

ანზორ ხელაშვილი

კლასიკური თეორიული მემანიკა

(ლექციების კურსი)



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი 2005

ლექციების წინამდებარე კურსში განიხილება თეორიული ფიზიკის პირველი ხაზის – კლასიკური თეორიული მექანიკის საფუძვლები და ძირითადი მეთოდები. ტრადიციულ ცნებებთან ერთად გაშუქებულია ისეთი საკითხები, რომლებიც სტანდარტულ სასწავლო კურსებში არ არის წარმოდგენილი. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა დრმა ურთიერთკავშირის სიმეტრიებს, ინვარიანტულობასა და შენახვის კანონებს შორის, რაც თანამედროვე ფიზიკაში უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებს.

ლექციების ამ კურსით სარგებლობა შეუძლიათ ფიზიკის ფაკულტეტების ბაკალავრიატის სტუდენტებს, აგრეთვე მაგისტრანტებსა და ასპირანტებს თეორიული ფიზიკის სპეციალუ-ბით.

In the Lecture Course below the foundations and main methods of the first subject of Theoretical Physics – Classical Theoretical Mechanics – are considered. Together with traditional issues there are topics, which are not usually described in standard teaching books. Among them special attention is paid on the deep correlations between symmetries, invariance properties and conservation laws, which play very important role in modern physics.

These lectures are addressed to the bachelor students of physics faculties, as well as to students of master degree on specialization of Theoretical Physics.

რედაქტორი დოცენტი თეიმურაზ ნადარეიშვილი

რეცენზენტები: პროფესორი მერაბ ელიაშვილი
პროფესორი ზაურ ძაჩლიშვილი
უფროსი მწიგნობარი ილია ლომიძე

Editor Dr. TEIMURAZ NADAREISHVILI

Reviewers: Prof. MERAB ELIASHVILI
Prof. ZAUR KACHLISHVILI
Assist.Prof. ILIYA LOMIDZE



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2005
Tbilisi University Press, 2005

ISBN 99940-12-70-3

წინამდებარე წიგნი ემყარება ავტორის მიერ უკანასკნელი 8-10 წლის მანძილზე უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტზე წაკითხული ლექციების მასალას და ამ ხნის განმავლობაში საგნის სწავლებისას დაგროვილ პედაგოგიურ გამოცდილებას.

კლასიკური მექანიკა თეორიული ფიზიკის საუნივერსიტეტო კურსის პირველი დისციპლინაა. მართალია, მექანიკურის გარდა ფიზიკა ბევრს სხვა სახის მოძრაობებს, რომლებიც მარტორდენ მექანიკურ მოძრაობაზე არ დაიყენებებიან, მაგრამ კლასიკური თეორიული მექანიკა ასრულებს განმსაზღვრელ როლს მთელი თეორიული ფიზიკის შენობაში. კლასიკური თეორიული მექანიკის მეთოდები გამსჭვალავნი თეორიული ფიზიკის მთელ კურსს, უწყობენ რა ხელს ამ დისციპლინათა უკეთ გაგებას.

უკანასკნელი 20-30 წლის მანძილზე მნიშვნელოვნად შეიცვალა თეორიული ფიზიკის სწავლების მეთოდიკა, განსაკუთრებით დასავლეთის უნივერსიტეტებში. წმინდა თეორიულ საკითხებთან ერთად საგრძნობი აქცენტია გადატანილი პრაქტიკულ გამოყენებებზე სხვადასხვა სირთულის ამოცანებისა და საფარულიშობის სახით. მხოლოდ ამ უკანასკნელში - საფარულიშობისა და ამოცანების ამოხსნაში შეღავათიანი თეორიული შეგნებულად აითვისა სტუდენტმა თეორიული მასალა, რამდენად დაეუფლა თეორიის მათემატიკურ მეთოდებს და რამდენად უნარიანად იყენებს მათ.

წინამდებარე კურსში უხვადია გამოყენებული ევროპისა და ამერიკის სხვადასხვა უნივერსიტეტების სახელმძღვანელოთა მეთოდიკა და უკვე ტრადიციად ქცეული თეორიული საკითხების გადმოცემის სტილი - პირველადი ცნებებიდან გამომდინარე ძირითად ქვაკუთხედ პრინციპებამდე ასულა და შემდეგ უკვე გადმოხვედა ამ სომადლებებიდან. როგორც პრაქტიკა აჩვენებს, ეს გზა უფრო ადვილად გასაგებია სტუდენტისათვის, ვიდრე პირდაპირი აქსიომატიკური მიდგომა, რადგან, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში აქსიომების ფიზიკური საფუძვლები, როგორც წესი, გაუგებარი რჩება.

ასეა, მაგალითად, გადმოცემული წყენი კურსის პირველ თავებში ლაგრანჟის მეთოდი - ნაბიჯ-ნაბიჯ გაკვლეულია გზა ჰამილტონის ქმედების პრინციპისაკენ და შემდგომ ეს პრინციპი აუვანილია ქვაკუთხედის რანგში, საიდანაც გამომდინარეობს თეორიის ძირითადი განტოლებები და თანაფარდობები. საკითხების შინაარსში გარკვევა უნდა გაამარტივოს ყოველ ეტაპზე გარჩეულმა მაგალითებმა და საფარულიშობმა ამოხსნილი ამოცანების სახით, აგრეთვე სტუდენტის დამოუკიდებელი მუშაობისათვის განკუთვნილმა ამოცანებმა.

თეორიული მასალის გადმოცემის სტილი ეყრდნობა ისეთ კლასიკურ სახელმძღვანელოებსა და მონოგრაფიებს, როგორიცაა ჯ. გოლდსტეინის "კლასიკური მექანიკა", დ. გრინუელის "კლასიკური დინამიკა", გ. ვინერის "კლასიკური თეორიული ფიზიკის კურსი", აგრეთვე ჯ. მაკკელის "კლასიკური მექანიკა". წყენი კურსის ბოლოს მოყვანილია ამ და სხვა სახელმძღვანელოთა სრული ნუსხა. შემოადინებულ წიგნებში თეორიული ფიზიკის აღრინველი ტრადიციული კურსებიდან გადაიხვევა ძირითადად განპირობებულია იმის მცდელობით, რომ სტუდენტისათვის მისაღები ფორმით გადაეშეადგოს მაღალი მათემატიკურ დონეზე დაწერილი ძველი მეთოდის მონოგრაფიები, როგორიცაა, მაგალითად, ვ. არნოლდის ცნობილი მონოგრაფია "კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მეთოდები", რომელმაც გასული საუკუნის 60-იანი წლებიდან მოყოლუბალი, უდიდესი ზეგავლენა იქონია თეორიული ფიზიკის მათემატიკური საფუძვლების განვითარებაზე და ამავე დროს ახალი ეპოქის მოთხოვნებსაც ეხმარება.

როგორც მრავალწლიანმა პრაქტიკამ გვიჩვენა, უნივერსიტეტის ბაკალავრიატის მე-2 კურსზე 3-კრედიტანი ხალექციო კურსით, ყოველკვირული 2-საათიანი პრაქტიკული მეცადინეობების თანხლებით ხალექციო კურსთან შეხამებულად, სტუდენტობის უდიდესი ნაწილის მიერ საკმაოდ კარგად დაიძლევა საგნის სირთულეები. სტუდენტობა კარგად ეუყრდება კლასიკური მექანიკის შემოთავსებულ მეთოდებს, რის შემდეგაც თეორიული ფიზიკის დანარჩენ კურსებშიც ავლენს ორიენტაციის გამახვილებულ უნარ-ჩვევებს.

როგორც ცნობილია, კლასიკური თეორიული მექანიკა იკითხება მექანიკის ზოგადი კურსის გაეღის შემდეგ, რაც თავისთავად შესანიშნავ შედეგს იძლევა.

წინამდებარე კურსში გაძლიერებულია ყურადღება კავშირებზე სიმეტრიების, ინვარიანტულობის და შენახვის კანონების შორის, შეტანილია ისეთი საკითხები, რომლებიც წინა წლებში არ იკითხებოდა და არც იყო გადმოცემული ტრადიციულ სახელმძღვანელოებში. ასეთ საკითხთა რიგს განეკუთვნება ნიორტრის თეორემა, კვპლერის და ისტროპული ოსცილატორის ამოცანების "ყარული სიმეტრია", ბერტრანის თეორემა, უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების მეთოდი და ა.შ. პამილტონ-იაკობის მეთოდი და განტოლება გადმოცემულია კანონიკური გარდაქმნების ჭრილობში, რაც ფიზიკურად უფრო გასაგებებს ხდის როგორც ერთს, ისე მეორეს.

წინამდებარე ლექციების კურსი ქართულ ენაზე ზემოაღნიშნული ტიპის სახელმძღვანელოებში შექმნის პირველი დამოუკიდებელი ცდაა. ამიტომ ის განხილული უნდა იქნეს როგორც სახელმძღვანელოს წინამძღვარი. მთ უმეტეს, რომ ერთადერთი არსებული სახელმძღვანელო ქართულ ენაზე, ე. მაინახელისთვის და გ. ჭილაშვილის აუტორობით, უკვე ბიბლიოთეკურ იშვიათობას წარმოადგენს. ბუნებრივია, რომ ლექციების ეს კურსი ვერ იქნება თავისუფალი ხარვეზებისგან, ამიტომ ავტორი სიამოვნებით მიიღებს ყველა შენიშვნას თუ მითითებას, რისთვისაც მკითხველს წინასწარ უხდის მადლობას.

ავტორი მადლობას უხდის თეორიული ფიზიკის კათედრის უყროს მასწავლებლებს - ოლღა მუხხელიშვილს და ილია ლომიძეს, აგრეთვე დოც. თემურაზ ნადარეიშვილს, რომლებმაც პრაქტიკულ მეცადინეობებსა და კოლოკვიუმებზე წარმატებით გამოისცადეს ლექციათა ამ კურსის განსაკუთრებული საკითხები და ამით ფასდაუდებელი სამსახური გაუწიეს როგორც სტუდენტებს, ასევე ავტორს. ავტორისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქონდა ნაყოფიერ დისკუსიებს ბატონ ილია ლომიძესთან, რამაც საგრძნობლად გააუმჯობესა კურსის შინაარსი.

ავტორი განსაკუთრებით კმაყოფილია თეორიული ფიზიკის კათედრის თანამშრომელთა ყურადღებით, რომლებმაც ლექციების საკენამო თავები საკმაოდ კრიტიკულად განიხილეს კათედრის ტრადიციულ სემინარებზე.

ამასთან დაკავშირებით ავტორი სიამოვნებით აღნიშნავს იმ მხარდაჭერას, რომელსაც მუდმივად გრძნობდა დოცენტ ნუგზარ ჩიტაიას მხრიდან, განსაკუთრებით კომპიუტერული უზრუნველყოფის დროს.

დაბოლოს, ავტორი კიდევ ერთხელ მადლობას უხდის დოც. თემურაზ ნადარეიშვილს, რომელმაც იკისრა კურსის რედაქტორის ურთულესი მოვალეობა - წაიკითხა იგი ორიგინალში და მიუთითა ავტორს რიგი ხარვეზების თაობაზე.

ავტორი გულწრფელ მადლობას უხდის პროფესორ მერაბ ელიაშვილს, რომელმაც გასწია კურსის რეცენზირება.

თავის დროზე ნილს ბორი აღნიშნავდა, რომ მათ (თეითონ და მისმა სკოლამ) იმიტომ მიადწიეს ესოდენ დიდ შედეგებს, რომ ჰყავდათ კარგი მეუღლეები. ავტორი ძალიან შორს დგას ნილს ბორთან შედარებისგან, მაგრამ არ შეუძლია დიდი პატივით არ მოიხსენიოს მეუღლის (და საერთოდ, ოჯახის წევრების) მუდმივი ყურადღება და ხელშეწყობა.

იმედს გვაქვს, რომ ლექციათა განახლებული კურსი პოეებს თავის ადგილს თეორიული ფიზიკის სწავლებაში და ხელს შეუწყობს სტუდენტ ახალგაზრდობის შორის თეორიული აზროვნების განვითარებას.

შ ო ნ ა ა რ ს ო

| | | |
|---|---|-----|
| წინათქმა | ----- | 5 |
| შესავალი | ----- | 9 |
| თავი I. კლასიკური მექანიკის ძირითადი კონცეფციები | | |
| 1. | მატერიალური სისტემები. ბმები და მათი კლასიფიკაცია | 17 |
| 2. | ვირტუალური გადაადგილებები. ვირტუალური სინქარები | 23 |
| 3. | ვირტუალური მუშაობა. იდეალური ბმები | 29 |
| 4. | არათაღისუფალი (ბმებიანი) მექანიკური სისტემების მოძრაობის შესწავლის ამოცანის დასმა | 32 |
| 5. | განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული ძალები | 35 |
| თავი II. კლასიკური დინამიკის ძირითადი პრინციპები და მოძრაობის განტოლებები | | |
| 1. | ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი | 39 |
| 2. | ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი განზოგადებულ კოორდინატებში | 41 |
| 3. | წონასწორობის მდებარეობის მდგრადობა | 42 |
| 4. | დალაშქრის პრინციპი და ლაგრანჯის განტოლებები | 43 |
| 5. | სინქარულ დამოკიდებულ პოტენციალი და დისიპაციური ფუნქცია | 47 |
| 6. | ლაგრანჯის განტოლებების მახალთები | 51 |
| ა) | კინეტიკური ენერგია (თავისუფალი მატერიალური წერტილის ლაგრანჟიანი) | 51 |
| ბ) | მოძრაობის განტოლების ფორმა | 53 |
| 7. | არაპოლინომური სისტემები და ლაგრანჯის განტოლებები | 54 |
| თავი III. ვარიაციული პრინციპები და ლაგრანჯის განტოლებები | | |
| 1. | იზოქრონული ვარიაციის თვისებები.ჰამილტონის ქმედების ფუნქცია | 60 |
| 2. | ვარიაციული აღრიცხვის სოგიურთი მეთოდი | 63 |
| თავი IV. სიმეტრიების თვისებები. შენახვის (მუდმივობის) კანონები | | |
| 1. | განზოგადებული იმპულსები. ციკლური კოორდინატები | 71 |
| 2. | რუსის ფუნქცია და რუსის განტოლება | 74 |
| 3. | სივრცე-დროთი სიმეტრიები და შენახვადი ფიზიკური სიდიდეები | 77 |
| ა) | იმპულსი | 77 |
| ბ) | იმპულსის მომენტი | 79 |
| გ) | თუორემა კონსერვატიული სისტემის სრული ენერჯიის შენახვის შესახებ | 81 |
| 4. | ნიოტერის თეორემა | 83 |
| თავი V. შენახვის კანონებისა და დინამიკის ძირითადი განტოლებების გამოყენება მოძრაობის განტოლებათა ინტეგრაციისათვის | | |
| 1. | ერსგანსომილებიანი მოძრაობა | 87 |
| 2. | შებრუნებული სექტრალური ამოცანის ცნება | 91 |
| 3. | მცირე რხევები | 94 |
| 4. | ორი სხეულის ამოცანა | 104 |
| 5. | მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში | 107 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 6. | ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობის თვისებრივი გამოკვლევა | 113 |
| 7. | მოძრაობა ნაკეტალ პერიოდულ ორბიტებზე (ორბიტის ნაკეტალობის პირობები). ბერტრანის თეორემა | 121 |
| 8. | კელდერის ამოცანა | 126 |
| 9. | ლაპლას-რუნდგელენცის ვექტორი და კელდერის ველის "ფარული" სიმეტრია | 134 |
| 10. | ნაწილაკთა გაფანტვის კლასიკური თეორიის ელემენტები | 137 |
| 11. | $\rho = \rho(\kappa)$ ფუნქციონალური დამოკიდებულების შესწავლა. გაფანტვის შებრუნებული ამოცანა | 141 |
| 12. | რესურსორდის ფორმულა | 144 |
| 13. | თეორემა ვირიალის შესახებ | 147 |

თავი VI. ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

| | | |
|----|---|-----|
| 1. | დეჰანდრის გარდაქმნა | 150 |
| 2. | ციკლური კოორდინატები და რაუსის მეთოდი | 155 |
| 3. | ფაზური სივრცე და ფაზური ტრაექტორიების მაგალითები | 160 |
| 4. | ფაზური სივრცე და ლიუვილის თეორემა | 161 |
| 5. | ვარიაციული პრინციპები ჰამილტონის განტოლებები-სათვის | 165 |
| 6. | ვარიაციული პრინციპების სხვადასხვა სახე | 168 |

თავი VII. კანონიკური გარდაქმნები

| | | |
|----|--|-----|
| 1. | კანონიკური გარდაქმნების განტოლებები | 174 |
| 2. | კანონიკური გარდაქმნების მაგალითები | 179 |
| 3. | პუასონის ფრენილუბი | 182 |
| 4. | პუასონის ფრენილუბი და კანონიკური გარდაქმნები | 185 |
| 5. | უასარულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნები. მოძრაობის ინტეგრალები და სიმეტრიის თვისებები | 188 |
| 6. | კლდეკ ერთხელ "ფარული სიმეტრიის" შესახებ | 192 |

თავი VIII. იაკობის თეორია. ჰამილტონ-იაკობის მეთოდი

| | | |
|----|--|-----|
| 1. | ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები | 196 |
| 2. | იაკობის თეორემა | 198 |
| 3. | კონსერვატიული სისტემები და იგნორირებადი კოორდინატები | 203 |
| 4. | ცვლადთა განცადების მეთოდი | 204 |
| 5. | ლიუვილის სისტემა. ლიუვილის თეორემა | 205 |

თავი IX. ლაგრანჟისა და ჰამილტონის ფორმალისმის ელემენტები უწყვეტი სისტემებისათვის

| | | |
|----|--|-----|
| 1. | დისკრეტულიდან უწყვეტ სისტემებზე გადასვლა | 210 |
| 2. | ლაგრანჟის განტოლებები უწყვეტი სისტემებისათვის | 213 |
| 3. | ჰამილტონის განტოლებები უწყვეტი სისტემებისათვის | 217 |
| | სილაბუსი | 221 |
| | ლიტერატურა | 223 |

თეორიული ფიზიკა, როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერება, გამოიყო გასული საუკუნის პირველ ათწლეულში. მისი ამოცანა იყო ფიზიკური მოვლენების რომელიმე სფეროს წარმმართველი ზოგადი კანონების აღმოჩენა, ერთი მხრივ, ხოლო მეორე მხრივ, იმის განსაზღვრა, თუ ამ ზოგადი კანონებიდან გამომდინარე, როგორ შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ ამა თუ იმ ფიზიკური სისტემის ყოფაქცევა.

ეს ამოცანები ჩვენ მიერ ბუნების შემეცნების თანამედროვე ეტაპზე იმდენად რთულია და ლოგიკური გაასრების იმდენად გრძელ ჯაჭვებს მოითხოვენ, რომ რაიმე წინსვლა ამ გზაზე შეუძლებელია მძლავრი მათემატიკური აპარატის გარეშე. მათემატიკის მაღალი ხარისხი, ალბათ არის თეორიული ფიზიკის პირველი დამახასიათებელი ატრიბუტი. ზოგისთვის ეს შეიძლება ძნელად დასაძლევად კი აღმოჩნდეს, მაგრამ მიუხედავად ამისა, მხოლოდ ამ მათემატიკურ აპარატზე გადის ყველაზე უმარტივესი გზა იმის გასარკვევად, თუ როგორაა მოწყობილი ბუნება.

ყოველივე ეს, ცხადია, არ ნიშნავს, რომ თეორიული ფიზიკა განვიხილოთ როგორც მათემატიკის დარგი. საქმე ისაა, რომ თეორიულ ფიზიკას აქვს თავისი სპეციფიკური განსაკუთრებულობანი, რომლებიც მას არაა თუ განახსებავენს მათემატიკისაგან, არამედ ხშირად ბუერი მისი მეთოდი გარკვეული შინაარსით პირდაპირ საწინააღმდეგოა მათემატიკური მეთოდისა. ერთი ცნობილი ფიზიკოს-თეორეტიკოსი ამბობდა: “მათემატიკოსი იძლევა მტკიცებებს, ფიზიკოსი კი არწმუნებს მსმენელს”.

ეს განსხვავება, ცხადია, იმით კი არ არის განპირობებული, რომ მათემატიკოსებს და ფიზიკოს-თეორეტიკოსებს განსხვავებული აზროვნება აქვთ, არამედ ამას თვით კვლევის საგანი განაპირობებს. მაშინ როცა მათემატიკოსი თვითონ აგებს კვლევის ობიექტებს საკუთარი სურვილის მიხედვით და შემოსახლერულია მხოლოდ ლოგიკის მოთხოვნების ჩარჩოებით, ფიზიკოსი სწავლობს ჩვენგან დამოუკიდებლად არსებულ ბუნებას, რომელიც ერთადერთია და, ამიტომ, ფიზიკოსი ვალდებულია იზრუნოს ამ ერთადერთი ობიექტისათვის საჭირო შესატყვისი ცნებების შემოტანისთვის.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თეორიული ფიზიკა მათემატიკას იყენებს როგორც დამხმარე საშუალებას, რომელიც წიხქვილის ქვის მსგავსად “ფქვაეს იმას, რასაც მასზე დაყრიან”.

დიდი ინგლისელი ფიზიკოსი, კენეტური მექანიკის ერთ-ერთი ფუძემდებელი პოლ დირაკი თვლიდა, რომ “სწორი ფიზიკური თეორია მათემატიკურად მოხდენილი უნდა იყოს”. გამოჩენილი საბჭოთა მათემატიკოსი და ფიზიკოს-თეორეტიკოსი ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვი მათემატიკით ზედმეტად მოხიბლულ ფიზიკოსებს აფრთხილებდა ხოლმე, რომ მათემატიკა მარტო იმას მოგცემს, რა ფიზიკურ სურათსაც ჩაღებთ მასში. სწორედ ამაშია თეორიული ფიზიკის, და საერთოდ ფიზიკის დიდი თავისებურება.

ბუნების ფილოსოფიის უმთავრესი დებულებების თანახმად, სივრცე და დრო მატერიის არსებობის ფორმებია. ამასთან სივრცის და დროის ცნებები თეორიული ფიზიკის ძირითადი ცნებებია. მათი შემოტანა უნდა ემყარებოდეს ცდი-სეულ მონაცემებს.

არ არსებობს ცვლები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემდნენ განვსაზღვროთ სხეულის მდებარეობა სივრცეში ან დროის მომენტი, რომელშიც ხდება მოცემული მოვლენა - ექსპერიმენტულად ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მხოლოდ მანძილები სხეულებს შორის ან დროის შუალედები მოვლენებს შორის.

ცვლები გეიმენებს, რომ ერთი სხეულის მდებარეობის განსაზღვრისათვის მეორის მიმართ რაიმე მასშტაბის მეშვეობით უნდა ჩავატაროთ სამი დამოუკიდებელი გაზომვა. ეს ნიშნავს, რომ სივრცე არის სამგანზომილებიანი. სხვადასხვა სხეულებს შორის მანძილების გაზომვამ და მიღებული შედეგების ანალიზმა დაგვარწმუნა, რომ ჩვენი სივრცე არის ევკლიდური, და ამიტომაც, მას ახასიათებს ერთგვაროვნება და იზოტროპულობა.

კლასიკურ, ე.წ. არარელატივისტურ მექანიკაში მიღებულია წარმოდგენა აბსოლუტურ სივრცესა და დროზე. სხვა სიტყვებით, ითვლება, რომ სხეულებს შორის მანძილები და მოვლენებს შორის დროის შუალედები არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემის მოძრაობაზე, რომელშიც ეს სიდიდეები განიხილება.

ამავე წარმოდგენებით მატერიალურ წერტილს დროის ყოველ მომენტში უკავია ზუსტად განსაზღვრული მდებარეობა სივრცეში, რაც შეიძლება დახასიათდეს სამი კოორდინატის მოცემით ან რადიუს-ვექტორით, როგორც დროის ფუნქციით:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(t) \equiv \{r_\alpha(t)\} \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ ეს არის ფიზიკური დაშვება, რომელიც კვანტურ მექანიკაში არ სრულდება. ვთვლით, რომ რადიუს-ვექტორის (ან კოორდინატის) დამოკიდებულება დროზე აღიწერება საკმაოდ გლუვი ფუნქციებით, ე.ი. მათ გააჩნიათ პირველი და მეტი რიგის წარმოებულები (ეს კვლავ ფიზიკური დაშვებაა, რაც არ არის სამართლიანი კვანტურ მექანიკაში). ამის შედეგად შეგვიძლია განვმარტოთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ და აჩქარება $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$. ეს ვექტორები არიან მატერიალური წერტილის მთავარი კინემატიკური მახასიათებლები.

ნიუტონისეულ ანუ არარელატივისტურ კლასიკურ მექანიკაში წერტილის (სხეულის) სიჩქარე არ არის შემოსაზღვრული რაიმე სიდიდით ანუ ურთიერთქმედება სხეულიდან სხეულზე გადაეცემა მყისიერად (უსასრულო სიჩქარით), განსხვავებით ფარდობითობის (რელატივისტური) თეორიისაგან, სადაც სინათლის სიჩქარე შესაძლო სიჩქარის ზედა ზღვარია.

წინამდებარე ლექციების კურსში კლასიკური თეორიული მექანიკა გვეხმარება სწორედ არარელატივისტური ფიზიკის შინაარსით. ესაა მექანიკა, რომელიც ჩამოყალიბდა და განვითარდა ფარდობითობის სპეციალური თეორიის შექმნამდე. ამავე დროს, როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მე-20 საუკუნეში ეს დარგი

დამატებით განვითარდა. ქვემოთ, პირველ რიგში, გავიხსენებთ მექანიკის ძირითად ფიზიკურ სიდიდეებს და თანაფარდობებს მათ შორის.

მატერიალური წერტილის მექანიკის ფიზიკური საფუძველია *ნიუტონის მეორე კანონი*, რომელიც განიხილება ან როგორც ძირითადი პოსტულატი ან როგორც ძალის განმარტება. იგი ასე ჩაიწერება

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

სადაც \vec{F} არის მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედი, ხოლო \vec{p} – ამ წერტილის მოძრაობის რაოდენობა ან იმპულსი, რომელიც ტოლია წერტილის მასის ნამრავლისა მის სიჩქარეზე

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

არარელატივისტურ მექანიკაში განხილულ უმეტეს შემთხვევაში მატერიალური წერტილის (სხეულის) მასა მუდმივი სიდიდეა და ნიუტონის მეორე კანონი იღებს სახეს

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

მექანიკის მრავალი უმნიშვნელოვანესი დებულება გამოიხატება ამა თუ იმ ფიზიკური სიდიდის მუდმივობის (შენახვის) თეორემების ფორმით. ეს თეორემები გვეუბნება, თუ რა პირობებში რჩება მექანიკის ზოგიერთი სიდიდე დროში უცვლელი. ასე, მაგალითად, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარეობს პირველი ამ თეორემათაგანი:

თეორემა მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის შესახებ. თუ სხეულზე მოქმედი \vec{F} ძალა ნულის ტოლია, მაშინ $\dot{\vec{p}} = 0$, ანუ მისი მოძრაობის რაოდენობა \vec{p} ინახება.

იმპულსის მომენტი (ან კინემატიკური მომენტი) რაიმე O ცენტრის მიმართ ეწოდება ვექტორს

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

სადაც \vec{r} – მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორია O ცენტრის მიმართ.

\vec{L} ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ (ან ამ ძალის ბრუნვითი მომენტი) ეწოდება ვექტორს

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

მისთვის შეგვიძლია მივიღოთ მოძრაობის შემდეგი განტოლება

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times m\vec{v}] = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

რისთვისაც საკმარისია გამოვიყენოთ ვექტორული ნამრავლის უმარტივესი თვისებები.

შევინშნოთ, რომ \vec{N} -იც დამოკიდებულია O ცენტრის არჩევაზე. შეგვიძლია მივიღოთ მუდმივობის შემდეგი თეორემა:

მატერიალური წერტილის კინეტიკური მომენტის შენახვის თეორემა:

თუ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალთა მომენტი \vec{N} ნულის ტოლია, მაშინ $\dot{\vec{I}} = 0$ და, ამრიგად, კინეტიკური მომენტი ინახება.

განვიხილოთ ახლა \vec{F} ძალის მიერ მატერიალურ წერტილზე შესრულებული მუშაობა, რომელიც განმარტების თანახმად ტოლია

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ესაა 1 მდგომარეობიდან 2 მდგომარეობაში ნაწილაკის გადატანისათვის შესრულებული მუშაობა. მუდმივი მასის შემთხვევაში ვიღებთ

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (v^2) dt$$

და, ამიტომაც

$$W_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

სკალარულ სიდიდეს $\frac{mv^2}{2}$ ეწოდება მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერგია და აღნიშნავენ T ასოთი. ამრიგად

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

ანუ შესრულებული მუშაობა ტოლია ნაწილაკის კინეტიკური ენერგიის ცვლილებებისა.

თუ ძალთა ველი ისეთია, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურის ირგვლივ ნაწილაკის შემოტარებაზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია, გვექნება

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

ასეთ ძალებს ეწოდება კონსერვატიული. ფიზიკური თვალსაზრისით ნათელია, რომ ხახუნის ან სხვა წინააღმდეგობის ძალების არსებობისას სისტემა კონსერვატიული არ იქნება, რადგან ამ ძალებისათვის $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ ყოველთვის უარყოფითი სიდიდე გამოდის და მათი აჯამებით ნულს ვერ მივიღებთ.

სტოქსის თეორემის თანახმად ძალთა კონსერვატიულობის პირობა შეიძლება ასე ჩაეწეროს

$$\text{rot} \vec{F} \equiv \nabla \times \vec{F} = 0$$

რადგან გრადიენტის როტორი ყოველთვის ნულის ტოლია, თუკი სივრცე მარტივად ბმულია, ძალის ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ რაიმე სკალარული ფუნქციის გრადიენტის სახით.

$$\vec{F} = -\nabla V$$

ეს ეძებულება მტკიცდება ვექტორული და ტენზორული ანალიზის ნებისმიერ კურსში.

V სიდიდეს ეწოდება პოტენციალი ან პოტენციალური ენერგია. ბუნებრივია, რომ ის ცალსახად არ არის განსაზღვრული. მას შეიძლება დაემატოს ნებისმიერი მუდმივი. ამით ძალა და მოძრაობის განტოლება არ შეიცვლება. ეს არაცალსახობა დაიფანება პოტენციალის ნულოვანი დონის არჩევის თავისუფლებაზე.

კონსერვატიული სისტემისათვის შესრულებული მუშაობა ტოლია

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{s} = V_1 - V_2$$

თუ ამას შევადარებთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილებით გამოხატულ მუშაობას, მივიღებთ

$$W_{12} = V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

ანუ

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2,$$

რაც ნიშნავს თეორემას მატერიალური წერტილის ენერგიის შენახვის შესახებ:

თუ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალები კონსერვატიულია, მაშინ ნაწილაკის სრული ენერგია - კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი - ინახება.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მექანიკა

ზემოთ მიღებული შედეგები ადვილად ზოგადდება მატერიალურ წერტილთა სისტემის შემთხვევაზე. ოღონდ ახლა ერთმანეთისგან უნდა გავარჩიოთ *გარე და შინაგანი ძალები*.

გარე (გარეშე) ძალებად გვესმის მოცემულ მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე გარედან მოქმედი ძალები, ხოლო შინაგანი ძალები ისინია, რომლებითაც მატერიალური სისტემის ნაწილაკები მოქმედებენ ერთმანეთზე.

ამიტომ i -ურ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა (ნიუტონის მე-2 კანონი) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{p}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(e)}$$

სადაც $\vec{F}_i^{(e)}$ აღნიშნავს i -ურ ნაწილაკზე მოქმედ გარე ძალას, ხოლო \vec{F}_{ij} არის სისტემის i -ურ ნაწილაკზე j -ური ნაწილაკის მხრივ მოქმედი ძალა.

ჩაეთვლით, რომ \vec{F}_{ij} ძალები ემორჩილებიან ნიუტონის მე-3 კანონს - ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობას, რომლის თანახმად ორი მატერიალური წერტილი ერთმანეთზე მოქმედებს ტოლი და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც მოქმედებენ მათი შემადგერთელი წრფის გასწვრივ. უნდა აღვნიშნოთ, რომ, მაგალითად, ელექტრომაგნიტური ძალების შემთხვევაში ნიუტონის მე-3 კანონი არ არის სამართლიანი. ამიტომ ასეთი სისტემების მიმართ მისი გამოყენება მოითხოვს გარკვეულ სიფრთხილის გამოყენებას.

თუ ნიუტონის მე-2 კანონს დაქვეით ვეწვლა წერტილისათვის და აუჯამავთ, მივიღებთ

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \quad (*)$$

პირველი ჯამი მარჯვენა მხარეში არის მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალების ტოლქმედი, ხოლო მეორე წევრი არის ყველა შინაგანი

ძალების ჯამი, რომელიც ნულის ტოლი ხდება ნიუტონის მე-3 კანონის გამოყენების შედეგად.

თუ შემოვიტანთ გასაშუალოებულ რადიუს-ვექტორს

$$\bar{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M},$$

რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მასათა ცენტრს, მაშინ მოძრაობის (*) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$M \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)},$$

საიდანაც ჩანს, რომ მასათა ცენტრი ისე მოძრაობს, თითქოსდა ამ წერტილშია თავმოყრილი სისტემის მთელი მასა და მოდებულია ყველა გარე ძალების ტოლქმედი $\vec{F}^{(e)}$, ანუ მასათა ცენტრის მოძრაობაზე შინაგანი ძალები არაეითარ გავლენას არ ახდენენ.

სისტემის სრული იმპულსი ეწოდება სიდიდეს

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \dot{\bar{R}}$$

ამიტომ, გვაქვს თეორემა მასათა ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის შესახებ: თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის სრული მოძრაობის რაოდენობა (სრული იმპულსი) ინახება.

სისტემის სრული მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ეწოდება ჯამს $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. ადვილად მოწმდება, რომ

$$\sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \dot{L} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}] + \sum_{i,j} [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}]$$

მაგრამ ნიუტონის მე-3 კანონის ძალით

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

რაც ნულის ტოლია, რადგან $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ვექტორი j -დან i წერტილისაკენ არის მიმართული და \vec{F}_{ij} ძალის კოლინეალურია. ამიტომ მივიღეთ, რომ

$$\frac{dL}{dt} = \vec{N}^{(e)}$$

და გვაქვს თეორემა სისტემის კინეტიკური მომენტის შენახვის შესახებ:

თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების სრული მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის სრული კინეტიკური მომენტი L რჩება დროში უცვლელი.

შეენიშნათ, რომ ესაა ვექტორული თეორემა, ამიტომ თუ, მაგალითად, სრული მომენტის მხოლოდ რომელიმე მდგენელია ნული, ხოლო დანარჩენი მდგენელები ნულისგან განსხვავდება, შეინახება კინეტიკური მომენტის შესაბამისი მდგენელი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ელექტრომაგნიტურ ველებში ძალთა ქმედება-უქმედების ტოლობა საზოგადოდ არ სრულდება, და, ამიტომ, სრული მექანიკური მომენტი არ რჩება მუდმივი, მაგრამ მუდმივი რჩება სისტემის მექანიკური

მომენტისა და ელექტრომაგნიტური ველის კინეტიკური მომენტების ჯამი. ასე რომ სრული კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონს აქვს უნივერსალური ხასიათი.

ახლა განვიხილოთ ენერჯიის განტოლება. გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის მუშაობა. სისტემის საწყისი და საბოლოო მდგომარეობანი პირობითად აღვნიშნოთ ისევე, 1 და 2 სიმბოლოებით. გვაქვს

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_i,$$

მოძრაობის განტოლების გამოყენებით ვიღებთ

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

ამრიგად, შესრულებული მუშაობა ტოლია საბოლოო და საწყისი კინეტიკური ენერჯიების სხვაობისა,

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

სადაც T სრული კინეტიკური ენერჯიაა, $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$.

ახლა გარეშე ძალები ჩავთვალოთ პოტენციალურად და მუშაობის ფორმულაში ჩავატაროთ სათანადო გარდაქმნები:

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2,$$

სადაც i ინდექსი $\vec{\nabla}$ ოპერატორთან აღნიშნავს \vec{r}_i ვექტორის მიხედვით გაწარმოებას (გრადიენტს).

თუ შინაგანი ძალებიც პოტენციალურია, მაშინ ისინიც დაუკავშირდებიან ნაწილაკთა ij წყვილის პოტენციალურ ენერჯიას:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

ამ დროს

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) f_{ij}$$

სადაც f_{ij} არის მანძილის რაიმე სკალარული ფუნქცია. ამრიგად, სრული მუშაობისათვის გვაქვს

$$- \int (\vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot d\vec{s}_j)$$

ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$, ჩვენთვის საინტერესო გამოსახველებას გადავწერთ ასე:

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} \quad \text{და} \quad d\vec{s}_i - d\vec{s}_j = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij}$$

და ij ინდექსიანი წევრი მიიღებს სახეს

$$- \int \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij},$$

ხოლო შინაგან ძალთა მუშაობა ტოლი იქნება

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \Big|_1^2$$

ზემოთქმულიდან ნათელი ხდება, რომ თუ შიგა და გარე ძალები პოტენციალურია, მაშინ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ სრული პოტენციალური ენერჯიის შესახებ, რაშიც გვეხმობს

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

ამავე დროს სრული ენერჯია მუდმივი სიდიდეა, რაც აზოგადებს ერთი მატერიალური წერტილისათვის მიღებულ შედეგს.

ნიუტონის მექანიკის ამ მცირედენი შესავლის შემდეგ გადავიდეთ ნაწილაკთა სისტემების მექანიკის სისტემატურ შესწავლაზე.

კლასიკური გეჰანის პირითაღი კონსუპსივა

(I-1). მატერიალური სისტემები. ბმები და მათი კლასიფიკაცია

მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობა იწოდება მატერიალურ წერტილთა სისტემად ანუ მატერიალურ სისტემად, თუ თითოეული ნაწილაკის მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი ნაწილაკების მდებარეობასა და მოძრაობაზე. ეს ნიშნავს, რომ მატერიალური სისტემის ნაწილაკებს შორის არსებობს ურთიერთქმედების ძალები.

გავიხსენოთ, რომ მატერიალური სისტემის წერტილებს შორის მოქმედ ძალებს ეწოდება შინაგანი ძალები. ძალებს, რომლებითაც მოქმედებენ სისტემის წერტილებზე ნაწილაკები ან სხეულები, რომლებიც არ ეკუთვნიან მოცემულ სისტემას, ეწოდება გარე ძალები.

მატერიალურ სისტემას, რომელშიც ნებისმიერ ორ ნაწილაკს შორის მანძილი არ იცვლება, ეწოდება მყარი სხეული.

ნაწილაკი ჰქვია იდეალიზებულ მატერიალურ სხეულს, რომლის მასა თავმოყრილია წერტილში. ნაწილაკის მოძრაობა არის წერტილის მოძრაობა სივრცეში. რაკი წერტილს გეომეტრიული განზომილება არ აქვს, ვერ ვილაპარაკებთ ნაწილაკის ორიენტაციაზე სივრცეში და მას ვერ მივაწერთ ბრუნვით მოძრაობას.

თუ მატერიალური სისტემის ყოველ წერტილს შეუძლია სივრცეში ნებისმიერი მდებარეობა დაიკავოს და ჰქონდეს ნებისმიერი სიჩქარე, ვიტყვი, რომ ასეთი სისტემა არის თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი.

თავისუფალი მატერიალური სისტემის კლასიკური მაგალითია მზის პლანეტარული სისტემა. ყველა პლანეტასა და მზეს შორის მოქმედებენ ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის ძალები, თვით პლანეტების და მზის მდებარეობა და სიჩქარეები კი არაფრით არ არის შეზღუდული.

თუ რაიმე შეზღუდვების (პირობების) გამო მატერიალური სისტემის ნაწილაკებს და სხეულებს არ შეუძლიათ დაიკავონ ნებისმიერი მდებარეობა სივრცეში და ჰქონდეთ ნებისმიერი სიჩქარეები, მაშინ მატერიალურ სისტემას ეწოდებენ ა რ ა თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ს.

შეზღუდვები (პირობები), რომლებიც სისტემის წერტილებს უკრძალავენ (არ აძლევენ საშუალებას) დაიკავონ ნებისმიერი მდებარეობა სივრცეში და ჰქონდეთ ნებისმიერი სიჩქარეები, იწოდებიან ბ მ ე ბ ა დ.

ბმები ზღუდავენ წერტილების კოორდინატების და სიჩქარეების ცვლილებას. ეს შეზღუდვები ანალიზურად ჩაიწერება განტოლებების ან უტოლობების სახით. ისინი არ გამომდინარეობენ მოძრაობის განტოლებებიდან.

* ვთქვათ, მატერიალური სისტემა შეიცავს N წერტილს. დეკარტეს კოორდინატებში i -ური ნაწილაკის კოორდინატები იყოს $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, სადაც $i=1, 2, \dots, N$. თუ მატერიალურ სისტემაზე დადებულია მხოლოდ ერთი ბმა, მაშინ იგი ზოგადად შეგვიძლია ჩაეწეროს შემდეგი ანალიზური სახით:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) \leq 0,$$

$$(I-1.1)$$

აქ $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ აღნიშნავს i -ური ნაწილაკის სინქარის გეგმილებს დეკარტეს სისტემის ღერძებზე, t -დროა.

ამ ფორმულაში ტოლობის ნიშნის შემთხვევაში ბმას უწოდებენ შ ე მ - კ ა ე ე ბ ე ლ ს, უტოლობის შემთხვევაში - ა რ ა შ ე მ კ ა ე ე ბ ე ლ ს.

მაგალითი. ეთქვათ, ორი ნაწილაკი, რომელთა მდებარეობა მოიცემა კოორდინატებით x_1, y_1, z_1 და x_2, y_2, z_2 , დაკავშირებულია ერთ-მანეთთან მყარი l სიგრძის ღეროთი. ამ შემთხვევაში ბმა არის შემკავებელი და ბმის განტოლებას აქვს სახე:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ამ წერტილებს შორის მანძილი ყოველთვის რჩება მუდმივი.

* თუ ღეროს შეგვევლით გლუვი უჭიმვადი ძაფით, წერტილები მიიღებენ დაახლოების საშუალებას, მაგრამ, როგორც ადრე, კვლავ ვერ დაშორდებიან ერთმანეთს l -ზე მეტი მანძილით. ამ შემთხვევაში ბმა არაშემკავებელი იქნება და ჩაიწერება უტოლობის სახით:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0.$$

* თუ შემკავებელი ბმის განტოლება ცხადი სახით შეიცავს t დროს, მაშინ ბმას უწოდებენ რ ე ო ნ ო მ უ რ ს ა ნ ა რ ა ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ს, ხშირად - კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ უ რ ს ა ც.

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0$$

$$(I-1.2)$$

ასეთი ბმის მაგალითი შეიძლება იყოს ორი მატერიალური წერტილი, შეერთებული არახისტი ღეროთი, რომელიც თავის სიგრძეს იცვლის რაიმე მოცემული წესით, მაგ., $l = l_1 + l_0 \sin t$.

თუკი ბმის განტოლება დროს ცხადად არ შეიცავს, ე.ი. აქვს სახე

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0$$

ბმას უწოდებენ ს კ ლ ე რ ო ნ ო მ უ რ ს ა ნ უ ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ს.

ბმას, რომლის განტოლება კოორდინატების წარმოებულს არ შეიცავს, ე.ი. ზღუდავს მარტო კოორდინატებს,

$$f(x_i, y_i, z_i; t) = 0,$$

$$(I-1.3)$$

უწოდება გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ა ნ უ კ ო ლ ო ნ ო მ უ რ ი.

თუ კინემატიკური ბმის (I-1.2) განტოლება ინტეგრაციით არ შეიძლება მივიყვანოთ (I-1.3) სახეზე, მაშინ ბმას უწოდებენ ა რ ა კ ო ლ ო ნ ო მ უ რ ს ა ნ უ ა რ ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ს.

თუკი კინემატიკური ბმის ინტეგრაციით ხერხდება სინქარეთა მთლიანად გამოორიცხვა, ბმა არსებითად პოლონომური ყოფილა.

მაგალითი: ეთქვათ, კინემატიკური ბმას აქვს სახე

$$\sum_{i=1}^N (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i) = 0,$$

ინტეგრაციის შემდეგ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = C$$

(C- ინტეგრაციის ნებისმიერი მუდმივია). ამრიგად, მოცემული ბმა ყოფილა გეომეტრიული.

* თუ მატერიალურ სისტემაზე დადებულია k -რაოდენობის ბმა, მაშინ გვექნება ბმების k განტოლება:

$$f_j(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

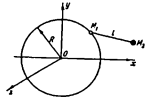
აქაც თუ განტოლებათა სისტემა ინტეგრებადია, ბმები პოლონომური იქნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არაპოლონომური.

ბმების ხასიათი განსაზღვრავს მატერიალურ სისტემასაც – ის ან პოლონომურია ან არაპოლონომური.

ჩვენ პოლონომურ ბმებს ყოველთვის ჩავწერთ წარმოებულების გარეშე ასე:

$$f_j(x_j, y_j, z_j; t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (I-1.4)$$

მაგალითი 1: M_1 ნაწილაკთან l სიგრძის უჭიმვადი ღეროს საშუალებით მიერთებულია M_2 ნაწილაკი. M_1 ნაწილაკს შეუძლია ბრუნვა წრეწირის რკადის გასწვრივ, რომელიც ევრტიკალურ სიბრტყეში ძევს (იხ. ნახაზი 1). ბმების განტოლებებია:



ნახაზი 1.

$$z_1 = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

როგორც ვხედავთ, ბმები გეომეტრიულია (პოლონომური).

მაგალითი 2: ღერო ევრტიკალური ღერძის ირგვლივ ბრუნავს თანაბრად ω კუთხური სიჩქარით. M_1 და M_2 ერთმანეთთან ზამბარითაა დაკავშირებული (ნახ. 2).

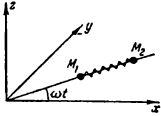
ნათელია, რომ ბმა იქნება არასტაციონარული. ბმების განტოლებებია:

$$x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t = 0$$

$$x_2 \sin \omega t - y_2 \cos \omega t = 0$$

$$z_1 = 0,$$

$$z_2 = 0$$



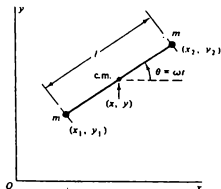
ნახაზი 2.

ორივე მაგალითში პოლონომური ბმაა.

მეორე მაგალითში ბმების განტოლებები შეიცავენ t დროს (რეონომური).

მაგალითი 3: ორი ნაწილაკი ერთმანეთს ხისტი ღეროთი უკავშირდება. ნაწილაკებს შეუძლიათ ხახუნის გარეშე სრიალი პორი'ზონტალურ სიბრტყეში. ცხადია, რომ ასეთი სისტემა არის პოლონომური. ახლა დავადოთ შექმნილი დამატებითი პირობა: ღეროს მასათა ცენტრი დურსმწიფ დავაჭყდოთ სიბრტყეში,

მაშინ ღეროს აეკრძალება მოძრაობა ღეროს გასწვრივ და ამიტომ დარჩება ბრუნვითი მოძრაობის შესაძლებლობა ღეროს პერპენდიკულარულად მასათა ცენტრის გარშემო (ნახ. 3).



ნახაზი 3

ცხადია, ამ დამატებითი შეზღუდვით სისტემა გახდება არაპოლონომური. მართლაც, ჯერ ჩაეწეროთ კონფიგურაცია თითოეული ნაწილაკის დეკარტეს კოორდინატებით. გვაქვს ორი დამოუკიდებელი ბმის განტოლება (პოლონომური)

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) \tan \theta, \quad \theta = \omega t$$

რომლებიც გამოხატავენ ღეროს სიგრძესა და მის ორიენტაციას. გარდა ამისა, გვაქვს არაპოლონომური ბმის განტოლება

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \cos \omega t + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \sin \omega t = 0,$$

რომელიც ზღუდავს ღეროს ცენტრის სინქარეს ღეროს პერპენდიკულარული მიმართულებით.

თუ შემოვიტანთ ღეროს ცენტრის კოორდინატებს (x, y) ასეთი გარდაქმნით:

$$x_1 = x - \frac{1}{2} l \cos \omega t$$

$$y_1 = y - \frac{1}{2} l \sin \omega t$$

$$x_2 = x + \frac{1}{2} l \cos \omega t$$

$$y_2 = y + \frac{1}{2} l \sin \omega t$$

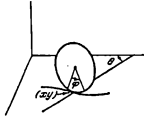
არაპოლონომური ბმის განტოლება ასე გადაიწერება

$$\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t = 0$$

განსახილავი სისტემა მართლაც რომ არაპოლონომურია, უკეთ გამოჩნდება შემდეგი მაგალითის განხილვიდან, რომელშიც წარმოიქმნება აგრეთვე დიფერენციალური სახის შეზღუდვები.

მაგალითი 4: (გოლდსტეინი)

დისკი მიგორავს სრიალის გარეშე ჰორიზონტალურ აუ სიბრტყეზე. ბმა ისეთია, რომ დისკის სიბრტყე მთელი მოძრაობის განმავლობაში რჩება ვერტიკალურად. ხახუნი არ გვაქვს. (ნახ. 4)



ნახაზი 4.

კოორდინატებად შეიძლება ავიღოთ დისკის ცენტრის კოორდინატები x, y , დისკის თავისი ღერძის ირგვლივ მობრუნების ϕ კუთხე, აგრეთვე დისკის ღერძსა და ვთქვათ, x ღერძს შორის შედგენილი კუთხე θ .

გორვის პირობის თანახმად დისკის ცენტრის სინქარის მოდული იქნება $\dot{\phi}$ -ის პროპორციული:

$$v = R \dot{\phi}$$

(R - დისკის რადიუსია). ამ სინქარის მიმართულება იქნება დისკის ღერძის პერპენდიკულარული. გვაქვს:

$$\dot{x} = v \sin \theta$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta$$

აქედან, წინა ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ ბმებისათვის ორ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\begin{aligned} dx - R \sin \theta d\phi &= 0 \\ dy + R \cos \theta d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

ამ განტოლებებს ვერ ვაინტეგრებთ, სანამ ამოცანა ბოლომდე არ იქნება ამოხსნილი. ასეთი არაინტეგრებადი ბმები - არაპოლინომური ბმების კერძო შემთხვევაა.

(*) სისტემა მართლაც არაინტეგრებადია. ამაში დასარწმუნებლად ის გადაეწეროს ასე

$$\cos \theta dx + \sin \theta dy = 0. \quad (**)$$

ეხედავთ, რომ ეს შეზღუდვა ემთხვევა წინა მაგალითის ანალოგიურ 'შესაღწევას. ამიტომ მათ ერთდროულად განვიხილავთ. ეს გამოსახულება არ არის სრული დიფერენციალი, ანუ არ მოიძებნება ისეთი ფუნქცია $\Phi(x, y, \theta)$, რომ მისთვის (**) განტოლებას ჰქონდეს სახე:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta = 0$$

საზოგადოდ, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ თუ გვაქვს განტოლება

$$a_x dx + a_y dy + a_\theta d\theta = 0,$$

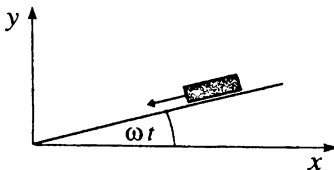
მისი ინტეგრებადობის პირობაა

$$a_x \left(\frac{\partial a_y}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial y} \right) + a_y \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial \theta} \right) + a_\theta \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) = 0,$$

სადაც a -ები არიან (x, y, θ) -ს ფუნქციები. ამ კრიტერიუმს თუ მიუყვანებთ (***) განტოლებას, დაეწმუნდებით, რომ ეს გამოსახულება არ არის ინტეგრებადი, რადგან აქედან მიიღება განტოლება $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$, რაც შეუძლებელია.

ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი:

1. სხეული მოსრიალებს დახრილ სიბრტყეზე ხახუნის გარეშე. დახრის კუთხე იცვლება დროის მიხედვით (ნახ. 5). გამოარკვეით სისტემაზე დადებული ბმის ხასიათი. რა შეიცვლება, თუ ხახუნსაც გაეითვალისწინებთ?



ნახაზი 5.

2. გამოარკვეით ბმების ხასიათი შემდეგ სისტემებში:
 - (ა). მცირე ზომის ბირთვი ჩამოგორდება ხახუნის გარეშე დიდი ზომის ბირთვის წვერიდან გრავიტაციული ველის მოქმედებით.
 - (ბ) ცილინდრი ჩამოგორდება არაგლუვ დახრილ სიბრტყეზე.
 - (გ) ნაწილაკი სრიალებს ბრუნვითი პარაბოლოიდის შიდა არაგლუვ ზედაპირზე.
 - (დ) ნაწილაკი მოძრაობს ძალიან გრძელ ღეროზე ხახუნის გარეშე. ამავდროულად ღერო ბრუნავს ω კუთხურ სიჩქარით ვერტიკალურ სიბრტყეში ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ.
 - (ე). ბმების განტოლებებს აქვთ სახე

$$(x^2 + y^2) dx + xz dz = 0$$

$$(y^2 + x^2) dy + yz dz = 0$$

ანეწენთ, რომ ერთად ეს ბმები პოლონომურია.

* თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი

პოლონომური მატერიალური სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი განისაზღვრება იმ დამოუკიდებელ პარამეტრთა რაოდენობით, რომლებიც საკმარისობით ახასიათებენ სისტემის კონფიგურაციას, ე.ი. განსაზღვრავენ სისტემის ყველა წერტილის მდებარეობას.

თუ N ნაწილაკისგან შედგენილ სისტემაზე დადებულია (1-1.3) ტიპის k ბმა, ეს ნიშნავს, რომ დეკარტეს ყველა კოორდინატა არ არის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი. მართლაც, $3N$ კოორდინატაზე ბმების k დამოუკიდებელი განტოლებაა დადებული. ამ განტოლებებიდან რომელიმე k კოორდინატებს თუ გამოეხატავეთ დანარჩენების საშუალებით, დაგერჩება $3N - k$ დამოუკიდებელი კოორდინატა, რომლებიც საკმარისობით დაახასიათებს სისტემას. ამრიგად, თავისუფლების ხარისხთა რაოდენობა ტოლია $n = 3N - k$.

მაგალითი: ნაწილაკი მოძრაობს ელიფსზე (x, y) სიბრტყეში. ელიფსის ნახევარღერძები ფიქსირებულია. გადადით პოლარულ კოორდინატებზე და დაადგინეთ თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი.

1-2. ვირტუალური გადაადგილებები. ვირტუალური სიჩქარეები

პოლონომური ბმების ზოგადი თვისებების შესწავლა მჭიდროდ უკავშირდება ცნებებს: შესაძლო, ნამდვილი და ვირტუალური გადაადგილებები.

მექანიკურ სისტემაზე მოქმედი ყოველი ბმა ზღუდავს მისი წერტილების უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, რომლებიც სრულდება დროის უსასრულოდ მცირე ინტერვალში Δt .

მართლაც, თუ სისტემაზე დადებულია k რაოდენობის პოლონომური ბმა

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-2.1)$$

მაშინ მისი წერტილების სიჩქარეები დააკმაყოფილებენ შემდეგი სახის k პირობას

$$\frac{df_j}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-2.2)$$

ამიტომ სისტემის წერტილების უსასრულოდ მცირე გადაადგილებები $\Delta \vec{r}_j = \vec{v}_j \Delta t$ აღმოჩნდებიან ერთმანეთთან შებმული შემდეგი თანაფარდობებით

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} \Delta \vec{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} \Delta t = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-2.3)$$

სისტემის ნაწილაკების უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, რომლებიც თავსებადია მათზე დადებულ ბმებთან, ე.ი. აკმაყოფილებენ (1-2.3) განტოლებებს, ეწოდება სისტემის შესაძლო გადაადგილებები. რაც შეეხება წერტილთან a მ დ ვ ი ლ გადაადგილებებს, ასე ეწოდება მარტო იმ შესაძლო გადაადგილებებს, რომლებიც (1-2.3) ტოლობებთან ერთად მოძრაობის განტოლებებსაც აკმაყოფილებენ. უსასრულოდ მცირე ნამდვილი გადაადგილებები გამოწვეულია სისტემაზე აქტიური და რეაქციის ძალების მოქმედებით. ისინი აღინიშნება დიფერენციალით, $d\vec{r}_i$.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ წარმოვიდგინოთ ასეთი მაგალითი: მატერიალური წერტილი მოძრაობს რაიმე მოცემულ ზედაპირზე, ე.ი. მისი შესაძლო გადაადგილებები დროის ნებისმიერ მომენტში ძვეს ამ ზედაპირის მსებ სიბრტყეში. მხოლოდ ერთი მათგანი, რომელიც ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიის მსებს მიჰყვება, იქნება ნამდვილი გადაადგილება.

განვიხილოთ ახლა რაიმე წერტილის ორი უსასრულოდ მახლობელი შესაძლო გადაადგილება: $\Delta \vec{r}$ და $\Delta \vec{r}'$. ამ ორი გადაადგილების სხვაობას უწოდებენ მატერიალური წერტილის ე ი რ ტ უ ა ლ უ რ გადაადგილებას. მისთვის შემოღებულია აღნიშვნა $\delta \vec{r}$, ე.ი.

$$\delta \vec{r} = \Delta \vec{r}' - \Delta \vec{r}, \quad (1-2.4)$$

(1-2.3) თანაფარდობიდან ცხადია, რომ სისტემის ვირტუალური გადაადგილებები აკმაყოფილებენ თანაფარდობებს:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0, \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (1-2.5)$$

(ამის მისაღებად (1-2.3) თანაფარდობანი უნდა ჩაეწეროს ორჯერ $\Delta \vec{r}$ და $\Delta \vec{r}'$ შესაძლო გადაადგილებებისათვის და ერთმანეთს დაეკლოთ ეს ორი თანაფარდობა).

(1-2.3) თანაფარდობები თანხვდება განტოლებებს, რომლებსაც დააკმაყოფილებენ სისტემის შესაძლო $\Delta \vec{r}$ გადაადგილებები, თუ მათზე დადებული ბმები არის სტაციონარული. ამრიგად ვირტუალური გადაადგილებები ხშირად განიმარტება როგორც სისტემის წერტილების პოტენციალურად შესაძლო გადაადგილებები დროის მოცემული მომენტისათვის $t = const$, ე.ი. დროის მოცემულ მომენტში ბმები თითქოს "გაიყინა" და შეწყვეტა ცვლილება.

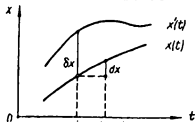
ვირტუალური გადაადგილებები არ არის გამოწვეული რაიმე ძალების მოქმედებით და ამიტომ არ გააჩნიათ ხანგრძლივობა. ამის გამო სისტემის ვირტუალური გადაადგილებების შესახებ წარმოდგენა წმინდა გეომეტრიულია და ხასიათდება სისტემაზე დადებული ბმების სტრუქტურით.

სტაციონარული ბმების შემთხვევაში შესაძლო და ვირტუალური გადაადგილებების ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა.

მათემატიკაში (1-2.4)-ის მსგავსს სიდიდეებს უწოდებენ ფუნქციის ვ ა რ ი ა ც ი ა ს. ასე მაგალითად, $\delta \vec{r}$ არის სათანადო მატერიალური წერტილის $\vec{r}_i(t)$ რადიუს-ვექტორის ვარიაცია, ამასთან

$$\delta \vec{r}_i = \vec{i} \delta x_i + \vec{j} \delta y_i + \vec{k} \delta z_i, \quad (1-2.6)$$

ამავე დროს $x(t)$ ფუნქციის ვარიაციაში ესმით ამ ფუნქციის მცირე ნაზრდი δx , რომელიც არ არის დაკავშირებული მისი t არგუმენტის ცვლილებასთან (რადგან $t = const.$), არამედ გამოწვეულია თვითონ ამ ფუნქციის ვარირებით, ე.ი. $x(t)$ ფუნქციიდან მასთან მახლობელ $x'(t)$ ფუნქციაზე გადასვლით. (იხ. ნახ. 6). მასზევე წარმოდგენილია განსხვავება ფუნქციის დიფერენციალისაგან dx .



ნახაზი 6

ვარიაციის ცნებასთან დაკავშირებით მიზანშეწონილია ვირტუალურ გადაადგილებებთან ერთად განვიხილოთ ვირტუალური სინქარებიც. ჯერ განვიხილოთ ერთი მატერიალური წერტილი, რომლის მოძრაობასაც ეძება ბმა

$$f(x, y, z; t) = 0 \quad (I-2.7)$$

დაეუწვათ, რომ ცნობილია ამ ნაწილაკის მოძრაობის კანონი:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (I-2.8)$$

თუ ამას გაითვალისწინებთ, ბმის განტოლება იკვეთება გადაიტყვევა

$$f(x(t), y(t), z(t); t) = 0, \quad (I-2.9)$$

რომლის გაწარმოება დროის მიხედვით გვაძლევს

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (I-2.10)$$

დაეუწვათ, რომ დროის რაღაც $t = t_0$ ფიქსირებულ მომენტში მატერიალური წერტილის კოორდინატები იყო x_0, y_0, z_0 . დროის ამ მომენტისათვის ზედა განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \dot{z} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0, \quad (I-2.11)$$

სადაც 0 ინდექსი მიუთითებს, რომ წარმოებულები გამოთვლილია $t = t_0$ მომენტში, როცა $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. ამ პირობებში შემაჯავლი წარმოებულებიც $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ შეესაბამებიან t_0 მომენტს.

(I-2.11) არის გამოსახულება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ $t = t_0$ მომენტში წერტილის სინქარების პროექციები $u_x = \dot{x}$, $u_y = \dot{y}$, $u_z = \dot{z}$. სინქარეს

$$\vec{u} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (I-2.12)$$

უწოდებენ ნ ა მ დ ე ე ლ სინქარეს (რაკი x, y, z არიან მოძრაობის განტოლების ამოხსნები).

ბმა სტაციონარული რომ ყოფილიყო, მისი განტოლება იქნებოდა

$$f(x, y, z) = 0 \quad (I-2.13)$$

და (I-2.11) პირობა გამარტივდებოდა

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \dot{z} = 0 \quad (I-2.14)$$

შემოეიტანათ ასეთი ვექტორი

$$\vec{u}^* = \dot{x}^*\vec{i} + \dot{y}^*\vec{j} + \dot{z}^*\vec{k} \quad (I-2.15)$$

და მოვითხოვოთ, რომ მისი პროექციები აკმაყოფილებდნენ (I-2.14) პირობას, ე.ი. იმავეს, რასაც ნამდვილი სინქარის პროექციები სტაციონარული ბმისას.

ამრიგად, თუ ბმა არასტაციონარულია, მაშინ ჩვენ მიერ შემოტანილი \vec{u}^* სინქარები დროის მოცემულ მომენტში წარმოადგენენ კინემატიკურად შესაძლებელ სინქარებს ბმების მყისიერი გაყინვისას, ე.ი. \vec{u}^* ესაა ბმებთან თავსებადი სინქარები, ოღონდ მათ არ აქვთ ბმების დეფორმაციით (ცვლილებით) გამოწვეული მდგენელები.

ასეთ \vec{u}^* სინქარებს უწოდებენ ვ ი რ ტ უ ა ლ უ რ სინქარებს.

მაგალითი: ეთქვით წერტილი მოძრაობს რაიმე ზედაპირზე, რომელიც თავის მხრივ გადაადგილდება სივრცეში. წერტილის ნამდვილი სიჩქარე იქნება 2 მდგენელის ჯამი: მდგენელი \vec{v} , რომელიც მოთაყესებულია მოცემულ მომენტში ნაწილაკის მდებარეობის წერტილზე ზედაპირისადმი გაკლებულ მხებ სიბრტყესე და განისაზღვრება (I-2.15) განტოლებით და მდგენელით, რომლითაც გადაადგილდება ზედაპირი.

ვირტუალური სიჩქარეები მოთაყესებელი იქნება მხოლოდ მხებ სიბრტყეში. (I-2.12) და (I-2.15) პირობების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ არასტაციონარული ბმების შემთხვევაში ნამდვილი სიჩქარე არ თანხვდება ვირტუალურ სიჩქარეს. სტაციონარული ბმის დროს კი ნამდვილი სიჩქარე დაემთხვევა ერთ-ერთ ვირტუალურ სიჩქარეს.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის შემთხვევაში, როცა გვაქვს k პოლონო-მური ბმა

$$f_j(x, y, z, t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots, k)$$

ვირტუალური სიჩქარეები დროის მოცემულ მომენტში აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right] = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (*)$$

ნამდვილი სიჩქარეების პროექციები კი -

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right] + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ეს ნიშნავს, რომ არასტაციონარული ბმების შემთხვევაში ნამდვილი სიჩქარეები საზოგადოდ არ ემთხვევა ვირტუალურ სიჩქარეებს.

სტაციონარული ბმებისას ბოლო განტოლება იღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right] = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

რაც გარეგნულად ემთხვევა (*) განტოლებებს. ამიტომ ამ შემთხვევაში ნამდვილი სიჩქარეები ემთხვევიან ვირტუალურ სიჩქარეთა ერთ-ერთ კრებულს.

მაგალითი: განვიხილოთ ბმა

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

(*) პირობა იღებს სახეს

$$(x_2 - x_1) \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1) \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (z_2 - z_1) \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0$$

ან ვექტორული ფორმით

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0.$$

ეს ტოლობა გვეუბნება, რომ ორი წერტილის ფარდობითი ვირტუალური სიჩქარე ყოველთვის პერპენდიკულარულია ფარდობითი რადიუს-ვექტორისა. ნამდვილი სიჩქარეებისათვის ეს ფაქტი კარგადაა ცნობილი კინემატიკიდან.

მატერიალური წერტილის ნამდვილი გადაადგილება, როგორც ცნობილია, ეწოდება ვექტორს

$$d\vec{r} = \vec{v} dt,$$

რომლის გეგმილები, როგორც ვხედავთ, აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

* სისტემის მატერიალური წერტილების ნამდვილ გადაადგილებას უწოდებენ ვექტორებს:

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

ნათელია, რომ მათი გეგმილები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

განვიხილოთ ახლა კავშირი ვირტუალურ გადაადგილებასთან. ვთქვათ წერტილი იმყოფება ზედაპირზე

$$f(x, y, z) = 0$$

დროის ფიქსირებულ t მომენტში წერტილის მდებარეობას განსაზღვრავს რადიუს-ვექტორი $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. განვიხილოთ ახლა წერტილის უსასრულოდ მახლობელ მდებარეობათა სიმრავლე, რომელიც დასაშვებია ბმით ამ ფიქსირებულ მომენტში და დაეწვეათ, რომ ეს უსასრულოდ მახლობელი მდებარეობები განისაზღვრება რადიუს-ვექტორით

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + d\vec{r} = (x + dx)\vec{i} + (y + dy)\vec{j} + (z + dz)\vec{k},$$

სადაც dx, dy, dz არიან $d\vec{r}$ ვექტორის მდგენელები.

$d\vec{r}$ ვექტორი არის $\vec{r}(t)$ რადიუს-ვექტორის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი წერტილის წარმოდგენით გადაადგილებისას $\vec{r}(t)$ რადიუს-ვექტორით განსაზღვრული წერტილიდან $\vec{r}'(t)$ რადიუს-ვექტორით განსაზღვრულ წერტილში. მას ეწოდება ვირტუალური გადაადგილების ვექტორი. ესაა უსასრულოდ მცირე ვექტორი, რომელიც საშუალებას იძლევა წარმოდგენით (აზრობრივად), ბმების დაურღვევლად გადავიტანოთ წერტილი უსასრულოდ მახლობელ წერტილში დროის იმავე მომენტში. $d\vec{r}$ -ს \vec{r} -ვექტორის ვირტუალური გადაადგილება ეწოდება.

ნათელია, რომ $\vec{r}'(t)$ -ვექტორის მდგენელებმა იგივე (1-2.7) ხასიათის ბმის განტოლება უნდა დააკმაყოფილონ:

$$f(x + dx, y + dy, z + dz; t) = 0$$

თუ ამ განტოლებას უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა მწკრივად გავშლით, გაითვალისწინებთ, რომ $f(x, y, z) = 0$ და შემოვიფარგლებით პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებით, მივიღებთ კოორდინატების ვარიაციებზე დადებული პირობას:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1-2.16)$$

რადგან ამ განტოლებების მისაღებად დრო ფიქსირებულად ითვლებოდა, dx, dy, dz ვარიაციებს უწოდებენ იზოქრონულს.

როგორ დაეუკავშიროთ ვირტუალური გადაადგილებები ვირტუალურ სინქარებს? შემოვიტანოთ დროის განზომილების მქონე პარამეტრი τ და მასზე გავამრავლოთ (*) თანაფარდობის თითოეული წევრი. ამავდროულად შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$\tilde{dx} = x' \tau, \quad \tilde{dy} = y' \tau, \quad \tilde{dz} = z' \tau$$

მივიღებთ თანაფარდობას

$$\frac{\partial f}{\partial x} \tilde{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \tilde{dy} + \frac{\partial f}{\partial z} \tilde{dz} = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $d\vec{r} = \tilde{dx}\vec{i} + \tilde{dy}\vec{j} + \tilde{dz}\vec{k} = \vec{v}' \tau$ ვექტორის გეგმილები აკმაყოფილებენ (1-2.12) პირობას. თუკი ახლა τ პარამეტრს ისე შევარჩევთ, რომ

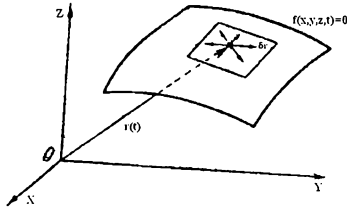
$\vec{\nabla}$ გადაადგილებები თავისებური იყენენ ბმასთან (ამისათვის r -ს უნდა ჰქონდეს სიმცირე, არანაკლებ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ სიდიდეებისა), მაშინ, რადგანაც $\vec{\delta x}, \vec{\delta y}, \vec{\delta z}$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ (1-2.16) პირობას, $\vec{\delta r}$ -ვექტორები წარმოადგენენ ვირტუალურ გადაადგილებებს, ე.ი. $\vec{\delta r} = \delta r \cdot \vec{e}_r$. თანაფარდობიდან $\vec{\delta r} = \vec{v} \cdot \vec{e}_r$ გამოდის, რომ ვირტუალურ გადაადგილებათა ვექტორებს აქვთ ვირტუალური სიჩქარეების მიმართულება.

თუ ბმა, რომელსაც ემორჩილება მატერიალური წერტილის მოძრაობა, არის სტაციონარული, მაშინ δr ნამდვილი გადაადგილების გეგმილები (dx, dy, dz) და აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

ეს კი ნიშნავს, რომ სტაციონარული ბმის შემთხვევაში ნამდვილი გადაადგილების ვექტორი დაემთხვევა ერთ-ერთ ვირტუალურ გადაადგილებას.

(1-2.16) პირობას შეგვიძლია მივცეთ თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ბმის განტოლებას $f(x, y, z) = 0$ შეიძლება ვუყუროთ (დროის ფიქსირებულ მომენტში) როგორც ზედაპირის განტოლებას. მაშინ (1-2.12)-დან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\nabla} f$ ვირტუალური გადაადგილებები არიან ვექტორები, რომლებიც მდებარეობენ მატერიალური წერტილის მდებარეობაზე მოცემული ზედაპირისადმი გატარებულ მხებ სიბრტყეში (იხ. ნახ. 7).



ნახაზი 7

მატერიალურ წერტილთა სისტემის შემთხვევაში ვირტუალურ გადაადგილებებს უწოდებენ უსასრულოდ მცირე ვექტორთა ერთობლიობას:

$$\delta \vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2.17)$$

მათი პროექციები აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1-2.18)$$

სტაციონარული ბმების შემთხვევაში ნამდვილი გადაადგილების ვექტორების მდგენელები ასეთსავე სახის პირობებს აკმაყოფილებენ. ამიტომაც ამ დროს ნამდვილი გადაადგილებანი თანხვედრიან ერთ-ერთ ვირტუალურ გადაადგილებათა ერთობლიობას.

თუ მატერიალური სისტემა შედგება N ნაწილაკისაგან, მას ექნება $3N$ კოორდინატთა ვარიაცია. მაგრამ თუ სისტემაზე დადებულია k ბმა, კოორ-

დინატთა ეს ვარიაციები აღარ არიან ურთიერთდამოუკიდებელი. ბმების განტოლებები ასე გამოიყურება:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (I-2.19)$$

ამ განტოლებებს თუ ამოვხსნით კოორდინატთა k ვარიაციის მიმართ, გამოვხატავთ მათ დანარჩენი $3N - k$ ვარიაციით. ამრიგად, დამოუკიდებელ ვარიაციათა რაოდენობა იქნება $3N - k$, ე.ი. კოორდინატთა დამოუკიდებელი ვარიაციების რაოდენობა ემთხვევა სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს.

I-3. ვირტუალური მუშაობა. იდეალური ბმები

თუ მატერიალური სისტემის წერტილებზე დროის მოცემულ ფიქსირებულ მომენტში მოქმედებენ ძალები $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, ხოლო სისტემის წერტილების ვირტუალური გადაადგილებები, შესაბამისად, არის $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \dots, \delta \vec{r}_N$, მაშინ ვირტუალური მუშაობა ეწოდება ამ ძალების მუშაობას სისტემის ვირტუალურ გადაადგილებებზე, ე.ი.

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (I-3.1)$$

ანუ თუ $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, მაშინ

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \quad (I-3.2)$$

განვსაზღვროთ ახლა იდეალური ბმების ცნება. იდეალური ისეთ ბმებს ეწოდება, რომლებისთვისაც ბმების რეაქციების ვირტუალური მუშაობა ნებისმიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (I-3.3)$$

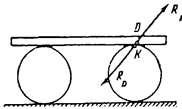
აქ \vec{R}_i არის i -ურ ნაწილაკზე მოდებული ბმის რეაქციის ძალა.

ძალიან ბევრ შემთხვევაში ბმის რეაქციის ძალები კერპენდიკულარულია მოძრაობის მიმართულებისა, და ამიტომ $\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ ნამრავლი ნულის ტოლია. მაგალითად, თუ წერტილოვანი მასა იძულებულია იმოძრაოს მოცემულ სივრცულ მრუდზე, მისი მოძრაობის მიმართულება ყოველთვის მრუდის მხებდადა; ბმის რეაქცია კი მრუდის მხების მართობულია.

მაგრამ არის ისეთი შემთხვევებიც, როცა ცალკეული ბმის რეაქციების ძალები ასრულებენ არანულოვან მუშაობას, მაგრამ ყველა მათგანის მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლი ხდება. ასეთი მაგალითია ძაფით მბრუნავ ლერძე (იდეალური ბლოკი) გადაკიდებული ორი მასიური სხეული. ძაფის დაჭიმულობანი არიან ამ მაგალითში რეაქციის ძალები, რომლებიც ინდივიდუალურად ერთმანეთის ტოლ და საწინააღმდეგო ნიშნის მუშაობას ასრულებენ.

განივილით კიდევ ასეთი მაგალითი (ნახ. 3):

სისტემა წარმოადგენს ორ ერთნაირ ბორბალს,



ნახაზი 8

რომლებზეც მოთავსებულია ფიცარი (დაფა). ბორბლებს შეუძლიათ გორვა ხახუნის გარეშე უძრავ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. დაფის სრიალი ბორბლებზე აკრძალულია რაიმე პირობით - D და K წერტილების წანაცვლება ბორბალზე და ფიცარზე პირველი რიგის სიზუსტით ერთნაირია.

დაფა და ბორბალი ურთიერთქმედებს სიდიდით ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული შინაგანი რეაქციის ძალებით, \vec{R}_D და \vec{R}_K . ვირტუალურ მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლია.

* დავუბრუნდეთ კვლავ (I-3.3) განტოლებას.

