (ნახ. 11). $p=(x, y, z)$ იყოს G არეში მოთავსებული L ღერძის ნებისმიერი წერტილი. $\overrightarrow{p_0p}$ ვექტორის სიდიდე L-ის მიმართ აღვნიშნოთ ρ-თი. იგი დადებითია ან უარყოფითი იმისდა მიხედვით, p_0p ვექტორის მიმართულება ემთხვევა L ღერძის მიმართულებას თუ არა. თუ არსებობს ზღვარი



ნახ. 11.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(p)-f(p_0)}{\rho},$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(p)$ ფუნქციის წარმოებული L მიმართულებით p_0 წერტილში და იგი ასე აღინიშნება:

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial L}.$$

ცხადია, კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ შეგვიძლია განვიხილოთ შესაბამისად როგორც წარმოებულები Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართულებით.

თეორემა 7. თუ სამგანზომილებიანი სივრცის G არეში განსაზღვრული $f(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია ამ არის $p_0=(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში, მაშინ არსებობს $\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}$ წარმოებული ნებისმიერი L მიმართულებით და მართებულია ტოლობა

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(p_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(p_0)}{\partial z}\cos\gamma, \quad (7.1)$$

სადაც $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ არიან L ღერძის მიმართულების კოსინუსები.

დამტკიცება. ავიღოთ L ღერძზე ნებისმიერი

$$p=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$$

წერტილი (ნახ. 11). რადგანაც $f(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია p_0 წერტილში, ამიტომ

$$f(p)-f(p_0)=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(p_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(p_0)}{\partial z}\Delta z+\varepsilon\rho, \qquad (7.2)$$

სადაც ρ არის $\overrightarrow{p_0p}$ ვექტორის სიდიდე და ε ნულისაკენ მიისწრაფვის ρ-სთან ერთად.

თუ (7.2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ ρ-ზე, გვექნება

$$\frac{f(p)-f(p_0)}{\rho}=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial f(p_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\partial f(p_0)}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho}+\varepsilon. \qquad (7.3)$$

მაგრამ

$$\frac{\Delta x}{\rho}=\cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\rho}=\cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\rho}=\cos\gamma.$$

მაშასადამე, თუ (7.3) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა ρ ნულისაკენ მიისწრაფვის, მივიღებთ (7.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება $f(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არ იყოს, მაგრამ მას ჰქონდეს წარმოებული ყოველი მიმართულებით.

დაბოლოს განვიხილოთ მრავალი ცვლადის $f(p)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია, განსაზღვრული n-განზომილებიანი სივრცის G არეში. ამ არის რომელიმე p_0 წერტილზე გავავლოთ რაიმე L ღერძი. ამ ღერძზე ავიღოთ G არეში მოთავსებული p წერტილი და განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{f(p)-f(p_0)}{\rho}, \qquad (7.4)$$

სადაც ρ წარმოადგენს $\overrightarrow{p_0p}$ ვექტორის სიდიდეს.

თუ არსებობს (7.4) ფარდობის ზღვარი, როცა $\rho\to 0$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(p)$ ფუნქციის წარმოებული L მიმართულებით p_0 წერტილში და იგი $\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ამრიგად, თანახმად განსაზღვრისა

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(p)-f(p_0)}{\rho}.$$

თეორემა ზ. თ უ n-გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ს ი ვ რ ც ი ს G ა რ ე შ ი გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი $f(p)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ა დ ი ა G ა რ ი ს p_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}$ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი L მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი თ დ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა:

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_1}\cos\varphi_1+\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_2}\cos\varphi_2+\cdots+\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_n}\cos\varphi_n, \quad (7.5)$$

სადაც $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \ldots, \cos\varphi_n$ წარმოადგენს L ღერძის მიმართულების კოსინუსებს.

ეს თეორემა მტკიცდება სამი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევის ანალოგიურად.

ვექტორს, რომლის კომპონენტებია $\frac{\partial f(p)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(p)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(p)}{\partial x_n}$, ეწოდება $f(p)$ ფუნქციის გრადიენტი და აღინიშნება $\operatorname{grad} f(p)$. თუ აღვნიშნავთ L ღერძის ორტს $\vec{e}$-თი, მაშინ ამ ორტის კომპონენტები იქნება $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \ldots, \cos\varphi_n$.

ცხადია, თუ $f(p)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია p_0 წერტილში და $\vec{e}$ არის L ღერძის ორტი, მაშინ

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_1}\cos\varphi_1+\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_2}\cos\varphi_2+\cdots+\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n}\cos\varphi_n=\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f(p_0)$$

და, მაშასადამე, (7.5) ტოლობის თანახმად

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f(p_0), \quad (7.6)$$

ე. ი. $f(p)$ ფუნქციის წარმოებული L ღერძის მიმართულებით უდრის ამ ღერძის ორტისა და აღებული ფუნქციის გრადიენტის სკალარულ ნამრავლს.

ეს ფაქტი ანიჭებს გრადიენტის ცნებას საყურადღებო მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ გვინდა გავიგოთ რა მიმართულებით იზრდება ან მცირდება ყველაზე სწრაფად ფუნქციის მნიშვნელობა, საჭიროა ვიპოვოთ ის მიმართულება, რომლისთვისაც (7.6) გამოსახულებას აქვს დადებითი მაქსიმალური და უარყოფითი მინიმალური მნიშვნელობა. ამას ადგილი აქვს მაშინ, როცა $\vec{e}$ ორტს აქვს იგივე მიმართულება, რაც $\operatorname{grad} f(p)$ ვექტორს, ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულება.

მართლაც, თუ φ არის კუთხე $\vec{e}$ ორტსა და $\operatorname{grad} f(p_0)$ შორის, მაშინ

$$\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f(p_0)=|\operatorname{grad} f(p_0)|\cos\varphi,$$

ე. ი.

$$\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}=|\operatorname{grad} f(p_0)|\cos\varphi.$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{\partial f(p_0)}{\partial L}$ წარმოებულს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა $\varphi=0$, ხოლო მინიმალური, როცა $\varphi=\pi$.

$f(p)$ ფუნქციის გრადიენტის ცნება წარმოადგენს, გარკვეული აზრით, ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის ცნების განზოგადებას. მართლაც, თუ განვიხილავთ p_0 წერტილზე მოდებულ ($dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$) ვექტორს (p წერტილის გადაადგილების ვექტორს) და მას dp სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ $f(p)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოისახება ფორმულით:

$$df=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_n}dx_n=\operatorname{grad} f(p_0)\cdot d\vec{p}.$$

თუ $\operatorname{grad} f(p_0)$-ს პირობით აღვნიშნავთ $f'(p_0)$ სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება

$$df=f'(p_0)\cdot d\vec{p}. \tag{7.7}$$

ამრიგად, მრავალი ცვლადის $f(p)$ ფუნქციისათვის შენარჩუნებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ფორმულის სახე, ხოლო (7.7) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $f(x, y, z)=x^3+2xy^2+3yz^2$ ფუნქციის წარმოებული (3, 3, 1) წერტილში $2\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$ ვექტორის მიმართულებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში L ღერძს მოცემული ვექტორის მიმართულება აქვს. ამიტომ მისი მიმართულების კოსინუსებია:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

ახლა ვიპოვოთ აღებული ფუნქციის კერძო წარმოებულები მოცემულ წერტილში. გვაქვს

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=4xy+3z^2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=6yz.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\partial f(3,3,1)}{\partial x}=45,\quad \frac{\partial f(3,3,1)}{\partial y}=39,\quad \frac{\partial f(3,3,1)}{\partial z}=18.$$

ამიტომ, (7.1) ფორმულის თანახმად,

$$\frac{\partial f(3,3,1)}{\partial L}=45\cdot\frac{2}{3}+39\cdot\frac{2}{3}+18\cdot\frac{1}{3}=62.$$

§ 8. სასრული ნაზრდის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის

ვთქვათ n-განზომილებიან რაიმე G არეში მოცემულია დიფერენცირებადი $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ ფუნქცია. ავიღოთ ამ არის ისეთი ორი წერტილი $p=(x_1, x_2,\dots,x_n)$ და $q=(x_1+h_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)$, რომ pq მონაკვეთი მთლიანად მოთავსდეს G არეში. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t)=f(x_1+th_1, x_2+th_2,\dots,x_n+th_n). \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

ცხადია,

$$F(0)=f(x_1, x_2,\dots,x_n), \; F(1)=f(x_1+h_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n). \quad (8,1)$$

$F(t)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\begin{aligned}F'(t)=&f'_{x_1}(x_1+th_1, x_2+th_2,\dots,x_n+th_n)h_1+\\&+f'_{x_2}(x_1+th_1, x_2+th_2,\dots,x_n+th_n)h_2+\dots+\\&+f'_{x_n}(x_1+th_1, x_2+th_2,\dots,x_n+th_n)h_n.\end{aligned} \quad (8.2)$$

შემდეგ ლაგრანჟის ფორმულის ძალით,

$$F(1)-F(0)=F'(\theta), \quad \text{სადაც} \quad 0<\theta<1. \quad (8.3)$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (8.1) და (8.2) ფორმულებს, (8.3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned}&f(x_1+h_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)-f(x_1, x_2,\dots,x_n)=\\&=f'_{x_1}(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2,\dots,x_n+\theta h_n)h_1+f'_{x_2}(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2,\dots,\\&\dots,x_n+\theta h_n)h_2+\dots+f'_{x_n}(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2,\dots,x_n+\theta h_n)h_n.\end{aligned} \quad (8.4)$$

(8.4) ფორმულას ეწოდება **სასრული ნაზრდის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის**. $(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2,\dots,x_n+\theta h_n)$ წერტილი ძევს pq მონაკვეთზე.

თეორემა 9. თუ $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *ფუნქცია განსაზღვრულია G არეში და ამ არის ყოველ წერტილში*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \quad (8.5)$$

მაშინ აღებული ფუნქცია G არეში ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას.

დამტკიცება. (8.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ ფუნქციის პირველი რიგის ყველა კერძო წარმოებული

უწყვეტია G არეში. მაშასადამე, აღებული ფუნქცია დიფერენცირებადია G არეში.

ახლა ავიღოთ G არეში რაიმე $p_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ წერტილი, ხოლო $p=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ იყოს G არის ნებისმიერი წერტილი. რადგანაც G ბმული ღია სიმრავლეა, ამიტომ p_0 და p წერტილები შეგვიძლია შევაერთოთ ტეხილით, რომელიც G არეშია მოთავსებული. ეს ტეხილი იყოს $p_0\ p_1\ p_2\cdots p_k\ p$. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ (8.5) ტოლობებს, (8.4) ფორმულა გვაძლევს

$$f(p_1)-f(p_0)=0,$$

ე. ი. $f(p_1)=f(p_0)$. ანალოგიურად მივიღებთ

$$f(p_1)=f(p_2),\ f(p_2)=f(p_3),\ldots,\ f(p_k)=f(p)$$

და, მაშასადამე,

$$f(p)=f(p_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. სრული დიფერენციალის გამოყენება ფუნქციის მნიშვნელობის მიახლოებით გამოთვლაში

ავიღოთ, სიმარტივისათვის, ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე G არეში და დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში. აღებული ფუნქციის სრული ნაზრდი (x_0, y_0) წერტილში იქნება

$$\Delta z=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\rho, \tag{9.1}$$

სადაც α მიისწრაფვის ნულისაკენ ρ-სთან ერთად. ამ ტოლობიდან ვხედავთ, რომ აღებული ფუნქციის სრული დიფერენციალი $dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ წრფივია Δx და Δy ნაზრდების მიმართ და ფუნქციის სრული Δz ნაზრდისაგან განსხვავდება $\alpha\rho$ სიდიდით, რომელიც მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

უკანასკნელი წინადადება გვიკარნახებს, რომ აღებულ წერტილში ფუნქციის სრული Δz ნაზრდი ჩავთვალოთ ამავე წერტილში მისივე სრული dz დიფერენციალის მიახლოებით მნიშვნელობად:

$$\Delta z\simeq dz. \tag{9.2}$$

ცხადია, რომ ამ მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე დამოკიდებულია Δx და Δy ნაზრდებზე. რამდენად მცირეა $|\Delta x|$ და $|\Delta y|$, იმდენად ზუსტია მიახლოებითი ტოლობა (9.2). გადავწეროთ (9.2) ახლა შემდეგი სახით

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\simeq f(x_0, y_0)+dz. \tag{9.3}$$

ხშირად (9.3) გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად აღებულ წერტილში.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $z=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა (4,02; 0,96) წერტილში.

ამრიგად, მოსაძებნია $\ln(\sqrt{4{,}02}-\sqrt{0{,}96})$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ვთქვათ, $x_0=4$, $y_0=1$. მაშინ $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}04$. გარდა ამისა, გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

მაშასადამე, (9.3) ფორმულის ძალით, მივიღებთ

$$\ln(\sqrt{4{,}02}-\sqrt{0{,}96})\simeq\ln(\sqrt{4}-\sqrt{1})+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{1}}\,\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0{,}02-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{1}}\,\frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot(-0{,}04)=0{,}025.$$

§ 10. ერთგვაროვანი ფუნქციები და ეილერის თეორემა

როგორც ცნობილია, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ პოლინომი ეწოდება ასეთი სახის გამოსახულებას

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n)=\sum_{k_1=0}^{m_1}\sum_{k_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{k_n=0}^{m_k} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

სადაც $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, ხოლო $m_1, m_2, \ldots, m_k$ წარმოადგენენ მოცემულ მთელ დადებით რიცხვებს. გამოსახულებას

$$A_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$

ეწოდება აღებული პოლინომის წევრი, $k_1+k_2+\ldots+k_n$ ჯამს—ამ წევრის ხარისხის მაჩვენებელი, ხოლო პოლინომის წევრების უდიდესი ხარისხის მაჩვენებელს ეწოდება ამ პოლინომის ხარისხი.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების პოლინომს ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მის ყველა წევრს აქვს ერთნაირი ხარისხი. მაგალითად,

$$3x_1^2x_2x_3^3+5x_1x_2x_3^4-10x_1^4x_3+x_1^6+3x_2^6-7x_3^6$$

მეხუთე ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომია. ცხადია, თუ x_1, x_2, x_3 ცვლადებს გავამრავლებთ t-ზე, მაშინ ზემოხსენებული პოლინომი გამრავლდება t^5-ზე.

საზოგადოდ, თუ $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ არის m ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი, მაშინ

$$P(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

არსებობს უფრო რთული ბუნების ფუნქციები, რომლებსაც აქვთ ზემოაღნიშნული თვისება. ვთქვათ,

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt[5]{x^3 + y^3 - 4z^3}}{\sqrt[7]{3x^4 + 2y^4 + 7z^4}} \ln\frac{x}{y},$$

თუ x, y, z ცვლადებს t-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$f(tx, ty, tz) = \frac{\sqrt[5]{(tx)^3 + (ty)^3 - 4(tz)^3}}{\sqrt[7]{3(tx)^4 + 2(ty)^4 + 7(tz)^4}} \ln\frac{tx}{ty}.$$

მაშასადამე,

$$f(tx, ty, tz) = t^{\frac{1}{35}} f(x, y, z).$$

ბუნებრივია, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქციას ვუწოდოთ $\frac{1}{35}$ ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია.

ახლა შემოვიღოთ ერთგვაროვანი ფუნქციის განსაზღვრა.

n-განზომილებიან G არეში განსაზღვრულ n ცვლადის $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია, თუ ამ ცვლადების გამრავლება ნებისმიერ t სიდიდეზე იწვევს ფუნქციის პირვანდელი მნიშვნელობის t^m-ზე გამრავლებას, ე. ი.

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots x_n). \tag{10.1}$$

m რიცხვს ეწოდება აღებული ფუნქციის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი.

ერთგვაროვნების m მაჩვენებელი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{3x^3 - y^3 + z^3}} \lg\frac{x}{y}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x, y, z)$ წარმოადგენს x, y, z ცვლადების $-\frac{3}{4}$ ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. მართლაც,

$$f(tx, ty, tz) = \frac{1}{\sqrt[4]{3(tx)^3 - (ty)^3 + (tz)^3}} \lg \frac{tx}{ty} = t^{-\frac{3}{4}} f(x, y, z).$$

მაშასადამე,

$$m = -\frac{3}{4}.$$

ახლა, თუ (10.1) ტოლობაში ვიგულისხმებთ $t = \frac{1}{x_1}$, გვექნება

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

ე. ი.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right). \tag{10.2}$$

ამრიგად, თუ m ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას გავყოფთ ერთ-ერთი არგუმენტის m ხარისხზე, მაშინ განაყოფი იქნება დამოკიდებული მხოლოდ არგუმენტების ფარდობაზე.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, თუ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (10.2) პირობას, მაშინ იგი m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

მაშასადამე, m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციის განსაზღვრას შეგვიძლია საფუძვლად დავუდოთ (10.2) პირობა.

ერთგვაროვანი ფუნქციის კერძო წარმოებულებისათვის ადგილი აქვს მარტივ და მრავალ გამოყენებაში მოხერხებულ დამოკიდებულებას, რომელიც ეილერის (Euler) მიერ იყო დადგენილი. ქვემოთ მოგვყავს ეილერის

თეორემა 10. *დიფერენცირებადი m ხარისხის ერთგვაროვანი $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების სათანადო ცვლადებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის თვით ფუნქციისა და მისი ერთგვაროვნების მაჩვენებლის ნამრავლს,* ე. ი.

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{10.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ არის m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ამიტომ ყოველი t-სათვის მართებულია ტოლობა

$$f(tx_1\, tx_2,\ldots,tx_n)=t^m f(x_1, x_2,\ldots,x_n).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u_1=tx_1,\ u_2=tx_2,\ldots,u_n=tx_n,$$

გვექნება

$$f(u_1, u_2,\ldots,u_n)=t^m f(x_1, x_2,\ldots,x_n).$$

ეს იგივეობა გავაწარმოოთ t პარამეტრით, მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}=mt^{m-1}f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

ანუ

$$x_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial u_n}=mt^{m-1}f(x_1, x_2,\ldots x_n). \quad (10.4)$$

მიღებულ ტოლობას ადგილი აქვს t პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის; ამიტომ, თუ (10.4) ტოლობაში ვივარაუდებთ $t=1$, მივიღებთ (10.3) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ა ხ ლ ა დ ა ვ ა მ ტ კ ი ც ო თ, რ ო მ, თუ $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ა დ ი ა რ ა ი მ ე G ა რ ე შ ი და ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს (10.3) ტ ო ლ ო ბ ა ს, მ ა შ ი ნ $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს m ხ ა რ ი ს ხ ი ს ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს.

ავიღოთ G არეში რაიმე $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ წერტილი და განვიხილოთ t ცვლადის შემდეგი ფუნქცია:

$$F(t)=\frac{1}{t^m}f(tx_1, tx_2,\ldots,tx_n). \quad (10.5)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $t>0$. ვიპოვოთ $F'(t)$. გვაქვს

$$F'(t)=\frac{\varphi(t)}{t^{m+1}},$$

სადაც

$$\varphi(t)=[x_1f'_{x_1}(tx_1, tx_2,\ldots,tx_n)+x_2f'_{x_2}(tx_1, tx_2,\ldots,tx_n)+$$

$$+\ldots+x_nf'_{x_n}(tx_1, tx_2,\ldots,tx_n)]t-mf(tx_1, tx_2,\ldots,tx_n).$$

თუ (10.3) ტოლობაში $x_1, x_2,\ldots,x_n$ სიდიდეებს შევცვლით შესაბამისად $tx_1, tx_2,\ldots,tx_n$ სიდიდეებით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$F'(t)=0.$$

მაშასადამე,

$$F(t)=c,$$

სადაც c მუდმივია.

ახლა (10.5) ტოლობაში ჩავსვათ t ცვლადის მაგივრად $t=1$, მივიღებთ

$$c=f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ამრიგად,

$$\frac{1}{t^m} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

აქედან

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

მაშასადამე, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია.

§ 11. უმაღლესი რიგის კერძო წარმოებულები

განვიხილოთ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელსაც რაიმე G არეში აქვს კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$. საზოგადოდ ეს კერძო წარმოებულები თავის მხრივ წარმოადგენენ x და y ცვლადების ფუნქციებს. ასე რომ, შეგვიძლია განვიხილოთ ამ კერძო წარმოებულების კერძო წარმოებულები.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x ცვლადით აღნიშნავენ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ან $f''_{x^2}(x, y)$ სიმბოლოებით, ხოლო იმავე ფუნქციის კერძო წარმოებულს y ცვლადით აღნიშნავენ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ან $f''_{xy}(x, y)$ სიმბოლოებით.

სრულიად ამგვარადვე, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები x და y ცვლადებით აღინიშნება შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ ან } f''_{yx}(x, y) \text{ და } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ ან } f''_{y^2}(x, y).$$

ამრიგად, განსაზღვრის თანახმად,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

მიღებულ კერძო წარმოებულებს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

მაშასადამე, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის გვაქვს ოთხი მეორე რიგის კერძო წარმოებული.

ამგვარადვე განისაზღვრება მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაგალითად, თანახმად განსაზღვრისა,

$$\frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x^m \partial y^{n+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\right).$$

საზოგადოდ, თუ მოცემულია რამდენიმე ცვლადზე დამოკიდებული $f(x, y, \ldots, t)$ ფუნქცია, მაშინ ამ ფუნქციის n რიგის კერძო წარმოებულის მისაღებად საჭიროა მისგან ავიღოთ მიმდევრობით n-ჯერ წარმოებული $x, y, \ldots, t$ ცვლადების მიმართ.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$u=\sin(x^2+3y^2).$$

ვიპოვოთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+3y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=6y\cos(x^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos(x^2+3y^2)-4x^2\sin(x^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-12xy\sin(x^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=-12xy\sin(x^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6\cos(x^2+3y^2)-36y^2\sin(x^2+3y^2).$$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \tag{11.1}$$

ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ადგილი (11.1) ტოლობას ნებისმიერი ფუნქციისათვის? ვაჩვენოთ, რომ (11.1) ტოლობა საზოგადოდ მართებული არაა.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$f(x, y)=\begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2>0. \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0,\ y=0. \end{cases}$$

კერძო წარმოებულის უშუალო განსაზღვრიდან ვღებულობთ

$$f'_x(0,0)=0, \quad f'_y(0,0)=0.$$

შემდეგ, რადგანაც $f(x,0)=f(0,y)=0$, ამიტომ

$$\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

და, მაშასადამე,

$$f'_x(0,y)=-y, \quad f'_y(x,0)=x.$$

გამოვთვალოთ ახლა $f''_{xy}(0,0)$ და $f''_{yx}(0,0)$. გვაქვს

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(\Delta x,0)-f'_y(0,0)}{\Delta x}=1.$$

ამრიგად,

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

ახლა ისმის კითხვა: რა პირობებშია მართებული

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

ტოლობა?

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ორ საკმარის პირობას, როცა მართებულია აღნიშნული ტოლობა.

თეორემა 11. თუ G არეში განსაზღვრული ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს f'_x და f'_y კერძო წარმოებულები G არის (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში და ეს წარმოებულები დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{11.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A(h)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0),$$

$$\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$A(h)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0).$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის ძალით,

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=h\varphi'(x_0+\theta h),$$

სადაც $0<\theta<1$. მაგრამ

$$\varphi'(x_0+\theta h)=f'_x(x_0+\theta h,\ y_0+h)-f'_x(x_0+\theta h,y_0).$$

მაშასადამე,

$$A(h)=h[f'_x(x_0+\theta h,\ y_0+h)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)]=$$

$$=h\{[f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0,y_0)]-[f'_x(x_0+\theta h,y_0)-f'_x(x_0,y_0)]\}. \quad (11.3)$$

რადგანაც $f'_x(x,\ y)$ დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, ამიტომ

$$f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0,y_0)=\theta hf''_{x^2}(x_0,y_0)+$$

$$+hf''_{xy}(x_0,\ y_0)+\varepsilon' h,$$

$$f'_x(x_0+\theta h,y_0)-f'_x(x_0,y_0)=\theta hf''_{x^2}(x_0,y_0)+\varepsilon'' h,$$

სადაც ε' და ε'' ნულისაკენ მიისწრაფვიან h ნაზრდთან ერთად. თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობას (11.3) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$A(h)=h^2f''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon h^2, \quad (11.4)$$

სადაც $\varepsilon=\varepsilon'-\varepsilon''$.

ახლა თუ განვიხილავთ ფუნქციას

$$\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0y),$$

გვექნება

$$A(h)=\psi(y_0+h)-\psi(y_0).$$

ანალოგიური მსჯელობის ჩატარების შედეგად მივიღებთ

$$A(h)=h^2f''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon_1 h^2, \quad (11.5)$$

სადაც ε_1 ნულისაკენ მიისწრაფვის h-თან ერთად.

(11.4) და (11.5) ტოლობებიდან გვაქვს

$$h^2f''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon h^2=h^2f''_{yx}(x_0,y_0)+\varepsilon_1 h^2.$$

აქედან

$$f''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon=f''_{yx}(x_0,y_0)+\varepsilon_1$$

და თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $h\to 0$ მივიღებთ (11.2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებული თეორემა ცნობილია იუნგის (Young) თეორემის სახელწოდებით.

იუნგის თეორემაში იგულისხმება ყველა მეორე რიგის კერძო წარმოებულის არსებობა (x_0,y_0) წერტილში, ხოლო მათი უწყვეტობა ნაგულისხმევი არაა.

ქვემოთ მოვიყვანთ მეორე თეორემას, რომელშიც ნაგულისხმევია ერთ-ერთი მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულის არსებობა და უწყვეტობა.

თეორემა 12. თუ (x_0,y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს კერძო წარმოებულები f'_x, f'_y და f''_{xy}, ამასთან, f''_{xy} უწყვეტია (x_0,y_0) წერტილში, მაშინ არსებობს $f''_{yx}(x_0,y_0)$ და მართებულია ტოლობა

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{11.6}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\psi(x,y)=\frac{g(x,y)-g(x_0,y)}{(x-x_0)(y-y_0)},$$

სადაც

$$g(x,y)=f(x,y)-f(x,y_0).$$

ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად

$$g(x,y)-g(x_0,y)=g'_x[x_0+\theta(x-x_0),y]\,(x-x_0),$$

სადაც $0<\theta<1$. მაშასადამე,

$$\psi(x,y)=\frac{g'_x[x_0+\theta(x-x_0),y]}{y-y_0}.$$

რადგანაც

$$g'_x(x,y)=f'_x(x,y)-f'_x(x,y_0),$$

ამიტომ

$$\psi(x,y)=\frac{f'_x[x_0+\theta(x-x_0),y]-f'_x[x_0+\theta(x-x_0),y_0]}{y-y_0}=$$

$$=f''_{xy}[x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta'(y-y_0)],$$

სადაც $0<\theta'<1$. შემდეგ f''_{xy} ფუნქციის უწყ ეტობის გამო (x_0,y_0) წერტილში, გვექნება

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\psi(x,y)=f''_{xy}(x_0,y_0). \tag{11.7}$$

მეორე მხრივ,

$$\psi(x,y)=\frac{[f(x,y)-f(x,y_0)]-[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)]}{(x-x_0)(y-y_0)}=$$

$$=\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}-\frac{f(x_0y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}\right],$$

აქედან გვაქვს

$$\lim_{y\to y_0}\psi(x,y)=\frac{f'_y(x,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (11.7) ტოლობას, V თავის 1-ლი თეორემის ძალით არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0}[\lim\limits_{y\to y_0}\psi(x,y)]$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0}\psi(x,y)]=f''_{xy}(x_0,y_0). \tag{11.8}$$

მაგრამ

$$\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0}\psi(x,y)]=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{11.9}$$

(11.8) და (11.9) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (11.6) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებული თეორემა უფრო მეტ შეზღუდვებში პირველად შ ვ ა რ ც ი ს (Schwarz) მიერ იყო დამტკიცებული.

§ 12. უმაღლესი რიგის სრული დიფერენციალები

განვიხილოთ სამი ცვლადის ფუნქცია

$$u=f(x,y,z).$$

ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y, z) წერტილში. მაშინ

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz, \tag{12.1}$$

სადაც dx, dy, dz განიხილებიან როგორც მუდმივი პარამეტრები.

თუ du დიფერენციალი არის დიფერენცირებადი ფუნქცია, ე. ი. თუ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ განსაზღვრულია (x, y, z) წერტილის მიდამოში და ისინი დიფერენცირებადი არიან ამ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ u ფუნქცია დიფერენცირებადია მეორე რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით და დიფერენციალის დიფერენციალს ეწოდება

u ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი და მას აღნიშნავენ d^2u სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრის მიხედვით

$$d^2u=d(du).$$

თუ არსებობს d^2u, მაშინ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია და ამიტომ, იუნგის თეორემის ძალით, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}. \tag{12.2}$$

ვთქვათ, აღებული u ფუნქცია დიფერენცირებადია მეორე რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით და ვიპოვოთ მეორე რიგის სრული d^2u დიფერენციალი. გვაქვს

$$\begin{aligned}d^2u=d(du) &= \frac{\partial(du)}{\partial x}dx+\frac{\partial(du)}{\partial y}dy+\frac{\partial(du)}{\partial z}dz=\\ &=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dx\right)dx+\\ &+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}dz\right)dy+\\ &+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz.\end{aligned}$$

(12.2) ტოლობების თანახმად, აქედან ვღებულობთ

$$\begin{aligned}d^2u=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\\ +2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dzdx.\end{aligned} \tag{12.3}$$

უმაღლესი რიგის სრული დიფერენციალები d^3u, $d^4u,\ldots$ განისაზღვრება მიმდევრობით, ამბობენ, რომ u ფუნქცია დიფერენცირებადია n რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით, თუ $d^{n-1}u$ დიფერენციალი დიფერენცირებადია, ე. ი. თუ u ფუნქციის $n-1$ რიგის ყველა კერძო წარმოებული განსაზღვრულია განსახილავი წერტილის მიდამოში და, ამის გარდა, ისინი დიფერენცირებადია ამ წერტილში.

d^nu სრული დიფერენციალისათვის შეიძლება შევადგინოთ სიმბოლური გამოსახულება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ du დიფერენ-

ციალის მისაღებად საკმარისია f ფუნქცია გავამრავლოთ სიმბოლურ $\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz$ მამრავლზე, მასთან, გამრავლება ხორციელდება ისე, თითქოს $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, dx, dy, dz ცალკეული მამრავლებია;

$$du=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)f.$$

ახლა, თუ (12.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირობით f-ს ფრჩხილების გარეთ გავიტანთ, მაშინ ფრჩხილების შიგნით დარჩება გახსნილი სახით

$$\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz$$

გამოსახულების კვადრატი. ამიტომ d^2u შეგვიძლია სიმბოლურად ასე ჩავწეროთ

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^{(2)}f.$$

ანალოგიურად შეიძლება ჩაიწეროს მესამე რიგის დიფერენციალი, მეოთხე რიგის დიფერენციალი და ა. შ. ეს წესი ზოგადია; ყოველი m-სათვის გვექნება სიმბოლური ტოლობა

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^{(m)}f, \tag{12.4}$$

რომელიც ასე უნდა გვესმოდეს: გამოსახულება, რომელიც ფრჩხილი შიგნითაა მოთავსებული, ფორმალურად უნდა ავიყვანოთ m ხარისხში და შემდეგ ∂ სიმბოლოს ხარისხებს (რაც წარმოებულის რიგს გამოსახავს) მარჯვნივ უნდა მივუწეროთ f.

თუ მოცემულია n ცვლადის ფუნქცია

$$u=f(x_1, x_2,\ldots,x_n),$$

მაშინ ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ, რომ

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(m)}f. \tag{12.5}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი d^2u.

ამოხსნა. (12.5) ფორმულის ძალით,

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

მოვძებნოთ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

მაშასადამე,

$$d^2u=\frac{2xy(dx^2-dy^2)+2(y^2-x^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

§ 13. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

ვთქვათ, მოცემულია სამი ცვლადის ფუნქცია

$$\omega=f(u,v,w),$$

განსაზღვრული რაიმე G არეში. ვიგულისხმოთ, რომ u, v, w თავის მხრივ დამოუკიდებელი x და y ცვლადების ფუნქციებია, განსაზღვრული B არეში.

ვიგულისხმოთ, რომ $f(u, v, w)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია G არეში, ხოლო u, v, w დიფერენცირებადი B არეში. მაშინ, როგორც ვიცით, რთული ფუნქცია ω დიფერენცირებადია B არეში და მართებულია ტოლობები

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\tag{13.1}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},\tag{13.2}$$

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.\tag{13.3}$$

ვიპოვოთ $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$.

(13.1) ფორმულის თანახმად,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (13.4)$$

მაგრამ იმავე (13.1) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

მიღებული გამოსახულებების ჩასმა (13.4) ფორმულაში გვაძლევს:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (13.5)$$

ანალოგიურად გამოითვლება $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ და $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ წარმოებულები.

ვიპოვოთ ახლა $d^2\omega$. ამისათვის გამოვიყენოთ ის წესი, რომელიც მიღებული გვქონდა $d\omega$ დიფერენციალის მოსაძებნად; ამასთან უნდა შევნიშნოთ, რომ (13.3) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი შეიცავს ექვს დამოუკიდებელ ფუნქციას u, v, w, du, dv, dw. ამიტომ გვექნება

$$d^2\omega=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}du\,dw+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}dv\,dw+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}du\,dw+\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}dv\,dw+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}d\,w^2+\frac{\partial f}{\partial w}d^2w.$$

თუ აქ შევკრებთ მსგავს წევრებს და ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფში მოყვანილი სიმბოლური აღნიშვნით, მივიღებთ

$$d^2\omega=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv+\frac{\partial}{\partial w}dw\right)^{(2)}f+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+\frac{\partial f}{\partial r}d^2v+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial w}d^2w.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში მეორე დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას ადგილი არა აქვს.

§ 14. ტეილორის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის

განვაზოგადოთ ტეილორის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის. ვთქვათ, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ განსაზღვრულია m-განზომილებიანი სივრცის G არეში. ტეილორის ფორმულის მიზანია წარმოადგინოს

$$f(x_1+h_1,\ x_2+h_2,\dots,x_m+h_m)-f(x_1, x_2,\dots,x_m)$$

სხვაობა $h_1, h_2, \dots, h_m$ ნაზრდების ისეთი ერთგვაროვანი პოლინომების ჯამის სახით, რომელთა ხარისხებია შესაბამისად 1, 2,...

ჩაწერის სიმოკლისათვის, განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია

$$\omega=f(x, y),$$

რომელიც დიფერენცირებადია n რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით ორგანზომილებიან $[a, a+h;\ b, b+k]$ სეგმენტზე. დავუშვათ,

$$x=a+ht,\quad y=b+kt,$$

სადაც t ახალი ცვლადია. $f(x,y)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც t ცვლადის რთული ფუნქცია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega=f(x,y)=f(a+ht,\ b+kt)=\varphi(t).$$

$[0,1]$ შუალედში $\varphi(t)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული n რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით, მასთან პირველი $n-1$ რიგის წარმოებულები იმავე

შუალედში უწყვეტია. ამიტომ, მაკლორენის ფორმულის ძალით ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის, გვაქვს

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+R_n, \tag{14.1}$$

სადაც

$$R_n=\frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!},\ 0<\theta<1.$$

რადგანაც $dx=hdt$, $dy=kdt$ დიფერენციალები მუდმივებია, ამიტომ ადგილი აქვს ფორმულას

$$d^m\omega=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(m)}f(x,y).$$

საიდანაც

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(m)}f(x,y). \tag{14.2}$$

როცა $t=0$ გვაქვს $x=a$, $y=b$ და (14.2) ფორმულა გვაძლევს

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(m)}f(a,b).$$

$t=\theta$ მნიშვნელობისათვის $x=a+\theta t$, $y=b+\theta t$ და (14,2) ფორმულიდან გვაქვს

$$\varphi^{(m)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(m)}f(a+\theta h,\ b+\theta k).$$

ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (14.1) ფორმულაში, გვექნება

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(2)}f(a,b)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n-1)}f(a,b)+R_n, \tag{14.3}$$

სადაც

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n)}f(a+\theta h,\ b+\theta k).$$

(14.3) ფორმულას ეწოდება **ტეილორის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის**. შევნიშნოთ, რომ ამ ფორმულაში არ იგულისხმება n რიგის წარმოებულების უწყვეტობა.

კითხვები

1. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და პირველი რიგის კერძო დიფერენციალები?

2. რაში მდგომარეობს ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების გეომეტრიული შინაარსი?

3. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი?

4. უზრუნველყოფს თუ არა მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა აღებულ წერტილში მისი კერძო წარმოებულების არსებობას იმავე წერტილში? გამოთქვით და დაამტკიცეთ სათანადო თეორემა.

5. რა დამოკიდებულებაა მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობასა აღებულ წერტილში და მის უწყვეტობას შორის? გამოთქვით და დაამტკიცეთ სათანადო თეორემა.

6. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები აღებულ წერტილში, რომ მოცემული ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი იმავე წერტილში?

7. არსებობს თუ არა მრავალი ცვლადის არადიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელსაც აქვს პირველი რიგის სასრული კერძო წარმოებულები?

8. არსებობს თუ არა მრავალი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულები წყვეტილია?

9. რაში მდგომარეობს ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი?

10. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული წარმოებული?

11. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის რთული ფუნქცია?

12. რას უწოდებენ მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრულ კერძო წარმოებულებს და როგორია მათი გამოთვლის ფორმულები?

13. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის მიმართული წარმოებული და გრადიენტი?

14. როგორია საკმარისი პირობა იმისა, რომ აღებულ წერტილში არსებობდეს მრავალი ცვლადის ფუნქციის მიმართული წარმოებული?

15. გამოიყვანეთ მიმართული წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულა.

16. რა დამოკიდებულებაა მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალის არსებობასა და მისი მიმართული წარმოებულის არსებობას შორის აღებულ წერტილში?

17. გამოიყვანეთ სასრული ნაზრდის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის.

18. რა სახე აქვს აღებულ წერტილში მრავალი ცვლადის ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულას სრული დიფერენციალის საშუალებით?

19. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ეილერის თეორემა ერთგვაროვან ფუნქციათა შესახებ.

20. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის უმაღლესი რიგის კერძო წარმოებულები?

21. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ იუნგისა და შვარცის თეორემები.

22. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის უმაღლესი რიგის სრული დიფერენციალები? გამოიყვანეთ მათი გამოსათვლელი ფორმულები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალები:

1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial x}=4(x^3-2xy^2)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4(y^3-2x^2y),\quad dz=4[(x^3-2xy^2)dx+(y^3-2x^2y)dy].$$

2. $u=z^3-3xyz+3a\ln(x^2+y^2)$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6ax}{x^2+y^2}-3yz$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{6ay}{x^2+y^2}-3xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3(z^2-xy),\quad du=3z^2dz-$$

$$-3xyz(x^{-1}dx+y^{-1}dy+z^{-1}dz)+\frac{6a}{x^2+y^2}(xdx+ydy).$$

3. $z=xye^{x+2y}$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+x)e^{x+2y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x(1+2y)\,e^{x+2y},\qquad dz=e^{x+2y}[y(1+x)dx+x(1+2y)dy].$$

4. $z=\ln\sin\frac{x}{y}$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\operatorname{ctg}\frac{x}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\operatorname{ctg}\frac{x}{y},\quad dz=\frac{ydx-xdy}{y^2}\operatorname{ctg}\frac{x}{y}.$$

5. $u=\operatorname{arc\,sec}\frac{xy}{z}$, პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2y^2-z^2}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{y}\frac{1}{\sqrt{x^2y^2-z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\sqrt{x^2y^2-z^2}},$$

$$du=\frac{yzdx+xzdy-xydz}{xy\sqrt{x^2y^2-z^2}},$$

6. $u=(y-\sqrt{y^2-z^2})^x$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=(y-\sqrt{y^2-z^2})^x\times$

$$\times\ln(y-\sqrt{y^2-z^2}),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-x\frac{(y-\sqrt{y^2-z^2})^x}{\sqrt{y^2-z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xz(y-\sqrt{y^2-z^2})^{(x-1)}}{\sqrt{y^2-z^2}},$$

$$du=(y-\sqrt{y^2-z^2})^{x-1}\Big[(y-\sqrt{y^2-z^2})\ln(y-\sqrt{y^2-z^2})-$$

$$-x\frac{(y-\sqrt{y^2-z^2})\,dy-zdz}{\sqrt{y^2-z^2}}\Big].$$

7. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z}$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z}{x^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x}{x^2+z^2}+z,\quad du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+$$

$$+\frac{zdx-xdz}{x^2+z^2}+zdz.$$

8. $u=(x^n-3e^y+a\ln z)^n$:

პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=n^2x^{n-1}(x^n-3e^y+a\ln z)^{n-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3ne^y(x^n-3e^y-a\ln z)^{n-1},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{an}{z}(x^n-3e^y+a\ln z)^{n-1},$$

$$du=n(x^n-3e^y+a\ln z)^{n-1}\left(nx^{n-1}dx-3e^ydy+\frac{a}{z}\,dz\right).$$

9. $z=\sin^2 xy$. პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin(2xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\sin(2xy)$,

$$dz=(ydx+xdy)\sin(2xy).$$

10. $z=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}\ln\frac{3}{4}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}\ln\frac{3}{4},\ dz=(dx-dy)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}\ln\frac{3}{4}.$$

11. $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}$; პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{2x\sqrt{x}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$dz=\left(\sqrt{y}-\frac{y}{2x\sqrt{x}}\right)dx+\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dy.$$

12. $z=\arcsin(x^2y^2)$; პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy^2}{\sqrt{1-x^4y^4}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2y}{\sqrt{1-x^4y^4}},\quad dz=\frac{2xy(ydx+xdy)}{\sqrt{1-x^4y^4}}.$$

13. $u=xy+yz+xz$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y+x,\ du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz.$$

14. $u=\frac{xyz}{xy+yz+xz}$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2z^2}{(xy+yz+xz)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2z^2}{(xy+yz+xz)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2y^2}{(xy+yz+xz)^2},$$

$$du=(y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz)\frac{1}{(xy+yz+xz)^2}.$$

15. $z=(3x)^{2y}$; პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x}=6y(3x)^{2y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$

$$=2(3x)^{2y}\ln(3x),\ dz=2(3x)^{2y-1}[3ydx+3x\ln(3x)dy].$$

16. $z=e^{xy}\cos(x+y)$; პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}[y\cos(x+y)-\sin(x+y)]$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}[x\cos(x+y)-\sin(x+y)],$$

$$dz=e^{xy}\{[y\cos(x+y)-\sin(x+y)]dx+[x\cos(x+y)-\sin(x+y)]dy\}.$$

17. $u=z^{xy}$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1},\ du=z^{xy-1}(yz\ln z\,dx+xz\ln z\,dy+xy\,dz).$$

დაამტკიცეთ, რომ, თუ:

18. $u=\ln(x^2+y^2+z^2-3xyz)$, მაშინ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$.

19. $z=x^y y^x$, მაშინ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y+\ln z)z$.

20. $u=\frac{x^2-y^2}{y^2-z^2}$, მაშინ $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

21. $z=ye^{x^2-y^2}$, მაშინ $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=y^{-2}z$.

22. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\rho.$$

23. $x=r\sin\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\sin\psi$, $z=r\cos\varphi$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}=r\sin^2\varphi.$$

24. $x=\xi\eta\zeta$, $y=\xi\eta-\xi\eta\zeta$, $z=\eta-\eta\zeta$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \xi\eta^2.$$

25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x-y}$, მაშინ $f'_x(0,1)=-1$, $f'_y(1,0)=1$.

26. $f(x,y)=(\sin 2y)^2$, მაშინ $f'_x\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)=0$, $f'_y\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

27. იპოვეთ $f'_x(x,1)$, თუ

$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; პასუხი: $f'_x(x,1)=1$.

28. იპოვეთ $f'_x(0,0)$ და $f'_y(0,0)$, თუ $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$;

პასუხი: $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების სრული წარმოებული:

29. $u=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=2t^3$, $y=1-2t^3$ პასუხი: $\dfrac{du}{dt}=0$.

30. $z=x^2+xy^2$, $x=e^{2t}$, $y=\sin t$;

პასუხი: $\dfrac{dz}{dt}=2e^{2t}(2e^{2t}+\sin^2 t)+e^{2t}\sin 2t$.

31. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+1}{y}$, $x=t$, $y=e^{(1+t)^2}$;

პასუხი: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{1-2(x+1)^2}{y^2+(1+x)^2}e^{(1+x)^2}$.

32. $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{1+a^2}$, $x=t$, $y=a\sin t$, $z=\cos t$.

პასუხი: $\dfrac{du}{dt}=e^{at}\sin t$.

33. $z=\dfrac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$; პასუხი: $\dfrac{dz}{dt}=-2\operatorname{ch}t$.

84. გამოთვალეთ $\frac{du}{dx}$, თუ $u=xe^y$ და $y=y(x)$;

$$\text{პასუხი:}\quad \frac{du}{dx}=e^y\left(1+x\frac{dy}{dx}\right).$$

85. გამოთვალეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=2u+v$,

$$\text{პასუხი:}\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right).$$

86. მოცემულია $z=f(x,y)$. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ წარმოებულებით, თუ:

1) $u=mx+ny$, $v=px+qy$;

2) $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$;

$$\text{პასუხი: 1)}\quad \frac{\partial z}{\partial x}=m\frac{\partial z}{\partial u}+p\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{\partial z}{\partial u}+q\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\text{2)}\quad \frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

87. მოცემულია $z=f(x,y)$, $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial r}$ და $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულებით.

$$\text{პასუხი:}\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}=r\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\alpha\right).$$

88. მოცემულია $z=y+f(u)$, $u=x^2-y^2$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial x}y+\frac{\partial z}{\partial y}x=x.$$

39. $z=xy+xf(u)$, $u=\frac{y}{x}$. დაამტკიცეთ, რომ

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

40. $z=yf(u)$, $u=x^2-y^2$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

41. $z=f(x,y)$. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ კერძო წარმოებულებით, თუ $u=\sqrt{xy}$, $v=x+y$.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}$.

42. შეამოწმეთ ეილერის თეორემა შემდეგი ერთგვაროვანი ფუნქციებისათვის:

1) $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$. 2) $z=e^{\frac{x}{y}}$.

3) $u=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3$. 4) $u=\frac{xyzt}{x+y+z+t}$.

5) $u=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$. 6) $z=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$

7) $z=\sqrt{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}$. 8) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

9) $z=\frac{x}{y}e^{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$.

43. შეცვალეთ სრული ნაზრდი სრული დიფერენციალით და გამოთვალეთ მიახლოებითი შემდეგი რიცხვები:

1) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$, 2) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$, 3) $(0{,}97)^{1{,}05}$

44. გამოთვალეთ
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
ფუნქციის წარმოებული $M(1,1)$ წერტილში l მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შეადგენს $\alpha = \frac{\pi}{3}$ კუთხეს.

პასუხი: $\frac{\partial f(1,1)}{\partial l} = 1 - \sqrt{3}$.

45. გამოთვალეთ
$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$
ფუნქციის წარმოებული $M(1,1)$ წერტილში l მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შეადგენს α კუთხეს. $\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}$ წარმოებულს α კუთხის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს: 1) უდიდესი მნიშვნელობა, 2) უმცირესი მნიშვნელობა, 3) ნულოვანი მნიშვნელობა.

პასუხი: $\frac{\partial f(1,1)}{\partial l} = \sin\alpha + \cos\alpha$; 1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 2) $\alpha = \frac{5}{4}\pi$, 3) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

46. გამოთვალეთ
$$f(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$
ფუნქციის წარმოებული $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ წერტილში l მიმართულებით, რომელიც ამ წერტილში მიჰყვება $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის შიგა ნორმალს.

პასუხი: $\frac{\partial f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)}{\partial l} = \frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$.

47. ვიპოვოთ $f(x,y,z) = xyz$ ფუნქციის წარმოებული $M(1,1,1)$ წერტილში $l(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ მიმართულებით. გამოთვალეთ ამ წერტილში ფუნქციის გრადიენტის სიდიდე.

პასუხი: $\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$,
$$|\operatorname{grad} f(x, y, z)| = \sqrt{3}.$$

48. გამოთვალეთ

$$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$$

ფუნქციის გრადიენტებს შორის მოთავსებული კუთხე $M_1(2,0,0)$ და $M_2(0,2,0)$ წერტილებში.

პასუხი: $\frac{\pi}{2}$.

გამოთვალეთ:

49. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, თუ $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

პასუხი: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

50. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, თუ $z=e^{xy}$

პასუხი: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=(1+xy)e^{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$.

51. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, თუ $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$.

პასუხი: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=(1-y)\cos(x+y)-(1+x)\sin(x+y)$.

52. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ და $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, თუ $z=\ln(x+y)$.

პასუხი: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{2}{(x+y)^3}$.

53. $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$, თუ $z=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-$

$$-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.$$

პასუხი: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}=0$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}=-16$.

54. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, თუ $u=x\ln(xy)$.

პასუხი: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=0$.

55. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, თუ $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

პასუხი: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$.

56. $\dfrac{\partial^5 f(0,0)}{\partial x^3 \partial y^2}$, თუ $f(x,y) = e^x \sin y$.

პასუხი: $\dfrac{\partial^5 f(0,0)}{\partial x^3 \partial y^2} = 0$.

57. $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$, თუ $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

პასუხი: $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = \dfrac{2(-1)^m (m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

დაამტკიცეთ, რომ:

58. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{y^3 (y-x)}{(2xy+y^2)^{5/2}}$, თუ $z = \sqrt{2xy+y^2}$.

59. $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \dfrac{2(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x}$, თუ $z = x \operatorname{tg} y + y \operatorname{tg} x$.

60. $\dfrac{1}{6} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial u}{\partial x} \dfrac{\partial u}{\partial y} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, და $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{3}{x+y+z}$, თუ $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

61. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} = 0$, თუ $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

62. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, თუ $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

63. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$, თუ $u = \dfrac{1}{r}(C_1 e^{ar} + C_2 e^{-ar})$, სადაც $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ხოლო C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

64. $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z} \right)^{(2)} u = 0$, თუ $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

65. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, თუ $z = x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + y\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$,

სადაც φ_1 და φ_2 არის ნებისმიერი ორჯერ წარმოებადი ფუნქციები.

66. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, თუ $z = x\varphi_1(x+y) + y\varphi_2(x+y)$, სადაც φ_1 და φ_2 ნებისმიერი ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებია.

67. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$, თუ $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, სადაც f არის ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია.

68. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, თუ $z = xe^{-\frac{y}{x}}$.

69. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k(k-1)z$, თუ $z = f(x,y)$ არის ორჯერ წარმოებადი ერთგვაროვანი ფუნქცია k მაჩვენებლით.

70. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z$, თუ $z = x^2 + xy + y^2$.

71. $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} z = 2z$, თუ $z = \frac{y}{x^2}$.

72. $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} z = 6z$, თუ $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

73. $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} z = 0$, თუ $z = \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)$.

74. $d^2 z = -z(m\,dx + n\,dy)^2$, თუ $z = \cos(mx + ny)$.

75. $d^2 z = 2(dz)^2$, თუ $z = \ln(ax + by)$.

76. ჩაწერეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ გამოსახულება u და v ცვლადებით, თუ $u = ax + y$, $v = ax - y$.

პასუხი: $4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

77. ჩაწერეთ $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ გამოსახულება u და v ცვლადებით, თუ $u=y$, $v=\dfrac{y}{x}$.

პასუხი: $\dfrac{v^2}{u}\dfrac{\partial z}{\partial v}+v^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

78. დაამტკიცეთ, რომ $z=\dfrac{x}{y}f(x)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{x z}{\partial y}=0,$$

სადაც f და φ ორჯერ წარმოებადი ნებისმიერი ფუნქციებია.

მოძებნეთ შემდეგი დიფერენციალები:

79. d^3u, თუ $u=xyz$. პასუხი: $d^3u=6dxdydz$.

80. d^4u, თუ $u=\ln(x^xy^yz^z)$.

პასუხი: $d^4u=2(x^{-3}dx^4+y^{-3}dy^4+z^{-3}dz^4)$.

81. d^nu, თუ $u=f(x+y+z)$.

პასუხი: $d^nu=(dx+dy+dz)^nf^{(n)}(x+y+z)$.

82. d^nu, თუ $u=e^{ax+by+cz}$.

პასუხი: $d^nu=(adx+bdy+cdz)^ne^{ax+by+cz}$.

83. d^nu, თუ $u=f(ax+by+cz)$.

პასუხი: $d^nu=(adx+bdy+cdz)f^{(n)}(ax+by+cz)$.

84. დაამტკიცეთ, რომ $z=yf(x^2-y^2)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz,$$

სადაც f ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

თ ა ვ ი VII

არაცხადი ფუნქციები

§ 1. ერთი ცვლადის არაცხადი ფუნქცია

ვთქვათ, ნამდვილი x და y ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან

$$F(x,\ y)=0 \tag{1.1}$$

განტოლებით, სადაც $F(x, y)$ არის რაიმე არეში განსაზღვრული ორი ცვლადის ფუნქცია.

თუ x-ს მივანიჭებთ რომელიმე ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას, მაშინ y-ის განსასაზღვრად მივიღებთ ერთუცნობიან განტოლებას, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს ერთი ან რამდენიმე ნამდვილი ფესვი. თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას რაიმე შუალედში y-ის ერთი ან რამდენიმე მნიშვნელობა შეესაბამება ისე, რომ (x, y) წერტილი აკმაყოფილებს (1. 1) განტოლებას, მაშინ ამ შუალედში განისაზღვრება ცალსახა ან მრავალსახა ფუნქცია $y=f(x)$, რომლისთვისაც ტოლობა $F[x, f(x)]=0$ იგივურად დაკმაყოფილდება აღნიშნულ შუალედში. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ y არის x-ის არაცხადი ფუნქცია.

შევნიშნოთ, რომ ორცვლადიანი განტოლება, საზოგადოდ, არ განსაზღვრავს ერთი რომელიმე ამ ცვლადთაგანის არაცხად ფუნქციას. მაგალითად, ავიღოთ განტოლება

$$x^2+y^2+1=0.$$

ცხადია, x-ის არც ერთ ნამდვილ მნიშვნელობას არ შეესაბამება y-ის ნამდვილი მნიშვნელობა. თუ განვიხილავთ

$$x^2+y^2-1=0$$

განტოლებას, მაშინ x-ის ყოველ მნიშვნელობას $]-1,\ 1[$ ინტერვალიდან შეესაბამება y-ის ორი მნიშვნელობა

$$y=\pm\sqrt{1-x^2};$$

საიდანაც რადიკალის წინ ამა თუ იმ ნიშნის არჩევით, ორი ცალსახა შტო გამოიყოფა.

ჩვენ ამოცანას შეადგენს იმ საკმარისი პირობების დადგენა, რომლებიც უზრუნველყოფენ (1.1) განტოლებით ცალსახა და უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრას ისე, რომ $F[x, f(x)]=0$ ტოლობა იგივეობას წარმოადგენდეს.

თეორემა 1. *ვთქვათ, ორგანზომილებიან $R_0=[x_0-a, x_0+a; y_0-b, y_0+b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x, y)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია y-ის მიმართ ყოველი ფიქსირებული x-სათვის $[x_0-a, x_0+a]$ სეგმენტში და $F(x_0, y_0)=0$. მაშინ არსებობს ერთადერთი ფუნქცია $y=f(x)$, რომ ელიც უწყვეტია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, ამ მიდამოში აკმაყოფილებს $F[x, f(x)]=0$ განტოლებას და $y_0=f(x_0)$.*

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული x-სათვის $F(x, y)$ არსებითად ზრდადია y-ის მიმართ. ვინაიდან $F(x_0, y_0)=0$ და $F(x_0, y)$ არსებითად ზრდადია y-ის მიმართ, ამიტომ

$$F(x_0, y_0-b)<0, \quad F(x_0, y_0+b)>0. \tag{1.2}$$

განვიხილოთ x-ის მიმართ უწყვეტი ფუნქციები $F(x, y_0-b)$ და $F(x, y_0+b)$, რომელთაგან პირველს $x=x_0$ წერტილზე აქვს უარყოფითი მნიშვნელობა, ხოლო მეორეს — დადებითი მნიშვნელობა. $F(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $]x_0-a, x_0+a[$ ინტერვალში არსებობს ისეთი სეგმენტი $[x_0-\eta, x_0+\eta]$, რომელშიც

$$F(x, y_0-b)<0, \quad F(x, y_0+b)>0, \quad \text{როცა } x_0-\eta\leqslant x\leqslant x_0+\eta. \tag{1.3}$$

ავიღოთ $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ სეგმენტში ნებისმიერი წერტილი $\tilde{x}$. რადგანაც $F(\tilde{x}, y)$ უწყვეტი ფუნქციაა y-ის მიმართ და

$$F(\tilde{x}, y_0-b)<0, \quad F(\tilde{x}, y_0+b)>0,$$

ამიტომ კოშის თეორემის ძალით, $[y_0-b, y_0+b]$ სეგმენტზე არსებობს ერთადერთი ისეთი $\tilde{y}$ წერტილი, რომ $F(\tilde{x}, \tilde{y})=0$.

ამრიგად, $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ სეგმენტიდან x-ის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის ერთი მნიშვნელობა, რომელიც $F(x, y)=0$ განტოლებას აკმაყოფილებს. მაშასადამე, არსებობს $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ისეთი $y=f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$F[x, f(x)]=0, \ f(x_0)=y_0, \ x \in [x_0-\eta, \ x_0+\eta].$$

ამით არაცხადი ფუნქციის არსებობა და ერთადერთობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ $y=f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ სეგმენტზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=x_0$ წერტილში. მართლაც, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta' \leqslant \eta$, რომ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[x_0-\eta', \ x_0+\eta']$ სეგმენტიდან მისი შესაბამისი y-ის მნიშვნელობა, რომელიც x-თან ერთად აკმაყოფილებს $F(x, y)=0$ განტოლებას, მოთავსებულია $y_0-\varepsilon$ და $y_0+\varepsilon$ რიცხვებს შორის. ამრიგად,

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } |x-x_0|<\eta.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

დასასრულ, ვთქვათ $\bar{x}$ არის $[x_0-\eta, \ x_0+\eta]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო $\bar{y}=f(\bar{x})$. ვინაიდან $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილი იმავე პირობებს აკმაყოფილებს, როგორც (x_0, y_0), ამიტომ $F(x, y)=0$ განტოლება განსაზღვრავს y ცვლადს როგორც x-ის ცალსახა ფუნქციას $\bar{x}$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში და ეს ფუნქცია უწყვეტია $\bar{x}$ წერტილში. თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

დავტოვოთ ზემოთ გამოყენებული აღნიშვნები უცვლელი და მოვიყვანოთ არაცხადი ფუნქციის არსებობის სხვა საკმარისი პირობები.

თეორემა 2. თუ $F(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ორგანზომილებიან R_0 სეგმენტზე, ამავე სეგმენტზე არსებობს და უწყვეტია მისი კერძო წარმოებული $F'_y(x, y)$, ამასთან $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, მაშინ $x=x_0$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში არსებობს ერთადერთი უწყვეტი $y=y(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $F[x, y(x)]=0$ და $y_0=y(x_0)$.

დამტკიცება. ვინაიდან $F'_y(x, y)$ უწყვეტია R_0 სეგმენტზე და $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, ამიტომ არსებობს (x_0, y_0) წერტილის ისეთი მიდამო $D[x_0-\alpha, \ x_0+\alpha; \ y_0-\beta, \ y_0+\beta] \subset R_0$, რომელშიც $F'_y(x, y)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს. აქედან გამომდინარეობს, რომ x-ის ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის $[x_0-\alpha, \ x_0+\alpha]$ სეგმენტიდან $F(x, y)$ წარმოადგენს y ცვლადის არსებითად მონოტონურ ფუნქციას. წინა თეორემის ძალით, არსებობს ერთადერთი $y=y(x)$ ფუნქცია, უწყვეტი x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\alpha', \ x_0+\alpha'[\subset [x_0-\alpha, \ x_0+\alpha]$, მიდამოში ისეთი, რომ $F[x, y(x)]=0$ და $y(x_0)=y_0$. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ გავაძლიერებთ ზოგიერთ პირობას, მაშინ არაცხადი ფუნქციის შესახებ შეგვიძლია დავამტკიცოთ უფრო მნიშვნელოვანი

თეორემა 8. ვთქვათ, $R_0=[x_0-a, x_0+a; y_0-b, y_0+b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციას აქვს ამ სეგმენტზე უწყვეტი კერძო წარმოებულები $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, ამასთან $F(x_0, y_0)=0$ და $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. მაშინ $F(x, y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში.

დამტკიცება. რადგან $F'_x(x, y)$ და $F'_y(x, y)$ კერძო წარმოებულები უწყვეტია R_0-ში, ამიტომ $F(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია R_0-ში. ვთქვათ, არაცხადი $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ინტერვალში და დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ინტერვალში. ავიღოთ ამ ინტერვალში რაიმე x წერტილი და Δx-ით აღვნიშნოთ x-ის ისეთი ნაზრდი, რომ $x+\Delta x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. გვაქვს:

$$F[x, f(x)]=0, \quad F[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]=0.$$

თუ მეორე ტოლობას გამოვაკლებთ პირველს და გავითვალისწინებთ $F(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას გვექნება

$$\Delta x F'_x[x, f(x)]+\Delta y F'_y[x, f(x)]+\alpha\Delta x+\beta\Delta y=0, \tag{1.4}$$

სადაც

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

ხოლო α და β ნულისაკენ მიისწრაფვიან, როცა $\Delta x\to 0$.

(1.4) ტოლობის ორივე ნაწილის Δx-ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ

$$\{F'_y[x, f(x)]+\beta\}\frac{\Delta y}{\Delta x}+F'_x[x, f(x)]+\alpha=0. \tag{1.5}$$

აქედან ადვილი შესამჩნევია, რომ არსებობს $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. მაშასადამე, თუ (1.5) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$F'_y[x, f(x)]\frac{dy}{dx}+F'_x[x, f(x)]=0,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{1.6}$$

აქ იგულისხმება, რომ y-ის ნაცვლად ჩასმულია $f(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც არაცხადი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა დამტკიცებულია, ამიტომ (1.6) ფორმულა სხვა გზითაც შეგვიძლია მივიღოთ. მართლაც, თუ $F(x, y)=0$ განტოლებაში y-ის ნაცვლად ვიგულისხმებთ $f(x)$ ფუნქციას, მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც x-ის რთული ფუნქცია და ამიტომ ტოლობის ორივე ნაწილის x-ით გაწარმოება მოგვცემს

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)\frac{dy}{dx}=0. \tag{1.7}$$

აქედან მიიღება (1.6) ტოლობა.

თუ მე-3 თეორემის პირობების გარდა მოვითხოვთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულების F''_{x^2}, F''_{xy}, F''_{y^2} უწყვეტობას, მაშინ არსებობს არაცხადი $y=\varphi(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული. იგი მიიღება (1.7) ტოლობის x-ით გაწარმოების შედეგად. მართლაც, გვაქვს

$$F''_{x^2}+2F''_{xy}y'+F''_{y^2}y'^2+F'_yy''=0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y''=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}y'+F''_{y^2}y'^2}{F'_y}. \tag{1.8}$$

თუ მოვითხოვთ $F(x, y)$ ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულების არსებობას, მსგავსად, დავამტკიცებთ არაცხადი ფუნქციის სათანადო რიგის უწყვეტი წარმოებულების არსებობას და გამოვიყვანთ მათ გამოსათვლელ ფორმულებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$F(x, y)=y+xe^y=0$$

განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, როცა $x=0$, $y=0$.

გვაქვს:

$$F'_x=e^y,\ F'_y=1+xe^y;\ F''_{x^2}=0,\ F''_{xy}=e^y, F''_{y^2}=xe^y.$$

შემდეგ

$$F'_x(0, 0)=1,\ F'_y(0, 0)=1,\ F''_{x^2}(0, 0)=0,\ F''_{xy}(0, 0)=1,$$

$$F''_{y^2}(0, 0)=0.$$

ამრიგად, (1.6) და (1. 8) ტოლობის თანახმად მივიღებთ

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0, 0)}{F'_y(0, 0)} = -1,$$

$$y''(0) = -\frac{F''_{x^2}(0, 0) + 2F''_{xy}(0, 0) + F''_{y^2}(0, 0)}{F'_y(0, 0)} = 2.$$

§ 2. მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქცია

განვიხილოთ $n+1$ ცვლადის შემცველი განტოლება

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \tag{2.1}$$

გარკვეულ პირობებში ამ განტოლებით განისაზღვრება u როგორც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების არაცხადი ფუნქცია

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

რომელიც საზოგადოდ მრავალსახა ფუნქციაა. თუ (2.1) განტოლებაში u-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციას, მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მიმართ იგივურად გვექნება

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0.$$

თეორემა 4. ვთქვათ, $(n+1)$-განზომილებიან $R_0 = [x_1^0 - a_1, x_1^0 + a_1; x_2^0 - a_2, x_2^2 + a_2; \ldots; x_n^0 - a_0, x_n^0 + a_n; u_0 - b, u_0 + b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია u-ს მიმართ ყოველი ფიქსირებული $x_1, x_2, \ldots, x_n$-სათვის და

$$F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u_0) = 0.$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია, უწყვეტი $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში, ამ მიდამოში აკმაყოფილებს

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0$$

ტოლობას და

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^{\bar{0}}) = u_0.$$

ეს თეორემა მტკიცდება პირველი თეორემის ანალოგიურად.

თეორემა 5. ვთქვათ, $(n+1)$-განზომილებიან R_0 სეგმენტზე უწყვეტ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ ფუნქციას აქვს იმავე სეგმენტზე უწყვეტი კერძო წარმოებულები $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_u$, ამასთან,

$$F(x_1^0,\ x_2^0, \ldots,\ x_n^0,\ u_0)=0 \text{ და } F'_u(x_1^0,\ x_2^0 \ldots x_n^0,\ u_0) \neq 0.$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია უწყვეტი $(x_1^0,\ x_2^0, \ldots,\ x_n^0)$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში ისეთი, რომ

$$F(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n))=0 \text{ და}$$

$$f(x_1^0,\ x_2^0, \ldots, x_n^0)=u_0.$$

ეს თეორემა მეორე თეორემის ანალოგიურად მტკიცდება.

ზევით შევისწავლეთ ისეთი არაცხადი ფუნქციის არსებობის საკითხი, როცა იგი განსაზღვრული იყო ერთი განტოლებით. საინტერესოა უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა დასადგენია განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციების არსებობის პირობები. წინასწარ გავეცნოთ ე. წ. ფუნქციონალური დეტერმინანტის ცნებას.

§ 3. ფუნქციონალური დეტერმინანტი

განვიხილოთ n ცვლადზე დამოკიდებული $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$ ფუნქციები:

$$\left.\begin{array}{l} u_1=u_1(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \\ u_2=u_2(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n=u_n(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \end{array}\right\}, \tag{3.1}$$

რომლებიც განსაზღვრულია n-განზომილებიანი R^n სივრცის რაიმე G არეში. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ u_i ფუნქციას აქვს პირველი რიგის კერძო წარმოებულები G არეში.

შევადგინოთ n-რიგის შემდეგი დეტერმინანტი:

$$\frac{D(u_1,\ u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

რომელსაც ეწოდება ფუნქციონალური დეტერმინანტი ანუ (3.1) ფუნქციათა სისტემის იაკობიანი.

როგორც 1 და 2 პარაგრაფებში ვნახეთ, ერთი განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის არსებობის საკმარისი პირობების შესწავლისას მოითხოვებოდა, რომ მოცემული წერტილის მიდამოში F ფუნქციის კერძო წარმოებული არაცხადი ფუნქციის მიმართ არ იყოს ნულის ტოლი. საყურადღებოა, რომ მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციების არსებობის ამოცანაში, უკანასკნელი პირობა გამოითქმება იაკობიანის საშუალებით.

დავამტკიცოთ დებულება, რომელიც წარმოადგენს ერთი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის განზოგადებას.

თეორემა 6. ვთქვათ, (3.1) განტოლებებში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები დამოკიდებულია $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ცვლადებზე:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ x_2 &= x_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= x_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{aligned}\right\}$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფუნქციები განსაზღვრულია n განზომილებიანი სივრცის რაიმე არეში და აქვთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. მაშინ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ რთული ფუნქციებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\frac{D(u_1, u_2, \cdots u_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}. \tag{3.2}$$

დამტკიცება. ავიღოთ (3.2) ტოლობის მარცხენა ნაწილში დეტერმინანტის ნებისმიერი ელემენტი $\frac{\partial u_i}{\partial t_k}$. იგი მოთავსებულია i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის გადაკვეთაზე. რაკი u_i არის $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ცვლადების რთული ფუნქცია, ამიტომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k}. \tag{3.3}$$

თუ გავიხსენებთ ორი დეტერმინანტის გამრავლების ცნობილ წესს, დავრწმუნდებით, რომ (3. 2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დეტერმინანტების გამრავლებით მიღებული დეტერმინანტის i-ური სვეტისა და k-ური სტრიქონის ელემენტი იქნება სწორედ (3.3). თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. დავუშვათ კერძოდ, რომ $u_1=t_1$, $u_2=t_2, \dots, u_n=t_n$, მაშინ

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)}=\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}=1$$

და, (3. 2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}=\frac{1}{\dfrac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}}.$$

ეს ტოლობა მოგვაგონებს ერთი ცვლადის შექცეული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელ წესს.

§ 4. მრავალი ცვლადის არაცხად ფუნქციათა სისტემა

ავიღოთ m განტოლების სისტემა

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)=0,\\ &F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.1}$$

სადაც $F_1, F_2, \dots, F_m$ წარმოადგენენ თავისი არგუმენტების მოცემულ ფუნქციებს. R_n სივრცის ω სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციებს

$$u_1=u_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ u_2=u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m=$$
$$=u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ეწოდება (4. 1) განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციების სისტემა, თუ ნებისმიერი $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \omega$ წერტილისათვის

$$\left.\begin{aligned} &F_1[x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]=0,\\ &F_2[x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_m[x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]=0. \end{aligned}\right\}$$

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7. *ვთქვათ, (4.1) სისტემაში $F_1, F_2, \dots, F_m$ თავისი არგუმენტების მიმართ ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციებია R^{m+n}-განზომილებიანი სივრცის $M(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})$ წერტილის მიდამოში, აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები $u_1, u_2, \dots, u_m$ არგუმენტების მიმართ იმავე მიდამოში, ამასთან,*

$$F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \dots, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})=0, \quad i=1, 2, \dots,$$

m და M წერტილში იაკობიანი

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.2}$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი სისტემა უწყვეტი ფუნქციებისა $u_i=u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, m$, რომლებიც იგივურად აკმაყოფილებენ განტოლებათა (4.1) სისტემას M წერტილის გარკვეულ მიდამოში და

$$u_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})=u_i^{(0)}, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, როცა $m=1$, თეორემა მართებულია. ვთქვათ, თეორემა მართებულია, როცა (4.1) სისტემა შეიცავს $m-1$. განტოლებას. დავამტკიცოთ, რომ თეორემა მართებულია m განტოლების სისტემისათვისაც. აღვნიშნოთ (4.2) დეტერმინანტის პირველი სვეტის ელემენტების ალგებრული დამატებები შესაბამისად $J_1, J_2, \dots, J_m$-ით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$J=J_1\frac{\partial F_1}{\partial u_1}+J_2\frac{\partial F_2}{\partial u_1}+\dots+J_m\frac{\partial F_m}{\partial u_1}.$$

რაკი M წერტილში $J\neq 0$, ამიტომ ამ წერტილში $J_1, J_2, \dots, J_m$ ალგებრული დამატებებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ვთქვათ, $J_1\neq 0$, რადგან J_1 უწყვეტია M წერტილში, ამიტომ არსებობს M წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიც $J_1\neq 0$. დაშვების ძალით, თეორემა მართებულია, როცა (4.1) სისტემა შეიცავს $m-1$

განტოლებას, ამიტომ არსებობს არაცხადი ფუნქციების ერთადერთი სისტემა

$$\left.\begin{array}{l} u_2=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1), \\ u_3=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m=\varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1), \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

რომლებიც უწყვეტია $N=N(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)})$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში და ამ მიდამოში

$$\varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)})=u_2^{(0)},$$

$$\varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)})=u_3^{(0)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{m-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)})=u_m^{(0)}$$

და

$$\left.\begin{array}{l} F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})=0, \\ F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1})=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})=0. \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

აღვნიშნოთ $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})=F(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n, u_1)$-ით და ვუჩვენოთ, რომ N წერტილის გარკვეულ მიდამოში კერძო წარმოებული $\frac{\partial F}{\partial u_1}\neq 0$. მართლაც, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=\frac{\partial F_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_1}. \tag{4.5}$$

გარდა ამისა, (4.4) სისტემიდან ადვილად მივიღებთ

$$\left.\begin{array}{l} 0=\frac{\partial F_2}{\partial u_1}+\frac{\partial F_2}{\partial u_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F_2}{\partial u_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 0=\frac{\partial F_m}{\partial u_1}+\frac{\partial F_m}{\partial u_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F_m}{\partial u_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial u_n}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_1}. \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

გავამრავლოთ (4.5) ტოლობა J_1-ზე, ხოლო (4. 6) ტოლობები შესაბამისად $J_2, \ldots, J_m$-ზე, შემდეგ მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, გვექნება

$$J_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} = J.$$

რადგან M წერტილის გარკვეულ მიდამოში $J \neq 0$ და $J_1 \neq 0$, ამიტომ N წერტილის გარკვეულ მიდამოში $\frac{\partial F}{\partial u_1} \neq 0$. ამ პირობებში განტოლება

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1) = 0 \tag{4.7}$$

განსაზღვრავს ერთადერთ უწყვეტ ფუნქციას

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{4.8}$$

რომელიც აკმაყოფილებს (4.7) განტოლებას M წერტილის გარკვეულ მიდამოში და $u_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = u_1^{(0)}$. ჩავსვათ (4.3) განტოლებებში u_1-ის ნაცვლად (4.8) მნიშვნელობა, გვექნება

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_m = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array}\right\},$$

სადაც

$$u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ტოლობებით განსაზღვრული $u_2, \dots, u_m$ ფუნქციები უწყვეტია და u_1 ფუნქციასთან ერთად $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში აკმაყოფილებს (4.1) სისტემას, ამასთან

$$u_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = u_1^{(0)},$$
$$u_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = u_2^{(0)},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_m(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = u_m^{(0)}.$$

ამრიგად, $u_1, u_2, \dots, u_m$ საძიებელი არაცხადი ფუნქციებია. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ფუნქციათა დამოკიდებული და დამოუკიდებელი სისტემები

განვიხილოთ n ცვლადზე დამოკიდებული m ფუნქცია

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_m = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $u_i (i=1, 2, \ldots, m)$ ფუნქციები განსაზღვრულია n-განზომილებიანი სივრცის რაიმე D არეში. ფუნქციათა (5.1) სისტემას ეწოდება დამოკიდებული სისტემა D არეში, თუ არსებობს ისეთი $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ფუნქცია, რომ ნებისმიერი $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$F[u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0. \tag{5.2}$$

მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია სამ ცვლადზე დამოკიდებული ოთხი ფუნქცია

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3, \; u_2 = x_1 - x_2 + x_3, \; u_3 = x_1 - 2x_2 + x_3, \; u_4 = x_1 + 2x_2 + x_3, \tag{5.3}$$

რომლებიც განსაზღვრულია სამგანზომილებიან ნებისმიერ სასრულ არეში. ცხადია, რომ თუ ავიღებთ $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$ ფუნქციას, მაშინ x_1, x_2, x_3 ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის აღებული არიდან გვექნება

$$F(x_1 + x_2 + x_3, \; x_1 - x_2 + x_3, \; x_1 - 2x_2 + x_3, \; x_1 + 2x_2 + x_3) = 0.$$

ამრიგად, (5. 3) განტოლებებით მოცემული ფუნქციები არის დამოკიდებული სისტემა.

თუ D არეში ან მის რაიმე ქვეარეში $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ფუნქციებისათვის არ არსებობს ისეთი F ფუნქცია, რომლისთვისაც მართებულია (5.2) სახის ტოლობა, მაშინ (5.1) ტოლობებით განსაზღვრულ ფუნქციებს ეწოდება დამოუკიდებელი სისტემა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $m = n$. ვიგულისხმოთ, რომ $u_i (i=1, 2, \ldots, n)$ ფუნქციებს აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები D არეში.

ავიღოთ ფუნქციონალური მარტიცი

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

ვიტყვით, რომ (5.4) მატრიცის რანგია $r (r \leqslant n)$, თუ ყველა n, $n-1, \ldots, r+1$ რიგის იაკობიანები, შედგენილი მოცემული მატრიცის ელემენტებისაგან, იგივურად ნულის ტოლია D არეში, ხოლო ყველა r რიგის იაკობიანებს შორის ერთი მაინც იგივურად არ უდრის ნულს D არეში.

ვთქვათ, $u_1, u_2 \ldots, u_n$ ფუნქციები დამოკიდებული სისტემაა, ამასთან მოვითხოვთ, რომ $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების მიმართ თავისი განსაზღვრის არეში.

თეორემა 8. თუ $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$, $u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციები დამოკიდებული სისტემაა D არეში, მაშინ იაკობიანი

$$J=\frac{D(u_1\ u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0$$

იმავე არეში, ე. ი. (5.4) მატრიცის რანგი n-ზე ნაკლებია.

დამტკიცება. პირობის ძალით, გვაქვს

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0. \tag{5.5}$$

დავუშვათ, რომ D არის რაიმე $M=M(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}; \ldots, x_n^{(0)})$ წერტილში იაკობიანი J განსხვავებულია ნულისაგან. აღვნიშნოთ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ფუნქციების მნიშვნელობანი M წერტილში, შესაბამისად $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{0}$-ით. თანახმად 6 თეორემისა, არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი. რომ $[u_1^{(0)}-\delta, u_1^{(0)}+\delta; u_2^{(0)}-\delta, u_2^{(0)}+\delta; \ldots; u_n^{(0)}-\delta, u_n^{(0)}+\delta]$ სეგმენტის ყოველ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ წერტილს შეესაბამება D არის გარკვეული $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებათა (5.1) სისტემას. ამის გამო, შეუძლებელია $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ფუნქციებს შორის არსებობდეს (5.5) დამოკიდებულება. ამრიგად, დაშვება არ არის მართებული და თეორემა დამტკიცებულია.

მსგავსად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 9. თუ D არეში (5.4) მატრიცის რანგი $r<n$, მაშინ (5.1) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციების სისტემა დამოკიდებული სისტემაა D არის რაიმე ქვეარეში.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ დამოუკიდებელ ფუნქციათა რიცხვი (5.4) მატრიცის რანგის ტოლია.

§ 6. მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციის წარმოებულები

გავეცნოთ მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციის კერძო წარმოებულების გამოთვლის ხერხს. ვთქვათ, მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქცია განსაზღვრულია (2.1) განტოლებით და შესრულებულია 4 თეორემის პირობები. მოვძებნოთ (2.1) ტოლობის მარცხენა ნაწილის სრული დიფერენციალი, რომელიც ცხადია იქნება ნულის ტოლი:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F}{\partial u}du=0, \qquad (6.1)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$du=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_1-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_2-\cdots-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_n. \qquad (6.2)$$

იგივე $u=u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი ასეც გამოისახება

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \qquad (6.3)$$

რადგან $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ დიფერენციალები ნებისმიერია, ამიტომ (6.2) და (6. 3) ტოლობების შედარებით დავწერთ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$$

არაცხადი ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულების გამოსათვლელად მოვძებნოთ (6,1) ტოლობის სრული დიფერენციალი:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n}dx_n+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial u}du\right)dx_1+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}dx_1+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n}dx_n+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial u}du\right)dx_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial u}d^2u=0.$$

შევიტანოთ აქ du დიფერენციალის მნიშვნელობა (6.3) ტოლობიდან და შემდეგ განვსაზღვროთ d^2u. ამ უკანასკნელის გამოსახულებაში dx_1^2-ის კოეფიციენტი მოგვცემს $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$, $dx_1 dx_2$. ნამრავლის კოეფიციენტი მოგვცემს $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$ და ა. შ.

მსგავსად მივიღებთ ყველა მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს. ანალოგიურად მოვიქცევით არაცხადი ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულების გამოთვლისას.

კიდევ ერთხელ გავიხსენოთ, რომ მოყვანილ გამოთვლებში არსებითი მნიშვნელობა აქვს პირობას $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$.

ახლა გავეცნოთ არაცხად ფუნქციათა სისტემის კერძო წარმოებულების გამოთვლის ხერხს. როგორც ვიცით, თუ (4.1) სისტემაში ჩავსვამთ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ არაცხადი ფუნქციების მნიშვნელობებს, მივიღებთ იგივეობებს. გავაწარმოოთ ეს იგივეობები x_1-ით, მივიღებთ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0, \\ \cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

ამ ტოლობების ერთობლიობა წარმოადგენს წრფივი განტოლებების არაერთგვაროვან სისტემას $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1}$ უცნობების მიმართ, ამასთან, სისტემის დეტერმინანტი

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} \neq 0$$

და, ამიტომ

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, u_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)}}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, x_1)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)}}. \qquad (6.4)$$

მსგავსად გამოითვლება $u_1, \ldots, u_m$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები $x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ.

საზოგადოდ, როცა $F_1, \ldots, F_m$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები k რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით, მაშინ არსებობს არაცხადი $u_1, \ldots, u_m$ ფუნქციების უწყვეტი კერძო წარმოებულები k რიგამდე ჩათვლით და ყველა ისინი უნდა ვიპოვოთ (4.1) ტოლობების სრული დიფერენციალების მიმდევრობითი გამოთვლით. ამა თუ იმ უმაღლესი რიგის კერძო წარმოებულის მოსაძებნად მიღებულ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი იაკობიანი განსხვავებული იქნება ნულისაგან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. არაცხადი ფუნქცია $u=u(x_1, x_2)$ მოცემულია განტოლებით

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{u^2}{c^2}-1=0, \tag{6.5}$$

ვიპოვოთ მისი კერძო წარმოებულები.

მოვძებნოთ (6.5) განტოლების მარცხენა ნაწილის სრული დიფერენციალი, რომელიც ცხადია იქნება ნულის ტოლი. გვექნება

$$\frac{x_1}{a^2}\,dx_1+\frac{x_2}{b^2}\,dx_2+\frac{u}{c^2}\,du=0, \tag{6.6}$$

საიდანაც

$$du=-\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x_1}{u}\,dx_1-\frac{c^2}{b^2}\,\frac{x_2}{u}\,dx_2,$$

ე. ი.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x_1}{u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{c^2}{b^2}\,\frac{x_2}{u}.$$

(6.5) ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები გამოთვლილია. ახლა მოვძებნოთ (6.6) ტოლობის მარცხენა ნაწილის სრული დიფერენციალი, რომელიც აგრეთვე ნულის ტოლი იქნება. მივიღებთ

$$\frac{dx_1^2}{a^2}+\frac{dx_2^2}{b^2}+\frac{du^2}{c^2}+\frac{u}{c^2}\,d^2u=0,$$

საიდანაც

$$d^2u=-\frac{c^4}{u^3}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{u^2}{c^2}\right)dx_1^2+\frac{2x_1x_2}{a^2b^2}\,dx_1dx_2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot dx_2^2\right],$$

ე. ი.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{c^4}{a^2 u^3}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{u^2}{c^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{2c^4 x_1 x_2}{a^2 b^2 u^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{c^4}{b^2 u^3}\left(\frac{x_2^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2}\right).$$

ანალოგიურად მოიძებნება მომდევნო რიგის კერძო წარმოებულები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოცემულია x ცვლადის სამი u_1, u_2, u_3 არაცხადი ფუნქცია:

$$x + u_1 + u_2 + u_3 = a,$$

$$x^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = b^2,$$

$$x^3 + u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 = c^3,$$

სადაც a, b, c ნებისმიერი მუდმივებია. მოვძებნოთ მათი წარმოებულები.

ავიღოთ მოცემული განტოლებების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების სრული დიფერენციალები, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} u_1' + u_2' + u_3' &= -1, \\ u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' &= -x, \\ u_1^2 u_1' + u_2^2 u_2' + u_3^2 u_3' &= -x^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \end{vmatrix} = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2).$$

ამიტომ, თანახმად (6.4) ფორმულებისა, მივიღებთ

$$u_1' = -\frac{(u_2 - x)(u_3 - x)}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)},$$

$$u_2' = \frac{(x - u_1)(x - u_3)}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)},$$

$$u_3' = \frac{(x - u_1)(x - u_2)}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}.$$

ახლა მოვძებნოთ (6.7) განტოლებების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების სრული დიფერენციალები, რომლებშიც u_1', u_2', u_3' წარ-

მოებულების ნაცვლად შევიტანოთ მათი უკვე გამოთვლილი მნიშვნელობები. მიღებული სისტემიდან გამოითვლება მეორე რიგის წარმოებულები u_1'', u_2'', u_3''.

მსგავსად გამოითვლება მომდევნო რიგის წარმოებულები.

კითხვები

1. მოიყვანეთ ერთი ცვლადის არაცხადი ფუნქციის განსაზღვრა.

2. გამოთქვით და დაამტკიცეთ $F(x,y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემები.

3. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ თეორემა $F(x,y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი არაცხადი ფუნქციის არსებობის შესახებ.

4. გამოიყვანეთ ერთ ცვლადზე დამოკიდებული არაცხადი ფუნქციის პირველი და უმაღლესი რიგის წარმოებულების გამოსათვლელი ფორმულები.

5. გაიხსენეთ მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციის და მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულების არსებობის საკმარისი პირობები.

6. რას უწოდებენ მოცემული ფუნქციების იაკობიანს?

7. როგორია მრავალი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი?

8. რას ეწოდება მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქციების სისტემა?

9. გამოთქვით და დაამტკიცეთ მრავალი ცვლადის არაცხად ფუნქციათა სისტემის არსებობის თეორემა.

10. გამოიყვანეთ არაცხად ფუნქციათა სისტემის კერძო წარმოებულების გამოსათვლელი ფორმულები.

11. მოიყვანეთ ფუნქციათა დამოკიდებული და დამოუკიდებელი სისტემების განსაზღვრა.

12. მოიყვანეთ საკმარისი პირობები იმისა, რომ ფუნქციათა სისტემა იყოს დამოკიდებული ან დამოუკიდებელი.

სავარჯიშო

გამოთვალეთ y', თუ

1. $ax+by+c=0$; პასუხი: $y'=-\dfrac{b}{a}$.

2. $2xy+ay^2-bx^2=0$; პასუხი: $y'=\frac{bx-y}{x+ay}$.

3. $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$; პასუხი: $y'=-\frac{2mx+p}{2ny+q}$.

4. $ax+by+xy=\sqrt{x^2+y^2}$,

პასუხი: $y'=\frac{x-(a+y)(ax+by+xy)}{(b+x)(ax+by+xy)-y}$.

5. $y^3=\frac{x^2-y}{x^2+y}$; პასუხი: $y'=\frac{4xy^2}{3(x^4-y^2)+2x^2y}$.

6. $y^n=xy+\frac{x}{y}$; პასუხი: $y'=\frac{y(1+y^2)}{x[1+n+(n-1)y^2]}$.

7. $y^n=\frac{x+y}{x-y}$; პასუხი: $y'=\frac{2y^2}{n(y^2-x^2)+2xy}$.

8. $y=1+xe^y$; პასუხი: $y'=\frac{e^y}{2-y}$.

9. $\sqrt[n]{x+y^2}=\frac{x-y}{x+y}$;

პასუხი: $y'=\frac{1}{2}\,\frac{2ny(x+y^2)+y^2-x^2}{nx(x+y^2)+y(x^2-y^2)}$.

10. $y\sin my=ae^{mx+y}$, პასუხი: $y'=\frac{my(1-\operatorname{ctg} mx)}{1-y}$.

11. $e^x=a^{x+y}$; პასუხი: $y'=\frac{1-\lg a}{\lg a}$.

12. $e^{x-y}=x^y$; პასუხი: $y'=\frac{\lg x}{1+\lg x}$.

13. $x^2\cos^2 y-2ax\cos y+a^2=0$, პასუხი: $y'=\frac{a}{x^2\sin y}$.

14. $\arcsin\frac{x^3+y^3-3x^2y}{x^3+y^3-3xy^2}=a$; პასუხი: $y'=\frac{y}{x}$.

15. $y \operatorname{arctg} x = y^2 - x^2$; პასუხი: $y' = \dfrac{y(2x+y+2x^3)}{(1+x^2)(x^2+y^2)}$.

16. $\dfrac{y \lg x}{x \lg y} - \dfrac{x \lg y}{y \lg x} = 0$; პასუხი: $y' = \dfrac{y^2(1-\lg x)}{x^2(1-\lg y)}$.

17. $(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$;

პასუხი: $y' = -\dfrac{x[3y^4+(6x^2-4a^2)y^2+3x^4]}{y[3y^4+(6x^2-4a^2)x^2+3x^4]}$.

18. $\arcsin x - \arcsin\sqrt{1-y^2} = 0$; პასუხი: $y' = -\dfrac{x}{y}$.

19. $a^{x^y} + \sqrt{\sec(xy)} = 0$;

პასუხი: $y' = \dfrac{2yx^{y-1}\lg a - y\operatorname{tg}(xy)}{x\operatorname{tg}(xy) - 2x^y \lg x \lg a}$.

20. $x \operatorname{arctg} y = y \sin x$; პასუხი: $y' = \dfrac{y(1+y^2)(x\cos x - \sin x)}{x[x-(1+y^2)\sin x]}$.

გამოთვალეთ y'', თუ

21. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; პასუხი: $y'' = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.

22. $x^3+y^3-3axy=0$; პასუხი: $y'' = -\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

23. $y^2+bx^2-3ay+ax-b=0$;

პასუხი: $y'' = -\dfrac{4b(y-a)^2+(2bx+a)^2}{4(y-a)^3}$.

24. $y+ye^{-x}-x=0$; პასუხი: $y'' = -\dfrac{y(e^x-1)-2e^x}{(e^x+1)^2}$.

25. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; პასუხი: $y'' = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{3x\sqrt[3]{xy}}$.

26. $x^4+y^4-4x^2y^2=0$; პასუხი: $y''=0$.

27. $ye^x+e^y=0$; პასუხი: $y'' = -\dfrac{y}{(y-1)^3}$.

28. $\ln y - xy = 0$; პასუხი: $y'' = \dfrac{2y^3 - y}{(1-x)^3}$.

29. $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; პასუხი: $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

30. გამოთვალეთ y', y'', y''', თუ $x^2 + xy + y^2 = 0$.

31. გამოთვალეთ y', y'', y''' წერტილზე $(0,1)$, თუ

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

პასუხი: $y' = 0$, $y'' = -\dfrac{2}{3}$, $y''' = -\dfrac{2}{3}$.

32. გამოთვალეთ y', y'' წერტილზე $(0,0)$, თუ $x^2 + y^2 - 3(x - y)$

პასუხი: $y' = 1$; $y'' = 0$;

33. გამოთვალეთ y', y'' წარმოებულები $(\sqrt{2}\,a, \sqrt[3]{4}\,a)$ წერტილზე, თუ

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$. პასუხი: $y' = 0$; $y'' = -\dfrac{2}{a}$.