ვისარგებლოთ ამ პირობით ბმების რეაქციების გამოსარიცხავად. ჩავწეროთ იგი ჯერ ასე:

$$\sum_{i=1}^N (R_x \cdot \delta x_i + R_y \cdot \delta y_i + R_z \cdot \delta z_i) = 0 \quad (I-3.4)$$

და გავიხსენოთ, რომ კოორდინატების ვარიაციები ემორჩილებიან განტოლებებს:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (I-3.5)$$

თითოეული ეს განტოლება გავამრავლოთ ე.წ. ლაგრანჟის განუსაზღვრელ მამრავლებზე $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, რომლებიც შეიძლება იყენენ კოორდინატებისა და დროის ფუნქციები,

$$\sum_{i=1}^N \lambda_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

შეეკრიბოთ მიღებული გამოსახულებები და შეეცვალოთ აჯამვის თანმიმდევრობა,

$$\sum_{i=1}^N \left[\delta x_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right] = 0 \quad (I-3.6)$$

ეს გამოსახულება დაავკლოთ (I-3.4) გატოლებას,

$$\sum_{i=1}^N \left[\delta x_i \left(R_x - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + \delta y_i \left(R_y - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) + \delta z_i \left(R_z - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \right] = 0 \quad (I-3.7)$$

როგორ დაავკაყოფილოთ ეს პირობა? რადგანაც (I-3.5) განტოლებების თანახმად დამოუკიდებელი ვარიაციების რაოდენობა არის $3N - k$, ავირჩიოთ ლაგრანჟის λ მამრავლები ისე, რომ პირველი k ვარიაციის წინ მდგომი კოეფიციენტები გადაიქცნენ ნულად. დანარჩენ გამოსახულებებში (I-3.7)-დან $3N - k$ ვარიაცია

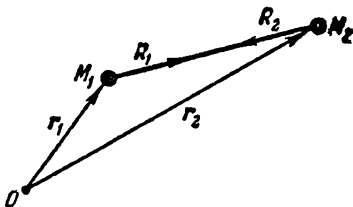
უკვე იქნება დამოუკიდებელი და ამიტომ მათთან მდგომი კოეფიციენტებიც აგრეთვე ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე.ი.

$$R_x = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad R_y = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \quad R_z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \quad (I-3.8)$$

მოვიყვანოთ იდეალური ბმების მაგალითები:

მაგალითი 1.

ორ M_1 და M_2 მატერიალურ წერტილებს შორის ბმას ახორციელებს აბსოლუტურად ხისტი ღერო (ნახ. 9).



ნახაზი 9

\bar{R}_1 და \bar{R}_2 იყოს ბმების რეაქციები ($\bar{R}_2 = -\bar{R}_1$). თუ \bar{u}_1^* და \bar{u}_2^* არიან სათანადო ვირტუალური სინქარეები, მაშინ ამ წერტილების ვირტუალური გადაადგილებები იქნება $\bar{\delta r}_1 = \bar{u}_1^* \tau$ და $\bar{\delta r}_2 = \bar{u}_2^* \tau$.

რეაქციების ძალთა მუშაობა წერტილთა ვირტუალურ გადაადგილებაზე ტოლია:

$$\bar{R}_1 \cdot \bar{\delta r}_1 + \bar{R}_2 \cdot \bar{\delta r}_2 = \bar{R}_1 (\bar{\delta r}_1 - \bar{\delta r}_2) = \bar{R}_1 (\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^*) \tau = 0$$

რადგან $\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^*$ სხვაობა კერპენდიკულარულია ღეროს მიმართულებისა (იხ. მაგალითი წინა პარაგრაფში), ხოლო \bar{R}_1 - მიმართულია ღეროს გასწვრივ.

მაგალითი 2.

წერტილი მოძრაობს ბრუნვითი პიკერბოლოიდის

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - az = 0$$

შიდა ზედაპირზე, რომელიც აბსოლუტურად გლუვია.

ცხადია, სივსლუვის გამო რეაქცია მიმართულია ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ და ვირტუალური გადაადგილებები მოთავსებულა ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, ე.ი. $\bar{R} \cdot \bar{\delta r} = 0$.

მოვიყვანოთ ახლა სხვა მტკიცება ღაგრანჩის მიმრავლის გამოყენებით. რადგან რეაქცია მიმართულია ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ, შეიძლება დაეწეროს

$$\frac{R_x}{\partial f / \partial x} = \frac{R_y}{\partial f / \partial y} = \frac{R_z}{\partial f / \partial z} \quad \text{ან} \quad \frac{R_x}{2x} = \frac{R_y}{2y} = -\frac{R_z}{a} \equiv \lambda,$$

საიდენაიც

$$R_x = 2\lambda x, \quad R_y = 2\lambda y, \quad R_z = -a\lambda$$

ამიტომ

$$\vec{R} \cdot \vec{\sigma} = R_x \sigma_x + R_y \sigma_y + R_z \sigma_z = \lambda(2x\sigma_x + 2y\sigma_y - a\sigma_z)$$

ბმების განტოლების თანახმად უნდა გექონდეს

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial f}{\partial z} \sigma_z = 0$$

ანუ

$$2x\sigma_x + 2y\sigma_y - a\sigma_z = 0 \Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{\sigma} = 0$$

მაშასადამე, ბმა ყოფილა იდეალური.

1-4. არათავისუფალი (ბმებიანი) მექანიკური სისტემების მოძრაობის შესწავლის ამოცანის დასმა

ბმებიანი მექანიკური სისტემებისათვის მოძრაობის შესწავლის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: სისტემის ნაწილაკებზე მოქმედი ცნობილი აქტიური \vec{F} , ძალების და სისტემაზე დადებული ბმების განტოლებების მეშვეობით უნდა განისაზღვროს მოძრაობის კანონები და ბმების რეაქციების \vec{R} , ძალები.

პრაქტიკულად ამოცანა დაიყვანება მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა და ბმების განტოლებების ერთობლივ ამოსხნაზე. მოძრაობის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (I-4.1)$$

ამავე დროს სისტემაზე დადებულია k პოლინომური ბმა

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (I-4.2)$$

გარდა ამისა, ცნობილი უნდა იყოს ბმებთან თავსებადი საწყისი პირობები.

ბუნებრივია, რომ ფიზიკურად საინტერესოა მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა $k < 3N$, ხოლო \vec{F} , ძალებში იგულისხმება როგორც შინაგანი (ნაწილაკებს შორის მოქმედი), ასევე გარე აქტიური ძალები, მაშინ როცა \vec{R} ,-ში იგულისხმება გეომეტრიული ჯამი i -ურ ნაწილაკზე მოქმედი რომელიმე j ($j = 1, 2, \dots, k$) ბმის პირობით გამოწვეული ყველა რეაქციის ძალთა გეომეტრიული ჯამი

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^k \vec{R}_{ij}$$

ამრიგად, შესასწავლია $3N + k$ განტოლებისგან შედგენილი სისტემა (I-4.1,2), რომელიც შეიცავს $6N$ უცნობს: $3N$ ნაწილაკთა კოორდინატას და $3N$ რეაქციის ძალების გეომეტრებს. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში ასე ჩამოყალიბებული ამოცანა განსაზღვრული არ არის.

ქვემოთ ჩვენ დაერწმუნდებით, რომ ამოცანა გახდება მათემატიკურად კორექტული პოლინომური სისტემებისათვის იდეალური ბმებით. მართლაც, როგორც წინა პარაგრაფში დაერწმუნდით, იდეალური ბმების შემთხვევაში

რეაქციის ძალები შეგვიძლია გამოვხატოთ ბმების პირობების მეშვეობით ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლების მეთოდით (იხ. I-3.8). ამ თანაფარდობათა გათვალისწინებით მოძრაობის (I-4.1) განტოლებები ასე გადაიწერება

$$m_i \ddot{r}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}_i}, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (I-4.3)$$

ახლა ბმების (I-4.2) განტოლებებთან ერთად გვაქვს სულ $3N+k$ სკალარულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც საძიებელია $3N+k$ უცნობი: სისტემის ნაწილაკთა $3N$ კოორდინატა და k რაოდენობის ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლები $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. ამრიგად ამოცანა საეცხებით განსაზღვრული გახდა – იმდენი განტოლება გვაქვს, რამდენიც საძიებელი უცნობია.

(I-4.3) განტოლებათა სისტემას უწოდებენ პირველი გვარის ლაგრანჟის განტოლებებს. მათი საშუალებით ერთდრულად მოიძებნება ნაწილაკთა ყველა კოორდინატა და ყველა რეაქციის ძალა.

მაგალითი: ვაჩვენოთ ამ განტოლებათა გამოყენება ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის შემთხვევაში, როგორცაა ბრტყელი მათემატიკური საქანი, რომელიც ასრულებს მოძრაობას ვერტიკალურ xy სიბრტყეში (ნახ.10).



ნახა'ნი 10

ბმების განტოლებებს აქვთ სახე

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (*)$$

$$f_2(x, y, z) = z = 0$$

(I-4.3)-ის საფუძველზე მიიღება მოძრაობის შემდეგი განტოლებები

$$m\ddot{x} = mg + \lambda_1 2x,$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1 2y, \quad (**)$$

$$0 = \lambda_2,$$

რადგანაც $z = 0$. ამ განტოლებებიდან ეპოულობთ

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{m\ddot{y}}{2y}. \quad (***)$$

ჩავატაროთ ახლა საჭირო აღგებრული გარდაქმნები: გაყამრავლოთ(**)-ის პირველი განტოლება y -ზე და დავაკლოთ მას x -ზე გამრავლებული მეორე განტოლება, მივიღებთ

$$m(\ddot{xy} - \dot{y}\dot{x}) = mgy \quad (****)$$

შემდგომი მსველულობისათვის მიზანშეწონილია პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლა:

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi$$

მაშინ (***) განტოლება მიიღებს ცნობილ სახეს

$$\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

ამ განტოლების ინტეგრაცია საწყისი პირობით: $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$, გვაძლევს პირველ ინტეგრალს

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2 \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi).$$

ახლა მოვიძებნოთ ძაფის რეაქცია. (1-3.8) ფორმულების თანახმად

$$R_x = \lambda_1 2x = m\ddot{y} \frac{x}{y}, \quad R_y = \lambda_2 2y = m\ddot{x}, \quad R_z = 0$$

ამიტომ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = m|\ddot{y}| \left| \frac{l}{y} \right| = m \left| \frac{\ddot{y}}{y} \right| l,$$

ან

$$R = m \left| \dot{\varphi}^2 - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \dot{\varphi} \right|$$

რადგან

$$\dot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi,$$

ხოლო $\dot{\varphi}^2$ განსაზღვრული გვაქვს ზემოთ, მიიღება

$$R = m \left| \dot{\varphi}_0^2 - 2 \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) + \frac{g}{l} \cos \varphi \right| = m \left| \dot{\varphi}_0^2 - \frac{g}{l} (2 - 3 \cos \varphi) \right|$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ ძაფის ბმა იქნება შემკაევებელი, თუ, როცა $\varphi = 0$, გვექნებოდა $R \geq 0$. ეს მოხდება მაშინ, თუ საწყისი კუთხური სიჩქარე აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\dot{\varphi}_0^2 \geq \frac{5g}{l}.$$

* მექანიკური მოძრაობის ზემოთ დასმული ზოგადი ამოცანის გადაწყვეტის მეორე გზა არის ახალი კოორდინატების შემოტანა, რომელთა რაოდენობა ემთხვევა სისტემის თავისუფლების ხარისხს. ამ კოორდინატებზე გადასვლის მეშვეობით შესაძლებელი ხდება განტოლებათა სისტემის დაყვანა $3N - k$ განტოლებისგან შემდგარ სისტემაზე, რომელიც ცხადი სახით აღარ შეიცავენ რეაქციის ძალებს. ამ განტოლებებს ლაგრანჟის მე-2 გვარის (ან უბრალოდ, ლაგრანჟის) განტოლებებს უწოდებენ.

გადავიდეთ ამ მეორედის განხილვაზე.

ადრე დაეადგინეთ, რომ თუ მატერიალური სისტემის მდებარეობა ემორჩილება k პოლონომურ ბმას, მაშინ მისი მდებარეობა განისაზღვრება $n = 3N - k$ დამოუკიდებელი დეკარტეს კოორდინატით. მაგრამ, ბევრ შემთხვევაში დეკარტეს კოორდინატების გამოყენება რთულ გამოთვლებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ, ხშირად სისტემის მდებარეობის დასახასიათებლად უფრო მოსახერხებელია სხვა ურთიერთდამოუკიდებელი q_1, q_2, \dots, q_n პარამეტრების გამოყენება. მათ შეიძლება ჰქონდეთ სხვადასხვა განზომილება - შეიძლება იყვნენ კუთხეები, რკალის სიგრძეები, ფართობები და ა.შ. ყველა $3N$ დეკარტეს კოორდინატა შეიძლება გამოიხატოს შემოყვანილი პარამეტრებით (რადგან დამოუკიდებელია მხოლოდ $3N - k$)

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad n = 3N - k. \quad (I-5.1)$$

ეს ფუნქციები ბმების განტოლებებსაც აკმაყოფილებენ, თუკი ასეთნი დადებული იყო სისტემაზე:

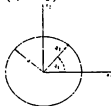
$$f_j(x_i, y_i, z_i; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ჩვენ დაეუშვებთ, რომ მატერიალური სისტემის ბმებთან თავსებადი ყოველი მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება (I-5.1) ფუნქციებით q_1, q_2, \dots, q_n , პარამეტრების რაიმე მნიშვნელობების დროს.

ამ ურთიერთდამოუკიდებელ პარამეტრებს q_1, q_2, \dots, q_n , სადაც n - თავისუფლების ხარისხთა რიცხვია, უწოდებენ განზოგადებულ კოორდინატებს.

მაგალითი: დეკარტეს კოორდინატებიდან განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლის მაგალითად განვიხილოთ ნაწილაკი, რომლის მოძრაობა შეზღუდულია a რადიუსიანი წრეწირით (ნახ. II)

$$\text{ბმის განტოლებას აქვს სახე } (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = a$$



ნახაზი II

q_1 იყოს ერთ-ერთი განზოგადებული კოორდინატა - პოლარული კუთხე. მეორე განზოგადებულ კოორდინატად ავიღოთ ბმის პირობა,

$$q_2 = a$$

გარდაქმნა ხდება ასე

$$x_1 = q_2 \cos q_1$$

$$x_2 = q_2 \sin q_1$$

ამ გარდაქმნის იაკობიანია

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(q_1, q_2)} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{array} \right|} = -q_2,$$

ამიტომ q -ების შეიძლება გამოისახოს როგორც x -ების ფუნქციები ყველა წერტილში, გარდა ნულოვანი იაკობიანისა, $q_2 = 0$. ამ დროს წრის რადიუსი ნულის ტოლია და ამიტომ კუთხე q_1 განუსაზღვრელია. ეს გარდაქმნებია

$$q_1 = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad q_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

სადაც ნებისმიერად ავიღეთ $0 \leq q_1 < 2\pi$, $0 < q_2 < \infty$, რათა q -ები იყვნენ x -ების ცალსახა ფუნქციები. გარდაქმნის ეს განტოლებები გამოდგება (x_1, x_2) სიბრტყის ყველა წერტილში სათავის გარდა. ამ მაგალითში დაერწმუნდით, რომ ახალი კოორდინატების ასეთი შემოტანისას სისტემის აღწერა შესაძლებელია მარტო ერთი, q_1 ცვლადით.

* ცხადია, რომ (I-5.1) განტოლებები ევქლორული ფორმიტაც შეიძლება ჩაიწეროს:

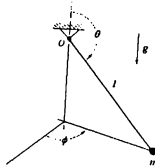
$$\vec{r} = x_i \vec{i} + y_j \vec{j} + z_k \vec{k} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (I-5.2)$$

სტაციონარული ბმების შემთხვევაში ფუნქციები შეიძლება ისე შეირჩეს, რომ ისინი არ შეიცავდნენ დროს ცხადად, ე.ა. კჭონდეთ სახე:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (I-5.3)$$

(I-4.1,2,3) არიან \vec{r}_i ცვლადებიდან q , ცვლადებზე გარდაქმნის განტოლებები. მათი გახილვა შეიძლება აგრეთვე როგორც $\{\vec{r}_i\}$ ცვლადების პარამეტრული წარმოდგენა. დეკარტეს კოორდინატებისგან განსხვავებით განზოგადებული კოორდინატები არ ცალდება სამ ჯგუფად, რათა შექმნან სათანადო ევქლორები.

მაგალითი: l სიგრძის სფერული საქანი შეიძლება დავახასიათოთ კუთხეებით $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. (ნახ. 12).



.ნახაზი 12.

გარდაქმნის ფორმულებს აქვთ სახე:

$$x = l \sin \theta \cos \varphi = l \sin q_1 \cos q_2$$

$$y = l \sin \theta \sin \varphi = l \sin q_1 \sin q_2$$

$$z = l \cos \theta = l \cos q_1$$

განზოგადებული კოორდინატები ხშირად თავისუფალი (ბმების გარეშე) სისტემებისთვისაც მოსახერხებელია. ასე მაგალითად, სფერული სიმეტრიის ველის ამოცანაში ან სხვა ტიპის სიმეტრიულ ამოცანებში.

გამოთვალათ ახლა (I-5.1) ფუნქციების დიფერენციალები იმ დაშვებით, რომ f დრო ფიქსირებულია. მათ აქვთ სახე (აღნიშნით თავზე ხაზით):

$$\bar{d}x_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \bar{d}q_m, \quad \bar{d}y_j = \sum_{m=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial q_m} \bar{d}q_m, \quad \bar{d}z_k = \sum_{m=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_m} \bar{d}q_m$$

მოქმედნოთ ახლა დიფერენციალები ბმების პირობებისა, რომლებიც მოძრაობის განტოლებებსაც აკმაყოფილებენ, ანუ ბმების იგივეობებისა:

$$f_j(x, y, z; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

აქ t ფიქსირებულია. მათში (I-5.1) ჩასმის შემდეგ გვაქვს

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \bar{d}x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \bar{d}y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \bar{d}z_i \right) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ეს კი თანხვდება (I-2.15)-ს. ვასკენით, რომ $\bar{d}x_i, \bar{d}y_i, \bar{d}z_i$ დიფერენციალები თანხვდება კოორდინატების ვარიაციებს (რადგან ორივე ერთდროულია) $\bar{d}x_i, \bar{d}y_i, \bar{d}z_i$. ამ გზით ჩვენ დავადგინეთ კოორდინატების ვარიაციების გამოთვლის "რეცეპტურა".

სახელდობრ, როგორც სტაციონარული, ასევე არასტაციონარული ვარიაციები კოორდინატებისა გამოითვლება ფორმულებით:

$$\bar{d}x_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \bar{d}q_m, \quad \bar{d}y_j = \sum_{m=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial q_m} \bar{d}q_m, \quad \bar{d}z_k = \sum_{m=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_m} \bar{d}q_m \quad (I-5.4)$$

სადაც $\bar{d}q_m = \bar{d}q_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) სიდიდეებს ეწოდება განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციები.

ამჟამად, რომ ვირტუალური გადაადგილებებისათვის მიიღება:

$$\bar{d}F_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial q_m} \bar{d}q_m$$

ჩავესვათ ეს გამოსახულება ვირტუალური მუშაობის ფორმულაში:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \sum_{m=1}^n \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial q_m} \bar{d}q_m$$

გადაჯგუფების შემდეგ

$$\delta A = \sum_{m=1}^n \bar{d}q_m \cdot \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial q_m}$$

ჯამებს

$$Q_m = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (I-5.4)$$

უწოდებენ განზოგადებულ ძალებს.

ყოველ განზოგადებულ კოორდინატას q_m ვირტუალური მუშაობის ფორმულაში ეთანადება თავისი განზოგადებული ძალა Q_m , ე.ი.

$$\delta A = \sum_{m=1}^n Q_m \bar{d}q_m \quad (I-5.5)$$

ეს გამოსახულება იძლევა განზოგადებული ძალის შემდეგ განმარტებას: განზოგადებული ძალები ეწოდება ვირტუალური მუშაობის ფორმულაში განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციებთან მდგომ კოეფიციენტებს.

მაგალითი: ზემოთ განხილულ სფერული საქანის მაგალითში მოქმედნით განზოგადებული ძალები.

ამოხსნა: ამ ამოცანაში $N=1, n=2$. განზოგადებული კოორდინატებია

$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi$, ხოლო განზოგადებული ძალები მოიცემა ასე:

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} + Z \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

სადაც X, Y, Z არიან საქანზე მოქმედი \vec{F} ძალის მდგენელები: $X = Y = 0, \quad Z = mg = P$.

ზემოთ ამოწერილი გარდაქმნის ფორმულების მიხედვით ეპოულობთ:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -l \sin \theta; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

ამრიგად

$$Q_1 = -Pl \sin \varphi, \quad Q_2 = 0$$

ცხადია, იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ განზოგადებულ ძალებს განვსაზღვრავთ ეირტულური მუშაობით. მართლაც

$$\delta A = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = P \delta z$$

რაკი

$$\delta z = -l \sin \theta \delta \theta,$$

ამიტომ

$$\delta A = -Pl \sin \theta \delta \theta,$$

ამრიგად,

$$Q_1 = -Pl \sin \theta, \quad Q_2 = 0.$$

კლასიკური დინამიკის ძირითადი პრინციპები და მოძრაობის განტოლებები

II-1. ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი

ესაა მექანიკის პრინციპი, რომელიც აწესებს მატერიალური სისტემის წონასწორობის (მათ შორის, უძრაობის) აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

ვთქვათ, მატერიალური სისტემა ემორჩილება k პოლონომურ სტაციონარულ ბმას:

$$f_j(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ასეთი არათავისუფალი სისტემის მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახისაა:

$$m_i \ddot{a}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II-1.1})$$

\bar{F}_i და \bar{R}_i არიან i -ურ წერტილზე მოდებული ყველა აქტიური და ბმების რეაქციების ძალების ტოლქმედები.

მატერიალური სისტემის წონასწორობაში (უძრაობაში) გვესმის მისი ისეთი მდებარეობა, რომელშიც სისტემა იქნება მთელი დროის განმავლობაში, თუ მას საწყის მომენტში ჰქონდა რა ნულის ტოლი სიჩქარეები, იმყოფებოდა ამ მდებარეობაში. სხვა სიტყვებით, წონასწორობის მდებარეობაში სისტემის ყველა წერტილის სიჩქარე და აჩქარებები ნულის ტოლია:

$$\dot{a}_i = 0, \quad \ddot{a}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ან მოძრაობის განტოლებების შესაბამისად

$$\ddot{a}_i = 0 \quad \bar{F}_i + \bar{R}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II-1.2})$$

ჩამოვყალიბოთ ახლა ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი:

* პოლონომური სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომელზეც იდეალური ბმებია მოდებული, მდგომარეობს ყველა აქტიური ძალების მიერ ნებისმიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობის ნულთან ტოლობაში, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (\text{II-1.3})$$

გარდა ამისა, წონასწორობის განმარტების შესაბამისად, $\dot{a}_i(t_0) = 0$. ($i = 1, 2, \dots, N$), სადაც t_0 დროის საწყისი მომენტია.

აუცილებლობა:

ე.ი. სრულდება პირობები (II-1.2). მეორე მათგანი სკალარულად გავამრავლოთ i -ური ნაწილაკის ვირტუალური გადაადგილების ვექტორზე,

$$\delta \vec{r}_i \cdot (\bar{F}_i + \bar{R}_i) = 0,$$

რომელიც სამართლიანია სისტემის ყველა წერტილისათვის. აუჯამოთ ახლა ეს გამოსახულებები:

$$\sum_{i=1}^N \delta \vec{r}_i \cdot (\bar{F}_i + \bar{R}_i) = 0, \quad \text{ანუ} \quad \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

რადგან პირობის თანახმად სისტემაზე დადებული ბმები არიან იდეალური, $\sum_{i=1}^N \bar{R}_i \cdot \bar{\sigma}_i = 0$, და ამიტომაც გერჩება

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \bar{\sigma}_i = 0 \quad (\text{რ.დ.გ.})$$

საკმარისობა:

უნდა დავამტკიცოთ, რომ (II-1.3)-დან გამომდინარეობს (II-1.2). თანაფარდობა (II-1.3) გადავწეროთ ასე (მდგენელებში, $\bar{F}_i = \bar{F}_i(X, Y, Z, \dots)$)

$$\sum_{i=1}^N (X, \bar{\alpha}_i + Y, \bar{\beta}_i + Z, \bar{\gamma}_i) = 0. \quad (\text{II-1.4})$$

ამავე დროს კოორდინატების ვარიაციები ემორჩილებიან k განტოლებას:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \bar{\alpha}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \bar{\beta}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \bar{\gamma}_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის განუსაზღვრელი $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლების მეთოდი. გვაქვს:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \bar{\alpha}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \bar{\beta}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \bar{\gamma}_i \right) = 0$$

ან

$$\sum_{i=1}^N \left(\bar{\alpha}_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \bar{\beta}_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \bar{\gamma}_i \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) = 0 \quad (\text{II-1.5})$$

ეს გამოსახულება შევკრიბოთ (II-1.4)-თან, მიიღება:

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(X, \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \bar{\alpha}_i + \left(Y, \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) \bar{\beta}_i + \left(Z, \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \bar{\gamma}_i \right] = 0$$

ავარჩიოთ λ , მუდმივები ისე, რომ k კოორდინატების ვარიაციებთან მდგომი კოეფიციენტები ნულად გადაიქცნენ. მაშინ ნულად გადაიქცევა დანარჩენ $3N - k$ ვარიაციებთან მდგომი კოეფიციენტებიც ამ ვარიაციების ურთიერთდამოუკიდებლობის გამო. ამრიგად, მივიღებთ განტოლებებს:

$$X_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad Y_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0, \quad Z_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0$$

აქედან (I-3.8) ფორმულების გათვალისწინებით გვექნება

$$X_i + R_{ix} = 0, \quad Y_i + R_{iy} = 0, \quad Z_i + R_{iz} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ეს კი (II-1.2) განტოლებებია. (რ.დ.გ.)

მტკიცების ორივე ნაწილში საწყისი სიჩქარეები ყველგან ნულია.

ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი საშუალებას იძლევა არათავისუფალი მატერიალური სისტემის წონასწორობის მდებარეობა განვსაზღვროთ ისე, რომ არ შემოვიტანოთ უცნობი რეაქციის ძალები.

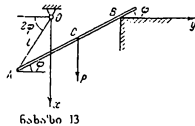
ამავედროულად ეს პრინციპი შეიძლება გამოვიყენოთ იდეალური ბმების გამოწვევი რეაქციების საპოვნელად.

ამისათვის უნდა გადავადგოთ ბმა და შევცვალოთ რეაქციების მოქმედებით, ამის შემდეგ ეს რეაქცია ჩაერთოთ აქტიური ძალების რიცხვში. ამასთან უნდა გვახსოვდეს, რომ ბმების გადაყრით ვზრდით სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს. როცა დადებული ბმები არ არიან იდეალური, მაშინ პრინციპს ასეთ სისტემებს პირდაპირ ვერ მიუყვანებთ. ამ დროს რეაქცია მდგენელზე უნდა დაეშალოს და არანორმალური (არაპერპენდიკულარული) მდგენელი ჩაერთოთ აქტიური ძალების რიცხვში.

მაგალითი:

2l სიგრძის მძიმე ერთგვაროვანი ღერო შუალედური წერტილით ეყრდნობა კედლის კუთხეს B წერტილში. მეორე ბოლო კი შეკავებულია l სიგრძის უწონადი ძაფით, რომელიც კიდია ჭერზე O წერტილში. მოცემულია აგრეთვე, რომ $OA = OB = l$. (ნახ. 13)

იპოვეთ φ კუთხე, რომელსაც ღერო ადგენს პორიზონტთან წონასწორობის დროს.



ნახაზი 13

ამოხსნა:

აქტიური ძალა მარტო ერთია - ღეროს წონა $P = mg$, რომელიც მოდებულია ღეროს სიმძიმის ცენტრში C. ამიტომ ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად ღეროს წონასწორობის პირობა ასე გამოიყურება

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{x}_C = P \delta x_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta x_C = 0$$

მაგრამ

$$x_C = l \sin 2\varphi - l \sin \varphi$$

ამიტომ

$$\delta x_C = l(2 \cos 2\varphi - \cos \varphi) \delta \varphi = 0$$

მაგრამ, რადგან $\delta \varphi$ ნებისმიერად აიღება, უნდა ჩავთვალოთ $\delta \varphi \neq 0$, ე.ი.

$$2 \cos 2\varphi - \cos \varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad 4 \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 2 = 0$$

აქედან

$$\cos \varphi = \frac{1 + \sqrt{1 + 32}}{8} \approx 0.842 \quad (\text{კუთხე ნაპოვნია})$$

II-2. ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი განზოგადებულ კოორდინატებში

ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი ქალიბდება განტოლებებით:

$$\bar{v}_i(t_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \delta A = \sum_i^N \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

ეს უკანასკნელი გამოსახულება გადაწერილი გეპქეს განზოგადებულ კოორდინატებში (იხ. განტ. (I-5.5)):

$$Q_1 \delta x_1 + Q_2 \delta x_2 + \dots + Q_n \delta x_n = 0$$

აქ δx_i -ები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია, ამიტომ ყველა განზოგადებული ძალა ერთდროულად ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$Q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-2.1})$$

ამრიგად, პოლონომური სტაციონარული სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება სისტემის ყველა წერტილის სიჩქარის ნულთან ტოლობა და ყველა განზოგადებული ძალის ნულთან ტოლობა.

განვიხილოთ კონსერვატიული ძალების შემთხვევა. როგორც ცნობილია, კონსერვატიული ძალები გამოიხატებიან პოტენციალური ენერჯიის გრადიენტის მეშვეობით

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (\text{II-2.2})$$

ჩავსვათ ეს განზოგადებული ძალის ფორმულაში (I-5.4') და გავიხსენოთ განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულები (I-5.1):

$$Q_j = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-2.3})$$

ამრიგად, კონსერვატიული ძალების შემთხვევაში q_j განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა Q_j არის მინუს ნიშნით აღებული პოტენციალური ენერჯიის კერძო წარმოებული ამ კოორდინატით.

აშკარაა, რომ (II-2.1) წონასწორობის პირობა ამ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-2.4})$$

ანუ წონასწორობის მდებარეობაში სისტემის პოტენციალურ ენერჯიას გააჩნია ექსტრემალური მინიმუმელობა.

II-3. წონასწორობის მდებარეობის მდგრადობა

სავესებოთ ბუნებრივია, რომ წონასწორობის ყველა მდებარეობის რეალიზაცია არ ხერხდება.

მაგალითად, ადრე განხილული სფერული საქანისათვის განზოგადებული ძალები ასე გამოიყურებოდა:

$$Q_1 = -Pl \sin \theta, \quad Q_2 = 0$$

ამიტომ წონასწორობის პირობას ექნება სახე

$$Pl \sin \theta = 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ამ პირობას პრაქტიკულად წონასწორობის 2 მდებარეობა შეესაბამება: ქვედა ($\theta = 0$) და ზედა ($\theta = \pi$).

ქვედა მდებარეობისთვის დამახასიათებელია ის, რომ მცირე გადახრებისას და საკმაოდ მცირე სინქარის მინიჭებისას საქანი შეასრულებს მოძრაობებს წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად.

ზედა მდებარეობისთვის კი რაგინდ მცირე გადახრისას ან რაგინდ მცირე სინქარის მინიჭებისას საქანი მხოლოდ დაშორდება წონასწორობის მდებარეობას.

ამრიგად, გეაქეს მდგრადი და არამდგრადი წონასწორობის მდებარეობანი. შეიძლება არსებობდეს აგრეთვე ე.წ. განურჩეველი წონასწორობის მდებარეობა, როცა აქედან გამოყვანილი სისტემა არც დაბრუნებას ეცდება და არც დაშორებას. ამისი მაგალითია ბურთულას წონასწორობა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. ა.მ. ლიპუნოვმა ჩამოაყალიბა მდგრადობის მკაცრი განსაზღვრა: * სისტემის მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა ეწოდება მის ისეთ მდებარეობას, როცა მისგან საკმაოდ მცირე გადახრისას და საკმაოდ მცირე საწყისი სინქარის მინიჭებისას სისტემის ყველა წერტილი, ექნება რა რაგინდ მცირე სინქარე, იმობრავებს ისე, რომ ყოველი მათგანი არ გაეა თავისი წონასწორობის მდებარეობიდან წინასწარ დასახელებულ მანძილზე შორს, რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს ეს უკანასკნელი.

წონასწორობის მდგრადობის ხასიათის გარკვევაში დაგვეხმარება ლაგრანჟის და ღირიხლეს თეორემა: თუ მატერიალური სისტემისათვის, რომელიც კონსერვატიულ ძალთა ველში იმყოფება და პოლონომურ იდეალურ ბმებს ემორჩილება, პოტენციალურ ენერჯიას წონასწორობის მდებარეობაში აქვს მინიმუმი, მაშინ წონასწორობის მდებარეობა არის მდგრადი.

II.4. დალამბერის პრინციპი და ლაგრანჟის განტოლებები

ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპს ხშირად ვირტუალურ მუშაობათა პრინციპსაც უწოდებენ. შემთხვევაში ეს პრინციპი გამოვიყენოთ სისტემის წონასწორობის შესასწავლად.

გვეტირდება პრინციპი ზოგადი შემთხვევისათვის. ამიტომ გამოვიყენოთ ხერხი, რომელიც შემოთავაზებული იყო ჯერ კიდევ იაკობ ბერნულის მიერ და განაეთარა დალამბერმა.

i -ური ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება ჩავწეროთ ასე

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (II-4.1)$$

და შეიძლება გაეიაზროთ როგორც სისტემის i -ური ნაწილაკის წონასწორობის განტოლება, რომელსაც რეალური \vec{F}_i და \vec{R}_i ძალების გარდა მოქმედებს "ინერციის" ძალა $-\dot{\vec{p}}_i$. ასეთი გზით დინამიკის ამოცანა დაგვეყავს სტატიკაზე.

ახლა შევადგინოთ კვლავ ვირტუალურ მუშაობათა ჯამი:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

ანუ, რაკი ბმები იდეალურია, დაგვრჩება

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (II-4.2)$$

ამ ტოლობას ხშირად დალამბერის პრინციპს უწოდებენ. ის ასე ყალიბდება: მატერიალური სისტემის მოძრაობის ყოველ მომენტში აქტიური ძალების და ინ-

ვრცობის ძალების ვირტუალურ მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლია. ესაა დინამიკის ზოგადი პრინციპი. ხანდახან დალაშქრის პრინციპის უწოდებენ ხოლმე (II-4.1) განტოლებას: მოძრაობის ნებისმიერ მომენტში აქტიური ძალის, რეაქციის ძალის და ინერციის ძალის ჯამი ნულის ტოლია.

შემდგომში ჩვენ ასე ვუწოდებთ (II-4.2)-ს.

მოსახერხებელი ფორმით მოძრაობის განტოლებების მისაღებად შემოვიღოთ განზოგადებული q , კოორდინატები და (II-4.2) ისეთ სახეზე მივიყვანოთ, რომელიც შეიცავდეს ამ კოორდინატების დამოუკიდებელ ვარიაციებს. მაშინ თითოეული მისი კოეფიციენტის ნულთან გატოლებით უნდა მივიღოთ მოძრაობის განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში.

გადასვლა $\vec{r}_i \rightarrow q$, ხდება ფორმულებით (აქ უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ ვექტორული ენით):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$$

ამ შემთხვევაში სიჩქარეებისთვის გვაქვს

$$\dot{\vec{v}}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (\text{II-4.3})$$

ახლა

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{II-4.4})$$

ამ ტოლობაში არ შევიდა დროის ვარიაცია δt , რადგანაც განმარტებით ვირტუალური გადაადგილებები განისაზღვრება მხოლოდ q -ების ცვლილებით. უნდა გარდავქმნათ (II-4.2). პირველი წევრია ვირტუალური მუშაობა, რომელიც უკვე გვაქვს გადაწერილი განზოგადებული კოორდინატებით, (I-5.4):

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{II-4.5})$$

აქ

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

განვიხილოთ განტოლების მეორე წევრი:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

გარდავქმნათ ახლა ჯამი იგივეურად

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]$$

და ამ გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ სიჩქარის (II-4.3) ფორმულიდან გამომდინარე თანაფარდობა

$$\frac{\partial \dot{\vec{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

მაშინ ზემოთ მოყვანილი ჯამი ასე გადაიწერება

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]$$

ამის გამო ჩვენთვის საინტერესო წვერი განტოლებაში მიიღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

კინეტიკური ენერჯია $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$ აღვნიშნოთ T ასოთი. საბოლოოდ დაღამბერის პრინციპს ასე ჩავწერთ:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (\text{II-4.6})$$

ახლა გამოვიყენოთ სისტემის პოლონომურობა (აქამდე არ გამოვიყენებია). მაშინ δq_j ვარიაციები ურთიერთდამოუკიდებელი იქნება. ამიტომ (II-4.6) ტოლობა მხოლოდ მაშინ შესრულდება, თუ ყველა δq_j -ის წინ მდგომი თითოეული კოეფიციენტი გადაიქცევა ნულად, რაც მოგვცემს განტოლებებს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-4.7})$$

ამ განტოლებებს ჩვეულებრივ ლაგრანჟის მე-2 გვარის განტოლებებს უწოდებენ.

ახლა ჩავთვალოთ, რომ სისტემაზე მოქმედი ძალები არიან კონსერვატიული. როგორც უკვე გამოვარკვეთ ზემოთ, (II-2.3), ამ შემთხვევაში

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

და ლაგრანჟის განტოლებები მიიღებენ სახეს

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ სისტემის პოტენციალური ენერჯია V დამოკიდებულია მხოლოდ სისტემის ნაწილაკების მდებარეობაზე და, ამიტომ, მხოლოდ განზოგადებულ კოორდინატებზე და არა მათ წარმოებულებზე. ამის გამო მიღებულ განტოლებაში კერძო წარმოებულ $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ შეიძლება შევცვალოთ გა-

მოსახულებით $\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}$, და მიიღება

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია - ლაგრანჟიანი

$$L = T - V, \quad L = L(q, \dot{q}; t) \quad (\text{II-4.8})$$

მისი გათვალისწინებით ლაგრანჟის განტოლებები გადაიწერება ტრადიციული ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-4.9})$$

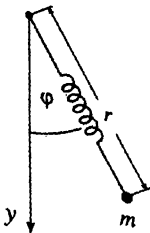
ამის შემდეგ, თუ სპეციალურად არ არის ნათქვამი, (II-4.9) განტოლებებს ეუწოდებთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს, ან უბრალოდ ლაგრანჟის განტოლებებს. ამრიგად, ესენი მიიღება პოტენციალური ძალების შემთხვევაში.

ამოცანა: აჩვენეთ, რომ ლაგრანჟის (II-4.9) განტოლებათა ფორმა დამოუკიდებელია განზოგადებული კოორდინატების შერჩევაზე.

მოძრაობის აღწერის ლაგრანჟის მეთოდის საილუსტრაციოდ გავარჩიოთ ერთი ასეთი ამოცანა:

ამოცანა: ზამბარიანი საქანი.

m მასის მცირე ზომის სხეული დაკიდებულია ზამბარიან საქანზე. ზამბარის სიხისტეა k . გასწვრივი რხევითი მოძრაობის გარდა ზამბარა საქანთან ერთად ასრულებს რხევებს (ნახ.14). ააგეთ ლაგრანჟიანი, მიიღეთ მოძრაობის განტოლება და განიხილეთ მიღებული შედეგი.



ნახაზი 14

ამოხსნა:

შემოვიტანოთ პოლარული კოორდინატები სიბრტყეზე:

$$x = r \sin \varphi, \quad \dot{x} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$y = r \cos \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

კინეტიკური ენერჯიაა

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

ზამბარის სიგრძე წაგრძელების გარეშე აღენიშნოთ r_0 -ით. პოტენციალური ენერჯია იქნება

$$\begin{aligned} V &= -mgy + \frac{k}{2} (r - r_0)^2 = \\ &= -mgr \cos \varphi + \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \end{aligned}$$

ამიტომ

ლაგრანჟიანი ასე გამოიყურება

$$L = T - V = \\ = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi - \frac{k}{2} (r - r_0)^2$$

ახლა პირდაპირ ამოვწერთ ლაგრანჟის განტოლებებს

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) = -mgr \sin \varphi$$

ეს სხვა არაფერია, თუ არა კუთხური მომენტის წესი კოორდინატთა სათაგის მიმართ. გაშლილი სახით ეს ასე გამოიყურება

$$m\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - 2m\dot{r}\dot{\varphi}$$

მარჯვენა მხარეში ბოლო წევრი არის კორიოლისის ძალა, გამოწვეული საქანის r სიგრძის ცვლილებით.

რადიალური კოორდინატისათვის ვიპოვით განტოლებას

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi - k(r - r_0)$$

აქ პირველი წევრი მარჯვნივ წარმოადგენს რადიალურ აჩქარებას, მეორე წევრი გამოდინარეობს სიმძიმის ძალის რადიალური კომპონენტიდან, ხოლო მესამე წევრი ჰუკის კანონს გამოხატავს. მცირე ამპლიტუდებისთვის (მცირეა გადახრის კუთხე φ) მოძრაობა წარმოიდგინება, როგორც r, φ -სიბრტყეში ჰარმონიული ვიბრაცია.

II-5. სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციული და დისიპაციური ფუნქცია

განტოლებები (II-4.9) ფორმით მივიღეთ კონსერვატიული სისტემებისათვის. თურმე როცა სისტემა არ არის კონსერვატიული, მაშინაც შეიძლება ლაგრანჟის განტოლებების წარმოდგენა ამავე ფორმით.

ეს იმ შემთხვევებში ხერხდება, როდესაც განზოგადებული ძალები Q , სპეციალური სახისაა. სახელდობრ, როცა ისინი მიიღებიან რაღაც $U(q, \dot{q}, t)$ ფუნქციებისაგან შემდეგი ტოლობით

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (II-5.1)$$

ამ შემთხვევაში უშუალო ჩასმით მოწმდება, რომ (II-4.7) განტოლებებიდან მიიღება (II-4.9) ფორმის განტოლებები, თუ ლაგრანჟიანს განვმარტავთ ასე

$$L = T - U \quad (II-5.2)$$

სიდიდეს U , რომელიც განზოგადებული კოორდინატების გარდა მათ დროით წარმოებულეზეც არის დამოკიდებული, უწოდებენ განზოგადებულ პოტენციალს ან "სიჩქარეზე დამოკიდებულ პოტენციალს".

ორად ორ შემთხვევაში - პოტენციალური ძალები ან განზოგადებული პოტენციალის სათანადო ძალები - მიიღება ერთნაირი ფორმის ლაგრანჟის განტოლებები.

ზემოთ მოყვანილი განზოგადებული პოტენციალის განხილვა არ არის რაიმე განეწეებული ამოცანა. ასეთი ამოცანების კლასს მიეკუთვნება ფიზიკურად

ისეთი მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როგორცაა ელექტრომაგნიტურ ძალთა ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა.

განივილით ეს შემთხვევა უფრო დაწვრილებით. აქ ჩვენ შევხვდებით ვექტორული ანალიზის მარტივ გამოყენებებს.

დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ელექტრომაგნიტურ ველში, როგორც ცნობილია, აღიწერება მაქსველის განტოლებებით. ერთეულთა ე.წ. გაუსის სისტემაში მათ აქვთ სახე:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

ელექტრულ q მუხტზე ველი მოქმედებს როგორც ელექტრული, ასევე მაგნიტური ძალით (ლორენცის ძალით)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

რადგანაც $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი \vec{B} წარმოდგინება როგორც რაიმე ვექტორული \vec{A} ველის როტორი (\vec{A} - ვექტორული მაგნიტური პოტენციალი):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

რაც შეეხება ელექტრულ ველს \vec{E} , ის აღარ განისაზღვრება მარტო სკალარული ϕ პოტენციალით. თუ \vec{B} -ს გამოსახულებას გაითვალისწინებთ მაქსველის (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

რაც საშუალებას იძლევა ჩავთვალოთ, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არის რაიმე სკალარული ფუნქციის გრადიენტი

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

მინუს ნიშანს იღებენ ფიზიკური მოსაზრებებით მოხერხებულობისათვის. ამრიგად გვაქვს შემდეგი გამოსახულება ელექტრული ველის დაძაბულობისათვის

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (II-5.3)$$

ახლა შევცადოთ ლორენცის ძალის გამოსახვას შემოტანილი პოტენციალებით. გვაქვს

$$\vec{F} = q \left\{ -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}] \right\} \quad (II-5.4)$$

ამ ტოლობაში შემავალი წევრები შეიძლება უფრო მოსახერხებელი სახით გადაიწეროს, რისთვისაც გამოვიყენოთ ვექტორული ალგებრის ცნობილი თანაფარდობები. ჯერ მოვძებნოთ ძალის x -მდგენელი. ნათელია, რომ

$$(\nabla \varphi)_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

ხოლო

$$\begin{aligned} [\vec{v} \times \nabla \times \vec{A}]_x &= v_y [\nabla \times \vec{A}]_z - v_z [\nabla \times \vec{A}]_y = \\ &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \end{aligned}$$

ბოლო სტრიქონის მისაღებად წინა სტრიქონში ჩაეატარეთ იგივეური ოპერაცია, სახელდობრ, დაემატეთ და დაეკელით წვერი $v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$.

ახლა ცალკე განვიხილოთ A_x -ის სრული წარმოებული დროით:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z$$

გავითვალისწინოთ ეს წინა ტოლობაში:

$$[\vec{v} \times \nabla \times \vec{A}]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

ამიტომ F_x ასეთ სახეს იღებს (იხ. (II-5.4)):

$$F_x = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \right\}$$

ბოლო წვერის მიღების დროს გათვალისწინებულია, რომ A_x -ები მარტო კოორდინატებზეა დამოკიდებული და არა სიჩქარეებზე, ხოლო ამავე დროს სიჩქარის სხვადასხვა მდგენელი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია. ამის გამო ბოლო წვერში ევადრატული ფრჩხილი ასე შეგვიძლია შეეცვალოთ $-c \left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)$.

გარდა ამისა, რადგან სკალარული პოტენციალი φ დამოუკიდებელია აგრეთვე სიჩქარეზე, ძალის x -მდგენელს ასე გადაეწეროთ

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x},$$

სადაც

$$U = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \quad (II-5.5)$$

ამრიგად, U ყოფილა განზოგადებული პოტენციალი (II-5.1) შინაარსით და ამიტომ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრაი დაძულებული ნაწილაკის ლაგრანჟიანს ჰქონია სახე:

$$L = T - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (II-5.6)$$

* შევნიშნოთ, რომ თუ სისტემაზე მოქმედ ძალთაგან პოტენციალურია (ჩვეულებრივი ან განზოგადებული შინაარსით) მხოლოდ ზოგიერთი, ხოლო დანარჩენს, რომელთაც აღვნიშნავთ \vec{Q} -ით, არ აქვს პოტენციალი, მაშინ ლაგრანჟიანს განტოლებები ასე ჩაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{II-5.7})$$

ხაილესტრაციოდ განვიხილოთ მექანიკური სისტემა, რომელზეც პოტენციალური (ან განზოგადებულ-პოტენციალური) ძალების გარდა მოქმედებენ ე.წ. დისიპაციური ძალები ანუ ბლანტი ხახუნის ძალები, რომლებიც ასევე სისტემის მექანიკური ენერჯის გაფანტვას ჩაეთვალეთ, რომ ხახუნის ძალა წერტილის მოძრაობის სინქარის პროპორციულია. ასე, რომ მისი x -მდგენელი გამოიხატება ტოლობით

$$F_x = -k_x u_x$$

ამ შემთხვევაში ხახუნის ძალები თურმე შეგვიძლია გამოვხატოთ რელვის დისიპაციური ფუნქციით, რომელსაც აქვს სახე

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_x u_x^2 + k_y u_y^2 + k_z u_z^2)$$

აქედან ჩანს, რომ რომელიმე წერტილზე მოქმედი ხახუნის ძალა მიიღება სინქარის მიხედვით გაწარმოებით

$$\vec{F} = -\nabla_v \Phi$$

დისიპაციურ ფუნქციას შეიძლება მიეცეს შემდეგი ფიზიკური ინტერპრეტაცია. როგორც ცნობილია, სისტემის მიერ ხახუნზე შესრულებული მუშაობა ტოლია

$$\Delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \vec{v} dt = (k_x u_x^2 + k_y u_y^2 + k_z u_z^2) dt$$

ამრიგად, 2Φ სიდიდე გამოხატავს სისტემის მიერ დაკარგული (გაფანტული) ენერჯის სინქარეს. ხახუნის ძალით გამოწვეული განზოგადებული ძალებია:

$$\tilde{Q}_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \nabla_v \Phi \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

როგორც ადრე დაუადგინეთ, $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_j}$, ამიტომ

$$- \sum_{i=1}^n \nabla_v \Phi \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \nabla_v \Phi \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

ე.ი.
$$\tilde{Q}_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

ხოლო ლაგრანჟის განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{II-5.8})$$

II-6. ლაგრანჟის განტოლებების მაგალითები

თუ სისტემა ისეთია, რომ მისთვის შეიძლება ლაგრანჟიანის აგება (ე.ი. სისტემა კოლონომურია და გააჩნია პოტენციალი - ჩვეულებრივი ან განზოგადებული), მაშინ გვაქვს ასეთი სისტემებისათვის მოძრაობის განტოლებების მიღების მეტად მოსახერხებელი (ლაგრანჟის) მეთოდი.

ლაგრანჟის განტოლებების მიღებისას ჩვენი მიზანი იყო გამოვეერიცხა ბმის რეაქციები. პარალელურად მივიღეთ სხვა სასარგებლო შედეგებიც.

როცა ნიუტონის კანონებს ვიყენებთ მოძრაობის განტოლებებად, საქმე გვაქვს ძალებისა და აჩქარებების ბევრ ვექტორთან. ლაგრანჟის მეთოდის გამოყენებისას კი ვემყარებით მხოლოდ 2 სკალარულ ფუნქციას, V და T , რაც საგრძნობლად ამარტივებს დასმულ ამოცანას. მოძრაობის განტოლებათა შედგენის ეს მეთოდი ზოგადია მექანიკის ყველა ამოცანისათვის. საჭიროა ჩაიწეროს მხოლოდ ეს ორი ფუნქცია განზოგადებული კოორდინატების საშუალებით, შედგეს მათგან L ლაგრანჟიანი და, (II-4.9)-ში ჩასმით მივიღოთ მოძრაობის განტოლებები. ამასთან, დეკარტეს კოორდინატებიდან განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლა განეახორციელოთ (I-5.1) გარდაქმნის ფორმულებით.

ა) კინეტიკური ენერგია (თავისუფალი მატერიალური წერტილის ლაგრანჟიანი)

დეკარტეს კოორდინატებში ნაწილაკის ან ნაწილაკთა სისტემის კინეტიკური ენერგიის ფორმულა კარგად არის ცნობილი:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (*)$$

ამ გამოსახულების დასაბუთება ადვილად შეგვიძლია გალილეის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულობის მოთხოვნით. ჯერ განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები: თუ K ინერციული სისტემა მოძრაობს K' ინერციული სისტემის მიმართ უსასრულოდ მცირე $\bar{\epsilon}$ სიჩქარით, მაშინ

$$\bar{v}' = \bar{v} + \bar{\epsilon}$$

რადგან ათვლის ყველა ასეთ სისტემაში მოძრაობის განტოლებებს ერთი და იგივე სახე უნდა აქონდეთ, ლაგრანჟიანები ამ ორ სისტემაში ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს (ან განსხვავდებოდნენ მქსიმუმ დროის მიხედვით სრული წარმოებულთ - დამატკიცეთ ეს დებულება! ე.ი. დამატკიცეთ, რომ ლაგრანჟიანისათვის დროის მიხედვით სრული წარმოებულის დამატება არ ცვლის ლაგრანჟის განტოლებებს):

$$L' = L(\bar{v}'^2) = L(\bar{v}^2 + 2\bar{v} \cdot \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}^2)$$

ცხადია, ლაგრანჟიანი უნდა იყოს სიჩქარის კვადრატულ დამოკიდებული სკალარული ფუნქცია. გავშალოთ ეს გამოსახულება $\bar{\epsilon}$ -ის ხარისხებად და დავითვოთ მხოლოდ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეები, მივიღებთ

$$L(\bar{v}'^2) \approx L(\bar{v}^2) + 2\bar{v} \cdot \bar{\epsilon} \frac{\partial L}{\partial \bar{v}^2}$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში მესამე წევრი იქნება დროის მიხედვით სრული წარმოებული მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $\frac{\partial L}{\partial \bar{v}^2}$ არ არის სიჩქარულ დამოკიდებული, ანუ როცა ლაგრანჟის ფუნქცია სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია, რაც ასე ჩავწერთ:

$$L = \frac{m}{2} \bar{v}^2,$$

სადაც პროპორციულობის კოეფიციენტი (დადებითი რიცხვი) აღებულია სპეციალური სახით. ახლა ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია ინვარიანტული აღმოჩნდება გადილის სასრულო გარდაქმნების მიმართაც. ესაა ზოგადი თვისება, რომელიც ახასიათებს ნებისმიერ უწყვეტ გარდაქმნებს და სოფუძვლად უდევს ე.წ. ლის ჯგუფებს, რომლებსაც შეეხვედებით თეორიული ფიზიკის შემდგომ კურსებშიც. სასრულო \bar{V} მუდმივი სინქარტ გარდაქმნისა გეპქება:

$$L' = \frac{m}{2} \bar{v}'^2 = \frac{m}{2} (\bar{v} + \bar{V})^2 = \frac{m}{2} \bar{v}^2 + m \bar{v} \cdot \bar{V} + \frac{m}{2} \bar{V}^2 =$$

$$= L + \frac{d}{dt} \left(m \bar{r} \cdot \bar{V} + \frac{m}{2} \bar{V}^2 t \right)$$

ე.ი. დამატებითი წევრი არის სრული წარმოებული დროის მიხედვით. m სიდიდეს უწოდებენ ნაწილაკის მასას.

თუ მექანიკური სისტემა ორი ნაწილაკიდან შედგება 1 და 2, თითოეული მათგანის კინეტიკური ენერგია (ლაგრანჟიანი, როცა ისინი თავისუფალია) არის L_1 და L_2 . მაშინ ზღვარში, როცა ეს ნაწილაკები დაშორებული იყენ ძალიან, რომ მათ შორის ურთიერთქმედება შეიძლება უგულვებელყოთ, მთელი სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია მიისწრაფის ზღვარისაკენ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L = L_1 + L_2$$

ეს არის ლაგრანჟიანის ადითივობის თვისება და გამოხატავს იმ უბრალო ფაქტს, რომ თითოეული არაურთიერთქმედი ნაწილაკის განტოლებები არ შეიძლება შეიცავდნენ სიდიდეებს, რომლებიც განეკუთვნებიან სისტემის სხვა ნაწილაკებს.

ამიტომაც სისტემის კინეტიკური ენერგია ჩაწერება (*) სახით, რაც დამთხვევა არაურთიერთქმედი ნაწილაკების სისტემის ლაგრანჟიანს.

გამოეხატოთ ახლა კინეტიკური ენერგია განზოგადებული კოორდინატებით. გეპონდა

$$\bar{v}_i = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

ამიტომ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (\text{II-6.1})$$

სადაც ინდექსები მიუთითებენ განზოგადებულ სინქარტების რომელი რიგის ერთგვაროვანი ფორმებია სათანადო წევრები. ცხადი სახით:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad (\text{II-6.2})$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

შეენიშნოთ, რომ m_{ij} და a_i , ისევე როგორც T_0 , საზოგადოდ, არიან q -ს და t -ს ფუნქციები:

$$m_y = m_{y'} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}, \quad (II-6.3)$$

$$a_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$$

თუ განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულები დროს ცხადი სახით არ შეიცავენ (ბმები სკალარონომულია), მაშინ $T_0 = T_1 = 0$ და T კინეტიკური ენერგია იქნება განზოგადებული სინქარების ერთგვაროვანი კვადრატული ფორმა. ასეთი სახის კინეტიკური ენერგიის ფორმას უწოდებენ ნორმალურს.

ბ) მოძრაობის განტოლების ფორმა

განვიხილოთ უფრო ცხადად ლაგრანჟის განტოლებებიდან გამომდინარე მოძრაობის განტოლებათა ფორმა.
სიდიდეს

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (II-6.4)$$

ეწოდება განზოგადებული იმპულსი.

წინა პუნქტის ფორმულებიდან აშკარაა, რომ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_j + a_i, \quad (II-6.5)$$

სადაც, როგორც უკვე ითქვა, m_{ij} და a_i კოეფიციენტები საზოგადოდ არიან განზოგადებული კოორდინატებისა და დროის ფუნქციები. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობის განტოლებებში \dot{q} შევა წრფივად. მართლაც,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \dot{m}_{ij} \dot{q}_j + \dot{a}_i,$$

სადაც

$$\dot{m}_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial m_{ijk}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}, \quad \dot{a}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial t}$$

აშკარაა, რომ თუ ლაგრანჟის განტოლების მეორე წევრსაც, $\frac{\partial L}{\partial q_i}$, გა-

მოვთვლით ამავე გზით, ადვილად დაერწმუნდებით, რომ განზოგადებული კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებული დროით აღარსად წარმოიქმნება. ამიტომ განტოლების შედგენის შემდეგ იგი შეგვიძლია ამოხსნათ \dot{q} -ის მიმართ. ეს არ არის რთული, რადგან იგი შევა წრფივად და შედეგი გამოიხატება განზოგადებული კოორდინატებისა და დროის მიხედვით მათი პირველი რიგის წარმოებულების საშუალებით. ამრიგად ლაგრანჟის განტოლებებს პქონიათ შემდეგი უზოგადესი სახე:

$$\ddot{q}_j + \varphi_j(q, \dot{q}; t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (II-6.6)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, მოძრაობის განტოლება არის დროის მიხედვით მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. ცხადია, მოძრაობის განსაზღვრისათვის საჭირო იქნება კიდევ საწყისი პირობების მოცუბა. ასე, რომ გვაქვს მათემატიკაში კარგად ცნობილი კოშის ჩვეულებრივი ამოცანა.

II-7. არაპოლონომური სისტემები და ლაგრანჟის განტოლებები

ჩვენ ძირითადად ვიხილავდით პოლონომურ სისტემებს, როდესაც ბმების განტოლებებს ჰქონდათ გეომეტრიული სახე ან მიიყვანებოდნენ ამ სახეზე

$$f_j(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.1})$$

აღვნიშნეთ, აგრეთვე, რომ ყველა ისეთი ბმა, რომელიც ამ სახეზე არ მიიყვანება, იწოდება არაპოლონომურად. ასევე იწოდება შესაბამისი მექანიკური სისტემები. როცა პოლონომური სისტემა გვაქვს, ბმის განტოლებების გეომეტრიული ხასიათის გამო ყოველთვის შეგვიძლია გამოვიტოვოთ k კოორდინატი და გამოვხატოთ ისინი $n = 3N - k$ დამოუკიდებელი განზოგადოებული q , კოორდინატებით. არაპოლონომური ბმების შემთხვევაში ეს შეუძლებელია, რადგან დამატებითი პირობები ედება დიფერენციალური ფორმით

$$\sum_{i=1}^N f_{j_i}(\{\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t\}) \cdot d\bar{r}_i + f_{j_t}(\{\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t\}) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.2})$$

საზოგადოდ, ეს განტოლებები შეიძლება არაინტეგრებადი იყოს, ამიტომ ვერ შეიძლება k დამოკიდებული კოორდინატის გამორიცხვას ამ დიფერენციალური ფორმიდან. ვიტყვით ასე: დეკარტეს კოორდინატებს \bar{r} , უბრალოდ გამოვსახაეთ $3N$ განზოგადებული კოორდინატით q , ოღონდ ახლა ყველა მათგანი არ იქნება დამოუკიდებელი, არამედ შეიზღუდება (II-7.2)-ის მსგავსი პირობებით, რაც განზოგადებულ კოორდინატებში შეგვიძლია ასე ჩაეწეროს:

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ji}(q, t) dq_i + a_{jt}(q, t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.3})$$

ვირტუალური δq , გადაადგილებებისათვის, როცა $\delta t = 0$, ეს პირობები ასე ჩაიწერება

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ji}(\{q, t\}) \delta q_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.4})$$

ამ სახით ეს დამატებითი პირობები შეგვიძლია იმავე ფორმით ჩაწერილ ლაგრანჟის განტოლებებთან ერთად განვიხილოთ, სახელდობრ,

$$\sum_{j=1}^k \left(\tilde{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (\text{II-7.5})$$

ამ ჩაწერისას, ისევე როგორც (II-5.7) განტოლებაში, კონსერვატიული ძალები იგულისხმება ლაგრანჟიანში ჩართულად. (II-7.4) პირობების გამო ყველა δq , არაა ურთიერთდამოუკიდებელი. ამის გასათვალისწინებლად გამოვიყენოთ კვლავ ლაგრანჟის განუხსნადურულ მაშრავლთა მეთოდი - გაეამრავლოთ (II-7.4) ჯერჯერობით უცნობ λ , მაშრავლებზე და ავეჯამოთ j -ის მიხედვით,

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{3N} \lambda_j a_{ji}(q, t) \delta q_i = 0 \quad (\text{II-7.6})$$

ამ ბოლო ორი ტოლობის შეკრება იძლევა

$$\sum_{j=1}^k \left(\tilde{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^{3N} \lambda_j a_{ji}(q, t) \right) \delta q_j = 0 \quad (\text{II-7.7})$$

ყველა $3N$ ვარიაციებს შორის მხოლოდ $3N - k$ შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერად, რადგან k დამატებითი პირობა კვლავ უნდა შესრულდეს. დაენოშროთ δq_j , ისე, რომ მათგან სწორედ პირველი k იყოს დამოკიდებული; დანარჩენი

$3N - k$ კი იყოს ნებისმიერი. ახლა, როგორც ჩვეულებრივად, ნებისმიერი λ_j კოეფიციენტების შერჩევით ისე, რომ პირველ k δq_j ვარიაციებთან მდგომი კოეფიციენტები ნულის ტოლი გახდეს, მივიღებთ k განტოლებას

$$\tilde{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}(q, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.8})$$

ამიტომ (II-7.7) განტოლება დაიყვანება შემდეგზე

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\tilde{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}(q, t) \right) \delta q_j = 0 \quad (\text{II-7.9})$$

ამ განტოლებაში უკვე თავისუფლად შეგვიძლია ავირჩიოთ δq_j სიდიდეები. ამიტომ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება ნულს გაუტოლდება თითოეული j -სათვის, ე.ი.

$$\tilde{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}(q, t) = 0 \quad j = k+1, k+2, \dots, 3N \quad (\text{II-7.10})$$

ახლა ვხედავთ, რომ განტოლებათა ორი სისტემა (II-7.8) და (II-7.10) ერთნაირი ფორმისაა და მათი მარტივი კომბინირება შეიძლება. შედეგად მიიღება:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \tilde{Q}_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}(q, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 3N \quad (\text{II-7.11})$$

ამრიგად, მივიღებთ $3N$ განტოლებას, რომლებიც შემდეგი k დამატებითი პირობით უნდა შეივსოს

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ij}(q, t) \dot{q}_i + a_{kj}(q, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.12})$$

ყველაფერი ეს ერთად განსაზღვრავს $3N + k$ უცნობს, სახელდობრ $3N$ კოორდინატას q_i და k ლაგრანჟის მამრავლს λ_i . ამიტომ (q, λ) სიდიდეების სრული რაოდენობა არის $3N + k$, რაც ემთხვევა (II-7.11) და (II-7.12) განტოლებების რაოდენობას და, ამრიგად, განსაზღვრავს მათ.

ლაგრანჟის მამრავლების ფიზიკური შინაარსი კიდევ უფრო უკეთ შეიძლება გავიაზროთ, თუ (II-7.11) განტოლების ბოლო წევრს გავიგებთ როგორც დამატებით ძალას, სახელდობრ,

$$\tilde{Q}_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}(q, t) \quad (\text{II-7.13})$$

ეს ახალი ძალები არიან ბმის რეაქციები, რომლებიც წარმოიქმნებიან დამატებითი პირობებით სისტემის მოძრაობის შესუღდვის გამო. მართლაც, თუ მოვხსნით შესუღდეებს, $(a_{ij} = 0)$, მაშინვე გაქრება ბმის რეაქციებიც, $\tilde{Q}_j = 0$. ადრინდელი განტოლება (II-7.4) ახლა ასე გადაიწერება

$$\sum_{i=1}^{3N} \tilde{Q}_i \delta q_i = 0 \quad (\text{II-7.14})$$

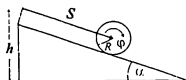
და შეგვიძლია გავიგოთ, როგორც ბმების რეაქციების ძალების მიერ შესრულებული ვირტუალური მუშაობების ჯამის ნულთან ტოლობა.

სავსებით ბუნებრივია, რომ აქ გამოყენებული ლაგრანჟის მამრავლის მეთოდი გამოდგება პოლანომური სისტემისთვისაც. მართლაც პოლანომური ბმების განტოლებები (II-7.1) შეგვიძლია ასეთივე წარმატებით გადავწეროთ დიფერენციალური ფორმით

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}_i} \cdot d\bar{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{II-7.15})$$

მას აქვს ზუსტად არაპოლინომური სისტემის სახე, (II-7.3). ამის შემდეგ ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდი ჩვეულებრივად იმოქმედებს. შედეგად ეიბოვით $3N + k$ გადაბმულ განტოლებებს, მაშინ როცა ზემოთ გამოყენებულმა გამორიცხვის მეთოდმა მოგვცა მხოლოდ $3N - k$ განტოლებათა სისტემა. დანარჩენი $2k$ განტოლებით განისაზღვრება ბმის რეაქციების ძალები, \vec{Q}_j , როგორც (II-7.13) ფორმულაშია, ყოველგვარი სირთულეების გარეშე.

არაპოლინომური სისტემის მაგალითები განხილული იყო წინა თავში. ახლაც განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.



ნახაზი 15

ამოცანა: მყარი ცილინდრი ჩამოგორდება h სიმაღლისა და α დახრის კუთხის მქონე სიბრტყეზე. გორვის პირობა არის პოლინომური პირობა, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, გამოგვაადგება მეთოდის ილუსტრაციისათვის (ნახ. 15).

ორ განზოგადოებულ კოორდინატად ავიღოთ s და ϕ . ბმის პირობა ასე იკითხება

$$R\dot{\phi} = \dot{s} \quad \text{ან} \quad R d\phi - ds = 0$$

ამ განტოლებათა პირდაპირი ინტეგრაცია ადვილად ჩატარდება. მიიღება

$$R\phi = s + \text{const.}$$

ამიტომ ბმა ყოფილა პოლინომური. მაგრამ ამ მაგალითზეც შეგვიძლია ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდის ილუსტრირება. ამ გზით ჩვენ ბმის რეაქციებსაც ეიბოვით. ბმებში მონაწილე კოორდინატები ტოლია

$$a_s = -1, \quad a_\phi = R,$$

რაც ჩანს (II-7.3)-თან შედარებით. კინეტიკური ენერგია T ტოლია მასათა ცენტრის და ბრუნვის კინეტიკურ ენერგიათა ჯამისა

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\phi}^2 \right),$$

სადაც გამოვიყენეთ, რომ მყარი ცილინდრის ინერციის მომენტია

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

პოტენციალური ენერგია ტოლია

$$V = mgh - mgs \sin \alpha$$

ამიტომ

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\phi}^2 \right) - mg(h - s \sin \alpha)$$

უნდა შეენიშნოთ, რომ ამ ლაგრანჟიანის პირდაპირი გამოყენება მოძრაობის განტოლების მისაღებად არ შეიძლება, რადგან კოორდინატები s და φ არ არიან ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი. ამრიგად, φ არ არის იგნორირებადი, თუმცა ცხადი სახით არ შედის ლაგრანჟიანში.

რადგან მხოლოდ ერთი ბმა გვაქვს, მხოლოდ ერთი ლაგრანჟის მამრავლი გვჭირდება. ზემოთ მოყვანილი კოეფიციენტებით ეპოულობთ ლაგრანჟის შემდეგ განტოლებებს

$$m\ddot{s} - mg \sin \alpha + \lambda = 0$$

$$\frac{m}{2} R^2 \ddot{\varphi} - \lambda R = 0$$

რომლებიც $R\dot{\varphi} = \dot{s}$ შეზღუდვასთან ერთად ქმნიან 3 განტოლების სისტემას 3 უცნობი სიდიდისათვის φ, s, λ . ბოლო ფორმულის გაწარმოებით დროის მიხედვით ეპოულობთ

$$R\ddot{\varphi} = \ddot{s},$$

საიდანაც მე-2 განტოლებასთან ერთად მიიღება

$$m\ddot{s} = 2\lambda$$

ამიტომ, პირველი განტოლება ასე შეიცვლება

$$mg \sin \alpha = 3\lambda$$

აქედან ეპოულობთ ლაგრანჟის მამრავლს

$$\lambda = \frac{1}{3} mg \sin \alpha$$

ხოლო განზოგადებული ბმის რეაქციებია

$$a_s \lambda = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha, \quad a_\varphi \lambda = \frac{1}{3} R mg \sin \alpha$$

პირველი მათგანი არის ხახუნით გამოწვეული რეაქცია, ხოლო მეორე – ამ ძალით გენერირებული წნევა, რომელიც განაპირობებს ცილინდრის გორვას. ლაგრანჟის მამრავლის ჩასმა პირველ განტოლებაში გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{s} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

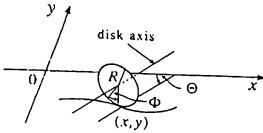
ხოლო φ -სთვის მიიღება

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \alpha$$

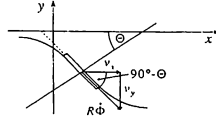
ამ მაგალითის განხილვით ჩვენ დავინახეთ, რომ ლაგრანჟის მამრავლების მეტოდი არა მარტო მოძრაობის საძიებელ განტოლებებს იძლევა, არამედ ბმების რეაქციებსაც, რომლებიც საერთოდ არ შედიან ლაგრანჟიანში.

როგორც არაპოლონომური ბმების შემთხვევა, განვიხილოთ ახლა შემდეგი

ამოცანა: ვიპოოთ M მასისა და R რადიუსის წრიული დისკის მოძრაობის განტოლება და ბმების რეაქციები, რომელიც სრიალის გარეშე მიგორავს x, y -სიბრტყეზე (ნახ. 16). დისკი მუდამ უნდა იდგეს ამ სიბრტყის პერპენდიკულარულად. ესაა ჩვენს მიერ წინა თავში განხილული გოლდსტიინის ამოცანა.



(ა)



(ბ)

ნახაზი 16

ჯერ გავერკვეთ, თუ როგორ ჩამოვყალიბოთ მათემატიკურად ამოცანის მოთხოვნები. ეს ნიშნავს, რომ დისკის ცენტრი ზუსტად სიბრტყესთან შეხების (x, y) წერტილის თავსუა (დისკი დგას პერპენდიკულარულად), ხოლო დისკის ცენტრის წრიული სიჩქარე $R\dot{\Phi}$ ტოლია შეხების წერტილის სიჩქარისა (Φ არის დისკის თავისი ღერძის ირგვლივ შემობრუნების კუთხე). ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ არ გვაქვს სრიალი. თუ შემოვიტანთ Θ კუთხეს დისკის ღერძსა და x - ღერძს შორის, ტერმინი “სრიალის გარეშე” მათემატიკურად ასე იკითხება

$$\dot{x} = R\dot{\Phi} \sin \Theta,$$

$$\dot{y} = -R\dot{\Phi} \cos \Theta$$

დიფერენციალური ფორმით კი

$$dx - R \sin \Theta d\Phi = 0$$

$$dy + R \cos \Theta d\Phi = 0$$

ტრადიციული (II-7.12) ფორმით ეს პირობები ასე გადაიწერება

$$a_{11}dx + a_{12}dy + a_{13}d\Phi + a_{14}d\Theta = 0$$

$$a_{21}dx + a_{22}dy + a_{23}d\Phi + a_{24}d\Theta = 0$$

სადაც

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = -R \sin \Theta, \quad a_{14} = 0$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = R \cos \Theta, \quad a_{24} = 0$$

(II-7.13) განტოლებების თანახმად ბმების რეაქციები ტოლია

$$\tilde{Q}_x = \lambda_1,$$

$$\tilde{Q}_y = \lambda_2,$$

$$\tilde{Q}_\Phi = -\lambda_1 R \sin \Theta + \lambda_2 R \cos \Theta,$$

$$\tilde{Q}_\Theta = 0$$

დისკის კინეტიკური ენერჯიაა

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

სადაც J_1, J_2 არიან დისკის ინერციის მომენტები, შესაბამისად, დისკის ცენტრზე მისი სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი ღერძის, და ცენტრზე და შეხების წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ. ახლა ლაგრანჟის განტოლებები ცხადი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} &= Q_x + \lambda_1, \\
 M\ddot{y} &= Q_y + \lambda_2, \\
 J_1\ddot{\Phi} &= Q_\Phi - \lambda_1 R \sin \Theta + \lambda_2 R \cos \Theta, \\
 J_2\ddot{\Theta} &= Q_\Theta
 \end{aligned}$$

ამ განტოლებებში Q_i -ები არიან შესაძლო გარე ძალები. შევიწავლოთ შემთხვევა ამ ძალების გარეშე მაშინ გვექნება განტოლებები

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} &= \lambda_1, \\
 M\ddot{y} &= \lambda_2, \\
 J_1\ddot{\Phi} &= -\lambda_1 R \sin \Theta + \lambda_2 R \cos \Theta, \\
 J_2\ddot{\Theta} &= 0.
 \end{aligned}$$

ამ ბოლო განტოლების პირდაპირი ინტეგრაცია იძლევა

$$\Theta = \omega t + \Theta_0$$

ჩასმა ბმის პირობებში სინქარისათვის გვაძლევს მეორე წარმომებულების გამოსვლის საშუალებას, საიდანაც განისაზღვრებიან ლაგრანჟის მამრავლები:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= M\ddot{x} = M(R\ddot{\Phi} \sin(\omega t + \Theta_0) + \omega R\dot{\Phi} \cos(\omega t + \Theta_0)) \\
 \lambda_2 &= M\ddot{y} = -M(R\ddot{\Phi} \cos(\omega t + \Theta_0) - \omega R\dot{\Phi} \sin(\omega t + \Theta_0))
 \end{aligned}$$

ახლა ამას ჩავსვამთ მესამე განტოლებაში და მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 J_1\ddot{\Phi} &= -MR(R\ddot{\Phi} \sin(\omega t + \Theta_0) + \omega R\dot{\Phi} \cos(\omega t + \Theta_0)) \sin \omega t \\
 &\quad - MR(R\ddot{\Phi} \cos(\omega t + \Theta_0) - \omega R\dot{\Phi} \sin(\omega t + \Theta_0)) \cos \omega t \\
 &= -MR^2\ddot{\Phi};
 \end{aligned}$$

ე.ი.

$$(J_1 + MR^2)\ddot{\Phi} = 0,$$

რაც იძლევა $\ddot{\Phi} = 0$ და ამიტომ $\dot{\Phi} = const.$ ამის შემდეგ უკვე შეგვიძლია ჩავწეროთ ბმების რეაქციის ძალები ცხადი სახით:

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_x &= M\omega R\dot{\Phi} \cos(\omega t + \Theta_0), \\
 \tilde{Q}_y &= M\omega R\dot{\Phi} \sin(\omega t + \Theta_0), \\
 \tilde{Q}_\Phi &= 0, \quad \tilde{Q}_\Theta = 0
 \end{aligned}$$

ბმების რეაქციების ეს ძალები უნდა მოქმედებდნენ, რათა დისკი შეინარჩუნონ ევრტიკალურ მდგომარეობაში x, y სიბრტყესე. თუკი დისკი იგორებდა წრფის გასწვრივ ($\omega = 0$), ბმების რეაქციები აღარ გვექნებოდა.