34. გამოთვალეთ y'; y'' წარმოებულები $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a, \dfrac{a}{2}\right)$ წერტილზე, თუ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. პასუხი: $y' = 0$; $y'' = -\dfrac{3}{2a}$.

გამოთვალეთ $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, თუ

35. $x_1^2 + x_2^2 + u^2 - 6x_1 = 0$;

პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{3 - x_1}{u}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = -\dfrac{x_2}{4}$.

36. $u^3 - x_1 x_2 = 0$; პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{x_2}{2u}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{x_1}{2u}$.

37. $\cos(ax_1 + bx_2 - cu) - k(ax_1 + bx_2 - cu) = 0$,

პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{a}{c}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{b}{c}$.

38. დაამტკიცეთ, რომ $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=u$, თუ $\dfrac{u}{x_1}=\varphi\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$.

39. დაამტკიცეთ, რომ $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+2u=0$, თუ $x_1x_2u=a^3$.

გამოთვალეთ $u=u(x_1, x_2)$ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, თუ

40. $x_1^2+x_2^2+u^2=a^2$; პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=-\dfrac{x_1}{u_1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=-\dfrac{x_1}{u}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=-\frac{x_1^2+u^2}{u^3};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{x_1x_2}{u^3};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-\frac{x_2^2+u}{u^3}.$$

41. $x_1+x_2+u=e^u$; პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=\dfrac{1}{x_1+x_2+u-1}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-\frac{x_1+x_2+u}{(x_1+x_2+u-1)^3}.$$

42. $u=\sqrt{x_1^2-x_2^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{u}{\sqrt{x_1^2-x_2^2}}$; პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{x_1u}{x_1^2-x_2^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{x_2u}{x_1^2-x_2^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=-\frac{x_2^2u}{(x_1^2-x_2^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{x_1x_2u}{(x_1^2-x_2^2)^3};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-\frac{x_1^2u}{(x_1^2-x_2^2)^3}.$$

43. $x_1+x_2+u=e^{-(x_1+x_2+u)}$; პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=-1$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}=0.$$

44. გამოთვალეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

როცა $x=1$, $y=-2$, $z=1$, თუ $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$;

პასუხი: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{394}{125}$.

გამოთვალეთ dz და d^2z, თუ

45. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, პასუხი: $dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)$, $d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

46. $xyz=x+y+z$; პასუხი: $dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}$;

$$d^2z=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2+[x+y-z(1+xy)]dxdy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

47. $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$; პასუხი: $dz=dx-\frac{(x-z)dy}{(x-z)^2+y(1+y)}$,

$$d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(1+y)]^3}dy^2.$$

გამოთვალეთ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, თუ

48. $xu-yv=0$, $yu+xv-1=0$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xy+yv}{x^2+y^2}.$$

49. $x=u\cos\frac{v}{u}$, $y=u\sin\frac{v}{u}$; პასუხი: $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}.$$

50. $x=e^u+u\sin v,\ y=e^u-u\cos v;$ პასუხი: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$

$$=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\mathrm{siu}\,u+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

თავი VIII

ცვლადთა გარდაქმნა

ვთქვათ, x დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $y=y(x)$ მისი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია გარკვეულ შუალედში და აქვს სასრული წარმოებულები $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ იმავე შუალედში. ქვევით, პირობით, x და y-ს ვუწოდოთ ძველი ცვლადები. განვიხილოთ გამოსახულება

$$F=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

სადაც f არის თავისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია. ხშირად, F ფუნქციის გამოსახულების გამარტივებისათვის საჭიროა ძველი x და y ცვლადების ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი და ახალი $u=u(t)$ ფუნქცია. მათემატიკურად საქმე გვაქვს შემდეგ ამოცანასთან: გამოვსახოთ F ფუნქცია ახალი t და u ცვლადებისა და u ფუნქციის წარმოებულების საშუალებით. მსგავსი ამოცანა განიხილება მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაშიც. ძველი ცვლადების შეცვლას ახალი ცვლადებით ეწოდება *ცვლადთა გარდაქმნა*.

§ 1. ცვლადთა გარდაქმნა ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში

განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა ვასრულებთ მხოლოდ ძველი დამოუკიდებელი x ცვლადის გარდაქმნას ახალი დამოუკიდებელი t ცვლადის საშუალებით. ვთქვათ, ამ გარდაქმნას აქვს ცხადი სახე

$$x=\varphi(t), \tag{1.1}$$

სადაც $\varphi(t)$ ფუნქციას აქვს t ცვლადის მიმართ წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით. რადგანაც y არის x ცვლადის ფუნქცია, ამიტომ

$$y=y(\varphi(t)) \tag{1.2}$$

და გვექნება (იხ. I ტომი, გვ. 303—304):

$$\left.\begin{aligned} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{x^2} &= \frac{x'_t\, y''_{t^2} - x''_{t^2}\, y'_t}{x'^3_t}, \\ y'''_{y^3} &= \frac{x'_t\,(x'_t\, y'''_{t^3} - x'''_{t^3}\, y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2}\, y'_t)}{x'^5_t}, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

და ა. შ., სადაც x'_t, y'_t, x''_{t^2}, $y''_{t^2}, \ldots$, გამოითვლება (1.1) და (1.2) ტოლობებიდან. ამის შემდეგ. F ფუნქციის გამოსახვისათვის ახალი დამოუკიდებელი ცვლადით, საკმარისია x და y-ის ნაცვლად შევიტანოთ მათი მნიშვნელობანი შესაბამისად (1.1) და (1.2) ტოლობებიდან, ხოლო y'_x, y''_{x^2}, $y'''_{x^3}, \ldots$ წარმოებულების ნაცვლად — მათი მნიშვნელობანი (1.3) ტოლობებიდან.

თუ x და t ცვლადებს შორის დამოკიდებულება მოცემულია არაცხადი სახით

$$\Phi(x,\ t)=0, \qquad (1.4$$

მაშინ x'_t, $x''_{t^2}, \ldots$ წარმოებულები უნდა გამოვთვალოთ (1.4) ტოლობიდან არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვასრულებთ ორივე ძველი ცვლადის გარდაქმნას. ვთქვათ,

$$x=\varphi_1(u,\ v), \quad y=\varphi_2(u,\ v) \tag{1.5}$$

არის გარდაქმნის ფორმულები. რადგან y დამოკიდებულია x ცვლადზე, ამიტომ v დამოკიდებული იქნება u ცვლადზე და, (1.5) ტოლობების ძალით, x და y იქნება u ცვლადის რთული ფუნქციები. თანახმად რთული ფუნქციის გაწარმოების წესისა, გვექნება.

$$\frac{dx}{du} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\,\frac{dv}{du},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\,\frac{dv}{du},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\,\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\,\dfrac{dv}{du}} \tag{1.6}$$

ახლა გამოვთვალოთ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, ამისათვის იგი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{du}} \tag{1.7}$$

აქ წილადის ნიშნული გამოთვლილი გვქონდა ზევით. მრიცხველისათვის კი გვექნება

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}\right)=$$

$$=\frac{\alpha\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)-\beta\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)^2},$$

სადაც

$$\alpha=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2},$$

$$\beta=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}.$$

ამრიგად, (1.7) ტოლობიდან გვექნება

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\alpha\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)-\beta\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)^3}. \tag{1.8}$$

მსგავსად გამოითვლება მომდევნო y'''_{x^3}, $y^{(4)}_{x^4}, \dots y^{(n)}_{x^n}$ წარმოებულებიც, რომლებიც, ცხადია, გამოისახებიან $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}, \dots, \frac{d^nv}{du^n}$ წარმოებულების საშუალებით.

F ფუნქციის გამოსახულების გამარტივებისათვის x, y, y'_x, $y''_{x^2}, \dots$ სიდიდეთა ნაცვლად უნდა შევიტანოთ მათი მნიშვნელობანი შესაბამისად (1.5), (1.6), (1.8), ... ფორმულებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დიფერენციალური განტოლება

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

ჩავწეროთ ახალი დამოუკიდებელი t ცვლადით, თუ $x=\cos t$.

ჯერ გამოვთვალოთ $y'=\frac{dy}{dx}$, გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}.$$

ახლა ვიპოვოთ

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{\sin t}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

მოცემული განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს;

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გარდავქმნათ გამოსახულება

$$F=\frac{y''_{x^2}-y'_x(1+y'_x)^2}{(1+y'_x)^2},$$

თუ $x=u-v$, $y=v$.

(1.6) და (1.8) ფორმულების ძალით, გვექნება

$$F=\frac{x'_u y''_{u^2}-x''_{u^2}y'_u-y'_u(x'_u-y'_u)^2}{(x'_u+y'_u)^3}$$

და, რადგანაც $x'_u=1-y'_u$, ამიტომ F ფუნქციის გამარტივებული სახე იქნება

$$F=y''_{u^2}-y'_u$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ, გამოსახულებაში

$$F=f(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n})$$

შეცვლილია x და y ცვლადების როლები, ე. ი. y არის დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო x მისი ფუნქცია. გამოვიყვანოთ ამ შემთხვევაში F ფუნქციის გამოსახულება.

ამოცანის გადასაწყვეტად საკმარისია y ცვლადის წარმოებულები

x-ით გამოვსახოთ x-ის წარმოებულების საშუალებით y ცვლადის მიმართ. გვაქვს

$$y'_x=\frac{1}{x'_y},\quad y''_{x^2}=-\frac{x''_{y^2}}{x'^3_y},\quad y'''_{x^3}=\frac{3\,(x''_{y^2})^2-x'_y x'''_{y^3}}{x'^5_y},\ldots,\tag{1.9}$$

ახლა F ფუნქციის გამოსახულებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ y, y-ის ნაცვლად ჩავსვათ x, წარმოებულები y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}, ... შევცვალოთ (1.9) ფორმულებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვთქვათ, x და $y=y(x)$ არის წერტილის მართკუთხა კოორდინატები. გამოვთვალოთ x, y, y'_x, y''_{x^2},... პოლარული ϑ და $r=r(\vartheta)$ კოორდინატებით.

ცნობილია, რომ

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\vartheta,\\ y&=r\sin\vartheta.\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

გავითვალისწინოთ, რომ r წარმოადგენს ϑ ცვლადის ფუნქციას და გავაწარმოოთ (1.10) ტოლობები ϑ ცვლადით;

$$\left.\begin{aligned} x'_\vartheta&=r'_\vartheta\cos\vartheta-r\sin\vartheta,\\ y'_\vartheta&=r'_\vartheta\sin\vartheta+r\cos\vartheta.\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

ახლა უკანასკნელი ტოლობები გავაწარმოოთ ϑ ცვლადით, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} x''_{\vartheta^2}&=r''_{\vartheta^2}\cos\vartheta-2r'_\vartheta\sin\vartheta-r\cos\vartheta,\\ y''_{\vartheta^2}&=r''_{\vartheta^2}\sin\vartheta+2r'_\vartheta\cos\vartheta-r\sin\vartheta.\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

ამნაირადვე გამოითვლება x და y ცვლადების უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები x'''_{ϑ^3}, y'''_{ϑ^3},....

თუ გამოვიყენებთ (1.6), (1.8) ფორმულებს, გვექნება

$$y'_x=\frac{r'_\vartheta\sin\vartheta+r\cos\vartheta}{r'_\vartheta\cos\vartheta-r\sin\vartheta},\quad y''_{x^2}=\frac{r^2+2r'^2_\vartheta-r\,r''_{\vartheta^2}}{\left(r'_\vartheta\cos\vartheta-r\sin\vartheta\right)^3},\ldots$$

§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა მრავალი ცვლადის ფუნქციაში

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi=\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\right),\tag{2.1}$$

რომელიც ორი დამოუკიდებელი x და y ცვლადის გარდა შეიცავს მათზე დამოკიდებულ z ფუნქციას და მის სხვადასხვა რიგის კერძო წარმოებულებს x და y ცვლადების მიმართ. ვუწოდოთ x და y ცვლადებს ძველი დამოუკიდებელი ცვლადები. ვთქვათ, საჭიროა ძველი x და y ცვლადები (2.1) გამოსახულებაში შევცვალოთ ახალი დამოუკიდებელი u და v ცვლადებით. შევისწავლოთ ის შემთხვევა, როცა ძველი x და y ცვლადები უშუალოდ არის გამოსახული ახალი u და v ცვლადების საშუალებით;

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \tag{2.2}$$

სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $x(u, v)$ და $y(u, v)$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები სასურველ რიგამდე.

თუ z-ს განვიხილავთ, როგორც u და v ცვლადების რთულ ფუნქციას, მაშინ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

(2.3) განტოლებათა ერთობლიობა წარმოადგენს წრფივ არაერთგვაროვან სისტემას საძიებელი $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულების მიმართ, რომლის ამოხსნა მოგვცემს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=C\frac{\partial z}{\partial u}+D\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{2.4}$$

სადაც A, B, C, D კოეფიციენტები დამოკიდებულია $x=x(u, v)$ და $y=y(u, v)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულებზე და არ არის დამოკიდებული z-ზე. რადგან იგულისხმება, რომ $x(u, v)$ და $y(u, v)$ ურთიერთდამოუკიდებელი ფუნქციებია, ამიტომ (2.3) სისტემის ამონახსნი (2.4) არსებობს. როგორც (2.4) ფორმულებიდან ვხედავთ, z ფუნქციის კერძო წარმოებულის მისაღებად x ცვლადით საჭიროა z ფუნქციის კერძო წარმოებულები u და v ცვლადებით გავამრავლოთ შესაბამისად A და B კოეფიციენტებზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. z ფუნქციის კერძო წარმოებულის გამოსათვლელად y ცვლადით საკმარისია A და B შევცვალოთ შესაბამისად C და D კოეფიციენტებით.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ კერძო წარმოებულის მოსაძებნად გამოვიყენოთ (2.4) ფორმულებით გამოსახული წესი, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}\right)+$$
$$+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}\right)=A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2AB\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+$$
$$+B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\left(A\frac{\partial A}{\partial u}+B\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}+\left(A\frac{\partial B}{\partial u}+B\frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}. \qquad (2.5)$$

ანალოგიურად მივიღებთ მეორე რიგის დანარჩენ კერძო წარმოებულებს:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=AC\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(AD+BC)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+BD\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+$$
$$+\left(A\frac{\partial C}{\partial u}+B\frac{\partial C}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}+\left(A\frac{\partial D}{\partial u}+B\frac{\partial D}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2CD\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+D^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+$$
$$+\left(C\frac{\partial C}{\partial u}+D\frac{\partial C}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}+\left(C\frac{\partial D}{\partial u}+D\frac{\partial D}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}. \qquad (2{\cdot}6)$$

მსგავსად მიიღება z ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები x და y ცვლადებით. ამის შემდეგ Φ ფუნქციის გამოსახულებაში უნდა შევიტანოთ x, y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, … სიდიდეთა ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) ფორმულებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გარდავქმნათ გამოსახულება

$$\Phi=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},$$

თუ $x=u$, $y=uv$.

გამოვიყენოთ (2.3) ფორმულები, გვექნება

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=u\frac{\partial z}{\partial y}$$

ამოვხსნათ განტოლებათა უკანასკნელი სისტემა $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ წარმოებულების მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

ჩავსვათ Φ ფუნქციის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\Phi=u\frac{\partial z}{\partial u}.$$

მაგალითი 2. გარდავქმნათ და ამოვხსნათ შემდეგი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y},$$

თუ $u=x+y,\quad v=x-y$.

(2.3) ფორმულების ძალით დავწერთ

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial v}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}.$$

მოცემული დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

რომლის ამონახსნი, ცხადია, იქნება

$$z=\psi(u)\quad \text{ანუ}\quad z=\psi(x+y),$$

სადაც ψ არის $x+y$ ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია.

მაგალითი 3. გამოვსახოთ

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2.7}$$

გამოსახულება პოლარულ კოორდინატებში.

გამოვიყენოთ მართკუთხა და პოლარული კოორდინატების დამაკავშირებელი ფორმულები: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, სადაც r და φ აღნიშნავს პოლარულ კოორდინატებს.

თუ მივმართავთ (2.3) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=-z\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y},$$

საიდანაც

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}=A\frac{\partial z}{\partial r}+B\frac{\partial z}{\partial \varphi},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}=C\frac{\partial z}{\partial r}+D\frac{\partial z}{\partial \varphi},\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

სადაც

$$A=\cos\varphi,\quad B=-\frac{1}{r}\sin\varphi,\quad C=\sin\varphi,\ D=\frac{1}{r}\cos\varphi.$$

ახლა (2.5) და (2.6) ფორმულების ძალით, გვექნება

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin 2\varphi}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\varphi\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin 2\varphi}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

შევიტანოთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ და $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ წარმოებულების გამოთვლილი მნიშვნელობანი (2,7) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

დავუბრუნდეთ ცვლადთა გარდაქმნის (2.2) ფორმულებს. ვთქვათ, ეს ტოლობები ამოხსნილია ახალი u და v ცვლადების მიმართ:

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y). \tag{2.9}$$

ახლა z ფუნქცია უნდა განვიხილოთ, როგორც x და y ცვლადების რთული ფუნქცია, ამიტომ მართებულია ფორმულები

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial v},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

უმაღლესი რიგის კერძო წარმოებულების მისაღებად საკმარისია (2.10) ტოლობებზე გავიმეოროთ იგივე სასურველ რიცხვჯერ. მაგალითად, z ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულისათვის x ცვლადის მიმართ, გვექნება

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

მსგავსად გამოისახება $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ და $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ კერძო წარმოებულები და ა. შ.

§ 3. ცვლადთა გარდაქმნა სრული დიფერენციალის მეთოდით

გავეცნოთ ცვლადთა გარდაქმნის საკითხს სრული დიფერენციალის გამოყენებით. ეს მეთოდი უმეტესად მაშინ გამოიყენება, როცა (2.1) ტოლობაში შედის z ფუნქციის ყველა მოცემული რიგის კერძო წარმოებულები, წინა პარაგრაფის მსგავსად, ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება.

1. ვთქვათ, დამოუკიდებელი ცვლადებია u და v. გამოვთვალოთ (2.2) ტოლობების სრული დიფერენციალები, გვექნება

$$dx=\alpha\, du+\beta\, dv,\quad dy=\gamma\, du+\delta\, dv, \qquad (3.1)$$

რომელთა სრული დიფერენციალები იქნება

$$d^2x=\varepsilon\, du^2+\zeta\, dudv+\eta dv^2,\quad d^2y=\vartheta\, du^2+i dudv+\varkappa\, dv^2 \qquad (3.2)$$

და ა. შ. აქ $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ კოეფიციენტები x, y, u და v ცვლადების ცნობილი ფუნქციებია.

ახლა შევნიშნოთ, რომ

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (3.3)$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში dx და dy დიფერენციალების მნიშვნელობანი (3.1) ფორმულებიდან და გავუტოლოთ მიღებული ტოლობის მარცხ-

ხენა და მარჯვენა ნაწილებში du და dv დიფერენციალების კოეფიციენტები, მივიღებთ

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial x}+\gamma \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \beta\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v},$$

საიდანაც განისაზღვრება $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ წარმოებულები.

მეორე რიგის კერძო წარმოებულების გამოსათვლელად, როგორც ზევით, მხედველობაში ვიქონიოთ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია და z-ის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი ისევ ორი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\partial v^2. \tag{3.4}$$

ჩავსვათ აქ dx და dy დიფერენციალების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (3.1) ტოლობებიდან, ხოლო d^2x და d^2y დიფერენციალების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (3.2) ტოლობებიდან და მიღებული ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში გავუტოლოთ ერთმანეთს du^2, $dudv$ და dv^2 სიდიდეთა კოეფიციენტები. მივიღებთ განტოლებათა გარკვეულ სისტემას, საიდანაც განისაზღვრება $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ კერძო წარმოებულები. მსგავსად გამოითვლება უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.

2. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დამოუკიდებელ ცვლადებად მიჩნეულია x და y. მოვძებნოთ (2.9) ტოლობებიდან u და v ფუნქციების პირველი რიგის, მეორე რიგის და ა. შ. სრული დიფერენციალები:

$$du=adx+bdy, \qquad dv=a_1dx+b_1dy, \tag{3.5}$$

$$d^2u=cdx^2+fdxdy+gdy^2, \quad d^2v=c_1dx^2+f_1dxdy+g_1dy^2 \tag{3.6}$$

და ა. შ., სადაც a, b, …, f_1, g_1 კოეფიციენტები არის x, y, u და v ცვლადების ცნობილი ფუნქციები. შევიტანოთ (3.1) ფორმულებში du და dv დიფერენციალების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (3.5) განტოლებებიდან და ერთმანეთს გავუტოლოთ მიღებული ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში dx და dy დიფერენციალების კოეფიციენტები, გვექნება

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial u} + a_1\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b\frac{\partial z}{\partial u} + b_1\frac{\partial z}{\partial v}.$$

მეორე რიგის კერძო წარმოებულების გამოსათვლელად z ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი წარმოვადგინოთ ორი ინვარიანტული სახით:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$

ჩავსვათ აქ du, dv, d^2u და d^2v დიფერენციალების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (3.5) და (3.6) ფორმულებიდან. მიღებული ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში გავუტოლოთ ერთმანეთს dx^2, $dxdy$ და dy^2-ის კოეფიციენტები, მივიღებთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ და $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ წარმოებულების მნიშვნელობებს. ანალოგიურად გამოითვლება მომდევნო რიგის კერძო წარმოებულები.

§ 4. ცვლადთა გარდაქმნის ზოგადი შემთხვევა

განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა, დამოუკიდებელი x და y ცვლადების გარდა, საჭიროა აგრეთვე გარდავქმნათ მათზე დამოკიდებული $z = f(x, y)$ ფუნქცია. ვთქვათ, გარდაქმნის ფორმულებიდან ამოხსნილია ძველი ცვლადები

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w). \qquad (4.1)$$

თუ $z = f(x, y)$ ტოლობაში x, y და z ცვლადების მნიშვნელობებს შევიტანთ (4.1) ფორმულებიდან, მივიღებთ ტოლობას, რომელიც ერთმანეთთან დააკავშირებს ახალ u, v და w ცვლადებს. ცხადია, ამ განტოლებიდან ერთ-ერთი ცვლადი, მაგალითად w, განისაზღვრება როგორც u და v ცვლადების ფუნქცია.

ვიგულისხმოთ, რომ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო z მათზე დამოკიდებული x და y ფუნქციების საშუალებით. გავაწარმოოთ z-ჯერ u და შემდეგ v ცვლადებით, მივიღებთ (2.3) სახის ტოლობებს, რომელთა ამოხსნა $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ წარმოებულების მიმართ

მოგვცემს (2.4) სახის ფორმულებს. ამ ფორმულებში $\frac{\partial x}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial v}$ წარმოადგენენ x, y, z ცვლადების სრულ კერძო წარმოებულებს u და v ცვლადების მიმართ, რომლებიც გამოითვლება (4.1) ტოლობებიდან იმის გათვალისწინებით, რომ w არის u და v ცვლადების ფუნქცია:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \chi}{\partial v}+\frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

რაც შეეხება (2.4) ფორმულებში შემავალ A, B, A_1, B_1 კოეფიციენტებს, ისინი დამოკიდებული იქნებიან u, v, w ცვლადებზე და $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ წარმოებულებზე. თუ ჩვენი შემთხვევისათვის დაწერილ (2.4) ფორმულებს მიმდევრობით გამოვიყენებთ, მივიღებთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს და ა. შ.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულები ამოხსნილია ახალი ცვლადების მიმართ:

$$u=\varphi_1(x, y, z), \quad v=\psi_1(x, y, z), \quad w=\chi_1(x, y, z), \tag{4.2}$$

სადაც x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია. გვექნება

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.3}$$

აქ იგულისხმება, რომ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ წარმოებულების ნაცვლად ჩასმულია მათი მნიშვნელობანი, რომლებიც გამოთვლილია (4.2) ტოლობებიდან იმის გათვალისწინებით, რომ z არის x და y ცვლადების ფუნქცია:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial \chi_1}{\partial y}+\frac{\partial \chi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

(4.3) ტოლობები, როგორც ვხედავთ, წარმოადგენს წრფივ სისტემას $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ წარმოებულების მიმართ. ეს წარმოებულები გამოითვლება (4.3) სისტემიდან x, y, z, $\frac{\partial w}{\partial u}$ და $\frac{\partial w}{\partial v}$ სიდიდეთა საშუალებით.

მეორე რიგის კერძო წარმოებულების გამოსათვლელად საკმარისია $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\text{ან } \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ ხელახლა გავაწარმოოთ x ცვლადით (ან y ცვლადით),

მასთან $\frac{\partial w}{\partial u}$ და $\frac{\partial w}{\partial v}$ უნდა ვიგულისხმოთ როგორც x და y ცვლადების რთული ფუნქციები. ანალოგიურად გამოითვლება მომდევნო რიგის კერძო წარმოებულები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვსახოთ

$$\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \tag{4.4}$$

გამოსახულება სფერულ კოორდინატებში.

ცნობილია, რომ მართკუთხა x, y, z კოორდინატები გამოისახება სფერული r, ϑ, φ კოორდინატებით შემდეგი ფორმულებით.

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\rho = r \sin \vartheta,$$

მაშინ წინა ორი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

ამ შემთხვევაში, (2.8) ტოლობის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \tag{4.5}$$

ახლა ავიღოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა

$$z = r \cos \vartheta, \quad \rho = r \sin \vartheta. \tag{4.6}$$

იმავე (2.8) ტოლობის ძალით, დავწერთ

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}. \tag{4.7}$$

შევკრიბოთ (4.5) და (4.7) ტოლობები, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho}. \tag{4.8}$$

გამოვთვალოთ $\frac{\partial \omega}{\partial \rho}$. ამისათვის გამოვიყენოთ (4.6) ტოლობები, სადაც გვექნება

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=\frac{\partial\omega}{\partial z}\cos\vartheta+\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}=-\frac{\partial\omega}{\partial z}r\sin\vartheta+\frac{\partial\omega}{\partial\rho}r\cos\vartheta.$$

ამ სისტემიდან

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{\partial\omega}{\partial r}\sin\vartheta+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\cos\vartheta. \tag{4.9}$$

ჩავსვათ (4.8) ტოლობაში $\frac{\partial\omega}{\partial\rho}$ წარმოებულის მნიშვნელობა (4.9) და გავითვალისწინოთ, რომ $\rho=r\sin\vartheta$, მივიღებთ

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta},$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ, რომ გამოსახულება

$$\Phi=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \tag{4.10}$$

არ შეიცვლება, თუ ძველ მართკუთხა x, y, z კოორდინატებს გარდავქმნით ახალი მართკუთხა x', y', z' კოორდინატებით.

მართლაც. როგორც ცნობილია გეომეტრიიდან, ძველი და ახალი კოორდინატები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$x'=l_1x+m_1y+n_1z,\quad y'=l_2x+m_2y+n_2z,\quad z'=l_3x+m_3y+n_3z, \tag{4.11}$$

სადაც გარდაქმნის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$l_il_j+m_im_j+n_in_j=\begin{cases}1, & \text{როცა } i=j,\\ 0, & \text{როცა } i\neq j.\end{cases} \tag{4.12}$$

(4.11) ტოლობებიდან გვექნება

$$dx'=l_1dx+m_1dy+n_1dz,\quad dy'=l_2dx+m_2dy+n_2dz,$$
$$dz'=l_3dx+m_3dy+n_3dz.$$

რადგანაც

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\frac{\partial u}{\partial x'}dx'+\frac{\partial u}{\partial x'}dy'+\frac{\partial u}{\partial z'}dz'=$$

$$=(l_1dx+m_1dy+n_1dz)\frac{\partial u}{\partial x'}+(l_2dx+m_2dy+n_2dz)\frac{\partial u}{\partial y'}+$$

$$+(l_3dx+m_3dy+n_3dz)\frac{\partial u}{\partial z'}=\left(l_1\frac{\partial u}{\partial x'}+l_2\frac{\partial u}{\partial y'}+l_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)dx+$$

$$+\left(m_1\frac{\partial u}{\partial x'}+m_2\frac{\partial u}{\partial y'}+m_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)dy+$$

$$+\left(n_1\frac{\partial u}{\partial x'}+n_2\frac{\partial u}{\partial y'}+n_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)dz,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=l_1\frac{\partial u}{\partial x'}+l_2\frac{\partial u}{\partial y'}+l_3\frac{\partial u}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=m_1\frac{\partial u}{\partial x'}+m_2\frac{\partial u}{\partial y'}+m_3\frac{\partial u}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=n_1\frac{\partial u}{\partial x'}+n_2\frac{\partial u}{\partial y'}+n_3\frac{\partial u}{\partial z'}.$$

ავიყვანოთ თითოეული ტოლობა კვადრატში და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მასთან გამოვიყენოთ (4.12) პირობები, მივიღებთ

$$\Phi=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2.$$

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი, როცა დამოუკიდებელ ცვლადებთან ერთად ვახდენთ ფუნქციის გარდაქმნასაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გარდავქმნათ განტოლება

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2, \tag{4.13}$$

თუ

$$x=u,\quad y=\frac{u}{1+uv},\quad z=\frac{u}{1+uw}, \tag{4.14}$$

ვიგულისხმოთ, რომ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო z და w — ფუნქციები u და v ცვლადებისა, ამასთან z არის u და v ცვლადების რთული ფუნქცია.

გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{1}{(1+uv)^2}=\frac{1-u^2\dfrac{\partial w}{\partial u}}{(1+uw)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{-u^2}{(1+uv)^2}=-\frac{u^2}{(1+uw)^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

თუ ამ ტოლობებიდან გამოვთვლით $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ წარმოებულებს, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(1+uw)^2}\left(1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+uv)^2}{(1+uw)^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

ჩავსვათ (4.13) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

ასეთია (4.13) განტოლების სახე დაწერილი ახალ u, v და w ცვლადებში.

მაგალითი 4. მოცემულია ფუნქცია $z=f(x, y)$. გამოვსახოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ახალი u, v და w ცვლადების საშუალებით, თუ გარდაქმნის ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე

$$u=p,\quad v=q,\quad w=px+qy-z, \tag{4.15}$$

სადაც

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

(4.15) ტოლობებით მოცემულ გარდაქმნას ლეჟანდრის გარდაქმნა ეწოდება. იგულისხმება, რომ u და v ახალი დამოუკიდებელი ცვლადებია. გამოვთვალოთ (4.15) ფორმულებიდან მესამე ტოლობის სრული დიფერენციალი, გვექნება

$$dw=udx+xdu+vdy+ydv-dz,$$

მაგრამ

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=udx+vdy, \tag{4.16}$$

ამიტომ

$$dw=xdu+ydv.$$

რადგანაც

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$$

და u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია, ამიტომ უკანასკნელი ორი ტოლობის შედარებით, მივიღებთ

$$\frac{\partial w}{\partial u}=x, \quad \frac{\partial w}{\partial v}=y. \tag{4.17}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ კერძო წარმოებულები, დავწეროთ (4.17) ტოლობების სრული დიფერენციალები:

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}dv, \\ dy&=\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}du+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

რაკი ამ ტოლობებში dx და dy დიფერენციალები ნებისმიერია, ამიტომ დეტერმინანტი

$$\Delta=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2\neq 0. \tag{4.19}$$

მაშასადამე, (4.18) სისტემიდან გამოითვლება du და dv დიფერენციალები:

$$\left.\begin{aligned} du&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dx-\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dy\right), \\ dv&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}dy-\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dx\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

რადგანაც x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ამიტომ (4.16) ტოლობის დიფერენციალი იქნება

$$d^2z=du\,dx+dv\,dy.$$

შევიტანოთ აქ du და dv დიფერენციალების ნაცვლად მათი მნიშვნელობები (4.20) ფორმულებიდან, მივიღებთ

$$d^2z=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dx^2-2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dx\,dy+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}dy^2\right).$$

მეორე მხრივ

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის შედარებით, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.$$

ასეთია ახალი u, v, w ცვლადებით გამოსახული მეორე რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობანი.

კითხვები

1. როგორ ხდება დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნა ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში?

2. როგორ ხდება დამოუკიდებელი ცვლადისა და ფუნქციის ერთდროული გარდაქმნა ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში?

3. ჩაატარეთ დამოუკიდებელ ცვლადთა გარდაქმნა მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში.

4. რაში მდგომარეობს ცვლადთა გარდაქმნა სრული დიფერენციალის მეთოდით.

5. რაში მდგომარეობს ცვლადთა გარდაქმნა ზოგად შემთხვევაში.

6. ჩაწერეთ ლეჟანდრის გარდაქმნა.

სავარჯიშო

შეასრულეთ ცვლადის გარდაქმნა შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებებში:

1. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=0$, თუ $x=e^t$; პასუხი: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{6y}{x^3}$, თუ $t=\ln|x|$, პასუხი: $\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-6y=0$.

3. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+n^2y=0$, თუ $x=\cos t$; პასუხი: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$.

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}\operatorname{th}x+\dfrac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0$, თუ $x=\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$; პასუხი: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(e^x + e^{-x})^2}$, თუ $x = \ln\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.

პასუხი: $t(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{dy}{dt} = ty$.

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\frac{dy}{dx} + \frac{4n^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2} = 0$, თუ $x = \ln\sqrt{\operatorname{tg} t}$;

პასუხი: $\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$.

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$, თუ $t = \operatorname{arc\,tg} x$.

პასუხი: $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

8. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$, თუ $x = \cos t$; პასუხი: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$.

9. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$, თუ $x^2 = 4t$; პასუხი: $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$.

10. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)x\frac{dy}{dx} - y = 0$, თუ $t = \ln x$.

პასუხი: $\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{dy}{dt} - y = 0$.

11. $(1-x)^3\frac{dy}{dx} + 2a(1+x) = 0$, თუ $t = \frac{1+x}{1-x}$;

პასუხი: $\frac{dy}{dt} + at = 0$.

12. $(1+x^2)x\frac{d^2y}{dx^2} - (1 - x^2y\sqrt{1+x^2})\frac{dy}{dx} - x^3y^3 = 0$, თუ $t = \sqrt{1+x^2}$; პასუხი: $\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt} - y = 0$.

13. $(1-x^2)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$, თუ $x = \sin t$; პასუხი: $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1 = 0$.

14. $(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+\frac{2a}{1-x}y=0$, თუ

$$x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1};\quad \text{პ ა ს უ ხ ი:}\ \frac{d^2y}{dt^2}+a(e^{2t}+1)y=0.$$

15. დაამტკიცეთ, რომ

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=t^3\frac{d^2y}{dt^2},\quad \text{თუ}\quad x=\frac{1}{t}.$$

16. გამოთვალეთ

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\ \text{თუ}\ x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi;$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}}{ab}$

17. გარდაქმენით დიფერენციალური განტოლება

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-1=\ln^2 z\left(z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}\right),\ \text{თუ}\ z=e^{\operatorname{tg}x}\ \text{და}\ x$$

ახალი დამოუკიდებელი ცვლადია; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{d^2y}{dx^2}+\operatorname{tg}x\frac{dy}{dx}=1.$

18. გარდაქმენით გამოსახულება

$$\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{x\frac{dy}{dx}-y},\ \text{თუ}\ x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\ \text{და}\ \varphi\ \text{ახალი და-}$$

მოუკიდებელი ცვლადია. პ ა ს უ ხ ი: $\frac{1}{r}\,\frac{r}{d\varphi}.$

19. გარდაქმენით დიფერენციალური განტოლება.

$$(x+y-6)\frac{dy}{dx}+x+y-6=0,\quad \text{თუ}\ x=u+v,\quad y=u-v;$$

პ ა ს უ ხ ი: $u\frac{du}{dv}+3=0.$

20. გარდაქმენით დიფერენციალური განტოლება

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}+y\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(3\frac{dy}{dx}+x^2\right)=0,$$

თუ დამოუკიდებელ ცვლადად მივიჩნევთ y-ს;

პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^3x}{dy^3}+x^2\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2-y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0.$

21. გარდავქმნათ დიფერენციალური განტოლება

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^3=0, \quad \text{თუ } x=e^u, \quad y=e^v;$$

პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^2v}{du^2}-\dfrac{dv}{du}+e^{u+v}=0.$

22. დავამტკიცოთ, რომ თუ $u=x+y$, მაშინ

$$\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[\left(\dfrac{du}{dy}\right)^2-2\dfrac{du}{dy}+2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\dfrac{d^2u}{dy^2}}$$

გარდავქმნათ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

23. $x^4\dfrac{d^2y}{dx^2}+xy\dfrac{dy}{dx}-2y^2=0,$ თუ $x=e^t,$ $y=ue^{2t},$ სადაც $u=u(t)$; პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\dfrac{du}{dt}+2u=0.$

24. $(1+x^2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=y,$ თუ $x=\operatorname{tg}u,$ $y=\dfrac{v}{\cos v},$ სადაც $v=v(u)$;

პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^2v}{du^2}=0.$

25. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0,$ თუ $x=th u,$ $y=\dfrac{v}{ch\, u}$; სადაც $v=u(u)$; პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^2v}{du^2}=0.$

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+y)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0,$ თუ $x=u+v,$ $y=v-u,$ სადაც $v=v(u)$, პ ა ს უ ხ ი: $\dfrac{d^2v}{du^2}+8u\left(\dfrac{dv}{du}\right)^3=0.$

27. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0,$ თუ $x=\dfrac{1}{u},$ $y=\dfrac{v}{u}$, სადაც $v=v(u)$; პ ა ს უ ხ ი: $u^5\dfrac{d^3v}{du^3}+(3u^4+1)\dfrac{d^2v}{du^2}+\dfrac{dv}{du}=0.$

28. გარდაქმენით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),\quad \frac{dy}{dt}=ky(x^2+y^2)-x,\ \text{თუ}\ x=r\cos\varphi,$$

$y=r\sin\varphi$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{dr}{dt}=kr^3,\ \frac{d\varphi}{dt}=-1.$

29. დაამტკიცეთ, რომ თუ $z=f(x,y)$, $x=e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}$,

$y=e^{\alpha+\beta}-e^{\alpha-\beta}$, მაშინ $4\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=e^{-2\alpha}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right).$

30. გარდაქმენით დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

თუ $x^2+y^2=r^2$ და $z=f(r)$; პ ა ს უ ხ ი: $\frac{d^2 z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}=0.$

31. გარდაქმენით გამოსახულება

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x},$$

თუ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$

ჩავთვალოთ u და v ახალ დამოუკიდებელ ცვლადებად და გარდაქმენით დიფერენციალური განტოლებები:

32. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z,$

პასუხი: $(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z.$

33. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-m^2 z=0$, თუ $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$;

პასუხი: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0.$

34. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, თუ $u=\ln x$, $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$;

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v.$

35. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, თუ $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,

$v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; პასუხი: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

36. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, თუ $u=\dfrac{y}{x}$,

$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, პასუხი: $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}$.

37. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{z}$, თუ $u=2x-z^2$, $v=\dfrac{y}{z}$;

პასუხი: $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{z}{v}\cdot\dfrac{z^2+u}{z^2-u}$.

38. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, თუ $u=x+2y+2$,

$v=x-y+1$, პასუხი: $3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.

39. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, თუ

$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$;

პასუხი: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

40. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

პასუხი: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

41. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $u=x+y$,

$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; პასუხი: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{2}{u(4-uv)}\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

42. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $u=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$,

$v=x$; პასუხი: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\dfrac{2u}{u^2+v^2}\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

ვიგულისხმოთ, რომ u და v ახალი დამოუკიდებელი ცვლადებია და $w=w(u,v)$ ახალი ფუნქციაა. გარდავქმნათ შემდეგი განტოლებები:

43. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{2}{x}=0$, თუ $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$;

პასუხი: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$

44. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}-z=0$, თუ $u=\dfrac{1}{2}(x+y)$, $v=\dfrac{1}{2}(x-y)$, $w=ze^y$; პასუხი: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w.$

45. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $u=x$, $v=x+y$, $w=x+y+z$; პასუხი: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\dfrac{v}{u}-1\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

46. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, თუ $x=\sin u$, $y=\sin v$, $z=e^w$. პასუხი: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}+$
$+\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$

47. დავამტკიცოთ, რომ განტოლება

$$q^2r-2pqs+p^2t=0.$$

ლეჟანდრის გარდაქმნით

$$u=px+qy-z$$

მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$q^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}+2pq\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+p^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=0,$$

სადაც

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

48. დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნით განტოლება

$$r-t=\frac{4x}{p+q}(rt-s^2)$$

მიიყვანება შემდეგ განტოლებამდე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{4}{p+q}\frac{\partial u}{\partial p}.$$

49. დაამტკიცეთ, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნით განტოლება

$$px+qy=z+xy$$

მიიყვანება შემდეგ განტოლებამდე

$$u=\frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial u}{\partial q}.$$

50. დაამტკიცეთ, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნით განტოლება

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=a^2$$

მიიყვანება შემდეგ განტოლებაზე:

$$(1+p^2+q^2)^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\right)^2\right]=\frac{1}{a^2}.$$

თავი IX

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით შეისწავლება მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. ქვემოთ განხილულია ისეთი ფუნქციის ექსტრემუმის ამოცანა, რომელიც დამოკიდებულია სასრული რიცხვის არგუმენტზე.

§ 1. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ, მოცემულია ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ორგანზომილებიანი სივრცის გარკვეულ A არეში. განვიხილოთ A არის (x_0, y_0) წერტილი.

ვიტყვით, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) *წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი*, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $\omega\subset A$, რომ ამ მიდამოს ნებისმიერი (x,y) წერტილისათვის

$$f(x,y)\geqslant f(x_0, y_0).$$

თუკი არსებობს (x_0, y_0) წერტილის ისეთი მიდამო $\omega\subset A$, რომ ყოველი $(x,y)\in\omega$ წერტილისათვის, გარდა თვით (x_0, y_0) წერტილისა, ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x,y)>f(x_0, y_0),$$

მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მკაცრი მინიმუმი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მინიმუმს *ლოკალური არამკაცრი მინიმუმი* ეწოდება.

იტყვიან, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) *წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი*, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $\omega\subset A$, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x,y) წერტილისათვის

$$f(x,y)\leqslant f(x_0, y_0).$$

თუკი არსებობს A არეში მოთავსებული (x_0,y_0) წერტილის ისეთი

მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x, y) წერტილისათვის, გარდა თვით (x_0, y_0) წერტილისა ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x,y)<f(x_0, y_0),$$

მაშინ იტყვიან, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა ქ ვ ს ლ ო კ ა ლ უ რ ი მ კ ა ც რ ი მ ა ქ ს ი მ უ მ ი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მაქსიმუმს ლ ო კ ა ლ უ რ ი ა რ ა მ კ ა ც რ ი მ ა ქ ს ი მ უ მ ი ე წ ო დ ე ბ ა.

თუ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი ან ლოკალური მაქსიმუმი, მაშინ იტყვიან, რომ (x_0, y_0) წ ე რ ტ ი ლ შ ი $f(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა ქ ვ ს ლ ო კ ა ლ უ რ ი ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ, რომ

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-1$$

ფუნქციას $M(1,2)$ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როცა $x\neq 1$, $y\neq 2$, მაშინ $(x-1)^2+(y-2)^2>0$, გარდა ამისა, $f(1,2)=-1$ და, მაშასადამე, $(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1$. ცხადია, არსებობს $M(1,2)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის ყოველ (x,y) წერტილში შესრულებულია უტოლობა $f(x,y)>f(1,2)$. ამრიგად, $M(1,2)$ წერტილზე მოცემულ ფუნქციას აქვს ლოკალური მკაცრი მინიმუმი და ეს მინიმუმია -1.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ, რომ

$$f(x,y)=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)$$

ფუნქციას $(0,0)$ წერტილზე აქვს ლოკალური მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმი უდრის $\frac{1}{2}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევნიშნოთ, რომ $f(0,0)=\frac{1}{2}$. მოცემული ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო xOy სიბრტყეს გადაკვეთს $x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$ წრეწირზე. ავიღოთ ამ წრეწირის შიგნით, $(0,0)$ წერტილისაგან განსხვავებული, ნებისმიერი (x,y) წერტილი. ცხადია, $0<x^2+y^2<\frac{\pi}{6}$ და $\sin(x^2+y^2)>0$. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x,y)=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)<\frac{1}{2},$$

საიდანაც $f(x,y)<f(0,0)$

ამრიგად, (0,0) წერტილზე მოცემულ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმი უდრის $\frac{1}{2}$.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. თუ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი (x_0,y_0) წერტილში და ამ წერტილში არსებობს $f(x,y)$ ფუნქციის სასრული კერძო წარმოებულები $f'_x(x_0,y_0)$ და $f'_y(x_0,y_0)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი (x_0,y_0) წერტილში. მაშინ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $]x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta,\ y_0+\delta[$, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x,y) წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0),$$

კერძოდ, მართებულია თანაფარდობა

$$f(x,y_0)\leqslant f(x_0,y_0), \tag{1.1}$$

როცა $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

რადგანაც $f(x,y_0)$ მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციაა, ამიტომ (1.1) თანაფარდობის ძალით, მას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი. მაშასადამე,

$$f'_x(x_0,y_0)=0.$$

ამგვარადვე მტკიცდება, რომ

$$f'_y(x_0,y_0)=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს სასრული კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$, მაშინ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი იმ (x,y) წერტილებში, რომელთათვის მართებულია ტოლობები:

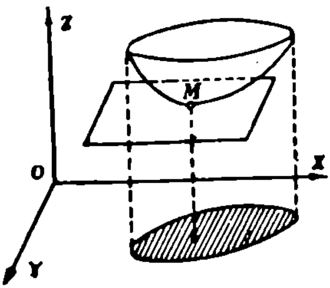
$$f'_x(x,y)=0,\ f'_y(x,y)=0. \tag{1.2}$$

ამრიგად, $f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებს შორის, რომლებზედაც ნულად იქცევა მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები.

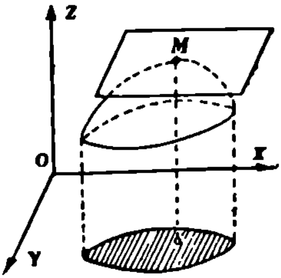
(x,y) წერტილს, რომელიც აკმაყოფილებს (1.2) განტოლებათა სისტემას, ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის *სტაციონარული წერტილი*.

მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ სტაციონარულ წერტილთა შორის.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას ჰქონდეს პირველი რიგის სასრული კერძო წარმოებულები მთელ xOy სიბრტყეზე, გარდა ზოგიერთი წერტილებისა, რომლებზედაც პირველი რიგის კერძო წარმოებულები უსასრულოდ დიდი ხდება ანდა არ არსებობს. მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ სტაციონარულ და იმ წერტილთა შორის, რომლებზედაც $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები უსასრულოდ დიდი ხდება ანდა, სადაც ისინი არ არსებობს.



ნახ. 12.



ნახ. 13.

თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში და ამ წერტილში ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $z=f(x,y)$ ზედაპირის მხები სიბრტყე $M[x_0,y_0, f(x_0,y_0)]$ წერტილზე xOy სიბრტყის პარალელურია.

მაშასადამე, თუ (x_0,y_0) წერტილი $f(x,y)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია, მაშინ არსებობს (x_0,y_0) წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის შესაბამისი ნაწილი $z=f(x,y)$ ზედაპირისა მოთავსებული იქნება ამ ზედაპირის $M[x_0,y_0, f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის ზემოთ (ნახ. 12), ხოლო, თუ (x_0,y_0) მაქსიმუმის წერტილია, მაშინ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის შესაბამისი ნაწილი

$z=f(x,y)$ ზედაპირისა მოთავსებული იქნება ამ ზედაპირის $M[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის ქვემოთ (ნახ. 13).

თეორემა 2. თუ $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარულ (x_0,y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ დიფერენცირებადია და, ამის გარდა, ადგილი აქვს უტოლობას

$$AC-B^2>0, \tag{1.3}$$

სადაც $A=f''_{x^2}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{y^2}(x_0,y_0)$, მაშინ (x_0,y_0) წერტილში $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი, როცა $A>0$, ხოლო მაქსიმუმი, როცა $A<0$; თუკი

$$AC-B^2<0, \tag{1.4}$$

მაშინ (x_0,y_0) წერტილში $f(x,y)$ ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი. იმ შემთხვევაში, როცა

$$AC-B^2=0, \tag{1.5}$$

გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

დამტკიცება. ფუნქციის სასრული ნაზრდის ფორმულის თანახმად

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+$$
$$+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k). \tag{1.6}$$

რადგანაც $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ კერძო წარმოებულები (x_0,y_0) წერტილში დიფერენცირებადია და

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0,$$

ამიტომ

$$f'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)=\theta(Ah+Bk+\varepsilon'\rho),$$

$$f'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)=\theta(Bh+Ck+\varepsilon''\rho),$$

სადაც $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, ხოლო ε' და ε'' უსასრულოდ მცირეებია ρ-სთან ერთად. მაშასადამე, (1.6) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)=\theta(Ah^2+2Bhk+Ck^2+\varepsilon), \tag{1.7}$$

სადაც $\varepsilon=(\varepsilon'h+\varepsilon''k)\rho$.

ახლა ვიპოვოთ ისეთი α კუთხე, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობებს

$$h=\rho\cos\alpha,\ k=\rho\sin\alpha,$$

მაშინ (1.7) ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)=\theta\rho^2(A\cos^2\alpha+$$
$$+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha+\eta),$$

სადაც $\eta=\varepsilon'\sin\alpha+\varepsilon''\cos\alpha$. აქედან ჩანს, რომ η უსასრულოდ მცირეა h და k-სთან ერთად.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Phi(\alpha)=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$

გვექნება

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)=\theta\rho^2[\Phi(\alpha)+\eta]. \tag{1.8}$$

1. განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა ადგილი აქვს (1.3) უტოლობას. ამ შემთხვევაში $AC>0$; ასე რომ, $A\neq 0$ და, მაშასადამე, C რიცხვიც განსხვავდება ნულისაგან, ცხადია,

$$\Phi(\alpha)=\frac{(A\cos\alpha+B\sin\alpha)^2+(AC-B^2)\sin^2\alpha}{A}. \tag{1.9}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მიღებული წილადის მრიცხველი დადებითია α კუთხის ყოველი მნიშვნელობისათვის და ამიტომ $\Phi(\alpha)$ ნიშანს ინარჩუნებს. მას აქვს A რიცხვის ნიშანი. ვთქვათ, $A>0$, მაშინ $\Phi(\alpha)$ ფუნქცია იქნება დადებითი და, რადგანაც იგი უწყვეტია, ამიტომ მას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა $[0,\ 2\pi]$ სეგმენტზე. აღვნიშნოთ იგი m-ით. ცხადია, $m>0$ და, მაშასადამე, (1.8) ტოლობის თანახმად,

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)\geqslant\theta\rho^2(m+\eta).$$

ავიღოთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$m+\eta>0,\ \text{როცა}\ |h|<\delta,\ |k|<\delta.$$

მაშინ

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)>0,\ \text{როცა}\ |h|<\delta,\ |k|<\delta.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

თუკი $A<0$, მაშინ (1.9) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi(\alpha)$ ფუნქცია უარყოფითია α კუთხის ყველა მნიშვნელობისათვის. აღვნიშნოთ M-ით ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[0,\ 2\pi]$ სეგმენტზე. ცხადია, $M<0$, და, მაშასადამე, (1.8) ტოლობის ძალით

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)\leqslant\theta\rho^2(M+\delta).$$

რაკი η უსასრულოდ მცირეა h და k-სთან ერთად, ამიტომ

მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$M+\eta<0, \text{ როცა } |h|<\delta, \ |k|<\delta.$$

მაშასადამე,

$$f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0, y_0)<0, \text{ როცა } |h|<\delta, \ |k|<\delta.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი.

2. ახლა ვთქვათ, ადგილი აქვს (1.4) უტოლობას. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $A\neq 0$. რადგანაც $\Phi(0)=A$, ამიტომ ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობისათვის $f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0,y_0)$ სხვაობას ექნება A-ს ნიშანი, როცა $\alpha=0$. თუკი α კუთხეს ისე შევარჩევთ, რომ

$$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{B}{A},$$

მაშინ (1.9) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\Phi(\alpha)=\frac{(AC-B^2)\sin^2\alpha}{A}.$$

აქ $\sin\alpha\neq 0$, ვინაიდან $\operatorname{ctg}\alpha\neq\infty$. ამ შემთხვევაში ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობისათვის $f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0,y_0)$ სხვაობას ექნება A რიცხვის საწინააღმდეგო ნიშანი.

ამრიგად, არ არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0,y_0)$ სხვაობამ შეინარჩუნოს ერთი და იგივე ნიშანი ყოველი α-სათვის, როცა $|h|<\delta$, $|k|<\delta$. მაშასადამე, (x_0,y_0) წერტილში $f(x,y)$ ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.

ახლა დავუშვათ, რომ $A=0$. ამ შემთხვევაში

$$\Phi(\alpha)=(2B\cos\alpha+C\sin\alpha)\sin\alpha.$$

რაკი $B\neq 0$, ამიტომ α კუთხის ნულთან ახლობელი მნიშვნელობისათვის $2B\cos\alpha+C\sin\alpha$ გამოსახულებას ექნება B-ს ნიშანი და, მაშასადამე, $\Phi(\alpha)$ ნიშანს არ ინარჩუნებს α-ს ნულთან ახლო მნიშვნელობებისათვის. რაკი

$$f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0, y_0)=\theta\rho^2(2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha+\eta)$$

და η უსასრულოდ მცირეა ρ-სთან ერთად, ამიტომ არ არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ $f(x_0+h, \ y_0+k)-f(x_0,y_0)$ სხვაობამ ნიშანი შეინარ-

ჩუნოს α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, როცა $|h|<\delta$, $|k|<\delta$. მაშასადამე, (x_0,y_0) წერტილში $f(x,y)$ ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

3. დასასრულ, ვთქვათ, ადგილი აქვს (1,5) ტოლობას, მაშინ გვექნება საეჭვო შემთხვევა, ე. ი. უშუალოდ ვერ ვიტყვით, აქვს თუ არა $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში ექსტრემუმი. საკითხის ბოლომდე გამოკვლევისათვის საჭიროა ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულების განხილვა და რთული გამოთვლების ჩატარება. ამიტომ ამ საეჭვო შემთხვევას განხილვის გარეშე დავტოვებთ.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. მოცემულ R-რადიუსიან წრეში ჩახაზულ ყველა სამკუთხედს შორის ვიპოვოთ ისეთი სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

ამოხსნა, ალვნიშნოთ x, y და z-ით ცენტრალური კუთხეები, რომლებიც ეყრდნობა სამკუთხედის გვერდებს. ცხადია,

$$z=2\pi-x-y,$$

ტრიგონომეტრიის ერთ-ერთი ცნობილი ფორმულის ძალით

$$\text{ფართი}\ \ (\Delta AOB)=\frac{1}{2}R^2\sin x,$$

$$\text{ფართი}\ \ (\Delta BOC)=\frac{1}{2}R^2\sin y,$$

$$\text{ფართი}\ \ (\Delta COA)=\frac{1}{2}R^2\sin z=-\frac{1}{2}R^2\sin(x+y).$$

თუ ABC სამკუთხედის ფართობს S-ით ალვნიშნავთ, გვექნება

$$S=\frac{1}{2}R^2f(x,y),$$

სადაც

$$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y).$$

საძიებელია S-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ცხადია, S მიიღებს მაქსიმუმს იმ (x,y) წერტილში, რომელზედაც $f(x,y)$ ფუნქცია მიიღებს მაქსიმუმს. ამიტომ ვეძებოთ ის (x,y) წერტილი, რომელშიც $f(x,y)$ ფუნქციას ექნება მაქსიმუმი.

ვიპოვოთ $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$. გვაქვს:

$$f'_x(x,y)=\cos x-\cos(x+y),\ \ f'_y(x,y)=\cos y-\cos(x+y).$$

სტაციონარული წერტილის მოსაძებნად საჭიროა ეს კერძო წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს

$$\cos x-\cos(x+y)=0,\ \cos y-\cos(x+y)=0. \tag{1.10}$$

(1.10) განტოლებებიდან გვაქვს

$$\cos x=\cos y=\cos(x+y),$$

ანუ

$$\cos x-\cos y=0,\ \cos x-\cos(x+y)=0. \tag{1.11}$$

მაგრამ

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{y+x}{2}=0,$$

საიდანაც

$$\frac{x+y}{2}=k\pi \quad \text{ან} \quad \frac{y-x}{2}=k\pi.$$

აქედან

$$x+y=2k\pi \quad \text{და} \quad y-x=2k\pi.$$

პირველი განტოლება ამოცანის პირობის მიხედვით გამოუსადეგარია, რადგანაც $k=0$ მნიშვნელობისათვის გვექნება $x+y=0$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, გვრჩება განტოლება

$$y-x=2\pi k.$$

თუ ვიგულისხმებთ $k=0$, მაშინ

$$x=y. \tag{1.12}$$

ახლა (1.11) სისტემის მეორე განტოლებაში y-ის ნაცვლად ჩავსვათ x, გვექნება

$$\cos x-\cos 2x=0$$

ანუ

$$2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=0.$$

აქედან

$$\sin\frac{3x}{2}=0 \quad \text{ან} \quad \sin\frac{x}{2}=0,$$

პირველი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{3x}{2}=k\pi, \tag{1.13}$$

ხოლო მეორედან $\frac{x}{2}=k\pi$. ცხადია, x-ის უკანასკნელი მნიშვნელობა არ გამოდგება და, მაშასადამე, (1.13) ტოლობიდან გვაქვს $x=\frac{2k\pi}{3}$.

თუ დავუშვებთ $k=1$, გვექნება $x=\frac{2\pi}{3}$. შემდეგ, (1,12) განტოლება გვაძლევს $y=\frac{2\pi}{3}$. მაშასადამე, $z=\frac{2\pi}{3}$. ამრიგად საძიებელი სამკუთხედი ტოლგვერდა სამკუთხედია.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ

$$f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$$

ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

ამოხსნა. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$:

$$f'_x(x,y)=3x^2-9y,\ f'_y(x,y)=3y^2-9x.$$

ამ წარმოებულებს თუ გავუტოლებთ ნულს და 3-ზე შევკვეცავთ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$x^2-3y=0,\ y^2-3x=0. \tag{1.14}$$

მიღებული განტოლებები სიმეტრიულია x და y-ის მიმართ, ამიტომ $y=x$ და, მაშასადამე, (1.14) სისტემის პირველი განტოლება გვაძლევს:

$$x^2-3x=0,$$

აქედან $x_1=0$, $x_2=3$.

შემდეგ, რაკი $y=x$, ამიტომ $y_1=0$, $y_2=3$. მაშასადამე, სტაციონარული წერტილებია (0;0) და (3;3). ახლა საჭიროა გამოკვლევა, თუ რა ხასიათისაა ეს წერტილები. ამისათვის აღნიშნულ წერტილებში გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. გვაქვს

$$f''_{x^2}(x,y)=6x,\ f''_{xy}(x,y)=-9,\ f''_{y^2}(x,y)=6y,$$

აქედან

$$A=f''_{x^2}(0,0)=0,\ B=f''_{xy}(0,0)=-9,\ C=f''_{y^2}(0,0)=0.$$

მაშასადამე,

$$AC-B^2=-81<0.$$

ამიტომ მოცემულ ფუნქციას (0;0) წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

შემდეგ

$$A_1=f''_{x^2}(3,3)=18,\ B_1=f''_{xy}(3,3)=-9,\ C_1=f''_{y^2}(3,3)=18.$$

მაშასადამე,

$$A_1C_1-B_1^2=243>0$$

და ამიტომაც (3;3) წერტილში $f(x,y)$ ფუნქცია ღებულობს მინიმუმს, ვინაიდან $A_1>0$.

ამოცანა 8. ვიპოვოთ

$$f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$$

ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$f'_x(x,y)=2x-2y^2,\ f'_y(x,y)=-4xy+4y^3-5y^4.$$

ამ წარმოებულებს თუ ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$2x-2y^2=0;\quad -4xy+4y^3-5y^4=0.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ამ განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $x=0$, $y=0$.

მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილია (0;0). გამოვარკვიოთ თუ რა ხასიათისაა ეს წერტილი. ამისათვის გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები (0;0) წერტილში. გვაქვს

$$f''_{x^2}(x,y)=2,\ f''_{xy}(x,y)=-4y,\ f''_{y^2}=-4x+12y^2-20y^3,$$

აქედან

$$A=f''_{x^2}(0,0)=2,\ B=f''_{xy}(0,0)=0,\ C=f''_{y^2}(0,0)=0.$$

მაშასადამე,

$$AC-B^2=0.$$

ჩვენ მივიღეთ საეჭვო შემთხვევა, მაგრამ შეგვიძლია გამოვარკვიოთ, თუ რა ხასიათისაა (0;0) წერტილი. ამისათვის $f(x,y)$ ფუნქცია ასე წარმოვადგინოთ:

$$f(x,y)=(x-y^2)^2-y^5.$$

ცხადია, (0,0) წერტილის ნებისმიერ მიდამოში $f(x,y)$ ფუნქცია არ ინარჩუნებს ნიშანს. ამის გარდა, $f(0,0)=0$. მაშასადამე, (0,0) წერტილში აღებულ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი.

§ 2. არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ, $y=y(x)$ არის x ცვლადის არაცხადი ფუნქცია, განსაზღვრული

$$F(x,y)=0 \tag{2.1}$$

განტოლებით.

ვიგულისხმოთ, რომ $F(x,y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$.

როგორც ვიცით $y=y(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი იმ x წერტილებში, სადაც $y'(x)=0$ ანდა იმ x წერტილებში, სადაც არ არსებობს $y'(x)$.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $F'_y(x,y)\neq 0$. მაშინ, როგორც ცნობილია, არსებობს $y'(x)$ და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

აქედან ჩანს, რომ $y'(x)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $F'_x(x,y)=0$. ამ პირობის შესრულება აუცილებელია იმისათვის, რომ არაცხად ფუნქციას ჰქონდეს ექსტრემუმი. მაშასადამე, x-ის იმ მნიშვნელობათა მოსაძებნად, სადაც $y=y(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი, საჭიროა შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა:

$$F(x,y)=0,\quad F'_x(x,y)=0. \tag{2.2}$$

ვთქვათ, (x_0,y_0) არის (2.2) განტოლებათა სისტემის რაიმე ამონახსნი. რადგანაც $y'(x_0)=0$, ამიტომ

$$y''(x_0)=-\frac{F''_{x^2}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $F(x,y)$ ფუნქციას აქვს კერძო წარმოებულები სასურველ რიგამდე.

$y=y(x)$ ფუნქციას ექნება x_0 წერტილში მაქსიმუმი, თუ $\dfrac{F''_{x^2}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}>0$, ხოლო მინიმუმი, თუ

$$\frac{F''_{x^2}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}<0.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $y''(x_0)=0$, საჭიროა უფრო მაღალი რიგის წარმოებულების განხილვა.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა (x,y) წერტილში, რომელიც (2.1) განტოლებას აკმაყოფილებს, ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'_y(x,y)=0.$$

ამ შემთხვევაში შეიძლება არ არსებობდეს $y'(x)$. ამიტომ, $y=y(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი იმ წერტილებშიც, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$F(x,y)=0,\ F'_y(x,y)=0. \tag{2.3}$$

ამოცანა 4. ვთქვათ, არაცხადი ფუნქცია განსაზღვრულია განტოლებით

$$F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0,$$

სადაც $a>0$. ვიპოვოთ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში (2.2) განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$x^3+y^3-3axy=0,\ 3x^2-3ay=0.$$

თუ ამ განტოლებათა სისტემას ამოვხსნით, მივიღებთ

$$x_1=0,\ y_1=0;\ x_2=a\sqrt[3]{2},\quad y_2=a\sqrt[3]{4}.$$

ცხადია,

$$F'_y(0,0)=0.$$

მაშასადამე, $y'(0)$ წარმოებულის არსებობის შესახებ ვერაფერს ვიტყვით. განვიხილოთ ახლა (x_2,y_2) წერტილი. გვაქვს

$$F'_y(x_2,y_2)=3a^2\sqrt[3]{2}>0,\ F'_x(x_2,y_2)=0.$$

მაშასადამე, არსებობს $y'(x)$ წარმოებული x_2 წერტილში და იგი ნულის ტოლია. შემდეგ

$$F''_{x^2}(x_2,y_2)=6a\sqrt[3]{2}>0.$$

მაშასადამე,

$$y''(x_2)=-\frac{F''_{x^2}(x_2,y_2)}{F'_y(x_2,y_2)}=-\frac{2}{a}<0.$$

ამრიგად, არაცხად $y=y(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი $x=a\sqrt[3]{2}$ წერტილში.

§ 3. n ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი სივრცის $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილზე დამოკიდებული $f(M)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე (დახურულ ან ღია) Ω არეში. ვიტყვით, რომ $M_0 \in \Omega$ წერტილში $f(M)$ ფუნქციას აქვს აბსოლუტური მინიმუმი (მაქსიმუმი), თუ ნებისმიერი $M \in \Omega$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$f(M_0) \leqslant f(M), \quad [f(M_0) \geqslant f(M)]. \tag{3.1}$$

თუ, ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $M = M_0$, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს მკაცრი აბსოლუტური მინიმუმი (მაქსიმუმი).

ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი (მაქსიმუმი) განისაზღვრება ისევე, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქციას რაიმე შიგა წერტილში აქვს აბსოლუტური მინიმუმი (მაქსიმუმი), მაშინ იმავე წერტილში ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი (მაქსიმუმი).

ვიტყვით, რომ ფუნქციას M_0 წერტილში აქვს ექსტრემუმი, თუ ამ წერტილში $f(M)$ ფუნქციას აქვს აბსოლუტური მინიმუმი (ლოკალური მინიმუმი) ან აბსოლუტური მაქსიმუმი (ლოკალური მაქსიმუმი). M_0 წერტილს უწოდებენ ექსტრემალურ წერტილს.

n ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციისათვის მართებულია ვაიერშტრასის შემდეგი თეორემები:

თეორემა 8. უწყვეტი ფუნქცია $f(M)$, განსაზღვრული n-განზომილებიანი სივრცის შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ $\omega \subset R^n$ არეში, შემოსაზღვრულია ზევიდან და ქვევიდან.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ω სიმრავლეზე $f(M)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული ზევიდან. მაშინ, არსებობს წერტილთა ისეთი მიმდევრობა $\{M_k\} \subset \omega$, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) = +\infty$. რადგან ω შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $\{M_k\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{M_{k_s}\}$, რომლის ზღვარითი წერტილი აღვნიშნოთ M^*-ით. ცხადია, $M^* \in \omega$ ვთქვათ, $f(M^*) = \mu$. შევნიშნოთ, რომ M^* წერტილის ნებისმიერ მიდამოში მოიძებნება ისეთი M_{k_s} წერტილები, რომლებზეც მართებული იქნება უტოლობა

$$f(M_{k_s})>\mu+1,$$

ანუ

$$f(M_{k_s})-f(M^*)>1.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება მოცემული ფუნქციის უწყვეტობის პირობას. მსგავსად დავამტკიცებთ $f(M)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობას ქვევიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ $\omega\subset R^n$ არეში განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია $f(M)$ მიაღწევს თავის ზედა და ქვედა საზღვრებს.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ f ფუნქციის ზედა საზღვარი ω არეში c-თი. წინა თეორემის ძალით c არსებობს. განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა არსებობს ისეთი $M_0\in\omega$ წერტილი, რომელშიც $f(M_0)=c$. ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. ახლა დავუშვათ, რომ არ არსებობს ასეთი თვისების M_0 წერტილი. მაშინ, ფუნქციის ზედა საზღვრის განმარტების თანახმად, არსებობს ω არეში წერტილთა ისეთი $(M_k)_{k>1}$ მიმდევრობა, რომ $f(M_k)>c-\varepsilon_k$, სადაც $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$.

გამოვყოთ $(M_k)_{k>1}$ მიმდევრობიდან კრებადი ქვემიმდევრობა $(M_{k_s})_{s\geqslant 1}$, რომლის ზღვარითი წერტილი აღვნიშნოთ M^*-ით. ω სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო $M^*\in\omega$. დაშვების ძალით $f(M^*)\neq c$ და, რადგან შეუძლებელია $f(M^*)>c$, ამიტომ $f(M^*)<c$. დავუშვათ, რომ

$$f(M^*)=c-h,\ \ (h>0). \tag{3.2}$$

არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n_0, რომ

$$c-f(M_{k_s})<\frac{h}{2},$$

როცა $k_s>n_0$. თუ უკანასკნელ უტოლობაში ჩავსვამთ c რიცხვის მნიშვნელობას (3.2) ტოლობიდან, გვექნება

$$f(M_{k_s})-f(M^*)>\frac{h}{2},\ \text{როცა}\ k_s>n_0. \tag{3.3}$$

ეს უტოლობა ეწინააღმდეგება f ფუნქციის უწყვეტობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ უწყვეტი $f(M)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ R^n სივრცეში და

$$\lim_{r \to 0} f(M) = +\infty,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $M^* \in R^n$ წერტილი, რომელშიც f ფუნქციას ექნება აბსოლუტური მინიმუმი, სადაც $r=r(0,M)$ მანძილია 0 სათავიდან M წერტილამდე.

დამტკიცება. ავიღოთ იმდენად დიდი N რიცხვი, რომ ყოველ M წერტილში, რომელშიც $r \geqslant N$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$f(0) < f(M). \tag{3.4}$$

ახლა ავიღოთ შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი $r(0,M)$ სფერო. წინა თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი M^* წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ამ სფეროს ან მის ზედაპირს და

$$f(M^*) \leqslant f(M), \tag{3.5}$$

სადაც M სფეროს ნებისმიერი წერტილია. მაშასადამე, არსებობს სფეროს წერტილი M^*, რომელშიც f ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $f(M)$ ფუნქციას M^* წერტილში აქვს აბსოლუტური მინიმუმი. მართლაც, თანახმად (3.5) უტოლობისა, გვაქვს

$$f(M^*) \leqslant f(0),$$

საიდანაც (3.4) უტოლობის ძალით

$$f(M^*) \leqslant f(0) < f(M).$$

ამრიგად, $r(0,M) \leqslant N$ სფეროს გარეთ მოთავსებულ ნებისმიერ M წერტილში

$$f(M^*) < f(M).$$

მაშასადამე, (3.5) უტოლობას ადგილი აქვს R^n სივრცის ნებისმიერი M წერტილისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა

ახლა განვიხილოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილთა ფაქტიური მოძებნის საკითხი. ვთქვათ, $f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ω არეში. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 6. თუ ω არეში განსაზღვრულ დიფერენცირებად $f(M)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $M^* \in \omega$

წ ე რ ტ ი ლ შ ი, მ ა შ ი ნ M^* ა რ ი ს ა მ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ს ტ ა ც ი ო ნ ა- რ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან M^* არის $f(M)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის ან ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, ამიტომ ამ წერტილის საკმარისად მცირე მიდამოში

$$f(M)-f(M^*)$$

სხვაობას აქვს მუდმივი ნიშანი. ვიგულისხმოთ, რომ M^* წერტილი ω არის შიგა წერტილია. M^* სტაციონარული წერტილი რომ არ იყოს, მაშინ M^* წერტილის ნებისმიერად მცირე მიდამოში იარსებებდა წერტილები, რომლებშიც ეს სხვაობა დადებითია და, რომლებშიც ეს სხვაობა უარყოფითია,

სხვანაირად ეს თეორემა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: თ უ n ც ვ ლ ა დ ზ ე დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს $M^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა ქ ვ ს მ ი ნ ი მ უ მ ი ა ნ მ ა ქ ს ი მ უ მ ი, მ ა შ ი ნ ა მ წ ე რ ტ ი ლ შ ი

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0, \quad i=1,2,\ldots, n. \tag{4.1}$$

მართლაც, თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციას $M^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი (ლოკალური მაქსიმუმი), მაშინ

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

ფუნქციას მით უმეტეს ექნება ლოკალური მინიმუმი (ლოკალური მაქსიმუმი) $x_i=x_i^*$ წერტილში, სადაც $i=1, 2, \ldots, n$. თუ გამოვიყენებთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის ცნობილ აუცილებელ პირობას მივიღებთ (4.1) განტოლებებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. n-განზომილებიან სივრცეში მოცემულია ორი წრფე, ვიპოვოთ მათ შორის r მანძილი.

მოცემული წრფეების განტოლებები ჩავწეროთ პარამეტრული სახით:

$$x_i=a_i+t\cos\alpha_i, \quad (i=1,\ 2, \ldots, n), \tag{4.2}$$

$$x_i=b_i+\tau\cos\beta_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4.3}$$

სადაც $\cos\alpha_i$ და $\cos\beta_i$ არის, შესაბამისად, მოცემული წრფეების მიმართულების კოსინუსები და, მაშასადამე, აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1, \quad \sum_{i=1}^{n}\cos^2\beta_i=1. \tag{4.4}$$

მანძილი ორ მოცემულ წრფეს შორის ეწოდება

$$r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\tau\cos\beta_i-t\cos\alpha_i+b_i-a_i)^2}$$

ფუნქციის მინიმუმს.

ამრიგად, ამოცანა მიიყვანება t და τ დამოუკიდებელი ცვლადების ისეთი მნიშვნელობების მოძებნაზე, რომლებისთვისაც

$$r^2=\sum_{i=1}^{n}(\tau\cos\beta_i-t\cos\alpha_i+b_i-a_i)^2 \tag{4.5}$$

ფუნქციას აქვს აბსოლუტური მინიმუმი.

თუ მოცემული წრფეები პარალელურია, მაშინ $\cos\alpha_i=\cos\beta_i$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ და (4.5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$r^2=\sum_{i=1}^{n}(v\cos\alpha_i+b_i-a_i)^2,$$

სადაც $v=\tau-t$. ამ შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ, ამოცანა დაიყვანება ერთი დამოუკიდებელი v ცვლადის ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის მოძებნაზე.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როცა წრფეები არ არის პარალელური. შევადგინოთ (4.1) განტოლებები. ამისათვის გამოვთვალოთ (4.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის კერძო წარმოებულები t და τ ცვლადებით და ეს წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს, გვექნება

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i(\tau\cos\beta_i-t\cos\alpha_i+b_i-a_i)=0,\\&\sum_{i=1}^{n}\cos\beta_i(\tau\cos\beta_i-t\cos\alpha_i+b_i-a_i)=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

აღვნიშნოთ კუთხე მოცემულ წრფეებს შორის γ-თი და შევნიშნოთ, რომ (4.4) ტოლობების ძალით, ეს კუთხე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\cos\gamma=\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\cos\beta_i.$$

ამის შემდეგ (4.6) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\left.\begin{aligned} t - \tau\cos\gamma &= \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i (b_i - a_i), \\ t\cos\gamma - \tau &= \sum_{i=1}^{n} \cos\beta_i (b_i - a_i). \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

ამ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta = -\sin^2\gamma \neq 0$. მაშასადამე, (4.7) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. რადგან r ფუნქციის მინიმუმი არსებობს, ამიტომ (4.7) განტოლებებიდან გამოთვლილი t და τ სწორედ ის მნიშვნელობები იქნება, რომლებისთვისაც r ფუნქციას აქვს მინიმუმი. (4.7) სისტემის ფაქტიური ამოხსნისათვის განვიხილოთ ვექტორი $\overline{M_1 M_2}$, რომლის სათავეა $M_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ წერტილი, ხოლო ბოლო $M_2(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ წერტილში. აღვნიშნოთ ამ ვექტორის ნორმა p-თი, ხოლო ϑ_1 და ϑ_2-თი შესაბამისად—კუთხეები, რომელსაც $\overrightarrow{M_1 M_2}$ ვექტორი შეადგენს (4.2) და (4.3) წრფეებთან. მაშინ, (4.7) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$t - \tau\cos\gamma = p\cos\vartheta_1,$$
$$t\cos\gamma - \tau = p\cos\vartheta_2.$$

აქედან

$$t_0 = \frac{p}{\sin^2\gamma}(\cos\vartheta_1 - \cos\gamma\cos\vartheta_2),$$

$$\tau_0 = \frac{p}{\sin^2\gamma}(\cos\gamma\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2).$$

ჩავსვათ t_0 და τ_0 მნიშვნელობანი (4.5) ტოლობაში, მივიღებთ საძიებელი მანძილის კვადრატს.

$$r^2 = \frac{p}{\sin^2\gamma}(1 - \cos^2\gamma - \cos^2\vartheta_1 - \cos^2\vartheta_2 + $$
$$+ 2\cos\gamma\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2). \qquad (4.8)$$

მივაქციოთ ყურადღება, რომ (4.8) გამოსახულება არ შეიცავს n-ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ (4.8) არ არის დამოკიდებული სივრცის განზომილებაზე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წრფე, რომელიც გაივლის მინიმალური წრფისა და მოცემული (4. 2), (4.3) წრფეების გადაკვეთის წერტილებზე, მოცემული წრფეების მართობია.

§ 5. პირობითი ექსტრემუმი

საკითხი მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის შესახებ დასმული გვქონდა შემდეგნაირად: მოცემულია ფუნქცია და საძიებელია მისი ლოკალური ან აბსოლუტური ექსტრემუმის წერტილები, ამასთან, არგუმენტებისათვის არ იყო დადებული არავითარი პირობა, გარდა იმისა, რომ არგუმენტების შესაბამისი წერტილები უნდა ეკუთვნოდეს მოცემულ არეს. ასეთ ექსტრემუმს თავისუფალი ექსტრემუმი ეწოდება. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნისას ისეთი ამოცანებიც გვხვდება, როცა ფუნქციის არგუმენტები დაკავშირებულია ერთი ან რამდენიმე დამოკიდებულებით. ასეთ ექსტრემუმს პირობითი ექსტრემუმი ეწოდება.

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია $z=f(x,y)$ და ერთი პირობა $\varphi(x,y)=0$. ცხადია, განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} z&=f(x,y), \\ \varphi(x,y)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

განსაზღვრავს γ წირს სამგანზომილებიან სივრცეში. ვუჩვენოთ, რომ f ფუნქციის პირობით სტაციონარულ წერტილებში γ წირის მხები პარალელურია $z=0$ სიბრტყისა.

მართლაც, თუ γ წირის მხები x_0, y_0, z_0 წერტილში არ მდებარეობს $z=z_0$ სიბრტყეში, მაშინ γ წირი $z=z_0$ სიბრტყეს გადაკვეთს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ წირზე მოიძებნება ისეთი წერტილები, რომლებშიც $z>z_0$ და მოიძებნება ისეთი წერტილებიც, რომლებშიც $z<z_0$. მაშასადამე z_0 არ შეიძლება იყოს $f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობა γ წირზე.

ამრიგად, ამოცანა მიიყვანება ისეთი წერტილების მოძებნაზე, რომლებშიც γ წირის მხები წრფეები პარალელურია $z=0$ სიბრტყისა.

ვთქვათ, (x_0, y_0, z_0) საძიებელი წერტილია და, გარდა ამისა, xOy სიბრტყეზე (x_0, y_0) არის $\varphi(x,y)=0$ ბრტყელი წირის წესიერი წერტილი. შევნიშნოთ, რომ γ წირის მხების განტოლება იქნება

$$\left.\begin{aligned} z-z_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0), \\ \varphi'_x(x-x_0)+\varphi'_y(y-y_0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

თუ γ წირის მხები (x_0, y_0, z_0) წერტილში xOy სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მისი განტოლება იქნება $z=z_0$ და (5.2) ტოლობებიდან პირველი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)=0. \tag{5.3}$$

ახლა (5.2) სისტემის მეორე ტოლობიდან და (5.3) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=\lambda, \tag{5.4}$$

ანუ

$$f'_x-\lambda\varphi'_x=0,\ f'_y-\lambda\varphi'_y=0. \tag{5.5}$$

როგორც ვხედავთ, პირობითი ექსტრემალური წერტილების მოძებნის ამოცანა მიიყვანება (5.5) და $\varphi(x,y)=0$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე x, y, λ უცნობთა მიმართ. ამასთან, განტოლებების იგივე სისტემა წარმოადგენს აუცილებელსა და საკმარის პირობებს იმისა, რომ (x_0,y_0) წერტილი იყოს $F=f-\lambda\varphi$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი.

განვიხილოთ ახლა ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, მოცემულია x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$ ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქცია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$. საძიებელია მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები იმ პირობით, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$ ცვლადები შეკავშირებულია შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)=0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)=0, \end{aligned}\right. \tag{5.6}$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ მოცემული დიფერენცირებადი ფუნქციებია. (5.6) განტოლებებს უწოდებენ ბმების განტოლებებს. ვიგულისხმოთ, რომ $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u_k}$ $(i,k=1,\ 2, \ldots, m)$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია და

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_m} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_m} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.7}$$

როცა (5.7) პირობა შესრულებულია, მაშინ (5.6) სისტემა შეგვიძლია ამოვხსნათ $u_1, u_2, \dots, u_m$ ცვლადების მიმართ, როგორც $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების ფუნქციები

$$u_1=\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ u_2=\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m=$$
$$=\psi_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

მაშასადამე, $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$ დამოკიდებული იქნება მხოლოდ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადეპზე. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებზედაც f ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, f-ის სრული დიფერენციალი უნდა იყოს ნულის ტოლი. გარდა ამისა, რადგან ყველა φ_k ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ შეიძლება (5.6) განტოლებების დიფერენცირება. მაშასადამე, გვექნება $m+1$ განტოლების შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial u_1}du_1+ \\ &\qquad+\frac{\partial f}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_m}du_m=0, \\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}du_1+ \\ &\qquad+\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_m}du_m=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}du_1+ \\ &\qquad+\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_2}du_2+\dots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_m}du_m=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

რადგან შესრულებულია (5.7) პირობა, ამიტომ (5.8) სისტემიდან შეგვიძლია გამოვრიცხოთ $du_1, du_2, \dots, du_m$ დიფერენციალები. გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ

$$A_1dx_1 + A_2dx_2 + \dots + A_ndx_n = 0, \tag{5.9}$$

სადაც $A_1, A_2, \dots, A_n$ კოეფიციენტები იქნება φ_k ფუნქციების კერძო წარმოებულების რაციონალური ფუნქციები.

იმის გამო, რომ $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ დამოუკიდებელი ცვლადების დიფერენციალებია, ამიტომ (5.9) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$A_1 = 0, \ A_2 = 0, \dots, \ A_n = 0.$$

ეს განტოლებები (5.6) განტოლებებთან ერთად გვაძლევს $m+n$ განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას, საიდანაც შეგვიძლია ვიპოვოთ $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$ უცნობების მნიშვნელობანი, რომელთათვის f ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი.

(5.8) სისტემიდან $du_1, du_2, \dots, du_m$ დიფერენციალების გამორიცხვა შეგვიძლია უფრო მოხერხებულად ვაწარმოოთ ეილერისა და ლაგრანჟის მეთოდითაც. ამისათვის (5.8) განტოლებები, გარდა პირველი განტოლებისა, გავამრავლოთ შესაბამისად განუსაზღვრელ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლებზე და ყველა ისინი შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}\right)dx_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_k}\right)du_k = 0. \tag{5.10}$$

ახლა შევარჩიოთ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლები ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_k} = 0, \ k = 1, \ 2, \dots, m, \tag{5.11}$$

რადგანაც $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ დამოუკიდებელი ცვლადების დიფერენციალებია, ამიტომ (5.11) ტოლობების საფუძველზე (5.10) ტოლობებიდან მივიღებთ შემდეგ n განტოლებას:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{d x_k} + \dots + \lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0, \ k = 1, \ 2, \dots, n.$$

ამრიგად, გვექნება $m+n$ განტოლების შემდეგი სისტემა:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_1}=0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_m}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m}=0.$$

(5.6) და (5.12) განტოლებების რიცხვია $2m+n$. ამ განტოლებათა სისტემიდან მოიძებნება $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$ ცვლადებისა და $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლების მნიშვნელობანი.

თუ ავაგებთ შემდეგი სახის დამხმარე ფუნქციას

$$F=f+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\ \varphi_l,$$

მაშინ (5.12) განტოლებები ჩაიწერება მოკლედ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\dots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=0,\ \frac{\partial F}{\partial u_1}=0,\dots,\ \frac{\partial F}{\partial u_m}=0.$$

ამრიგად, ეილერისა და ლაგრანჟის მეთოდის გამოყენებით პირო-

ბითი ექსტრემუმის ამოცანა დაიყვანება F ფუნქციის თავისუფალი ექსტრემუმის ამოცანაზე.

ეს მეთოდი გვაძლევს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას.

ამოცანა 1. ყველა სამკუთხედიდან, რომლებსაც ერთი და იგივე $2p$ პერიმეტრი აქვთ, ვიპოვოთ ისეთი სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თანახმად ჰერონის ფორმულისა, სამკუთხედის ფართობის კვადრატი ასე გამოისახება

$$f(x, y, z)=p(p-x)(p-y)(p-z), \tag{5.13}$$

სადაც x, y, z აღნიშნავენ სამკუთხედის გვერდებს. მაშასადამე, საძიებელია $f(x, y, z)$ ფუნქციის მაქსიმუმი იმ პირობით, რომ დაცული იყოს ტოლობა

$$\varphi(x, y, z)=x+y+z-2p=0. \tag{5.14}$$

ამასთან, x, y და z უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y\geqslant z,\ x+z\geqslant y,\ y+z\geqslant x. \tag{5.15}$$

ეს უტოლობები სამგანზომილებიან სივრცეში განსაზღვრავს დახურულ არეს. ამ დახურული არის საზღვარზე, ე. ი. იქ, სადაც (5.15) უტოლობებიდან ერთი მაინც შეცვლილია ტოლობით, $f(x, y, z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს არის შიგნით.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x, y, z)=p(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p).$$

გავუტოლოთ ნულს მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები, მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-p(p-y)(p-z)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-p(p-x)(p-z)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-p(p-x)(p-y)+\lambda=0.$$

აქედან მივიღებთ

$$(p-y)(p-z)=(p-x)(p-z)=(p-x)(p-y),$$

საიდანაც $x=y=z$ და, თანახმად (5.14) პირობისა, გვექნება $x=y=z=\frac{2}{3}p$. მაშასადამე, არსებობს ერთადერთი სტაციონარული წერტილი. ამიტომ საძიებელი სამკუთხედია ტოლგვერდა.

ამოცანა 2. მოვძებნოთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები, თუ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1$, სადაც f და φ არის შესაბამისად μ_1 და μ_2 რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციები.

ამოხსნა. შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=0,\ (i=1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{5.16}$$

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)=1. \tag{5.17}$$

გავამრავლოთ (5.16) განტოლებები შესაბამისად $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებზე და შემდეგ შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}x_i.$$

გამოვიყენოთ ეილერის თეორემა ერთგვაროვანი ფუნქციის შესახებ გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=\mu_1 f,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}x_i=\mu_2\varphi.$$

ანუ თუ ვისარგებლებთ (5.17) განტოლებით, მივიღებთ

$$\mu_1 f=\lambda\mu_2\varphi,\quad \text{ე. ი.}\quad \lambda=\frac{\mu_1}{\mu_2}f. \tag{5.18}$$

შევიტანოთ λ მამრავლის მოძებნილი მნიშვნელობა (5.16) ტოლობებში, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, საიდანაც განისაზღვრება სტაციონარული წერტილები.

კითხვები

1. მოიყვანეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილების განმარტება.

2. ჩამოაყალიბეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები.

3. რაში მდგომარეობს ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის საკმარისი პირობები?

4. ჩამოაყალიბეთ და გამოიყვანეთ არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმის პირობები.

5. რას უწოდებენ n ცვლადის ფუნქციის აბსოლუტურ ექსტრემუმს?

6. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ვაიერშტრასის თეორემები.

7. რაში მდგომარეობს n ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები?

8. როგორ არის დასმული მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა?

9. რაში მდგომარეობს მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილების მოძებნის ეილერისა და ლაგრანჟის მეთოდი?

სავარჯიშო

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმი:

1. $z=xy(x+y-1)$; პასუხი: $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

2. $z=x^2+y^2-9xy+27$; პასუხი: ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

3. $z=x^2-xy+y^2-3y$; პასუხი: (1;2) წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

4. $z=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$. პასუხი: $(1;-1)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

5. $z=y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x$;

პასუხი: $(1+\sqrt{2};\ 2+\sqrt{3})$ და $(1+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{3})$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მინიმუმი. $(1-\sqrt{2};\ 2)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. $(1+\sqrt{2};\ 2)$ წერტილში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

6. $z=x^4+y^4-ax^2y-axy^2+c^2x^2+c^2y^2$. პასუხი: (0,0) და $\left(\frac{3a+\sqrt{9a^2-32c^2}}{8};\ \frac{3a+\sqrt{9a^2-32c^2}}{8}\right)$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მინიმუმი. $\left(\frac{3a-\sqrt{9a^2-32c^2}}{8};\right.$

$\frac{3a-\sqrt{9a^2-32c^2}}{8}\Big)$ წერტილში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

7. $z=2+(x-y)^2+(y-1)^4$. პასუხი: $(1;1)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

8. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$. პასუხი: $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

9. $z=\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\sin(y-\beta)$. პასუხი: $(\alpha;\beta)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. $\left(0;\ \beta+\frac{\pi}{2}\right)$ წერტილში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

10. $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$. პასუხი: $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ წერტილში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

11. $z=\sin x\sin y\sin(a-x-y)$. პასუხი: $\left(\frac{1}{3}a;\ \frac{1}{3}a\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

12. $z=xy\ln(x^2+y^2)$; პასუხი: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმი უდრის $-\frac{1}{2e}$. $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ და $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}};\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მაქსიმუმია $\frac{1}{2e}$. დანარჩენ $(0;1)$, $(0;-1)$, $(1;0)$ და $(-1;0)$ სტაციონარულ წერტილებში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

13. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$, სადაც $0\leqslant x,\ y,\ z\leqslant\pi$. პასუხი: $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმია 4, ხოლო $(0,\ 0,\ 0)$ და $(\pi;\ \pi;\ \pi)$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმია 0.

იპოვეთ შემდეგი არაცხადი ფუნქციების ექსტრემუმი:

14. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$. პასუხი: $(-6;\ 6\sqrt{3})$ წერ-

ტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმია $12\sqrt{3}$. $(-6, -6\sqrt{3})$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმი უდრის $-12\sqrt{3}$.

15. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

პასუხი: $(-3-\sqrt{6};\ -3-\sqrt{6})$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმია $-(4+2\sqrt{6})$. $(-3+\sqrt{6};\ -3+\sqrt{6})$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმია $2\sqrt{6}-4$.

16. $(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2+y^2+z^2)=0$; პასუხი: როცა $x^2+y^2=\frac{3}{8}$ და $z>0$, მაშინ ფუნქციას აქვს არამკაცრი მინიმუმი და ეს მინიმუმია $-\frac{a}{2\sqrt{2}}$. როცა $x^2+y^2=a^2$ და $z<0$, მაშინ ფუნქციას აქვს არამკაცრი მაქსიმუმი და ეს მაქსიმუმია $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების ფარდობითი ექსტრემუმის წერტილები:

17. $u=xyzt$, თუ $x+y+z+t=a$; პასუხი: $\left(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{4}\right)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

18. $u^2=x^2+y^2+z^2$, თუ $ax+by+cz=k$. პასუხი: $\left(\pm\frac{ak}{a^2+b^2+c^2};\ \pm\frac{bk}{a^2+b^2+c^2};\ \pm\frac{ck}{a^2+b^2+c^2}\right)$ წერტილებში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

19. $u=xyz$, თუ $x^2+y^2+z^2=4r^2$; პასუხი: $\left(\frac{2r}{\sqrt{3}};\ \frac{2r}{\sqrt{3}};\ \frac{2r}{\sqrt{3}}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

20. $u=xy+yz+xz$, თუ $x^2+y^2+z^2=4r^2$;

პასუხი: $\left(\frac{2r}{\sqrt{3}};\ \frac{2r}{\sqrt{3}};\ \frac{2r}{\sqrt{3}}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

21. $u=xyz$, თუ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

პ ა ს უ ხ ი: $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{b}{\sqrt{3}}; \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

22. $u=x^m y^n z^p$, თუ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$;

პ ა ს უ ხ ი: $\left(\frac{a(m+n+p)}{m}; \frac{b(m+n+p)}{n}; \frac{c(m+n+p)}{p}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

23. $u=x^2y^3z^4$, თუ $x+y+z=a$. პ ა ს უ ხ ი: $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

24. მოცემულ ელიფსოიდში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედი. პ ა ს უ ხ ი: პარალელეპიპედის განზომილებებია $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

25. იმ სამკუთხედებს შორის, რომლებსაც ერთი და იგივე $2p$ პერიმეტრი აქვთ, ვიპოვოთ სამკუთხედი, რომელიც თავისი ერთ-ერთი გვერდის ირგვლივ ბრუნვისას წარმოქმნის უდიდესი მოცულობის ბრუნვის სხეულს.

პ ა ს უ ხ ი: სამკუთხედის გვერდებია $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ და $\frac{3p}{4}$.

26. R რადიუსიან ნახევარსფეროში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედი.

პ ა ს უ ხ ი: პარალელეპიპედის განზომილებებია $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ და $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

27. მოცემულ სწორ წრიულ კონუსში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედი.

პ ა ს უ ხ ი: პარალელეპიპედის სიმაღლე კონუსის სიმაღლის მესამედია.

28. სფეროში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედი.

პ ა ს უ ხ ი: კუბი.

29. მოცემულ სამკუთხედში ჩავხაზოთ უმცირესი ფართობის მეორე სამკუთხედი.

პ ა ს უ ხ ი: საძიებელი სამკუთხედის წვეროები მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუა წერტილებია.

30. მოცემულ სამკუთხედში ჩავხაზოთ უმცირესი პერიმეტრის მეორე სამკუთხედი.

პ ა ს უ ხ ი: საძიებელი სამკუთხედის წვეროებია მოცემული სამკუთხედის სიმაღლეების ბოლო წერტილები.

31. ბრუნვის ელიფსოიდში $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის ცილინდრი.

პ ა ს უ ხ ი: ცილინდრის სიმაღლეა $\frac{2\sqrt{3}c}{3}$.

თავი X

პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალები

მათემატიკის სხვადასხვა დარგში საჭირო ხდება ისეთი ინტეგრალების განხილვა, რომლებშიც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დამოკიდებულია არა მარტო ინტეგრების ცვლადზე, არამედ სხვა ცვლადებზეც, რომლებიც განიხილება როგორც პარამეტრები. ამ თავში შევისწავლით პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრალებს.

§ 1. პარამეტრზე დამოკიდებული საკუთრივი ინტეგრალის უწყვეტობა

ვთქვათ, $f(x,\alpha)$ არის ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია ორგანზომილებიან $[a\leqslant x\leqslant b;\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$ სეგმენტზე. თუ $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტიდან ავიღებთ რაიმე α რიცხვს, მაშინ $f(x,\alpha)$ იქნება მხოლოდ x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე და ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

საზოგადოდ, α-ზეა დამოკიდებული. ამრიგად, ეს ინტეგრალი წარმოადგენს $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ α-ს ფუნქციას. იგი აღვნიშნოთ $F(\alpha)$ სიმბოლოთი:

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx,\quad \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1. \tag{1.1}$$

α-ს პარამეტრი ეწოდება.

შესაძლებელია ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დამოკიდებული იყოს რამდენიმე პარამეტრზე $y, z,\dots,t$. მაშინ ინტეგრალი

$$F(y, z,\dots,t)=\int_a^b f(x, y, z,\dots,t)dx$$

წარმოადგენს $y, z,\dots,t$ პარამეტრებზე დამოკიდებულ ფუნქციას.

სიმარტივისათვის განვიხილავთ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრალებს.

თეორემა 1. თუ $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია ორგანზომილებიან სეგმენტზე $R=[a\leqslant x\leqslant b;\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$, მაშინ (1.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ და α-ს მივცეთ $\Delta\alpha$ ნაზრდი ისეთი, რომ $\alpha+\Delta\alpha$ ეკუთვნოდეს $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტს. მაშინ მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx. \tag{1.2}$$

რადგანაც $f(x,\alpha)$ თანაბრად უწყვეტია R სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-სა და α-საგან დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a},$$

როდესაც

$$|\Delta\alpha|<\eta,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

მაშასადამე, (1.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|\leqslant\int_a^b |f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|\,dx<\varepsilon,$$

როდესაც $|\Delta\alpha|<\eta$.

ამრიგად, $F(\alpha)$ უწყვეტია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტის ნებისმიერ α წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. გაწარმოება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

ახლა განვიხილოთ (1.1) ფორმულით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქციის წარმოებადობის საკითხი. მართებულია შემდეგი

თეორემა 2. თუ $f(x,\alpha)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ უწყვეტია R მართკუთხედზე, მაშინ არსებობს $F'(\alpha)$ წარმოებული $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$F'(\alpha)=\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{2.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ ნებისმიერი $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ და α-ს მივცეთ $\Delta\alpha$ ნაზრდი. მაშინ, როგორც ზემოთ დავინახეთ, მართებულია ტოლობა

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx. \qquad (2.2)$$

სასრული ნაზრდის თეორემის თანახმად

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) \quad 0<\theta<1.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (2.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx, \quad 0<\theta<1. \qquad (2.3)$$

რაკი კერძო წარმოებული $f'_\alpha(x,\alpha)$ უწყვეტია R მართკუთხედზე, ამიტომ 1-ლი თეორემის თანახმად

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

მაშასადამე, თუ (2.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta\alpha\to 0$, მივიღებთ (2.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

(2.1) ფორმულით წარმოებულის გამოთვლას ეწოდება ლ ა ი ბ ნ ი- ც ი ს წ ე ს ი.

(2.1) ფორმულის გამოყენების დროს ვგულისხმობდით, რომ a და b დამოუკიდებელია α-ზე. ახლა ვთქვათ, a და b დამოკიდებულია α-ზე:

$$a=a(\alpha), \quad b=b(\alpha).$$

ამ შემთხვევაში ინტეგრალს აქვს სახე

$$F(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx. \qquad (2.4)$$

თეორემა 8. ვ თ ქ ვ ა თ, $f(x,\alpha)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა და მ ი ს ი კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ უ წ ყ ვ ე ტ ი ა ო რ გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ $[a_0\leqslant x\leqslant b_0;\ \ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე, ხ ო ლ ო $a(\alpha)$ და $b(\alpha)$ ფ უ ნ- ქ ც ი ე ბ ი წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა $[\alpha_0,\alpha_1]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე და მ ა თ ი მ ნ ი შ- ვ ნ ე ლ ო ბ ე ბ ი $[a_0,b_0]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ს ე კ უ თ ვ ნ ი ს. მ ა შ ი ნ (2.4) ტო-

ლობით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქცია წარმოებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე და

$$F'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f(b,\alpha)\frac{db}{\partial\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{\partial\alpha}. \qquad (2.5)$$

დამტკიცება. მივცეთ α-ს ნაზრდი $\Delta\alpha$, მაშინ $a(\alpha)$ და $b(\alpha)$ ფუნქციებიც მიიღებს შესაბამისად Δa და Δb ნაზრდებს. გვაქვს:

$$F(\alpha+\Delta\alpha)=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx,$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx+$$

$$+\int_b^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx. \qquad (2.6)$$

თუ გამოვიყენებთ ორი უკანასკნელი ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის პირველ ფორმულას და შემდეგ (2.6) ტოლობის ყველა წევრს გავყოფთ $\Delta\alpha$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx+$$

$$+f(b+\theta\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}-f(a+\theta'\Delta a,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}, \qquad (2.7)$$

სადაც θ და θ' წარმოადგენს 1-ზე ნაკლებ დადებით რიცხვებს.

სასრული ნაზრდის თეორემის თანახმად

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\alpha+\theta''\Delta\alpha),\quad 0<\theta''<1.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx=\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta''\Delta\alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx. \qquad (2.8)$$

ახლა, თუ (2.7) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\Delta\alpha \to 0$ და გავითვალისწინებთ (2.8) ტოლობას. მივიღებთ (2.5) ფორმულას.

(2.1) და (2.5) ფორმულებს ეწოდება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების ფორმულები.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0,a]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა:

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n f(y)\,dy, \quad 0<x<a. \quad (2.9)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)dy.$$

მე-3 თეორემის ძალით, გვაქვს

$$F_n'(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y)dy,$$

ე. ი.

$$F_n'(x) = F_{n-1}(x).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$F_n''(x) = F_{n-2}(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n^{(n-1)}(x) = F_1(x),$$

$$F_n^{(n)}(x) = F_0(x).$$

მაგრამ

$$F_0(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

მაშასადამე,

$$F_n^{(n+1)}(x) = f(x).$$

ამრიგად, $F_n(x)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომლის $(n+1)$ რიგის წარმოებული $f(x)$ ფუნქციის ტოლია და რომელიც თავისი პირველი n რიგის წარმოებულებით ნულად იქცევა, როცა $x=0$. იგი მიიღება $F_{n-1}(x)$-დან ინტეგრებით 0-დან x-მდე. მაშასადამე, $F_n(x)$ ფუნქცია

შეგვიძლია მივიღოთ $f(x)$ ფუნქციის $n+1$-ჯერ განმეორებით ინტეგრებით 0-დან x-მდე, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის განმეორებითი n-ჯერადი ინტეგრება 0-დან x-მდე შეგვიძლია შევცვალოთ $\frac{(x-y)^n}{n!}f(y)$ ფუნქციის ინტეგრებით. მაშასადამე, მართებულია (2.9) ტოლობა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ინტეგრება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

ვთქვათ, ორგანზომილებიან სეგმენტზე $R=[a\leqslant x\leqslant b;\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$ განსაზღვრულია $f(x,\alpha)$ ფუნქცია და არსებობს ინტეგრალები

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx \quad \text{და} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha,$$

პირველი α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტიდან, მეორე კი x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $[a,b]$ სეგმენტიდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx,\quad \psi(x)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(\alpha)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ და $[a,b]$ სეგმენტებზე შესაბამისად. ისმება კითხვა: მართებულია თუ არა ტოლობა

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha)d\alpha = \int_a^b \psi(x)dx$$

ანუ რაც იგივეა, მართებულია თუ არა ტოლობა

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha? \tag{3.1}$$

საზოგადოდ, ეს ტოლობა მართებული არაა. მოვიყვანოთ

მაგალითი 1. ვთქვათ, ორგანზომილებიან $[0,1;\ 0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x,\alpha)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}, & \text{როდესაც} \quad x^2+\alpha^2>0,\\ 0, & \text{როდესაც} \quad x=0 \ \text{და} \ \alpha=0.\end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში.

თუ ჩავატარებთ მარტივ გამოთვლებს, მივიღებთ:

$$\int_0^1 f(x,\alpha)dx = -\left[\frac{x}{x^2+\alpha^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{1+\alpha^2}\ (\alpha>0),$$

$$\int_0^1 f(x,\alpha)d\alpha = \left[\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha^2}\ (x>0).$$

აქედან

$$\int_0^1 d\alpha \int_0^1 f(x,\alpha)dx = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,\alpha)d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

მაშასადამე, (3.1) ტოლობა მართებული არაა.

საკმარის პირობას იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს (3.1) ტოლობას, გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 5. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ორგანზომილებიან R სეგმენტზე, მაშინ მართებულია (3.1) ტოლობა.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$F(t) = \int_a^t dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha, \quad \Phi(t) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^t f(x,\alpha)\,dx, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

მე-2 თეორემის თანახმად

$$\Phi'(t) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(t,\alpha)d\alpha.$$

შემდეგ

$$F'(t) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(t,\alpha)d\alpha.$$

მაშასადამე,

$$\Phi'(t) = F'(t).$$

აქედან

$$\Phi(t) = F(t) + C,$$

სადაც C მუდმივია. რაკი $\Phi(a)=F(a)=0$, ამიტომ

$$F(t)=\Phi(t).$$

მაშასადამე,

$$\int_a^t dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^t f(x,\alpha)dx.$$

კერძოდ, თუ $t=b$, მივიღებთ (3.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები

ვთქვათ, $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია ($a\leqslant x<+\infty$; $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$) არეში, თუ α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტიდან ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$$

კრებადია, მაშინ ეს ინტეგრალი წარმოადგენს $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ α-ს ფუნქციას:

$$F(\alpha)=\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx. \tag{4.1}$$

$F(\alpha)$ ფუნქცია, საზოგადოდ, უწყვეტი არაა $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე. მართლაც, განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x}dx,\ 0\leqslant\alpha\leqslant1.$$

ინტეგრალის უშუალო გამოთვლა გვაძლევს

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ \text{როდესაც } \alpha>0 \text{ და } F(0)=0.$$

აქედან ჩანს, რომ $F(\alpha)$ ფუნქცია წყვეტილია $\alpha=0$ წერტილში.

განსაზღვრა 1. (4.1) ინტეგრალს ეწოდება თანაბრად კრებადი $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს α-ზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი რიცხვი N, რომ მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_{l}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } l \geqslant N$$

α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტიდან.

თეორემა 6. თუ $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია ($a \leqslant x < +\infty$; $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$) არეში და (4.1) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე, მაშინ $F(\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_n(\alpha) = \int_{a}^{a+n} f(x,\alpha)dx, \tag{4.2}$$

სადაც n არის ნატურალური რიცხვი. რადგანაც (4.1) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია, ამიტომ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $(F_n(\alpha))_{n>1}$ თანაბრად კრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე $F(\alpha)$ ფუნქციისაკენ. მაშასადამე, $F(\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. ვთქვათ, ($a \leqslant x < +\infty$; $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$) არეში უწყვეტ $f(x,\alpha)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული $f'_\alpha(x,\alpha)$. თუ (4.1) ინტეგრალი კრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე ინტეგრალი

$$\Phi(\alpha) = \int_{a}^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx \tag{4.3}$$

თანაბრად კრებადია, მაშინ α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0\alpha_1]$ სეგმენტიდან არსებობს $F'(\alpha)$ და მართებულია ტოლობა

$$F'(\alpha) = \int_{a}^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx. \tag{4.4}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi_n(\alpha) = \int_{a}^{a+n} f'_\alpha(x,\alpha)dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

რადგანაც (4.3) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე, ამიტომ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $(\Phi_n(\alpha))_{n>1}$ თანაბრად კრე-

ბადია $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე $\Phi(\alpha)$ ფუნქციისაკენ. ამის გარდა. მე-2 თეორემის თანახმად

$$\Phi_n(\alpha) = F'_n(\alpha),$$

სადაც $F_n(\alpha)$ განისაზღვრება (4.2) ტოლობით. შემდეგ,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha)$$

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს უწყვეტ ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობა $(F_n(\alpha))_{n\geq 1}$, ამასთან $(F'_n(\alpha))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $\Phi(\alpha)$ ფუნქციისაკენ. ამიტომ არსებობს $F'(\alpha)$ წარმოებული α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტიდან და მართებულია ტოლობა

$$F'(\alpha) = \lim_{n\to\infty} F'_n(\alpha),$$

ე. ი. ადგილი აქვს (4.4) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

(4.4) ფორმულას ეწოდება პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალის გაწარმოების ფორმულა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

თეორემა 8. თუ $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a\leqslant x<+\infty, \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1]$ არეში და ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ თანაბრად კრებადია $[\alpha_0, \alpha_1]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha$$

და მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx. \tag{4.5}$$

დამტკიცება. მე-5 თეორემის თანახმად, ყოველი t-სათვის, რომელიც a-ზე მეტია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_a^{t} dx \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{t} f(x,\alpha)\,dx. \tag{4.6}$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{t} f(x,\alpha)dx = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx. \tag{4.7}$$

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რაკი ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ თანაბრად კრებადია $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს α-საგან დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$\left|\int\limits_t^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha_1-\alpha_0}, \text{ როდესაც } t>N$$

α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტიდან. შემდეგ

$$\left|\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_a^{t} f(x,\alpha)dx\right| =$$

$$\left|\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int\limits_t^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left|\int\limits_t^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| d\alpha < \varepsilon,$$

როდესაც $t>N$. ეს კი ამტკიცებს (4.7) ტოლობის მართებულობას. მაშასადამე, თუ (4.6) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $t\to+\infty$, მივიღებთ (4.5) ტოლობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ თანაბრად კრებადი არაა $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე, მაშინ (4.5) ტოლობა შეიძლება არ იყოს მართებული.

ზოგჯერ საჭიროა პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალის ინტეგრება ინტეგრების უსასრულო შუალედზე. ამიტომ სასურველია ინტეგრების რიგის შეცვლის თეორემის განზოგადება ამ შემთხვევისათვის. სანამ ამ საკითხზე გადავიდოდეთ შემოვიღოთ

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. ვთქვათ, $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a\leqslant x<+\infty;\ \alpha_0\leqslant\alpha<+\infty]$ არეში. ვიგულისხმოთ, რომ α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $[\alpha_0,+\infty[$ შუალედში კრებადია ინტეგრალი

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx. \tag{4.8}$$

ვიტყვით, რომ (4.8) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია α-ს მიმართ $[\alpha_0,\infty[$ შუალედში, თუ იგი თანაბრად კრებადია ყოველ $[\alpha_0,\alpha_1]$ სეგმენტზე.

თეორემა 9. ვთქვათ, $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია და არაუარყოფითი ($a \leqslant x < +\infty$; $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$) არეზე. თუ ინტეგრალები

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx \text{ და } \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha$$

თანაბრად კრებადია α-ს და x-ის მიმართ $[\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty[$, და $[a \leqslant x < +\infty[$ შუალედებში შესაბამისად, ამასთან, განმეორებითი ინტეგრალებიდან

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx, \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha \tag{4.9}$$

ერთ-ერთი არსებობს, მაშინ იარსებებს მეორე განმეორებითი ინტეგრალიც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha. \tag{4.10}$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ (4.9) განმეორებითი ინტეგრალებიდან არსებობს პირველი განმეორებითი ინტეგრალი.

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად, აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როდესაც $t > N$ ადგილი ექნება უტოლობას

$$0 \leqslant \int_a^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

შემდეგ, რაკი ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ თანაბრად კრებადია α-ს მიმართ $[\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty[$ შუალედში, ამიტომ მოიძებნება α-ზე დამოუკიდებელი ისეთი $L(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ

$$\int_l^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2(t-\alpha_0)}, \text{ როდესაც } l > L.$$

მაშასადამე, როდესაც $l > L$ გვექნება

$$0 \leqslant \int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_{a}^{l} f(x,\alpha)dx =$$

$$= \int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_{l}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.12}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.11) და (4.12) უტოლობებს, მივიღებთ

$$0 \leqslant \int_{\alpha_0}^{+\infty} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx - \int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_{a}^{l} f(x,\alpha)dx < \varepsilon,$$

როდესაც $t > N, l > L$ და რადგანაც t და l სასრული რიცხვებია, ამიტომ

$$\int_{\alpha_0}^{t} d\alpha \int_{a}^{l} f(x,\alpha)dx = \int_{a}^{l} dx \int_{\alpha_0}^{t} f(x,\alpha)d\alpha,$$

ამრიგად, როდესაც $l > L$, $t > N$, გვექნება

$$0 \leqslant \int_{\alpha_0}^{+\infty} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{a}^{l'} dx \int_{\alpha_0}^{t} f(x,\alpha)d\alpha < \varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი $f(x,\alpha) \geqslant 0$, ამიტომ

$$0 \leqslant \int_{\alpha_0}^{+\infty} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{a}^{l} dx \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha \leqslant \varepsilon,$$

როდესაც $l > L$. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი $\int_{a}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha$ და მართებულია (4.10) ტოლობა.

§ 5. განსაზღვრული ინტეგრალების გამოთვლა პარამეტრით გაწარმოებისა და ინტეგრების საშუალებით

*მაგალითი 2. გამოვთვალოთ დირიხლეს ინტეგრალი

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

ამოხსნა. წინასწარ განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{5.1}$$

ეს ინტეგრალი კრებადია [0, $+\infty$[შუალედში და გაწარმოებით მიღებული ინტეგრალი თანაბრად კრებადია ყოველ [ε, $+\infty$] შუალედში, სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. მართლაც,

$$\left|\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx\right| < \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{e^{-l\alpha}}{\alpha} < \frac{e^{-l\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

ამ უტოლობის თანახმად, ინტეგრალი $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx$ თანაბრად კრებადია [ε, $+\infty$[შუალედში. მაშასადამე,

$$F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx.$$

მაგრამ

$$\int_0^l e^{-\alpha x}\sin x dx = \frac{e^{-l\alpha}(-\alpha\sin l-\cos l)}{1+\alpha^2} - \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

აქედან მივიღებთ

$$F'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ინტეგრებას α-თი, მივიღებთ

$$F(\alpha) = C - \operatorname{arctg}\alpha, \tag{5.2}$$

სადაც C მუდმივია. რადგანაც

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| < \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha},$$

ამიტომ

$$\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 0.$$

მაშასადამე, თუ (5,2) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\alpha\to+\infty$, მივიღებთ

$$0 = C - \frac{\pi}{2},$$

საიდანაც $C = \frac{\pi}{2}$. ამრიგად,

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha},$$

ანუ

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha}\,. \tag{5.3}$$

$[0,+\infty[$ შუალედში $F(\alpha)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვაქვს

$$\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha)=F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{5.4}$$

მეორე მხრივ

$$\lim_{\alpha\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2} \tag{5.5}$$

მაშასადამე, თუ (5.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\alpha\to 0$ და გავითვალისწინებთ (5.4) და (5.5) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\,. \tag{5.6}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც $\frac{\sin x}{x}$ ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi.$$

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე, რომ

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } \alpha>0,\\ 0, & \text{როდესაც } \alpha=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } \alpha<0,\end{cases} \tag{5.7}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ პუასონის ინტეგრალი

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

ამოხსნა. მოცემული ინტეგრალის არსებობა ადვილად მტკიცდება. ამ ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=\alpha t,$$

სადაც α ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. გვაქვს

$$I=\alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2t^2}\,dt.$$

თუ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $e^{-\alpha^2}d\alpha$ გამოსახულებაზე და შემდეგ ვაინტეგრებთ 0-დან $+\infty$-მდე, მივიღებთ

$$I^2=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2t^2}dt. \tag{5.8}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(t,\alpha)=\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}.$$

ცხადია, რომ $f(t,\alpha)\geqslant 0$. ამის გარდა, ინტეგრალები

$$\int_0^{+\infty} f(t,\alpha)dt \text{ და } \int_0^{+\infty} f(t,\alpha)d\alpha$$

თანაბრად კრებადია $[0,+\infty[$ შუალედში. მართლაც,

$$\int_l^{+\infty} f(t,\alpha)dt=\alpha\int_l^{+\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt<\alpha\int_l^{+\infty}\frac{dt}{1+\alpha^2(1+t^2)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right]_l^{+\infty}<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{l\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

მაშასადამე, ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} f(t,\alpha)dt$ თანაბრად კრებადია $[\varepsilon,+\infty[$ შუალედში, სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ანალოგიურად მტკიცდება $\int_0^{+\infty} f(t,\alpha)d\alpha$ ინტეგრალის თანაბრად კრებადობა $[0,+\infty[$ შუალედში. მაშასადამე, მე-8 თეორემის თანახმად,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} d\alpha\int_0^{+\infty} f(t,\alpha)dt=\int_0^{+\infty} dt\int_\varepsilon^{+\infty} f(t,\alpha)\,d\alpha,$$

ე. ი.

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt = \int_{0}^{+\infty} dt \int_{\varepsilon}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha.$$

ამრიგად, თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\varepsilon \to 0$, (5.8) ტოლობის თანახმად, გვაქვს

$$I^2 = \int_{0}^{+\infty} dt \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

აქედან

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.9}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ფრენელის (Fresnel) ინტეგრალი

$$I = \int_{0}^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ მოვახდენთ ჩასმას $t = x^2$, მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

მაშასადამე, არსებობს ინტეგრალი I.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-tz^2} dz.$$

მაშასადამე,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} dt \int_{0}^{+\infty} e^{-tz^2} \sin t dz.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{0}^{+\infty} dt \int_{0}^{+\infty} e^{-tz^2} \sin t dz = \int_{0}^{+\infty} dz \int_{0}^{+\infty} e^{-tz^2} \sin t dt. \tag{5.10}$$

ამისათვის განვიხილოთ ინტეგრალი

$$J = \int_{0}^{+\infty} e^{-kt} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

სადაც k დადებითი რიცხვია. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dz = \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dt. \qquad (5.11)$$

რადგანაც ინტეგრალები

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dz \text{ და } \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dt$$

თანაბრად კრებადია $[0, +\infty[$ შუალედში და არსებობს

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} |\sin t| dt,$$

ამიტომ, მე-8 თეორემის ძალით, მართებულია (5.11) ტოლობა. შემდეგ ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dz.$$

(5.11) ტოლობის თანახმად,

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} e^{-(k+z^2)t} \sin t dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(k+z^2)^2}. \qquad (5.12)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(k+z^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4}. \qquad (5.13)$$

გვაქვს

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4} - \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(k+z^2)^2} = k \int_0^{+\infty} \frac{k+2z^2}{(1+z^4)[1+(k+z^2)^2]} dz.$$

მაგრამ მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $k\to 0$. მაშასადამე, მართებულია (5.13) ტოლობა.

ამრიგად, თუ (5.12) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k\to 0$, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4}.$$

მაგრამ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{5.14}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{5.15}$$

ინტეგრალებს $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ და $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ ეწოდება ფრენელის ინტეგრალები. ეს ინტეგრალები გვხვდება სინათლის დიფრაქციის თეორიაში.

ფრენელის ინტეგრალები გვიჩვენებს, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი შეიძლება კრებადი იყოს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $x \to +\infty$. უფრო მეტიც, არასაკუთრივი ინტეგრალი შეიძლება კრებადი იყოს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოუსაზღვრელია. მართლაც, განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\infty} 2u \cos(u^4)\,du.$$

როდესაც $u = \sqrt[4]{n\pi}$ $(n=0, 1, \ldots)$ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობებს

$$2\sqrt[4]{n\pi}\cos n\pi = (-1)^n 2\sqrt[4]{n\pi}.$$

მაშასადამე, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოსაზღვრული არაა. მასთან, თუ მოცემულ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $u^2 = x$, მივიღებთ კრებად ინტეგრალს

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \alpha x \, dx.$$

ეს ინტეგრალი თანაბრად კრებადია $[0, +\infty[$ შუალედში. თუ გამოვიყენებთ ნაწილობით ინტეგრების ფორმულას, მივიღებთ

$$F(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

შემდეგ, მე-8 თეორემის თანახმად,

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \int_0^\alpha d\alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^\alpha \cos \alpha x d\alpha =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

საიდანაც,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arc\,tg} \alpha.$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილში ინტეგრალი თანაბრად კრებადია $[0, +\infty[$ შუალედში. მაშასადამე,

$$\int_0^\alpha \operatorname{arc\,tg} t \, dt = \int_0^\alpha dt \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin tx}{x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \int_0^\alpha \sin txdt = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos \alpha x}{\alpha x^2} dx.$$

მაგრამ

$$\int_0^{\alpha} \operatorname{arc\,tg} t dt = \alpha \operatorname{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \ln (1+\alpha^2).$$

ამრიგად,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos \alpha x}{x^2} dx = \alpha \operatorname{arc\,tg} \alpha - \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2). \tag{5.16}$$

ვთქვათ, $\alpha > 0$ და (5.16) ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $x = \frac{t}{\alpha}$, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-\frac{t}{\alpha}} dt = \operatorname{arctg} \alpha - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2\alpha}.$$

ამ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\alpha \to +\infty$, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{5.17}$$

გვაქვს აგრეთვე

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

მაშასადამე, (5.17) ფორმულის თანახმად,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}. \tag{5.18}$$

(5.18) ფორმულას გამოყენება აქვს ფურიეს მწკრივთა თეორიაში.

§ 6. ეილერის ინტეგრალები

1°. ეილერის ინტეგრალების განსაზღვრა. მათემატიკური ანალიზის მრავალ საკითხში გამოიყენება ეგრეთ წოდებული ეილერის პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალები. ამ ინტეგრალებს აქვს სახე

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \tag{6.1}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{6.2}$$

თეორემა 10. $B(p,q)$ ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p>0$, $q>0$.

დამტკიცება. ავიღოთ ერთზე ნაკლები რაიმე დადებითი რიცხვი ε და განვიხილოთ ინტეგრალები

$$I_1=\int_0^{\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad I_2=\int_{\varepsilon}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ I_1 ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p>0$, ხოლო I_2 ინტეგრალი კრებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $q>0$. მაშასადამე, $B(p,q)$ ინტეგრალის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ გვქონდეს $p>0$, $q>0$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. $\Gamma(p)$ ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p>0$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $p>0$. განვიხილოთ ინტეგრალები

$$I_1=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx \text{ და } I_2=\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

ცხადია, რომ I_1 ინტეგრალი კრებადია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ I_2 ინტეგრალი კრებადია. გვაქვს

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{e^x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}dx<$$

$$<n!\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x^n}dx=n!\int_1^{\infty}x^{p-n-1}dx.$$

თუ ავიღებთ n-ს იმ პირობით, რომ $n+1-p>1$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty}x^{p-n-1}\,dx$$

კრებადია და, ამიტომ კრებადია I_2 ინტეგრალიც. ამრიგად, $\Gamma(p)$ ინტეგრალიც კრებადია, როდესაც $p>0$.

ახლა ვთქვათ, $p\leqslant 0$. ამ შემთხვევაში I_1 ინტეგრალი განშლადია და, მაშასადამე, განშლადია $\Gamma(p)$ ინტეგრალიც. თეორემა დამტკიცებულია.

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $p>0$, $q>0$.

$B(p,q)$ ინტეგრალს ეწოდება ეილერის პირველი გვარის ინტეგრალი, $\Gamma(p)$ ინტეგრალს კი—მეორე გვარისა. $B(p,q)$ ინტეგრალს ეწოდება აგრეთვე ბეტა-ფუნქცია, $\Gamma(p)$ ინტეგრალს კი-გამა-ფუნქცია.

ახლა ვთქვათ, $p>1$ და დავამტკიცოთ, რომ მართებულია ტოლობა

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1). \tag{6.3}$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად

$$\Gamma(p)=[-x^{p-1}e^{-x}]_0^{+\infty}+(p-1)\int_0^{+\infty} x^{p-2}e^{-x}dx=(p-1)\Gamma(p-1).$$

მაშასადამე, მართებულია (6.3) ტოლობა.

თუ $p=n$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (6,3) ფორმულის გამოყენებით $(n-1)$-ჯერ, მივიღებთ

$$\Gamma(n)=(n-1)!\Gamma(1);$$

მაგრამ

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

მაშასადამე,

$$\Gamma(n)=(n-1)! \tag{6.4}$$

2°. დამოკიდებულება ბეტა-ფუნქციასა და გამა-ფუნქციას შორის. ახლა ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ბეტა-ფუნქცია შეგვიძლია გამოვსახოთ გამა-ფუნქციის საშუალებით. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი

თეორემა 12. ადგილი აქვს ტოლობას

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{6.5}$$

დამტკიცება. თუ (6.2) ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $x=\alpha t$, სადაც $\alpha>0$, გვექნება

$$\Gamma(p) = \alpha^p \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-\alpha t}dt.$$

აქედან

$$\frac{1}{\alpha^p}=\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-\alpha t}dt. \tag{6.6}$$

ახლა (6.1) ინტეგრალში თუ მოვახდენთ ჩასმას $x=\dfrac{t}{1+t}$, მივიღებთ

$$B(p, q)=\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{6.7}$$

თუ (6.6) ტოლობაში p-ს შევცვლით $(p+q)$-თი, α-ს კი $(1+y)$-ით, მივიღებთ

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}\,e^{-(1+y)t}\,dt.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $y^{p-1}dy$ გამოსახულებაზე და შემდეგ ვაინტეგროთ 0-დან $+\infty$-მდე, გვექნება

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} y^{p-1}dy\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}e^{-(1+y)t}\,dy,$$

ანუ, (6.7) ტოლობის ძალით,

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} y^{p-1}dy\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}e^{-(1+y)t}\,dt.$$

შემდეგ მე-8 თეორემის საფუძველზე ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\int_0^{+\infty} y^{p-1}\,dy\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}e^{-(1+y)t}\,dt=\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} y^{p-1}\,t^{p+q-1}\,e^{-(1+y)t}\,dy.$$

მაშასადამე,

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}\,e^{-t}\,dt\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}dy,$$

მაგრამ (6.6) ფორმულის ძალით

$$\int_0^{+\infty} y^{p-1}\,e^{-ty}\,dy=\frac{\Gamma(p)}{t^p}.$$

ამიტომ

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} t^{p+q-1}\,e^{-t}\,\frac{\Gamma(p)}{t^p}\,dt=$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

(6.5) ფორმულის საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{6.8}$$

3°. დაყვანის ფორმულა ბეტა-ფუნქციისათვის. გამოვიყვანოთ დაყვანის ფორმულა $B(p,q)$ ინტეგრალისათვის. ვთქვათ, $q>1$. თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.3) და (6.5) ფორმულებს, გვექნება

$$B(p,\ q) = \frac{(q-1)\Gamma(p)\Gamma(q-1)}{(p+q-1)\Gamma(p+q-1)}.$$

აქედან

$$B(p,\ q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1). \tag{6.9}$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ იმ მიზნით, რომ შევამციროთ q, როდესაც $q>1$. მაშასადამე, (6.9) ფორმულის თანახმად, ყოველთვის შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ გვქონდეს $q\leqslant 1$.

თუ $p>1$, მაშინ, (6.8) და (6.9) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

$$B(p,\ q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,\ q). \tag{6.10}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $q=n$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, (6.9) ფორმულის თანდათანობითი გამოყენებით მივიღებთ

$$B(p,\ n) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)} B(p,1).$$

მაგრამ

$$B(p,\ 1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

მაშასადამე,

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{1\,.\,2\ldots(n-1)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}. \tag{6.11}$$

4°. $\Gamma(p)$ ფუნქციის დაშლა უსასრულო ნამრავლად. (6.6) ფორმულიდან გვაქვს

$$\Gamma(p) = \alpha^p \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-\alpha x}dx, \quad \alpha > 0. \tag{6.12}$$

აქედან ვღებულობთ

$$\Gamma(p) > \alpha^p \int_0^1 x^{p-1}e^{-\alpha x}dx$$

და რაკი $e^{-x} > 1-x$, ამიტომ $e^{-\alpha x} > (1-x)^\alpha$. მაშასადამე,

$$\Gamma(p) > \alpha^p \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^\alpha\, dx,$$

ანუ

$$\Gamma(p) > \alpha^p B(p,\alpha+1). \tag{6.13}$$

შემდეგ, რადგანაც $e^x > 1+x$, ამიტომ $e^{-\beta x} < (1+x)^{-\beta}$, სადაც $\beta > p$. თუ (6.12) ტოლობაში α-ს შევცვლით β-თი და გავითვალისწინებთ ზემოთ დაწერილ უტოლობას, მივიღებთ

$$\Gamma(p) < \beta^p \int_0^{+\infty} x^{p-1}(1+x)^{-\beta}dx.$$

ამ ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $t = \dfrac{x}{1+x}$, გვექნება

$$\Gamma(p) > \beta^p \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{\beta-p-1}dt = \beta^p B(p,\beta-p). \tag{6.14}$$

(6.13) და (6.14) უტოლობები შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე:

$$\alpha^p B(p,\alpha+1) < \Gamma(p) < \beta^p B(p,\beta-p). \tag{6.15}$$

ახლა ვთქვათ, რომ $\alpha = n$, $\beta - p = n+1$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია. მაშინ (6.15) უტოლობები მიიღებს სახეს

$$n^p B(p,n+1) < \Gamma(p) < (n+1+p)^p B(p,n+1).$$

აქედან

$$1 < \frac{\Gamma(p)}{n^p B(p,n+1)} < \left(1 + \frac{1+p}{n}\right)^p$$

საიდანაც

$$0 < \left[\frac{\Gamma(p)}{n^p B(p,n+1)}\right]^{1/p} - 1 < \frac{1+p}{n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{n}{p+1}\left\{\left[\frac{\Gamma(p)}{n^p B(p,n+1)}\right]^{1/p}-1\right\}=\theta,\ \ \theta<1.$$

ამ ტოლობიდან გვაქვს

$$\Gamma(p)=n^p B(p,\ n+1)\left(1+\frac{p+1}{n}\theta\right)^p.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.11) ფორმულას, გვექნება

$$\Gamma(p)=\frac{n!\ n^p}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}\cdot\left(1+\frac{p+1}{n}\theta\right)^p.$$

ამ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $n\to\infty$, მივიღებთ

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ n^p}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}, \tag{6.16}$$

ეს არის ეილერ-გაუსის ფორმულა $\Gamma(p)$ ფუნქციის დაშლისა უსასრულო ნამრავლად.

(6.16) ფორმულიდან მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n!}\simeq\frac{n^p}{\Gamma(p)}. \tag{6.17}$$

ეს ფორმულა გამოიყენება მწკრივთა თეორიაში.

5°. დამატების ფორმულა. თუ (6.7) ფორმულაში ვიგულისხმებთ $q=1-p$, სადაც $0<p<1$, და გავითვალისწინებთ (6.5) ფორმულას, მივიღებთ

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}dt.$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}dt. \tag{6.18}$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ p რიცხვს აქვს სახე,

$$p=\frac{2m+1}{2n},$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, მასთან $m<n$. თუ (6.18) ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $t=x^{2n}$, მივიღებთ:

$$I=2n\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx.$$

როგორც ვიცით (იხ. ტ. 1, გვ. 536),

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

მაშასადამე,

$$I=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ p არის ერთზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ არის p-ს უწყვეტი ფუნქცია $]0,1[$ ინტერვალში. ავიღოთ 0 და 1-ს შორის ორი ნებისმიერი რიცხვი p' და p'':

$$0<p'<p''<1,$$

გვაქვს

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=\int_0^{1}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=I_1+I_2,$$

ვაჩვენოთ, რომ I_1 და I_2 ინტეგრალები თანაბრად კრებადია $[p', p'']$ შუალედში. გვაქვს:

$$I_1<\int_0^{1}\frac{t^{p'-1}}{1+t}\,dt,\quad I_2<\int_0^{+\infty}\frac{t^{p''-1}}{1+t}\,dt.$$

აქედან გამომდინარეობს I ინტეგრალის თანაბარი კრებადობა p-ს მიმართ $[p', p'']$ შუალედში. მაშასადამე, I ინტეგრალი უწყვეტია $]0,1[$ შუალედში.

შემდეგ, p-ს ყოველ მნიშვნელობას $]0,1[$ შუალედიდან შეგვიძლია მივუახლოვდეთ $\frac{2m+1}{2n}$ სახის რიცხვებით, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, მასთან $m<n$. ამიტომ

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=\lim_{(2m+1):2n\to p}\int_0^{+\infty}\frac{t^{(2m+1):2n-1}}{1+t}\,dt=$$

$$= \lim_{(2m+1):2n\to p} \frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

ამრიგად,

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{6.19}$$

ამ ფორმულას ეწოდება დ ა მ ა ტ ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა.

დასასრულ, ვთქვათ, რომ $p=\frac{1}{2}$. მაშინ (6.19) ტოლობა გვაძლევს:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

აქედან

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

ე. ი.

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

თუ ამ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $t=x^2$, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§ 7. სტირლინგის ფორმულა

როგორც ვიცით, თუ n მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx. \tag{7.1}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ დიდი რიცხვების ფაქტორიალებს მეტად მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია როგორც თეორიულ გამოკვლევებში, ისე პრაქტიკულ გამოანგარიშებებშიც. სტირლინგის ფორმულის მიზანია ვიპოვოთ $n!$ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ავიღოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=x^n e^{-x}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $[0,+\infty[$ შუალედში, როდესაც $x=n$:

$$\varphi(n)=n^n e^{-n}.$$

ახლა (7.1) ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=\int_0^n x^n e^{-x}\,dx+\int_n^{+\infty} x^n e^{-x}dx=A_n+B_n. \qquad (7.2)$$

A_n ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა

$$t=-\sqrt{x-n+n\ln\frac{n}{x}}\,, \qquad (7.3)$$

ხოლო B_n ინტეგრალში—ჩასმა

$$t=\sqrt{x-n+n\ln\frac{n}{x}}\,. \qquad (7.4)$$

ორივე ჩასმის შემთხვევაში გვექნება

$$e^{-x}x^n=e^{-n}n^n e^{-t^2}. \qquad (7.5)$$

როდესაც x იზრდება 0-დან n-მდე, მაშინ, (7.3) ტოლობის ძალით, t იცვლება $-\infty$-დან 0-მდე, ხოლო, თუ x იცვლება n-დან $+\infty$-მდე, მაშინ, (7.4) ტოლობის ძალით, t იზრდება 0-დან $+\infty$-მდე. ამიტომ

$$A_n=\int_{-\infty}^0 e^{-n}n^n e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt=e^{-n}n^n\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt.$$

$$B_n=\int_0^{+\infty} e^{-n}n^n e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt=e^{-n}n^n\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=e^{-n}n^n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt.$$

გამოვსახოთ, $\frac{dx}{dt}$ წარმოებული t-თი. (7.5) ფორმულიდან გვაქვს:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2n^n e^{-n}te^{-t^2}}{e^{-x}x^{n-1}(x-n)}.$$

თუ ვისარგებლებთ (7.5) ტოლობით, გვექნება

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2xte^{-n}n^ne^{-t^2}}{e^{-n}n^ne^{-t^2}(x-n)}=\frac{2xt}{x-n}=\frac{2t}{1-\frac{n}{x}}.$$

ამრიგად,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{t\,dt}{1-\frac{n}{x}}, \tag{7.6}$$

ახლა გამოვსახოთ $1-\frac{n}{x}$ ფუნქცია t-თი. ამისათვის (7.3) ან (7.4) ტოლობა კვადრატში ავამაღლოთ, გვექნება

$$t^2=(x-n)+n\ln\frac{n}{x}.$$

იქიდან

$$\ln\frac{x}{n}=\frac{x}{n}-1-\frac{t^2}{n}. \tag{7.7}$$

შემდეგ ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$\ln\frac{x}{n}=\ln\left[1+\left(\frac{x}{n}-1\right)\right]=\left(\frac{x}{n}-1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}-1\right)^2\left[1+\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)\right]^{-2},$$

სადაც $0<\theta<1$. თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (7.7) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}-1\right)^2=\frac{t^2}{n}\left[1+\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)\right]^2.$$

საიდანაც

$$\frac{x}{n}=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2}(1-\theta)t}{\sqrt{n}-\sqrt{2}\theta t}.$$

მაშასადამე,

$$1-\frac{n}{x}=1-\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2}\theta t}{\sqrt{n}+\sqrt{2}(1-\theta)t}=\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{n}+\sqrt{2}(1-\theta)t}.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (7.6) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$n! = \sqrt{2}\, n^n e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sqrt{n} + \sqrt{2}(1-\theta)t] e^{-t^2} dt,$$

ანუ

$$n! = \sqrt{2}\, n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + 2e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}(1-\theta) dt.$$

მაგრამ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

რაც შეეხება ინტეგრალს $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}(1-\theta)dt$, იგი ზუსტად ვერ გამოითვლება იმის გამო, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დგას მამრავლად $1-\theta$. მაგრამ შეგვიძლია დავადგინოთ ამ ინტეგრალის ზედა საზღვარი. მართლაც, რადგანაც $0<\theta<1$, ამიტომ

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}(1-\theta)\, dt \right| < \int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-t^2} dt = 2 \int_{0}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}(1-\theta) dt,$$

გვექნება

$$n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^n \sqrt{n} + 2e^{-n} n^n \alpha.$$

აქედან

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi} \left(1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{2n\pi}}\right), \quad |\alpha| < 1. \tag{7.8}$$

ეს არის მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ფორმულა, რომელსაც სტირლინგის (Stirling) ფორმულა ეწოდება ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}} = 1. \tag{7.9}$$

აქედან ვღებულობთ

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}.$$

სავარჯიშო

1. იპოვეთ $F'(\alpha)$, თუ

$$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2}dx.$$

2. იპოვეთ $F'(\alpha)$, თუ

$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

3. იპოვეთ $F'(\alpha)$, თუ

$$F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha^2} dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

4. იპოვეთ $F''(\alpha)$, თუ

$$F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}(x+\alpha)f(x)dx,$$

სადაც $f(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

5. დაამტკიცეთ, რომ მთელი n ინდექსის ბესელის ფუნქცია

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

აკმაყოფილებს ბესელის განტოლებას

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

6. პარამეტრით გაწარმოების წესის გამოყენებით, გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{0}^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx.$$

7. პუასონის ინტეგრალის გამოყენებით, გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2-2bx+c)}dx\quad (a>0,\ ac-b^2>0);$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \ (a>0)$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx \ (a>0)$.

8. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

აკმაყოფილებს სითბოგამტარებლობის განტოლებას

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

და საწყის პირობას

$$\lim_{t\to 0+} u(x, t) = f(x).$$

9. ეილერის ინტეგრალების საშუალებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \ (a>0)$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \ (n>0)$.

10. განსაზღვრეთ არსებობის არე და გამოსახეთ ეილერის ინტეგრალებში შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^2}\,dx \ (m>0)$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \ (m>0)$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \ (n>0)$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx$; $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

11. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

12. დაამტკიცეთ ეილერის ფორმულა:

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos (\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x.$$

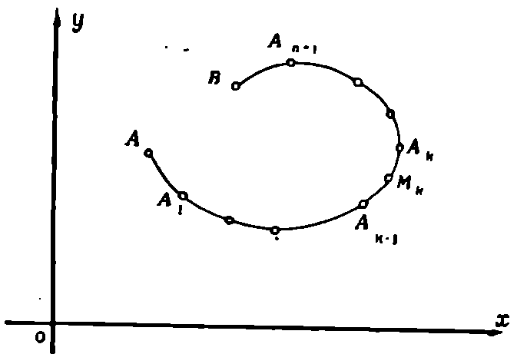
თ ა ვ ი XI

წირითი ინტეგრალი

ამ თავში განიხილება ინტეგრალის ცნების ერთი თავისებური განზოგადება, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით.

§ 1. პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია წრფევადი ჟორდანის γ წირი, რომლის ბოლოებია A და B წერტილები (ნახ. 14). განვიხილოთ ამ წირზე განსაზღვრული $f(M)\equiv f(x,y)$ ფუნქცია. ავიღოთ γ წირზე A-დან B წერტილისაკენ მოძრაობისას $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ წერტილები.



ნახ. 14.

აღვნიშნოთ A და B წერტილები A_0-ით და A_n-ით შესაბამისად.

γ წირის ყოველი $A_{k-1}A_k$ რკალი ($k=1, 2, \dots, n$) წრფევადია და ამ რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ Δs_k სიმბოლოთი. $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი M_k წერტილი ($k=1, 2, \dots, n$) და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k.$$

თუ არსებობს σ ჯამის ზღვარი, როდესაც ყოველი $\Delta s_k \to 0$ და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული γ წირის დაყოფის წესზე და M_k წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება γ წირზე აღებული $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\int_\gamma f(M)ds=\int_\gamma f(x,y)ds \quad \text{ან} \quad \int_{AB} f(M)ds=\int_{AB} f(x,y)ds.$$

ამრიგად

$$\int_\gamma f(M)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k,$$

სადაც λ არის $\Delta s_k (k=1, 2, \ldots, n)$ რიცხვებს შორის უდიდესი.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრაში არავითარ როლს არ ასრულებს მიმართულება, რომელიც შეიძლება მივანიჭოთ γ წირს. მაგალითად, თუ γ წირი შეკრული არაა და AB და BA სხვადასხვა მიმართულებიანი წირებია, მაშინ

$$\int_{AB} f(M)ds=\int_{BA} f(M)ds.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი, გავრცელებული სივრცით γ წირზე:

$$\int_\gamma f(M)ds=\int_\gamma f(x,y,z)ds.$$

აქ იგულისხმება, რომ სივრცეში აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და f ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ γ წირზე.

ადვილი დასამტკიცებელია პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1°. თუ არსებობს γ წირზე აღებული $f(M)$ და $g(M)$ ფუნქციების პირველი გვარის წირითი ინტეგრალები, მაშინ არსებობს $f(M)+ +g(M)$ და $f(M)-g(M)$ ფუნქციების პირველი გვარის წირითი ინტეგრალები და

$$\int_\gamma [f(M)\pm g(M)]ds=\int_\gamma f(M)ds\pm\int_\gamma g(M)ds.$$

2°. თუ არსებობს γ წირზე აღებული $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი, მაშინ არსებობს $kf(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი, სადაც k ნებისმიერი მუდმივია, და მართებულია ტოლობა

$$\int_{\gamma} kf(M)ds = k\int_{\gamma} f(M)ds.$$

3°. თუ არსებობს $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი $\gamma=AB$ წირზე და ეს წირი შიგა C წერტილით გაყოფილია AC და CB ნაწილად, მაშინ

$$\int_{AB} f(M)ds = \int_{AC} f(M)ds + \int_{CB} f(M)ds.$$

თეორემა 1. თუ არსებობს $\gamma=AB$ წირზე აღებული $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი და $|f(M)|\leqslant K$, მაშინ

$$\left|\int_{\gamma} f(M)ds\right| \leqslant Kl, \tag{1.1}$$

სადაც l წარმოადგენს γ წირის სიგრძეს.

დამტკიცება. γ წირის ნებისმიერი $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ დანაწილებისა და $M_k \in A_{k-1}A_k$ $(k=1,\ldots,n)$ წერტილების ყოველნაირი შერჩევისათვის გვაქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(M_k)|\Delta s_k \leqslant K\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = Kl.$$

აქედან, თუ ზღვარზე გადავილთ, როცა ყველა $\Delta s_k \to 0$, მივიღებთ (1.1) უტოლობას.

თეორემა 2. თუ γ წირი წრფევადია და $f(M)=f(x,y,z)$ ფუნქცია უწყვეტია γ-ზე, მაშინ არსებობს γ-ზე აღებული $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი და მართებულია ტოლობა

$$\int_{\gamma} f(M)ds = \int_{0}^{l} f[x(s),\ y(s),\ z(s)]ds, \tag{1.2}$$

სადაც $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$ წარმოადგენს γ წირის

ნატურალურ განტოლებებს, ხოლო l არის γ წირის სიგრძე.

დამტკიცება. $\gamma=AB$ წირის A წერტილი მივიღოთ საწყის წერტილად. ამ წირის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება გარკვეული s რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს AM რკალის სიგრძეს.

γ წირის განტოლებები ნატურალური სახით წარმოვადგინოთ:

$$x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s),\ 0\leqslant s\leqslant l.$$

აქ პარამეტრად აღებულია ცვლადი რკალის s სიგრძე.

დავყოთ γ წირი ქვერკალებად $A=A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n=B$ წერტილებით და ყოველ $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $M_k(k=1, 2, \dots, n)$. აღვნიშნოთ A_k და M_k წერტილების შესაბამისი ნატურალური პარამეტრის მნიშვნელობანი s_k და σ_k-თი; მაშინ $s_k - s_{k-1}=\Delta s_k$ სხვაობა $A_{k-1}A_k$ რკალის სიგრძეა, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{n} f(M)\Delta s_k=\sum_{k=1}^{n} f[x(\sigma_k),\ y(\sigma_k),\ z(\sigma_k)]\Delta s_k. \tag{1.3}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს $[0,l]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f[x(s), y(s), z(s)]$ ფუნქციის რიმანის ჯამს, ამიტომ ამ ინტეგრალური ჯამის ზღვარია $f[x(s), y(s), z(s)]$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი, გავრცელებული $[0,l]$ სეგმენტზე. მაშასადამე, თუ (1.3) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც ყოველი $\Delta s_k\to 0$, მივიღებთ (1.2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ γ წირის განტოლებებია

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს γ წირზე უწყვეტი $f(M)=f(x, y, z)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი, აღებული γ წირზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_{\gamma} f(M)ds=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{1.4}$$

დამტკიცება. ცხადია, γ წირი წრფევადია და თუ t პარამეტრის ზრდისას AM რკალის $s=s(t)$ სიგრძე იზრდება, მაშინ

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

(1.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდინოთ ცვლათა გარდაქმნა $s=s(t)$, მივიღებთ (1.4) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ γ წირი მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე, მაშინ (1.4) ფორმულა ასე დაიწერება

$$\int_\gamma f(M)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),\,y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{1.5}$$

როდესაც γ წირი მოცემულია ცხადი განტოლებით

$$y=y(x),\ a\leqslant x\leqslant b,$$

მაშინ (1.5) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\int_\gamma f(M)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1.6}$$

§ 2. წირზე განაწილებული მასის გამოთვლა

ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია უწყვეტი წრფევადი $\gamma=\overset{\frown}{AB}$ წირი, რომლის გასწვრივ განაწილებულია მასა, ამასთან ცნობილია წირის ყოველ წერტილში წრფივი $\rho(M)$ სიმკვრივე. ვიპოვოთ γ წირზე განაწილებული m მასა. ამ მიზნით დავყოთ γ წირი ნაწილებად $A=A_0$, $A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n=B$ წერტილებით (ნახ. 14). $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი M_k წერტილი და დავუშვათ, რომ $A_{k-1}A_k$ რკალის ყოველ წერტილში სიმკვრივე არის $\rho(M_k)$. მაშინ $A_{k-1}A_k$ რკალზე განაწილებული m_k მასისათვის გვექნება მიახლოებითი გამოსახულება

$$m_k\simeq\rho(M_k)\Delta s_k,$$

სადაც Δs_k სიმბოლოთი აღნიშნულია A_{k-1}, A_k რკალის სიგრძე. მთელი საძიებელი m მასისათვის გვექნება მიახლოებითი გამოსახულება

$$m\simeq\sum_{k=1}^n \rho(M_k)\Delta s_k.$$

თუ $\rho(M)$ უწყვეტი ფუნქციაა γ წირზე, მაშინ არსებობს მიღებული მიახლოებითი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი, როცა ყველა $\Delta s_h \to 0$ და m მასისათვის მივიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას

$$m=\int_{\gamma} \rho(M)ds. \tag{2.1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ ჯაჭვწირის იმ ნაწილის მასა, რომლის ბოლოების აბსცისებია $x=0$, $x=a$, თუ წირის სიმკვრივე ყოველ მის წერტილში წერტილის ორდინატის პროპორციულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირობის თანახმად, $\rho=\frac{k}{y}$, სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია. შემდეგ

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+sh^2x}=ch\,\frac{x}{a}=\frac{y}{a}.$$

მაშასადამე,

$$ds=\frac{y}{a}dx.$$

დასასრულ, (2.1) ფორმულის თანახმად

$$m=\int_0^a \frac{k}{y}\cdot\frac{y}{a}dx=k.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევისწავლოთ მატერიალური წერტილის მატერიალური წირით მიზიდულობის საკითხი.

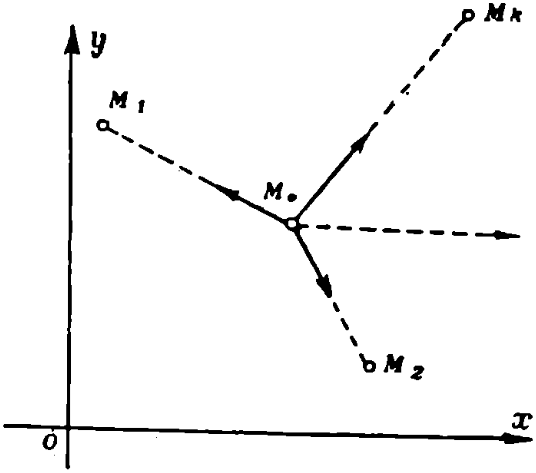
როგორც ცნობილია, ნიუტონის კანონის თანახმად, მატერიალური M წერტილი m მასით იზიდავს მატერიალურ M_0 წერტილს m_0 მასით იმ ძალით, რომელიც მიმართულია M_0 წერტილიდან M წერტილისაკენ და სიდიდით ტოლია $k\cdot\frac{mm_0}{r^2}$ გამოსახულებისა, სადაც r მანძილია M_0 და M წერტილებს შორის, ხოლო k არის კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია საზომი ძირითადი ერთეულების შერჩევაზე. სიმარტივისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $k=1$.

თუ M_0 წერტილს იზიდავს $M_1, M_2, \dots, M_n$ წერტილები, მასებით $m_1, m_2, \dots, m_n$, მაშინ ტოლქმედი მიიღება ცალკეული წერტი-

ლების მიზიდულობის ძალების გეომეტრიული შეკრებით. ამავე დროს ტოლქმედის გეგმილი კოორდინატთა ღერძებზე შესაკრები ძალების გეგმილების ალგებრული ჯამის ტოლია. თუ ტოლქმედის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე აღვნიშნავთ X და Y-ით, ხოლო კუთხეს $\vec{r_k}=\overrightarrow{M_0 M_k}$ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის ϑ_k-თი (ნახ. 15), მაშინ

$$X=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_0 m_k}{r_k^2}\cos\vartheta_k, \qquad Y=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_0 m_k}{r_k^2}\sin\vartheta_k,$$

სადაც r_k აღნიშნავს $\vec{r_k}$ ვექტორის სიგრძეს.



ნახ. 15.

ახლა ვთქვათ, მიმზიდველი მასა უწყვეტად განაწილებულია γ წირზე. მიზიდულობის ძალის მოსაძებნად დავყოთ γ წირი ნაწილებად და წირის ყოველი ნაწილის მასა მოვათავსოთ ამ ნაწილის ნებისმიერ M_k წერტილში. მაშინ კოორდინატთა ღერძებზე ტოლქმედის X და Y გეგმილების მიახლოებითი მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$X\simeq\sum_{k}\frac{m_0\rho(M_k)\Delta s_k}{r_k^2}\cos\vartheta_k,$$

$$Y\simeq\sum_{k}\frac{m_0\rho(M_k)\Delta s_k}{r_k^2}\sin\vartheta_k,$$

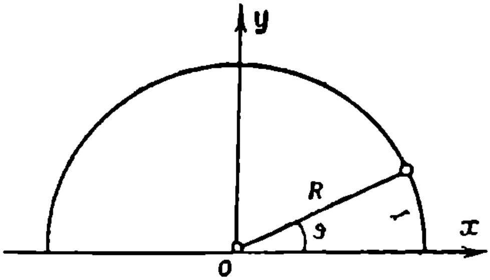
ვინაიდან წირის ცალკეული ნაწილის მასა მიახლოებით $\rho(M_k)\Delta s_k$ სიდიდის ტოლია. თუ ყველა $\Delta s_k \to 0$, მაშინ ზღვარში მივიღებთ ზუსტ ტოლობას:

$$X = m_0 \int_\gamma \frac{\rho(M)\cos\vartheta}{r^2}\, ds, \quad Y = m_0 \int_\gamma \frac{\rho(M)\sin\vartheta}{r^2}\, ds, \qquad (2.2)$$

სადაც r აღნიშნავს $\vec{r} = \overline{M_0 M}$ ვექტორის სიგრძეს, ხოლო ϑ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{r}$ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ ის მიზიდულობა, რომელსაც ახდენს ერთგვაროვანი ნახევარწრეწირი ცენტრში მოთავსებულ ერთეულ მასაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიგულისხმოთ, რომ ნახევარწრეწირის სიმკვრივე $\rho = 1$. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ნახევარწრეწირის ცენტრში (ნახ. 16).



ნახ. 16.

რადგანაც მოცემული ნახევარწრეწირი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ $X = 0$. მაშასადამე, დაგვრჩა მოსაძებნი მხოლოდ Y გეგმილი. (2.2) ფორმულის თანახმად

$$Y = \int_\gamma \frac{\sin\vartheta}{r^2}\, ds,$$

სადაც γ აღნიშნავს მოცემულ ნახევარწრეწირს. ჩვენს შემთხვევაში $r = R$ (ნახევარწრეწირის რადიუსი) და $ds = R d\vartheta$, ამიტომ

$$Y = \frac{1}{R}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{R}.$$

ამრიგად, $X = 0$, $Y = \dfrac{2}{R}$.

§ 3. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია ღია უწყვეტი $\gamma = AB$ წირი, (ნახ. 14) და განვიხილოთ ამ წირზე განსაზღვრული $f(M) = f(x, y)$ ფუნქცია. ავიღოთ γ წირზე A-დან B წერტილისაკენ მოძრაობისას $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ წერტილები; ეს წერტილები დაყოფს γ წირს ნაწილებად

$$\overset{\frown}{A_0A_1}, \quad \overset{\frown}{A_1A_2}, \ldots, \quad \overset{\frown}{A_{n-1}A_n},$$

სადაც $A_0 = A$, $A_n = B$. ყოველ $A_{k-1}A_k$ რკალზე ($k = 1, 2, \ldots, n$ ავიღოთ ნებისმიერი $M_k = (\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k,$$

სადაც Δx_k არის $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე.

თუ არსებობს σ ჯამის ზღვარი, როდესაც თითოეული $A_{k-1}A_k$ ვექტორის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი დამოკიდებული არაა γ წირის დაყოფის წესზე და არც M_k წერტილების არჩევისაგან, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება AB წირზე აღებული მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს წ ი რ ი თ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $f(M)dx$-დან და აღინიშნება

$$\int_{AB} f(M)dx \quad \text{ან} \quad \int_{AB} f(x, y)dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(M)dx$ დიფერენციალი ინტეგრებადია AB წირის გასწვრივ.

ახლა შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta y_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

სადაც Δy_k არის $A_{k-1}A_k$ ვექტორის გეგმილი Oy ღერძზე. თუ არსებობს σ^* ჯამის ზღვარი, როდესაც თითოეული $\overline{A_{k-1}A_k}$ ვექტორის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი დამოკიდებული არაა γ წირის დაყოფის წესზე და არც M_k წერტილების არჩევისაგან, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება AB წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $f(M)dy$-დან და აღინიშნება

$$\int_{AB} f(M)dy \quad \text{ან} \quad \int_{AB} f(x, y)dy.$$

თუ AB წირზე განსაზღვრულია ორი ფუნქცია $P(x,y)$, $Q(x,y)$ და არსებობს ინტეგრალები

$$\int_{AB} P(x,y)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y)dy,$$

მაშინ ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება ზოგადი სახის წირითი ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

აღსანიშნავია, რომ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის განსაზღვრაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს AB რკალის მიმართულებას. მართლაც, γ წირზე წერტილთა A_1, A_2, ..., A_{n-1}, B მიმდევრობის ნაცვლად რომ მივიღოთ ახალი მიმდევრობა, რომელიც დანომრილია B-დან A-საკენ მოძრაობის მიხედვით, მაშინ $\overline{A_{k-1}A_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ვექტორის ნაცვლად გვექნება $\overline{A_kA_{k-1}}$ ვექტორი და ამ ვექტორის გეგმილი Ox (Oy) ღერძზე იქნება $-\Delta x_k(-\Delta y_k)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ არსებობს AB წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $f(M)dx$-დან, მაშინ იარსებებს BA წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალიც $f(M)dx$-დან და მართებულია ტოლობა

$$\int_{BA} f(M)dx=-\int_{AB} f(M)dx.$$

ანალოგიურად გვექნება

$$\int_{BA} f(x,y)dy=-\int_{AB} f(x,y)dy.$$

მსგავსად შეგვიძლია შემოვიღოთ სივრცით AB წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი. სახელდობრ, ვთქვათ, $f(M)=f(x,y,z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია AB წირზე და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k.$$

განვიხილოთ ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც ყველა $\overline{A_{k-1}A_k}$ ვექტორის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის. ამ ზღვარს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება AB წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $f(M)dx$-დან და აღინიშნება

$$\int_{AB} f(M)dx \text{ ან } \int_{AB} f(x,y,z)dx.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ინტეგრალები

$$\int_{AB} f(x,y,z)dy \text{ და } \int_{AB} f(x,y,z)dz.$$

თუ AB წირზე განსაზღვრულია სამი ფუნქცია $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ და არსებობს ინტეგრალები

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy, \quad \int_{AB} R(x,y,z)dz,$$

მაშინ ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება ზოგადი სახის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz.$$

აქაც, თუ ინტეგრების მიმართულებას შევცვლით, ინტეგრალს ნიშანი ეცვლება, ე. ი.

$$\int_{BA} Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz.$$

ადვილად მტკიცდება შემდეგი დებულება: თუ არსებობს AB წირზე აღებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $f(M)dx$-დან და თუ AB წირი გაყოფილია შიგა C წერტილით AC და CB რკალებად, მაშინ

$$\int_{AB} f(M)dx=\int_{AC} f(M)dx+\int_{CB} f(M)dx.$$

თეორემა 1. განვიხილოთ უწყვეტი $\gamma=AB$ წირი, რომლის განტოლებებია

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

და ვიგულისხმოთ, რომ (x,y,z) წერტილი აღწერს AB წირს, როდესაც t იზრდება α-დან β-მდე. თუ $x'(t)$ არსებობს და უწყვეტია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x,y,z)dx$ დიფერენციალი, სადაც $f(x,y,z)=f(M)$ უწყვეტი ფუნქციაა γ-ზე, ინტეგრებადია AB წირის გასწვრივ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{AB} f(x, y, z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt. \quad (3.1)$$

დამტკიცება. AB რკალზე A წერტილიდან B წერტილისაკენ მოძრაობისას ავიღოთ წერტილები

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B.$$

აღვნიშნოთ t_k-თი t პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც A_k წერტილს შეესაბამება, მაშინ

$$A_k = (x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

τ_k იყოს t პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $A_{k-1}A_k$ რკალზე აღებული ნებისმიერი M_k წერტილს. ცხადია, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k))[x(t_k) - x(t_{k-1})].$$

რადგანაც $f(M)$ ფუნქცია უწყვეტია უწყვეტ AB წირზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია ამ წირზე და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი K, რომ

$$|f(M)| \leqslant K, \quad M \in AB.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რაკი $x'(t)$ წარმოებული თანაბრად უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ აღებული ε-სათვის არსებობს t-ზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ყოველი ორი t' და t'' წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|t'' - t'| < \eta$, მართებულია უტოლობა

$$|x'(t'') - x(t')| < \frac{\varepsilon}{K(\beta - \alpha)}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ ყოველი $t_k - t_{k-1} < \eta$. თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას, გვექნება

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k))x'(\vartheta_k)\Delta t_k,$$

სადაც $\vartheta_k \in]t_{k-1}, t_k[$. ცხადია, რომ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{r} f(x(\tau_k),\ y(\tau_k),\ z(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k),\ y(\tau_k),\ z(\tau_k))\,[x'(\vartheta_k) - x'(\tau_k)]\Delta t_k = \sigma_1 + \sigma_2.$$

შევაფასოთ σ_2. გვაქვს

$$|\sigma_2| \leqslant K \sum_{k=1}^{n} |x'(\vartheta_k) - x'(\tau_k)|\,\Delta t_k < K \cdot \frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)}(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$|\sigma - \sigma_1| < \varepsilon. \qquad (3.2)$$

რაკი $\lim\sigma_1$ არსებობს და

$$\lim\sigma_1 = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t)dt,$$

ამიტომ (3.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს σ ჯამის ზღვრის არსებობა და (3.1) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $\gamma = AB$ წირი მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე და ამ წირის განტოლებებია

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

სადაც $y(t)$ უწყვეტია, ხოლო $x(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, მაშინ γ წირზე ყოველი უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))x'(t)dt. \qquad (3,3)$$

კერძოდ, როცა γ წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით

$$y = \varphi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

სადაც $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,\ b]$ სეგმენტზე, მაშინ γ-ზე ყოველი უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,\varphi(x))dx. \qquad (3.4)$$

თუ AB წირის განტოლებაა $x=\psi(y)$, $(c\leqslant y\leqslant d)$, მაშინ AB წირზე ყოველი უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy=\int\limits_{c}^{d} f(\psi(y),y)dy. \tag{3.5}$$

ახლა ვთქვათ, AB წირი Ox ღერძის პარალელურ მონაკვეთს წარმოადგენს. მაშინ არსებობს ამ წირზე აღებული წირითი ინტეგრალი $f(x,y,z)dx$ დიფერენციალიდან, სადაც $f(x,y,z)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც უწყვეტია x-ის მიმართ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx=\int\limits_{a}^{b} f(x,y_0,z_0)dx,$$

სადაც a და b წარმოადგენენ შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებს, ამასთან y_0 და z_0 არიან A წერტილის y და z კოორდინატები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ წირითი ინტეგრალი $I=\int\limits_{\gamma}(x^2+y^2)dx$, თუ γ წარმოადგენს $y=x^2$ პარაბოლის რკალს $A(0,0)$ წერტილიდან $B(3, 9)$ წერტილამდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ინტეგრების წირი მოცემულია ცხადი განტოლებით, ამიტომ (3.4) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$I=\int\limits_{0}^{3}(x^2+y^4)dx=57,6.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\limits_{\gamma}(x^2-y^2)dx,$$

თუ γ არის $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ზედა ნახევარი, ამასთან, γ წირის საწყისი წერტილია $A=(a, 0)$, ბოლო კი $B=(-a,0)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ ელიფსის პარამეტრული განტოლებები

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

ჩვენს შემთხვევაში $0\leqslant t\leqslant\pi$. აქედან $dx=-a\sin t dt$. მაშასადამე, (3.3) ფორმულის თანახმად

$$I=-\int_0^{\pi}(a^2\cos^2t-b^2\sin^2t)a\sin t\,dt=-a^3\int_0^{\pi}\cos^2t\sin t\,dt+$$

$$+ab^2\int_0^{\pi}\sin^3t\,dt=-\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}ab^2=\frac{2}{3}a(2b^2-a^2).$$

§ 4. კავშირი პირველი და მეორე გვარის წირით ინტეგრალებს შორის

ვთქვათ, მოცემულია სივრცითი $\Gamma=AB$ წირი, რომლის განტოლებებია

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[t_0, T]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ Γ წირზე რაიმე უწყვეტი $f(M)\equiv f(x,y,z)$ ფუნქცია. ვთქვათ, A წირის საწყისი წერტილია, B კი ბოლო წერტილი, ე. ი. Γ წირზე დადებით მიმართულებად დავაწესოთ ის, რომელიც t პარამეტრის t_0-დან T-მდე ზრდას შეესაბამება.

Γ წირის M წერტილში გავავლოთ მხები და აღვნიშნოთ α-თი ამ მხების დადებით მიმართულებასა და Ox ღერძს შორის მოთავსებული კუთხე. ცხადია, α წარმოადგენს M წერტილის უწყვეტ ფუნქციას და

$$\cos\alpha=\cos(x(t),\ y(t),\ z(t))=\frac{dx}{ds},$$

სადაც s არის t წერტილის შესაბამისი რკალის სიგრძე.

განვიხილოთ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი

$$\int_{AB}f(M)dx=\int_{AB}f(x,y,z)dx.$$

მე-4 თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\int_{AB}f(M)dx=\int_{t_0}^{T}f(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t)dt.$$

მაგრამ

$$x'(t)=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\cos\alpha\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}.$$

მაშასადამე,

$$\int_{AB} f(M)dx=\int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t))\cos(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

მეორე მხრივ, მეორე თეორემის თანახმად, ამ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს γ წირზე აღებულ $f(M)\cos\alpha$ ფუნქციის პირველი გვარის წირით ინტეგრალს. მაშასადამე,

$$\int_{AB} f(M)dx=\int_{AB} f(M)\cos\alpha ds. \tag{4.1}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\int_{AB} f(M)dy=\int_{AB} f(M)\cos\beta ds, \tag{4.2}$$

$$\int_{AB} f(M)dz=\int_{AB} f(M)\cos\gamma ds, \tag{4.3}$$

სადაც β და γ წარმოადგენენ Γ წირის M წერტილში გავლებული მხების დადებით მიმართულებას და, სათანადოდ, Oy და Oz ღერძებს შორის მოთავსებულ კუთხეებს.

ახლა ვთქვათ, Γ წირი მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე და მისი განტოლებებია

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[t_0, T]$ სეგმენტზე. მაშინ Γ-ზე უწყვეტი $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციებისათვის გვექნება

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB} [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\,ds, \tag{4.4}$$

სადაც α და β წარმოადგენენ Γ წირის მხების დადებით მიმართულებასა და, სათანადოდ, Ox და Oy ღერძებს შორის მოთავსებულ კუთხეებს.

რადგანაც $\cos\beta=\sin\alpha$, ამიტომ (4.4) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB} [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\sin\alpha]\,ds. \tag{4.5}$$

დასასრულ, აღვნიშნოთ $\vec{n}$-ით ნორმალის ისეთი მიმართული ორტი, რომელიც Γ წირის ყოველ წერტილში გავლებულ დადებით მხებთან

$+\frac{\pi}{2}$ კუთხეს ადგენს, ე. ი. მხებიდან ნორმალის აღნიშნული მიმართულების მისაღებად პირველის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით შემობრუნებაა საჭირო სიბრტყეზე არჩეული ორიენტაციის თანახმად. ასეთ შემთხვევაში $(\widehat{x,n})$-ით იმ კუთხეს აღვნიშნავთ, რომელსაც Ox ღერძის მიმართულება $\vec{n}$ ორტის მიმართულებასთან ადგენს. ამიტომ

$$(\widehat{x,n})=\alpha+\frac{\pi}{2}.$$

ცხადია, რომ

$$\cos\alpha=\sin(\widehat{x,n}),\ \sin\alpha=-\cos(\widehat{x,n}),$$

მაშასადამე, (4.5) ფორმულიდან გვაქვს

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB}[P(x,y)\sin(\widehat{x,n})-Q(x,y)\cos(\widehat{x,n})]\ dx. \tag{4.6}$$

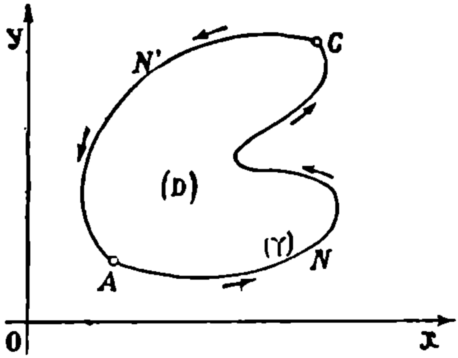
§ 5. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის განსაზღვრა შეკრული კონტურის შემთხვევაში

მრავალი ამოცანის ამოხსნისას საჭირო ხდება წირითი ინტეგრალის აღება შეკრულ წირზე. ამ შემთხვევაში, რაკი წირის საწყისი წერტილი ბოლო წერტილს ემთხვევა, ამიტომ ინტეგრალის აღებისას სპეციალურად უნდა იყოს აღნიშნული წირის შემოვლის მიმართულება.

ბრტყელი შეკრული კონტურის (წირის) შემთხვევაში კონტურის შემოვლის მიმართულების აღნიშვნა მარტივად ხდება დეკარტის კოორდინატთა სისტემის გამოყენებით.

ვთქვათ, შეკრული მარტივი γ წირი მოთავსებულია სიბრტყეზე და შემოსაზღვრავს D არეს. ავიღოთ ამ სიბრტყეზე კოორდინატთა Oxy სისტემა. თუ კოორდინატთა აღებული სისტემა მარჯვენაა, ე. ი. Ox ღერძის Oy ღერძზე დასამთხვევად საჭიროა პირველის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ γ წირზე შემოვლის დადებით მიმართულებად იღებენ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებას; უფრო ზუსტად, γ წირზე დადებითი მიმართულებით შემოვლისას დამკვირვებელი, რომელიც ამ მიმართულებით მიჰყვება კონტურს, D არეს მარცხნით ტოვებს

(ნახ. 17). ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია ორიენტაცია. თუკი Oxy წარმოადგენს მარცხენა სისტემას, ე. ი. Ox ღერძის Oy ღერძზე დასამთხვევად საჭიროა პირველის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ γ წირზე შემოვლის დადებით მიმართულებად ითვლება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულება; უფრო ზუსტად, γ წირზე დადებითი მიმართულებით შემოვლისას, დამკვირვებელი, რომელიც ამ მიმართულებით მიჰყვება წირს, D არეს მარჯვნივ ტოვებს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სიბრტყეზე მოცემულია მარცხენა ორიენტაცია.



ნახ. 17.

ახლა ვთქვათ, შეკრულ γ კონტურზე, რომელზედაც არჩეულია მიმართულება, მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია $f(M)$. ამ წირზე ავიღოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ორი წერტილი A და C (ნახ. 17). განსაზღვრის მიხედვით

$$\int_{\gamma} f(M)dx = \int_{ANC} f(M)dx + \int_{CN'A} f(M)dx.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ინტეგრალის სიდიდე დამოუკიდებელია A და C წერტილების არჩევისაგან. ამის გარდა, შეკრული კონტურებისათვისაც გამოიყენება (3.3) ფორმულა.

§ 6. ფართობის გამოთვლა წირითი ინტეგრალის საშუალებით

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე D არე, რომელიც შემოსაზღვრულია Oy ღერძის პარალელური AA' და BB' წრფეებით და ორი AB

და $A'B'$ წირებით, რომლებსაც კვეთს Oy ღერძის პარალელური ყოველი წრფე არა უმეტეს ერთი წერტილისა (ნახ. 18).

A' წერტილი შეიძლება დაემთხვეს A წერტილს, B' წერტილი B წერტილს.

ვთქვათ, AB და $A'B'$ წირების განტოლებებია შესაბამისად

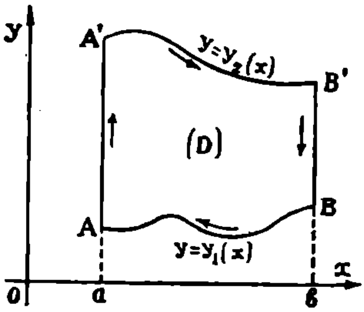
$$y=y_1(x),\quad y=y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

მრუდწირული $ABB'A'$ ტრაპეციის S ფართობი წარმოადგენს $abB'A'$ და $abBA$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობთა სხვაობას:

$$S=\int_a^b y_2(x)dx-\int_a^b y_1(x)dx.$$

მეორე მხრივ,

$$\int_{AB} ydx=\int_a^b y_1(x)dx,\qquad \int_{A'B'} ydx=\int_a^b y_2(x)dx.$$



ნახ. 18.

მაშასადამე,

$$S=\int_{A'B'} ydx+\int_{BA} ydx.$$

თუ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს მივუმატებთ ინტეგრალებს

$$\int_{AA} ydx \text{ და } \int_{B'B} ydx,$$

რომლებიც ნულის ტოლია, მაშინ ტოლობა არ დაირღვევა. ამრიგად,

$$S=\int_{AA'B'BA} ydx.$$

თუ D არის კონტურს აღვნიშნავთ γ ასოთი, მაშინ სიმბოლო $\int\limits_{\gamma} ydx$ აღნიშნავს ინტეგრალს, აღებულს დადებითი მიმართულებით. ღერძების მარჯვენა ორიენტაციის შემთხვევაში, რომელიც მოცემულია მე-18 ნახაზზე, ეს იქნება შემოვლის მიმართულება, რომელიც არეს ტოვებს მარცხნივ, იმ დროს, როცა $AA'B'BA$ მიმართულება ამ არეს ტოვებს მარჯვნივ. ამიტომ

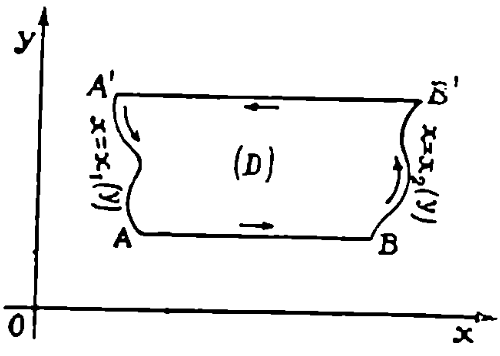
$$\int\limits_{AA'B'BA} ydx = -\int\limits_{\gamma} ydx.$$

მაშასადამე,

$$S = -\int\limits_{\gamma} ydx. \qquad (6.1)$$

$ABB'A'$ ფიგურისათვის (ნახ. 19), რომელიც შემოსაზღვრულია Ox ღერძის პარალელური AB და $A'B'$ წრფეებით, და ორი მრუდით AA' და BB'

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$



ნახ. 19.

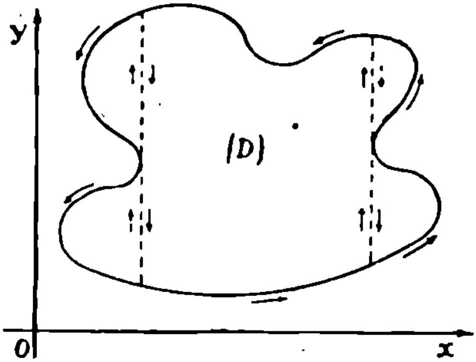
მსგავსი მსჯელობების საშუალებით მივიღებთ ფორმულას

$$S = \int\limits_{\gamma} xdy. \qquad (6.2)$$

(6.1) ფორმულა მართებულია უფრო რთული ფიგურებისათვისაც, რომელიც დაიყოფა Oy ღერძის პარალელური წრფეებით განხილული

სახის მრუდწირულ ტრაპეციებად (ნახ. 20). თითოეული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება (6.1) ფორმულით. თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მარცხნივ მივიღებთ D ფიგურის ფართობს, მარჯვნივ კი — D ფიგურის ნაწილების კონტურებზე გავრცელებულ ინტეგრალების ჯამს. მაგრამ თითოეულ დამხმარე მონაკვეთზე აღებული ინტეგრალი ნულის ტოლია. მაშასადამე, მარჯვნივ გვექნება D ფიგურის კონტურზე გავრცელებული ინტეგრალი· ამრიგად, (6.1) ფორმულა ძალაში რჩება რთული სახის ფიგურებისათვისაც.

(6.2) ფორმულას ადგილი აქვს აგრეთვე ისეთი ფიგურისათვის, რომლის დაყოფა შეიძლება Ox ღერძის პარალელური წრფეებით, მე-19 ნახაზზე მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციებად.



ნახ. 20.

თუ (6.1) და (6.2) ტოლობებს წევრ წევრად შევკრებთ და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილს ორზე გავყოფთ, გვექნება

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma} x\,dy - y\,dx. \qquad (6.3)$$

ეს სიმეტრიული ფორმულაა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ელიფსის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ ელიფსის პარამეტრული განტოლებით:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

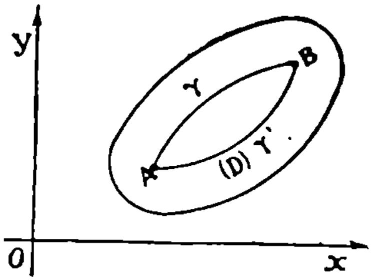
(6.3) ფორმულის მიხედვით

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\,.\,b\cos t-b\sin t\cdot(-b\sin t)]dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

§ 7. წირითი ინტეგრალის ინტეგრების გზიდან დამოუკიდებლობის პირობები

1°. წირითი ინტეგრალის დამოუკიდებლობა ინტეგრების წირისაგან. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია D არე, რომელზედაც უწყვეტია $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციები. ავიღოთ არეში რაიმე უბან-უბან



ნახ. 21.

გლუვი γ წირი, რომლის ბოლო წერტილებია A და B (ნახ. 21). განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი

$$I=\int_\gamma Pdx+Qdy.$$

თუ ავიღებთ D არეში სხვა γ' წირს, რომელიც აგრეთვე აერთებს A და B წერტილებს, მაშინ წირითი ინტეგრალი $\int_{\gamma'} Pdx+Qdy$ საზოგადოდ განსხვავდება I ინტეგრალისაგან. მართლაც, განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია $A(0,1)$ და $B(2,5)$ წერტილები. გამოვთვალოთ წირითი ინტეგრალი

$$I=\int_{\gamma}(x+y)dx-2ydy$$

ორ სხვადასხვა წირზე: a) γ წირი AB მონაკვეთია; b) γ წირი $y=x^2+1$ პარაბოლის AB რკალია.

ამოხსნა. a) შემთხვევაში γ წირის განტოლებაა $y=2x+1$. ამიტომ

$$\int_{\gamma}(x+y)dy-2ydy=\int_{0}^{2}(x+2x+1)dx-4(2x+1)dx=-16.$$

b) შემთხვევაში გვაქვს

$$\int_{\gamma}(x+y)dx-2ydy=\int_{0}^{2}(x+x^2+1)dx-4x(x^2+1)dx=-\frac{52}{3}.$$

ამრიგად, მოცემულ წირით ინტეგრალს განხილულ ორ წირზე სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს.

ისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს P და Q ფუნქციები, რომ ინტეგრალი $\int_{\gamma}Pdx+Qdy$ დამოუკიდებელი იყოს A და B წერტილების შემაერთებელ γ წირისაგან, ანუ, როგორც ხშირად შემოკლებით ამბობენ, ინტეგრების გზისაგან. სანამ დასმულ კითხვას ვუპასუხებდეთ, დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 5. წირითი ინტეგრალის გზისაგან დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ D არეში ყოველ შეკრულ წირზე ინტეგრალი ნულის ტოლი იყოს.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, ინტეგრალი დამოუკიდებელია ინტეგრების წირისაგან და γ რაიმე შეკრული წირია D არეში. ავიღოთ γ წირზე ორი ნებისმიერი A და B წერტილი და განვიხილოთ γ წირის რკალები AmB და $Am'B$ (ნახ. 22). პირობის ძალით

$$\int_{AmB}Pdx+Qdy=\int_{Am'B}Pdx+Qdy.$$

აქედან

$$\int_{AmB}Pdx+Qdy-\int_{Am'B}Pdx+Qdy=0,$$

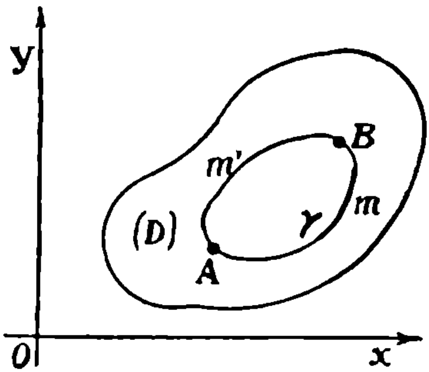
ე. ი.

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy+\int\limits_{Bm'A} Pdx+Qdy=0.$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=0.$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, D არეში ყოველ უბან-უბან გლუვ შეკრულ წირზე ინტეგრალი ნულის ტოლია.. ვაჩვენოთ, რომ ეს ინტეგრალი დამოუკიდებელია ინტეგრების წირისაგან. ამისათვის განვიხილოთ D არის ნებისმიერი ორი A და B წერტილი და შევაერთოთ ისინი ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი ორი AmB და $Am'B$



ნახ. 22.

წირით (ნახ. 22), რომლებიც მთლიანად მოთავსებულია D არეში. პირობის თანახმად

$$\int\limits_{AmBm'A} Pdx+Qdy=0.$$

აქედან

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy+\int\limits_{Bm'A} Pdx+Qdy=0.$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy=\int\limits_{Am'B} Pdx+Qdy,$$

ე. ი. განსახილავი წირითი ინტეგრალი დამოუკიდებელია ინტეგრების წირისაგან. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა. ბრტყელ D არეს ცალადბმული ეწოდება, თუ ამ არეში აღებული ყოველი შეკრული მარტივი Γ წირით შემოსაზღვრული G არე მთლიანად მოთავსებულია D არეში.

თეორემა 8. *ვთქვათ, $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია D არეში. იმისათვის, რომ წირითი ინტეგრალი*

$$\int Pdx+Qdy \tag{7.1}$$

იყოს გზისაგან დამოუკიდებელი აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს D არეში დიფერენცირებადი $U(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი $Pdx+Qdy$ გამოსახულების ტოლია D არეში.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული ინტეგრალი გზისაგან დამოუკიდებელია. ავიღოთ D არეში რაიმე ფიქსირებული $A(x_0, y_0)$ წერტილი და ნებისმიერი $B(x,y)$ წერტილი. A წერტილი B წერტილთან შევაერთოთ რაიმე გლუვი γ წირით და შევნიშნოთ, რომ ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ B წერტილის მდებარეობაზე და, მაშასადამე, ეს ინტეგრალი იქნება x და y ცვლადების ფუნქცია:

$$U(x,y)=\int_{\gamma} Pdx+Qdy$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$dU=Pdx+Qdy$$

D არის ყოველ წერტილში. ამისათვის განვიხილოთ

$$U(x+h,y)-U(x,y)$$

სხვაობა, სადაც h იმდენად მცირე სიდიდეა, რომ (x, y) და $(x+h,y)$ წერტილების იემაერთებელი მონაკვეთი მთლიანად D არეს ეკუთვნის (ნახ. 23). $U(x+h,y)$ წარმოადგენს A და $B'(x+h,y)$ წერტილების შემაერთებელი გზის გასწვრივ აღებულ (7.1) ინტეგრალს, რომლის გზიდან დამოუკიდებლობის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს გზა არის $AB+BB'$. მაშინ გვექნება

$$U(x+h,y)=\int_{AB} Pdx+Qdy+\int_{BB'} Pdx+Qdy=$$

$$=U(x,y)+\int_x^{x+h} P(t,y)dt.$$

მაგრამ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად,

$$\int_x^{x+h} P(t,y)dt=hP(x+\theta h,y) \quad (0<\theta<1).$$

ამიტომ

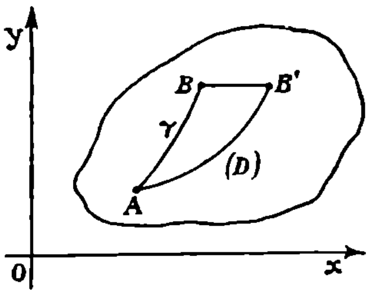
$$U(x+h,y)-U(x,y)=hP(x+\theta h,y).$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ h-ზე და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $h\to 0$, მივიღებთ

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=P(x,y).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y).$$



ნახ. 23.

მაშასადამე, რაკი $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციები უწყვეტია D არეში, ამიტომ $U(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია D არეში და

$$dU=Pdx+Qdy$$

ყველგან D არეში. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $U(x,y)$ ფუნქცია, რომ

$$dU=Pdx+Qdy.$$

მაშინ გვექნება

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

D არის ყოველ წერტილში.