ვარიაციული პრინციპები და ლაგრანჟის განტოლებები

III-1. იზოქრონული ვარიაციის თვისებები. ჰამილტონის ქმედების ფუნქცია

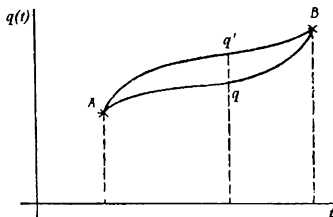
გადავხედოთ კიდევ ერთხელ ლაგრანჟის განტოლებებს განსხვავებული პოზიციიდან. ეს განტოლებები ჩაწერილია ლაგრანჟის ფუნქციისათვის, რომელიც არის განზოგადებული კოორდინატების და მათი დროითი წარმოებულების (განზოგადებული სინქარების) სკალარული ფუნქცია:

$$L = L(q, \dot{q}, t), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

გამოეთვალთ ამ ფუნქციის ვარიაცია

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

შევისწავლოთ წარმოებულის ვარიაცია $\delta \dot{q}$, (იხ.ნახ.17).



ნახაზი 17.

როგორც ვიცით,

$$\delta q = q'(t) - q(t)$$

ხოლო წარმოებულნი განიმარტება ასე

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

აშკარაა, რომ

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{q(t + \Delta t) + \delta q(t + \Delta t) - q(t) - \delta q(t)}{\Delta t}$$

ანუ

$$\frac{dq'}{dt} - \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta q(t + \Delta t) - \delta q(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \delta q(t)$$

თავის მხრივ, ამ თანაფარდობის მარცხენა მხარეში დგას $\delta \left(\frac{dq}{dt} \right)$,

ე.ი. იზოქრონული ვარიაცია გადასმადია გაწარმოებასთან:

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad (\text{III-1.2})$$

ასევე

$$\delta dq = d \delta q$$

ეს ფაქტი გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილ δL -ში, სადაც მეორე წევრი ასე გადაეწეროს:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \end{aligned}$$

ამის გამოყენებით ლაგრანჟიანის ვარიაცია ასე გადაიწერება

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad (\text{III-1.3})$$

დაეუშვათ ახლა, რომ q_i -ები ნამდვილ მოძრაობას შეესაბამებიან, ე.ი. ადგილი აქვს ლაგრანჟის განტოლებას. მაშინ (III-1.3)-ში პირველი წევრი ნულის ტოლი იქნება და ნამდვილი მოძრაობისათვის დაგვრჩება

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad (\text{III-1.4})$$

ამრიგად, ლაგრანჟიანის იზოქრონული ვარიაცია ნამდვილი მოძრაობისათვის ყოველთვის რაიმე ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოდის. ამ ფაქტით შეგვიძლია ვისარგებლოთ მოძრაობის შესასწავლად დროის რაიმე სასრულო ინტერვალში შერჩეულ t_1 და t_2 მომენტებს შორის. განზოგადებული კოორდინატები და სინქარეები არიან დროის რაღაცა ფუნქციები ნამდვილი მოძრაობისას. იზოქრონული ვარიაციები შეგვიძლია მოვცეთ დროის ყოველ მომენტში ისე, რომ მივიღოთ დროის უწყვეტი და დიფერენცირებადი ფუნქციები $\delta q_i(t), \delta \dot{q}_i(t)$. მაშინ δL -იც იქნება დროის დიფერენცირებადი ფუნქცია. (III-1.4) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ dt -ზე და ვაინტეგროთ t_1 -დან t_2 -მდე:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt$$

ინტეგრაციის სასაღვრები ფიქსირებულია, მათი ვარირება არ ხდება. ამიტომ ვარიაციის და დროით ინტეგრაციის ოპერაციების ურთიერთგადასმა შეიძლება ტოლობის მარცხენა მხარეში, მარჯვენა მხარეში კი ინტეგრაცია ტარდება მარტივად. მიიღება თანაფარდობა:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (\text{III-1.5})$$

რადგან, ყველაფერი აქ შეეხება ნამდვილ მოძრაობას, ინტერვალის კიდევსე კოორდინატების ვარიაცია არ ხდება, ე.ი.

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

ამიტომ, ვიღებთ ჰამილტონის პრინციპის გამოსახულებას:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt = 0 \quad (\text{III-1.6})$$

ინტეგრალს

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv S \quad (\text{III-1.7})$$

უწოდებენ ჰამილტონის ქმედების ფუნქციას. ის არის ფუნქციონალი, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ლაგრანჟის ფუნქციის სახეზე. მიღებული შედეგი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ნამდვილი მოძრაობის დროს ჰოლონომური სისტემის ჰამილტონის ქმედება იღებს სტაციონარულ მნიშვნელობას, თუ ყველა აქტიური ძალა არის პოტენციალური, ხოლო განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციები ნულის ტოლია ინტეგრაციის არის ბოლოებზე.

სწორედ ესაა ჰამილტონის პრინციპი.

როცა გამოგვეყავა ლაგრანჟის განტოლებები, ეიხილავეით სისტემის მყისიერ მდებარეობას და მის მცირე ვირტუალურ ცვლილებას, ე.ი. ჩვენ ამოვიღოთ „დიფერენციალური პრინციპიდან“, როგორცაა დალამბერის პრინციპი.

მაგრამ ლაგრანჟის განტოლებების მიღება შეიძლება სხვა პრინციპიდანაც, რომელშიც განიხილება სისტემის მოძრაობა დროის სასრულო ინტერვალში და მდებარეობის მცირე ცვლილებები ამ ინტერვალში. ამ სახის პრინციპებს უწოდებენ „ინტეგრალურ პრინციპებს“.

ჯერ დავაზუსტოთ ფრაზა — „სისტემის მოძრაობა დროის სასრულო ინტერვალში“.

სისტემის კონფიგურაცია ყოველ მოცემულ დროის მომენტში განისაზღვრება q_1, q_2, \dots, q_n განზოგადებული კოორდინატების მნიშვნელობებით და თუ ამათ შეეხედავთ როგორც დეკარტეს კოორდინატებს n - განზომილებიან სივრცეში, მაშინ სისტემის ყოველ კონფიგურაციას შეესაბამება ამ სივრცის წერტილი. ასეთ n -განზომილებიან სივრცეს ვუწოდებთ კონფიგურაციულ სივრცეს. დროის განმავლობაში სისტემის მდებარეობა იცვლება და ამ მდებარეობის გამომხატველი წერტილი კონფიგურაციულ სივრცეში აღწერს რაღაცა მრუდს — „სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიას“. ამიტომ, სისტემის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პარამეტრი. ტრაექტორიის ყოველ წერტილს შეესაბამება ამ პარამეტრის ერთი ან რამდენიმე მნიშვნელობა.

ამჟამად, რომ კონფიგურაციების სივრცე საზოგადოდ არ იქნება ჩვეულებრივი 3-განზომილებიანი სივრცე, რომელშიც ხდება სისტემის მოძრაობა. ამ ტრაექტორიასაც არ ექნება მსგავსება ჰუმბოლტის ტრაექტორიასთან.

კონფიგურაციულ სივრცეში ტრაექტორიის ყოველი წერტილი გამოხატავს ამ სისტემას დროის რომელიმე მომენტში.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ჰამილტონის ინტეგრალური პრინციპი კონსერვატიული სისტემისათვის (მას ადგილი აქვს აგრეთვე სისტემებისთვის, რომლებშიც მოქმედებენ განზოგადებული პოტენციალური ძალები):

სისტემის ჭეშმარიტი მოძრაობა დროის სასრულო ინტერვალში ისეთია, რომ ინტეგრალს

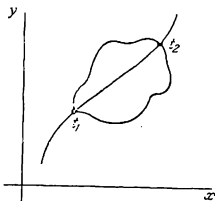
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{III-1.8})$$

(სადაც $L = T - V$) აქვს ექსტრემუმი.

ამრიგად, გამომსახველი წერტილის ყველა შესაძლო მოძრაობებიდან t_1 მომენტში მისი მდებარეობიდან მდებარეობამდე t_2 მომენტში ჭეშმარიტი იქნება ის მოძრაობა, რომლისთვისაც (III-1.8) ინტეგრალს აქვს მინიმუმი ან მაქსიმუმი (ექსტრემუმი)

ანუ

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = 0 \quad (\text{III-1.9})$$



ნახაზი 18. გამომსახველი წერტილის ტრაექტორია კონფიგურაციულ სივრცეში.

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ ჰამილტონის პრინციპი გამომდინარეობს ლაგრანჟის განტოლებებიდან. ახლა მოვიქცევით პირიქით – ლაგრანჟის განტოლებებს გამოვიყვანოთ ჰამილტონის პრინციპიდან.

ამით ნაჩვენები იქნება, რომ კონსერვატიული სისტემების მექანიკა შეიძლება ავაგოთ, თუ გამოვალთ ჰამილტონის პრინციპიდან, როგორც ძირითადი პოსტულატიდან, რომელიც შევვლის ნიუტონის კანონებს.

ამისათვის, ჯერ გავეცნოთ ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთ ელემენტებს.

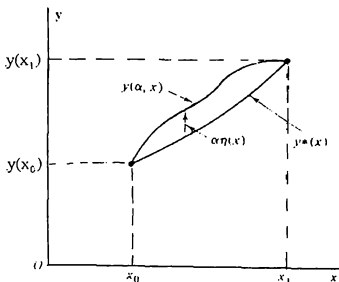
III-2. ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთი მეთოდი

(III-1.9) ინტეგრალის ექსტრემუმის ამოცანაში მთავარი მიზანია მოიძებნოს მრუდი, რომლისთვისაც მოცემულ წირით ინტეგრალს ექნება ექსტრემალური მნიშვნელობა.

განვიხილოთ ეს ამოცანა პირველყოველისა ერთგანზომილებიანი ფორმით, როგორც ამას განიხილავს ე.წ. ვარიაციული აღრიცხვა: უნდა ვიპოვოთ ისეთი მრუდი $y = y(x)$, რომელიც ინტერვალში $x_1 \leq x \leq x_2$ ანიჭებს ექსტრემუმს წირით ინტეგრალს მოცემული ფუნქციიდან $f(y(x), y'(x), x)$, სადაც $y' = \frac{dy}{dx}$. სხვა სიტყვებით, საძიებელი $y(x)$ ფუნქციისათვის ინტეგრალს

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (\text{III-2.1})$$

უნდა პქონდეს ექსტრემუმი. x ასრულებს t დროითი პარამეტრის როლს. ამასთან ჩვენ ვიხილავთ მარტო ისეთ $y(x)$ მრუდებს, რომლებსთვისაც $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. (ნახ. 19)



ნახაზი 19

ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა I წარმოედგინოთ ისეთი ფორმით, რომ მისთვის დიფერენციალური აღრიცხვის ჩვეულებრივი აპარატის გამოყენება შეგვეძლოს, რომელიც საშუალებას მოგვცემს დასაშვებ ფუნქციათა კლასში ვიპოვოთ ისეთი $y'(x)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრალს მიანიჭებს სტაციონარულ მნიშვნელობას.

შემოვიტანოთ მრუდების ერთპარამეტრიანი ოჯახი $y(\alpha, x)$. ამ ოჯახის სხვადასხვა წევრი განისაზღვრება α პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობით და დაეუშვათ, რომ, მაგალითად, ამ პარამეტრის ნულოვან მნიშვნელობას ეთანადებოდეს საძიებელი მრუდი, ანუ ეს ოჯახი ასე დაეახსიანოთ:

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x) = y'(x) + \alpha \eta(x), \quad (\text{III-2.2})$$

სადაც $\eta(x)$ არის x -ის ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც ინტერვალის ბოლოებზე 0-ის ტოლი ხდება

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (\text{III-2.3})$$

ამ მოთხოვნის შემდეგ (III-2.2) გახდება $y(x)$ მრუდების ერთ-ერთი შესაძლო ოჯახი.

თუ $y(\alpha, x)$ -ს (არააუცილებლად (III-2.2) სახით) ჩავსვამთ (III-2.1) გამოსახულებაში, მაშინ აშკარაა, რომ ეს უკანასკნელი გადაიქცევა α -ს ჩვეულებრივ ფუნქციად:

$$I = I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx \quad (\text{III-2.4})$$

ამის შემდეგ ნათელია, რომ ექსტრემუმის პირობა მიღებს სახეს:

$$\left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

რადგან ინტეგრაციის საზღვრები დამოუკიდებელია α -სგან, შეგვიძლია გაწარმოება ჩავატაროთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx$$

მარჯვენა მხარეში მეორე წევრი ასე გარდაექმნათ

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \text{ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია} = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \end{aligned}$$

აშკარაა, რომ (III-2.3)-ის გამო პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. (ნულის ტოლებია აგრეთვე $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{x=x_1, x_2}$, რადგანაც განხილული ოჯახის ყველა წირი გადის ბოლო წერტილებზე. შეგვიძლო არც კი გამოგვეყენებინა აქ (III-2.2) წარმოდგენა).

ამრიგად, დაგვრჩენია მოვითხოვთ ექსტრემუმი

$$\left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0 \quad (\text{III-2.5})$$

რადგანაც $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ არის ნებისმიერი, $d\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \delta y$, ანუ გვაქვს

$$\left(\frac{dI}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y = 0, \quad (\text{III-2.6})$$

δy -ის ნებისმიერობის გამო აქედან ვასკენით, რომ ინტეგრალის ექსტრემუმისათვის აუცილებელი პირობა ყოფილა შემდეგი განტოლების შესრულება:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{III-2.7})$$

აშკარაა, რომ ეს პირობა საკმარისცაა, რადგან თუ ის სრულდება, მაშინ (III-2.6)-ში ინტეგრალი ნულის ტოლია. ეს კი სხვა არაფერია, თუ არა $\delta I(\alpha) = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} d\alpha$, ანუ $\delta I = 0$.

(III-2.7)-ს ვარიაციულ აღრიცხვაში უწოდებენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს. ისინი პირველად ეილერმა მიიღო 1744 წელს, და, მოგვიანებით ლაგრანჟმა მიუყენა მექანიკურ სისტემებს.

განვიხილოთ ექსტრემუმის მოძებნის ამ მეთოდის სოციერტი მაგალითი.

მაგალითი 1.

განვსაზღვროთ სიბრტყის ორ წერტილის შორის უმოკლესი მანძილი.

ამოხსნა:

ბრტყელი წირის რკალის ელემენტის სიგრძე უდრის $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$, ხოლო 1 და 2 წერტილების შემაერთებელი ბრტყელი წირის სრული სიგრძეა

$$l = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ამრიგად l უნდა იყოს მინიმალური, რათა მანძილი იყოს უმოკლესი. მივიღოთ ექსტრემუმის შემთხვევაში ამოცანაზე, რომელშიც

$$f(y, y'; x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

უნდა შევადგინოთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება, რისთვისაც გამოვთვალოთ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ამრიგად, ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

ანუ

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c = \text{const.}$$

აშკარაა, რომ ამ ტოლობას ადგილი მხოლოდ მაშინ ექნება, თუ y' იქნება მუდმივი

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \equiv a = \text{const.}$$

ამ განტოლების ამონახსნია მრუდი:

$$y = y(x) = ax + b,$$

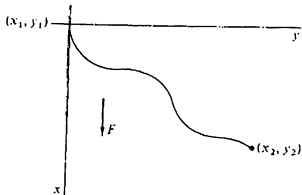
სადაც b ინტეგრების ახალი მუდმივია.

მივიღოთ, რომ საძიებელი მრუდი ყოფილა წრფე. ინტეგრაციის მუდმივები a და b განისაზღვრებიან იმ პირობიდან, რომ წრფემ უნდა გაიაროს მოცემულ ორ წერტილზე, (x_1, y_1) და (x_2, y_2) .

მაგალითი 2. ბრაქისტოქრონის პრობლემა

ესა ვარიაციული აღრიცხვის ერთ-ერთი კლასიკური პრობლემა.

უნდა მოიძებნოს $y(x)$ წირი O წერტილსა და რაღაც (x_1, y_1) წერტილს შორის ისეთი, რომ ნაწილაკი, იწყებს რა O წერტილში უძრავობის მდგომარეობიდან, მოძრაობს ერთგვაროვანი გრავიტაციული ველის გავლენით (წინააღმდეგობის გარეშე), უნდა მიაღწიოს (x_2, y_2) წერტილს (ნახ. 20) მინიმალურ დროში (ე.ი. გრავიტაციული ძალის გავლენით სხეული ხახუნის გარეშე “ცურავს” რაღაცა წირზე).



ნახაზი 20

სიჩქარე ადვილად მოიძებნება ენერგიის შენახვის კანონიდან

$$\frac{mv^2}{2} = mgx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gx}$$

საძიებელი დროა

$$t = \int_0^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} dx$$

ამრიგად, ვარიაციულ-ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ახლა არის

$$f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}$$

რომელიც y -ს არ შეიცავს ცხადად. ამიტომ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება იქნება

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

ანუ

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx}(1+y'^2)} = c = \text{const.}$$

გადავწეროთ ასე

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \quad \Rightarrow \quad y = \int \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} dx$$

ამოსახსნელად მოსახერხებელია შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad a \equiv \frac{1}{4gc^2}$$

მიიღება

$$y = \int a(1 - \cos\theta) d\theta$$

ეს ინტეგრალი ცხადად აიღება და

$$y = a(\theta - \sin\theta)$$

ინტეგრაციის მუდმივა 0-ის ტოლია, რადგან ნაწილაკი მოძრაობას იწყებს სათავედან.

მივიღოთ ციკლოიდას პარამეტრული განტოლება.

მაგალითი 3. მოექმბნოთ უმოკლესი წირი ორ მოცემულ წერტილს შორის r რადიუსის სფეროს ორგანზომილებიან ზედაპირზე.

ამოხსნა:

გამოვიყენოთ სფერული (θ, ϕ) ცვლადები. სიგრძის დიფერენციალური ელემენტია

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

ანუ

$$ds = \pm r \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2} d\theta$$

ავირჩიოთ ფესვის წინ ნიშანი ისე, რომ s -ის ყოველი ცვლილება ds იყოს დადებითი. მაშინ წირის სიგრძეა

$$s = r \int_a^{\theta} \sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad \phi' \equiv \frac{d\phi}{d\theta}$$

მივიღოთ ფუნქციონალის სტანდარტული სახე, საიდანაც გვაქვს:

$$f = \sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta},$$

რაც ცხადად არ არის დამოკიდებული ϕ -ზე, ამიტომ ამ ცვლადის მიმართ ეილერ-ლავრანჟის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi'} = \frac{\phi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} = c = \text{const.}$$

ამოხსნათ ეს თანაფარდობა ϕ' -ისათვის და გამოვთვალოთ

$$\phi' = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{c}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - c^2}},$$

საიდანაც

$$\phi = \int \frac{cd\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - c^2}} = \arccos \frac{c \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1 - c^2}} + \phi_0$$

ანუ

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \operatorname{ctg} \theta,$$

სადაც ϕ_0 არის ინტეგრების მუდმივა.

მიღებული შედეგი უკეთ რომ აღვიქვათ, დავუბრუნდეთ დეკარტეს კოორდინატებს. ზოგიერთი მარტივი ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} z = 0.$$

ეს კი არის სათავეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. ეს სიბრტყე გადაკვეთს სფეროს დიდ წრეწირზე, რომელიც ამ მაგალითში არის გეოდეზიური.

მრავალი ცვლადის შემთხვევა

უნდა ვიპოვოთ ფუნქციები $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, რომლებიც ექსტრემალურ მნიშვნელობას მიანიჭებენ ინტეგრალს:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'; x) dx \quad (III-2.8)$$

სადაც თითოეულ $y_i(x)$ ფუნქციას აქვს ფიქსირებული მნიშვნელობა ინტეგრაციის არის ბოლო წერტილებზე x_1, x_2 .

ავიზრით ფუნქციათა კლასები ერთი ცვლადის შემთხვევის ანალოგიურად:

$$y_1(\alpha, x) = y_1(0, x) + \alpha \eta_1(x) = y_1'(x) + \delta y_1(x),$$

$$y_2(\alpha, x) = y_2(0, x) + \alpha \eta_2(x) = y_2^*(x) + \delta y_2(x),$$

$$y_n(\alpha, x) = y_n(0, x) + \alpha \eta_n(x) = y_n^*(x) + \delta y_n(x),$$

სადაც $\eta_i(x_{1,2}) = 0$.

ადვილად დავინახავთ, რომ I -ინტეგრალი (III-2.8) გადაიქცევა მხოლოდ α -ს ფუნქციად $\eta_i(x)$ ფუნქციების მოცემული სისტემისათვის. ამიტომ წინა შემთხვევის ანალოგიურად გამოვიყვანო:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \eta_i'(x) \right] dx = 0$$

მეორე წევრში ნაწილობითი ინტეგრაციით ამ გამოსახულებას მივიყვანო სახეზე:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \eta_i(x) dx = 0$$

საიდანაც $\eta_i(x)$ ფუნქციების ნებისმიერობის გამო, ვიღებთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (III-2.9)$$

ეს განტოლებები არის სწორედ I -ინტეგრალის ექსტრემუმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

ახლა ნათელია, რომ ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით შეგვიძლია ლაგრანჟის განტოლებების გამოყვანა, რისთვისაც მოგვიწევს მივუყვნით მას მრავალი ცვლადის შემთხვევა.

ჰამილტონის ქმედების ინტეგრალს აქვს სახე:

$$S = \int_1^2 L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (\text{III-2.10})$$

ვხედავთ, რომ (IV-2.8)-დან ეს მიიღება ფორმალური შეცვლით

$$x \rightarrow t, \quad y_i \rightarrow q_i, \quad f(y_i, \dot{y}_i; x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i; t)$$

ამის გამო ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები გადადიან ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებებში:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III-2.11})$$

ახლა ეს განტოლებები მიღებულია ჰამილტონის პრინციპიდან:

კონფიგურაციულ სივრცეში რეალური წირი, რომელსაც მიყვება ჰოლონომური დინამიკური სისტემა ფიქსირებული t_1, t_2 ინტერვალის განმავლობაში არის ისეთი, რომელზეც ინტეგრალი

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

არის ექსტრემალური წირების იმ ვარიაციების მიმართ, რომლებიც ნულის ტოლია ინტერვალის ბოლო წერტილებში.

სიმეტრიების თვისებები. შანახვის (მულტიპოლის) კანონები

IV-1. განზოგადებული იმპულსები. ციკლური კოორდინატები

აქამდე ძირითადად დაკავებული ვიყავით მოძრაობის განტოლებების გამოყვანით და თითქმის არაფერი გეითქვამს მათი ამოხსნების მეთოდების შესახებ, რაც, საზოგადოდ, მათემატიკის ამოცანაა.

ჩვენ ვინახეთ, რომ M თავისუფლების ხარისხთა მქონე სისტემა აღიწერება დროის მიხედვით მეორე რიგის n დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით. თითოეული ასეთი განტოლების ამოხსნა მოითხოვს ორჯერად ინტეგრაციას, რაც გამოიწვევს სულ $2n$ ნებისმიერი მუდმივის გაჩენას. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში ეს მუდმივები უნდა განისაზღვრონ სასაზღვრო პირობებით, ე.ი. q , კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობებით (სულ n ცალი) და n განზოგადოებული q , სინქარების საწყისი მნიშვნელობებით.

ზოგჯერ კერძო შემთხვევაში ინტეგრაცია ელემენტარულ ფუნქციებში ადვილად ხერხდება. მაგრამ უძრავლეს შემთხვევაში განტოლებები არაინტეგრებადია ამ შინაარსით და საჭირო ხდება ინტეგრაციის მიახლოებითი რიცხვითი მეთოდების გამოყენება თანამედროვე კომპიუტერებზე.

საკვებით ბუნებრივია, რომ რიცხვითი მეთოდების გარდა განვითარებულია სისტემის მოძრაობის განსაზღვრის სხვადასხვა ეფექტური მეთოდები, რათა ყველა შემთხვევაში შევძლოთ საკმარისი ინფორმაციის მიღება ფიზიკური სურათის შესახებ. ამ ინფორმაციას ზოგჯერ უფრო მეტი მნიშვნელობა აქვს ფიზიკური სურათის დასადგენად, ვიდრე $q, (t)$ ფუნქციების ცოდნას.

ამიტომ, არსებითია შეგვეძლოს რაც შეიძლება მეტი ცოდნის მიღება მოცემული სისტემის მოძრაობის შესახებ განტოლებათა ინტეგრაციის გარეშე. ასეთ შემთხვევებში პირველ ხარისხოვანი მნიშვნელობა ენიჭება სიმეტრიის თვისებებს და მათგან გამომდინარე მოძრაობის ინტეგრალების მიღებას.

შეიძლება არსებობდნენ განზოგადებული კოორდინატებისა და განზოგადებული სინქარების ისეთი კომბინაციები (ფუნქციები), რომლებიც არ იცვლება დროის მიხედვით. მათ უწოდებენ მოძრაობის განტოლებების პირველ ინტეგრალებს. ესაა შემდეგი სახის თანაფარდობები:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = const. \quad (IV-1.1)$$

ეს თანაფარდობები თვითონ წარმოადგენენ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს. მათ გარკვეული ინტერესი აქვთ, რადგან სისტემის მოძრაობასუ ზოგიერთ ფიზიკურ მონაცემს შეიცავენ.

განვიხილოთ ჯერ კონსერვატიული სისტემა (პოტენციალი მარტო მდებარეობს და მოკიდებული). გამოვიყენოთ დეკარტეს კოორდინატები. გამოვთვალოთ შემდეგი სიდიდე:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = m_i \dot{x}_i = p_{xi}$$

სადაც p_{xi} არის ჩვეულებრივი მექანიკური იმპულსის x კომპონენტი.

ამ თანაფარდობაზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვაზოგადოთ იმპულსის ცნება:

განზოგადებული იმპულსი ეწოდება სიდიდეს

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (IV-1.2)$$

ამრიგად, ყოველ q , კოორდინატას შეესაბამება განზოგადებული იმპულსი p_i . ხშირად მას კანონიკურ იმპულსსაც უწოდებენ.

როცა q , არ არის დეკარტეს კოორდინატა, მაშინ p_i -ს, საზოგადოდ, არ ექნება ჩვეულებრივი იმპულსის განზომილება. გარდა ამისა, როცა პოტენციალი დამოკიდებულია სინქარესზე, q , დეკარტეს კოორდინატაც რომ იყოს, განზოგადებული იმპულსი არ დაემთხვევა ჩვეულებრივ მექანიკურ იმპულსს. ასეა, მაგალითად, ზემოთ განხილულ ელექტრომაგნიტურ ველში ნაწილაკის მოძრაობის შემთხვევაში, როცა

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 - \sum_{i=1}^N Q_i \phi(\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{c} \dot{r}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i)$$

ამ გამოსახულებაში, ცხადია, Q_i არის i -ური ნაწილაკის ელექტრული მუხტი. ნათელია, რომ

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{1}{c} Q_i A_x, \quad (IV-1.3)$$

ე.ი. მექანიკურ იმპულსს დაემატა წევრი.

თუ სისტემის ლაგრანჟიანი არ შეიცავს რომელიმე კოორდინატას (ამ დროს ის შეიძლება შეიცავდეს შესაბამის სინქარეს q_i), მაშინ ამ კოორდინატას უწოდებენ ციკლურს ან იგნორირებადს. ასეთი კოორდინატისთვის ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

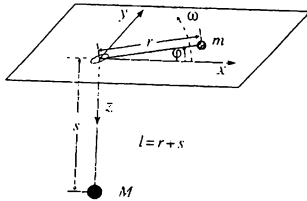
ანუ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const. \quad (IV-1.4)$$

ამრიგად, ციკლური q , კოორდინატის სათანადო განზოგადებული იმპულსი p , არის მუდმივი.

(IV-1.4) ტოლობა არის (IV-1.1) ტიპის პირველი ინტეგრალი და შეიძლება გამოიყენოს ციკლური კოორდინატის ფორმალური გამორიცხვისათვის. ასეთი გამორიცხვის შემდეგ ამოცანა დაიყვანება ერთი ნაკლები ცვლადის შემცველი მოძრაობის განტოლების შესწავლაზე.

ლაგრანჟის ფორმალისში იგნორირებადი კოორდინატის კონცეფციის უკეთ გაგებისათვის განვიხილოთ ერთი მაგალითი, რომლის დანადგარი ნაჩვენებია ნ.ხ. 21-სე.



ნახაზი 21

მაგალითი:

ორი მასა m და M დაკავშირებულია ერთმანეთთან $l = r + s$ სრული სიგრძის მქონე ძაფით, რომლის მასა უგულებელვყოთ. m მასას შეუძლია ბრუნვა სიბრტყეში ძაფთან ერთად ცვლადი პარციალური სიგრძით r . სიბრტყეში ბრუნვის ω კუთხური სიჩქარის სიდიდესე დამოკიდებულებით ძაფს შეუძლია სრიალი ზევით და ქვევით. ამიტომ M მასა მოძრაობს მხოლოდ z -ღერძის გასწვრივ. სისტემის დამახასიათებელი ბმები არიან პოლონომური და სკლერონომული. სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. მათი შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატები ϕ და s ცალსახად ახასიათებენ სისტემის მოძრაობას.

$$x = r \cos \phi = (l - s) \cos \phi,$$

გვაქვს

$$y = r \sin \phi = (l - s) \sin \phi$$

სისტემის კინეტიკური ენერჯისთვის ეპოულვობთ

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} (l - s) \right)^2 + \frac{1}{2} (l - s)^2 m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{s}^2 \\ &= \frac{1}{2} (m + M) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} (l - s)^2 m \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

ხოლო პოტენციალური ენერჯიაა $V = -Mgs$.

ლაგრანჟიანი

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m + M) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} (l - s)^2 m \dot{\phi}^2 + Mgs.$$

ახლა შევადგინოთ ლაგრანჟის განტოლებებისთვის საჭირო წევრები

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = (m + M) \dot{s}, \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -(l - s) m \dot{\phi}^2 + Mg$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left((l - s)^2 m \dot{\phi} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

აქ ϕ არის ციკლური ანუ იგნორირებადი კოორდინატა, რაკი მას ლაგრანჟიანი არ შეიცავს. ამიტომ ლაგრანჟის განტოლება მისთვის დაიყვანება შემდეგზე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left((l - s)^2 m \dot{\phi} \right) = 0$$

ან

$$(l - s)^2 m \dot{\phi} = \tilde{L} = \text{const.}$$

სადაც \tilde{L} არის მბრუნავი m მასის კუთხური მომენტი.

ასე, რომ მოძრაობის პირველი ინტეგრალი აქ ნიშნავს კუთხური მომენტის შენახვის კანონს.

ლაგრანჟის განტოლება მეორე ცვლადისათვის ასე გამოიყურება

$$(m + M)\dot{\varphi} + (l - s)m\dot{\phi}^2 - Mg = 0$$

ან $\dot{\varphi}$ -ზე გამრავლების შემდეგ,

$$(m + M)\dot{\varphi}^2 + \frac{\tilde{L}^2 \dot{\varphi}}{(l - s)^3 m} - Mg\dot{\varphi} = 0,$$

ეს განტოლება შეგვიძლია უცვლელ ვაინტეგრატოთ და ვიპოვოთ მოძრაობის კიდევ ერთი პირველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2}(m + M)\dot{\varphi}^2 + \frac{\tilde{L}^2}{2(l - s)^2 m} - Mgs = \text{const} = T + V = E$$

ანუ სისტემის სრული ენერგია ინახება. ეს სისტემა იქნება წონასწორობის მდგომარეობაში, როცა აჩქარება ნულის ტოლია, $\dot{\varphi} = 0$.

$$0 = \dot{\varphi} = \frac{1}{m + M} \left[Mg - (l - s)m \left(\frac{\tilde{L}}{(l - s)^2 m} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{m + M} \left[Mg - \frac{\tilde{L}^2}{(l - s)^3 m} \right]$$

შედგვი გვეუბნება, რომ φ უნდა დარჩეს მუდმივი. ფიქსირებული s_0 მანძილისათვის წონასწორობა წარმოიქმნება გარკვეული კუთხური მომენტისათვის $\tilde{L} = \tilde{L}_0 = \sqrt{mMg(l - s_0)^3}$.

როცა $\tilde{L} > \tilde{L}_0$, მთელი სისტემა სრიალებს ზევით; როცა $\tilde{L} < \tilde{L}_0$, სისტემა სრიალებს ქვევით. როცა გვაქვს ტოლობა, $\tilde{L} = \tilde{L}_0$, სისტემა წონასწორობაშია. ძალიან კერძო შემთხვევაში, როცა $\tilde{L} = 0$, ე.ი. ($\phi = 0$), აღარ გვაქვს ბრუნვა სიბრტყეში, უბრალოდ გვრჩება ვარდნა M მასისა.

* ციკლური კოორდინატების განცალკევებასთან დაკავშირებით საინტერესოა რაუსის მეთოდი, რომელიც ლაგრანჟიანის ისეთი მოდფიკაციაა, რომლის დროსაც ქრება ციკლური კოორდინატების სათანადო სინქარების ფუნქციები და მათ ნაცვლად შემოდინან სათანადო განზოგადებული იმპულსები.

IV-2. რაუსის ფუნქცია და რაუსის განტოლება

რაუსის მეთოდით ლაგრანჟის განტოლებებიდან გამოირიცხება ციკლური კოორდინატები და გამოირიცხულ კოორდინატთა რაოდენობის ტოლფასად მცირდება დამოუკიდებელ განტოლებათა რაოდენობა.

თუ არც ერთი კოორდინატა არ არის ციკლური, მაშინ ლაგრანჟიანი ყველა მათგანის ფუნქციაა და ამ დროს გვაქვს n განტოლება

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

დაეყვით ახლა ცვლადები ორ ჯგუფად: ($j = 1, 2, \dots, r$) და ($i = r + 1, r + 2, \dots, n$).

ჯერჯერობით ეს დაყოფა სრულიად ნებისმიერია. პირველი r ($r \leq n$) წარმოებულისათვის შემოვიღოთ განზოგადებული იმპულსები:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.1)$$

მაშინ ლაგრანჯის განტოლებების საფუძველზე გვაქვს:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.2)$$

გამოეთვალთ ახლა ლაგრანჯის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dL = \sum_{j=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

რომელიც (IV-2.1,2) თანაფარდობების გამოყენებით ასე გადავწეროთ:

$$dL = \sum_{j=1}^r \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^r p_j d\dot{q}_j + \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

რადგან

$$\sum_{j=1}^r p_j d\dot{q}_j = d \sum_{j=1}^r p_j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^r \dot{q}_j dp_j,$$

გვექნება

$$d \left(\sum_{j=1}^r p_j \dot{q}_j - L \right) = - \sum_{j=1}^r \dot{p}_j dq_j - \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^r \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

შემოვიტანოთ ე.წ. რაუსის ფუნქცია

$$R = \sum_{j=1}^r p_j \dot{q}_j - L \quad (IV-2.3)$$

ეს ფუნქცია პრინციპში შეიძლება დამოკიდებული იყოს ყველა არგუმენტზე. მაშინ მისი სრული დიფერენციალისთვის ვწერთ:

$$dR = \sum_{j=1}^r \frac{\partial R}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial R}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^r \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \sum_{j=r+1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \sum_{j=1}^r \frac{\partial R}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

ამ უკანასკნელის შედარებით ზემოთ მოყვანილი ფრჩხილის დიფერენციალთან ვასკენით, რომ უნდა შესრულდეს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -p_j; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_m} = -\frac{\partial L}{\partial q_m}; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \quad (m = r+1, \dots, n) \quad (IV-2.5)$$

გარდა ამისა

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (IV-2.6)$$

ახლა გაავანალიზოთ მიღებული თანაფარდობები. პირობიდან

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

გამომდინარეობს, რომ რაუსის R ფუნქცია პირველ r განზოგადებულ სინქარულზე არ არის დამოკიდებული. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან რაუსის ფუნქციის განმარტება (IV-2.3) პრაქტიკულად არის ე.წ. ლეჟანდრის გარდაქმნა, რომელიც გამორიცხავს სინქარის ცვლადებზე დამოკიდებულებას (იხ. ქვემოთ). თუ ზემოთ მიღებულ თანაფარდობებს ლაგრანჯის განტოლებებში გაითვალისწინებთ, მიიღება შემდეგი განტოლებები რაუსის ფუნქციისათვის:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = r+1, r+2, \dots, n) \quad (IV-2.7)$$

და

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial R}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.8)$$

როგორც ვხედავთ, მოხერხდა განტოლებათა განცალკევა ცველადების ორი კრებულიათვის, რომელთა შემოყვანა იყო სავსებით ნებისმიერი. ახლა დავუბრუნდეთ ციკლური კოორდინატების ამოცანას და მეთოდი მისთვის გამოვიყენოთ.

ვთქვათ, პირველი r განზოგადებული კოორდინატა (q_1, q_2, \dots, q_r) არის ციკლური. მაშინ

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

ამიტომაც $\dot{p}_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, r)$

და

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const.} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

ამის შედეგად (IV-2.8) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.9)$$

ამრიგად რაუსის ფუნქციიდან განდევნილია დამოკიდებულება ციკლური კოორდინატების წარმოებულეებზე სათანადო განზოგადებული იმპულსების სასარგებლოდ:

$$R = R(q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n; \dot{q}_{r+1}, \dot{q}_{r+2}, \dots, \dot{q}_n; p_1, p_2, \dots, p_r; t)$$

ეს ნიშნავს, რომ ციკლური კოორდინატები და მათი წარმოებულები არ შედიან რაუსის ფუნქციაში. რაც შეეხება რაუსის განტოლებებს (IV-2.7), რომელთა სახეუმთხვევა ლაგრანჟის განტოლებებს, მათი რაოდენობა უკვე r -ით ნაკლებია და ამოსახსნელად გვრჩება $n-r$ განტოლება. ხოლო ციკლური კოორდინატები, (IV-2.9)-ის გამო, განისაზღვრებიან უბრალო ინტეგრებით:

$$q_j = \int \frac{\partial R}{\partial p_j} dt + c_j, \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (IV-2.10)$$

მაგალითი:

რაუსის მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მატერიალური წერტილის მოძრაობა გრავიტაციულ ველში. გამოვიყენოთ პოლარული კოორდინატები $q_1 = \phi, \quad q_2 = r$. რაჟი

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \quad \text{და} \quad V = -\frac{\alpha}{r}$$

ამიტომ

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

ვხედავთ, რომ ϕ ციკლური კოორდინატაა. ამიტომ

$$p_\phi \equiv p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p}{mr^2}$$

შევადგინოთ რაუსის ფუნქცია

$$R = p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r} = \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r}$$

უ.ი. მთლიანად განიდეგნა ციკლური ცვლადი ϕ და მისი წარმოებულნი $\dot{\phi}$.
ახლა რაუსის განტოლებების შესადგენად გეჭირდება სიდიდეები:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r}, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

შეეადგინოთ რაუსის განტოლება (ამ შემთხვევაში, ერთი)

$$\frac{d}{dt}(-m\dot{r}) + \frac{p^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

ანუ საბოლოოდ

$$m\ddot{r} - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r} = 0 \quad (*)$$

ესაა განტოლება $r = r(t)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის.

რადგან $\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{p}{mr^2}$, გვაქვს

$$\phi = \int \frac{p}{mr^2} dt,$$

სადაც r -ის ნაკველად უნდა ჩაისვას (*) განტოლების ამონახსნი.

IV-3. სივრცე-დროითი სიმეტრიები და შენახვადი ფიზიკური სიდიდეები

ა) იმპულსი

იმპულსის შენახვის კანონი წარმოიქმნება სივრცის ერთგვაროვნებასთან დაკავშირებით.

სივრცის ერთგვაროვნება ნიშნავს, რომ სივრცეში ყველა წერტილი აბსოლუტურად ტოლფასია. ათელის სისტემის სათავე შეიძლება ნებისმიერ წერტილში მოვითავსოთ და, ამიტომ, ჩაკეტილი სისტემის თვისებები არ იცვლება სისტემის, როგორც მთლიანის, პარალელური გადატანის (ტრანსლაციის) დროს.

ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე $\vec{\epsilon}$ ვექტორზე ტრანსლაცია (წანაცვლება) და შოვითხოვოთ, რომ ამ გარდაქმნისას სისტემის ლაგრანჟიანი არ იცვლებოდეს. გარდაქმნას აქვს სახე (განზოგადებულ კოორდინატებზე)

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\epsilon}, \quad \dot{\vec{r}} = \text{const.}$$

$$\delta \vec{r} = \vec{\epsilon}$$

განვიხილოთ ლაგრანჟიანის ვარიაცია ამ გარდაქმნის დროს

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

$\vec{\epsilon}$ -ის ნებისმიერობის გამო $\delta L = 0$ პირობა (ინვარიანტულობა) ეკვივალენტურია პირობისა

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

ლაგრანჟის განტოლებების თანახმად ეს ნიშნავს

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$$

რაც გვეუბნება, რომ ჩაკეტილი სისტემისათვის შემადგენელი ნაწილაკების იმპულსების ჯამი არის მუდმივი:

$$\bar{P} \equiv \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \text{const.} \quad (\text{IV-3.1})$$

ე.ი. შენახვადი სიდიდე – კანონიკური იმპულსი შეგვიძლია ავაგოთ ინვარიანტულობიდან. ამავე დროს ნათელია იმპულსის ადითიურობის თვისება: სისტემის სრული იმპულსი უდრის ცალკეული ნაწილაკების იმპულსების ჯამს მიუხედავად ურთიერთქმედებებისა, რომელიც მათ შორის შეიძლება არსებობდეს.

შემოტანილ სიდიდეს რომ მართლაც იმპულსის შინაარსი აქვს, შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ. განვიხილოთ რაიმე სისტემა და შემოვიღოთ მისთვის განზოგადებული q_j , კოორდინატები ისე, რომ მისი dq_j დიფერენციალი ტოლი იყოს განსახილვად სისტემის, როგორც მთლიანის, გადაადგილებისა მოცემული მიმართულებით.

ასეთი კოორდინატის მაგალითია სისტემის მასათა ცენტრის დეკარტეს კოორდინატა. მაშინ ნათელია, რომ q_j არ შევა T კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულებაში, რადგან სისტემის, როგორც მთლიანის წანაცვლება გაველნას არ ახდენს მისი წერტილების სინქარეზზე. ამიტომ $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$. ამის გარდა,

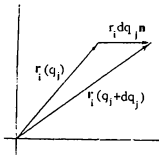
სისტემის პოტენციალური ენერჯიაც შეგვიძლია ჩავთვალოთ სინქარეზე დამოუკიდებლად. მაშინ ამ კოორდინატისათვის ლაგრანჯის განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{p}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j$$

ვანენით ახლა, რომ ეს განტოლება გამოხატავს თეორემას იმპულსის შესახებ, ე.ი. Q_j არის q_j -ის მიმართულებით ყველა ძალების ტოლქმედი, ხოლო p_j – ამავე მიმართულებით სისტემის იმპულსის მდგენელი.

$$\text{როგორც ვიცით,} \quad Q_j = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$$

მაგრამ, რადგან ჩვენ შემთხვევაში dq_j არის სისტემის გადაადგილება რაიმე ღერძის გასწვრივ, $\bar{r}_i(q_j)$ და $\bar{r}_i(q_j + dq_j)$ ვექტორები განლაგებული იქნებიან ნახაზზე გამოხატული წესით. ამიტომ \bar{r}_i -ის დიფერენცირებისას q_j -ით მივიღებთ



ნახაზი 22

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\bar{r}_i(q_j + dq_j) - \bar{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j}{dq_j} \bar{n} = \bar{n}$$

სადაც \bar{n} არის ერთეულოვანი ვექტორი dq , წანაცვლების მიმართულებით. ამრიგად

$$Q_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \bar{n} = \bar{F} \cdot \bar{n}$$

ანუ Q_i ყოფილა სრული \bar{F} ძალის მდგენელი \bar{n} მიმართულებაზე.

ახლა განვიხილოთ მტკიცების მეორე ნაწილი. კინეტიკურ ენერგიას აქვს სახე

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2$$

ამიტომ q_i კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი ასე ჩაიწერება

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_i} = \bar{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ დებულების მეორე ნაწილიც - p_i არის სრული იმპულსის მდგენელი \bar{n} მიმართულებაზე.

დაეუშვათ ახლა, რომ ჩვენ მიერ განხილული q_i კოორდინატა არის ციკლური. მაშინ ის არ უნდა შევიდეს პოტენციალურ ენერგიაში და

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} \equiv Q_i = 0$$

ამ დროს მივიღებთ ჩვეულებრივ თეორემას იმპულსის შენახვის შესახებ -

თუ სრული \bar{F} ძალის ერთ-ერთი მდგენელი უდრის ნულს, მაშინ იმპულსის სათანადო მდგენელი იქნება მუდმივი.

ბ) იმპულსის მომენტი

სივრცის იზოტროპულობას უკავშირდება იმპულსის მომენტის შენახვის თეორემა. იზოტროპულობა ნიშნავს, რომ ჩაკეტვითი სისტემის მექანიკური თვისებები არ იცვლება სისტემის, როგორც მთლიანის, ნებისმიერი მობრუნების დროს.

ამ შემთხვევაში ციკლური კოორდინატა q_i ისეთი უნდა იყოს, რომ dq_i შეესაბამებოდეს სისტემის ბრუნვას რაიმე ღერძის ირგვლივ. მაშინ თანაფარდობა $p_i = const$ გამოხატავს თეორემას კინეტიკური მომენტის შენახვის შესახებ.

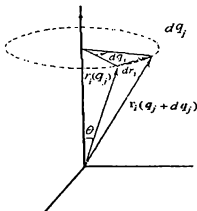
აქაც თუ გავიმეორებთ ა) პუნქტში ნათქვამს: q_i კოორდინატა არ შეიძლება შედიოდეს კინეტიკურ ენერგიაში. რადგან სისტემის მთლიანი მობრუნება არ მოახდენს გავლენას ნაწილაკთა სიჩქარეების სიდიდეზე, ანუ $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$. ასევე

$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$. ამიტომ ისევე ექნება ადგილი ლაგრანჟის განტოლებებს შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \equiv \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

მაგრამ რადგან ახლა q_j არის კუთხური ცვლადი, უნდა ვანვენოთ, რომ განზოგადებული ძალა Q_j იქნება ყველა ძალების ჯამური მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ხოლო p_j - სრული კინეტიკური მომენტი იმავე ღერძის მიმართ.

განზოგადებულ ძალაში შემავალ $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ ვექტორს ახლა სხვა გეომეტრიული შინაარსი აქვს. q_j -ის ცვლილება ახლა ნიშნავს \vec{r}_i ვექტორის უსასრულოდ მცირე მობრუნებას მისი სიგრძის შეუცვლელად. ამიტომ გვექნება (ნახ. 23)



ნახაზი 23

$$|d\vec{r}_i| = r_i \sin \theta dq_j \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \sin \theta$$

ამასთან ამ ვექტორის მიმართულება იქნება \vec{r}_i და \vec{n} ვექტორების პერპენდიკულარული. ამის გათვალისწინებით ვწერთ $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n} \times \vec{r}_i$. მაშინ

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{n} \times \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{n} \cdot \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{n} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{N}_i = \vec{n} \cdot \vec{N},$$

რაც ასაბუთებს ჩვენი მტკიცების პირველ ნაწილს.

ზუსტად ანალოგიურად გარდაეკმინით p_j სიდიდესაც:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \vec{n} \cdot \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{n} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

ამრიგად, თუ კუთხური კოორდინატა q_j იქნება ციკლური, მაშინ განზოგადებული ძალა Q_j (ყველა მოქმედი ძალის მომენტი \vec{n} -ღერძის მიმართ) ნულის ტოლი იქნება.

სისტემის კინეტიკური მომენტი \vec{n} -ღერძის მიმართ ამ დროს მუდმივი იქნება, ე.ი. დავამტკიცეთ თეორემა კინეტიკური მომენტის შესახებ, მივიღეთ რა ციკლური კოორდინატებისათვის დამტკიცებული შენახვის ზოგადი თეორემა დან.

აშკარაა, რომ ლაგრანჟიანის ინვარიანტულობიდან მობრუნებების მიმართ უნდა გამოიყვანებოდეს სრული კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონი დეკარტეს კოორდინატებში.

მართლაც, მობრუნებისას ლაგრანჟიანის ვარიაციაა:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{p}_i} \delta \vec{p}_i \right) = 0 \quad (\text{ინვარიანტულობა})$$

აქ, ცხადია, $\vec{p}_i = \dot{\vec{r}}_i$.

შეეცვალოს $\frac{\partial L}{\partial \vec{p}_i} = \vec{p}_i$, $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \dot{\vec{p}}_i$. მაშინ

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{p}_i + \vec{p}_i \cdot \delta \dot{\vec{p}}_i \right) = 0$$

სადაც გამოყენებულია ვექტორის ცვლილების წესი მობრუნებისას

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{p}_i \times \vec{r}_i, \quad \delta \vec{p}_i = \delta \dot{\vec{p}}_i \times \vec{p}_i$$

წინა ფორმულაში მოვახდინოთ ციკლური გადასმა

$$\delta L = \delta \vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{p}_i \times \vec{p}_i) = \delta \vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0$$

ანუ $\delta \vec{\varphi}$ -ის ნებისმიერობის გამო

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}$$

ამრიგად, იმპულსის და კინეტიკური მომენტის შენახვის შესახებ თეორემები მჭიდროდ უკავშირდება სისტემის სიმეტრიის თვისებებს.

ჩვენ ქვემოთ შესაძლებლობა გვექნება დავამტკიცოთ ზოგადი თეორემა სისტემის სიმეტრიის თვისებებსა, ინვარიანტულობასა და შენახვის კანონებს შორის. ჯერჯერობით კი განვიხილოთ კიდევ ერთი შენახვის კანონი.

გ) თეორემა კონსერვატიული სისტემის სრული ენერჯის შენახვის შესახებ

ნაწილაკთა სისტემისათვის შემოვიღოთ დამატებითი შეზღუდვა: პოტენციალები დამოუკიდებელი იყვნენ დროზე ცხადად, მაშინ ლაგრანჟიანიც არ იქნება ცხადად დროზე დამოკიდებული.

ესაა ე.წ. დროის ერთგვაროვნების თვისება ანუ ინვარიანტულობა დროის ათვლის მომენტის შერჩევის მიმართ: $t \rightarrow t + t_0$.

როგორც ადრე ითქვა, ლაგრანჟიანისთვის ეს ნიშნავს

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

მაგრამ მაშინ $\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$,

ლაგრანჯის განტოლების გამოყენებით ამ ფორმულას ასე გადავწერთ

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

საიდანაც

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$$

და ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება არის მოძრაობის ინტეგრალი. აღვნიშნოთ ასე:

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (IV-3.2)$$

მივიღოთ, რომ H არის მოძრაობის განტოლების პირველი ინტეგრალი. შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ეს სიდიდე უკავშირდება სისტემის სრულ ენერგიას.

მართლაც, კონსერვატიული სისტემისათვის

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

ამიტომ (IV-3.2)-ში პირველი წევრია $\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

წინა მასალიდან ვიცით, რომ თუ ბმები დროზე დამოუკიდებელია, მაშინ განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულებიც არ შეიცავენ დროს. ამ შემთხვევაში სისტემის კინეტიკური ენერგია არის \dot{q}_i -ის კვადრატული ფუნქცია.

გავიხსენოთ ელდერის თეორემა - ყოველი ერთგვაროვანი $f(x)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f,$$

სადაც k არის f ფუნქციის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი. კინეტიკური ენერგიისათვის $k = 2$. ამიტომ

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

და

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V$$

ეს კი სისტემის სრული ენერგიაა. ამ თეორემის მიღებისას ძალთა კონსერვატიულობის გარდა უნდა მოვითხოვოთ ბმების დამოუკიდებლობა დროზე (ბმების სკლერონომულობა).

ლიტერატურაში მოძრაობის ამ ინტეგრალს ხშირად იაკობის ინტეგრალს უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე:

$$h = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

რადგან საზოგადოდ კინეტიკური ენერგია შეიძლება არ იყოს მხოლოდ კვადრატული ფუნქცია განზოგადებული სიქარეებისა:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

ამიტომ

$$h = T_2 - T_0 + V$$

იაკობის ინტეგრალს აქვს ენერგიის განზომილება. ამრიგად, თუ კონსერვატიული სისტემებისთვის განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულები (\bar{F}_i და q_i -ების დამაკავშირებელი გარდაქმნის განტოლებები) დროს ცხადად შეიცავენ (ეს შესაძლებელია), იაკობის ინტეგრალი h არ დამოხვევა ენერგიას.

ბუნებრივს უწოდებენ სისტემებს, რომლებისთვისაც $T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, სა-

დაც ინერციის კოეფიციენტები m_{ij} დამოუკიდებელია დროზე. მხოლოდ ასეთი სისტემებისათვის იაკობის ინტეგრალი ემთხვევა სრულ ენერგიას.

ლაგრანჟიანის იზოქრონული ვარიაციისათვის მიღებული გეჰონდა (III-1.4) ფორმულა, როცა ნაგულისხმევი იყო აგრეთვე ნამდვილი მოძრაობა. ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის ეს ფორმულა ასე გამოვიყენოთ: ჩავთვალოთ, რომ ვარიაცია ეთანადება განზოგადებული კოორდინატების უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებს. სხვა სიტყვებით, ახალ საკოორდინატო სისტემაში გადასვლას უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებით, როგორცაა, მაგალითად, სისტემის სათავეს წანაცვლება, ღერძების მობრუნებები და ა.შ. ეს მცირე გარდაქმნები დავახასიათოთ სათანადო უწყვეტი პარამეტრით, α , რომელიც შეიძლება იყოს მობრუნების კუთხე ან სხვა გეომეტრიული სიდიდე. თუ უწყვეტი პარამეტრის ნულოვანი მნიშვნელობა ეთანადება იგივე გარდაქმნას, მის მახლობლობაში პირველი ვარიაცია შეგიძლია ასე ავიღოთ

$$\delta q_i = \left[\frac{\partial q_i(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \delta \alpha$$

ასეთი განმარტება არაერთხელ გამოვიყენებია ზემოთ.

(III-4) ფორმულის თანახმად ჰამილტონის ქმედების ცვლილება ტოლია

$$\delta S \equiv S(\alpha) - S(0) \approx \int_1 \frac{dL_\alpha}{dq_j(\alpha)} \delta \alpha dt = \int_1 \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial q_j(\alpha)} \frac{\partial q_j(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}_j(\alpha)} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha dt,$$

რომელიც მოძრაობის განტოლებების გამოყენებით ადვილად მიიყვანება შემდეგ სახესე

$$\delta S = \left[\left[\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}_j(\alpha)} \delta q_j \right]_{j=1}^n \right]_{\alpha=0} = \left[p_j(\alpha) \left[\frac{\partial q_j(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \right]_{j=1}^n \quad (IV-4.1)$$

დროის მიხედვით ინტეგრაცია აქაც ჩატარდა იმის გამო, რომ როგორც საწყისი, ასევე მისგან უსასრულოდ მცირედ განსხვავებული (გარდაქმნილი) ამონახსნები აკმაყოფილებენ ლაგრანჟის განტოლებებს ორ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემაში - ორივე ამონახსნი არის ერთდროივე დინამიკის აღწერა კონფიგურაციულ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ ქმედების ცვლილება, გამოწვეული უწყვეტი გარდაქმნის პარამეტრის ცვლილებით ფიქსირებულ მომენტში არის შემდეგი სიდიდეების სხვაობა

$$G = \left[p_j(\alpha) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}, \quad (IV-4.2)$$

გამოთვლილი დროის ორ განსხვავებულ მომენტში, t_1 და t_2 . ზედა ფორმულაში ლაგრანჟიანის ინდექსი მიუთითებდა მიკუთვნებაზე ამა თუ იმ საკოორდინატო სისტემისათვის.

ჩვენ ახლა მომზადებული გეაქვს ყველაფერი, რათა ჩამოვაყალიბოთ კავშირი სიმეტრიასა, ინვარიანტულობასა და შენახვის კანონებს შორის.

როგორც ცნობილია, ლაგრანჟიანი არის განზოგადებული კოორდინატებისა და სიჩქარეების სკალარული ფუნქცია ნებისმიერი წერტილოვანი გარდაქმნების მიმართ (ე.ი. გარდაქმნებისა, რომლებიც ახალ კოორდინატებს გამოსახავენ ძველი კოორდინატების მეშვეობით).

სკალარული ფუნქცია ნიშნავს, რომ ის იღებს ერთი და იმავე რიცხვით მნიშვნელობებს გარდაქმნის შედეგად დაკავშირებულ ორ სხვადასხვა წერტილში, ანუ $L(q, q', t) = L'(q', q', t)$.

რაც შეეხება ინვარიანტულობას, ეს კიდევ უფრო ზღუდავს შესაძლებლობებს: ეს ნიშნავს, რომ თვით ფუნქციები არ იცვლება, $L = L'$.

ამ ნაბიჯზე მოვიხილოთ მხოლოდ, რომ ინვარიანტული იყოს ქმედება.

ზემოთ მოყვანილი თანაფარდობების ძალით ქმედების ინვარიანტულობა გარდაქმნის პარამეტრის უსასრულოდ მცირე $\delta\alpha$ ვარიაციების დროს იძლევა მუდმივობას სიდიდისა

$$G = \left[p_j(\alpha) \frac{\delta q_j}{\delta \alpha} \right]_{\alpha=0} = const., \quad (IV-4.3)$$

რაც შენახვის კანონს წარმოადგენს!

ესაა ნაწილაკთა მექანიკაში კარგად ცნობილი ნიოტერის თეორემის შინაარსი და გამოხატავს იმ მჭიდრო კავშირს, რომელიც არსებობს სიმეტრიებსა, ინვარიანტულობასა და შენახვის კანონებს შორის, დინამიკური სიდიდე G ინახება სისტემის ნამდვილი ტრაექტორიების გასწვრივ კონფიგურაციულ სივრცეში, თუკი უწყვეტი უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები სისტემის ქმედებას ტოვებენ ინვარიანტულს.

ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული შენახვის კანონები არის ნიოტერის თეორემის კერძო გამოვლინება. მართლაც, გაეხსენოთ განხილული მაგალითები უკვე ნიოტერის თეორემის კუთხით:

1. თუ ლაგრანჟიანი ინვარიანტულია უსასრულოდ მცირე წანაცვლებების მიმართ რაიმე q , ღერძის გასწვრივ, $q \rightarrow q + \delta\alpha$, კონფიგურაციულ სივრცეში, რაც იგუევა, რომ L დამოუკიდებელია q , კოორდინატაზე, მაშინ $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ და შესაბამისი შენახვის კანონი უბრალოდ p_j , განზოგადებული იმპულსის შენახვას ნიშნავს. შესაბამისი კანონიკური p_j , იმპულსის შენახვა ეკვივალენტურ სივრცეში ამ შედეგის კერძო შემთხვევაა.

თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანი დეკარტეს კოორდინატებში

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

ინვარიანტულია კოორდინატა სიბრტყის გადატანის მიმართ, $x \rightarrow x' = x - \alpha$ და შესაბამისი იმპულსი $p = m\dot{x}$ ინახება. ამ კანონის საფუძველი გეომეტრიულია - ეკვივალური სივრცის ერთგვაროვნება: x -ღერძი ყველგან ერთნაირად გამოიყურება, რაც იგივეა ვთქვათ, რომ ეკვივალურ სივრცეში საკოორდინატო ღერძზე ყველა წერტილი ტოლფასოვანია, როცა თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობას ეხილავთ.

სიმეტრია გეომეტრიულია, ინვარიანტულობა არის ალგებრული ანუ ანალიზური - ობიექტის შესაბამისი ფუნქცია არის ინვარიანტული, ის არ იცვლება კოორდინატების გარდაქმნისას.

2. განვიხილოთ ახლა N -ნაწილაკოვანი სისტემის მყარი ბრუნვა ეკვივალურ სივრცეში. ზოგადობის დაურღვეველად შეგვიძლია გამოვიყენოთ დეკარტეს კოორდინატები და ვაბრუნოთ კოორდინატთა სისტემა, მაგალითად, z -ღერძის ორგველი ხაზის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით:

$$\begin{aligned}x_1(\theta) &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y_1(\theta) &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z_1(\theta) &= z\end{aligned}\quad (IV-4.4)$$

ამიტომ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებს, გამოთვლილს იგივეური გარდაქმნების მახლობლად, ექნებათ სახე

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= y_1 \delta \theta \\ \delta y_1 &= -x_1 \delta \theta \\ \delta z_1 &= 0\end{aligned}\quad (IV-4.5)$$

დეკარტეს კოორდინატებში, სისტემის კინეტიკური ენერჯიაა

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

ხოლო დეკარტეს კოორდინატების სათანადო იმპულსებია

$$p_{x_i} = m_i \dot{x}_i, \quad p_{y_i} = m_i \dot{y}_i, \quad p_{z_i} = m_i \dot{z}_i,$$

რომელთა ჩასმა ნიუტონის თეორემის შედეგში (IV-4.3), სადაც გამეორებული (მუნჯი) ინდექსებით იგულისხმება აჯამება, გვაძლევს, რომ

$$\sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i) = const. \quad (IV-4.6)$$

ამ თანაფარდობის მარცხენა მხარე არის N -ნაწილაკიანი სისტემის სრული კუთხური მომენტის z -მდგენელი, L_z . სხვა სიტყვებით, ლაგრანჟიანის ინვარიანტულობიდან ბრუნვების მიმართ მივიღეთ შენახვადი დინამიკური სიდიდე - კუთხური მომენტი. ამ შემთხვევაში კანონი ემყარება ცარიელი ევკლიდური სივრცის იზოტროპულობის თვისებას: სივრცე ერთნაირად გამოიყურება ყველა მიმართულებით.

ამ შედეგის უკეთ გააზრებისათვის შევხედოთ პრობლემას განსხვავებული კუთხიდანაც, სახელდობრ, ვუპასუხოთ კითხვას: რას ნიშნავს ლაგრანჟიანის ინვარიანტულობა ბრუნვების მიმართ? რაკი გვაქვს არწევის თავისუფლება, მობრუნების კუთხე θ ავირჩიოთ განზოგადებულ კოორდინატად კონფიგურაციულ სივრცეში, მაშინ

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \text{და} \quad \dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

ბრუნვების მიმართ ინვარიანტულობა ნიშნავს, რომ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, ამიტომ ლაგრანჟის განტოლებების თანახმად შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი p_θ კონსტანტია. გამოვთვალოთ ახლა p_θ დეკარტეს კოორდინატებში:

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \theta} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \theta} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \theta} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i(\theta)}{\partial \theta} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i(\theta)}{\partial \theta} \right)$$

ხოლო ბრუნვების უსასრულოდ მცირე წარმოდგენის (IV-4.5) გამოყენებით დაეასკენით, რომ

$$p_\theta = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i) = L_z \quad (IV-4.7)$$

კონფიგურაციულ სივრცეში $q_i \rightarrow q_i'$ გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულობა, როგორც არაერთხელ ითქვა, ნიშნავს ლაგრანჟიანის უცვლელობას $L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t)$. ამის გამო ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებებიც უცვლელია. ამის უმარტივეს მაგალითად ჩვენ განვიხილეთ თავისუფალი ნაწილაკი

დეკარტეს სხვადასხვა სისტემაში: ნებისმიერ მათგანში მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ერთნაირია $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0$. ესაა ნიუტონის ფარდობითობის

პრინციპი და აგრეთვე გამოხატავს აბსოლუტური ევკლიდური სივრცის სიმეტრიას, სახელდობრ, მის ინდეფერენტულობას სიჩქარის (და არა აჩქარების) მიმართ. ყველაფერს ერთად თუ შევაჯამებთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მყარი გადატანების (ტრანსლაციების), მყარი ბრუნვების, დროის ტრანსლაციების და ინერციულ სისტემებს შორის გარდაქმნების ერთობლიობა ქმნის ინვარიანტულობას, რომელსაც გალილეის ინვარიანტულობა ჰქვია.

კონფიგურაციულ სივრცეში ლაგრანჟის განტოლებები არის ვექტორული განტოლებები. გარდაქმნების კლასი, რომელიც ვექტორულ განტოლებებს ტოვებს უცვლელად, განსაზღვრავს კოვარიანტულობას ამ გარდაქმნების მიმართ. ამის საპირისპიროდ, გარდაქმნათა გარკვეული კლასი, რომელიც არ ცვლის სკალარულ ფუნქციებს, განსაზღვრავს მათ მიმართ ინვარიანტულობას. ვაჩვენებთ, რომ ლაგრანჟიანის ინვარიანტულობა არის გარკვეული შენახვის კანონების საფუძველი. ამ ინვარიანტულობას არაფერი საერთო არ აქვს ლაგრანჟის განტოლებების ზოგად კოვარიანტულობასთან. გარდაქმნების სპეციალური კლასი, რომელიც ლაგრანჟიანის ტოვებს ინვარიანტულს, წარმოადგენს სიმეტრიის ოპერაციებს ამ ლაგრანჟიანით განსაზღვრულ ფიზიკურ სისტემაზე. მათემატიკის კლასიკოსთა (კლეინი, ლი და სხვ.) განმარტება გეომეტრიისა გარდაქმნების ჯგუფით, რომელიც მოცემული სივრცის გეომეტრიულ ობიექტებს ტოვებს ინვარიანტულს, სულისკვეთებით ძალზე ახლოსაა ნიოტერის თეორემასთან. (ემი ნიოტერი, გერმანელი მათემატიკოსი ქალი, 1882 - 1935).

ქვემოთ, შემდგომ თავებში კიდევ შეხვედებით სიმეტრიისა და ინვარიანტულობის საკითხებს.

შენახვის კანონებისა და დინამიკის ძირითადი განტოლებების გამოყენება მოძრაობის განტოლებათა ინტეგრაციისათვის

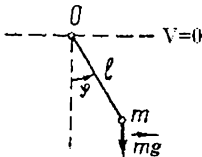
(V-1). ერთგანზომილებიანი მოძრაობა

მექანიკაში (ფიზიკაში) ასე უწოდებენ ნებისმიერი კონსერვატიული სისტემის მოძრაობას ერთი თავისუფლების ხარისხით, როცა მისი სრული ენერგია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(x) = const \quad (V-1.1)$$

სადაც $V(x)$ არის სისტემის პოტენციალური ენერგია გარეშე ველში, ხოლო x — ადწერს ამ სისტემის მდებარეობას სივრცეში. იგი ნებისმიერი პარამეტრია.

ერთგანზომილებიანი მოძრაობის მაგალითებად შეიძლება მოვიყვანოთ m მასის მატერიალური წერტილის წრფივი მოძრაობა $V(x)$ პოტენციალური ენერგიის ველში. ერთგანზომილებიანად შეიძლება ჩაითვალოს აგრეთვე ბრტყელი მათემატიკური საქანის (ან ფიზიკური საქანის) მოძრაობა m მასის ნაწილაკისა დედამიწის მიზიდულობის ერთგვაროვან ველში (ნახ. 24)



ნახაზი 24

ამ უკანასკნელ ამოცანაში სისტემის სრული მექანიკური ენერგია ასე წარმოიდგინება:

$$E = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} - mgl \cos \phi$$

რაც (V-1.1) — ის ანალოგიურად გამოიყურება.

ამრიგად, საზოგადოდ x და m (V-1.1) გამოსახულებაში აუცილებლად არ იგულისხმება რაიმე ნაწილაკის დეკარტის კოორდინატა და მასა. დადებით m პარამეტრს დავარქმევთ სისტემის კინემატიკურ პარამეტრს (მაგალითად, ბრტყელი მათემატიკური საქანისათვის ამ პარამეტრის როლში გამოდის ინერციის მომენტი ml^2).

ერთგანზომილებიანი ამოცანის ანალიზური ამოხსნისათვის არ არის აუცილებელი მიემართოთ სათანადო მოძრაობის განტოლებას, არამედ შესაძლებელია დავეყრდნოთ უშუალოდ მოძრაობის პირველ ინტეგრალს (V-1.1). მართლაც, შენახვის ამ კანონს შეგვიძლია შევხედოთ როგორც პირველი რიგის

დიფერენციალურ განტოლებას და მასში dx/dt სინქარის ამოხსნისა და ცვლადთა განცვლადების შემდეგ მივიღოთ:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}, \quad (V-1.2)$$

საიდანაც ინტეგრაციით მიიღება

$$t + t_0 = F(x, E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}. \quad (V-1.3)$$

შეენიშნოთ, რომ ამ ფორმულებში საზოგადოდ ინტეგრალის წინ უნდა იყოს ორი ნიშანი “±”. ჩვენ დავტოვეთ მარტო ერთი – დადებითი. ნიშნის არჩევა ხდება საწყისი სინქარის მიმართულების მიხედვით, $\dot{x} = \dot{x}(0) > 0$ ან < 0 .

ესაა ამოცანის ზოგადი ამონახსნი, რომელშიც ნებისმიერი მუდმივების როლს ასრულებენ სრული E ენერგია და ინტეგრაციის t_0 მუდმივა. ეს ორი რიცხვი შეგვიძლია გამოვსახოთ საწყისი მონაცემებით $x_0 = x(0)$ და $v_0 = \dot{x}(0)$, ანუ საწყისი კოორდინატით და საწყისი სინქარით. მართლაც, გვაქვს (თუ ზემო თანაფარდობებს საწყის მომენტში განვიხილავთ):

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(x_0) \quad (V-1.4)$$

$$t_0 = F(x_0, E)$$

ასეთია ერთგანზომილებიანი მოძრაობის ზოგადი ამონახსნი, რომელიც შეიცავს სრულ (ამომწურავ) ინფორმაციას გარეშე $V(x)$ ველში სისტემის ყოფაქცევის შესახებ. ამავე დროს უნდა აღვნიშნოთ, რომ ენერგიის შენახვის კანონი თავისთავად უკვე გეაძლევს საშუალებას გამოვასწაროთ სისტემის ყოფაქცევის თავისებურებანი მოცემულ გარეშე $V(x)$ ველში ზოგადი ამოხსნის გამოყენების გარეშე. ასეთი თვისებრივი გამოკვლევა ხანდახან მეტად მიზანშეწონილია და საკმაოდ ბევრ ფიზიკურ ინფორმაციას იძლევა.

მოძრაობის თვისებრივი გამოკვლევისას ჩვეულებრივ გვაინტერესებს შემდეგი საკითხების ჯგუფი:

1. E სრული ენერგიის როგორი მნიშვნელობებისათვის პრინციპში შესაძლებელია მოძრაობა $V(x)$ ველში?
2. დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობათა როგორ არეშია შესაძლებელი მოძრაობა? ასეთ არეებს უწოდებენ კლასიკურად დასაშვებ არეებს (ე.ი. ისეთ არეებს, რომლებშიც დასაშვებია მოძრაობა კლასიკური მექანიკის კანონების მოხედვით).
3. როგორია მოძრაობის ხასიათი თითოეულ დასაშვებ არეში?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად ენერგიის შენახვის კანონი გადავწეროთ ასე:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - V(x) \geq 0,$$

რადგან სისტემის კინეტიკური ენერგია არსებითად დადებითი სიდიდეა.

ამრიგად, მოცემული E სრული ენერგიისას კლასიკურად დასაშვებ არეებში იზღუდება პოტენციალური ენერგია

$$V(x) \leq E \quad (V-1.5)$$

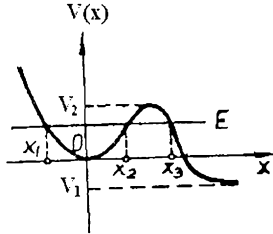
წერტილები, რომლებშიც პოტენციალური ენერგია უდრის სრულ ენერგიას

$$V(x) = E$$

იწოდებიან სისტემის გაჩერების (ზოგჯერ მობრუნების) წერტილებად. ამ წერტილებში სისტემის \dot{x} სინქარე ხდება ნულის ტოლი და იცვლის თავის ნიშანს. ეს წერტილები არის სასაღერები, რომლებიც განაცალებენ ერთ-

მანეთისგან კლასიკურად დასაშვებ და აკრძალულ არეებს (რომლებშიც (V-1.5) პირობა არ სრულდება).

ნათელია, რომ ერთგანზომილებიანი მოძრაობა სრული E ენერჯიის მარტო იმ მნიშვნელობებისთვისაა შესაძლებელი, რომლებსთვისაც თუნდაც ერთი დასაშვები არე იარსებებს, რომელიც არ დაიყვანება წერტილზე. ნახ. 25-ზე მოცემულია $V(x)$ პოტენციალური ენერჯიის სანიშნო მრუდი. იმავე ნახაზზე სრული ენერჯიის სხვადასხვა მნიშვნელობები შეიძლება გამოვსახოთ აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფეებით.



ნახაზი 25.

აშკარაა, რომ მოცემული სისტემის მოძრაობა შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $E > V_1$, რადგან ამ პირობებში მიიღება თუნდაც ერთი კლასიკურად დასაშვები არე.

განივილით ახლა E სრული ენერჯიის რაიმე მნიშვნელობა, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და $V_2 \equiv V_{\max}$ შორის. მოცემული E - სივრცის მექანიკურ სისტემას უწინდება 2 დასაშვები არე: (x_1, x_2) და $(x_3, +\infty)$ და ორი აკრძალული არე: $(-\infty, x_1)$ და (x_2, x_3) . დასაშვებ არეს (x_1, x_2) უწოდებენ პოტენციალურ ორმოს, ხოლო აკრძალულ (x_2, x_3) არეს - პოტენციალურ ბარიერს (ჯებირს). მოცემული E ენერჯიით მექანიკური სისტემის მოძრაობა შეიძლება ერთ-ერთ დასაშვებ არეში: (x_1, x_2) ან $(x_3, +\infty)$. თუ რომელში - დამოკიდებულია კოორდინატის საწყის მნიშვნელობაზე $x(0)$, სადაც კი მოხედება ეს უკანასკნელი. გადასვლა (x_1, x_2) არიდან $(x_3, +\infty)$ არეში შესაძლოა მარტო იმ შემთხვევაში, თუ სისტემას მივანიჭებთ დამატებით კინეტიკურ ენერჯიას $\Delta T \geq V_2 - E$. ბარიერისქვეშა გადასვლები კლასიკური (ნიუტონის) მექანიკის თანახმად, დამატებითი კინეტიკური ენერჯიის მინიჭების გარეშე აკრძალულია ენერჯიის შენახვის კანონით (ასეთი გადასვლები დასაშვებია მხოლოდ კვანტურ მექანიკაში, სადაც ნაწილაკებს (მიკროობიექტებს) ტალღური თვისებებიც გააჩნიათ კორპუსკულურთან ერთად. ამ მოვლენას კვანტურ მექანიკაში უწოდებენ გვირაბის ეფექტს ან ტუნელირებას).

თუ დასაშვები არე შემოფარგლულია ორი მობრუნების წერტილით (როგორც მაგ., (x_1, x_2) არე), მოძრაობა წარმოებს სივრცის შემოფარგლულ

არეში და მოძრაობას ეწოდება ფინიტური (შემოსაზღვრული). ამის საწინააღმდეგოდ, სისტემის მოძრაობას არეებში, რომლებსაც არ გააჩნიათ მობრუნების წერტილები ან მარტო ცალ მხარეს გააჩნიათ ასეთი, არის ინფინიტური (შემოსაზღვრავი), რადგანაც ამ შემთხვევაში სისტემას შეუძლია წასვლა უსასრულობაში.

ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში ფინიტურ მოძრაობას აქვს რხევითი ხასიათი: სისტემა ასრულებს პერიოდულ (განმეორებად) მოძრაობას x_1 და x_2 მობრუნების წერტილებს შორის. ამ რხევის პერიოდი შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც გაორკეცებული დრო, რომელიც სისტემას ესაჭიროება $x_2 - x_1$ მონაკვეთის გასაფლად. (V-1.3)–ის მიხედვით ეს დრო იქნება

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (V-1.7)$$

სადაც $x_1 = x_1(E)$ და $x_2 = x_2(E)$ არიან (V-1.6) განტოლების ფესვები.