ავალოთ D არის ნებისმიერი ორი წერტილი $A(x_0,y_0)$ და $B(x_1,y_1)$ და შევაერთოთ ისინი რაიმე გლუვი წირით γ:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

$$x(\alpha)=x_0,\quad y(\alpha)=y_0;\quad x(\beta)=x_1,\quad y(\beta)=y_1.$$

ასეთ პირობებში გვექნება

$$\int_\gamma Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta P(x(t),\ y(t))x'(t)dt+Q(x(t),\ y(t))y'(t)dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta [U'_x(x(t),\ y(t))x'(t)+U'_y(x(t),\ y(t))y'(t)]dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}[U(x(t),\ y(t))]dt=U(x(\beta),\ y(\beta))-U(x(\alpha),\ y(\alpha))=$$

$$=U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0).$$

ამრიგად, წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობა γ წირის ბოლო წერტილთა მდებარეობაზეა დამოკიდებული. ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

2°. გ. ტოლსტოვის თეორემა წირითი ინტეგრალის გზიდან დამოუკიდებლობის შესახებ.

ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია ცალადბმულ D არეში და ამ არის ყოველ წერტილში

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{7.2}$$

მაშინ D-ში აღებული ნებისმიერი ორგანზომილებიანი I სეგმენტის γ საზღვრისათვის მართებულია ტოლობა

$$\int_\gamma Pdx+Qdy=0. \tag{7.3}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

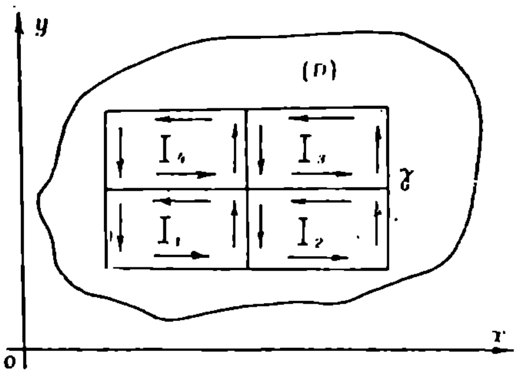
$$\int_\gamma Pdx+Qdy=K,$$

გავყოთ I სეგმენტი ოთხ კონგრუენტულ სეგმენტად I_1, I_2, I_3, I_4. ცხადია, რომ

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=\sum_{k=1}^{4}\int\limits_{\gamma_k} Pdx+Qdy, \tag{7.4}$$

სადაც γ_k წარმოადგენს I_k სეგმენტის საზღვარს (აქ ინტეგრება ყველა γ_k და γ კონტურებზე დადებითი მიმართულებით ხდება). მართლაც, I_k სეგმენტის ყოველი გვერდი, რომელიც არ ეკუთვნის γ კონტურს, ორჯერ აიწერება ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 24) ამიტომ მართებულია (7.4) ტოლობა. ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ერთ-ერთი შესაკრების აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები არ არის $\frac{|K|}{4}$ სიდიდეზე. ვთქვათ,

$$\left|\int\limits_{\gamma^{(1)}} Pdx+Qdy\right|\geqslant\frac{|K|}{4},$$



ნახ. 24.

სადაც $\gamma^{(1)}$ არის რომელიმე I_k სეგმენტის საზღვარი. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $I^{(1)}$ სიმბოლოთი.

ახლა $I^{(1)}$ სეგმენტი გავყოთ ოთხ კონგრუენტულ სეგმენტად და მათი საზღვრები აღვნიშნოთ $\gamma_1^{(1)}$, $\gamma_2^{(1)}$, $\gamma_3^{(1)}$, $\gamma_4^{(1)}$ სიმბოლოებით. ამ ოთხი საზღვრიდან $\gamma^{(2)}$-ით აღვნიშნოთ ის, რომლისთვისაც

$$\left|\int\limits_{\gamma^{(2)}} Pdx+Qdy\right|\geqslant\frac{|K|}{4^2}.$$

ეს პროცესი რომ უსაზღვროდ გავაგრძელოთ, მივიღებთ ორგანზომილებიან სეგმენტთა მიმდევრობას $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(n)}, \ldots$, ამასთან,

$$\left|\int_{\gamma^{(n)}} Pdx+Qdy\right| \geqslant \frac{|K|}{4^n} \quad (n=0,\ 1,\ldots,),$$

სადაც $\gamma^{(n)}$ არის $I^{(n)}$ სეგმენტის კონტური, ამასთანავე $\gamma^{(0)}$ წარმოადგენს I სეგმენტის კონტურს. ცხადია, რომ

$$I=I^{(0)}\supset I^{(1)}\supset\ldots\supset I^{(n)}\supset\ldots,$$

ამასთან $I^{(n)}$ სეგმენტის დიამეტრია

$$d_n=\frac{d}{2^n}\,(n=1,2,\ldots),$$

სადაც d არის I სეგმენტის დიამეტრი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=0$. მაშასადამე არსებობს ერთადერთი წერტილი (x_0,y_0), რომელიც ეკუთვნის ყველა $I^{(n)}$ სეგმენტს. რადგანაც D ღია სიმრავლეა და $(x_0,y_0)\in D$, ამიტომ არსებობს ამ წერტილის წრიული მიდამო S, რომელიც D არეშია მოთავსებული.

შემდეგ, რაკი P და Q ფუნქციები დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, ამიტომ

$$P(x,y)=P(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\sigma\rho,$$

$$Q(x,y)=Q(x_0,y_0)+A'(x-x_0)+B'(y-y_0)+\sigma'\rho,$$

სადაც

$$A=P'_x(x_0,y_0),\quad B=P'_y(x_0,y_0),\quad A'=Q'_x(x_0,y_0),\quad B'=Q'_y(x_0,y_0),$$

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

ხოლო σ და σ' ნულისაკენ მიისწრაფვიან ρ-თან ერთად.

ახლა თუ n საკმარისად დიდია, $I^{(n)}$ სეგმენტი მოთავსდება S მიდამოში და ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (7.2) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{|K|}{4^n}\leqslant\left|\int_{\gamma^{(n)}} Pdx+Qdy\right|=\left|\int_{\gamma^{(n)}} A(x-x_0)dx+B'(y-y_0)dy+\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma^{(n)}} B[(y-y_0)dx+(x-x_0)dy]+\int_{\gamma^{(n)}}\sigma\rho dx+\sigma'\rho dy\right|.$$

მაგრამ, წირითი ინტეგრალების უშუალო გამოთვლით დავრწმუნდებით, რომ

$$\int_{\gamma^{(n)}} A(x-x_0)dx+B'(y-y_0)dy=0,$$

$$\int_{\gamma^{(n)}} B[(y-y_0)dx+(x-x_0)dy]=0.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\frac{|K|}{4^n}\leqslant\left|\int_{\gamma^{(n)}}\sigma\rho dx+\sigma'\rho dy\right|\leqslant\left|\int_{\gamma^{(n)}}\sigma\rho dx\right|+\left|\int_{\gamma^{(n)}}\sigma'\rho dy\right|.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $(x,y)\in I^{(n)}$, მაშინ $\rho\leqslant\frac{d_0}{2^n}$. მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N, რომ

$$|\sigma\rho|<\frac{\varepsilon d_0}{2^n},\ |\sigma'\rho|<\frac{\varepsilon d_0}{2^n},\quad \text{როცა } n>N.$$

ამრიგად, თუ $n>N$, გვექნება

$$\frac{|K|}{4^n}<\frac{\varepsilon d_0}{2^n}\left(\frac{l_0}{2^n}+\frac{l_0}{2^n}\right)=\frac{2d_0l_0}{4^n}\varepsilon,$$

სადაც l_0 წარმოადგენს $\gamma^{(0)}$ კონტურის სიგრძეს. აქედან

$$|K|<2d_0l_0\varepsilon$$

და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $K=0$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7 (გ. ტოლსტოვი). თუ $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია ცალადბმულ D არეში, მაშინ წირითი ინტეგრალის

$$\int Pdx+Qdy \tag{7.5}$$

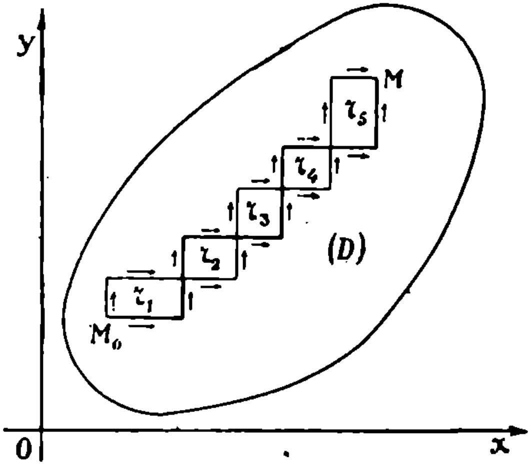
გზიდან დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ D არის ყოველ წერტილში შესრულებული იყოს (7.2) ტოლობა.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ავიღოთ D არეში ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილი და შევაერთოთ იგი ამ

არის ფიქსირებულ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილთან რაიმე l ტეხილით, რომელიც მოთავსებულია D არეში, და რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_l Pdx+Qdy$$

არ არის დამოკიდებული l ტეხილის ფორმაზე. ავიღოთ მეორე ასეთი l_1 ტეხილი (ნახ. 25). აქ l შავი ხაზითაა გავლებული, l_1 კი ჩვეულებრივი ხაზით.



ნახ. 25.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_l Pdx+Qdy-\int_{l_1} Pdx+Qdy=\int_{l\cup l_1^-} Pdx+Qdy,$$

სადაც $l\cup l_1^-$ წარმოადგენს შეკრულ ტეხილს, რომელიც M_0 წერტილიდან იწყება და l-ის გასწვრივ M წერტილამდე მიგვიყვანს, შემდეგ კი M წერტილიდან l_1-ის გასწვრივ გვაბრუნებს M_0 წერტილში. ეს რთული შეკრული ტეხილი ჩვენს შემთხვევაში ხუთი ორგანზომილებიანი $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ სეგმენტის $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ კონტურის ჯამს წარმოადგენს. ინტეგრალის მნიშვნელობა ამ რთულ შეკრულ ტეხილზე შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ კონტურებზე

დადებითი მიმართულებით აღებული ინტეგრალების ჯამი. მაგრამ ლე მის ძალით

$$\int_{\gamma_i} Pdx+Qdy=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

მაშასადამე,

$$\int_{l} Pdx+Qdy=\int_{l_1} Pdx+Qdy.$$

ამრიგად, წირითი ინტეგრალი $\int_l Pdx+Qdy$ დამოკიდებულია მხოლოდ

M წერტილის მდებარეობაზე, ე. ი. ეს ინტეგრალი იქნება x და y ცვლადების ფუნქცია, როცა M_0 ფიქსირებულია. ეს ფუნქცია აღვნიშნოთ $U(x,y)$ სიმბოლოთი:

$$U(x,y)=\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

დავამტკიცოთ, რომ D არის ყოველ (x,y) წერტილში არსებობს $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ და მართებულია ტოლობები

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q.$$

ამის ათვის განვიხილოთ $U(x+h,\ y)-U(x,y)$ სხვაობა, სადაც h ისეთი სიდიდეა, რომ (x,y) და $(x+h,y)$ წერტილების შემაერთებელი MM მონაკვეთი მოთავსებულია D არეში. $U(x+h,y)$ წარმოადგენს M_0 და $M'(x+h,y)$ წერტილების შემაერთებელი. რაიმე ტეხილის გასწვრივ აღებულ (7. 5) ინტეგრალს, რომლის გზიდან დამოუკიდებლობის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $M_0M'=M_0M \cup MM'$. მაშინ გვექნება

$$U(x+h,y)=\int_{M_0M} Pdx+Qdy+\int_{MM'} Pdx+Qdy=U(x,y)+$$

$$+\int_{MM'} Pdx+Qdy.$$

მაგრამ

$$\int_{MM'} Pdx+Qdy=\int_x^{x+h} P(t,y)dt.$$

მაშასადამე,

$$U(x+h,y)-U(x,y)=\int_x^{x+h}P(t,y)dt.$$

რადგანაც $P(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეში, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად გვექნება

$$U(x+h,y)-U(x,y)=hP(x+\theta h,y) \qquad (0<\theta<1).$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ h-ზე და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $h\to 0$, მივიღებთ

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=P(x,y).$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y).$$

P და Q ფუნქციების უწყვეტობის გამო, U ფუნქცია დიფერენცირებადია D არეში და

$$dU=Pdx+Qdy$$

D არის ყოველ წერტილში. მაშასადამე, მე-6 თეორემის თანახმად მოცემული წირითი ინტეგრალი გზიდან დამოუკიდებელია. ამით პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, წირითი ინტეგრალი (7.5) გზიდან დამოუკიდებელია. მაშინ მე-6 თეორემის თანახმად არსებობს D-ში ისეთი დიფერენცირებადი $U(x,y)$ ფუნქცია, რომ

$$dU=Pdx+Qdy$$

D არის ყოველ წერტილში. მაშინ

$$P=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

მაგრამ P და Q დიფერენცირებადი ფუნქციებია, ამიტომ იუნგის თეორემის თანახმად

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

ამით თეორემის პირობის აუცილებლობაც დამტკიცებულია და, მაშასადამე, გ. ტოლსტოვის თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. მრავლადბმული არის შემთხვევაში (7.2) პირობა საკმარისი არაა იმისათვის, რომ ყოველ შეკრულ კონტურზე წირითი ინტეგრალი $\int Pdx+Qdy$ იყოს ნულის ტოლი. განვიხილოთ

მაგალითი 8. ვთქვათ,

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\quad x^2+y^2>0.$$

ამ ფუნქციების განსაზღვრის არეა

$$D=R^{(2)}\setminus(0.0),$$

სადაც $R^{(2)}$ წარმოადგენს xOy სიბრტყეს. D არ არის ცალადბმული არე. ცხადია, P და Q ფუნქციები უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი D არეში. ამის გარდა, ადვილი შესამოწმებელია, რომ D არის ყოველ წერტილში მართებულია ტოლობა

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

მაგრამ D არეში მოთავსებულ ნებისმიერ შეკრულ კონტურზე აღებული წირითი ინტეგრალი $\int Pdx+Qdy$ ნული არ არის. მართლაც, შეკრულ γ კონტურად ავიღოთ r რადიუსიანი წრეწირი, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამ წრეწირის პარამეტრული განტოლებებია

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

მაშინ

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=\int\limits_{\gamma}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

ამრიგად, ინტეგრალი ამ შეკრულ კონტურზე ნული არ არის.

უკანასკნელი ორი თეორემის შედეგია შემდეგი

თეორემა 6. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ გამოსახულება, სადაც $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია ცალადბმულ D არეში, წარმოადგენს რაიმე ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც D არის ყოველ წერტილში შესრულდება ტოლობა

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

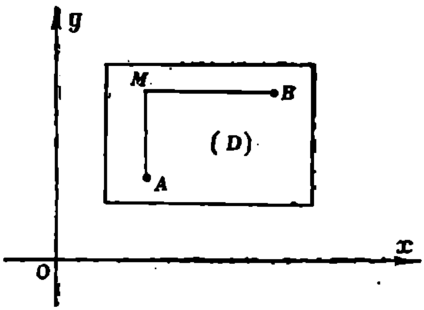
თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ $U(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალია $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ მოიცემა ფორმულით

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy,$$

სადაც (x_0,y_0) ფიქსირებული წერტილია D არეში, ხოლო ინტეგრება (x,y) წერტილამდე D არეში აღებული ნებისმიერი გზით წარმოებს. ამ შემთხვევაში, $U(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება $Pdx+Qdy$ დიფერენციალის პირველყოფილი ფუნქცია.

ცხადია, პირველყოფილი ფუნქციის ზოგადი სახეა

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C,$$



ნახ. 26.

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თუ ამ ტოლობაში ვიგულისხმებთ $x=x_0$, $y=y_0$, მივიღებთ $C=U(x_0,y_0)$. მაშასადამე,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=U(x,y)-U(x_0,y_0).$$

მივიღეთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის ანალოგიური ფორმულა.

ახლა განვიხილოთ მართკუთხოვანი D არე, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია (ნახ. 26). ვიგულისხმოთ,

რომ $Pdx+Qdy$ სრული დიფერენციალია. ვიპოვოთ ამ დიფერენციალის პირველყოფილი ფუნქცია. $A(x_0,y_0)$ წერტილად შეგვიძლია ავიღო D არის ნებისმიერი შიგა წერტილი. თუ ავიღებთ D არის ნებისმიერ $B(x,y)$ წერტილს, მაშინ $Pdx+Qdy$ დიფერენციალის პირველყოფილი ფუნქცია $U(x,y)$ გამოითვლება ფორმულით

$$U(x,y)=\int_{AMB} Pdx+Qdy=\int_{MB} Pdx+\int_{AM} Qdy=$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y} P(x_0,\tau)d\tau.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_{\gamma}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$$

სადაც γ არის $y=x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ პარაბოლის რკალი (ინტეგრალი აღებულია პარამეტრის ზრდის მიმართულებით).

პ ა ს უ ხ ი: $-\frac{11}{15}$.

2. გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_{\gamma}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy.$$

სადაც γ არის $y=1-|1-x|$ წირი (ინტეგრალი აღებულია პარამეტრის ზრდის მიმართულებით).

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{4}{3}$.

3. გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_{\gamma}(x+y)dx+(x-y)dy,$$

სადაც γ არის $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსი, რომლის ავლა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

პ ა ს უ ხ ი: 0.

დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება სრული დიფერენციალია და გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

4. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx.$ პასუხი: 8.

5. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy.$ პასუხი: 12.

6. იპოვეთ პირველყოფილი ფუნქცია $U(x,y)$, თუ

$$dU=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy.$$

პასუხი: $U=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$

თავი XII

ფუნქციები სასრული ვარიაციით. სტილტიესის ინტეგრალი

§ 1. ერთი ცვლადის ფუნქცია სასრული ვარიაციით

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

და შევადგინოთ ჯამი

$$s=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

$[a,b]$ სეგმენტის ყოველ დაყოფას ქვესეგმენტებად შეესაბამება არაუარყოფითი რიცხვი s. აღვნიშნოთ H-ით ყველა s რიცხვის სიმრავლე. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის სრული ვარიაცია და აღინიშნება $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ სიმბოლოთი. თუ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty.$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ფუნქცია სასრული ვარიაციით.**

თეორემა 1. *$[a, b]$ სეგმენტზე მონოტონური $f(x)$ ფუნქცია არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით.*

დამტკიცება. თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=f(b)-f(a),$$

ვინაიდან $f(x_k)-f(x_{k-1})\geqslant 0$. მაშასადამე,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=f(b)-f(a).$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ $f(x)$ კლებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=f(a)-f(b).$$

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის a და b შორის მოთავსებული რაიმე რიცხვი. გვაქვს:

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

აქედან

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

ეს უტოლობა მართებულია $[a,b]$ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას ექნება სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ $[c,d]$ ქვესეგმენტზე.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 4. $[a,b]$ სეგმენტზე სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\qquad a<c<b. \tag{1.1}$$

დამტკიცება. დავყოთ $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტები შემდეგი წერტილებით:

$$a=y_0<y_1<\cdots<y_p=c,\quad c=z_0<z_1<\cdots<z_q=b.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$s_{ac}=\sum_{k=1}^{p}|f(y_k)-f(y_{k-1})|,\quad s_{cb}=\sum_{k=1}^{q}|f(z_k)-f(z_{k-1})|.$$

ცხადია, $y_0, y_1, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$ წერტილები ყოფენ $[a,b]$ სეგმენტს ნაწილებად. ამ დანაწილების შესაბამისი ჯამი აღვნიშნოთ s_{ab}-თი. გვაქვს:

$$s_{ac}+s_{cb}=s_{ab}\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \tag{1.2}$$

განვიხილოთ ახლა $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება

$$[a,x_1],\ [x_1,x_2], \ldots,\ [x_{n-1},b]. \tag{1.3}$$

$[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ წერტილებს შევუერთოთ c წერტილი ($x_{k-1}<c<x_k$). მივიღებთ $[a,b]$ სეგმენტის ახალ დანაწილებას

$$[a,x_1],\ [x_1,x_2], \ldots,\ [x_{k-1},\ c],\ [c,x_k], \ldots,\ [x_{n-1},b]. \tag{1.4}$$

ცხადია, (1.3) დანაწილების შესაბამისი s_{ab} ჯამი არ აღემატება (1.4) დანაწილების შესაბამის s'_{ab} ჯამს:

$$s_{ab}\leqslant s'_{ab}=s'_{ac}+s'_{cb}\leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f), \tag{1.5}$$

სადაც s'_{ac} და s'_{cb} წარმოადგენენ შესაბამისად

$[a,x_1],\ [x_1,x_2], \ldots,\ [x_{k-1},c]$ და $]c,x_k],\ [x_k,x_{k+1}], \ldots,\ [x_{n-1},b]$

დანაწილებათა შესატყვის ჯამებს. (1.5)-დან გვაქვს

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{1.6}$$

(1.2) და (1.6) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (1.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5 (ჟორდანი). *თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ეს ფუნქცია წარმოიდგინება ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.*

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f),$$

სადაც $a \leqslant x \leqslant b$. ცხადია, $\varphi(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$\psi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x) \tag{1.7}$$

ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე. ავიღოთ ამ სეგმენტიდან x-ის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობა x_1, და x_2, $x_1 < x_2$. გვაქვს:

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \left[\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - f(x_2)\right] - \left[\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) - f(x_1)\right]$$

რადგანაც

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f),$$

ამიტომ

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geqslant 0.$$

მაშასადამე, $\psi(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე. (1.7) ტოლობიდან გვაქვს

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

ჟორდანის თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x$ ფუნქციები არა მარტო ზრდადია, არამედ დადებითიც. ამისათვის საკმარისია თითოეულ მათგანს დავუმატოთ საკმაოდ დიდი დადებითი რიცხვი, ამით $f(x)$ იგივე დარჩება, ხოლო $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები დადებითი ზრდადი ფუნქციებით შეიცვლება.

§ 2. წირის წრფევადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ბრტყელი C წირი, რომლის განტოლებებია

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2.1}$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $I = [a,b]$ სეგმენტზე. ვიგულისხმოთ, რომ როცა t იცვლება a-დან b-მდე, მაშინ სათანადო წერტილი $M[\varphi(t), \psi(t)]$ აღწერს C წირს გარკვეული მიმართულებით.

a და b-ს შესატყვისი წერტილები C წირზე აღვნიშნოთ შესაბამისად A და B ასოებით. მართებულია შემდეგი

თეორემა 6 (ჟორდანი). (2.1) წირის წრფევადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებს ჰქონდეთ სასრული ვარიაციები I სეგმენტზე.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, C წრფევადი წირია და დავყოთ I სეგმენტი წერტილებით

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b \tag{2.2}$$

და C წირში ჩავხაზოთ ტეხილი, რომლის წვეროები შეესაბამებიან t პარამეტრის $t_0, t_1, \ldots, t_n$ მნიშვნელობებს. ცხადია ამ ტეხილის სიგრძე აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2}\leqslant s,$$

სადაც s არის C წირის სიგრძე. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|\leqslant s,\quad \sum_{k=1}^{n}|\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|\leqslant s.$$

მაშასადამე,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi)\leqslant s,\quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(\psi)\leqslant s.$$

რაკი s სასრულია, ამიტომ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებია სასრული ვარიაციით I სეგმენტზე.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებია სასრული ვარიაციით I-ზე. დავყოთ I სეგმენტი (2.2) წერტილებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|\leqslant$$

$$\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(\psi).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$s\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(\psi).$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

§ 3. სტილტიესის ინტეგრალი

XIX საუკუნის მიწურულში რიმანის ინტეგრალის ცნებამ განიცადა განზოგადება. ეს განზოგადება მოცემული იყო 1894 წელს ჰოლანდიელი მათემატიკოსის სტილტიესის (Th. I. Stieltjes) მიერ. სტილტიესის ინტეგრალი განსაკუთრებულ როლს ასრულებს მათემატიკურ ანალიზში, მექანიკაში, მათემატიკურ ფიზიკასა და ალბათობათა თეორიაში, მომენტთა და პოტენციალის თეორიაში.

1.° სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია ორი ფუნქცია $f(x)$ და $\alpha(x)$. განვიხილოთ ამ სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1},\ x_n], \tag{3.1}$$

სადაც

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

ყოველ $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})].$$

ამ ჯამს სტილტიესის ჯამი ეწოდება. ცხადია, ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც ξ_k წერტილებზე, ისე $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე.

თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ყოველი λ დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, და $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტიდან აღებული ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\sigma-I|<\varepsilon,$$

სადაც I რაიმე რიცხვია, მაშინ ვიტყვით, რომ σ მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ, როდესაც $\lambda\to 0$ და დავწერთ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I.$$

თუ ასეთი I რიცხვი არსებობს, მაშინ ამ რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *სტილტიესის ინტეგრალი* $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, გავრცელებული $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x). \tag{3.2}$$

ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება $[a,b]$ სეგმენტზე *ინტეგრებადი* $\alpha(x)$ *ფუნქციის მიმართ*.

რიმანის ინტეგრალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კერძო შემთხვევა სტილტიესის ინტეგრალისა, თუ $\alpha(x)$ ფუნქციად მივიჩნევთ თვით დამოკიდებულ ცვლადს: $\alpha(x)=x$.

თეორემა 7. *სტილტიესის (3.2) ინტეგრალის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი* ε *რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს ისეთი დადებითი* λ_0 *რიცხვი, რომ ნებისმიერი დადებითი* λ *და* λ' *რიცხვებისათვის,* $\lambda<\lambda_0$, $\lambda'<\lambda_0$, *ადგილი ჰქონდეს უტოლობას*

$$|\sigma_\lambda-\sigma_{\lambda'}|<\varepsilon, \tag{3.3}$$

სადაც σ_λ *არის* $[a,b]$ *სეგმენტის* λ-*დანაწილების შესაბამისი სტილტიესის ჯამი.*

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი რიცხვი $\lambda_0>0$, რომ ყოველი დადებითი λ და λ' რიცხვებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, $\lambda'<\lambda_0$, მართებულია (3.3) უტოლობა.

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$, რომ $\lambda_k<\lambda_0$ $(k=1,2,\ldots)$. ყოველ დადებით λ' რიცხვს $\lambda'<\lambda_0$ შეესაბამება უამრავი სტილტიესის $\sigma_{\lambda'}$ ჯამი. ამ ჯამებიდან ავიღოთ რომელიმე ფიქსირებული ჯამი და იგი ისევ $\sigma_{\lambda'}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. მაშინ (3.3) უტოლობის ძალით გვექნება

$$\sigma_{\lambda'}-\varepsilon<\sigma_{\lambda_k}<\sigma_{\lambda'}+\varepsilon\quad(k=1,2,\ldots).$$

აქედან გამომდინარეობს $(\sigma_{\lambda_k})_{k\geqslant 1}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $(\sigma_{\lambda_{k_i}})_{i\geqslant 1}$. ვთქვათ,

$$\lim_{i\to\infty}\sigma_{\lambda_{k_i}}=I. \tag{3.4}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_\lambda = I. \tag{3.5}$$

(3.4) ტოლობის ძალით, i იმდენად დიდი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|\sigma_{\lambda_{k_i}} - I| < \varepsilon.$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3) უტოლობას, გვექნება

$$|\sigma_\lambda - \sigma_{\lambda_{k_i}}| < \varepsilon, \text{ როდესაც } \lambda < \lambda_0.$$

მაშასადამე,

$$|\sigma_\lambda - I| \leqslant |\sigma_\lambda - \sigma_{\lambda_{k_i}}| + |\sigma_{\lambda_{k_i}} - I| < 2\varepsilon,$$

როდესაც $\lambda < \lambda_0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (3.5) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

2°. სტილტიესის ინტეგრალის თვისებები. სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები.

1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ A და B რიცხვებისათვის $Af(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $B\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b Af(x)d[B\alpha(x)] = AB\int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

2. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f_1(x)+f_2(x)$ ჯამიც ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]d\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)d\alpha(x) + \int_a^b f_2(x)d\alpha(x).$$

3. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე ცალ-ცალკე $\alpha_1(x)$ და $\alpha_2(x)$ ფუნქციების მიმართ, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ ფუნქციის მიმართაც და

$$\int_a^b f(x)d[\alpha_1(x)+\alpha_2(x)] = \int_a^b f(x)d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)d\alpha_2(x).$$

თეორემა 8. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $f(x)$ იქნება ინტეგრებადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ $[c,d]$ ქვესეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ნებისმიერი დადებითი λ და λ' რიცხვებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, $\lambda'<\lambda_0$, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma_{\lambda}(a,b)-\sigma_{\lambda'}(a,b)|<\varepsilon,$$

სადაც $\sigma_{\lambda}(a,b)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $[a,b]$ სეგმენტის λ-დანაწილების სტილტიესის შესაბამისი ჯამი.

თუ $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში შევიტანთ c და d წერტილებს, ხოლო დაყოფის წერტილებს, რომლებიც მოდის $[a,c]$ და $[d,b]$ სეგმენტებზე ავიღებთ ერთსა და იმავეს ორივე დაყოფისათვის, მაშინ გვექნება

$$|\sigma\lambda(a,b)-\sigma\lambda'(a,b)|=|\sigma\lambda(c,d)-\sigma\lambda'(c,d)|<\varepsilon,$$

როდესაც $\lambda<\lambda_0$, $\lambda'<\lambda_0$. მაშასადამე, მე-7 თეორემის ძალით არსებობს

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma\lambda(c,d)$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე და $a<c<b$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^c f(x)d\alpha(x)+\int_c^d f(x)d\alpha(x). \tag{3.6}$$

დამტკიცება. მე-8 თეორემის თანახმად არსებობს ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)d\alpha(x) \quad \text{და} \quad \int_c^b f(x)d\alpha(x).$$

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ დანაწილება ისეთი, რომ დაყოფის წერტილების შემადგენლობაში ყოველთვის შედიოდეს c წერტილი. მაშინ

$$\sigma\lambda(a,b)=\sigma\lambda(a,c)+\sigma\lambda(c,b).$$

თუ ამ ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\lambda \to 0$, მივიღებთ (3.6) ტოლობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტებზე, სადაც $a<c<b$, მაშინ $f(x)$ შეიძლება არ იყოს ინტეგრებადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{როდესაც } 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases} x, & \text{როდესაც } -1\leqslant x<0,\\ 0, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\int_{-1}^{0} f(x)d\alpha(x)=0, \qquad \int_{0}^{1} f(x)d\alpha(x)=0.$$

განვიხილოთ $[-1, 1]$ სეგმენტის λ-დანაწილება და ვიგულისხმოთ, რომ რიცხვი 0 არ შედის დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში. მაშინ

$$\sigma_\lambda(-1,1)=f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=-\frac{x_{k-1}}{\xi_k},$$

სადაც $x_{k-1}<0<x_k$ და $\xi_k>0$. რადგანაც ξ_k შეიძლება ავიღოთ რაგინდ მცირე, ამიტომ $\sigma_\lambda(-1,1)$ აბსოლუტური სიდიდით შეიძლება რაგინდ დიდი გავხადოთ. ამის გარდა, თუ $\xi_k<0$, მაშინ $\sigma_\lambda(-1,1)=0$. მაშასადამე, არ არსებობს

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\alpha(x).$$

თეორემა 10. თუ $f(x)$ და $\alpha(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი დ ა ნ ე რ თ-ე რ თ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ა c წ ე რ ტ ი ლ შ ი, $a<c<b$, ხ ო ლ ო მ ე ო რ ე შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა ა მ ა ვ ე წ ე რ ტ ი ლ ი ს რ ა ი მ ე მ ი დ ა მ ო შ ი დ ა ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ე ბ ი

$$\int_{a}^{c} f(x)d\alpha(x) \quad \text{და} \quad \int_{c}^{b} f(x)d\alpha(x),$$

მაშინ იარსებებს $\int_{a}^{b} f(x)d\alpha(x)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება და ვიგულისხმოთ, რომ c წერტილი შედის დაყოფის წერტილთა რიცხვში. მაშინ

$$\sigma_\lambda(a,b)=\sigma_\lambda(a,c)+\sigma_\lambda(c,b).$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\lambda\to 0$ მივიღებთ ტოლობას

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_\lambda=\int_a^c f(x)d\alpha(x)+\int_c^b f(x)d\alpha(x). \tag{3.7}$$

ახლა ვთქვათ, c არ შედის $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილთა რიცხვში და დავუშვათ, რომ

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

არის ამ დანაწილების შესაბამისი სტილტიესის ჯამი. თუ $[a,b]$ სეგმენტის ამ დაყოფის წერტილთა შემადგენლობაში შევიტანთ c წერტილსაც, მაშინ ამ ახალი დანაწილების სტილტიესის სათანადო ჯამი აღვნიშნოთ σ' სიმბოლოთი. (3.7) ტოლობის თანახმად, σ' ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda\to 0$, არის

$$\int_a^c f(x)d\alpha(x)+\int_c^b f(x)d\alpha(x).$$

მაშასადამე, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}(\sigma-\sigma')=0. \tag{3.8}$$

ცხადია, თუ $x_{k-1}<c<x_k$, მაშინ σ ჯამი განსხვავდება σ' ჯამისაგან იმით, რომ σ ჯამში k-ური შესაკრები იქნება $f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$, ხოლო მეორე ჯამში მის ნაცვლად გვექნება

$$f(\xi_k')[\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})]+f(\xi_k'')[\alpha(x_k)-\alpha(c)],$$

სადაც $x_{k-1}\leqslant\xi_k'\leqslant c$, $c\leqslant\xi_k''\leqslant x_k$, ამასთან, ξ_k' და ξ_k'' აღებულია ნებისმიერად აღნიშნულ შუალედებში. ამიტომ

$$\sigma-\sigma'=f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]-$$

$$-f(\xi_k')[\alpha(c)-\alpha(x_{k-1})]-f(\xi_k'')[\alpha(x_k)-\alpha(c)].$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $\alpha(x)$ უწყვეტია c წერტილში, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის

თანახმად მართებულია (3.8) ტოლობა. თუკი $\alpha(x)$ შემოსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $f(x)$ უწყვეტია c წერტილში, მაშინ $\sigma-\sigma'$ სხვაობა წარმოვადგინოთ ასე:

$$\sigma-\sigma'=[f(\xi_k)-f(c)][\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]+\alpha(x_k)[f(c)-f(\xi_k'')]+$$
$$+\alpha(x_{k-1})[f(\xi_k')-f(c)]+\alpha(c)[f(\xi_k'')-f(\xi_k')].$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda\to 0$, მივიღებთ (3.8) ტოლობას და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

3°. ნაწილობითი ინტეგრება. მართებულია შემდეგი

თეორემა 11. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ, მაშინ $\alpha(x)$ ფუნქცია იქნება ინტეგრებადი იმავე სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის მიმართ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=[f(x)\alpha(x)]_a^b-\int_a^b \alpha(x)df(x), \tag{3.9}$$

სადაც

$$[f(x)\alpha(x)]_a^b=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a).$$

დამტკიცება. დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ და ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავილოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი. სტილტიესის ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\alpha(\xi_k)[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

წარმოვადგინოთ ასე:

$$\sigma=-\alpha(\xi_1)f(a)-\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)[\alpha(\xi_{k+1})-\alpha(\xi_k)]+\alpha(\xi_n)f(b).$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს მივუმატებთ და გამოვაკლებთ $f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)$ გამოსახულებას, გვექნება

$$\sigma=[f(x)\alpha(x)]_a^b-\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)[\alpha(\xi_{k+1})-\alpha(\xi_k)]+$$
$$+f(b)[\alpha(b)-\alpha(\xi_n)]+f(a)[\alpha(\xi_1)-\alpha(a)]\Big\}.$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\lambda\to 0$ მივიღებთ (3.9) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

4°. სტილტიესის ინტეგრალის არსებობა ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ ზრდადია ამავე სეგმენტზე. დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. აღვნიშნოთ m_k და M_k სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრები $[a,b]$ სეგმენტზე და შევადგინოთ ჯამები

$$\overline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],\quad \underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

სადაც $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$.

$\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ ჯამებს ვუწოდოთ შესაბამისად დარბუ-სტილტიესის ზედა და ქვედა ჯამები. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma}.$$

შევნიშნოთ, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება გარკვეული ქვედა ჯამი $\underline{\sigma}$ და გარკვეული ზედა ჯამი $\overline{\sigma}$. რაც შეეხება σ ჯამს, იგი განსაზღვრული არაა, ვინაიდან ξ_k წერტილები ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ სათანადო სეგმენტებზე. თუ $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებას უცვლელად დავტოვებთ, ხოლო ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის შიგნით ვცვლით ξ_k წერტილს ისე, რომ

$$\lim f(\xi_k)=m_k,$$

მაშინ

$$\lim\sigma=\overline{\sigma}.$$

ანალოგიურად, ξ_k წერტილების შერჩევით σ ჯამი შეგვიძლია რაგინდ ახლოს გავხადოთ $\underline{\sigma}$ ჯამთან.

ამრიგად, $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილებას, წარმოადგენენ სტილტიესის იმ ჯამთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრებს, რომლებიც შეესაბამებიან $[a,b]$ სეგმენტის იმავე დანაწილებას.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ დარბუ-სტილტიესის ნებისმიერი ქვედა ჯამი არ აღემატება ნებისმიერ ზედა ჯამს.

თეორემა 12. *$[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის ზრდადი $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ*

აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ მოცემული სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon. \tag{3.10}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, ადგილი ექნება უტოლობებს

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც σ-თი აღნიშნულია აღებული დანაწილების სათანადო სტილტიესის ჯამი. მაშასადამე,

$$I = \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{\sigma} \leqslant \overline{\sigma} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

აქედან გამომდინარეობს (3.10) უტოლობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, სათანადო ზედა და ქვედა ჯამებისათვის მართებულია (3.10) უტოლობა. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ

$$\underline{I} = \overline{I},$$

სადაც

$$\underline{I} = \sup\{\underline{\sigma}\},\quad \overline{I} = \inf\{\overline{\sigma}\}.$$

$\overline{I}$ აღვნიშნოთ I ასოთი. რადგანაც

$$\underline{\sigma} \leqslant I \leqslant \overline{\sigma},\quad \underline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\sigma},$$

ამიტომ

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

ე. ი.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 13. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია იმავე სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ $[a,b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც სასრული ვარიაციის ყოველი ფუნქცია წარმოიდგინება ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე.

შემდეგ, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $[a,b]$ სეგმენტზე, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x''-x'|<\delta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon,$$

მაშასადამე, თუ განვიხილავთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერ λ დანაწილებას $\{[x_{k-1}, x_k]\}$, $\lambda<\delta$, მაშინ ყოველი k-სათვის გვექნება

$$M_k - m_k < \varepsilon,$$

სადაც M_k და m_k წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. მაშასადამე,

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{n} [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

მე-12 თეორემის თანახმად $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ უწყვეტია იმავე სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ.

ეს თეორემა მე-11 და მე-13 თეორემების შედეგია.

5°. სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლა. მართებულია შემდეგი

თეორემა 15. *თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ იმავე სეგმენტზე სასრულია და ყოველ*

$$]a,c_1[,\ ]c_1,c_2[,\ \ldots,]c_n,b[$$

ინტერვალზე მუდმივია, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)[\alpha(a+)-\alpha(a)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(b-)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(c_k)[\alpha(c_k+)-\alpha(c_k-)]. \qquad (3.11)$$

დამტკიცება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha)=|\alpha(a+)-\alpha(a)|+|a(b)-\alpha(b-)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\{|\alpha(c_k)-\alpha(c_k-)|+|\alpha(c_k+)-\alpha(c_k)|\}.$$

მაშასადამე, $\alpha(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a,b]$ სეგმენტზე და ამიტომ $f(x)$ ინტეგრებადია $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ. ცხადია, რომ

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)d\alpha(x), \qquad (3.12)$$

სადაც $c_0=a$, $c_{n+1}=b$.

გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)d\alpha(x)$. ამისათვის $[c_{k-1}, c_k]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად წერტილებით

$$c_{k-1}=x_0<x_1<\cdots<x_m=c_k$$

და შევადგინოთ სტილტიესის ჯამი:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})],$$

სადაც $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. ცხადია, რომ

$$\sigma = f(\xi_1)[\alpha(x_1) - \alpha(c_{k-1})] + f(\xi_m)[\alpha(c_k) - \alpha(x_{m-1})],$$

რადგან სხვა შესაკრებები ისპობა. ამ ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda \to 0$, მივიღებთ

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)d\alpha(x) = f(c_{k-1})[\alpha(c_{k-1}{}^{+}) - \alpha(c_{k-1})] +$$
$$+ f(c_k)[\alpha(c_k) - \alpha(c_k -)].$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (3.12) ტოლობას, მივიღებთ (3.11) ტოლობას.

თეორემა 16. თუ $f(x)$ ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $\alpha(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული $\alpha'(x)$, რომელიც რიმანის აზრით ინტეგრებადია მოცემულ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx. \tag{3.13}$$

დამტკიცება. დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. გვაქვს:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \alpha'(x)dx.$$

მაშასადამე,

$$\sigma - \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\alpha'(x)dx. \tag{3.14}$$

რადგანაც $\alpha'(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი K, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $|\alpha'(x)| \leqslant K$. მაშასადამე,

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\alpha'(x)dx \right| \leqslant K(M_k - m_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx =$$
$$= K(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}).$$

სადაც m_k და M_k წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. ამიტომ (3.14) ტოლობიდან გვაქვს

$$\left| \sigma - \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \right| \leqslant K \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}). \qquad (3.15)$$

რაკი $f(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე რიმანის აზრით, ამიტომ (3.15) უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\lambda \to 0$. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე $\alpha(x)$ ფუნქციის მიმართ და მართებულია (3.13) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $Af(x)$ ფუნქციასაც, სადაც A მუდმივი სიდიდეა, აქვს აგრეთვე სასრული ვარიაცია იმავე სეგმენტზე.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ სასრული ვარიაციები $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)+g(x)$ ფუნქციასაც აქვს სასრული ვარიაცია იმავე სეგმენტზე.

3. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ სასრული ვარიაციები $[a,b]$ სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)g(x)$ ფუნქციასაც აქვს სასრული ვარიაცია იმავე სეგმენტზე.

4. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ სასრული ვარიაციები $[a,b]$ სეგმენტზე, ამასთან, x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $|g(x)| \geqslant m$, სადაც m დადებითი რიცხვია. დაამტკიცეთ, რომ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია.

5. მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{2x}, & \text{როდესაც } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{როდესაც } x = 0. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ ამ ფუნქციას არა აქვს სასრული ვარიაცია.

6. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციასაც აქვს სასრული ვარიაცია იმავე სეგმენტზე.

7. ააგეთ ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც არა აქვს სასრული ვარიაცია რაიმე სეგმენტზე, ხოლო $|f(x)|$ ფუნქციას ჰქონდეს სასრული ვარიაცია.

8. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ სასრული ვარიაციები $[a,b]$ სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ და $\Phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ფუნქციებსაც აქვთ სასრული ვარიაციები იმავე სეგმენტზე.

9. $f(x)$ და $\alpha(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია ასე

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როდესაც } -1\leqslant x<0, \\ 0, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1; & \text{როდესაც } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\alpha(x)$ არ არსებობს.

10. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int\limits_{0}^{2} x^2 d\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ განსაზღვრულია ასე:

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } 0\leqslant x<2, \\ 5, & \text{როდესაც } x=2. \end{cases}$$

პასუხი: 20.

11. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^{3} x d\alpha(x)$, სადაც

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } x=-1, \\ 1, & \text{როდესაც } -1<x<2, \\ -1, & \text{როდესაც } 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

პასუხი: -5.

თავი XIII

ორჯერადი ინტეგრალი

დიფერენციალური აღრიცხვის ცნებები და მეთოდები, რომლებიც ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის განვიხილეთ, ფართოდ ვრცელდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი იდეები შეგვიძლია გადავიტანოთ აგრეთვე მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც. უპირველეს ყოვლისა ეს ეხება მთავარ იდეას— ინტეგრალი, როგორც გარკვეული სახის ჯამის ზღვარი. ეს იდეა პრაქტიკის მოთხოვნილებებიდან წარმოიშვა. ამ თავში განვიხილავთ ძირითად საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია ორი ცვლადის ფუნქციათა ინტეგრებასთან.

სანამ ორჯერადი ინტეგრალის შესწავლას შევუდგებოდეთ, ჯერ განვიხილოთ ბრტყელი ფიგურის ზოგიერთი თვისება[1].

§ 1. ზომადი სიმრავლეები

პირველ ტომში მოვიყვანეთ ფართობადი არის ცნება და შევისწავლეთ ასეთი არეების ზოგიერთი თვისება. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ფართობად სიმრავლეებს და დაწვრილებით შევისწავლით ასეთ სიმრავლეთა თვისებებს. ჯერ შემოვიღოთ

განსაზღვრა 1. ჩვენ ვიტყვით, რომ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ ორგანზომილებიან სეგმენტთა სასრული სისტემა

$$S=\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$$

ფარავს R_2 სივრცეში აღებულ შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს, თუ ამ სიმრავლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთ სეგმენტს მაინც S სისტემიდან და, ამის გარდა, ამ სისტემის ყოველი სეგმენტი შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს.

ავიღოთ xOy სიბრტყეზე შემოსაზღვრული E სიმრავლე და განვიხილოთ ორგანზომილებიან სეგმენტთა რაიმე სისტემა, რომელიც

---

[1] ბრტყელი ფიგურა ეწოდება სიბრტყის წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს.

ფარავს E სიმრავლეს. აღვნიშნოთ $\sigma^*(S)$ სიმბოლოთი S სისტემის სეგმენტთა ფართობების ჯამი, $\sigma_*(S)$-ით კი S-ის იმ სეგმენტების ფართობთა ჯამი, რომლებიც E სიმრავლეშია მოთავსებული. ცხადია,

$$\sigma_*(S)\leqslant\sigma^*(S).$$

ამრიგად, ორგანზომილებიან სეგმენტთა ყოველ S სისტემას, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, შეესაბამება ორი რიცხვი $\sigma_*(S)$ და $\sigma^*(S)$. განვიხილოთ ორგანზომილებიან სეგმენტთა ყოველგვარი S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს და აღვნიშნოთ H^*-ით $\sigma^*(S)$ რიცხვთა სიმრავლე, H_*-ით კი $\sigma_*(S)$ რიცხვთა სიმრავლე. თუ E სიმრავლე ცარიელი არაა, მაშინ H^* სიმრავლის ყველა ელემენტი დადებითი რიცხვია. თუ E სიმრავლე არ შეიცავს შიგა წერტილებს, მაშინ H_* სიმრავლე ცარიელია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშასადამე, H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და ამიტომ მას აქვს ზედა საზღვარი. რაც შეეხება H^* სიმრავლეს, იგი ქვემოდან შემოსაზღვრულია და ამიტომ მას აქვს ქვედა საზღვარი.

განსაზღვრა 1. H^* სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის გარე ზომა ჟორდანის აზრით, H_* სიმრავლის ზედა საზღვარს კი E სიმრავლის შიგა ზომა ჟორდანის აზრით.

E სიმრავლის გარე და შიგა ზომებს აღნიშნავენ შესაბამისად m^*E და m_*E სიმბოლოებით.

განსაზღვრა 2. E სიმრავლეს ეწოდება ზომადი ჟორდანის აზრით ან მოკლედ ზომადი, თუ $m^*E=m_*E$.

ჟორდანის აზრით ზომად სიმრავლეს ეწოდება აგრეთვე ფართობადი სიმრავლე.

თუ E სიმრავლე ზომადია, მაშინ ამ სიმრავლის გარე ან შიგა ზომას ვუწოდებთ E სიმრავლის ზომას ჟორდანის აზრით ან ფართობს და მას აღვნიშნავთ $|E|$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ [0,1; 0,1] კვადრატის ყველა რაციონალური წერტილის E სიმრავლისათვის

$$m^*E=1,\quad m^*E=0.$$

მაშასადამე, E სიმრავლე ფართობადი არაა.

თეორემა 1. შემოსაზღვრული სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი საზღვრის ზომა იყოს ნულის ტოლი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, E შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეა' მაშინ

$$m^*E=m_*E=|E|.$$

სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრების განსაზღვრის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ორგანზომილებიან სეგმენტთა ისეთი S სისტემა, რომელიც ფარავს E სიმრავლეს და მართებულია უტოლობები:

$$\sigma^*(S)-|E|<\frac{\varepsilon}{2},\ |E|-\sigma_*(S)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1}$$

ვთქვათ, $I_1, I_2,\ldots,I_n$ არის S სისტემის სეგმენტები, რომლებიც მთლიანად არ შედიან E სიმრავლეში. ცხადია, რომ

$$I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n\supset K,$$

სადაც K-თი აღნიშნულია E სიმრავლის საზღვარი. ამის გარდა,

$$m^*K\leqslant|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n|=\sigma^*(S)-\sigma_*(S). \tag{1.2}$$

მაგრამ (1.1) უტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$\sigma^*(S)-\sigma_*(S)<\varepsilon.$$

მაშასადამე, (1.2) უტოლობათა ძალით

$$m^*K<\varepsilon$$

და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $m^*K=0$, ე. ი. $|K|=0$. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $|K|=0$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ორგანზომილებიან სეგმენტთა ისეთი S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sigma^*(S)-\sigma_*(S)<\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$m^*E-m_*E<\varepsilon$$

და, რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ

$$m^*E=m_*E.$$

პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თ უ A ს ი მ რ ა ვ ლ ე B ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ნ ა წ ი ლ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$m^*A\leqslant m^*B,\ m_*A\leqslant m_*B. \tag{1,3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ სეგმენტთა ნებისმიერი სასრული S სისტემა, რომელიც B სიმრავლეს ფარავს. S_0-ით აღვნიშნოთ S სისტემის ქვესისტემა, რომელიც A სიმრავლეს ფარავს. ცხადია, რომ

$$\sigma^*(S_0)\leqslant\sigma^*(S).$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (1.3)-ის პირველ უტოლობას. ანალოგიურად მტკიცდება (1.3)-ის მეორე უტოლობა.

თეორემა 3. თუ A და B შემოსაზღვრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B. \tag{1.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ სეგმენტთა ნებისმიერი ორი S_1 და S_2 სისტემა, რომლებიც ფარავენ შესაბამისად A და B სიმრავლეებს. აღვნიშნოთ S-ით S_1 და S_2 სიმრავლეთა ჯამი. თუ S სისტემის რაიმე სეგმენტს აქვს ამავე სისტემის რამდენიმე სეგმენტთან საერთო შიგა წერტილი, მაშინ ეს სეგმენტი შეგვიძლია ისე დავყოთ სეგმენტებად, რომ მათ არ ჰქონდეთ საერთო შიგა წერტილები. ასე რომ, შეგვიძლია თავიდანვე ვიგულისხმოთ, რომ S სისტემის სეგმენტებს წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო შიგა წერტილები. შემდეგ, ცხადია, რომ S ფარავს $A\cup B$ სიმრავლეს და

$$\sigma^*(S)\leqslant\sigma^*(S_1)+\sigma^*(S_2).$$

აქედან

$$m^*(A\cup B)\leqslant\sigma^*(S_1)+\sigma^*(S_2). \tag{1.5}$$

რადგანაც S_1 და S_2 სისტემები ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ (1.5) უტოლობიდან მიიღება (1.4) უტოლობა.

§ 2. თეორემები ზომად სიმრავლეთა შესახებ

თეორემა 4. თუ E_1 და E_2 ზ ო მ ა დ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ა თ ი გ ა დ ა კ ვ ე თ ა ც ზ ო მ ა დ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $E=E_1\cap E_2$. აღვნიშნოთ K_1, K_2, K სიმბოლოებით E_1, E_2, E სიმრავლეთა საზღვრები შესაბამისად. რადგანაც E_1 და E_2 ზომადი სიმრავლეებია, ამიტომ

$$|K_1|=0,\ |K_2|=0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$K\subset K_1\cup K_2.$$

მე-2 და მე-3 თეორემების თანახმად

$$m^*K\leqslant m^*(K_1\cup K_2)\leqslant m^*K_1+m^*K_2=0.$$

მაშასადამე, $m^*K=0$ და 1-ლი თეორემის ძალით E სიმრავლე ზომადია.

თეორემა 5. *თუ A და B ზომადი სიმრავლეებია და, ამასთანავე, $B\subset A$, მაშინ $A-B$ სიმრავლეც ზომადია.*

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $A, B, A-B$ სიმრავლეთა საზღვრები შესაბამისად K_1, K_2, K სიმბოლოებით. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $K\subset K_1\cup K_2$. აქედან

$$m^*K\leqslant m^*(K_1\cup K_2)\leqslant m^*K_1+m^*K_2.$$

მაგრამ, რაკი A და B სიმრავლეები ზომადია, ამიტომ

$$m^*K_1=0, \quad m^*K_2=0.$$

მაშასადამე, $m^*K=0$ და ამიტომ $A-B$ სიმრავლე ზომადია.

თეორემა 6. *თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე დაყოფილია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ზომად $E_1, E_2, \ldots, E_n$ სიმრავლეებად, ანდა საერთო წერტილებად აქვთ მხოლოდ საზღვრის წერტილები, მაშინ E სიმრავლე ზომადია და*

$$\sum_{k=1}^{n}|E_k|=|E| \tag{2.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ორგანზომილებიან სეგმენტთა ნებისმიერი S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს. აღვნიშნოთ S_k-თი S სისტემის იმ სეგმენტთა სისტემა, რომლებიც მთავსებულია E_k სიმრავლეში $(k=1,2,\ldots,n)$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_*(S_k)\leqslant\sigma_*(S)\leqslant m_*E.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\sum_{k=1}^{n}m_*E_k\leqslant m_*E. \tag{2.2}$$

შემდეგ, მე-3 თეორემის თანახმად

$$\sum_{k=1}^{n}m^*E_k\geqslant m^*E. \tag{2.3}$$

რაკი ყოველი E_k სიმრავლე ზომადია, ამიტომ

$$m_*E_k=m^*E_k=|E_k| \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

მაშასადამე, (2.2) და (2.3) თანაფარდობები შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\sum_{k=1}^{n} |E_k| \leqslant m_* E, \ \sum_{k=1}^{n} |E_k| \geqslant m^* E. \tag{2.4}$$

მაგრამ

$$m_* E \leqslant m^* E.$$

ამიტომ (2.4) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს

$$m_* E = m^* E = \sum_{k=1}^{n} |E_k|,$$

ე. ი. E სიმრავლე ზომადია და მართებულია (2.1) ტოლობა.

თეორემა 7. თუ C წირის განტოლებას აქვს სახე $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, სადაც $f(x)$ უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე, მაშინ C წირის ფართობი ნულის ტოლია.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x''-x'| < \eta$ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

ახლა დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

სადაც

$$x_k - x_{k-1} < \eta \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

აღვნიშნოთ m_k და M_k სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე და განვიხილოთ ორგანზომილებიან სეგმენტთა S სისტემა:

$$S = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\},$$

სადაც

$$I_k = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k; \ m_k \leqslant y \leqslant M_k] \quad (k = 1, 2 \ldots, n).$$

ცხადია S სისტემა ფარავს C სიმრავლეს და

$$m^* C < \sigma^*(S). \tag{2.5}$$

შემდეგ, რაკი

$$M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad(k=1,2,\ldots,n),$$

ამიტომ

$$\sigma^*(S)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})(M_k-m_k)<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=\varepsilon.$$

მაშასადამე, (2.5) უტოლობის ძალით, $m^*C<\varepsilon$ და ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო, $m^*C=0$, ე. ი. $|C|=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ C წირის ფართობი ნულის ტოლია, თუ წირის განტოლებას აქვს სახე $x=\varphi(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, სადაც $\varphi(y)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[c,d]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრა 3. რაიმე C წირს ეწოდება უბან-უბან ცალსახა, თუ იგი შეიძლება დაიყოს სასრულ რიცხვ წირებად $C_1, C_2,\ldots,C_n$, რომელთა განტოლებებს აქვთ სახე: $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, ან $x=\varphi(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, სადაც $f(x)$ და $\varphi(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამისად $[a,b]$ და $[c,d]$ სეგმენტზე.

თეორემა 8. ყოველი დახურული G არე, რომელიც შემოსაზღვრულია უბან-უბან ცალსახა წირით, ფართობადია.

დამტკიცება. G არის საზღვარი ალვნიშნოთ C ასოთი. რადგანაც C უბან-უბან ცალსახა წირია, ამიტომ იგი შეგვიძლია დავყოთ სასრულ რიცხვ წირებად $C_1, C_2,\ldots,C_n$, რომელთა განტოლებებს აქვს სახე

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

ან

$$x=\varphi(y),\quad c\leqslant y\leqslant d,$$

სადაც $f(x)$ და $\varphi(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამისად $[a,b]$ და $[c,d]$ სეგმენტზე. მე-7 თეორემის ძალით

$$|C_k|=0\quad(k=1,2,\ldots,n)$$

და, მაშასადამე, მე-6 თეორემის თანახმად

$$|C|=\sum_{k=1}^{n}|C_k|=0.$$

ამრიგად, G არის საზღვრის ფართობი ნულის ტოლია და ამიტომ 1-ლი თეორემის ძალით მოცემული არე ფართობადია.

§ 3. სიმრავლის წესიერი დანაწილება

ვთქვათ, ზომადი E სიმრავლე დაყოფილია ზომად $E_1, E_2, \ldots, E_n$ სიმრავლეებად. ამ სიმრავლეთა სისტემას ვუწოდებთ E სიმრავლის წესიერ დანაწილებას, თუ

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = E$$

და

$$E_i \cap E_j = K_i \cap K_j \quad (i \neq j),$$

სადაც K_i არის E_i სიმრავლის საზღვარი.

ახლა ვთქვათ, სიმრავლეთა $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ სისტემა ზომადი სიმრავლის წესიერი დანაწილებაა. ამ დანაწილებას ვუწოდებთ E სიმრავლის წესიერ λ-დანაწილებას, თუ

$$\lambda = \max\{d(E_1),\ d(E_2), \ldots, d(E_n)\},$$

სადაც $d(E_k)$ წარმოადგენს E_k სიმრავლის დიამეტრს.

დასასრულ, სიბრტყის წერტილთა რაიმე სიმრავლეს ვუწოდებთ *ელემენტარულ ფიგურას*, თუ იგი შეგვიძლია დავყოთ სასრულ რიცხვ ორგანზომილებიან სეგმენტებად, რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო შიგა წერტილები არა აქვთ.

თეორემა 9. *თუ ზომადი E სიმრავლის H ქვესიმრავლის ზომა ნულის ტოლია, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ რიცხვი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებიდან აღებული იმ სიმრავლეების ფართობთა ჯამი, რომლებსაც აქვთ საერთო წერტილი H-თან, ε-ზე ნაკლებია.*

დამტკიცება. რადგანაც $|H|=0$, ამიტომ არსებობს H სიმრავლის შემცველი ისეთი ელემენტარული R ფიგურა, რომ $|R|<\varepsilon$ და

$$\rho(H, K)>0,$$

სადაც K არის R-ის საზღვარი, ხოლო $\rho(H,K)$ წარმოადგენს მანძილს H და K სიმრავლეებს შორის. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\lambda=\rho(H, K)$$

და განვიხილოთ E სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება. ამ დანაწილებიდან აღებული ის სიმრავლეები, რომლებსაც აქვთ საერთო წერტილები H-თან. მოთავსდებიან R-ში. მაშასადამე, ამ სიმრავლეთა ფართობების ჯამი ნაკლები იქნება ε-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

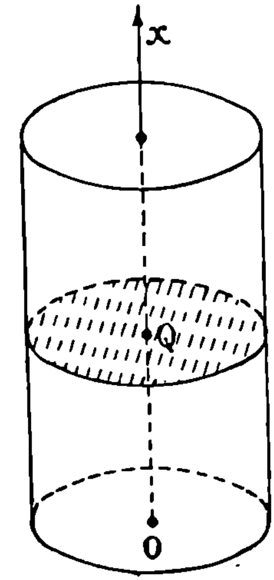
§ 4. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ ორჯერადი ინტეგრალის ცნებამდე

მრავალი გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს ორჯერადი ინტეგრალის ცნების შემოღებას. ასეთი ამოცანებიდან განვიხილოთ ორი—ერთი გეომეტრიული და ერთიც ფიზიკური შინაარსისა.

1°. სხეულის მოცულობის გამოთვლა. ჯერ შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 4. ცილინდრი ეწოდება სამგანზომილებიან არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია ცილინდრული ზედაპირით და ორი ურთიერთპარალელური სიბრტყის ნაწილებით, რომლებსაც ცილინდრის ფუძეები ეწოდება.

ლემა 1. თუ ცილინდრის ფუძე ფართობადი არეა, მაშინ ამ ცილინდრის მოცულობა უდრის ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლს.



ნახ. 27.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ცილინდრული ზედაპირის მსახველები ფუძის მართობია. ცილინდრის ქვედა ფუძის რაიმე O წერტილში გავავლოთ მსახველის პარალელური Ox ღერძი (ნახ. 27). ასეთი სხეულის V მოცულობა გამოითვლება განსაზღვრული ინტეგრალით, თუ ცნობილია Ox ღერძის ყოველ წერტილში მართობული კვეთის Q ფართობი (ჩვენს შემთხვევაში ეს ფართობი ყოველი წერტილისათვის ერთი და იგივეა). თუ ცილინდრის სიმაღლეს აღვნიშნავთ H ასოთი. მაშინ, როგორც ცნობილია, გვექნება

$$V=\int_0^H Qdx=QH.$$

ლემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 5. ცილინდრული სხეული ვუწოდოთ სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი ზედაპირებით: ქვემოდან xOy სიბრტყით, ზემოდან $z=f(x,y)$ ზედაპირით და გვერდიდან ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია. აქ იგულისხმება, რომ $f(x,y)>0$.

ახლა განვსაზღვროთ ცილინდრული სხეულის მოცულობა. ვთქვათ, D წარმოადგენს მოცემული ცილინდრული სხეულის ფუძეს. ვიგულისხმოთ, რომ D დახურული ფართობადი არეა. დავყოთ D არე ფართობად ქვეარეებად.

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_n.$$

ყოველი $\Delta\sigma_k(k=1,2,\ldots,n)$ არის კონტურზე ავაგოთ ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია. მაშინ მოცემული ცილინდრული სხეული დაიყოფა ელემენტარულ ცილინდრულ სხეულებად, რომელთა რიცხვია n. ავიღოთ $\Delta\sigma_k$ არეზე ნებისმიერი $p_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი. ცხადია, $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილი, სადაც $\zeta_k=f(\xi_k, \eta_k)$, ძევს მოცემულ $z=f(x,y)$ ზედაპირზე. თუ ყოველ $M_k(k=1,2,\ldots,n)$ წერტილზე გავავლებთ xOy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს, მივიღებთ ელემენტარულ ცილინდრებს, რომელთა მოცულობებია

$$f(p_k)\,|\Delta\sigma_k| \quad (k=1,\ 2,\ldots,n).$$

ავიღოთ ასეთი ცილინდრების მოცულობათა ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\,|\Delta\sigma_k|. \tag{4.1}$$

შემოვიღოთ

განსაზღვრა 6. ცილინდრული სხეულის V მოცულობა ვუწოდოთ ზღვარს

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\,|\Delta\sigma_k|, \tag{4.2}$$

სადაც λ უდიდესია $\Delta\sigma_k$ არეების დიამეტრებს შორის.

ამრიგად, ცილინდრული სხეულის მოცულობის ამოცანამ მიგვიყვანა (4.1) სახის ჯამის ზღვრის მოძებნამდე.

2°. **ბრტყელი ფიგურის მასა.** მოცემულია ბრტყელი ფართობადი D არე, რომელზედაც განაწილებულია რაიმე მასა. ვიტყვით, რომ მასა თანაბრად განაწილებულია D არეზე, ანუ D არე ერთგვაროვანია, თუ მისი ორი ნებისმიერი ნაწილი, რომელთაც თანატოლი ფართობი აქვთ, შეიცავენ თანატოლ მასებს. ამ შემთხვევაში არის ნებისმიერი ნაწილის მასის ფარდობა ამავე ნაწილის ფარდობასთან მუდმივი სიდიდეა, იგი რიცხობრივად უდრის D არის ერთეული ფართობის მასას. ამ ფარდობას D არის მასის სიმკვრივე ეწოდება. თუ მასა თანაბრად განაწილებული არაა, ე. ი. არე, ერთგვაროვანი არაა, მაშინ საჭირო ხდება შემოვიღოთ სიმკვრივის ცნება წერტილში.

ავიღოთ D არეში რაიმე p წერტილი და მისი $\Delta\sigma$ მიდამო, ე. ი. ε რადიუსიანი წრე, ცენტრით p წერტილში. $\Delta\sigma$ მიდამოს მასა იყოს Δm. ფარდობას $\dfrac{\Delta m}{|\Delta\sigma|}$ ეწოდება D არის მასის საშუალო სიმკვრივე $\Delta\sigma$ არეზე, ხოლო ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც $\varepsilon\to 0$, ჰქვია D არის მასის სიმკვრივე p წერტილში. აღვნიშნოთ იგი $\rho(p)$ სიმბოლოთი. ამგვარად,

$$\rho(p)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta m}{|\Delta\sigma|}. \tag{4.3}$$

ახლა გადავიდეთ D არის მასის მოძებნის საკითხზე. ვთქვათ, ფართობად D არეზე განაწილებულია მასა და ცნობილია მასის $\rho(p)$ სიმკვრივე D არის ყოველ p წერტილში. საძიებელია D არის მასა. დავყოთ D არე ფართობად ქვეარეებად

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\dots,\Delta\sigma_n.$$

ყოველ $\Delta\sigma_k$ არეზე ავიღოთ ნებისმიერი p_k წერტილი. (4.3) ტოლობის თანახმად, $\Delta\sigma_k$ არის Δm_k მასა მიახლოებით ასე გამოისახება:

$$\Delta m_k\simeq\rho(p_k)\,|\Delta\sigma_k|,$$

სადაც p_k არის $\Delta\sigma_k$ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი. D არის მთელი m მასის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება:

$$m\simeq\sum_{k=1}^{n}\rho(p_k)\,|\Delta\sigma_k|.$$

ცხადია, რომ $\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(p_k)|\Delta\sigma_k|$ გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $\lambda\to 0$, სადაც λ უდიდესი დიამეტრია $\Delta\sigma_k$ არეების დიამეტრებს შორის, წარმოადგენს მასის ზუსტ მნიშვნელობას:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(p_k)\,|\Delta\sigma_k|. \tag{4.4}$$

ამრიგად, ნივთიერი ფიგურის მასის მოძებნის ამოცანამ მიგვიყვანა

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(p_k)\,|\Delta\sigma_k| \tag{4.5}$$

ჯამის ზღვარის მოძებნამდე.

თუ შევადარებთ (4.1) და (4.5) ჯამებს, რომლებიც ორი სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნის შედეგად მივიღეთ, დავინახავთ, რომ ამ ჯამების აგებულება სავსებით ერთნაირია. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ამგვარი ჯამების ზღვრებს.

§ 5. ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა

ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემოსაზღვრულ ზომად ω სიმრავლეზე. განვიხილოთ ამ სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. ყოველი $\omega_k (k=1,2,\ldots,n)$ სიმრავლიდან ავიღოთ ნებისმიერი (ξ_k, η_k) წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,|\omega_k|.$$

ამ ჯამს ეწოდება რიმანის ჯამი. ცხადია, ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც (ξ_k, η_k) წერტილების არჩევაზე, ისევ λ-დანაწილებაზე.

თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ω არის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda \leqslant \lambda_0$, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

სადაც I რაიმე რიცხვია, მაშინ ვიტყვით, რომ σ ჯამი მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ და ამ ფაქტს ასე აღვნიშნავთ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

ამ შემთხვევაში I რიცხვს, თუ ასეთი არსებობს, ეწოდება ორჯერადი ინტეგრალი $f(x,y)$ ფუნქციისა, გავრცელებული ω სიმრავლეზე და აღინიშნება

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy \text{ ან } \iint_{\omega} f(p)\,d\omega.$$

აქ $p=(x,y)$.

ამრიგად, განსაზღვრის თანახმად,

$$\iint_{\omega} f(x, y)\,dx\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\,|\omega_k|\cdot$$

თუ ზემოთ აღნიშნული ზღვარი არსებობს, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება რიმანის აზრით ინტეგრებადი ან, მოკლედ, ინტეგრებადი ω სიმრავლეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x,y)$ ფუნქცია ინ-

ტეგრებადი არაა ω სიმრავლეზე. ω სიმრავლეს ეწოდება ინტეგრებადობის არე.

ცხადია, რომ თუ $|\omega|=0$, მაშინ $\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy=0$.

§ 6. ზედა და ქვედა ინტეგრალები

ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზომად ω სიმრავლეზე. განვიხილოთ ω სიმრავლის რაიმე წესიერი დანაწილება

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}. \tag{6.1}$$

ჯამებს

$$\bar{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} M_k |\omega_k|, \quad \underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} m_k |\omega_k|,$$

სადაც M_k და m_k არის $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებია ω_k სიმრავლეზე, ეწოდება შესაბამისად დარბუს ზედა და ქვედ ჯამები. ცხადია,

$$\underline{\sigma} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)|\omega_k| \leqslant \bar{\sigma},$$

სადაც (ξ_k, η_k) არის ω_k სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი. აქედან ჩანს, რომ ω სიმრავლის აღებული დანაწილებისათვის დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები წარმოადგენს შესაბამისად რიმანის ჯამთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრებს. მართლაც, (ξ_k, η_k) წერტილების შერჩევით

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)|\omega_k|$$

ჯამები შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ ახლოს როგორც $\bar{\sigma}$ ჯამთან, ისე $\underline{\sigma}$ ჯამთანაც.

ლემა 2. ვთქვათ, (6.1) დანაწილებისათვის $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამებია $\bar{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$. თუ $\omega_k (k=1,2,\ldots,n)$ სიმრავლეებს კვლავ დავყოფთ ზომად ქვესიმრავლეებად და ხელახლა შევადგენთ ზედა და ქვედა ჯამებს $\bar{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$, გვექნება

$$\underline{\sigma} \leqslant \underline{\sigma}' \leqslant \bar{\sigma}' \leqslant \bar{\sigma},$$

ე. ი. ზედა ჯამი არ გადიდდება, ქვედა ჯამი კი არ შემცირდება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ ერთ რაიმე ω_k სიმრავლისათვის. ვთქვათ, ω_k სიმრავლე დაყოფილია, მაგალითად, ორ ზომად ω_k' და ω_k'' სიმრავლედ. აღვნიშნოთ M_k' და M_k'' სიმბოლოებით $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა საზღვრები ω_k' და ω_k'' სიმრავლეებზე შესაბამისად. ცხადია, რომ

$$M_k' \leqslant M_k, \quad M_k'' \leqslant M_k.$$

ამ შემთხვევაში $\bar{\sigma}$ ჯამში ყველა შესაკრები უცვლელი რჩება, გარდა $M_k|\omega_k|$ შესაკრებისა, რომლის ნაცვლად ახლა ორი შესაკრებია $M_k'|\omega_k'|$ და $M_k''|\omega_k''|$, ასე რომ, $M_k|\omega_k|$ გამოსახულების ნაცვლად გვექნება ჯამი

$$M_k'|\omega_k'| + M_k''|\omega_k''|.$$

მაგრამ

$$M_k'|\omega_k'| + M_k''|\omega_k''| \leqslant M_k(|\omega_k'| + |\omega_k''|) = M_k|\omega_k|.$$

მაშასადამე, $\bar{\sigma}' \leqslant \bar{\sigma}$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ კლებულობს, ე. ი. $\underline{\sigma} \leqslant \underline{\sigma}'$. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 8. ა რ ც ე რ თ ი ქ ვ ე დ ა ჯ ა მ ი ა რ ა ღ ე მ ა ტ ე ბ ა ა რ ც ე რ თ ზ ე დ ა ჯ ა მ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია ω სიმრავლის ორი ნებისმიერი წესიერი დანაწილება

$$\{\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n'\} \text{ და } \{\omega_1'', \omega_2'', \ldots, \omega_m''\}.$$

მათი შესაბამისი ზედა და ქვედა ჯამები იყოს $\bar{\sigma}'$, $\underline{\sigma}'$ და $\bar{\sigma}''$, $\underline{\sigma}''$, ე. ი.

$$\bar{\sigma}' = \sum_{k=1}^{n} M_k'|\omega_k'|, \quad \underline{\sigma}' = \sum_{k=1}^{n} m_k'|\omega_k'|,$$

$$\bar{\sigma}'' = \sum_{k=1}^{m} M_k''|\omega_k''|, \quad \underline{\sigma}'' = \sum_{k=1}^{m} m_k''|\omega_k''|.$$

დასამტკიცებელია, რომ

$$\underline{\sigma}'' \leqslant \bar{\sigma}'.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega_{ik} = \omega_i' \cap \omega_k''.$$

ω_{ik} სიმრავლე ზომადია. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\omega_i' = \bigcup_{k=1}^{m} \omega_{ik}, \quad \omega_k'' = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_{ik}.$$

ამის გარდა,

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \omega_{ik}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ორ სხვადასხვა ω_{ik} სიმრავლეს საერთო შიგა წერტილი არა აქვს. მართლაც, ვთქვათ,

$$\omega_{ik} = \omega_i' \cap \omega_k'', \quad \omega_{rs} = \omega_r' \cap \omega_s'',$$

სადაც $i \neq r$, და ვიგულისხმოთ, რომ ω_{ik} და ω_{rs} სიმრავლეებს აქვთ საერთო შიგა წერტილი p. მაშინ p იქნება ω_i' და ω_r' სიმრავლეების საერთო შიგა წერტილი, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად, ორ სხვადასხვა ω_{ik} სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს საერთო წერტილებად მხოლოდ საზღვრის წერტილები. შემდეგ, მე-6 თეორემის თანახმად

$$|\omega_i'| = \sum_{k=1}^{m} |\omega_{ik}|, \quad |\omega_k''| = \sum_{i=1}^{n} |\omega_{ik}|, \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\omega_{ik}| = |\omega|.$$

აღვნიშნოთ M_{ik} და m_{ik} სიმბოლოებით $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები ω_{ik} სიმრავლეზე. ცხადია, რომ

$$M_{ik} \leqslant M_i', \quad M_{ik} \leqslant M_k'', \quad m_{ik} \geqslant m_i', \quad m_{ik} \geqslant m_k''.$$

რადგანაც

$$m_k'' |\omega_k''| = m_k'' \sum_{i=1}^{n} |\omega_{ik}| = \sum_{i=1}^{n} m_k'' |\omega_{ik}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_{ik} |\omega_{ik}|,$$

ამიტომ

$$\underline{\sigma}'' = \sum_{k=1}^{n} m_k'' |\omega_k''| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} |\omega_{ik}|.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\overline{\sigma}' \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik} |\omega_{ik}|.$$

მაშასადამე,

$$\underline{\sigma}'' \leqslant \overline{\sigma}'.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა აღვნიშნოთ H^* სიმბოლოთი $f(x,y)$ ფუნქციის ყველა ზედა ჯამის სიმრავლე, H_*-ით კი—ყველა ქვედა ჯამის სიმრავლე. მე-2 ლე-

მის თანახმად H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ H^* სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, H_* კი ზემოდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$I^* = \inf H^*, \quad I_* = \sup H_*.$$

ცხადია, რომ $I_* \leqslant I^*$.

I^* და I_* რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად ზედა და ქვედა ორჯერადი ინტეგრალები $f(x,y)$ ფუნქციისა, გავრცელებული ω სიმრავლეზე, და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად

$$\overline{\iint_\omega} f(x, y)\,dx\,dy \text{ და } \underline{\iint_\omega} f(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 7. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

თეორემა 1 (რიმანი). *ფართობად ω სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ω სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას*

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon. \tag{7.1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω სიმრავლეზე; მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ω სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც σ არის აღებული დანაწილების სათანადო რიმანის ჯამი, ხოლო

$$I = \iint_\omega f(x, y)\,dx\,dy.$$

მაშასადამე,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{\sigma} \leqslant \overline{\sigma} < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

აქედან გამომდინარეობს (7.1) უტოლობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ ω სიმრავლის ყოველი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, მართებულია (7.1) უტოლობა. აქედან ვღებულობთ

$$I^*-I_*<\varepsilon.$$

რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $I^*=I_*$. ეს საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ I ასოთი. შემდეგ, რადგანაც

$$\underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma},\quad \underline{\sigma}\leqslant I\leqslant\overline{\sigma},$$

ამიტომ, (7.1) უტოლობის ძალით,

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

ყოველი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I$$

და ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ შემოსაზღვრული $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ფართობად ω სიმრავლეზე, იგი ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ფართობად ქვესიმრავლეზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, ω^* არის ω სიმრავლის ფართობადი ქვესიმრავლე. განვიხილოთ ω^* სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega_1^*, \omega_2^*,\ldots,\omega_p^*\}$. ამ დანაწილების შესაბამისი ზედა და ქვედა ჯამები აღვნიშნოთ $\overline{\sigma}^*$ და $\underline{\sigma}^*$ სიმბოლოებით. შემდეგ განვიხილოთ $\omega-\bigcup\limits_{k=1}^{p}\omega_k^*$ სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega_1', \omega_2',\ldots,\omega_q'\}$.

ამ ორი დანაწილების გაერთიანება მოგვცემს ω არის წესიერ დანაწილებას $\{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_n\}$, რომლის შესატყვისი ზედა და ქვედა ჯამები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ სიმბოლოებით. ცხადია, რომ

$$\overline{\sigma}^*-\underline{\sigma}^*\leqslant\overline{\sigma}-\underline{\sigma}.$$

თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω სიმრავლეზე, მაშინ პირველი თეორემის ძალით უკანასკნელი უტოლობა მოგვცემს

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}^*-\underline{\sigma}^*)=0,$$

სადაც λ არის $\omega_k^*(k=1,2,\ldots,p)$ სიმრავლეების დიამეტრთა შორის უდიდესი. უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს თეორემას.

§ 8. ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი ? ?

თეორემა 3. დახურულ ფართობად არეზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ არეზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ ფართობად ω არეზე. კანტორის თეორემის თანახმად იგი თანაბრად უწყვეტია ω არეზე. მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ω არის ყოველი $p'=(x',y')$ და $p''=(x'',y'')$ წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $\rho(p',p'')<\eta$, გვექნება

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\frac{\varepsilon}{|\omega|}.$$

ახლა განვიხილოთ ω არის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, სადაც $\lambda<\eta$, მაშინ

$$M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{|\omega|}\quad(k=1,2,\ldots,n),$$

სადაც M_k და m_k წარმოადგენს შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს ω_k სიმრავლეზე. მაშასადამე,

$$\bar{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|\omega_k|<\frac{\varepsilon}{|\omega|}\sum_{k=1}^{n}|\omega_k|=\varepsilon.$$

აქედან, პირველი თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს $f(x,y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა ω არეზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად, ცილინდრული სხეულის V მოცულობა, რომელიც (4.2) ტოლობითაა მოცემული, შეგვიძლია ასე დავწეროთ:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{8.1}$$

ასევე, (4.4) ტოლობა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy. \tag{8.2}$$

ახლა დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი

თეორემა 4. თუ დახურულ ფართობად ω არეზე შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულია, მაშინ აღებული ფუნქცია ინტეგრებადია ω-ზე.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ D ასეთი $f(x,y)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე და ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც

$$|D|=0,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი დახურული ფართობადი არე $F\supset D$, რომ

$$|F|<\frac{\varepsilon}{8M},$$

სადაც M არის $|f(x,y)|$ ფუნქციის ზედა საზღვარი ω სიმრავლეზე.

შემდეგ მოიძებნება ისეთი დახურული ფართობადი არე $P\subset\omega\dot{-}F$, რომ

$$|\omega\dot{-}P|<\frac{\varepsilon}{8M}.$$

$\omega-F^{\circ}$ სიმრავლეზე[1] $f(x,y)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია და ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ $\omega-F^{\circ}$ სიმრავლის ყოველი $p'=(x',y')$ და $p''=(x'',y'')$ წერტილებისათვის, რომელთა შორის მანძილი ნაკლებია $\delta(\varepsilon)$-ზე, მართებულია უტოლობა

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\frac{\varepsilon}{2|\omega|}.$$

P და F სიმრავლეებს შორის მანძილი აღვნიშნოთ η-თი, რადგანაც ჩაკეტილ F და P სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი. ამიტომ $\eta>0$.

ახლა განვიხილოთ ω არის რაიმე წესიერი λ-დანაწილება $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, $\lambda<\lambda_0$, სადაც λ_0 უმცირესი რიცხვია δ და η რიცხვებს შორის. გვაქვს:

$$\bar{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|\omega_k|.$$

აქ M_k და m_k წარმოადგენს შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს ω_k სიმრავლეზე. $\bar{\sigma}-\underline{\sigma}$ სხვაობა წარმოვადგინოთ ასე:

$$\bar{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum^{(1)}(M_k-m_k)|\omega_k|+\sum^{(2)}(M_k-m_k)|\omega_k|, \tag{8,3}$$

[1] F° სიმბოლოთი აღნიშნულია F სიმრავლის შიგა წერტილთა სიმრავლე.

სადაც $\sum^{(1)}$ ჯამში შედის $(M_k-m_k)|\omega_k|$ სახის შესაკრებები, შესაბამისი ω_k სიმრავლეებისა, რომლებსაც აქვთ საერთო წერტილი P სიმრავლესთან, ხოლო $\sum^{(2)}$ ჯამში შედის ყველა დანარჩენი შესაკრები.

შევაფასოთ $\sum^{(1)}$ და $\sum^{(2)}$ ჯამები. ცხადია, რომ $\sum^{(1)}$ ჯამის ყველა შესაკრებისათვის გვექნება

$$M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{2|\omega|}$$

და ამიტომ

$$\sum\nolimits^{(1)}(M_k-m_k)|\omega_k|<\frac{\varepsilon}{2|\omega|}\sum\nolimits^{(1)}|\omega_k|<\frac{\varepsilon}{2|\omega|}\cdot|\omega|=\frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ

$$\sum\nolimits^{(2)}(M_k-m_k)|\omega_k|\leqslant 2M\sum\nolimits^{(2)}|\omega_k|<2M(|F|+|\omega-P|)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამრიგად,

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\varepsilon.$$

მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω არეზე. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. ორჯერადი ინტეგრალის უმარტივესი თვისებები

თეორემა ნ. თუ ω ფართობადი არეა, მაშინ

$$\iint\limits_{\omega} dxdy=|\omega|. \tag{9.1}$$

დამტკიცება. ω არის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის $\{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_n\}$ გვაქვს

$$|\omega_1|+|\omega_2|+\cdots+|\omega_n|=|\omega|$$

და მაშასადამე,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|\omega_k|=|\omega|,$$

ე. ი. მართებულია (9.1) ტოლობა.

თეორემა ჲ. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω არეზე, მაშინ $af(x,y)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია ω-ზე და მართებულია ტოლობა

$$\iint\limits_{\omega} af(x,y)dxdy=a\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy. \tag{9.2}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ω სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $F(x,y)=af(x,y)$, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k)\,|\omega_k| = a\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\,|\omega_k|,$$

სადაც (ξ_k,η_k) წარმოადგენს ω_k სიმრავლის ნებისმიერ წერტილს. თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda\to 0$, სადაც λ არის $d(\omega_k)$ დიამეტრებს შორის უდიდესი, მივიღებთ (9.2) ტოლობას.

თეორემა 7. თუ $f(x,y)$ და $g(x,y)$ ფუნქციები ინტეგრებადია ω არეზე, მაშინ მათი ჯამიც $f(x,y)+g(x,y)$ ინტეგრებადია ω-ზე და მართებულია ტოლობა

$$\iint_{\omega} [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\omega} g(x,y)\,dxdy. \tag{9.3}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ω არის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. გვაქვს:

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k,\eta_k)+g(\xi_k,\eta_k)]\,|\omega_k| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\,|\omega_k| + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k,\eta_k)\,|\omega_k|.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda\to 0$, სადაც λ არის $d(\omega_k)$ დიამეტრებს შორის უდიდესი, მივიღებთ (9.3) ტოლობას.

შედეგი (ინტეგრალის წრფივობა). თუ $f_1(x,y)$, $f_2(x,y), \ldots, f_n(x,y)$ ფუნქციები ინტეგრებადია ფართობად ω არეზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია

$$a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)+\ldots+a_nf_n(x,y)$$

აგრეთვე ინტეგრებადია ω-ზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_{\omega} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x,y)\right) dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\omega} f_k(x,y)\,dxdy.$$

თეორემა 8 (ინტეგრალის ადიტიურობა). თუ შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ფართობად ω სიმრავლეზე და სიმრავლეთა სისტემა $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ წარმოადგენს ω სიმრავლის წესიერ დანაწილებას, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\omega_k} f(x,y)\,dxdy. \tag{9.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $\omega_k (k=1,2,\ldots,n)$ წარმოადგენს ω სიმრავლის ზომად ქვესიმრავლეს, ამიტომ მე-2 თეორემის თანახმად $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω_k სიმრავლეზე,

განვიხილოთ $\omega_k (k=1,2,\ldots,n)$ სიმრავლის რაიმე წესიერი დანაწილება

$$\tau_k = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots, \omega_{k\, p_k}\}.$$

მაშინ $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \tau_k$ წარმოადგენს ω სიმრავლის წესიერ დანაწილებას. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{p_k} f(\xi_j, \eta_j) |\omega_{kj}| \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

მაშინ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$$

წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის რიმანის ჯამს, რომელიც შეესაბამება ω სიმრავლეს. ამ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ (9.4) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 6. ჩვენ ვიტყვით, რომ რაიმე P თვისებას ადგილი აქვს თითქმის ყველგან ზომად E სიმრავლეზე, თუ E სიმრავლის იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლის ზომა, სადაც P თვისებას ადგილი არა აქვს, ნულის ტოლია.

თეორემა 9. თ უ ზ ო მ ა დ ω ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე $f(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა დ ა თ ი თ ქ მ ი ს ყ ვ ე ლ გ ა ნ ω-ზ ე $f(x,y) \geqslant 0$. მ ა შ ი ნ

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0. \tag{9.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ω სიმრავლის ყოველ წერტილში $f(x,y) \geqslant 0$. ცხადია, $f(x,y)$ ფუნქციის ნებისმიერი ინტეგრალური σ ჯამისათვის $\sigma \geqslant 0$ და, მაშასადამე, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma \geqslant 0$, ე. ი. მართებულია (9.5) თანაფარდობა.

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x,y) \geqslant 0$ თითქმის ყველგან ω-ზე. აღვნიშნოთ H-ით ω სიმრავლის იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის $f(x,y) < 0$.

პირობის თანახმად, $|H| = 0$. შემდეგ, მე-8 თეორემის თანახმად,

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega - H} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{H} f(x,y)\,dx\,dy.$$

მაგრამ

$$\iint\limits_{\omega-H} f(x,y)dxdy \geqslant 0, \quad \iint\limits_{H} f(x,y)dxdy=0.$$

მაშასადამე, მართებულია (9.5) თანაფარდობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ ზომად ω სიმრავლეზე ინტეგრებადი $f(x,y)$ და $g(x,y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ თითქმის ყველგან ω-ზე, მაშინ

$$\iint\limits_{\omega} f(x, y)dx\,dy \leqslant \iint\limits_{\omega} g(x,y)dxdy. \tag{9.6}$$

დამტკიცება. რადგანაც თითქმის ყველგან $g(x,y)-f(x,y)\geqslant 0$, ამიტომ მე-9 თეორემის თანახმად

$$\iint\limits_{\omega} [g(x,y)-f(x,y)]dxdy \geqslant 0.$$

აქედან მიიღება (9.6) უტოლობა.

თეორემა 11. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ზომად ω სიმრავლეზე, მაშინ $|f(x,y)|$ ფუნქციაც ინტეგრებადია და

$$\left|\iint\limits_{\omega} f(x, y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_{\omega} |f(x,y)|\,dxdy. \tag{9.7}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ω სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი დანაწილება $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$. თუ აღვნიშნავთ M_k^* და m_k^* სიმბოლოებით შესაბამისად $|f(x,y)|$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს ω_k სიმრავლეზე, გვექნება

$$M_k^*-m_k^*=\sup\,||f(x'',y'')|-|f(x',y')||,$$

სადაც (x',y') და (x'',y'') წარმოადგენს ω_k სიმრავლის ნებისმიერ წერტილებს. მაგრამ

$$||f(x'',y'')|-|f(x',y')|| \leqslant |f(x'',y'')-f(x',y')|.$$

ამიტომ

$$M_k^*-m_k^* \leqslant M_k-m_k,$$

სადაც M_k და m_k სიმბოლოებით აღნიშნულია შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები ω_k სიმრავლეზე. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k^*-m_k^*)|\omega_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k-m_k)|\omega_k|.$$

$f(x,y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო ω არეზე, ამ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც ყველა $d(\omega_k)\to 0$, სადაც $d(\omega_k)$ წარმოადგენს ω_k სიმრავლის დიამეტრს, ამიტომ მარცხენა ნაწილიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. მაშასადამე, $|f(x,y)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω სიმრავლეზე.

ახლა დავამტკიცოთ (9.7) უტოლობის მართებულობა. გვაქვს:

$$\left|\iint_\omega f(x,y)dx\,dy\right| = \lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)|\omega_k|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n |f(\xi_k,\eta_k)||\omega_k| = \iint_\omega |f(x,y)|\,dxdy.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება $|f(x,y)|$ ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი, $f(x,y)$ კი არა.

შედეგი. თუ $f(x,y)$ და $g(x,y)$ ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა ზ ო მ ა დ ω ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, ა მ ა ს თ ა ნ ა ვ ე

$$|f(x,y)-g(x,y)|<\varepsilon,\quad (x,y)\in\omega,$$

ს ა დ ა ც ε დ ა დ ე ბ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\left|\iint_\omega f(x,y)dxdy - \iint_\omega g(x,y)dx\,dy\right| < \varepsilon|\omega|.$$

თეორემა 12. ო რ ი ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ა გ რ ე თ ვ ე ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა.

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ერთმაგი ინტეგრალის შემთხვევაში.

§ 10. თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ

თეორემა 13. თუ $f(x,y)$ და $g(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა ω ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, ა მ ა ს თ ა ნ ა ვ ე $g(x,y)$ ნ ი შ ა ნ ს ა რ ი ც ვ ლ ი ს ω-ზ ე, მ ა შ ი ნ

$$\iint_\omega f(x,y)g(x,y)dxdy=\mu\iint_\omega g(x,y)dxdy, \tag{10.1}$$

ს ა დ ა ც μ ა რ ი ს $f(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ქ ვ ე დ ა დ ა ზ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ს შ ო რ ი ს მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღვნიშნოთ m და M ასოებით შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრები ω სიმრავლეზე. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ω სიმრავლეზე $g(x,y)\geqslant 0$. რადგანაც

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M,$$

ამიტომ

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y). \tag{10.2}$$

მე-11 თეორემის ძალით $f(x,y)g(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω-ზე. თუ მოვახდენთ (10.2) უტოლობათა წევრ-წევრად ინტეგრებას, მე-10 თეორემის თანახმად გვექნება

$$m\iint\limits_{\omega} g(x,y)dx\,dy\leqslant \iint\limits_{\omega} f(x,y)g(x,y)dx\,dy\leqslant M\iint\limits_{\omega} g(x,y)dxdy.$$

მაშასადამე, არსებობს m და M რიცხვებს შორის მოთავსებული ისეთი μ რიცხვი. რომლისთვისაც ადგილი აქვს (10.1) ტოლობას.

შედეგი. თ უ $f(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ა ფ ა რ დ ო ბ ა დ დ ა ხ უ რ უ ლ ω ა რ ე შ ი, ხ ო ლ ო $g(x,y)$ ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა დ ა ნ ი შ ა ნ ს ა რ ი ც ვ ლ ი ს ω-ზ ე, მ ა შ ი ნ ω ა რ ე შ ი ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი (ξ,η) წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ

$$\iint\limits_{\omega} f(x,y)g(x,y)dx\,dy=f(\xi,\eta)\iint\limits_{\omega} g(x,y)dxdy. \tag{10.3}$$

მართლაც, ძე-3 თეორემის თანახმად, $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω-ზე, ხოლო ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით, არსებობს m და M რიცხვებს შორის ისეთი μ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\iint\limits_{\omega} f(x,y)g(x,y)dxdy=\mu\iint\limits_{\omega} g(x,y)dxdy,$$

სადაც m და M წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს ω არეზე. მაგრამ ω არეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი (ξ,η) წერტილი, რომ

$$f(\xi,\eta)=\mu.$$

მაშასადამე, მართებულია (10.3) ტოლობა.

კერძოდ, თუ ω არეში $g(x,y)=1$, მაშინ (10.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy=\mu\cdot|\omega|. \tag{10.4}$$

ამ ტოლობას ეწოდება ორჯერადი ინტეგრალის შ ე ფ ა ს ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა.

თუკი $f(x,y)$ უწყვეტია ω არეზე და $g(x,y)=1$, მაშინ (10.3) ფორმულიდან გვაქვს

$$\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\,|\,\omega\,|. \tag{10.5}$$

(10.1), (10.3), (10.4), (10.5) ფორმულები გამოსახავენ თეორემას საშუალო მნიშვნელობის შესახებ ორჯერადი ინტეგრალის თეორიაში.

გამოსახულებას

$$\frac{1}{|\,\omega\,|}\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy$$

ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა ω არეში. ეს ცნება ხშირად გვხვდება ფიზიკასა და მექანიკაში.

§ 11. ზოგიერთი შენიშვნა მარტივი და ორჯერადი ინტეგრალის შესახებ

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის $[a,b]$ სეგმენტზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ზედა და ქვედა ინტეგრალები იყოს თანატოლი:

$$\overline{\int_{a}^{b}} f(x)dx=\underline{\int_{a}^{b}} f(x)dx.$$

ზედა და ქვედა ინტეგრალების საერთო მნიშვნელობა წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალს, გავრცელებულს $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

შევთანხმდეთ, რომ $\int_{a}^{b} f(x)dx$ სიმბოლოს აზრი მივანიჭოთ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $f(x)$ ინტეგრებადი არაა რიმანის აზრით $[a,b]$ სეგმენტზე. სახელდობრ, მას მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც მოთავსებულია ქვედა და ზედა ინტეგრალებს შორის.

ანალოგიურად, თუ ზომად ω სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა ω-ზე, მაშინ $\iint\limits_{\omega} f(x,y)dxdy$ სიმბოლოს მი-

ვანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც მოთავსებულია $f(x,y)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა ინტეგრალებს შორის.

პირველ ტომში ვიხილავდით $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ მხოლოდ ცალსახა $f(x)$ ფუნქციას. ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განუსაზღვრელია x-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის, მხოლოდ უნდა იყოს ნაჩვენები x-ის ასეთი მნიშვნელობებისათვის $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელობის საზღვრები.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში, გარდა ზოგიერთი წერტილისა, ხოლო ამ წერტილებზე ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელობის საზღვრები, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერ ქვესეგმენტზე და, მაშასადამე, შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები. ამ შემთხვევაშიც ზედა ჯამთა სიმრავლის ქვედა საზღვარი იქნება $f(x)$ ფუნქციის ზედა ინტეგრალი, ქვედა ჯამთა ზედა საზღვრები კი ქვედა ინტეგრალი. თუ ზედა ინტეგრალები ტოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

სრულიად ამგვარადვე, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ზომად ω სიმრავლის ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლებელია ზოგიერთი წერტილისა და ამ წერტილებზე ცნობილია $f(x,y)$ ფუნქციის განუსაზღვრელობის საზღვრები, მაშინ შესაძლებელია $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრების განსაზღვრა ω სიმრავლის ყოველ ზომად ქვესიმრავლეზე და, მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამების შედგენა. ამ შემთხვევაშიც ზედა ჯამთა სიმრავლის ქვედა საზღვარი იქნება $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა ინტეგრალი, ქვედა ჯამთა სიმრავლის ზედა საზღვარი კი ქვედა ინტეგრალი. თუ ზედა და ქვედა ინტეგრალები ტოლია, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ω სიმრავლეზე.

თეორემა 14. $[a,b]$ *სეგმენტზე შემოსაზღვრული* $f(x)$ *ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობები*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx, \tag{11,1}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx, \tag{11.2}$$

სადაც $a<c<b$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ, მაგალითად, (11.1) ტოლობა. განვიხილოთ $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტების ნებისმიერი დანაწილებანი ქვესეგმენტებად. ეს დანაწილებანი შეგვიძლია განვიხილოთ აგრეთვე როგორც $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებაც. აღვნიშნოთ $\overline{\sigma}_{ab}$, $\overline{\sigma}_{ac}$ და $\overline{\sigma}_{cb}$ სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ზედა ჯამები შესაბამისი $[a,b]$, $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტებისა. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overline{\sigma}_{ab}=\overline{\sigma}_{ac}+\overline{\sigma}_{cb}$$

და რადგანაც

$$\overline{\sigma}_{ab}\geqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

ამიტომ

$$\overline{\sigma}_{ac}+\overline{\sigma}_{cb}\geqslant \overline{\int_a^b} fx(dx).$$

აქედან ვღებულობთ

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx\geqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{11.3}$$

თუ განვიხილავთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერ დანაწილებას ქვესეგმენტებად და სათანადო მსჯელობას ჩავატარებთ, მივიღებთ

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx\leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{11,4}$$

(11.3) და (11.4) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (11.1) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (11.2) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 15. თ უ $f(x,y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა

$$R_0=[a_1, b_1;\ a_2, b_2]$$

მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ზ ე, მ ა შ ი ნ

$$\overline{\iint_{R_0}} f(x, y)dxdy=\overline{\iint_{R_1}} f(x, y)dxdy+\overline{\iint_{R_2}} f(x,y)dxdy,$$

$$\underline{\iint_{R_0}} f(x, y)dxdy=\underline{\iint_{R_1}} f(x, y)dxdy+\underline{\iint_{R_2}} f(x,y)dxdy,$$

ს ა დ ა ც

$$R_1=[a_1,c;\ a_2,b_2],\quad R_2=[c, b_1;\ a_2, b_2].$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

§ 12. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა მართკუთხა არის შემთხვევაში

სანამ შევუდგებოდეთ ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის საკითხის შესწავლას, დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 1. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია

$$R_0=[a_1, b_1;\ a_2, b_2]$$

მართკუთხედზე, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_{a_2}^{\overline{b_2}} dy \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx = \int_{a_2}^{\overline{c}} dy \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx + \int_{c}^{\overline{b_2}} dy \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx, \qquad (12.1)$$

სადაც

$$a_2<c<b_2.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(y) = \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx.$$

რადგანაც $f(x,y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია R_0 მართკუთხედზე, ამიტომ $\varphi(y)$ ფუნქციაც შემოსაზღვრულია $[a_2, b_2]$ სეგმენტზე, შემდეგ მე-13 თეორემის თანახმად

$$\int_{a_2}^{\overline{b_2}} \varphi(y)dy = \int_{a_2}^{\overline{c}} \varphi(y)dy + \int_{c}^{\overline{b_2}} \varphi(y)dy.$$

ეს ტოლობა იგივეა, რაც (12.1) ტოლობა.

შენიშვნა. ეს ლემა ძალაში რჩება, თუ ზედა ინტეგრალების მაგიერ განვიხილავთ ქვედა ინტეგრალებს.

ლემა 2. თუ m და M არის $f(x,y)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრები $R_0=[a_1, b_1;\ a_2, b_2]$ მართკუთხედზე, მაშინ მართებულია უტოლობები

$$m\,|R_0| \leqslant \int_{\underline{a_2}}^{b_2} dy \int_{\underline{a_1}}^{b_1} f(x,y)dx \leqslant \int_{a_2}^{\overline{b_2}} dy \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx \leqslant M\,|R_0|. \qquad (12.2)$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$m(b_1 - a_1) \leqslant \int_{\underline{a_1}}^{b_1} f(x,y)dx \leqslant \int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx \leqslant M(b_1-a_1).$$

ახლა დავყოთ $[a_2, b_2]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით:

$$a_2=y_0<y_1<\cdots<y_n=b_2.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\psi(y)=\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx, \quad \varphi(y)=\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dx,$$

გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} m(b_1-a_1)(y_k-y_{k-1}) \leqslant \underline{\sigma}_\varphi \leqslant \overline{\sigma}_\psi \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(b_1-a_1)(y_k-y_{k-1}),$$

სადაც $\underline{\sigma}_\varphi$ და $\overline{\sigma}_\psi$ სიმბოლოებით აღნიშნულია შესაბამისად $\varphi(y)$ და $\psi(y)$ ფუნქციების ქვედა და ზედა ჯამები $[a_2, b_2]$ სეგმენტზე. ამ უტოლობებიდან გვაქვს

$$m\,|R_0| \leqslant \underline{\sigma}_\varphi \leqslant \overline{\sigma}_\psi \leqslant M\,|R_0|.$$

საიდანაც გამომდინარეობს (12.2) უტოლობები.

თეორემა 16. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ მართკუთხედზე, მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \text{ და } \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$

და მართებულია ტოლობები

$$\iint_{R_0} f(x, y)dxdy=\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy=\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx. \quad (12.3)$$

დამტკიცება. დავყოთ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად წერტილებით

$$a_1=x_0<x_1<\cdots<x_m=b_1,$$

$[a_2, b_2]$ სეგმენტი კი—წერტილებით

$$a_2=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=b_2.$$

თუ ამ წერტილებზე გავავლებთ შესაბამისად Oy და Ox ღერძების პარალელურ წრფეებს, მაშინ R_0 მართკუთხედი დაიყოფა მართკუთხედებად, რომელთა რიცხვია mn. ვთქვათ,

$$r_{ik}=[x_{i-1},\ x_i;\ y_{k-1},\ y_k].$$

პირველი ლემის თანახმად

$$\overline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \overline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\overline{\int_{y_{k-1}}^{y_k}} dy \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x,y)dx, \tag{12.4}$$

ხოლო მე-2 ლემის ძალით

$$m_{ik}|r_{ik}|\leqslant \overline{\int_{y_{k-1}}^{y_k}} dy \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x,y)dx\leqslant M_{ik}|r_{ik}|, \tag{12.5}$$

სადაც m_{ik} და M_{ik} აღნიშნავს $f(x,y)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს r_{ik} მართკუთხედზე ($i=1,2,\ldots m;\ k=1,2,\ldots,n$).

თუ (12.5) უტოლობებს შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (12.4) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}|r_{ik}|\leqslant \overline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \overline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}|r_{ik}|. \tag{12.6}$$

რადგანაც $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია R_0-ზე, ამიტომ (12.6) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$\iint_{R_0} f(x,y)dx\,dy=\overline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \overline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx. \tag{12.7}$$

ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ, რომ

$$\iint_{R_0} f(x,y)dxdy=\underline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \underline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx. \tag{12.8}$$

(12.7) და (12.8) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\overline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \overline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx=\underline{\int_{a_2}^{b_2}} dy \underline{\int_{a_1}^{b_1}} f(x,y)dx, \tag{12.9}$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(y)=\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx,\quad \underset{\bullet}{\varphi}(y)=\int_{\underline{a_1}}^{b_1} f(x,y)dx,\ \overset{\bullet}{\varphi}(y)=\int_{a_1}^{\overline{b_1}} f(x,y)dx. \qquad (12.10)$$

$\underset{\bullet}{\varphi}(y)$ და $\overset{\bullet}{\varphi}(y)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[a_2, b_2]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში, ხოლო $\varphi(y)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული $[a_2, b_2]$ სეგმენტის ზოგიერთ წერტილში. ასეთ წერტილში $\varphi(y)$-ის მნიშვნელობად მივიჩნიოთ ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია $\underset{\bullet}{\varphi}(y)$ და $\overset{\bullet}{\varphi}(y)$ შორის. მაშინ $[a_2, b_2[$ სეგმენტის ყოველ წერტილში გვექნება

$$\int_{\underline{a_2}}^{b_2} \underset{\bullet}{\varphi}(y)dy \leqslant \int_{\underline{a_2}}^{b_2} \varphi(y)dy \leqslant \int_{a_2}^{\overline{b_2}} \varphi(y)dy \leqslant \int_{a_2}^{\overline{b_2}} \overset{\bullet}{\varphi}(y)dy. \qquad (12.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ (12.9) და (12.10) ტოლობებს, (12.11) თანაფარდობიდან მივიღებთ

$$\int_{\underline{a_2}}^{b_2} \underset{\bullet}{\varphi}(y)dy=\int_{a_2}^{b_2'} \varphi(y)dy=\int_{a_2}^{\overline{b_2}} \overset{\bullet}{\varphi}(y)dy.$$

აქედან გამომდინარეობს $\varphi(y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა $[a_2, b_2]$ სეგმენტზე და ამიტომ (12.7) ტოლობა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\iint_{R_0} f(x, y)dxdy=\int_{a_2}^{b_2} dy\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx. \qquad (12.12)$$

მაშასადამე, ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობის მოსაძებნად საჭიროა ჯერ ვაინტეგროთ $f(x,y)$ ფუნქცია x-ით a_1-დან b_1-მდე, ჩავთვლით რა y-ს მუდმივად. მიღებული შედეგი წარმოადგენს მხოლოდ y-ის ფუნქციას, რომელიც უნდა ვაინტეგროთ a_2 და b_2 ზღვრებს შორის.

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\iint f(x, y)dxdy=\int_{a_1}^{b_1} dx\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy. \qquad (12.13)$$

12.12) და (12.13) ტოლობები გვაძლევს (12.3) ფორმულას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_{\omega} f(x,y)dxdy,$$

სადაც ω წარმოადგენს ორგანზომილებიან $[a_1, b_1, a_2, b_2]$ სეგმენტს, აღინიშნება ასე

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dydx \text{ ან } \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy.$$

აქ ინტეგრალების გარე ნიშნები შეესაბამება გარე დიფერენციალებს. მაგალითად,

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dydx = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy\right)dx = \int_{a_1}^{b_1} dx\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$I = \int_0^a\int_0^b \frac{dydx}{(1+x+y)^2} \quad (a>0, \ b>0).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (12.13) ფორმულის თანახმად

$$I = \int_0^a dx\int_0^b \frac{dy}{(1+x+y)^2}.$$

მაგრამ

$$\int_0^b \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_0^b = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+b+x}.$$

მაშასადამე,

$$I = \int_0^a \frac{dx}{1+x} - \int_0^a \frac{dx}{1+b+x} = \left[\ln\frac{1+x}{1+b+x}\right]_0^a =$$

$$= \ln\frac{1+a}{1+b+a} - \ln\frac{1}{1+b} = \ln\frac{(1+a)(1+b)}{1+a+b}.$$

მაგალითი 2. თუ $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ მართკუთხედზე უწყვეტ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს სახე $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_{R_0} f(x, y)dx\,dy=\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} \psi(y)\,dy.$$

დამტკიცება. (12.13) ფორმულის თანახმად

$$\iint_{R_0} f(x, y)dx\,dy= \iint_{R_0} \varphi(x)\,\psi(y)dx\,dy=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\varphi(x)\,\psi(y)\,dy\right)dx =$$

$$=\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx\cdot \int_{a_2}^{b_2} \psi(y)\,dy,$$

რ. დ. გ.

მაგალითი 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე იგი ნიშანს ინარჩუნებს, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2. \tag{12.14}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$I=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$$

ცხადია, რომ

$$I=\int_a^b\int_a^b\frac{f(y)}{f(x)}\,dxdy=\int_a^b\int_a^b\frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy.$$

აქედან ვღებულობთ

$$I=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dx\,dy=\int_a^b\int_a^b\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}\,dx\,d\,y$$

და, რაკი

$$f^2(x)+f^2(y)\geqslant 2f(x)f(y)$$

ამიტომ

$$I\geqslant(b-a)^2.$$

(12.14) ფორმულაში ტოლობას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც $f(x)=\mathrm{const}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ბუნიაკოვსკი-შვარცის უტოლობას

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \qquad (12.15)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$I = \int_a^a \int_a^b [f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2 dxdy.$$

თუ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას კვადრატში ავახარისხებთ და შემდეგ მოვახდენთ წევრ-წევრად ინტეგრებას, მივიღებთ

$$I = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - 2\int_a^b f(x)\,g(x)dx \cdot \int_a^b f(y)\,g(y)dy +$$

$$+\int_a^b f^2(y)dy \cdot \int_a^b g^2(y)dy = 2\left[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2\,(x)dx -\right.$$

$$\left.-\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\right].$$

რადგანაც $I \geqslant 0$, ამიტომ ადგილი აქვს (12.15) უტოლობას. (12.15) ფორმულაში ტოლობას ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)=Cg(x)$, გარდა ზოგიერთი წერტილისა, სადაც C რაიმე მუდმივია.

§ 18. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა ნებისმიერი არის შემთხვევაში

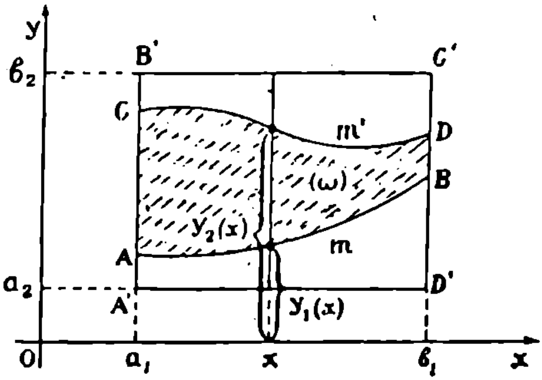
ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე აღებულია ისეთი დახურული ფართობადი ω არე, რომ მის ყველა შიგა წერტილზე გამავალი Oy ღერძის პარალელური წრფე კვეთს ω არის საზღვარს მხოლოდ ორ წერტილში (ნახ. 28). ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ω არის

საზღვარი შედგება $x=a_1$ და $x=b_1$ წრფეებზე მდებარე AC და BD მონაკვეთებისაგან და ორი AmB და $Cm'D$ რკალისაგან, რომლებიც წარმოდგენილია შესაბამისად განტოლებებით

$$y=y_1(x),\quad y=y_2(x);\quad y_1(x)<y_2(x),$$

სადაც $y_1(x)$ და $y_2(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a_1b_1]$ სეგმენტზე.

AmB და $Cm'D$ წირებს ეწოდება შესაბამისად *ქვედა* და *ზედა წირები*. შეიძლება A და C წერტილები ერთმანეთს ემთხვეოდეს; ასევე B წერტილი შეიძლება D წერტილს დაემთხვეს.



ნახ. 28.

ახლა განვიხილოთ ω არეზე ინტეგრებადი $f(x,y)$ ფუნქცია. ავიღოთ ω არის შემცველი ორგანზომილებიანი სეგმენტი $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ და განვიხილოთ $F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x, y), & \text{როდესაც } (x, y)\in\omega,\\ 0 & \text{როდესაც } (x, y)\in R_0-\omega.\end{cases}$$

ცხადია, რომ $F(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია R_0-ზე. ამიტომ, მე-15 თეორემის ძალით, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint\limits_{R_0} F(x, y)\,dx\,dy=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}F(x, y)\,dy.$$

შემდეგ

$$\int_{a_2}^{b_2}F(x,y)\,dy=\int_{a_2}^{y_1(x)}F(x,y)\,dy+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}F(x,y)\,dy+\int_{y_2(x)}^{b_2}F(x,y)\,dy.$$

მაგრამ

$$\int_{a_2}^{y_1(x)} F(x, y)dy=0, \int_{y_2(x)}^{b_2} F(x, y)dy=0,$$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

მაშასადამე,

$$\iint_{R_0} F(x,y)dxdy=\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \tag{13.1}$$

მეორე მხრივ, მე-8 თეორემის თანახმად

$$\iint_{R_0} F(x,y)dxdy=\iint_{\omega} F(x,y)dxdy+\iint_{\omega'} F(x,y)dxdy+\iint_{\omega''} F(x, y)dx\, dy,$$

სადაც ω' და ω'' წარმოადგენენ შესაბამისად $A'D'BA$ და $CDC'B'$ კონტურებით შემოსაზღვრულ არეებს. ცხადია, რომ

$$\iint_{\omega'} F(x,y)dxdy=0, \iint_{\omega''} F(x,y)dxdy=0,$$

$$\iint_{\omega} F(x, y)dxdy=\iint_{\omega} f(x, y)\, dxdy.$$

მაშასადამე,

$$\iint_{R_0} F(x,y)dxdy=\iint_{\omega} f(x,y)dxdy. \tag{13.2}$$

(13.1) და (13.2) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\iint_{\omega} f(x,y)dxdy=\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{13.3}$$

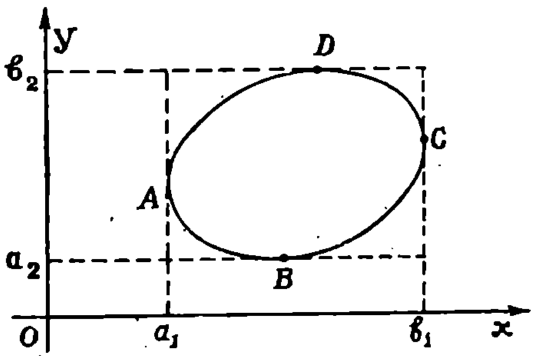
ინტეგრალი $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ წარმოადგენს შიგა ინტეგრალს, რომელშიც x განიხილება როგორც მუდმივი. როდესაც x იცვლება a_1-დან b_1-მდე, ეს ინტეგრალი x-ის ფუნქციაა. მიღებული ფუნქცია ამის შემდეგ x-ით უნდა ვაინტეგროთ $[a_1, b_1]$ სეგმენტზე.

თუ ინტეგრების არე შემოსაზღვრულია ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირით, მაშინ ეს არე უნდა დავყოთ რამდენიმე ისეთ ნაწილად, რომ თითოეული ნაწილის შიგა წერტილზე გავლებული Oy ღერძის

პარალელური წრფე კვეთდეს ამ ნაწილის კონტურს ორ წერტილში შემდეგ გამოვთვლით ორჯერად ინტეგრალს თითოეული ნაწილისათვის და ავიღებთ ამ ინტეგრალების ჯამს.

ჩვენ შეგვიძლია აგრეთვე ინტეგრება მოვახდინოთ ჯერ x-ით, დავყოფთ რა არეს ისეთ ნაწილებად, რომ თითოეული ნაწილის შიგა წერტილზე გავლებული Ox ღერძის პარალელური წრფე კვეთდეს ამ ნაწილის კონტურს ორ წერტილში.

განვიხილოთ, მაგალითად, რაიმე დახურული ფართობადი ω არე, რომლის კონტური ამოზნექილი წირია (ნახ. 29). დავაგეგმილოთ ω არე



ნახ. 29.

Ox და Oy ღერძებზე, მივიღებთ $[a_1, b_1]$ და $[a_2, b_2]$ სეგმენტებს. ცხადია, რომ $x=a_1$ და $x=b_1$ წრფეებს აქვთ საერთო წერტილები ω არის საზღვართან. ასევე $y=a_2$ და $y=b_2$ წრფეებს აქვთ საერთო წერტილები ω არის საზღვართან.

ამის გარდა, ω არე მოთავსებულია $R_0=[a_1, b_1, a_2, b_2]$ მართკუთხედში. აღნიშნული წრფეების საერთო წერტილები ω არის საზღვართან აღვნიშნოთ შესაბამისად A, B, C, D ასოებით.

ვთქვათ, ABC და ADC რკალების განტოლებებია

$$y=y_1(x), \ y=y_2(x),$$

ხოლო DAB და BCD რკალების კი

$$x=x_1(y), \ x=x_2(y).$$

DAB და BCD რკალებს ეწოდება შესაბამისად **მარცხენა** და **მარჯვენა წირები**.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_{\omega} f(x, y)dx\,dy=\int_{a_1}^{b_1} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{13.4}$$

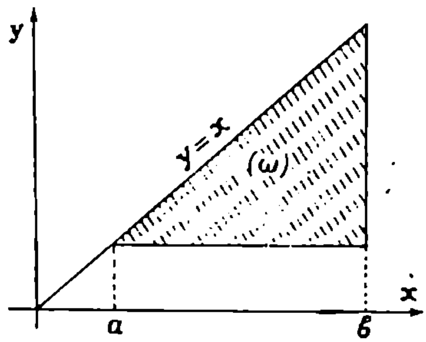
ანალოგიურად მივიღებთ

$$\iint_{\omega} f(x, y)dx\,dy=\int_{a_2}^{b_2} dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{13.5}$$

(13.4) და (13.5) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\int_{a_1}^{b_1} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy=\int_{a_2}^{b_2} dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{13.6}$$

ყოველი ამოზნექილი კონტურისათვის გვექნება (13.6) სახის ფორმულა.



ნახ. 30.

კერძოდ, ვთქვათ, ω არე სამკუთხედია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x$, $y=a$, $x=b$ წრფეებით, $a<b$ (ნახ. 30).

(13.6) ფორმულის თანახმად,

$$\int_{a}^{b} dx\int_{a}^{x} f(x, y)dy=\int_{a}^{b} dy\int_{y}^{b} f(x,y)\,dx. \tag{13.7}$$

ამ ფორმულას დირიხლეს (Dirichlet) ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულას აქვს სხვადასხვა გამოყენება, განსაკუთრებით —ვოლტერას (G. Volterra) ინტეგრალურ განტოლებებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი

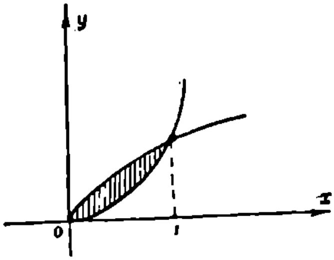
$$I = \iint\limits_{\omega} (x^2+y)dxdy,$$

სადაც ω არე შემოსაზღვრულია პარაბოლებით $y^2=x$ და $y=x^2$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ პარაბოლები $y^2=x$ და $y=x^2$, რომლებიც შემოსაზღვრავენ ω არეს (ნახ. 31). მოვძებნოთ ამ არის განაპირა წერტილების აბსცისები. ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა

$$y^2=x, \quad y=x^2.$$

ამ სისტემის ნამდვილი ამონახსნებია x-ის მიმართ $x_1=0$, $x_2=1$. ამრიგად, განაპირა წერტილების აბსცისებია $a=0$, $b=1$.



ნახ. 31.

ცხადია, ინტეგრების ω არეში შესვლის და გამოსვლის წერტილების ორდინატებია $y_1=x^2$ და $y_2=\sqrt{x}$. ამიტომ (13.4) ფორმულის თანახმად

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy.$$

ჯერ გამოვთვალოთ შიგა ინტეგრალი:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy = \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4.$$

მაშასადამე,

$$I=\int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\frac{33}{140}.$$

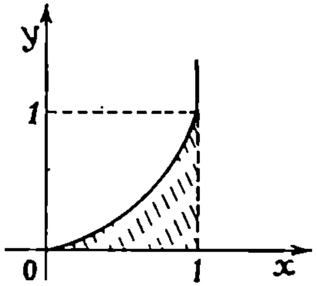
მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. შევცვალოთ ინტეგრების რიგი განმეორებით ინტეგრალში

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x^3}} f(x,y)dy.$$

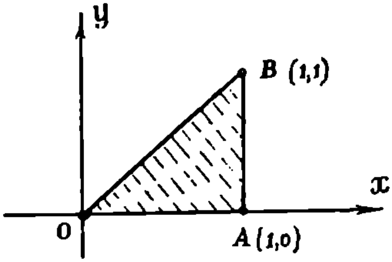
ა მ ო ხ ს ნ ა. ინტეგრების ზღვრების მიხედვით აღვადგინოთ ω არე ეს არე შემოსაზღვრულია $x=1$, $y=0$ წრფეებით და $y=\sqrt{x^3}$ წირით (ნახ. 32), მარჯვენა წირის განტოლებაა $x=1$, მარცხენა წირისა კი $x=\sqrt[3]{y^2}$. მაშასადამე,

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y^2}}^1 f(x,y)dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. მოცემულია ორჯერადი ინტეგრალი



ნახ. 32.



ნახ. 33.

$$I = \iint_\omega f(x,y)dx\,dy,$$

სადაც ω წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$. დავწეროთ ინტეგრების საზღვრები განმეორებით ინტეგრალებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვხაზოთ ω არე (ნახ.33). ქვედა და ზედა წირებია $y=0$ და $y=x$. ამიტომ

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\,dy.$$

შემდეგ, მარცხენა და მარჯვენა წირებია $x=y$ და $x=1$. ამიტომ

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)dx.$$

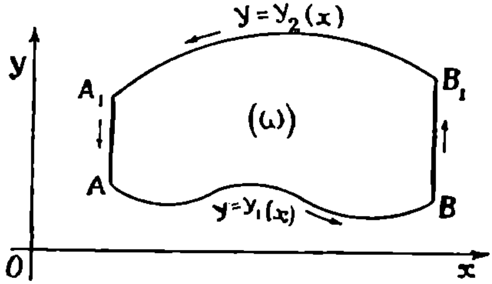
§ 14. გრინის ფორმულა

გრინის ფორმულა ამყარებს კავშირს ორჯერად ინტეგრალსა და წირით ინტეგრალს შორის.

ვთქვათ, ცალადბმული დახურული ω არე მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ω არე ქვემოდან და ზემოდან შემოსაზღვრულია შესაბამისად წირებით

$$y=y_1(x),\quad y=y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

მარცხნიდან და მარჯვნიდან კი $x=a$ და $x=b$ წრფეებით (ნახ.34). $y_1(x)$ და $y_2(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. შეიძლება, რომ



ნახ. 34.

A და A_1 წერტილები ერთმანეთს დაემთხვეს, ასევე B და B_1 წერტილებიც.

თუ $P(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ ω არეში და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული y-ით, მაშინ, ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის წესის თანახმად, გვაქვს

$$\iint\limits_{\omega}\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy.$$

მაგრამ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის ძალით

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy=P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x)).$$

მაშასადამე,

$$\iint\limits_{\omega}\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy=\int\limits_a^b P(x,\,y_2(x))\,dx-\int\limits_a^b P(x,\,y_1(x))\,dx=$$

$$=\int\limits_{A_1B_1}P(x,y)dx-\int\limits_{AB}P(x,y)dx=-\int\limits_{B_1A_1}P(x,y)dx-\int\limits_{AB}P(x,y)dx.$$

რაკი

$$\int_{A_1A} P(x,y)\,dx=0, \quad \int_{BB_1} P(x,y)dx=0,$$

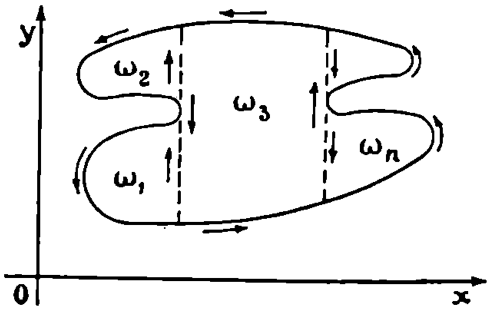
ამიტომ, თუ γ-თი აღვნიშნავთ ω არის კონტურს, გვექნება

$$\iint_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{AB} Pdx - \int_{BB_1} Pdx - \int_{B_1A_1} Pdx -$$

$$-\int_{A_1A} Pdx = -\int_{\gamma} Pdx.$$

ამრიგად,

$$\int_{\gamma} Pdx = -\iint_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \qquad (14.1)$$



ნახ. 35.

აქ წირითი ინტეგრალი აღებულია დადებითი მიმართულებით. ეს არის გრინის ფორმულის უმარტივესი შემთხვევა.

(14.1) ფორმულა მართებულია აგრეთვე ნებისმიერი ω არისათვის, რომელიც შეიძლება დავყოთ ზემოთ განხილული სახის $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ არეებად (ნახ. 35). მართლაც, თუ აღვნიშნავთ γ_i-თი ω_k არის კონტურს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

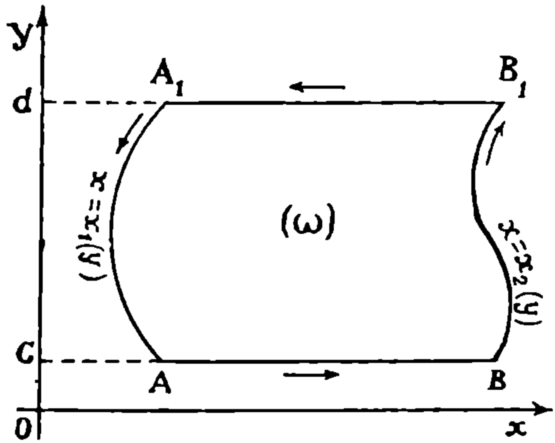
$$\int_{\gamma} Pdx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} Pdx = \sum_{k=1}^{n}\left(-\iint_{\omega_k} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy\right) = -$$

$$-\iint_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

ახლა განვიხილოთ დახურული ω არე (ნახ. 36), რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით

$$x=x_1(y),\quad x=x_2(y),\quad y=c,\quad y=d,$$

სადაც $x_1(y)$ და $x_2(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია, ამასთანავე $x_1(y)<x_2(y)$ და $c<d$.



ნახ. 36.

თუ $Q(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ω არეში და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული x-ით, მაშინ, ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის წესის თანახმად, გვაქვს

$$\iint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int\limits_{c}^{\alpha} [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]dy =$$

$$= \int\limits_{BB_1} Q(x,y)dy - \int\limits_{AA_1} Q(x,y)dy = \int\limits_{BB_1} Q(x,y)dy + \int\limits_{A_1A} Q(x,y)\,dy.$$

რადგანაც

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy=0,\quad \int\limits_{B_1A_1} Q(x,y)dy=0,$$

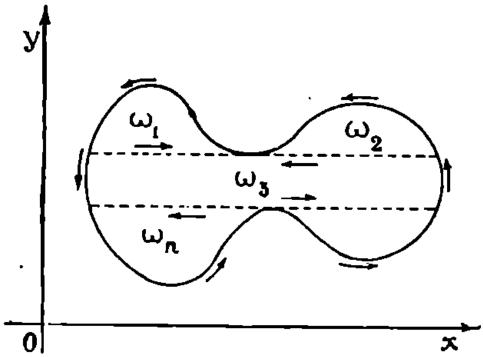
ამიტომ

$$\int\limits_{\gamma} Q(x,y)dy = \iint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy, \tag{14.2}$$

სადაც γ არის ω არის კონტური, მასთან წირითი ინტეგრალი აღებულია დადებითი მიმართულებით.

(14.2) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ω არისათვის, რომელიც შეიძლება დავყოთ ზემოთ განხილული სახის $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ არეებად (ნახ. 37). მართლაც, თუ აღვნიშნავთ γ_k-თი ω_k არის კონტურს, გვექნება

$$\int_{\gamma} Qdy = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} Qdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\omega_k} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \iint_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy.$$



ნახ. 37.

დასასრულ, თუ ω არე შეიძლება დაიყოს პირველი და მეორე ტიპის მრუდწირულ ტრაპეციებად, მაშინ მართებულია (14.1) და (14.2) ტოლობები. ამიტომ ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მივიღებთ ფორმულას

$$\iint_{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\gamma} Pdx + Qdy. \tag{14.3}$$

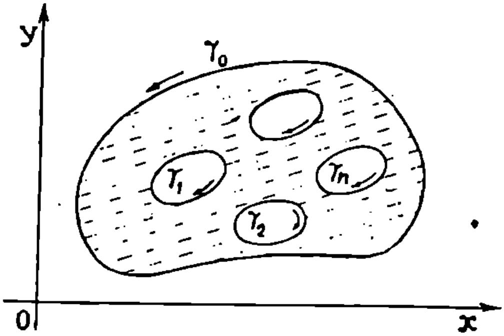
ეს არის გრინის (G. Green) ფორმულა.

თუ ω მრავლადბმული არეა, ე. ი. იგი შემოსაზღვრულია უბან-უბან შეკრული კონტურით

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$$

(ნახ.38), მაშინაც ადგილი აქვს (14.3) ტოლობას. მართლაც, დამატებითი ჭრილების გავლებით ω არე შეგვიძლია დავანაწილოთ ზემოთ აღნიშნული ტიპის სასრულ რიცხვ არეებად, რომელთათვისაც გრინის

ფორმულა უკვე დადგენილია. ასეთ ტოლობათა წევრ-წევრად შეკრებით ჭრილების გასწვრივ აღებული წირითი ინტეგრალები გაბათილდება და მრავლადბმული არის შემთხვევაში მივიღებთ გრინის ფორმულას, რომელსაც გარეგნულად (14.3) სახე ექნება, მაგრამ მარჯვენა ნაწილში აღებული ინტეგრალი მთელი მრავლადბმული ω არის γ საზღვარზე იქნება გავრცელებული. ამასთან ყოველი კონტურის შემოვლა ისე ხდება, რომ ω არე მარცხნივ გვრჩებოდეს. მე-11 ნახაზზე



ნახ. 38.

ისრითაა აღნიშნული ასეთი მიმართულებანი თითოეული $\gamma_k (k=0,1,\dots,n)$ კონტურისათვის.

თუ გრინის (14.3) ფორმულაში ვიგულისხმებთ

$$P(x,y)=y, \quad Q(x,y)=-x,$$

მაშინ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, (14.3) ტოლობის მარცხენა ნაწილი ω არის გაორკეცებულ ფართობს მოგვცემს, ამიტომ გვექნება

$$|\omega|=\frac{1}{2}\int_{\gamma} xdy-ydx.$$

მივიღეთ XI თავში გამოყვანილი ფორმულა.

გრინის ფორმულას შეიძლება სხვა სახეც მივცეთ. ამ მიზნით შევიტანოთ (14.3) ფორმულაში $P(x, y)$ ფუნქციის ნაცვლად $Q(x, y)$, ხოლო $Q(x,y)$ ფუნქცია შევცვალოთ $-P(x,y)$ ფუნქციით. მაშინ (14.3) ფორმულა მიიღებს სახეს .

$$\iint_{\omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\gamma} Pdy-Qdx. \qquad (14.4)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული წირითი ინტეგრალი შეგვიძლია პირველი გვარის წირითი ინტეგრალით გამოვსახოთ. აღვნიშნოთ α-თი γ წირის დადებითი მხების მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე. მაშინ გვექნება

$$\iint_{\omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\gamma}(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)ds. \qquad (14.5)$$

აქ იგულისხმება, რომ γ არის გლუვი წირი.

გრინის ფორმულას მრავალი გამოყენება აქვს სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას. ამ ფორმულის გამოყენებით მარტივად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 17. *თუ ცალადბმულ ω არეში, რომლის კონტური მარტივი შეკრული წირია, $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციები და მათი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტია, მაშინ წირითი ინტეგრალის $\int Pdx+Qdy$ გზისაგან დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ω არის ყოველ (x,y) წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (14.6)$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, ω არეში ყოველ მარტივ შეკრულ γ წირზე

$$\int_{\gamma}Pdx+Qdy=0.$$

განვიხილოთ ω არის ნებისმიერი $A(x,y)$ წერტილი და შემოვხაზოთ ამ წერტილის გარშემო ისეთი ρ რადიუსიანი k_ρ წრე, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია ω არეში.

გრინის ფორმულის თანახმად

$$\iint_{k_\rho}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\gamma_\rho}Pdx+Qdy,$$

სადაც γ_ρ წარმოადგენს k_ρ წრის კონტურს. პირობის თანახმად,

$$\int_{\gamma_\rho}Pdx+Qdy=0.$$

ამრიგად, ნებისმიერი მცირედ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\iint_{k_\rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

რადგანაც $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციაა ω არეში, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\iint_{k_\rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \pi\rho^2 [Q'_x(\xi,\eta) - P'_y(\xi,\eta)] = 0,$$

სადაც $(\xi,\eta) \in k_\rho$. რაკი $\rho \neq 0$, ამიტომ

$$Q'_x(\xi,\eta) - P'_y(\xi,\eta) = 0. \tag{14.7}$$

ეს ტოლობა მართებულია ρ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის. თუ $\rho \to 0$, მაშინ $(\xi,\eta) \to (x,y)$ და, მაშასადამე, (14.7) ტოლობიდან მივიღებთ

$$Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 0,$$

ე. ი. მართებულია (14.6) ტოლობა ω არის ყოველ (x,y) წერტილში, ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ω არის ყოველ (x,y) წერტილში მართებულია (14.6) ტოლობა. ავიღოთ ω არეში ნებისმიერი მარტივი შეკრული γ წირი. რაკი ω არე მარტივად ბმულია, ამიტომ γ წირით შემოსაზღვრული G არე მთლიანად ω არეშია მოთავსებული. გრინის ფორმულის თანახმად

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\gamma Pdx + Qdy.$$

თუ გავითვალისწინებთ (14.6) პირობას, გვექნება

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = 0,$$

ე. ი. წირითი ინტეგრალი $\int Pdx + Qdy$ დამოუკიდებელია ინტეგრების წირისაგან. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

§ 15. ბრტყელ არეთა გარდაქმნა

ვთქვათ, მოცემულია ორი სიბრტყე, რომლებზედაც აღებულია შესაბამისად მართკუთხა კოორდინატთა Oxy და $O'uv$ სისტემები. განვიხილოთ $uO'v$ სიბრტყეზე რაიმე E სიმრავლე და, ვთქვათ, ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი ფუნქცია

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v). \tag{15.1}$$

თუ x და y-ს განვიხილავთ xOy სიბრტყეზე როგორც წერტილის კოორდინატებს, მაშინ (15.1) გარდაქმნათა სისტემა გვაძლევს E სიმრავლის გადასახვას xOy სიბრტყეზე ან მის ნაწილზე. იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მიიღება (15.1) ტოლობებით, როდესაც (u, v) წერტილი გაირბენს E სიმრავლის წერტილებს, ვუწოდოთ E სიმრავლის სახე და იგი აღვნიშნოთ $T_{xy}(E)$ სიმბოლოთი.

თეორემა 18. თუ $\varphi(u, v)$ და $\psi(u, v)$ უწყვეტი ფუნქციებია შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ F სიმრავლეზე, მაშინ $T_{xy}(F)$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

დამტკიცება. განვიხილოთ $T_{xy}(F)$ სიმრავლის რაიმე დაგროვების $p_0=(x_0, y_0)$ წერტილი. მაშინ $T_{xy}(F)$ სიმრავლეში არსებობს ისეთი წერტილები

$$p_n=(x_n, y_n) \quad (n=1, 2,\ldots),$$

რომ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=p_0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n=y_0.$$

ვთქვათ,

$$x_n=\varphi(v_n, v_n), \quad y_n=\psi(u_n, v_n) \quad (n=1, 2,\ldots).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$q_n=(u_n, v_n) \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{15.2}$$

ცხადია, რომ $q_n\in F$.

(15.2) მიმდევრობიდან გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $(q_{n_k})_{k\geq 1}$, რომელიც კრებადია რაიმე $q_0(u_0, v_0)$ წერტილისაკენ. რაკი F ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $q_0\in F$. ამის გარდა,

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}=u_0, \quad \lim_{k\to\infty} v_{n_k}=v_0.$$

F სიმრავლეზე $\varphi(u, v)$ და $\psi(u, v)$ ფუნქციების უწყვეტობის გამო

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} \varphi(u_{n_k}, v_{n_k}) = \varphi(u_0, v_0),$$

$$y_0 = \lim_{k \to \infty} \psi(u_{n_k}, v_{n_k}) = \psi(u_0, v_0).$$

მაშასადამე, $p_0 \in T_{xy}(F)$.

ამრიგად, $T_{xy}(F)$ შეიცავს ყველა თავისი დაგროვების წერტილს და ამიტომ იგი ჩაკეტილი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 6. (15.1) გარდაქმნას ვუწოდებთ რეგულარულს შემოსაზღვრულ დახურულ B არეში, თუ დაცულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $\varphi(u, v)$ და $\psi(u, v)$ ფუნქციებს აქვთ B არეში პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები;

2) (15.1) გარდაქმნა გვაძლევს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას B და $T_{xy}(B)$ არეებს შორის;

3) იაკობიანი $\dfrac{D(u, \psi)}{D(u, v)}$ ნულისაგან განსხვავებულია B არეში.

შევნიშნოთ, რომ თუ (15.1) გარდაქმნა აკმაყოფილებს მხოლოდ 1) და 3) პირობებს, შეიძლება 2) პირობა არც იყოს შესრულებული

შეიძლება აგრეთვე აღმოჩნდეს, რომ $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ იაკობიანი ნულის ტოლი იყოს B არის ზოგიერთ წერტილში, მაგრამ B და $T_{xy}(B)$ არეებს შორის შესაბამისობა იყოს ურთიერთცალსახა.

თეორემა 10. თუ (15.1) გარდაქმნა რეგულარულია დახურულ შემოსაზღვრულ B არეში, მაშინ B არის ყოველი შიგა წერტილი გადაისახება $T_{xy}(B)$ სიმრავლის შიგა წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, p წარმოადგენს B არის შიგა წერტილს, ხოლო q იყოს მისი შესაბამისი წერტილი $T_{xy}(B)$ სამრავლეში. რადგანაც p წერტილი B სიმრავლის შიგა წერტილია, ამიტომ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $K(p, \varepsilon)$, რომელიც B არეში მოთავსდება. მაგრამ, პირობის თანახმად, $K(p, \varepsilon)$ წრეში იაკობიანი $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ ნულისაგან განსხვავდება და ამიტომ მოიძებნება q წერტილის ისეთი $V(q, \eta)$ მიდამო, რომელიც მოთავსდება $T_{xy}(K(p, \varepsilon))$ სიმრავლეში. მაშასადამე, q წარმოადგენს $T_{xy}(B)$ სიმრავლის შიგა წერტილს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ (15.1) გარდაქმნა რეგულარულია დახურულ შემოსაზღვრულ B არეში, მაშინ B არის საზღვარი გადაისახება $T_{xy}(B)$ არის საზღვარზე.

თეორემა 20. თუ (15.1) გარდაქმნა რეგულარულია B არეში, მაშინ ამ არეში აღებული მარტივი უბან-უბან გლუვი C წირი გადაისახება (15.1) გარდაქმნის საშუალებით მარტივ უბან-უბან გლუვ L წირში, რომელიც მოთავსებულია $T_{xy}(B)$ არეში.

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც C მარტივი გლუვი წირია ვთქვათ, ამ წირის განტოლებებია

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{15.3}$$

$u(t)$ და $v(t)$ ფუნქციებს აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები, რომლებიც ერთდროულად ნული არ ხდება $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის არც ერთ წერტილში. თუ ამ ფუნქციებს ჩავსვამთ (15.1) ფორმულაში, მივიღებთ შესაბამისი L წირის პარამეტრულ განტოლებებს

$$x=\varphi[u(t),\ v(t)]=x(t), \quad y=\psi[u(t),\ v(t)]=y(t). \tag{15.4}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ფუნქციებს აქვთ აგრეთვე უწყვეტი წარმოებულები:

$$x'(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \ y'(t)=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \tag{15.5}$$

რომლებიც ერთდროულად ნული არ ხდება $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის არც ერთ წერტილში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში,

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\neq 0$$

უტოლობის თანახმად, (15.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{du}{dt}=0, \ \frac{dv}{dt}=0,$$

რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, L წირს არა აქვს განსაკუთრებული წერტილები და იგი წარმოადგენს მარტივ გლუვ წირს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. თუ B არე შემოსაზღვრულია მარტივ უბან-უბან გლუვი C წირით და ამასთანავე (15.1) გარდაქმნა რეგულარულია, მაშინ $T_{xy}(B)$ არე ფართობადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-20 თეორემის თანახმად, C წირის შესაბამისი L წირი, რომელიც შემოსაზღვრავს $T_{xy}(B)$ არეს, წარმოადგენს აგრეთვე მარტივ უბან-უბან გლუვ წირს და ამიტომ $T_{xy}(B)$ არე ფართობადია.

§ 16. ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში

მრავალ ამოცანაში, რომლებიც ჯერადი ინტეგრალების გამოყენებას მოითხოვს, დეკარტის კოორდინატთა სისტემა არ არის საუკეთესო. ამიტომ საჭიროა ვიცოდეთ გადასვლა ერთი სისტემიდან უფრო მოხერხებულ მეორე სისტემაზე.

ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი უბან-უბან გლუვი კონტურით. განვიხილოთ გარდაქმნა

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \tag{16.1}$$

რომელსაც გადაყავს D არე D' არეში. საჭიროა ორჯერადი ინტეგრალის

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$$

გამოსახვა ორჯერადი ინტეგრალით, რომელიც გავრცელებულია D არეზე. მართებულია

თეორემა 22. თ უ (16.1) გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_D f[\varphi(u, v),\psi(u, v)]|I|du\,dv, \tag{16.2}$$

ს ა დ ა ც I ა რ ი ს (16.1) გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს ი ა კ ო ბ ი ა ნ ი.

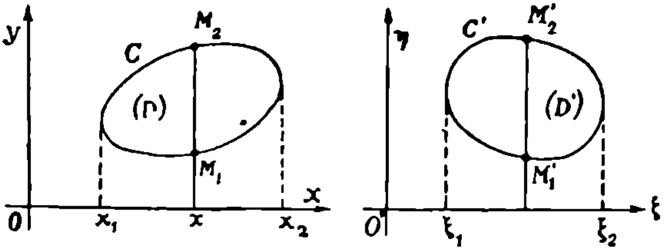
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევები. ვთქვათ,

$$x=\xi, \quad y=\psi(\xi,\eta). \tag{16.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $M(x,y)$ და $M'(\xi,\eta)$ წერტილები განხილულია შესაბამისად მართკუთხა კოორდინატთა Oxy და $O\,\xi\eta$ სისტემების მიმართ. ამის გარდა, დავუშვათ, რომ Oy ღერძის პარალელური ყოველი წრფე კვეთს D არის C კონტურს არა უმეტეს ორი წერტილისა. (16.3) ფორმულის ძალით, C კონტურს შეესაბამება D' არის C' კონტური. C კონტური მოთავსებულია $x=x_1$ და $x=x_2$ წრფეებს შორის, C' კონტური კი $\xi=x_1$ და $\xi=x_2$ წრფეებს შორის. თუ Oy ღერძის პარალელური წრფე კვეთს C კონტურს მხოლოდ ორ წერტილში, მაშინ მისი შესაბამისი წრფე გადაკვეთს C' კონტურს მხოლოდ ორ

წერტილში. C კონტურის M_1 და M_2 წერტილებს, რომლებსაც x აბსცისი აქვთ, შეესაბამება C' კონტურის M_1' და M_2' წერტილები (ნახ. 39).

აქ შეიძლება ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს იმისდა მიხედვით, თანადობა პირდაპირია, თუ შებრუნებული. თუ $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}>0$, მაშინ y ზრდადია η-თან ერთად და ამ შემთხვევაში შესაბამისობა პირდაპირია, ხოლო თუ $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}<0$, მაშინ შესაბამისობა შებრუნებულია. 39-ე ნახაზზე გვაქვს პირდაპირი შესაბამისობის შემთხვევა.



ნახ. 39.

ვთქვათ, $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}>0$. აღვნიშნოთ y_1, y_2, η_1, η_2 სიმბოლოებით M_1, M_2, M_1', M_2' წერტილების ორდინატები შესაბამისად. თუ მარტივი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას, მივიღებთ

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f[\xi, \psi(\xi, \eta)] \frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta,$$

სადაც x და ξ განიხილებიან როგორც მუდმივები. აქედან ვღებულობთ

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy= \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} f[\xi,\psi(\xi,\eta)]d\eta. \tag{16.4}$$

მაგრამ (16.3) გარდაქმნისათვის გვაქვს

$$I = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}.$$

ამიტომ (16.4) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[\xi,\psi(\xi,\eta)]\,|I|\,d\xi d\eta. \tag{16.5}$$

თუ $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}<0$, (16.5) ფორმულა ანალოგიურად გამოიყვანება.

ამავე წესით დავამტკიცებთ, რომ თუ

$$x=\varphi(\xi,\eta), \quad y=\eta,$$

მაშინ

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[\varphi(\xi,\eta),\eta]\,|I|\,d\xi d\eta.$$

დასასრულ, განვიხილოთ ზოგადი გარდაქმნა (16.1), ეს გარდაქმნა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნამრავლი ზემოგანხილული სახის ორი გარდაქმნისა. მართლაც, ვთქვათ,

$$\xi=u, \quad \eta=y.$$

მაშინ (16.1) სისტემის უკანასკნელი განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\eta=\psi(\xi, v),$$

საიდანაც

$$v=\omega(\xi, \eta).$$

მაშასადამე, (16.1) სისტემა შეგვიძლია შევცვალოთ ოთხი განტოლების შემდეგი სისტემით:

$$x=\varphi_1(\xi, \eta), \quad y=\eta, \tag{16.6}$$

$$\xi=u, \quad \eta=\psi(u; v), \tag{16.7}$$

სადაც

$$\varphi_1(\xi, \eta)=\varphi[\xi, \omega(\xi, \eta)].$$

(16.1) გარდაქმნა წარმოადგენს (16.6) და (16.7) გარდაქმნათა ნამრავლს, ე. ი. (16.6) გარდაქმნის საშუალებით D არე შეგვიძლია გადავსახოთ ფართობად D'' არეში, ხოლო (16.7) გადასახავს D'' არეს ფართობად D' არეში.

(16.6) ფორმულის თანახმად

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D''} f[\varphi_1(\xi,\eta), \eta]\left|\frac{D(x{\cdot}y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta. \tag{16.8}$$

(16.8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა (16.7) ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ

$$\iint_{D''} f(\varphi,\eta)\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta=$$

$$=\iint_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|\left|\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\right| du dv.$$

მაგრამ

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

მაშასადამე, მართებულია (16.2) ფორმულა ზოგად შემთხვევაში.

შედეგი. თუ (16.2) ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x,y)=1$, მაშინ

$$|D|=|D'|\cdot|I'|, \tag{16.9}$$

სადაც I' წარმოადგენს I იაკობიანის მნიშვნელობას D' არის რაიმე წერტილში.

მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ (16.2) ფორმულას, გვექნება

$$|D|=\iint_D dx\,dy=\iint_{D'}|I|\,du\,dv, \tag{16.10}$$

ხოლო საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით

$$\iint_{D'}|I|\,dudv=|I'|\cdot|D'|,$$

სადაც I' წარმოადგენს I იაკობიანის მნიშვნელობას D' არის რაიმე (u',v') წერტილში. მაშასადამე, მართებულია (16.9) ტოლობა.

§ 17. ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის გამოყვანის მეორე ხერხი

ავიღოთ xOy და $uO'v$ სიბრტყეებზე შესაბამისად დახურული D და A არეები, რომლებიც შემოსაზღვრულია C და Γ კონტურებით (ნახ. 40).

ვიგულისხმოთ, რომ D და A არეებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომელიც გამოისახება ფორმულებით

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v).$$

ვთქვათ, $\varphi(u,v)$ და $\psi(u,v)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$ უწყვეტია A არეში, ამასთანავე იაკობიანი

$$I(u,v)=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$$

ნულისაგან განსხვავებულია.

დავუშვათ, რომ Γ კონტურის პარამეტრული განტოლებებია

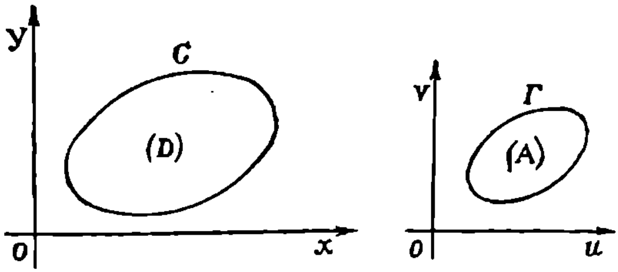
$$u=u(t),\ v=v(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

სადაც $u(t)$ და $v(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე. მაშინ C კონტურის პარამეტრული განტოლებები იქნება

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

სადაც

$$x=\varphi[u,(t),\ v(t)],\quad y=\psi[u(t),\ v(t)].$$



ნახ. 40.

(Γ კონტურის წერტილებს შეესაბამება C კონტურის წერტილები).

D არის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_C x\,dy,$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია C კონტურის დადებითი მიმართულებით. აქედან

$$S=\int_\alpha^\beta x\frac{dy}{dt}dt=\int_\alpha^\beta \varphi[u,(t),\ v(t)]\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt=$$

$$=\pm\int_\Gamma \varphi(u,v)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)=\pm\int_\Gamma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

თუ Γ და C კონტურების შესაბამისობა პირდაპირია, ე. ი. თუ C კონტურის დადებით მიმართულებას შეესაბამება Γ კონტურის დადებითი მიმართულება, მაშინ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში უნდა ავიღოთ $+$ ნიშანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — ნიშანი.

ახლა გრინის ფორმულაში ვიგულისხმოთ.

$$x=u, y=v,\ P=\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ Q=\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

მაშინ

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=I(u,v).$$

ამიტომ გრინის ფორმულის თანახმად

$$\int_\Gamma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du+\psi\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv=\iint_A I(u,v)\,du\,dv.$$

მაშასადამე,

$$S=\pm\iint_A I(u,v)\,du\,dv,$$

თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას ორჯერადი ინტეგრალისათვის, გვექნება

$$S=\pm\sigma I(\xi,\eta),$$

სადაც $(\xi,\eta)\in A$, ხოლო σ წარმოადგენს A არის ფართობს. ამრიგად,

$$S=\sigma|I(\xi,\eta)|. \tag{17.1}$$

ახლა ვთქვათ, D არეზე მოცემულია უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქცია. საჭიროა ორჯერადი ინტეგრალის

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

გამოსახვა ორჯერადი ინტეგრალით, რომელიც გავრცელებულია A არეზე. მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A f[u,v),\ \varphi(u,v)]\,|I(u,v)|\,du\,dv. \tag{17.2}$$

მართლაც, დავყოთ A არე ფართობად ქვეარეებად $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$. მაშინ D არე დაიყოფა ფართობად ქვეარეებად $S_1,S_2,\ldots,S_n$. თუ გამოვიყენებთ (17.1) ფორმულას, გვექნება

$$|S_k|=|\sigma_k|\cdot|I(u_k,v_k)|\quad (k=1,2,\ldots,n),$$

სადაც $(u_k, v_k) \in \sigma_k$, ვთქვათ,

$$x_k = \varphi(u_k, v_k), \quad y_k = \psi(u_k, v_k).$$

ცხადია, $(x_k, y_k) \in S_k$. გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,|S_k| = \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)]\,|I(u_k, v_k)|\,|\sigma_k|.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$F(u,v) = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)]\,|I(u,v)|, \tag{17.3}$$

გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,|S_k| = \sum_{k=1}^{n} F(u_k, v_k)\,|\sigma_k|.$$

ამ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც ყოველი σ_k არის დიამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, გვექნება

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_A F(u, v)\,du\,dv$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (17.3) ტოლობას, მივიღებთ (17.2) ტოლობას.

§ 18. ორჯერად ინტეგრალში დეკარტის კოორდინატებიდან პოლარულ კოორდინატებში გადასვლა

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე აღებულია დახურული D არე, რომელიც შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი წირით და ვიგულისხმოთ, რომ ამ წირს კვეთს კოორდინატთა სათავიდან გამავალი ყოველი წრფე არა უმეტეს ორი წერტილისა. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც D არე არ შეიცავს კოორდინატთა სათავეს. როგორც ცნობილია, დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta. \tag{18.1}$$

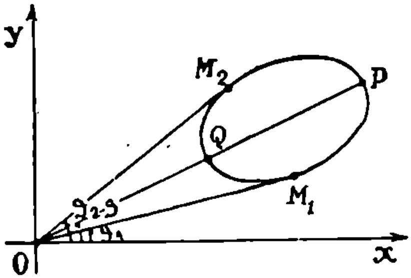
აღვნიშნოთ ϑ_1 და ϑ_2 სიმბოლოებით უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა ϑ კუთხისა იმ წერტილებისათვის, რომლებიც ეკუთვნიან D არის საზღვარს. ვთქვათ, ϑ_1 და ϑ_2 კუთხეების შესაბამისი წერტილებია M_1 და M_2 (ნახ. 41). M_1 და M_2 წერტილები ყოფენ D არის

კონტურს ორ M_1QM_2 და M_1PM_2 რკალებად. ვთქვათ, ამ რკალების განტოლებებია შესაბამისად

$$\rho=\rho_1(\vartheta) \quad \text{და} \quad \rho=\rho_2(\vartheta),$$

სადაც $\rho_1(\vartheta)$ და $\rho_2(\vartheta)$ წარმოადგენენ ϑ ცვლადის ცალსახა ფუნქციებს. მაშინ (18.1) ფორმულის თანახმად, D არე გადაისახება $\rho\vartheta$ სიბრტყის D' არეში,

$$\vartheta_1\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_2,\quad \rho_1(\vartheta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\vartheta).$$



ნახ. 41.

ამ შემთხვევაში (18.1) გარდაქმნის $I(\rho,\vartheta)$ იაკობიანი არის

$$I(\rho,\vartheta)=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\vartheta)}=\begin{vmatrix}\cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta\end{vmatrix}=\rho.$$

რადგანაც D არე არ შეიცავს კოორდინატთა სათავეს, ამიტომ

$$I(\rho,\vartheta)>0.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (18.1) გარდაქმნა რეგულარულია.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია D არეში უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქცია. განვიხილოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$J=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

თუ ვისარგებლებთ ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულით, მივიღებთ

$$J=\iint_{D'} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}d\vartheta\int_{\rho_1(\vartheta)}^{\rho_2(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho. \qquad (18.2)$$

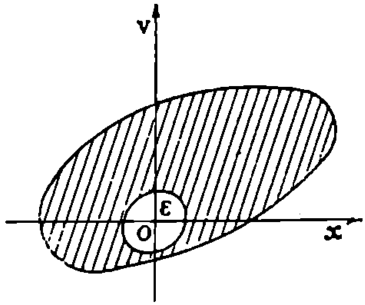
დასასრულ, ვთქვათ, D არე შეიცავს თავის შიგნით კოორდინატთა სათავეს. ამ შემთხვევაში $I(\rho, \vartheta)$ იაკობიანი ნულად იქცევა კოორდინატთა სათავეში და, მაშასადამე, ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის გამოყენების უფლება, საზოგადოდ, არ გვაქვს. ამ შემთხვევაში ასე მოვიქცეთ: კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოვხაზოთ ε რადიუსიანი ღია წრე $K_\varepsilon \subset D$ (ნახ. 42).

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_\varepsilon = D - K_\varepsilon.$$

K_ε წრის კონტურის განტოლებაა $\rho=\varepsilon$. მაშასადამე, $\rho_1(\vartheta)=\varepsilon$.

ახლა ვთქვათ, რომ $\rho=\rho(\vartheta)$ წარმოადგენს D არის კონტურის განტოლებას. რაკი O სათავე D არის შიგა წერტილია, ამიტომ



ნახ. 42.

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi.$$

მაშასადამე, (18.2) ფორმულის მიხედვით

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_\varepsilon^{\rho(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho.$$

თუ ამ ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ ტოლობას

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\rho(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho. \qquad (18.3)$$

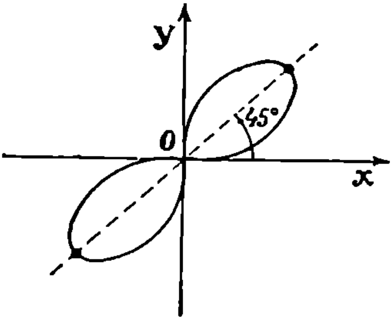
ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია D არის კონტურზე.

§ 19. ბრტყელი ფიგურების ფართობთა გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალით

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული ω არის ფართობი.

ამოხსნა. თუ $x=\rho\cos\vartheta$ და $y=\rho\sin\vartheta$ გამოსახულებებს შევიტანთ ლემნისკატის განტოლებაში, მივიღებთ

$$\rho^2=a^2\sin 2\vartheta.$$



ნახ. 43.

ეს არის ლემნისკატის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. ლემნისკატს აქვს 43-ე ნახაზზე მოცემული სახე.

როგორც ვხედავთ, ლემნისკატი შედგება ორი ერთმანეთის კონგრუენტული მარყუჟისაგან. ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ, მაგალითად, პირველ საკოორდინატო კუთხეში მოთავსებული მარყუჟის ფართობი. ამ შემთხვევაში

$$\vartheta_1=0,\ \vartheta_2=\frac{\pi}{2},\ \rho_1(\vartheta)=0,\ \rho_2(\vartheta)=a\sqrt{\sin 2\vartheta}.$$

მაშასადამე,

$$|\omega|=\iint_{\omega} dx\,dy=2\int_0^{\pi/2} d\vartheta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\vartheta}}\rho\,d\rho=\int_0^{\pi/2} a^2\sin 2\vartheta\,d\vartheta=a^2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ დეკარტის $x^3+y^3=axy$ ფოთოლის ω მარყუჟის ფართობი (ნახ. 44).

ამოხსნა. თუ $x=\rho\cos\vartheta$ და $y=\rho\sin\vartheta$ გამოსახულებებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\rho=\frac{a\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}.$$

ნახ. 44.

ეს არის დეკარტის ფოთოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\vartheta_1=0,\ \vartheta_2=\frac{\pi}{2},\ \rho_1(\vartheta)=0,\ \rho_2(\vartheta)=\frac{a\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}.$$

მაშასადამე,

$$|\omega| = \iint_{\omega} dxdy = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\rho_2(\vartheta)} \rho d\rho =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}{(\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta)^2}\, d\vartheta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^2\vartheta(1+\mathrm{tg}^2\vartheta)}{(1+\mathrm{tg}^3\vartheta)^2}\, d\vartheta$$

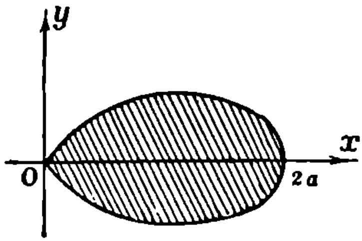
თუ მოვახდენთ ჩასმას $\mathrm{tg}^3\vartheta = t$, მივიღებთ

$$|\omega| = \frac{a^2}{6}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ იმ ω არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირით

$$(x^2+y^2)^2 = 2ax^3 \quad (a>0).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული წირი სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, განლაგებულია Oy ღერძის მარჯვნივ; Ox ღერძს კვეთს, როდესაც $x=0$, $x=2a$. თვით განტოლებიდან ცხადია, რომ $x^4 \leqslant 2ax^3$, ასე რომ $x \leqslant 2a$, ხოლო რაკი $y^4 \leqslant 2ax^3$, ამიტომ $|y| \leqslant 2a$. მაშასადამე, წირი შემოსაზღვრულია. ამ წირის ესკიზი მოცემულია 45-ე ნახაზზე.



ნახ. 45.

მოცემული წირის პოლარული განტოლება იქნება

$$\rho = 2a\cos^3\vartheta,$$

სადაც ϑ იცვლება $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ წირი სიმეტრიულია პოლარული Ox ღერძის მიმართ, გვექნება

$$|\omega| = \iint_{\omega} dxdy = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta\int_0^{2a\cos^3\vartheta}\rho d\rho = 4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\vartheta d\vartheta = \frac{5}{8}\pi a^2$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ იმ ω არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირით

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2} \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. წირი შემოსაზღვრულია, სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ; ორი სიმეტრიული მარყუჟიდან ერთი ძევს პირველ საკოორდინატო კუთხეში, მეორე—მესამეში. კოორდინატთა სათავე წარმოადგენს ერთადერთ გადაკვეთის წერტილს კოორდინატთა ღერძებთან. ახლა განვიხილოთ შემდეგი გარდაქმნა

$$x=a\rho\cos\vartheta,\quad y=b\rho\sin\vartheta.$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ მოცემული წირის განტოლებაში, მივიღებთ

$$\rho^2=\frac{ab}{2c^2}\sin 2\vartheta.$$

თუ გავითვალისწინებთ სიმეტრიულობას, გვექნება

$$|\omega|=2\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{2c^2}\sin 2\vartheta}}ab\rho d\rho=\frac{a^2b^2}{2c^2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\vartheta\, d\vartheta=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

§ 20. სივრცითი არის მოცულობა

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე შეკრული S ზედაპირი, რომელიც ყოფს მთელ სივრცეს ორ სხვადასხვა ბმულ D და D' არედ. ვიგულისხმოთ, რომ D წარმოადგენს ზედაპირის მიერ შემოსაზღვრულ არეს. მაშინ D და D' არეებს უწოდებენ შესაბამისად შ ი გ ა და გ ა რ ე ა რ ე ე ბ ს. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ D არის მოცულობა. ამისათვის D-ში ჩავხაზოთ და შემოვხაზოთ მრავალწახნაგა არეები A და B შესაბამისად[1]. A და B არეების მოცულობები გამოითვლება ელემენტარულად. ეს მოცულობები აღვნიშნოთ შესაბამისად V_A და V_B სიმბოლოებით. ცხადია, რომ

$$V_A\leqslant V_B.$$

[1] მრავალწახნაგა არე ეწოდება ყოველ შემოსაზღვრულ არეს, რომლის საზღვარი შედგება სასრული რიცხვის ბრტყელი მრავალკუთხა არეებისაგან, რომლებსაც წახნაგები ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა ყველა შესაძლო A და B სახის მრავალწახნაგა არეები და აღვნიშნოთ H_* და H^* სიმბოლოებით V_A და V_B სახის რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად:

$$H_*=\{V_A\}, \quad H^*=\{V_B\}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია. რაც შეეხება H^* სიმრავლეს, იგი ქვემოდან შემოსაზღვრულია. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$V_*=\sup H_*, \quad V^*=\inf H^*.$$

ცხადია, რომ

$$V_*\leqslant V^*.$$

V_* და V^* რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად D არის **შიგა და გარე მოცულობები.**

თუ $V_*=V^*$, მაშინ D არეს ეწოდება **მოცულობადი არე** და ამ საერთო მნიშვნელობას ეწოდება D არის მოცულობა, მას ჩვეულებრივ V ასოთი აღნიშნავენ.

თეორემა 28. **D არის მოცულობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ორი მრავალწახნაგა არე A და B, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას**

$$V_B-V_A<\varepsilon. \tag{20.1}$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ჯერ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, D არე მოცულობადია და ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. თუ მხედველობაში მივიღებთ სიმრავლის ქვედა და ზედა საზღვრების განსაზღვრას, აღებული ε რიცხვისათვის არსებობს H_* და H^* სიმრავლეებში ისეთი V_A და V_B ელემენტები შესაბამისად, რომ

$$V_*-V_A<\frac{\varepsilon}{2}, \; V_B-V^*<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობების წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$V_A \quad A \quad -_A<\varepsilon,$$

ვინაიდან $V_*=^*$. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს H_* და H^* სიმრავლეებში ისეთი

ორი ელემენტი V_A და V_B, რომ ადგილი აქვს (20.1) უტოლობას. რადგანაც

$$V_* \geq V_A, \quad V^* \leq V_B,$$

ამიტომ (19.1) უტოლობის თანახმად ვღებულობთ

$$V^* - V_* < \varepsilon$$

უტოლობას და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $V_* = V^*$. მაშასადამე, D არე მოცულობადია. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ S ზედაპირი მოთავსებულია A და B არეების საზღვრების მიერ შემოსაზღვრულ არეში და $V_B - V_A$ წარმოადგენს ამ არის მოცულობას. ამიტომ 23-ე თეორემა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ასე:

D არის მოცულობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს D არის საზღვრის შემცველი მრავალწახნაგებით შემოსაზღვრული არე, რომლის მოცულობა ε-ზე ნაკლებია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ D არე მოცულობადია, მაშინ მისი საზღვრის მოცულობა ნულის ტოლია.

თეორემა 24. *თუ მოცულობადი D არე დაყოფილია მოცულობად $D_1, D_2, \ldots, D_n$ არეებად, რომლებსაც შესაძლებელია წყვილ-წყვილად ჰქონდეთ მხოლოდ საერთო საზღვრითი წერტილები, მაშინ*

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n, \tag{20.2}$$

სადაც V-თი აღნიშნულია D არის მოცულობა, ხოლო $V_k (k=1,2,\ldots,n)$ წარმოადგენს D_k არის მოცულობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_k და $B_k (k=1,2,\ldots,n)$ მრავალწახნაგა არეებია, რომლებიდან პირველი მათგანი მოთავსებულია D_k არეში, ხოლო მეორე შეიცავს თავის შიგნით D_k არეს. რადგანაც $A_1, A_2, \ldots, A_n$ არეები მოთავსებულია D არის შიგნით და ამ არეებს წყვილ-წყვილად საერთო წერტილები არა აქვთ, ამიტომ

$$V_{A_1} + V_{A_2} + \cdots + V_{A_n} < V. \tag{20.3}$$

შემდეგ რაკი

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = D$$

და B_k არეებს შეიძლება ჰქონდეს საერთო ნაწილები, ამიტომ

$$V_{B_1}+V_{B_2}+\cdots+V_{B_n}>V. \tag{20.4}$$

(20.3) და (20.4) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} V_{A_k}<V<\sum_{k=1}^{n} V_{B_k}. \tag{20.5}$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რადგანაც D_k არე მოცულობადია, ამიტომ A_k და B_k ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ

$$V_{B_k}-V_{A_k}<\frac{\varepsilon}{n} \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

მაგრამ

$$V_{A_k}<V_k<V_{B_k}.$$

მაშასადამე,

$$V_{A_k}>V_k-\frac{\varepsilon}{n},\quad V_{B_k}<V_k+\frac{\varepsilon}{n}. \tag{20.6}$$

თუ გავითვალისწინებთ (19.6) უტოლობებს, (20.5) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{n} V_k-\varepsilon<V<\sum_{k=1}^{n} V_k+\varepsilon.$$

რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ მართებულია (20.2) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 21. მოცულობის გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალით

ავიღოთ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $Oxyz$ და განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე რაიმე შემოსაზღვრული დახურული ფართობადი ω_0 არე, რომელზედაც უწყვეტია $f(x,y)$ ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ ω_0 არის ყოველ წერტილში $f(x,y)\geqslant 0$.

ავიღოთ ახლა ω_0 არის შიგნით რაიმე დახურული ფართობადი ω არე. ამ არის საზღვრის ყოველ წერტილში აღვმართოთ xOy სიბრტყის მართობი. ასეთ მართობთა ერთობლიობა მოგვცემს ცილინდრულ ზედაპირს

განვიხილოთ G არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრტყელი ω არით, აღნიშნული ცილინდრული ზედაპირითა და $z=f(x,y)$ ზედაპირით.

დავამტკიცოთ, რომ G არე მოცულობადია და მისი V მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = \iint_{\omega} f(x,y)dxdy. \tag{21.1}$$

ამ მიზნით აღვნიშნოთ Q_0 სიმბოლოთი უმცირესი ორგანზომილებიანი სეგმენტი, რომელიც შეიცავს ω_0 არეს. დავყოთ Q_0 მართკუთხედი ისეთ მართკუთხედებად, რომელთა დიამეტრები არ აღემატება $\rho(C,C_0)$, სადაც C და C_0 წარმოადგენენ შესაბამისად ω და ω_0 არეების საზღვრებს. რადგანაც ω არე მოთავსებულია ω_0 არის შიგნით, ამიტომ C და C_0 სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო წერტილი. ამის გარდა, ისინი ჩაკეტილი სიმრავლეებია, რის გამო $\rho(C,C_0)>0$.

ვთქვათ, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ის მართკუთხედებია აღნიშნული დანაწილებისა, რომლებიც მოთავსებულია ω-ში. $r_1', r_2', \ldots, r_m'$ იყოს ის მართკუთხედები, რომელთაგან ყოველი შეიცავს ω არის ერთ წერტილს მაინც. ცხადია, რომ ნებისმიერი r_k მართკუთხედი არის რომელიმე r_i' მართკუთხედი და, ამის გარდა, არც ერთი $r_j'(j=1, 2,\ldots,m)$ მართკუთხედი არ გამოვა ω_0 არიდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$V^* = \sum_{j=1}^{m} M_j' |r_j'|, \quad V_* = \sum_{k=1}^{n} m_k |r_k|,$$

სადაც M_j' არის $f(x,y)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა r_j' მართკუთხედზე, m_k კი იმავე ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა r_k მათკუთხედზე. $M_j'|r_j'|$ წარმოადგენს იმ პრიზმის მოცულობას, რომლის ფუძეა r_j' მართკუთხედი, სიმაღლე კი M_j'. ყველა ასეთი პრიზმის ერთობლიობა გვაძლევს რაღაც მრავალწახნაგა არეს, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს G არეს. ამ მრავალწახნაგა არის მოცულობაა V^* რიცხვი.

ასევე, V_* წარმოადგენს G-ში მოთავსებულ გარკვეული მრავალწახნაგა არის მოცულობას.

აღვნიშნოთ H^* და H_* სიმბოლოებით შესაბამისად V^* და V_* სახის რიცხვთა სიმრავლეები. რადგანაც $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ω_0 არეში, ამიტომ

$$\sup H_* = \inf H^* = \iint_{\omega} f(x,y)dx\,dy.$$

მაგრამ, თუ $\sup H_* = \inf H^*$, მაშინ G მოცულობადი არეა და მისი V მოცულობა ამ ორი სიდიდის საერთო მნიშვნელობაა. მაშასადამე, მართებულია (21.1) ტოლობა.

შენიშვნა. ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ω_0 არეზე. (21.1) ფორმულა ძალაში რჩება მაშინაც, როდესაც $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ ω არეზე და მასზე უწყვეტია.

ამრიგად, ω არეზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი გამოსახავს გეომეტრიულად იმ არის მოცულობას, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრტყელი ω არით, xOy სიბრტყის მართობული ცილინდრული ზედაპირითა და $z=f(x,y)$ ზედაპირით.

ახლა, ვთქვათ, რომ ω არეში უწყვეტი ფუნქცია არადადებითია, ე. ი. ω არის ყოველ წერტილში $f(x,y)\leqslant 0$. გამოვარკვიოთ $f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა. ამისათვის განვიხილოთ

$$z=-f(x,y)$$

ფუნქცია. ცხადია, ეს ფუნქცია ω არეში არაუარყოფითია და, მაშასადამე, ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint\limits_{\omega}[-f(x,y)]\,dx\,dy$$

წარმოადგენს გეომეტრიულად იმ არის მოცულობას, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრტყელი ω არით, $z=-f(x,y)$ ზედაპირითა და ω არის კონტურზე აგებული xOy სიბრტყის მართობული ცილინდრული ზედაპირით.

ცხადია, ეს მოცულობა იმ არის მოცულობის ტოლია, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრტყელი ω არით, $z=-f(x,y)$ ზედაპირითა და აღნიშნული ცილინდრული ზედაპირით. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_{\omega}f(x,y)dxdy$ გამოსახავს უარყოფითი ნიშნით აღებულ იმ არის მოცულობას, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრტყელი ω არით, $z=f(x,y)$ ზედაპირითა და აღნიშნული ცილინდრული ზედაპირით.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ იმ სამღერძა ელიფსოიდის მოცულობა, რომლის ნახევარღერძებია a, b, c.

ამოხსნა. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ელიფსოიდის ცენტრში და კოორდინატთა ღერძებად ავიღოთ ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძები. მაშინ ელიფსოიდის განტოლება იქნება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

რადგანაც კოორდინატთა სიბრტყეები ყოფს აღებულ ელიფსოიდს რვა კონგრუენტულ ნაწილად, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ იმ არის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით და ელიფსოიდის ზედაპირის ნაწილით

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$$

თუ ელიფსოიდის მოცულობას აღვნიშნავთ V ასოთი, გვექნება

$$\frac{V}{8}=c\iint_{\omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a_2}-\frac{y^2}{b^2}}\;dxdy, \tag{20.2}$$

სადაც ω წარმოადგენს იმ არეს xOy სიბრტყეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია Ox, Oy ღერძებით და ელიფსის რკალით

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

20.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$V=8c\iint_{\omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\;dxdy.$$

ამ ორჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=a\,\rho\cos\vartheta,\quad y=b\,\rho\sin\vartheta.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\vartheta)}=a\,b\,\rho. \tag{20.3}$$

აქ ρ იცვლება 0-დან 1-მდე, ϑ კი 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე. მაშასადამე,

$$V=8a\,b\,c\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c.$$

ამრიგად

$$V=\frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c. \tag{20.4}$$

კერძოდ, თუ $a=b=c=R$, მაშინ ელიფსოიდი სფეროდ გადაიქცევა და ამ შემთხვევაში (20.4) ფორმულა გვაძლევს

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

მივიღეთ ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილი ფორმულა სფეროს მოცულობისათვის.

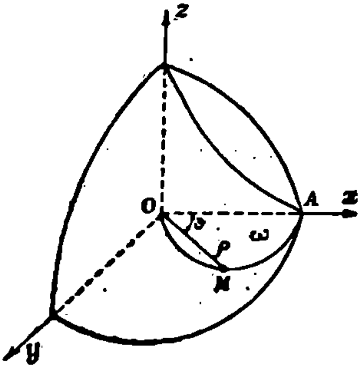
ამოცანა 2. მოცემულია R რადიუსიანი სფერო, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში: სფეროს OA რადიუსზე როგორც დიამეტრზე შემოვხაზოთ K წრე და ვიპოვოთ სფეროს იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია წრიულ ცილინდრში, რომლისთვისაც K წარმოადგენს მართობულ კვეთს.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, სფეროს განტოლებაა

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

რადგანაც აღნიშნული ცილინდრის მიერ სფეროდან ამონაკვეთი არე სიმეტრიულია როგორც xOy, ისე yOz სიბრტყის მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ აღნიშნული არის იმ ნაწილაკის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო კუთხის პირველ მერვედში (ნახ. 46). ამრიგად, თუ აღვნიშნავთ საძიებელ მოცულობას V-თი, გვექნება

$$V=4\iint_{\omega}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy, \quad (20.5)$$



ნახ. 46.

სადაც ω წარმოადგენს იმ წრის ნახევარს, რომელიც შემოხაზულია OA-ზე, როგორც დიამეტრზე. (20.5) ინტეგრალის გამოსათვლელად შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები:

$$x=\rho\cos\vartheta, \quad y=\rho\sin\vartheta.$$

აქ ϑ იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, ρ კი 0-დან $R\cos\vartheta$-მდე. ამის გარდა, იაკობიანი $I=\rho$. მაშასადამე, (20.5) ტოლობიდან გვაქვს

$$V=4\int_{0}^{\pi/2}d\vartheta\int_{0}^{R\cos\vartheta}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=\frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

თუ მთელ სფეროს გამოვაკლებთ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია აღნიშნულ ცილინდრსა და იმ ცილინდრის შიგნით, რომელიც

პირველი ცილინდრის სიმეტრიულია yOz სიბრტყის მიმართ, მაშინ სფეროს დარჩენილი ნაწილის მოცულობა იქნება

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{8}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}R^3.$$

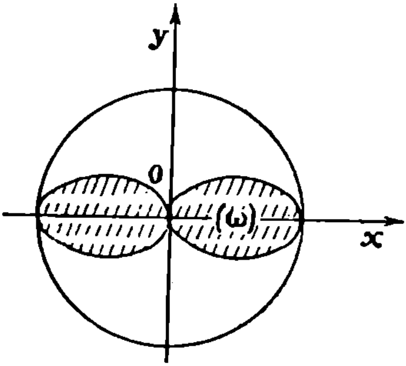
ეს შედეგი წარმოადგენს სწორედ ვივიანის ამოცანის ამოხსნას სფეროს რაციონალური ნაწილის მოძებნის შესახებ.

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ იმ G არის V მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროთი და $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, ცილინდრით.

ამოხსნა. მოცემული სფეროს გადაკვეთა xOy სიბრტყესთან გვაძლევს

$$x^2+y^2=a^2 \tag{20.6}$$

წრეწირს, ცილინდრის გადაკვეთა xOy სიბრტყესთან კი ლემნისკატს რომელიც ძევს (20.6) წრეწირის შიგნით (ნახ. 47). ამიტომ ინტეგრების D არეს წარმოადგენს ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული არე.



ნახ. 47.

რადგანაც G არე განლაგებულია სიმეტრიულად კოორდინატთა სიბრტყეების მიმართ, ამიტომ ინტეგრების არედ შეგვიძლია ავიღოთ D არის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ კვადრანტში. აღვნიშნოთ იგი ω ასოთი. მაშინ საძიებელი მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$V=8\iint\limits_{\omega}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

თუ შემოვიღებთ პოლარულ კოორდინატებს

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta, \tag{20.7}$$

ლემნისკატის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho^2=a^2\cos 2\vartheta \text{ ანუ } \rho=a\sqrt{\cos 2\vartheta}$$

აქ ϑ იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{4}$-მდე, ρ კი 0-დან $a\sqrt{\cos 2\vartheta}$-მდე. რაკი (20.7) გარდაქმნის იაკობიანი ρ-ს ტოლია, ამიტომ გვექნება

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}(4\sqrt{2}-5)a^3.$$

§ 22. ზედაპირის ფართობი

ზედაპირის ამა თუ იმ ნაწილის ფართობის გამოთვლა შეგვიძლია ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით მხოლოდ კერძო შემთხვევებში. საზოგადოდ კი საჭირო ხდება ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდების გამოყენება.

ავიღოთ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა და ვთქვათ, xOy სიბრტყის ზემოთ მოცემულია S ზედაპირი, რომელსაც აქვს მხები სიბრტყე ყოველ წერტილში. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ Oz ღერძის პარალელური წრფე კვეთს ამ ზედაპირს არა უმეტეს ერთი წერტილისა. დავუშვათ, რომ S ზედაპირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე არის დახურული ფართობადი ω არე. დავყოთ ω არე ფართობად $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ არეებად და ყოველი ω_k არის კონტურზე გავავლოთ xOy სიბრტყის მართობი ცილინდრული ზედაპირი. ეს ცილინდრი ამოკვეთს S ზედაპირიდან S_k ზედაპირს. ცხადია, ამ ცილინდრების საშუალებით S ზედაპირი დაიყოფა ქვეზედაპირებად

$$S_1, S_2, \ldots, S_n.$$

ყოველ S_k ზედაპირზე ავიღოთ M_k წერტილი და მასზე გავავლოთ S ზედაპირის მხები სიბრტყე. ω_k ზე აგებული ცილინდრი ამოჭრის ამ მხები სიბრტყიდან გარკვეულ T_k არეს, რომელიც ფართობადია, ვინაიდან ω_k ფართობადია. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|T_k|,$$

სადაც λ არის $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ არეების დიამეტრთა შორის უდიდესი, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება S **ზედაპირის ფართობი**, S ზედაპირს კი—**ფართობადი ზედაპირი**.

თეორემა 25. თუ S **ზედაპირის განტოლებაა**

$$z=f(x, y),$$

ამასთან, კერძო წარმოებულები

$$P=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

უწყვეტია ω არეში, მაშინ S ზედაპირი ფართობადია და მისი ფართობი $|S|$ გამოითვლება ფორმულით

$$|S|=\iint\limits_{\omega}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \tag{22.1}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ γ_k-თი S ზედაპირის M_k წერტილში გავლებულ ნორმალსა და Oz ღერძებს შორის მახვილი კუთხე. მაშინ

$$|\omega_k|=|T_k|\cos\gamma_k.$$

აქედან

$$|T_k|=\frac{|\omega_k|}{\cos\gamma_k}.$$

მაგრამ

$$\cos\gamma_k=\frac{1}{\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}},$$

სადაც

$$p_k=f_x'(x_k,y_k),\quad q_k=f_y'(x_k,y_k),$$

ხოლო x_k და y_k წარმოადგენენ M_k წერტილის აბსცისას და ორდინატას. მაშასადამე,

$$|T_k|=\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}\,|\omega_k|.$$

ამრიგად,

$$\sum_{k=1}^{n}|T_k|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}\,|\omega_k|.$$

რადგანაც $\sqrt{1+p^2+q^2}$ ფუნქცია უწყვეტია ω არეში, ამიტომ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}\,|\omega_k| \tag{22.2}$$

და, ამრიგად, S ზედაპირი ფართობადია. მაგრამ (22.2) გამოსახულება წარმოადგენს ორჯერად ინტეგრალს:

$$\iint\limits_{\omega}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

მაშასადამე, მართებულია (22.1) ფორმულა. თეორემა დამტკიცებულია. (22.1) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე:

$$|S| = \iint_{\omega} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}, \tag{22.3}$$

სადაც γ მახვილი კუთხეა Oz ღერძისა და ზედაპირის ნორმალს შორის.

თუ ნორმალს არ მივანიჭებთ გარკვეულ მიმართულებას, მაშინ (22.3) ფორმულა შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$$S = \iint_{\omega} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}. \tag{22.4}$$

შევნიშნოთ, რომ $\cos\gamma$ ნულად არ იქცევა ω არეში და (22,3) და (22.4) ფორმულებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციები უწყვეტია.

დასასრულ, ვთქვათ, S ზედაპირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x=\varphi(u, v),\ y=\psi(u, v),\ z=\chi(u, v). \tag{22.5}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) ისინი უწყვეტია დახურულ D არეში;
2) მათ აქვთ უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები D-ში;
3) ფუნქციონალური დეტერმინანტებიდან

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)},\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)},\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან D არეში.

ზემოთ აღნიშნულ პირობებში S ზედაპირის ყოველ წერტილზე შეგვიძლია გავავლოთ მხები სიბრტყე და ეს უკანასკნელი უწყვეტად იცვლება ნორმალთან ერთად. თუ კუთხეს ნორმალსა და Oz ღერძებს შორის აღვნიშნავთ γ-ით, მაშინ

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{22.6}$$

სადაც

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)},\quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)},\quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ C განსხვავდება ნულისაგან D არეში.

თუ (22.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u,v),$$

მაშინ

$$|S|=\iint_D \frac{|I|}{|\cos\gamma|}\,du\,dv,$$

სადაც $\cos\gamma$ განისაზღვრება (22.6) ფორმულით. მაგრამ $|I|=|C|$ მაშასადამე,

$$|S|=\iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv. \qquad (22.7)$$

ამ ფორმულას მივცეთ უფრო მარტივი სახე. ამისათვის გავიხსენოთ ლაგრანჟის შემდეგი იგივეობა:

თუ მოცემულია რიცხვები $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2. \qquad (22.8)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F.$$

E, G და F გამოსახულებებს ეწოდება **ზედაპირის გაუსის კოეფიციენტები**.

თუ გამოვიყენებთ (22.8) ფორმულას, მივიღებთ

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2.$$

მაშასადამე, (22.7) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$|S|=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \qquad (22.9)$$

გამოსახულებას $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ ეწოდება S **ზედაპირის ფართითი ელემენტი** მრუდწირულ კოორდინატებში.