როგორც ვხედავთ, ერთგანზომილებიანი მექანიკური სისტემის რხევის პერიოდი საზოგადოდ დამოკიდებულია მის სრულ ენერგიაზე და ამრიგად, მთლიანად განისაზღვრება საწყისი პირობებით.

არსებობს მხოლოდ ერთი ერთგანზომილებიანი მექანიკური სისტემა, რომლის პერიოდი ენერგიაზე არაა დამოკიდებული. ასეთია წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორი, რომლის სრული ენერგია ასე წარმოიდგინება

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

ამიტომ პერიოდი ტოლია

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}}$$

თუ აქ გამოვიყენებთ ტიპურ ცხრილის ინტეგრალს,

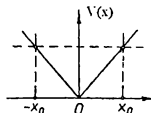
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}, \quad a > 0, b > 0$$

ხოლო საინტეგრაციო საზღვრებს მოექმნით პირობიდან $E = \frac{kx^2}{2}$, მარტივი გამოთვლით მივიღებთ, რომ

$$T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

მაგალითი: გამოთვალეთ m მასის ნაწილაკის რხევის პერიოდი შემდეგ ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში (ნახ.26)

$$V(x) = \begin{cases} -F_0 x, & x \leq 0; \\ F_0 x, & x \geq 0 \end{cases}$$



ასეთი პოტენციალი აქვს უსასრულო თანაბრად დამუხტული სიბრტყის ელექტროსტატიკურ ველს.

ამოხსნა: ამ ველში რხევის პერიოდი ტოლია OX ღერძზე სათავედან x_0 მობრუნების წერტილამდე გასაველელად საჭირო დროის გაოთხეცეპული მნიშვნელობისა. ეპოულობთ:

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - F_0 x}} = -4 \frac{\sqrt{2m}}{F_0} \sqrt{E - F_0 x} \Big|_0^{x_0} = \frac{4\sqrt{2mE}}{F_0},$$

რადგან x_0 მოიძებნება პირობიდან $E = F_0 x_0$.

ამ მარტივი მეთოდით მკითხველს ეძლევა ამოსახსნელად შემდეგი ამოცანები (Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика, გვ.41).

ამოცანა 1. განსაზღვრეთ ბრტყელი მათემატიკური საქანის (m ნაწილაკი დაკიდებული l სიგრძის ძაფზე სიმძიმის ძალის ველში) რხევების პერიოდის დამოკიდებულება ამპლიტუდაზე.

ამოცანა 2. განსაზღვრეთ m მასის ნაწილაკის რხევების პერიოდი $T(E)$ შემდეგ პოტენციალურ ველებში:

- ა) $V = A|x|^n$
- ბ) $V = -\frac{V_0}{ch^2 \alpha x}, \quad -V_0 < E < 0$
- გ) $V = V_0 l g^2 \alpha x,$
- დ) $V = V_0 l h^2 \alpha x$
- ე) $V = -\frac{k}{x} + \frac{l^2}{x^2} \quad E < 0$

ამოცანა 3. ოსცილატორი ირხევა შემდეგი პოტენციალური ფუნქციის გავლენით:

$$V = \frac{kx^2}{2} + \epsilon x^4 \quad \epsilon \ll 1$$

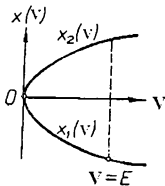
ისარგებლეთ ϵ -ის სიმცირით და მიიღეთ პერიოდის მიახლოებითი გა-
მოსახულება, როგორც ამპლიტუდის ფუნქცია (პირველ რიგში ϵ -ის მიხედ-
ვით).

V - 2. შებრუნებული სპექტრალური ამოცანის ცნება

თუ ექსპერიმენტულად ან რაიმე სხვა მოსაზრებებიდან ცნობილია რხევის პერიოდის დამოკიდებულება სრულ ენერგიაზე, ე.ი. ფუნქცია $T = T(E)$, მაშინ (V-1.7) ტოლობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც ინტეგრალურ განტოლებას უცნობი $V(x)$ ფუნქციის მიმართ. ამის გამო შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ე.წ. შებრუნებული სპექტრალური ამოცანა, ე.ი. $V(x)$ პოტენციალური ენერგიის მრუდის

სახის ადგენის ამოცანა პოტენციალური ორმოს არეში, (x_1, x_2) , ცნობილი $T(E)$ სპექტრალური ფუნქციის საშუალებით.

პირველ რიგში გამოვიყენოთ ყოველთვის აქვს თუ არა ამ ამოცანას ცალსახა ამოხსნა. $(V-1.7)$ განტოლება მიეკუთვნება აბელის ინტეგრალურ განტოლებათა კლასს, რომელიც შედარებით იოლად ამოიხსნება (ანუ, როგორც იტყვიან, იძლევა $V(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის საშუალებას). განტოლების ამოსახსნელად, უპირველეს ყოვლისა, უნდა გადავსვათ V და x ცვლადების როლები, სახელდობრ, V განვიხილოთ დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო x - მის ფუნქციად, ე.ი. $x=x(V)$. შევნიშნოთ, რომ $V(x)$ ფუნქციისგან განსხვავებით $x(V)$ ფუნქცია არის ორსახა: V -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $x(V)$ ფუნქციის 2 მნიშვნელობა (ნახ. 27)



ნახაზი 27

ნახაზის მიხედვით ამ ფუნქციის ერთ-ერთი შტო, რომელიც ძვეს დადებით ნახევარსიბრტყეში, აღნიშნოთ $x_2(V)$ -ით, ხოლო უარყოფით ნახევარსიბრტყეში მოთავსებული შტო - $x_1(V)$ -ით. ნათელია, რომ V ცვლადზე გადასვლისას ინტეგრალი $(V-1.7)$ ფორმულაში უნდა დაეკოთ 2 ნაწილად. ამასთან V -ს მიხედვით ინტეგრაციის საზღვრებად საჭიროა ავიღოთ 0 და E .

ნათქვამის გათვალისწინებით ჩვენი განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{T(E)}{\sqrt{2m}} = \int_0^E \frac{dx_2(V)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{E-V}} + \int_E^0 \frac{dx_1(V)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{E-V}} = \int_0^E \left(\frac{dx_2}{dV} - \frac{dx_1}{dV} \right) \frac{dV}{\sqrt{E-V}}$$

ახლა გამოვიყენოთ აბელის მეთოდი: ამ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ ფუნქციაზე $\frac{1}{\sqrt{\alpha-E}}$, სადაც α რაიმე დამხმარე პარამეტრია და ჩავატაროთ ინტეგრაცია ენერგიით $(0, \alpha)$ ინტერვალში

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \int_0^\alpha dE \int_0^E \left(\frac{dx_2}{dV} - \frac{dx_1}{dV} \right) \frac{dV}{\sqrt{(\alpha-E)(E-V)}}$$

მარჯვენა მხარეში შევცვალოთ ინტეგრების რიგი მათემატიკურ ანალიზში ცნობილი წესის მიხედვით. გვაქვს

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \int_0^\alpha \frac{T(E)}{\sqrt{\alpha-E}} dE = \int_0^\alpha \left(\frac{dx_2}{dV} - \frac{dx_1}{dV} \right) dV \int_V^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-V)}}$$

ახლა მარჯვენა მხარეში ენერგიით ინტეგრალი უკვე ადვილად აიღება შემდეგი ცხრილის ინტეგრალის გამოყენებით:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}} = \frac{-1}{\sqrt{-bf}} \arcsin \frac{2bfx+af+bc}{af-bc}; \quad bf < 0$$

ჩვენი შემთხვევისათვის:

$$x = E, a = \alpha, b = -1; c = -V, f = 1 \quad \text{და} \quad bf = -1 < 0$$

ამიტომ ინტეგრალი ტოლი იქნება

$$-\arcsin \frac{-2E + \alpha + V}{\alpha - V} \Big|_V^\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ამრიგად, ტრივიალურად შეგვიძლია ჩავატაროთ დარჩენილი dV ინტეგრაციაც, რადგან ინტეგრალქვეშ სრული დიფერენციალია. ამიტომ მიიღება

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

აქ ნებისმიერი α -ს ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ V . მივიღებთ აბელის გარდაქმნის საბოლოო ფორმულას:

$$x_2(V) - x_1(V) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)dE}{\sqrt{V - E}} \quad (V-2.1)$$

ამრიგად, ცნობილი $T(E)$ სექტრალური ფუნქციის მიხედვით ზოგად შემთხვევაში შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ სხეობა $x_2(V) - x_1(V)$. თვით $x_1(V)$ და $x_2(V)$ ფუნქციები რჩებიან განუსაზღვრელი. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს $V(x)$ პოტენციალური მრუდების უსასრულო რაოდენობა, რომლებიც მოგვეცემენ ერთიადიგივე $T(E)$ ფუნქციას. ყველა ეს მრუდი შეგვიძლია მივიღოთ თუკი ერთ-ერთ მათგანზე განვახორციელებთ ცალმხრივი წანაცვლების დეფორმაციას, რომლის დროსაც ნებისმიერი V -სთვის მობრუნების წერტილებს შორის მანძილი არ შეიცვლება.

ამიტომ შებრუნებული სექტრალური ამოცანის ცალსახა ამოხსნის საპოვნელად უნდა გვექონდეს რაიმე დამატებითი პირობა.

კერძოდ, არაკალსახობა ქრება იმ შემთხვევაშიც, როცა ცნობილია, რომ საძიებელი პოტენციალური $V(x)$ მრუდი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, ე.ი. თუ $x_2(V) = -x_1(V) = x(V)$. ამ კერძო შემთხვევაში (V-2.1) ფორმულა იძლევა ამოცანის ცალსახა ამოხსნას:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)dE}{\sqrt{V - E}} \quad (VI-2.2)$$

გვეცოდინება რა $x(V)$ ფუნქციაა, მისი შებრუნებით ვიპოვით $V(x)$ პოტენციალურ ენერგიას.

ამრიგად, $T(E)$ ფუნქცია ცალსახად განსაზღვრავს $V(x)$ ფუნქციის მხოლოდ სიმეტრიულ ნაწილს მისი მინიმუმის წერტილის მიმართ, ანტი-სიმეტრიული ნაწილი რჩება ნებისმიერი.

მაგალითი: განვიხილოთ პარაბოლური ოსცილატორის უმარტივესი შემთხვევა, როცა $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \equiv T_0 = const$ ანუ სექტრალური ფუნქცია არის მუდმივი.

მაშინ გვაქვს

$$x(V) = \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{dE}{\sqrt{V - E}} = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2m}} \sqrt{V} = \frac{2}{\pi\sqrt{2k}} \sqrt{V},$$

სადაც გამოვიყენეთ ელემენტარული ცხრილის ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx}, \quad a=V, b=-1$$

წინა ფორმულიდან მიიღება პარამონიული ოსცილატორის პოტენციალი

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

ამოცანები: გამოიყენეთ (V-2.2) ფორმულა და აღადგინეთ სიმეტრიული პოტენციალური ორმოს სახე პერიოდის შემდეგი $T(E)$ ფუნქციებისათვის:

$$a) T(E) = \pi \alpha \sqrt{\frac{2m}{V_0 - E}}, \quad V_0 > E$$

$$b) T(E) = \pi \frac{\sqrt{2m}}{\alpha} \frac{1}{E + V_0}$$

$$c) T(E) = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{|E|}}$$

V-3. მცირე რხევები

შესავალი. ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი შემთხვევაა კონსერვატიული მექანიკური სისტემის მცირე მოძრაობის ანალიზი წონასწორულ კონფიგურაციებთან. თუმცა მოძრაობის განტოლებები შეიძლება სხვა გზებითაც მივიღოთ, მაგალითად, ნიუტონის კანონებით, ლაგრანჟის მეთოდი იძლევა მოძრაობის განტოლებებს ისეთი ფორმით, რომელიც სისტემის სიმეტრიის თვისებებს უკეთ ამჟღავნებს. ამიტომ ჩვენ მცირე რხევებს შევისწავლით ლაგრანჟის მეთოდით.

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ მცირე რხევების თეორია გამოყენებას პოულობს ფიზიკის უამრავ სფეროში, როგორცაა, მაგალითად, აკუსტიკა, ტალღები, მოლეკულური სპექტრები, ელექტრული კონტურის რხევები და მათი ურთიერთქმედება. გარდა ამისა მცირე რხევების შესწავლა შეგვაშადავებს ეკლების და უწყვეტი გარემოს მექანიკისათვის.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ რხევებს, რომლებიც აღიძვრება წონასწორობის მდებარეობიდან სისტემის მცირე გადახრების დროს. ამიტომ ჩვენი განხილვა არის მხოლოდ საფუძველი როული რხევითი და ტალღური მოვლენების შესასწავლად.

ამოცანის დასმა.

განვიხილოთ ბუნებრივი სისტემა, რომლის კონფიგურაცია განისაზღვრება n დამოუკიდებელი განზოგადებული კოორდინატით q_1, q_2, \dots, q_n . ამავე დროს ჩაეთვლით, რომ დეკარტეს კოორდინატებიდან განზოგადებულზე გადასვლა არ შეიცავს დროს, ე.ი. სისტემაზე დადებული ბმები იყოს სტაციონარული. ამიტომ სისტემის პოტენციალური ენერგია არის მხოლოდ განზოგადებული კოორდინატების ფუნქცია.

ვიტყვიით, რომ სისტემა წონასწორობაშია, თუ მასზე მოქმედი განზოგადებული ძალები ნულის ტოლია (იხ. სათანადო პარაგრაფი, II-3)

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (V-3.1)$$

სხვა სიტყვებით, წონასწორობის დროს სისტემის პოტენციალურ ენერჯიას აქვს ექსტრემუმი. თუ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია არის წონასწორული და მისი ნაწილაკების საწყისი სიჩქარეები ნულის ტოლია, სისტემა შემდეგშიც დარჩება წონასწორობაში. ამასთან დაკავშირებით შეგვიძლია გავიხსენოთ სისტემის წონასწორობის კრიტერიუმები, რომლებიც განვიხილეთ (II-3) პარაგრაფში.

იქ დაეადგინეთ, რომ თუ V ფუნქციის ექსტრემუმი არის მისი მინიმუმი, მაშინ წონასწორობა მდგრადია. ჩვენ დავეინტერესდებით სისტემის მოძრაობით მდგრადი წონასწორობის უშუალო მახლობლობაში. ამიტომ, ამ მდებარეობიდან გადახრას ჩავთვლით მცირედ და სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეების სათანადო ფუნქციების ამ მდებარეობასთან ტეილორის გაშლის მწკრივში შემოვიფარგლებით უდაბლესი რიგის წევრებით.

ჩავთვალოთ, რომ

$$q_i = q_{0i} + \eta_i \quad (V-3.2)$$

სადაც q_{0i} არის q_i კოორდინატების მნიშვნელობა წონასწორობის მდებარეობაში. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ η_i არიან ახალი განზოგადებული კოორდინატები და გავშალოთ პოტენციალური ენერჯია q_{0i} -ების მახლობლად. მივიღებთ

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \dots \quad (V-3.3)$$

ამ მწკრივში წონასწორობის (V-3.1) პირობის გამო η_i -ის პრამორციული წევრები განუღლება. რაც შეეხება პირველ (მუდმივ) წევრს, $V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$, მისი უგულვებელყოფა შეგვიძლია, რაც ნიშნავს, რომ პოტენციალური ენერჯიის ათვლას ვაწარმოებთ მისი წონასწორული მნიშვნელობიდან. ამიტომ პოტენციალური ენერჯიის პირველი არატრიალიური მიახლოების სახით გვრჩება

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (V-3.4)$$

სადაც მეორე წარმოებულები აღვნიშნეთ V_{ij} -ით. ცხადია, $V_{ij} = V_{ji}$ ადგენს სიმეტრიულ მატრიცას.

ზუსტად ანალოგიურად შეგვიძლია გავშალოთ მწკრივად კინეტიკური ენერჯიაც. რადგან განსოგადებული კოორდინატები დროზე ცხადად არ არიან დამოკიდებული, სისტემის კინეტიკური ენერჯია იქნება განსოგადებული \dot{q}_i სიჩქარეების ერთგვაროვანი კვადრატული ფუნქცია

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (V-3.5)$$

სადაც m_{ij} კოეფიციენტები q_i კოორდინატების რაღაც ფუნქციებია. გავშალოთ ისინიც ტეილორის მწკრივად:

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots$$

რადგან (V-3.5) ტოლობა კვადრატულია $\dot{\eta}_i$ -ს მიხედვით, იმისათვის, რომ მივიღოთ პირველი ნულისგან განსხვავებული მიახლოება T -სთვის, ამ მწკრივში უნდა ჩამოვუშვათ ყველა წევრი, გარდა პირველისა. ამრიგად, თუ T_{ij} -ით აღვნიშნავთ $m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n})$ მუდმივებს, კინეტიკური ენერჯიისათვის მივიღებთ:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n T_y \dot{\eta}_j \dot{\eta}_j \quad (\text{V-3.6})$$

აშკარაა, რომ T_y სიმეტრიულ მატრიცას შეადგენს.

მიღებული თანაფარდობების თანახმად განსახილავი სისტემის ლაგრანჟის ექნება სახე:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (T_y \dot{\eta}_j \dot{\eta}_j - V_y \eta_j \eta_j) \quad (\text{V-3.7})$$

ამიტომ თუ η_j -ს განზოგადებულ კოორდინატებად ჩავთვლით, მივიღებთ ლაგრანჟის შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{j=1}^n T_y \dot{\eta}_j + \sum_{j=1}^n V_y \eta_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{V-3.8})$$

გამოყვანისას გამოყენებულია აქ შემავალი კოეფიციენტების სიმეტრიულობა.

ამრიგად, მივიღეთ n დიფერენციალური განტოლებისგან შედგენილი სისტემა, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მოძრაობას წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად.

მოძრაობის განტოლებათა შესწავლა.

ზემოთ მიღებულ მოძრაობის განტოლებათა სისტემას ხშირად მატრიცული სახით ჩაწერენ ხოლმე:

$$\dot{T}\dot{\eta} + V\eta = 0, \quad (\text{V-3.9})$$

სადაც

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n} \\ T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n} \\ \dots \\ T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nn} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11}, V_{12}, \dots, V_{1n} \\ V_{21}, V_{22}, \dots, V_{2n} \\ \dots \\ V_{n1}, V_{n2}, \dots, V_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{V-3.10})$$

ხოლო η აღნიშნავს სვეტს

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (\text{V-3.11})$$

მატრიცათა გამრავლების სტანდარტული წესის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოძრაობის განტოლებათა ეს ორივე ჩაწერა ერთმანეთის ტოლფასია. მიღებული მოძრაობის განტოლებები არის მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები (სისტემა) მუდმივი კოეფიციენტებით. \dot{T} და V მატრიცები სიმეტრიულია. შეენიშნოთ, რომ თუ ნიუტონის კანონებს გამოვიყენებდით მოძრაობის განტოლებათა მისაღებად, მაშინ ეს მატრიცები, საზოგადოდ, სიმეტრიული არ იქნებოდა. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, განტოლებათა სიმეტრიის აღდგენას მაშინაც შევძლებდით განტოლებათა გამრავლებით სათანადოდ შერჩეულ მუდმივებზე და მათი კომბინაციების განხილვით. ეს არ შეცვლიდა ამონახსნების თვისებებს. ლაგრანჟის მეთოდის უპირატესობა ამ შემთხვევაში სწორედ ისაა, რომ ის ყოველ ეტაპზე ინარჩუნებს ამოცანისთვის დამახასიათებელ სიმეტრიებს.

ახლა შევუდგეთ განტოლებათა მიღებული სისტემის შესწავლას. დავეშვათ, რომ მის ამონახსნებს აქვთ სახე:

$$\eta_i = A_i C \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (V-3.12)$$

სადაც ამპლიტუდად ავიღეთ მუდმივების ნამრავლი $A_i C$. აქ C გამოხატავს η_i -ების საერთო სკალას, მაშინ როცა A_i -ები - მათ ფარდობით სიდიდეებს.

თუ ამ საცდელ ამონახსნს ჩავსვამთ (V-3.8) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}) A_j C \cos(\omega t + \varphi_j) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (V-3.13)$$

საერთო მამრაველი $C \cos(\omega t + \varphi_i)$ არ შეიძლება იყოს ნული გარდა ტრივი-ალური შემთხვევისა, როცა ყველა η_i ნულია, რაც არ არის საინტერესო. ამიტომ არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის უნდა დავასკვნათ, რომ

$$\sum_{j=1}^n (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) A_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (V-3.14)$$

ესაა წრფივი ერთგვაროვანი ალგებრული განტოლებების სისტემა მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის მისი კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11}, & V_{12} - \omega^2 T_{12}, & \dots, & V_{1n} - \omega^2 T_{1n} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21}, & V_{22} - \omega^2 T_{22}, & \dots, & V_{2n} - \omega^2 T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} - \omega^2 T_{n1}, & V_{n2} - \omega^2 T_{n2}, & \dots, & V_{nn} - \omega^2 T_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (V-3.15)$$

ამ დეტერმინანტის გამოთვლის შედეგად მიიღება n -ური რიგის განტოლება ω^2 -ის მიმართ. მისი ფესვები განსაზღვრავენ იმ სიხშირეებს, რომლებსითვისაც (V-3.12) იქნება მოძრაობის განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. თავის მხრივ A_j ამპლიტუდები უნდა განისაზღვრონ (V-3.14) სისტემიდან ω^2 -ის თითოეული ნაპოვნი მნიშვნელობისათვის (უფრო ზუსტად, ყველა A_j ამპლიტუდა გამოიხატება ერთი მათგანით).

(V-3.15)-ს უწოდებენ მახასიათებელ ან საუკუნოებრივ განტოლებას, ხოლო მის n ფესვს ω_k^2 , ($k = 1, 2, \dots, n$) უწოდებენ მახასიათებელ ანუ საკუთარ მნიშვნელობებს. ისინი წარმოადგენენ ბუნებრივი სიხშირეების კვადრატებს.

მატრიცების თეორიიდან ცნობილია, რომ ω_k^2 ფესვები არიან ნამდვილი და სასრულო სიდიდეები, თუ \hat{T} და \hat{V} არიან ნამდვილი სიმეტრიული მატრიცები. ამასთან \hat{T} უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრულიც. (V-3.15) განტოლების ამონახსნის ნამდვილობა და დადებითობა წინასწარვე ნათელია ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე. მართლაც, ω -ს რომ ჰქონდეს წარმოსახვითი ნაწილი, ამოხსნაში განჩნდებოდა ექსპონანციალურად ზრდადი ან ექსპონენციალურად კლებადი მამრავლი. მაგრამ ასეთი მამრავლი დაუშვებელია, რადგან ეს გამოიწვევდა სისტემის სრული $E = T + V$ ენერჯიის ცვლილებას, რაც ეწინააღმდეგება ენერჯიის შენახვის კანონს.

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით წმინდა მათემატიკური გზითაც. ამისათვის (V-3.14) განტოლება გაგამრავლოთ სიდიდესუ A_i' და ჩავატაროთ აჯამვა i -ს მიხედვით. მივიღებთ განტოლებას:

$$\sum_{i,j} (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) A_i^* A_j = 0,$$

საიდანაც

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j} V_{ij} A_i^* A_j}{\sum_{i,j} T_{ij} A_i^* A_j}$$

ამ გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელი ნამდვილია T_{ij} და V_{ij} კოეფიციენტების სიმეტრიულობის და ნამდვილობის გამო. მართლაც,

$$\left(\sum_{i,j} T_{ij} A_i^* A_j \right)^* = \sum_{i,j} T_{ij} A_i A_j^* = \sum_{i,j} T_{ji} A_j A_i^* = \sum_{i,j} T_{ij} A_i^* A_j$$

ე.ი. ეს გამოსახულება ნამდვილია. ამავე დროს იგი დადებითად განსაზღვრულიცაა. მართლაც, თუ კომპლექსურ A_i სიდიდეებს გადავწერთ ზოგადი კომპლექსური რიცხვის სახით $A_i = \alpha_i + i\beta_i$, გადაამრავლების შემდეგ მივიღებთ

$$\sum_{i,j} T_{ij} A_i^* A_j = \sum_{i,j} T_{ij} (\alpha_i - i\beta_i)(\alpha_j + i\beta_j) = \sum_{i,j} T_{ij} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i,j} T_{ij} \beta_i \beta_j$$

სადაც ორივე წევრი აშკარად დადებითია. ზუსტად იგივე ეხება მრიცხველში მოთავსებულ გამოსახულებასაც, ამიტომ ω^2 არსებითად დადებითია.

დავუბრუნდეთ კვლავ (V-3.14)-ს. ეხედავთ, რომ ყოველი ω_k^2 -ისათვის შეგვიძლია დავწეროთ n ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც შეგვა n განსასაზღვრავი ამპლიტუდა $A_j^{(k)}$. რადგან განტოლებები ერთგვაროვანია, უცნობებისთვის ცალსახა ამოხსნებს ვერ ავაგებთ. ვიპოვით მხოლოდ მათ შორის ფარდობებს. მოხერხებულობისათვის ამოხსნები გამოვხატოთ პირველი ამპლიტუდით, A_1 , რომელიც ერთის ტოლად ავიღოთ, $A_1 = 1$. დარჩენილი $(n-1)$ უცნობი ამპლიტუდის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ დანარჩენი განტოლებები, რომლებიდანაც ამოვაგდეთ, მაგალითად, პირველი განტოლება:

$$\{(V_{ij} - \omega_k^2 T_{ij})\} \{A_j^{(k)}\} = \{(\omega_k^2 T_{i1} - V_{i1})\}, \quad (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

სადაც ფრჩხილში გამოვხატეთ ტიპური მატრიცული ელემენტი თითოეული შემთხვევისათვის. ქვედა ინდექსები მიუთითებენ საწყის სტრიქონებს და ხევტებს. ამ უკანასკნელი განტოლებებიდან $A_j^{(k)}$ ამპლიტუდების ამოხსნით მივიღებთ:

$$\{A_j^{(k)}\} = \{(V_{ij} - \omega_k^2 T_{ij})^{-1}\} \{(\omega_k^2 T_{i1} - V_{i1})\}, \quad (i, j = 2, 3, \dots, n) \quad (V-3.16)$$

სადაც ჩვენ დავეუშით, რომ საკუთარი მნიშვნელობები ურთიერთგანსხვავებულია და $A_1^{(k)} \neq 0$. ამ დაშვებით უზრუნველყოფილია ამონახსნის აგებისას გამოყენებული მატრიცის შებენების შესაძლებლობა. იმ შემთხვევაში, როცა $A_1^{(k)} = 0$, სხვა ნულისაგან განსხვავებული ამპლიტუდა შეგვიძლია ავირჩიოთ ამოსავალ (საბაზო) ამპლიტუდად და მისთვის გავიმეოროთ ყველაფერი. საზოგადოდ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ამპლიტუდების ნებისმიერი ნორმირება, ოღონდ უნდა შევინარჩუნოთ სწორი ფარდობითი მნიშვნელობები.

n ამპლიტუდების სრულ სისტემას, ერთეულდანი საბაზო ამპლიტუდის ჩათვლით, ეწოდება საკუთარი ვექტორები ან მოდალური სვეტები. გვაქვს თითოეული ω_k^2 -ის შესაბამისი საკუთარი ვექტორი $A^{(k)}$. ამპლიტუდების ეს სისტემა

განხილვება როგორც მოცემულ სიხშირესთან დაკავშირებული მოდა. ყოველი ბუნებრივი სიხშირე ω_k თავის შესაბამის საკუთარ $A^{(k)}$ ვექტორთან ერთად განსაზღვრავს ვიბრაციის (რხევის) ბუნებრივ მოდას, რომელსაც ხანდახან უწოდებენ მთავარ ან ნორმალურ მოდას.

ჩვენ მიერ განხილული ბუნებრივი სისტემებისათვის ω_k^2 არის ნამდვილი და სათანადო ამპლიტუდაც ნამდვილია. თუ სისტემა ასრულებს რხევებს ერთ მოდაში, ნაცვლად ზოგადი შემთხვევისა, როცა გვაქვს მოდების სუპერპოზიცია, მაშინ ყველა კოორდინატი ასრულებს სინუსოიდალურ მოძრაობას თანხვედრი სიხშირით (მარტივი მოდა).

ნულსიხშირიანი მოდები ხანდახან გამორჩეულია ფიზიკურად იმით, რომ არ ხდება დრეკადი დეფორმაციები. ამ მიზეზით ისინი ცნობილია როგორც მყარსხეულოვანი მოდები. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები არიან ცალკე-ცალკე მუდმივები, რაც გამოიხატება ერთგვაროვან ტრანსლაციურ და რხევით მოძრაობაში.

მთავარი (ნორმალური) კოორდინატები. როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, ბუნებრივ წრფივ სისტემას n თავისუფლების ხარისხით აქვს n საკუთარი მნიშვნელობა ანუ ბუნებრივი სიხშირე. სისტემას შეუძლია შეასრულოს მარტივი რხევა, თუ საწყის პირობებს სათანადოდ შეეარჩევთ; მაგალითად, თუ ყველა საწყისი სიჩქარეები ნულია და საწყისი გადახრები პროპორციულია მოცემული მოდის $A_j^{(k)}$ ამპლიტუდებისა. მაგრამ საზოგადოდ საჭირო ხდება სხვადასხვა მოდების სუპერპოზიციების განხილვა. ასე, მაგალითად, ჩვენ მიერ მიღებული ამონახსნები ასეთია (იხ. (V-3.12, 16))

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n A_k C_k \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad (V-3.17)$$

სადაც $A_k \equiv A_j^{(k)}$ წარმოადგენენ (V-3.16)-ში მატრიცის შებრუნებისას წარმოქმნილ მინორებს (იხ. წრფივი ალგებრის ნებისმიერი კურსი).

ახლა შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\Theta_k = C_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (V-3.18)$$

მაშინ ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n A_k \Theta_k \quad (V-3.19)$$

ამრიგად, სისტემის თითოეული კოორდინატის ცვლილება დროის მიხედვით წარმოიდგინება n მარტივი $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ პერიოდული რხევების ზედედებით ნებისმიერი ამპლიტუდებით და ფაზებით, ოღონდ მკაცრად გარკვეული სიხშირეებით.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: ხომ არ შეიძლება ისე ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები, რომ თითოეული მათგანი ასრულებდეს ერთ მარტივ რხევას მკაცრად გარკვეულ პარმონიული კანონით? ამ კითხვაზე პასუხს გვეპარნახობს თვითონ ზოგადი ამონახსნის ფორმა, (V-3.19).

მართლაც, თუ ამ გამოსახულებებს შევხვდავთ როგორც განტოლებათა სისტემას n უცნობი სიდიდისათვის Θ_k , შეგვიძლია ეს სიდიდეები $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ გამოვხატოთ $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ კოორდინატებით. ამრიგად Θ_k სიდიდეებს შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც ახალ განზოგადებულ კოორდინატებს. ამ კოორდინატებს უწოდებენ ნორმალურს (ან მთავარს), ხოლო მათ მიერ შესრულებულ მარტივ პერიოდულ რხევებს – სისტემის ნორმალურ რხევებს.

ამ თანაფარდობით განსაზღვრული Θ_k ნორმალური კოორდინატები აკმაყ-
ოფილებენ განტოლებებს

$$\ddot{\Theta}_k + \omega_k^2 \Theta_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (V-3.20)$$

რაშიც ადვილია დარწმუნება მათი განმარტებიდან გამომდინარე. ეს ნიშნავს,
რომ ნორმალურ კოორდინატებში მოძრაობის განტოლებები იხლიჩება ერთ-
მანეთისგან დამოუკიდებელ n ცალკეულ განტოლებად, ე.ი. სისტემის ნორ-
მალური რხევები ურთიერთდამოუკიდებელია.

ნათქვამიდან ნათელია, რომ ნორმალური კოორდინატებით ჩაწერილი ლა-
გრანჟიანი იქნება ω_k სიხშირის შესაბამისი წვევრების ჯამი, ანუ ექნება სახე

$$L = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\dot{\Theta}_k^2 - \omega_k^2 \Theta_k^2) \quad (V-3.21)$$

სადაც m_k - დადებითი მუდმივებია. მათემატიკური თვალსაზრისით ეს ნიშნავს,
რომ (V-3.19) გარდაქმნით ორივე კვადრატული ფორმა (V-3.5) და (V-3.6) - კი-
ნეტიკური და პოტენციალური ენერგიები - ერთდროულად მიიყვანება დი-
აგონალურ სახეზე. ამში დარწმუნება ძალზე ადვილია მატრიცების თეორიის
ელემენტარული მეთოდების გამოყენებითაც.

ნორმალურ კოორდინატებს, როგორც წესი, ისე ირჩევენ ხოლმე, რომ ლა-
გრანჟიანში სიჩქარეების კვადრატებთან კოეფიციენტად $1/2$ იდგეს. ახლა ამას
მივაღწევთ უბრალო გადანორმვით

$$Q_k = \sqrt{m_k} \Theta_k \quad (V-3.22)$$

მაშინ

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2) \quad (V-3.23)$$

ყოველივე ზემოთ გადმოცემული თითქმის არ შეიცვლება, როცა მახასიათე-
ბელი (V-3.15) განტოლების ფესვებს შორის გეხედება ჯერადი ფესვები.
ამონახსნის ზოგადი სახე უცვლელი რჩება. განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ
ჯერადი ფესვების შესაბამისი A_k კოეფიციენტები დეტერმინანტის სხვა მი-
ნორებს დაუკავშირდება და უნდა ცალკე განისაზღვრონ. თითოეულ ჯერად (ან,
როგორც ამბობენ, გადაგვარებულ) სიხშირეს ესაბამება იმდენი სხვადასხვა
ნორმალური კოორდინატი, რასაც უდრის გადაგვარების ჯერადობა. მაგრამ ამ
ნორმალური კოორდინატების არჩევა ცალსახად ვეღარ ხდება, რადგან კინეტი-
კურ და პოტენციალურ ენერგიებში ნორმალური კოორდინატები (ერთნაირი სიხ-
შირის შესაბამისი) შედიან დიაგონალური კვადრატული ფორმების სახით, ამი-
ტომ მათზე შეიძლება ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნის ჩატარება, რომელიც ინ-
ვარიანტულს დატოვებს კვადრატების ჯამს.

განვიხილოთ ამოცანა:

მოვქმნოთ 2 თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის საკუთარი სიხ-
შირეები კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების (V-3.5-6) კვადრატული
ფორმების კანონიკურ (დიაგონალურ) სახეზე მიყვანიტ.

ამოხსნა: ნორმალური კოორდინატები შემოვიტანოთ შემდეგი თანაფარდო-
ბებით:

$$\eta_1 = \alpha \Theta_1 + \Theta_2, \quad \eta_2 = \Theta_1 + \beta \Theta_2,$$

სადაც α, β - განუსაზღვრელი მუდმივებია. ჩავსვათ ეს კინეტიკური და პოტენ-
ციალური ენერგიების ფორმულებში, მიიღება:

$$T = \frac{1}{2}(\alpha^2 T_{11} + 2\alpha T_{12} + T_{22})\Theta_1^2 + [\alpha T_{11} + (1 + \alpha\beta)T_{12} + \beta T_{22}]\Theta_1\Theta_2 + \frac{1}{2}(T_{11} + 2\beta T_{12} + \beta^2 T_{22})\Theta_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}(\alpha^2 V_{11} + 2\alpha V_{12} + V_{22})\Theta_1^2 + [\alpha V_{11} + (1 + \alpha\beta)V_{12} + \beta V_{22}]\Theta_1\Theta_2 + \frac{1}{2}(V_{11} + 2\beta V_{12} + \beta^2 V_{22})\Theta_2^2$$

ავიზრინოთ ახლა α, β მუდმივები ისე, რომ არადიაგონალური წევრები განუღდნენ

$$\alpha T_{11} + (1 + \alpha\beta)T_{12} + \beta T_{22} = 0$$

$$\alpha V_{11} + (1 + \alpha\beta)V_{12} + \beta V_{22} = 0$$

ამ სისტემის ამონახსნი ასე წარმოიდგინება

$$\alpha = \frac{V_{22}T_{11} - V_{11}T_{22} + \sqrt{A}}{2(V_{11}T_{12} - V_{12}T_{11})}, \quad \beta = \frac{V_{22}T_{11} - V_{11}T_{22} + \sqrt{A}}{2(V_{12}T_{22} - V_{22}T_{12})}$$

სადაც

$$A = (V_{11}T_{22} + V_{22}T_{11} - 2V_{12}T_{12})^2 - 4(V_{11}V_{22} - V_{12}^2)(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)$$

ამიტომ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია მიიყვანება სახეზე

$$L = \frac{M_1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \omega_1^2\Theta_1^2) + \frac{M_2}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - \omega_2^2\Theta_2^2)$$

სადაც

$$M_1 = \alpha^2 T_{11} + 2\alpha T_{12} + T_{22}$$

$$M_2 = T_{11} + 2\beta T_{12} + \beta^2 T_{22}$$

და

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{V_{11}T_{22} + V_{22}T_{11} - 2V_{12}T_{12} \mp \sqrt{A}}{2(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)}$$

ხოლო ნორმალური რხევების ფორმები (შებრუნებული გარდაქმნა) განისაზღვრება თანაფარდობებით:

$$\Theta_1 = R_{11}\eta_1 + R_{12}\eta_2,$$

$$\Theta_2 = R_{21}\eta_1 + R_{22}\eta_2,$$

სადაც

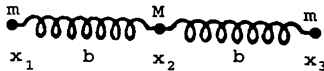
$$R_{11} = -\frac{\beta}{1 - \alpha\beta}, \quad R_{12} = R_{21} = \frac{1}{1 - \alpha\beta}, \quad R_{22} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა.

ამოცანა:

სამატომიანი მოლეკულის თავისუფალი რხევები

განვიხილოთ წრფივი სამატომიანი მოლეკულა, რომლის მოდელი ნაჩვენებია ნახაზზე 28.



ნახაზი 28. წრფივი სამატომიანი მოლეკულის მოდელი

კიდურა ატომების მასები იყოს m -ის ტოლი, ხოლო შუა ატომისა $-M$. წონასწორობის მდებარეობაში კიდურა ატომებს შორის მანძილი იყოს $2b$. სიმარტივისათვის განვიხილათ ატომების რხევას მხოლოდ მათი შემაერთებული წრფის გასწვრივ (გასწვრივი რხევები). ამასთან ატომებს შორის კავშირი წარმოვიდგინოთ მათი შემაერთებელი ორი უწონადი სამბარის სახით, რომლებსაც ერთნაირი k სიხისტე აქვთ. ამ ატომების მდებარეობის განმსაზღვრელ კოორდინატებად ავიღოთ მათი აბსცისები. მაშინ სისტემის პოტენციალური ენერგია V ტოლი იქნება

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2$$

შემოვიტანოთ აგრეთვე ატომების წანაცვლებები წონასწორობის მდებარეობების მიმართ

$$\eta_i = x_i - x_{0i}$$

სადაც

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}$$

მაშინ გვაქვს

$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2$$

ან

$$V = \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$$

ამიტომ პოტენციალის \hat{V} მატრიცას აქვს სახე

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} k, & -k, & 0 \\ -k, & 2k, & -k \\ 0, & -k, & k \end{pmatrix}$$

კიდევ უფრო მარტივად გამოიყურება სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2$$

რომლის მატრიცა დიაგონალურია

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & M, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{pmatrix}$$

ამიტომ სისტემის საუკუნობრივი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$|\hat{V} - \omega^2 \hat{T}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m, & -k, & 0 \\ -k, & 2k - \omega^2 M, & 0 \\ 0, & -k, & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

რაც გვაძლევს განტოლებას

$$\omega^2(k - \omega^2 m)[k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

მისი ამონახსნებია

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

აქედან პირველი ამონახსნი, $\omega_1 = 0$, უცნაურად გამოიყურება, რადგან ის არ ეთანხმება წარმოდგენას რხევითი მოძრაობის შესახებ, რამეთუ ნულეანი სიხშირისას სათანადო მთავარი კოორდინატი არ შეასრულებს რხევით მოძრაობას,

არამედ დააკმაყოფილებს განტოლებას, $\ddot{\theta} = 0$, რაც თანაბარ მოძრაობას უთანადება და არა რხევას. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან მოლეკულას, როგორც მოლიანს, შეუძლია შეასრულოს გადატანითი მოძრაობა. ამ დროს მისი პოტენციალური ენერგია არ შეიცვლება. ამიტომ იყო, რომ ნულოვანი სიხშირის მოდას დავარქვით მყარსხეულოვანი მოდა.

ω^2 -ის ზოგადი ამონახსნიდან ჩანს, რომ ამ შემთხვევას ადგილი ექნება, როცა პოტენციალური ენერგია არ არის დადებითად განსაზღვრული.

სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს ახლა საქმე, რადგან ზემოთ მოყვანილი პოტენციალური ენერგია გადაიქცევა ნულად, როცა $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$, ანუ მოლეკულის თანაბარი გადატანითი მოძრაობის დროს.

რაკი $\omega_1 = 0$ სიხშირე ჩვენს ამოცანაში ფიზიკურად საინტერესო არ არის, სასურველია მისი გამორიცხვა, ანუ ამოცანის ისეთიანი მოდიფიცირება, რომ ეს ნულოვანი ფესვი აღარ გვეჩვენდეს. მას ყველაზე იოლად მივაღწევთ, თუ მოვითხოვთ, რომ მოლეკულის, როგორც მოლიანის, გასწვრივი წანაცვლება არ ხდებოდეს, ანუ, რაც იგივეა, მოლეკულის მასათა ცენტრი იყოს უძრავი (ვთქვათ, მუდმივად იმყოფებოდეს კოორდინატთა სათავეში). მაშინ გვექნება პირობა

$$m(x_1 + x_2) + Mx_3 = 0$$

ამ პირობის გამოყენებით ლაგრანჟიანიდან შეგვიძლია გამოვირიცხოთ ერთ-ერთი კოორდინატი და მივიღოთ ამოცანა ორი თავისუფლების ხარისხით. დავუბრუნდეთ ახლა ზემოთ მიღებული საკუთარი სიხშირეების გამოკვლევას. ადვილად მივხედებით, რომ ω_2 შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც k სიხისტის ზამბარაზე დამაგრებული m მასის ნაწილაკის რხევის სიხშირე. ამიტომ მოველით, რომ ამ სიხშირით ირხებიან მხოლოდ კიდურა ატომები, ხოლო შუათანა ამ დროს უძრავი რჩება. ეს მოლოდინი მართლდება ნორმალური კოორდინატების განხილვისას მოლეკულის ლაგრანჟიანში:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_3^2 - \frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2]$$

შემოვიტანოთ ისინი შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\Theta_+ = x_1 + x_2, \quad \Theta_- = x_1 - x_2$$

ან შებრუნებულად;

$$x_1 = \frac{1}{2}(\Theta_+ + \Theta_-), \quad x_2 = \frac{1}{2}(\Theta_+ - \Theta_-)$$

ჩასმის შედეგად მიიღება

$$L = \frac{m\mu}{4M}\dot{\Theta}_+^2 + \frac{m}{4}\dot{\Theta}_-^2 - \frac{k\mu^2}{4M^2}\Theta_+^2 - \frac{k}{4}\Theta_-^2$$

აქედან მიღებული ლაგრანჟის განტოლებები იძლევიან შემდეგ მოძრაობის განტოლებებს:

$$\ddot{\Theta}_+ + \frac{k}{m}\Theta_+ = 0,$$

$$\ddot{\Theta}_- + \frac{k(2m+M)}{mM}\Theta_- = 0.$$

ვხედავთ, რომ ამ (ნორმალური) კოორდინატების რხევების საკუთარი სიხშირეები ზუსტად ემთხვევა ზემოთ (საუკუნობრივი განტოლებებიდან) მიღებულ სიხშირეებს. ამავე დროს აღარ გვაქვს ნულოვანი მოდა.

ასე ეწოდება ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი ჩაკეტილი მექანიკური სისტემის მოძრაობის ამოცანას. ამასთან ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან მათ შორის მანძილზე დამოკიდებული ძალებით.

თეორიული თვალსაზრისით ეს ამოცანა იმითაა საინტერესო, რომ მრავალი (2-ზე მეტი) სხეულის ამოცანისგან განსხვავებით უშეგებს სრულ და ზუსტ ამოხსნას ზოგად შემთხვევაში. რაც შეეხება ამოცანის პრაქტიკულ ღირებულებას, მისი მნიშვნელობა ძალზედ დიდია. ორი სხეულის ამოცანა საფუძვლად უდევს ციურ მექანიკას და ხელოვნური თანამგზავრების მოძრაობას, ნაწილაკთა დაჯახებისა და გაფანტვის პროცესებს. ორი სხეულის ამოცანის კლასიკური ამოხსნების დროს გამოყენებული იდეები წარმოადგენენ კვანტური მექანიკის საფუძვლებს და გვეხმარება ატომური და ბირთვული ფიზიკის ბევრი მნიშვნელოვანი ამოცანის გააზრებაში.

გადაუჭარბებლად შეიძლება ითქვას, რომ ორი ნაწილაკის ამოცანა არის მთელი ფიზიკის ფუნდამენტური ამოცანა.

ქვემოთ ამ ამოცანას განვიხილავთ ჯერ მოძრაობის განტოლებათა და შენახვის კანონების გამოყენებით, ხოლო შემდგომში კვლავ დაეუბრუნდებით მას ლაგრანჟის და ჰამილტონის მეთოდების მეშვეობით.

ამრიგად, ვიხილავთ 2 ნაწილაკის ჩაკეტილ სისტემას მასეებით m_1 და m_2 , რომელთა რადიუს-ვექტორები ნებისმიერი ათვლის სისტემის მიმართ იყოს \vec{r}_1 და \vec{r}_2 . როგორც ითქვა, მათი ურთიერთქმედების ძალები დამოკიდებულია მათ შორის მანძილზე: $\vec{F}_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ და $\vec{F}_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. ამიტომ ნაწილაკთა მოძრაობის (ნიუტონის) განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (V - 4.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (V - 4.2)$$

ამ განტოლებათა შეკრებით მიიღება:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0, \quad (V - 4.3)$$

რაც ნიშნავს, რომ თუ შემოვიტანთ ე.წ. მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორს \vec{R}_c , თანაფარდობით:

$$\vec{R}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2$$

მაშინ (V - 4.3) გვეუბნება

$$M \ddot{\vec{R}}_c = 0$$

ანუ სისტემის მასათა ცენტრი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით:

$$\vec{V}_c = \dot{\vec{R}}_c = const$$

აქედან მარტივად ვპოულობთ მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორის ცვლილების კანონს:

$$\vec{R}_c = \vec{V}_c \cdot t + \vec{R}_{c0} \quad (V - 4.4)$$

ე.ი. სისტემის, როგორც მთლიანის მოძრაობის კანონი ცნობილია. დაგვრჩა განვსაზღვროთ ნაწილაკთა ურთიერთმოძრაობის ანუ ფარდობითი მოძრაობის კანონი.

ნაწილაკთა ფარდობით მოძრაობას აღწერს რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (V - 4.5)$$

ამრიგად, ამოცანის გასაანალიზებლად ნაცვლად \vec{r}_1, \vec{r}_2 ცვლადებისა მიზანშეწონილია შემოვიტანოთ სხვა ორი ცვლადი: (\vec{R}_c, \vec{r}) ზემოთ მოყვანილი თანაფარდობებით. ამ თანაფარდობებიდან შეგვიძლია ცვლადთა გარდაქმნა ჩაეწეროს პირდაპირი სახითაც:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_c + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (\text{V-4.6})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_c - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

ხოლო მოძრაობის (V-4.1, 2) განტოლებებს ასე მოვეპყრათ: პირველი მათგანი გავამრავლოთ m_2 -ზე, მეორე m_1 -ზე და გამოვაკლოთ მიღებული განტოლებები. ახალი ცვლადების გამოყენებით განტოლებების სხვაობა ასე ჩაიწერება

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = M \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

ანუ თუ შემოვიტანთ ე.წ. დაყვანილ მასას

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

ფარდობითი მოძრაობისათვის დაგვრჩება განტოლება:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(\vec{r}) \quad (\text{V-4.7})$$

რაც ნიშნავს, რომ ფარდობითი რადიუს-ვექტორი ისეთივე განტოლებას აკმაყოფილებს, რასაც μ დაყვანილი მასის ნაწილაკი იმავე ძალის ველში.

ამრიგად, ახალი ცვლადების შემოტანით ჩვენ მოვახერხეთ 2 ნაწილაკის ამოცანაში ცვლადთა განცალგება, რაც ნიშნავს ორი მოძრაობის განცალგებას – მასათა ცენტრისა და ფარდობითი მოძრაობისა. რადგან მასათა ცენტრი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად, გალილეის ფარდობითობის პრინციპის თანახმად ინერციულ სისტემად გამოდგება სისტემა, რომელიც უძრავია მასათა ცენტრის მიმართ. თუ ასე ავირჩევთ ათვლის სისტემას, მაშინ შესასწავლი დაგვრჩება მხოლოდ ფარდობითი მოძრაობა, რომელიც აღიწერება (V-4.7) განტოლებით. ამრიგად, ორი ნაწილაკის ამოცანა პრაქტიკულად დაივსო ერთი დაყვანილი მასის ნაწილაკის მოძრაობის შესწავლაზე ძალთა ველში.

შეგნიშნოთ, რომ როცა ნაწილაკებს შორის მოქმედი ძალები პოტენციალური

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}},$$

ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \quad (\text{V-4.8})$$

შეგნიშნოთ აგრეთვე, რომ ადვილად შეგვიძლია დავაკავშიროთ m_1 და m_2 რეალური ნაწილაკების \vec{p}_1 და \vec{p}_2 სინქარეები ფიქტიური μ მასის ნაწილაკის \vec{p} სინქარესთან, რისთვისაც საკმარისია გავაწარმოოთ დროის მიხედვით (V-4.6) თანაფარდობა. მიიღება

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_c + \frac{m_2}{M} \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_c - \frac{m_1}{M} \vec{p} \quad (\text{V-4.9})$$

მასათა ცენტრის სისტემაში ($\vec{p}_c = 0$) ეს თანაფარდობა კიდევ უფრო მარტივდება

$$\vec{p}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{p}$$

ბუნებრივია, რომ \vec{p} ვმთხვევა ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარეს:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

შემდეგისათვის მიზანშეწონილია ახალ ცვლადებში გამოვხატოთ სისტემის ძირითადი დინამიკური სიდიდეები:

ა) სრული ენერჯია

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + V(r) = \frac{M V_c^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2} + V(r)$$

ბ) იმპულსის მომენტი

$$\vec{l} = m_1 [\vec{r}_1, \vec{v}_1] + m_2 [\vec{r}_2, \vec{v}_2] = M [\vec{R}_c, \vec{V}_c] + \mu [\vec{r}, \vec{v}]$$

როგორც ვხედავთ, ამ სიდიდეებშიც ხდება მასათა ცენტრისა და ფარდობითი მოძრაობების განცალკევა. მასათა ცენტრის სისტემაში

$$E = \frac{\mu v^2}{2} + V(r) \quad \text{და} \quad \vec{l} = \mu [\vec{r}, \vec{v}] \quad (V - 4. 10)$$

მასათა ცენტრის სისტემაში გამოთვლილ ინერციის მომენტს ხშირად სისტემის საკუთარ მომენტს (სპინს) უწოდებენ.

ადგილი საჩვენებელია, რომ სრული ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის მუდმივობიდან გამომდინარეობს მათი მუდმივობა ფარდობითი მოძრაობისთვისაც.

თუ ამოვხსნით ამოცანას ფარდობითი მოძრაობისათვის, ე.ი. განვსაზღვრავთ ფარდობით რადიუს-ვექტორს $\vec{r} = \vec{r}(t)$, რეალური m_1 და m_2 ნაწილაკებისათვის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების გამოყენებით შეგვეძლება განვსაზღვროთ მათი რადიუს-ვექტორებიც.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა:

ა) $m_1 \ll m_2$ (ასეთი თანაფარდობა ხორციელდება, მაგალითად სისტემაში “პლანეტა - მზე”, “წყალბადისმაგვარი ატომი”). ამ შემთხვევაში რადიუს-ვექტორების და დაყვანილი მასის მნიშვნეულობები შეგვიძლია მივახლოებით ასე წარმოვადგინოთ (მასათა ცენტრის სისტემაში):

$$\vec{r}_1 \approx \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{r}; \quad \vec{r}_2 \approx -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}, \quad \mu \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)$$

ზღვარში, როცა $m_2 \rightarrow \infty$, გვაქვს

$$\vec{r}_1 = \vec{r}; \quad \vec{r}_2 = 0, \quad \mu = m$$

ამრიგად, 2 ნაწილაკის სისტემაში მოძრაობა დაიყვანება მსუბუქი m_1 ნაწილაკის მოძრაობაზე უძრავი m_2 მძიმე ნაწილაკის მიმართ.

ბ) $m_1 = m_2 = m$ (ასეთი თანაფარდობა გვხვდება ზოგიერთ ორმაგ ვარსკვლავებში, აგრეთვე ელემენტარულ ნაწილაკთა სისტემებში “ნეიტრონი - პროტონი”, “ელექტრონი - პოზიტრონი” და ა.შ.).

ამ დროს

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{1}{2} \vec{r}, \quad \mu = \frac{m}{2}$$

როგორც შემდგომში დავინახავთ, გრავიტაციულ ველში გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია ფიქტიური μ ნაწილაკის მდგრადი მოძრაობა წრიულ ორბიტაზე. ამ დროს რეალური ნაწილაკები ტოლი მასებით იმოძრაებენ ერთიდაიმავე წრიულ ორბიტაზე, თითქოსდა მისდევნონ ერთმანეთს. ასტრონომიული დაკვირვებები აჩვენებენ, რომ ასეთ სიტუაციას აქვს ადგილი დიდი დათვის თანავარსკვლავედის ორმაგ ვარსკვლავებში.

როგორც ვნახეთ, ორი m_1 და m_2 ნაწილაკის მოძრაობის გამოკვლევის ამოცანა დაიყვანება მის ეკვივალენტურ ამოცანაზე - დაყვანილი $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

მასის ერთი ნაწილაკის მოძრაობაზე გარეშე ველში. თუკი ამ ველის პოტენციალური ენერგია $V(\vec{r})$ დამოკიდებულია მარტო ცენტრამდე r მანძილზე, მაშინ საქმე გვაქვს ნაწილაკის მოძრაობის ამოცანასთან ცენტრალური სიმეტრიის ველში. როგორც აღვნიშნეთ, თუ $m_2 \gg m_1 \equiv m$, მაშინ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მსუბუქი m ნაწილაკის მოძრაობაზე ცენტრალური სიმეტრიის ველში, რომელსაც ქმნის უძრავი მძიმე ნაწილაკი m_2 . სწორედ ასეთი შემთხვევის განხილვაზე გადავდივართ.

ამრიგად, განვიხილოთ m მასის წერტილოვანი ნაწილაკის მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში, რომელშიც მის პოტენციალურ ენერგიას აქვს სახე $V = V(r)$, სადაც r არის მანძილი რაიმე უძრავ O წერტილამდე, რომელსაც უწოდებენ ველის (ან ძალთა) ცენტრს.

ამ ამოცანის განხილვისას ბუნებრივია გამოვიყენოთ შენახვის კანონები. სახელდობრ, რადგან ველი $V = V(r)$ სტაციონალურია, შეინახება ნაწილაკის სრული ენერგია E , ხოლო, ცენტრალური სიმეტრიის გამო, \vec{I} მომენტი ველის ცენტრის მიმართ. \vec{I} ვექტორის მიმართულებების შენახვა ნიშნავს იმას, რომ ნაწილაკის მოძრაობა იქნება ბრტყელი: ნაწილაკის ტრავექტორია ძვეს \vec{I} ვექტორის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, რადგან $\vec{r} \cdot \vec{I} = 0$.

მომენტის ვექტორი შეგვიძლია უფრო მოსახერხებელი სახით გადავწეროთ, რისთვისაც გავიხსენოთ სიჩქარის ვექტორის გაშლა რადიალურ \vec{v} , და ბრუნვით \vec{v}_ϕ მდგენელებად, რაც ადვილად გამოისახება, თუკი რადიუს - ვექტორს წარმოვადგენთ მისი r მოდულისა და მის გასწვრივ ერთეულოვანი \hat{r}_0 ვექტორის ნამრავლის სახით (იხ. მაგ., მათე მირიანაშვილი; ზოგადი ფიზიკის კურსი, ნაწილი I, მექანიკა, თსუ, 1973), $\vec{v} = r \cdot \dot{\hat{r}}_0$. მაშინ

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\phi, \quad \vec{v}_r = \dot{\hat{r}}_0 \frac{dr}{dt}, \quad \vec{v}_\phi = r \frac{d\hat{r}_0}{dt}, \quad \left| \frac{d\hat{r}_0}{dt} \right| = \dot{\phi}, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2,$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს პოლარული ცვლადები r, ϕ .

მაშინ ნათელია, რომ

$$\vec{I} = m[\vec{r}, \vec{v}_r + \vec{v}_\phi] = m[\vec{r}, \vec{v}_\phi], \quad \text{ხოლო} \quad |\vec{I}| = m r^2 \dot{\phi}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ცხადი თანაფარდობანი $\vec{r} \perp \vec{v}_r$, და $\vec{r} \perp \vec{v}_\phi$. ამრიგად, (r, ϕ) პოლარული სისტემის პოლუსს თუ ავირჩევთ ძალთა O ცენტრში, ხოლო პოლარული ღერძის მიმართულებებს ჯერჯერობით ნებისმიერად ჩაეთვლით, ნაწილაკის $V(r)$ ველში მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება $r(t)$ და $\phi(t)$ ფუნქციების განსაზღვრაზე. ეს უკანასკნელი კი ყველაზე ადვილად გადაწყდება, თუ ვის-არგებლებთ ზემოაღნიშნული მოძრაობის ინტეგრაციები

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \quad (\text{V-5.1})$$

$$l = mr^2\dot{\phi} \quad (\text{V}-5.2)$$

ეს ტოლობები უცნობი $r(t)$ და $\phi(t)$ ფუნქციების მიმართ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს წარმოადგენენ.

ამავე დროს r და ϕ ცვლადები ამ განტოლებებში ადვილად ცალდება, რადგან მომენტის განტოლებიდან კუთხურ $\dot{\phi}$ სინქარეს გამოვისახავთ

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2} \quad (\text{V}-5.3)$$

ლაგრანჟის ფორმალისმის თვალსაზრისით l -ის შენახვა გამომდინარეობს იქიდანაც, რომ ϕ კუთხე ლაგრანჟიანისთვის, რომელიც E -ს გამოსახულებისგან $V(r)$ - ის წინ მიწის ნიშნით განსხვავდება, არის ციკლური კოორდინატა და მისი შესაბამისი განზოგადებული იმპულსია

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = l \quad (\text{V}-5.4)$$

ამიტომ $\dot{\phi}$ -იც გამოირიცხება, თუ (V-5.3)-ს გამოვიყენებთ ენერჯიის გამოსახულებაში

$$E = \frac{mr^2}{2} + V_\phi(r) \quad (\text{V}-5.5)$$

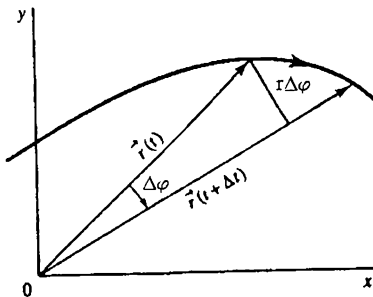
სადაც

$$V_\phi(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (\text{V}-5.6)$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ ერთგანზომილებიან ეფექტურ პოტენციალს. ამ ტერმინით ხაზგასმულია, რომ ცენტრალური სიმეტრიის შემთხვევაში ნაწილაკის რადიალური მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთგანზომილებიანი მოძრაობა ეფექტური $V_\phi(r)$ პოტენციალური ენერჯიის ველში. "ეფექტური ერთგანზომილებიანი მოძრაობა" ცენტრალურ ველში იმით განსხვავდება წმინდა ერთგანზომილებიანი მოძრაობისაგან, რომ თავისი შინაარსით r კოორდინატა დადებითად არის განსაზღვრული $0 \leq r < \infty$. ეს პრინციპულ განსხვავებას იძლევა შესაძლო მოძრაობათა კლასიფიკაციაში.

გაეხსენოთ, რომ $V_\phi(r)$ -ში შემავალ წევრს $\frac{l^2}{2mr^2}$, ხშირად ცენტრგამშორ პოტენციალს უწოდებენ. თუმცა უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს სახელწოდება მთლად შესატყვისი არ არის, რადგან სინამდვილეში ეს სიდიდე არის ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯიის ნაწილი, რომელიც დაკავშირებულია მის ბრუნვით მოძრაობასთან ველის ცენტრის მიმართ.

გაეხსენოთ აგრეთვე, რომ ბრტყელი მოძრაობისათვის მომენტის შენახვის მარტივი გეომეტრიული შინაარსი გააჩნია. გამოსახულება $\frac{1}{2}r \cdot r d\phi$ გეომეტრიულად არის იმ სექტორის ფართობი, რომელიც შექმნილია $d\phi$ კუთხით გაშლილი ორ უსასრულოდ ახლოს მდებარე რადიუს - ექვტორისა და ტრაექტორიის რკალის ელემენტით. (იხ. ნახ. 29)



ნახაზი 29

თუ ამ ფართობს S -ით აღვნიშნავთ, ნაწილაკის მომენტი ასეც ჩაიწერება

$$l = 2m\dot{S} \quad (\text{V-5.7})$$

ციურ მექანიკაში S -ის წარმოებულს, \dot{S} -ს უწოდებენ სექტორულ სიჩქარეს. ამიტომ, მომენტის შენახვა ნიშნავს სექტორული სიჩქარის მუდმივობას - დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედებში მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი შემოწერს ტოლ ფართობებს. ესაა ცნობილი კეპლერის მეორე კანონი. ამავე დროს გაეიხსენოთ, რომ კეპლერის I კანონის თანახმად ნაწილაკის (პლანეტის) ტრაექტორია ბრტყელი წირია, რაც, როგორც ჯემოთ ითქვა, გამოიმდინარეობს მომენტის ვექტორის მიმართულების შენახვიდან.

ქვემოთ განვიხილავთ ე.წ. კეპლერის ამოცანას - ნაწილაკის მოძრაობას გრავიტაციულ ველში და მივიღებთ კეპლერის მე-3 კანონსაც.

ახლა შევუდგეთ განტოლებათა ინტეგრაციას. (V-5.5) განტოლებიდან ამოვხსნათ \dot{r}

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}$$

აქ ტრივიალურად ხერხდება r და t ცვლადების განცალკება და ვიღებთ

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{m}{2}(E - V_{eff}(r))}} \quad (\text{V-5.8})$$

რომლის ინტეგრაცია იძლევა

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{m}{2}(E - V_{eff}(r))}} + t_0 \quad (\text{V-5.9})$$

ამ გამოსახულებიდან პრინციპში შეიძლება განისაზღვროს r , როგორც დროის ფუნქცია $r(t)$, რომლის ჩასმა (V-5.3)-ში მოგვცემს კიდევ ერთ საძიებელ ფუნქციას:

$$\varphi(t) = \frac{l}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \varphi_0 \quad (\text{V} - 5.10)$$

მიღებული გამოსახულებები, რომლებსაც მოძრაობის მეორე ინტეგრალებსაც უწოდებენ, იძლევიან ნაწილაკის $V(r)$ პოტენციალურ ველში მოძრაობის სრულ ამოხსნას. ამოცანის მიღებული სრული ამონახსნი, როგორც უნდა ყოფილიყო, შეიცავს ნებისმიერ მუდმივებს, (t_0, φ_0) , რომლებიც უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებიდან. ინტეგრალის წინ ნიშნის არჩევა უნდა მოხდეს საწყისი რადიალური სიჩქარის ნიშნის მიხედვით, $\dot{r}_0 = \dot{r}(0)$.

ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია სიბრტყეში $r = r(\varphi)$ შეიძლება განვსაზღვროთ 2 გზით. ჯერ ერთი, ზოგჯერ შესაძლებელი ხდება t დროის გამორიცხვა $r(t)$ და $\varphi(t)$ ფუნქციებიდან, რომლებიც მეორე ინტეგრალებითაა მოცემული.

გარდა ამისა, ტრაექტორიის განტოლების მიღება შეგვიძლია უბრალო კვადრატურებითაც. მართლაც (VI - 5. 3)-ში (VI - 5. 8)-ის გამოყენებით მივიღებთ

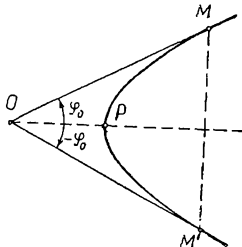
$$d\varphi = \pm \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]}}, \quad (\text{V} - 5.11)$$

საიდანაც

$$\varphi = \pm \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]}} + \varphi_0 \quad (\text{V} - 5.12)$$

ეს გამოსახულება არის ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაე ნაწილაკის ტრაექტორიის ზოგადი განტოლება, რადგანაც ის პრინციპულად $r = r(\varphi)$ ფუნქციის პოვნის საშუალებას იძლევა.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $V(r)$ ველში მოძრაე ნაწილაკის ტრაექტორიას გააჩნია პერიცენტრი P , ე.ი. წერტილი, რომელშიც r ცვლადი იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, $r_{\min} \neq 0$. ამ შემთხვევაში პოლარულ დერძებად მოსახერხებელია ავიღოთ OP წრფე, რომელიც გადის ნაწილაკის ტრაექტორიის P პერიცენტრზე და ეწოდება აფსიდა (იხ.ნახ.30)



მაშინ პერიცენტრის მქონე ტრაექტორიის განტოლება იღებს სახეს:

$$\varphi = \pm \int_{r_{\min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}} \quad (\text{V} - 5.13)$$

ამ ინტეგრალის წინ ორი ნიშნის არსებობა გეინვენებს, რომ ნაწილაკის სათანადო ტრაექტორია სიმეტრიულია OP აფსიდის მიმართ. მართლაც ტრაექტორიის ნებისმიერი $M(r_0, \varphi_0)$ წერტილისათვის იარსებებს OP აფსიდის მიმართ მისი სიმეტრიული წერტილი $M'(r_0, -\varphi_0)$.

ამიტომ P პერიცენტრის მქონე ტრაექტორიის განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}} \quad (\text{V} - 5.14)$$

სანამ მოძრაობის სოკად გამოკვლევაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ ერთი მაგალითი.

მაგალითი: m მასის ნაწილაკი მოძრაობს ცენტრალური სიმეტრიის ველში, რომელშიც მისი პოტენციალური ენერგიაა $V(r) = -\frac{5m\alpha^2}{2r^2}$. მოახდინეთ მოძრაობის განტოლების ინტეგრაცია, თუ ცნობილია, რომ $r(0) = r_0$, $v(0) = v_0 = \frac{\alpha\sqrt{5}}{r_0}$ და

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, სადაც $\theta > \frac{\pi}{2}$ არის კუთხე $\vec{r}(0)$ და $\vec{v}(0)$ ვექტორებს შორის. განსაზღვრეთ ნაწილაკის ტრაექტორია (პოლარულ ღერძად აიღეთ ძალთა ცენტრის და ნაწილაკის საწყისი მდებარეობის შემაერთებული წრფე):

ამოხსნა:

უპირველეს ყოვლისა, საწყისი პირობებიდან განვსაზღვროთ ამოცანის პარამეტრები

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{5m\alpha^2}{2r_0^2} = \frac{5m\alpha^2}{2r_0^2} - \frac{5m\alpha^2}{2r_0^2} = 0$$

$$l = mr_0 v_0 \sin \theta = m\alpha$$

$$V_{\text{eff}} = -\frac{5m\alpha^2}{2r^2} + \frac{m^2\alpha^2}{2mr^2} = -\frac{2m\alpha^2}{r^2}$$

ჩავსვათ ახლა ყველაფერი (V-5.9) ფორმულაში

$$t - t_0 = - \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[0 + \frac{2m\alpha^2}{r^2} \right]}} = - \frac{r^2}{4\alpha} \quad (\text{V} - 5.15)$$

აქ ინტეგრალის წინ ავიღეთ “-“ ნიშანი, რადგანაც პირობის თანახმად საწყისი რადიალური სიჩქარე უარყოფითია ($\theta > \frac{\pi}{2}$).

ახლა (V-5.15) - დან საწყისი პირობებით ვიპოვიოთ

$$t_0 = \frac{r_0^2}{4\alpha}$$

ამიტომაც

$$r^2 = r_0^2 - 4\alpha \cdot t$$

ეს ფუნქცია ჩავსვათ (V-5.10) განტოლებაში და ჩავატაროთ ინტეგრაცია

$$\varphi(t) = \frac{l}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \varphi_0 = \frac{l}{m} \int_{r_0^2 - 4\alpha \cdot t} \frac{dt}{r_0^2 - 4\alpha \cdot t} + \varphi_0$$

ანუ

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{4} \ln(r_0^2 - 4\alpha \cdot t)$$

ახლა რაკი პოლარული ღერძი ცენტრს აერთებს ნაწილაკის საწყის მდებარეობასთან, უნდა ავიღოთ $\varphi(0) = 0$, როცა $r = r_0$.

ამიტომ

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \ln r_0^2$$

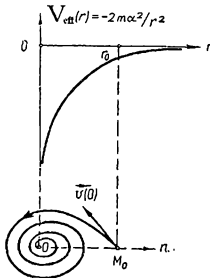
და საბოლოოდ

$$\varphi(t) = \frac{1}{4} \ln \frac{r_0^2}{r_0^2 - 4\alpha \cdot t} \quad (\text{V-5.16})$$

ტრაექტორიის მისაღებად შეგვიძლია პირველი გზა ავირჩიოთ. მიღებული ამონახსნებიდან გამოვრიცხოთ t : მიიღება ტრაექტორიის განტოლება პარამეტრული სახით

$$r = r_0 e^{-2\varphi} \quad (\text{V-5.17})$$

ამრიგად, განსახილავი ნაწილაკი, რომელიც მოძრაობს $E = 0$ ენერგიით და აქვს $l = m\alpha$ მომენტი "ეცემა" ძალთა ცენტრს ლოგარითმული სპირალის გაფლთი (ნახ.31),



ნახაზი 31

დაცემის τ დრო მოიძებნება პირობიდან $r = 0$ ანუ

$$\tau = \frac{r_0^2}{4\alpha}$$

ამ დროში ნაწილაკი ასწრებს შემოწვროს უსასრულოდ ბევრი ხეია.

(V-6). ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობის თვისებრივი გამოკვლევა

სანამ მოძრაობის ზოგადი ამონახსნის ანალიზს შევუდგებოდეთ ამ თუ იმ ცენტრალური სიმეტრიის ველისათვის, მიზანშეწონილია ჩავატაროთ მოძრაობის თვისებრივი გამოკვლევა, ე.ი. განვსაზღვროთ r კოორდინატის დასაშვები და აკრძალული არეები, მოვეძებნოთ მობრუნების წერტილები, რომლებიც განაცალუბენ დასაშვებ არეებს აკრძალულისგან და დავადგინოთ მოძრაობის ხასიათი თითოეულ დასაშვებ არეში.

ასეთი თვისებრივი ანალიზი ცენტრალური სიმეტრიის $V(r)$ ველში მოძრაობისა ტარდება ერთგანზომილებიანი $V_{eff}(r)$ ეფექტური პოტენციალის გრაფიკების მეშვეობით, რომლებსაც ავებენ იმპულსის l მომენტის სხვადასხვა ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის.

$V_{eff}(r)$ ფუნქციის გრაფიკებით და სრული E ენერგიით პირველ რიგში შეიძლება განვსაზღვროთ r ცვლადის ცვლილების არე, რომელშიც კლასიკური მექანიკის კანონებით დასაშვებია მოძრაობა (კლასიკურად დასაშვები არეები).

მართლაც, რადგან რეალური ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია $\frac{mv^2}{2}$ უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრული სიდიდე, ენერგიის შენახვის (V-5.5) კანონიდან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$E - V_{eff}(r) \geq 0, \quad (V-6.1)$$

რომელიც განსაზღვრავს r კოორდინატის ცვლილების არეებს. მობრუნების წერტილები (ანუ მოძრაობის საზღვრები) განისაზღვრება განტოლებით

$$E = V_{eff}(r). \quad (V-6.2)$$

თვისებრივი გამოკვლევის მაგალითად ავიღოთ შემდეგი სახის პოტენციალური ენერგია

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \quad (V-6.3)$$

შეენიშნოთ, რომ ასეთი ფუნქციის არჩევით ჩვენ მოვიცავთ ფიზიკური ამოცანების საკმაოდ ფართო კლასს. მართლაც, თუ $n=1$, საკმე გვექნება კულონურ ველთან, რომლისთვისაც α არის მუხტების ნამრავლი $\alpha = kq_1q_2$ (ატომური ფიზიკის ამოცანები), ხოლო გრავიტაციული ველისათვის $\alpha = Gm_1m_2$ (ციური მექანიკის ამოცანები). ასეთი პოტენციალური ფუნქცია, როცა $n=6$, გამოიყენება მოლეკულური ფიზიკის ამოცანებში მოლეკულებს შორის ურთიერთქმედების აღსაწერად (ენ-დერ-ვაალსის პოტენციალი).

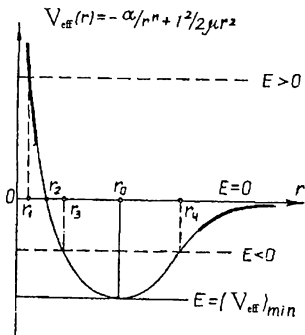
განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა

$$\alpha > 0 \quad \text{და} \quad 1 < n < 2$$

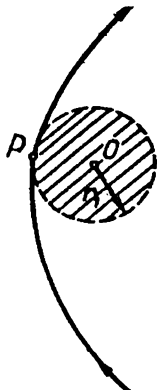
(სუსტად სინგულარული მიზიდვის ველი). ეფექტური პოტენციალი არანულოვანი $l \neq 0$ მომენტით ასე გამოიყურება:

$$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (V-6.4)$$

ამ ფუნქციის საგარაუდო გრაფიკი მოცემულია ნახ. 32-ზე



ნახაზი 32



ნახაზი 33

შეენიშნოთ, რომ თვისებრივი გამოკვლევისათვის არ არის აუცილებელი გასაკუთრებული სიზუსტით გამოვსაზოთ $V_{eff}(r)$ -ის მრუდი. საკმარისია ჯერ შეეისწავლოთ ამ მრუდის ასიმპტოტიკები, როცა $r \rightarrow 0$ და $r \rightarrow \infty$, ხოლო შემდეგ დაეხაზოთ გრაფიკი მისი ექსტრემუმების და r ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობის გათვალისწინებით. ნახაზზე ასიმპტოტური უბნები გამსხვილებული წირებითაა წარმოდგენილი.

ნახაზზე ჰორიზონტალური წყვეტილი წრფეებით ნაჩვენებია E ენერგიის მნიშვნელობები. ჩანს, რომ როცა $E > 0$, დასაშვები არეა (r_1, ∞) , ე.ი. მთელი უსასრულო სიბრტყე r_1 რადიუსის წრის გამოკლებით. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ნაწილაკის მოძრაობა არის ინფინიტური, რომელიც ხორციელდება ჰიპერბოლური ტიპის ტრაექტორიაზე. ამასთან ნაწილაკი შეიძლება მოვიდეს უსასრულობიდან, მიუახლოვდეს ძალთა O ცენტრს r_1 მანძილამდე და კვლავ უსასრულობაში წაივდეს. ნახ. 33-ზე აკრძალული არე დაშტრიხულია. ამრიგად, ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს გაფანტვის პროცესთან.

ასეთი ხასიათი აქვს მოძრაობას ნებისმიერი დადებითი სრული E ენერგიით, $E > 0$.

ანალოგიურია მოძრაობა ნულოვანი ენერგიის ($E = 0$) დროსაც. ითვალისწინებენ რა ამ შემთხვევის შუალედურ (გარდამავალ) ხასიათს დადებით და უარყოფით ენერგიებს შორის, მიღებულია ჩაეთვალოს, რომ $E = 0$ მნიშვნელობით მოძრაობა არის პარაბოლური ტიპისა, რაშიც ქვემოთ დავრწმუნდებით ცხად მაგალითზე.