ზედაპირის ფართობის ზემოთ მოყვანილი პროცესი დაკავშირებული იყო კოორდინატთა გარკვეული სისტემის შერჩევასთან. მაგრამ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ზედაპირის ფართობის ის განსაზღვრა, რომელიც ზემოთ მოვიყვანეთ დამოკიდებული არაა კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზედაპირის ფართობის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრა განსხვავდება რკალის სიგრძის განსაზღვრისაგან. როგორც პირველ ტომში დავინახეთ, რკალის სიგრძის განსაზღვრისას გამოვდიოდით რკალში ჩახაზული ტეხილი წირებიდან, ხოლო ზედაპირის ფართობის განსაზღვრისას ვსარგებლობდით არა მრავალწახნაგებით, რომლებიც ჩახაზულია მოცემულ ზედაპირში, არამედ მხები სიბრტყეებით. ამიტომ ბუნებრივად ისმის კითხვა: შეგვიძლია თუ არა განვიხილოთ ზედაპირის ფართობი როგორც ზღვარი ზედაპირში ჩახაზული მრავალწახნაგების ფართობებისა, როდესაც მრავალწახნაგების ყოველი წახნაგის დიამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის? თურმე, ზედაპირის ფართობის ასეთნაირი განსაზღვრა უვარგისია, ვინაიდან აღნიშნული პროცესი საზოგადოდ, არ გვაძლევს გარკვეულ ზღვარს.

ამის დასადასტურებლად განვიხილოთ შვარცის მიერ მოცემული მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მართი წრიული ცილინდრი, რომლის სიმაღლე და ფუძის რადიუსი 1-ის ტოლია. ამ ცილინდრის გვერდითი ფართობი 2π-ს ტოლია. გავყოთ ცილინდრის სიმაღლე m ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ პარალელური სიბრტყეები. მაშინ ამ სიბრტყეებისა და ცილინდრის გადაკვეთა მოგვცემს m წრეწირს, გარდა ფუძის წრეწირისა. თითოეული წრეწირი გავყოთ n ტოლ ნაწილად ისე, რომ ყოველი შემდგომი წრეწირის დაყოფის წერტილები მდებარეობდეს წინა წრეწირის დანაყოფი რკალების შუა წერტილების ზემოთ.

განვიხილოთ ახლა მოცემულ ცილინდრში ჩახაზული მრავალწახნაგა, რომლის წახნაგები შედგენილია ჩვენი წრეწირების ქორდებითა და იმ მონაკვეთებით, რომლებიც აერთებენ მეზობელი წრეწირების დაყოფის უახლოეს წერტილებს. მიღებული მრავალწახნაგას წახნაგები წარმოადგენენ თანატოლ ტოლფერდა სამკუთხედებს, რომლებიც რაგინდ ახლოს არიან ცილინდრის გვერდით ზედაპირთან, თუ m და n საკმარისად დიდი რიცხვებია. ახლა მივანიჭოთ n რიცხვს რაიმე ფიქსირებული მნიშვნელობა. m რიცხვი შეგვიძლია იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ ყოველი ჩვენი სამკუთხედთაგანი შეადგენდეს ცილინდრის გვერდით ზედაპირთან კუთხეს, რომელიც რაგინდ ახლოსაა მართ კუთხესთან. ასეთ შემთხვევაში მოსალოდნელი არაა, რომ მრავალწახნაგას ფართობი წა -

რმოადგენდეს ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას. მართლაც, ეს რომ დავადასტუროთ, გამოვთვალოთ ჩვენი მრავალწახნაგას ფართობი. რადგანაც ამ მრავალწახნაგას ყოველი წახნაგი წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედს და ეს წახნაგები ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ აღებული მრავალწახნაგას ფართობის გამოსათვლელად საკმარისია მოვძებნოთ რომელიმე მისი წახნაგის ფართობი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, წახნაგები წარმოადგენენ ტოლფერდა სამკუთხედებს, რომელთა ფუძეა $2\sin\frac{\pi}{n}$, ხოლო სიმაღლე h გამოითვლება პითაგორას თეორემის მიხედვით:

$$h=\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}\,.$$

თუ ჩვენი სამკუთხედის ფართობს აღვნიშნავთ σ ასოთი, გვექნება

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

და რაკი სამკუთხედების რიცხვია $2mn$, ამიტომ მრავალწახნაგას ფართობი σ_{mn} გამოისახება ფორმულით:

$$\sigma_{mn}=2mn\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin\frac{4\pi}{2n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}=$$

$$=2n\sqrt{1+4m^2\sin\frac{4\pi}{2n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\,.$$

ვთქვათ, $m=kn^2$, სადაც k რაიმე ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{mn}=2\pi\sqrt{1+\frac{k^2\pi^2}{4}}\,.$$

ამრიგად, σ_{mn}-ის ზღვარი დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ მიისწრაფვიან m და n უსასრულობისაკენ. მაშასადამე, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sigma_{mn}$ არ არსებობს.

როგორც ვხედავთ, თუ ზედაპირის ფართობს განვსაზღვრავთ როგორც ამ ზედაპირში ჩახაზული მრავალწახნაგას ფართობის ზღვარს, მაშინ ისეთ ზედაპირსაც კი, როგორიცაა ცილინდრი, ფართობი არა აქვს.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ კოორდინატთა სათავეს მოვათავსებთ სფეროს ცენტრში, მაშინ სფეროს ზედა ნახევრის განტოლება იქნება

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

სადაც R სფეროს რადიუსია. ცხადია, რომ

$$|S|=2\iint\limits_{\omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

სადაც ω სფეროს გეგმილია xOy სიბრტყეზე, ხოლო $|S|$-ით აღნიშნულია სფეროს ზედაპირის ფართობი. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{R^2}{z^2}.$$

მაშასადამე,

$$|S|=2\iint\limits_{\omega}\frac{R}{z}\,dx\,dy=2R\iint\limits_{\omega}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,$$

მივიღებთ

$$|S|=2R\int\limits_0^{2\pi}d\vartheta\int\limits_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=4\pi R^2.$$

ეს ფორმულა ცნობილია ელემენტარული გეომეტრიიდან.

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ იმ წრიული კონუსის გვერდითი ზედაპირის S ფართობი, რომლის ფუძის რადიუსია R, სიმაღლე კი H.

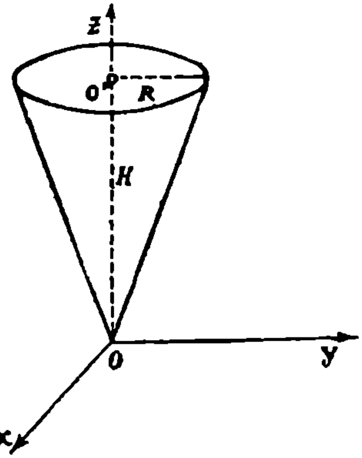
ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუშვათ, რომ კონუსის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო Oz ღერძი ემთხვევა კონუსის ღერძს (ნახ. 48). მაშინ კონუსის ზედაპირის განტოლებაა

$$z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$$

აქედან

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{H}{R}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{H}{R}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}.$$



ნახ. 48.

ვთქვათ, ω წარმოადგენს კონუსის ფუძის გეგმილს xOy სიბრტყეზე. მაშინ კონუსის გვერდითი ზედაპირის S ფართობისათვის გვექნება გამოსახულება

$$S=\iint_{\omega}\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}\cdot|\omega|.$$

რაკი ω წარმოადგენს R რადიუსიან წრეს, ამიტომ $|\omega|=\pi R^2$ და, მაშასადამე.

$$S=\pi R^2\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}=\pi R\sqrt{R^2+H^2}.$$

§ 23. არასაკუთრივი ორჯერადი ინტეგრალები

1°. არაშემოსაზღვრულ არეებზე გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალები. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია ისეთი არაშემოსაზღვრული D არე, რომ სიბრტყის ყოველ სასრულ ნაწილში მოთავსებუ-

ლი არის საზღვრის ფართობი ნულის ტოლია. განვიხილოთ D არეში გან-საზღვრული $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია რიმანის აზრით D არის ყოველ შემოსაზღვრულ ფართობად ქვეარეზე.

კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოვხაზოთ რაიმე შეკრული C კონტური, რომლის ფართობი ნულის ტოლია. ეს წირი მოკვეთს D არედან შემოსაზღვრულ ფართობად G არეს. აღვნიშნოთ R-ით მანძილი $\rho(O, C)$ კოორდინატთა O სათავიდან C წირამდე. პირობის თანახმად არსებობს ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy. \tag{23.1}$$

თუ არსებობს ამ ინტეგრალის სასრული ან უსასრულო ზღვარი, როდესაც $R\to+\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივ ორჯერადი ინტეგრალი $f(x,y)$ ფუნქციისა, გავრცელებული D არეზე და აღინიშნება

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy. \tag{23.2}$$

თუ ეს ზღვარი სასრულია, მაშინ (23.2) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში—განშლადი. $f(x,y)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც (23.2) ინტეგრალი კრებადია, ეწოდება ინტეგრებადი არასაკუთრივი აზრით D არეში.

თეორემა 26. (23.1) ორჯერადი ინტეგრალის ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი C_0 წრეწირი ცენტრით O წერტილში, რომ ყოველი შეკრული C' და C'' წირებისათვის, რომელთა მიერ შემოსაზღვრული არეები შეიცავენ თავის შიგნით C წირს, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\iint\limits_{G''} f(x,y)dx\,dy-\iint\limits_{G'} f(x,y)dx\,dy\right|<\varepsilon, \tag{23.3}$$

სადაც G' და G'' წარმოადგენენ შესაბამისად C' და C' წირების მიერ მოკვეთილ D არის სასრულ ნაწილებს.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია (23.3) პირობა და განვიხილოთ ისეთი შეკრული წირთა მიმდევრობა $C_1, C_2,\ldots,C_n,\ldots$, რომელთა მიერ შემოსაზღვრული არეები შეიცავენ თავის შიგნით O წერტილს და

$$\rho(O, C_1)<\rho(O, C_2)<\cdots<\rho(O, C_n)<\cdots,$$

მასთან

$$\lim_{n\to\infty} \rho(O, C_n) = +\infty.$$

აღებული ε-სათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ

$$\left| \iint_{G_n} f(x, y)dx\,dy - \iint_{G_m} f(x, y)dx\,dy \right| < \varepsilon,$$

როდესაც $n>N$, $m>N$, სადაც G_k-თი აღნიშნულია C_k წირის მიერ მოკვეთილი D არის სასრული ნაწილი[1]. მაშასადამე, კოშის თეორემის თანახმად არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G_n} f(x, y)dxdy.$$

ეს ზღვარი აღვნიშნოთ I სიმბოლოთი.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი შეკრული C წირი, რომლის მიერ შემოსაზღვრული არე შეიცავს თავის შიგნით C_0 წირს. მაშინ გვექნება

$$\left| \iint_{G} f(x, y)dx\,dy - \iint_{G_n} f(x, y)dx\,dy \right| < \varepsilon, \tag{23.4}$$

სადაც G წარმოადგენს C წირის მიერ მოკვეთილ D არის სასრულ ნაწილს, ხოლო $n>N$.

თუ (23.4) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n\to\infty$ მივიღებთ

$$\left| \iint_{G} f(x, y)dx\,dy - I \right| \leqslant \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\rho(O,C)\to\infty} \iint_{G} f(x, y)dx\,dy = I$$

პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 27. ვთქვათ, D არეში განსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით D არის ყოველ შემოსაზღვრულ ფართობად ქვეარეზე. თუ არსებობს არასაკუთრივი ორჯერადი ინტეგრალი

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $G_m \supset G_n$, როდესაც $m>n$.

$\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$, მაშინ იარსებებს ორჯერადი ინტეგრალიც

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy. \tag{23.5}$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მაშინ ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი C_0 წრეწირი ცენტრით O წერტილში, რომ ყოველი შეკრული C' და O'' წირებისათვის, რომელთა მიერ შემოსაზღვრული არეები შეიცავენ თავის შიგნით C_0 წირს, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\iint\limits_{G''}|f(x,y)|\,dx\,dy - \iint\limits_{G'}|f(x,y)|\,dx\,dy\right| < \varepsilon, \tag{23.6}$$

სადაც G' და G'' წარმოადგენენ შესაბამისად C' და C'' წირების მიერ მოკვეთილ D არის სასრულ ნაწილს.

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $G'' \supset G'$. მაშინ (23.6) უტოლობა ასე გადაიწერება

$$\iint\limits_{G''-G'} |f(x,y)|\,dx\,dy < \varepsilon.$$

მაგრამ

$$\left|\iint\limits_{G''} f(x,y)dx\,dy - \iint\limits_{G'} f(x,y)dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_{G''-G'} |f(x,y)|\,dxdy < \varepsilon.$$

მაშასადამე, 26-ე თეორემის თანახმად (23.5) ინტეგრალი კრებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 28. თუ შემოუსაზღვრელ D არეზე გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ კრებადია, მაშინ ეს ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია, ე. ი. კრებადია ინტეგრალიც $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ

$$\iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy = +\infty. \tag{23.7}$$

შემოვხაზოთ კოორდინატთა სათავიდან რაიმე შეკრული C_1 წირი. აღვნიშნოთ R_1-ით მანძილი O წერტილიდან C_1 წირამდე. (23.7) ტო-

ლობის თანახმად, O წერტილის გარშემო შეგვიძლია შემოვხაზოთ ისეთი შეკრული წირი C_2, რომ

$$\iint\limits_{G_2} |f(x,y)|\,dxdy > 3 \iint\limits_{G_1} |f(x,y)|\,dxdy + 2,$$

სადაც G_1 და G_2 წარმოადგენენ შესაბამისად C_1 და C_2 წირების მიერ მოკვეთილ D არის სასრულ ქვეარეებს, მასთან $G_1 \subset G_2$ და $R_1 < R_2$ (R_2 წარმოადგენს მანძილს O წერტილსა და C_2 წირს შორის).

შემდეგ, O წერტილის გარშემო შემოვხაზოთ ისეთი შეკრული C_3 წირი, რომ

$$\iint\limits_{G_3} |f(x,y)|\,dxdy > 3 \iint\limits_{G_2} |f(x,y)|\,dx\,dy + 4,$$

სადაც G_3 წარმოადგენს D არიდან C_3 წირის მიერ მოკვეთის სასრულ ქვეარეს, მასთან $G_2 \subset G_3$ და $R_2 < R_3$.

საზოგადოდ, O წერტილის გარშემო შემოვხაზოთ ისეთი შეკრული C_{n+1} წირი, რომ

$$\iint\limits_{G_{n+1}} |f(x,y)|\,dxdy > 3 \iint\limits_{G_n} |f(x,y)|\,dxdy + 2n,$$

სადაც G_{n+1} წარმოადგენს C_{n+1} წირის მიერ D არიდან მოკვეთილ სასრულ ქვეარეს; ამასთან, $G_n \subset G_{n+1}$, $R_n < R_{n+1}$ და

$$\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $A_n = G_{n+1} - G_n$ გვექნება

$$\iint\limits_{A_n} |f(x,y)|\,dx\,dy = \iint\limits_{G_{n+1}} |f(x,y)|\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} |f(x,y)|\,dx\,dy >$$

$$> 2\iint\limits_{G_n} |f(x,y)|\,dx\,dy + 2n. \tag{23.8}$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციები:

$$\overset{*}{f}(x,y) = \frac{|f(x,y)| + f(x,y)}{2}, \quad \underset{*}{f}(x,y) = \frac{|f(x,y)| - f(x,y)}{2}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\underset{*}{f}(x,y) \geq 0$, $\overset{*}{f}(x,y) \geq 0$ და

$$|f(x,y)| = \overset{*}{f}(x,y) + \underset{*}{f}(x,y).$$

მაშასადამე,

$$\iint_{A_n} |f(x, y)|\, dx\, dy = \iint_{A_n} \overset{*}{f}(x, y) dx\, dy + \iint_{A_n} \underset{*}{f}(x, y) dx dy. \quad (23.9)$$

ვთქვათ, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ინტეგრალებიდან პირველი მათგანი მეტია ან ტოლია მეორეზე. მაშინ (23.8) და (23.9) თანაფარდობების საფუძველზე გვაქვს

$$\iint_{A_n} \overset{*}{f}(x, y) dx\, dy > \iint_{G_n} |f(x,y)|\, dx dy + n.$$

ახლა ავიღოთ A_n არის ისეთი დანაწილება ფართობად არეებად

$$\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \ldots, \omega_p^{(n)},$$

რომ $\overset{*}{f}(x,y)$ ფუნქციის დარბუს ქვედა ჯამისათვის მართებული იყოს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{p} m_k^{(n)} |\omega_k^{(n)}| > \iint_{G_n} |f(x,y)|\, dx dy + n,$$

სადაც $m_k^{(n)}$ წარმოადგენს $\overset{*}{f}(x,y)$ ფუნქციის ქვედა საზღვარს $\omega_k^{(n)}$ არეზე.

აღვნიშნოთ A_n'-ით იმ $\omega_k^{(n)}$ არეთა ჯამი, რომელთათვის $m_k^{(n)} > 0$. მაშინ გვექნება

$$\iint_{A_n'} f(x, y) dx\, dy = \iint_{A_n'} \overset{*}{f}(x, y) dx\, dy > \iint_{G_n} |f(x,y)|\, dx dy + n. \quad (23.10)$$

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\iint_{G_n} f(x, y) dx\, dy \geqslant - \iint_{G_n} |f(x, y)|\, dx\, dy. \quad (23{,}11)$$

(23.10) და (23. 11) უტოლობების წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$\iint_{H_n} f(x, y) dx\, dy > n,$$

სადაც

$$H_n = A_n' \cup G_n.$$

თუ H_n ბმული არე არ არის, მაშინ H_n არის ცალკეული ბმული ნაწილები შეგვიძლია ერთმანეთთან შევაერთოთ ვიწრო ჭრილებით, რო-

მელთა ფართობების ჯამი რაგინდ მცირეა. თუ ამ ჭრილებს დავუმატებთ H_n არეს, მივიღებთ რაღაც ბმულ H_n^* არეს, მასთან ეს ჭრილები ისე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\iint\limits_{H_n^*} f(x, y)dx\,dy > n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{H_n^*} f(x, y)dx = +\infty,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, კრებადია ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint\limits_{D} |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

როგორც ვიცით, ამ თეორემის ანალოგიური თეორემა მარტივი ინტეგრალისათვის მართებული არაა.

თეორემა 29. ვთქვათ, შემოუსაზღვრელ D არეზე განსაზღვრულია არაუარყოფითი $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ შემოსაზღვრულ G არეზე, $G\subset D$, თუ

$$I=\sup_{G\subset D}\left\{\iint\limits_{G} f(x, y)dx\,dy\right\}$$

სასრული რიცხვია, მაშინ ნებისმიერ ისეთ შეკრულ წირთა $C_1, C_2,\ldots,C_n,\ldots$ მიმდევრობისათვის, რომელთა მიერ შემოსაზღვრული არეები $G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_n\subset\ldots$ თავის შიგნით შეიცავენ კოორდინატთა O სათავეს და $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(O, C_n)=+\infty$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{G_n} f(x, y)dx\,dy = I. \tag{23.12}$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ამ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი შემოსაზღვრული ფართობადი არე $G^*\subset D$, რომ

$$I\geqslant\iint\limits_{G^*} f(x, y)dx\,dy > I-\varepsilon.$$

შემდეგ, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $G_n \supset G^*$, როდესაც $n > N$. მაგრამ

$$I \geqslant \iint\limits_{G_n} f(x, y)dxdy > I - \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (23.12) ტოლობას. აქედან გამომდინარეობს აგრეთვე $f(x,y)$ ფუნქციის ინტეგრადობა D არეზე და შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy = I.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ პუასონის ინტეგრალი

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნებისმიერი დადებითი t რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^t e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^t e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_0^t e^{-y^2}\,dx.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $t \to +\infty$, მივიღებთ

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

მაშასადამე, არსებობს ორჯერადი ინტეგრალი

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად განვიხილოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$I(r) = \iint\limits_{G} e^{-x^2-y^2}dx\,dy, \tag{23.13}$$

სადაც G წარმოადგენს $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=r^2$ წირებით შემოსაზღვრულ არეს. თუ (23.13) ორჯერად ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას

$$x = \rho\cos\vartheta,\quad y = \rho\sin\vartheta,$$

მივიღებთ

$$I(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho = (1-e^{-r^2})\frac{\pi}{2}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $r \to +\infty$, მივიღებთ $I=\frac{\pi}{4}$. მაშასადამე,

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}.$$

აქედან

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოცემულია ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \tag{23.14}$$

სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \geqslant R^2$ არეს, ხოლო $\alpha>0$. გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებშია კრებადი მოცემული ორჯერადი ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ ჩასმა $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, მაშინ

$$\iint_{D(r)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_R^r \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}}=2\pi\int_R^r \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \tag{23.15}$$

სადაც $D(r)$ არის $x^2+y^2=R^2$ და $x^2+y^2=r^2 (r>R)$ წრეწირებით შემოსაზღვრული არე (წრიული რგოლი). თუ (23.15) ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $r \to +\infty$, მივიღებთ

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=2\pi\int_R^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

მაგრამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი არსებობს, როდესაც $\alpha>1$, ხოლო იგი არ არსებობს, როდესაც $\alpha\leqslant 1$. ამრიგად, ორჯერადი ინტეგრალი (23.14) კრებადია, როდესაც $\alpha>1$ და განშლადია, როდესაც $\alpha\leqslant 1$.

2°. შემოუსაზღვრელი ფუნქციის არასაკუთრივი ორჯერადი ინტეგრალი. ეთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემოსაზღვრულ

ფართობად D არეზე და ვთქვათ, რომ D არის რაიმე M წერტილის მიდამოში იგი შემოსაზღვრული არაა. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ ფართობად $G \subset D$ არეზე, რომელიც არ შეიცავს M წერტილს. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D - G = H.$$

თუ არსებობს

$$\lim_{d(H)\to 0} \iint_G f(x, y)dxdy,$$

სადაც $d(H)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია H სიმრავლის დიამეტრი, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება D არეზე გავრცელებული $f(x,y)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ორჯერადი ინტეგრალი.

შეიძლება $f(x,y)$ ფუნქცია არ იყოს შემოსაზღვრული D არის რამდენიმე წერტილზე ან მთელ წირზე. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წირის ფართობი იყოს ნულის ტოლი. ეს შემთხვევა მოითხოვს კიდევ დამატებით მსჯელობას, რასაც აქ არ მოვიყვანთ.

წინა პუნქტის ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 30. *თუ შემოსაზღვრულ ფართობად D არეზე გავრცელებული არასაკუთრივი ინტეგრალი*

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy$$

კრებადია, მაშინ ეს ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

სავარჯიშო

1. შეცვალეთ ინტეგრების რიგი შემდეგ ინტეგრალებში:

ა) $\int_0^1 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$; ბ) $\int_0^1 dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$;

გ) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

2. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_{\omega} xy^2dxdy$, თუ ω შემოსაზღვრულია $y^2=2px$ პარაბოლითა და $x=\frac{p}{2}$ წრფით $(p>0)$.

პასუხი: $\frac{p^5}{21}$.

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_{\omega} y^2dxdy$, თუ ω შემოსაზღვრულია Ox ღერძით და

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

ციკლოიდის პირველი თაღით.

პასუხი: $\frac{35\pi a^2}{12}$.

4. შეცვალეთ ინტეგრების რიგი შემდეგ ინტეგრალებში:

ა) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int\limits_{0}^{a\cos\vartheta} f(\vartheta,\rho)d\rho\ (a>0)$; ბ) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int\limits_{0}^{a\sqrt{\sin 2\vartheta}} f(\vartheta,\rho)d\rho\ (a>0)$,

სადაც ρ და ϑ პოლარული კოორდინატებია.

5. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_{\omega}(x+y)dx\,dy$, სადაც ω არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=x+y$ წირით.

პასუხი: $\frac{\pi}{2}$.

6. გამოთვალეთ $\iint\limits_{\omega}(x+y)dxdy$, სადაც ω არე შემოსაზღვრულია წირებით: $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

პასუხი: $543\ \frac{11}{15}$.

7. იპოვეთ

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2<r^2} f(x,y)dxdy,$$

სადაც $f(x,y)$ არის უწყვეტი ფუნქცია.

პასუხი: $f(0,0)$.

8. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x,y)$ უწყვეტია, მაშინ ფუნქცია

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^x dt \int_{t-x+y}^{x+y-t} f(t, \tau)d\tau$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

9. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_{\omega} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, სადაც ω წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით (0; 0), (2; 0) (1; $\sqrt{3}$).

10. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობები, რომელიც შემოსაზღვრულია წირით

$$(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2 \quad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0).$$

პასუხი: $\frac{\pi a^2}{4}$.

11. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \; x=0, \; y=0 \quad (a>0, \quad (b>0)$$

პასუხი: $\frac{ab}{70}$.

12. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{|x|\leqslant n, |y|\leqslant n} \sin(x^2+y^2)dx\,dy = \pi,$$

ხოლო

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)dxdy = 0$$

(n ნატურალური რიცხვია).

13. დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი

$$\iint\limits_{x>1, y>1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

განშლადია, ხოლო განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int_{1}^{+\infty} dx \int_{1}^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \text{ და } \int_{1}^{+\infty} dy \int_{1}^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$

კრებადია.

14. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy.$$

პასუხი: $\frac{\pi}{2}$.

15. გამოთვალეთ $\iint\limits_{\omega} \ln \sin(x-y) dx dy$, სადაც ω არე შემოსაზღვრულია წრფეებით

$$y=0, \quad y=x, \quad x=\pi.$$

პასუხი: $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$.

თ ა ვ ი XIV

სამჯერადი ინტეგრალი

§ 1. მოცულობადი სიმრავლეები

ვთქვათ, სამგანზომილებიან R^3 სივრცეში მოცემულია შემოსაზღვრული E სიმრავლე. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სამგანზომილებიან სეგმენტთა სასრული S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, ვგულისხმობთ, რომ S სისტემის ყოველი სეგმენტი შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს. აღვნიშნოთ $\sigma^*(S)$ სიმბოლოთი S სისტემაში შემავალი სეგმენტების მოცულობათა ჯამი, $\sigma_*(S)$ სიმბოლოთი კი S-ში შემავალი იმ სეგმენტების მოცულობათა ჯამი, რომლებიც მთლიანად მოთავსებულია E სიმრავლეში. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sigma^*(S) \geqslant \sigma_*(S) \geqslant 0.$$

ამრიგად, სამგანზომილებიან სეგმენტთა ყოველ S სისტემას, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, შევუსაბამებთ ორ რიცხვს $\sigma^*(S)$ და $\sigma_*(S)$. განვიხილოთ სამგანზომილებიან სეგმენტთა ყოველგვარი S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს. აღვნიშნოთ H^* სიმბოლოთი $\sigma^*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო H_* იყოს $\sigma_*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე. ადვილი შესამჩნევია, რომ H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ ღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშასადამე, H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია.

H^* სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის *გარე ზომა* ჟორდანის აზრით, H_* სიმრავლის ზედა საზღვარს კი E სიმრავლის *შიგა ზომა*.

E სიმრავლის გარე და შიგა ზომა აღვნიშნოთ შესაბამისად m^*E და m_*E სიმბოლოებით. თუ $m^*E=m_*E$, მაშინ E სიმრავლეს ეწოდება *ზომადი ჟორდანის აზრით*.

ჟორდანის აზრით ზომად სიმრავლეს ეწოდება აგრეთვე *მოცულობადი სიმრავლე*.

თუ E ზომადი სიმრავლეა, მაშინ E სიმრავლის გარე ან შიგა ზომას ვუწოდებთ E სიმრავლის ზომას ჟორდანის აზრით ან მოცულობას და მას აღვნიშნავთ $|E|$ სიმბოლოთი.

მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. R^3 სივრცეში აღებული შემოსაზღვრული სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი საზღვრის ზომა იყოს ნულის ტოლი.

თეორემა 2. თუ A და B სიმრავლეები აღებულია R^3 სივრცეში, ამასთან, $A \subset B$, მაშინ

$$m^* A \leqslant m^* B, \quad m_* A \leqslant m_* B.$$

თეორემა 3. თუ R^3 სივრცეში აღებული A და B სიმრავლეები შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$m^*(A \cup B) \leqslant m^* A + m^* B.$$

თეორემა 4. თუ A და B ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ მათი თანაკვეთაც ზომადია.

თეორემა 5. თუ A და B ზომადი სიმრავლეებია, ამასთან, $B \subset A$, მაშინ $A - B$ სიმრავლეც ზომადია.

თეორემა 6. თუ R^3 სივრცეში აღებული E სიმრავლე დაყოფილია ზომად $E_1, E_2, \ldots, E_n$ სიმრავლეებად, რომლებსაც წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო წერტილები ანდა საერთო წერტილებად აქვთ მხოლოდ საზღვრის წერტილები, მაშინ E ზომადი სიმრავლეა და

$$\sum_{k=1}^{n} |E_k| = |E|.$$

ეს თეორემები მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ორგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში.

თეორემა 7. *თუ R^3 სივრცეში აღებულ S ზედაპირის განტოლებას აქვს სახე $z=f(x, y)$, სადაც $f(x, y)$ უწყვეტია შემოსაზღვრულ S_{xy} არეზე*[1], *მაშინ S ზედაპირის მოცულობა ნულის ტოლია.*

დამტკიცება. S_{xy} არის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს ისეთი ორგანზომილებიანი სეგმენტი Q_0, რომ $S_{xy} \subset Q_0$. რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია S_{xy} არეზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს (x, y) წერტილისაგან დამოუკიდე-

[1] S_{xy} სიმბოლოთი აღნიშნულია S ზედაპირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე.

ბული ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ S_{xy} არის ყოველი (x', y') და (x'', y'') წერტილე^ისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $|x''-x'|<\eta$, $|y''-y'|<\eta$, მართებულია უტოლობა

$$|f(x'', y'')-f(x', y')|<\frac{\varepsilon}{|Q_0|}.$$

ახლა განვიხილოთ რაიმე W სისტემა წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ორგანზომილებიანი სეგმენტებისა.

$$I_{ik}=[x_{i-1}, x_i; y_{k-1}, y_k] \quad (i=1, 2, \ldots, p; \quad k=1, 2, \ldots, q),$$

რომელიც ფარავს S_{xy} სიმრავლეს, ამასთან,

$$x_i-x_{i-1}<\eta; \quad y_k-y_{k-1}<\eta \quad (i=1, 2, \ldots, p; k=1, 2, \ldots, q),$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $I_{ik}\subset Q_0$. აღვნიშნოთ m_{ik} და M_{ik} სიმბოლოებით $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $S_{xy}\cap I_{ik}$ სიმრავლეზე. ცხადია, რომ

$$M_{ik}-m_{ik}<\frac{\varepsilon}{|Q_0|}, \tag{1.1}$$

განვიხილოთ სამგანზომილებიან სეგმენტთა სისტემა

$$W^*=\{I^*_{ik}\} (i=1,2, \ldots, p; k=1, 2,\ldots, q),$$

სადაც

$$I^*_{ik}=[x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i; \quad y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k; \quad m_{ik}\leqslant z\leqslant M_{ik}].$$

ცხადია, რომ W^* სისტემა ფარავს S სიმრავლეს და ამიტომ

$$m^*S<\sigma^*(W^*)\leqslant|Q_0|. \tag{1.2}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (1.1) უტოლობას, გვექნება

$$\sigma^*(W^*)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})(M_{ik}-m_{ik})<\frac{\varepsilon}{|Q_0|}\sigma^*(W).$$

მაშასადამე, (1.2) უტოლობის ძალით,

$$m^*S<\frac{\varepsilon}{|Q_0|}\sigma^*(W)\leqslant\varepsilon.$$

ვინაიდან ε რიცხვი ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ

$$m^*S=0:$$

თეორემა დამტკიცებულია.

სრულიად ამგვარადვე მტკიცდება, რომ თუ S ზედაპირის განტოლებას აქვს სახე $x=\varphi(y, z)$ [ან $y=\psi(x, z)$], სადაც $\varphi(y, z)$ ფუნქცია [ან $\psi(x,z)$] უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ ფართობად S_{yz} (ან S_{xz}) არეზე. მაშინ S ზედაპირის მოცულობა ნულის ტოლია.

თეორემა 8. ყოველი დახურული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია უბან-უბან ცალსახა ზედაპირით[1], მოცულობადია.

დამტკიცება. მოცემული არის საზღვარი S-ით აღვნიშნოთ. რადგანაც S უბან-უბან ცალსახა ზედაპირია, ამიტომ იგი შეგვიძლია გავყოთ სასრულ რიცხვ ზედაპირებად $S_1, S_2, \ldots, S_m$, რომელთა განტოლებებს აქვთ სახე:

$$z=f(x, y), \quad (x, y) \in S_{xy},$$

ან

$$x=\varphi(y,z), \quad (y, z) \in S_{xz},$$

ან

$$y=\psi(y, z), \quad (y, z) \in S_{yz}.$$

სადაც S_{xy}, S_{xz} და S_{yz} შემოსაზღვრული დახურული ფართობადი არეებია. მე-7 თეორემის ძალით,

$$|S_k|=0, \quad (k=1,2, \ldots, m).$$

შემდეგ, მე-6 თეორემის თანახმად,

$$|S|=\sum_{k=1}^{m} |S_k|.$$

და, მაშასადამე,

$$|S| = 0.$$

ამრიგად, აღებული არის საზღვრის მოცულობა ნულის ტოლია და ამიტომ 1-ლი თეორემის ძალით, მოცემული არე მოცულობადია.

კერძოდ, ყოველი მრავალწახნაგოვანი არე მოცულობადია.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

[1] რაიმე S ზედაპირს ვეწოდებთ უბან-უბან ცალსახას, თუ იგი შეგვიძლია დავყოთ სასრულ რიცხვ ზედაპირებად $S_1, S_2, \ldots, S_m$, რომელთა განტოლებებს აქვს სახე $z=f(x, y)$ ან $y=\varphi(x, z)$ ან $x=\psi(y, z)$, სადაც $f(x, y)$, $\varphi(x, z)$ და $\psi(y, z)$ უწყვეტი ფუნქციებია შემოსაზღვრულ დახურულ ფართობად S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} არეებზე შესაბამისად.

განსაზღვრა. ვთქვათ, მოცემულია ზომადი E სიმრავლე და რაიმე დადებითი λ რიცხვი. ზომად სიმრავლეთა სისტემას $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ ვუწოდოთ E სიმრავლის წესიერ λ-დანაწილებას, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m = E$;

2) $E_i \cap E_k = C_i \cap C_k$, სადაც C_j წარმოადგენს E_j სიმრავლის საზღვარს, ხოლო

$$\lambda = \max\{d(E_1), d(E_2), \ldots, d(E_m)\}.$$

§ 2. სამჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე მოცულობად A სიმრავლეზე. განვიხილოთ ამ სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. ყოველ v_k სიმრავლეში ავიღოთ ნებისმიერი (ξ_k, η_k, ζ_k) წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,|v_k|.$$

ცხადია, ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც (ξ_k, η_k, ζ_k) წერტილებზე, ისე λ-დანაწილებაზე.

თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ A სიმრავლის ყოველი წესიერი λ დანაწილებისათვის, $\lambda < \lambda_0$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

(ξ_k, η_k, ζ_k) წერტილებისაგან დამოუკიდებლად, სადაც I მუდმივი სიდიდეა, მაშინ ვიტყვით, რომ σ ჯამი მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ, როცა $\lambda \to 0$, და დავწერთ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

ამ შემთხვევაში I რიცხვს ეწოდება **რიმანის სამჯერადი ინტეგრალი** ან, მოკლედ, სამჯერადი ინტეგრალი $f(x, y, z)$ ფუნქციისა, გავრცელებული A სიმრავლეზე, და აღინიშნება

$$\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{ან} \quad \iiint_A f(p)\,dv,$$

ხოლო თვით $f(x, y, z)$ ფუნქციას ეწოდება **ინტეგრებადი** A-ზე. ამრიგად,

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)|v_k|.$$

§ 3. ზედა და ქვედა ინტეგრალები

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზომად E. სიმრავლეზე. დავყოთ E სიმრავლე ზომად $v_1, v_2, \ldots, v_m$ სიმრავლეებად ჯამებს

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{m} M_k|v_k|, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{m} m_k\,|v_k|,$$

სადაც M_k და m_k არის $f(x, y, z)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები v_k სიმრავლეზე, ვუწოდოთ შესაბამისად ზედა და ქვედა ჯამები.

აღვნიშნოთ $\overline{H}$-ით $f(x, y, z)$ ფუნქციის ყველა ზედა ჯამის სიმრავლე, $\underline{H}$-ით კი — ყველა ქვედა ჯამის სიმრავლე. ისე, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\underline{H}$-ის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება $\overline{H}$-ის ნებისმიერ ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{H}$ სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, $\underline{H}$ კი ზემოდან მაშასადამე, $\inf \overline{H}$ და $\sup \underline{H}$ სასრული სიდიდეებია. ამ რიცხვებს უწოდებენ შესაბამისად $f(x, y, z)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა სამჯერად ინტეგრალებს, გავრცელებულთ E სიმრავლეზე და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად სიმბოლოებით:

$$\overline{\iiint\limits_E} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{და} \quad \underline{\iiint\limits_E} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

§ 4. ინტეგრებადობის სხვადასხვა ნიშანი

თეორემა 9 (რიმანი). ზომად E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x, y, z)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის E-ზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

ეს თეორემა ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: ზომად E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x, y, z)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის E-ზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\underline{\iiint_E} f(x, y, z)dxdydz = \overline{\iiint_E} f(x, y, z)\,dxdydz.$$

თეორემა 10. თუ ზომად E სიმრავლეზე შემოსაზღვრული $f(x, y, z)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია, მაშინ აღებული ფუნქცია ინტეგრებადია E-ზე.

ეს თეორემები მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში.

§ 5. სამჯერადი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

ქვემოთ ჩამოყალიბებული თეორემებიც სრულიად იმგვარადვე მტკიცდება, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში.

თეორემა 11. თუ R^3 სივრცეში აღებული E სიმრავლე ზომადია, მაშინ

$$\iiint_E dx\,dy\,dz = |E|.$$

თეორემა 12. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ზომად E სიმრავლეზე, მაშინ $af(x, y, z)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია E-ზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iiint_E af(x, y, z)dx\,dy\,dz = a\iiint_E f(x, y, z)dx\,dy\,dz.$$

თეორემა 13. თუ $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_m(x, y, z)$ ფუნქციები ინტეგრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ მათი წრფივი კომბინაციაც $a_1f_1+a_2f_2+\dots+a_mf_m$ ინტეგრებადია E-ზე და მართებულია ტოლობა.

$$\iiint_E \left[\sum_{k=1}^{m} a_kf_k(x, y, z)\right] dx\,dy\,dz = \sum_{k=1}^{m} a_k \iiint_E f_k(x,y,z)dxdydz.$$

თეორემა 14. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ზომად E სიმრავლეზე და E სიმრავლე დაყოფილია სას-

რულ რიცხვ ზომად სიმრავლეებად $E_1, E_2, \dots, E_m$, რომ-ლებსაც წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო შიგა წერტილები, მაშინ

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{k=1}^{m} \iiint_{E_k} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

თეორემა 15. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია E-ზე და $f(x, y, z) \geqslant 0$ გარდა, შესაძლებელია, ნულზომიან სიმრავლეზე, მაშინ

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \geqslant 0.$$

თეორემა 16. თუ $f(x, y, z)$ და $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციები ინტეგრებადია E-ზე, მაშინ მათი ნამრავლიც $f(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)$ ინტეგრებადია E-ზე.

თეორემა 17. თუ $f(x, y, z)$ და $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციები ინტეგრებადია E სიმრავლეზე და $\varphi(x, y, z)$ ნიშანს ინარჩუნებს E-ზე, მაშინ

$$\iiint_E f(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mu \iiint_E \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{5.1}$$

სადაც μ არის $f(x, y, z)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს შორის მოთავსებული რაიმე რიცხვი.

შედეგი. ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ B არეში. თუ $\varphi(x, y, z)$ ინტეგრებადია და ნიშანს არ იცვლის B-ზე, მაშინ B-ში არსებობს ისეთი (ξ, η, ζ) წერტილი, რომ მართებულია ტოლობა

$$\iiint_B f(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\xi, \eta, \zeta) \iiint_B \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{5.2}$$

კერძოდ, თუ $\varphi(x, y, z) = 1$, მაშინ (5.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\xi, \eta, \zeta)\, |B|. \tag{5.3}$$

(5.1), (5.2) და (5.3) ფორმულებს ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები სამჯერადი ინტეგრალებისათვის.

§ 6 სამგანზომილებიან სეგმენტზე გავრცელებული სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

ლემა 1. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია სამგანზომილებიან სეგმენტზე $R_0=[a_1 \leqslant x \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2;\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3]$ და $R_0=R_1 \cup R_2$, სადაც $R_1=[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ a_3, c]$, $R_2=[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ c, b_3]$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\overline{\int_{a_3}^{b_3}} dz \overline{\iint_r} f(x, y, z)dxdy = \overline{\int_{a_3}^{c}} dz \overline{\iint_r} f(x, y, z)\, dxdy + \overline{\int_{c}^{b_3}} dz \overline{\iint_r} f(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{6.1}$$

$$\underline{\int_{a_3}^{b_3}} dz \underline{\iint_r} f(x, y, z)dxdy = \underline{\int_{a_3}^{c}} dz \underline{\iint_r} f(x, y, z)\, dxdy + \underline{\int_{c}^{b_3}} dz \underline{\iint_r} f(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{6.2}$$

სადაც $r=[a_1, b_1;\ a_2, b_2]$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\overline{\varphi}(z) = \overline{\iint_r} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

რადგან $f(x, y, z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია R_0-ზე, ამიტომ $\overline{\varphi}(z)$-იც შემოსაზღვრულია $[a_3, b_3]$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, გვექნება

$$\overline{\int_{a_3}^{b_3}} \overline{\varphi}(z)dz = \overline{\int_{a_3}^{c}} \overline{\varphi}(z)dz + \overline{\int_{c}^{b_3}} \overline{\varphi}(z)dz.$$

მიღებული ტოლობა ტოლფასია (6.1) ტოლობისა. ანალოგიურად მტკიცდება (6.2) ტოლობის მართებულობა.

ლემა 2. თუ m და M არის $f(x, y, z)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრები სამგანზომილებიან სეგმენტზე $R_0=[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ a_3, b_3]$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$m|R_0| \leqslant \int\limits_{a_3}^{b_3} dz \underline{\iint_r} f(x, y, z)dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{a_3}^{\overline{b_3}} dz \overline{\iint_r} f(x, y, z)\,dxdy \leqslant M\,|\,R_0\,|, \tag{6.3}$$

სადაც $r=[a_1, b_1;\ a_2,\ b_2]$.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$m|r| \leqslant \underline{\iint_r} f(x, y, z)\,dxdy \leqslant \overline{\iint_r} f(x, y, z)dxdy \leqslant M|r|.$$

დავყოთ $[a_3, b_3]$ სეგმენტი ნაწილებად შემდეგი წერტილებით:

$$a_3=z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b_3.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(z)= \underline{\iint_r} f(x, y, z)\,dxdy, \quad \Phi(z) = \overline{\iint_r} f(x, y, z)dxdy^{*}.$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} m\,|r\,|(z_k-z_{k-1}) \leqslant \underline{\sigma}_\varphi \leqslant \overline{\sigma}_\Phi \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\,|\,r\,|\,(z_k-z_{k-1}),$$

სადაც $\underline{\sigma}_\varphi$ და $\overline{\sigma}_\Phi$ სიმბოლოებით აღნიშნულია შესაბამისად $\varphi(z)$ და $\Phi(z)$ ფუნქციების ქვედა და ზედა ჯამები $[a_3, b_3]$ სეგმენტისათვის. მიღებული უტოლობიდან გვაქვს

$$m|R_0| \leqslant \underline{\sigma}_\varphi \leqslant \overline{\sigma}_\Phi \leqslant M|R_0|.$$

აქედან გამომდინარეობს (6.3) უტოლობები.

თეორემა 18. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით სამგანზომილებიან სეგმენტზე $R_0= =[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ a_3, b_3]$, მაშინ არსებობს ინტეგრალები

$$\iint_{Q_0} dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz \text{ და } \int\limits_{a_3}^{b_3} dz \iint_{Q_0} f(x, y, z)dxdy$$

---

* ხაზები ინტეგრალებს ზემოთ და ქვემოთ აღნიშნავს ზედა და ქვედა ინტეგრალებს.

და მართებულია ტოლობა

$$\iiint_{R_0} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{Q_0} dxdy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_{Q_0} f(x, y, z)dx\, dy, \qquad (6,4)$$

სადაც $Q_0=[a_1, b_1; a_2, b_2]$.

დამტკიცება. დავყოთ $[a_1, b_1]$; $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ სეგმენტები შესაბამისად შემდეგი წერტილებით:

$$a_1=x_0<x_1<\dots<x_m=b_1,$$

$$a_2=y_0<y_1<\dots<y_n=b_2,$$

$$a_3=z_0<z_1<\dots<z_p=b_3.$$

თუ ამ წერტილებზე გავავლებთ შესაბამისად yOz, zOx, და xOy სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებს, მაშინ R_0 დაიყოფა სამგანზომილებიან სეგმენტებად, რომელთა რიცხვი იქნება mnp. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$R_{ikj}=[x_{i-1}, x_i;\ y_{k-1}, y_k;\ z_{j-1}, z_j].$$

პირველი ლემის თანახმად

$$\int_{a_3}^{b_3} dz \overline{\iint_{Q_0}} f(x, y, z)dxdy = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{j-1}}^{z_j} dz \overline{\iint_{r_{ik}}} f(x, y, z)dxdy, \quad (6.5)$$

სადაც $r_{ik}=[x_{i-1}, x_i;\ y_{k-1}, y_k]$. მაგრამ, მე-2 ლემის ძალით,

$$m_{ikj}|R_{ikj}| \leqslant \overline{\int_{z_{j-1}}^{z_j}} dz \overline{\iint_{r_{ik}}} f(x, y, z)dxdy \leqslant M_{ikj}|R_{ikj}|, \qquad (6.6)$$

სადაც m_{ikj} და M_{ikj} სიმბოლოებით აღნიშნულია $f(x, y, z)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრები R_{ikj} სეგმენტზე.

თუ (6.6) უტოლობებს შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (6.5) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ikj}R_{ikj} \leqslant \overline{\int_{a_3}^{b_3}} dz \overline{\iint_{Q_0}} f(x, y, z)dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} M_{ikj}\,|R_{ikj}|. \tag{6.7}$$

რადგანაც $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია R_0-ზე, ამიტომ თუ (6.7) თანაფარდობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ ტოლობას:

$$\iiint\limits_{R_0} f(x, y, z)\,dxdydz = \overline{\int_{a_3}^{b_3}} dz\ \overline{\iint\limits_{Q_0}} f(x, y, z)\,dxdy. \tag{6.8}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$\iiint\limits_{R_0} f(x, y, z)\,dxdydz = \underline{\int_{a_3}^{b_3}} dz\ \iint\limits_{Q_0} f(x, y, z)\,dxdy\,. \tag{6.9}$$

(6.8) და (6.9) ტოლობათა ძალით, გვაქვს

$$\underline{\int_{a_3}^{b_3}} dz\ \underline{\iint\limits_{Q_0}} f(x, y, z)\,dxdy = \underline{\int_{a_3}^{b_3}} dz\ \overline{\iint\limits_{Q_0}} f(x, y, z)\,dxdy. \tag{6.10}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\left.\begin{aligned} \varphi_*(z) &= \underline{\iint\limits_{Q_0}} f(x, y, z)\,dxdy, \\ \varphi^*(z) &= \overline{\iint\limits_{Q_0}} f(x, y, z)\,dxdy, \\ \varphi(z) &= \iint\limits_{Q_0} f(x, y, z)\,dxdy. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

$\varphi_*(z)$ და $\varphi^*(z)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[a_3, b_3]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში, ხოლო $\varphi(z)$ შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს $[a_3, b_3]$ სეგმენტის წერტილთა გარკვეულ სიმრავლეზე. ასეთ წერტილებზე $\varphi(z)$-ის მნიშვნელობად მივიჩნიოთ ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია $\varphi_*(z)$ და $\varphi^*(z)$-ს შორის. მაშინ $[a_3, b_3]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში გვექნება

$$\varphi_*(z) \leqslant \varphi(z) \leqslant \varphi^*(z).$$

აქედან, ცხადია, რომ

$$\int_{a_3}^{b_3} \varphi_*(z)\,dz \leqslant \underline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi(z)\,dz \leqslant \overline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi(z)\,dz \leqslant \overline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi^*(z)\,dz. \tag{6.12}$$

მაგრამ (6.10) და (6.11) ტოლობათა ძალით

$$\underline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi_*(z)dz = \overline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi^*(z)dz$$

და, მაშასადამე,

$$\underline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi(z)dz = \overline{\int_{a_3}^{b_3}} \varphi(z)dz.$$

ამრიგად, $\varphi(z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a_3,b_3]$ სეგმენტზე და (6·12) თანაფარდობათა ძალით, (6.8) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\iiint_{R_0} f(x, y, z)dxdydz = \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_{Q_0} f(x,y, z)dxdy. \tag{6.13}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$\iiint_{R_0} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{Q_0} dxdy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz. \tag{6.14}$$

წინა თავის ერთ-ერთი თეორემის ძალით

$$\int_{a_3}^{b_3} dz \iint_{Q_0} f(x, y, z)dxdy = \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y, z)dx. \tag{6.15}$$

ანალოგიურად

$$\iint_{Q_0} dxdy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz. \tag{6.16}$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (6.13) და (6.14) ტოლობებს. გვექნება

$$\iiint_{R_0} f(x, y, z)dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)dx. \tag{6.17}$$

ეს ფორმულა მართებულია x, y, z ცვლადების სხვაგვარად დალაგების შემთხვევაშიც.

§ 7. სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა ნებისმიერი არის შემთხვევაში

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია მარტივი წირით შემოსაზღვრული ω არე და ვიგულისხმოთ, რომ $z=\varphi_1(x, y)$ და $z=\varphi_2(x, y)$ ფუნქციები უწყვეტია ამ არეში. ამის გარდა, დავუშვათ, რომ $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$. ახლა განვიხილოთ რაიმე T არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $z=\varphi_1(x, y)$, $z=\varphi_2(x,y)$ და ცილინდრული ზედაპირით Oz ღერძის პარალელური მსახველებით, რომლის მიმმართველი ω არის კონტურია. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია T არეში, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_\omega dxdy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)dz, \qquad (7.1)$$

მართლაც, ვინაიდან T არე შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს T არის შემცველი სამგანზომილებიანი სეგმენტი $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$; განვიხილოთ დამხმარე $F(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირად არის განსაზღვრული:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{როცა } (x, y, z) \in T, \\ 0, & \text{როცა } (x, y, z) \in R_0-T. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $F(x, y, z)$ ინტეგრებადია R_0-ზე. ამიტომ, ზემოდამტკიცებული თეორემის ძალით,

$$\iiint\limits_{R_0} F(x, y, z)dxdydz= \iint\limits_r dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} F(x, y, z)dz,$$

სადაც

$$r=[a_1, b_1; a_2, b_2]\supset\omega.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int\limits_{a_3}^{b_3} F(x, y, z)dz = \int\limits_{a_3}^{\varphi_1(x, y)} F(x, y, z)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} F(x, y, z)dz+ \int\limits_{\varphi_2(x, y)}^{b_3} F(x, y, z)dz.$$

მაგრამ

$$\int_{a_3}^{\varphi_1(x,y)} F(x, y, z)dz=0, \quad \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} F(x, y, z)dz = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

$$\int_{\varphi_2(x,y)}^{b_3} F(x, y, z)dz=0, \quad \iint_{r} dxdy \int_{a_3}^{b_3} F(x, y, z)dz =$$

$$= \iint_{\omega} dxdy \int_{a_3}^{b_3} F(x, y, z)\, dz.$$

მაშასადამე,

$$\iiint_{R_0} F(x, y, z)dxdydz = \iint_{\omega} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{7.2}$$

აგრეთვე ცხადია, რომ

$$\iiint_{R_0} F(x, y, z)dxdydz= \iiint_{T} F(x, y, z)\, dxdydz \; +$$

$$+ \iiint_{R_0-T} F(x, y, z)dxdydz$$

ამასთან

$$\iiint_{T} F(x, y, z)dxdydz= \iiint_{T} f(x, y, z)dxdydz,$$

$$\iiint_{R_0-T} F(x, y, z)dxdydz=0.$$

ამიტომ

$$\iiint_{R_0} F(x, y, z)dxdydz= \iiint_{T} f(x, y, z)dxdydz. \tag{7.3}$$

(7.2) და (7.3) ტოლობების ძალით მივიღებთ (7.1) ტოლობას.
თუ ω არე შემოსაზღვრულია უწყვეტი წირებით

$$y=\psi_1(x) \text{ და } y=\psi_2(x) \quad (\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x))$$

და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით, მაშინ

$$\iint_{\omega} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

და, მაშასადამე,

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

ამ ფორმულაში ინტეგრების პირველი ზღვრები φ_1 და φ_2 დამოკიდებულია x და y ცვლადებზე, ψ_1 და ψ_2 ზღვრები კი მხოლოდ x-ზე. რაც შეეხება ინტეგრების a და b ზღვრებს, ისინი მუდმივებია.

თუ ინტეგრების T არე შემოსაზღვრულია შეკრული S ზედაპირით, რომელსაც კვეთს კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები არა უმეტეს ორი წერტილისა (როგორიცაა, მაგალითად, ელიფსოიდი ან საზოგადოდ ამოზნექილი ზედაპირი), მაშინ ინტეგრება შეგვიძლია მოვახდინოთ ნებისმიერი რიგით, მხოლოდ ინტეგრების ზღვრები იქნება საზოგადოდ სხვადასხვა, იმისდა მიხედვით, თუ რა რიგით ვახდენთ ინტეგრებას.

§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა სამჯერად ინტეგრალში

როგორც ვიცით, თუ დახურულ მოცულობად G არეში მოცემულია შემოსაზღვრული უწყვეტი $f(x, y, z)$ ფუნქცია, მაშინ არსებობს სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dxdydz.$$

ამ ინტეგრალის ჩვეულებრივი გზით გამოთვლა ხშირად გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ აღნიშნული ინტეგრალის გამოთვლისათვის სასარგებლოა მივმართოთ სხვა გზას. ვთქვათ,

$$x=\varphi(u, v, w), \quad y=\psi(u, v, w), \quad z=\chi(u, v, w), \tag{8.1}$$

სადაც $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$, $\chi(u, v, w)$ ფუნქციებს აქვს პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები რაიმე G' არეში. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ (8.1) ფორმულები გვაძლევს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას G და G' არეების წერტილთა შორის. მაშინ მართებულია შემდეგი

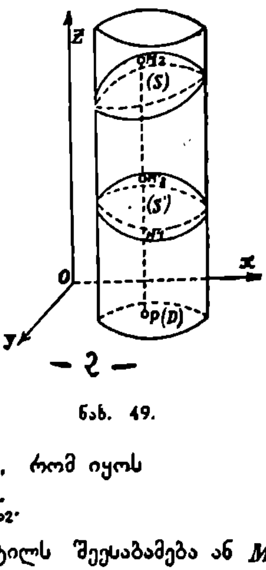
თეორემა 10. თუ G' არის ყოველ წერტილში (8.1) სისტემის I იაკობიანი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ

$$\iiint_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{G'} f(\varphi, \psi, \chi)\, |I|\, dudvdw. \tag{8.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ამ ფორმულის მართებულობა დავამტკიცოთ ჯერ კერძო შემთხვევებისათვის. ვთქვათ,

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\chi(\xi,\eta,\zeta). \tag{8.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $M(x, y, z)$ და $M'(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილები განხილულია მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის მიმართ. ამის გარდა, დავუშვათ, რომ Oz ღერძის პარალელური ყოველი წრფე კვეთს G არის შემომსაზღვრელ S ზედაპირს არა უმეტეს ორი წერტილისა. (8.3) ფორმულის ძალით S ზედაპირს შეესაბამება G' არის შემომსაზღვრელი S' ზედაპირი. S და S' ზედაპირების გარშემო შემოვხაზოთ ცილინდრი, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია (ნახ. 49). ამ ცილინდრისა და xOy სიბრტყის გადაკვეთა მოგვცემს რომელიღაც C წირს. ამ წირის მიერ შემოსაზღვრული D არის ყოველი P წერტილი წარმოადგენს S ზედაპირის რომელიღაც ორი M_1 და M_2 წერტილის გეგმილს, z_1 და z_2 აპლიკატებით. ასევე, P წარმოადგენს S' ზედაპირის რაიმე ორი M_1' და M_2' წერტილის გეგმილს, ζ_1 და ζ_2 აპლიკატებით. ცხადია, რომ აღნიშვნები იმგვარად შეგვიძლია შემოვიღოთ, რომ იყოს



ნახ. 49.

$$z_1 < z_2 \quad \text{და} \quad \zeta_1 < \zeta_2.$$

(8. 3) ფორმულის თანახმად, M_1 წერტილს შეესაბამება ან M_1' წერტილი, ან M_2' წერტილი. თუ $\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}>0$, მაშინ, z იზრდება ζ-თან ერთად. ამ შემთხვევაში M_1 წერტილს შეესაბამება M_1' წერტილი, ხოლო M_2 წერტილის შესაბამისი წერტილი იქნება M_2' წერტილი. თუკი $\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}<0$, მაშინ z კლებულობს, როცა ζ იზრდება და, მაშასადამე, M_1 წერტილს შეესაბამება M_2' წერტილი, M_2 წერტილს კი M_1' წერტილი. პირველ შემთხვევაში გვაქვს

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f[\xi,\eta,\chi(\xi,\eta,\zeta)]\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\zeta.$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში გვექნება

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz = -\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f[\xi, \eta, \chi(\xi, \eta, \zeta)] \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}d\zeta.$$

ცხადია, ორივე შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f[\xi, \eta, \chi(\xi, \eta, \zeta)] \left|\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right| d\zeta. \tag{8.4}$$

თუ (8.4) ტოლობის ორივე ნაწილიდან ავიღებთ ω არეზე გავრცელებულ ორჯერად ინტეგრალს, მივიღებთ

$$\iint_{\omega} dxdy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz = \iint_{\omega} d\zeta d\eta \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f[\xi, \eta, \chi(\xi, \eta, \zeta)] \left|\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right| d\zeta,$$

ანუ

$$\iiint_{G} f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{G'} f[\xi, \eta, \chi(\xi, \eta, \zeta)] \left|\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right| d\xi d\eta d\zeta.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (8.3) სისტემისათვის

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}.$$

მაშასადამე, (8.3) სახის გარდაქმნისათვის მართებულია (8.2) ფორმულა.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია გარდაქმნა

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \xi. \tag{8.5}$$

დავუშვათ, რომ ეს ფორმულები ამყარებენ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას G და G' არეებს შორის. აქაც ვიგულისხმოთ, რომ $M(x,y,z)$ და $M'(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილები განხილულია მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის მიმართ. ვთქვათ, A და A' წარმოადგენს შესაბამისად კვეთებს, რომლებიც მიიღება xOy სიბრტყის პარალელური სიბრტყისა და G და G' არეების გადაკვეთით. ცხადია, A და A'' კვეთების წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ამიტომ, თუ მივიღებთ მხედველობაში (8.5) ტოლობებს და გამოვიყენებთ ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას, მივიღებთ

$$\iint\limits_{A} f(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{A'} f[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta)] \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi d\eta. \quad (8.6)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ (8.5) ფორმულაში იცვლება z_1-დან z_2-მდე, მაშინ ζ იცვლება ζ_1-დან ζ_2-მდე, სადაც $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_2 = z_2$ და, მაშასადამე, (8.6) ტოლობის თანახმად,

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} dz \iint\limits_{A} f(x, y, z) dxdy = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \iint\limits_{A'} f[\varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\psi(\xi, \eta, \zeta), \zeta] \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi d\eta,$$

ანუ

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{G'} f[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta), \zeta] \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi d\eta d\zeta.$$

მაგრამ (8.5) სისტემისათვის

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \zeta)}.$$

ამრიგად, (8.2) ფორმულა მართებულია ცვლადთა (8.5) სახის გარდაქმნისათვისაც.

დასასრულ განვიხილოთ ზოგადი (8.1) გარდაქმნა. ეს გარდაქმნა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ზემოგანხილული სახის ორივე გარდაქმნის ნამრავლი. მართლაც, ვთქვათ,

$$\xi = u, \quad \eta = v, \quad \zeta = z.$$

მაშინ (8.1) სისტემის უკანასკნელი განტოლება ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\zeta = \chi(\xi, \eta, w).$$

აქედან

$$w = \Omega(\xi, \eta, \zeta).$$

მაშასადამე, (8.1) სისტემა შეგვიძლია შევცვალოთ ექვსი განტოლების შემდეგი სისტემით:

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \zeta. \quad (8.7)$$

$$\xi = u, \quad \eta = v, \quad \xi = \chi(u, v, w). \quad (8.8)$$

სადაც

$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = \varphi[\xi, \eta, \Omega(\xi, \eta, \zeta)], \quad \psi_1(\xi, \eta, \zeta) = \psi[\xi, \eta, \Omega(\xi, \eta, \zeta)].$$

(8.1) გარდაქმნა წარმოადგენს (8.7) და (8.8) გარდაქმნათა ნამრავლს ე. ი. (8 7) გარდაქმნის საშუალებით G არე შეგვიძლია გადავსახოთ, რაიმე G'' არეში, ხოლო (8.8) გარდაქმნა გადასახავს G'' არეს G' არეში. (8.7) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\iiint_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{G''} f(\varphi_1 \psi, \zeta) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta. \qquad (8.9)$$

თუ (8.9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას (8.8) ფორმულების მიხედვით, მივიღებთ

$$\iiint_{G''} f(\varphi_1, \psi_1 \ \zeta) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \iiint_{G'} f[\varphi(u, v, w), \ \psi(u, v, w), \ \chi(u, v, w)] \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

მაგრამ

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(u, v, w)} = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}.$$

მაშასადამე, მართებულია (8.2) ტოლობა ზოგად შემთხვევაშიც.

შედეგი. თუ (8.2) ფორმულაში G წარმოადგენს დახურულ არეს და ვიგულისხმებთ $f(x, y, z)=1$, გვექნება

$$V = V' |I'|, \qquad (8.10)$$

სადაც I' არის I იაკობიანის მნიშვნელობა G' არის რაიმე (u', v', w') წერტილში, ხოლო V და V' წარმოადგენს G და G' არეების მოცულობებს.

მართლაც, თუ მივიღებთ მხედველობაში (8.2) ფორმულას, გვექნება

$$V = \iiint_G dxdydz = \iiint_{G'} |I| dudvdw.$$

მაგრამ, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით.

$$\iiint_{G'} |I| dudvdw = |I'| V'.$$

სადაც I' წარმოადგენს I იაკობიანის მნიშვნელობას G' არის რაიმე (u', v', w') წერტილში. მაშასადამე, მართებულია (8.10) ტოლობა.

§ 9. სამჯერად ინტეგრალში დეკარტის კოორდინატებიდან პოლარულ და ცილინდრულ კოორდინატებზე გადასვლა

1°. ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ ფართობად G არეში. აღვნიშნოთ ρ, θ და ϑ-თი G არის $M(x, y, z)$ წერტილის პოლარული კოორდინატები, მაშინ

$$x=\rho \sin\theta \cos\vartheta, \quad y=\rho \sin\theta \sin\vartheta, \quad z=\rho \cos\theta. \tag{9.1}$$

გამოვთვალოთ (9.1) სისტემის I იაკობიანი. გვაქვს

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}=\sin\theta \cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}=\rho \cos\theta \cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta}=-\rho \sin\theta \sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\theta \sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=\rho \cos\theta \sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta}=\rho \sin\theta \cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}=\cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\rho \sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta}=0.$$

მაშასადამე,

$$I=\begin{vmatrix} \sin\theta \cos\vartheta & \rho \cos\theta \cos\vartheta & -\rho \sin\theta \sin\vartheta \\ \sin\theta \sin\vartheta & \rho \cos\theta \sin\vartheta & \rho \sin\theta \cos\vartheta \\ \cos\theta & -\rho \sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტს თუ გამოვთვლით, მივიღებთ

$$I=\rho^2 \sin\theta.$$

მაშასადამე, სამჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას პოლარულ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint\limits_G f(\rho \sin\theta \cos\vartheta, \quad \rho \sin\theta \sin\vartheta, \quad \rho \cos\theta)\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\vartheta.$$

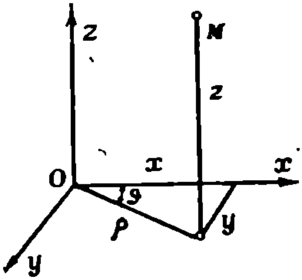
2°. ახლა ავიღოთ G სიმრავლის რაიმე $M(x, y, z)$, წერტილი. ამ წერტილის ცილინდრული კოორდინატები წარმოადგენს შეერთებას xOy სიბრტყეზე პოლარული კოორდინატებისა დეკარტის z კოორდინატთან (ნახ. 50). ფორმულები, რომლებიც აკავშირებენ ცილინდრულ და დეკარტის კოორდინატებს, შემდეგია:

$$x=\rho \cos\vartheta, \quad y=\rho \sin\vartheta, \quad z=z. \tag{9.3}$$

გამოვთვალოთ (9.3) გარდაქმნის I იაკობიანი. გვაქვს

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\rho\sin\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \rho\cos\vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$



ნახ. 50.

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

ამიტომ

$$I = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

მაშასადამე, ცილინდრულ კოორდინატებში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას ექნება სახე

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\vartheta, \quad \rho\sin\vartheta, z)\, \rho d\rho d\vartheta dz \qquad (9.4)$$

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი

$$I = \iiint\limits_T z dxdydz,$$

სადაც T არე შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის ზედა ნახევრით და xOy სიბრტყით.

ამოხსნა. მოცემულ სამჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\vartheta, \quad y = b\rho\sin\theta\sin\vartheta, \quad z = c\rho\cos\theta. \qquad (9.5)$$

გამოვთვლით რა ამ სისტემის იაკობიანს, მივიღებთ

$$I = abc\,\rho^2\sin\theta.$$

თუ მოცემულ ელიფსოიდის განტოლებაში ჩავსვამთ (9.5) გამოსახულებებს, გვექნება

$$\rho^2 = 1.$$

მაშასადამე, ρ იცვლება 0-დან 1-მდე, რაც შეეხება θ კუთხეს, იგი იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, ϑ კი 0-დან 2π-მდე. ამიტომ

$$I=\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\pi} abc^2\rho^3\cos\theta\sin\theta\, d\vartheta=$$

$$=abc^2\int_0^1 \rho^3 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta\int_0^{2\pi} d\vartheta=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x \quad (a>0) \tag{9.6}$$

ზედაპირით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები:

$$x=\rho\sin\theta\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\theta\sin\vartheta,\quad z=\rho\cos\theta. \tag{9.7}$$

9.6) ტოლობაში თუ ჩავსვამთ (9.6) გამოსახულებებს, მივიღებთ

$$\rho^4=a^3\rho\sin\theta\cos\vartheta,$$

ანუ

$$\rho^3=a^3\sin\theta\cos\vartheta.$$

აქედან

$$\rho=a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\vartheta}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (9.6) ზედაპირი სიმეტრიულია როგორც xOy სიბრტყის მიმართ, ისე xOz სიბრტყის მიმართაც. ამის გარდა, (9.6) განტოლებიდან ჩანს, რომ $x\geqslant 0$ და კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ამ ზედაპირის მხები სიბრტყეა yOz. ამიტომ

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

აგრეთვე, ρ იცვლება 0-დან $a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\vartheta}$-მდე ფიქსირებული θ და ϑ-თვის. მაშასადამე, საძიებელი V მოცულობა გამოისახება ტოლობით:

$$V=\int_0^{\pi} d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\vartheta}}\rho^2\sin\theta\, d\rho=\int_0^{\pi} d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}\sin^2\theta\cos\vartheta\, d\vartheta=$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta d\vartheta = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი

$$I = \iiint_T \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz,$$

სადაც T წარმოადგენს $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდით შემოსაზღვრულ არეს.

ამოხსნა. ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (9.5) გარდაქმნით. ამ შემთხვევაში.

$$0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi.$$

ცხადია, რომ

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} abc\,\rho^4 \sin\theta\, d\vartheta =$$

$$= abc \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{4}{5}\pi abc.$$

ამოცანა 4. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz \quad a > 0. \tag{9.8}$$

ზედაპირით.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ ეს ზედაპირი მოთავსებულია იმ ოქტანტებში [1], რომელთათვის: 1) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$; 2) $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, $z\leqslant 0$; 3) $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, $z\geqslant 0$; 4) $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\leqslant 0$.

(9.8) განტოლების სიმეტრიის გამო მოცემული სხეულის იმ ნაწილების მოცულობები, რომლებიც მოთავსებულია აღნიშნულ ოქტანტებში, ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ აღნიშნული სხეულის იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და მიღებული შედეგი 4-ზე გავამრავლოთ. აგრეთ-

[1] საკოორდინატო სიბრტყეებით შექმნილ მერვედებში

ვე შევნიშნოთ, რომ $x=0$, $y=0$ და $z=0$ სიბრტყეები წარმოადგენს (9.8) ზედაპირის მხებ სიბრტყეებს.

შემოვიღოთ ახლა პოლარული კოორდინატები

$$x=\rho\sin\theta\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\theta\sin\vartheta,\quad z=\rho\cos\theta. \tag{9.9}$$

აქ

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

თუ (9.9) გამოსახულებებს (9.8) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\rho^4=a\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\vartheta\sin\vartheta.$$

აქედან ჩანს, რომ ρ იცვლება 0-დან $a\sin^2\theta\cos\theta\cos\vartheta\sin\vartheta$-მდე. მაშასადამე,

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{a\sin^2\theta\cos\theta\cos\vartheta\sin\vartheta}\rho^2\sin\theta\,d\rho=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^3\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta\,d\vartheta.$$

მაგრამ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{1}{40},\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{12}.$$

ამრიგად

$$V=\frac{a^3}{360}.$$

§ 10. ორჯერადი და სამჯერადი ინტეგრალების გამოყენება მექანიკაში

ჯერადი ინტეგრალების საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ სხეულის მასა, სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, ინერციის მომენტები და სხვა.

1°. სხეულის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე T სხეული. განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. დავუშვათ, რომ T სხეულის სიმკვრივე ყოველ $P(x, y, z)$ წერ-

ტილში არის $\mu(x, y, z)$. მაშინ T სხეულის მთელი M მასა გამოისახება ფორმულით

$$M=\iiint_T \mu(x, y, z)dxdydz.$$

რაც შეეხება T სხეულის სიმძიმის ცენტრს, მისი ξ, η, ζ კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\xi=\frac{1}{M}\iiint_T x\mu(x, y, z)\,dxdydz,$$
$$\eta=\frac{1}{M}\iiint_T y\mu(x, y, z)\,dxdydz, \tag{10.1}$$
$$\zeta=\frac{1}{M}\iiint_T z\mu(x, y, z)dxdydz.$$

თუ T ერთგვაროვანი სხეულია, მაშინ $\mu(x, y, z)$ სიმკვრივე მუდმივია და (10.1) ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\xi=\frac{1}{V}\iiint_T xdxdydz, \quad \eta=\frac{1}{V}\iiint_T ydxydz,$$
$$\zeta=\frac{1}{V}\iiint_T zdxdydz,$$

სადაც V არის T სხეულის მოცულობა.

თუ T ბრტყელი სხეულია, რომელიც xOy სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ მისი მასა და სიმძიმის ცენტრის ξ და η კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$M=\iint_T \mu(x, y)dxdy,$$

$$\xi=\frac{1}{M}\iint_T x\mu\,(x, y)\,dxdy, \qquad \eta=\frac{1}{M}\iint_T y\mu(x, y)dxdy.$$

თუ T სხეული ერთგვაროვანია, მაშინ ξ და η-თვის ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\xi=\frac{1}{S}\iint_T xdxdy, \quad \eta=\frac{1}{S}\iint_T ydxdy,$$

სადაც S წარმოადგენს T სხეულის ფართობს.

ამოცანა 5. ვიპოვოთ იმ წრის მასა, რომლის სიმკვრივე ყოველ წერტილში ტოლია ამ წერტილის მანძილისა წრის კონტურამდე.

ამოხსნა. თუ წრის რადიუსს აღვნიშნავთ R-ით და კოორდი-

ნატთა სათავეს წრის ცენტრში ავიღებთ, მაშინ $\mu(x, y)$ სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით.

$$\rho(x, y)=R-\sqrt{x^2+y^2}$$

მაშასადამე, მოცემული K წრის M მასა გამოითვლება ფორმულით

$$M=\iint_K (R-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy.$$

ამ ორჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,$$

მივიღებთ

$$M=\int_0^R\int_0^{2\pi}(R-\rho)\rho d\rho d\vartheta=\frac{1}{3}\pi R^3.$$

ამოცანა 8. ვიპოვოთ პირველ კვადრანტში მოთავსებული იმ ბრტყელი ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის რკალით, $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის რკალით და Oy ღერძით $(a>b)$.

ამოხსნა. მოცემული სხეულის ფართობს თუ აღვნიშნავთ S-ით, გვექნება

$$S=\frac{1}{4}(\pi a^2-\pi ab)=\frac{1}{4}\pi a(a-b).$$

შემდეგ

$$\xi=\frac{1}{S}\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xdy=\frac{1}{S}\,\frac{a-b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi a^3}\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{4a}{3\pi},$$

$$\eta=\frac{1}{S}\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\frac{1}{S}\,\frac{a^2-b^2}{2a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{4(a+b)}{3\pi}.$$

ამრიგად, მოცემული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია

$$\xi=\frac{4a}{3\pi},\qquad \eta=\frac{4(a+b)}{3\pi}.$$

3 **ინერციის მომენტი.** ვთქვათ, მოცემულია რაიმე მყარი სხეულ T. დავყოთ ეს სხეული მცირე ΔT_i ელემენტებად, მასით Δm_i. აღვნიშნოთ ρ_i სიმბოლოთი მანძილი ΔT_i ელემენტის რაიმე წერტილიდან მოცემულ Δ ღერძამდე. $\sum \rho_i^2 \Delta m_i$ ჯამის ზღვარს, როცა ყოველი ΔT_i ელემენტის დიამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება მოცემული სხეულის *ინერციის მომენტი* Δ ღერძის მიმართ; იგი I_Δ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ თუ განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემას და $\mu(x, y, z)$-ით აღვნიშნავთ T სხეულის სიმკვრივეს (x, y, z) წერტილში, მაშინ Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები გამოისახება ფორმულებით:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

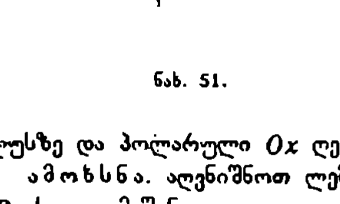
$$I_y = \iiint\limits_T (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

გამოსახულებას

$$I_0 = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

ეწოდება T სხეულის *ინერციის მომენტი* O წერტილის მიმართ; მას უწოდებენ აგრეთვე T სხეულის *ინერციის პოლარულ მომენტს*.



ნახ. 51.

ამოცანა 7. გამოვთვალოთ $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი იმ Oy ღერძის მიმართ, რომელიც ლემნისკატის სიბრტყეში მდებარეობს, გადის O პოლუსზე და პოლარული Ox ღერძის მართობია.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული არე D ასოთი, მაშინ

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x, y)\,dxdy.$$

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული სხეული ერთგვაროვანია, მაშინ $\mu(x,y)$ მუდმივი სიდიდეა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\mu(x, y)=1$. ამიტომ

$$I_y=\iint\limits_D x^2dxdy=4\iint\limits_A x^2dxdy,$$

სადაც A არის ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული D არის მეოთხედი (ნახ. 51). მიღებულ ორჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta.$$

გვექნება

$$I_y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}}\rho^3\cos^2\vartheta\, d\rho=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\cos^2 2\vartheta\, d\vartheta.$$

რადგანაც

$$\cos^2\vartheta=\frac{1+\cos 2\vartheta}{2},\quad \cos^2 2\vartheta=\frac{1+\cos 4\vartheta}{2},$$

$$\cos^2\vartheta\cos 4\vartheta=\frac{\cos 2\vartheta+\cos 6\vartheta}{2},$$

ამიტომ

$$\cos^2\vartheta\cos^2 2\vartheta=\frac{1}{4}(1+\cos 2\vartheta)(1+\cos 4\vartheta)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 2\vartheta+\cos 4\vartheta+\cos 2\vartheta\cos 4\vartheta)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cos 2\vartheta+\frac{1}{4}\cos 4\vartheta+\frac{1}{8}\cos 6\vartheta.$$

მაშასადამე,

$$I_y=a^4\left[\frac{\vartheta}{4}+\frac{3}{16}\sin 2\vartheta+\frac{1}{16}\sin 4\vartheta+\frac{1}{48}\sin 6\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=a^4\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3}{16}-\frac{1}{48}\right)=\frac{a^4}{48}(3\pi+8).$$

ვიპოვოთ ახლა მოცემული ლემნისკატის მიერ შემოსაზღვრული S ფართობი. გვაქვს

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} \rho d\rho = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\vartheta d\vartheta = a^2.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$I_y = \frac{1}{48} Sa^2(3\pi+8).$$

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირით

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad (a<1).$$

2. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ და } (z=h).$$

3. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ და } lx+my+nz=p.$$

4. გამოთვალეთ სამჯერადი ინტეგრალი,

$$\iiint_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz,$$

სადაც G წარმოადგენს $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდით შემოსაზღვრულ არეს.

5. გამოთვალეთ სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint_G (x^2+y^2)dxdydz,$$

სადაც G წარმოადგენს $x^2+y^2=2z$ და $z=2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრულ არეს.

6. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია G არეში და

$$\iiint_\omega f(x, y, z)dxdydz=0.$$

G არის ყოველ ω ქვეარეზე, მაშინ G არის ყოველ (x, y, z) წერტილში $f(x, y, z)=0$.

7. იპოვეთ იმ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

8. იპოვეთ იმ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2 \quad (z \geqslant 0).$$

9. იპოვეთ იმ ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტები კოორდინატთა ღერძების მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

10. იპოვეთ იმ ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$z=x^2+y^2, \quad x+y=\pm 1, \quad x-y=\pm 1, \quad z=0.$$

11. იპოვეთ იმ ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირით

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^5z.$$

12. იპოვეთ ρ_0 სიმკვრივის იმ ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირით

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2).$$

თავი XV

n-ჯერადი ინტეგრალი

§ 1. n-ჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა

სანამ შევუდგებოდეთ n-ჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრას, საჭიროა შემოვიღოთ n-განზომილებიანი სივრცის მოცულობადი სიმრავლის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიან სივრცეში შემოსაზღვრული E სიმრავლე. განვიხილოთ n-განზომილებიან სეგმენტთა სასრული S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ S სისტემის სეგმენტებს წყვილ-წყვილად არა აქვს საერთო შიგა წერტილები. აღვნიშნოთ $\sigma^*(S)$ სიმბოლოთი S სისტემაში შემავალი სეგმენტების მოცულობათა ჯამი. ხოლო $\sigma_*(S)$-ით S-ში შემავალი იმ სეგმენტების მოცულობათა ჯამი, რომლებიც მთლიანად E-ში შედიან. ცხადია,

$$\sigma^*(S)\geqslant\sigma_*(S)\geqslant 0.$$

ამრიგად. n-განზომილებიან სეგმენტთა ყოველ S სისტემას, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, შევუსაბამოთ ორი $\sigma^*(S)$ და $\sigma_*(S)$ რიცხვი. განვიხილოთ n-განზომილებიან სეგმენტთა ყოველგვარი S სისტემა, რომელიც E სიმრავლეს ფარავს, და აღვნიშნოთ H^*-ით $\sigma^*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო H_*-ით $\sigma_*(S)$ სახის რიცხვთა სიმრავლე. ადვილი შესამჩნევია, რომ H_* სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება H^* სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს. მაშასადამე, H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია. რაც შეეხება H^* სიმრავლეს, იგი ქვემოდან შემოსაზღვრულია.

H^* სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება E სიმრავლის გარე ზომა ჟორდანის აზრით, ან გარე მოცულობა, H_* სიმრავლის ზედა საზღვარს კი E სიმრავლის შიგა ზომა ჟორდანის აზრით, ან შიგა მოცულობა.

E სიმრავლის გარე და შიგა ზომა აღვნიშნოთ შესაბამისად m^*E და m_*E სიმბოლოებით. თუ

$$m_*E=m^*E,$$

მაშინ E სიმრავლეს ეწოდება **ზომადი სიმრავლე** ჟორდანის აზრით. ზომად სიმრავლეს ვუწოდებთ აგრეთვე **მოცულობად სიმრავლეს**. თუ E ჟორდანის აზრით ზომადი სიმრავლეა, მაშინ E-ს გარე ზომას ვუწოდებთ E სიმრავლის **ზომას ჟორდანის აზრით** ან მოცულობას და მას აღვნიშნავთ $|E|$ სიმბოლოთი.

იმგვარადვე, როგორც ორგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში, მტკიცდება შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. *R^n სივრცეში აღებული შემოსაზღვრული სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი საზღვრის ზომა ნულის ტოლი იყოს.*

თეორემა 2. *თუ R^n სივრცეში აღებულ S ზედაპირის განტოლებას აქვს სახე $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, სადაც $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ Q_{n-1} რეში*[1], *მაშინ S ზედაპირის მოცულობა ნულის ტოლია.*

ახლა ვთქვათ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია განსაზღვრულია R^n სივრცეში მოთავსებულ შემოსაზღვრულ მოცულობად A სიმრავლეზე. განვიხილოთ ამ სიმრავლის ნებისმიერი წესიერი λ-დანაწილება $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. ყოველ a_k სიმრავლეში ავიღოთ ნებისმიერი $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum f(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})\,|a_k|.$$

ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ წერტილებზე, ისე λ-დანაწილებაზე თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ A სიმრავლის ყოველი წესიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \lambda_0$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

$(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ წერტილებზე დამოუკიდებლად, სადაც I რაიმე მუდმივი სიდიდეა, მაშინ ვიტყვით, რომ σ ჯამი მიისწრაფვის I რიცხვისაკენ, როცა $\lambda \to 0$, და დავწერთ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

ამ შემთხვევაში I რიცხვს ეწოდება $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის რი-

---

[1] Q_{n-1} სიმბოლოთი აღნიშნულია $x_n = 0$ სიბრტყეზე აღებული შემოსაზღვრული დახურული არე.

მანის n-ჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული A სიმრავლეზე და აღინიშნება

$$\overbrace{\iint\cdots\int_A}^{n\text{-ჯერ}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

სიმბოლოთი, ხოლო $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციას კი — ინტეგრებადი A-ზე. ამრიგად,

$$\overbrace{\iint\cdots\int_A}^{n\text{-ჯერ}} f(x_1\ x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})\,|a_k|.$$

მსგავსად ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევისა მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 3. თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია მოცულობად A სიმრავლეზე და მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია, მაშინ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ინტეგრებადია A-ზე.

§ 2. n-ჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც A წარმოადგენს n-განზომილებიან სეგმენტს. მართებულია შემდეგი

თეორემა 4. თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია ინტეგრებადია n-განზომილებიან სეგმენტზე $R_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n]$, მაშინ არსებობს ინტეგრალები

$$\overbrace{\iint\cdots\int_{Q_0}}^{(n-1)\text{-ჯერ}} dx_1, dx_2 \ldots dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n$$

და

$$\int_{a_n}^{b_n} dx_n \overbrace{\iint\cdots\int_{Q_0}}^{(n-1)\text{-ჯერ}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

და ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\iint\cdots\int_{R_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{Q_0}\cdots\int dx_1,\ dx_2\cdots dx_{n-1}\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)dx_n=$$

$$=\int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n\iint\limits_{Q_0}\cdots\int f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n-1})dx_1,\ dx_2\cdots dx_{n-1},$$

სადაც

$$Q_0=[a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\cdots;\ a_{n-1},\ b_{n-1}].$$

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში.

თეორემა 5. ვთქვათ, $f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რაიმე მოცულობად A არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი ზედაპირით

$$x_n=\varphi_1(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n-1}),\ x_n=\varphi_2(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n-1})$$

და ცილინდრული ზედაპირით Ox_n ღერძის პარალელური მსახველებით, რომლის მიმმართველი წარმოადგენს D არის საზღვარს. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას[1]

$$\iint\limits_{A}\cdots\int f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)dx_1,\ dx_2\cdots dx_n=$$

$$=\iint\limits_{D}\cdots\int dx_1,\ dx_2,\cdots,\ dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots,\ x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots,\ x_{n-1})} f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)dx_n. \qquad (2.1)$$

დამტკიცება. რადგანაც A არე შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს n-განზომილებიანი სეგმენტი $R_0=[a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2,\cdots;\ a_n,\ b_n]$, რომელიც A არეს შეიცავს. ახლა განვიხილოთ დამხმარე $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ფუნქცია, რომელიც ასეა განსაზღვრული:

$$F(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)=\begin{cases} f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n), & \text{როცა } (x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)\in A, \\ 0, & \text{როცა } (x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)\in R_0-A. \end{cases}$$

ცხადია, $F(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ ინტეგრებადია R_0-ზე. ამიტომ მე-4 თეორემის ძალით

[1] D წარმოადგენს A არის გეგმილს $x_n=0$ სიბრტყეზე, ხოლო $\varphi_1(x_1,\dots,\ x_{n-1})<$ $<\varphi_2(x_1,\dots,\ x_{n-1})$.

$$\iint\limits_{R_0}\cdots\int F(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1, dx_2\cdots dx_n=$$

$$=\iint\limits_{Q_0}\cdots\int dx_1\, dx_2\cdots dx_{n-1}\int\limits_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n,$$

სადაც

$$Q_0=[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n-1}, b_{n-1}]\supset D.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n=\int\limits_{a_n}^{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n+$$

$$+\int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n+\int\limits_{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})}^{b_n} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n.$$

მაგრამ

$$\int\limits_{a_n}^{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})} F(x_1, x_2,\dots,x_n)dx_n=0, \qquad \int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n,$$

$$\int\limits_{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})}^{b_n} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n=0,$$

$$\iint\limits_{Q_0}\cdots\int dx_1\, dx_2\cdots dx_{n-1}\int\limits_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n=$$

$$=\iint\limits_{D}\cdots\int dx_1,\dots, dx_{n-1}\int\limits_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n.$$

მაშასადამე,

$$\iint\limits_{R_0}\cdots\int F(x_1, x_2,\dots, x_n)\, dx_1\, dx_2, \dots, dx_n=$$

$$=\iint\limits_{D}\cdots\int dx_1\cdots dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2,\dots, x_n)dx_n. \tag{2.2}$$

აგრეთვე ცხადია, რომ

$$\iint\limits_{R_0}\cdots\int F(x_1, x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{A}\cdots\int F(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n +$$

$$+\iint\limits_{R_0-A}\cdots\int F(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

მაგრამ

$$\iint\limits_{A}\cdots\int F(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{A}\cdots\int f(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

$$\iint\limits_{R_0-A}\cdots\int F(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n = 0.$$

მაშასადამე,

$$\iint\limits_{R_0}\cdots\int F(x_1, x_2, \ldots , x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{A}\cdots\int f(x_1, x_2,\ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n. \tag{2.3}$$

2.2) და (2.3) ტოლობათა ძალით მივიღებთ (2.1) ტოლობას.

§ 3. ცვლადთა გარდაქმნა n-ჯერად ინტეგრალში

განვიხილოთ დახურული მოცულობადი G არე $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სივრცეში. ვთქვათ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია G არეში. მაშინ არსებობს n-ჯერადი ინტეგრალი

$$\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n. \tag{3.1}$$

ამ ინტეგრალის გამოთვლა მე-5 თეორემის მიხედვით ხშირად გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ამიტომ (3.1) ინტეგრალის გამოთვლა მოხერხებულია სხვა გზით. ვთქვათ,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{aligned} \tag{3.2}$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ფუნქციები არიან უწყვეტი და აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები რაიმე G' არეში $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ სივრციდან. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ (3.2) ფორმულები გვაძლევს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას G და G' არეებს შორის. რადგანაც G არე დახურულია და მოცულობადი, ამიტომ G' არეც დახურულია და მოცულობადი. ამ პირობებში მართებულია შემდეგი

თეორემა 8. თუ G' არის ყოველ წერტილში (3.2) სისტემის იაკობიანი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$\iint\limits_{G'}\cdots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)\,|I|\,du_1\cdots du_n.$$

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც ორჯერადი და სამჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ n-განზომილებიანი შემდეგი G არის მოცულობა:

$$x_1+x_2+\dots+x_n\leqslant 1,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \dots,\ x_n\geqslant 0. \tag{3.3}$$

ამოხსნა. G არის V_n მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$V_n=\iint\limits_{G}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+\dots+x_n=u_1,\\
&x_2+x_3+\dots+x_n=u_1u_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n-1}+x_n=u_1u_2\cdots u_{n-1},\\
&x_n=u_1u_2\cdots u_n.
\end{aligned}$$

ეს ფორმულები შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{aligned}
&u_1=x_1+x_2+\dots+x_n,\\
&u_2=\frac{x_2+x_3+\dots+x_n}{x_1+x_2+\dots+x_n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$u_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_n}{x_{n-2}+x_{n-1}+x_n},$$

$$u_n=\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}.$$

პირიქით,

$$\begin{aligned} x_1&=u_1(1-u_2)\\ x_2&=u_1u_2(1-u_3)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=u_1u_2\cdots u_n. \end{aligned} \tag{3.5}$$

თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები აკმაყოფილებენ (3.3) პირობებს, მაშინ

$$0\leqslant u_1\leqslant 1,\ 0\leqslant u_2\leqslant 1, \ldots,\ 0\leqslant u_n\leqslant 1 \tag{3.6}$$

და პირიქით, თუ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ აკმაყოფილებენ (3.6) პირობებს, მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ აკმაყოფილებს (3.3) პირობებს. მაშასადამე, G არე გადავსახეთ (3.4) ფორმულების მიხედვით $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ სივრცის n-განზომილებიან

$$Q_0=[0,\ 1;\ 0,1;\ldots;\ 0,1]$$

სეგმენტზე.

ახლა გამოვთვალოთ იაკობიანი

$$I=\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n)}.$$

ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$X_1=u_1,\ X_2=u_1u_2,\ldots,\ X_n=u_1u_2\cdots u_n.$$

ფუნქციონალური დეტერმინანტის ერთ-ერთი თვისების თანახმად

$$I=\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{D(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)}\cdot\frac{D(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)}{D(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n)}.$$

(3.5) ფორმულის ძალით

$$x_1=X_1-X_2,\ x_2=X_2-X_3,\ldots,\ x_{n-1}=X_{n-1}-X_n,\ x_n=X_n.$$

ამიტომ

$$\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{D(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \ldots u_{n-2}^2 u_{n-1}.$$

მაშასადამე,

$$I = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \ldots u_{n-2}^2 u_{n-1}.$$

n-ჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის ძალით გვექნება

$$V_n = \iint_{Q_0} \cdots \int |I| \, du_1 du_2 \ldots du_n =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{n-1} u_2^{n-2} \ldots u_{n-1} \, du_1 du_2 \ldots du_n = \cdots$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2}.$$

მაშასადამე,

$$V_n = \frac{1}{n!}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ მოცულობა შემდეგი n-განზომილებიანი სფეროსი:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

ამოხსნა. ამ სფეროს ზედაპირის განტოლებაა

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2. \tag{3.7}$$

თუ მოცემულ სფეროს აღვნიშნავთ G-თი, მოცულობას კი V_n-ით, მაშინ

$$V_n = \iint_G \cdots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\begin{aligned}
&x_1 = a \sin u_1, \\
&x_2 = a \cos u_1 \sin u_2, \\
&x_3 = a \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_{n-1} = a \cos u_1 \cos u_2 \ldots \cos u_{n-2} \sin u_{n-1}, \\
&x_n = a \cos u_1 \cos u_2 \ldots \cos u_{n-2} \cos u_{n-1}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3.8) წარმოადგენს (3.7) ზედაპირის განტოლებებს პარამეტრული სახით.