როცა $E < 0$, დასაშვები არე წარმოადგენს რგოლს, რომელიც შემოსაზღვრულია r_3 და r_4 რადიუსის წრეწირებით. ამიტომ, მოძრაობა ამ დროს ფინიტურია. ექვივალენტურ ორნაწილაკიდან ამოცანაში m_1 და m_2 მასის ნაწილაკებით, გვაქვს მდგომარეობა, როცა ნაწილაკები ერთმანეთს უსასრულოდ არ

შორდება. ატომური ფიზიკის ამოცანებში ეს უთანადება ელექტრონის და პროტონის, ორი ატომის ან მოლეკულის ბმულ მდგომარეობებს.

ფინიტური მოძრაობის ტრაექტორიებს (r_3, r_4) პოტენციალურ ორმოში უწოდებენ ელიფსური ტიპის ტრაექტორიებს. ასეთი ტრაექტორიები იქნება ჩაკეტილი ორბიტები მარტო იმ შემთხვევაში, როცა r და ϕ ცვლადების ცვლილების პერიოდები T_r და T_ϕ ურთიერთთანაზომადია, ე.ი. თუ

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]}} = 2\pi \cdot q, \quad (V-6.5)$$

ანუ

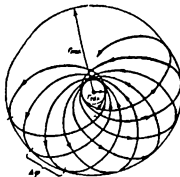
$$\Delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial l} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]} = 2\pi \cdot q, \quad (V-6.6)$$

სადაც q არის რაციონალური რიცხვი (მთელი ან წილადი).

ტრაექტორიის ჩაკეტილობა ნიშნავს, რომ ეს კუთხე იყოს 2π -ს რაციონალური რიცხვი $2\pi \frac{m}{n}$, სადაც m, n - მთელი რიცხვებია. მაშინ n მობრუნების შემდეგ (ამ პერიოდის n -ჯერ გამეორების შემდეგ) წერტილის რადიუს-ვექტორი m სრულ ბრუნს შეასრულებს და დაუბრუნდება თავდაპირველ მნიშვნელობას, ე.ი. ტრაექტორია ჩაკეტება.

რაკი r -ის ცვლილება ორმხრივად შემოსასღერული ფინიტური მოძრაობის დროს (არე r_3, r_4), ტრაექტორია მოლიანად ძეკვს რგოლის შიგნით, რომელიც შემოსასღერულია $r = r_{\max}$ და $r = r_{\min}$ რადიუსიანი წრეწირებით. ცხადია, ეს არ ნიშნავს, რომ ტრაექტორიები აუცილებლად ჩაკეტილი მრუდებია. r -ის მთელ ინტერვალში $r = r_{\max}$, $r = r_{\min}$ ცვლილების დროში (ანუ $r = r_{\max}$ -დან $r = r_{\min}$ -მდე და შემდეგ კვლავ $r = r_{\max}$ -მდე) ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი შემობრუნდება $\Delta\phi$ კუთხეზე, რომელიც (V-6.5) ფორმულით გამოისახება.

ნებისმიერ ცენტრალურ სიმეტრიის ველში, რომელიც რაგინდ მცირედ განსხვავდება ქვემოთ აღნიშნული 2 პოტენციალისაგან, $\Delta\phi$ არ არის 2π -ს რაციონალური ჯეარადი რიცხვი. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში ფინიტური მოძრაობის ტრაექტორია არ არის ჩაკეტილი. მოძრაობის პროცესში ნაწილაკი უსასრულოდ ბევრჯერ გადის კურიცენტრსა და აპოცენტრზე და უსასრულოდ დიდი დროის განმავლობაში რაგინდ მკვრივად აესებს (r_3, r_4) რგოლს. ასეთ ტრაექტორიებს უწოდებენ როზეტებს (ნახ. 34).

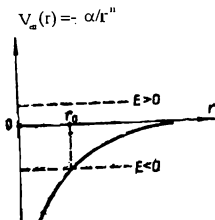


ნახაზი 34

მათზე მოძრაობა შეგვიძლია თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, როგორც ნაწილაკის მოძრაობა ელიფსზე დიდი ნახევარღერძის პრეცესიით ძალთა ცენტრის მიმართ.

როდესაც $E \rightarrow (V_{eff})_{min}$, რგოლი (r_3, r_4) იკუმშება r_0 რადიუსის წრეში, რომელზეც ხდება ნაწილაკის მოძრაობა. ამ წრიულ ორბიტაზე მოძრაობა მდგრადია, რადგანაც r_0 წერტილს შეესაბამება ეფექტური პოტენციალის მინიმუმი. ეს კი ნიშნავს, რომ მცირე შეშფოთებას არ შეუძლია შეცვალოს მისი წრიული ორბიტა.

α და n იმავე მნიშვნელობისთვის, ოღონდ $l=0$ შემთხვევაში ეფექტური პოტენციალის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 35-ზე



ნახაზი 35

ამ დროს დასაშვებია არეგებია:

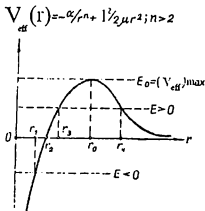
ა). თუ $E \geq 0$ - მთელი უსასრულო სიბრტყე $(0, \infty)$.

ბ). თუ $E \leq 0$ - არე $(0, r_0)$

ნებისმიერი საწყისი პირობების შემთხვევაში მოძრაობა წმინდად რადიალურია (ერთგანზომილებიანი). მართლაც, $l=0$ ტოლფასია მოთხოვნის $\phi=0$ ანუ $\phi = const$.

E ენერჯიის ნებისმიერი მნიშვნელობებისას შესაძლებელია ნაწილაკის ჩაჭურა ცენტრის მიერ: როცა $E \geq 0$ - რაგინდ დიდი მანძილიდან; როცა $E < 0$ - მანძილიდან $r \leq r_0$. თუ $E \geq 0$ და $\dot{r}(0) > 0$, მაშინ ნაწილაკი წავა უსასრულობაში.

ახლა შევისწავლოთ მიზიდვის სინგულარული ველი, $n > 2$. შემოვიხაზდეთ არანულოვანი მომენტით $l \neq 0$. ამ შემთხვევისათვის ეფექტური პოტენციალის გრაფიკს აქვს ნახ. 36-ზე გამოსახული სახე:



ნახაზი 36

დასაშვები არეუბია:

ა). როცა $E \leq 0$ - წრე რადიუსით $r_1 \leq r_2$.

ბ). როცა $E > (V_{off})_{max}$ - მთელი უსასრულო სიბრტყე $(0, \infty)$.

გ) როცა $0 < E < (V_{off})_{max}$ - გვაქვს 2 დასაშვები არე: $(0, r_3)$ და (r_4, ∞) ,

რომლებიც ერთმანეთისგან გაყოფილია პოტენციალური ბარიერით (r_3, r_4) .

ნაწილაკის მოძრაობის ხასიათი ასეთია: $(0, r_1)$ არეში - ცენტრზე დაცემა სასრულო მანძილიდან, რაც, როგორც წესი, ხდება სპირალური ტრაექტორიების გასწვრივ (გაეიხსენოთ ზემოთ განხილული ამოცანა). ცალკეულ შემთხვევებში ნაწილაკის ცენტრზე დაცემა ხორციელდება უფრო მარტივ ტრაექტორიებზე, მაგალითად, წრეწირის რკალზე. როცა $E \leq 0$, ნაწილაკის ჩაჭერა ცენტრის მიერ ხდება მისი რადიალური სიჩქარის ნიშნის მიუხედავად: როცა $\dot{r}(0) < 0$, ნაწილაკი ეცემა ცენტრს, უახლოვდება რა მას განუწყვეტლად, ხოლო როცა $\dot{r}(0) > 0$, ნაწილაკი რაღაც r_1 მომენტამდე, სანამ არ მიაღწევს მობრუნების r_1 წერტილს და არ შეიცვლის რადიალური სიჩქარის მიმართულებას, შორდება ცენტრს, ხოლო შემდეგ იწყებს მასზე დაცემას.

ნაწილაკის ცენტრზე დაცემის პირობა შეგვიძლია მივიღოთ თავდაპირველი (V-5.1) განტოლებით, რომელიც ასე გადაწერილი

$$r^2 V(r) + \frac{l^2}{2m} \leq r^2 E$$

და r მივასწრაფოთ ნულისკენ. მაშინ ეს პირობა მიიღებს სახეს:

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^2 V(r)] < -\frac{l^2}{2m} \quad (V-6.7)$$

ზემოთ განხილული ხარისხოვანი $V = -\frac{\alpha}{r^n}$ პოტენციალისათვის ეს პირობა შესრულდება, როცა

$$\begin{cases} n = 2, & \text{თუ } \alpha > l^2/2m \\ n > 2, & \text{თუ } \alpha > 0 \end{cases} \quad (V-6.8)$$

სწორედ ამისა და მკარებელი პოტენციალთა დაყოფა სუსტად და ძლიერად სინგულარულ ველებად.

ძლიერად სინგულარულ ველში, როცა $E > (V_{off})_{max}$ შესაძლებელია ნაწილაკის ჩაჭერა რაგინდ დიდი მანძილებიდან, თუ $\dot{r}(0) < 0$. მაგრამ თუ $\dot{r}(0) > 0$, მაშინ ნაწილაკი წავა უსასრულობაში ნებისმიერი სასრულო მანძილიდან.

როცა $E = (V_{off})_{max}$ და $\dot{r}(0) = 0$ - შესაძლებელია ნაწილაკის მოძრაობა r_4 რადიუსის წრიულ ორბიტაზე. მაგრამ ეს მოძრაობა ძლიერ არამდგრადია: ნაწილაკისათვის რაგინდ მცირე რადიალური იმპულსის მინიჭებისას ის ან ეცემა ცენტრს ან მიდის უსასრულობაში.

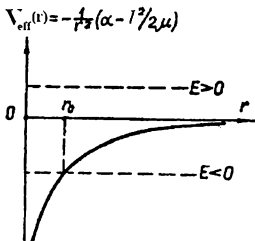
როცა $0 < E < (V_{off})_{max}$, მაშინ ნაწილაკი, მისი საწყისი კოორდინატის $r(0)$ -ის მნიშვნელობის მიხედვით მოძრაობს $(0, r_3)$ ან (r_4, ∞) არეებში. ამასთან პირველ არეში მოძრაობა არაფრით განსხვავდება ცენტრზე დაცემისაგან, როცა $E \leq 0$. მოძრაობა (r_4, ∞) არეში არის ინფინიტური და მიმდინარეობს კიპერბოლური ტიპის ტრაექტორიებზე, ე.ი. გვაქვს გაფანტვის პროცესი.

მიზიდულობის ველში $n = 2$ შემთხვევაში უროგანზომილებიან ეფექტურ

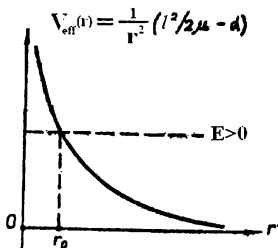
პოტენციალს აქვს სახე

$$V_{\text{eff}} = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}(\alpha - l^2/2m), & \text{თუ } \alpha > l^2/2m \\ \frac{1}{r^2}(l^2/2m - \alpha), & \text{თუ } \alpha < l^2/2m \end{cases}$$

ამ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულია (ნახ. 37 ა, ბ) -ზე.



(ა)



(ბ)

ნახაზი 37

ამ გრაფიკებიდან ჩანს, რომ როცა $2m\alpha > l^2$ ნებისმიერი E ენერჯიისა და $r(0) < 0$ -თვის ხდება ნაწილაკის დაცემა ცენტრზე (სასრულო ან რაგინდ დიდი მანძილიდან), ხოლო როცა $2m\alpha < l^2$, შესაძლებელია მხოლოდ ინფინიტური მოძრაობა $E > 0$ დადებითი ენერჯიით.

ბოლოს განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა განზიდვის ველში

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^n}, \quad (\alpha > 0, n > 0)$$

ამ დროს ეფექტური პოტენციალის გრაფიკი გამოიყურება წინამდებარე ნახაზის ბ) გრაფიკის მსგავსად. აქედან ჩანს, რომ განზიდვის ველში მხოლოდ ინფინიტური მოძრაობაა შესაძლებელი დადებითი ენერჯიით.

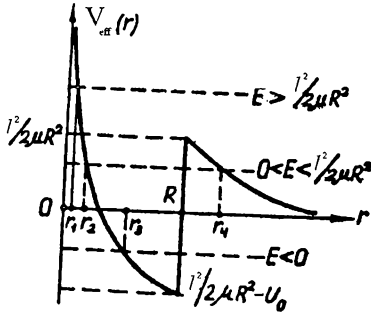
მაგალითი. განსაზღვრეთ ნაწილაკის შესაძლო ტრაექტორიები სფერულ სწორკუთხა პოტენციალურ ორმოში

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

ამოხსნა. ამ ველში მოძრაობის შესწავლისას აუცილებელია გაითვალისწინოთ, რომ R რადიუსის სფეროს შიგნით და გარეთ ნაწილაკი მოძრაობს თანაბრად და წრფივად, შესაბამისად, სინქარეებით

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(E + V_0)} \quad \text{და} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

ამ სფეროს ზედაპირზე ხდება მისი მოძრაობის მიმართულების შეცვლა უსასრულოდ დიდი ძალის გაელენით. ეფექტური პოტენციალის მრუდი გამოსახულია ნახ. 38-ზე.



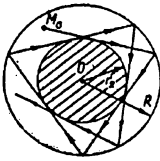
ნახაზი 38

დასაშვები არეები: (r_3, R) , როცა $\frac{l^2}{2mR^2} - V_0 < E < 0$; არეები (r_2, R) და (r_4, ∞) ,

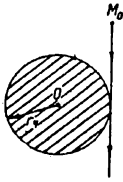
როცა $0 < E < \frac{l^2}{2mR^2}$ და არე (r_1, ∞) , როცა $E > \frac{l^2}{2mR^2}$.

(r_2, R) და (r_3, R) არეებში მოძრაობა არის ფინიტური და ხდება ტყვიან წრეებზე, რომლებიც მრავალჯერადად აირეკლებიან არის ერთი საზღვრიდან და ეხებიან მის მეორე საზღვარს (ნახ. 39ა). (r_4, ∞) არეში --ინფინიტური მოძრაობა, როცა $0 < E < \frac{l^2}{2mR^2}$ და $r(0) > R$, ხდება წრეებზე, რომლებიც ეხებიან

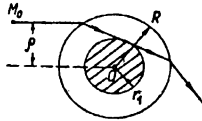
r_4 რადიუსის წრეწირებს (ნახ. 39ბ) დაბოლოს, როცა $E > \frac{l^2}{2mR^2}$ ხდება ტრაექტორიების გარდატეხა (ნახ.39გ).



(ა)



(ბ)



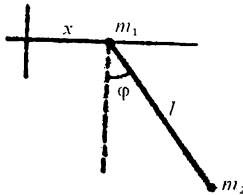
(გ)

ნახაზი 39

ამოცანები:

1. აინტეგრეთ სიმძიმის ძალის ველში კონუსის ზედაპირზე მოძრავი მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ კონუსი მოთავსებულია ვერტიკალურად წვეროთი ქვემოთ და წვეროსთან გაშლის კუთხეა 2α .

2. აინტეგრეთ ბრტყელი საქანის მოძრაობის განტოლება, რომლის m_1 მასის დაკიდების წერტილი ასრულებს მოძრაობას პორიზონტალური მიმართულებით (იხ. ნახ. 40). აჩვენეთ, რომ ამ ორივე ამოცანაში საქმე გვაქვს ელიფსურ ინტეგრალთან.



ნახაზი 40

3. აჩვენეთ, რომ თუ ნაწილაკი მოძრაობს წრის რკალის გასწვრივ ცენტრალური მიზიდვის ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია იმავე წრეწირის წერტილისაკენ, მაშინ ეს ძალა აღმოჩნდება მანძილის მეხუთე ხარისხის უკუპროპორციული.

არსებობს ბერტრანის თეორემა, რომელიც ამტკიცებს, რომ ერთადერთი ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალები, რომლებსთვისაც ბმული მდგომარეობების ორბიტები ნებისმიერი საწყისი პირობებისას ჩაკეტილი მრუდებია,

არიან კულონური პოტენციალი $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ და სამგანზომილებიანი ისოტრო-

პული ოსცილატორის პოტენციალი $V(r) = \frac{kr^2}{2}$. ამ თეორემის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით ქვემოთ.

V-7. მოძრაობა ჩაკეტილ პერიოდულ ორბიტებზე (ორბიტის ჩაკეტილობის პირობები). ბერტრანის თეორემა

დასადგენი გვაქვს ორბიტების ჩაკეტილობის პირობები მოძრაობის განტოლების ცხადი ამოხსნის გარეშე. სახელდობრ, თურმე შესაძლებელია მივიღოთ მეტად მძლავრი თეორემა მიზიდვის ხასიათის ცენტრალური ძალების შესახებ, რომლებიც იძლევიან ჩაკეტილ ორბიტებს, ანუ ორბიტებს, რომლებზეც ნაწილაკი პერიოდულად იმეორებს თავის ნაკედივს.

პირველ რიგში აღვწეროთ ძალთა ცენტრის ირგვლივ კერძო სახის ჩაკეტილ ორბიტაზე, სახელდობრ, წრეწირზე მოძრაობა. ნებისმიერი მოცემული l მომენტისათვის ნაწილაკი იმობრავებს წრეზე, თუკი ეფექტურ $V_{eff}(r)$ პოტენციალს ექნება მინიმუმი რაიმე r_0 მანძილზე და, ამასთან ერთად, სრული E ენერგია ზუსტად დაემთხვევა $V_{eff}(r_0)$ -ს. აშკარაა, რომ ეფექტური პოტენციალისათვის ექსტრემუმის პირობა ასე გამოიყურება:

$$V'_{eff}(r_0) = V'(r_0) - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0 \quad (V-7.1)$$

ანუ

$$l^2 = mr_0^3 V'(r_0), \quad (V-7.2)$$

რაც ჩვენი ადრინდელი თანაფარდობების თანახმად შეესაბამება იმას, რომ წრიულ ორბიტაზე ნაწილაკის რადიალური სინქარე ნულის ტოლია, $\dot{r} = 0$.

ეს აგრეთვე ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ცენტრალური ველის შემთხვევაში შესაძლებელია გვექონდეს რაიმე r_0 რადიუსის წრეწირზე მოძრაობა, თუკი l მომენტი მოიცემა (V-7.2) თანაფარდობით, ხოლო ნაწილაკის სრული ენერგიაა

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2} \quad (V-7.3)$$

ცხადია, რომ თავის მხრივ ეს გულისხმობს სათანადო საწყისი პირობების შერჩევას.

ორბიტა ეფექტური პოტენციალის მინიმუმს რომ შეესაბამებოდეს (ანუ მოძრაობა სტაბილური რომ იყოს) აუცილებელია, რომ ეფექტური პოტენციალის მეორე რიგის წარმოებული იყოს დადებითი

$$V''_{eff}(r)|_{r=r_0} = V''(r_0) + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0$$

ანუ

$$r_0 V''(r_0) + 3V'(r_0) > 0 \quad (V-7.4)$$

r_0 -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც ამ უტალობას აკმაყოფილებენ, შესაძლებელია დავადგინოთ სტაბილური წრიული ორბიტა, თუ ნაწილაკს მივანიჭებთ ისეთ საწყის ენერგიასა და იმპულსის მომენტს, რომლებიც (V-7.1-2) პირობებს შეასრულებენ.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: პოტენციალის როგორი ფორმა უნდა ავიღოთ, რომ ოდნავ შეცვლილი (შეშფოთებული) წრიული ორბიტები კვლავ ჩაკეტილი იყვნენ.

ზემოხსენებულ წრიულ ტრაექტორიაზე მოძრაობისას სათანადო კუთხური სინქარე განისაზღვრება მომენტის გამოსახულებიდან:

$$\omega_0 = \dot{\phi} = \frac{l}{mr_0^2},$$

რაც (V-6.2)-ის თანახმად გეაძლევს

$$\omega_0^2 = \left(\frac{l}{mr_0^2} \right)^2 = \frac{mr_0^3 V'(r_0)}{m^2 r_0^4} = \frac{V'(r_0)}{mr_0} \quad (V-7.5)$$

რაკი განსახილავი წრიული ორბიტა სტაბილურია, ნაწილაკის ენერჯის მცირე ზრდა წრიულის სათანადო მნიშვნელობიდან გამოიწვევს მხოლოდ r მანძილის მცირედ შეცვლას r_0 მნიშვნელობიდან: $\delta r = r - r_0$, ხოლო ახალ ორბიტაზე მოძრაობის კუთხური მოიძებნება პირობიდან

$$\omega_1 = \dot{\phi} = \frac{l}{mr^2} \approx \frac{l}{mr_0^2} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0} \right)$$

მეორეს მხრივ, ახალ ორბიტაზე კუთხური სინქარე შეგვიძლია მოვძებნოთ ეფექტური პოტენციალის მეორე წარმოებულის საშუალებით (გავეხსენოთ მცირე რხევების თეორია)

$$m\omega_1^2 = V_{eff}''(r) = V''(r) + \frac{3V'(r)}{r} \approx V''(r_0) + \frac{3V'(r_0)}{r_0} \quad (V-7.6)$$

ნაწილაკის ტრაექტორია იქნება ჩაკეტილი მრუდი, თუ ეს კუთხური სინქარეები ურთიერთთანაზომადია, ე.ი.

$$\omega_1 = \omega_0 \nu, \quad (V-7.7)$$

სადაც ν - რაციონალური რიცხვია.

ამ მოთხოვნის დასაბუთება შეიძლება ასე: როცა ნაწილაკის ენერჯია ოდნავ მეტი გახდება (V-7.3)-ით მოცემულ მნიშვნელობაზე, კვლავ უნდა გეჭონდეს წრიული ორბიტა, ხოლო პერიოდული ორბიტა რომ გეჭონდეს ნებისმიერ ენერჯიებზე, შემობრუნების კუთხე თავდაპირველ წერტილში დაბრუნებისას $2\pi - \nu$ რაციონალური ჯერადი რიცხვი უნდა გამოვიდეს.

თუ (V-7.7) პირობას ავიყვანთ კვადრატში და (V-7.5,6) განტოლებებს გამოვიყენებთ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას პოტენციალზე:

$$rV''(r) = (\nu^2 - 3)V'(r)$$

ამ განტოლების ამოხსნა ხარისხოვანი პოტენციალი

$$V(r) = cr^\alpha, \quad \alpha = \nu^2 - 2 \quad (V-7.8)$$

სადაც c - ნებისმიერი საინტეგრაციო მუდმივია. ამრიგად, ხარისხოვანი პოტენციალის შემთხვევაში ორბიტაზე მოძრაობის პერიოდების ხასიათი დამოკიდებული არ ყოფილა ენერჯიაზე, რაც თავის მხრივ საწყის პირობებს განსაზღვრავს. ეს კი ნიშნავს, რომ შემობრუნების სიხშირე ერთნაირი უნდა იყოს როგორც ძალიან დიდი, ასევე ძალიან მცირე ენერჯიებისათვის. როგორც ზემოთ გაიკეთა, ენერჯიაზე დამოუკიდებლობას ვერ ექნება ადგილი ყველა ცენტრალური პოტენციალისათვის. მას ადგილი აქვს მხოლოდ ხარისხოვანი პოტენციალებისათვის, თუმცა წრეზე მოძრაობა შესაძლებელი იყო ნებისმიერი ცენტრალური პოტენციალებისათვის.

ამავე დროს აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ცენტრზე დაცემის თავიდან ასაცილებლად, როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, უნდა შესრულდეს პირობა

$$\alpha > -2$$

ამასთან თავიდანვე შეგვიძლია გამოვირიცხოთ $\alpha = 0$ შემთხვევა, რომელიც ლოგარითმულ პოტენციალს შეესაბამება. მართლაც,

$$r^n \rightarrow \alpha \ln r, \quad \alpha \rightarrow 0$$

ეს შემთხვევა გამოირიცხება იმის გამო, რომ მისთვის $v^2 = 2$, ანუ $v = \sqrt{2}$, რაც ირაციონალური რიცხეია.

ამრიგად, ცალკ-ცალკე უნდა განვიხილოთ 2 შემთხვევა: $\alpha = v^2 - 2 > 0$, ე.ი. მანძილის მიხედვით უსასრულოდ ზრდადი (მიზიდვის) პოტენციალი და $\alpha = v^2 - 2 < 0$, ანუ მანძილის მიხედვით კლებადი პოტენციალი.

ამის შემდეგ სხვადასხვა მოქმედ სახელმძღვანელოში ანალიზის სხვადასხვა გზებია არჩეული. ასე მაგალითად, გოლდსტეინის სახელმძღვანელოს უკანასკნელ, მე-3 გამოცემაში განიხილება მობრუნების $r_1 = r_{\min}$ და $r_2 = r_{\max}$ წერტილებს შორის მოძრაობისას შემობრუნების კუთხის ცვლილების ფორმულა

$$\Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{ldr}{r^2 \sqrt{2m(E-V) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

ამ გამოსახულებაში პოტენციალისათვის ხარისხოვანი ყოფაქცევის $V = ar^{n+1}$ ჩასმის და $r \rightarrow u = 1/r$ ცვლადის გარდაქმნის შემდეგ შეისწავლება გამოსახულება

$$\Delta\varphi = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}, \quad (V-7.9)$$

რომელიც ანალიზურად ცხადი სახით ამოიხსნება რამდენიმე შემთხვევაში, სახელდობრ,

$$n = 1, -2, -3,$$

ამ დროს პასუხი გამოიხატება ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით და, ამრიგად, ეთანადება პერიოდულ მოძრაობას, და აგრეთვე, როცა

$$n = 5, 3, 0, -4, -5, -7.$$

ამ დროს პასუხი გამოიხატება ე.წ. ელიფსური ფუნქციებით და არ შეესაბამება პერიოდულ მოძრაობას.

შემდგომ ამ შემთხვევებისგან გამოირიცხება $n = -3$, რადგან იძლევა ცენტრზე დატყვას. ასე, რომ რჩება ორად-ორი შემთხვევა პერიოდული ჩაკეტილი ორბიტებისა - იზოტროპული ოსცილატორი ($n = 1$) და კელონური ($n = -2$) პოტენციალები.

ამ მტკიცების ნაკლი ისაა, რომ მხოლოდ კონკრეტული შემთხვევები განიხილება.

გაცილებით მეტ ინფორმაციას შეიცავს ე. არნოლდისა და მაკკელის სახელმძღვანელოები, რომლებშიც პრაქტიკულად ერთი და იგივე სტრატეგიაა არჩეული (იხ. სახელმძღვანელოთა ნუსხა ლექციების კურსის ბოლოში).

განიხილება გარდაქმნა $x = 1/r$ და ამოცანა მიყვანილია ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაზე, რაც ამ თავის დასაწყის პარაგრაფებში იყო გადმოცემული. ამიტომ

$$\Delta\varphi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - w(x))}}, \quad (V-7.10)$$

სადაც

$$w(x) = \frac{x^2}{2} + V\left(\frac{1}{x}\right). \quad (V-7.11)$$

ამის შემდეგ გამოთვლება წრიულთან ახლო მდებარე ორბიტის შესაბამისი შემობრუნების კუთხე, რაც 1-განზომილებიანი ამოცანის ნახევარპერიოდს ეთანადება. ეს კუთხეა

$$\Delta\varphi_c = \pi \sqrt{\frac{V'}{3V' + rV''}} \quad (V-7.12)$$

(ამ შედეგის სამართლიანობაში დარწმუნება ადვილია ω_1^2 -ისათვის ზემოთ მოყვანილი ფორმულიდანაც, თუ ამავე დროს გაეხსენებთ, რომ $\varphi_c = \pi/\omega_1$).

ამის შემდეგ დგინდება, რომ ეს კუთხე დამოუკიდებელია r რადიუსზე მხოლოდ ხარისხიანი პოტენციალებისათვის $V(r) = r^\alpha$, ამ დროს

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + 2}}$$

და იმ მოთხოვნით, რომ ეს კუთხე არ იყოს დამოკიდებული E ენერჯიაზე, განიხილება ზღვრული შემთხვევები: $E \rightarrow \infty$ (დადებითი ხარისხის მანევრების დროს) და $E \rightarrow 0$ (უარყოფითი ხარისხის მანევრებისათვის). გარკვეული მიახლოებების გამოყენების შემდეგ აღმოჩნდება, რომ ადგილი აქვს სასურველ შედეგს (ბერტრანის თეორემას).

ამ განხილვის ტოლფასია ა. პერელომოვის წიგნში აღწერილი მტკიცება. ჩვენ სწორედ ამ მეთოდს გაყვებით ვ. არნოლდის განხილვასთან კომბინაციაში შემდეგნაირად: ჩაატაროთ კუთხის გამოსახულებაში ცვლადის შემდეგი გარდაქმნა: $r \rightarrow \rho = r_1/r$. გვაქვს

$$\Delta\varphi = \int_{\rho_0}^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2mE_1^2}{l^2} - \frac{2mr_1^2}{l^2} V - \rho^2}}, \quad \rho_0 = \frac{r_1}{r_2} \quad (V-7.13)$$

რაკი საწყის პირობებზე (ენერჯიაზე) დამოუკიდებელი შედეგი უნდა მივიღოთ, შეგვიძლია ინტეგრალი გამოვთვალოთ ნებისმიერი ენერჯისათვის.

ჯერ განვიხილოთ დადებითი ხარისხის მანევრების შემთხვევა. რადგან ამ დროს პოტენციალი უსასრულოდ ზრდადია მანძილის მიხედვით, ნათელია, რომ მისთვის მობრუნების წერტილი r_2 წავა უსასრულობაში, როცა $E \rightarrow \infty$, ანუ ამ დროს გვექნება $\rho_0 \rightarrow 0$. ახლა ჩაკეტილ მრუდად კარგი მიახლოებით შეგვიძლია ავიღოთ წრეწირი და ინტეგრალქვეშ გამოვიყენოთ (V-7.3) ფორმულა. მივიღებთ შედეგზე

$$\Delta\varphi = \int_{\rho_0}^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \arcsin \rho \Big|_{\rho_0}^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \rho_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

მეორეს მხრივ, შემობრუნების კუთხე უნდა იყოს $\frac{\pi}{\nu}$, ე.ი. $\nu = 2$.

ამრიგად, პოტენციალისათვის მივიღეთ,

$$V = cr^2, \quad c > 0. \quad (V-7.14)$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როცა $\nu^2 - 2 < 0$, ანუ პოტენციალს აქვს სახე

$$V = -kr^{-\alpha}, \quad k > 0, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (V-7.15)$$

ამჯერად კვლავ $x = l/r$ გარდაქმნა გამოვიყენოთ. ეუბრუნდებით ერთგანზომილებიან ამოცანას. გავეანალიზოთ იგი $E \rightarrow 0$ ზღვარში. მაშინ

$$\Delta\varphi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{-2w(x)}},$$

სადაც სახლვრებად დგას მობრუნების წერტილები, ამიტომ ცხადია, რომ $w(x_{\min}) = w(x_{\max}) = 0$, რაც ჩვენი პოტენციალისათვის ასე გამოიყურება

$$\frac{x_{\min}^2}{2} - k \frac{x_{\min}^{\sigma}}{l^{\sigma}} = \frac{x_{\max}^2}{2} - k \frac{x_{\max}^{\sigma}}{l^{\sigma}} = 0$$

ამავე დროს პოტენციალი ნულის ტოლი ხდება შორ მანძილებზე, $r \rightarrow \infty$. ამიტომ

$$x_{\min} = 0, \text{ ხოლო } x_{\max} = (2J)^{\frac{1}{2-\sigma}}, \quad J \equiv \frac{k}{l^{\sigma}} \quad (V-7.16)$$

ამიტომ ცვლადის გატიმვის გამოყენებით, $x = x_{\max} y$, საძიებელი კუთხის გამოსახულება მიიყვანება სახეზე

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{dy}{(y^{\sigma} - y^2)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{y^{\frac{\sigma-1}{2}} dy}{\sqrt{1-y^{\sigma}}}$$

რაც ცხრილის მარტივ ინტეგრალზე დაიყვანება აღნიშნით $\rho = y^{\frac{\sigma}{2}} \Rightarrow d\rho = \frac{\nu^{\sigma}}{2} y^{\frac{\sigma}{2}-1}$. ამრიგად

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\nu^{\sigma}} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{2}{\nu^{\sigma}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\nu^{\sigma}}$$

როგორც ვიცით, უნდა მიგვეყო $\frac{\pi}{\nu}$. ამიტომ გეიქეს თანაფარდობა

$$\frac{\pi}{\nu^{\sigma}} = \frac{\pi}{\nu} \Rightarrow \nu^{\sigma} = \nu \Rightarrow \nu = 0,1$$

ცხადია, ნულთან მნიშვნელობა არ გამოგადგება, რადგან შესაბამება ცენტრზე დაცემის შემთხვევას, $V \approx r^{-2}$ და დაგვრჩა $\nu = 1$ ანუ $V = -\frac{k}{r}$.

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ცენტრალური ველების შემთხვევაში საწყისი პირობებისგან და პოტენციალის სიძლიერისგან (c ან k) დამოუკიდებლად ჩაკეტილ პერიოდულ ორბიტებზე მოძრაობა მიიღება მხოლოდ ორ შემთხვევაში, სახელდობრ, იზოტროპული ოსცილატორისა ($V = cr^2$, $c > 0$) და კულონური პოტენციალისათვის ($V = -\frac{k}{r}$, $k > 0$).

სწორედ ესაა ბერტრანის თეორემა.

შენიშნა: ზემოთ მიღებული ორივე ცნობილი პოტენციალისათვის შემობრუნების კუთხე $\Delta\varphi$ გამოვა π -ს რაციონალური ჯერადი. ამ გამოყვანაში იგულისხმებოდა, რომ საწყისი პირობები მხოლოდ ოდნავ იცვლებოდა წრული ორბიტის განმსაზღვრელ პირობებთან შედარებით. აშკარაა, რომ ცნობილი პოტენციალების გარდა შემობრუნების კუთხე π -ს რაციონალური რიცხვი გამოვა სხვა უცნაური ხარისხის მანევრებლებისათვისაც, როგორცაა, მაგალითად, $7/9$, $1/4$ და ა.შ. ეს ეგზოტიკური ხარისხებიც დასაშვებია გამოდის. მაგრამ საქმე ისაა, რომ როცა საწყისი პირობებს ძალიან ვცვლით, ამავე ძიებებში უნდა მოგვეცნენ ჩაკეტილი პერიოდული მოძრაობა. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განხილული უნდა იყოს გადასრები, რომლებსაც სივრცის მწკრივად გაშლაში მეტი რიგის შესწორებები გასათვალისწინებელია. სწორედ ეს პრობლემა გადაწყვიტა ჯ. ბერტრანმა 1873 წელს. ესაა მეტად მნიშვნელოვანი თეორიული შედეგი, რომლის მისაღებად საქმად რთული მათემატიკური მანიპულაციებია ჩასატარებელი.

ნვენ მიერ მოუყვანილ მტიციებაში დიდი გადახრების გათვალისწინების მცდელობა მდგორ მარუობს უსასრულო ენერჯის სდერის განხილვაში.

ნიშნადობლივია, რომ თუორემაში მიღებული შედეგი სამართლიანი აღმონდა ბუნებაში კარგად ცნობილი ძალებისათვის, როგორცია, პუკის დრეკადობის ძალა და მსოფლიო მიზიდულობის ძალა.

ასტრონომიული დაკვირვებები ცხადყოფენ, რომ ხილული ციური ობიექტები მოძრაობენ ორბიტებზე, რომლებიც პირველ მიახლოებაში არიან ნაკეტილი. უმრავლესი მათგანისათვის ნაკეტილი ორბიტისგან მცირე გადახრები შეიძლება მიეწეროს სხვა ახლომდებარე ციური სხეულებით გამოწვეულ შემფოთებებს. ნაკეტილი ორბიტები დამახასიათებელია არა მარტო მზის სისტემის პლანეტებისათვის, არამედ ე.წ. ორმაგი ვარსკვლავებისათვისაც, რაც დადასტურებულია უამრავი გაზომვებით.

რაც შეეხება პუკის კანონს, ის ვერ გეჟენება ყველა მანძილზე, რადგან ეს ნიშნავს ძალის უსასრულო ზრდას მანძილის მიხედვით. პუკის კანონი, როგორც ცნობილია, დაიკვირვება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობიდან მცირე გადახრებისას და ასრულებს მნიშვნელოვან როლს ნიუთონებთან აღნაგობაში. უკანასკნელი წარმოდგენების თანახმად მანძილის მიხედვით ზრდადი პოტენციალები უნდა განაპირობებდნენ მატერიის ფუნდამენტალურ შემადგენლებს, ე.წ. კვარკებს შორის არსებულ ურთიერთქმედებას.

თუ გრავიტაციულ ძალებს დაუბრუნდებით, უნდა აღენიშნოთ, რომ ნაწიყის პირობების ძალიან ფართო არეში ნაკეტილი ორბიტების არსებობა მიუთითებს იმაზე, რომ გრავიტაციული ძალები ინარუნებენ თავის $\frac{1}{r^2}$ ხასიათს ძალიან დიდ მანძილებზეც. თუმცა

უკანასკნელ წლებში დაკვირვებულია სამყაროს ამჟარბული გაფართოება, რომლის ახსნის ერთ-ერთი მექანიზმი მდგომარეობს სწორედ გრავიტაციული ურთიერთქმედებების შესუსტებაში და მანძილზე დამოკიდებულების კანონის ცვლილებაში იმის გამო, რომ სამყაროს შეიძლება პქონდეს დამატებითი განზომილებები, რომლებიც ახლო (ჩვეულებრივ) მანძილებზე დაუშუარადია (G.Dvali, G.Gabadadze, M.Porrati, Phys. Letters. B485, 208-214 (2000)).

(V - 8). კეპლერის ამოცანა

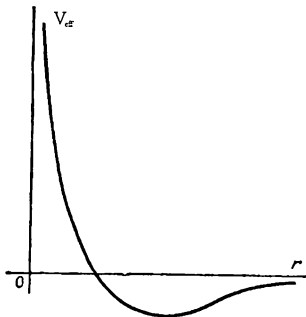
ცენტრალური სიმეტრიის ველების უმნიშვნელოვანესი მაგალითია ველები, რომლებშიც m_1 და m_2 ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია (ანუ ეკვივალენტურად μ დაყვანილი მასის მქონე ნაწილაკის პოტენციალური ენერჯია) უკუპროპორციულია მანძილისა, r , ხოლო სათანადო ძალები მანძილის კუადრატის, r^2 , უკუპროპორციულია. ასეთ მაგალითს განეკუთვნებიან ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის ველები და კულონური ელექტროსტატიკური ველი, რომელიც გრავიტაციულიისაგან განსხვავებით შეიძლება იყოს როგორც მიზიდვისა, ასევე განზიდვისა.

ნაწილაკის კულონურ $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ველში მოძრაობის ამოცანას უწოდებენ კეპლერის ამოცანას.

ჯერ განვიხილოთ ამოცანა მიზიდვის ველში, როცა α არის დადებითი მუდმივი.

ზოგადი განხილვის თანახმად გვიანტერესებს ნაწილაკის ტრავექტორიისა და სხვა მახასიათებლების მოძებნა შემდეგი ფუქტური პოტენციალით (ნახ. 41)

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (V-8.1)$$



ნახაზი 41

ცხადია, რომ E სრული ენერჯისა და $l \neq 0$ მომენტის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობისათვის r კოორდინატას შეუძლია მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა, რაც განისაზღვრება $E = V_{\alpha}(r)$ განტოლებიდან და, ამრიგად, ერთ-ერთი ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულებიდან

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \right] \quad (\text{V-8.2})$$

ამიტომ ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლებას მივიღებთ ზოგადი (IV-5.14) გამოსახულებიდან მასში (V-8.1) -ის გათვალისწინებით

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}}} \quad (\text{V-8.3})$$

მარჯვენა მხარეში ჩასმით $u = \frac{1}{r}$ და ტრივიალური გარდაქმნებით ინტეგრალი მიიყვანება სახეს:

$$\varphi = - \int_{u_{\min}}^{\frac{1}{r}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 \alpha^2}{l^4} - \left(u - \frac{\mu\alpha}{l}\right)^2}}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$b^2 = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 \alpha^2}{l^4}$$

$$x = u - \frac{\mu\alpha}{l}$$

რის შედეგად მივაღწიოთ ცხრილის ინტეგრალის სახეს:

$$\varphi = - \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{b}$$

თუ დაეუბრუნდებით ძველ ცვლადებს, მივიღებთ:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{l^2}{\mu\alpha} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$$

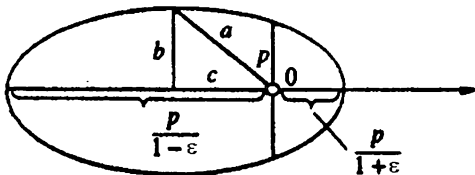
საიდანაც ტრაექტორიის განტოლებას ჩაწერთ შემდეგი კომპაქტური სახით:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi \quad (V - 8.4)$$

სადაც

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{და} \quad p = \frac{l^2}{\mu\alpha} \quad (V - 8.5)$$

მიღებული (V-8.4) განტოლება არის კონუსური კვეთის ფოკალური განტოლება. ესაა მეორე რიგის მრუდის ისეთი განტოლება, როცა კოორდინატთა სათავედ, რომელიც თანხვედრა O ცენტრს, მიღებულია მრუდის ერთ-ერთი ფოკუსი. ამასთან ε მუდმივს უწოდებენ მეორე რიგის მრუდის ექცენტრისიტეტს, ხოლო p -ს კი ფოკალურ პარამეტრს. ნებისმიერი კონუსური კვეთის ფოკალური პარამეტრი ტოლია ფოკუსიდან მრუდის გადაკვეთის წერტილამდე აღმართული პერპენდიკულარის სიგრძისა (ნახ.42).



ნახაზი 42

ჩვენ მიერ მიღებული ამონახსნი სახესებით ეთანხმება წინა პარაგრაფებში სუსტად სინგულარული მიზიდვის ველის შემთხვევაში ჩატარებულ თვისობრივ ანალიზს.

მართლაც (VI - 8.5) ექცენტრისიტეტის ფორმულიდან ნათელია, რომ ნაწილაკის ტრაექტორია კულონური მიზიდვის ველში შეიძლება იყოს:

ა) ჰიპერბოლა ($\varepsilon > 1$), თუ $E > 0$;

ბ) პარაბოლა ($\varepsilon = 1$), თუ $E = 0$;

გ) ელიფსი ($\varepsilon < 1$), თუ $E < 0$;

დ) წრეწირი ($\varepsilon = 0$), რადიუსით $\frac{l^2}{\mu\alpha}$, თუ $E = -\frac{\mu\alpha^2}{l^2}$

ორი ნაწილაკის ეკვივალენტურ ამოცანაში თითოეული ნაწილაკის ტრაექტორია იქნება მყორე რიგის ანალოგიური მრუდები, რომელთა ფოკუსი თანხედება მათ საერთო მასათა ცენტრს.

განვიხილოთ უფრო დეტალურად ელიფსური მოძრაობა. მიღებული გამოსახულებების გამოყენებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძები ამოცანის ძირითადი მახასიათებლებით E, l და α :

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (V-8.6)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (V-8.7)$$

პერიოდის გამოსათვლელად ჩავატაროთ კეპლერის მე-2 კანონის (V-5.7) გამოსახულების ინტეგრაცია ორბიტაზე ერთი სრული ბრუნვისათვის. აშკარაა, რომ მივიღებთ თანაფარდობას:

$$lT = 2\mu S,$$

სადაც S არის ორბიტის ფართობი. ელიფსისათვის $S = \pi ab$ და ზედა ფორმულების მიხედვით პერიოდისათვის ვიპოვით

$$T = \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} \quad (V-8.8)$$

ანდა $|E|$ ენერჯიის გამორიცხვით დიდი ნახევარღერძის (V-8.6) ფორმულიდან,

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}},$$

საიდანაც

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} \quad (V-8.9)$$

რაც კეპლერის მე-3 კანონს გამოხატავს.

განვიხილოთ ახლა სისტემა “პლანეტა - მზე”, რომლისთვისაც $\alpha = Gm_1 m_2$, სადაც m_1 პლანეტის მასაა, ხოლო m_2 - მზის მასა. რადგან $m_2 \gg m_1$ (ან თუ ავიღებთ, რომ $m_2 \rightarrow \infty$ და მზე უძრავია), ძალიან კარგი მიახლოებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mu = m_1$ და $a = a_1$, სადაც a_1 არის პლანეტის ელიფსური ორბიტის დიდი ნახევარღერძი. ეს მონაცემები შევიტანოთ (V-8.9) ფორმულაში. მივიღებთ

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi}{Gm_2},$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\frac{T^2}{a_1^3}$ შეფარდება ერთნაირაა მზის სისტემის ყველა პლანეტისათვის.

თუ გვჭირდება მზის მოძრაობის გათვალისწინება (ანუ ის, რომ მზის m_2 მასა სასრულოა), უნდა ავიღოთ (იხ. პარაგრაფი (V-4))

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ამ დროს საძიებელი შეფარდება ტოლია

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^3 \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^3$$

ანუ

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \approx \frac{4\pi^2}{Gm_2} \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right) \quad (\text{V} - 8.10)$$

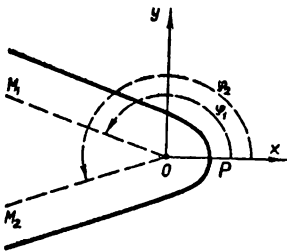
აქედან ჩანს, რომ კეპლერის პირველი ორი კანონისგან განსხვავებით, რომლებიც მკაცრად სრულდება, მე-3 კანონი მიახლოებითია, თუმცა სრულდება მაღალი სიზუსტით. μ ნაწილაკის უმცირესი და უდიდესი დაშორებანი ველის O ცენტრამდე (ანუ მისი პერიცენტრის და აპოცენტრის კოორდინატები) განისაზღვრება გამოსახულებებით:

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon)$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon)$$

რომელთა მიღება შეიძლებოდა აგრეთვე $E = V_{\text{eff}}(r)$ განტოლების ფესვებით (იხ. V-7.2).

როცა $E > 0$ ნაწილაკის მოძრაობა კულონურ ველში ხდება ჰიპერბოლურ ტრაექტორიებზე, რომლებიც გარს უვლიან ველის ცენტრს (ნახ. 43).



ნახაზი 43

ამ ტრაექტორიების ასიმპტოტებია OM_1 და OM_2 სხივების პარალელური წრფეები, რომლებიც OX ღერძთან ადგენენ კუთხეებს

$$\varphi_{1,2} = \pi \mp \arccos \frac{1}{\varepsilon}$$

ხოლო ცენტრამდე უმცირესი მანძილი მოიცემა ასე:

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(\varepsilon - 1), \quad a = \frac{\alpha}{2E} \quad (\text{V} - 8.11)$$

და ბოლოს, როცა $E = 0$, კონუსური კვეთის ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon = 1$, ე.ი. მოძრაობა ხდება პარაბოლურად, რომელსაც ასიმპტოტები არ გააჩნია. კუთხისთვის მიიღება $\varphi_{1,2} = \pi$, ხოლო $r_{\min} = \frac{p}{2}$. კულონურ ველში ინფინიტური მოძრაობის ეს

შემთხვევა რეალიზდება, როცა μ ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას უსასრულოდ დაშორებული წერტილიდან ნულოვანი საწყისი სიჩქარით $v(0) = 0$.

დასასრულ, განვიხილოთ μ ნაწილაკის მოძრაობა განზიდვის კულონურ ველში

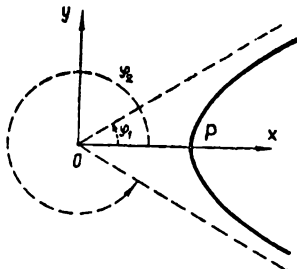
$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad (\alpha > 0) \quad (V - 8.12)$$

როგორც უკვე ითქვა, ამ დროს მხოლოდ ინფინიტური მოძრაობაა შესაძლებელი დადებითი $E > 0$ ენერგიით. სათანადო ტრაექტორიის განტოლების მოსაძებნად კვლავ (V - 5.14) ფორმულას უნდა მივმართოთ. ამასთან გამოთვლები არაფრით განსხვავდება მიზიდვის შემთხვევისაგან. საბოლოოდ მიიღება

$$\frac{p}{r} = -1 + \varepsilon \cos \varphi \quad (V - 8.13)$$

სადაც p და ε პარამეტრები განისაზღვრებიან ძველი ფორმულებით.

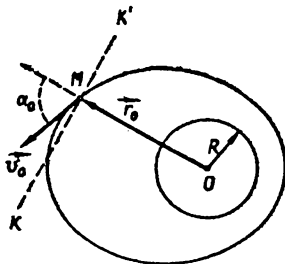
მიღებული განტოლება გეინვენებს, რომ განზიდვის კულონურ ველში ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია არის ჰიპერბოლა, რომელიც გადის ველის ცენტრის ახლოს, ოღონდ ახლა ველის O ცენტრი თანხვდება ჰიპერბოლის გარე ფოკუსს (ნახ. 44)



ნახაზი 44

მაგალიტი I: კოსმოსური სიჩქარეები

დავუშვათ, რომ m მასის სხეულს, რომელიც იმყოფებოდა დედამიწის ცენტრიდან r_0 მანძილზე, დროის რაღაც მომენტში მიანიჭეს სიჩქარე v_0 , რომელიც α_0 კუთხეს ადგენს მისი რადიუს-ვექტორის მიმართულებასთან. რისი ტოლი უნდა იყოს საწყისი სიჩქარის v_0 სიდიდე, რომ სხეული გადაიქცეს დედამიწის ხელოვნურ თანამგზავრად (დხთ) ან საკლანუტთაშორისო ხომალდად? (იხ.ნახ. 45)



ნახაზი 45

ამოხსნა: პირობიდან ნათელია, რომ ამოცანა დაიყვანება ფარდობით მოძრაობის შესწავლაზე ორი ნაწილაკის სისტემაში (სხეული მასით m და დედამიწა მასით M), რომლებიც ერთმანეთთან მოქმედებენ კანონით

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

ამიტომ შეგვიძლია ჩვენთვის ცნობილი ამოხსნები გამოვიყენოთ.

ვიპოვოთ ჯერ ამ ამოხსნაში შემავალი პარამეტრები α, E, l . როგორც ცნობილია, გრავიტაციული მიზიდვის ძალა $\frac{GmM}{R^2}$ დედამიწის ზედაპირზე (R - დედამიწის რადიუსია) mg -ს ტოლია ანუ

$$GM = gR^2$$

და სხეულის პოტენციალური ენერგია შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = mgR^2$$

ამიტომ დროის საწყის მომენტში სხეულის სრული ენერგია და მუქანიკური მომენტი იქნება:

$$E = \frac{m}{2} \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right)$$

$$l = mr_0 v_0 \sin \alpha_0$$

თუ ამას გამოვიყენებთ ორბიტის ექსცენტრისიტეტისათვის, მივიღებთ:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{\left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right) r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 R^4}} \quad (V-8.14)$$

ახლა გავაანალიზოთ ეს შედეგი. შესაძლო ტრაექტორიები იქნება:

ჰიპერბოლა, თუ $v_0 > v_2 \sqrt{\frac{R}{r_0}}$.

პარაბოლა, თუ $v_0 = v_2 \sqrt{\frac{R}{r_0}}$.

$$v_0 \geq v_1 \sqrt{\frac{R}{r_0}}.$$

$$\text{წრეწირი, } \text{თუ } v_0 = v_1 \sqrt{\frac{R}{r_0}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

სადაც $v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9$ კმ/წმ; $v_2 = \sqrt{2gR} \approx 7,9$ კმ/წმ - არიან პირველი და მეორე კოსმოსური სინქარეები ზედაპირთან.

მაგალითი 2: იპოვეთ ფინიტური მოძრაობის ტრაექტორია ველში:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ამოხსნა: ამ ველში მოძრაეი ნაწილაკის ენექტური პოტენციალი ადეილად მიიყენება შემდეგ სახესზე:

$$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\tilde{I}^2}{2\mu r^2}, \quad \text{სადაც } \tilde{I} = \gamma \cdot l,$$

ხოლო $\gamma = \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{l^2}}$. ტრაექტორიის გამოსათვლელი ფორმულა ახლა ასე ჩაიწერება (დაამტკიცეთ):

$$\varphi = \int_{r_{min}}^r \frac{\tilde{I} dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\tilde{I}^2}{r^2}}},$$

საიდანაც ჩანს, რომ ნაწილაკის შესაძლო ტრაექტორიები მოიქმნება განტოლებიდან

$$\frac{\tilde{p}}{r} = 1 + \tilde{\epsilon} \cos \varphi, \quad (V-8.15)$$

სადაც

$$\tilde{p} = \frac{\gamma^2 l^2}{\mu\alpha}, \quad \tilde{\epsilon} = \sqrt{1 + \frac{2El^2 \gamma^2}{\mu\alpha^2}}$$

მიუხედავად ამ განტოლების გარეგნული მსგავსებისა (V - 8.4) ამოხსნებთან, მათ მიერ აღწერილი ტრაექტორიები საგრძნობლად განსხვავებულიან და მით უფრო, რაც γ განსხვავდება 1 - სგან. ეს განსხვავება განსაკუთრებით ჩანს ფინიტური მოძრაობის ($E < 0$) შემთხვევაში. ამაში დასარწმუნებლად გამოვთვალოთ პოლარული φ კუთხის ნაზრდი r კოორდინატის ცვლილების მთელი პერიოდის განმავლობაში. გამოთვლები აჩვენებს, რომ

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V_{eff}(r)]}} = \frac{2\pi}{\gamma}$$

თუ როგორი რიცხვი იქნება γ , დამოკიდებულია ამოცანის პარამეტრებზე. ყველაზე ხშირად γ რიცხვი ირაციონალურია და დიდად არ განსხვავდება 1-სგან (როცა $2\mu\beta \ll l^2$). ამ დროს მოძრაობა ხდება როზეტულ ტრაექტორიებზე - ნაწილაკი მოძრაობს ელიფსურ ორბიტაზე, რომელიც ნულა პრეცესიონებს ველის ცენტრის მიმართ.

ამ პრეცესიის სინქარეს ახასიათებენ სიდიდით:

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right),$$

როცა $2\mu\beta \ll l^2$, მიახლოებით ვპოულობთ:

$$\delta\varphi \approx -\frac{2\pi\mu\beta}{l^2}$$

შენიშნოთ, რომ ანალოგიური პრეცესიული მოძრაობა ელიფსური ორბიტებისა დაიკვირვება აგრეთვე ველში

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

თუკი $2\mu\beta \ll l^2$. ამ დროს $\delta\varphi \approx \frac{2\pi\mu\beta}{l^2}$.

შენიშვნა: მცირე დამატებითი წევრები $\pm \frac{\beta}{r^2}$ ურთიერთქმედების პოტენციალში შეიძლება გამოწვეული იყოს პლანეტაზე სხვა პლანეტების მხრივ სუსტი შემფოთებით ან მზის ფორმის გადახრით ზუსტი სფეროსგან. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ასეთი შემფოთებები იწვევს პლანეტის ორბიტის ნელ პრეცესიას მზის სისტემის მასათა ცენტრის მიმართ. პრეცესიის ყველაზე მეტი სინქარე დაკვირვებულია მზესთან უახლოესი პლანეტა მერკურის ორბიტისათვის (5599',74 საუკუნეში). კლასიკური მექანიკის კანონებზე დაყრდნობით ჩატარებული გამოთვლები იძლევა მერკურის ორბიტების პრეცესიის სინქარეს - 5557',18 საუკუნეში. განსხვავება 42',56 ამ შედეგსა და დაკვირვებულს შორის ახსნა მხოლოდ ფარდობითობის ზოგადმა თეორიამ შეძლო.

შეგნიშნოთ აგრეთვე, რომ დიდი სინქარეების დროს ორბიტების პრეცესია შეიძლება განპირობებული იყოს რელატივისტური ეფექტებით. მაგალითად, რელატივისტური ელექტრონიც წყალბადის ატომში იმოძრაეებს როზეტულ ტრაექტორიებზე.

(V-9). ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი და კულონური ველის "ფარული" სიმეტრია

ზემოთ ნახსენები იყო ბერტრანის თეორემა, რომლის მიხედვითაც ნაკეტილ ტრაექტორიებზე პერიოდული მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველებში ხდება მხოლოდ კულონური და ოსცილატორული პოტენციალების შემთხვევაში. მაგრამ ეს თეორემა არ ხსნის თუ რატომაა გამოყოფილი ეს ორი პოტენციალი.

ამ პარაგრაფში შევეცდებით გამოვარკვიოთ მიზეზი, თუ რითაა განპირობებული კულონური ველის ეს თავისებურება? აღმოჩნდება, რომ კულონის ამოცანაში გვაქვს კიდევ ერთი მოძრაობის ინტეგრალი.

ამის გასარკვევად განვიხილოთ მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -V'(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{V-9.1})$$

$$\text{სადაც } \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{და} \quad \bar{\rho} = \mu\bar{v} = \mu\dot{\mathbf{r}}.$$

გავამრავლოთ მოძრაობის განტოლება ვექტორულად იმპულსის მომენტის ვექტორზე \vec{L} :

$$[\dot{\mathbf{r}} \times \vec{L}] = -V'(r)[\hat{\mathbf{r}} \times \vec{L}] \quad (\text{V-9.2})$$

ცხადია

$$[\dot{\vec{r}} \times \vec{l}] = [\dot{\vec{r}} \times [\vec{r} \times \mu \vec{v}]] = \mu [\dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})] = \mu(\vec{r}\dot{r} - r\dot{\vec{r}}) \quad (\text{V-9.3})$$

ასე, რომ თუ ამას (V-9.2)-ში გამოვიყენებთ,

$$[\dot{\vec{p}} \times \vec{l}] = -\mu V'(\vec{r}\dot{r} - r\dot{\vec{r}}) = \mu V' r^2 \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \dot{r} \frac{\vec{r}}{r^2} \right)$$

და რაკი

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\dot{r}\vec{r} - r\dot{\vec{r}}}{r^2} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \dot{r} \frac{\vec{r}}{r^2},$$

ამიტომ

$$[\dot{\vec{p}} \times \vec{l}] = \mu V' r^2 \frac{d\vec{r}}{dt}$$

მარცხენა მხარე, \vec{l} -ის შენახვის გამო მიიყვანება სახეზე:

$$\dot{\vec{p}} \times \vec{l} = \frac{d}{dt} [\vec{p} \times \vec{l}]$$

ე.ი. გვექვია თანაფარდობა

$$\frac{d}{dt} [\vec{p} \times \vec{l}] = \mu V' r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{V-9.4})$$

ეხედავთ, რომ მარჯვენა მხარეში შეიქმნება დროის მიხედვით სრული წარმოებული, თუ V -ს გაწარმოებისას მნიშვნელში r^2 წარმოიქმნება. ეს კი მარტო კულონური პოტენციალისთვის ხდება

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \rightarrow \quad V'(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

ასე, რომ ამ შემთხვევაში მიიღება

$$\frac{d}{dt} [\vec{p} \times \vec{l}] = \mu \alpha \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ანუ

$$\frac{d}{dt} \{ [\vec{p} \times \vec{l}] - \mu \alpha \vec{r} \} = 0,$$

საიდანაც ვასკენით, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული ვექტორი ინახება,

$$\vec{l} \equiv [\vec{p} \times \vec{l}] - \mu \alpha \vec{r} = \text{const} \quad (\text{V-9.5})$$

ამრიგად, კულონური პოტენციალის შემთხვევაში გვექვია ცდევ ერთი შენახვადი ვექტორი. მას უწოდებენ ლაპლას - რუნგე - ლენცის ვექტორს.

ადრე ჩვენ გაეარკვიეთ, რომ შენახვის კანონები დაკავშირებულია რაიმე სიმეტრიასთან კოორდინატების (და დროის) გარდაქმნების მიმართ. ქვემოთ, ჰამილტონის ფორმალიზმის განხილვის დროს კვლავ დაეუბრუნდებით ამ პრობლემას და ენახავთ, რომ ამ შენახვადი ვექტორის არსებობა დაკავშირებულია ლორენცის გარდაქმნასთან და 3-განზომილებიან სივრცეში არავითარი გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტობას არ შეესაბამება. ამიტომ ხშირად ამ შემთხვევას უწოდებენ "ფარულ" სიმეტრიას, რომელიც ახასიათებს მარტო კულონის ამოცანას.

უკვე ვიცით, რომ ყოველი შენახვის კანონი საშუალებას გვაძლევს ცვლადთა რაოდენობა შევამციროთ და ამოცანა უფრო დაბალგანზომილებიანზე დავიყვანოთ. ცენტრალურმა სიმეტრიამ - ბრუნვების მიმართ ინვარიანტობამ - მოძრაობის ვექტორულ განტოლებებში ცვლადთა განცალკების და ნაწილი მათგანის აცილების საშუალებას მოგვცა. ასე მაგალითად,

1). მომენტის შენახვიდან (რაც ბრუნვის მიმართ ინვარიანტობას შეესაბამება) მივიღეთ, რომ მოძრაობა ხდება სიბრტყეში. ამით ავიცილეთ ერთ-ერთი კუთხური ცვლადი სფერულ კოორდინატებში.

2). მომენტის მოდულის შენახვიდან კიდევ ერთი ცვლადი - პოლარული კუთხე განვაცადეთ და ამრიგად, ამოცანა მარტო რადიალურ r ცვლადზე დავიყვანეთ.

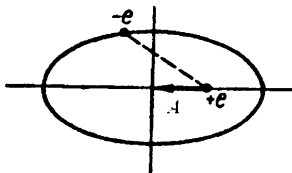
3). ენერჯიის მუდმივობის კანონმა უკვე რადიალურ ცვლადებში ჩაწერილი გამოსახულებიდან მოძრაობის განტოლების რიგი დაგვაწვევინა, რის შემდეგაც განტოლება ამოიხსნა უბრალო კვადრატურებში.

ახლა გვაქვს კიდევ ერთი ახალი შენახვადი სიდიდე კულონის ამოცანისთვის. ხომ არ გამოიწვევს ეს რაიმე დამატებით გამარტივებას?

ამის გასარკვევად შევისწავლოთ \vec{A} ვექტორის ზოგიერთი თვისება:

ა). აშკარაა, რომ $(\vec{l} \cdot \vec{A}) = 0$, ანუ $\vec{A} \perp \vec{l}$ და ძვეს ორბიტის სიბრტყეში.

მისი მიმართულება ემთხვევა ველის ცენტრის ტრავექტორიის პერიცენტრთან შემაერთებულ წრფეს (ნახ. 46).



ნახაზი 46

ბ). ახლა გავამრავლოთ \vec{A} სკალარულად \vec{r} -ზე და ერთდროულად შემოვიყვანოთ φ კუთხე \vec{A} და \vec{r} ვექტორებს შორის. მიიღება $rA \cos \varphi = l^2 - \mu\alpha$, საიდანაც

$$r = \frac{l^2}{1 + \frac{A}{\mu\alpha} \cos \theta}$$

ანუ

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (V-9.6)$$

სადაც $p = \frac{l^2}{\alpha\mu}$ ემთხვევა ორბიტის პარამეტრს, ხოლო ε -ით აღვნიშნეთ სიდიდე

$$\varepsilon = \frac{A}{\alpha\mu}, \quad (V-9.7)$$

რომელიც, როგორც ქვემოთ გამოჩნდება, ემთხვევა ორბიტის ექცენტრისიტეტის ცნობილ გამოსახულებას.

ამისათვის გავიხილოთ რუნგე-ლენცის ვექტორის კვადრატი:

$$\vec{A}^2 = [\vec{p} \times \vec{r}]^2 + \alpha^2 \mu^2 - 2[\vec{p} \times \vec{r}] \cdot \hat{r} \alpha \mu = p^2 r^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2 + \alpha^2 \mu^2 - 2\mu^2 \frac{\alpha}{r} =$$

$$= 2\mu^2 \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r} \right) + \alpha^2 \mu^2$$

გამოვიყენოთ სრული ენერჯის გამოსახულება $E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}$ და გავითვალისწინოთ \vec{A}^2 -ის გამოსახულებაში. მიიღება

$$A^2 = 2\mu E l^2 + \alpha^2 \mu^2$$

ანუ

$$\frac{A}{\alpha \mu} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu \alpha^2}}$$

რაც ემთხვევა ϵ ექცენტრისიტეტს.

ამრიგად, დამატებითმა მოძრაობის ინტეგრალმა საშუალება მოგვცა მიგვეღო ტრაექტორიის განტოლება ალგებრულად, მოძრაობის განტოლების ამოხსნის გარეშე.

ვიცით, რომ ყოველი მოძრაობის ინტეგრალი მექანიკური ამოცანის ამოხსნას ამარტივებს. ამიტომ მოძრაობის ინტეგრალების მოძებნას დინამიკის ამოცანების გადასაწყვეტად უდიდესი მნიშვნელობა აქვს. როგორც უკვე ითქვა, ამ საკითხს კიდევ დაეუბრუნდებით ქვემოთ კამპლტონის ფორმალიზმის განხილვისას, სადაც ამ შენახვადი სიდიდის ფიზიკური მნიშვნელობა უფრო ნათლად გამოიკვეთება.

(V-10). ნაწილაკთა გაფანტვის კლასიკური თეორიის ელემენტები

ნაწილაკთა დაჯახების ამოცანის დასმა. ჩვეულებრივ ნაწილაკთა დაჯახების შესახებ ამოცანა ასე ისმება: m_1 მასის ერთნაირ ნაწილაკთა ერთგვაროვანი კონა \vec{p}_1 სიჩქარით უსასრულოდ დიდი მანძილიდან ეცემა სამიზნე m_2 მასის ნაწილაკების რაიმე ერთობლიობას, რომელიც უძრავია ე.წ. ლაბორატორიული სისტემის მიმართ. დაცემული ნაწილაკების სამიზნე ნაწილაკებთან ურთიერთქმედების შედეგად ხდება მათი გაფანტვა. საწყის (დაჯახებამდე) და საბოლოო (დაჯახების შემდეგ) მდგომარეობათა ისეთი კონფიგურაციები განიხილება, როცა ნაწილაკები ერთმანეთისგან იმდენად შორსაა, რომ მათ შორის ურთიერთქმედება შეგვიძლია უგულებელვყოთ. შემდეგ ნაწილაკები ისევ დაახლოებულიან, რომ ურთიერთქმედება უკვე იჩენს თავს და თანდათანობით მნიშვნელოვანი ხდება. ამის გამო ნაწილაკები გადაიხრებიან თავდაპირველი (სწორხაზოვანი) მიმართულებიდან. შემდეგ ნაწილაკები კვლავ შორდებიან ერთმანეთს, მათ შორის ურთიერთქმედება კვლავ მჭიდრდება და ბოლოს მისი უგულებელყოფა შეიძლება. ამის შემდგომ ნაწილაკები კვლავ წრფივად და თანაბრად მოძრაობენ. თუ ცნობილია m_1 და m_2 ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედების კანონი, მსითხოვება განისაზღვროს m_1 ნაწილაკების რაოდენობა, რომელიც გაიფანტება დროის ერთეულში $d\tau$, სხეულოვან კუთხეში და აგრეთვე m_2 ნაწილაკების რაოდენობა, რომლებიც იმავე დროში გაიბნევიან $d\Omega$, სხეულოვან კუთხეში.

დასმული ამოცანის გადაწყვეტა საგრძობლად გამარტივდება, თუ დაცემულ ნაწილაკთა და სამიზნე ნაწილაკთა ერთობლიობა საკმარისად გაიშვიათებულია. ამ შემთხვევაში ერთი და იგივე სახის ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება შეიძლება არ მივიღოთ მხედველობაში და ნაკადის ნაწილაკთა დაჯახება სამიზნეს ნაწილაკებთან ჩათვალოთ ერთჯერადად. ეს საშუალებას გვაძლევს ჩამოყალიბებული ამოცანა დაივიწყოთ ნაკადის თითოეული ნაწილაკის ერთ სამიზნე-ნაწილაკთან ერთჯერადი გაფანტვის ამოცანაზე, ე.ი. m_1 და m_2 მასის ურთიერთქმედი ნაწილაკების ინფინიტური ფარდობითი მოძრაობის ამოცანაზე ანუ ფიქტიური μ ნაწილაკის $V(r)$ ძალთა O ცენტრის მიმართ მოძრაობაზე. ძალთა ცენტრთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემას უწოდებენ მასათა ცენტრის ანუ C - სისტემას.

μ ნაწილაკის გაფანტვის ეფექტური განიევებით. განვიხილოთ ძალთა

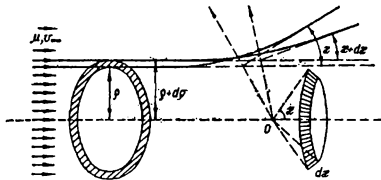
უძრავი O ცენტრის მიერ μ ნაწილაკთა კონის გაფანტვა მასებით $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

და \bar{v}_n სიჩქარეებით (გაიხსენოთ, რომ ფიქტიური μ ნაწილაკის სიჩქარე უნდა ემთხვეოდეს რეალური m_1 და m_2 ნაწილაკების ფარდობით $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ სიჩქარეს და განსახილავ შემთხვევაში უდრის \bar{v}_n -ს). დაეუშვათ, რომ μ ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია მისიწრაფვის 0 - სკენ, როცა $r \rightarrow \infty$. ამიტომ მისი სრული

ენერგია ჩაეწეროს $E = \frac{mU_\infty^2}{2}$ სახით.

μ ნაწილაკთა ნაკადი დავახსიათოთ მისი ინტენსიურობით (ან სიმკვრივით) n , ე.ი. ნაწილაკთა რიცხვით, რომლებიც გადიან დროის ერთეულში კონის პერპენდიკულარული ერთეულოვანი ფართობის განიევებითში, რომელიც მოთავსებულია ძალთა ცენტრიდან საკმარის დიდ მანძილზე. მისი განზომილებაა $[n] = \text{ნაწილაკთა რაოდენობა/სმ}^2 \cdot \text{წმ}$.

μ ნაწილაკის ძალთა O ცენტრის მიერ გაფანტვა ხდება ჰიპერბოლური ტიპის ტრაექტორიის გასწვრივ (ნახ. 47). ამ ნახაზზე გამოხატულია ორი μ ნაწილაკის ტრაექტორია იმ შემთხვევისათვის, როცა $V(r)$ არის განზიდვის ველი.



ნახაზი 47

თითოეული μ ნაწილაკის ტრაექტორია ხასიათდება ორი სიდიდით: სამიზნე ρ პარამეტრით და გაფანტვის χ კუთხით.

ნაწილაკის სამიზნე პარამეტრი ეწოდება უმოკლეს მანძილს, რომელზეც ჩაუვლიდა ნაწილაკი სამიზნეს (გაფანტვის ცენტრს), ძალთა ველი რომ არ ეწვილიყო.

μ ნაწილაკის გაფანტვის კუთხე χ კუთხეს ამ ნაწილაკის ტრანსკტორიის ასიმპტოტებს შორის. (ეს კუთხე იმავე დროს არის რეალური m_1 და m_2 ნაწილაკების გაფანტვის კუთხე C - სისტემაში). ρ და χ პარამეტრებს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება $\rho = \rho(\chi)$, ამასთან წარმოებულნი

$\frac{d\rho}{d\chi}$, როგორც წესი, უარყოფითია. ამის მიხედვრა ადვილია, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ρ პარამეტრის გაზრდის დროს ნაწილაკზე გამფანტავე ცენტრი ნაკლები ძალით იმოქმედებს. ამის გამო გადახრის χ კუთხეც შემცირდება.

ცენტრალური სიმეტრიის ველში გაფანტვის პროცესი ვერ დაარღვევს თავდაპირველი ნაკადის აქსიალურ (დერძულ) სიმეტრიას. ამიტომ გაფანტვის სურათი აბსოლუტურად ერთნაირი იქნება ნაკადის მიმართულების მართობულად გადაშეკვეთ ნებისმიერ (ყველა) სიბრტყეში. აქედან გასაგებია, რომ $(\chi, \chi + d\chi)$ ინტერვალში χ კუთხეზე შეიძლება გაიფანტონ მხოლოდ ის ნაწილაკები, რომელთა სამიზნე პარამეტრი ρ მოთავსებულია $(\rho, \rho + d\rho)$ ინტერვალში. ამიტომ μ ნაწილაკთა საძიებელი რაოდენობა, რომლებიც დროის ერთეულში გაიბნევიან χ კუთხეზე $(\chi, \chi + d\chi)$ ინტერვალში, ტოლი იქნება ნაკადის n სიმკვრივის ნამრავლისა ρ და $\rho + d\rho$ რადიუსებიანი წრეწირებით შემოსაზღვრული რგოლის ფართობზე, ე.ი.

$$dN = n \cdot 2\pi\rho d\rho \quad (V-10.1)$$

მაგრამ ეს dN რიცხვი მოუხერხებელია გაფანტვის პროცესის დასახასიათებლად, რადგან დამოკიდებულია დაცემული ნაკადის სიმკვრივეზე. ამიტომ dN -ის ნაცვლად შემოაქვთ შეფარდება:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho \quad (V-10.2)$$

სიდიდეს $d\sigma$, რომელსაც აქვს ფართობის განზომილება, უწოდებენ გაფანტვის დიფერენციალურ განიკვეთს. ის განსაზღვრავს μ ნაწილაკთა ფარდობით რიცხვს, რომელიც გაიბნევა დროის ერთეულში გაფანტვის კუთხის უსასრულოდ მცირე $(\chi, \chi + d\chi)$ ინტერვალში. გაფანტვის ეფექტური განიკვეთი $d\sigma$ მთლიანად განისაზღვრება გამფანტავე $V(r)$ ველით და ამიტომ გაფანტვის პროცესის უმნიშვნელოვანეს მახასიათებელს წარმოადგენს. სწორედ მისი გაზომვა ხერხდება ექსპერიმენტალურად.

თუ ρ და χ პარამეტრებს შორის კავშირი ურთიერთკალსახაა (რასაც ყოველთვის აქვს ადგილი, როცა გაფანტვის χ კუთხე არის ρ -ს მონოტონურად კლებადი ფუნქცია), მაშინ გაფანტვის დიფერენციალურ განიკვეთი შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (V-10.3)$$

ანუ

$$d\sigma = F(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi, \quad (V-10.4)$$

სადაც

$$F(\chi) = -\frac{\rho}{\sin \chi} \cdot \frac{d\rho}{d\chi} = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \quad (V-10.5)$$

თუ $\rho(\chi)$ ფუნქცია მრავალსახაა, მაშინ ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში უნდა ავიღოთ $2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right|$ გამოსახულებათა ჯამი ამ ფუნქციის ყველა შტოზე.

$F(\chi)$ ფუნქციის ფიზიკური შინაარსის გასარკვევად (V-10.4) გამოსახულებაში გაფანტვის ბრტყელი $d\chi$ კუთხიდან გადავიდეთ სხეულოვანი კუთხის ელემენტზე, $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$, რომლითაც O ცენტრიდან ჩანს ერთეულოვანი რადიუსის სფეროს ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტი, რომელსაც ამოჭრის კონუსები 2χ და $2(\chi + d\chi)$ გამლის კუთხით. ამ შემთხვევაში ზედა ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (\text{V-10.6})$$

და

$$F(\chi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (\text{V-10.7})$$

ამრიგად, $F(\chi)$ ფუნქცია განსაზღვრავს დროის ერთეულში ერთეულოვან სხეულოვან კუთხეში გაფანტული ნაწილაკების ფარდობით რიცხვს. ამასთან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ გაფანტვის ეფექტური კვეთა არ არის დამოკიდებული დაცემული ნაწილაკების ნაკადის სიმკვრივეზე, $F(\chi)d\Omega$ სიდიდე შეგვიძლია გავიგოთ, როგორც ცალკეული ნაწილაკის $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში გაფანტვის ალბათობა, ხოლო $F(\chi)$ ფუნქცია – როგორც ამ ალბათობის სიმკვრივე.

თუ გაფანტვის χ კუთხე შეიძლება იცვლებოდეს $(0, \pi)$ ინტერვალში, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\rho^2(\chi) = 2 \int_{\chi}^{\pi} F(\chi) \sin \chi d\chi \quad (\text{V-10.8})$$

ამაში ადვილად დაერწმუნდებით, თუ გავიხსენებთ, რომ $\rho(\pi) = 0$ [ცენტრალური დარტყმისას $\rho = 0$ და $\chi = \pi$] და გამოვალთ (V-10.5) ფორმულიდან.

დიფერენციალური კვეთის გარდა ხშირად გვინტერესებს სრული ეფექტური განივეკეთი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ (V-10.3) ან (V-10.4) გამოსახულებების ინტეგრაციით χ კუთხის ყველა მნიშვნელობებისათვის, ე.ი.

$$\sigma = 2\pi \int F(\chi) \sin \chi d\chi \quad (\text{V-10.9})$$

გაფანტვის სრული განივეკეთი ტოლია დროის ერთეულში ყველა მიმართულებით გაფანტული ნაწილაკების საერთო რაოდენობის შეფარდებისა დაცემული ნაკადის n სიმკვრივესთან. იმ შემთხვევაში, როცა გამფანტავ ცენტრთან μ ნაწილაკის ურთიერთქმედება შეგვიძლია უგულებელვუყოთ რაღაც $r = r_{\text{eff}}$ მანძილიდან დაწყებული, სრული კვეთა გამოდის

$$\sigma = \pi (r_{\text{eff}})^2 \quad (\text{V-10.10})$$

r_{eff} სიდიდეს უწოდებენ ურთიერთქმედების ეფექტურ რადიუსს.

შენიშვნა: ზემოთ მოყვანილ ფორმულების მიხედვით ვადგენთ, რომ (იხ. მაგ. (V-10.2)) სრული განივეკეთი ასე მოიცემა

$$\sigma = \int d\sigma = 2\pi \int \rho d\rho$$

სადაც ინტეგრება ახლა ვრცელდება ყველა სამიზნე მანძილზე, რომლებსთვისაც ხდება თუნდაც რაიმე გაბნევა. ამიტომ $V(r)$ პოტენციალური ენერგია რომც ეცემოდეს r -ის ზრდით რაგინდ სწრაფად, მაგრამ არ გადაიქცევა ზუსტად 0-ად რაიმე R_0 -დან დაწყებული, მაშინ სრული ეფექტური განივეკეთი გამოდის უსასრულო, ე.ი. კლასიკურ მექანიკაში სრული ეფექტური განივეკეთი განშლადია.

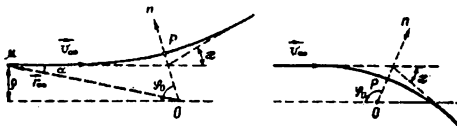
ფიზიკურად ეს შედეგი პარადოქსალურია: წარმოუდგენელია, რომ გამოიყვებზე დაშვარებულ მეცნიერებაში რაგინდ მცირე სიდიდეს შეეძლოს მოგ-

ეცეს შედეგები, რომლებიც პრინციპულად განსხვავდება ზუსტად ნულოვანი მნიშვნელობიდან მიღებულისგან.

ამ ჩიხიდან გამოსავლის ძიებისას ხშირად მოყვადათ არგუმენტაცია, რომ საკმაოდ სწრაფად კლებადი პოტენციალებისათვის დიდი სამიზნე პარამეტრებისას გაფანტვა მოხდებოდა იმდენად მცირე კუთხეებზე, რომ ცდაზე მათი გარჩევა დაცემული ნაკადის ნაწილაკებისაგან შეუძლებელი იქნებოდა. ამიტომაც ცდაზე გაზომილი სრული კვეთა აღმოჩნდებოდა სასრულო. მაგრამ ის, რომ ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობა არსებითად გახდებოდა დამოკიდებული ექსპერიმენტების სიზუსტეში მიღწეულ პროგრესზე, კვლავაც არაადაკმაყოფილებლად გამოიყურება! მხოლოდ კვანტურმა შექანიკამ გამოამკვლავა, რომ ზემოთ მოყვანილი განურჩევლობა ძალზედ მცირე კუთხეებზე გადახრილი ნაწილაკებისა და გაუბნეველ ნაწილაკებს შორის ხელსაწყოს "ბრალი" კი არ არის, არამედ ფუნდამენტურ ხასიათს ატარებს. კერძოდ, კვანტურ მექანიკაში აღმოჩნდა, რომ ნელა კლებადი $V(r)$ პოტენციალებისათვის გამოთვლილი სრული კვეთა სასრულო შედეგს იძლევა!

(V-11). $\rho = \rho(\chi)$ ფუნქციონალური დამოკიდებულების შესწავლა.
გაფანტვის შებრუნებული ამოცანა

გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთის გამოთვლა, როგორც ენახეთ, დაიყვანება ρ სამიზნე პარამეტრის გაფანტვის χ კუთხეზე დამოკიდებულების განსაზღვრაზე. ამ მიზნით განვიხილოთ რაიმე μ ნაწილაკის გაფანტვის ტრაექტორია (ნახ. 48)



ნახაზი 48

ვიცით, რომ ცენტრალური სიმეტრიის ველში ნაწილაკის ტრაექტორია სიმეტრიულია მისი OP აფხიდის მიმართ. თუ ამ წრფესა და დაცემული ნაკადის მიმართულებას შორის კუთხეს აღვნიშნავთ ϕ_0 -ით, მაშინ გაფანტვის χ კუთხე ასე წარმოიდგინება

$$\chi = \pm \pi \mp 2\phi_0, \quad (V-11.1)$$

სადაც ზედა ნიშნები ეთანადება განზიდვის, ხოლო ქვედა - მიზიდვის ველებს. თვით ϕ_0 კუთხე განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით

$$\phi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{l^2}{r^2}}} \quad (V-11.2)$$

აქედან ჩანს, რომ გაფანტვის კუთხე დამოკიდებულია სრულ ენერჯიაზე და იმპულსის მომენტზე, ე.ი. $\chi = \chi(E, l)$. ამიტომ ზედა (V-11.1), (V-11.2) თანაფარდობებით არაცხადი სახით განისაზღვრება $\rho(\chi)$ დამოკიდებულებაც. ეს კავშირი უფრო აშკარა რომ გაეხადოთ, იმპულსის მომენტი გამოვხატოთ დავახეების პარამეტრით. 48-ე ნახაზიდან ნათელია, რომ

$$l = \mu v_{\infty} r_{\infty} \sin \alpha = \mu v_{\infty} \rho \quad (\text{V-11.3})$$

გარდა ამისა, ვიცით, რომ

$$E = \frac{\mu v_{\infty}^2}{2} \quad (\text{V-11.4})$$

ამის გათვალისწინებით ვპოულობთ:

$$\frac{\pi \pm \chi}{2} = \int_{r_{\infty}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{\mu v_{\infty}^2}}}, \quad (\text{V-11.5})$$

სადაც ზედა ნიშანი χ -ს წინ შეესაბამება განზიდვის ველებს. სწორედ ამ თანაფარდობით განისაზღვრება $\rho(\chi)$ ფუნქციონალური დამოკიდებულება.

(V-11.5) თანაფარდობა სრულდება μ ნაწილაკის მოძრაობისას სუსტი სინგულარობის მიზიდვის ველებში $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ ($n < 2$) და განზიდვის ნებისმიერ ველებში $V(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ ($n > 0$).

მიხლოდ ამ შემთხვევებში (V-11.5) თანაფარდობიდან მიღება ცალსახა დამოკიდებულება $\rho = \rho(\chi)$. მიზიდვის ველებში, როცა $n \geq 2$, ადგილი აქვს ორბიტორების ეფექტს ანუ μ ნაწილაკის ტრაექტორიის ჩახევეას, როგორც აღნიშნული იყო (V-7) პარაგრაფში. ამ ეფექტის გათვალისწინებას მიყვავართ $\rho(\chi)$ ფუნქციის არაცალსახობასთან და ამ დროს განიკვეთის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა ასე უნდა ჩაეწეროს

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = 2\pi \sum_k \rho_k(\chi) \left| \frac{d\rho_k(\chi)}{d\chi} \right|, \quad (\text{V-11.6})$$

სადაც აჯამება ხდება მრავალსახა $\rho(\chi)$ ფუნქციის ცალკეული შტოების მიხედვით.

შეენიშნოთ, რომ ზოგჯერ $\rho(\chi)$ დამოკიდებულების განსაზღვრა შესაძლებელი ხდება (V-11.5) ფორმულის გარეშეც, წმინდა გეომეტრიული მოსაზრებებით (ამის მაგალითი მოყვანილი იქნება ქვემოთ).

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ μ ნაწილაკთა ნაკადის გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთის გამოსათვლელი ფორმულები (V-11.3) და (V-11.5). თუ ამ ფორმულებში ჩავატარებთ შეცვლას

$$\mu \rightarrow m, \quad \chi \rightarrow \theta$$

მაშინ ისინი განსაზღვრავენ მცირე m მასის ნაწილაკის გაფანტვის განიკვეთს $\mu \gg m$ მასის უძრავი სამიზნის ნაწილაკზე. აქედან რომ მივიღოთ გაფანტვის მაკროსკოპული განიკვეთი Σ (ანუ იმის ალბათობა, რომ ცალკე აღებული m ნაწილაკი დროის ერთეულში გაიფანტება ნებისმიერი θ კუთხით დაცემული ნაკადის მიმართ, როცა გაედლის μ ნაწილაკებისაგან შედგენილ გამბნეეთა l სმ სისქის ფენას) საკმარისია (VI-10.9) სრული კვეთის ფორმულა გაავამრავლოთ l სმ² -ში მოთავსებული სამიზნე ნაწილაკთა N რიცხვზეც, ე.ი.

$$\Sigma = 2\pi N \int F(\theta) \sin \theta d\theta \quad (V-11.7)$$

გაფანტვის პირდაპირ ამოცანასთან ერთად ხშირად წარმოიქმნება გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის აუცილებლობა, ე.ი. გამფანტავი $V(r)$ პოტენციალის სახის აღდგენის ამოცანა ნაწილაკთა დრეკადი გაფანტვის ექსპერიმენტული მონაცემებიდან.

განვიხილოთ უმარტივესი ამოცანა - ჩაეთვალოთ, რომ საძიებელი პოტენციალი $V(r)$ არის განზიდვის ხასიათისა და r -ის მიხედვით მონოტონურ ფუნქციას წარმოადგენს, რომელიც ნულისკენ მიისწრაფვის, როცა $r \rightarrow \infty$.

შევიჩინოთ, რომ გაფანტვის ექსპერიმენტებში, რომლებიც ტარდება I მომენტის მოცემული ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის, განისაზღვრება დიფერენციალური განივკვეთების დამოკიდებულება სრულ E ენერგიასა და გაფანტვის

χ კუთხეზე ანუ ფუნქცია $F(\chi, E) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$. ამასთან $\chi(E)$ დამოკიდებულება შეიძლება განესაზღვროთ $I(\chi, E)$ მრუდების რაიმე ოჯახის გადაკვეთის წერტილების მიხედვით (χ, E) სიბრტყეზე $I = const$ წრფესთან. მრუდების ასეთი ოჯახი განისაზღვრება განტოლებით

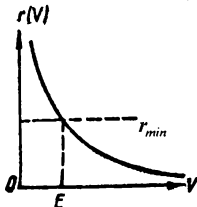
$$I^2 = 2\mu E \int_x^\pi F(\chi, E) \sin \chi d\chi,$$

რაც გამომდინარეობს (V-10.8) თანაფარდობიდან.

საძიებელი $V(r)$ პოტენციალის განსაზღვრისათვის მოცემული $\chi(E)$ და დამოკიდებულებით გამოიყენება (V-11.2) განტოლება, რომელიც ასე გადავწეროთ

$$\pi - \chi(E) = -\frac{2I}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^\infty \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}} \quad (V-11.8)$$

ცხადია, $V_{eff}(r)$ -იც არის r -ის მონოტონური ფუნქცია. ამიტომ უნდა არსებობდეს $V_{eff}(r)$ -ის შებრუნებული (კალსახა ფუნქცია $r(V_{eff})$). (ნახ. 49).



ნახ. 49

(V-11.8) -ში გადავიდეთ ახალ დამოკიდებულებაზე V_{eff} დამოუკიდებელი ცვლადისა. მივიღებთ

$$\pi - \chi(E) = \frac{2l}{\sqrt{2\mu}} \int_0^E \frac{e^{-\frac{d}{V_{eff}} \left(\frac{1}{r}\right)} dV_{eff}}{\sqrt{E - V_{eff}}} \quad (V - 11.9)$$

ეს თანაფარდობა წარმოადგენს აგრეთვე აბელის ინტეგრალურ განტოლებას. მისი შექცევა არაფრით არ განსხვავდება ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შესწავლისას გამოყენებული მეთოდისაგან. მივიყვანოთ მხოლოდ საბოლოო შედეგი

$$\frac{1}{r(V_{eff})} = \frac{\sqrt{2\mu}}{2\pi l} \int_0^E \frac{[\pi - \chi(E)] dE}{\sqrt{V_{eff} - E}} \quad (V - 11.10)$$

ამრიგად, თუ გვეცოდინება $\chi(E)$, შეგვეძლება ვიპოვოთ r როგორც V_{eff} -ის ფუნქცია და განვსაზღვროთ საძიებელი $V(r)$ ფუნქცია, როგორც სხვაობა

$$V = V_{eff}(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}. \text{ ამ მეთოდის ნაკლი ისაა, რომ რთულია ნაწილაკთა გაფანტვის ექსპერიმენტის ჩატარება, როცა იმპულსის მომენტი ფიქსირებულია, } l = const.$$

გაცილებით უფრო ადვილია მივიღოთ ექსპერიმენტული მონაცემები გაფანტვის ეფექტური განივეკეთის χ კუთხეზე დამოკიდებულებისა მოცემული E ენერგიით. ეს ამოცანა გადაწყვიტა ო.ფირსოვმა 1963 წელს და მოყვანილია ამოცანის სახით ლანდაუსა და ლიფშიცის სახელმძღვანელოში (გვ. 71).

ამოცანა: აღადგინეთ გამფანტავი ეფლის $V(r)$ პოტენციალის სახე ეფექტური განივი კვეთის გაფანტვის კუთხეზე დამოკიდებულების მიხედვით ფიქსირებული E ენერგიის დროს. ჩათვალეთ $V(r)$ r -ის მონოტონურად კლებად ფუნქციად (განზიდვის ველი). ამასთან $V(0) > E$, $V(\infty) = 0$.

ამ ამოცანის ამოხსნაც მიიყვანება აბელის ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომელიც შეისწავლება სტანდარტული მეთოდებით (იხ. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая Физика. т.1, Механика. გვ.71, აგრეთვე Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. გვ.137**).

დაბოლოს, შევინშნოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკთა გაფანტვის ამოცანა განსაკუთრებით მარტივად ყალიბდება კანონიკურ ფორმალისში Φ პამილტონ-იაკობის განტოლების ბაზაზე, რასაც შემდგომ განვიხილავთ.

(V - 12). რეზერფორდის ფორმულა

კლასიკურ მექანიკაში გაფანტვის ეფექტური განივეკეთის გამოთვლის უმნიშვნელოვანესი შემთხვევა არის გაფანტვა კულონური ძალების მოქმედებით.

განსაკუთრებული ყურადღება ამ შემთხვევისადმი გამოწვეულია 3 მთავარი მიზეზით: ჯერ-ერთი, თვითონ კულონური ურთიერთქმედება მიკრონაწილაკთა სამყაროში თვალსაჩინო როლს ასრულებს. მეორე, ეს გახლავთ ერთ-ერთი კერძო შემთხვევა უამრავთაგან, როცა ეფექტური განივეკეთის გამოთვლისათვის საჭირო ინტეგრაციები გამოითვლება ცხადი სახით და შესამცდ, კულონური ურთიერთქმედება იძლევა სასიამოვნო სიურპრიზს - აღმოჩნდება, რომ კლასიკურ მექანიკაში ამ შემთხვევისათვის გამოთვლილი განივეკეთის ფორმულა ინარჩუნებს თავის სახეს კვანტურ მექანიკაზე გადასვლისას (ოლონდ თუ გაბნეული და გამზნევი ნაწილაკები არ არიან იგივეური). დაბოლოს, დროა

გავიხსენოთ, რომ რეზერფორდის 1911 წლის ექსპერიმენტებში სწორედ ეს ამოცანა წარმოიქმნა, რომელმაც საფუძველი დაუდო ატომის ბირთვის აღმოჩენას. თუ არა ზემოთ ჩამოთვლილი თავისებურებანი კულონის ამოცანისა, ალბათ ატომბირთვის აღმოჩენა გადაიდებოდა კიდევ დიდი ხნით.

შევუდგეთ ამ ამოცანის განხილვას ჯერ $C -$ სისტემაში. $\rho = \rho(\chi)$ დამოკიდებულების მიღება შეგვიძლია ზოგადი ფორმულიდან (V-11.5):

$$\frac{\pi - \chi}{2} = - \int_{r_{\max}}^{\infty} \frac{\rho r \frac{1}{r}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{\mu v_0^2} \cdot \frac{1}{r}}} \quad (V-12.1)$$

ამ ფორმულაში გადავიდეთ ახალ ცვლადზე $x = \frac{1}{r}$ და ჩავატაროთ ინტეგრაცია, როგორც (V-6) პარაგრაფში. მიიღება

$$\frac{\pi - \chi}{2} = \arccos \frac{\rho x + \frac{\alpha}{\mu v_0^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\mu v_0^2 \rho}\right)^2}} \Big|_0^{\infty} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_0^2}{\alpha}\right)^2 \rho^2}},$$

საიდანაც

$$1 + \left(\frac{\mu v_0^2}{\alpha}\right)^2 \rho^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} \quad (V-12.2)$$

აქედან $\rho(\chi)$ დამოკიდებულების მისაღებად გამოვიყენოთ მარტივი ტრიგონომეტრიული იგივეობა, $1 + \operatorname{ctg}^2 \chi = 1/\cos^2 \chi$. შედეგად მივიღებთ

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{\mu v_0^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} \quad (V-12.3)$$

თუ ამ გამოსახულებას χ კუთხით გავაწარმოებთ და მიღებულ შედეგს ჩავსვათ დიფერენციალური განიკვეთის გამოსათვლელ ფორმულაში (V-10.3) ან (V-10.4), საძიებელი დიფერენციალური განიკვეთისათვის ეიპოვით:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_0^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_0^2}\right)^2 \frac{d(1 - \cos \chi)}{(1 - \cos \chi)^2}$$

ანუ

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_0^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (V-12.4)$$

განიკვეთის ამ გამოსახულებას უწოდებენ რეზერფორდის ფორმულას.

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ კულონური გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთი სრულებით არ არის დამოკიდებული იმაზე, ნაწილაკები მთხოვნიან თუ განიზიდებიან, მაშინ როცა ამ ორი შემთხვევისათვის ნაწილაკის შოპრაობის ტრაექტორიები სხვადასხვაა.

კულონური გაფანტვისათვის დამახასიათებელია დიფერენციალური განიკვეთის ძალზედ მკვეთრი ზრდა მცირე $\chi \rightarrow 0$ კუთხეებზე გაფანტვისათვის.

ამ დროს დიფერენციალური განივკვეთი $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, აგრეთვე მისი პირველი წარმოებულები უსასრულო ხდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ უკან (ან დიდ კუთხეებზე) გაფანტული ნაწილაკთა რაოდენობა ძალზედ მცირე გამოდის, ხოლო გაფანტვის სრული განივკვეთი - უსასრულოა.

მართლაც რეკურფორდის ფორმულის ინტეგრაცია გვაძლევს:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mu v_0^2}{\alpha} \right) \sigma = \int_0^\pi \frac{d(1 - \cos \chi)}{(1 - \cos \chi)^2} = \frac{1}{\cos \chi - 1} \Big|_0^\pi = \infty \quad (\text{V} - 12.5)$$

ეს შედეგი კერძო გამოვლინებაა კლასიკურ მექანიკაში გაფანტვის სრული განივკვეთის განზღადობისა, რომელზეც საუბარი გვექონდა (VI - 10) პარაგრაფში და დამახასიათებელია ყველა შორსქმედი პოტენციალისათვის.

ლაბორატორიულ (L) სისტემაზე გადასვლა ხდება ტრივიალურად. ჩვენ შემოვისას ზღვრებით ყველაზე საინტერესო შემთხვევების განხილვით: $m_1 \ll m_2$ და $m_1 = m_2$.

პირველ შემთხვევაში დაცემული m_1 ნაწილაკის $m_2 \gg m_1$ უძრავ ნაწილაკზე გაფანტვის აღსაწერად საკმარისია ზედა ფორმულებში მოვახდინოთ შეცვლა: $\mu \rightarrow m_1; \chi \rightarrow \theta_1$. შედეგად მიიღება

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2m_1 v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (\text{V} - 12.6)$$

სწორედ ეს ფორმულა მიიღო რეკურფორდმა 1911 წელს.

თუკი $m_1 = m_2$, $\mu = \frac{m}{2}$, მაშინ χ გაფანტვის კუთხე შემდგენიარად უკავშირდება გაფანტვის θ_1 კუთხეს დაცემული ნაწილაკებისა და უკუკემის θ_2 კუთხეს თავდაპირველად უძრავი ნაწილაკისა:

$$\chi = 2\theta_1 \quad \text{და} \quad \chi = \pi - 2\theta_2$$

შესაბამისად ამისი ჩასმა (V-11.4)-ში იძლევა დიფერენციალურ განივკვეთებს

$$d\sigma_1 = \left(\frac{2\alpha}{m v_0^2} \right)^2 \frac{\cos \theta_1 d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (\text{V} - 12.7)$$

და

$$d\sigma_2 = \left(\frac{2\alpha}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^4 \theta_2} \quad (\text{V} - 12.7)$$

თუ ორივე ნაწილაკს ერთნაირი აქვთ არა მარტო მასები, არამედ სხვა მახასიათებლებიც, ანუ როგორც იტყვიან, ნაწილაკები არიან იგივერნი (მაგალითად, ელექტრონის გაბნევა ელექტრონზე, α - ნაწილაკების გავლა (გაფანტვა) ჰელიუმის ორთქლში), მაშინ გაფანტვის შემდეგ უაზროა შევეცადოთ დაცემული და თავდაპირველად უძრავი ნაწილაკების გარჩევას.

ორივე მათგანისათვის საერთო დიფერენციალური განივკვეთი, ბუნებრივია, მივიღოთ $d\sigma_1$ და $d\sigma_2$ განივკვეთების შეკრებით, ხოლო θ_1 და θ_2 კუთხე შეეცვალოთ ერთი საერთო θ კუთხით. ამ დროს იგივე ნაწილაკთა გაფანტვისათვის მიიღება შემდეგი ფორმულა

$$d\sigma_{classical} = \left(\frac{2\alpha}{m v_0^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \cos \theta \cdot d\Omega$$

მაგრამ ამ ფორმულის შედარებისას ექსპერიმენტულ მონაცემებთან აღმონდება შეუთანხმებლობა!

როგორც კვანტურმა მექანიკამ აჩვენა, დიფერენციალური განიკვეთის ფორმულა განსხვავდება ამისაგან და აქვს სახე

$$d\sigma_{\text{quatum}} = \left(\frac{2\alpha}{m v_\alpha^2} \right)^2 \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} + \frac{2 \cos \left(\frac{\alpha^2}{\hbar v_\alpha} \ln \lg^2 \theta \right)}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right] \cos \theta \cdot d\Omega$$

აქ გაჩნდა დამატებითი, ე.წ. ინტერფერენციული წევრი, რომელიც განპირობებულია იგივე ნაწილაკთა სრული განურჩევლობით კვანტურ მექანიკაში. კლასიკურ მექანიკაში იგივე ნაწილაკების გარჩევა კიდევ შეიძლება მათი ტრაექტორიების მიხედვით. კვანტურ მექანიკაში ტრაექტორიის ცნება აზრს კარგავს და იგივე ნაწილაკებისათვის ჩნდება ე.წ. გაცვლითი ურთიერთქმედება (ურთიერთქმედება გამოწვეული ნაწილაკთა ურთიერთგადასმით). შევნიშნოთ, რომ დამატებითი წევრი $d\sigma_{\text{quatum}}$ -ში იძლევა დიფერენციალური განიკვეთის არსებით ზრდას. (მაგალითად - 45° -ზე, თითქმის ორჯერ).

V-13. თეორემა ვირიალის შესახებ

დავადგინოთ ცენტრალური ძალების ველში მოძრაობის კიდევ ერთი თვისება, რომელიც შეიძლება მიღებულ იქნას როგორც კერძო შემთხვევა უფრო ზოგადი თეორემისა, რაც სამართლიანია სხვადასხვა სისტემების ფართო წრისათვის. ესაა თეორემა ვირიალის შესახებ. მას აქვს სტატისტიკური ხასიათი, ე.ი. განიხილავს დროის მიხედვით გასაშუალებულ მექანიკურ სიდიდეებს.

განიხილოთ მატერიალურ წერტილთა ნებისმიერი სისტემა, რომელიც განისაზღვრება \vec{r}_i რადიუს-ვექტორებით. მისი მოძრაობის განტოლებებია

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i,$$

შევადგინოთ სიდიდე

$$G = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

გამოთვალათ მისი პირველი წარმოებული დროის მიხედვით

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i, \quad (\text{V-13.1})$$

ამასთან ჯამის პირველი წევრი ასე გადაეწეროთ

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = 2T,$$

ხოლო მეორე - ასე

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

მაშინ (V-13.1) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = 2T + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i.$$

აქ შემავალი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობებზე გადასასვლელად საჭიროა ვაინტეგრით ეს ტოლობა დროის რაღაც ინტერვალში და შედეგი გავყოთ ინტეგრაციის არის სიგრძეზე

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dG \equiv \frac{d\bar{G}}{dt} = 2\bar{T} + \sum_i^N \bar{F}_i \cdot \bar{r}_i$$

ანუ

$$2\bar{T} + \sum_i^N \bar{F}_i \cdot \bar{r}_i = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \quad (V-13.2)$$

ამ და ქვემოთ მოყვანილ ფორმულებში თავზე ხაზის გადასმა აღნიშნავს დროის მიხედვით გასაშუალოებას.

თუ ამ სისტემის მოძრაობა არის პერიოდული, ე.ი. მისი ყველა წერტილის კოორდინატის მნიშვნელობები მეორდება დროის გარკვეული შუალედების შემდეგ, მაშინ, თუკი ამ შუალედს ავირჩევთ τ -ს ტოლად, მარჯვენა მხარეს ვაქცევთ ნულად. ანალოგიურ დასკვნას გავაკეთებთ არაპერიოდული მოძრაობის დროსაც, თუ მოძრაობა იწარმოებდა შემოსასაღერულ არეში. ამ შემთხვევაში $|C|$ სიდიდე უემოდან შემოსასაღერული იქნება, და საკმაოდ დიდს თუ ავიღებთ τ -შუალედს, (V-13.2) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეიძლება გაეხადოს რაინდ მცირე. ყოველ ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_i^N \bar{F}_i \cdot \bar{r}_i \quad (V-13.3)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს უწოდებენ კლაუზიუსის ვირიალს, თვით ამ ტოლობას კი - თეორემას ვირიალის შესახებ.

ამ სახით თეორემა ძალიან სასარგებლოა გაზების კინეტიკურ თეორიაში, საზოგადოდ, მას დიდი გამოყენება აქვს ფიზიკის მრავალ სფეროში, სადაც საქმე გვაქვს მრავალნაწილაკიან სისტემებთან. უკანასკნელ ხანს ამ თეორემამ ფართო გამოყენება პოვა მიკროსამყაროს ფიზიკაში, მაგალითად, კვარკ-ანტიკვარკისაგან შედგენილი სისტემების დონეების სტრუქტურის შესასწავლად, აგრეთვე კლასიკური სოლიტონური ამონახსნების შესწავლისას ველების კვანტური თეორიის ტოპოლოგიურ მოდელებში.

შეიძლება წეყნება, რომ თუ \bar{F}_i , ძალაში აქტიურ ძალებთან ერთად მონაწილეობს სიჩქარის პროპორციული ხახუნის ძალები, ეს უკანასკნელნი ვირიალის გამოთვლაზე არ ახდენენ გავლენას. ამავე დროს, ცხადია, უნდა ვიგულისხმობთ, რომ სისტემის მოძრაობა ხახუნის გამო არ წყდება, ე.ი. მუდმივად მიეწოდება ენერგია მოძრაობის შესანარჩუნებლად (აჩვენეთ!).

თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, მაშინ თეორემა მიიღებს სახეს:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_i^N \nabla V \cdot \bar{r}_i \quad (V-13.4)$$

თუ გამოვიყენებთ პოტენციალურ ველში მოძრავე ცალკე ადგილზე ნაწილაკისათვის, (V-13.4) ტოლობა მოგვცემს

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} r \quad (V-13.5)$$

თუ, მაგალითად, პოტენციალი ხარისხობანი ფუნქციაა

$$V = ar^{n-1}$$

მაშინ

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V \quad (V-13.6)$$

და თეორემა იღებს სახეს

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V} \quad (V-13.7)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა პოტენციული კულონური სახისაა, $n = -2$, ვირი-ალის თეორემა იღებს კარგად ცნობილ ფორმას

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}$$

ამოცანები:

1. განსაზღვრეთ ნაწილაკის ცენტრზე "დაცემის" ეფექტური განივკვეთი შემდეგ ველებში: (ა) $V = -\alpha/r^2$, (ბ) $V = -\alpha/r^n$ ($n > 2$, $\alpha > 0$).

2. განსაზღვრეთ m_1 მასის ნაწილაკთა m_2 მასის და R რადიუსის სფეროზე დაცემის ეფექტური განივკვეთი, თუ სფერო მათ იზიდავს ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის ძალით.

3. განსაზღვრეთ $V = \alpha/r^2$ ($\alpha > 0$) ველში ნაწილაკის გაფანტვის ეფექტური განივკვეთი.

4. განსაზღვრეთ მცირე კუთხეებზე გაფანტვის ეფექტური განივკვეთი შემდეგ ველში $V = \alpha/r^n$, ($n > 0$).

5. განიხილეთ შემდეგი ძალა $F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^4}$. აჩვენეთ, რომ თუ $\rho^2 k > k'$, ნაწილაკს შეუძლია იმოძრაოს სტაბილურ წრიულ ორბიტაზე რადიუსით $r = \rho$.

6. განიხილეთ ძალა $F(r) = -k/r^2 \exp(-r/a)$. გამოიკვლიეთ მის ველში წრიული ორბიტების სტაბილურობის პრობლემა.

7. განსაზღვრეთ იზოტროპული ოსცილატორის ველში, $V(r) = \frac{kr^2}{2}$, ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია.

8. განიხილეთ ნებისმიერი N ნაწილაკისგან შედგენილი სისტემა. ნაწილაკთა წვეილებს შორის მოქმედი ძალები ჩათვალეთ ცენტრალურად. შემოიტანეთ მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორი და აჩვენეთ რომ ის არის ციკლური.

ჰამილტონის კანონიკური ბანტოლებები

ამ თავში გავაგრძელებთ მექანიკის თეორიული მეთოდების განვი-
თარებას და ჩამოყვავილებით ე.წ. ჰამილტონის ფორმალიზმს. თუმცა ფიზიკური
თვალსაზრისით ახალი დიდი არაფერი მოგმატება, მიუხედავად ამისა, მივიღებთ
მექანიკური სისტემების გამოკვლევის უფრო მძლავრ მეთოდს. შემდეგში
ჩაეთვლით, რომ განხილული სისტემები არის ჰოლონომური, ხოლო მოქმედი
ძალები – პოტენციალური ზოგადი შინაარსით.

VI-1. ლეჟანდრის გარდაქმნა

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია $f(x, y)$. მის დიფერენციალს აქვს სახე

$$df = udx + vdy, \quad (VI-1.1)$$

სადაც

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (VI-1.2)$$

გადავიდეთ ახლა x, y დამოუკიდებელი ცვლადებიდან u, v დამოუ-
კიდებელ ცვლადებზე და ამრიგად, dx, dy დიფერენციალებიდან du, dv დიფერენ-
ციალებზე. ეთქვას g არის u და v ცვლადების ფუნქცია, განსაზღვრული ასე

$$g = f - ux \quad (VI-1.3)$$

მაშინ მისი დიფერენციალი იქნება

$$dg = df - udx - xdu.$$

მაგრამ (VI-1.1)-ის ძალით

$$dg = vdy - xdu,$$

სადაც x და v სიდიდეები ახლა არიან u და v ცვლადების ფუნქციები. ის-
ინი ასე განიზარტებიან

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \text{და} \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (VI-1.4)$$

ამ ფორმულებს ვწერთ (VI-1.2)-ის მსგავსად, რადგან
 $dg = vdy + bdu$. ზემოთ მოყვანილი ფორმულები განსაზღვრევენ ლეჟანდრის გარ-
დაქმნას.

ამ გარდაქმნის შედეგად $f(x, y)$ ფუნქციიდან გადავივართ $g(u, v)$ ფუნქცი-
აზე.

სხვანაირად, გვინდა გადავიდეთ $f(x, y) \rightarrow g(u, v)$ ანუ f -დან განვდევ-
ნოთ x -ზე დამოკიდებულება და შევცვალოთ u -ზე დამოკიდებულებით. გვაქვს:

$$df = udx + vdy, \quad u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

შემოგვაქვს $g = f - ux \equiv g(u, v)$. როდის მოხდება ასე?

აშკარაა, რომ თუ ასეა, მაშინ

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

მეორეს მხრივ

$$df - udx - xdu = udx + ydy - udx - xdu$$

საიდანაც გამოდის, რომ მიზანს მივაღწევთ თუ

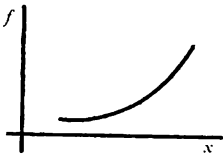
$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{და} \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

- ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

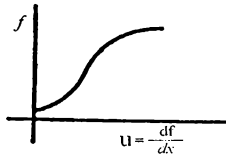
სიმარტივისათვის განვიხილოთ ერთი დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქცია

$$f = f(x)$$

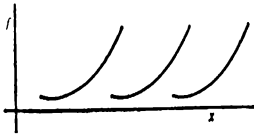
დავუშვათ ახლა, რომ გვინდა გადავიდეთ ახალ დამოუკიდებელ ცვლადზე $u = \frac{df}{dx}$. ისმის კითხვა: რომელი სიდიდე უნდა ავირჩიოთ მის ფუნქციად (მასზე დამოკიდებულ ცვლადად), რათა შევინარჩუნოთ წინა გამოსახულებაში მოცემული სრული ინფორმაცია?



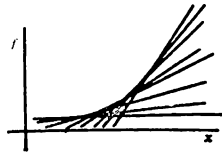
(a)



(b)



(c)



(d)

ნახაზი 50

სტრატეგია გადმოცემულია ამ გრაფიკებზე: (a) გრაფიკი გამოსახავს თავდაპირველ თანაფარდობას. (b) -ზე ფორმალურად გამოხატულია $f(u)$ ფუნქცია. შეიცავს თუ არა ეს გრაფიკი (a) -ზე გამოხატულ სრულ ინფორმაციას?

(b) – ს მიხედვით f ფუნქცია რომ აღვადგინოთ, ეს არ მოხდება ცალსახად, მიიღება (c) – სე გამოხატული სურათი (წარმოებულთან ფუნქციის აღდგენა).

გავისვენოთ, რომ (a) – გრაფიკის (მრუდის) მხები აღიწერება განტოლებით:

$$f = ux + g$$

აქ g არის f – ღერძზე მოკვეთილი მონაკვეთი, ხოლო u – პირველი წარმოებულს. ამრიგად, თუ u დამოუკიდებელი ცვლადია და ჩვენ გვეცოდინება ფუნქცია $g = g(u)$, სადაც

$$g = f - ux. \quad (*)$$

შეგვეძლება აღვადგინოთ f ფუნქციის გრაფიკი, როგორც მხებების მომხლები.

ესაა ლეჟანდრის გარდაქმნის კერძო მაგალითი, რომლის განზოგადება მრავალ ცვლადზე ტრივიალურია.

• როგორც ვიცით, n თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემა აღიწერება შემდეგი n განტოლებით:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (VI-15)$$

რადგან ესაა მეორე რიგის განტოლება დროითი წარმოებულის მიხედვით, მოძრაობის ცალსახად განსაზღვრისათვის აუცილებელია ნებისმიერად დავასახელოთ საწყისი მნიშვნელობები n კოორდინატისა q , და მათი n წარმოებულისა \dot{q} . ამ შინაარსით q , კოორდინატები და \dot{q} , სინქარები აღგენენ $2n$ დამოუკიდებელ ცვლადთა სრულ სისტემას, რომელიც აუცილებელია სისტემის მოძრაობის აღსაწერად. ამიტომ ლაგრანჟის მეთოდი ნიშნავს სისტემის აღწერას განზოგადებული კოორდინატებითა და განზოგადებული სინქარებით.

ჰამილტონის მეთოდში კი დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღებინ განზოგადებული კოორდინატები q , და განზოგადებული იმპულსები p , განსაზღვრული ასე

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (VI-16)$$

ამრიგად, (q, \dot{q}, t) ცვლადებიდან უნდა გადავიდეთ (q, p, t) ცვლადებზე, რისთვისაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლეჟანდრის გარდაქმნა მრავალი ცვლადისათვის.

ანუ ლაგრანჟიანის ნაცვლად უნდა შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (VI-17)$$

რომელიც აგებულია ზემოთ განხილული g ფუნქციის მსგავსად, (VI-13). თუ გავიხსენებთ ადრე შემოყვანილი განზოგადებული იმპულსის განმარტებას და გამოვიყენებთ (VI-17) ფორმულაში, დავრწმუნდებით, რომ (VI-17) ემთხვევა (IV-32)-ს.

გამოეთვალათ ახლა H – ის, როგორც q, p, t ცვლადების ფუნქციის სრული დიფერენციალი:

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (VI-18)$$

მაგრამ (VI-17) გარდაქმნის თანახმად ვწერთ:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i dq_i - dL = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

თუ (VI-1.6) განმარტებას გავისხენებთ, $d\dot{q}_i$ -ის შემცველი წევრები გაბათილდებიან და ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (VI-1.9)$$

აქ კიდევ მხედველობაში მიიღებულნი ლაგრანჟის განტოლება

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

თუ ახლა შევადარებთ dH -ის ორივე გამოსახულებას, (VI-1.8)-(VI-1.9), დავასკენით:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (VI-1.10)$$

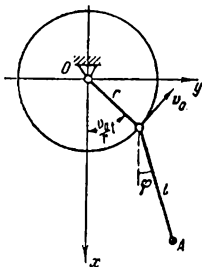
გარდა ამისა გვაქვს კიდევ ერთი თანაფარდობა

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (VI-1.11)$$

(VI-1.10) განტოლებებს უწოდებენ ჰამილტონის განტოლებებს. ისინი წარმოადგენენ $2n$ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომლებიც ეკვივალენტურია ლაგრანჟის განტოლებებისა.

ამ განტოლებათა შესადგენად პირველ რიგში უნდა ავაგოთ ლაგრანჟიანი $L(q, \dot{q}, t)$ და, გამოვთვლით რა განზოგადებულ იმპულსებს (VI-1.6) თანაფარდობით, შევადგინოთ ჰამილტონიანი (VI-1.7), როგორც (q, p, t) ცვლადების ფუნქცია. ამის შემდეგ (VI-1.10) მოგვეცემს საძიებელ განტოლებებს.

მაგალითი: შევადგინოთ ჰამილტონიანი H სივრცის მათემატიკური საქანისათვის, რომლის დაკიდების წერტილი მუდმივი s_0 სიჩქარით მოძრაობს r -რადიუსის ევრტიკალურ წრეწირზე (ნახ. 51)



ნახაზი 51

ამოხსნა: განზოგადებულ კოორდინატად ავიღოთ გადახრის კუთხე

$\varphi = q$

ცხადია, ბურთულას დეკარტეს კოორდინატები

$$x_A = r \cos \frac{v_0}{r} t + l \cos \varphi, \quad \omega = \frac{v_0}{r}, \quad \alpha = \omega t$$

$$y_A = r \sin \frac{v_0}{r} t + l \sin \varphi$$

ამიტომ

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\varphi}^2 + 2v_0 l \dot{\varphi} \cos \left(\varphi - \frac{v_0}{r} t \right) + v_0^2 \right]$$

განზოგადებული ძალის პოენისას ბმები ითვლება მყისიერად გაჩერებულად. ამიტომ პოტენციალური ენერგიაა

$$V = -mgl \cos \varphi$$

ე.ი.

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\varphi}^2 + 2v_0 l \dot{\varphi} \cos \left(\varphi - \frac{v_0}{r} t \right) + v_0^2 \right] + mgl \cos \varphi$$

ამრიგად,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} + mv_0 l \cos \left(\varphi - \frac{v_0}{r} t \right)$$

აქედან მოიძებნება

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l} \cos \left(\varphi - \frac{v_0}{r} t \right)$$

შევადგინოთ ჰამილტონის ფუნქცია

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\varphi}^2 - v_0^2 \right) - mgl \cos \varphi$$

თუ $v_0 = 0$, მაშინ

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = T + V,$$

რაც ემთხვევა სრულ ენერგიას.

ჩაესვათ აქ $\dot{\varphi}$ -ის გამოსახულება, მივიღებთ საძიებელ ჰამილტონიანს:

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l} \cos \left(\varphi - \frac{v_0}{r} t \right) \right]^2 - mgl \cos \varphi$$

VI-2. ციკლური კოორდინატები და რაუსის მეთოდი

ჰამილტონის განტოლებები განსაკუთრებით მოსახერხებელია ისეთი სისტემების შესასწავლად, რომლებსაც ციკლური კოორდინატი გააჩნიათ. როგორც ვიცით, თუ q_j , ციკლური კოორდინატია, ის არ შედის ლაგრანჟიანში და, ამიტომ, მისი შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი მუდმივია. მაგრამ თუ ასეა, მაშინ $\dot{p}_j = 0$, ანუ ჰამილტონის განტოლებების თანახმად, $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$, ე.ი.

ციკლური კოორდინატა არც ჰამილტონიანში შევა.

ახლა პირიქით, ვთქვათ, რომ რომელიღაც q_j , კოორდინატი არ შედის ჰამილტონიანში. მაშინ ჰამილტონის განტოლებებიდან გამოვა, რომ სათანადო p_j მუდმივია.

ამრიგად, ჰამილტონისა და ლაგრანჟის მეთოდებს შორის ამ საკითხში სრული მსგავსებაა. მაგრამ მათ შორის არსებითი განსხვავებაც წარმოიქმნება.

თუ რომელიმე კოორდინატი, მაგ., q_n არის ციკლური, ლაგრანჟიანს ექნება სახე:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n; t),$$

ე.ი. შეიცავს ყველა განზოგადებულ სიქარეს. ამიტომ, ციკლური კოორდინატის მიუხედავად, ჩვენ მაინც საქმე გვაქვს n თავისუფლების ხარისხთან.

ამის საწინააღმდეგოდ, ჰამილტონისეული აღწერისას q_n - ის შესაბამისი p_n იმპულსი იქნება რაღაც α მუდმივი და ჰამილტონიანს ექნება სახე:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \alpha; t)$$

ამრიგად, ჰამილტონიანში ამ შემთხვევაში შევა მარტო $n-1$ კოორდინატი და მათი განსაზღვრა ხდება ციკლური კოორდინატის სრული იგნორირებით. ეს კოორდინატი თავს ავლენს მხოლოდ ინტეგრაციის α მუდმივის სახით, რაც განსაზღვრება ამოცანის საწყისი პირობებიდან. ამდენად ჰამილტონის ფორმალიზმში ციკლური კოორდინატი მართლაც "იგნორირებადია". მისი განსაზღვრისათვის საკმარისი იქნება ვაინტეგროთ განტოლება

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

• მივქცვიოთ ყურადღება იმას, რომ არსებობს ციკლური კოორდინატის სრული გამორიცხვის მეთოდი - რაუსის მეთოდი. ჯერ აღვწეროთ პირდაპირი მეთოდი:

დავუშვათ, რომ განზოგადებული კოორდინატებიდან პირველი k კოორდინატი q_1, q_2, \dots, q_k არის ციკლური. მაშინ ისინი არ შედიან ჰამილტონიანში და ჰამილტონის განტოლებების თანახმად გვექნება:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{VI-2.1})$$

აქედან გამოდინარეობს, რომ

$$p_j = c_j = \text{const.} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial c_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{VI-2.2})$$

სადაც c_j - ინტეგრაციის მუდმივებია.

ჰამილტონის ფუნქცია ახლა დამოკიდებული იქნება $n-k$ განზოგადებულ კოორდინატზე, $n-k$ განზოგადებულ იმპულსზე, t დროზე და k ინტეგრების მუდმივზე c_j :

$$H = H(t, q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n, c_1, c_2, \dots, c_k), \quad (VI-2.3)$$

გამოვიყენოთ ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad (m = k+1, k+2, \dots, n) \quad (VI-2.4)$$

ესაა პირველი რიგის $2n-2k$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა p_m, q_m ცვლადების მიმართ. მის ამონახსნში შევა $2m = 2(n-k)$ ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივი c_m და c'_m , აგრეთვე c_j ინტეგრაციის მუდმივები

$$\left. \begin{aligned} p_m &= p_m(t, c_m, c'_m, c_j) \\ q_m &= q_m(t, c_m, c'_m, c_j) \end{aligned} \right\} \quad (m = k+1, k+2, \dots, n) \quad (VI-2.5)$$

ნავსეათ ეს ამონახსნები H ფუნქციაში, (VI-2.3). გვაქვს

$$H = H(t, q_m(t, c_m, c'_m, c_j), p_m(t, c_m, c'_m, c_j))$$

ვისარგებლოთ შემდეგ (VI-2.2) გამოსახულებებით:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial c_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ვიპოვიოთ

$$q_j = \int \frac{\partial H}{\partial c_j} dt + c'_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (VI-2.6)$$

ამრიგად, k ციკლური კოორდინატის არსებობის დროს ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება (VI-2.4) განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. ამ სისტემაში ახლა $2k$ რაოდენობით ნაკლები განტოლება გვაქვს.

• გაცილებით ელვგანტურად გამოიყურება ჩვენს მიერ IV თავში განხილული რაუსის მეთოდი. შემოვიტანოთ რაუსის ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - L, \quad (VI-2.7)$$

რაც წააგავს პირველი k სიჩქარით ლეჟანდრის გარდაქმნას. მისი დიფერენციალია

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^k \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

აქედან ვაკენით, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, & \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, & (i = 1, \dots, k) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, & \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}, & (i = k+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (VI-2.8.9)$$

პირველი მათგანი მიეკუთვნება ციკლურ კოორდინატებს და აქვს ჰამილტონის განტოლებების ფორმა, რომელშიც R ასრულებს ჰამილტონიანის როლს. ამავე დროს, დანარჩენი განტოლებები გეინვენუბენ, რომ q_{k+1}, \dots, q_n კოორდინატებისათვის გვაქვს განტოლებები:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad (i = k+1, \dots, n) \quad (\text{VI-2.10})$$

რომელთაც აქვთ ლაგრანჟის განტოლებების სახე და R ასრულებს ლაგრანჟიანის როლს.

რაკი q_1, \dots, q_k - ციკლური კოორდინატებია, ისინი ლაგრანჟიანთან ერთად R - შივ არ შეეღვენ, ხოლო მათი შესატყვისი განზოგადებული იმპულსები p_1, p_2, \dots, p_k მუდმივებია $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, რომლებიც უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებიდან. ამრიგად რაუსის ფუნქცია შემდეგი სახისია:

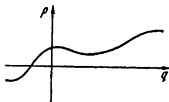
$$R = R(q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k, t),$$

ე. ი. აღარ შეიცავს ციკლურ კოორდინატებს და მათ წარმოებულებს. ამის საფუძველზე (VI-2.10) განტოლებები შეგვიძლია ამოვხსნათ ისე, რომ არ განვიხილოთ ციკლური კოორდინატების ყოფაცევა.

ამრიგად, სიტუაცია წააგავს ჰამილტონის განტოლებებში არსებულს - რაუსის მეთოდი ამცირებს განსახილავი ცვლადების რაოდენობას.

• შევადაროთ კიდევ ერთხელ ლაგრანჟისა და ჰამილტონის მეთოდები.

ლაგრანჟის ფორმალისმში მექანიკური სისტემის მდგომარეობა (დროის რაიმე მომენტში) ფიქსირდებოდა ყველა განზოგადებული კოორდინატისა და ყველა განზოგადებული სინქარის მოცემით. რაც შეეხება სისტემის კანონიკური ცვლადებით აღწერას, ბუნებრივია უნდა დაეფიქსიროთ ყველა კოორდინატი და იმპულსი. ამიტომ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის თუ ავადებთ $2n$ - განზომილებიან სივრცეს, რომელშიც კოორდინატებია q , და p , მაშინ ამ სივრცეში თითოეული წერტილი შეესაბამება სისტემის რაიმე მდგომარეობას. ამ სივრცეს უწოდებენ ფაზურ სივრცეს, ხოლო სისტემის მდგომარეობის გამომსახველად წერტილებს (დროის რაიმე მომენტში) უწოდებენ გამოშხატველ წერტილებს. გამოშხატველი წერტილების ერთობლიობა დროის სხვადასხვა მომენტებში ფაზურ სივრცეში წარმოქმნის რაიმე მრუდს - სისტემის ფაზურ ტრაექტორიას.



ნახაზი 52. ფაზური ტრაექტორია

რადგან, მდგომარეობის ცნების შინაარსის მიხედვით სისტემის მდგომარეობის მოცემა რაღაც $t = t_0$ მომენტში განსაზღვრავს მის მდგომარეობას დროის ყველა დანარჩენ მომენტებში, ზუსტად ასევე, რაიმე $t = t_0$ მომენტში გამოშხატველი წერტილის მოცემა განსაზღვრავს მთელ ფაზურ ტრაექტორიას. ამისგან განსხვავებით - სისტემის მდებარეობის მოცემა კონფიგურაციულ სივრ-

ცეში ტოვებს კონფიგურაციული ტრაექტორიების გატარების უამრავ შესაძლებლობებს.

* სხვადასხვა მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ საქანის მოძრაობის განტოლების მიღების ამოცანა ნიუტონის, ლაგრანჟის და ჰამილტონის ფორმალისმებში.

ა) ნიუტონის თეორია:
ვიწყებთ ნიუტონის აქსიომით

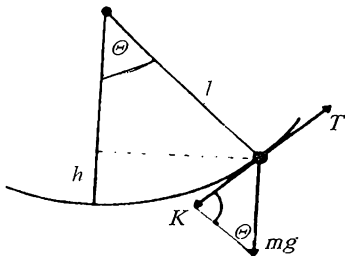
$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

გადახრის შესაბამისი რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ s -ით, ხოლო ერთეულოვანი მხები ვექტორი იყოს \vec{T} (ნახ. 53). მაშინ

$$\vec{F} = -mg \sin \Theta \vec{T}$$

და ამიტომ

$$m\dot{s} \vec{T} = -mg \sin \Theta \vec{T}$$



ნახაზი 52

რაკი $s = l\Theta$, გვაქვს $\dot{s} = l\dot{\Theta}$, ამიტომ ვიღებთ მოძრაობის განტოლებას

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0$$

მცირე გადახრებისათვის ($\sin \Theta \approx \Theta + \dots$), გვრჩება

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \Theta = 0$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\Theta = A \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

სადაც მუდმივები უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებიდან.

ბ) ლაგრანჟის თეორია:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\Theta})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}^2,$$

$$V = mgh = mg(l - l \cos \Theta) = mgl(1 - \cos \Theta).$$

ამიტომ ამ კონსერვატიული სისტემის ლაგრანჟიანი ასეთია

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}^2 - mgl(1 - \cos \Theta)$$

ახლა დაეწეროთ ლაგრანჟის განტოლებები

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$$

ამიტომ აქ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = -mgl \sin \Theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta} = ml^2 \ddot{\Theta}$$

გვაქვს

$$ml^2 \ddot{\Theta} + mgl \sin \Theta = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0$$

გ) ჰამილტონის თეორია:

გამოვიყენოთ განზოგადებული იმპულსი

$$p_{\Theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = ml^2 \dot{\Theta}$$

კინეტიკური ენერჯია ტოლია

$$T = \frac{1}{2} \frac{p_{\Theta}^2}{ml^2}$$

ამიტომ ჰამილტონიანი, რაკი სისტემა კონსერვატიულია, ასე გამოიყურება

$$H = T + V = \frac{1}{2} \frac{p_{\Theta}^2}{ml^2} + mgl(1 - \cos \Theta)$$

ხოლო ჰამილტონის განტოლებები იღებენ სახეს

$$\dot{p}_{\Theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = -mgl \sin \Theta$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\Theta}} = \frac{p_{\Theta}}{ml^2}$$

როგორც ვხედავთ ეს განტოლებები პირველი რივისაა დროითი წარმომადგენლის მიხედვით. ამიტომ, ზოგადი შემთხვევის (როცა კუთხე არ არის მცირე) ანალიზი შესაძლებელია თუნდაც რიცხვითი მეთოდებით. ამ მხრივ ჰამილტონის მეთოდს აშკარა უპირატესობა გააჩნია. რაც შეეხება ეკვივალენტურობას, ის ადვილი სანერნებელია. მართლაც, უკანასკნელი განტოლებებიდან გვაქვს

$$p_{\Theta} = ml^2 \dot{\Theta},$$

რომლის გაწარმოება იძლევა

$$\dot{p}_{\Theta} = ml^2 \ddot{\Theta}$$

ზედა ფორმულასთან შედარებას საბოლოოდ მივყავართ საძიებელ

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0$$

VI-3. ფაზური სივრცე და ფაზური ტრაექტორიების მაგალითები

როგორც ითქვა, ჰამილტონის ფორმალიზმში n თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემის მოძრაობის მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში საესებით აღიწერება n რაოდენობის განზოგადებული კოორდინატებისა და ამდენივე განზოგადებული იმპულსების $q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n$ მოცემით. ეს სიდიდეები შეგვიძლია გავიგოთ როგორც კოორდინატები $2n$ განზომილებიან სივრცეში, ფაზურ სივრცეში. ამ სივრცის განზოგადებული q , კოორდინატების n განზომილებიანი ქვესივრცე არის კონფიგურაციული სივრცე, ხოლო p , იმპულსების ქვესივრცეა იმპულსური სივრცე. მოძრაობის დროს სისტემის გამომსახველი წერტილი აღწერს წირს, ფაზურ ტრაექტორიას. თუ ჰამილტონიანი ცნობილია, მაშინ მთელი ტრაექტორია შეიძლება ცალსახად გამოთვალოს წინასწარ ერთი წერტილის კოორდინატებიდან. ამიტომ ყოველი წერტილი მიეკუთვნება მხოლოდ ერთ ტრაექტორიას, და ორი სხვადასხვა ტრაექტორია ერთმანეთს არ კვეთს. წირი ფაზურ სივრცეში მოიცემა პარამეტრული წარმოდგენით $q_j(t), p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). ჰამილტონის განტოლებების ამონახსნის ერთადერთობის გამო სისტემა მოძრაობს სხვადასხვა ტრაექტორიების გასწვრივ სხვადასხვა საწყისი და სასაზღვრო პირობების შესაბამისად. კონსერვატიული სისტემებისათვის ფაზური წერტილი მოძრაობს $(2n-1)$ -განზომილებიან ზედაპირზე, რადგან ედება პირობა $H(q, p) = E = const$.

ფაზური ტრაექტორიები შეიცავენ ვრცელ ინფორმაციას მოძრაობის შესახებ. თუნდაც ყველაზე წოგადი (ტოპოლოგიური) სურათი ფაზური ტრაექტორიების მდებარეობისა საშუალებას იძლევა გავაკეთოთ მთელი რიგი დასკვნები სისტემის შესაძლო მოძრაობების შესახებ. ესაა დიფერენციალურ განტოლებათა თვისებრივი თეორიის ერთ-ერთი მთავარი მეთოდი.

განვიხილოთ, მაგალითად, ბრტყელი საქანის ფაზური დიაგრამა. თუ გადახრის ϕ კუთხეს ავირჩევთ განზოგადოებულ კოორდინატად, ბრტყელი საქანისათვის გვექნება

$$p_\phi = ml^2 \dot{\phi}$$

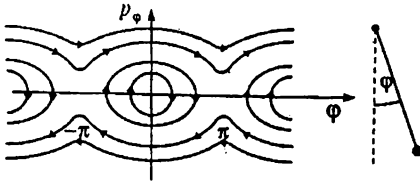
ჰამილტონიანი (ამ შემთხვევაში სრული ენერგია) იქნება

$$H = \frac{1}{2} m(l\dot{\phi})^2 - mgl \cos \phi = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - mgl \cos \phi = E$$

პოტენციალის ათვლას ვიწყებთ დაკიდების წერტილიდან. ახლა შეგვიძლია ჩავწეროთ ფაზური ტრაექტორიის $p_\phi = p_\phi(\phi)$ განტოლება:

$$p_\phi = \pm \sqrt{2ml^2 (E + mgl \cos \phi)}$$

ამრიგად ვიპოვეთ მრუდების ოჯახი, რომლებსთვისაც E ენერგია არის პარამეტრიც (ნახ. 54).



ნახაზი 54. ერთგანზომილებიანი საქანის ფაზური სივრცე და ფაზური დიაგრამა

$E < mgl$ ენერგიებისათვის ფაზური ტრაექტორიები არიან ჩაკეტილი (ელიფსის მსგავსი) მრუდები; საქანი ირხევა წინ და უკან (ვიბრაციას განიცდის). თუ სრული ენერგია გადააჭარბებს mgl -ს, საქანს კვლავ ექნება კინეტიკური ენერგია უმაღლეს წერტილებში $\varphi = \pm\pi$ და განაგრძობს მოძრაობას მიმართულების შეუცვლელად (ბრუნავს).

VI-4. ფაზური სივრცე და ლიუვილის თეორემა

განვიხილოთ ახლა დამოუკიდებელ ნაწილაკთა დიდი რაოდენობა, N , რომლებიც მუქანიკურად იგივეური არიან. რაც ნიშნავს, რომ ისინი გარდა საწყისი პირობებისა, აღიწერებიან ერთი და იგივე ჰამილტონიანით. როგორც კერძო მაგალითი, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნაწილაკთა ნაკადი ამანქარებულში. თუ ყველა წერტილი დროის რაღაც t_1 მომენტში მოხვედრილია 2π -1 განზომილებიანი ფაზური სივრცის G_1 არეში, რომლის მოცულობაა

$$\Delta V = \Delta q_1 \dots \Delta q_n \Delta p_1 \dots \Delta p_n$$

შეგვიძლია განვმარტოთ სიმკვრივე

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta V}. \quad (VI-4.1)$$

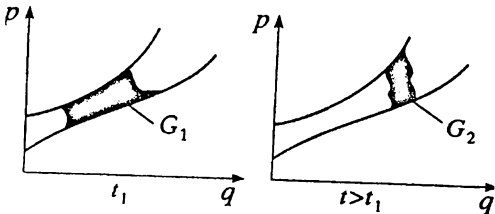
მოძრაობის განმავლობაში G_1 იცვლება ჰამილტონის განტოლებების მიხედვით და გადადის G_2 არეში (ნახ.55). ლიუვილის თეორემის მტკიცება შემდეგში მდგომარეობს:

ფაზურ სივრცეში ნებისმიერი არის მოცულობა ინახება, თუ მისი საზღვრის წერტილები მოძრაობენ კანონიკური განტოლებების მიხედვით.

ან, სხვა სიტყვებით, თუ ჩავატარებთ ზღვრულ გადასვლას,

ფაზური სივრცის წერტილების სიმკვრივე ნაკადთან ერთად მოძრავე წერტილის მახლობლობაში არის მუდმივი.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად შევისწავლოთ სისტემის წერტილების მოძრაობა ფაზური სივრცის მოცულობის ვლემენტში. ჯერ განვიხილოთ ნაწილაკთა ნაკადის კომპონენტები q_k და p_k მიმართულებით. $ABCD$ არე (ნახ. 56) წარმოადგენს $2n$ განზომილებიანი მოცულობის dV ვლემენტის პროექციას q_1, p_1 -სიბრტყეზე.



ნახაზი 55. არის ევოლუცია ფაზურ სივრცეში

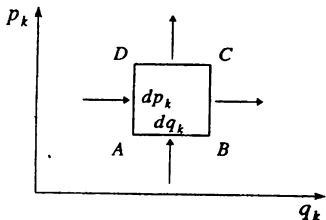
წერტილთა რაოდენობა, რომლებიც შედიან მოცულობის ელემენტში დროის ერთეულში "გვერდითი კვეთიდან" (პროექციით AD), არის

$$\rho \dot{q}_k dp_k \cdot dV_k,$$

სადაც

$$dV_k = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^n dq_\alpha dp_\alpha$$

არის $(2n-2)$ - განზომილებიანი დანარჩენი მოცულობის ელემენტი; $dp_k dV_k$ არის გვერდითი ზედაპირის სიდიდე, რომლის პროექციაა AD ზემოაღნიშნულ p_k, q_k - სიბრტყეში.



ნახაზი 56. მოცულობის ელემენტის პროექცია q_k, p_k - სიბრტყეზე

იმ წერტილთა ტეილორის გაშლა, რომლებიც ტოვებენ BC გვერდს პირველი მიმართულებით არის

$$\left(\rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right) dp_k \cdot dV_k \quad (VI-42)$$

ანალოგიურად, ნაკადისათვის p_k - მიმართულებით გადაქვს

- შესვლა AB გვერდში: $\rho \dot{p}_k dq_k \cdot dV_k,$

$$- \text{გასვლა } CD \text{ გვერდში: } \left(\rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right) dq_k \cdot dV_k.$$

p_k - და q_k - მიმართულებებით ნაკადის კომპონენტებიდან სისტემის წერტილთა ის რაოდენობა, რომელიც დარჩა მოცულობის ელემენტში დროის ერთეულში, ტოლია

$$- \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right) dV$$

k -ს მიხედვით აჯამებით ($k = 1, \dots, n$) ვიპოვით ასეთ წერტილთა სრულ რაოდენობას. სწორედ ეს სიდიდე შეესაბამება სიმკვრივის dV -ზე ნამრავლის დროის მიხედვით ცვლილებას. აქედან ვასკენით, რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right) \quad (\text{VI-4.3})$$

ამრიგად მივიღეთ ნაკადის უწყვეტობის განტოლება შემდეგი ფორმით

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (\text{VI-4.4})$$

დიფერენცია გამოითვლება $2n$ -განზომილებიან ფაზურ სივრცეში

$$\text{div} \equiv \nabla = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (\text{VI-4.5})$$

ამ სახის უწყვეტობის განტოლებები წარმოიქმნება დინებების ფიზიკაში (ჰიდროდინამიკა, ელექტროდინამიკა, კვანტური მექანიკა). ისინი ყოველთვის რაიმე შენახვის კანონს გამოხატავენ.

ცხადი გაწარმოებით (VI-4.3) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VI-4.6})$$

ჰამილტონის განტოლებებიდან გვაქვს

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k}, \quad \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k}$$

თუ ჰამილტონიანის მგორვე წარმოებულები უწყვეტია, მივიღებთ

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0$$

აქედან გამოდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VI-4.7})$$

ეს კი ზუსტად უდრის სიმკვრივის სრულ წარმოებულს დროის მიხედვით

$$\frac{d}{dt} \rho = 0.$$

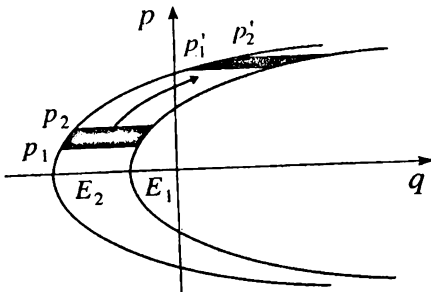
(VI-4.8)

და. ამიტომ, $\rho = \text{const.}$

მაგალითი:

ფაზური სივრცის სიმკვრივე ნაწილაკებისათვის გრავიტაციულ ველში: m მასის ნაწილაკების სისტემა იმოფება მუდმივ გრავიტაციულ ველში. ენერგიისათვის გეპქეს

$$H = E = \frac{p^2}{2m} - mgq$$



ნახაზი 57

ფაზური ტრაექტორიები $p(q)$ პარაბოლებია (იხ. ნახ. 57)

$$p(q) = \sqrt{2m(E + mgq)},$$

რომლებსათვისაც ენერგია პარამეტრია. განვიხილოთ ნაწილაკთა რაოდენობა, რომლებსაც $t = 0$ მომენტში აქეთ იმოფლები ინტერვალში $p_1 \leq p \leq p_2$, ხოლო ენერგიები $E_1 \leq E \leq E_2$ ისინი დაფარავენ ფაზურ სივრცეში რაღაც F . არეს. დროის გეიანდელ მომენტში t წერტილები დაფარავენ უკვე F' არეს. მათ ექნებათ იმოფლები

$$p' = p + mgt$$

ასე, რომ F' ყოფილა არე ინტერვალში $p_1 + mgt \leq p' \leq p_2 + mgt$. თუ გაეიხსენებთ, რომ

$$q = \frac{(p^2 / 2m) - E}{mg},$$

ამ არეების ფართობები ასე გამოითვლება

$$F = \int_{\rho_1}^{\rho_2} dp \int_{\frac{(p^2 + 2m) - E_1}{mg}}^{\frac{(p^2 + 2m) - E_2}{mg}} dq = \frac{E_2 - E_1}{mg} = \frac{E_2 - E_1}{mg} \int_{\rho_1}^{\rho_2} dp = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p_2 - p_1),$$

ანალოგიურად

$$F' = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p'_2 - p'_1) = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p_2 - p_1).$$

ესაა სწორედ ლიუვილის თეორემა: $F = F'$ ნიშნავს, რომ ფაზურ სივრცეში სისტემის წერტილთა სიმკვრივე დროის მიხედვით მუდმივია. ლიუვილის თეორემის მნიშვნელობა ძალიან დიდია სტატისტიკურ მექანიკაში, სადაც განიხილავენ ნაწილაკთა ანსამბლებს, რადგან იკარგება ზუსტი ცოდნა ნაწილაკთა სისტემის შესახებ.

VI-5. ვარიაციული პრინციპები ჰამილტონის განტოლებებისათვის

მოძრაობის განტოლებები ლაგრანჟის ფორმით ჩვენ მივიღეთ ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპიდან, სახელდობრ, მოეთხოვეთ ქმედების ფუნქციონალის (ანუ ჰამილტონის ქმედების) ექსტრემუმი

$$\delta I = 0, \quad \text{სადაც} \quad I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t), \quad (*)$$

q , ცვლადების ნებისმიერი ვარიაციების მიმართ, რომლებიც ინტეგრაციის არის ბოლოებზე აკმაყოფილებდნენ პირობას $\delta q_i = 0$.

ამრიგად, დამოუკიდებლად ითვლებოდა კოორდინატების ვარიაციები. რაც შეეხება სინქარუთა ვარიაციებს, ისინი გამოითვლებოდა. სახელდობრ, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ იზოქრონული ვარიაციის დროს

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

ახლა ჩვენი მიზანი იქნება ისე შევცვალოთ ვარიაციული პრინციპი, რომ ის პირდაპირ ჰამილტონის განტოლებებს იძლეოდეს.

დავიწყოთ იქიდან, რომ L ლაგრანჟიანი $(*)$ ტოლობაში შევცვალოთ მისი კეშირით H ჰამილტონიანთან, (VI-1.7):

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, \dot{q}, t)$$

და გადავწეროთ $(*)$ ასე

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = 0 \quad (\text{VI-5.1})$$

ან

$$\delta \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0 \quad (\text{VI-5.2})$$

ამ ტოლობებს ხშირად ჰამილტონის მოდიფიცირებულ პრინციპს უწოდებენ. მას უფრო ხშირად ე.წ. კანონიკური გარდაქმნების განხილვისას იყენებენ. ახლა კი ვაჩვენებთ თუ როგორ მიიღება აქედან ჰამილტონის განტოლებები.

ამ ფორმულაში შემავალი δ - ვარიაცია ანუ ინტეგრალის ვარიაცია გვესმოდა, როგორც ინტეგრალის ცვლილება კონფიგურაციების სივრცეში გამომსახველი წერტილის ტრაექტორიის ცვლილებისას. ამასთან ტრაექტორიის საწყისი და საბოლოო წერტილები რჩებოდნენ უცვლელი. ამავე დროს ვარიაცია იყო ისოქრონული, ე.ი. გამომსახველი წერტილის ტრაექტორიის ვარიაციის დროს t დრო არ იცვლებოდა, ტრაექტორიის საწყისი და საბოლოო წერტილების შესაბამისი დროის მომენტები ვარიაციის დროს რჩებოდნენ უცვლელი და მოძრაობის მთელი დრო ყველა ტრაექტორიაზე იყო ერთნაირი. ეს პირობები ედებოდა (VI-5.1)-ში შემავალი ინტეგრალის ვარიაციას.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ინტეგრალის ვარიაციის პროცესი შეიძლება დავიყვანოთ დიფერენციალების გამოთვლაზე, რისთვისაც საკმარისია განვიხილოთ შესაძლო ტრაექტორიების ერთპარამეტრიანი ოჯახი კონფიგურაციათა სივრცეში. ამ დროს q , კოორდინატები t დროსთან ერთად რაიმე α პარამეტრის ფუნქციებიც ხდებიან. α პარამეტრი აკონკრეტებს, თუ რომელი ტრაექტორია გამოიყენება I ინტეგრალის გამოთვლისას. ამიტომ I შეიძლება განვიხილოთ როგორც α -ს ფუნქცია $I = I(\alpha)$ და მასში შემავალი სიდიდეების ვარიაციები განვიხილოთ როგორც მათი დიფერენციალები, ან სიმბოლურად:

$$\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

სწორედ ეს მეთოდი იყო გამოყენებული ლაგრანჟის განტოლებების მიღებისას.

გამოვიყენოთ ეს მეთოდი ახლაც, ოღონდ q და p სიდიდეების ვარიაციები ჩავთვალოთ ურთიერთდამოუკიდებლად, რაკი ჰამილტონის მეთოდში q და p განიხილებიან როგორც ტოლუფლებიანი კოორდინატები, რომლებიც აღწერენ სისტემის მდგომარეობას.

გადავწეროთ (VI-5.1) α პარამეტრის მეშვეობით. გვაქვს:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0,$$

ანუ

$$d\alpha \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0 \quad (\text{VI-5.3})$$

რაკი ვარიაცია ხდება მუდმივი ("გაყინული") t დროისათვის, $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}$ წერტილში შეგვიძლია t და α ცვლადებით გაწარმოების რიგი გადავსვათ და ეს წერტილს ასე ნაგწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right)$$

მაშინ

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt.$$

ნათუელია, რომ აქ პირველი შესაკრები ნულის ტოლი იქნება, რადგან ყველა ტრანსკორია გადის ერთსა და იმავე კიდურა წერტილებზე, ამიტომ როცა

$$t = t_1 \text{ ან } t = t_2, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = 0.$$

ამის გათვალისწინებით და აგრეთვე იმით, რომ

$$d\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \delta q_i, \quad d\alpha \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \delta p_i,$$

(VI-4.3) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] dt = 0$$

მაგრამ, რადგანაც δp_i და δq_i ვარიაციები ყველა ურთიერთდამოუკიდებელია, ეს ინტეგრალი ნულის ტოლი იქნება, თუ დამოუკიდებელ ვარიაციათა წინ მდგომი კოეფიციენტები უტოლდება ნულს. ეს კი ნიშნავს შემდეგი განტოლებების შესრულებას:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

რაც ემთხვევა ჰამილტონის განტოლებებს.

ამ განტოლებათა მიღებისას ვარიაციული პრინციპიდან არსებითი მნიშვნელობა ჰქონდა δq_i და δp_i ვარიაციების ურთიერთდამოუკიდებლობის მოთხოვნას. ეს გარემოება განასხვავებს ლაგრანჟისა და ჰამილტონის მეთოდებს.

- ლაგრანჟის მეთოდში სისტემის ყოფაცევა აღიწერება განზოგადებული კოორდინატებით და განზოგადებული სიჩქარეებით, (q_i, \dot{q}_i) მაგრამ \dot{q}_i დაკავშირებულია q_i -სთან უბრალო გაწარმოებით. ამიტომ ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებისას $\delta \dot{q}_i$ უნდა გამოეხატოს δq_i -ით. ეს ადვილად კეთდება ინტეგრალქვეშ ნაწილობითი ინტეგრაციით. შედეგად ვიღებთ წევრს $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$, რასაც მივეყვართ მეორე რიგის განტოლებებთან.

- მოდიფიცირებული ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებისას ვიღებთ პირველი რიგის განტოლებებს და ეს იმიტომ ხდება, რომ $\delta \dot{q}_i$ - ისგან განსხვავებით δp_i - ის ვითვლით δq_i - სგან დამოუკიდებლად. ეს კი ნიშნავს, რომ განზოგადებულ იმპულსებს ვთვლით ისეთსავე დამოუკიდებელ ცვლადებად, როგორც განზოგადებულ კოორდინატებს.

ვთვლით, რომ p_i დაკავშირებულია q_i და t ცვლადებთან მხოლოდ მოძრაობის განტოლებებით და არა რაიმე წინასწარმცემული თანაფარდობით. ამრიგად, არც ერთ მათგანს არ ვანიჭებთ უპირატესობას, ორივე ერთნაირად და-

მოუკიდებელი ცვლადებია. ამით n -დან $2n$ -მდე ვზრდით დამოუკიდებელ ცვლადთა რაოდენობას და ვიღებთ პირველი რიგის განტოლებებს.

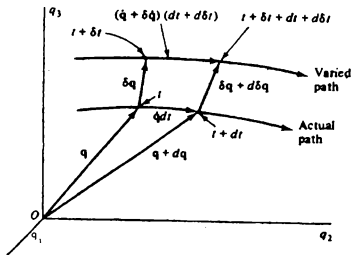
ამასთან დაკავშირებით ცნებები "კოორდინატი" და "იმპულსი" უკვე მოუხერხებელი ცნებებია, რადგანაც მაშინვე იწვევენ წარმოდგენას სივრცულ კოორდინატებთან და მოძრაობის რაოდენობასთან ან კინეტიკურ მომენტთან. სინამდვილეში მათ უნდა მივანიჭოთ უფრო ფართო შინაარსი და ჩავუვალოთ, რომ კოორდინატებად და იმპულსებად დაყოფა არის მოძრაობის აღმწერი დამოუკიდებელი ცვლადების დაყოფა ორ დამოუკიდებელ ჯგუფად, რომლებიც ერთმანეთს უკავშირდებიან ჰამილტონის განტოლებებით თითქმის სიმეტრიულად.

ჰამილტონის განტოლებებს მისი სიმეტრიისა და სილამაზის გამო უწოდებენ კანონიკურსაც.

VI-6. ვარიაციული პრინციპების სხვადასხვა სახე

ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ჩამოყალიბებისას ვთვლიდით, რომ განზოგადებულ კოორდინატთა δq , ვარიაციები არიან მყისიერი, ანუ, სხვა სიტყვებით, წერტილი (q, t) ვარირებულ ტრაექტორიაზე ეთანადება წერტილს (q, t) ნამდვილ წირზე. ამიტომ ვუშვებდით, რომ ვარიაციები ხდება დროის ცვლილების გარეშე, როგორც ვირტუალური წანაცვლებისას.

ბუნებრივია, განვიხილოთ ვარიაციის უფრო ზოგადი სახე, როდესაც წერტილი $(q, \delta q, t, \delta t)$ ეთანადება წერტილს (q, t) , როგორც ნაჩვენებია ნახ. 58-ზე.