ახლა (3.8) ფორმულებში დავწეროთ a-ს ნაცვლად ρ, რომელსაც ვცვლით 0-დან a-მდე, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}
&x_1=\rho \sin u_1,\\
&x_2=\rho \cos u_1 \sin u_2,\\
&x_3=\rho \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n-1}=\rho \cos u_1 \cos u_2 \cdots \cos u_{n-2} \sin u_{n-1},\\
&x_n=\rho \cos u_1 \cos u_2 \cdots \cos u_{n-2} \cos u_{n-1},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

სადაც

$$0\leqslant\rho\leqslant a, \ -\frac{\pi}{2}\leqslant u_k\leqslant \frac{\pi}{2} \ (k=1,\ 2, \dots,\ n-2),$$
$$0\leqslant u_{n-1}\leqslant 2\pi. \tag{3.10}$$

(3.9) განტოლებები (3.10) პირობებით წარმოადგენენ G სფეროს. (3.9) ფორმულების საშუალებით G სფერო გადაისახება $(u_1, u_2, \dots, \dots, u_{n-1}, \rho)$ სივრცის

$$Q_0=\left[-\frac{\pi}{2}\leqslant u_1\leqslant \frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\leqslant u_2\leqslant \frac{\pi}{2};\dots;\right.$$
$$\left.;\dots;\ 0\leqslant u_{n-1}\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant\rho\leqslant a\right]$$

სეგმენტზე,

სათანადო გამოთვლების ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$I=\frac{D(x_1,\ x_2\dots,\ x_n)}{D(\rho,\ u_1,\ u_2,\dots,u_{n-1})}=$$
$$(-1)^{n-1}\rho^{n-1}\cos^{n-2}u_1 \cos^{n-3}u_2\cdots\cos^2 u_{n-3}\cos u_{n-2}.$$

მაშასადამე,

$$V_n=\iint_{Q_0}\cdots\int |I|\, du_1 du_2\cdots du_{n-1}d\rho=$$
$$=\iint_{Q_0}\cdots\int \rho^{n-1}\cos^{n-2}u_1 \cos^{n-3}u_2\cdots\cos^2 u_{n-3}\cos u_{n-2}\, d\rho=$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}u_1\, du_1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-3}u_2 du_2\cdots$$

$$\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u_{n-2}du_{n-2}\int_0^{2\pi}du_{n-1}\int_0^a\rho^{n-1}\,d\rho.$$

მაგრამ

$$\int_0^a\rho^{n-1}\,d\rho=\frac{a^n}{n},\quad\int_0^{2\pi}du_{n-1}=2\pi,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x)^{\frac{k-1}{2}}(1-\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}2\sin x\cos x dx=$$

$$=\int_0^1 z^{\frac{k-1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz=B\left(\frac{k+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

(აქ მოვახდინეთ ჩასმა $z=\cos^2 x$). მაგრამ

$$B\left(\frac{k+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}.$$

ამიტომ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x dx=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\quad(k=1,\ 2,\ldots,\ n-2).$$

მაშასადამე,

$$V_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots$$

$$\cdots\frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot 2\pi\frac{a^n}{n}=\frac{2\pi\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-2}a^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

რაკი

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

ამიტომ

$$V_n=\frac{(\pi a^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{3.11}$$

ეს არის n-განზომილებიანი სფეროს მოცულობის გამოსახულება.

n-განზომილებიანი სფეროს მოცულობის ცოდნა საჭიროა ალბათობათა თეორიასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის შესწავ-

თ ა ვ ი XVI

ზედაპირული ინტეგრალები

§ 1. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის განსაზღვრა და არსებობა

პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი წარმოადგენს ორჯერადი ინტეგრალის ბუნებრივ განზოგადებას, ისევე როგორც პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი — განსაზღვრული ინტეგრალის განზოგადებას.

განვიხილოთ გლუვი წირით შემოსაზღვრული ფართობადი S ზედაპირი. ვთქვათ, ამ ზედაპირზე განსაზღვრულია $f(P) \equiv f(x, y, z)$ ფუნქცია. მოცემული ზედაპირი დავყოთ რაიმე წესით ფართობად ნაწილებად

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n.$$

ყოველი ΔS_k ნაწილზე ავიღოთ ნებისმიერი P_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(P_k) |\Delta S_k| .$$

აქ ΔS_k ნაწილის ფართობი აღნიშნულია $|\Delta S_k|$ სიმბოლოთი. თუ არსებობს σ ჯამის სასრული ზღვარი, როდესაც ყოველი ΔS_k ნაწილის დიამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის და იგი დამოკიდებული არაა არც S ზედაპირის დაყოფის წესზე და არც P_k წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება **პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი**, გავრცელებული S ზედაპირზე და აღინიშნება $\iint\limits_S f(x, y, z) dS$ ან მოკლედ $\iint\limits_S f(P) dS$.

ახლა გადავიდეთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოთვლის წესზე: ვთქვათ, ფართობადი S ზედაპირის განტოლებაა

$$z = \varphi(x, y),$$

სადაც $\varphi(x, y)$ ფუნქციას აქვს ω არეში უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ და $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ (აქ ω წარმოადგენს S ზედაპირის გეგმილს xOy სიბრტყეზე). მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია S ზედაპირზე, მაშინ არსებობს $f(x, y, z)$ ფუნქციის პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f[x, y, \varphi(x, y)] \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (1.1)$$

დამტკიცება. S ზედაპირი დავყოთ რაიმე წესით ფართობად ნაწილებად $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. როგორც ვიცით

$$|\Delta S_k| = \iint\limits_{\Delta\omega_k} \sqrt{1+[\varphi'_x(x, y)]^2+[\varphi'_y(x,y)]^2}\,dxdy \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

სადაც $\Delta\omega_k$ წარმოადგენს ΔS_k ნაწილის გეგმილს xOy სიბრტყეზე. თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას ორჯერადი ინტეგრალისათვის, გვექნება

$$|\Delta S_k| = \sqrt{1+[\varphi'_x(\xi_k, \eta_k)]^2+[\varphi'_y(\xi_k, \eta_k)]^2}\,|\Delta\omega_k|,$$

სადაც $|\Delta\omega_k|$-თი აღნიშნულია $\Delta\omega_k$ არის ფართობი, ხოლო (ξ_k, η_k) გარკვეული წერტილია $\Delta\omega_k$ არეში.

ახლა

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,|\Delta S_k|$$

ჯამი, სადაც $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta S_k$, ასე წარმოვადგინოთ

$$\sigma= \sum_{k=1}^{n} f[x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)] \cdot \sqrt{1+[\varphi'_x(\xi_k, \eta_k)]^2+[\varphi'_y(\xi_k, \eta_k)]^2}\,|\Delta\omega_k|.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim\,(\sigma-\sigma^*)=0, \qquad (1.2)$$

სადაც

$$\sigma^* = \sum_{n=1}^{n} f\,[x_k,\ y_k,\ \varphi(x_k\ y_k)]\ \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1+[\varphi_x'(x_k,\ y_k)]^2 + [\varphi_y'(x_k,\ y_k)]^2}\,|\Delta\omega_k\,|.$$

გვაქვს

$$\sigma - \sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f\,[x_k,\ y_k,\ \varphi(x_k,\ y_k)]\ \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1+[\varphi_x'(\xi_k,\ \eta_k)]^2 + [\varphi_y'(\xi_k.\ \eta_k)]^2} -$$

$$-\sqrt{1+[\varphi_x'(x_k,\ y_k)]^2 + [\varphi_y'(x_k,\ y_k)]^2}\ \}\,|\,\Delta\omega_k\ . \tag{1.3}$$

რაკი $\sqrt{1+[\varphi_x'(x,\ y)]^2 + [\varphi_y'(x,\ y)]^2}$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია დახურულ ω არეში, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ S ზედაპირის ნებისმიერი დანაწილებისათვის $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_n$, სადაც

$$d(\Delta S_k) < \delta \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

გვექნება

$$|\sqrt{1+[\varphi_x'(\xi_k,\ \eta_k)]^2 + [\varphi_y'(\xi_k,\ \eta_k)]^2} -$$

$$-\sqrt{1+[\varphi_x'(x_k,\ y_k)]^2 + [\varphi_y'(x_k,\ y_k)]^2}\,| < \varepsilon\cdot$$

$(k=1,\ 2,\ldots,n)$.

თუ ამის მიხედვით შევაფასებთ $\sigma - \sigma^*$ სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას, გვექნება

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon M\,|\,\omega\,|,$$

სადაც M წარმოადგენს $|\,f[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)]\,|$ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას ω არეზე. მაშასადამე, მართებულია (1.2) ტოლობა. მაგრამ $\lim \sigma^*$ ზღვარი არსებობს და წარმოადგენს დასამტკიცებელი (1.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს, ამიტომ არსებობს $\lim \sigma$ ზღვარიც და იგი წარმოადგენს (1.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა ინტეგრალქვეშა $f(x,\ y,\ z)$ ფუნქციაში z-ის ნაცვლად შევიტანოთ $\varphi(x,\ y)$ გამოსახულება ზედაპირის განტოლებიდან, ხოლო dS შევცვალოთ გამოსახულებით

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი

$$I = \iint_S \frac{z}{x^2+y^2} dS,$$

სადაც S წარმოადგენს $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის ნაწილს, რომელიც მასზე ამოიკვეთება $x^2+y^2=2$ ცილინდრით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩვენს შემთხვევაში $f(x, y, z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, $\varphi(x, y) = =x^2+y^2$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,.$$

ცხადია, S ზედაპირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე იქნება წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით $\sqrt{2}$. მაშასადამე, D არეს წარმოადგენს აღნიშნული წრე. (1.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$I = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\; dxdy.$$

თუ ამ ორჯერად ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, მივიღებთ:

$$I = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho = \frac{13\pi}{3}\,.$$

თუ ზედაპირი მოცემულია პარამეტრული სახის განტოლებებით

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v),$$

მაშინ, როგორც ცნობილია, ზედაპირული ელემენტი შემდეგი ტოლობით წარმოიქმნება

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\; dudv,$$

სადაც

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\; G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

თუ გამოვიყენებთ ანალოგიურ მსჯელობას, რაც ზემოთ იყო მო-

ყვანილი, დავინახავთ, რომ ამ შემთხვევაში პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_\Omega f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v)]\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

სადაც Ω წარმოადგენს იმ არეს (u, v) სისტემის მიმართ, რომელიც S ზედაპირს შეესაბამება.

§ 2. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის თვისებები

პირველი გვარის ზედაპირულ ინტეგრალზე ვრცელდება ორჯერადი ინტეგრალის თვისებები;

1°. $\iint_S dS = |S|,$

სადაც $|S|$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ფართობადი S ზედაპირის ფართობი.

2°. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე და a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\iint_S af(x, y, z)dS = a\iint_S f(x, y, z)dS.$$

3°. თუ $f(x, y, z)$ და $g(x, y, z)$ ფუნქციები უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე, მაშინ

$$\iint_S [f(x, y, z)+g(x, y, z)]\,dS = \iint_S f(x, y, z)dS+\iint_S g(x, y, z)\,dS.$$

4°. თუ $f(x, y, z)$ უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე და ეს ზედაპირი დაყოფილია ორ ფართობად S_1 და S_2 ზედაპირად, მაშინ

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)dS + \iint_{S_2} f(x, y, z)dS.$$

ეს არის პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის ადიტიურობის თვისება.

5°. თუ ფართობად S ზედაპირზე $f(x, y, z)$ ფუნქცია არაუარყოფითია, მაშინ

$$\iint_S f(x, y, z)dS \geq 0.$$

6°. თუ $f(x, y, z)$ და $g(x, y, z)$ ფუნქციები უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე და ამ ზედაპირზე $f(x, y, z) \leqslant \leqslant g(x, y, z)$, მაშინ

$$\iint_S f(x, y, z)dS \leqslant \iint_S g(x, y, z)dS.$$

7°. თუ $f(x, y, z)$ უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე და, ამის გარდა, S-ზე შესრულებულია უტოლობები $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, მაშინ

$$m|S| \leqslant \iint_S f(x, y, z)dS \leqslant M|S|.$$

8°. თუ $f(x, y, z)$ უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე, მაშინ

$$\left|\iint_S f(x, y, z)dS\right| \leqslant \iint_S |f(x, y, z)|dS.$$

ზემოთ მოყვანილი თვისებების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 2. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია ფართობად ჩაკეტილ S ზედაპირზე, მაშინ ამ ზედაპირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი (ξ, η, ζ) წერტილი, რომ

$$\iint_S f(x, y, z)dS = f(\xi, \eta, \zeta)|S|. \tag{2.1}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ m და M-ით $f(x, y, z)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები. მაშინ S ზედაპირის ყოველი (x, y, z) წერტილისათვის გვექნება

$$m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M.$$

მე-7 თვისების თანახმად გვაქვს

$$m|S| \leqslant \iint_S f(x, y, z)dS \leqslant M|S|.$$

აქედან

$$m \leqslant \frac{1}{|S|} \iint_S f(x, y, z)dS \leqslant M.$$

ადვილად დავამტკიცებთ, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის.

ამიტომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი წერტილი $(\xi, \eta, \zeta) \in S$, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\frac{1}{|S|}\iint_S f(x, y, z)dS = f(\xi, \eta, \zeta).$$

აქედან მიიღება (2.1) ტოლობა.

ეს არის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალისათვის.

§ 3. ზედაპირის მხარეები

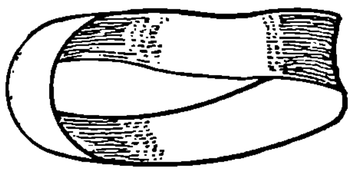
თუ ზედაპირი მოცემულია $z=f(x, y)$ განტოლებით, ინტუიციურად ცხადია, რომ ზედაპირს აქვს ზედა და ქვედა მხარეები. შეკრული ზედაპირის შემთხვევაში ადვილი წარმოსადგენია, რომ ზედაპირს აქვს ორი მხარე—შიგა და გარე მხარეები, როგორც, მაგალითად, სფერულ ზედაპირს.

ახლა გადავიდეთ ზედაპირის მხარის განსაზღვრაზე. განვიხილოთ რაიმე S ზედაპირი (შეკრული ან კიდიანი) და ვიგულისხმოთ, რომ ზედაპირის ყოველ წერტილში შეიძლება მხები სიბრტყისა და, მაშასადამე, ნორმალის გავლება. ზედაპირის ნებისმიერ M_0 წერტილზე გავავლოთ ნორმალი და მას მივანიჭოთ გარკვეული მიმართულება ერთ-ერთი ორი შესაძლებლობიდან. შემდეგ, S ზედაპირზე ავიღოთ M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი შეკრული C კონტური, რომელიც არ კვეთს ზედაპირის კიდეს. ვთქვათ, M წერტილი მოძრაობს C კონტურზე და ამ წერტილზე გამავალი ნორმალის მიმართულება უწყვეტად იცვლება. შეიძლება მოხდეს, რომ კონტურის შემოვლის შემდეგ M_0 წერტილში ნორმალის მიმართულება დაემთხვეს თავდაპირველ მიმართულებას ან მისი საწინააღმდეგო იყოს. თუ ყოველი M_0 წერტილისათვის ადგილი აქვს პირველ შემთხვევას, მაშინ S ზედაპირს ორპირა ზედაპირი ეწოდება, მეორე შემთხვევაში კი—ცალპირა ზედაპირი.

ცალპირა ზედაპირის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს ეგრეთ წოდებული მებიუსის (Möbius) ფურცელი. ავიღოთ ქაღალდის მოგრძო ლენტი, ერთხელ გადავგრიხოთ და ნაპირები ერთმანეთს მივაწებოთ, მივიღებთ მებიუსის ფურცლის მოდელს (ნახ. 52). თუ დავიწყებთ მის შეღებვას, მაგალითად, წითელი საღებავით, მაშინ საზღვარზე გადაუსვლელად მთელი რგოლი შეგვიძლია წითლად შევღებოთ. შემდეგში ასეთ ზედაპირებს არ განვიხილავთ.

ორპირა ზედაპირის ერთ წერტილში ნორმალის მიმართულების არჩევა ცალსახად განსაზღვრავს ზედაპირის ყველა წერტილში ნორმალის მიმართულების არჩევას. სიბრტყე, სფერო, ელიფსოიდი, პარაბოლოიდი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი—ორპირა ზედაპირებია.

ვთქვათ, S გლუვი კიდიანი ორპირა ზედაპირია, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი შეკრული L კონტურით. ავიღოთ ამ ზედაპირის გარკვეული მხარე და L კონტურზე ავირჩიოთ შემოვლის გარკვეული მიმართულება, როგორც დადებითი შემდეგი წესის მიხედვით: თუ მზვერავი მოძრაობს L კონტურზე ისე, რომ ზედაპირის შერჩეული მხარის შესაბამისი ნორმალის მიმართულება გადის ფეხებიდან თავისაკენ, მაშინ L კონტურის მიერ შემოსაზღვრული ზედაპირის ნაწილი უნდა რჩებოდეს მარცხნივ.



ნახ. 52.

ამავე წესით შეგვიძლია დავადგინოთ ავლის დადებითი მიმართულება ზედაპირზე მდებარე ყოველი მარტივი შეკრული კონტურისათვის, რომელიც ზედაპირის ნაწილს შემოხაზავს.

დადებითი ავლის საწინააღმდეგო მიმართულებას ავლის უარყოფითი მიმართულება ეწოდება.

თუ ავიღებთ ზედაპირის მეორე მხარეს, მაშინ ნორმალები შეიცვლიან მიმართულებას საწინააღმდეგოთი, შეიცვლება მზვერავის მდებარეობა და საჭირო გახდება L კონტურის ავლის დადებით და უარყოფით მიმართულებათა გადასმა. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ზედაპირი შეიცვლის ო რ ი ე ნ ტ ა ც ი ა ს. ამრიგად, ზედაპირის მხარის შერჩევა განსაზღვრავს S ზედაპირის ორიენტაციას და, პირიქით, ზედაპირის კონტურის ავლის დადებითი მიმართულების შერჩევა ცალსახად განსაზღვრავს ზედაპირის მხარეს.

ორპირა ზედაპირის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს ზედაპირი, რომლის განტოლებაა $z=f(x, y)$, სადაც $f(x, y)$ უწყვეტია D არეში და ამ არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$.

ამ შემთხვევაში ზედაპირის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები გამოისახება ფორმულებით

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{3.1}$$

თუ რადიკალის წინ ავიღებთ გარკვეულ ნიშანს, ამით ზედაპირის ყოველ წერტილში დავადგენთ ნორმალის გარკვეულ მიმართულებას. დაშვების თანახმად, მიმართულების კოსინუსები წარმოადგენენ წერტილის კოორდინატების უწყვეტ ფუნქციებს, ამიტომ ნორმალის დადგენილი მიმართულებაც უწყვეტად დამოკიდებულია წერტილის მდებარეობაზე. აქედან ცხადია, რომ (3.1) ფორმულებში რადიკალის წინ ნიშნის შერჩევას გეომეტრიულად შეესაბამება ზედაპირის გარკვეული მხარის ალება. თუ რადიკალის წინ ავიღებთ $+$ ნიშანს, მაშინ ზედაპირის ყოველ წერტილში $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ დადებითია, ე. ი. Oz ღერძსა და ნორმალს შორის γ კუთხე მახვილია.

§ 4. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის განსაზღვრა

განვიხილოთ რაიმე S ზედაპირი, რომლის განტოლებაა

$$z = f(x, y);$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია თავისი $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია xOy სიბრტყეზე ალებულ დახურულ D არეზე. ვიგულისხმოთ, რომ D არე შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი კონტურით. ამ ზედაპირზე ავირჩიოთ გარკვეული მხარე, მაგალითად, ზედა მხარე. ამით ზედაპირზე არჩეულია გარკვეული ორიენტაცია.

ახლა ვთქვათ, S ზედაპირზე განსაზღვრულია $R(M) = R(x, y, z)$ ფუნქცია. S ზედაპირი დავყოთ რაიმე წესით ფართობად ნაწილებად

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$$

და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} R(M_k)\,\Delta\omega_k = \sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)\Delta\omega_k, \tag{4.1}$$

სადაც $\Delta\omega_k$ წარმოადგენს xOy სიბრტყეზე ΔS_k არის გეგმილის ფართობს, ხოლო $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ნებისმიერი წერტილია ΔS_k არისა.

თუ არსებობს (4.1) ჯამის ზღვარი, როდესაც ყოველი ΔS_k დანაყოფის დიამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი დამოუკიდებელია როგორც S ზედაპირის დაყოფის წესზე, ისე M_k წერტილების

შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $R(x, y, z)$ ფუნქციის მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy \quad \text{ან} \quad \iint\limits_S R(M)dxdy.$$

§ 5. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის თვისებები

მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის ქვემოთ მოყვანილი თვისებები მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც წირითი ინტეგრალის შემთხვევაში.

1°. წრფივობის თვისება. თუ არსებობს $R_1(M), R_2(M), \ldots, R_n(M)$ ფუნქციების მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალები $\iint\limits_S R_k(M)dxdy$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, მაშინ იარსებებს $\iint\limits_S \sum\limits_{k=1}^{n} C_k R_k(M)dxdy$ და მართებულია ტოლობა

$$\iint\limits_S \sum_{k=1}^{n} C_k R_k(M)dxdy = \sum_{k=1}^{n} C_k \iint\limits_S R_k(M)dxdy,$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

2°. ადიტიურობის თვისება. თუ არსებობს მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი $\iint\limits_S R(M)dxdy$ და $S_1, S_2, \ldots, S_n$ წარმოადგენს S ზედაპირის დანაწილებას, სადაც ყოველი S_k ნაწილი ფართობადია, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint\limits_S R(M)dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_k} R(M)dxdy.$$

3°. ზედაპირული ინტეგრალები $R(M)$ ფუნქციიდან, გავრცელებული ერთი და იმავე S ზედაპირის სხვადასხვა მხარეს, აბსოლუტური სიდიდით ტოლი არიან და აქვთ ურთიერთსაწინააღმდეგო ნიშნები, ეს ასე ჩაიწერება.

$$\iint\limits_{S^-} R(M)dxdy = -\iint\limits_{S^+} R(M)dxdy.$$

ახლა, თუ ზედაპირულ ელემენტებს დავაგეგმილებთ yOz ან xOz სიბრტყეზე, ანალოგიური გზით მივიღებთ მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგრალებს

$$\iint_S P(M)dydz, \quad \iint_S Q(M)dxdz,$$

სადაც $P(M)\equiv P(x, y, z)$ და $Q(M)=Q(z, y, z)$ წარმოადგენენ S ზედაპირზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

ხშირად განიხილება სამი ინტეგრალის ჯამი

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy.$$

§ 6. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოსახვა პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალით

განვიხილოთ მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy, \tag{6.1}$$

სადაც $R(x, y, z)$ არის უწყვეტი ფუნქცია ფართობად S ზედაპირზე, ხოლო S ზედაპირის განტოლებაა $z=f(x, y)$, ამასთან $f(x, y)$ ფუნქცია თავისი p და q კერძო წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია დახურულ Ω არეში.

(6.1) ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალით, ხოლო ეს უკანასკნელი, როგორც ზემოთ იყო დადგენილი, ორჯერად ინტეგრალზე დაიყვანება. მართლაც, როგორც ვიცით

$$|\Delta S_k|=\iint_{\Delta\omega_k} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy. \tag{6.2}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ზედაპირის ზედა მხარისაკენ მიმართული ნორმალის მიერ Oz ღერძთან შედგენილი კუთხის კოსინუსია

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

მაშინ (6,2) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$|\Delta S_k| = \iint_{\Delta\omega_k} \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$|\Delta S_k| = \frac{1}{\cos\overline{\gamma}_k}|\Delta\omega_k|, \tag{6.3}$$

სადაც $\overline{\gamma}_k$-თი აღნიშნულია კუთხე, რომელსაც Oz ღერძთან შეადგენს ΔS_k ზედაპირული ელემენტის ერთ-ერთ გარკვეულ წერტილზე გავლებული ნორმალი.

(6.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$|\Delta\omega_k| = \cos\overline{\gamma}_k\,|\Delta S_k| \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} R(x_k,\ y_k,\ z_k)\,|\Delta\omega_k|,$$

გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} R(x_k,\ y_k,\ z_k)\cos\overline{\gamma}_k\,|\Delta S_k|. \tag{6.4}$$

ახლა აღვნიშნოთ γ_k-თი კუთხე, რომელსაც შეადგენს $(x_k,\ y_k,\ z_k)$ წერტილზე გავლებული ზედაპირის ზედა მხარის ნორმალი Oz ღერძთან და განვიხილოთ ჯამი

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} R(x_k,\ y_k,\ z_k)\cos\gamma_k\,|\Delta S_k|.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma^*$ არის პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი, სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა $R(x,\ y,\ z)\cos\gamma$.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}(\sigma-\sigma^*)=0. \tag{6.5}$$

გვაქვს:

$$|\sigma-\sigma^*| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |R(x_k,\ y_k,\ z_k)|\,|\cos\overline{\gamma}_k-\cos\gamma_k|\,|\Delta S_k|. \tag{6.6}$$

$\cos\gamma$ უწყვეტია Ω არეზე, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ S ზედაპირის ნებისმიერი დანაწილებისათვის $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_n$, სადაც

$$d(\Delta S_k) < \delta \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|\overline{\cos\gamma_k} - \cos\gamma_k| < \frac{\varepsilon}{M|S|},$$

სადაც M არის $|R(x, y, z)|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა S ზედაპირზე.

მაშასადამე, (6.6) უტოლობის თანახმად

$$|\sigma - \sigma^*| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M|S|} \sum_{k=1}^{n} |\Delta S_k| = \varepsilon.$$

ამრიგად, მართებულია (6.5) ტოლობა და ამიტომ $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma^*$, ე. ი. მართებულია ტოლობა

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS. \tag{6.7}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი დაიყვანება ორჯერად ინტეგრალზე. ამისათვის საკმარისია $R(x, y, z)$-ში z-ის ნაცვლად შევიტანოთ $f(x, y)$, ხოლო dS-ის ნაცვლად შევიტანოთ ზედაპირული ელემენტის მნიშვნელობა

$$dS = \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

მაშასადამე,

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_\Omega R[x, y, f(x, y)]dxdy, \tag{6.8}$$

სადაც Ω აღნიშნავს xOy სიბრტყეზე S ზედაპირის გეგმილს.

თუ ინტეგრალს ავიღებთ S ზედაპირის ქვედა მხარეზე, მაშინ გვექნება ფორმულა

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = -\iint_\Omega R[x, y, f(x, y)]\, dxdy. \tag{6.9}$$

თუ მთელი S ზედაპირის წერტილის z აპლიკატის გამოსახვა არ შეიძლება x და y-ის ცალსახა ფუნქციით, მაშინ S ზედაპირი უნდა დავყოთ ნაწილებად ისე, რომ თითოეულ ნაწილთან Oz ღერძის პარალელური წრფის გადაკვეთის წერტილების რიცხვი ერთზე მეტი არ იყოს, ავიღოთ ინტეგრალები ამ ნაწილებზე და შევკრიბოთ.

ახლა S ზედაპირის $z=f(x, y)$ განტოლება ამოვხსნათ x-ის მიმართ (ვიგულისხმოთ, რომ ეს შესაძლებელია): $x=\varphi(y, z)$, მაშინ ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$\iint_S P(x, y, z)\, dydz = \iint_S P(x, y, z)\cos\alpha\, dS, \qquad (6.10)$$

$$\iint_S P(x, y, z)\, dydz = \iint_{\Omega_1} P[\varphi(y, z), y, z]\, dydz,$$

სადაც $P(x, y, z)$ უწყვეტი ფუნქციაა S ზედაპირზე, ხოლო Ω_1 წარმოადგენს S ზედაპირის გეგმილს yOz სიბრტყეზე, α კი კუთხეა S ზედაპირის ნორმალსა და Ox ღერძს შორის.

თუ $z=f(x, y)$ განტოლებას ამოვხსნით y-ის მიმართ, გვექნება $y=\psi(x, z)$ და ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}\iint_S Q(x, y, z)\, dxdz &= \iint_S Q(x, y, z)\cos\beta\, dS,\\ \iint_S Q(x, y, z)\, dxdz &= \iint_{\Omega_2} Q[x, \psi(x, z), z]\, dxdz,\end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

სადაც $Q(x, y, z)$ უწყვეტი ფუნქციაა S ზედაპირზე, Ω_2 წარმოადგენს S ზედაპირის გეგმილს xOz სიბრტყეზე, β კი კუთხეა S ზედაპირის ნორმალსა და Oy ღერძს შორის. (6.7), (6.10) და (6.11) ტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

§ 7. სტოქსის ფორმულა

ზედაპირული ინტეგრალისათვის ადგილი აქვს გრინის ფორმულის ანალოგიურ ფორმულას, რომელსაც S ზედაპირზე გავრცელებული ინტეგრალის გამოთვლა დაჰყავს ამ ზედაპირის შემომსაზღვრელ C კონტურზე აღებულ წირითი ინტეგრალის გამოთვლამდე.

განვიხილოთ ფართობადი S ზედაპირი, რომელთანაც Oz ღერძის პარალელური წრფის გადაკვეთის წერტილების რიცხვი ერთზე მეტი არ არის. ამ ზედაპირის საზღვარი აღვნიშნოთ C ასოთი. ვთქვათ, S ზედაპირის განტოლებაა

$$z=f(x, y),$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია თავისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით D არეში. როგორც ვიცით, S ზედაპირის $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულების კოსინუსები გამოისახებიან ფორმულებით

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

აქედან გვაქვს

$$p\cos\gamma = -\cos\alpha, \qquad q\cos\gamma = -\cos\beta. \tag{7.1}$$

ახლა ვთქვათ, S ზედაპირის შემცველ რაიმე G არეში განსაზღვრულია $P(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია თავისი კერძო წარმოებულებით $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial P}{\partial z}$. განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_C P(x, y, z)dx.$$

L ასოთი აღვნიშნოთ C კონტურის გეგმილი xOy სიბრტყეზე. რაკი C ძევს S ზედაპირზე, ამიტომ

$$\int_C P(x, y, z)dx = \int_L P[x, y, f(x, y)]\,dx.$$

გრინის ფორმულის თანახმად

$$\int_L P[x, y, f(x, y)]dx = -\iint_D \frac{\partial P[x, y, f(x, y)]}{\partial y}dxdy. \tag{7.2}$$

მაგრამ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \left.\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\right|_{z=f(x, y)} + \left.\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z=f(x,y)} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}q,$$

ამასთან, P-ს გამოსახულებაში z-ის ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ $f(x, y)$. მაშასადამე, (7.2) ფორმულის თანახმად

$$\int_C P(x, y, z)dx = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}q\right)dxdy.$$

შემდეგ, რაკი $dxdy=\cos\gamma\, dS$, ამიტომ

$$\int\limits_C P(x, y, z)dx=-\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\, q\right)\cos\gamma\, dS.$$

ვისარგებლებთ რა (7.1) ფორმულებიდან მეორეთი, გვექნება

$$\int\limits_C P(x, y, z)dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{7.3}$$

ეს ფორმულა ამყარებს კავშირს S ზედაპირზე გავრცელებულ ინტეგრალსა და S ზედაპირის შემომსაზღვრელ C კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალს შორის. ჩვეულებრივ (7.3) ფორმულის ნაცვლად განიხილავენ უფრო ზოგად ფორმულას, რომელსაც ფიზიკური შინაარსი აქვს. ამისათვის განვიხილოთ ორი სხვა ფუნქცია $Q(x, y, z)$ და $R(x, y, z)$, რომლებიც უწყვეტია G არეში თავისი კერძო წარმოებულებით $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ და $\frac{\partial R}{\partial x}$. ამის გარდა ვიგულისხმოთ, რომ S ზედაპირის წარმოდგენა შეიძლება როგორც $x=\varphi(y, z)$, ისე $y=\psi(x,z)$ განტოლებით.

თუ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურ მსჯელობებს ჩავატარებთ, გვექნება

$$\int\limits_C Q(x, y, z)dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \tag{7.4}$$

$$\int\limits_C R(x, y, z)dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \tag{7.5}$$

მაშასადამე, თუ S ზედაპირის წარმოდგენა შეიძლება ერთდროულად განტოლებებით

$$z=f(x, y) \quad x=\varphi(y, z), \quad y=\psi(x, z),$$

მაშინ (7.3), (7.4), და (7.5) ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$\int\limits_C Pdx+Qdy+Rdz =$$

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS. \tag{7.6}$$

ეს ფორმულა ამყარებს კავშირს ზედაპირის შემოსაზღვრულ კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალსა და ზედაპირზე გავრცელებულ ინტეგრალს შორის. (7.6) ფორმულას ეწოდება სტოქსის ფორმულა (G. G. Stokes).

სტოქსის ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოყენებითაც. სახელდობრ

$$\int\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \tag{7.7}$$

(7.6) ფორმულა გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ Ox, Oy და Oz ღერძების პარალელური წრფეები კვეთენ S ზედაპირს შესაბამისად არა უმეტეს ერთი წერტილისა. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ S ზედაპირი ისე უნდა დავყოთ დამხმარე წირებით, რომ S ზედაპირის ყოველი ნაწილისათვის გამოიყენება (7.6) ფორმულა. თუ ამგვარად მიღებულ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, ტოლობის მარცხენა ნაწილში გვექნება C კონტურზე გავრცელებული წირითი ინტეგრალი, ვინაიდან დამხმარე წირებზე ინტეგრალები აღებულია ორ-ორჯერ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით და გაბათილდებიან. ტოლობის მარჯვნივ მივიღებთ ზედაპირულ ინტეგრალს, გავრცელებულს მთელ S ზედაპირზე; ასე რომ, (7.6) ფორმულა მართებულია ზოგად შემთხვევაში. ამასთან, უნდა დავიცვათ C კონტურის შემოვლისა და S ზედაპირის $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებისათვის შემდეგი პირობა: მზვერავისათვის, რომელიც უვლის C კონტურს და დგას ნორმალის მიმართულებით, S ზედაპირი უნდა რჩებოდეს მარცხნივ.

მაგალითი 2. შევამოწმოთ სტოქსის ფორმულა $P=y$, $Q=z$, $R=x$ ფუნქციებისათვის, თუ C არის წრეწირი

$$x=a\cos^2 t,\quad y=a\sqrt{2}\sin t\cos t,\quad z=a\sin^2 t\ (0\leqslant t\leqslant\pi),$$

S კი ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრეა (ეს წრე მიიღება $x+z=a$ სიბრტყისა და $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს გადაკვეთაში; მისი რადიუსი ტოლია $\frac{a}{\sqrt{2}}$).

შემოწმება. გვაქვს

$$\int_C ydx+zdy+xdz=a^2\int_0^{\pi}(-\sqrt{2}\sin^2 t+2\cos^3 t\sin t)\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

ზედაპირული ინტეგრალი

$$-\iint_S dxdy+dydz+dxdz,$$

უდრის ზემოთ აღნიშნული წრის კოორდინატთა სიბრტყეებზე გეგმილების ფართობთა ჯამს, აღებულს შებრუნებული ნიშნით, ე. ი.

$$-2\,\frac{\pi a^2}{2}\cos 45^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

ამრიგად, სტოქსის ფორმულა მართებულია ზემოთ მოყვანილი ფუნქციებისათვის.

§ 8. წირითი ინტეგრალის დამოუკიდებლობა ინტეგრების გზისაგან

ვთქვათ, სივრცითი ღია G არეში განსაზღვრულია P, Q და R ფუნქციები, რომლებიც უწყვეტია თავისი კერძო წარმოებულებით

$$\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y}.$$

სტოქსის ფორმულის საშუალებით ადვილად დავადგენთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს იმისას, რომ წირითი ინტეგრალი

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz, \tag{8.1}$$

აღებული ყოველ მარტივ ჩაკეტილ უბან-უბან გლუვ C კონტურზე, რომელიც აღებულია G-ში, იყოს ნულის ტოლი.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ სტოქსის ფორმულა, საჭიროა წინასწარ დავადოთ G არეს ბუნებრივი შეზღუდვა. სახელდობრ, უნდა მოვითხოვოთ, რომ როგორიც გინდა იყოს G-ში მოთავსებული მარტივი შეკრული უბან-უბან გლუვი C კონტური, მასზე შეიძლებოდეს დაჭიმვა, G-ში მოთავსებული უბან-უბან გლუვი S ზედაპირისა, რომელსაც აქვს C თავის კონტურად. ეს თვისება ანალოგიურია ბრტყელი ფიგურის ცალადბმულობის თვისებებისა. G არეს, რომელსაც აქვს ზემოთ აღნიშნული თვისება, ვუწოდოთ *ზედაპირულად ცალად-*

ბ მ უ ლ ი ა რ ე. მაგალითად, ორი კონცენტრული სფერული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეული ზედაპირულად ცალადბმული არეა. როგორი შეკრული კონტურიც გინდა ავიღოთ ამ არის შიგნით, მასზე დაიჭიმება ზედაპირი, რომელიც მთლიანად არეს ეკუთვნის. ტორი არ წარმოადგენს ზედაპირულად ცალადბმულ არეს.

ვთქვათ, G არე არის ზედაპირულად ცალადბმული არე. დავჭიმოთ C კონტურზე S ზედაპირი, რომელიც G-შია მოთავსებული და სტოქსის ფორმულის მიხედვით (8.1) ინტეგრალი შევცვალოთ ზედაპირული ინტეგრალით

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dzdy+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{dx}\right)dxdz.$$

ამ ინტეგრალის ნულთან ტოლობისათვის საკმარისია შემდეგი პირობები

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\,. \tag{8.2}$$

ეს პირობები აუცილებელიცაა, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ ბრტყელ S ფიგურებს, რომლებიც რიგ-რიგობით მდებარეობენ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებში.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (8.2) პ ი რ ო ბ ე ბ ი ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა დ ა ს ა კ მ ა რ ი ს ი ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ წ ი რ ი თ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz \tag{8.3}$$

ი ყ ო ს დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი G ა რ ი ს ო რ ი ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი A დ ა B წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ს შ ე მ ა ე რ თ ე ბ ე ლ ი AB წ ი რ ი ს ფ ო რ მ ა ზ ე (აქ იგულისხმება, რომ G არე ზედაპირულად ცალადბმულია).

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ (8.3) ინტეგრალი გზიდან დამოუკიდებელია, მაშინ აქედან გამომდინარეობს (8.1) წირითი ინტეგრალის ნულთან ტოლობა ყოველ მარტივ შეკრულ C კონტურზე და, მაშასადამე, (8.2) პირობის შესრულება.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. თუ შესრულებულია (8.2) პირობები, მაშინ ყოველ მარტივ შეკრულ C კონტურზე (8.1) ინტეგრალი ნულის ტოლია. აქედან ვღებულობთ ტოლობას

$$\int_{AIB} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{AIIB} Pdx+Qdy+Rdz. \tag{8.4}$$

თუ AIB და $AIIB$ წირებს არა აქვთ საერთო წერტილები, გარდა A და B წერტილებისა. თუკი ეს წირები იკვეთებიან, მაშინ G არეში ყოველთვის შეგვიძლია ავიღოთ ისეთი $AIIIB$ წირი, რომელიც არ იკვეთება AIB და $AIIB$ წირებთან. მაშინ

$$\int\limits_{AIB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AIIIB} Pdx+Qdy+Rdz,$$

$$\int\limits_{AIIB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AIIIB} Pdx+Qdy+Rdz.$$

აქედან მიიღება (8.4) ტოლობა.

ამ შედეგს შეიძლება დავუკავშიროთ საკითხი იმის შესახებ, იქნება თუ არა გამოსახულება

$$Pdx+Qdy+Rdz \tag{8.5}$$

სამი ცვლადის რაიმე ცალსახა ფუნქციის სრული დიფერენციალი. მართებულია შემდეგი

თეორემა 8. თუ G ზედაპირულად ცალადბმული არეა, მაშინ (8.2) პირობები აუცილებელია და საკმარისი იმისათვის, რომ (8.5) გამოსახულება იყოს სრული დიფერენციალი.

ამ შემთხვევაში პირველყოფილი $U(x, y, z)$ ფუნქცია გამოისახება წირითი ინტეგრალით

$$U(x, y, z)=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

§ 9. ოსტროგრადსკის ფორმულა

ოსტროგრადსკის ფორმულა ამყარებს კავშირს სივრცულ არეზე გავრცელებულ სამჯერად ინტეგრალსა და არის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალს შორის. ჯერ შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა. სამგანზომილებიან G არეს ვუწოდებთ მარტივ სხეულს xOy სიბტყის მიმართ, თუ იგი შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი ზედაპირებით

$$S_1: z=z_1(x, y),\ S_2: z=z_2(x, y)\quad (z_1\leqslant z_2) \tag{9.1}$$

და ცილინდრული S_3 ზედაპირით, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია.

S_3 ზედაპირის მიმართებით წარმოადგენს უბან-უბან გლუვი შეკრული L კონტური xOy სიბრტყეზე, რომელიც შემოსაზღვრავს D არეს.

ცხადია, მარტივი სხეული წარმოადგენს ორი ცილინდრის ჯამს ან სხვაობას.

თეორემა 4. ვთქვათ, G არე წარმოადგენს თითოეული xOy, yOz, zOx სიბრტყეების მიმართ მარტივი სხეულების ჯამს. თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ ფუნქციები და კერძო წარმოებულები $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ უწყვეტია G არეში, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy, \quad (9.2)$$

სადაც S არის G არის შემომსაზღვრელი ზედაპირი, ამასთან, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია S ზედაპირის გარე მხარეზე.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ G არე არის მარტივი სხეული xOy სიბრტყის მიმართ და განვიხილოთ სამჯერადი ინტეგრალი

$$I = \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz.$$

თუ ვაინტეგრებთ z-ით, მივიღებთ

$$I = \iint\limits_D \Big[R\,(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1\,(x, y))\Big] dxdy,$$

სადაც D წარმოადგენს G არის გეგმილს xOy სიბრტყეზე. ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ორი ზედაპირული ინტეგრალის სხვაობას წარმოადგენს. ორივე ინტეგრალი აღებულია შესაბამისად S_2 და S_1 ზედაპირების ზედა მხარეზე, სადაც S_1 და S_2 ზედაპირების განტოლებებია (9.1). ასე, რომ

$$I = \iint\limits_{S^+_2} R(x, y, z)dxdy - \iint\limits_{S^+_1} R(x, y, z)\,dxdy.$$

მაშასადამე,

$$I = \iint\limits_{S^+_2} R(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{S_1^-} R(x, y, z)dxdy.$$

ეს ტოლობა არ დაირღვევა, თუ მის მარჯვენა ნაწილს მივუმატებთ S_3 ზედაპირის გარე მხარეზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალს

$$\iint_{S_3} R(x, y, z)dxdy,$$

რომელიც ნულის ტოლია, ამიტომ

$$I = \iint_{S} R(x, y, z)\,dxdy,$$

ე. ი.

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_S R(x, y, z)dxdy.$$

ახლა ვთქვათ, G არე წარმოადგენს xOy სიბრტყის მიმართ მარტივ სხეულთა ჯამს:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n.$$

ვიგულისხმოთ, რომ G არე შემოსაზღვრულია ზემოდან, ქვემოდან და გვერდებიდან S^*, S_* და S' ზედაპირებით შესაბამისად, ხოლო ყოველი G_k არე შემოსაზღვრულია ზემოდან და ქვემოდან $S_k^{(2)}$ და $S_k^{(1)}$ ზედაპირებით შესაბამისად. მაშინ

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \sum_{k=1}^{n} \iiint_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

მაგრამ

$$\iiint_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_k^{(2)}} R(x, y, z)dxdy + \iint_{S_k^{(1)}} R(x, y, z)dxdy,$$

ხოლო

$$\iint_{S'} R(x, y, z)dxdy = 0.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k^{(2)}} R(x, y, z)\,dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k^{(1)}} R(x, y, z)\,dxdy + \iint_{S'} R(x, y, z)dxdy.$$

რადგანაც

$$(S_1^{(1)} \cup S_2^{(1)} \cup \cdots \cup S_n^{(1)}) \cup (S_1^{(2)} \cup S_2^{(2)} \cup \cdots \cup S_n^{(2)}) \cup S' = S,$$

სადაც S წარმოადგენს G არის შემომსაზღვრელ ზედაპირს, ამიტომ

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S R(x, y, z)\, dxdy. \tag{9.3}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია S ზედაპირის გარე მხარეზე.

თუ G არე წარმოიდგინება თითოეული yOz, და zOx სიბრტყეების მიმართ მარტივი სხეულების ჯამის სახით, მაშინ ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_S P(x, y, z) dydz, \tag{9.4}$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_S Q(x, y, z) dzdx. \tag{9.5}$$

მაშასადამე, თუ G არე წარმოიდგინება თითოეული xOy, yOz და zOx სიბრტყეების მიმართ მარტივი სხეულების ჯამის სახით, მაშინ (9.3), (9.4) და (9.5) ტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს (9.2) ტოლობას.

(9.2) ფორმულას ეწოდება **ოსტროგრადსკის ფორმულა**. ეს ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$
$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS,$$

სადაც $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ წარმოადგენენ S ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს.

ოსტროგრადსკის ფორმულიდან მიიღება მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა, რომელსაც ხშირად სასარგებლო გამოყენება აქვს. ვთქვათ, (9.2) ფორმულაში $P \equiv x$, $Q \equiv 0$, $R \equiv 0$, მაშინ გვექნება

$$\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_S xdydz.$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილში გვაქვს S ზედაპირით შემოსაზღვრული არის მოცულობა და, მაშასადამე, G არის V მოცულობა გამოისახება S ზედაპირზე აღებული ზედაპირული ინტეგრალით:

$$V=\iint\limits_S xdydz. \tag{9,6}$$

იგივე V მოცულობა შეიძლება გამოვთვალოთ აგრეთვე შემდეგი ფორმულებით

$$V=\iint\limits_S ydxdz, \quad V=\iint\limits_S zdxdy. \tag{9,7}$$

თუ (9.6) და (9.7) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილს 3-ზე გავყოფთ, მივიღებთ

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy. \tag{9.8}$$

§ 10. გრინის მეორე ფორმულა

ავიღოთ R^3 სივრცეში დახურული T არე, რომელიც შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი S ზედაპირით. ვთქვათ T არეში განსაზღვრულია $u(x, y, z)$ და $v(x, y, z)$ ფუნქციები, რომლებსაც აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ამის გარდა, მეორე რიგის წარმოებულები

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, უწყვეტია.

მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\iiint\limits_T (v\Delta u-u\Delta v)dxdydz=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS, \tag{10.1}$$

სადაც

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

ხოლო ზედაპირული ინტეგრალი აღებულია S ზედაპირის გარე მხარეზე. ამ ინტეგრალის ქვეშ მდგომ გამოსახულებაში $\frac{\partial u}{\partial n}$ და $\frac{\partial v}{\partial n}$ წარმოადგენენ u და v ფუნქციების წარმოებულებს S ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულებით.

განვიხილოთ სამჯერადი ინტეგრალი

$$I=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz.$$

ეს ინტეგრალი წარმოვადგინოთ S ზედაპირზე გავრცელებული ინტეგრალის სახით. ჯერ მხედველობაში მივიღოთ შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

ამ ტოლობების გამოყენებით I ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$I=\iiint_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz-$$
$$-\iiint_T u\Delta v dxdydz.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრებისათვის გამოვიყენებთ ოსტროგრადსკის ფორმულას, გვექნება

$$I=\iint_S u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)dS-$$
$$-\iiint_T u\Delta v dxdydz,$$

სადაც ზედაპირული ინტეგრალი აღებულია S ზედაპირის გარე მხარეზე.

რადგანაც

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma=\frac{\partial v}{\partial n},$$

ამიტომ

$$I=\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_T u\Delta v dxdydz. \tag{10.2}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$I=\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint_T v\Delta u dxdydz. \tag{10.3}$$

თუ (10.2) ტოლობას გამოვაკლებთ წევრ-წევრად (10.3) ტოლობას, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ (10.1) ტოლობას.

(10.1) ფორმულას ეწოდება გ რ ი ნ ი ს მ ე ო რ ე ფ ო რ მ უ ლ ა·

თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციები განსაზღვრულია ω არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი γ წირით და ამ ფუნქციებს აქვს პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები და აგრეთვე უწყვეტი $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ წარმოებულები, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_{\omega} (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \tag{10.4}$$

სადაც Δ სიმბოლოთი აღნიშნულია ლაპლასის ოპერატორი $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ხოლო $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ არის γ კონტურის გარე ნორმალის მიმართულებით აღებული წარმოებულები.

თუ (10.4) ტოლობაში $v(x, y) \equiv 1$, მაშინ გვექნება

$$\iint_{\omega} \Delta u\, dxdy = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS. \tag{10.5}$$

ანალოგიურ ტოლობას მივიღებთ სივრცის შემთხვევაში, თუ გრინის მეორე ფორმულაში ვიგულისხმებთ $v(x, y, z) \equiv 1$. ამ ტოლობას ექნება ასეთი სახე:

$$\iiint_{T} \Delta u dxdydz = \iint_{S} \frac{\partial u}{\partial n} dS. \tag{10.6}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. რაიმე ω არეში ორჯერ დიფერენცირებად $u(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება ჰარმონიული, თუ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

დაამტკიცეთ, რომ $u(x, y)$ არის ჰარმონიული ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი შეკრული γ კონტურისათვის, რომელიც ω არეშია მოთავსებული, მართებულია ტოლობა

$$\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ

$$\iint\limits_{\omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_{\omega}u\Delta u dxdy+\int\limits_{\gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

სადაც გლუვი γ კონტური შემოსაზღვრავს შემოსაზღვრულ ω არეს.

3. გამოთვალეთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS,$$

სადაც S არის $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ სხეულის საზღვარი.

პასუხი: $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

4. გამოთვალეთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2},$$

სადაც S არის $x+y+z\leqslant 1,\quad x\geqslant 0, y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0$ ტეტრაედრის საზღვარი.

პასუხი: $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.

5. იპოვეთ ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ ერთგვაროვანი სფერული გარსისა

$$x^2+y^2+z^2=a^2\quad(z\geqslant 0),$$

რომლის სიმკვრივეა ρ_0.

პასუხი: $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$.

თავი XVII

ველის თეორიის ელემენტები

§. 1. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია

ვექტორს, რომლის კოორდინატებია რაიმე სკალარული არგუმენტის ფუნქცია, ამავე არგუმენტის ვ ე ქ ტ ო რ-ფ უ ნ ქ ც ი ა ეწოდება.

განვიხილოთ რაიმე $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორი, რომლის კოორდინატებია t ცვლადის ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე. ეს ვექტორი შემოკლებით აღვნიშნოთ $\vec{P}(t)$ სიმბოლოთი. მივდოთ $\vec{P}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია რაიმე მკვიდრ წერტილს. მაშინ $\vec{P}$ ვექტორის ბოლო მოხაზავს წირს, რომელსაც ამ ვექტორის ჰ ო დ ო გ რ ა ფ ი ეწოდება.

ახლა შემოვიღოთ ცვლადი ვექტორის ზღვარის ცნება. ვთქვათ, ცვლადი $\vec{r}(t)$ ვექტორი განსაზღვრულია t_0 სკალარის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია, t_0 მნიშვნელობისა. ვიტყვით, რომ მუდმივი $\vec{r}_0$ ვექტორი ზღვარია $\vec{r}(t)$ ვექტორისა t_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$|\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\varepsilon, \text{ როდესაც } 0<|t-t_0|<\delta.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0.$$

სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციათა ჯამისათვის, აგრეთვე ვექტორ-ფუნქციის სკალარულ ფუნქციაზე ნამრავლისათვის, ძალაში რჩება ის დებულებანი, რომლებიც დამტკიცებული იყო მხოლოდ სკალარული ფუნქციებისათვის.* სახელდობრ, მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t).$$

§ 2. ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, $\vec r(t)$ ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. t_0-ს მივცეთ ისეთი Δt ნაზრდი, რომ $t_0+\Delta t$ წერტილი ეკუთვნოდეს t_0 წერტილის აღნიშნულ მიდამოს. სხვაობას $\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)$ ეწოდება მოცემულ ვექტორ-ფუნქციის ნაზრდი და იგი აღინიშნება $\overrightarrow{\Delta r}$ სიმბოლოთი. ამრიგად

$$\vec r(t_0+\Delta t)=\vec r(t_0)+\overrightarrow{\Delta r}.$$

და ვექტორთა შეკრების წესის თანახმად $\vec r(t_0)$, $\vec r(t_0+\Delta t)$ და $\overrightarrow{\Delta r}$ ვექტორები შეკრავს სამკუთხედს.

ახლა გავყოთ $\overrightarrow{\Delta r}$ ვექტორი Δt სკალაზე, მივიღებთ $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ ვექტორს, რომელიც წარმოადგენს Δt ნაზრდის ვექტორ-ფუნქციას. თუ არსებობს $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ ვექტორის ზღვარი, როდესაც $\Delta t\to 0$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $\vec r(t)$ ვექტორის წარმოებული t_0 წერტილში და აღინიშნება $\vec r\,'(t_0)$ ან $\frac{d\vec r}{dt}$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, *ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული სკალარული არგუმენტით არის ვექტორ-ფუნქციის ნაზრდისა და სკალარული არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარი, როდესაც სკალარული არგუმენტის ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფვის.*

ვექტორს, რომელსაც წარმოებული აქვს, *დიფერენცირებადი* ვექტორი ეწოდება.

თეორემა 1. *ვექტორის წარმოებულის კოორდინატები მოცემული ვექტორის კოორდინატთა წარმოებულის ტოლია.*

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული $\vec r$ ვექტორის კოორდინატებია x, y, z, რომლებიც სკალარული t არგუმენტის დიფერენცირებად ფუნქციებს წარმოადგენენ. მაშინ

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k, \tag{2.1}$$

სადაც $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ — კოორდინატთა ღერძების ორტებია. სკალარული არგუმენტის ფიქსირებულ t მნიშვნელობას მივცეთ Δt ნაზრდი, მაშინ

x, y, z, კოორდინატების ნაზრდები შესაბამისად იქნება Δx, Δy, Δz, რის გამოც (2.1) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\vec{r}+\Delta\vec{r}=(x+\Delta x)\vec{i}+(y+\Delta y)\vec{j}+(z+\Delta z)\vec{k}. \qquad (2.2)$$

გამოვაკლოთ (2.2) ტოლობას (2.1) ტოლობა, გვექნება

$$\Delta\vec{r}=\Delta x\cdot\vec{i}+\Delta y\cdot\vec{j}+\Delta z\cdot\vec{k}.$$

გავყოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი არგუმენტის Δt ნაზრდზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta t\to 0$ მივიღებთ.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\vec{j}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\vec{k}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

საიდანაც

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

მაშასადამე, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ვექტორის კოორდინატებია $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, თეორემა დამტკიცებულია.

იმ წესების ანალოგიურად, რომლებიც ფუნქციათა გაწარმოებისათვის გვქონდა, მართებულია შემდეგი დებულებები:

1°. მუდმივი ვექტორის წარმოებული ნულოვანი ვექტორია.

2°. ვექტორთა ჯამის წარმოებული შესაკრებ ვექტორთა წარმოებულების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{d(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

3°. სკალარული ფუნქციის ვექტორულ ფუნქციაზე ნამრავლის წარმოებული იმავე წესით მოიძებნება, რომლითაც ორი სკალარული ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული, ე. ი.

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)\,\vec{r}(t)]=\vec{r}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}+\varphi(t)\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

კერძოდ, თუ c მუდმივია, გვექნება

$$\frac{d}{dt}[c\,\vec{r}(t)]=c\,\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

4°. ორი ვექტორ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლის გაწარმოება

იმავე წესით ხდება, რაც ორი სკალარული ფუნქციის ნამრავლისა, ე. ი.

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)]=\vec{r}_1(t)\cdot\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}+\vec{r}_2\cdot\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt},$$

5°. ორი ვექტორ-ფუნქციის ვექტორული ნამრავლის გაწარმოება ხდება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)]=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

ამ დებულებათა დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

მე-4° დებულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი.

შედეგი. *მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული თვით ამ ვექტორის მართობულია.*

მართლაც, ვთქვათ $|\vec{r}(t)|=c$, მაშინ $[\vec{r}(t)]^2=c^2$ და, სკალარული ნამრავლის გაწარმოება გვაძლევს

$$2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0.$$

საიდანაც $\vec{r}\perp\vec{r}'$.

§ 8. ვექტორის წარმოებულის გეომეტრიული და მექანიკური ინტერპრეტაცია

1°. მოცემული $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია მოვდოთ მკვიდრ O წერტილს. მაშინ, როგორც ვიცით, $\vec{r}(t)$ ვექტორის ბოლო მოხაზავს ამ ვექტორის ჰოდოგრაფს. გამოვარკვიოთ, რა გეომეტრიული აზრი აქვს $\vec{r}'(t_0)$ წარმოებულს. როგორც ვიცით

$$\vec{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}.$$

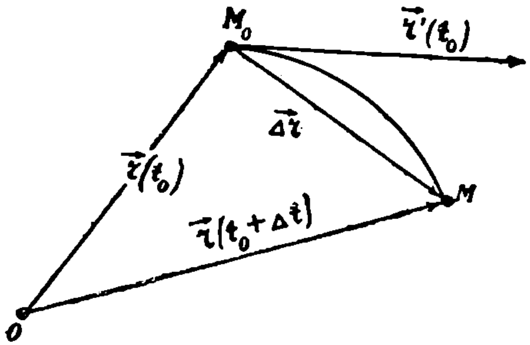
$\overline{\Delta r}=\overline{M_0M}$ ვექტორი მუდამ გადის ჰოდოგრაფის M_0 და M წერტილებზე (ნახ. 53), რომელთაგანაც პირველი მკვიდრია, მეორე კი ცვლადია. იმავე წერტილებზე გამავალ წრფეზე, ე. ი. ჰოდოგრაფის მკვეთ წრფეზე ძევს $\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ ვექტორი. ამის გამო $\vec{r}'(t_0)$ წარმოებული გადის ჰოდოგრაფის M_0 წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფის ზღვრულ წრფეზე, თუ ასეთი არსებობს.

მაშასადამე, მოცემული ვექტორის წარმოებული ძევს

მოცემული ვექტორის ჰოდოგრაფის M_0 წერტილზე გამავალ მხებ წრფეზე, ესაა ვექტორის წარმოებულის გეომეტრიული აზრი.

2°. როდესაც ვამბობთ, რომ რაიმე M წერტილის მოძრაობა მოცემულია, ეს იმას ნიშნავს, რომ დროის ყოველი მომენტისათვის ცნობილია M წერტილის მდებარეობა. თავის მხრივ, M წერტილის მდებარეობა ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია ცვლადი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი, რომელიც მკვიდრ O წერტილიდან მოძრავ M წერტილამდე მიდის.

ამრიგად, ვთქვათ, მოცემულია $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი როგორც t დროის ვექტორ-ფუნქცია, მოდებული O წერტილში. მოძრაობის დაწყების მომენტად მივიჩნიოთ t_0, ხოლო ამ მომენტში მოძრავი წერტი-



ნახ. 53.

ლის მდებარეობა იყოს M_0. ვთქვათ, მოძრაობის დაწყების მომენტიდან განვლილი დროა Δt, ხოლო დროის $t_0+\Delta t$ მომენტში მოძრავი წერტილის მდებარეობაა M, მაშინ $\Delta\vec{r}=\overline{M_0M}$ ვექტორს ეწოდება წერტილის ვექტორული გადაადგილება, ე. ი. ვექტორული გადაადგილება წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მოძრავი წერტილის საწყისი მდებარეობიდან იწყება და თავდება მოცემულ მომენტში წერტილის მდებარეობით (ნახ. 54).

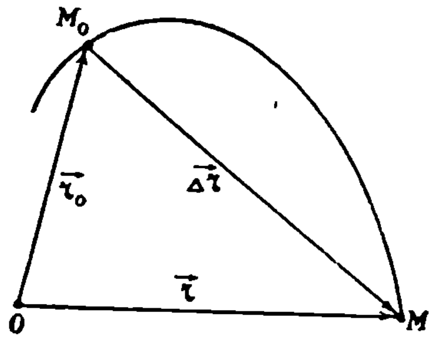
ვექტორული გადაადგილების ფარდობას დროის შესაბამის ნაზრდთან ეწოდება წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარე. ამგვარად, წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარეა $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ვექტორი.

საშუალო ვექტორული სიჩქარის ზღვარს, როდესაც $\Delta t\to 0$, ეწოდება წერტილის ვექტორული სიჩქარე

აღებულ მომენტში. ეს არის იმ წერტილის სიჩქარე, რომლის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = \vec{r}(t)$. მაგრამ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \vec{r}'(t).$$

ამრიგად, მოცემული $\vec{r}(t)$ ვექტორის წარმოებული უდრის ამ ვექტორის მოძრავი ბოლო წერტილის ვექტორულ სიჩქარეს. ეს ვექტო-



ნახ. 54.

რის წარმოებულის მექანიკური აზრია. მოძრავი წერტილის ვექტორული სიჩქარე ძევს ამ წერტილის ტრაექტორიის მხებზე.

§ 4. სივრცითი წირის მხების განტოლება. ნორმალური სიბრტყე

განვიხილოთ რაიმე C წირი, რომლის პარამეტრული განტოლებებია

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{4.1}$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

(4.1) განტოლებები შეგვიძლია ჩავწეროთ ერთი განტოლების საშუალებით

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{4.2}$$

სადაც $\vec{r}(t)$ ვექტორის კოორდინატებია $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

ავიღოთ C წირზე რაიმე $M(x, y, z)$ წერტილი. ცხადია, რომ $\frac{d\vec{r}}{dt}$ წარმოადგენს C წირის M წერტილზე გამავალი მხების მიმართ-

ველ ვექტორს. შემდეგ, რაკი $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ვექტორის კოორდინატებია $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ამიტომ ზემოთ აღნიშნული მხების განტოლება იქნება

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}, \tag{4.3}$$

სადაც X, Y, Z წარმოადგენენ მხების ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს. (4.3) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ ასე

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}. \tag{4.4}$$

C წირის შეხების M წერტილზე მხების მართობულად გამავალ სიბრტყეს წირის **ნორმალური სიბრტყე** ეწოდება.

თუ გავიხსენებთ წრფისა და სიბრტყის მართობულობის პირობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \tag{4.5}$$

ეს განტოლება წარმოადგენს მოცემული წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გამავალი ნორმალური სიბრტყის განტოლებას.

§ 5. სკალარული და ვექტორული ველი

სივრცით არეს, რომლის ყოველ წერტილს შეესაბამება ფიზიკური სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა, **ველი** ეწოდება. თუ ფიზიკური სიდიდე სკალარია, მაშინ ველს **სკალარული ველი** ჰქვია. მაგალითად, გახურებული სხეული გვაძლევს ტემპერატურათა ველს, მოცემულია სკალარული ველი ნიშნავს იმას, რომ განსაზღვრულია სკალარული U ფუნქცია. ამ ფუნქციას **ველის ფუნქცია** ეწოდება.

თუ ფიზიკური სიდიდე ვექტორია, მაშინ ველს **ვექტორული ველი** ეწოდება. ვექტორული ველი მოცემულია, თუ სივრცითი არის ყოველ M წერტილში ცნობილია ამ წერტილის შესაბამისი $\vec{A}(M)$ ვექტორი.

ჩვენ განვიხილავთ სტაციონარულ ველს, ე. ი. ველს, რომლისთვისაც $\vec{A}(M)$ ვექტორი დამოკიდებულია მხოლოდ M წერტილზე და დამოკიდებული არაა t დროზე. $\vec{A}(M)$ ფუნქციას **ვექტორული ვე-**

ლ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ეწოდება. შემდეგში თვით ამ ფუნქციას ვუწოდებთ ვექტორულ ველს. ვექტორული ველის მაგალითებს წარმოადგენენ ძალთა ველი, მდინარი სითხის სიჩქარეთა ველი და ა. შ.

ახლა განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. აღვნიშნოთ A_x, A_y, A_z სიმბოლოებით $\vec{A}(M)$ ვექტორის გეგმილები Ox, Oy, Oz ღერძებზე შესაბამისად. თუ M წერტილის კოორდინატებია x, y, z, მაშინ $\vec{A}(M)$ ვექტორი და მისი გეგმილები წარმოადგენენ ამ კოორდინატების ფუნქციებს და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec{A}(M)=A_x(x,\, y,\, z)\,\vec{i}+A_y(x,\, y,\, z)\,\vec{j}+A_z(x,\, y,\, z)\,\vec{k}\,,$$

სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ წარმოადგენენ შესაბამისად Ox, Oy, Oz ღერძების ორტებს.

ამრიგად, ერთი ვექტორული $\vec{A}(M)$ ველის მოცემა ტოლფასია სამი A_x, A_y, A_z სკალარული ველის მოცემისა. შემდეგში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ A_x, A_y, A_z უწყვეტი ფუნქციებია თავიანთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად.

§ 6. ვექტორული წირი

ვექტორული ველის დახასიათებისას განსაკუთრებულ როლს ასრულებს ეგრეთ წოდებული ველის ვექტორული წირები. ვექტორული ველის ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი წ ი რ ი ისეთი წირია, რომლის ყოველ M წერტილში გავლებული მხები $\vec{A}(M)$ ვექტორის მიმართულებისაა. ვექტორულ წირებს კონკრეტულ ველებში აქვთ გარკვეული ფიზიკური აზრი. ასე, მაგალითად, თუ განვიხილავთ მდინარის სითხის სიჩქარეთა ველს, მაშინ ვექტორული წირები ის წირებია, რომლებზედაც მოძრაობენ სითხის ნაწილაკები. ელექტრულ ველში ვექტორული წირებია ამ ველის ძალთა წირები. მაგნიტური ველისათვის ვექტორულ წირებს წარმოადგენენ წირები, რომლებიც გამოდიან ჩრდილო პოლუსიდან და თავდებიან სამხრეთ პოლუსში. ძალთა წირების განლაგების შესწავლა ელექტრულ, მაგნიტურ და ელექტრომაგნიტურ ველებში ფრიად მნიშვნელოვანია ბუნებისმეტყველებაში.

ახლა გამოვიყვანოთ ვექტორული წირების განტოლებანი. ვთქვათ C წირის პარამეტრული განტოლებებია

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია. განვიხილოთ C წირის ცვლადი M წერტილის რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z.$$

როგორც ვიცით, ვექტორი

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}.$$

წარმოადგენს C წირის მხებს M წერტილში. თუ C არის ვექტორული წირი, მაშინ $\frac{d\vec{r}}{dt}$ და $\vec{A}(M)$ ვექტორები პარალელურია. ამიტომ გვექნება შემდეგი ტოლობები

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ ველის ვექტორული წირების ეგრეთ წოდებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნის საშუალებით შეიძლება ველის წირების აგება.

შევნიშნოთ, რომ თუ ველი ბრტყელია, ე. ი. $A_z = 0$, მაშინ ვექტორული წირები ძევს xOy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში და ამ წირთა დიფერენციალური განტოლებაა

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}.$$

§ 7. წრფივი ინტეგრალი და ცირკულაცია

ვთქვათ, სივრცეში, რომელშიაც მოცემულია $\vec{A}(M)$ ველი, აღებულია ორიენტირებული უბან-უბან გლუვი C წირი. $\vec{A}(M)$ ვექტორის წრფივი ინტეგრალი C წირის გასწვრივ ეწოდება წირით ინტეგრალს

$$I = \int_C A_\tau d_s,$$

სადაც A_τ არის $\vec{A}(M)$ ვექტორის გეგმილი C წირის მხებზე, რადგანაც $d\vec{r}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\vec{\tau}$ ვექტორის მიმართულებას, ხოლო $|d\vec{r}| = ds$, ამიტომ

$$\int_C A_\tau ds = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz. \tag{7.1}$$

წრფივი ინტეგრალი სკალარული სიდიდეა და აქვს წირითი ინტეგრალის ჩვეულებრივი თვისებები.

წრფივი ინტეგრალის ფიზიკური შინაარსი მარტივია, თუ $\vec{A}$ არის ძალთა ველი. ამ შემთხვევაში (7.1) ინტეგრალი წარმოადგენს ველის მიერ შესრულებულ მუშაობას, როდესაც წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს ძალა, გაირბენს C წირს.

თუ C წირი შეკრულია, მაშინ წრფივ ინტეგრალს $\vec{A}$ ველის ც ი რ კ უ ლ ა ც ი ა ეწოდება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ ამ ველის მუშაობა დამოკიდებულია გზისაგან. ანუ, თუ ვექტორული ველის ცირკულაცია ყოველ შეკრულ წირზე ნულის ტოლია.

თუ $\vec{A}$ ველი პოტენციალურია, მაშინ არსებობს ისეთი დიფერენცირებადი $U(x, y, z)$ ფუნქცია, რომ

$$dU = A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

ასეთ შემთხვევაში U ფუნქციას ეწოდება $\vec{A}$ ვ ე ლ ი ს პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ ი.

ამრიგად, ვექტორული A ველი პოტენციალურია, თუ არსებობს ისეთი სკალარული U ველი, რომ

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U.$$

§ 8. ვექტორის ნაკადი. დივერგენცია. როტორი

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორული ველი

$$\vec{A}(M) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

ავიღოთ ამ ველში რაიმე ორპირა ზედაპირი და მასზე შევარჩიოთ გარკვეული მხარე. აღვნიშნოთ $\vec{n}$-ით ზედაპირის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის ორტი. $\vec{n}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. განვიხილოთ S ზედაპირზე გავრცელებული ზედაპირული ინტეგრალი $\vec{A}(M)$. $\vec{n}$ სკალარული ნამრავლიდან:

$$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma)\, dS. \tag{8.1}$$

თუ $\vec{A}(M)$ მდინარი სითხის სიჩქარეთა ველია, მაშინ (8.1) ინტეგრალი გამოსახავს სითხის ნაკადს S ზედაპირის გამჭოლს.

ნებისმიერ ვექტორულ A ველში (8.1) ინტეგრალს ეწოდება S ზედაპირის გამჭოლი ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ნ ა კ ა დ ი. ამგვარად, ზედაპირის გამჭოლი ვექტორის ნაკადი არის ზედაპირული ინტეგრალი ვექტორუ-

ლი ველისა და ზედაპირის ნორმალის ორტის სკალარული ნამრავლიდან:

$$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n}\, dS.$$

განსაკუთრებით საინტერესოა ის შემთხვევა, როდესაც S შეკრული ზედაპირია. თუ ავიღებთ გარე ნორმალს, მაშინ ნაკადი გვექნება S ზედაპირის შიგნიდან.

რადგანაც $\vec{A}(M)$ და $\vec{n}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი $A_n(M)$ სიდიდის ტოლია, სადაც $A_n(M)$ არის $\vec{A}(M)$ ვექტორის გეგმილი $\vec{n}$ მიმართულებაზე, ამიტომ (8.1) ნაკადი ჩაიწერება ასე:

$$\iint_S A_n(M) dS.$$

თუ გამოვიყენებთ ოსტროგრადსკის ფორმულას A_x, A_y, A_z ფუნქციებზე, გვექნება

$$\iiint_G \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S A_n dS.$$

გამოსახულებას $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ეწოდება ვექტორული $\vec{A}(M)$ ველის დ ი ვ ე რ გ ე ნ ც ი ა და აღინიშნება $\mathrm{div}\,\vec{A}$ სიმბოლოთი:

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

მაშასადამე, ოსტროგრადსკის ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე:

$$\iiint_G div\,\vec{A}\, dxdydz = \iint_S A_n dS.$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ ყოველი ვექტორული $\vec{A}$ ველი გვაძლევს სკალარულ ველს $div\,\vec{A}$.

სტოქსის ფორმულის მიხედვით შეგვიძლია $\vec{A}$ ველის საშუალებით შევადგინოთ ახალი ვექტორული ველი. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P = A_x, \quad Q = A_y, \quad R = A_z$$

და დავწეროთ სტოქსის ფორმულა;

$$\int\limits_C A_x dx + A_y dy + A_z dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{8.2}$$

ახლა C წირის რკალის ელემენტი $\vec{ds}$ განვიხილოთ როგორც მცირე ვექტორი, რომლის გეგმილებია კოორდინატთა ღერძებზე dx, dy, dz, მაშინ

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \vec{A} \cdot \vec{ds} = A_s ds,$$

სადაც A_s არის $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილი C წირის მხებზე. ამის გარდა, განვიხილოთ ვექტორი, რომლის გეგმილებია Ox, Oy, Oz ღერძებზე

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

ამ ვექტორს $\vec{A}$ ველის როტორი ეწოდება და აღინიშნება $rot\,\vec{A}$. მაშასადამე, (8.2) ფორმულა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\int\limits_C A_s ds = \iint\limits_S rot\,\vec{A} \cdot \vec{n}\, dS.$$

მაგრამ

$$rot\vec{A} \cdot \vec{n} = rot_n \vec{A},$$

სადაც $rot_n\vec{A}$ არის $rot\,\vec{A}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე. ამრიგად, სტოქსის ფორმულის ვექტორული სახე იქნება

$$\int\limits_C A_s ds = \iint\limits_S rot_n \vec{A} dS.$$

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულება: იმისათვის, რომ ვექტორული $\vec{A}$ ველი იყოს პოტენციალური, აუცილებელია და საკმარისი ველის ყოველ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$rot\vec{A} = 0.$$

თავი XVIII

ფურიეს მწკრივი და ფურიეს ინტეგრალი

ბუნების მოვლენებისა და ტექნიკის პრობლემების შესწავლის თანამედროვე მეთოდებს შორის განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა პერიოდული ფუნქციის უმარტივეს პერიოდულ ფუნქციებად დაშლის მეთოდი, რომელიც განსაკუთრებულ როლს ასრულებს ზოგად მექანიკაში, მასალათა გამძლეობასა და დრეკადობის თეორიაში, რიცხვთა თეორიაში, ჰიდროდინამიკასა და აეროდინამიკაში, ელექტობასა და მაგნიტიზმში, რადიოტექნიკაში, ოპტიკაში, გეოფიზიკაში, სტატისტიკაში და ა. შ.

პერიოდული ფუნქციის დაშლის მეთოდის გამოყენების აღნიშნული დიაპაზონის გამო ეს მეთოდი შეისწავლებოდა სხვადასხვა დარგის მკვლევარების მიერ. მანქანათა კონსტრუქტორები და ასტრონომები, ფიზიკოსები და ფიზიოლოგები, ინჟინრები და მათემატიკოსები—ყველა გატაცებით მონაწილეობდა ამ ნაყოფიერი მეთოდის გაღრმავებასა და გამოგონებაში. ამის გამო ცოდნის სხვადასხვა დარგის წარმომადგენლები, გამოდიოდნენ რა ერთი და იმავე წყაროდან, რომელიც ფურიეს (Fourier) მიერ იყო აღმოჩენილი, მიდიოდნენ სხვადასხვა გზით.

§ 1. პერიოდული ფუნქციები. პერიოდული გაგრძელება

როგორც ვიცით, $]-\infty, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პ ე რ ი ო დ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი ნამდვილი რიცხვი T, რომ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$f(x+T)=f(x).$$

T რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს პ ე რ ი ო დ ი.

ცხადია, თუ T არის $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ $-T$ რიცხვიც იქნება იმავე ფუნქციის პერიოდი. ამიტომ, შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ პერიოდული ფუნქციის პერიოდი დადებითი რიცხვია.

თუ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ $f(kx)$ ფუნქციის პერიოდი, სადაც $k\neq 0$, იქნება $\frac{T}{k}$. მართლაც,

$$f\left[k\left(x+\frac{T}{k}\right)\right]=f(kx+T)=f(kx)$$

ნებისმიერი x-სათვის.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]a,b[$ ინტერვალში. განვსაზღვროთ $F(x)$ ფუნქცია ასე:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{როდესაც } a<x<b, \\ f(x-kT), & \text{როდესაც } a+kT<x<b+kT, \end{cases}$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო $T=b-a$. ამის გარდა $x=kT$ წერტილებში $F(kT)$ უნდა ავიღოთ ერთი და იმავე ნამდვილი რიცხვის ტოლი. გარკვეულობისათვის შევთანხმდეთ, რომ

$$F(kT)=\frac{f(a+)+f(b-)}{2} \quad (k=0,1,\ldots),$$

ცხადია, $F(x)$ განსაზღვრულია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში; იგი T პერიოდიანი ფუნქციაა. ამ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პ ე რ ი ო დ უ ლ ი გ ა გ რ ძ ე ლ ე ბ ა.

თეორემა 1. თ უ T პ ე რ ი ო დ ი ს $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა $[0,T]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე, მ ა შ ი ნ ი გ ი ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა ი მ ა ვ ე ს ი გ რ ძ ი ს ყ ო ვ ე ლ $[a,a+T]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე დ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx. \tag{1.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx. \tag{1.2}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მესამე ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $x=t+T$, მივიღებთ

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=-\int_a^0 f(x)dx.$$

მაშასადამე, (1.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი და მესამე ინტეგრალები ერთმანეთს გააბათილებენ და მივიღებთ (1.1) ტოლობას.

§ 2. კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციები. ბუნიაკოვსკისა და კოშის უტოლობები

განსაზღვრა 1. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქცია, თუ არსებობს ინტეგრალები

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ და } \int_a^b f^2(x)dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f^2(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია იმავე აზრით $[a,b]$ სეგმენტზე, მაგრამ არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია შეიძლება კვადრატით ინტეგრებადი არ იყოს. მაგალითად, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ფუნქცია ინტეგრებადია არასაკუთრივი აზრით $[0,1]$ სეგმენტზე, მაგრამ $f^2(x)=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა არასაკუთრივი აზრით $[0,1]$ სეგმენტზე.

ისმის კითხვა: თუ $f^2(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია სეგმენტზე, მაშინ იქნება თუ არა ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია? საზოგადოდ არა. მოვიყვანოთ

მაგალითი 1. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია},\\ -1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია}.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია ინტეგრებადი არაა $[0,1]$ სეგმენტზე, მაგრამ $f^2(x)=1$ ფუნქცია ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)g(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ დადებითი α და β რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}. \tag{2.1}$$

ახლა ვთქვათ,

$$\alpha=|f(x)|, \quad \beta=|g(x)|.$$

მაშინ (2.1) უტოლობის თანახმად გვექნება

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)].$$

რაკი $\frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$ ფუნქცია ინტეგრებადია, ამიტომ $|f(x)g(x)|$ ფუნქციაც ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია კვადრატით ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი იქნება აბსოლუტურად ინტეგრებადი.

თეორემა 3. კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა ჯამი არის კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე. გვაქვს

$$[f(x)+g(x)]^2=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x).$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრებად ფუნქციას $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ $f(x)+g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციაა იმავე სეგმენტზე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია კვადრატით ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $cf(x)$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციაა იმავე სეგმენტზე.

შედეგი. თუ $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x)$ აგრეთვე კვადრატით ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. ნებისმიერი ნამდვილი λ რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_a^b [\lambda f(x)+g(x)]^2dx=\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\int_a^b f^2(x)dx = A, \int_a^b f(x)g(x)\,dx = B, \int_a^b g^2(x)\,dx = C,$$

ნებისმიერი λ-სათვის გვაქვს

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0,$$

ამიტომ $A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ სამწევრის დისკრიმინანტი დააკმაყოფილებს პირობას

$$B^2 - AC \leqslant 0$$

ანუ

$$B^2 \leqslant AC.$$

აქედან ვღებულობთ (2.2) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. (2.2) უტოლობას ეწოდება ვ. ბუნიაკოვსკის უტოლობა.

განსაზღვრა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ გამოსახულებას $\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნორმა და აღინიშნება $\|f\|$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

განსაზღვრა 3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრალს $\int_a^b f(x)g(x)dx$ ეწოდება $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი და აღინიშნება (f, g):

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

ახლა ბუნიაკოვსკის უტოლობა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$|(f,g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|. \tag{2.3}$$

თეორემა 5. თუ $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{2.4}$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ ბუნიაკოვსკის უტოლობას, გვექნება

$$\|f+g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} = \sqrt{\|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2} = \|f\| + \|g\|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(2.4) უტოლობას ეწოდება **კოშის უტოლობა**.

განსაზღვრა 4. $[a,b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად ორ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ურთიერთორთოგონალური ფუნქციები** $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ მათი სკალარული ნამრავლი $(f,g)=0$, ე. ი.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

§ 3. ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონალურობა

ტრიგონომეტრიული სისტემა ეწოდება ფუნქციათა შემდეგ სისტემას:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{3.1}$$

თეორემა 6. (3.1) სისტემის ორი ნებისმიერი ფუნქცია ურთიერთორთოგონალურია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0, \tag{3.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0. \tag{3.3}$$

ამრიგად, ფუნქციები 1 და $\cos nx$ აგრეთვე 1 და $\sin nx$ ურთიერთორთოგონალურია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე.

ახლა განვიხილოთ (3.1) სისტემის $\cos mx$ და $\cos nx$ ფუნქციები, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთან $m \neq n$. რადგანაც

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]\,dx = 0. \quad (3.4)$$

მაშასადამე, $\cos mx$ და $\cos nx$ ფუნქციები ურთიერთორთოგონალურია.

შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ ფორმულებს

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)]\,dx = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx = 0. \quad (3.6)$$

ამრიგად, (3.1) სისტემის ორი ნებისმიერი ფუნქცია ურთიერთორთოგონალურია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ ახლა გამოვიყენებთ ფორმულებს

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\, dx = \pi, \tag{3.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)\, dx = \pi. \tag{3.8}$$

§ 4. 2π პერიოდის ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.1}$$

სადაც $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ნამდვილი რიცხვებია. ამ რიცხვებს (4.1) მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ (4.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ ამ მწკრივის ჯამი წარმოადგენს 2π პერიოდის ფუნქციას.

ახლა განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივებისათვის ამოცანა, რომელიც ხარისხოვანი მწკრივებისათვის განხილული ამოცანის ანალოგიურია.

ვთქვათ, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქცია იშლება ტრიგონომეტრიულ მწკრივად:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{4.2}$$

ვიპოვოთ a_k და b_k კოეფიციენტები. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ (4.2) და მისი $\sin nx$ და $\cos nx$ $(n=1, 2, \ldots)$ ფუნქციებზე გამრავლებით მიღებული მწკრივების წევრ-წევრად ინტეგრება შეიძლება.

თუ (4.2) ტოლობას წევრ-წევრად ვაინტეგრებთ $-\pi$-დან π-მდე, მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx \right).$$

(3.2) და (3.3) ფორმულების მიხედვით, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ყველა შესაკრები, გარდა პირველისა, ნულის ტოლია. ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0. \tag{4.3}$$

ახლა (3.2) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\cos nx dx$ გამოსახულებაზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ ისევ $-\pi$-დან π-მდე, მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx\right).$$

(3.2) ფორმულის ძალით ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, ხოლო (3.4) და (3.6) ფორმულების თანახმად ყველა ინტეგრალი ჯამის ნიშნის ქვეშ ნულის ტოლია, გარდა ერთი ინტეგრალისა

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi,$$

რომელიც დგას a_n კოეფიციენტებთან. მაშასადამე,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \pi a_n. \tag{4.4}$$

ანალოგიურად ვიპოვოთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \pi b_n. \tag{4.5}$$

4.3), (4.4) და (4.5) ტოლობებიდან ვღებულობთ :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0, 1, \ldots), \tag{4.6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

a_n და b_n კოეფიციენტებს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი, ხოლო ტრიგონომეტრიულ მწკრივს ასეთი a_n და b_n კოეფიციენტებით ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ წ კ რ ი ვ ი ანუ, შემოკლებით, $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ი.

შევნიშნოთ, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქციისათვის ყოველთვის შეგვიძლია შევადგინოთ ფურიეს კოეფიციენტები და, მაშასადამე, ფურიეს მწკრივიც, მაგრამ ეს მწკრივი შეიძლება კრებადი არ იყოს. ამიტომ ვწერთ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

ასეთი ჩაწერა მხოლოდ იმას აღნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება ფურიეს მწკრივი, რომელიც დაწერილია $\sim$ სიმბოლოს მარჯვნივ. $\sim$ სიმბოლო შეგვიძლია შევცვალოთ $=$ ნიშნით მხოლოდ მაშინ, როდესაც მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი შ ლ ე ბ ა ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ა დ.

თეორემა 7. თ უ 2π პ ე რ ი ო დ ი ს $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა $[-\pi,\pi]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე ი შ ლ ე ბ ა თ ა ნ ა ბ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ მ წ კ რ ი ვ ა დ, მ ა შ ი ნ ე ს. მ წ კ რ ი ვ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია (4.2 ტოლობა, სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. რადგანაც ამ მწკრივის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, $f(x)$-ის პერიოდულობის გამო, ეს ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამის გარდა, შეიძლება (4.2) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება, რაც მოგვცემს (4.3) ტოლობას.

ახლა (4.2) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\cos nx$ ფუნქციაზე, გვექნება

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cos nx + b_k\sin kx\cos nx).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მწკრივი თანაბრად კრებადია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე. მაშასადამე, შეიძლება მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება, რაც მოგვცემს (4.4) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება (4.5) ტოლობის მართებულობა. ამით დამტკიცებულია a_n და b_n კოეფიციენტებისათვის (4.6) და (4.7) ფორმულები. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ვაიერშტრასის მეორე თეორემა უწყვეტი ფუნქციის აპროქსიმაციის შესახებ

მათემატიკურ ანალიზსა და გამოყენებით საკითხებში საჭიროა ვიცოდეთ პერიოდული $f(x)$ ფუნქციების მიახლოება უმარტივესი ფუნქციებით.

თუ $f(x)$ არის 2π პერიოდის ფუნქცია, მაშინ ბუნებრივია, მააპროქსიმებელ ფუნქციებად უნდა ავიღოთ არა მრავალწევრები, არამედ ეგრეთ წოდებული ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი პ ო ლ ი ნ ო მ ე ბ ი, ე. ი. შემდეგი სახის გამოსახულებები

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \qquad (5.1)$$

სადაც α_k და β_k ნამდვილი რიცხვებია. თუ α_n და β_n-დან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (5.1) ტრიგონომეტრიულ პოლინომებს ეწოდება n რიგის ტრიგონომეტრიული პოლინომი.

ლ ე მ ა. *ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის $\cos^n x$ წარმოადგენს n რიგის ტრიგონომეტრიულ პოლინომს.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $n=2$, გვექნება

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

ამ შემთხვევისათვის ლემა მართებულია.

ახლა ვთქვათ, რომ ლემა მართებულია, როდესაც $n=k$ და დავამტკიცოთ ლემის მართებულობა, როდესაც $n=k+1$. დაშვების თანახმად

$$\cos^k x = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu \cos \nu x,$$

სადაც α_ν ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $\alpha_k \neq 0$. მაშინ

$$\cos^{k+1} x = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu \cos x \cos \nu x =$$

$$= \alpha_0 \cos x + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \cos x \cos \nu x = \alpha_0 \cos x +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\alpha_\nu}{2} \left[\cos(\nu-1)x + \cos(\nu+1)x \right],$$

ე. ი.

$$\cos^{k+1} x = \sum_{\nu=1}^{k+1} \alpha'_\nu \cos \nu x,$$

სადაც α'_ν ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2} \neq 0$, რაკი თეორემა მართებულია, როდესაც $k=1$ და $k=2$, ამიტომ თეორემა ზოგადად დამტკიცებულია.

თეორემა 8 (ვაიერშტრასი). თუ $f(x)$ არის 2π პერიოდის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $T(x)$, რომ

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

ყველა x-სათვის $]-\infty, +\infty[$ შუალედიდან.

დამტკიცება. რაკი $f(x)$ და $T(x)$ ფუნქციები 2π პერიოდის ფუნქციებია, ამიტომ საკმარისია დავადგინოთ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ უტოლობა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტისათვის.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია და შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = \arccos t$. თუ t იცვლება -1-დან 1-მდე, მაშინ x უწყვეტად იცვლება π-დან ნულამდე. ამიტომ $f(\arccos t)$ წარმოადგენს t ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას $[-1, 1]$ სეგმენტზე. ვაიერშტრასის პირველი თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი $P(t)$ მრავალწევრი, რომ

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon$$

ყველა x-სათვის $[0, \pi]$ სეგმენტიდან.

თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, მივიღებთ ტოლფას უტოლობას

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \tag{5.2}$$

ყველა x-სათვის $[0,\pi]$ სეგმენტიდან.

თუ x-ს შევცვლით $-x$-ით, მაშინ (5,2) უტოლობა ძალაში დარჩება $[-\pi,0]$ სეგმენტისათვისაც. ამრიგად,

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon$$

ყველა x-ისათვის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტიდან, სადაც $P(\cos x)$ არის მრავალწევრი $\cos x$-ის მიმართ:

$$P(\cos x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos^2 x+\cdots+a_n\cos^n x.$$

ლემის თანახმად $P(\cos x)$ წარმოადგენს n რიგის ტრიგონომეტრიულ პოლინომს. ამით თეორემა დამტკიცებულია ლუწი ფუნქციისათვის.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, $f(x)$ არის ნებისმიერი 2π პერიოდის უწყვეტი ფუნქცია. ამ ფუნქციის პერიოდულობის გამო საკმარისია განვიხილოთ იგი $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე. ავიღოთ დამხმარე ფუნქციები

$$\varphi(x)=f(x)+f(-x),\quad \psi(x)=[f(x)-f(-x)]\sin x.$$

$\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები არის 2π პერიოდის ლუწი უწყვეტი ფუნქციები. ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომები $P(\cos x)$ და $Q(\cos x)$, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|\varphi(x)-P(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\psi(x)-Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ყველა x-სათვის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტიდან.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს უტოლობები

$$|\varphi(x)\sin^2 x-P(\cos x)\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\psi(x)\sin x-Q(\cos x)\sin x|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობათა ძალით გვაქვს

$$|[\varphi(x)\sin^2 x+\psi(x)\sin x]-[P(\cos x)\sin^2 x+Q(\cos x)\sin x]|<\varepsilon$$

ყველა x-სათვის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტიდან.

მაგრამ

$$\varphi(x)\sin^2 x+\psi(x)\sin x=f(x)\sin^2 x+f(-x)\sin^2 x+$$
$$+f(x)\sin^2 x-f(-x)\sin^2 x=2f(x)\sin^2 x,$$

ხოლო $P(\cos x)\sin^2 x+Q(\cos x)\sin x$ წარმოადგენს გარკვეულ ტრიგონომეტრიულ $T_1(x)$ პოლინომს. ამრიგად, არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული $T_1(x)$ პოლინომი, რომ

$$|2f(x)\sin^2 x-T_1(x)|<\varepsilon. \tag{5.3}$$

თუ გამოვიყენებთ იმავე მსჯელობას $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციისათვის, დავამტკიცებთ ისეთი $T_2(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომის არსებობას, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\left|2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x-T_2(x)\right|<\varepsilon.$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში x-ს შევცვლით $x-\frac{\pi}{2}$-ით და გავითვალისწინებთ იმას, რომ ასეთ შემთხვევაში ყოველი ტრიგონომეტრიული პოლინომი გადადის ტრიგონომეტრიულ პოლინომში, გვექნება

$$|2f(x)\cos^2 x-T_3(x)|<\varepsilon, \tag{5.4}$$

სადაც $T_3(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომია.

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T(x)=\frac{T_1(x)+T_3(x)}{2}.$$

ცხადია, $T(x)$ წარმოადგენს ტრიგონომეტრიულ პოლინომს. თუ მხედველობაში მივიღებთ (5.3) და (5.4) უტოლობებს, გვექნება,

$$|f(x)-T(x)|=\left|\left[f(x)\sin^2 x-\frac{T_1(x)}{2}\right]+\left[f(x)\cos^2 x-\frac{T_3(x)}{2}\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|f(x)\sin^2 x-\frac{T_1(x)}{2}\right|+\left|f(x)\cos^2 x-\frac{T_3(x)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ფუნქციის განსაზღვრის ცალსახობა ფურიეს კოეფიციენტების საშუალებით

თეორემა 9. 2π *პერიოდის ორ სხვადასხვა უწყვეტ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეთ ერთნაირი ფურიეს მწკრივები.*

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია 2π პერიოდის ორი სხვადასხვა უწყვეტი ფუნქცია $f_1(x)$ და $f_2(x)$. დავამტკიცოთ, რომ მათ შეესაბამება სხვადასხვა ფურიეს მწკრივები. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, მათ შეესაბამება ერთი და იგივე ფურიეს მწკრივი:

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$f_2(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

მაშინ 2π პერიოდის უწყვეტი $f(x)=f_1(x)-f_2(x)\not\equiv 0$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი იქნება ნულის ტოლი. რაკი $f(x)$ უწყვეტია, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ $|f(x)|\leqslant M$ ყველა x-სათვის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტიდან. ვაიერშტრასის მეორე თეორემის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $T_n(x)$, რომ

$$|f(x)-T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi M}.$$

ამიტომ

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,|f(x)-T_n(x)|\, dx < M \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi M} \cdot 2\pi = \varepsilon. \qquad (6.1)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)\, dx = 0. \qquad (6.2)$$

მართლაც, რაკი $T_n(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომია, ამიტომ

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

მაშასადამე,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)\, dx = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \right) = 0,$$

ვინაიდან $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

(6.1) და (6.2) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx < \varepsilon$$

და რაკი ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 0$.

აქედან $f^2(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, ვღებულობთ $f(x) \equiv 0$.

ამრიგად, ერთი მხრივ $f(x) \not\equiv 0$ და მეორე მხრივ $f(x) \equiv 0$. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთი და იგივე ფურიეს მწკრივი, არ არის სწორი. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. თუ 2π *პერიოდის უწყვეტი* $f(x)$ *ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია* $[-\pi, \pi]$ *სეგმენტზე, მაშინ ამ მწკრივის ჯამი არის* $f(x)$ *ფუნქცია.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{6.3}$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k=1,2,\ldots).$$

პირობის თანახმად (6.3) მწკრივი თანაბრად კრებადია და ამიტომ ამ მწკრივის ჯამი $S(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია. მაშასადამე, მე-7 თეორემის თანახმად

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos kx\, dx \quad (k=0,\ 1,\ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin kx\, dx \quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

ამრიგად, 2π პერიოდის უწყვეტი $f(x)$ და $S(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთი და იგივე ფურიეს მწკრივი. ამიტომ მე-9 თეორემის ძალით $f(x)\equiv S(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. დირიხლეს ინტეგრალი

ლემა 1. *მართებულია შემდეგი ტოლობა*

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\ldots+\cos nu = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{7.1}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sigma_n = \frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\ldots+\cos nu$$

და ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $2\sin\frac{u}{2}$-ზე, მივიღებთ

$$2\sigma_n\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{u}{2}+2\cos u\sin\frac{u}{2}+2\cos 2u\sin\frac{u}{2}+\ldots+$$
$$+2\cos nu\sin\frac{u}{2}. \tag{7.2}$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta),$$

(7.2) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$2\sigma_n \sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+\left(\sin\frac{3u}{2}-\sin\frac{u}{2}\right)+\left(\sin\frac{5u}{2}-\sin\frac{3u}{2}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\sin\frac{2n+1}{2}u-\sin\frac{2n-1}{2}u\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u.$$

აქედან მიიღება (7.1) ტოლობა.

ახლა მოვახდინოთ (7.1) ტოლობის ინტეგრება $-\pi$-დან π-მდე და შემდეგი გავყოთ π-ზე, გვექნება

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{7.3}$$

ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის.

(7.3) ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია და ამიტომ აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}. \tag{7.4}$$

ახლა განვიხილოთ 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე. ვთქვათ,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{7.5}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{7.6}$$

$s_n(x)$ პოლინომს ეწოდება (7.5) ფურიეს მწკრივის n-ური კერძო ჯამი თუ (7.6) ტოლობაში a_k და b_k კოეფიციენტების გამოსახულებებს ჩავსვამთ, გვექნება

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\cos kx dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\sin kx dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

თუ ვისარგებლებთ (7.1) ფორმულით, გვექნება

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \tag{7.7}$$

ამ მნიშვნელოვან ინტეგრალს ეწოდება **დირიხლეს ინტეგრალი.**

(7.7) ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $t-x=u$. ეს გვაძლევს

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

$f(x+u)$ და $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$ ფუნქციების პერიოდია u-ს მიმართ 2π, ხოლო $[-\pi-x,\ \pi-x]$ სეგმენტის სიგრძეა 2π. ამიტომ

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du. \tag{7.8}$$

ახლა თუ ინტეგრების $[-\pi, \pi]$ არეს წარმოვადგენთ $[-\pi, 0] \cup [0, \pi]$ ჯამის სახით, მაშინ (7.8) ტოლობა მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \tag{7.9}$$

ახლა (7.4) ტოლობის ორივე ნაწილის გამრავლება $2s$-ზე გვაძლევს

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} 2s\, dt.$$

თუ ამ ტოლობას გამოვაკლებთ (7.9) ტოლობას, მივიღებთ

$$s_n(x)-s =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \tag{7.10}$$

ამ ფორმულით ვისარგებლებთ შემდეგში.

§ 8. რიმანის თეორემა

დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 11 (რიმანი). თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx=0, \tag{8.1}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_a^b f(x) \cos \lambda x\, dx=0 \tag{8.2}$$

(λ არ იგულისხმება მთელ რიცხვად).

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ (8.1) ტოლობის მართებულობა, ვინაიდან (8.2) ტოლობა მტკიცდება ანალოგიურად. ჯერ

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე რიმანის აზრით. $[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<_{n-1}<x_n=b. \tag{8.3}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin\lambda x\,dx. \tag{8.4}$$

თუ აღვნიშნავთ m_k-თი $f(x)$ ფუნქციის ქვედა საზღვარს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, (8.4) ტოლობა შეგვიძლია ასე დავწეროთ

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-m_k]\sin\lambda x\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin\lambda x\,dx.$$

რადგანაც ნებისმიერი α და β-სათვის

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin\lambda x\,dx\right|\leqslant\frac{2}{\lambda},$$

ამიტომ

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k(x_k-x_{k-1})+\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} m_k,$$

სადაც ω_k არის $f(x)$ ფუნქციის რხევა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე.

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შევარჩიოთ (8.3) წერტილები ისე, რომ გვქონდეს

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, რაკი m_k რიცხვები უკვე განსაზღვრულია, შეგვიძლია ავიღოთ დადებითი რიცხვი λ_0 იმ პირობით, რომ $\lambda_0>\dfrac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{k=1}^{n}|m_k|$. მაშინ ყოველი λ-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lambda>\lambda_0$, გვექნება

$$\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}|m_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right|<\varepsilon,$$

როდესაც $\lambda>\lambda_0$, ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $f(x)$ ინტეგრებადია რიმანის აზრით.

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია არასაკუთრივი აზრით (იგულისხმება, რომ $f(x)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია). საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $f(x)$ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ერთი განსაკუთრებული წერტილი, მაგალითად, a წერტილი.

ვთქვათ, $0<\delta<b-a$ და ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\int_a^{a+\delta} f(x)\sin\lambda x\,dx+\int_{a+\delta}^b f(x)\sin\lambda x\,dx=I_1+I_2.$$

I_1 ინტეგრალისათვის გვაქვს შეფასება

$$|I_1|\leqslant\int_a^{a+\delta}|f(x)|\,dx$$

ნებისმიერი λ-სათვის. ახლა, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ავიღოთ δ იმდენად მცირე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\int_a^{a+\delta}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშინ $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. რაც შეეხება I_2 ინტეგრალს, იგი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\lambda\to\infty$, ვინაიდან $[a+\delta,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით. ამიტომ არსებობს ისეთი $\lambda_0>0$, რომ ყოველი λ-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $\lambda>\lambda_0$ გვექნება

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამრიგად,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \varepsilon,$$

როდესაც $\lambda > \lambda_0$, ე. ი. მართებულია (8.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. *აბსოლუტურად ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები a_n და b_n ნულისაკენ მიისწრაფვიან, როდესაც $n \to \infty$.*

მართლაც, ამისათვის საჭიროა ავიღოთ ზემოდამტკიცებულ თეორემაში $\lambda = n$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

§ 9. ლოკალიზაციის პრინციპი

მე-11 თეორემის უშუალო შედეგს წარმოადგენს აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 12 (რიმანი). *აბსოლუტურად ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ქცევა რაიმე x წერტილში დამოკიდებულია მხოლოდ ფუნქციის მნიშვნელობებზე x წერტილის მიდამოში.*

დამტკიცება. ავიღოთ π-ზე ნაკლები რაიმე დადებითი δ რიცხვი. $g(t)$ ფუნქცია განვსაზღვროთ ასე:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{როდესაც } x-\delta < t < x+\delta, \\ 0, & \text{როდესაც } t \in [x-\pi, x+\pi[\setminus]x-\delta, x+\delta[. \end{cases}$$

თუ $g(t)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ურ კერძო ჯამს x წერტილისათვის აღვნიშნავთ $S_n(x)$-ით, გვექნება

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [g(x+t) + g(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt.$$

ამრიგად,

$$s_n(x)-S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

მაგრამ

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

ფუნქცია ინტეგრებადია $[\delta, \pi]$ სეგმენტზე; ამიტომ, მე-11 თეორემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-S_n(x)]=0.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვისათვის $s_n(x)$ ჯამის ქცევა დამოკიდებულია მხოლოდ $f(t)$ ფუნქციის ქცევაზე $]x-\delta, x+\delta[$ ინტერვალში და არ არის დამოკიდებული იმ მნიშვნელობებზე, რომლებსაც იგი ღებულობს ამ ინტერვალის გარეთ. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას უწოდებენ **ლოკალიზაციის პრინციპს**.

§ 10. ფურიეს მწკრივის კრებადობის დინისა და ლიფშიცის ნიშნები

ვთქვათ, 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. (7.10) ფორმულა ასე დავწეროთ

$$s_n(x)-s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\varphi(t)\,dt, \tag{10.1}$$

სადაც

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის x წერტილში კრებადობისათვის s რიცხვისაკენ აუცილებელია და საკმარისი, რომ (10.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფოდეს ნულისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\varphi(t)\,dt=0. \tag{10.2}$$

ეს პირობა შეგვიძლია შევცვალოთ პირობით

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt=0, \tag{10.3}$$

სადაც $0<\delta\leqslant\pi$. მართლაც, მე-11 თეორემის თანახმად (10.2) და (10.3) ინტეგრალებს შორის სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n\to\infty$. შემდეგ, (10.3) პირობა შეგვიძლია შევცვალოთ პირობით

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot t}{t}\varphi(t)\,dt=0. \tag{10.4}$$

მართლაც, $\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\right)\varphi(t)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[0,\delta]$ სეგმენტზე, და ამიტომ, მე-11 თეორემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\right)\varphi(t)dt=0.$$

თეორემა 18 (დინის ნიშანი). $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია s ჯამისაკენ, თუ რაიმე დადებითი δ რიცხვისათვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt. \tag{10.5}$$

დამტკიცება. რაკი $\frac{\varphi(t)}{t}$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[0,\delta]$ სეგმენტზე, ამიტომ მე-11 თეორემის თანახმად მართებულია (10.4) ტოლობა. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში s ჯამისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $s=f(x)$, მაშინ დინის (10.5) ინტეგრალი შეგვიძლია გაშლილი სახით ასე დავწეროთ:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}dt, \tag{10,6}$$

ხოლო თუ $s=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$, მაშინ (10.5) ინტეგრალს აქვს სახე,

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-)|}{t}\,dt. \tag{10.7}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (10.6) ინტეგრალი არსებობს, თუ არსებობს ინტეგრალები

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt \text{ და } \int_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x)|}{t}\,dt, \tag{10.8}$$

ხოლო (10.7) ინტეგრალის არსებობისათვის საკმარისია შემდეგი ინტეგრალების არსებობა:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x+)|}{t}\,dt \text{ და } \int_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x-)|}{t}\,dt. \tag{10.9}$$

თეორემა 14 (ლიფშიცის ნიშანი). 2π პერიოდის აბსოლუტურად ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია ამ ფუნქციის უწყვეტობის x წერტილში $f(x)$ ჯამისაკენ, თუ არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$|f(x\pm t)-f(x)|\leqslant L\,t^{\alpha}, \quad 0<t\leqslant\delta, \tag{10.10}$$

სადაც L და α დადებითი რიცხვებია, ამასთან $\alpha\leqslant 1$.

დამტკიცება. (10.10) პირობის თანახმად

$$\int_0^\delta \frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}\,dt\leqslant L\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt<+\infty.$$

მაშასადამე, არსებობს (10 8) ინტეგრალები და ამიტომ მე-13 თეორემის ძალით $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x)$ ჯამისაკენ.

შედეგი 1. 2π პერიოდის აბსოლუტურად ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში $f(x)$ ჯამისაკენ, თუ არსებობს ამ წერტილში ფუნქციის სასრული მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები.

მართლაც, ამ შემთხვევაში არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები L და δ, რომ

$$|f(x\pm t)-f(x)|\leqslant Lt, \quad 0<t\leqslant\delta.$$

მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის მიხედვით $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში $f(x)$ ჯამისაკენ.

თეორემა 16. ვთქვათ, 2π პერიოდის აბსოლუტურად ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას აქვს x წერტილში პირველი გვარის წყვეტა, ე. ი. $f(x+)$ და $f(x-)$ სასრული რიცხვებია. თუ არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$|f(x+t)-f(x+)|\leqslant Lt^{\alpha}, \quad |f(x-t)-f(x-)|\leqslant Lt^{\alpha},$$

როდესაც $0<t\leqslant\delta$, სადაც L და α დადებითი რიცხვებია, ამასთან $\alpha\leqslant 1$, მაშინ მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ჯამისაკენ.

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც მე-14 თეორემა.

შედეგი 2. ვთქვათ, 2π პერიოდის აბსოლუტურად ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას აქვს x წერტილში პირველი გვარის წყვეტა. თუ არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}, \quad \lim_{t\to 0-}\frac{f(x-t)-f(x-)}{t},$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ჯამისაკენ.

მართლაც, ამ შემთხვევაში არსებობს ისეთი დადებითი L და δ რიცხვები, რომ

$$|f(x+t)-f(x+)|\leqslant Lt, \ |f(x-t)-f(x-)|\leqslant Lt, \ 0<t\leqslant\delta.$$

მაშასადამე, მე-15 თეორემის თანახმად, მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია x წერტილში $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ჯამისაკენ.

§ 11. ფურიეს მწკრივის კრებადობის ჟორდანის ნიშანი

ლემა (დირიხლე). თუ $g(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[0,h]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^h g(x)\,\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\,g(0+). \tag{11.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ცხადია, რომ

$$\int_0^h g(x)\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx=g(0+)\int_0^h\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx+$$

$$+\int_0^h [g(x)-g(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx=I_1+I_2.$$

თუ I_1 ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $\lambda x=t$, გვექნება

$$I_1=g(0+)\int_0^{\lambda h}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

აქედან

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_1=g(0+)\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}g(0+).$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_2=0 \tag{11.2}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრას, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\delta<h$, რომ

$$0\leqslant g(x)-g(0+)<\varepsilon,\quad \text{როდესაც}\quad 0<x\leqslant\delta. \tag{11.3}$$

I_2 ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე

$$I_2=\int_0^\delta [g(x)-g(0+)]\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx+$$

$$+\int_\delta^h [g(x)-g(0+)]\,\frac{\sin\lambda x}{x}dx=I_2'+I_2''.$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის თანახმად

$$I_2'=[g(\delta)-g(0+)]\int\limits_{\xi}^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx=[g(\delta)-g(0+)]\int\limits_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}dt$ ერთობლივ შემოსაზღვრულია λ-ს მიმართ. მართლაც, რაკი ინტეგრალი $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ კრებადია, ამიტომ τ-ს ფუნქცია

$$\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

შემოსაზღვრულია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში:

$$\left|\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\sin t}{t}\,dt\right|\leqslant L.$$

ასე რომ

$$\left|\int\limits_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt\right|=\left|\int\limits_{0}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt-\int\limits_{0}^{\lambda\xi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right|\leqslant 2L.$$

ამრიგად, თუ მხედველობაში მივიღებთ (11.3) უტოლობას λ-ს ყველა მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$|I_2'|<2L\varepsilon. \tag{11.4}$$

შემდეგ, $\dfrac{g(x)-g(0+)}{x}$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[\delta, h]$ სეგმენტზე, ამიტომ მე-11 თეორემის თანახმად

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_2''=0.$$

ამ ტოლობისა და (11.4) უტოლობის თანახმად ადგილი აქვს (11.2) ტოლობას და, მაშასადამე, მართებულია (11.1) ტოლობა. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16 (ჟორდანის ნიშანი). თუ 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[0,2\pi]$ სეგმენტზე

და მას აქვს სასრული ვარიაცია $[x_0-h,\ x_0+h]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $\frac{1}{2}[f(x_0+)+f(x_0-)]$ ჯამისაკენ.

დამტკიცება. როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით, მაშინ არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$. ფუნქციას

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+)-f(x_0-)$$

აქვს სასრული ვარიაცია $[0,h]$ სეგმენტზე და $\varphi(t)\to 0$, როდესაც $t\to 0$. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

სადაც $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ დადებითი ზრდადი ფუნქციებია, რომლებიც მიისწრაფვიან ერთი და იმავე ზღვრისაკენ, როდესაც $t\to 0$. თუ ორივე ფუნქციას გამოვაკლებთ ერთი და იმავე მუდმივს, ჩვენ შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ეს ზღვარი იყოს ნულის ტოლი. გვაქვს:

$$\int_0^h \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt=\int_0^h \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi_1(t)\,dt-$$

$$-\int_0^h \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi_2(t)dt=I_1-I_2.$$

ლემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty} I_1=\frac{\pi}{2}\varphi_1(0+)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} I_2=\frac{\pi}{2}\varphi_2(0+)=0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქციას აქვს $[0,2\pi]$ სეგმენტზე სასრული რიცხვი მაქსიმუმებისა და მინი-

მ უ მ ე ბ ი ს და ს ა ს რ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ი წ ყ ვ ე ტ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ს ა, მ ა შ ი ნ მ ი ს ი ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა ყ ო ვ ე ლ x წ ე რ- ტ ი ლ შ ი $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$ ჯ ა მ ი ს ა კ ე ნ.

მართლაც, ასეთ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია $[0,2\pi]$ სეგმენტზე. ამიტომ მე-16 თეორემის თანახმად $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია ყოველ x წერტილში $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$ ჯამისაკენ.

შემდეგში, მოყვანილი პირობები ცნობილია დ ი რ ი ხ ლ ე ს პ ი რ ო- ბ ე ბ ი ს სახელწოდებით.

§ 12. 2π სიგრძის სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი

გამოყენებებში ხშირად საჭირო ხდება $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად. აქ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდულობაზე ლაპარაკიც არ არის. მაგრამ ეს ხელს არ გვიშლის დავწეროთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, რადგანაც (4.6) და (4.7) ფორმულებში მონაწილეობს მხოლოდ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტი. ამასთან, თუ $f(x)$ ფუნქციას პერიოდულად გავაგრძელებთ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან მთელ Ox ღერძზე, მივიღებთ პერიოდულ ფუნქციას, რომელიც $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციას და რომლის ფურიეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის იგივური იქნება. ამის გარდა, თუ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x)$-საკენ, მაშინ მწკრივის ჯამი მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის პერიოდულ გაგრძელებას $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან მთელ Ox ღერძზე.

ამრიგად, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის შესახებ ლაპარაკი იმავეს ნიშნავს, რაც იმ ფუნქციის ფურიეს მწკრივზე, რომელიც მიიღება $f(x)$ ფუნქციის პერიოდულად გაგრძელებით მთელ Ox ღერძზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ საკმარისია ფურიეს მწკრივის კრებადობის ნიშნები ჩამოვაყალიბოთ პერიოდული ფუნქციებისათვის.

თუ $f(-\pi)=f(\pi)$, მაშინ პერიოდული გაგრძელება არავითარ სიძნელესთან არ არის დაკავშირებული. ამასთანავე, თუ $f(x)$ უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციის გაგრძელება იქნება უწყვეტი მთელ Ox ღერძზე.

თუ $f(-\pi)\neq f(\pi)$, მაშინ $f(-\pi)$ და $f(\pi)$ მნიშვნელობების შეუცვლელად ვერ განვახორციელებთ სასურველ გაგრძელებას, ვინაიდან

პერიოდულობის განსაზღვრის მიხედვით უნდა გვქონდეს $f(-\pi)=f(\pi)$. ამ სიძნელეს შეგვიძლია გვერდი ავუაროთ ორი წესით:

1) გამოვრიცხოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x=-\pi$ და $x=\pi$ წერტილებში. ამით $f(x)$ ფუნქცია ამ წერტილებში გახდება განუსაზღვრელი და, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის პერიოდული გაგრძელება განუსაზღვრელი იქნება $(2k+1)\pi$ $(k=0, 1,\ldots)$ წერტილებში.

2) $x=-\pi$ და $x=\pi$ წერტილებში შევცვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ისე, რომ ისინი ტოლი იყოს.

შევნიშნოთ, რომ 1) და 2) შემთხვევაში ფურიეს კოეფიციენტებს ექნება იგივე მნიშვნელობები, რაც $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს.

თუ $f(-\pi)\neq f(\pi)$ და $f(x)$ უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციას Ox ღერძზე ექნება წყვეტა $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ წერტილებში, როგორც გინდა ვცვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=-\pi$, $x=\pi$ წერტილებში.

§ 13. ფურიეს მწკრივები ლუწი და კენტი ფუნქციებისათვის

ვთქვათ, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე აბსოლუტურად ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია ლუწია. ცხადია, $f(x)\cos nx$ ფუნქციაც ლუწია, ხოლო $f(x)\sin nx$ იქნება კენტი ფუნქცია. ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტებისათვის გვაქვს ფორმულები:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\ldots), \tag{13.1}$$

$$b_n=0 \quad (n=1, 2,\ldots).$$

ამრიგად, ლუწი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიცავს მხოლოდ კოსინუსებს:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx, \tag{13.2}$$

სადაც a_n კოეფიციენტები გამოითვლება (13.1) ფორმულით.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ არის კენტი ფუნქცია, მაშინ $f(x)\cos nx$ იქნება კენტი ფუნქცია, ხოლო $f(x)\sin nx$ ფუნქცია ლუწია. ამიტომ

$$a_n=0 \quad (n=0, 1,\ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{13.3}$$

ამრიგად, კენტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს სახე

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{13.4}$$

სადაც b_n კოეფიციენტი გამოითვლება (13.3) ფორმულის მიხედვით.

რადგანაც კენტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიცავს მხოლოდ სინუსებს, ამიტომ ეს მწკრივი ყოველთვის კრებადია ნულოვანი მნიშვნელობისაკენ $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ წერტილებში, როგორიც გინდა ჰქონდეს მნიშვნელობა $f(x)$ ფუნქციას $x=k\pi$ წერტილებში.

§ 14. ფურიეს მწკრივად დაშლის მაგალითები

მაგალითი 1. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)=x$ ფუნქცია. დავშალოთ ეს ფუნქცია ფურიეს მწკრივად. ამისათვის ვიპოვოთ ფურიეს კოეფიციენტები. რადგანაც მოცემული ფუნქცია კენტია, ამიტომ

$$a_n=0 \quad (n=0, 1,\ldots).$$

შემდეგ, $x\sin nx$ ფუნქცია ლუწია, და, მაშასადამე

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2\cos n\pi}{n}.$$

მაგრამ $\cos n\pi=(-1)^n$. ამიტომ,

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad (n=1, 2,\ldots).$$

რაკი $f(x)=x$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ, როდესაც $-\pi<x<\pi$, გვექნება

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right). \tag{14.1}$$

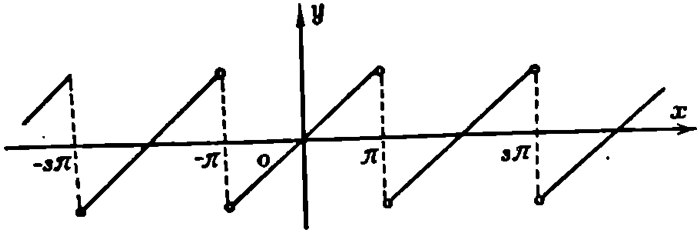
თუ (14.1) ტოლობაში ვიგულისხმებთ $x=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{14.2}$$

ახლა ვთქვათ, რომ $0<x<\pi$ და (14.1) ფორმულაში x-ის ნაცვლად ავიღოთ $\pi-x$. მაშინ მარტივი გარდაქმნების შემდეგ გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi-x}{2}. \tag{14.3}$$

(14.1) მწკრივის $S(x)$ ჯამის გრაფიკი მოცემულია 55-ე ნახაზზე.



ნახ. 55.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)=x^2$ ფუნქცია დავშალოთ ფურიეს მწკრივად. ამისათვის ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები. რაკი $x^2 \cos nx$ $(n=0, 1,\ldots)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

შემდეგ, ნაწილობითი ინტეგრებით მოვძებნით

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

დაბოლოს, რაკი $f(x)=x^2$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $b_n=0$ $(n=1, 2,\ldots)$. ამის გარდა, მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და $f(-\pi)=f(\pi)$. მაშასადამე,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right), \tag{14.4}$$

სადაც $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

თუ $x=\pi$, გვექნება

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right).$$

აქედან

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots \qquad (14.5)$$

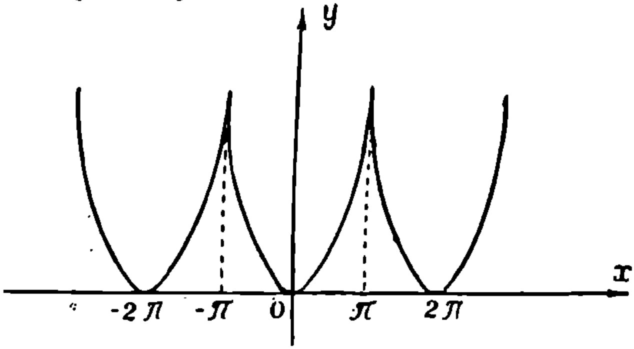
ახლა ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ 4-ზე, გვექნება

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\dots \qquad (14.6)$$

ეს ტოლობა გამოვაკლოთ (14.5) ტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{1}{5^2}+\dots \qquad (14.7)$$

(14.4) მწკრივის $S(x)$ ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა. მისი გრაფიკი წარმოდგენილია 56-ე ნახაზზე.



ნახ. 56.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)=|x|$ ფუნქცია დავშალოთ ფურიეს მწკრივად. თუ ამ ფუნქციას პერიოდულად გავაგრძელებთ, მივიღებთ უწყვეტ და უბან-უბან გლუვ ფუნქციას. რადგანაც მოცემული ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

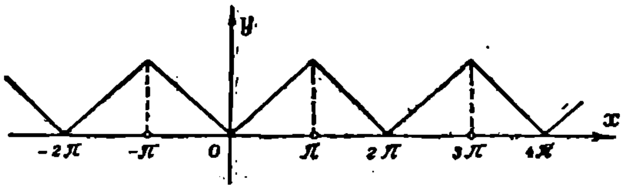
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

($n=1, 2,\ldots$). აქედან გამომდინარეობს, რომ ლუწი n-სათვის $a_n=0$, ხოლო კენტი n-სათვის $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$

დაბოლოს $b_n=0$ ($n=1, 2,\ldots$), ვინაიდან $f(x)$ ლუწია. ამრიგად, როდესაც $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, გვაქვს

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right). \quad (14.8)$$

ამ მწკრივის $S(x)$ ჯამის გრაფიკი წარმოდგენილია 57-ე ნახაზზე.



ნახ. 57.

მაგალითი 4. დავშალოთ ფურიეს მწკრივად $f(x)=|\sin x|$ ფუნქცია. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის და წარმოადგენს უწყვეტ, უბან-უბან გლუვ და ლუწ ფუნქციას. რადგანაც $|\sin x| = \sin x$, როდესაც $0\leqslant x\leqslant\pi$, ამიტომ

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = -2\,\frac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)},$$

თუ $n>1$. თუკი $n=1$, გვექნება

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0.$$

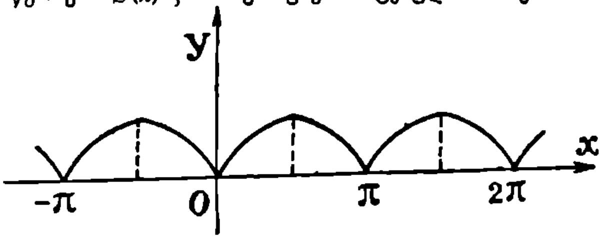
შემდეგ, $b_n=0$ $(n=1, 2,\ldots)$, ვინაიდან $f(x)\sin nx$ კენტი ფუნქციაა. ამრიგად, x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გვაქვს:

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}+\ldots\right). \tag{14.9}$$

კერძოდ, თუ $x=0$, ამ ფორმულიდან მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}.$$

(14.9) მწკრივის $S(x)$ ჯამის გრაფიკი მოცემულია 58-ე ნახაზზე



ნახ. 58.

მაგალითი 5. დავშალოთ ფურიეს მწკრივად $f(x)=\sin\alpha x$ ფუნქცია, სადაც α არამთელი რიცხვია· ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და წარმოადგენს გლუვ და კენტ ფუნქციას. ამიტომ $a_n=0$ $(n=0,1,\ldots)$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\alpha x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}-\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right]\quad(n=1, 2, \ldots).$$

თუ n ლუწია, მაშინ $\sin(\alpha \pm n)\pi = \sin \alpha\pi$, ხოლო თუ n კენტია, მაშინ $\sin(\alpha \pm n)\pi = -\sin \alpha\pi$. მაშასადამე,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \dfrac{n}{\alpha^2 - \pi^2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \\[2ex] -\dfrac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \dfrac{n}{\alpha^2 - \pi^2}, & \text{თუ } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

ამრიგად, ნებისმიერი x-სათვის მართებულია ტოლობა

$$\sin \alpha x = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{\alpha^2 - \pi^2}. \tag{14.10}$$

§ 15. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ნაწილზე მოცემული ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად

აქამდე განვიხილავდით $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე მოცემული ფუნქციის დაშლას ფურიეს მწკრივად. ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია მხოლოდ $[a, \pi]$ სეგმენტზე, სადაც $-\pi < a < \pi$. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $f(x)$ ფუნქცია გლუვია $[a, \pi]$ სეგმენტზე და დავსვათ საკითხი ამ ფუნქციის ტრიგონომეტრიულ მწკრივად დაშლის შესახებ. ეს ამოცანა შეიძლება ასე ამოვხსნათ: ავიღოთ $[-\pi, a]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი გლუვი $g(x$ა ფუნქცია და განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულ ი ასე:

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & \text{როდესაც } -\pi \leqslant x < a, \\ f(x), & \text{როდესაც } a \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია იშლება ფურიეს მწკრივად

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{15.1}$$

მთელ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, გარდა, შესაძლებელია, $x=\pm\pi$ და $x=a$ წერტილებისა. ამ წერტილებში მწკრივის ჯამი ტოლია შესაბამისად $\dfrac{g(-\pi)+f(\pi)}{2}$ და $\dfrac{g(a)+f(a)}{2}$ სიდიდეებისა.

რადგანაც $F(x)=f(x)$, როდესაც $a<x<\pi$, ამიტომ ასეთ x-სათვის

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{15.2}$$

თუ $g(x)$ ფუნქციას შევარჩევთ იმ პირობით, რომ $g(-\pi)=f(\pi)$, მაშინ $F(-\pi)=F(\pi)$ და (15.2) ტოლობა მართებული იქნება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $x=\pi$. დაბოლოს, $g(a)=f(a)$ უზრუნველყოფს (15.2) ტოლობის მართებულობას, როდესაც $x=a$.

ამრიგად, დასმულ ამოცანას აქვს ამოხსნა, მაგრამ ეს ამოხსნა ერთადერთი არაა, ვინაიდან $g(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია უამრავი გზით ავარჩიოთ და a_k და b_k კოეფიციენტებისათვის (15.1) ფორმულიდან გვექნება სხვადასხვა მნიშვნელობები. ამიტომ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია მხოლოდ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ნაწილზე, აქვს (15.2) სახის უამრავი წარმოდგენა.

ყველაფერი ნათქვამი ეხება $[0, \pi]$ სეგმენტსაც, მაგრამ აქ თავს იჩენს ახალი გარემოება. სახელდობრ, $g(x)$ შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ, რომ $F(x)$ აღმოჩნდეს ლუწი ფუნქცია. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx, \tag{15.3}$$

სადაც

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \quad (k=0,1,\ldots). \tag{15.4}$$

(15.3) ფორმულა მართებულია მთელ $[0, \pi]$ სეგმენტზე.

მეორე მხრივ, $g(x)$ შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ, რომ $F(x)$ კენტი ფუნქცია აღმოჩნდეს. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx, \tag{15.5}$$

სადაც

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{15.6}$$

(15.5) ფორმულა მართებულია, როდესაც $0<x<\pi$. ეს ფორმულა რომ იყოს მართებული $x=0$ მნიშვნელობისათვის, საჭიროა ადგილი ჰქონდეს $f(0)=0$ ტოლობას, ვინაიდან (15.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნული ხდება, როდესაც $x=0$, ასევე, (15.5) ფორმულის მართებულობისათვის $x=\pi$ წერტილში საჭიროა გვქონდეს $f(\pi)=0$.

მაგალითი 6. $]0, \pi[$ ინტერვალში დავშალოთ სინუსების მწკრივად $f(x)=\frac{\pi}{4}$ ფუნქცია. ამისათვის განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & \text{როდესაც } -\pi\leqslant x<0,\\ \frac{\pi}{4}, & \text{როდესაც } 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x=0$ წერტილში. იგი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე უბან-უბან გლუვია და კენტია. ამის გარდა, $F(x)=f(x)$, როდესაც $0\leqslant x<\pi$. ამიტომ

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx=0 \quad (n=0, 1,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx=\frac{1-(-1)^n}{2n}.$$

მაშასადამე, თუ $0<x<\pi$, გვექნება

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots \tag{15.7}$$

თუკი $-\pi<x<0$, გვექნება

$$-\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. $]0,\pi[$ ინტერვალში დავშალოთ სინუსების მწკრივად $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ ფუნქცია. ამისათვის განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & \text{როდესაც } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x=0$ წერტილში. იგი $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე უბან-უბან გლუვია და კენტია. ამის გარდა, $F(x)=f(x)$, როდესაც $0\leqslant x\leqslant\pi$. ამიტომ

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=0\quad(n=0,1,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx=\frac{(-1)^n+1}{2n}.$$

ამრიგად,

$$b_{2k+1}=0,\quad b_{2k}=\frac{1}{2k}\quad(k=1,2,\dots).$$

მაშასადამე, როდესაც $0<x<\pi$, გვექნება

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}. \tag{15.8}$$

ახლა, თუ ამ დაშლას გამოვაკლებთ (15.7) დაშლას, მივიღებთ

$$\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k},\quad 0<x<\pi. \tag{15.9}$$

რადგანაც ამ ტოლობის ორივე ნაწილი წარმოადგენს კენტ ფუნქციებს და, ამის გარდა, მათი მნიშვნელობები $x=0$ წერტილში ნულის ტოლია, ამიტომ (15.9) ფორმულას ადგილი აქვს, როდესაც $-\pi<x<\pi$.

დაბოლოს, თუ (15.7) და (15.8) დაშლებს შევკრებთ, გვექნება

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \tag{15.10}$$

და ეს ფორმულა მართებულია, როდესაც $0<x<2\pi$, ვინაიდან ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ნიშანს იცვლის, თუ x-ს შევცვლით $2\pi-x$ სხვაობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. $[0, \pi]$ სეგმენტზე მოცემულია $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ ფუნქცია. დავშალოთ ეს ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად. ამისათვის განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant\pi. \\ \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}, & \text{როდესაც } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, უბან-უბან გლუვია და ლუწია. ამის გარდა, $F(x)=f(x)$, როდესაც $0\leqslant x\leqslant\pi$. ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები იქნება:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\ (n\geqslant1).$$

მაშასადამე, როდესაც $0\leqslant x\leqslant\pi$, გვაქვს

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}. \tag{15.11}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. $]0, \pi[$ ინტერვალში განსაზღვრულია ფუნქცია $f(x) = \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$. დავშალოთ ეს ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად. ამისათვის განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$F(x) = \begin{cases} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), & \text{როდესაც } 0<x<\pi, \\ \ln\left[2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right], & \text{როდესაც } -\pi<x<0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია წყვეტილია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, უბან-უბან გლუვია და ლუწია. ამის გარდა, $F(x)=f(x)$, როდესაც $0<x<\pi$.

$f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[0, \pi]$ სეგმენტზე. მართლაც, ნებისმიერი დადებითი α რიცხვისათვის

$$\lim_{x\to 0+}\left[x^{\alpha}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right]=0,$$

ამიტომ 36-ე თეორემის თანახმად (ტ. 1, გვ. 545) არსებობს

$$\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

ახლა გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

გვაქვს

$$I = \int_0^{\pi}\left(\ln 2+\ln\sin\frac{x}{2}\right)dx = \pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

მეორე ინტეგრალი აღვნიშნოთ $\mathbf{X}$-ით, ჩასმა $x=2t$ გვაძლევს

$$\mathbf{X}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt = \pi\ln 2+$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{t}{2}\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{t}{2}\,dt$$

ჩასმა $t=\pi-u$ გვაძლევს:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos\frac{t}{2}dt=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin\frac{u}{2}\,du=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

ამიტომ

$$X=\pi\ln 2+2X.$$

საიდანაც $X=\pi\ln 2$. მაშასადამე, $I=0$. ამრიგად, $a_0=0$. შემდეგ, ნაწილობითი ინტეგრება გვაძლევს:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx=-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx.$$

მაგრამ

$$\sin nx\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

და ამიტომაც

$$a_n=-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (7.4) ფორმულას, გვექნება

$$a_n=-\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\ldots).$$

დასასრულ, რაკი $F(x)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $b_n=0$ $(n=1, 2,\ldots)$.

მაშასადამე,

$$-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k},\quad 0<x<\pi. \tag{15.12}$$

თუ ტოლობის მარცხენა ნაწილს დავწერთ $-\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)$ სახ-ით, მაშინ გვექნება ტოლობა

$$-\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}, \tag{15.13}$$

ამასთან, ტოლობის ორივე ნაწილი ლუწი ფუნქციებია პერიოდით 2π. ასე რომ, ტოლობა მართებულია ნებისმიერი x-სათვის. ამ შემთხ-ვევაში განსახილავი ფუნქცია არ იქნება შემოსაზღვრული, იგი ხდება უსასრულო, როდესაც $x=k\pi$.

§ 16. ნებისმიერპერიოდიანი ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად

ვთქვათ, $f(x)$ არის $2l$ პერიოდის ფუნქცია და აბსოლუტურად ინ-ტეგრებადია $[-l, l]$ სეგმენტზე, სადაც l ნებისმიერი დადებითი რიც-ხვია. საჭიროა $f(x)$ ფუნქციის დაშლა ტრიგონომეტრიულ მწკრივად. თუ შემოვიღებთ ჩასმას $x=\frac{lt}{\pi}$, გვექნება

$$f(x)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\varphi(t).$$

ცხადია, $\varphi(t)$ წარმოადგენს 2π პერიოდის ფუნქციას და ამიტომ $\varphi(t)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ ფურიეს მწკრივი

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \tag{16.1}$$

სადაც

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos kt\,dt \quad (k=0, 1, \ldots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin kt\,dt \quad (k=1, 2, \ldots)$$

თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, ე. ი. ვიგულისხმებთ, რომ $t=\frac{\pi x}{l}$, გვექნება

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{16.2}$$

სადაც

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{16.3}$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{16.4}$$

a_k და b_k კოეფიციენტებს, რომლებიც (16.3) და (16.4) ფორმულებითაა განსაზღვრული, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **ფურიეს კოეფიციენტები**, ხოლო (16.2) მწკრივს—$f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

თუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, მაშინ (16.3) და (16.4) ფორმულები მიიღებს სახეს

$$a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$b_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

და, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

თუკი $f(x)$ არის კენტი ფუნქცია, მაშინ

$$a_k=0 \quad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

ამ შემთხვევაში

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

§ 17. ფურიეს მწკრივის კომპლექსური სახე

ვთქვათ, 2π პერიოდის $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. ამ ფუნქციისათვის შევადგინოთ ფურიეს მწკრივი

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{17.1}$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{17.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{17.3}$$

ეილერის ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2},$$

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2} i.$$

ეს გამოსახულებანი ჩავსვათ (17.1) მწკრივში, გვექნება

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right). \tag{17.4}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{17.5}$$

(17.4) მწკრივის და, მაშასადამე, (17.1) მწკრივის n-ური ჯამი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

ამიტომ ბუნებრივია დავწეროთ

$$f(x)\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{17.6}$$

ეს არის $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსური სახე.

c_k კოეფიციენტებს, რომლებიც განსაზღვრულია (17.5) ტოლობებით, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს *კომპლექსური კოეფიციენტები*. ვიპოვოთ ამ კოეფიციენტების გამოსახულებანი. თუ $k\geqslant 1$ გვექნება

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx-i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx,$$

$$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx+i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{ikx}\,dx.$$

მაშასადამე,

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots). \tag{17.7}$$

§ 18. ორთოგონალური და ორთონორმირებული სისტემები

განსაზღვრა 5. $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x),\dots$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=0, \text{ როდესაც } i\neq k \quad (i,k=0,\ 1,\ \dots).$$

აგრეთვე ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ

$$\lambda_k = \int_a^b \varphi_k^2(x)dx > 0 \quad (k=0, 1, \ldots).$$

განსაზღვრა 6. $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ორთონორმირებული $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ეს სისტემა ორთოგონალურია და

$$\int_a^b \omega_k^2(x)dx = 1 \quad (k=0, 1, \ldots).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{18.1}$$

ორთონორმირებული სისტემაა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ცხადია, თუ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ სისტემა ორთოგონალურია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{\lambda_0}}, \ \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}, \ldots$$

ორთონორმირებული სისტემაა იმავე სეგმენტზე.

მრავალწევრებს

$$P_0(x)=1, \ P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1), \ldots, \ P_n(x) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \ldots \tag{18.2}$$

ეწოდება ლეჟანდრის პოლინომები.

ცხადია, რომ $P_n(x)$ წარმოადგენს n ხარისხის მრავალწევრს:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + \cdots$$

დავამტკიცოთ, რომ (18.2) სისტემა წარმოადგენს ორთოგონალურ სისტემას $[-1, 1]$ სეგმენტზე. ჯერ შევნიშნოთ, რომ $\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$ გამოსა-

ხულება, როდესაც $k=0, 1, \ldots, n-1$ ნული ხდება $x=-1$ და $x=1$ წერტილებში. დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის $P_n(x)$ პოლინომი ორთოგონალურია m ხარისხის ნებისმიერი $Q_m(x)$ მრავალწევრისა, სადაც $m<n$. ნაწილობითი ინტეგრების m-ჯერ გამოყენება გვაძლევს

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx=\left[Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right]_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1} Q'_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx=-\int_{-1}^{1} Q'_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx=\ldots=$$

$$=(-1)^m Q_m^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}dx=$$

$$=\left[(-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m}(x^2-1)}{dx^{n-m-1}}\right]_{-1}^{1}=0.$$

ამრიგად,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)dx=0 \quad (m<n).$$

კერძოდ,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0, \quad m\neq n.$$

ახლა ვიპოვოთ $P_n(x)$ პოლინომის ნორმა $\|P_n\|$. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$P_n(x)=\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n+Q_{n-1}(x),$$

სადაც $Q_{n-1}(x)$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება $(n-1)$-ს. გვაქვს:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\int_{-1}^{1} P_n(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n+Q_{n-1}(x)\right]dx=$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^n\, dx = \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx.$$

ნაწილობითი ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

ამრიგად,

$$\| P_n \| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

§ 19. ფურიეს მწკრივი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემა

$$\omega_0(x),\ \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots \tag{19.1}$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია. რიცხვებს

$$c_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx \quad (k=0,1,\ldots) \tag{19.2}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის მიმართ, ხოლო მწკრივს

$$c_0\omega_0(x)+c_1\omega_1(x)+\cdots+c_n\omega_n(x)+\cdots \tag{19.3}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს მ წ კ რ ი ვ ი მოცემული სისტემის მიხედვით და წერენ

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \omega_k(x). \tag{19.4}$$

ამ მწკრივს ეწოდება აგრეთვე $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი მ წ კ რ ი ვ ი.

(19.4) ფორმულაში $\sim$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ c_k კოეფიციენტები გამოთვლილია $f(x)$ ფუნქციის მიხედვით (19.2) ფორმულის თანახმად. მაგრამ არ იგულისხმება, რომ მწკრივი (19.3) კრებადია.

თეორემა 15. თუ ორთონორმირებული (19.1) სისტემის ყოველი ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია იშლება თანაბრად კრებად ორთოგონალურ მწკრივად, მაშინ ეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივია.

ეს თეორემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც მე-7 თეორემა.

§ 20. ფუნქციათა სრული სისტემა

განსაზღვრა 7. $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემას **სრული** ეწოდება, თუ არ არსებობს ამ სეგმენტზე იგივურად ნულისაგან განსხვავებული უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც მოცემული სისტემის ყოველი ფუნქციის ორთოგონალურია.

მართებულია შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 16. ტრიგონომეტრიული სისტემა (18.1) სრული სისტემაა $I_0=[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ეს თეორემა დავამტკიცოთ ლებეგის (Lebesgue) მეთოდით. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, (18.1) სისტემა სრული არ არის. მაშინ არსებობს უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც იგივურად ნულის ტოლი არაა და რომელიც ორთოგონალურია (18.1) მიმდევრობის ელემენტებისა. რაკი $f(x)$ იგივურად ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ $]-\pi, \pi[$ ინტერვალში მოიძებნება ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)\neq 0$. მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები ε და δ, რომ

$$|f(x)|>\varepsilon,$$

როდესაც $x\in I=]x_0-\delta,\ x_0+\delta[\subset]-\pi, \pi[$, თანაც $f(x)$ ნიშანს ინარჩუნებს I ინტერვალში.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)>\varepsilon$, როდესაც $x\in I$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$T_n(x)=[t(x)]^n,$$

სადაც

$$t(x)=1-\cos\delta+\cos(x-x_0).$$

ცხადია, $t(x)\geqslant 1$, როდესაც $x\in I$, ხოლო $t(x)>1$ ყოველ $\Delta=[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, რომელიც I ინტერვალშია მოთავსებული. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $T_n(x)$ არის ტრიგონომეტრიული პოლინომი, ე. ი.

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია (18.1) სისტემის ყოველი ფუნქციის ორთოგონალურია, ამიტომ იგი $T_n(x)$ ფუნქციის ორთოგონალური იქნება:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,T_n(x)\,dx=0 \tag{20.1}$$

ყოველი n-სათვის. აქედან

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)T_n(x)dx+\int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)T_n(x)dx+$$

$$+\int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)T_n(x)dx=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0.$$

ვთქვათ,

$$M=\max_{x\in I_0}|f(x)|,\quad \sigma=\min_{x\in\Delta} t(x).$$

ცხადია, $\sigma>1$. ამიტომ

$$\sigma_1>\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}\sigma^n dx=\varepsilon\,|\Delta|\,\sigma^n\to+\infty,\quad \text{როდესაც}\quad n\to\infty.$$

შემდეგ, რაკი $|t(x)|<1$, როდესაც $x\in I_0\diagdown I$, ამიტომ

$$|\sigma_2|\leqslant M(\pi+x_0-\delta),\ |\sigma_3|\leqslant M(\pi-x_0-\delta).$$

ამრიგად,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_1=+\infty,\ \sup_{1<n<\infty}|\sigma_2|\leqslant M(\pi+x_0-\delta),\ \sup_{1<n<\infty}|\sigma_3|\leqslant M(\pi-x_0-\delta).$$

ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი ν, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_\nu(x)\,dx>0.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (20.1) ტოლობას. ამიტომ არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ორთოგონალური იყოს (18.1) სისტემის ყველა ფუნქციისა. მაშასადამე, (18.1) სისტემა სრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, $[-\pi,\pi]$ სეგმენტის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ $[a, a+2\pi]$ სეგმენტი, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

§ 21. ფურიეს კოეფიციენტების მინიმალურობის თვისება. ბესელის უტოლობა

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე. საშუალო კვადრატობითი გადახრა $f(x)$ ფუნქციისა $g(x)$ ფუნქციისაგან ეწოდება რიცხვს

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx}.$$

ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია და ორთონორმირებული (19.1) სისტემა. შევადგინოთ $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\ldots$, $\omega_n(x)$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია

$$s_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + \ldots + a_n\omega_n(x),$$

სადაც $a_0, a_1, \ldots, a_n$—ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. $s_n(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ n-ური რიგის განზოგადებული პოლინომი.

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: n-ური რიგის ყველა განზოგადებული პოლინომიდან ვიპოვოთ ის, რომელსაც აქვს უმცირესი საშუალო კვადრატობითი გადახრა მოცემულ $f(x)$ ფუნქციიდან. საკითხი დაიყვანება ისეთი $a_0, a_1 \ldots, a_n$ კოეფიციენტების მოძებნაზე, რომელთათვის ინტეგრალი

$$\Delta_n = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx}$$

იქნება უმცირესი.

ცხადია, Δ_n და

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx$$

გამოსახულებები მიიღებენ უმცირეს მნიშვნელობას ერთი და იმავე $a_0, a_1, \ldots, a_n$ მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ ვეძებოთ $I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ინტეგრალის უმცირესი მნიშვნელობა. გვაქვს:

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx = \int_a^b f^2(x) \, dx - 2 \int_a^b f(x) s_n(x) dx +$$

$$+\int_a^b s_n^2(x)dx=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n} a_k c_k+\sum_{k=0}^{n} a_k^2=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(a_k-c_k)^2,$$

სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_n$ წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს მოცემული სისტემის მიმართ. აქედან ჩანს, რომ $I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ინტეგრალს აქვს უმცირესი მნიშვნელობა, როდესაც $a_k=c_k (k=0,1,\ldots,n)$.

მაშასადამე, n-ური რიგის ყველა განზოგადებულ პოლინომს შორის უმცირესი საშუალო კვადრატობითი გადახრა მოცემული $f(x)$ ფუნქციიდან აქვს ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ურ კერძო ჯამს.

ამრიგად, I ინტეგრალის უმცირესი მნიშვნელობაა

$$\int_a^b [f(x)-T_n(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2, \tag{21.1}$$

სადაც

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\omega_k(x).$$

რადგანაც (21.1) ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს არაუარყოფით რიცხვს, ამიტომ

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx.$$

აქედან, n რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გვაქვს:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx. \tag{21.2}$$

ამ უტოლობას ბესელის (Bessel) უტოლობა ეწოდება.

(21.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n\to\infty$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\omega_n(x)dx=0.$$

§ 22. ჩაკეტილი სისტემა. საშუალოდ კრებადობა

განსაზღვრა 8. $[a, b]$ სეგმენტზე ორთონორმირებულ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემას ეწოდება ჩაკეტილი მოცემულ სეგმენტზე, თუ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2, \tag{22.1}$$

სადაც c_k $(k=0, 1,\ldots)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს მოცემული სისტემის მიმართ.

(22.1) ტოლობას ეწოდება პარსევალის (Parseval) ტოლობა. მას უწოდებენ აგრეთვე ჩაკეტილობის პირობას.

თეორემა 17. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე (19.1) სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ იგი სრულიც იქნება.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ყოველი $\omega_k(x)$ ფუნქციის ორთოგონალურია. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი მოცემული სისტემის მიმართ ნულია და, მაშასადამე, პარსევალის ტოლობის თანახმად

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

აქედან გვაქვს $f(x)\equiv 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18. $[a, b]$ სეგმენტზე (19.1) სისტემის ჩაკეტილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\,\omega_k(x)\right]^2 dx = 0. \tag{22.2}$$

სადაც c_k $(k=0, 1,\ldots)$ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია მოცემული სისტემის მიმართ.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ური ჯამი $T_n(x)$ სიმბოლოთი. მაშინ (22.1) ტოლობის თანახმად ჩაკეტილობის პირობა ეკვივალენტურია პირობის

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\right] = 0, \tag{22.3}$$

მაშასადამე, თუ სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია (22.3) ტოლობა. პირიქით, თუ ადგილი აქვს (22.3) ტოლობას ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ სისტემა ჩაკეტილია. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 9. ვთქვათ, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა ეს მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია კვადრატით ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx=0.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x)=f(x)$$

(limit in mean—საშუალო ზღვარი).

მწკრივს ეწოდება საშუალოდ კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ მისი კერძო ჯამთა მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ახლა მე-18 თეორემა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ასე:

$[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციათა ორთონორმირებულ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის ჩაკეტილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს საშუალოდ კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შენიშვნა. ფუნქციათა მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობიდან $f(x)$ ფუნქციისაკენ, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობა $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მართლაც, განვიხილოთ

მაგალითი 10. ყოველი მთელი დადებითი m რიცხვისათვის განვსაზღვროთ $[0, 1]$ შუალედში ფუნქციები

$$\varphi_1^{(m)}(x), \varphi_2^{(m)}(x), \ldots, \varphi_m^{(m)}(x)$$

შემდეგნაირად

$$\varphi_i^{(m)}x=\begin{cases} 1, \text{ თუ } x\in\left[\dfrac{i-1}{m}, \dfrac{i}{m}\right[& (i=1, 2, \ldots, m), \\ 0, \text{ თუ } x\,\overline{\in}\left[\dfrac{i-1}{m}, \dfrac{i}{m}\right[& (i=1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

ამგვარად აგებულ ფუნქციებს თუ გადავნომრავთ რიგრიგობით ერთი ნიშნაკით, მივიღებთ ფუნქციათა მიმდევრობას

$$f_1(x)=\varphi_1^{(1)}(x),\ f_2(x)=\varphi_1^{(2)}(x),\ f_3(x)=\varphi_2^{(2)}(x),\ f_4(x)=\varphi_1^{(3)}(x),\dots$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქციათა ეს მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია ნულისაკენ. მართლაც, თუ $f_n(x)=\varphi_i^{(m)}(x)$, გვექნება

$$\int_0^1 f_n^2(x)dx=\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} dx=\frac{1}{m}.$$

თუ $m\to\infty$, მაშინ $n\to\infty$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n^2(x)dx=0,$$

ე. ი. ფუნქციათა $(f_n(x))_{n>1}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია ნულისაკენ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციათა აღნიშნული მიმდევრობა არ არის კრებადი $[0, 1[$ შუალედის არც ერთ წერტილში. ვთქვათ, ξ არის $[0, 1[$ შუალედის ნებისმიერი წერტილი. ცხადია, ყოველი მთელი m რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $i\leqslant m$, რომ

$$\xi\in\left[\frac{i-1}{m},\ \frac{i}{m}\right[.$$

ასე რომ $\varphi_i^{(m)}(\xi)=1$; მაშასადამე, $f_1(\xi), f_2(\xi),\dots,f_n(\xi),\dots$ მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრჯერ შეგვხვდება რიცხვი 1 და ამიტომ ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n>1}$ არ იქნება კრებადი ξ წერტილში. ამრიგად, ფუნქციათა აღნიშნული მიმდევრობა არ იქნება კრებადი $[0, 1[$ შუალედის არც ერთ წერტილში.

შებრუნებით, ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობა შეიძლება არ იყოს საშუალოდ კრებადი. მოვიყვანოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი 11. ვთქვათ, $[0, 2]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f_m(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$f_m(x)=\begin{cases} m^2x, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{m},\\ -m^2x+2m, & \text{როდესაც } \dfrac{1}{m}<x\leqslant\dfrac{2}{m},\\ 0, & \text{როდესაც } \dfrac{2}{m}<x\leqslant 2 \qquad (m=0, 1, 2,\dots).\end{cases}$$

ყოველი $f_m(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, 2]$ სეგმენტზე. ცხადია, $[0, 2]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)=0$, მაგრამ

$$\int_0^2 f_m^2(x)dx > \int_0^{\frac{1}{m}} f^2(x)dx = \frac{m}{3}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^2 f_m^2(x)dx = +\infty.$$

ამრიგად, ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_m(x))_{m\geq 1}$ ნულისაკენ კრებადია $[0, 2]$ სეგმენტზე, მაგრამ იგი საშუალოდ კრებადი არაა.

თეორემა 19. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს განზოგადებული პოლინომი

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(x)$$

ისეთი, რომ

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx < \varepsilon, \tag{22.4}$$

მაშინ (19.1) სისტემა ჩაკეტილია.

დამტკიცება. განვიხილოთ განზოგადებული $s_n(x)$ პოლინომი, რომლისათვისაც სრულდება (22.4) უტოლობა. როგორც ვიცით, n-ური რიგის განზოგადებულ ყველა პოლინომს შორის უმცირესი საშუალო კვადრატობითი გადახრა მოცემული $f(x)$ ფუნქციიდან აქვს ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ურ კერძო ჯამს. ამიტომ (22.4) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \, \omega_k(x) \right]^2 dx < \varepsilon.$$

აქედან (21.1) ტოლობის თანახმად

$$0 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 < \varepsilon.$$

და რაკი n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ამიტომ

$$0 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \varepsilon.$$

საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობის გამო, გვექნება

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 23. ტრიგონომეტრიული სისტემის ჩაკეტილობა

ლემა. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $t_n(x)$, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - t_n(x)]^2\,dx < \varepsilon. \tag{23.1}$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $f(-\pi) = f(\pi)$. ახლა $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულად გავაგრძელოთ მთელ Ox ღერძზე; ეს გაგრძელებული ფუნქცია უწყვეტია მთელ Ox ღერძზე. ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად მოცემული ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $t_n(x)$, რომ

$$|f(x) - t_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - t_n(x)]^2\,dx < \varepsilon.$$

ამრიგად, ლემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

ახლა ვთქვათ, რომ $f(-\pi) \neq f(\pi)$. აღვნიშნოთ M-ით $|f(x)|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და შევარჩიოთ დადებითი η რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$4M^2\eta < \frac{\varepsilon}{4}.$$

განვიხილოთ $g(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

1) $g(x)=f(x)$, როდესაც $-\pi \leqslant x \leqslant \pi-\eta$,

2) $g(\pi)=f(-\pi)$ და წრფივია $[\pi-\eta, \pi]$ სეგმენტზე.

ცხადია, რომ

$$|g(x)| \leqslant M, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-g(x)]^2 dx =$$

$$= \int_{\pi-\eta}^{\pi} [f(x)-g(x)]^2 dx \leqslant \int_{\pi-\eta}^{\pi} 4M^2 dx = 4M^2\eta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{23.2}$$

მეორე მხრივ, $g(x)$ უწყვეტია და $g(-\pi)=g(\pi)$. ამიტომ არსებობს ტრიგონომეტრიული პოლინომი $t_n(x)$, რომლისთვისაც

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(x)-t_n(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{23.3}$$

თუ გავითვალისწინებთ (23.2) და (23.3) უტოლობებს, გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-t_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-g(x)+(g(x)-t_n(x))]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx + 2\int_a^b [g(x)-t(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20. ტრიგონომეტრიული (18.1) სისტემა ჩაკეტილია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. ლემის ძალით ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული $t_n(x)$ პოლინომი, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-t_n(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

მაგრამ (18.1) სისტემა ორთონორმირებული სისტემაა, ამიტომ მე-19 თეორემის თანახმად ეს სისტემა ჩაკეტილია, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \tag{23.4}$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=0, 1, \ldots)$$

(23.4) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{23.5}$$

ამ ტოლობას პარსევალის ტოლობა ეწოდება.

პარსევალის ტოლობას დიდი მნიშვნელობა აქვს ელექტრონიკაში. მას გარკვეული ფიზიკური აზრი აქვს.

შენიშვნა. მე-16 თეორემა წარმოადგენს მე-20 თეორემის შედეგს. მართლაც, მე-20 თეორემის თანახმად (18.1) სისტემა ჩაკეტილია, ხოლო მე-17 თეორემის ძალით იგი სრულ სისტემას წარმოადგენს.

§ 24. ფურიეს მწკრივის ინტეგრება

თეორემა 21. თუ (19.1) სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ინტეგრება შეიძლება წევრ-წევრად, იმისდა მიუხედავად, მწკრივი კრებადია თუ არა.

დამტკიცება. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტიდან ორი ნებისმიერი წერტილი α და β, $\alpha<\beta$. თუ გამოვიყენებთ ბუნიაკოვსკის უტოლობას, გვექნება

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\alpha}^{\beta} \omega_k(x)dx\right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\omega_k(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{a}^{b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\omega_k(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{a}^{b} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\,\omega_k(x)\right]^2 dx \cdot \int_{a}^{b} 1 \cdot dx}.$$

მე-18 თეორემის თანახმად უკანასკნელი წევრი ნულისაკენ მისწრაფვის, როდესაც $n \to \infty$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} c_k\int_\alpha^\beta \omega_k(x)\,dx\right]=0,$$

ე. ი.,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\int_\alpha^\beta \omega_k(x)dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 25. ფურიეს ინტეგრალი

1°. **ფურიეს ინტეგრალი როგორც ფურიეს მწკრივის ზღვრული შემთხვევა.** ვთქვათ, $[-l, l]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია აბსოლუტურად ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია. გარკვეულ პირობებში ეს ფუნქცია შეგვიძლია დავშალოთ ტრიგონომეტრიულ მწკრივად:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{25.1}$$

სადაც

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

თუ a_n და b_n კოეფიციენტების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (25.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt.$$

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში, როგორიც გინდა იყოს x, შესაბამისი $f(x)$ მნიშვნელობა გამოისახება (25.1) დაშლით ნებისმიერი l-სათვის, რომე-

ლიც აკმაყოფილებს პირობას $l>|x|$. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

მაშინ, როცა $l \to +\infty$, მივიღებთ

$$f(x)=\lim_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (t-x)\, dt.$$

ამ ზღვრის მოსაძებნად შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\lambda_1=\frac{\pi}{l},\ \lambda_2=\frac{2\pi}{l}, \ldots, \lambda_k=\frac{k\pi}{l}, \ldots,$$

$$\Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\pi}{l}.$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t-x)\, dt=$$

$$=\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{l} f(t) \cos \lambda_k(t-x)\, dt. \tag{25.2}$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის გამოსახულება მოგვაგონებს ინტეგრალურ ჯამს λ-ს შემდეგი ფუნქციისათვის

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt,$$

შედგენილს $[0, +\infty[$ შუალედისათვის. ამიტომ ბუნებრივია მოველოდეთ, რომ როდესაც $l \to +\infty$, (25.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გადავა არასაკუთრივ ორმაგ ინტეგრალში და, მაშასადამე, ბუნებრივია მოველოდეთ ფორმულას

$$f(x)=\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt. \tag{25.3}$$

ცხადია, ჩვენი მსჯელობა მკაცრი არაა, მაგრამ ყოველ შემთხვევაში ვიცით, თუ რა ფორმულა უნდა მივიღოთ. ქვემოთ მოვიყვანთ საკმარის პირობებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ (25.3) ფორმულის მართებულობას, ამასთანავე $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებში $f(x)$-ის ნაცვლად უნდა ავიღოთ

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

(25.3) ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალს **ფ უ რ ი ე ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი** ეწოდება, ხოლო (23.3) ფორმულას — **ფ უ რ ი ე ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ უ რ ი ფ ო რ მ უ ლ ა**.

თუ ვისარგებლებთ ორი კუთხის სხვაობის კოსინუსის ფორმულით, (25.3) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{25.4}$$

სადაც

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt. \tag{25.5}$$

როგორც ვხედავთ, (25.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ფურიეს მწკრივის ანალოგიურია: ჯამის ნიშანი შეიცვალა ინტეგრალის ნიშნით, ხოლო მთელრიცხვა k პარამეტრის ნაცვლად გვაქვს უწყვეტად ცვალებადი პარამეტრი. $a(\lambda)$ და $b(\lambda)$ მოგვაგონებს ფურიეს კოეფიციენტებს.

2°. **ფურიეს ინტეგრალით ფუნქციის წარმოდგენის საკმარისი პირობები.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

სადაც A ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, x კი ფიქსირებულია. ეს ინტეგრალი წარმოადგენს ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამის ანალოგს. ამ ინტეგრალის ზღვარი, როდესაც $A\to+\infty$ წარმოადგენს ფურიეს ინტეგრალს

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{25.6}$$

რადგანაც ნებისმიერი დადებითი B რიცხვისათვის $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[-B, B]$ სეგმენტზე, ამიტომ გვექნება

$$\int_0^A d\lambda \int_{-B}^{B} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt = \int_{-B}^{B} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt. \tag{25.7}$$

მაგრამ ინტეგრალის

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \tag{25.8}$$

მაჟორანტია ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

ამიტომ (25·8) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია λ-ს მიმართ ნებისმიერ შუალედში. ამრიგად, ინტეგრალი

$$\int_{-B}^{B} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

თანაბრად მიისწრაფვის თავის (25.8) ზღვრისაკენ, როდესაც $B\to+\infty$. ამიტომ, თუ (25.7) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $B\to+\infty$, გვექნება

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt.$$

ელემენტარული გარდაქმნებით ეს ინტეგრალი შეგვიძლია დავიყვანოთ შემდეგ სახემდე:

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt.$$

ლემა. თუ $g(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, მაშინ მართებულია ტოლობები

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin\lambda t\,dt=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos\lambda t\,dt=0.$$

ეს ლემა მტკიცდება იმგვარადვე, როგორც მე-11 თეორემა.

თეორემა 22 (ჟორდანის ნიშანი). თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და აქვს სასრული ვარიაცია რაიმე $[x-h, x+h]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{25.9}$$

დამტკიცება. ინტეგრალი

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt$$

წარმოვადგინოთ ასე:

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_h^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt=J_1+J_2.$$

ლემის თანახმად,

$$\lim_{A\to+\infty} J_2=0,$$

ხოლო დირიხლეს ლემის ძალით

$$\lim_{A\to+\infty} J_1=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x+)+f(x-)]=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

ამრიგად,

$$\lim_{A\to+\infty} I(A)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

მეორე მხრივ

$$\lim_{A\to+\infty} I(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

მაშასადამე, მართებულია (25.9) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

3°. ფურიეს ინტეგრალი ლუწი და კენტი ფუნქციებისათვის. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 22-ე თეორემის პირობებს, მაშინ

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\int_{0}^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \qquad (25.9)$$

სადაც $a(\lambda)$ და $b(\lambda)$ განისაზღვრებიან (25.5) ტოლობებით.
თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad b(\lambda)=0.$$

მაშასადამე, ფურიეს ინტეგრალი (25.9) მიიღებს სახეს

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt. \qquad (25.10)$$

ეს არის ფურიეს ინტეგრალი ლუწი $f(x)$ ფუნქციისათვის.
ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა. მაშინ

$$a(\lambda)=0, \quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

მაშასადამე, (25.9) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda x\,d\lambda\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt. \qquad (25.11)$$

ეს არის ფურიეს ინტეგრალი კენტი ფუნქციისათვის.

4°. ფურიეს ინტეგრალის კომპლექსური სახე. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჟორდანის თეორემის პირობებს. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt.$$

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს λ-ს კენტ ფუნქციას, ამიტომ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt=0. \qquad (25.12)$$

მეორე მხრივ, ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

არის λ-ს ლუწი ფუნქცია, ამიტომ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (25,13)$$

(25.12) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ i-ზე და მივუმატოთ (25.13) ტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,[\cos\lambda(t-x)+i\sin\lambda(t-x)]\,dt.$$

თუ გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულას, გვექნება

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\lambda(t-x)}\,dt, \qquad (25.14)$$

5°. ფურიეს გარდაქმნა, სპექტრალური ფუნქცია. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ფუნქციას

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \qquad (25.15)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფ უ რ ი ე ს გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა. თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(t-x)}\,dt,$$

მაშინ გვექნება

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \qquad (25.16)$$

ეს ფუნქცია წარმოადგენს $F(\lambda)$ **ფუნქციის შებრუნებულ გარდაქმნას.**

(25.15) ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ამონახსნი (25.16) ინტეგრალური განტოლებისა: $f(x)$ მოცემულია, საძიებელია $F(\lambda)$.

ახლა განვიხილოთ λ-ს შემდეგი ფუნქცია:

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt. \qquad (25.17)$$

ამ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **სპექტრალური ფუნქცია.** იგი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ელექტროტექნიკაში. (25.15) და (25.16) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \qquad (25.18)$$

სავარჯიშო

1. $f(x)=1$ ფუნქცია დაშალეთ სინუსების მიხედვით]C, [illegible] რვალში.

პასუხი: $1=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right).$

2. $f(x)=x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად]0, 2π[ინტერვალში.

პასუხი: $x=\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots\right).$

3. $f(x)=x^2$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად]0, 2π[ინტერვალში.

პასუხი: $x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

4. $f(x)=e^x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $]-\pi, \pi[$ ინტერვალში.

პასუხი: $e^x=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx)\right]$.

5. $f(x)=\cos \alpha x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $]-\pi, \pi[$ ინტერვალში (α მთელი არ არის).

პასუხი: $\cos \alpha x=\frac{2}{\pi}\sin \alpha\pi\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\alpha\cos nx}{n^2-\alpha^2}\right]$.

6. დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $f(x)=\arcsin(\cos x)$ ფუნქცია.

პასუხი: $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

7. $f(x)=x\sin x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში.

პასუხი: $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$.

8. $f(x)=|\cos x|$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად.

პასუხი: $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$.

9. ფურიეს ინტეგრალით წარმოადგინეთ $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ ფუნქცია.

პასუხი: $\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x d\lambda$.

10. მოძებნეთ სპექტრალური ფუნქცია შემდეგი ფუნქციისათვის:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როდესაც } |x|<a\\ 0, & \text{როდესაც } |x|>a.\end{cases}$$

პასუხი: $A(\lambda)=\frac{\sin ax}{\pi\lambda}$.

თ ა ვ ი XIX

ფურიეს ორმაგი მწკრივი

გამოყენებით საკითხებში ხშირად სარგებლობენ ფურიეს ჯერადი მწკრივებით. ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ფურიეს ორმაგ მწკრივებს.

§ 1. ფურიეს ორმაგი მწკრივის ცნება

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $Q=[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ კვადრატზე და, ამის გარდა, ვთქვათ, რომ იგი პერიოდულია 2π პერიოდით ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ. შემოვილოთ აღნიშვნა

$$A_{mn}(x, y)=a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny,$$

სადაც

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(t, \tau)\cos mt\cos n\tau dt d\tau,$$

$$b_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(t, \tau)\sin mt\cos n\tau\, dt d\tau,$$

$$c_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(t, \tau)\cos mt\sin n\tau dt d\tau, \tag{1.1}$$

$$d_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(t, \tau)\sin mt\sin n\tau dt d\tau.$$

ორმაგ მწკრივს

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{mn}A_{mn}(x, y), \tag{1.2}$$

სადაც

$$\lambda_{mn}=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{როცა } m=n=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } m=0,\ n>0, \text{ ან } m>0,\ n=0, \\ 1, & \text{როცა } m>0,\ n>0, \end{cases}$$

ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივი და წერენ:

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y).$$

a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} და d_{mn} რიცხვებს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები.

§ 2. ფურიეს კოეფიციენტების თვისებები

ფურიეს (1.2) მწკრივის კრებადობის საკითხის შესწავლისათვის ხელსაყრელია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. *თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით Q კვადრატზე და იგი პერიოდულია პერიოდით 2π ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ, მაშინ მისი ფურიეს კოეფიციენტებისათვის გვაქვს შემდეგი ტოლობები:*

$$\lim_{m+n\to\infty} a_{mn}=0,\ \lim_{m+n\to\infty} b_{mn}=0,\ \lim_{m+n\to\infty} c_{mn}=0,\ \lim_{m+n\to\infty} d_{mn}=0.$$

ეს თეორემა შედეგია შემდეგი ლემისა:

ლემა. *თუ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $R=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ მართკუთხედზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:*

$$\lim_{m+n\to\infty} \iint_R \varphi(x, y) \cos mx \cos ny\,dxdy=0.$$

$$\lim_{m+n\to\infty} \iint_R \varphi(x, y) \sin mx \cos ny\,dxdy=0,$$

$$\lim_{m+n\to\infty} \iint_R \varphi(x, y) \cos mx \sin ny\,dxdy=0,$$

$$\lim_{m+n\to\infty} \iint_R \varphi(x, y) \sin mx \sin ny\,dxdy=0;$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ პირველი ტოლობის მართებულობა.

გავყოთ R მართკუთხედი მცირე მართკუთხედებად $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, რომლებსაც წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო შიგა წერტილები და რომელთა გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. აღვნიშნოთ ω_k-თი $\varphi(x, y)$ ფუნქციის რხევა r_k-ზე, ე. ი. $\omega_k = M_k - m_k$, სადაც M_k და m_k არიან შესაბამისად $\varphi(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები r_k-ზე. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. რადგანაც $\varphi(x, y)$ ინტეგრებადია R-ზე, ამიტომ r_k სეგმენტები იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \omega_k \mid r_k \mid < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2,1}$$

ახლა ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი N იმ პირობით, რომ

$$N > \frac{16}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\nu} \mid m_k \mid. \tag{2,2}$$

გვაქვს

$$\iint\limits_R \varphi(x, y) \cos mx \cos ny \, dx dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \iint\limits_{r_k} \varphi(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \iint\limits_{r_k} [\varphi(x, y) - m_k] \cos mx \cos ny \, dx \, dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} m_k \iint\limits_{r_k} \cos mx \cos ny \, dx \, dy.$$

რადგან $\varphi(x, y) - m_k \leqslant \omega_k$, როცა $(x, y) \in r_k$ და

$$\left| \iint\limits_{r_k} \cos mx \cos ny \, dx dy \right| < \frac{4}{mn},$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ (2.1) და (2.2) უტოლობებს, მივიღებთ:

$$\left|\iint\limits_R \varphi(x, y)\cos mx \cos ny\, dx\, dy\right| < \sum_{k=1}^{\nu}\omega_k\,|r_k| +$$

$$+\frac{4}{mn}\sum_{k=1}^{\nu}|m_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{N\varepsilon}{4mn} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{N\varepsilon}{2(m+n)} < \varepsilon,$$

როცა $m+n>N$, მაშასადამე,

$$\lim_{m+n\to\infty}\iint\limits_R \varphi(x, y)\cos mx \cos ny\, dx\, dy = 0.$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი სამი ტოლობის მართებულობა.

§ 3. ფურიეს ორმაგი მწკრივის კერძო ჯამის გამოსახულება

აღვნიშნოთ $S_{mn}(x, y; f)$-ით (1.2) მწკრივის კერძო ჯამი:

$$S_{mn}(x, y; f) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{ik}A_{ik}(x, y).$$

კერძო ჯამი $S_{mn}(x, y; f)$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ორჯერადი ინტეგრალის საშუალებით. მართლაც (1.1)-ის ძალით,

$$S_{mn}(x, y; f) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{ik}\iint\limits_Q f(t, \tau)\cos i(x-t)\cos k(y-\tau)\,dt\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(t, \tau)\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m}\cos i(x-t)\right]\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-\tau)\right]dt\, d\tau.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m}\cos i(x-t) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$S_{mn}(x, y; f) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(t, \tau)\, D_m(x-t)\, D_n(y-\tau)\,dt\,d\tau, \qquad (3.1)$$

სადაც

$$D_m(x-t)=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}.$$

$D_m(x-t)$-ს ეწოდება დირიხლეს გული.

თუ (3.1)-ში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას $x-t=-u$, $y-\tau=-v$ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 2π u და v-ს მიმართ და შემდეგ u და v-ს ნაცვლად დავწერთ შესაბამისად t და τ-ს, მივიღებთ:

$$S_{mn}(x, y; f)=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x+t, y+\tau)\, D_m(t) D_n(\tau)\, dt d\tau. \quad (3.2)$$

თუ (x, y) წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn}(x, y; f)=f(x, y),$$

მაშინ ამბობენ, რომ (1.2) მწკრივი კრებადია (x, y) წერტილზე და ჯამად აქვს $f(x, y)$.

$S_{mn}(x, y; f)$ კერძო ჯამის ნაცვლად ხელსაყრელია განვიხილოთ $S^*_{mn}(x, y; f)$, რომელიც შემდეგი ტოლობითაა განსაზღვრული:

$$S^*_{mn}(x, y; f)=S_{mn}(x, y; f)-\frac{1}{4}A_{mn}(x, y).$$

რადგანაც $A_{mn}(x, y)$ თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $m, n\to\infty$, ამიტომ $f(x, y)$ ფუნქციის გაშლისათვის ფურიეს ორმაგ მწკრივად (x, y) წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$\lim_{m,n\to\infty} S^*_{mn}(x, y; f)=f(x, y).$$

თუ გავითვალისწინებთ ფურიეს კოეფიციენტების გამოსახულებებს, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$A_{mn}(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x+t, y+\tau)\cos mt\cos n\tau\, dt d\tau.$$

ამიტომ (3.2)-ის ძალით გვექნება:

$$S^*_{mn}(x, y; f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x+t, y+\tau) \left[D_m(t) D_n(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \cos mt \cos n\tau \right] dt d\tau.$$

მაგრამ

$$D_m(t) D_n(\tau) - \frac{1}{4} \cos mt \cos n\tau =$$

$$= D^*_m(t) D^*_n(\tau) + \frac{1}{2} D^*_m(t) \cos n\tau + \frac{1}{2} D^*_n(\tau) \cos mt,$$

სადაც

$$D^*_m(t) = D_m(t) - \frac{1}{2} \cos mt = \frac{\sin mt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$S^*_{mn}(x, y; f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x+t, y+\tau) D^*_m(t) D^*_n(\tau)\, dt d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \iint_Q f(x+t, y+\tau) D^*_m(t) \cos n\tau\, dt d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \iint_Q f(x+t, y+\tau) D^*_n(\tau) \cos mt\, dt d\tau.$$

რადგანაც

$$\int_{-\pi}^{\pi} D^*_m(t) dt = \pi,$$

ამიტომ

$$\iint_Q D^*_m(t) D^*_n(\tau) dt d\tau = \pi^2,$$

ახლა ავიღოთ რაიმე რიცხვი S; გვაქვს:

$$S^*_{mn}(x, y; f) - S = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q [f(x+t, y+\tau) - S] D^*_m(t) D^*_n(\tau) dt d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_Q f(x+t,\ y+\tau)\,D_m^*(t)\cos n\tau\,dtd\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_Q f(x+t,\ y+\tau)\,D_n^*(\tau)\cos mt\,dt\,d\tau.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi D_m^*(t)\cos n\tau\,dtd\tau=0,\quad \text{როცა}\quad n>0,\\&\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi D_n^*(\tau)\cos mt\,dtd\tau=0,\quad \text{როცა}\quad m>0.\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ $D^*(t)$ ფუნქციის ლუწობას და (3.3) ტოლობებს, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$S_{mn}^*(x,\ y;\ f)-S=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)D_m^*(t)D_n^*(\tau)+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)\,D_m^*(t)\cos n\tau\,dtd\tau+\tag{3.4}$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)\,D_n^*(\tau)\cos mtdtd\tau,$$

როცა $m>0$, $n>0$, სადაც

$$\varphi_{x,y}(t,\ \tau)=f(x+t,\ y+\tau)+f(x+t,\ y-\tau)+f(x-t,\ y+\tau)+$$
$$+f(x-t,\ y-\tau)-4S.$$

(3.4) გამოსახულებით ქვემოთ ვისარგებლებთ.

§ 4. ფურიეს ორმაგი მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი

თეორემა 2. თუ $f(x,\ y)$ პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 2π ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი კრებადია $(x,\ y)\in Q$ წერტილში $\frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4)$ ჯამისაკენ (S_1, S_2, S_3, S_4—მოცემული რიცხვებია), თუ დაცულია შემდეგი პირობები:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t,\ \tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}dtd\tau<\infty,\ \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t.\ \tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dtd\tau<\infty,$$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t,\ \tau)|}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}dtd\tau<\infty \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$\int_0^\pi \frac{|\Psi_k(t)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt<\infty,\ \int_0^\pi \frac{|\Omega_k(\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}d\tau<\infty \quad (k=1,\ 2),$$

სადაც

$$\Phi_1(t,\ \tau)=f(x+t,\ y+\tau)-f(x+t,\ y+)-f(x+,\ y+\tau)+S_1,$$
$$\Phi_2(t,\ \tau)=f(x+t,\ y\quad \tau)-f(x+t,\ y-)-f(x+.\ y-\tau)+S_2,$$
$$\Phi_3(t,\ \tau)=f(x-t,\ y+\tau)-f(x-t,\ y+)-f(x-,\ y+\tau)+S_3,$$
$$\Phi_4(t,\ \tau)=f(x-t,\ y-\tau)-f(x-t,\ y-)-f(x-,\ y-\tau)+S_4$$
$$\Psi_1(t)=f(x+t,\ y+)+f(x-t,\ y+)-(S_1+S_3),$$
$$\Psi_2(t)=f(x+t,\ y-)+f(x-t,\ y-)-(S_2+S_4),$$
$$\Omega_1(\tau)+f(x+,\ y+\tau)+f(x+,\ y-\tau)-(S_1+S_2),$$
$$\Omega_2(\tau)=f(x-,\ y+\tau)+f(x-,\ y-\tau)-(S_3+S_4),$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$S=\frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4).$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$\varphi_{x,y}(t,\ \tau)=\Phi_1(t,\ \tau)+\phi_2(t,\ \tau)+\Phi_3(t,\ \tau)+\Phi_4(t,\ \tau)+$$
$$+\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Omega_1(\tau)+\Omega_2(\tau).$$

აღვნიშნოთ

$$J_1=\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)\,D_m^*(t)\,D_n^*(\tau)\,dtd\tau,$$

$$J_2=\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)\,D_m^*(t)\cos n\tau\,dt\,d\tau.$$

$$J_3=\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{x,y}(t,\ \tau)\, D_n^*(\tau)\cos mt\, dt d\tau.$$

გვაქვს

$$J_1=A_{mn}^{(1)}+A_{mn}^{(2)}+A_{mn}^{(3)}+A_{mn}^{(4)}+B_m^{(1)}+B_m^{(2)}+C_n^{(1)}+C_n^{(2)},$$

სადაც

$$A_{mn}^{(i)}=\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\Phi_i(t,\tau)}{4\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\sin mt\cos nt\, dt d\tau, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$B_m^{(i)}=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \frac{\Psi_i(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\sin mt dt, \quad i=1,\ 2,$$

$$C_n^{(i)}=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \frac{\Omega_i(\tau)}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\sin n\tau d\tau, \quad i=1,\ 2.$$

რადგანაც $\dfrac{|\Phi_i(t,\ \tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[0,\ \pi;\ 0,\ \pi]$ მართკუთხედზე, ამიტომ პირველი თეორემის ძალით

$$\lim_{m,n\to\infty} A_{mn}^{(i)}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

აგრეთვე, რადგანაც $\dfrac{|\Psi_i(t)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$ და $\dfrac{|\Omega_i(\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[0,\ \pi]$ შუალედში, ამიტომ ერთ-ერთი ცნობილი თეორემის ძალით

$$\lim_{m\to\infty} B_m^{(i)}=\lim_{n\to\infty} C_n^{(i)}=0 \quad (i=1,\ 2).$$

მაშასადამე,

$$\lim_{m,n\to\infty} J_1=0.$$

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$\lim_{m,n\to\infty} J_2=\lim_{m,n\to\infty} J_3=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.4) ტოლობას, მივიღებთ

$$\lim_{m,n\to\infty} S^{*}_{mn}(x,\ y;\ f)=S.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა. ვიტყვით რომ $f(x,\ y)$ პერიოდული ფუნქცია პერიოდით 2π ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს $(x_0,\ y_0)$ წერტილში $T^{\alpha',\beta'}_{\alpha,\beta}$ პირობას, თუ დაცულია შემდეგი პირობები:

1) Q-ს შიგნით აღებული ყოველი ორი წერტილისათვის $(x',\ y')$ და $(x'',\ y'')$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'',\ y'')-f(x',\ y')|<K_1(|x''-x'|^{\alpha}+|y''-y'|^{\beta}),\qquad(4.1)$$

სადაც K_1, α, β დადებითი რიცხვებია.

2) არსებობს $(x_0,\ y_0)$ წერტილის ისეთი მიდამო R, რომ ამ მიდამოს ყოველი $(x,\ y)$ წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x,\ y)-f(x_0,\ y)-f(x,\ y_0)+$$
$$+f(x_0,\ y_0)|<K_2|x-x_0|^{\alpha'}|y-y_0|^{\beta'},\qquad(4.2)$$

სადაც K_2, α', β' დადებითი რიცხვებია.

თუ $(x_0,\ y_0)$ წერტილი მდებარეობს Q-ს საზღვარზე, მაშინ x_0, y_0 უნდა შეიცვალოს $x_0\pm$, $y_0\pm$ იმისდა მიხედვით, თუ როგორი მდებარეობა აქვს $(x,\ y)$ წერტილს $(x_0,\ y_0)$ წერტილის მიმართ. შემდეგ, 1) პირობის საფუძველზე ადვილი საჩვენებელია $f(x_0\pm,\ y_0\pm)$ ზღვრების არსებობა, თუ $(x_0,\ y_0)$ წერტილი მდებარეობს Q-ს საზღვარზე. Q-ს შიგნით $f(x,\ y)$ ფუნქცია უწყვეტია.

თეორემა 8. თუ $f(x,\ y)$ პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 2π ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ და $(x_0,\ y_0)\in Q$ წერტილში იგი აკმაყოფილებს $T^{\alpha',\beta'}_{\alpha,\beta}$ პირობას, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი კრებადია S ჯამისაკენ, სადაც

$$S=\frac{1}{4}[f(x_0+,\ y_0+)+f(x_0+,\ y_0-)+f(x_0-,\ y_0+)+f(x_0-,\ y_0-)].$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_0,\ y_0)$ წერტილის მიდამო, სადაც სრულდება (4.2) პირობა, არის $R=[x_0-\eta,\ x_0+\eta;\ y_0-\eta,\ y_0+\eta]$ მართკუთხედი. აღვნიშნოთ

$$f(x_0+,\ y_0+)=S_1,\ f(x_0+,\ y_0-)=S_2,\ f(x_0-,\ y_0+)=S_3,$$
$$f(x_0-,\ y_0-)=S_4.$$

დავამტკიცოთ, რომ სრულდება მე-2 თეორემის ყველა პირობა. გვაქვს

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t,\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau=\int_0^\eta\int_0^\eta \frac{|\Phi_i(t,\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau+$$

$$+\int_0^\eta dt\int_\eta^\pi \frac{|\Phi_i(t,\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau+\int_\eta^\pi dt\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t,\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau=I_1+I_2+I_3.$$

რადგანაც R მართკუთხედზე ადგილი აქვს (4.2) პირობას, ამიტომ

$$|\Phi_i(t,\tau)|<K_2 t^{\alpha'}\tau^{\beta'}.$$

მაშასადამე, არსებობს I_1 ინტეგრალი.

შემდეგ, (4.1) პირობის ძალით

$$|\Phi_i(t,\tau)|<2K_1t^{\alpha},\quad |\Phi_i(t,\tau)|<2K_1\tau^{\beta}$$

და ამიტომ არსებობს I_2 და I_3 ინტეგრალები. მაშასადამე,

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|\Phi_i(t,\tau)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\,dt\,d\tau<\infty\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს მეორე თეორემის დანარჩენ პირობებს. ამიტომ მე-2 თეორემის ძალით, მართებულია მე-3 თეორემა.

რადგანაც Q კვადრატის შიგნით $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ Q კვადრატის ყოველ შიგა (x_0, y_0) წერტილში $S=f(x_0, y_0)$. მაშასადამე, ასეთ წერტილებში $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x_0, y_0)$ მნიშვნელობისაკენ.

ეს თეორემა ლ. ტონელის (Tonelli) ეკუთვნის. ამ თეორემას იგი სხვა გზით ამტკიცებს.

შინაარსი

თავი I

ფუნქციათა მიმდევრობა და ფუნქციათა მწკრივი

თავი II

ხარისხოვანი მწკრივები

თავი III

ორმაგი მწკრივები

თავი IV

მრავალგანზომილებიანი სივრცის ზოგიერთი საკითხი

თავი V

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

თავი VI

მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

თავი VII

არაცხადი ფუნქციები

თავი VIII

ცვლადთა გარდაქმნა

თავი IX

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

თავი X

პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალები

თავი XI

წირითი ინტეგრალი

თავი XII

ფუნქციები სასრული ვარიაციით. სტილტიესის ინტეგრალი

თავი XIII

ორჯერადი ინტეგრალი

თავი XIV

სამჯერადი ინტეგრალი

თავი XV

n-ჯერადი ინტეგრალი

თავი XVI

ზედაპირული ინტეგრალები

თავი XVII

ველის თეორიის ელემენტები

თავი XVIII

ფურიეს მწკრივი და ფურიეს ინტეგრალი

თავი XIX

ფურიეს ორმაგი მწკრივი

რედაქტორი ა. სულაქველიძე
გამომცემლობის რედაქტორი ა. სტურუა
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ზ. გიორგაძე

სგ 818

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20.9.82
ქაღალდის ფორმატი 60×90/16
ნაბეჭდი თაბახი 42,5
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 35,83

შეკვეთა 3312 ტირაჟი 2000

ფასი 1 მან. 60 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 380028,
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა,
თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ. 19
Типография АН Груз. ССР,
Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

Владимир Георгиевич Челидзе
Элизбар Семёнович Цитланадзе

КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(На грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1983