ნახაზი 58

აქ ვარირებული წერტილი, საზოგადოდ, დროის განსხვავებულ მომენტს შეესაბამება. ასეთ ცვლილებას სრულ ვარიაციას უწოდებენ და აღნიშნავენ Δ სიმბოლოთი. ნათელია, რომ სრული ვარიაციით მიღებული ტრაექტორიები განსხვავდებიან დროის დიფერენციალებითაც. სწორედ ამის გამო შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ Δ -ვარიაციით მიღებული მოძრაობები ფიზიკურად

შესაძლო იყენენ, ოღონდ ამისათვის უნდა მოეთხოვროთ აგრეთვე, რომ H იყოს მუდმივი არა მარტო ნამდვილ ტრაექტორიებზე, არამედ Δ -ვარიაციით მიღებულ ტრაექტორიებზეც. ამაშია პრინციპული განსხვავება ამ ორ ვარიაციას შორის. იზოქრონული ვარიაციით მიღებული გადაადგილება ყოველთვის არ მიეკუთვნება ისეთ გადაადგილებათა რიცხვს, რომელსაც ადგილი ექნება სისტემის მოძრაობისას. სრული ვარიაციისას სხვადასხვა ტრაექტორიებზე მოძრაობის დრო უკვე არაა აუცილებელი ერთნაირი იყოს, რადგან ჰამილტონიანის მუდმივობისას მოგვიწევს ავანქაროთ ან შევანელოთ მოძრავე წერტილი. ამიტომ Δ -პროცესი გულისხმობს დროის ვარიაციას ტრაექტორიის კიდურა (საწყის და საბოლოო) წერტილებშიც, სადაც პირობის თანახმად q , სიდიდეების სრული ვარიაციები ნულის ტოლად ითვლება.

Δ -ვარიაციის მისაღებად შეგვიძლია შემოვიტანოთ რაიმე α -პარამეტრზე დამოკიდებული მრუდების ოჯახი, ზუსტად ისე, როგორც ვიქცევოდით δ -ვარიაციისას. მაგრამ ახლა დროის ვარიაციაც უნდა ჩავატაროთ. იგულისხმება დრო, რომელიც ყთანადება ტრაექტორიის თითოეულ წერტილს. ამის გამო t -ც უნდა განვიხილოთ როგორც α -ს ფუნქცია. ე.ი. $q(t, \alpha)$ კოორდინატები განისაზღვრებიან არა მარტო q -ის ცხადი დამოკიდებულებით α -ზე, არამედ არაცხადი დამოკიდებულებითაც, რომელიც ნდება t ცვლადის მეშვეობით. ამის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta q \rightarrow d\alpha \left(\frac{dq}{d\alpha} \right) = d\alpha \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \dot{q} \frac{dt}{d\alpha} \right)$$

მაგრამ, როგორც ვიცით

$$\delta q \rightarrow d\alpha \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right),$$

ხოლო $\frac{dt}{d\alpha} d\alpha$ არის დროის ცვლილება სრული ვარიაციის გამო, რაც აღვნიშნოთ Δt სიმბოლოთი. ამიტომ საბოლოოდ ეწერთ

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t \quad (VI-6.1)$$

ასეთი თანაფარდობა საშარტლიანია აგრეთვე ნებისმიერი $f(q, t)$ ფუნქციისათვის შემდეგი სახით

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t \quad (VI-6.2)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სრული ვარიაცია აღარ კომპუტირებს დროით გაწარმოებასთან.

შემოვიღოთ ახლა ქმედების ინტეგრალი

$$A = \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt, \quad (VI-6.3)$$

რომელსაც ხშირად შემოკლებულ ქმედებასაც უწოდებენ.

სანამ მის სრულ ვარიაციას გამოვუვლით, გადავწეროთ იგი ცხადი სახით ასე:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1),$$

რადგან $H = const.$ ახლა

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

ცხადია, რომ საზღვრების ვარიაციაც ხდება.

$L(t)$ – ფუნქციის პირველადი აღვნიშნოთ $I(t)$ – ით. მაშინ გვექნება

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta I(t_2) - \Delta I(t_1) = \delta I(t_2) - \delta I(t_1) + \dot{I}(t_2) \Delta t_2 - \dot{I}(t_1) \Delta t_1$$

ასე საბოლოოდ,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

პირველი წევრი ნული არ არის, რადგან სასაზღვრებიც განიცდიან ვარიაციას, რის გამოც ტრაექტორიის საბოლოო წერტილებში ნულის ტოლი ხდება არა იზოქრონული ვარიაცია, არამედ სრული ვარიაცია. განმარტების თანახმად,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

ეს კი ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებით ასე გადაიწერება:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right] dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

აქ $\delta \dot{q}_i$ შევცვალოთ Δ – ვარიაციით:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) dt = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

ახლა თუ მივიღებთ, რომ ტრაექტორიის ბოლო წერტილებზე Δq , ხდება ნული, ხოლო $\Delta t \neq 0$, დაგვრჩება

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

დავებრუნდეთ ახლა ΔA – ს ფორმულას და გავითვალისწინოთ ეს უკანასკნელი გამოსახულება. გვაქვს

$$\Delta A = \left(- \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + L - H \right) \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

მაგრამ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება H – ის განმარტების თანახმად უდრის ნულს.

ამრიგად, დავამტკიცეთ უმცირესი ქმედების პრინციპი:

$$\Delta A = 0, \quad \text{როცა} \quad \Delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

ჰოლონომური კონსერვატიული სისტემის ნამდვილი ტრაექტორია ისეთია, რომ მის გასწვრივ შემოკლებული ქმედება არის ექსტრემალური სრული ვარიაციების მიმართ ტრაექტორიებისა, რომელთაც აქვთ ერთნაირი ბოლო წერტილები კონფიგურაციულ სივრცეში და ერთნაირი ენერჯიის ინტეგრალი H .

იმისათვის, რომ უკეთ გავიგოთ ქმედების ინტეგრალის შინაარსი, გავიხსენოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = 2T_2 + T_1$$

ბუნებრივი სისტემებისთვის $T_1 = 0$, $T_2 = T$ და უმცირესი ქმედების პრინციპი იღებს სახეს

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0 \quad (\text{VI-6.4})$$

ამ შემთხვევაში ვარირებულ ტრაექტორიებზე გვაქვს ერთნაირი სრული ენერჯია.

თუ ამივე დროს დაეუშვებთ, რომ კინეტიკური ენერჯია მუდმივა (მაგ., თავისუფალი სხეული), მაშინ აქედან მიიღება უმცირესი დროის პრინციპი (ოპტიკაში ცნობილი ფერმას პრინციპის ანალოგი)

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ კონფიგურაციულ სივრცეში სისტემის ტრაექტორია ისეთია, რომ მასზე მოცემული ენერჯიით მოძრაობისას სისტემა ორ წერტილს შორის გზას გაივლის უმცირეს დროში (უფრო სწორედ, მოძრაობის დრო არის ექსტრემალური).

• განვიხილოთ უმცირესი ქმედების პრინციპის კიდევ ერთი, იაკობის ფორმა.

ეთქვათ ვიხილავთ ბუნებრივ სისტემას და ეწერთ (VI-6.4) პრინციპს შემდეგი ფორმით:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{T(H-V)} dt = 0 \quad (\text{VI-6.5})$$

განვსაზღვროთ დიფერენციალი ds შემდეგნაირად

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j dt^2 = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} dq_i dq_j, \quad (\text{VI-6.6})$$

ასე რომ

$$ds = \sqrt{2T} dt, \quad (\text{VI-6.7})$$

ამიტომ ვიპოვიოთ

$$\Delta A = \Delta \int \sqrt{2(H-V)} ds = 0 \quad (\text{VI-6.8})$$

ესაა უმცირესი ქმედების პრინციპის იაკობის ფორმა.

მართალია შემოტანილი დიფერენციალი ds ფორმალურ ხასიათს ატარებს, შეგვიძლია მივცეთ ნათელი ინტერპრეტაცია.

დიფერენციალურ გეომეტრიაში (VI-6.6) სახის ტოლობა არის n -განზომილებიან სივრცეში $(q_1, q_2, \dots, q_n$ - კოორდინატებით) წირის სიგრძის ელემენტის ყველაზე სოკადი განსაზღვრა. ასეთი ინტერპრეტაციისას m_{ij} - კოეფიციენტები შეადგენენ ე.წ. ფუნდამენტალურ მეტრიკულ ფორმას. თუ, მაგალითად, q , დეკარტეს კოორდინატებია, მაშინ $m_{ij} = \delta_{ij}$, რაც მანს ტოლობიდან

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

სასოკადოდ, მტკიცდება, რომ ნებისმიერი მრუდწირული ორთოგონალური კოორდინატებისათვის მეტრიკული ფორმის მატრიცა m_{ij} კოეფიციენტებით იქნება დიაგონალური (ოღონდ არ არის აუცილებელი დიაგონალური ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იყვნენ). მაგალითად, ცილინდრული კოორდინატების შემთხვევაში

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

ასე, რომ მეტრიკულ მატრიცაში არანულოვანი ელემენტებია

$$m_{rr} = 1, \quad m_{\theta\theta} = r^2, \quad m_{zz} = 1$$

ამრიგად ds დიფერენციალი შეიძლება გავიგოთ, როგორც კონფიგურაციულ სივრცეში (q - კოორდინატებით) ტრაექტორიის სიგრძის ელემენტი.

რაც შეეხება უმცირესი ქმედების პრინციპის იაკობის ფორმას (VI-6.8), მასში განიხილება გამომსახველი წერტილის ტრაექტორია და არა ამ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი. ეს იქიდანაც ჩანს, რომ მასში l დრო გამორიცხულია. ე.ი. იაკობის ფორმაში გეაინტერესებს სისტემის მიერ აღწერილი ტრაექტორია და არ გეაინტერესებს კოორდინატების დამოკიდებულება დროზე. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: კეპლერის პრობლემა. პირველ ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ეს არის ბუნებრივი სისტემა მუდმივი სრული ენერგიით

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu Gm}{r} = E$$

იაკობის ფორმის გამოყენება გვაძლევს

$$\Delta \int \sqrt{2\left(E + \frac{\mu Gm}{r}\right)} ds = 0$$

სადაც, (VI-6.6)-ის შესაბამისად,

$$ds^2 = m(dr^2 + r^2 d\theta^2)$$

θ ჩათვალოთ დამოუკიდებელ ცვლადად და გამოვიყენოთ აღნიშვნა $r' = dr/\mu\theta$. გვაქვს

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{2m\left(E + \frac{\mu Gm}{r}\right)}(r^2 + r'^2) d\theta = 0,$$

სადაც r და θ -ს მიხედვით ბოლო წერტილები დაფიქსირებულია. ამრიგად პრინციპმა მიიღო სახე:

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, r') d\theta = 0,$$

სადაც

$$f(r, r') = \sqrt{2m\left(E + \frac{\mu Gm}{r}\right)}(r^2 + r'^2)$$

პრინციპს ახლა აქვს სტანდარტული სახე, ამიტომ ეილერ-ლავრანჟის მეთოდის გამოყენება შეიძლება და ვიღებთ განტოლებას

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

უმჯობესია უშუალოდ მოძრაობის პირველი ინტეგრალი მოვძებნოთ. შევნიშნოთ, რომ f არ არის θ დამოუკიდებელი ცვლადის ცხადი ფუნქცია. ამიტომ ზედა განტოლების ინტეგრალს აქვს სახე

$$\frac{\partial f}{\partial r'} r' - f = C,$$

ანუ f -ის განმარტებიდან ვპოულობთ

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = \sqrt{\frac{2m\left(E + \frac{\mu Gm}{r}\right)}{r^2 + r'^2}} r', \quad (*)$$

საიდანაც

$$-\sqrt{\frac{2m\left(E + \frac{\mu Gm}{r}\right)}{r^2 + r'^2}} = C/r^2.$$

დაეუბრუნდეთ ჩასმას

$$\dot{r} = r'\dot{\theta}$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მოძრაობის ეს მუდმივი არის უარყოფითი ნიშნით აღებული კუთხური მომენტი, ანუ

$$-mr^2\dot{\theta} = C$$

ორბიტის განტოლების საპოვნელად (*) განტოლებაში გადავალაგოთ წევრები ასე

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mr^2}{C^2} \left(Er^2 + \mu Gmr - \frac{C^2}{2m} \right)$$

ათელის სისტემა ისე ავირჩიოთ, პოლარული კუთხის ათელა დაიწყოს მანძილის მინიმუმიდან, ე.ი. $r = r_1 = r_{\min}$, როცა $\theta = \theta_0 = 0$. მაშინ მიღებული განტოლებიდან ვპოულობთ

$$\theta = \frac{C}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{Er^2 + \mu Gmr - C^2/2m}}$$

ეს კი ცხრილის ინტეგრალია. გვაქვს

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\mu Gmr - C^2/m}{r \sqrt{\mu^2 G^2 m^2 + 2EC^2/m}} \right) - \frac{\pi}{2}.$$

აქ ბოლო რიცხვის მისაღებად გამოვიყენეთ ენერჯიის მნიშვნელობა ინტეგრალის ქვედა საზღვარზე.

ახლა კი ამოვხსნით r -ს, როგორც θ -ს ფუნქციას

$$r = \frac{C^2 / \mu G m^2}{1 + \sqrt{1 + 2EC^2 / \mu^2 G^2 m^3} \cos \theta}$$

ესაა ჩვეულებრივი კონუსური კვეთის ფორმულა და წარმოადგენს კეპლერის ამოცანის ორბიტას სრული ენერჯიით E , კუთხური მომენტი $-C$ და ექცენტრისიტეტით

$$e = \sqrt{1 + 2EC^2 / \mu^2 G^2 m^3},$$

ხოლო ორბიტის პარამეტრია

$$p = \frac{C^2}{\mu G m^2}.$$

კანონიკური გარდაქმნები

ჰამილტონის განტოლებების პირდაპირი გამოყენებისას მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური სირთულეები, როგორც წესი, არსებითად არ მცირდება, რადგანაც ამ შემთხვევაშიც საქმე გვაქნება ისეთივე სირთულის დიფერენციალურ განტოლებებთან, როგორც ლაგრანჟის მეთოდში.

ჰამილტონის მეთოდის უპირატესობა არის არა მისი მათემატიკური სქემა, არამედ ის, რომ ეს მეთოდი უფრო ღრმად იჭრება მექანიკის სტრუქტურაში, რადგან კოორდინატებისა და იმპულსების, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადების თანაბარუფლებიანობა, არჩევის მეტ თავისუფლებას იძლევა.

ამის შედეგად მივიღივართ ფიზიკური არსის გადმოცემის ახალ, უფრო აბსტრაქტულ ფორმებთან. თუმცა ამ გზებით მიღებული მეთოდები დაგვეხმარებიან ამოცანების ამოხსნისას, თანამედროვე თვალსაზრისით მათი მთავარი ღირსება ისაა, რომ ახალი თეორიების აგებისას ისინი არსებით როლს ასრულებენ. მაგალითად, კლასიკური მექანიკის სწორედ ეს აბსტრაქტული კონცეფციები გახდნენ სტატისტიკური მექანიკისა და კვანტური მექანიკის აგების ამოსავალი.

ჩვენ ქვემოთ გადმოვცემთ ჰამილტონის მეთოდში განვითარებულ სწორედ ასეთი სახის კონცეფციებს.

VII-1. კანონიკური გარდაქმნების განტოლებები

შევიცავს თუ არა ჰამილტონიანი ციკლურ კოორდინატას, საზოგადოდ დამოკიდებულია მოცემული პრობლემის შესასწავლად არჩეულ კოორდინატებზე. ეს პირდაპირ ჩანს შემდეგი მაგალითიდან. თუ ცენტრალურ ველში წრეზე მოძრაობას აღვწერთ დეკარტეს კოორდინატებით, არ გვაქნება ციკლური კოორდინატები, მაშინ როცა პოლარული კოორდინატების გამოყენებისას კუთხური ცვლადი აღმონჩდება ციკლურად, რაც, როგორც ვიცით, დაკავშირებულია კუთხური მომენტის შენახვასთან.

განვიხილოთ სისტემა, რომლის ჰამილტონიანი არის მოძრაობის კონსტანტა, ხოლო ყველა q , კოორდინატი ციკლურია. ამ დროს, ცხადია, ყველა განზოგადოებული იმპულსი p , იქნება მუდმივი, ე.ი.

$$p_i = \alpha_i = \text{const.} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ხოლო რადგან, როგორც ითქვა, ჰამილტონიანი ცხადად არ შეიცავს დროს და ციკლურ კოორდინატებს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

ამიტომ განზოგადებული კოორდინატებისათვის ჰამილტონის განტოლებებს ექნება სახე:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VII-1.1})$$

აქ ω_i , არიან მარტო α_i -ების ფუნქციები, ანუ რაღაც მუდმივებია. ამ განტოლების ინტეგრაციით ვიღებთ

$$q_i = \omega_i t + \beta_i,$$

სადაც β , - ინტეგრაციის მუდმივებია, რომლებიც უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებით.

ამრიგად, ამოცანა ამოიხსნა მარტივად!

- ყოველი მატერიალური სისტემა შეიძლება აღიწეროს განზოგადებულ კოორდინატების სხედასხვა კრებულით.

მაგალითად, სიბრტყეზე მოძრაობის განხილვისას დეკარტეს x, y ცვლადების ნაცვლად განზოგადებულ კოორდინატებად შეიძლება ავირჩიოთ r, φ პოლარული ცვლადები. ორივე არჩევანი დასაშვებია, და რომელი მათგანია უკეთესი, დამოკიდებულია ამოცანის ხასიათზე.

ცნობილია, რომ ცენტრალური ძალების დროს დეკარტეს კოორდინატები ნაკლებ მოსახერხებელია, მაშინ როცა პოლარული კოორდინატების გამოყენებისას ერთ-ერთი ცვლადი (φ) ხდება ციკლური.

- კოორდინატის ციკლურობა დაკავშირებულია მათი არჩევის ხერხთან და შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში შესაძლებელია ისე ავირჩიოთ განზოგადებულ კოორდინატთა კრებული, რომ ყველა ცვლადი იყოს ციკლური.

(ცხადია, რომ თუ ასეთ კრებულს ვიპოვით, ამოცანას ტრივიალურად ამოვხსნით.

მაგრამ, რადგან ის განზოგადებული კოორდინატები, რომლებსაც ჩვენ ვიყენებთ, როგორც ყველაზე ბუნებრივს მოცემული სისტემისათვის, ჩვეულებრივ ციკლური არ არიან, საჭიროა დამუშავდეს საუციალური პროცედურა კოორდინატთა ახალ სისტემაზე გადასასვლელად, სადაც ისინი აღმოჩნდებიან უფრო მოსახერხებელი.

- აქამდე - ლაგრანჯის მეთოდში - ვხევდებით გარდაქმნებს, რომლებიც წარმოადგენდნენ ძველი q , კოორდინატებიდან ახალ Q , კოორდინატებზე გადასვლას. ასეთი გარდაქმნები გამოიხატებიან განტოლებებით:

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (\text{VII-12})$$

სხვა სიტყვებით, გარდაქმნილი კოორდინატები გამოიხატებიან მხოლოდ ძველი კოორდინატებით. ასეთ გარდაქმნებს უწოდებენ წერტილოვანს.

მაგრამ ჰამილტონის მეთოდში იმპულსები ისეთივე დამოუკიდებელი ცვლადებია, როგორც განზოგადებული კოორდინატები. ამიტომ ჩვენ უნდა გავაფართოვოთ კოორდინატთა გარდაქმნის ცნება და ჩავროთ q , დამოუკიდებელ კოორდინატებთან ერთად p , იმპულსების გარდაქმნაც.

ამრიგად, საზოგადოდ, საქმე გვექნება გარდაქმნებითან, რომლებიც აღიწერებიან განტოლებებით:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \quad (\text{VII-13})$$

სადაც Q_i - ახალი კოორდინატებია, ხოლო P_i - ახალი იმპულსები. ამგვარად ახალი კოორდინატები (და იმპულსები) გამოიხატებიან არა მარტო ძველი კოორდინატებით, არამედ ძველი იმპულსებითაც.

ასეთი გარდაქმნებისათვის ხშირად გამოიყენება ტერმინი - კონტაქტური გარდაქმნები.

ჩვენ გვსურს შევიარჩუნოთ ამოსავალი განტოლებების სტრუქტურაც. ამიტომ დაგვიინტერესებს მხოლოდ ის გარდაქმნები, რომლის დროსაც ახალი ცვლადები Q_i, P_i იქნებიან აგრეთვე კანონიკური. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ ვთხოვლობთ, რომ ახალ ცვლადებში განტოლებებს ჰქონდეთ იგივე ფორმა, რაც ჰამილტონის განტოლებებს, ე.ი. ჩაიწერებოდა ასე:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (\text{VII-14})$$

სადაც $K(Q, P, t)$ ახალი ცვლადების და დროის რაღაც ფუნქციაა, რომელიც ახალი ჰამილტონიანის როლს ასრულებს.

გარდაქმნები, რომლებიც ამ პირობებს აკმაყოფილებენ, იწოდებიან კანონიკურ გარდაქმნებად.

რადგან Q , და P , ცვლადები უნდა იყენენ კანონიკური, ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ ჰამილტონის პრინციპს, ჩაწერილს ამ ცვლადებში:

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) \right] dt = 0 \quad (\text{VII-15})$$

ამავედროულად ძველი ცვლადებით, რა თქმა უნდა, დააკმაყოფილებენ ამავე პრინციპს

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) \right] dt = 0 \quad (\text{VII-16})$$

ამრიგად, ეს ორი ტოლობა უნდა დაკმაყოფილდეს ერთდროულად. აქედან, ცხადია, არ გამოძღინარეობს, რომ ამ ტოლობებში ინტეგრალქვეშ მდგომი ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევიან - ისინი შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან, მაგრამ არაუმეტეს რაიმე F ფუნქციის სრული წარმოებულთ დროის მიხედვით.

მათთლაც, ამ ფუნქციათა სხვაობიდან ინტეგრალი ტოლი იქნება

$$\int_1^2 \frac{dF}{dt} dt = F(2) - F(1)$$

და რისი ტოლიც არ უნდა იყოს ეს F ფუნქცია, მისი ვარიაცია ნულის ტოლი იქნება, რადგან ინტეგრაციის საზღვრებზე $\delta F = 0$.

F ფუნქციას უწოდებენ მოცემული გარდაქმნის მაწარმოებელ ფუნქციას.

ქვემოთ ჩვენ დავწმუნდებით, რომ ამ ფუნქციის ნებისმიერი შერჩევისას ცალსახად განესაზღვრავთ გარდაქმნის განტოლებებს, (VII-1.3).

პირველ რიგში შევნიშნათ, რომ F ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრავს ძველი კანონიკური ცვლადებიდან ახალზე გადასვლას, უნდა იყოს ცვლადთა ორივე კრებულის ფუნქცია. ამიტომ t დროის გარდა უნდა შეიცავდეს $4n$ ცვლადს. მაგრამ, რადგან გარდაქმნის განტოლებები აკავშირებენ მათ, ამიტომ დამოუკიდებელი მათ შორის იქნება $2n$ ცვლადი. ასე რომ მაწარმოებელი ფუნქცია შეიძლება შემდეგი 4 სახით ჩაიწეროს:

$$F_1(q, Q; t), \quad F_2(q, P; t), \quad F_3(p, Q; t), \quad F_4(p, P; t)$$

თუ რომელი მათგანი ეისარგებლებთ, დამოკიდებულია განსახილავი ამოცანის თავისებურებებზე.

განვიხილოთ გარდაქმნის ხასიათი თითოეულ შემთხვევაში:

1. თუ ავირჩიეთ $F_1(q, Q; t)$ ფუნქცია, მაშინ ვარიაციული ინტეგრალების ქვეშ მდგომი გამოსახულებები დაკავშირებული იქნება თანაფარდობით:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q; t) \quad (\text{VII-1.7})$$

ამ დროს

$$\frac{d}{dt} F_1(q, Q; t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

მაგრამ რადგან ძველი და ახალი კოორდინატები აქ განიხილება როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები, (VII-1.7) ტოლობას მაშინ ექნება ადგილი, როცა q , და \dot{Q} - სთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლობის ორივე მხარეს იქნებიან ერთნაირი. ამრიგად განხილულ შემთხვევაში გვექნება:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (\text{VII-1.9})$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

ამათგან პირველი წარმოადგენს თანაფარდობას, რომელშიც შედის მარტო p_i, q_i, Q_i და t . მათი საშუალებით ყველა Q_i -ს გამოეხატავეთ p_i, q_i, t ცვლადებით. ამ გზით მივიღებთ (VII-1.3) გარდაქმნების პირველ ნაწილს. ამის შემდეგ გამოვიყენებთ (VII-1.9)-ის მეორე თანაფარდობას და მივიღებთ (VII-1.3)-დან დანარჩენ n განტოლებას, რისთვისაც დაგვჭირდება ახლახან მიღებული გარდაქმნის ფორმულის გამოყენებაც.

დაბოლოს, (VII-1.9)-ის უკანასკნელი განტოლება გვაძლევს ახალ კამილ-ტონიანს, K .

2. ახლა განვიხილოთ გარდაქმნა მეორე ფუნქციით, F_2 , როცა დამოუკიდებელ ცვლადებად არჩეულია q , და P . ავიღოთ ჯერ ადრინდელი განტოლება, (VII-1.7), რომელიც ასე გადავწეროთ

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H(q, p; t) + K(Q, P; t) = \frac{dF_1(q, Q; t)}{dt}$$

მეორე წევრი გარდაექმნათ სრული წარმოებულის მეშვეობით

$$\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n P_i Q_i$$

გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q_i - H + K = \frac{d}{dt} \left[F_1(q, Q; t) + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \right]$$

მარჯვენა მხარეში ფრჩხილებში გვიწერია ლეჟანდრის გარდაქმნა, რომლის მეშვეობით ხდება ცვლადის შეცვლა $Q_i \rightarrow P_i$ და, ამრიგად, მიიღება ფუნქცია F_2 :

$$F_2(q, P; t) = F_1(q, Q; t) + \sum_{i=1}^n P_i Q_i, \quad \text{ამასთან} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

ე.ი. გვაქვს კანონიკური გარდაქმნის პირობა შემდეგი სახით:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q_i - H + K = \frac{dF_2(q, P; t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ახლა $q_i, (\dot{P}_i)$ -თან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით ამ განტოლებას დავეკმაყოფილებთ, როცა

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (\text{VII-1.10})$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

პირველი განტოლება შეიცავს თანაფარდობას p_i, q_i, P_i, t (ცვლადებს შორის, საიდანაც გამოვხატავთ $P_i = P_i(q, p; t)$ - ვიღებთ კანონიკური გარდაქმნების მეორე ჯგუფს. მეორე განტოლება შეიცავს ცვლადებს Q_i, q_i, P_i, t . საიდანაც მიღებული P_i -ს გამორიცხვით დაიყვანთ კანონიკურ გარდაქმნათა პირველ ჯგუფზე.

3. ახლა განვიხილოთ გარდაქმნა მე-3 ფუნქციით, როცა ცვლადებად აიღება p_i, Q_i . აქაც შეიძლება გამოვიყენოთ ლეჟანდრის გარდაქმნა.

რადგან

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial q_i}$$

შეგვიძლია $q \rightarrow p$ გადასვლა განვახორციელოთ ლეჟანდრის გარდაქმნით:

$$F_2(q, Q; t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i = F_3(p, Q; t)$$

ამიტომ, ამოსავალ განტოლებაში მოვახდინოთ სათანადო გარდაქმნა ძველი ცვლადების შემცველ ნაწილში:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = -\sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - H + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n p_i q_i = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

საიდანაც გვაქვს

$$-\sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} \left(F_1 - \sum_{i=1}^n p_i q_i \right) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q; t)$$

რაკი

$$\frac{dF_3}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

ამიტომ გარდაქმნის კანონიკურობა მოითხოვს შემდეგი თანაფარდობების შესრულებას:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

4. დაბოლოს, მე-4 ფუნქციით გარდაქმნის მისაღებად დავემყაროთ F_1 -ის განტოლებას:

$$F_1(q, Q; t) \rightarrow F_4(p, P; t)$$

ეს შეიძლება მივიღოთ ლეჟანდრის ორი გარდაქმნით:

$$F_4(p, P; t) = F_1(q, Q; t) - \sum_{i=1}^n p_i q_i + \sum_{i=1}^n P_i Q_i = F_3(p, Q; t) + \sum_{i=1}^n P_i Q_i$$

ამ დროს გვახსოვს, რომ

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

ამიტომ, გვაქვს

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{i=1}^n P_i Q_i + F_4(p, P; t) \right]$$

აქედან

$$-\sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - H = -\sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - K + \frac{dF_2(p, P; t)}{dt}$$

წარმოებულის გამოთვლის შემდეგ მიიღება თანაფარდობები:

$$q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ამრიგად, მივიღეთ 4 ტიპი კანონიკური გარდაქმნებისა, რომლებიც შევიძლია მოვიყვანოთ შეჯამებული სახით:

1. $F_1(q, Q; t): \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
2. $F_2(q, P; t): \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$
3. $F_3(p, Q; t): \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
4. $F_4(p, P; t): \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

VII-2. კანონიკური გარდაქმნების მაგალითები

განვიხილოთ კანონიკური გარდაქმნების რამდენიმე მარტივი მაგალითი, რომელიც ხორციელდება სხედასხვა მაწარმოებელი ფუნქციით:

ა) იგიური გარდაქმნა. ავიღოთ F_2 ტიპის ფუნქცია შემდეგნაირად

$$F_2^0 = \sum_{i=1}^n q_i P_i \quad (\text{VII-2.1})$$

ამ შემთხვევაში კანონიკური გარდაქმნების განტოლებები ასეთია

$$p_i = \frac{\partial F_2^0}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2^0}{\partial P_i} = q_i, \quad K = H + \frac{\partial F_2^0}{\partial t} = H$$

ე.ი. ყველა ახალი კოორდინატი და იმპულსი ემთხვევა ძველს, ანუ განხილული გარდაქმნა არის იგიური.

ბ) განვიხილოთ ამ გარდაქმნის ერთი განსოგადება:

$$F_2 = \sum_{i=1}^n f_i(q, t) P_i \quad (\text{VII-2.2})$$

სადაც f_i არიან q -ს ნებისმიერი ფუნქციები. მაშინ, რადგან $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$, მიიღება

$$Q_i = f_i(q, t) \quad (\text{VII-2.3})$$

ანუ ახალი კოორდინატები მთლიანად გამოიხატა ძველი კოორდინატებით და დროით, მაგრამ არ შეიცავს ძველ იმპულსებზე დამოკიდებულებას. ესენი განეკუთვნებიან წერტილოვან გარდაქმნათა კლასს.

ამრიგად, წერტილოვანი გარდაქმნებიც ყოფილა კანონიკური.

რადგან განხილულ მაგალითში f_1 ფუნქციები სავსებით ნებისმიერია, ვასკენით, რომ ყველა წერტილოვანი გარდაქმნა არის კანონიკური. ახალი ჰამილტონიანი ძველს უკავშირდება $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ წარმოებულებით.

გ) ორთოგონალური გარდაქმნები
განვიხილოთ წერტილოვანი გარდაქმნების კერძო სახე, როცა

$$f_1(q, t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k \quad (\text{VII-2.4})$$

და, ამიტომ,

$$F_2(q, P; t) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_k P_i \quad (\text{VII-2.5})$$

ჩავეთვალოთ, რომ a_{ik} არიან ორთოგონალური მატრიცის ელემენტები

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$$

ახლა

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} P_i$$

აქედან რომ ამოვხსნათ P_i , გამოვიყენოთ ორთოგონალურობის პირობა

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} a_{ik} P_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} P_i = P_i$$

ე.ი.

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \quad (\text{VII-2.6})$$

ანუ იმპულსებზეც ისეთივე ორთოგონალური გარდაქმნა ხდება, როგორც კოორდინატებზე. როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში კოორდინატთა სისტემის ბრუნვები ორთოგონალურ გარდაქმნებს წარმოადგენს. სემით განხილული კოორდინატების ორთოგონალური გარდაქმნები განმარტების თანახმად განსაზღვრავენ ბრუნვებისას ექვტორის გარდაქმნის წესს. (VII-2.6) გვეუბნება, რომ იმპულსებიც ექვტორებს წარმოადგენენ. ამ ზოგადი შედეგით ჩვენ უკვე ვისარგებლეთ IV თავში იმპულსის მომენტის მისაღებად სივრცის სიმეტრიის თვისებებიდან.

დ) განვიხილოთ ახლა F_1 ტიპის შემდეგი ფუნქცია

$$F_1 = \sum_{k=1}^n q_k Q_k \quad (\text{VII-2.7})$$

კანონიკური განტოლებების თანახმად მიიღება

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \quad (\text{VII-2.8})$$

ე.ი. გარდაქმნები კოორდინატებსა და იმპულსებს ადგილს უცვლიან. ეს მაგალითი გვეუბნება, რომ განზოგადებული კოორდინატები და განზოგადებული იმპულსები ტოლფუნქციებიან ცვლადებია. ჰამილტონის განტოლებებში მათ შორის განსხვავება მხოლოდ სახელწოდებაშია.

ე) კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი გარდაქმნები ოსცილატორის ამოცანაში.

განვიხილოთ პარამონიული ოსცილატორის ჰამილტონიანი

$$H = \frac{mq^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

სადაც გაეითვალისწინეთ კავშირი $k = m\omega^2$.

თურმე ოსცილატორის ჰამილტონიანი საგრძნობლად მარტივდება, თუ ჩვენ გამოვიყენებთ კანონიკურ გარდაქმნას შემდეგი სახის პირველი ტიპის ფუნქციით

$$F_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg} Q \quad (\text{VII-2.9})$$

მაშინ ამ გარდაქმნიდან შეგვიძლია გამოვიყენოთ კავშირი ძველ და ახალ სიდიდეებს შორის, რისთვისაც ვისარგებლოთ სათანადო კანონიკური განტოლებებით

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q}$$

ეს განტოლებები შეიძლება ამოიხსნას ახალი ცვლადების მიმართ და გამოიხატოს ისინი ძველი ცვლადებით. მაგრამ ჩვენი მიზნებისათვის უფრო მოსახერხებელია ძველი ცვლადები გამოვხატოთ ახლებით.

ბოლო განტოლებიდან ვიპოვით

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (\text{VII-2.10})$$

ჩავსვათ ეს წინა განტოლებაში, მიიღება

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (\text{VI-2.11})$$

ამრიგად, ძველი ცვლადები გამოვსახეთ ახალი ცვლადებით. ვრწმუნდებით, რომ ისინი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია. აშკარაა, რომ რაკი გარდაქმნა დროს ცხადად არ შეიცავს, ამიტომ ახალი ჰამილტონიანი ემთხვევა ძველს, $K = H$ და

$$K = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P \quad (\text{VII-2.12})$$

ამრიგად, ახალ ცვლადებში ჰამილტონიანი არის ციკლური Q -ს მიმართ, რის გამოც P იმპულსი უნდა იყოს მუდმივი. მიღებული განტოლებიდან ჩანს, რომ

$$P = \frac{E}{\omega}, \quad E = \text{const.}$$

რაც შეეხება განტოლებას კოორდინატისთვის, მას აქვს სახე

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega,$$

ე.ი.

$$Q = \omega t + \beta,$$

სადაც β - ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივია. მივიღეთ ცნობილი ამონახსნი

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) \quad (\text{VII-2.13})$$

აქ არსებითია, რომ ამონახსნი მივიღეთ მოძრაობის განტოლების შესწავლის გარეშე მხოლოდ კანონიკურ გარდაქმნაზე დაყრდნობით.

VII-3. პუასონის ფრჩხილები .

ჰამილტონისეული მექანიკა (ან როგორც ხშირად ამბობენ - ჰამილტონის ფორმალისში მექანიკისთვის) შეიძლება ჩაიწეროს მეტად ლამაზი და ელევანტური ფორმით. ამისათვის შემოაქვთ გარკვეული სპეციალური სტრუქტურა - წარმონაქმნი, რომელიც მართლაც არსებით როლს ასრულებს.

ეთქვათ, გვაქვს კანონიკური q, p ცვლადების (რომლებსაც ხშირად კანონიკურად შეუღლებულ ცვლადებს უწოდებენ) ორი ნებისმიერი ფუნქცია

$$f = f(q, p; t) \quad \text{და} \quad g(q, p; t)$$

ამ ორი ფუნქციის პუასონის ფრჩხილი ეწოდება გამოსახულებას

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (\text{VII-3.1})$$

აღსანიშნავია, რომ ლიტერატურაში პუასონის ფრჩხილებისათვის გამოიყენება სხვა აღნიშვნებიც, რომელთა შორის ყველაზე გავრცელებულია კვადრატული ან ფიგურული ფრჩხილების გამოყენება. გარდა ამისა, ზოგჯერ განმარტებაში ადგილები აქვს შეცვლილი კოორდინატით და იმპულსით გაწარმოების რიგს. ყოველივე ეს, ცხადია არ ცვლის ამ სიმბოლოს შინაარსს.

განმარტებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს რამდენიმე თვისება:

1. ანტისიმეტრიულობა

$$(f, g) = -(g, f)$$

კერძო შემთხვევაში, $(f, f) = 0$.

2. მუდმივთან ფრჩხილის ნულთან ტოლობა

$$(f, c) = 0$$

3. წრფივობა თითოეული არგუმენტით

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g), \quad (cf, g) = c(f, g)$$

კერძოდ, ნულის ტოლია ფრჩხილი 2 წრფივად დამოკიდებული სიდიდისა

$$(f, cf) = 0$$

ანალოგიურად მეორე ფუნქციისათვის .

$$(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$$

4. ჯუფდებადობის თვისება ნამრავლის მიმართ, რაც ემთხვევა გაწარმოებისათვის ლეიბნიცის წესს:

$$(f_1 f_2, g) = (f_1, g) f_2 + f_1 (f_2, g)$$

$$(f, g_1 g_2) = (f, g_1) g_2 + g_1 (f, g_2)$$

5. პარამეტრით კერძო წარმოებულის გამოთვლის ლაიბნიცის

წესი:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) \quad (\text{VII-3.2})$$

6. იაკობის იგივეობა:

$$(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0 \quad (\text{VII-3.3})$$

ეს ემსგავსება ლაიბნიცის გაწარმოების წესს პუასონის ფრჩხილებით

$$(f, (g, h)) = ((f, g), h) + (g, (f, h))$$

შეენიშნოთ, რომ იაკობის იგივეობის დამტკიცება არ წარმოადგენს რაიმე სირთულეს და მოკვანილია უამრავ სახელმძღვანელოში. მაგრამ როგორც იგივეობა, ადვილად მოწმდება უშუალო გამოთვლით.

განვიხილოთ ახლა პუასონის ფრჩხილების ზოგიერთი სპეციალური (კერძო) თვისება, რომლებიც სასარგებლო თანაფარდობებს წარმოადგენენ:

თუკი ერთ-ერთი ფუნქცია თანხედება კოორდინატს ან იმპულსს, გვაქვს:

$$(q_i, g) = \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad (p_i, g) = -\frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (\text{VII-3.4})$$

ამ ტოლობებში რომ ავიღოთ g - ს ნაცვლად q ან p , მიიღება:

$$(q_i, q_j) = 0, \quad (p_i, p_j) = 0 \quad (\text{VII-3.5})$$

$$(q_i, p_j) = \delta_{ij}$$

ამ თანაფარდობებს ხშირად პუასონის ფუნდამენტურ ფრჩხილებს უწოდებენ.

ეს კერძო მნიშვნელობები პირდაპირ გვეპარნახობს, თუ როგორ შევვიძლია გავეამარტივოთ ჰამილტონის ფორმალისმის ჩაწერა:

მართლაც, რაკი

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

და (VII-3.4) ფორმულაში g ფუნქციად ჰამილტონიანს ავიღებთ, ეს განტოლებები ჩაიწერება სრულიად სიმეტრიულად

$$\dot{q}_i = (q_i, H) \quad \dot{p}_i = (p_i, H) \quad (\text{VII-3.6})$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სინამდვილეში სიმეტრია უკურო ფართოა. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი დინამიკური სიდიდე, ანუ კოორდინატების და იმპულსების ნებისმიერი ფუნქცია $f(q, p, t)$ და გავაწარმოოთ დროით

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

გამოვიყენოთ აქ ჰამილტონის განტოლებები და გადავწეროთ ასე

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ანუ

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) \quad (\text{VII-3.7})$$

ე.ი. სრული წარმოებული დროის მიხედვით უდრის კერძო წარმოებულს დამატებული ამ სიდიდის პუასონის ფრჩხილი ჰამილტონიანთან.

კერძო შემთხვევაში, როცა დინამიკური სიდიდე ცხადად დროსე არ არის დამოკიდებული, მიიღება

$$\frac{df}{dt} = (f, H), \quad \text{თუ} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII-3.8})$$

გარდა ამისა, თუ (VII-3.6) ფორმულაში f - ის ნაცვლად H - ს ავიღებთ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (\text{VII-3.9})$$

ე.ი. ჰამილტონიანის კერძო და სრული წარმოებულები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვიხილოთ ახლა ზოგადი პუასონის ფრჩხილის სრული წარმოებული დროით:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f, g) &= \frac{\partial}{\partial t}(f, g) + ((f, g), H) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) + ((f, H), g) + (f, (g, H)) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H), g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} + (g, H) \right) \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ სრული წარმოებულის გამოსათვლელადაც გვაქვს ლაიბნიციის წესი:

$$\frac{d}{dt}(f, g) = \left(\frac{df}{dt}, g \right) + \left(f, \frac{dg}{dt} \right)$$

აქედან ჩანს, მაგალითად, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა ორივე დინამიკური სიდიდე მოძრაობის ინტეგრალებია, ანუ თუ $f, g = const$, მათი პუასონის ფრჩხილიც მოძრაობის ინტეგრალი იქნება.

ამრიგად

$$(f, g) = const., \quad \text{თუ} \quad f = const., \quad \text{და} \quad g = const.$$

ამ წინადადებას ჰქვია პუასონის თეორემა.

პუასონის ფრჩხილების გამოთვლის მაგალითები

განვიხილოთ დეკარტეს კოორდინატებით შედგენილი დინამიკური სიდიდეების პუასონის ფრჩხილები. ავიღოთ ჯერ იმპულსი და მომენტი.

$$\vec{P} = \sum_{\sigma=1}^N \vec{p}_{\sigma}, \quad \vec{L} = \sum_{\sigma=1}^N [\vec{r}_{\sigma}, \vec{p}_{\sigma}]$$

ან მდგენელებში

$$L_i = \varepsilon_{ijk} r_{aj} p_{ik}$$

1) აშკარაა, რომ

$$(P_i, P_j) = 0$$

2) განვიხილოთ ახლა

$$\begin{aligned} (L_i, r_j) &= \varepsilon_{imk} (r_m p_k, r_j) = \varepsilon_{imk} r_m (p_k, r_j) + \varepsilon_{imk} (p_k, r_j) r_m = \\ &= -\varepsilon_{imk} \delta_{kj} r_m = -\varepsilon_{imj} r_m = \varepsilon_{jmi} r_m \end{aligned} \quad (\text{VII-3.10})$$

გამოყვანის პროცესში გამოვიყენეთ პუასონის ფუნდამენტური ფრჩხილების თვისებები, (VII-3.5).

ზუსტად ასევე დავადგენთ, რომ

$$(L_i, p_j) = \varepsilon_{ijm} p_m \quad (\text{VII-3.11})$$

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, ბოლო ორი თანაფარდობა წარმოადგენს ვექტორის კომპონენტების გარდაქმნის წესს კოორდინატთა ღერძების მობრუნებისას.

3. როგორც ვიცით, იმპულსის მომენტი არის ვექტორი, ამიტომ მისთვისაც უნდა გვქონდეს ზუსტად ანალოგიური თანაფარდობა, რაშიც ადვილად დაერწმუნდებით მსგავსი გამოთვლებით:

$$\begin{aligned} (L_i, L_j) &= \varepsilon_{imk} (r_m p_k, L_j) = \varepsilon_{imk} r_m (p_k, L_j) + \varepsilon_{imk} (r_m, L_j) p_k = \\ &= \varepsilon_{imk} \varepsilon_{kjm} r_m p_n + \varepsilon_{imk} \varepsilon_{njk} p_k r_n = (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}) r_m p_n + (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}) r_n p_m = \\ &= \delta_{ij} (\vec{r} \vec{p}) - r_j p_i + r_i p_j - \delta_{ij} (\vec{r} \vec{p}) = r_i p_j - r_j p_i = \varepsilon_{ijm} L_m \end{aligned}$$

აქ ბოლო წინადადება ადვილად შემოწმდება იმპულსის მომენტის განმარტების გამოყენებით. ამრიგად

$$(L_i, L_j) = \varepsilon_{ijm} L_m \quad (\text{VII-3.12})$$

4. ადვილად დაერწმუნდებით, რომ იმპულსის მომენტის პუასონის ფრჩხილი კოორდინატების და (ან) იმპულსების სკალარულ კომბინაციებთან ნულის ტოლია, რაც ამ სიდიდეთა სკალარულ ხასიათს გამოხატავს სიერცეში მობრუნებების მიმართ. მართლაც:

$$(L_i, \vec{r}^2) = (L_i, r_k r_k) = r_k (L_i, r_k) = r_k \varepsilon_{ikm} r_m = 0$$

ამ ტოლობაში ბოლო წინადადება გამომდინარეობს იქიდან, რომ სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ნამრავლი ნულის ტოლია.

5. ზუსტად ასევე,

$$(L_i, \vec{p}^2) = 0$$

6. ან ზოგადად,

$$(L_i, \varphi(\vec{r}^2, \vec{p}^2)) = 0,$$

რაშიც ადვილად დაერწმუნდებით თუ აქ შემავალ ნებისმიერ სკალარულ ფუნქციას $\varphi(\vec{r}^2, \vec{p}^2)$ გაეშლით ხარისხოვან მწკრივად.

შენიშვნა: ამ ფორმულების გამოყენების დროს ჩვენ ესარგებლობდით საყოველთაო შეთანხმებით, რომ გამეორებული ინდექსებით იგულისხმება აჯამება.

VII-4. პუასონის ფრჩხილები და კანონიკური გარდაქმნები

საინტერესოა გავერკვეთ, თუ როგორ იცვლება პუასონის ფრჩხილები ცვლადების გარდაქმნების დროს. შევისწავლოთ კელაე ჩვენს მიერ ადრე განხილული გარდაქმნები:

$$Q_i = Q_i(q, p; t); \quad P_i = P_i(q, p; t)$$

ჯერჯერობით ჩავთვალოთ, რომ ესაა ნებისმიერი გარდაქმნები და არა აუცილებლად კანონიკური. დავსვათ ამოცანა ასე: გამოვიყოთ აქედან გარდაქმნათა სპეციალური კლასი, რომელიც პუასონის ფრჩხილებს დატოვებს ინვარიანტულს, ე.ი.

$$(f, g)_{pq} = (f, g)_{rst}, \quad \forall f, g \quad (\text{VII-4.1})$$

ჩაკატაროთ მოყვანილი გარდაქმნები ამ განტოლების მარცხენა მხარეში, სადაც, განმარტების თანახმად,

$$(f, g)_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(ცვლადის გარდაქმნა ნიშნავს:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i},$$

და ა.შ.

ასეთივე ფორმულები დაიწერება პუასონის ფრჩხილში შემავალ დანარჩენი წარმოებულებისათვის. ამიტომ გვაქვს:

$$(f, g)_{\mathcal{M}} = \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \right) =$$

წევრები ასე დაეაჯგუფოთ გადამრავლების შემდეგ:

$$= \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} - \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} - \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \right) =$$

=გამოიყენოთ პუასონის ფრჩხილების ჩვეულებრივი განმარტება. მიიღება:

$$= \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} (P_i, P_i)_{\mathcal{M}} + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} (Q_i, P_i)_{\mathcal{M}} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} (P_i, Q_i)_{\mathcal{M}} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} (P_i, P_i)_{\mathcal{M}}$$

თუ ახლა ჩვენ მოვითხოვთ, რომ პუასონის ფუნდამენტალური ფრჩხილები ერთსახელა სიდიდეებს შორის ინარჩუნებს თავის ძველ მნიშვნელობებს ახალი კოორდინატებისთვისაც,

ანუ, თუ

$$(P_i, P_i)_{\mathcal{M}} = (Q_i, Q_i)_{\mathcal{M}} = 0,$$

მაშინ, ზედა გამოსახულებაში დაგვრჩება შემდეგი ორი წევრი:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} (Q_i, P_i)_{\mathcal{M}} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} (P_i, Q_i)_{\mathcal{M}} \quad (\text{VII-4.2})$$

პირველ წევრში შეგვიძლია მუნჯი ინდექსები ურთიერთშეცვალათ $j \leftrightarrow l$ და შემდეგ გამოიყენოთ პუასონის ფრჩხილების ანტისიმეტრიულობა

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} (Q_i, P_i)_{\mathcal{M}} = - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} (Q_i, P_i)_{\mathcal{M}}$$

ამიტომ, ზევით მოყვანილი ორი წევრი ასე გადაიწერება

$$(P_i, Q_i)_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right)$$

ანუ თუკი შესრულდება დარჩენილი პუასონის ფრჩხილიც

$$(Q, P)_{pq} = \delta_{pq}$$

ზედა გამოსახულება შეიკვრება ორი ფუნქციის პუასონის ფრჩხილად ახალი ცვლადებით. ამრიგად, საბოლოოდ

$$(f, g)_{pq} = (f, g)_{p'q'} \quad (\text{VII-4.3})$$

ცხადია, ესაა საკმარისი პირობა იმისა, რომ გარდაქმნები მიეკუთვნებოდნენ სპეციალურ კლასს, რომელიც ინვარიანტულს ტოვებს პუასონის ფრჩხილებს.

გავარკვიოთ ახლა თუ რომელია ის გარდაქმნები ზოგადი გარდაქმნებიდან, რომლებიც ინვარიანტულს ტოვებენ პუასონის ფუნდამენტალურ ფრჩხილებს და, ამიტომაც (VII-4.3) თანაფარდობას.

ამისათვის, ჯერ განვიხილოთ დროზე დამოუკიდებელი გარდაქმნები, რომლებიც პუასონის ფუნდამენტალურ ფრჩხილებს აკმაყოფილებენ. ადრე მიღებული განტოლებების თანახმად გვაქვს:

$$\dot{Q}_i = (Q_i, H)_{pq} = (Q_i, H)_{p'q'} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = (P_i, H)_{pq} = (P_i, H)_{p'q'} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad H = H(P, Q)$$

ამრიგად, ახალი კოორდინატებისა და იმპულსებისათვის სრულდება ჰამილტონის განტოლებები, ე.ი. გარდაქმნა ყოფილა კანონიკური.

დასკვნა: გარდაქმნა, რომელიც პუასონის ფრჩხილებს ინახავს, არის კანონიკური გარდაქმნა.

ცხადია, ადგილი აქვს შემბრუნებულ წინადადებასაც.

ამოცანები:

1. განიხილეთ ერთგანზომილებიანი სისტემა ჰამილტონიანი

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}$$

აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $D = pq/2 - Ht$ არის მოძრაობის ინტეგრალი.

2. აჩვენეთ, რომ ცვლადთა გარდაქმნა

$$Q = p + iaq, \quad P = (p - iaq)/2ia$$

არის კანონიკური და იპოვეთ ამ გარდაქმნის მაწარმოებელი ფუნქცია.

3. მოცემულია ჰამილტონიანი

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$$

აჩვენეთ, რომ ფუნქციები

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2}, \quad F_2 = q_1 q_2$$

არიან მოძრაობის ინტეგრალები.

4. განიხილეთ გარდაქმნა

$$Q = \ln \left(\frac{1}{q} \sin p \right), \quad P = qct \exp$$

ა) აჩვენეთ, რომ გარდაქმნა არის კანონიკური,

ბ) ააგეთ ამ გარდაქმნის ოთხივე ტიპის მაწარმოებელი

ფუნქციები.

5. აჩვენეთ, რომ თუ მოძრაობის განტოლების ორი პირველი ინტეგრალი ცხადად შეიცავს t -ს, მათგან შედგენილი პუასონის ფრჩხილი მაინც იქნება მოძრაობის ამ განტოლებათა ინტეგრალი.

6. α -ს და β -ს რომელი მნიშვნელობებისათვის იქნებიან გარდაქმნები

$$Q = q^{\alpha} \cos \beta p, \quad P = q^{\alpha} \sin \beta p$$

კანონიკური? რაც უდრის ამ დროს მაწარმოებელი ფუნქცია F_3 ?

7. განიხილეთ გარდაქმნა $Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$, $P = -\arctg \frac{q}{p}$. აჩვენეთ,

რომ ეს გარდაქმნა კანონიკურია და მოძებნეთ ახალი ჰამილტონიანი, თუ ძველი ჰამილტონიანი იყო $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$.

(VII-5). უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნები.
 მოძრაობის ინტეგრალები და სიმეტრიის თვისებები

პუასონის ფრჩხილების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან გამოყენებას ეხედებით უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების განხილვისას.

ასე უწოდებენ გარდაქმნებს, რომლის დროსაც განზოგადებული კოორდინატები და იმპულსები განიცდიან ცვლილებას უსასრულოდ მცირე სიდიდესზე. ამ დროს გათვლები ტარდება ხოლმე ამ ცვლილების პირველი რიგის სიზუსტით. უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებს სხვანაირად უწოდებენ ინფინიტეზიმალურს.

ინფინიტეზიმალური გარდაქმნები ასე ჩაიწერება:

$$Q, = q, + \delta q, \quad P, = p, + \delta p, \quad (\text{VII-5.1})$$

აქ $\delta q,$ და $\delta p,$ არიან უსასრულოდ მცირე ნაზრდები და არა ვირტუალური ცვლილებები. ეს ნაზრდები შეიძლება გამოწვეული იყოს, მაგალითად, ცვლადთა უსასრულოდ მცირე გარდაქმნით. ცხადია, რომ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის მაწარმოებელი ფუნქცია უსასრულოდ მცირედ იქნება განსხვავებული იგივერი გარდაქმნის მაწარმოებელი ფუნქციისაგან, რომელიც ჩვენ განვიხილეთ წინა პარაგრაფში, (VII-2.1):

$$F_2^0 \equiv F_2^0(q, P) = \sum_{i=1}^n q_i P_i$$

შესაბამისად ახალ ფუნქციას ასე ჩაეწერთ

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \varepsilon G(q, P),$$

სადაც ε არის უსასრულოდ მცირე პარამეტრი ($\varepsilon \ll 1$). მაშინ კანონიკური გარდაქმნების განტოლებიდან მიიღება:

$$p, = \frac{\partial F_2}{\partial q,} = P, + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q,}$$

ანუ

$$P, - p, = \delta p, = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q,}$$

ანალოგიურად

$$Q, = \frac{\partial F_2}{\partial P,} = q, + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P,}$$

ამ ჯამებში მეორე წევრი უნდა იყოს პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე ε -ის მიხედვით. რაკი P , განსხვავდება p_i -ისგან ε სიზუსტით, ამ ფორმულაში გაწარმოება შეგვიძლია ძველი იმპულსით მოვახდინოთ:

$$G(q, P) \rightarrow G(q, p) \quad \text{და} \quad \frac{\partial G}{\partial P_i} \rightarrow \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

ამრიგად, გვაქვს უსასრულოდ მცირე გარდაქმნების შემდეგი სახე:

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (\text{VII-5.2})$$

ხშირად G - ს უწოდებენ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების მაწარმოებელ ფუნქციას ან გენერატორს.

უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების საინტერესო მაგალითია, როცა მაწარმოებელ ფუნქციად აიღება ჰამილტონიანი $G = H(q, p)$, ხოლო ε - არის უსასრულოდ მცირე დროის ინტერვალი dt .

მაშინ

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = dt \cdot \dot{q}_i = dq_i,$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = dt \cdot \dot{p}_i = dp_i,$$

ეს ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ კოორდინატები და იმპულსები ისე იცვლება, რომ დროის t მომენტში $q(t)$ და $p(t)$ მნიშვნელობების ნაცვლად dt დროის შემდეგ ისინი ხდებიან $q(t+dt)$ და $p(t+dt)$. ამრიგად, სისტემის მდგომარეობის შეცვლა dt დროში შეიძლება მივიღოთ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნით, რომელსაც ახორციელებს ჰამილტონიანი, H .

აქედან გამომდინარეობს, რომ რაიმე საწყისი t_0 მომენტიდან t მომენტამდე სისტემის მდგომარეობის ცვლილება შეიძლება მივიღოთ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების მიმდევრობით. რადგან ორი სანმიმდევრული კანონიკური გარდაქმნა ეკვივალენტურია რაიმე ერთი კანონიკური გარდაქმნისა, ამიტომ, გადასვლა $q(t_0), p(t_0)$ მდგომარეობიდან $q(t), p(t)$ მდგომარეობაში შეიძლება მივიღოთ დროზე დამოკიდებული კანონიკური გარდაქმნით. ამრიგად, მექანიკური სისტემის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც უწყვეტად მიმდინარე კანონიკური გარდაქმნების ჯაჭვი, რომლის მაწარმოებელი ფუნქცია დროის ყოველ მომენტში არის სისტემის ჰამილტონიანი, ე.ი.

მოძრაობა არის კანონიკური გარდაქმნა!

ნათელია, რომ არსებობს შებრუნებული კანონიკური გარდაქმნაც, რომელსაც $q(t), p(t)$ გადააყავს მუდმივ მნიშვნელობებში $q(t_0), p(t_0)$. ასეთი კანონიკური გარდაქმნა ეკვივალენტურია მოძრაობის ამოცანის სრული ამოხსნისა.

- პუასონის ფრჩხილები და უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნები

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია $u(q, p)$ და მისი ცვლილება უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნისას. ფუნქციის ცვლილებას ეწოდებთ გამოსახულებას

$$\delta u = u(q + \delta q, p + \delta p) - u(q, p)$$

პირველ რიგადვე გაშლა იძლევა

$$\delta u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

ჩავესვათ აქ შემოთ მიღებული უსასრულოდ მცირე ცვლილებები:

$$\delta u = \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

ანუ

$$\delta u = \varepsilon (u, G) \quad (\text{VII-5.3})$$

ავიღოთ ახლა $u = H$, მაშინ

$$\delta H = \varepsilon (H, G)$$

თუ G არის მოძრაობის პირველი ინტეგრალი, როგორც ვიცით, ის დროზე ცხადად არ იქნება დამოკიდებული, ამიტომ მისი სრული წარმოებული დროით, რომელიც მუდმივობის გამო ნულის ტოლია, დაეძახევა მისსავე პუასონის ფუნქციონალს $\delta H = \varepsilon (H, G)$.

$$(H, G) = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ასეთი მაწარმოებელი ფუნქციით გენერირებული უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნა არ ცვლის ჰამილტონიანის მნიშვნელობას.

ამრიგად, მოძრაობის განტოლების ყოველი (პირველი) ინტეგრალი არის იმ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების მაწარმოებელი ფუნქცია, რომლებიც არ ცვლიან ჰამილტონიანს.

რაც შეეხება გარდაქმნებს, რომლებიც ჰამილტონიანს არ ცვლიან, მათი მოძებნა შეიძლება სისტემის სიმეტრიის თვისებებზე დაყრდნობით, იმით, რომ თუ ფიზიკური სისტემა სიმეტრიულია მისი კონფიგურაციების გარკვეული ცვლილებების მიმართ, მაშინ მისი ჰამილტონიანი ამ გარდაქმნებისას უნდა დარჩეს უცვლელი. ჩვენ მიერ ადრე მიღებული შენახვის თეორემები, ბუნებრივია, აღმოჩნდება აქ გამოთქმული ზოგადი დებულების კერძო შემთხვევები.

ეხედავთ, რომ ადრე განხილული ნიოტერის თეორემის მოძრაობის ინტეგრალებმა შეიძინეს ნათელი ფიზიკური და გეომეტრიული შინაარსი, სახელდობრ, ისინი ყოფილან ჰამილტონიანის სიმეტრიის შესაბამისი ინფინიტეზიმალური (და სასრულოც, საზოგადოდ) გარდაქმნების გენერატორები.

მაგალითები:

(ა) ტრანსლაციური გარდაქმნა

ვთქვათ, რომელიმე q , კოორდინატი არის ციკლური. მაშინ ჰამილტონიანი არ იქნება მასზე დამოკიდებული და, ცხადია, არ შეიცვლება უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნებისას, რომლებიც მართო ამ კოორდინატს ცვლიან

$$\delta q_i = \varepsilon \delta_i$$

$$\delta p_i = 0$$

განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\delta_y = \frac{\partial G}{\partial p_y}$$

რაც ნიშნავს, რომ $G = p_x x + p_y y - x$, ანუ $q_x - x$ შესაბამისი განზოგადებული იმპულსის ინახება.

(ბ) კოორდინატთა სისტემის მობრუნება

განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნა, რომელიც შეესაბამება მთელი სისტემის მობრუნებას უსასრულოდ მცირე ε კუთხეზე.

ზოგადობის შეუსწავლად შეგვიძლია განვიხილოთ ბრუნვა z -ღერძის ირგვლივ: ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია ამ გარდაქმნის სახე

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$Y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$Z = z$$

თუ კუთხეს ჩაეთვლით უსასრულო მცირედ, $\varphi = \varepsilon \ll 1$, მაშინ ამ გარდაქმნიებიდან დაგერჩება

$$X = x + y\varepsilon$$

$$Y = y - x\varepsilon$$

$$Z = z$$

ასეთივე გარდაქმნებს განიცდიან იმპულსის მდგენელები. ამრიგად გვაქვს:

$$\delta x = y\varepsilon, \quad \delta y = -x\varepsilon, \quad \delta z = 0$$

$$\delta p_x = p_y\varepsilon, \quad \delta p_y = -p_x\varepsilon, \quad \delta p_z = 0$$

ადვილია იმის მიხედვით, რომ ეს გარდაქმნები შეგვიძლია გამოვხატოთ პუასონის ფრჩხილებით

$$\delta x = \varepsilon(l_z, x), \quad \delta y = \varepsilon(l_z, y), \quad \delta z = \varepsilon(l_z, z),$$

რის შესახებაც გექონდა საუბარი პუასონის ფრჩხილების მაგალითების განხილვისას.

რაკი ჰამილტონიანი ინვარიანტულია აღნიშნული ბრუნვის მიმართ, ამიტომ ამ გარდაქმნის გენერატორი შენახვადი სიდიდე უნდა იყოს.

განმარტების თანახმად

$$\delta x = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_x}, \quad \delta y = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_y}, \quad \delta z = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_z}$$

ე.ი. გვაქვს

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = y, \quad \frac{\partial G}{\partial p_y} = -x, \quad \frac{\partial G}{\partial p_z} = 0$$

ანუ

$$G = yp_x - xp_y,$$

რაც ემთხვევა l_z -ს.

ამრიგად, იმპულსის მომენტი, ერთის მხრივ ბრუნვების გენერატორია, ხოლო მეორეს მხრივ, ის მოძრაობის ინტეგრალია იმის

გამო, რომ სისტემის ჰამილტონიანი ინვარიანტულია ამ გარდაქმნების მიმართ.

VII-6. კიდევ ერთხელ “ფარული სიმეტრიის” შესახებ

ადრე (თავი V. პარაგრაფი V-7) ვნახეთ, რომ კვპლერის ამოცანაში გვაქვს დამატებითი შენახვადი ინტეგრალი, ე.წ. ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, რამაც საშუალება მოგვცა მიგველო ორბიტის განტოლება უკვე აღგებურლად – მოძრაობის განტოლების ამოხსნის გარეშე.

ამავე დროს ბერტრანის თეორემით გამოვარკვეთ, რომ არსებობს მხოლოდ ორი ცენტრალური პოტენციალური ველი, რომელიც იძლევა ნაკეტილ ორბიტებზე პერიოდულ მოძრაობას ნებისმიერი საწყისი პირობების შემთხვევაში – ესაა კულონური და იზოტროპული ოსცილატორის პოტენციალები.

ახლა ჩვენი მიზანი იქნება გამოვამსუვროთ ამ არატრევი-ალურ დამატებით შენახვის კანონებთან დაკავშირებული “ფარული სიმეტრია”.

ორივე ჰამილტონიანი არის ინვარიანტული სამგანზომილუ-ბიანი ბრუნვების მიმართ. თურმე ამავე დროს ორივე ჰამილტონიანი ინვარიანტულია უფრო ფართო გარდაქმნების (ანუ, როგორც იტყვიან, ჯგუფის) მიმართ, რაც ნათელი არ არის ამ ჰამილტონიანების გარეუ-ნული სახის პირდაპირი განხილვის დროს.

დავიწყოთ კვპლერის ამოცანით,

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \quad (\text{VII-6.1})$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ, 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრ-ცეში ბრუნვების მიმართ ინვარიანტულობა ნიშნავს იმას, რომ ამ სიმეტრიის ინფინიტეზიმალური გენერატორი – მომენტის \vec{L} -ვექტორი – ინახება

$$(L, H) = 0 \quad (\text{VII-6.2})$$

თუკი გავიხსენებთ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორს

$$\vec{A} = [\vec{p} \times \vec{r}] + \frac{m\alpha\vec{r}}{r}, \quad (\text{VII-6.3})$$

როგორც უკვე ვაჩვენეთ, ისიც ინახება

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad (A, H) = 0 \quad (\text{VII-6.4})$$

ანუ H ინვარიანტულია \vec{A} ვექტორის A , კომპონენტების, როგორც რაიმე ინფინიტეზიმალური გენერატორების მიერ გენერირებული გარ-დაქმნების მიმართ.

ამავე დროს გვაქვს შემდეგი პუასონის ფრჩხილი

$$(L, A_i) = \varepsilon_{ijk} A_j \quad (\text{VII-6.5})$$

რაც, როგორც ვიცით, იმ უბრალო ჭეშმარიტებას აღნიშნავს, რომ

A_k არიან 3-განზომილებიანი ვექტორის კომპონენტები. შემდგომი მსჯელობისათვის სასურველია მათთვის შემოვიტანოთ ახლებური ნორმირება

$$D_k = \frac{A_k}{\sqrt{2m|H|}}. \quad (\text{VII-6.8})$$

ზედა თანაფარდობებიდან გამომდინარე ნათელია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ერთობლივ პუასონის ფრჩხილებს:

$$(l_i, l_j) = \varepsilon_{ijk} l_k, \quad (l_i, D_j) = \varepsilon_{ijk} D_k, \quad (D_i, D_j) = \varepsilon_{ijk} l_k \quad (\text{VII-6.9})$$

როგორც ხედავთ, ეს 6 გენერატორი ერთად წარმოქმნის ჩაკეტილ ალგებრას პუასონის ფრჩხილების მიმართ, რაც პუასონის თეორემის თანახმად ნიშნავს, რომ მათ შორის პუასონის ფრჩხილების შედგენისას მოძრაობის ახალი ინტეგრალები აღარ წარმოიქმნება.

ამავე დროს ეს ექვსივე გენერატორი ინვარიანტულს ტოვებს კუპლერის ამოცანის ჰამილტონიანს და ამიტომ განსაზღვრავენ ექვსგანზომილებიან სიმეტრიას. ამ სიმეტრიის ხახიათში უკეთ გარკვევისათვის შემოვიტანოთ გენერატორების შემდეგი კომბინაციები

$$J_k = \frac{l_k + iD_k}{2}, \quad N_k = \frac{l_k - iD_k}{2} \quad (\text{VII-6.10})$$

თუ ახლა პუასონის ზემოთ მოყვანილ ფრჩხილებს გამოვიყენებთ და გამოვთვლით პუასონის ფრჩხილებს ამ ახალ გენერატორებს შორის, მიიღება

$$(J_i, J_j) = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad (N_i, N_j) = \varepsilon_{ijk} N_k, \quad (J_i, N_j) = 0 \quad (\text{VII-6.11})$$

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი ორი ჯგუფი გენერატორებისა ერთმანეთთან ნულოვან პუასონის ფრჩხილს იძლევა და ამავე დროს თითოეული მათგანი ცალკე ქმნის ბრუნვების გარდაქმნებისათვის დამახასიათებელ პუასონის ფრჩხილების ალგებრულ თანაფარდობებს. სულ ასეთი 6 გენერატორია. ამიტომ კოლექტიურად მათ მიერ წარმოებული გარდაქმნები ეკვივალენტურია 4-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში ბრუნვებისა. მართლაც, რადგან თითოეული პუასონის ფრჩხილი გენერირებს მობრუნებას რომელიმე სიბრტყეში და 6 გენერატორისათვის გვექნება 6 დამოუკიდებელი სიბრტყე, ესაა სწორედ ის, რაც ხდება 4-განზომილებიან სივრცეში ბრუნვების შემთხვევაში – საიში “ჩეულებრივი” სიბრტყე და საიში სიბრტყე, რომლებიც გადიან მე-4 ღერძზე და ერთ-ერთ “ჩეულებრივ” ღერძზე. ასეთი გარდაქმნების ერთობლიობა აღინიშნება $O^*(4)$ -ით, განსხვავებით 3-განზომილებიანი ბრუნვების $O^*(3)$ ერთობლიობისაგან.

ეს “ფარული სიმეტრია” განსაკუთრებით ნათელი ხდება J_k და N_k გენერატორების ენაზე, მაშინ როცა თავდაპირველი გენერატორებით ეს სიმეტრია შედარებით მიჩქმალული იყო. კუპლერის ამოცანაში ამ სიმეტრიაზე წარმოდგენას პირველად მიაგნო ცნობილმა საბჭოთა ფიზიკოსმა-თეორეტიკოსმა ვ.ფოკმა 1935 წელს. სწორედ ამ “ფარული” სიმეტრიის არსებობით აიხსნება დამატებითი შენახედი ვექტორის არსებობა კუპლერის ამოცანაში. ამასთანავე არის დაკავშირებული ორბიტების ჩაკეტილობა და პერიოდულობა, ხოლო კვანტურ მექანიკაში წყაღბადის ატომის სპექტრის ე.წ. “შემთხვევითი გადაგვარება”.

რაც შეეხება ბურტრანის თეორემაში აღნიშნულ მეორე პოტენციალს – იზოტროპულ ჰარმონიულ ოსცილატორს – მისთვისაც შეგვიძლია მოვქმენოთ დამატებითი მოძრაობის ინტეგრალები.

დავიწყოთ 2-განზომილებიანი იზოტროპული ოსცილატორით და ავიღოთ მისი შესაბამისი ჰამილტონიანი შემდეგი ფორმით $H = H_1 + H_2$, სადაც H , ცალკეული ღერძის გასწვრივ რხევების აღმწერი ჰამილტონიანებია

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega_i^2 x_i^2}{2} \quad (i=1,2) \quad (\text{VII-6.11})$$

აქ ესარგებლოთ კოორდინატებისათვის შემდეგი აღნიშვნებით: $(x, y, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$. როგორც ვიცით, (x_1, x_2) სიბრტყის კერპენდიკულარული x_3 -ღერძის ირგვლივ ბრუნვების გენერატორი (მომენტი) ასე განიშარტება

$$l_3 = \epsilon_{ijk} x_j p_k = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

გამოვთვალოთ მისი პუასონის ფრჩხილი სრულ ჰამილტონიანთან. მიიღება

$$(l_3, H) = \frac{1}{2m} x_1 x_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

ვხედავთ, რომ მხოლოდ იზოტროპული ოსცილატორისათვის $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ვექნება ბრუნვების მიმართ სიმეტრია, $(l_3, H) = 0$.

შემოვიტანოთ მეორე რანგის ტენზორი ასე

$$A_y = \frac{1}{2m} (p_x p_x + m\omega^2 x_x x_x) \quad (\text{VII-6.12})$$

ადვილად დაერწმუნდებით, რომ

$$(A_y, H) = 0, \quad (\text{VII-6.13})$$

ე.ი. ამ ტენზორის კომპონენტები არიან ისეთი გარდაქმნების გენერატორები, რომლებიც ჰამილტონიანს ტოვებენ ინვარიანტულს. გარდა ამისა, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\sum_j A_{ij} l_j = 0, \quad (\text{VII-6.14})$$

რაც ნიშნავს, რომ ამ ტენზორის კომპონენტები თავმოყრილია ორბიტის სიბრტყეში.

თუ შემოვიტანოთ გენერატორებს

$$K_1 = \frac{A_{12}}{\omega}, \quad K_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega}, \quad K_3 = \frac{l_3}{2} \quad (\text{VII-6.15})$$

ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ისინი ქმნიან პუასონის ფრჩხილების ჩაკეტილ ალგებრას

$$(K_i, K_j) = \epsilon_{ijk} K_k, \quad (\text{VII-6.16})$$

ანუ ეთანადებიან გარკვეულ ბრუნვებს, ოდონდ უკვე მეტ (სამ) -განზომილებიან რაიმე სივრცეში. ამრიგად, სიმეტრია აქაც გაფართოვდა.

ახლა თუ შემოვიტანოთ 3-განზომილებიან იზოტროპულ ოსცილატორს

$$H = H_1 + H_2 + H_3, \quad (\text{VII-6.17})$$

აღმოჩნდება, რომ A_y -კომპონენტები მასთანაც ნულოვან პუასონის ფრჩხილებს იძლევიან და გარკვეულ შენახვად სიდიდეებს გამოხატავენ.

რაკი A_y სიმეტრიული ტენზორია, მას შეიძლება პქონდეს სულ მეტი ნ დამოუკიდებელი კომპონენტი. ადვილად შემოწმდება, რომ

$$(A_y, l_k) = \epsilon_{\mu k} A_{\mu} + \epsilon_{\mu k} A_{\mu} \quad (\text{VII-6.18})$$

და

$$(A_{\mu}, A_{\nu}) = \frac{\omega^2}{4} [\delta_{\mu\nu} \epsilon_{ikm} l_m + \delta_{\mu i} \epsilon_{jkm} l_m + \delta_{\nu k} \epsilon_{ilm} l_m + \delta_{\nu l} \epsilon_{jkm} l_m] \quad (\text{VII-6.19})$$

ამავე დროს თუ გვეხსომება, რომ l , აკმაყოფილებენ ბრუნვების გენერატორების ჩვეულებრივ ფრენხილებს, გამოვა, რომ 3 კუთხური მომენტი l , და 6 დამოუკიდებელი A_{μ} კომპონენტები A ტენზორისა ქმნიან პუასონის ფრენხილების მიმართ ჩაკეტილ სისტემას და ამიტომ ეთანადებიან რაღაც ფართო სიმეტრიის გარდაქმნებს, რაიმე 8-განზომილებიან სივრცეში. სათანადო სიმეტრია ცნობილია როგორც სიმეტრია სპეციალური უნიტარული გარდაქმნების მიმართ, რომელსაც უწოდებენ $SU(3)$ -ს.

ეს სიმეტრია განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში, სახელდობრ, კვარკების საშუალებით ელემენტარულ ნაწილაკთა კლასიფიკაციისათვის, აგრეთვე ძლიერ ურთიერთქმედებათა ფუნდამენტალური თეორიის ასაგებად, რომელშიც ზემოაღნიშნული სიმეტრიის მატარებელია კვარკების კვანტური მახასიათებელი, ე.წ. "ფერი". ფერის დინამიკის შექმნისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა ჰქონდა სწორედ დამატებითი სიმეტრიების კონცეფციას, რაც კვარკებისათვის შემოიტანეს საბჭოთა ფიზიკოსებმა ბ.სტრუმინსკიმ, ნ. ბოგოლიუბოვმა და ა. თაყეხლიძემ იაპონელი ფიზიკოსების პარალელურად და მათგან დამოუკიდებლად.

იაკობის თეორია. ჰამილტონ—იაკობის მეთოდი

VIII-1. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

კანონიკური გარდაქმნების განხილვისას ჩვენ დაეკისებოდა დებულება:

მოძრაობა არის კანონიკური გარდაქმნა,

რაც ნიშნავს შემდეგს: შეიძლება მოიძებნოს კანონიკური გარდაქმნა, რომელიც ახორციელებს $q(t)$ კოორდინატებიდან და $p(t)$ იმპულსებიდან საწყის $q(t_0)$ და $p(t_0)$ მნიშვნელობებზე გადასვლას, ანუ იძლევიან მექანიკის ამოცანის სრულ ამოხსნას. საწყისი კოორდინატები და იმპულსები აღენიშნოთ ასე:

$$q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = p_0$$

ესენი იყენენ "ძველი" ცვლადები. ახალ კანონიკურ ცვლადებზე გადასვლას მაშინ ექნება სახე

$$q = q(q_0, p_0, t)$$

$$p = p(q_0, p_0, t)$$

ნათელია, რომ ეს გარდაქმნა იძლევა მექანიკის ამოცანის სრულ ამოხსნას, რადგან კოორდინატები და იმპულსები გამოხატულია მათი საწყისი მნიშვნელობებითა და დროით. ცხადია, ეს მეთოდი ყველაზე ზოგადია. მაგრამ, როცა ასეთ მიდგომას ვიყენებთ, დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ კანონიკური გადასვლა მართლაც მუდმივ მნიშვნელობებზე ტარდება.

ამ პროგრამის განხორციელებისათვის მოვიშველიოთ ჩვენი ცოდნა სიმეტრიებისა და შენახვის კანონების შესახებ.

ვიცით, რომ თუ რომელიმე განზოგადებული კოორდინატა არის ციკლური, მაშინ სათანადო განზოგადებული იმპულსი მუდმივია და თვითონაც ციკლურია. ამიტომ ძალიან მარტივად მოიძებნება.

დაესვათ კითხვა: შეიძლება თუ არა მოეძებნოთ ისეთი კანონიკური გარდაქმნა, რომლის შემდეგაც ჰამილტონის გარდაქმნილ განტოლებებში ახალი ჰამილტონის ფუნქცია K საერთოდ არ შეიცავდეს ახალ განზოგადებულ კოორდინატებს, ე.ი. ყველა განზოგადებული კოორდინატა იყოს ციკლური?

დაეუშვათ, რომ ვიყენებთ მე-2 ტიპის კანონიკურ გარდაქმნებს, როცა მაწარმოებელი ფუნქციაა $F_2(q, P, t)$. ამასთან

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(VIII-1.1)}$$

მოეძებნოთ შემდეგი სახის ჰამილტონის ახალ ფუნქციათ

$$K = f(P_1, P_2, \dots, P_n) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad \text{(VIII-1.2)}$$

სადაც f - ნებისმიერი ფუნქციაა. მაშინ ახალი ცვლადებისათვის მიიღება განტოლებები:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial K}{\partial q_i} = 0, \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(VIII-1.3)}$$

ზედა განტოლებიდან გამოიძინარეობს, რომ

$$P_i = \alpha_i = \text{const.} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-14})$$

ხოლო α_i – ინტეგრების მუდმივებია.

თუ ამას გავითვალისწინებთ (VIII-12) განტოლებებში, მივიღებთ (რადგან K მუდმივია):

$$Q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-15})$$

სადაც

$$\omega_i = \left(\frac{\partial f}{\partial P_i} \right)_{P_i = \alpha_i} \quad (\text{VIII-16})$$

არინ მუდმივი სიდიდეები, ხოლო β_i – ინტეგრების მუდმივებია.

(VIII-14; 15) წარმოადგენენ (VIII-13) განტოლებების ინტეგრალების სისტემას. ახლა (VIII-1.1) გარდაქმნებით შეგვეძლოს მიგვეღოს ძველი ცვლადებიც q_i, p_i , და, ამრიგად, ამოგვეხსნა ამოცანა სისტემის მოძრაობის შესახებ (ამათი მოძებნა აუცილებელია იმიტომ, რომ შევეძლოთ საწყისი პირობების ჩართვა – საწყისი პირობები ხომ ძველ ცვლადებში გვაქვს! მაგრამ ამის გაკეთება ჯერ არ შევუძლებია სანამ ჩვენთვის უცნობია F_2 კანონიკური გარდაქმნის ფუნქცია).

* განვიხილოთ თანაფარდობა (VIII-12), რომელიც ასე ჩაწერვით

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = f(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (\text{VIII-17})$$

ამ თანაფარდობაში p_i -ები შევცვალოთ კანონიკური გარდაქმნების თანაფარდობებით (VIII-1.1), ხოლო P_i -ები α_i -ებით. მივიღებთ

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (\text{VIII-18})$$

ესაა ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური კერძოწარმოებულობიანი განტოლება.

ამრიგად F_2 -ის განსაზღვრისათვის მივიღეთ პირველი რიგის კერძოწარმოებულობიანი დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მაწარმოებელი ფუნქცია $F_2(q_1, q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t)$ ძირითადი ცვლადებით $q_1, q_2, \dots, q_n; t$. იმის გამო, რომ სუდა განტოლებაში მუდმივი ფუნქცია f ნებისმიერია, შეგვიძლია ავირჩიოთ

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (\text{VIII-19})$$

ანუ, რაც იგივეა, რომ ახალი ჰამილტონიანი $K = 0$. მაშინ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII-1.10})$$

კერძო წარმოებულობიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც იმდენივე ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს, რამდენიც დამოუკიდებელი ცვლადია (ჩვენ შემთხვევაში $n+1$), ეწოდება განტოლების სრული ინტეგრალი. რაკი F_2 ფუნქცია (VIII-1.10) განტოლებაში მხოლოდ თავისი წარმოებულებით შედის, ნიშნავს, რომ ერთი ნებისმიერი მუდმივი სრულ ინტეგრალში შევა ადითორი შესაქმნის სახით, ე. ი. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალს აქვს სახეს:

$$S = F_2(q_1, q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t) + \alpha_0. \quad (\text{VIII-1.11})$$

სადაც α_0 – ნებისმიერი ადითორი მუდმივია.

მართლაც, თუ $F_2(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$ არის (VIII-1.10) განტოლების ამონახსნა, რადგანაც

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-1.12})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ფუნქცია S იქნება (VIII-10)-ის ამოხსნა, რომელიც შეიცავს $n+1$ ნებისმიერ მუდმივს, ე.ი. წარმოადგენს სრულ ინტეგრალს.

*** ამრიგად, თუ ცნობილია ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალი (VIII-1.11), მაშინ საწყისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-1.13})$$

ამონახსნის საპოვნელად მაწარმოებელ ფუნქციად უნდა ავიღოთ ფუნქცია

$$\psi = F_2(q_1, q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t),$$

რის შემდეგაც გარდაქმნის (VIII-1.1) ფორმულაში ჩავატაროთ შეცვლა $p_i \rightarrow \alpha_i$, და (VIII-1.5) ფორმულის შესაბამისად $Q \rightarrow \beta_i$. მაშინ (VIII-1.1) გარდაქმნა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VIII-1.14})$$

$$\beta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i}$$

იმიტომ, რომ როცა $f = 0$, $\omega = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(VIII-1.14) განტოლებები საშუალებას გვაძლევენ განვოგადებულო კოორდინატები q_1, q_2, \dots, q_n , გამოვხატოთ t დროის და $2n$ ნებისმიერი α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) მუდმივის საშუალებით.

ამრიგად, ნაჩვენებია, რომ თუ ცნობილია ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალი, მაშინ აღარ გვჭირდება ვაინტეგრროთ ჰამილტონის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, ე.ი. ეს ამოცანა იცვლება (VIII-10) განტოლების სრული ინტეგრალის მოძებნის ამოცანით. ესაა იაკობის თეორემის შინაარსი, რომელსაც უფრო კონსტრუქციული სახით ჩამოვყავალიბებთ ქვემოთ. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალს ხშირად ჰამილტონის მთავარ ფუნქციასაც უწოდებენ და აღნიშნავენ S -ით.

(VIII-2) იაკობის თეორემა

უკეთ ვნახეთ, რომ ჰამილტონის მთავარი ფუნქცია გამოიხატება n რაოდენობის საწყისი კოორდინატებით და ამავე რაოდენობის მუდმივი განვოგადებული იმპულსებით. იბალება კითხვა: კანონიკური განტოლებების სრული ინტეგრაციისათვის რა როლს ასრულებს ჰამილტონის მთავარი ფუნქცია? გვჭირდება მხოლოდ გარკვეული ამოხსნები მთავარი ფუნქციისათვის თუ ნებისმიერი სრული ამონახსნი დააკმაყოფილებს პრობლემას? ამ კითხვებზე პასუხს იძლევა იაკობის თეორემა:

თუ $S(q, \alpha, t)$ არის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0 \quad (\text{VIII-2.1})$$

ნებისმიერი სრული ამონახსნი, და თუ $q_i(\alpha, \beta, t)$ და $p_i(\alpha, \beta, t)$ სიდიდეების ამონახსნელად გამოიყენება განტოლებები

$$-\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (\text{VIII-2.2})$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

მაშინ ეს გამოსახულებები იძლევიან $H(q, p, t)$ ჰამილტონიანთან დაკავშირებული კანონიკური განტოლებების ზოგად ამონახსნებს.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად პირველ რიგში ჰამილტონ-იაკობის განტოლება გაეწარმოთ α_i -ს მიხედვით:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (\text{VIII-2.3})$$

სადაც p_j განიხილება როგორც (q, α, t) -ის ფუნქცია, (VIII-2.2)-ის შესაბამისად.

ახლა (VIII-2.2)-ის პირველი განტოლების დროის მიხედვით სრული წარმოებული მოენახოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა მიუყვებით ფაზურ სივრცეში ნამდვილი ამონახსნის წირს. შევნიშნოთ, რომ $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ არის (q, α, t) -ს ფუნქცია, ხოლო α, β სიდიდეები მუდმივებია. მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j = 0 \quad (\text{VIII-2.4})$$

ნაწილობრივი გაწარმოების რიგს არ აქვს მნიშვნელობა S ფუნქციის გლეულობის გამო. ზედა განტოლებების გათვალისწინებით ამ უკანასკნელში ეპოვიეთ

$$\sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = 0, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (\text{VIII-2.5})$$

ჰამილტონის მთავარი ფუნქციის მეორე წარმოებულების სივრცეის გამო, რასაც ახლა მოვითხოვთ, მათგან შედგენილი მატრიცის დეტერმინანტი ნული არ იქნება. ამიტომ ზედა განტოლებების შესრულება მოითხოვს, რომ ფრჩხილებში მოქცეული გამოსახულება ნულის ტოლი იყოს. მაშინ მიიღება

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{VIII-2.6})$$

რაც ჰამილტონის პირველი განტოლებაა.

ახლა დაეუბრუნდეთ კვლავ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას, ოღონდ გაეწარმოთ q_j -ს მიხედვით, დავეშვებთ რა, რომ p_j არის (q, α, t) -ს ფუნქცია, კვლავ (VIII-2.2) განტოლებების შესაბამისად. გვაქვს

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{VIII-2.7})$$

ახლა ავიღოთ (VIII-2.2)-ის მე-2 განტოლების სრული წარმოებული დროის მიხედვით, თანაც შევნიშნოთ, რომ ყოველი α_i არის მუდმივი ნამდვილ წირზე, მიიღება

$$\dot{p}_j - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i = 0 \quad (\text{VIII-2.8})$$

შეეკრებით ეს განტოლება წინასთან და გამოვიყენოთ (VIII-2.2) და (VIII-2.6), ვიპოვიოთ, რომ

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-2.9})$$

რაც მე-2 კანონიკური განტოლებაა.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ნებისმიერი სრული ამონახსნი იძლევა ჰამილტონის პრობლემის ამოხსნას. ამონახსნს აქვს ნებისმიერი მუდმივების სწორი რაოდენობა, და აკმაყოფილებს კანონიკურ განტოლებებს.

*** ჰამილტონის მთავარი ფუნქციის $S(q_j, P_j = \alpha_j; t)$ ფიზიკური შინაარსი უკეთ გამოჩნდება, თუ გამოვთვლით მის სრულ წარმოებულს დროის მიხედვით:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

აქ არ შევიდა წარმოებულები P_j , იმპულსებით, რადგან $\dot{P}_j = 0$.

მაგრამ კანონიკური გარდაქმნების განტოლებების მიხედვით შეგვიძლია შევცვალოთ

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

ამიტომ

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L$$

საიდანაც

$$S = \int L dt + const.$$

ჰამილტონის პრინციპი ემყარება განსაზღვრულ ინტეგრალს, მაშინ, როცა ზედა განტოლებაში გვაქვს განუსაზღვრელი ინტეგრალი. უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკული თვალსაზრისით განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ შეიძლება აღმოჩნდეს სასარგებლო, რადგან მისი გამოთვლა მხოლოდ მას შემდეგ შეიძლება, როცა ჩვენთვის ცნობილი იქნება q , და p , როგორც დროის ფუნქციები, ე.ი. მხოლოდ მას შემდეგ, რაც მიღებული გექნება მოცემული ამოცანის ამოხსნები.

მეთოდის საიდუმლოტრაცოდ განვიხილოთ კვლავ ამოცანა პარამონიული ოსცილატორის შესახებ.

ერთგანზომილებიანი ამოცანის ჰამილტონიანი ასე ჩაიწერება

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

მაშინ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

რადგან დრო შედის მარტო ბოლო წევრში, ამოხსნა ვეძებთ სახით

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t, \quad \alpha = const.$$

ამ მუდმივს შემდეგ ჩათვლით გარდაქმნილ იმპულსად. ასეთი არჩევით დროს განტოლებიდან დრო გამოირიცხება და მივიღებთ

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha,$$

რომლის ინტეგრაციით გვექნება

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}$$

ამიტომაც

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} - \alpha t$$

ეს ინტეგრალი მარტივი ასაღებია, მაგრამ მისი გამოთვლა მიზანშეუწონელია, რადგან შემდგომში დაგეგმირდება მხოლოდ მისი კერძო წარმოებულები. q -ს განსაზღვრისათვის გამოვთვალოთ (VIII-1.14)-ის მიხედვით

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t,$$

რაც ინტეგრაციის შემდეგ გვაძლევს

$$t + \beta = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}$$

აქედან ვიპოვით

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega(t + \beta), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

აქ α და β ინტეგრაციის მუდმივებია. მიღებული გამოსახულება თანხვედრა პარამონიული ოსცილატორის ამონახსნის ჩვეულებრივ ფორმულას.

საბოლოო ამონახსნის მისაღებად ეს მუდმივები უნდა დავეუკავშიროთ საწყის პირობებს.

აეილოთ ასეთი საწყისი პირობები: $t = 0$ მომენტში მატერიალური წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლი იყოს, ე.ი. $q = q_0$, $p = p_0 = 0$. ჩავსვათ ზედა ფორმულებში $t = 0$.

$$0 = p_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)_{t=0} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq_0^2}{2}}$$

საიდანაც

$$\alpha = \frac{kq_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}$$

ამრიგად, α ყოფილა სისტემის საწყისი სრული ენერგია. სისტემის კონსერვატიულობის გამო ენერგია მუდამ ამ სიდიდის ტოლი დარჩება. ამის დადგენა შემდეგნაირადაც შეიძლებოდა: ტოლობაში

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

ჩავსვათ $S = W - \alpha t$, მიიღება $H = \alpha$.

α -ს ეს მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ ამონახსნში. გვაქვს

$$q = q_0 \cos \omega(t + \beta),$$

საიდანაც საწყისი პირობის გათვალისწინებით ვაღგენთ, $\beta = 0$. ამრიგად, განხილული S ფუნქცია ახორციელებს გადასვლას ახალ კანონიკურ იმპულს-სზე, რომელიც თანხედება სრულ ენერგიას და კოორდინატზე, რომელიც იგივეურად ნულის ტოლია (არჩეული სასაზღვრო პირობის გამო).

ახლა უკვე შეგვიძლია გამოვთვალოთ ჰამილტონის მთავარი ფუნქცია

$$S = m\omega \int dq(\sqrt{q_0^2 - q^2} - \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} t)$$

ანუ q -ს ჩასმით (რაკი უკვე ვიცით)

$$S = m\omega^2 q_0^2 \int (\sin^2 \omega t - \frac{1}{2}) dt$$

აქედან ვასკენით, რომ

$$L = \frac{mq^2}{2} - \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} = \\ = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = m\omega^2 q_0^2 (\sin^2 \omega t - \frac{1}{2})$$

საიდანაც აშკარად ჩანს, რომ $S(t)$ თანხვედბა განუსაზღვრულ ინტეგრალს $\int L dt$. ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, ოღონდ ამაში დარწმუნება ხერხდება მხოლოდ მას შემდეგ, რაც მიღებულია ამოცანის საბოლოო ამონახსნი

ამოცანები თემაზე: ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ამოცანა 1. განიხილეთ დროზე დამოკიდებული ჰამილტონიანი

$$H = \frac{p^2}{2m} - mAtx, \quad A = const.$$

გამოიყენეთ იაკობის მეთოდი და განსაზღვრეთ $p(t)$ და $x(t)$ ამონახსნები შემდეგი საწყისი პირობებით: როცა $t=0$, $p = mV_0$, $x = x(0) = 0$.

ამოცანა 2. განიხილეთ დამუხტული ოსცილატორი $V = kv^2/2$ მუდმივ \vec{B} მაგნიტურ ველში, ვექტორული პოტენციალით

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B} \times \vec{r}]$$

ჩათვალით, რომ \vec{B} მიმართულია XOY სიბრტყის მართობულად, ხოლო \vec{r} არის ამ სიბრტყეში მერხვევი წერტილის რადიუს-ვექტორი.

შეადგინეთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება და ააგეთ ჰამილტონის მთავარი ფუნქცია.

ამოცანა 3. განიხილეთ სისტემა ჰამილტონიანით $H = q + p$. ამოხსენით ჰამილტონ-იაკობის განტოლება და აჩვენეთ, რომ მისი სრული ინტეგრალი იძლევა კანონიკური განტოლებების სწორ ამონახსნებს.

ამოცანა 4. განიხილეთ კონსერვატიული სისტემა, რომლისთვისაც

$$T = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad V = \frac{k}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (k > 0)$$

გამოიყენეთ ჰამილტონ-იაკობის მეთოდი და მოძებნეთ ტრაექტორია კონფიგურაციულ სივრცეში.

ამოცანა 5. შეადგინეთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ერთგვაროვან სიმძიმის ძალთა ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის და მიიღეთ სრული ინტეგრალი.

(VIII-3). კონსერვატიული სისტემები და იზნორირებადი კოორდინატები

დავუშვათ, რომ განსახილველი მექანიკური სისტემა ემორჩილება სტაციონარულ ბმებს. ამ შემთხვევაში ჰამილტონიანი (VIII-1.10) განტოლებებში დროზე ცხადად დამოკიდებული არ იქნება და ჰამილტონ-იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII-3.1})$$

ამის ნაცვლად შეგვიძლია მივიღოთ უფრო მარტივი განტოლება, თუ წარმოვადგენთ

$$\psi(q, \alpha, t) = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_n; h, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (\text{VIII-3.2})$$

სადაც $h, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ არიან ნებისმიერი მუდმივები. ამავე დროს ცხადია, რომ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-3.3})$$

ამიტომ (VIII-3.1)-ის ნაცვლად მივიღებთ

$$H(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = h \quad (\text{VIII-3.4})$$

აქ h არის სრული მექანიკური ენერგია. (VIII-3.4)-ს უწოდებენ ჰამილტონ-იაკობის მოდფიცირებულ (შემოკლებულ ან მახასიათებელ) განტოლებას. მისი ინტეგრაციით მიიღება ფუნქცია

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_n; h, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

და, ამიტომაც,

$$S = -ht + W(q_1, \dots, q_n; h, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (\text{VIII-3.5})$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial h} &= -t + \frac{\partial W}{\partial h} \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{VIII-3.6})$$

(VIII-1.14)-ის გამო გვაქვს

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -t + \frac{\partial W}{\partial h}, \\ \beta_i &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{VIII-3.7})$$

ჩავთვალოთ $\beta_1 = -t_0$, საბოლოოდ ვიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t - t_0 \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} &= \beta_i, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{VIII-3.8})$$

ამავე დროს

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-3.9})$$

ამ ფორმულებით შეგვიძლია ვიპოვოთ ახლა განზოგადებული კოორდინატები q_1, q_2, \dots, q_n . დრო შედის მარტო პირველ განტოლებაში, მეორე გან-

ტოლებები, რაკი არ შეიცავენ დროს, წარმოადგენენ განზოგადებულ კოორდინატებს შორის ბმების განტოლებებს.

დასკვნა: კიდევ ერთხელ ვაჩვენეთ, რომ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების ინტეგრაცია შეიძლება შეიცვალოს ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალის პონით. საზოგადოდ, ორივე ამ ამოცანას ერთნაირი სირთულეები ახასიათებს, მაგრამ არსებობენ დინამიკური ამოცანები, რომლებსთვისაც ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალის პონა უფრო მარტივია, ვიდრე კანონიკური ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრაცია.

(VIII-4). ცვლადთა განცალკების მეთოდი

ვთქვათ განზოგადებული კოორდინატების ნაწილი, მაგალითად, q_1, \dots, q_k ($k < n$) და შესაბამისი განზოგადებული იმპულსები p_1, \dots, p_k ჰამილტონის ფუნქციაში შედიან ცალკეული ფუნქციების სახით:

$$\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \dots, \varphi_k(q_k, p_k),$$

რომლებიც დამოუკიდებელია დროზე და იმ კოორდინატებზე, რომლებსაც არ აქვთ ფუნქციის ინდექსი.

სხვა სიტყვებით, ჰამილტონიანს აქვს სახე:

$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \dots, \varphi_k(q_k, p_k), q_{k+1}, \dots, q_n; p_{k+1}, \dots, p_n; t)$$

და ჩაწეროთ მისი სათანადო ჰამილტონ-იაკობის განტოლება

$$H \left\{ \varphi_1 \left(q_1, \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right), \dots, \varphi_k \left(q_k, \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right), q_{k+1}, \dots, q_n; p_{k+1}, \dots, p_n; t \right\} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII-4.1})$$

ვეძებთ ამ განტოლების ამონახსნი შემდეგი სახით

$$\psi = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \dots + \psi_k(q_k) + \psi^*(q_{k+1}, \dots, q_n; t) \quad (\text{VIII-4.2})$$

(VIII-4.1) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივაღწეოთ განტოლებაზე

$$H \left\{ \varphi_1 \left(q_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} \right), \dots, \varphi_k \left(q_k, \frac{\partial \psi_k}{\partial q_k} \right), q_{k+1}, \dots, q_n; \frac{\partial \psi^*}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \psi^*}{\partial q_n}; t \right\} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII-4.3})$$

დაეუწუათ ახლა, რომ (VIII-4.2) გამოსახულება არის (VIII-4.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ (VIII-4.3) გადაიქცევა იგივეობად, რომელიც უნდა შესრულდეს q_1, q_2, \dots, q_k ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. რადგან ეს კოორდინატები ერთმანეთზე დამოუკიდებელია, იგივეობა მხოლოდ მაშინ შესრულდება, თუ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ ფუნქციები დარჩებიან უცვლელი ზემოაღნიშნული კოორდინატების ცვლილებისას. ეს კი ნიშნავს, რომ (VIII-4.3) დაიშლება $k+1$ განტოლებად

$$\varphi_i(q_i, \frac{d\psi_i}{dq_i}) = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{VIII-4.4})$$

ჩვენ აქ კერძო წარმოებული შევცვალოთ ჩვეულებრივი წარმოებულებით, რადგან ფუნქციები მხოლოდ ერთ განზოგადებულ კოორდინატზე არიან დამოკიდებული, რომლითაც ხდება გაწარმოება.

(VIII-4.4) განტოლებებთან ერთად დაგვრჩება კიდევ ერთი, $(k+1)$ -ე განტოლება დარჩენილი ფუნქციისათვის

$$H\left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, q_{k+1}, \dots, q_n; \frac{\partial \psi^*}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \psi^*}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII-4.5})$$

სადაც α_i -ები არიან ნებისმიერი მუდმივები. პირველი k განტოლება (VIII-4.4) უკვე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია, ხოლო (VIII-4.5) არის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ცვლადთა ნაკლები რაოდენობით.

(VIII-5). ლიუვილის სისტემა. ლიუვილის თეორემა

ცვლადთა განცალკევებამ საშუალება მოგვცა მიგველო ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალი. მაგრამ, ცხადია, ეს მეთოდი ყოველთვის ვერ გამოიყენება, რადგან არ არის მარტივი მოიძებნოს ცვლადთა შესაფერისი გარდაქმნები, რითაც სისტემის ყველა განზოგადებული კოორდინატა გამოირიცხოს.

მეორე მხრივ, ცვლადთა განცალკევების მეთოდი, რომელიც წინა პარაგრაფში აღვწერეთ, არის დინამიკური სისტემების მოძრაობის განტოლებათა ამოხსნის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდი. ის ხშირად საშუალებას იძლევა მრავალი თავისუფლების ხარისხთა მქონე სისტემის ინტეგრების ამოცანა დაეიყვანოს ერთგანზომილებიანი ამოცანების მიმდევრობათა ინტეგრების ამოცანაზე.

მექანიკის განტოლებებში ცვლადთა განცალკევების პრობლემას ინტენსიურად სწავლობდნენ ჯერ კიდევ მე-19 საუკუნეში. ამოცანა ასე დაისმის:

— ჰამილტონის ფუნქციის როგორი სახისათვის შეიძლება გამოიყენოს ცვლადთა განცალკევების მეთოდი?

ქვემოთ ჩვენ შემოვისას ლერებით მხოლოდ პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი რამდენიმე შემთხვევის განხილვით.

ამოცანაში უკეთ რომ გავერკვეთ, განვიხილოთ ე.წ. ლიუვილის სისტემის (1849 წ.) უმარტივესი მაგალითი.

ამ მაგალითის ჩამოყალიბებისათვის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სისტემა, რომლის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს განზოგადებულ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$T = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2, \quad (\text{VIII-5.1})$$

$$V = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n V_i(q_i)$$

სადაც

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(q_i) > 0 \quad (\text{VIII-5.2})$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს სისტემა არის განცალკეობადი (სეპარაბელური). გამოვიყენოთ ლაგრანჯის განტოლებები შემდეგი სახით

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

ვიპოვიოთ

$$\frac{d}{dt} (f \dot{q}_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2 + \frac{1}{f} \frac{\partial V_i}{\partial q_i} - \frac{V}{f} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{VIII-5.3})$$

ესაა ბუნებრივი სისტემა, ამიტომ მას აქვს ენერჯის ინტეგრალი

$$T + V = \frac{1}{2} f \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2 + V = h$$

ამიტომ

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2 = \frac{1}{f} (h - V) \quad (\text{VIII-5.4})$$

ამის ჩასმით (VIII-5.3)-ში, გარკვეული გამარტივებების ჩატარების შემდეგ მიიღება

$$\frac{d}{dt} (f \dot{q}_i) - \frac{h}{f} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} + \frac{1}{f} \frac{\partial V_i}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{VIII-5.5})$$

გავამრავლოთ ახლა ეს განტოლება სიდიდესე $2f \dot{q}_i$, და ვიპოვიოთ

$$\frac{d}{dt} (f^2 \dot{q}_i^2) - 2h \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + 2 \frac{\partial V_i}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0$$

ანუ

$$\frac{d}{dt} (f^2 \dot{q}_i^2) = 2 \frac{d}{dt} (hf_i - V_i),$$

რომლის ინტეგრაციის შემდეგ მიიღება

$$f^2 \dot{q}_i^2 = 2[hf_i(q_i) - V_i(q_i) + c_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-5.6})$$

სადაც c_i -ები არიან ინტეგრაციის მუდმივები. ზედა განტოლებების გამოყენებით აღმოჩნდება, რომ

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \quad (\text{VIII-5.7})$$

ამიტომ, c_i -ები h -თან ერთად ქმნიან მოძრაობის n დამოუკიდებელ მუდმივებს.

მოძრაობის დანარჩენი n ინტეგრალი მიიღება, თუ (VIII-5.6) განტოლებას გადავწერთ $\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{f} \sqrt{2(hf_i - V_i + c_i)}$ სახით, რაც გულისხმობს შემდეგი ტოლობების შესრულებას:

$$\frac{dq_1}{\sqrt{2(hf_1 - V_1 + c_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{2(hf_2 - V_2 + c_2)}} = \dots = \frac{dq_n}{\sqrt{2(hf_n - V_n + c_n)}} = \frac{dt}{f} \quad (\text{VIII-5.8})$$

თითოეული დიფერენციალური გამოსახულება არის ერთადერთი q_i ცვლადის ფუნქცია. ამრიგად ამოცანა დაყვანილია უბრალო კვადრატურებზე, რომლის ჩატარების შემდეგ მიიღება მოძრაობის დანარჩენი n მუდმივი.

ეს მაგალითი შეგვიძლია ისე განვაზოგადოთ, რომ გადაიქცეს დიფერენციალური სისტემად. თუ ჩაეატარებთ შეცვლას $dq_i \rightarrow \sqrt{M_i(q_i)} dq_i$, ვიპოვიოთ

$$T = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^n M_i(q_i) \dot{q}_i^2, \quad M_i(q_i) > 0 \quad (\text{VIII-5-9})$$

$$V = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n V_i(q_i)$$

ბუნებრივი სისტემა, რომლის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები მოიცემა ზედა თანაფარდობებით, იწოდება ლიუვილის სისტემად. (VIII-5-8) განტოლებების შესაბამისი ახლა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{dq_1}{\sqrt{\phi_1(q_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{\phi_2(q_2)}} = \dots = \frac{dq_n}{\sqrt{\phi_n(q_n)}} = \frac{dt}{f}, \quad (\text{VIII-5-10})$$

სადაც

$$\phi_i(q_i) = \frac{2}{M_i} (hf_i - V_i + c_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-5-11})$$

მაშინ წინა განტოლებიდან ვიპოვიტ

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_i dq_i}{\sqrt{\phi_i(q_i)}} = dt,$$

ან

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{f_i dq_i}{\sqrt{\phi_i(q_i)}} = t + \beta,$$

ანალოგიურად (VIII-5.10) განტოლებებში განუსაზღვრელი ინტეგრაციების სხვაობებს თუ განვიხილავთ, მიიღება

$$\int \frac{dq_i}{\sqrt{\phi_i(q_i)}} - \int \frac{dq_j}{\sqrt{\phi_j(q_j)}} = \beta_j, \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (\text{VIII.5.12})$$

სადაც პირველი ინტეგრალი აღებულია ნებისმიერად ასათყუელად. ამრიგად, მიღებული განტოლებები იძლევიან n დამატებით მუდმივს, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, რომლებიც აღრინდელ $n-1$ მუდმივ c_i -ებთან და ენერგიის h მუდმივასთან ერთად შეადგენენ მოძრაობის $2n$ დამოუკიდებელ მუდმივას.

* *
*

მეთოდის უფრო ცხადი სახით წარმოსადგენად განვიხილოთ სფერული საქანის ამოცანა. ვაჩვენოთ, თუ როგორ დაიყენება პრობლემა კვადრატურებზე და მივიღოთ მოძრაობის ინტეგრალები.

გამოვიყენოთ სფერული კოორდინატები. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიებისთვის გვაქვს:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$V = mgl \cos \theta$$

სადაც m არის ნაწილაკის მასა, რომელიც დაკიდებულია l სიგრძის უძახო ზამბარასზე. ენერგიების ეს გამოსახულებანი შევადაროთ ლიუვილის ზემოთ განხილულ ფორმას. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პარამეტრები ასეთია:

$$f_\theta = ml^2 \sin^2 \theta, \quad V_\theta = m^2 gl^2 \sin^2 \theta \cos \theta, \quad M_\theta = \frac{l}{\sin^2 \theta},$$

$$f_\phi = 0, \quad M_\phi = 1, \quad V_\phi = 0$$

(VIII-5.11) თანაფარდობების გამოყენებით ვასკენით, რომ

$$\phi_\theta = 2 \sin^2 \theta [ml^2 \sin^2 \theta (h - mgl \cos \theta) + c_\theta]$$

$$\phi_\theta = 2c_\theta$$

სადაც ადრე მოყვანილი განტოლებების თანახმად წარმოიქმნება თანაფარდობანი:

$$2c_\theta = -2c_\theta = (ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)^2 = \alpha^2_\theta$$

საბოლოოდ ამ გამოსახულებათა გამოყენებით მიღებული შედეგები შეგვიძლია წაეწეროთ უკვე განსაზღვრული ინტეგრალების სახით

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{ml^2 \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\phi_\theta(\theta)}} = t - t_0$$

და

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\phi_\theta(\theta)}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\phi}{\sqrt{2c_\theta}}$$

ან

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\alpha_\theta d\theta}{\sqrt{\phi_\theta(\theta)}} = \phi - \phi_0$$

ახლა განვიხილოთ ლიუვილის სისტემა ჰამილტონ-იაკობის განტოლების პოზიციებიდან.

თეორემა: თუ n თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰოლონომურ სისტემებში კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს აქვთ სახე

$$T = \frac{1}{2} f \sum_{j=1}^n A_j(q_j) \dot{q}_j^2 \quad (\text{VIII-5.13})$$

$$V = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^n V_j(q_j)$$

სადაც

$$f = \sum_{j=1}^n F_j(q_j),$$

მაშინ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებების ინტეგრაცია ხდება კვადრატურებში.

დამტკიცება: ჰამილტონის ფუნქციის შესადგენად ჯერ გამოთვალოთ განზოგადებული იმპულსები

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = f A_j(q_j) \dot{q}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII-5.14})$$

შევადგინოთ ჰამილტონის ფუნქცია სტანდარტული გზით

$$H = T + V = \frac{1}{2} f \sum_{j=1}^n A_j(q_j) \dot{q}_j^2 + \frac{1}{f} \sum_{j=1}^n V_j(q_j) = h$$

ან (VIII-5.14)-ის თანახმად

$$H = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^n \left[\frac{p_j^2}{2A_j(q_j)} + V_j(q_j) \right] = h \quad (\text{VIII-5.15})$$

შეცვალოთ ჰამილტონ-იაკობის მეთოდის სტილში

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j},$$

მივაღწიოთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაზე

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2A_j(q_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 + V_j(q_j) - hF_j(q_j) \right] = 0 \quad (\text{VIII-5.16})$$

ამ განტოლების სრული ინტეგრალი ვეძებთ სახით

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \dots + W_n(q_n)$$

მაშინ (VIII-5.16) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{2A_j(q_j)} \left(\frac{dW}{dq_j} \right)^2 + V_j(q_j) - hF_j(q_j) = \alpha_j, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{VIII-5.17})$$

ამასთან ერთად უნდა შესრულდეს პირობა

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

თითოეული განტოლება (VIII-5.17)-იდან ამოიხსნება კვადრატურებში

$$W_j(q_j) = \int \sqrt{2A_j(q_j)} [\alpha_j + hF_j(q_j) - V_j(q_j)] dq_j$$

ამიტომაც ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალი იქნება

$$W = \sum_{j=1}^n \int dq_j \sqrt{2A_j(q_j)} [\alpha_j + hF_j(q_j) - V_j(q_j)], \quad (\text{VIII-5.18})$$

რომელიც შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს

$$h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$$

ხოლო

$$\alpha_n = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})$$

ამრიგად, ლიუვილის თეორემა დამტკიცებულია.

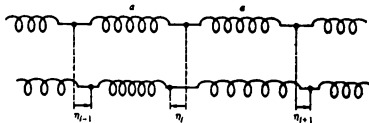
ლაბრანჟისა და ჰამილტონის ფორმალიზმის ელემენტები უწყვეტი სისტემებისა და ველებისათვის

აქამდე შემოთ განხილულ თავებში საკმე გეკონდა სასრულო რაოდენობის ან, უკიდურეს შემთხვევაში, თვლადი რაოდენობის თავისუფლების ხარისხების მქონე სისტემებთან. არსებობს მექანიკური ამოცანები, რომლებიც უწყვეტ გარემოსაც მოიცავენ. ასე მაგალითად, დრეკადი მყარი სხეულების რხევები, როცა უწყვეტი გარემოს ყველა წერტილი მონაწილეობს რხევით მოძრაობებში. ამ დროს სრული მოძრაობა შეიძლება დახასიათდეს მხოლოდ ყველა წერტილის კოორდინატების განხილვით. ბუნებრივია, რომ ასეთი ამოცანებისათვის შემოთ განხილული მეთოდების პირდაპირი გადმოტანა გაუმართლებელია, მაგრამ მათი სახეცვლილებით შესაძლებელი ხდება უწყვეტი გარემოს აღწერაც.

IX-1. დისკრეტულიდან უწყვეტ სისტემებზე გადასვლა

ამ პროცედურას განვიხილავთ უსასრულოდ გრძელი ძეხლის მაგალითზე, რომლის ნაწილაკები განიცდიან მცირე გასწვრივ რხევებს (ვიბრაციებს), სხვა სიტყვებით, ძეხლის ნაწილაკები განიცდიან ოსცილატორულ წანაცვლებებს ძეხლის ღერძის პარალელური მიმართულებით.

დისკრეტული სისტემა, რომელიც ასეთი ძეხლის აპროქსიმაციას მოდელირებს, შედგება ტოლი მასების მქონე უსასრულო რაოდენობის წერტილებისგან, რომლებიც ერთმანეთისგან ტოლი a მანძილებით არიან დაშორებული და ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან უმასო ზამბარებით, რომელთა სიხისტის კოეფიციენტებია k (იხ. ნახ.59)



ნახ.59

დისკრეტული სისტემა შეგვიძლია გავიგოთ როგორც წრფივი მრავალატომიანი მოლეკულა. ასეთი სისტემის მოძრაობის განტოლებებს ადვილად მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ მცირე რხევების შესწავლისათვის განვითარებულ მეთოდებს.

თუ i -ური ნაწილაკის გადახრას წონასწორობის მდებარეობიდან ადენიშნავთ η_i , ასოთი, კინეტიკური ენერგიისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \eta_i^2 \quad (\text{IX-1.1})$$

სადაც m არის თითოეული ნაწილაკის მასა. შესაბამისი პოტენციალური ენერგია იქნება ჯამი თითოეული ზამბარის პოტენციალური ენერგიებისა, რომლებიც გაჭიმულია ან შეკუმშულია მათი წონასწორობის მდებარეობასთან შედარებით:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \quad (\text{IX-1.2})$$

ამ ორი გამოსახულების კომბინაციით ვწერთ სისტემის ლაგრანჟიანს

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i [m \eta_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2] \quad (\text{IX-1.3})$$

ეს გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \eta_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i, \quad (\text{IX-1.4})$$

სადაც a არის ნაწილაკებს შორის მანძილი წონასწორობის დროს. ახლა უკვე შეგვიძლია დავწეროთ ლაგრანჟის განტოლება i -ური კოორდინატისათვის

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (\text{IX-1.5})$$

ლაგრანჟიანი და სათანადო მოძრაობის განტოლებების ეს სპეციფიკური სახე არჩეულია ისე, რომ მოხერხებული იყოს $a \rightarrow 0$ ზღვარზე გადასვლა. ამ დროს ნათელია, რომ m/a შეფარდება გადაიქცევა უწყვეტი სისტემის ერთეულოვანი სიგრძის მასად, μ . მაგრამ ამავე დროს ka სიდიდის ზღვრული მნიშვნელობა არც ისე ნათელია. ამის გასარკვევად გავიხსენოთ, რომ რადგან დრეკადი ღერო ემორჩილება ჰუკის კანონს, მისი ფარდობითი წაგრძელება პროპორციული უნდა იყოს გამჭიმავი ძალისა და ამიტომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$F = Y \xi,$$

სადაც ξ არის ფარდობითი წაგრძელება, ანუ ღეროს ერთეულოვანი სიგრძის წაგრძელება, ხოლო Y არის იუნგის მოდული. ამავე დროს, ნათელია, რომ a მონაკვეთის ფარდობითი წაგრძელება ტოლია

$$\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i) / a,$$

ხოლო ამისათვის აუცილებელი ძალაა $F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)$.

ე.ი. ka ნამრაველი უნდა ეთანადებოდეს უწყვეტი ღეროს იუნგის მოდულს. ამის შემდეგ ნათელია, რომ i ინდექსი, რომელიც მატერიალური წერტილის ნომერს მიუთითებს, უწყვეტ ღეროზე გადასვლისას უნდა გადავიდეს უწყვეტ კოორდინატაში x . ამიტომ, η , (ველადის ნაცვლად ახლა გვექნება (ველადი $\eta(x)$), ხოლო L , - ში შემაჯავლი სიდიდე

$$(\eta_{i+1} - \eta_i) / a = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

ცხადია, გადავა წარმოებულში

$$\frac{d\eta}{dx},$$

რადგან a უნდა მივასწრაფოთ ნულისკენ. ეს უკანასკნელი თავისთავად შეიცვლება ახლა dx -ით, ხოლო დისკრეტული აჯამება შეიცვლება x -ის მიხედვით ინტეგრალით. ყოველივე ამის შემდეგ (IX-14) ლაგრანჟიანი მიიღებს სახეს

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (\text{IX-16})$$

გადავიდეთ ახლა მოძრაობის განტოლებაზე. როცა $a \rightarrow 0$, (IX-15) განტოლების ბოლო ორი წევრი იღებს სახეს

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{Y}{a} \left[\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right],$$

რაც, ცხადია, განსაზღვრავს მეორე რიგის წარმოებულს და უდრის $-Y \frac{d^2\eta}{dx^2}$ -ს.

ამრიგად, უწყვეტი ღეროს რხევები აღიწერება განტოლებით

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0 \quad (\text{IX-17})$$

ესაა კარგად ცნობილი ტალღური განტოლება, რომელიც აღწერს ერთი ღერძის გასწვრივ ერთგანზომილებიან მოძრაობას სიჩქარით

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} \quad (\text{IX-18})$$

ეს მარტივი მაგალითი საცხებით საკმარისია რათა გავერკვეთ დისკრეტულიდან უწყვეტ სისტემებზე გადასვლის დამახასიათებელ თავისებურებებში. ყველაზე მნიშვნელოვანია ხაზი გაესვას x კოორდინატის როლის გააზრებას, რომელიც არ არის განზოგადებული კოორდინატა, არამედ განსაზღვრავს ნაწილაკის “უწყვეტ ნომერს”, რაც ანალოგიურია მისი “დისკრეტული ნომრისა” i . დისკრეტულ სისტემაში i -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება გარკვეული განზოგადებული კოორდინატა η_i . უწყვეტ გარემოში კი x -ის ყველა მნიშვნელობას უთანადება განზოგადებული კოორდინატა $\eta(x)$, მაგრამ რადგანაც η დამოკიდებულია აგრეთვე t დროზე, უმჯობესია ჩავეწეროთ $\eta = \eta(x, t)$, მივანიშნოთ რა, რომ x და t შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ლაგრანჟიანში შემავალი ცვლადები, ანუ ლაგრანჟიანის პარამეტრები.

უწყვეტი გარემო 3-განზომილებიანი რომ ყოფილიყო, განზოგადებულ კოორდინატებს განვახსებავებდით 3 უწყვეტი ინდექსით - x, y, z და ჩავეწერდით ასე $\eta = \eta(x, y, z, t)$. შევნიშნოთ, რომ ფრნხილბერგში მითითებული სიდიდეები ურთიერთდამოუკიდებელია და წარმოადგენენ ცხად ცვლადებს, რომლებზეც დამოკიდებულია η . ლაგრანჟის ფუნქცია, რასაც ადრე ლაგრანჟიანსაც ვუწოდებდით, რომელიც გამოიხატებოდა როგორც ინტეგრალი x -ის მიხედვით, ახლა ჩაიწერება სამგანზომილებიანი ინტეგრალის სახით

$$L = \iiint \Lambda dx dy dz, \quad (\text{IX-19})$$

სადაც Λ არის მოცულობის ერთეულის ლაგრანჟის ფუნქცია, რომელსაც ლაგრანჟიანის სიმკვრივეს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ეელის თეორიაში,

განსაკუთრებით კვანტური ველების თეორიაში, ხშირად Λ -ს უწოდებენ ლაგრანჯიანს. ზემოთ განხილული უწყვეტი ღეროს შემთხვევაში იგი ტოლია

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{IX-1.10})$$

ეს შეესაბამება (IX-14) ფორმულაში შემავალ L , ხიდიდის უწყვეტ ზღვარს, როცა $a \rightarrow 0$. შემდგომში დაეინახათ, რომ უწყვეტი სისტემის მოძრაობის შესასწავლად დაკვირდება სწორედ ლაგრანჯიანის სიმკვრივე.

IX-2. ლაგრანჯის განტოლებები უწყვეტი სისტემებისათვის

(IX-1.10) ფორმულიდან ჩანს, რომ დრეკადი ღეროს შემთხვევაში Λ შეიცავს არა მარტო დროით წარმოებულს $\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ -ს, არამედ სივრცით წარ-

მოებულსაც, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$. ამრიგად x და t აქ არიან ლაგრანჯიანის სიმკვრივის ტოლფუნქციანი პარამეტრები. ზოგად შემთხვევაში ლაგრანჯიანის სიმკვრივე დამოკიდებული იქნება არა მარტო ამ წარმოებულებზე, არამედ თვითონ η, t, x -ზეც. თუკი განსახილავი უწყვეტი სისტემა სამგანზომილებიანია, მაშინ მისი ლაგრანჯიანის სიმკვრივე სხვა წარმოებულებსაც უნდა შეიცავდეს:

$$\Lambda = \Lambda \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, x, y, z, t \right). \quad (\text{IX-2.1})$$

დისკრეტული სისტემების მექანიკაში ლაგრანჯიანი იმით იყო მნიშვნელოვანი, რომ მოძრაობის განტოლებების მიღების საშუალებას გვაძლევდა. ახლა დავრწმუნდებით, რომ უწყვეტი გარემოსათვის მოძრაობის განტოლებების გამოყვანა მოხდება ლაგრანჯიანის სიმკვრივის გამოყენებით. გამოვიდეთ კვლავ ჰამილტონის პრინციპიდან, რომელიც ახლა იღებს სახეს

$$\delta I = \delta \int \int \int \Lambda dx dy dz dt = 0 \quad (\text{IX-2.2})$$

აქ შემავალი ვარიაციის ხასიათი თითქმის ისეთივეა, როგორც ეიხლავდით ადრე. პარამეტრები x, y, z ამ ვარიაციის პროცესში არ მონაწილეობენ და ყველა ვარიაცია გამოითვლება x, y, z და t პარამეტრების მუდმივი მნიშვნელობების პირობებში. ამავე დროს არ იცვლებიან მათ მიხედვით ინტეგრაციის საზღვრებიც. რაც შეეხება $\delta \eta$ ვარიაციებს, ისინი ნული უნდა ხდებოდეს არა მარტო დროის საწყისი და საბოლოო მნიშვნელობებისათვის $t = t_1, t = t_2$, არამედ ინტეგრაციის მოცულობის ნებისმიერ სასაზღვრო წერტილში.

ჩვეულებრივი ექსტრემუმის ამოცანაზე გადასვლა აქაც ისევე ხდება, როგორც დისკრეტული სისტემების შემთხვევაში ვიქცუოდით, ე.ი. შემოგაქვს შესაძლო ტრაექტორიების ოჯახები და ვახასიათებთ მათ რაიმე α პარამეტრით. ამ გამოცდილებით შეიარაღებულებს შეგვიძლია პირდაპირ ვისარგებლოთ ვარიაციის სიმბოლოთი და გვახსოვდეს, რომ

$$\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$$

ამრიგად, გვექნება

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right), \quad (\text{IX-2. 3})$$

სადაც x, y, z ჩაწერის მოხერხებულობისათვის შეცვლილია x_1, x_2, x_3 -ით. ამიტომ ჰამილტონის პრინციპი ასე ჩაიწერება

$$\int_1^2 \iiint \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (\text{IX-2.4})$$

ჩაუბაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია (როგორც ამას ვიყენებდით ლაგრანჟის ჩვეულებრივი განტოლებებისათვის), მივიღებთ:

$$\int_1^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \delta \eta dt = - \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}} \right) \delta \eta dt.$$

ანალოგიურად უნდა მოვექცეთ ინტეგრალებს, რომლებიც შეიცავენ ვარიაციებს $\delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)$. გადავსვამთ რა ვარიაციისა და გაწარმოების სიმბოლოებს, მივიღებთ

$$\int \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) dx_k = \int - \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial \delta \eta}{\partial x_k} dx_k \quad (\text{IX-2.5})$$

ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარებით კი ვიღებთ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \eta - \int \frac{d}{dx_k} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right] \delta \eta dx_k. \quad (\text{IX-2.6})$$

ამ სხვაობის პირველი წევრი ნულის ტოლია (ისევე, როგორც ინტეგრალში დროის მიხედვით), რადგან ინტეგრაციის ინტერვალის კიდურა წერტილებზე $\delta \eta = 0$. აქ შეიძლება გარკვეული უჭვივ წარმოიშვას, რადგან განსახილველი სისტემის ზომები უსასრულოც კი შეიძლება იყოს. მაგრამ მანძილის უსასრულობისკენ მისწრაფებისას η უმრავლეს შემთხვევებში სწრაფად მისწრაფის ნულისკენ, და ამიტომ ამ სხვაობის პირველი წევრი შეგვიძლია ნულად ჩავთვალოთ ამ შემთხვევებში. გარდა ამისა, იქცევიან ხოლმე ფორმალურადაც - ინტეგრაციას ატარებენ სასრულო არეში და (IX-2.6) ფორმულაში პირველი წევრის ჩამოშვების შემდეგ უსასრულო ზომებზეც გადადიან.

ამრიგად, ჰამილტონის პრინციპი იღებს სახეს

$$\int_1^2 \iiint \delta \eta \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_{,k}} \right] \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0, \quad (IX-2.7)$$

სადაც გამოყენებულია ტენზორული ანალიზის ტრადიციული აღნიშვნა მიმართ

$$\eta_{,k} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial x_k}.$$

ნებისმიერი $\delta \eta(x_1, x_2, x_3, t)$ ფუნქციის შემთხვევაში ეს ინტეგრალი ნულად გადაიქცევა მარტო მაშინ, თუ შესრულდება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_{,k}} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} = 0 \quad (IX-2.8)$$

ეცით, რომ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების შემთხვევაში გვექნება ლაგრანჟის n განტოლება. ამიტომ, შეიძლება მოგვეჩვენოს უცნაურად, რომ უსასრულო რაოდენობის თავისუფლების ხარისხების მქონე სისტემებისათვის მიიღება მარტო ერთი განტოლება (IX-2.8). მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ ლაგრანჟის ჩვეულებრივი განტოლებები დამოუკიდებელ ცვლადად შეიცავენ მარტო დროს, მაშინ, როცა (IX-2.8) განტოლებაში შედის 4 ცვლადი x_1, x_2, x_3, t . ამიტომ, მიღებული განტოლება არის კერძო წარმობეულებიანი. მას შეიძლება შევხედოთ როგორც ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ერთობლიობას, რომელიც მიიღება ამ ცვლადების ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის. ამ შემთხვევაში გამოვა, რომ საქმე გვაქვს განტოლებათა უსასრულო რაოდენობასთან და შესაბამისად, თავისუფლების ხარისხთა უსასრულო რაოდენობასთან.

განტოლების გამოყენების დროს ეთვლიდით, რომ სისტემის ყოველი წერტილი ასრულებს η ცვლადით აღწერილ ერთადერთი სახის გადაადგილებას. მაგრამ უფრო ზოგად ამოცანებში, როგორცაა, მაგალითად, დრეკადი სხეულის რხევების ამოცანა, ადგილი ექნება გადაადგილებებს ყველა სამივე მიმართულებით. ამ შემთხვევაში გვექნება არა ერთი განზოგადებული კოორდინატა, არამედ სამი, რომლებსაც აღვნიშნავთ დამატებითი ინდექსით j : $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$, სადაც $j = 1, 2, 3$. უფრო ზოგად შემთხვევაში შეიძლება გვექნოდეს სამზე მეტი განზოგადებული კოორდინატა, მაშინ ლაგრანჟიანის სიმკრივე ყველა მათგანის და მათი წარმოებულების ფუნქცია იქნება. თითოეული განზოგადებული კოორდინატისთვის $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$ გვექნება შემდეგი სახის მოძრაობის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}_j} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_{j,k}} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (IX-2.9)$$

აქ

$$\eta_{j,k} \equiv \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}.$$

ჩვენ მიერ გამოყენებული აღნიშვნები საგრძობლად გამარტივდება, თუ შემოვიტანთ L ლაგრანჟიანის ე.წ. ფუნქციონალურ ანუ ვარიაციულ წარმობებს η_j -ის მიხედვით.

L -ის ფუნქციონალური წარმობული η_j -ს მიხედვით ახასიათებს L -ის ცვლილებას $\eta_j(x)$ ფუნქციის ცვლილებისას სივრცის მოცემული წერტილის მახლობლობაში იმ პირობით, რომ η_j -ს t დროზე დამოკიდებულება რჩება უცვლელი. ჩვენი ლაგრანჟიანის შემთხვევაში ეს ასე განისაზღვრება

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^j \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_{j,k}}. \quad (\text{IX-2.10})$$

ანალოგიურად განისაზღვრება L -ის ფუნქციონალური წარმოებულნი η_j -ით. მაგრამ რადგან Λ არ არის დამოკიდებული ამ წარმოებულის, ე.ი. (η_j)-ის გრადიენტზე, გვაქვს

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} = \frac{\partial L}{\partial \eta_j}. \quad (\text{IX-2.11})$$

ფუნქციონალური წარმოებულის უპირატესობა ისაა, რომ მისი გამოყენებისას საქმე ადარ გვექნება Λ -ის დამოკიდებულებასთან $\frac{\partial \eta}{\partial x_k}$ -ზე. ასე, მაგალითად, (IX-2.9)-ის და (IX-2.3), (IX-2.6)-ის თანახმად გვექნება

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_j} \delta \eta_j - \sum_k \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_j + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_j} \right) dV, \quad (\text{IX-2.12})$$

სადაც dV არის მოცულობის ელემენტი. თუ ფუნქციონალური წარმოებულთი ხისარგებლებით, ეს შედეგი მიიღებს სახეს

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \right) dV, \quad (\text{IX-2.13})$$

რაც გაცილებით ადვილად გამოიყურება, ვიდრე (IX-2.12), რადგან აქ არ შედის $\frac{\partial \eta}{\partial x_k}$. რაც შეეხება მოძრაობის განტოლებებს (IX-2.9), ფუნქციონალური წარმოებულთი ისინი ასე ჩაიწერება

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} - \frac{\delta L}{\delta \eta_j} = 0, \quad (\text{IX-2.14})$$

რაც გარეგნულად ლაგრანჟის ჩვეულებრივი განტოლებებს წააგავს.

დასასრულ შეენიშნოთ, რომ ზემოთ მიღებული მოძრაობის ლაგრანჟისეული განტოლებები პირდაპირ შეგვიძლია მივეყენოთ ისეთ უწყვეტობიექტებს, როგორიცაა, მაგალითად, სიმი ან მემბრანა. კლასიკური სიმის რხევის განტოლებას აქვს ჩვეულებრივი ტალღური განტოლების სახე

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0, \quad (\text{IX-2.15})$$

სადაც $u(x, t)$ ფუნქცია აღწერს სიმის გადახრას წონასწორობიდან, ხოლო v არის დრეკადი დეფორმაციების გაგრძელების სიჩქარე სიმში, რომელიც გამოიხატება სიმის დაჭიმულობის ძალის ფარდობით მის გრძივ სიმკვრივესთან

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (\text{IX-2.16})$$

მრავალი ცვლადის ზემოთ აღწერილი ფორმალიზმი შეგვიძლია მივეყენოთ, მაგალითად, ორგანოზომილებიანი ზედაპირის (მემბრანის) რხევებს. მისთვის ასეთი განტოლება მიიღება

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, y, t) = 0, \quad (\text{IX-2.17})$$

სადაც $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ არის ლაპლასის ოპერატორი ორგანოზომილებიან

სივრცეში, ხოლო u ახლა აღწერს გადახრებს მემბრანის ზედაპირის პერპენდიკულარულად, სიჩქარე კი იმავე (IX-2.16) ფორმულით გამოისახება, ოღონდ σ არის ზედაპირული სიმკვრივე.

IX-3. ჰამილტონის განტოლებები უწყვეტი სისტემებისათვის

ჰამილტონის განტოლებების მიღება აგრეთვე შეგვიძლია დისკრეტული სისტემებისათვის წინა თავებში განხილული მეთოდების განზოგადებით. განვიხილოთ კვლავ წინა პარაგრაფებში აღწერილი დისკრეტული სისტემა და ყოველ განზოგადებულ η_i , კოორდინატას შევესაბამოთ კანონიკური იმპულსი

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \quad (IX-3.1)$$

ამიტომ ასეთი სისტემის ჰამილტონიანი იქნება

$$H = \sum_i p_i \dot{\eta}_i - L = \sum_i a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L$$

ანუ

$$H = \sum_i a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right) \quad (IX-3.2)$$

ზღვარში, როცა $a \rightarrow 0$ და $L_i \rightarrow \Lambda$, ეს ჯამი გადავა ინტეგრალში

$$H = \int dx \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \Lambda \right) \quad (IX-3.3)$$

(IX-3.1) ტოლობიდან ჩანს, რომ როცა $a \rightarrow 0$, თითოეული p_i იმპულსიც აგრეთვე ნულისკენ მიისწრაფის. ამიტომ უნდა შემოვიტანოთ კუთრი იმპულსის ან იმპულსის სიმკვრივის ცნება, რომელსაც განემარტავთ ტოლობით

$$\pi = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}} \quad (IX-3.4)$$

გარდა ამისა, შემოვიტანოთ კუთრი ჰამილტონიანიც ანუ ჰამილტონიანის სიმკვრივე, რომელშიც გვესმის

$$\mathfrak{H} = \pi \dot{\eta} - \Lambda \quad (IX-3.5)$$

მაშინ (IX-3.3) ჰამილტონიანი გადაიქცევა ინტეგრალად $\int dx \mathfrak{H}$, და მისი განზოგადება სამგანზომილებიან სისტემაზე რამდენიმე თავისუფლების ხარისხით გადაიწერება ანალიტიკური ფორმულის სახით

$$H = \iiint \mathfrak{H} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \left(\sum_i \pi_i \dot{\eta}_i - \Lambda \right) \quad (IX-3.6)$$

სადაც

$$\pi_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_i} \quad (IX-3.7)$$

მომრავობის კანონიკური განტოლებების მისაღებად აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში განვითარებული პროცედურა. სახელდობრ,

ჩავთვალოთ, რომ \mathfrak{M} არის $\eta_k(x, t)$ განზოგადებული კოორდინატებისა და $\pi_k(x, t)$ კანონიკური იმპულსების, აგრეთვე $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ წარმოებულების და, შესაძლოა, t დროის ფუნქცია და დაეწეროს

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \pi_k} d\pi_k + \sum_j \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \eta_{k,j}} d\eta_{k,j} \right] + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3.$$

აქ ამოწერილი ინტეგრალი გეგავონებს (IX-2.4) ინტეგრალს უწყვეტი სისტემისათვის ჰამილტონის პრინციპის ჩამოსაყალიბებლად. ამიტომ ახლაც გამოვიყენებთ ნაწილობით ინტეგრაციას წვერში

$$\int \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \eta_{k,j}} d\eta_{k,j} dx_j$$

ამ დროს ორ შესაძლებლობაში მივიღებთ, რომელთაგან პირველი (ზედაპირული წვერის) შევვიძლია ნულად ჩავთვალოთ, რადგან ინტეგრაციის არე იმდენად დიდი შეიძლება იყოს, რომ მის საზღვრებზე η და \mathfrak{M} ნულებად გადაიქცევა. მეორე წვერს კი გაითვალისწინებთ ჩვეულებრივად. ამიტომ

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \pi_k} d\pi_k - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \eta_{k,j}} \right) d\eta_k \right] + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (IX-3.8)$$

ან თუ (IX-2.110) ფუნქციონალურ წარმოებულს გამოვიყენებთ, ეს გამოსახულება გადაიწერება უფრო კომპაქტური სახით:

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} d\eta_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} d\pi_k \right) + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (IX-3.9)$$

გავიხსენოთ ახლა, რომ (IX-3.6)-ის თანახმად

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(\pi_k d\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k d\pi_k - \frac{\delta L}{\delta \eta_k} d\eta_k - \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} d\dot{\eta}_k \right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (IX-3.10)$$

აქ ჩვეულებრივ ფრჩხილში მოთავსებული კიდურა წვერები ერთმანეთს გაათილებს კუთრი იმპულსის განმარტების თანახმად. გარდა ამისა, ლაგრანჟის (IX-2.14) განტოლების თანახმად

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_k} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} = \dot{\pi}_k.$$

ამიტომ, წინა ტოლობა (IX-3.10) შეიძლება ასე გადაეწეროს

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(-\dot{\pi}_k d\eta_k + \dot{\eta}_k d\pi_k \right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (IX-3.11)$$

თუ ახლა ამას შევადარებთ (IX-3.8) ტოლობას, მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\dot{\eta}_k = \frac{\delta H}{\delta \pi_k}, \quad \dot{\pi}_k = -\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \quad (IX-3.12)$$

და იგივეობას

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$$

როგორც ვხედავთ, (IX-3.12) განტოლებები წარმოადგენენ ჰამილტონის ჩვეულებრივი განტოლებების ანალოგს და სამართლიანი არიან ნებისმიერი უწყვეტი სისტემისათვის. მათ დაეარქმეეთ ჰამილტონის განტოლებებს უწყვეტი სისტემებისათვის.

საინტერესოა, რომ მათი გადაწერა შეიძლება კუთრი ჰამილტონიანის მეშვეობითაც. მიიღება

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta_k} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right) = -\dot{\pi}_k, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_k} = \dot{\eta}_k. \quad (\text{IX-3.13})$$

ამ ფორმით, ფუნქციონალურ სახესთან შედარებით, განტოლებები არა-სიმეტრიულად გამოიყურებიან განზოგადებული კოორდინატებისა და კანონიკური იმპულსების მიმართ. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან \mathfrak{H} კუთრი ჰამილტონიანი არ არის დამოკიდებული π_k სიდიდეების გრადიენტებზე.

რიგი ფორმალური შედეგებისა, რომლებიც ადრე გვაქვს მიღებული ჰამილტონის განტოლებებთან დაკავშირებით, შეგვიძლია ადვილად განვაგრძოთ უწყვეტ სისტემებზე. ასე მაგალითად, ჰამილტონის მოდერნიზაციის პრინციპი ახლა მიიღებს სახეს

$$\delta \int \left[\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathfrak{H} \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0, \quad (\text{IX-3.14})$$

საიდანაც გამომდინარეობენ ზემოხსენებული (IX-3.12) მოძრაობის ჰამილტონისეული განტოლებები.

სხვა მაგალითის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ჰამილტონიანის სრული წარმოებული დროის მიხედვით

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3,$$

რაც (IX-3.12) განტოლებების თანახმად მთავრდება სახეზე

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3,$$

ანუ

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3.$$

რაც ნიშნავს, რომ H იქნება მუდმივი მაშინ, როცა \mathfrak{H} (ან H) ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე.

ზუსტად ასევე შეგვიძლია მივიღოთ დასკვნები მოძრაობის ინტეგრალების შესახებ.

აეილოთ ნებისმიერი ფუნქცია G , რომელიც დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული და მოიცემა შემდეგი ინტეგრალით:

$$G = \iiint g dx_1 dx_2 dx_3$$

გამოეთვალათ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

თუ აქ მოძრაობის განტოლებებს გამოვიყენებთ, მიიღება

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{IX-3.15})$$

მაგრამ, ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს დგას პუასონის ფრჩხილების ზუსტი ანალოგი. იმ განსხვავებით, რომ ფუნქციონალური გაწარმოებაა გამოყენებული, ხოლო განზოგადებული კოორდინატებით აჯამება შეცვლილია ინტეგრაციით "უწყვეტი ნუმერაციის" მიხედვით. ამიტომ, ვწერთ

$$\frac{dG}{dt} = (G, H), \quad (\text{IX-3.16})$$

ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა G დროის ცხადი ფუნქცია იქნებოდა, ზედა განტოლება მიიღებდა ჩვენთვის კარგად ცნობილ სახეს

$$\frac{dG}{dt} = (G, H) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

ამრიგად, შენახვის თეორემები უწყვეტი სისტემებისთვისაც შეგვიძლია მივიღოთ იმავე მეთოდებით. აგრეთვე შენარჩუნდება კავშირი სიმეტრიებსა და მოძრაობის ინტეგრალურ კონსტანტებს შორის. გარდა ასეთი ინტეგრალური შენახვის კანონებისა, უწყვეტი სისტემების ფიზიკაში ადგილი აქვს შენახვის კანონების დიფერენციალურ ფორმებს, რომლის ანალოგი ლიუვილის თეორემის სახით ჩვენ უკვე განვიხილეთ ერთ-ერთ წინა თავში. ასეთი სახის კანონები უწყვეტი გარემოსათვის გამოხატავენ გარკვეული ფიზიკური სიდიდეების ნაკადების უწყვეტობის თვისებებს და კანონზომიერებებს.

უწყვეტი სისტემის თვალსაჩინო მაგალითია ველი, მაგალითად, ელექტრომაგნიტური ველი. თვით ველის ცნება საკმაოდ ფართოა, მისი შემოყვანა შეიძლება პრაქტიკულად ყველა უწყვეტი გარემოსათვის. ამისათვის საკმარისია გვექონდეს რაიმე ფიზიკური სიდიდე, რომელიც განმარტებულია სივრცის ყოველ წერტილში.

ამრიგად, ვრწმუნდებით, რომ კლასიკურ თეორიულ მექანიკაში განვითარებული მეთოდები საკმარისად ზოგადია და გააჩნიათ გამოყენების მეტად ფართო სპექტრი.

ისიც აღვნიშნოთ, რომ ლექციების ამ კურსში გადმოცემული მეთოდებით არ ამოიწურება კლასიკური თეორიული მექანიკის შესაძლებლობები და სიმძლავრე. უკანასკნელ პერიოდში მძლავრი განვითარება ჰპოვა არაწრფივმა მექანიკამ, ქაოსის თეორიამ, სადაც დიდი ინტენსივობით გამოიყენება თანამედროვე მათემატიკის მძლავრი აპარატი, განსაკუთრებით ჯგუფთა თეორია და ტოპოლოგია.

ამ აპარატის გამოყენებას სტუდენტი შეხვდება თეორიული ფიზიკის შემდგომ კურსებში.

უკანასკნელ წლებში საგრძობლად იცვლება სწავლების მეთოდები, რაც მთავარია, შეფასების სისტემა. კურსი აღებულია იქითკენ, რომ სტუდენტი შეეცნოს დამოუკიდებელ და სისტემატურ მუშაობას. ამისათვის იქნა შემოღებული სემესტრის განმავლობაში სტუდენტის ცოდნის შემოწმების სხვადასხვა ფორმები. მართალია პრაქტიკული მეცადინეობის სახით სტუდენტის ცოდნის კონტროლი აღინიღებ წლებშიც ხდებოდა, დღევანდელ განათლების სისტემას ეს უკვე აღარ აკმაყოფილებს. შემოღებულია საკონტროლო წერები, კოლოკიუმები და შემოწმების სხვა ფორმებიც, რაც საგნის მასწავლებლის პერფორმაციაა. ამ ახალი მეთოდის მთავარი, განმასხვავებელი ნიშანი ისაა, რომ სემესტრის მანძილზე ჩატარებული შუალედური შემოწმებების შედეგები საგამოცდო შეფასებასთან ერთად აისახება სტუდენტის საბოლოო შეფასებაზე. ამიტომ, ჩვენ ქვემოთ მოვიყვანთ საგნის სწავლების გეგმას და სათანადო შეფასების სისტემის (ე.წ. სილაბუსის) ნიმუშს.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ფიზიკის ფაკულტეტი
თეორიული ფიზიკის კათედრა
(2005 – 2006 სასწავლო წელი, I სემესტრი)

ს ი ლ ა ბ უ ს ი

საგანი: თეორიული მექანიკა

ლექტორი: პროფესორი ანზორ ხელაშვილი

საგნის მოცულობა: სალექციო-3 კრედიტი, პრაქტიკული-2 კრედიტი.

ლექციის დღე:

ლექციის ჩატარების დრო:

პრაქტიკული მეცადინეობის დღე:

პრაქტიკული მეცადინეობის ჩატარების დრო:

ლექციის ჩატარების ადგილი: თსუ II კორპუსი, (ფდა)

საკონტაქტო ტელეფონები: 235163 (ბინა); 231397 (სამს); (899)172775 (მობ)

კურსის მიზანი: სტუდენტები ეუფლებიან თეორიული ფიზიკის პირველ საგანს – კლასიკურ თეორიულ მექანიკას: მექანიკის ძირითადი კონცეფციები, ვირტუალურ გადაადგილებათა და დალაშქრის პრინციპები, პამილტონის ქმედების პრინციპი, ბმებიანი სისტემები, განზოგადებული კოორდინატები, დინამიკის განტოლებები, შენახვის კანონები. ლაგრანჟისა და ჰამილტონის განტოლებები, ვარიაციული პრინციპები. იაკობის თეორემა. პამილტონ-იაკობის მეთოდი. კანონიკური გარდაქმნები. პუასონის ფრჩხილები, ინვარიანტსამაღური გარდაქმნები, სიმეტრიები და მათი გენერატორები. სიმეტრია, ინვარიანტულია და შენახვის კანონები. ნიორტრის თეორემა. "ფარული" სიმეტრიები და ჩაკეტილი პერიოდული ორბიტები.

ერთგანსომილებიანი მოძრაობა. მცირე რხევები. ორი სხეულის პრობლემა. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველებში. მექანიკის პრინციპების გამოყენება უწყვეტი გარემოსათვის. მექანიკის ამოცანების ამოხსნა.

ლექტორის მოთხოვნა: სტუდენტი უნდა ფლობდეს მათემატიკური ანალიზის საფუძვლებს, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას, წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მეთოდებს. ნაბარებული უნდა ჰქონდეს მექანიკის ზოგადი კურსი.

სტუდენტი ვალდებულია მოისმინოს აღნიშნული საგნის სრული კურსი (3 კრედიტი ანუ 45 სთ). მიუღებელია გაცდენა და დაგვიანება, ლექციებზე წესრიგის დარღვევა. სავალდებულოა პრაქტიკულ მეცადინეობებზე დასწრება, სააუდიტორო სამუშაოების და საშინაო დავალებების შესრულება.

ლექტორის საშინაო დავალებები: სტუდენტებს ორ კვირაში ერთხელ ლექტორი აძლევს საშინაო დავალებას 10 ამოცანის სახით, რაც სტუდენტმა უნდა შეასრულოს ცალკე რეკულში და დათქმულ ვადაში დაუბრუნოს ლექტორს. ამოცანები შერჩეულია ლექციებზე გავლილი თემების მიხედვით.

სტუდენტის სემესტრში ეძლევა 6 ასეთი დავალება, ე.ი. სულ სამუშაოდ ეძლევა სემესტრში 60 ამოცანა. თითოეული სწორად ამოხსნილი ამოცანა ფასდება 2 ქულით. სტუდენტი ვალდებულია შეასრულოს ამოცანების არანაკლებ 60%-სა. არ არის რეკომენდებული გადაწერა. დავალებების შესრულების ხარისხის მიხედვით სტუდენტი ხვდება ამა თუ იმ პროცენტულ კატეგორიაში. ლექტორის საშინაო დავალებების საბოლოო შეფასება ნორმირდება 30 ქულაზე.

შეფასების სისტემა: სტუდენტის საბოლოო შეფასება საგანში გამოიყენება მისი მუშაობის ხარისხის მიხედვით მთელი სემესტრის განმავლობაში. ამასთან გათვალისწინებული იქნება სამუშაოთა სრული კომპლექსი შემდეგი კრიტერიუმების მიხედვით:

- ა) ქვემოთ მოყვანილია თითოეული ეტაპის მაქსიმალური შესაძლო ქულები
 - ა) ლექტორის საშინაო დავალებები - 30 ქულა;
 - ბ) საკონტროლო წერა (პრაქტიკულ მეცადინეობებზე, სემესტრში ორჯერ - სულ 10 ქულა; შემაჯამებელი წერა - 10 ქულა;
 - გ) კოლოკიუმში (სემესტრში 2-ჯერ, ატარებს საგნის ლექტორი) - 14 ქულა სულ.
 - დ) გამოცდა - 16 ქულა.
- სულ მაქსიმალურად შესაძლო ქულების რაოდენობა - 80 ქულა.

მიღებული ცალკეული შეფასებების მიხედვით გამოითვლება საბოლოო შეფასება შემდეგნაირად:

| | |
|---------------------------------------|-------|
| 5(ფრიადი) - 70 ქულა და მეტი; | 87.5% |
| 4(კარგი) - 50-დან 69 ქულის ჩათვლით; | 75% |
| 3(დამაკმ.) - 45-დან 59 ქულის ჩათვლით; | 56% |
| 2(არადამ.) - 44 ქულის ქვევით; | <55% |

სასწავლო პროგრამა:

დაყოფილია 4 ნაწილად:

- ა) სალექციო კურსი;
- ბ) სააუდიტორიო პრაქტიკული მეცადინეობა (თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების დაუფლება);
- გ) საშინაო დავალებები (თეორიული საკითხების დამუშავება, ლიტერატურის გაცნობა, ამოცანების ამოხსნა);
- დ) კონსულტაციები.

ამ პროგრამის განხორციელება მოხდება შემდეგი ღონისძიებებით:

- ა) სალექციო კურსი
(იხ. კურსის შინაარსი, გვ.7 და რეკომენდებული ლიტერატურა, ქვემოთ, გვ. 223)
- ბ) სააუდიტორიო პრაქტიკული მეცადინეობა
სალექციო თემების მიხედვით ამოცანების ამოხსნის მეთოდების დაუფლება. წინამდებარე კურსში მოცემული ამოხსნილი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შესწავლა.
- გ) საშინაო დავალებების შესახებ ლაპარაკია პუნქტში შეფასების სისტემა.
- დ) კონსულტაციები: თეორიული ფიზიკის კათედრის სამუშაო ოთახში (ოთხშაბათობით, 13-15 სთ).

ლიტერატურა

1. ეშამასახლიძის, გვილაშვილი, თეორიული ფიზიკა, ნაწ. I, მექანიკა, თბ., 1982.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика, М., Наука, 1957, 1972, 1988.
3. Г.Голдстейн, Классическая механика, М., Наука, 1975.
4. Г.Л.Коткин, В.Г.Сербо, Сборник задач по классической механике, М., Наука, 1977.
5. Н.В.Бутенин, Введение в аналитическую механику, М., Наука, 1971.
6. Ю.И.Наймарк, Н.А.Фуфаев, Динамика неголономных систем. М., Наука, 1967.
7. А.М.Переломов, Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли, М., Наука, 1990.
8. В.И.Арнольд, Математические методы классической механики. М., Наука, 1989.
9. Б.В.Медведев, Начала теоретической физики, М., Наука, 1977.
10. H.Goldstein, C.Poole, J.Saiko, Classical Mechanics., 3d ed., PE, 2002.
11. D.T. Greenwood. Classical Dynamics., Dover Publ. NY, 1997.
12. W. Greiner, Classical Mechanics (Systems of particles and Hamiltonian dynamics), Springer, 2003.
13. T.W.B.Kibble, F.H. Berkshire, Classical Mechanics., 4th ed. Longman, 1996.
14. H.C.Corbenn, P.Stehle., Classical Mechanics., 2nd ed. Dover Publ. NY, 1994.
15. J.L.McCauley., Classical Mechanics (transformation, flows, integrable and chaotic dynamics, Cambridge, 1997.

გამომცემლობის რედაქტორი 'ს. ეიორგაძე
სამხატვრო რედაქტორი ი. ჩიქვანიძე
ტექნოლოგიური რედაქტორი ფრ. ბუღაღალია
კორექტორები ნ. ჩახაია
დ. ბაღოშვილი

ხელმოწერილია დასაბუჯდად 14.03.05
საბუჯდი ქაღალდი 60x84
პირ. ნაბუჯდი თაბახი 32,62
საიდრ. – საგამომც. თაბახი 14,41
შეკვეთა № 41
ფასი სახელშეკრულებო

ტირაჟი 200

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სარედაქციო-სადუბლიკაციო
კომპიუტერული სამსახური, 0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1.